

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Estudo Teórico Experimental de Parâmetros de
Projeto de uma Transmissão Continuamente
Variável por Tração Tipo Esfera Cone**

Autor: **Antonio Wagner Forti**
Orientador: Franco Giuseppe Dedini

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO**

Estudo Teórico Experimental de Parâmetros de Projeto de uma Transmissão Continuamente Variável por Tração Tipo Esfera Cone

Autor: **Antonio Wagner Forti**

Orientador: Franco Giuseppe Dedini

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Dinâmica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2003
S.P . – Brasil

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E FLUIDOS**

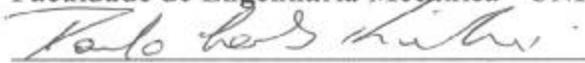
TESE DE DOUTORADO

**Estudo Teórico Experimental de Parâmetros de
Projeto de uma Transmissão Continuamente
Variável por Tração Tipo Esfera Cone**

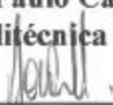
Autor: Antonio Wagner Forti
Orientador: Franco Giuseppe Dedini



Prof. Dr. Franco Giuseppe Dedini, Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP



Prof. Dr. Paulo Carlos Kaminski
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - USP



Prof. Dr. Jonas de Carvalho
Escola de Engenharia de São Carlos - USP



Prof. Dr. Oscar Antonio Braunbeck
Faculdade de Engenharia Agrícola - UNICAMP



Prof. Dr. Anselmo Eduardo Diniz
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Campinas, 25 de fevereiro de 2003

Dedicatória:

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

A Deus que me deu a graça de poder realizar esse trabalho.

Aos meus pais pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador que me deu a oportunidade.

A professora Katia Lucchesi Cavalca DPM/UNICAMP, que gentilmente permitiu a utilização de alguns de seus equipamentos nos testes experimentais para cálculo do coeficiente de tração do fluido.

Ao professor Bonet DEP/UNICAMP que forneceu material para a construção da bancada.

Ao Professor Joost Jacques Kalker da Universidade Tecnológica de Delft, The Netherlands com quem iniciei os estudos sobre Teoria de Contato.

Aos professores e colegas de trabalho da FEM/UNICAMP que acreditaram e colaboraram.

Aos professores participantes dessa banca de doutoramento pela gentileza da participação e comentários sobre o trabalho.

Ao pessoal técnico do DPM/UNICAMP particularmente: Maurício, Ferreira, Rosângela e Leandro.

As secretárias Patrícia e Denise que muito me ajudaram durante esses anos.

A minha amiga Professora Dra. Paula F. Cavalcante pela ajuda e incentivo.

Ao Dr. Abdon Tápias que me auxiliou na elaboração do programa de aquisição de dados.

A INA Brasil S/A na pessoa do Engenheiro Alexandre Mastaler pelo auxílio na manufatura de algumas partes da bancada.

Ao Centro de Pesquisa Renato Archer – CENPRA – na pessoa do Engenheiro Jorge Vicente Lopes da Silva que permitiu a utilização da máquina de prototipagem rápida para a construção algumas peças da transmissão.

A Fapesp e a Capes pelo auxílio financeiro durante o projeto.

As pessoas que realmente pagam seus impostos, e com isso contribuem para sustentar a estrutura universitária e as pesquisas deste País, meus sinceros agradecimentos.

Aquilo que não nos mata torna-nos mais fortes.
Friedrich Wilhelm Nietzsche

Resumo

FORTI, Antonio Wagner, *Estudo Teórico Experimental de Parâmetros de Projeto de uma Transmissão Continuamente Variável Tipo Esfera Cone*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003. 203 p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho é apresentado o desenvolvimento de uma Transmissão Continuamente Variável por Tração (TD-CVT) tipo esfera-cone para aplicação em sistemas de baixo torque e potência, particularmente em bicicletas. Primeiramente, é apresentado um breve histórico sobre CVTs e sobre a capacidade do homem em produzir potência. Em seguida, são estudados dois tópicos fundamentais quando o assunto é TD-CVT: (1) teoria de contato, no qual é calculada teoricamente a força tangencial em contato de rolamento seco baseado na teoria simplificada do contato de rolamento; (2) Lubrificação elastohidrodinâmica (EHL), no qual é calculado experimentalmente o coeficiente de tração de um fluido nacional. Em seguida, descreve-se o protótipo da TD-CVT e seu princípio de funcionamento. Finalizando, três tópicos de otimização referentes ao projeto de TD-CVTs são abordados: (1) Geométrica; (2) Movimento de *spin* nos contatos entre os elementos rolantes, em função das características geométricas; (3) Tempo de vida da transmissão baseado na teoria de Lundberg e Palmgren e parâmetros de projeto.

Palavras Chave:

CVT, TD-CVT, Lubrificação Elastohidrodinâmica, Coeficiente de Tração, Teoria de Contato, Spin, EHL.

Abstract

FORTI, Antonio Wagner, *Experimental Theoretical Study of Design Parameters of a Continuously Variable Transmissions Type Sphere Cone*. Campinas,,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2003. 203 p. Tese (Doutorado)

The development of a Traction Drive Continuously Variable Transmission (TD-CVT) type sphere cone for application in low torque and power systems, especially in bicycles is present in this work. Firstly a brief historical of CVTs and human power capacity is present. Then, two important subjects are studied: (1) Contact theory, where the tangential force in the rolling contact is evaluated theoretically based on the simplified theory of rolling contact; (2) Elastohydrodynamic Lubrication (EHL), where the traction coefficient of a oil available in Brazilian market is evaluated experimentally. After that, the prototype of the TD-CVT and its working is described. Finally, three optimization subjects are studied: (1) Geometric; (2) Spin motion in the contact area as a function of geometric parameters; (3) The lifetime of the transmission based on Lundberg and Palmgren theory and design parameters.

Key Words

CVT, TD-CVT, Elastohydrodynamic Lubrication, Traction Coefficient, Contact Theory, Spin, EHL.

Índice

Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas.....	viii
Nomenclatura.....	ix
Capítulo 1 - Introdução.....	1
1.1 Objetivo.....	3
1.2 Motivação.....	4
1.2.1 Curvas de Potência Humana	5
1.2.2 Freqüência de Pedalar Ótima	6
1.2.3 Sistemas de Transmissão para Bicycletas	8
1.3 Desenvolvimento do Projeto (Etapas do Projeto)	9
1.3.1 Etapa 1.....	9
1.3.2 Etapa 2.....	11
1.3.2.1 Micro Problema.....	11
1.3.2.2 Macro Problema	12
1.3.2.3 Etapa 3.....	14
1.4 Divisão dos Capítulos	14
Capítulo 2 - As TD-CVTs no Universo das Transmissões.....	16
2.1 Introdução	16
2.2 Classificação das Transmissões	18
2.3 Transmissões com um Número Fixo de Relações de Transmissão	19
2.4 Transmissões com um Número Infinito de Relações de Transmissão	20
2.4.1 CVTs Tipo Polia Expansiva.....	21
2.4.2 CVTs por tração	23
2.4.2.1 Definição.....	23
2.4.2.2 Modelo mais Conhecido	24
2.4.2.3 Região de Contato entre os Elementos Rolantes da TD-CVT	26
2.5 Perspectivas Futuras e Aplicações para as CVTs.....	28
2.6 Sistema de transmissão em bicycletas.....	31
2.6.1 Dos Primórdios Até Hoje	31
2.6.2 Tendência Observada	33
2.6.3 Proposta Para Um "Novo" Sistema.....	33

2.7	Comentários e Conclusões	35
Capítulo 3 - Teoria de Contato		
36		
3.1	Introdução	36
3.2	Tribologia	39
3.3	Contato de Rolamento	41
3.4	Conceitos Básicos do Problema de Contato de Rolamento	42
3.4.1	Definição do Problema	43
3.4.2	A Distância Entre os Pontos de contato	44
3.4.3	O Escorregamento	46
3.4.4	Borda Dianteira, Borda Traseira	48
3.4.5	Fricção	49
3.4.6	Condição de Contorno	51
3.5	Aproximação por <i>Half-Space</i>	55
3.5.1	Propriedades de uma Aproximação por <i>Half-Space</i>	56
3.5.1.1	O Número de Influência	56
3.5.1.2	Corpos Quase Iguais (<i>Quasiidentity</i>)	61
3.5.1.3	<i>Slip</i> em <i>Half-Space</i>	61
3.5.2	O Problema de Hertz	63
3.5.2.1	A Teoria Linear de Contato de Rolamento Para Contatos Hertzianos	68
3.6	A Teoria Simplificada do Contato de Rolamento	72
3.6.1	Discretização do Escorregamento (<i>slip</i>)	72
3.6.2	Teoria Simplificada	73
3.6.2.1	Lei de Coulomb	75
3.6.2.2	Teoria Linear	75
3.6.2.3	Parâmetro de Flexibilidade	78
3.6.2.4	O Limite de Tração	79
3.6.2.5	Uma Solução Analítica	80
3.7	Simulações	82
3.8	Comentários e Conclusões	85
Capítulo 4 - Lubrificação Elastohidrodinâmica		
87		
4.1	Introdução	87
4.2	Tipos de Lubrificação	89
4.2.1	Lubrificação por Camada Limite	90
4.2.2	Lubrificação de Filme Combinado	90
4.2.3	Lubrificação de Filme Completo	91
4.2.3.1	Lubrificação Hidrostática	91
4.2.3.2	Lubrificação Hidrodinâmica	92
4.2.3.3	Lubrificação Elastohidrodinâmica	93
4.3	Comportamento Reológico dos Lubrificantes	94
4.3.1	Equações de Reynolds	95

4.3.1.1	Coeficiente Pressão-Viscosidade:.....	97
4.3.1.2	Relação Densidade-Pressão.....	99
4.3.1.3	Deformação - Espessura do Filme	100
4.3.2	Curvas de Fricção.....	103
4.4	Teoria da Solidificação.....	107
4.5	Coeficiente de Tração	109
4.6	Experimento - Cálculo Experimental do Coeficiente de Tração.....	112
4.6.1	Bancada de Teste dos Lubrificantes	113
4.6.2	Princípio de Funcionamento.....	114
4.7	Resultados	116
4.8	Comentários e Conclusão.....	118
Capítulo 5 - Desenvolvimento da TD-CVT Esfera-Cone		120
5.1	Introdução	120
5.2	Forma Construtiva de uma TD-CVT Esfera-Cone.....	121
5.2.1	Princípio do Funcionamento	121
5.2.2	Variação da Relação de Transmissão Através das Esferas	121
5.3	Forma construtiva da TD-CVT Tipo Esfera-Cone Proposta	124
5.3.1	Funcionamento da Transmissão	126
5.3.2	Disco de Ajuste da Relação de Transmissão.....	129
5.4	Mecanismos para Posicionamento do Disco de Ajuste da RT	131
5.5	Força Normal no Contato	131
5.5.1	Carnes.....	131
5.6	Sistema de Controle	132
5.6.1	Notações.....	132
5.6.2	Relações Cinemáticas	133
5.6.3	Equações Dinâmicas.....	134
5.7	Bancada de Teste da TD-CVT	138
5.8	Aplicação da Transmissão Desenvolvida	141
5.9	Comentários e Conclusões	141
Capítulo 6 - Otimização		143
6.1	Introdução	143
6.2	Otimização Geométrica – Otimização de Forma.....	144
6.3	Otimização do Spin.....	150
6.4	Otimização do Tempo de Vida da Transmissão	157
6.4.1	Falha de Origem Subsuperficial.....	158
6.4.2	Região de Contato.....	158
6.4.3	Modelo de Vida por Fadiga.....	160
6.4.4	Sistema Analisado	163
6.4.5	Resultados.....	166
6.5	Comentários e Conclusões	170

Capítulo 7 - Comentários de Conclusões	171
Bibliografia	173
Apêndice A	184
Apêndice B	187
Apêndice C	193
Apêndice D	198

Lista de Figuras

Figura 1.1	Produção de potência em função: (a) do tipo de movimento; (b) do membro utilizado. Trabalho realizado por Ursinus e extraído do livro <i>The History of Man-Powered Flight</i> , D.A. Reay, (Rean 1977).....	4
Figura 1.2	Gráfico típico de máxima produção de potência mecânica pelo homem em função do tempo.....	5
Figura 1.3	Energia bruta consumida em função da frequência de pedalar para 10 valores de potência constante.....	7
Figura 1.4	Fluxograma do trabalho.....	10
Figura 2.1	Sistema de transmissão genérico.....	17
Figura 2.2	Classificação dos diferentes tipos de transmissões.....	19
Figura 2.3	Alguns tipos de CVTs.....	21
Figura 2.4	CVT tipo polia expansiva.....	22
Figura 2.5	Correia utilizada na CVT Van Dorne.....	23
Figura 2.6	CVT de polias expansivas utilizando correntes.....	23
Figura 2.7	CVT por tração tipo toroidal.....	25
Figura 2.8	Esquema de funcionamento da CVT <i>Extroid</i> TM	26
Figura 2.9	Forças agindo no sistema propulsor em bicicletas.....	33
Figura 2.10	Vista 3D da CVT no quadro da bicicleta.....	34
Figura 2.11	Vista 2D da CVT no quadro da bicicleta com a descrição dos componentes....	34
Figura 3.1	Distribuição de pressão na região de contato seco.....	36
Figura 3.2	Distribuição de pressão na região de contato lubrificado.....	37
Figura 3.3	Representação das forças.....	40
Figura 3.4	Dois corpos em contato de rolamento.....	43
Figura 3.5	Distância entre os pontos dos corpos em contato.....	44
Figura 3.6	Área de contato potencial e real.....	46
Figura 3.7	Esquematização do <i>creep</i> e velocidade de rolamento.....	48
Figura 3.8	Divisão da área de contato segundo: (A) Haines e Ollerton (1963), (B) Johnson e Vermeulen (1958).....	55
Figura 3.9	Aproximação por <i>half-space</i>	56
Figura 3.10	Raios principais de curvatura dos corpos.....	63
Figura 3.11	Distribuição de tração devido ao <i>creepage</i> longitudinal puro na teoria simplificada.....	81
Figura 3.12	Distribuição de tração exata para puro <i>creepage</i> longitudinal.....	81

Figura 3.13	Áreas de <i>slip</i> (S) e adesão (A). (a) <i>creepage</i> puro ($\phi = 0$); (b): <i>spin</i> puro ($v_x = v_y = 0$); (c) <i>creepage</i> lateral com <i>spin</i> ($v_x = 0$); (d) <i>creepage</i> longitudinal com <i>spin</i> ($v_y = 0$); (e) caso geral; (f) grande <i>spin</i> - fonte Kalker (1990).....	82
Figura 3.14	Força, pressão e área de contato para faixa de relação de transmissão 1:2~2:1, raio interno = 20.40 mm e diâmetro da esfera 14.28 mm.....	84
Figura 3.15	Spin nos contatos cone de entrada esfera, esfera cone de saída e spin total.....	84
Figura 3.16	Variação da força tangencial no contato esfera cone de entrada em função do <i>spin</i>	85
Figura 4.1	Tipos de lubrificação em função da fricção e velocidade relativa dos corpos em contato de rolamento.....	89
Figura 4.2	Lubrificação por camada limite.....	90
Figura 4.3	Lubrificação de filme combinado.....	90
Figura 4.4	Lubrificação de filme completo.....	91
Figura 4.5	Classificação dos tipos de lubrificação.....	91
Figura 4.6	Gráfico tensão de cisalhamento versus taxa de cisalhamento.....	97
Figura 4.7	Comportamento reológico de um típico lubrificante em condição de EHL.....	104
Figura 4.8	Planos da área de contato mostrando as regiões do filme de óleo.....	108
Figura 4.9	Região de contato e curva de tração.....	109
Figura 4.10	Fatores que influenciam o coeficiente de tração.....	111
Figura 4.11	Região utilizável de μ	112
Figura 4.12	Esquema da bancada de testes do lubrificante.....	113
Figura 4.13	Fotos da bancada de testes.....	114
Figura 4.14	Mecanismo de 4 barras para cálculo das forças normal e tangencial.....	115
Figura 4.15	Pressão no contato em função da força na célula de carga normal.....	116
Figura 4.16	Valores experimentais do coeficiente de tração.....	117
Figura 4.17	Valores experimentais do coeficiente de tração.....	118
Figura 5.1	CVT representado: (A) redução. (B) relação 1:1 e (C) ampliação de movimento.....	121
Figura 5.2	Relação de transmissão através da inclinação do eixo da esfera.....	122
Figura 5.3	Relação entre as variáveis α , β e a faixa da relação de transmissão.....	124
Figura 5.4	Vista em 3D da TD-CVT proposta.....	125
Figura 5.5	Detalhe dos elementos da TD-CVT.....	125
Figura 5.6	Funcionamento da transmissão. esquema 1.....	126
Figura 5.7	Funcionamento da transmissão. esquema 2.....	126
Figura 5.8	Funcionamento da transmissão. esquema 3.....	127
Figura 5.9	Funcionamento da transmissão. esquema 4.....	127
Figura 5.10	Funcionamento da transmissão. esquema 5.....	128
Figura 5.11	Funcionamento da transmissão. esquema 6.....	128
Figura 5.12	Vista dos ângulos α e β na transmissão.....	129
Figura 5.13	Disco de ajuste da relação de transmissão e detalhe do rasgo.....	130
Figura 5.14	Princípio de funcionamento do cames.....	132

Figura 5.15	Elementos da transmissão.....	133
Figura 5.16	Vista 3D da TD-CVT na bancada.....	138
Figura 5.17	Vista 2D da TD-CVT na bancada.....	138
Figura 5.18	Partes da TD-CVT 1.....	139
Figura 5.19	Partes da TD-CVT 2.....	139
Figura 5.20	Partes da TD-CVT 3.....	140
Figura 5.21	Partes da TD-CVT 4.....	140
Figura 5.22	Aplicação da transmissão desenvolvida.....	141
Figura 6.1	Tela inicial para entrada de dados.....	145
Figura 6.2	Tela de visualização dos primeiros resultados.....	145
Figura 6.3	Tela para escolha do ângulo de inclinação do eixo da esfera ($rt=1:3\sim 3:1$).....	146
Figura 6.4	Tela para escolha da faixa da relação de transmissão para $\beta=60^\circ$	148
Figura 6.5	Tela para escolha dos ângulos acima e abaixo do ponto de contato.....	149
Figura 6.6	Geometria do contato.....	149
Figura 6.7	Tela para visualização da CVT esquematizada.....	150
Figura 6.8	Geometria do contato de uma TD-CVT esfera cone.....	151
Figura 6.9	Curvas de ψ para $A = 0.5$	153
Figura 6.10	Curvas de ψ para $A = 1.0$	153
Figura 6.11	Curvas de ψ para $A = 3.0$	154
Figura 6.12	Curvas de ψ para $\alpha=50^\circ$	155
Figura 6.13	Curvas de ψ para $\alpha=30^\circ$	155
Figura 6.14	Curvas de ψ e R para $\alpha=30^\circ$ e uma faixa de relação de transmissão = $1:3\sim 3:1$	156
Figura 6.15	Curvas de ψ e R para $\alpha=30^\circ$ e uma faixa de relação de transmissão = $1:2\sim 2:1$	157
Figura 6.16	Tensões de cisalhamento alternadas simétricas no interior dos corpos durante o deslocamento de um corpo sobre outro.....	158
Figura 6.17	Geometria de contato de corpos sólidos elásticos.....	159
Figura 6.18	Forças agindo no sistema bicicleta+ciclista.....	164
Figura 6.19	Topografia do percurso.....	165
Figura 6.20	Deslocamento angular total da esfera (60°) dividido em 15 partes.....	167
Figura 6.21	Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.....	168
Figura 6.22	Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.....	168
Figura 6.23	Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.....	169
Figura 6.24	Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.....	169

Lista de Tabelas

Tabela 1.1	Frequência de pedalar ótima para cada valor de potência da Figura 1.3.....	7
Tabela 3.1	Valores de K para diversas combinações de materiais.....	59
Tabela 3.2	Valor das integrais elípticas (Kalker 1993).....	66
Tabela 3.3	Razão axial do contato elíptico como uma função de t , Love(1926).....	67
Tabela 3.4	Os coeficientes de <i>creepage</i> C_{ij} da teoria linear do contato de rolamento para áreas de contato elíptica.....	71
Tabela 3.5	Forças tangenciais na teoria simplificada e exata - $L(a, b, (1), (2), (3))$	78
Tabela 3.6	$L(a,b,(1),(2),(3))$	79
Tabela 4.1	Parâmetros para cálculo da espessura do filme de óleo.....	101
Tabela 4.2	Características típicas do óleo Texaco Multigear LS 85W140.....	117
Tabela 5.1	Características dos elementos da TD-CVT.....	142
Tabela 6.1	Relação total de transmissão (RTT) em função da relação de transmissão da TD-CVT (RT_TD-CVT). Assim, $RTT=(L_2/L_3)*(RT_TD-CVT)$	165

Nomenclatura

Capítulo 2

Letras Latinas

F	força	[N]
L	comprimentos dos elementos do sistema de transmissão em bicicletas	[m]
P	potência	[Watts]
r	raio da roda da bicicleta	[m]
T	torque	[N.m]

Letras Grega

γ	ângulo do pedal	[rad]
η	Velocidade angular	[rad/s]
θ	deslocamento angular da roda da bicicleta	[rad]

Subscritos

1	pé de vela
2	raio da coroa
3	raio da catraca
c	corrente
i	entrada
o	saída
p	pedal
m	motora

Capítulo 3

Letras Latinas

a	comprimento do semi-eixo maior da área de contato elíptica	[m]
A	área de contato	[m ²]
A	soma das inversas dos raios relativos na direção x	[m ⁻¹]

A	área de adesão	
A	coeficientes da matriz de influência	
A	matriz de influência	
b	comprimento do semi-eixo menor da área de contato elíptica	[m]
B	soma das inversas dos raios relativos na direção y	[m ⁻¹]
B	integral elíptica completa	[m ²]
c	<i>creep</i>	[m/s]
C	coeficientes de creepage	
C	Integral elíptica completa	[m ²]
C	região de contato	
D	integral elíptica completa	[m ²]
e	distância entre pontos (2) e (1) – deformada	[m]
<i>f</i>	coeficiente de fricção:	
<i>g</i>	limite da força de tração	[N]
E	integral elíptica completa	[m ²]
E	região exterior a área de contato	
<i>E</i>	módulo de Young,	[N/m ²]
F	força	[N]
<i>G</i>	módulo combinado de rigidez	
h	distância entre pontos (2) e (1) - indeformada.	[m]
H	área de adesão	
L	semi-eixo menor do contato elíptica	[m]
L	flexibilidade	
K	integral elíptica completa	[m ²]
K	relação entre constantes elásticas	
m'	relação entre os eixos do contato elíptico	
m	excentricidade	[m]
M	momento	[N.m]
n	vetor unitário normal à área de contato	
<i>N</i>	força normal	[N]
p	vetor das forças de tração no contato	[N/m ²]
<i>p</i>	componente da força tangencial	[N/m ²]
<i>q</i>	de distância transversal	[m]
r	raio	[m]
R	raio de curvatura	[m]
S	slip relativo	
S	comprimento do semi-eixo maior do contato elíptico	[m]
S	área de escorregamento	
s	slip	[m/s]
<i>s</i>	componente do escorregamento	[m/s]
u	vetor diferença de deslocamento	[m]
u	derivada do vetor diferença de deslocamento	[m/s]
v	velocidade de rolamento	[m/s]

V	velocidade de rolamento	[m/s]
\mathbf{x}	vetor posição	[m]
\mathbf{y}	vetor posição	[m]
W	peso	[N]
$\dot{\mathbf{x}}$	derivada do vetor posição \mathbf{x}	[m/s]

Letras Gregas

δ	delta de Kronecker	
φ	<i>spin</i>	[rad/s]
v	componente tangencial da velocidade de escorregamento	[m/s]
v	<i>creepage</i>	[m/s]
σ	tensão	[N/m ²]
ν	coeficiente de Poisson	

Superescritos

1,2	corpo 1,2.
a	corpo a

Subscritos

a	fricção
est	estático
din	dinâmico
N	normal
T	tangencial
p	parte da área de contato onde a carga superficial é prescrita
u	parte da área de contato onde o deslocamento superficial é prescrito
c	zona de contato potencial
x	direção longitudinal
y	direção transversal
z	direção normal
τ	componentes tangencias da força normal ao contato

Capítulo 4

Letras Latinas

b	comprimento do contato Hertziano na direção do rolamento	[m]
D	número de Deborah razão do tempo de relaxação do lubrificante (η/\bar{G})	
E	modulo elasticidade	[N/m ²]
E'	módulo de elasticidade efetivo do par de elementos em rolamento	
F_t	força tangencial no contato	[N]
F_n	força normal no contato	[N]

G	parâmetro do material	
\bar{G}	módulo cisalhante	[N.s/m ²]
h	espessura do filme	[m]
p	pressão	[N/m ²]
p_r	pressão constante de 196.2 Mpa	[Pa]
t	tempo	[s]
u_1, u_2	velocidades das superfícies em movimento 1 e 2	[m/s]
u^+	soma das velocidades das superfícies em movimento $u^+ = u_1 + u_2$	[m/s]
R	raio efetivo do par de elementos em rolamento	[m]
$R_x,$	raios de curvatura na direção x	[m]
R_y	raios de curvatura na direção y	[m]
U	parâmetro de velocidade	
x, y	coordenadas cartesianas espaciais	[m]
w, u	variáveis externas: carga por unidade de comprimento e velocidade	
z	índice viscosidade-pressão	
W	parâmetro de carga	

Letras Gregas

α	coeficiente viscosidade-pressão	
ε	ângulo de tração	
$\dot{\gamma}$	taxa de cisalhamento	[1/s]
η_o	viscosidade na pressão ambiente	[Pa.s]
η_∞	viscosidade = $6.315 \cdot 10^{-5}$ = Constante	[Pa.s]
η	viscosidade dinâmica	[Pa.s]
μ	coeficiente de tração	
ρ	densidade	[kg/m ³]
ρ_0	densidade na temperatura ambiente	[kg/m ³]
τ	tensão de cisalhamento	[N/m ²]
τ_0	tensão cisalhante de Eyring	[N/m ²]
τ_H	tensão cisalhante	[N/m ²]
τ_l	tensão cisalhante limite	[N/m ²]

Capítulo 5

N	número de esferas da transmissão	
r	raio da esfera	[mm]
r_1	distância entre o centro da esfera e o ponto de contato com o disco de ajuste	[mm]
y	distância entre o centro da esfera e o ponto de contato com o cone	[m]
α	angulo de rotação do disco de ajuste da rt.	[rad]

β	ângulo de inclinação do eixo de rotação da esfera	[rad]
η	ângulo do mecanismo proporcional	[rad]
F_n	força normal no contato	[N]
θ_s	deslocamento angular	[rad]
$\dot{\theta}$	velocidade angular	[rad/s]
T	energia cinética	[N.m]
V	energia potencial	[N.m]
I	momento de inércia	[kg.m ²]

Capítulo 6

Letras Latinas

a	semi-eixo maior da elipse	[m]
A	$m_{total} r^2 + I_{rt} + I_{rd}$	[Kg.m ²]
Ar	área projetada pelo ciclista + bicicleta no plano frontal ao movimento	[m ²]
b	semi-eixo menor da elipse	[m]
B	$m_{total} g r$	[N.m]
C	coeficiente função do número de Reynolds e da geometria do corpo	
C ₁	valor médio da força nos pedais	[N]
C ₂	amplitude da força nos pedais	[N]
E	módulo de Young	[N/m ²]
F	força	[N]
g	aceleração da gravidade	[m/s ²]
H	medida relacionada a geometria da CVT	[m]
I	inércia de massa	[kg.m ²]
k	razão de elipsidade do contato	
l ₁	comprimento do pedivela	[m]
l ₂	diâmetro do movimento central (coroa)	[m]
l ₃	diâmetro do carreto (catraca)	[m]
Ls	perda de potência em função do movimento de spin	[Watts]
m	massa	[Kg]
P	peso do ciclista + quadro da bicicleta	[Kg]
r	raio da roda da bicicleta	[m]
R _b	raio da esfera	[mm]
Re	raio externo	[mm]
Ri	raio interno	[mm]
Tor	torque	[N.m]
T	energia cinética	[N.m]
v	velocidade	[m.s ⁻¹]
y	medida relacionada a geometria da CVT	[m]
z _o	profundidade da máxima tensão cisalhante reversa ortogonal	[m]

Letras Gregas

α	inclinação do plano	[graus]
β	inclinação do eixo de rotação da esfera	[grau]
ε	ângulo de tração	[rad]
γ	posição angular do pedal	[rad]
$\dot{\gamma}$	velocidade angular do pedal	[rad/s]
η	ângulo do dispositivo proporcional	[graus]
μ	coeficiente de tração	
θ	posição angular da roda	[rad]
$\dot{\theta}$	velocidade angular da roda	[rad/s]
ρ	soma das curvaturas (capítulos 5 e 6)	[m ⁻¹]
τ_o	máxima tensão cisalhante ortogonal reversa	[N/m ²]
σ_o	máxima tensão normal no contato	[N/m ²]
ν	coeficiente de Poisson	
ω_s	movimento de spin perpendicular ao contato	[rad/s]

Subscritos

(c + q)	quadro mais ciclista
r	rolamento
a	ar
rt	roda traseira
rd	roda dianteira
m	motora
n	normal ao contato
t	tangencial ao contato
r	rolamento
d	dissipativa
c	corrente
p	pedal

Abreviaturas

CVT e CVTs	<i>Continuously Variable Transmission</i>
TD-CVTs	<i>Traction Drive Continuously Variable Transmission</i>
rt	relação de transmissão
EHD e EHL	elastohidrodinâmica e lubrificação elastohidrodinâmica.
Ct	coeficiente de tração

Siglas

UCI	União Internacional dos Ciclistas
-----	-----------------------------------

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos anos, questões ambientais têm sido cada vez mais discutidas pela sociedade e pela comunidade científica mundial. A preservação do meio ambiente tornou-se uma questão extremamente atual e relevante. Dentro dessa nova tendência, de preocupação com o meio ambiente e, conseqüentemente, com a qualidade de vida, encontra-se o problema da otimização do uso da energia e das fontes energéticas pela humanidade.

Tendo isso em mente, todos devem procurar racionalizar o uso de toda a forma de energia, cabendo aos cientistas, procurar os meios de melhor aproveitá-las. Assim sendo, as máquinas devem ser projetadas para trabalhar no seu ponto ótimo de transformação da energia, sem que isso, contudo, comprometa seu desempenho.

Por esse motivo, as fontes de potência nas máquinas não são conectadas diretamente à carga. Entre elas existe um sistema de transmissão de potência que, na sua grande maioria, possui um número fixo de relações de transmissão.

Dependendo da relação de transmissão empregada pode-se obter na saída do sistema de transmissão de potência:

- Alta velocidade e, conseqüentemente, baixo torque;
- Baixa velocidade e, conseqüentemente, alto torque.

Um motor à gasolina típico tem uma faixa de torque dinâmico desde o torque zero até o torque nominal, e uma faixa de velocidade que vai da marcha lenta até a velocidade nominal. Por projeto, o motor tem que variar constantemente sua velocidade e torque de operação para que o veículo mantenha a velocidade desejada em função das variações de carga (inclinação da pista, resistência do ar, resistência ao rolamento, entre outras). Essa característica contrasta com a transmissão que tem um número discreto de relações de transmissão e permanece em uma mesma marcha durante longos períodos de tempo, pois nesse caso, o motor opera em eficiência máxima apenas em pequenos intervalos de tempo, intercalados por grandes intervalos de operação em baixa eficiência. Assim sendo, o número de pontos ótimos de trabalho do conjunto fonte de potência + transmissão + carga, é o mesmo do número de relações de transmissão do sistema de transmissão. Portanto, um sistema de transmissão que tenha como características:

- infinitas relações de transmissão dentro de uma faixa de trabalho pré-determinada;
- seja auto-ajustável às necessidades instantâneas do sistema;

terá também infinitos pontos de ótimo.

Essas características estão presentes nas Transmissões Continuamente Variáveis (CVTs). Embora as CVTs constituam assunto de investigação tecnológica há décadas, apenas recentemente tornaram-se objeto de aplicações industriais, com destaque na área automobilística. Atualmente, as CVTs parecem ser a resposta para muitos problemas que pressionam o projeto de veículos modernos. Veículos equipados com CVT apresentam diminuição do consumo de combustível e emissão de poluentes sem comprometimento do desempenho, quando comparados com veículos que utilizam transmissões escalonadas convencionais.

Além do uso na área automobilística, vislumbra-se também a aplicação das CVTs em veículos recreacionais e veículos movidos por força humana. Como se pode constatar nas seções 1.2.1 e 1.2.2, o ser humano é uma fonte de potência bastante limitada. Assim sendo, veículos movidos por força humana, poderiam utilizar CVTs com objetivo de otimizar o uso da potência fornecida ao sistema pelo ser humano mais facilmente.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma CVT por tração compacta e possível de ser utilizada em sistemas de baixo torque e potência, particularmente, bicicletas. Contudo, em virtude do emprego cada vez mais crescente de CVTs na indústria automobilística e, sabendo que, muito dos avanços tecnológicos alcançados nessa área são repassados às demais, o Capítulo 2 apresenta algumas aplicações de CVTs em automóveis.

1.1 Objetivo

Projetar, desenvolver e construir uma CVT por tração capaz de equipar sistemas de baixo torque e baixa potência, particularmente bicicletas. Para alcançar esse objetivo, vários tópicos foram estudados, dentre os quais destacam-se:

- Viabilidade construtiva, pois quanto menores os componentes, maiores as dificuldades de ajuste entre os elementos rolantes, Capítulo 5;
- Perdas de potência no contato seco entre elementos rolantes em função da geometria do contato, Capítulos 3 e 6;
- Mecanismo de ajuste da relação de transmissão, Capítulo 5;
- Estudo das características elasto-hidrodinâmicas de um lubrificante nacional, Capítulo 4;
- Tempo de vida do conjunto em função do tamanho da transmissão e da potência, transmitida, Capítulo 6.

Para estimar o tempo de vida do conjunto e a perda de potência no contato seco era necessária a utilização de dados que descrevessem os esforços na transmissão como se ela estivesse acoplada a um sistema de baixo torque e baixa potência. Assim sendo, foram utilizados dados provenientes de estudos do comportamento dinâmico do sistema ciclista+bicicleta+transmissão realizados por Forti (1997).

Na seção 1.3 será apresentado o desenvolvimento do projeto, e na seção 1.4 como ele será apresentado nesse trabalho. Antes, porém, serão descritos os motivos que levaram a proposta do uso de CVTs em bicicletas.

1.2 Motivação

O conhecimento da capacidade do ser humano considerando-o puramente como fonte de potência mecânica, é de fundamental importância, tanto para atletas como para o projeto de dispositivos acionados por força humana.

Um dos primeiros autores a apresentar estudos científicos a respeito da produção de potência pelo homem foi Nonweiler (1958). Ele comprovou cientificamente que quanto melhor treinado o indivíduo, maior será a quantidade de potência que ele pode produzir. Os estudos de Nonweiler surgiram numa época em que o homem tinha o sonho de voar utilizando sua própria força. Nessa mesma linha de estudo científico, Wilkie (1960) constata que os atletas campeões são capazes de produzir entre 20 e 30% mais potência que pessoas saudáveis, porém não atletas. Realizando testes com ciclistas de corrida em treinamento, Reay (1977) mostra que Ursinus comparou a produção de potência alcançada em função do tipo de movimento realizado (Remo, Alternado (vaivém), Rotativo) e do membro utilizado (pernas, braços e pernas e braços), Figura 1.1. Ele constatou que os valores de potência alcançados quando os atletas utilizavam somente os membros inferiores eram maiores do que eles alcançavam quando utilizavam somente os membros superiores e, que o movimento rotativo era o mais potente. Essas características podem ter contribuído para o grande sucesso alcançado pelas bicicletas.

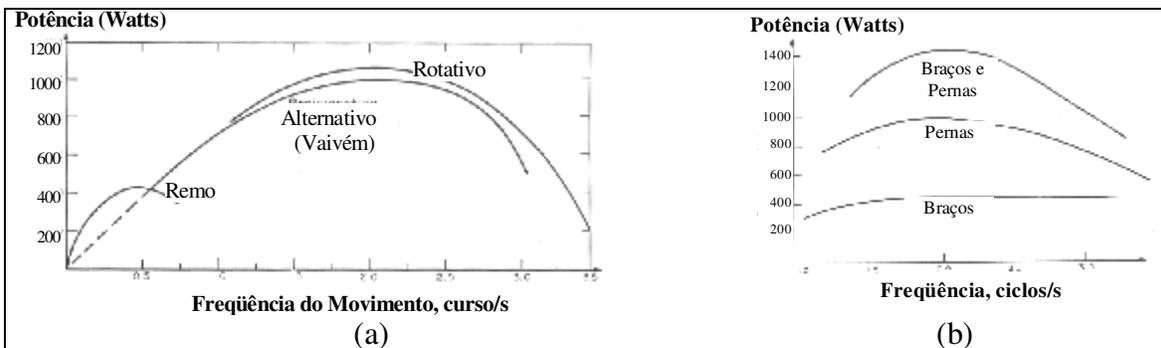


Figura 1.1 - Produção de potência em função: (a) do tipo de movimento; (b) do membro utilizado. Trabalho realizado por Ursinus e extraído do livro *The History of Man-Powered Flight*, D.A. Reay, (Rean 1977).

Na próxima seção será apresentada a forma típica de uma curva de potência em função do tempo de exercício.

1.2.1 Curvas de Potência Humana

A forma das curvas de potência *versus* tempo são sempre similares a da Figura 1.2. Esta curva, em particular, foi obtida a partir de dados levantados por Wilkie (1960) em indivíduos testados em bicicletas ergométricas. Analisando-a, pode-se inicialmente interpretá-la imaginando que o indivíduo que apresentasse estas características de produção de potência em função do tempo pudesse desenvolver uma potência de aproximadamente 750 Watts por 0,2 minuto (12 segundos), caindo para cerca de 450 Watts depois de 0,9 minuto (54 segundos) do início do exercício, e mantendo-se por volta de 270 Watts a partir de 10 minutos. Contudo, isto não é o que realmente acontece. Quando esse indivíduo desenvolve uma potência constante de 750 Watts por 0,2 minuto, ele atinge a exaustão e não será capaz de prosseguir com o exercício sem um intervalo de descanso. O mesmo raciocínio vale para qualquer potência. Por exemplo, uma potência constante de 450 Watts pode ser mantida por 0,9 minuto (54 segundos) e nada mais poderá ser realizado sem que antes o indivíduo tenha um período de recuperação. Por isso, são necessários vários dias para obtenção deste tipo de curva.

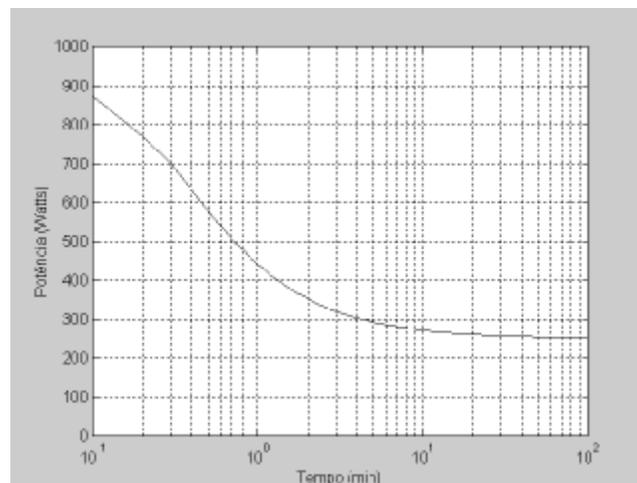


Figura 1.2 - Gráfico típico de máxima produção de potência mecânica pelo homem em função do tempo

Assim sendo, as curvas de potência em função do tempo, são na realidade curvas de potência máxima aplicável durante um determinado intervalo de tempo. As altas potências obtidas em curtos intervalos de tempo são possíveis graças à energia proveniente do metabolismo anaeróbico, (Fox *et. al.* 1991). Contudo, a quantidade de energia proveniente deste sistema é limitada e tem a desvantagem de produzir ácido lático como subproduto das reações metabólicas, o que leva o indivíduo à exaustão em pouco tempo. Já as baixas potências são supridas, com exceção do início do exercício, pelo sistema aeróbico. Exercícios que utilizam predominantemente o sistema aeróbico podem ser mantidos por intervalos de tempo maiores. Para uma explicação mais detalhada consultar Astrand e Rodahl (1987), capítulo 2 páginas 8-29 e capítulo 9 páginas 265-303.

Com base na curva apresentada na Figura 1.2 optou-se pelos valores de potência de 163 e 245 watts para o projeto da transmissão. Como será detalhado na próxima seção, constata-se que a energia metabólica consumida pelo ciclista para produzir uma determinada quantidade de potência está diretamente relacionada com a frequência de pedalar com a qual essa potência é atingida, Figura 1.3.

Assim sendo, a minimização da energia metabólica consumida pelo ciclista, seria o equivalente à minimização do consumo de combustível em um motor de combustão interna.

1.2.2 Frequência de Pedalar Ótima

Muitos autores têm proposto a existência de uma frequência de pedalar ótima, definida como sendo a frequência que metaboliza a menor quantidade de energia pelo corpo. Porém, há muito desacordo de qual seria esta frequência ótima em virtude dos vários fatores envolvidos.

Dickinson (1929) foi um dos primeiros a estudar os efeitos da frequência de pedalar e da carga aplicada nos pedais, no consumo de energia por ciclista recreacionais, desenvolvendo potências relativamente baixas, e concluiu que a frequência ótima era 33 rpm. Garry e Wishart (1931), realizando os testes neles mesmos, concluíram que a frequência ótima seria de 52 rpm. Hagberg (1981) em estudos realizados com ciclistas de competição utilizando suas próprias

bicicletas e desenvolvendo potências médias de 330 Watts, encontrou um valor médio de 91 rpm para a frequência de pedalar ótima, sendo esse valor muito próximo ao manifestado pela maioria dos ciclistas de competição. Outros grupos de autores descobriram que não existe uma frequência ótima de pedalar, mas sim várias; isto porque, a frequência de pedalar ótima aumenta em função da potência produzida pelo ciclista, como pode ser constatado no trabalho de Seabury (1977), Figura 1.3 e Tabela 1.1.

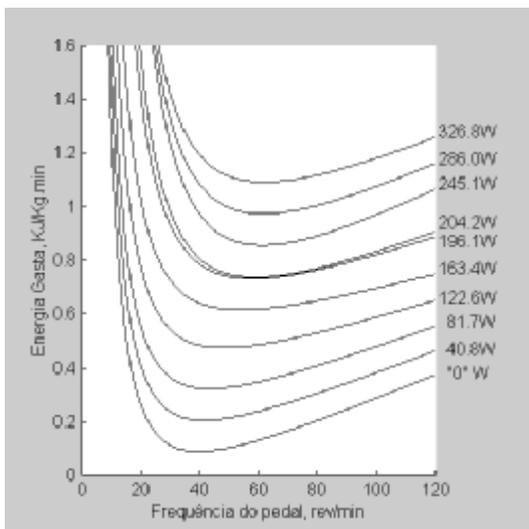


Figura 1.3 - Energia bruta consumida em função da frequência de pedalar para 10 valores de potência constante

Tabela 1.1 - Frequência de pedalar ótima para cada valor de potência da Figura 1.3.

Potência (Watts)	Frequência Ótima (rev/min)
0	39.7
40.8	41.6
81.7	43.5
122.6	48.3
163.4	54.2
196.1	58.0
204.2	59.0
245.1	61.3
286.0	61.6
326.8	62.0

As diferenças encontradas quanto à frequência de pedalar ótima pode ser atribuída a diferentes fatores. Um deles é que os ciclistas competitivos treinam utilizando altas frequências de pedalar, sendo esperado um desempenho melhor com estas frequências. Outra explicação pode ser atribuída ao uso da bicicleta ergométrica em muitos testes. Nas bicicletas de competição o conjunto de transmissão e as rodas são mais leves, conseqüentemente, possuem uma baixa inércia, ou seja, é mais fácil colocar o conjunto em movimento. De acordo com Seabury (1977), se bicicletas de corrida fossem utilizadas ao invés de bicicletas ergométricas em seus testes, possivelmente as frequências de pedalar mais eficientes para cada valor de potência, seriam maiores. Patterson (1983) medindo simultaneamente do consumo de O_2 e as forças aplicadas nos pedais, concluiu que o mínimo consumo de O_2 pelo ciclista ocorre entre 50 e 60 rpm, sendo que,

neste estudo ele levou em consideração a influência do peso da roda da bicicleta ergométrica. Suzuki (1979) foi um dos pioneiros no estudo do relacionamento entre a composição dos tipos de fibras musculares nos membros inferiores dos ciclistas e a eficiência de pedalar. Seus resultados sustentam a hipótese que a frequência de pedalar mais eficiente é influenciada pela composição das fibras musculares do indivíduo, uma vez que, as fibras de contração lenta e de contração rápida apresentam características mecânicas e metabólicas diferentes.

1.2.3 Sistemas de Transmissão para Bicicletas

A partir da constatação do relacionamento entre a potência e frequência de pedalar que o ciclista desenvolve e do respectivo consumo de energia metabólica pelo ciclista, os fabricantes de sistemas de transmissão para bicicletas têm aumentando continuamente o número de relações de transmissão nas bicicletas, com o objetivo de tornar o sistema de transmissão mais versátil às várias condições de pilotagem. Eles começaram com 1 relação de transmissão, passando para 3, 5, 10, 15, 18, 21, 24 e, alcançando as atuais 28 relações de transmissão. Contudo, esse aumento não quer dizer necessariamente que o sistema seja mais eficiente, isso porque:

- dificilmente um ciclista consegue utilizar todas as relações de transmissão de forma seqüencial;
- existem certas relações de transmissão que fazem com que a corrente trabalhe torcida, e devem ser evitadas para preservar o sistema de transmissão.

Essas limitações dos sistemas de transmissão atuais serviram de motivação para que fosse proposta a utilização de CVTs em bicicletas, uma vez que, em virtude das infinitas relações de transmissão possíveis dentro de uma faixa de trabalho, ela permitiria ao ciclista manter uma frequência de pedalar constante grande parte do tempo, independente das características do percurso para uma dada potência fornecida ao sistema. Nesse caso, o que variaria seria a velocidade linear da bicicleta. Conseqüentemente, o ciclista poderia desenvolver essa potência a maior parte do tempo nas regiões de mínimo consumo de energia (ver Figura 1.3). Com relação às relações de transmissão que favorecem a torção da corrente nas bicicletas com câmbios convencionais, a utilização de CVTs eliminará esse problema. Como pode ser visto no Capítulo 2

seção 2.6.3, no Capítulo 5 seção 5.8 e no Capítulo 6 seção 6.4.4 a corrente trabalhará sempre paralela ao quadro da bicicleta, uma vez que as trocas de relação de transmissão ocorrerão na CVT.

Essa estabilização da frequência de pedalar e a conseqüente minimização da energia que o ciclista necessita para fornecer uma dada potência numa determinada frequência de pedalar foi confirmada teoricamente por Forti *et al.* 1997a, 1997b e 1999, através de simulações numéricas do sistema ciclista+CVT+bicicleta.

1.3 Desenvolvimento do Projeto (Etapas do Projeto)

Essa tese de doutoramento faz parte de um projeto para o desenvolvimento e aplicações de CVTs, com ênfase em sistemas de baixo torque e potência, particularmente bicicletas. O projeto teve início durante o mestrado, em que foram estudados: tipos, princípios de funcionamento, características e aplicações de vários tipos de CVTs com ênfase num tipo particular denominado Transmissões Continuamente Variáveis por Tração (TD-CVTs) (ver Capítulo 2).

Dentre os possíveis campos em que as CVTs poderiam se aplicadas, surgiu com grande potencialidade, os sistemas de transmissão para bicicletas. Além, dos benefícios já citados, elas podem, dependendo do tipo e configuração escolhidos, ter como característica poucas partes móveis e geometria de fácil construção. A partir dos estudos realizados, optou-se pelo projeto de uma TD-CVT tipo esfera cone para transmitir potência de até 245 Watts.

A seguir serão apresentadas, com o auxílio do fluxograma da Figura 1.4, as etapas de desenvolvimento desse projeto

1.3.1 Etapa 1

Executada durante o mestrado. Corresponde a região amarela do canto superior esquerdo da Figura 1.4 e consta de:

- Estudo da capacidade do homem em produzir potência;
- Comparação de desempenho entre CVTs com diferentes faixas de trabalho e transmissões escalonadas com diferentes números de relações de transmissão. A análise de desempenho foi baseada em simulações numéricas da quantidade de energia que o ciclista necessita para fornecer uma dada quantidade de energia ao sistema num determinado percurso. Constatou-se que as CVTs apresentavam melhor desempenho na maioria das condições;
- Estudo das características físicas e princípio de funcionamento de diferentes tipos de CVTs;
- Opção pela CVT por tração tipo esfera-cone.

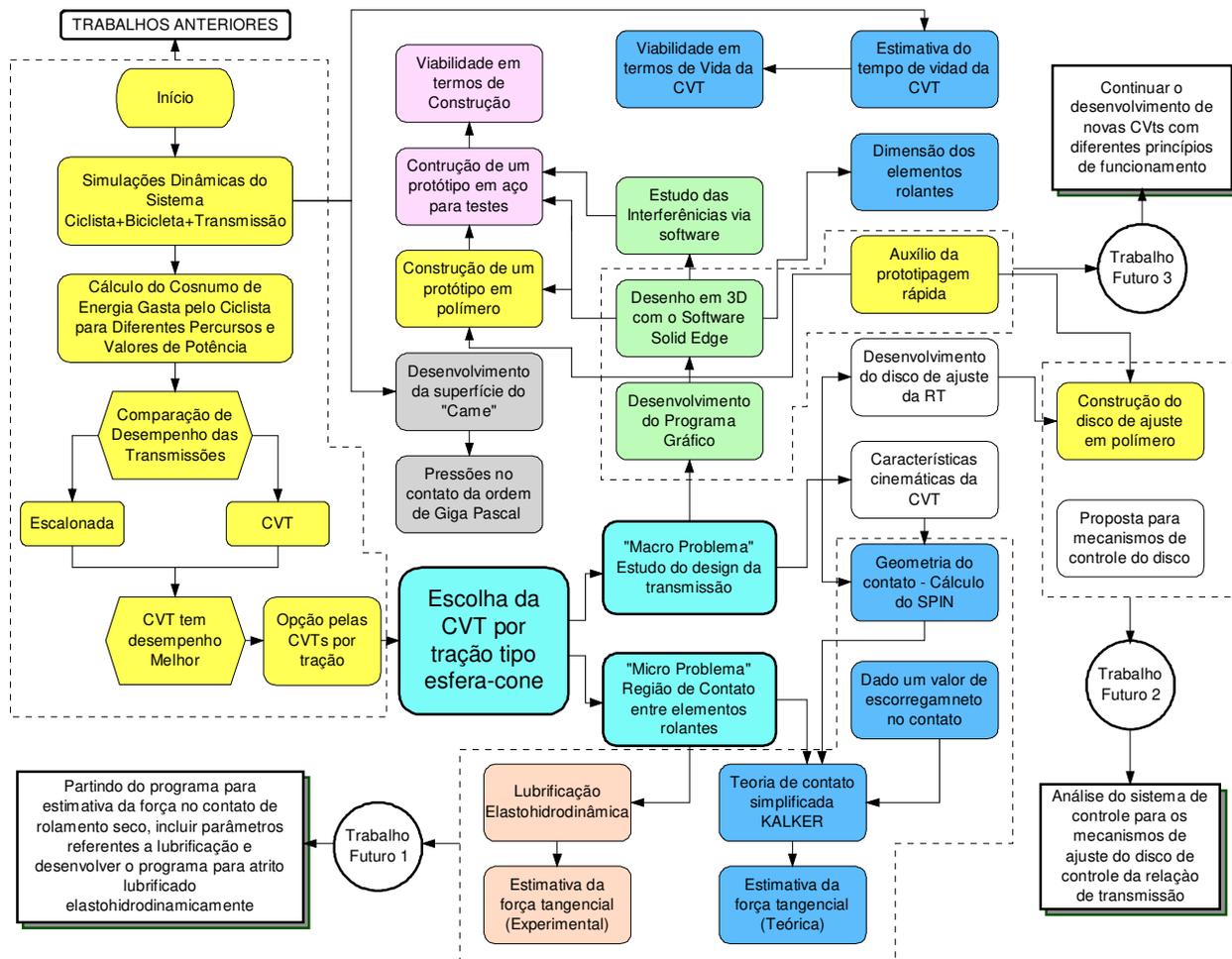


Figura 1.4 - Fluxograma do trabalho

1.3.2 Etapa 2

Executada durante o trabalho de doutoramento pode ser esquematizada como segue.

Escolhido o tipo de CVT a ser construído, o problema foi dividido em duas partes:

- Micro problema – relacionado com os fenômenos que ocorrem na região de contato entre os elementos rolantes da CVT, região central da Figura 1.4.
- Macro problema – relacionado com o projeto, desenho, montagem, construção e teste da TD-CVT;

1.3.2.1 Micro Problema

As CVTs por tração diferem das CVTs por fricção basicamente pela presença de um fluido lubrificante entre os elementos rolantes. Logo, a transmissão de potência nas TD-CVTs deve necessariamente ocorrer através desse fluido. Para que o fluido possa desempenhar bem essa função ele deve ter características específicas, sendo a principal delas possuir um alto coeficiente de tração, ou seja, alta razão entre a força tangencial e a força normal aplicada no contato lubrificado, ver Capítulo 4. Os fluidos específicos para esse fim enfrentam um elevado gradiente de pressão durante sua passagem pela região de contato, onde o pico de pressão pode passar de 3.0 GPa. Com pressões dessa ordem de grandeza acontecem duas coisas importantes: (1) a região de contato deforma-se elasticamente; (2) a viscosidade do lubrificante varia muito durante sua passagem pela região de contato, sofrendo um fenômeno chamado de solidificação que aumenta a tensão cisalhante do lubrificante, tornando-o capaz de transmitir potência entre os elementos rolantes. Como a área de contato é muito pequena se comparada às dimensões dos corpos em contato de rolamento, essas deformações e as mudanças de viscosidade do fluido são quase que pontuais e acontecem por curtos intervalos de tempo. O cálculo da força tangencial no contato lubrificado elastohidrodinamicamente requer a solução simultânea das equações da teoria da elasticidade linear e das equações de Reynolds, levando em consideração a variação da viscosidade do fluido em função da pressão. Além disso, escorregamentos, movimento de spin (ver Capítulo 6 – seção 6.3) e características do material, também influenciam na resolução desse problema. Tudo isso faz com que o desenvolvimento de um programa para esse fim seja

extremamente trabalhoso. Por esse motivo, esta parte do projeto foi dividido em duas, ou seja, os Capítulos 3 e 4. No Capítulo 3 são apresentados estudos teóricos do contato de rolamento seco, que em muitos casos é a base para a solução de problemas de contato lubrificado. No Capítulo 4 é realizado um experimento para a determinação do coeficiente de tração de um fluido nacional. Assim, inicia-se um estudo com a finalidade de analisar a qualidade dos lubrificantes nacionais quando submetidos à lubrificação elastohidrodinâmica e também adquirir parâmetros de comparação entre lubrificantes diferentes, ver seção 1.3.2.3 (Trabalho 1).

1.3.2.2 Macro Problema

O desenvolvimento, projeto, construção e testes do protótipo encontra-se nessa seção. A seqüência aqui apresentada não corresponde necessariamente à ordem cronológica dos acontecimentos durante o projeto.

Estudo da Geometria do contato - Como uma das principais causas de perda de potência nas CVTs por tração é proveniente do movimento de spin nos contatos, e ele é função única e exclusivamente da geometria dos elementos em contato de rolamento, foi feita uma análise da quantidade de spin no contato em função de alguns parâmetros geométricos da transmissão. Esses dados também foram usados no cálculo da estimativa da força tangencial no contato;

Estudo cinemático da CVT – Nesse item foram analisadas as faixas de trabalho da CVT em função das características geométricas desejadas e/ou possíveis de serem aplicadas;

Desenvolvimento do programa gráfico, desenho das peças da CVT e estudos das interferências – Face às várias combinações possíveis dos parâmetros de projeto, tornou-se necessária à execução de um programa gráfico para uma primeira idéia da configuração geométrica da transmissão. Definido todos os parâmetros, iniciou-se a execução dos desenhos em 3D utilizando o software SolidEdge™, em que foi possível também fazer um estudo das interferências entre os elementos rolantes da CVT. Essa fase é representada pela região verde no centro da Figura 1.4;

Desenvolvimento do disco de ajuste da relação de transmissão – Devido às características geométricas dessa CVT, foi necessário projetar um mecanismo capaz de mudar simultaneamente os eixos de rotação de todas as esferas. Como era desejado que esse mecanismo tivesse o menor número possível de peças móveis, a escolha recaiu sobre um disco com ranhuras variáveis, que será apresentado no Capítulo 5 seção 5.3.2.

Protótipo em resina - Com o auxílio da prototipagem rápida foi construído um protótipo em resina de todos os elementos da transmissão. Com ele foi possível sanar alguns problemas de montagem e aprimorar o projeto do disco de ajuste da relação de transmissão, cor amarela na Figura 1.4.

Mecanismo de Carga - Para alcançar pressões da ordem de Giga Pascal no contato (necessária para atingir o efeito da lubrificação elastohidrodinâmica) e também evitar o escorregamento entre os elementos rolantes da transmissão, foi necessário projetar um mecanismo para esse fim, descrito no Capítulo 5 seção 5.5.1. Essa fase é representada pela cor cinza no centro da Figura 1.4.

Tempo de Vida da Transmissão - Definido o tamanho da TD-CVT e as forças atuantes dos elementos rolantes, foi possível estimar o tempo de vida da transmissão utilizando a teoria de Lundberg e Palmgren, cor azul no canto superior direito da Figura 1.4 e, apresentada no Capítulo 6 seção 6.4.

Protótipo para Testes - Finalmente foi construído um protótipo em aço e com isso finalizou-se essa parte do projeto, cor rosa da parte superior da Figura 1.4. Detalhes do protótipo são apresentados no Capítulo 5 seção 5.7.

Como o trabalho proposto abrange várias áreas do conhecimento – dinâmica, teoria de contato, controle, mecanismos, fisiologia humana, lubrificação, simulações numéricas – não é o objetivo desse trabalho contribuir com novas teorias e/ou formulações em qualquer uma destas áreas, mais sim, utilizar conhecimentos adquiridos através de anos de estudos dos mais diversos pesquisadores destes assuntos e aplicá-los no projeto de TD-CVTs.

1.3.2.3 Etapa 3

A etapa 3 do projeto corresponde a alguns trabalhos futuros necessários para o complemento desse projeto:

Trabalho1 – As CVTs por tração trabalham em contatos lubrificados elastohidrodinamicamente. No Capítulo 3 calculou-se teoricamente as forças tangenciais em contatos de rolamento secos utilizando a teoria simplificada de contato de rolamento desenvolvida por Kalker (1973), ao passo que, no Capítulo 4 calculou-se experimentalmente as forças em contatos lubrificados elastohidrodinamicamente. Isso a princípio pode parecer uma discrepância, mas foi a primeira abordagem num assunto muito complexo. Futuramente, pretende-se acrescentar as equações de Reynolds na formulação matemática do contato seco, levando em consideração a variação da viscosidade com a pressão e assim, tratá-lo como contato lubrificado. Desse modo, será possível analisar a viabilidade da aplicação da teoria simplificada do contato de rolamento (agora lubrificado) em problemas envolvendo TD-CVTs, uma vez que será possível comparar os resultados teóricos com os experimentais obtidos no Capítulo 4;

Trabalho2 – Uma parte importante no projeto de CVTs é o projeto do sistema de controle. Durante o doutoramento iniciaram-se estudos a esse respeito. Contudo, em virtude do tempo escasso nessa fase do projeto optou-se por retomá-lo no futuro.

Trabalho futuro 3 – Durante esse projeto foi possível perceber os grandes benefícios da prototipagem rápida no desenvolvimento de novos produtos. Alguns erros em nosso projeto foram sanados com o auxílio dessa ferramenta ágil e prática. Por esse motivo, pretende-se utilizá-la no projeto de novas CVTs com diferentes princípios de funcionamento.

1.4 Divisão dos Capítulos

Na medida do possível os capítulos serão independentes. Assim sendo, cada capítulo será iniciado com uma pequena introdução sobre o assunto nele tratado. Em seguida, será abordado o assunto principal do capítulo, através de explicações, teorias, equacionamentos e simulações. Finalizando cada capítulo será apresentada uma seção de comentários e conclusões pertinentes.

No Capítulo 2 será abordado o assunto principal desse trabalho, ou seja, CVTs. Inicialmente, será definido o que vem a ser uma transmissão e qual a sua função nos sistemas mecânicos. Em seguida, será apresentado um breve estado da arte das CVTs. Finalizando, serão descritas algumas particularidades e aplicações das TD-CVTs.

No Capítulo 3 será analisado o contato de rolamento seco. Inicialmente será definido o problema de contato de rolamento seco e descritos seus conceitos fundamentais. Em seguida, serão apresentadas a teoria exata de contato de rolamento seco e a teoria simplificada de contato de rolamento seco que será utilizada para o cálculo teórico da força tangencial no contato.

No Capítulo 4 o assunto será a lubrificação elastohidrodinâmica. Inicialmente serão abordados os principais tipos de lubrificação e a variação da viscosidade do fluido em função da pressão. Para o caso específico das TD-CVTs é de fundamental importância utilizar como fluido lubrificante, um óleo que possua alto coeficiente de tração. Assim sendo, o capítulo será finalizado mostrando o procedimento para a determinação experimental do coeficiente de tração de um óleo nacional.

No Capítulo 5 será analisada a TD-CVT construída para os testes. Inicialmente, serão descritos: seu princípio de funcionamento, as relações geométricas e cinemáticas entre os elementos em contato de rolamento, as equações dinâmicas desses elementos e o mecanismo para ajuste da relação de transmissão. Finalizando será apresentado o protótipo da TD-CVT juntamente com sua bancada de testes.

No Capítulo 6 serão apresentados os tópicos de otimização estudados. Inicialmente, será abordada a otimização geométrica em função de parâmetros cinemáticos. Em seguida, será abordada a otimização das perdas nos contatos em função do movimento de spin. Finalizando, será aplicado o modelo de vida por fadiga para estimar o tempo de vida da transmissão em função do tamanho dos elementos rolantes e da potência transmitida.

No Capítulo 7 serão apresentados alguns comentários e conclusões gerais do projeto.

Capítulo 2

As TD-CVTs no Universo das Transmissões

2.1 Introdução

Neste trabalho, transmissão ou sistema de transmissão, será definido como sendo um dispositivo mecânico de ajuste de velocidades, que é utilizada para:

- Variar a velocidade de saída de uma fonte de potência e velocidade constantes (como em máquinas ferramentas que utilizam um motor de corrente alternada de velocidade constante);
- Proporcionar aumento de torque para uma fonte de potência e velocidade variável (como nos motores de combustão interna dos automóveis).

Assim sendo, elas estão presentes, quase que sem exceção, em todos os tipos de máquinas que possuam uma fonte de potência.

A Figura 2.1 esquematiza a forma mais geral de um sistema de transmissão. A fonte de potência pode ser qualquer tipo de motor (combustão interna, elétrico, hidráulico) e a carga, uma inércia a ser vencida. A transmissão pode apresentar várias formas e princípios de funcionamento, como será visto adiante.

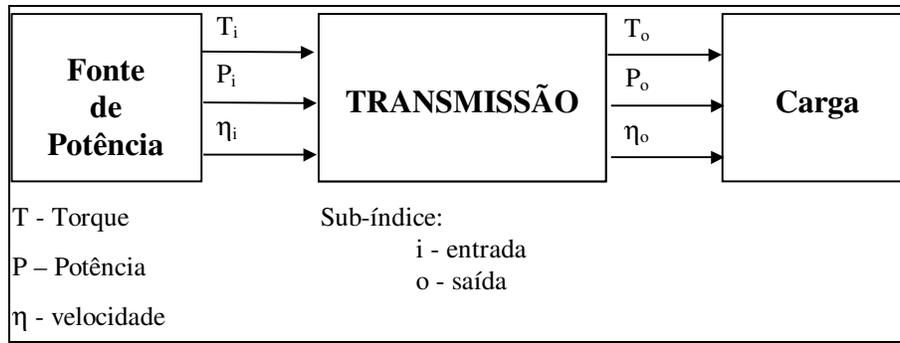


Figura 2.1 – Sistema de transmissão genérico

A velocidade e o torque de saída da transmissão são dados por:

$$\eta_o = \eta_i \, rt \quad (2.1)$$

$$T_o = \frac{T_i}{rt} \quad (2.2)$$

sendo, rt a relação de transmissão.

As transmissões mecânicas diferenciam-se em função do princípio de funcionamento, ou seja, como seus eixos de entrada e saída são acoplados. Esses acoplamentos podem ser: rodas de fricção, polias conectadas por correias ou correntes, engrenagens ou rodas dentadas, entre outros.

As transmissões por engrenamento possuem números fixos de relações de transmissão, que variam conforme a necessidade de uso. As transmissões por fricção ou polias podem ter tanto um número fixo quanto ou número infinito de relações de transmissão, dentro de uma dada faixa de trabalho. As transmissões que possuem um número infinito de relações de transmissão dentro de uma determinada faixa de trabalho são chamadas de Transmissões Continuamente Variáveis, do inglês *Continuously Variable Transmission (CVT)*. Dentre os vários tipos de CVT dar-se-á ênfase às Transmissões Continuamente Variáveis por Tração, do inglês *Traction Drive Continuously Variable Transmission (TD-CVT)*.

Iniciando o capítulo serão apresentados alguns termos em inglês usados para designar transmissões e um modo de classificá-las. Em seguida, serão descritos os tipos mais comuns de CVTs usadas na área automobilística. Finalizando, será feito um breve histórico sobre o desenvolvimento do sistema de transmissão para bicicletas e, será apresentada uma proposta para sistema de transmissão para bicicletas utilizando TD-CVT.

2.2 Classificação das Transmissões

Em inglês, além do termo *transmission* propriamente dito, existem outros que, expressam a idéia de transmissão de potência mecânica:

- ***Adjustable Speed Drives*** (Dispositivos ou transmissões de velocidade ajustável ou regulável) – Nesse tipo de dispositivo a variação de velocidades pode ser executada de duas maneiras:
 - 1.) Escalonada ou abrupta – É o caso das *geared transmissions* (transmissões de engrenamento), que possuem algumas variantes como: *gearbox* (caixa de engrenamento), *gear drives* (transmissões de engrenagem) e *step transmission* (transmissão escalonada);
 - 2.) Contínua ou suave – É o caso, por exemplo, das *variable-pitch belt and chain drives* (dispositivos ou transmissões de cintos e correntes com polias expansivas); e das *traction drives* (transmissões por tração) entre outras.
- ***Mechanical Variable Speed Drives*** (Dispositivos ou transmissões mecânica de velocidade variável) – são dispositivos eletro-mecânicos que diminuem os inconvenientes das flutuações de carga. Esse dispositivo é composto de: carcaça, transmissão, motor, sistema de controle e indicadores de ajuste de velocidade. Assim sendo, um *Mechanical Variable Speed Drive*, engloba a fonte de potência, a transmissão e seu controle.

Dentre as várias maneiras possíveis de classificarmos as transmissões, adotou-se uma combinação das classificações apresentadas por Baudoin (1979) e Singh (1992), Figura 2.2. Nelas, as transmissões foram divididas em 2 grandes grupos:

- **Grupo 1** - formado pelas transmissões com um número fixo de relações de transmissão;
- **Grupo 2** - formado pelas transmissões com um número infinito de relações de transmissão, ou seja, as transmissões continuamente variáveis, onde encontram-se as TD-CVTs.

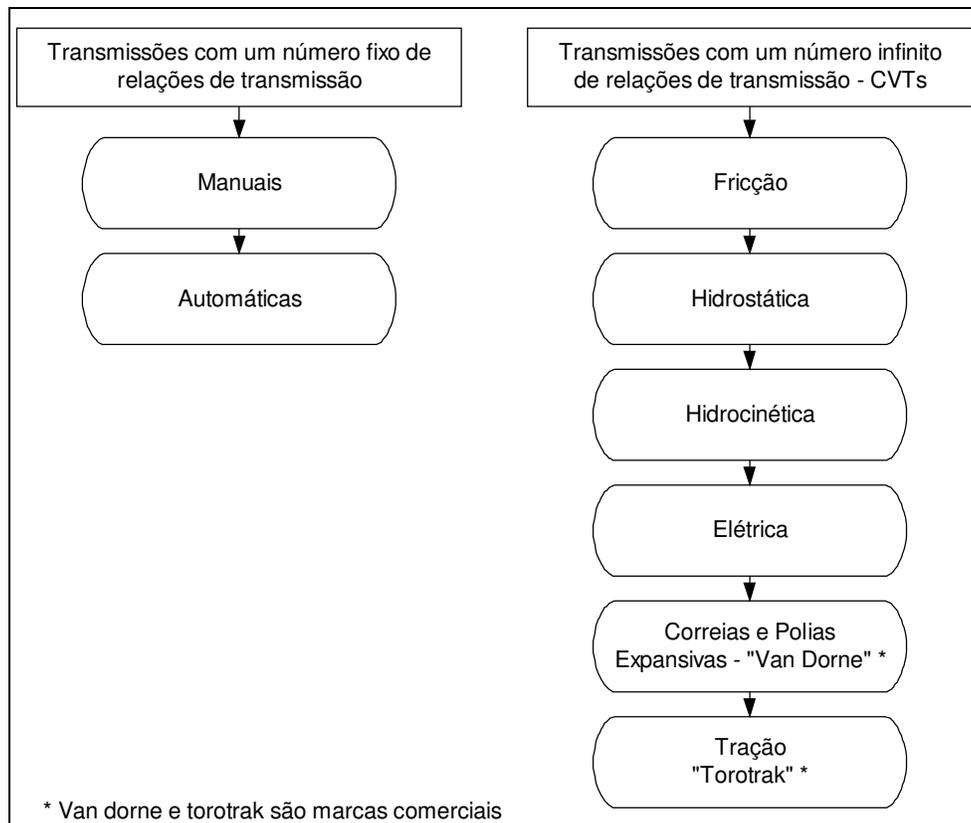


Figura 2.2 - Classificação dos diferentes tipos de transmissões

2.3 Transmissões com um número fixo de Relações de Transmissão

O tipo mais comum de transmissão com um número fixo de relações de transmissão são as transmissões de engrenagens ou por engrenamento. Elas são usadas em uma grande variedade de aplicações incluindo: automóveis, dispositivos e máquinas industriais e sistemas robóticos.

As transmissões por engrenamento também podem ser classificadas de acordo com seu uso final:

- Transmissões automotivas (*automotive transmissions*)- Usadas como transmissão principal em carros, caminhões, máquinas agrícolas e tratores. Usualmente possuem de 4 a 10 relações de velocidades e podem ser automáticas ou manuais;
- Transmissões auxiliares (*auxiliary transmissions*) - Usualmente instaladas atrás da transmissão principal para aumentar as razões de velocidades disponíveis;
- Caixas de transferência (*transfer cases*) – Proporcionam bifurcação de potência de saída (como em veículos de tração total – tração nas 4 rodas);
- *Powers takeoffs* – Usualmente montada do lado da transmissão principal, sendo movida por elas através de uma engrenagem adicional. Similar a *transfer case*;
- Engrenagens Marinhas (*marine gears*) – Diferem das outras transmissões porque geralmente possuem uma única marcha à frente e uma marcha à re;
- Transmissões hidráulicas (*hydraulic drives*) – São caixas de mudança de velocidade que conectam fontes de potência e bombas hidráulicas com dispositivos hidrostáticos;
- Transmissões Industriais – Em função da sua variedade, englobam qualquer outro tipo de transmissão que não tenha sido descrito acima;
- Diferenciais - Conjunto de engrenagens planetárias com três membros rotativos independentes, e com uma relação de velocidade e torque entre eles.

2.4 Transmissões com um Número Infinito de Relações de Transmissão

Desde o século 3 antes de cristo têm-se notícias do uso de engrenagens pelos egípcios, e desde então, elas têm sido cada vez mais empregadas. Na área automobilística todo carro construído desde o Panhard 1890 conta com alguma forma de sistema de transmissão mecânico baseado em engrenagens. Contudo, olhando para o futuro da indústria automobilística, os projetos desenvolvidos atualmente mostram a possibilidade desse século ser dominado pelas transmissões sem escalonamento (*steplless transmission*), ou seja, pelas Transmissões Continuamente Variáveis (CVTs), uma vez que nesse tipo de transmissão não ocorrem mudanças de marcha de forma abrupta, (Peal 1996).

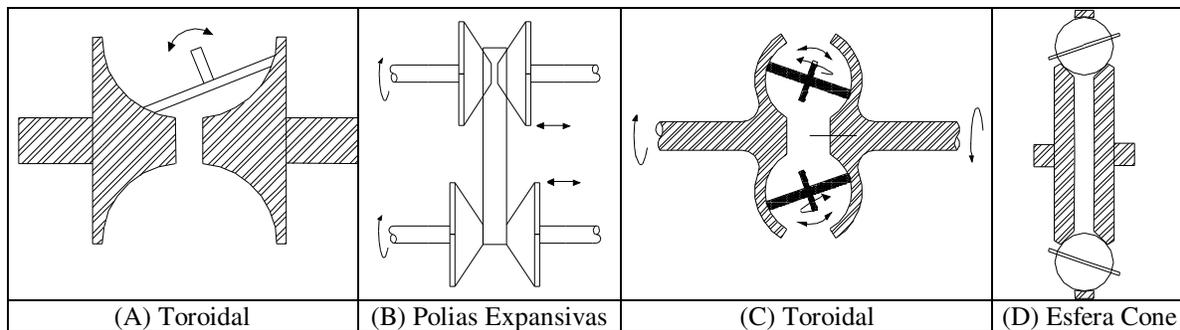


Figura 2.3 - Alguns tipos de CVTs

Quando os engenheiros começaram a projetar transmissões para automóveis há mais de um século atrás, as CVTs pareciam ser a melhor maneira de acoplar o eixo de saída do motor às rodas. Seja qual fosse o tipo de CVT, ela possibilitava aos projetistas fazer com que o motor do veículo operasse sempre no ponto ou próximo do ponto de máxima eficiência e/ou desempenho. Contudo, provou-se difícil construir uma CVT, independente do seu tipo, capaz de apresentar a mesma performance das transmissões escalonadas. Na prática as primeiras CVTs não suportavam as condições de trabalho impostas e acabavam falhando. Essas falhas ocorriam em virtude, principalmente, das limitações tecnológicas em materiais, lubrificantes e sistema de fabricação de algumas peças.

Independente do modelo de CVT escolhido para o projeto, elas necessitam de baixo escorregamento no contato entre os elementos rolantes para transmitir potência com grande eficiência. Para alcançar esse objetivo os contatos entre os elementos rolantes têm que trabalhar em condições severas.

Atualmente, a área automobilística é a que tem fornecido os maiores recursos para o desenvolvimento das CVTs, e os modelos que mais têm se destacado são:

- Cintos ou correntes com polias expansivas, seção 2.4.1.;
- Por tração, seção 2.4.2.

2.4.1 CVTs Tipo Polia Expansiva

A CVT tipo polia expansiva, apresentada em detalhe na Figura 2.4, possui um cinto ou correia que conecta as duas polias expansivas e permite a troca de relação de transmissão entre elas. No início, as CVTs tinham os cintos ou correias feitos de metal e couro. Por esse motivo, escorregavam, geravam ruídos excessivos e tinham pouca durabilidade. Depois de muitos anos de pesquisa, a fábrica holandesa Van Dorne desenvolveu uma CVT tipo polia expansiva capaz de transmitir alta potência com grande eficiência. Estava claro para o Sr. Van Dorne que a correia não poderia ser usada como peça de tração em aplicações de alto torque. Então, ele reprojeto as correias para serem usadas como dispositivo de compressão, Figura 2.5. Cerca de 300 pequenos elos de aço são colocados em linha entre as bordas tangentes das polias motora e movida. Quando um elo deixa a polia motora, ele alinha-se com outro elo que deixou a polia motora antes dele. Esses elos formam uma espécie de barra de aço reta que aplica torque na polia movida. Uma vez que os elos alcançam a polia movida, a força é descarregada e os elos podem curvar-se, fazendo o caminho de volta à polia motora para repetir o ciclo.

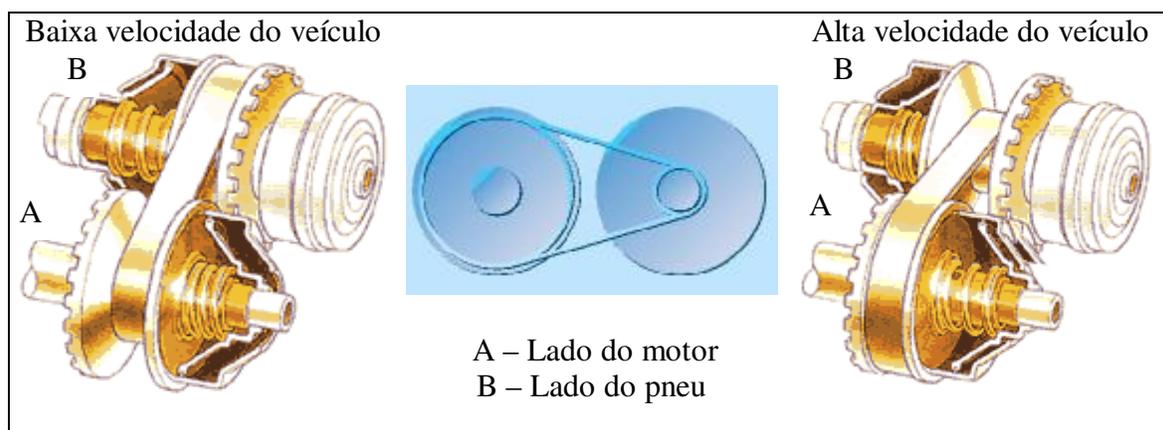


Figura 2.4 - CVT tipo polia expansiva

O desenvolvimento tecnológico alcançado na CVT da Van Dorne levou-a a ser testada nos carros de fórmula 1 da equipe Williams em 1993. Os resultados obtidos, segundo Emery Hendriks da *Van Dorne Transmissie*, foram bastante promissores, (Yamaguchi 1996). Contudo, infelizmente, mudanças no regulamento da competição baniram as CVT's da Fórmula 1 antes mesmo de sua estréia oficial em corridas.

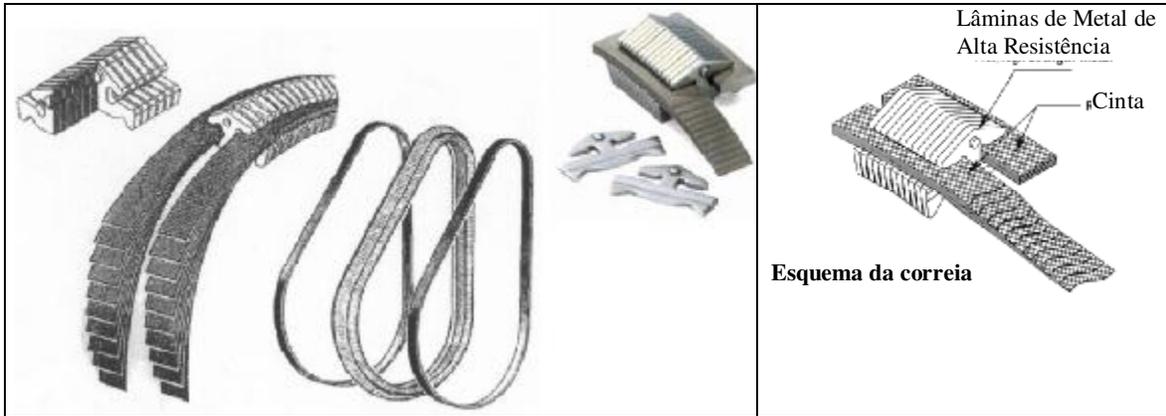


Figura 2.5 - Correia utilizada na CVT Van Dorne

O Audi A6 2.8 Multitronic, ao invés de correias, utiliza correntes, Figura 2.6. Além desse diferencial, em relação a CVT da Van Dorne, a área de contato entre a corrente e a polia é lubrificada (na CVT da Van Dorne o contato da correia com a polia é seco).

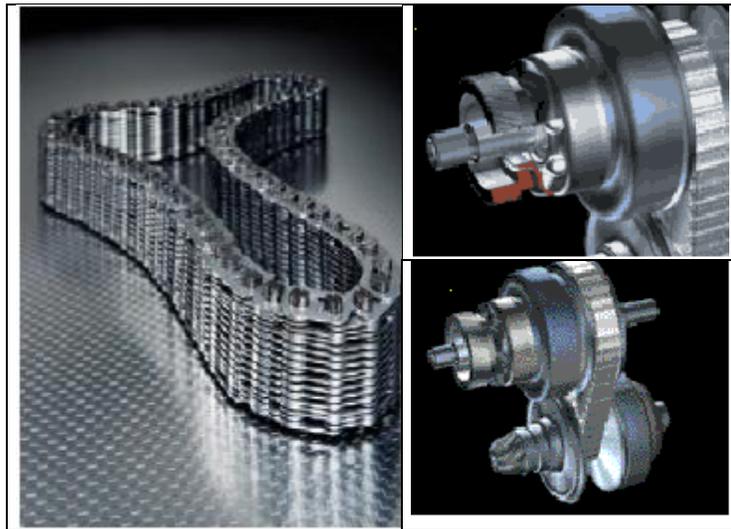


Figura 2.6 – CVT de polias expansivas utilizando correntes

2.4.2 CVTs por tração

2.4.2.1 Definição

As Transmissões por Tração transferem potência mecânica do eixo de uma fonte para a carga, por meio do contato entre dois elementos rolantes metálicos submetidos a altíssimas pressões (da ordem de GPa). Como os contatos entre os elementos rolantes devem ser lubrificados, essa ordem de pressão está relacionada a um tipo de lubrificação denominada elastohidrodinâmica, ver Capítulo 4. Os elementos rolantes podem ter a forma de cones, cilindros, discos, anéis, esferas ou toróides, e são fabricados de aço liga (especialmente ao cromo) de grande dureza superficial. O fluido lubrificante pode ser óleo, silicone, ou um dos lubrificantes sintéticos naftênicos. Assim sendo, três elementos devem estar presentes para que a transmissão possa ser chamada de Transmissão por Tração: (1) o elemento rolante de metal de entrada, (2) o fluido de tração em condição elastohidrodinâmica, e (3) o elemento rolante de metal de saída. Dedini (1986) esquematiza e Heilich e Shube (1983) ilustram e descrevem o princípio de funcionamento, de vários tipos de Transmissões por Tração.

As TD-CVTs apresentam muitas vantagens sobre as transmissões por engrenamento. A principal delas, é claro, é que a velocidade pode ser mudada continuamente para maximizar o aproveitamento da potência disponível da fonte. Adicionalmente, elas trabalham silenciosamente, tem vibração mínima e são geralmente fáceis de construir por causa da forma circular da seção transversal de seus componentes. Apesar das vantagens, a eficiência global da maioria das TD-CVTs, em carga nominal, é menor do que as das transmissões por engrenagem. Assim, é importante projetá-las para trabalhar com máxima eficiência. Uma técnica para otimizar o projeto de TD-CVTs, minimizando as perdas de potência é apresentado por Lim e Ullman (1989).

2.4.2.2 Modelo mais Conhecido

Atualmente, o modelo de TD-CVT mais conhecido é, sem dúvida, o tipo toroidal. Esse tipo de TD-CVT tem sido o mais empregado em veículos de passeio por muitas indústrias automobilísticas, principalmente no Japão. Um dos principais motivos dessa escolha é que, em virtude da geometria do contato, esse tipo de TD-CVT apresenta pouca perda de potência no contato relacionada com o movimento de spin, (Lim 1989).

A marca comercial Torotrak™ vem logo a mente quando o assunto é transmissão por tração. Ela é um modelo de TD-CVT tipo duplo toróide capaz de substituir as melhores transmissões convencionais sem deixar nada a desejar, Figura 2.7. Muitas indústrias automobilísticas possuem protótipos de veículos em teste com essa transmissão, entre elas Ford e Toyota.

A Nissan tem investido muito no seu próprio modelo de TD-CVT tipo toroidal, denominada de Extroid™ CVT. Diferente do modelo Torotrak™, o modelo da Nissan é um toróide simples, como ilustrado na Figura 2.8. Com sua CVT, a Nissan quer conseguir a façanha de utilizá-la tanto em veículos de tração traseira equipados com grandes motores (mais de 3 litros), quanto em veículos de tração dianteira com motores menores.



Figura 2.7 – CVT por tração tipo toroidal

Nesse trabalho será proposta a utilização de uma TD-CVT tipo esfera cone (Figura 2.3d) para sistemas de baixo torque e baixa potência, especialmente veículo movidos por força humana. Um esboço do projeto pode ser visto no item 2.6.3, enquanto que seus detalhes são apresentados no Capítulo 5.

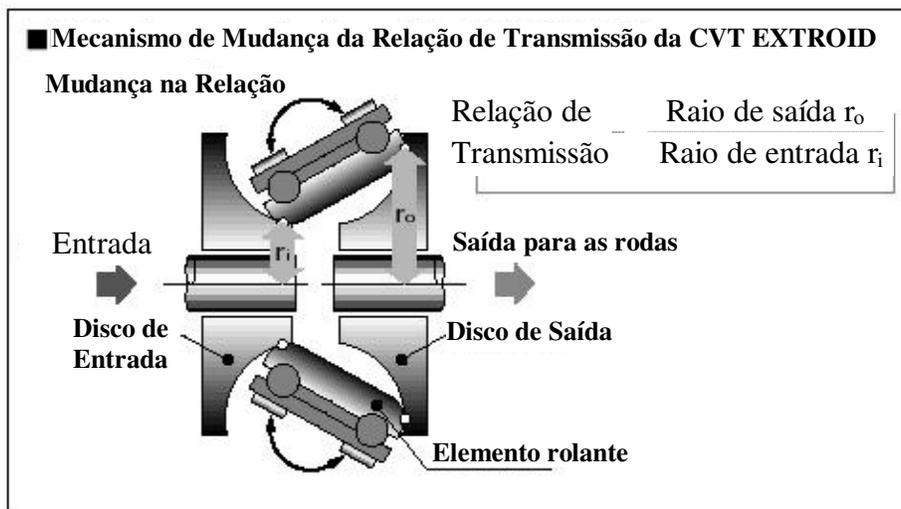


Figura 2.8 – Esquema de funcionamento da CVT *Extroid*TM

2.4.2.3 Região de Contato entre os Elementos Rolantes da TD-CVT

A transmissão de potência através dos elementos rolantes em TD-CVTs ocorre numa região relativamente pequena, se comparada com as dimensões dos corpos em contato, ou seja, na chamada área ou região de contato. Nessa região ocorrem fenômenos importantes como: escorregamento, rolamento, spin, lubrificação elastohidrodinâmica. Todos esses fenômenos serão analisados em detalhes no decorrer do trabalho. Por enquanto, segue uma breve introdução.

Um grande número de elementos de máquinas como engrenagens, rolamentos, cames e dispositivos de tração, entre eles as TD-CVTs, operam em regime de lubrificação elastohidrodinâmica. Neste regime de lubrificação as pressões são suficientemente altas, da ordem de Giga Pascal, o que causa uma deformação elástica significativa nas superfícies em contato de rolamento, e um grande aumento da viscosidade do fluido lubrificante quando passa pela área de contato. A soma de altas pressões mais deformação elástica no contato produz a lubrificação elastohidrodinâmica. Nessas condições o filme de óleo formado entre os elementos rolantes é muito fino, menos do que um micron. Apesar da aparente fragilidade, este filme desempenha um papel importante. As forças de tração que ocorrem nos contatos têm papel significativo no desempenho e na vida destes elementos e, conseqüentemente, nas máquinas que eles fazem parte.

Além do fenômeno da lubrificação elastohidrodinâmica, a região de contato é marcada pela combinação de vários movimentos simultâneos, ou seja, movimentos de escorregamento, rolamento e spin que complicam ainda mais o problema. Assim sendo, pode-se constatar que um bom entendimento da região de contato é de fundamental importância no projeto de transmissões por tração. Estes assuntos e suas variantes têm sido estudados por muitos pesquisadores. Alguns destes estudos são listados a seguir.

Spikes e Olver (1998) realizaram estudos para prever as forças de tração presente nos contatos lubrificadas elastohidrodinamicamente. Hooke e Huang (1997), descreveram a influência da visco-elasticidade na lubrificação elastohidrodinâmica. Dama e Chang (1997) apresentaram um novo modelo de tração em contatos lubrificadas elastohidrodinamicamente. Moore (1997) preocupou-se com o comportamento do lubrificante em contatos elastohidrodinâmicos. Kato *et al.* (1996) pesquisaram a tensão cisalhante limite dos lubrificantes, uma vez que, este valor de tensão está diretamente relacionado com a carga transmitida pelas transmissões por tração. Kaneta (1992) apresentou uma revisão de como e porque o filme de óleo formado na lubrificação elastohidrodinâmica é influenciado pelas condições cinemáticas da superfície.

Preocupados exclusivamente com problemas de contato seco, uma vez que, muitas vezes ele serve de base para o cálculo da área de contato nos problemas de contato lubrificado, Greenwood (1997) compara três métodos de aproximação para determinar a área, a pressão e as deformações no contato. Kalker *et al.* (1997) interessaram-se pelo efeito da rugosidade superficial em contatos elásticos. Ai e Cheng (1993) mostram um modelo de cálculo rápido para a distribuição de pressão na linha de contato entre superfícies rugosas. Um trabalho interessante contando um pouco do desenvolvimento da teoria de contato e apresentando as principais teorias desenvolvidas sobre o assunto é descrito por Kalker (1991). Lukowski *et al.* (1991) analisaram as tensões no contato e a área de contato nos disco de uma transmissão por fricção. Loewenthal (1986) desenvolveu um trabalho analisando o fenômeno do spin na região de contato de transmissões por tração.

2.5 Perspectivas Futuras e Aplicações para as CVTs

Um fator adicional que tem contribuído muito para impulsionar o desenvolvimento das CVTs é a questão ambiental. Segundo Guzzela e Schmid (1995), devido às legislações cada vez mais rígidas quanto à emissão de gases poluentes e economia de combustível nos países desenvolvidos, as indústrias automobilísticas têm como um dos maiores desafios atualmente, reduzir o consumo de combustível dos automóveis pela metade. Para atingir esse objetivo, uma combinação dos seguintes fatores deve ser empregada nos projetos:

- Redução da massa do veículo através do uso de materiais mais leves e resistentes;
- Redução das forças dissipativas, como a força de arrasto e resistência ao rolamento, através do uso de formas mais aerodinâmicas e aprimoramento dos pneus;
- Aumento da eficiência do consumo de combustível do motor.

O sistema de motorização dos veículos pode ter sua eficiência aumentada de diversas maneiras, entre elas:

- Utilização de motores híbridos como fonte de potência;
- Diminuição do fator peso/potência dos motores;
- Utilização de CVTs nos sistemas de transmissão. Como elas realizam infinitas trocas de relação de transmissão dentro de uma determinada faixa de trabalho, elas possibilitariam ao motor trabalhar na sua curva de consumo de combustível ótimo a maior parte do tempo.

Analisando os resultados das pesquisas dos últimos anos, pode-se prever um futuro bastante promissor para as TD-CVTs.

Como comentado anteriormente, a Nissan Motor Company vem acreditando e investindo muito no desenvolvimento de CVTs. Em seus laboratórios no Japão Mori *et al.* (2001) pesquisaram e desenvolveram uma CVT por tração tipo toroidal para aplicação em veículos de tração traseira. Osamura *et al.* (2001) desenvolveram um algoritmo de controle para veículos

equipados com CVTs e motores a diesel com o objetivo de reduzir a emissão de dióxido de carbono pelo veículo. No 32° Tokyo Motor Show's, em 1998, a Nissan apresentou um conjunto equipado com um motor tipo VQ30DET turbo alimentado de 3.0 litros e uma TD-CVT tipo Toroidal para equipar veículos de tração traseira de alta performance, (Yamaguchi 1998).

A Ford Motor Company é outra grande indústria automobilística que está trabalhando no desenvolvimento de CVTs. Trabalhos desenvolvidos por seus pesquisadores em sua sede em Dearborn, EUA, em união com pesquisadores da Universidade de Michigan confirmam isso. Zou *et al.* (2001) apresentam a modelagem e simulação da dinâmica de transmissões por tração juntamente com seu controle. Zhang *et al.* (1999) apresentam um modelo para projeto e análise de uma TD-CVT no qual as forças de tração no contato entre os elementos rolantes são modeladas baseados na teoria elastohidrodinâmica, e são correlacionadas com parâmetros cinemáticos e geométricos da transmissão. Esses tipos de trabalhos teóricos por parte da indústria automobilística mostram a busca do embasamento teórico para o perfeito entendimento das TD-CVTs.

Mattsson (1996) apresenta um modelo de CVT divisora de potência formada por um variador, neste caso representado por uma CVT esfera cone, Figura 2.3d, e de um planetário. As teorias e métodos por ele apresentados são úteis para a análise e síntese de transmissões variáveis divisoras de potência.

Tanaka vem estudando TD-CVTs há muitos anos. Em 1989 (Tanaka 1989) comparou os resultados teóricos e experimentais da eficiência na transmissão de velocidade e torque num protótipo de TD-CVT com capacidade nominal de torque de entrada de 120 N.m, velocidade de rotação de 5000 rpm e razão de velocidade variando de 0.4 a 2.5. Em 1993, apresentou estudos que descrevem o princípio de funcionamento de um mecanismo regulador de velocidade para uma TD-CVT tipo meio-toroidal (Tanaka e Eguchi 1993). Desenvolveu também trabalhos voltados para o problema de fadiga nos elementos em contato de rolamento em TD-CVTs, da resistência a altas temperaturas do fluido de tração e da eficiência em TD-CVT meio-toroidal com simples e dupla cavidade para veículos de passeio utilizando motores de 1.5 L e 3 L respectivamente (Tanaka *et al.* 1995a). Continuando o desenvolvimento da TD-CVT meio-

toroidal com dupla cavidade, Tanaka *et al.* 1995b descreveram o princípio do mecanismo de controle e a eficiência de uma CVT para veículo com tração nas quatro rodas com capacidade de torque nominal de entrada de 250 N.m, velocidade de rotação de 5500 rpm e razão de velocidade de 1:8.7. Apresentou também, trabalhos voltados para algumas questões fundamentais em TD-CVT como: a influência do *spin* no aumento da temperatura na superfície de tração (região de contato); a resistência aos ciclos de tensão dos elementos de tração; e a transferência de calor nos elementos rolantes, utilizando uma CVT com capacidade de torque nominal de entrada de 340 N.m e velocidade de rotação de 7000 rpm, trabalhando com uma pressão máxima no contato de 3.2 GPa (Tanaka e Machida 1996).

Contudo, o desenvolvimento de CVTs não se limita apenas à área automobilística.

Ma e Ro (1994), afirmam que sistemas baseados em transmissões por tração são promissores para uso em lapidação de diamante. Isto porque, são excelentes quando é necessária uma grande precisão de posicionamento. Esta qualidade das transmissões por tração é atribuída à baixa fricção e folga entre os elementos rolantes.

Segundo Soviero (1992), a Specialized, uma das maiores e mais famosas fabricantes de bicicleta do mundo criou um protótipo denominado FSX (Future Shock Experimental) equipada com CVT. Silva *et al.* (1994) apresentam a análise cinemática de uma transmissão inovativa que se enquadra na classe de CVTs por tração. As aplicações iniciais dessa transmissão estão limitadas a sistemas robustos e de baixo custo, como veículos agrícolas e veículos recreacionais, por exemplo, bicicletas. Como muitas CVTs têm sido propostas nos últimos tempos, mas poucas tem recebido a atenção necessária para que possam ser postas no mercado, Dorey (1992) preocupou-se com a avaliação de uma TD-CVT que alcançou o estágio de protótipo, mas que necessita de um investimento significativo para avançar em seu desenvolvimento e poder tornar-se um produto comercial.

Devido à similaridade existente entre a minimização do consumo de combustível nos automóveis e da energia metabolizada pelo ciclista durante o exercício, esse trabalho propõe a utilização de CVTs em bicicletas.

Em virtude da quase inexistência de sistema de transmissões que não sejam os convencionais em bicicletas, esse capítulo está baseado quase que exclusivamente nas inovações tecnológicas das CVTs aplicadas na indústria automobilística. Essa opção tem a ver com fato, que muitos dos avanços tecnológicos alcançados pela indústria automobilística acabam migrando para as demais áreas. Por exemplo, muitas das inovações que são usadas nas bicicletas atualmente vieram da área automobilística, ou seja:

- Sistema de freios a disco;
- Amortecedores a base de ar e óleo;
- Materiais leves e ultra-resistentes;
- Formas aerodinâmicas.

entre outras. Logo, é perfeitamente razoável vislumbrar que no futuro as bicicletas possam ser equipadas com CVTs.

2.6 Sistema de Transmissão em Bicicletas

2.6.1 Dos Primórdios Até Hoje

A primeira bicicleta comercialmente importante foi o velocípede Francês desenvolvido por Pierre e Ernest Michaux em Paris, em 1863. Este veículo possuía o pedal fixo diretamente no centro da roda dianteira, como os triciclos infantis de hoje. Como resultado, possuía uma baixa relação de transmissão, ou seja, uma volta do pedal avançava a bicicleta a uma distância igual ao perímetro da roda, em torno de 3.3 m (10 pés) (nas bicicletas atuais o avanço pode chegar a 10 m, ou mais). Inicialmente, o modo mais simples para aumentar o avanço da bicicleta para cada volta do pedal, foi o uso de rodas dianteiras maiores. Assim, surgiram as bicicletas com "rodas enormes" (*high-wheeler*) com cerca de 1,5 metros de diâmetro (60 polegadas), enquanto que as rodas traseiras possuíam 0.5 m (20 polegadas) de diâmetro. Um modelo particular desse tipo, todo em metal, foi produzido por James Starley e William Hillman em 1870. Neste modelo, os raios da roda da bicicleta convergiam exatamente para o centro da roda e, a princípio, não foram bem adaptados para resistir ao grande esforço naquele ponto. Assim, duas barras rígidas extras

tiveram que ser adaptadas aos raios para ajudar a transmitir o torque dos pedais no centro da roda sem danificar os raios. Este problema foi resolvido definitivamente por Starley quatro anos depois. Os raios não convergiam mais para o centro da roda e sim para pontos tangentes a uma circunferência próxima ao centro da roda. Esses raios formam assim uma série de triângulos que reforçam as rodas contra o torque aplicado durante as acelerações e desacelerações, como são usados até hoje. Contudo, o maior problema das bicicletas com rodas dianteiras enormes era subir no seu banco e se manter nele.

Apesar de descrita séculos antes por Leonardo da Vinci, a transmissão por correntes para impulsionar a roda traseira só foi aplicada às bicicletas em 1879 por Harry J. Lawson. Nos anos seguintes, Hans Renold produziu a forma definitiva das bicicletas com corrente. Outro passo no desenvolvimento aconteceu em 1888. O inglês John Boy Dunlop introduziu as câmaras pneumáticas acopladas as rodas, que eram mais confortáveis e eficientes que as rodas de borracha sólida usadas até então.

Outros acessórios também surgiram durante 1880 e 1890, entre eles os mecanismos de roda livre e sistemas de freios mais eficientes. A necessidade de mudanças das relações de transmissão durante o percurso fez surgir em 1899 a primeira versão de bicicleta com um câmbio acoplado.

Alguns fatos que ocorreram próximos da passagem do século fizeram diminuir o progresso do desenvolvimento das bicicletas. Um deles foi tecnológico, o desenvolvimento de motores de combustão interna e, conseqüentemente, dos veículos autopropulsionados, que atraíram a atenção e o entusiasmo de inventores para longe das bicicletas. Outro fato importante, e não tecnológico, teve a influência mais perversa: a criação de um corpo internacional para regulamentação das corridas de bicicleta - a União Internacional dos Ciclistas (UCI) - organizada em 1900. Entre suas regras, estava uma declarando que era permitido utilizar qualquer dispositivo como fonte de potência auxiliar nas bicicletas de corrida com o objetivo de aumentar seu desempenho, desde que, fossem mantidas suas formas originais. Assim, a tecnologia para aproveitamento da força humana como fonte de potência permaneceu congelada por décadas.

2.6.2 Tendência Observada

Ultimamente, além da busca pela melhor aerodinâmica e do menor peso, pode-se acrescentar no projeto de modernas bicicletas, a necessidade de um bom desempenho e eficiência dos demais componentes, sendo que, um dos sistemas que mais tem evoluído é o mecanismo de transmissão. De fato, graças à popularidade crescente das bicicletas desenhadas para percorrer qualquer terreno, que solicita muito mais a transmissão, todo o sistema evoluiu bastante nos últimos anos. É a chamada linha fora de estrada, conhecidas com *off-road*, *all-terrain bike (ATB)* ou *mountain bikes*, que já representa mais da metade de todas as bicicletas vendidas no mundo. Analisando particularmente este tipo de bicicleta, vemos que há uma tendência em aumentar cada vez mais o número de relações de transmissão.

2.6.3 Proposta Para Um “Novo” Sistema

A Figura 2.9 esquematiza um sistema tradicional de transmissão em bicicletas. Nela pode-se ver um par coroa/catraca de comprimentos L_2 e L_3 fixo, sendo que a razão L_2/L_3 fornece a relação de transmissão. A maioria das bicicletas possui conjuntos de valores para L_2 e L_3 .

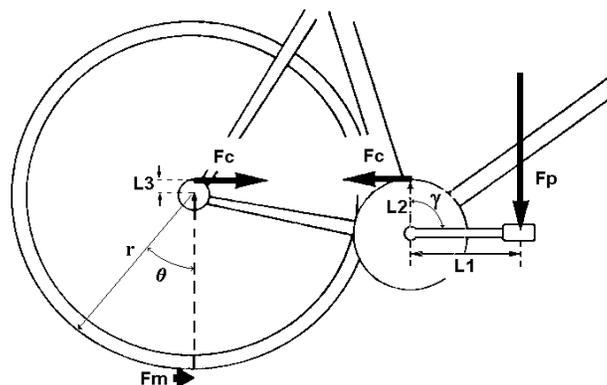


Figura 2.9 – Forças agindo no sistema propulsor em bicicletas

Nesse trabalho é proposto um “novo” sistema de transmissão para bicicletas, simplesmente acrescentando uma TD-CVT em série com um único par coroa/catraca (L_2/L_3). Assim sendo, a relação L_2/L_3 funcionará como uma redução secundária e a TD-CVT como a transmissão propriamente dita, Figura 2.10 e 2.11. A relação de transmissão total será então, a relação de

transmissão da CVT multiplicada pela razão $L2/L3$. Forti (1997) estudou a quantidade de energia metabolizada pelo ciclista quando ele percorre diferentes tipos de percurso, fornecendo diferentes valores de potência ao sistema, em função da relação $L2/L3$, sendo que, o valor da razão $L2/L3=0.55$ obteve o melhor desempenho.

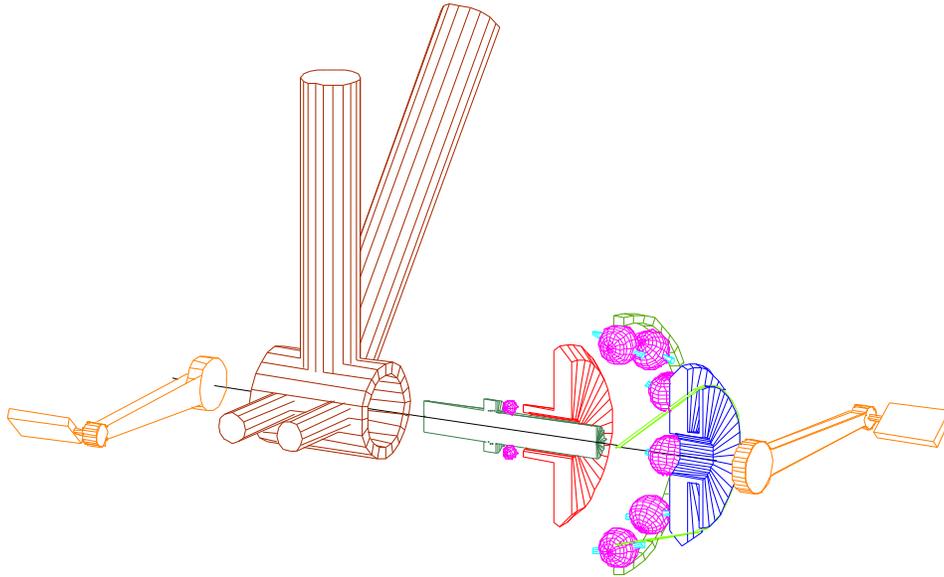


Figura 2.10 – Vista 3D da CVT no quadro da bicicleta

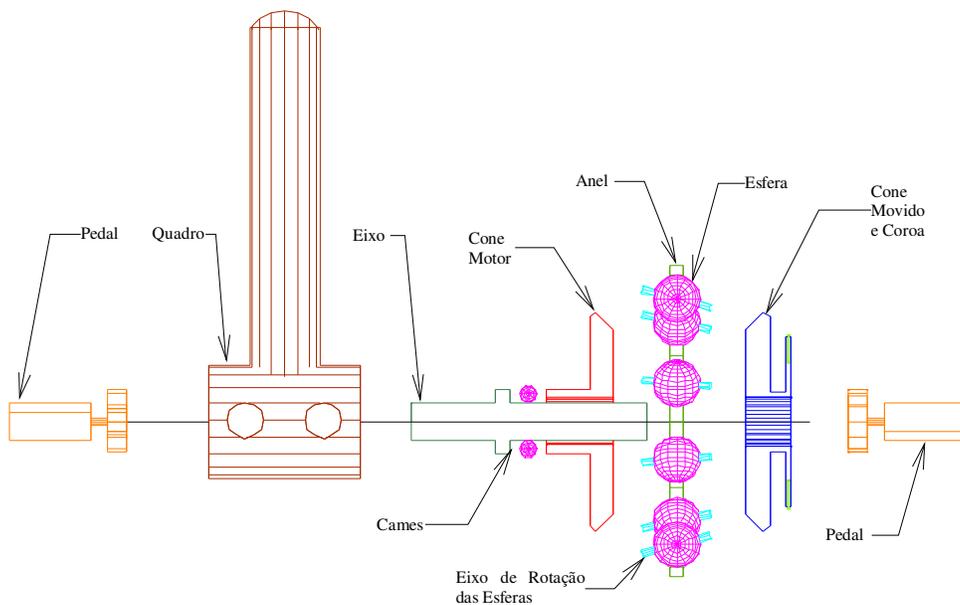


Figura 2.11 – Vista 2D da CVT no quadro da bicicleta com a descrição dos componentes

2.7 Comentários e Conclusões

Como visto, pode-se constatar que a indústria automobilística está investindo muito no projeto de CVTs.

Adicionalmente ao que foi exposto até aqui, pode-se mencionar que a utilização de microprocessadores permitiria que uma mesma CVT pudesse operar de maneiras diferentes, ou seja, pode-se programar o controle de ajuste da relação de transmissão de CVT de acordo com o tipo de carro e motorização e também, de acordo com o estilo de pilotagem do motorista.

Ainda com relação aos microprocessadores, nota-se que eles estão cada vez mais baratos e fáceis de serem utilizados. Por esse motivo, eles poderiam facilmente vir a ser utilizados no sistema de controle de uma CVT para bicicletas. Assim sendo, seria possível, por exemplo, monitorar a frequência de pedalar do ciclista e programar a CVT para mantê-la constante independente das mudanças de carga que o ciclista venha experimentar durante o percurso. Essa frequência de pedalar seria escolhida pelo próprio ciclista.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, seria possível adaptar uma CVT numa bicicleta ergométrica. Nesse caso poderia haver um monitor na frente da ergométrica mostrando um determinado percurso a ser realizado, e o ciclista a medida que pedalasse poderia acompanhar seu posicionamento nesse percurso. Assim sendo, quando o ciclista atingisse uma subida, a CVT mudaria sua relação de transmissão para emular a carga relacionada a essa subida. O mesmo procedimento seria aplicado para qualquer outra mudança na topografia do percurso.

Além disso, também seria possível adaptar uma CVT para sistemas de baixo torque e baixa potência em alguns aparelhos domésticos e mesmo industriais.

Capítulo 3

Teoria de Contato

3.1 Introdução

As CVTs por tração diferenciam-se das CVTs por fricção basicamente pela presença de um fluido lubrificante entre os elementos rolantes.

No caso das CVTs por fricção, o contato entre os elementos rolantes é chamado de contato hertziano seco. Nesse caso, dois corpos elásticos são prensados um contra o outro, sendo que a distribuição de pressão no interior da área de contato pode ser definida matematicamente por um elipsóide de volume, Figura 3.1 - Ver teoria de Hertz seção 3.5.2.

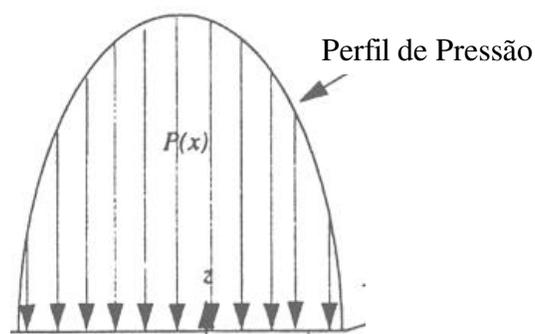


Figura 3.1 - Distribuição de pressão na região de contato seco

A presença do lubrificante entre os contatos rolantes causa alguma deformação nesse elipsóide, Figura 3.2. Contudo, isso não impede que muitas vezes, a distribuição de pressão nos contatos lubrificados seja tratada da mesma forma que em contatos hertzianos secos.

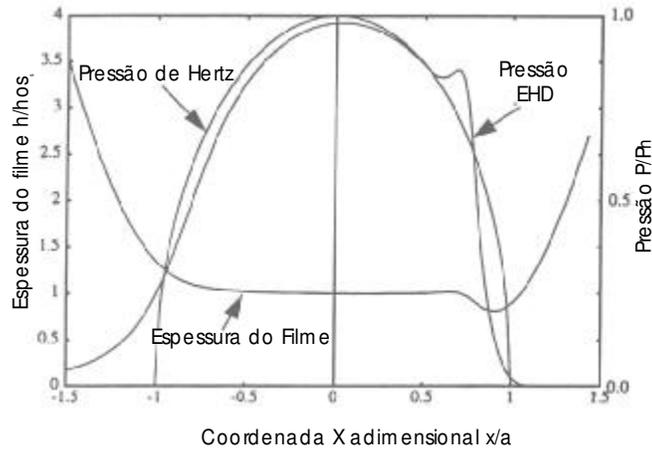


Figura 3.2 - Distribuição de pressão na região de contato lubrificado

A forma da área de contato entre dois corpos elásticos prensados um contra o outro, varia em função das características geométricas dos corpos em contato, e da intensidade da força com que os corpos são prensados. Assim sendo, a área de contato pode ser:

- Um ponto;
- Uma linha;
- Uma superfície, sendo o caso mais geral uma elipse;

Contudo, em função de fatores como:

- Rigidez dos materiais em contato;
- Textura;
- Acabamento superficial;
- Taxa de carregamento;
- Magnitude do carregamento;
- Direção do carregamento em relação a região do contato;
- Suporte dos corpos, entre outros.

uma combinação das formas acima citadas, para a área de contato, pode ocorrer.

Essas dependências tornam os problemas de contato não lineares, sendo necessário resolvê-los numericamente, através de métodos iterativos. Contudo, quando determinadas simplificações são adotadas, algumas formas de problemas podem ser resolvidas analiticamente.

Nos contatos de rolamento, o fluxo de torque é possível graças a interação entre as superfícies de contato. Essa interação gera fricção (atrito) e, conseqüentemente, força tangencial nas superfícies de contato dos corpos, que propicia a transferência de torque entre os elementos em contato de rolamento. Este fenômeno é importante no estudo de componentes mecânicos, como por exemplo: rolamentos, dentes de engrenagem, CVTs por fricção, etc. Como será visto nesse capítulo, a fricção, a força normal com que os corpos são prensados e a força tangencial no contato, além de estarem relacionadas entre si, estão também relacionadas com as tensões e as deformações do contato.

De acordo com a lei de Coulomb para atrito seco, quando dois corpos rígidos rolam um sobre o outro, duas coisas podem acontecer:

- 1.) Os corpos rolam sem escorregamento e a força tangencial fica abaixo do valor da multiplicação de uma constante (coeficiente de atrito entre os corpos em contato) pela força normal com a qual os corpos são prensados;
- 2.) Os corpos escorregam e rolam enquanto a força tangencial atinge o valor da multiplicação de uma constante (coeficiente de atrito entre os corpos em contato) pela força normal com a qual os corpos são prensados um contra o outro e agem na direção do escorregamento.

Contudo, tem sido observado experimentalmente que os corpos escorregam um pouco mesmo quando a força transmitida encontra-se abaixo do valor máximo. Para uma explicação desse fenômeno deve-se levar em conta a elasticidade dos corpos em contato. Nesse caso, os corpos não são mais tratados como rígidos.

Os assuntos abordados nesse capítulo serão:

- 1.) Tribologia que engloba todos os fenômenos que ocorrem na região de contato;
- 2.) Contato de rolamento, em que será formulado o problema geral do contato, apresentando os conceitos básicos para a resolução do problema;
- 3.) Teoria das *half-spaces*, suas propriedades e particularidades na resolução do problema de contato de rolamento;
- 4.) O problema de Hertz e a resolução do problema linear de contato;
- 5.) A teoria simplificada do contato rolamento desenvolvida por Kalker. Essa teoria será usada nas simulações para mostrar a influência do movimento de *spin* na força tangencial à superfície de contato para um valor de escorregamento (*slip*) constante. É através da força tangencial que o movimento e, conseqüentemente, o torque e a potência são transmitidos através dos elementos rolantes.

Esse capítulo tem por finalidade apresentar uma idéia geral da teoria de contato de rolamento e servir de base para a continuação de estudo em CVTs, pois futuramente será acrescentado à teoria simplificada de contato de rolamento seco (desenvolvida por Kalker) a influência do filme lubrificante entre os elemento em contato de rolamento (as características do filme de óleo no contato de rolamento serão apresentada no Capítulo 4). Fazendo isso, será possível desenvolver um programa para a determinação das forças na região de contato lubrificado. A intenção de fazer um programa para solução do problema de contato lubrificado baseado na teoria simplificada do contato de rolamento seco, é que assim, aproveita-se uma das grandes vantagens dessa teoria, ou seja, a rapidez computacional. Desse modo, espera-se poder usar esse programa em simulações dinâmicas com um grau razoável de precisão.

3.2 Tribologia

Tribologia é o ramo da ciência e tecnologia que trata das interações entre as superfícies em movimento relativo. Assim sendo, ela abrange o estudo da fricção (atrito), desgaste, lubrificação e de maneira geral os contatos mecânicos.

Fricção – A força de fricção é definida como sendo a resistência encontrada quando dois corpos em contato movem-se relativamente um ao outro. A razão entre a força de fricção F_a e a

força normal N , fornece o coeficiente de fricção, Figura 3.3. Usualmente, alta fricção é indesejável, contudo, em freios isso é essencial. Para reduzir a fricção e, conseqüentemente, o desgaste, lubrificam-se os contatos.

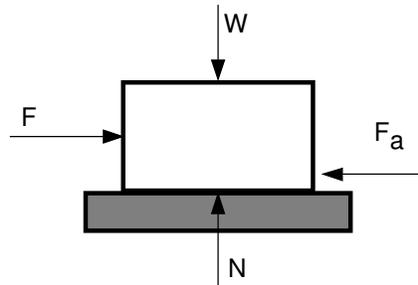


Figura 3.3 – Representação das forças

Desgaste – de uma maneira simplificada, pode-se definir desgaste como sendo a massa ou o volume de material removido ou retirado de um corpo, que está em contato mecânico contínuo com outro corpo ou corpos, e está sendo repetitivamente tensionado.

Lubrificação – Quando uma superfície de um componente move-se sobre outra superfície, existe sempre uma força de fricção resistiva ao movimento entre elas. Se as superfícies estão bastante próximas uma da outra, os picos de rugosidade das superfícies interagem, aumentando a fricção e podendo causar danos nessas superfícies. A principal função de um lubrificante é separar essas superfícies em contato e, desse modo, reduzir a fricção e o desgaste. O lubrificante também pode agir como um regulador de temperatura ou protetor contra a corrosão. O capítulo 4 abordará um tipo específico de lubrificação denominada lubrificação elastohidrodinâmica que ocorre em contatos submetidos a altas pressões, como ocorre em TD-CVTs.

Contatos Mecânicos – As máquinas que possuem superfícies interagindo tais como: engrenagens, mancais, cames, entre outras, dependem da integridade desses componentes para um bom desempenho do conjunto onde estão montadas. Em muitos casos, a pressão nas superfícies de contato desses elementos é alta, da ordem de Giga Pascal. Essas pressões ocasionam deformações e tensões que devem ser levadas em conta pelos engenheiros para evitar que os componentes e/ou máquinas falhem por:

- Sobrecarga (*Overload*) - Os componentes falham devido a excessivas cargas no contato;
- Desgaste (*Wear*) – Remoção de material na superfície por abrasão ou pontos de solda locais nas superfícies;
- Fadiga nos contatos de rolamento (*Rolling Contact Fatigue*) – Tensões de contato cíclico podem causar iniciação de trinca por fadiga;
- Emperramento, Gripamento (*Seizure*) – Sob altas tensões podem ocorrer pequenos pontos de solda nos picos de rugosidade na superfície dos componentes;
- Perda de Tolerância (*Loss of Tolerance*) – Devido à excessiva deformação dos componentes.

A análise das tensões de contato e, conseqüentemente, o cálculo da vida por fadiga é apresentado no Capítulo 6 – seção 6.4.

3.3 Contato de Rolamento

O contato de rolamento desempenha uma parte importante na simulação de muitos sistemas em contatos mecânicos, tais como: contato entre a roda e o trilho de trem, mancais de rolamento, transmissões por tração, entre outros. Como essas simulações, freqüentemente, são feitas através de métodos de integração no tempo, é crucial que sejam capazes de calcular as forças no contato rapidamente e com um bom grau de precisão.

Os problemas de contato, freqüentemente, podem ser divididos em duas partes:

- 1.) **Problema Normal** – em que é calculada a distribuição normal de tensão (ou pressão) sobre a superfície de contato quando dois corpos elásticos são prensados.
- 2.) **Problema Tangencial** – em que é estabelecida a relação entre a distribuição de tensão tangencial e a velocidade relativa global entre dois corpos elásticos rolando um sobre o outro, e submetidos a uma força normal, ou seja, dada uma força normal na superfície de contato, calcula-se a força tangencial correspondente em função do escorregamento entre as duas superfícies em contato.

Para geometrias muito simples e/ou quando algumas simplificações teóricas são adotadas é possível resolver os problemas normal e tangencial de contato de rolamento analiticamente. Contudo, para situações de contato mais realísticas, em que as superfícies em contato não apresentam geometrias tão simples, métodos numéricos devem ser aplicados. Uma das maneiras de resolver esse problema é através do emprego do Método dos Elementos Finitos. A desvantagem desse método é o longo tempo computacional, o que o torna um tanto quanto inviável de ser usado em simulações dinâmicas.

Uma maneira apropriada para resolver problemas de contato é assumir que os corpos podem ser definidos como *half space* (ver seção 3.5) e, então, aplicar as equações constitutivas de Cerruti-Boussinesq que relacionam tensões e deslocamentos (ver seção 3.5.1.1). Para utilizar a aproximação das *half space* é necessário que o tamanho da região de contato seja muito menor do que o raio característico dos corpos e, que os materiais envolvidos sejam homogêneos, que é o caso da grande parte dos contatos de rolamento nas CVTs, ou seja, contato aço-aço. Nesse caso, a deformação dos corpos é tão pequena, que a teoria linear das pequenas deformações produz uma aproximação muito boa (Timoshenko 1951).

O caminho tradicional para resolver problemas de *half space* é fazer uma discretização da área de contato e linearizar as funções dentro de cada elemento (Kalker 1990). Assim, é possível, através de um algoritmo iterativo e método variacional encontrar o valor do deslocamento e tensão em cada ponto. Este método é menos preciso do que o método dos elementos finitos, porém, muito mais rápido.

Caso os corpos em contato sejam *quasi-identical* (possuam as mesmas propriedades físicas – ver seção 3.5.1.3), a tensão tangencial não influencia na distribuição de tensão normal. Assim sendo, o problema de contato tangencial pode ser resolvido independentemente do problema de contato normal, o que facilita muito a sua solução.

3.4 Conceitos Básicos do Problema de Contato de Rolamento

Nos próximos subitens serão definidos alguns termos e conceitos básicos para a resolução de problemas de contato de rolamento como: distância entre os pontos de contato, escorregamento, fricção, bordas da área de contato e as condições de contorno do problema.

3.4.1 Definição de Problema

Considere dois corpos elásticos fixos por seus eixos de rotação e identificados pelos números 1 e 2 na Figura 3.4. Quando os corpos são prensados utilizando os eixos de rotação como apoios, forma-se entre eles uma área de contato, onde surgem trações tangenciais e normais. Se esses corpos forem rolados um sobre o outro através da rotação de seus eixos, ocorrerá fricção (atrito) e escorregamento entre eles. O escorregamento entre os corpos gera uma diferença de velocidade entre eles, que influencia no valor das trações tangenciais. Essas tensões normais e tangenciais são acompanhadas por um campo elástico de deslocamento e deformações nos corpos. Nesse caso, é preciso encontrar esse campo elástico e, em particular, o campo elástico na superfície dos corpos onde o fenômeno de contato acontece. Na Figura 3.4 nota-se que a área de contato é geralmente elíptica e que seu perímetro pode ser dividido em partes, as quais serão detalhadas na seção 3.4.4.

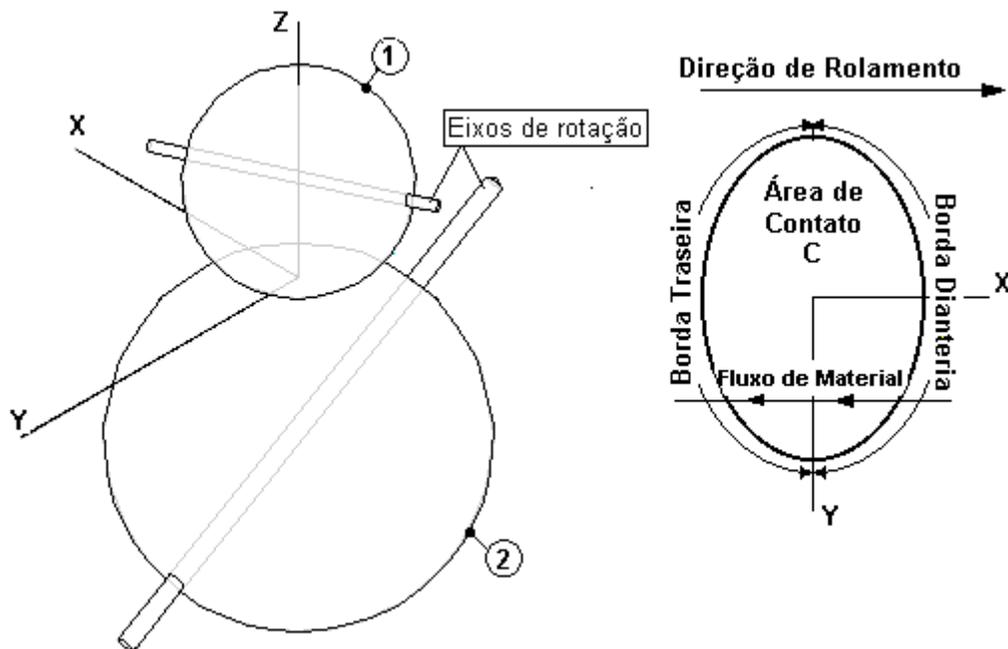


Figura 3.4 – Dois corpos em contato de rolamento

3.4.2 A Distância Entre os Pontos de Contato

Em função dos raios de curvatura e das características físicas dos corpos 1 e 2, as superfícies desses corpos na vizinhança da área de contato entre eles podem ser consideradas como sendo planas, Figura 3.5. Para isso, assume-se que:

- 1.) Os corpos 1 e 2 não estão em contato no ponto \mathbf{x} , mas sim, estão separados por $O(\mathbf{u})$;
- 2.) As superfícies dos corpos são lisas e planas na vizinhança do ponto \mathbf{x} .

Com essas considerações a relação $\mathbf{n}^1 = \mathbf{n}^2$ (vetores normais à superfície de contato), é aproximadamente válida, uma vez que os corpos na área de contato podem ser visualizados como duas superfícies planas.

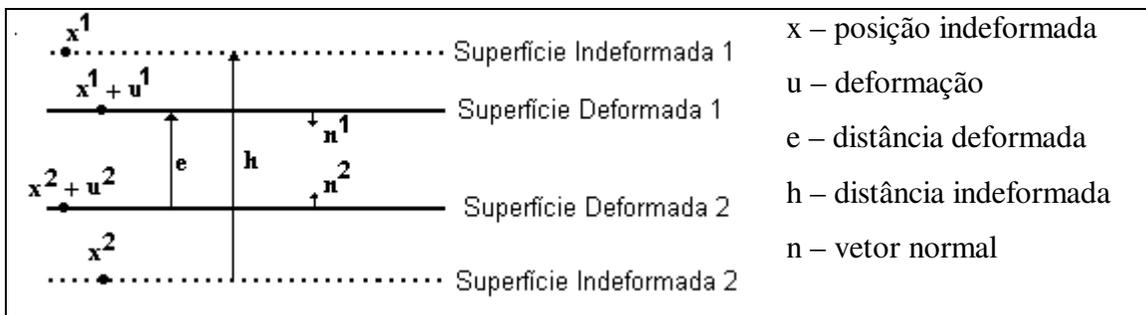


Figura 3.5 – Distância entre os pontos dos corpos em contato

Sendo h a distância entre as superfícies dos corpos 1 e 2 no estado indeformado (antes dos corpos serem prensados), e e no estado deformado (depois dos corpos serem prensados), tem-se que:

$$h = \mathbf{n}^{2T} (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2), \quad e = \mathbf{n}^{2T} \{(\mathbf{x}^1 + \mathbf{u}^1) - (\mathbf{x}^2 + \mathbf{u}^2)\} \quad (3.1)$$

sendo que, o índice sobrescrito T significa transposto.

O deslocamento ocorre em problemas de contato linearizado (pequenos deslocamentos, pequenos gradientes de deslocamento) apenas na forma $\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$ que, é chamado de diferença de deslocamento e , denotado por \mathbf{u} que introduzindo na expressão de e resulta em:

$$e = h + \mathbf{n}^{2T} \mathbf{u} = h - \mathbf{n}^{1T} \mathbf{u} \quad (3. 2)$$

e : distância entre pontos (2) e (1) deformada;

h : distância entre pontos (2) e (1) indeformada

Analisando a distância deformada e tem-se que:

- $e > 0$ – Existe uma brecha entre os corpos em \mathbf{x}^1 e \mathbf{x}^2 , sendo: $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2)/2$;
- $e = 0$ – os corpos estão em contato em \mathbf{x} ;
- $e < 0$ – os corpos penetram em \mathbf{x} , o que é impossível.

Portanto, apenas $e(\mathbf{x}) \geq 0$ é possível.

Além das distâncias entre os pontos existem as forças no contato. As forças de tração no contato $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2$ (dimensão: N/m²) agem nos corpos (1) e (2).

De acordo com a 3ª Lei de Newton;

$$\mathbf{p}^1 = - \mathbf{p}^2 = \mathbf{p} \quad (3. 3)$$

Então a tração normal no corpo (1) em \mathbf{x} , é positiva caso seja compressiva. Logo a componente normal é:

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{n}^{2T} \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (3. 4)$$

e a componente tangencial da tração é dada por

$$\mathbf{p}_T = \mathbf{p} - \mathbf{n}^2 \mathbf{p}_N(\mathbf{x}) \quad (3. 5)$$

Fora da área de contato a componente normal da tração é nula e dentro do contato é positiva (compressiva); enquanto que a distância deformada é positiva fora do contato e nula em seu interior, ou seja:

$$e(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{e} \quad p_N(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (3.6)$$

No contato p_N pode ser positiva e $e = 0$. Fora do contato, a tração normal é nula e, $e > 0$.

Então, pode-se formalizar isso da seguinte maneira. Escolhe-se uma zona de contato potencial (também chamada de área de contato potencial) tal que, a zona de contato potencial encampa completamente a área de contato real. Na zona de contato potencial $p_N \geq 0$, $e \geq 0$ e $p_N \cdot e = 0$.

A área de contato potencial pode ser escolhida livremente, contanto que, as relações definidas acima sejam mantidas, Figura 3.6.

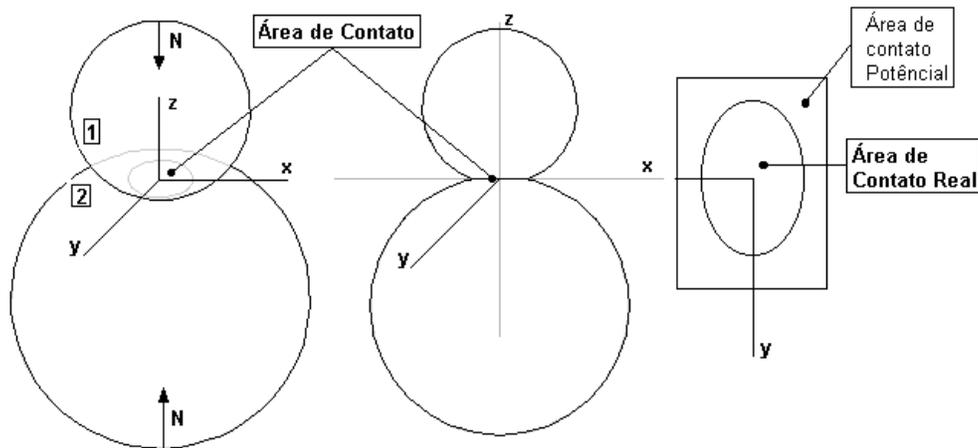


Figura 3.6 – Área de contato potencial e real

3.4.3 O Escorregamento

Das Figuras 3.4 e 3.5 têm-se que a partícula \mathbf{x}^1 está em contato com a partícula \mathbf{x}^2 no tempo t , isto é:

$$\mathbf{x}^1(t) + \mathbf{u}^1(\mathbf{x}^1, t) = \mathbf{x}^2(t) + \mathbf{u}^2(\mathbf{x}^2, t) \quad (3.7)$$

A velocidade da partícula 1 com respeito ao sistema global de coordenada (x,y,z) é:

$$\mathbf{v}^1 = \dot{\mathbf{x}}^1(t) + \mathbf{u}^1(\mathbf{x}^1, t) = \dot{\mathbf{x}}^1(t) + \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \mathbf{x}^1} \dot{\mathbf{x}}^1 + \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} \quad (3.8)$$

sendo \mathbf{v}^2 definida similarmente

O escorregamento (*slip*) \mathbf{s} é a velocidade relativa entre duas partículas em contato, isto é:

$$\mathbf{s} = \mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^2 = \left\{ \dot{\mathbf{x}}^1(t) - \dot{\mathbf{x}}^2(t) \right\} + \left\{ \mathbf{u}^1(\mathbf{x}^1, t) - \mathbf{u}^2(\mathbf{x}^2, t) \right\} \quad (3.9)$$

Agora,

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 \rightarrow \mathbf{x}^1 \approx \mathbf{x}^2 \approx \mathbf{x} \cong \frac{\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2}{2} \quad (3.10)$$

tal que, devido ao valor muito pequeno de \mathbf{u}^a ($a = 1, 2$), e se $\dot{\mathbf{x}}^1 \approx \dot{\mathbf{x}}^2$

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{x}}^1 - \dot{\mathbf{x}}^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{x}} \right) \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^1}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial t} \quad (3.11)$$

Se $\dot{\mathbf{x}}^1$ não for aproximadamente igual a $\dot{\mathbf{x}}^2$, então $(\dot{\mathbf{x}}^1 - \dot{\mathbf{x}}^2)$ é grande com respeito a $\left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}^a}{\partial \mathbf{x}^a} \right) \dot{\mathbf{x}}^a + \frac{\partial \mathbf{u}^a}{\partial t} \right\}$, e \mathbf{s} é dado pela Equação 3.11, mesmo que o segundo e o terceiro termo sejam negligenciáveis com respeito ao primeiro.

Denota-se:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{c} = \dot{\mathbf{x}}^1 - \dot{\mathbf{x}}^2 & \text{creep} \\
 \mathbf{v} = -\dot{\mathbf{x}} = -\left(\frac{\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2}{2}\right) & \text{velocidade de rolamento} \\
 \mathbf{u} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2 & \text{diferença de deslocamento} \\
 \mathbf{s} = \mathbf{c} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} & \text{slip}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{c} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{array}} \right\} \quad (3.12)$$

O sinal negativo na definição da velocidade de rolamento significa que uma partícula na superfície do corpo em rolamento circula na direção contrária ao movimento do corpo.

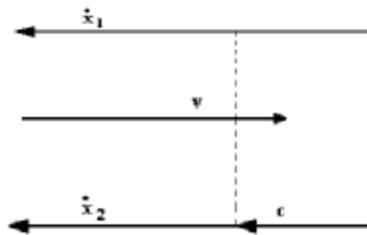


Figura 3.7 – Esquemática do *creep* e velocidade de rolamento

Se um sistema de coordenada pode ser encontrado tal que todas as quantidades \mathbf{c} , \mathbf{u} , \mathbf{v} são independentes do tempo t , tem-se o rolamento estacionário (*steady state rolling*), caso contrário tem-se o rolamento não estacionário (*non-steady state rolling*).

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{s} = \mathbf{c} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathbf{v} & \text{steady state rolling} \\
 \mathbf{s} = \mathbf{c} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} & \text{non-steady state rolling}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{s} \\ \mathbf{s} \end{array}} \right\} \quad (3.13)$$

3.4.4 Borda Dianteira, Borda Traseira

Como comentado anteriormente, a região de contato C tem um perímetro, Figura 3.4. Esse perímetro ou borda pode ser dividida em três partes: borda dianteira, borda traseira, e possivelmente, uma borda neutra.

Quando a velocidade de rolamento (ver Figura 3.7) aponta para o lado de fora da região de contato C num ponto da borda, esse ponto pertence à borda dianteira: as partículas da superfície do corpo que se encontram nesse ponto movem-se para o interior da área de contato com a velocidade de rolamento.

Quando a velocidade de rolamento (ver Figura 3.7) aponta para o interior da região de contato C num ponto da borda, esse ponto pertence à borda traseira: as partículas da superfície do corpo que se encontram nesse ponto deixam a área de contato com a velocidade de rolamento.

Quando a velocidade de rolamento é nula ou paralela a borda, pode-se dizer que é a borda neutra: partículas movem-se apenas para o interior ou para o exterior da área de contato através da deformação elástica, não através do movimento de corpo rígido.

3.4.5 Fricção

Quando dois corpos escorregam um sobre o outro, há uma força de oposição ao movimento, denominada força de fricção. Usualmente, uma força de compensação finita é necessária para ajustar o equilíbrio de forças de um corpo escorregando, enquanto que em muitos experimentos a força de fricção permanece constante durante o escorregamento. Assim, assume-se que a força cisalhante é limitada por uma força limite g , que depende da força normal F_z , da magnitude da velocidade de escorregamento V , e alguns outros parâmetros, assim:

$$g = g(F_z, V, \dots) \quad (3.14)$$

Quando a velocidade de escorregamento é nula, a força tangencial pode cair abaixo do limite de tração g em valor absoluto. A partir do momento que o escorregamento ocorre, a força tangencial atinge o limite de tração, e é oposta ao escorregamento:

$$|F_\tau| < g(F_z, V, \dots) \quad (3.15)$$

F_τ componente tangencial da força normal no contato, $\tau = 1, 2$,

$$|F_{\tau}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \quad (3.16)$$

se $V \neq 0$

$$F_{\tau} = -\frac{g v_{\tau}}{V} \quad (3.17)$$

v_{τ} : Componente Tangencial da velocidade de escorregamento; $V = |v_{\tau}|$

Índice Grego: Componente Tangencial

A Lei de Coulomb para atrito seco propõe que g é proporcional a F_z sendo a constante de proporcionalidade denominada de coeficiente de fricção:

$$g(F_z, V, \dots) = f F_z \quad (3.18)$$

Para interpretar a Equação 3.18, Archard (1957) propôs que a fricção era, primeiramente, causada pela adesão dos picos de rugosidade dos corpos em contato, formando junções nesses pontos, ou seja, a superfície de contato real C_r , que está contida na área de contato potencial C , Figura 3.6. Archard mostrou que a área da superfície de contato real é proporcional a F_z , (força de compressão normal).

Na superfície de contato real, os corpos estão unidos por forças interatômicas. Devido ao escorregamento os picos de rugosidade unidos cisalham. Eventualmente, essas uniões se quebram, e novos pares de união acabam se formando. O cisalhamento dos picos de rugosidade é acompanhado por deformação micro plástica e, também, pela separação de partículas de material dos corpos, levando-os assim ao desgaste. Logo, pode-se concluir que a fricção e o desgaste são fenômenos conectados. Apesar dessa sustentação para a Lei de Coulomb, os tribologistas geralmente concordam que a Equação 3.18 deve ser modificada. A modificação mais simples é a introdução de diferentes coeficientes de fricção: um para quando há escorregamento (f_{din}) e outro para quando não há escorregamento (f_{est}), sendo:

$$f_{est} > f_{din} \quad (3.19)$$

Isso, contudo, não é suficiente para muitos pesquisadores que, propõem relacionamentos mais complicados para o coeficiente de fricção.

Até aqui foram consideradas, para estimativa da força de fricção, a força normal no contato e a velocidade global no escorregamento. Contudo, em contatos mecânicos é necessária uma forma local da lei de fricção. Uma teoria muito simples sugere que ao invés de quantidades globais usem-se quantidades locais, isto é, que ao invés de \mathbf{F} use-se \mathbf{p} a tração local, e ao invés da velocidade de escorregamento global \mathbf{V} use-se o escorregamento \mathbf{s} .

$$|p_\tau| \leq g(p_z, |s_\tau|, \dots) \quad (3.20)$$

se

$$|s_\tau| \neq 0 \Rightarrow p_\tau = -\frac{g s_\tau}{|s_\tau|} \quad (3.21)$$

sendo:

p_τ : Componente da força tangencial

s_τ : Componente do escorregamento, $\tau = 1, 2$

Essa lei foi confirmada experimentalmente por Rabinowicz (1965). Ela foi usada anteriormente em trabalhos teóricos por Carter (1926) e Mindlin (1949), em que o limite de tração é dado por:

$$g(p_z, |s_\tau|, \dots) = f(|s_\tau|, \dots) p_z \quad (3.22)$$

sendo que f é usualmente considerado como sendo constante.

3.4.6 Condições de Contorno

Segundo Kalker (1990) de acordo com a lei de Hooke há uma relação linear entre a tensão σ_{ij} e a deformação e_{hk} dada por:

$$\sigma_{ij} = E_{ijhk} e_{hk} \quad (3.23)$$

sendo E_{ijhk} constante elástica. Para o caso de um material isotrópico temos que:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk}, \quad \sigma_{ij} = \frac{Ee_{ij}}{1+\nu} + \frac{E\delta_{ij}e_{kk}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.24)$$

sendo:

E – Módulo de Young, ν - Coeficiente de Poisson

δ_{ij} - Delta de Kronecker, sendo igual a 0 quando $i \neq j$ e, igual a 1 quando $i = j$.

A Equação 3.23 é válida para todos os tipos de corpos. Contudo, para corpos sujeitos a certas regularidades é possível que ela obtenha a seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \int_{\partial V} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{p}(\mathbf{y}) dS \\ u_i(\mathbf{x}) &= \int_{\partial V} A_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) p_k(\mathbf{y}) dS \end{aligned} \right\} \quad (3.25)$$

sendo $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ o deslocamento do ponto \mathbf{x} devido a carga no ponto \mathbf{y} , é chamada de Função de Influência, e depende da forma do corpo. Para problemas de elasticidade em 3D ela foi calculada para algumas formas, em particular para *half space*, ver seção 3.5

A vantagem da Equação 3.25 em relação a Equação 3.23 está no fato que para problemas em 3D, a Equação 3.25 é tomada apenas sobre o contorno da área de contato dos corpos (2D), enquanto que a Equação 3.23 estende-se pelo interior dos corpos (3D).

Por esse motivo, será utilizada a Equação 3.25, sendo que, a superfície do corpo a ($a = 1, 2$), nas vizinhanças da área de contato, é dividida em três partes:

- A_p onde a carga superficial é prescrita como \bar{p} ;
- A_u onde o deslocamento superficial é prescrita como \bar{u} ;
- A_c que é a zona de contato potencial, Figura (3.6).

Nessa seção será dada uma definição um pouco diferente para zona de contato potencial, contudo ela é equivalente a definição dada anteriormente.

A zona de contato potencial pode ser escolhida livremente sobre as seguintes condições:

- 1.) Ela deve encampar completamente a região de contato;
- 2.) Nela, $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 = O(\mathbf{u})$;
- 3.) Nela, $\mathbf{n}^1 \approx -\mathbf{n}^2$, ver Figura 3.5.

então as seguintes relações são válidas na área de contato potencial

$$e(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) + \mathbf{n}^{2T} \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^1(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^2(\mathbf{x}), \quad e \geq 0 \quad (3.26)$$

$$p_N(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^{2T} \mathbf{p}^1, \quad p_N \geq 0 \quad p_N e = 0 \quad (3.27)$$

onde os campos em \mathbf{x}^1 e \mathbf{x}^2 são apropriadamente estendidos para

$$\mathbf{x} = \frac{(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)}{2} \quad (3.28)$$

A região onde $e = 0$ é chamada de zona de contato (região ou área de contato). Ela é denotada pela letra C . Nela $p_N \geq 0$.

A região onde $e > 0$ é chamada de zona exterior (região ou área exterior). Ela é denotada pela letra E . Nela $p_N = 0$.

As equações 3.26 e 3.27 são a descrição matemática de $C \cup E = A_c$. As desigualdades dessas equações desempenham um papel crucial na determinação da área de contato e do campo elástico.

A Equação $p_N e = 0$ é muito importante. Em conjunto com as desigualdades elas significa que quando $e > 0 \rightarrow p_N = 0$ e vice-versa.

De volta para as condições de contorno de fricção, a componente tangencial do *slip* na zona de contato é definida como: $s = \dot{x}^1 - \dot{x}^2 + u^1 - u^2$, ver seção 3.4.3.

Já foi comentado anteriormente que os corpos escorregam um pouco mesmo quando a força transmitida encontra-se abaixo do valor máximo. Isso, propõe a divisão da área de contato em duas partes: uma área de adesão (*stick area*) H onde a componente tangencial do escorregamento é nula; e uma área de escorregamento (*slip*) S onde isso não ocorre. As condições de contorno total na área de contato potencial A_c são:

$$\text{em } H : |s_T| = 0, \quad |p_T| \leq g \quad (3.29)$$

$$\text{em } S : |s_T| \neq 0, \quad |p_T| = -g s_T / |s_T| \quad (3.30)$$

$$S \cup H = C, \quad S \cap H = 0 \quad (3.31)$$

$$\text{em } C : e = 0, \quad p_N \geq 0 \quad (3.32)$$

$$\text{em } E : p = 0, \quad e > 0 \quad (3.33)$$

$$C \cup E = A_c, \quad C \cap E = 0 \quad (3.34)$$

A Figura 3.8a mostra a divisão da área de contato para o caso sem *spin* e *creepage* lateral (ver seção 3.5.1.3) segundo Haines e Ollerton (1963), enquanto que, a Figura 3.8b está em acordo com Johnson e Vermeulen (1958), onde a área de *slip*, achurada, representa um erro.

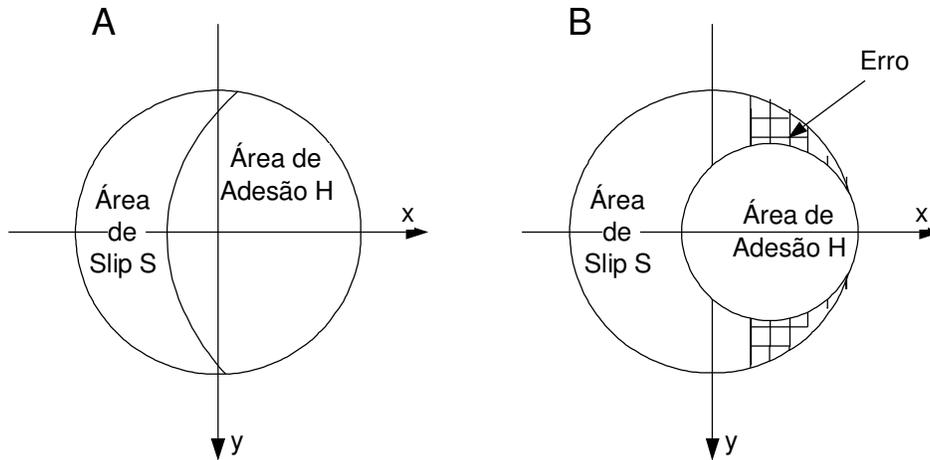


Figura 3. 8 – Divisão da área de contato segundo: (A) Haines e Ollerton (1963), (B) Johnson e Vermeulen (1958)

3.5 Aproximação por Half-Space

Uma das maneiras de resolver problemas de contato tridimensionais é através do método dos elementos finitos, em que princípios variacionais que descrevem os problemas de contato são discretizados. Uma das vantagens desse método é a grande generalidade de aplicação, enquanto que uma das suas desvantagem é o grande tempo computacional que ele consome. Uma alternativa ao método dos elementos finitos é o método dos elementos de contorno que opera uma das representações da Equação 3.25. Um caso especial desse método ocorre quando os corpos em contato podem ser aproximados pelas chamadas *half-spaces* elásticas. Nessas condições a matrix $\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ é explicitamente conhecida, ver seção 3.5.1.1

A grande maioria das teorias exatas de contato emprega a teoria das *half spaces*. Isso significa que os efeitos elásticos próximos do contato são considerados. Os corpos 1 e 2 (Figura 3.6) são considerados como *half-spaces* elásticas $z \geq 0$ (corpo1) e $z \leq 0$ (corpo2), quando se considera as duas áreas de contato com superfícies plana. Os efeitos do campo elástico de tensões praticamente desaparecem a aproximadamente 3 vezes o comprimento da área de contato, Figura 3.9.

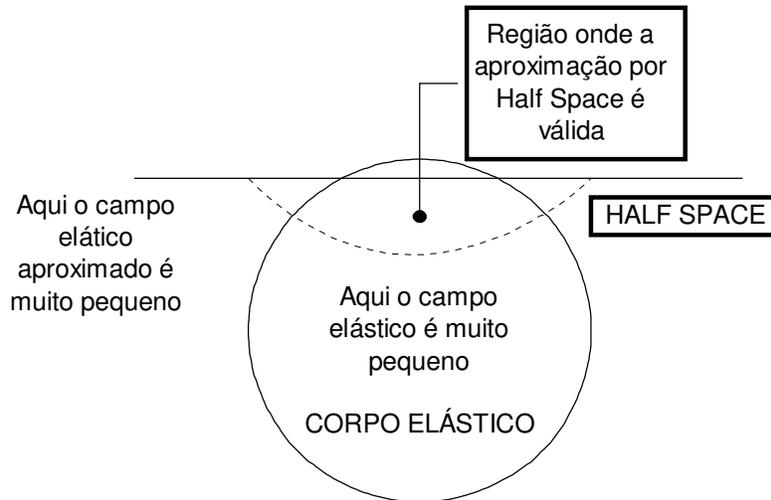


Figura 3.9 - Aproximação por *half-space*

3.5.1 Propriedades de uma Aproximação por *Half-Space*

3.5.1.1 O Número de Influência

O número de influência $A_{ik}(x,y)$ pode ter seu valor exato calculado, Love(1926). Adotando um sistema de coordenadas globais ($O: x,y,z$), sendo que a origem O e os eixos x e y encontram-se na superfície da *half-space*. O eixo x aponta na direção do rolamento, o eixo de z aponta verticalmente para cima para dentro do corpo 1, e o eixo y completa o sistema de coordenadas da mão direita, Figura 3.4. Além disso, denotam-se os componentes \mathbf{u}^a por $u_i^a = (u^a, v^a, w^a)$ e os componentes das superfície de tração \mathbf{p}^a por $p_i^a = (p_x^a, p_y^a, p_z^a)$, sendo $a = 1, 2$ e i o ponto de contato. Claramente, pela Terceira Lei de Newton

$$p_i^1 = -p_i^2 \quad \& p_i \quad (3.35)$$

da Equação 3.25

$$u_i^a(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{ij}^a p_j^a(x', y') dx' dy' \quad (3.36)$$

no corpo a ($a=1, 2$) tem-se para o cálculo do deslocamento devido a carga aplicada p_z segundo índice de A_{ij} igual a 3:

$$A_{1,3}^a = \frac{1}{4\pi G^a} \left\{ \frac{(x-x')|z|}{r^3} - \frac{(1-2\nu^a)(x-x')}{r(|z|+r)} \right\} \quad (3.37)$$

$$A_{2,3}^a = \frac{1}{4\pi G^a} \left\{ \frac{(y-y')|z|}{r^3} - \frac{(1-2\nu^a)(y-y')}{r(|z|+r)} \right\} \quad (3.38)$$

$$A_{3,3}^a = \frac{-(-1)^a}{4\pi G^a} \left\{ \frac{z^2}{r^3} + \frac{2(1-2\nu^a)}{r} \right\} \quad (3.39)$$

sendo: $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$

O fator $-(-1)^a$ merece comentário. Quando $a=1$, ele é igual a unidade. Então o eixo z aponta para dentro do corpo, e a componente w^1 tem a mesma direção que a carga concentrada $p_3^1 = p_3$. Quando $a=2$ deve-se ter a mesma fórmula mas no sistema de coordenadas o eixo z aponta verticalmente para baixo, enquanto os eixos x e y permanecem o mesmo. Então, deve-se inverter o sinal de z nas Equações 3.37, 3.38, 3.39 e, o sinal de w também.

Assim, vemos que os deslocamentos dos corpos 1 e 2 devido a carga normal obedecem a mesma lei.

$$u^1(x, y, z) = u^2(x, y, -z) \quad (3.40)$$

$$v^1(x, y, z) = v^2(x, y, -z) \quad (3.41)$$

$$w^1(x, y, z) = -w^2(x, y, -z) \quad (3.42)$$

se $p_x = p_y = 0$

As diferenças de deslocamento que são prescritas nos problemas normal e tangencial são:

$$u(x, y) = u^1(x, y, 0) - u^2(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1-2\nu^1}{G^1} - \frac{1-2\nu^2}{G^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_z(x', y') \frac{x' - x}{R^2} dx' dy' \quad (3.43)$$

$$v(x, y) = v^1(x, y, 0) - v^2(x, y, 0) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1-2\nu^1}{G^1} - \frac{1-2\nu^2}{G^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_z(x', y') \frac{y' - y}{R^2} dx' dy' \quad (3.44)$$

$$w(x, y) = w^1(x, y, 0) - w^2(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1-2\nu^1}{G^1} - \frac{1-2\nu^2}{G^2} \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_z(x', y')}{R} dx' dy' \quad (3.45)$$

sendo: $p_x = p_y = 0$, $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

G^a : módulo de rigidez, ($a=1,2$).

ν^a : Coeficiente de Poisson, ($a=1,2$).

combinamos G^1, G^2 e ν^1, ν^2 ,

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{G^1} \right) + \left(\frac{1}{G^2} \right) \right\} \quad (3.46)$$

$$\frac{\nu}{G} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\nu^1}{G^1} \right) + \left(\frac{\nu^2}{G^2} \right) \right\} \quad (3.47)$$

$$K = \frac{G}{4} \left\{ \frac{(1-2\nu^1)}{G^1} - \frac{(1-2\nu^2)}{G^2} \right\} \quad (3.48)$$

No caso de simetria elástica (ambos os corpos possuem as mesmas constantes elásticas)

$$G = G^1 = G^2 \quad \nu = \nu^1 = \nu^2 \quad K = 0 \quad (3.49)$$

A constante K é nula quando:

- 1.) As constantes elásticas dos corpos são iguais, ou seja, $\nu^1 = \nu^2 = \nu$, $G^1 = G^2 = G$;
- 2.) Os corpos são incompressíveis: $\nu^1 = \nu^2 = \frac{1}{2}$.

Nesse casos, u e v não são influenciados p_z , nem w é influenciado por p_x e p_y . Isso implica que a teoria de Hertz pode ser usada para a determinação da área de contato C . O máximo valor possível para K é 0.5, contudo, na prática seu valor é bem menor.

A Tabela 3.1 fornece valores de K para algumas combinações de materiais. Porém, como K é sempre bastante pequeno pode-se negligenciar sua influência.

Tabela 3.1 - Valores de K para diversas combinações de materiais.

Material	K
Aço/Latão	+0.03
Aço/Aluminio	+0.06
Aço/Vidro	+0.13
Latão/Aluminio	+0.02
Latão/Vidro	+0.10
Aluminio/Vidro	0.03

Em termos das constantes K , G e ν , as diferenças de deslocamento (Equações 3.43, 3.44 e 3.45), tornam-se:

$$u(x, y) = \frac{K}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_z(x', y') \frac{x' - x}{R^2} dx' dy' \quad (3.50)$$

$$v(x, y) = -\frac{K}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_z(x', y') \frac{y' - y}{R^2} dx' dy' \quad (3.51)$$

$$w(x, y) = \frac{1 - \nu}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_z(x', y')}{R} dx' dy' \quad (3.52)$$

sendo: $p_x = p_y = 0$, $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$

O procedimento para o cálculo do deslocamento devido às trações tangenciais é muito parecido. Assim sendo, o deslocamento devido a carga p_x , segundo índice de A_{ij}^a igual a 1, é dado por:

$$A_{1,1}^a = (-(-1)^a) \frac{1}{4\pi G^a} \left\{ (1/r) + \frac{(1-2\nu^a)}{|z|+r} + \frac{(x'-x)^2}{r^3} - \frac{(1-2\nu^a)(x'-x)^2}{r(|z|+r)^2} \right\} \quad (3.53)$$

$$A_{2,1}^a = (-(-1)^a) \frac{1}{4\pi G^a} \left\{ \frac{(x-x')(y'-y)}{r^3} - \frac{(1-2\nu^a)(x'-x)(y'-y)}{r(|z|+r)^2} \right\} \quad (3.54)$$

$$A_{3,1}^a = -\frac{1}{4\pi G^a} \left\{ \frac{(x'-x)|z|}{r^3} + \frac{(1-2\nu^a)(x'-x)^2}{r(|z|+r)^2} \right\} \quad (3.55)$$

O deslocamento devido a carga p_y , na direção y , ou seja, segundo índice de A_{ij}^a igual a 2 é encontrado pela troca de x por y , u por v e p_x por p_y , nas equações 3.53, 3.54 e 3.55. O fator $-(-1)^a$ merece novamente comentários. Deve-se levar em conta que a tensão cisalhante nos corpos tem sinal contrário e que u , v , w têm sinais diferentes nos dois corpos, mas que w é tomado num sistema de coordenadas onde o eixo z tem outro sinal, de modo que o fator $-(-1)^a$ é neutralizado para o deslocamento vertical w .

Para a solução do problema de valor de contorno, necessita-se somente do deslocamento no contorno dos corpos, isto é, em $z = 0$. Calcula-se $u(x, y)$, $v(x, y)$ e $w(x, y)$ e, finalmente tem-se que:

$$u(x, y) \equiv u^1(x, y, 0) - u^2(x, y, 0), \quad v(x, y) \equiv v^1(x, y, 0) - v^2(x, y, 0) \quad e$$

$$w(x, y) \equiv w^1(x, y, 0) - w^2(x, y, 0)$$

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p_x(x', y') \left[\frac{1-\nu}{R} + \frac{(x'-x)^2}{R^3} \right] + p_y(x', y') \left[\frac{(x'-x)(y'-y)}{R^3} \right] + K p_z(x', y') \frac{x'-x}{R^2} \right\} dx' dy' \quad (3.56)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p_x(x', y') \left[\frac{(x' - x)(y' - y)\nu}{R^3} \right] + p_y(x', y') \left[\frac{(1 - \nu)}{R} \frac{(y' - y)^2}{R^3} \right] + K p_z(x', y') \frac{y' - y}{R^2} \right\} dx' dy' \quad (3. 57)$$

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi G} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -K p_x(x', y') \left[\frac{(x' - x)}{R^2} \right] + -K p_y(x', y') \frac{y' - y}{R^2} + p_z(x', y') \left[\frac{(1 - \nu)}{R} \right] \right\} dx' dy' \quad (3. 58)$$

3.5.1.2 Corpos Quase Iguais (*Quasiidentity*)

As *half-space* em contato são quase iguais (*quasiidentical*) quando $K=0$. Nesse caso, as diferenças de deslocamento u e v não são influenciadas pela tração normal p_z , e a diferença de deslocamento w não é influenciada pelas trações tangenciais p_x e p_y , ou seja:

$$\left| (p_x, p_y) \right| \leq f p_z \quad (3. 59)$$

sendo f , o coeficiente de fricção. Assim sendo, deve-se:

- | | | | |
|---------------------------|--------|-----------------|-----------------------|
| 1.) Determinar p_z | quando | $p_x = p_y = 0$ | (Problema Normal) |
| 2.) Determinar p_x, p_y | quando | $g = f p_z$ | (Problema Tangencial) |

Nesse caso o problema de contato pode ser dividido em dois, ou seja, um problema normal e um problema tangencial, que podem ser resolvidos independentemente.

3.5.1.3 *Slip* em Half-Space

Na seção 3.4.3 foi visto que:

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (3.60)$$

sendo:

\mathbf{s}	<i>slip</i>
\mathbf{c}	<i>creep</i>
\mathbf{v}	velocidade de rolamento
\mathbf{u}	diferença de deslocamento
\mathbf{x}	posição
t	tempo

No rolamento de *half-space*, assume-se que o rolamento ocorre ao longo eixo x positivo com velocidade constante V , e que o movimento ocorre no plano de contato, assim sendo,

$$\mathbf{c} = V(v_x - \varphi y, v_y + \varphi x)^T \quad (3.61)$$

$$\mathbf{v} = (V, 0)^T \quad (3.62)$$

e

$$s_x = V \left(v_x - \varphi y - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial(Vt)} \right) \quad (3.63)$$

$$s_y = V \left(v_y - \varphi x - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial(Vt)} \right) \quad (3.64)$$

sendo: v_x chamado de *creepage* longitudinal; v_y de *creepage* lateral; e φ de *spin*.

Denominando q de distância transversal,

$$q = \int_0^t V t' dt' \quad (3.65)$$

dividindo as Equações 3.63 e 3.64 por V , e denominando S de *slip* relativo tem-se:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{s}}{V} \quad (3.66)$$

Quando a variável tempo t é substituída pela distância transversal q , e o *slip* s pelo *slip* relativo \mathbf{S} , então, vemos que o *slip* relativo é independente da velocidade de rolamento V . Desde que o *slip* relativo tenha a mesma direção que o *slip* real, e a fórmula para a tração tangencial no escorregamento depende somente daquela direção quando o coeficiente de fricção é independente da velocidade de rolamento (como assumido), o problema inteiro torna-se independente da velocidade de rolamento, ou, mais precisamente, depende da velocidade de rolamento apenas através do coeficiente de fricção.

3.5.2 O Problema de Hertz

Sejam dois parabolóides com eixos paralelos denominados por 1 e 2, Figura 3.10.

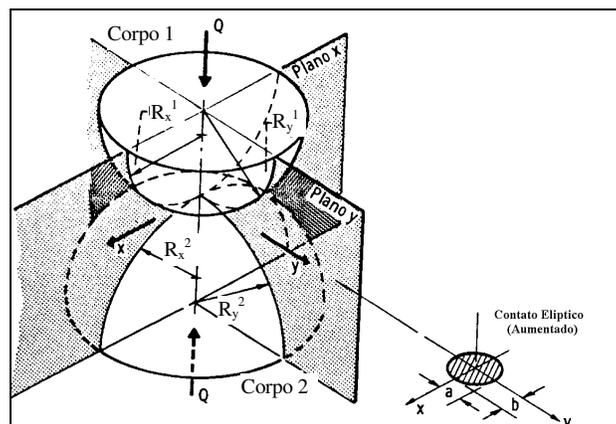


Figura 3.10 – Raios principais de curvatura dos corpos

Considere que eles são aproximados até que se toquem. Um sistema de coordenadas cartesianas é introduzido ao sistema, tal que, o plano formado pelos eixos x e y seja um plano comum e tangente aos dois parabolóides. A origem do sistema de coordenada encontra-se no ponto em que os dois parabolóides se tocam. O eixo z aponta verticalmente para dentro do parabolóide 1. Assume-se por simplicidade que os planos verticais de curvatura coincidem com os planos x e y como é o caso em rolamento. Os raios de curvatura dos parabolóides 1 e 2 no plano x são $R_x^{(1)}$ e $R_x^{(2)}$ e os do plano y são $R_y^{(1)}$ e $R_y^{(2)}$. Os raios de curvatura são positivos

quando o centro do raio de curvatura está no interior do parabolóide correspondente e, é negativo caso contrario. Finalmente, considere que os corpos são prensados um contra o outro de uma distância q . Assim sendo, o problema é: Encontrar a área de contato e a distribuição de pressão quando não há fricção ou no caso dos parabolóides serem quase iguais (*quasiidentity*).

A equação da superfície do corpo a ($a = 1, 2$) é:

$$z^{(a)} = -(-1)^a \left\{ \frac{x^2}{2R_x^{(a)}} + \frac{y^2}{2R_y^{(a)}} \right\} - q^{(a)} \quad (3.67)$$

Na região de contato a distância h entre dois pontos no eixo z é dada por:

$$h = z^{(1)} - z^{(2)} = Ax^2 + By^2 - q \quad (3.68)$$

sendo:

$$A = \frac{1}{2R_x^{(1)}} + \frac{1}{2R_x^{(2)}} \quad (3.69)$$

$$B = \frac{1}{2R_y^{(1)}} + \frac{1}{2R_y^{(2)}} \quad (3.70)$$

$$q = q^{(1)} - q^{(2)} \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{R} = \frac{A+B}{2} \quad (3.72)$$

Hertz assumiu que a área de contato era elíptica numa aproximação por *half-space*, sendo:

$$C = \left\{ (x, y, 0) \mid \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \leq 1 \right\} \quad (3.73)$$

Então ele pôde demonstrar que a distribuição de pressão no contato é um semi-elipsóide de volume.

$$p_z(x, y) = G f_{oo} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (3.74)$$

sendo G o módulos combinado de rigidez, ver Equação 3.46.

A força normal total é encontrada pela integração da Equação 3.74.

$$N = \iint_C p_z dx dy = \frac{2}{3} \pi ab G f_{oo}, \quad f_{oo} = \frac{3N}{2\pi ab G} \quad (3.75)$$

Os semi-eixos maior e menor do contato elíptico são denotados por S e L , sendo $m' = S/L$:

$$m' = S/L, \quad S = \min(a, b), \quad L = \max(a, b) \quad (3.76)$$

A excentricidade é dada por:

$$|m| = \sqrt{1 - m'^2}, \quad m > 0 \text{ se } a < b, \quad m < 0 \text{ se } a > b, \quad (3.77)$$

Então: q , A e B são dados por:

$$q = \frac{3N(1-\nu)S \mathbf{K}}{2\pi ab G} \quad (3.78)$$

$$A(|m|) = B(-|m|) = \frac{3N(1-\nu)(\mathbf{D} - m^2 \mathbf{C})}{2\pi ab S G} \quad (3.79)$$

$$B(|m|) = A(-|m|) = \frac{3N(1-\nu)(\mathbf{1} - m^2) \mathbf{D}}{2\pi ab S G} \quad (3.80)$$

sendo: **K**, **C** e **D** juntamente com **B** e **E**, abaixo definidas, integrais elípticas completas. Todas essas integrais podem ser obtidas através de combinações lineares de duas delas. Nesse caso optou-se por **C** e **D**.

$$\mathbf{B} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}} dt, \quad \mathbf{B} = \mathbf{D} - m^2 \mathbf{C} \quad (3.81)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}} dt \quad (3.82)$$

$$\mathbf{D} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}} dt \quad (3.83)$$

$$\mathbf{E} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m^2 \sin^2 t} dt, \quad \mathbf{E} = (2-m^2)\mathbf{D} - m^2 \mathbf{C} \quad (3.84)$$

$$\mathbf{K} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 t}} dt, \quad \mathbf{K} = 2\mathbf{D} - m^2 \mathbf{C} \quad (3.85)$$

O valor dessas integrais em função de m' é fornecida na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Valor das integrais elípticas (Kalker 1993).

m'	B	C	D	E	K	m^2
0	1	$-2 + \ln(4/m')$	$-1 + \ln(4/m')$	1	$+\ln(4/m')$	1.00
0.1	0.9889	1.7351	2.7067	1.0160	3.6959	0.99
0.2	0.9686	1.1239	2.0475	1.0505	3.0161	0.96
0.3	0.9451	0.8107	1.6827	1.0965	2.6278	0.91
0.4	0.9205	0.6171	1.4388	1.1507	2.3593	0.84
0.5	0.8959	0.4863	1.2606	1.2111	2.1565	0.75
0.6	0.8719	0.3929	1.1234	1.2763	1.9953	0.64
0.7	0.8488	0.3235	1.0138	1.3456	1.8626	0.51
0.8	0.8267	0.2706	0.9241	1.4181	1.7508	0.36
0.9	0.8055	0.2292	0.8491	1.4933	1.6548	0.19
1.0	$0.7864=\pi/4$	$0.1964=\pi/16$	$0.7854=\pi/4$	$1.571=\pi/2$	$1.571=\pi/2$	0.00

Pode ser visto na Tabela 3.2 que $\mathbf{D} > \mathbf{C}$ e segue das Equações 3.79 e 3.80 que $A(|m|) = B(-|m|) \geq A(-|m|) = B(|m|)$ tal que:

- $A \geq B \Rightarrow m \geq 0, a \leq b$
- $A \leq B \Rightarrow m \leq 0, a \geq b$

Para encontrar a excentricidade do contato elíptico, tem-se que (Kalker 1990):

$$\cos t = \frac{|A - B|}{A + B}, \quad \text{com } R = \frac{2}{A + B} \quad (3.86)$$

e segue das Equações 3.79 e 3.80, o fato que $\mathbf{D} > \mathbf{C}$ e a expressão de \mathbf{E} em \mathbf{D} e \mathbf{C} que:

$$\cos t = m^2 \left(\frac{\mathbf{D} - \mathbf{C}}{\mathbf{E}} \right) \quad (3.87)$$

A razão axial m' em função de t é mostrado na Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Razão axial do contato elíptico como uma função de t , Love(1926).

t	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
$m' = S/L$	1.00	0.79	0.62	0.47	0.36	0.26	0.18	0.10	0.05	0

Das Equações 3.72 a 3.87 nota-se que a forma do contato elíptico depende apenas do raio de curvatura dos corpos, e não da carga aplicada e das propriedades elásticas dos corpos. Com relação ao tamanho da área de contato tem-se que:

$$A + B = \frac{2}{R} = \frac{3N(1-\nu)\mathbf{E}}{2G\pi abS} \quad (3.88)$$

ou

$$3N(1-\nu)R\mathbf{E} = 4\pi abSG \quad (3.89)$$

Uma quantidade freqüentemente usada é f_{00} , ver Equação 3.74, sendo Gf_{00} o valor máximo da distribuição de pressão elíptica:

$$f_{00} = \frac{3N}{2\pi abG} = \frac{2S}{(1-\nu)RE} \quad (3.90)$$

finalmente determina-se a penetração dos corpos, ver Equação 3.68:

$$q = (1-\nu) \mathbf{K} S f_{00} = \frac{2S^2 \mathbf{K}}{RE} \quad (3.91)$$

3.5.2.1 A Teoria Linear de Contato de Rolamento para Contatos Hertzianos

Uma das grandes dificuldades na análise dos contatos de rolamento é a determinação da área de adesão e da área de escorregamento (*slip*) na área de contato. Para tentar resolver esse problema, Parter (1962) propôs adotar que a área de *slip* é tão pequena que sua influência poderia ser negligenciada. Esse tratamento foi desenvolvido por Kalker (1964 e 1967), baseado na teoria de estacionária (*steady-state theory*).

Relembrando as formulas para *slip* relativo s/V em rolamento estacionário (*steady state rolling*):

$$S_x = \frac{s_x}{V} = v_x - \varphi y - \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad (3.92)$$

$$S_y = \frac{s_y}{V} = v_y + \varphi x - \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \quad (3.93)$$

sendo:

V	velocidade de rolamento
v_x, v_y, φ	<i>creepage</i> longitudinal, lateral e <i>spin</i>

(u, v)	diferença de deslocamento tangencial, corpos (1)-(2)
eixo x	eixo de rolamento
eixo z	direção vertical apontando para o corpo (1).
eixo y	completa o sistema de coordenadas baseado na regra da mão direita
O	origem no centro da área de contato (elipse)

Quando o *creepage* é muito pequeno, é fácil para (u, v) compensá-lo sem violar o limite de tração. Isso é, quase toda a área de contato será coberta pela região de adesão (*stick*). Ao invés de dizer que os valores de *creepages* são pequenos, pode-se dizer que o coeficiente de fricção vai para infinito. Então, o limite de tração não será violado, contanto que, (p_x, p_y) seja finito. Agora, para valores finitos de (u, v) a tração é finita exceto, talvez na borda da área de contato elíptica, como pode ser mostrada pelo comportamento da curva de tração próximo à borda.

$$(p_x(x, y), p_y(x, y)) = O \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}^{-1} \right) \quad (3.94)$$

de modo que o *slip* seja limitado por parte da borda da área de contato.

Assim, dentro da área de contato tem-se:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = v_x - \varphi y, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = v_y + \varphi x \quad (3.95)$$

Integrando em relação x

$$u(x, y) = v_x x - \varphi x y + k(y), \text{ em } C \quad (3.96)$$

$$v(x, y) = v_y x - \frac{\varphi y^2}{2} + l(y), \text{ em } C \quad (3.97)$$

$$p_x(x, y) = p_y(x, y), \text{ em } E \quad (3.98)$$

sendo k e l funções arbitrárias de y .

A questão é como determinar k e l . Observa-se que as Equações 3.96 a 3.98 determinam completamente o problema de contato junto com o comportamento próprio no infinito, onde o campo elástico desaparece de acordo com a hipótese da *half-space*.

Para esse fim, nota-se que na borda de entrada da elipse de contato a tração deve ser nula, para que as partículas na superfície do material sem carga naquele ponto, possam fluir para dentro da zona de contato. Durante a passagem pela área de contato, a tração no material aumenta gradualmente e, é repentinamente livre na borda traseira. Assim, na borda dianteira a tração deve ser nula, mas isso não é necessário na borda traseira. Então k e l devem ser determinados para que a tração na borda dianteira seja nula, ou seja:

$$\left\{ (x, y, z) \mid x \geq 0, z = 0, |y| = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right\} \text{ borda dianteira} \quad (3.99)$$

Os resultados finais para o cálculo das forças e momento no contato serão apresentados a seguir. A força tangencial (F_x, F_y) e o momento torçor M_z são tabelados em termos dos valores de *creepage*. Detalhes sobre esses cálculos são apresentados por Kalker (1967).

$$F_x = \iint_C p_x dx dy, \quad F_x = -GabC_{11}v_x \quad (3.100)$$

$$F_y = \iint_C p_y dx dy, \quad F_y = -GabC_{22}v_y - G\sqrt{ab}C_{23}\varphi \quad (3.101)$$

$$M_z = \iint_C (xp_y - yp_x)_x dx dy, \quad M_z = -G\sqrt{ab}C_{32}v_y - G(ab)^2C_{33}\varphi \quad (3.102)$$

sendo:

F_x, F_y, M_z Força e Momento total no corpo 1.

v_x, v_y, φ *creepage* (*slip* rígido relativo) do corpo 1 com relação ao corpo 2.

Tabela 3.4 - Os coeficientes de *creepage* C_{ij} da teoria linear do contato de rolamento para áreas de contato elíptica

		C_{11}			C_{22}			$C_{23} = -C_{32}$			C_{33}		
g		$\sigma=0$	1/4	1/2	$\sigma=0$	1/4	1/2	$\sigma=0$	1/4	1/2	$\sigma=0$	1/4	1/2
a b	↓0.0	$\frac{\pi^2}{4(1-\sigma)}$			$\frac{\pi^2}{4}$			$\frac{\pi\sqrt{g}}{3(1-\sigma)}\left\{1+\sigma\left(\frac{1}{2}\Lambda+\ln 4-5\right)\right\}$			$\frac{\pi^2}{16(1-\sigma)g}$		
	0.1	2.51	3.31	4.85	2.51	2.52	2.53	0.334	0.473	0.731	6.42	8.28	11.7
	0.2	2.59	3.37	4.81	2.59	2.63	2.66	0.483	0.603	0.809	3.46	4.27	5.66
	0.3	2.68	3.44	4.80	2.68	2.88	2.81	0.607	0.715	0.889	2.49	2.96	3.72
	0.4	2.78	3.53	4.82	2.78	3.01	2.98	0.720	0.823	0.977	2.02	2.32	2.77
	0.5	2.88	3.62	4.83	2.88	3.14	3.14	0.827	0.929	1.07	1.74	1.93	2.22
	0.6	2.98	3.72	4.91	2.98	3.28	3.31	0.930	1.03	1.18	1.56	1.68	1.86
	0.7	3.09	3.81	4.97	3.09	3.41	3.48	1.03	1.14	1.29	1.43	1.50	1.60
	0.8	3.19	3.91	5.05	3.19	3.54	3.65	1.13	1.25	1.40	1.34	1.37	1.42
	0.9	3.29	4.01	5.12	3.29	3.67	3.82	1.23	1.36	1.51	1.27	1.27	1.27
	1.0	3.40	4.12	5.20	3.40	3.81	3.98	1.33	1.47	1.63	1.21	1.19	1.16
b a	0.9	3.51	4.22	5.30	3.51	3.99	4.16	1.44	1.59	1.77	1.16	1.11	1.06
	0.8	3.65	4.36	5.42	3.65	4.21	4.39	1.58	1.75	1.94	1.10	1.04	0.954
	0.7	3.82	4.54	5.58	3.82	4.21	4.67	1.76	1.95	2.18	1.05	0.965	0.852
	0.6	4.06	4.78	5.80	4.06	4.50	5.04	2.01	2.23	2.50	1.01	0.892	0.751
	0.5	4.37	5.10	6.11	4.37	4.90	5.56	2.35	2.62	2.96	0.958	0.819	0.650
	0.4	4.84	5.57	6.57	4.84	5.48	6.31	2.88	3.24	3.70	0.912	0.747	0.549
	0.3	5.57	6.34	7.34	5.57	6.40	7.51	3.79	4.32	5.01	0.868	0.674	0.446
	0.2	6.96	7.78	8.82	6.96	8.14	9.79	5.72	6.63	7.89	0.828	0.601	0.341
	0.1	10.7	11.7	12.9	10.7	12.8	16.0	12.2	14.6	18.0	0.795	0.526	0.228
	↓0.0	$\frac{2\pi}{(\Lambda-2\sigma)g}\left\{1+\frac{3-\ln 4}{\Lambda-2\sigma}\right\}$			$\frac{2\pi}{g}\left\{1+\frac{(1-\sigma)(3-\ln 4)}{(1-\sigma)\Lambda+2\sigma}\right\}$			$\frac{2\pi}{3g\sqrt{g}}\frac{1}{(1-\sigma)\Lambda-2+4\sigma}$			$\frac{\pi}{4}\left\{1-\frac{\sigma(\Lambda-2)}{(1-\sigma)\Lambda-2+4\sigma}\right\}$		

$$\Lambda = \ln\left(\frac{16}{g^2}\right); \quad g = \min(a/b; b/a); \quad \ln 4 = 1.386$$

É um fato empírico que:

$$C_{11} > 0, \quad C_{22} > 0, \quad C_{23} = -C_{32} > 0, \quad C_{33} > 0 \quad (3.103)$$

Os coeficientes de *creepage* e *spin*, mostrados na Tabela 3.4, podem ser calculados de maneira puramente numérica ou de uma forma semi-analítica. Os coeficientes mostrados na Tabela 3.4 seguem o procedimento semi-analítico (Kalker 1990, pp.68).

3.6 Teoria Simplificada do Contato de Rolamento

3.6.1 Discretização do Escorregamento (Slip)

Da definição de *slip* apresentada na seção 3.4.3,

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} - \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (3.104)$$

\mathbf{s} - *slip*: velocidade do corpo 1 em relação ao corpo 2.

\mathbf{c} - *creep*: velocidade de corpo rígido 1 em relação ao corpo rígido 2 = $\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2$

\mathbf{u} - diferença de deslocamento superficial = $\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$

\mathbf{x} - vetor posição

\mathbf{v} - velocidade de rolamento = $-(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2)$

t = tempo

Considerando $\mathbf{u}(\mathbf{x} + k\mathbf{v}, t - k)$, $k > 0$ que expandindo ao redor de $k=0$ e adotando somente os dois primeiros termo, tem-se:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + k\mathbf{v}, t - k) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + k \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\} + O(k^2) \quad (3.105)$$

Negligenciando $O(k^2)$,

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} + \left(\frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{k} \right) \quad (3.106)$$

sendo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}(\mathbf{x} + k\mathbf{v}, t - k)$$

Em princípio, \mathbf{u}' é conhecido em *non-steady state*, onde \mathbf{u} evolui no tempo sobre um *creep* $\mathbf{c}(t)$ não constante.

Em estado estacionário (*steady state*), \mathbf{u} e \mathbf{u}' são independentes do tempo, e

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}' = \mathbf{u}(\mathbf{x} + k\mathbf{v}) \quad (3.107)$$

A Equação 3.106 é uma discretização do *slip* e, é válida tanto para rolamento estacionário (*steady*), como para rolamento não estacionário (*non-steady*).

3.6.2 Teoria Simplificada

Como visto na seção 3.5.1.1, as relações entre o deslocamento superficial tangencial (u^a, v^a) e a tração superficial tangencial (p_x^a, p_y^a) do corpo a , são bastante complicadas. Na teoria simplificada do contato de rolamento essas relações são substituídas por:

$$(u^a, v^a) = L^a(p_x^a, p_y^a) \quad (3.108)$$

sendo L^a chamado de parâmetro de flexibilidade. A flexibilidade é comparável a $1/E^a$, sendo E^a o módulo de elasticidade do corpo a . A diferença entre a teoria simplificada e a teoria exata está no fato da adoção da Equação 3.108, ao invés da Equação 3.36, para relacionar força e deslocamento no contato.

O deslocamento normal w^a não é aproximado por uma relação simples como a da Equação 3.108, por causa da falta de precisão da teoria simplificada nesse caso. Ao invés disso, usa-se a teoria de Hertz, em que o contato é elíptico e a distribuição de tração semi-elipsoidal. Depois a tração normal semi-elipsoidal será aproximada por uma distribuição de tração paraboloidal, nos mesmos eixos e com a mesma força normal total.

Considerando a relação entre as trações superficiais (p_x^1, p_y^1) e (p_x^2, p_y^2) , tem-se que elas são opostas, ou seja:

$$(p_x^1, p_y^1) = -(p_x^2, p_y^2) = (p_x, p_y) \quad (3.109)$$

De fato, fora do contato $(p_x^1, p_y^1) = -(p_x^2, p_y^2) = (0, 0)$, enquanto que, dentro do contato, pela terceira lei de Newton, $(p_x^1, p_y^1) = -(p_x^2, p_y^2)$, o que prova a Equação 3.109.

Como visto anteriormente, a função chave é desempenhada pela diferença de deslocamento, isto é:

$$(u, v) = (u^1 - u^2, v^1 - v^2) = (L^1 + L^2)(p_x, p_y) = L(p_x, p_y) \quad (3.110)$$

A flexibilidade L depende das características físicas dos corpos, exatamente como o módulo de elasticidade. Contudo, diferentemente do módulo de elasticidade, a flexibilidade depende da forma dos corpos em contato e também da carga.

Então, considerando dois corpos em contato, e analisando apenas as quantidades superficiais temos: um problema normal $(w^a; p_z^a)$; e um problema tangencial $(u^a, v^a; p_x^a, p_y^a)$. O problema normal é resolvido através da teoria de Hertz, ou seja, a área de contato é uma elipse, com semi-eixos a e b , e a distribuição de pressão é semi-elipsoidal.

O problema tangencial satisfaz aproximadamente a hipótese da teoria simplificada, ou seja:

$$(u^a, v^a) = L^a(p_x^a, p_y^a) \quad (3.111)$$

então:

$$(p_x^1, p_y^1) = -(p_x^2, p_y^2) = (p_x, p_y) \Rightarrow (u^1, v^1) = L^1(p_x, p_y) \quad e \quad (u^2, v^2) = -L^2(p_x, p_y) \quad (3.112)$$

e a diferença de deslocamento é:

$$(u, v) = (u' - u^2, v' - v^2) = (L^1 + L^2)(p_x, p_y) = L(p_x, p_y) \quad (3.113)$$

$$L = L(a, b, (1), (2), (3)) \quad (3.114)$$

sendo, (1), (2), (3) três carregamentos especiais, ver seção 3.6.2.3

3.6.2.1 Lei de Coulomb

Relembrando a Lei de Coulomb:

$$g = f p_z; |(p_x, p_y)| < g \Rightarrow (S_x, S_y) = \text{velocidade local de (1) em relação a (2)} = (0, 0) \quad (3.115)$$

$$(S_x, S_y) > 0 \Rightarrow (p_x, p_y) = -g \left((S_x, S_y) / |(S_x, S_y)| \right) \quad (3.116)$$

com,

$$(S_x, S_y) = (v_x - \phi y, v_y + \phi x) - \frac{\partial(u, v)}{\partial x} + \frac{\partial(u, v)}{\partial t} \quad (3.117)$$

$$(S_x, S_y) = (v_x - \phi y, v_y + \phi x) + \frac{[(u, v) - (u', v')]}{k} \quad (3.118)$$

$$u = u((x, y), t); \quad u' = u((x + k, y), t - k); \quad (\mathbf{v}^T = (1, 0, 0)) \quad (3.119)$$

3.6.2.2 Teoria Linear

Na teoria linear, a área de adesão (*stick*) H , cobre toda a área de contato C . Então, o limite de tração $|(p_x, p_y)| < g$, corresponde apenas a pequenas trações. Em rolamento de estado estacionário (*steady state rolling*) tem-se:

$$(0,0) = (S_x, S_y) = (v_x - \phi y, v_y + \phi x) - \frac{\partial(u, v)}{\partial x} \quad (3.120)$$

portanto:

$$u = v_x x - \phi xy + k(y) \quad (3.121)$$

$$v = v_y x + \frac{\phi x^2}{2} + l(y) \quad (3.122)$$

Sendo k e l funções arbitrárias de y . Portanto, suas derivadas com respeito a x são nulas.

Com a hipótese teórica simplificada $(u, v) = L(p_x, p_y)$ tem-se que:

$$(p_x, p_y) = \left(v_x x - \phi y x + k(y), v_y x - \frac{\phi x^2}{2} + l(y) \right) / L, \mathbf{x} \in C \quad (3.123)$$

$$(p_x, p_y) = (0,0), \mathbf{x} \notin C \quad (3.124)$$

A questão é como determinar k e l .

Durante o rolamento, quando uma partícula na superfície do corpo encontra-se em frente da borda dianteira da área de contato (Figura 3.4), ela está inicialmente sem carga, ou seja, como ela está fora da área de contato as tensões são nulas. Então, em virtude do rolamento dos corpos, essa partícula move-se até atingir a borda de entrada da área de contato, ainda sem carga. A medida que a partícula entra na área de contato, a tração aumenta até que o limite de tração seja atingido. Quando esse limite é alcançado a tração permanece nesse valor e o escorregamento (*slip*) acontece nesse ponto da área de contato. Ao atingir na borda traseira, a partícula deixa a área de contato, contudo, novamente sem carga. Na teoria linear o limite de tração nunca é alcançado. Porém, na borda traseira a tração repentinamente cai para zero.

Denotando a borda de entrada por $x_L = a(y) > 0$, a borda de saída é então $x_T = -a(y) < 0$.

Na borda de entrada temos:

$$\begin{aligned}
p_x(a(y), y) &= v_x a(y) - \phi a(y)y + k(y) = 0 \\
k(y) &= -v_x a(y) + \phi a(y)y \\
p_x(x, y) &= v_x [x - a(y)] - \phi [x - a(y)]y \text{ dentro } C \\
0 &= \text{fora } C
\end{aligned} \tag{3.125}$$

similarmente,

$$\begin{aligned}
p_x(x, y) &= v_y [x - a(y)] + \phi [x^2 - a(y)^2] \text{ dentro } C \\
0 &= \text{fora } C
\end{aligned} \tag{3.126}$$

sendo:

$$C = \left\{ (x, y, z) \mid z = 0, \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 \leq 1 \right\} \tag{3.127}$$

$$a(y) = a \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2} \tag{3.128}$$

Pode-se calcular a força total devido a esses carregamentos, ou seja:

$$F_x = \int_{-b}^b \int_{-a(y)}^{a(y)} p_z(x, y) dx dy = \frac{-8a^2 b v_x}{3L} \tag{3.129}$$

$$F_y = \int_{-b}^b \int_{-a(y)}^{a(y)} p_y(x, y) dx dy = \frac{-8a^2 b v_y}{3L} - \frac{-\pi a^3 b \phi}{4L} \tag{3.130}$$

As Equações 3.129 e 3.130 fornecem os valores das forças no contato seguindo o procedimento da teoria simplificada do contato de rolamento. Contudo, F_x e F_y podem ser calculadas através da teoria exata de contato de rolamento, como visto, ou seja:

$$F_x = -a b G C_{11} v_x \tag{3.131}$$

$$F_y = -abGC_{22}v_y - (ab)^{1.5}GC_{23}\varphi \quad (3.132)$$

sendo que os coeficientes *creepage* e *spin* C_{ij} apresentados na Tabela 3.4 dependem apenas de (a/b) e do coeficiente de Poisson ν . O módulo de rigidez G que pode ser expresso em função do módulo de Young E , e do coeficiente de Poisson, ν :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.133)$$

3.6.2.3 Parâmetro de Flexibilidade

Como visto, a teoria linear proporciona um *link* entre as teorias simplificada e exata. Esse *link* pode ser usado para calcular os três valores do parâmetro de flexibilidade L .

Tabela 3.5 – Forças tangenciais na teoria simplificada e exata

Teoria simplificada	Teoria Exata
$F_x = \frac{-8a^2bv_x}{3L}$	$F_x = abGC_{11}v_x$
$F_y = \frac{-8a^2bv_y}{3L} - \frac{\pi a^3b\varphi}{4L}$	$F_y = -abGC_{22}v_y - (ab)^{1.5}GC_{23}\varphi$

Igualando os coeficientes de v_x , v_y , φ na teoria exata e simplificada encontramos três valores de L :

$$(v_x): L_1 = \frac{8a}{3GC_{11}} \quad (3.134)$$

$$(v_y): L_2 = \frac{8a}{3GC_{22}} \quad (3.135)$$

$$(\varphi): L_3 = \frac{\pi a^2}{4G\sqrt{ab} C_{23}} \quad (3.136)$$

A Tabela 3.6 mostra alguns valores válidos para $\nu = 0.25$. Pode-se constatar que esses valores diferem consideravelmente.

Tabela 3.6 - $L(a, b, (1), (2), (3))$

a/b	0.1	0.3	1.0	1.3	1.1
$GL_1/a = 8/(3C_{11})$	0.806	0.775	0.647	0.421	0.228
$GL_2/a = 8/(3C_{22})$	1.06	0.970	0.784	0.417	0.208
$GL_3/a = \pi a / [4(ab)^{0.5} C_{23}]$	0.525	0.602	0.534	0.352	0.170

A dependência da relação a/b para o cálculo de L_i ($i=1,2,3$) está bem visível, especialmente entre L_2 e L_3 que referem-se a F_y . Então, determina-se um valor para L como uma média ponderada de L_i :

$$L = \frac{L_1|v_x| + L_2|v_y| + L_3|\varphi|\sqrt{ab}}{\sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + ab\varphi^2}} \quad (3.137)$$

Claramente, quando:

$$v_x = v_y = 0 \Rightarrow L = L_3$$

$$v_y = \varphi = 0 \Rightarrow L = L_1$$

$$\varphi = v_x = 0 \Rightarrow L = L_2$$

como deveria ser.

3.6.2.4 O Limite de Tração

De acordo com a teoria de Hertz, a tração normal tem a seguinte forma:

$$p_z(x, y) = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (3.138)$$

sendo Z_0 constante e a pressão semi-elipsoidal.

A teoria simplificada análoga à teoria de hertz existe, porém, ela tem defeitos graves. Assim, para encontrar a “pressão normal adaptada” $p'_z(x, y)$, utilizam-se os comprimentos dos eixos a e b da área de contato elíptica provenientes da teoria de Hertz, e a forma da pressão normal da teoria simplificada, ou seja, uma distribuição de pressão paraboloidal. Assim sendo:

$$p'_z(x, y) = Z'_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\} \quad (3.139)$$

O valor de Z_0 é conhecido da teoria de Hertz e Z'_0 deve ser adaptado. Isso é feito para que as forças compressivas totais F_z e F'_z sejam iguais:

$$F_z = \iint_C Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2} dx dy = \frac{2\pi ab Z_0}{3} \Rightarrow Z_0 = \frac{3F_z}{2\pi ab} \quad (3.140)$$

$$F'_z = \iint_C Z'_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right\} dx dy = \frac{\pi ab Z'_0}{2} \Rightarrow Z'_0 = \frac{2F_z}{\pi ab} \quad (3.141)$$

3.6.2.5 Uma Solução Analítica

A tração tangencial devido ao *creepage* longitudinal puro ($v_x = \varphi = 0$) tem a seguinte forma na teoria sem escorregamento ou linear (*no-slip*).

$$p_x(x, y) = \frac{(x - a(y))v_x}{L} \quad (3.142)$$

$$a(y) = a \sqrt{1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2} \quad (3.143)$$

Assim a tensão limite é:

$$g = \frac{2fF_z}{\pi ab} \left\{ \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} = \frac{2fF_z}{\pi a^3 b} \{ a(y)^2 - x^2 \} \quad (3.144)$$

como mostra a Figura 3.11

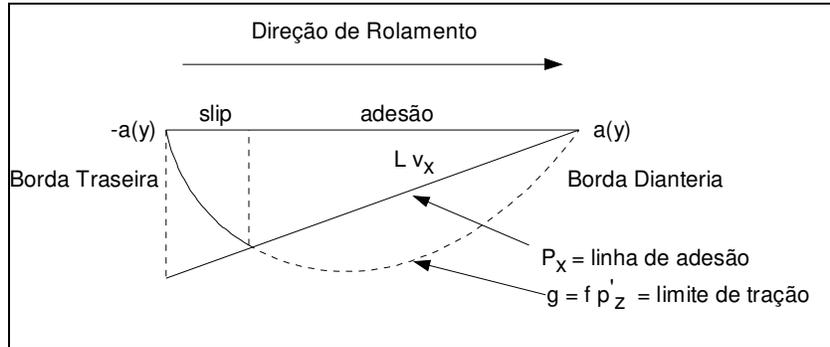


Figura 3.11 – Distribuição de tração devido ao *creepage* longitudinal puro na teoria simplificada

Próximo da borda traseira ($-a(y)$) a lei de Coulomb é “quebrada” pela teoria linear. Assim, a teoria linear nunca é totalmente válida, mas apenas aproximada quando $v_x \rightarrow 0$. A solução exata é mostrada na Figura 3.12. As soluções para *creepage* longitudinal e lateral puro e combinado são análogas.

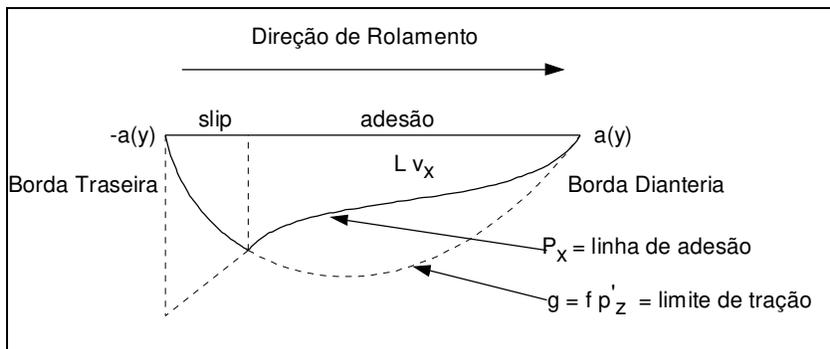


Figura 3.12 – Distribuição de tração exata para puro *creepage* longitudinal

Resumindo então, a solução teórica simplificada para o caso de $\varphi = 0$ é analiticamente conhecida. Para o caso de $\varphi \neq 0$ necessita-se a aplicação de uma teoria numérica. Kalker (1982) apresentou um algoritmo denominado de FASTSIM para solucionar esse tipo de problema. O algoritmo é descrito no Apêndice A.

É conveniente ressaltar que em função do tipo de movimento entre as superfícies em contato, pode-se encontrar várias combinações para a divisão da área de contato entre *stick* (adesão) e *slip* (escorregamento), Figura 3.13.

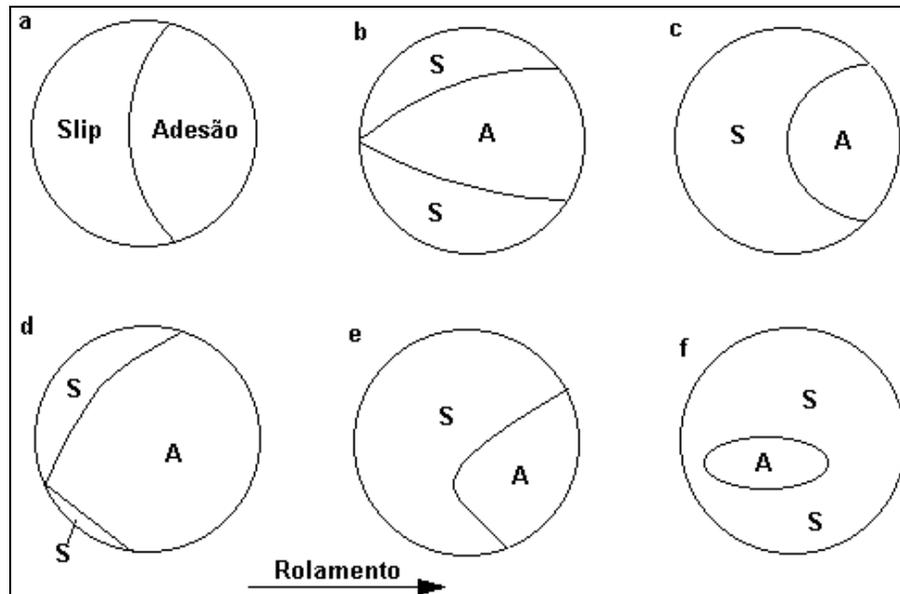


Figura 3. 13 – Áreas de *slip* (S) e adesão (A). (a) *creepage* puro ($\varphi = 0$); (b): *spin* puro ($v_x = v_y = 0$); (c) *creepage* lateral com *spin* ($v_x = 0$); (d) *creepage* longitudinal com *spin* ($v_y = 0$); (e) caso geral; (f) grande *spin* – Fonte Kalker (1990)

3.7 Simulações

A teoria simplificada do contato de rolamento foi utilizada para estimar a força tangencial nos contatos de uma transmissão por tração tipo esfera cone. Os detalhes dessa transmissão encontram-se no Capítulo 5.

Os dados geométricos do protótipo construído necessários para o cálculo das forças tangenciais no contato de rolamento são:

- diâmetro da esfera 14,28 mm;
- diâmetro do cone no ponto de contato com a esfera 21,09 mm;
- Inclinação do ângulo do cone 30°;

As Constantes físicas dos materiais em contato de rolamento são:

- Módulos de elasticidade, $E = 207 \text{ e}9$.
- Coeficiente de Poison, $\nu = 0.3$.

Suposições adotadas:

- Escorregamento na direção do rolamento 1%;
- Escorregamento na direção perpendicular ao rolamento 0%;
- O coeficiente de fricção adotado foi de 0,05. Esse valor foi obtido através do cálculo experimental do coeficiente de tração de um fluido lubrificante, cujos detalhes são apresentados no Capítulo 4. Como apresentado na seção 1.3.3, essas são as primeiras análises para o desenvolvimento de um programa para o cálculo das forças tangenciais em contatos de rolamento lubrificadas elastohidrodinamicamente;
- A força normal no contato entre a esfera e o cone da transmissão será considerado, constante e igual a 344 N. Como proposto na seção 1.1 a CVT foi projetada para sistemas de baixo torque e baixa potência, particularmente bicicleta. Assim sendo, foram realizadas simulações de um sistema ciclista + CVT + bicicleta, em que foram calculadas as forças normais agindo nos contatos esfera-cone da CVT quando potências de 163 e 245 Watts são transmitidas. A seção 6.4.4 apresenta detalhes da simulação do sistema ciclista+CVT+bicicleta, e a Figura 3.14 apresenta alguns dados obtidos dessas simulações;
- O movimento de *spin* é função da geometria da transmissão, ver seção 6.3. Nela foi calculada a quantidade de spin nos contatos entre a esfera e o cone na entrada e saída da CVT e o spin total Figura 3.15. Nela nota-se que o valor do spin nos contatos de entrada e saída variam inversamente e o spin total tem seu valor de mínimo quando o ângulo de inclinação do eixo da esfera é igual a zero graus, ou seja, quando o eixo de rotação do eixo da esfera é paralelo aos eixos dos cones de entrada e saída da CVT (relação de transmissão = 1).

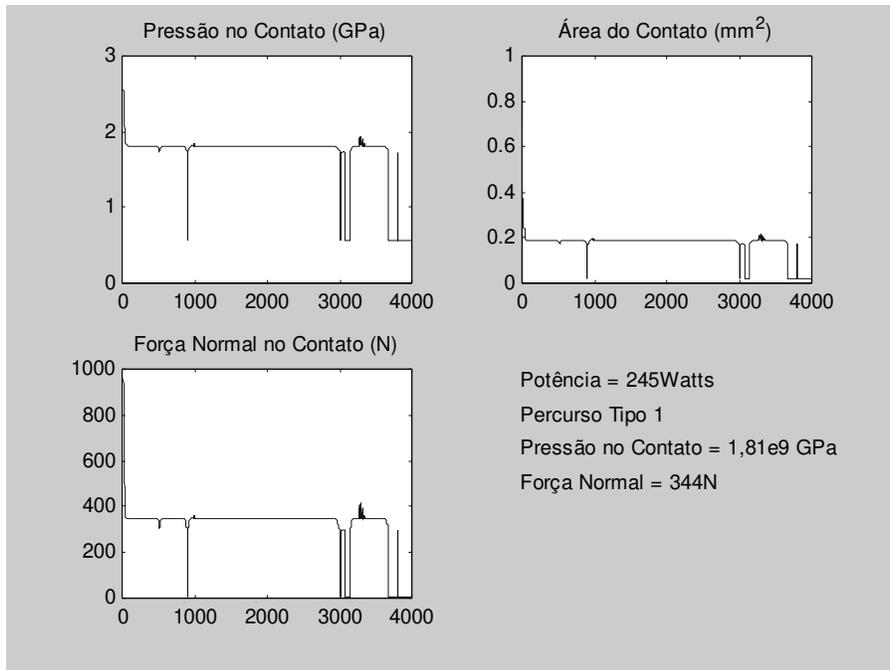


Figura 3.14 – Força, pressão e área de contato para faixa de relação de transmissão 1:2~2:1, raio interno = 20.40 mm e diâmetro da esfera 14.28 mm

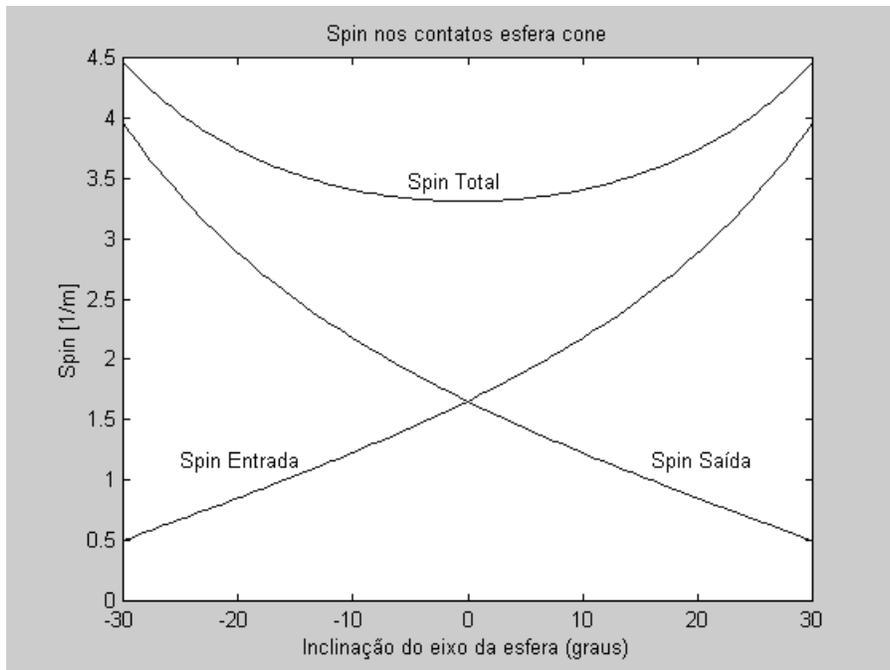


Figura 3.15 - Spin nos contatos cone de entrada esfera, esfera cone de saída e spin total

Utilizando esses dados e considerações, foi calculada a força tangencial no contato de rolamento através do algoritmo da teoria simplificada de contato (FASTSIM), desenvolvido por Kalker (1982,1990) e adaptado para o cálculo da força tangencial na CVT esfera-cone, Figura 3.16. Nela pode-se observar simultaneamente a força e o *spin* no contato entre a esfera e o cone de entrada. É visível que o aumento do *spin* causa uma diminuição da força tangencial. Assim, fica claro que as características geométricas da transmissão devem ser estudadas de modo a minimizar o *spin* no contato. Um estudo mais detalhado sobre as características do movimento de *spin* é apresentado na seção 6.3.

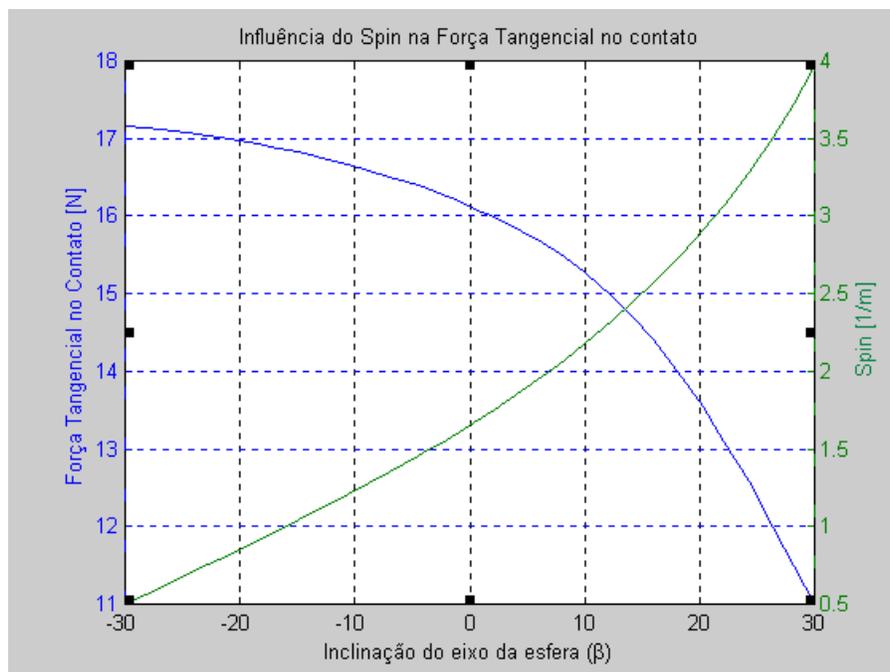


Figura 3.16 – Variação da força tangencial no contato esfera cone de entrada em função do *spin*

3.8 Comentários e Conclusões

O problema do contato de rolamento pode ser dividido em dois sub-problemas, ou seja, um problema normal e um problema tangencial. O problema normal é resolvido utilizando a teoria de Hertz, enquanto que, o problema tangencial é resolvido utilizando a teoria de contato de rolamento simplificada. Na teoria simplificada as relações entre as deformações e as tensões no contato são mais simples.

A teoria linear, isto é, a teoria na qual o *slip* é nulo, foi mostrada como um exemplo da teoria simplificada. Seu desenvolvimento corresponde rigorosamente ao modelo teórico exato. A comparação entre as teorias simplificada e exata fornece o valor de L (parâmetro de flexibilidade – utilizado na teoria simplificada) e sua dependência com: o módulo de rigidez G , os semi-eixos da elipse de contato a e b , e os valores de *creepages* v_x, v_y e φ , ou seja $L = L(G, a, b : v_x, v_y, \varphi)$.

Na verdade, a teoria linear é aproximada, e é válida para pequenos valores de *creepages*. Quando o *spin* é nulo pode-se desenvolver uma solução analítica para a teoria simplificada. Contudo, quando o *spin* não é nulo é necessária a utilização de um método numérico, nesse caso o algoritmo FASTSIM.

Análises executadas por Kalker indicam que a teoria simplificada apresenta erro máximo de 10% quando comparada com a teoria exata, e que o erro depende das características do contato.. Em contra partida, o cálculo da força no contato utilizando a teoria simplificada é muito mais rápido. Assim sendo, para uma grande maioria dos problemas de engenharia a aplicação da teoria simplificada do contato de rolamento é bastante razoável.

Deve ser enfatizado que a teoria simplificada somente pode ser usada para corpos quase iguais (*quasiidentical*) e, que para um estudo mais apurado da teoria do contato deve-se estudar princípios variacionais e teoria da elasticidade.

Esse capítulo teve como objetivo apresentar o problema de contato de rolamento para um futuro prosseguimento no assunto.

Capítulo 4

Lubrificação Elastohidrodinâmica

4.1 Introdução

Em muitos contatos de rolamentos as forças entre os elementos em contato são transmitidas através de uma fina camada de óleo lubrificante, que separa os componentes móveis da máquina.

Nos últimos anos percebeu-se que a aplicação da teoria hidrodinâmica em contato de baixa conformidade tais como: engrenagens, alguns rolamentos, cames, entre outros, freqüentemente não condizia com as observações experimentais.

Assim sendo, fatos que antes eram desconsiderados na formulação matemática, como por exemplo: a variação a viscosidade do fluido durante sua passagem pela área de contato e a deformação elástica dos corpos em contato de rolamento passaram a ser considerados. Esses efeitos podem mudar drasticamente a distribuição de pressão, e conseqüentemente, a espessura do filme de fluido entre as duas superfícies.

Desse modo, a combinação da teoria da lubrificação hidrodinâmica associada à deformação elástica das superfícies em contato deu origem a um novo tipo de lubrificação denominada lubrificação elastohidrodinâmica.

Assim sendo, EHD é uma abreviação de elastohidrodinâmica e, EHL de Lubrificação Elastohidrodinâmica. É, também, correto dizer filme EHL, EHD *film*, lubrificação EHD. Contudo, lubrificação EHL é redundância.

A partir dessas considerações, as condições do contato em muitas máquinas foram reexaminadas e os equipamentos de transmissão de potência passaram a ser projetados para tirar vantagens do conceito elastohidrodinâmico.

Dowson e Moore entendem como teoria Elastohidrodinâmica: “O estudo de situações nas quais a deformação elástica dos sólidos introduz efeitos significativos no processo de lubrificação hidrodinâmica”. Dowson explica que a maior dificuldade encontrada referia-se à resolução simultânea das equações elásticas e hidrodinâmicas. Dentro do espírito de simplificação de características físicas do problema, de modo a permitir a resolução matemática sem a descaracterização da solução, o primeiro sucesso foi obtido por Grubin em 1949. Utilizando a teoria de Hertz e a variação da viscosidade do fluido com a pressão, obteve expressões consideradas excelentes para a época e que ainda hoje são utilizadas.

Dowson e Higginson desenvolveram em 1959 um processo de cálculo iterativo capaz de resolver o problema da distribuição de pressão na área de contato, considerando o efeito da pressão nas propriedades do fluido e a geometria dos corpos elásticos. Este processo de cálculo iterativo tem sido continuamente aperfeiçoado, e a partir de 1965 leva em conta subsequentemente: distribuição de temperatura no contato, lubrificantes compressíveis e não newtonianos, corpos tridimensionais, materiais compostos, acabamento e tratamento superficiais. Todos estes fatores foram estudados isolados e conjuntamente com as condições clássicas, de modo a formar um entendimento global da lubrificação elastohidrodinâmica.

Um modelo mais completo foi apresentado por Jacobson (1973), em que a viscosidade do fluido depende da pressão e da temperatura em cada ponto da área de contato, que é dividido em regiões de predominância de efeitos, de modo que existem regiões onde:

- o fluido está líquido;
- o fluido solidifica-se e aparece escorregamento;
- o fluido solidifica-se e não ocorre escorregamento;
- e uma região de cavitação.

Assim sendo, o problema em EHL é encontrar a distribuição de pressão no contato e, ao mesmo tempo, saber os efeitos que a mesma provoca nas propriedades do fluido e na geometria dos sólidos. Além disso, deve-se saber também qual a espessura do filme de óleo entre os corpos para prever a tensão cisalhante do fluido nessas condições, seu coeficiente de tração e, conseqüentemente, a força tangencial transmitida entre os elementos em contato de rolamento.

O objetivo desse capítulo é a determinação experimental do coeficiente de tração de um fluido nacional. Contudo, inicialmente será feita uma explanação a respeito do tema lubrificação, com ênfase na EHL.

Assim sendo, no início desse capítulo serão abordados tópicos como: tipos de lubrificação, reologia, teoria de solidificação e coeficiente de tração. Finalizando o capítulo será apresentado o experimento para a determinação do coeficiente de tração de um fluido nacional e os resultados encontrados.

4.2 Tipos de Lubrificação

A lubrificação pode ser dividida em três grupos:

- camada limite;
- filme-combinado;
- filme-completo.

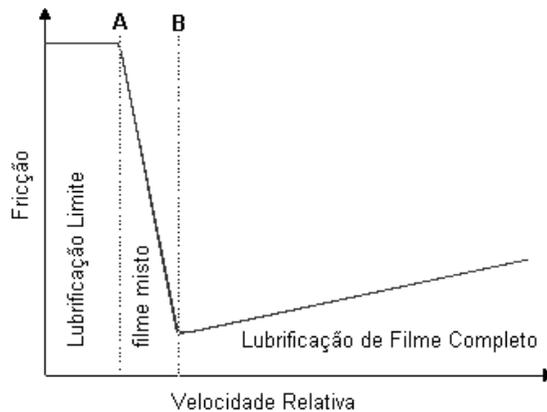


Figura 4.1 - Tipos de lubrificação em função da fricção e velocidade relativa dos corpos em contato de rolamento.

A Figura 4.1 mostra o tipo de lubrificação em função da fricção e do escorregamento, ou seja, a velocidade relativa entre os corpos em rolamento no ponto de contato. Em velocidade baixa ocorre lubrificação limite, que tem como característica alta fricção. Com o aumento da velocidade de escorregamento além do ponto A, forma-se um filme de fluido hidrodinâmico, reduzindo assim a fricção. Em altas velocidades relativas, do ponto B em diante, forma-se um filme completo que separa as superfícies completamente, reduzindo assim a fricção em relação aos valores do ponto A. Esse fenômeno é o mesmo que faz com que os pneus dos automóveis “aquaplanem” em pistas molhadas.

Em muitos contatos de rolamento pode-se encontrar os três regimes de lubrificação durante o início e final de operação.

4.2.1 Lubrificação por Camada Limite

Ocorre quando, por razões de geometria, rugosidade superficial, carga excessiva, ou insuficiência de lubrificante, as superfícies dos corpos entram em contato fisicamente e uma adesão ou um desgaste abrasivo podem ocorrer. Neste caso, o contato entre as superfícies é contínuo e extenso, mas o lubrificante está continuamente distribuído entre as superfícies, proporcionando uma camada de filme continuamente renovada, que reduz o atrito e o desgaste. Os valores típicos para o coeficiente de atrito vão de 0,05 a 0,20

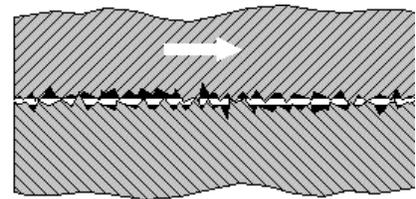


Figura 4.2 – Lubrificação por camada limite

4.2.2 Lubrificação de Filme Combinado

Os picos que porventura ocorrem no acabamento das superfícies, entram em contato intermitente, provocando uma sustentação hidrodinâmica parcial. Com projeto adequado, o desgaste superficial pode ser atenuado. A faixa para os coeficientes de atrito se encontra entre 0,004 e 0,10.

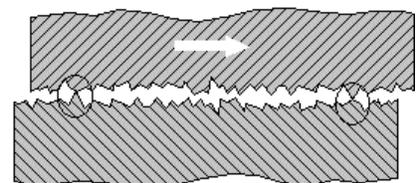


Figura 4.3 – Lubrificação de filme combinado

4.2.3 Lubrificação de Filme Completo

As superfícies estão completamente separadas pelo filme lubrificante. O carregamento, que tende a provocar o contato entre as superfícies é inteiramente suportado pela pressão do fluido, causada pelo próprio movimento relativo entre as superfícies. Problemas como desgaste das superfícies são raros (apenas em cavitação ou

instabilidade) e as perdas por atrito são devidas apenas ao atrito viscoso do lubrificante. A espessura mínima do filme lubrificante varia entre 0,05 e 0,020 mm.

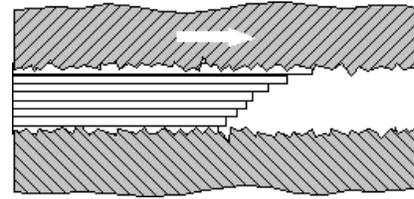


Figura 4.4 – Lubrificação de filme completo

A lubrificação de filme completo pode ser: (1) Hidrostática; (2) Hidrodinâmica; (3) Elastohidrodinâmica, Figura 4.5.

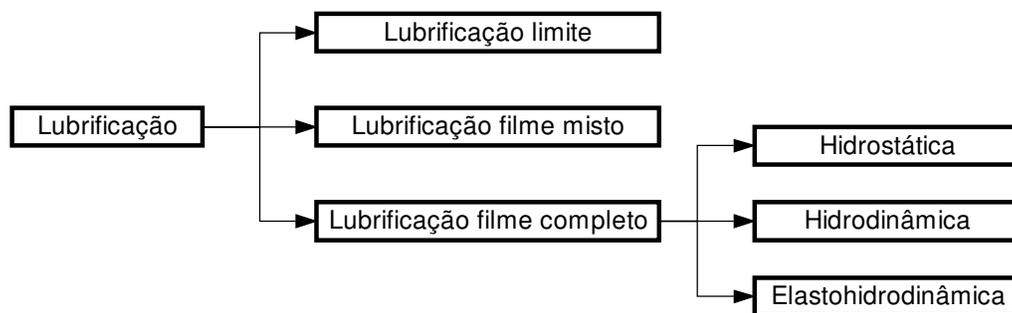


Figura 4.5 – Classificação dos tipos de lubrificação

4.2.3.1 Lubrificação Hidrostática

A lubrificação hidrostática refere-se ao fornecimento de um fluxo de lubrificante (tipicamente óleo) à interface deslizante numa pressão hidrostática elevada ($\cong 10^2 - 10^4$ Psi). Esse processo requer um reservatório para armazenar, uma bomba para pressurizar e um sistema para distribuir o lubrificante. Quando realizada adequadamente, a lubrificação hidrostática, pode eliminar todo o contato metal-metal na interface durante o escorregamento. As superfícies são separadas por um filme de lubrificante que, se mantido limpo e livre de contaminantes, reduz a taxa de desgaste a praticamente a zero. Em velocidade relativa igual a zero, o atrito é essencialmente nulo. Com uma velocidade relativa maior, o coeficiente de atrito, está entre 0.002

e 0.010. Este é também o princípio de um mancal aerostático, usado em “*air pallets*” para levantar (separar) uma carga de uma superfície, permitindo que se mova lateralmente com pouco esforço. *Hovercrafts* funcionam por um princípio similar. Água é algumas vezes usada em mancais hidrostáticos. O “*Denver’s Mile High Stadium*” tem uma arquibancada de 21000 lugares, que desliza sobre um filme hidrostático de água convertendo o estádio de baseball para futebol americano. Os mancais axiais hidrostáticos são mais comuns que os mancais radiais hidrostáticos.

4.2.3.2 Lubrificação Hidrodinâmica

Para entender a lubrificação elastohidrodinâmica é necessário primeiro entender a lubrificação hidrodinâmica. O entendimento da lubrificação hidrodinâmica começou com o experimento clássico de Tower (1883), que detectou a existência de um filme lubrificante através de medidas de pressão no interior do lubrificante; e de Petrov (1883) que chegou a mesma conclusão a partir das medidas de fricção. Esses trabalhos foram seguidos por Reynolds, que usou a forma reduzida da equação de Navier-Stokes juntamente com a equação da continuidade para gerar uma equação diferencial de segunda ordem para o cálculo da pressão em superfícies em contato de rolamentos. Essa pressão permite que a carga seja transmitida entre as superfícies.

A lubrificação hidrodinâmica é caracterizada por superfícies que se ajustam com alto grau de conformidade, para que a área da superfície de contato permaneça praticamente constante, mesmo quando a carga é aumentada. Mancais de rolamento axial e radial são exemplos de superfícies com alto grau de conformidade.

Em rolamentos axiais e radiais lubrificados hidrodinamicamente ocorre pressão positiva, isto porque, as superfícies dos rolamentos convergem. O movimento relativo entre as superfícies e a viscosidade do fluido faz com que as superfícies permaneçam separadas. A existência dessa pressão positiva indica que a carga normal aplicada pode ser suportada. A pressão desenvolvida (usualmente menos do que 5 MPa) não é grande o suficiente para causar deformação elástica nas superfícies. A espessura mínima do filme em rolamento lubrificado hidrodinamicamente é função da carga normal aplicada, da viscosidade do lubrificante e da geometria do contato.

Em lubrificação hidrodinâmica o filme de lubrificante é geralmente espesso. Assim sendo, as superfícies dos sólidos não entram em contato direto. Essa condição é frequentemente chamada de “a forma ideal de lubrificação,” uma vez que ela propicia baixa fricção e alta resistência ao desgaste. A espessura do filme normalmente excede 10^6 m. A lubrificação das superfícies sólidas é governada pelas propriedades físicas do lubrificante, entre elas a viscosidade e a taxa de cisalhamento.

4.2.3.3 Lubrificação Elastohidrodinâmica

O primeiro avanço notável para o entendimento da EHL ocorreu quando Grubin, em 1949, trabalhou simultaneamente com a deformação elástica dos sólidos, e a influência da pressão na viscosidade do lubrificante na região de contato dos elementos de máquinas em contatos lubrificadas de baixa conformidade. A principal contribuição desse trabalho foi que a equação desenvolvida de Grubin para calcular a espessura do filme de óleo, resultava em valores maiores do que aqueles preditos pela teoria hidrodinâmica. Porém, seus resultados eram mais condizentes com os resultados experimentais. Petrusevich (1951) determinou três soluções numéricas para as equações hidrodinâmicas e elásticas que confirmaram as características essenciais da análise de Grubin e forneceram informações adicionais sobre a forma do filme de óleo e a distribuição de pressão por toda a superfície de contato.

A EHL é uma forma de lubrificação hidrodinâmica onde as deformações elásticas das superfícies lubrificadas desempenham um papel importante. As características importantes na lubrificação hidrodinâmica – espessura do filme, movimento relativo e viscosidade do fluido entre as superfícies – também são importantes aqui. A EHL normalmente está associada com superfícies de baixo grau de conformidade. Pode-se separar a EHL em dois grupos: *hard* e *soft*.

EHL *Hard* - Está relacionada a materiais com alto módulo de elasticidade como metais. Nessa forma de lubrificação a deformação elástica e os efeitos da pressão sobre a viscosidade são importantes. A pressão máxima no contato está tipicamente entre 0.5 e 3 GPa com uma espessura mínima do filme de óleo de cerca de 0.1 μm . Essas condições são drasticamente diferentes daquelas encontradas em contato lubrificado hidrodinamicamente. Em cargas normalmente

encontradas em elementos de máquinas com superfícies de baixa conformidade as deformações elásticas são várias ordens de magnitude maiores do que a espessura mínima do filme. Além disso, a viscosidade do lubrificante pode variar oito ordens de grandeza dentro da área de contato lubrificada. A espessura mínima do filme é função dos mesmos parâmetros que da lubrificação hidrodinâmica, com a adição do efeito do módulo de elasticidade e o coeficiente pressão-viscosidade do lubrificante. Aplicações de engenharia em que a lubrificação elastohidrodinâmica *hard* é importante incluem: engrenagens, rolamentos, cames e seguidores, transmissões por tração entre outras.

EHL *Soft* - Está relacionada a materiais com baixo módulo de elasticidade como, por exemplo, borracha. Em EHL *soft* as distorções elásticas são grandes, mesmo com carga baixa. A máxima pressão em EHL *soft* é tipicamente 1 MPa, em contraste à faixa de 0.5 a 3 GPa da EHL *hard*. Essa baixa pressão tem um efeito desprezível na variação da viscosidade em toda a área de contato. A espessura mínima do filme é uma função dos mesmos parâmetros que na lubrificação hidrodinâmica com a adição do módulo de elasticidade efetivo. A espessura mínima do filme em EHL *soft* é tipicamente de 1 μm . As aplicações em engenharia em que a lubrificação elastohidrodinâmica *soft* é importante incluem selos, juntas humanas, pneus e elementos de máquinas lubrificadas que utilizem borracha como um material. As características comuns da EHL *soft* e *hard* são que as deformações elásticas dos sólidos devem propiciar um coerente filme de fluido e que a interação entre os picos de rugosidade devem ser evitados. Isso implica que a resistência friccional ao movimento em EHL, assim como na lubrificação hidrodinâmica, seja devido ao cisalhamento do lubrificante.

4.3 Comportamento Reológico dos Lubrificantes

No contato lubrificado elastohidrodinamicamente:

- as pressões no contato entre os elementos em rolamento são extremamente altas (0.5 ~ 3 GPa);
- a espessura do fluido lubrificante é extremamente fina (0.1 ~ 1 μm);

- o tempo de passagem do lubrificante através da área de contato é muito pequeno ($\approx 1 \mu\text{sec}$);
- as áreas em contato de rolamento sofrem deformação elástica.

Essas condições extremas, somadas às características típicas do contato de rolamento (escorregamento, movimento de spin, desalinhamentos, rugosidade superficial) afetam o desempenho do fluido lubrificante, denominado de fluido de tração.

O campo da ciência que estuda o fluxo (escoamento) de fluidos e a deformação de sólidos sob a ação de uma força num determinado intervalo de tempo é chamado Reologia. O termo vem do grego *rheo* significa fluxo e *logos* ciência.

No Capítulo 3 foi apresentado o contato de rolamento seco em que a força tangencial (força de atrito ou fricção), calculada teoricamente, estava relacionada com o coeficiente de fricção das superfícies em contato. Nesse Capítulo a força tangencial no contato de rolamento lubrificado receberá o nome de força de tração e estará relacionada com o coeficiente de tração do lubrificante, e será calculada experimentalmente.

4.3.1 Equações de Reynolds

A maior parte da teoria da EHL é baseada na equação de Reynolds. Essa equação relaciona a pressão no filme lubrificante, a geometria das superfícies, as velocidades das superfícies em movimento e propriedades físicas do lubrificante. A equação é uma simplificação das equações de Navier-Stokes, em que se assume uma brecha estreita entre os elementos rolantes e a conservação da massa durante o fluxo do lubrificante pela área de contato. A equação de Reynolds pode ser escrita de várias formas. Em coordenadas cartesianas temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \underbrace{6(u^+)}_{\text{wedge}} \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \underbrace{6\rho h}_{\text{stretch}} \frac{\partial(u^+)}{\partial x} + \underbrace{12}_{\text{squeeze}} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad (4.1)$$

sendo:

u^+ - soma das velocidades das superfícies em movimento $u^+ = u_1 + u_2$

x, y - coordenadas cartesianas espaciais

t - tempo

p - pressão

h - espessura do filme

ρ - densidade

η - viscosidade

Os três termos do lado direito da Equação (1) são conhecidos como termos de Poiseuille. O primeiro termos é conhecido com termo de cunha (*wedge*), o segundo como termo de extensão ou dilatação (*stretch*) e o último como termo de compressão, pressão ou aperto (*squeeze*).

Um fenômeno importante que ocorre na EHL, e que não é levado em conta na Equação 4.1 é a cavitação. Na região de cavitação a pressão no lubrificante permanece constante e igual a pressão de vapor do lubrificante.

Uma vez que, a pressão de vapor e a pressão ambiente são geralmente pequenas se comparadas com a pressão que ocorre no contato, é justificado assumir que o lubrificante cavita à pressão zero. Então, a cavitação pode ser levada em conta restringindo o campo de pressões apenas para valores positivos, ou seja:

$$p(x, y) \geq 0; \quad \forall (x, y) \in S \quad (4.2)$$

sendo S o domínio.

Caso sejam conhecidas:

- a geometria das superfícies (isto é a espessura do filme, h);
- a viscosidade η ;
- a densidade ρ ;

a equação de Reynolds fornece a distribuição de pressão no contato. Contudo, esses três parâmetros são funções da pressão. Por esse motivo, várias relações entre esses parâmetros têm sido propostas na literatura. Nas seções seguintes serão descritas relações entre: pressão e viscosidade, pressão e densidade e, pressão e deformação dos contatos em rolamento, ou seja, espessura do filme de óleo.

4.3.1.1 Coeficiente Pressão-Viscosidade

A Lei de Newton da Viscosidade impõe uma proporcionalidade entre a tensão de cisalhamento τ , e a taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$. O coeficiente de proporcionalidade é representado por η e é chamado de viscosidade dinâmica, ou seja:

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (4.3)$$

A viscosidade é uma propriedade de cada fluido e varia em função de suas condições físicas, entre elas temperatura e pressão.

A viscosidade de um fluido pode ser definida como sendo a resistência que um fluido apresenta ao fluxo (ou escoamento), assim sendo, se a resistência ao escoamento aumenta, aumenta também a viscosidade.

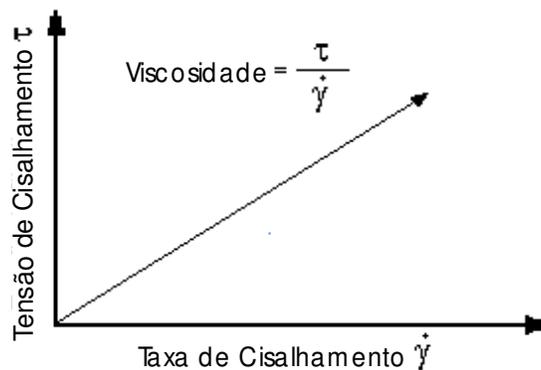


Figura 4.6 – Gráfico tensão de cisalhamento versus taxa de cisalhamento

A viscosidade de um Fluido Newtoniano depende apenas da temperatura e não da taxa de cisalhamento e do tempo. Nesse caso o fluido apresenta uma relação linear entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento, Figura 4.6. Exemplos: água e óleo mineral.

A viscosidade de um fluido não Newtoniano não depende apenas da temperatura mas também da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$

Na literatura pode-se encontrar muitas relações entre viscosidade e pressão. A seguir são apresentadas duas delas: Equação de Barus (Barus, 1893) e a relação de Roelands (Roelands, 1966).

O fato de a viscosidade aumentar quase que exponencialmente com a pressão é um efeito muito importante para a formação do filme de fluido em contatos de EHL. Esse comportamento exponencial está contido na relação viscosidade-pressão de Barus (Barus, 1893).

$$\eta(p) = \eta_o e^{\alpha p} \quad (4.4)$$

sendo:

η_o : viscosidade na pressão ambiente

α : coeficiente viscosidade-pressão.

A Equação 4.4 representa uma das relações de viscosidade-pressão mais usadas porque ela é fácil de ser usada em derivações analíticas. Contudo, seu uso deve ficar restrito a baixas pressões (menores do que 0.1 GPa).

Para pressões até 1 GPa pode-se utilizar a relação viscosidade-pressão proposta por Roelands (1966).

$$\eta(p) = \eta_o \exp \left[\left\{ \left(1 + \frac{p}{p_r} \right)^z - 1 \right\} \cdot \ln \left(\frac{\eta_o}{\eta_\infty} \right) \right], \quad (4.5)$$

ou

$$\eta(p) = \eta_o \left(\frac{\eta_o}{\eta_\infty} \right)^{1 - \left[1 + \frac{p}{p_r} \right]^z} \quad (4.6)$$

sendo:

η_∞ - $6.315 \cdot 10^{-5}$ Pa.s = Constante

p_r - 196.2 MPa = Constante

z – índice de viscosidade-pressão

Para a maioria dos óleo minerais $0.6 \leq z \leq 1.0$.

A Equação 4.6 é uma versão simplificada da relação completa de Roelands. A relação completa tem também um termo para a dependência da viscosidade com a temperatura.

Para baixas pressões as equações de Baurus e Roelands produzem os mesmos resultados, sendo então, possível expressar o índice viscosidade-pressão de Roelands utilizando o índice de viscosidade-pressão de Barus,

$$\alpha = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right)_{p=0} \quad (4.7)$$

ou seja, α , η_0 e z são mutuamente dependentes

$$\frac{\alpha p_r}{z} = \ln \left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right) \quad (4.8)$$

4.3.1.2 Relação Densidade-Pressão

Em EHL a compressibilidade do lubrificante deve ser levada em conta para altas pressões. Na literatura a relação pressão-densidade usada mais frequentemente é a proposta por Dowson e Higginson (1966).

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{0.59 \text{ GPa} + 1.34 p}{0.59 \text{ GPa} + p} \quad (4.9)$$

sendo:

ρ_0 - densidade a temperatura ambiente

Dowson e Higginson (1966) realizaram suas medidas com pressões de até 0.4 Gpa. Hamrock (1994) provou que a Equação 4.9 pode ser usada com óleos minerais para pressões de até 1 Gpa.

4.3.1.3 Deformação - Espessura do Filme

Um fluido EHD deve satisfazer duas condições:

- Manter um filme protetor suficiente que evite o desgaste prematuro dos elementos rolantes em contato;
- Transmitir a força tangencial necessária, economizando assim energia, ou seja, possuir um bom coeficiente de tração.(ver seção.4.5)

Como visto, a viscosidade do lubrificante é afetada pela pressão, ou seja, ela aumenta com o aumento da pressão. A espessura do filme torna-se uma função do aumento da área de contato. Assim, para contatos de baixa conformidade, mesmo aqueles com alguma deformação elástica, a pressão pode ser muito alta. Essa combinação de pressão muito alta e deformação local elástica na presença de um lubrificante pode permitir a formação da EHL. A formação de um filme de óleo sobre uma superfície relativamente pequena e deformada elasticamente é possível graças ao aumento da viscosidade do óleo sobre altas pressões. Os filmes elastohidrodinâmicos são muito finos e requerem superfícies com alto grau de polimento para prevenir que os picos de rugosidade das superfícies entrem em contato direto. A EHL é analisada usando uma combinação das equações de Reynolds (Equação 4.1), equações de viscosidade-pressão do lubrificante (Equação 4.4 ou 4.6), e equações da teoria linear da elasticidade. Utilizando a teoria da deformação elástica dos corpos, vista no Capítulo 3, a distância entre as superfícies pode ser descrita por:

$$h(x, y) = \delta + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E'} \iint_S \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (4.10)$$

Isso, torna o método teórico para obter a solução para o problema de lubrificação em contato de rolamento muito trabalhoso para ser usado por projetistas. Contudo, uma das características que os projetistas mais se preocupam é a mínima espessura do filme de óleo que garanta o funcionamento dos elementos sem o perigo de danos.

Para evitar a resolução simultânea das equações acima citadas, vários autores têm proposto fórmulas empíricas para o cálculo da espessura do filme de óleo que possam ser usadas facilmente.

Essas fórmulas são baseadas nos parâmetros:

R – O raio efetivo do par de elementos em rolamento

E' – O módulo de elasticidade efetivo do par de elementos em rolamento

η_0, α - propriedades viscosas dos lubrificantes

w, u - variáveis externas: carga por unidade de comprimento e velocidade

h - espessura do filme de óleo

Essas sete variáveis independentes têm as suas dimensões mostradas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parâmetros para cálculo da espessura do filme de óleo

h	R	E'	η_0	α	w	u
L	L	$\frac{M}{LT^2}$	$\frac{M}{LT}$	$\frac{LT^2}{M}$	$\frac{M}{T^2}$	$\frac{L}{T}$

sendo que, h pode ser governada por três parâmetros adimensionais, ou seja:

$$\frac{h}{R} = f(W, U, G) \quad (4.11)$$

Os valores desses três grupos adimensionais são:

- **Parâmetro de carga:**

$$W = \frac{w}{E' R} \quad (4.12)$$

em aços um valor de 3.10^{-4} corresponde à pressão máxima de cerca de 1.5 Gpa e, um valor de 3.10^{-5} corresponde a cerca de 0.5 Gpa.

- **Parâmetro de velocidade**

$$U = \frac{\eta_o u}{E' R} \quad (4.13)$$

esse é o parâmetro que mais influencia na espessura do filme de óleo. Geralmente varia de 10^{-8} a 10^{-13}

- **Parâmetro do material**

$$G = \alpha E' \quad (4.14)$$

todos os valores publicados de α para lubrificantes variam muito pouco, como os valores de E' para metais. Assim sendo, na prática a faixa de $\alpha E'$ é pequena, a menos que os sólidos em contato sejam não metálicos.

Dowson e Higginson (1977) apresentam várias dessas fórmulas empíricas baseadas nos parâmetros adimensionais (W, U, G) para contato linear no caso do problema isotérmico.

Hamrock e Dowson (1976ab), (1977ab), (1978) e (1979) acrescentaram o parâmetro e elipsidade, k , e apresentaram equações para a espessura central e mínima (sub-índices c e min) do filme para EHL *hard* e *soft* (sub-índices h e s)

$$H_{c,h} = 2.69 U^{0.67} G^{0.53} W^{-0.067} \left(1 - 0.61 e^{-0.73 k}\right) \quad (4.15)$$

$$H_{min,h} = 3.63 U^{0.68} G^{0.49} W^{-0.073} \left(1 - e^{-0.68 k}\right) \quad (4.16)$$

$$H_{c,s} = 7.32 U^{0.64} W^{-0.22} \left(1 - 0.72 e^{-0.28 k}\right) \quad (4.17)$$

$$H_{\min,s} = 7.43U^{0.65}W^{-0.21}(1 - 0.85e^{-0.31k}) \quad (4.18)$$

4.3.2 Curvas de Fricção

Geralmente a tensão de cisalhamento hidrodinâmica pode ser escrita como uma função da taxa de cisalhamento $\dot{\gamma}$

$$\tau_H = f(\dot{\gamma}) \quad (4.19)$$

Diferentes relações entre a tensão de cisalhamento hidrodinâmica e a taxa de cisalhamento são apresentadas na Figura 4.7.

O comportamento $\tau_H/\dot{\gamma}$ de um lubrificante particular pode variar em virtude da influência da pressão e da temperatura.

Em todas as quatro curvas da Figura 4.7a pode-se distinguir três regiões. Em baixas velocidades de escorregamento ($\dot{\gamma}$ pequeno), a tensão cisalhante aumenta linearmente com a taxa de cisalhamento. Esse comportamento é isotérmico e caracteriza a primeira região.

Na segunda região a tensão cisalhante desvia-se de uma curva linear até que um valor máximo seja atingido. Com o aumento da velocidade de escorregamento entre os corpos, os efeitos térmicos passam a ter um papel importante. A partir do ponto em que a máxima tensão de cisalhamento é atingida, tem-se uma terceira região, na qual o efeito térmico faz com que a tensão de cisalhamento diminua com o aumento do escorregamento.

Assim sendo, lubrificantes submetidos a EHL podem apresentar comportamento elástico, viscoso, visco-elástico ou plástico como ilustrado pela curva C na Figura 4.7b; ou um comportamento elasto-plástico como ilustrado pela curva D da Figura 4.7b.

Sob pressões muito altas e baixas velocidades de escorregamento como ocorre em transmissões por tração, o regime viscoso diminui, e a resposta do fluido aproxima-se daquela de

um material elasto-plástico, curva D Figura 4.7b. Esse comportamento reológico do lubrificante é caracterizado principalmente por dois parâmetros dos materiais, ou seja, o módulo de cisalhamento elástico e a tensão cisalhante limite.

Métodos para o cálculo do módulo de elasticidade e do limite de tensão cisalhante são apresentados por Fang *et. al.* (2000), Kato *et.al.* (1993), Johnson e Tevaarwerk (1977).

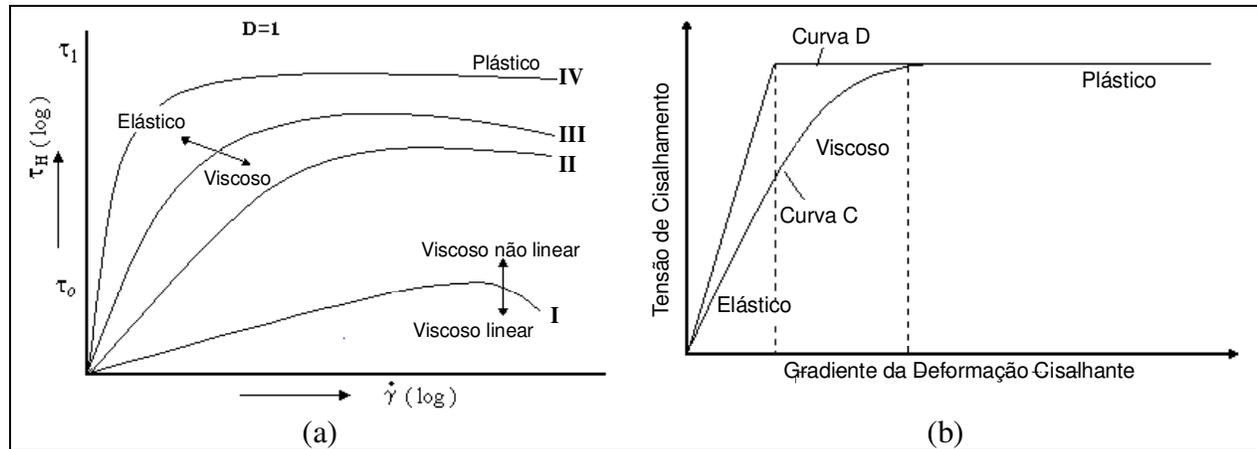


Figura 4.7 – Comportamento reológico de um típico lubrificante em condição de EHL

Na Figura 4.7a as curvas são plotadas para diferentes comportamentos reológicos dos lubrificantes e, para o número de Deborah igual a 1. O número de Deborah D , é definido como:

$$D = \frac{\eta u_{av}}{\bar{G} b} \quad (4.20)$$

sendo:

$$u_{av} = \frac{1}{2} u^+ \text{ (velocidade média);}$$

b = comprimento do contato Hertziano na direção do rolamento;

\bar{G} = módulo de cisalhamento elástico.

O número de Deborah é a razão entre o tempo de relaxação do lubrificante (η/\bar{G}) e o tempo de passagem de um elemento do fluido através da área de contato (b/u_{av}) . Para números

de Deborah muito menores do que a unidade ($D \ll 1$) o lubrificante comporta-se como viscoso, ou passo que, para $D \gg 1$ o comportamento elástico é determinante.

Curva I – é aplicável para o caso viscoso linear (Newtoniano)

$$\tau_H = \eta \dot{\gamma} \quad (4.21)$$

Curva II – é a relação viscosa não linear. O modelo de fluido de Eyring como proposto por Bell *et al.* (1964) é aplicável

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\eta} \sinh\left(\frac{\tau_H}{\tau_0}\right) \quad (4.22)$$

A tensão cisalhante de Eyring τ_0 é mostrado na Figura 4.7a. É um parâmetro limiar acima do qual ocorre a transição do comportamento Newtoniano para o não Newtoniano.

Curva III – a curva visco-elástica não linear foi descrita por Johnson e Tevaarwerk (1977)

$$\dot{\gamma} = \gamma_e + \gamma_v = \frac{\dot{\tau}_H}{G} + \frac{\tau_0}{\eta} \sinh\left(\frac{\tau_H}{\tau_0}\right) \quad (4.23)$$

A Equação 4.23 é, de fato, um modelo de Maxwell não linear do lubrificante. A taxa cisalhante $\dot{\tau}_H$ dessa equação pode ser eliminada, uma vez que:

$$\dot{\tau}_H = \frac{d\tau_H}{dt} = \left(\frac{u_{av}}{b}\right) \frac{d\tau_H}{d(x/b)} \quad (4.24)$$

e multiplicando ambos dos lados da Equação 4.23 por η

$$\eta \dot{\gamma} = D \frac{d\tau_H}{d(x/b)} + \tau_0 \sinh\left(\frac{\tau_H}{\tau_0}\right) \quad (4.25)$$

sendo:

D – Número de Deborah definido na Equação 4.20.

As Equações 4.24 e 4.25 descrevem o comportamento elástico não linear do lubrificante, assim com, o comportamento Newtoniano. O comportamento newtoniano é descrito no caso de

$D \ll 1$ e $\tau_H \ll \tau_0$, uma vez que, nesse caso $\sinh\left(\frac{\tau_h}{\tau_0}\right) \approx \frac{\tau_h}{\tau_0}$ e a Equação 4.25 reduz-se a:

$$\eta \dot{\gamma} = \tau_H \quad (4.26)$$

Curva IV – descreve o comportamento elástico-plástico do lubrificante. Na descrição das outras três curvas, a tensão cisalhante podia crescer sem limite. Contudo, na realidade, os lubrificantes, como os materiais sólidos, possuem uma tensão limite. Esse comportamento é descrito pela chamada equação de Prandtl-Reuss (Jonhson e Cameron 1967 e, Evans e Johnson 1986).

$$\tau_H < \tau_l \rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\tau_H}{G} \quad (4.27)$$

$$\tau_H = \tau_l \rightarrow \dot{\gamma} = \frac{\tau_H}{G} + \frac{\tau_l \dot{\gamma}}{\tau_H} \quad (4.28)$$

sendo:

τ_l - tensão cisalhante limite, proposta por Smith (1959), Figura 4.7a.

O comportamento elástico/plástico também é descrito por outros autores, entre eles Bair e Winer (1979a) e (1979b) que, através em dados experimentais propuseram um modelo baseado na tensão cisalhante limite (τ_l):

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{G} - \frac{\tau_l}{\eta} \ln\left(1 - \frac{\tau}{\tau_l}\right) \quad (4.30)$$

A princípio as curvas de fricção no contato (E)HL é determinado por quatro parâmetros: η, τ_0, \bar{G} e τ_l , sendo que, \bar{G} é o mais difícil de medir e, por esse motivo, frequentemente aproximado por $\bar{G} = 30\tau_l$.

Essa pequena explanação sobre o comportamento reológico dos lubrificantes dá uma idéia da complexidade do problema EHD. Convém lembrar que não está no escopo desse trabalho a modelagem matemática do contato lubrificado elastohidrodinâmica, mais sim a determinação experimental do coeficiente de tração de um fluido nacional. Porém, antes disso, será feita uma explanação sobre a teoria da solidificação do lubrificante.

4.4 Teoria da Solidificação

Em baixas pressões os lubrificantes comportam-se com um líquido normal e, assim sendo, as mesmas propriedades dos líquidos podem ser usadas para analisar a pressão, a espessura do filme de óleo e as deformações elásticas das superfícies de contato.

Porém, em altas pressões, quando o lubrificante solidifica-se, o aumento da pressão é governada pela resistência ao cisalhamento, pela compressibilidade do óleo solidificado e pelas propriedades elásticas das superfícies em contato. Dependendo do gradiente de pressão no filme lubrificante, ele pode assumir dois comportamentos distintos:

- 1.) O óleo adere às superfícies em contato de rolamento e move-se com a mesma velocidade que a superfície;
- 2.) O óleo “sólido” escorrega ao longo das superfícies na direção do gradiente local de pressão.

Qual comportamento irá ocorrer depende da tensão de cisalhamento na interface do óleo. Se a tensão de cisalhamento for menor do que a resistência ao cisalhamento da interface ou do óleo solidificado, o óleo aderirá às superfícies e mover-se-á como uma camada sólida sem escorregar entre as superfícies. Quando a tensão cisalhante alcançar o limite de resistência ao cisalhamento, ocorrerá escorregamento na direção da máxima tensão.

Se houver pressões maiores do que a pressão de solidificação a uma dada temperatura no contato lubrificado, a zona de óleo pode ser dividida em quatro partes como mostra a Figura 4.8. Essas áreas são denominadas: óleo sem cavitação, óleo solidificado com escorregamento, óleo solidificado sem escorregamento e região de cavitação.

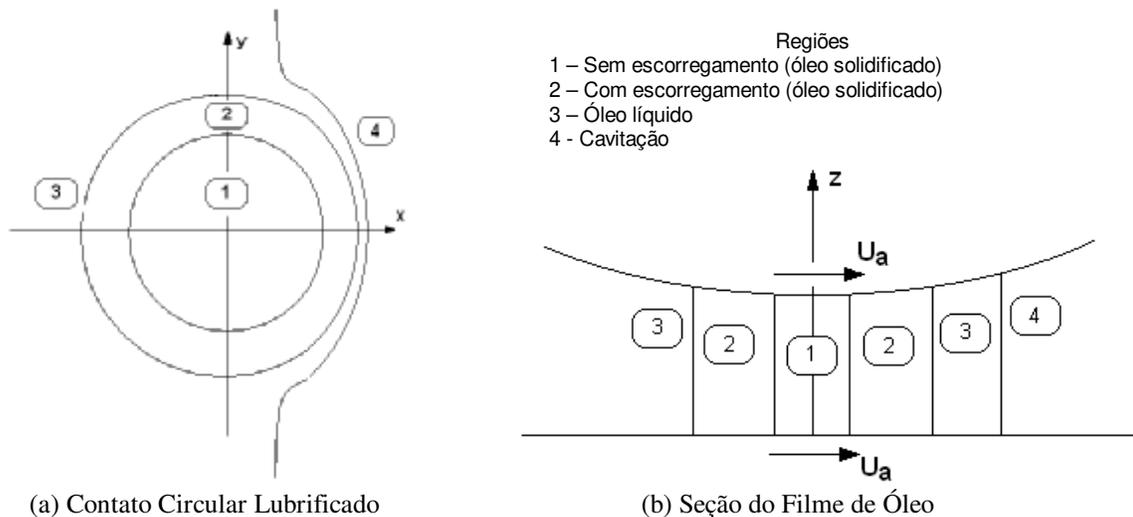


Figura 4.8 – Planos da área de contato mostrando as regiões do filme de óleo

Para calcular a pressão nas diferentes regiões do contato lubrificado, deve-se garantir a continuidade e o fluxo de massa em todo o limite entre essas regiões, ou seja: (1) entre líquido e óleo solidificado; (2) entre o óleo solidificado aderido à superfície e o óleo solidificado escorregando entre as superfícies na direção do máximo gradiente de pressão; (3) entre o óleo e a região de cavitação. Para ser capaz de resolver esse problema de lubrificação numericamente, as propriedades do lubrificante em estado solidificado devem ser determinados experimentalmente.

Vale ressaltar que a pressão de solidificação é altamente dependente de temperatura. Segundo Jacobson (1991 - página 92), Hersey e Hopkins mostram no relatório intitulado *Viscosity of Lubricants Under Pressure* a temperatura de solidificação do óleo denominado P62 em três diferentes temperaturas:

- 25°C: 110 a 165 MPa
- 40°C: 215 a 295 MPa
- 75°C: 550 a 570 MPa

Essas pressões são muito mais baixas das que a máxima pressão permissível em muitos contatos de rolamento, uma vez que rolamentos de esfera modernos podem resistir a pressões de até 3 Gpa.

4.5 Coeficiente de Tração

Existe uma grande quantidade de tipos de lubrificantes à disposição no mercado. Porém, quais deles se aplicam às transmissões por tração? Como se pode comparar lubrificantes de naturezas diferentes para uso em Transmissões por Tração? O que pode ser considerado como qualidade em um lubrificante para este fim?

De um modo geral, no exterior, utilizam-se lubrificantes sintéticos cicloalifáticos ou óleo naftênicos aditivados para extrema pressão em todas as transmissões por tração. Estes óleos são de difícil aquisição no Brasil, além de seu custo, ser extremamente alto. O melhor óleo para esse tipo de aplicação é o Santotrac e Santotrac2000 que custa cerca de U\$70,00 o quarto de galão. Pode-se, porém, dentre os lubrificantes nacionais verificar quais possuem a capacidade de ser apropriado às transmissões por tração. Isso é possível comparando-se o coeficiente de tração dos óleos em função do escorregamento entre os corpos em contato de rolamento.

O coeficiente de tração dos fluidos μ , é a razão da força transmitida tangencialmente F_t , pela carga radial (normal ao contato), F_n . Assim, $\mu = F_t / F_n = \tan(\epsilon)$; sendo $\epsilon =$ ângulo de tração Figura 4.9a.

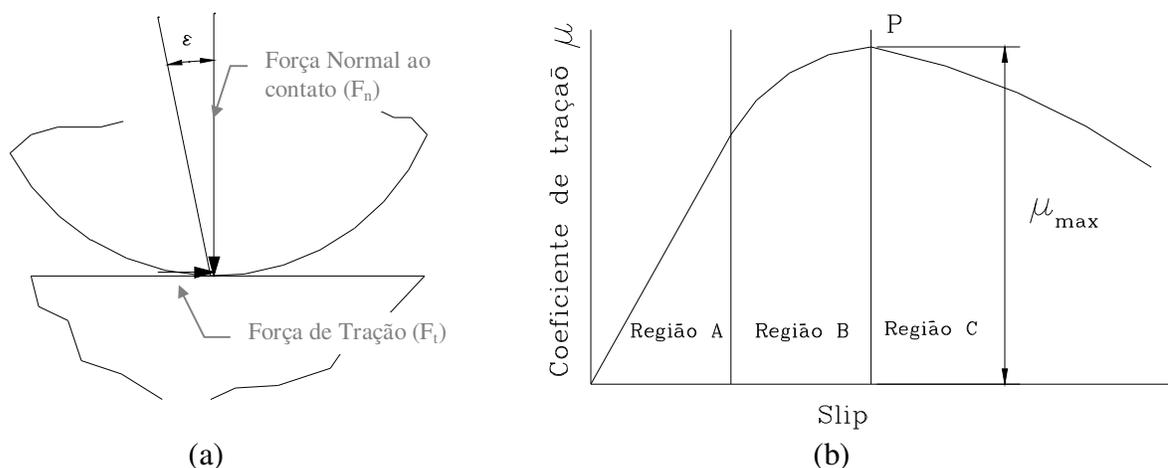


Figura 4.9- Região de contato e curva de tração

Todo fluido de tração é caracterizado por um gráfico do coeficiente de tração em função do *slip* (escorregamento), O *slip* é a diferença relativa das velocidades nas superfícies de dois corpos em contato de rolamento, ou seja: $\frac{(U_1 - U_2)}{(U_1 + U_2)/2}$, sendo U_1 e U_2 as velocidades dos corpos 1 e 2,

Figura 4.9b. Estas curvas são obtidas pressionando dois corpos rolantes em contato e causando uma diferença de velocidade entre eles. A rotação destes dois corpos junto com o lubrificante deixa um fino filme lubrificante entre as superfícies. A diferença de velocidade entre os corpos tende a cisalhar este filme, e a resistência ao cisalhamento do fluido transmite a força entre os corpos. Os valores de *slip* nos contatos das transmissões por tração geralmente variam 0.1 a 2 %. Para evitar o *gross slip*, ou seja, o escorregamento total onde o filme de óleo é quebrado e ocorre o contato entre os corpos, a maioria das transmissões por tração é projetada para aumentar a carga normal na área de contato quando o torque transmitido é aumentado. Isto pode ser feito utilizando-se um came, seção 5.5.1. Assim, a transmissão pode trabalhar em baixa velocidade com baixa carga e pouco escorregamento no contato. Com o eventual aumento da carga na parte motora da transmissão, a força normal aumenta automaticamente, mantendo o escorregamento num nível relativamente baixo - usualmente em torno de 1%.

A explicação do comportamento da curva da Figura 4.9b é similar ao da Figura 4.7 na seção 4.3.2.

Nas CVTs, o *slip* é complicado pela adição do *spin*. O *spin* pode ser explicado como sendo a diferença do vetor velocidade angular dos corpos na direção normal ao contato. Como as CVT's por tração tipicamente usam elementos com raios de rotação que variam continuamente para produzir a variação das relações de velocidade, o *spin* está sempre presente. Na prática, o *spin* tende a girar as superfícies no contato enquanto elas executam o movimento de rotação. Projetistas tentam minimizar esta torção através de um cuidadoso controle da geometria do contato. Estudos que tratam do *spin* no contato de CVT's por tração podem ser encontrados em Lim e Ullman (1989), Loewenthal (1986), Doug(1980), Yeaple(1971).

O coeficiente de tração de um fluido é afetado por diversos fatores, dentre os quais destacam-se os seguintes:

- Velocidade de rolamento - para um dado valor de μ , o escorregamento tende a aumentar com o aumento da velocidade de rolamento. O valor de μ deve ser determinado para a mais alta velocidade de rolamento pretendida no projeto, assim para as velocidades menores o projeto estará preservado, Figura 4.10a.;
- Pressão no contato - o máximo valor de μ , tende a ocorrer na mesma faixa de pressão para a maioria dos fluidos de tração comumente usados (1.4 ~ 1.9 GPa), Figura 4.10b;
- Temperatura - para temperaturas entre 4 e 121° C, se o acabamento superficial não for levado em consideração, a variação de μ com a temperatura pode ser desprezada Figura 4.10c;
- Spin - A Figura 4.10d é da mesma forma da Figura 4.10a onde uma família de curvas de μ em função do *slip* foi plotada para o aumento de valores da velocidade de rotação. Um completo entendimento dos efeitos do *spin* requer análise do fenômeno na área de contato. O *spin* não afeta somente μ diretamente, mas em grande parte controla perdas no contato e tipos de falhas, ver capítulo 6 - seção 6.3.

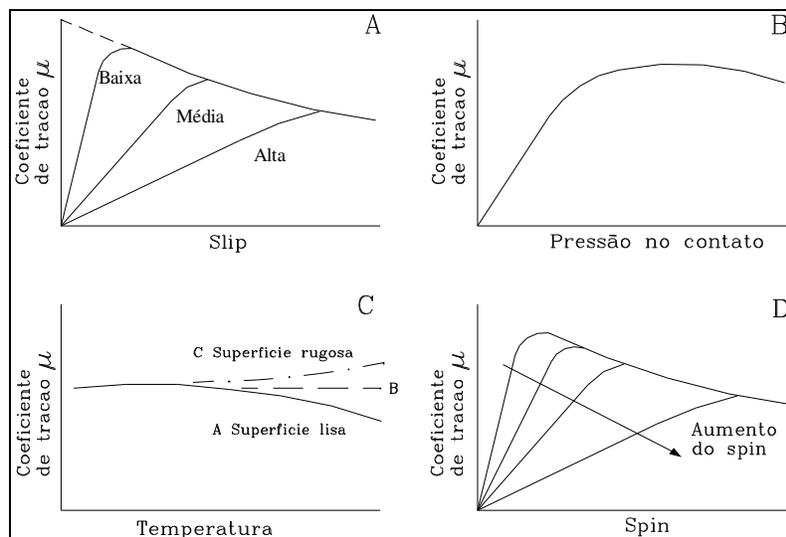


Figura 4.10 - Fatores que influenciam o coeficiente de tração

Heilich e Shube (1983) apresentam um estudo detalhado desses fatores agindo individual e simultaneamente. O valor de μ para um projeto deve ficar abaixo do seu valor máximo. Contudo, se ele for muito baixo, a transmissão estará sujeita a forças de compressão (forças normais/rádias)

muito grandes nos contatos, o que diminui a vida útil do equipamento, ver capítulo 6 - seção 6.4. Analisando a Figura 4.11 nota-se uma região utilizável de μ , sendo que, o valor selecionado de projeto deve ficar por volta de $\frac{3}{4}$ do valor máximo (Heilich e Shube 1983).

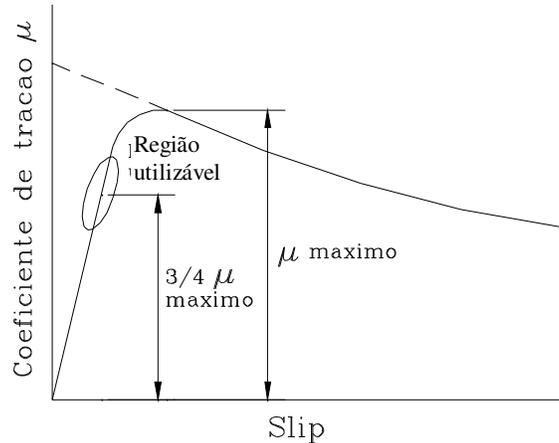


Figura 4.11 - Região utilizável de μ

A seguir será descrito o experimento e método para a determinação experimental do coeficiente de tração de um lubrificante nacional.

4.6 Experimento – Cálculo Experimental do Coeficiente de Tração

Um aspecto importante no projeto de TD-CVT é o conhecimento do coeficiente de tração do fluido utilizado. Atualmente, sabe-se através da literatura, que o melhor lubrificante para TD-CVT é o Santotrac 2000 e 2100. Contudo, o preço por litro desse óleo está por volta de 70 dólares americanos, o que o torna inviável para o nosso projeto. Como nenhum dos óleos nacionais fornece o valor do seu respectivo coeficiente de tração, fica impossível uma comparação entre eles e os lubrificantes da linha Santotrac. Além do que, os testes na literatura geralmente são feitos em altas rotações e nós vamos trabalhar em baixas rotações (baixa potência), o que faz aumentar coeficiente de tração, Figura 4.10a. Assim sendo, foi testado o desempenho de um lubrificante nacional para esse tipo específico de aplicação.

4.6.1 Bancada de Teste dos Lubrificantes

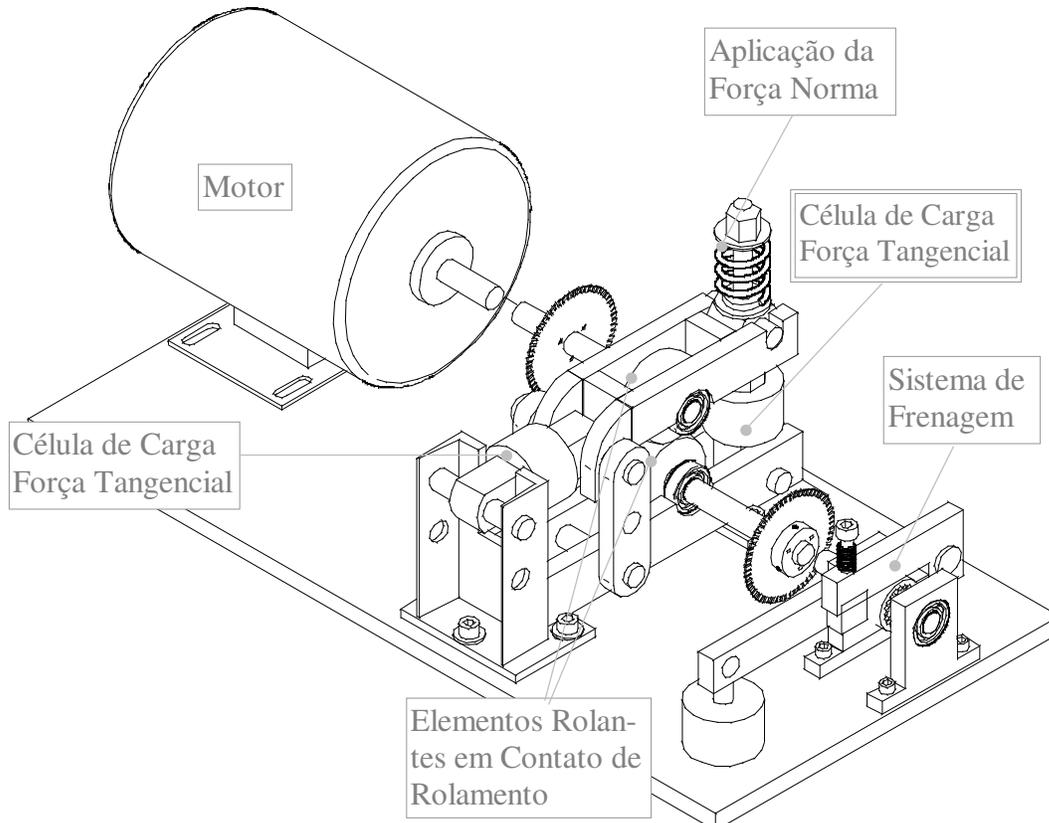


Figura 4.12 - Esquema da bancada de testes do lubrificante

A máquina de teste foi projetada para permitir a aplicação de uma pressão máxima de 2,2 GPa no centro do contato dos rolos de testes. A identificação direta da força normal aplicada, e da força tangencial transmitida é feita através das células de carga indicadas na Figura 4.12. Foram utilizados também: sensores ópticos de rotação, retificador de sinais, ponte condicionadora e um PC modelo Pentium II 166 MHz para aquisição dos dados.

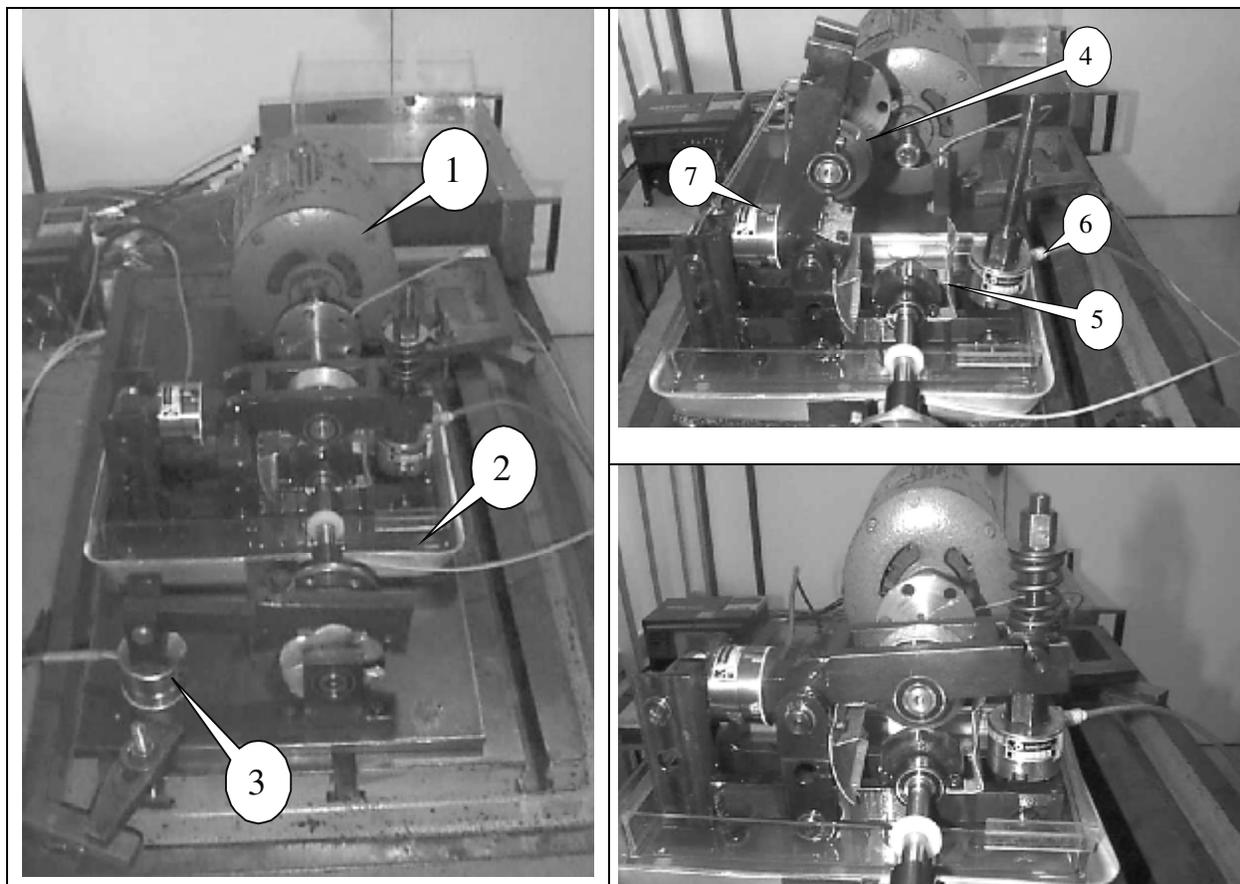


Figura 4.13 – Fotos da bancada de testes

sendo:

1. Motor
2. Base do Óleo
3. 3, 6 e 7 Células de Carga
4. 4 e 5 Rolos de Teste

4.6.2 Princípio de Funcionamento

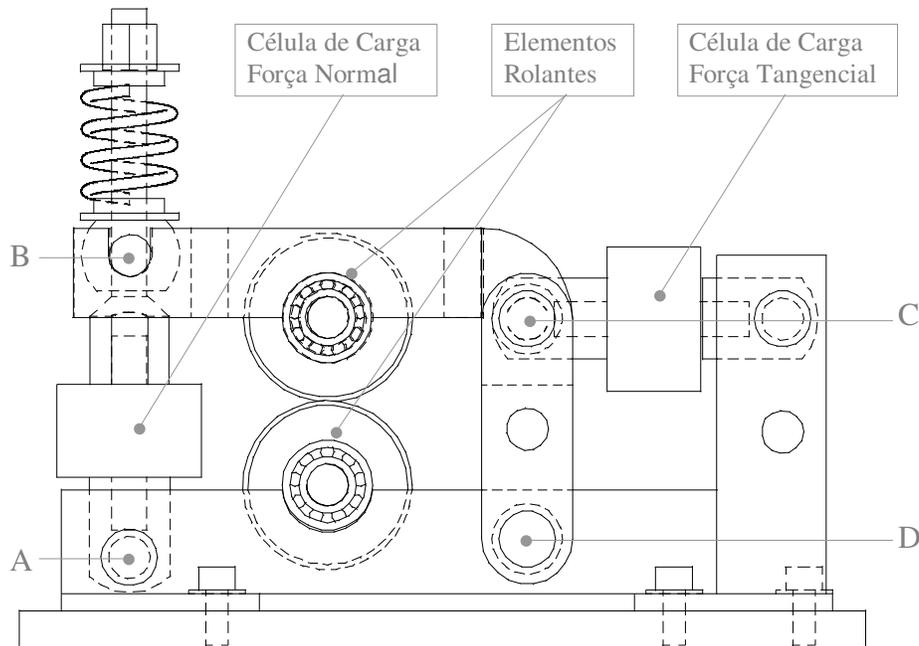


Figura 4.14 – Mecanismo de 4 barras para cálculo das forças normal e tangencial

Os pontos A, B, C e D da Figura 4.14 formam um mecanismo 4 barras, sendo a barra AD fixa. Quando os elementos rolantes são prensados um contra o outro e um torque é aplicado ao elemento rolante superior, ele faz com que o elemento rolante inferior gire e carregue o óleo que está na base do dispositivo formando um filme de óleo entre os elementos rolantes, Figura 4.13. Isso faz com que a barra AB (Figura 4.14) gire um pouco em torno de A e a barra CD gire um pouco em torno de D. A força responsável por esse movimento angular, ocorre devido a resistência ao cisalhamento do fluido lubrificante entre os elementos rolantes e, é medida pela célula de carga da força tangencial. Em função da geometria do dispositivo as forças normal e tangencial no ponto de contato é o dobro da marcada nas células de carga correspondente. Assim sendo, o coeficiente de tração é calculado diretamente pela relação entre as forças normal e tangencial.

A Figura 4.15 mostra a pressão no contato entre os elementos rolantes em função da força na célula de carga normal. A área de contato para o cálculo da pressão é encontrada utilizando o procedimento apresentado no Capítulo 6 seção 6.4.2.

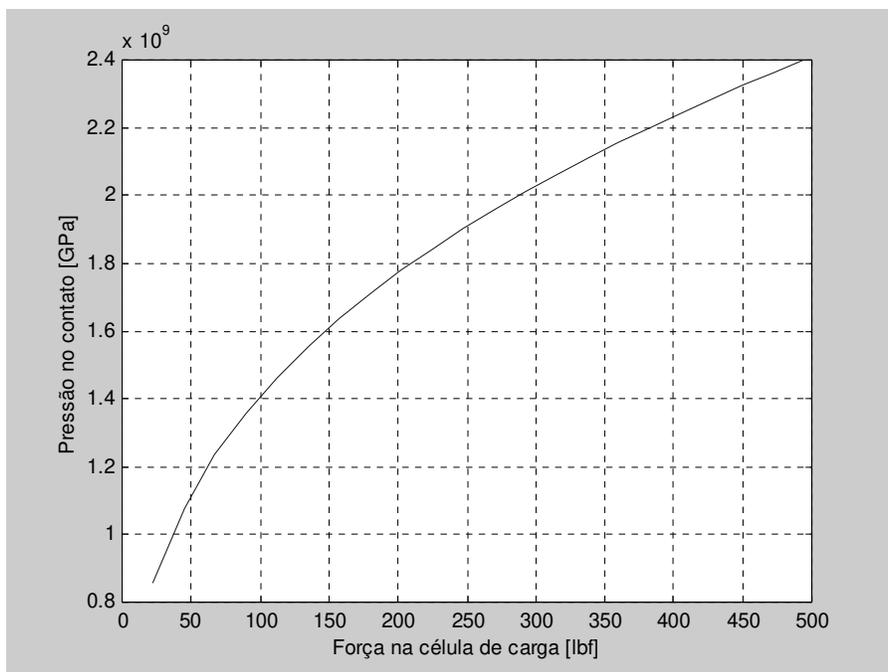


Figura 4.15 – Pressão no contato em função da força na célula de carga normal.

4.7 Resultados

Os resultados do coeficiente de tração em função do escorregamento apresentados nas Figuras 4.16 e 4.17, foram obtidos a partir de ensaios experimentais do óleo Texaco Multigear LS 85W140, cujas características típicas são apresentadas na Tabela 4.2

A pressão de teste no contato foi de 1.2 GPa, a temperatura do óleo no cárter próximo aos elementos rolantes era de 39°, a velocidade de rotação era de aproximadamente 600 rpm (velocidade linear por volta de 1890 mm/s), sem movimento de spin, ou seja, os eixos de rotação dos elementos rolantes eram paralelos.

Tabela 4.2 – Características típicas do óleo Texaco Multigear LS 85W140

MULTIGEAR LS	
Grau de Viscosidade SAE	85W140
Código	02361
Densidade a 20°.C, g.cm ³ (D-4052)	0.908
Cor, ASTM (D-1500)	3.5
Ponto de Fulgor, °C (D-92)	202
Ponto de Fluidez	-18
Viscosidade sCt a 40°. C	380
sCt a 100°. C	26.8
Índice de Viscosidade (D-2270)	96
Corr. Lâmina Cu 3H/100°C (D-130)	1 A

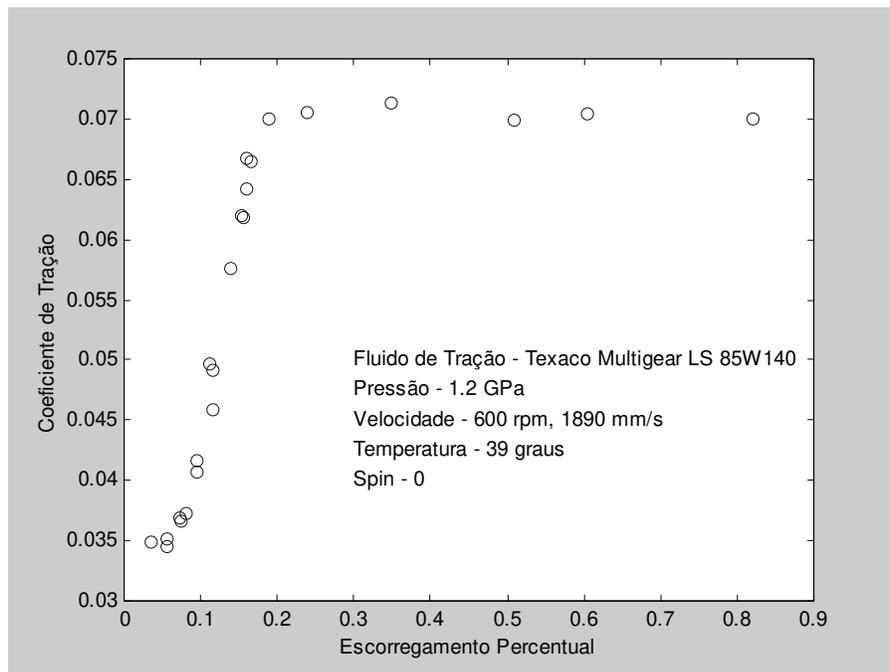


Figura 4.16 – Valores experimentais do coeficiente de tração

Comparando as Figura 4.16 com a Figura 4.7 nota-se que o fluido estudado apresenta um comportamento bem próximo ao elasto-plástico. Em virtude da velocidade de rotação ser relativamente baixa, o coeficiente de tração máximo foi de aproximadamente 0.07. Como se pode constatar através da Figura 4.10a, quanto maior a velocidade de rotação menor o coeficiente de

tração. Como é aconselhável trabalhar por volta de 75% do coeficiente de tração máximo, seria razoável adotarmos um valor de 0.05 para o coeficiente de tração que, corresponde a um escorregamento por volta de 0.12% entre os elementos rolantes da transmissão.

Os resultados apresentados na Figura 4.17 são os mesmos da Figura 4.16, apenas foi alterada a escala no eixo das abscissas.

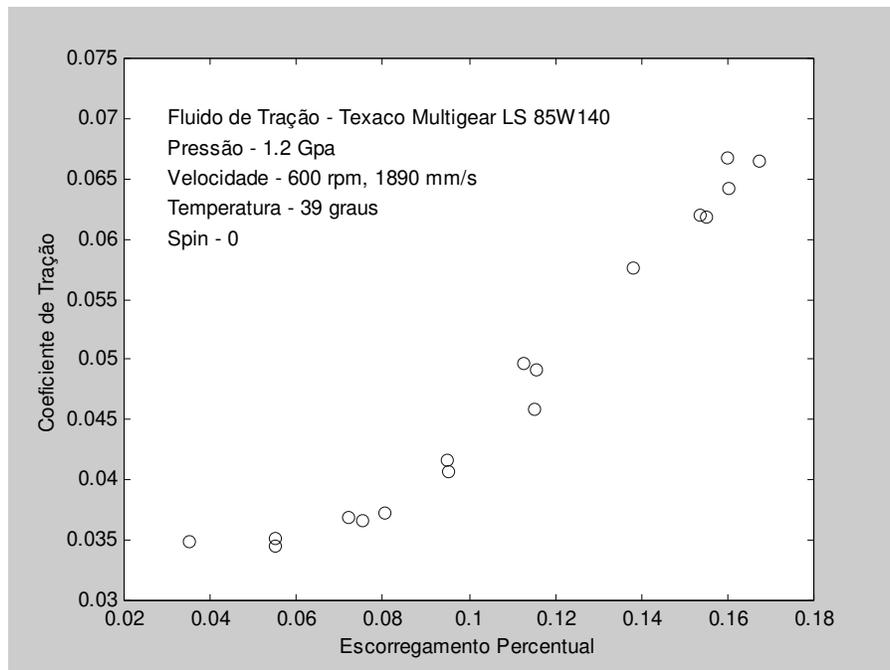


Figura 4.17- Valores experimentais do coeficiente de tração

4.8 Comentários e Conclusão

Durante os teste deve-se evitar que o escorregamento entre os elementos rolantes ultrapasse um determinado valor limite, a partir do qual rompe-se o filme de fluido e os elementos rolantes entram em contato direto ocasionando a falha dos elementos rolantes

Depois de determinar experimentalmente as curvas do coeficiente de tração em função do escorregamento é aconselhável adotar o valor de projeto do coeficiente de tração como sendo 75% do limite máximo. Coeficiente de tração muito baixo torna necessária a aplicação de forças

normais nos contatos mais altas para transferir a mesma potência. Isso, diminui o tempo de vida do conjunto como pode ser visto no Capítulo 6 seção 6.4.

O limite máximo do coeficiente de tração do fluido testado nesse trabalho foi 0.07, Figura 4.16. Assim sendo, adotou-se como valor de projeto 0.05. Esse valor foi usado nas simulações numéricas para calcular a transmissão de potência através da CVT e estimar o tempo de vida da transmissão, seção 6.4.3.

Capítulo 5

Desenvolvimento da TD-CVT Esfera-Cone

5.1 Introdução

Os diferentes tipos de TD-CVTs diferenciam-se basicamente pela forma geométrica dos elementos rolantes em contato. Nesse projeto optou-se pela TD-CVT tipo esfera cone basicamente por causa de suas formas geométricas serem relativamente simples, e por apresentar grande potencialidade de ser adaptada em bicicletas comerciais sem muitas mudanças.

Nesse capítulo será apresentado o projeto de uma TD-CVT tipo esfera cone para um sistema de baixo torque e baixa potência. Os tópicos abordados são:

- Princípio de funcionamento e forma construtiva da TD-CVT tipo esfera cone;
- Mecanismo de ajuste da relação de transmissão da TD-CVT;
- Mecanismo para aumentar a força normal no contato entre os elementos em contato de rolamento, evitando que o escorregamento entre esses elementos aumente muito quando um torque é aplicado e danifique-os;
- Equações cinemáticas e dinâmicas do sistema;
- Bancada de testes para ensaio da TD-CVT projetada;
- Comentários e conclusões.

5.2 Forma Construtiva de uma TD-CVT Tipo Esfera-Cone

5.2.1 Princípio do Funcionamento

A Figura 5.1 mostra três configurações possíveis da TD-CVT proposta diferenciando-se apenas pela inclinação do eixo de rotação da esfera e, conseqüentemente, pela variação do comprimento das cordas (linhas tracejadas perpendiculares ao eixo de rotação da esfera) nos pontos de contato entre a esfera e o cone. A configuração da Figura 5.1a representa redução de velocidade, ou seja, a velocidade angular no cone de saída é menor do que no cone de entrada, uma vez que, a corda da esfera no contato com o cone de entrada é maior do que com o cone de saída. Em contra partida, na configuração da Figura 5.1c a velocidade no cone de saída é maior do que no cone de entrada, representando assim, uma ampliação de velocidade. A Figura 5.1b representa uma relação de transmissão 1:1.

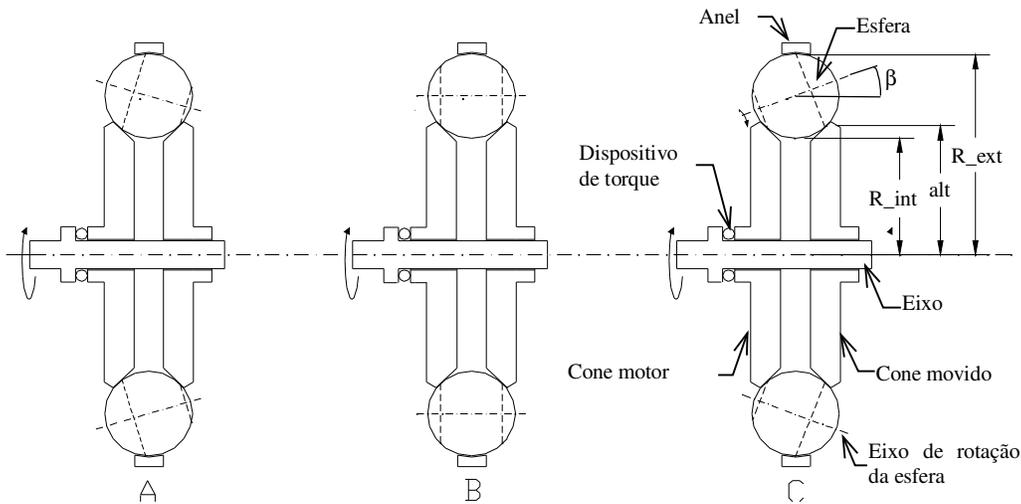


Figura 5.1 - CVT representado, (A) redução, (B) relação 1:1 e (C) ampliação de movimento.

5.2.2 Variação da Relação de Transmissão Através das Esferas

A Figura 5.2a representa uma esfera da transmissão, sendo C e D pontos de contato da esfera com os cones de entrada e saída respectivamente, Figura 5.2b.

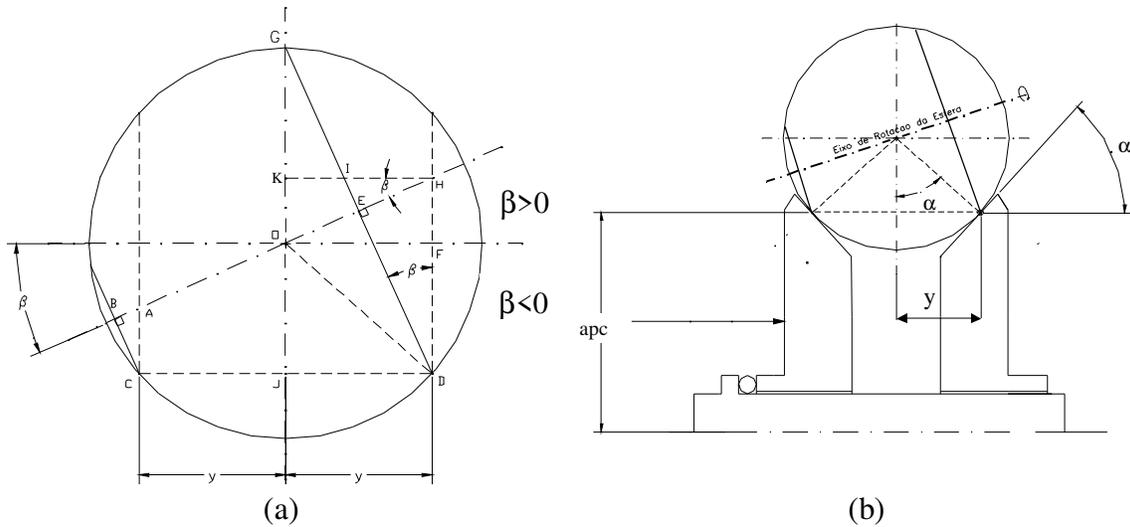


Figura 5.2 – Relação de transmissão através da inclinação do eixo da esfera

A relação de transmissão rt é dada por:

$$rt = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \quad (5.1)$$

sendo: $\begin{cases} \overline{BC} = [\overline{FD} - y \tan(\beta)] \cos(\beta) \\ \overline{DE} = [\overline{FD} + y \tan(\beta)] \cos(\beta) \end{cases}$ e $\overline{FD} = \sqrt{(\overline{OD})^2 - y^2} = \text{constante} = c1$

Como \overline{OD} (raio da esfera) e y são constantes para uma dada montagem, o valor de rt é função apenas de β .

$$rt = \frac{c1 - (y \tan(\beta))}{c1 + (y \tan(\beta))} \quad (5.2)$$

Portanto:

$rt > 1$	$\overline{BC} > \overline{DE}$	e	$\beta < 0$	redução do movimento
$rt = 1$	$\overline{BC} = \overline{DE}$	e	$\beta = 0$	entrada = saída
$rt < 1$	$\overline{BC} < \overline{DE}$	e	$\beta > 0$	ampliação do movimento

Fazendo o caminho inverso ao da Equação 5.2, pode-se encontrar β em função de rt ,

$$\tan(\beta) = \frac{c1 [1 - rt]}{y [rt + 1]} \quad (5.3)$$

Através das Equações 5.2 e 5.3 nota-se que a distância y está diretamente ligada à faixa de variação da relação de transmissão. Para uma faixa de relação de transmissão variando de 1:2 ~2:1 (0.5 ~ 2), define-se o fator *overrange* como sendo a divisão dos extremos da faixa da relação de transmissão. Assim sendo, para a faixa de 1:2 ~ 2:1 o *overrange* é 4, ou seja, (2÷0.5).

$$\overline{DE} = 2 \overline{BC} \quad (5.4)$$

substituindo na Equação 5.2 temos:

$$c1 + y \tan(\beta) = 2 (c1 - y \tan(\beta)) \quad (5.5)$$

$$-c1 + 3y \tan(\beta) = 0 \quad (5.6)$$

lembrando que $c1 = \sqrt{OD^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - y^2}$

$$3y \tan(\beta) = \sqrt{r^2 - y^2} \quad (5.7)$$

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{9 \tan(\beta)^2 + 1}} \quad (5.8)$$

Similarmente pode-se encontrar os valores de y para *overrange* de 6.25 (1:2,5 ~2,5:1):

$$y = \sqrt{\frac{2.25 r^2}{12.25 \tan(\beta)^2 + 2.25}} \quad (5.9)$$

e, para *overrange* de 9 (1:3 ~ 3:1) o valor de y correspondente será:

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{4 \tan(\beta)^2 + 1}} \quad (5.10)$$

A Figura 5.3 mostra a relação entre o fator *overrange*, β e α (inclinação dos cones de entrada e saída). Nesse projeto optou-se por: $\beta = 60$ e *overrange* = 2, conseqüentemente, da Figura 5.3a $\alpha = 30$. Essa escolha ficará mais clara no Capítulo 6, no qual será abordada a otimização da TD-CVT em função de parâmetros de projeto, entre eles a perda de potência em função do movimento de spin no contato, seção 6.3.

Na próxima seção será descrita a forma construtiva da TD-CVT juntamente com o mecanismo para ajuste da relação de transmissão.

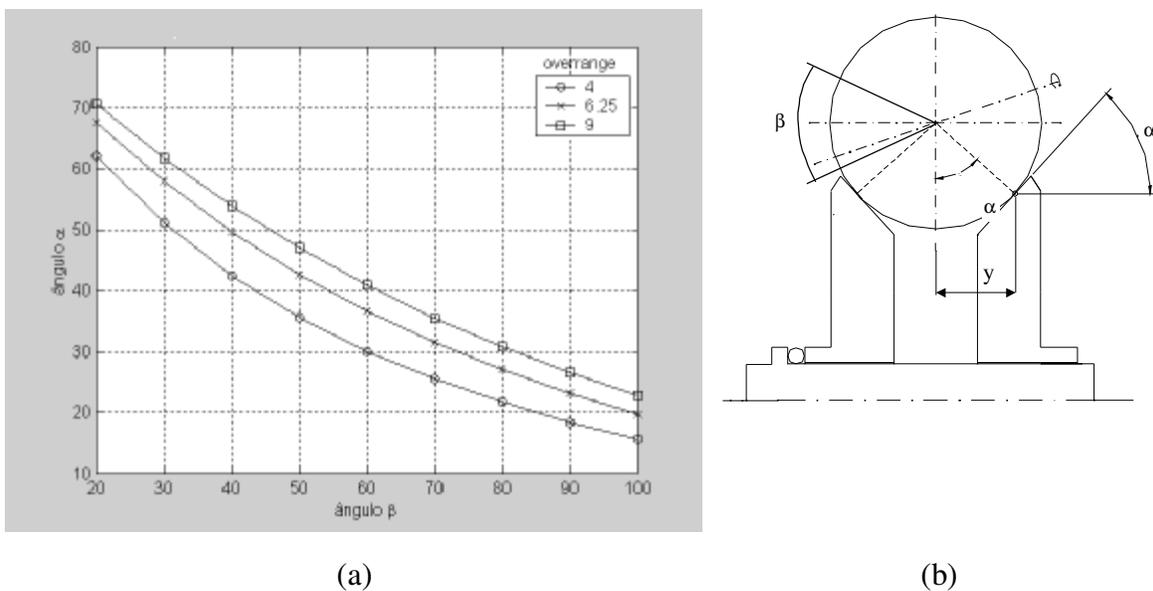


Figura 5.3 – Relação entre as variáveis α , β e a faixa da relação de transmissão.

5.3 Forma Construtiva da TD-CVT Tipo Esfera Cone Proposta

A Figura 5.4 mostra uma visão em 3D da TD-CVT projetada, enquanto que, a Figura 5.5 detalha os seus componentes principais. Algumas partes como as peças 2, 6 e 10, respectivamente comes, disco de ajuste da relação de transmissão e esferas serão apresentados com mais detalhes nesse capítulo. Os desenhos de todas as peças podem ser vistos no Apêndice B.

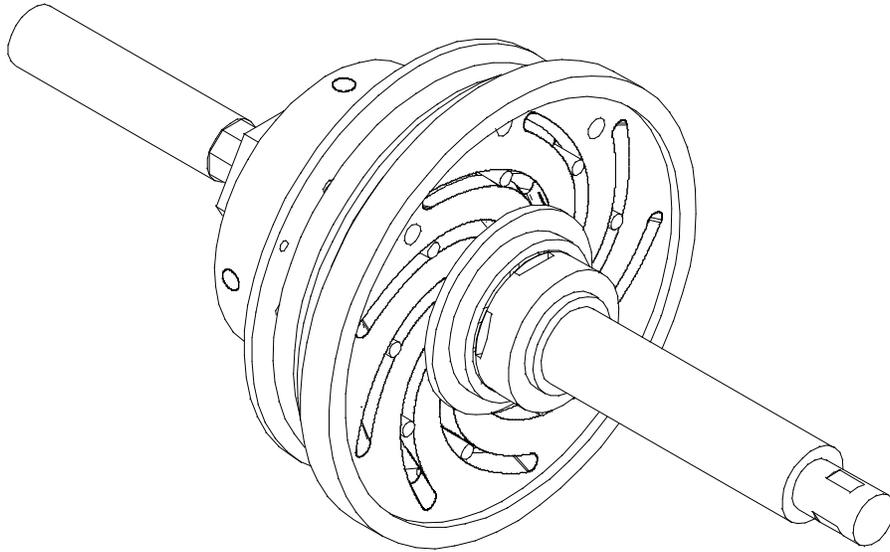
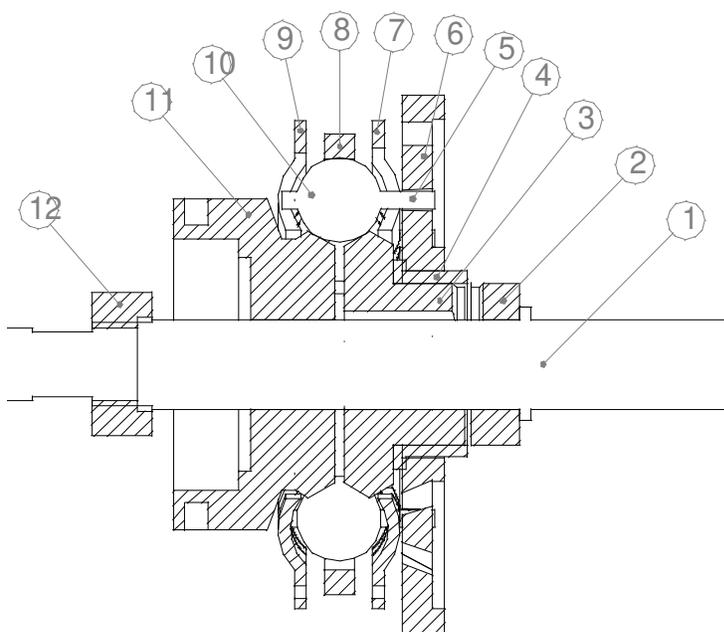


Figura 5.4 – Vista em 3D da TD-CVT proposta



1. Eixo Principal
2. Cames
3. Cone da Direita - Motor
4. Bucha
5. Eixo de Rotação da Esfera
6. Disco de Ajuste da RT
7. Disco de Alinhamento da Direita
8. Anel
9. Disco de Alinhamento da Esquerda
10. Esfera
11. Cone da Esquerda - Movido
12. Porca de Aperto

Figura 5.5 – Detalhe dos elementos da TD-CVT

Apesar da forma geométrica ser relativamente simples, o projeto geométrico da TD-CVT envolve uma quantidade razoável de variáveis intimamente relacionadas. Assim sendo, foi

desenvolvido um programa em Matlab® para minimizar erros geométricos no início do projeto. Este programa está detalhado no Capítulo 6, seção 6.2.

5.3.1 Funcionamento da Transmissão

O torque externo é aplicado ao sistema através do eixo principal. Metade do cames é fixo ao eixo e gira solidário a ele, Figura 5.6.

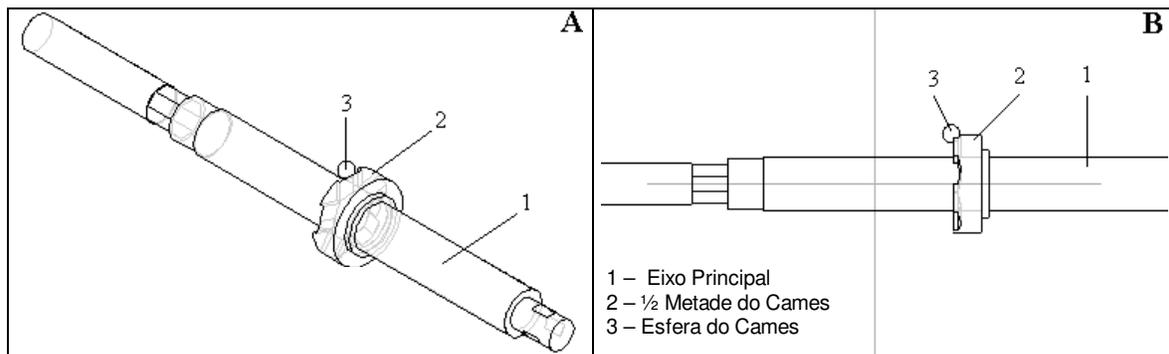


Figura 5.6 – Funcionamento da transmissão, esquema 1

A outra metade do cames é solidária ao cone de entrada. Entre as duas metades do cames encontra-se um conjunto de cinco esferas. Quando um torque é aplicado ao eixo, as esferas tendem a movimentar o cone motor na direção axial, Figura 5.7. Após esse pequeno deslocamento axial do cone motor ele passa a girar com a mesma velocidade angular do eixo de principal.

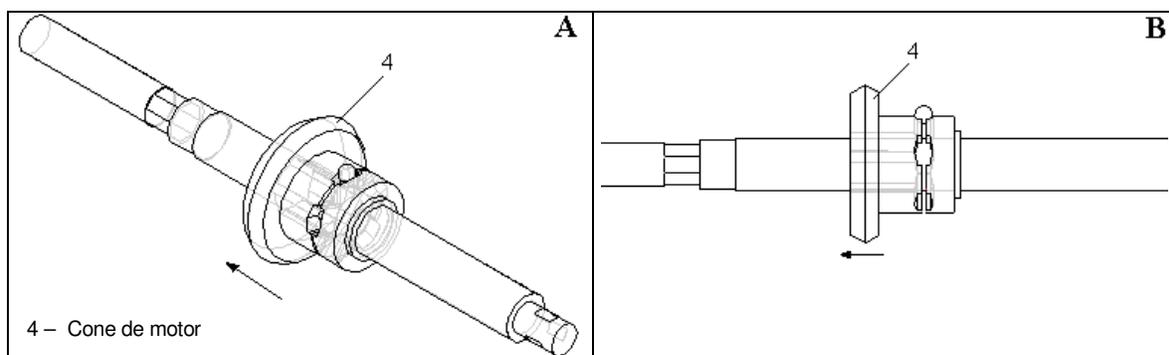


Figura 5.7 – Funcionamento da transmissão, esquema 2

O cone motor comprime um conjunto de 9 esferas igualmente espaçadas contra o cone movido. A Figura 5.8 que apresenta apenas uma dessas esferas. Essa compressão aumenta a força normal no contato entre as esferas e os cones motor e movido, evitando assim o escorregamento e aumentando a força tangencial transmitida entre os elementos rolantes.

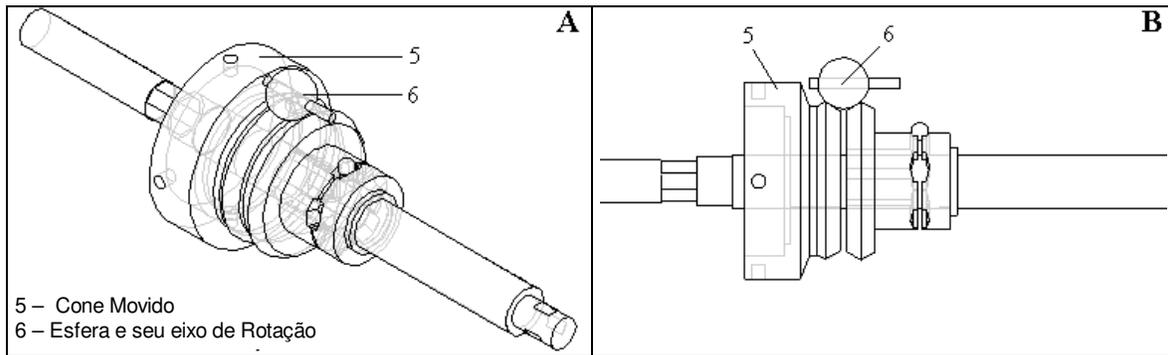


Figura 5.8 – Funcionamento da transmissão, esquema 3

Entre o eixo principal e o cone de saída há um rolamento cônico que permite a rotação relativa entre esses dois elementos. Esse rolamento fica posicionado numa cavidade no interior do cone movido, Figura 5.8. Ao cone de saída é conectada uma polia e uma correia que ligam a transmissão a um sistema externo, finalizando assim, a transmissão de potência, Figura 5.9.

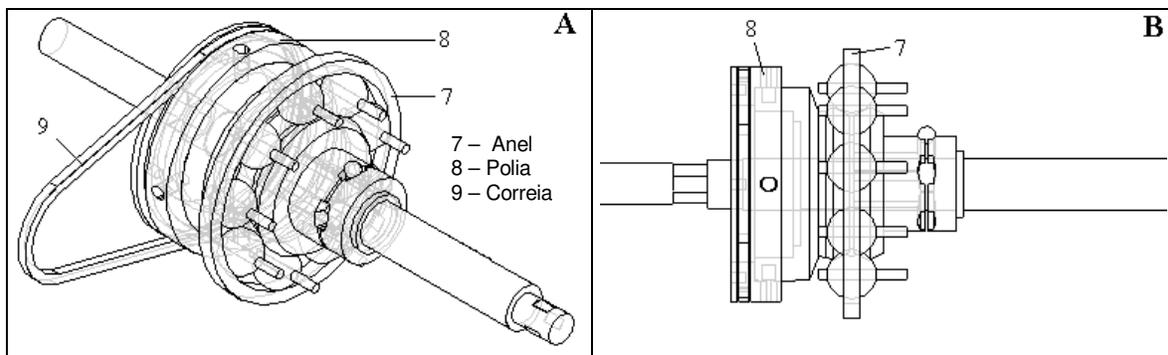


Figura 5.9 – Funcionamento da transmissão, esquema 4

As esferas são impedidas de “escaparem” radialmente quando um torque é aplicado por um anel externo como mostrado na Figura 5.9.

As esferas são mantidas nas posições desejadas, igualmente espaçadas, por dois discos de alinhamento ranhurados axialmente no quais são posicionados os eixos de rotação das esferas, impedindo assim, que as esferas movam-se ao redor da superfície dos cones. Assim sendo, as esferas movem-se apenas ao redor do seu eixo de rotação. Os discos de alinhamento são posicionados no local desejado por suportes que são fixos na carcaça (não mostrada) do conjunto (Figura 5.10).

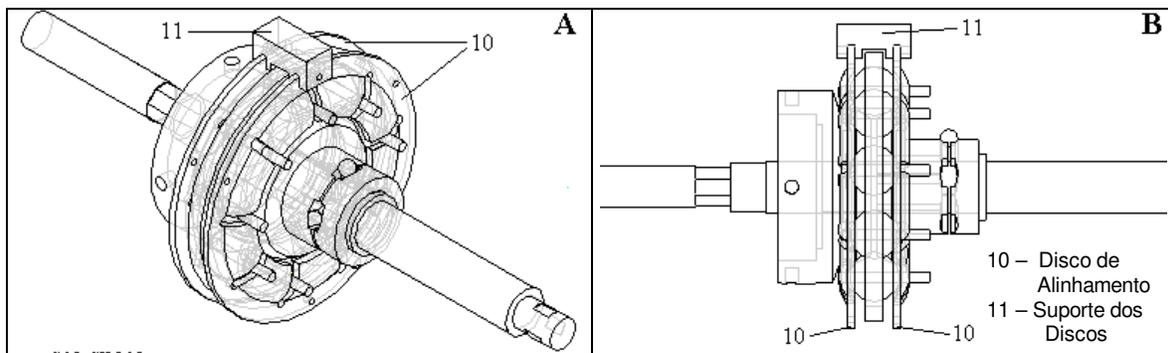


Figura 5.10 – Funcionamento da transmissão, esquema 5

O ajuste da relação de transmissão é feito através de um disco ranhurado, mostrado em primeiro plano na Figura 5.11. O movimento de rotação desse disco faz com que os eixos de rotação das esferas movam-se radialmente, variando assim, os comprimentos das cordas das esferas nos cones motor e movido e, conseqüentemente, a relação de transmissão, ver Figura 5.1.

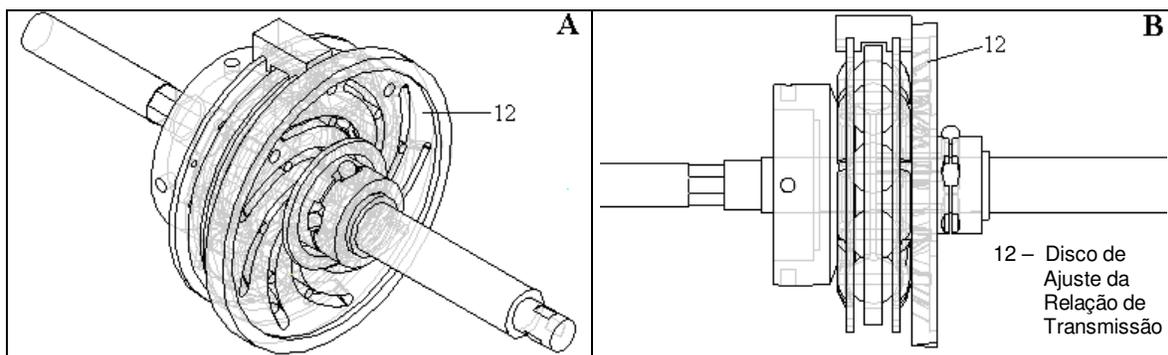


Figura 5.11 – Funcionamento da transmissão, esquema 6

Nesse tipo de transmissão os cones motor e movido giram no mesmo sentido.

5.3.2 Disco de Ajuste da Relação de Transmissão

Como pode ser visto nas Figuras 5.4 e 5.11, em primeiro plano, e na Figura 5.5, o disco de ajuste da relação de transmissão está em contato direto com os eixos de rotações das esferas e pode ter um movimento de rotação relativo em relação ao eixo principal. Assim sendo, em função do perfil do rasgo, um movimento de rotação do disco ao redor do eixo principal, faz com que os eixos das esferas tenham um movimento radial em relação disco. Dois discos de alinhamento, um à esquerda e outro à direita das esferas impedem que as esferas girem em torno do eixo principal. Desse modo, as esferas giram apenas ao redor dos seus próprios eixos de rotação.

Optou-se pelo uso de um disco para controle da relação de transmissão pois essa escolha diminui o número de peças móveis no sistema. Contudo, a geometria do rasgo é complexa e, conseqüentemente, impossível de ser construída em máquina ferramentas convencionais. Para a manufatura do disco foi utilizada a tecnologia da prototipagem rápida.

Na Figura 5.12 pode-se observar o princípio de funcionamento do mecanismo de ajuste da relação de transmissão. A idéia básica é que um deslocamento angular α , do disco em torno do eixo principal, causa um deslocamento angular β , em torno do centro das esferas, mudando assim, a relação de transmissão.

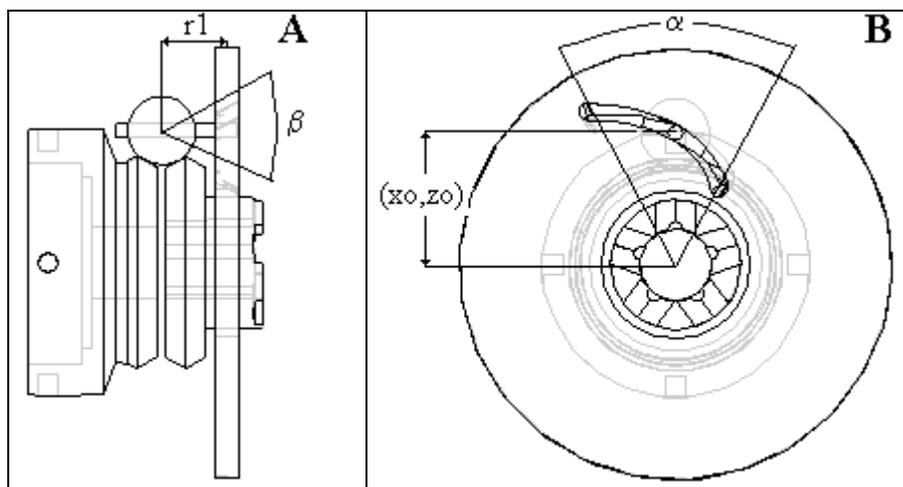


Figura 5.12 – Vista dos ângulos α e β na transmissão

Vários parâmetros influenciam no perfil do rasgo do disco de ajuste da relação de transmissão, entre eles:

- $r1$ - distância entre o centro da esfera e o ponto de contato entre o disco de ajuste e o eixo da esfera, Figura 5.12a;
- Ângulo β máximo - máxima inclinação do eixo da esfera, Figura 5.12a;
- relação (β/α) - Relação entre o ângulo de inclinação do eixo da esfera β , e o ângulo de rotação do disco de ajuste α .
- N - número de esferas.

O procedimento para o projeto do rasgo do disco pode ser visto no Apêndice C:

A Figura 5.13 apresenta detalhes do disco feito de polímero através da prototipagem rápida com as seguintes características:

- $r1 = 20\text{mm}$;
- Ângulo β máximo = 60° .
- relação $(\beta/\alpha) = 0.75$.
- $N = 9$.

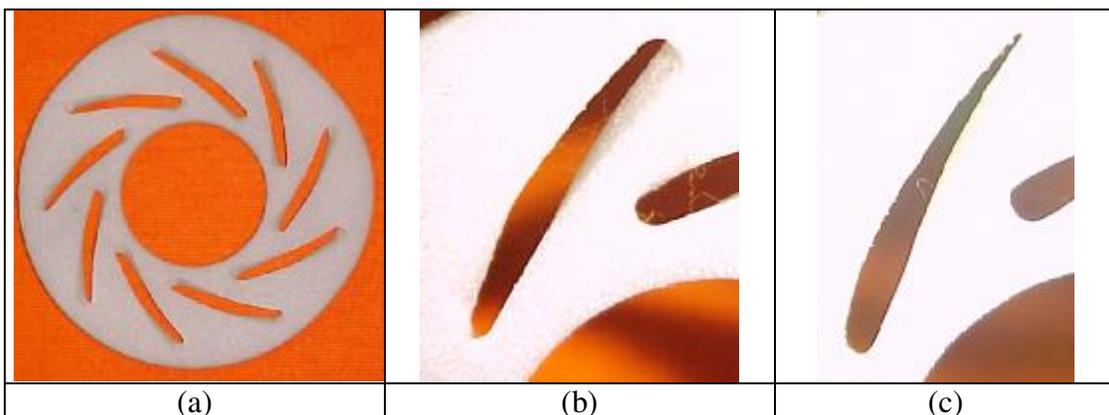


Figura 5.13 – Disco de ajuste da relação de transmissão e detalhe do rasgo

O próximo passo é determinar o tipo de mecanismo que pode ser usado para executar o movimento de rotação do disco.

5.4 Mecanismos para Posicionamento do Disco de Ajuste da RT

Como descrito anteriormente, o movimento de rotação do disco de ajuste ao redor do eixo principal resulta na variação de inclinação dos eixos das esferas e, conseqüentemente, na variação da relação de transmissão.

Dentre os possíveis mecanismos que podem ser utilizados para fazer com que o disco execute um movimento de rotação ao redor do eixo principal pode-se destacar: coroa e parafuso sem-fim e mecanismo 4 Barras.

Para os testes em bancada optou-se por um mecanismo 4 barras (ver seção 5.7).

5.5 Força Normal no Contato

Para o correto funcionamento da TD-CVT faz-se necessária a aplicação de uma força normal ao contato suficiente para que:

- A força tangencial no contato entre os elementos rolantes seja suficiente para transmitir o torque aplicado sem escorregamento excessivo;
- Produza uma pressão no contato suficiente para que o fenômeno da lubrificação elastohidrodinâmica possa ocorrer (Pressão ≥ 1.0 GPa)

Isso pode ser feito utilizando um *comes* localizado entre o eixo principal e o cone motor da transmissão.

5.5.1 Cames

A Figura 5.14 apresenta a relação geométrica entre as forças aplicadas no contato esfera-cone da CVT e a esfera na superfície do *comes* (seção AA).

É graças ao ângulo η da superfície do *comes* que a força no contato entre as esferas e os cones motor e movido F_n , pode ser ampliada. O valor do ângulo η não deve ser menor que 3 graus para evitar o auto-travamento do mecanismo, Chirones (1965).

Nesse projeto optou-se por $\eta=10^\circ$. Todo o procedimento desse cálculo pode ser visto no Apêndice D.

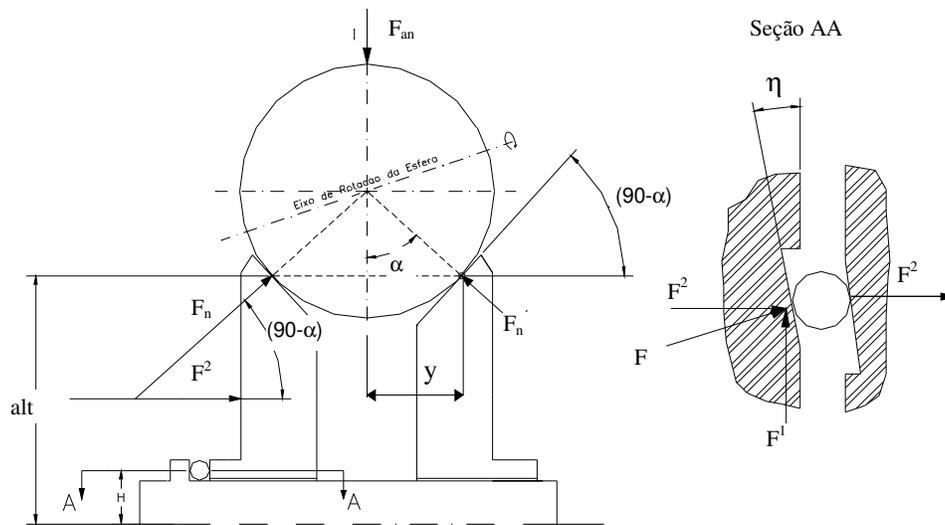


Figura 5.14 - Princípio de funcionamento do *comes*

5.6 Sistema de Controle

O projeto do sistema de controle é uma parte importante no desenvolvimento de CVTs. Nessa seção serão apresentadas as equações principais que governam o funcionamento de uma TD-CVT tipo esfera cone.

5.6.1 Notações

R – raio

$\theta, \dot{\theta}$ – deslocamento e velocidade angular

T, V – Energia Cinética e Energia Potencial

rt – relação de transmissão

Y – distância do eixo z ao ponto de contato entre a esfera e o cone

I – Momento de Inércia

L – Lagrangeano

Tor – Torque Aplicado

C – Carga imposta na saída da transmissão

índices:

1, 2, 3, 4 – representa os elementos: cones motor e movido, esfera e anel, Figura 5.15

x, y, z – eixos coordenados

3e, 3s – metade do comprimento das cordas da esfera formado respectivamente pela união dos pontos de contato com os cones motor e movido e passando perpendicular ao eixo de rotação da esfera. Da Figura 5.2 nota-se que 3e e 3s são similares aos comprimentos \overline{BC} e \overline{DE}

e – esfera

3a – metade do comprimento da corda da esfera formada pela união do ponto de contato entre a esfera e o anel externo e passando perpendicular ao eixo de rotação da esfera.

5.6.2 Relações Cinemáticas

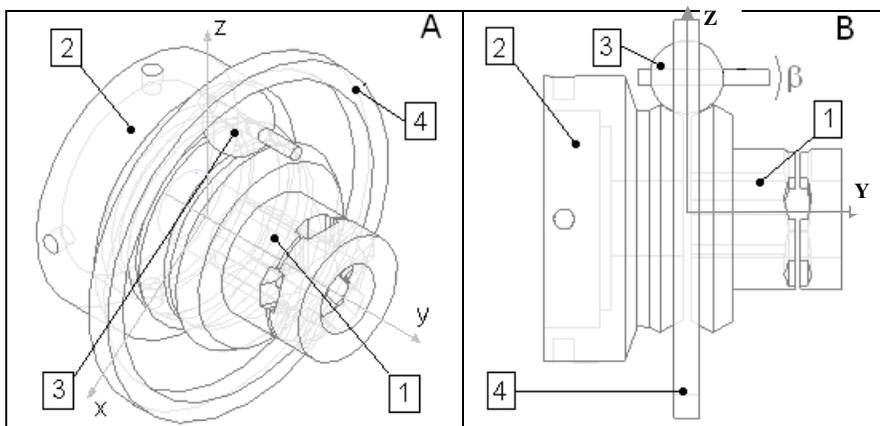


Figura 5.15 – Elementos da transmissão

A seguir serão relacionadas as velocidades dos elementos rolantes 2, 3 e 4 em função do elemento 1, desconsiderando o escorregamento entre eles.

Relação entre as velocidades dos corpos 1 e 3.

$$R_1 \theta_{1y}^{\&} = R_{3e} \theta_{3y}^{\&} \rightarrow \theta_{3y}^{\&} = \frac{R_1 \theta_{1y}^{\&}}{R_{3e}} \quad (5.11)$$

Relação entre as velocidades dos corpos 1 e 2.

$$R_{3s} \theta_{3y}^{\&} = R_2 \theta_{2y}^{\&} \rightarrow \theta_{2y}^{\&} = \frac{R_{3s} \theta_{3y}^{\&}}{R_2} \quad (5.12)$$

substituindo a Equação 5.11 em 5.12

$$\theta_{2y}^{\&} = \frac{R_{3s}}{R_2} \frac{R_1}{R_{3e}} \theta_{1y}^{\&} \quad (5.13)$$

como $R_1 = R_2$, tem-se que:

$$\theta_{2y}^{\&} = \frac{R_{3s}}{R_{3e}} \theta_{1y}^{\&} \rightarrow \theta_{2y}^{\&} = rt \theta_{1y}^{\&} \quad (5.14)$$

sendo rt a relação de transmissão

Relação entre os corpos 1 e 4.

$$R_{3a} \theta_{4y}^{\&} = R_{3e} \theta_{3y}^{\&} \rightarrow \theta_{4y}^{\&} = \frac{R_{3e} \theta_{3y}^{\&}}{R_{3a}} \quad (5.15)$$

$$\theta_{4y}^{\&} = \frac{R_{3e}}{R_{3a}} \frac{R_1}{R_{3e}} \theta_{1y}^{\&} \rightarrow \theta_{4y}^{\&} = \frac{R_1}{R_{3a}} \theta_{1y}^{\&} \quad (5.16)$$

5.6.3 Equações Dinâmicas

As equações diferenciais que descrevem o movimento de um sistema dinâmico com n graus de liberdade podem ser escritas na forma das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.17)$$

sendo L o Lagrangeano e q_k as coordenadas generalizadas do sistema.

Para o caso em que há p forças F agindo no sistema a equação toma a forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.18)$$

sendo:

$$Q_k = \sum_{j=1}^p F_j \frac{\partial s_j}{\partial q_k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5.19)$$

$$s_j = s_j(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (5.20)$$

Como $L = T - V$ e $V = 0 \rightarrow L = T$, sendo T a energia cinética e V a energia potencial do sistema.

Logo a Energia Cinética do Sistema é:

$$T = \frac{I_{1y} \dot{\theta}_{1y}^2}{2} + \frac{I_{2y} \dot{\theta}_{2y}^2}{2} + \frac{I_{3y} \dot{\theta}_{3y}^2}{2} + \frac{I_{4y} \dot{\theta}_{4y}^2}{2} + \frac{I_{3x} \dot{\theta}_{3x}^2}{2} \quad (5.21)$$

Substituindo as Equações 5.11, 5.14 e 5.16 em 5.21

$$T = \frac{\dot{\theta}_{1y}^2}{2} \left[I_{1y} + (rt)^2 I_{2y} + \left(\frac{R_1}{R_{3e}} \right)^2 I_{3y} + \left(\frac{R_1}{R_{3a}} \right)^2 I_{4y} \right] + \frac{I_{3x} \dot{\theta}_{3x}^2}{2} \quad (5.22)$$

sendo:

$$rt = \left[\frac{\sqrt{R_E - Y^2} - Y \tan(\theta_{3x})}{\sqrt{R_E - Y^2} + Y \tan(\theta_{3x})} \right] \quad (5.23)$$

e,

$$\sqrt{R_3 - Y^2} = \text{constante} = c1$$

$$R_1 = \text{constante}$$

$$R_{3e} = c1 - Y \tan(\theta_{3x})$$

$$R_{3a} = R_E \cos(\theta_{3x})$$

tem-se que:

$$T = \frac{\dot{\theta}_{1y}}{2} \left[I_{1y} + \left(\frac{c1 - Y \tan(\theta_{3x})}{c1 + Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{2y} + \left(\frac{R_1}{c1 - Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{3y} + \left(\frac{R_1 \sec(\theta_{3x})}{R_E} \right)^2 I_{4y} \right] + \frac{I_{3x} \dot{\theta}_{3x}}{2} \quad (5.24)$$

Para a coordenada generalizada θ_{1y} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{1y}} = Q_{1y} \quad (5.25)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1y}} = \dot{\theta}_{1y} \left[I_{1y} + \left(\frac{c1 - Y \tan(\theta_{3x})}{c1 + Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{2y} + \left(\frac{R_1}{c1 - Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{3y} + \left(\frac{R_1 \sec(\theta_{3x})}{R_E} \right)^2 I_{4y} \right] \quad (5.26)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{1y}} \right) = \dot{\theta}_{1y} \left[I_{1y} + \left(\frac{c1 - Y \tan(\theta_{3x})}{c1 + Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{2y} + \left(\frac{R_1}{c1 - Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{3y} + \left(\frac{R_1 \sec(\theta_{3x})}{R_E} \right)^2 I_{4y} \right] \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_{1y}} = 0 \quad (5.28)$$

sendo:

$$Q = Tor_{1y} - C$$

$$\dot{\theta}_{1y} \left[I_{1y} + \left(\frac{c1 - Y \tan(\theta_{3x})}{c1 + Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{2y} + \left(\frac{R_1}{c1 - Y \tan(\theta_{3x})} \right)^2 I_{3y} + \left(\frac{R_1 \sec(\theta_{3x})}{R_E} \right)^2 I_{4y} \right] = Tor_{1y} - C \quad (5.29)$$

Para a coordenada generalizada θ_{3x} :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{3x}} = Q_{3x} \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3x}} = I_{3x} \dot{\theta}_{3x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{3x}} \right) = I_{3x} \ddot{\theta}_{3x} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_{3x}} = \frac{\dot{\theta}_{3x}}{2} & \left[\frac{2 I_{4y} R_1^2 \text{Sec}(\theta_{3x})^2 \text{Tan}(\theta_{3x})^2}{R_2^2} + \frac{2 I_{3y} R_1^2 Y \text{Sec}(\theta_{3x})^2}{[c1 - Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^3} - \right. \\ & \left. \frac{2 I_{2y} Y \text{Sec}(\theta_{3x})^2 [c1 - Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^2}{[c1 + Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^3} - \frac{2 I_{2y} Y \text{Sec}(\theta_{3x})^2 [c1 - Y \text{Tan}(\theta_{3x})]}{[c1 + Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^3} \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

sendo:

$$Q = \text{Tor}_{3x}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} I_{3x} \ddot{\theta}_{3x} - \frac{\dot{\theta}_{3x}}{2} & \left[\frac{2 I_{4y} R_1^2 \text{Sec}(\theta_{3x})^2 \text{Tan}(\theta_{3x})^2}{R_2^2} + \frac{2 I_{3y} R_1^2 Y \text{Sec}(\theta_{3x})^2}{[c1 - Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^3} - \right. \\ & \frac{2 I_{2y} Y \text{Sec}(\theta_{3x})^2 [c1 - Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^2}{[c1 + Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^3} - \\ & \left. + \frac{2 I_{2y} Y \text{Sec}(\theta_{3x})^2 [c1 - Y \text{Tan}(\theta_{3x})]}{[c1 + Y \text{Tan}(\theta_{3x})]^3} \right] = \text{Tor}_{3x} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Considerando os elementos da TD-CVT com sendo corpos rígidos, as Equações 5.29 e 5.33 governam o sistema dinâmico. Em virtude da não linearidade das equações, o projeto de um sistema de controle requer uma atenção especial. Por esse motivo, optou-se por desenvolvê-lo num trabalho futuro, como proposto no Capítulo 1 seção 1.3.2.3 (Trabalho Futuro 2).

5.7 Bancada de teste da TD-CVT

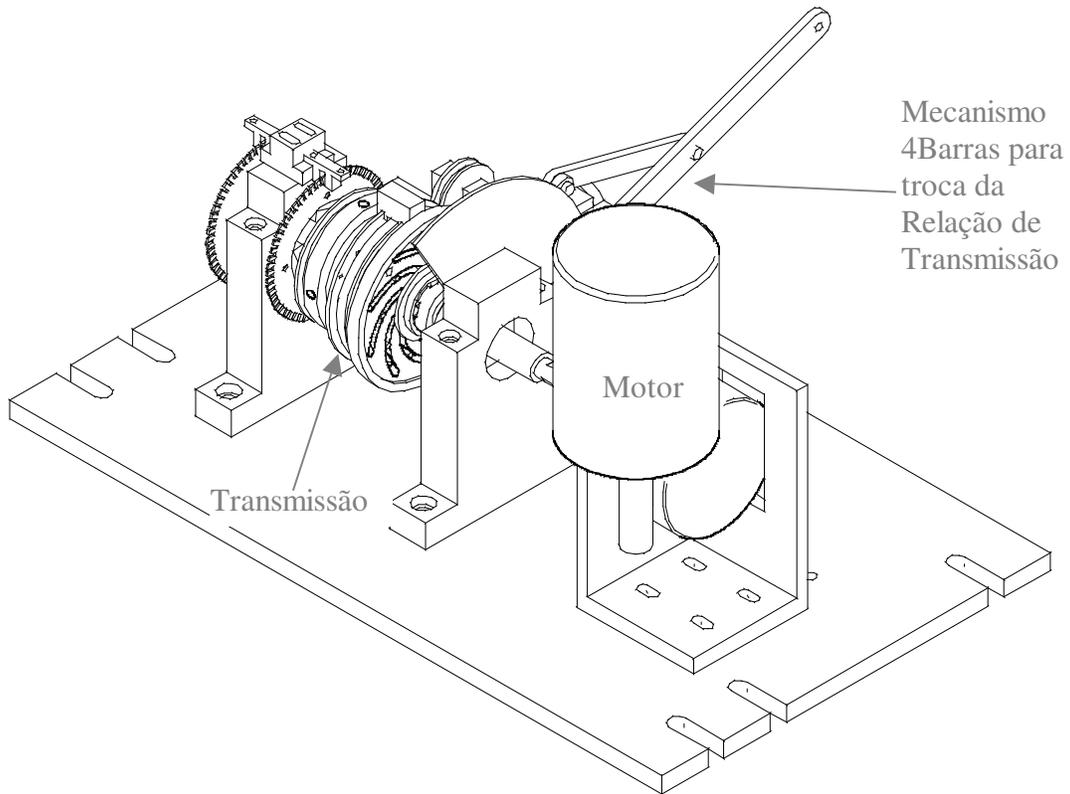


Figura 5.16 – Vista 3D da TD-CVT na bancada

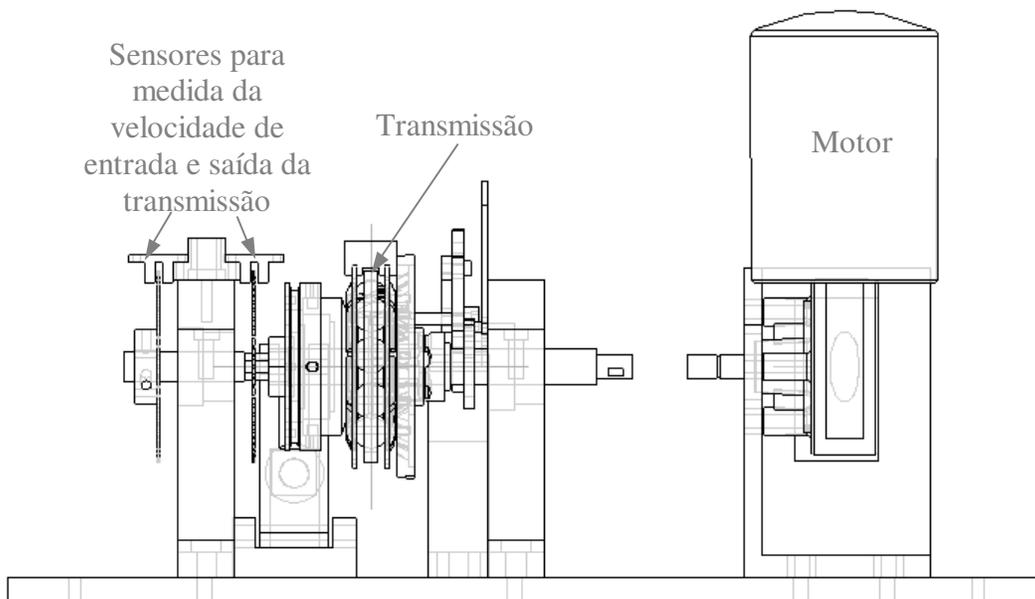


Figura 5.17 – Vista 2D da TD-CVT na bancada

Uma bancada de teste foi construída para aplicar os conceitos desenvolvidos e viabilizar a execução dos trabalhos futuros necessários para a conclusão desse projeto. A Figura 5.16 apresenta uma visão geral da bancada construída para o teste da transmissão. Ao passo que, a Figura 5.17 mostra uma vista em 2D da bancada.

A seguir será mostrada uma seqüência de fotos do protótipo e da bancada. A Figura 5.18 mostra os cones motor e movido e as esferas da transmissão posicionadas com os discos de alinhamento do eixo de rotação da esfera. A Figura 5.19 apresenta os elementos acima descritos numa única montagem. Mostra também o disco de ajuste da relação de transmissão, em que é possível ver uma das extremidades do eixo de rotação da esfera no interior de cada rasgo.



Figura 5.18 – Partes da TD-CVT 1.

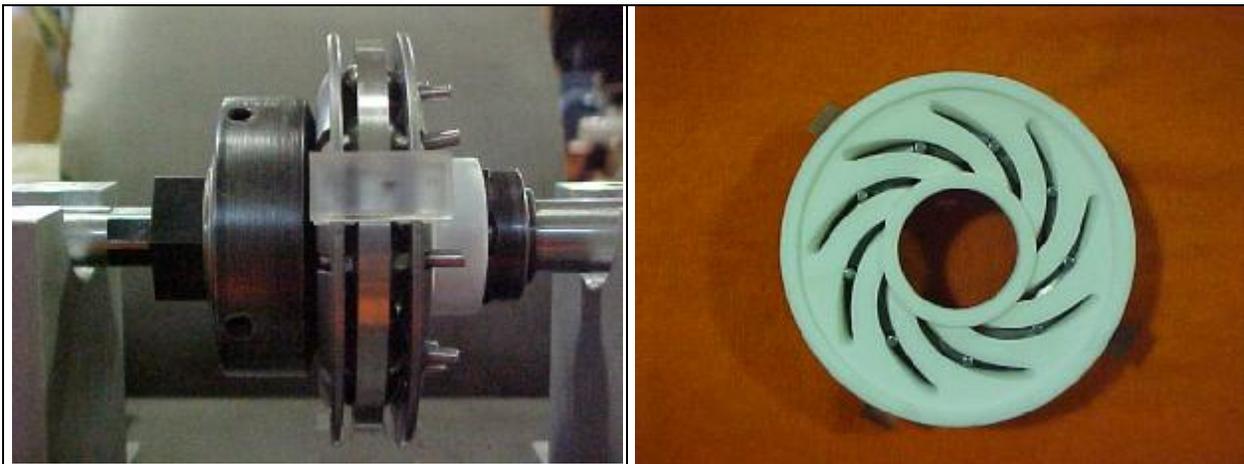


Figura 5.19- Partes da TD-CVT 2

A Figura 5.20 mostra o disco de ajuste da relação de transmissão posicionado no conjunto e, a carcaça da transmissão feita em acrílico para fácil visualização dos elementos quando em movimento.



Figura 5.20- Partes da TD-CVT 3

Finalizando, a Figura 5.21 apresenta a bancada de testes equipada e pronta para trabalhos futuros.

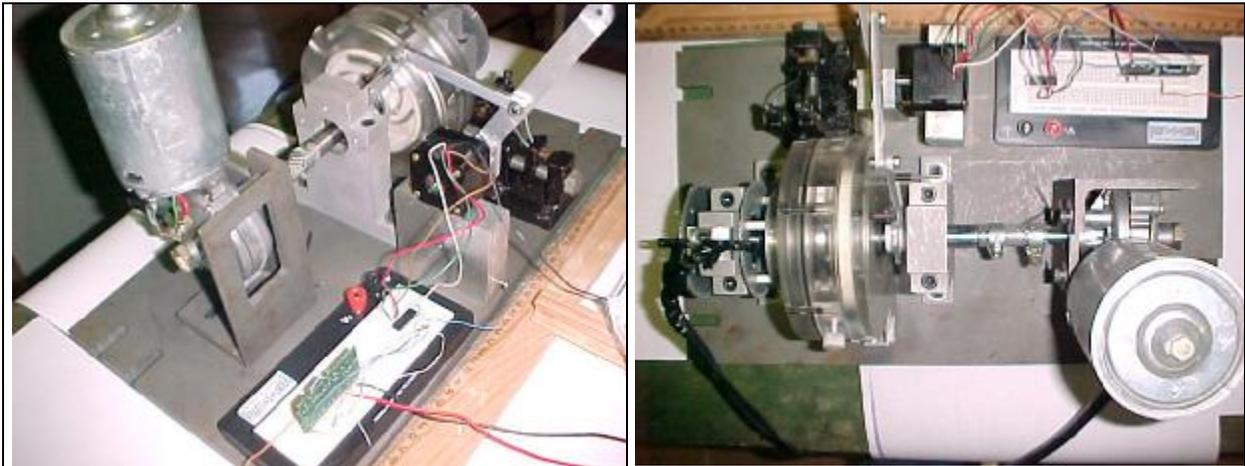


Figura 5.21- Partes da TD-CVT 4

5.8 Aplicação da Transmissão Desenvolvida

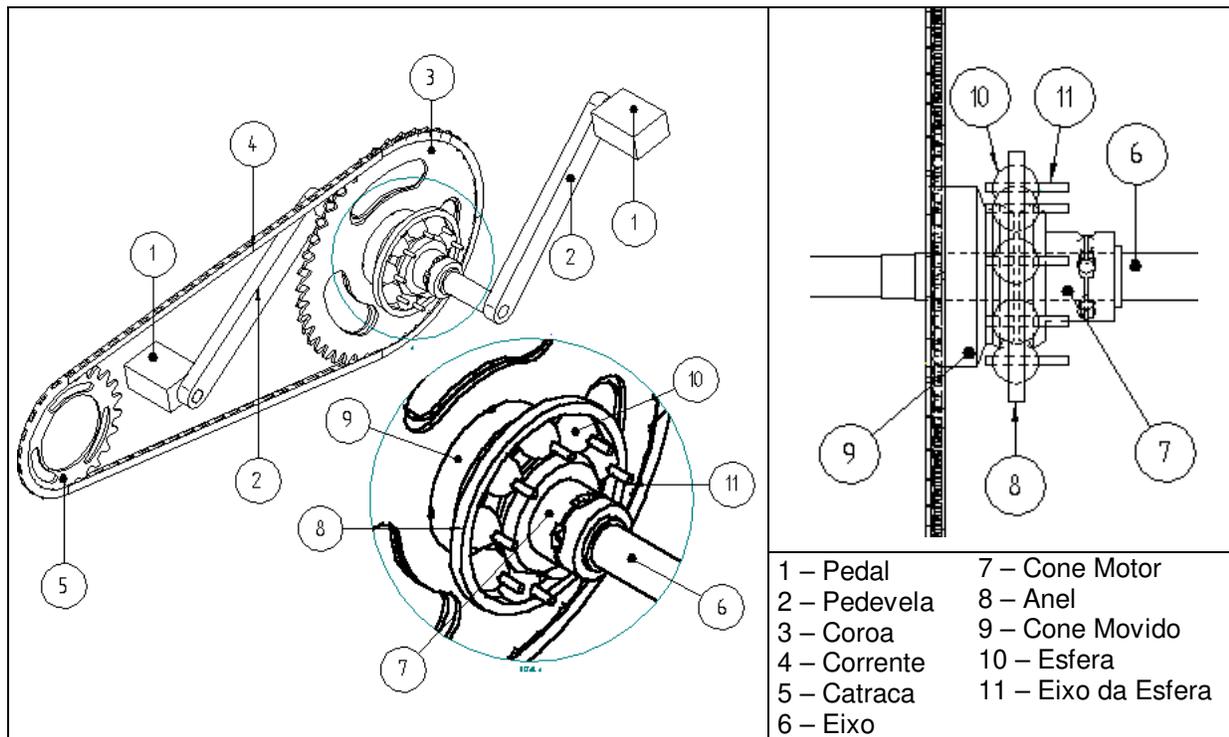


Figura 5.22 – Aplicação da transmissão desenvolvida

Desde o início do projeto tem-se procurado direcionar o desenvolvimento da TD-CVT para aplicação em bicicletas. Através da Figura 5.22, nota-se uma grande potencialidade em termos construtivos para atingir esse objetivo. Falta, porém, fazer algumas adaptações ao protótipo e montá-lo primeiramente numa bicicleta ergométrica para testes mais apurados.

5.9 Comentários e Conclusões

As dificuldades construtivas encontradas no desenvolvimento da transmissão foram muitas. Um dos principais problemas foi o desenvolvimento do disco de ajuste da relação de transmissão, em virtude da complexidade do rasgo. Para construí-lo, primeiro foi utilizado um software de CAD para desenhá-lo em 3D. Em seguida, o arquivo foi transferido para uma máquina de prototipagem rápida para a manufatura do disco. Em virtude do não conhecimento da precisão da máquina de prototipagem, foi necessário fazer alguns testes para ajustar as medidas do desenho

as reais dimensões do protótipo. Apesar disso, as superfícies dos rasgos do disco tiveram que acabadas manualmente, para que os eixos de rotação das esferas pudessem deslizar livremente no seu interior.

Uma das características impostas a essa TD-CVT era que fosse pequena e compacta para ser adaptada em uma bicicleta e/ou bicicleta ergométrica. As dimensões do protótipo confirmam que esse objetivo foi alcançado, ver Apêndice B. Além disso, os problemas de montagem foram todos resolvidos.

A Tabela 5.1 mostra a característica dos elementos da transmissão.

Tabela 5.1 – Características dos elementos da TD-CVT.

Elemento	Peso (g)	Material	Quantidade
Anel	37.5	aço	1
Bucha	6.0	teflon	1
Carcaça	437.0	acrílico	1
Cone Motor	111.5	aço	1
Cone Movido	308.5	aço	1
Disco de alinhamento	46.0	ferro	2
Disco de ajuste da rt	30.5	polímero (nylon)	1
Eixo	263.5	aço	1
Esfera e seu eixo	12.5	aço	9
Rolamento ϕ 12mm	43.5	aço	1
Rolamento ϕ 10mm	35.0	aço	1
Rolamento cônico	61.5	aço	1

O próximo passo no cronograma de desenvolvimento do protótipo é o projeto do sistema de controle da relação de transmissão.

Capítulo 6

Otimização

6.1 Introdução

Nesse capítulo serão apresentados três tópicos referentes à otimização da TD-CVT tipo esfera-cone:

- **Geométrica** – apresenta um programa gráfico desenvolvido para facilitar a visualização da influência de variáveis do projeto na forma e tamanho da TD-CVT.
- **Perdas** – uma das principais causas de perda de potência em TD-CVTs está relacionado com o movimento de spin no contato entre os elementos rolantes. Como esse tipo de movimento é função apenas da geometria do contato, será analisada a influência de algumas variáveis de projeto na geometria do contato e, conseqüentemente, na perda de potência;
- **Tempo de vida** – em virtude das altas pressões a que são submetidos os contatos entre os elementos rolantes das TD-CVTs, é importante estimar o tempo de vida do conjunto. Assim sendo, será analisado o tempo de vida da TD-CVT para determinadas condições de trabalho.

No decorrer desse capítulo ficará claro que esses três itens estão intimamente relacionados. O tamanho da TD-CVT influencia diretamente no tempo de vida da transmissão, ou seja, para uma mesma transmissão de potência, quanto maior a transmissão maior o seu tempo de vida. A geometria do contato influencia o movimento de spin e, conseqüentemente, a perda de potência

através dos elementos rolantes. Além disso, a geometria do contato influencia na distribuição de forças nos elementos da TD-CVT e, conseqüentemente, no seu tempo de vida.

Esse capítulo será iniciado tratando da otimização geométrica. Em seguida, será analisado o cálculo do spin no contato. Depois, será dada uma visão geral sobre a metodologia de cálculo para o tempo de vida de uma TD-CVT para determinadas condições de uso. Finalizando serão feitos alguns comentários sobre os resultados obtidos.

6.2 Otimização Geométrica – Otimização de Forma

Apesar da forma geométrica relativamente simples, o projeto de uma TD-CVT tipo esfera-cone conta com uma quantidade considerável de parâmetros geométricos intimamente relacionados, ou seja, mudança num parâmetro causa mudanças em vários outros.

A Figura 6.1. mostra a tela de entrada de dados, através da qual é fornecido:

- Raio da esfera – número 1 no desenho;
- Raio interno – número 2 no desenho;
- Ângulo mínimo entre as esferas – número 3 no desenho;
- Raio do eixo de inclinação da esfera – número 4 no desenho.

A Figura 6.2. mostra a disposição geométrica da TD-CVT em função dos dados de entrada.

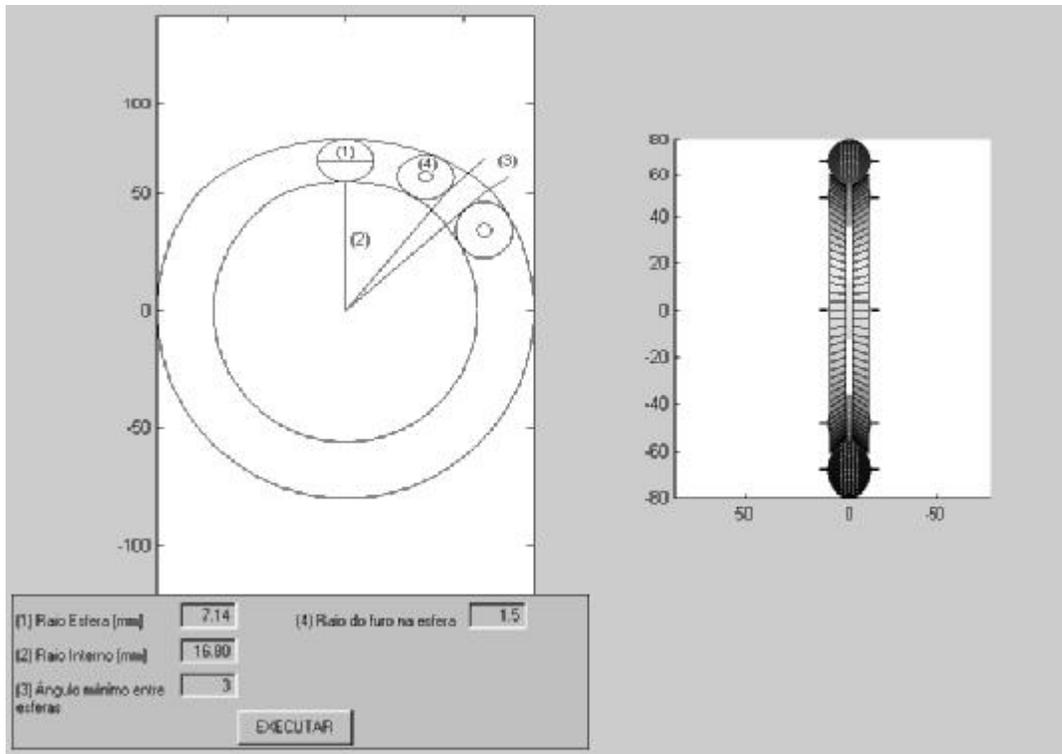


Figura 6.1 – Tela inicial para entrada de dados

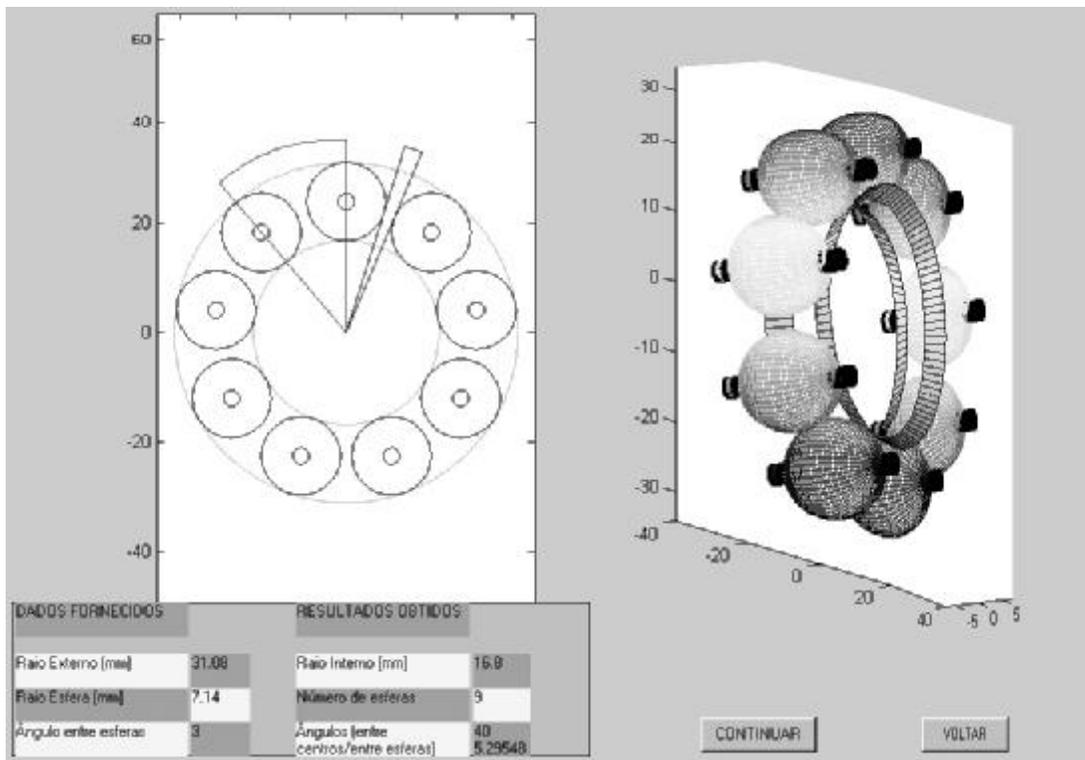


Figura 6.2 – Tela de visualização dos primeiros resultados

Em seguida, deve-se escolher o máximo valor de inclinação do eixo de rotação da esfera (ângulo β), Figura 6.3. Contudo, como visto no Capítulo 5 seção 5.2.2, β está relacionado com a faixa da relação de transmissão, com o comprimento y (ver Figura 5.2) e com o raio da esfera r .

- Para faixa da rt 1:2~2:1,

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{9 \tan(\beta)^2 + 1}} \quad (6.1)$$

- Para faixa da rt 1:2.5~2.5:1,

$$y = \sqrt{\frac{2.25 r^2}{12.25 \tan(\beta)^2 + 2.25}} \quad (6.2)$$

- Para faixa da rt 1:3~3:1,

$$y = \sqrt{\frac{r^2}{4 \tan(\beta)^2 + 1}} \quad (6.3)$$

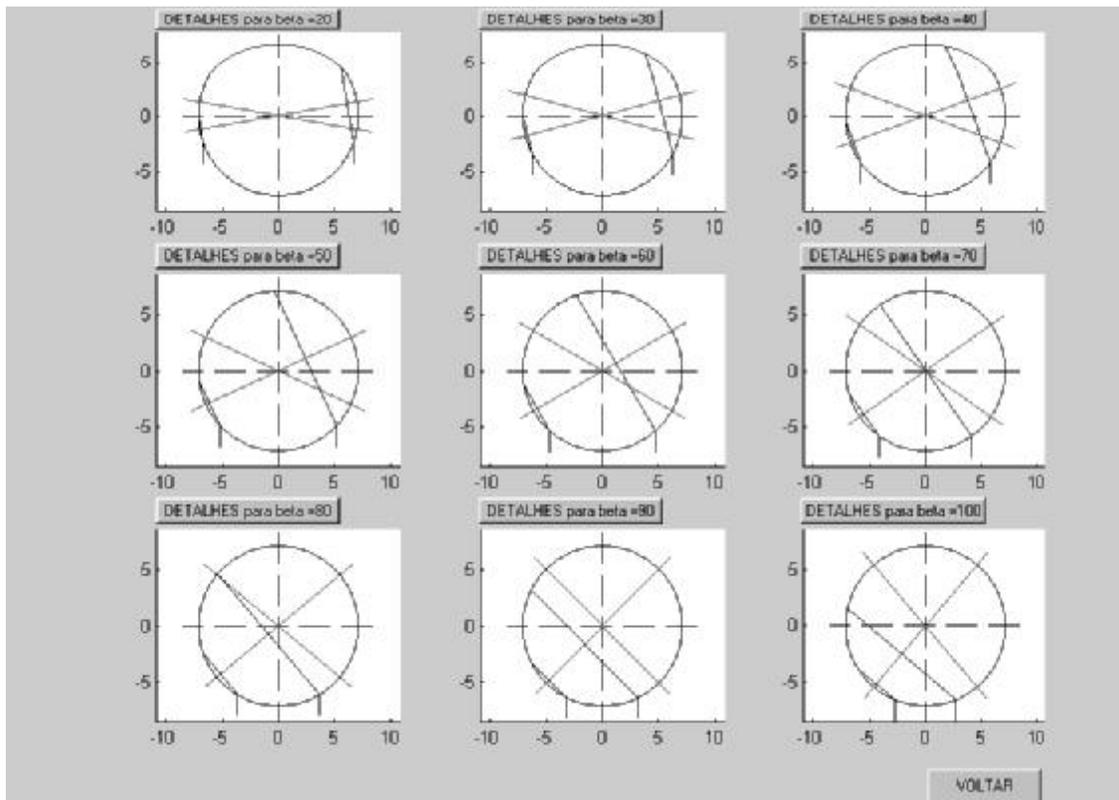


Figura 6.3 – Tela para escolha do ângulo de inclinação do eixo da esfera (rt = 1:3~3:1)

Nas esferas da Figura 6.3 o posicionamento do ponto de contato entre a esfera e os cones são representados pelas pequenas linhas verticais na parte inferior de cada esfera e, paralelas ao eixo das ordenadas (eixo vertical passando pelo centro da esfera). A distância entre essas linhas e o eixo das ordenadas é o comprimento y . As linhas cheias passando pelo centro da esfera representam a máxima abertura do ângulo β , ou seja, a máxima inclinação do eixo de rotação da esfera, sendo que o seu valor aparece na parte superior de cada configuração. A Figura 6.3 apresenta ainda as cordas formadas entre os pontos de contato entre a esfera e os cones passando perpendicularmente ao eixo de rotação da esfera. A relação entre o comprimento dessas duas cordas fornece a relação de transmissão. As configurações mostradas na Figura 6.3 representam a faixa de relação de transmissão da CVT 1:3~3:1.

Na Figura 6.3 é possível observar que ângulos pequenos obrigam que os pontos de contato esfera-cone (pequenas linhas verticais na parte inferior de cada esfera) fiquem posicionados muito próximo dos extremos da esfera. Isso, traz alguns inconvenientes: (1) A área da superfície da esfera que ficará em contato com o cone será pequena. Como será visto na seção 6.4.3, a probabilidade de falha na esfera nesse caso é maior; (2) Uma grande força normal no contato poderia fazer com que as esferas se deformem e trave a transmissão; (3) Pequenas variações nos ângulo de inclinação da esfera resultaria em grande variação na relação de transmissão.

Escolhido um valor para o ângulo β , pode-se estudar o efeito da faixa de relação de transmissão, Figura 6.4. Como visto, para um dado valor de β , quanto maior a faixa de trabalho da CVT maior o valor de y (ponto de contato esfera-cone em relação ao centro de CVT) e, conseqüentemente, os comprimentos das cordas nos extremos da faixa de trabalho da CVT serão pequenos, o que pode tornar extremamente difícil o funcionamento da CVT nessas condições. Abaixo de cada configuração da Figura 6.4, é apresentada a curva da relação de transmissão em função do ângulo de inclinação do eixo da esfera (ângulo β). É possível observar que quanto menor a faixa de trabalho da relação de transmissão mais a curva tende para uma reta.

Para os parâmetros de entrada: raio da esfera = 7.14 mm, raio Interno = 20.40 mm, raio do furo da esfera = 1.5 mm, optou-se por 60° para a máxima inclinação do ângulo β e 1:2~2:1 para a faixa de trabalho da CVT.

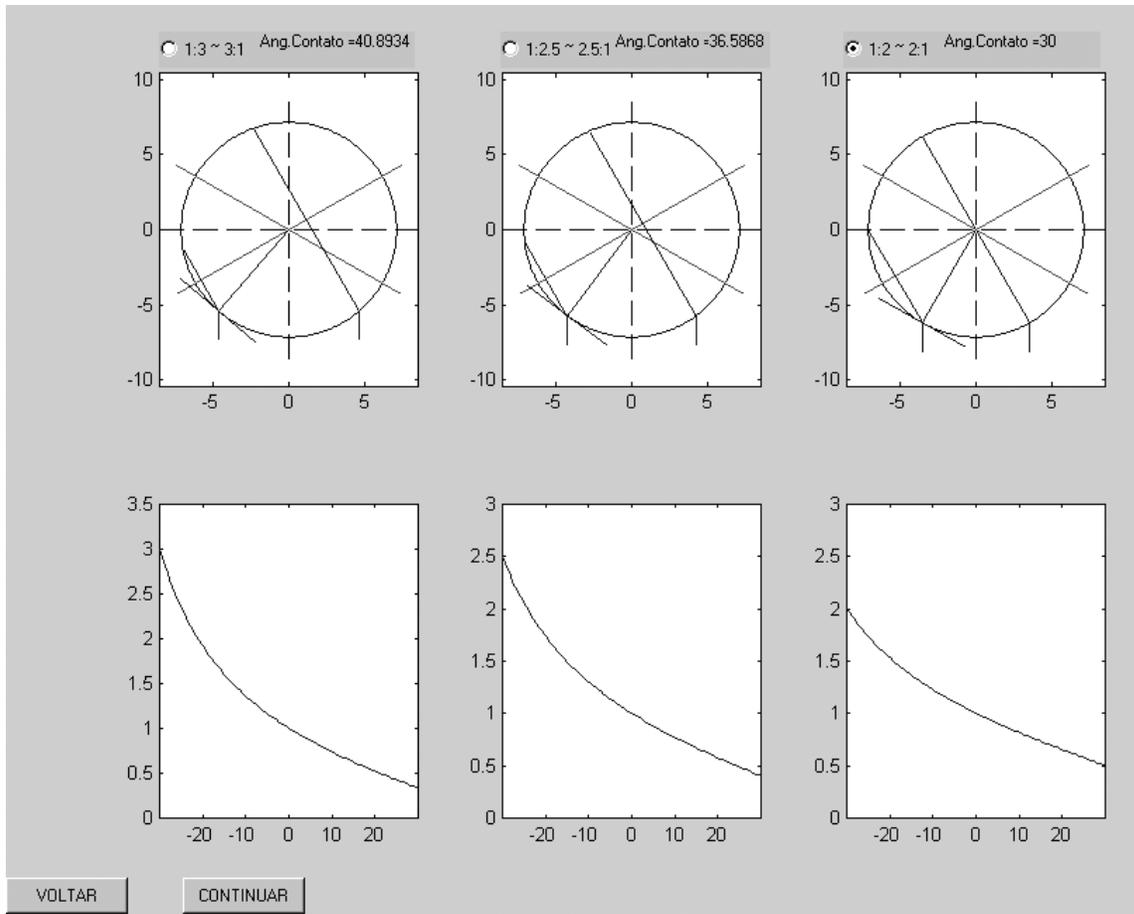


Figura 6.4 – Tela para escolha da faixa da relação de transmissão para $\beta = 60^\circ$

Agora, pode-se tratar da interferência entre o eixo de rotação da esfera com os cones de entrada e saída. A Figura 6.5 apresenta os máximos ângulos permissíveis acima (A_{ac}) e abaixo (A_{ab}) do ponto de contato sem que ocorram interferências, Figura 6.6.

Na Figura 6.5 as linhas paralelas à linha de centro da esfera representam o diâmetro do eixo de rotação da esfera. Em virtude da geometria optou-se pelos valores de 14° e 24° , respectivamente para os ângulos acima e abaixo do ponto de contato. Esses ângulos serão responsáveis pelo comprimento dos cones.

Finalmente, pode-se visualizar a configuração final da CVT no canto inferior direito da Figura 6.7 e a ampliação do ponto de contato no canto inferior esquerdo.

Além da visualização gráfica este programa auxiliou na elaboração do desenho final das partes principais da CVT, uma vez que, todas as dimensões para o desenho dos elementos da TD-CVT foram armazenadas para ser utilizadas em um programa CAD.

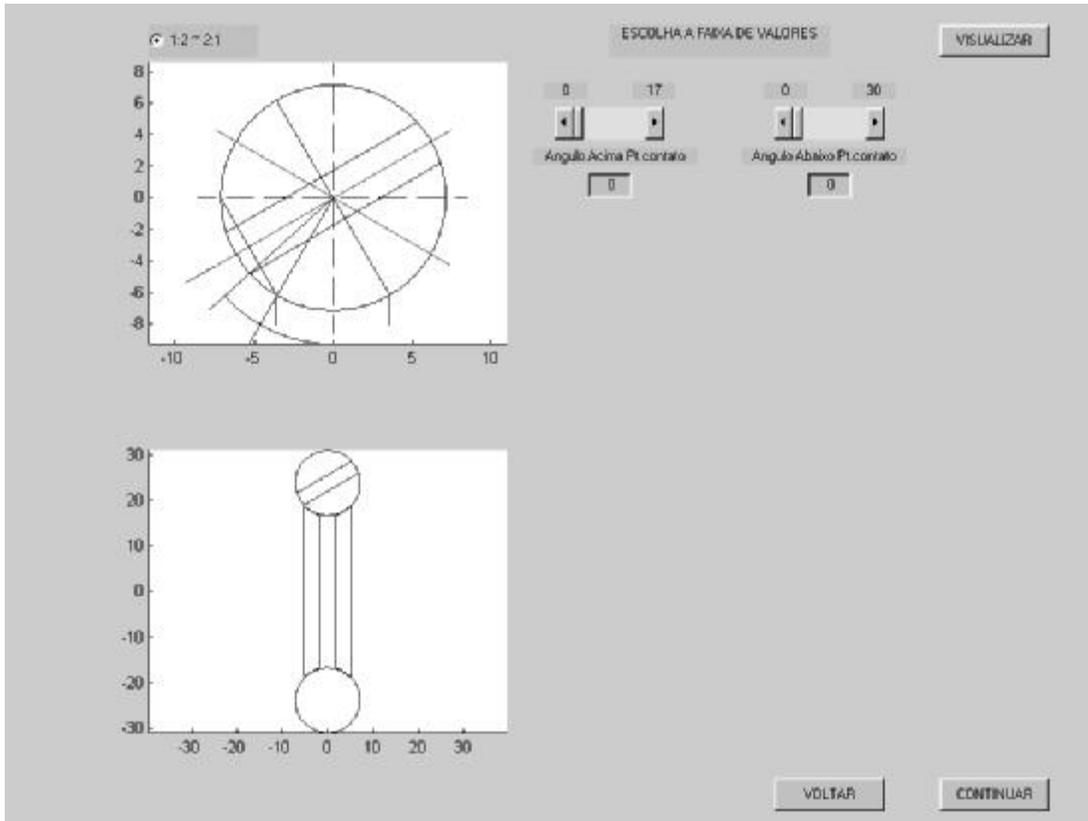
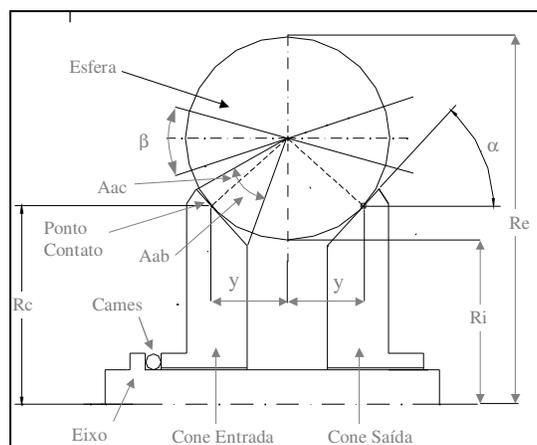


Figura 6.5 – Tela para escolha dos ângulos acima e abaixo do ponto de contato



Ri – Raio interno
Re – Raio externo

Figura 6.6 – Geometria do contato

Convém aqui ressaltar que quanto maior o valor do ângulo de inclinação do cone (ângulo de contato da Figura 6.4 – inclinação das retas tangentes ao ponto de contato esfera-cone), maior será a perda por spin no contato, como será visto na seção 6.3. Contudo, quanto menor a faixa da relação de transmissão, menor será a vida do conjunto, como será mostrado na seção 6.4.

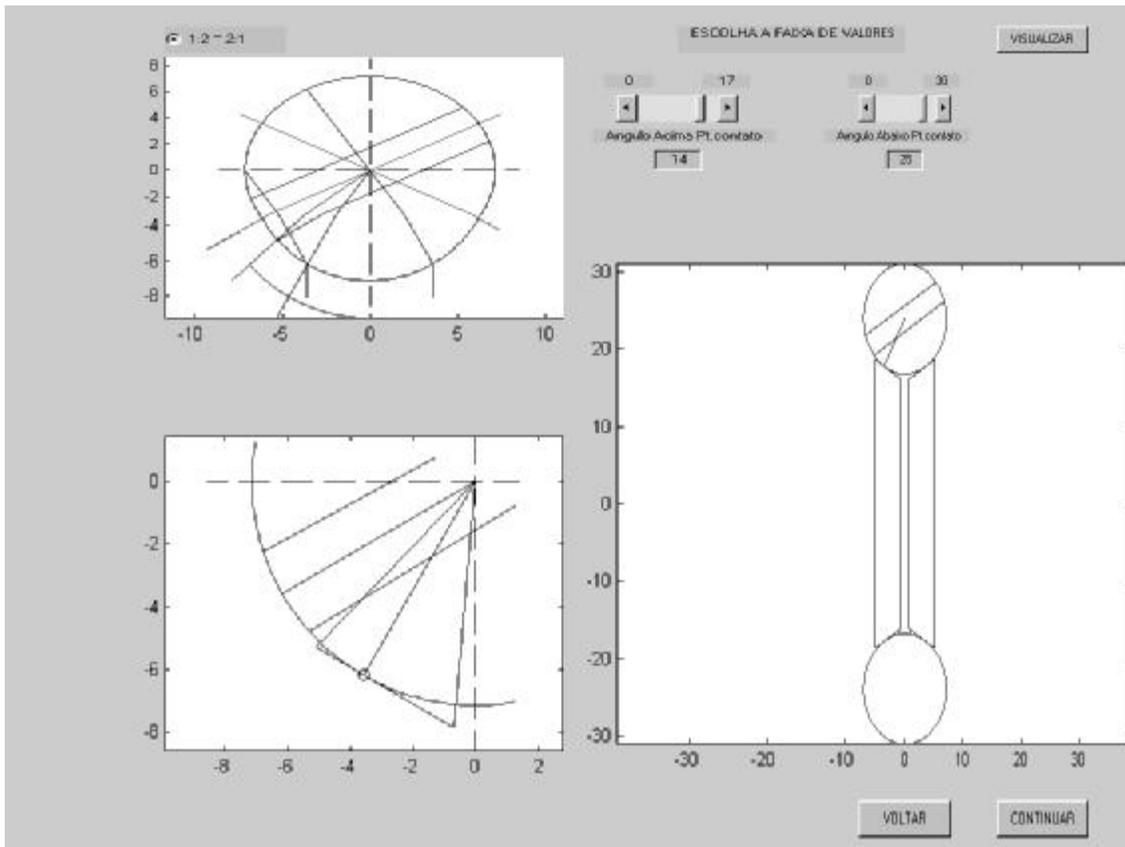


Figura 6.7 – Tela para visualização da CVT esquematizada

6.3 Minimização do Spin

A força de tração ou força tangencial no contato está relacionada com a quantidade de *spin* e *slip* no contato. A quantidade de *slip* depende não somente da geometria da transmissão por tração mas também do torque aplicado na transmissão. O *spin*, contudo, pode ser determinado somente pela geometria entre os elementos em contato de rolamento. *Spin* ocorre geralmente quando os elementos em contato de rolamento possuem eixos de rotação não paralelos. Essa característica está inevitavelmente presente em todas as CVTs por tração que mudam de configuração para variar a velocidade. *Spin* causa perda de potência, reduz a força de tração

disponível e gera força de tração perpendicular à direção de rolamento. Assim, o *spin* tem um mau efeito em transmissões por tração e deve ser mantido tão pequeno quanto possível para que a CVT tenha bom desempenho, Johnson e Tevaarwerk (1977) e Lowenthal (1986).

A quantidade de perda de potência em função do movimento de *spin*, L_s , é dada por:

$$L_s = T\omega_s \quad (6.4)$$

sendo:

T o torque e ω_s o movimento de *spin* perpendicular ao contato.

A geometria básica de uma TD-CVT esfera-cone é mostrada na Figura 6.8. As velocidades angulares dos elementos rolantes 1 e 2 são dadas por ω_1 e ω_2 . As velocidades angulares perpendiculares ao plano tangencial no contato são dadas por $\omega_1 \sin(\alpha)$ e $\omega_2 \sin(\alpha - \beta)$ respectivamente nos elementos rolantes 1 e 2, sendo α o ângulo entre o eixo de rotação e o plano de contato tangencial, e β o ângulo entre os dois eixos de rotação. O *spin* ω_s é a diferença de velocidade angular relativa perpendicular à área de contato, e é expressa por:

$$\omega_s = \omega_1 \sin(\alpha) - (-\omega_2 \sin(\alpha - \beta)) = \omega_1 \sin(\alpha) + \omega_2 \sin(\beta - \alpha) \quad (6.5)$$

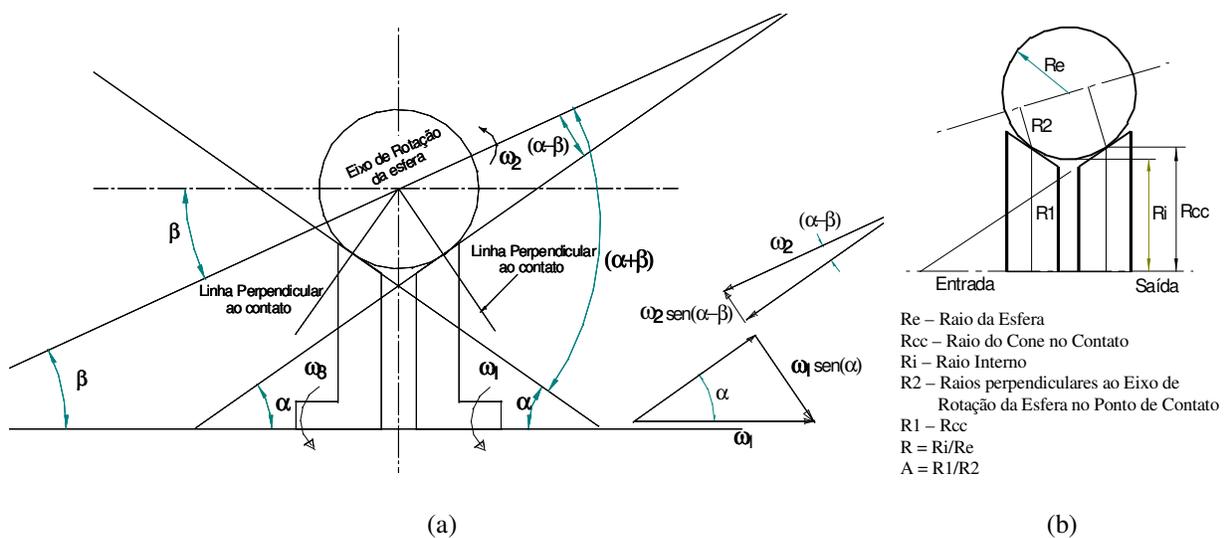


Figura 6.8 - Geometria do contato de uma TD-CVT esfera cone

Para uma condição de ausência de escorregamento no contato,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad (6.6)$$

reescrevendo a Equação 6.5 temos:

$$\psi = \sin(\alpha) - A \sin(\beta - \alpha) \quad (6.7)$$

sendo:

$$\psi = \frac{\omega_s}{\omega_1}; \quad A = \frac{R_1}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}; \quad R_1 \text{ e } R_2 \text{ raios de rotação dos elementos rolantes}$$

Na Equação 6.7 ψ é a razão entre o movimento de *spin* e a velocidade angular de entrada. Esta razão é usada para descrever as relações cinemáticas entre os dois elementos rolantes, Wernitz (1962). Adicionalmente, A é a razão entre as velocidades angulares dos dois elementos rolantes.

Em geral, R_1 , R_2 , α , e β variam, permitindo assim, mudanças de velocidade angulares dos elementos rolantes e, conseqüentemente, ψ também muda. Para o caso de rolamento puro, que é uma condição ideal para perda de potência mínima em transmissões por tração, ψ é igual a zero. Portanto, uma escolha de parâmetros que se aproxime daquela do rolamento puro seria a configuração ótima em termos de perda de potência em TD-CVTs. As figuras a seguir mostram curvas de $\psi(\alpha, \beta)$ constante para determinados valores A .

A faixa de trabalho de uma TD-CVT tipo esfera cone está limitada a: $-40 \leq \beta \leq 40$ e $30 \leq \alpha \leq 70$. As Figuras 6.9 e 6.10 representam curvas de *spin* no contato entre o cone de entrada e a esfera para $A=0.5$ e 1.0 respectivamente. Os retângulos plotados nas figuras representam os limites de α e β especificados anteriormente

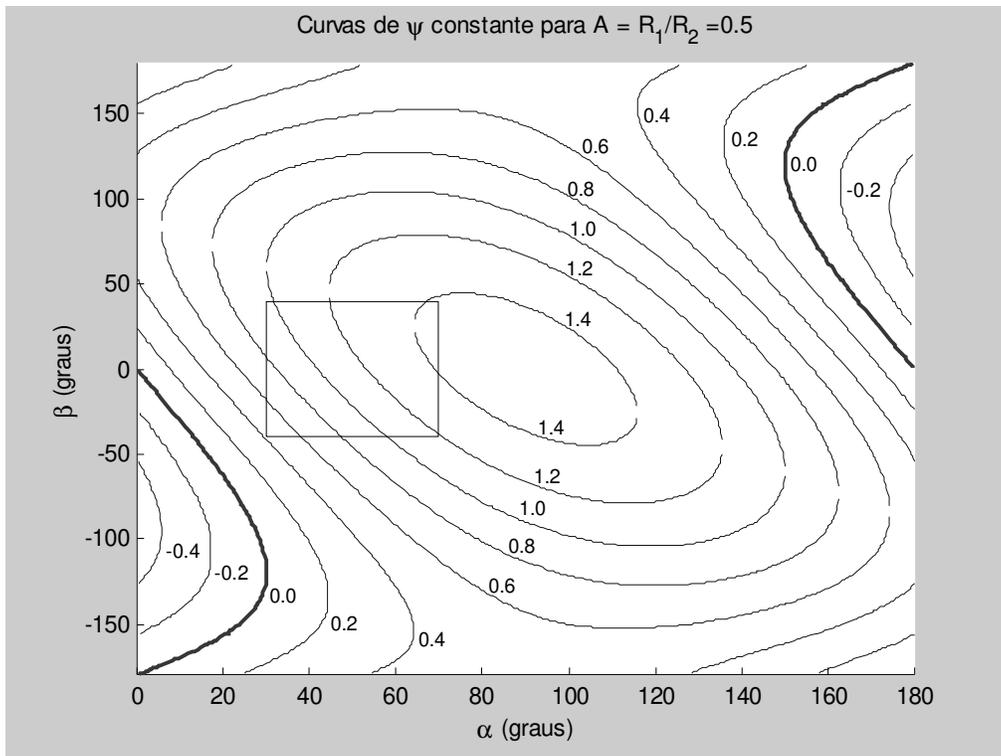


Figura 6.9 – Curvas de ψ para $A = 0.5$

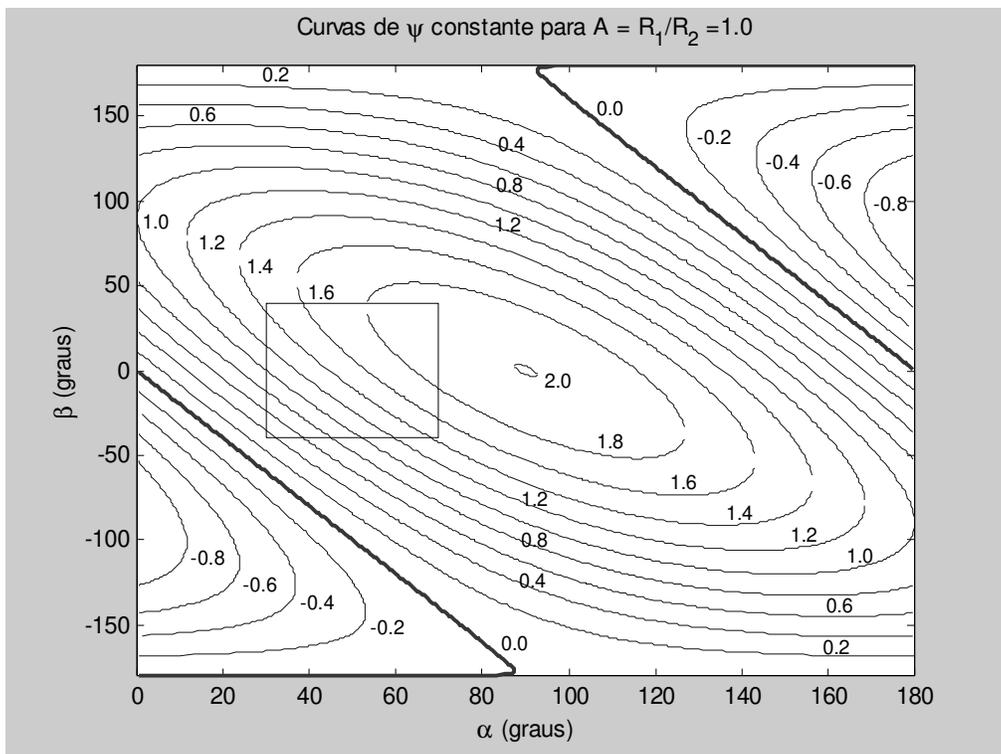


Figura 6.10 – Curvas de ψ para $A = 1.0$

A Figura 6.11 representa curvas de *spin* no contato entre a esfera e o cone de saída para $A=3.0$. Além dos diferentes valores das curvas de *spin*, quando comparadas com as Figuras 6.9 e 6.10 nota-se uma mudança na inclinação das curvas. Quando comparamos as Figuras 6.9, 6.10 e 6.11, nota-se que a medida que o valor de A aumenta, as curvas de *spin* aumentam também em módulo.

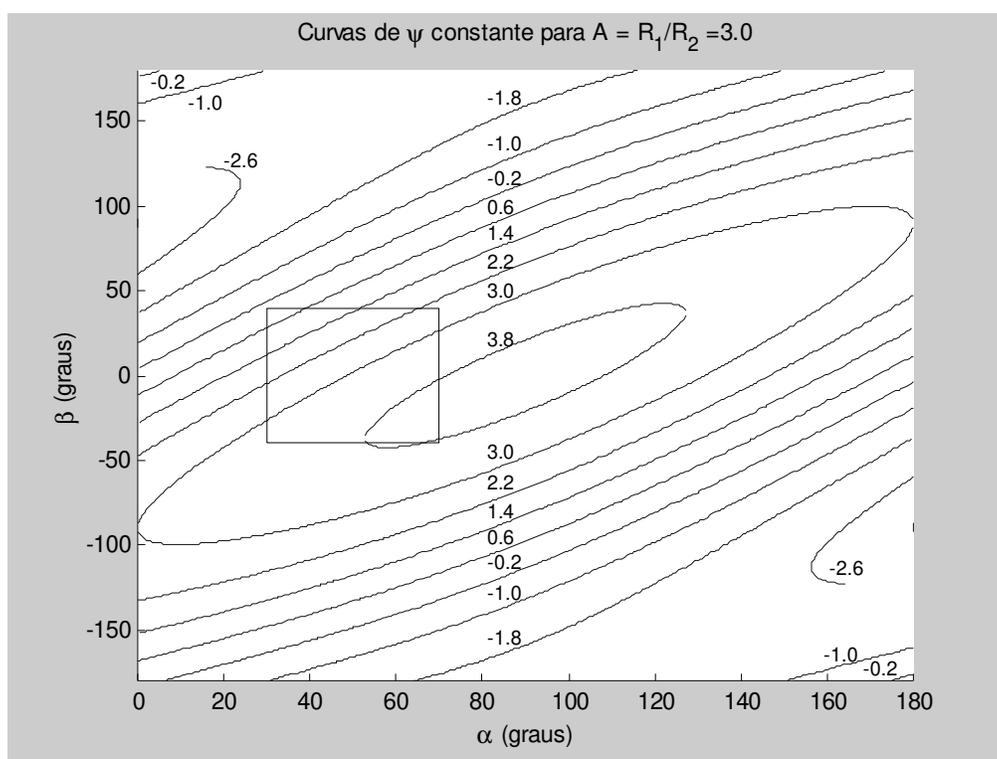


Figura 6.11 – Curvas de ψ para $A = 3.0$

Nas TD-CVTs tipo esfera-cone o ângulo do cone α é constante para uma dada configuração. Por esse motivo, serão apresentadas curvas de $\psi(A, \beta)$ constante para determinados valores do ângulo α . Na Figura 6.12 são plotadas curvas para $\alpha=50^\circ$ e na Figura 6.13 para $\alpha=30^\circ$. Comparando-as nota-se que as curvas de ψ nessas figuras convergem para -50° e -30° respectivamente quando A tende a $+\infty$ e $-\infty$. As curvas tracejadas representam valores de *spin* negativos, enquanto que as linhas cheias, valores positivos. As curvas vão de -0.8 a 4.0 . Convém aqui ressaltar que $A < 0$ não tem sentido físico, uma vez que, A é o quociente entre dois valores de comprimento (ver Figura. 6.8b).

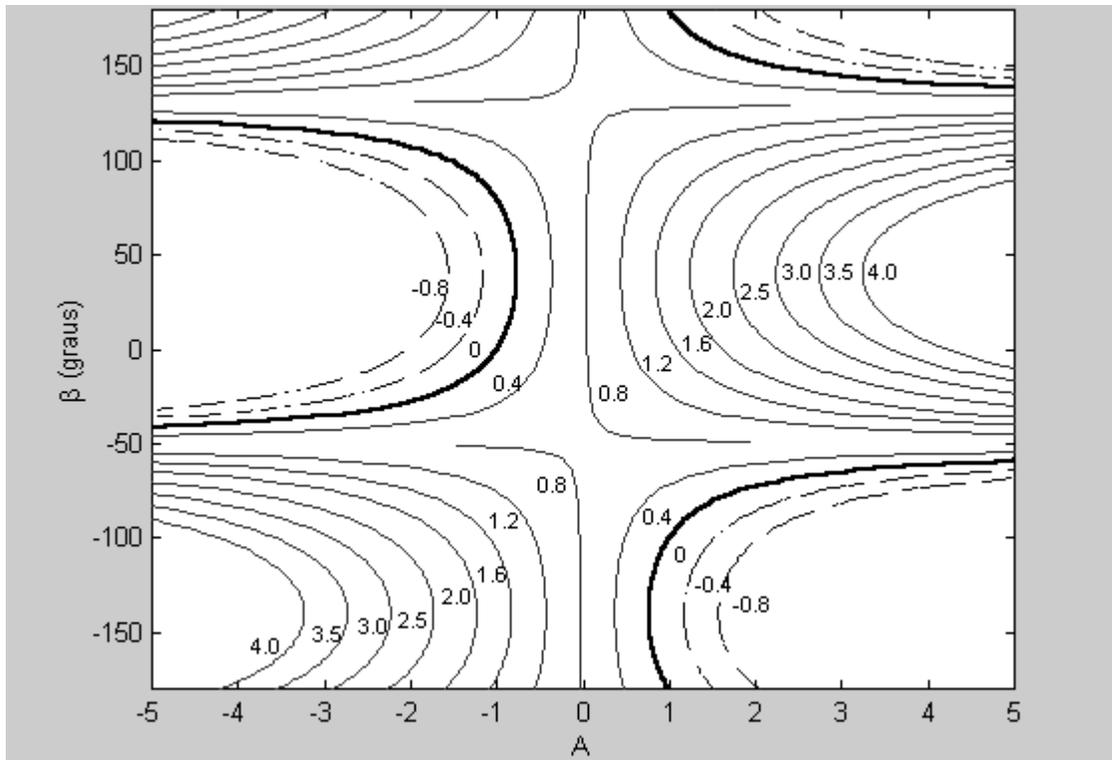


Figura 6.12 – Curvas de ψ para $\alpha=50^\circ$

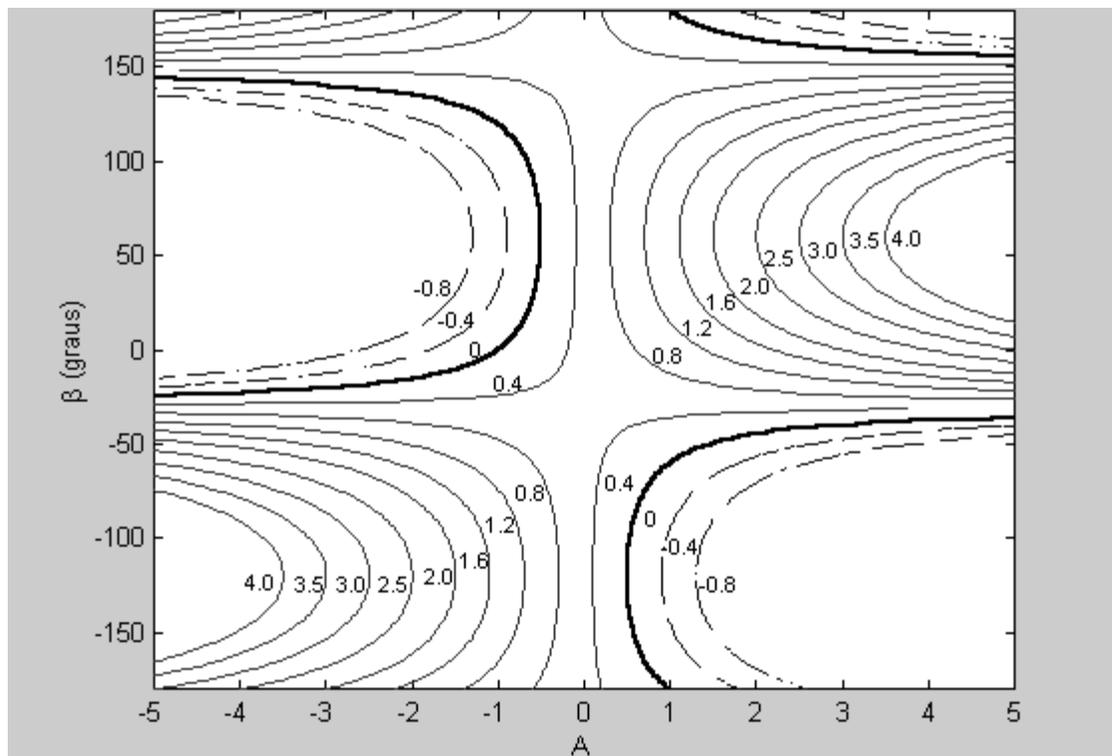


Figura 6.13 – Curvas de ψ para $\alpha=30^\circ$

As Figuras 6.14 e 6.15 representam as curvas correspondentes a $\alpha=30^\circ$, $A>0$ e $-40 \leq \beta \leq 40$. Além disso, foram adicionadas curvas correspondentes ao tamanho da transmissão, ou seja, o parâmetro R ($R=R_i/R_e$ - ver Figura 6.8b). As Figuras 6.14 e 6.15 diferenciam-se pela faixa de trabalho da relação de transmissão. Assim sendo, a Figura 6.14 representa a faixa de trabalho 1:3~3:1, e a Figura 6.15 uma faixa de trabalho 1:2~2:1.

A medida que R aumenta, A também aumenta para um mesmo valor de β , uma vez que o raio da esfera é mantido constante. Assim sendo, fica claro que quanto menor R , menor a perda de potência em função do *spin*. Contudo, isso traz vários problemas construtivos, uma vez que R_i/R_e (Raio interno/Raio da esfera) é proporcional a $R1/R2$, Figura 6.8b. No protótipo construído optou-se por $R=2.85$ (20.40/7.14).

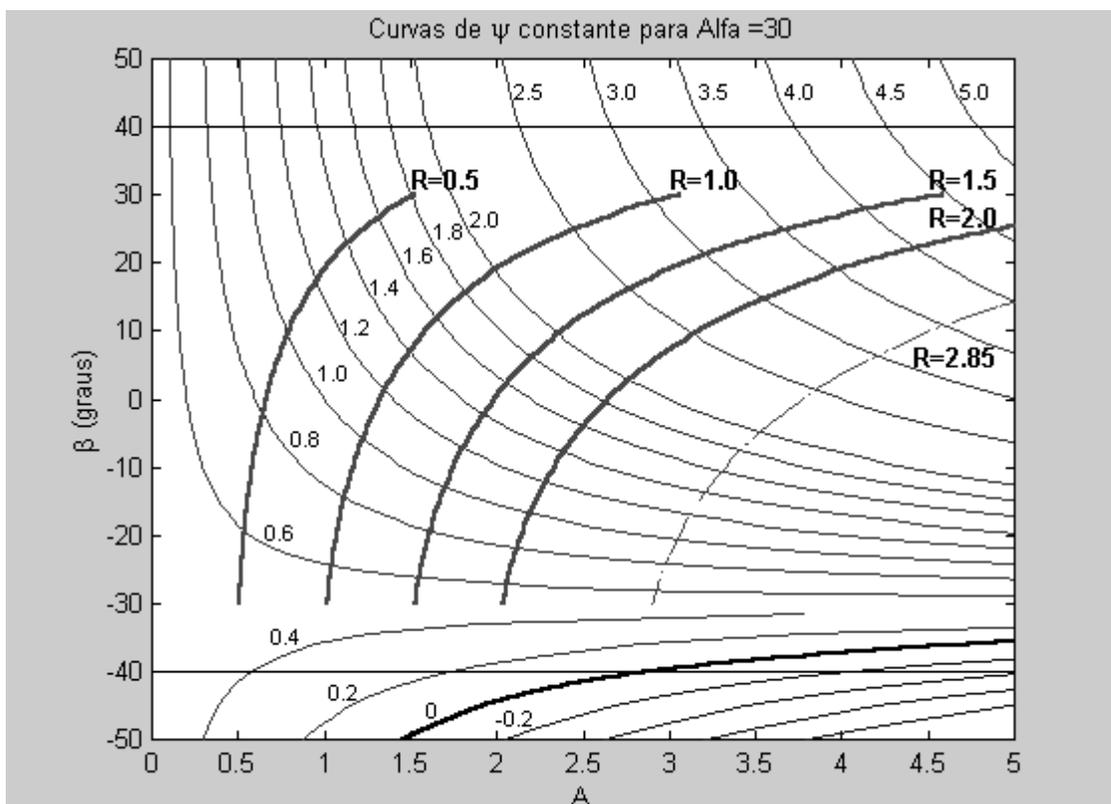


Figura 6.14 – Curvas de ψ e R para $\alpha=30^\circ$ e uma faixa de relação de transmissão = 1:3~3:1

Com relação à faixa de trabalho da CVT, quanto mais estreita a faixa, menor será a perda de eficiência devido ao movimento do *spin*. Isso, deve-se ao fato da menor variação de $R2$.

Com o auxílio do programa gráfico seção 6.2, e sabendo que o diâmetro da esfera está fixado em 14.29 mm, concluí-se que $\alpha=30^\circ$ e a faixa de relação de transmissão 1:2~2:1 fornece uma boa solução.

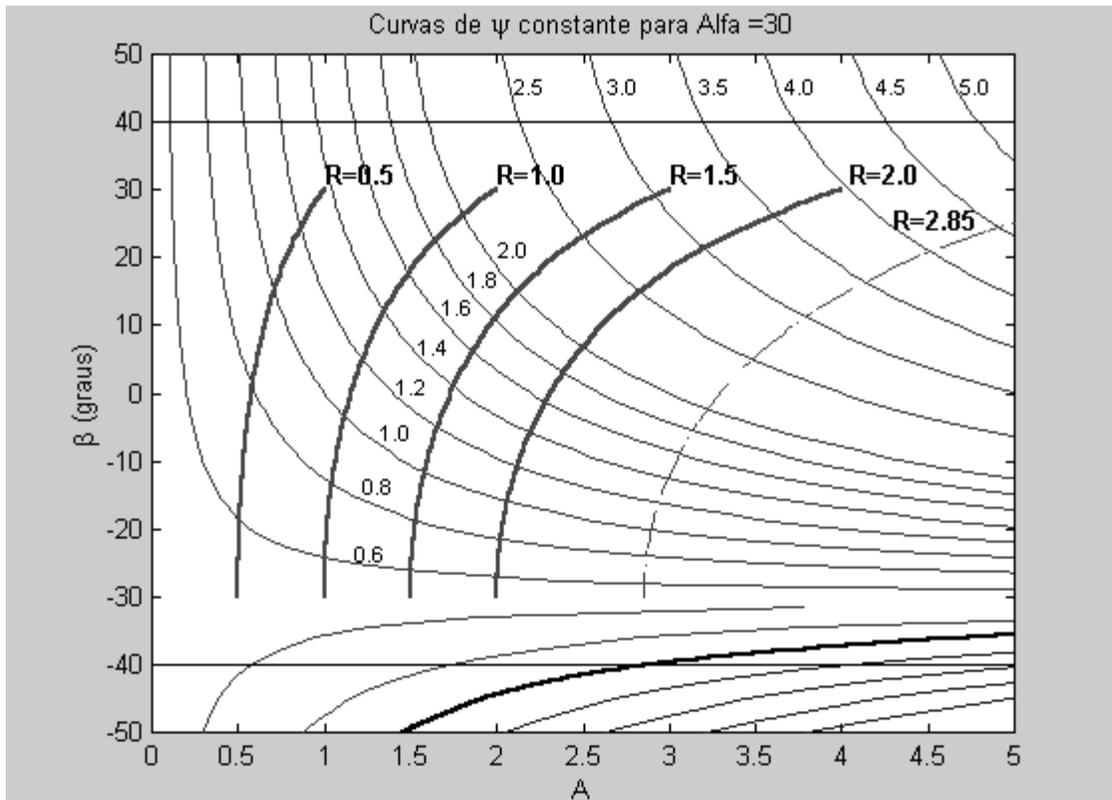


Figura 6.15 – Curvas de ψ e R para $\alpha=30^\circ$ e uma faixa de relação de transmissão = 1:2~2:1

6.4 Otimização do Tempo de Vida da Transmissão

Lundberg e Palmgren (1947) publicaram uma teoria estatística para uma distribuição de falhas nas esferas e rolos de rolamentos. Eles assumiram que o tipo de falha seria a fadiga de origem subsuperficial, por ser esta a mais importante das falhas por fadiga de elementos rolantes em contato de rolamento. A vida por fadiga é geralmente determinada em milhões de revoluções. Contudo, como alternativa ela é freqüentemente dada em horas de vida para uma determinada rotação. Nos próximos itens serão descritos: (1) o que vem a ser falha de origem subsuperficial; (2) como é proposto um modelo de vida por fadiga em função única e exclusivamente desse tipo de falha; (3) os resultados encontrados para o sistema simulado.

6.4.1 Falha de Origem Subsuperficial

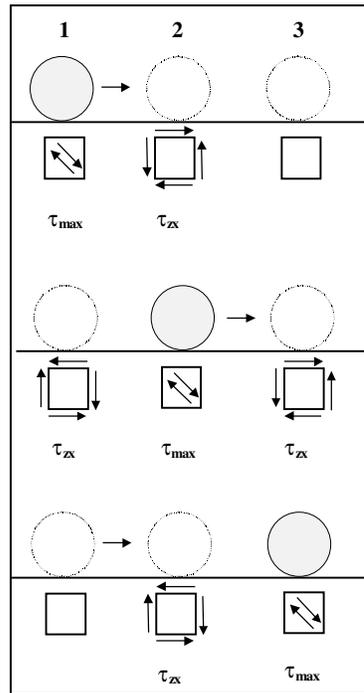


Figura 6.16 - Tensões de cisalhamento alternadas simétricas no interior dos corpos durante o deslocamento de um corpo sobre outro

O deslocamento cíclico de um corpo sobre outro, provoca sob a superfície de contato, o deslocamento do estado de tensão de forma conjunta. Isto faz com que determinados pontos no interior do corpo sejam submetidos a contínuas alterações de sentido na tensão de cisalhamento, resultando em um estado de tensões dinâmico de forma alternada simétrica. Na Figura 6.16 pode-se ver a esquematização do processo durante o deslocamento de um rolete sobre uma pista plana em três posições subseqüentes. Na posição 2 o mesmo ponto interior a uma mesma profundidade é submetido a tensão de cisalhamento de sentidos opostos com a passagem do rolete. Esta tensão de cisalhamento alternada simétrica origina um processo de fadiga na camada subsuperficial. Com a passagem dos ciclos, a fadiga do material acaba por acarretar a formação de uma trinca ou fissura a uma determinada profundidade.

6.4.2 Região de Contato

A Figura 6.17 mostra dois corpos em contato. Os planos x e y são os respectivos planos de curvatura relativa máximo e mínimo dos corpos. Estes planos são chamados de planos principais e são mutuamente perpendiculares. Os planos x e y devem ser escolhidos para que a curvatura relativa no plano x seja maior do que no plano y , ou seja:

$$\frac{1}{r_{Ax}} + \frac{1}{r_{Bx}} > \frac{1}{r_{Ay}} + \frac{1}{r_{By}} \quad (6.8)$$

O raio de curvatura pode ser positivo ou negativo dependendo se as superfícies são convexas ou côncavas, respectivamente.

Quando os corpos são prensados assume-se que a área de contato formada é uma pequena elipse com eixo maior $2a$ e menor igual a $2b$. O plano y contém o eixo maior e o plano x contém o menor eixo, Figura. 6.17. A razão $k=a/b$ é chamada de razão de elipsidade do contato. Os valores de k variam de 1 até infinito em função das várias combinações possíveis de superfícies de contato. Para cilindros em contato a elipsidade é ∞ , visto que, a área de contato formada é aproximadamente uma faixa retangular. Para esferas em contato a elipsidade é 1.

Segundo Coy *et al.* (1981a), Brewe e Hamrock fornecem fórmulas simples para determinar as integrais elípticas de primeira e segunda ordem, respectivamente ϵ e ζ , Equações 6.9 e 6.10, assim como a excentricidade k , Equação 6.11. Convém aqui ressaltar que esse procedimento é um pouco diferente do apresentado no Capítulo 3.

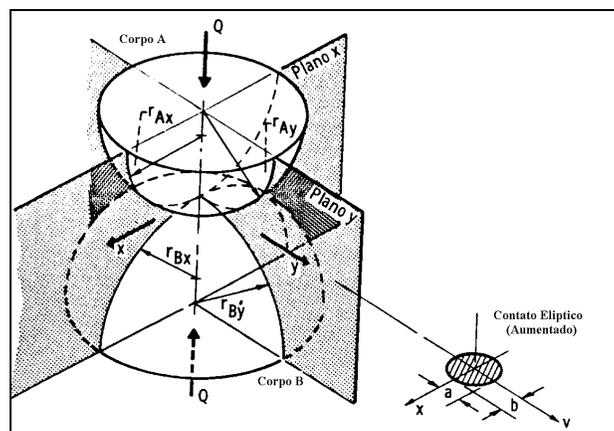


Figura 6.17 - Geometria de contato de corpos sólidos elásticos

$$\varepsilon = 1.528 + 0.602 \ln\left(\frac{R_y}{R_x}\right) \quad (6.9)$$

$$\zeta = 1.000 + \left(\frac{0.597}{R_y / R_x}\right) \quad (6.10)$$

$$k = 1.034 \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^{0.636} \quad (6.11)$$

sendo:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{r_{Ax}} + \frac{1}{r_{Bx}}; \quad \frac{1}{R_y} = \frac{1}{r_{Ay}} + \frac{1}{r_{By}}$$

Assim é possível calcular os semi-eixos maior e menor do contato elíptico, respectivamente a e b .

$$a = a^* g \quad (6.12)$$

$$b = b^* g \quad (6.13)$$

sendo:

$$g = \sqrt[3]{\frac{3Q}{2\rho} \left(\frac{1-\nu_a^2}{E_a} + \frac{1-\nu_b^2}{E_b} \right)}; \quad a^* = \sqrt[3]{\frac{2k^2\varepsilon}{\pi}}; \quad b^* = \sqrt[3]{\frac{2\varepsilon}{\pi k}}$$

$$Q = \text{Carga normal no contato}; \quad \rho = \frac{1}{r_{Ax}} + \frac{1}{r_{Bx}} + \frac{1}{r_{Ay}} + \frac{1}{r_{By}}$$

6.4.3 Modelo da Vida por Fadiga

Um modelo simplificado de análise de vida por fadiga para contatos em transmissões por tração é descrito por Rohn *et al.* (1981), e serviu de base neste estudo. Para um elemento rolante de aço, o número de ciclos de tensões antes de ocorrer uma falha é dado pela seguinte equação:

$$L = \left(\frac{K_1 z_o^h}{\tau_o^c V} \right)^{1/c} \quad (6.14)$$

A Equação 6.14 é uma forma modificada da teoria de Lundberg e Palmgren para o cálculo do tempo de vida dos elementos em contatos de rolamento por fadiga e, é aplicável em engrenagens, rolamentos entre outros. A tensão cisalhante crítica τ_o (Equação 6.15) é considerada como sendo a máxima tensão cisalhante cíclica ortogonal, que ocorre a uma profundidade z_o (Equação 6.16) da superfície de contato e, é uma medida relativa da distância que a trinca deve percorrer até atingir a superfície e causar a falha. Esta tensão não é a maior tensão subsuperficial, mas tem o componente de maior variação, o que é crítico no processo de fadiga.

$$\tau_o = \frac{\sqrt{2t-1}}{2t(t+1)} Q \quad (6.15)$$

$$z_o = \frac{b}{(t+1)\sqrt{2t-1}} \quad (6.16)$$

$$t = 1 + 0.304 k^{-1.856} \quad (6.17)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{3Q}{2\pi a b} \quad (6.18)$$

O termo do volume tencionado V na Equação 6.14 é importante pois a teoria de Lundberg e Palmgren é baseada na probabilidade de encontrar o início de uma falha por fadiga no volume de material que está sendo tencionado, e é definido como sendo:

$$V = a z_o 2 \pi |R| \quad (6.19)$$

sendo, R o raio de rotação do elemento. Portanto, o termo $2 \pi |R|$ é igual ao comprimento da trilha que é percorrida durante uma revolução do elemento rolante.

Baseado nos testes de vida de esferas e rolos de rolamentos os valores dos expoentes da Equação 6.14, são: $h=7/3$, $c=31/3$, sendo $e=10/9$ para área de contato elíptica e $e=3/2$ para área de contato na forma de linha de contato. Para elementos rolantes de rolamento feitos de aço AISI 52100, dureza Rockwell-C62, com uma probabilidade de vida de 90%, o valor de K_1 na Equação 6.14 para determinar a vida em milhões de ciclos é $K_1 = 1.430 \cdot 10^{95}$ (N.m), Coy *et al.* (1981b).

Pelo uso das Equações (6.15), (6.16), (6.17) e (6.19), os parâmetros da Equação (6.14), podem ser encontrados. Contudo, uma fórmula mais simples que expressa a vida teórica dos elementos rolantes no contato pode ser desenvolvida. A equação que expressa a vida em termos das constantes do material, carga aplicada e geometria dos corpos em contato é:

$$L = K_3 (K_2)^{9/10} \left[Q^{-10/3} (E' \rho)^{-7} |R|^{-1} \right]^{9/10} \quad (6.20)$$

sendo:

$L = 90\%$ de probabilidade de vida para contato simples entre os elementos em milhões de ciclos de tensão.

$$K_3 = 8.18 \cdot 10^{90} \text{ (N.m)}; \quad K_2 = \left(\frac{z_o}{b} \right)^{4/3} \left(\frac{\tau_o}{\sigma_o} \right)^{-31/3} (a^*)^{28/3} (b^*)^{35/3}; \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2}$$

Se os corpos em contato são de aço, com $E = 207 \text{ Gpa}$ e $\nu = 0.3$,

$$L = K_4 (K_2)^{0.9} Q^{-3} \rho^{-6.3} |R|^{-0.9} \quad (6.21)$$

sendo:

$$K_4 = 2.32 \times 10^{19} \text{ (N.m)}$$

Todos os corpos num sistema acumulam ciclos de tensão em diferentes razões, porque suas velocidades de rotação e número de ciclos de tensão por revolução podem não ser o mesmo. Por esse motivo, para comparar a vida dos componentes, o tempo em horas deveria ser usado. Assumindo que a rotação em revoluções por minuto do i ésimo corpo é n_i e que há u_i ciclos de tensão por revolução, então a vida do corpo i em horas é dada por:

$$H_i = \frac{L_i}{u_i n_i} \left(\frac{10^6}{60} \right) \quad (6.22)$$

Segundo Harris (1991) a vida do sistema é então encontrada aplicando a regra de Weibull. Se o sistema consiste de j corpos rolantes e a vida de cada um é designada por H_i ($i=1$ até j), então a vida do sistema em horas é dada por:

$$H_s = \left[\frac{1}{(H_1)^e} + \frac{1}{(H_2)^e} + \dots + \frac{1}{(H_j)^e} \right]^{-1/e} \quad (6.23)$$

sendo:

$$e = 10/9 \text{ para contato elíptico e } 3/2 \text{ para contato linear}$$

A Equação 6.23 com $e=10/9$, foi utilizada para calcular o tempo de vida em horas do conjunto.

6.4.4 Sistema Analisado

Como o objetivo desse trabalho é projetar uma TD-CVT para veículos de baixa potência e torque, foi simulado o comportamento de um sistema bicicleta+CVT+ciclista, Figura 6.18.

A análise dinâmica foi desenvolvida por Forti (1997), sendo, a equação dinâmica do sistema dada por:

$$A\ddot{\theta} - B \sin(\alpha) = \left[\left(\left(C_1 + C_2 \sin \left(2 r t \theta - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) l_1 r t e f \right) - (0.2 \theta \dot{\theta}^3) - (R_r, r) \right] \quad (6.24)$$

sendo:

$A\ddot{\theta}$ - termo relacionado à inércia do sistema

$B \sin(\alpha)$ - termo relacionado à energia potencial

$\left(\left(C_1 + C_2 \sin \left(2 r t \theta - \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \right) l_1 r t e f \right)$ - termo relacionado ao torque aplicado na roda traseira

$(0.2 \theta \dot{\theta}^3)$ - termo relacionado ao torque dissipado em função da força de arrasto aerodinâmico.

(R_r, r) - termo relacionado ao torque dissipado em função do rolamento

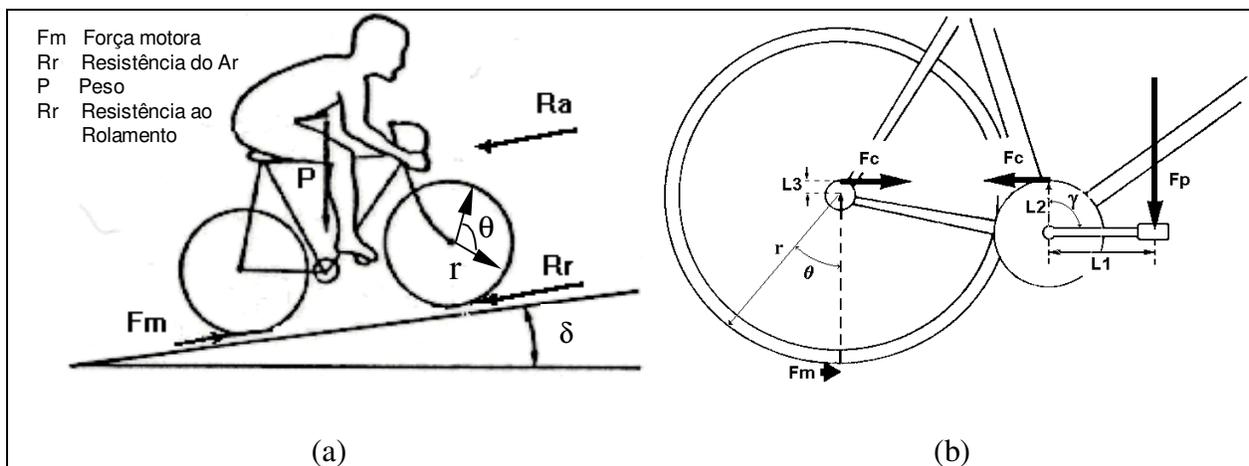


Figura 6.18 – Forças agindo no sistema bicicleta+ciclista

Nas transmissões convencionais os comprimentos L3 e L2 podem variar para mudar a relação de transmissão, Figura 6.18b. Nesse projeto, L3 e L2 são fixos e trabalham em conjunto com uma TD-CVT. Então, a relação de transmissão total é dada por $(L2/L3)$ multiplicado pela relação de transmissão da TD-CVT.

Forti (1997) estudou o parâmetro (L_2/L_3) em função da potência fornecida ao sistema e tipo de percurso, a fim de minimizar a quantidade de energia metabólica utilizada pelo ciclista. Baseado nesse estudo, a melhor opção para L_2/L_3 e as respectivas faixas de relação de transmissão são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Relação total de transmissão (RTT) em função da relação de transmissão (L_2/L_3) e da relação de transmissão da TD-CVT (RT_TD-CVT). Assim, $RTT = (L_2/L_3) * (RT_TD-CVT)$.

L_2/L_3	Relação de Transmissão da TD-CVT (RTT)		
	1:3~3:1 (0.333~3)	1:2.5~2.5:1(0.4~2.5)	1:2~2:1 (0.5~2)
0.55	0.183~1.65	0.22~1.375	0.275~1.1

O sistema foi simulado num percurso de 2243,79 m, sendo, a pista compactada, sem curvas somente com subidas e descidas como apresentado na Figura 6.18.

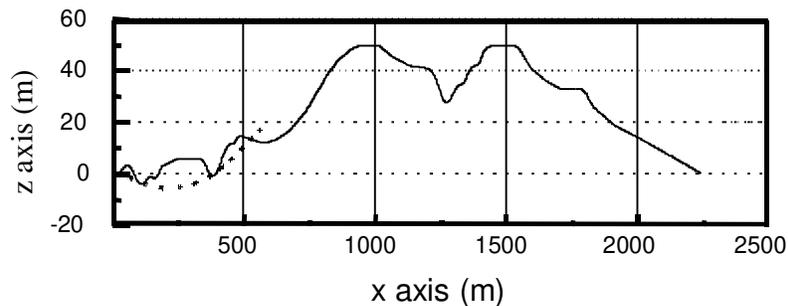


Figura 6.19 – Topografia do percurso

Para resolução do problema foi assumido que:

- 1.) O Ciclista+Quadro da Bicicleta é um corpo rígido de inércia equivalente;
- 2.) Não foi adotado nenhum torque de frenagem, pois o escopo do trabalho era a verificação do desempenho máximo do sistema sem limitações;
- 3.) Não foram considerados movimentos laterais no sistema. Assim sendo, o sistema possui um grau de liberdade (desde que seja considerada a condição de contato com o solo).

Durante as simulações dinâmicas armazenou-se: força e frequência no pedal, relação de transmissão, tempo e o intervalo de tempo entre iterações. Com esses dados foi possível utilizar a Teoria de Vida em contato de rolamento descrita anteriormente e estimar o tempo de vida da CVT para essas condições.

6.4.5 Resultados

Embora possam ser encontrados vários modos de falhas, entre elas “*scuffing*” (falhas térmicas) e corrosão por “*pitting*” numa TD-CVT, se ela for corretamente projetada é bem provável que ela irá falhar por fadiga de origem subsuperficial (Loewenthal e Zaretsky 1985).

Assim sendo, estudou-se o tempo de vida da TD-CVT em função da geometria e da carga (tensão) nela aplicada. Como visto, a teoria que será utilizada é estatística. Nela a probabilidade da TD-CVT não apresentar falha depende não apenas da tensão mas também do tempo. Logo, tendo o espectro de carga pode-se chegar à probabilidade de vida da transmissão numa determinada aplicação.

Nessa seção será analisada a influência da Faixa da Relação de Transmissão, do raio interno (Figura. 6.8b) e da potência, no tempo de vida da CVT para um dado percurso (Figura 6.19).

Procedimento de cálculo:

- 1) Dado o valor da potência fornecida pelo ciclista ao sistema (ciclista + bicicleta ou triciclo + transmissão) e, através de relações geométricas e fluxo de torque na CVT, calcula-se a força normal nas esferas da transmissão necessária para transmitir essa potência e apresentar o fenômeno da lubrificação elastohidrodinâmica. O aumento da força normal no contato é feito através do auxílio de cames, ver seção 5.5.1.
- 2) Simular o sistema ciclista+bicicleta+CVT (Figura 6.17) no percurso mostrado na Figura 6.19, denominado de percurso tipo 1, para dois valores distintos de potência

- (163 e 245 Watts). Fazendo isso, obtêm-se os espectros de carga, frequência de pedalar, relação de transmissão e força no pedal em função do tempo.
- 3) De posse desses dados e com o auxílio de um programa desenvolvido em Matlab™ foi possível analisar a influência de parâmetros, tais como:
- 1.) faixa de trabalho;
 - 2.) raio interno (tamanho – ver Figura 6.6);
- no tempo de vida da TD-CVT.
- 4) Foram analisadas três faixas de relação de transmissão, ou seja: 1:2~2:1 (*Overrange*=4), 1:2.5~2.5:1 (*Overrange*=6.25) and 1:3~3:1 (*Overrange*=9), e três valores de raio interno: 13.50mm, 16.80mm, 20.40mm.
- 5) O deslocamento total da esfera (60° , sendo $-30^\circ \geq \beta \geq 30^\circ$) foi dividido em 15 partes, Figura 6.20. Foi calculado o tempo percentual que a transmissão ficou em cada uma dessas partes o respectivo tempo de vida de cada parte. Assim sendo, o tempo de vida total da transmissão é a somatória da multiplicação do tempo percentual em cada faixa, pelo respectivo tempo de vida de cada parte.

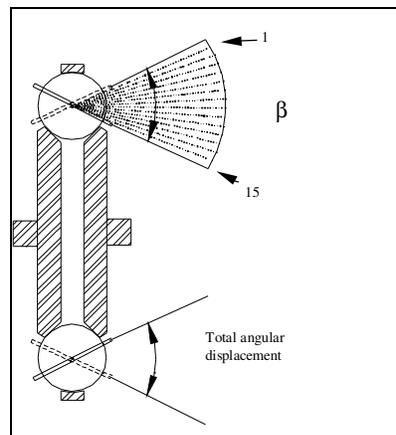


Figura 6.20 – Deslocamento angular total da esfera (60°) dividido em 15 partes

As Figuras 6.21 e 6.22 mostram o tempo de vida em função da *overrange* para diferentes valores de raio interno (ver Figura 6.6) para potência de 163 e 245 Watts respectivamente. As Figuras 6.23 e 6.24 mostram o tempo de vida em função do raio interno para diferentes valores de *overrange*.

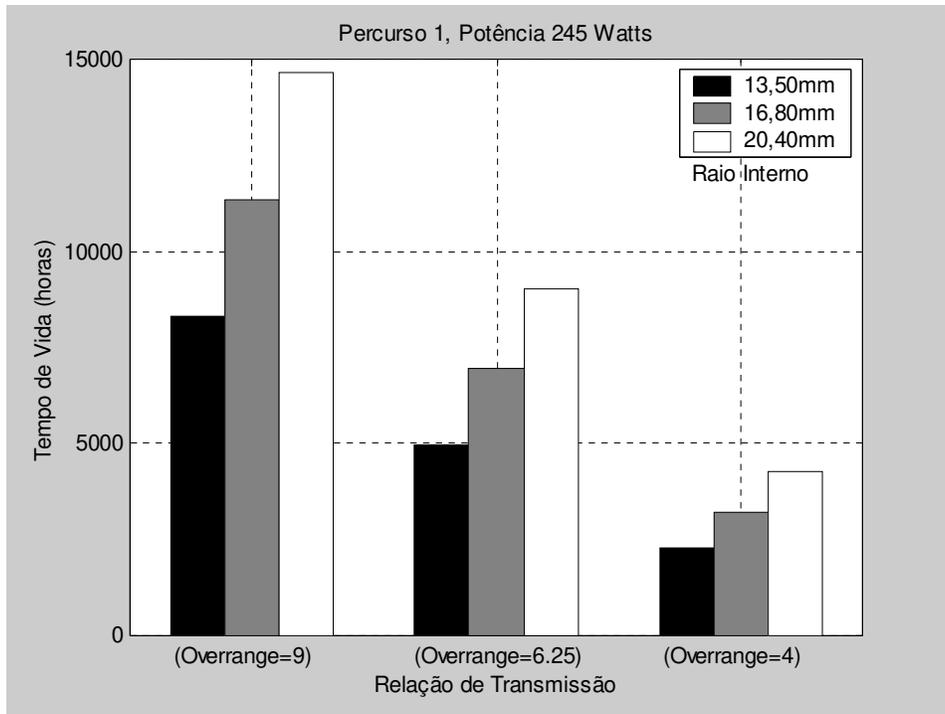


Figura 6.21 – Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.

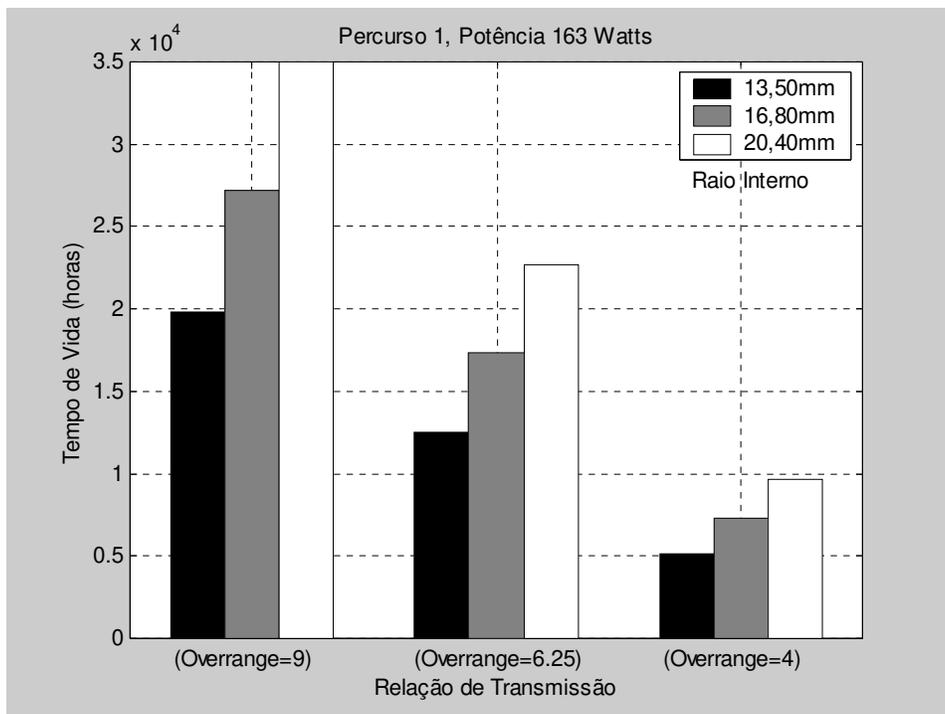


Figura 6.22 – Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.

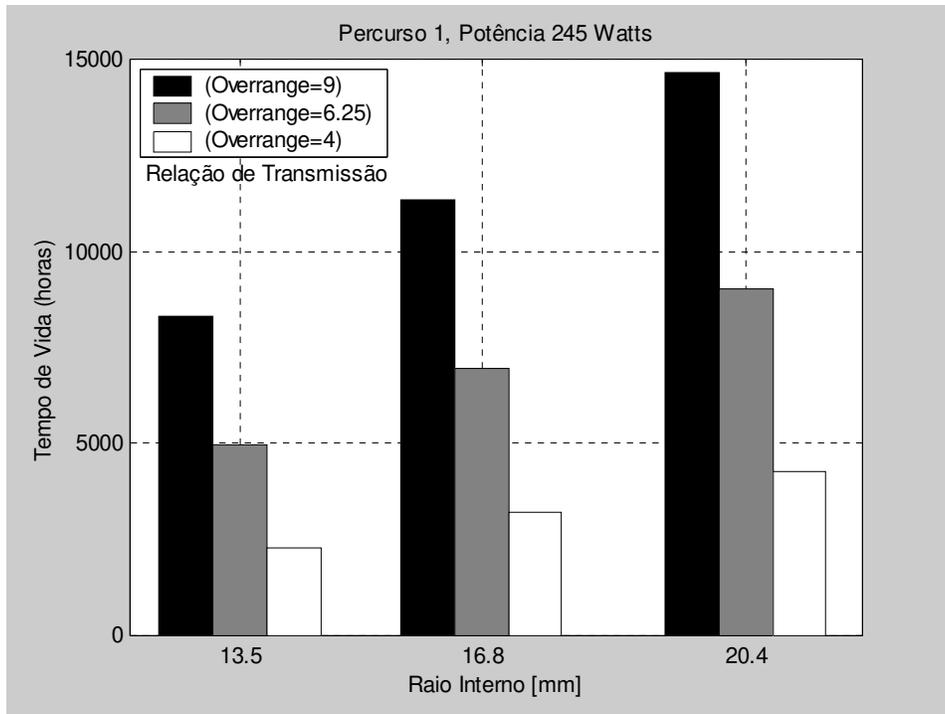


Figura 6.23 – Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.

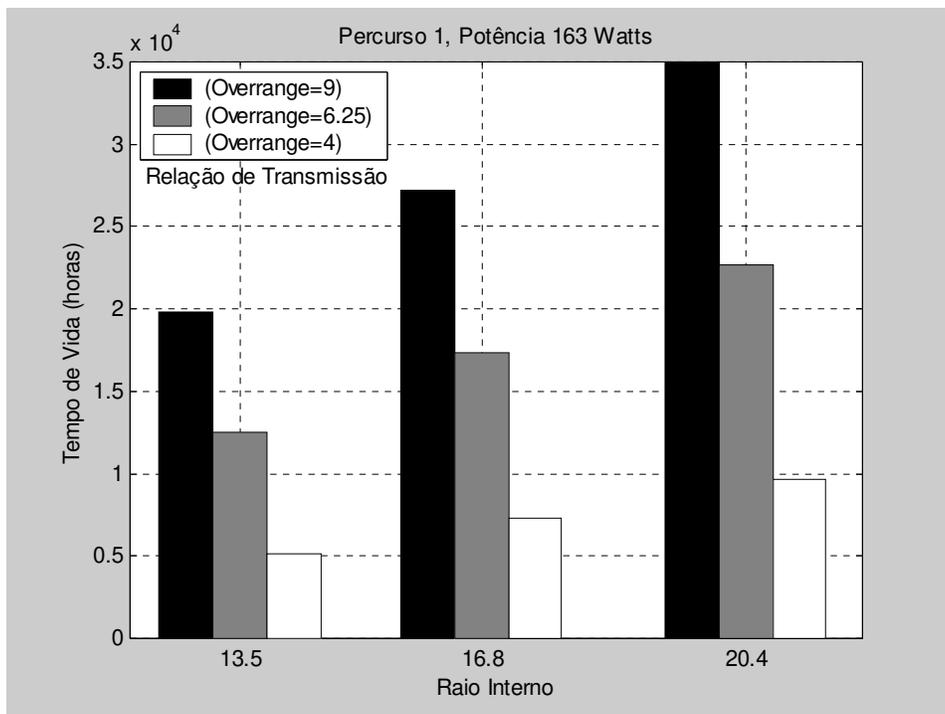


Figura 6.24 – Cálculo da vida em função do raio interno, faixa da relação de transmissão e potência.

6.5 Comentários e Conclusões

O movimento de spin é uma das principais causas de perda de potência em TD-CVTs e está presente, inevitavelmente, em todos os tipos de TD-CVTs. Assim, o spin deve ser mantido tão pequeno quanto possível para que a transmissão tenha boa performance. Nesse capítulo nota-se que uma boa escolha dos parâmetros geométricos pode diminuir o movimento de *spin* nos contatos significativamente.

A análise apresentada para o cálculo do tempo de vida da TD-CVT leva em consideração apenas a falha por fadiga de origem sub-superficial, que é o principal tipo de falha observada em TD-CVTs.

Com respeito à faixa de trabalho da transmissão, quanto mais longa a faixa, maior será o seu tempo de vida. Isso acontece porque quanto maior a faixa de trabalho maior será a área da superfície da esfera que poderá conter a área de contato. Como a análise do tempo de vida por fadiga é baseada na probabilidade de encontrar uma falha na superfície dos elementos rolantes, essa ocorrência torna-se mais difícil.

Capítulo 7

Comentários e Conclusões Finais

Como no final de cada capítulo formam apresentados os comentários e conclusões pertinentes, agora serão feitas apenas algumas considerações gerais.

O projeto de uma TD-CVT requer o conhecimento de vários tópicos (teoria de contato, EHL, controle, dinâmica, mecanismos entre outras) que estão intimamente relacionados. Cada um desses tópicos possui um determinado conjunto de parâmetros de projeto. Assim sendo, parâmetros de projeto de diferentes tópicos acabam se inter-relacionando. Por esse motivo, no projeto de uma TD-CVT é imprescindível saber com precisão a sua aplicação, para que ela possa ser bem projetada.

Como exemplo pode-se citar o caso do ângulo da superfície do cames (Capítulo 5 seção 5.5.1). Se ele for mal projetado as forças normais nos contatos entre os elementos em contato de rolamento podem ser insuficientes para evitar escorregamento, ou demasiadamente altas e, conseqüentemente, os elementos sofrerão esforços elevados. Como vimos no Capítulo 6 seção 6.4.3, quanto maior a força no contato, menor o tempo de vida da transmissão, em contra partida, o escorregamento excessivo no contato pode quebrar o filme lubrificante, fazendo com que os elementos rolantes entrem em contato direto e danifiquem a superfície de contato.

As dimensões do protótipo construído (Raio externo = 34.68mm, ver Figura 6.6) confirmam o tamanho reduzido dessa TD-CVT, ao passo que, as Figuras 2.11 e 5.22 mostram a possibilidade de adaptá-la a uma bicicleta. Além disso, o tempo de vida estimado de 4500 horas

para uma transmissão de potência de 235 Watts (Figura 6.21) é um valor bastante respeitável, mesmo que se esteja admitindo apenas um tipo de falha, ou seja, a falha de origem subsuperficial.

O alto grau tecnológico alcançado no desenvolvimento de materiais e lubrificantes, processos de fabricação, sistemas de controle entre outros tem impulsionado o projeto de CVTs. Atualmente, a grande maioria dos projetos de CVTs têm sido desenvolvidos pela indústrias automobilísticas e, em virtude disso, pode-se prever um futuro bastante promissor para esse tipo de transmissão.

Este trabalho finaliza mais um estágio no desenvolvimento da TD-CVT proposta para veículos de baixo torque e baixa potência. Os próximos passos no cronograma de desenvolvimento desse e outros protótipos de CVT são:

- 1.) A formulação de um programa para o cálculo das forças tangenciais no contato lubrificado, que possa ser utilizado em simulações dinâmicas, ou seja, o algoritmo terá que estimar as forças rapidamente e com um bom grau de precisão. Assim sendo, pensa-se que fazendo algumas adaptações no algoritmo para cálculo das forças tangenciais no contato seco, baseado na teoria simplificada do contato de rolamento, isso seja possível;
- 2.) Desenvolvimento de uma metodologia para o projeto de sistemas de controle para CVTs;
- 3.) Continuar o estudo das características dos lubrificantes nacionais que possam vir a ser utilizados em TD-CVTs.
- 4.) Projetar CVTs com geometrias diferentes.

Bibliografia

Ai, X., Cheng, H. S. A fast model for pressure profile in rough EHL line contacts. *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, v.115, pp.460-465, July 1993.

Archard, J.F. Elastic deformation and the laws of friction. *Proceedings of the Royal Society of London, Serie A* 243, pp.190-205, 1957.

Astrand, P., Rodahl, K. *Tratado de fisiologia do exercício*. 2.ed. Editora: Guanabara, 1987. Cap. 2: Liberação e transferência de energia, pp.8-29. Cap. 9: Capacidade para o trabalho físico, pp.265-303.

Bair, S. e Winer, W. O. A rheological model for elastohydrodynamic contacts based on primary laboratory data. *ASME Journal of Lubrication Technology*, v101, pp.258-265, 1979a.

Bair, S. e Winer, W. O. Shear strength measurements of lubricants at high pressure, *ASME Journal of Lubrication Technology*, v.101, pp251-257, 1979b.

Barus, C. Isothermals, isopiestic and isometrics relative to viscosity. *Am. J of Science*, v.45, pp.87-96, 1893.

Baudoin, P. Continuously variable transmission for cars with high ratio coverage. *SAE Technical Papers Series*. 790041, 1979.

- Bell, J. C., Kannel, J. W e Allen, C. M. The rheological behaviour of the lubricant in the contact zone of a rolling contact system. *ASME Journal of Basic Eng.* v.86, pp.423, 1964.
- Carter F.W. On the Action of locomotive driving wheel. *Proceedings of the Royal Society of London A* 112, pp.151-157, 1926.
- Chironis. P. *Mechanisms, linkages and mechanical controls*. McGraw-Hill, Cap 11: Clutch, coupling, and braking devices, 1965, pp311.
- Coy, J. J., Rohn, D. A., Loewenthal, S. H. Life analysis of multiroller planetary traction drive. *Nasa Technical Paper* 1710. Avradcom Technical Report 80-C-16, 1981.
- Dama, R., Chang, L. An efficient and accurate calculation of traction in elastohydrodynamic contacts. *Wear*, v.206, n.1,2, pp113-121, May 1997.
- Dedini, F. G. *Projeto e otimização de uma transmissão planetária por rolos de tração*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1986. 150p. Tese (Metrado)
- Dickinson, S. The efficiency of bicycle pedalling, as affected by speed and load. *Journal of physiology*, v.67, pp242-255, 1929.
- Dorey, R. E. Na Appraisal of a continuously variable transmission system for possible application to vehicle and industrial drives. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automatic Engineering*, v.206, n.D2, pp125-135, 1992.
- Doug M. Traction drives move to higher powers. *Design Engineering*, pp35-39, December, 1980.
- Dowson, D., Higginson, G.R. *Elasto-hydrodynamic lubrication*. 2.ed. Pergamon Press, Oxford, Great Britain, 1966, 233p.

- Evans, C. R. *Measurement and mapping of the rheological properties of elastohydrodynamic lubricants*. University of Cambridge, 1983, PhD thesis.
- Evans, C. R. e Johnson, K. L. The rheological properties of elastohydrodynamic lubricants, *Proc. Inst, Mech, Engrs*. v200, nC5, pp.303-312, 1986.
- Fang, N., Chang, L., Webster, M.N., Jackson, A. A non-averaging method of determining the rheological properties of traction fluids. *Tribology International*, v.33, pp751-760, 2000.
- Forti, A. W. Projeto e otimização de uma transmissão continuamente variável (CVT) para bicicletas. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997a. 119p. Tese (Mestrado).
- Forti, A. W., Dedini F. G. Development of bicycle-suitable transmissions through performance simulation and ergometric factors. In: *VI International Mobility Technology Conference and Exhibit*, São Paulo, Brazil, October 27-29, 1997b. SAE Paper 973082.
- Forti, A. W., Becker, M., Okabe, E. P., Dedini F. G. Dirigibility and transmission studies applied to human powered tricycles – HPT. In: *Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Oulu, Finland, June 20-24, 1999, v.5, pp. 1944-1949.
- Forti, A. W., Dedini F. G. The influence of spin and lifetime in design of traction drive continuously variable transmissions. In: *X International Mobility Technology Conference and Exhibit*, São Paulo, Brazil, November 19-22, SAE Paper 2001-01-3841.
- Fox, E. D., Bowers, R. W., Foss, M. L. *Bases fisiológicas da educação física e dos desportos*. 4.ed. Editora: Guanabara Koogan, 1991. Cap. 2: Fontes de energia, pp.10-27. Cap. 3: Recuperação após o exercício, pp.28-43. Cap. 4: Mensuração de energia, trabalho e potência, pp.45-60.

- Garry, R.C., Whisart, G.M. On the existence of a most efficient speed in bicycle pedalling, and the problem of determining human muscular efficiency, *Journal of Physiology*, v.72, pp.426-437, 1931.
- Greenwood, J. A. Analysis of elliptical hertzian contacts. *Tribology International* pp.235-237, v.30, n3, 1997.
- Guzzella, L., Schmid, A. M. Feedback Linearization of spark-ignition engines with continuously variable transmissions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v.3, n.1, pp.54-60, March 1995.
- Haines D.J., Ollerton E. Contact stress distributions on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, v177, pp95-114, 1963.
- Hagberg, J.M., Mullin, J.P., Giese, M.D., Spitznagel, E. Effect of pedalling rate on submaximal response of competitive cyclists. *Journal of Applied Physiology.: Respirat. Environ. Exercise Physiol.*, v.51, n.2, pp.447-451, 1981.
- Hamrock, B.J., Dowson, D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: Part I. theoretical formulation, *Journal of Lubrication Technology*, v.98, n.2, pp. 223-229, 1976a.
- Hamrock, B.J., Dowson, D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: Part II. ellipticity parameter results, *Journal of Lubrication Technology*, v.98, n.2, pp.375-383, 1976b.
- Hamrock, B.J., Dowson, D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: Part III. fully flooded results, *Journal of Lubrication Technology*, v.99, n.2, pp.264-276, 1977a.
- Hamrock, B.J., Dowson, D. Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: Part IV. starvation results, *Journal of Lubrication Technology*, v.99, n.1, pp.15-23, 1977b.

Hamrock, B.J., Dowson, D. Elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts for materials of low elastic modulus: Part I. fully flooded conjunctions, *Journal of Lubrication Technology*, v.100, n.2, pp.236-245, 1978.

Hamrock, B.J., Dowson, D. Elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts for materials of low elastic modulus: Part II. starved conjunctions, *Journal of Lubrication Technology*, v.100, n.1, pp.92-98, 1979.

Hamrock, B. J. *Fundamentals of fluid film lubrication*, Mc.Graw-Hill Series in Mechanical Engineering, Mc. Graw-Hill, Inc., 1994.

Harris T. A. *Rolling bearing analysis*. John Wiley, 1991, 1013p.

Heilich, F. W., Shube, E. E. *Traction drives - selection and application*. Pleassey Dynamics Corporation, Hillside, New Jersey 1983.

Hooke, C. J., Huang, P. Elastohydrodynamic lubrication of soft viscoelastic materials in line contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J*, v.211, p.185-194. 1997.

Jacobson, B.O. e Vinet, P. A model for the influence of pressure on the bulk modulus and the influence of temperature on the solidification pressure for liquid lubricants, *ASME Journal of Tribology* v.109, pp.709-714, 1987.

Johnson, K. L. e Cameron, R. Shear behaviour of elastohydrodynamic oil films at high rolling contact pressures, *Proc. Inst. Mech. Engrs.* v.182, n.14, pp.307. Pt-I, 1967.

Johnson K.L., Tevaarwerk, J.L. Shear Behaviour of elastohydrodynamic oil film. *Proceedings of the Royal Society of London A.* v.356, n.1685, pp.215-2, 1977.

Kalker, J.J. *On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction*, Technologic University of Delft, 1967, PhD Thesis.

Kalker, J. J. Simplified theory of rolling contact. *Delft Progress Report Series C: Mechanical and Aeronautical Engineering and Shipbuilding.*, v.1, n.1, p. 1-10, December 1973.

Kalker, J. J. A Fast Algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle System Dynamics*, v.11, pp1-13., December 1973.

Kalker J.J. *Three-Dimensional elastic bodies in rolling contact*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1990, 314p.

Kalker, J. J. Wheel-Rail rolling contact theory. *Wear*, pp.243-261, v.144, 1991.

Kalker, J. J., Dekking, F. M., Vollebregt, E. A. H. Simulation of rough, elastic contacts. *Transactions of the ASME Journal of applied mechanics*, v.64, pp.361-368 June 1997.

Kaneta, M. Effects of surface roughness in elastohydrodynamic lubrication. *JSME International Journal Series III: Vibration, Control, Engineering and Engineering for Industry*, v.35, n4, pp.535-546, 1992.

Kato, K., Kato, M., Inoue, K., Hata, H. Evaluation of limiting shear stress of lubricants for design of traction drives. In: *American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE-Vol.88, Power Transmission and Gearing Conference*, pp.113-118, ASME 1996.

Kato, K., Iwasaki, T., Kato, M., Inoue, K. Evaluation of limiting shear stress of lubricants by roller test. *JSME International Journal, Series C, Dynamics, Control, Robotics, Design and Manufacturing*, v.36, n.4, pp.515-522, 1993.

- Lim, K.H., Ullman, D.G. Optimal design of traction drive continuously variable transmissions. *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, v.111, pp.264-269, June 1989.
- Lim, K.H. Optimal design of traction drive continuously variable transmissions, Oregon State University, 1989, 152p, PhD Thesis
- Loewenthal S. H. Spin analysis of concentrated traction contacts. *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. v.108, pp.77-85, March 1986.
- Loewenthal, S. H., Zaretsky, E. V. Design of traction drives. *NASA Reference Publication* 1154, 1985.
- Love, A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4.ed. Ed. Cambridge, 1926.
- Lundberg G., Palmgren A. Dynamic capacity of rolling bearings. Ingeniörsvetenskapsakademies Handlingar NR 196 1947, Generalstabens Litografiska Anstalts Förlag Stockholm.
- Lukowski, S.A., Medeksza, L. A., Claar, P. W. Geometry of contact and hertzian stress analysis of frictional coupling elements of mutidisk Stepless Transmission with Initial Point Contact. *Journal of Mechanical Desing – Transaction of the ASME*, v.113, pp.416-421, December 1991.
- Ma, Q., Ro, P. I. Robust H_{∞} control of traction drive system for precision motion. *Proceedings of the American Control Conference, Green Valley, AZ, USA*. v.3, pp.2965-2966, 1994.
- Mattsson, P. A. Ratio coverage of continuously variable split-power transmissions. *American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publications), Power Transmission and Gearing Conference*. DE-Vol. 88, ASME 1996.

Mindlin R.D. Compliance of elastic bodies in contact. *Journal of Applied Mechanics* v16, pp.353-383, 1949.

Moore, A. J. The behaviour of lubricants in elasto-hydrodynamic contacts. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, pp.91-106, v.211, n4, 1997.

Mori, H., Yamazaki, T., Kobayashi, K., Hibi, T. A Study on the layout and ratio change characteristics of a dual-cavity half-toroidal CVT. *JSAE Review*, n.22, p299-303, 2001.

Nonweiler, T. R. F. The man-powered aircraft. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, v.62, pp.723-734, October 1958.

Osamura, K., Itoyama, H., Iwano, H. Improvement of drive torque response by applying an integrated control algorithm for diesel engine and CVT. *JSAE Review* n22, p293-298, 2001

Parter, A. D. On the reciprocal pressure between two bodies. *Proceedings of the Symposium of Rolling Contact Phenomena*, Ed. J. B. Bidweel, Elsevier, pp.22-75, 1962.

Patterson, R.P., Pearson, J.L The influence of flywheel weight and pedalling frequency on the biomechanics and physiological responses to bicycle exercise. *Ergonomics*, v.26, n.7, p.659-668, 1983.

Peal, P. Transmission the next (stepless) step? *Automotive Engineer (London)*. v21, n.4 pp.26-27, Aug-Sep,1996.

Rabinowicz E. *Friction and wear of materials*. John Wiley and Sons, New York , 1965.

Reay, D.A. *The history of man-powered flight*, Willian Clowes & Sons 1977, 355p.

- Roelands, C.J.A. *Correlation aspects of the viscosity-temperature-pressure relationship of lubricating oils*, Technische Hogeschool Delft, The Netherlands, 1966, 155p. PhD Thesis.
- Rohn, D. A., Loewenthal, S. H., Coy, J. J. Simplified fatigue life analysis for traction drive contacts. *Journal of Lubrication Technology*. v.103, pp.430-439, April, 1981.
- Seabury, J.J., Adams, W.C., Ramey, M.R. Influence of pedalling rate and power output on energy expenditure during bicycle ergometry. *Ergonomics*, v.50, n.5, pp.491-498, 1977.
- Silva, C. W., Schultz, M., Dolejsi, E. Kinematic analysis and design of a continuously variable transmission. *Mechanism and Machine Theory*, v.29, n.1, pp.149-167, 1994.
- Singh, T., Nair, S. S. A Mathematical review and comparison of continuously variable transmissions. *SAE International Worldwide Passenger Car Conference and Exposition*, Dearbon, Michagan, U.S.A, September 28 - October 1, 1992.
- Spikes, H. A., Olver A. V. Prediction of traction in elastohydrodynamic lubrication. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology, Proceeding Part J*, v.212, n.5, pp.321-332, 1998.
- Smith, F. W. Lubricant behaviour in concentrated contact systems – the castor oil-steel system, *Wear* v.2, pp.250-263, 1959.
- Soviero M.M. Bike to the future. *Popular Science*, p.100-101, August 1992.
- Suzuki, Y., Mechanical efficiency of fast and slow twitch muscle fibers in man during cycling. *Journal of Applied Physiology.: Respirat. Environ. Exercise Physiol*, v.47, n.2, p.263-267, 1979.

Tanaka H. Power transmission of a cone roller toroidal traction drive. *JSME International Journal, Series 3: Vibration, Control Engineering, Engineering for Industry*, v.32, n.1, pp.82-90, March 1989.

Tanaka H., Eguchi, M. Stability of a Speed ratio control servo-mechanism for a half-toroidal traction drive CVT. *JSME International Journal, series C: Dynamics, Control Robotics, Design and Manufacturing*, v.36, n.1, pp.135-140, 1993.

Tanaka, H., Machida, H., Hata, H., Nakano, M. Half-toroidal traction drive continuously variable power transmission for automobiles (traction drive materials, transmission design and efficiency). *International Journal, series C: Dynamics, Control Robotics, Design and Manufacturing*, v.38, n.4, pp.772-777, 1995a.

Tanaka, H., Eguchi, M., Machida, H., Imanishi, T. Power transmission of half-toroidal traction drive continuously variable transmission (four-wheel-drive CVT design and its performance). *International Journal, series C: Dynamics, Control Robotics, Design and Manufacturing*, v.38, n.4, pp.778-782, 1995b

Tanaka, H., Machida, H. Half-toroidal traction drive continuously variable transmission. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Parte J: Journal of Engineering Tribology*, v.210, p.205-212, 1996.

Tevaarwerk, J. L. A Simple thermal correction for large spin traction curves. *Journal of Mechanical Design*. v.103, pp.440-446, april 1981.

Timoshenko S., Goodier J.N. *Theory of elasticity*, 3ed., McGraw-Hill, 1951.

Vermeulen P.L., Johnson K.L. Contact of nospherical bodies transmitting tangential forces. *Journal of Applied Mechanics*, v31, p 338-340, 1964.

Wernitz, W., Friction at hertzian with combined roll and twist. *Rolling Contact Phenomena*, J. B. Bidwell, ed., Elsevier, Amsterdam, 1962.

Wilkie, D.R., Man as a source of mechanical power. *Ergonomics*, v.3, n.1, pp.1-8, 1960.

Yamaguchi, J. CVT's Rapid expansion. *Automotive Engineering*. pp.77-82. March 1996.

Yamaguchi J. Concept vehicles and technology at the Tokyo motor show. *Automotive Engineering International*, p.41-65, January 1998.

Yeple F. Metal-to-metal traction drives now have a new lease on life. *Design*, pp.33-37, October,1971.

Zhang, Y., Zhang, X., Tobler, W. A systematic model for the analysis of contact, slide slip and traction of toroidal drives. *Journal of Mechanical Design* v.122, pp.523-528, 2000.

Zou, Z., Zang, Y., Zhang, X., Tobler, W. Modeling and simulation of traction drive dynamics and control. *Journal of Mechanical Design*, v.123, pp.556-561, 2001.

Apêndice A

FASTSIM

A.1 Introdução

FASTSIM é um algoritmo para determinar a tração no caso geral (principalmente quando $\varphi \neq 0$). Relembrando a Equação 3.106, na qual foi inserida a hipótese teórica simplificada, ou seja:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{c} + (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{k} = \frac{\mathbf{c} + L(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{k} \quad (\text{A. 1})$$

sendo:

$$\mathbf{c} = \dot{\mathbf{x}}_1 - \dot{\mathbf{x}}_2 = \text{creep}$$

$$\mathbf{p} = (p_x[(x, y), t], p_y[(x, y), t])^T = \text{tração presente}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p}((\mathbf{x} + \mathbf{v}k), t - k)$$

Na borda dianteira $a(y, t)$, $\mathbf{p} = 0$, ou seja, é conhecido. Supondo que \mathbf{p}' seja conhecido. Então, \mathbf{p} é?

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + (k/L)[\mathbf{s} - \mathbf{c}] \quad (\text{A.2})$$

No lado direito da Equação A.2, apenas o escorregamento (*slip*) \mathbf{s} é desconhecido. O escorregamento de corpo rígido (*rigid slip*) \mathbf{c} é conhecido. Na base da tentativa faz-se $\mathbf{s} = 0$.

$$\mathbf{p}_H = \mathbf{p}(\mathbf{x})_{s=0} = \mathbf{p}' - (k/L)\mathbf{c} \quad (\text{A.3})$$

Determina-se $|\mathbf{p}_H|$, e compara-se com g (limite de tração que é conhecida). Se:

- $\mathbf{p}_H \leq g$: ajusta-se $\mathbf{p} = \mathbf{p}_H$;

Então $|\mathbf{p}_H| \leq g$, e $\mathbf{s}=0$: COULOMB

- $\mathbf{p}_H > g$: ajusta-se $\mathbf{p} = (g/|\mathbf{p}_H|)\mathbf{p}_H$.

Então $|\mathbf{p}| = g$, e

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} + (L/k)(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = (L/k)(-\mathbf{p}_H + \mathbf{p}) = -(L/k)\mathbf{p}_H(1 - [g/|\mathbf{p}_H|])$$

tal que \mathbf{s} é exatamente oposta \mathbf{p} : COULOMB

O sumário do algoritmo para contato de rolamento estacionário (*steady state*) é:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x} + t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.4})$$

dados:

$$\mathbf{x} = (x, y);$$

$$\mathbf{x} + k\mathbf{v} = (x + q, y);$$

m = número de intervalos em x (divisão do eixo da elipse na direção x);

n = número de intervalos em y (divisão do eixo da elipse na direção y);

V = $|\mathbf{v}|$ = velocidade de rolamento, >0 ;

L = flexibilidade, >0 ;

g = $g(x,y)$ limite de tração em $(x,y) \in C$;

$c(x,y)$ = escorregamento de corpo rígido (*rigid slip*) em $(x,y) \in C$;

$+a(y)$ = borda dianteira;

$-a(y)$ = borda traseira;

a, b : semi-eixos do contato elíptico;

\mathbf{p}_H, \mathbf{p} : tração tangencial, a ser calculada;

\mathbf{F} : força tangencial total, a ser calculada;

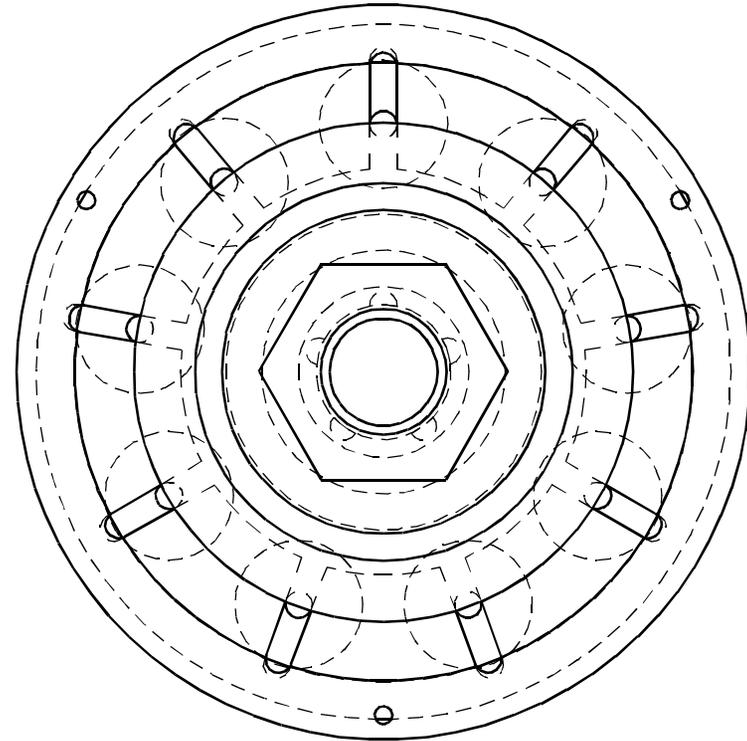
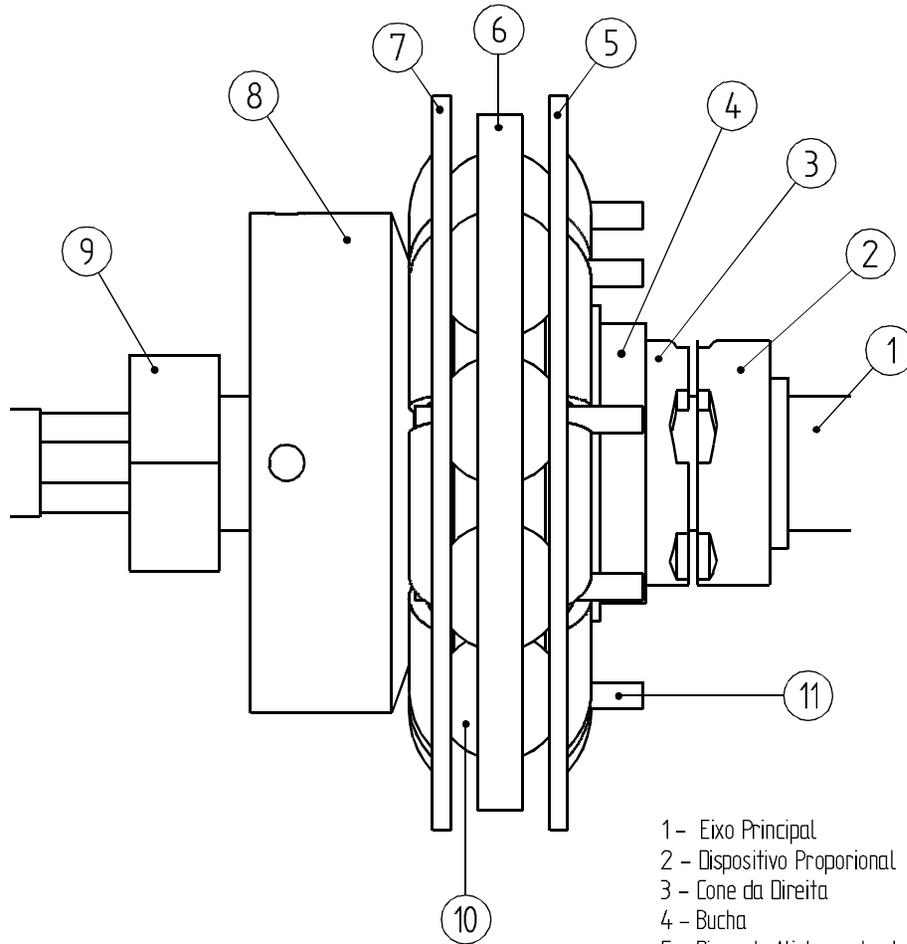
A.2 O algoritmo

1. Ajuste $r = \frac{2b}{n}$; $y = \frac{b-r}{2}$; $\mathbf{F} = 0$ (inicialização do programa e *loop* em y);
2. $q = \frac{2a(y)}{m}$; $x = a(y) - q$; $p = p(x + q, y) = 0$ (inicialização e *loop* em x);
3. $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ (\mathbf{p}' é \mathbf{p} recém encontrado);
4. $\mathbf{p} = \mathbf{p}' - \left[\frac{q}{VL} \right] \mathbf{c} \left(x + \frac{q}{2}, y \right)$
5. Se $|\mathbf{p}| > g$ então $\mathbf{p} = \left(\frac{g}{|\mathbf{p}|} \right) \mathbf{p}$ (Forma \mathbf{p} se o limite de tração é excedido).
Senão, $|\mathbf{p}| \leq g$ (área de *stick*), e $\mathbf{p}(x,y) = \mathbf{p} = \mathbf{p}_H$.
6. $\mathbf{p}(x,y) = \mathbf{p}$; $\mathbf{F} = \mathbf{F} + q r \mathbf{p}$ (preencha $\mathbf{p}(x,y)$; atualize \mathbf{F})
7. $x = x - q$; se $x > -a(y)$ vá para 3 (teste do *loop* x)
8. $y = y - r$; se $y > -b$ vá para 2 (teste do *loop* y)
9. Pronto

Apêndice B

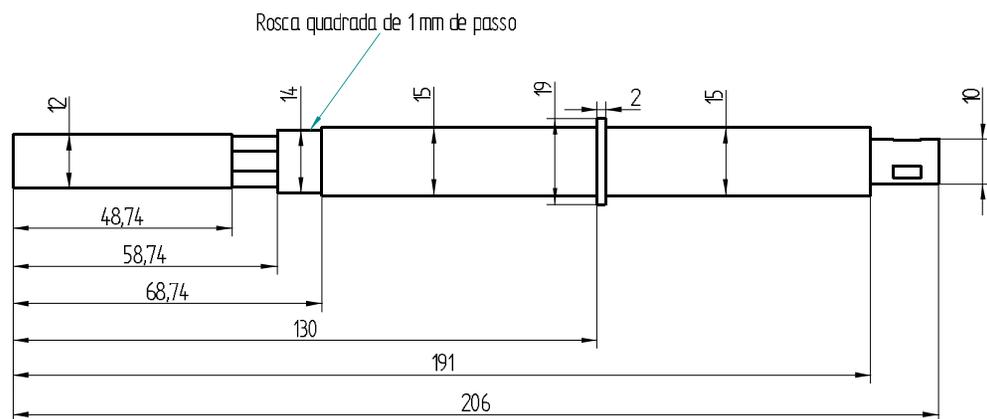
Desenho das Peças Principais da Transmissão

Desenho de Conjunto – Esquema da Transmissão

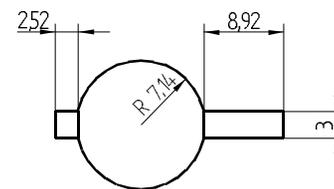


- 1- Eixo Principal
- 2 - Dispositivo Proporcional
- 3 - Cone da Direita
- 4 - Bucha
- 5 - Disco de Alinhamento da Direita
- 6 - Anel
- 7 - Disco de Alinhamento da Esquerda
- 8 - Cone da Esquerda
- 9 - Parca de Aperto
- 10 - Esfera
- 11 - Eixo da Esfera

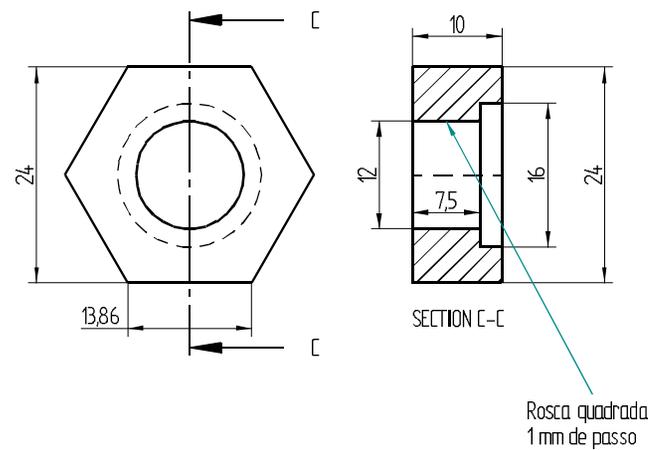
1 Eixo Principal



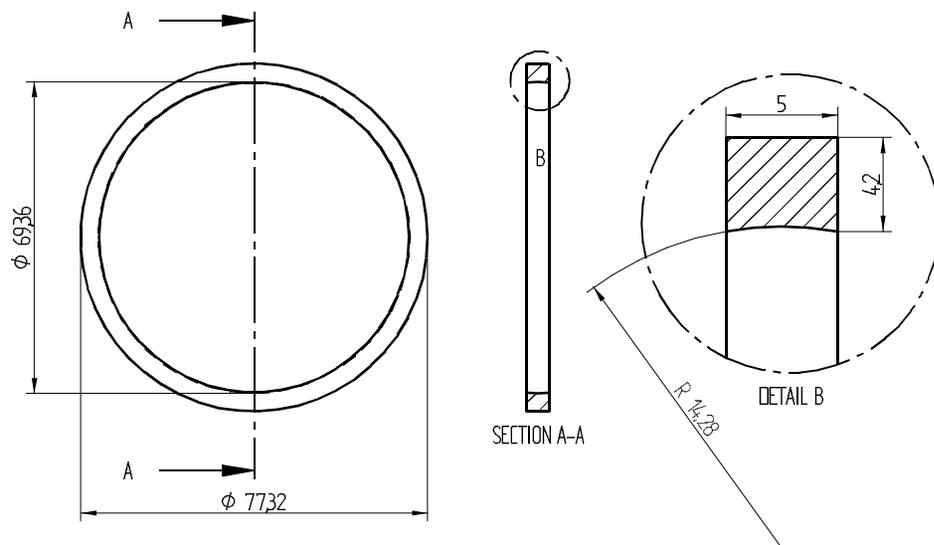
10/11 - Esfera e Eixo da Esfera



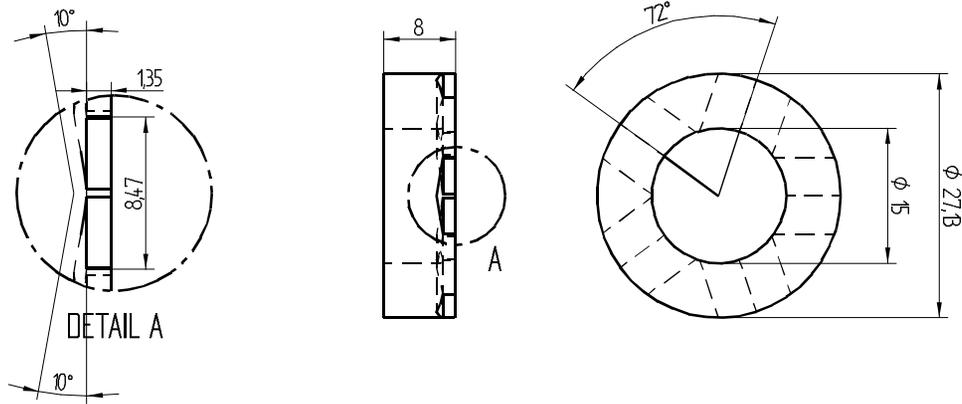
9 Porca de Aperto



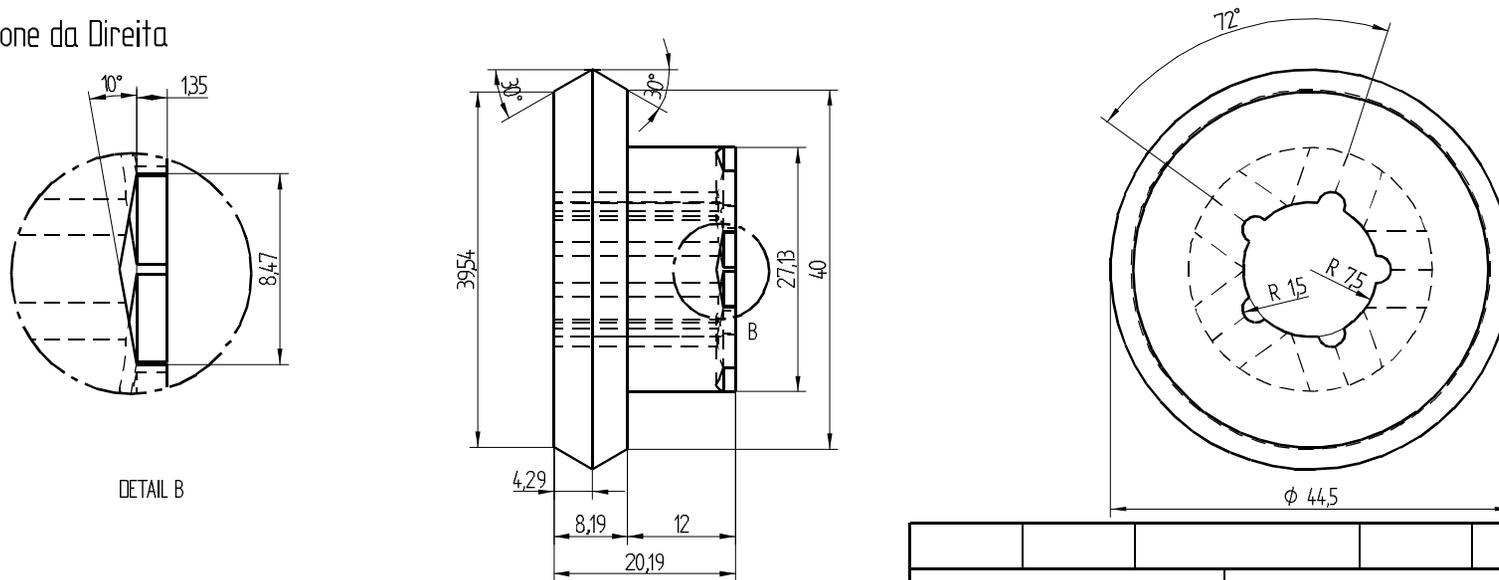
6 - Anel



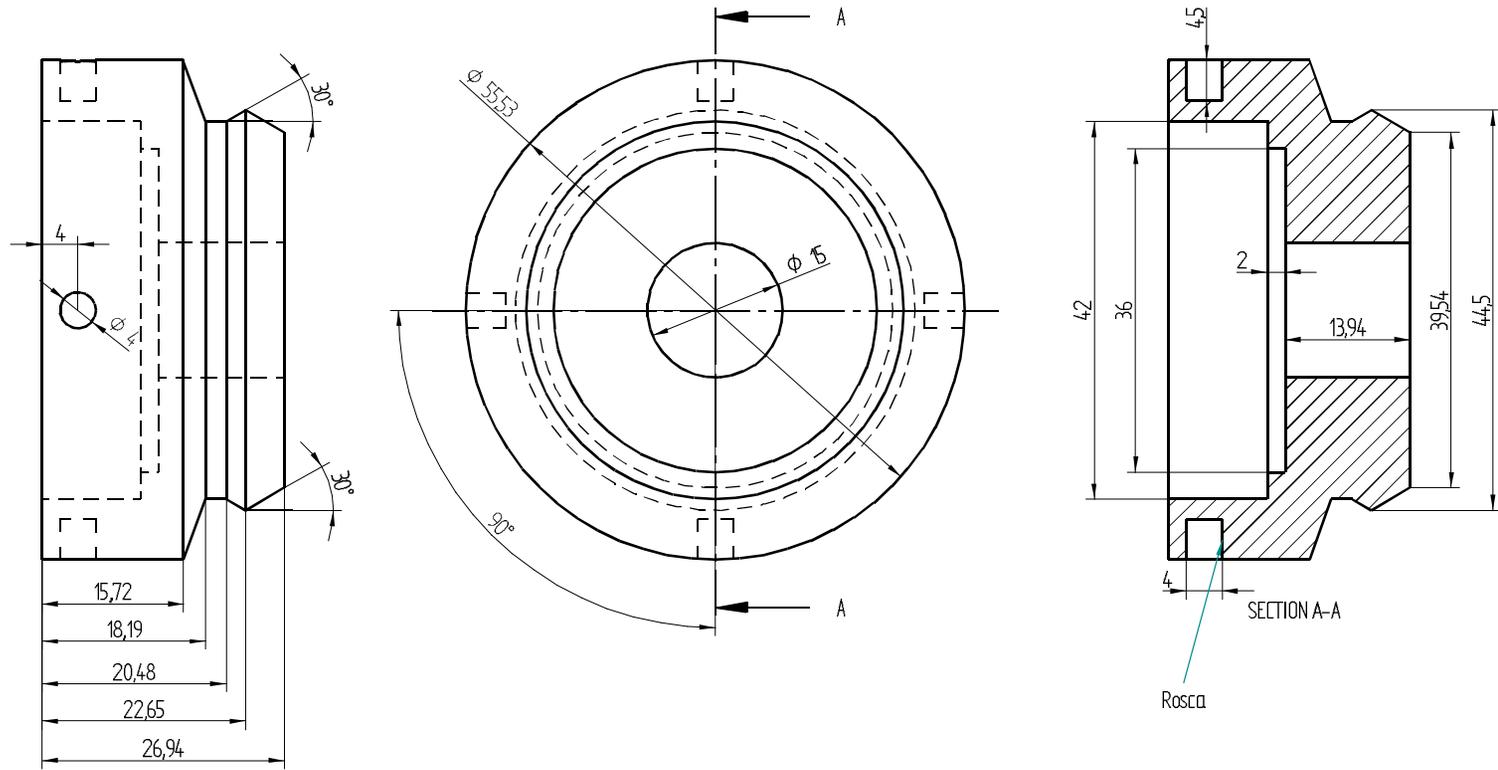
2 Dispositivo Proporcional



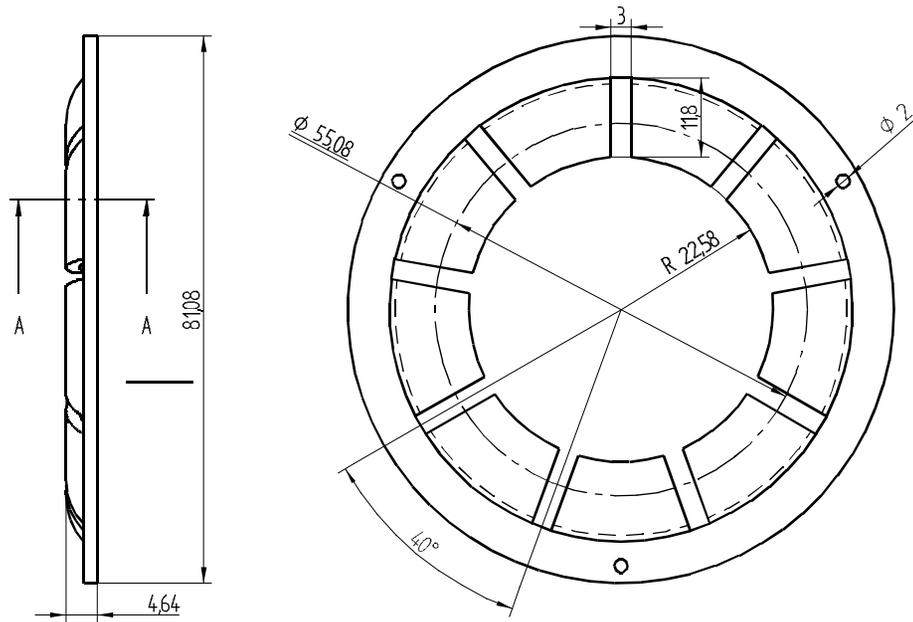
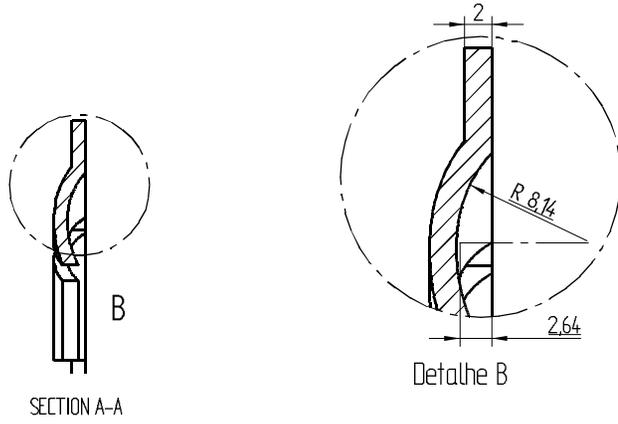
4 - Cone da Direita



8 - Cone da Esquerda



5/7 Discos de Alinhamento



Apêndice C

Cálculo do Disco de Ajuste da Relação de Transmissão

C.1 Desenvolvimento

Nessa seção será descrito o procedimento para o cálculo do rasgo do disco de ajuste da relação de transmissão.

A idéia básica é que um deslocamento angular desse disco (ângulo α) no plano xz ao redor do eixo principal da transmissão causará uma rotação do eixo da esfera no plano yz (ângulo β), mudando assim, a relação de transmissão da CVT, Figura C.1.

A geometria do rasgo é função de:

- r_1 - Distância entre o centro da esfera e o ponto de contato entre o disco de ajuste e o eixo da esfera;
- β máximo - Ângulo máximo de inclinação do eixo da esfera;
- Relação entre o ângulo de inclinação do eixo da esfera β , e o ângulo de rotação do disco de ajuste α ;

São dados:

- diâmetro da esfera (14,28 mm)
- diâmetro do furo da esfera (3 mm)

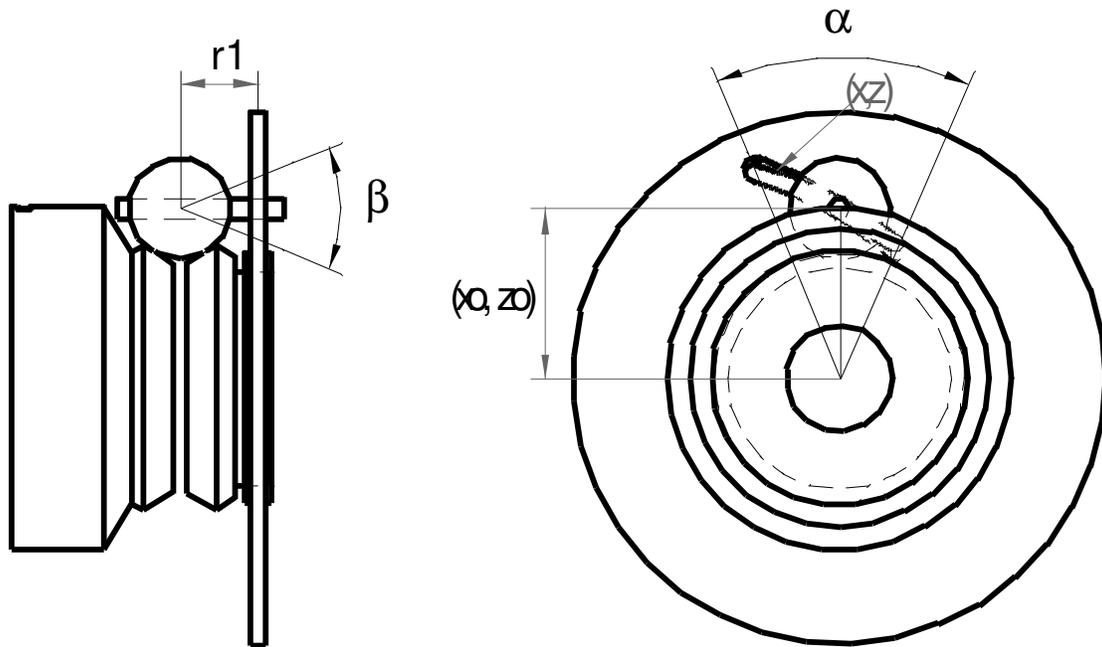


Figura C.1 – Vista dos ângulos α e β na transmissão

Procedimento de cálculo:

- 1.) Através da configuração geométrica da CVT determina-se o ponto em que a relação de transmissão é 1:1 (eixo de rotação da esfera está paralelo ao eixo principal da CVT), coordenadas (x_0, z_0) ;
- 2.) Define-se
 - Ângulo máximo de inclinação do eixo da esfera, β máximo;
 - $rel = \frac{\beta}{\alpha}$ (Relação entre os ângulos β e α)
 - Número de esferas.
- 3.) Foram definidos anteriormente
 - Raio da esfera
 - Diâmetro do furo da esfera;
 - Raio interno - parâmetro estudado durante os cálculos do spin na transmissão, ver Figura C.2.

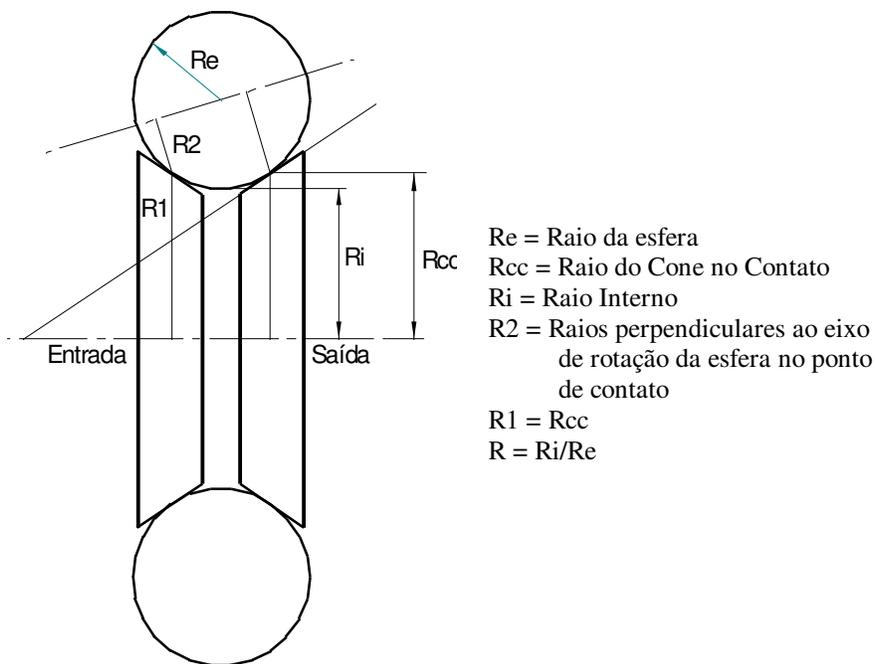


Figura C.2 - Vista dos ângulos α e β na transmissão

O deslocamento vertical do eixo de inclinação da esfera no ponto de contato com o disco de ajuste da relação de transmissão é dado por:

$$\overset{v}{z} = z_0 + r \sin(\overset{v}{\beta}) \quad (\text{C. 1})$$

A relação entre o deslocamento vertical do eixo de inclinação da esfera no ponto de contato com o disco de ajuste da relação de transmissão e o deslocamento na direção x do disco de ajuste é:

$$\overset{v}{x} = x_0 + \overset{v}{z} \tan(\overset{v}{\alpha}) \quad (\text{C. 2})$$

sendo:

(x_0, z_0) – ponto em que a relação de transmissão é 1:1.

$\overset{v}{\beta}$ - ângulo de inclinação do eixo de rotação da esfera.

$\overset{v}{\alpha}$ - ângulo de rotação do disco de ajuste da relação de transmissão

r - distância entre o centro da esfera e o ponto de contato com o disco de ajuste da relação de transmissão, quando a relação de transmissão é 1:1.

As Figuras C.3 e C.4 mostram as curvas descritas pelo centro do eixo da esfera em função do raio de inclinação da esfera r , sendo r_5 igual a $r = 5\text{mm}$; r_{10} igual a $r = 10\text{mm}$ e assim por diante.

Observações:

- 1.) Não foi levando em conta o diâmetro do eixo da esfera e a espessura do disco;
- 2.) Observa-se na Figura C.5 que a geometria do rasgo varia de ponto a ponto, para poder acomodar o eixo de rotação da esfera no seu interior, em virtude da espessura do disco.

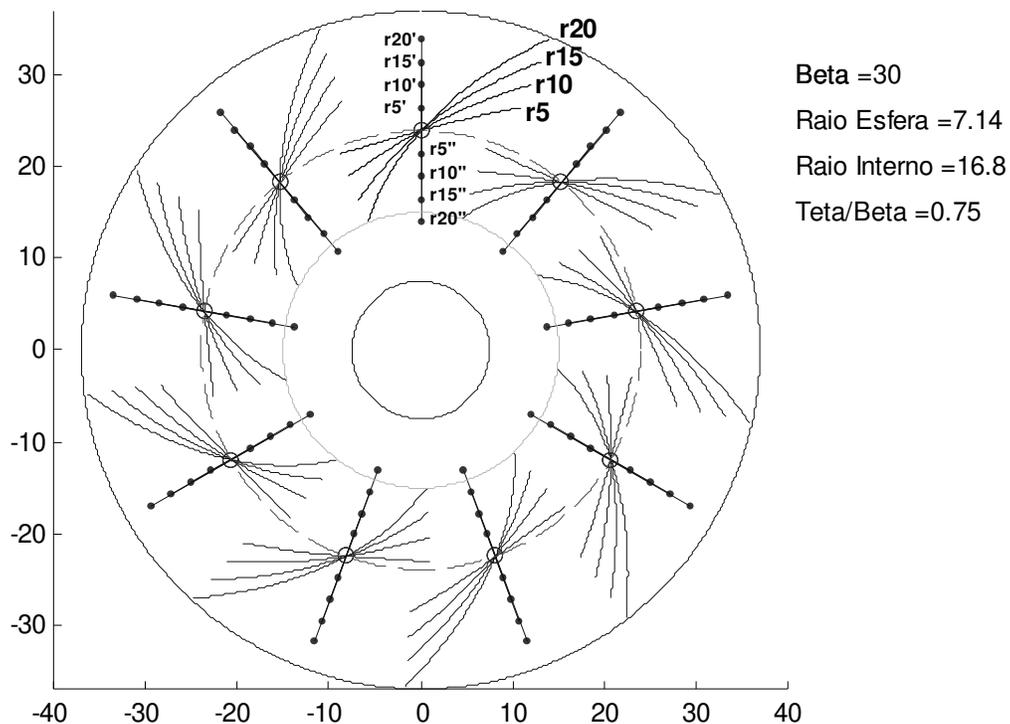


Figura C.3 – Perfis dos rasgos em função do eixo inclinação da esfera

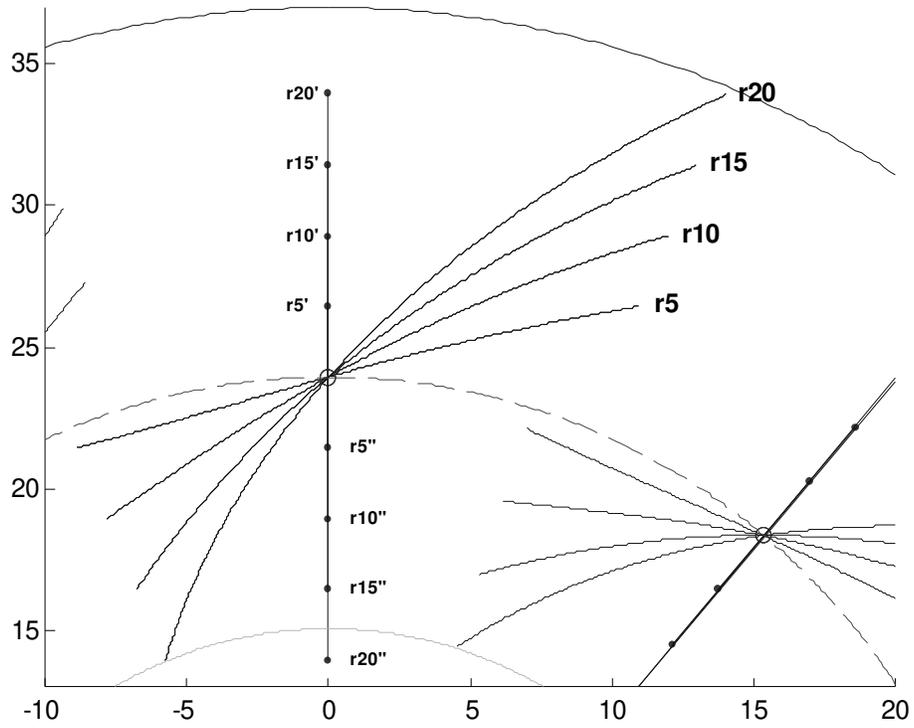


Figura C.4 – Detalhe da Figura C.3

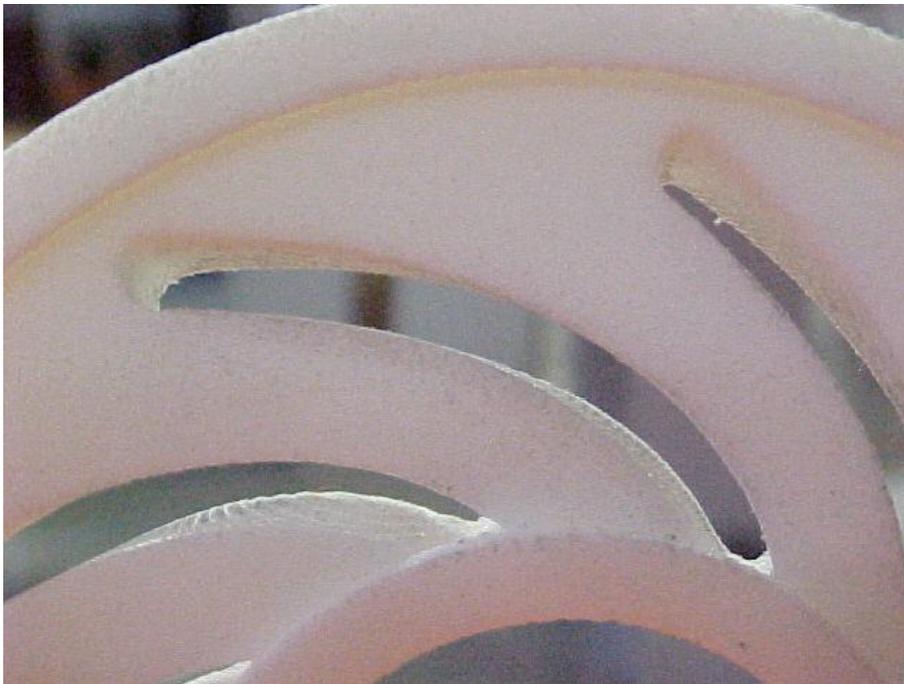


Figura C.5 – Detalhe rasgo do disco de ajuste da relação de transmissão

Apêndice D

Cálculo do Cames

D.1 Metodologia de cálculo do cames

O tem por objetivo aumentar a força normal no contato, impedindo o escorregamento entre as esferas e os cones e, facilitando assim a transmissão de potência entre os elementos em contato de rolamento.

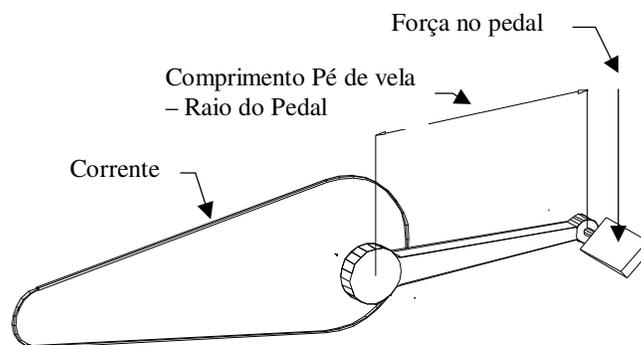


Figura D. 1 – Parte do sistema propulsor de uma bicicleta

A Figura D.1 mostra parte do sistema propulsor de uma bicicleta. A Figura D.2 apresenta algumas das forças envolvidas na transmissão, enquanto que a Figura D.3 representa a relação entre as forças normal e tangencial no contato em função do ângulo ϵ .

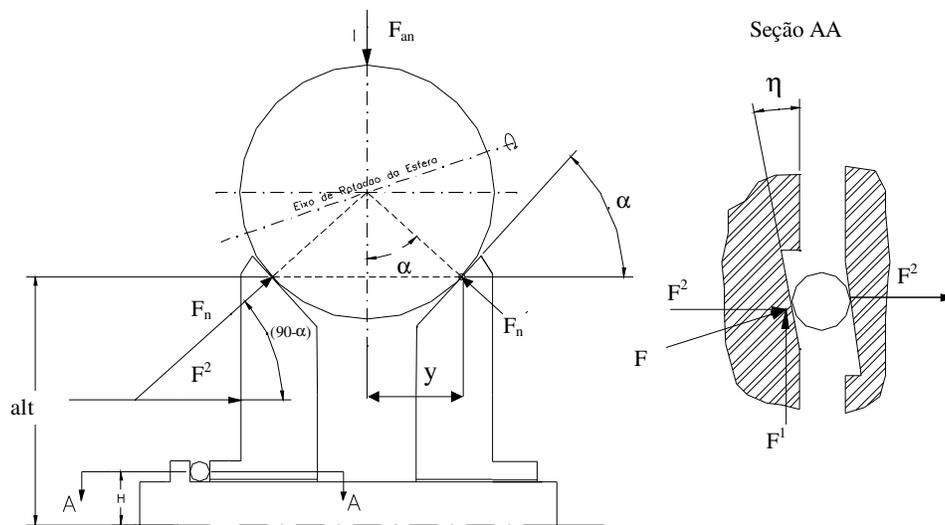


Figura D. 2 - Princípio de funcionamento do cames

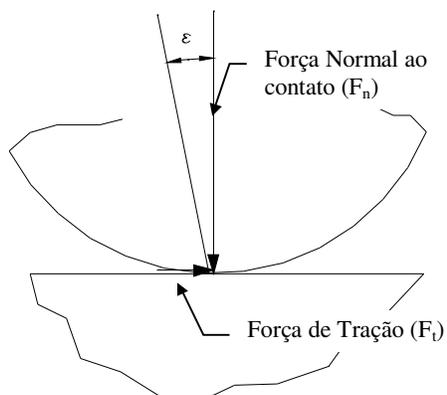


Figura D. 3 – Forças agindo na região de contato esfera-cone

Nomenclatura para esse tópico:

T – Torque

F – Força

r – Raio

n – número de esferas na transmissão

m – número de esferas no dispositivo de torque

μ - coeficiente de tração do fluido lubrificante

α - ângulo de inclinação do cone

η - ângulo do cames

Índices

p – pedal

n - normal

t – tangencial

ce – cone de entrada

c –cames

Primeiramente deve-se fornecer o valor da força nos pedais. Em função do comprimento do pé de vela (raio do pedal), calcula-se o torque nos pedais, que deve ser igual ao torque no cone de entrada (cone motor) da transmissão. Assim sendo:

$$T_p = r_p F_p = F_t r_{ce} n \quad (\text{D. 1})$$

$$F_t = \frac{r_p F_p}{r_{ce} n} \quad (\text{D. 2})$$

Da Figura D.3 temos que $\mu = \tan(\varepsilon) = F_t / F_n$

$$F_t = F_n \mu \quad (\text{D. 3})$$

Substituindo D.2 em D.3

$$F_n = \frac{r_p F_p}{r_{ce} n \mu} \quad (\text{D. 4})$$

F_n é a força normal necessária em cada esfera da transmissão para transmitir a potência fornecida nos pedais. Quanto maior o número de esferas na transmissão, menor a força tangencial necessária em cada esfera para transmitir essa potência. Portanto, menor a força normal no contato e, conseqüentemente, maior a vida do conjunto. Contudo, deve-se confirmar se F_n é suficiente para atingir o efeito da lubrificação elastohidrodinâmica.

Da Figura D.2 tem-se que as decomposições na direção axial da força normal no contato esfera cone deve ser igual a decomposição na direção axial da força no cames, ou seja:

$$F_n \sin(\alpha) n = F^2 m \quad (\text{D. 5})$$

Seguindo o raciocínio semelhante ao descrito acima, a somatória das forças tangenciais no cames estão relacionada ao torque nos pedais,

$$F^2 m = \frac{r_p F_p}{r_c \tan(\eta)} \quad (\text{D. 6})$$

Teoricamente, pode-se colocar qualquer número de esferas no cames. Contudo, é bom calcular o valor das tensões nas esferas do cames para confirmar se elas suportam as tensões aplicadas.

Igualando as Equações D.5 e D.6:

$$F_n \sin(\alpha) n = \frac{r_p F_p}{r_c \tan(\eta)} \quad (\text{D. 7})$$

ou seja,

$$F_n = \frac{r_p F_p}{r_c \tan(\eta) \sin(\alpha) n} \quad (\text{D. 8})$$

O valor da força normal calculada na Equação D.8 deve ser maior ou igual ao da força normal calculada na Equação D.4. Assim sendo, deve-se ajustar os parâmetros na Equação D.8 para que esse objetivo seja atingido.

Igualando as Equações D.4 e D.8,

$$\frac{r_p F_p}{r_{ce} n \mu} = \frac{r_p F_p}{r_c \tan(\eta) \sin(\alpha) n} \quad (\text{D. 9})$$

$$\mu = \tan(\eta) \sin(\alpha) \left(\frac{r_c}{r_{ce}} \right) \quad (\text{D. 10})$$

A Equação D.10 representa o valor o coeficiente de tração necessário ao fluido lubrificante em função dos parâmetros geométricos do problema.

D.2 Resultados

O ângulo da superfície do cames foi calculado para transmitir uma dada potência em função da faixa da relação de transmissão, tipo de percurso, raio interno (ver Figura 6.6) e número de esferas na transmissão.

Tabela D. 1 - Percurso 1, potência 165Watts, faixa relação 1:2~2:1

Ângulo do cames. (η)	Raio interno	Número de esferas
8	13.50	8
10	16.80	8
12	20.40	8
8	13.50	8
10	16.80	9
12	20.40	10

Tabela D. 2 - Percurso 1, potência 165Watts, faixa relação 1:2.5~2.5:1

Ângulo do cames. (η)	Raio interno	No. de esferas
7	13.50	8
8.5	16.80	8
10.5	20.40	8
7	13.50	8
8.5	16.80	9
10.5	20.40	10

Tabela D. 3– Percurso 1, potência 165Watts, faixa relação 1:3~3:1

Ângulo do cames. (η)	Raio interno	No. de esferas
6.5	13.50	8
8	16.80	8
9.5	20.40	8
6.5	13.50	8
8	16.80	9
9.5	20.40	10

Tabela D. 4 – Percurso 1, potência 245Watts, faixa relação 1:2~2:1

Ângulo do cames. (η)	Raio interno	No. de esferas
8.2	13.50	8
10	16.80	8
12	20.40	8
8.2	13.50	8
10	16.80	9
12	20.40	10

Tabela D. 5 – Percurso 1, potência 245Watts, faixa relação 1:2.5~2.5:1

Ângulo do cames. (η)	Raio interno	No. de esferas
7	13.50	8
8.7	16.80	8
10.5	20.40	8
7	13.50	8
8.7	16.80	9
10.5	20.40	10

Tabela D. 6 – Percurso 1, potência 245Watts, faixa relação 1:3~3:1

Ângulo do cames. (η)	Raio interno	No. de esferas
6.5	13.50	8
8	16.80	8
9.5	20.40	8
6.5	13.50	8
8.1	16.80	9
9.5	20.40	10

Face aos resultados obtidos foi escolhido um ângulo igual a 10 graus para a superfície do cames.