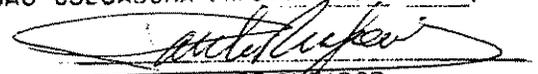


ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Heraldo Nélio
Cambraia E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 25 11 03.


ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL MULTIVARIÁVEL ORIENTADAS A SUBESPAÇOS

Autor: **Heraldo Nélio Cambraia**
Orientador: **Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka**

11/2003

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL MULTIVARIÁVEL ORIENTADAS A SUBESPAÇOS

**Autor: Heraldo Nélio Cambraia
Orientador: Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka**

**Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica de Sólidos e Projeto Mecânico**

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

**Campinas, 2003
SP - Brasil**

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	TUNICAMP C143t
V	EX
TOMBO BCI	58614
PROC.	16-117-04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	29-06-04
Nº CPD	

CM00198174-7

BIB ID 317212

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

C143t	<p>Cambraia, Heraldo Nélio Técnicas de identificação modal multivariável orientadas a subespaços / Heraldo Nélio Cambraia.-- Campinas, SP: [s.n.], 2003.</p> <p>Orientador: Paulo R. G. Kurka. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Análise modal. 2. Identificação. 3. Processamento de sinais. 4. Vibração. I. Kurka, Paulo R. G. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
-------	--

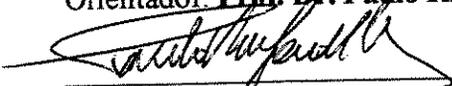
**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

TESE DE DOUTORADO

**TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO MODAL
MULTIVARIÁVEL ORIENTADAS A
SUBESPAÇOS**

Autor: **Heraldo Nélio Cambraia**

Orientador: **Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka**



Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka - Presidente
DPM/FEM/UNICAMP



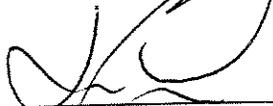
Prof. Dr. José Manoel Balthazar
DPM/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Robson Pederiva
DPM/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. José João de Espíndola
UFSC



Prof. Dr. Luiz Carlos Sandoval Góes
ITA

Campinas, 25 de novembro de 2003

Dedicatória:

Dedico este trabalho aos meus pais (minha mãe in memoriam) e a minha família.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus e a todos aqueles que de alguma forma, contribuíram para a concretização do trabalho aqui descrito.

Agradeço, em especial ao meu orientador, Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, pela amizade, apoio e incentivo que tem me dado.

À CAPES, Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas que muito contribuíram para minha qualificação profissional.

Aos colegas do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná pela confiança depositada em mim, especialmente aos professores Prof. Dr. Adriano Scremin, Prof. Dr. Carlos José de Mesquita Siqueira e Prof. Dr. Wilian Alves Barbosa pelo apoio recebido e ao secretário Sr. Gilmar de Jesus Alves Ferreira pela valiosa ajuda na confecção gráfica deste trabalho.

É o Senhor que vai adiante de ti, Ele
será contigo, não te deixará nem te desampará,
não temas, nem te atemorizes. (Deut. 31-18)

Resumo

Cambraia, Heraldo Nélio, *Técnicas de Identificação Modal Multivariável Orientadas a Subespaços*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 160 p., Tese de Doutorado.

A análise do comportamento dinâmico de sistemas estruturais é fundamental por sua importância econômica e tecnológica. Este trabalho apresenta um conjunto de métodos de identificação no domínio do tempo baseados na teoria de realização de sistemas lineares e implementados usando uma metodologia orientada a subespaços vetoriais e multivariável. As características destes métodos, bem como a comparação com outros métodos tradicionais de identificação modal no domínio do tempo, são apresentadas através de simulações numéricas. Além disso, foram realizados testes experimentais para demonstrar a aplicação dos algoritmos desenvolvidos em dados experimentais obtidos de um escapamento automotivo e de um modelo reduzido de uma asa de avião.

Palavras Chave

Análise Modal Experimental, Identificação Paramétrica, Métodos de Subespaços, Processamento de Sinais, Vibrações.

Abstract

Cambráia, Heraldo Nélio, *Técnicas de Identificação Modal Multivariável Orientadas a Subespaços*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003, 160 p., Tese de Doutorado.

The analysis of the dynamical behaviour of structures is of great economical and technological importance. The present work brings a contribution to this field, presenting time domain identification methods based on realization theory. The methods are implemented for multivariable measurements through the use of the subspace approach. Numerical simulations are used to present the main characteristics of the methods and to compare its performance with traditional techniques used in experimental modal analysis. The proposed algorithms are also used in the modal tests of two practical engineering structures: an automotive exhaust system and a simplified aircraft wing model.

Key Words

Experimental Modal Analysis, Parametric Identification, Subspace Methods, Signal Processing, Vibration.

Conteúdo

1. Introdução

1.1 Os Métodos de Identificação de Parâmetros Modais e sua Classificação	1
1.2 Revisão Bibliográfica	6
1.3 Objetivos do Trabalho	11
1.4 Apresentação do Trabalho	12

2. Modelagem Matemática de Sistemas Mecânicos

2.1 Introdução	14
2.2 Das Equações do Movimento aos Parâmetros Modais	14
2.3 Função de Resposta ao Impulso e Resíduos Modais	25

3. Identificação de Parâmetros Modais Usando a Teoria da Realização

3.1 Introdução	28
3.2 Introdução à Teoria da Realização de Sistemas Lineares	29
3.2.1 O Modelo de Espaço de Estado e os Parâmetros de Markov	29
3.2.2 Sistema de Ordem Mínima e Transformação de Similaridade	32
3.2.3 Formulação Básica do Problema	34
3.3 Decomposição da Matriz Hankel Através das Matrizes de Vandermonde	38
3.4 Cálculo dos Resíduos Modais do Sistema	40

3.4.1 Cálculo dos Resíduos Diretamente da Formulação das FRI's	40
3.4.2 Cálculo dos Resíduos Através da Realização do Sistema	41
4. Métodos de Identificação de Parâmetros Modais Usando Dados das FRI's	
4.1 Introdução	44
4.2 Identificação Usando Mínimos Quadrados	45
4.2.1 O Método <i>Polyreference</i> LS	45
4.2.2 O Método de Ibrahim	46
4.2.3 Equivalência Entre os Métodos <i>Polyreference</i> LS e de Ibrahim	47
4.3 Identificação da Ordem do Modelo e os Subespaços de Sinal – Ruído	48
4.3.1 Identificação da Ordem do Modelo	48
4.3.2 Subespaços de Sinal – Ruído	50
4.4 Métodos de um Único Deslocamento com Redução de <i>Rank</i>	51
4.4.1 O Método <i>Polyreference</i> TLS	52
4.4.2 O Algoritmo ERA	53
4.4.3 O Método <i>Polyreference</i> Orientado a Subespaços	54
4.4.4 O Método dos Autovetores da Matriz de Covariância	57
4.4.5 O Método de Ibrahim com Redução de <i>Rank</i>	59
4.4.6 O Método ESPRIT TLS	60
4.5 Equivalência Entre os Métodos de Identificação	61
5. Métodos de Identificação de Parâmetros Modais Usando Dados de Entrada e Saída	
5.1 Introdução	63
5.2 Modelos Auto – Regressivos com Entrada Exogênea (ARX)	64
5.2.1 ARX SISO	64
5.2.2 ARX MIMO	66
5.3 Identificação Modal Através dos Subespaços das Matrizes de Dados de Entrada e Saída	70

5.3.1 Algoritmo 1 – Aplicando a SVD Apenas Sobre a Matriz de Dados de Entrada	72
5.3.2 Análise da Sensibilidade de $Y_H V_2$ à Presença de Ruído e a Ordem Mínima do Modelo	74
5.3.3 Algoritmo 2 – Aplicando a SVD Diretamente Sobre as Matrizes de Entrada e Saída	75
5.4 Identificação Modal Usando a Decomposição RQ	78
5.5 Equivalência Entre os Métodos de Subespaços	82
5.6 Cálculo das Matrizes B e D e dos Resíduos Modais	83
5.6.1 Cálculo das Matrizes B e D	83
5.6.2 Cálculo dos Resíduos Modais	87

6. Exemplos e Aplicações

6.1 Introdução	89
6.2 Exemplo de Simulação Numérica	90
6.2.1 Identificação Usando Dados das FRI's	91
Exemplo 1: Pequenos Amortecimentos - SISO	91
Exemplo 2: Pequenos Amortecimentos – Multivariável	94
Exemplo 3: Grandes Amortecimentos - SISO	96
Exemplo 4: Grandes Amortecimentos – Multivariável	98
6.2.2 – Identificação Usando Dados de Entrada e Saída	100
Exemplo 5: Pequenos Amortecimentos - SISO	100
Exemplo 6: Pequenos Amortecimentos - MIMO	102
Exemplo 7: Grandes Amortecimentos - SISO	103
Exemplo 8: Grandes Amortecimentos – MIMO	105
6.2.3 Resultado da Simulação	106
6.3 Análise Modal Experimental de um Escapamento Automotivo	106
6.3.1 Excitação, Resposta e Sistema de Aquisição	107
6.3.2 Identificação de Parâmetros Modais SISO	108
6.3.3 Identificação de Parâmetros Modais Multivariável	111

6.3.4 Determinação dos Modos de Vibração	113
6.4 Análise Modal Experimental MIMO para Dados de Entrada e Saída	118
7. Conclusões e Sugestões	
7.1 Conclusões Gerais	131
7.2 Contribuições do Trabalho	134
7.3 Sugestões para Próximos Trabalhos	134
Bibliografia	136
Apêndice A – Decomposição em Valores Singulares	
A.1 Decomposição em Valores Singulares	148
A.2 Aproximação Tipo Mínimos Quadrados	151
A.3 Aproximação Tipo Mínimos Quadrados Totais	153
Apêndice B – Formulações Básicas do Método <i>Polyreference</i>	155
Apêndice C – Análise do Problema TLS	158

Lista de Figuras

Figura 6.1 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel \mathbf{H}	92
Figura 6.2 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel \mathbf{H}	94
Figura 6.3 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel \mathbf{H}	96
Figura 6.4 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel \mathbf{H}	98
Figura 6.5 – Logaritmo dos Valores Singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$	101
Figura 6.6 – Logaritmo dos Valores Singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$	102
Figura 6.7 – Logaritmo dos Valores Singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$	104
Figura 6.8 – Logaritmo dos Valores Singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$	105
Figura 6.9 – Estimativas de Algumas FRF's e FC's	108
Figura 6.10 – Valores Singulares de \mathbf{H}	109
Figura 6.11 – Média dos Valores Singulares de \mathbf{H}	109
Figura 6.12 – FRI's Experimentais e Estimadas Através do Método <i>Polyreference</i> LS	110
Figura 6.13 – Média das FRF's Experimentais e Estimadas Através do Método <i>Polyreference</i> LS	110
Figura 6.14 - FRI's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC	111
Figura 6.15 – Média das FRF's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC	111
Figura 6.16 – Valores Singulares de \mathbf{H}	112
Figura 6.17 - FRI's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC	112
Figura 6.18 – Média das FRF's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC	113
Figura 6.19 – Modo de Vibração associado a 45.5 Hz	115
Figura 6.20 – Modo de Vibração associado a 57.0 Hz	115

Figura 6.21 – Modo de Vibração associado a 80.0 Hz	116
Figura 6.22 – Modo de Vibração associado a 97.0 Hz	116
Figura 6.23 – Modo de Vibração associado a 123.0 Hz	117
Figura 6.24 – Modo de Vibração associado a 146.5 Hz	117
Figura 6.25 – Modo de Vibração associado a 156.0 Hz	118
Figura 6.26 – Teste Livre – Livre da Trelça Espacial	118
Figura 6.27 – Discretização da Trelça Espacial	119
Figura 6.28 - Valores Singulares de $Y_H V_2$	120
Figura 6.29 – FRF's Sintetizadas	121
Figura 6.30 – Média das FRF's Sintetizadas Através do Ensaio MIMO	121
Figura 6.31 – Modo de Vibração Associado a 47.5 Hz	122
Figura 6.32 – Modo de Vibração Associado a 127 Hz	123
Figura 6.33 – Modo de Vibração Associado a 328 Hz	123
Figura 6.34 – Modo de Vibração Associado a 450 Hz	124
Figura 6.35 – Modo de Vibração Associado a 495 Hz	124
Figura 6.36 – Modo de Vibração Associado a 706 Hz	125
Figura 6.37 – Modo de Vibração Associado a 870 Hz	125
Figura 6.38 – Média das FRF's Sintetizadas Através do Ensaio SISO	126
Figura 6.39 – Modo de Vibração Associado a 47.5 Hz	127
Figura 6.40 – Modo de Vibração Associado a 127 Hz	127
Figura 6.41 – Modo de Vibração Associado a 328 Hz	128
Figura 6.42 – Modo de Vibração Associado a 450 Hz	128
Figura 6.43 – Modo de Vibração Associado a 495 Hz	129

Figura 6.44 – Modo de Vibração Associado a 706 Hz	129
Figura 6.45 – Modo de Vibração Associado a 870 Hz	130

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Equivalência entre os Métodos de Identificação	62
Tabela 6.1- Fatores de Amortecimento	91
Tabela 6.2 – Pólos e Resíduos Exatos de h_{31} para Pequenos Amortecimentos	91
Tabela 6.3 – Pólos Identificados	93
Tabela 6.4 – Resíduos $r_{31(l)}$ Identificados	93
Tabela 6.5 – Pólos Identificados	95
Tabela 6.6 – Resíduos $r_{31(l)}$ Identificados	95
Tabela 6.7 – Pólos e Resíduos Exatos de h_{31} para Grandes Amortecimentos	96
Tabela 6.8 – Pólos Identificados	97
Tabela 6.9 – Resíduos $r_{31(l)}$ Identificados	97
Tabela 6.10 – Pólos Identificados	99
Tabela 6.11 – Resíduos $r_{31(l)}$ Identificados	99
Tabela 6.12 – Pólos Identificados	101
Tabela 6.13 – Resíduos Identificados	101
Tabela 6.14 – Pólos Identificados	103
Tabela 6.15 – Resíduos Identificados Através dos Métodos de Subespaços	103
Tabela 6.16 – Pólos Identificados	104
Tabela 6.17 – Resíduos Identificados	104
Tabela 6.18 – Pólos Identificados	105
Tabela 6.19 – Resíduos Identificados Através dos Métodos de Subespaços	105
Tabela 6.20 - Freqüências Naturais Identificadas	113
Tabela 6.21 – Freqüências Naturais Identificadas	122

Nomenclatura

Letras Latinas

A:	Matriz de transição, $2n \times 2n$
$\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}$:	Matrizes da equação de estado para o caso contínuo, $2n \times 2n$
B:	Matriz de influência da entrada, $2n \times r$
C:	Matriz de influência da saída, $m \times 2n$
$\tilde{\mathbf{C}}$:	Matriz de amortecimento, $n \times n$
\mathbf{C}_N :	Matriz de controlabilidade, $2n \times rN$
D:	Matriz de transição direta, $m \times r$
$\mathbf{e}(k)$:	Componente discreta de um ruído branco
f:	Vetor de forças, $n \times 1$
F:	Matriz dinâmica, $2n \times 2n$
$\bar{\mathbf{f}}$:	Vetor de excitação na equação de estado, $2n \times 1$
g:	Vetor de forças externas, $r \times 1$
\mathbf{g}_L :	Vetor de saída contendo $\mathbf{g}(k)$ até $\mathbf{g}(k + L - 1)$, $rL \times 1$
$h_y(k)$:	Elemento genérico da função de resposta ao impulso
H:	Matriz Hankel dos parâmetros de Markov, $m(L + 1) \times rN$
$\hat{\mathbf{H}}$:	Matriz construída via truncamento da SVD de \mathbf{H} , $m(L + 1) \times rN$
$\mathbf{H}_{(1)}, \mathbf{H}_{(2)}$:	Matrizes partição de \mathbf{H} , $mL \times rN$
$\mathbf{H}(s), \mathbf{H}(z)$:	Matrizes de transferência, $m \times r$
$H_y(s)$:	Elemento genérico da matriz de transferência $\mathbf{H}(s)$

$H_y(z)$:	Elemento genérico da matriz de transferência $\mathbf{H}(z)$
$\tilde{\mathbf{K}}$:	Matriz de amortecimento, $n \times n$
$\tilde{\mathbf{M}}$:	Matriz de massa, $n \times n$
N_p :	Número de amostras
NSR :	Relação ruído/sinal
\mathbf{O}_L :	Matriz de observabilidade, $mL \times 2n$
\mathbf{P} :	Matriz dos coeficientes de auto-regressão da forma observável, $m \times mL$
\mathbf{P}_i :	Coefficientes de auto-regressão da forma controlável, $m \times m$
\mathbf{Q}_i :	Coefficientes de auto-regressão da forma observável, $r \times r$
$r_{ij(l)}$:	Resíduo modal
RMS :	Valor RMS – root mean squared
\mathbf{R}_{gg} :	Matriz de auto-correlação dos dados de entrada, $rL \times rL$
\mathbf{R}_{yg} :	Matriz de correlação cruzada dos dados de entrada e saída, $mL \times rL$
\mathbf{R}_{yy} :	Matriz de auto-correlação dos dados de saída, $mL \times mL$
\mathbf{T}_L :	Matriz Toeplitz, $mL \times rL$
\mathbf{u} :	Vetor de respostas, $n \times 1$
$\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}$	Matrizes da Decomposição SVD
$\hat{\mathbf{U}}$:	Matriz que contém as $2n$ primeiras colunas de \mathbf{U}
$\bar{\mathbf{U}}_f$:	Matriz de influência de forças, $n \times r$
$\hat{\mathbf{V}}$:	Matriz que contém as $2n$ primeiras colunas de \mathbf{V}
$\mathbf{V}_L, \mathbf{V}_N$	Matrizes de Vandermonde, $m(L+1) \times m(2n)$, $r(2n) \times rN$
\mathbf{x} :	Vetor de estado, $2n \times 1$
z_k :	Autovalor da matriz de transição
\mathbf{y} :	Vetor de saída, $m \times 1$
\mathbf{y}_L :	Vetor de saída contendo $\mathbf{y}(k)$ até $\mathbf{y}(k+L-1)$, $mL \times 1$
\mathbf{Y}_{ij} :	Parâmetros de Markov, $m \times r$

Letras Gregas

Δt :	Intervalo de discretização
$\boldsymbol{\eta}$:	Vetor de coordenada modal, $2n \times 1$
λ_k :	Autovalor da matriz de estado ou pólos do sistema
Λ :	Matriz dos autovalores da matriz de estado, $2n \times 2n$
ξ :	Fator de amortecimento
$\boldsymbol{\Pi}_C$:	Operador de projeção ortogonal sobre o espaço coluna, $mL \times mL$
$\boldsymbol{\Pi}_L$:	Operador de projeção ortogonal sobre o espaço linha, $rN \times rN$
σ_i :	i-ésimo valor singular
$\hat{\Sigma}$:	Matriz diagonal que contém os $2n$ principais valores singulares, $2n \times 2n$
ϕ_k :	Vetor modo complexo, $n \times 1$
Φ :	Matriz dos modos próprios do sistema, $n \times n$
Ψ :	Matriz Modal, $2n \times 2n$
Ψ_k :	Autovetor da matriz de estado, $2n \times 1$
ω :	Frequência natural
ω_d :	Frequência natural amortecida

Símbolos

$EC(\mathbf{H})$:	Espaço coluna de \mathbf{H}
$EC^\perp(\mathbf{H})$:	Espaço complementar ao espaço coluna de \mathbf{H}
$EL(\mathbf{H})$:	Espaço linha de \mathbf{H}
$EL^\perp(\mathbf{H})$:	Espaço complementar ao espaço linha de \mathbf{H}
$\ \cdot\ _F$:	Norma de Frobenius

Siglas

AME:	Análise Modal Experimental
AR:	Modelo Auto-Regressivo
ARMA:	Modelo Auto-Regressivo com Média Móvel
ARMAX:	Modelo Auto-Regressivo com Média Móvel e Entrada Exogênea
ARX:	Modelo Auto-Regressivo com Entrada Exogênea
DOA:	Direction of Arrivals
ERA:	Eigensystem Realization Algorithm
ESPRIT:	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FC:	Função de Coerência
FFT:	Fast Fourier Transform
FRF:	Função de Resposta em Frequência
FRI:	Função de Resposta ao Impulso
ITD:	Ibrahim Time Domain
LS:	Least Squares
MIMO:	Múltipla Entrada Múltipla Saída
MISO:	Múltipla Entrada Saída Única
ML:	Maximum Likelihood
MOESP:	MIMO Output-Error State Space Model Identification
N4SID:	Numerical Algorithm for Subspace State System Identification
MUSIC:	Multiple Signal Classification
SISO:	Saída Única Saída Única
SVD:	Singular Value Decomposition
TL:	Transformada de Laplace
TLS:	Total Least Squares
WSF:	Weighted Subspace Fitting

Capítulo 1

Introdução

1.1 Os Métodos de Identificação de Parâmetros Modais e sua Classificação

A identificação de sistemas dinâmicos trata do problema de inferir modelos matemáticos a uma certa quantidade de dados experimentais. É importante, quando se formula um problema de identificação, conhecer claramente o propósito a ser cumprido, Juang [39]. Em problemas de controle, por exemplo, é importante o projeto das estratégias usadas. Em análise dinâmica, busca-se a determinação das propriedades dinâmicas do sistema tais como frequências de ressonância, fatores de amortecimento e modos de vibração estrutural. Fundamentalmente, procura-se encontrar um modelo matemático que melhor reproduza o teste realizado de acordo com algum critério. De maneira geral, o procedimento básico para a realização da identificação de sistemas dinâmicos consiste no cumprimento das seguintes etapas, Ljung [62] e Söderström e Stoica [87]:

- 1) Definição dos dados experimentais mais adequados para extrair a maior quantidade de informação possível a respeito do processo que está sendo analisado. É importante nesta etapa, delimitar o processo em estudo, definindo o que é a parte do processo e quais são as variáveis a serem medidas. Também é importante considerar a aplicação de técnicas de

análise de sinais tais como filtragem, truncamento e escolha adequada de taxas de amostragem, Bendat e Piersol [7] e Newland [71].

2) Definição de um conjunto de modelos matemáticos adequados ao problema. A escolha da estrutura do modelo a ser utilizado é uma tarefa fundamental na formulação do problema de identificação. Esta escolha influencia o tipo de problema a ser resolvido, bem como o esforço computacional e a precisão desejada para o cálculo dos parâmetros identificados. Este procedimento é conhecido como modelagem.

3) Escolha e aplicação do modelo mais apropriado dentro deste conjunto de modelos. Formalmente, a aplicação de um método de identificação consiste em um mapeamento do conjunto de dados experimentais para um conjunto de parâmetros a ser determinado. Uma tarefa importante nesta etapa é a determinação da ordem do modelo que representará o sistema a ser identificado.

4) Validação do modelo matemático escolhido. Uma vez cumprida a tarefa de identificação do sistema dinâmico, é importante verificar se o modelo obtido representa suficientemente bem os dados experimentais de acordo com o critério especificado – verificação do sucesso do ajuste. Em análise de sistemas dinâmicos, a identificação e a modelagem caminham juntas. O modelo é a base para a identificação e a identificação pode ser vista como uma espécie de validação do modelo dinâmico.

A análise modal experimental (AME) envolve uma vasta quantidade de diferentes áreas de pesquisa em dinâmica estrutural como: correlação e *updating* modais, testes modais, sub-estruturação modal, modificação modal e análise modal não linear, Maia et al. [65]. A identificação de parâmetros modais é fundamental em AME por sua importância econômica e tecnológica, diante da necessidade de caracterização do comportamento dinâmico de estruturas, avaliação de performance e detecção de falhas, ou ainda na calibração e refinamento de modelos de elementos finitos.

A identificação de parâmetros modais é considerada como um dos ramos do chamado problema inverso definido por Berman [8], um processo no qual os dados de entrada e saída são usados na determinação de modelos matemáticos representativos das características dinâmicas do sistema. O propósito da identificação de parâmetros modais consiste, portanto, na estimativa de propriedades dinâmicas do sistema tais como, frequências naturais, fatores de amortecimento e configurações modais assumidas pelo sistema.

Nas últimas décadas, devido a grandes desenvolvimentos na tecnologia dos computadores e dos sistemas de aquisição de dados, e ancorada pelas atuais necessidades da comunidade de controle, a identificação de parâmetros modais desempenha um papel importante na área de projeto mecânico como mostra, por exemplo, os trabalhos de Allemang, Brown e Fladung [2], Alvin e Peterson [3], Cooper e Wrigth [17] - [21], Juang [41], Juang, Cooper e Wrigth [42], Juang et al. [45], Liu e Skelton [61] e Pappa [77] e Pappa e Juang [78]. É crescente o desenvolvimento e a pesquisa de métodos de identificação procurando resultados cada vez mais precisos, velozes e robustos. Os métodos de identificação de parâmetros modais podem ser classificados como:

1) Paramétricos e não paramétricos: No caso das técnicas de identificação paramétricas, utiliza-se explicitamente um conjunto de parâmetros com significado físico na representação do modelo matemático. O cálculo dos parâmetros é realizado através da aplicação de algum critério de otimização que atua sobre um funcional que envolve o erro de ajuste definido pela diferença entre a saída do sistema e a saída estimada. Os métodos de otimização mais usuais são os mínimos quadrados (LS), máxima verossimilhança (ML), variáveis instrumentais e otimização não linear como apresentam Ljung [62] e Söderström e Stoica [87]. No caso das técnicas não paramétricas, Bendat e Piersol [7] e Newland [71], os dados experimentais sofrem processamento numérico que independe, a priori, de um prévio conhecimento do sistema físico em estudo. O resultado de tal processamento pode fornecer algumas informações da correlação entre os dados analisados e os sistemas físicos ideais.

2) Recursivos e não recursivos: O método recursivo, por sua característica econômica quanto à rapidez de processamento é utilizado na identificação de sistemas que apresentam características não estacionárias ou em aplicações em tempo real, Ljung [62] e Söderström e Stoica [87]. A identificação não recursiva ocorre quando uma grande quantidade de dados é coletada no sistema e em seguida é pós-processada. Normalmente, os algoritmos não recursivos fornecem parâmetros calculados com uma maior precisão, visto que, com uma grande quantidade de dados, a identificação pode ser repetida várias vezes utilizando-se diferentes métodos.

3) Domínios do tempo e da frequência: Os métodos de identificação se classificam ainda quanto ao domínio no qual os dados são tratados numericamente – domínio do tempo ou da frequência.

As técnicas de identificação no domínio da frequência são mais antigas e utilizam as funções de resposta em frequência (FRF) na formulação do modelo. Os métodos do domínio da frequência envolvem estimativas das FRF's calculadas através da razão das transformadas discretas de Fourier dos sinais de entrada e saída. Estas técnicas tornaram-se atraentes para o processamento de dados em micro computadores com a formulação da transformada rápida de Fourier (FFT) desenvolvida por Cooley e Tukey [16] em 1965. Tal metodologia demanda um custo computacional relativamente baixo resultando em uma grande economia de memória computacional. Técnicas de processamento de sinais no domínio da frequência podem ser encontradas em Bendat e Piersol [7], Newland [71] e Maia et al. [65].

Uma dificuldade na utilização dos métodos no domínio da frequência é a presença de erros devido às influências de *leakage*, proveniente do efeito de truncamento dos dados, que causam distorções nas estimativas das FRF's. Do ponto de vista da identificação de parâmetros modais, estes erros se agravam mais nos picos de ressonância, no caso de sistemas pouco amortecidos com pouca resolução em frequência, Red Horse et al. [83]. Além disso, os métodos em frequência apresentam restrições na identificação de parâmetros modais para sistemas que apresentam grandes razões de amortecimento e

freqüências naturais muito próximas, especialmente se associados com dados contaminados com ruído, Gontier, Smail e Gautier [33].

Recentemente há um grande interesse na aplicação dos métodos no domínio do tempo, ao contrário dos tradicionais métodos do domínio da freqüência. As técnicas no domínio do tempo consistem basicamente em encontrar coeficientes de regressão de uma equação à diferenças, a partir dos quais os parâmetros modais são calculados, como em Ljung [62] e Söderström e Stoica [87]. A utilização dos métodos baseados diretamente nos dados de entrada e saída do sistema resulta na eliminação dos efeitos provenientes da aplicação da transformada discreta de Fourier. Os métodos do domínio do tempo tendem a fornecer melhores resultados quando uma grande quantidade de freqüências ou uma grande quantidade de modos estão presentes nos dados experimentais [83].

A escolha de um método de identificação no domínio do tempo ou da freqüência, em geral, é orientada em termos do conhecimento prévio de determinadas características do sistema como também das informações requeridas pelo processo de identificação. Estes métodos possuem suas vantagens e desvantagens. Não devem, no entanto, serem vistos como alternativas distintas de identificação, mas sim como complementares, sempre que possível.

4) Quanto ao número de modos analisados: O método de identificação é classificado como de um único grau de liberdade quando ele pode analisar um único modo de vibrar do sistema de cada vez. O método é chamado múltiplos graus de liberdade quando vários modos de vibrar do sistema são analisados simultaneamente. Os métodos de identificação do domínio do tempo são todos do tipo múltiplos graus de liberdade, enquanto os métodos do domínio da freqüência podem ser uni ou múltiplos graus de liberdade.

5) Quanto ao número de entradas e saídas: Os dados experimentais são resultado do tipo de excitação e medições nos diversos pontos da estrutura. Alguns métodos de identificação são formulados de tal maneira que podem ser aplicados apenas para um único par de dados de entrada e saída, estes métodos são chamados métodos SISO (*single input*

single output). Outros métodos são formulados de modo que permitem utilizar amostras de dados experimentais de simultâneas entradas e saídas. Estes métodos são chamados MISO (*multiple input single output*) ou MIMO (*multiple input multiple output*). Os métodos MISO ou MIMO são chamados também de métodos globais, Maia et al. [65].

A crescente popularidade da utilização dos métodos MIMO em AME deve-se às seguintes razões, como apontam Allemang e Brown [1]: i) a aplicação de excitação múltipla permite a distribuição de energia de excitação mais uniforme ao longo da estrutura, ii) a aquisição simultânea dos dados de entrada e saída minimiza as diferenças que aparecem como consequência da restrição da invariância no tempo do modelo matemático de equilíbrio de forças do sistema, iii) a redundância das informações que resulta da aquisição múltipla dos sinais dinâmicos de resposta, se reflete beneficentemente na estimação de parâmetros modais especialmente para sistemas com modos acoplados e frequências naturais muito próximas.

Poder-se-ia ainda classificar os métodos de identificação quanto à linearidade do modelo matemático e a invariância temporal de seus parâmetros. Tais aspectos, entretanto, não são abordados no presente trabalho.

1.2 Revisão Bibliográfica

Este trabalho trata da identificação de parâmetros modais aplicáveis à metodologia MIMO através de métodos não recursivos no domínio do tempo.

A análise de sistemas dinâmicos no domínio do tempo até a década de 80 abrange uma grande quantidade de aplicações em diversas áreas do conhecimento científico como: na modelagem de processos estocásticos, Box e Jenkins [9] e Wold [99], na teoria de previsão econômica como nos trabalhos de Chatfield [14], Makridakis e Wheelwright [66] e [67], Walker [97] e Yule [100], na teoria de filtros digitais e processamento de sinais como em Oppenheim e Schaffer [72], Peled e Liu [80] e Rabiner e Gold [82], em controle digital com Franklin e Powell [29] e Kuo [47], e de maior interesse deste trabalho, na

análise de vibrações mecânicas como nos trabalhos de Brown et al. [13], Cole [15], Ibrahim e Mikulcik [35] - [38] e Walker e Clegg [98].

As técnicas de identificação modal no domínio do tempo começaram a serem difundidas em 1973 por Cole [15] que desenvolveu um método de análise de vibrações utilizando uma função chamada *Randomdec*. Em 1976 e 1977 Ibrahim e Mikulcik [36] e [38] desenvolveram um método de identificação chamado *Ibrahim Time Domain Method* (ITD). Em 1979 Ibrahim [35] associou a função *Randomdec* ao método ITD resultando na *Randomdec Time Domain Technique*. Em 1979 Brown et al. [13] desenvolveram os algoritmos de exponenciais complexas usando o método de mínimos quadrados para o cálculo dos coeficientes auto regressivos do modelo para a metodologia SISO.

Na década de 80 incluem-se ainda os algoritmos no domínio do tempo tais como: o *Polyreference Complex Exponential Method* desenvolvido por Vold e Rocklin [96] e Vold et al. [95] em 1982, o *Time Domain Direct Parameter Method* desenvolvido por Leuridan [58] em 1984 como extensão do método de exponenciais complexas para a metodologia MIMO e o método *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) desenvolvido por Juang e Pappa [43] e [44] em 1985 e 1986 e Longman e Juang [63] em 1989. Outros trabalhos importantes nesta época são, por exemplo, os de Brown [12] em 1982, de Ewins [25] e [26] em 1984, de Ibrahim [34] em 1986, de Allemang e Brown [1] em 1987 e a metodologia *Data Dependent System* desenvolvida por Pandit [75] e Pandit e Metha [76] em 1985. Os autores Ljung [62] em 1987 e Söderström e Stoica [87], em 1989, publicaram importantes trabalhos na área da identificação paramétrica de sistemas dinâmicos no domínio do tempo numa abordagem mais voltada para a engenharia elétrica. Os trabalhos de Ljung e Söderström e Stoica são importantíssimos e têm sido citados recentemente em trabalhos desenvolvidos pelas comunidades de controle e análise modal experimental tal como Juang [41], Fassois [27] e Florakis, Fassois e Hemes [28].

Na segunda metade da década de 80 e na década de 90 surgiram vários trabalhos visando à comparação e a unificação dos algoritmos de identificação modal, principalmente, do domínio do tempo. Os pesquisadores Leuridan, Brown e Allemang [59]

em 1986 procuraram sintetizar a formulação de alguns métodos de identificação no domínio do tempo, Juang [39] em 1987 apresenta a relação entre alguns métodos de realização de sistemas lineares em AME tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência. O termo realização de sistemas é usado na teoria de controle referindo-se ao processo de identificar um modelo (em geral uma representação em espaço de estado) a partir de dados experimentais.

Cooper [18] em 1989 apresenta um trabalho comparando vários métodos de identificação no domínio do tempo em uma análise teórica suportada por estudo estatístico com resultados apresentados em forma de simulação numérica, onde os dados são corrompidos por ruído branco. Estes métodos são apresentados por Cooper [17] em 1990 em testes experimentais em aeronáutica, comparando os diferentes resultados de métodos baseados em otimização por mínimos quadrados no domínio do tempo. Pesquisadores como Juang, Cooper e Wriqth [42] em 1988 e Cooper e Wriqth [21] em 1991 sintetizam os métodos *Polyrefence* e ITD em uma abordagem clássica de mínimos quadrados utilizando o conceito da chamada matriz de correlação.

Allemang, Brown e Fladung [2] apresentam um trabalho em 1994 enfatizando a importância da comparação destes diversos algoritmos utilizados na identificação modal, visando contrastar as características numéricas entres eles. Neste trabalho os autores reformulam alguns algoritmos usando uma estrutura matemática comum entre eles em termos de polinômios matriciais.

Juang [40] e [41] em 1997 apresenta importantes trabalhos discutindo aspectos comuns entre alguns recentes algoritmos de identificação no domínio do tempo usando dados de entrada/saída baseados na matriz de informação. Além disso, outros trabalhos podem ser citados como Juang et al. [45] que propuseram um método de identificação usando a teoria de filtros de Kalman, Fassois [27] e Florakis, Fassois e Hemes [28] que estudaram em 2001 os métodos ARX e ARMAX para o caso MIMO.

A questão do ruído, sempre presente em dados experimentais, é bastante difícil de ser contornada. A maioria dos algoritmos de identificação modal utiliza o método de mínimos quadrados como parte integrante de sua formulação. Entretanto, é sabido que, para dados contaminados com ruído, a utilização da otimização por mínimos quadrados produz estimativas distorcidas dos parâmetros modais, principalmente dos valores de amortecimentos e de resíduos modais. Para minimizar este problema usa-se geralmente adotar uma sobredeterminação da ordem dos modelos de identificação. Este procedimento introduz modos computacionais, sem significado físico que não pertencem ao sistema e, portanto, devem ser separados numa etapa posterior do processo de identificação.

Uma alternativa para obter melhores estimativas dos parâmetros modais para o caso de dados com ruído é a utilização de modelos de média móvel como o ARMA, para o caso da identificação usando dados das FRI's, ou o ARMAX, para o caso de dados de entrada e saída, usando estimadores do tipo máxima verossimilhança como em Reinsel, Basu e Yap [84]. Entretanto, estes métodos requerem elevado custo computacional os tornando de difícil aplicação, principalmente para o caso MIMO.

Uma outra possibilidade para a melhoria da qualidade das estimativas dos parâmetros modais consiste na utilização dos chamados métodos de subespaços, Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90], Viberg [93] e Viberg e Ottersten [94]. Os métodos de subespaço foram desenvolvidos, inicialmente, para atender ao problema de localização de posição de fontes emissoras de ondas - *direction of arrivals* (DOA) - na área de análise de sinais em engenharia elétrica, Roy e Kailath [85].

A principal característica dos métodos está na utilização de propriedades invariantes de subespaços estruturados para o cálculo dos parâmetros do sistema. Para o caso ideal, de dados livres de ruído, estes subespaços são representados pelas matrizes de observabilidade e controlabilidade, obtidas da fatorização da matriz tipo Hankel dos dados do sistema, formados através de uma ordenação natural imposta pelo modelo de espaço de estado, Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90]. Para dados com ruído, tal sub-estruturação é obtida numericamente através do cálculo de uma aproximação de *rank* inferior (em torno

da ordem mínima do sistema) da matriz Hankel dos dados do sistema usando a decomposição em valores singulares (SVD). É comum chamar o espaço coluna desta aproximação de *rank* inferior de subespaço de sinal e seu complemento ortogonal de subespaço de ruído.

Vários métodos de subespaços na literatura são aplicados ao problema de emissão de ondas DOA, o primeiro deles é o MUSIC (*Multiple Signal Classification*) desenvolvido por Schmidt [86] em 1981. Este método fornece uma boa interpretação geométrica para os métodos de subespaços, entretanto, sua utilização é limitada especialmente para o caso multivariado, devido ao elevado custo computacional despendido em operações de otimização não linear. O método ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques*), proposto por Roy e Kailath [85] em 1989, explora a propriedade de invariância ao deslocamento do subespaço de sinal presente na matriz de dados do sistema. O método ESPRIT apresenta grandes vantagens computacionais sobre o MUSIC sendo que a principal delas é a utilização da SVD na discriminação entre os espaços de sinal e de ruído resultando numa drástica redução do custo computacional comparado com o MUSIC. O método ESPRIT é referido neste trabalho como o método dos autovetores da matriz de covariância e pode ser aplicado em AME para o problema de identificação usando dados das FRI's.

Existem também, na área de análise de sinais e controle da engenharia elétrica, os métodos de realização que calculam os subespaços estruturados de subespaços vetoriais definidos pelos dados de entrada e saída como nos trabalhos de Verhaegen [91], Verhaegen e Dewilde [92], Moonen et al. [69] e Overschee e De Moor [73] e [74]. A principal característica destes algoritmos consiste em explorar a propriedade de invariância ao deslocamento presente nas matrizes de observabilidade e controlabilidade, precedida de uma fatorização do tipo RQ, seguida de uma decomposição tipo SVD e a solução de um conjunto sobre-determinado de equações lineares.

Os métodos de subespaços, por encontrarem aplicação essencialmente nas áreas de controle da engenharia elétrica, são de uso praticamente inédito na análise de sistemas

dinâmicos e estruturas mecânicas. Em tais sistemas, a variedade de sinais de entrada e saída, associado à ordem elevada dos modelos requerem formulações, desenvolvimentos e implementações específicas. O presente trabalho contribui nessa direção promovendo a transferência de técnicas de realização da área de controle para a AME com aplicação experimental dos métodos desenvolvidos para a metodologia MIMO.

1.3 Objetivos do Trabalho

O grupo de Processamento de Sinais e Análise de Sistemas Dinâmicos do Departamento de Projeto Mecânico da UNICAMP vem desenvolvendo estratégias aplicadas ao processamento de sinais e análise dinâmica de sistemas vibratórios visando à cooperação com a indústria e áreas de aplicabilidade dos métodos desenvolvidos. Dentre os vários trabalhos desenvolvidos pelo grupo cita-se os seguintes:

1) Bazán e Kurka, [5], [6], [48], [49], [51] e [52], desenvolveram algumas técnicas numéricas visando à otimização do processo de identificação paramétrica no domínio do tempo utilizando conceitos da álgebra linear e teorias usuais da área de problemas inversos como, por exemplo, a aplicação da teoria de regularização de Tikhonov e Arsenin [89]. Destaca-se nestes trabalhos a utilização da SVD e a sobredeterminação dos modelos AR e ARX para obter melhores resultados dos parâmetros identificados, Bazán [5], bem como o desenvolvimento de uma técnica de deconvolução no domínio do tempo, Kurka [49].

2) Dias e Kurka, [24] e [54], apresentaram a utilização de métodos de identificação modal tipo LS no domínio da frequência na análise dinâmica de um garfo mecânico.

3) Gomes [32] desenvolveu o método ERABACK multivariado e aplicou na análise dinâmica de um tubo de sucção de óleo do motor Perkins T4236 para a validação dos resultados obtidos por elementos finitos usando o software MSC-NASTRAN.

4) Araújo e Kurka, [4] e [50], desenvolveram técnicas de sub-estruturação modal para a síntese modal de estruturas mecânicas com aplicação em um modelo reduzido de uma asa de avião.

5) Mathias [68] aplicou o método ARX sobredeterminado adotando a metodologia SISO e LS para a identificação de parâmetros modais com aplicação em um modelo reduzido de uma asa de avião.

6) Podem-se ainda citar outros trabalhos desenvolvidos pelo grupo como, Brandon, Kurka e Mathias [10], Brandon, Mathias e Kurka [11], Kurka e Braun [53], Kurka e Ferreira [55], Kurka, Gomes e Bazán [56] e Kurka et al. [57].

Dentro deste contexto, o objetivo deste trabalho consiste em propor estratégias para a construção de algoritmos de identificação de parâmetros modais, que produzam melhores estimativas dos parâmetros, para dados contaminados com ruído, comparadas com as obtidas dos métodos tradicionais em AME (*Polyreference* LS e ARX). Os algoritmos desenvolvidos são formulados segundo a metodologia MIMO, baseados na teoria de realização de sistemas lineares, utilizando os métodos de subespaços, para dados das FRI's e de entrada e saída. Propõe-se também demonstrar a equivalência presente nas formulações dos diversos algoritmos de identificação.

Os programas computacionais são implementados na linguagem Matlab. A qualidade da identificação dos parâmetros modais é demonstrada através da introdução de ruído Gaussiano branco aos dados obtidos da simulação numérica de sistemas mecânicos tipo massa, mola, amortecedor de três graus de liberdade. Apresentam-se também resultados experimentais usando dados obtidos de um escapamento automotivo e de um modelo reduzido de uma asa de avião.

1.4 Apresentação do Trabalho

Este trabalho é organizado da seguinte maneira:

O capítulo 2 estabelece as relações matemáticas básicas da AME utilizada para dar suporte ao trabalho. Este capítulo enfatiza, especialmente, a obtenção das expressões dos parâmetros modais e das FRI's partindo das equações do movimento de sistemas mecânicos espacialmente discretizado.

O capítulo 3 apresenta uma introdução à teoria de realização de sistemas lineares abordando a propriedade de invariância ao deslocamento da matriz Hankel dos dados do sistema, a decomposição da matriz Hankel em termos das chamadas matrizes de Vandermonde e a determinação dos resíduos modais.

O Capítulo 4 apresenta alguns métodos de identificação usando os dados das FRI's como o *Polyreference*, ITD, ERA e o método baseado nos autovetores da matriz de covariância. Além disso, apresenta-se a equivalência entres estes métodos.

O capítulo 5 desenvolve algoritmos para a identificação de parâmetros modais para dados de entrada e saída através do método de subespaços apresentando a equivalência entre estes e outros algoritmos de uso corrente em engenharia de controle e elétrica.

O capítulo 6 apresenta os resultados dos cálculos dos parâmetros modais usando os algoritmos desenvolvidos neste trabalho. Em primeiro lugar apresenta-se os resultados com dados simulados para identificação usando dados das FRI's e de entrada e saída seguido dos resultados obtido do processamento usando dados experimentais tomados de um escapamento automotivo e de um protótipo reduzido de uma asa de avião.

O capítulo 7 apresenta as conclusões visando à comparação dos resultados apresentados pelos algoritmos desenvolvidos neste trabalho com os algoritmos mais populares em AME e sugestões para futuros trabalhos.

Capítulo 2

MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS

2.1 Introdução

A descrição analítica dos sinais de resposta ao impulso unitário constitui a base para elaboração dos algoritmos de identificação de parâmetros modais de estruturas mecânicas no domínio do tempo. Este capítulo apresenta a expressão das FRI's baseada no modelo modal, isto é, em função dos parâmetros modais do sistema. Além disso, são descritas outras relações fundamentais da análise modal necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

2.2 Das Equações Dinâmicas aos Parâmetros Modais

Um sistema mecânico, linear, invariante no tempo, com n graus de liberdade pode ser modelado através de um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem espacialmente discretizadas como,

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{u}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (2.1)$$

onde $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ e $\tilde{\mathbf{K}}$ são matrizes simétricas, positivo-definidas, de dimensão $n \times n$, que representam, respectivamente, as propriedades de inércia, de amortecimento viscoso e de rigidez do sistema. Os vetores $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{f}(t)$ ambos de dimensão $n \times 1$ representam, respectivamente, as coordenadas relacionadas aos n graus de liberdade do modelo e as forças generalizadas que atuam sobre os pontos de massa do sistema. Esta seção mostra a obtenção das expressões dos parâmetros modais do sistema mecânico descrito pela equação (2.1) visando sua utilização em identificação modal.

Como o amortecimento do modelo acima é assumido do tipo viscoso, é necessário considerar um problema de autovalor complexo para a determinação dos parâmetros modais do sistema, Müller e Schiehlen [70]. A solução deste problema requer a construção de um modelo em espaço de estado de ordem $2n$ representado pela seguinte equação diferencial de primeira ordem,

$$\bar{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{f}}(t), \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{Bmatrix}, \quad (2.3)$$

é chamado vetor de estado do sistema formado pelos vetores de posição $\mathbf{u}(t)$ e velocidade $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e possui dimensão $2n \times 1$. As matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ ambas de dimensão $2n \times 2n$ são definidas como,

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}} & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

e o vetor $\bar{\mathbf{f}}(t)$ de dimensão $2n \times 1$ é definido como,

$$\bar{\mathbf{f}}(t) = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_f \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

onde o vetor $\mathbf{g}(t)$ de dimensão $r \times 1$ e a matriz $\bar{\mathbf{U}}_f$ de dimensão $n \times r$ representam, respectivamente, os r esforços não nulos de entrada e a correspondente matriz de influência da entrada de modo que, $\mathbf{f}(t) = \bar{\mathbf{U}}_f \mathbf{g}(t)$.

O comportamento próprio do sistema pode ser descrito através de sua resposta livre como,

$$\bar{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Uma solução genérica $\mathbf{x}(t)$ da equação acima é assumida como,

$$\mathbf{x}(t) = \Psi_j e^{\lambda_j t}, \quad (2.7)$$

onde Ψ_j é um vetor complexo de dimensão $2n \times 1$ e λ_j uma constante. Substituindo a equação (2.7) em (2.6), obtém-se o seguinte problema de autovalor de primeira ordem associado à equação (2.6) como,

$$(\lambda_j \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{B}})\Psi_j = 0, \quad (2.8)$$

onde para cada autovalor λ_j , também chamado pólo do sistema, está associado um autovetor Ψ_j com $j = 1, \dots, 2n$. Assumindo que o sistema mecânico seja sub-amortecido os autovalores são representados em pares complexos conjugados como em Müller e Schiehlen [70],

$$\lambda_j, \lambda_{j+1} = -\omega_j \xi_j \pm \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} = -\sigma_j \pm i\omega_{d_j}, \quad (2.9)$$

onde $\omega_j = \sqrt{[\text{Re}(\lambda_j)]^2 + [\text{Im}(\lambda_j)]^2}$, $\xi_j = \frac{\text{Re}[-\lambda_j]}{\omega_j}$, $\sigma_j = \omega_j \xi_j$ e $\omega_{d_j} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}$

denotam, respectivamente, frequência natural, fator de amortecimento, parâmetro de amortecimento modal e frequência natural amortecida associados ao j -ésimo modo de vibração do sistema e $i = \sqrt{-1}$.

As equações (2.3) e (2.7) sugerem que os autovetores Ψ_j devam possuir a seguinte forma,

$$\Psi_j = \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \lambda_j \phi_j \end{Bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde ϕ_j é um vetor de dimensão $n \times 1$ com $j = 1, \dots, 2n$.

Substituindo as equações (2.4) e (2.10) na equação (2.8) obtém-se o seguinte,

$$(\tilde{\mathbf{M}} \lambda_j^2 + \tilde{\mathbf{C}} \lambda_j + \tilde{\mathbf{K}}) \phi_j = 0, \quad (2.11)$$

com $j = 1, \dots, 2n$.

A equação (2.11) representa a forma padrão de um problema de autovalor de segunda ordem associada à equação (2.6), onde ϕ_j representa o vetor de solução não trivial. Este vetor também é chamado de modo complexo amortecido.

Seja Λ uma matriz de dimensão $2n \times 2n$ formada pelos $2n$ autovalores do problema descrito pela equação (2.8) definida como,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\Lambda}^* \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde $\tilde{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ é uma matriz diagonal de dimensão $n \times n$ que contém os n autovalores (ou pólos) do sistema. O símbolo $*$ denota conjugação complexa.

A chamada matriz modal Ψ , de dimensão $2n \times 2n$, formada por todos os $2n$ autovetores do problema representado pela equação (2.8) é definida como,

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Phi \tilde{\Lambda} & \Phi^* \tilde{\Lambda}^* \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$ é uma matriz de dimensão $n \times n$ que contém os modos próprios de vibrar do sistema.

Pode-se mostrar que, adotando-se uma normalização conveniente, a matriz modal Ψ possui as seguintes propriedades de ortogonalidade, Müller e Schiehlen [70],

$$\Psi^T \bar{\mathbf{A}} \Psi = \mathbf{I} \quad \text{e} \quad \Psi^T \bar{\mathbf{B}} \Psi = -\Lambda, \quad (2.14)$$

onde o símbolo T denota transposição.

No caso genérico de não singularidade da matriz $\tilde{\mathbf{M}}$, o sistema mecânico representado pela equação de estado (2.2) pode ser convertido em uma outra forma obtida pela pré multiplicação da equação (2.2) por $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$, que fornece,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{A}}^{-1} \bar{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + \mathbf{E} \mathbf{g}(t), \quad (2.15)$$

onde

$$\bar{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1} & -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{F} = -\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{K}} & -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

e

$$\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{M}}^{-1} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1} & -\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_f \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{U}}_f \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{g}(t), \quad (2.18)$$

com

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\bar{\mathbf{U}}_f \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de dimensão $n \times n$. A matriz \mathbf{F} de dimensão $2n \times 2n$ é chamada de matriz dinâmica do sistema pois contém toda a informação a respeito do comportamento dinâmico do sistema representado pela equação (2.1). A matriz \mathbf{E} possui dimensão $2n \times r$.

Isolando-se as matrizes $\bar{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ da equação (2.14) pode-se mostrar que,

$$\bar{\mathbf{A}}^{-1} = \Psi\Psi^T \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{B}} = -\Psi^{-T}\Lambda\Psi^{-1}. \quad (2.20)$$

Substituindo as matrizes $\bar{\mathbf{A}}^{-1}$ e $\bar{\mathbf{B}}$ descritas pela equação (2.20) na expressão de \mathbf{F} dada pela equação (2.17), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{F} = -\bar{\mathbf{A}}^{-1}\bar{\mathbf{B}} = \Psi\Lambda\Psi^{-1}. \quad (2.21)$$

A equação (2.21) mostra que as matrizes Ψ e Ψ^{-1} diagonalizam a matriz dinâmica F segundo a decomposição de autovalor acima, resultando que as matrizes Λ e Ψ contêm, respectivamente, os autovalores e autovetores de F , Luenberger [64].

Assumindo que o vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ seja conhecido no instante t_1 , a solução da equação (2.15) para um instante t_2 é dada por, Luenberger [64],

$$\mathbf{x}(t_2) = e^{\mathbf{F}(t_2-t_1)} \mathbf{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{F}(t_2-\tau)} \mathbf{E} \mathbf{g}(\tau) d\tau. \quad (2.22)$$

Os dados de vibrações experimentais são amostrados em instantes discretos igualmente espaçados no tempo. Todo equacionamento até agora, entretanto, foi feito em tempo contínuo. Para passar para tempo discreto utiliza-se a chamada discretização de ordem zero que consiste em amostrar o sinal de excitação mantendo seu valor constante durante um intervalo de tempo Δt , isto é, definindo-se $t_1 = k\Delta t$ e $t_2 = (k+1)\Delta t$ como dois instantes consecutivos separados um intervalo de discretização Δt , tem-se que,

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(k\Delta t) \quad \text{para} \quad k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t. \quad (2.23)$$

Substituindo a equação (2.23) em (2.22) para os instantes t_1 e t_2 obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{x}((k+1)\Delta t) = e^{\mathbf{F}\Delta t} \mathbf{x}(k\Delta t) + \int_{t_1=k\Delta t}^{t_2=(k+1)\Delta t} e^{\mathbf{F}((k+1)\Delta t-\tau)} \mathbf{E} \mathbf{g}(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

Como o termo $\mathbf{g}(\tau)$ é assumido constante durante o intervalo de discretização $k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$ e vale $\mathbf{g}(k\Delta t)$, a equação (2.24) pode ser escrita como,

$$\mathbf{x}((k+1)\Delta t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k\Delta t) + \mathbf{B} \mathbf{g}(k\Delta t), \quad (2.25)$$

onde

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\Delta t}, \quad (2.26)$$

é chamada matriz de transição e possui dimensão $2n \times 2n$ e

$$\mathbf{B} = \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \mathbf{A}((k+1)\Delta t - \tau) \mathbf{E} d\tau. \quad (2.27)$$

Considerando que a matriz \mathbf{E} é constante e fazendo a mudança de variável $\rho = (k+1)\Delta t - \tau$ com $d\rho = -d\tau$, tem-se que $\rho = \Delta t$ para $\tau = k\Delta t$ e $\rho = 0$ para $\tau = (k+1)\Delta t$. Substituindo estes termos na equação (2.27) obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{B} = \left[- \int_{\Delta t}^0 \mathbf{A}(\rho) d\rho \right] \mathbf{E} = \left[\int_0^{\Delta t} \mathbf{A}(\rho) d\rho \right] \mathbf{E} = \left[\int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{F}\rho} d\rho \right] \mathbf{E}. \quad (2.28)$$

Considerando que $\int_0^t e^{a\rho} d\rho = \frac{1}{a}(e^{at} - 1)$, tem-se então, por analogia, que a equação (2.28) pode ser escrita como,

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{E}. \quad (2.29)$$

Na prática, nem todos os elementos do vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ do sistema são realmente observados. A parte da resposta observável do sistema é definida através de um vetor $\mathbf{y}(t)$, de dimensão $m \times 1$, que depende do tipo de medição realizada no processo experimental como,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{g}(t), \quad (2.30)$$

onde as matrizes \mathbf{C} de dimensão $m \times 2n$ e \mathbf{D} de dimensão $m \times r$ relacionam a resposta medida do sistema $\mathbf{y}(t)$ com, respectivamente, as variáveis de estado $\mathbf{x}(t)$ e as forças externas $\mathbf{g}(t)$ que atuam no sistema.

Definido o termo k para representar o instante discreto $k\Delta t$, e incluindo a parte da resposta observável do sistema dinâmico descrita pela equação (2.30), obtém-se a versão discretizada para as equações de estado (2.2) como,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{g}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{g}(k) \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde de agora em diante, $\mathbf{x}(k)$ representa o vetor de estado de dimensão $2n \times 1$, no índice k , $\mathbf{g}(k)$ é o vetor de entrada de dimensão $r \times 1$ correspondente a r entradas do sistema, $\mathbf{y}(k)$ o vetor de saída de dimensão $m \times 1$ correspondente a m saídas consideradas do sistema.

Como no caso da modelagem de estado em tempo contínuo, o comportamento próprio do sistema modelado em tempo discreto pode também ser determinado pela resposta livre. A análise do comportamento próprio do sistema através da equação (2.31) livre de excitação, isto é com $\mathbf{g}(k) = \mathbf{0}$, começa explorando a seguinte equação,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (2.32)$$

cuja solução assumida para o vetor $\mathbf{x}(k)$ possui a seguinte forma,

$$\mathbf{x}(k) = \Psi_j z_j^k, \quad (2.33)$$

onde, como antes no caso da modelagem em tempo contínuo, Ψ_j é um vetor complexo de dimensão $2n \times 1$ e z_j é uma constante complexa. Substituindo a equação (2.33) em (2.32), obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned}\Psi_j z_j^{k+1} &= \mathbf{A} \Psi_j z_j^k \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \Psi_j z_j^k\end{aligned}\quad (2.34)$$

que, considerando a parte superior da equação acima, resulta no seguinte problema de autovalor,

$$(z_j \mathbf{I} - \mathbf{A}) \Psi_j = 0. \quad (2.35)$$

A solução deste problema fornece $2n$ autovalores z_j para a matriz \mathbf{A} . Para cada um destes autovalores tem-se um autovetor associado Ψ_j . O modo de vibrar ϕ_j de dimensão $m \times 1$, que é a parte observável do autovetor Ψ_j , é obtida através da equação (2.32) como,

$$\phi_j = \mathbf{C} \Psi_j. \quad (2.36)$$

A matriz modal complexa é obtida como,

$$\mathbf{\Psi} = [\Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \cdots \quad \Psi_{2n}]. \quad (2.37)$$

Considerando a equação (2.35), a matriz modal $\mathbf{\Psi}$ diagonaliza a matriz \mathbf{A} em uma matriz \mathbf{Z} diagonal que contém os $2n$ autovalores de \mathbf{A} como,

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Psi} \mathbf{Z} \mathbf{\Psi}^{-1}, \quad (2.38)$$

onde $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1, \dots, z_{2n}\}$.

Neste ponto é necessário estabelecer uma relação entre as duas decomposições de autovalor presentes nas formulações contínua e discreta dadas, respectivamente, pelas equações (2.21) e (2.38). Esta relação é estabelecida através da definição da matriz de transição $A = e^{F\Delta t}$ segundo a equação (2.26).

Na verdade, os modos de vibrações do sistema discreto são equivalentes aos do sistema em tempo contínuo a menos de uma normalização. Finalmente, comparando as equações (2.7) e (2.33), obtém-se a relação entre os $2n$ autovalores dos modelos contínuo e discreto como,

$$z_j = e^{\lambda_j \Delta t}, \quad (2.39)$$

com $j = 1, \dots, 2n$.

Da comparação da expressão de λ_j descrita pela equação (2.9) com a equação (2.39), obtém-se as expressões dos parâmetros modais do sistema dinâmico descrito pela equação (2.2), como,

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{\log(z_j)}{\Delta t}, \\ \omega_j &= |\lambda_j|, \\ \xi_j &= -\frac{\text{Re}\{\lambda_j\}}{|\lambda_j|}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

com $j = 1, \dots, 2n$ e \log denota logaritmo natural.

2.3 Função de Resposta ao Impulso e Resíduos Modais

Esta seção apresenta a determinação da expressão das FRI's que será usada neste trabalho.

Usando a transformação $\mathbf{x}(t) = \Psi \boldsymbol{\eta}(t)$, sendo $\boldsymbol{\eta}(t)$ um vetor $2n \times 1$, e pré-multiplicando a equação (2.2) por Ψ^T , obtém-se o seguinte,

$$\Psi^T \bar{\mathbf{A}} \Psi \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \Psi^T \bar{\mathbf{B}} \Psi \boldsymbol{\eta}(t) = \Psi^T \bar{\mathbf{f}}(t). \quad (2.41)$$

Considerando as propriedades de ortogonalidade da matriz modal Ψ a equação acima se reduz a seguinte forma,

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \Lambda \boldsymbol{\eta}(t) + \Psi^T \bar{\mathbf{f}}(t). \quad (2.42)$$

O vetor $\boldsymbol{\eta}(t)$ é chamado coordenada modal do sistema pois ele desacopla a equação do movimento (2.2). Aplicando a transformada de Laplace (TL) à equação (2.42), obtém-se o seguinte,

$$(s\mathbf{I} - \Lambda) \boldsymbol{\eta}(s) = \Psi^T \bar{\mathbf{F}}(s). \quad (2.43)$$

Voltando a variável $\mathbf{X}(s)$ como $\boldsymbol{\eta}(s) = \Psi^{-1} \mathbf{X}(s)$, a equação (2.43) fica,

$$(s\mathbf{I} - \Lambda) \Psi^{-1} \mathbf{X}(s) = \Psi^T \bar{\mathbf{F}}(s) \quad (2.44)$$

ou

$$\mathbf{X}(s) = \Psi (s\mathbf{I} - \Lambda)^{-1} \Psi^T \bar{\mathbf{F}}(s). \quad (2.45)$$

Agora, aplicando a TL à equação (2.30) com $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{0}]$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ (esta hipótese é considerada aqui para simplificar a formulação, não é uma necessidade), fazendo $\bar{\mathbf{U}}_f = [\mathbf{I}, \mathbf{0}]^T$ na equação (2.5) e usando a equação (2.45), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) = [\mathbf{I}_m \ \mathbf{0}] \boldsymbol{\Psi} (s\mathbf{I} - \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \boldsymbol{\Psi}^T \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{G}(s). \quad (2.46)$$

Definindo a matriz de transferência como as funções que relacionam as entradas e saídas do sistema como $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{G}(s)$, onde $\mathbf{H}(s)$ possui dimensão $m \times r$, segue imediatamente da equação (2.46) que,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Y}_1(s) \\ \mathbf{Y}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_m(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1r}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(s) & H_{m2}(s) & \cdots & H_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_1(s) \\ \mathbf{G}_2(s) \\ \vdots \\ \mathbf{G}_r(s) \end{Bmatrix}. \quad (2.47)$$

Usando a equação (2.46), pode-se mostrar que a expressão de um termo genérico da matriz de função de transferência relativa a uma excitação aplicada no ponto j e a resposta medida no ponto i é dada pela seguinte equação, Ewins [25],

$$H_{ij}(s) = \sum_{l=1}^n \frac{\phi_{i(l)} \phi_{j(l)}}{s - \lambda_l} + \frac{\phi_{i(l)}^* \phi_{j(l)}^*}{s - \lambda_l^*}. \quad (2.48)$$

Aplicando-se a TL inversa ao termo genérico $H_{ij}(s)$ da equação (2.48), obtém-se a mesma relação no domínio do tempo para um elemento genérico da FRI, como,

$$h_{ij}(t) = \sum_{l=1}^n \left[\phi_{i(l)} \phi_{j(l)} e^{\lambda_l t} + \phi_{i(l)}^* \phi_{j(l)}^* e^{\lambda_l^* t} \right], \quad (2.49)$$

Definindo-se o termo $r_{ij(l)} = \phi_{i(l)} \phi_{j(l)}$, a equação (2.49) pode ser escrita como,

$$h_{ij}(t) = \sum_{l=1}^n \left[r_{ij(l)} e^{\lambda_l t} + r_{ij(l)}^* e^{\lambda_l^* t} \right], \quad (2.50)$$

onde o termo $r_{ij(t)} = \phi_{i(t)} \phi_{j(t)}$ é chamado resíduo modal complexo sendo $\phi_{i(t)}$ o i -ésimo elemento do autovetor $\phi_{(t)}$. A equação (2.50) é a expressão das FRI's, escritas em função dos pólos e resíduos modais do sistema, que será usada neste trabalho.

Capítulo 3

IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS USANDO A TEORIA DA REALIZAÇÃO

3.1 Introdução

A teoria de realização de sistemas lineares é bastante difundida na comunidade de análise de sinais e controle da engenharia elétrica como, por exemplo, em Kailath [46], Moonen et al. [69], Verhaegen [91] Verhaegen e Dewilde [92] e Viberg [93]. Esta metodologia tem atraído a atenção da comunidade da análise modal experimental - como em Alvin e Peterson [3], Juang [39] – [41], Juang, Cooper e Wright [42], Juang e Pappa [43] e [44], Juang et al. [45], Longman e Juang [63], Pappa [77] - motivada pelas facilidades apresentadas na implementação dos algoritmos de identificação, que envolve basicamente teorias usuais da álgebra linear computacional, Datta [22]. Este capítulo fornece os conceitos básicos para a formulação dos algoritmos de realização de sistemas lineares em AME.

A seção 3.2 apresenta uma introdução à identificação paramétrica através da teoria da realização de sistemas lineares. Esta seção mostra que as FRI's adquirem uma estrutura matricial tipo Hankel dotada de duas importantes propriedades que são decisivas na

elaboração dos métodos de identificação. Uma destas propriedades está relacionada com o *rank* da matriz Hankel e a outra com a invariância ao deslocamento, de onde se identifica, respectivamente, a ordem do modelo e os parâmetros modais do sistema.

As FRI's são descritas como uma soma de senoídes amortecidas, o que permite a estrutura Hankel ser também representada por uma decomposição matricial formada por matrizes de Vandermonde. A seção 3.3 apresenta este tipo de decomposição para o caso multivariado e mostra também que ela preserva a propriedade de invariância ao deslocamento da matriz Hankel.

A seção 3.4 apresenta duas propostas para a determinação dos resíduos modais via metodologias SISO e MISO. A primeira maneira é obtida diretamente da formulação das FRI's usando a matriz de Vandermonde e a segunda usando uma realização especial na qual a matriz de transição A é diagonal e contém os parâmetros $z_k = e^{\lambda_k \Delta}$ do sistema, e a matriz B fornece diretamente os resíduos de várias FRI's.

3.2 Introdução à Teoria da Realização de Sistemas Lineares

O problema de realização de sistemas lineares consiste em encontrar uma representação em espaço de estado para um conjunto de dados experimentais obtidos da medição de sinais de um sistema dinâmico, Kailath [46]. Esta seção apresenta os elementos básicos necessários para a montagem do problema de identificação modal multivariável visando a determinação dos pólos e resíduos do sistema.

3.2.1 O Modelo de Espaço de Estado e os Parâmetros de Markov

Após algumas manipulações algébricas, a equação (2.31) pode ser expandida como,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+L-1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{D} & & & & \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & & & \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{CA}^{L-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L-4}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(k) \\ \mathbf{g}(k+1) \\ \mathbf{g}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(k+L-1) \end{Bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde $L \geq 2n$ é um número inteiro cujo valor depende da dimensão da matriz de transição A do sistema.

Definindo os vetores $\mathbf{y}_L(k)$ e $\mathbf{g}_L(k)$ de dimensões, respectivamente iguais a, $mL \times 1$ e $rL \times 1$,

$$\mathbf{y}_L(k) = \begin{Bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \mathbf{y}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+L-1) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{g}_L(k) = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(k) \\ \mathbf{g}(k+1) \\ \mathbf{g}(k+2) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(k+L-1) \end{Bmatrix}, \quad (3.2)$$

e as matrizes \mathbf{O}_L e \mathbf{T}_L de dimensões, respectivamente iguais a, $mL \times 2n$ e $mL \times rL$ como,

$$\mathbf{O}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & & & & \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & & & \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \mathbf{D} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \mathbf{CA}^{L-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L-4}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

a equação (3.1) pode ser escrita como,

$$\mathbf{y}_L(k) = \mathbf{O}_L \mathbf{x}(k) + \mathbf{T}_L \mathbf{g}_L(k), \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{g}_L(k)$ e $\mathbf{y}_L(k)$ são vetores que contém, respectivamente, os dados de entrada e saída do sistema, \mathbf{O}_L é chamada matriz de observabilidade e \mathbf{T}_L é uma matriz triangular inferior de estrutura Toeplitz.

Seja,

$$\mathbf{g}_j(k) = \begin{cases} \mathbf{e}_j & k = 0 \\ 0 & k > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

O vetor $\mathbf{g}_j(k)$ representa um impulso unitário na j -ésima componente do vetor $\mathbf{g}(k)$ da equação de espaço de estado para tempo discreto (2.31), sendo todas as demais componentes iguais a zero.

Substituindo $\mathbf{g}_j(k)$ na equação (2.31) para $k = 0$, obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(0) + \mathbf{b}_j \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(0) + \mathbf{d}_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

e para $k > 0$, obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^{k+1} \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^k \mathbf{b}_j \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}_j \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde os vetores \mathbf{b}_j e \mathbf{d}_j possuem dimensões, respectivamente, iguais a $2n \times 1$ e $m \times 1$.

Considerando um sistema em repouso inicial, isto é $\mathbf{x}(0)=0$, e a equação (3.5) para valores de $j=1:r$, tem-se r impulsos unitários do tipo $\mathbf{g}_j(k)$ aplicados não simultaneamente ao sistema, que produzem a seguinte resposta impulsiva,

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{cases} \mathbf{D} & k = 0 \\ \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} & k > 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

As matrizes $\mathbf{Y}(k)$ de dimensão $m \times r$ definidas desta maneira são chamadas parâmetros de Markov, Kailath [46]. Fisicamente, os parâmetros de Markov representam precisamente as m respostas impulsivas de um sistema em tempo discreto quando r pulsos unitários são aplicados não simultaneamente ao sistema. Portanto, a matriz $\mathbf{Y}(k)$ pode ser representada como,

$$\mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} h_{11}(k) & h_{12}(k) & h_{1r}(k) \\ h_{21}(k) & h_{22}(k) & h_{2r}(k) \\ h_{m1}(k) & h_{m2}(k) & h_{mr}(k) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

onde cada coluna de $\mathbf{Y}(k)$ representa um conjunto de m respostas impulsivas devido a cada um dos r pulsos aplicados no sistema. Nota-se que para o caso SISO, os parâmetros de Markov são representados por uma FRI específica $h_y(k)$. Para o caso SIMO, os parâmetros de Markov são representados por uma coluna específica de $\mathbf{Y}(k)$ e para o caso MIMO eles são representados através da equação (3.8), mais sobre isso vide Phan, Juang e Longman [81].

3.2.2 Sistema de Ordem Mínima e Transformação de Similaridade

O problema de realização de sistemas lineares consiste em encontrar um modelo em espaço de estado para um conjunto de dados experimentais de um sistema dinâmico como,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \mathbf{y}(k) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \mathbf{g}(k) \end{Bmatrix}, \quad (3.10)$$

de modo que as FRI's do sistema correspondam aos parâmetros de Markov dados pela equação (3.8).

Em princípio, existe um número muito grande (infinito) de realizações possíveis do tipo descrito pela equação (3.10) que podem ser encontradas para um determinado sistema. O vetor de estado $\mathbf{x}(k)$, por exemplo, pode conter alguns estados que não são observados na resposta ou não são excitados pela entrada. Um modelo em espaço de estado de ordem mínima é aquele cuja ordem ou dimensão do vetor de estado do sistema é igual à ordem $2n$ do sistema dinâmico, Kailath [46].

Mesmo para sistemas de ordem mínima, a representação de estado dada pela equação (2.31), pode não ser única. Uma transformação de estado descrita por uma matriz \mathbf{T} , inversível e de dimensão $2n \times 2n$, pode levar a representações equivalentes descritas de forma diferente da original, como,

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{T} \mathbf{x}'(k), \quad (3.11)$$

resultando no seguinte sistema equivalente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(k+1) &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{x}'(k) + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{g}(k), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C} \mathbf{T} \mathbf{x}'(k) + \mathbf{D} \mathbf{g}(k) \end{aligned}, \quad (3.12)$$

de modo que a representação de estado equivalente é dada por,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} & \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \mathbf{T} & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

A existência desta infinidade de matrizes não singulares \mathbf{T} para a equação (3.11), define claramente infinitas realizações possíveis do tipo $[\mathbf{A}' \ \mathbf{B}' \ \mathbf{C}' \ \mathbf{D}']$. Na teoria da álgebra linear, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{A}' relacionadas como $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ são chamadas similares e seus autovalores permanecem invariantes sobre esta transformação. Este tipo de transformação de variável de estado dada pela equação (3.11) é chamada transformação de similaridade.

Uma transformação de similaridade importante é aquela que dada uma realização $[A \ B \ C \ D]$, encontra-se uma realização $[A_d \ B_d \ C_d \ D_d]$ de modo que, $T^{-1}AT = A_d = \text{diag}\{z_1 \ \dots \ z_{2n}\}$. Esta transformação especial $[A_d \ B_d \ C_d \ D_d]$ será discutida com mais detalhes na seção 3.4 para o cálculo dos resíduos modais do sistema.

3.2.3 Formulação Básica do Problema

Assumindo-se que os dados das FRI's do sistema dinâmico estejam disponíveis, a identificação de parâmetros modais no domínio do tempo começa pela formação da matriz Hankel $H(k)$ de dimensão $m(L+1) \times rN$, que contém os parâmetros de Markov $Y(k)$ (de dimensão $m \times r$), definida como,

$$H(k) = \begin{bmatrix} Y(k) & Y(k+1) & \dots & Y(k+N-1) \\ Y(k+1) & Y(k+2) & \dots & Y(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y(k+L) & Y(k+L+1) & \dots & Y(k+L+N-1) \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

onde $2n \leq m(L+1) \leq rN$, sendo $2n$ a ordem do sistema. Segue uma discussão a respeito das propriedades da matriz de Hankel na identificação de sistemas dinâmicos.

Para um sistema de r entradas e m saídas, a relação entrada/saída de um sistema linear, em termos dos parâmetros de Markov $Y(k)$, é dada por,

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{Y}(k) * \mathbf{g}(k), \quad (3.15)$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}(k) & h_{12}(k) & \dots & h_{1r}(k) \\ h_{21}(k) & h_{22}(k) & \dots & h_{2r}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(k) & h_{m2}(k) & \dots & h_{mr}(k) \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} g_1(k) \\ g_2(k) \\ \vdots \\ g_r(k) \end{Bmatrix},$$

onde o símbolo * denota produto de convolução discreta que é definida como, Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90],

$$\mathbf{y}(k) = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{Y}(s) \mathbf{g}(k-s)$$

$$\begin{Bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{L+1} \begin{bmatrix} h_{11}(s) & h_{12}(s) & \cdots & h_{1r}(s) \\ h_{21}(s) & h_{22}(s) & \cdots & h_{2r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1}(s) & h_{m2}(s) & \cdots & h_{mr}(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1(k-s) \\ g_2(k-s) \\ \vdots \\ g_r(k-s) \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

Com base na equação (3.16), a matriz Hankel \mathbf{H} é obtida como a relação entre uma seqüência de entradas representada pela matriz $\mathbf{G}_- = [\mathbf{g}(-1) \ \mathbf{g}(-2) \ \cdots \ \mathbf{g}(-N)]^T$ - de dimensão $rN \times 1$, correspondente aos instantes passados com respeito ao instante inicial $t = 0$, definida desde o instante $t = -N$ até o instante $t = -1$ - e uma seqüência de saídas representada pela matriz $\mathbf{Y}_+ = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \cdots \ \mathbf{y}(L)]^T$, de dimensão $m(L+1) \times 1$ correspondente aos instantes futuros com respeito ao instante inicial $t = 0$. De acordo com a equação (3.16), pode-se escrever o seguinte,

$$\mathbf{Y}_+ = \mathbf{H}_{(L+1)m \times Nr} \mathbf{G}_-. \quad (3.17)$$

Substituindo as expressões de \mathbf{Y}_+ e \mathbf{G}_- na equação (3.17) e considerando a relação de entrada/saída dada pela equação (3.16), obtém-se o seguinte,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \mathbf{y}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(1) & \mathbf{Y}(2) & \cdots & \mathbf{Y}(N) \\ \mathbf{Y}(2) & \mathbf{Y}(3) & \cdots & \mathbf{Y}(N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}(L+1) & \mathbf{Y}(L+2) & \cdots & \mathbf{Y}(L+N) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{g}(-1) \\ \mathbf{g}(-2) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(-N) \end{Bmatrix}. \quad (3.18)$$

Substituindo as expressões dos parâmetros de Markov dados pela equação (3.8) na equação (3.18), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{Y}_+ = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \dots & \mathbf{CA}^{N-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^N\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^L\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{L+N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{G}_-, \quad (3.19)$$

de modo que a matriz Hankel $\mathbf{H}=\mathbf{H}(k=1)$ pode ser escrita como,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \dots & \mathbf{CA}^{N-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^N\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^L\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{L+N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) mostra que o matriz \mathbf{H} pode ser calculado através do produto de duas matrizes como,

$$\mathbf{H} = \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^L \end{bmatrix} [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B}], \quad (3.21)$$

onde \mathbf{O}_L de dimensão $m(L+1) \times 2n$ e \mathbf{C}_N de dimensão $2n \times rN$ são chamadas, respectivamente, de matrizes de observabilidade e de controlabilidade do sistema, Kailath [46].

Para uma realização de ordem mínima as matrizes \mathbf{O}_L e \mathbf{C}_N possuem por definição *rank* $2n$, igual a ordem do sistema dinâmico e definem as bases, respectivamente, dos espaços coluna e linha de \mathbf{H} . Além disso, nota-se que as matrizes \mathbf{O}_L e \mathbf{C}_N possuem propriedade de invariância ao deslocamento, ou seja,

$$\mathbf{O}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{(L-1)} \\ \mathbf{CA}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{L(1)} \\ \mathbf{CA}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{O}_{L(2)} \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

onde as matrizes $\mathbf{O}_{L(1)}$ e $\mathbf{O}_{L(2)}$, de dimensão $mL \times 2n$, são partições da matriz de observabilidade \mathbf{O}_L formadas, respectivamente, pelas primeiras e últimas mL linhas da matriz \mathbf{O}_L como,

$$\mathbf{O}_{L(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{O}_{L(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^L \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Considerando que as matrizes $\mathbf{O}_{L(1)}$ e $\mathbf{O}_{L(2)}$ possuem *rank* igual a $2n \leq mL \leq rN$, e que

$$\mathbf{O}_{L(2)} = \mathbf{O}_{L(1)}\mathbf{A}, \quad (3.24)$$

pode-se calcular a matriz de transição \mathbf{A} como,

$$\mathbf{A} = \mathbf{O}_{L(1)}^+ \mathbf{O}_{L(2)}, \quad (3.25)$$

onde o símbolo + denota pseudo-inversa. Poder-se-ia obter relações semelhantes para a matriz de controlabilidade \mathbf{C}_N .

3.3 Decomposição da Matriz Hankel Através das Matrizes de Vandermonde

A propriedade de invariância ao deslocamento presente nas matrizes de observabilidade e controlabilidade do sistema, apresentada na seção anterior, é válida para qualquer sistema dinâmico que possa ser descrito na formulação de espaço de estado. Em análise modal, as FRI's são definidas como soma de exponenciais complexas do tipo

$$h_{ij}(k) = \sum_{l=1}^{2n} r_{ij(l)} e^{\lambda_l \Delta t k}, \text{ onde } z_k = e^{\lambda_k \Delta t}. \text{ Neste caso, a matriz Hankel } \mathbf{H} \text{ admite uma}$$

decomposição através de um produto de matrizes Vandermonde como,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} [I]_{m \times m} & \cdots & [I]_{m \times m} \\ [Z_1]_{m \times m} & \cdots & [Z_{2n}]_{m \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [Z_1^L]_{m \times m} & \cdots & [Z_{2n}^L]_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_1]_{m \times r} & & \\ & \ddots & \\ & & [R_{2n}]_{m \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [I]_{r \times r} & [Z_1]_{r \times r} & \cdots & [Z_1^{N-1}]_{r \times r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [I]_{r \times r} & [Z_{2n}]_{r \times r} & \cdots & [Z_{2n}^{N-1}]_{r \times r} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{V}_L \mathbf{R} \mathbf{V}_N. \quad (3.26)$$

onde $[Z_k]_{l \times l}$ são matrizes diagonais de dimensão $l \times l$ que contém o k -ésimo parâmetro $z_k = e^{\lambda_k \Delta t}$ do sistema. As matrizes $[R_k]_{m \times r}$, de dimensão $m \times r$, são definidas como,

$$[R_k]_{m \times r} = \begin{bmatrix} r_{11(k)} & r_{12(k)} & \cdots & r_{1r(k)} \\ r_{21(k)} & r_{22(k)} & \cdots & r_{2r(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1(k)} & r_{m2(k)} & \cdots & r_{mr(k)} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

representando os k -ésimos resíduos das FRI's que formam a matriz $\mathbf{Y}(k)$ dos parâmetros de Markov da equação (3.8). As matrizes \mathbf{V}_L , \mathbf{R} e \mathbf{V}_N possuem dimensões, respectivamente, iguais a $m(L+1) \times m(2n)$, $m(2n) \times r(2n)$ e $r(2n) \times rN$. As matrizes \mathbf{V}_L e \mathbf{V}_N possuem a estrutura conhecida como estrutura de Vandermonde.

Definindo-se $\mathbf{H}_{(1)}$ e $\mathbf{V}_{L(1)}$, e $\mathbf{H}_{(2)}$ e $\mathbf{V}_{L(2)}$ como as matrizes formadas, respectivamente, pelas mL primeiras e últimas linhas de \mathbf{H} e de \mathbf{V}_L da equação (3.26), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{V}_{L(1)} \mathbf{R} \mathbf{V}_N = \begin{bmatrix} [I]_{m \times m} & \cdots & [I]_{m \times m} \\ [Z_1]_{m \times m} & \cdots & [Z_{2n}]_{m \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [Z_1^{L-1}]_{m \times m} & \cdots & [Z_{2n}^{L-1}]_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_1]_{m \times r} \\ \vdots \\ [R_{2n}]_{m \times r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [I]_{r \times r} & [Z_1]_{r \times r} & \cdots & [Z_1^{N-1}]_{r \times r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [I]_{r \times r} & [Z_{2n}]_{r \times r} & \cdots & [Z_{2n}^{N-1}]_{r \times r} \end{bmatrix},$$

(3.28)

e

$$\mathbf{H}_{(2)} = \mathbf{V}_{L(2)} \mathbf{R} \mathbf{V}_N = \begin{bmatrix} [Z_1]_{m \times m} & \cdots & [Z_{2n}]_{m \times m} \\ [Z_1^2]_{m \times m} & \cdots & [Z_{2n}^2]_{m \times m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [Z_1^L]_{m \times m} & \cdots & [Z_{2n}^L]_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_1]_{m \times r} \\ \vdots \\ [R_{2n}]_{m \times r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [I]_{r \times r} & [Z_1]_{r \times r} & \cdots & [Z_1^{N-1}]_{r \times r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [I]_{r \times r} & [Z_{2n}]_{r \times r} & \cdots & [Z_{2n}^{N-1}]_{r \times r} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_{L(1)} \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{R} \mathbf{V}_N,$$

(3.29)

onde

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} [Z_1]_{m \times m} & & \\ & \ddots & \\ & & [Z_{2n}]_{m \times m} \end{bmatrix},$$

(3.30)

é uma matriz de dimensão $m(2n) \times m(2n)$ formada pelos parâmetros $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1, \dots, z_{2n}\}$ do sistema.

A equação (3.29) mostra claramente a presença da propriedade de invariância ao deslocamento na matriz \mathbf{H} decomposta através das matrizes de Vandermonde.

3.4 Cálculo dos Resíduos Modais do Sistema

Esta seção apresenta duas propostas para a determinação dos resíduos modais. A primeira é obtida diretamente da definição das FRI's usando a matriz de Vandermonde válida para o caso SISO. A segunda, válida para o caso MISO, é obtida a partir de uma realização especial na qual a matriz de transição \mathbf{A} é diagonal e contém os parâmetros $z_k = e^{\lambda_k \Delta t}$ do sistema, e a matriz \mathbf{B} fornece diretamente os resíduos correspondentes às várias FRI's que compõem a resposta obtida da excitação impulsiva em vários pontos do sistema.

3.4.1 Cálculo dos Resíduos Diretamente da Formulação das FRI's

Uma vez $2n$ os pólos do sistema estejam identificados, obtém-se uma estimativa dos resíduos modais $r_{ij} = [r_{ij(1)} \quad \dots \quad r_{ij(2n)}]$ para uma específica FRI $h_{ij}(k)$ através da solução por mínimos quadrados do seguinte sistema de equações lineares formado por l valores consecutivos de $h_{ij}(k)$ como,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{l-1} & z_2^{l-1} & \dots & z_{2n}^{l-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{ij(1)} \\ r_{ij(2)} \\ \vdots \\ r_{ij(2n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_{ij}(0) \\ h_{ij}(1) \\ \vdots \\ h_{ij}(l-1) \end{Bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde $l \geq 2n$ é o número de pontos de uma específica FRI $h_{ij}(k)$. Com base na equação (3.31), os resíduos \mathbf{r}_{ij} são calculados como,

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{A}_l^+ \mathbf{h}, \quad (3.32)$$

$$\text{onde } \mathbf{A}_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{l-1} & z_2^{l-1} & \cdots & z_{2n}^{l-1} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{h} = [h_{ij}(0) \ \cdots \ h_{ij}(l-1)]^T.$$

3.4.2 Cálculo dos Resíduos Através da Realização do Sistema

A seção 3.2.2 apresentou uma discussão a respeito das várias possibilidades de obter-se diferentes realizações para um mesmo sistema dinâmico através da aplicação de transformações de similaridade. Uma importante realização de sistema MISO é obtida como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{C}_d & \mathbf{D}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & & r_{i1(1)} & \cdots & r_{ir(1)} \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & z_{2n} & r_{i1(2n)} & \cdots & r_{ir(2n)} \\ 1 & \cdots & 1 & d_1 & \cdots & d_r \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Fisicamente, a realização acima reproduz claramente uma resposta $h_i(k)$ composta de r respostas impulsivas simultâneas para um sistema inicialmente em repouso com $\mathbf{x}(0)=0$ como,

$$h_i(k) = h_{i1}(k) + \cdots + h_{ir}(k) = \sum_{l=1}^{2n} r_{i1(l)} z_l^{k\Delta t} + \cdots + \sum_{l=1}^{2n} r_{ir(l)} z_l^{k\Delta t}, \quad (3.34)$$

onde $\mathbf{A}_d = \mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1, \dots, z_{2n}\}$ é a matriz de dimensão $2n \times 2n$ que contém os $2n$

parâmetros $z_k = e^{\lambda_k \Delta t}$ do sistema e $\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} r_{i1(1)} & \cdots & r_{ir(1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{i1(2n)} & \cdots & r_{ir(2n)} \end{bmatrix}$ de dimensão $2n \times r$ contém

os resíduos modais do sistema associados às r FRI's $h_{i1}(k) \cdots h_{ir}(k)$.

O resultado obtido da aplicação dos algoritmos de identificação, no entanto, nem sempre fornece diretamente as matrizes $\{\mathbf{A}_d \ \mathbf{B}_d \ \mathbf{C}_d \ \mathbf{D}_d\}$ da forma apresentada na equação (3.33). Uma maneira de se obter tal realização consiste na aplicação de uma transformação de similaridade \mathbf{T} , de dimensão $2n \times 2n$, sobre uma realização genérica $\{\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C} \ \mathbf{D}\}$ obtida de uma realização genérica do sistema. Da equação (3.13) obtém-se as seguintes relações,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= \text{diag}\{z_1 \ \cdots \ z_{2n}\} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \\ \mathbf{B}_d &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (3.35)$$

A idéia agora é procurar um tipo de transformação de similaridade \mathbf{T} que aplicada sobre a realização genérica $\{\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C} \ \mathbf{D}\}$ produza $\{\mathbf{A}_d \ \mathbf{B}_d \ \mathbf{C}_d \ \mathbf{D}_d\}$. Esta transformação de similaridade \mathbf{T} é obtida considerando que a matriz Hankel \mathbf{H} de dimensão $(L+1) \times rN$, para cada FRI $h_{ij}(k)$ específica pode ser escrita em termos de uma decomposição matricial em termos de matrizes de Vandermonde $\mathbf{H}_{(L+1) \times rN} = \mathbf{V}_L \mathbf{R} \mathbf{V}_N$. Considerando que $\mathbf{O}_{L(2)} = \mathbf{O}_{L(1)} \mathbf{A}$ e $\mathbf{V}_{L(2)} = \mathbf{V}_{L(1)} \mathbf{Z}$, pode-se escrever o seguinte,

$$\mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{O}_{L(1)} \mathbf{C}_N = \mathbf{V}_{L(1)} \mathbf{R} \mathbf{V}_N, \quad (3.36)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{(2)} &= \mathbf{O}_{L(2)} \mathbf{C}_N = \mathbf{O}_{L(1)} \mathbf{A} \mathbf{C}_N = \\ &= \mathbf{V}_{L(2)} \mathbf{R} \mathbf{V}_N = \mathbf{V}_{L(1)} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}) \mathbf{Z} (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}) \mathbf{R} \mathbf{V}_N \end{aligned} \quad (3.37)$$

Considerando que, pela equação (3.35), $\mathbf{A} = \mathbf{TZT}^{-1}$, a equação (3.37) fornece o seguinte,

$$\mathbf{H}_{(2)} = \mathbf{O}_{L(1)} \mathbf{A} \mathbf{C}_N = \mathbf{V}_{L(1)} \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{TZT}^{-1}) \mathbf{TRV}_N = \mathbf{V}_{L(1)} \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{A}) \mathbf{TRV}_N, \quad (3.38)$$

de onde obtém-se que,

$$\mathbf{O}_{L(1)} = \mathbf{V}_{L(1)} \mathbf{T}^{-1} \Rightarrow \mathbf{O}_{L(1)} \mathbf{T} = \mathbf{V}_{L(1)}, \quad (3.39)$$

que fornece a expressão da transformação de similaridade \mathbf{T} como,

$$\mathbf{T} = \mathbf{O}_{L(1)}^+ \mathbf{V}_{L(1)}. \quad (3.40)$$

A matriz dos resíduos modais \mathbf{B}_d da realização dada pela equação (3.33) pode então ser obtido como,

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{B} = (\mathbf{O}_{L(1)}^+ \mathbf{V}_{L(1)})^{-1} \mathbf{B}. \quad (3.41)$$

Capítulo 4

MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS USANDO DADOS DAS FRI'S

4.1 Introdução

Os métodos de identificação modal no domínio do tempo possuem uma grande variedade de interpretações quanto aos principais algoritmos que levam ao cálculo dos parâmetros do sistema, baseado na sua resposta impulsiva ou livre. Dentre os principais métodos estudados neste capítulo destacam-se os seguintes: i) o método *Polyreference* desenvolvido por Vold et al. [95] e [96] constitui uma extensão MIMO do método das exponenciais complexas, Brown et al. [13] ii) o método de Ibrahim - Ibrahim e Mikulcik [34] - [38] - introduz o vetor de estado em sua formulação; iii) o método *Eigensystem Realization Analysis* (ERA) desenvolvido por Juang e Pappa [43] e [44] é formulado usando a teoria da realização de sistemas lineares e iv) os métodos de subespaços, comumente usados na área relacionada com o problema DOA na engenharia elétrica, Viberg e Ottersten [94], baseiam-se na projeção das matrizes dos dados em subespaços comuns determinados através da SVD como em Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90]. Todos estes algoritmos são desenvolvidos para o caso multivariável.

Mostra-se, entretanto, que a totalidade dos métodos mencionados acima tratam sempre dos mesmos tipos essenciais de operações algébricas, que consiste em soluções dos tipos mínimos quadrados (LS) ou mínimos quadrados totais (TLS) ou em aproximações de *rank* reduzido dos tipos LS ou TLS. Este capítulo apresenta a equivalência entre as formulações destes métodos.

4.2 Identificação Usando Mínimos Quadrados

Esta seção apresenta as formulações do método *Polyreference* LS e do método de Ibrahim, bem como a equivalência entre eles.

4.2.1 O Método *Polyreference* LS

Nesta seção utiliza-se a formulação desenvolvida por Deblawe, Brown e Allemang [23]. Estendendo a equação (B.1), do apêndice B, para $L+N$ observações de $\mathbf{Y}(k)$, obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned} & \left[-\mathbf{P}_L \quad -\mathbf{P}_{L-1} \quad \cdots \quad -\mathbf{P}_1 \right] \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(1) & \mathbf{Y}(2) & \cdots & \mathbf{Y}(N) \\ \mathbf{Y}(2) & \mathbf{Y}(3) & \cdots & \mathbf{Y}(N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}(L) & \mathbf{Y}(L+1) & \cdots & \mathbf{Y}(L+N-1) \end{bmatrix} = \\ & = \left[\mathbf{Y}(L+1) \quad \mathbf{Y}(L+2) \quad \cdots \quad \mathbf{Y}(L+N) \right] \end{aligned} \quad (4.1)$$

ou

$$\mathbf{P} \mathbf{H}_{(1)} = \bar{\mathbf{y}}, \quad (4.2)$$

onde $N \geq L \geq 2n$, $\mathbf{H}_{(1)}$ é uma matriz partição da matriz Hankel \mathbf{H} como na seção 3.3, $\mathbf{P} = \left[-\mathbf{P}_L \quad -\mathbf{P}_{L-1} \quad \cdots \quad -\mathbf{P}_1 \right]$, de dimensão $m \times mL$, é a matriz dos coeficientes de auto-regressão e $\bar{\mathbf{y}} = \left[\mathbf{Y}(L+1) \quad \mathbf{Y}(L+2) \quad \cdots \quad \mathbf{Y}(L+N) \right]$ possui dimensão $m \times rN$.

O erro na estimativa de \bar{y} , da equação (4.2), devido a presença de ruído nos dados, leva a seguinte equação,

$$\bar{y} = \mathbf{P} \mathbf{H}_{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.3)$$

onde a matriz $\boldsymbol{\varepsilon}$, de dimensão $m \times rN$, representa o erro somado ao termo \bar{y} da equação (4.2).

O método LS fornece uma estimativa para \mathbf{P} minimizando a função de custo $\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T$ com respeito aos coeficientes de auto-regressão contidos em \mathbf{P} , como, Söderström e Stoica [87],

$$\mathbf{P} = \bar{y} \mathbf{H}_{(1)}^T (\mathbf{H}_{(1)} \mathbf{H}_{(1)}^T)^{-1}. \quad (4.4)$$

Substituindo $\mathbf{P} = [-\mathbf{P}_L \quad -\mathbf{P}_{L-1} \quad \dots \quad -\mathbf{P}_1]$ na equação (B.4), do Apêndice B, calcula-se os mL parâmetros $z_j = e^{\lambda_j \Delta t}$ do sistema como os autovalores da matriz companheira (B.4), dentre os quais $2n$ deles do sistema e $mL-2n$ são computacionais.

4.2.2 O Método de Ibrahim

Esta seção apresenta uma versão do método de Ibrahim para dados das FRI's deslocados de um único intervalo de tempo como no caso da disposição de dados de $\mathbf{H}_{(1)}$ da equação (4.1). Este método baseia-se na propriedade de invariância ao deslocamento presente na matriz Hankel \mathbf{H} da realização do sistema para dados sem ruído apresentada na seção 3.3.

Seja \mathbf{F} uma matriz de dimensão $mL \times mL$ definida como a relação entre as matrizes partições $\mathbf{H}_{(1)}$ e $\mathbf{H}_{(2)}$ como,

$$\mathbf{F}\mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{H}_{(2)}. \quad (4.5)$$

Da seção 3.3 pode-se escrever o seguinte,

$$\mathbf{F}\mathbf{V}_{L(1)}\mathbf{R}\mathbf{V}_N = \mathbf{V}_{L(1)}\bar{\mathbf{Z}}\mathbf{R}\mathbf{V}_N, \quad (4.6)$$

de onde obtém-se o seguinte,

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{V}_{L(1)}^+ \mathbf{F}\mathbf{V}_{L(1)}. \quad (4.7)$$

A equação (4.7) representa o problema de autovalor generalizado Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90], sendo que a matriz $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1 \ \dots \ z_{2n}\}$ é calculada como os $2n$ autovalores não nulos de \mathbf{F} , onde de acordo com a equação (4.5), $\mathbf{F} = \mathbf{H}_{(2)}\mathbf{H}_{(1)}^+$. No caso de dados com ruído, todos os mL autovalores de \mathbf{F} são diferentes de zero o que implica a presença dos pólos computacionais.

4.2.3 Equivalência Entre os Métodos *Polyreference* LS e de Ibrahim

Nota-se que para dados com ruído, tanto os valores dos pólos verdadeiros, como dos pólos computacionais, calculados através dos métodos *Polyreference* LS e o método de Ibrahim são exatamente iguais. Isto pode ser explicado pelo fato destes métodos utilizarem a mesma informação contida na matriz Hankel \mathbf{H} sem sofrer qualquer processamento prévio que possa alterar sua estrutura como, por exemplo, a redução de *rank* - apresentada no Apêndice A - que será aplicada na formulação dos métodos apresentados nas próximas seções. Segue, entretanto, uma discussão mais formal para justificar tal equivalência.

A equação (4.1) mostra que a matriz $\bar{\mathbf{y}} = [\mathbf{Y}(L+1) \ \mathbf{Y}(L+2) \ \dots \ \mathbf{Y}(L+N)]$, que representa o último bloco de m linhas da matriz \mathbf{H} , pode ser escrita como combinação linear

das linhas da matriz $\mathbf{H}_{(1)}$ como $\mathbf{P}\mathbf{H}_{(1)} = \bar{\mathbf{y}}$. No método de Ibrahim, o vetor dos parâmetros $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1 \ \dots \ z_{2n}\}$ são calculados selecionando-se um conjunto apropriado de $2n$ autovalores a partir dos mL autovalores de \mathbf{F} sendo $\mathbf{F}\mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{H}_{(2)}$. Considerando que, a menos de $\bar{\mathbf{y}}$, a matriz $\mathbf{H}_{(2)}$ é uma cópia de $\mathbf{H}_{(1)}$, é possível obter uma estrutura especial para a matriz \mathbf{F} em termos da matriz \mathbf{P} como,

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & & & \\ & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \\ & \mathbf{P} & & & \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

A equação acima mostra claramente que a matriz \mathbf{F} representa a matriz companheira associada à forma canônica observável do sistema, o que demonstra formalmente a equivalência entre os métodos *Polyreference* LS e o método de Ibrahim.

4.3 Identificação da Ordem do Modelo e os Subespaços de Sinal - Ruído

A determinação da ordem mínima do modelo é uma tarefa muito importante em identificação de parâmetros modais. Esta seção apresenta uma maneira relativamente simples, através da qual permite-se identificar a ordem do modelo usando a SVD da matriz Hankel \mathbf{H} da realização do sistema.

4.3.1 Identificação da Ordem do Modelo

O modelo dos sinais das FRI's observados em medições experimentais utilizado neste trabalho é o seguinte,

$$h_e(k) = h(k) + e(k), \quad (4.9)$$

onde $h(k)$ representa uma específica FRI e $e(k)$ um sinal de distribuição Gaussiana branca de média zero e variância μ^2 . Neste caso, define-se a matriz Hankel \mathbf{H}_e , de dimensão $m(L+1) \times rN$, como,

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \mathbf{E}, \quad (4.10)$$

onde a matriz \mathbf{E} , de dimensão $m(L+1) \times rN$, é formada pelos dados do sinal de ruído $e(t)$ que possui também estrutura Hankel. A matriz \mathbf{H}_e pode ser decomposta em seus valores singulares como,

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp \hat{\mathbf{\Sigma}}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T, \quad (4.11)$$

onde, de acordo com o apêndice A, as matrizes $\mathbf{\Sigma}$, $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ e $\hat{\mathbf{\Sigma}}^\perp$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $m(L+1) \times rN$, $2n \times 2n$ e $m(L+1) - 2n \times m(L+1) - 2n$. A matriz $\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{U}} \quad \hat{\mathbf{U}}^\perp]$ possui dimensão $m(L+1) \times m(L+1)$. Além disso, as matrizes $\mathbf{\Sigma}$ e $\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{U}} \quad \hat{\mathbf{U}}^\perp]$ são definidas como, respectivamente, os autovalores e os autovetores da matriz de covariância $\mathbf{H}_e \mathbf{H}_e^T$. Considerando que os processos $h(k)$ e $e(k)$ são independentes, a matriz de covariância $\mathbf{H}_e \mathbf{H}_e^T$ pode ser escrita como,

$$\mathbf{H}_e \mathbf{H}_e^T = [\mathbf{H} + \mathbf{E}][\mathbf{H}^T + \mathbf{E}^T] = \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \mu^2 \mathbf{I}. \quad (4.12)$$

A matriz Hankel \mathbf{H} dos dados de $h(k)$ livres de ruído possui *rank* $2n$, igual a ordem do sistema dinâmico, enquanto que \mathbf{H}_e possui *rank* completo igual a $m(L+1) > 2n$. Da equação (4.12) nota-se que a matriz $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ de dimensão $2n \times 2n$ contém os $2n$ principais valores singulares de \mathbf{H}_e cuja magnitude é igual a dos valores singulares de \mathbf{H} acrescidos de μ^2 . A matriz $\hat{\mathbf{\Sigma}}^\perp$ de dimensão $m(L+1) - 2n \times m(L+1) - 2n$ contém os outros $m(L+1) -$

$2n$ valores singulares de \mathbf{H}_e com multiplicidade $m(L+1)-2n$ e magnitude igual a μ^2 . Logo, a matriz Σ , que contém todos os $m(L+1)$ valores singulares de \mathbf{H}_e , pode ser escrita como,

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1 + \mu^2 \quad \sigma_2 + \mu^2 \quad \dots \quad \sigma_{2n} + \mu^2 \quad \mu^2 \quad \dots \quad \mu^2\}. \quad (4.13)$$

A equação (4.13) sugere um critério robusto para a identificação da ordem do modelo modal que representa o sistema dinâmico, baseado na inspeção dos valores singulares imediatamente maiores que μ^2 da matriz de Hankel \mathbf{H}_e . A ordem do modelo é igual ao número de valores singulares de Σ imediatamente superiores a μ^2 .

4.3.2 Subespaços de Sinal-Ruído

Para o caso de dados livres de ruído, com base na equação (3.21), as matrizes de observabilidade \mathbf{O}_L e controlabilidade \mathbf{C}_N definem dois subespaços vetoriais estruturados como, respectivamente, os espaços coluna e linha da matriz Hankel \mathbf{H} . Esta seção apresenta o conceito do subespaço de sinal de \mathbf{H}_e para o caso de dados com ruído como uma aproximação do espaço coluna (ou espaço linha) de \mathbf{H} gerado por \mathbf{O}_L (ou \mathbf{C}_N).

Com respeito a matriz $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \hat{\mathbf{U}}^\perp \end{bmatrix}$, tem-se que as $2n$ colunas da matriz $\hat{\mathbf{U}}$, de dimensão $m(L+1) \times 2n$, relacionadas com os valores singulares mais importantes de \mathbf{H}_e definem o chamado subespaço de sinal, que é o espaço coluna da aproximação de *rank* $2n$ de \mathbf{H}_e dada por $\hat{\mathbf{H}}_e = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T$. O complemento ortogonal do espaço coluna de $\hat{\mathbf{H}}_e$ definido pela matriz $\hat{\mathbf{U}}^\perp$, de dimensão $m(L+1) \times m(L+1) - 2n$, define o subespaço de ruído Viberg e Ottersten [94]. Além disso, a equação (4.12) mostra que - para uma quantidade arbitrariamente grande de amostras - a matriz de covariância $\mathbf{H}_e \mathbf{H}_e^T$ sofre apenas uma variação constante em sua diagonal principal da ordem da variância do sinal de ruído μ^2 , sendo que tal variação não altera a magnitude de seus autovetores com relação aos autovetores da matriz de covariância $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$ dos dados livres de ruído. Portanto, os

autovetores da matriz de covariância $\mathbf{U} = [\hat{\mathbf{U}} \quad \hat{\mathbf{U}}^\perp]$ são menos sensíveis a presença de ruído. Esta observação é a base da teoria da perturbação da SVD baseada na relação entre as decomposições de uma matriz em seus valores singulares e em seus autovetores, Viberg e Ottersten [94].

4.4 Métodos de um Único Deslocamento com Redução de *Rank*

Na seção 4.3 fez-se uma distinção entre as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{H}_e para denotar as matrizes de dados, respectivamente, sem e com ruído. Tal distinção será abandonada, doravante a matriz \mathbf{H} denota a matriz dos dados perturbados com ruído, tendo, portanto, *rank* completo igual a $m(L+1) > 2n$.

Um dos maiores problemas dos métodos *Polyreference* LS e de Ibrahim, apresentados na seção 4.2 é com relação a separação dos pólos computacionais dos pólos verdadeiros do sistema. Para dados com ruído, adotando-se um valor para L na equação (4.1) da ordem $2n$ do sistema, obtém-se estimativas pouco precisas dos pólos do sistema. Sobredeterminando-se o valor de L , as estimativas dos pólos melhoram, mas ocorre o surgimento dos pólos computacionais.

Esta seção apresenta alguns métodos de um único deslocamento, usando aproximações $\hat{\mathbf{H}}$ de *rank* $2n$ de \mathbf{H} , baseados na propriedade de invariância ao deslocamento, discutida na seção 3.2, para o caso de dados livres de ruído. É importante salientar que a ordem $2n$ do sistema é assumida ser previamente conhecida para aplicação destes métodos. Os métodos apresentados aqui são os seguintes: *Polyreference* TLS, ERA, método dos autovetores da matriz de covariância e o método de Ibrahim com redução de *rank*, bem como a equivalência entre eles.

4.4.1 O Método *Polyreference* TLS

A formulação do método *Polyreference* LS discutida na seção 4.2.1 minimiza o erro quadrático $\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T$ dos elementos do vetor $\bar{\mathbf{y}}$ da equação (4.3), assumindo-se que a matriz $\mathbf{H}_{(1)}$ não contenha erro, como no caso do problema de regressão linear. Para dados reais, a matriz $\mathbf{H}_{(1)}$ da equação (4.3), entretanto, contém erro. O método *Polyreference* TLS minimiza o termo $\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T$ tanto para $\bar{\mathbf{y}}$ como para $\mathbf{H}_{(1)}$, Golub e Van Loan [30] e Cooper [17]. O apêndice C apresenta uma análise mais detalhada sobre a formulação do problema TLS extraída de Golub e Van Loan [30]. Com base na equação (4.3), o termo $\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T$ pode ser escrito como,

$$\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{P}\mathbf{H}_{(1)}) (\bar{\mathbf{y}}^T - \mathbf{H}_{(1)}^T\mathbf{P}^T) = \begin{bmatrix} -\mathbf{P} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(1)}\mathbf{H}_{(1)}^T & \mathbf{H}_{(1)}\bar{\mathbf{y}}^T \\ \bar{\mathbf{y}}\mathbf{H}_{(1)}^T & \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{P}^T \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

estabelecendo-se o seguinte problema de autovalor,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(1)}\mathbf{H}_{(1)}^T & \mathbf{H}_{(1)}\bar{\mathbf{y}}^T \\ \bar{\mathbf{y}}\mathbf{H}_{(1)}^T & \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{P}^T \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -\mathbf{P}^T \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

O método *Polyreference* TLS é formulado determinando-se os autovetores $\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^T \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$ correspondentes com os m menores autovalores $\lambda = \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T$ da matriz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(1)}\mathbf{H}_{(1)}^T & \mathbf{H}_{(1)}\bar{\mathbf{y}}^T \\ \bar{\mathbf{y}}\mathbf{H}_{(1)}^T & \bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{y}}^T \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Nota-se que a matriz acima é a matriz de covariância $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Em termos da SVD, a matriz Hankel \mathbf{H} pode ser escrita como,

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp\hat{\mathbf{\Sigma}}^\perp(\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T, \quad (4.17)$$

onde \mathbf{U} , de dimensão $m(L+1) \times m(L+1)$, é a matriz cujas colunas contém os autovetores da matriz de covariância $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. A matriz $\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^T \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$, de dimensão $m(L+1) \times m$, é calculada tomando-se, portanto, as últimas m colunas de \mathbf{U} , de onde são obtida a matriz dos coeficientes de auto-regressão $\mathbf{P} = [-\mathbf{P}_L \quad -\mathbf{P}_{L-1} \quad \cdots \quad -\mathbf{P}_1]$. Nota-se ainda, com base na equação (4.17), que a solução para a matriz $\begin{bmatrix} -\mathbf{P}^T \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}$, através do método *Polyreference* TLS, são as m últimas colunas de $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ que pertencem ao subespaço de ruído de \mathbf{H} .

4.4.2 O Algoritmo ERA

O algoritmo ERA é bastante utilizado em identificação de sistemas estruturais e baseia-se na propriedade de invariância ao deslocamento presente na matriz de observabilidade \mathbf{O}_L (ou na matriz de controlabilidade \mathbf{C}_N). Este algoritmo calcula uma aproximação de *rank* $2n$ $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^T$ da matriz Hankel \mathbf{H} usando SVD como,

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}} & \hat{\mathbf{U}}^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Sigma}} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}^T \\ (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T \end{bmatrix} \cong \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N, \quad (4.18)$$

onde as matrizes $\hat{\mathbf{U}}$ e $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $m(L+1) \times 2n$ e $m(L+1) \times m(L+1) - 2n$. As matrizes $\hat{\mathbf{\Sigma}}$, $\mathbf{0}_{12}$, $\mathbf{0}_{21}$ e $\mathbf{0}_{22}$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $2n \times 2n$, $2n \times rN - 2n$, $m(L+1) - 2n \times 2n$ e $m(L+1) - 2n \times rN - 2n$. As matrizes $\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $rN \times 2n$ e $rN \times rN - 2n$. A expressão de $\hat{\mathbf{H}}$ na equação (4.18) é adotada propositalmente diferente da apresentada no apêndice A para sua utilização na próxima seção.

As expressões das matrizes \mathbf{O}_L e \mathbf{C}_N de dimensões, respectivamente, iguais a $m(L+1) \times 2n$ e $2n \times rN$ são obtidas da equação (4.18) em termos de $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\Sigma}$ e $\hat{\mathbf{V}}$ como,

$$\mathbf{O}_L = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma}^{1/2} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_N = \hat{\Sigma}^{1/2} \hat{\mathbf{V}}^T \quad (4.19)$$

Conhecendo-se \mathbf{O}_L (ou \mathbf{C}_N) determina-se a matriz de transição \mathbf{A} , através da equação (3.25), usando a propriedade de invariância ao deslocamento. Calcula-se em seguida os pólos do sistema como $\lambda_k = \log(z_k) / \Delta t$, onde os parâmetros $\mathbf{Z} = \{z_1, \dots, z_{2n}\}$ são determinados como os $2n$ autovalores de \mathbf{A} .

4.4.3 O Método *Polyreference* Orientado a Subespaços

Nota-se, da equação (4.19), que o algoritmo ERA utiliza em sua formulação as primeiras $2n$ colunas da matriz \mathbf{U} (ou \mathbf{V}). As matrizes de $\hat{\mathbf{U}}$ e $\hat{\mathbf{V}}$ formam, respectivamente, as bases para os espaços coluna e linha de $\hat{\mathbf{H}}$ – que são definidos como subespaços de sinal. Esta seção apresenta uma formulação para o método *Polyreference* utilizando as matrizes $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ que geram, respectivamente, o espaço ortogonal ao espaço coluna de $\hat{\mathbf{H}}$ e o núcleo de $\hat{\mathbf{H}}$ – que são definidos como subespaços de ruído.

Do apêndice A tem-se que $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_{m(L+1)}$ e $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{rN}$. Da equação (4.18) obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

Considerando que $\hat{\mathbf{H}} \cong \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N$, a equação (4.20) pode ser reescrita como,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^T \\ (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \end{bmatrix} \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}} & \hat{\mathbf{V}}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

que resulta no seguinte,

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}} & \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}}^\perp \\ (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}} & (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}}^\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

de onde obtém as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}} &= \hat{\Sigma} \\ \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}}^\perp &= \mathbf{0}_{12} \\ (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{0}_{21} \\ (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \mathbf{O}_L \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}}^\perp &= \mathbf{0}_{22} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nota-se que o *rank* das matrizes $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{V}}$, \mathbf{O}_L e \mathbf{C}_N é igual a $2n$. Da mesma forma, o *rank* de $\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{O}_L \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}} \neq \mathbf{0}$ é também igual a $2n$. Portanto, das equações acima, obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \mathbf{O}_L &= \mathbf{0}_{21} \\ \mathbf{C}_N \hat{\mathbf{V}}^\perp &= \mathbf{0}_{12} \end{aligned}, \quad (4.24)$$

indicando que as matrizes $(\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T$ e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ são ortogonais, respectivamente, às matrizes \mathbf{O}_L e \mathbf{C}_N .

Adota-se as seguintes partições para as matrizes $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ como,

$$\hat{\mathbf{U}}^\perp = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_1^\perp \\ \hat{\mathbf{U}}_2^\perp \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{U}}_{L+1}^\perp \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{V}}^\perp = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_1^\perp \\ \hat{\mathbf{V}}_2^\perp \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{V}}_N^\perp \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

onde $\hat{\mathbf{U}}_i^\perp$ e $\hat{\mathbf{V}}_i^\perp$ são matrizes de dimensões, respectivamente, iguais a $m \times m(L+1) - 2n$ e $r \times rN - 2n$.

Substituindo as equações (3.21) e (4.25) em (4.24), obtém-se o seguinte,

$$\left[\begin{array}{cccc} (\hat{\mathbf{U}}_1^\perp)^T & (\hat{\mathbf{U}}_2^\perp)^T & \dots & (\hat{\mathbf{U}}_{L+1}^\perp)^T \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^L \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{L+1} (\hat{\mathbf{U}}_i^\perp)^T \mathbf{CA}^{i-1} = \mathbf{0}_{21} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}_1^\perp \\ \hat{\mathbf{V}}_2^\perp \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{V}}_N^\perp \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{V}}_i^\perp = \mathbf{0}_{12}. \quad (4.27)$$

As equações (4.26) e (4.27) representam as formulações básicas do método *Polyreference* conforme apresentadas no apêndice B. Nota-se que as matrizes $\hat{\mathbf{U}}_i^\perp$ e $\hat{\mathbf{V}}_i^\perp$, da equação (4.25), possuem mais colunas que linhas. Pode-se formar as matrizes dos coeficientes de auto-regressão \mathbf{P}_i , $i = 1, \dots, L+1$ de dimensão $m \times m$ tomando-se as últimas m colunas das matrizes $\hat{\mathbf{U}}_i^\perp$ como sugere o método *Polyreference* TLS. Denotando-se $\tilde{\mathbf{U}}_i^\perp$, $i = 1, \dots, L+1$, como as matrizes de dimensão $m \times m$ que contém as últimas colunas de $\hat{\mathbf{U}}_i^\perp$ e substituindo na equação (4.26), a formulação do método *Polyreference* associada à forma canônica observável do sistema é dada por,

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^L + \sum_{i=1}^L \left[\left(\tilde{\mathbf{U}}_{L+1}^\perp \right)^T \right]^{-1} \left(\tilde{\mathbf{U}}_i^\perp \right)^T \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} = \mathbf{0}_{m \times 2n} \quad (4.28)$$

ou

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^L + \sum_{i=1}^L \mathbf{P}_i \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1} = \mathbf{0}_{m \times 2n} . \quad (4.29)$$

onde $\mathbf{P}_i = \left[\left(\tilde{\mathbf{U}}_{L+1}^\perp \right)^T \right]^{-1} \left(\tilde{\mathbf{U}}_i^\perp \right)^T$. A formulação associada à canônica controlável do sistema pode ser facilmente obtida de forma análoga ao anterior usando as matrizes $\hat{\mathbf{V}}_i^\perp$.

4.4.4 O Método dos Autovetores da Matriz de Covariância

As matrizes partições $\mathbf{H}_{(1)}$ e $\mathbf{H}_{(2)}$, de dimensão $mL \times rN$, formadas por dados sem ruído possuem os mesmos espaços linha e coluna. Esta seção apresenta o método de um único deslocamento de maneira diferente, considerando-se que as matrizes partições $\mathbf{H}_{(1)}$ e $\mathbf{H}_{(2)}$, formadas por dados com ruído, compartilham idealmente o mesmo espaço linha como no caso de dados livres de ruído.

A formulação do método começa determinando-se uma aproximação de *rank* $2n$ $\hat{\mathbf{H}}$ para $\mathbf{H} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\Sigma}\hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp\hat{\Sigma}^\perp(\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T$ usando SVD como,

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{U}}\hat{\Sigma}\hat{\mathbf{V}}^T, \quad (4.30)$$

onde a matriz $\hat{\mathbf{V}}$, de dimensão $rN \times 2n$, forma uma base do espaço linha de dimensão $2n$ para $\hat{\mathbf{H}}$, cujo operador de projeção ortogonal é calculado como $\mathbf{\Pi}_L = \hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{V}}^T$.

As aproximações de *rank* $2n$ $\hat{\mathbf{H}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{(2)}$ das partições $\mathbf{H}_{(1)}$ e $\mathbf{H}_{(2)}$ são calculadas como as projeções de $\mathbf{H}_{(1)} = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^\perp \hat{\Sigma}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T$ e $\mathbf{H}_{(2)} = \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}_{(2)}^\perp \hat{\Sigma}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T$ sobre este espaço linha comum gerado por $\hat{\mathbf{V}}$ que, de acordo com a equação (A.4) do apêndice A, obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}_{(1)} &= \mathbf{H}_{(1)} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T (\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T) = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T, \\ \hat{\mathbf{H}}_{(2)} &= \mathbf{H}_{(2)} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T = \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T (\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T) = \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}^T,\end{aligned}\tag{4.31}$$

onde as matrizes $\hat{\mathbf{U}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{U}}_{(2)}$, de dimensão $mL \times 2n$, correspondentes, respectivamente, as primeiras e as últimas mL linhas da matriz $\hat{\mathbf{U}}$, de dimensão $m(L+1) \times 2n$, da equação (4.30). De acordo com a seção 4.2.2, a matriz dos parâmetros $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1, \dots, z_{2n}\}$ do sistema é calculada como os $2n$ autovalores não nulos de \mathbf{F} , onde $\mathbf{F} \hat{\mathbf{H}}_{(1)} = \hat{\mathbf{H}}_{(2)}$. Substituindo as expressões de $\hat{\mathbf{H}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{(2)}$ das equações (4.31) em $\mathbf{F} \hat{\mathbf{H}}_{(1)} = \hat{\mathbf{H}}_{(2)}$, obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^+.\tag{4.32}$$

Os pólos do sistema são calculados através da equação (2.43) como $\lambda_k = \log(z_k) / \Delta t$.

Nota-se as matrizes $\hat{\mathbf{U}}_1$ e $\hat{\mathbf{U}}_2$ correspondem as partições dos primeiros $2n$ autovetores da matriz de covariância $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Na seção 4.3 mostrou-se que para o caso de ruído Gaussiano branco de média zero e variância μ^2 adicionado aos dados das FRI's, os autovalores da matriz de covariância são acrescidos da ordem do valor da variância do ruído, enquanto que seus autovetores, para um número arbitrariamente grande de amostras, não sofrem qualquer variação. Na prática, esta menor sensibilidade dos autovetores da

matriz de covariância a presença do ruído traz maior precisão no cálculo dos parâmetros $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1, \dots, z_{2n}\}$ do sistema. Este método é referido na área relacionada com o problema DOA como o algoritmo ESPRIT-LS, Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90].

Nota-se também que este algoritmo é equivalente ao ERA. Da equação (4.19), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{O}_{L(1)} = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{1/2} \quad \text{e} \quad \mathbf{O}_{L(2)} = \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{1/2}. \quad (4.33)$$

que substituindo na equação (3.24) obtém-se que $\mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1/2} \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^+ \hat{\mathbf{U}}_{(2)}^+ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1/2} = \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^+ \hat{\mathbf{U}}_{(2)}^+$.

A equação acima mostra que o algoritmo ERA contém em sua formulação a presença da propriedade da menor sensibilidade ao ruído dos autovetores da matriz de covariância.

4.4.5 O Método de Ibrahim com Redução de Rank

O método de Ibrahim com redução de *rank* é baseado na relação exata presente entre as matrizes $\mathbf{H}_{(1)}$ e $\mathbf{H}_{(2)}$ para dados livres de ruído apresentado na seção 4.2.2. Aqui as matrizes $\hat{\mathbf{H}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{(2)}$, de dimensão $mL \times mL$, são calculadas diretamente através da aproximação de *rank* $2n$ $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T$ como,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_{(1)} &= \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T \\ \hat{\mathbf{H}}_{(2)} &= \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T \end{aligned} \quad (4.34)$$

Substituindo as expressões de $\hat{\mathbf{H}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{(2)}$ da equação acima em $\mathbf{F} \hat{\mathbf{H}}_{(1)} = \hat{\mathbf{H}}_{(2)}$, obtém-se $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^+$ que é idêntica a equação (4.32). Esta discussão demonstra,

portanto, a equivalência entre o presente método e os métodos dos autovetores da matriz de covariância e o ERA.

4.4.6 O Método ESPRIT TLS

Este algoritmo é também relacionado com o problema DOA, Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90]. Neste caso, o operador de projeção ortogonal sobre o espaço linha comum $\mathbf{\Pi}_L$ é obtido identicamente como no método dos autovetores da matriz de covariância, apresentado na seção 4.4.4. O operador de projeção ortogonal sobre o espaço coluna comum $\mathbf{\Pi}_C$ é determinado usando explicitamente a aproximação do tipo mínimos quadrados totais, apresentada na seção A.3 do apêndice A.

Este algoritmo consiste na determinação das aproximações de *rank* $2n$ $\hat{\mathbf{H}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{(2)}$ usando as matrizes $\bar{\mathbf{H}}_{(a)} = [\mathbf{H}_{(1)} \quad \mathbf{H}_{(2)}]$ e $\bar{\mathbf{H}}_{(b)} = \mathbf{H}$ de dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times 2rN$ e $m(L+1) \times rN$, usando SVD como,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}_{(a)} &= \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\mathbf{\Sigma}}_{(1)} \hat{\mathbf{V}}_{(1)}^T + \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^\perp \hat{\mathbf{\Sigma}}_{(1)}^\perp (\hat{\mathbf{V}}_{(1)}^\perp)^T \\ \bar{\mathbf{H}}_{(b)} &= \hat{\mathbf{U}}_{(2)} \hat{\mathbf{\Sigma}}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T + \hat{\mathbf{U}}_{(2)}^\perp \hat{\mathbf{\Sigma}}_{(2)}^\perp (\hat{\mathbf{V}}_{(2)}^\perp)^T \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde as matrizes $\hat{\mathbf{U}}_{(1)}$, $\hat{\mathbf{V}}_{(1)}$, $\hat{\mathbf{U}}_{(2)}$ e $\hat{\mathbf{V}}_{(2)}$ da equação acima possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times 2n$, $2rN \times 2n$, $m(L+1) \times 2n$ e $rN \times 2n$.

Os espaços coluna comum e linha comum usados para calcular as aproximações de *rank* $2n$ $\hat{\mathbf{H}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{(2)}$ são determinados, respectivamente, usando as matrizes $\hat{\mathbf{U}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{V}}_{(2)}$. Os operadores de projeção ortogonal sobre os espaços coluna e linha comuns são calculados, respectivamente, como $\mathbf{\Pi}_C = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^T$ e $\mathbf{\Pi}_L = \hat{\mathbf{V}}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T$. As matrizes $\hat{\mathbf{H}}_1$ e $\hat{\mathbf{H}}_2$ são calculadas como,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}_{(1)} &= \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^T \mathbf{H}_{(1)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \mathbf{E}_{(1)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T \\ \hat{\mathbf{H}}_{(2)} &= \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^T \mathbf{H}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \mathbf{E}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T\end{aligned}\quad (4.36)$$

onde $\mathbf{E}_{(1)} = \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^T \mathbf{H}_{(1)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}$ e $\mathbf{E}_{(2)} = \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^T \mathbf{H}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}$ são matrizes de dimensão $2n \times 2n$.

A matriz dos parâmetros $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1, \dots, z_{2n}\}$ do sistema é calculada como os autovalores não nulos de \mathbf{F} , onde $\mathbf{F} \hat{\mathbf{H}}_{(1)} = \hat{\mathbf{H}}_{(2)}$. Substituindo as expressões de $\hat{\mathbf{H}}_{(1)}$ e $\hat{\mathbf{H}}_{(2)}$ da equação (4.36) em $\mathbf{F} \hat{\mathbf{H}}_{(1)} = \hat{\mathbf{H}}_{(2)}$ obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{F} \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \mathbf{E}_{(1)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \mathbf{E}_{(2)} \hat{\mathbf{V}}_{(2)}^T \Rightarrow \mathbf{F} = \hat{\mathbf{U}}_{(1)} \mathbf{E}_{(2)} \mathbf{E}_{(1)}^{-1} \hat{\mathbf{U}}_{(1)}^+ \quad (4.37)$$

Os pólos do sistema são calculados através da equação (2.43) como $\lambda_k = \log(z_k) / \Delta t$.

4.5 Equivalência entre os Métodos de Identificação

Esta seção apresenta um resumo das equivalências entre os métodos de identificação apresentados neste capítulo na tabela 4.1.

Métodos de Identificação	Características Comuns dos Métodos
<ul style="list-style-type: none"> - <i>Polyreference</i> LS - Método de Ibrahim 	<ul style="list-style-type: none"> - equivalência entre a relação $\mathbf{F}\mathbf{H}_{(1)} = \mathbf{H}_{(2)}$ e a forma canônica observável do método <i>Polyreference</i> LS, - possuem pólos computacionais, - dificuldade na determinação da ordem do modelo.
<ul style="list-style-type: none"> - <i>Polyreference</i> TLS - <i>Polyreference</i> Orientado à Subespaços 	<ul style="list-style-type: none"> - usam as últimas m colunas de $\hat{\mathbf{U}}^\perp$, exploram o subespaço de ruído, - melhores estimativas dos parâmetros modais, - possuem pólos computacionais.
<ul style="list-style-type: none"> - ERA - Método dos Autovetores da Matriz de Covariância - Método de Ibrahim com Redução de <i>Rank</i> 	<ul style="list-style-type: none"> - equivalência através da matriz $\hat{\mathbf{U}}$ formada pelos $2n$ autovetores da matriz de covariância $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ - melhores estimativas dos parâmetros modais, - não possuem pólos computacionais - sugere a determinação da ordem do modelo, através da inspeção dos $2n$ valores singulares mais importantes de \mathbf{H}.

Tabela 4.1 – Equivalência entre os Métodos de Identificação.

Capítulo 5

MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PARÂMETROS MODAIS USANDO DADOS DE ENTRADA E SAÍDA

5.1 Introdução

No capítulo 4 apresentaram-se alguns métodos de identificação de parâmetros modais usando os dados das FRI's. Um outro tipo de procedimento bastante comum em AME consiste na utilização dos dados da entrada não impulsiva, especialmente as excitações aleatória ou pseudo-aleatória.

No caso da resposta não impulsiva, poder-se-ia obter as estimativas das FRI's através da operação de deconvolução no tempo. No entanto, esta operação nem sempre produz resultados satisfatórios, sendo de baixa eficiência numérica Kurka [49]. A forma mais comumente utilizada para estimação das FRI's é através da transformada de Fourier inversa, no domínio da frequência.

Em geral, os algoritmos de identificação no domínio do tempo utilizam um modelo de equações a diferenças. Os dois tipos mais comuns de modelos usados para dados de entrada/saída são o ARX (modelo auto regressivo com entrada exogênea) e o ARMAX

(modelo auto regressivo de média móvel com entrada exógena) - Ljung [62] e Söderström e Stoica [87]. Estes dois tipos de modelos podem apresentar resultados distintos na identificação dos parâmetros dependendo do tipo de estimador adotado na determinação das matrizes que compõem as equações fundamentais do modelo. Os estimadores mais comuns são os do tipo mínimos quadrados, entretanto, utiliza-se também para esta finalidade os estimadores de máxima verossimilhança, Reinsel, Basu e Yap [84]. Estes últimos produzem uma melhor estimativa dos parâmetros, mas requerem, em geral, um alto custo computacional que os tornam de difícil aplicação para o caso MIMO.

Este capítulo desenvolve alguns algoritmos de identificação modal para dados de entrada aleatória Gaussiana baseados na teoria de realização de sistemas lineares, implementados no domínio do tempo e válidos para o caso MIMO. Estes algoritmos contam com a propriedade de invariância ao deslocamento presente na matriz de observabilidade do sistema e são formulados segundo uma metodologia orientada a subespaços. A vantagem da utilização deste tipo de abordagem está no menor custo computacional despendido e o uso da SVD como parte integrante dos algoritmos o que possibilita também a determinação da ordem $2n$ do sistema.

5.2 Modelos Auto-Regressivos com Entrada Exógena (ARX)

Esta seção apresenta os modelos ARX para as versões SISO e MIMO. Os métodos de identificação modal baseados nestes modelos são os mais populares em AME.

5.2.1 ARX SISO

A relação entre a entrada $g(k)$ aplicada no ponto j e a saída $y(k)$ medida no ponto i de um sistema físico, pode ser descrita através de um modelo ARX – Ljung [62] e Söderström e Stoica [87] - como,

$$y_i(k) + a_1 y_i(k-1) + \dots + a_L y_i(k-L) = b_0 g_j(k) + b_1 g_j(k-1) + \dots + b_{L-1} g_j(k-L+1), \quad (5.1)$$

onde $L \geq 2n$ e os termos a_i 's e b_i 's são coeficientes constantes a serem determinados. Aplicando-se a transformada Z sobre a equação (5.1), o sistema linear pode também ser descrito através de uma função de transferência $H_{ij}(z) = Y_i(z)/G_j(z)$ na forma racional, como,

$$H_{ij}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{L-1} z^{-L+1}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_L z^{-L}} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (5.2)$$

ou na forma de expansão em frações parciais obtida da transformada Z da FRI

$$h_{ij}(k) = \sum_{l=1}^L r_{ij(l)} z_l^k, \text{ Liu e Liu [60], como,}$$

$$H_{ij}(z) = \sum_{l=1}^L \frac{r_{ij(l)}}{1 - z^{-1} z_l} = \sum_{l=1}^L \frac{r_{ij(l)} z}{z - z_l}. \quad (5.3)$$

Os pólos do sistema são calculados através das raízes do polinômio $P(z)$ da função de transferência $H_{ij}(z)$ da equação (5.2). Considerando que os pólos do sistema sejam distintos, os resíduos modais $r_{ij(l)}$ são calculados através dos coeficientes da expansão de $H_{ij}(z)$ em frações parciais da equação (5.3), Taylor [88], como,

$$\rho_{ij(l)} = \lim_{z \rightarrow z_l} (z - z_l) \sum_{l=1}^L \frac{r_{ij(l)} z}{z - z_l}. \quad (5.4)$$

Da equação acima obtém-se que $\rho_{ij(l)} = r_{ij(l)} z_l$, logo $r_{ij(l)} = \rho_{ij(l)} / z_l$.

Os coeficientes a_i 's e b_i 's são calculados resolvendo o seguinte sistema de equações lineares para uma quantidade $L + N$ de amostras de $g(k)$ e $y(k)$, como ,

$$\begin{bmatrix} -a_L & -a_{L-1} & \cdots & -a_1 & b_{L-1} & \cdots & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(1) & y(2) & \cdots & y(N) \\ y(2) & y(3) & \cdots & y(N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(L) & y(L+1) & \cdots & y(L+N-1) \\ g(2) & g(3) & \cdots & g(N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(L) & g(L+1) & \cdots & g(L+N-1) \\ g(L+1) & g(L+2) & \cdots & g(L+N) \end{bmatrix} \\
= [y(L+1) \quad y(L+2) \quad \cdots \quad y(L+N)] \tag{5.5}$$

ou

$$\Theta \mathbf{X} = \bar{\mathbf{y}}, \tag{5.6}$$

onde $N \geq L \geq 2n$, $\Theta = [-a_L \quad \cdots \quad -a_1 \quad b_{L-1} \quad \cdots \quad b_0]$ é o vetor $1 \times 2L$ dos coeficientes a_i 's e b_i 's, \mathbf{X} é a matriz de dimensão $2L \times N$ que contém os dados de entrada e saída e $\bar{\mathbf{y}} = [y(L+1) \quad \cdots \quad y(L+N)]$ é o vetor $1 \times N$ que contém os dados de saída. A solução de Θ por mínimos quadrados é dada por,

$$\Theta = \bar{\mathbf{y}} \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1}. \tag{5.7}$$

Os parâmetros $z_j = e^{\lambda_j \Delta t}$ são calculados como os autovalores da matriz companheira, equação (B.4) do apêndice B, usando os coeficientes de auto – regressão a_i 's.

5.2.2 ARX MIMO

O modelo ARX – MIMO é descrito através da seguinte equação a diferenças,

$$\mathbf{y}(k) + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}(k-1) + \dots + \mathbf{A}_L \mathbf{y}(k-L) = \mathbf{B}_0 \mathbf{g}(k) + \mathbf{B}_1 \mathbf{g}(k-1) + \dots + \mathbf{B}_{L-1} \mathbf{g}(k-L+1), \quad (5.8)$$

onde \mathbf{A}_i e \mathbf{B}_i são coeficientes matriciais de dimensão, respectivamente, iguais a $m \times m$ e $m \times r$. Considerando uma extensão da equação (5.8) para uma quantidade $L+N$ de amostras de $\mathbf{g}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$ como,

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{A}_L & -\mathbf{A}_{L-1} & \dots & -\mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_{L-1} & \dots & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(1) & \mathbf{y}(2) & \dots & \mathbf{y}(N) \\ \mathbf{y}(2) & \mathbf{y}(3) & \dots & \mathbf{y}(N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}(L) & \mathbf{y}(L+1) & \dots & \mathbf{y}(L+N-1) \\ \mathbf{g}(2) & \mathbf{g}(3) & \dots & \mathbf{g}(N+1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{g}(L) & \mathbf{g}(L+1) & \dots & \mathbf{g}(L+N-1) \\ \mathbf{g}(L+1) & \mathbf{g}(L+2) & \dots & \mathbf{g}(L+N) \end{bmatrix} = [\mathbf{y}(L+1) \quad \mathbf{y}(L+2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(L+N)] \quad (5.9)$$

ou

$$\Theta \mathbf{X} = \bar{\mathbf{y}}, \quad (5.10)$$

onde $N \geq L \geq 2n$, $\Theta = [-\mathbf{A}_L \quad -\mathbf{A}_{L-1} \quad \dots \quad -\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{B}_{L-1} \quad \dots \quad \mathbf{B}_0]$ possui dimensão $m \times (m+r)L$, \mathbf{X} possui dimensão $(m+r)L \times N$ e $\bar{\mathbf{y}} = [\mathbf{y}(L+1) \quad \mathbf{y}(L+2) \quad \dots \quad \mathbf{y}(L+N)]$ possui dimensão $m \times N$. As matrizes \mathbf{A}_i e \mathbf{B}_i são calculadas através da solução do sistema linear acima, por mínimos quadrados, como,

$$\Theta = \bar{\mathbf{y}} \mathbf{X}^T (\mathbf{X} \mathbf{X}^T)^{-1}. \quad (5.11)$$

Os modos de vibração do sistema são calculados aplicando-se a transformada Z sobre a equação (5.8) que resulta no seguinte,

$$\left[\mathbf{I}_m + \mathbf{A}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{A}_L z^{-L} \right] \mathbf{Y}(z) = \left[\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 z^{-1} + \dots + \mathbf{B}_{L-1} z^{-L+1} \right] \mathbf{G}(z), \quad (5.12)$$

ou

$$\left[\mathbf{I}_m z^L + \mathbf{A}_1 z^{L-1} + \dots + \mathbf{A}_L \right] \mathbf{H}(z) = \left[\mathbf{B}_0 z^L + \mathbf{B}_1 z^{L-1} + \dots + \mathbf{B}_{L-1} z \right], \quad (5.13)$$

onde \mathbf{I}_m denota a matriz identidade de dimensão $m \times m$ e

$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & \dots & H_{1r}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & \dots & H_{2r}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1}(z) & H_{m2}(z) & \dots & H_{mr}(z) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

é a matriz de funções de transferências do sistema no plano z e possui dimensão $m \times r$.

A equação (5.13) pode ser reescrita como,

$$\left[z \mathbf{I}_{mL} - \tilde{\mathbf{A}} \right] \tilde{\mathbf{I}}(z) \mathbf{H}(z) = \tilde{\mathbf{B}}(z), \quad (5.15)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_{L-1} & -\mathbf{A}_L \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

$$\tilde{\mathbf{I}}(z) = \begin{bmatrix} z^{L-1} \mathbf{I}_m \\ z^{L-2} \mathbf{I}_m \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

e

$$\tilde{\mathbf{B}}(z) = \begin{bmatrix} z^L \mathbf{B}_0 + \dots + z \mathbf{B}_{L-1} \\ \mathbf{0}_{m \times r} \\ \vdots \\ \mathbf{0}_{m \times r} \end{bmatrix}, \quad (5.18)$$

sendo que as matrizes $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{I}}(z)$ e $\tilde{\mathbf{B}}(z)$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times mL$, $mL \times m$ e $mL \times r$.

A equação (5.15) fornece as informações do comportamento próprio do sistema através do seguinte problema de autovalor,

$$\left[z_j \mathbf{I}_{mL} - \tilde{\mathbf{A}} \right] \tilde{\phi}_j = 0, \quad (5.19)$$

onde o autovetor $\tilde{\phi}_j$ possui dimensão $mL \times 1$.

A equação acima fornece mL autovetores $\tilde{\phi}_j$ associados aos mL autovalores z_j da matriz companheira $\tilde{\mathbf{A}}$. Destes mL autovalores, obtém-se os parâmetros $z_j = e^{\lambda_j \Delta t}$ de onde são calculados os pólos do sistema, dentre os quais $2n$ são os pólos verdadeiros e $mL-2n$ são pólos computacionais.

As equações (5.15) e (5.19) sugerem o seguinte,

$$\tilde{\phi}_j = \tilde{\mathbf{I}}(z) \phi_j \quad (5.20)$$

onde o vetor ϕ_j de dimensão $m \times 1$, representa o modo de vibração associado ao j -ésimo autovalor z_j da equação (5.19). Na verdade, o que procura-se são os modos ϕ_j associados aos $2n$ pólos verdadeiros do sistema. Cada modo ϕ_j é calculado usando a equação (5.20), como,

$$\phi_j = \left(\tilde{\mathbf{I}}^T(z) \tilde{\mathbf{I}}(z) \right)^{-1} \tilde{\mathbf{I}}^T(z) \tilde{\phi}_j. \quad (5.21)$$

5.3 Identificação Modal Através dos Subespaços das Matrizes de Dados de Entrada e Saída

Os métodos tradicionais apresentados na seção anterior motivaram o desenvolvimento dos algoritmos apresentados nesta seção. Esta seção desenvolve dois algoritmos de identificação modal inspirados em conceitos puramente geométricos relacionados com os subespaços vetoriais obtidos da aplicação da SVD nas matrizes de dados de entrada e saída. Destes subespaços determina-se uma expressão da matriz de observabilidade \mathbf{O}_L da qual são calculados os parâmetros do sistema usando a propriedade de invariância ao deslocamento.

A descrição de sistemas lineares em espaço de estado é dada pela equação (3.4) (que é repetida aqui) como,

$$\mathbf{y}_L(k) = \mathbf{O}_L \mathbf{x}(k) + \mathbf{T}_L \mathbf{g}_L(k) \quad (5.22)$$

onde $\mathbf{y}_L(k) = [\mathbf{y}(k) \ \cdots \ \mathbf{y}(k+L-1)]^T$ e $\mathbf{g}_L(k) = [\mathbf{g}(k) \ \cdots \ \mathbf{g}(k+L-1)]^T$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times 1$ e $rL \times 1$. \mathbf{O}_L é a matriz de observabilidade do sistema e \mathbf{T}_L é uma matriz Toeplitz triangular inferior de dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times 2n$ e $mL \times rL$. Mais detalhes a respeito da formulação acima, vide seção 3.2.1 deste trabalho. Para uma seqüência de $L+N-1$ dados de $\mathbf{g}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$, que satisfaçam a equação (5.22), obtém-se a seguinte equação matricial de entrada/saída,

$$\mathbf{Y}_H(k) = \mathbf{O}_L \mathbf{X}(k) + \mathbf{T}_L \mathbf{G}_H(k), \quad (5.23)$$

onde,

$$\mathbf{Y}_H(k) = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+N-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(k+N) \\ y(k+2) & y(k+3) & \cdots & y(k+N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+L-1) & y(k+L) & \cdots & y(k+L+N-2) \end{bmatrix}, \quad (5.24)$$

$$\mathbf{G}_H(k) = \begin{bmatrix} g(k) & g(k+1) & \cdots & g(k+N-1) \\ g(k+1) & g(k+2) & \cdots & g(k+N) \\ g(k+2) & g(k+3) & \cdots & g(k+N+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g(k+L-1) & g(k+L) & \cdots & g(k+L+N-2) \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{X}(k) = [\mathbf{x}(k) \quad \mathbf{x}(k+1) \quad \mathbf{x}(k+2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(k+N-1)], \quad (5.26)$$

$$\mathbf{O}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-1} \end{bmatrix}, \quad (5.27)$$

e

$$\mathbf{T}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA}^{L-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L-3}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{L-4}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

As matrizes dos dados de entrada \mathbf{G}_H e saída \mathbf{Y}_H , das equações (5.24) e (5.25), possuem estrutura Hankel e dimensões, respectivamente, iguais a $rL \times N$ e $mL \times N$, onde r e m representam, respectivamente, os números de entrada e saída do sistema. A matriz $\mathbf{X}(k)$ contém as variáveis de estado do sistema $\mathbf{x}(k)$ e possui dimensão igual a $2n \times N$.

5.3.1 Algoritmo 1 – Aplicando a SVD Apenas Sobre a Matriz dos Dados de Entrada

Considerando que $N > \max(mL, rL)$, a SVD completa da matriz \mathbf{G}_H leva a,

$$\mathbf{G}_H = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma} & \mathbf{0}_{N_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

onde as matrizes \mathbf{U} e $\mathbf{\Sigma}$ possuem dimensão igual a $rL \times rL$. A matriz $\mathbf{0}_{N_0}$ possui dimensão $rL \times N_0$ e as matrizes \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 possuem dimensões, respectivamente, iguais a $N \times rL$ e $N \times N_0$, sendo $N_0 = N - rL > mL$.

Da teoria de realização de sistemas lineares, a entrada que excita todos os possíveis modos de um sistema linear dentro de uma faixa de frequência é chamada de excitação persistente, Kailath [46]. A condição necessária para garantir excitação persistente é que a matriz \mathbf{G}_H tenha *rank* completo, igual a rL . Assumindo que a matriz de dados de entrada \mathbf{G}_H tenha *rank* completo, a matriz \mathbf{U} da equação (5.29) gera o espaço coluna de \mathbf{G}_H de dimensão igual a rL , enquanto que as matrizes \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 geram, respectivamente, o espaço linha de \mathbf{G}_H e o espaço complementar ao espaço linha (ou núcleo) de \mathbf{G}_H de dimensões, respectivamente, iguais a rL e $N_0 = N - rL$.

Uma proposta interessante para a identificação das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{C} do modelo de espaço de estado, consiste na projeção dos vetores da matriz Hankel da saída $\mathbf{Y}_H(k)$, da equação (5.23), sobre o núcleo de $\mathbf{G}_H(k)$, como,

$$\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^T = \mathbf{O}_L \mathbf{X} \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^T + \mathbf{T}_L \mathbf{G}_H \mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^T. \quad (5.30)$$

Considerando que $\mathbf{G}_H \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}_{rL \times N_0}$, a equação (5.30), resulta no seguinte,

$$\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 = \mathbf{O}_L \mathbf{X} \mathbf{V}_2. \quad (5.31)$$

As matrizes \mathbf{O}_L , de dimensão $mL \times 2n$, e $\mathbf{V}_2^T \mathbf{X}^T$, de dimensão $N_0 \times 2n$, da equação acima possuem *rank* igual a ordem mínima $2n$ do sistema, de modo que o *rank* de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$, de dimensão $mL \times N_0$, é também igual a $2n$. Além disso, \mathbf{O}_L e $\mathbf{V}_2^T \mathbf{X}^T$ geram as bases para, respectivamente, os espaços coluna e linha de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$ Moonem et al. [69]. A matriz de observabilidade \mathbf{O}_L pode ser calculada como uma base para o espaço coluna de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$. Usando a propriedade de invariância ao deslocamento de \mathbf{O}_L , apresentada na seção 3.2.5 deste trabalho, determina-se as matrizes **A** e **C** do sistema.

O algoritmo 1 pode ser resumido como:

1) Cálculo da SVD completa da matriz \mathbf{G}_H , de dimensão $rL \times N$, como na equação (5.29) de onde obtém-se a matriz \mathbf{V}_2 de dimensão $N \times N_0$,

2) Cálculo da matriz $\mathbf{Y}_H(k) \mathbf{V}_2$ de dimensão $mL \times N_0$ de acordo com a equação (5.31),

3) Para dados $\mathbf{y}(k)$ sem ruído, a matriz $\mathbf{Y}_H(k) \mathbf{V}_2$ possui *rank* $2n$. Para dados contaminados com ruído, determina-se uma aproximação de *rank* $2n$ para $\mathbf{Y}_H(k) \mathbf{V}_2$ usando SVD como,

$$\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{2n} & \mathbf{U}_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{2n} & \mathbf{0}_{2n \times no} \\ \mathbf{0}_{no \times 2n} & \boldsymbol{\Sigma}_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{2n}^T \\ \mathbf{V}_{no}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{2n} \boldsymbol{\Sigma}_{2n} \mathbf{V}_{2n}^T, \quad (5.32)$$

onde as matrizes \mathbf{U}_{2n} , $\mathbf{\Sigma}_{2n}$ e \mathbf{V}_{2n} possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times 2n$, $2n \times 2n$ e $N_0 \times 2n$. As matrizes \mathbf{U}_{no} , $\mathbf{\Sigma}_{no}$ e \mathbf{V}_{no} possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times no$, $no \times no$ e $N_0 \times 2n$, onde $no = mL - 2n$. O espaço coluna de $\mathbf{Y}_H(k)\mathbf{V}_2$ é determinado pela matriz \mathbf{U}_{2n} , que com base na discussão acima, possui a propriedade de invariância ao deslocamento como a matriz de observabilidade \mathbf{O}_L .

4) Os parâmetros $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1 \dots z_{2n}\}$ do sistema são calculados através dos autovalores não nulos da matriz $\mathbf{F} = \mathbf{U}_{2n(2)}\mathbf{U}_{2n(1)}^+$, onde as matrizes $\mathbf{U}_{2n(1)}$ e $\mathbf{U}_{2n(2)}$, de dimensão $m(L-1) \times 2n$, são partições de um único deslocamento da matriz \mathbf{U}_{2n} . Os pólos do sistema são calculados através da equação (2.43) como $\lambda_k = \log(z_k)/\Delta t$.

5.3.2 Análise da Sensibilidade de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$ à Presença de Ruído e a Ordem do Modelo

O método acima permite a análise da sensibilidade da identificação dos parâmetros à presença de ruído somado à saída $\mathbf{y}(k)$ do sistema. Para o caso da saída $\mathbf{y}(k)$ contaminada com ruído Gaussiano $\mathbf{e}(k)$ de média zero e variância μ^2 , a equação (5.23) pode ser escrita como,

$$\mathbf{Y}_H = \mathbf{O}_L \mathbf{X} + \mathbf{T}_L \mathbf{G}_H + \mathbf{E}_H, \quad (5.33)$$

onde a matriz \mathbf{E}_H possui estrutura Hankel e dimensão $mL \times N$.

Pós-multiplicando a equação (5.33) por \mathbf{V}_2 , considerando que $\mathbf{V}_2 \mathbf{V}_2^T = \mathbf{I}_N$, $\mathbf{G}_H \mathbf{V}_2 = \mathbf{0}_{rL \times N_0}$ e que a matriz $\mathbf{O}_L \mathbf{X}$ é independente de \mathbf{E}_H , a matriz de covariância $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)^T$, de dimensão $mL \times mL$, pode ser escrita como,

$$\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)^T = \mathbf{O}_L \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{O}_L^T + \mathbf{E} \mathbf{E}^T = \mathbf{O}_L \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{O}_L^T + \mu^2 \mathbf{I}_{mL}. \quad (5.34)$$

O *rank* de $\mathbf{O}_L \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{O}_L^T$ é igual a $2n < mL$. Com base na equação acima, a matriz de covariância $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)^T$ pode ser expressa como a soma de uma matriz de *rank* $2n$ com uma outra matriz diagonal $\mu^2 \mathbf{I}_{mL}$ de *rank* completo. A estrutura da equação (5.34) já foi discutida na seção 4.3 deste trabalho, onde mostrou-se que a magnitude dos valores singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)^T$ é igual a magnitude dos valores singulares de $\mathbf{O}_L \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{O}_L^T$ somados a variância μ^2 do ruído. Além disso, os autovetores de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)^T$ são pouco sensíveis à presença de ruído Gaussiano. Tal estrutura sugere, portanto, uma proposta para identificação da ordem do modelo através da inspeção dos $2n$ maiores valores singulares da matriz de covariância $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2 (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)^T$ como a da seção 4.3.

5.3.3 Algoritmo 2 – Aplicando a SVD Diretamente Sobres as Matrizes de Entrada e Saída

Considere agora a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{G}_H \end{bmatrix}$ de dimensão $(m+r)L \times N$ com $N > (m+r)L$.

Para dados livres de ruído $\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{G}_H \end{bmatrix}$ possui as seguintes propriedades, Moonen et al. [69]:

1) o *rank* de $\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{G}_H \end{bmatrix}$ é igual a $rL + 2n$, sendo $2n$ a ordem mínima do sistema,

2) a SVD de $\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{G}_H \end{bmatrix}$ é dada por,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{G}_H \end{bmatrix} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \mathbf{0}_{12} \\ \mathbf{0}_{21} & \mathbf{0}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

sendo que,

$$[\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

onde a matriz dos valores singulares Σ_1 possui dimensão $(rL+2n) \times (rL+2n)$. As matrizes \mathbf{U}_1 e \mathbf{U}_2 possuem dimensões, respectivamente, iguais a $(m+r)L \times rL+2n$ e $(m+r)L \times mL-2n$. As matrizes \mathbf{U}_{11} , \mathbf{U}_{12} , \mathbf{U}_{21} e \mathbf{U}_{22} possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times rL+2n$, $mL \times mL-2n$, $rL \times rL+2n$ e $rL \times mL-2n$. As matrizes \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 possuem dimensões, respectivamente, iguais a $N \times rL+2n$ e $N \times N - rL - 2n$. As matrizes $\mathbf{0}_{12}$, $\mathbf{0}_{21}$ e $\mathbf{0}_{22}$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $rL+2n \times N - rL - 2n$, $mL-2n \times rL+2n$ e $mL-2n \times N - rL - 2n$.

Substituindo a equação (5.36) em (5.35), após manipulações algébricas, obtém-se o seguinte,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{G}_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{U}_{21} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T \end{bmatrix}, \quad (5.37)$$

onde as matrizes $\mathbf{U}_{11} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T$ e $\mathbf{U}_{21} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times N$ e $rL \times N$ de modo que,

$$\mathbf{Y}_H = \mathbf{U}_{11} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T \quad (5.38)$$

e

$$\mathbf{G}_H = \mathbf{U}_{21} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T. \quad (5.39)$$

Substituindo as equações (5.38) e (5.39) na equação (5.23), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{U}_{11} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T = \mathbf{O}_L \mathbf{X} + \mathbf{T}_L \mathbf{U}_{21} \Sigma_1 \mathbf{V}_1^T. \quad (5.40)$$

A idéia agora é isolar a matriz de observabilidade \mathbf{O}_L da equação acima. Definindo a matriz $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T$ de dimensão $rL + 2n \times N$, após manipulações algébricas, a equação (5.40) pode ser escrita como,

$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{O}_L \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^+ + \mathbf{T}_L \mathbf{U}_{21}, \quad (5.41)$$

onde $\boldsymbol{\beta}^+ = \boldsymbol{\beta}^T (\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\beta}^T)^{-1}$ é a pseudo-inversa da matriz $\boldsymbol{\beta}$ e possui dimensão igual a $N \times rL + 2n$.

A matriz \mathbf{U}_{21} de dimensão $rL \times rL + 2n$ possui *rank* igual a rL e nulidade igual a $2n$. A SVD de \mathbf{U}_{21} é dada por,

$$\mathbf{U}_{21} = \hat{\mathbf{U}}_{21} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21} \hat{\mathbf{V}}_{21}^T + \hat{\mathbf{U}}_{21}^\perp \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21}^\perp (\hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp)^T, \quad (5.42)$$

onde as matrizes $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21}$ e $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{21}^\perp$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $rL \times rL$ e $rL \times 2n$. A matriz $\hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp$ de dimensão $rL + 2n \times 2n$ gera o núcleo de \mathbf{U}_{21} , de modo que $\mathbf{U}_{21} \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp = \mathbf{0}_{rL \times 2n}$.

Pós-multiplicando a equação (5.41) por $\hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp$ obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp = \mathbf{O}_L \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^+ \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp = \mathbf{O}_L \bar{\boldsymbol{\beta}}, \quad (5.43)$$

onde as matrizes $\mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp$ e $\bar{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}^+ \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp$ possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times 2n$ e $2n \times 2n$, portanto a matriz $\mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp$ possui a propriedade de invariância ao deslocamento de \mathbf{O}_L que pode ser explorada para a determinação dos parâmetros do sistema.

O algoritmo 2 pode ser resumido como:

1) Cálculo da SVD da matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_H \\ \mathbf{G}_H \end{bmatrix}$ conforme a equação (5.35) e determinação das matrizes \mathbf{U}_{11} , \mathbf{U}_{12} , \mathbf{U}_{21} e \mathbf{U}_{22} conforme a equação (5.36),

2) Cálculo da matriz $\hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp$ via SVD da matriz \mathbf{U}_{21} conforme a equação (5.42),

3) Cálculo da matriz $\mathbf{H} = \mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp = \mathbf{O}_L \bar{\boldsymbol{\beta}}$ conforme a equação (5.43),

4) Cálculo dos parâmetros $\mathbf{Z} = \text{diag}\{z_1 \ \cdots \ z_{2n}\}$ do sistema usando a propriedade de invariância ao deslocamento presente em \mathbf{H} como os autovalores não nulos de $\mathbf{F} = \mathbf{H}_{(2)} \mathbf{H}_{(1)}^+$, onde as matrizes $\mathbf{H}_{(1)}$ e $\mathbf{H}_{(2)}$ de dimensão $m(L-1) \times 2n$ são partições da matriz $\mathbf{H} = \mathbf{U}_{11} \hat{\mathbf{V}}_{21}^\perp$. Os pólos do sistema são calculados através da equação (2.43) como $\lambda_k = \log(z_k) / \Delta t$.

5.4 Identificação Modal Usando a Decomposição RQ

Esta técnica de subespaços é conhecida como MIMO *Output-Error State Space Model Identification* (MOESP), Verhaegen [91], Verhaegen e Dewilde [92] ou *Numerical Algorithm for Subspace State Space System Identification* (N4SID), Overschee e De Moor [73] e [74], na área de realização de sistemas lineares na engenharia elétrica. Esta seção apresenta uma versão desta metodologia baseada na interpretação matemática da matriz Hankel com respeito à relação entrada/saída, apresentada na seção 3.2.3, como em Van der Veen, Deprettere e Swindlehurst [90].

Seja a matriz de dados de entrada e saída $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_H \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}$, de dimensão $(m+r)L \times N$, que admita a seguinte fatorização RQ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_H \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} = \mathbf{R}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

onde as matrizes \mathbf{R} e \mathbf{Q} possuem dimensões, respectivamente, iguais a $(m+r)L \times (m+r)L$ e $(m+r)L \times N$. As matrizes \mathbf{R}_{11} , \mathbf{R}_{21} , \mathbf{R}_{22} e $\mathbf{0}$ possuem dimensões, respectivamente iguais a $rL \times rL$, $mL \times rL$, $mL \times mL$ e $rL \times mL$. A matriz \mathbf{Q} é particionada em duas sub matrizes \mathbf{Q}_1 de dimensão $rL \times N$ e \mathbf{Q}_2 de dimensão $mL \times N$. Além disso, as matrizes \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 são ortogonais, satisfazendo as seguintes condições,

$$\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{I}_{rL}, \quad \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{0}_{mL \times rL} \quad \text{e} \quad \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^T = \mathbf{I}_{mL} \quad (5.45)$$

A matriz de dados $\begin{bmatrix} \mathbf{G}_H \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix}$ contém os dados de entrada e saída do sistema $\mathbf{g}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$.

A matriz \mathbf{R} da equação (5.44) representa uma seqüência de pseudo-entradas $\mathbf{g}'(k)$ e de pseudo-saídas $\mathbf{y}'(k)$, diferentes de $\mathbf{g}(k)$ e $\mathbf{y}(k)$ definidas como,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'(k) & \cdots & \mathbf{g}'(k+rL-1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}'(k+rL-1) & \cdots & \mathbf{g}'(k+2rL-2) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{y}'(k) & \cdots & \mathbf{y}'(k+rL-1) & \mathbf{y}'(k+rL) & \cdots & \mathbf{y}'(k+rL+mL-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}'(k+mL-1) & \cdots & \mathbf{y}'(k+rL+mL-2) & \mathbf{y}'(k+rL+mL-1) & \cdots & \mathbf{y}'(k+rL+2mL-2) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

onde as colunas de \mathbf{R}_{21} contém as seqüências de saídas $\mathbf{y}'(k)$ relacionadas com as entradas não nulas $\mathbf{g}'(k)$ representadas pelas colunas de \mathbf{R}_{11} . Analogamente, as colunas de \mathbf{R}_{22} contém as seqüências de saídas $\mathbf{y}'(k)$ relacionadas com entradas nulas correspondentes aos

instantes $t = (k+rL \dots k+rL+2mL-2)$. De acordo com a seção 3.2.3, a matriz \mathbf{R}_{22} possui as propriedades da matriz Hankel, e como tal, pode-se escrever o seguinte,

$$\mathbf{R}_{22} = \mathbf{O}_L \mathbf{X}, \quad (5.47)$$

de onde pode-se obter a matriz de observabilidade do sistema, sendo que \mathbf{X} é uma matriz de *rank* completo e dimensão $2n \times mL$.

Da equação (5.44), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{G}_H = \mathbf{R}_{11} \mathbf{Q}_1 \quad (5.48)$$

e

$$\mathbf{Y}_H = \mathbf{R}_{21} \mathbf{Q}_1 + \mathbf{R}_{22} \mathbf{Q}_2. \quad (5.49)$$

O objetivo agora é obter uma expressão para \mathbf{R}_{22} em função das matrizes de dados de entrada e saída \mathbf{G}_H e \mathbf{Y}_H . Considerando as propriedades de ortogonalidade de \mathbf{Q}_1 e \mathbf{Q}_2 descritas na equação (5.45), a matriz de covariância,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_H \\ \mathbf{Y}_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_H^T & \mathbf{Y}_H^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_H \mathbf{G}_H^T & \mathbf{Y}_H \mathbf{G}_H^T \\ \mathbf{Y}_H \mathbf{G}_H^T & \mathbf{Y}_H \mathbf{Y}_H^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} \mathbf{R}_{11}^T & \mathbf{R}_{11} \mathbf{R}_{21}^T \\ \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^T & \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{21}^T + \mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

fornece o seguinte,

$$\mathbf{R}_{11} \mathbf{R}_{11}^T = \mathbf{G}_H \mathbf{G}_H^T, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{11}^T = \mathbf{Y}_H \mathbf{G}_H^T, \quad (5.52)$$

e

$$\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T = \mathbf{Y}_H \mathbf{Y}_H^T - \mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{21}^T. \quad (5.53)$$

Da equação (5.52), calcula-se \mathbf{R}_{21} , como,

$$\mathbf{R}_{21} = \mathbf{Y}_H \mathbf{G}_H^T (\mathbf{R}_{11}^T)^{-1}. \quad (5.54)$$

Substituindo a equação (5.54) em (5.53), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T = \mathbf{Y}_H \mathbf{Y}_H^T - \mathbf{Y}_H \mathbf{G}_H^T (\mathbf{R}_{11}^T)^{-1} (\mathbf{R}_{11})^{-1} \mathbf{G}_H \mathbf{Y}_H^T. \quad (5.55)$$

Substituindo a equação (5.51) em (5.55), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T = \mathbf{Y}_H \mathbf{Y}_H^T - \mathbf{Y}_H \mathbf{G}_H^T [\mathbf{G}_H \mathbf{G}_H^T]^{-1} \mathbf{G}_H \mathbf{Y}_H^T, \quad (5.56)$$

ou

$$\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T = \mathbf{R}_{yy} - \mathbf{R}_{yg} \mathbf{R}_{gg}^{-1} \mathbf{R}_{yg}^T, \quad (5.57)$$

onde as matrizes \mathbf{R}_{yy} , \mathbf{R}_{gg} e \mathbf{R}_{yg} são simétricas, possuem dimensões, respectivamente, iguais a $mL \times mL$, $rL \times rL$ e $mL \times rL$ e representam, respectivamente, as auto correlações dos dados de saída $\mathbf{y}(k)$, entrada $\mathbf{g}(k)$ e a correlações cruzada dos dados de entrada/saída.

O termo $\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T$ pode ser calculado através da equação (5.57) em função das matrizes dos dados de entrada e saída \mathbf{G}_H e \mathbf{Y}_H . Por outro lado, da equação (5.47) obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T = \mathbf{O}_L \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{O}_L^T. \quad (5.58)$$

Para dados livres de ruído, a equação (5.58) mostra que o *rank* de $\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T$ é igual a ordem mínima $2n$ do sistema, sendo que \mathbf{O}_L representa o espaço coluna de $\mathbf{R}_{22} \mathbf{R}_{22}^T$. Para

dados contaminados por ruído, determina-se uma aproximação de *rank* $2n$ para $\mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{22}^T$ usando a SVD, como,

$$\mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{22}^T = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{2n} & \mathbf{U}_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{2n} & \mathbf{0}_{2n \times no} \\ \mathbf{0}_{no \times 2n} & \mathbf{\Sigma}_{no} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{2n}^T \\ \mathbf{U}_{no}^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{2n}\mathbf{\Sigma}_{2n}\mathbf{U}_{2n}^T, \quad (5.59)$$

onde a matriz \mathbf{U}_{2n} representa o espaço coluna de $\mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{22}^T$.

Combinando as equações (5.58) e (5.59), obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{22}^T = \mathbf{O}_L\mathbf{X}\mathbf{X}^T\mathbf{O}_L = \mathbf{U}_{2n}\mathbf{\Sigma}_{2n}\mathbf{U}_{2n}^T, \quad (5.60)$$

de onde determina-se a expressão da matriz de observabilidade \mathbf{O}_L do sistema, como,

$$\mathbf{O}_L = \mathbf{U}_{2n} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{\Sigma}_{2n}. \quad (5.61)$$

Os pólos do sistema são determinados pela equação (2.43) como $\lambda = \log(\text{eig}(\mathbf{O}_{2n(1)}^+ \mathbf{O}_{2n(2)})) / dt$, onde $\mathbf{O}_{L(1)}$ e $\mathbf{O}_{L(2)}$ são partições de \mathbf{O}_L .

A equação (5.61) mostra também que a matriz $\mathbf{X}\mathbf{X}^T = \mathbf{\Sigma}_{2n}$ corresponde aos $2n$ maiores valores singulares de $\mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{22}^T$ o que sugere o método de identificação da ordem $2n$ do modelo da inspeção dos $2n$ valores singulares de mais importantes da matriz $\mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{22}^T$.

5.5 Equivalência Entre os Métodos de Subespaços

Os três métodos apresentados nas seções 5.3 e 5.4 para determinação das matriz de transição A apresentam formulações diferentes, no entanto, são equivalentes pois eles utilizam as mesmas matrizes \mathbf{G}_H e \mathbf{Y}_H para obter as relações que isolem a matriz de

observabilidade \mathbf{O}_L do sistema. A matriz \mathbf{C} é determinada através das m primeiras linhas de matriz $\mathbf{O}_L = \mathbf{U}_{2n}$.

5.6 Cálculo das Matrizes \mathbf{B} e \mathbf{D} e dos Resíduos Modais

Esta seção apresenta o cálculo das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{D} como em Juang [40] e dos resíduos modais do sistema.

5.6.1 Cálculo das Matrizes \mathbf{B} e \mathbf{D}

As matrizes \mathbf{B} e \mathbf{D} são estimadas usando a matriz Toeplitz \mathbf{T}_L , de dimensão $mL \times rL$, definida na equação (5.28). A idéia consiste basicamente em eliminar o termo associado com a matriz de observabilidade \mathbf{O}_L da equação matricial de entrada/saída (5.23).

As equações (5.32) e (5.59) representam aproximações de *rank* $2n$ de, respectivamente, $\mathbf{Y}_H(k)\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{R}_{22}\mathbf{R}_{22}^T$. Com base nestas equações pode-se dizer que \mathbf{U}_{2n} é proporcional a \mathbf{O}_L , isto é, $\mathbf{U}_{2n} = \mathbf{O}_L\boldsymbol{\alpha}$ onde $\boldsymbol{\alpha}$ é uma matriz não singular de dimensão $2n \times 2n$. Devido a ortogonalidade de \mathbf{U}_{2n} e \mathbf{U}_{n0} pode-se dizer também que $\mathbf{U}_{n0}^T \mathbf{U}_{2n} = \mathbf{U}_{n0}^T \mathbf{O}_L \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_{mL-2n \times 2n}$.

Pré-multiplicando a equação (5.23) por \mathbf{U}_{n0}^T , de dimensão $mL - 2n \times mL$, e usando a ortogonalidade das matrizes \mathbf{U}_{2n} e \mathbf{U}_{n0} discutida no parágrafo anterior, obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{U}_{n0}^T \mathbf{Y}_H = \mathbf{U}_{n0}^T \mathbf{O}_L \mathbf{X} + \mathbf{U}_{n0}^T \mathbf{T}_L \mathbf{G}_H = \mathbf{U}_{n0}^T \mathbf{T}_L \mathbf{G}_H. \quad (5.62)$$

Pós-multiplicando a equação anterior por \mathbf{G}_H^T , obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{no}^T \mathbf{Y}_H \mathbf{G}_H^T &= \mathbf{U}_{no}^T \mathbf{T}_L \mathbf{G}_H \mathbf{G}_H^T \\ \mathbf{U}_{no}^T \mathbf{R}_{yg} &= \mathbf{U}_{no}^T \mathbf{T}_L \mathbf{R}_{gg} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Considerando a existência de \mathbf{R}_{gg}^{-1} (excitação persistente), a equação acima pode ser escrita como,

$$\mathbf{U}_{no}^T \mathbf{T}_L = \mathbf{U}_{no}^T \mathbf{R}_{yg} \mathbf{R}_{gg}^{-1} \quad (5.64)$$

Fazendo uma partição das colunas da matriz Toeplitz \mathbf{T}_L em L matrizes de dimensão $mL \times r$, como,

$$\mathbf{T}_L = [\mathbf{T}_L(:, 1:r) \quad \mathbf{T}_L(:, r+1:2r) \quad \cdots \quad \mathbf{T}_L(:, (L-1)r+1:Lr)], \quad (5.65)$$

e considerando que $\mathbf{O}_L = \mathbf{U}_{2n}$, obtém-se o seguinte,

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_L(:, 1:r) &= \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{CB} \\ \mathbf{CAB} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{U}_{2n}(1:(L-1)m,:) \mathbf{B} \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_L(:, r+1:2r) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{CB} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times r} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{U}_{2n}(1:(L-2)m,:) \mathbf{B} \end{bmatrix} \\
\mathbf{T}_L(:, 2r+1:3r) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{D} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-4}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2m \times r} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{U}_{2n}(1:(L-3)m,:) \mathbf{B} \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\mathbf{T}_L(:, (L-1)r+1:Lr) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(L-1)m \times r} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.66}$$

A matriz $\mathbf{U}_{n0}^T \mathbf{T}_L$, de dimensão $mL - 2n \times rL$, do lado esquerdo da equação (5.64), pode ser igualmente particionada gerando L equações matriciais de dimensão $mL - 2n \times r$, como,

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, 1:r) &= \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 1:m) \mathbf{D} + \mathbf{U}_{n_0}^T(:, m+1:mL) \mathbf{U}_{2n}(1:m(L-1), :) \mathbf{B} \\
\mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, r+1:2r) &= \mathbf{U}_{n_0}^T(:, m+1:2m) \mathbf{D} + \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 2m+1:mL) \mathbf{U}_{2n}(1:m(L-2), :) \mathbf{B} \\
\mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, 2r+1:3r) &= \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 2m+1:3m) \mathbf{D} + \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 3m+1:mL) \mathbf{U}_{2n}(1:m(L-3), :) \mathbf{B}. \quad (5.67) \\
&\vdots \\
\mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, r(L-1)+1:rL) &= \mathbf{U}_{n_0}^T(:, m(L-1)+1:mL) \mathbf{D}
\end{aligned}$$

A equação (5.67) pode ser reescrita como,

$$\mathbf{U}_{0T} = \mathbf{U}_{0N} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad (5.68)$$

onde

$$\mathbf{U}_{0T} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, 1:r) \\ \mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, r+1:2r) \\ \mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, 2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{T}_L(:, r(L-1)+1:rL) \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

e

$$\mathbf{U}_{0N} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 1:m) & \mathbf{U}_{n_0}^T(:, m+1:mL) \mathbf{U}_{2n}(1:m(L-1), :) \\ \mathbf{U}_{n_0}^T(:, m+1:2m) & \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 2m+1:mL) \mathbf{U}_{2n}(1:m(L-2), :) \\ \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 2m+1:3m) & \mathbf{U}_{n_0}^T(:, 3m+1:mL) \mathbf{U}_{2n}(1:m(L-3), :) \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{U}_{n_0}^T(:, m(L-1)+1:mL) & \mathbf{0}_{n_0 \times 2n} \end{bmatrix}, \quad (5.70)$$

onde \mathbf{U}_{0T} e \mathbf{U}_{0N} possuem dimensões, respectivamente, iguais a $Ln_0 \times r$ e $Ln_0 \times (m + 2n)$, onde $n_0 = mL - 2n$.

Denotando o lado direito da equação (5.64) por $\mathbf{U}_{n_0D} = \mathbf{U}_{n_0}^T \mathbf{R}_{yg} \mathbf{R}_{gg}^{-1}$, o cálculo de \mathbf{U}_{0T} é realizado impondo a mesma partição descrita pela equação (5.69), isto é,

$$\mathbf{U}_{0T} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{n_0D}(:, 1:r) \\ \mathbf{U}_{n_0D}(:, r+1:2r) \\ \mathbf{U}_{n_0D}(:, 2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{n_0D}(:, r(L-1)+1:rL) \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

As matrizes \mathbf{B} e \mathbf{D} são calculadas através da solução tipo LS da equação (5.68), como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_{0N}^+ \mathbf{U}_{0T}, \quad (5.72)$$

onde as matrizes \mathbf{U}_{0N} e \mathbf{U}_{0T} são calculadas através das equações (5.70) e (5.71). As primeiras m linhas de $\mathbf{U}_{0N}^+ \mathbf{U}_{0T}$ representam a matriz \mathbf{D} e as últimas $2n$ linhas produzem a matriz \mathbf{B} .

5.6.2 Cálculo dos Resíduos Modais

O cálculo dos resíduos modais para o caso MIMO é realizado aplicando-se m vezes o procedimento descrito na seção 5.5.1 obtendo-se m matrizes $\mathbf{B}^{(1)}$ $\mathbf{B}^{(2)}$... $\mathbf{B}^{(m)}$ de dimensão $2n \times r$ associadas com as r entradas e uma única saída. Aplicando-se a transformação de similaridade $\mathbf{T} = \mathbf{O}_{L(1)}^+ \mathbf{A}_{L(1)}$ sobre cada matriz $\mathbf{B}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, como apresentado na seção 3.4.2, obtém-se o seguinte,

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}^{(i)} = \begin{bmatrix} \rho_{i1(1)} & \rho_{i2(1)} & \cdots & \rho_{ir(1)} \\ \rho_{i1(2)} & \rho_{i2(2)} & \cdots & \rho_{ir(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i1(2n)} & \rho_{i2(2n)} & \cdots & \rho_{ir(2n)} \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Repetindo-se este procedimento para todas as matrizes $\mathbf{B}^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ calcula-se todos os resíduos modais do sistema para o caso MIMO como,

$$r_{ij(l)} = \rho_{ij(l)} / z_l, \quad (5.74)$$

com $l = 1, \dots, 2n$.

Capítulo 6

EXEMPLOS E APLICAÇÕES

6.1 Introdução

Este capítulo apresenta alguns resultados correspondentes à aplicação dos algoritmos de identificação modal desenvolvidos neste trabalho. Como exemplo, utilizam-se os dados simulados de um sistema massa mola amortecedor de três graus de liberdade cujas FRI's são conhecidas. É bastante comum em identificação modal adicionar um sinal Gaussiano de média zero aos dados gerados por simulação numérica para verificar o desempenho dos algoritmos de identificação. Nestes exemplos, o ruído aleatório é qualificado em termos da relação ruído/sinal (NSR), definida através da relação entre os valores RMS do ruído e do sinal livre de ruído. Todos os exemplos baseados em simulação numérica são desenvolvidos para as metodologias SISO e MIMO (ou multivariável) e para pequenos e grandes fatores de amortecimento. Além disso, para demonstrar a aplicação destes algoritmos em dados reais, apresenta-se um procedimento de identificação modal usando dados experimentais obtidos de um escapamento automotivo e de uma treliça espacial.

Nos exemplos apresentados neste capítulo são usadas as seguintes notações:

Poly LS – Método *Polyreference* tipo LS.

Poly TLS – Método *Polyreference* tipo TLS.

AVMC – Método baseado nos Autovetores da Matriz de Covariância.

ESPRIT TLS – Algoritmo ESPRIT TLS.

ARX-SISO – Método ARX implementado via metodologia SISO.

ARX-MIMO – Método ARX implementado via metodologia MIMO.

MSIO – Métodos de subespaço para dados de entrada/saída.

6.2 Exemplos de Simulação Numérica

Nesta seção apresentam-se alguns exemplos de aplicação dos métodos de identificação modal para dados das FRI's e de entrada/saída obtidos através de simulações numéricas do seguinte sistema mecânico,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (6.1)$$

onde as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são adotadas como,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1100 & -100 & 0 \\ -100 & 1100 & -1000 \\ 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix},$$

para pequenos amortecimentos e

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 50 & -10 & 0 \\ -10 & 40 & -30 \\ 0 & -30 & 50 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1100 & -100 & 0 \\ -100 & 1100 & -1000 \\ 0 & -1000 & 2000 \end{bmatrix},$$

para grandes amortecimentos.

Os fatores de amortecimentos para os casos de pequenos e grandes amortecimentos são apresentados na tabela 6.1.

Pequenos amortecimentos	Grandes Amortecimentos
$\xi_1 = 0.0030$	$\xi_1 = 0.1054$
$\xi_2 = 0.0047$	$\xi_2 = 0.2434$
$\xi_3 = 0.0080$	$\xi_3 = 0.2300$

Tabela 6.1- Fatores de Amortecimento

6.2.1 Identificação Usando Dados das FRI's

Esta seção apresenta quatro exemplos de identificação de parâmetros modais para dados do tipo FRI's.

Exemplo 1: Pequenos Amortecimentos - SISO

Neste exemplo toma-se $N_p = 750$ amostras da FRI h_{31} correspondente ao sistema representado através da equação (6.1), usando um intervalo de discretização $\Delta t = 0.125$ seg. Os pólos e os resíduos exatos de h_{31} para pequenos amortecimentos são mostrados na tabela 6.2 .

Pólos	Resíduos $/(10e - 003)$
$\lambda_1 = -0.0196 + 6.6533i$	$r_{31(1)} = -0.0031 - 0.5114i$
$\lambda_2 = -0.0496 + 10.5300i$	$r_{31(2)} = -0.0047 - 0.4629i$
$\lambda_3 = -0.1307 + 16.2737i$	$r_{31(3)} = -0.0016 - 0.0905i$

Tabela 6.2 – Pólos e Resíduos Exatos de h_{31} para Pequenos Amortecimentos

Um sinal aleatório Gaussiano de média zero com amplitude igual a 0.0001 é somado à h_{31} produzindo uma relação ruído/sinal de aproximadamente $NSR=0.25$. O número de amostras das FRI's, o intervalo de discretização, os valores das constantes L e N adotadas para a construção da matriz Hankel \mathbf{H} , a dimensão da matriz de Hankel \mathbf{H} e a relação ruído/sinal NSR associados a cada exemplo estão descritos na parte inferior das tabelas a seguir. Neste exemplo adota-se $L = 20$ e $N=730$.

A ordem mínima do modelo é adotada como $2n=6$ com base na inspeção dos valores singulares mais significativos da matriz Hankel \mathbf{H} , de dimensão 21×730 , apresentados na figura 6.1. Em seguida aplicam-se os métodos de identificação cujos resultados são apresentados nas tabelas 6.3 e 6.4. Os métodos *Polyreference* LS e *Polyreference* TLS possuem pólos computacionais, no entanto, nos exemplos apresentam-se apenas os pólos e resíduos associados aos modos reais do sistema. Os resíduos $r_{31(t)}$ são calculados usando a decomposição da matriz Hankel \mathbf{H} em matrizes de Vandermonde, de acordo com a metodologia apresentada na seção 3.4.1.

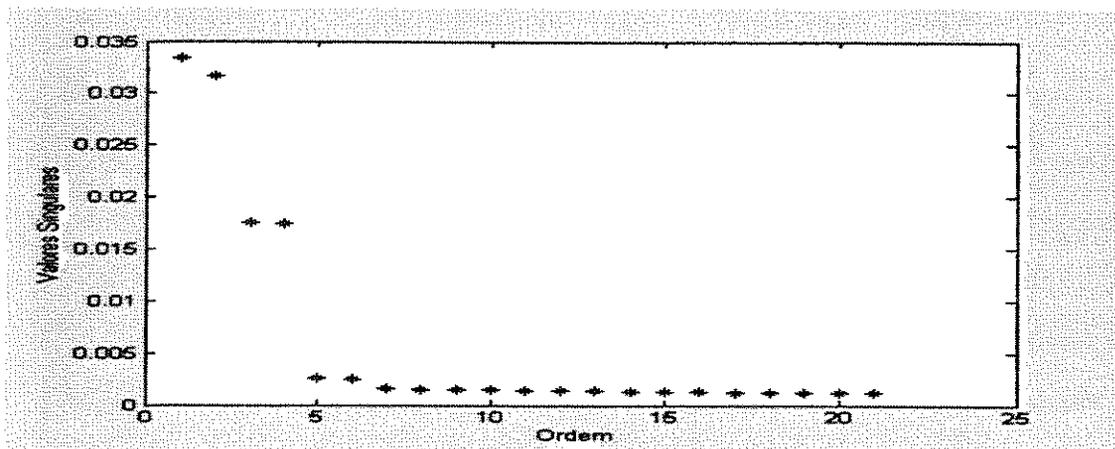


Figura 6.1 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel \mathbf{H}

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
-0.0270 + 6.6548 i	-0.0198 + 6.6540 i
-0.0782 + 10.5366 i	-0.0524 + 10.5374 i
-0.7726 + 16.1958 i	-0.1196 + 16.0227 i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
-0.0195 + 6.6538 i	-0.0195 + 6.6539 i
-0.0501 + 10.5366 i	-0.0501 + 10.5366 i
-0.1216 + 16.0226 i	-0.1196 + 16.0227 i
$N_p = 750, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=20, \quad N=730, \quad H_{21 \times 730}, \quad NSR=0.25$	

Tabela 6.3 – Pólos Identificados

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
-0.0219 - 0.5933 i	-0.0132 - 0.5176 i
0.0429 + 0.5689 i	0.0434 + 0.4753 i
0.0083 - 0.1211 i	0.0589 - 0.0138 i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
-0.0104 - 0.5141 i	-0.0101 - 0.5138 i
0.0397 - 0.4658 i	0.0412 - 0.4661 i
0.0349 - 0.0078 i	0.0321 - 0.0069 i
$N_p = 750, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=20, \quad N=730, \quad H_{21 \times 730}, \quad NSR=0.25$	

Tabela 6.4 – Resíduos $r_{31(t)}$ Identificados

Exemplo 2: Pequenos Amortecimentos – Caso Multivariável

Neste exemplo toma-se $N_p = 450$ amostras das FRI's h_{11} , h_{21} , h_{31} , h_{23} e h_{33} obtidas do sistema mecânico representado através da equação (6.1) usando um intervalo de discretização igual a $\Delta t = 0.125$ seg. A matriz $Y(k)$ dos parâmetros de Markov, descrita através da equação (3.7), é dada por,

$$Y(k) = \begin{bmatrix} h_{11}(k) & h_{13}(k) \\ h_{21}(k) & h_{23}(k) \\ h_{31}(k) & h_{33}(k) \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

onde o número de entradas $r=2$ e o número de saídas $m=3$. Um sinal aleatório Gaussiano de média zero com amplitude igual a 0.0003 é somado as FRI's produzindo uma relação ruído/sinal média de aproximadamente $NSR=0.35$.

A ordem mínima do modelo é adotada como $2n=6$ por inspeção dos valores singulares mais significativos da matriz Hankel H , de dimensão 33×880 , construída usando $L=10$ e $N=440$, mostrados na figura 6.2. As tabelas 6.5 e 6.6 mostram as estimativas dos pólos e apenas do resíduo $r_{31(l)}$.

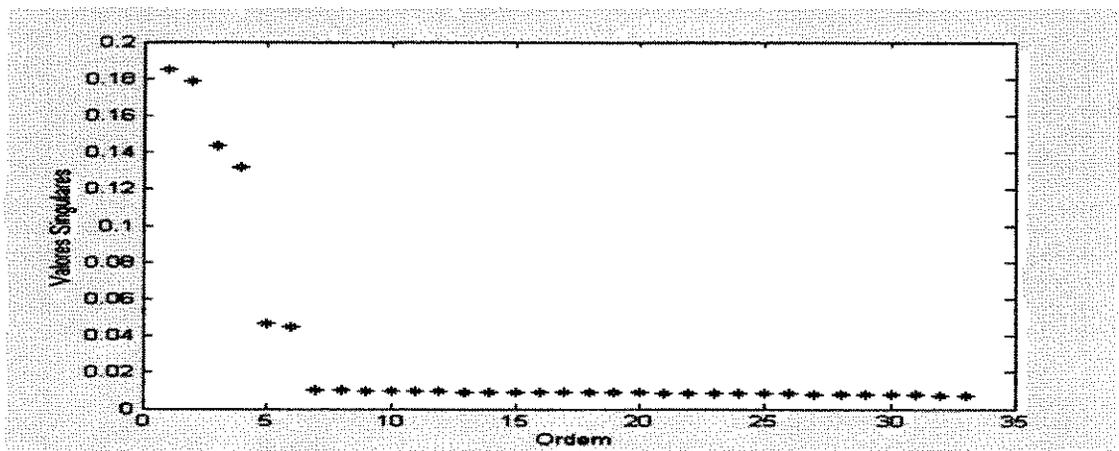


Figura 6.2 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel H

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
-0.0265 + 6.6550 i	-0.0195 + 6.6517 i
-0.0597 +10.7390 i	-0.0489 +10.5291 i
-0.2507 +16.6842 i	-0.1295 -16.2755i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
-0.0198 + 6.6517 i	-0.0198 + 6.6517 i
-0.0483 +10.5293 i	-0.0483 +10.5293 i
-0.1354 +16.2777 i	-0.1352 +16.2777i
$N_p = 450, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=10, \quad N=440, \quad H_{33 \times 880}, \quad NSR=0.35$	

Tabela 6.5 – Pólos Identificados

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
0.0032 - 0.5428 i	0.0049 - 0.5081 i
0.0214 + 0.4357 i	0.0196 + 0.4139 i
0.0487 - 0.1142 i	0.0436 - 0.1098 i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
0.0045 - 0.5106 i	0.0025 - 0.5105 i
0.0202 + 0.4110 i	0.0157 + 0.4111 i
0.0422 - 0.1100 i	0.0295 - 0.1102 i
$N_p = 450, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=10, \quad N=440, \quad H_{33 \times 880}, \quad NSR=0.35$	

Tabela 6.6 – Resíduos $r_{31(l)}$ Identificados

Exemplo 3: Grandes Amortecimentos - SISO

Como no exemplo 1 toma-se $N_p = 750$ amostras da FRI h_{31} usando um intervalo de discretização igual a $\Delta t = 0.150$ seg. Os pólos e resíduos exatos de h_{31} para grandes amortecimentos são mostrados na tabela 6.7.

Pólos	Resíduos $\cdot (10e-003)$
$\lambda_1 = -0.7026 + 6.6302i$	$r_{31(1)} = 0.1512 - 0.5544i$
$\lambda_2 = -2.5634 + 10.2155i$	$r_{31(2)} = -0.2895 - 0.5154i$
$\lambda_3 = -3.7340 + 15.8016i$	$r_{31(3)} = 0.1382 - 0.0930i$

Tabela 6.7 – Pólos e Resíduos Exatos de h_{31} para Grandes Amortecimentos

Um sinal aleatório Gaussiano de média zero com amplitude igual a 0.00004 é somado à h_{31} produzindo uma relação ruído/sinal média de aproximadamente $NSR=0.15$. A ordem mínima do modelo é adotada como $2n=6$ por inspeção dos valores singulares mais significativos da matriz Hankel \mathbf{H} , de dimensão 21×730 , mostrados na figura 6.3, construída usando $L=20$ e $N=730$. Os pólos e resíduos estimados de h_{31} são apresentados nas tabelas 6.8 e 6.9.

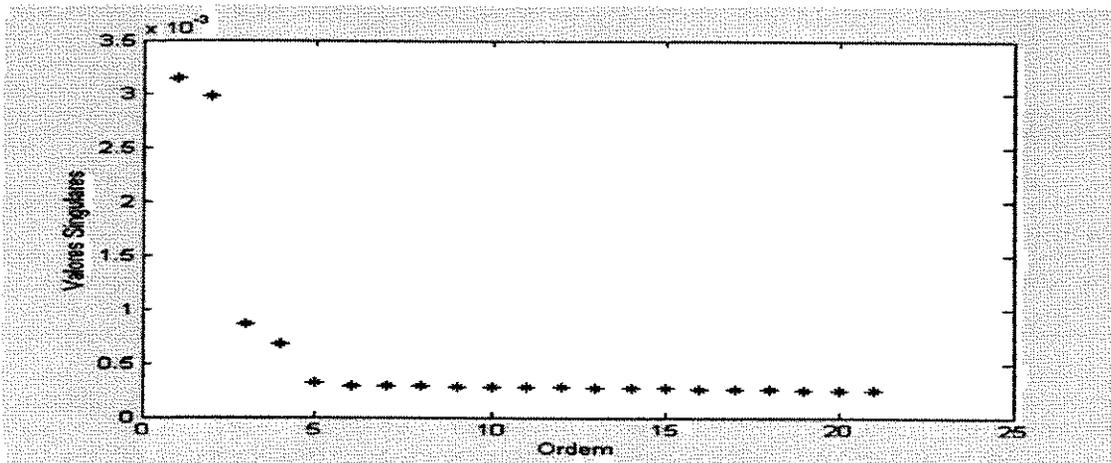


Figura 6.3 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel \mathbf{H}

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
-0.7169 - 6.7101i	-0.7185 - 6.7038i
-1.3278 -11.2257i	-1.6965 -11.2319i
-1.1499 -15.4702	-0.4210 -17.4686i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
-0.7237 - 6.6710i	-0.7225 - 6.6712i
-2.6618 -10.7536i	-2.6475 -10.7521i
-0.2397 -19.9651i	-0.1545 -19.9477i
$N_p = 750, \quad \Delta t = 0.150, \quad L=20, \quad N=730, \quad H_{21 \times 730}, \quad NSR=0.15$	

Tabela 6.8 – Pólos Identificados

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
0.0424 - 0.5493i	0.0645 - 0.5559i
-0.0348 + 0.3197i	-0.0511 + 0.4112i
0.0192 - 0.0359i	0.0009 - 0.0027i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
-0.1179 + 0.6049i	-0.1056 - 0.6016i
0.1253 - 0.5866i	0.1263 + 0.5881i
-0.0086 - 0.0025i	-0.0050 - 0.0020i
$N_p = 750, \quad \Delta t = 0.150, \quad L=20, \quad N=730, \quad H_{21 \times 730}, \quad NSR=0.15$	

Tabela 6.9 – Resíduos $r_{31(t)}$ Identificados

Exemplo 4: Grandes Amortecimentos - MIMO

Como no exemplo 2 toma-se $N_p = 450$ amostras das FRI's h_{11} , h_{21} , h_{31} , h_{23} e h_{33} usando um intervalo de discretização igual a $\Delta t = 0.150$ seg. Um sinal aleatório Gaussiano de média zero com amplitude igual a 0.00004 é somado às FRI's produzindo uma relação ruído/sinal média de aproximadamente $NSR=0.25$.

A ordem mínima do modelo é adotada como $2n=6$ por inspeção dos valores singulares mais significativos da matriz Hankel \mathbf{H} mostrados na figura 6.4. As tabelas 6.10 e 6.11 mostram, respectivamente, as estimativas dos pólos e do resíduo $r_{31(l)}$.

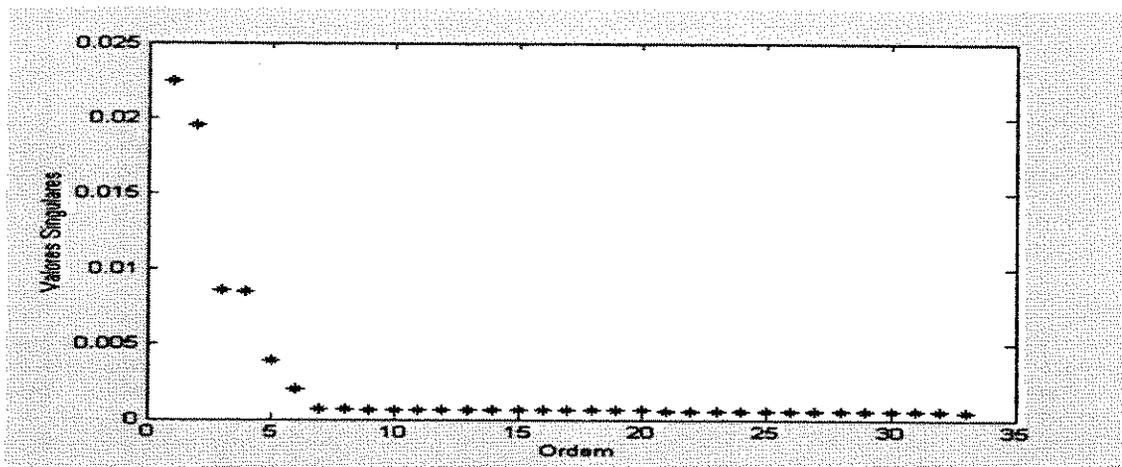


Figura 6.4 – Os Valores Singulares da Matriz Hankel \mathbf{H}

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
-0.7146 - 6.6328i	-0.7115 - 6.6304i
-2.7100 -10.2400i	-2.5606 -10.1978i
-1.8035 -15.4083i	-3.5584 -15.8188i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
-0.7096 - 6.6224i	-0.7092 - 6.6225i
-2.5621 -10.1977i	-2.5606 -10.1978i
-3.5700 -15.8173i	-3.5584 -15.8188i
$N_p = 450, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=10, \quad N=440, \quad H_{33 \times 880}, \quad NSR=0.25$	

Tabela 6.10 – Pólos Identificados

<i>Poly LS</i>	<i>Poly TLS</i>
0.1705 - 0.5928i	0.1773 - 0.5958i
-0.2371 + 0.5477i	-0.2699 + 0.5678i
0.0626 - 0.0119i	0.0851 - 0.0686i
<i>AVMC</i>	<i>ESPRIT TLS</i>
0.1745 - 0.5785i	0.1731 - 0.5933i
-0.2782 + 0.5264i	-0.2166 + 0.4594i
0.1003 - 0.0596i	0.2353 - 0.0471i
$N_p = 450, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=10, \quad N=440, \quad H_{33 \times 880}, \quad NSR=0.25$	

Tabela 6.11 – Resíduos $r_{31(t)}$ Identificados

6.2.2 Identificação Usando Dados de Entrada e Saída

Esta seção apresenta quatro exemplos da identificação de parâmetros modais para dados do tipo entrada/saída cuja entrada é obtida da simulação numérica do sistema representado através da equação (6.1) com entrada do tipo Gaussiana de media zero.

Exemplo 5: Pequenos amortecimentos - SISO

Neste exemplo calcula-se $N_p = 550$ amostras da resposta y_3 do sistema representado pela equação (6.1) através da convolução discreta entre a FRI h_{13} e g_1 como,

$$y_3(k) = \sum_{s=0}^{N_p} h_{13}(s)g_1(k-s), \quad (6.3)$$

adotando-se a amplitude da excitação aleatória g_1 igual a 5. Adiciona-se um sinal Gaussiano de média zero com amplitude de 0.01 à saída y_3 resultando numa razão ruído/sinal igual a aproximadamente $NSR=0.20$.

Adotando-se $L=20$ e $N=530$, a ordem mínima do modelo é identificada como $2n=6$ através da inspeção dos valores singulares mais importantes de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$, de dimensão igual a 20×20 , conforme metodologia proposta na seção 5.3.2. A figura 6.5 mostra o logaritmo dos valores singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$. Os pólos e os resíduos modais $r_{13(l)}$ do sistema são calculados através do método ARX SISO e dos algoritmos de subespaço apresentados no capítulo 5 e são mostrados nas tabelas 6.12 e 6.13.

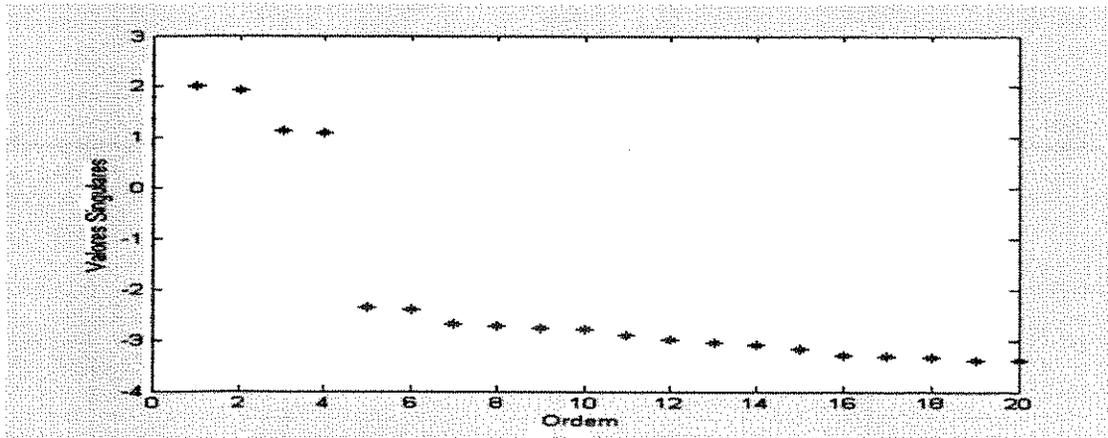


Figura 6.5 – Logaritmo dos Valores Singulares de $Y_H V_2$

<i>MSIO</i>	<i>ARX</i>
-0.0264 - 6.6471 i	-0.0391 - 6.6516 i
-0.0513 -10.5290 i	-0.0615 -10.5280 i
-0.1524 -16.0025 i	-0.8863 -16.4251 i
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=20, \quad N=530, \quad (Y_H V_2)_{20 \times 20}, \quad NSR=0.20$	

Tabela 6.12 – Pólos Identificados

<i>MSIO</i>	<i>ARX</i>
-0.0050 - 0.5607 i	0.3070 - 0.9671 i
-0.0004 + 0.4762 i	-0.2305 + 0.8762 i
-0.0002 - 0.0840 i	-0.0671 - 0.1110 i
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=20, \quad N=530, \quad (Y_H V_2)_{20 \times 20}, \quad NSR=0.20$	

Tabela 6.13 – Resíduos Identificados

Exemplo 6: Pequenos amortecimentos - MIMO

Neste exemplo as $N_p = 550$ amostras das saídas y_1 , y_2 e y_3 são calculadas através das seguintes convoluções discretas,

$$\begin{aligned} y_1(k) &= \sum_{s=0}^{N_p} h_{11}(s)g_1(k-s) + \sum_{s=0}^{N_p} h_{13}(s)g_3(k-s) \\ y_2(k) &= \sum_{s=0}^{N_p} h_{21}(s)g_1(k-s) + \sum_{s=0}^{N_p} h_{23}(s)g_3(k-s), \\ y_3(k) &= \sum_{s=0}^{N_p} h_{31}(s)g_1(k-s) + \sum_{s=0}^{N_p} h_{33}(s)g_3(k-s) \end{aligned} \quad (6.4)$$

sendo as excitações g_1 e g_3 do tipo Gaussiana branca de média zero e amplitude igual a 5. Além disso, soma-se uma sinal Gaussiano de média zero e amplitude igual a 0.05 às saídas y_1 , y_2 e y_3 resultando uma relação ruído/sinal média igual a aproximadamente $NSR=0.20$.

Adotando $L=20$ e $N=530$ determina-se a ordem mínima do modelo como $2n=6$ através da inspeção dos valores singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$, de dimensão igual a 60×60 , como mostra a figura 6.6. Os pólos estimados através dos métodos de subespaço e ARX são mostrados na tabela 6.14. Os resíduos $r_{11(l)}$ e $r_{13(l)}$ calculados através dos métodos de subespaço são mostrados na tabela 6.15.

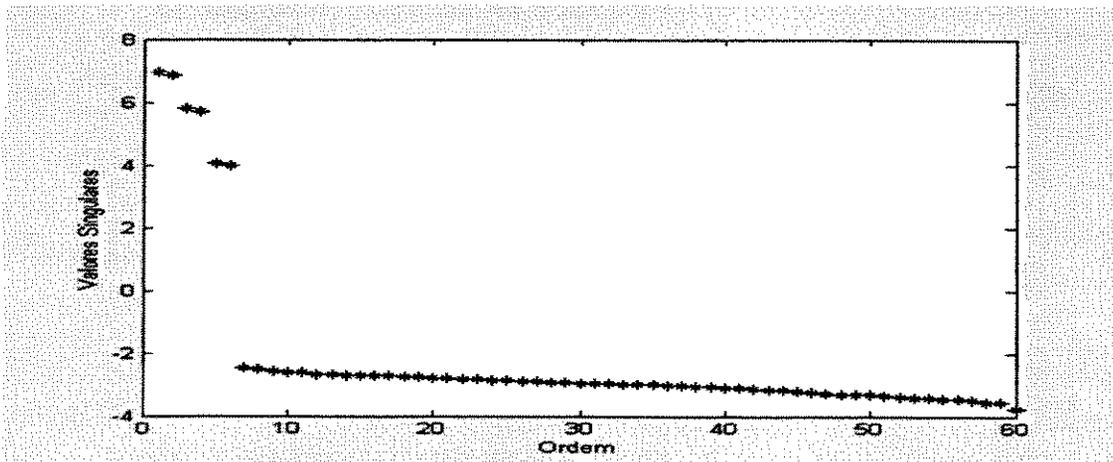


Figura 6.6 – Logaritmo dos Valores Singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$

<i>MSIO</i>			<i>ARX</i>		
-0.0197 - 6.6533i			-0.0221 - 6.6541i		
-0.0475 -10.5297i			-0.0646 -10.5316i		
-0.1330 -16.2743i			-0.1706 -16.4879i		
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=20,$			$N=530, \quad (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)_{60 \times 60}, \quad NSR=0.20$		

Tabela 6.14 – Pólos Identificados

\mathbf{r}_{11}			\mathbf{r}_{31}		
-0.0000 - 0.0001i			-0.1096 - 0.4125i		
0.0000 - 0.0047i			-0.0681 + 0.5038i		
-0.0000 - 0.0001i			-0.3743 - 0.6916i		
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.125, \quad L=20,$			$N=530, \quad (\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2)_{60 \times 60}, \quad NSR=0.20$		

Tabela 6.15 – Resíduos Identificados Através dos Métodos de Subespaços

Exemplo 7: Grandes amortecimentos - SISO

Este exemplo utiliza o mesmo procedimento de identificação que o exemplo 5 adotando-se uma relação ruído sinal de aproximadamente $NSR=0.10$. A ordem do sistema é identificada como $2n=6$ através da inspeção dos valores singulares de $\mathbf{Y}_H \mathbf{V}_2$ mostrados na figura 6.7. Os pólos e resíduos do sistema são apresentados nas tabelas 6.16 e 6.17.

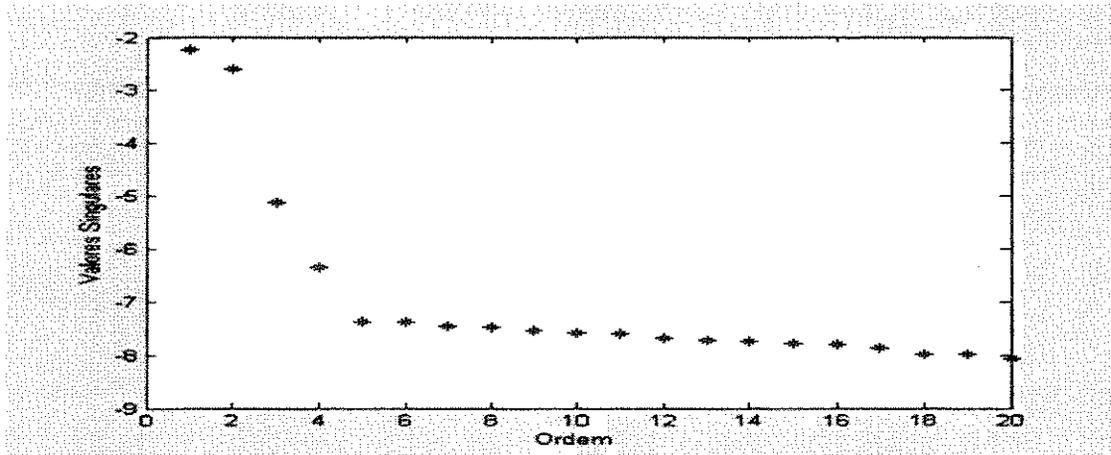


Figura 6.7 – Logaritmo dos Valores Singulares de $Y_H V_2$

<i>MSIO</i>	<i>ARX</i>
-0.7429 - 6.6544i	-0.7039 - 6.6563i
-2.6471 -10.9791i	-1.3122 -11.1968i
-0.2211 -16.6298i	-0.8651 -16.3857i
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.150, \quad L=20, \quad N=530, \quad (Y_H V_2)_{20 \times 20}, \quad NSR=0.10$	

Tabela 6.16 – Pólos Identificados

<i>MSIO</i>	<i>ARX</i>
0.1345 - 0.5990i	****
-0.0422 + 0.6077i	****
-0.0022 - 0.0091i	****
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.150, \quad L=20, \quad N=530, \quad (Y_H V_2)_{20 \times 20}, \quad NSR=0.10$	

Tabela 6.17 – Resíduos Identificados

Exemplo 8: Grandes amortecimentos - MIMO

Neste exemplo adota-se o mesmo procedimento do Exemplo 6, usando um nível de entrada igual a $0.0025 N$ e a relação ruído sinal $NSR=0.0613$. A ordem mínima do modelo é adotada como $2n=6$ através da inspeção dos valores singulares apresentados na figura 6.8. Os pólos e resíduos são apresentados nas tabelas 6.18 e 6.19.

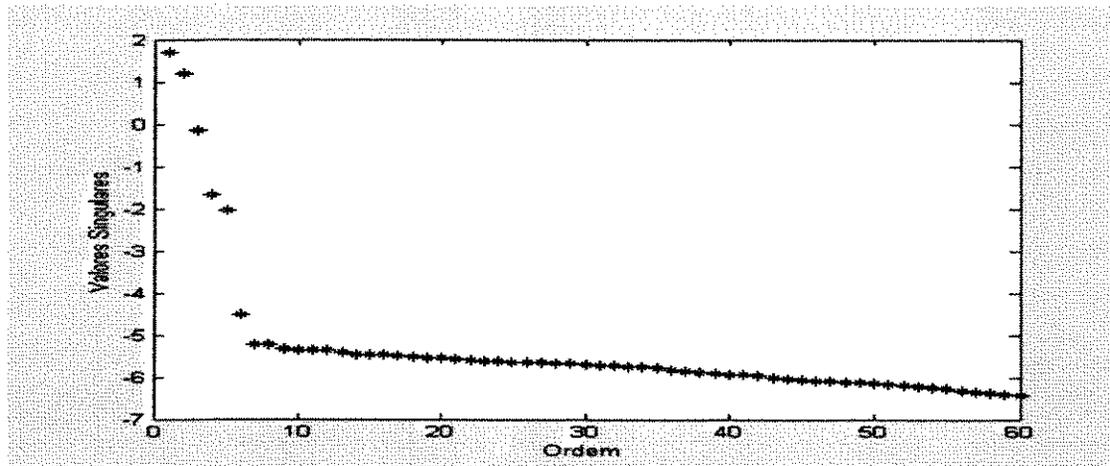


Figura 6.8 – Logaritmo dos Valores Singulares de $Y_H V_2$

<i>MSIO</i>	<i>ARX</i>
-0.7021 - 6.3427i	-0.7720 - 6.6297i
-2.5634 -10.2079i	-0.6504 -10.2210i
-3.7495 -15.7276i	-0.8267 -15.6509i
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.150, \quad L=20, \quad N=530, \quad (Y_H V_2)_{60 \times 60}, \quad NSR=0.06$	

Tabela 6.18 – Pólos Identificados

r_{11}	r_{31}
0.0001 - 0.0002i	0.1495 - 0.5296i
0.0002 - 0.0047i	-0.4952 + 0.4953i
-0.0004 - 0.0004i	0.3903 - 0.3554i
$N_p = 550, \quad \Delta t = 0.150, \quad L=20, \quad N=530, \quad (Y_H V_2)_{60 \times 60}, \quad NSR=0.06$	

Tabela 6.19 – Resíduos Identificados Através dos Métodos de Subespaços

6.2.3 Resultado da Simulação

Nesta seção procura-se comparar o desempenho de alguns métodos tradicionais de identificação modal como o *Polyreference* LS e o ARX aos métodos de subespaços desenvolvidos neste trabalho, sem querer, entretanto, eleger um método vencedor e sim procurando enfatizar as diferentes vantagens e dificuldades de cada um. Foram realizadas, cuidadosamente, várias simulações utilizando diferentes níveis de ruído. São apresentadas aqui, entretanto, e de maneira proposital, apenas aquelas correspondentes aos maiores níveis de ruído para os quais os métodos de subespaços ainda produzem boas estimativas dos parâmetros modais.

A comparação dos métodos mostra que todos eles fornecem estimativas razoáveis para as frequências naturais. Os métodos de subespaços, entretanto, produzem melhores estimativas dos fatores de amortecimento e dos resíduos modais. A vantagem dos métodos de subespaços está na maior precisão da identificação dos parâmetros modais associada a um custo computacional razoavelmente pequeno comparado com os métodos tradicionais utilizados em análise modal.

Nota-se ainda que a identificação da ordem do modelo, para dados na presença de ruído, através da inspeção dos valores singulares, é mais dificultada nos casos SISO, especialmente para grandes amortecimentos. Em geral, observa-se que quanto maior redundância da matriz Hankel dos dados, isto é, quanto maior for sua dimensão, melhor será a identificação da ordem do modelo e dos parâmetros modais obtida pelos métodos apresentados.

6.3 Análise Modal Experimental de um Escapamento Automotivo

Esta seção apresenta a aplicação da AME em dados das FRI's de um escapamento Walker visando a determinação de suas frequências naturais e seus modos próprios de vibração para a condição livre-livre.

6.3.1 Excitação, Resposta e Sistema de Aquisição

A excitação usada no teste foi do tipo impulsiva, obtida através de um martelo de impacto Brüel & Kjaer Type 8202, aplicada no ponto onde a peça é conectada ao motor em três direções mutuamente ortogonais vertical v , horizontal h e axial a . A aplicação dos pulsos nas direções vertical, horizontal e axial foi realizada não simultaneamente.

As respostas consistem das acelerações medidas nas direções vertical, horizontal e axial tomadas em 45 pontos ao longo do comprimento da peça usando um acelerômetro Brüel & Kjaer Type 4371.

O sistema de aquisição utilizado no teste foi o Order Tracking Analyser Type 2145 de dois canais, fabricado pela Brüel & Kjaer, configurado para apresentar 400 amostras dos sinais para uma faixa de frequência de 0 – 200 Hz. Este analisador espectral é comumente usado na área de acústica e fornece, em arquivo para o usuário, apenas os valores dos auto espectros e espectro cruzado dos sinais medidos em dois canais. As estimativas das FRF's são calculadas como,

$$H_{ij}(f) = \frac{S_{g_i y_j}(f)}{S_{g_i g_i}(f)}, \quad (6.5)$$

onde $H_{ij}(f)$, $S_{g_i y_j}(f)$ e $S_{g_i g_i}(f)$ denotam, respectivamente, uma particular FRF, o espectro cruzado da entrada e saída e auto espectro da saída. As estimativas das funções de coerência (FC) são calculadas como,

$$\gamma_{ij}^2(f) = \frac{|S_{g_i y_j}(f)|^2}{S_{g_i g_i}(f) S_{y_j y_j}(f)}, \quad (6.6)$$

onde $\gamma_{ij}^2(f)$ e $S_{y_j y_j}(f)$ denotam, respectivamente, uma particular FC e o auto espectro da saída. Algumas estimativas das FRF's e FC's são mostradas na figura (6.9).

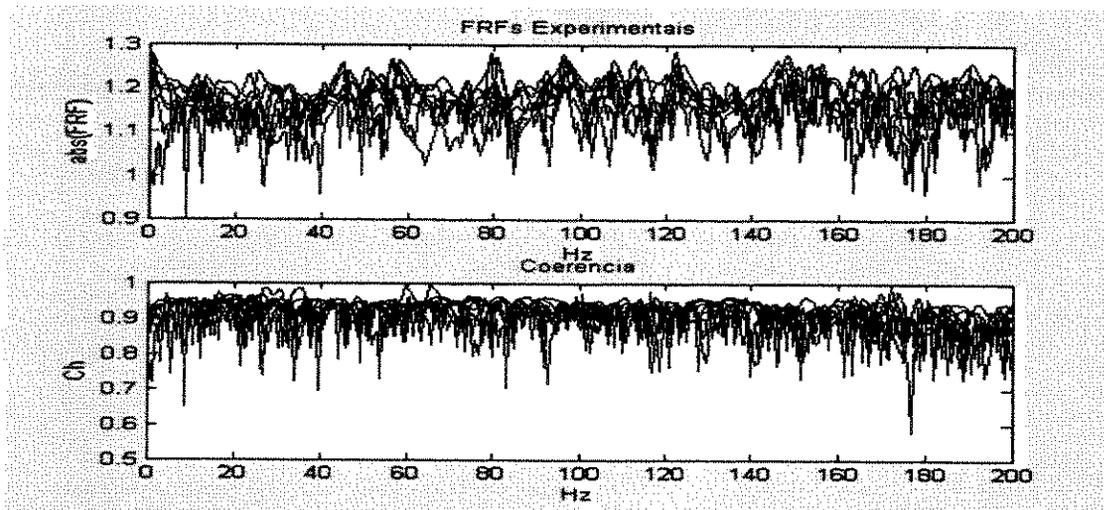


Figura 6.9 Estimativas de Algumas FRF's e FC's

As FRI's são calculadas através da transformada inversa de Fourier das FRF's. Neste procedimento utilizou-se um total de 218 FRI's com 512 amostras cada.

6.3.2 Identificação de Parâmetros Modais SISO

A determinação da ordem mínima do modelo é obtida por inspeção dos valores singulares da matriz de Hankel \mathbf{H} para $L=100$ e $N=412$. A figura 6.10 mostra os valores singulares de uma específica FRI e a figura 6.11 mostra a média dos valores singulares das 218 FRI's. Com base nestas figuras a ordem $2n$ do modelo é igual a 80. Entretanto, foram realizadas várias identificações dos parâmetros adotando-se a ordem $2n$ do modelo entre 40 e 80 e observou-se que os melhores ajustes das curvas das FRF's dos dados experimentais comparadas com as sintetizadas foram obtidos usando $2n=50$.

A figura 6.12 mostra algumas curvas das FRI's experimentais e sintetizadas através do método *Polyreference* LS adotando-se a ordem do modelo como $2n=50$ e a figura 6.13 mostra a média das FRF's experimentais e sintetizadas através do método *Polyreference* LS.

A figura 6.14 mostra algumas curvas das FRI's experimentais e as FRI's sintetizadas usando o método AVMC adotando a ordem do modelo como $2n=50$. A figura 6.15 mostra a média das FRF's experimentais e sintetizadas através do método AVMC.

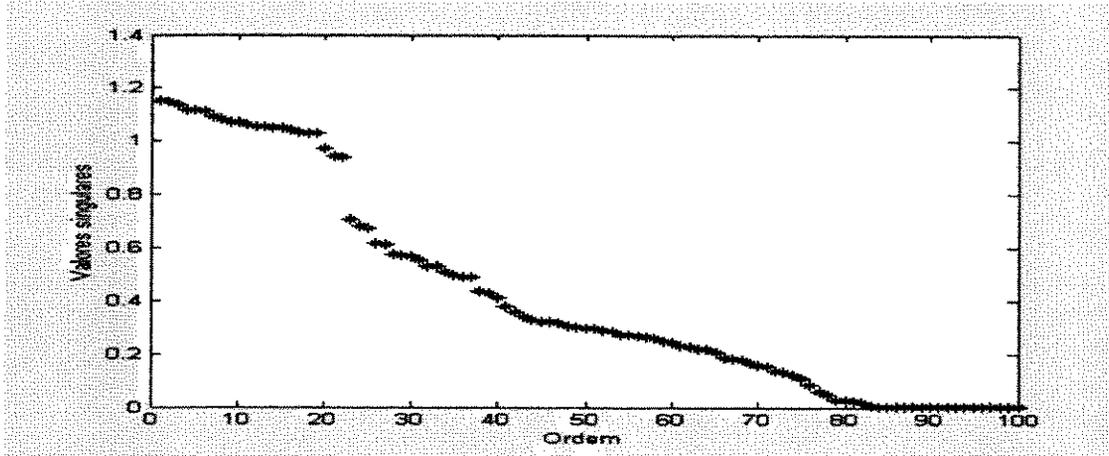


Figura 6.10 – Valores Singulares de H

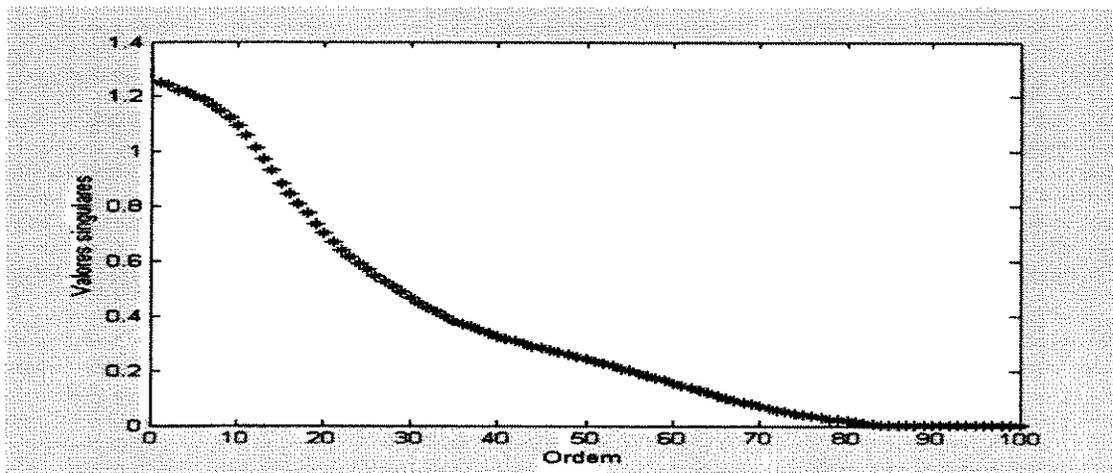


Figura 6.11 – Média dos Valores Singulares de H

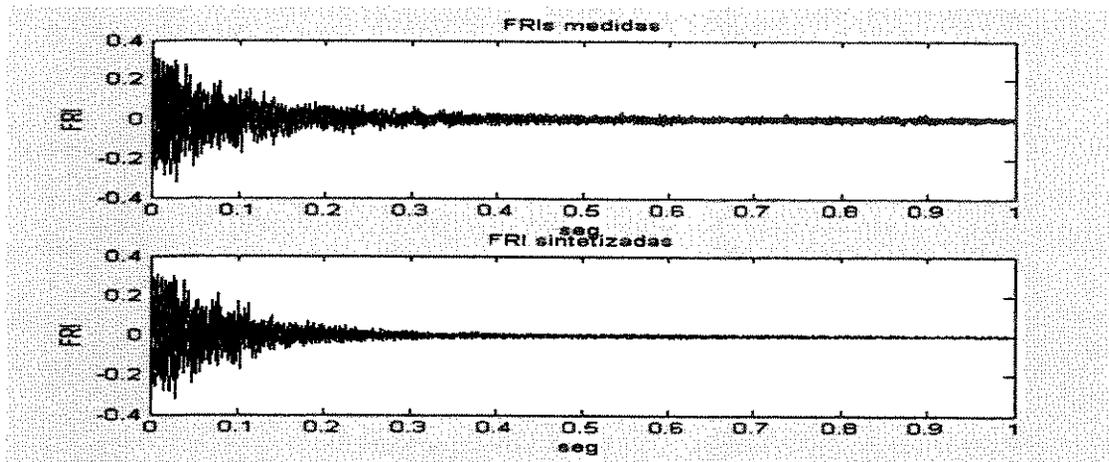


Figura 6.12 – FRI's Experimentais e Estimadas Através do Método *Polyreference* LS

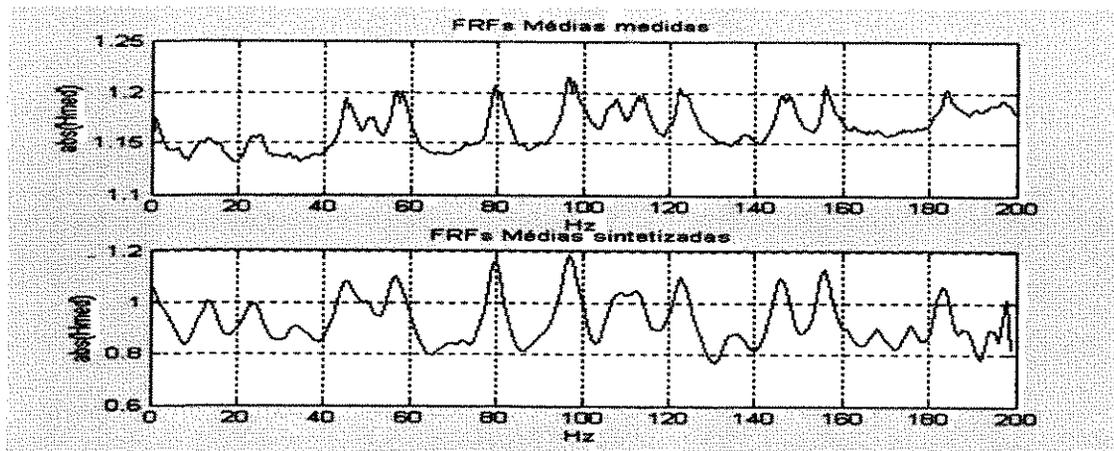


Figura 6.13 – Média das FRF's Experimentais e Estimadas Através do Método *Polyreference* LS

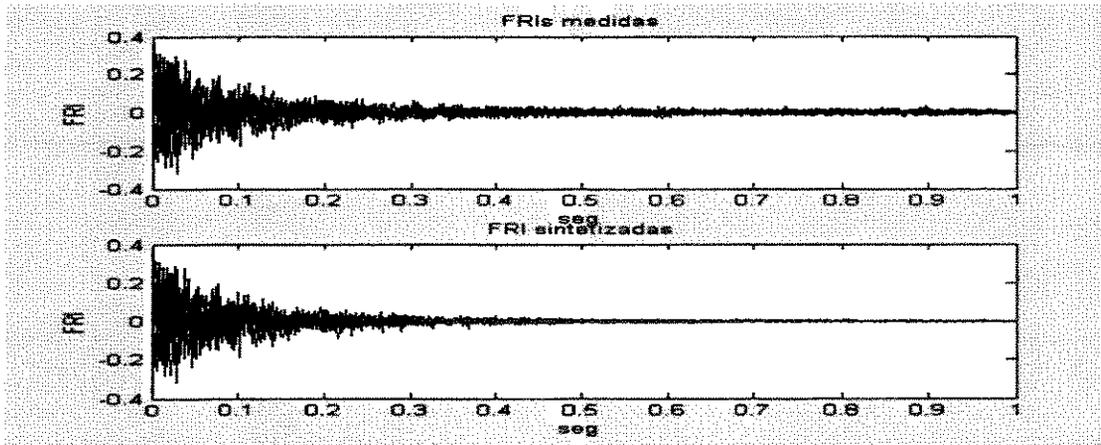


Figura 6.14 – FRI's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC

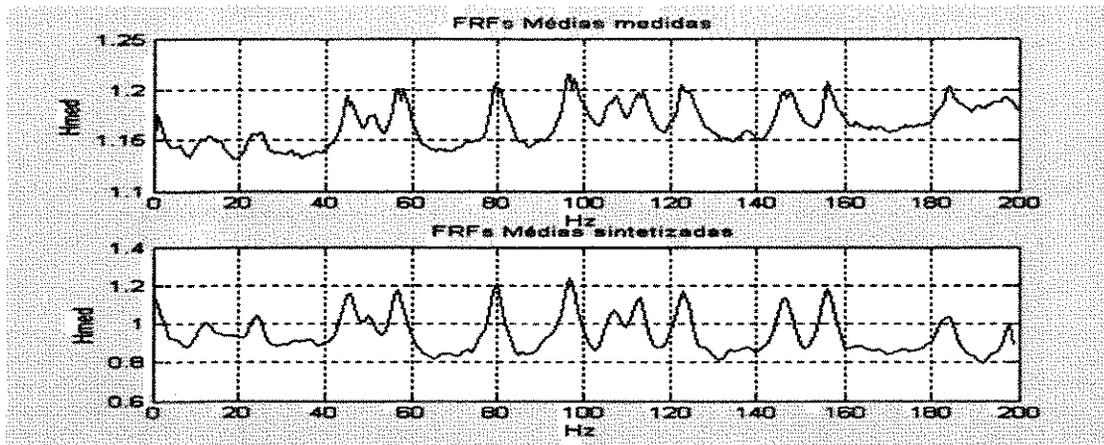


Figura 6.15 - Média das FRF's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC

6.3.3 Identificação de Parâmetros Modais Multivariável

No caso da identificação multivariável utiliza-se 30 FRI's relacionadas com as medidas de aceleração vertical, horizontal e axial correspondendo às excitações vertical, horizontal e axial. A matriz \mathbf{Y} dos parâmetros de Markov possui, portanto, dimensão igual a 30×3 . Adotando-se $L = 56$ e $N = 55$ a matriz de Hankel \mathbf{H} possui dimensão igual a 1710×165 .

A figura 6.16 mostra os 165 valores singulares de \mathbf{H} sugerindo o uso de $2n = 140$ como a ordem modelo. Entretanto, na prática verifica-se que o melhor valor para a ordem

do modelo é em torno de $2n=120$. As figuras 6.17 e 6.18 mostram, respectivamente, as FRI's e as médias das FRF's experimentais e sintetizadas através do método AVMC multivariável.

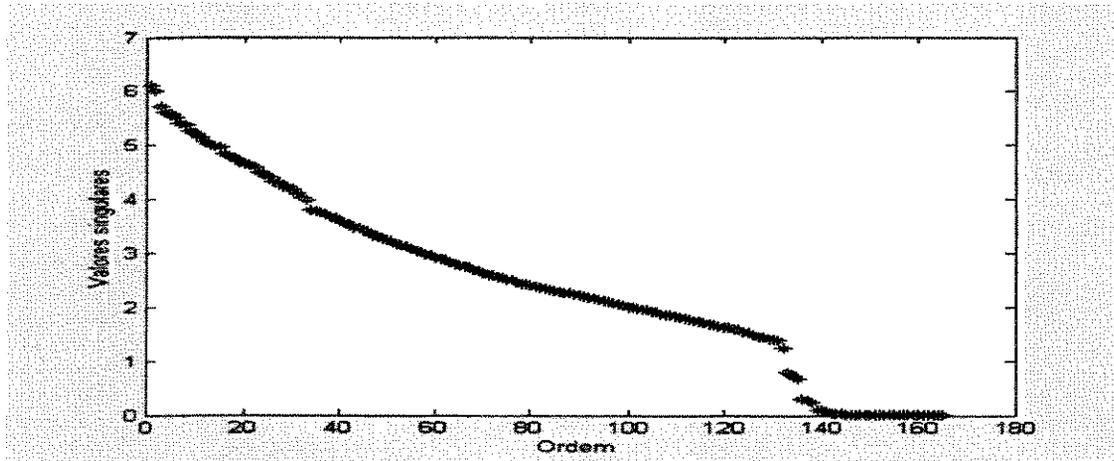


Figura 6.16 - Valores Singulares de H

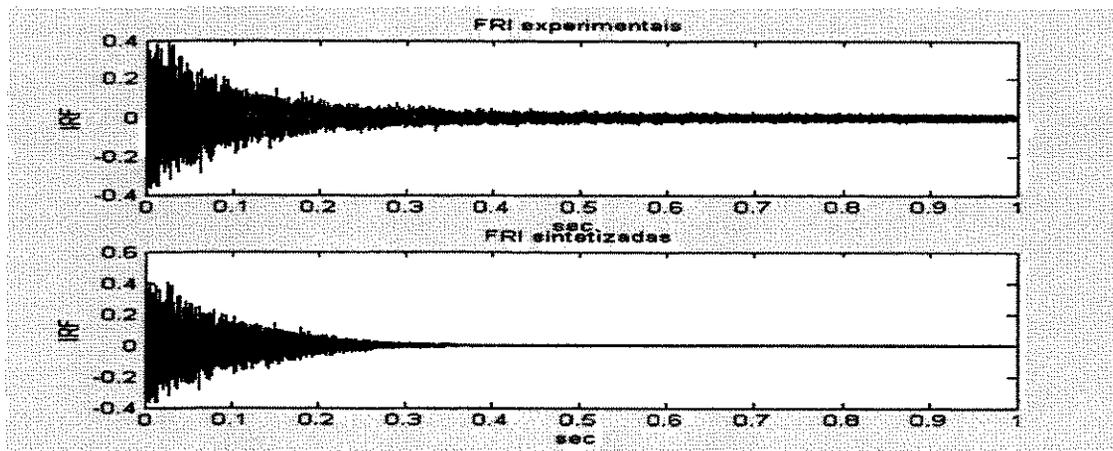


Figura 6.17 - FRI's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC

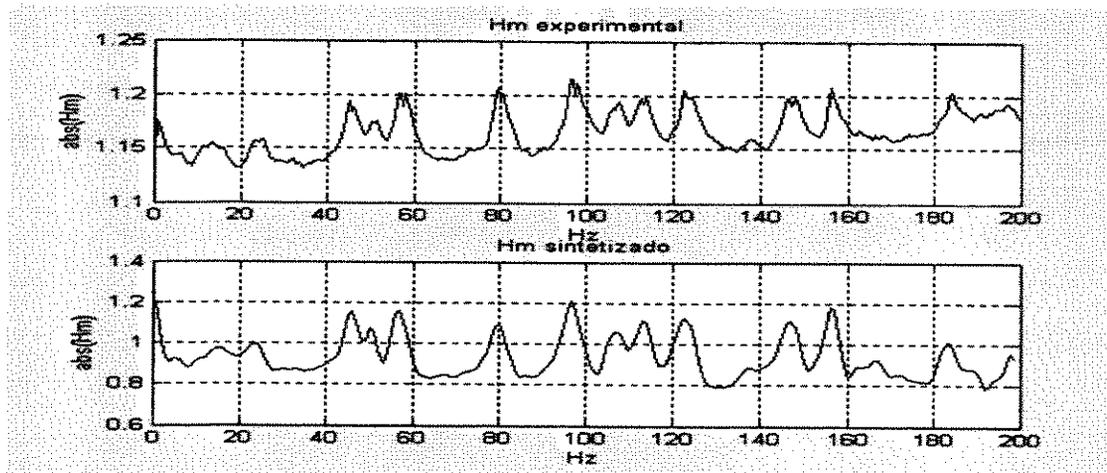


Figura 6.18 - Média das FRF's Experimentais e Estimadas Através do Método AVMC

6.3.4 Determinação dos Modos de Vibração

O objetivo deste procedimento consiste no cálculo das configurações modais associadas às frequências críticas identificadas da estrutura. O bom resultado das funções de coerência mostrados na figura 6.9 e a boa qualidade dos ajustes do modelo representadas nas figuras 6.15 e 6.18 motivaram o cálculo dos modos de vibração do escapamento.

As frequências críticas do sistema identificadas por inspeção nas figuras 6.13, 6.15 e 6.18 são apresentadas na tabela 6.20.

Frequências Naturais Hz
45.5
57.0
80.0
97.0
123.0
146.5
156.0

Tabela 6.20 - Frequências Naturais Identificadas

Os resíduos modais de cada FRI associados a cada frequência natural identificada são calculados de acordo com o método apresentado na seção 3.4.1 usando a decomposição de \mathbf{H} em matrizes de Vandermonde. Os modos de vibrar associados a cada frequência crítica são usando a relação,

$$r_{ij(l)} = \phi_{i(l)} \phi_{j(l)}. \quad (6.7)$$

As configurações modais reais de $\phi_{i(l)}$ são calculadas através da projeção dos modos complexos no eixo real do plano real – imaginário como,

$$\phi_{i(l)} = \text{abs}(\phi_{i(l)}) \sin(\text{angle}(\phi_{i(l)})). \quad (6.8)$$

As excitações impulsivas nas três direções (vertical, horizontal e axial) fornecem 9 modos reais de aceleração associados às três direções denotados por ϕ_{vv} , ϕ_{hv} , ϕ_{av} , ϕ_{vh} , ϕ_{hh} , ϕ_{ah} , ϕ_{va} , ϕ_{ha} e ϕ_{aa} tomados nos 45 pontos espacialmente discretizados ao longo do escapamento. As acelerações resultantes para cada frequência crítica em cada direção (vertical, horizontal e axial) são calculadas como,

$$\phi_V = \phi_{vv} + \phi_{vh} + \phi_{va}$$

$$\phi_H = \phi_{hv} + \phi_{hh} + \phi_{ha} . \quad (6.9)$$

$$\phi_A = \phi_{av} + \phi_{ah} + \phi_{aa}$$

Embora não se disponha de um desenho ilustrativo da geometria do sistema, apresenta-se nas figuras 6.19 a 6.25 um esquema tipo *baseline* para mostrar as deflexões modais relativas às frequências naturais identificadas.

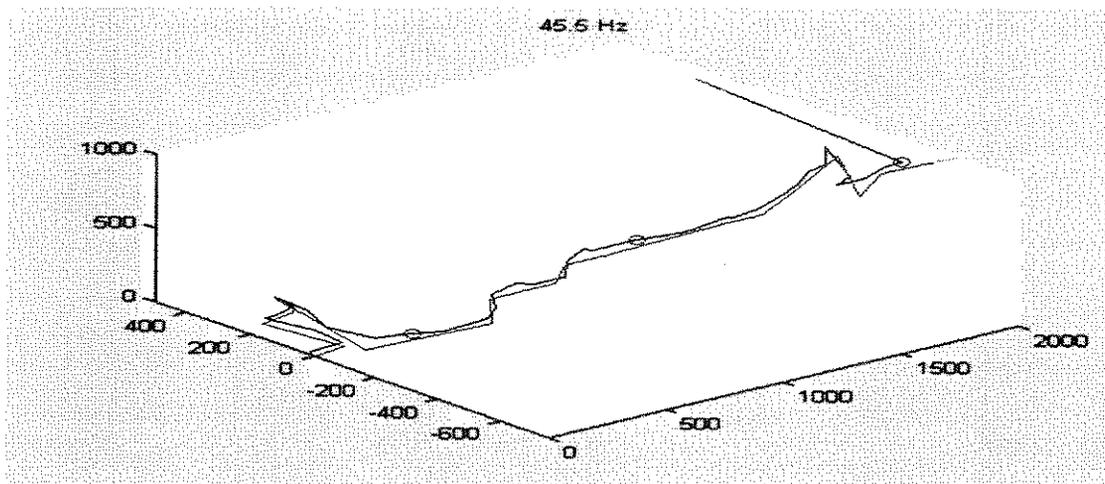


Figura 6.19 – Modo de Vibração associado a 45.5 Hz

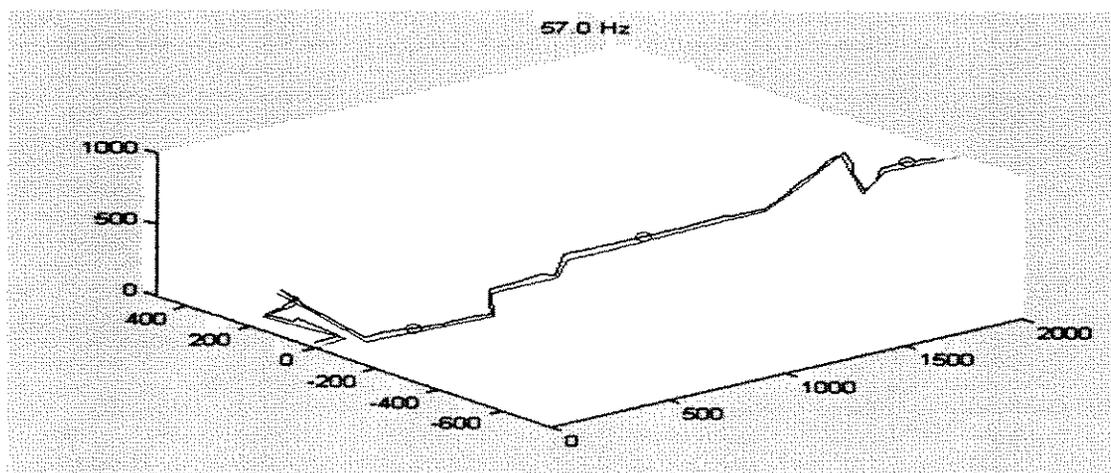


Figura 6.20 – Modo de Vibração associado a 57.0 Hz

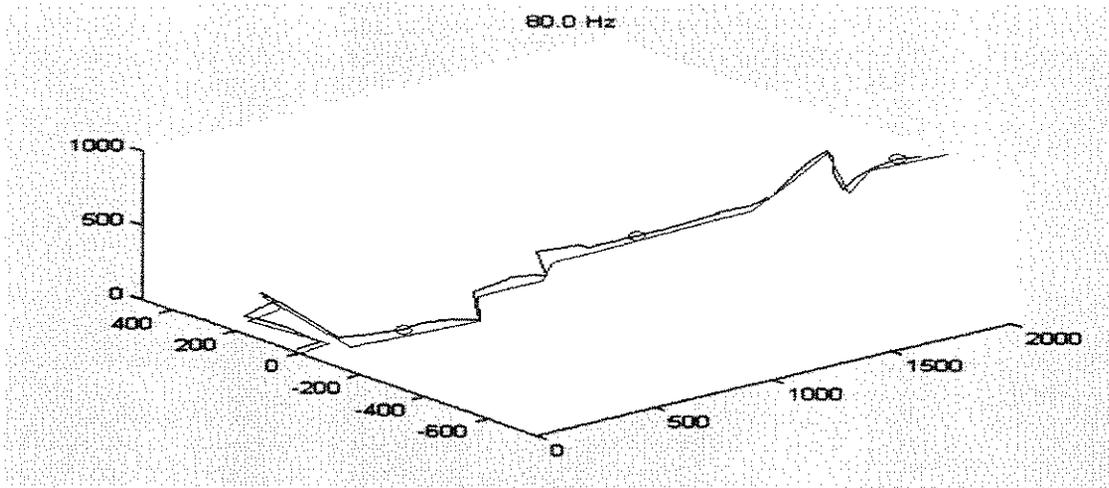


Figura 6.21 – Modo de Vibração associado a 80.0 Hz

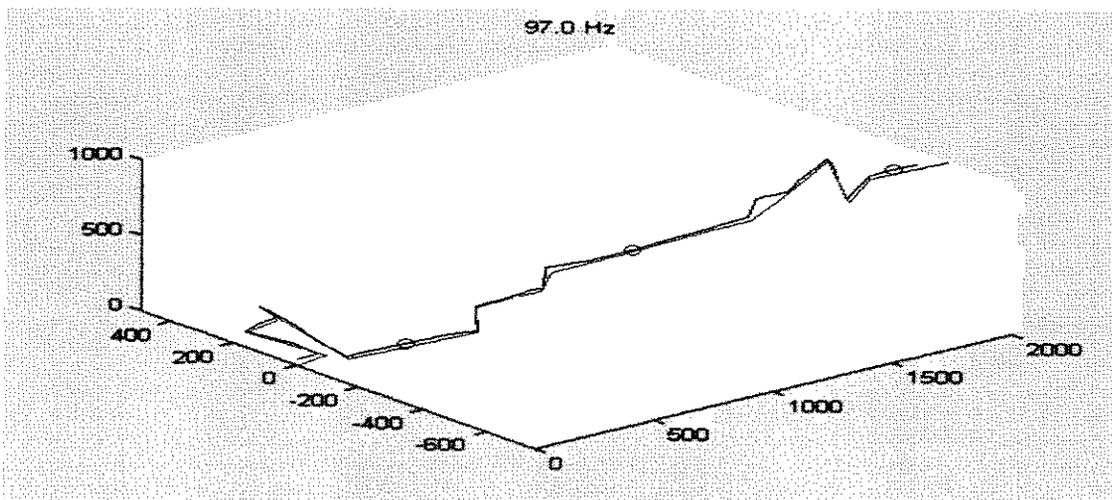


Figura 6.22 – Modo de Vibração associado a 97.0 Hz

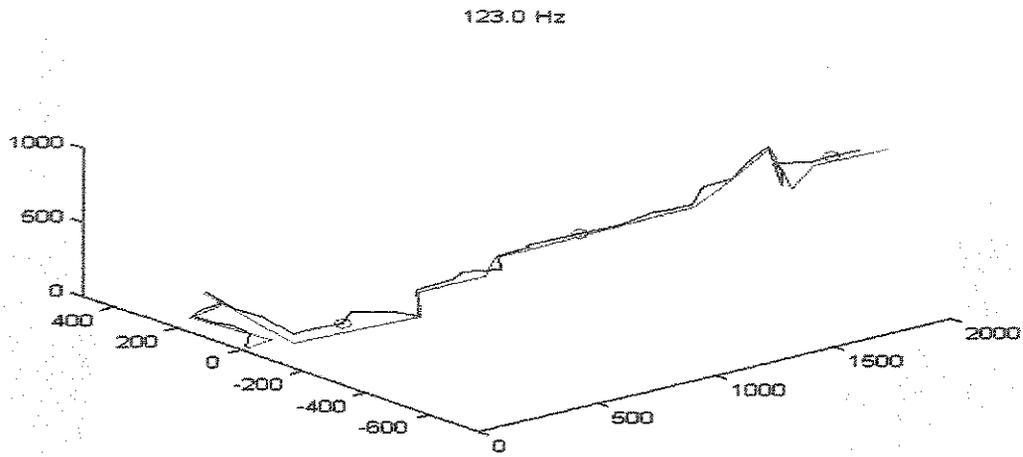


Figura 6.23 – Modo de Vibração associado a 123.0 Hz

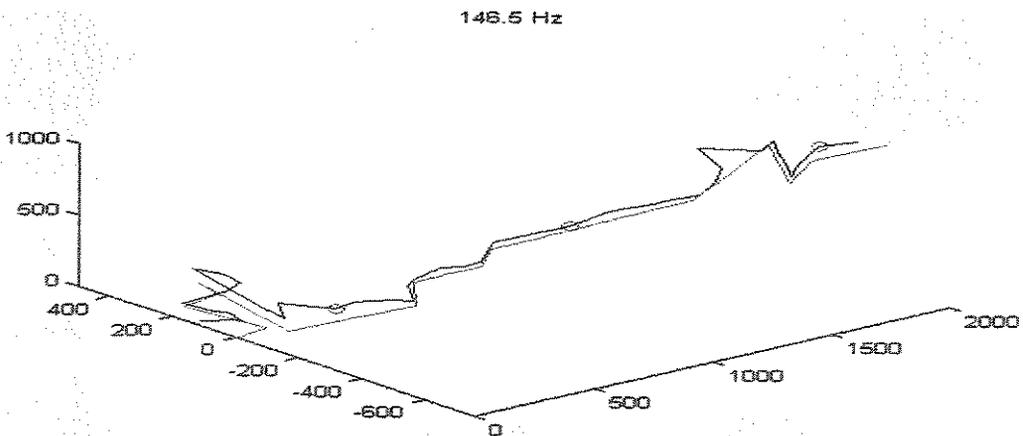


Figura 6.24 – Modo de Vibração associado a 146.5 Hz

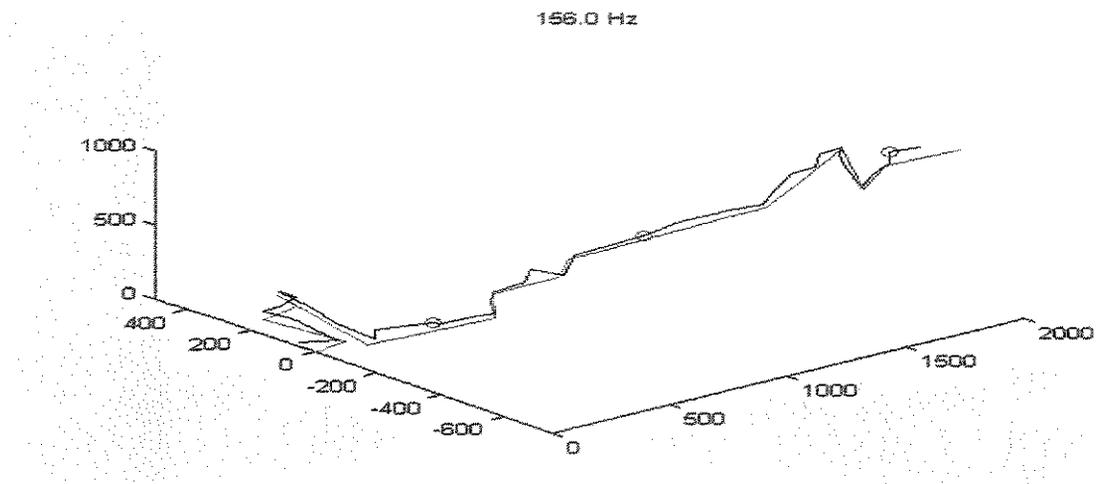


Figura 6.25 – Modo de Vibração associado a 156.0 Hz

6.4 Análise Modal Experimental MIMO para Dados de Entrada e Saída

Esta seção apresenta a aplicação da AME para dados de entrada e saída obtidos da treliça espacial mostrada na figura 6.26 para a condição livre – livre. Esta estrutura representa um modelo reduzido de uma asa de avião.

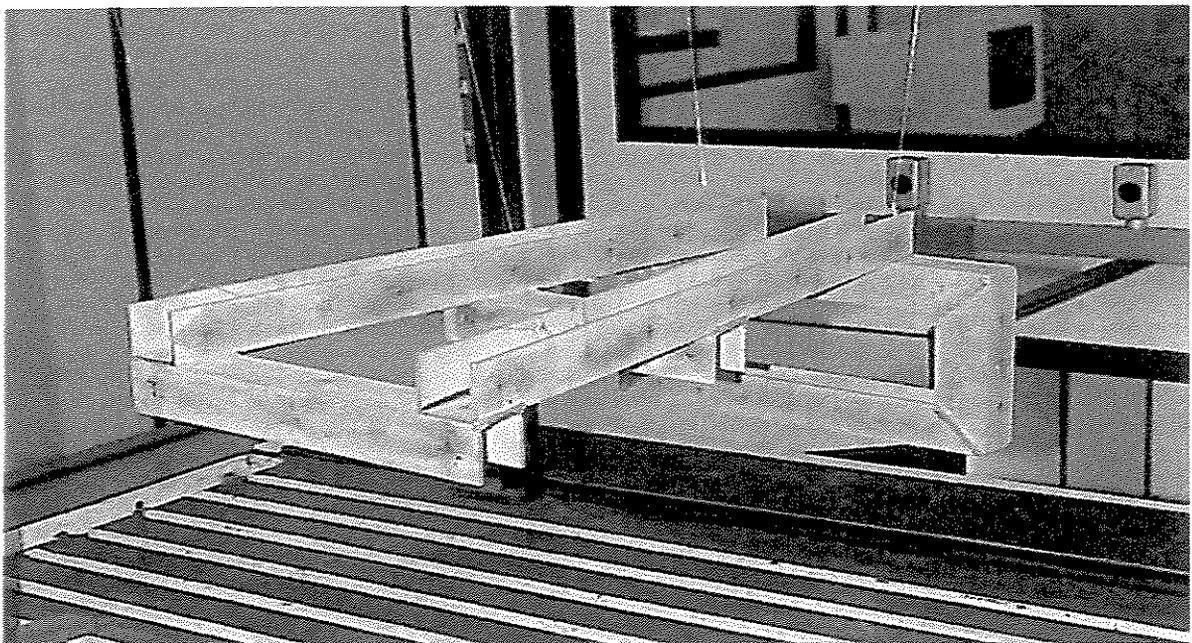


Figura 6.26 – Teste Livre – Livre da Treliça Espacial

A figura 6.27 mostra a discretização da estrutura indicando os 28 pontos onde foram tomadas as medições dos dados de entrada (força) e saída (acelerações), utilizados neste ensaio dinâmico.

A estrutura foi excitada usando força aleatória do tipo ruído branco através de dois *shakers* posicionados nos pontos 1 e 16. As acelerações foram medidas nos 28 pontos tomadas aos pares, caracterizando 14 ensaios MIMO de 2 entradas e 2 saídas. Os sinais de entrada e saída foram obtidos simultaneamente e filtrados convenientemente com filtro passa baixas para obter uma frequência máxima de 1000 Hz. Foram tomadas 1024 amostras em cada ponto de medida. O sistema de aquisição utilizado neste teste foi o módulo SCXI – 1200 conectado ao chassi SCXI – 1000 DC produzidos pela National Instruments.

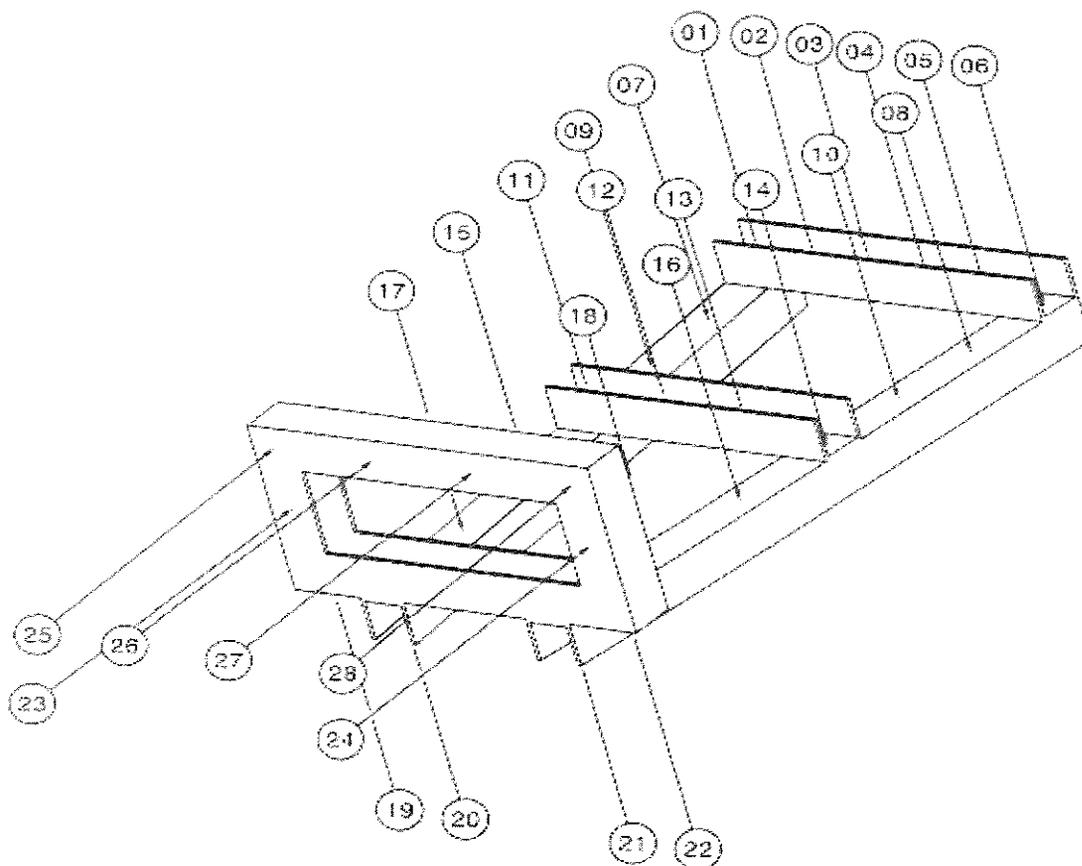


Figura (6.27) – Discretização da Treliça Espacial

O objetivo deste ensaio consiste na determinação das freqüências naturais e de seus modos próprios de vibração associados. O algoritmo utilizado na identificação dos pólos do sistema foi o algoritmo 1 apresentado na seção 5.3.1 deste trabalho usando os seguintes parâmetros: $m = r = 2$ (ensaio MIMO para duas entradas e duas saídas), $N_p = 1024$ (número de pontos), $L=100$ e $N = N_p - L = 924$.

A ordem $2n$ do modelo foi adotada como $2n = 30$ com base nas curvas dos valores singulares de $Y_H V_2$, uma delas mostrada na figura 6.28.

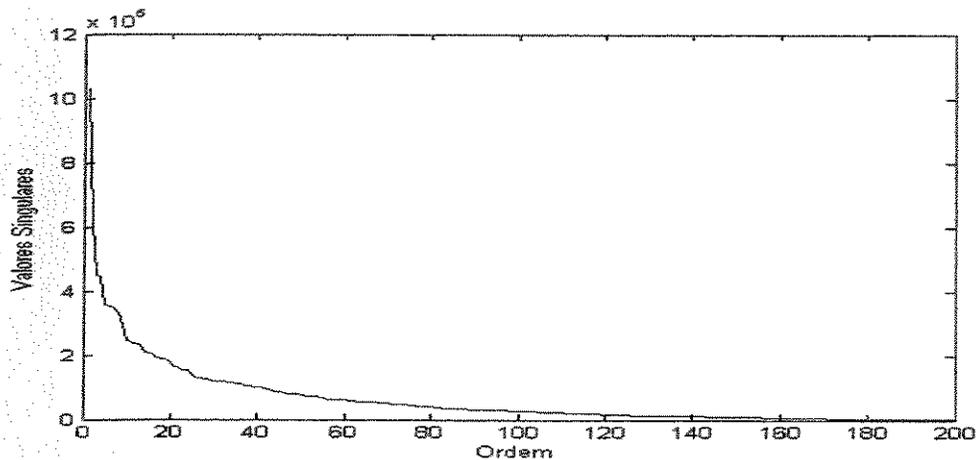


Figura 6.28 – Valores Singulares de $Y_H V_2$

As matrizes B e os resíduos modais para cada teste realizado foram calculados com base nos algoritmos apresentados, respectivamente, nas seções 5.6.1 e 5.6.2 deste trabalho. Com os pólos e os resíduos modais identificados, calculam-se as FRF's usando a equação (2.48). Algumas das 58 FRF's sintetizadas são apresentadas na figura 6.29. A figura 6.30 mostra a média das FRF's sintetizadas nos 14 ensaios dinâmicos realizados obtidas através deste procedimento de identificação.

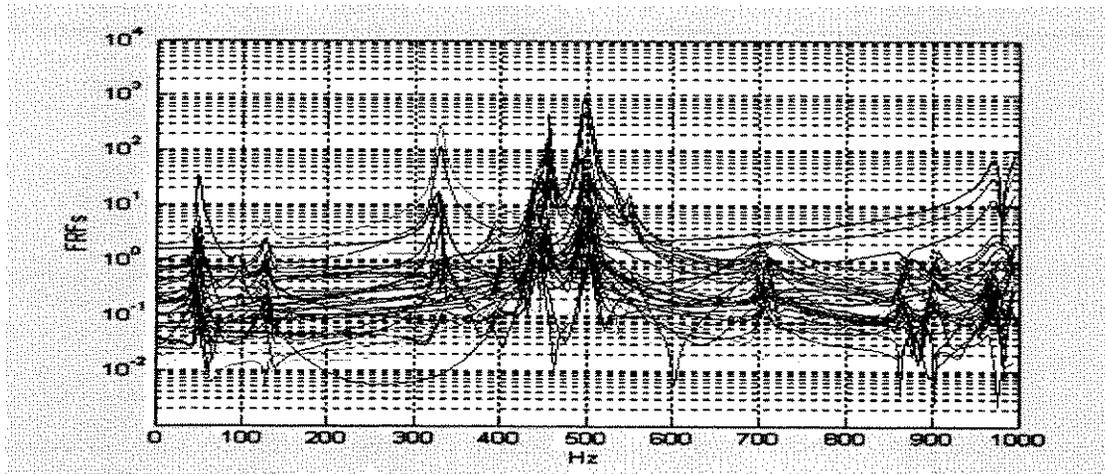


Figura 6.29 – FRF's Sintetizadas

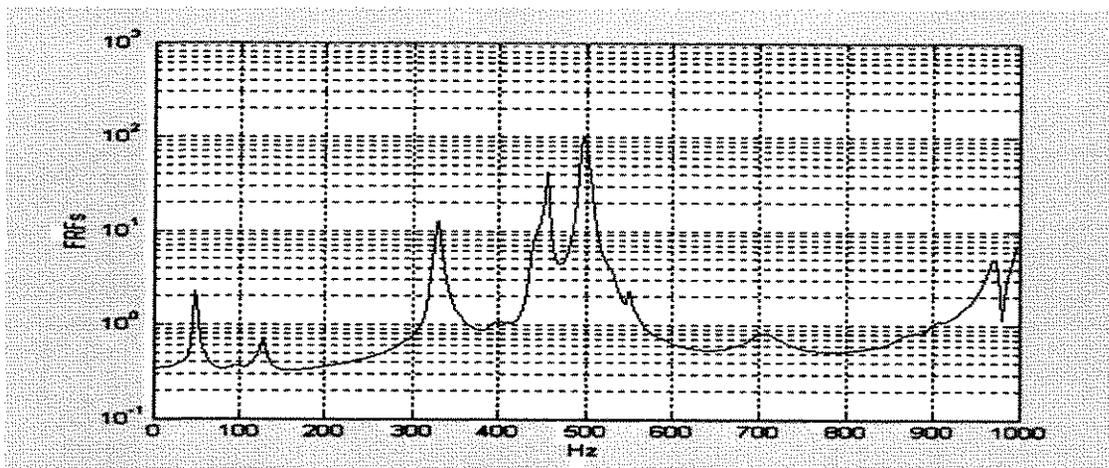


Figura 6.30 – Média das FRF's Sintetizadas Através do Ensaio MIMO

As frequências naturais do sistema foram identificadas com base nos picos da média das FRF's apresentados na figura 6.30 e na repetibilidade dos pólos do sistema no procedimento de identificação. As sete frequências mais relevantes são mostradas na tabela 6.21. As frequências de 708 Hz e 870 Hz foram identificadas da repetibilidade dos pólos.

Frequências Naturais Hz
47.5
127.5
328.0
450.0
495.0
708.0
870.0

Tabela 6.21 - Frequências Naturais Identificadas

Os modos complexos de vibração associados às frequências naturais são calculados usando os resíduos modais através da equação $r_{ij(t)} = \phi_{i(t)}\phi_{j(t)}$. As configurações modais reais são calculadas através da projeção dos modos complexos no eixo real do plano real – imaginário usando a equação (6.9) como $\phi_{i(t)} = \text{abs}(\phi_{i(t)})\sin(\text{angle}(\phi_{i(t)}))$. Os modos de vibração associados às frequências naturais do sistema são apresentados nas figuras 6.31 – 6.37.

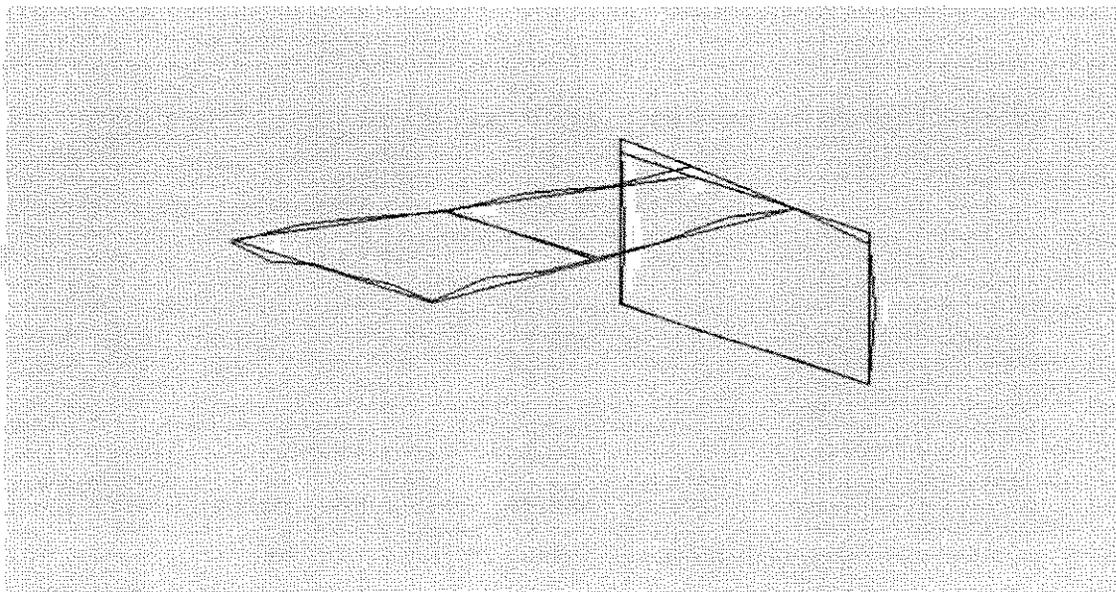


Figura 6.31 – Modo de Vibração Associado a 47.5 Hz

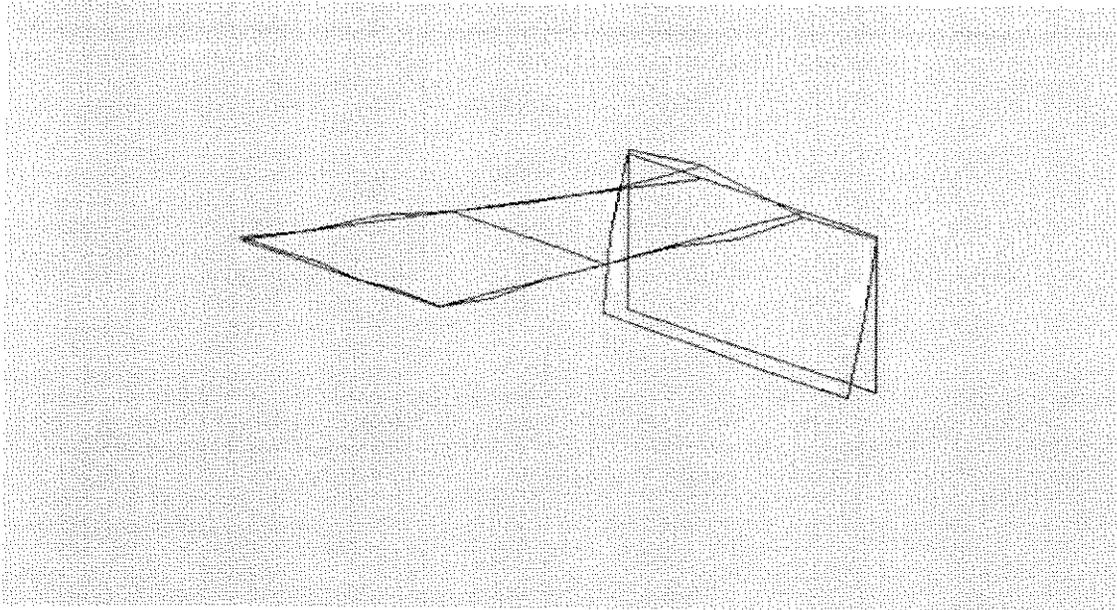


Figura 6.32 – Modo de vibração Associado a 127.5 Hz

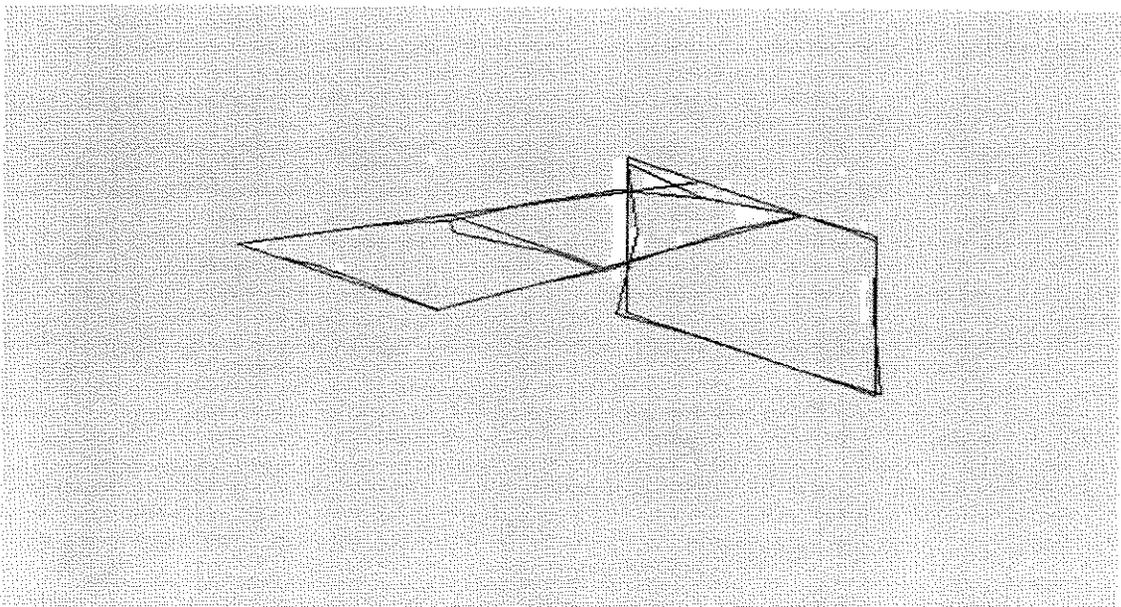


Figura 6.33 – Modo de vibração Associado a 328 Hz

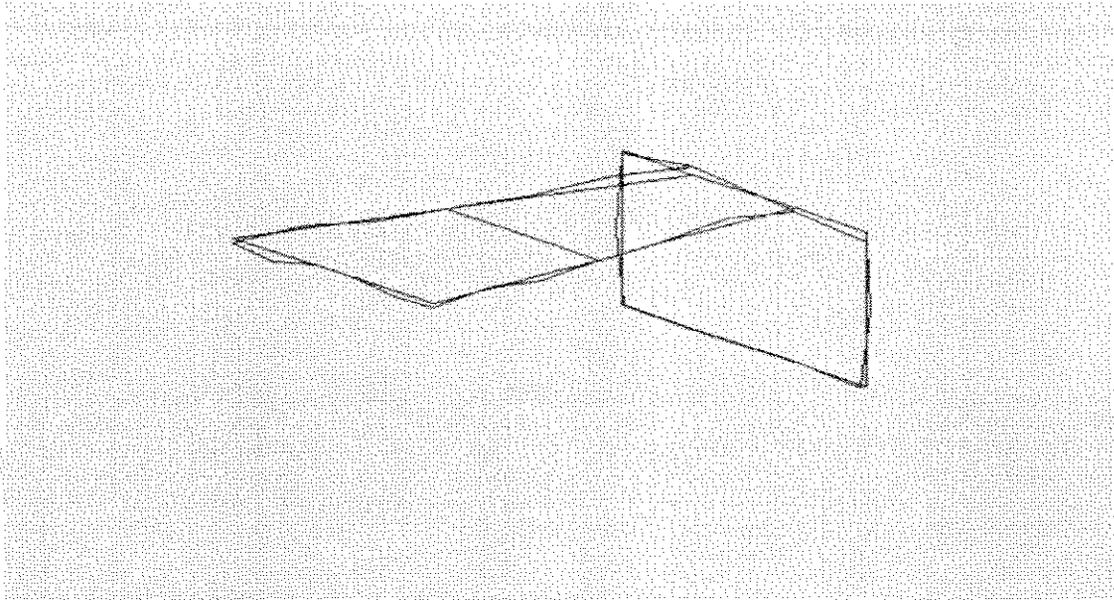


Figura 6.34 – Modo de Vibração Associado a 450 Hz

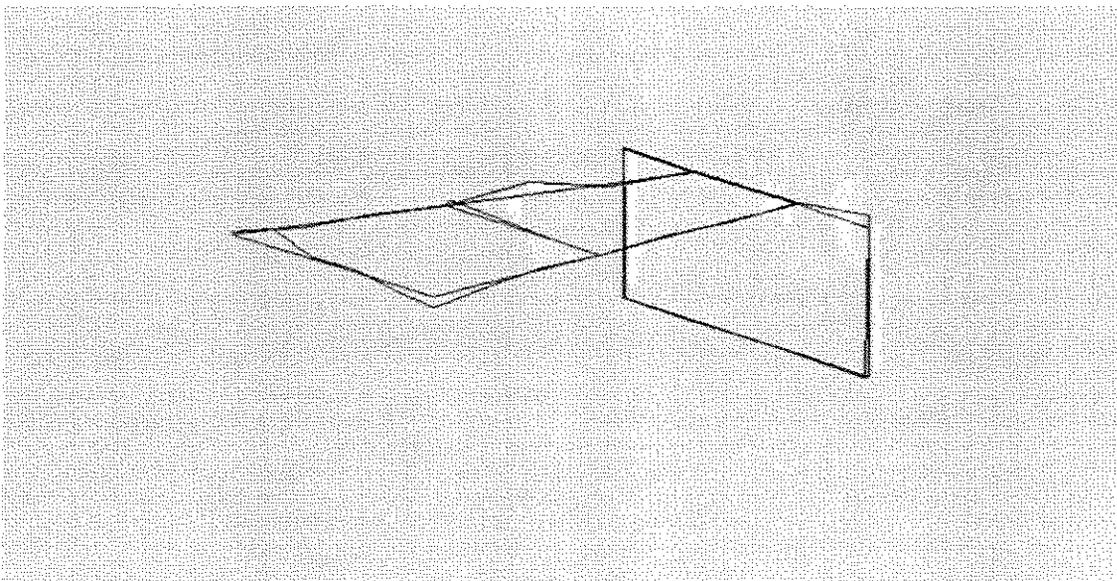


Figura 6.35 – Modo de Vibração Associado a 495 Hz

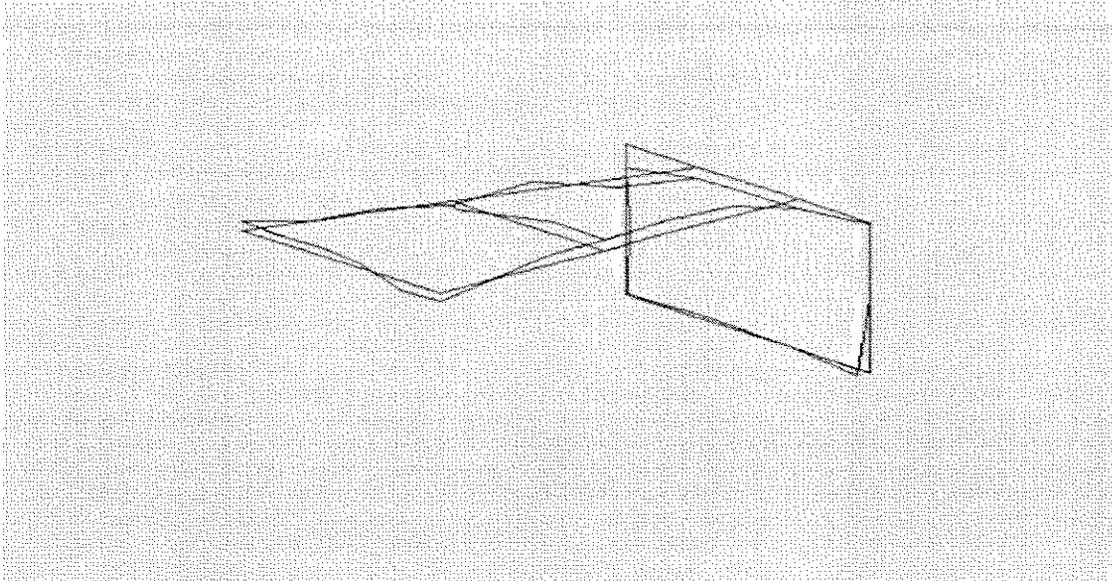


Figura 6.36 – Modo de Vibração Associado a 708 Hz

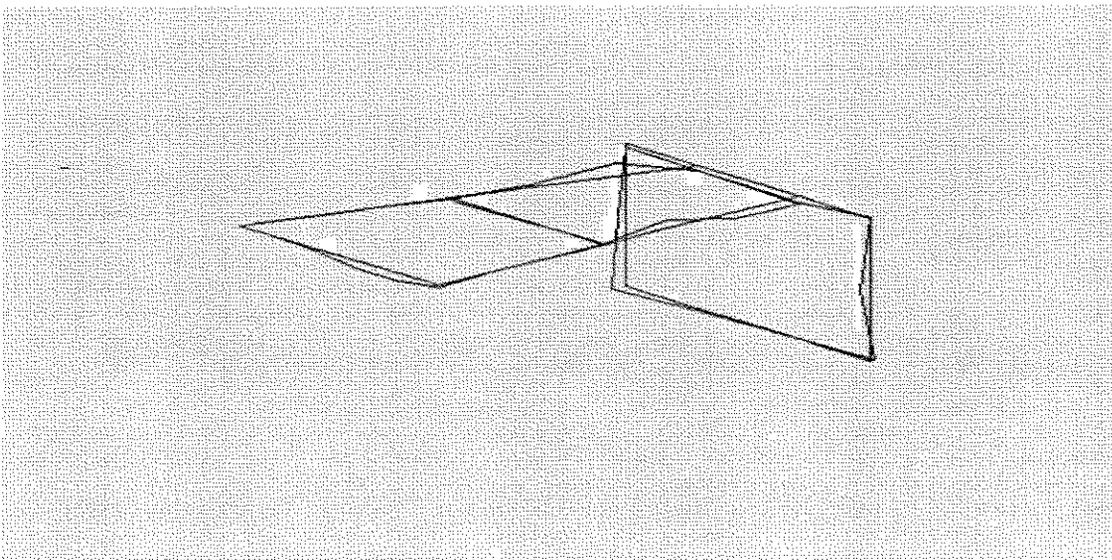


Figura 6.37 – Modo de Vibração Associado a 870 Hz

Foi realizado também um ensaio forçado SISO para condições idênticas ao caso MIMO. A estrutura foi excitada através de um *shaker* posicionado no ponto 1 e foram medidas as acelerações nos 28 pontos. O algoritmo 1 foi utilizado para o cálculo dos pólos do sistema adotando-se os seguintes parâmetros: $2n = 30$, $m = r = 1$ (ensaio SISO para uma entrada e uma saída), $N_p = 1024$ (número de pontos), $L=100$ e $N = N_p - L = 924$.

A figura 6.38 mostra a das FRF's identificadas de onde observa-se que as frequências críticas deste teste são praticamente iguais às identificadas no ensaio MIMO. Os modos de vibração associados com as frequências naturais são mostrados nas figuras 6.39 – 6.45. Nota-se que os modos de vibração obtidos do ensaio SISO possuem configurações mais suaves que as do ensaio MIMO representado melhor os modos de vibração da estrutura. A razão desta melhor representação acredita dever-se ao fato de estar tratando-se de uma estrutura relativamente pequena e as duas excitações aleatórias usadas no ensaio MIMO estarem localizadas em pontos muito próximos.

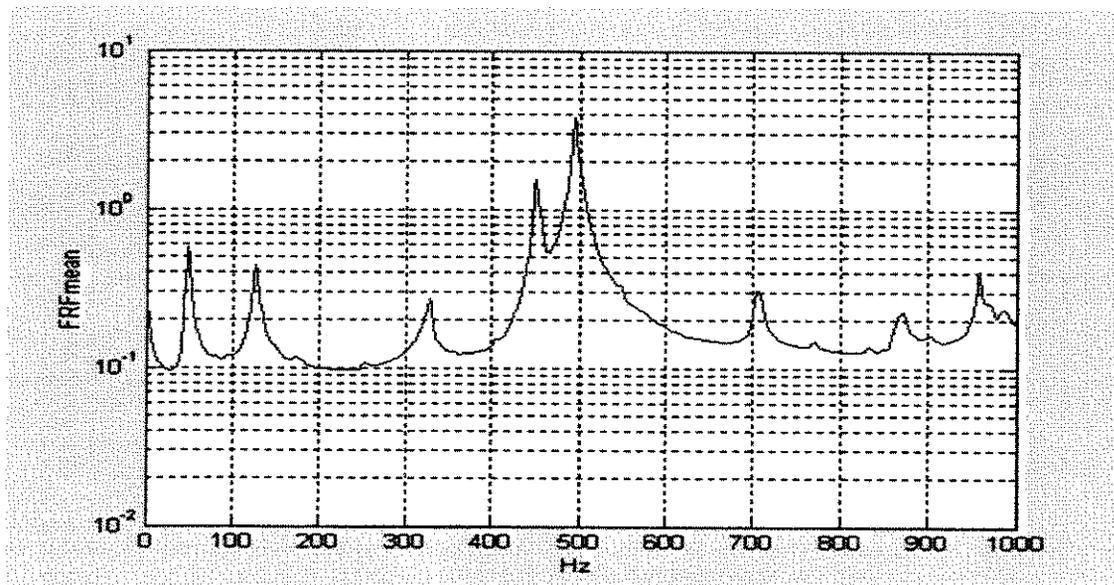


Figura 6.38 – Média das FRF's Sintetizadas Através do Ensaio SISO

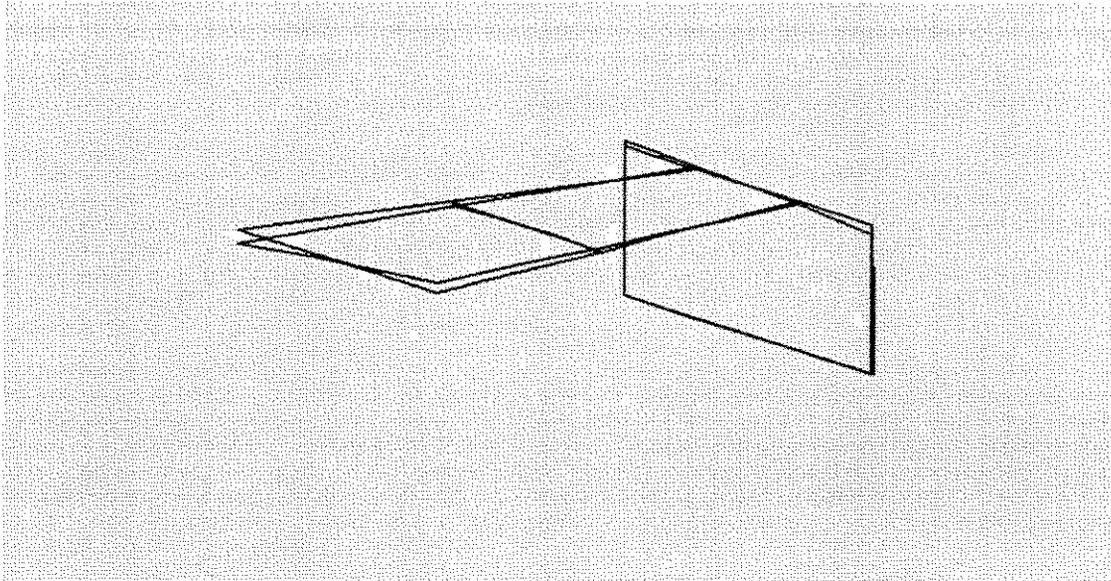


Figura 6.39 - Modo de Vibração Associado a 47.5 Hz

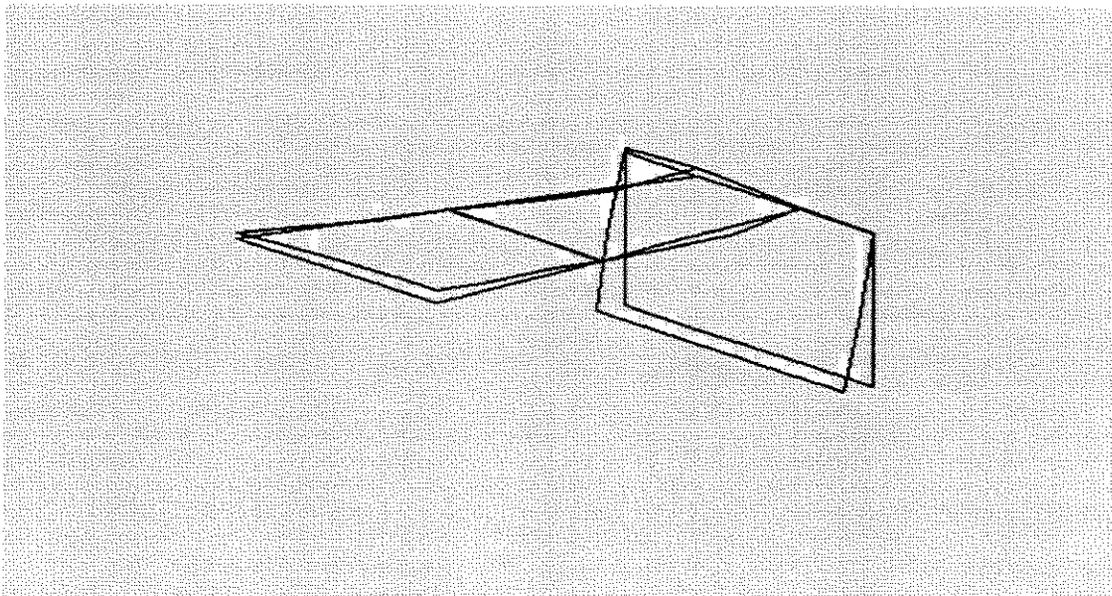


Figura (6.40) – Modo de Vibração Associado a 127.5 Hz

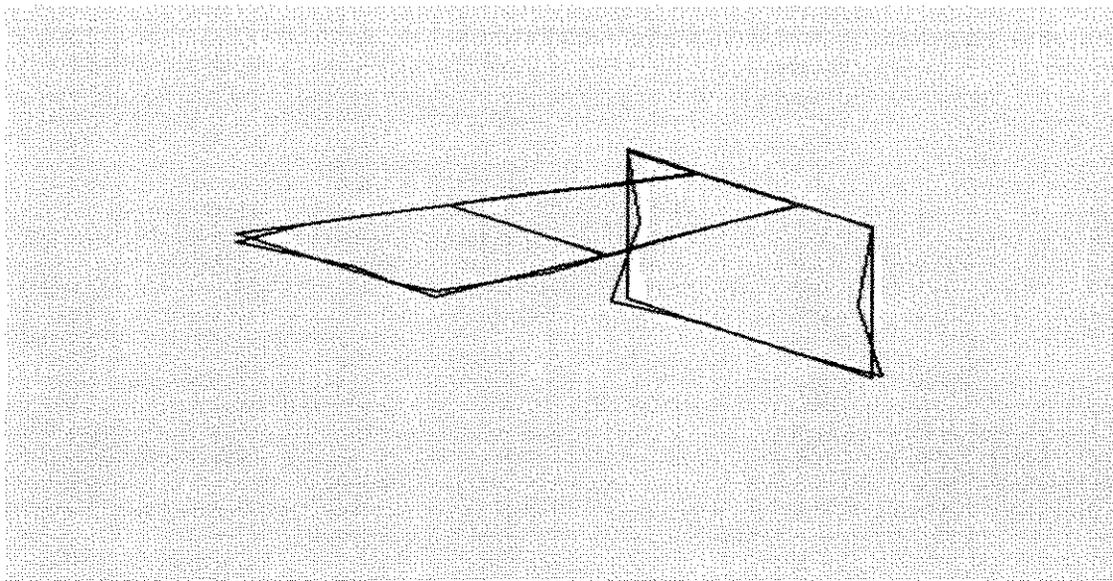


Figura (6.41) - Modo de Vibração Associado a 328 Hz

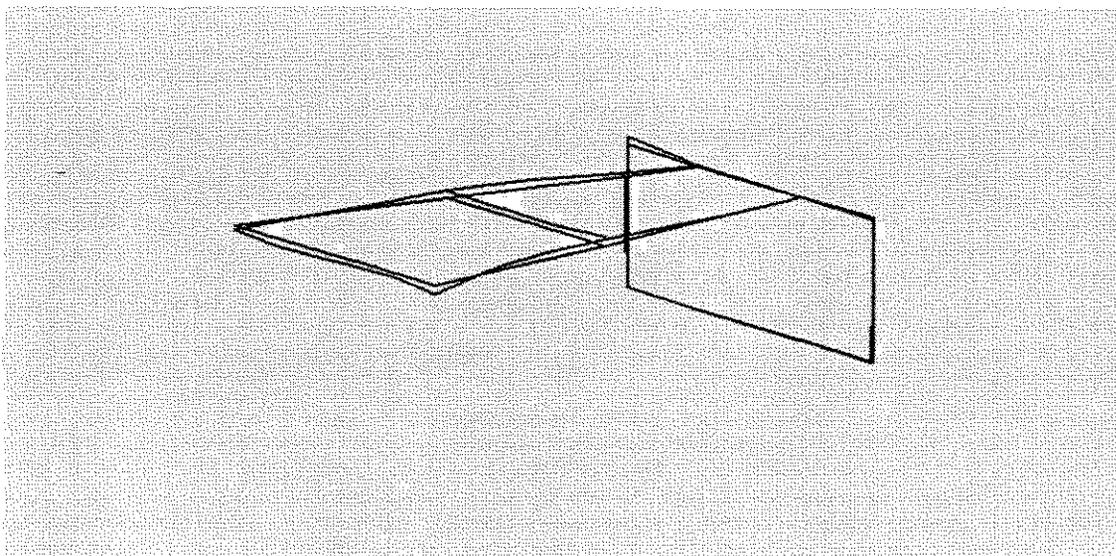


Figura (6.42) – Modo de Vibração Associado a 450 Hz

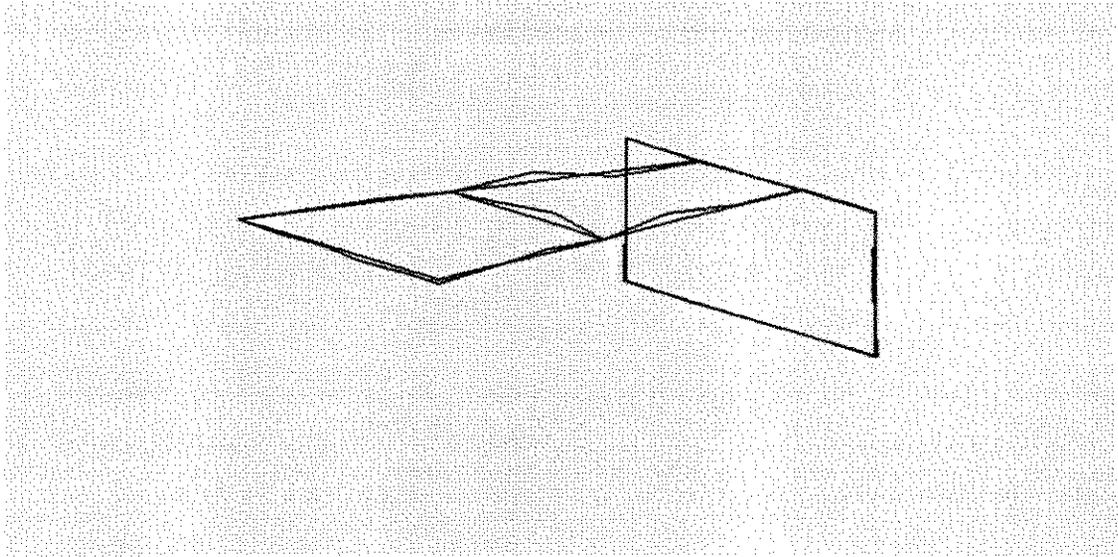


Figura (6.43) – Modo de Vibração Associado a 495 Hz

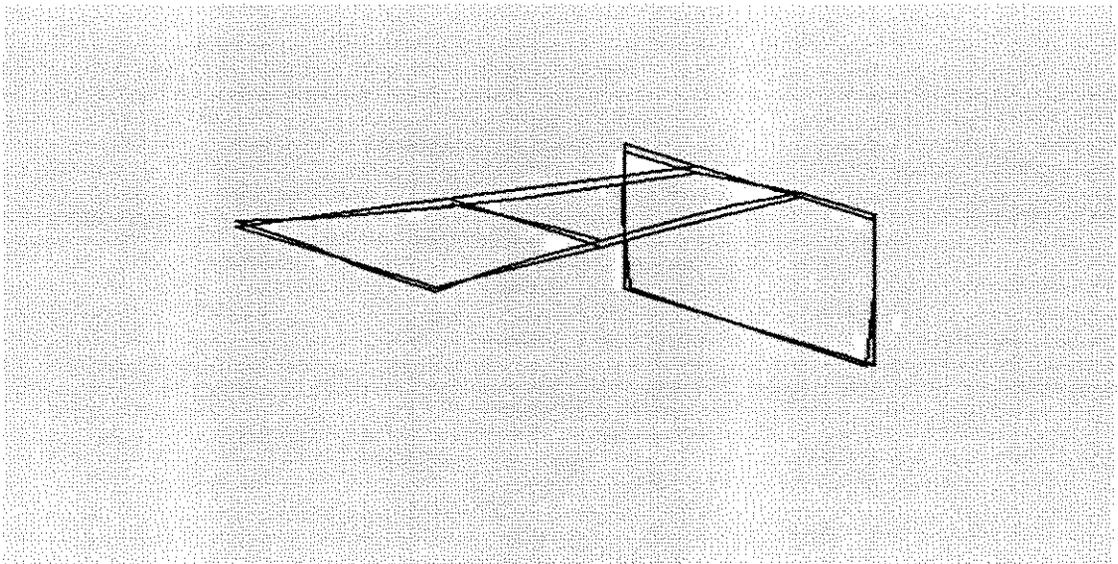


Figura (6.44) – Modo de vibração Associado a 708 Hz

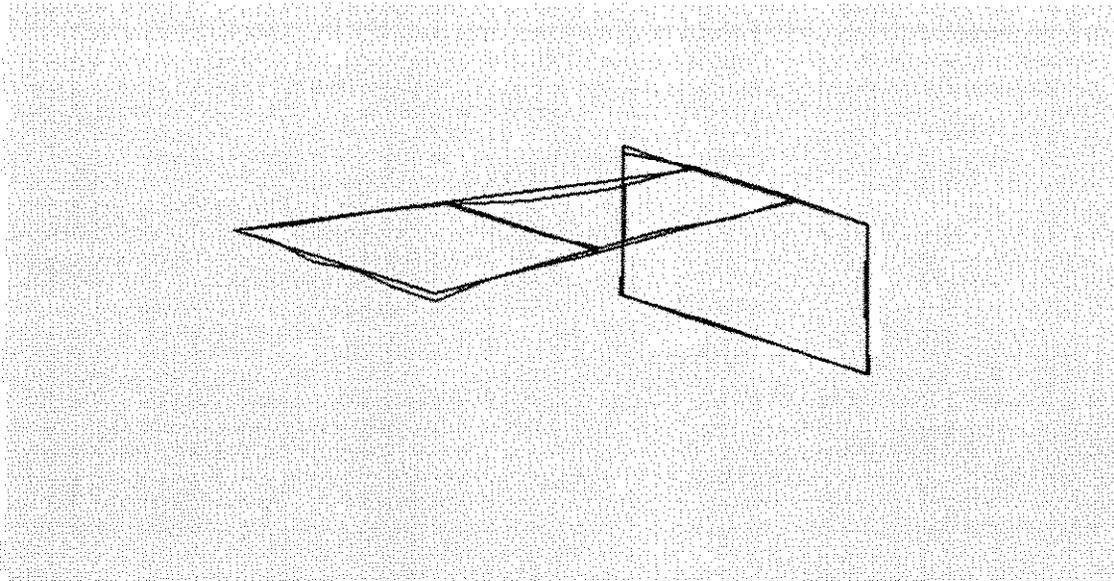


Figura (6.45) – Modo de Vibração Associado a 870 Hz

Capítulo 7

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

7.1 Conclusões Gerais

O objetivo deste trabalho consiste no desenvolvimento de técnicas de identificação de parâmetros modais no domínio do tempo, baseadas na teoria da realização de sistemas lineares e implementados através dos métodos de subespaços vetoriais. O estudo dos conceitos da teoria de realização de sistemas lineares é fundamental para o entendimento das técnicas recentes de identificação, destacando as similaridades entre elas e possibilitando a criação de formulações adequadas à análise dinâmica de estruturas mecânicas. Os métodos de subespaço consistem do cálculo de aproximações de *rank* reduzido de uma matriz equivalente a matriz de observabilidade do sistema via SVD. O uso de tais métodos resulta na formulação de algoritmos simples e elegantes, que apresentam pequeno custo computacional, e são aplicados na metodologia de testes do tipo MIMO e formulados diretamente para os dados do tipo FRI's ou entrada/saída.

Os desenvolvimentos e estudo dos métodos apresentados neste trabalho levam às seguintes conclusões:

- Quanto à identificação dos parâmetros modais: os métodos de subespaços permitem uma estimativa da ordem $2n$ do modelo e o cálculo dos pólos e resíduos modais. A estimativa da ordem $2n$ do modelo é obtida através da inspeção dos $2n$ valores singulares mais significativos da matriz Hankel formada pelos dados experimentais do sistema, em torno da qual o dinamicista pode basear-se para adotar o valor $2n$ no procedimento de redução de *rank* usado para o cálculo dos pólos do sistema. Os pólos do sistema são calculados com base na propriedade de invariância ao deslocamento da matriz de observabilidade. Os resíduos são calculados através de um sistema de equações lineares usando uma decomposição da matriz Hankel em matrizes de Vandermonde para o caso de dados tipo FRI's. No caso de dados de entrada/saída os resíduos são obtidos através de uma realização especial na qual a matriz de transição A é diagonal e contém os parâmetros $Z = \text{diag}(z_1 \ \dots \ z_{2n})$ do sistema e a matriz de influência da entrada B correspondente contém diretamente os resíduos modais. Esta realização especial é obtida usando uma transformação de similaridade conveniente apresentada no capítulo 3.

Uma vantagem importante dos métodos de subespaços sobre os métodos baseados em equações a diferenças está na questão dos pólos computacionais. Os métodos *Polyreference* (AR) e o ARX contém $mL - 2n$ pólos computacionais difíceis de serem separados dos $2n$ pólos verdadeiros do sistema.

- Quanto ao custo computacional: ao contrário dos algoritmos clássicos de identificação baseados em equações a diferenças, os métodos de subespaços baseiam-se em conceitos puramente geométricos usando apenas ferramentas da álgebra linear, não envolvendo otimização não linear ou procedimentos iterativos. Esta metodologia reduz sensivelmente o custo computacional permitindo a utilização destes algoritmos para o caso de identificação MIMO ou monitoramento *on-line*.
- Quanto à equivalência entre os métodos: muitos métodos de identificação são matematicamente equivalentes, embora sejam apresentados de forma diferente.

Neste trabalho, graças à análise rigorosa das formulações dos diferentes modelos, pôde-se estabelecer uma equivalência entre alguns métodos de identificação cujo resultado está apresentado na tabela (4.1). Como resultado desta análise, foram desenvolvidas formulações adicionais como o método *Polyreference* orientado a subespaços e os algoritmos de identificação baseados no método de subespaços para dados de entrada/saída apresentados na seção 5.3.

- Quanto à sensibilidade ao ruído: as simulações apresentadas no capítulo 6 mostram que o resultado da identificação obtida através dos métodos de subespaços é menos sensível a presença de ruído quando comparada com o dos métodos *Polyreference* LS e ARX. Tal comportamento está associado à menor sensibilidade do cálculo dos autovetores da matriz de covariância na presença de ruído. A abordagem do tratamento de sinais contaminados por ruídos é uma preocupação constante ao longo deste trabalho. Nota-se que os métodos *Polyreference* TLS e *Polyreference* orientado a subespaços produzem excelentes estimativas dos parâmetros modais, usando em sua formulação os vetores pertencentes ao subespaço de ruído.
- Quanto à robustez dos métodos: a robustez dos métodos de subespaços é garantida pela utilização da SVD.
- Quanto à aplicação dos métodos: o capítulo 6 apresenta os exemplos numéricos mais representativos, dentre a grande quantidade de testes realizados, no que diz respeito à aplicação dos métodos apresentados neste trabalho. Além disso, apresentam-se resultados experimentais obtidos das análises dinâmicas de um escapamento automotivo e de uma treliça espacial. Conclui-se das simulações e resultados experimentais que as técnicas de identificação baseadas no método de subespaço apresentaram resultados bastante satisfatórios na identificação de parâmetros modais.

7.2 Contribuições do Trabalho

A identificação de parâmetros compreende uma grande quantidade de técnicas diferentes em suas formulações a aplicadas em várias áreas da ciência e engenharia, sendo que ainda há muita divergência quanto a melhor técnica a ser aplicada para um certo problema. Acredita-se que este trabalho tenha contribuído para a identificação de parâmetros modais nos seguintes aspectos:

- O desenvolvimento de formulações das técnicas de identificação das áreas de controle e engenharia elétrica para a AME. Estes desenvolvimentos proporcionam, sobretudo, expressões algébricas aplicadas ao cálculo dos resíduos modais.
- Equivalência das técnicas de identificação. Este trabalho contribuiu para compreender melhor e estabelecer alguma equivalência entre os vários métodos de identificação para dados das FRI's, cuja formulação se encontra bastante dispersa na literatura, através da formulação de subespaço vetorial como mostra a tabela 4.1.
- Aplicação experimental dos métodos discutidos no trabalho para metodologia MIMO.

7.3 Sugestões para Próximos Trabalhos

O estudo dos métodos apresentados neste trabalho permite sugerir algumas idéias e desenvolvimentos para futuros trabalhos como:

- Os métodos de identificação apresentados neste trabalho são aplicados ao caso dos dados das FRI's e de entrada/saída aleatórias. Um tema interessante seria o estudo de tais métodos para o caso da identificação para entrada senoidal como sugere, por exemplo, Verhaegen e Dewilde [92].

- Implementação dos métodos de identificação usando estimadores de parâmetros baseados em otimização não linear como os métodos *Weighted Subspace Fitting* (WSF), Van der Veen, Depreterre e Swidlehurst [90], para dados tipo FRI's.
- Implementação dos métodos ARMA para dados das FRI's e ARMAX, Reinsel, Basu e Yap [84] e Park e Kim [79] para dados tipo entrada/saída usando a otimização por máxima verossimil提高idade.
- Aplicação de tais métodos em identificação de espaços de estado na área de controle e monitoramento *on line* de estruturas mecânicas. Tais aplicações são motivadas pelo custo computacional reduzido apresentado pelos métodos de subespaços.

Bibliografia

1. ALLEMANG, R.J., BROWN, D.L., *Modal Parameter Estimation - Experimental Modal Analysis and Dynamic Component Synthesis*, USAF Technical Report, Vol. 3, 1987.
2. ALLEMANG, R.J., BROWN, D.L. and FLADUNG, W., *Modal Parameter Estimation: An Unified Matrix Polynomial Approach*, Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, Honolulu, HA, pp. 501-514, 1994.
3. ALVIN, K.F. and PETERSON, L.D., *Determination of Modal Residues and Residual Flexibility for Time Domain System Realization*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 21, No. 4, pp. 588 – 594, 1998.
4. ARAUJO, C.A., *Modelagem Dinâmica de Sistemas Conservativos e não Conservativos Através da Síntese Modal Utilizando um Superconjunto de Flexibilidade Residual*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 1998.
5. BAZÁN, F.S.V., *Desenvolvimento de Ferramentas de Identificação Paramétrica de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 1993.

6. BAZÁN, F.S.V. and KURKA, P.R.G., *Truncated Singular Value Decomposition and Inverse Problem of Parameter Identification in Mechanical Structures in the Time Domain*, DINAME 93, Santo Amaro da Imperatriz, SC., 1993.
7. BENDAT, J.S. and PERSOL, A.G., *Engineering Application of Correlation and Spectral Analysis*, John Willey & Sons, 1980.
8. BERMAN, A., *System Identification of Structural Dynamics Models: Theoretical and Practical Bounds*, AIAA SDM Conference, Paper 84-0929, pp. 123-128, 1984.
9. BOX, G.E.P. and JENKINS, G.M., *Time Series Analysis Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day, 1971.
10. BRANDON, J.A., KURKA, P.R.G. and MATHIAS, M.H., *Identification Methods Based on Passive Measurements of Ambient Vibration – An Overview*, Conference on Modern Practice in Stress and Vibration Analysis, Ed. J.L. Wearing, Academic Press, Sheffield, UK, pp. 533-543, 1993.
11. BRANDON, J.A., MATHIAS, M.H. and KURKA, P.R.G., *Performance of ARMA Algorithms on a Time Series from a Simple Vibrating System*, 5th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, England, pp. 592-599, 1994.
12. BROWN, D.J., *Modal Analysis – Past, Present and Future*, Proceedings of the 1st International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, pp.ix-xiii, 1982.
13. BROWN, D.L., ALLEMANG, R.J., ZIMMERMAN R.D. and MERGREAY, M., *Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis*, SAE Paper Number 790221, SAE Transaction, Vol. 88, pp. 828 – 846, 1979.

14. CHATFIELD, C., *The Analysis of Time Series: Theory and Practice*, London, Chapman and Hall, 1975.
15. COLE, H. A. JR., *On Line Failure Detection and Damping Measurement of Aerospace Structures by Random Decrement Signatures*, NASA CR-2205, 1973.
16. COOLEY, J.W. and TUKEY, J.W., *An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*, *Mathematics and Computation*, Vol. 19, pp. 297 – 301, 1965.
17. COOPER, J.E., *Comparison of Modal Parameter Estimation Techniques on Aircraft Structural Data*, *Mechanical System and Signal Processing*, Vol. 4, No. 2, pp. 157 – 172, 1990.
18. COOPER, J.E., *Comparasio of Some Time Domain System Identification Techniques Using Approximate Data Correlations*, *International Analytical and Experimental Journal of Modal Analysis*, Vol. 4, No. 1, pp. 51 – 57, 1989.
19. COOPER, J.E., *On Line Version of the Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlations*, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No.1, pp.137 – 142, 1997.
20. COOPER, J.E. and WRIGHT, J.R., *Comparison of Some Time Domain System Identification Methods for Free Response Data*, *Proceedings of the 4st International Modal Analysis Conference*, Los Angeles, CA, pp. 831-836, 1986.
21. COOPER, J.E. and WRIGHT, J.R., *Data Correlation in Matrix Methods for Modal Identification*, *Proceeding of the 9th International Modal Analysis Conference*, Florence, Italy, pp. 1427 – 1432, 1991.
22. DATTA, N.B., *Numerical Linear Algebra and Applications*, Brooks/Cole Publishing Company, 1994.

23. DEBLAWE, F., BROWN, D. and ALLEMANG, R.J., The Polyreference Time Domain Technique, Proceedings of the 5th International Modal Analysis Conference, London, UK, pp. 832-845,1987.
24. DIAS, N.E., *Identificação de Parâmetros e Análise Modal em uma Estrutura Tipo Garfo Mecânico*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1992.
25. EWINS, D.J., *Modal Testing and Practice*, New York, John Wiley & Sons, 1984.
26. EWINS, D.J., *Use and Abuses of Modal Testing*, Proceeding of the 3th International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, pp. xiii-xvii, 1985.
27. FASSOIS, S.D., *MIMO LMS – ARMAX Identification of Vibrating Structures – Part I – The Method*, Mechanical System and Signal Processing, Vol. 15, No. 4, pp. 723 – 735, 2001.
28. FLORAKIS, A., FASSOIS, S.D. and HEMES, F.M., *MIMO LMS ARMAX Identification of Vibrating Structures. Part II – A Critical Assessment*, Mechanical System and Signal Processing, Vol. 15, No. 4, pp. 737 – 758, 2001.
29. FRANKLIN, G.F. and POWELL, J.D., *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison Wesley Publishing Company, 1980.
30. GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C.F., *An Analysis of the Total Least Squares Problem*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 17, No. 6, 1980.
31. GOLUB, G. H. and VAN LOAN, C.F., *Matrix Computation*, John Hopkins Press, 1989.

32. GOMES, A.E., *Identificação Paramétrica Multi – Canal de Sistemas Mecânicos no Domínio do Tempo*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1992.
33. GONTIER, C., SMAIL, M. and GAUTIER, P.E., *A Time Domain Method for the Identification of Dynamic Parameter of Structures*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 7, No. 1, pp. 45 – 56, 1993.
34. IBRAHIM, S.R., *Advantages in Time Domain Modal Identification and Modeling of Structures*, preprint presented at 2nd International Symposium on Aerospace & Structural Dynamic, 1986.
35. IBRAHIM, S.R., *Application of Random Time Series Analysis to Dynamic Flight Measurements*, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 49, No. 2, pp. 165-170, 1979.
36. IBRAHIM, S.R. and MIKULCIK, E.C., *A Method for the Direct Identification of Vibration Parameters from Free Responses*, The Shock and Vibrations Bulletin, Vol. 47, No. 4, pp. 183-198, 1977.
37. IBRAHIM, S.R. and MIKULCIK, E.C., *A Time Modal Vibration Test Technique*, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 43, No. 4, pp. 21 – 37, 1973.
38. IBRAHIM, S.R. and MIKULCIK, E.C. *The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses*, The Shock and Vibrations Bulletin, Vol. 46, pp. 187-196, 1976.
39. JUANG, J.N., *Mathematical Correlation of Modal Parameter Identification Methods via System Realization Theory*, International Analytical and Experimental Journal of Modal Analysis, Vol.1, No. 2, pp. 1-18, 1987.

40. JUANG, J.N., *System Realization Using Information Matrix*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 20, No. 3, pp. 492-500, 1997.
41. JUANG, J.N., *Unification of Several System Realization Algorithms*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 20, No. 1, pp. 67 – 73, 1997.
42. JUANG, J.N., COOPER, J.E. and WRIGHT, J.R., *An Eigensystem Realization Algorithm Using Data Correlation (ERA/DC) for Modal Parameter Identification*, Control Theory and Advanced Technology, Vol. 4, No. 1, pp. 5-14, 1988.
43. JUANG, J.N. and PAPPA, R.S., *An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Modal Reduction*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 8, No. 5, pp. 620-627, 1985.
44. JUANG, J.N. and PAPPA, R.S., *Effects of Noise on ERA Identification Modal Parameter*, Journal of Guidance, Control, and Dynamic, Vol. 9, No. 3, pp. 294-303, 1986.
45. JUANG, J.N., PHAN, M., HORTA, L.G. and LONGMAN, R.W., *Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, No. 2, pp. 320 – 329, 1993.
46. KAILATH, T., *Linear System*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1980.
47. KUO, B.C., *Digital Control System*, New York, Holt, Rinehart and Wiston, 1980.
48. KURKA, P.R.G., *Modal Order Determination in a Time Domain Identification Algorithm*, Poceeding of the 4th International Modal Analysis Conference, Florence, Italy, pp. 971-976, 1991.

49. KURKA, P.R.G., *Modal Parameter Identification in the Time Domain from a Random Excitation Force*, Mechanical System and Signal Processing, Vol. 4, No.5, pp. 393-404, 1990.
50. KURKA, P.R.G. and ARAUJO, C.A., *Dynamic Modeling Through Time Domain Identification and Substructuring Techniques*, VI DINAME, Caxambu, MG, 1995.
51. KURKA, P.R.G. and BAZÁN, F.S.V., *A Prony – Moments for Parameter Identification in Overdetermined Systems*, Mechanical System and Signal Processing, Vol. 8, No. 2, pp. 145 – 154, 1994.
52. KURKA, P.R.G. and BAZÁN, F.S.V., *Regularization Techniques in the Time Domain Modal Parameters Identification*, In: 17th International Seminar on Modal Analysis, Belgium, Catholic University of Leuven, pp. 733-741, 1992.
53. KURKA, P.R.G. and BRAUN, S., *System Identification and Order Determination via the Regularized Suboptimal Solution (RSOS)*, In: XIV International Modal Analysis Conference and Exhibit, Dearborn, pp. 943-949, 1996.
54. KURKA, P.R.G., DIAS, N.E., *Gradient Least Squares Modal Parameter Determination in the Frequency Domain*, IV DINAME, Florianópolis, SC, 1993.
55. KURKA, P.R.G. and FERREIRA, R.P., *Application of a Time Domain Regularized Soboptimal Solution in the Deflection Shape Analysis of a Diesel Engine Timing Drive Over*, In: International Seminar on Modal Analysis (ISMA 21), pp. 1149-1155, 1996.
56. KURKA, P.R.G., GOMES, A.E. and BAZÁN, F.S.V., *Gauss Factorization for Least Squares Solutions in Over Determined Techniques*, VI DINAME, Caxambu, MG, 1995.

57. KURKA, P.R.G., MORAES, M., BLOTA, E. e GOMES, A.E., *Método de Identificação Paramétrica no Domínio do Tempo, Através da Resposta de Sistemas Dinâmicos*, XI-COBEM, pp. 469-472, 1991.
58. LEURIDAN, J.M., *Some Direct Parameter Modal Identification Methods Applicable for Multiple Input Modal Analysis*, Ph.D. Thesis, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Cincinnati, 1984.
59. LEURIDAN, J. M., BROWN, D.L. and ALLEMANG, R.J., *Time Domain Parameter Identification Methods for Linear Modal Analysis: An Unifying Approach*, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reability in Design, Vol. 108, pp. 1-8, January, 1986.
60. LIU, C.L. and LIU, J.W.S., *Linear Systems Analysis*, MacGraw-Hill, 1975.
61. LIU, K. and SKELTON, R.E., *Q – Markov Covariance Equivalent Realization and Its Application to Flexible Structure Identification*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 16, No. 2, pp. 308 – 319, 1993.
62. LJUNG, L., *System Identification: Theory for the User*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
63. LONGMAN, R., JUANG, J.N., *Recursive Forms of Eigenystem Realization Algorithm for System Identification*, AIAA, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol.. 12, No. 5, pp. 647 – 652, 1989.
64. LUENBERGER, D.G., *Introdution to Dynamic System: Theory, Models, and Applications*, Jonh Wiley & Sons, 1979.
65. MAIA, N.M.M., MONTALVÃO e SILVA, J.M., HE, J., LIEVEN, N.A.J., LIN, R.M., SKINGLE, G.W., TO, W.M. and URTIGUEIRA, A.P.V., *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press, Jonh Wiley & Sons, 1997.

66. MAKRIDAKIS, S. and WHEELWRIGTH, S.C., *Forecasting – Methods and Applications*, New York, John Wiley & Sons, 1978.
67. MAKRIDAKIS, S. and WHEELWRIGTH, S.C., *Iterative Forecasting - Univariate and Multivariate Methods*, San Francisco, Holden-Day, 1978.
68. MATHIAS, M.H., *Técnicas Paramétricas de Processamento de Sinais na Caracterização de Estruturas Mecânicas*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 1998.
69. MOONEN, M., DE MOOR, B., VANDENBERGHE, L. and VANDEWALLE, J., *On – and Off – Line Identification of Linear State – Space Models*, International Journal of Control, vol. 49, n.1, pp.219 – 232, 1989.
70. MÜLLER, P.C. and SCHIEHLEN, W.O., *Linear Vibration – A Theoretical Treatment of Multi Degree of Freedom Vibrating Systems*, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
71. NEWLAND, D.E., *Random Vibrations, Spectral and Wavelets Analysis*, Longman Scientific and Technical, Essex, England, 1993.
72. OPPENHEIM, A. and SCHAFER, R.W., *Digital Signal Processing*, New Jersey, Prentice Hall, 1975.
73. OVERSCHEE, P. and DE MOOR, B., *A Unifying Theorem for Three Subspace System Identification Algorithm*, Automatica, Vol. 31, No. 12, pp. 1853 – 1864, 1995.
74. OVERSCHEE, P. and DE MOOR, B., *N4SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic – Stochastic Systems*, Automatica, Vol. 30, No. 1, pp. 75 – 93, 1994.

75. PANDIT, S.M., *Analysis of Vibration Records by Data Dependent Systems*, The Shock and Vibration Bulletin, Vol. 47, No. 4, pp. 161-174, 1985.
76. PANDIT, S.M. and METHA, N.P., *Data Dependent System Approach to Modal Analysis via State Spece*, Journal of Dynamic Systems, Measurements, and Control, Vol. 107, pp. 132-138, 1985.
77. PAPPA, R.S., *Independent Analysis of the Space Station Node Modal Test Data*, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 22, No. 1, pp. 22 – 27, 1999.
78. PAPPA, R.S. and JUANG, J.N., *Some Experiences with the Eigensystem Realization Algorithm*, Sound and Vibration, pp. 30 – 34, January, 1988.
79. PARK, B.H. and KIM, K.J., *Vector ARMAX Modelling Approach in Multi Input Modal Analysis*, Mechanical System and Signal processing, Vol. 3, No. 4, pp. 373-387, 1989.
80. PELED, A. and LIU, B., *Digital Signal Processing – Theory, Design, and Implementation*, New York, John Wiley & Sons, 1976.
81. PHAN, M., JUANG, J.N. and LONGMAN, R.W., *On Markov Parameter in System Identification*, Proceedings of the 9th International Modal Analysis Conference, Florence, Italy, pp. 1415-1421, 1991.
82. RABINER, L.R. and GOLD, B., *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1975.
83. RED HORSE, J.R., ALVIN, K.F., MIGNOLET, M.P. and ROBERTSON, A. N., *An Investigation of Three Major Time-Series Data Analysis Techniques*, Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, Dearborn, MI, pp. 1600 – 1607, 1996.

84. REINSEL, G.C., BASU, S. and YAP, S.F., *Maximum Likelihood Estimation in Multivariate Autorregressive Moving Average Model from a Generalized Least Squares Viewpoint*, Journal of Time Series Analysis, Vol. 13, No. 2, pp. 133-145, 1992.
85. ROY, R. and KAILATH, T., *ESPRIT – Estimation of Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques*, IEEE Transactions in Acoustic, Speech and Signal Processing, Vol. 37, No. 7, pp. 984 – 995, 1989.
86. SCHMIDT, R.O., *A Signal Subspace Approach to Multiple Emmitter Location and Spectral Estimation*, Ph.D. Thesis, Stanford University, 1981.
87. SÖDERSTRÖM, T. and STOICA, P., *System Identification*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
88. TAYLOR, F.J., *Principles of Signal and Systems*, MacGraw-Hill, 1994.
89. TIKHONOV, A.N. and ARSENIN, V.Y., *Solutions of Ill Poosed Problems*, John Willey & Sons, New York, 1977.
90. VAN DER VEEN, A.J., DEPRETTERE, E.F. and SWINDLEHURST, A.L., *Subspace Based Signal Analysis Using Singular Value Decomposition*, Proceeding of the IEEE, Vol. 81, No. 9, 1993.
91. VERHAEGEN, M., *Identification of the Deterministic Part of MIMO State Space Models Given in Innovations from Input – Output Data*, Automatica, Vol. 30, No. 1, pp. 61 – 74, 1994.
92. VERHAEGEN, M. and DEWILDE, P., *Subspace Model Identification Part 1. The Output – Error State Space Model Identification Class of Algorithms*, International Journal of Control, Vol. 56, No. 5, pp. 1187 – 1210, 1992.

93. VIBERG, M., *Subspace – Based Methods for Identification of Linear Time- Invariant System*, Automatica, Vol. 31, No. 12, pp. 1835 – 1851, 1995.
94. VIBERG, M. and OTTERSTEN, B., *Sensor Array Processing Based on Subspace Fitting*, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 39, No. 5, pp. 1110-1121, 1991.
95. VOLD, H., KURDRAT, J., ROCKLIN, T. and RUSSELL, R., *A Multi Input Modal Estimation Algorithm for Mini Computers*, SAE Transactions, Vol. 91, No. 1, pp. 815 – 821, 1982.
96. VOLD, H., ROCKLIN, T., *The Numerical Implementation of a Multi Input Modal Estimation Algorithm for Mini Computers*, Proceedings of the International Modal Analysis Conference, Orlando, Florida, pp. 542 – 548, 1982.
97. WALKER, G., *On the Peridiocity in Series of Related Terms*, Proceedings of the Royal Soc. London, series A, Vol. 131, pp. 518-532, 1931.
98. WALKER, P.B. and CLEGG, A W., *The Estimation of Wing Resonance Testing*, Rep. No. AD.3105/M.T-11767 of The Royal Aircraft Estab., South Farnborough, England, 1939.
99. WOLD, H., *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*, Upsalla: Almqvist and Wiksel, 1938.
100. YULE, G. U., *On the Method of Invetigation Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer’s Sunspot Numbers*, Philosophical Transation Royal Soc. London, series A, Vol. 226, pp. 267-298, 1972.

Apêndice A

DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES

Esta seção apresenta as definições das aproximações dos tipos mínimos quadrados e mínimos quadrados totais usando SVD.

A.1 Decomposição em Valores Singulares

Seja \mathbf{X} uma matriz de elementos reais, dimensão $L \times N$ de *rank* d e com $d \leq L \leq N$. A SVD de \mathbf{X} é obtida como, Golub e Van Loan [31],

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp \hat{\mathbf{\Sigma}}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz de dimensão $L \times N$ que contém os valores singulares de \mathbf{X} e são, por conveniência, ordenados na ordem decrescente como,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d > \sigma_{d+1} = \dots = \sigma_L = 0, \quad (\text{A.2})$$

e o sobre índice T denota transposição. A matriz diagonal $\hat{\Sigma}$, de dimensão $d \times d$, contém os primeiros valores singulares não nulos de \mathbf{X} , enquanto que a matriz diagonal $\hat{\Sigma}^\perp$, de dimensão $(L-d) \times (N-d)$, contém os outros $L-d$ valores singulares nulos de \mathbf{X} .

A matriz \mathbf{U} , de dimensão $L \times L$, é formada de maneira tal que suas colunas são os autovetores da matriz de covariância $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ e são chamados vetores singulares à esquerda de \mathbf{X} . As matrizes $\hat{\mathbf{U}}$ (associadas com os valores singulares não nulos de Σ) e $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ (associadas com os valores singulares nulos de Σ) têm dimensões, respectivamente, iguais a $L \times d$ e $L \times (L-d)$. As matrizes \mathbf{U} , $\hat{\mathbf{U}}$ e $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ têm as seguintes propriedades,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \mathbf{I}_L \\ \mathbf{U} \mathbf{U}^T &= \mathbf{I}_L \\ \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} &= \mathbf{I}_d \\ (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T \hat{\mathbf{U}}^\perp &= \mathbf{I}_{L-d} \\ \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}}^\perp &= \mathbf{0}_d \\ \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T &= \mathbf{I}_L \end{aligned} \quad , \quad (\text{A.3})$$

onde \mathbf{I} denota matriz identidade.

A matriz \mathbf{V} , de dimensão $N \times N$, é formada de maneira tal que suas colunas são os autovetores da matriz de informação $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ e são chamados vetores singulares à direita de \mathbf{X} . As matrizes $\hat{\mathbf{V}}$ (relacionada com os valores singulares não nulos de Σ) e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ (relacionada com os valores singulares nulos de Σ) têm dimensão, respectivamente, iguais a $N \times d$ e $N \times (N-d)$. As matrizes \mathbf{V} , $\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ têm as seguintes propriedades,

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_N \\
\mathbf{V} \mathbf{V}^T &= \mathbf{I}_N \\
\hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} &= \mathbf{I}_d \\
(\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T \hat{\mathbf{V}}^\perp &= \mathbf{I}_{N-d} \\
\hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}}^\perp &= \mathbf{0}_d \\
\hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{V}}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T &= \mathbf{I}_N
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Com base nas equações (A.3) e (A.4) observa-se que as matrizes $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{U}}^\perp$, $\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ da equação (A.1) são ortogonais e portanto formam bases ortogonais de subespaços vetoriais dos espaços \mathfrak{R}^N e \mathfrak{R}^L . A SVD de matrizes é uma ferramenta matemática robusta para determinar as bases destes subespaços.

Considerando \mathbf{X} como uma transformação linear entre dois espaços Euclidiano \mathfrak{R}^N e \mathfrak{R}^L , é possível mostrar que:

- i) as d colunas da matriz $\hat{\mathbf{U}}$ $L \times d$ correspondentes aos valores singulares não nulos de Σ geram o espaço coluna de \mathbf{X} , denotado por $EC(\mathbf{X})$,
- ii) as $(L-d)$ colunas da matriz $\hat{\mathbf{U}}^\perp$ formam o complemento ortogonal do espaço coluna de \mathbf{X} , denotado por $EC^\perp(\mathbf{X})$,
- iii) as d colunas de $\hat{\mathbf{V}}$ $N \times d$ correspondentes aos valores singular não nulos de Σ geram o espaço linha de \mathbf{X} denotado por $EL(\mathbf{X})$ e
- iv) o complemento ortogonal ao espaço linha de \mathbf{X} , denotado por $EL^\perp(\mathbf{X})$, é formado pelas $(N-d)$ colunas de $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ correspondentes aos valores singulares nulos de Σ .

Considerando que os $(L-d)$ valores singulares da matriz Σ são nulos, é usual escrever SVD de \mathbf{X} de forma compacta como,

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T \quad (\text{A.5})$$

A.2 Aproximação Tipo Mínimos Quadrados

Seja \mathbf{X} uma matriz de elementos reais, de dimensão $L \times N$ com $N \geq L$, de *rank* L tal que seus primeiros $d < L$ valores singulares sejam muito maiores que os outros ($L-d$). A matriz \mathbf{X} pode ser escrita em termos da SVD segundo equação (A.1). A matriz $\hat{\mathbf{U}}$ contém as d primeiras colunas correspondentes aos d primeiros valores singulares da matriz diagonal $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ que determinam as direções mais importantes no espaço coluna de \mathbf{X} .

Pré-multiplicando e pós-multiplicando a equação (A.1) por, respectivamente, $\hat{\mathbf{U}}^T$ e $\hat{\mathbf{V}}$, obtém-se o seguinte,

$$\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}}^\perp \hat{\mathbf{\Sigma}}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T \hat{\mathbf{V}}. \quad (\text{A.6})$$

Considerando as propriedades de ortogonalidade das matrizes $\hat{\mathbf{U}}$, $\hat{\mathbf{U}}^\perp$, $\hat{\mathbf{V}}$ e $\hat{\mathbf{V}}^\perp$ dadas pelas equações (A.3) e (A.4), tem-se que $\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}}^\perp \cong \mathbf{0}$, $(\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T \hat{\mathbf{V}} \cong \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} \cong \mathbf{I}_d$ e $\hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} \cong \mathbf{I}_d$, portanto a equação (A.6) se restringe a,

$$\hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{\Sigma}}. \quad (\text{A.7})$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando a equação (A.7) por, respectivamente, $\hat{\mathbf{U}}$ e $\hat{\mathbf{V}}^T$, obtém-se o seguinte,

$$\hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^T \mathbf{X} \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}}^T. \quad (\text{A.8})$$

Os operadores de projeção ortogonal sobre os espaços coluna, núcleo, espaço linha e complemento ortogonal podem ser facilmente calculados usando a SVD como Golub e Van Loan [31],

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_C &= \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^T \\ \mathbf{\Pi}_L &= \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T \\ \mathbf{\Pi}_{C^\perp} &= \hat{\mathbf{U}}^\perp (\hat{\mathbf{U}}^\perp)^T, \\ \mathbf{\Pi}_{L^\perp} &= \hat{\mathbf{V}}^\perp (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T\end{aligned}\tag{A.9}$$

onde $\mathbf{\Pi}_C$, $\mathbf{\Pi}_L$, $\mathbf{\Pi}_{C^\perp}$ e $\mathbf{\Pi}_{L^\perp}$ denotam, respectivamente, os operadores de projeção ortogonal sobre os espaços coluna, linha e espaços complementares aos espaço coluna e linha de \mathbf{X} . Portanto, a equação (A.8) pode ser reescrita como,

$$\mathbf{\Pi}_C \mathbf{X} \mathbf{\Pi}_L = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{\Sigma}} \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{X}},\tag{A.10}$$

onde as matrizes, $\mathbf{\Pi}_C = \hat{\mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}}^T$ e $\mathbf{\Pi}_L = \hat{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{V}}^T$ de dimensão, respectivamente, iguais a $L \times L$ e $N \times N$ são os operadores de projeção ortogonal sobre, respectivamente, os espaços coluna e linha de \mathbf{X} .

A matriz $\hat{\mathbf{X}}$ calculada através da equação (A.10) é chamada de aproximação do tipo mínimos quadrados de *rank* d da matriz \mathbf{X} .

Geometricamente, $\hat{\mathbf{X}}$ é a matriz que minimiza o erro $\varepsilon = \mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}}$ segundo a norma de Frobenius. A norma de Frobenius de uma matriz \mathbf{a} de dimensão $L \times N$ é definida como a raiz quadrada da soma quadrática de seus elementos, isto é,

$$\|\mathbf{a}\|_F = \left[\sum_{j=1}^L \sum_{i=1}^N |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}\tag{A.11}$$

Pode-se mostrar que a norma de Frobenius é também equivalente a raiz quadrada da soma dos quadrados de seus valores singulares $\|\mathbf{a}\|_F = \left[\sum_{i=1}^L \sigma_i^2 \right]^{1/2}$, Golub e Van Loan [31].

Como $\hat{\mathbf{X}}$ mantém os d valores singulares mais importantes de \mathbf{X} e anula os outros ($L-d$), então,

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_F = \|\bar{\mathbf{X}} - \hat{\mathbf{X}}\| = [\sigma_{d+1}^2 + \dots + \sigma_L^2]^{1/2}. \quad (\text{A.12})$$

Uma aplicação típica do tipo de aproximação por mínimos quadrados $\hat{\mathbf{X}}$ é o caso da solução do problema $\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ quando a matriz \mathbf{X} é tem ($L-d$) valores singulares muito pequenos comparados com os primeiros. Neste caso o vetor solução \mathbf{a} $N \times 1$ é calculado por $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{X}}^+ \mathbf{b}$, onde $\hat{\mathbf{X}}^+$ denota pseudo inversa de $\hat{\mathbf{X}}$.

A.3 Aproximação Tipo Mínimos Quadrados Totais

Seja agora o seguinte problema,

$$\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{Y}, \quad (\text{A.13})$$

onde \mathbf{X} é uma matriz de dimensão $L \times N$ com $N \geq L$ de *rank* L de modo que, como antes, seus primeiros d valores singulares sejam muito maiores que os outros ($L-d$) e \mathbf{Y} uma matriz de dimensão também igual a $L \times N$. A matriz solução \mathbf{A} , de dimensão $N \times N$, para este problema poderia ser calculada via mínimos quadrados como antes, isto é, forçando cada um dos N vetores coluna de \mathbf{Y} a ser projetada no espaço coluna de $\hat{\mathbf{X}}$ por Π_C e em seguida calculando todas as soluções do tipo norma mínima. Entretanto, existe uma outra maneira de fazer isso, que consiste em projetar ambas as matrizes \mathbf{X} e \mathbf{Y} sobre um espaço coluna comum entre eles. A solução da matriz \mathbf{A} para este problema obtida desta forma é chamada solução tipo mínimos quadrados totais, e pode ser obtida usando a SVD das matrizes \mathbf{X} e \mathbf{Y} simultaneamente como,

$$[\mathbf{X} \ \mathbf{Y}] = [\hat{\mathbf{U}} \ \hat{\mathbf{U}}^\perp] \begin{bmatrix} \hat{\Sigma} & \\ & \hat{\Sigma}^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{V}}^T \\ (\hat{\mathbf{V}}^\perp)^T \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} [\hat{\mathbf{V}}_1^T \ \hat{\mathbf{V}}_2^T] + \hat{\mathbf{U}}^\perp \hat{\Sigma}^\perp [(\hat{\mathbf{V}}_1^\perp)^T \ (\hat{\mathbf{V}}_2^\perp)^T] \quad (\text{A.14})$$

onde $\hat{\mathbf{X}} = \Pi_C \mathbf{X} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}_1^T$ e $\hat{\mathbf{Y}} = \Pi_C \mathbf{Y} = \hat{\mathbf{U}} \hat{\Sigma} \hat{\mathbf{V}}_2^T$ são as matrizes de aproximações de *rank* d de, respectivamente, as matrizes \mathbf{X} e \mathbf{Y} . As matrizes $\hat{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{V}(1:N,1:d)$ e $\hat{\mathbf{V}}_2 = \mathbf{V}(N+1:2N,1:d)$ de dimensão $N \times d$ são partições de $\hat{\mathbf{V}}$. A principal característica da aproximação de *rank* d tipo mínimos quadrados totais é que as aproximações $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$ são calculadas usando a projeção sobre espaço coluna comuns de \mathbf{X} e \mathbf{Y} , note que a matriz $\hat{\mathbf{U}}$ aparece nas expressões de $\hat{\mathbf{X}}$ e $\hat{\mathbf{Y}}$.

Neste caso a matriz \mathbf{A} satisfazendo $\hat{\mathbf{X}}\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Y}}$ é obtida como $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{X}}^+ \hat{\mathbf{Y}}$.

Apêndice B

FORMULAÇÕES BÁSICAS DO MÉTODO POLYREFERENCE

O método *Polyreference* é a técnica de identificação global mais popular na abordagem do domínio do tempo. Sua formulação considera que os parâmetros de Markov $\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}$, de dimensão $m \times r$, definidos pelas equações (3.6) e (3.7), representam a solução geral da seguinte equação bloco a diferenças do tipo auto-regressiva como,

$$\mathbf{Y}(k) + \mathbf{P}_1 \mathbf{Y}(k-1) + \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}(k-2) + \dots + \mathbf{P}_L \mathbf{Y}(k-L) = \mathbf{0}_{m \times r}, \quad (\text{B.1})$$

onde as matrizes \mathbf{P}_i , $i = 1, \dots, L$, de dimensão $m \times m$, são os coeficientes matriciais de auto-regressão da equação (B.1).

Substituindo as expressões dos parâmetros de Markov $\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B}$ na equação (B.1), obtém-se, após manipulações algébricas, a seguinte equação bloco polinomial,

$$\mathbf{C} \mathbf{A}^L + \mathbf{P}_1 \mathbf{C} \mathbf{A}^{L-1} + \mathbf{P}_2 \mathbf{C} \mathbf{A}^{L-2} + \dots + \mathbf{P}_L \mathbf{C} = \mathbf{0}_{m \times 2n}. \quad (\text{B.2})$$

A equação (B.2) pode ser reescrita em termos da matriz companheira de dimensão $mL \times mL$ como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}_L & -\mathbf{P}_{L-1} & -\mathbf{P}_{L-2} & \cdots & -\mathbf{P}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-2} \\ \mathbf{CA}^{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{L-2} \\ \mathbf{CA}^{L-1} \end{bmatrix} \mathbf{A}, \quad (\text{B.3})$$

onde \mathbf{I}_m denota a matriz identidade de dimensão $m \times m$.

A equação (B.2) é a formulação básica do método *Polyreference* associada à forma canônica observável do sistema representada pela equação (B.3). Os mL autovalores da matriz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{P}_L & -\mathbf{P}_{L-1} & -\mathbf{P}_{L-2} & \cdots & -\mathbf{P}_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

são as raízes da equação polinomial (B.2) que levam aos pólos do sistema, Kailath [46].

É possível obter uma outra formulação para o método *Polyreference* considerando-se a seguinte equação bloco a diferenças,

$$\mathbf{Y}(k) + \mathbf{Y}(k-1)\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Y}(k-2)\mathbf{Q}_2 + \cdots + \mathbf{Y}(k-N)\mathbf{Q}_N = \mathbf{0}_{m \times r}, \quad (\text{B.5})$$

onde as matrizes \mathbf{Q}_i , $i=1, \dots, N$, de dimensão $r \times r$, são os coeficientes matriciais de auto-regressão da equação (B.5).

Substituindo as expressões dos parâmetros de Markov $Y(k) = CA^{k-1}B$ na equação (B.5), obtém-se, após manipulações algébricas, a seguinte equação bloco polinomial,

$$A^N B + A^{N-1} B Q_1 + A^{N-2} B Q_2 + \dots + B Q_N = \mathbf{0}_{2n \times r}, \quad (\text{B.6})$$

que pode ser reescrita na forma da matriz companheira de dimensão $rN \times rN$ como,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_N \\ \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

onde \mathbf{I}_r denota a matriz identidade de dimensão $r \times r$.

A equação (B.6) é a formulação básica do método *Polyreference* associada à forma canônica controlável do sistema representada pela equação (B.7). Os rN autovalores da matriz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_N \\ \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & \mathbf{0} & -\mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_r & -\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

são as raízes da equação polinomial (B.6) que levam aos pólos do sistema.

Apêndice C

ANÁLISE DO PROBLEMA TLS

Seja o problema,

$$Ax = b \tag{C.1}$$

onde A tem dimensão $m \times n$. O problema LS ordinário é formulado como,

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|r\|_2 \\ & \text{sujeito a } b+r \in EC(A) \end{aligned} \tag{C.2}$$

onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma Euclidiana, r uma perturbação somada ao vetor b e $EC(A)$ espaço coluna de A . Se $\|r\|_2 = \min$ e $Ax = b+r$, então x resolve o problema (C.1) por mínimos quadrados como $x = A^+b$. Nota-se que o problema LS considera que a perturbação r recai apenas sobre o vetor b .

A idéia do problema TLS consiste em considerar a perturbação recaindo tanto em b como em A . O problema TLS é formulado como,

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \|\mathbf{E} \mid r\|_F \\ & \text{sujeito a } b+r \in EC(\mathbf{A}+\mathbf{E}) \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

onde $\|\cdot\|_F$ denota a norma de Frobenius.

A equivalência entre os problemas LS e TLS é dada pela minimização tipo LS de $(\mathbf{A}+\mathbf{E})x-(b+r)$, isto é, $\min\|(\mathbf{A}+\mathbf{E})x-(b+r)\|_2$.

Se $b+r \in EC(\mathbf{A}+\mathbf{E})$, então existe um vetor $x \in \mathfrak{R}^n$ tal que $(\mathbf{A}+\mathbf{E})x=(b+r)$, ou,

$$\{[\mathbf{A} \mid b]+[\mathbf{E} \mid r]\}\begin{Bmatrix} x \\ -1 \end{Bmatrix}=0 \quad (\text{C.4})$$

A equação acima mostra que o problema TLS consiste em encontrar uma matriz de perturbação $\Delta=[\mathbf{E} \mid r]$ que tenha norma mínima tal que $\mathbf{C}+\Delta$ seja *rank* deficiente, sendo $\mathbf{C}=[\mathbf{A} \mid b]$. A SVD pode ser usada para tal propósito. A solução do problema

TLS é dada, portanto, por qualquer vetor $\begin{Bmatrix} x \\ -1 \end{Bmatrix}$ que pertença ao núcleo (ou espaço

ortogonal ao espaço linha) de \mathbf{C} . Se $\mathbf{C}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$, onde $\mathbf{U}=[u_1 \ \dots \ u_k \ u_{k+1} \ \dots \ u_m]$,

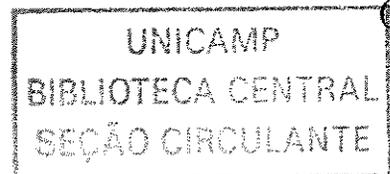
$\mathbf{V}=[v_1 \ \dots \ v_k \ v_{k+1} \ \dots \ v_{n+1}]$ e $\Sigma=\text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1}\}$ com

$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_k > \sigma_{k+1} = \dots = \sigma_{n+1}$, então $\begin{Bmatrix} x \\ -1 \end{Bmatrix}$ pertence a

$\mathbf{S}_C = \text{span}[v_{k+1} \ \dots \ v_{n+1}]$.

No caso do problema $\mathbf{P}\mathbf{H}_{(1)}=\bar{\mathbf{y}}$ do método *Polyreference*, isto equivale a escrever o seguinte,

$$\mathbf{H}_{(1)}^T \mathbf{P}^T = \bar{\mathbf{y}}^T \quad (\text{C.5})$$



Com base na discussão anterior, a solução TLS para a equação acima é qual
qualquer matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{I}_m \end{bmatrix}$ que pertença ao núcleo de $\mathbf{H}^T = \left(\mathbf{H}_{(1)}^T \mid \bar{\mathbf{y}}^T \right)$. Tomando a SVD
de \mathbf{H} como $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{\Sigma}}\hat{\mathbf{V}}^T + \hat{\mathbf{U}}^\perp\hat{\mathbf{\Sigma}}^\perp\left(\hat{\mathbf{V}}^\perp\right)^T$, o núcleo de \mathbf{H} é dado pela matriz $\hat{\mathbf{V}}^\perp$,
logo, o núcleo de \mathbf{H}^T é dado por $\hat{\mathbf{U}}^\perp$. Portanto, a solução TLS do problema $\mathbf{P}\mathbf{H}_{(1)} = \bar{\mathbf{y}}$ é
qualquer matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ -\mathbf{I}_m \end{bmatrix}$ que pertença ao $EC^\perp(\mathbf{H})$ representado por $\hat{\mathbf{U}}^\perp$, ou seja, as colunas
de \mathbf{U} correspondentes aos últimos m valores singulares σ_i .