

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA

TESE DEFENDIDA POR Dalmo Inácio

Galdez Costa E APROVADA

PELA COMISSÃO JULGADORA EM 15/02/2011

[Assinatura]  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Dalmo Inácio Galdez Costa

**Análise Numérica de Falhas em Materiais  
Compósitos Laminados Usando um Critério  
Baseado em Fenômenos Físicos**

Campinas, 2011

Dalmo Inácio Galdez Costa

# **Análise Numérica de Falhas em Materiais Compósitos Laminados Usando um Critério Baseado em Fenômenos Físicos**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Campinas

2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C823a Costa, Dalmo Inácio Galdez  
Análise numérica de falhas em materiais compósitos laminados usando um critério baseado em fenômenos físicos / Dalmo Inácio Galdez Costa. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Paulo Sollero.

Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Materiais compósitos. 2. Método dos elementos de contorno. 3. Anisotropia. I. Albuquerque, Éder Lima de. II. Sollero, Paulo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Numerical analysis of laminates failure using physical phenomena based criteria

Palavras-chave em Inglês: Composite materials, Boundary element method, Anisotropy

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Carlos Alberto Cimini Junior, Flamínio Levy Neto

Data da defesa: 15/02/2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

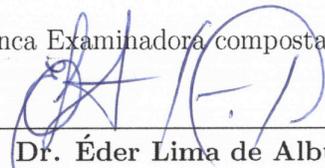
**Análise Numérica de Falhas em Materiais  
Compósitos Laminados Usando um Critério  
Baseado em Fenômenos Físicos**

Autor: Dalmo Inácio Galdez Costa

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque

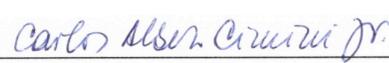
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



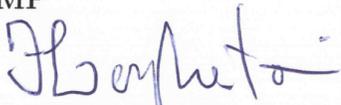
---

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente  
FT/UnB



---

Prof. Dr. Carlos Alberto Cimini Jr.  
FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. Flaminio Levy Neto  
FT/UnB

Campinas, 15 de fevereiro de 2011.

## **Dedicatória**

Dedico este trabalho à todas as pessoas que me ajudaram nesta longa caminhada.

## Agradecimentos

- À minha mãe, Rosenilde, que sempre fez tudo que esteve ao seu alcance para permitir que eu e meus irmãos pudéssemos ter uma vida plena de felicidades e realizações.
- Ao meu pai e irmãos, Domingos, Diego e Anara, pelo incentivo nos estudos.
- À minha namorada, Danúbia, grande companheira e incentivadora da minha formação, que apesar da distância sempre cuidou de mim, fazendo com que eu superasse os momentos de angústia.
- Ao meu orientador, Éder Lima de Albuquerque, por ter me aceitado como seu aluno, pelos conhecimentos transmitidos e por seu modo de lidar com a vida e com as pessoas ao seu redor.
- Ao Professor Paulo Sollero pela co-orientação.
- Aos amigos que fiz e outros cuja amizade fortaleci em Campinas, Adilto, Adriana, Audirene, Carlos Magno, Carolina, Denize, Doval, Eveline, Fabiano, Fábio Dalmazzo, Gisele Gonçalves, Giselle Barata, Hairton, Karlos, Kerlles, Lourival Matos e Patrícia, Lourival Paixão, Luís Jorge, Núbia, Raquel e Solange. Agradeço pelos muitos momentos que passamos juntos, tanto nos trabalhos quanto nos momentos de lazer.
- Aos amigos do IFMA, Professor Keyll Carlos, Luciano, Rita de Cássia, André, Gricirene, Izaque e muitos outros pela amizade e pelo apoio nos tempos da graduação.
- À Capes pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

“O verdadeiro lugar de nascimento é aquele em que lançamos pela primeira vez  
um olhar inteligente sobre nós mesmos.”  
(Marguerite Yourcenar)

# Resumo

Costa, Dalmo Inácio Galdez, *Análise Numérica de Falhas em Materiais Compósitos Laminados Usando um Critério Baseado em Fenômenos Físicos*. Campinas, 2010. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

Este trabalho apresenta uma análise da falha de laminados de materiais compósitos através de critérios baseados em fenômenos físicos. Formulações de elasticidade plana anisotrópica do Método dos Elementos de Contorno (MEC) e suas respectivas soluções fundamentais foram utilizados para calcular as deformações e as tensões no contorno e no domínio de cada uma das lâminas que formam o laminado. Os envelopes de falha do critério LaRC03 foram reproduzidos e comparados com os envelopes de falha dos critérios de Puck e Tsai-Wu. A variação da resistência longitudinal de uma lâmina com o ângulo de orientação das fibras foi analisada. Uma vez que as tensões foram previamente calculadas com o MEC, o critério LaRC03 foi utilizado para avaliar se há algum dano no laminado. O modo de falha também é analisado e os resultados discutidos. Os resultados para alguns problemas são apresentados e discutidos.

*Palavras chaves:* Materiais Compósitos, Método dos Elementos de Contorno, Critérios de Falha, Anisotropia.

# Abstract

Costa, Dalmo Inácio Galdez, *Numerical Analysis of Failure of Laminated Composite Materials Using a Criterion Based on Physical Phenomena*. Campinas, 2010. Master Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas.

This work presents a formulation of failure of laminated composite materials using a criterion based on physical phenomena. The Boundary Element Method (BEM) for anisotropic plane elasticity and its respective fundamental solutions were used to compute strains and stresses at the boundary and in the domain of each of the laminae forming the laminated. The LaRC03 failure criterion envelope was reproduced and compared with Puck's and Tsai-Wu's failure criteria as well as the longitudinal strength variation of laminae with the fiber orientation angle. Since the stresses were previously computed with BEM, the LaRC03 criterion was used to evaluate if there is any damage in the laminated. Furthermore, failure modes are observed and results were discussed. Results to some problems are presented and discussed.

*Key words:* Composite Materials, Boundary Element Method, Failure Criteria, Anisotropy.

# *Sumário*

Resumo . . . . .	vii
Abstract . . . . .	viii
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xviii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contextualização do Problema . . . . .	1
1.2 Revisão Bibliográfica . . . . .	5
1.3 Descrição do Presente Trabalho . . . . .	8
<b>2 Equações Constitutivas para Materiais Compósitos</b>	<b>9</b>
2.1 Introdução . . . . .	9
2.2 Tipos e Classificação dos Materiais Compósitos . . . . .	9
2.3 Análise Estrutural de Materiais Compósitos . . . . .	12
2.3.1 Comportamento Elástico da Lâmina de Compósito . . . . .	13
2.3.2 Comportamento Elástico de Laminados Multidirecionais . . . . .	16
2.3.3 Relações Deformação-Deslocamento de Laminados Multidirecionais . . . . .	17
2.3.4 Comportamento Elástico de Laminados Simétricos . . . . .	24
<b>3 Método dos Elementos de Contorno Para Elasticidade Anisotrópica</b>	<b>26</b>
3.1 Elasticidade Anisotrópica . . . . .	26

3.2	Formulação Integral . . . . .	33
3.3	Soluções Fundamentais Anisotrópicas . . . . .	36
3.4	Equações Integrais Singulares . . . . .	39
3.5	Formulação dos Elementos de Contorno Discretizada . . . . .	40
3.6	Integração no Espaço . . . . .	42
3.7	Cálculo dos Deslocamentos e Densidades de Forças em Pontos Internos . . . . .	45
3.8	Densidade de Força no Contorno . . . . .	46
<b>4</b>	<b>CrITÉRIOS de Falha para Materiais Compósitos</b>	<b>49</b>
4.1	Introdução . . . . .	49
4.2	CrITÉrio de Falha LaRC03 . . . . .	49
4.2.1	Determinação das Tenacidades à Fratura Interlaminares . . . . .	50
4.2.2	CrITÉrio para Falha da Matriz sob Compressão Transversal . . . . .	52
4.2.3	CrITÉrio para a Falha da Matriz sob Tração Transversal . . . . .	55
4.2.4	CrITÉrio para Falha da Fibra sob Tração Longitudinal . . . . .	59
4.2.5	CrITÉrio para Falha da Fibra sob Compressão Longitudinal . . . . .	60
4.3	CrITÉrio de Falha Tsai-Wu . . . . .	62
4.4	CrITÉrio de Puck . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>68</b>
5.1	Introdução . . . . .	68
5.2	World Wide Failure Exercise (WWFE) . . . . .	68
5.3	Envelopes de Falha para Laminados Unidirecionais . . . . .	70
5.4	Análise de Tensões em Laminados Simétricos e Avaliação da Falha . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>83</b>

6.1	Conclusões . . . . .	83
6.2	Propostas de Trabalhos Futuros . . . . .	84
	<b>Referências</b>	<b>85</b>

# Símbolos

## Letras gregas

$\alpha, \alpha_0$  = Ângulo do plano de fratura.

$\delta$  = Delta de dirac.

$\Delta_k$  = Operador diferencial.

$\varepsilon$  = Deformação normal.

$\phi$  = Vetor de funções de forma e ângulo de desalinhamento das fibras.

$\gamma$  = Deformação cisalhante.

$\eta_{jk,l}, \eta_{l,jk}$  = Coeficientes de influência mútua de primeira e segunda espécie.

$\eta$  = Coeficiente de fricção interna.

$\kappa$  = Curvaturas do laminado.

$\Lambda$  = Pâmetros constantes.

$\mu_i$  = Raízes complexas.

$\nu_{ij}$  = Coeficientes de poisson

$\theta$  = Ângulo.

$\rho$  = Densidade.

$\sigma$  = Tensões normais.

$\tau$  = Tensões cisalhantes.

$\xi$  = Coordenada adimensional ao longo do elemento de contorno.

$\zeta$  = Coeficiente de Chentsov.

## Letras arábicas

$a$  = Comprimento da trinca no corpo de prova *Double Cantilever Beam*

$a_0$  = Comprimento da trinca idealizada

$a_{ijkl}$  = Tensor de flexibilidade reduzido

$\mathbf{A}$  = Matriz de rigidez extensional.

$b$  = Força de corpo.

$b$  = Largura do corpo de prova *Double Cantilever Beam*

$\mathbf{B}$  = Matriz de rigidez de acoplamento.

$C_{ijkl}$  = Tensor de constantes elásticas.

$\mathbf{D}$  = Matriz de rigidez de flexão.  
 $E_i$  = Módulo de Elasticidade.  
 $F$  = Função tensão de Airy.  
 $f_i, f_{ij}$  = Tensores de resistência de segunda e quarta ordem.  
 $G_{ij}$  = Módulo de Cisalhamento.  
 $G$  = Taxa de dissipação de energia.  
 $g$  = Razão de tenacidades.  
 $h$  = Espessura total do laminado.  
 $h$  = Espessura da viga em balanço do corpo de prova *Double Cantilever Beam*.  
 $J$  = Jacobiano.  
 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  = Tensores de momento e Força aplicados ao laminado.  
 $n$  = Vetor normal.  
 $P$  = Máxima Carga Aplicada no ensaio para determinação da tenacidade à fratura.  
 $\mathbf{Q}$  = Matriz de rigidez.  
 $\bar{\mathbf{Q}}$  = Matriz de rigidez transformada.  
 $q_{ik}$  = Matriz de parâmetros complexos.  
 $S_{ijkl}$  = Tensor de flexibilidade.  
 $S_{ij}$  = Resistências ao Cisalhamento.  
 $t_i$  = Vetor de forças de superfície.  
 $t$  = Espessura da lâmina.  
 $\mathbf{T}$  = Matriz de transformação.  
 $u, v, w$  = Deslocamento nas direções 1,2 e 3, respectivamente.  
 $\mathbf{U}_{ik}, \mathbf{T}_{ik}$  = Soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície.  
 $\mathcal{U}$  = Função potencial.  
 $V_f$  = Fração volumétrica de fibras.  
 $w_i$  = Pesos de gauss.  
 $x_1, x_2$  = Sistema de coordenadas da lâmina.  
 $X, Y, Z$  = Resistências mecânicas nas direções 1,2 e 3, respectivamente.  
 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  = Sistema de coordenadas do laminado.  
 $z_k$  = Coordenadas das lâminas ao longo da espessura.

## Subscritos

$\Gamma$  = Contorno.

$\Omega$  = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

eff = Para tensões efetivas

is = *in situ*

$I, II$  = Modos de solitação da trinca.

## **Sobrescritos**

1, 2, 3 = Nós do elemento.

• = Soluções fundamentais.

$T$  = Tração.

$C$  = Compressão.

$L$  = Longitudinal.

$T$  = Transversal.

# *Lista de Figuras*

1	MQ-9 Reaper UAV de vigilância e ataque (AIRFORCE-TECHNOLOGY.COM, 2010). . . . .	3
2	Pás de uma turbina eólica construídas com material compósito (VESTAS, 2010). . . . .	4
3	Aeronave civil da Companhia Aérea Boeing, 787 Dreamliner. . . . .	5
4	Lâmina ortotrópica no plano $(1, 2)$ . . . . .	11
5	Sistemas de coordenadas da lâmina $(1, 2)$ e do laminado $(x, y)$ . . . . .	15
6	Lâmina antes e após a deformação (DANIEL; ISHAI, 2006). . . . .	17
7	Camada $k$ no laminado multidirecional. . . . .	20
8	Elemento contendo forças e momentos resultantes em um laminado. . . . .	21
9	Laminado multidirecional com a notação das coordenadas para as lâminas individuais (DANIEL; ISHAI, 2006). . . . .	22
10	Laminado simétrico com lâminas de mesma orientação e propriedades em coordenadas equivalentes $k$ e $k'$ . . . . .	25
11	Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular. . . . .	39
12	Transformação de coordenadas $x_1 - x_2$ para $\xi$ . . . . .	43
13	Tensões no contorno. . . . .	47
14	Ensaio para a determinação de $G_{Ic}$ a partir de um corpo de prova DCB (VELMURUGAN; SOLAIMURUGAN, 2007). . . . .	51
15	Arranjo do ensaio para a determinação de $G_{IIc}$ a partir de um corpo de prova ENF, onde $P$ , $L$ e $H$ são, respectivamente, o carregamento aplicado, o comprimento e a espessura do corpo de prova. . . . .	52

16	Plano de fratura proposto idealizado por Hashin (1980) e aprimorado por Puck e Schurmann (1998) (DÁVILA; CAMANHO; ROSE, 2005). . . . .	53
17	Círculo de Mohr para compressão uniaxial, reproduzido de Dávila, Camanho e Rose (2005). . . . .	54
18	Envelope de falha $\sigma_{22} - \tau_{12}$ para vários ângulos do plano de fratura (Reproduzido de Dávila, Camanho e Rose (2005)). . . . .	56
19	Micrografia com a região de dobramento das fibras, mostrando (1) a região de dobramento e (2) a quebra das fibras (PINHO; ROBINSON; IANNUCCI, 2006). . . . .	60
20	Imperfeição no alinhamento da fibra, idealizado como ondulação localizada (DÁVILA; CAMANHO; ROSE, 2005). . . . .	61
21	Ângulos dos planos de fratura para os modos de falha A, B e C do critério de Puck (PUCK; KOPP; KNOPS, 2002). . . . .	67
22	Envelope de falha $\sigma_{22} - \tau_{12}$ para um laminado unidirecional de E-glass/LY556 epoxy. . . . .	70
23	Envelope de falha $\sigma_{11} - \tau_{12}$ para um laminado unidirecional de T300/BSL914 C (Carbono/epóxi). . . . .	71
24	Envelope de falha $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ para laminado unidirecional de E-glass/MY750 epoxy. . . . .	72
25	Resistência à compressão em função da orientação das fibras para laminados de AS4-3502 $[\theta / -\theta / -\theta / \theta]_{6s}$ . . . . .	73
26	Discretização do contorno do laminado e sentido dos carregamentos aplicados. . . . .	74
27	Índices de falha para a lâmina de número 1. . . . .	75
28	Índices de falha para a lâmina de número 2. . . . .	76
29	Modos de falha para a lâmina 2, ponto a ponto. . . . .	77
30	Geometria e carregamento do laminado proposto para a segunda análise. . . . .	79
31	Índice de falha para a lâmina número 1 da segunda análise. . . . .	80
32	Índice de falha para a lâmina de número 2 da segunda análise. . . . .	81

33	Modos de falha para a lâmina 2 ( $50^\circ$ ). . . . .	82
34	Modos de falha no furo central da lâmina de número 2. . . . .	82

## *Lista de Tabelas*

1	Propriedades de materiais estruturais convencionais e compósitos fibrosos bidirecionais (AGARWAL; BROUTMAN, 1990) . . . . .	3
2	Propriedades mecânicas e de resistência utilizadas na abordagem mesomecânica	13
3	Propriedades mecânicas e limites de resistência de lâminas com reforço unidirecional analisados neste trabalho (SODEN; HINTON; KADDOUR, 2002). . . . .	69
4	Propriedades mecânicas e limites de resistência da lâmina de Bóro-Epoxi. . .	78
5	Valores máximos e mínimos dos índices de falha no laminado da segunda análise.	78

# ***1 Introdução***

## **1.1 Contextualização do Problema**

O projeto de componentes estruturais é, sem dúvida nenhuma, muito importante para a Engenharia Mecânica. Toda a base teórica da formação de um engenheiro, incluindo as disciplinas iniciais como Cálculo e Física, continuando com as disciplinas específicas de cada Engenharia, serão determinantes para a correta concepção da forma que atenderá a necessidade de um projeto mecânico. Além de realizar uma determinada função em um equipamento, o componente deverá também suportar todos os carregamentos ao qual estará submetido de forma a manter sua integridade estrutural e não cessar sua funcionalidade. Para tal, é muito importante que o material, sua quantidade e forma, sejam dimensionados de maneira racional. Como uma das variáveis mais importantes, o material deve ser entendido e suas propriedades conhecidas.

Um dos tipos de materiais que vêm encontrando larga aplicação na área de engenharia são os materiais compósitos. Os materiais de engenharia convencionais têm sido classificados em três grandes grupos: materiais metálicos, cerâmicos e poliméricos. Os materiais compósitos são uma espécie de combinação entre dois ou mais materiais dessas categorias (NETO; PARDINI, 2006). Em se tratando de compósitos estruturais, o conceito é um pouco mais específico e diz que é um material que consiste de duas ou mais fases em escala macroscópica, cujo desempenho mecânico e propriedades são projetados para serem superiores àqueles dos materiais constituintes quando analisados de maneira isolada. Uma dessas fases, normalmente descontínua, mais rígida e mais resistente, é chamada de reforço. A outra, fase menos resistente e contínua, é chamada de matriz. Em algumas situações é possível que, devido às interações químicas ou outro efeito do processamento, surja, entre as duas fases, uma terceira chamada de interfase que, embora possua dimensões reduzidas, pode ser de fundamental importância no controle dos mecanismos de falha, propagação de falha, tenacidade

à fratura e no comportamento geral da relação tensão-deformação do material. As propriedades de um material compósito dependem das propriedades dos materiais constituintes, da geometria e da maneira como as fases estão distribuídas. Um dos parâmetros mais importantes, determinado pelo processo de fabricação adotado, é a fração volumétrica do reforço. O fato das propriedades serem também diretamente influenciadas pela disposição do reforço possibilita ao engenheiro determinar uma orientação que seja mais favorável à determinada aplicação, desenvolvendo assim um componente otimizado (DANIEL; ISHAI, 2006).

As aplicações de materiais compósitos são muitas e aumentam continuamente. Entre estas se destacam a aeroespacial, automotiva, naval, energia, biomédica e esportes. A alta rigidez, alta resistência mecânica e baixa densidade são características que fazem com que este tipo de material seja extremamente desejável em estruturas aeroespaciais, em aviões civis e militares. São exemplos o Boeing 777, o Boeing 787 "Dreamliner" e o Airbus A380. No caso do Boeing 787, os materiais compósitos correspondem a mais de 50% do peso da aeronave. Pequenas aeronaves não tripuladas em alguns casos são feitas inteiramente de materiais compósitos (Figura 1) (AIRFORCE-TECHNOLOGY.COM, 2010). Como exemplo, pode-se citar também um componente de amortecedor fabricado de compósito de fibra de vidro/resina epóxi que possui 20% do peso de seu original fabricado em aço (DANIEL; ISHAI, 2006). Na área de produção de energia, compósitos de fibra de carbono têm sido usados nas pás de turbinas de geradores eólicos aumentando de forma significativa a potência gerada e reduzindo significativamente os custos (Figura 2, cortesia de Vestas Wind Systems A/S (VESTAS, 2010)). Na biomedicina, as aplicações incluem próteses e partes artificiais de membros. Produtos esportivos de alto desempenho também se utilizam deste tipo de material, tais como estrutura de bicicletas de competição, raquetes de tênis, esquis etc.

Os materiais compósitos possuem vantagens exclusivas em relação aos materiais convencionais, tais como alta resistência mecânica específica, alta rigidez específica, longa vida em fadiga, baixa densidade e adaptabilidade à função requerida da estrutura. O fundamento para esse desempenho estrutural superior está na alta resistência específica (resistência por densidade) e na alta rigidez específica (módulo de elasticidade por densidade) e nas características anisotrópicas e heterogêneas do material. Estas características tornam a modelagem do comportamento mecânico do material compósito muito mais trabalhosa. Por outro lado, elas possibilitam um ajuste na manufatura, dotando-o de propriedades adequadas para atender a um requisito específico de projeto (NETO; PARDINI, 2006). A comparação entre as propri-



Figura 1: MQ-9 Reaper UAV de vigilância e ataque (AIRFORCE-TECHNOLOGY.COM, 2010).

idades de dois metais com as de materiais compósitos reforçados com tecido ou arranjos de fibras a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , ou seja, bidirecionais e com frações volumétricas de fibras,  $V_f$ , entre 57 e 60% pode ser observada na Tabela 1.

Tabela 1: Propriedades de materiais estruturais convencionais e compósitos fibrosos bidirecionais (AGARWAL; BROUTMAN, 1990)

Material	$V_f$ %	Módulo de Elasticidade $E$ (GPa)	Resistência Mecânica $\sigma_u$ (GPa)	Densidade $\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	Módulo Específico ( $E/\rho$ )	Resistência Específica ( $\sigma_u/\rho$ )
Aço doce		210	0,45-0,83	7,8	26,9	0,058-0,106
Alumínio						
2024-T4		73	0,41	2,7	27	0,152
6061-T6		69	0,26	2,7	25	0,096
E-glass-epoxy	57	21,5	0,57	1,97	10,9	0,26
Kevlar 49-epoxy	60	40	0,65	1,40	29,0	0,46
Carbon fibre-epoxy	58	83	0,38	1,54	53,5	0,24
Boron-epoxy	60	106	0,38	2,00	53,0	0,19

O material compósito estrutural possui um certo grau de anisotropia devido às diferentes propriedades de seus constituintes e à orientação das fibras imersas na matriz, o que faz com que sua análise estrutural seja bem mais complexa. O atraso de mais de dois anos do voo inaugural do Boeing 787 Dreamliner (Figura 3) é um exemplo de como pode ser complicado projetar componentes com esse material. Em grande parte, esse atraso foi devido a problemas



Figura 2: Pás de uma turbina eólica construídas com material compósito (VESTAS, 2010).

de projeto. Em situações como esta, os métodos numéricos são largamente utilizados. Dentre eles está o Método dos Elementos de Contorno (MEC) que é bastante utilizado por possuir, entre outras características, alta taxa de convergência em problemas com altos gradientes (ALBUQUERQUE, 2001).

É importante para o dimensionamento de um componente que se tenha conhecimento de suas propriedades. Além disso, é importante também que se tenha um critério para avaliar se o material virá ou não a falhar sob a ação de um determinado estado de tensões. Para materiais isotrópicos, critérios como o critério de Tresca e o de Von Mises podem ser usados. Para materiais compósitos, critérios específicos mais complexos foram desenvolvidos. Teorias macromecânicas de falha foram propostas através da extensão e adaptação de teorias de falha isotrópicas, fazendo com que estas considerem a anisotropia do compósito (HILL, 1947). Primeiramente estas foram desenvolvidas com o único objetivo de identificar a possibilidade de falha. Porém, logo se percebeu a necessidade de incluir a previsão do modo de falha, ou seja, como o material compósito falha sob um estado de tensões arbitrário. Devido à interação matriz-reforço, esse tipo de material possui vários modos de falha que são determinantes na mudança das propriedades e em uma eventual análise da propagação de danos no material. Esse segundo tipo de critério se baseia em fenômenos físicos para a análise (DANIEL; ISHAI,



Figura 3: Aeronave civil da Companhia Aérea Boeing, 787 Dreamliner.

2006).

O presente trabalho efetua uma análise numérica da falha em compósitos laminados através da utilização de um critério baseado em fenômenos físicos, além da análise dos modos de falha previstos.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

Os principais temas abordados nesta dissertação são a análise estrutural numérica de compósitos laminados usando o Método dos Elementos de Contorno (MEC) com a aplicação de um critério de falha baseado em fenômenos físicos, com a posterior análise do modo de falha gerado. Entre os vários métodos numéricos existentes, o MEC é um método que possui vantagens no que diz respeito às suas características básicas. Como exemplo, a discretização do problema se torna mais simples tendo em vista que é necessário discretizar apenas o contorno. O MEC também possui uma alta taxa de convergência em problemas com altos gradientes, que é o caso de estruturas que possuem descontinuidades geométricas ou concentradores de tensão. Também possui algumas desvantagens e a principal delas para problemas de elasticidade anisotrópica é a dificuldade na obtenção de soluções fundamentais. Ape-

sar desta dificuldade, várias formulações para materiais anisotrópicos foram desenvolvidas utilizando o MEC. Entre as formulações de elasticidade plana pode-se citar Sollero e Aliabadi (1993, 1995), Deb (1996), Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2002, 2004) e Albuquerque, Sollero e Fedelinski (2003a, 2003b).

Para se fazer uma análise estrutural de um material compósito laminado é necessário, após o cálculo das tensões, avaliar as falhas e os respectivos danos causados na estrutura. De maneira geral, um elemento estrutural falha quando deixa de realizar sua função adequadamente. Portanto, a definição de falha pode variar para cada tipo de aplicação. No caso dos materiais compósitos, de acordo com Agarwal e Broutman (1990), a falha pode se dar das seguintes maneiras: quebra das fibras, microtrincamento da matriz, separação das fibras da matriz (descolamento das fibras) e separação das lâminas do laminado compósito (delaminação). Para prever o estado de tensão no qual as falhas irão ocorrer, são utilizados experimentos que mostram os limites de resistência do material em carregamentos com direções específicas. Com o conhecimento dos valores limites de tensão do material, deve-se aplicar um critério de falha para avaliar se a falha do material ocorrerá em um estado de tensão qualquer. O trabalho de Hill (1947), que sugere uma teoria para descrever em uma escala macroscópica o escoamento e o fluxo plástico em um metal anisotrópico (a anisotropia considerada neste trabalho é aquela resultante de orientação preferencial), serviu de base para que Azzi e Tsai (1965) desenvolvessem o conhecido critério Tsai-Hill. Alguns anos depois, Tsai e Wu (1971) desenvolveram o critério Tsai-Wu, largamente utilizado atualmente mas que, apesar da fácil implementação, não permite identificar, sozinho, o modo de falha sofrido pelo material. Este foi desenvolvido a partir de uma função escalar de dois tensores de resistência, que satisfaz as condições dadas pelos invariantes à transformação de coordenadas e trata dos termos de interação como componentes independentes. Este critério leva em consideração as diferenças entre as resistências em tensões negativas e positivas e pode ser especializado para diferentes tipos de simetria do material, espaço multi-dimensional e tensão multi-axial.

Segundo Hashin (1980), um critério de falha ideal para compósitos fibrosos unidirecionais é aquele que consegue distinguir entre os vários modos de falha e modelar cada um separadamente. A identificação de cada modo de falha, ainda segundo Hashin (1980), é indispensável para modelagem da propagação de danos. Por exemplo, através de uma análise das tensões do laminado é possível, utilizando-se um critério desta natureza, dizer não só que o material

falhou mas também como o material falhou, se por ruptura da fibra, trincamento da matriz, delaminação etc. Neste trabalho, Hashin estabeleceu um critério de falha tridimensional para compósitos fibrosos unidirecionais em termos de polinômios quadráticos, os quais são expressos em termos dos invariantes do estado de tensão médio aplicado a materiais transversalmente isotrópicos. Quatro diferentes modos de falha (modos de tensão e compressão da fibra e da matriz) foram modelados separadamente. Isso resultou em uma superfície de falha suave por partes. Anos antes, Hashin e Rotem (1973) introduziram um método parcialmente iterativo baseado nos modos de falha. Os modelos desenvolvidos ficaram conhecidos como critério de Hashin. Por nem sempre se ajustar aos dados experimentais, vários trabalhos sugeriram mudanças, dentre eles o trabalho de Puck e Schurmann (1998) que sugere um plano de ação que leva em conta um aumento da resistência ao cisalhamento da matriz quando existe uma tensão normal transversal de compressão moderada. A determinação do ângulo de fratura é apresentada neste artigo.

Hinton e Soden (1998) realizaram um estudo no qual participaram vários pesquisadores e que ficou conhecido como World Wide Failure Exercise (WWFE). Este estudo teve como intenção apresentar uma descrição compreensiva da maioria das teorias de falha disponíveis até aquele momento e comparar as capacidades preditivas diretamente entre as teorias e das teorias com dados experimentais. Em trabalho posterior, Puck e Schurmann (2002) mostraram que seu critério, conhecido como critério de Puck, apresentava boa concordância com os dados experimentais do WWFE. Porém, Dávila, Camanho e Rose (2005) afirmam que a abordagem semi-empírica do critério de Puck usa vários parâmetros não físicos do material e que podem ser difíceis de quantificar sem que se tenha um conhecimento aprofundado do material.

De acordo com Dávila, Camanho e Rose (2005), os mecanismos que levam à falha em um material compósito ainda não estão completamente entendidos, em especial a compressão da matriz e da fibra. O entendimento inadequado destes mecanismos e a dificuldade no desenvolvimento de modelos dos modos de falha de fácil utilização podem explicar as previsões imprecisas da maioria dos participantes do WWFE. Os resultados do exercício indicam que a predição da maioria das teorias difere significativamente das observações experimentais ainda que estivessem analisando apenas laminados simples. Dávila, Camanho e Rose (2005) dizem ainda que a incerteza na predição da iniciação e da progressão do dano em compósitos sugere a necessidade de rever as teorias de falha existentes, avaliar sua capacidade e de-

envolver novas teorias se for necessário. Seu trabalho descreve um novo conjunto de seis critérios fenomenológicos para predição da falha de laminados unidirecionais do tipo FRP (*Fibre Reinforced Polymer*), tal trabalho ficou conhecido como LaRC03.

Em trabalhos posteriores Puck e Mannigel (2007) abordaram o problema do ponto de vista da análise das tensões do laminado, descrevendo a influência do carregamento combinado  $(\sigma_2, \tau_{21})$  com a tensão normal  $\sigma_2$  atuando na deformação cisalhante  $\gamma_{21}$  e  $\tau_{21}$  atuando na deformação normal  $\varepsilon_2$ . Melhorias nos modelos para o caso de fibras sob compressão também foram propostas em Pinho, Robinson e Iannucci (2009a, 2009b). Finalmente, trabalhos mais recentes ((VELMURUGAN; SOLAIMURUGAN, 2007; LAFFAN et al., 2010a, 2010b)) desenvolveram técnicas otimizadas de obtenção das propriedades de tenacidade à fratura intralaminar e interlaminar.

### 1.3 Descrição do Presente Trabalho

Neste trabalho será feita uma análise das tensões em laminados de materiais compósitos utilizando o Método dos Elementos de Contorno e, de posse desses resultados, será aplicado o critério de falha LaRC03, verificando suas predições de falha e dos modos de falha para laminados sob diferentes carregamentos. Serão feitas também comparações entre os dados experimentais e os valores obtidos com o critério citado, além de sua comparação com outras teorias de falha.

No capítulo 2 serão apresentadas as equações constitutivas para materiais compósitos e, mais especificamente, para laminados multidirecionais e simétricos. No capítulo 3 será apresentada a teoria referente à elasticidade e ao Método dos Elementos de Contorno para materiais anisotrópicos. No capítulo 4 as teorias de falha serão apresentadas, incluindo a teoria do critério LaRC03. No capítulo 5 os resultados da aplicação dos critérios Tsai-Wu, Puck e LaRC03 serão mostrados. No capítulo 6 serão feitas as considerações finais e conclusões do trabalho, assim como propostas para trabalhos futuros.

## ***2 Equações Constitutivas para Materiais Compósitos***

### **2.1 Introdução**

Os materiais compósitos, segundo Agarwal e Broutman (1990), podem ser considerados como materiais consistindo de dois ou mais materiais quimicamente distintos, em escala macroscópica, tendo uma interface que os separa. Comumente são formados por uma fase descontínua envolvida por uma fase contínua. A primeira, denominada reforço ou material de reforço, é normalmente mais rígida e resistente que a segunda, denominada matriz. Suas propriedades são fortemente influenciadas pelos materiais dos quais são formados, pela distribuição destes materiais e pela interação entre eles. As propriedades do compósito podem ser ponderadas pelas respectivas frações volumétricas de seus constituintes, ou estes podem interagir de tal maneira que as novas propriedades não podem ser calculadas desta maneira. Tendo isso em vista, ao se descrever um material compósito como um sistema, além de especificar as propriedades dos materiais constituintes, deve se especificar a geometria e a orientação do reforço em relação a um sistema de referência. A geometria do reforço pode ser descrita pela sua forma, tamanho e distribuição de tamanho. A forma das unidades do reforço podem ser, às vezes, aproximada por esferas ou cilindros. A forma, o tamanho, juntamente com a concentração são determinantes no nível de interação entre o reforço e a matriz.

### **2.2 Tipos e Classificação dos Materiais Compósitos**

Muitos materiais compósitos tem sido fabricados com o intuito de se obter materiais com melhores propriedades mecânicas, físicas e químicas. Dessa forma, uma boa maneira

de classificá-los é agrupando-os pelo mecanismo utilizado para melhorar a sua resistência. Os materiais compósitos formados por duas fases são então classificados em três grandes categorias que dependem do tipo, da geometria e da orientação do reforço. São os compósitos particulados, compósitos descontínuos ou de pequenas fibras e compósitos de fibra contínua (AGARWAL; BROUTMAN, 1990).

Compósitos particulados consistem de partículas de várias formas e tamanhos que estão aleatoriamente dispersas na matriz. Em virtude destas características, este tipo de compósito pode ser considerado como sendo quasi-homogêneo e quasi-isotrópico em uma escala muito maior que o tamanho da partícula e de seu espaçamento. São exemplos deste tipo de material: o concreto, o vidro reforçado com flocos de mica, polímeros frágeis reforçados com partículas com propriedades próximas a de borrachas, partículas de chumbo em ligas de cobre para melhorar a usinabilidade etc. Os compósitos descontínuos contém pequenas fibras, nanotubos ou "whiskers" como reforço. Essas pequenas fibras, que possuem alta razão de aspecto, podem ser ou não aleatoriamente orientadas. Por isso um material deste tipo pode ser quasi-isotrópico (fibras aleatoriamente orientadas), ou ser anisotrópico ou, mais especificamente, ortotrópico (fibras orientadas). Nanocompósitos reforçados com nanotubos de carbono são exemplos desta categoria. Os compósitos do terceiro tipo são reforçados por fibras longas e contínuas que são as mais eficiente do ponto de vista de rigidez e resistência. Estas fibras podem ser todas paralelas (compósito fibroso unidirecional), podem ser orientadas em ângulos retos em relação umas as outras (compósito "cross ply"), ou podem ser orientados em várias direções (compósito fibroso multidirecional). Este último caso pode ser caracterizado como um material quasi-isotrópico, dependendo das direções da fibra e de sua distribuição.

Além da classificação pelo tipo de fibra, os compósitos podem ainda ser classificados pelo tipo da matriz usada: poliméricas, metálicas, cerâmicas e feitas de carbono. Compósitos de matriz polimérica incluem as resinas termofixas (epoxy, poliéster), ou termoplásticas (polisulfona) reforçadas com fibras de vidro, carbono, aramida ou aquelas feitas de boro. De maneira geral, são usadas em aplicações em que as temperaturas são relativamente baixas. Compósitos de matriz metálica consistem de metais ou ligas (alumínio, magnésio, titânio, cobre) reforçados com fibras de boro, carbono ou cerâmica. Seu limite máximo de temperatura é determinado pela temperatura de fusão da matriz metálica. Compósitos de matriz cerâmica são formados por uma matriz cerâmica que pode ser o óxido de alumínio, vitrocerâmicas e compostos de silício. Este tipo é reforçado com fibras também de cerâmica e se adaptam bem

em aplicações de altas temperaturas. Compósitos Carbono/carbono são formados de uma matrix de carbono ou grafite reforçada com fios ou tramas de fibras de carbono. Eles possuem propriedades singulares, tais como: relativa alta rigidez e resistência a altas temperaturas, agregado ao baixo coeficiente de expansão térmica e à baixa densidade. Além dos tipos descritos até aqui, existem também os compósitos laminados que consistem de finas camadas unidas, tais como os bimetais, metais folheados, madeira compensada, fórmica e muitos outros. Neste trabalho estudaremos compósitos de fibras contínuas, mais especificamente os compósitos laminados (DANIEL; ISHAI, 2006).

Uma lâmina é uma camada plana (ou curva) de fibras unidirecionalmente dispostas ou na forma de tecidos. A lâmina é um material ortotrópico com os eixos principais na direção das fibras (longitudinal), normal às fibras no plano da lâmina (transversal) e normal ao plano da lâmina. Esses eixos, conforme a Figura 4, são denominados 1, 2 e 3, respectivamente. Já um laminado é feito de duas ou mais lâminas unidirecionais empilhadas em várias orientações. As lâminas podem ter várias espessuras e consistir de diferentes materiais. Considerando que a orientação dos eixos principais varia de lâmina para lâmina, é mais conveniente analisar os laminados usando um sistema de coordenadas fixo, como mostrado na Figura 5. A orientação de uma lâmina é dada pelo ângulo entre o eixo de referência  $x$  e a direção das fibras (1) da lâmina em questão, medido no plano  $x - y$  de referência em sentido anti-horário. Compósitos laminados que contém lâminas de dois ou mais tipos de material são conhecidas como compósitos híbridos. Laminados compósitos são designados indicando o número, tipo, orientação e sequência de empilhamento das várias lâminas.

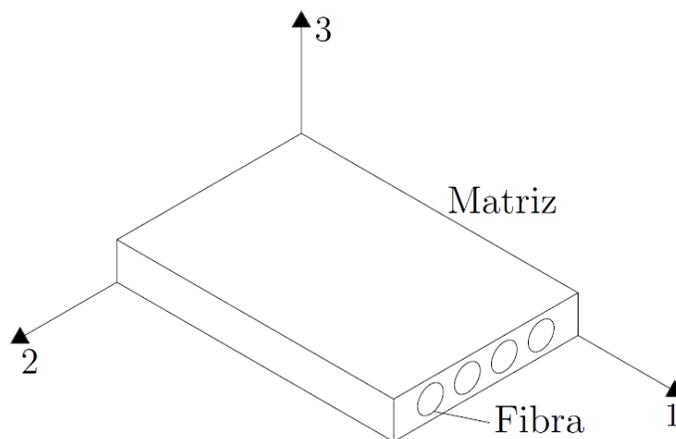


Figura 4: Lâmina ortotrópica no plano (1, 2).

## 2.3 Análise Estrutural de Materiais Compósitos

Materiais compósitos podem ser vistos e analisados em diferentes níveis e escalas: na escala micro, ou seja, da fibra e matriz, na escala meso, ou seja do ponto de vista da lâmina e do laminado, ou na escala macro, considerando o material homogêneo e sob os carregamentos de projeto (TSAI, 2008).

Na escala micro, a escala de observação é da ordem do diâmetro da fibra, do tamanho da partícula ou dos interstícios da matriz entre os reforços. A micromecânica é o estudo da interação entre os constituintes em um nível microscópico. Trata dos estados de tensão e deformação dos constituintes e de falhas locais, tais como falha da fibra (tração, flambagem, quebra), falha da matriz (tração, compressão, cisalhamento) e falha interfacial (descolamento da fibra, matriz e da interface, delaminação). A micromecânica é particularmente importante no estudo das propriedades elásticas e dos mecanismos de falha e resistência, tenacidade à fratura, vida em fadiga, os quais são fortemente influenciados por características locais que não podem ser integradas ou tomadas com seu valor médio. A micromecânica também permite a predição do comportamento médio no nível da lâmina, como função das propriedades dos constituintes e das condições locais, bem como a avaliação da qualidade dos compósitos através da determinação da fração volumétrica de vazios (DANIEL; ISHAI, 2006).

Na escala meso é normalmente mais rápido e eficiente considerar o material homogêneo, apesar de anisotrópico, e usar propriedades médias na análise. Esse tipo de análise é chamada mesomecânica e considera a lâmina unidirecional como um material anisotrópico quasi-homogêneo com suas próprias propriedades médias de rigidez e resistência. Critérios de falha podem ser expressos em termos da tensão média e da resistência da lâmina sem fazer referência a qualquer mecanismo de falha em particular. Esta abordagem, que assume continuidade do material, é recomendada no estudo geral do comportamento elástico, viscoelástico ou higrotérmico de compósitos laminados e estruturas. Na escala macro, a análise é aplicada na forma da teoria do laminado, com seu comportamento geral descrito como uma função das propriedades da lâmina e da sequência de empilhamento. Esta é a abordagem macromecânica, onde métodos como o dos elementos finitos ou dos elementos de contorno, juntamente com a teoria dos laminados, podem prever o comportamento elástico da estrutura assim como o estado de tensão em cada lâmina.

As propriedades básicas de uma lâmina para a utilização na abordagem mesomecânica

necessárias para análise e projeto são as propriedades médias da lâmina. As propriedades e a convenção adotada estão resumidas na Tabela 2.

Tabela 2: Propriedades mecânicas e de resistência utilizadas na abordagem mesomecânica

Notação	Descrição das propriedades
$E_1, E_2, E_3$	Módulos de elasticidade nas direções principais 1,2 e 3
$G_{12}, G_{23}, G_{13}$	Módulos de cisalhamento nos planos 1 – 2, 2 – 3 e 1 – 3
$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$	Coefficientes de Poisson
$X^T, Y^T, Z^T$	Resistências a tração nas direções principais
$X^C, Y^C, Z^C$	Resistências a compressão nas direções principais
$S_{12}, S_{23}, S_{13}$	Resistências ao cisalhamento nas direções principais

### 2.3.1 Comportamento Elástico da Lâmina de Compósito

Uma lâmina bidimensional no plano (1,2), na qual as fibras estão imersas numa matriz e alinhadas unidirecionalmente (Figura 4), é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por (DANIEL; ISHAI, 2006):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde  $Q_{ij}$  são as componentes da matriz de rigidez, ou seja:

$$\mathbf{Q} = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}. \quad (2.2)$$

Em termos das constantes de engenharia, as componentes do tensor de rigidez podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), & Q_{22} &= E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}), \\ Q_{66} &= G_{12}, & Q_{16} &= Q_{26} = 0, \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_1/(1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2/(1 - \nu_{12}\nu_{21}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sendo a lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas independentes: os módulos de elasticidade longitudinais  $E_1$  e  $E_2$  nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal  $G_{12}$  e a razão de Poisson  $\nu_{12}$ . A quinta constante elástica,  $\nu_{21}$ , pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da

matriz  $\mathbf{Q}$ ,

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2. \quad (2.4)$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina (12) não são coincidentes com os eixos do laminado ( $xy$ ). Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual deve ser transformada para o eixo de referência do laminado (Figura 5) para então se determinar a relação constitutiva. Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}, \quad (2.6)$$

onde  $[\sigma]_{x,y}$  e  $[\varepsilon]_{x,y}$  são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado,  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  são os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

sendo

$$m = \cos \theta, \quad (2.8)$$

$$n = \sen \theta. \quad (2.9)$$

Convém observar que a matriz inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo  $\theta$ , conforme Figura 5, pelo ângulo negativo  $-\theta$ . A equação constitutiva pode ser escrita da forma:

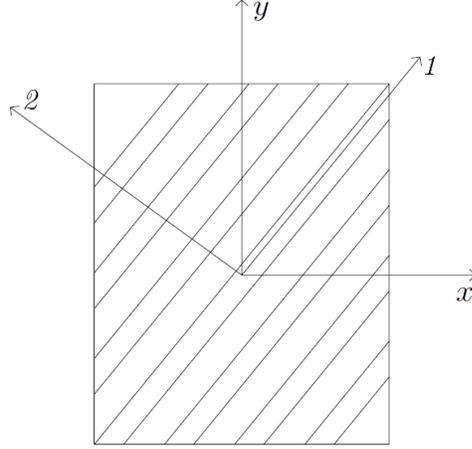


Figura 5: Sistemas de coordenadas da lâmina (12) e do laminado ( $x y$ ).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{T}^{-1})' \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde  $(\mathbf{T}^{-1})'$  representa a matriz transposta da matriz inversa de  $\mathbf{T}$  e

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Multiplicando-se as matrizes da equação (2.10), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}, \quad (2.12)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= m^4 Q_{11} + n^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}, \\ Q_{yy} &= n^4 Q_{11} + m^4 Q_{22} + 2m^2 n^2 Q_{12} + 4m^2 n^2 Q_{66}, \\ Q_{ss} &= m^2 n^2 Q_{11} + m^2 n^2 Q_{22} + (m^4 + n^4) Q_{12} - 4m^2 n^2 Q_{66}, \\ Q_{xs} &= m^3 n Q_{11} - mn^3 Q_{22} - mn (m^2 - n^2) Q_{12} - 2mn (m^2 - n^2) Q_{66}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{ys} &= m^3nQ_{11} - mn^3Q_{22} + mn(m^2 - n^2)Q_{12} + 2mn(m^2 - n^2)Q_{66}, \\
Q_{ss} &= m^2n^2Q_{11} - m^2n^2Q_{22} - 2m^2n^2Q_{12} + (m^2 - n^2)^2Q_{66}.
\end{aligned}
\tag{2.13}$$

A matriz  $[Q]_{x,y}$  é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas,  $Q_{xs}$  e  $Q_{ys}$ , são combinações lineares das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz  $[Q]_{x,y}$  é análoga à matriz  $\mathbf{Q}$  de lâminas totalmente anisotrópicas ( $Q_{xs} \neq 0$ ,  $Q_{ys} \neq 0$ ). Quando se tem  $Q_{16} = Q_{26} = 0$  diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

### 2.3.2 Comportamento Elástico de Laminados Multidirecionais

O comportamento geral de um laminado multidirecional é função das propriedades, das espessuras e da sequência de empilhamento das camadas individuais. A assim conhecida Teoria clássica de Laminação prevê o comportamento do laminado dentro das suposições e restrições:

1. Cada lâmina é quasi-homogênea, ortotrópica para  $\theta = 0$  e anisotrópica pra  $\theta \neq 0$ ;
2. O laminado é fino com dimensões laterais bem maiores que sua espessura e carregado apenas no seu plano, ou seja, o laminado e as lâminas estão em estado plano de tensões;
3. Todos os deslocamentos são pequenos quando comparados com a espessura do laminado;
4. Os deslocamentos no plano variam linearmente através da espessura do laminado;
5. Linhas retas normais à superfície média antes da deformação permanecem retas e normais após a deformação da superfície;
6. As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são lineares;
7. As distâncias normais a partir da superfície média permanecem constantes.

### 2.3.3 Relações Deformação-Deslocamento de Laminados Multidirecionais

Nesta seção será demonstrada a relação deformação-deslocamento para laminados multidirecionais. A formulação aqui apresentada possibilita a análise de laminados simétricos e não simétricos, porém neste trabalho, apenas laminados simétricos com carregamentos no plano serão analisados. A Figura 6 mostra a seção de um laminado normal ao eixo  $y$  antes e após a deformação. O plano  $x - y$  equidistante das superfícies superior e inferior do laminado é conhecido como plano médio ou plano de referência, no qual  $z = 0$ . Os deslocamentos no plano de referência  $u_0$  e  $v_0$  nas direções  $x$  e  $y$  e o deslocamento fora do plano  $w$  na direção  $z$  são funções apenas de  $x$  e  $y$ :

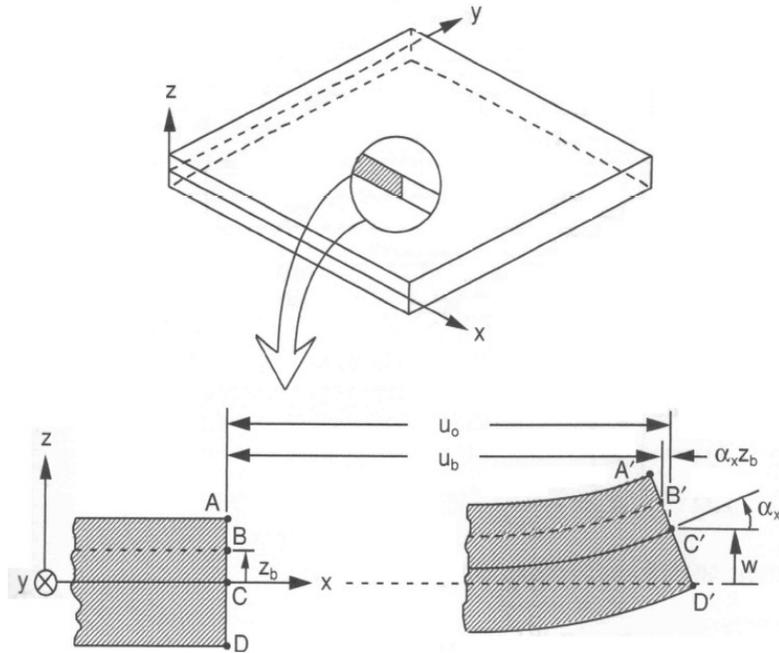


Figura 6: Lâmina antes e após a deformação (DANIEL; ISHAI, 2006).

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0(x, y), \\ v_0 &= v_0(x, y), \\ w &= f(x, y). \end{aligned} \tag{2.14}$$

As rotações das secções transversais em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente, são:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \alpha_y &= \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Os deslocamentos no plano do ponto  $B$  de coordenada  $z_b$ , nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, são:

$$\begin{aligned}u_b &= u_0 - \alpha_x z_b, \\ v_b &= v_0 - \alpha_y z_b\end{aligned}\tag{2.16}$$

e, de maneira geral, para  $-t/2 \leq z \leq t/2$  em um laminado de espessura  $t$ :

$$\begin{aligned}u &= u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}, \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y},\end{aligned}\tag{2.17}$$

onde  $z$  é a coordenada na espessura do laminado de um ponto genérico da secção transversal. Para pequenos deslocamentos, as relações clássicas de deformação-deslocamento da elasticidade produzem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Observando que as componentes de deformação no plano de referência são expressas como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, \\
\varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, \\
\varepsilon_s^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

e as curvaturas do laminado como:

$$\begin{aligned}
\kappa_x &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\
\kappa_y &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\
\kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

pode-se relacionar as deformações em qualquer ponto no laminado às deformações no plano de referência e às curvaturas do laminado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_s^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Considere uma camada individual  $k$  no laminado multidirecional cujo plano médio está a uma distância  $\bar{z}_k$  do plano de referência do laminado, de acordo com a Figura 7. As relações tensão deformação para esta camada em relação aos eixos do material são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

e após a transformação para o sistema de coordenadas do laminado,

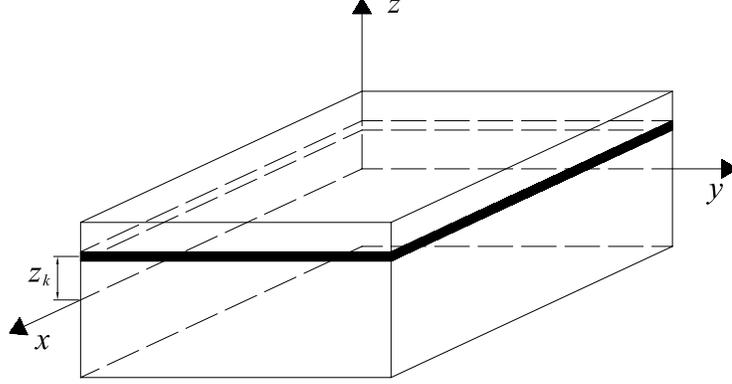


Figura 7: Camada  $k$  no laminado multidirecional.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{Bmatrix}_k. \quad (2.23)$$

Substituindo as expressões para as deformações da Equação (2.21), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

Das Equações (2.21) e (2.24) é visto que, apesar das deformações terem uma variação linear através da espessura, a tensão não o tem. Devido a variação da matriz  $[Q]_{x,y}$  de camada para camada, as tensões também variam de forma descontínua. Porém, em muitas aplicações o gradiente de tensões entre as camadas é desconsiderado. As tensões médias em cada lâmina são determinadas utilizando as deformações no plano de referência  $\varepsilon^0$ , as curvaturas  $\kappa$  do laminado, a localização do plano médio na espessura,  $\bar{z}_k$  ( $-t/2 \leq \bar{z}_k \leq t/2$ ), e as matrizes de rigidez transformadas  $[Q]_{x,y}$ .

Por causa da variação descontínua das tensões de lâmina para lâmina, é mais conveniente lidar com o efeito integrado dessas tensões no laminado. Dessa forma, procura-se relacionar

as forças e momentos à deformação do laminado. As tensões atuando na camada  $k$  dadas pela Equação (2.24) podem ser substituídas pelas resultantes das forças e momentos, como mostrado na Figura 8:

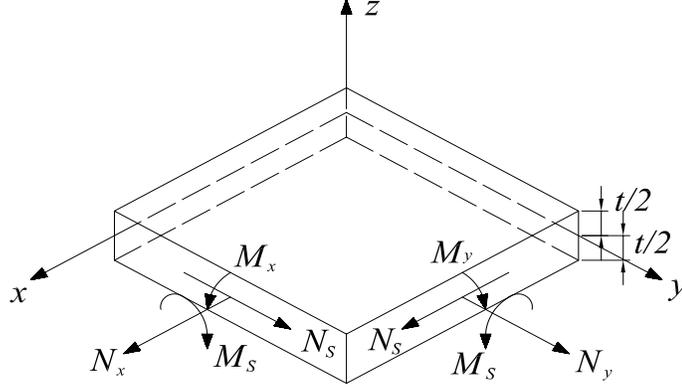


Figura 8: Elemento contendo forças e momentos resultantes em um laminado.

$$\begin{aligned} N_x^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{x_k} dz, \\ N_y^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{y_k} dz, \\ N_s^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s_k} dz, \end{aligned} \quad (2.25)$$

e

$$\begin{aligned} M_x^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{x_k} z dz, \\ M_y^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{y_k} z dz, \\ M_s^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{s_k} z dz. \end{aligned} \quad (2.26)$$

No caso de um laminado de várias camadas, as resultantes de tensões e de momentos são obtidas pelo somatório dos efeitos de todas as camadas. Assim, para um laminado como o

da Figura 9 de  $n$  lâminas, a força e os momentos resultantes são obtidos como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k dz, \quad (2.27)$$

e

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{Bmatrix}_k z dz, \quad (2.28)$$

onde  $z_k$  e  $z_{k-1}$  são as coordenadas das superfícies superior e inferior da camada  $k$ . Substituindo

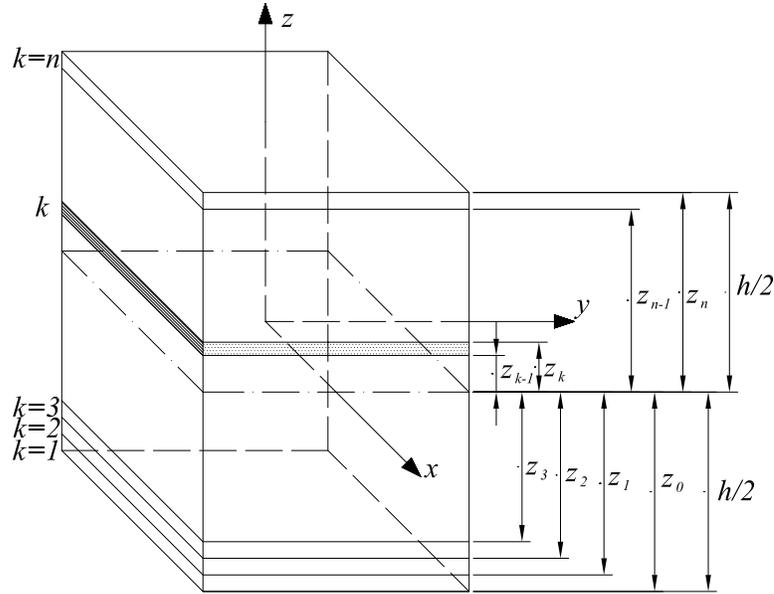


Figura 9: Laminado multidirecional com a notação das coordenadas para as lâminas individuais (DANIEL; ISHAI, 2006).

a Equação (2.24) nas Equações (2.27) e (2.28), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right\}, \quad (2.29)$$

e

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz + \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2 dz \right\}. \quad (2.30)$$

Nas expressões (2.29) e (2.30) a matriz de rigidez, as deformações no plano médio de referência  $\varepsilon^0$  e as curvaturas  $\kappa$  podem ser colocados para fora da operação de integração pois não são função de  $z$ . Destas, apenas a matriz de rigidez possui valores diferentes para cada lâmina. Desta forma, as Equações (2.29) e (2.30) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} [N]_{x,y} &= \left[ \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right] \{\varepsilon^0\}_{x,y} + \left[ \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z dz \right] \{\kappa\}_{x,y} \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k - z_{k-1}) \right] \{\varepsilon^0\}_{x,y} + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \{\kappa\}_{x,y} \\ &= [A] \{\varepsilon^0\}_{x,y} + [B] \{\kappa\}_{x,y} \end{aligned} \quad (2.31)$$

e

$$\begin{aligned} [M]_{x,y} &= \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right] \{\varepsilon^0\}_{x,y} + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \{\kappa\}_{x,y} \\ &= [B] \{\varepsilon^0\}_{x,y} + [D] \{\kappa\}_{x,y}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

nas quais:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n Q_{x,y}^k (z_k - z_{k-1}), \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{x,y}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{x,y}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Assim, as relações resultantes de tensões-deformação e resultantes de momento-deformação no plano de referência (plano médio), ficam:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}, \quad (2.34)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xs} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{ys} \\ B_{sx} & B_{sy} & B_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xs} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{ys} \\ D_{sx} & D_{sy} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_s \end{Bmatrix}. \quad (2.35)$$

As relações aqui descritas são expressas em termos de três matrizes de rigidez do laminado,  $[A]$ ,  $[B]$ , e  $[D]$ , as quais são funções da geometria, propriedades do material e sequência de empilhamento das lâminas individuais. Elas representam as propriedades elásticas médias do laminado multidirecional, em relação ao plano médio de referência, com os seguintes significados:

- $A_{ij}$  é a matriz de rigidez extensional do laminado, que relaciona carregamentos no plano às deformações no plano;
- $B_{ij}$  é a matriz de acoplamento do laminado, que relaciona carregamento no plano às curvaturas e momentos às deformações no plano. Desta maneira se  $B_{ij} \neq 0$  forças aplicadas no plano produzem curvaturas de flexão e torção além de deformações no plano. Momentos produzem deformações extensionais e de cisalhamento, além de curvaturas de flexão e torção;
- $D_{ij}$  é a matriz de rigidez flexional do laminado relacionando momentos às curvaturas.

### 2.3.4 Comportamento Elástico de Laminados Simétricos

Laminados simétricos são aqueles cujas lâminas são montadas de maneira que haja um plano médio em relação ao qual, para cada lâmina de um lado deste plano, existe uma outra, idêntica em propriedade, espessura e orientação, localizada a mesma distância porém do outro lado deste plano médio (Figura 10). Esta simetria ocorre tanto na geometria quanto em suas propriedades. Devido a isso, os laminados simétricos apresentam uma equação constitutiva mais simples, e por serem mais facilmente analisados, são de utilização bastante

comum em estruturas. Esta facilidade de análise vem do fato de que, uma vez que  $B_{ij} = 0$ , não há acoplamento entre carregamentos no plano e deformações (curvaturas) fora deste. A hipótese inicial sobre a qual os laminados simétricos podem ser tratados pela formulação

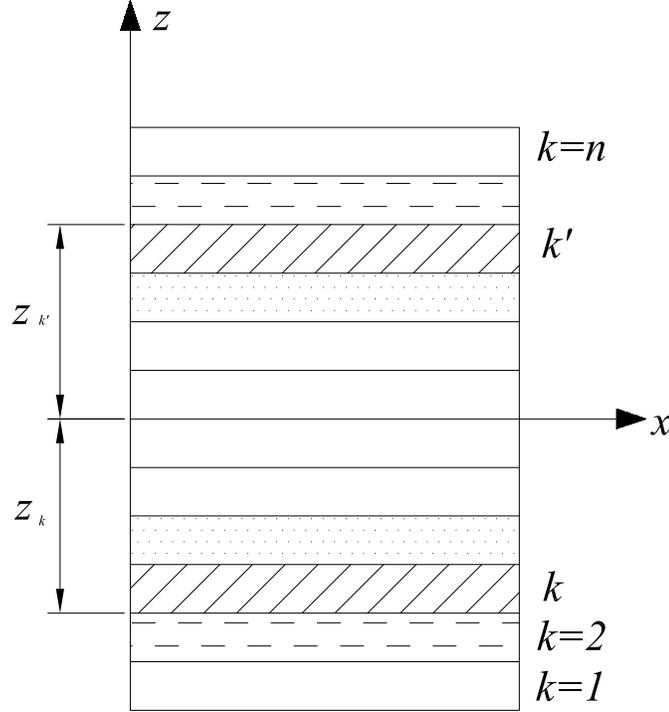


Figura 10: Laminado simétrico com lâminas de mesma orientação e propriedades em coordenadas equivalentes  $k$  e  $k'$ .

aqui apresentada é que as deformações, devido a carregamentos no plano, em qualquer reta perpendicular ao plano  $xy$  sejam as mesmas em toda a espessura do laminado. Isto equivale a dizer que as lâminas encontram-se perfeitamente coladas (não há escorregamentos entre uma lâmina e outra).

As relações entre as resultantes de tensões e deformações no plano médio em um laminado simétrico podem ser obtidas a partir da Equação (2.34) e observando que  $B_{ij} = 0$ , resulta em:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xs} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{ys} \\ A_{sx} & A_{sy} & A_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_s^0 \end{Bmatrix}. \quad (2.36)$$

# 3 *Método dos Elementos de Contorno Para Elasticidade Anisotrópica*

## 3.1 Elasticidade Anisotrópica

Considerando um elemento infinitesimal dentro de um domínio  $\Omega$ , o equilíbrio de forças no sistema de coordenadas ortogonal pode ser expresso por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0. \quad (3.1)$$

Por sua vez, o equilíbrio de momentos é expresso por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (3.2)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões e  $b_i$  é o vetor de forças de corpo.

O vetor de forças de superfície  $t_i$  em um ponto no contorno  $\Gamma$  de um domínio  $\Omega$  é expresso na forma:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (3.3)$$

onde  $n_j$  é o vetor normal do contorno  $\Gamma$  no ponto.

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação, considerando deslocamentos infinitesimais, pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (3.4)$$

Para assegurar a unicidade dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. A equação de compatibilidade é dada por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0, \quad (3.5)$$

que no caso bidimensional é reduzida à forma:

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12}. \quad (3.6)$$

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.7)$$

sendo o coeficiente de linearidade  $C_{ijkl}$  um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor de constantes elásticas. Devido às restrições de simetria dos tensores de tensão  $\sigma_{ij}$  e de deformação  $\varepsilon_{kl}$ , tem-se que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \quad (3.8)$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que:

$$C_{ijkl} = C_{klji}. \quad (3.9)$$

Estas considerações reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Como as direções das tensões principais não coincidem necessariamente com as direções das deformações principais, apenas 18, das 21 constantes são independentes (LEKHNITSKII, 1963).

Considerando as 21 constantes elásticas, a Equação (3.7) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

A Equação (3.7) também pode ser escrita na forma:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (3.11)$$

onde  $S_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido às mesmas razões do tensor de constantes elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes.

A Equação (3.11) pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112} \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212} \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312} \\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312} \\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312} \\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por Lekhnitskii (1963), a Equação (3.12) pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

e

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como (LEKHNITSKII, 1963):

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, & a_{12} &= \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2, \\ a_{13} &= -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3, & a_{14} &= \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23}, \\ a_{15} &= \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23}, & a_{16} &= \eta_{12,1}/E_1, \\ a_{22} &= 1/E_2, & a_{23} &= \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3, \\ a_{24} &= \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23}, & a_{25} &= \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13}, \\ a_{26} &= \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12}, & a_{33} &= 1/E_3, \\ a_{34} &= \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23}, & a_{35} &= \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13}, \\ a_{36} &= \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12}, & a_{44} &= 1/G_{23}, \\ a_{45} &= \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13}, & a_{46} &= \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12}, \\ a_{55} &= 1/G_{13}, & a_{56} &= \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12}, \\ a_{66} &= 1/G_{12}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde  $E_k$  são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos  $x_k$ ,  $G_{ij}$  são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os

planos definidos pelos eixos  $x_i x_j$ . Os coeficientes  $\nu_{ij}$  são chamados coeficientes de Poisson. As constantes  $\eta_{jk,l}$  são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes  $\eta_{l,jk}$  são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim,  $\zeta_{ij,kl}$  são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em outros planos, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ( $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$ ), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a Equação (3.13) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}. \quad (3.17)$$

Substituindo as Equações (3.4) e (3.7) na Equação (3.1) e integrando-se a ao longo da espessura, obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos:

$$C_{ijkl} u_{k,jl} + N_i = 0. \quad (3.18)$$

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções  $F(x_1, x_2)$ , chamadas funções tensão de Airy (LEKHNITSKII, 1963), dadas por:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + \mathcal{U}, \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + \mathcal{U}, \\ \sigma_{12} &= -F_{,12}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $\mathcal{U}$  é uma função potencial na qual

$$\mathcal{U}_{,i} = p_i. \quad (3.20)$$

Substituindo as Equações (3.19) na Equação constitutiva (3.17) e então na Equação de compatibilidade (3.6), resulta na equação diferencial para funções tensão  $F(x_1, x_2)$  dada por:

$$\begin{aligned} a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ -(a_{12} + a_{22})\mathcal{U}_{,11} + (a_{16} + a_{26})\mathcal{U}_{,12} - (-a_{11} + a_{12})\mathcal{U}_{,22}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

No caso da ausência de forças de corpo, a Equação (3.21) pode ser escrita como:

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0. \quad (3.22)$$

Criando o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (3.23)$$

aplicando este operador na função tensão  $F(x_1, x_2)$  na forma

$$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 F = 0 \quad (3.24)$$

e expandindo a Equação (3.24) tem-se:

$$\begin{aligned} F_{,2222} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1222} + (\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \mu_1 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 + \mu_2 \mu_4 \\ + \mu_3 \mu_4) F_{,1122} - (\mu_1 \mu_2 \mu_3 + \mu_1 \mu_2 \mu_4 + \mu_1 \mu_3 \mu_4 + \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1112} \\ + (\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4) F_{,1111} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

As Equações (3.22) e (3.25) serão idênticas se  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  e  $\mu_4$  forem raízes da equação

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0. \quad (3.26)$$

As raízes da Equação (3.26) são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares  $(\mu_k$  e  $\bar{\mu}_k)$  conforme mostrado por Lekhnitskii (1968).

Criando-se a variável

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad k = 1, 2, \quad (3.27)$$

tem-se que:

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k}. \quad (3.28)$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se:

$$F(x_1, x_2) = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \quad (3.29)$$

Introduzindo a notação

$$\frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \Psi_k(z_k), \quad (3.30)$$

onde a convenção de soma não é empregada em  $k$ , e substituindo a Equação (3.29) na Equação (3.19), obtém-se as componentes de tensão:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re} \left[ \mu_1^2 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right], \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re} \left[ \Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2) \right], \\ \sigma_{12} &= -2\text{Re} \left[ \mu_1 \Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2 \Psi_2^{(1)}(z_2) \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde  $\Psi_k^{(1)}$  representa a primeira derivada de  $\Psi_k$ .

Substituindo a Equação (3.31) na Equação (3.17) e então na Equação (3.18), desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\text{Re} [q_{11} \Psi_1(z_1) + q_{12} \Psi_2(z_2)], \\ u_2 &= 2\text{Re} [q_{21} \Psi_1(z_1) + q_{22} \Psi_2(z_2)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde

$$q_{ik} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

é a matriz de parâmetros complexos.

Uma vez que as condições de contorno são conhecidas, determina-se a função tensão, dada pelas Equações (3.19) com derivadas dadas pela Equação (3.30), que satisfaça estas condições, determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas Equações (3.32), e tensões, dadas pelas Equações (3.31).

## 3.2 Formulação Integral

Assumindo-se uma função vetorial contínua  $u_i^\bullet$ , que representa o deslocamento de um estado elasto-estático definido sobre um domínio  $\Omega$ , como sendo uma função peso residual da Equação de equilíbrio (3.18), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_{ij,j} u_i^\bullet d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^\bullet d\Omega = 0. \quad (3.34)$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções, tem-se:

$$(N_{ij} u_i^\bullet)_{,k} = N_{ij,k} u_i^\bullet + N_{ij} u_{i,k}^\bullet. \quad (3.35)$$

Pode-se escrever  $u_{i,j}^\bullet$  como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, da forma:

$$u_{i,j}^\bullet = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet + u_{j,i}^\bullet) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet - u_{j,i}^\bullet) = \varepsilon_{ij}^\bullet + \omega_{ij}^\bullet, \quad (3.36)$$

sendo que  $\varepsilon_{ij}^\bullet$  e  $\omega_{ij}^\bullet$  representam os tensores deformação (simétrico) e rotação (anti-simétrico), respectivamente, do estado elástico "•".

Substituindo (3.36) em (3.35), tem-se:

$$(N_{ij} u_i^\bullet)_{,j} = N_{ij,j} u_i^\bullet + N_{ij} \varepsilon_{ij}^\bullet + N_{ij} \omega_{ij}^\bullet, \quad (3.37)$$

sendo  $N_{ij}$  um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo. Desta forma, a Equação (3.37) torna-se:

$$N_{ij,j}u_i^\bullet = (N_{ij}u_i^\bullet)_{,j} - N_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet. \quad (3.38)$$

Substituindo a Equação (3.38) na Equação (3.34) tem-se:

$$- \int_{\Omega} N_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet d\Omega + \int_{\Omega} (N_{ij}u_i^\bullet)_{,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_i^\bullet d\Omega = 0. \quad (3.39)$$

Pelo teorema de Green, tem-se:

$$\int_{\Omega} (N_{ij}u_i^\bullet)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (N_{ij}u_i^\bullet)n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^\bullet d\Gamma, \quad (3.40)$$

onde:

$$t_i = N_{ij}n_j. \quad (3.41)$$

Substituindo (3.40) em (3.39), tem-se:

$$\int_{\Omega} N_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^\bullet d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^\bullet d\Omega. \quad (3.42)$$

Se partirmos da Equação (3.1) como sendo a correspondente ao estado  $u_i^\bullet$  e a função de interpolação da Equação (3.34) como sendo  $u_i$ , obtém-se, de forma análoga a anterior:

$$\int_{\Omega} N_{ij}^\bullet \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^\bullet u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^\bullet u_i d\Omega. \quad (3.43)$$

Pelo teorema recíproco, dois estados de um mesmo material podem ser relacionados por  $N_{ij}^\bullet \varepsilon_{ij} = N_{ij}\varepsilon_{ij}^\bullet$ . Desta forma, igualando-se as Equações (3.43) e (3.42), tem-se:

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^\bullet d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^\bullet b_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^\bullet u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^\bullet d\Omega. \quad (3.44)$$

A Equação integral (3.44) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados

é conhecido e o outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno, o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária em um ponto  $\mathbf{x}'$ . A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac que é definido como:

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x}=\mathbf{x}', \\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}', \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\Omega = 1. \end{cases} \quad (3.45)$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio, pois esta possui a propriedade

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\Omega = f(\mathbf{x}') \quad (3.46)$$

para um dado ponto  $\mathbf{x}' \in \Omega$ .

Considerando o estado "•" como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ( $b_i^\bullet = 0$ ), a Equação (3.44) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i U_{ik} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta_{ik} u_i d\Omega, \quad (3.47)$$

onde  $U_{ik}$  e  $T_{ik}$  representam, respectivamente, deslocamentos e forças de superfície na direção  $k$ , num ponto  $\mathbf{x}$ , devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto  $\mathbf{x}'$  numa direção  $i$ . Por serem soluções do estado fundamental,  $U_{ik}$  e  $T_{ik}$  são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade (3.46), a Equação (3.47) pode ser escrita como:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}t_i d\Gamma - \int_{\Omega} b_i U_{ik} d\Omega. \quad (3.48)$$

Considerando que as forças de corpo  $b_i$  são nulas, pode-se escrever:

$$u_k + \int_{\Gamma} T_{ik}u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ik}t_i d\Gamma. \quad (3.49)$$

### 3.3 Soluções Fundamentais Anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, o domínio  $\Omega$  será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

e

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix}, \quad (3.51)$$

onde  $\mu_k$  são raízes complexas da Equação (3.26),  $x'_1$  e  $x'_2$  são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

Se for considerado um contorno fechado  $\Gamma$  ao redor do ponto fonte e se forem usadas as forças de superfície definidas pela Equação (3.3) e as tensões definidas pela Equação (3.31), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} t_1 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2]], \\ \int_{\Gamma} t_2 d\Gamma &= 2\text{Re}[[\Psi_1 + \Psi_2]], \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde os colchetes duplos representam o salto na função para um contorno fechado ao redor do ponto fonte. Se o contorno  $\Gamma$  engloba  $\mathbf{z}'$ , então os resultados das Equações (3.52) serão diferentes de zero.

As soluções fundamentais em um plano anisotrópico infinito podem ser encontradas usando-se a função tensão de Airy resultante das forças de superfície fundamentais, dadas pelas Equações (3.52), e a Equação de equilíbrio de forças (3.1) considerando forças de corpo e efeitos de inércia nulos.

A função tensão de Airy para um ponto carregado na direção  $x_i$  pode ser representada por  $\Psi_{ik}$ . Como as equações integrais de contorno (3.52) possuem sinais opostos à carga aplicada,

ela pode ser expressa para um ponto fonte como:

$$2\text{Re}[[\mu_1\Psi_{i1} + \mu_2\Psi_{i2}]] = -\delta_{i1},$$

$$2\text{Re}[[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}]] = \delta_{i2}. \quad (3.53)$$

As Equações (3.53) podem ser satisfeitas para qualquer contorno fechado  $\mathbf{z}'$ , tomando

$$\Psi_{ik} = A_{ik} \ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}'), \quad (3.54)$$

onde  $A_{ik}$  são constantes complexas. Usando propriedades de funções complexas, pode ser mostrado que para qualquer contorno fechando o ponto  $\mathbf{z}'$

$$\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') = 2\pi i. \quad (3.55)$$

Usando as Equações (3.53), (3.54) e (3.55), podem ser obtidas duas equações para as constantes desconhecidas  $A_{ik}$ :

$$A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} = \delta_{i2}/(2\pi i),$$

$$\mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} = -\delta_{i1}/(2\pi i). \quad (3.56)$$

As duas outras equações necessárias para se determinar  $A_{ik}$  resultam da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos, ou seja:

$$[[u_i]] = 0. \quad (3.57)$$

Usando as equações de deslocamentos (3.32), a Equação (3.54) e a Equação (3.55), a Equação (3.57) pode ser expandida como:

$$q_{11}A_{i1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{i1} + q_{12}A_{12} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{i2} = 0,$$

$$q_{21}A_{i1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{i1} + q_{22}A_{12} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{i2} = 0. \quad (3.58)$$

Escrevendo as Equações (3.56) e (3.58) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ q_{11} & -\bar{q}_{11} & q_{12} & -\bar{q}_{12} \\ q_{21} & -\bar{q}_{21} & q_{22} & -\bar{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ \bar{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \bar{A}_{j2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.59)$$

que é suficiente para encontrar as constantes complexas  $A_{ik}$ .

As soluções fundamentais para deslocamentos são obtidas inserindo a função tensão dada pela Equação (3.31) nas equações de deslocamentos (3.32). Desta forma, tem-se:

$$U_{ji}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re}[q_{i1}A_{j1} \ln(z_1 - z'_1) + q_{i2}A_{j2} \ln(z_2 - z'_2)]. \quad (3.60)$$

Similarmente, as soluções fundamentais para forças de superfície são obtida pela substituição da Equação (3.54) nas Equações de tensão (3.31) e usando a Equação (3.3). Daí, obtém-se:

$$T_{ij}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2} \right], \quad (3.61)$$

onde

$$[g_{ji}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

e  $n_k$  são as componentes do vetor normal externo.

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ( $\ln r$ ). Já no caso da solução fundamental de forças

de superfície tem-se uma singularidade forte ( $1/r$ ). As formas como estas singularidades serão tratadas é mostrada na seção 3.6.

### 3.4 Equações Integrais Singulares

A Equação integral (3.49) foi escrita para um ponto fonte no interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semi-circular, com contorno  $\Gamma_\epsilon^*$  e raio  $\epsilon$ , centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Figura 11. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma:

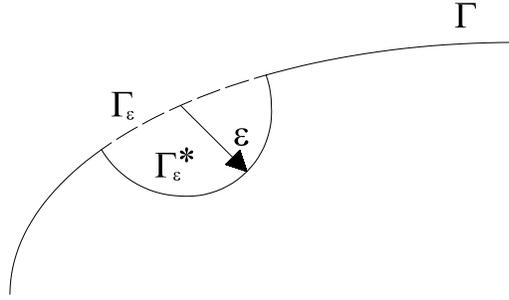


Figura 11: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*), \quad (3.63)$$

onde  $\epsilon$  é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno  $\Gamma$  (Figura 11). A Equação (3.49) é, então, reescrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} U_{li} t_i d\Gamma. \quad (3.64)$$

A integral do lado direito da Equação (3.64) contém um integrando de singularidade fraca da ordem  $\ln(1/r)$  e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem  $1/r$ , que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma_\epsilon^*} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} [u_i(\mathbf{z}) - u_i(\mathbf{z}')] d\Gamma + \\ &u_i(\mathbf{z}') \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon^*} T_{li} d\Gamma + \\ &\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} T_{li} u_i(\mathbf{z}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da Equação (3.65) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por  $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$ , no qual  $A_{ij}(\mathbf{z}')$  é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando  $\epsilon \rightarrow 0$ , o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a Equação (3.64) pode ser escrita na forma:

$$c_{li}u_i + \int T_{li}u_i d\Gamma = \int U_{li}t_i d\Gamma, \quad (3.66)$$

onde  $\int$  representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente  $c_{li}(\mathbf{z}')$  é dado por  $\delta_{ij} + A_{ij}(\mathbf{z}')$ , no qual  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker.

### 3.5 Formulação dos Elementos de Contorno Discretizada

Para se obter a solução do problema elasto-estático, o contorno é dividido em elementos de contorno. Nesta etapa do trabalho, serão utilizados apenas elementos quadráticos (3 nós por elementos) contínuos (elementos cujos nós das extremidades são compartilhados pelos elementos vizinhos).

Nesta formulação será mais conveniente trabalhar com vetores que usar notação indicial. Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \phi \mathbf{u}^{(i)}, \\ \mathbf{t} &= \phi \mathbf{t}^{(i)},\end{aligned}\tag{3.67}$$

sendo que as variáveis em negrito representam vetores de dimensões  $2N$ , onde  $N$  é o número de nós,  $\mathbf{u}^{(i)}$  e  $\mathbf{t}^{(i)}$  representam os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente,  $\phi$  é o vetor de funções de forma,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{t}$  representam os deslocamentos e tensões ao longo do elemento, respectivamente.

Considere que o domínio tenha sido dividido em  $NE$  elementos de contorno. Substituindo as Equações (3.67) na Equação (3.66), tem-se

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma_j \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \phi d\Gamma_j \right\} \mathbf{t}^j.\tag{3.68}$$

Chamando

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \phi d\Gamma_j = \mathbf{G}\tag{3.69}$$

e

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma_j = \mathbf{H},\tag{3.70}$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^{NE} H^{lj} u^j = \sum_{j=1}^{NE} G^{lj} t^j,\tag{3.71}$$

ou, na forma matricial

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t}.\tag{3.72}$$

### 3.6 Integração no Espaço

As funções de interpolação no espaço utilizada neste trabalho (funções de forma) são as funções de forma quadráticas. Funções de forma quadrática permitem o modelamento de elementos curvos e são especialmente indicados para problemas onde se tem altos gradientes.

Os deslocamentos e as forças de superfícies são representados em um elemento quadrático padrão, respectivamente, como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{u}^{(n)} \quad (3.73)$$

e

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{t}^{(n)}, \quad (3.74)$$

onde  $u_i^{(n)}$  e  $t_i^{(n)}$  são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e  $\phi^{(i)}$  são as funções de forma quadráticas definidas por:

$$\phi^{(1)} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1), \quad (3.75)$$

$$\phi^{(2)} = 1 - \xi^2, \quad (3.76)$$

$$\phi^{(3)} = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1), \quad (3.77)$$

onde  $\xi$  representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 12).

A geometria do elemento pode também ser considerada quadrática (elementos isoparamétricos) e, neste caso, ser representada pelas coordenadas nodais e as funções de forma  $\phi^{(i)}$ , ou seja (Figura 12):

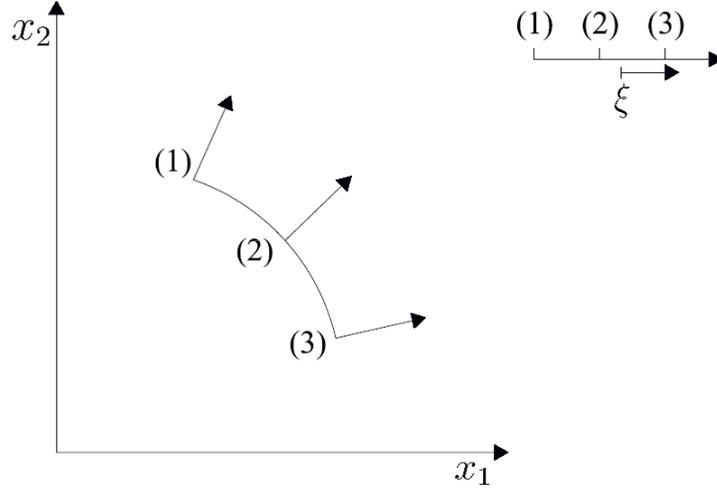


Figura 12: Transformação de coordenadas  $x_1 - x_2$  para  $\xi$ .

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi^{(1)} & 0 & \phi^{(2)} & 0 & \phi^{(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \phi \mathbf{x}^{(n)}. \quad (3.78)$$

Desta forma, as integrais de contorno podem ser escritas como:

$$H^{(j)} = \oint_{\Gamma_j} T_{lk} \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 T_{lk} \phi^{(j)} |J| d\xi \quad (3.79)$$

e

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} U_{lk} \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^1 U_{lk} \phi^{(j)} |J| d\xi. \quad (3.80)$$

onde  $|J|$  representa o módulo do Jacobiano da transformação  $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$ , e é dado por Brebbia e Dominguez (1989) e Kane (1993):

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left( \frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (3.81)$$

onde  $dx_1/d\xi$  e  $dx_2/d\xi$  são obtidos derivando-se as equações (3.78) em relação a  $\xi$ .

Integrais singulares da ordem  $O(\ln r)$  podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles (1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por:

$$I = \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{\xi} \right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^N w_i f(\xi_i), \quad (3.82)$$

onde  $N$  é o número de pontos de Gauss. A coordenada do ponto de integração  $\xi_i$  e o fator peso  $w_i$  podem ser encontrados na literatura (STROUD; SECREST, 1966; BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989).

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de  $\mathbf{G}$  são do tipo  $\ln(r)$  sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de  $\mathbf{H}$  são do tipo  $1/r$  e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy. Uma maneira bastante simples de se tratar esta singularidade é através de considerações de corpos rígidos (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989). Assumindo que um corpo rígido tenha todos os seus pontos do contorno deslocados de um valor unitário e que não existam forças de corpo ( $b_i = 0$ ) na direção de um dos eixos de coordenadas, as forças de superfície em qualquer ponto do contorno deste corpo deve ser zero. Desta forma, a Equação (3.72) torna-se

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^q = 0 \quad (3.83)$$

onde  $\mathbf{v}^q$  é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção  $q$  e zero na outra direção. Para satisfazer a Equação (3.83) tem-se

$$H_{ii} = - \sum_{j=1}^N H_{ij} \quad j \neq i \quad (3.84)$$

sendo  $j$  par ou ímpar, dependendo da direção considerada.

O termo da diagonal da matriz  $\mathbf{H}$  é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade (direção) em consideração.

### 3.7 Cálculo dos Deslocamentos e Densidades de Forças em Pontos Internos

O tensor de tensões para um ponto no interior do domínio  $\Omega$ , obtido derivando-se a Equação (3.48) neste ponto e aplicando-se a lei de Hooke, pode ser escrito como:

$$N_{ik} + \int_{\Gamma} S_{jik} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{jik} t_j d\Gamma, \quad (3.85)$$

onde  $S_{kij}$  e  $D_{kij}$  são combinações lineares das derivadas de  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$ , respectivamente.

O tensor  $S_{kij}$  é dado por:

$$\begin{Bmatrix} S_{11j} \\ S_{22j} \\ S_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{1j,1} \\ T_{2j,2} \\ \frac{1}{2} (T_{1j,2} + T_{2j,1}) \end{Bmatrix}, \quad (3.86)$$

onde  $j = 1, 2$ . As derivadas de  $T_{ij}$  são obtidas pela equação

$$T_{ij,k} = -2\text{Re} \left[ \frac{1}{(z_1 - z'_1)^2} R_{k1} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)^2} R_{k2} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right], \quad (3.87)$$

onde

$$R_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{bmatrix}. \quad (3.88)$$

Da mesma forma  $D_{kij}$  pode ser calculado como:

$$\begin{Bmatrix} D_{11j} \\ D_{22j} \\ D_{21j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{1j,1} \\ U_{2j,2} \\ \frac{1}{2} (U_{1j,2} + U_{2j,1}) \end{Bmatrix}, \quad (3.89)$$

sendo que as derivadas de  $U_{ij}$  são dadas por

$$U_{ij,k} = 2\text{Re} \left[ \frac{1}{z_1 - z'_1} R_{k1} q_{j1} A_{i1} + \frac{1}{z_2 - z'_2} R_{k2} q_{j2} A_{i2} \right]. \quad (3.90)$$

### 3.8 Densidade de Força no Contorno

Para se calcular o tensor de tensões em um dado nó do contorno, considere um nó em que as direções dos vetores tangente e normal ao contorno não coincidam com as direções dos eixos geométricos (Figura 13). Neste nó é criado um novo sistema de referência  $x'_1 x'_2$  possuindo direções que coincidam com os vetores tangente e normal ao contorno neste nó. Escrevendo os deslocamentos e as forças de superfícies neste sistema local, tem-se:

$$\begin{aligned} u'_i &= l_{ij} u_j, \\ t'_i &= l_{ij} t_j, \end{aligned} \quad (3.91)$$

onde  $l_{ij}$  são os cossenos diretores.

No sistema local tem-se a seguinte relação

$$\begin{aligned} N'_{22} &= t'_2, \\ N'_{12} &= t'_1. \end{aligned} \quad (3.92)$$

A deformação  $\varepsilon'_{11}$  pode ser calculada, sabendo que

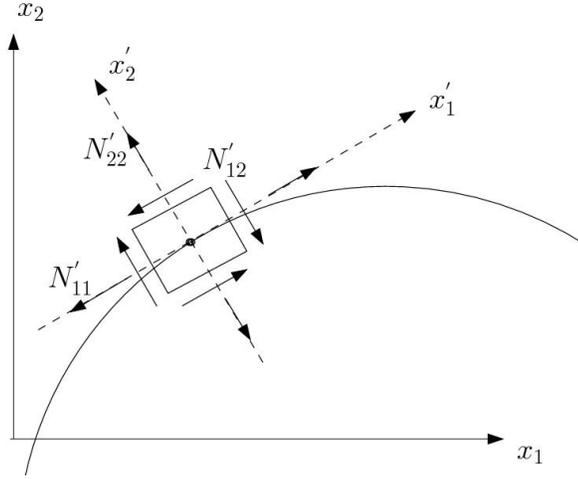


Figura 13: Tensões no contorno.

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{11} &= \frac{1}{2}(u'_{1,1} + u'_{1,1}) = u'_{1,1}, \\ u'_{1,1} &= \frac{du'_1}{dx'_1} = \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx'_1}.\end{aligned}\tag{3.93}$$

Usando geometria diferencial na Equação (3.93), pode-se notar que a direção local  $x'_1$  é tangente ao comprimento infinitesimal de arco  $ds$  dado por:

$$ds = \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2} = \sqrt{\left(\frac{dx'_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx'_2}{d\xi}\right)^2} d\xi,$$

ou seja

$$\frac{ds}{d\xi} = J.\tag{3.94}$$

Um pequeno movimento ao longo de  $s$  corresponde a um pequeno movimento em  $x'_1$ . Isto permite com que  $x'_1$  na equação (3.93) seja substituído pela Equação (3.94), ou seja,

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} \frac{d\xi}{ds}, \\ \varepsilon'_{11} &= \frac{du'_1}{d\xi} J^{-1}.\end{aligned}\tag{3.95}$$

Sendo

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{i=1}^3 \phi^{(i)} u_1^{(i)}, \\ \frac{du_1}{d\xi} &= \sum_{n=1}^3 \frac{d\phi^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)}, \end{aligned} \tag{3.96}$$

onde  $\phi^{(i)}$  são as funções de forma. Pode-se então obter a deformação por:

$$\varepsilon'_{11} = \sum_{n=1}^3 \frac{d\phi^{(i)}}{d\xi} u_1^{(i)} J^{-1}. \tag{3.97}$$

Da relação tensão deformação, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N'_{11} \\ N'_{22} \\ N'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}, \tag{3.98}$$

onde  $A'_{ij}$  são as componentes do tensor de rigidez escritas no referencial local.

Na Equação (3.98) tem-se três incógnitas  $N'_{11}, \varepsilon'_{22}, \varepsilon'_{12}$ , que agora podem então ser calculadas.

Por último, as densidades de força tem que ser escritas no referencial global  $x_1 x_2$ , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \begin{Bmatrix} N'_{11} \\ N'_{22} \\ N'_{12} \end{Bmatrix}, \tag{3.99}$$

onde  $\mathbf{T}$  é a matriz de transformação de coordenadas.

# *4 Critérios de Falha para Materiais Compósitos*

## **4.1 Introdução**

Os mecanismos de falha de um material compósito variam bastante com suas propriedades e com o tipo de carregamento. Mesmo que os mecanismos de falha obtidos através de uma análise micromecânica sejam conhecidos, a interação entre os mesmos no caso de um carregamento genérico pode tornar as predições de resistência do material não confiáveis. Diante disso, uma abordagem macromecânica e principalmente fenomenológica é preferível para a análise de falha. De um ponto de vista macroscópico, a resistência de uma lâmina é uma propriedade anisotrópica, isto é, varia com a orientação das fibras. Por isso os critérios de falha procuram relacionar a resistência em uma direção arbitrária com parâmetros básicos do material que são as resistências em direções específicas. Para o caso de compósitos laminados, estes parâmetros são as resistências à compressão e à tração nas direções normal e perpendicular à fibra, além da resistência ao cisalhamento.

## **4.2 Critério de Falha LaRC03**

Para o uso de materiais compósitos em aplicações estruturais, é necessário o entendimento de como cada modo de falha ocorre. Isto pode ser feito através do desenvolvimento de modelos físicos que estabeleçam quando ocorre a falha e também descrevam o comportamento após a falha (PINHO, 2005). De acordo com Dávila, Camanho e Rose (2005), os mecanismos que levam a falha em um material compósito ainda não estão completamente entendidos, em especial a compressão da matriz e da fibra. O entendimento inadequado destes mecanismos e a dificuldade no desenvolvimento de modelos dos modos de falha de fácil

utilização podem explicar os resultados imprecisos da maioria dos participantes do WWFE. Os resultados do exercício indicam que a predição da maioria das teorias difere significativamente das observações experimentais ainda que estivessem se analisando apenas laminados simples. Dávila, Camanho e Rose (2005) dizem ainda que a incerteza na predição da iniciação e da progressão do dano em compósitos sugere a necessidade de rever as teorias de falha existentes, avaliar sua capacidade e desenvolver novas teorias se for necessário. Seu trabalho descreve um novo conjunto de seis critérios fenomenológicos para predição da falha de laminados unidirecionais do tipo FRP (*Fiber Reinforced Polymer*). Em trabalhos posteriores Pinho, Robinson e Iannucci (2009a, 2009b) propuseram melhorias nos modelos para o caso de compressão das fibras. Velmurugan e Solaimurugan (2007), Laffan et al. (2010a, 2010b) desenvolveram técnicas otimizadas de obtenção das propriedades de tenacidade à fratura intralaminar e interlaminar, necessárias nos modelos dos critérios.

O critério LaRC03 pode ser resumido em seis índices de falha, cada um baseado em um diferente tipo de falha micro-estrutural. Uma vez que os modos de falha se devem a mecanismos diferentes, estes índices de falha não são relacionados de maneira explícita entre si. O nome LaRC03 é oriundo do centro de pesquisas da *National Aeronautics and Space Administration*(NASA) no qual o critério foi desenvolvido, **Langley Research Center**. Os índices de falha do critério LaRC03 podem ser divididos nos que prevêm a falha da matriz (trincamento da matriz) e falha da fibra (quebra da fibra) que serão detalhados a seguir.

As propriedades que necessitam ser obtidas experimentalmente são  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $\nu_{12}$ ,  $X^T$ ,  $X^C$ ,  $Y^T$ ,  $Y^C$ ,  $S^L$ ,  $G_{Ic}(L)$  e  $G_{IIc}(L)$ , onde  $X^T$  e  $X^C$  são, respectivamente, os limites de resistência longitudinais de tração e compressão,  $Y^T$  e  $Y^C$  são, respectivamente, os limites de resistência transversais de tração e compressão,  $S^L$  é o limite de resistência ao cisalhamento da matriz no plano do laminado. As tenacidades à fratura em modos *I* e *II*, dadas por  $G_{Ic}(L)$  e  $G_{IIc}(L)$ , respectivamente, podem ser obtidas em ensaios padronizados de mecânica da fratura (DÁVILA; CAMANHO; ROSE, 2005).

#### 4.2.1 Determinação das Tenacidades à Fratura Interlaminares

A obtenção dos valores de  $G_{Ic}$  e  $G_{IIc}$  é importante para o critério LaRC03, pois são utilizados para o cálculo de parâmetros utilizados nas suas formulações. Pelo fato dos compósitos laminados serem um empilhamento de lâminas, a possibilidade destas lâminas se separarem sob a ação de um carregamento deve ser considerada e avaliada. Existem duas principais ma-

neiras de se avaliar a resistência a essa separação das lâminas, conhecida como delaminação: uma através da resistência à tração medida na direção da espessura do laminado e outra através de conceitos da mecânica da fratura, sendo expressa através da taxa de liberação de energia associada à propagação da trinca promotora da delaminação.  $G_{Ic}$  e  $G_{IIc}$  se referem a esta segunda forma de avaliação. Como indicado pela listagem citada acima, apenas os valores de tenacidade à fratura em modos  $I$  e  $II$  são necessárias para o critério LaRC03. Os valores experimentais são obtidos através de, principalmente, dois ensaios, DCB (*Double Cantilever Beam*), para o modo  $I$  (normalizado pela American Society for Testing Materials (2009)) e ENF (*End Notched Flexure*), para o modo  $II$ . Para os ensaios do modo  $I$ , é utilizado um arranjo como o mostrado na Figura 14. O corpo de prova, neste caso, é assumido como sendo formado por duas vigas em balanço de dimensões idênticas com comprimento igual ao comprimento inicial da trinca. O valor de  $G_{Ic}$ , nestas condições e para um carregamento quasi-estático é obtido através da Equação (4.1).

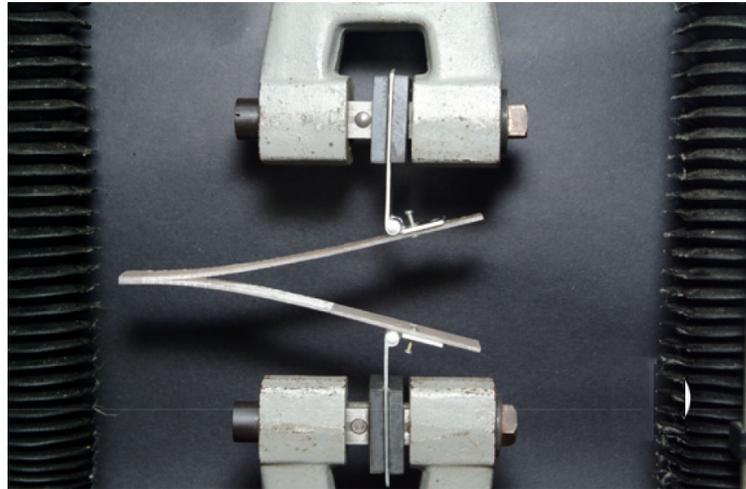


Figura 14: Ensaio para a determinação de  $G_{Ic}$  a partir de um corpo de prova DCB (VELMURUGAN; SOLAIMURUGAN, 2007).

$$G_{Ic} = \frac{12P_{max}^2}{E_1 b^2 h} \left[ \left( \frac{a}{h} \right)^2 + \frac{E_1}{10G_{31}} \right], \quad (4.1)$$

Onde  $P_{max}$  é a máxima carga aplicada,  $b$  é a largura do corpo de prova,  $h$  é a espessura da viga em balanço,  $G_{31}$  é o módulo de cisalhamento transversal e  $a$  é o comprimento da trinca. Para os ensaios do modo  $II$  é utilizado, principalmente, um corpo de prova como o mostrado na Figura 15. O valor de  $G_{IIc}$  para carregamento quasi-estático é obtido através da Equação

(4.2), obtida a partir da teoria de vigas.

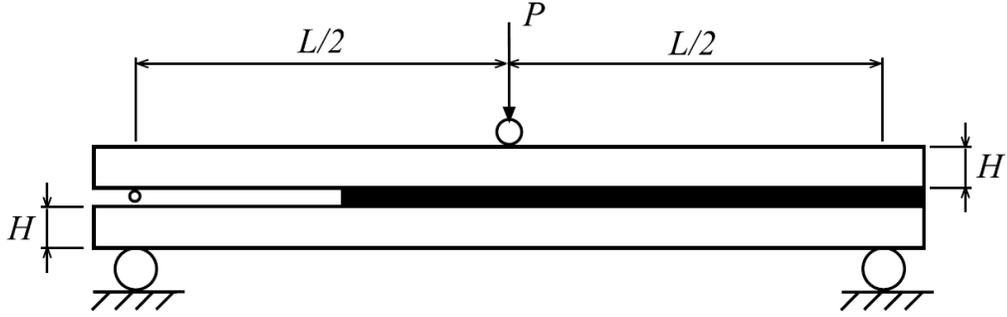


Figura 15: Arranjo do ensaio para a determinação de  $G_{IIc}$  a partir de um corpo de prova ENF, onde  $P$ ,  $L$  e  $H$  são, respectivamente, o carregamento aplicado, o comprimento e a espessura do corpo de prova.

$$G_{IIc} = \frac{9P_{max}^2 a^2}{16E_1 b^2 h^3} \left[ 1 + 0,2 \frac{E_1}{G_{31}} \left( \frac{h}{a} \right)^2 \right]. \quad (4.2)$$

Em situações nas quais a trinca se propaga no sentido da espessura do laminado, a tenacidade à fratura deve ser aquela correspondente à dissipação de energia neste sentido de propagação. Não existe, segundo Pinho (2005), Pinho, Robinson e Iannucci (2010) um ensaio padrão para a determinação desta propriedade. Como será mostrado a seguir, o critério LaRC03 utiliza os valores interlaminares de  $G_{Ic}$  e  $G_{IIc}$ . Em Pinho (2005), Pinho, Robinson e Iannucci (2010) foram testados ensaios para medir a tenacidade à fratura intralaminar, que é importante para a caracterização do material e para modelagens numéricas.

#### 4.2.2 Critério para Falha da Matriz sob Compressão Transversal

O critério de falha LaRC03 é baseado nos conceitos de plano de fratura propostos por Hashin (1980) e aprimorados por Puck e Schurmann (1998), sendo este um de seus conceitos

chave. No caso da matriz de um laminado com reforço unidirecional estar sob tensão normal transversal de tração, o plano de fratura (Figura 16) é normal à direção das lâminas e paralelo à direção das fibras. Para a matriz sob tensão de compressão, o plano de fratura pode não ser normal à lâmina. O ângulo do plano de fratura é então calculado usando a tensão efetiva de Morh-Coulomb (M-C). Para laminados de material compósito sob carregamento de compressão longitudinal, um ângulo típico para o plano de fratura  $\alpha_0$  é aproximadamente  $53^\circ$  (PUCK; SCHURMANN, 1998; DÁVILA; CAMANHO; ROSE, 2005). O critério M-C é representado geometricamente na Figura 17 pelo círculo de Mohr para um estado de compressão uniaxial transversal. A linha  $AB$  é tangente ao círculo de Mohr em  $A$  e é chamada de linha de fratura de Coulomb. Este critério diz que em um estado de tensão biaxial normal, a fratura ocorre para qualquer círculo de Mohr tangente à linha de fratura de Coulomb. A tensão efetiva  $\tau_{\text{eff}}$  é relacionada às tensões  $\tau^T$  e  $\sigma_n$  atuando no plano de fratura por:

$$\tau_{\text{eff}} = \tau^T + \eta\sigma_n \quad (4.3)$$

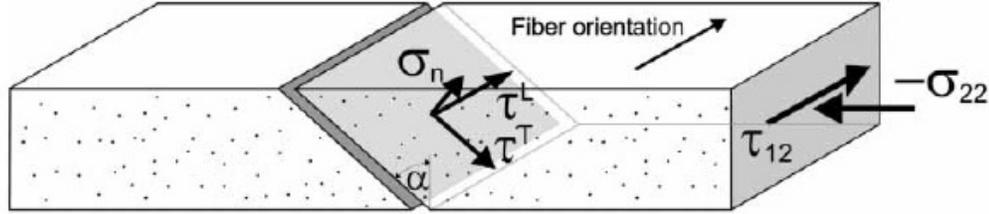


Figura 16: Plano de fratura proposto idealizado por Hashin (1980) e aprimorado por Puck e Schurmann (1998) (DÁVILA; CAMANHO; ROSE, 2005).

O arco tangente do termo  $\eta$  é chamado de ângulo de fricção interna (DÁVILA; CAMANHO; ROSE, 2005) e é assumido como sendo uma constante do material. De maneira geral, o plano de fratura pode estar sujeito a tensões transversais e tensões no plano. Logo, as tensões efetivas devem ser definidas nas duas direções de acordo com as Equações (4.4):

$$\begin{aligned} \tau_{\text{eff}}^T &= \langle |\tau^T| + \eta^T \sigma_n \rangle, \\ \tau_{\text{eff}}^L &= \langle |\tau^L| + \eta^L \sigma_n \rangle, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde os termos  $\eta^T$  e  $\eta^L$  são os coeficientes de influência transversal e longitudinal, respectiva-

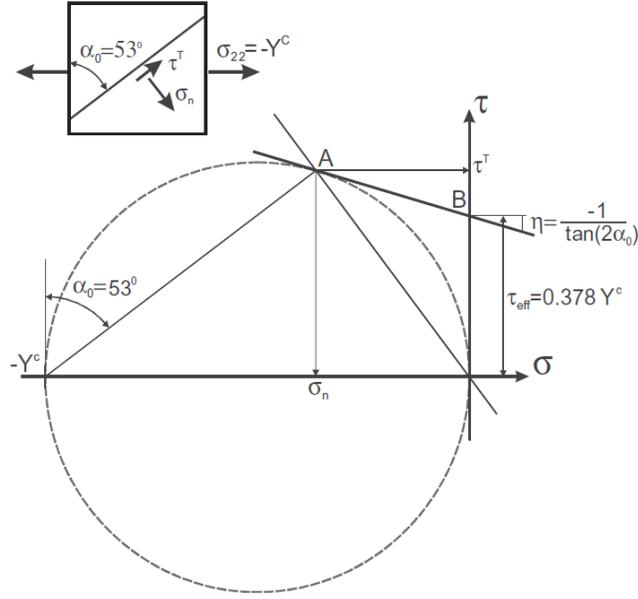


Figura 17: Círculo de Mohr para compressão uniaxial, reproduzido de Dávila, Camanho e Rose (2005).

mente, e o operador  $\langle x \rangle = 1/2 (x + |x|)$ . A falha da matriz sob carregamento de compressão transversal é assumida como sendo resultado da interação quadrática entre as tensões efetivas cisalhantes atuando no plano da falha. O índice de falha para a matriz é:

$$FI_M = \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^T}{S^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^L}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1, \quad (4.5)$$

onde  $S^T$  e  $S_{is}^L$  são as resistências ao cisalhamento transversal e longitudinal. O subscrito *is* indica que para um laminado qualquer, a resistência longitudinal *in situ* ao cisalhamento deve ser usada no lugar da resistência de um laminado unidirecional. A razão para isto é que o efeito de restrição das camadas adjacentes aumenta a resistência efetiva da lâmina. Por outro lado, foi assumido por Dávila, Camanho e Rose (2005) que a resistência ao cisalhamento transversal efetiva  $S^T$  é independente do efeito *in situ*. As componentes de tensão atuantes no plano de fratura podem ser expressas em termos das tensões no plano e do ângulo do plano de fratura  $\alpha$  através de:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_{22} \cos^2 \alpha, \\ \tau^T &= -\sigma_{22} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \tau^L &= \tau_{12} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Usando as Equações (4.4) e (4.6), as tensões efetivas para um ângulo do plano de fratura  $\alpha$  entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  são:

$$\begin{aligned}\tau_{\text{eff}}^T &= \left\langle -\sigma_{22} \cos \alpha \left( \sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right) \right\rangle, \\ \tau_{\text{eff}}^L &= \left\langle \cos \alpha \left( |\tau_{12}| + \eta^L \sigma_{22} \cos \alpha \right) \right\rangle,\end{aligned}\quad (4.7)$$

onde  $\eta^T$  e  $\eta^L$  são obtidos a partir do caso de compressão uniaxial transversal. Na ocorrência da falha, a tensão compressiva no plano é igual à resistência da matriz à compressão, ( $\sigma_{22} = Y^C$ ). A tensão cisalhante transversal efetiva na falha é:

$$\tau_{\text{eff}}^T = S^T = Y^C \cos \alpha \left( \sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right). \quad (4.8)$$

Sob compressão uniaxial transversal, a fratura ocorre em um ângulo de fratura  $\alpha_0$  que maximiza o cisalhamento efetivo transversal. Tomando a derivada da expressão (4.8), igualando-a a zero e resolvendo-a para  $\eta^T$ , obtém-se o valor:

$$\eta^T = \frac{-1}{\tan 2\alpha_0}. \quad (4.9)$$

De acordo com Dávila, Camanho e Rose (2005), pode ser utilizado  $\alpha_0 = 53 \pm 2^\circ$ . O coeficiente de influência longitudinal  $\eta^L$ , pode ser estimado a partir das resistências ao cisalhamento longitudinal e transversal, através da equação:

$$\eta^L = -\frac{S^L \cos 2\alpha_0}{Y^C \cos^2 \alpha_0}. \quad (4.10)$$

O ângulo do plano de fratura para um laminado unidirecional carregado em compressão transversal é facilmente obtido experimentalmente. Para carregamentos combinados, isso deixa de ser verdade e é necessário calculá-lo. O ângulo de fratura é aquele que maximiza o índice de falha da Equação (4.5) e pode ser encontrado por uma busca dentro da faixa de ângulos possíveis  $0 < \alpha < \alpha_0$ . A Figura 18 mostra o envelope de falha para vários ângulos do plano de falha.

### 4.2.3 Critério para a Falha da Matriz sob Tração Transversal

Apesar do trincamento transversal da matriz causar apenas uma pequena redução na rigidez da estrutura, ela pode afetar a propagação do dano. Para prever o trincamento

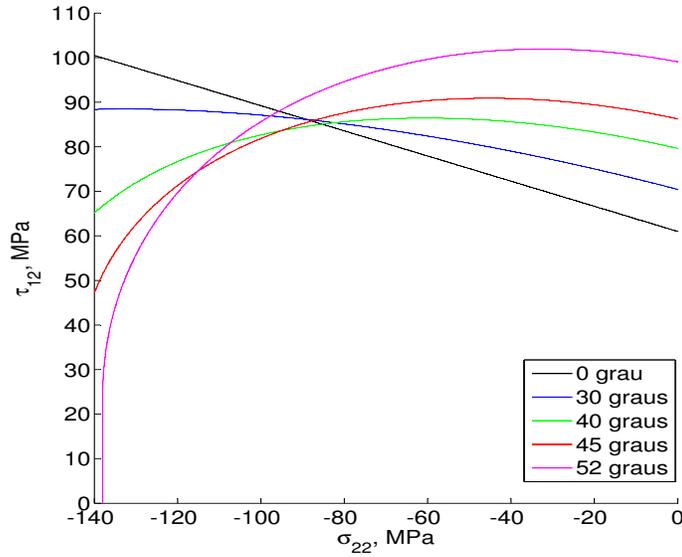


Figura 18: Envelope de falha  $\sigma_{22} - \tau_{12}$  para vários ângulos do plano de fratura (Reproduzido de Dávila, Camanho e Rose (2005)).

da matriz em um laminado sujeito a um cisalhamento no plano e a uma tensão de tração transversal, um critério deve ser capaz de calcular as resistências *in situ*. O efeito *in situ* é caracterizado por uma maior resistência à tensão e ao cisalhamento transversais de uma lâmina restringida por lâminas de diferentes orientações no interior de um laminado, quando comparado à resistência da mesma lâmina em um laminado unidirecional. A resistência *in situ* também depende do número de lâminas do laminado e da orientação das lâminas adjacentes àquela analisada. Métodos experimentais para quantificação do valor da tenacidade à fratura *in situ* foram estudados em Laffan et al. (2010a) e os efeitos da espessura e sequência de empilhamento em Laffan et al. (2010b). Dávila, Camanho e Rose (2005) calcularam estas resistências utilizando soluções da mecânica da fratura para a propagação de uma trinca aguda em uma lâmina restrita, de acordo com Dvorak e Laws (1987). Esta trinca aguda representa um defeito de fabricação que é idealizado como estando contido no plano 1 – 3. A trinca possui um comprimento  $2a_0$  na espessura da lâmina,  $t$ . Fisicamente esta trinca representa uma distribuição do descolamento entre a matriz e a fibra que pode estar presente na lâmina como consequência de defeitos de fabricação ou de tensões residuais resultantes dos diferentes coeficientes de expansão térmica da fibra e da matriz.

A tensão transversal de tração  $\sigma_{22}$  é associada com o modo *I* de solitação trinca, enquanto a tensão cisalhante  $\tau_{12}$  é associada com o modo *II* de solitação da trinca. A taxa

de dissipação de energia para propagação da trinca na direção transversal nos modos  $I$  e  $II$  são, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} G_I(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2, \\ G_{II}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

onde os parâmetros  $\Lambda_{jj}^0$  são calculados como:

$$\begin{aligned} \Lambda_{22}^0 &= 2 \left( \frac{1}{E_2} - \frac{-\nu_{21}^2}{E_1} \right), \\ \Lambda_{44}^0 &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

As tenacidades à fratura correspondentes são dadas por:

$$\begin{aligned} G_{Ic}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{22}^0 (Y_{is}^T)^2, \\ G_{IIc}(T) &= \frac{\pi a_0}{2} \Lambda_{44}^0 (S_{is}^L)^2, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde  $Y_{is}^T$  e  $S_{is}^L$  são as resistências *in situ* transversais à tração e ao cisalhamento, respectivamente. A taxa de dissipação de energia para a propagação da trinca na direção longitudinal nos modos  $I$  e  $II$  são, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned} G_I(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{22}^0 \sigma_{22}^2, \\ G_{II}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{44}^0 \tau_{12}^2. \end{aligned} \quad (4.14)$$

As tenacidades à fratura correspondentes são dadas por:

$$\begin{aligned} G_{Ic}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{22}^0 (Y_{is}^T)^2, \\ G_{IIc}(L) &= \frac{\pi a_0}{4} \Lambda_{44}^0 (S_{is}^L)^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Na presença da tensão de cisalhamento e de tensão normal de tração, ambos no plano 1 – 2, a taxa de liberação de energia crítica depende dos efeitos combinados de todos os mecanismos de absorção de energia microscópicos, entre eles a energia de criação da nova superfície de fratura. Hahn e Johannesson (1983) propuseram um critério envolvendo os dois modos escritos como uma equação polinomial de primeira ordem nos fatores de concentração

de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ . Escritos em termos dos modos  $I$  e  $II$  das taxas de liberação de energia, esse critério fica como:

$$(1 - g) \sqrt{\frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)}} + g \frac{G_I(i)}{G_{Ic}(i)} + \frac{G_{II}(i)}{G_{IIc}(i)} = 1 \quad i = T, L, \quad (4.16)$$

onde a constante  $g$  é definida como

$$g = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}} = \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left( \frac{Y_{is}^T}{S_{is}^L} \right)^2. \quad (4.17)$$

O índice de falha pode então ser expresso em termos da tensão na lâmina e das resistências *in situ*. Substituindo em (4.16) as Equações (4.11) e (4.13) ou (4.14) e (4.15), obtém-se:

$$FI_M = (1 - g) \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} + g \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_{is}^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S_{is}^L} \right)^2 \leq 1. \quad (4.18)$$

Para o cálculo das propriedades *in situ*, o tamanho da trinca em relação à espessura da lâmina deve ser levado em conta. Uma lâmina espessa é definida como aquela na qual o comprimento da trinca é muito menor do que a espessura da lâmina, ou seja,  $2a_0 \ll t$ . A espessura mínima de uma lâmina espessa depende do material usado. As resistências *in situ* para lâminas espessas que se encontram no interior do laminado podem ser calculadas como sendo:

$$\begin{aligned} Y_{is}^T &= \sqrt{\frac{2G_{Ic}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{22}^0}}, \\ S_{is}^L &= \sqrt{\frac{2G_{IIc}(T)}{\pi a_0 \Lambda_{44}^0}}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para o caso de lâminas finas que se encontram no interior do laminado, estas podem ser calculadas por:

$$\begin{aligned} Y_{is}^T &= \sqrt{\frac{8G_{Ic}(L)}{\pi t \Lambda_{22}^0}}, \\ S_{is}^L &= \sqrt{\frac{8G_{IIc}(L)}{\pi t \Lambda_{44}^0}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Um laminado unidirecional é considerado um caso especial de lâmina espessa. Levando-

se em consideração que não existem lâminas restritivas, a trinca pode estar localizada na superfície do laminado, o que aumenta a taxa de dissipação de energia. Os valores para os modos  $I$  e  $II$  são, então, dados por:

$$\begin{aligned} G_{Ic}(T) &= 1,12^2 \pi a_0 \Lambda_{22}^0 (Y^T)^2, \\ G_{IIc}(T) &= \pi a_0 \Lambda_{44}^0 (S^L)^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde  $Y^T$  e  $S^L$  são as resistências ao cisalhamento e à tração medidos em ensaios com laminados unidirecionais. Substituindo as Equações (4.21) em (4.19), obtém-se as equações para a resistência *in situ* de laminados unidirecionais, que são dadas por:

$$\begin{aligned} Y_{is}^T &= 1,12\sqrt{2}Y^T, \\ S_{is}^L &= \sqrt{2}S^L. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A razão de tenacidades  $g$  pode também ser calculada em termos das propriedades unidirecionais, substituindo as Equações (4.21) na Equação (4.17). Desta forma, obtém-se:

$$g = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}} = 1,12^2 \frac{\Lambda_{22}^0}{\Lambda_{44}^0} \left( \frac{Y^T}{S^L} \right)^2 \quad (4.23)$$

#### 4.2.4 Critério para Falha da Fibra sob Tração Longitudinal

O critério para falha das fibras sob tração é baseado nas investigações experimentais de Puck e Schurmann (1998) que recomendam o uso da deformação efetiva da fibra. Contudo, Puck e Schurmann (1998) relatam que é possível também utilizar as trações longitudinais como critério porque isso não traria diferenças significativas. O índice de falha para tração na direção longitudinal então é:

$$FI_F = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_1^T} \leq 1, \quad (4.24)$$

onde  $\varepsilon_{11}$  é a deformação do material na direção da fibra e  $\varepsilon_1^T$  é a deformação em que ocorre a falha do material quando o mesmo é solicitado na direção da fibra.

## 4.2.5 Critério para Falha da Fibra sob Compressão Longitudinal

A falha de fibras de compósitos sob compressão ocorre devido ao colapso das fibras como resultado do cisalhamento originado de sua dobra e do dano à matriz que o suporta. Este, segundo Pinho, Robinson e Iannucci (2009a), é o modo de falha mais comum para compósitos FRP sob tensão de compressão longitudinal. O dobramento da fibra ocorre como uma deformação de cisalhamento, conduzindo à formação de uma região de dobramento, esta região pode ser observada na Figura 19. Para o próximo índice de falha, é necessário calcular o ângulo de desalinhamento das fibras que poderia causar falha da matriz sob compressão uniaxial. Esse desalinhamento é idealizado como uma região de ondulamento local, de acordo com a Figura 20. As tensões nas coordenadas desalinhadas, mostradas na Figura 20, são:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^m &= \cos^2 \phi \sigma_{11} + \sin^2 \phi \sigma_{22} + 2 \sin \phi \cos \phi \tau_{12}, \\ \sigma_{22}^m &= \sin^2 \phi \sigma_{11} + \cos^2 \phi \sigma_{22} - 2 \sin \phi \cos \phi \tau_{12}, \\ \tau_{12}^m &= -\sin \phi \cos \phi \sigma_{11} + \sin \phi \cos \phi \sigma_{22} + (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \tau_{12}.\end{aligned}\quad (4.25)$$

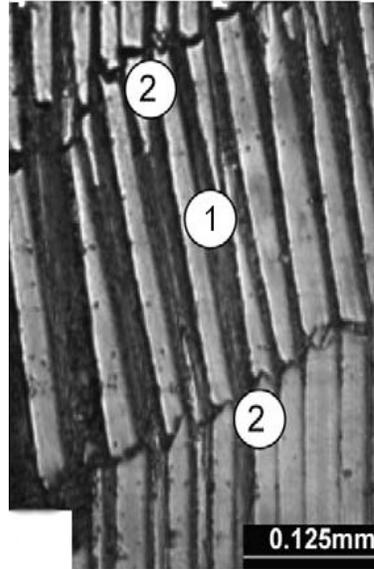


Figura 19: Micrografia com a região de dobramento das fibras, mostrando (1) a região de dobramento e (2) a quebra das fibras (PINHO; ROBINSON; IANNUCCI, 2006).

Na falha sob compressão axial,  $\sigma_{11} = -X^C$ , e  $\sigma_{22} = \tau_{12} = 0$ . Substituindo esse valores na Equação (4.25) obtém-se  $\sigma_{22}^m = -\sin^2 \phi^C X^C$  e  $\tau_{12}^m = -\sin \phi^C \cos \phi^C X^C$ , onde o ângulo  $\phi^C$  é o ângulo de desalinhamento total para o caso de compressão longitudinal pura.

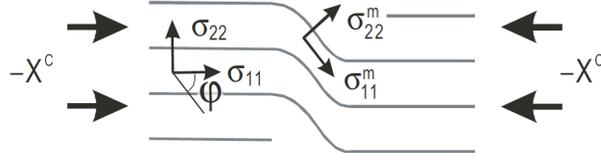


Figura 20: Imperfeição no alinhamento da fibra, idealizado como ondulação localizada (DÁVILA; CAMANHO; ROSE, 2005).

Para calcular o índice de falha para o dobramento da fibra, as tensões  $\sigma_{22}^m$  e  $\tau_{12}^m$  são substituídas no critério para a falha da matriz sob compressão, dado pela Equação (4.5). Como o modo de falha é governado pela tensão cisalhante  $\tau_{12}$ , o ângulo de fratura é igual a zero e  $\tau_{\text{eff}}^T = 0$ . O critério de falha para a matriz se torna:

$$\tau_{\text{eff}}^L = X^C \left( \sin \phi^C \cos \phi^C - \eta^L \sin^2 \phi^C \right) = S_{\text{is}}^L. \quad (4.26)$$

Resolvendo para  $\phi^C$ , leva à equação quadrática:

$$\tan^2 \phi^C \left( \frac{S_{\text{is}}^L}{X^C} + \eta^L \right) - \tan \phi^C + \left( \frac{S_{\text{is}}^L}{X^C} \right) = 0. \quad (4.27)$$

A menor das duas raízes da Equação (4.27) é:

$$\phi^C = \tan^{-1} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - 4(S_{\text{is}}^L/X^C + \eta^L)(S_{\text{is}}^L/X^C)}}{2(S_{\text{is}}^L/X^C + \eta^L)} \right). \quad (4.28)$$

O ângulo de desalinhamento total pode ser decomposto em um ângulo de desalinhamento inicial  $\phi^0$ , que representa imperfeições de fabricação e uma componente de rotação adicional  $\phi^R$ , resultante de carregamento cisalhante. Estes ângulos podem ser calculados usando aproximações para ângulos pequenos e as Equações (4.25):

$$\begin{aligned} \phi^R &= \frac{\tau_{12}^m}{G_{12}} = \frac{-\phi \sigma_{11} + \phi \sigma_{22} + |\tau_{12}|}{G_{12}}, \\ \phi^0 &= \phi^C - \phi_{X^C}^R = \phi^C - \frac{\tau_{12}^m}{G_{12} X^C} \Rightarrow \phi^0 = \left( 1 - \frac{X^C}{G_{12}} \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde o valor absoluto da tensão cisalhante  $|\tau_{12}|$  é usado porque o sinal de  $\phi$  é assumido como

positivo, independente do sinal da tensão de cisalhamento. Lembrando que  $\phi = \phi^0 + \phi^R$ , é possível agora resolver as Equações (4.29) para  $\phi$  em função de  $\phi^C$ , através da equação:

$$\phi = \frac{|\tau_{12}| + (G_{12} - X^C)\phi^C}{G_{12} + \sigma_{11} - \sigma_{22}}. \quad (4.30)$$

A falha por compressão da fibra pela formação de uma região em que há dobra é prevista usando as tensões da Equação (4.25) juntamente com o critério de falha para tração ou compressão da matriz. Para compressão da matriz ( $\sigma_{22}^m < 0$ ), o critério da Equação (4.5), com  $\alpha = 0^\circ$  e  $\tau_{\text{eff}}^T = 0$  é utilizado. O critério para dobramento da fibra se torna:

$$FI_F = \left\langle \frac{|\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m}{S_{\text{is}}^L} \right\rangle \leq 1. \quad (4.31)$$

Para a compressão da fibra com tração da matriz, as tensões transformadas das Equações (4.25) são substituídas no critério de falha da matriz sob tração, dado pela Equação (4.18) para produzir o critério para dobramento das fibras dado por:

$$FI_F = (1 - g) \left( \frac{\sigma_{22}^m}{Y_{\text{is}}^T} \right) + \left( \frac{\sigma_{22}^m}{Y_{\text{is}}^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}^m}{S_{\text{is}}^L} \right)^2 \leq 1. \quad (4.32)$$

Na presença de alta compressão transversal combinada com compressão moderada das fibras, o dano na matriz pode ocorrer sem a formação de regiões de dobramento ou dano às fibras. Este modo de dano à matriz é calculado usando as tensões efetivas no local de desalinhamento da estrutura no critério de falha da Equação (4.25), que resulta em:

$$FI_M = \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^{mT}}{S^T} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{\text{eff}}^{mL}}{S_{\text{is}}^L} \right)^2 \leq 1, \quad (4.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_{\text{eff}}^{mT} &= \left\langle -\sigma_{22}^m \cos \alpha \left( \sin \alpha - \eta^T \cos \alpha \right) \right\rangle, \\ \tau_{\text{eff}}^{mL} &= \left\langle \cos \alpha \left( |\tau_{12}^m| + \eta^L \sigma_{22}^m \cos \alpha \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.34)$$

### 4.3 Critério de Falha Tsai-Wu

Tsai e Wu (1971) desenvolveram um critério que tinha como proposta ser operacionalmente simples de maneira que se pudesse caracterizar o material e que fosse facilmente

utilizável no projeto de componentes. Este critério não explica ou prevê os mecanismos reais da falha, mas se tornou um dos critérios mais populares por ser computacionalmente fácil de ser implementado e por requerer um método relativamente simples para estimar a capacidade de carregamento de uma estrutura. Neste trabalho, o critério de falha de Tsai-Wu será utilizado para prever a falha em cada uma das lâminas do material compósito para posterior comparação com a previsão de falha do critério LaRC03. A suposição básica do critério Tsai-Wu é que existe uma superfície de falha no espaço de tensão na seguinte forma escalar:

$$f_i \sigma_i + f_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad (4.35)$$

onde  $f_i$  e  $f_{ij}$  são tensores de resistência de segunda e quarta ordem e  $i, j=1, 2, \dots, 6$ , ou seja, a notação reduzida é usada, conforme a Equação (3.13). A Equação (4.35) na forma expandida é igual a:

$$\begin{aligned} & f_1 \sigma_1 + f_2 \sigma_2 + f_3 \sigma_3 + f_4 \sigma_4 + f_5 \sigma_5 + f_6 \sigma_6 + f_{11} \sigma_1^2 + 2f_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2f_{13} \sigma_1 \sigma_3 \\ & + 2f_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2f_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2f_{16} \sigma_1 \sigma_6 + f_{22} \sigma_2^2 + 2f_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2f_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2f_{25} \sigma_2 \sigma_5 \\ & + 2f_{26} \sigma_2 \sigma_6 + f_{33} \sigma_3^2 + 2f_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2f_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2f_{36} \sigma_3 \sigma_6 + f_{44} \sigma_4^2 + 2f_{45} \sigma_4 \sigma_5 \\ & + 2f_{46} \sigma_4 \sigma_6 + f_{55} \sigma_5^2 + 2f_{56} \sigma_5 \sigma_6 + f_{66} \sigma_6^2 = 1. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Os termos lineares na tensão normal nesta expressão permitem a distinção entre resistência à compressão e à tração. Os coeficientes  $f_{12}$ ,  $f_{23}$  e  $f_{13}$  permitem a interação entre as tensões normais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Os termos quadráticos  $\sigma_i \sigma_j$  definem um elipsóide no espaço de tensão. As resistências ao cisalhamento de compósitos unidirecionais,  $F_4$ ,  $F_5$  e  $F_6$ , em relação aos planos principais do material (material especialmente ortotrópico), são independentes do sinal da tensão cisalhante ( $\sigma_4$ ,  $\sigma_5$ ,  $\sigma_6$ ). Por causa disso, todos os termos lineares das tensões cisalhantes e todos os termos associados com interações entre tensões normais e cisalhantes e tensões cisalhantes atuando em planos diferentes devem desaparecer. Assim,

$$f_4 = f_5 = f_6 = f_{14} = f_{15} = f_{16} = f_{24} = f_{25} = f_{26} = f_{34} = f_{35} = f_{36} = f_{45} = f_{46} = f_{56} = 0. \quad (4.37)$$

O número de coeficientes é reduzido ainda mais assumindo isotropia transversa com o plano 2-3 como plano de isotropia e observando que:

$$f_2 = f_3 \quad f_{22} = f_{33} \quad f_{55} = f_{66} \quad f_{12} = f_{13}. \quad (4.38)$$

Então, o critério é escrito como:

$$f_1\sigma_1 + f_2(\sigma_2 + f_1\sigma_3) + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) + f_{44}\sigma_4^2 + f_{66}(\sigma_5^2 + \sigma_6^2) + 2f_{12}(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3) + 2f_{23}\sigma_2\sigma_3 = 1. \quad (4.39)$$

Para um estado bidimensional de tensão, onde somente  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_6$  são diferentes de zero, o critério acima é reduzido para:

$$f_1\sigma_1 + f_2\sigma_2 + f_{11}\sigma_1^2 + f_{22}\sigma_2^2 + f_{66}\sigma_6^2 + 2f_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \quad (4.40)$$

Segundo Tsai e Wu (1971), resistências de engenharia, assim como constantes de engenharia, são aquelas para as quais há relativa simplicidade para medição em laboratório e embora não sejam componentes de um tensor, podem ser relacionadas aos componentes  $f_i$  e  $f_{ij}$  através de carregamentos elementares aplicados à lâmina. Para um carregamento longitudinal (direção 1) de tensão que leva a falha  $\sigma_1^u = X^T$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$ , e

$$f_1X^T + f_{11}X^{T2} = 1, \quad (4.41)$$

e para carregamento de compressão longitudinal  $\sigma_1^u = -X^C$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$  e

$$-f_1X^C + f_{11}X^{C2} = 1. \quad (4.42)$$

Resolvendo as duas equações para  $f_1$  e  $f_{11}$  encontra-se os valores:

$$f_1 = \frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C}, \quad f_{11} = \frac{1}{X^T X^C}. \quad (4.43)$$

De maneira análoga, é possível obter:

$$f_2 = \frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C}, \quad f_{22} = \frac{1}{Y^T Y^C}. \quad (4.44)$$

Realizando ensaios de carga cisalhante pura até a falha em cada um dos três planos de simetria do material, obtém-se:

$$f_{44} = \frac{1}{S_{23}^2},$$

$$f_{55} = \frac{1}{S_{31}^2},$$

$$f_{66} = \frac{1}{S_{12}^2}. \quad (4.45)$$

Em uma análise bidimensional, o termo que resta é o de interação  $f_{12}$  que deve ser obtido por alguma forma de teste biaxial. Sob carregamento normal biaxial  $\sigma_1^u = \sigma_2^u = S_{\{12\}}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0$ , obtém-se:

$$(f_1 + f_2)S_{(12)} + (f_{11} + f_{22} + 2f_{12})S_{\{12\}}^2 = 1, \quad (4.46)$$

onde  $S_{\{12\}}$  é a resistência determinada experimentalmente para um estado biaxial de tensões de tração ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ). A Equação (4.46) é resolvida para  $f_{12}$ . O critério de falha de Tsai-Wu para um estado plano de tensão, após a substituição de todos os coeficientes é dado por:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^T X^C} + \frac{\sigma_2^2}{Y^T Y^C} + \frac{\sigma_6^2}{S^L} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X^T X^C Y^T Y^C}} + \left( \frac{1}{X^T} - \frac{1}{X^C} \right) \sigma_1 + \left( \frac{1}{Y^T} - \frac{1}{Y^C} \right) \sigma_2 = 1. \quad (4.47)$$

O critério de Tsai-Wu não é um critério de falha baseado totalmente em fenômenos físicos, por isso ele pode prever a ocorrência do dano mas não consegue distinguir entre os diferentes modos de falha. Tendo em vista que em estudos da propagação de danos é imprescindível o conhecimento do modo de falha. Autores como Zhao e Cho (2007) e Ganapathy e Rao (1998) utilizaram um critério secundário em conjunto com o critério de Tsai-Wu para identificar os modos de falha. Como exemplo o critério adicional usado por Ganapathy e Rao (1998) que considerava apenas dois modos de falha, quebra da matriz e quebra da fibra e desconsiderava a delaminação, era baseado nas seguintes condições:

Para tensões de tração:

$$\sigma_1 > X^T \text{ falha da fibra,}$$

$$\sigma_2 > Y^T \text{ falha da matriz,}$$

$$|\sigma_6| > S \text{ falha da matriz,}$$

e para tensões de compressão:

$$|\sigma_1| > |X^C| \text{ falha da fibra,}$$

$$|\sigma_2| > |Y^C| \text{ falha da matriz.}$$

## 4.4 Critério de Puck

Em seu trabalho Puck e Schurmann (1998) aplicaram modelos fenomenológicos baseados em uma sólida base física. Estes modelos retornam resultados, não somente dos níveis de tensão que levam a iniciação da trinca, como também da sua direção de propagação. Este critério pode ser dividido em um critério para a falha da fibra e outro para a falha da matriz. Para a falha da fibra, apresenta as seguintes condições:

$$\frac{1}{\varepsilon_{1T}} \left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) = 1 \quad (4.48)$$

e

$$\frac{1}{\varepsilon_{1C}} \left| \left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right) \right| + (10\gamma_{21})^2 = 1, \quad (4.49)$$

onde  $\varepsilon_{1T}$  e  $\varepsilon_{1C}$  são as deformações longitudinais de ruptura, para tensões de tração e compressão, respectivamente. O termo  $m_{\sigma f}$  é utilizado para descrever um efeito de “intensificação” da tensão e assume o valor de  $m_{\sigma f} = 1.3$  para fibras de vidro e  $m_{\sigma f} = 1.1$  para fibras de carbono. A Equação (4.48) é usada quando  $\left( \varepsilon_1 + \frac{\nu_{f12}}{E_{f1}} m_{\sigma f} \sigma_{22} \right)$  tem valor positivo, caso contrário, se possuir um valor negativo, a Equação (4.49) é utilizada.

Para a falha da matriz, este critério é baseado na critério de Mohr-Coulomb e indica que a falha é criada exclusivamente pelas tensões que atuam no plano de fratura. Neste caso o critério é dividido em três modos de falha, chamados de modo A, modo B e modo C. Os modos A e B indicam um plano de fratura com ângulo de  $0^\circ$ . O modo C apresenta diferentes ângulos do plano de fratura, que aumentam de  $0^\circ$  até  $\approx 51^\circ$ . As representações destes ângulos de fratura podem ser observados na Figura 21. Para o modo A, a Equação (4.50) é usada e é válida para  $\sigma_{22} \geq 0$ :

$$\sqrt{\left( \frac{\tau_{21}}{S_{21}} \right)^2 + \left( 1 - p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{Y_T}{S_{21}} \right)^2 \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_T} \right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(+)} \frac{\sigma_{22}}{S_{21}} = 1. \quad (4.50)$$

Para o modo B, a condição é dada por:

$$\frac{1}{S_{21}} \left( \sqrt{\tau_{21}^2 + \left( p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_{22} \right)^2} + p_{\perp\parallel}^{(-)} \sigma_{22} \right) = 1, \quad (4.51)$$

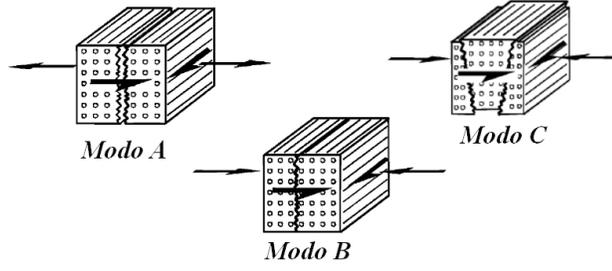


Figura 21: Ângulos dos planos de fratura para os modos de falha A, B e C do critério de Puck (PUCK; KOPP; KNOPS, 2002).

válida para  $\sigma_{22} < 0$  e  $0 \leq \left| \frac{\sigma_{22}}{\tau_{21}} \right| \leq \frac{R_{\perp\perp}^A}{|\tau_{21c}|}$ . Para o modo C, a condição é dada por:

$$\left[ \left( \frac{\tau_{21}}{2(1 + p_{\perp\perp}^{(-)} S_{21})} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{22}}{Y_C} \right)^2 \right] \frac{Y_C}{(-\sigma_{22})} = 1, \quad (4.52)$$

válida para  $\sigma_{22} < 0$  e  $0 \leq \left| \frac{\tau_{21}}{\sigma_{22}} \right| \leq \frac{|\tau_{21c}|}{R_{\perp\perp}^A}$ . Onde  $p$  são parâmetros de inclinação, obtidos experimentalmente.  $R_{\perp\perp}^A$  é a resistência à fratura no plano de fratura, calculada a partir dos resultados de ensaios uniaxiais de compressão transversal. Os valores destes parâmetros de inclinação para compósitos de fibra de vidro/epóxi e de fibra de carbono/epóxi podem ser encontrados em Puck, Kopp e Knops (2002).

O critério de Puck utiliza também um modelo de degradação que indica as tensões aplicadas às fibras, tanto de compressão quanto de tração, como causadoras de um enfraquecimento da matriz. Este enfraquecimento se deve a microtrincas e a descolamentos ocorridos por conta da solicitação nas fibras, sendo descritos por um fator de enfraquecimento das resistências à fratura dos planos de falha ( $R$ ), que é calculado em função das tensões aplicadas nas fibras. Esta relação é dada pela Equação (4.53):

$$f_w = 1 - \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_{1d}} \right), \quad (4.53)$$

onde  $\sigma_{1d}$  é dado por  $1.1X^T$  para o caso de tensão de tração nas fibras e  $-1.1X^C$  para o caso de tensão de compressão nas fibras.

# 5 *Resultados Numéricos*

## 5.1 Introdução

Para avaliar o critério de falha LaRC03, será adotado um procedimento semelhante àquele sugerido nos trabalhos de Hinton e Soden (1998), que ficou conhecido como World Wide Failure Exercise (WWFE). Serão feitas comparações entre os envelopes de falha dos critérios Tsai-Wu, Puck e LaRC03, para três compósitos laminados formados por lâminas com reforço unidirecional. As propriedades mecânicas dos materiais que formam os laminados a serem analisados foram obtidas de Soden, Hinton e Kaddour (1998) e estão agrupados na Tabela 3. Além disso, o critério LaRC03 também foi comparado com dados experimentais de ensaios biaxiais obtidos de Soden, Hinton e Kaddour (2002). Utilizando os dados experimentais de falha para tensões compressivas em função do ângulo das fibras para laminados *cross-ply* (AGARWAL; BROUTMAN, 1990), foi realizada a comparação das predições de falha dos critérios Tsai-Wu, Puck e LaRC03. A formulação do Método dos Elementos de Contorno para elasticidade anisotrópica plana será aplicada para análise das tensões em um laminado multidirecional. De posse dos valores de tensão no contorno e domínio de cada lâmina, os critérios Tsai-Wu, Puck e LaRC03 são aplicados para verificação da falha. Foi feita também uma análise utilizando a predição dos modos de falha inerente aos critérios LaRC03 e Puck.

## 5.2 World Wide Failure Exercise (WWFE)

Tendo em vista a utilização dos dados experimentais que formaram a base de comparação do WWFE, é necessário explicar de que maneira este exercício foi organizado. A origem deste trabalho está em um encontro de especialistas da área, ocorrido em St. Alban (Reino Unido), em 1991. De acordo com Soden e Hinton (1998), como resultado de vários fóruns e discussões, duas principais conclusões foram tiradas: que não havia uma definição sobre o

Tabela 3: Propriedades mecânicas e limites de resistência de lâminas com reforço unidirecional analisados neste trabalho (SODEN; HINTON; KADDOUR, 2002).

Tipo da fibra	T300 (carbono)	E-glass Gevetex	Silenka E-glass	AS4 (carbono)
Matriz	BSL914C epoxi	LY556 epoxi	MY750 epoxy	3501-6 epoxi
$V_f$	0.6	0.62	0.6	0.6
$E_1(GPa)$	138	53.48	45.6	126
$E_2(GPa)$	11	17.7	16.2	11
$G_{12}(GPa)$	5.5	5.83	5.83	6.6
$\nu_{12}$	0.28	0.278	0.278	0.28
$\nu_{23}$	0.4	0.4	0.4	0.4
$X^T(MPa)$	1500	1140	1280	1950
$X^C(MPa)$	900	570	800	1480
$Y^T(MPa)$	27	35	40	48
$Y^C(MPa)$	200	114	145	200
$S^L(MPa)$	80	72	73	79
$G_{Ic}(Jm^{-2})$	220	165	165	220

que se constitui falha de um material compósito e que projetistas não tinham confiança na utilização dos critérios de falha àquela época.

Desta maneira organizou-se este exercício, o qual possuía regras gerais de maneira a garantir a possibilidade de comparação entre os diversos trabalhos. Os artigos enviados faziam parte de um estudo coordenado por M.J. Hinton e P.D. Soden, que tinha como intuito promover uma descrição compreensível da capacidade preditiva das teorias de falha, comparando-as entre si e com os dados experimentais obtido pelos organizadores e apresentados em Soden, Hinton e Kaddour (2002). Quase todos estes resultados experimentais foram obtidos de ensaios em corpos de prova tubulares, porque desta maneira são evitados problemas com efeitos de borda livre, além disso, uma grande variedade de testes biaxiais e triaxiais podem ser aplicadas impondo aos espécimes tubulares uma combinação de pressões internas, externas, torção e carregamento axial. Porém esse tipo de corpo de prova também possui alguns problemas, entre eles, evitar falhas em função das restrições das extremidades, várias formas de flambagem que podem aparecer e mudanças de geometria durante o ensaio. Apesar dos espécimes tubulares poderem falhar em uma variedade de maneiras, os autores do trabalho consideraram como tendo falhado apenas aqueles que tiveram fratura.

### 5.3 Envelopes de Falha para Laminados Unidirecionais

Os dados experimentais para laminados unidirecionais foram apresentados por Soden, Hinton e Kaddour (2002), como citado anteriormente, fazendo parte da preparação para o WWFE.

A Figura 22 mostra os envelopes de falha ( $\sigma_{22} - \tau_{12}$ ) dos critérios Tsai-Wu, Puck e LaRC03 para um laminado unidirecional do material E-glass/LY556 epoxy, juntamente com os dados experimentais de falha de um ensaio executado com carregamento transversal e de cisalhamento combinados. Para um laminado com reforço unidirecional do material T300/BSL914C (carbono/epóxi), os envelopes de falha ( $\sigma_{11} - \tau_{12}$ ) dos critérios Tsai-Wu, Puck e LaRC03 são apresentados na Figura 23, juntamente com os dados experimentais de falha de um ensaio no qual foram combinados carregamentos axiais e cisalhantes. O terceiro material analisado é o E-glass/MY750. Os envelopes de falha dos mesmos critérios são comparados com dados experimentais obtidos em um ensaio biaxial ( $\sigma_{11} - \sigma_{22}$ ) feitos em tubos formados por laminados aproximadamente unidirecionais ( $\pm 85^\circ$ ). A comparação é mostrada na Figura 24.

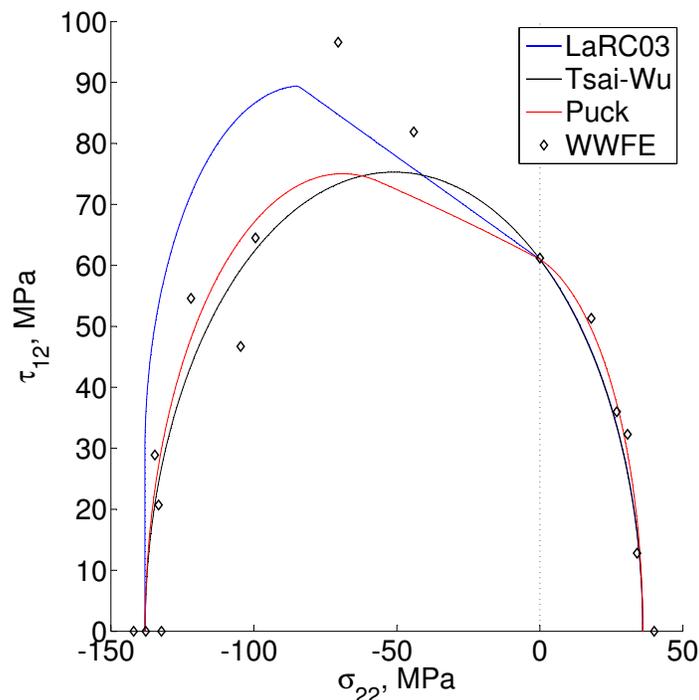


Figura 22: Envelope de falha  $\sigma_{22} - \tau_{12}$  para um laminado unidirecional de E-glass/LY556 epoxy.

Na Figura 22, no primeiro quadrante, observou-se uma boa concordância entre os dados experimentais e os três critérios. Quando se trata do segundo quadrante, é possível observar que os critérios de Puck e LaRC03 representam melhor a distribuição dos dados experimentais com destaque para o critério LaRC03. Nesta região, o índice de falha é dado pela Equação (4.5). É possível observar também que estes dois critérios no segundo quadrante são menos conservativos que o critério Tsai-Wu. No primeiro quadrante do gráfico o índice de falha do critério LaRC03 é dado pela Equação (4.18). Os modos de falha neste envelope dizem respeito somente à matriz tanto para o critério de Puck quanto para o critério LaRC03.

Os resultados apresentados na Figura 23 não apresentam uma boa concordância com os dados experimentais para nenhum dos critérios implementados. Puck e Schurmann (2002) quando da avaliação dos seus resultados, consideraram parte destes dados experimentais inconsistentes (principalmente àqueles para tensões cisalhantes superiores a 100 MPa). É razoável assumir que possam ter algum problema devido a dificuldades experimentais, ou ainda que sejam a representação de um mecanismo desconhecido de falha. Observa-se também que no primeiro quadrante o critério Tsai-Wu superestima a falha e no segundo quadrante, a subestima. Neste caso os critérios mais conservativos foram o Tsai-Wu no primeiro quadrante e o LaRC03 no segundo quadrante. Apesar dos dados experimentais da Figura 24 se

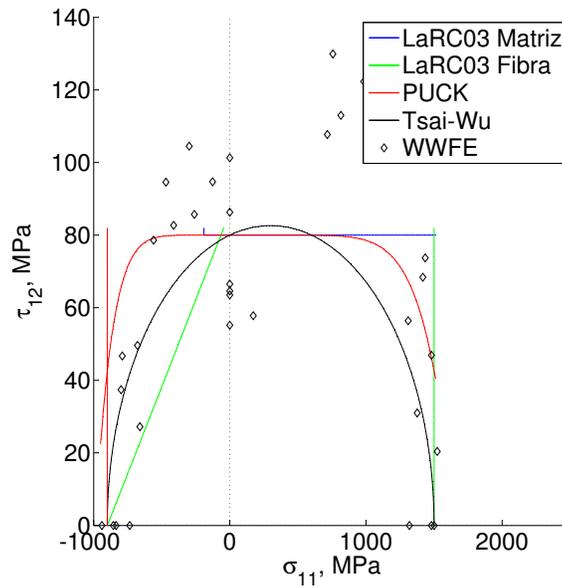


Figura 23: Envelope de falha  $\sigma_{11} - \tau_{12}$  para um laminado unidirecional de T300/BSL914 C (Carbono/epóxi).

concentrarem no primeiro e quarto quadrantes do gráfico, é possível observar uma melhor

concordância com o critério Tsai-Wu. Avalia-se que, para uma melhor análise do comportamento dos critérios, dados experimentais para as situações de compressão longitudinal combinada com compressão transversal e compressão longitudinal combinada com tração transversal deveriam ser utilizados. Neste caso a modelagem da falha dos critérios LaRC03 e Puck superestimaram as máximas tensões. Os melhores resultados obtidos pelo modelo de Puck indicam que a inclusão dos efeitos descritos pela Equação (4.53) podem ser uma descrição coerente do fenômeno de enfraquecimento da matriz com as tensões aplicadas nas fibras.

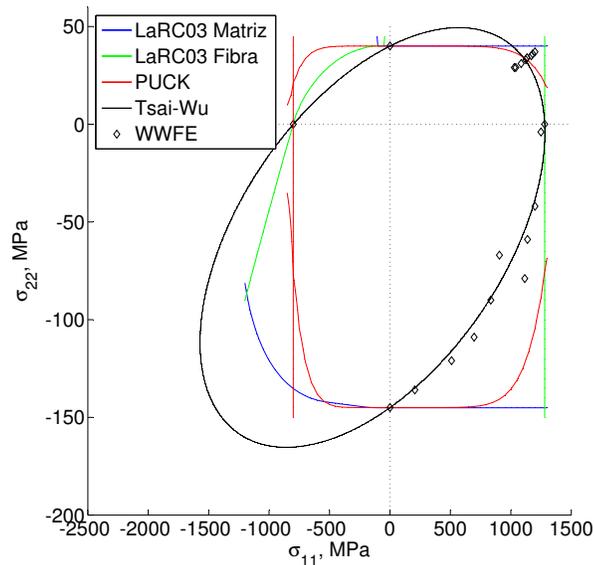


Figura 24: Envelope de falha  $\sigma_{11} - \sigma_{22}$  para laminado unidirecional de E-glass/MY750 epoxy.

A Figura 25 mostra a resistência à compressão em função da orientação das fibras para laminados AS4/3502 (carbono/epóxi) com sequência de empilhamento  $[\pm\theta]_s$ . O gráfico mostra que houve uma boa concordância entre o critério LaRC03 e os dados experimentais (SHUART, 1989), quando comparado com o critério Tsai-Wu. Os resultados na região do gráfico próximo ao ângulo de  $70^\circ$ , segundo Dávila, Camanho e Rose (2005), são devidos à inclusão do efeito de aumento da resistência ao cisalhamento causada pela tensão de compressão transversal. Este efeito não está previsto no modelo Tsai-Wu, o que explica o desvio desse critério dos pontos experimentais, tornando-o neste caso mais conservativo.

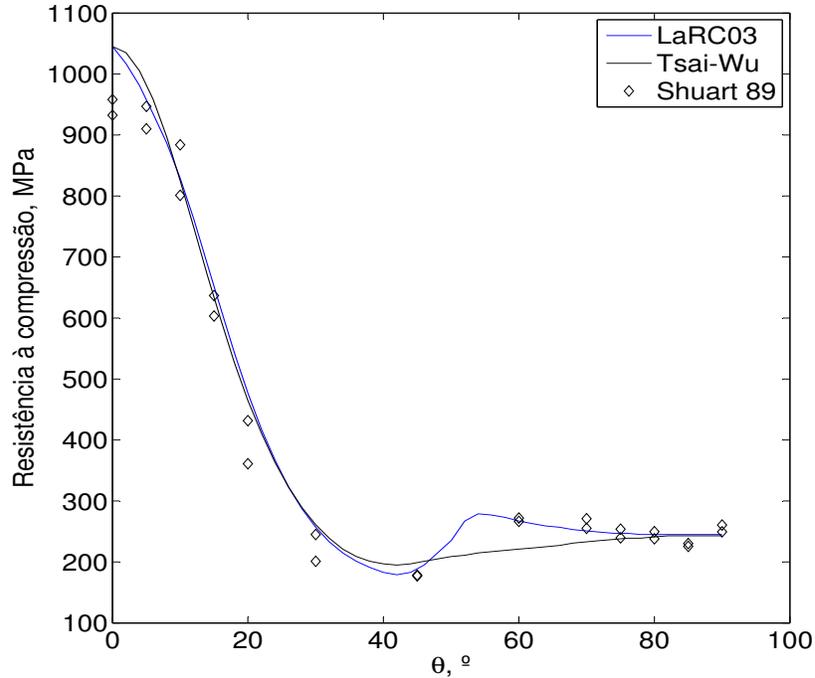


Figura 25: Resistência à compressão em função da orientação das fibras para laminados de AS4-3502  $[\theta / -\theta / -\theta / \theta]_{6s}$ .

## 5.4 Análise de Tensões em Laminados Simétricos e Avaliação da Falha

Utilizando as propriedades agrupadas na Tabela 3 e uma análise preliminar das tensões através do Método dos Elementos de Contorno (MEC), é possível também calcular os índices de falha em cada uma das lâminas de um laminado, verificando assim, se haverá falha em alguma delas. Devido à utilização de uma formulação do MEC para elasticidade anisotrópica plana, apenas a análise de laminados simétricos é possível, pois caso laminados não simétricos fossem analisados, deformações fora do plano surgiriam, o que não está previsto no modelo numérico. A rotina utilizada no cálculo das tensões foi feita no ambiente de programação do software MATLAB e foi desenvolvida por Éder Lima de Albuquerque durante seu doutorado (ALBUQUERQUE, 2001). Esta rotina baseou-se em programas feitos anteriormente por Frederico Lourenço, Piotr Fedelinsk e Paulo Sollero, respectivamente nos anos de 2000, 1993 e 1994. No presente trabalho, dois laminados diferentes serão analisados. O primeiro é constituído de Silenka E-glass MY750 epoxy e será analisado sob um carregamento de

tração longitudinal e compressão transversal. Este laminado, “*cross-ply*”, possui a seguinte sequência de empilhamento  $[0/90]_s$ , sua geometria é apresentada na Figura 26 com largura e comprimento iguais a  $1\text{ m}$ , espessura de cada lâmina  $t = 0,002\text{ m}$  onde é possível observar que há um furo central, que torna a variação das tensões mais complexa em suas proximidades. Apenas carregamentos no contorno foram aplicados e estes podem ser observados, assim como as restrições impostas.

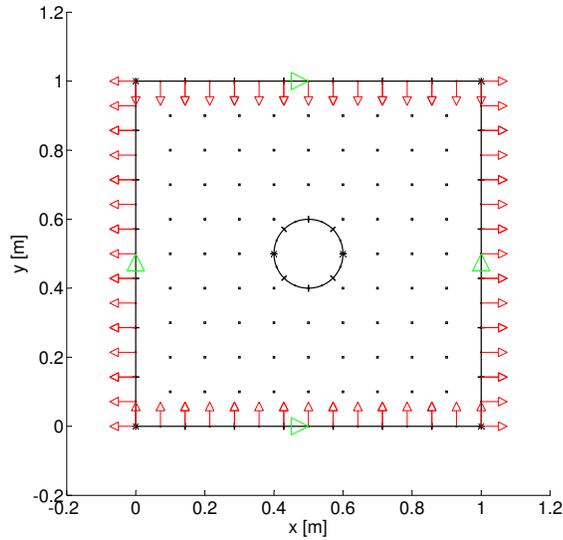


Figura 26: Discretização do contorno do laminado e sentido dos carregamentos aplicados.

Para efeito de comparação, os índices de falha também foram avaliados com o critério Tsai-Wu e Puck. São mostrados apenas os resultados para as lâminas 1 ( $0^\circ$ ) e 2 ( $90^\circ$ ), tendo em vista que o laminado é simétrico. A Figura 27 compara os resultados para a lâmina 1 e a Figura 28 para a lâmina 2.

De acordo com os resultados mostrados, percebe-se que os critérios identificam, de maneira semelhante, as regiões onde a falha é mais provável. Devido à descontinuidade geométrica do laminado, neste caso, é fácil perceber que se trata da região central, nas proximidades do furo. Uma das características que torna os critérios LaRC03 e Puck indicados para análises de propagação de danos é a identificação do modo de falha em conjunto com a predição da falha. De posse destas informações, análises mais detalhadas são possíveis, uma vez que a degradação das propriedades do material, após a falha inicial, é diretamente dependente da forma como o material falhou. Neste trabalho, esta característica foi incorporada

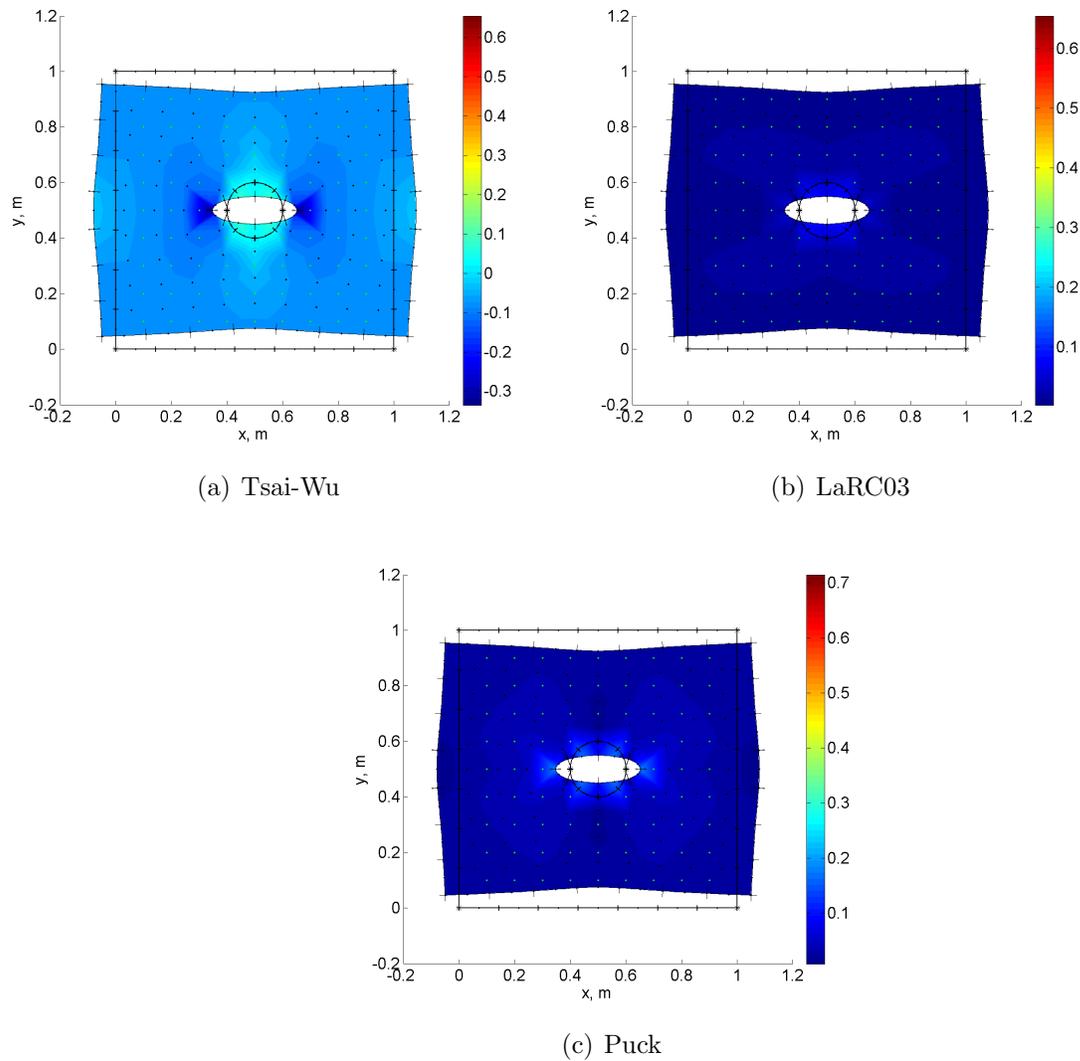


Figura 27: Índices de falha para a lâmina de número 1.

na análise e os resultados são mostrados na Figura 29, para a lâmina de número 2 (fibras a  $90^\circ$ ). Atribuiu-se um número representativo para cada modo de falha e a correspondência é dada abaixo. Para o critério LaRC03:

- Modo de falha = 1: Falha da matriz devido ao trincamento sob compressão transversal. O índice de falha é dado pela Equação (4.5).
- Modo de falha = 2: Falha da matriz devido ao trincamento sob tração transversal. O índice de falha é dado pela Equação (4.18).
- Modo de falha = 3: Falha da fibra devido à quebra da fibra sob tração longitudinal. O

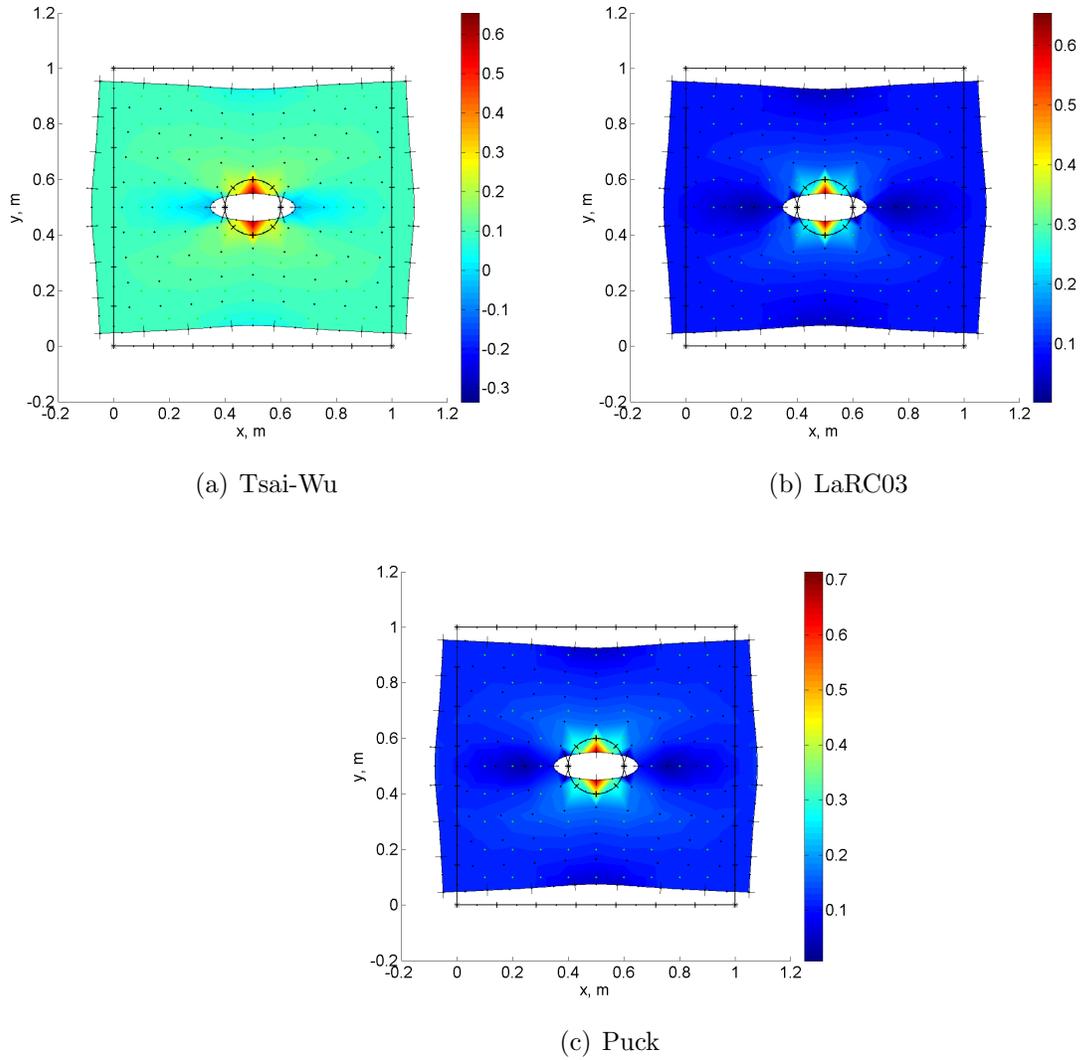


Figura 28: Índices de falha para a lâmina de número 2.

índice de falha é dado pela Equação (4.24).

- Modo de falha = 4: Falha da fibra devido ao dobramento da fibra sob compressão longitudinal e compressão transversal. O índice de falha é dado pela Equação (4.31).
- Modo de falha = 5: Falha da fibra devido ao dobramento da fibra sob compressão longitudinal e tração transversal. O índice de falha é dado pela Equação (4.32).
- Modo de falha = 6: Falha da matriz sob compressão biaxial. O índice de falha é dado pela Equação (4.33).

Para o critério de Puck:

- Modo de falha = 1: Falha da fibra sob carregamento de tração longitudinal. O índice de falha é dado pela Equação (4.48).
- Modo de falha = 2: Falha da fibra sob carregamento de compressão longitudinal. O índice de falha é dado pela Equação (4.49).
- Modo de falha = 3: Falha da matriz, modo A, com ângulo do plano de fratura igual a  $0^\circ$ , devido a carregamento de tração transversal. O índice de falha é dado pela Equação (4.50).
- Modo de falha = 4: Falha da matriz, modo B, com ângulo do plano de fratura igual a  $0^\circ$ , devido a carregamento de compressão transversal. O índice de falha é dado pela Equação (4.51).
- Modo de falha = 5: Falha da matriz, modo C, com ângulo do plano de fratura maior que  $0^\circ$  e menor que  $\approx 53^\circ$ , devido a carregamento de compressão transversal. O índice de falha é dado pela Equação (4.52).

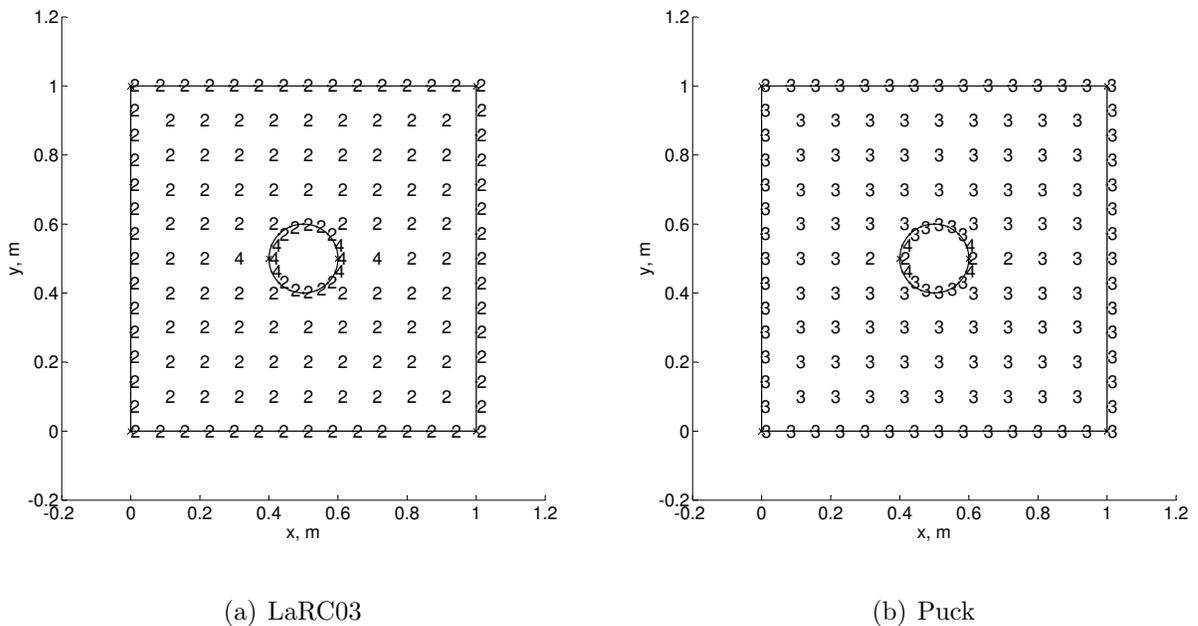


Figura 29: Modos de falha para a lâmina 2, ponto a ponto.

O modos de falha predominantes na lâmina 2 foram de falha da matriz para ambos os critérios, o modo de falha predominante do critério LaRC03 foi o modo 2, trincamento da

matriz sob tensão de tração transversal e, para o critério de Puck, foi o modo 3 (modo A), indicando também trincamento da matriz sob tensão de tração transversal com ângulo do plano de fratura igual a  $0^\circ$ . Nas proximidades do furo central o critério LaRC03 indicou o modo de falha 4, ou seja, falha da fibra por dobramento. O critério de Puck, além da falha equivalente da fibra sob tensão de compressão longitudinal, também identificou o modo 4 (modo B), falha da matriz sob tensão de compressão com ângulo do plano de fratura igual a  $0^\circ$ .

Para a segunda análise será considerado um laminado simétrico, com geometria definida na Figura 30, formado por quatro lâminas  $[20/50]_S$  com espessura  $t = 0,002m$  cada, cujo material é o Bóro-Epoxi. O laminado está submetido ao carregamento indicado na Figura 30 com valores iguais a  $N_1 = 50$  MN/m e  $N_2 = 100$  MN/m. O contorno do laminado foi discretizado com 59 elementos quadráticos descontínuos, sendo 45 no contorno externo e 14 no furo central. Os módulos de elasticidade transversal e longitudinal,  $E_1$  e  $E_2$ , o módulo de cisalhamento  $G_{12}$ , o coeficiente de poisson  $\nu_{12}$ , além dos limites de resistência a tração e compressão longitudinal,  $X^T$  e  $X^C$ , dos limites de resistência a tração e compressão transversal,  $Y^T$  e  $Y^C$ , e finalmente o limite de cisalhamento  $S$  estão dispostos na Tabela 4.

Tabela 4: Propriedades mecânicas e limites de resistência da lâmina de Bóro-Epoxi.

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$X^T$ (MPa)	$Y^T$ (MPa)	$X^C$ (MPa)	$Y^C$ (MPa)	$S^L$ (MPa)
204	18,5	5,59	0,23	1260	61	2500	202	67

Utilizando o mesmo procedimento adotado anteriormente, é possível realizar a comparação a partir das Figuras 31 e 32. Pode-se notar que os critérios indicaram as mesmas regiões como as mais prováveis para a ocorrência de falha. Além disso para as duas lâminas, pode-se observar através da Tabela 5, os valores máximos e mínimos dos índices de falha obtidos a partir dos 3 critérios, mostrando razoável acordo.

Tabela 5: Valores máximos e mínimos dos índices de falha no laminado da segunda análise.

Número da lâmina	LaRC03		Tsai-Wu		Puck	
	mín	máx	mín	máx	mín	máx
1 ( $20^\circ$ )	0,0168	0,9924	-0,2874	1,0258	0,0221	0,9990
2 ( $50^\circ$ )	0,0268	1,1788	-0,3185	1,1436	0,0268	1,1059

A visualização dos modos de falha neste segundo problema para a lâmina de número 2

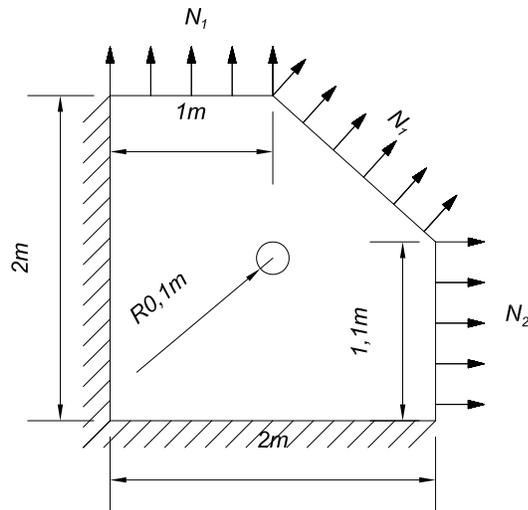
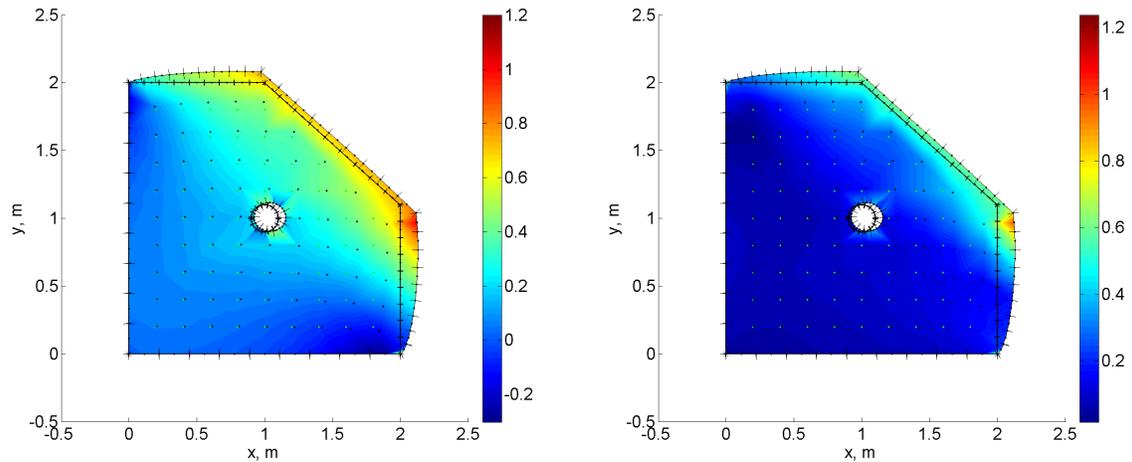


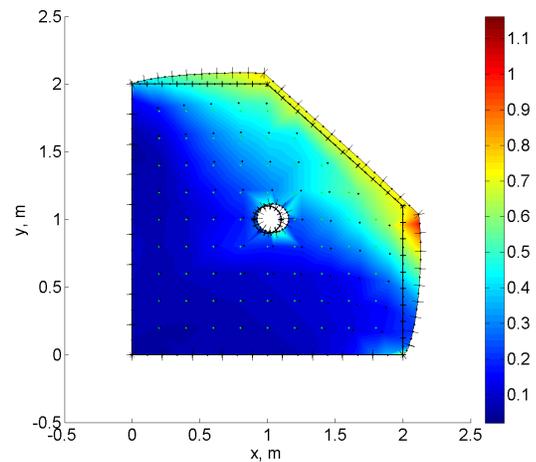
Figura 30: Geometria e carregamento do laminado proposto para a segunda análise.

é mostrada na Figura 33. Para uma melhor visualização dos modos de falha, a Figura 34 mostra o detalhe do furo central do laminado. Para o critério LaRC03 há uma predominância dos modos 2 e 3, respectivamente, falha da matriz sob tensão de tração transversal e falha da fibra sob tensão de tração longitudinal. Para o critério de Puck a predominância é dos modos 1 e 3, respectivamente, falha da fibra sob carregamento de tração longitudinal e falha da matriz no modo A, ou seja com ângulo do plano de fratura igual a  $0^\circ$ . Desta análise percebe-se a equivalência dos modos de falha dos dois critérios, inclusive nas proximidades do furo central, com poucas exceções.



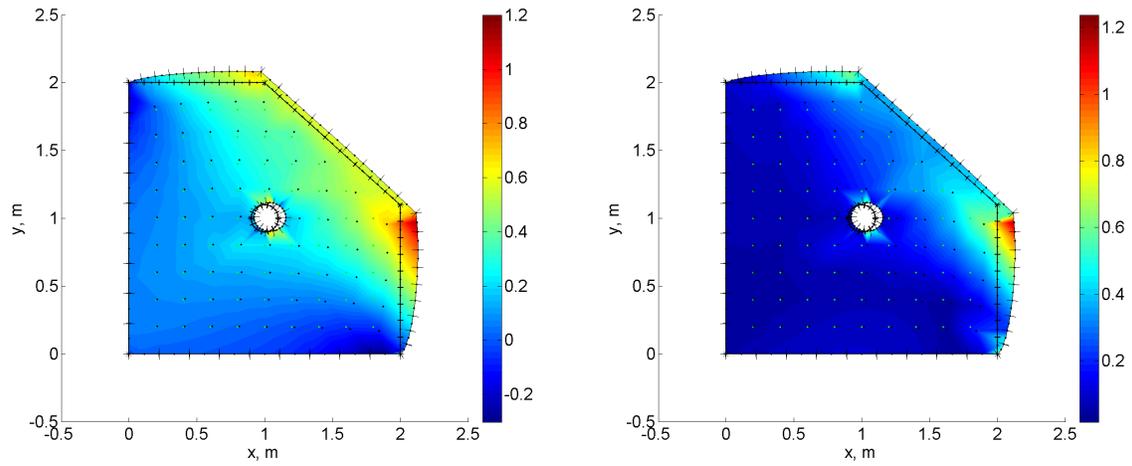
(a) Tsai-Wu

(b) LaRC03



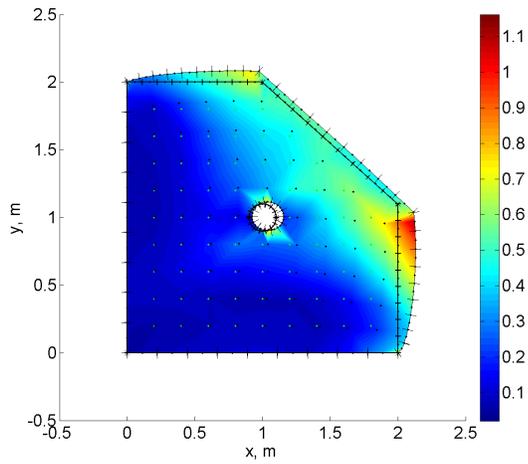
(c) Puck

Figura 31: Índice de falha para a lâmina número 1 da segunda análise.



(a) Tsai-Wu

(b) LaRC03



(c) Puck

Figura 32: Índice de falha para a lâmina de número 2 da segunda análise.



# 6 *Considerações Finais*

## 6.1 Conclusões

Para geometrias e carregamentos complexos, as técnicas numéricas são, na maioria dos casos, a única maneira de se obter respostas de uma análise de tensões e deformações. Neste trabalho, o Método dos Elementos de Contorno foi utilizado como ponto de partida para a análise da falha. A formulação usada foi a de elasticidade plana anisotrópica utilizando elementos quadráticos contínuos para a discretização do contorno.

A análise numérica da falha em materiais compósitos teve como parte principal a implementação dos critérios de falha de Tsai-Wu, Puck e LaRC03, os dois últimos, critérios baseados em fenômenos físicos. Em geral os critérios de falha conseguem prever bem as falhas para os casos onde fibras e matriz encontram-se sob tração, combinadas ou não com cisalhamento. Porém, quando existe compressão, não há a concordância dos critérios de falha com dados experimentais e também entre os próprios critérios de falha. Isto se deve aos mecanismos de falha (modos de falha) que ainda não são bem entendidos e demandam bastante pesquisa. A compreensão destes mecanismos é essencial para o desenvolvimento de modelos para a propagação dos danos, uma vez que a falha da matriz ou das fibras e o modo com que estas falhas ocorrem, influenciam de maneira diferente a degradação das propriedades elásticas de uma lâmina. A exceção neste caso, está no critério LaRC03 que conseguiu prever com razoável precisão a resistência à compressão de um laminado simétrico formado por fibras de carbono e matriz epóxi. O grande apelo dos critérios LaRC03 e Puck é a possibilidade de identificar a maneira como o material irá falhar, as predições deste critério foram verificadas e se mostraram coerentes com os carregamentos aplicados e entre os próprios critérios. Apesar disso, uma comparação com dados experimentais dos modos de falha é necessária. Entretanto, essa comparação é mais complexa, porque a verificação do início da falha para alguns dos modos é complicada, causando alterações quase sempre difíceis de serem iden-

tificadas, quer sejam geométricas, quer sejam do comportamento mecânico. Além disso, a correlação entre os modos de falha do critério com os modos de falha finais do laminado ainda necessita ser discutida. O acoplamento da análise de tensões com os critérios LaRC03 e Puck mostrou-se eficiente na avaliação estrutural de um laminado simétrico, sendo possível verificar os locais onde é maior a probabilidade de falha, além do próprio modo de falha.

## 6.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Como propostas de trabalhos futuros podem ser citadas:

- Estender o critério LaRC03 para problemas tridimensionais.
- Analisar a falha em placas e cascas utilizando este critério.
- Realizar uma análise de danos a partir dos modos de falha obtidos com o procedimento adotado neste trabalho.

# Referências

- AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1990.
- AIRFORCE-TECHNOLOGY.COM. *Predator RQ-1 / MQ-1 / MQ-9 Reaper - Unmanned Aerial Vehicle (UAV), EUA*. [S.l.], 2010. Disponível em: <<http://www.airforce-technology.com/projects/predator/>>.
- ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic material. *International Journal of Solid and Structures*, v. 39, p. 1405–1422, 2002.
- ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. Dual boundary method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 59, p. 1187–1205, 2004.
- ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers and Structures*, v. 81, p. 1703–1713, 2003.
- ALBUQUERQUE, E.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 27, p. 977–985, 2003.
- ALBUQUERQUE, E. L. *Numerical analysis of dynamic anisotropic problems using the boundary element method*. Tese (Doutorado) — Unicamp, Dept. Mec. Comput., July 2001.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING MATERIALS. *ASTM D5528: Standard test method for Mode I Interlaminar Fracture Toughness of Unidirectional Fiber-Reinforced Polymer Matrix Composites plastic and electrical insulating materials*. [S.l.], 2009.
- AZZI, V.; TSAI, S. Anisotropic strength of composites. *Experimental Mechanics*, v. 9, p. 283–288, 1965.
- BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1989.
- DANIEL, I.; ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.
- DEB, A. Boundary element analysis of anisotropic bodies under thermomechanical body force loadings. *Computers and Structures*, v. 58, p. 715–726, 1996.

- DÁVILA, C.; CAMANHO, P.; ROSE, C. Failure criteria for FRP laminates. *Journal of Composite Materials*, v. 39, p. 323–345, 2005.
- DVORAK, G.; LAWS, N. Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates: II first ply failure. *Journal of Composite Materials*, v. 21, p. 309–329, 1987.
- GANAPATHY, S.; RAO, K. Failure analysis of laminated composite cylindrical/spherical shell panels subjected to low-velocity impact. *Computers and Structures*, v. 68, p. 627–641, 1998.
- HAHN, H.; JOHANNESSON, T. Mechanics of composite materials. *ASME AMD*, v. 58, p. 135–142, 1983.
- HASHIN, Z. Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of Applied Mechanics*, v. 47, p. 329–334, 1980.
- HASHIN, Z.; ROTEM, A. A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. *Journal of Composite Materials*, v. 7, p. 448–464, 1973.
- HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 193, p. 281–297, 1947.
- HINTON, M.; SODEN, P. Prediction failure in composite laminates: The background to the exercise. *Composites Science and Technology*, v. 58, p. 1001–1010, 1998.
- KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- LAFFAN, M. et al. Measurement of the in situ ply fracture toughness associated with mode I fibre tensile failure in FRP. part I: Data reduction. *Composites Science and Technology*, v. 70, p. 606–613, 2010.
- LAFFAN, M. et al. Measurement of the in situ ply fracture toughness associated with mode I fibre tensile failure in FRP. part II: Size and lay-up effects. *Composites Science and Technology*, v. 70, p. 614–621, 2010.
- LEKHNITSKII, S. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. [S.l.]: Holden-Day, 1963.
- LEKHNITSKII, S. *Anisotropic Plates*. [S.l.]: Gordon and Breach, 1968.
- NETO, F. L.; PARDINI, L. C. *Compósitos Estruturais: ciência e tecnologia*. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.
- PINHO, S.; ROBINSON, P.; IANNUCCI, L. Fracture toughness of the tensile and compressive fibre failure modes in laminated composites. *Composites Science and Technology*, v. 66, p. 2069–2079, 2006.

- PINHO, S.; ROBINSON, P.; IANNUCCI, L. A micromechanical model for kink-band formation: Part I experimental study and numerical modelling. *Composites Science and Technology*, v. 69, p. 948–955, 2009.
- PINHO, S.; ROBINSON, P.; IANNUCCI, L. A micromechanical model for kink-band formation: Part II analytical modelling and numerical modelling. *Composites Science and Technology*, v. 69, p. 956–964, 2009.
- PINHO, S.; ROBINSON, P.; IANNUCCI, L. Developing a four point bend specimen to measure the mode I intralaminar fracture toughness of unidirectional laminated composites. *Composites Science and Technology*, v. 70, p. 614–621, 2010.
- PINHO, S. T. *Modelling failure of laminated composites using physically-based failure models*. Tese (Doutorado) — Imperial College London, Department of Aeronautics, 2005.
- PUCK, A.; KOPP, J.; KNOPS, M. Guidelines for the determination of the parameters in pucks action plane strength criterion. *Composites Science and Technology*, v. 62, p. 371–378, 2002.
- PUCK, A.; MANNIGEL, M. Physically based non-linear stress-strain relations for the inter-fibre fracture analysis of FRP laminates. *Composites Science and Technology*, v. 67, p. 1955–1964, 2007.
- PUCK, A.; SCHURMANN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, v. 58, p. 1045–1067, 1998.
- PUCK, A.; SCHURMANN, H. Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, v. 62, p. 1633–1662, 2002.
- SHUART, M. Failure of compression-loaded multidirectional composite laminates. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 27, p. 1274–1279, 1989.
- SODEN, P.; HINTON, M. Predicting failure in composite laminates: The background to the exercise. *Composites Science and Technology*, v. 58, p. 1001–1010, 1998.
- SODEN, P.; HINTON, M.; KADDOUR, A. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology*, v. 58, p. 1011–1022, 1998.
- SODEN, P.; HINTON, M.; KADDOUR, A. Biaxial test results for strength and deformation of a range of e-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data. *Composites Science and Technology*, v. 62, p. 1489–1514, 2002.
- SOLLERO, P.; ALIABADI, M. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *International Journal of Fracture*, v. 64, p. 269–284, 1993.

- SOLLERO, P.; ALIABADI, M. Anisotropic analysis of composite laminates using the dual boundary element method. *Composite Structures*, v. 31, p. 229–234, 1995.
- STROUD, A. H.; SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. New jersey. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.
- TELLES, J. C. F. A self adaptative coordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. *Int. J. for Numerical Methods in Engn.*, v. 24, p. 959–973, 1987.
- TSAI, S.; WU, E. A general theory of strength test for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, v. 5, p. 58–80, 1971.
- TSAI, S. W. *Strength and Life of Composites*. Stanford. Stanford University: JEC Composites, 2008.
- VELMURUGAN, R.; SOLAIMURUGAN, S. Improvements in mode I interlaminar fracture toughness and in-plane mechanical properties of stitched glass/polyester composites. *Composites Science and Technology*, v. 67, p. 61–69, 2007.
- VESTAS. *Wind Turbines - VESTAS, Dinamarca*. [S.l.], 2010. Disponível em: <<http://www.vestas.com/en/media/images.aspx>>.
- ZHAO, G.; CHO, C. Damage initiation and propagation in composite shells subjected to impact. *Composite Structures*, v. 78, p. 91–100, 2007.