

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Hector Andrés  
Tinoco Navarro E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 22, 03, 2011

Roberto Luiz Ferreira  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**  
**COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Hector Andrés Tinoco Navarro**

**Análise Numérica e Experimental dos Efeitos  
da Descolagem na Resposta Elétrica de  
Sensores Piezelétricos**

Campinas, 2011.

**Hector Andrés Tinoco Navarro**

# **Análise Numérica e Experimental dos Efeitos da Descolagem na Resposta Elétrica de Sensores Piezelétricos**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica de Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Campinas  
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

T496a Tinoco Navarro, Hector Andrés  
Análise numérica e experimental dos efeitos da  
descolagem na resposta elétrica de sensores piezelétricos  
/ Hector Andrés Tinoco Navarro. --Campinas, SP: [s.n.],  
2011.

Orientador: Alberto Luis Serpa.  
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Adesivos. 2. Detectores. 3. Transdutores  
piezoelétricos. 4. Materiais piezoelétricos. I. Serpa,  
Alberto Luis. II. Universidade Estadual de Campinas.  
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Numerical and experimental analysis of effects of debonding in  
the electrical response of piezoelectric sensors

Palavras-chave em Inglês: Adhesives, Sensors, Piezoelectric transducers,  
Piezoelectric materials

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestrado em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Janito Vaqueiro Ferreira, José Juliano de Lima Junior

Data da defesa: 22/03/2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

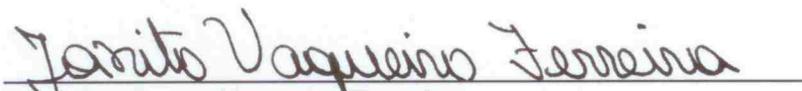
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Análise Numérica e Experimental dos Efeitos  
da Descolagem na Resposta Elétrica de  
Sensores Piezelétricos**

Autor: **Hector Andrés Tinoco Navarro**  
Orientador: **Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa**  
DMC-FEM-UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira**  
DMC-FEM-UNICAMP

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. José Juliano de Lima Jr.**  
Instituto de Engenharia Mecânica-UNIFEI

Campinas, 22 de Março de 2011

## **Dedicatória:**

Dedico este trabalho ao meu pai que esta no céu, a minha família que acredita sempre em mim, e a outras pessoas especiais que sempre estiveram ao meu lado. Este é um passo dentro de um caminho longo que me espera.

## **Agradecimentos**

Eu muito sinceramente agradeço as seguintes pessoas e instituições por seu apoio:

- Agradeço ao meu irmão Luis Ernesto, a minha irmã Lizeth Katerine e em especial a minha mãe Luz Mery Navarro que sempre esteve apoiando a minha causa.
- Um agradecimento muito especial ao Professor Dr. Alberto Luiz Serpa pela oportunidade concedida para que eu realizasse o meu mestrado em uma instituição de tanto renome como a UNICAMP. Também agradeço ao professor, pelo apoio incondicional que me brindou, já que foi uma peça fundamental na realização do trabalho.
- Agradeço a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio econômico que me brindou durante um ano e meio em Brasil.
- Agradeço também a o Banco Santander (Brasil) pela oportunidade que me brindou de conhecer a Espanha e pelo apoio econômico o qual foi muito importante na realização da estadia na Universidade Complutense de Madrid, Espanha.
- Um agradecimento muito especial aos amigos da pós-graduação de física, Instituto de Física Gleb Wataghin, Yovanni, William, Miguel (Toddy), Miguel, Alex e a outros que tenho muito presente.

*Yo que sentí el horror de los espejos  
no sólo ante el cristal impenetrable  
donde acaba y empieza, inhabitable,  
un imposible espacio de reflejos.*

“Jorge Luis Borges”

## Resumo

Neste trabalho foi desenvolvido um estudo numérico e experimental com o objetivo de compreender os efeitos da descolagem nos sinais elétricos obtidos por meio de sensores piezelétricos. Na análise numérica, os deslocamentos do sistema acoplado estrutura-adesivo-sensor foram representados em equações diferenciais para os casos estático e dinâmico. Os sinais elétricos emitidos pelos sensores foram determinados pelos deslocamentos para diferentes parâmetros geométricos da interface adesiva. Os resultados numéricos mostram que as propriedades geométricas da interface adesiva modificam as condições de deformação entre o sensor e a estrutura. Também, foi proposto um sensor com três eletrodos com o qual foram estabelecidas relações de força. As relações de força mostraram que as propriedades do adesivo podem diminuir as forças nos extremos do sensor e assim evitar descolagem. As simulações de descolagem do sensor foram realizadas com o aplicativo computacional COMSOL. As soluções numéricas dinâmicas indicaram que um sensor descolado gera menor potência elétrica que um sensor completamente colado. Isto foi comprovado experimentalmente em três casos e os resultados experimentais concordaram com os resultados teóricos. Este estudo demonstrou que a descolagem parcial não pode ser considerada uma falha de adesão, já que o sensor pode emitir sinais elétricos quando o sensor está descolado. Também foi demonstrado que a descolagem afeta o rendimento elétrico dos sensores.

### *Palavras Chave*

Sensores Piezelétricos, Colagem, Descolagem, Rendimento de Sensores

## **Abstract**

In this investigation it was developed a numerical and experimental study with the aim to understand the debonding effects on electrical signatures obtained by means of piezoelectric sensors. In the numerical analysis, the displacements of the coupled system structure-adhesive-sensor were represented by differential equations for static and dynamic cases. Electrical signatures emitted by sensors were determined through the displacements for different geometric parameters of the adhesive interface. Numerical results show that geometric properties of the adhesive interface modify the deformation conditions between the sensor and the structure. Also, a sensor was proposed with three electrodes in which were established force relations between each electrode. Force relations shown that the properties of adhesive can diminish the forces in the end of the sensor avoiding debonding. Simulations of debonding of the sensor were carried out with COMSOL software. Dynamic numerical solutions indicate that debonded sensor generates electric power lower than a sensor completely bonded. This was proved experimentally in three cases and the experimental results presented good agreement. This study demonstrated that the partial debonding cannot be considered as a fail by adhesion, since the sensor can emit electrical signatures when it is partially debonded. Also it was demonstrated that the debonding of the sensor affects electric performance.

### *Key Words*

Piezoelectric Sensor, Bonding, Debonding, Performance Sensors

# Sumário

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Motivação . . . . .   | 1         |
| 1.2      | Revisão bibliográfica . . . . .                               | 3         |
| 1.3      | Objetivos deste trabalho . . . . .                            | 5         |
| 1.4      | Estrutura do trabalho . . . . .                               | 5         |
| <b>2</b> | <b>Teoria linear dos materiais piezelétricos</b>              | <b>7</b>  |
| 2.1      | Introdução . . . . .  | 7         |
| 2.2      | Densidade de energia da deformação elástica [6] . . . . .     | 8         |
| 2.3      | Densidade de energia do campo eletrostático [6] . . . . .     | 11        |
| 2.4      | Equações constitutivas lineares [6] . . . . .                 | 12        |
| 2.4.1    | Equações constitutivas (T,E) [6] . . . . .                    | 13        |
| 2.4.2    | Equações constitutivas (S,E) [6] . . . . .                    | 15        |
| 2.5      | Fundamentos do sensor piezelétrico (PZT) [42] . . . . .       | 16        |
| <b>3</b> | <b>Método do elemento finito para materiais piezelétricos</b> | <b>20</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .  | 20        |
| 3.2      | Princípios variacionais . . . . .                             | 21        |
| 3.3      | Formulação dos elementos finitos . . . . .                    | 23        |
| 3.4      | Elemento de <i>Kirchhoff</i> [21] . . . . .                   | 26        |
| 3.5      | Elemento de <i>Mindlin</i> [21] . . . . .                     | 27        |
| <b>4</b> | <b>Análise estática de sensores piezelétricos</b>             | <b>31</b> |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 4.1      | Introdução . . . . .  | 31        |
| 4.2      | Deformação axial em sensores piezelétricos . . . . .  | 32        |
| 4.3      | Deformação plana no sensor piezelétrico . . . . .   | 38        |
| 4.4      | Sinal elétrico no sensor . . . . .  | 40        |
| 4.5      | Sensor com o eletrodo segmentado . . . . .  | 41        |
| <b>5</b> | <b>Análise dinâmica de sensores piezelétricos</b>   | <b>46</b> |
| 5.1      | Introdução . . . . .  | 46        |
| 5.2      | Equações de movimento axial . . . . .   | 46        |
| 5.3      | Frequências naturais . . . . .  | 50        |
| 5.4      | Solução dinâmica . . . . .  | 53        |
| 5.5      | Sinais elétricos no sensor . . . . .  | 56        |
| <b>6</b> | <b>Resultados Estáticos</b>   | <b>58</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .  | 58        |
| 6.2      | Caso 1: Efeitos mecânicos (soluções analíticas) . . . . .   | 58        |
| 6.3      | Caso 2: Efeitos elétricos (soluções analíticas) . . . . .   | 67        |
| 6.4      | Caso 3: Efeitos elétricos, sensor com o eletrodo segmentado (soluções analíticas) . . . . .                                       | 68        |
| 6.5      | Caso 4, viga em tensão plana: efeitos eletro-mecânicos . . . . .  | 71        |
| 6.6      | Caso 5: Análise experimental - caso estático . . . . .  | 75        |
| 6.6.1    | Deformação simétrica com força controlada . . . . .   | 75        |
| 6.6.2    | Efeitos do comprimento do sensor . . . . .  | 78        |
| 6.6.3    | Efeitos da espessura da camada adesiva na voltagem . . . . .  | 79        |
| 6.6.4    | Sensor com o eletrodo segmentado, relações de força na amostra 1 com descolagem do lado esquerdo (força não controlada) . . . . . | 81        |
| 6.6.5    | Sensor com o eletrodo segmentado, relações de força na amostra 2 com descolagem no lado direito . . . . .                         | 84        |
| <b>7</b> | <b>Resultados dinâmicos</b>   | <b>86</b> |

|       |   |            |
|-------|---|------------|
| 7.1   | <b>Caso 1 dinâmico: Efeitos nas frequências naturais (soluções analíticas e numéricas)</b> . . . . .  | 86         |
| 7.2   | <b>Caso 2 dinâmico: Efeitos eletromecânicos pela descolagem (soluções analíticas e numéricas)</b> . . . . .   | 88         |
| 7.3   | <b>Caso 3 dinâmico: Efeitos elétricos para casos de descolagem (soluções numéricas para <math>d = 0, 5, 10, 15, 20, 25 \text{ mm}</math>)</b> . . . . . | 91         |
| 7.4   | <b>Caso 4 dinâmico: Análise dinâmica experimental</b> . . . . .   | 94         |
| 7.4.1 | <b>Variações na potência elétrica e admitância elétrica do sensor para casos de descolagem</b> . . . . .  | 94         |
| 7.4.2 | <b>Identificação de descolagem com um sensor de 3 eletrodos</b> . .   | 102        |
| 8     | <b>Conclusões</b>   | <b>106</b> |

# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 2.1 | Componentes de tensão do elemento diferencial de volume .....  | 8  |
| 2.2 | Elemento diferencial deformado no plano $x - y$ .....  | 9  |
| 2.3 | Placa piezelétrica, a) Circuito aberto, b) Circuito fechado .....  | 17 |
| 3.1 | Forças resultantes e momentos na placa .....   | 29 |
| 4.1 | Sensor piezelétrico colado numa estrutura por meio de uma camada adesiva .....   | 31 |
| 4.2 | Elemento diferencial $dx$ da estrutura, camada adesiva e sensor piezelétrico .....                                     | 32 |
| 4.3 | a) Diagrama de corpo livre da barra, b) Elemento diferencial $dx$ .....  | 33 |
| 4.4 | a) Tensão de cisalhamento na camada adesiva, b) Deformação angular .....   | 34 |
| 4.5 | a) Sensor piezelétrico, b) Elemento diferencial $dx$ no sensor .....   | 35 |
| 4.6 | a) Sensor piezelétrico, b) Elemento diferencial dos planos $x - y$ (2) e $x - z$ (1) .....                             | 39 |
| 4.7 | Sensor com três eletrodos .....  | 41 |
| 4.8 | Capacitores do sensor piezelétrico segmentado .....  | 42 |
| 4.9 | Representação equivalente de molas em serie para cada eletrodo do sensor .....   | 44 |
| 5.1 | a) Diagrama de corpo livre da barra, b) Elemento diferencial $dx$ .....  | 47 |
| 5.2 | a) Tensão de cisalhamento na camada adesiva, b) Deformação angular .....   | 48 |
| 5.3 | a) Sensor piezelétrico, b) Elemento diferencial do sensor $dx$ .....   | 48 |
| 6.1 | Estrutura- adesivo-sensor do caso 1 .....  | 59 |
| 6.2 | Deslocamentos do modelo analítico e solução numérica para $l = 5$ mm .....   | 60 |
| 6.3 | Deslocamentos do sensor e estrutura para $l = 5$ mm - Solução analítica variando-se a espessura do adesivo $h_a$ ..... | 60 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 6.4  | Deslocamentos do sensor e estrutura para $l = 15$ mm - Solução analítica variando-se a espessura do adesivo $h_a$ ..... | 61 |
| 6.5  | Deslocamentos do sensor e estrutura para $l = 25$ mm - Solução analítica variando-se a espessura do adesivo $h_a$ ..... | 62 |
| 6.6  | Deformação do sensor e estrutura para $l = 5$ mm - Solução analítica variando-se a espessura do adesivo $h_a$ .....     | 62 |
| 6.7  | Deformação do sensor e estrutura para $l = 15$ mm - Solução analítica variando-se a espessura do adesivo $h_a$ .....    | 63 |
| 6.8  | Deformação do sensor e estrutura para $l = 25$ mm - Solução analítica variando-se a espessura do adesivo $h_a$ .....    | 63 |
| 6.9  | Tensão de cisalhamento para $l = 5$ mm - Solução analítica variando-se $h_a$ .....                                      | 64 |
| 6.10 | Tensão de cisalhamento para $l = 15$ mm - Solução analítica variando-se $h_a$ .....                                     | 65 |
| 6.11 | Tensão de cisalhamento para $l = 25$ mm - Solução analítica variando-se $h_a$ .....                                     | 65 |
| 6.12 | Relação de deformação sensor/estrutura para $l = 5$ mm - Solução analítica variando-se $h_a$ .....                      | 66 |
| 6.13 | Relação de deformação sensor/estrutura para $l = 15$ mm - Solução analítica variando-se $h_a$ .....                     | 66 |
| 6.14 | Relação de deformação sensor/estrutura para $l = 25$ mm - Solução analítica variando-se $h_a$ .....                     | 67 |
| 6.15 | Comparação das voltagens para diferentes espessuras $h_a \in (0.1h_a, h_a)$ e comprimentos $l \in (0,15)$ .....         | 68 |
| 6.16 | Relações da voltagem para $l \in (0,25)$ e $h_a \in (0.1h_a, h_a)$ .....  | 69 |
| 6.17 | Relações de força equivalente $F1/F2$ e $F3/F2$ .....   | 70 |
| 6.18 | Caso4 - PZT colado em um dos lados da viga .....  | 71 |
| 6.19 | Tensão de cisalhamento da estrutura e deformação do sensor .....  | 72 |
| 6.20 | Deslocamentos da estrutura/adesivo/sensor e potencial elétrico no sensor .....  | 73 |
| 6.21 | Deformação da estrutura e deslocamento elétrico do sensor .....   | 74 |
| 6.22 | Tensão normal ou de pele nas interfaces estrutura/adesivo e adesivo/PZT .....   | 74 |
| 6.23 | Dimensões das amostras A e B .....  | 75 |
| 6.24 | Teste experimental para um sensor com o eletrodo segmentado e outro não segmentado .....                                | 77 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 6.25 | Voltagens obtidas para diferentes carregamentos - sensor B segmentado em 2 partes e sensor A não segmentado.....                          | 77 |
| 6.26 | Propriedades geométricas das amostras A, B e C .....  | 78 |
| 6.27 | Voltagem obtida das amostras A, B e C .....   | 79 |
| 6.28 | Voltagem obtida das amostras A e B .....  | 80 |
| 6.29 | Configuração das amostras para sensores segmentados .....   | 81 |
| 6.30 | Voltagem medida na amostra 1 da Tabela 6.6 devido a aplicação da carga .....  | 82 |
| 6.31 | Relação das voltagens da amostra 1 da Tabela 6.6 .....  | 83 |
| 6.32 | Relação das voltagens da amostra 2 .....  | 84 |
| 7.1  | Modelo de Vibração de frequências naturais, a) Colado completamente, b) Descolado à esquerda de 5 mm .....                                | 87 |
| 7.2  | Resposta a excitação senoidal, a) Deslocamentos - estrutura e PZT, b) Deformações - estrutura e PZT .....                                 | 88 |
| 7.3  | Deformações da estrutura para uma excitação senoidal, a) Estrutura sem descolagem, b) Estrutura com descolagem .....                      | 89 |
| 7.4  | Deformações do PZT para uma excitação senoidal, a) PZT sem descolagem-excitação senoidal, b) PZT com descolagem-excitação.....            | 89 |
| 7.5  | Densidade do campo elétrico através do PZT .....  | 90 |
| 7.6  | Efeitos no deslocamento elétrico do eletrodo central, $e_1$ $x \in (0.010, 0.020)$ .....  | 91 |
| 7.7  | Malha gerada para os casos de colagem completa e descolagem do sensor .....   | 92 |
| 7.8  | Carga elétrica gerada no sensor para os diferentes caso de descolagem (5, 10, 15, 20, 25 unidades em mm) .....                            | 93 |
| 7.9  | Rendimento ( $\eta$ ) do sensor para diferentes casos de descolagem (d) .....   | 94 |
| 7.10 | Caso 1 experimental , Placa de alumínio com dois sensores, sensor 1 colado completamente e sensor 2 parcialmente colado seção 7.4.1 ..... | 95 |
| 7.11 | Potência elétrica consumida pelo sensor 1 (100% colado) e sensor 2 (50% colado) da amostra 1 (caso 1) no tempo .....                      | 96 |

|  |     |
|--|-----|
| 7.12 Caso 2 experimental, Placa de alumínio com dois sensores, sensor 1 colado completamente e sensor 2 parcialmente colado, seção 7.4.1 ..... | 97  |
| 7.13 Potência elétrica consumida pelo sensor 1 (100% colado) e sensor 2 (50% colado) da amostra 2 (caso 2) no tempo .....                      | 98  |
| 7.14 Caso 3 experimental, Placa de alumínio com dois sensores, sensor 1 colado 50% e sensor 2 colado 30%, seção 7.4.1 .....                    | 99  |
| 7.15 Potência elétrica consumida pelo sensor 1 (50% colado) e sensor 2 (30% colado) da amostra 2 (caso 2) no tempo .....                       | 100 |
| 7.16 Porcentagem RMS para os casos 1, 2 e 3 .....  | 101 |
| 7.17 Placa de alumínio com dois sensores de 3 eletrodos, sensor 1 colado completamente e sensor 2 parcialmente colado (80%) .....              | 102 |
| 7.18 Relação das voltagens V2 com V1 e V3 (regressão linear) .....   | 103 |
| 7.19 Relação das voltagens V2 com V1 e V3 para o caso de descolagem (regressão linear) .....   | 104 |

# Lista de Tabelas

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 2.1 | Definição das constantes do material (T,E) . . . . .  | 14  |
| 2.2 | Definição das constantes do material (S,E) . . . . .  | 16  |
| 3.1 | Analogia das variáveis mecânicas e elétricas . . . . .  | 22  |
| 6.1 | Propriedades físicas e dimensões do Caso 1 . . . . .  | 59  |
| 6.2 | Propriedades físicas e dimensões da configuração da Figura 6.18 . . . . .   | 71  |
| 6.3 | Propriedades geométricas das amostras da seção 6.6.1 - caso estático . . . . .                                      | 76  |
| 6.4 | Propriedades geométricas das amostras da seção 6.6.2 para o teste estático . . . . .                                | 78  |
| 6.5 | Propriedades geométricas das amostras da seção 6.6.3 para o teste estático . . . . .                                | 80  |
| 6.6 | Propriedades geométricas das amostras do caso 6.6.4 estático (mm) . . . . .   | 82  |
| 6.7 | Propriedades geométricas das amostras do caso 6.6.5 estático (mm) . . . . .   | 84  |
| 7.1 | Propriedades geométricas das amostras do caso 1 dinâmico . . . . .  | 86  |
| 7.2 | Número de elementos da malha dos elementos finitos no COMSOL para os<br>vários comprimentos de descolagem . . . . . | 92  |
| 7.3 | Propriedades geométricas da seção 7.4.1, caso 1 experimental (mm) . . . . .   | 95  |
| 7.4 | Propriedades geométricas do caso 7.4.1 dinâmico, caso 2 experimental (mm) . . . . .                                 | 97  |
| 7.5 | Propriedades geométricas da seção 7.4.1 dinâmico caso 3 experimental (mm) . . . . .                                 | 99  |
| 7.6 | Potência RMS para os casos 1, 2 e 3 (W) . . . . .   | 101 |
| 7.7 | Propriedades geométricas da Figura 7.19 (dimensões em mm) . . . . .   | 102 |

# Lista de Símbolos

$u_s$  - Deslocamento da estrutura

$P(x)$  - Força interna normal na direção  $x$

$V(x)$  - Força de cisalhamento na direção  $x$

$u_p$  - Deslocamento do sensor piezoeletrico

$l_p$  - Comprimento do sensor piezoeletrico

$l_s$  - Comprimento da estrutura

$\epsilon_s(x)$  - Deformação da estrutura para  $x \in [0, l_s]$

$\epsilon_p(x)$  - Deformação do sensor piezoeletrico para  $x \in [0, l_p]$

$h_s$  - Espessura da estrutura

$h_p$  - Espessura do sensor piezoeletrico

$h_a$  - Espessura da camada adesiva

$w_s$  - Largura da estrutura

$w_p$  - Largura do sensor piezoeletrico

$h_a$  - Largura da camada adesiva

$\sigma_s(x)$  - Tensão normal na estrutura para  $x \in [0, l_s]$

$\sigma_p(x)$  - Tensão normal no sensor piezoeletrico para  $x \in [0, l_p]$

$\tau(x)$  - Tensão de cisalhamento nas interfaces estrutura-adesivo e adesivo-sensor para  $x \in [0, l_p]$

$G_a$  - Módulo de elasticidade de cisalhamento da camada adesiva

$E_s$  - Módulo de elasticidade da estrutura

$E_p$  - Módulo de elasticidade do sensor piezoeletrico

$E_z$  - Campo elétrico do sensor piezoeletrico na direção  $z$

$\xi(x)$  - Coeficiente de deformação

$\mathbf{D}$  - Deslocamento elétrico

$\rho$  - Densidade de carga elétrica

$Q$  - Carga elétrica

$C_{pzt}$  - Capacitância do sensor piezoeletrico

$d_{ij}$  - Coeficientes piezoeletricos de tensão  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$\varepsilon_{ik}$  - Permissividade elétrica  
 $e_{ijk}$  - Módulo piezoelectrico  
**E** - Campo elétrico  
 $s_{ijkl}$  - Coeficientes elásticos piezoelectricos  
 $V_c$  - Potencial elétrico do sensor piezoelectrico  
 $i$  - Corrente elétrica  
 $C_{ij}$  - Matriz das constantes elásticas  
 $f_i$  - Força de corpo na direção  $i$ , para  $i = x, y$  e  $z$   
 $T_{ij}$  - Tensor de tensão  
 $S_{ij}$  - Tensor de deformação  
 $\varphi$  - Potencial elétrico  
 $P(t)$  - Potência elétrica no tempo  $t$   
 $\eta$  - Relação de rendimento elétrico  
 $\phi$  - Potencial elétrico nos nós  
 $T$  - Sobre-índice que denota transposição  
 $\{ \}$  - Indicam se um valor é vetor  
 $[ ]$  - Indicam se um valor é matriz  
 $diag()$  - Indica uma matriz diagonal  
 $[I]$  - Representa a matriz identidade  
 $i$  - Indica imaginário  $\sqrt{-1}$

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação

Os materiais piezelétricos [35], principalmente as cerâmicas, PZT (material cerâmico de *Lead Zirconate Titanate*), e os filmes plásticos, PDVF (Fluorido de Polivinilideno) são usados comumente em estruturas inteligentes como sensores e atuadores devido a seu forte acoplamento eletromecânico. Os sensores e atuadores piezelétricos são usualmente aderidos às estruturas de forma permanente por meio de uma camada adesiva. A interface adesiva fornece o acoplamento mecânico necessário para transmitir as forças e deformações entre a estrutura e o material piezelétrico. Os sensores piezelétricos são usados para medir os deslocamentos locais da estrutura por meio da resposta elétrica obtida com o sensor. Quando a estrutura é submetida a forças de tração ou compressão, o sensor piezelétrico produz cargas elétricas que são medidas na forma de voltagem.

Durante os últimos anos muitos estudos têm sido realizados com sensores piezelétricos em diferentes áreas. No entanto em algumas áreas da mecânica estrutural os PZT apresentam maior importância, tais como monitoramento da integridade estrutural [8, 9, 10, 33], avaliação não destrutiva [4, 8, 10], controle ativo de estruturas [5, 20, 36, 43] entre outras.

O fenômeno piezelétrico pode ser analisado do ponto de vista matemático mediante as relações constitutivas, as quais são definições que estabelecem o acoplamento eletromecânico do material. Quando um sensor piezelétrico é colado a uma estrutura, o seu acoplamento eletromecânico depende da deformação da estrutura e portanto da deformação da interface

adesiva. A maioria das formulações analíticas e numéricas que têm sido estabelecidas para analisar o acoplamento mecânico não consideram os efeitos do adesivo sobre o acoplamento eletromecânico do sensor [24, 28].

Recentemente alguns métodos têm sido empregados para monitorar a integridade estrutural com sensores e atuadores piezelétricos. Por exemplo, os métodos de propagação de ondas e os métodos baseados na técnica da impedância eletromecânica (EMI). Alguns estudos começaram a levar em conta os efeitos do adesivo considerando as suas propriedades geométricas, lembrando que o adesivo fornece o acoplamento mecânico entre a estrutura e o material piezelétrico [9, 15, 21, 29, 33, 47]. No entanto, o fenômeno da interação eletromecânica entre estrutura, adesivo e sensor piezelétrico ainda requer investigações. Muitas relações fundamentais têm sido adotadas, mas os modelos propostos precisam ser verificados experimentalmente.

Análises estáticas e dinâmicas demonstram que a relação de deformação entre estrutura e material piezelétrico é não linear por causa da colagem [9, 15]. A não linearidade na deformação aparece na união entre estrutura e material piezelétrico, e esta depende das propriedades geométricas do acoplamento. Entretanto, [22] mostra que os efeitos causados pela colagem são dependentes das propriedades do sensor, do adesivo e da estrutura. Os efeitos de descolagem sobre os sinais elétricos emitidos pelo sensor são ainda pouco conhecidos. Um trabalho sobre descolagem é a referênica [47], onde se relacionou a descolagem com mudanças na rigidez do adesivo ou mudanças no módulo de Poisson e módulo de elasticidade.

Os efeitos relacionados com a colagem e descolagem de sensores piezelétricos podem ser relevantes na hora de implementar métodos que detectem dano estrutural e portanto devem ser levados em conta.

A motivação deste trabalho compreende o estudo dos efeitos da colagem e descolagem sobre os sinais elétricos emitidos pelos sensores, quando estes são aderidos a uma estrutura em casos estáticos e dinâmicos na situação uniaxial. Também, são objetivos caracterizar e discutir os efeitos na efetividade dos sensores (transmissão de forças mecânicas localmente) e o rendimento (capacidade de medir no tempo) dos sensores em casos de descolagem.

## 1.2 Revisão bibliográfica

O trabalho de [5] apresentou o projeto e análise de um amortecedor ativo com atuadores piezelétricos para uma viga esbelta. Neste trabalho foi usado um material piezelétrico polimérico como atuador. O modelo realizado para o controle ativo não considerou a camada adesiva entre o atuador e a viga.

Modelos axiais de deformação estática e dinâmica foram desenvolvidos por [15]. Estes modelos relacionavam a deformação de um atuador piezelétrico com a deformação de uma estrutura. Este foi um dos primeiros modelos de cisalhamento ou modelo “*shear lag*” proposto. Este estudo não considerou a flexão nos elementos piezelétricos. Deste modo foram realizados testes experimentais, onde se avaliaram diferentes tipos de material piezelétrico. As respostas obtidas nos testes experimentais foram comparadas com os resultados determinados a partir dos modelos analíticos.

O comportamento de elementos piezelétricos como sensores de deformação foi pesquisado por [42]. Neste estudo mostra-se a deformação do sensor em termos da carga elétrica gerada como resultado do efeito piezelétrico direto. Da mesma forma foram realizadas medidas experimentais usando dois tipos de sensores, PZT e PVDF. As medidas obtidas pelo sensor piezelétrico foram comparadas com medidas de extensômetros. Pode-se notar que a análise de deformação entre sensor e estrutura foi considerada direta. Isso quer dizer que o adesivo não foi considerado na interface entre estrutura e PZT. Adicionalmente, mostrou-se foi desenvolvido um circuito para condicionar os sinais emitidos pelo sensor piezelétrico. Os resultados mostraram que as cerâmicas piezelétricas apresentavam melhor rendimento que os extensômetros convencionais.

Modelos numéricos também têm sido utilizados para se ter aproximações diretas entre a estrutura e os elementos piezelétricos. Uma formulação de elementos finitos para controle de vibrações em uma placa laminada de material piezelétrico foi apresentado por [24]. A teoria clássica de placas e o princípio de Hamilton foram usados para formular as equações de movimento. As deformações causadas pelo atuador foram calculadas de forma direta usando as equações constitutivas. O trabalho de [30] mostrou diferentes formulações de elementos finitos (vigas e placas), com comprovações experimentais. No trabalho, a espessura da camada

adesiva não foi considerada nos modelos desenvolvidos, portanto o elemento piezelétrico foi considerado perfeitamente colado à estrutura (ver pág. 166, [30]).

O trabalho [28] estabeleceu o modelo de um elemento finito de viga com um atuador piezelétrico aderido. Neste modelo não foi considerado o efeito da colagem. Para a viga e o atuador foi usada a teoria de vigas de Timoshenko, garantindo a continuidade dos deslocamentos axiais e transversais da viga e do atuador. As funções de resposta em frequência da viga e do piezoatuador foram obtidas a partir de experimentos e comparadas com o modelo apresentado teoricamente.

A técnica da impedância eletromecânica acopla o fenômeno elétrico com a impedância mecânica da estrutura e do PZT. Esta técnica é usada no monitoramento da integridade estrutural e em avaliação não destrutiva. Uma análise eletromecânica acoplando atuadores piezelétricos em um sistema eletromecânico foi apresentada por [29]. A análise determina o consumo de potência do atuador e a transferência de energia no sistema eletromecânico. Para esta análise foi usado um modelo simples, um PZT guiado por um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade.

O modelo eletromecânico e o acoplamento por meio da camada adesiva entre PZT e estrutura é mostrado em [10]. Este estudo analisou o mecanismo de transferência de forças através da camada adesiva. A transferência mecânica das forças é realizada pelo efeito “*shear lag*”, transmissão de forças axiais. No entanto, as análises mostraram que a transmissão de forças apresenta mais efetividade nos extremos do sensor. Deste modo, demonstrou-se que a camada adesiva pode modificar significativamente as medidas da admitância eletromecânica se não há uma colagem controlada dos elementos piezelétricos.

Os efeitos das propriedades da camada adesiva, sobre o comportamento dinâmico do sensor e da estrutura são apresentados em [21, 22]. As soluções analíticas foram obtidas por meio da transformada de Fourier. Os resultados indicaram que a espessura e a viscosidade do adesivo apresentam efeitos importantes sobre a resposta elétrica do sensor.

## 1.3 Objetivos deste trabalho

O objetivo principal deste trabalho é determinar os efeitos causados pelas propriedades da colagem e descolagem sobre o comportamento estático, dinâmico e elétrico do sensor.

Alguns objetivos específicos deste trabalho são:

- Apresentar os modelos matemáticos uni-axiais para os casos estáticos e dinâmicos, os quais representem o comportamento eletro-mecânico do conjunto estrutura-adesivo-sensor.
- Comprovar experimentalmente os efeitos causados pelas propriedades de colagem nos sinais elétricos emitidos pelo sensor piezelétrico.
- Estabelecer um método para detectar descolagem parcial de sensor colado a uma estrutura.

## 1.4 Estrutura do trabalho

No Capítulo 1 é apresentada a motivação e uma breve revisão bibliográfica deste trabalho. O objetivo geral do estudo é também definido.

No Capítulo 2 é mostrada a teoria linear dos materiais piezelétricos. São definidas as equações constitutivas dos materiais piezelétricos a partir das leis termodinâmicas, as quais estabelecem a relação eletromecânica. Também são mostrados os fundamentos matemáticos de um sensor piezelétrico e é mostrado como se determina a capacitância do sensor e admitância eletromecânica.

No Capítulo 3 é mostrada uma formulação de elementos finitos para materiais piezelétricos e é mostrada uma descrição de dois tipos de elementos.

No Capítulo 4 é formulado o modelo analítico dos deslocamentos e das deformações do sensor e da estrutura quando o sensor está completamente colado no caso estático axial. No modelo é considerada a camada adesiva como interface na transmissão de forças. Também são mostradas as formulações que determinam a resposta elétrica do sensor quando este é deformado por meio da camada adesiva. É adotada uma proposta de um sensor com três

eletrodos para determinar a descolagem relacionando as voltagens de cada um dos eletrodos. Com o sensor dividido em três eletrodos verificou-se a distribuição não linear da deformação causada pela colagem. As relações de voltagem entre os eletrodos representam as relações de força entre eles.

No Capítulo 5 é mostrado o modelo analítico dinâmico axial dos deslocamentos do sensor e da estrutura, considerando a camada adesiva como interface de transmissão de forças. Os modelos para determinar a resposta elétrica no sensor são os mesmos usados no Capítulo 4.

No Capítulo 6 são mostrados os resultados estáticos teóricos e experimentais. Neste capítulo são mostrados os seguintes resultados: 1. Efeitos mecânicos (soluções analíticas); 2. Efeitos elétricos (soluções analíticas); 3. Efeitos elétricos do sensor com o eletrodo segmentado (soluções analíticas); 4. Viga em tensão plana: efeitos eletro-mecânicos (soluções numéricas obtidas com o COMSOL [14]) 5. Análise experimental (casos estáticos).

No Capítulo 7 são mostrados os resultados dinâmicos teóricos e experimentais. Neste caso são mostrados os seguintes resultados: 1. Efeitos nas frequências naturais (soluções analíticas e numéricas); 2. Efeitos eletromecânicos pela descolagem (soluções analíticas e numéricas); 3. Efeitos elétricos para casos de descolagem (soluções numéricas para diferentes casos de descolagem); 4. Análise experimental dinâmica (casos dinâmicos).

No Capítulo 8 são mostradas as conclusões deste trabalho e as questões que foram identificadas para trabalhos futuros.

Finalmente, uma lista com as principais referências do trabalho é apresentada.

# Capítulo 2

## Teoria linear dos materiais piezelétricos

### 2.1 Introdução

Os materiais piezelétricos pertencem à categoria dos materiais chamados inteligentes ou materiais multifuncionais, os quais têm a habilidade de responder a estímulos de diferentes naturezas físicas. Nos materiais piezelétricos vários efeitos têm sido observados em resposta às excitações mecânicas, elétricas, magnéticas, térmicas e de luz. Portanto, o fenômeno piezelétrico é um conceito que envolve muitas áreas da física tais como: mecânica, elasticidade, termodinâmica, acústica, ótica, eletrostática, dinâmica dos fluidos, teoria de circuitos, cristalografia e outras [34].

No começo do século XIX, o efeito piezelétrico foi mencionado de forma intuitiva em 1817 pelo francês René Just Haüy em seus trabalhos de cristalografia. No entanto, o efeito piezelétrico foi demonstrado por Pierre Jacques Curie em 1880 com experimentos [34]. Os experimentos de Curie, levaram a uma elaboração da primeira teoria piezelétrica. Contudo, esta teoria foi completada mais extensamente pelo trabalho de G. Lippman e W. G. Hankel no começo do século XX [34].

O fenômeno piezelétrico apresenta-se em alguns cristais que não possuem simetria na estrutura cristalina, onde uma diferença de potencial elétrico (voltagem) é gerada em certas

faces do cristal quando é submetido a deformação mecânica (efeito direto ou sensor). O efeito direto é usado amplamente no projeto de transdutores como acelerômetros, transdutores de força e transdutores de pressão. Caso contrário, se é aplicado um campo elétrico em algumas faces do cristal este será deformado mecanicamente (efeito indireto). O efeito indireto tem sido aplicado no projeto de atuadores.

Os materiais piezelétricos mais populares são *Lead-Zirconate-Titanate* (PZT) e *Polyvinylidene fluoride* (PVDF) que é um material polimérico. Neste trabalho será considerado só o PZT como material do estudo. Em adição ao efeito piezelétrico, os materiais piezelétricos também mostram outro fenômeno causado pela temperatura chamado piroelétrico, mas este efeito não será discutido neste trabalho.

O efeito piezelétrico nos últimos anos tem sido muito utilizado em algumas áreas da engenharia, por exemplo, controle de vibrações [5, 7, 20, 36, 43], sistemas aeroespaciais [1, 16, 26], nanotecnologia [11, 39, 40], e monitoramento da integridade estrutural [8, 9, 10, 33] entre outras áreas de aplicação.

## 2.2 Densidade de energia da deformação elástica [6]

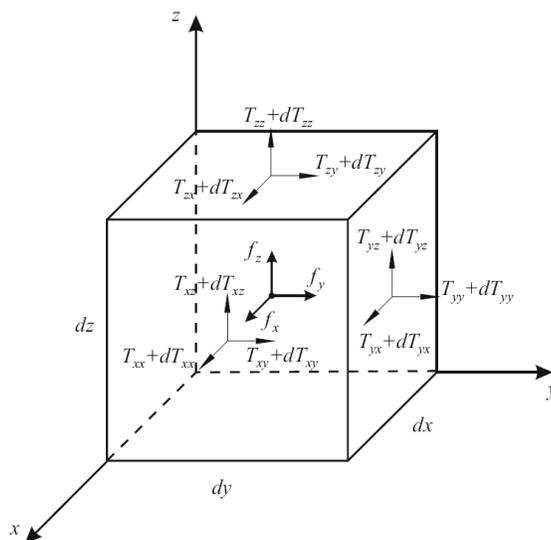


Figura 2.1: Componentes de tensão do elemento diferencial de volume

O elemento diferencial de volume  $dV$  da Figura 2.1 é considerado para estabelecer as relações de tensão-deformação através de um corpo sólido. Por conveniência, este elemento é

orientado de uma forma na qual os eixos coordenados são perpendiculares as suas faces. Os eixos do sistema coordenado coincidem com as arestas do elemento  $dV$ .

Se uma força contínua é aplicada no corpo sólido, as tensões mecânicas resultantes são continuamente distribuídas através do sólido e as tensões resultantes podem ser representadas no centro das faces do elemento diferencial  $dV$ .  $f_x, f_y, f_z$  são as forças de corpo que atuam no centro geométrico do elemento,  $T_{xx}$  é a tensão resultante causada pela força  $T_{xx}dx dz$  no lado esquerdo do elemento e  $dz$  é a espessura do elemento na direção  $z$ .

Para simplificar o cálculo da densidade de deformação do elemento, só o trabalho realizado pelas tensões na direção  $x$  será considerado.

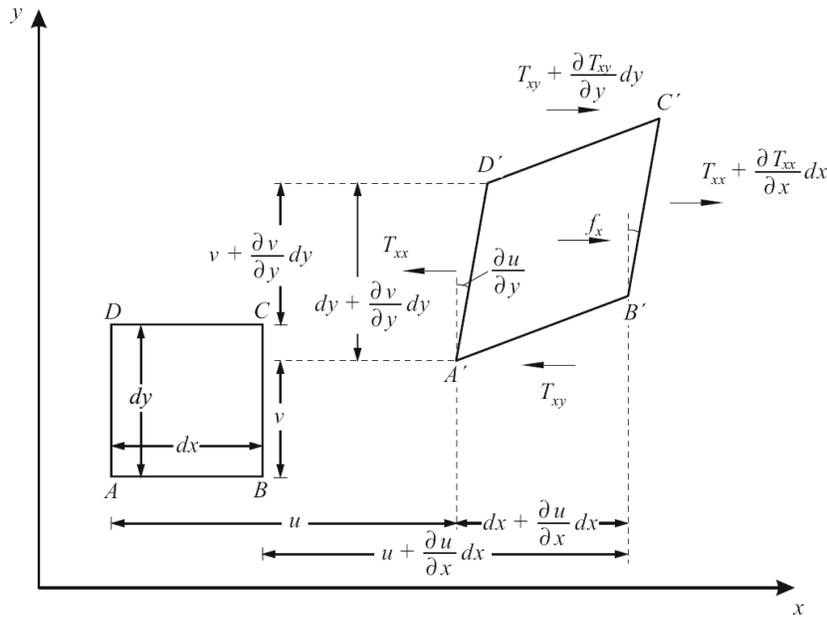


Figura 2.2. Elemento diferencial deformado no plano  $x - y$

A Figura 2.2 mostra o elemento diferencial numa configuração deformada no plano  $x - y$ . Logo, para o plano  $x - y$  o deslocamento do ponto médio do lado  $A'D'$ , depois de ser deformado, pode ser obtido como

$$u_{A'D'} = u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx. \quad (2.1)$$

Com a Equação (2.1) é possível determinar o trabalho realizado pela tensão mecânica  $T_{xx}$ , obtendo-se

$$dW_{T_{xx}}^{(1)} = -T_{xx} d\left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz. \quad (2.2)$$

Considerando os deslocamentos dos pontos médios dos lados  $B'C'$ ,  $A'B'$  e  $D'C'$  causados pela tensão e pela a força de corpo na direção  $x$ , pode-se determinar o diferencial do trabalho total realizado nesta direção como

$$dW_{T_{xx}} = \left( T_{xx}dS_{xx} + T_{xy}d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \right) dV, \quad (2.3)$$

onde,  $dV = dx dy dz$ ,  $dS_{xx} = d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$  sendo  $dS_{xx}$  a deformação mecânica na direção  $x$ . Analogamente tem-se para

$$dW_{T_{xy}} = \left( T_{yy}dS_{yy} + T_{xy}d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \right) dV. \quad (2.4)$$

Portanto, o trabalho total realizado no plano  $x - y$  é calculado como

$$dW_{T_x} = (T_{xx}dS_{xx} + T_{yy}dS_{yy} + 2T_{xy}dS_{xy}) dV, \quad (2.5)$$

onde  $dS_{yy} = d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)$ ,  $dS_{xy} = d\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$ .

Considerando uma situação de equilíbrio, o trabalho gerado pelas cargas externas será igual à energia de deformação armazenada na estrutura. Logo, a energia total de deformação do volume total  $dV$  pode ser determinada por meio de

$$dW_m = (T_{xx}dS_{xx} + T_{yy}dS_{yy} + T_{zz}dS_{zz} + 2T_{xy}dS_{xy} + 2T_{yz}dS_{yz} + 2T_{xz}dS_{xz}) dV. \quad (2.6)$$

A Equação (2.6) pode ser reescrita como

$$dW_m = \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T_{ij}dS_{ij} \right) dV, \quad (2.7)$$

onde,  $i = 1, 2, 3$  e  $j = 1, 2, 3$ . A notação das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  é substituída por 1, 2 e 3 para conseguir a representação da Equação (2.6) em notação indicial. A densidade de energia da deformação elástica fica então na forma

$$dw_m = T_{ij}dS_{ij}. \quad (2.8)$$

Integrando a Equação (2.8) tem-se que

$$w_m = \int_S C_{ij}S_{ij}dS_{ij}, \quad (2.9)$$

onde  $C_{ij}$  é a matriz das constantes elásticas ou seja  $T_{ij} = C_{ij}S_{ij}$ . A partir da Equação (2.9) pode-se escrever a densidade de energia da deformação elástica total do corpo como

$$w_m = \frac{1}{2}C_{ij}S_{ij}^2 = \frac{1}{2}T_{ij}S_{ij}. \quad (2.10)$$

## 2.3 Densidade de energia do campo eletrostático [6]

Num cristal com efeito piezoeletrico, o trabalho no campo elétrico é a variação de energia potencial elétrica que uma determinada carga sofre quando se desloca. Seja a carga elétrica  $dQ > 0$ , que é movida desde o ânodo até o cátodo. O trabalho elétrico é dado pela expressão  $\int dW_e = \int Qd\varphi$ , onde  $\varphi$  é o potencial elétrico. Assim, o trabalho elétrico total realizado pela carga  $Q$  pode ser calculado como

$$W_e = \frac{1}{2}Q\varphi. \quad (2.11)$$

A correlação da densidade de carga  $\rho$  e a carga elétrica  $Q$  é estabelecida por

$$Q = \int \int \int_V \rho dV. \quad (2.12)$$

Substituindo (2.12) em (2.11) e usando a equação de Maxwell,  $\rho = \text{div } \mathbf{D}$ , tem-se que

$$W_e = \frac{1}{2} \int \int \int_V \varphi \text{div } \mathbf{D} dV, \quad (2.13)$$

onde  $\mathbf{D}$  é o deslocamento elétrico medido em  $C/m^2$ . Pela lei de Gauss é obtida a relação do deslocamento elétrico como

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.14)$$

onde  $\varepsilon$  é permissividade elétrica do meio e  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico associado.

Usando a as propriedades do divergente [27], tem-se que

$$\text{div}(\varphi \mathbf{D}) = \varphi \text{div}(\mathbf{D}) + \text{grad}(\varphi) \mathbf{D}. \quad (2.15)$$

De (2.13) e usando (2.15) é possível obter que

$$W_e = \frac{1}{2} \int \int \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV - \frac{1}{2} \int \int \int_V \text{grad}(\varphi) \mathbf{D} dV. \quad (2.16)$$

O primeiro termo da Equação (2.16) pode ser transformado em uma integral de superfície sobre uma superfície fechada  $A$ . Usando o teorema de Gauss [3] pode-se determinar que

$$\int \int \int_V \text{div}(\varphi \mathbf{D}) dV = \oint_A (\varphi \mathbf{D}) dA. \quad (2.17)$$

Assumindo que a distribuição de carga desaparece no infinito ( $\lim_{r \rightarrow \infty} \varrho(r) = 0$ ), já que as linhas do campo elétrico diminuem a sua intensidade quando estão longe das cargas elétricas, o potencial elétrico  $\varphi$  e a norma do deslocamento elétrico  $|\mathbf{D}|$ , decrescem com a seguinte razão

$$\varphi \sim \frac{1}{r}, \quad \varphi(r) = 0 \quad \text{e} \quad |\mathbf{D}| \simeq \frac{1}{r^2}, \quad |\mathbf{D}(\mathbf{r})| = 0. \quad (2.18)$$

Deste modo, no infinito a integral de superfície de (2.17) decresce a razão de  $\frac{1}{r^3}$ . Consequentemente a Equação (2.16) fica na forma

$$W_e = -\frac{1}{2} \int \int \int_V \text{grad}(\varphi) \mathbf{D} dV. \quad (2.19)$$

Pode-se representar o campo elétrico  $\mathbf{E}$  como o gradiente do potencial elétrico como a seguir [6]:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi). \quad (2.20)$$

Introduzindo a Equação (2.20) na Equação (2.19), tem-se que

$$W_e = \frac{1}{2} \int \int \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV. \quad (2.21)$$

A densidade de energia elétrica total é determinada como

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad (2.22)$$

e da mesma forma (2.22) pode ser representada em notação indicial da seguinte forma:

$$w_e = \frac{1}{2} E_i D_i. \quad (2.23)$$

## 2.4 Equações constitutivas lineares [6]

Para determinar a densidade de energia total de um corpo piezelétrico é indispensável considerar o corpo como um sistema termodinamicamente fechado (o corpo piezelétrico só pode trocar energia, mas não massa). Portanto, a densidade de energia interna num corpo piezelétrico pode ser estabelecida por

$$dU = dw_m + dw_e, \quad (2.24)$$

ou

$$dU = T_{ij}dS_{ij} + E_idD_i. \quad (2.25)$$

A Equação (2.25) representa a base da termodinâmica de dielétricos flexíveis com características piezelétricas. A Equação (2.25) estabelece a relação entre o trabalho mecânico e o trabalho elétrico na energia total. Isto implica que o diferencial de densidade de energia  $dU$  pode ser descrito em termos das mudanças de energia causadas pela deformação e pelo campo elétrico da seguinte forma

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial S_{ij}} \right)_E dS_{ij} + \left( \frac{\partial U}{\partial E_i} \right)_S dE_i. \quad (2.26)$$

Na Equação (2.26) os sub-índices nas derivadas referem-se as variáveis  $E$  (potencial elétrico) e  $S$  (deformação). A equação da energia pode ser também relacionada em termos das mudanças de energia causadas pela tensão e pelo campo elétrico como

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T_{ij}} \right)_E dT_{ij} + \left( \frac{\partial U}{\partial E_i} \right)_T dE_i, \quad (2.27)$$

onde, os sub-índices nas derivadas referem-se as variáveis  $E$  (potencial elétrico) e  $T$  (tensão).

### 2.4.1 Equações constitutivas ( $\mathbf{T}, \mathbf{E}$ ) [6]

O diferencial  $d(T_{ij}S_{ij})$  pode ser representado por meio das suas derivadas como

$$d(T_{ij}S_{ij}) = \frac{d(T_{ij}S_{ij})}{\partial T_{ij}} dT_{ij} + \frac{d(T_{ij}S_{ij})}{\partial S_{ij}} dS_{ij}. \quad (2.28)$$

A Equação (2.28) pode ser reescrita como

$$d(T_{ij}S_{ij}) = S_{ij}dT_{ij} + T_{ij}dS_{ij}. \quad (2.29)$$

É possível escrever que

$$d(E_iD_i) = \frac{d(E_iD_i)}{\partial E_i} dE_i + \frac{d(E_iD_i)}{\partial D_i} dD_i, \quad (2.30)$$

ou também

$$d(E_iD_i) = D_idE_i + E_idD_i. \quad (2.31)$$

Subtraindo os termos do lado esquerdo das equações (2.29) e (2.31) e usando a Equação (2.25) tem-se que

$$dU - d(T_{ij}S_{ij}) - d(E_iD_i) = T_{ij}dS_{ij} + E_idD_i - S_{ij}dT_{ij} - T_{ij}dS_{ij} - D_idE_i - E_idD_i. \quad (2.32)$$

Reorganizando (2.32) obtém-se que

$$d(U - T_{ij}S_{ij} - E_iD_i) = -S_{ij}dT_{ij} - D_idE_i. \quad (2.33)$$

Usando a definição de entalpia dada por

$$H = U - T_{ij}S_{ij} - E_iD_i, \quad (2.34)$$

é possível determinar que

$$dH = -D_idE_i - S_{ij}dT_{ij}. \quad (2.35)$$

Segundo a Equação (2.27),  $dH$  pode ser representado como a seguir:

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial E_i} \right)_T dE_i + \left( \frac{\partial H}{\partial T_{ij}} \right)_E dT_{ij}. \quad (2.36)$$

As variáveis  $D_i$  e  $S_{ij}$  são funções dependentes das variáveis independentes  $E_i$  e  $T_{ij}$ . Portanto, estas podem ser representadas como

$$dD_i = \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_T dE_k + \left( \frac{\partial D_i}{\partial T_{kl}} \right)_E dT_{kl}, \quad (2.37)$$

$$dS_{ij} = \left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_k} \right)_T dE_k + \left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} \right)_E dT_{kl}. \quad (2.38)$$

As equações (2.37) e (2.38) representam um sistema de equações constitutivas para o par de variáveis  $(T, E)$ . As constantes do material são especificadas na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Definição das constantes do material (T,E)

| constante do material   | notação                   | unidade SI                            |
|---|---------------------------|---------------------------------------|
| $\left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_T = \varepsilon_{ik}$   | permissividade            | $[\varepsilon_{ik}] = 1 \text{ F/m}$  |
| $\left( \frac{\partial D_i}{\partial T_{kl}} \right)_T = \left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_k} \right)_T = d_{ikl}$ | coeficiente piezoelétrico | $[d_{ikl}] = 1 \text{ m/V}$           |
| $\left( \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} \right)_E = s_{ijkl}$   | coeficiente elástico      | $[s_{ijkl}] = 1 \text{ m}^2/\text{N}$ |

As equações constitutivas (2.37) e (2.38) podem ser reescritas com respeito às constantes do material definidas na Tabela 2.1 como

$$D_i = \varepsilon_{ik}^T E_k + d_{ikl} T_{kl}, \quad (2.39)$$

$$S_{ij} = d_{ijk} E_k + s_{ijkl}^E T_{kl}. \quad (2.40)$$

As equações (2.39) e (2.40) podem ser escritas na forma matricial como

$$[D] = [\varepsilon^T] \{E\} + [d] \{T\}, \quad (2.41)$$

$$[S] = [d]^T \{E\} + [s^E] \{T\}, \quad (2.42)$$

onde  $[d]^T$  é a matriz  $[d]$  transposta.

## 2.4.2 Equações constitutivas (S,E) [6]

Como  $S_{kl}$  e  $E_i$  são variáveis independentes, um novo potencial termodinâmico resulta da transformação de *Legendre* [6] chamada entalpia elétrica  $H_e$ . Usando a Equação (2.31) e subtraindo a Equação (2.25) tem-se que

$$d(U - E_i D_i) = T_{ij} dS_{ij} + E_i dD_i - D_i dE_i - E_i dD_i. \quad (2.43)$$

Usando a definição de entalpia

$$H_e = U - E_i D_i, \quad (2.44)$$

é possível determinar que

$$dH_e = T_{ij} dS_{ij} - D_i dE_i. \quad (2.45)$$

Segundo a Equação (2.26),  $dH_e$  pode ser escrito como

$$dH_e = \left( \frac{\partial H}{\partial S_{ij}} \right)_E dS_{ij} - \left( \frac{\partial H}{\partial E_i} \right)_S dE_i. \quad (2.46)$$

As variáveis  $D_i$  e  $T_{ij}$  são funções dependentes das variáveis independentes  $E_i$  e  $S_{ij}$ . Logo,  $dD_i$  e  $dT_{ij}$  podem ser expressados por meio do campo diferencial causado pelas variações de deformação e do campo elétrico, tendo que

$$dT_{ij} = \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_E dS_{kl} + \left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} \right)_S dE_k, \quad (2.47)$$

$$dD_i = \left( \frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} \right)_D dS_{kl} + \left( \frac{\partial D_i}{\partial E_k} \right)_S dE_k. \quad (2.48)$$

As equações (2.47) e (2.48) são chamadas equações lineares constitutivas (S,E). As constantes do material são especificadas na Tabela 2.2.

Tabela 2.2: Definição das constantes do material (S,E)

| constante de material  | notação                | unidade SI                     |
|--|------------------------|--------------------------------|
| $\left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial S_{kl}} \right)_T = c_{ijkl}$  | módulo de elasticidade | $[c_{ijkl}] = 1 \text{ N/m}^2$ |
| $\left( \frac{\partial T_{ij}}{\partial E_k} \right)_S = - \left( \frac{\partial D_i}{\partial S_{kl}} \right) = -e_{ijk}$ | módulo piezométrico    | $[e_{ijk}] = 1 \text{ C/m}^2$  |

As equações constitutivas (2.47) e (2.48) podem ser resumidas com respeito às constantes do material definidas na Tabela 2.2 como

$$T_{ij} = c_{ijkl}^E S_{kl} - e_{ijk} E_k, \quad (2.49)$$

$$D_i = e_{ikl} S_{kl} + \varepsilon_{ik}^S E_k. \quad (2.50)$$

As equações (2.49) e (2.50) podem ser escritas na forma matricial

$$[T] = [c^E] \{S\} + [e]^T \{E\}, \quad (2.51)$$

$$[S] = [e] \{S\} + [\varepsilon^S] \{E\}, \quad (2.52)$$

onde  $[e]^T$  é a matriz  $[e]$  transposta. As equações (2.39), (2.40) e (2.49), (2.50) representam o acoplamento eletro-mecânico de um material piezométrico quando este é usado como sensor ou como atuador.

## 2.5 Fundamentos do sensor piezométrico (PZT) [42]

Os transdutores piezométricos podem ter diferentes formas geométricas. Neste estudo é considerada a forma retangular. Os PZT usados na forma retangular apresentam polaridade numa direção, a qual é normal às faces que coincidem com o plano  $x - y$  como mostra a Figura 2.3. A direção de polarização é alinhada ao eixo  $z$ .

As faces de maior tamanho do PZT são compostas por duas lâminas chamadas eletrodos que recobrem o PZT com uma espessura muito fina. O objetivo do eletrodo é acumular a carga elétrica produzida pela deformação mecânica. Isto significa que quando no sensor é aplicada uma tensão de forma mecânica na direção  $x$  ou  $y$ , o PZT gera uma carga elétrica  $Q$  nos eletrodos  $e_1$  e  $e_2$ . A carga elétrica  $Q$  pode ser medida em forma de voltagem (Circuito aberto, ver Figura 2.3a) ou na forma de corrente (circuito fechado, ver Figura 2.3b).

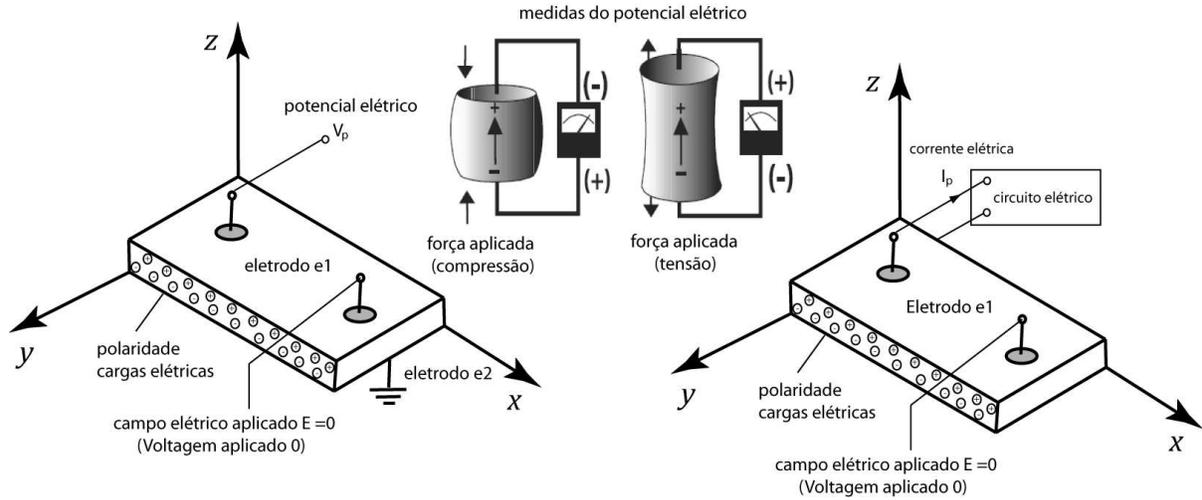


Figura 2.3: Placa piezoeletrica, a) Circuito aberto, b) Circuito fechado

A Equação (2.53) resume o princípio de operação dos sensores (PZT).

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \\ T_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.53)$$

A Equação (2.53) representa o acoplamento eletromecânico, onde a tensão mecânica causa um deslocamento elétrico no sensor. Pela equação de Maxwell, o deslocamento elétrico pode ser relacionado com a densidade de carga elétrica  $\rho$  gerada no sensor que é definida como

$$\rho = \text{div } \mathbf{D}. \quad (2.54)$$

Com a densidade de carga elétrica, pode-se determinar a carga elétrica da seguinte forma

$$Q = \int \int \int_V \rho dV, \quad (2.55)$$

onde  $V$  é o volume da placa piezelétrica. A carga  $Q$  gera uma voltagem  $V_c$  (potencial elétrico) através dos eletrodos paralelos ao plano  $x - y$  e é determinada como

$$V_c = \frac{Q}{C_{pzt}}, \quad (2.56)$$

onde  $C_{pzt}$  é a capacitância da placa piezelétrica. A voltagem no sensor representa como as cargas elétricas são movidas desde a referência até o lugar do potencial elétrico gerado. Entretanto, o sensor pode acumular carga elétrica dependendo da forma em que é deformado.

A capacitância do sensor piezelétrico é obtida como a seguir

$$C_{pzt} = \frac{e_{33}^{\sigma} l_c b_c}{t_c}, \quad (2.57)$$

onde  $l_c$ ,  $b_c$ ,  $t_c$ , são o comprimento, largura e espessura do PZT e  $e_{33}^{\sigma}$  é a permissividade elétrica.

Um capacitor é um elemento que acumula energia em um campo elétrico. Quando a voltagem é variável sobre um ciclo, a energia é acumulada sobre uma parte do ciclo e a energia retorna na outra parte do ciclo. O capacitor acumula a carga elétrica e o campo elétrico pode manter a carga depois de removida a fonte de energia. A relação de potência no tempo  $t$  para um capacitor é dada por

$$P(t) = V_c(t)i(t), \quad (2.58)$$

onde  $i(t)$  é corrente elétrica no tempo determinada por

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad (2.59)$$

ou também,

$$i(t) = C_{pzt} \frac{dV_c(t)}{dt}. \quad (2.60)$$

A potência elétrica, Equação (2.58), pode ser um indicador de rendimento do sensor quando o sensor é descolado, permitindo estabelecer uma relação de potência entre a potência inicial

consumida ( $P_i$ ) pelo sensor (sem descolagem) com a potência consumida ( $P_d$ ) pelo sensor com descolagem. Esta relação pode ser estabelecida também da seguinte forma: carga elétrica inicial gerada ( $P_i$ ) pelo sensor (sem descolagem) com carga elétrica gerada ( $P_d$ ) pelo sensor com descolagem. Logo, a relação de rendimento  $\eta$  é

$$\eta = \frac{\max(P_d)}{\max(P_i)} 100\%. \quad (2.61)$$

Neste capítulo foram mostradas as formulações das equações constitutivas para um material piezoeletrico. Também foram mostrados os fundamentos elétricos para um sensor piezoeletrico com o objetivo de obter os sinais elétricos quando o sensor é deformado mecanicamente. As equações (2.56) e (2.58) são usadas para determinar a potência elétrica do sensor piezoeletrico com os dados experimentais.

# Capítulo 3

## Método do elemento finito para materiais piezelétricos

### 3.1 Introdução

O estudo dos sistemas físicos frequentemente resulta em equações diferenciais parciais, no qual algumas não podem ser resolvidas analiticamente. Para estas situações um método numérico pode ser usado para resolver este tipo de problema. Neste caso o método de elementos finitos é um método adequado para obter soluções numéricas.

Nos últimos anos com o desenvolvimento dos computadores modernos, o método dos elementos finitos tem-se tornado uma das mais importantes ferramentas de análise na engenharia. Esta ferramenta tem sido usada em áreas como transferência de calor, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, acústica, mecânica de fratura e contato mecânico. Basicamente, o método dos elementos finitos [23, 38, 50] consiste em estabelecer funções de aproximação aplicando métodos variacionais clássicos em pequenos subdomínios chamados elementos finitos conectados de forma sistemática por meio de pontos chamados nós.

Os elementos finitos para meios piezelétricos foram propostos inicialmente por [32], que estabeleceu os princípios variacionais para formular os problemas com piezelétricos integrados nas estruturas. Em [2] é modelado, a partir do princípio de Hamilton e das equações constitutivas, um elemento tetraédrico de 4 nós e 4 graus de liberdade por nó (3 de translações e

o potencial elétrico) levando em conta o fenômeno piezoeletrico.

Um elemento de placa retangular multicamada de flexão pura, com 4 nós e 3 graus de liberdade em cada nó (1 translação e 2 rotações) com um grau de liberdade elétrico para cada camada piezoeletrica é proposto em [24]. Um campo de deslocamento cúbico com uma placa multicamada de 8 nós com 2 graus de liberdade elétricos e 11 graus de liberdade mecânicos é apresentado em [41]. Esta aproximação apresentou resultados muito próximos das soluções exatas para os problemas de multicamada com material piezoeletrico.

Um modelo termo-piezoeletrico quase estático para uma estrutura de placa composta com materiais piezoeletricos unidos na superfície foi desenvolvido em [13]. Neste modelo foi assumida uma distribuição da deformação de cisalhamento de ordem 3. A formulação do elemento finito de casca para piezoeletricos colados na superfície é apresentada em [49]. Um modelo de elemento finito de uma viga com um atuador piezoeletrico (viga e o atuador modelados usando a teoria de vigas de Timoshenko) é apresentado em [28].

Mais recentemente [31] formulou dois modelos de elementos finitos para análise estática de vigas inteligentes com atuadores e sensores piezoeletricos. Os tipos de elementos formulados são ADSBE (*ad hoc smart beam element*) e VASBE (*variational asymptotic smart beam element*). As matrizes da seção transversal levam em conta as propriedades da seção transversal da viga, considerando assim o acoplamento eletromecânico.

## 3.2 Princípios variacionais

As equações dinâmicas de um piezoeletrico contínuo podem ser derivadas através do princípio de Hamilton, no qual o trabalho Lagrangiano e virtual são propriamente adaptados para incluir as contribuições elétricas como também as mecânicas [2, 49]. A densidade de energia potencial de um material piezoeletrico inclui contribuições da energia de deformação e da energia eletrostática. O princípio de Hamilton [21] é dado por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{L} + \mathcal{W}) dt = 0, \quad (3.1)$$

onde  $t_1$  e  $t_2$  definem o intervalo de tempo,  $\mathcal{L}$  é o Lagrangiano e  $\mathcal{W}$  é o trabalho virtual das forças externas mecânicas e elétricas. O Lagrangiano  $\mathcal{L}$  é definido pela soma da densidade

de energia cinética  $J$  e entalpia elétrica  $H$  (piezeletricidade linear). Logo

$$J = \frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\}, \quad (3.2)$$

$$H = \frac{1}{2} \{S\}^T \{T\} - \{E\}^T \{D\}, \quad (3.3)$$

$$\mathcal{L} = \int_V (J - H) dV = \int_V \left( \frac{1}{2} \rho \{\dot{u}\}^T \{\dot{u}\} - \frac{1}{2} \{S\}^T \{T\} - \{E\}^T \{D\} \right) dV, \quad (3.4)$$

onde  $\{\dot{u}\}$  é o campo da velocidade e  $\rho$  é a massa específica do material.

O trabalho virtual realizado pelas forças mecânicas externas e as cargas elétricas aplicadas é determinado por

$$\delta\mathcal{W} = \int_V \{\delta u\}^T \{F_V\} dV + \int_{\Omega_1} \{\delta u\}^T \{F_\Omega\} d\Omega + \{\delta u\}^T \{F_p\} - \int_{\Omega_2} \delta\phi \varrho d\Omega - \delta\phi Q, \quad (3.5)$$

onde  $\{F_V\}$  são as forças de corpo aplicadas,  $\{F_\Omega\}$  são as forças de superfície aplicadas sobre o domínio  $\Omega_1$ ,  $\{F_p\}$  são as cargas pontuais colocadas nos nós,  $\phi$  é o potencial elétrico,  $\varrho$  é a carga elétrica superficial sobre o domínio  $\Omega_2$  e  $Q$  é a carga elétrica concentrada.

Através das equações (3.4) e (3.5), a analogia para as variáveis elétricas e mecânicas é mostrada na Tabela 3.1. Os tensores elétricos têm um grau de liberdade mais baixo que os tensores mecânicos.

Tabela 3.1: Analogia das variáveis mecânicas e elétricas

| Mecânica     |         | Elétrica  |                       |
|--------------|---------|-----------|-----------------------|
| Força        | $\{F\}$ | $\varrho$ | Carga                 |
| Deslocamento | $\{u\}$ | $\phi$    | Voltagem              |
| Tensão       | $\{T\}$ | $\{D\}$   | Deslocamento elétrico |
| Deformação   | $\{S\}$ | $\{E\}$   | Campo elétrico        |

Integrando-se a variação do termo da energia cinética por partes sobre o intervalo de tempo  $(t_1, t_2)$ , tem-se que

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho \{\delta u\}^T \{\dot{u}\} dt = \left[ \rho \{\delta u\}^T \{u\} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dt. \quad (3.6)$$

Na Equação (3.6) o primeiro termo desaparece devido a que  $\{\delta u\} = 0$  em  $t_1$  e  $t_2$ . Levando em conta as equações constitutivas (49) e (50) e substituindo o Lagrangiano e o trabalho virtual no princípio de Hamilton da equação (3.1) tem-se que

$$\begin{aligned}
0 = & - \int_V [\rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} - \{\delta S\}^T [c^E] \{S\} + \{\delta S\}^T [e]^T \{E\} \\
& + \{\delta E\}^T [e]^T \{S\} + \{\delta E\}^T [\varepsilon^S]^T \{E\} + \{\delta u\}^T \{F_V\}] dV \\
& + \int_{\Omega_1} \{\delta u\}^T \{F_\Omega\} d\Omega + \{\delta u\}^T \{F_p\} - \int_{\Omega_2} \delta\phi_Q d\Omega - \delta\phi Q.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

### 3.3 Formulação dos elementos finitos [34]

O campo de deslocamentos  $\{u\}$  e o potencial elétrico  $\phi$  sobre um elemento são relacionados aos valores correspondentes  $\{u_i\}$  e  $\{\phi_i\}$  por meio das funções de aproximação  $[N_u]$  e  $[N_\phi]$  como

$$\{u\} = [N_u] \{u_i\}, \tag{3.8}$$

$$\phi = [N_\phi] \{\phi_i\}, \tag{3.9}$$

e portanto, o campo de deformação  $\{S\}$  e o campo elétrico  $\{E\}$  estão relacionados aos deslocamentos nodais e ao potencial elétrico por meio das derivadas das funções de forma  $[B_u]$  e  $[B_\phi]$  definidas por

$$\{u\} = [\mathcal{D}] [N_u] \{u_i\} = [B_u] \{u_i\}, \tag{3.10}$$

$$\phi = -\nabla [N_\phi] \{\phi_i\} = -[B_\phi] \{\phi_i\}, \tag{3.11}$$

onde  $\nabla$  é o operador gradiente e  $[\mathcal{D}]$  o operador de diferenciação definido como

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Substituindo as equações (3.8) à (3.11) na equação do princípio variacional (3.7), obtém-se como resultado

$$\begin{aligned}
0 = & - \{\delta u_i\}^T \int_V \rho [N_u]^T [N_u] dV \{\ddot{u}_i\} - \{\delta u_i\}^T \int_V [B_u]^T [c^E] [B_u] dV \{u_i\} \\
& - \{\delta u_i\}^T \int_V [B_u]^T [e]^T [B_\phi] dV \{\phi_i\} - \{\delta \phi_i\}^T \int_V [B_\phi]^T [e] [B_u] dV \{u_i\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \{\delta\phi_i\}^T \int_V [B_\phi]^T [\varepsilon^S] [B_\phi] dV \{\phi_i\} + \{\delta u_i\}^T \int_V [N_u]^T \{F_V\} dV \\
& + \{\delta u_i\}^T \int_{\Omega_1} [N_u]^T \{F_\Omega\} d\Omega + \{\delta u_i\}^T [N_u]^T \{F_P\} - \{\delta\phi_i\}^T \int_{\Omega_2} [N_\phi]^T \varrho d\Omega - \{\delta\phi_i\}^T [N_\phi]^T Q.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Para um elemento finito piezoeletrico, a Equação (3.13) pode ser escrita da seguinte forma

$$[M] \{\ddot{u}_i\} + [K_{uu}] \{u_i\} + [K_{u\phi}] \{\phi_i\} = \{f_i\}, \tag{3.14}$$

$$[K_{\phi u}] \{u_i\} + [K_{\phi\phi}] \{\phi_i\} = \{g_i\}. \tag{3.15}$$

A matriz de massa do elemento é dada por

$$[M] = \int_V \rho [N_u]^T [N_u] dV. \tag{3.16}$$

A matriz de rigidez  $[K_{uu}]$  é determinada por

$$[K_{uu}] = \int_V [B_u]^T [c^E] [B_u] dV. \tag{3.17}$$

As matrizes de acoplamento eletromecânico são obtidas da seguinte forma,

$$[K_{u\phi}] = \int_V [B_u]^T [e]^T [B_\phi] dV, \tag{3.18}$$

$$[K_{\phi u}] = [K_{u\phi}]^T, \tag{3.20}$$

e por último é determinada a matriz dielétrica de rigidez como

$$[K_{\phi\phi}] = - \int_V [B_\phi]^T [\varepsilon^S] [B_\phi] dV. \tag{3.19}$$

Além disso é possível determinar os vetores

$$\{f_i\} = \int_V [N_u]^T \{F_V\} dV + \int_{\Omega_1} [N_u]^T \{F_\Omega\} d\Omega + [N_u]^T \{F_P\}, \tag{3.21}$$

e

$$\{g_i\} = - \int_{\Omega_2} [N_\phi]^T \varrho d\Omega - [N_\phi]^T Q, \tag{3.22}$$

onde  $\{g_i\}$  e  $\{f_i\}$  representam a carga elétrica e a força mecânica externa aplicada nos nós.

Cada elemento  $k$  da malha é referenciado com respeito ao sistema coordenado local e cada elemento é conectado aos seus elementos vizinhos por meio de um sistema coordenadas globais.

Isso quer dizer que os graus de liberdade  $\{u_i^{(k)}, \phi_i^{(k)}\}^T$  são relacionados com os graus de liberdade do sistema global  $\{U, \phi\}$  por meio das matrizes de localização  $[L_u]^{(k)}$  e  $[L_\phi]^{(k)}$ :

$$\{u_i^{(k)}\} = [L_u]^{(k)} \{U\}, \quad (3.23)$$

$$\{\phi_i^{(k)}\} = [L_\phi]^{(k)} \{\phi\}. \quad (3.24)$$

O elemento  $ij$  de  $[L_u]^{(k)}$  é igual a 1 se os graus de liberdade mecânicos  $i$  do elemento finito  $k$  correspondem ao graus de liberdade mecânicos globais  $j$ , e de outra forma é igual a 0. O elemento  $ij$  de  $[L_\phi]^{(k)}$  é igual a 1 se os graus de liberdade elétricos  $i$  do elemento finito  $k$  correspondem ao grau de liberdade elétrico global  $j$ , e de outra forma é 0.

O princípio de Hamilton deve ser verificado para a estrutura completa. Ou seja, somar a contribuição de cada elemento finito e assim obter a solução para a estrutura global. Desta forma

$$\begin{aligned} 0 = \{\delta U\}^T & \left[ \left( \sum_k [L_u]^{(k)T} [M^{(k)}] [L_u]^{(k)} \right) \{\ddot{U}\} + \left( \sum_k [L_u]^{(k)T} [K_{uu}^{(k)}] [L_u]^{(k)} \right) \{U\} \right] \\ & + \left( \sum_k [L_u]^{(k)T} [K_{u\phi}^{(k)}] [L_u]^{(k)} \right) \{\phi\} - \left( \sum_k [L_u]^{(k)} [f_k] \right) \\ \{\delta \phi\}^T & \left[ \left( \sum_k [L_\phi]^{(k)T} [K_{\phi u}^{(k)}] [L_u]^{(k)} \right) \{U\} + \left( \sum_k [L_\phi]^{(k)T} [K_{\phi\phi}^{(k)}] [L_\phi]^{(k)} \right) \{\phi\} \right] \\ & - \left( \sum_k [L_\phi]^{(k)} [g_k] \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

A Equação (3.25) pode ser escrita na forma matricial como a seguir:

$$[M] \{\ddot{U}_{uu}\} + [K_{uu}] \{U_{uu}\} + [K_{u\phi}] \{\phi\} = \{f_i\}, \quad (3.26)$$

$$[K_{\phi u}] \{U_{\phi u}\} + [K_{\phi\phi}] \{\phi\} = \{g_i\}, \quad (3.27)$$

onde as matrizes são dadas por

$$[M] = \sum_i [L_{ui}]^T [M^{(i)}] [L_{ui}], \quad (3.28)$$

$$[K_{uu}] = \sum_i [L_{ui}]^T [K_{uu}^{(i)}] [L_{ui}], \quad (3.29)$$

$$[K_{u\phi}] = \sum_i [L_{ui}]^T [K_{u\phi}^{(i)}] [L_{\phi i}], \quad (3.30)$$

$$[K_{\phi u}] = \sum_i [L_{\phi i}]^T [K_{\phi u}^{(i)}] [L_{ui}], \quad (3.31)$$

$$[K_{\phi\phi}] = \sum_i [L_{\phi i}]^T [K_{\phi\phi}^{(i)}] [L_{\phi i}]. \quad (3.32)$$

### 3.4 Elemento de *Kirchhoff* [21]

Para um elemento de Kirchhoff é assumido que o campo elétrico e o campo de deslocamento são uniformes através da espessura e assim alinhados com a direção de polarização no plano médio normal do elemento. Os graus de liberdade elétricos são as voltagens  $\phi_k$  através das camadas piezelétricas. É adotado que o potencial elétrico é constante sobre cada elemento. Também é estabelecido um grau de liberdade elétrico por camada piezelétrica. Dessas considerações é possível concluir que

$$\{\phi\} = \{\phi_k\}, \quad (3.33)$$

$$\{E\} = - \left\{ \frac{\phi_k}{h_k} \right\}, \quad (3.34)$$

onde  $h_k$  é a espessura da camada  $k$ ,  $[N_\phi] = I$  e  $[B_\phi] = \text{diag}(1/h_k)$ . Logo, as matrizes de massa, rigidez, capacitância e acoplamento piezelétrico são definidas por

$$[M] = \int_{\Omega} \rho [N_u]^T [N_u] d\Omega, \quad (3.35)$$

$$[K_{uu}] = \int_{\Omega} [B_u]^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [B_u] d\Omega, \quad (3.36)$$

$$[K_{u\phi}] = \int_{\Omega} [B_u]^T \begin{bmatrix} \cdots & \varepsilon_k^T & \cdots \\ \cdots & \varepsilon_k^T z_{mk} & \cdots \end{bmatrix} d\Omega, \quad (3.37)$$

$$[K_{\phi\phi}] = - \int_V - \Omega \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \varepsilon_k/h_k & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} [B_\phi] dV, \quad (3.38)$$

$$[K_{\phi u}] = [K_{u\phi}]^T, \quad (3.39)$$

onde  $A$ ,  $B$ ,  $D$  são as matrizes de acoplamento determinadas pela formulação clássica de materiais multicamada [21], dadas por

$$[A] = \sum_{k=1}^n [\overline{Q}]_k (z_k - z_{k-1}), \quad (3.40)$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\overline{Q}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (3.41)$$

$$[C] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\bar{Q}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad (3.42)$$

onde  $[\bar{Q}]_k$  é a matriz de rigidez da camada  $k$ ,

$$[\bar{Q}]_k = [R_T]_k^{-1} [C]_k [R_S]_k, \quad (3.43)$$

e  $[C]_k$  é a matriz de coeficientes elásticos.  $[R_T]_k$  e  $[R_S]_k$  são matrizes de transformação

$$[R_T]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -2 \sin \theta_k \cos \theta_k \\ -\sin \theta_k \cos \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

$$[R_S]_k = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_k & \sin^2 \theta_k & \sin \theta_k \cos \theta_k \\ \sin^2 \theta_k & \cos^2 \theta_k & -\sin \theta_k \cos \theta_k \\ -2 \sin \theta_k \cos \theta_k & 2 \sin \theta_k \cos \theta_k & \cos^2 \theta_k - \sin^2 \theta_k \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Logo, para o elemento de *Kirchhoff* é definido que

$$\{\varepsilon\}_k = \left\{ \begin{matrix} e_{31} & e_{32} & 0 \end{matrix} \right\}_k [R_S]_k, \quad (3.46)$$

As forças mecânicas aplicadas e as cargas elétricas produzidas nos eletrodos são

$$\{f\} = \int_{\Omega} [N]^T \{P_S\} d\Omega + \{P_c\}, \quad (3.47)$$

$$\{g\} = - \left\{ \begin{matrix} \dots & \varrho_k & \dots \end{matrix} \right\}^T, \quad (3.48)$$

onde  $[P_S]$  e  $[P_c]$  são respectivamente as forças externas distribuídas e as forças concetradas, e  $\varrho_k$  são as cargas externas nos eletrodos.

### 3.5 Elemento de *Mindlin* [21]

A teoria clássica de *Kirchhoff* não considera as deformações de cisalhamento transversais. Algumas teorias alternativas têm sido constituídas para ajustar as deformações de cisalhamento transversais e estabelecem soluções aproximadas para cascas delgadas [23]. Para um elemento de *Mindlin* (ver Figura 3.1) são considerada a seguintes hipóteses:

- Uma dimensão é significativamente menor que as outras dimensões.
- Hipótese da tensão plana:  $T_{zz} = 0$ .
- Suposição *Mindlin*: Uma deformação de cisalhamento transversal  $\{\gamma\}$  é introduzida.  $\{\gamma\}$  é constante através da espessura e igual a diferença do ângulo entre a normal ao plano médio e a direção do material. Neste caso tem-se

$$\{S\} = \{S_0\} + z \{k\}, \quad (3.49)$$

$$\{\gamma\} = \{\beta\} + \nabla\varphi, \quad (3.50)$$

onde  $\{S_0\}$  é a deformação do plano médio,  $\{k\}$  é a curvatura atual (derivadas espaciais dos ângulos de rotação  $\{\beta\}$  da fibra) e  $\varphi$  é o deslocamento transversal do plano médio.

- Não há acoplamento entre extensão/flexão e deformação transversal.
- O campo elétrico e o deslocamento são uniformes através da espessura do elemento e estão alinhados com a direção normal ao plano médio (direção  $z$ ).

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{Bmatrix}, \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D \end{Bmatrix}. \quad (3.51)$$

- Piezeletricidade linear: Para cada camada piezelétrica  $k$ , é assumido que os eixos principais são paralelos aos eixos ortogonais da estrutura e que a direção de polaridade é a direção  $z$ . Também é assumido que um campo elétrico transversal ( $e_{34} = e_{35} = e_{36} = 0$ ) aplicado não pode induzir deformação de cisalhamento. Este caso de piezeletricidade linear é considerado para os materiais piezelétricos na forma de placa (PZT e PVDF).

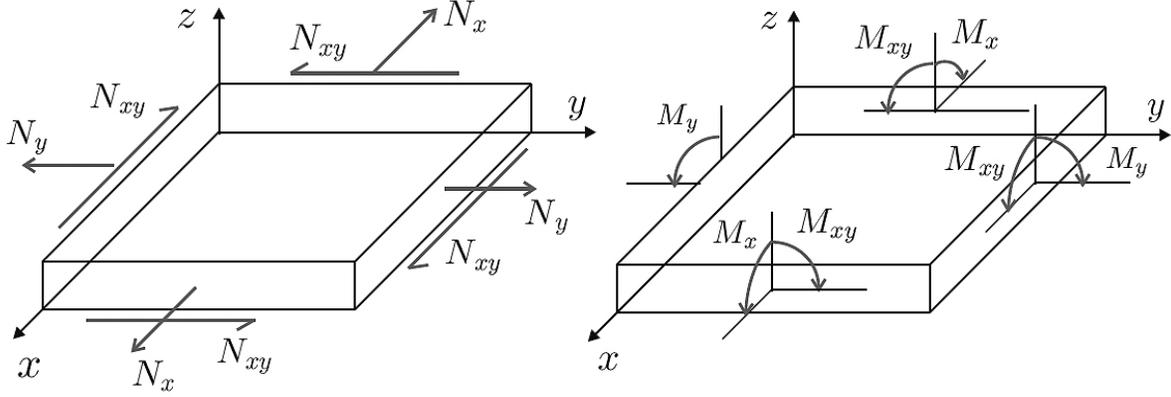


Figura 3.1: Forças resultantes e momentos na placa

Logo, para um elemento *Mindlin*, as equações constitutivas na camada  $k$  estabelecem que

$$\{T\} = [c]_k \{S\} - \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k \{E\}_k, \quad (3.52)$$

$$D_k = \begin{Bmatrix} e_{31} & e_{32} & 0 \end{Bmatrix} \{S\} + \varepsilon_k E_k, \quad (3.53)$$

$$\{\tau\} = [c_t]_k \{\gamma\}. \quad (3.54)$$

As equações para uma casca piezelétrica *Mindlin* podem ser derivadas a partir da casca piezelétrica de *Kirchhoff*. Deste modo as equações constitutivas de uma casca piezelétrica de *Mindlin* são representadas como

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ k \\ \gamma \end{Bmatrix} + \sum \begin{bmatrix} I_3 \\ z_{mk} I_3 \\ 0 \end{bmatrix} [R_T]_k^{-1} \begin{Bmatrix} e_{31} \\ e_{32} \\ 0 \end{Bmatrix}_k \phi_k, \quad (3.55)$$

$$D_k = \begin{Bmatrix} e_{31} & e_{32} & 0 \end{Bmatrix} [R_S]_k \begin{bmatrix} I_3 & z_{mk} I_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ k \\ \gamma \end{Bmatrix} - \frac{\varepsilon_k}{h_k} \phi_k, \quad (3.56)$$

onde os vetores de carga agora incluem as cargas normais do plano médio  $N$ , momentos  $M$  e cargas de cisalhamento transversal  $T$ . Similarmente, os vetores de deformação incluem deformações de membranas  $\epsilon_0$ , curvatura  $k$  e deformações de cisalhamento transversal  $\gamma$ . Na

Equação (3.55), as matrizes de rigidez  $A$ ,  $B$  e  $D$  são obtidas pelas relações clássicas para um material multicamada. A matriz de rigidez (cisalhamento transversal) é obtida seguindo um método similar apresentado em [25]. Neste caso as matrizes de interesse são:

$$[M] = \int_{\Omega} \rho [N_u]^T [N_u] d\Omega, \quad (3.57)$$

$$[K_{uu}] = \int_{\Omega} [B_u]^T \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} d\Omega, \quad (3.58)$$

$$[K_{u\phi}] = \int_{\Omega} [B_u]^T \begin{bmatrix} \dots & \varepsilon_k^T & \dots \\ \dots & \varepsilon_k^T z_{mk} & \dots \\ \dots & 0 & \dots \end{bmatrix} d\Omega, \quad (3.59)$$

$$[K_{\phi\phi}] = - \int_V - \Omega \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & \varepsilon_k/h_k & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} [B_{\phi}] dV, \quad (3.60)$$

$$[K_{\phi u}] = [K_{u\phi}]^T. \quad (3.61)$$

Este capítulo mostrou as formulações de um elemento finito para um material piezoeletrico. Dois tipos de elementos foram mostrados, elemento *Mindlin* e elemento *Kirchhoff*. Estas formulações já estão implementadas no aplicativo computacional COMSOL [14] que será utilizado neste trabalho, no entanto as aplicações implementadas neste trabalho usam o elemento *Kirchhoff* devido a que as aplicações feitas neste trabalho são bidimensionais.

# Capítulo 4

## Análise estática de sensores piezelétricos

### 4.1 Introdução

Neste capítulo é modelado o fenômeno de transmissão de forças axiais entre uma estrutura e um sensor piezelétrico considerando a camada adesiva. São mostradas as soluções analíticas estáticas para as deformações e para os deslocamentos da estrutura e do sensor, tensões de cisalhamento na camada adesiva e as relações da voltagem no sensor.

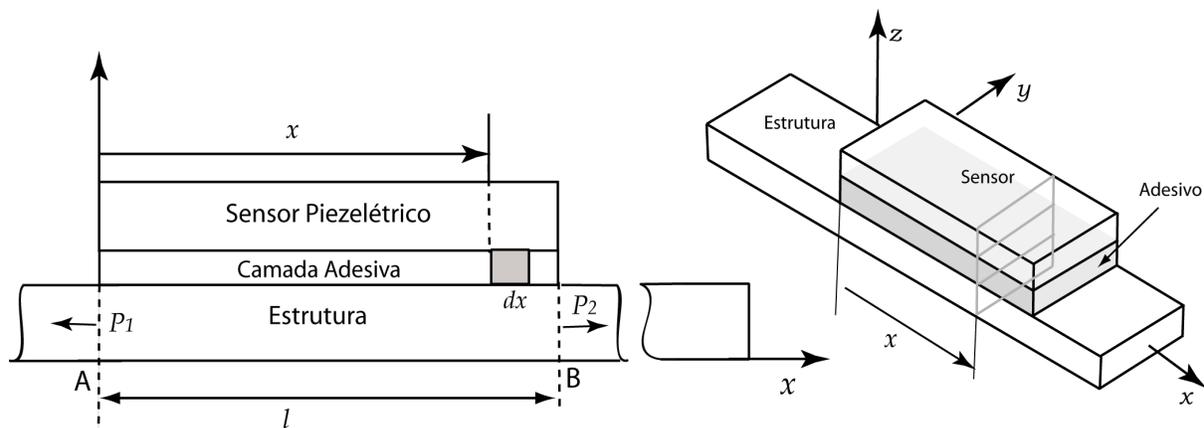


Figura 4.1: Sensor piezelétrico colado numa estrutura por meio de uma camada adesiva

Este estudo mostra que a distribuição da deformação através do sensor é não linear. É proposta a divisão do eletrodo do sensor para comparar os sinais elétricos obtidos através do

sensor. São estabelecidas relações com os sinais elétricos para determinar casos de descolagem aproveitando a característica da não linearidade da deformação.

## 4.2 Deformação axial em sensores piezelétricos

A Figura 4.1 mostra uma estrutura com um sensor piezelétrico colado na superfície por meio de uma camada adesiva do mesmo comprimento do sensor. A estrutura está submetida somente a cargas axiais que atuam fora dos extremos  $A$  e  $B$  da estrutura.  $u_s$  e  $u_p$  são os deslocamentos da estrutura e do sensor piezelétrico, causados pelas forças externas aplicadas, respectivamente. A camada adesiva atua por meio da interface da estrutura e do sensor piezelétrico. Na interface da união é considerada somente tensão de cisalhamento, ou seja, não é considerada a flexão.

O sensor piezelétrico da Figura 4.1 tem comprimento  $l$ ;  $w_s, w_a, w_p$  são as larguras da estrutura, da camada adesiva e do sensor piezelétrico e  $h_s, h_a, h_p$  são as espessuras da estrutura, da camada adesiva e do sensor piezelétrico como se pode ver na Figura 4.2 para o elemento de comprimento  $dx$ . As forças  $P_1$  em  $x = 0$  e  $P_2$  em  $x = l$  são as forças internas da estrutura produzidas por forças externas (ver Figura 4.1).

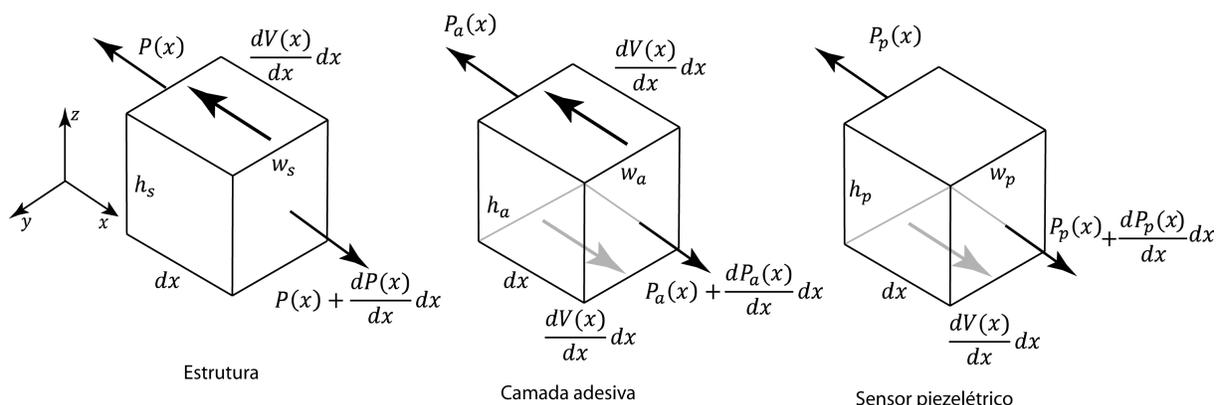


Figura 4.2: Elemento diferencial  $dx$  da estrutura, camada adesiva e sensor piezelétrico

Para simplificar a análise, a estrutura da Figura 4.1 é considerada uma barra. Logo, a tensão normal que atua na seção transversal da barra é dada por

$$\sigma_s(x) = \frac{P(x)}{w_s h_s}, \quad (4.1)$$

onde  $P(x)$  denota a força interna.  $P(x)$  e  $\sigma_s(x)$  serão consideradas positivas em tração e negativas em compressão. O sub-índice  $s$  indica estrutura.

A tensão de cisalhamento  $\tau(x)$  atua na direção  $x$  sobre a superfície de contato entre a estrutura e a camada adesiva. Esta tensão de cisalhamento é também chamada de “*shear lag stress*”. A tensão de cisalhamento na superfície da barra é definida como

$$\tau(x) = \frac{V_s(x)}{A_s(x)}, \quad (4.2)$$

onde  $V_s(x)$  é a força de cisalhamento na direção  $x$  e  $A_s(x)$  é a área na qual a força  $V_s(x)$  atua. Neste estudo é considerado que a tensão de cisalhamento na superfície do sensor piezelétrico e da estrutura têm o mesmo valor, como se mostra na Figura 4.4. Outra consideração importante é que a camada adesiva é aplicada sobre toda a superfície com uma espessura homogênea, portanto é assumido que  $w_a = w_s = w_p$ .

Para determinar as equações de equilíbrio da barra é aplicado o equilíbrio estático para o diagrama de corpo livre da Figura 4.2 obtendo-se

$$-\frac{dV(x)}{dx}dx - P(x) + P(x + dx) = 0, \quad (4.3)$$

Logo, a Equação (4.3) pode ser escrita como

$$-\frac{dV(x)}{dx} + \frac{dP(x)}{dx} = 0, \quad (4.4)$$

substituindo  $\frac{dV(x)}{dx}dx = \tau(x)w_a dx$  e  $P(x) = \sigma_s(x)w_s h_s$  na Equação (4.4) determina-se que

$$-w_a \tau(x) + w_s h_s \frac{d\sigma_s(x)}{dx} = 0, \quad (4.5)$$

ou

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} = \frac{\tau(x)w_a}{w_s h_s}. \quad (4.6)$$

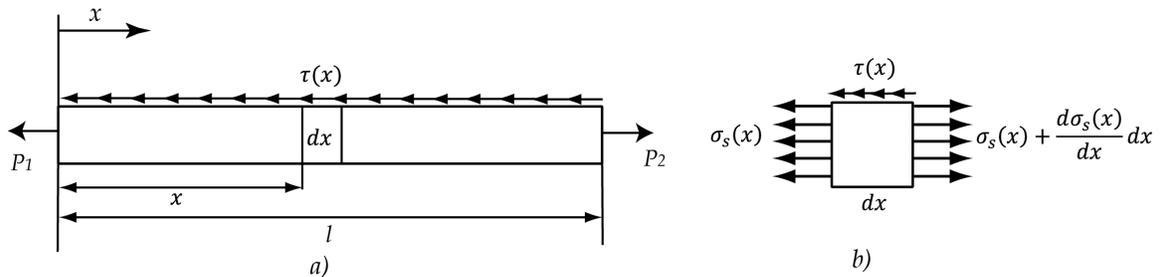


Figura 4.3: a) Diagrama de corpo livre da barra b) Elemento diferencial  $dx$

Se a barra é feita com um material que obedece a lei de Hooke (material linear), é possível assumir que

$$\sigma_s(x) = E_s \epsilon_s(x), \quad (4.7)$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade ao longo do eixo  $x$  do material e  $\epsilon_s(x)$  é a deformação no ponto  $x \in [0, l]$  da barra. Logo, substituindo a Equação (4.7) na Equação (4.6) obtém-se que

$$\frac{d\epsilon_s(x)}{dx} = \frac{\tau(x)}{E_s h_s}. \quad (4.8)$$

Pode-se escrever a lei de Hooke para a tensão de cisalhamento como

$$\tau(x) = G_a \gamma(x), \quad (4.9)$$

onde  $G_a$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento ou módulo de rigidez da camada adesiva e  $\gamma(x)$  é o ângulo da deformação causada pela distorsão da cola no comprimento  $x$ . É importante mencionar que  $\tau(x)$  atua sobre uma superfície. Para a camada adesiva (ver Figura 4.4b) o ângulo de deformação (suposto ser pequeno, ver [15]) pode ser aproximado por

$$\tan(\gamma(x)) \simeq \gamma(x) = \frac{(u_s(x) - u_p(x))}{h_a}. \quad (4.10)$$

Usando as equações (4.9) e (4.10) a tensão de cisalhamento pode ser escrita como

$$\tau(x) = G_a \frac{(u_s(x) - u_p(x))}{h_a}. \quad (4.11)$$

Introduzindo a Equação (4.11) na Equação (4.8), tem-se que

$$\frac{d\epsilon_s(x)}{dx} = \frac{G_a}{h_a E_s h_s} u_s(x) - \frac{G_a}{h_a E_s h_s} u_p(x). \quad (4.12)$$

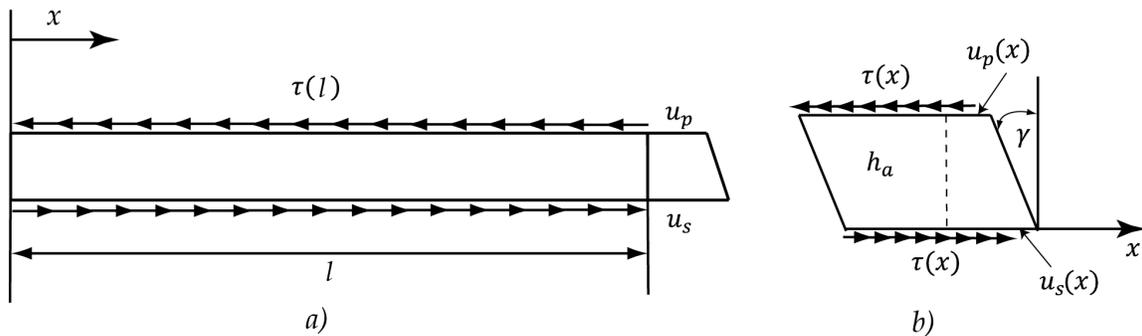


Figura 4.4: a) Tensão de cisalhamento na camada adesiva b) Deformação angular

Sabendo que  $\epsilon_s(x) = \frac{du_s(x)}{dx}$  (definição de deformação), determina-se que

$$\frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} - \frac{G_a}{h_a E_s h_s} u_s(x) = -\frac{G_a}{h_a E_s h_s} u_p(x). \quad (4.13)$$

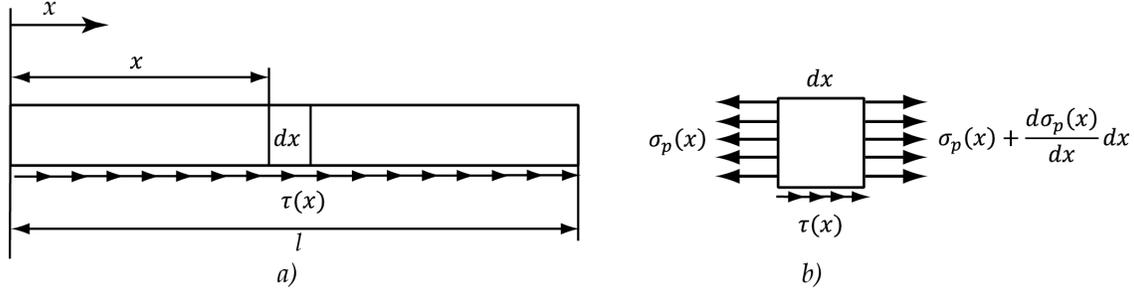


Figura 4.5: a) Sensor piezoelectric b) Elemento diferencial  $dx$  no sensor

Similarmente, a equação de equilíbrio para o sensor piezoelectric da Figura 4.5, é dada por

$$w_a \tau(x) dx + w_p h_p \sigma_p(x) - w_p h_p \sigma_p(x) + w_p h_p \frac{d\sigma_p(x)}{dx} dx = 0, \quad (4.14)$$

e a Equação (4.14) pode ser reescrita como

$$\frac{d\sigma_p(x)}{dx} = -\frac{\tau(x) w_a}{w_p h_p}, \quad (4.15)$$

onde  $\sigma_p(x)$  é a tensão axial na seção transversal de área  $w_p h_p$  do sensor piezoelectric,  $\tau(x)$  é a tensão de cisalhamento que atua sobre a superfície de adesão entre sensor e camada adesiva (levando-se em conta que  $\tau(x)$  é igual para a interface estrutura-adesivo). No caso uniaxial a equação (2.51) torna-se

$$\sigma_p(x) = \epsilon_p(x) E_p + e E_z, \quad (4.16)$$

onde  $E_z$  é o campo elétrico aplicado na direção  $z$  e  $e$  é o módulo piezoelectric do material. No caso do material piezoelectric usado como sensor, não há um campo elétrico aplicado e deste modo  $E_z = 0$ . A Equação (4.16) fica da forma

$$\sigma_p(x) = \epsilon_p(x) E_p. \quad (4.17)$$

Substituindo a Equação (4.17) e a Equação (4.11) na Equação (4.15) obtém-se que

$$\frac{d\epsilon_p(x)}{dx} = -\frac{G_a}{h_a E_p h_p} u_s(x) + \frac{G_a}{h_a E_p h_p} u_p(x), \quad (4.18)$$

e aplicando a definição de deformação no sensor tem-se que

$$\frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} - \frac{G_a}{h_a E_p h_p} u_p(x) = -\frac{G_a}{h_a E_p h_p} u_s(x). \quad (4.19)$$

As seguintes condições de contorno satisfazem as equações (4.13) e (4.19):

$$u_s(0) = u_0, \quad \frac{du_p(0)}{dx} = 0, \quad \frac{du_s(l)}{dx} = \frac{P_2}{E_s w_s h_s}, \quad \frac{du_p(l)}{dx} = 0. \quad (4.20)$$

Para as equações (4.13) e (4.19) definem-se as seguintes constantes  $k_1 = \frac{G_a}{h_a E_s h_s}$  e  $k_2 = \frac{G_a}{h_a E_p h_p}$ .

É necessário derivar duas vezes a Equação (4.19) com respeito a  $x$  para obter da Equação (4.13) uma equação diferencial em função de  $u_p(x)$ , como a seguir

$$-\frac{1}{k_2} \frac{d^4 u_p(x)}{dx^4} + \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} = \frac{d^2 u_s(x)}{dx^2}. \quad (4.21)$$

Substituindo  $\frac{d^2 u_s(x)}{dx^2}$  de (4.13) e  $u_s(x)$  de (4.19) na Equação (4.21) tem-se a seguinte expressão

$$-\frac{1}{k_2} \frac{d^4 u_p(x)}{dx^4} + \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} - k_1 \left( \frac{1}{-k_2} \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} + u_p(x) \right) = -k_1 u_p(x), \quad (4.22)$$

ou

$$-\frac{1}{k_2} \frac{d^4 u_p(x)}{dx^4} + \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} + \frac{k_1}{k_2} \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} - k_1 u_p(x) = -k_1 u_p(x). \quad (4.23)$$

Assim a Equação (4.23) pode ser escrita como

$$\frac{d^4 u_p(x)}{dx^4} - (k_1 + k_2) \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} = 0, \quad (4.24)$$

que é a equação diferencial a ser resolvida.

A equação diferencial (4.24) é uma equação homogênea com coeficientes constantes. A seguinte solução particular  $u_p(x) = ce^{\lambda x}$  satisfaz a Equação (4.24). As respectivas derivadas  $\frac{du_p(x)}{dx} = c\lambda e^{\lambda x}$ ,  $\frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} = c\lambda^2 e^{\lambda x}$ ,  $\frac{d^3 u_p(x)}{dx^3} = c\lambda^3 e^{\lambda x}$ ,  $\frac{d^4 u_p(x)}{dx^4} = c\lambda^4 e^{\lambda x}$  e a solução podem ser substituídas em (4.24) levando à :

$$(\lambda^4 - (k_1 + k_2) \lambda^2) ce^{\lambda x} = 0, \quad (4.25)$$

e como  $e^{\lambda x}$  não pode ser zero (solução trivial), então

$$\lambda^4 - (k_1 + k_2) \lambda^2 = 0, \quad (4.26)$$

e (4.26) pode ser reescrita como

$$(\lambda^2 - (k_1 + k_2))\lambda^2 = 0. \quad (4.27)$$

A partir da Equação (4.27) define-se o primeiro caso como

$$\lambda^2 = 0, \quad (4.28)$$

e tem-se duas raízes reais e iguais tais que

$$\lambda_1^{(1)} = 0, \lambda_1^{(2)} = 0. \quad (4.29)$$

Deste modo a primeira solução homogênea é

$$u_p^{(1)}(x) = c_1 + c_2x, \quad (4.30)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes a determinar.

A partir da Equação (4.27) define-se o segundo caso como

$$\lambda^2 - (k_1 + k_2) = 0, \quad (4.31)$$

obtendo-se duas raízes reais tais que

$$\lambda_2^{(1)} = \sqrt{k_1 + k_2}, \lambda_2^{(2)} = -\lambda_2^{(1)}, \quad (4.32)$$

e desta maneira obtém-se a seguinte solução homogênea

$$u_p^{(2)}(x) = c_3e^{\lambda_2x} + c_4e^{-\lambda_2x}. \quad (4.33)$$

Para os dois casos determina-se a solução homogênea para  $u_p(x)$  como

$$u_p(x) = u_p^{(1)}(x) + u_p^{(2)}(x), \quad (4.34)$$

e de (4.33) e (4.30), obtém-se que

$$u_p(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{\lambda_2x} + c_4e^{-\lambda_2x}. \quad (4.35)$$

Para (4.35) aplica-se a seguinte identidade trigonométrica,  $u_p^{(2)}(x) = \beta_3 \cosh(\lambda_2x) +$

$\beta_4 \sinh(\lambda_2 x)$  e (4.35) fica da forma

$$u_p(x) = c_1 + c_2 x + \beta_3 \cosh(\lambda_2 x) + \beta_4 \sinh(\lambda_2 x), \quad (4.36)$$

onde  $\beta_3$  e  $\beta_4$  são constantes a determinar.

Da equação (4.19) determina-se que

$$u_s(x) = -\frac{1}{k_2} \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} + u_p(x). \quad (4.37)$$

Para a Equação (4.36) tem-se a segunda derivada dada por

$$\frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} = \lambda_2^2 \beta_3 \cosh(\lambda_2 x) + \lambda_2^2 \beta_4 \sinh(\lambda_2 x), \quad (4.38)$$

e substituindo a Equação (4.38) e a Equação (4.36) dentro da Equação (4.37) tem-se que

$$u_s(x) = A (\beta_3 \cosh(\lambda_2 x) + \beta_4 \sinh(\lambda_2 x)) + c_1 + c_2 x, \quad (4.39)$$

onde  $A = \left(1 - \frac{\lambda_2^2}{k_2}\right)$ .

Desta forma é possível determinar a deformação da barra e do sensor aplicando a definição de deformação da seguinte maneira

$$\epsilon_p(x) = \frac{du_p(x)}{dx} = \lambda_2 \beta_3 \sinh(\lambda_2 x) + \lambda_2 \beta_4 \cosh(\lambda_2 x) + c_2, \quad (4.40)$$

e

$$\epsilon_s(x) = \frac{du_s(x)}{dx} = A (\lambda_2 \beta_3 \sinh(\lambda_2 x) + \lambda_2 \beta_4 \cosh(\lambda_2 x)) + c_2. \quad (4.41)$$

A transmissão de forças entre o sensor e a estrutura não é efetuada de forma direta, já que a camada adesiva atua como interface. É possível definir uma relação que determina a porcentagem de deformação entre o sensor e a estrutura, esta relação é chamada de coeficiente de deformação ou parâmetro “*shear lag*” [10] calculado como

$$\xi(x) = \frac{\epsilon_p(x)}{\epsilon_s(x)} = \frac{\lambda_2 \beta_3 \sinh(\lambda_2 x) + \lambda_2 \beta_4 \cosh(\lambda_2 x) + c_2}{A (\lambda_2 \beta_3 \sinh(\lambda_2 x) + \lambda_2 \beta_4 \cosh(\lambda_2 x)) + c_2}. \quad (4.42)$$

### 4.3 Deformação plana no sensor piezométrico

Na Figura 4.6a mostra-se um sensor piezométrico deformado (B) e não deformado (A). Neste caso a deformação plana é considerada no plano  $x - y$  (ver Figura 4.6b) para o sensor, depois de aplicadas as forças através da barra.

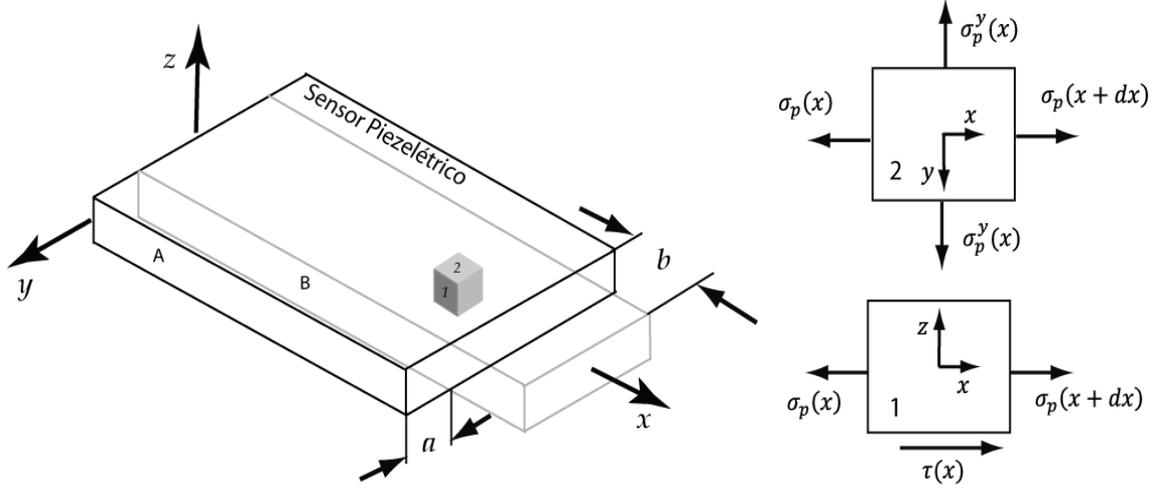


Figura 4.6: a) Sensor piezoelectric b) Elemento diferencial dos planos  $x - y$  (2) e  $x - z$  (1)

Quando a estrutura é submetida à tensão, o sensor é deformado em duas direções, extensão na direção  $x$ , sendo  $b = u_p(x)$  e  $2a$  é a contração na direção  $y$ . No entanto, se a estrutura é submetida a compressão acontece o caso oposto para  $a$  e  $b$ . As equações que relacionam a tensão normal e a deformação nos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  são dadas por

$$\epsilon_p^x(x) = \frac{1}{E_p}(\sigma_p(x) - \nu_p \sigma_p^y(x) - \nu_p \sigma_p^z(x)), \quad (4.43)$$

$$\epsilon_p^y(x) = \frac{1}{E_p}(\sigma_p^y(x) - \nu_p \sigma_p(x) - \nu_p \sigma_p^z(x)), \quad (4.44)$$

$$\epsilon_p^z(x) = \frac{1}{E_p}(\sigma_p^z(x) - \nu_p \sigma_p(x) - \nu_p \sigma_p^y(x)), \quad (4.45)$$

onde  $\nu_p$  é o módulo de Poisson do material piezoelectric,  $\sigma_p^y(x)$  é a tensão normal na direção  $y$ ,  $\sigma_p^z(x)$  é a tensão normal na direção  $z$ ,  $\epsilon_p^x(x)$  é a deformação na direção  $x$ ,  $\epsilon_p^y(x)$  é a deformação na direção  $y$  e  $\epsilon_p^z(x)$  é a deformação na direção  $z$ . É muito importante notar que foi considerado  $\tau_p^{xz}(x) = \tau_p^{xy}(x) = \tau_p^{yz}(x) = 0$ . Também é assumido que  $\sigma_p^z(x) = 0$  (não há flexão na estrutura),  $\epsilon_p^z(x) = 0$  (as dimensões da largura e comprimento são muito maiores quando comparadas com a espessura). Das equações (4.43), (4.44), (4.45) pode-se obter que

$$\sigma_p^y(x) = -\sigma_p(x), \quad (4.46)$$

$$\epsilon_p^x(x) = \frac{(1 + \nu_p)}{E_p} \sigma_p(x), \quad (4.47)$$

$$\epsilon_p^y(x) = -\frac{(1 + \nu_p)}{E_p} \sigma_p(x). \quad (4.48)$$

## 4.4 Sinal elétrico no sensor

A Equação (4.49) representa o acoplamento eletromecânico, onde a tensão mecânica causa um deslocamento elétrico através do sensor. Da Equação (2.53) pode ser determinado o deslocamento elétrico na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$  para o sensor piezelétrico. Sabendo que  $\sigma_x = \sigma_p(x)$ ,  $\sigma_y = \sigma_p^y(x)$ ,  $\sigma_{yz} = 0$  (não há distorsão da camada adesiva no plano  $y - z$ ) tem-se

$$D_z(x) = d_{31}\sigma_p(x) + d_{32}\sigma_p^y(x), \quad (4.49)$$

e

$$D_x(x) = d_{15}\tau(x). \quad (4.50)$$

Por substituição da Equação (4.46) dentro da Equação (4.49) tem-se

$$D_z(x) = \sigma_p(x)(d_{31} - \nu_p d_{32}), \quad (4.51)$$

$$\{\mathbf{D}\} = \begin{bmatrix} D_x(x) & 0 & D_z(x) \end{bmatrix}^T. \quad (4.52)$$

A densidade de carga elétrica é definida como

$$\rho = \text{div}\{\mathbf{D}\} = \frac{\partial D_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial D_z(x)}{\partial z}. \quad (4.53)$$

Como não há flexão no conjunto estrutura-adesivo-sensor, as mudanças do deslocamento elétrico através da espessura do PZT são constantes. Portanto  $\frac{\partial D_z(x)}{\partial z} = 0$ . Assim,

$$\rho = \frac{\partial \tau(x)}{\partial x} = d_{15} \frac{G_a}{h_a} \frac{\partial (u_s(x) - u_p(x))}{\partial x} = d_{15} \frac{G_a}{h_a} (\epsilon_s(x) - \epsilon_p(x)) dx. \quad (4.54)$$

Através da densidade de carga elétrica  $\rho$  (carga elétrica por unidade de volume), a carga elétrica no sensor piezelétrico pode ser determinada como

$$Q = \int_V \rho w_p h_p dx = \frac{d_{15} w_p h_p G_a}{h_a} \int_0^l (\epsilon_s(x) - \epsilon_p(x)) dx. \quad (4.55)$$

Introduzindo (4.40) e (4.41) em (4.55) é determinada a carga elétrica causada pela deformação do sensor. A carga elétrica acumulada no eletrodo  $e_1$  (o eletrodo  $e_2$  está conectado à terra) é da seguinte forma

$$Q = \frac{d_{15} w_p h_p G_a}{h_a} \int_0^l ((A - 1) (\beta_3 \lambda_2 \sinh(\lambda_2 x) + \beta_4 \lambda_2 \cosh(\lambda_2 x))) dx. \quad (4.56)$$

Um sensor piezolétrico pode ser considerado como um capacitor, já que o sensor piezolétrico armazena a carga elétrica por meio do campo elétrico. O potencial elétrico  $V_C$  gerado através dos eletrodos do sensor piezolétrico é determinado por

$$V_C = \frac{Q}{C_{pzt}}, \quad (4.57)$$

onde  $C_{pzt}$  é a constante capacitiva do piezolétrico (ver Equação (2.57)).

Através da Equação (4.56), o potencial elétrico obtido numa placa piezolétrica submetida a uma força axial é obtido como

$$V_C = \frac{d_{15}(A-1)w_p h_p G_a}{C_{pzt} h_a} |(\beta_3 \cosh(\lambda_2 x) + \beta_4 \sinh(\lambda_2 x))|_0^l. \quad (4.58)$$

As soluções determinadas de deformação axial (ver equações (4.40) e (4.41)) e tensão de cisalhamento (ver Equação (4.11)) obtidas analiticamente mostram que através do sensor apresenta-se uma distribuição de tensão e deformação não linear.

## 4.5 Sensor com o eletrodo segmentado

Para diferenciar as cargas elétricas geradas através do sensor, pode-se dividir o eletrodo de forma simétrica com respeito ao eixo a-a, Figura 4.7. A área total do eletrodo será dividida em três partes ( $e_{1L}$ ,  $e_1$ ,  $e_{1R}$ ) com o objetivo de comparar os diferentes sinais emitidos pelo sensor em cada eletrodo.

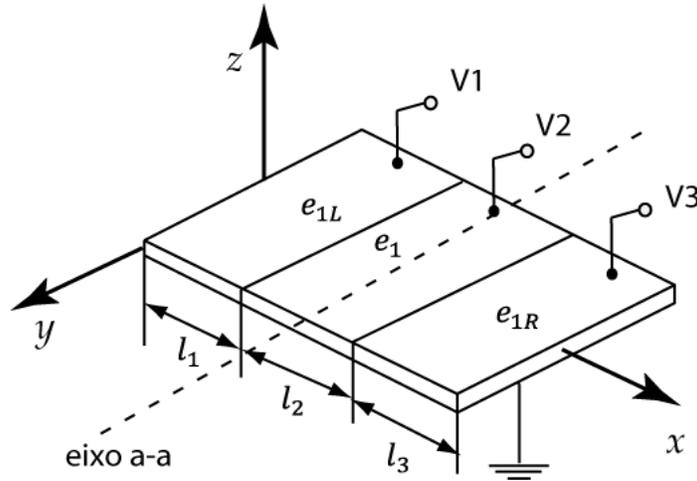


Figura 4.7: Sensor com três eletrodos

De (4.55) pode-se obter a carga elétrica armazenada no sensor. Para cada eletrodo a carga elétrica é obtida da seguinte forma

$$Q_1 = \frac{d_{15}w_ph_pG_a}{h_a} \int_0^{l_1} (\epsilon_s(x) - \epsilon_p(x)) dx, \quad (4.59)$$

$$Q_2 = \frac{d_{15}w_ph_pG_a}{h_a} \int_{l_1}^{l_1+l_2} (\epsilon_s(x) - \epsilon_p(x)) dx, \quad (4.60)$$

$$Q_3 = \frac{d_{15}w_ph_pG_a}{h_a} \int_{l_1+l_2}^l (\epsilon_s(x) - \epsilon_p(x)) dx. \quad (4.61)$$

onde  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  são as cargas elétricas geradas em cada eletrodo para cada capacitor equivalente  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  (ver Figura 4.8).

No entanto nas equações (4.59), (4.60) e (4.61) sabe-se que para a estrutura

$$\int_a^b \epsilon_s(x) dx = \int_a^b du_s(x) = u_s(b) - u_s(a) = U_{sab}, \quad (4.62)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes, e representam os valores de  $x \in (a, b)$  na estrutura e  $U_{sab}$  é o deslocamento total da estrutura no intervalo  $x \in (a, b)$ . Logo para o sensor é determinado que

$$\int_c^d \epsilon_p(x) dx = \int_c^d du_p(x) = u_p(d) - u_p(c) = U_{pcd}, \quad (4.63)$$

onde  $c$  e  $d$  são constantes e representam os valores de  $x \in (c, d)$  no sensor e  $U_{pcd}$  é o deslocamento total do PZT no intervalo  $x \in (c, d)$ .

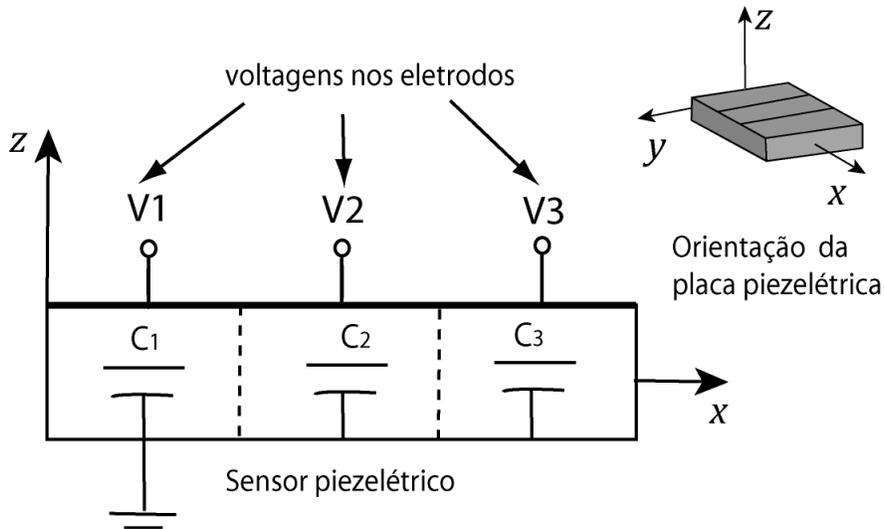


Figura 4.8: Capacitores do sensor piezelétrico segmentado

Determinando as integrais (4.62) e (4.63), têm-se os deslocamentos totais em cada eletrodo. A voltagem em cada eletrodo pode ser determinada usando-se as equações (4.57), (4.62) e (4.63) nas equações (4.59), (4.60) e (4.61), obtendo-se como resultado

$$V1 = \frac{\mu}{C_1} (U_{sl_1} - U_{pl_1}), \quad (4.64)$$

$$V2 = \frac{\mu}{C_2} (U_{sl_1l_2} - U_{pl_1l_2}), \quad (4.65)$$

$$V3 = \frac{\mu}{C_3} (U_{sl_2} - U_{pl_2}), \quad (4.66)$$

onde  $\mu = \frac{d_{15}w_p h_p G_a}{h_a}$ ;  $U_{sl_1} = u_s(0) - u_s(l_1)$  é o deslocamento total da estrutura em  $x \in (0, l_1)$ ;  $U_{pl_1} = u_p(0) - u_p(l_1)$  é o deslocamento total do sensor em  $x \in (0, l_1)$  (eletrodo  $e_{1L}$ );  $U_{sl_1l_2} = u_s(l_2) - u_s(l_1)$  é o deslocamento total da estrutura em  $x \in (l_1, l_2)$ ;  $U_{pl_1l_2} = u_p(l_2) - u_p(l_1)$  é o deslocamento total do sensor em  $x \in (l_1, l_2)$  (eletrodo  $e_1$ );  $U_{sl_2} = u_s(l_3) - u_s(l_2)$  é o deslocamento total da estrutura em  $x \in (l_2, l_3)$ ; e  $U_{pl_2} = u_p(l_3) - u_p(l_2)$  é o deslocamento total do sensor em  $x \in (l_2, l_3)$  (eletrodo  $e_{1R}$ ).

As voltagens obtidas podem ser relacionadas com o objetivo de detectar descolagem nos extremos do sensor. Como  $\mu$  é constante, as equações (4.64) e (4.65) são relacionadas da seguinte forma

$$V2 = \frac{C_1 (U_{sl_1l_2} - U_{pl_1l_2})}{C_2 (U_{sl_1} - U_{pl_1})} V1, \quad (4.67)$$

e da mesma forma relacionando as equações (4.65) e (4.66), tem-se que

$$V2 = \frac{C_3 (U_{sl_1l_2} - U_{pl_1l_2})}{C_1 (U_{sl_2} - U_{pl_2})} V3. \quad (4.68)$$

As equações (4.67) e (4.68) mostram que as relações da voltagem entre os eletrodos dos extremos ( $e_{1L}$  e  $e_{1R}$ , ver Figura 4.7) com o eletrodo do centro são lineares. É importante mencionar que quando o eletrodo do sensor é segmentado em três partes iguais, as capacitâncias de cada eletrodo são iguais ( $C_1 = C_2 = C_3$ ). Logo, (4.67) e (4.68) ficam da forma

$$V1 = \frac{(U_{sl_1} - U_{pl_1})}{(U_{sl_1l_2} - U_{pl_1l_2})} V2, \quad (4.69)$$

e

$$V3 = \frac{(U_{sl_2} - U_{pl_2})}{(U_{sl_1l_2} - U_{pl_1l_2})} V2. \quad (4.70)$$

Os deslocamentos totais ( $U_{sl_1}$ ,  $U_{pl_1}$ ,  $U_{sl_1l_2}$ ,  $U_{pl_1l_2}$ ,  $U_{sl_2}$ ,  $U_{pl_2}$ ) em cada seção do sensor são gerados por uma força total  $F_i$ ,  $\forall i = 1, 2, 3$ , aplicada através de cada eletrodo. [47] mostrou que o conjunto estrutura-camada adesiva-sensor pode ser representado como um sistema massa-mola-amortecedor. Portanto as três seções do eletrodo do sensor são representadas como um sistema de molas em série (comportamento linear  $F = Ku$ ), como é mostrado na Figura 4.9.

A Figura 4.9 mostra a representação de um sistema de molas em série estabelecida no eletrodo  $e_{1R}$ . Na Figura 4.9,  $K_{s1}$  representa a rigidez da estrutura no intervalo do eletrodo  $e_{1R}$ ,  $K_{p1}$  representa a rigidez do sensor para o eletrodo  $e_{1L}$  e  $F_1$  é a força que atua através do eletrodo.

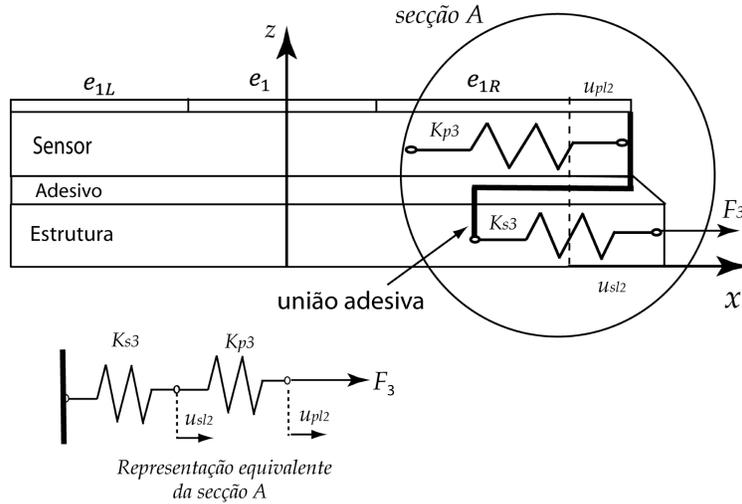


Figura 4.9: Representação equivalente de molas em série para cada eletrodo do sensor

Desta forma são estabelecidas as equações deste sistema, tais que

$$\frac{F_1}{K_{s1}} = U_{sl_1}, \quad (4.71)$$

$$\frac{F_1}{K_{p1}} = U_{pl_1}, \quad (4.72)$$

e da mesma forma para as outras seções

$$\frac{F_2}{K_{s2}} = U_{sl_1l_2}, \quad (4.73)$$

$$\frac{F_2}{K_{p2}} = U_{pl_1l_2}, \quad (4.74)$$

$$\frac{F_3}{K_{s3}} = U_{sl_2}, \quad (4.75)$$

$$\frac{F_3}{K_{p3}} = U_{pl_2}. \quad (4.76)$$

Cada eletrodo tem dimensões iguais neste trabalho e desta forma  $K_{p1} = K_{p2} = K_{p3} = K_p$  e  $K_{s1} = K_{s2} = K_{s3} = K_s$ . As equações (4.71), (4.72), (4.73), (4.74), (4.75) e (4.76) são substituídas nas equações (4.69) e (4.70) de forma que

$$V1 = \frac{\left(\frac{F_1}{K_{s1}} - \frac{F_1}{K_{p1}}\right)}{\left(\frac{F_2}{K_{s2}} - \frac{F_2}{K_{p2}}\right)} V2, \quad (4.77)$$

e

$$V3 = \frac{\left(\frac{F_3}{K_{s3}} - \frac{F_1}{K_{p3}}\right)}{\left(\frac{F_2}{K_{s2}} - \frac{F_2}{K_{p2}}\right)} V2. \quad (4.78)$$

As equações (4.77) e (4.78) são reescritas como

$$V1 = \frac{F_1}{F_2} V2, \quad (4.79)$$

e

$$V3 = \frac{F_3}{F_2} V2. \quad (4.80)$$

As inclinações das relações da voltagem entre  $V1/V2$  (Equação (4.79)) e  $V3/V2$  (Equação (4.80)) representam as relações de força entre os eletrodos  $e_{1L}$  e  $e_{1R}$  com o eletrodo central  $e_1$ .

Neste capítulo foram estabelecidas as equações diferenciais que descrevem o comportamento mecânico do conjunto estrutura-adesivo-sensor. Os sinais elétricos emitidos pelo sensor são obtidos com a primeira equação de Maxwell (Lei de Gauss para a electricidade). Também foi apresentado um modelo de um sensor com três eletrodos (eletrodo segmentado) que demonstra que as relações da voltagem entre os eletrodos têm como inclinação as relações de força entre os mesmos eletrodos.

# Capítulo 5

## Análise dinâmica de sensores piezelétricos

### 5.1 Introdução

Neste capítulo são estabelecidas as equações dinâmicas analíticas do sistema acoplado estrutura-adesivo-sensor. As soluções analíticas são definidas para determinar as frequências naturais e o comportamento dinâmico do sistema.

### 5.2 Equações de movimento axial

A Figura 5.1 mostra uma estrutura com um sensor piezelétrico colado na superfície por meio de uma camada adesiva do mesmo comprimento. Neste caso a estrutura estará submetida a forças internas axiais  $P(x, t)$  e forças de cisalhamento  $V(x, t)$ .  $u_s(x, t)$  e  $u_p(x, t)$  são os deslocamentos da estrutura e do sensor piezelétrico causados pelas forças no tempo, respectivamente. A camada adesiva somente terá tensão de cisalhamento, ou seja, não será considerada a flexão no conjunto estrutura-adesivo-PZT. As demais condições do problema foram especificadas no item 4.2 do Capítulo 4.

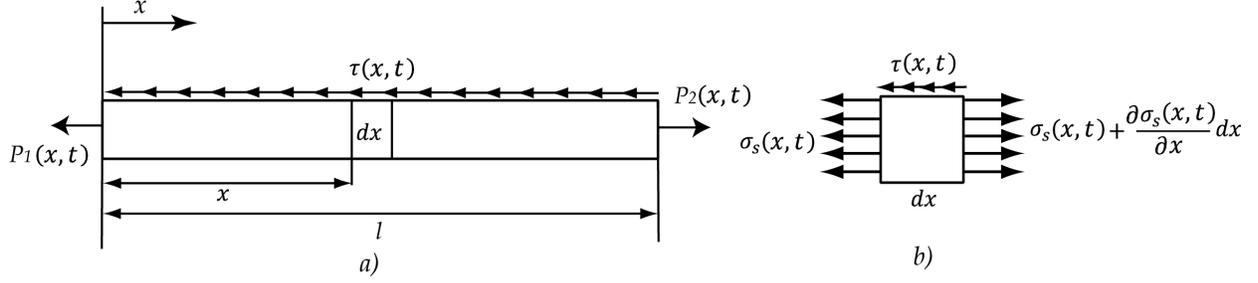


Figura 5.1: a) Diagrama de corpo livre da barra b) Elemento diferencial  $dx$

Para determinar as equações de movimento da barra é aplicada a segunda lei de Newton para o elemento de volume da Figura 5.1b obtendo que

$$-dV(x, t) - P(x, t) + P(x + dx, t) = \rho_s \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} w_s h_s dx, \quad (5.1)$$

onde  $V(x, t)$  é a força de cisalhamento e  $\rho_s$  é a densidade.

Reorganizando (5.1), tem-se que

$$-dV(x, t) - P(x, t) + P(x, t) + \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} dx = (\rho_s w_s h_s) \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad (5.2)$$

e substituindo  $dV(x, t) = \tau(x, t) w_a dx$ ,  $P(x, t) = \sigma_s(x, t) w_s h_s$  em (5.2), obtém-se que

$$-w_a \tau(x, t) dx + w_s h_s \frac{\partial \sigma_s(x, t)}{\partial x} dx = \rho_s w_s h_s \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad (5.3)$$

ou

$$\rho_s w_s h_s \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} - w_s h_s \frac{\partial \sigma_s(x, t)}{\partial x} + w_a \tau(x, t) dx = 0. \quad (5.4)$$

Se a barra é feita com um material que obedece a lei de Hooke, é possível assumir que

$$\sigma_s(x, t) = E_s \epsilon_s(x, t) \quad (5.5)$$

onde  $E_s$  é o módulo de elasticidade do material e  $\epsilon_s(x, t)$  é a deformação no ponto  $x \in [0, l]$  da barra. Logo, substituindo a Equação (5.5) dentro da Equação (5.4), verifica-se que

$$\rho_s w_s h_s \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} - E_s w_s h_s \frac{\partial \epsilon_s(x, t)}{\partial x} + w_a \tau(x, t) = 0. \quad (5.6)$$

A tensão de cisalhamento é definida como

$$\tau(x, t) = G_a \gamma(x, t), \quad (5.7)$$

onde  $G_a$  é o módulo de elasticidade ao cisalhamento da camada adesiva e  $\gamma(x)$  é o ângulo de deformação causado pela distorsão da camada adesiva (ver Figura 5.2b), e é aproximado por

$$\gamma(x, t) = \frac{u_s(x, t) - u_p(x, t)}{h_a}, \quad (5.8)$$

onde  $h_a$  é a espessura da camada adesiva. Logo, à partir das equações (5.8) e (5.7), a tensão de cisalhamento pode ser escrita como

$$\tau(x, t) = G_a \left( \frac{u_s(x, t) - u_p(x, t)}{h_a} \right). \quad (5.9)$$

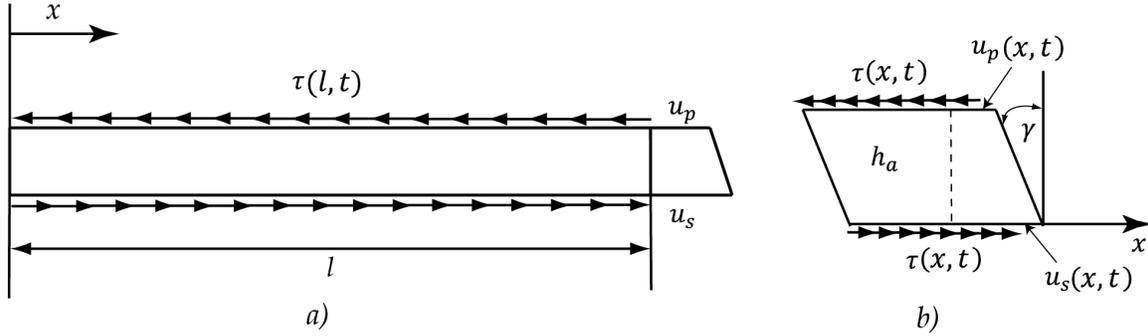


Figura 5.2: a) Tensão de cisalhamento na camada adesiva b) Deformação angular

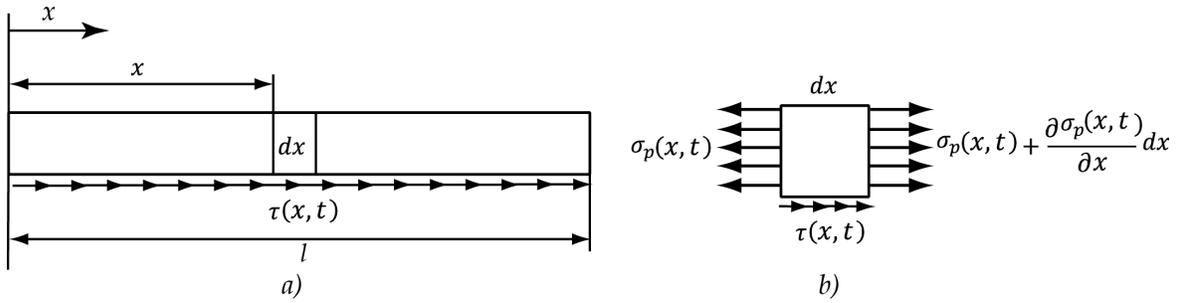


Figura 5.3: a) Sensor piezoelectric b) Elemento diferencial do sensor  $dx$

Introduzindo a Equação (5.9) dentro da Equação (5.6), tem-se que

$$\rho_s w_s h_s \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} - E_s w_s h_s \frac{\partial \epsilon_s(x, t)}{\partial x} + \frac{G_a w_a}{h_a} (u_s(x, t)) - \frac{G_a w_a}{h_a} (u_p(x, t)) = 0, \quad (5.10)$$

e pela definição da deformação  $\left( \epsilon_s(x, t) = \frac{\partial u_s(x, t)}{\partial x} \right)$ , tem-se que

$$\frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} - c_s \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial x^2} + k_s (u_s(x, t) - u_p(x, t)) = 0, \quad (5.11)$$

onde  $c_s = \frac{E_s}{\rho_s}$  e  $k_s = \frac{G_a}{\rho_s h_s h_a}$ .

Similarmente, mostra-se a equação de equilíbrio para o sensor piezolétrico da Figura 5.3, obtendo-se a seguinte expressão:

$$(w_a)\tau(x, t)dx + (w_p h_p)\sigma_p(x, t) - (w_p h_p)\sigma_p(x, t) + (w_p h_p)\frac{\partial \sigma_p(x, t)}{\partial x} dx = (\rho_p w_p h_p)\frac{\partial^2 u_p(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad (5.12)$$

que pode ser reescrita como

$$\rho_p w_p h_p \frac{\partial^2 u_p(x, t)}{\partial t^2} - w_p h_p \frac{\partial \sigma_p(x, t)}{\partial x} - \tau(x)w_a = 0, \quad (5.13)$$

onde  $\sigma_p(x, t)$  é a tensão axial na seção transversal de área  $w_p h_p$  do sensor piezolétrico,  $\tau(x, t)$  é a tensão de cisalhamento sobre a superfície do sensor de área  $xw_p$ .

A equação constitutiva para um transdutor piezolétrico é definida como

$$\sigma_p(x, t) = \epsilon_p(x, t)E_p + eE_z(t), \quad (5.14)$$

onde  $E_z(t)$  é o campo elétrico aplicado na direção  $z$  e  $e$  é o módulo piezolétrico do material. Como o material piezolétrico será usado como sensor o campo elétrico aplicado no material é zero, deste modo  $E_z(t) = 0$ . Então a Equação (5.14) fica na forma

$$\sigma_p(x, t) = \epsilon_p(x, t)E_p. \quad (5.15)$$

Substituindo a Equação (5.15) e a Equação (5.9) dentro da Equação (5.13) obtém-se que

$$\rho_p w_p h_p \frac{\partial^2 u_p(x, t)}{\partial t^2} - E_p w_p h_p \frac{\partial \epsilon_p(x, t)}{\partial x^2} - \frac{G_a w_a}{h_a} u_s(x, t) + \frac{G_a w_a}{h_a} (u_p(x, t)) = 0, \quad (5.16)$$

e aplicando a definição de deformação para (5.16) tem-se que

$$\frac{\partial^2 u_p(x, t)}{\partial t^2} - c_p \frac{\partial^2 u_p(x, t)}{\partial x^2} - k_p (u_s(x, t) + u_p(x, t)) = 0, \quad (5.17)$$

onde  $c_p = \frac{E_p}{\rho_p}$  e  $k_p = \frac{G_a}{\rho_p h_p h_a}$ .

As equações (5.11) e (5.17) podem ser acopladas da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \{Q(x, t)\}}{\partial t^2} - [\mathbf{C}] \frac{\partial^2 \{Q(x, t)\}}{\partial x^2} + [\mathbf{K}] \{Q(x, t)\} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \quad (5.19)$$

$$\text{onde } \{Q(x, t)\} = \begin{pmatrix} u_s(x, t) \\ u_p(x, t) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \{Q(x, t)\}}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 u_p(x, t)}{\partial t^2} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 \{Q(x, t)\}}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_s(x, t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_p(x, t)}{\partial x^2} \end{pmatrix},$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{pmatrix} c_s & 0 \\ 0 & c_p \end{pmatrix}, [\mathbf{K}] = \begin{pmatrix} k_s & -k_s \\ -k_p & k_p \end{pmatrix}.$$

A Equação (5.19) representa o comportamento dinâmico acoplado dos deslocamentos da estrutura e do sensor piezeletrico.

### 5.3 Freqüências naturais

A Equação (5.19) é classificada como uma equação hiperbólica acoplada com coeficientes constantes [46]. O método de separação de variáveis combinado com o princípio de superposição é amplamente usado para resolver problemas de contorno e valor inicial que envolvem equações diferenciais parciais lineares e hiperbólicas. Para (5.19) é estabelecida a solução como

$$[Q(x, t)] = [X(x)] [Y(t)]. \quad (5.20)$$

$$\text{donde } [Q(x, t)] = \begin{pmatrix} u_s(x, t) & 0 \\ 0 & u_p(x, t) \end{pmatrix}, [X(x)] = \begin{pmatrix} u_s(x) & 0 \\ 0 & u_p(x) \end{pmatrix} \text{ e } [Y(t)] = \begin{pmatrix} y(t) & 0 \\ 0 & y(t) \end{pmatrix}.$$

Substituindo a Equação (5.20) dentro da Equação (5.19) obtém-se que

$$[X(x)] \frac{\partial^2 [Y(t)]}{\partial t^2} - [\mathbf{C}] \frac{\partial^2 [X(x)]}{\partial x^2} [Y(t)] + [\mathbf{K}] [X(x)] [Y(t)] = 0, \quad (5.21)$$

e multiplicando (5.21) ao lado esquerdo por  $[X(x)]^{-1}$ , determina-se que

$$\frac{\partial^2 [Y(t)]}{\partial t^2} - [X(x)]^{-1} [\mathbf{C}] \frac{\partial^2 [X(x)]}{\partial x^2} [Y(t)] + [\mathbf{K}] [Y(t)] = 0, \quad (5.22)$$

multiplicando (5.22) ao lado direito por  $[Y(t)]^{-1}$ , determina-se que

$$\frac{\partial^2 [Y(t)]}{\partial t^2} [Y(t)]^{-1} - [X(x)]^{-1} [\mathbf{C}] \frac{\partial^2 [X(x)]}{\partial x^2} + [\mathbf{K}] = 0, \quad (5.23)$$

$$[\mathbf{C}]^{-1} \frac{\partial^2 [Y(t)]}{\partial t^2} [Y(t)]^{-1} + [\mathbf{C}]^{-1} [\mathbf{K}] = [X(x)]^{-1} \frac{\partial^2 [X(x)]}{\partial x^2}, \quad (5.24)$$

O lado esquerdo da Equação (5.24) é uma função somente de  $x$ , e o lado direito da Equação (5.24) depende somente de  $t$ . Logo, deriva-se (5.24) com respeito a  $x$ , e obtém-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( [X(x)]^{-1} \frac{\partial^2 [X(x)]}{\partial x^2} \right) = 0, \quad (5.25)$$

e integrando (5.25) determina-se que

$$[I]\boldsymbol{\lambda} = [X(x)]^{-1} \frac{\partial^2 [X(x)]}{\partial x^2}, \quad (5.26)$$

com  $[\boldsymbol{\lambda}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$   $\lambda$  constante. Logo, reorganizando (5.26), tem-se que

$$\frac{\partial^2 [X(x)]}{\partial x^2} - \boldsymbol{\lambda} [X(x)] = 0, \quad (5.27)$$

Logo, multiplicamos (5.27) no lado direito por  $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \right\}^T$  tal que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u_s(x)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_p(x)}{\partial x^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s(x) \\ u_p(x) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.28)$$

Derivando (5.24) obtém-se a equação diferencial na varivavel  $[Y(t)]$  depois multiplicando por  $\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \right\}^T$ , tem-se que

$$\frac{\partial^2 \{Y(t)\}}{\partial t^2} - ([\mathbf{C}][\boldsymbol{\lambda}] - [\mathbf{K}]) \{Y(t)\} = 0. \quad (5.29)$$

Para este caso as seguintes condições de contorno são estabelecidas

$$[Q(0, t)] = [X(0)] [Y(t)] = 0 \quad \text{e} \quad [Q(l, t)] = [X(l)] [Y(t)] = 0, \quad (5.30)$$

e sabendo que  $[Y(t)] \neq 0$  para todos os valores de  $t$ , então tem-se que

$$[X(0)] = 0, \quad [X(l)] = 0. \quad (5.31)$$

Para determinar a solução de  $X(x)$  é necessário resolver o problema de autovalores com as condições de contorno (5.31). É importante notar aqui que as soluções de  $[\boldsymbol{\lambda}]$  devem ser soluções não triviais para os seguintes casos  $\boldsymbol{\lambda}_j > 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_j = 0$ ,  $\boldsymbol{\lambda}_j < 0$ . O subíndice  $j$  indica o elemento  $jj$  da diagonal principal de uma matriz diagonal. Ou seja:

a)  $[\boldsymbol{\lambda}] > 0$ , a solução geral neste caso é da forma

$$X(x)_j = a_1 e^{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_j} x} + a_2 e^{-\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_j} x}, \quad \text{para } j = 1, 2, \quad (5.32)$$

onde  $X(x)_j$  indica o elemento  $j$  da diagonal principal,  $a_{1j}$  e  $a_{2j}$  são constantes arbitrárias. Para satisfazer as condições de contorno deve-se ter que

$$a_{1j} + a_{2j} = 0, \quad a_{1j} e^{\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_j} x} + a_{2j} e^{-\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_j} x} = 0. \quad (5.33)$$

Pode-se ver que para o sistema de equações (5.33), o determinante deve ser diferente de zero. Conseqüentemente,  $a_{1j}$  e  $a_{2j}$  devem ser nulos. Portanto, a solução geral de  $[X(x)]$  é identicamente zero. Logo, a solução é trivial.

b)  $[\lambda] = 0$ , a solução geral é

$$X(x)_j = a_{1j} + a_{2j}x, \text{ para } j = 1, 2, \quad (5.34)$$

e aplicando as condições de contorno da Equação (5.31) tem-se que

$$a_{1j} = 0, \quad a_{2j} = 0, \quad (5.35)$$

e a solução geral de  $[X(x)]$  é identicamente zero, portanto a solução é trivial.

c)  $[\lambda] < 0$ , neste caso a solução geral assume a forma tal que

$$X(x)_j = a_{1j} \cos(\sqrt{-\lambda_j}x) + a_{2j} \sin(\sqrt{-\lambda_j}x), \text{ para } j = 1, 2. \quad (5.36)$$

De  $[X(0)] = 0$ , obtém-se  $a_1 = 0$ , e da condição  $X(l) = 0$  determina-se que

$$0 = a_2 \sin(\sqrt{-\lambda_j}l), \quad (5.37)$$

e como  $a_2 = 0$ , a solução é trivial. Portanto, para soluções não triviais  $a_2 \neq 0$ . Logo

$$0 = \sin(\sqrt{-\lambda_j}l), \quad (5.38)$$

e a Equação (5.38) é satisfeita quando

$$n\pi = \sqrt{-\lambda_j}l, \quad (5.39)$$

ou

$$- \begin{pmatrix} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \end{pmatrix} = \lambda. \quad (5.40)$$

Com o valor de  $[\lambda]$  e  $[Y(t)] = [I] e^{i\omega t}$ , pode-se obter os autovalores substituindo  $[\lambda]$  e  $[Y(t)]$  na Equação (5.29), obtendo como resultado

$$[\omega^2] = ([\mathbf{C}] [\lambda] - [\mathbf{K}]). \quad (5.41)$$

Para um conjunto de valores discretos de  $[\lambda]$  o problema tem soluções não triviais. Esses valores de  $[\lambda]$  são chamados autovalores e as correspondentes funções associadas a cada autovalor são chamadas autofunções.

## 5.4 Solução dinâmica

O sistema estrutura-adesivo-sensor apresenta uma solução periódica quando o sistema é submetido a excitações harmônicas. É possível assumir na Equação (5.20) que  $Y(t) = e^{i\omega t}$  onde  $i = \sqrt{-1}$ , e então  $\{Q(x, t)\} = \{X(x)\} e^{i\omega t}$ . Logo para a equação diferencial (5.19) determina-se que

$$-\omega^2 \{X(x)\} e^{i\omega t} - [\mathbf{C}] \frac{d^2 \{X(x)\}}{dx^2} e^{i\omega t} + [\mathbf{K}] \{X(x)\} e^{i\omega t} = 0, \quad (5.42)$$

e

$$\left( -[\mathbf{C}] \frac{d^2 \{X(x)\}}{dx^2} + ([\mathbf{K}] - \omega^2 [I]) \{X(x)\} \right) e^{i\omega t} = 0. \quad (5.43)$$

Para  $t > 0$ ,  $e^{i\omega t} \neq 0$ , e portanto

$$\frac{d^2 \{X(x)\}}{dx^2} - [\mathbf{C}^{-1}] ([\mathbf{K}] - \omega^2 [I]) \{X(x)\} = 0, \quad (5.44)$$

ou

$$\begin{pmatrix} \frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} \\ \frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{c_s} (k_s - \omega^2) & -\frac{k_s}{c_s} \\ -\frac{k_p}{c_p} & \frac{1}{c_p} (k_p - \omega^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_s(x) \\ u_p(x) \end{pmatrix} = 0. \quad (5.45)$$

separando as equações de (5.45) obtém-se que

$$\frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} - \frac{1}{c_s} (k_s - \omega^2) u_s(x) + \frac{k_s}{c_s} u_p(x) = 0, \quad (5.46)$$

e

$$\frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} - \frac{1}{c_p} (k_p - \omega^2) u_p(x) + \frac{k_p}{c_p} u_s(x) = 0. \quad (5.47)$$

Para obter uma equação diferencial em  $u_s(x)$  aplica-se para (5.46) a segunda derivada com respeito a  $x$  e determina-se que

$$\frac{d^2 u_p(x)}{dx^2} = -\frac{c_s}{k_s} \frac{d^4 u_s(x)}{dx^4} + \frac{1}{k_s} (k_s - \omega^2) \frac{d^2 u_s(x)}{dx^2}. \quad (5.48)$$

Introduzindo em (5.47) as Equações (5.48) e (5.46), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u_s(x)}{dx^4} - \frac{1}{c_s} (k_s - \omega^2) \frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} - \frac{1}{c_p} (k_p - \omega^2) \frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} \\ + \frac{1}{c_s c_p} (k_p - \omega^2) (k_s - \omega^2) u_s(x) - \frac{k_s k_p}{c_s c_p} u_s(x) = 0, \end{aligned} \quad (5.49)$$

Para simplificar (5.49), define-se  $c_1 = -\left(\frac{1}{c_s}(k_s - \omega^2) + \frac{1}{c_p}(k_p - \omega^2)\right)$ ,  $c_2 = \frac{1}{c_s c_p}(k_p - \omega^2)(k_s - \omega^2) - \frac{k_s k_p}{c_s c_p}$ , e então (5.49) fica da forma

$$\frac{d^4 u_s(x)}{dx^4} + c_1 \frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} + c_2 u_s(x) = 0, \quad (5.50)$$

e da Equação (5.46) pode-se obter

$$u_p(x) = -\frac{c_s}{k_s} \frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} + \frac{1}{k_s} (k_s - \omega^2) u_s(x). \quad (5.51)$$

A equação diferencial (5.50) é uma equação homogênea com coeficientes constantes. Desta forma a solução particular  $u_s(x) = ce^{\lambda x}$  satisfaz a Equação (5.50). Substituindo as derivadas  $\frac{du_s(x)}{dx} = a\lambda e^{\lambda x}$ ,  $\frac{d^2 u_s(x)}{dx^2} = a\lambda^2 e^{\lambda x}$ ,  $\frac{d^3 u_s(x)}{dx^3} = a\lambda^3 e^{\lambda x}$ ,  $\frac{d^4 u_s(x)}{dx^4} = a\lambda^4 e^{\lambda x}$  e a solução em (5.50), tem-se que

$$(\lambda^4 + c_1 \lambda^2 + c_2) c e^{\lambda x} = 0. \quad (5.52)$$

Como  $e^{\lambda x}$  não pode ser zero (solução trivial), tem-se

$$\lambda^4 + c_1 \lambda^2 + c_2 = 0, \quad (5.53)$$

e trocando a variável  $m = \lambda^2$ , a Equação (5.53) pode ser reescrita como

$$m^2 + c_1 m + c_2 = 0. \quad (5.54)$$

A Equação (5.54) tem duas raízes tais que

$$m = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}. \quad (5.55)$$

A partir da Equação (5.55) define-se o primeiro caso como

$$\lambda^2 = \frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}, \quad (5.56)$$

se a Equação (5.56) tem duas raízes reais tais que

$$\lambda_1^{(1)} = \sqrt{\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}}, \quad \lambda_1^{(2)} = -\sqrt{\frac{-c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}}. \quad (5.57)$$

Desta maneira obtém-se a seguinte solução particular

$$u_s^{(1)}(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{-\lambda_1 x}. \quad (5.58)$$

A partir da Equação (5.55) define-se o segundo caso como

$$\lambda^2 = \frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}. \quad (5.59)$$

obtendo-se duas raízes imaginárias tais que

$$\lambda_2^{(1)} = \sqrt{\frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}}, \quad \lambda_2^{(2)} = -\sqrt{\frac{-c_1 - \sqrt{c_1^2 - 4c_2}}{2}}. \quad (5.60)$$

Desta maneira obtém-se a seguinte solução particular

$$u_s^{(2)}(x) = \alpha_3 e^{\lambda_2^{(1)} x} + \alpha_4 e^{-\lambda_2^{(2)} x}. \quad (5.61)$$

Para os dois casos determina-se a solução geral para os deslocamentos da estrutura  $u_s(x)$  como

$$u_s(x) = u_s^{(1)}(x) + u_s^{(2)}(x), \quad (5.62)$$

e substituindo as soluções de (5.58) e (5.61) em (5.62) tem-se que

$$u_s(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{-\lambda_1 x} + \alpha_3 e^{\lambda_2^{(1)} x} + \alpha_4 e^{-\lambda_2^{(2)} x}. \quad (5.63)$$

Usando as seguintes identidades trigonométricas

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{-\lambda_1 x} = \alpha_1 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \sinh(\lambda_1 x), \quad (5.64)$$

e

$$\alpha_3 e^{\lambda_2^{(1)} x} + \alpha_4 e^{-\lambda_2^{(2)} x} = \alpha_3 \cos(\lambda_2 x) + \alpha_4 \sin(\lambda_2 x), \quad (5.65)$$

(5.63) pode ser reescrita como

$$u_s(x) = \alpha_1 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \sinh(\lambda_1 x) + \alpha_3 \cos(\lambda_2 x) + \alpha_4 \sin(\lambda_2 x), \quad (5.66)$$

e a solução de  $u_p(x)$  pode ser determinada por meio da Equação (5.51), ou seja,

$$u_p(x) = \beta_1 (\alpha_1 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \sinh(\lambda_1 x)) + \beta_2 (\alpha_3 \cos(\lambda_2 x) + \alpha_4 \sin(\lambda_2 x)), \quad (5.67)$$

onde  $\beta_1 = \left(-\frac{c_s}{k_s} \lambda_1^2 + \frac{1}{k_s} (k_s - \omega^2)\right)$  e  $\beta_2 = \left(\frac{c_s}{k_s} \lambda_2^2 - \frac{1}{k_s} (k_s - \omega^2)\right)$ .

Para determinar as constantes é necessário aplicar as condições de contorno, a referência  $x$  é mudada para  $x_1 = x - l/2$ , e portanto as condições de contorno em  $x_1$  são:  $u_s(-l/2) =$

$u_0, \frac{du_p(-l/2)}{dx} = 0, \frac{du_s(l/2)}{dx} = \frac{P_2}{E_s w_s h_s}$  (força aplicada pela direita),  $\frac{du_p(l/2)}{dx} = 0$ . Desta forma é obtido o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \cosh(-\lambda_1 l/2) & \sinh(-\lambda_1 l/2) & \cos(-\lambda_2 l/2) & \sin(-\lambda_2 l/2) \\ \beta_1 \lambda_1 \sinh(-\lambda_1 l/2) & \lambda_1 \beta_1 \cosh(-\lambda_1 l/2) & -\lambda_2 \beta_2 \sin(-\lambda_2 l/2) & \lambda_2 \beta_2 \cos(-\lambda_2 l/2) \\ \lambda_1 \sinh(\lambda_1 l/2) & \lambda_1 \cosh(\lambda_1 l/2) & -\lambda_2 \sin(\lambda_2 l/2) & \lambda_2 \cos(\lambda_2 l/2) \\ \beta \lambda_1 \sinh(\lambda_1 l/2) & \lambda_1 \beta_1 \cosh(\lambda_1 l/2) & -\lambda_2 \beta_2 \sin(\lambda_2 l/2) & \lambda_2 \beta_2 \cos(\lambda_2 l/2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ 0 \\ \frac{P_2}{E_s w_s h_s} \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.68)$$

A solução dinâmica geral para o deslocamento de cada ponto  $x$  na estrutura é

$$u_s(x, t) = (\alpha_1 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \sinh(\lambda_1 x) + \alpha_3 \cos(\lambda_2 x) + \alpha_4 \sin(\lambda_2 x)) e^{i\omega t}, \quad (5.69)$$

e para o sensor piezelétrico é

$$u_p(x, t) = (\beta_1 (\alpha_1 \cosh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \sinh(\lambda_1 x)) + \beta_2 (\alpha_3 \cos(\lambda_2 x) + \alpha_4 \sin(\lambda_2 x))) e^{i\omega t}. \quad (5.70)$$

Usando a definição de deformação obtém-se a deformação da estrutura para todo ponto  $x$  como

$$\epsilon_s(x, t) = (\alpha_1 \lambda_1 \sinh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \lambda_1 \cosh(\lambda_1 x) - \alpha_3 \lambda_2 \sin(\lambda_2 x) + \alpha_4 \lambda_2 \cos(\lambda_2 x)) e^{i\omega t}, \quad (5.71)$$

e a deformação do sensor piezelétrico é estabelecida tal que

$$\epsilon_p(x, t) = (\beta_1 \lambda_1 (\sinh(\lambda_1 x) + \alpha_2 \cosh(\lambda_1 x)) + \beta_2 \lambda_2 (-\alpha_3 \sin(\lambda_2 x) + \alpha_4 \cos(\lambda_2 x))) e^{i\omega t}. \quad 5.72$$

## 5.5 Sinais elétricos no sensor

Os sinais elétricos no sensor podem ser determinados com as soluções de deformação (ver equações (5.71) e (5.72)) as quais são substituídas nas equações (4.55) e (4.57), mas neste caso se deve incluir a variável do tempo. Todos os procedimentos realizados para obter os

sinais elétricos são expostos no Capítulo 4, item 4.4, e estes procedimentos são igualmente aplicados neste caso (caso dinâmico). Para um sensor com o eletrodo segmentado pode-se usar os procedimentos do item 4.5 do Capítulo 4, em especial as equações (4.64), (4.65) e (4.66) considerando as variações no tempo.

Neste capítulo foram estabelecidas as equações diferenciais dinâmicas que descrevem o comportamento dinâmico do conjunto estrutura-adesivo-sensor. Foi desenvolvida uma solução analítica para determinar as frequências naturais do conjunto estrutura-adesivo-sensor. Também foram estabelecidas as soluções dos deslocamentos do conjunto estrutura-adesivo-sensor. As soluções dos deslocamentos (ver equações (5.69) e (5.70)), deformações (ver equações (5.71) e (5.72)) e frequências naturais obtidas são usadas em uma análise paramétrica realizada no Capítulo 7.

# Capítulo 6

## Resultados Estáticos

### 6.1 Introdução

Neste capítulo são mostrados os resultados das soluções analíticas obtidas para os deslocamentos da estrutura e do sensor para o caso estático. Alguns casos experimentais estáticos são também expostos neste capítulo para verificar as soluções analíticas obtidas.

### 6.2 Caso 1: Efeitos mecânicos (soluções analíticas)

A Tabela 6.1 mostra as propriedades físicas do sensor, da estrutura e da camada adesiva para o Caso 1 mostrado na Figura 6.1. As condições de contorno do problema são: uma restrição imposta no extremo esquerdo ( $u(0) = 0$ ), uma força aplicada no extremo direito ( $P = 20N$ ) e  $r_a = 0$ . É estabelecido um sistema de coordenadas  $x_1$  em  $x = l/2$ .

A Figura 6.2 mostra os deslocamentos obtidos a partir das soluções analíticas determinadas para o sensor e a estrutura. Os deslocamentos são comparados com resultados numéricos obtidos pelo software de elementos finitos COMSOL [14]. A malha do modelo de elementos finitos apresenta 104007 graus de liberdade e 21484 elementos triangulares de três nós. O elemento triangular possui nove graus de liberdade, três para cada nó, onde dois graus de liberdade correspondem aos deslocamentos em  $u$  (eixo  $x$ ) e  $v$  (eixo  $y$ ) e o outro grau de liberdade corresponde ao potencial elétrico.

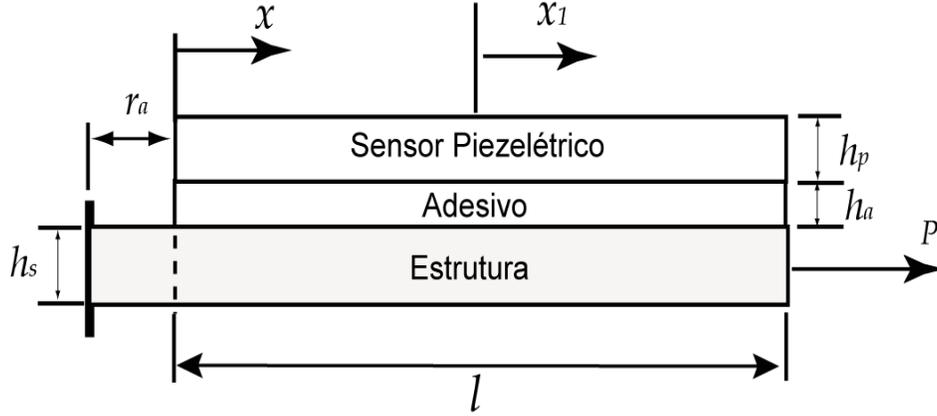


Figura 6.1: Estrutura - adesivo - sensor do Caso 1

Tabela 6.1: Propriedades físicas e dimensões do Caso 1

| Item  | Sensor                 | Estrutura    | Adesivo     |
|---|------------------------|--------------|-------------|
|   | (PZT-5A)               | Alumínio     | Araldite    |
| Densidade ( $\text{kg m}^{-3}$ )                          | 7500                   | 2700         | 7850        |
| Módulo de Young (GPa)                                     | 120.34                 | 70           | 2.84        |
| Constante do PZT $d_{15}$ (C/N)                           | $5.84 \times 10^{-10}$ | —            | —           |
| Permissividade Relativa, $\varepsilon_{33}/\varepsilon_0$ | 1.470                  | —            | —           |
| Espessura (mm)  | $h_p = 0.2667$         | $h_s = 0.25$ | $h_a = 0.3$ |
| Comprimento $l$ (mm)                                      | 5, 15, 25              | 5, 15, 25    | 5, 15, 25   |
| Largura $w$ (mm)  | 15                     | 15           | 15          |

As Figuras 6.3 à 6.17 foram obtidas a partir dos modelos analíticos descritos pelas equações (4.35), (4.36), (4.40), (4.41) e (4.42). Os gráficos têm como referência o eixo  $x_1$ .

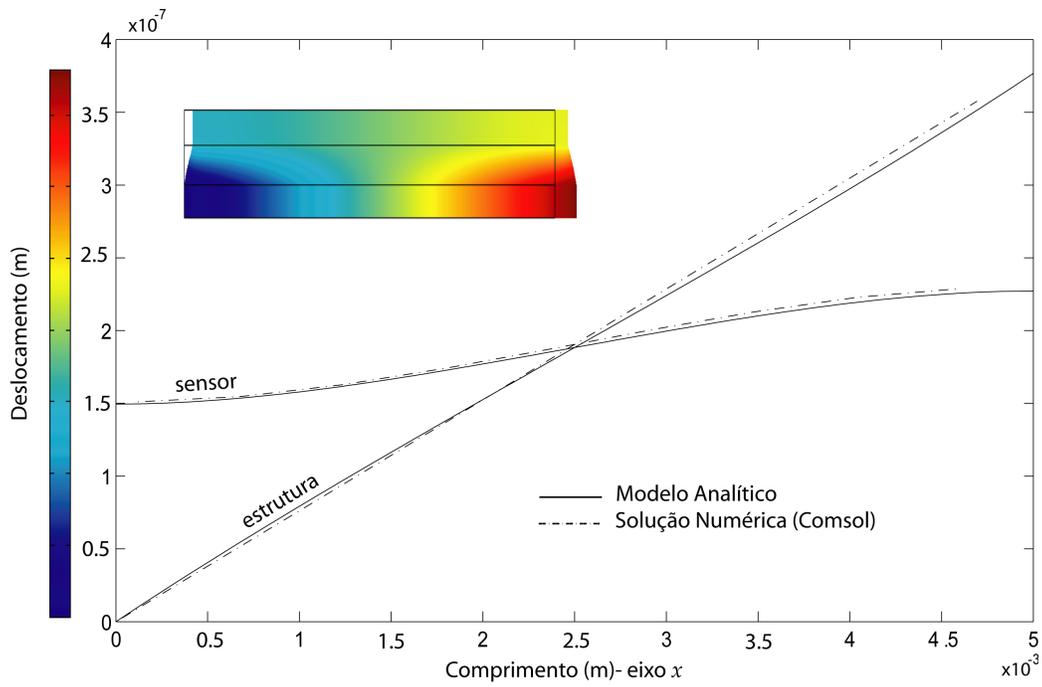


Figura 6.2: Deslocamentos do modelo analítico e solução numérica para  $l = 5 \text{ mm}$

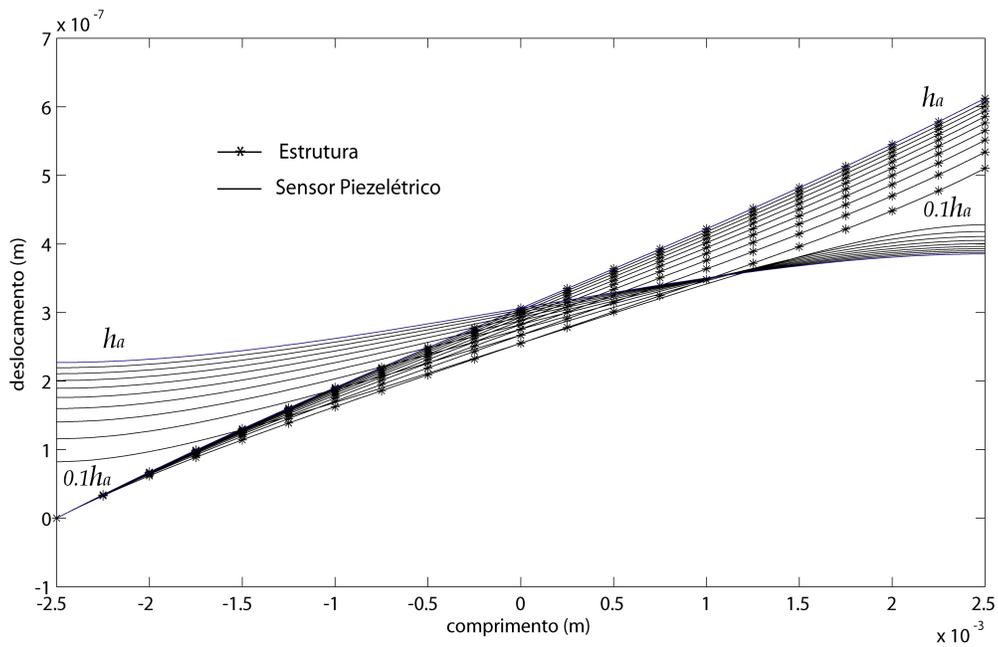


Figura 6.3: Deslocamentos do sensor e estrutura para  $l = 5 \text{ mm}$  – Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

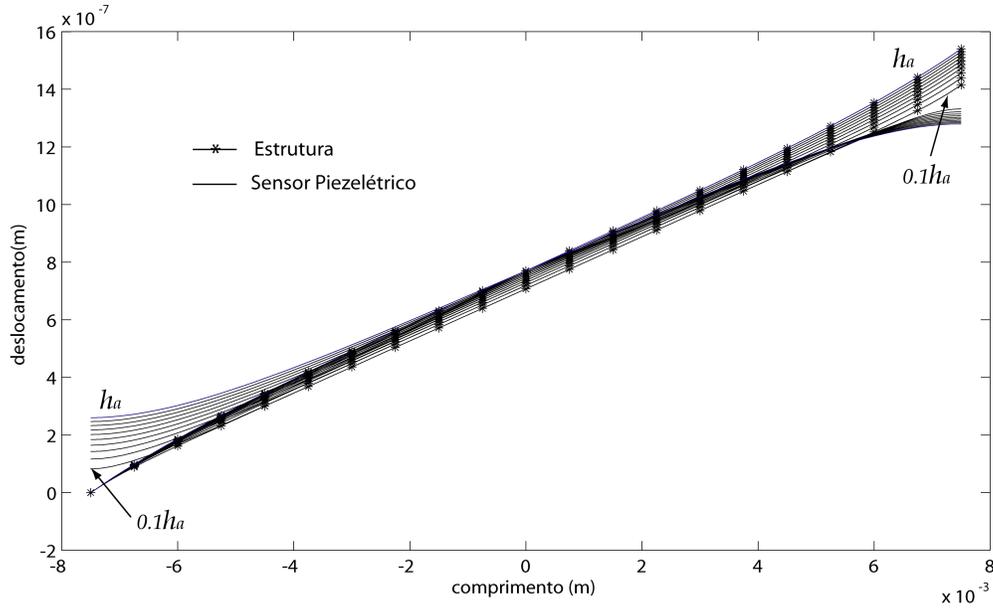


Figura 6.4: Deslocamentos do sensor e estrutura para  $l = 15 \text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

As figuras 6.3, 6.4 e 6.5 mostram os deslocamentos do sensor e da estrutura causados pela força aplicada no extremo direito. Nestas figuras pode-se observar os valores de deslocamento em cada ponto  $x_1 \in [-l/2, l/2]$  para as diferentes espessuras da camada adesiva, desde  $0.1h_a$  até  $h_a$ .

Os deslocamentos mostrados na Figura 6.3 correspondem a um comprimento de  $5 \text{ mm}$ . Os deslocamentos das figuras 6.4 e 6.5 correspondem aos comprimentos de  $15 \text{ mm}$  e  $25 \text{ mm}$  respectivamente. É possível notar que no sensor os deslocamentos no extremo esquerdo ( $x_1 = -l/2$ ) aumentam com o aumento da espessura adesiva. O oposto ocorre no extremo direito ( $x_1 = l/2$ ) no qual os deslocamentos diminuem com o aumento da espessura adesiva. Isto se repete para os diferentes comprimentos de  $l$ ,  $5 \text{ mm}$ ,  $15 \text{ mm}$  e  $25 \text{ mm}$ .

Pode-se observar nas figuras 6.3, 6.4, e 6.5 que os deslocamentos da estrutura para todos os comprimentos e espessuras da camada adesiva têm comportamento próximo ao linear, só mudam a inclinação. Os deslocamentos no sensor para os mesmos casos de comprimento e espessura da camada adesiva apresentam um comportamento não linear mais visível. Para o sensor com comprimento de  $25 \text{ mm}$ , os deslocamentos da estrutura e do sensor tendem a ser

mais próximos e lineares, exceto nos extremos do sensor, conforme na Figura 6.5.

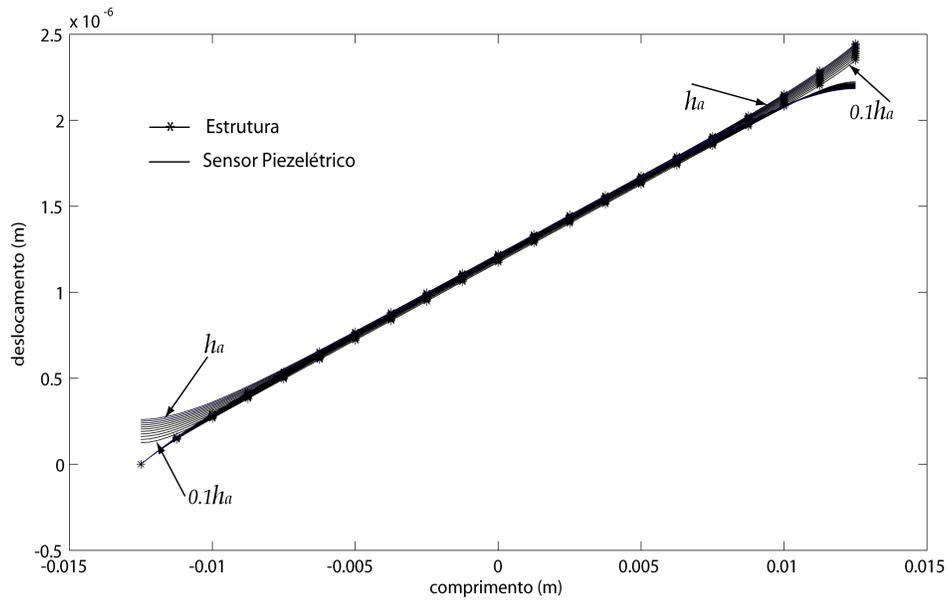


Figura 6.5: Deslocamentos do sensor e estrutura para  $l = 25 \text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

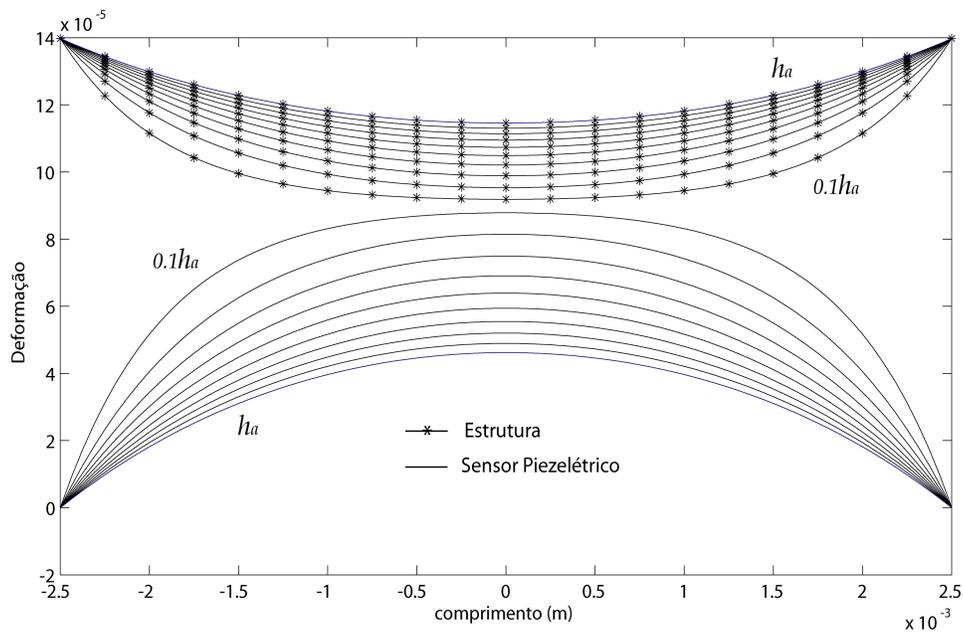


Figura 6.6: Deformação do sensor e estrutura para  $l = 5 \text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

As figuras 6.6, 6.7 e 6.8 mostram as deformações da estrutura e do sensor depois de aplicada

a força  $P$ . É evidente que a distribuição da deformação no sensor e na estrutura é não linear para os diferentes comprimentos de  $5\text{ mm}$ ,  $15\text{ mm}$ ,  $25\text{ mm}$ , e para as diferentes espessuras da camada adesiva.

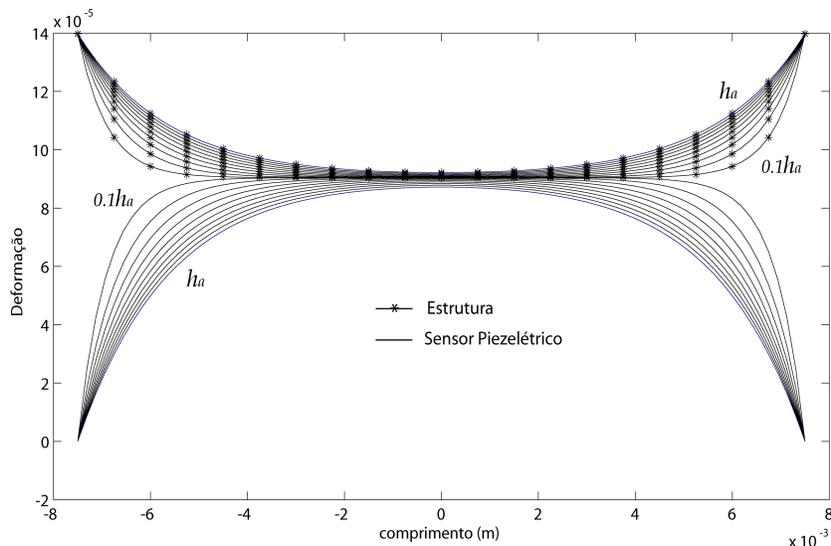


Figura 6.7: Deformação do sensor e estrutura para  $l = 15\text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

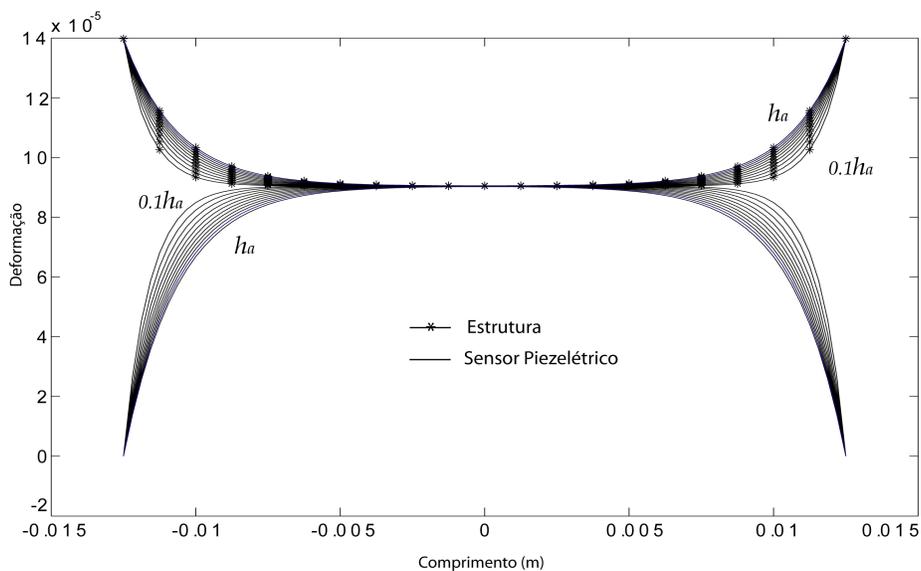


Figura 6.8: Deformação do sensor e estrutura para  $l = 25\text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

Na Figura 6.6 verifica-se que os valores de deformação no sensor e na estrutura não são iguais em nenhum trecho do intervalo colado. Isto mostra que a deformação não é transmitida

de forma integral da estrutura para o sensor.

Na Figura 6.7 os valores de deformação da estrutura e do sensor em  $x_1 = 0$  se aproximam. Mas na Figura 6.8, os valores de deformação da estrutura e do sensor para o intervalo aproximado  $x_1 \in (-0.01, 0.01)$  são bem mais próximos. Verifica-se que a transmissão das deformações da estrutura para o sensor devido ao aumento do comprimento do sensor é mais efetiva do que devido ao aumento da camada adesiva.

Os resultados obtidos nas figuras 6.9, 6.10 e 6.11 mostram a tensão de cisalhamento nas superfícies delimitadas pela área de adesão estrutura-adesivo e adesivo-sensor. Nas três figuras pode-se observar que a tensão de cisalhamento é nula em  $x_1 = 0$ . Isto quer dizer que a deformação na camada adesiva nesse ponto se efetua sem distorção do adesivo. Em [44] é observada uma distribuição de tensão de cisalhamento similar para diferentes espessuras da camada adesiva.

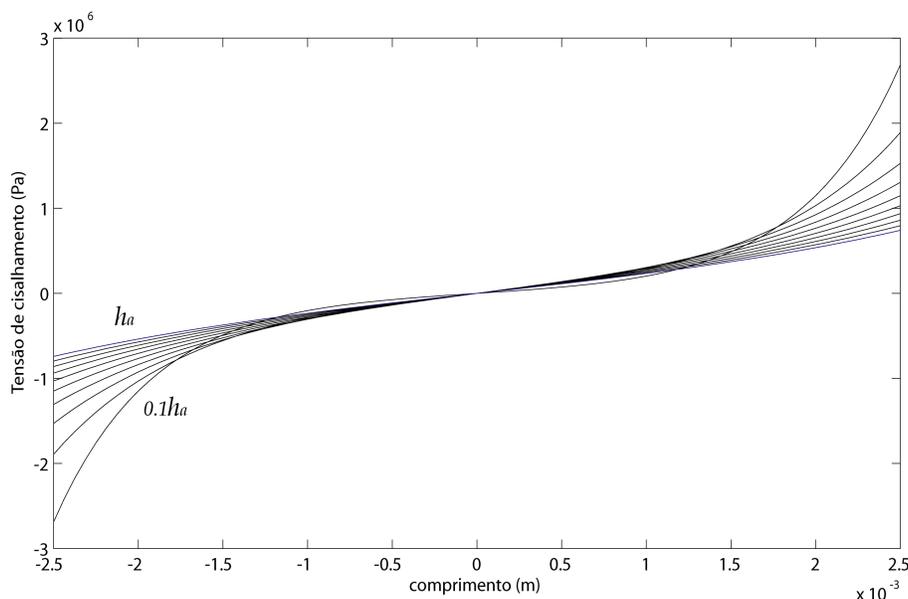


Figura 6.9: Tensão de cisalhamento para  $l = 5 \text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

Os efeitos das espessuras da camada adesiva são mais visíveis nos extremos. Por exemplo, para o comprimento de  $5 \text{ mm}$  (ver Figura 6.9), a variação de tensão no extremo direito para as diferentes espessuras está no intervalo  $\tau \in (0.7, 2.8) \text{ MPa}$  aproximadamente. Para  $l = 15 \text{ mm}$  (Figura 6.10), tem-se  $\tau \in (0.8, 2.7) \text{ MPa}$  e para  $l = 25 \text{ mm}$  (Figura 6.11),

tem-se  $\tau \in (0.9, 1.7) \text{ MPa}$  aproximadamente. Logo, a tensão nos extremos vai diminuindo na medida que o sensor é mais longo.

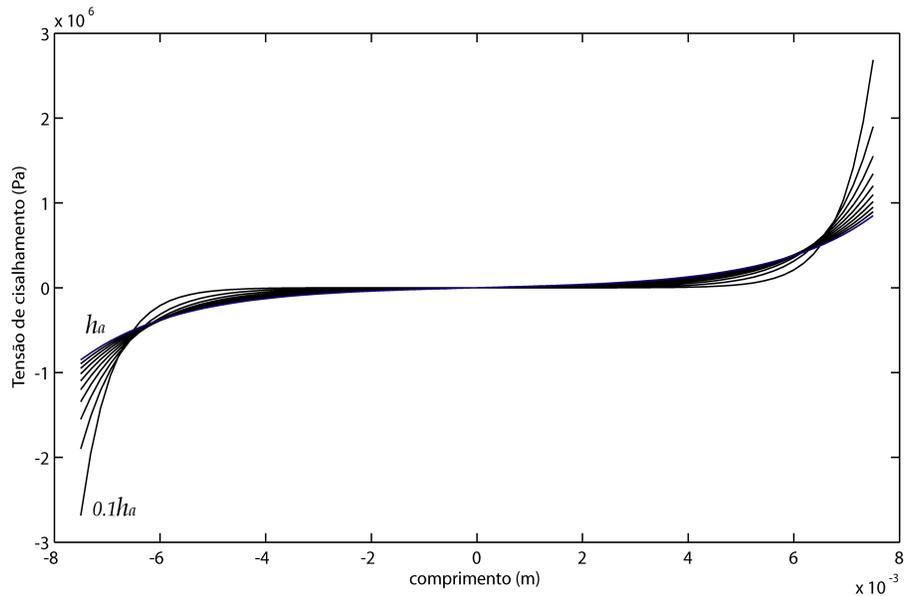


Figura 6.10: Tensão de cisalhamento para  $l = 15 \text{ mm}$ — Solução analítica variando-se  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

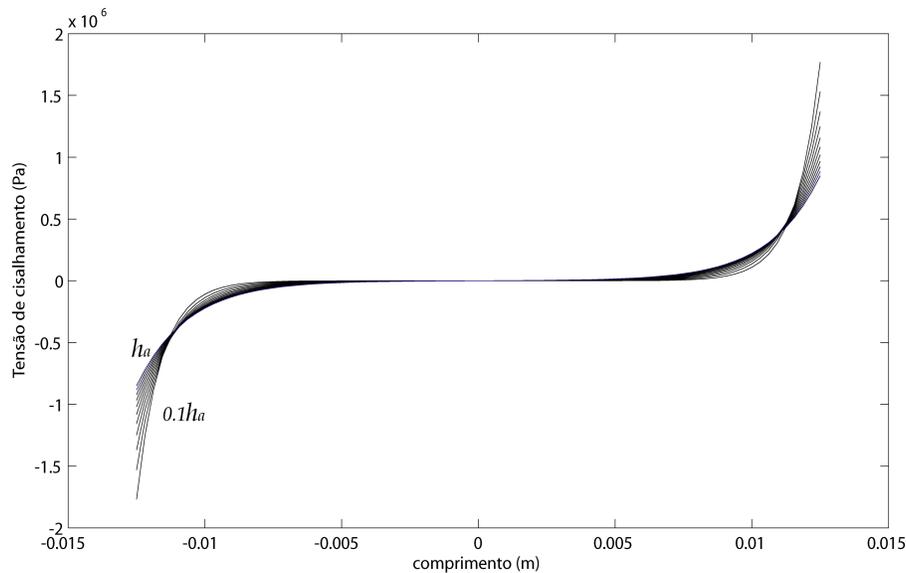


Figura 6.11: Tensão de cisalhamento para  $l = 25 \text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

É possível notar nas figuras 6.9, 6.10, 6.11 que o trecho no qual a tensão de cisalhamento apresenta uma região próxima de zero é maior para o sensor com comprimento de  $25 \text{ mm}$ ,

seguido do sensor com  $15\text{ mm}$  e por último o sensor com  $5\text{ mm}$ . Portanto para sensores com maior comprimento, maior é o intervalo com tensão de cisalhamento nula.

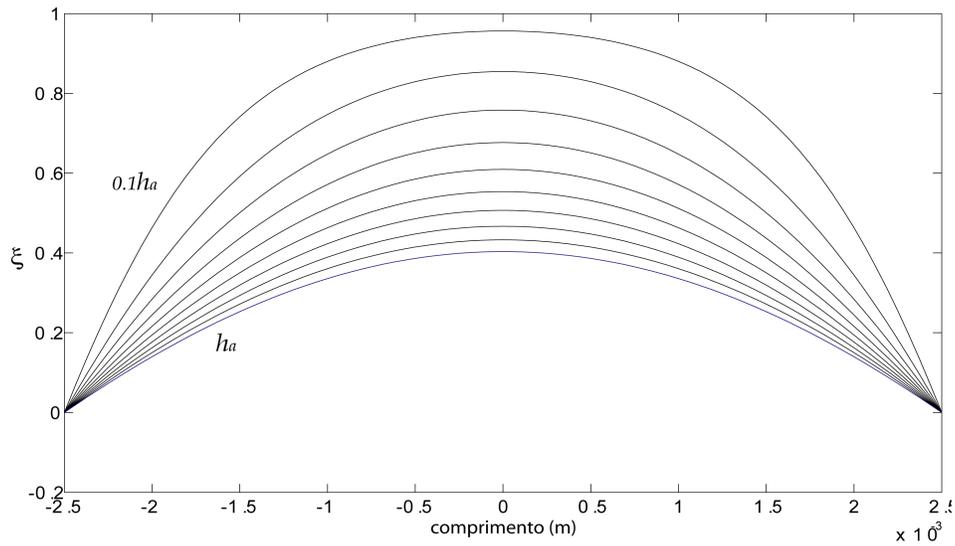


Figura 6.12: Relação de deformação sensor-estrutura para  $l = 5\text{ mm}$ — Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

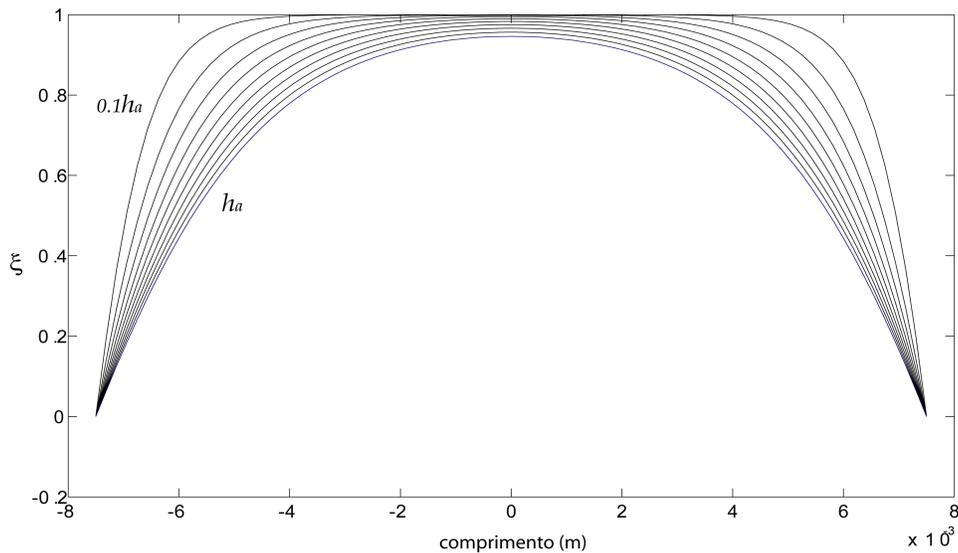


Figura 6.13: Relação de deformação sensor-estrutura para  $l = 15\text{ mm}$  - Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

Se a tensão de cisalhamento ultrapassa a tensão de adesão entre a estrutura e o adesivo, ou entre o adesivo e o sensor, as duas interfaces começam a se descolar. [18] explica o fenômeno de tensão num transdutor piezoeletrico colado a uma estrutura. O efeito de tensões maiores

nos extremos das interfaces estrutura-adesivo e adesivo-sensor é chamado “*shear lag effect*” [10].

As figuras 6.12, 6.13 e 6.14 mostram a relação da deformação dada pela Equação (4.42) entre o sensor e a estrutura. Nestas figuras observa-se que à medida em que o sensor é mais longo, a espessura da camada adesiva apresenta menor influência sobre a relação de deformação nos intervalos centrais. Nos sensores de 15 *mm* e 25 *mm* as relações de deformação são mais próximas do valor unitário na zona central. Desta forma se conclui que os sensores mais longos apresentam melhores condições para a transferência de deformação entre a estrutura e o sensor.

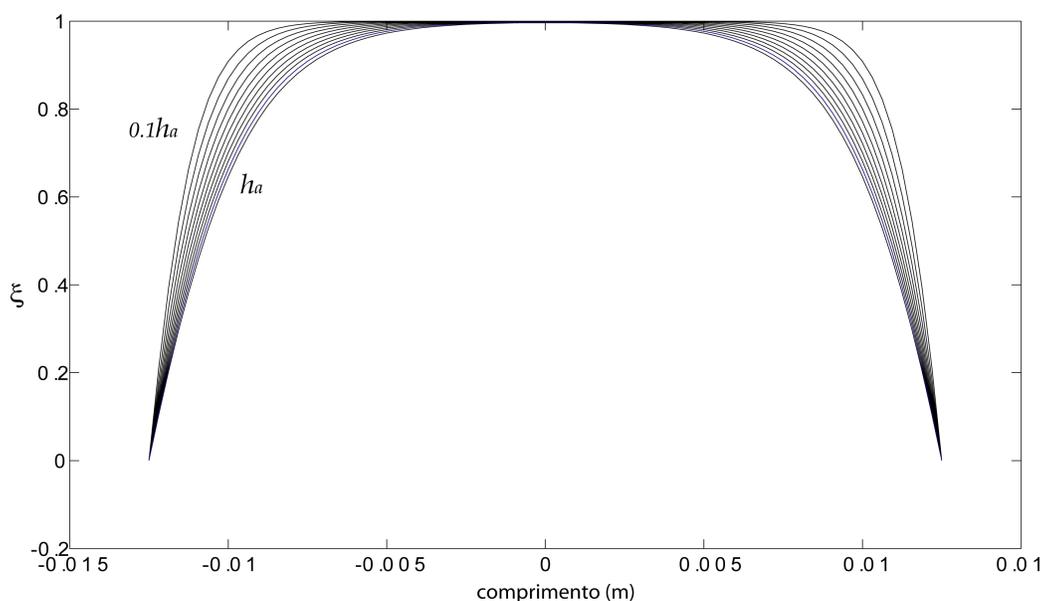


Figura 6.14: Relação de deformação sensor-estrutura para  $l = 25 \text{ mm}$  – Solução analítica variando-se a espessura do adesivo  $h_a$  entre  $0.1h_a$  a  $h_a$ , espaçamento de  $0.1h_a$

### 6.3 Caso 2: Efeitos elétricos (soluções analíticas)

A Figura 6.15 mostra a resposta elétrica (potencial elétrico) emitida pelo sensor para o exemplo do caso 1 (ver Figura 6.1). O potencial elétrico foi determinado com a Equação (4.58). Pode-se observar nesta figura que o sensor com comprimento de 25 *mm* apresenta maior voltagem em todos os casos de espessura da camada adesiva. Os sensores de 5 *mm* e 15 *mm* apresentam variações menores na voltagem quando comparadas com a voltagem

do sensor de  $25\text{ mm}$ . Para a mesma força ( $P = 20\text{ N}$ ), as voltagens obtidas nos eletrodos para os diferentes comprimentos ( $5, 15$  e  $25\text{ mm}$ ) do sensor diminuem quando a espessura da camada adesiva é maior. Os efeitos da espessura da camada adesiva são mais visíveis no sensor com comprimento de  $25\text{ mm}$ .

Pode-se concluir, neste caso (exemplo do caso 1, seção 6.2), que o efeito causado pela espessura da camada adesiva na voltagem emitida pelo sensor para comprimentos menores são mais significativos. No caso contrário, para sensores de comprimento maior os efeitos da espessura da camada adesiva na voltagem emitida pelo sensor são menores.

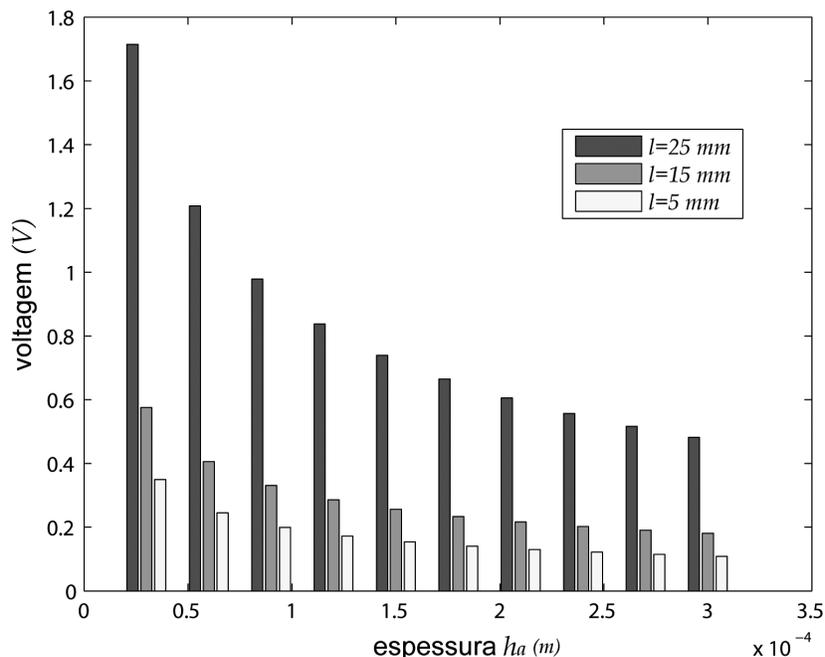


Figura 6.15: Comparação das voltagem para diferentes espessuras do adesivo  $h_a \in (0.1h_a, h_a)$  e diferentes comprimentos  $l \in (0, 15)$

## 6.4 Caso 3: Efeitos elétricos, sensor com o eletrodo segmentado (soluções analíticas)

Para entender os efeitos causados pelas propriedades da colagem, o sensor usado neste exemplo apresenta três eletrodos. Depois de aplicar a força  $P = 20\text{ N}$  na estrutura, o sensor emite uma voltagem em cada eletrodo (a configuração é a mesma do caso 1, ver Figura 6.1 exceto pela subdivisão do eletrodo nas três partes). As voltagens  $V1$  e  $V3$  emitidas pelos

eletrodos dos extremos ( $e_{1L}$  e  $e_{1R}$ ) do sensor são relacionados com a voltagem  $V2$  do eletrodo central ( $e_1$ ) (ver Figura 6.16). É importante lembrar que a inclinação das relações das voltagens são as relações de força entre os eletrodos (ver equações (4.79) e (4.80)). As figuras 6.16a, 6.16b e 6.16c mostram as relações das voltagens entre os eletrodos extremos com o eletrodo central do sensor para os diferentes casos de espessura do adesivo  $h_a \in (0.1h_a, h_a)$  (valor de  $h_a$  na Tabela 6.1) e comprimento do sensor  $l \in (0, 25)$ .

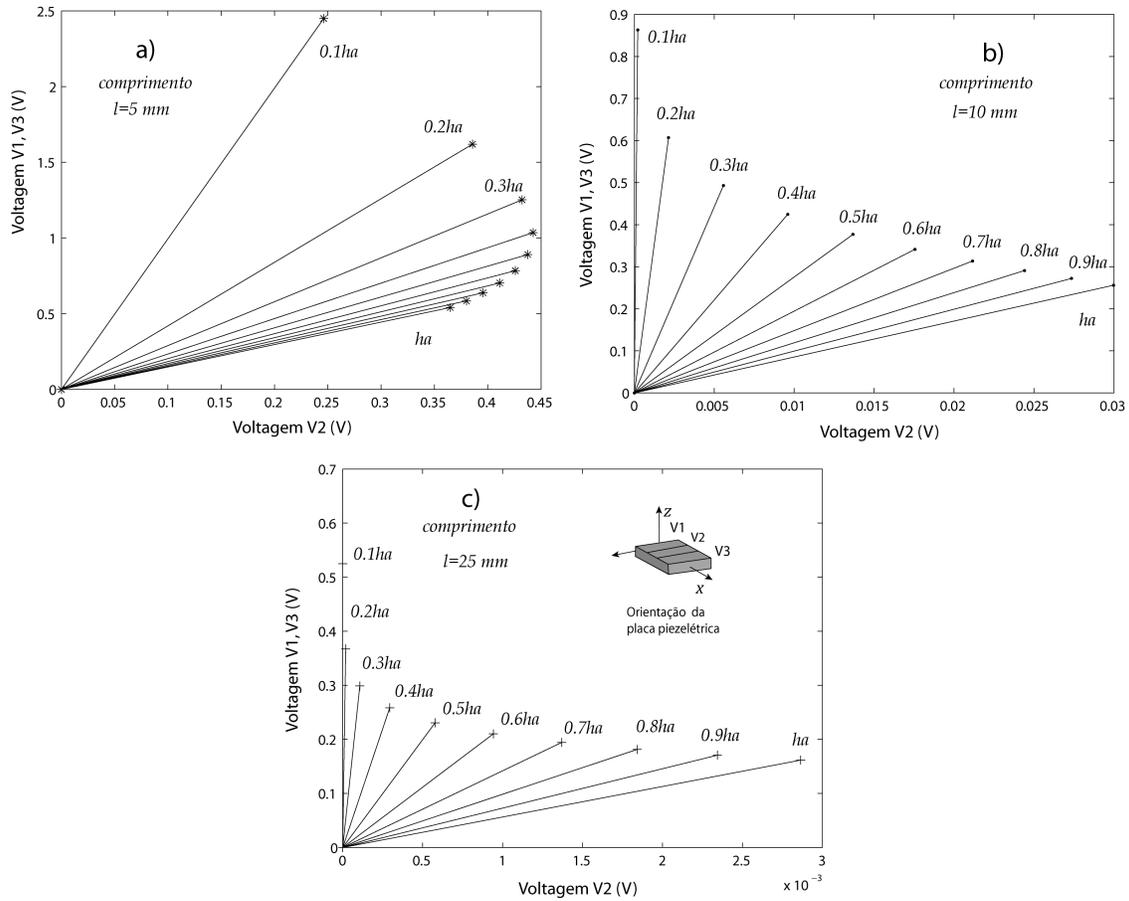


Figura 6.16: Relações de voltagem para  $l \in (0, 25)$  e  $h_a \in (0.1h_a, h_a)$

Pode-se observar que as inclinações das relações de voltagem nos três casos (figuras 6.16a, 6.16b, 6.16c) diminuem quando a espessura da camada adesiva aumenta. Para o comprimento de  $5$  mm (ver Figura 6.16a) a voltagem  $V2$  aumenta quando a espessuras da camada adesiva vai até  $0.4h_a$  e diminui para espessuras maiores que  $0.4h_a$ . Na Figura 6.16b a voltagem  $V2$  aumenta com o aumento da espessura  $h_a$ . Na Figura 6.16c a voltagem  $V2$  aumenta com o aumento da espessura  $h_a$ . Para observar melhor as relações das voltagens, a Figura 6.17

mostra o valor das inclinações para os diferentes casos de comprimento do sensor e espessura do adesivo. Pode-se observar nesta figura que as relações de força  $F1/F2$  e  $F3/F2$  (valor da inclinação da relação de voltagens, ver equações (4.79) e (4.80)) através dos eletrodos para o comprimento de  $25\text{ mm}$  apresentam valores de 4.2 para o primeiro valor da espessura do adesivo (eixo  $x$ ) até 1.5 vezes a força do eletrodo central para o último valor da espessura do adesivo (eixo  $x$ ). Para o comprimento  $15\text{ mm}$  as relações de força ( $F1/F2$  e  $F3/F2$ ) apresentam valores de 1.5 para o primeiro valor da espessura do adesivo (eixo  $x$ ) até 0.7 vezes a força do eletrodo central para o último valor da espessura do adesivo. Para o comprimento  $5\text{ mm}$  as relações de força ( $F1/F2$  e  $F3/F2$ ) apresentam valores desde 0.9 para o primeiro valor da espessura do adesivo até 0.4 vezes a força do eletrodo médio para o último valor da espessura do adesivo. É importante mencionar que a relação de força entre os eletrodos deve ser constante de acordo com as equações (4.79) e (4.80).

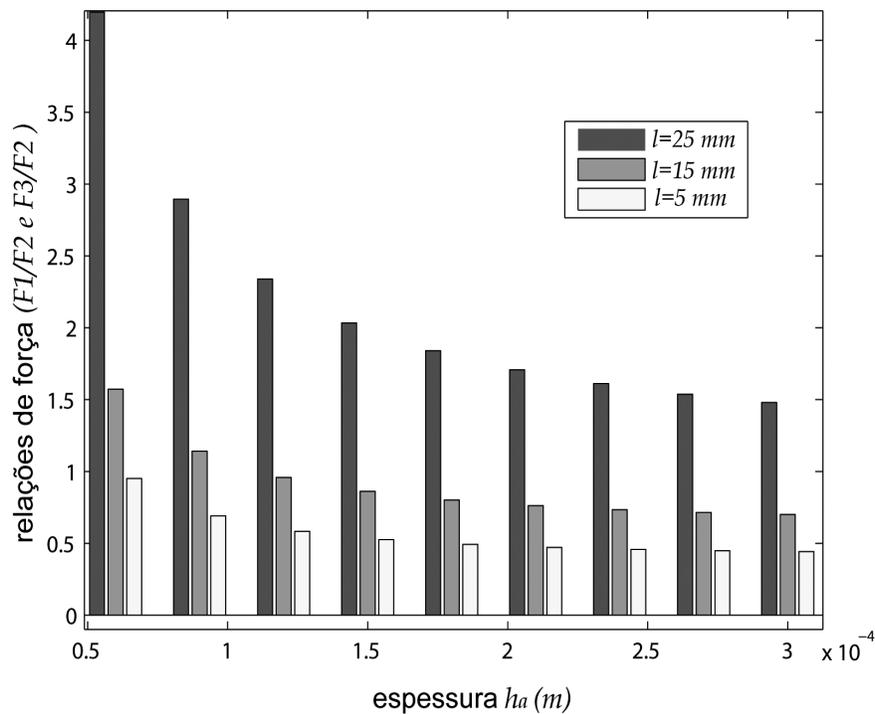


Figura 6.17: Relações de força equivalente  $F1/F2$  e  $F3/F2$

## 6.5 Caso 4, viga em tensão plana: efeitos eletro-mecânicos

A viga mostrada na Figura 6.18 (neste caso é admitida a flexão) está submetida a uma força axial no extremo direito de magnitude  $P = 50 \text{ N}$ , e a uma restrição de fixação no extremo esquerdo. A viga tem as seguintes dimensões:  $d_p = 0.1 \text{ m}$ ,  $l_p = 0.015 \text{ m}$ ,  $d_e = 0.005 \text{ m}$ . A Tabela 6.2 mostra as propriedades geométricas e físicas do conjunto PZT-adesivo-estrutura. O sensor é colocado em um lado apenas para minimizar o custo operacional, como na área de monitoramento estrutural [33, 48]. As soluções numéricas obtidas neste caso são obtidas com COMSOL [14].

Tabela 6.2: Propriedades físicas e dimensões da configuração da Figura 6.18

| Item  | Sensor                  | Estrutura    | Adesivo epóxi |
|---|-------------------------|--------------|---------------|
|   | PZT-5H                  | Alumínio     | (HC100-X2)    |
| Densidade ( $\text{kg m}^{-3}$ )                          | 7500                    | 2700         | 7850          |
| Módulo de Young (GPa)                                     | 127.20                  | 70           | 3.0842        |
| Constante de Poisson                                      | 0.3                     | 0.33         | 0.33          |
| Constante do PZT $d_{31} (\text{m V}^{-1})$               | $-2.74 \times 10^{-10}$ | —            | —             |
| Permissividade Relativa, $\varepsilon_{33}/\varepsilon_0$ | 1704.4                  | —            | —             |
| Espessura (mm)  | $h_p = 0.2667$          | $h_s = 6.35$ | $h_a = 0.15$  |
| Comprimento (m)   | $l_p = 0.015$           | $l_s = 0.12$ | $l_a = 0.015$ |
| Largura $w$ (mm)  | 10                      | 10           | 10            |

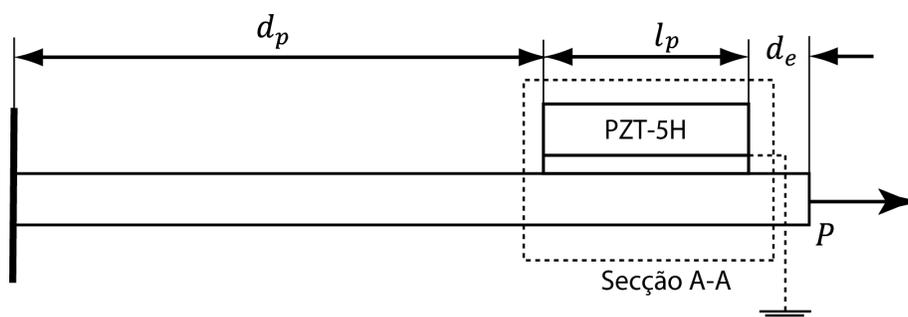


Figura 6.18: Caso 4 - PZT colado em um dos lados da viga

A viga mostrada na Figura 6.18 foi modelada usando o aplicativo COMSOL [14] com as propriedades físicas e geométricas estabelecidas na Tabela 6.2. Os subdomínios da estru-

tura (ver Figura 6.18) foram discretizados com elementos triangulares, e a malha apresentou 104007 graus de liberdade e 21484 elementos. A análise realizada com COMSOL foi bidimensional em tensão plana.

Depois de aplicada a força  $P$ , pode-se observar na Figura 6.19 a distribuição da tensão de cisalhamento na viga e a distribuição da deformação no sensor. A tensão de cisalhamento na viga apresenta uma distribuição aproximadamente simétrica com respeito ao ponto médio do sensor.

A deformação no sensor é nula nos extremos deste, e aumenta à medida em que as tensões de cisalhamento diminuem na seção média  $x = 0.1075$ , ponto no qual a deformação do sensor é máxima.

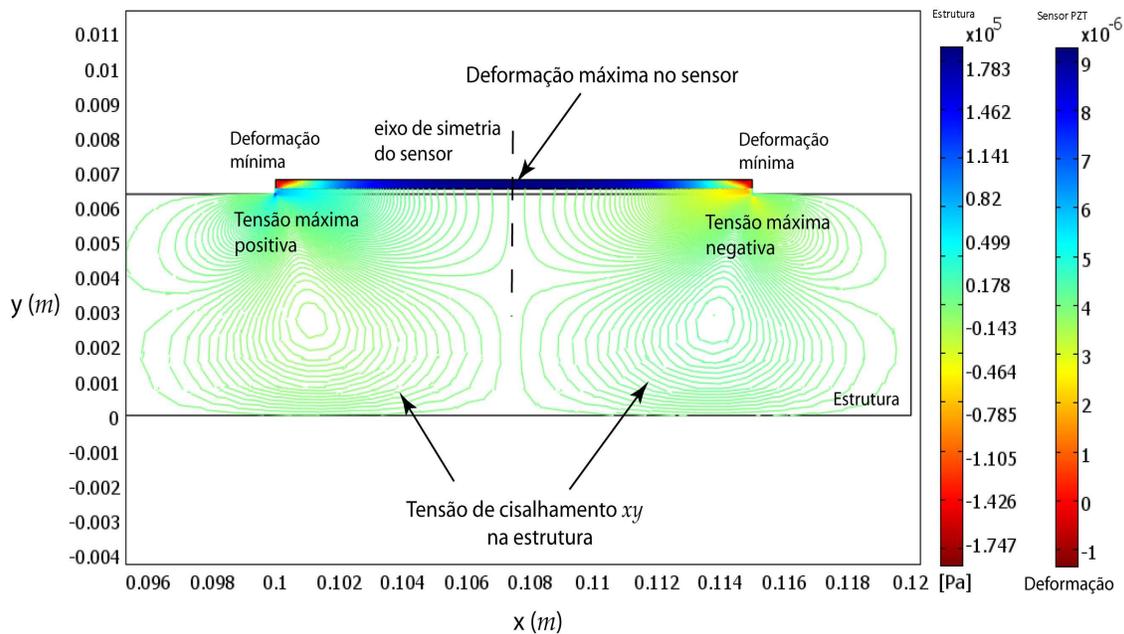


Figura 6.19: Tensão de cisalhamento da estrutura e deformação do sensor

Os deslocamentos da viga e o potencial elétrico do sensor são mostrados na Figura 6.20. Neste gráfico pode-se observar que os deslocamentos ao longo da viga comportam-se de forma quase paralela ao eixo  $y$  até a coordenada  $x \cong 0.1$  m. A partir de  $x = 0.1$  os deslocamentos para cada ponto  $y$  da viga começam a apresentar uma variação na inclinação até o extremo desta. Portanto, é possível verificar que devido à não simetria causada pelo sensor, a estrutura experimenta flexão.

As deformações mecânicas transferidas ao sensor são transformadas em um sinal elétrico. Este sinal é medido como um potencial elétrico no PZT. Pode-se observar que o máximo potencial elétrico é medido na parte média do sensor,  $x = 0.1075$ , e o mínimo nos extremos com  $V = 0$ .

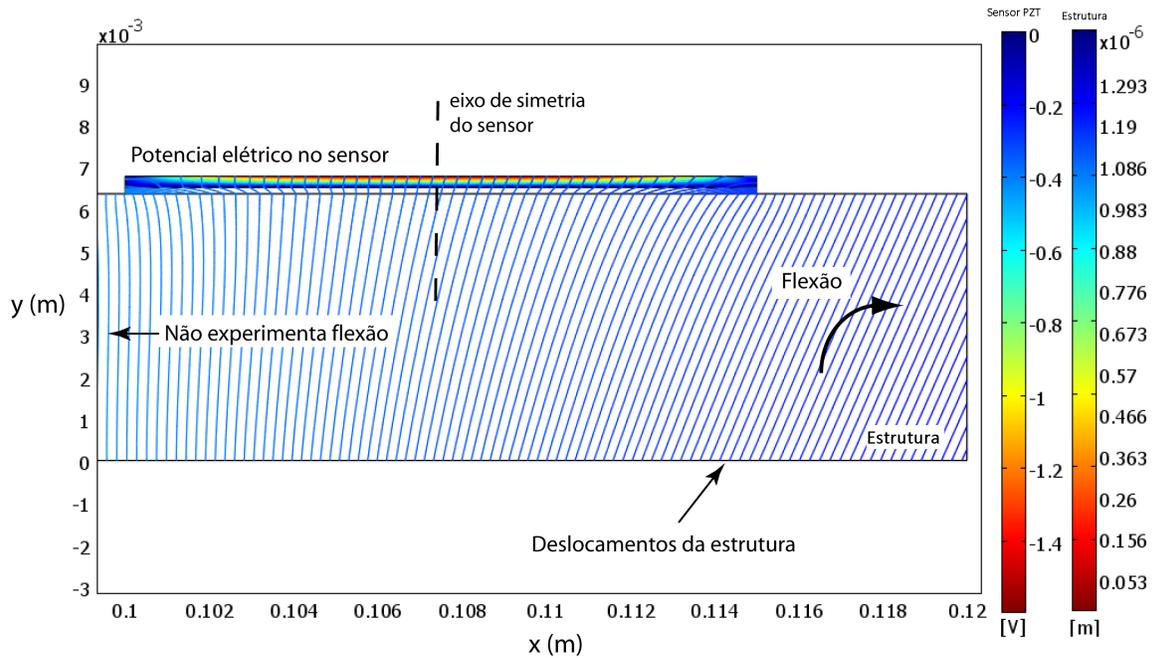


Figura 6.20: Deslocamentos da estrutura-adesivo-sensor e potencial elétrico no sensor

A distribuição do potencial elétrico gera um campo elétrico na direção  $y$  (ver Figura 6.20) devido à distribuição de carga elétrica. Na Figura 6.21 pode-se ver o deslocamento elétrico através do sensor. Esta medida relaciona a carga elétrica com a variação do campo elétrico através do sensor. Deste modo é possível dizer que as zonas de maior acúmulo de carga elétrica estão nos extremos do sensor. A corrente elétrica gerada através do sensor depende da impedância elétrica do sensor [19]. Para a viga da Figura 6.21 pode-se ver a distribuição da deformação causada pelos efeitos de se colar o sensor na viga. Estes efeitos foram explicados na seção 6.2.

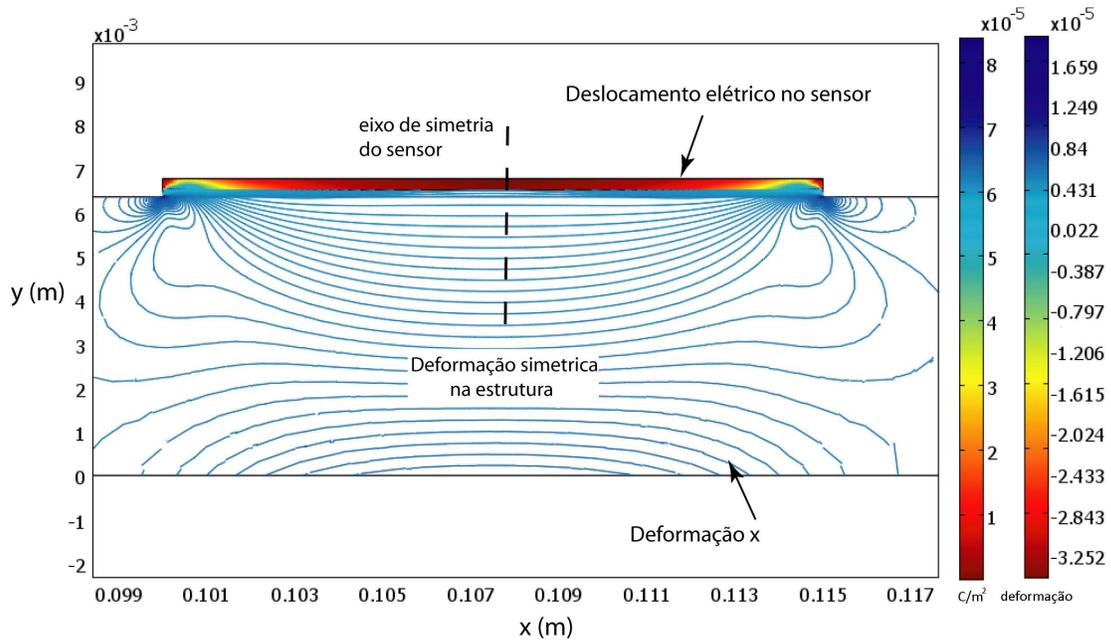


Figura 6.21: Deformação da estrutura e deslocamento elétrico do sensor

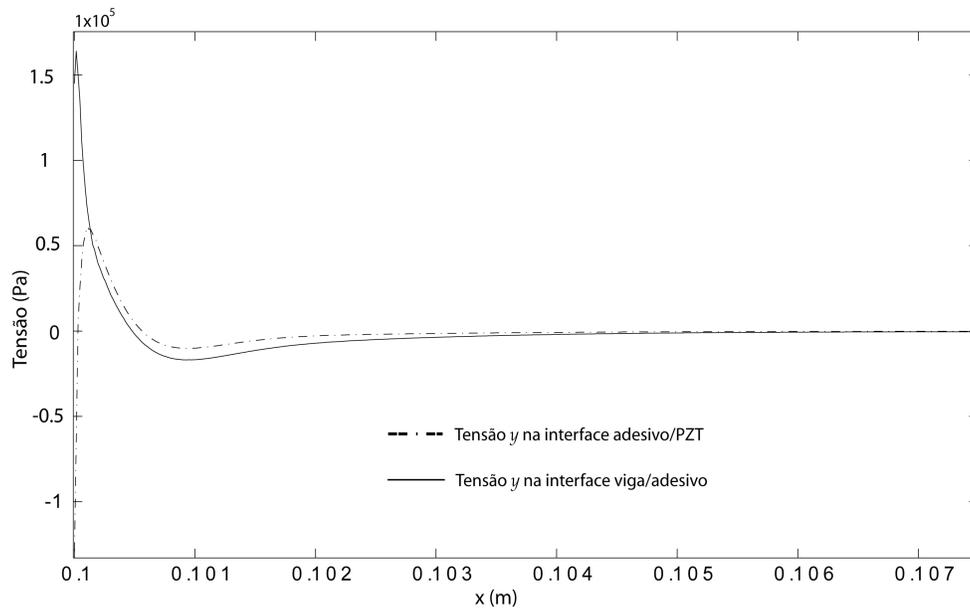


Figura 6.22: Tensão normal nas interfaces estrutura-adesivo e adesivo-PZT

As interfaces viga-adesivo e adesivo-PZT estão sujeitas a tensões que tentam separar a camada adesiva da estrutura e do PZT. A tensão que aparece na direção  $y$  (ver Figura 6.22) localizada nas interfaces da estrutura-adesivo e adesivo-sensor é a tensão normal à superfície de adesão nas interfaces, esta tensão é chamada tensão normal [37]. Observa-se que a tensão normal aparece nas duas interfaces.

Pode-se ver na Figura 6.22 que as tensões normais que atuam sobre a superfície de adesão são maiores nos extremos das interfaces viga-adesivo e adesivo-PZT. No entanto, a tensão normal é maior em magnitude nos extremos da interface estrutura-adesivo.

As tensões normais são consideradas importantes porque podem ocasionar descolagem nos extremos das interfaces. Se as tensões normais são maiores que as tensões de adesão, o sensor começa a descolar da estrutura, e portanto, terá o seu comprimento efetivo diminuído. Se o comprimento efetivo de colagem muda, a voltagem gerada no sensor muda. Este mecanismo de descolagem é discutido em [45].

## 6.6 Caso 5: Análise experimental - caso estático

### 6.6.1 Deformação simétrica com força controlada

Neste teste experimental foram usadas duas amostras (ver Figura 6.26), uma com o eletrodo segmentado (amostra B) em duas partes e outra com um só eletrodo (amostra A). A Figura 6.26 mostra os parâmetros dimensionais das amostras A e B.

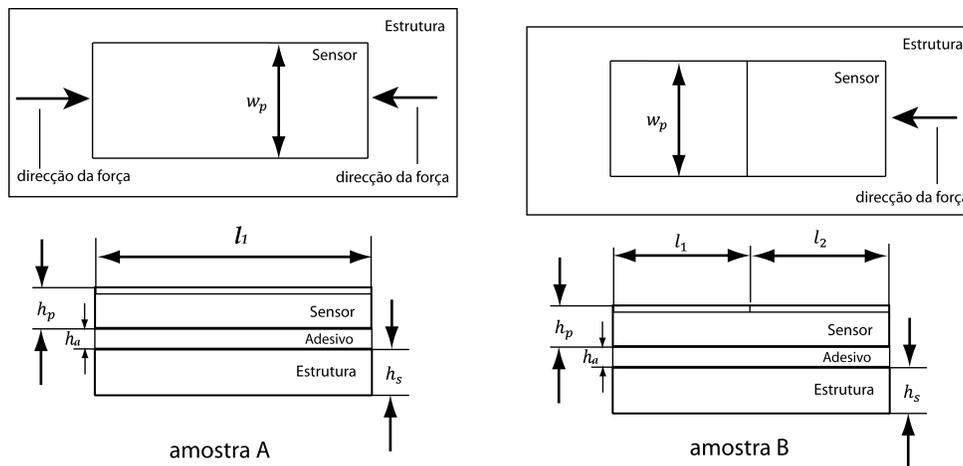


Figura 6.23: Dimensões das amostras A e B

Os valores dos parâmetros dimensionais são mostrados na Tabela 6.3. As amostras A e B (ver Figura 6.23) foram submetidas a forças controladas com o objetivo de obter a voltagem em cada eletrodo dos sensores preparados.

Tabela 6.3: Propriedades geométricas das amostras da seção 6.6.1 - caso estático

| Amostra | $l_1$ | $l_2$ | $h_s$ | $h_p$ | $h_a$ | $w_p$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A (mm)  | 10    | 0     | 2     | 0.3   | 0.3   | 10.2  |
| B (mm)  | 10    | 10    | 2     | 0.3   | 0.25  | 10.5  |

O sensor da amostra B apresenta dois eletrodos com as mesmas dimensões do eletrodo do sensor da amostra A. O eletrodo do sensor da amostra B foi dividido para demonstrar que as voltagens emitidas pelos eletrodos são iguais, devido à distribuição de deformação no sensor. Os sensores foram aderidos a uma estrutura de alumínio por meio de uma camada adesiva (adesivo epóxi “Araldite”). A espessura da camada adesiva foi obtida aplicando-se pressão com um calibrador de espessuras.

A Figura 6.24 mostra o esquema do dispositivo que foi usado para realizar o teste experimental.

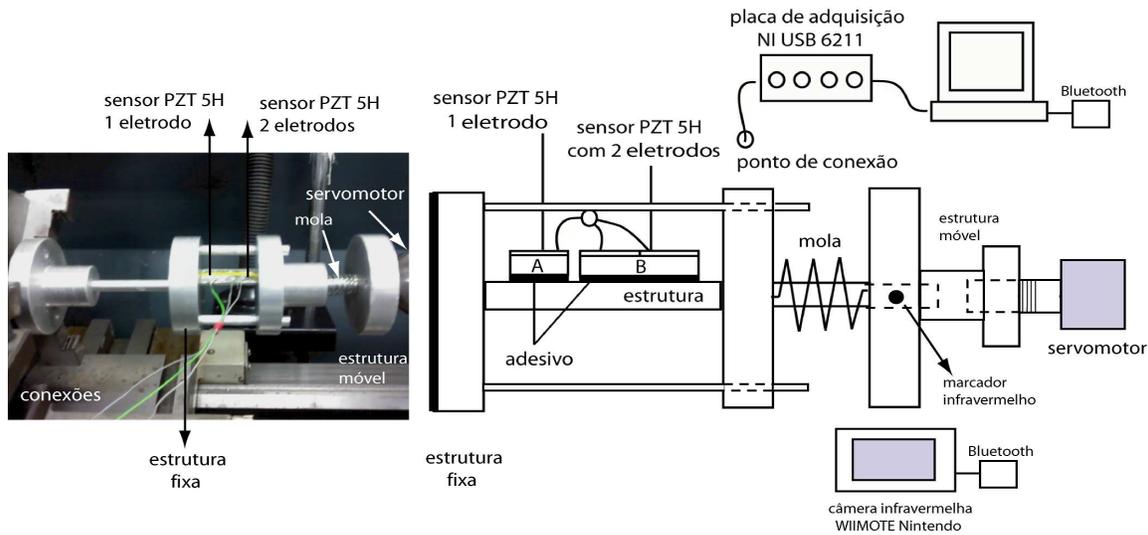


Figura 6.24: Teste experimental para um sensor com o eletrodo segmentado e outro não segmentado

O teste experimental é descrito a seguir. Um servomotor foi controlado através de uma placa de aquisição de dados (USB 6211) para deslocar a estrutura móvel (ver Figura 6.24). Os deslocamentos realizados pela estrutura móvel foram lidos com uma câmara infravermelha (câmara incorporada no Nintendo Wiimote) colocada na frente do marcador infravermelho.

A câmera foi calibrada para obter as medições em *mm*. A câmera infravermelha envia a informação do marcador infravermelho via Bluetooth para o computador. A frequência de amostragem dos deslocamentos foi de 20 amostras por segundo. Com cada deslocamento registrado da estrutura móvel estima-se a força de compressão na mola, a qual corresponde a força aplicada na estrutura (ver Figura 6.24). Desta forma a força era controlada no dispositivo. Os sinais das voltagens das amostras A e B eram lidos pela placa de aquisição de dados (National instruments USB 6211). No teste experimental foi usado o aplicativo MATLAB para realizar a aquisição de dados.

Os resultados obtidos das voltagens nas amostras A e B são mostrados na Figura 6.25. Pode-se verificar nesta figura que as voltagens emitidas pelos eletrodos do sensor B são aproximadamente iguais para os três casos de carregamento. Isto demonstra que a deformação em cada eletrodo pode ser considerada simétrica. Os dois sinais foram comparados com um sensor das mesmas características (amostra A). O sensor da amostra A apresenta um valor da voltagem maior que as voltagens emitidas pelos eletrodos da amostra B. Os resultados experimentais foram comparados com os resultados obtidos com COMSOL, como pode-se observar na Figura 6.25. A comparação mostrou que os resultados experimentais obtidos com o dispositivo são confiáveis.

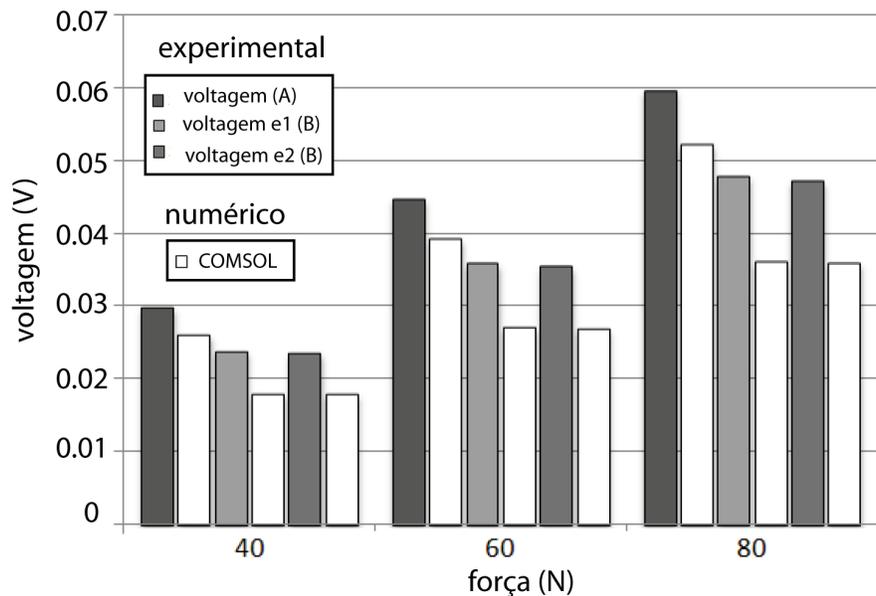


Figura 6.25: Voltagens obtidas para diferentes carregamentos - sensor B segmentado em 2 partes e sensor A não segmentado

## 6.6.2 Efeitos do comprimento do sensor

Neste teste são usadas três amostras A, B e C de diferentes comprimentos (a mudança de comprimento é considerada na direção da força). Os parâmetros dimensionais estabelecidos em cada amostra são mostrados na Figura 6.26. A Tabela 6.4 mostra as propriedades geométricas de cada amostra. Os materiais usados neste teste são: alumínio (estrutura), PZT-5H (sensor), adesivo epóxi “Araldite” (camada adesiva).

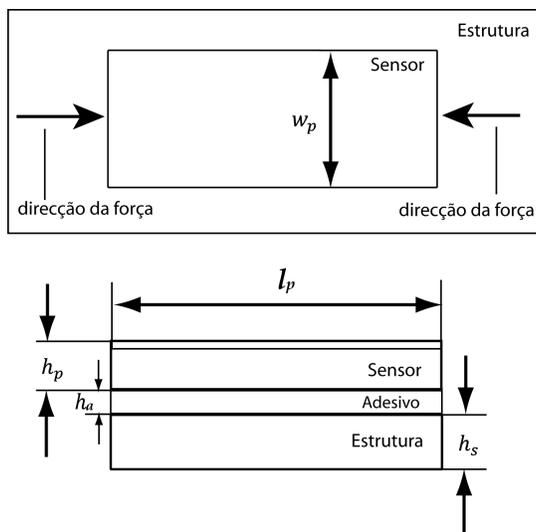


Figura 6.26: Propriedades geométricas das amostras A, B e C

O teste foi realizado com o dispositivo mostrado na Figura 6.24. Para a aplicação da força foram usados os mesmos procedimentos expostos no item 6.6.1, onde as forças foram aplicadas controladamente.

Tabela 6.4: Propriedades geométricas das amostras da seção 6.6.2 para o teste estático

| Amostra         | $l_p$ | $h_s$ | $h_p$ | $h_a$ | $w_p$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A ( <i>mm</i> ) | 11    | 2     | 0.3   | 0.005 | 8.6   |
| B ( <i>mm</i> ) | 6.3   | 2     | 0.3   | 0.01  | 8.6   |
| C ( <i>mm</i> ) | 5     | 2     | 0.3   | 0.01  | 8.6   |

Os resultados obtidos para os diferentes estados de carregamento são mostrados na Figura 6.27. Pode-se ver nesta figura que o sensor da amostra A apresenta maior sinal de voltagem para todos os casos de força. Quando a força é aumentada a magnitude do sinal da amostra A aumenta em maior proporção que as magnitudes das amostras B e C.

Como foi mostrado no caso 1 (item 6.2), os sensores que têm comprimento  $l_p > 5 \text{ mm}$  (ver figuras 6.6, 6.7 e 6.8), na direção das forças aplicadas (eixo  $x$ ), apresentam uma zona efetiva de deformação (não há tensão de cisalhamento) na qual os deslocamentos da estrutura e do sensor são aproximadamente iguais. Desta forma as forças que são transmitidas, nesta zona da estrutura para o sensor são transferidas diretamente produzindo uma voltagem maior para o mesmo nível de força. Portanto, os sensores que têm maior comprimento geram maior potencial elétrico ou voltagem como foi explicado para as figuras 6.6, 6.7 e 6.8.

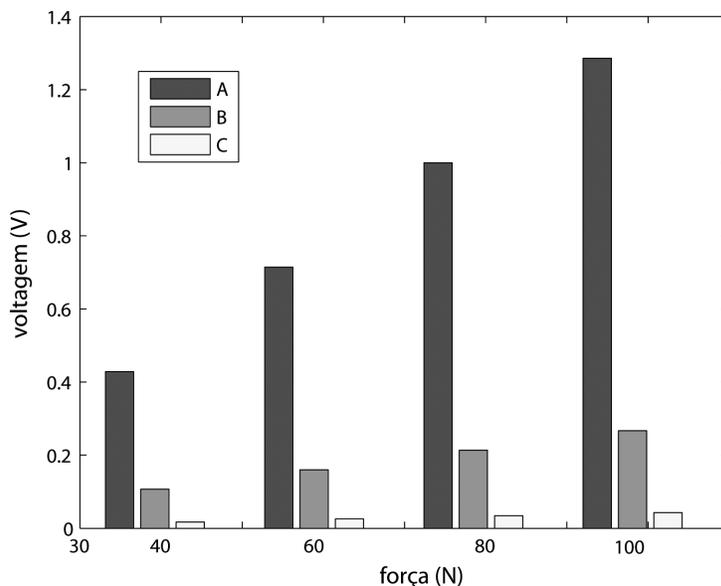


Figura 6.27: Voltagem obtida das amostras A, B e C

### 6.6.3 Efeitos da espessura da camada adesiva na voltagem

Neste teste são usadas duas amostras (A e B) com diferentes espessuras de adesivo. Os sensores das amostras apresentam parâmetros dimensionais iguais, como se observa na Tabela 6.5 (a configuração dos parâmetros é dada pela Figura 6.26). A Tabela 6.5 mostra as propriedades geométricas de cada amostra. Os materiais usados neste teste são: alumínio (es-

trutura), PZT-5H (sensor), adesivo epóxi “Araldite” (camada adesiva).

Tabela 6.5: Propriedades geométricas das amostras da seção 6.6.3 para o teste estático

| Amostra         | $l_p$ | $h_s$ | $h_p$ | $h_a$ | $w_p$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A ( <i>mm</i> ) | 4.5   | 0.3   | 0.3   | 0.01  | 5     |
| B ( <i>mm</i> ) | 4.5   | 0.3   | 0.3   | 0.04  | 5     |

O teste experimental foi realizado com o dispositivo mostrado na Figura 6.24. As forças aplicadas foram controladas usando os mesmos procedimentos expostos no item 6.6.1. Os resultados obtidos nas amostras A e B são mostrados na Figura 6.28.

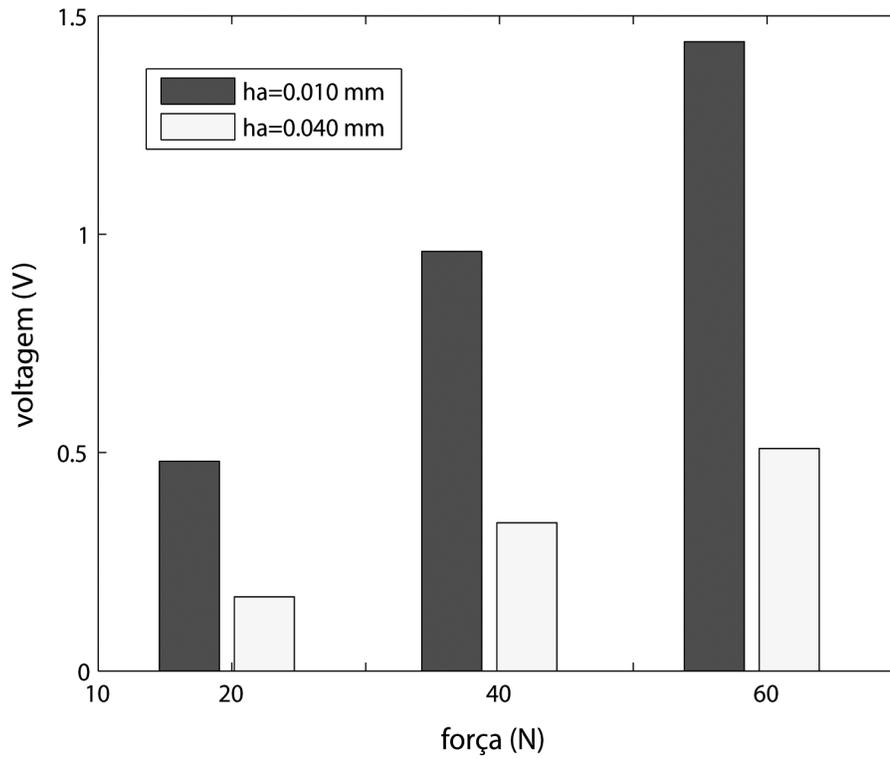


Figura 6.28: Tensão obtida das amostras A e B

Na Figura 6.28 pode-se observar que a tensão obtida com o sensor que apresentava uma espessura adesiva de 0.010 *mm* é maior que a tensão obtida com o sensor que foi colado com uma espessura de 0.040 *mm* em todos os casos de aplicação da força (20, 40 e 60 *N*).

Este efeito foi exposto na Figura 6.15, a qual mostra que quando a espessura da camada adesiva é menor, a voltagem emitida pelo sensor é maior. Verifica-se então que a espessura da camada adesiva influi na voltagem gerada pelos sensores.

#### 6.6.4 Sensor com o eletrodo segmentado, relações de força na amostra 1 com descolagem do lado esquerdo (força não controlada)

Neste teste experimental são avaliadas as relações de força entre os eletrodos do sensor (ver Figura 6.29) na direção da força aplicada. O sensor apresenta descolagem no extremo esquerdo do sensor. O teste é realizado com o objetivo de detectar descolagem no extremo do sensor.

Neste teste foram utilizados os seguintes materiais: alumínio (estrutura), resina epóxi (adesivo), placa de aquisição (dSPACE), PZT- 5H e morsa. A amostra foi submetida a forças de compressão crescentes e aplicadas lentamente, com o objetivo de obter as voltagens em cada eletrodo para diferentes níveis de força. Os parâmetros dimensionais são mostrados na Figura 6.29 e na Tabela 6.6.

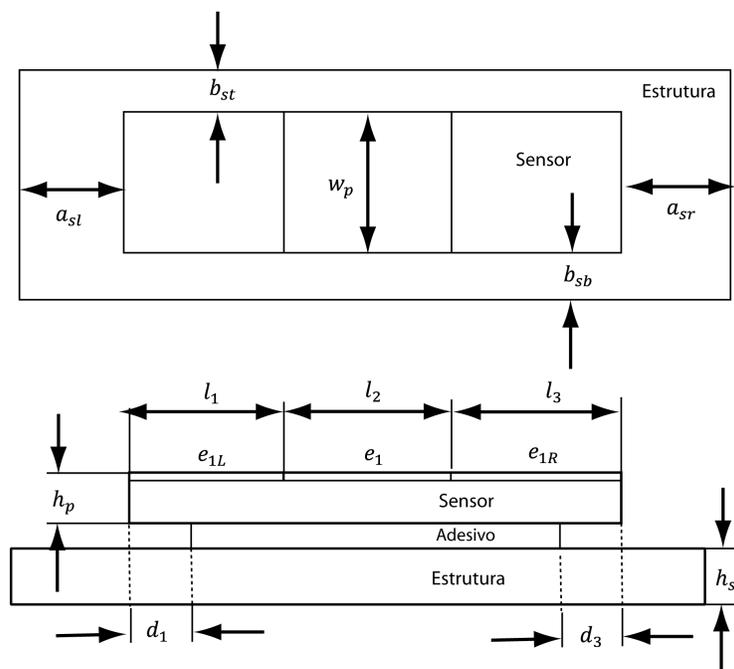


Figura 6.29: Configuração das amostras para sensores segmentados

Tabela 6.6: Propriedades geométricas das amostras do caso 6.6.4 estático (mm)

| Amostra | $d_1$ | $d_3$ | $h_s$ | $a_{sr}$ | $a_{sl}$ | $b_{st}$ | $b_{sb}$ | $w_p$ | $h_p$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ |
|---------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1       | 5     | 0     | 2     | 32       | 32       | 1        | 2.5      | 11    | 0.3   | 10    | 10    | 10    |

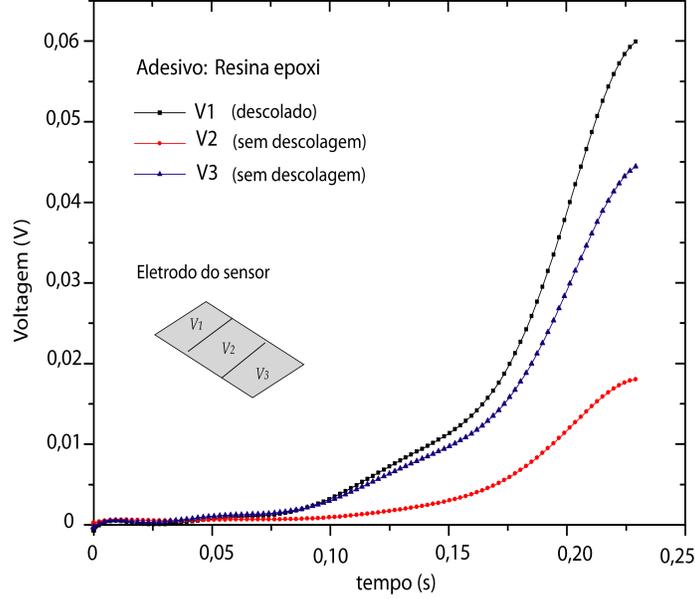


Figura 6.30: Voltagem medida na amostra 1 da Tabela 6.6 devido a aplicação da carga

Na Figura 6.30 são mostradas as voltagens obtidas nos três eletrodos do sensor ao se aplicar a carga. A ordem dos eletrodos é a mesma usada na Figura 6.29 ( $l_1 \rightarrow V1$ ,  $l_2 \rightarrow V2$ ,  $l_3 \rightarrow V3$ ). O teste é considerado quase-estático. Pode-se observar na Figura 6.30 que a voltagem do eletrodo  $e_1$  (eletrodo central) é menor que as voltagens dos eletrodos  $e_{1L}$  e  $e_{1R}$ . Isto é atribuído à distribuição de deformação como foi mostrado nas Figuras 6.6, 6.7, 6.8.

Uma relação pode ser estabelecida para mostrar as mudanças das voltagens entre os eletrodos  $e_{1L}$  ( $V1$ ) e  $e_{1R}$  ( $V2$ ) com respeito ao eletrodo do centro  $e_1$  ( $V2$ ). Na Figura 6.31 observa-se que a relação das voltagens é uma medida linear para os diferentes incrementos de força aplicados à estrutura. As retas mostradas na Figura 6.31 foram obtidas por meio de uma regressão linear. A reta  $V1$  (eletrodo descolado) apresenta uma inclinação de  $\frac{V1}{V2} = 3.36013$  e um coeficiente de correlação de 0.99613. A reta  $V3$  apresenta uma inclinação  $\frac{V3}{V2} = 2.46232$  e um coeficiente de correlação de 0.99209. As inclinações são representadas pelas constantes  $K_1 = \frac{V1}{V2} = \frac{F_1}{F_2}$  (relações de força entre  $e_{1L}$  e  $e_1$ ) e  $K_2 = \frac{V3}{V2} = \frac{F_3}{F_2}$  (relações de força entre  $e_{1R}$  e  $e_1$ ) as quais indicam as relações de força entre os eletrodos. Logo, comparando as inclinações

das retas  $V1$  e  $V2$  é verificado que  $K_1 > K_2$ .

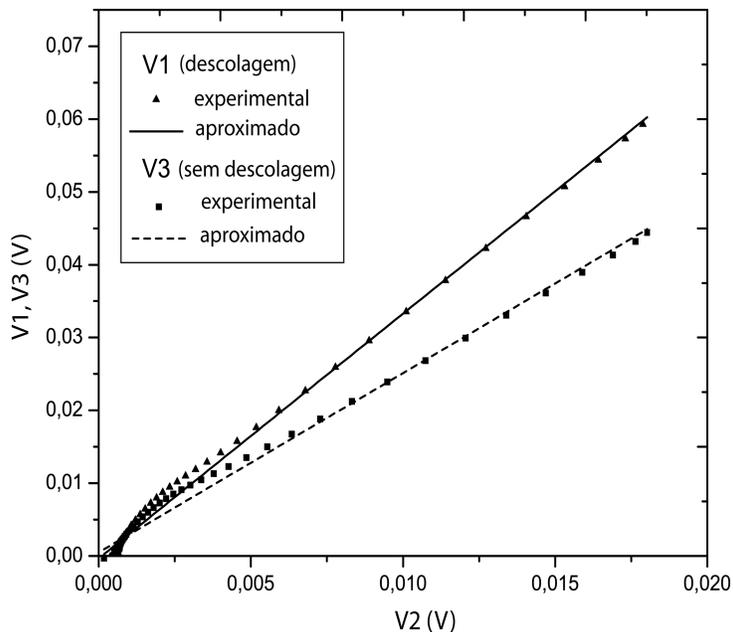


Figura 6.31: Relação das tensões da amostra 1 da Tabela 6.6

No item 4.5 do Capítulo 4 foi demonstrado que as inclinações das relações da tensão representam as relações de força entre os eletrodos (ver Figura 6.17). Estas relações devem ser iguais para os eletrodos dos extremos se a estrutura é deformada axialmente.

Os resultados das inclinações das retas  $V1$  e  $V2$  indicam que as forças dos eletrodos  $e_{1L}$  e  $e_{1R}$  são 3.36013 ( $K_1$ ) vezes e 2.46232 ( $K_2$ ) vezes maiores que a força do eletrodo do centro  $e_1$ . Pode-se notar nos valores das inclinações que o eletrodo com descolagem ( $e_{1L}$ ) apresenta maior inclinação.

A relação de forças entre os eletrodos dos extremos pode ser determinada da seguinte forma  $K_2/K_1 = 0.7323$ . Este valor representa uma porcentagem entre as forças geradas nos eletrodos extremos. O  $K_2/K_1$  pode ser um indicador de descolagem, já que se há uma distribuição simétrica da deformação com respeito ao eletrodo do centro, a relação  $K_2/K_1$  deve ser igual a 1 como foi mostrado nos casos da Figura 6.16, onde as tensões eram iguais para  $e_{1L}$  e  $e_{1R}$ . Portanto as relações  $K_2/K_1$  ou  $K_1/K_2$  podem indicar qual eletrodo está descolado.

### 6.6.5 Sensor com o eletrodo segmentado, relações de força na amostra 2 com descolagem no lado direito

Neste teste são usados os mesmos procedimentos do item 6.6.4. As configurações dimensionais são mostradas na Tabela 6.7 (ver Figura 6.29).

Tabela 6.7: Propriedades geométricas das amostras do caso 6.6.5 estático (mm)

| Amostra | $d_1$ | $d_3$ | $h_s$ | $a_{sr}$ | $a_{sl}$ | $b_{st}$ | $b_{sb}$ | $w_p$ | $h_p$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ |
|---------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 2       | 0     | 3     | 3     | 20       | 20       | 0        | 0        | 10    | 0.3   | 6.5   | 6     | 6.5   |

Na Figura 6.32 mostram-se as inclinações das voltagens  $V1$  e  $V3$ , com respeito à voltagem  $V2$ . Nesta figura, a reta com maior inclinação corresponde ao eletrodo descolado  $V3$  ( $e_{1R}$ ). É importante mencionar que no teste mostrado na seção 6.6.4, a voltagem do eletrodo descolado também apresentava uma inclinação maior (eletrodo  $e_{1L}$ ).

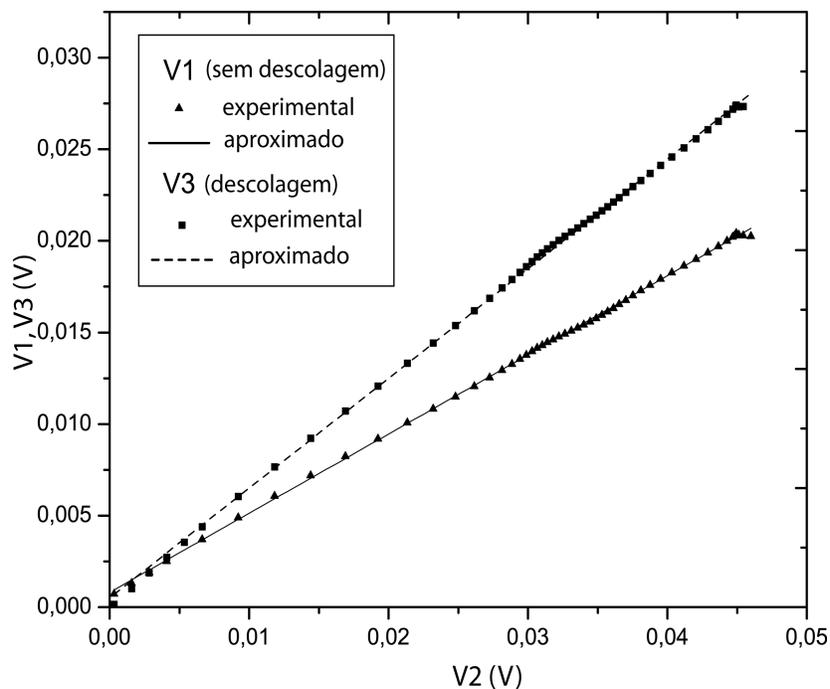


Figura 6.32: Relação das voltagens da amostra 2

As retas mostradas na Figura 6.32 foram obtidas por meio de uma regressão linear com os valores das voltagens  $V1$ ,  $V2$  e  $V3$ . A reta  $V1$  (eletrodo descolado) apresenta uma inclinação de  $K_1 = \frac{V1}{V2} = 0.43232$  e um coeficiente de correlação de 0.99962. A reta  $V3$  apresenta uma inclinação  $K_2 = \frac{V3}{V2} = 0.59887$  e um coeficiente de correlação de 0.99944. Logo, comparando as inclinações é determinado que  $K_1 < K_2$ .

Neste caso a relação de forças entre os eletrodos dos extremos é de  $K_1/K_2 = 0.7219$  (o valor maior de  $K_i$  divide o valor menor de  $K_i$ ,  $i = 1, 2$ , por exemplo no item 6.6.4 a relação foi  $K_2/K_1$ ). Isto novamente indica que a força gerada no eletrodo descolado é maior que no eletrodo completamente colado. Pode-se notar neste caso que os valores das voltagens dos extremos ( $e_{1L}$  e  $e_{1R}$ ) são menores que a voltagem do eletrodo do centro. No item 6.6.4 o valor da voltagem do eletrodo do centro era maior.

Os valores de  $K_1$  e  $K_2$  ( $K_1 = 3.36013$  e  $K_2 = 2.46232$ ) obtidos no item 6.6.4 são maiores que 2, e no item 6.6.5 os valores de  $K_1$  e  $K_2$  ( $K_1 = 0.43232$  e  $K_2 = 0.59887$ ) são menores de 1. Segundo a Figura 6.17 a relação de força entre eletrodos é maior quando o comprimento do sensor é maior e a espessura do adesivo é menor. Portanto, pode-se observar que o sensor preparado no item 6.6.4 apresenta maior comprimento que o sensor do item 6.6.5, e isto verifica os resultados teóricos expostos na Figura 6.17.

Pode-se concluir que os experimentos realizados e mostrados nas seções 6.6.4 e 6.6.5 validaram os resultados obtidos teoricamente com as equações (4.79) e (4.80) e mostrados na seção 6.6.2. É importante mencionar que o método proposto com o eletrodo segmentado foi efetivo para realizar um diagnóstico de descolagem nos eletrodos extremos do sensor, identificando qual eletrodo apresentava descolagem.

# Capítulo 7

## Resultados dinâmicos

### 7.1 Caso 1 dinâmico: Efeitos nas frequências naturais (soluções analíticas e numéricas)

A Tabela 7.1 mostra as propriedades físicas do sensor piezelétrico, da estrutura e da camada adesiva, para este primeiro caso dinâmico. A geometria deste caso e as condições de contorno são as mesmas do caso 1 item 6.2 mostrado na Figura 6.1.

Tabela 7.1: Propriedades geométricas das amostras do caso 1 dinâmico

| Item  | Sensor                  | Estrutura | Adesivo    |
|---|-------------------------|-----------|------------|
|   | PZT-5H                  | Alumínio  | (HC100-X2) |
| Densidade ( $\text{kg m}^{-3}$ )                          | 7500                    | 2700      | 7850       |
| Módulo de Young (GPa)                                     | 127.205                 | 70        | 3.0842     |
| Constante do PZT $d_{31}$ ( $\text{m V}^{-1}$ )           | $-2.74 \times 10^{-10}$ | —         | —          |
| Permissividade relativa, $\varepsilon_{33}/\varepsilon_0$ | 1.470                   | —         | —          |
| Espessura $h$ (mm)  | 0.2667                  | 3         | 0.15       |
| Comprimento $l$ (mm)                                      | 30                      | 30        | 30         |
| Largura $w$ (mm)  | 10                      | 10        | 10         |

A Figura 7.1 mostra os modos de vibração e as frequências naturais obtidas com o software

COMSOL [14]. São indicadas também as frequências naturais calculadas analiticamente através da Equação (5.41). Nesta figura também são mostrados os modos de vibração e as frequências naturais quando o conjunto estrutura-adesivo-piezolétrico apresenta descolagem no extremo esquerdo do sensor, sendo a descolagem de 5 mm.

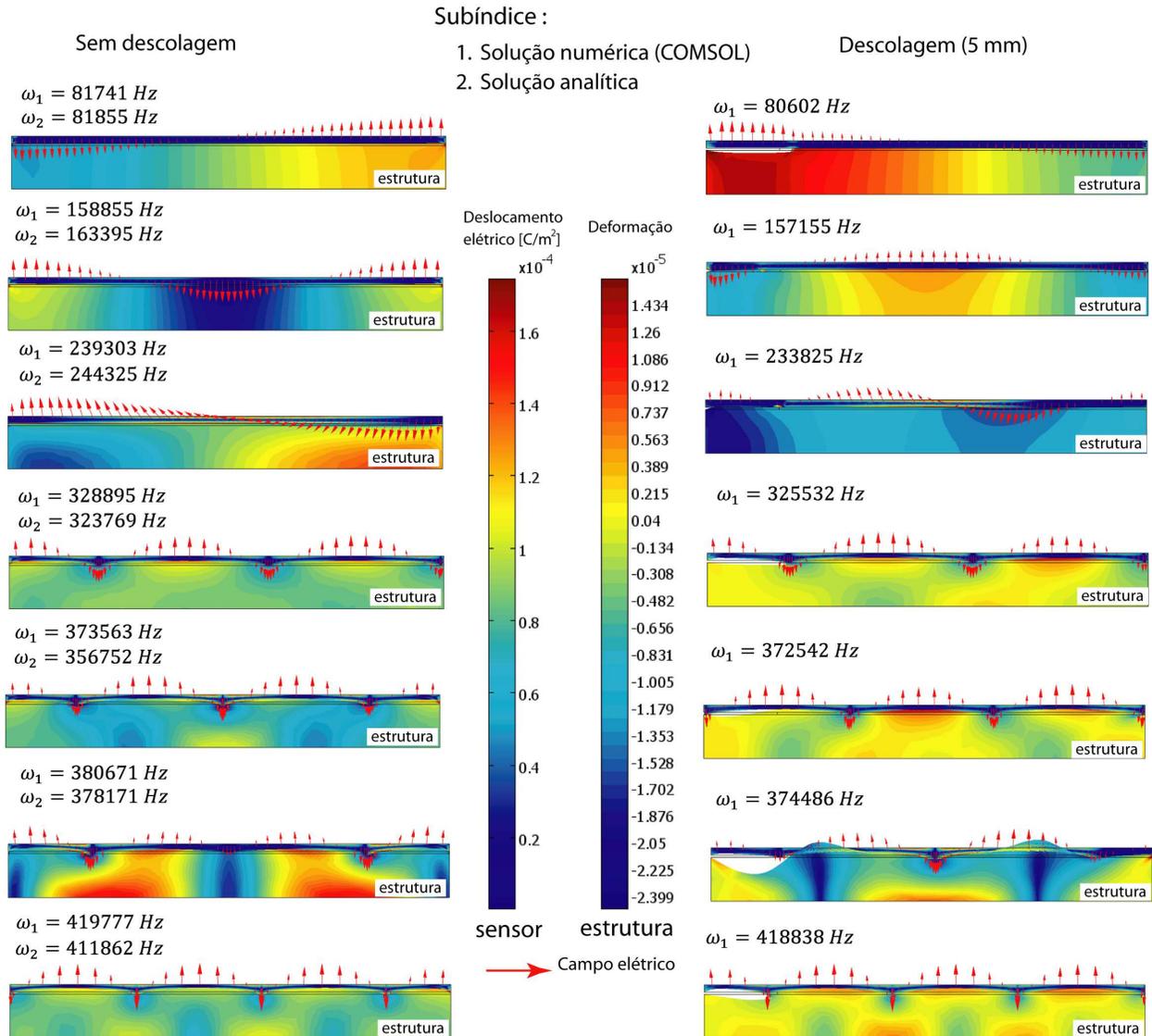


Figura 7.1: Modos de vibração e frequências naturais, a) Colado completamente, b) Descolado à esquerda de 5 mm

As figuras 7.1a e 7.1b apresentam as deformações em cada frequência natural. No sensor são determinados os deslocamentos elétricos e o campo elétrico associado. O campo elétrico é denotado por meio de setas vermelhas. Observa-se que o caso descolado apresenta frequências naturais menores que o caso colado.

## 7.2 Caso 2 dinâmico: Efeitos eletromecânicos pela descolagem (soluções analíticas e numéricas)

Neste caso é usado o mesmo exemplo do caso 1 do item 7.1. As propriedades geométricas e físicas são mostradas na Tabela 7.1.

Para o conjunto estrutura-adesivo-PZT é aplicada uma força periódica no extremo direito da estrutura  $P = 20\text{sen}(20t)$ , com intervalo de tempo de  $1 \times 10^{-3}\text{s}$  e duração  $0.1\text{ s}$  (o tempo de aplicação da força foi escolhido para que a função harmônica possa ser vista, ver Figura 7.2). Para este caso também será considerada a descolagem no extremo esquerdo com um valor de  $5\text{ mm}$ .

A Figura 7.2 mostra os deslocamentos e deformações obtidos na extremidade direita ( $x = l$ ) a partir dos modelos analíticos expostos nas equações (5.69), (5.70), (5.71) e (5.72). Os resultados são comparados com as soluções numéricas obtidas com o COMSOL [14]. Pode-se destacar que as soluções analíticas obtidas para os deslocamentos e as deformações aproximam-se ao modelo numérico realizado em COMSOL. A malha aplicada no modelo realizado no COMSOL apresenta 104007 graus de liberdade e 21484 elementos na geometria usada.

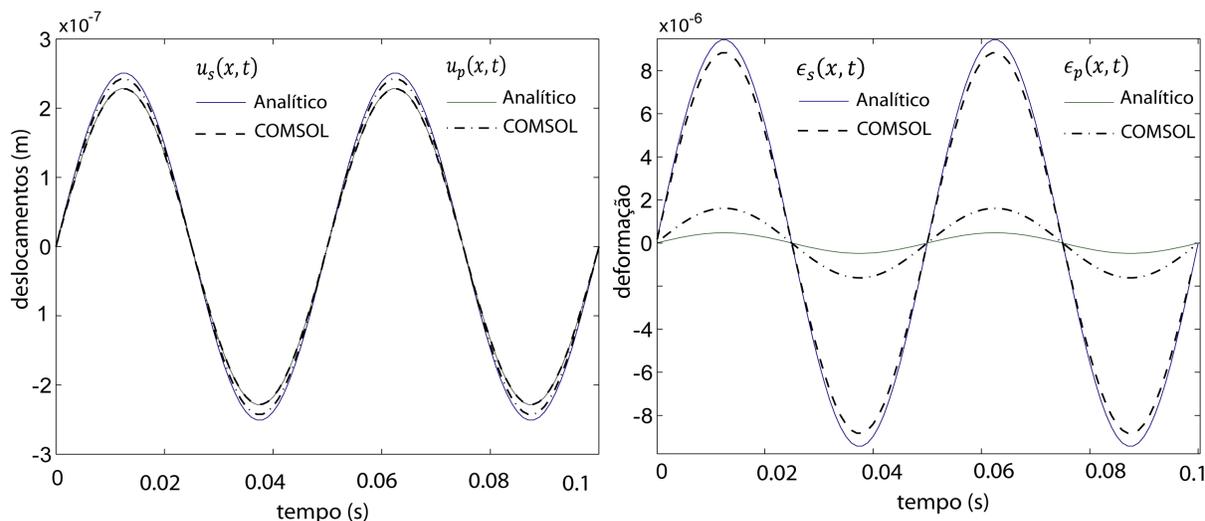


Figura 7.2: Resposta à excitação senoidal, a) Deslocamentos - estrutura e PZT    b)  
Deformações - estrutura e PZT

As figuras 7.3 e 7.4 mostram os gráficos para as deformações da estrutura e do sensor

piezolétrico. Nesta análise são considerados dois casos: quando o sensor está completamente colado e quando o sensor apresenta uma descolagem de  $5\text{ mm}$  no extremo esquerdo.

A deformação no sensor para o intervalo  $x \in (0\text{ m}, 0.005\text{ m})$  é nula como se observa na Figura 7.4b. A distribuição da deformação é simétrica no sensor para condições normais de colagem, mas esta distribuição desloca-se na medida em que o sensor apresenta descolagem. Isto é mostrado na Figura 7.4b.

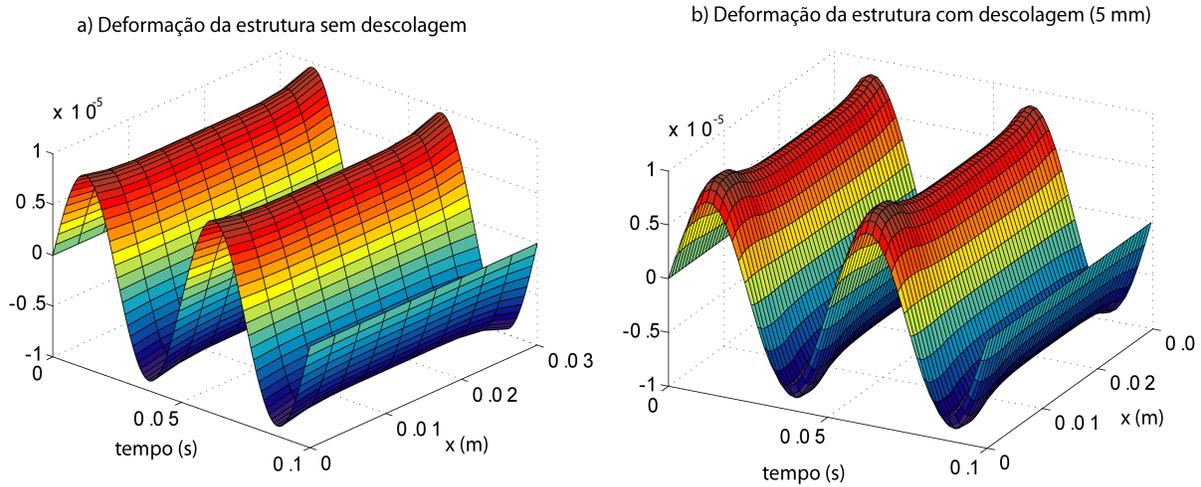


Figura 7.3: Deformações da estrutura para uma excitação senoidal, a) Estrutura sem descolagem, b) Estrutura com descolagem

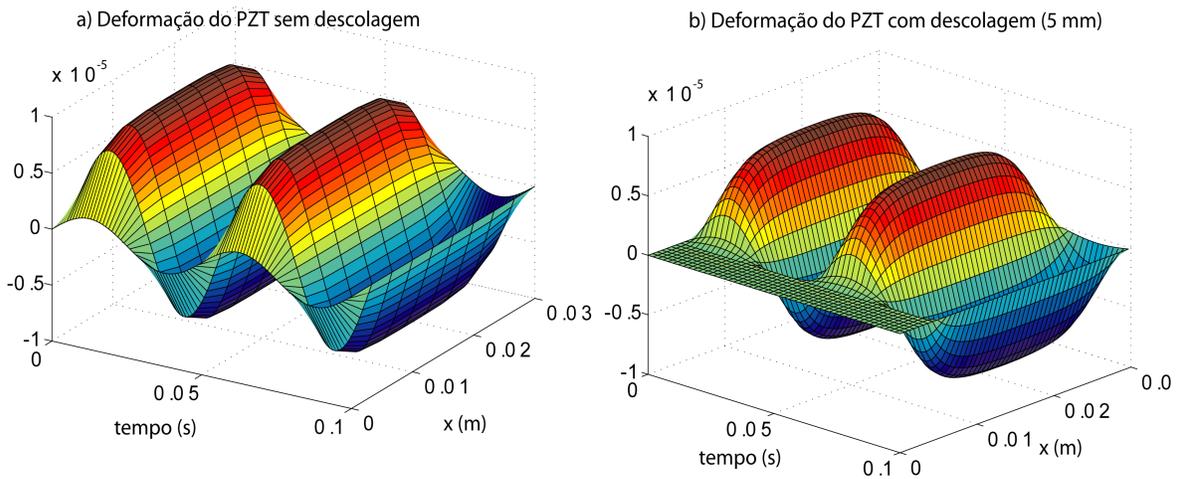


Figura 7.4: Deformações do PZT para uma excitação senoidal, a) PZT sem descolagem, b) PZT com descolagem

Pode-se observar na Figura 7.4b que não há deformação do sensor onde não há união com a estrutura.

Na Figura 7.5 pode-se ver a densidade do campo elétrico determinado para o caso de colagem e descolagem no sensor. Observa-se na Figura 7.5, que no caso de descolagem, o campo elétrico apresenta maior magnitude nos extremos comparado ao caso sem descolagem. Isso ocorre devido às tensões geradas nos extremos.

Os efeitos causados pela descolagem podem ser aproveitados se o eletrodo do sensor for dividido, como foi proposto no Capítulo 4. Para analisar o deslocamento elétrico é considerado um sensor com três eletrodos. Na Figura 7.6 é mostrado o deslocamento elétrico do eletrodo central  $e_1$  (seguindo a notação do Capítulo 4). Na Figura 7.6 observa-se o deslocamento elétrico para o caso de colagem e descolagem. É importante notar que o deslocamento elétrico no caso de descolagem apresenta valores maiores.

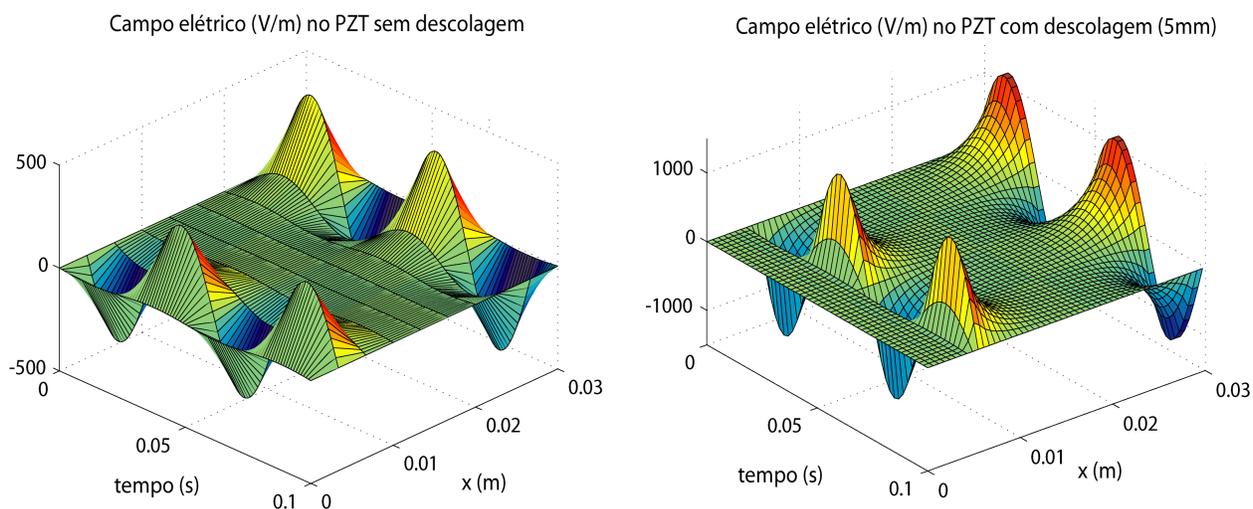


Figura 7.5: Campo elétrico através do PZT

Para um sensor com o eletrodo dividido em três partes, as mudanças do deslocamento elétrico são refletidas em cada eletrodo. A descolagem leva à perda de simetria da deformação através do sensor. A informação obtida por cada eletrodo pode ser usada para determinar diferenças no potencial elétrico de cada segmento. Estes dados podem ser comparados para detectar descolagem no sensor e assim avaliar a efetividade do mesmo.

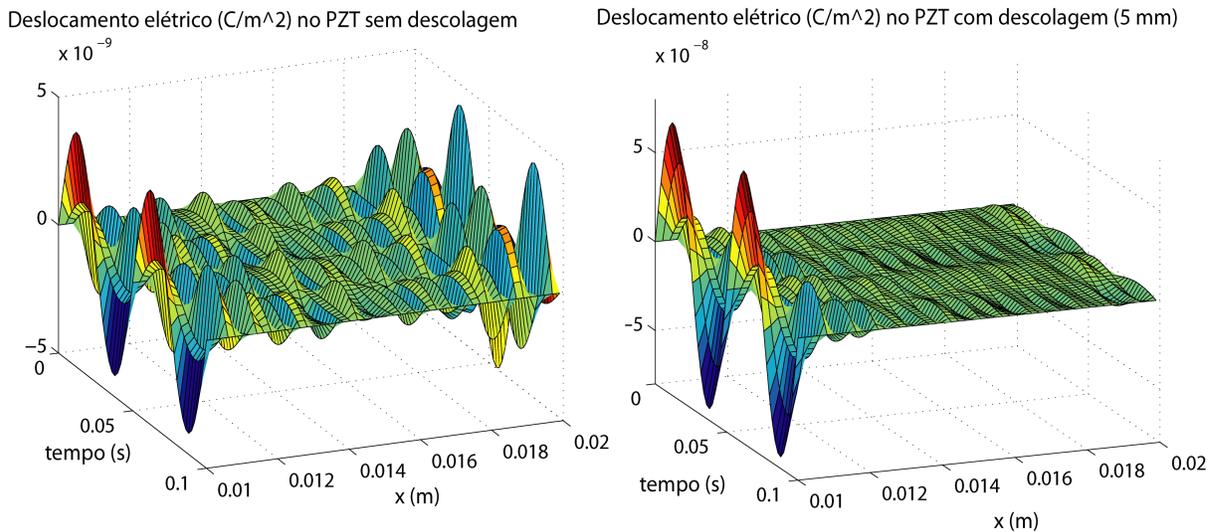


Figura 7.6: Efeitos no deslocamento elétrico do eletrodo central  $e_1$ ,  $x \in (0.010, 0.020)$

### 7.3 Caso 3 dinâmico: Efeitos elétricos para casos de descolagem (soluções numéricas para $d = 0, 5, 10, 15, 20, 25 \text{ mm}$ )

Neste caso é usado o mesmo exemplo do caso 1 do item 7.1. No entanto, para este caso são considerados 5 situações de descolagem (5, 10, 15, 20, 25  $\text{mm}$ ) e um modelo de um sensor completamente colado. A descolagem do sensor foi realizada no extremo esquerdo cujo comprimento descolado é denotado com a letra  $d$ . As propriedades geométricas e físicas são mostradas na Tabela 7.1.

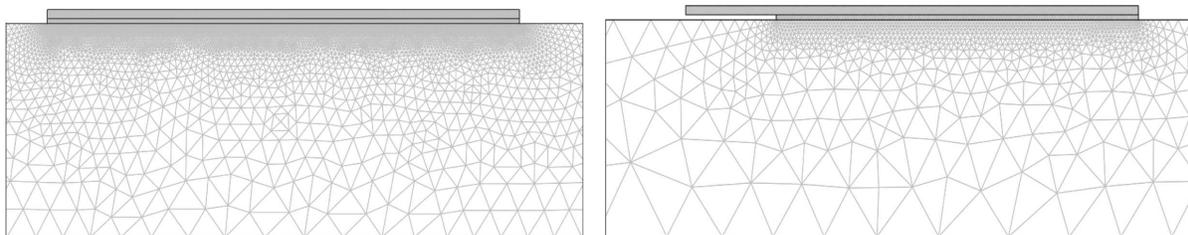


Figura 7.7: Malha gerada para os casos de colagem completa e descolagem do sensor

Os resultados deste exemplo foram obtidos através dos cálculos dos 6 modelos no COMSOL [14], os quais foram discretizados de forma diferente (ver Figura 7.7). Elementos triangulares

foram usados na malha e a Tabela 7.2 mostra as propriedades da malha para cada caso. Neste exemplo é mostrado como a descolagem do sensor piezelétrico influi na carga elétrica gerada.

Tabela 7.2: Número de elementos da malha dos elementos finitos no COMSOL para os vários comprimentos de descolagem

|          | Sensor          | Estrutura       | Adesivo         |
|----------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $d$ (mm) | N° de elementos | N° de elementos | N° de elementos |
| 0        | 583             | 1137            | 292             |
| 5        | 400             | 1010            | 244             |
| 10       | 711             | 843             | 196             |
| 15       | 320             | 740             | 149             |
| 20       | 252             | 514             | 101             |
| 25       | 201             | 349             | 54              |

A estrutura está submetida a uma força  $F = 20 \sin(20t)$  N no extremo direito. Esta força  $F$  é aplicada durante 0.1 s com um tempo de amostragem de 0.001s.

Na Figura 7.8 observa-se a carga elétrica gerada no sensor piezelétrico para os diferentes casos de descolagem. Pode-se ver que à medida que o sensor é descolado a carga elétrica não muda de forma considerável. Nos casos de  $d = 5$ ,  $d = 10$  e  $d = 15$  mm, pode-se considerar que a carga elétrica apresenta uma variação entre 15% e 20%. Quando o sensor é descolado com os comprimentos  $d = 20$  e  $d = 25$  mm as mudanças na carga elétrica estão entre 35% e 60%.

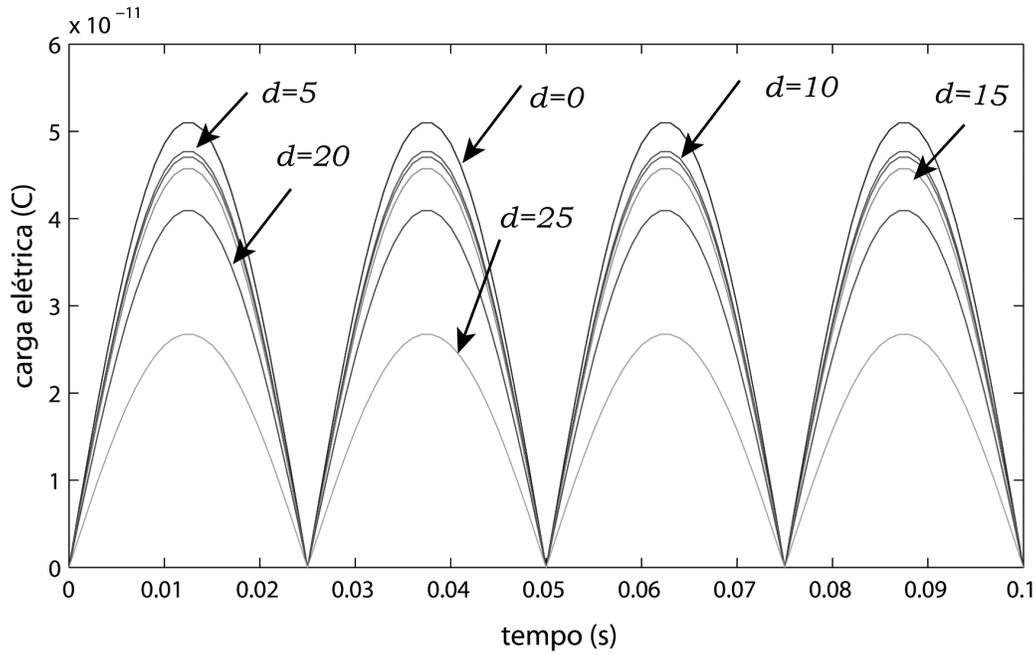


Figura 7.8: Carga elétrica gerada no sensor para os diferentes casos de descolagem (5, 10, 15, 20, 25 mm)

Os resultados da Figura 7.8 mostram que quando o sensor começa a descolar, a carga elétrica gerada diminui.

Com os valores de carga elétrica obtidos em cada caso de descolagem pode-se calcular a voltagem e a corrente com as equações (2.56) e (2.59). Com a voltagem e a corrente emitida pela sensor pode-se calcular a potência elétrica consumida pelo sensor com a Equação (2.58).

Na Figura 7.9 é mostrada a relação  $\eta$  (ver Equação 2.61) para cada porcentagem de descolagem. Nesta figura observa-se que a potência vai diminuindo quando o sensor apresenta maior porcentagem de descolagem. O rendimento do sensor começa a diminuir mais significativamente depois de uma porcentagem de descolagem de 50% com respeito ao comprimento inicial, e corresponde a  $\eta = 80\%$  e quando o sensor apresenta o 83.83% de descolagem o rendimento do sensor esta em 20% aproximadamente. Estes resultados demonstram que o valor do rendimento  $\eta$  pode ser um indicador descolagem.

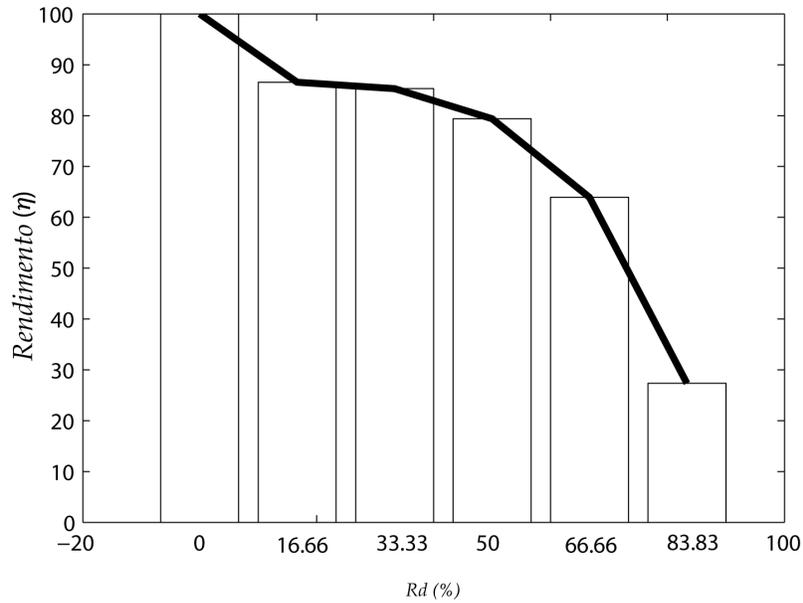


Figura 7.9: Rendimento ( $\eta$ ) do sensor para diferentes comprimentos de descolagem ( $d$ )

## 7.4 Caso 4 dinâmico: Análise dinâmica experimental

### 7.4.1 Variações na potência elétrica e admitância elétrica do sensor para casos de descolagem

#### a) Caso 1 experimental: sensor 50% descolado comprimento de 15 mm

Neste teste experimental foi usada uma estrutura de alumínio, dois sensores piezelétricos (PZT 5H) e um atuador piezelétrico (PZT 5H). Os sensores foram colados da seguinte forma na estrutura: sensor 1 colado completamente à estrutura, sensor 2 com 50% do seu comprimento colado à estrutura. Os sensores e atuadores foram colados à placa por meio de uma camada de resina epóxi. A Figura 7.10 mostra a configuração dos sensores e do atuador na amostra. A Tabela 7.3 e a Figura 6.26 mostram as dimensões de alguns parâmetros da estrutura, do sensor e da camada adesiva.

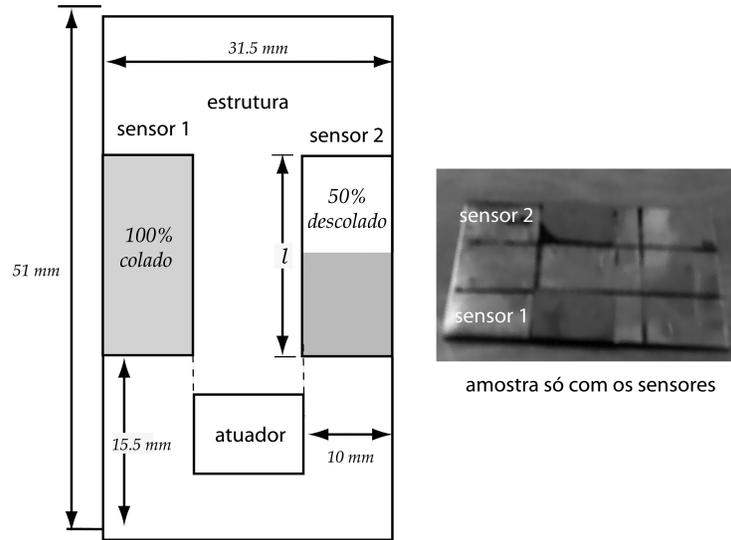


Figura 7.10: Caso 1 experimental, placa de alumínio com dois sensores, sensor 1 colado completamente e sensor 2 parcialmente colado, seção 7.4.1

Tabela 7.3: Propriedades geométricas da seção 7.4.1, caso 1 experimental (mm)

| sensor    | $l$ | $h_s$ | $h_p$ | $h_a$ | $w_p$ |
|-----------|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1         | 15  | ...   | 0.3   | 0.35  | 10    |
| 2         | 15  | ...   | 0.3   | 0.40  | 10    |
| estrutura | 51  | 0.3   | ...   | ...   | 31    |

Neste teste foi usada a placa de aquisição USB 6211 da National Instruments com um algoritmo em MATLAB usando a ferramenta do *Data Acquisition Toolbox* [17]. No atuador piezolétrico foi aplicada uma voltagem  $V(t)$  com as seguintes características:

$$V(t) = 8\text{sen}(\omega t), \quad (7.1)$$

onde  $\omega$  é a frequência em  $Hz$  e  $t$  o tempo em  $s$ . Para aplicar o sinal dado pela Equação (7.1) foi realizada uma varredura na frequência de 0 até  $50000Hz$  da seguinte maneira:

1. Foi definida a frequência de amostragem como  $f_s = 100000 Hz$ . Portanto o intervalo de amostragem é de  $t_s = 1/f_s$ .
2. O número de amostras a obter no tempo final de aquisição  $t_f = 0.1 s$  foi de  $n_a = 10000$  amostras.

3. Para a construção do vetor de frequências se estabeleceu que  $\omega \in (0, f_s)$  em  $Hz$  com incrementos de  $f_s/(n_a - 1)$ .
4. O vetor tempo foi construído com  $t \in (0, t_f)$  com incrementos de tempo de  $t_s$ .
5. Os vetores  $t$  e  $\omega$  apresentam 10000 elementos. Desta forma os valores de  $t$  e  $\omega$  são substituídos na Equação (7.1).

Os valores determinados para  $V(t)$  são aplicados no atuador mostrado na Figura 7.10. Os sensores 1 e 2 emitem voltagens depois da aplicação da voltagem  $V(t)$  no atuador por meio da placa de aquisição. As voltagens obtidas dos sensores 1 e 2 são chamados de  $V1(t)$  (sensor 1 sem descolagem) e  $V2(t)$  (sensor 2 com descolagem de 50% do comprimento inicial). Com os dados das voltagens  $V1(t)$  e  $V2(t)$  determinam-se as correntes elétricas respectivas para cada sensor usando a Equação (2.60). Depois é determinada a potência consumida pelos sensores, usando a Equação (2.58) mostrada no Capítulo 2. A Figura 7.11 mostra a potência consumida por cada sensor no tempo  $t \in (0, 0.05)$  s. Pode-se observar que a magnitude do valor absoluto da potência consumida pelo sensor 1 é maior que a potência consumida pelo sensor 2. É importante mencionar que a potência elétrica se mostra como um indicador de descolagem.

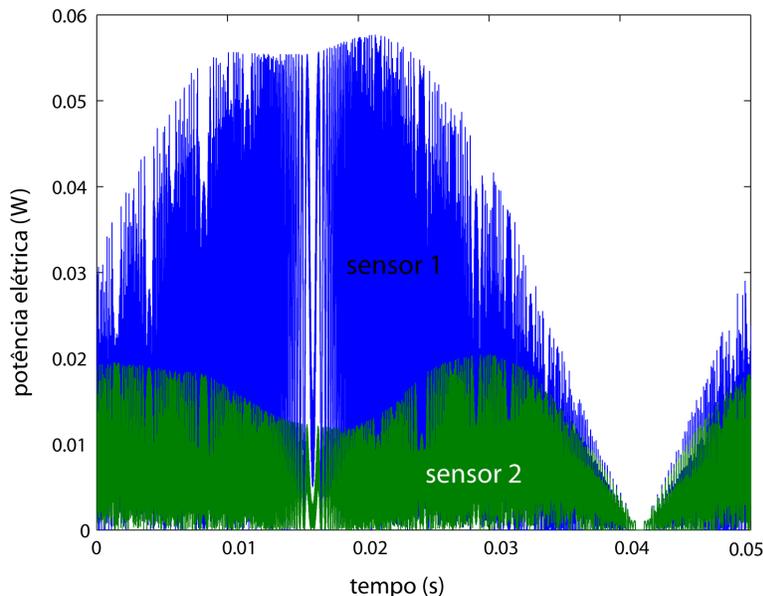


Figura 7.11: Valor absoluto da potência elétrica consumida pelo sensor 1 (100% colado) e sensor 2 (50% colado) da amostra 1 (caso 1) no tempo

**b) Caso 2 experimental: sensor 50% descolado comprimento de 8 mm**

Tabela 7.4: Propriedades geométricas do caso 7.4.1 dinâmico, caso 2 experimental (mm)

| sensor    | $l$ | $h_s$ | $h_p$ | $h_a$ | $w_p$ |
|-----------|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1         | 8   | ...   | 0.3   | 0.03  | 8     |
| 2         | 8   | ...   | 0.3   | 0.03  | 8     |
| estrutura | 51  | 0.3   | ...   | ...   | 31    |

Neste teste experimental foi usada a mesma estrutura do caso 1 (item 7.4.1a), dois sensores piezelétricos (PZT 5H) e um atuador piezelétrico (PZT 5H).

Os sensores foram colados da mesma forma que no caso 1, ou seja sensor 1 colado completamente à estrutura e sensor 2 com 50% da sua área colada à estrutura. Os sensores e atuadores foram colados à estrutura por meio de uma camada de resina epóxi. A Figura 7.12 mostra a configuração dimensional dos sensores e do atuador. A Tabela 7.4 e a Figura 6.26 mostram as dimensões de alguns parâmetros da estrutura, do sensor e da camada adesiva.

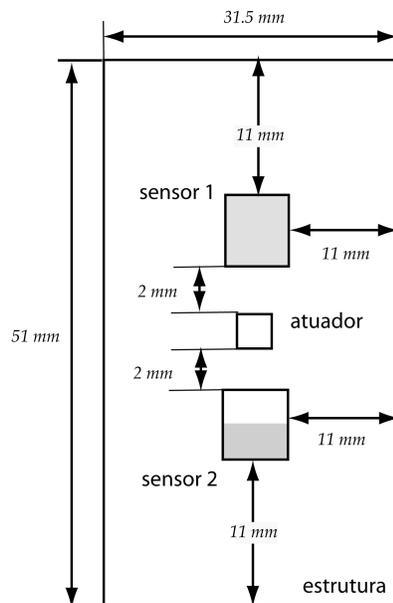


Figura 7.12: Caso 2 experimental, placa de alumínio com dois sensores, sensor 1 colado completamente e sensor 2 parcialmente colado, seção 7.4.1

Na Figura 7.13 é mostrada a potência consumida pelos sensores 1 e 2 depois de aplicada uma voltagem no atuador ( $V(t) = 8sen(\omega t)$ ), o mesmo potencial elétrico aplicado na seção

7.4.1 caso 1 experimental). As características do sistema de aquisição são as mesmas da seção 7.4.1 caso 1 experimental. O procedimento para obter a potência consumida nos sensores é o mesmo exposto na seção 7.4.1 caso 1 experimental.

Pode-se observar na Figura 7.13 que o valor absoluto da potência elétrica consumida pelos sensores 1 e 2 apresentam diferentes níveis. A potência consumida no sensor 1 é maior que a potência no sensor 2. Isto indica que o sensor 2 pode ser identificado como um sensor descolado se é tomada como referência a potência do sensor 1. Portanto verifica-se qual sensor apresenta descolagem neste caso.

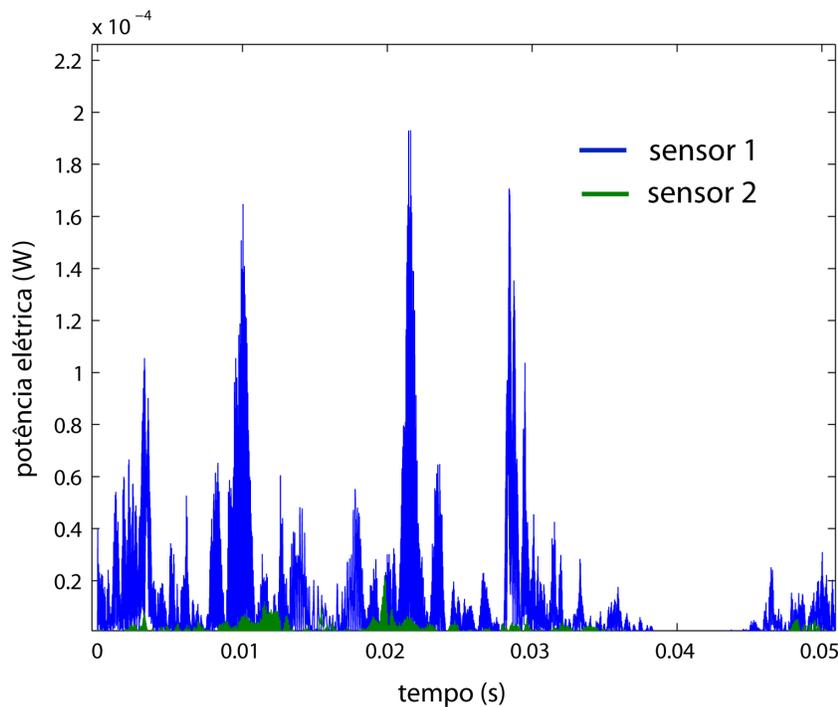


Figura 7.13: Valor absoluto potência elétrica consumida pelo sensor 1 (100% colado) e sensor 2 (50% colado) da amostra 2 (caso 2) no tempo

Deve-se levar em conta que os sensores deste caso apresentam menor tamanho que os sensores da seção 7.4.1 do caso 1 experimental. Desta forma os sensores do caso 2 consomem menor potência elétrica para o mesmo sinal de referência.

c) **Caso 3 experimental: sensores com 50% e 70% de descolagem**

Tabela 7.5: Propriedades geométricas da seção 7.4.1 dinâmico caso 3 experimental (mm)

| sensor    | $l$ | $h_s$ | $h_p$ | $h_a$ | $w_p$ |
|-----------|-----|-------|-------|-------|-------|
| 1         | 5   | ...   | 0.3   | 0.2   | 8     |
| 2         | 5   | ...   | 0.3   | 0.2   | 8     |
| estrutura | 51  | 0.3   | ...   | ...   | 31    |

Neste teste experimental foi usada a mesma geometria para a estrutura da seção 7.4.1 caso 1 experimental e 2 experimental, dois sensores piezelétricos (PZT 5H) e um atuador piezelétrico (PZT 5H). Os sensores foram colados da seguinte forma: sensor 1 com 50% do seu comprimento colado à estrutura e sensor 2 colado 30% do seu comprimento à estrutura. Os sensores e atuadores foram colados à estrutura de alumínio por meio de uma camada de resina epóxi. A Figura 7.14 mostra a configuração dimensional dos sensores 1 e 2 e a posição do atuador na estrutura. A Tabela 7.5 (o significado das dimensões é mostrado na Figura 6.26) mostra as dimensões dos parâmetros da estrutura, do sensor e da camada adesiva.

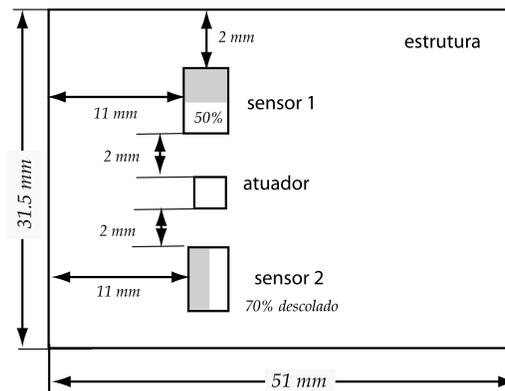


Figura 7.14: Caso 3 experimental, placa de alumínio com dois sensores, sensor 1 colado 50% e sensor 2 colado 30%, seção 7.4.1

Na Figura 7.15 é mostrada a potência consumida pelos sensores 1 (colado 50%) e 2 (colado 30%) depois de aplicada uma voltagem no atuador ( $V(t) = 8sen(\omega t)$ , o mesmo potencial elétrico aplicado no caso 1 e 2 do item 7.4.1). As características do sistema de aquisição são

as mesmas do caso 1 e 2. O procedimento para obter a potência consumida nos sensores é a mesma exposta no caso 1 e 2.

Pode se observar na Figura 7.15 que o valor absoluto da potência consumida pelos sensores 1 e 2 apresentam pequenas variações entre os dois sinais de potência determinados. Nesta Figura não é possível concluir qual sensor apresenta maior potência à primeira vista.

No entanto para diferenciar o valor é determinado o valor RMS para os dois sinais de potência obtendo-se os seguintes resultados: para o sensor 1 a potência RMS foi de  $4.72 \times 10^{-8}$  W e para o sensor 2 a potência RMS foi de  $3.63 \times 10^{-8}$  W. Portanto, o resultado indica que o sensor 1 apresenta uma potência RMS maior que o sensor 2. Em todos os casos expostos (1, 2 e 3 item 74.1) o valor da potência em cada teste indicou que sensor apresentava maior descolagem tomando como referência a potência consumida.

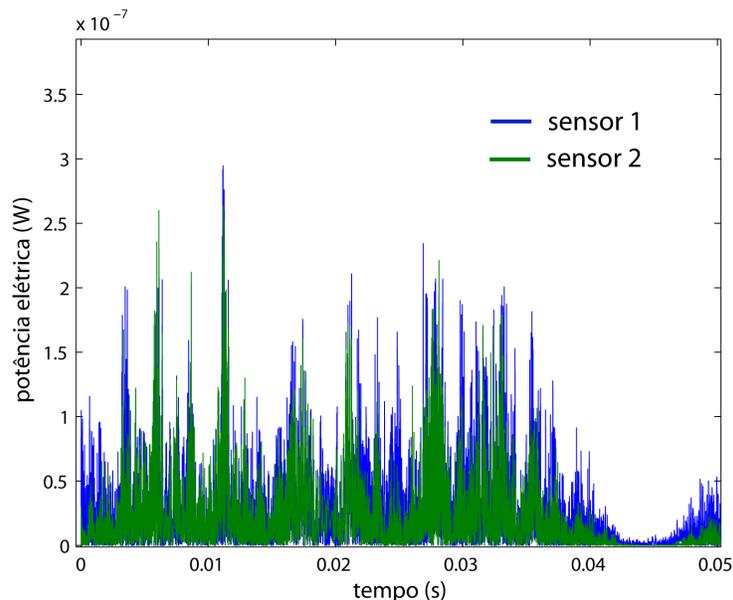


Figura 7.15: Valor absoluto da potência elétrica consumida pelo sensor 1 (50% colado) e sensor 2 (30% colado) da amostra 2 (caso 2) no tempo

#### d) Comparação e discussão dos casos 1, 2 e 3 do item 7.4.1

Para os casos 1, 2 e 3 do item 7.4.1 é estabelecida uma medida na forma de porcentagem para quantificar os sinais das potências mostrados nas figuras 7.11, 7.13 e 7.15. A Tabela 7.6 mostra os valores das potências RMS de cada caso mostrado no item 7.4.1. Nos três casos os

valores das potências RMS dos sensores que apresentam descolagem são menores comparados com os valores de potência RMS dos sensores colados completamente.

Tabela 7.6: Potência RMS para os casos 1, 2 e 3 (W)

| Caso | Colagem completa      | Descolagem parcial    |
|------|-----------------------|-----------------------|
| 1    | 0.0238                | 0.0072                |
| 2    | $2.4 \times 10^{-5}$  | $1.72 \times 10^{-6}$ |
| 3    | $4.72 \times 10^{-8}$ | $3.63 \times 10^{-8}$ |

A Figura 7.16 mostra uma porcentagem para os três casos expostos no item 7.4.1. A porcentagem mostrada na Figura 7.16 foi determinada da seguinte forma: as potências RMS de cada caso (ver Tabela 7.6) é dividida pela potência RMS obtida nos sensores colados completamente. Nesta figura pode-se verificar que nos três casos os sensores que apresentam descolagem parcial podem ser identificados. Os experimentos realizados comprovam que a potência elétrica pode ser uma indicadora do rendimento do sensor. Esta metodologia pode ser aplicada para monitorar a integridade do acoplamento estrutura-sensor.

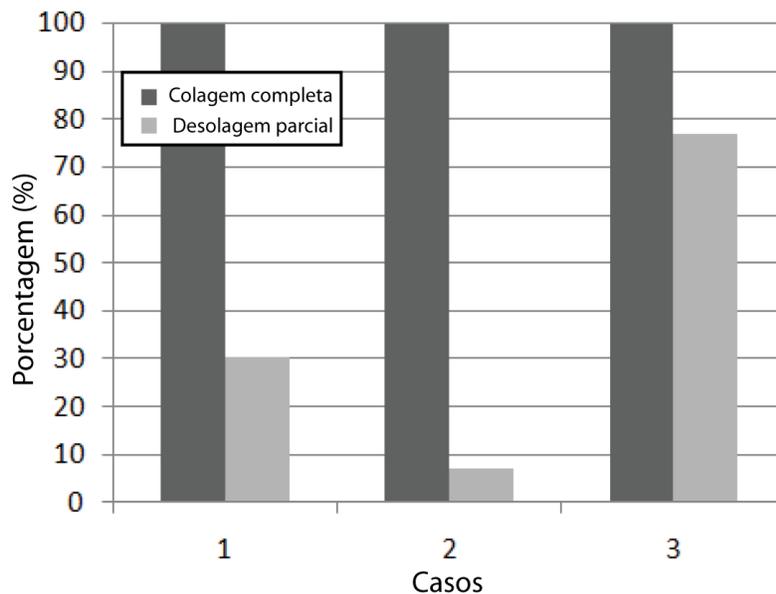


Figura 7.16: Porcentagem das potências RMS para os casos 1, 2 e 3

## 7.4.2 Identificação de descolagem com um sensor de 3 eletrodos

Neste teste experimental foi usada uma estrutura de alumínio, dois sensores piezelétricos (PZT 5H) e um atuador piezelétrico (PZT 5H). Os sensores foram colados da seguinte forma na estrutura: sensor 1 colado completamente à estrutura, sensor 2 colado 80% à estrutura. O eletrodo 3 do sensor 2 apresenta uma descolagem de 50% aproximadamente. Os sensores e atuadores foram colados à placa por meio de uma camada de resina epóxi.

A Figura 7.17 mostra a configuração dimensional dos sensores e do atuador na amostra. A Tabela 7.1 (o significado das dimensões é mostrado na Figura 6.26) mostra as dimensões de alguns parâmetros da estrutura, do sensor e da camada adesiva.

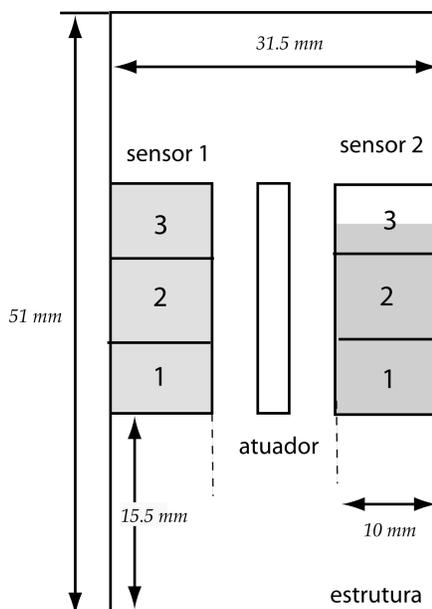


Figura 7.17: Placa de alumínio com dois sensores de 3 eletrodos, sensor 1 colado completamente e sensor 2 parcialmente colado (80%)

Tabela 7.7: Propriedades geométricas da Figura 7.19 (dimensões em mm)

| sensor | $d_1$ | $d_3$ | $h_s$ | $w_p$ | $h_p$ | $l_1$ | $l_2$ | $l_3$ | $h_a$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 0     | 0     | 2     | 11    | 0.3   | 10    | 10    | 10    | 0.3   |
| 2      | 0     | 2     | 0.3   | 10    | 0.3   | 4     | 4     | 4     | 0.2   |

Neste teste foram usados os mesmos procedimentos do item 7.4.1. No atuador piezelétrico foi aplicada a voltagem  $V(t)$  da Equação (7.1) Para aplicar (7.1) na frequência foi realizada

uma varredura na frequência de 0 até  $20000Hz$  (o procedimento de aplicação da varredura em frequência é o mesmo do item 7.4.1).

Serão comparadas as voltagens obtidas em cada eletrodo ( $V1$ ,  $V2$  e  $V3$ , notação mostrada no Capítulo 4) depois de aplicada a voltagem da Equação (7.1) ao atuador. Isto com o objetivo de determinar as relações de força entre os três eletrodos. No Capítulo 4 está exposta a metodologia aplicada neste caso. As voltagens obtidas no sensor 1 foram relacionadas da seguinte forma:  $V2$  (eletrodo central) contra  $V1$  e  $V3$  eletrodos dos extremos. Para os dados obtidos do sensor 1 aplicou-se uma regressão linear para aproximar os dados experimentais. Os resultados da regressão linear são mostrados na Figura 7.18. As inclinações obtidas para a relações  $V1/V2$  e  $V2/V3$  são de  $Rf_1 = 0.97833$  e  $Rf_2 = 0.98102$ . Os resultados das inclinações mostram que as relações de força entre os eletrodos extremos são aproximadamente iguais.

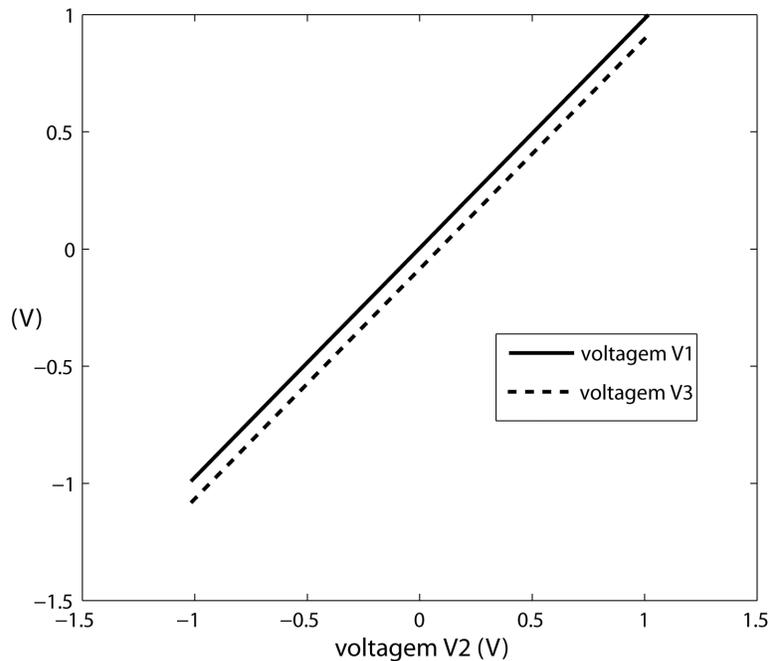


Figura 7.18: Relação das voltagens  $V2$  com  $V1$  e  $V3$  (regressão linear)

Dividindo os valores das inclinações ( $Rf_1$  entre  $Rf_2$ ) obtemos a relação de força entre os eletrodos dos extremos (1 e 3) tal que  $Rf_3 = 0.9892$ . O resultado mostra que as forças entre os eletrodos extremos são aproximadamente as mesmas. Os valores das inclinações são  $44.335$  ( $Rf_1$ ) graus e  $44.6455$  ( $Rf_2$ ) graus. Isto demonstra que as inclinações são aproximadamente iguais.

Para o sensor 2, também foram obtidas as voltagens  $V1$ ,  $V2$  e  $V3$  quando foram aplicados os valores das voltagens obtidas por meio da Equação (7.1). Da mesma forma, foram realizados os mesmos procedimentos para obter a Figura 7.18. Portanto aplicou-se uma regressão linear para os dados das relações das voltagens  $V1/V2$  e  $V3/V2$  obtidas como o sensor 2. As retas obtidas por meio da regressão são mostradas na Figura 7.19. As inclinações determinadas nas retas para as relações  $V1/V2$  e  $V3/V2$  são  $Rf_1 = 1.1523$  e  $Rf_2 = 0.1426$ . Os coeficientes angulares para  $Rf_1$  e  $Rf_2$  são 49.0476 graus e 7.9696 graus. Comparando as relações de força pode-se ver que mudam consideravelmente.

O valor de  $Rf_1$  do sensor 2 mostra que a relação de força do eletrodo 1 (sem descolagem) com o eletrodo do centro é aproximadamente igual a  $Rf_1$  e  $Rf_2$  do sensor 1. Também o ângulo da inclinação de  $Rf_1$  do sensor 2 coincide com os ângulos de  $Rf_1$  e  $Rf_2$  do sensor 1, o qual apresenta um desvio aproximado de 4 graus.

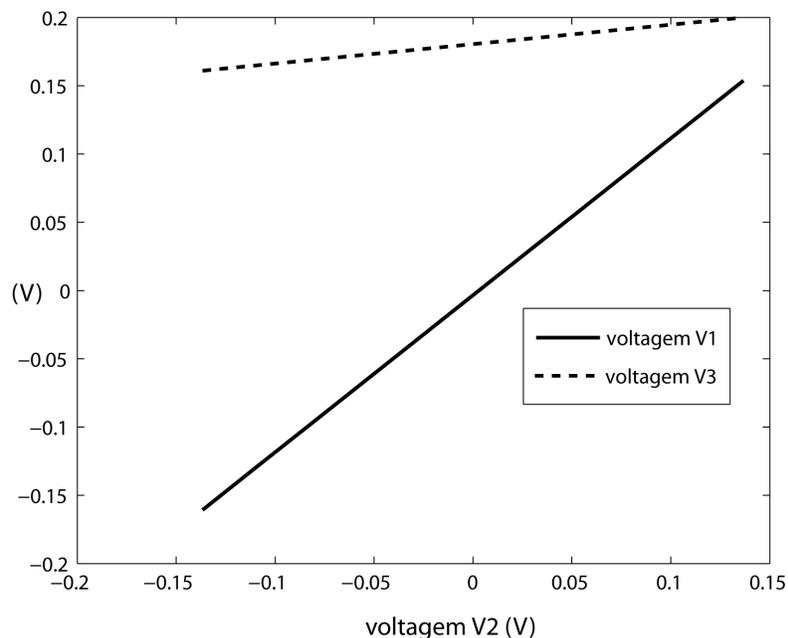


Figura 7.19: Relação das voltagens  $V2$  com  $V1$  e  $V3$  para o caso de descolagem (regressão linear)

Com esta metodologia pode-se indicar qual eletrodo está descolado (neste caso o eletrodo 3 do sensor 2). Neste caso também mostra-se a importância de ter uma relação de força equilibrada entre os eletrodos do sensor, como foi mostrado na Figura 6.17. Já que se existem relações de força ( $V1/V2$  e  $V3/V2$ ) muito maiores que 1, possivelmente os extremos

do sensor começaram a descolar se pela desigualdade de forças entre eles. É importante mencionar que as relações de força dependem dos parâmetros geométricos e físicos do conjunto estrutura-adesivo-sensor. Portanto esses parâmetros podem ser usados para efetuar um desenho adequado da montagem do conjunto.

# Capítulo 8

## Conclusões

Neste trabalho verificou-se como as propriedades geométricas do adesivo influem na relação de deformação entre a estrutura e o sensor piezelétrico. Fatores como a espessura, comprimento do adesivo e do sensor têm relação direta com a transmissão de forças através do adesivo.

Através da variação de alguns parâmetros geométricos foi mostrado como as deformações e tensões no sensor e na estrutura eram modificadas devido às mudanças de espessura e comprimento do adesivo. Estes resultados foram obtidos com uma análise paramétrica realizada em um modelo axial analítico que incluía os efeitos de cisalhamento da camada adesiva. Os resultados do modelo analítico foram comparados com os resultados obtidos no software COMSOL.

No estudo numérico estático dois tipos de tensões foram analisadas, as tensões de cisalhamento (efeito "shear lag") e as tensões normais que aparecem na superfície colada entre o adesivo/sensor e estrutura/adesivo. As tensões de cisalhamento e as tensões normais apresentam maior magnitude nos extremos da interface colada. No entanto, as tensões normais que aparecem nos extremos da interface estrutura/adesivo são maiores que as tensões normais que aparecem na interface adesivo/PZT.

Um sensor com três eletrodos foi proposto para mostrar o efeito da simetria da deformação através do sensor no caso de aplicação de força axial na estrutura. Com as equações constitutivas foram obtidos os sinais elétricos em cada eletrodo do sensor. Por meio das deformações

se estabeleceram relações entre as voltagens dos eletrodos. Foi demonstrado analiticamente que estas relações correspondiam às relações de força entre os eletrodos. Os resultados das relações de força mostraram como os parâmetros do adesivo e do sensor podem modificar as relações de força através do sensor. Estes resultados ajudam a compreender como se pode diminuir as tensões nos extremos através da diminuição das relações de força entre os eletrodos, procurando que estas tornem-se mais próximas do valor unitário. Para isso é necessário controlar os parâmetros dimensionais através da seleção dos valores adequados de espessura do adesivo e comprimento do sensor usando as relações de força entre os eletrodos (por exemplo ver a Figura 6.17). Este método poderia ser usado no projeto de sensores.

No teste experimental estático os resultados mostraram que a variação da espessura e do comprimento modificam o potencial elétrico quando a estrutura é submetida a uma força determinada. Os resultados estáticos obtidos para um sensor com três eletrodos demonstraram e comprovaram que existe uma relação linear entre as voltagens dos eletrodos dos extremos com o eletrodo central como previsto pelo modelo analítico. Neste teste também se verificou que as relações da voltagem entre os eletrodos representam as relações de força entre eles. Para mostrar a vantagem de um sensor com três eletrodos foram realizados dois testes experimentais em dois sensores descolados parcialmente. Com as relações de força determinadas através das voltagens dos eletrodos, foi possível detectar a descolagem parcial dos sensores. Portanto, esta técnica poderia ser usada como um indicador de descolagem parcial.

Na análise dinâmica as frequências naturais determinadas para o conjunto estrutura-adesivo-sensor foram modificadas quando o conjunto apresentou descolagem. Os valores das frequências naturais diminuíram quando o sensor apresentava descolagem. Também, o conjunto estrutura-adesivo-sensor foi submetido a uma força periódica e o conjunto foi avaliado em dois casos, sensor colado completamente e sensor colado parcialmente. Os resultados mostraram que na área descolada a deformação local da estrutura aumentou e a deformação local no sensor tornou-se zero. Este resultado mostra que a deformação de forma simétrica do sensor em torno ao ponto médio pode ser aproveitada para segmentar o eletrodo do sensor e estabelecer relações entre as voltagens, como foi realizado neste trabalho.

Também na análise dinâmica, uma análise de rendimento elétrico foi definida para diferentes casos de descolagem. Neste caso mostrou-se que o sensor tem menor rendimento elétrico

quando a descolagem é maior. Uma relação de rendimento elétrico foi estabelecida com a potência elétrica e a carga elétrica, com objetivo de observar o rendimento elétrico do sensor quando este apresentava descolagem parcial. Os resultados mostraram que o rendimento elétrico (relação de potência elétrica ou relação de carga elétrica) do sensor diminuiu significativamente quando o sensor apresentou descolagem de 50% do comprimento de adesão inicial, atingindo um rendimento elétrico do sensor de 80%. Este resultado mostra que a potência elétrica pode ser uma indicadora de rendimento do sensor quando o sensor apresenta descolagem.

Na análise dinâmica experimental, três amostras foram preparadas com descolagem parcial. As amostras foram submetidas a uma força transitória com frequência variável. Com os valores das voltagens foi determinada a potência RMS consumida pelos sensores nos três casos de descolagem. Os resultados mostraram que quando o sensor está descolado, a potência RMS consumida pelo sensor nas mesmas condições de carregamento diminui. Deste modo os valores da potência RMS podem ser indicadores de descolagem, como também podem ser usados para monitorar o acoplamento entre estrutura-sensor. Com esta metodologia não só é possível indentificar descolagem, como também é possível quantificá-la por meio do rendimento elétrico dos sensores.

Também uma análise dinâmica experimental foi realizada para dois sensores de três eletrodos. Um sensor foi completamente colado à estrutura e o outro foi colado parcialmente. O objetivo desta análise foi identificar o sensor que apresentava a descolagem. Uma regressão linear foi aplicada às relações da voltagem entre os eletrodos. As inclinações das retas obtidas com a regressão mostraram qual sensor apresentava descolagem. Este método se mostrou efetivo para detectar a descolagem parcial dos sensores.

As principais dificuldades deste trabalho foram encontradas nos testes experimentais. A primeira dificuldade foi a obtenção das placas piezelétricas com as dimensões desejadas. As placas piezelétricas usadas neste trabalho são muito rígidas e portanto elas devem ser manipuladas com muito cuidado para obter as dimensões requeridas do sensor. Outra dificuldade foi realizar a segmentação da lâmina do eletrodo dos sensores, pois se o corte do eletrodo fosse muito profundo o sensor apresentava fratura.

Algumas limitações foram encontradas também na parte numérica. Na parte numérica

não foi possível simular a obtenção da admitância eletromecânica para aplicar a técnica da impedância eletromecânica (EMI) por meio de elementos finitos, devido a que as frequências das forças de excitação são muito grandes (da ordem de 25 kHz até 500 kHz). A técnica EMI precisa de frequências muito altas para que o sensor entre em ressonância e deste modo é possível obter informação da estrutura na admitância elétrica do sensor. Portanto, a grande quantidade de passos no tempo precisa de um tempo de processamento muito alto.

Este trabalho pode ser estendido a uma análise estática e dinâmica usando a teoria de vigas. No caso do eletrodo segmentado também é possível estabelecer uma metodologia similar para analisar as relações de voltagem na forma linear (este trabalho) e na forma não linear (atualizando a espessura e o comprimento da camada adesiva com a deformação).

Na detecção de descolagem pode-se realizar uma análise teórica com o objetivo de relacionar a área colada do sensor com a potência elétrica consumida em um estado operativo. Desta forma é possível estimar quanto é a área colada do sensor através do valor potência elétrica. Outra alternativa para detectar quanto o sensor está descolado (comprimento descolado dos extremos) é relacionar a inclinação das voltagens obtidas em um sensor com três eletrodos com o comprimento colado.

Em resumo este trabalho mostrou como os efeitos causados pela interface adesiva no comportamento eletromecânico podem ser usados para selecionar adequadamente parâmetros dimensionais do sensor e da camada adesiva. Também estes efeitos podem ajudar a monitorar a integridade do sensor usando as diferentes técnicas expostas neste trabalho.

# Referências Bibliográficas

- [1] Aldrich, J. B., Hagood, N. W., von Flotow, A., Vos, D. W., 1993. “Design of passive piezoelectric damping for space structures”, In: *Proc. SPIE, Conference on Smart, Structures and Intelligent Systems*, 19(17):629-705.
- [2] Allik, H., Hughes, T. J. R., 1970. “Finite element method for piezoelectric vibration”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2:151-157.
- [3] Arfken, G. B., Weber, H. J., 1995. “*Mathematical methods for physicists*”. 4th ed. Academic Press, San Diego.
- [4] Ayres, J.W., Lalande, F., Chaudhry, Z., Rogers, C. A., 1998. “Qualitative impedance-based health monitoring of civil infrastructures”, *Smart Materials and Structures*, 7(5):599–605.
- [5] Bailey, T., Hubbard, J. E., 1985. “Distributed piezoelectric-polymer active vibration control of a cantilever beam”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 8(5):605-61.
- [6] Ballas, R. G., 2007. “*Piezoelectric multilayer beam bending actuators: static and dynamic behavior and aspects of sensor integration*”, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [7] Baz, A., Poh, S., 1988. “Performance of an active control system with piezoelectric actuators”, *Journal of Sound and Vibration*, 126(2):327-343.
- [8] Bhalla, S., Soh, C. K., 2003. “Structural impedance based damage diagnosis by piezotransducers”. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 32(12):1897–1916.

- [9] Bhalla, S., 2004. “*A mechanical impedance approach for structural identification, health monitoring and non-destructive evaluation using piezo-impedance transducers*”, PhD Thesis, Nanyang Technological University, Singapore.
- [10] Bhalla, S., Soh, C. K., 2004. “Electromechanical impedance modeling for adhesively bonded piezo-transducers”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 15(12):955–72.
- [11] Bonnail, S., Tonneau, D., Capolino, G. A. & Dallaporta, H., 2000. “Dynamic and static responses of a piezoelectric actuator at nanometer scale elongation”, In: *Proceedings IEEE Industry Applications Conference*, 1:293-298.
- [12] Chandrupatla, T. R., Belegundu, A. D., 1999. “*Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería*”, 2 edición. Prentice Hall.
- [13] Chattopadhyay, A., Li, J., Haozhong, G., 1999. “Coupled thermo-piezoelectric-mechanical model for smart composite laminate”, *AIAA Journal*, 37(12):1633-1638.
- [14] COMSOL. 2007. “*Reference manual for COMSOL 3.5*”, COMSOL LAB, Stockholm, [www.comsol.se](http://www.comsol.se).
- [15] Crawley, E., Luis, J., 1986. “Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures”, *AIAA Journal*, 25(10): 373-1385.
- [16] Croft, D., Devasia S., 1999. “Vibration compensation for high speed scanning tunneling microscopy”, *Review of Scientific Instruments*, 70(12):4600-4605.
- [17] DAQ, 2002. “*Data acquisition for use with MATLAB. User’s Guide*”, The MathWorks Inc.
- [18] De Faria, A. R., 2003. “The effect of finite stiffness bonding on the sensing effectiveness of piezoelectric patches”, *Smart Materials and Structures*, 12:5–8.
- [19] Dorf, R. C., Svoboda J. A., 2003. “*Circuitos eléctricos*”, 5 edición. Alfaomega.

- [20] Garcia, E., Dosch, J. D., Inman, D. J., 1991. “Vibration attenuation in an active antenna structure”, In: *Proceedings of the Conference on Recent Advances in Active Control of Sound and Vibration*, Virginia Polytechnique Institute and State University, Blacksburg, 35-42.
- [21] Ha, S., 2009. “*Modeling Lamb wave propagation induced by adhesively bonded PZTs on thin plates*”, Ph.D. dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University.
- [22] Hang, L., Wang, X. D., Sun, Y., 2008. “The effect of bonding layer properties on the dynamic behavior of surface-bonded piezoelectric sensor”. *International Journal of Solids and Structures*. 45(21) 5599-5612.
- [23] Hughes, T. J. R., 1987. “*The finite element method*”, Prentice-Hall International Editions.
- [24] Hwang, W. S., Park, H. C., 1993. “Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators”, *AIAA Journal*, 31(5):930–937.
- [25] Jetteur, P., 1991. “Validation des elements 28 et 29”, *Tech. Rep. 39*, Samtech S.A., Liege, Belgium.
- [26] Kim, S. J., Han, C. H., Yun, C. Y., 1999. “Improvement of aeroelastic stability of hingeless helicopter rotor blade by passive piezoelectric damping”, In: *Proceedings SPIE Conference on Passive Damping and Isolation*, 131–141, NewportBeach, CA.
- [27] Kreyszig, E., 2006. “*Advanced engineering mathematics*”, 9th.ed. Wiley.
- [28] Kusculuoglu, Z. K., Fallahi, B., Royston, T. Y., 2004. “Finite element model of a beam with a piezoelectric patch actuator”, *Journal of Sound and Vibration*, 276:27-44.
- [29] Liang C., Sun F. P., Rogers, C. A., 1994. “Coupled electromechanical analysis of adaptive material systems-determination of the actuator power consumption and system energy transfer”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 5(1):12–20.

- [30] Lima Jr, J. J., 1999, "Modelagem de Sensores e Atuadores Piezelétricos com Aplicações em Controle Ativo de Estruturas", Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP.
- [31] Neto, M. A., Yub, W., Roy, S., 2009. "Two finite elements for general composite beams with piezoelectric actuators and sensors", *Finite Element Analysis and Design*, 45(5):295-304.
- [32] Nisse, E. P., 1967. "Variational method for electroelastic vibration analysis", *IEEE Transactions on Sonics And Ultrasonics*, 14(4):153-160.
- [33] Park, G., Sohn, H., Farrar, C., Inman, D. J., 2003. "Overview of piezoelectric impedance-based health monitoring and path forward", *Shock Vibration Diagnosis*, 35(6):451-63.
- [34] Piefort, V., 2001. "Finite Element Modeling of Piezoelectric Active Structures", Ph.D. thesis, Department of Mechanical Engineering and Robotics, Universite Libre de Bruxelles.
- [35] PI Catalogue of piezoelectric actuators and sensors. <http://www.piceramics.com>. [acesada em 20 de Agosto de 2009]
- [36] Preumont, A., 1997. "*Vibration control of active structures*", Kluwer Academic.
- [37] Q. Luo and L. Tong. 2004. "An adhesively laminated plate element for PZT smart plates", *Computational Mechanics*, 34:224-236.
- [38] Reddy, J. N., 1984. "*Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*", John Wiley & sons.
- [39] Salapaka. S., 2003. "Control of the nanopositioning devices", In: *Proceedings IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii.
- [40] Salapaka, S., Sebastian, A., Cleveland, J. P., 2000. "Design, identification and control of a fast nanopositioning device", In: *Proceedings American Control Conference*, 1966-1971.

- [41] Samanta, B., Ray, M. C., Bhattacharyya, R., 1996. “Finite element model for active control of intelligent structures”, *AIAA Journal*, 34(9):1885-1893.
- [42] Sirohi, J., Chopra, I., 2000. “Fundamental understanding of piezoelectric strain sensors”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 11(4):246-257.
- [43] Song, G., Qiao, P. Z., Binienda, W. K., Zou., G. P., 2000. “Active vibration damping of composite beam using smart sensors and actuators”, *Journal of Aerospace Engineering*, 15(3):97–103.
- [44] Tong, L., Steven, G. P., 1999. “*Analysis and design of structural bonded joints*”, Kluwer Academic.
- [45] Wang, X.D., Meguid, S.A., 2000. “On the electroelastic behavior of a thin piezoelectric actuator attached to an infinite host structure”, *International Journal of Solids and Structures* 37: 3231-3251.
- [46] Weinberger H. F., 1965. “*A first course in partial differential equations*”, Blaisdell Publishing, New York.
- [47] Xu Y. G., Liu, G. R., 2002. “A modified electro-mechanical impedance model of piezoelectric actuator–sensor for debonding detection of composite patches”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*;13:389–96.
- [48] Yan, W., Chen, W. Q., 2010. “Structural health monitoring using high-frequency electro-mechanical impedance signatures”, *Advances in Civil Engineering*, 2010:429148.
- [49] Zhou, X., Chattopadhyay, A., Haozhong, G., 2000. “Dynamic responses of smart composites using a coupled thermo-piezoelectric-mechanical model”, *AIAA Journal*, 38(10):1939-1948.
- [50] Zienkiewicz, O. C., 1971. “*The finite element method in engineering science*”, Mc Graw-Hill, Maidenhead.