UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Luís Jorge Mesquita de Jesus

Análise de Cascas Abatidas de Materiais Compósitos Laminados Simétricos Usando o Método dos Elementos de Contorno

Campinas, 2011

30/2011

Luís Jorge Mesquita de Jesus

Análise de Cascas Abatidas de Materiais Compósitos Laminados Simétricos Usando o Método dos Elementos de Contorno

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque
Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero

Campinas
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Jesus, Luís Jorge Mesquita de
J499a	Análise de cascas abatidas de materiais compósitos laminados simétricos usando o método dos elementos de contorno / Luís Jorge Mesquita de Jesus. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.
	Orientadores: Éder Lima de Albuquerque, Paulo Sollero.
	Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Método dos elementos de contorno. 2. Cascas (Engenharia). 3. Materiais compósitos. I. Albuquerque, Éder Lima de. II. Sollero, Paulo. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Analysis of shallow shells of symmetric composite laminated materials using the boundary element method
Palavras-chave em Inglês: Boundary element method, Peel (Engineering), Composite materials
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Carlos Alberto Cimini Júnior, Luciano Mendes Bezerra
Data da defesa: 17/02/2011
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise de Cascas Abatidas de Materiais Compósitos Laminados Simétricos Usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: **Luís Jorge Mesquita de Jesus**
Orientador: **Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque**
Co-orientador: **Prof. Dr. Paulo Sollero**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque, Presidente
FEM/UNICAMP

Carlos Alberto Cimini Jr.

Prof. Dr. Carlos Alberto Cimini Júnior
FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Luciano Mendes Bezerra
FT/UnB

Campinas, 17 de fevereiro de 2011.

Dedicatória

Dedico este trabalho à pessoa mais importante de toda minha existência, Jesus Cristo, o Filho de Deus, que foi quem me proporcionou todas as coisas boas que tenho e que fazem parte de meu caráter, e a meus pais e irmãos que foram instrumentos D'Ele para isso.

Agradecimentos

- Primeiramente, a Deus por tudo o que tenho e que sou.

- Aos meus pais, Jorge e Antonia, e irmãos, Newton e Ysnaia que sempre incentivaram meus estudos apoiando e participando de todas as minhas pequenas conquistas. Sem eles, nada seria possível.

- Ao meu orientador, Professor Éder Lima de Albuquerque, pela dedicação, amizade, paciência e ótima orientação, sempre motivando e auxiliando neste trabalho.

- Ao Professor Paulo Sollero pela co-orientação, palavras de incentivo e apoio durante o mestrado.

- A todos os irmãos da IBN Vinho Novo por todo o apoio e orações.

- Aos amigos da República (Samir, Lenilson, Leonardo, Daniel, Olímpio, Arthur e Edmilson) pelo companheirismo, amizade e brincadeiras durante todos os dias de convivência.

- Aos amigos Adilto Cunha, Adriana, Núbia, Flamys, Carolina Matsuo, Raquel, Lourival, Ed Carlos, Carlos Alexandre, Marcel Sato, Diego, Fabiano, Dalmo, Kerlles, Karlos, Tainá, Carlos Magno, Hairton e João Vital pela amizade e apoio.

- À Priscila Akemi e Companhia por todo o amor e atenção dispensados durante o mestrado, trazendo sempre palavras de sabedoria e atitudes de amor que transformaram toda minha maneira de ver e agir para com aqueles que me rodeiam.

- À Oda Moen Hurum e Camilla Sæther pela ótima companhia, carinho e incentivo.

- Aos irmãos Hermes, Mislene, Robson, Raquel, Aliandro, Cleudiane, Klenya e todos os irmãos da Igreja Batista do Real Parque.

- Ao irmão Manoel pelo apoio, investimento e orações, que Deus o abençõe muito, assim como a toda sua família.

- Ao amigo Paulo César Marques Doval, pelo grande incentivo durante todo o mestrado.

- A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

- Ao CNPq e AFOSR (Air Force Office of Scientific Research) pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Elevo os meus olhos para os montes: de onde me virá o socorro? O meu socorro vem do Senhor, que fez o céu e a terra.
(Salmos 121:1-2)

Resumo

Jesus, Luís Jorge Mesquita de, *Análise de Cascas Abatidas de Materiais Compósitos Laminados Simétricos Usando o Método dos Elementos de Contorno.* Campinas, 2010. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

Este trabalho apresenta uma formulação do método dos elementos de contorno para o cálculo de deslocamentos em cascas abatidas de materiais compósitos laminados simétricos. A formulação desenvolvida baseia-se no acoplamento da formulação de elasticidade plana (formulação de membrana) e da formulação de placas finas (placas de Kirchhoff ou teoria clássica de placas). Os efeitos da curvatura são considerados como forças de corpo nas duas formulações, gerando integrais de domínio. Ambas as formulações utilizam soluções fundamentais da elasto-estática. As integrais de domínio provenientes de forças de corpo são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial (MIR). No MIR duas funções de base radiais são usadas como funções de aproximação nas integrais de domínio ou de força de corpo, neste trabalho. O uso do MIR propicia que apenas o contorno seja discretizado. É feita uma análise da sensibilidade do MIR em relação ao número de pontos de integração. Os resultados numéricos apresentaram boa concordância com os resultados disponíveis na literatura.

Palavras chaves: Método dos elementos de contorno, método da integração radial, cascas abatidas, materiais compósitos.

Abstract

Jesus, Luís Jorge Mesquita de, *Analysis of Shallow Shells of Symmetric Composite Laminated Materials Using the Boundary Element Method.* Campinas, 2010. Master Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, University of Campinas.

This work presents a formulation of the boundary element method for the analysis of symmetric laminated composite shallow shells. The formulation developed in this work is based on the coupling of plane elasticity formulation (membrane formulation) and thin plate formulation (Kirchhoff plates or classical theory of plates). Curvature effects are considered as body forces in the formulation, generating domain integrals. Both formulations use elastostatic fundamental solutions. Domain integrals that come from body forces are transformed into boundary integrals using the radial integration method (RIM). In the RIM two radial basis functions are used as approximation functions in the domain integrals or body forces, in this research. The use of RIM propitiates just the boundary be discretized. It is analysed the sensibility of the RIM with the number of integration points. Numerical results show good agreement with results available in literature.

Key words: Boundary element method, radial integration method, shallow shell, composite materials.

Sumário

Símbolos

Letras gregas

α = Ângulo.

ε = Deformação normal.

ϕ = Ângulo.

Γ = Contorno.

γ = Deformação cisalhante.

μ = Raíz do polinômio característico.

ν = Razão de Poisson.

Ω = Domínio.

θ = Ângulo.

ρ = Distância.

σ = Tensão normal.

τ = Tensão cisalhante.

Letras arábicas

b = Força de corpo.

C, K = Constantes.

$\mathbf{D}$ = Matriz de rigidez de flexão.

$\mathbf{D}'$ = Matriz $\mathbf{D}$ transformada.

d_i = Parte real de μ.

E = Módulo de elasticidade.

e_i = Parte imaginária de μ.

g = Força elementar.

M, m = Momentos.

N = Função de interpolação.

$\mathbf{n}$ = Vetor normal ao contorno.

Q = Ponto campo.

$\mathbf{Q}$ = Matriz de rigidez.

$\overline{\mathbf{Q}}$ = Matriz de rigidez transformada.

q = Força distribuída.

R_i = Função.

r_i, s_i, q_i, p_i = Constantes.

S_i = Função.

$\mathbf{T}$ = Matriz de transformação.

t = Espessura da placa.

u, v = Deslocamentos no plano.

V = Força cortante equivalente de Kirchhoff.

w = Deslocamento transversal.

z = Distância transversal do plano médio à um ponto.

Subscritos

Γ = Contorno.

Ω = Domínio.

1, 2, 3 = Direções principais.

c = Compressão, elemento contínuo.

d = Elemento descontínuo.

L = Direção longitudinal às fibras.

n = Direção normal.

s = Direção tangencial.

T = Direção transversal às fibras.

t = Tração.

x, y, z = Eixos do sistema de coordenadas.

Sobrescritos

1, 2, 3 = Nós do elemento.

$*$ = Soluções fundamentais.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 *Introdução*

1.1 Introdução

O presente trabalho trata de três assuntos: os materiais compósitos, as cascas abatidas e o método dos elementos de contorno. A seguir são apresentadas as razões para a escolha desses três assuntos como objeto de estudo, bem como um pouco de suas histórias.

1.2 Considerações sobre materiais compósitos

Inúmeras conquistas tecnológicas recentes, principalmente as relacionadas com as aplicações relevantes em áreas tais como aeronáutica, aeroespacial, petroquímica, naval, bioengenharia, automobilística, construção civil, de artigos esportivos, entre outras, somente se tornaram viáveis após o advento dos materiais compósitos estruturais ou simplesmente compósitos. Esta classe de materiais é bastante ampla e abrangente, compreendendo os polímeros reforçados com fibras, os materiais híbridos metal/compósito, os concretos estruturais e outros compósitos que incorporam matriz metálica ou cerâmica.

Embora a associação do termo compósitos esteja ligada às chamadas tecnologias de ponta, nas quais peças e dispositivos oriundos desse material são empregados em componentes utilizados em satélites, aeronaves e helicópteros, implantes ortopédicos e odontológicos biocompatíveis, veículos de Fórmula 1, plataformas marítimas de petróleo, pontes, telescópios, instrumentos músicais, e estruturas inteligentes em geral, a origem desta importante classe de materiais remonta a milhares de anos, uma vez que as madeiras, os ossos e os tecidos musculares são exemplos notáveis em termos de eficiência estrutural dos chamados compósitos naturais.

As pesquisas por materiais de alta resistência, alta rigidez e baixo peso impuseram ciclos históricos na aplicação de materiais na indústria aeronáutica. Partindo do uso da madeira, passando pelas ligas de alumínio e magnésio, chega-se ao estado atual, no qual a indústria aeroespacial está, cada vez mais, substituindo o uso de metais pelo uso de compósitos, como exemplo, pode-se citar o Boeing 787 "Dreamliner", produzido com 50% de materiais compósitos (Figura 1). A princípio com utilização restrita à aeroespacial, atualmente a utilização dos materiais compósitos modernos vem se estendendo aos mais diversos ramos industriais. O motivo desse crescimento é que esses materiais apresentam características bastante desejavéis para muitas aplicações em engenharia. Devido à sua grande importância, os materiais compósitos têm sido objeto de muitos estudos, com vários livros publicados sobre o assunto (AGARWAL; BROUTMAN, 1990; GIBSON, 1994).

Figura 1: Boeing 787-8 Dreamliner (Fonte: http://picasaweb.google.com/lh/photo/ kG-drqsmgAaGLLHtdFC86eQ).

1.3 Considerações sobre placas anisotrópicas

A adoção de hipóteses simplificadoras, visando analisar a placa como um elemento bidimensional, fez surgir diferentes teorias para verificar o comportamento geral desta superfície estrutural. Kirchhoff (1850) estabeleceu as hipóteses fundamentais da teoria de placas finas, derivando a expressão da energia potencial para uma placa sob flexão e aplicando o princípio dos trabalhos virtuais para obter uma equação diferencial, onde a rigidez à flexão foi definida em termos do módulo de Young e do coeficiente de Poisson. Adicionalmente, ele percebeu que as três condições de contorno naturais propostas por Poisson (1829) não eram compatíveis com a natureza de quarta ordem da equação diferencial obtida e mostrou que estas poderiam ser reduzidas a duas condições de contorno naturais. Esta teoria não leva em conta o efeito da deformação pelo esforço cortante, assumindo-se que retas normais ao plano médio da placa permanecem normais após a deformação. As hipóteses apresentadas por Kirchoff resultaram em uma equação diferencial de quarta ordem, na qual o deslocamento é dado em função de duas coordenadas no plano médio da placa. Esta equação pode ser uma representação eficiente do comportamento de placas finas para pequenos deslocamentos, apresentando boa precisão de resultados para uma grande variedade de carregamentos e geometrias. Entretanto, a teoria desenvolvida por Kirchhoff não apresenta bons resultados quando são analisadas placas de maior espessura. Mindlin (1951) formulou uma teoria para analisar placas moderadamente espessas onde, assumindo-se que as distorções que ocorrem na espessura são constantes, as tensões são obtidas a partir da geometria imposta para as deformações. O sistema de equações diferenciais obtido é de sexta ordem e também satisfaz as três condições de contorno requeridas. As formulações apresentadas por Kirchhoff e Mindlin podem ser consideradas como expressivas contribuições para o aprimoramento da teoria bidimensional de placas.

1.4 Considerações sobre cascas abatidas

Define-se como casca um elemento estrutural curvo com uma dimensão, a espessura, relativamente pequena quando comparada às demais dimensões e ao raio de curvatura (Figura 2). Esta estrutura é, em geral submetida a esforços de membrana (tração e compressão na superfície média) e de flexão. Devido à curvatura, há um acoplamento entre os efeitos de membrana e de flexão. A superfície média de uma casca é dada por uma equação do tipo

$$z = z(x, y) \tag{1.1}$$

Uma casca é considerada como sendo abatida quando as arestas desta casca são pequenas quando comparadas com os raios de curvatura (VENTSEL; KRAUTHAMMER, 2001). Na formulação, esta hipótese implica em

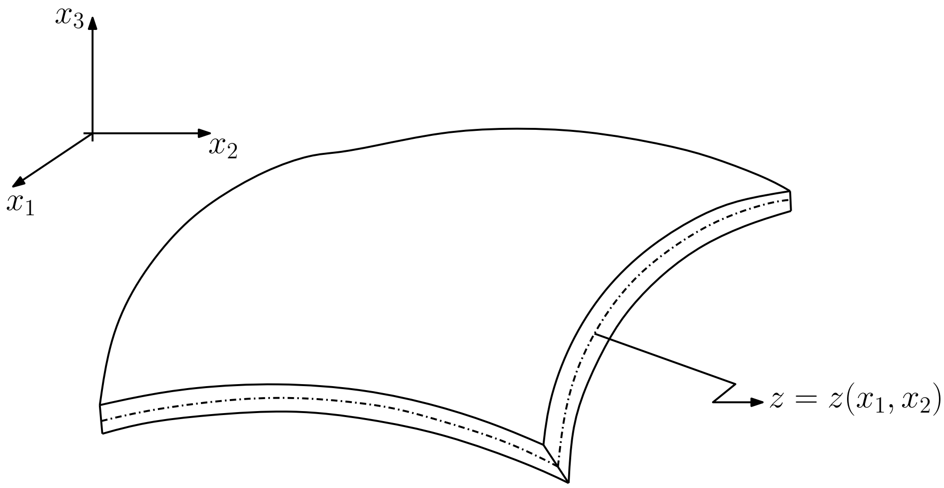

Figura 2: Casca.

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 << 1, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 << 1, \tag{1.2}$$

que proporciona uma série de simplificações nas equações de equilíbrio e constitutivas. A teoria de cascas abatidas pode ser também empregada para a análise de cascas que são localmente abatidas quando as mesmas são divididas em pequenos elementos. Este fato torna a teoria de cascas abatidas aplicáveis a grande maioria dos problemas que envolvem estruturas na forma de cascas.

Atualmente, a demanda para a construção de estruturas aeroespaciais, automotivas e navais avançadas tem aumentado o interesse pelas estruturas na forma de cascas, particularmente pelas cascas de compósitos laminados. Alguns requisitos, como por exemplo a alta resistência ao peso, boa resistência à corrosão, bem como vida em fadiga longa, não podem ser obtidos com o uso de materiais metálicos ou quaisquer outros materiais de engenharia, exceto por compósitos. Outros requisitos, como o perfil aerodinâmico tem boa demanda de estruturas curvas, cascas ou estruturas semelhantes.

1.5 Evolução do método dos elementos de contorno

Atualmente, a simulação computacional de fenômenos físicos de problemas de engenharia tem sido uma das principais ferramentas que auxiliam os engenheiros no desenvolvimento de projetos. Vários fenômenos físicos, nas diversas áreas do conhecimento, podem ser representadas por equações diferenciais parciais. Em casos práticos porém, dificilmente essas equações possuem soluções analíticas. Por isso, métodos numéricos são empregados para se obter uma solução aproximada das equações que governam o problema. Problemas envolvendo análises térmicas, análises de tensões, escoamento de fluidos, eletromagnetismo, só para citar alguns, podem ser modelados sob as variadas condições de contorno com o objetivo de simular computacionalmente as condições reais de serviço de um determinado componente mecânico. Essa prática tem sido cada vez mais utilizada atualmente, pois proporciona uma significativa economia de tempo e recursos financeiros durante o desenvolvimento de projetos. Vários ensaios práticos e a construção de protótipos, que outrora eram indispensavéis, podem ser substituídos por uma simulação computacional adequada feita por um programa de análise numérica. Dentre os métodos numéricos que mais se destacam no tratamento de problemas estruturais estão o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC). A obtenção de uma fórmulação de elementos de contorno possui como atrativo a possibilidade de reduzir o número de dimensões do problema, o que leva a um conjunto reduzido de equações e a uma quantidade menor de dados requeridos para a computação. Embora a idéia de redução do número de dimensões do problema pelo uso de uma formulação integral de contorno seja conhecida desde o final do século XIX, o MEC, na forma como é apresentado hoje, só se desenvolveu quase 80 anos depois, quando Rizzo e Shyppy (1970) apresentaram a formulação das equações integrais singulares, com as variáveis físicas acopladas umas às outras na formulação direta do método. A partir disso, o MEC se desenvolveu de forma bastante rápida, sendo atualmente um método bem estabelecido, com vasta bibliografia publicada (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989b; DOMINGUEZ, 1993; KANE, 1994; PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992; KOGL; GAUL, 2003). As primeiras aplicações do MEC em análise de placas anisotrópicas começaram a surgir na década de 80. Wu e Altiero (1981) apresentaram a solução fundamental anisotrópica para placas numa aplicação do método indireto dos elementos de contorno. A mesma solução fundamental foi usada por Shi e Bezine (1988) e Rajamohan e Raamachandran (1999) na análise de placas anisotrópicas pelo método direto dos elementos de contorno e pelo método de simulação de carga, respectivamente. Na mesma linha dos trabalhos anteriores, Albuquerque et al. (2006) apresentaram uma análise de flexão em compósitos laminados.

Uma alternativa para se tratar problemas com integrais de domínio é o método dos elementos de contorno de reciprocidade dual (NARDINI; BREBBIA, 1983) e o método da integração radial (GAO, 2002; ALBUQUERQUE; SOLLERO; PAIVA, 2007). Nestes métodos, integrais de domínio são transformadas em somas de integrais de contorno. A primeira aplicação do método dos elementos de contorno de reciprocidade dual (DRM) para o tratamento de problemas estruturais em materiais anisotrópicos foi proposta por Schlar e Partridge (1993) para problemas estacionários tridimensionais e por Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2002a) para problemas transientes bidimensionais. Além destes trabalhos, o DRM também foi usado para análise materiais anisotrópicos por Albuquerque, Sollero e Fedelinski (2003a, 2003b), Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2004) e Kogl e Gaul (2003).

O DRM tem se mostrado como uma poderosa técnica para transformar integrais de domínio em integrais de contorno, e tem sido amplamente aplicado em muitas formulações diferentes para esta finalidade. Nesta técnica, os termos do domínio são aproximados utilizando uma expansão de série finita envolvendo funções de aproximação propostas e coeficientes a determinar. A fim de realizar a transformação, é necessário calcular soluções particulares para a equação diferencial governante, considerando a função de aproximação como um termo não-homogêneo. Este método é muito adequado para problemas de potenciais, bem como para estruturas isotrópicas. No entanto, quando é aplicado às estruturas anisotrópicas, devido a complexidade das equações diferenciais constitutivas, torna-se dificultoso, ou mesmo impossível, calcular as soluções particulares para muitas funções de aproximação escolhidas. Uma abordagem alternativa para superar a principal desvantagem do DRM, que é a falta de livre escolha da função de aproximação, é o método de integração radial (RIM), proposto por Wen, Aliabadi e Rooke (1998), chamado método da integração radial (RIM) por Gao (2002). Seu uso foi estendido para a formulação clássica de placas anisotrópicas por Albuquerque et al. (2006), Albuquerque, Sollero e Paiva (2007) e para cascas abatidas isotrópicas por Albuquerque e Aliabadi (2008, 2010). Como no DRM, o RIM também aproxima os termos de domínio por uma soma de funções de aproximação e coeficientes a determinar. No entanto, o RIM não demanda o cálculo de qualquer solução particular, o que tornou esta técnica especialmente apropriada para formulações anisotrópicas.

Embora a grande maioria dos trabalhos sobre a análise numérica de cascas de materiais compósitos estão relacionados com o método dos elementos finitos, há poucos trabalhos na literatura que apresentam formulações de elementos de contorno aplicadas para cascas ortotrópicas e anisotrópicas (WANG; SCHWEIZERHOF, 1995, 1996b, 1996a, 1997). No entanto, todos estes artigos envolvem soluções fundamentais que precisam ser calculadas numericamente. Uma abordagem alternativa para as formulações anteriores é o acoplamento das formulações de elasticidade plana e de flexão de placas, como proposto por Zhang e Atluri (1986) que apresentaram uma formulação para análise estática e dinâmica de cascas abatidas isotrópicas clássicas onde as integrais de domínio foram calculadas através da discretização do domínio em células. Dirgantara e Aliabadi (1999, 2000) estenderam esta abordagem para a análise de deformação de cisalhamento de cascas abatidas isotrópicas. Wen, Aliabadi e Young (2000) utilizaram a formulação proposta por Dirgantara e Aliabadi (1999) e transformaram as integrais de domínio em integrais de contorno usando o método da reciprocidade dual (DRM). Baiz e Aliabadi (2006) apresentaram uma formulação de elementos de contorno para a análise de flambagem linear de deformação por cisalhamento de cascas abatidas.

1.6 Escopo do presente trabalho

Este trabalho tem como objetivo a análise de problemas de cascas abatidas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno. As formulações para a elasticidade plana e para a teoria clássica de placas (placas de Kirchhoff) são acopladas. Devido à curvatura da casca, integrais de domínio surgem na formulação. Estas integrais são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial. Trata-se de uma sequência de vários trabalhos já desenvolvido pelos grupos de pesquisa dos professores Eder Lima de Albuquerque e Paulo Sollero. A formulação do método dos elementos de contorno de elasticidade plana anisotrópica foi desenvolvida por Sollero (1994) para problemas de mecânica da fratura elasto-estática e estendida para outros problemas nos trabalhos de Albuquerque (2001) e Gouvêa (2006). A formulação de elementos de contorno para a teoria clássica de placas anisotrópicas foi desenvolvida por Paiva (2005), Albuquerque et al. (2006) e estendidas para outros problemas nos trabalhos de Torsani (2007), Santana (2008), Souza (2009), Reis (2010), Reis et al. (2011). A formulação de cascas abatidas foi apresentada por Albuquerque e Aliabadi (2008) para cascas isotrópicas e por Albuquerque e Aliabadi (2010) para cascas anisotrópicas. Estes dois últimos trabalhos utilizaram o método da integração radial para a transformação de integrais de domínio remanescente na formulação em integrais de contorno. Entretanto, o custo computacional desta formulação foi alto, principalmente para a formulação anisotrópica.

A principal contribuição desta dissertação é a análise da sensibilidade do método da integração radial em relação ao número de pontos de integração para a formulação de cascas abatidas anisotrópicas. Conforme citado na literatura, nos trabalhos de Gao (2002) e Jesus, Albuquerque e Sollero (2010), o método da integração radial demanda poucos pontos de integração para a obtenção de uma solução próxima da solução analítica. Nestes dois trabalhos, bons resultados são obtidos com 4 pontos de integração. Entretanto, isto não foi observado no trabalho de Albuquerque e Aliabadi (2008, 2010) onde foram necessários, em alguns casos, o uso de 32 pontos de integração para a obtenção de uma boa precisão dos resultados. O principal foco desta dissertação é estudar o número de pontos de integração necessários para a obtenção de resultados com uma boa precisão. São estudados os mesmos problemas analisados no trabalho de Albuquerque e Aliabadi (2010).

1.7 Descrição do presente trabalho

Este trabalho apresenta uma formulação de elementos de contorno para a análise de cascas abatidas de compósitos laminados simétricos, onde apenas o contorno é discretizado. As formulação clássica de flexão de placas e a formulação de elasticidade plana são acopladas e os efeitos de curvatura são tratados como forças de corpo. As soluções fundamentais para as formulações elastostática de placas e de elasticidade plana são usadas e as forças de corpo são escritas como uma soma de funções aproximação multiplicadas por coeficientes desconhecidos. Integrais de domínio que constam nas formulações são transformadas em integrais de contorno pelo método de integração radial. Duas funções de aproximação são utilizadas. Os resultados para as funções de aproximação são comparados e a precisão da formulação proposta é avaliada através de comparações com resultados da literatura. Foi mostrado que os resultados obtidos com a função de aproximação, chamada spline de placas finas aumentada, apresenta melhor concordância com a literatura. A precisão dos resultados numéricos apresentados no presente trabalho é analisada pela comparação com resultados analíticos e numéricos obtidos na literatura. O presente trabalho é disposto de 5 capítulos.

No Capítulo 2 serão apresentadas as equações constuitivas para materiais compósitos, especificamente laminados multidirecionais. No capítulo 3 será apresentada teoria referente à elasticidade plana anisotrópica e a formulação do método dos elementos de contorno para esta teoria. No capítulo 4 será apresentada uma formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas anistrópicas. No capítulo 5 será apresentada a formulação de elementos de contorno para a análise de cascas abatidas de materiais compósitos laminados simétricos, onde integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial. No capítulo 6 foram apresentadas conclusões a partir das análises e resultados citados nos capítulos anteriores.

2 Equações Constitutivas para Materiais Compósitos

2.1 Introdução

Este capítulo descreve as equações constitutivas de um laminado compósito. Detalhes desta formulação podem ser encontrados em livros de materiais compósitos como, por exemplo, Daniel e Ishai (2006).

2.2 Comportamento elástico da lâmina de compósito

Considere uma lâmina na qual as fibras imersas numa matriz estão alinhadas unidirecionalmente (Figura 3). Esta lâmina é ortotrópica e sua relação tensão deformação é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{array} \right\}, \tag{2.1}$$

onde Q_{ij} são as componentes da matriz de rigidez, ou seja:

$$\mathbf{Q} = [Q_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}. \tag{2.2}$$

Em termos das constantes de engenharia, as componentes do tensor de rigidez podem ser

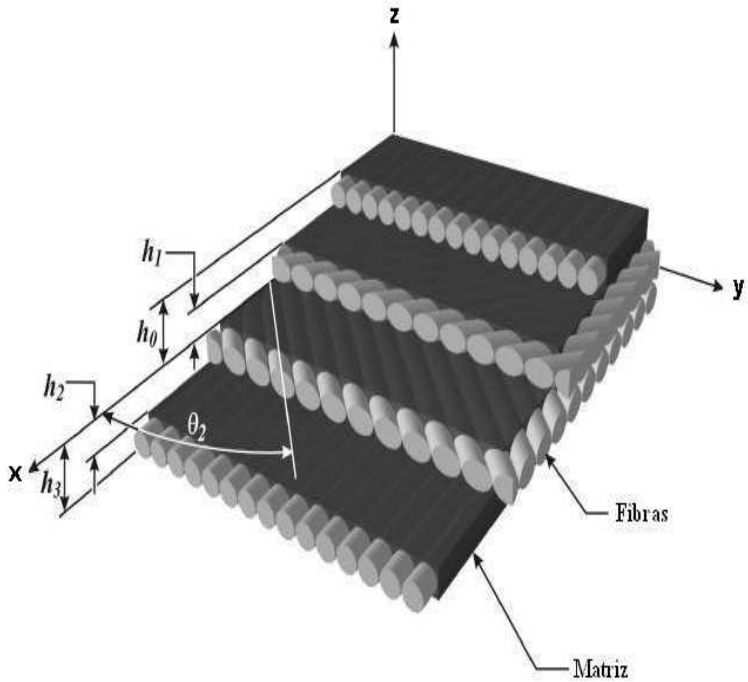

Figura 3: Laminado multidirecional com a notação das coordenadas para as lâminas individuais.

escritas como

$$\begin{aligned} &Q_{11} = E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) && Q_{22} = E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) \\ &Q_{66} = G_{12} && Q_{16} = Q_{26} = 0 \\ &Q_{12} = \nu_{21}E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{12}E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}) && \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sendo a lâmina ortotrópica, esta fica completamente caracterizada com quatro constantes elásticas: os módulos de elasticidade longitudinais E_1 e E_2 nas direções 1 e 2, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal G_{12} e a razão de Poisson, ν_{12}. A quinta constante elástica, ν_{21} pode ser determinada pela relação constitutiva, devido a simetria da matriz $\mathbf{Q}$

$$\nu_{21}E_1 = \nu_{12}E_2 \tag{2.4}$$

Muitas vezes os eixos principais da lâmina (x_1, x_2) não são coincidentes com os eixos do laminado $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Quando isto ocorre, a relação constitutiva para cada lâmina individual deve ser transformada para o eixo de referência do laminado (Figura 4) para então se determinar a relação constitutiva. Para que esta transformação seja feita, basta que os tensores de tensão e deformação sejam multiplicados pela matriz de transformação, ou seja

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{array} \right\} = \mathbf{T} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} \tag{2.5}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{array} \right\} = \mathbf{T} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{array} \right\} \tag{2.6}$$

onde σ'_{ij} e ε'_{ij} são tensores de tensão e deformação, respectivamente, escritos no sistema de referência do laminado, σ_{ij} e ε_{ij} são os mesmos tensores escritos no sistema de referência da lâmina e $\mathbf{T}$ a matriz de transformação dada por

$$\mathbf{T} = \left[\begin{array}{ccc} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{array} \right] \tag{2.7}$$

sendo

$$m = \cos\theta \tag{2.8}$$

$$n = \mathrm{sen}\theta \tag{2.9}$$

Convém observar que a matriz inversa $\mathbf{T}^{-1}$ pode ser obtida pela substituição do ângulo positivo θ, conforme Figura 4, pelo ângulo negativo $-\theta$. A equação constitutiva pode ser escrita da forma

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{array} \right\} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}(\mathbf{T^{-1}})' \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{array} \right\} \tag{2.10}$$

onde $(\mathbf{T^{-1}})'$ representa a matriz transposta da matriz inversa de $\mathbf{T}$ e

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}(-\theta) = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Multiplicando-se as matrizes da equação (2.10), tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\mathrm{sen}^4\theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\mathrm{sen}^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\mathrm{sen}^4\theta + \cos^4\theta) \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\mathrm{sen}^4\theta + \cos^4\theta) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\mathrm{sen}\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\mathrm{sen}^3\theta\cos\theta) \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\mathrm{sen}\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})(\mathrm{sen}\theta\cos^3\theta)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A matriz $\bar{Q}$ é completamente preenchida, sendo que das seis constantes elásticas que governam o comportamento da lâmina, duas, $\bar{Q}_{16}$ e $\bar{Q}_{26}$, são combinações lineares das outras quatro. No sistema de coordenadas transformado, a lâmina é dita geralmente ortotrópica, e a matriz $\bar{Q}$ é parecida com a matriz Q dos materiais totalmente anisotrópicos ($\bar{Q}_{16} \neq 0$, $\bar{Q}_{26} \neq 0$). Quando se tem $Q_{16} = Q_{26} = 0$ diz-se que o material é especialmente ortotrópico.

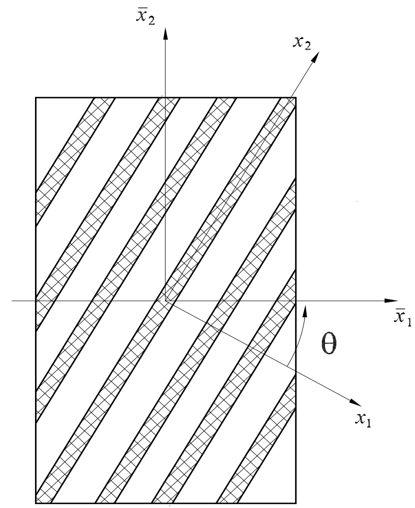

Figura 4: Sistemas de coordenadas da lâmina (x_1, x_2) e do laminado $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

2.3 Comportamento elástico de laminados multidirecionais

É evidente que o comportamento geral de um laminado multidirecional é função das propriedades e da sequência de empilhamento das camadas individuais. A assim conhecida Teoria clássica de Laminação prevê o comportamento do laminado dentro das suposições e restrições:

1. Cada lâmina é quase-homogênea e ortotrópica
2. O laminado é fino com dimensões laterais bem maiores que sua espessura e é carregado apenas no seu plano, ou seja o laminado e as lâminas estão em estado plano de tensões
3. Todos os deslocamentos são pequenos comparados com a espessura do laminado
4. Deslocamentos no plano variam linearmente através da espessura do laminado
5. Linhas retas normais à superfície média permanecem retas e normais após a deformação da superfície
6. As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação são lineares
7. Distâncias normais a partir da superfície média permanecem constantes

2.4 Relações deformação-deslocamento de laminados multidirecionais

A Figura 5 mostra uma seção infinitesimal de um laminado normal ao eixo y antes e após a deformação. O plano $x - y$ equidistante das superfícies superior e inferior do laminado é conhecido como plano médio ou plano de referência. Os deslocamentos no plano de referência u_0 e v_0 nas direções x e y e deslocamento fora do plano w na direção z são funções apenas de x e y:

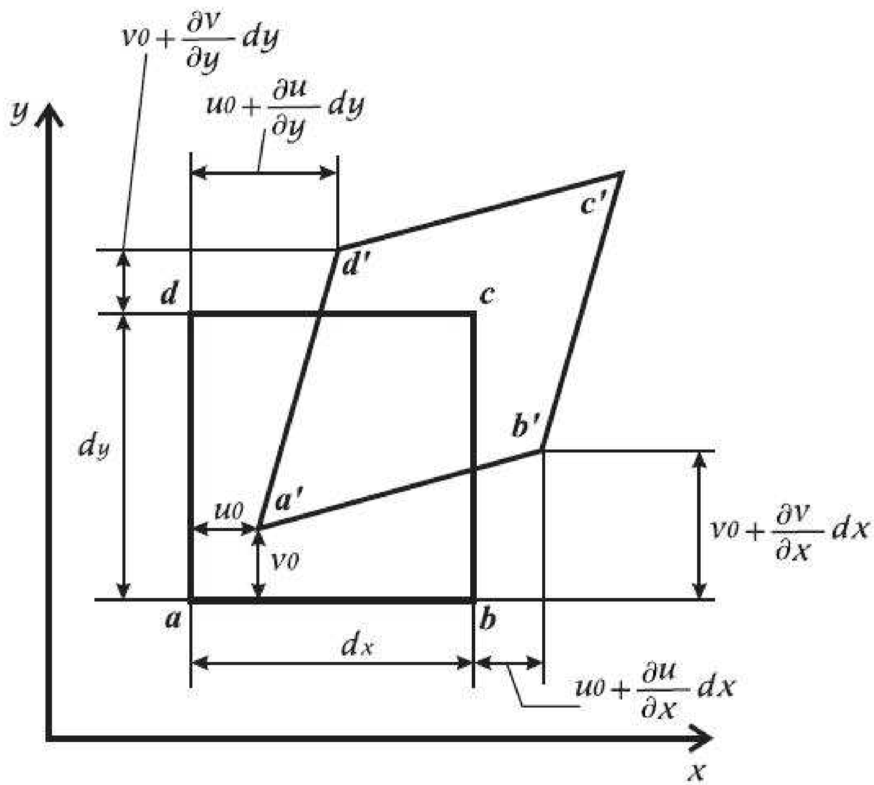

Figura 5: Deformação em um elemento da placa(DANIEL; ISHAI, 2006).

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u_0\,(x, y) \\
v_0 &= v_0\,(x, y) \\
w &= f\,(x, y)
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

As rotações no eixo x e y são

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \alpha_y &= \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.15}$$

O deslocamento no plano do ponto b de coordenada z_b são:

$$\begin{aligned} u_b &= u_0 - \alpha_x z_b \\ v_b &= v_0 - \alpha_y z_b \end{aligned} \tag{2.16}$$

e de maneira geral

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.17}$$

onde z é a coordenada na espessura do laminado de um ponto genérico da seção transversal. Para pequenos deslocamentos, as relações clássicas de deformação-deslocamento da elasticidade produzem

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{2.18}$$

Observando que as componentes de deformação no plano de referência são expressas como

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}$$

e a curvatura do laminado como

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \kappa_y &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \kappa_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{2.20}$$

pode-se relacionar as deformações em qualquer ponto no laminado às deformações no plano de referência e às curvaturas do laminado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Considerando uma camada individual k no laminado multidirecional cujo plano médio está a uma distância $\overline{z}_k$ do plano de referência do laminado. A partir de uma mudança de notação para a equação (2.21), as relações tensão deformação para esta camada em relação aos eixos do material são escritas da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.22}$$

e após a transformação para o sistema de coordenadas do laminado,

$$\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ \varepsilon'_{12} \end{Bmatrix}_k \tag{2.23}$$

onde o sub-índice k indica a camada k no laminado onde a equação (2.22) é válida. Substituindo as expressões para as deformações da Equação (2.21), obtém-se

$$
\begin{Bmatrix} \sigma'_{11} \\ \sigma'_{22} \\ \sigma'_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} {\varepsilon'_{11}}^0 \\ {\varepsilon'_{22}}^0 \\ {\varepsilon'_{12}}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa'_{11} \\ \kappa'_{22} \\ \kappa'_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.24}
$$

Das equações (2.21) e (2.24) é visto que, apesar das deformações terem uma variação linear através da espessura, a tensão não o tem. Devido a variação da matriz $\mathbf{Q}'$ de camada para camada, as tensões variam de forma descontínua. As tensões médias em cada lâmina são determinadas utilizando-se as deformações no plano de referência $\{\varepsilon^0\}$, as curvaturas $\{\kappa\}$ do laminado, a localização do plano médio $\overline{z}_k$, e as matrizes de rigidez tranformadas $[Q']$.

Por causa da variação descontínua das tensões de lâmina para lâmina, é mais conveniente lidar com o efeito integrado dessas tensões no laminado. Dessa forma, procura-se expressar as relações entre as forças e momentos à deformação do laminado. As tensões atuando na camada k dadas pela Equação (2.24) podem ser substituídas pela resultante das forças e momentos, como:

$$
\begin{aligned}
N_{11}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{11}\, dz \\
N_{22}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{22}\, dz \\
N_{12}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{12}\, dz
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

e

$$
\begin{aligned}
M_{11}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{11} z\, dz \\
M_{22}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{22} z\, dz \\
M_{12}^k &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{12} z\, dz
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

onde t é a espessura da camada k. No caso de um laminado de várias camadas, a força total e o momento resultantes são obtidos pelo somatório dos efeitos de todas as camadas. Assim, para um laminado como o da Figura 3 de n lâminas, as forças e os momentos resultantes são obtidos como

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_k dz \tag{2.27}$$

e

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_k zdz \tag{2.28}$$

onde z_k e z_{k-1} são as coordenadas das superfícies superior e inferior da camada k.

Substituindo a Equação (2.24) para as tensões na lâmina nas Equações (2.27) e (2.28), obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} \quad = \quad & \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} {\varepsilon'_{11}}^0 \\ {\varepsilon'_{22}}^0 \\ {\varepsilon'_{12}}^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa'_{11} \\ \kappa'_{22} \\ \kappa'_{12} \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z\,dz \right\} \end{aligned} \tag{2.29}$$

e

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} \quad = \quad & \sum_{k=1}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} {\varepsilon'_{11}}^0 \\ {\varepsilon'_{22}}^0 \\ {\varepsilon'_{12}}^0 \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z\,dz \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{13} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{23} \\ Q'_{31} & Q'_{32} & Q'_{33} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \kappa'_{11} \\ \kappa'_{22} \\ \kappa'_{12} \end{Bmatrix} \int_{z_{k-1}}^{z_k} z^2\,dz \right\} \end{aligned} \tag{2.30}$$

Nas expressões (2.30) e (2.31), a matriz de constantes elásticas $[Q]^k$, deformações no plano de referência ε^0 e as curvaturas κ podem ser tomados fora da operação de integração pois não são função de z. Destes, apenas a matriz de rigidez possui valores diferentes para cada lâmina de forma que as equações assumem as formas:

$$
\begin{aligned}
[N] &= \left[\sum_{k=1}^{n}[Q]^k\int_{z_{k-1}}^{z_k}dz\right]\left[\varepsilon^0\right]+\left[\sum_{k=1}^{n}[Q]^k\int_{z_{k-1}}^{z_k}zdz\right][\kappa] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}[Q]^k(z_k-z_{k-1})\right]\left[\varepsilon^0\right]+\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[Q]^k(z_k^2-z_{k-1}^2)\right][\kappa] \\
&= [A][\varepsilon^0]+[B][\kappa]
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

e

$$
\begin{aligned}
[M] &= \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[Q]^k(z_k^2-z_{k-1}^2)\right]\left[\varepsilon^0\right]+\left[\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[Q]^k(z_k^3-z_{k-1}^3)\right][\kappa] \\
&= [B][\varepsilon^0]+[D][\kappa]
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

nas quais

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}Q_{ij}^k(z_k-z_{k-1}) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}Q_{ij}^k(z_k^2-z_{k-1}^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}Q_{ij}^k(z_k^3-z_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Dessa maneira as relações força-deformação e momento-deformação ficam

$$
\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {\varepsilon'_{11}}^0 \\ {\varepsilon'_{22}}^0 \\ {\varepsilon'_{12}}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.34}
$$

$$
\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {\varepsilon'_{11}}^0 \\ {\varepsilon'_{22}}^0 \\ {\varepsilon'_{12}}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{Bmatrix} \tag{2.35}
$$

As relações aqui descritas são expressas em termos de três matrizes de rigidez do laminado, $[A]$, $[B]$, e $[D]$, os quais são funções da geometria, propriedades do material e sequência de empilhamento das lâminas individuais. Elas representam as propriedades elásticas médias do laminado multidirecional com os seguintes significados:

- A_{ij} é a matriz de rigidez extensional do laminado, que relaciona carregamentos no plano a deformações no plano.
- B_{ij} é a matriz de rigidez de acoplamento do laminado, que relaciona carregamento no plano a curvaturas e momentos a deformações no plano. Desta maneira, se $B_{ij} \neq 0$, forças aplicadas no plano produzem deformações de flexão e torção além de deformações no plano. Momentos produzem deformações extensionais e de cisalhamento, além de deformações de flexão e torção.
- D_{ij} é matriz de rigidez flexional do laminado, relacionando momentos a curvaturas.

Neste trabalho, somente laminados simétricos serão usados. Neste caso, as equações (2.34) e (2.35) se reduzem a:

$$\left\{ \begin{array}{c} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} {\varepsilon'_{11}}^0 \\ {\varepsilon'_{22}}^0 \\ {\varepsilon'_{12}}^0 \end{array} \right\} \tag{2.36}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{array} \right\} \tag{2.37}$$

3 *Método dos Elementos de Contorno para Elasticidade Anisotrópica*

3.1 Introdução

Este capítulo descreve a formulação do método dos elementos de contorno para elasticidade plana (formulação de membrana) considerando o material como anisotrópico. Esta formulação já foi apresentada nos trabalhos de Sollero (1994), Albuquerque (2001), Reis (2010). Entretanto, para facilitar a compreensão do texto e homogenizar a nomenclatura utilizada neste trabalho, grande parte da formulação é novamente descrita aqui.

3.2 Elasticidade anisotrópica

Considerando um elemento infinitesimal dentro de um domínio Ω, o equilíbrio de forças pode ser expresso por:

$$\sigma_{ij,j} + b'_i = 0. \tag{3.1}$$

Por sua vez, o equilíbrio de momentos resulta em:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tag{3.2}$$

onde σ_{ij} é o tensor de tensões e b'_i é o vetor de forças de corpo.

O vetor de forças de superfície t_i em um ponto no contorno Γ de um domínio Ω é expresso na forma:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j, \tag{3.3}$$

onde n_j é o vetor normal do contorno Γ no ponto.

Em elasticidade linear, o vetor de deslocamentos e suas derivadas são assumidos como infinitesimais. O tensor de deformação, considerando deslocamentos infinitesimais, pode ser escrito como

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) \tag{3.4}$$

Para assegurar a unicidade dos deslocamentos, as componentes do tensor de deformações não podem ser designadas arbitrariamente, devendo satisfazer certas condições de compatibilidade e integrabilidade. A equação de compatibilidade é dada por:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \tag{3.5}$$

que no caso bidimensional é reduzida à forma

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = \varepsilon_{12,12}. \tag{3.6}$$

No caso de material elástico linear, a relação entre o tensor de tensões com o tensor de deformações é escrita, na sua forma mais geral, como

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \tag{3.7}$$

sendo o coeficiente de linearidade C_{ijkl} um tensor de quarta ordem (81 elementos) conhecido como tensor de constantes elásticas. Devido as restrições de simetria tem-se que

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \qquad C_{ijkl} = C_{ijlk}. \tag{3.8}$$

A condição para a existência de uma função energia de deformação também requer que

$$C_{ijkl} = C_{klji} \tag{3.9}$$

Estas considerações reduzem o número de constantes elásticas de 81 para 21. Como a direção das tensões principais não coincidem necessariamente com a direção das deformações principais, apenas 18, das 21 constantes são independentes (LEKHNITSKII, 1963).

Considerando as 21 constantes elásticas, a equação (3.7) pode ser reescrita na forma matricial como

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112}\\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212}\\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312}\\ C_{1123} & C_{2223} & C_{3323} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312}\\ C_{1113} & C_{2213} & C_{3313} & C_{2313} & C_{1313} & C_{1312}\\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & C_{2312} & C_{1312} & C_{1212}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{13}\\ 2\varepsilon_{12}\end{array}\right\} \tag{3.10}$$

A equação (3.7) também pode ser ainda expressa na forma

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{3.11}$$

onde S_{ijkl} é um tensor de quarta ordem conhecido como tensor de flexibilidade, que, devido as mesmas razões do tensor de constantes elásticas, possui 21 elementos, dos quais apenas 18 são independentes.

A equação (3.11) pode ser escrita na forma matricial como

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ 2\varepsilon_{23}\\ 2\varepsilon_{13}\\ 2\varepsilon_{12}\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccccc} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 2S_{1123} & 2S_{1113} & 2S_{1112}\\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 2S_{2223} & 2S_{2213} & 2S_{2212}\\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 2S_{3323} & 2S_{3313} & 2S_{3312}\\ 2S_{1123} & 2S_{2223} & 2S_{3323} & 4S_{2323} & 4S_{2313} & 4S_{2312}\\ 2S_{1113} & 2S_{2213} & 2S_{3313} & 4S_{2313} & 4S_{1313} & 4S_{1312}\\ 2S_{1112} & 2S_{2212} & 2S_{3312} & 4S_{2312} & 4S_{1312} & 4S_{1212}\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{array}\right\} \tag{3.12}$$

Usando a notação tensorial reduzida, proposta por (LEKHNITSKII, 1963), a equação (3.12) pode ser escrita como

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{56} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{3.13}
$$

onde

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.14}
$$

e

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.15}
$$

Os coeficientes elásticos podem ser expressos em termos de constantes de engenharia como (LEKHNITSKII, 1963)

$$
\begin{aligned}
&a_{11} = 1/E_1 && a_{12} = \nu_{12}/E_1 = -\nu_{21}/E_2 \\
&a_{13} = -\nu_{31}/E_1 = -\nu_{13}/E_3 && a_{14} = \eta_{23,1}/E_1 = \eta_{1,23}/G_{23} \\
&a_{15} = \eta_{32,1}/E_1 = \eta_{1,32}/G_{23} && a_{16} = \eta_{12,1}/E_1 \\
&a_{22} = 1/E_2 && a_{23} = \nu_{32}/E_2 = -\nu_{23}/E_3 \\
&a_{24} = \eta_{23,1}/E_2 = \nu_{23,3}/G_{23} && a_{25} = \eta_{31,2}/E_2 = \eta_{2,31}/G_{13} \\
&a_{26} = \eta_{12,2}/E_2 = \eta_{2,12}/G_{12} && a_{33} = 1/E_3 \\
&a_{34} = \eta_{23,3}/E_3 = \eta_{3,23}/G_{23} && a_{35} = \eta_{31,1}/E_3 = \eta_{3,31}/G_{13} \\
&a_{36} = \eta_{12,3}/E_3 = \eta_{3,12}/G_{12} && a_{44} = 1/G_{23} \\
&a_{45} = \zeta_{32,23}/G_{23} = \zeta_{23,31}/G_{13} && a_{46} = \zeta_{12,23}/G_{23} = \zeta_{23,12}/G_{12} \\
&a_{55} = 1/G_{13} && a_{56} = \zeta_{12,31}/G_{13} = \zeta_{31,12}/G_{12} \\
&a_{66} = 1/G_{12} &&
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

onde E_k são os módulos de elasticidade longitudinais, ou módulos de Young, referindo-se aos eixos x_k, G_{ij} são os módulos de elasticidade transversais, ou módulos de Coulomb, para os planos definidos pelos eixos $x_i x_j$. Os coeficientes ν_{ij} são chamados coeficientes de Poisson. As constantes $\eta_{jk,l}$ são denominadas de coeficientes de influência mútua de primeira espécie que caracterizam extensões nas direções dos eixos principais, produzidas por tensões tangenciais agindo nos planos principais. As constantes $\eta_{l,jk}$ são os coeficientes de influência mútua de segunda espécie, que expressam deformações tangenciais nos planos principais, causadas pelas tensões normais atuantes nos planos principais. Por fim, $\zeta_{ij,kl}$ são os coeficientes de Chentsov, que caracterizam as deformações tangenciais em planos paralelos aos planos principais de elasticidade, causadas por tensões tangenciais que atuam em outros planos, paralelos aos planos principais de elasticidade.

Em estado plano de tensão ($\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$), um material pode ser descrito usando-se somente seis constantes elásticas independentes. Desta forma, a equação (3.13) pode ser escrita como

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{3.17}
$$

Substituindo as equações (3.4), (3.7) na equação (3.1), obtém-se a equação de equilíbrio escrita em função dos deslocamentos

$$C_{ijkl}u_{k,jl} + b_i = 0 \tag{3.18}$$

O tensor tensão pode ser escrito em termos de funções $F(x_1, x_2)$ chamadas funções tensão de Airy (LEKHNITSKII, 1963) dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= F_{,22} + \mathcal{U} \\ \sigma_{22} &= F_{,11} + \mathcal{U} \\ \sigma_{12} &= -F_{,12}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\mathcal{U}$ é uma função potencial na qual

$$\mathcal{U}_{,i} = b_i \tag{3.20}$$

Substituindo as equações (3.19) na equação constitutiva (3.17) e então na equação de compatibilidade (3.6), resulta na equação diferencial para funções tensão $F(x_1, x_2)$

$$\begin{gathered} a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = \\ -(a_{12} + a_{22})\mathcal{U}_{,11} + (a_{16} + a_{26})\mathcal{U}_{,12} - (-a_{11} + a_{12})\mathcal{U}_{,22} \end{gathered} \tag{3.21}$$

No caso da ausência de forças de corpo a equação (3.21) pode ser escrita como

$$a_{11}F_{,2222} - 2a_{16}F_{,1222} + (2a_{12} + a_{66})F_{,1122} - 2a_{26}F_{,1112} + a_{22}F_{,1111} = 0 \tag{3.22}$$

Criando o operador diferencial

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{3.23}$$

aplicando este operador na função tensão $F(x_1, x_2)$ na forma

$$\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4 F = 0 \tag{3.24}$$

e expandindo a equação (3.24) tem-se

$$\begin{aligned} &F_{,2222} - (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1222} + (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3\mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 \\ &\quad +\mu_3\mu_4)F_{,1122} - (\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1112} \\ &\quad +(\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4)F_{,1111} = 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

As equações (3.22) e (3.25) serão idênticas se μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 forem raízes da equação

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0 \tag{3.26}$$

As raízes da equação (3.26) são sempre complexas ou imaginárias puras, ocorrendo aos pares (μ_k e $\bar{\mu}_k$) conforme mostrado por Lekhnitskii (1968).

Criando-se a variável

$$z_j = x_1 + \mu_j x_2 \qquad j = 1, 2 \tag{3.27}$$

tem-se que

$$\Delta_j = \frac{\partial}{\partial x_2} - \mu_j \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_j} \tag{3.28}$$

Exigindo que a função tensão seja real, tem-se

$$F(x_1, x_2) = 2\mathrm{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \tag{3.29}$$

Introduzindo a notação

$$\frac{dF_j(z_j)}{dz_j} = \Psi_j(z_j), \tag{3.30}$$

onde a convenção de soma não é empregada em j, e substituindo a equação (3.29) na equação

(3.19), obtém-se as componentes de tensão

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= 2\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2^2\Psi_2^{(1)}(z_2)\right] \\
\sigma_{22} &= 2\mathrm{Re}\left[\Psi_1^{(1)}(z_1) + \Psi_2^{(1)}(z_2)\right] \qquad (3.31) \\
\sigma_{12} &= -2\mathrm{Re}\left[\mu_1\Psi_1^{(1)}(z_1) + \mu_2\Psi_2^{(1)}(z_2)\right]
\end{aligned}$$

onde $\Psi_j^{(1)}$ representa a primeira derivada de Ψ_j.

Substituindo a equação (3.31) na equação (3.17) e então na equação (3.18), desprezando-se os movimentos de corpos rígidos e integrando, obtém-se

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2\mathrm{Re}\left[q_{11}\Psi_1(z_1) + q_{12}\Psi_2(z_2)\right] \\
u_2 &= 2\mathrm{Re}\left[q_{21}\Psi_1(z_1) + q_{22}\Psi_2(z_2)\right] \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

onde

$$q_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_j^2 + a_{12} - a_{16}\mu_j \\ a_{12}\mu_j + a_{22}/\mu_j - a_{26} \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

é a matriz de parâmetros complexos.

Uma vez que as condições de contorno sejam conhecidas, determina-se a função tensão, dada pelas equações (3.19) com derivadas dadas pela equação (3.30), que satisfaça estas condições, determinando assim os campos de deslocamentos, dados pelas equações (3.32), e tensões, dados pelas equações (3.31).

3.3 Formulação integral

Integrando a equação (3.1) ao longo da espessura do laminado, as tensões σ_{ij} se tornam densidade de força N_{ij}, ou seja:

$$N_{ij,j} + b_i = 0, \tag{3.34}$$

onde b_i representa a densidade de força aplicada ao longo da espessura.

Assumindo-se uma função vetorial contínua $u_i^\bullet$, que representa o deslocamento de um estado elasto-estático definido sobre um domínio Ω, como sendo uma função peso residual da equação de equilíbrio (3.34), tem-se:

$$\int_\Omega N_{ij,j} u_i^\bullet d\Omega + \int_\Omega b_i u_i^\bullet d\Omega = 0 \tag{3.35}$$

Pela regra de derivação do produto de duas funções tem-se:

$$(N_{ij} u_i^\bullet)_{,k} = N_{ij,k} u_i^\bullet + N_{ij} u_{i,k}^\bullet \tag{3.36}$$

Pode-se escrever $u_{i,j}^\bullet$ como a soma de um tensor simétrico e um anti-simétrico, da forma

$$u_{i,j}^\bullet = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet + u_{j,i}^\bullet) + \frac{1}{2}(u_{i,j}^\bullet - u_{j,i}^\bullet) = \varepsilon_{ij}^\bullet + \omega_{ij}^\bullet \tag{3.37}$$

sendo que $\varepsilon_{ij}^\bullet$ e $\omega_{ij}^\bullet$ representam os tensores deformação (simétrico) e rotação (anti-simétrico), respectivamente, do estado elástico " $\bullet$ ".

Substituindo (3.37) em (3.36) tem-se

$$(N_{ij} u_i^\bullet)_{,j} = N_{ij,j} u_i^\bullet + N_{ij} \varepsilon_{ij}^\bullet + N_{ij} \omega_{ij}^\bullet \tag{3.38}$$

sendo N_{ij} um tensor simétrico. O produto de um tensor simétrico por um anti-simétrico é nulo. Desta forma, a equação (3.38) torna-se

$$N_{ij,j} u_i^\bullet = (N_{ij} u_i^\bullet)_{,j} - N_{ij} \varepsilon_{ij}^\bullet \tag{3.39}$$

Substituindo a equação (3.39) na equação (3.35) tem-se

$$-\int_\Omega N_{ij} \varepsilon_{ij}^\bullet d\Omega + \int_\Omega (N_{ij} u_i^\bullet)_{,j} d\Omega + \int_\Omega b_i u_i^\bullet d\Omega = 0 \tag{3.40}$$

Pelo teorema de Green tem-se:

$$\int_{\Omega}(N_{ij}u_i^{\bullet})_{,j}d\Omega = \int_{\Gamma}(N_{ij}u_i^{\bullet})n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet} d\Gamma \tag{3.41}$$

onde

$$t_i = N_{ij}n_j \tag{3.42}$$

Substituindo (3.41) em (3.40), tem-se

$$\int_{\Omega} N_{ij}\varepsilon_{ij}^{\bullet} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^{\bullet} d\Omega \tag{3.43}$$

Partindo-se da equação (3.1) como sendo a correspondente ao estado $u_i^{\bullet}$ e a função de interpolação da equação (3.35) como sendo u_i, obtém-se, de forma análoga a anterior

$$\int_{\Omega} N_{ij}^{\bullet}\varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{\bullet} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{\bullet} u_i d\Omega \tag{3.44}$$

Pelo teorema recíproco dois estados de um mesmo material podem ser relacionados por $N_{ij}^{\bullet}\varepsilon_{ij} = N_{ij}\varepsilon_{ij}^{\bullet}$. Desta forma, igualando-se as equações (3.44) e (3.43), tem-se

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^{\bullet} d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^{\bullet} b_i d\Omega = \int_{\Gamma} t_i^{\bullet} u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_i b_i^{\bullet} d\Omega \tag{3.45}$$

A equação integral (3.45) relaciona dois estados quaisquer de tensões. Para que se possa tratar problemas de elasticidade em meio contínuo, será adotado que um destes estados é conhecido, e o outro se deseja determinar. No caso de elementos de contorno, o estado conhecido é o chamado estado fundamental que corresponde a resposta de um corpo infinito a uma carga concentrada unitária em um ponto $\mathbf{x}'$. A representação matemática de uma carga concentrada unitária é dada pelo delta de Dirac que é definido como

$$\begin{cases} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}') = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\Omega = 1 \end{cases} \tag{3.46}$$

A razão da escolha do estado fundamental deve-se ao fato que a função delta de Dirac reduz o número de integrais de domínio, pois esta possui a propriedade

$$\int_\Omega f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')d\Omega = f(\mathbf{x}') \tag{3.47}$$

para um dado ponto $\mathbf{x}' \in \Omega$.

Considerando o estado " $\bullet$ " como sendo o estado fundamental de um problema estático livre de forças de corpo ($b_i^\bullet = 0$), a equação (3.45) pode ser escrita como

$$\int_\Gamma t_{ik}^* u_i d\Gamma + \int_\Omega b_i u_{ik}^* d\Omega = \int_\Gamma t_i u_{ik}^* d\Gamma - \int_\Omega \delta_{ik} u_i d\Omega \tag{3.48}$$

onde u_{ik}^* e t_{ik}^* representam respectivamente deslocamentos e forças de superfície na direção k, num ponto $\mathbf{x}$, devido a uma força concentrada unitária aplicada de forma estática num ponto $\mathbf{x}'$ numa direção i. Por serem soluções do estado fundamental, u_{ik}^* e t_{ik}^* são chamadas soluções fundamentais de deslocamentos e forças de superfície, respectivamente.

Devido a propriedade (3.47), a equação (3.48) pode ser escrita como

$$u_k + \int_\Gamma t_{ik}^* u_i d\Gamma = \int_\Gamma u_{ik}^* t_i d\Gamma - \int_\Omega b_i u_{ik}^* d\Omega \tag{3.49}$$

Considerando que as forças de corpo b_i são nulas, pode-se escrever:

$$u_k + \int_\Gamma t_{ik}^* u_i d\Gamma = \int_\Gamma u_{ik}^* t_i d\Gamma \tag{3.50}$$

3.4 Soluções fundamentais anisotrópicas

Para se obter as soluções fundamentais estáticas para problemas bidimensionais em materiais anisotrópicos, o domínio Ω será mapeado num plano complexo, usando a seguinte mudança de variável

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1' + \mu_1 x_2' \\ x_1' + \mu_2 x_2' \end{Bmatrix} \tag{3.51}$$

e

$$\mathbf{z} = \left\{ \begin{array}{c} z_1 \\ z_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{array} \right\} \tag{3.52}$$

onde μ_k são raízes complexas da equação (3.26), x'_1 e x'_2 são as coordenadas do ponto fonte (ponto de aplicação da carga concentrada unitária) e x_1 e x_2 são as coordenadas do ponto campo (ponto de obtenção da resposta devido a aplicação da carga unitária).

Se for considerado um contorno fechado Γ ao redor do ponto fonte e se forem usadas as forças de superfície definidas pela equação (3.3) e as tensões definidas pela equação (2.1), tem-se

$$\begin{aligned} \int_\Gamma t_1 d\Gamma &= 2\mathrm{Re}[[\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2]], \\ \int_\Gamma t_2 d\Gamma &= 2\mathrm{Re}[[\Psi_1 + \Psi_2]] \end{aligned} \tag{3.53}$$

onde os colchetes duplos representam o salto na função para um contorno fechado ao redor do ponto fonte. Se o contorno Γ engloba $\mathbf{z}'$, então o resultado das equações (3.53) serão diferentes de zero.

As soluções fundamentais em um plano anisotrópico infinito podem ser encontradas usando-se a função tensão de Airy resultante das forças de superfície fundamentais, dadas pelas equações (3.53), e a equação de equilíbrio de forças (3.1) considerando forças de corpo e efeitos de inércia nulos.

A função tensão de Airy para um ponto carregado na direção x_i pode ser representada por Ψ_{ik}. Como as equações integrais de contorno (3.53) possuem sinais opostos à carga aplicada, ela pode ser expressa para um ponto fonte como

$$2\mathrm{Re}[[\mu_1 \Psi_{i1} + \mu_2 \Psi_{i2}]] = -\delta_{i1},$$

$$2\mathrm{Re}[[\Psi_{i1} + \Psi_{i2}]] = \delta_{i2}. \tag{3.54}$$

As equações (3.54) podem ser satisfeitas para qualquer contorno fechado $\mathbf{z}'$, tomando

$$\Psi_{ik} = A_{ik}\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') \tag{3.55}$$

onde A_{ik} são constantes complexas. Usando propriedades de funções complexas, pode ser mostrado que para qualquer contorno fechando o ponto $\mathbf{z}'$

$$\ln(\mathbf{z} - \mathbf{z}') = 2\pi i. \tag{3.56}$$

Usando as equações (3.54), (3.55) e (3.56), podem ser obtidas duas equações para as constantes desconhecidas A_{ik}

$$\begin{aligned} A_{i1} - \bar{A}_{i1} + A_{i2} - \bar{A}_{i2} &= \delta_{i2}/(2\pi i) \\ \mu_1 A_{i1} - \bar{\mu}_1 \bar{A}_{i1} + \mu_2 A_{i2} - \bar{\mu}_2 \bar{A}_{i2} &= -\delta_{i1}/(2\pi i) \end{aligned} \tag{3.57}$$

As duas outras equações necessárias para se determinar A_{ik} resultam da exigência que os deslocamentos tenham valores únicos, ou seja

$$[[u_i]] = 0 \tag{3.58}$$

Usando as equações de deslocamentos (3.32), a equação (3.55) e a equação (3.56), a equação (3.58) pode ser expandida como

$$\begin{aligned} q_{11}A_{i1} - \bar{q}_{11}\bar{A}_{i1} + q_{12}A_{12} - \bar{q}_{12}\bar{A}_{i2} = 0 \\ q_{21}A_{i1} - \bar{q}_{21}\bar{A}_{i1} + q_{22}A_{12} - \bar{q}_{22}\bar{A}_{i2} = 0 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Escrevendo as equações (3.57) e (3.59) na forma matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\overline{\mu}_1 & \mu_2 & -\overline{\mu}_2 \\ q_{11} & -\overline{q}_{11} & q_{12} & -\overline{q}_{12} \\ q_{21} & -\overline{q}_{21} & q_{22} & -\overline{q}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ \overline{A}_{j1} \\ A_{j2} \\ \overline{A}_{j2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{j2}/(2\pi i) \\ -\delta_{j1}/(2\pi i) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.60}$$

que é suficiente para se encontrar as constantes complexas A_{ik}. No caso de materiais isotrópicos a equação característica (3.26) se torna biquadrada com duas raízes iguais a i e duas iguais a $-i$. Estes valores tornam o sistema de equações (3.60) singular. Por causa disso não é possível o uso de materiais isotrópicos para comparar esta formulação com a formulação isotrópica que utiliza a solução fundamental de Kelvin (DOMINGUEZ, 1993) e (PARTRIDGE; BREBBIA; WROBEL, 1992). Para fazer esta comparação serão usados materiais quase-isotrópicos, ou seja

$$E_2 = E_1 + \epsilon \cong E \tag{3.61}$$

sendo que

$$\epsilon \leq 10^{-2} E_1 \tag{3.62}$$

e

$$G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})} \tag{3.63}$$

As soluções fundamentais para deslocamentos são obtidas inserindo a função tensão dada pela equação (3.31) nas equações de deslocamentos (3.32). Desta forma, tem-se

$$u^*_{ji}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\mathrm{Re}[q_{i1} A_{j1} \ln(z_1 - z_1') + q_{i2} A_{j2} \ln(z_2 - z_2')]. \tag{3.64}$$

Similarmente, as soluções fundamentais para forças de superfície são obtida pela substituição da equação (3.55) nas equações de tensão (3.31) e usando a equação (3.3)

$$t^*_{ij}(\mathbf{z}', \mathbf{z}) = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(z_1 - z'_1)} g_{i1}(\mu_1 n_1 - n_2) A_{j1} + \frac{1}{(z_2 - z'_2)} g_{i2}(\mu_2 n_1 - n_2) A_{j2}\right] \tag{3.65}$$

onde

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

e n_k são as componentes do vetor normal externo.

Note que tanto a solução fundamental de deslocamentos quanto a de forças de superfície são singulares quando o ponto fonte tende ao ponto campo. No caso da solução fundamental de deslocamentos a singularidade é fraca ($\ln r$). Já no caso da solução fundamental de forças de superfície tem-se uma singularidade forte ($1/r$). As formas como estas singularidades serão tratadas é mostrada na seção 3.7.

3.5 Equações integrais singulares

A equação integral (3.50) foi escrita para um ponto do interior do domínio. Uma vez que o ponto fonte é interno, a equação contém apenas integrandos regulares. Considere agora o limite da transição quando o ponto fonte tende ao contorno. Esta operação pode ser implementada colocando o ponto fonte no contorno e diminuindo o domínio do problema por uma região semi-circular, com contorno Γ^*_ϵ e raio ϵ, centrado no ponto fonte, conforme mostrado na Figura 6. Com esta configuração, o contorno completo é dividido em duas partes, na forma

$$\Gamma = \lim_{\epsilon \to 0} (\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma^*_\epsilon) \tag{3.67}$$

onde ϵ é o raio do semi-círculo de centro no ponto fonte, pertencendo ao contorno Γ. A equação (3.50) é, então, reescrita como:

$$u_l + \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma^*_\epsilon} t^*_{li} u_i d\Gamma = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \Gamma^*_\epsilon} u^*_{li} t_i d\Gamma \tag{3.68}$$

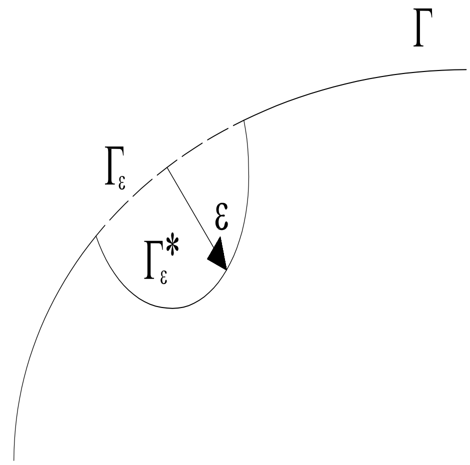

Figura 6: Ponto fonte localizado no contorno, circundado por uma região semi-circular.

A integral do lado direito da equação (3.68) contém um integrando de singularidade fraca da ordem $\ln(1/r)$ e é integrável como uma integral imprópria. A integral do lado esquerdo tem uma singularidade forte, de ordem $1/r$, que pode ser regularizada com o primeiro termo da expansão de Taylor em torno do ponto fonte, ou seja

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon+\Gamma_\epsilon^*} t_{li}^*\, u_i(\mathbf{z})\, d\Gamma &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon^*} t_{li}^*\,[u_i(\mathbf{z})-u_i(\mathbf{z}^{'})]\, d\Gamma + \\ & u_i(\mathbf{z}^{'})\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon^*} t_{li}^*\, d\Gamma + \\ & \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma-\Gamma_\epsilon} t_{li}^* u_i(\mathbf{z})\, d\Gamma \end{aligned} \qquad (3.69)$$

Assumindo que os deslocamentos são contínuos no ponto fonte, o primeiro termo do lado direito da equação (3.69) é integrável e desaparece no processo de limite. O segundo termo da equação representa um salto nos deslocamentos dado por $A_{ij}(\mathbf{z}')u_j(\mathbf{z}')$, no qual $A_{ij}(\mathbf{z}')$ é uma constante que depende da geometria local e das constantes elásticas. Finalmente, o terceiro termo do lado direito da equação resulta numa integral imprópria que é calculada no sentido do valor principal de Cauchy. Portanto, quando $\epsilon \to 0$, o ponto fonte tende ao contorno e, no limite, a equação (3.68) pode ser escrita na forma

$$c_{li}u_i + \fint t_{li}^* u_i d\Gamma = \int_\Gamma u_{li}^* t_i d\Gamma \qquad (3.70)$$

onde $\fint$ representa integral no sentido do valor principal de Cauchy e o coeficiente $c_{li}(\mathbf{z}')$ é dado por $\delta ij + A_{ij}(\mathbf{z}')$, no qual δ_{ij} representa o delta de Kronecker.

3.6 Formulação dos elementos de contorno discretizada

Para se obter a solução do problema elasto-estático, o contorno é dividido em elementos de contorno. Nesta etapa do trabalho, serão utilizados apenas elementos quadráticos (3 nós por elementos) contínuos (elementos cujos nós das extremidades são compartilhados com os elementos vizinhos).

Nesta formulação será mais conveniente trabalhar com vetores do que usar notação indicial. Desta forma tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \phi \mathbf{u}^{(i)} \\ \mathbf{t} &= \phi \mathbf{t}^{(i)} \end{aligned} \tag{3.71}$$

sendo que as variáveis em negrito representam vetores de dimensões $2N$, onde N é o número de nós, $\mathbf{u}^{(i)}$ e $\mathbf{t}^{(i)}$ representam os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, ϕ é o vetor de funções de forma, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{t}$ representam os deslocamentos e tensões ao longo do elemento, respectivamente.

Considere que o domínio tenha sido dividido em NE elementos de contorno. Substituindo as equações (3.71) na equação (3.70), tem-se

$$\mathbf{c}^l \mathbf{u}^l + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \fint_{\Gamma_j} \mathbf{T} \phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{U} \phi d\Omega \right\} \mathbf{t}^j \tag{3.72}$$

Chamando

$$\int_{\Gamma} \mathbf{U} \phi d\Gamma = \mathbf{G} \tag{3.73}$$

e

$$\int\!\!\!\!-_{\Gamma_j} \mathbf{T}\phi d\Gamma = \mathbf{H} \tag{3.74}$$

tem-se

$$\sum_{j=1}^{N} H^{lj} u^j = \sum_{j=1}^{N} G^{lj} t^j \tag{3.75}$$

ou, na forma matricial

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gt} \tag{3.76}$$

3.7 Integração no espaço

As funções de interpolação no espaço utilizada neste trabalho (funções de forma) são as funções de forma quadráticas. Essas funções permitem o modelamento de elementos curvos e são especialmente indicadas para problemas onde se tem altos gradientes.

Os deslocamentos e as forças de superfícies são representados em um elemento quadrático descontínuo como:

$$\mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{array} \right\} = \phi \mathbf{u}^{(n)} \tag{3.77}$$

$$\mathbf{t} = \left\{ \begin{array}{c} t_1 \\ t_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} t_1^{(1)} \\ t_2^{(1)} \\ t_1^{(2)} \\ t_2^{(2)} \\ t_1^{(3)} \\ t_2^{(3)} \end{array} \right\} = \phi \mathbf{t}^{(n)} \tag{3.78}$$

onde $u_i^{(n)}$ e $t_i^{(n)}$ são os valores nodais de deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente, e $\phi^{(i)}$ são as funções de forma quadráticas descontínuas definidas por:

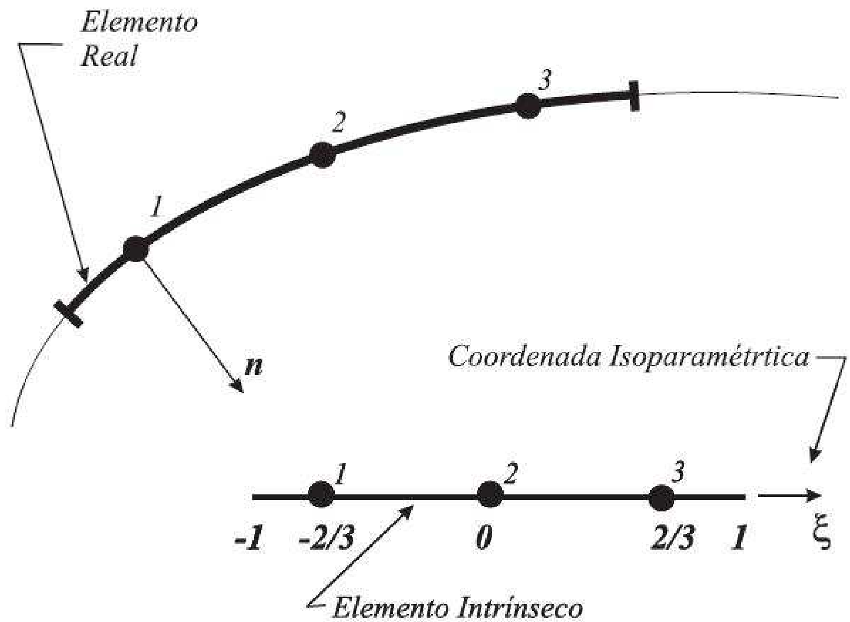

Figura 7: Elemento quadrático descontínuo.
(KANE, 1994)

$$\phi_d^{(1)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4}\right); \tag{3.79}$$

$$\phi_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi\right)\left(1 + \frac{3}{2}\xi\right); \tag{3.80}$$

$$\phi_d^{(3)} = \xi\left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4}\right). \tag{3.81}$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 7).

A geometria do elemento também pode ser considerada como quadrática e é representada por coordenadas nodais na forma:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_c^{(1)} & 0 & \phi_c^{(2)} & 0 & \phi_c^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_c^{(1)} & 0 & \phi_c^{(2)} & 0 & \phi_c^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(1)} \\ x_2^{(2)} \\ x_2^{(3)} \end{array} \right\} = \phi \mathbf{x}^{(n)} \tag{3.82}$$

porém, utilizando as funções de forma para elementos quadráticos contínuos dadas por:

$$\phi_c^{(1)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi - 1\right); \tag{3.83}$$

$$\phi_c^{(2)} = \left(1 - \xi^2\right); \tag{3.84}$$

$$\phi_c^{(3)} = \frac{1}{2}\xi\left(\xi + 1\right). \tag{3.85}$$

onde ξ representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento.

Desta forma, as integrais de contorno podem ser escritas como:

$$H^{(j)} = \fint_{\Gamma_j} t_{lk}^* \phi^{(j)} d\Gamma = \fint_{-1}^{1} t_{lk}^* \phi^{(j)} |J| d\xi \tag{3.86}$$

$$G^{(j)} = \int_{\Gamma_j} u_{lk}^* \phi^{(j)} d\Gamma = \int_{-1}^{1} u_{lk}^* \phi^{(j)} |J| d\xi \tag{3.87}$$

onde $|J|$ representa o módulo do Jacobiano da transformação $(x_1, x_2) \rightarrow \xi$, e é dado por (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989a) e (KANE, 1993):

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2 \right\}^{1/2} \tag{3.88}$$

onde $dx_1/d\xi$ e $dx_2/d\xi$ são obtidos derivando-se as equações (3.82) em relação a ξ.

Integrais singulares da ordem $0(\ln r)$ podem ser avaliadas eficientemente pela quadratura de Gauss com uma transformação de variáveis cúbica, conforme proposto por Telles (1987), que cancela exatamente a singularidade logarítmica. Uma outra possibilidade é o uso da quadratura logarítmica de Gauss, apresentada por Stroud e Secrest (1966). De acordo com este método, os termos incluindo singularidades logarítmicas podem ser integrados por

$$I = \int_0^1 \ln\left(\frac{1}{\xi}\right) f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^{N} w_i f(\xi) \ , \tag{3.89}$$

onde N é o número de pontos de Gauss. A coordenada do ponto de integração ξ_i e o fator peso w_i podem ser encontrados na literatura (STROUD; SECREST, 1966) e (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989b).

Neste trabalho, os termos não singulares das matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de $\mathbf{G}$ são do tipo $\ln(r)$ sendo integrados usando quadratura logarítmica de Gauss com 10 pontos de integração. Já os termos singulares de $\mathbf{H}$ são do tipo $1/r$ e precisam ser calculados no sentido do valor principal de Cauchy. Uma maneira bastante simples de se tratar esta singularidade é através de considerações de corpos rígidos (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1989a). Assumindo que um corpo rígido tenha todos os seus pontos do contorno deslocados de um valor unitário e que não existam forças de corpo ($b_i = 0$) na direção de um dos eixos de coordenadas, as forças de superfície em qualquer ponto do contorno deste corpo deve ser zero. Desta forma, a equação (3.76) torna-se

$$\mathbf{H}\mathbf{v}^q = 0 \tag{3.90}$$

onde $\mathbf{v}^q$ é um vetor que para todos os nós tem deslocamentos unitários ao longo da direção q e zero na outra direção. Para satisfazer a equação (3.90) tem-se

$$H_{ii} = -\sum_{j=1}^{N} H_{ij} \qquad j \neq i \tag{3.91}$$

sendo j par ou ímpar.

O termo da diagonal da matriz $\mathbf{H}$ é igual a soma de todos os outros termos fora da diagonal correspondentes ao grau de liberdade em consideração.

3.8 Cálculo dos deslocamentos e densidades de forças em pontos internos

O tensor de tensões para um ponto no interior do domínio Ω, obtido derivando-se a equação (3.49) neste ponto e aplicando-se a lei de Hooke, pode ser escrito como

$$N_{ik} + \int_\Gamma S_{jik} u_j d\Gamma = \int_\Gamma D_{jik} t_j d\Gamma \tag{3.92}$$

onde S_{kij} e D_{kij} são combinações lineares das derivadas de T_{ij} e U_{ij}, respectivamente.

O tensor S_{kij} é dado por

$$\left\{ \begin{array}{c} S_{11j} \\ S_{22j} \\ S_{21j} \end{array} \right\} = - \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} t^*_{1j,1} \\ t^*_{2j,2} \\ \frac{1}{2}\left(t^*_{1j,2} + t^*_{2j,1}\right) \end{array} \right\} \tag{3.93}$$

onde $j = 1, 2$. As derivadas de t^*_{ij} são obtidas pela equação

$$\begin{aligned} t^*_{ij,k} \quad = \quad & -2\text{Re}\left[\frac{1}{(z_1 - z'_1)^2} R_{k1} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \right. \\ & \left. \frac{1}{(z_2 - z'_2)^2} R_{k2} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right] \end{aligned} \tag{3.94}$$

onde

$$R_{kl} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{array} \right] \tag{3.95}$$

Da mesma forma D_{kij} pode ser calculado como

$$\left\{ \begin{array}{c} D_{11j} \\ D_{22j} \\ D_{21j} \end{array} \right\} = - \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u^*_{1j,1} \\ u^*_{2j,2} \\ \frac{1}{2}\left(u^*_{1j,2} + u^*_{2j,1}\right) \end{array} \right\} \tag{3.96}$$

sendo que as derivadas de u^*_{ij} são dadas por

$$u^*_{ij,k} = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{z_1 - z'_1} R_{k1} q_{j1} A_{i1} + \frac{1}{z_2 - z'_2} R_{k2} q_{j2} A_{i2}\right] \tag{3.97}$$

4 O Método dos Elementos de Contorno para Flexão em Placas Anisotrópicas

4.1 Introdução

Este capítulo descreve a formulação clássica do método dos elementos de contorno para a formulação clássica de flexão de placas anisotrópicas (formulação de placas de Kirchhoff, ou seja, formulação onde os efeitos da deformação por cisalhamento são desprezados). Esta formulação já foi apresentada nos trabalhos de Paiva (2005), Torsani (2007), Santana (2008), Souza (2009), Reis (2010), Reis et al. (2011). Entretanto, da mesma forma que no capítulo 3, para facilitar a compreensão do texto e homogenizar a formulação utilizada neste trabalho, grande parte da formulação é novamente descrita aqui.

4.2 Teoria clássica de placas

As placas são elementos estruturais limitados por duas superfícies planas e paralelas (Figura 8) distanciadas entre si por uma espessura t.

No caso da dimensão da espessura ser muito menor que as dimensões das superfícies planas limitantes, as placas são designadas por placas finas. O plano equidistante das superfícies planas externas é designado por plano médio da placa. Considerando as propriedades do material, uma placa pode ser anisotrópica, com diferentes propriedades em diferentes direções, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Dependendo de sua espessura, uma placa pode ser considerada fina ou espessa. Neste trabalho, será desenvolvida a formulação do método dos elementos de contorno para placas finas anisotrópicas. A teoria

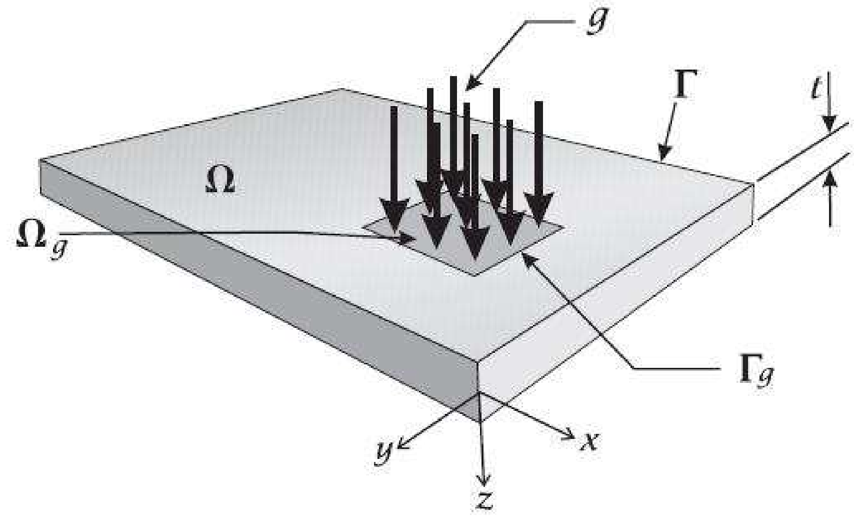

Figura 8: Placa Fina.

clássica de flexão de placas anisotrópicas (onde o efeito da deformação por cisalhamento não é considerado) está baseada nos seguintes pressupostos:

1. A normal ao plano médio da placa antes da deformação permanece normal à superfície média após a flexão.

2. A tensão normal σ_z na direção normal ao plano médio é desprezível diante das outras tensões no plano da placa.

4.3 Relações básicas na teoria clássica de placas

Considere um elemento de placa seguindo os pressupostos já definidos. A Figura 9 mostra este elemento com um estado de tensões agindo nele e uma força distribuída aplicada em sua superfície.

Integrando as componentes de tensão ao longo da espessura da placa podemos definir os momentos e forças (Figura 10):

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz, \tag{4.1}$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz, \tag{4.2}$$

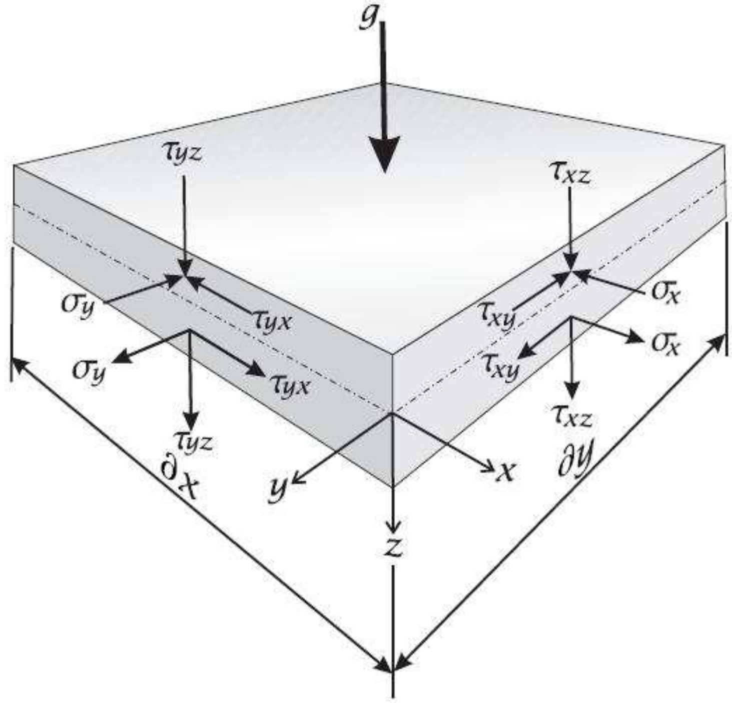

Figura 9: Tensões em um elemento de placa

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz, \tag{4.3}$$

$$q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz, \tag{4.4}$$

e

$$q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz. \tag{4.5}$$

Do equilíbrio de forças e momentos, podemos escrever:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} - q_x = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - q_y = 0. \tag{4.8}$$

onde as unidades são: força distribuída g em N/m^2, momento m em $N.m$ e esforço cortante

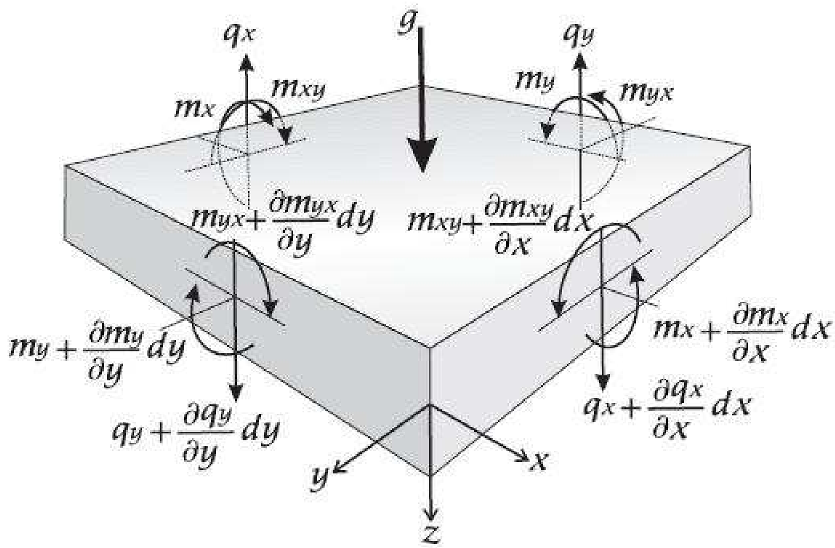

Figura 10: Forças e momentos em um elemento da placa

q em N.

Resolvendo as equações (4.7) e (4.8) para q_x e q_y, respectivamente, substituindo a equação (4.6) e considerando a simetria de momentos ($m_{xy} = m_{yx}$), temos:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -g. \tag{4.9}$$

Considere as posições inicial e final de um elemento da placa dado por $abcd$ paralelo ao plano médio com lados ab e ad paralelos aos eixos x e y, respectivamente, a uma distância z do plano médio (Figura 5).

Assumindo que, durante a flexão da placa, os pontos a, b, c e d, movem-se para a', b', c' e d', chamando as componentes de deslocamento u_0 e v_0 do ponto a nas direções x e y (Figura 5), respectivamente, o deslocamento do ponto b na direção x é dado por:

$$b'_x - b_x = u_o + \frac{\partial u}{\partial x}dx. \tag{4.10}$$

Então, o incremento do comprimento dx na direção x é dado por:

$$\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x}dx, \tag{4.11}$$

e a deformação na direção x é dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4.12}$$

Da mesma forma, podemos escrever:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4.13}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{4.14}$$

A Figura 11 mostra as posições inicial e final de uma seção da placa, paralela ao plano xz, que contém os pontos a, b, n_1 e n_2. A rotação do elemento an_1, inicialmente na posição vertical, é igual a $\frac{\partial w}{\partial x}$ (Figura 11). Então, o deslocamento do ponto na direção x, a uma distância z da superfície média pode ser escrita como:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{4.15}$$

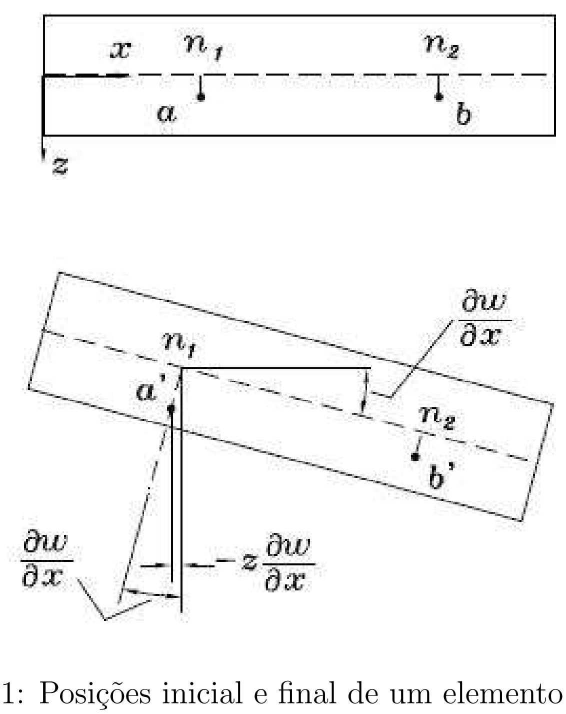

Figura 11: Posições inicial e final de um elemento de placa.

Seguindo um procedimento similar, o deslocamento de um ponto na direção y é dado por:

$$v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{4.16}$$

Substituindo as equações (4.15) e (4.16) nas equações (4.12), (4.13) e (4.14) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = z\kappa_x, \\
\varepsilon_y &= -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = z\kappa_y, \\
\gamma_{xy} &= -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = z\kappa_{xy}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

onde κ_x, κ_y e κ_{xy} são as curvaturas da placa dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} = -\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \tag{4.18}$$

Integrando ao longo da espessura (Figura 3) as equações (4.1), (4.2), (4.3) e usando a equação (2.12) obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left\{ \begin{array}{c} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\}_k z\, dz \tag{4.19}$$

Usando-se as equações (2.12) e (4.17), a equação (4.19) pode ser escrita para um laminado como:

$$\left\{ \begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{N} \left\{ \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\begin{array}{ccc} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array} \right\} z^2\, dz \right\} \tag{4.20}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{c} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{ccc} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{array}\right\} \tag{4.21}$$

onde

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right) \tag{4.22}$$

onde h_k é a distância do plano médio do laminado até a interface k (Figura 3).

A equação (4.21) também pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} m_x &= -\left(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\ m_y &= -\left(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right), \\ m_{xy} &= -\left(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Substituindo as equações (4.23) nas equações (4.7) e (4.8), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} q_x &= -\left[D_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right], \\ q_y &= -\left[D_{16}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 3D_{26}\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right]. \end{aligned} \tag{4.24}$$

A equação (4.9) pode então ser reescrita usando as equações (4.23) como:

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = g. \tag{4.25}$$

A equação (4.25) pode ser integrada no plano característico complexo:

$$z = x + \mu y \tag{4.26}$$
$$\mu = d + ie$$

onde d e e são as partes real e imaginária de μ, respectivamente. Usando a equação (3.26) e considerando as forças de corpo nulas, a equação (4.25) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4}\left[D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11}\right] = 0. \tag{4.27}$$

A solução geral para w na equação (4.25) depende das raízes μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ da equação característica dada por:

$$D_{22}\mu^4 + 4D_{26}\mu^3 + 2(D_{12} + 2D_{66})\mu^2 + 4D_{16}\mu + D_{11} = 0. \tag{4.28}$$

As raízes desta equação, como mostrado por Lekhnitskii (1968), são sempre complexas para materiais homogêneos. As raízes complexas $\mu_1 = d_1 + e_1 i$ e $\mu_2 = d_2 + e_2 i$ são conhecidas como parâmetros complexos de deflexão. Em geral, estas raízes são números complexos distintos. Uma expressão geral para a deflexão tem a forma:

1. no caso de parâmetros complexos distintos ($\mu_1 \neq \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + w_2(z_2)]. \tag{4.29}$$

2. no caso de parâmetros complexos iguais ($\mu_1 = \mu_2$):

$$w = w_o + 2\text{Re}[w_1(z_1) + \bar{z_1} w_2(z_1)]. \tag{4.30}$$

onde w_0 é uma solução particular da equação (4.25) que depende da força distribuída g nas superfícies da placa, $w_1(z_1)$ e $w_2(z_2)$ são funções analíticas arbitrárias de variáveis complexas $z_1 = x + \mu_1 y$ e $z_2 = x + \mu_2 y$. Baseada nas equações (4.23) e (4.24), podem ser obtidas expressões gerais para forças e momentos como (para o caso $\mu_1 \neq \mu_2$):

$$m_x = m_x^o - 2\text{Re}[p_1 w''(z_1) + p_2 w''(z_2)],$$

$$
\begin{aligned}
m_y &= m_y^o - 2\mathrm{Re}[q_1 w''(z_1) + q_2 w''(z_2)], \\
m_{xy} &= m_{xy}^o - 2\mathrm{Re}[r_1 w''(z_1) + r_2 w''(z_2)], \\
q_x &= q_x^o - 2\mathrm{Re}[\mu_1 s_1 w'''(z_1) + \mu_2 s_2 w'''(z_2)], \\
q_y &= q_y^o - 2\mathrm{Re}[s_1 w'''(z_1) + s_2 w'''(z_2)].
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

onde m_x^0, m_y^0, m_{xy}^0, q_x^0 e q_y^0 são momentos e forças cisalhantes correspondentes a função w_0 calculada pelas equações (4.23) e (4.24). As outras constantes são dadas por:

$$
\begin{aligned}
&p_1 = D_{11} + D_{12}\mu_1^2 + 2D_{16}\mu_1, && p_2 = D_{11} + D_{12}\mu_2^2 + 2D_{16}\mu_2, \\
&q_1 = D_{12} + D_{22}\mu_1^2 + 2D_{26}\mu_1, && q_2 = D_{12} + D_{22}\mu_2^2 + 2D_{26}\mu_2, \\
&r_1 = D_{16} + D_{26}\mu_1^2 + 2D_{66}\mu_1, && p_2 = D_{16} + D_{26}\mu_2^2 + 2D_{66}\mu_2, \\
&s_1 = \frac{D_{11}}{\mu_1} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_1 + D_{26}\mu_1^2, && \\
&s_2 = \frac{D_{11}}{\mu_2} + 3D_{16} + D_{12} + D_{66}\mu_2 + D_{26}\mu_2^2, && \\
&s_1 - r_1 = \frac{p_1}{\mu_1}, && s_2 - r_2 = \frac{p_2}{\mu_2}, \\
&s_1 + r_1 = -q_1\mu_1, && s_2 + r_2 = -q_2\mu_2.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

Expressões similares podem ser obtidas para o caso onde $\mu_1 = \mu_2$. Estes casos ocorrem quando:

$$D_{11} \ D_{22} = (D_{12} + 2D_{66})^2 \tag{4.33}$$

e

$$D_{16} = D_{26} = 0 \tag{4.34}$$

Contudo este caso não será apresentado neste trabalho (SHI; BEZINE, 1988).

4.4 Transformação de coordenadas para momentos e forças cortantes

As componentes de tensão σ_n e τ_{ns}, tensões normal e cisalhante, respectivamente, estão relacionadas com as tensões σ_x, σ_y e τ_{xy} por:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha\cos\alpha, \tag{4.35}$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{4.36}$$

onde α é o ângulo entre os eixos h e y.

As componentes de momento, inicialmente escritas considerando os eixos x e y, podem agora ser reescritas em um sistema de coordenadas genérico n, s (PAIVA, 1987). Os momentos fletores referentes às direções n e s são dados por:

$$m_n = m_x \cos^2\alpha + m_y \sin^2\alpha + 2m_{xy} \sin\alpha\cos\alpha, \tag{4.37}$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha + m_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \tag{4.38}$$

Similarmente, q_n, a força cisalhante no eixo n, pode ser escrita como:

$$q_n ds = q_x ds \cos\alpha + q_y ds \sin\alpha, \tag{4.39}$$

ou

$$q_n = q_x \cos\alpha + q_y \sin\alpha. \tag{4.40}$$

Com o objetivo de resolver a equação diferencial da placa dada por (4.25), é necessário a imposição das condições de contorno para o deslocamento w e sua derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$. Kirchhoff (1850) mostrou que as condições de contorno da força cisalhante q_n e momento volvente m_{ns} podem ser escritas como uma única condição dada por:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s}. \tag{4.41}$$

A outra condição de carregamento no contorno é o momento m_n.

4.5 Formulação integral

Usando o teorema de Betti (KANE, 1994), podemos relacionar dois estados de tensão-deformação de um material linear como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega. \tag{4.42}$$

Escrevendo o lado direito da equação (4.42) na notação de von Karman, temos:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* + \tau_{xz} \gamma_{xz}^* + \tau_{yz} \gamma_{yz}^* \right) d\Omega. \tag{4.43}$$

Desconsiderando as tensões normais à superfície média da placa, a equação (4.43) é escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_\Omega \left(\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \tau_{xy} \gamma_{xy}^* \right) d\Omega. \tag{4.44}$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.17) na equação (4.44), pode-se escrever o primeiro termo da integral do lado direito da equação (4.44) como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[\int_z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(z \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right) dz \right] d\Omega. \tag{4.45}$$

Integrando (4.45) ao longo da espessura da placa, tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Omega} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = - \int_{\Omega} m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.46}$$

Para obter as equações do método dos elementos de contorno, é necessário transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Considere duas funções $f(x)$ e $g(x)$. A derivada de seu produto pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x)g(x)] = \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x) + \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x). \tag{4.47}$$

Usando a propriedade de derivação (4.47) na equação (4.46), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \right) - \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} \right] d\Omega. \tag{4.48}$$

Usando o teorema de Green (KANE, 1994), a equação (4.48) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial w^*}{\partial x} \frac{\partial m_x}{\partial x} d\Omega. \tag{4.49}$$

Aplicando a propriedade de derivação (4.47) no segundo termo do lado direito da equação (4.49), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = - \int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \right) - w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} \right] d\Omega. \tag{4.50}$$

Depois, usando o teorema de Green, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_x \varepsilon_x^* d\Omega = \int_{\Gamma} \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + w^* \frac{\partial m_x}{\partial x} \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} w^* \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} d\Omega. \tag{4.51}$$

Seguindo um procedimento similar, podemos mostrar que:

$$\int_\Omega \sigma_y \varepsilon_y^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_y}{\partial y} \sin\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega w^* \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} d\Omega, \tag{4.52}$$

e

$$\int_\Omega \tau_{xy} \gamma_{xy}^* d\Omega = \int_\Gamma \left(-m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha + w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \sin\alpha + \right.$$

$$\left. w^* \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \cos\alpha \right) d\Gamma - \int_\Omega 2w^* \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} d\Omega. \tag{4.53}$$

Assim, a equação (4.44) é escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_\Gamma \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_\Gamma w^* \left[\left(\cos\alpha \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \left(\sin\alpha \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \right] d\Gamma -$$

$$\int_\Omega w^* \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} \right) d\Omega. \tag{4.54}$$

Substituindo as equações (4.7) e (3.9) e usando a equação (4.40), a equação (4.54) pode ser escrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = - \int_\Gamma \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos\alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin\alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos\alpha + \right.$$

$$\left. m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin\alpha \right) d\Gamma + \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.55}$$

Da relação entre dois sistemas de coordenadas (x, y) e (n, s), tem-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin\alpha,$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha. \tag{4.56}$$

Substituindo as equações (4.56) na equação (4.55), tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = -\int_\Gamma \left[m_x \cos\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha \right) + \right.$$

$$m_y \sin\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha \right) + m_{xy}\cos\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\sin\alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s}\cos\alpha \right) +$$

$$\left. m_{xy}\sin\alpha \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}\cos\alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s}\sin\alpha \right) \right] d\Gamma + \int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.57}$$

Depois de algumas manipulações algébricas, a equação (4.57) pode ser reescrita como:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = -\int_\Gamma \left\{ \frac{\partial w^*}{\partial n} \left(m_x \cos^2\alpha + m_y \sin^2\alpha + 2m_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \right) + \right.$$

$$\left. \frac{\partial w^*}{\partial s} \left[m_{xy} \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \right) + (m_y - m_x)\sin\alpha\cos\alpha \right] \right\} d\Gamma +$$

$$\int_\Gamma w^* q_n d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.58}$$

Substituindo as equações (4.37) e (4.38) na equação (4.58), tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij} d\Omega = -\int_\Gamma \left(m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns}\frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.59}$$

Calculando o segundo termo da primeira integral do lado direito da equação (4.59), temos:

$$\int_\Gamma m_{ns}\frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = m_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_\Gamma \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \tag{4.60}$$

onde Γ_1 e Γ_2 são as coordenadas dos extremos do contorno onde a integração está sendo realizada.

No caso de um contorno fechado sem canto, isto é, a função que descreve a curva de contorno e suas derivadas são contínuas e diferenciáveis, o primeiro termo do lado direito da equação (4.60) desaparece. No caso onde há cantos, a equação (4.60) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = -\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma, \tag{4.61}$$

onde

$$R_{c_i} = m^+_{ns_i} - m^-_{ns_i}, \tag{4.62}$$

e os termos w_{c_i}, $m^+_{ns_i}$, $m^-_{ns_i}$ são, respectivamente, os valores de deslocamentos e momentos depois e antes do canto i da placa (Figura 12), N_c é o número total de cantos no contorno (PAIVA, 1987).

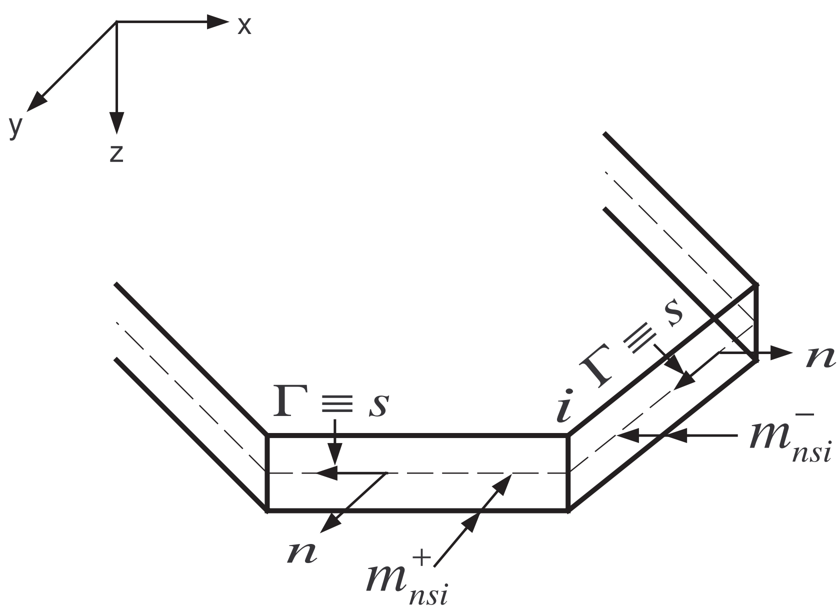

Figura 12: Canto i do contorno da placa.

Das equações (4.59) e (4.61), pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon^*_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \left(q_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_{\Omega} g w^* d\Omega. \tag{4.63}$$

Das equações (4.63) e (4.41), tem-se:

$$\int_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon^*_{ij}d\Omega = \int_\Gamma \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_\Omega g w^* d\Omega. \tag{4.64}$$

Seguindo um procedimento similar àquele usado para obter a equação (4.64), o lado esquerdo da equação (2.10) pode ser escrito como:

$$\int_\Omega \sigma^*_{ij}\varepsilon_{ij}d\Omega = \int_\Gamma \left(V^*_n w - m^*_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R^*_{c_i} w_{c_i} + \int_\Omega g^* w d\Omega. \tag{4.65}$$

Substituindo as equações (4.64) e (4.65) na equação (2.10), pode-se escrever:

$$\int_\Gamma \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w^*_{c_i} + \int_\Omega g w^* d\Omega =$$

$$\int_\Gamma \left(V^*_n w - m^*_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R^*_{c_i} w_{c_i} + \int_\Omega g^* w d\Omega. \tag{4.66}$$

A equação (4.66) relaciona dois estados de um material elástico. Para aplicar esta equação para resolver problemas de flexão, precisamos considerar um dos estados como conhecido e o outro como o estado que queremos investigar. Para obter a equação integral de contorno, o estado conhecido é ajustado para que a integral de domínio dada por:

$$\int_\Omega g^* w d\Omega \tag{4.67}$$

desapareça. Usando as propriedades da função delta de Dirac $\delta(P,Q)$, de forma que $g^* = \delta(P,Q)$, a integral (4.67) é escrita como:

$$\int_\Omega \delta(P,Q) w(P) d\Omega(P) = w(Q), \tag{4.68}$$

onde Q é o ponto onde a carga é aplicada, conhecido como ponto fonte, e P é o ponto onde o deslocamento é observado, conhecido como ponto campo. O estado correspondente a um material linear sob carregamento de uma função delta de Dirac é conhecido como um estado fundamental e as variáveis da equação (4.66) relacionadas a este estado (w^*,V^*_n e m^*_n) são conhecidas como soluções fundamentais, as quais são calculadas analiticamente a partir da equação (4.25).

Considerando o estado "*" como o estado fundamental, a equação (4.66) pode ser escrita como:

$$Kw(Q) + \int_\Gamma \left[V_n^*(Q,P)w(P) - m_n^*(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}^*(Q,P)w_{c_i}(P) =$$

$$\int_\Gamma \left[V_n(P)w^*(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)w_{c_i}^*(Q,P) +$$

$$\int_\Omega b(P)w^*(Q,P)d\Omega. \tag{4.69}$$

A equação(4.69) é a equação de placas finas para deslocamentos em pontos do domínio da placa. Esta equação fornece deslocamentos em todos os pontos do domínio da placa a partir das cortantes equivalentes (V_n), momentos de flexão na direção normal (m_n), reação de canto (R_{c_i}), deslocamentos (w) e rotações em relação à normal ($\partial w/\partial n$) conhecidos no contorno.

A constante K é introduzida para se considerar que a função delta de Dirac pode ser aplicada no domínio, no contorno ou fora do domínio. Se a função delta de Dirac é aplicada em um ponto onde o contorno é suave, então $K = 1/2$. As variáveis da equação (4.69) são deslocamentos $w(P)$, rotações $\frac{\partial w(P)}{\partial n}$, momentos $m_n(P)$, e forças $V_n(P)$. Para uma dada condição de contorno, algumas destas variáveis são conhecidas e outras desconhecidas. Para se ter um número de equações igual ao número de variáveis desconhecidas, é necessário escrever a equação integral correspondente à derivada do deslocamento $w(Q)$ em relação ao sistema de coordenadas cartesiano fixo no ponto de origem, isto é, o ponto onde o delta de Dirac do estado fundamental é aplicado. As direções dos eixos deste sistema de coordenadas são coincidentes com as direções normal e a tangente ao contorno no ponto de origem. Para problemas de flexão em placas anisotrópicas tem-se que a equação integral de contorno é escrita em termos de quatro valores de contorno básicos, isto é, deflexão w, inclinação da normal $\partial w/\partial n$, força cortante V_n e momento fletor m_n. Em um problema bem colocado dois destes quatro valores são incógnitas do problema e dois são condições de contorno conhecidas.

Pode-se verificar que num problema de flexão em placas anisotrópicas há sempre duas incógnitas a serem determinadas em qualquer ponto do contorno e consequentemente, a solução do problema requer que uma segunda equação seja estabelecida.

A segunda equação integral de contorno é obtida da derivada da equação (4.69) em relação à direção n_1 normal ao contorno no ponto fonte e também corresponde à solução do binário unitário. Esta equação é dada por:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w(Q)}{\partial n_1} + \int_\Gamma \left[\frac{\partial V^*}{\partial n_1}(Q,P)w(P) - \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1}(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P)\right] d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P) w_{c_i}(P) = \int_\Gamma \left\{V_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial}{\partial n_1}\left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P)\right]\right\} d\Gamma(P) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(P)\frac{\partial w_{c_i}^*}{\partial n_1}(Q,P) + \int_\Omega b(P)\frac{\partial w^*}{\partial n_1}(Q,P) d\Omega. \tag{4.70}$$

Encontra-se na literatura formulações de elementos de contorno que usam apenas a equação (4.69). Neste caso, os pontos fontes são os nós do contorno e um número igual de pontos externos ao domínio do problema (RAJAMOHAN; RAAMACHANDRAN, 1999).

4.6 Solução fundamental de deflexão para uma carga pontual

A solução fundamental é a resposta à aplicação de um carregamento unitário pontual em um meio elástico infinito cujas propriedades elásticas são as mesmas do componente que se quer analisar. No caso particular de placas, a solução fundamental é dada pelo deslocamento w em um ponto P qualquer do domínio, chamado de ponto campo, devido à aplicação de uma carga unitária q em um ponto Q qualquer, chamado de ponto fonte (Figura 13).

A solução fundamental do deslocamento transversal de placas fletidas é calculado fazendo o termo não-homogêneo da equação diferencial parcial (4.25) igual a uma força concentrada dada por uma função delta de Dirac $\delta(Q,P)$, isto é:

$$\Delta\Delta w^*(Q,P) = \delta(Q,P), \tag{4.71}$$

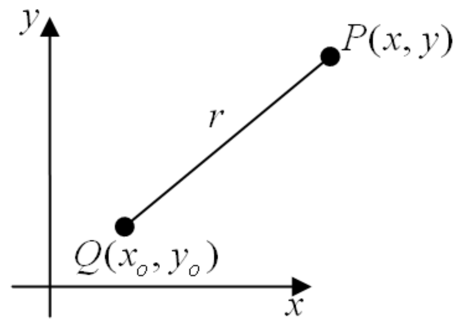

Figura 13: Solução fundamental

onde $\Delta\Delta(.)$ é o operador diferencial:

$$\Delta\Delta(.) = \frac{D_{11}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^4} + 4\frac{D_{16}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial^3\partial y} + \frac{2(D_{12}+2D_{66})}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x^2\partial y^2} + 4\frac{D_{26}}{D_{22}}\frac{\partial^4(.)}{\partial x\partial y^3} + \frac{\partial^4(.)}{\partial y^4}. \qquad (4.72)$$

Como mostrado por (SHI; BEZINE, 1988), a solução fundamental do deslocamento transversal é dada por:

$$w^*(\rho,\theta) = \frac{1}{8\pi}\left\{C_1R_1(\rho,\theta) + C_2R_2(\rho,\theta) + C_3\left[S_1(\rho,\theta) - S_2(\rho,\theta)\right]\right\}, \qquad (4.73)$$

onde

$$\rho = [(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2]^{1/2}, \qquad (4.74)$$

x e y são as coordenadas do ponto campo P, x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto fonte Q,

$$\theta = \arctan\frac{y-y_o}{x-x_o}, \qquad (4.75)$$

$$C_1 = \frac{(d_1-d_2)^2 - (e_1^2-e_2^2)}{GHe_1}, \qquad (4.76)$$

$$C_2 = \frac{(d_1 - d_2)^2 + (e_1^2 - e_2^2)}{GHe_2}, \tag{4.77}$$

$$C_3 = \frac{4(d_1 - d_2)}{GH}, \tag{4.78}$$

$$G = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 + e_2)^2, \tag{4.79}$$

$$H = (d_1 - d_2)^2 + (e_1 - e_2)^2, \tag{4.80}$$

d_i e e_i são respectivamente as partes real e imaginária das raízes μ_i da equação característica (4.28).

$$\begin{aligned} R_i = {} & \rho^2 \left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 - e_i^2 \sin^2\theta \right] \times \\ & \left\{ \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} \left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right) \right] - 3 \right\} - \\ & 4\rho^2 e_i \sin\theta \left(\cos\theta + d_i \sin\theta \right) \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \end{aligned} \tag{4.81}$$

e

$$\begin{aligned} S_i = {} & \rho^2 e_i \sin\theta \left(\cos\theta + d_i \sin\theta \right) \times \\ & \left\{ \log \left[\frac{\rho^2}{a^2} \left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right) \right] - 3 \right\} + \\ & \rho^2 \left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 - e_i^2 \sin^2\theta \right] \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

O índice repetido i nos termos de R_i e S_i não implicam em soma. O coeficiente a é uma constante arbitrária tomada como $a = 1$. As outras grandezas derivadas da solução fundamental são dadas por:

$$m_n^* = -\left(f_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + f_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + f_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right), \tag{4.83}$$

$$R_{c_i}^* = -\left(g_1\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + g_2\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + g_3\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right), \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned} V_n^* &= -\left(h_1\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^3} + h_2\frac{\partial^3 w^*}{\partial x^2\partial y} + h_3\frac{\partial^3 w^*}{\partial x\partial y^2} + h_4\frac{\partial^3 w^*}{\partial y^3}\right) - \\ &\quad \frac{1}{\bar{R}}\left(h_5\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + h_6\frac{\partial^2 w^*}{\partial x\partial y} + h_7\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}\right). \end{aligned} \tag{4.85}$$

onde $\bar{R}$ é o raio de curvatura em um ponto suave do contorno Γ. As demais constantes são definidas como:

$$f_1 = D_{11}n_x^2 + 2D_{16}n_xn_y + D_{12}n_y^2, \tag{4.86}$$

$$f_2 = 2(D_{16}n_x^2 + 2D_{66}n_xn_y + D_{26}n_y^2), \tag{4.87}$$

$$f_3 = D_{12}n_x^2 + 2D_{26}n_xn_y + D_{22}n_y^2, \tag{4.88}$$

$$g_1 = (D_{12} - D_{11})\cos\beta\sin\beta + D_{16}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.89}$$

$$g_2 = 2(D_{26} - D_{16})\cos\beta\sin\beta + 2D_{66}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.90}$$

$$g_3 = (D_{22} - D_{12})\cos\beta\sin\beta + D_{26}(\cos^2\beta - \sin^2\beta), \tag{4.91}$$

$$h_1 = D_{11}n_x(1 + n_y^2) + 2D_{16}n_y^3 - D_{12}n_xn_y^2, \tag{4.92}$$

$$h_2 = 4D_{16}n_x + D_{12}n_y(1 + n_x^2) + 4D_{66}n_y^3 - D_{11}n_x^2n_y - 2D_{26}n_xn_y^2, \tag{4.93}$$

$$h_3 = 4D_{26}n_y + D_{12}n_x(1+n_y^2) + 4D_{66}n_x^3 - D_{22}n_xn_y^2 - 2D_{16}n_x^2n_y, \tag{4.94}$$

$$h_4 = D_{22}n_y(1+n_x^2) + 2D_{26}n_x^3 - D_{12}n_x^2n_y, \tag{4.95}$$

$$h_5 = (D_{12} - D_{11})\cos 2\beta - 4D_{16}\sin 2\beta, \tag{4.96}$$

$$h_6 = 2(D_{26} - D_{16})\cos 2\beta - 4D_{66}\sin 2\beta, \tag{4.97}$$

$$h_7 = (D_{22} - D_{12})\cos 2\beta - 4D_{26}\sin 2\beta, \tag{4.98}$$

e β é o ângulo entre o sistema de coordenadas global xy e um sistema de coordenadas ns o qual tem seus eixos paralelos aos vetores n e s, normal e tangente, respectivamente, ao contorno no ponto Q. As derivadas da solução fundamental do deslocamento transversal podem ser expressas pela combinação linear das derivadas das funções R_i e S_i. Por exemplo:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} = \frac{1}{8\pi}\left[C_1\frac{\partial^2 R_1}{\partial y^2} + C_2\frac{\partial^2 R_2}{\partial y^2} + C_3\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 S_2}{\partial y^2}\right)\right]. \tag{4.99}$$

As derivadas de R_i e S_i são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_i}{\partial x} &= 2r\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} - \\ &\quad 4re_i\sin\theta\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta},\end{aligned} \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_i}{\partial y} &= 2r\left[d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - e_i^2\sin\theta\right]\times \\ &\quad \left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left((\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right)\right] - 2\right\} - \\ &\quad 4re_i\left(\cos\theta + 2d_i\sin\theta\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta + d_i\sin\theta},\end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x^2} = 2\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[(\cos\theta + d_i\sin\theta)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]\right\} \tag{4.102}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial x \partial y} = 2d_i \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right] \right\} - 4e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \tag{4.103}$$

$$\frac{\partial^2 R_i}{\partial y^2} = 2\left(d_i^2 - e_i^2\right) \log \left\{ \frac{r^2}{a^2} \left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right] \right\} - 8d_i e_i \arctan \frac{e_i \sin\theta}{\cos\theta + d_i \sin\theta}, \tag{4.104}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^3} = \frac{4(\cos\theta + d_i \sin\theta)}{r\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right]}, \tag{4.105}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x^2 \partial y} = \frac{4\left[d_i(\cos\theta + d_i \sin\theta) + e_i^2 \sin\theta\right]}{r\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right]}, \tag{4.106}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{4\left[(d_i^2 - e_i^2)\cos\theta + (d_i^2 + e_i^2) d_i \sin\theta\right]}{r\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right]}, \tag{4.107}$$

$$\frac{\partial^3 R_i}{\partial y^3} = \frac{4\left[d_i(d_i^2 - 3e_i^2)\cos\theta + (d_i^4 - e_i^4)\sin\theta\right]}{r\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right]}, \tag{4.108}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^4} = -\frac{4\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 - e_i^2 \sin^2\theta \right]}{r^2\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right]^2}, \tag{4.109}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^3 \partial y} = -\frac{4}{r^2}\left\{ \frac{d_i}{(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta} + \frac{2e_i^2 \sin\theta\cos\theta}{\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right]^2} \right\}, \tag{4.110}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4}{r^2}\left\{ \frac{(d_i^2 + e_i^2)}{\left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right)} - \frac{2e_i^2 \cos^2\theta}{\left[(\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right]^2} \right\}, \tag{4.111}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{4}{r^2}\left\{ \frac{d_i(d_i^2 + e_i^2)}{\left((\cos\theta + d_i \sin\theta)^2 + e_i^2 \sin^2\theta \right)} - \right.$$

$$\left.\frac{2e_i^2\cos\theta\left(2d_i\cos\theta+\left(d_i^2+e_i^2\right)\sin\theta\right)}{\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.112}$$

$$\frac{\partial^4 R_i}{\partial y^4} = -\frac{4}{r^2}\left\{\frac{\left(d_i^4-e_i^4\right)}{\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta}-\right.$$

$$\left.\frac{2e_i^2\cos\theta\left[\left(3d_i^2-e_i^2\right)\cos\theta+2d_i\left(d_i^2+e_i^2\right)\sin\theta\right]}{\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.113}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial x} = re_i\sin\theta\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right)\right]-2\right\}+$$

$$2r\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.114}$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial y} = re_i\left(\cos\theta+2d_i\sin\theta\right)\left\{\log\left[\frac{r^2}{a^2}\left(\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right)\right]-2\right\}+$$

$$2r\left[d_i\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)-e_i^2\sin\theta\right]\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.115}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x^2} = 2\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.116}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial x\partial y} = e_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]\right\}+$$

$$2d_i\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.117}$$

$$\frac{\partial^2 S_i}{\partial y^2} = 2d_ie_i\log\left\{\frac{r^2}{a^2}\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]\right\}+$$

$$2\left(d_i^2-e_i^2\right)\arctan\frac{e_i\sin\theta}{\cos\theta+d_i\sin\theta}, \tag{4.118}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^3} = -\frac{2e_i\sin\theta}{r\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.119}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x^2\partial y} = \frac{2e_i\cos\theta}{r\left[\left(\cos\theta+d_i\sin\theta\right)^2+e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.120}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial x \partial y^2} = \frac{2e_i\left[2d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - \left(d_i^2 - e_i^2\right)\sin\theta\right)}{r\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.121}$$

$$\frac{\partial^3 S_i}{\partial y^3} = \frac{2e_i\left[\left(3d_i^2 - e_i^2\right)\cos\theta + 2d_i\left(d_i^2 + e_i^2\right)\sin\theta\right]}{r\left(\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]}, \tag{4.122}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^4} = \frac{4e_i\sin\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)}{r^2\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.123}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^3 \partial y} = \frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{1}{\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta} - \right.$$

$$\left.\frac{2\cos\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)}{\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.124}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{4e_i\cos\theta\left[d_i\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) + e_i^2\sin\theta\right]}{r^2\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}, \tag{4.125}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial x \partial y^3} = -\frac{2e_i}{r^2}\left\{\frac{\left(d_i^2 + e_i^2\right)}{\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{2\left(d_i^2 + e_i^2\right)\cos\theta\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right) - 4e_i^2\cos^2\theta}{\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}, \tag{4.126}$$

$$\frac{\partial^4 S_i}{\partial y^4} = -\frac{4e_i}{r^2}\left\{\frac{d_i\left(d_i^2 + e_i^2\right)}{\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta} + \right.$$

$$\left.\frac{\cos\theta\left[d_i\left(d_i^2 - 3e_i^2\right)\cos\theta + \left(d_i^4 - e_i^4\right)\sin\theta\right]}{\left[\left(\cos\theta + d_i\sin\theta\right)^2 + e_i^2\sin^2\theta\right]^2}\right\}. \tag{4.127}$$

Como pode ser visto, as derivadas de R_i e S_i apresentam singularidades fracas ($\log r$), singularidades fortes ($1/r$), e hipersingularidades ($1/r^2$) que precisam de uma atenção especial durante sua integração.

4.7 Elementos quadráticos

Nos elementos quadráticos, os deslocamentos e as forças podem ser representados como:

$$\left\{ \begin{array}{c} w \\ \frac{\partial w}{\partial n} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} w^{(1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(1)} \\ w^{(2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(2)} \\ w^{(3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.128}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} V_n \\ m_n \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} & 0 \\ 0 & \phi_d^{(1)} & 0 & \phi_d^{(2)} & 0 & \phi_d^{(3)} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} V_n^{(1)} \\ m_n^{(1)} \\ V_n^{(2)} \\ m_n^{(2)} \\ V_n^{(3)} \\ m_n^{(3)} \end{array} \right\} \tag{4.129}$$

Nos elementos quadráticos descontínuos os nós são colocados em $\xi = -2/3$, $\xi = 0$ e $\xi = +2/3$, como mostrado na Figura 7. As funções de forma são dadas pelas equações:

$$\phi_d^{(1)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi - \frac{3}{4} \right); \tag{4.130}$$

$$\phi_d^{(2)} = \left(1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left(1 + \frac{3}{2}\xi \right); \tag{4.131}$$

$$\phi_d^{(3)} = \xi \left(\frac{9}{8}\xi + \frac{3}{4} \right). \tag{4.132}$$

onde ξ é a coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 7).

4.8 Equação matricial

Com o objetivo de calcular as variáveis de contorno desconhecidas, o contorno Γ é discretizado em N_e elementos de contorno quadráticos e as variáveis de contorno w, $\partial w/\partial n$, m_n e V_n são interpoladas ao longo de cada elemento. Tomando um nó d como o ponto fonte, as equações (4.69) e (4.70) podem ser escritas na forma matricial como:

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{c} w^{(d)} \\ \\ \frac{\partial w}{\partial n_1}^{(d)} \end{array}\right\} + \sum_{i=1}^{N_e}\left(\left[\begin{array}{cccccc} h_{11}^{(i,d)} & h_{12}^{(i,d)} & h_{13}^{(i,d)} & h_{14}^{(i,d)} & h_{15}^{(i,d)} & h_{16}^{(i,d)} \\ h_{21}^{(i,d)} & h_{22}^{(i,d)} & h_{23}^{(i,d)} & h_{24}^{(i,d)} & h_{25}^{(i,d)} & h_{26}^{(i,d)} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} w^{(i,1)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,1)} \\ w^{(i,2)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,2)} \\ w^{(i,3)} \\ \frac{\partial w}{\partial n}^{(i,3)} \end{array}\right\}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{N_e}\left(\left[\begin{array}{cccccc} g_{11}^{(i,d)} & g_{12}^{(i,d)} & g_{13}^{(i,d)} & g_{14}^{(i,d)} & g_{15}^{(i,d)} & g_{16}^{(i,d)} \\ g_{21}^{(i,d)} & g_{22}^{(i,d)} & g_{23}^{(i,d)} & g_{24}^{(i,d)} & g_{25}^{(i,d)} & g_{26}^{(i,d)} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} V_n^{(i,1)} \\ m_n^{(i,1)} \\ V_n^{(i,2)} \\ m_n^{(i,2)} \\ V_n^{(i,3)} \\ m_n^{(i,3)} \end{array}\right\}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_c}\left(\left\{\begin{array}{c} R_1^{(i,d)} \\ R_2^{(i,d)} \end{array}\right\} w_c^{(i)}\right) + \sum_{i=1}^{N_c}\left(\left\{\begin{array}{c} c_1^{(i,d)} \\ c_2^{(i,d)} \end{array}\right\} R_c^{(i)}\right) + \left\{\begin{array}{c} P_1^{(d)} \\ P_2^{(d)} \end{array}\right\}. \tag{4.133}$$

Os termos da equação (4.133) são integrais dadas por:

$$h_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{12}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.134}$$

$$h_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{14}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.135}$$

$$h_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} V_n^* d\Gamma, \qquad h_{16}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} m_n^* d\Gamma, \tag{4.136}$$

$$h_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{22}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.137}$$

$$h_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{24}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.138}$$

$$h_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} \frac{\partial V_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad h_{26}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} \frac{\partial m_n^*}{\partial n_1} d\Gamma, \tag{4.139}$$

$$g_{11}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} w^* d\Gamma, \qquad g_{12}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.140}$$

$$g_{13}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} w^* d\Gamma, \qquad g_{14}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.141}$$

$$g_{15}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} w^* d\Gamma, \qquad g_{16}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.142}$$

$$g_{21}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{22}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(1)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.143}$$

$$g_{23}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{24}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(2)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.144}$$

$$g_{25}^{(i,d)} = \int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} \frac{\partial w^*}{\partial n_1} d\Gamma, \qquad g_{26}^{(i,d)} = -\int_{\Gamma_i} \phi^{(3)} \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial m_n^*}{\partial n} d\Gamma, \tag{4.145}$$

$$c_1^{(i,d)} = w_{ci}^*, \qquad c_2^{(i,d)} = \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.146}$$

$$R_1^{(i,d)} = R_{ci}^*, \qquad R_2^{(i,d)} = \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial n_1}, \tag{4.147}$$

$$P_1^{(d)} = \int_{\Omega} g w^* d\Omega, \qquad P_2^{(d)} = \int_{\Omega} g \frac{\partial w}{\partial n_1} d\Omega. \tag{4.148}$$

sendo o contorno Γ dado por:

$$\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \Gamma_e, \tag{4.149}$$

onde, N_e é o número de elementos.

O desenvolvimento das integrais ao longo do elemento na equação (4.133) requer o uso do jacobiano, já que as funções de forma são expressas em termos da coordenada adimensional e as integrais são resolvidas ao longo do contorno Γ_e.

A equação matricial (4.133) tem duas equações e $6N_e + N_c$ variáveis desconhecidas. Para se obter um sistema linear solucionável, o ponto fonte é colocado sucessivamente em cada nó do contorno ($d = 1, ..., 6N_e$) bem como em cada nó de canto ($d = 6N_e + 1, ..., 6N_e + N_c$). É importante notar que enquanto ambas as equações, (4.69) e (4.70), são usadas para cada nó de contorno (fornecendo as primeiras $6N_e$ equações), somente a equação (4.69) é usada para cada canto (fornecendo outras N_c equações). Então, a seguinte equação matricial é obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix} \left\{ \mathbf{V}_{bn} \; \mathbf{V}_c \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{array} \right\}, \tag{4.150}$$

onde, $\mathbf{w}_{bn}$ contém o deslocamento transversal e a rotação de cada nó de contorno, $\mathbf{V}_{bn}$ contém a força cisalhante e o momento torsor de cada nó de contorno, $\mathbf{P}_{bn}$ contém a integral de domínio para cada nó de contorno, $\mathbf{w}_c$ contém o deslocamento transversal de cada canto, $\mathbf{V}_c$ contém a reação de canto para cada canto, $\mathbf{P}_c$ contém a integral de domínio para cada canto. Os termos $\mathbf{H}'$, $\mathbf{C}'$, $\mathbf{R}'$ e $\mathbf{G}'$ são matrizes que contém os respectivos termos da equação (4.133) escritos para os N_e nós de contorno. Os termos $\mathbf{H}''$, $\mathbf{C}''$, $\mathbf{R}''$ e $\mathbf{G}''$ são matrizes que contém os respectivos primeiros termos da equação (4.133) escrita para os N_c cantos.

A equação (4.150) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{Hw} = \mathbf{GV} + \mathbf{P}, \tag{4.151}$$

onde,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{R}' \\ \mathbf{H}'' & \mathbf{R}'' \end{bmatrix}, \tag{4.152}$$

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{w}_{bn} \\ \mathbf{w}_c \end{array} \right\}, \tag{4.153}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}' & \mathbf{C}' \\ \mathbf{G}'' & \mathbf{C}'' \end{bmatrix}, \tag{4.154}$$

$$\mathbf{V} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{V}_{bn} \\ \mathbf{V}_c \end{array} \right\}, \tag{4.155}$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{P}_{bn} \\ \mathbf{P}_c \end{array} \right\}. \tag{4.156}$$

Para resolver a equação (4.151) é necessário levar em conta as condições de contorno. No caso de formulações dinâmicas, o termo **P** contém as acelerações (termos de inércia). Na formulação transiente, esta aceleração é escrita em função dos deslocamentos em passos de tempo anteriores e no instante atual. Neste trabalho, utiliza-se o método de (HOUBOLT, 1950) para descrever a aceleração em termos dos deslocamentos. Este procedimento é descrito na seção 5.3.

5 O Método dos Elementos de Contorno para Cascas Abatidas Anisotrópicas

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta a formulação do método dos elementos de contorno para a análise de cascas abatidas de materiais anisotrópicos. Esta formulação foi apresentada inicialmente nos trabalhos de Albuquerque e Aliabadi (2008, 2010). Ela se baseia no acoplamento da formulação de elasticidade plana (membrana), apresentada no capítulo 3, e a formulação de flexão de placas finas, apresentada no capítulo 4. Devido à curvatura, surgem integrais de domínio nas formulações. Neste trabalho, estas integrais de domínio são transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial. O método da integração radial apresenta uma grande vantagem sobre o método da reciprocidade dual, que é a ausência de soluções particulares na formulação. Dada as dificuldades em se obter soluções particulares para as equações constitutivas anisotrópicas, o método da integração radial é especialmente indicado para materiais compósitos. Porém, por ser uma formulação inteiramente numérica, o custo computacional do método da integração radial é mais alto que o custo da reciprocidade dual.

5.2 Considerações iniciais sobre cascas abatidas

Conforme já mencionado no capítulo 1, a superfície média de uma casca abatida pode ser escrita como uma função $z = z(x, y)$ conforme a equação (1.1).

Considere uma casca abatida de um material elástico anisotrópico com a superfície média descrita por $z = z(x, y)$, conforme mostrado na Figura 14. Considere também um elemento infinitesimal $ABCD$ que é parte da superfície da casca. A projeção de $ABCD$ no plano xy é dada por $A'B'C'D'$. Conforme mostrado na figura, o comprimento infinitesimal ds_1 sobre a superfície da casca pode ser escrita como:

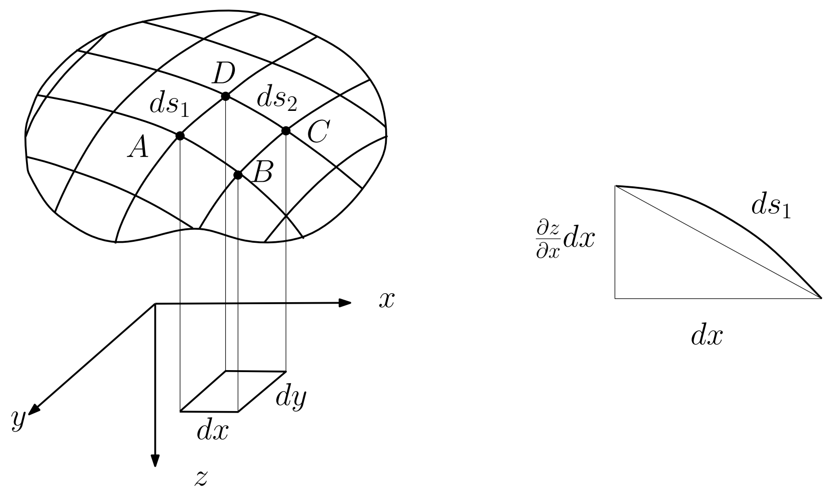

Figura 14: Casca.

$$ds_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)^2 + dx^2} = dx\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 1}. \tag{5.1}$$

Da mesma forma, pode-se escrever:

$$ds_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)^2 + dy^2} = dy\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}. \tag{5.2}$$

As expressões (5.1) e (5.2), devido à simplificação da geometria dada pela equação (1.2), podem ser reescritas da forma:

$$ds_1 = dx \tag{5.3}$$

e

$$ds_2 = dy. \tag{5.4}$$

Por sua vez, o inverso dos raios de curvatura podem ser aproximados por:

$$\kappa_{11} = -\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{5.5}$$

$$\kappa_{22} = -\frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{5.6}$$

e

$$\kappa_{12} = -\frac{1}{R_{12}} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \tag{5.7}$$

5.3 Equação integral de contorno

Considere uma casca abatida de um material elástico anisotrópico com a superfície média descrita por $z = z(x_1, x_2)$, conforme mostrado na Figura 14. A projeção da casca é definida por um domínio Ω no plano xy, cujo contorno é dado por Γ.

A equação de equilíbrio para essa estrutura pode ser escrita como:

$$N_{ij,j} + b_i = 0, \tag{5.8}$$

$$D_{11}\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 4D_{16}\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} + 2\left(D_{12} + D_{66}\right)\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26}\frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} + D_{22}\frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + \frac{N_{ij}}{R_{ij}} = q_3, \tag{5.9}$$

onde $i, j, k = 1, 2$; N_{ij} são forças de membrana aplicada na casca; D_{11}, D_{22}, D_{66}, D_{12}, D_{16}, e D_{26} são a rigidez flexural da placa anisotrópica; w representa o deslocamento na direção x_3; q_i são cargas de domínio aplicadas nas direções dos eixos x_1 e x_2, q_3 é a carga de domínio aplicada na direção do eixo x_3 e, conforme as equações (5.5), (5.6) e (5.7):

$$R_{ij} = \frac{-1}{z_{,ij}} \tag{5.10}$$

Usando as equações de equilíbrio de cascas abatidas isotrópicas, a relação de reciprocidade, e o teorema de Green, Zhang e Atluri (1986) obtiveram equações integrais que podem ser divididas em termos de formulações de elasticidade plana e de flexão de placas. Estas formulações são acopladas através de integrais de domínio que surgem nas equações. Alterando as equações constitutivas para suas respectivas anisotrópicas, as equações integrais obtidas por (ZHANG; ATLURI, 1986) podem ser estendidas a cascas abatidas de compósitos laminados simétricos. Assim, as equações integrais de elasticidade plana (equações de membrana) são dadas por:

$$\begin{aligned} c_{ij}u_j + \int_\Gamma t^*_{ik}(Q,P)u_k(P)d\Gamma(P) = \int_\Gamma u^*_{ik}(Q,P)t_k(P)d\Gamma(P) \\ + \int_\Omega \kappa_{kj} w u^*_{ik,j}(Q,P)d\Omega + \int_\Omega u^*_{ik}(Q,P)q_k(P)d\Omega(P), \end{aligned} \tag{5.11}$$

onde u_k é o deslocamento nas direções x_1 e x_2, $t_i = N_{ij}n_j$, P é o ponto campo; Q é o ponto fonte. A constante c_{ij} é introduzida a fim de ter a possibilidade de que o ponto Q possa ser colocado no domínio, no contorno, ou fora do domínio. O símbolo * representa as soluções fundamentais que podem ser encontradas em Sollero e Aliabadi (1993), Albuquerque, Sollero e Aliabadi (2002b), Aliabadi (2002). As constantes κ_{kj} dependem do raio de curvatura R_{kj} da casca abatida e são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{c} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{R_{11}} \\ \frac{1}{R_{22}} \\ \frac{2}{R_{12}} \end{array} \right\} \tag{5.12}$$

onde A_{11}, A_{22}, A_{66}, A_{12}, A_{16}, e A_{26} são a rigidez extensional da placa anisotrópica.

A equação integral de flexão de placa é dada por:

$$\begin{aligned} & Kw(Q) + \int_\Gamma \left[V^*_n(Q,P)w(P) - m^*_n(Q,P)\frac{\partial w(P)}{\partial n} \right] d\Gamma(P) \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R^*_{c_i}(Q,P)w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R^*_{c_i}(P)w_{ci}(Q,P) + \int_\Omega q_3(P)w^*(Q,P)\, d\Omega \\ & + \int_\Gamma \left[V_n(P)w^*(Q,P) - m_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right] d\Gamma(P) + \int_\Gamma \kappa_{ij}n_j u_i(P)w^*(Q,P)\, d\Gamma(P) \\ & + \int_\Omega \frac{\kappa_{ij}}{\rho_{ij}} w^*(Q,P)w(P)\, d\Omega + \int_\Omega \left[\kappa_{ij}(P)w^*(Q,P)\right]_{,j} u_i(P)\, d\Omega, \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde $\frac{\partial()}{\partial n}$ é a derivada na direção do vetor externo $\mathbf{n}$ que é normal ao contorno Γ, e m_n e V_n

são, respectivamente, o momento normal de flexão e a tensão de cisalhamento equivalente de Kirchhoff sob o contorno Γ, R_c é a reação nos cantos da placa fina; w_{ci} é o deslocamento transversal nos cantos, q_3 é a força de domínio no sentido transversal; K é uma constante equivalente a c_{ij} da equação (5.11). Soluções fundamentais para placas finas anisotrópicas podem ser encontradas em Shi e Bezine (1988), Albuquerque et al. (2006). Para se ter um número igual de equações e incógnitas, é necessário escrever uma equação integral correspondente à derivada do deslocamento $w(Q)$ com relação ao vetor unitário $\mathbf{m}$ que é normal ao contorno no ponto fonte Q. Esta equação é dada por:

$$
\begin{aligned}
&K\frac{\partial w}{\partial m}(Q)+\int_{\Gamma}\left[\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m}w(P)-\frac{\partial m_n^*(Q,P)}{\partial m}\frac{\partial w(P)}{\partial n}\right]d\Gamma(P)\\
&+\sum_{i=1}^{N_c}\frac{\partial R_{c_i}^*(Q,P)}{\partial m}w_{ci}(P)=\sum_{i=1}^{N_c}\frac{\partial R_{c_i}(P)^*}{\partial m}w_{ci}(Q,P)+\int_{\Omega}q_3(P)\frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial m}\,d\Omega\\
&+\int_{\Gamma}\left[V_n(P)\frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial m}-m_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial n\partial m}(Q,P)\right]d\Gamma(P)+\int_{\Gamma}\kappa_{ij}n_ju_i(P)\frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial m}\,d\Gamma(P)\\
&+\int_{\Omega}\frac{\kappa_{ij}}{\rho_{ij}}\frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial m}w(P)\,d\Omega+\int_{\Omega}\left[\kappa_{ij}(P)\frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial m}\right]_{,j}u_i(P)\,d\Omega.
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

Como pode ser visto nas equações (5.11), (5.13), e (5.14), integrais de domínio surgem na formulação devido à curvatura da casca. Estas integrais de domínio são:

$$P_1(Q)=\int_{\Omega}C\kappa_{kj}wu_{ik,j}^*(Q,P)d\Omega, \tag{5.15}$$

$$P_2(Q)=\int_{\Omega}C\frac{\kappa_{ij}}{\rho_{ij}}w^*(Q,P)w(P)\,d\Omega, \tag{5.16}$$

$$P_3(Q)=\int_{\Omega}\left[C\kappa_{ij}(P)w^*(Q,P)\right]_{,j}u_i(P)\,d\Omega, \tag{5.17}$$

$$P_4(Q)=\int_{\Omega}C\frac{\kappa_{ij}}{\rho_{ij}}\frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial m}w(P)\,d\Omega, \tag{5.18}$$

e

$$P_5(Q) = \int_\Omega \left[C\kappa_{ij}(P) \frac{\partial w^*(Q,P)}{\partial m} \right]_{,j} u_i(P)\, d\Omega. \tag{5.19}$$

Caso estas integrais de domínio não sejam transformadas em integrais de contorno, torna-se necessário a discretização do domínio em células. Com isso, o método dos elementos de contorno perde o seu principal atrativo que é a discretização apenas do contorno.

5.4 O método da integração radial

Neste trabalho, o método da integração radial é utilizado para transformar as integrais de domínio, dadas pelas equações (5.15) até (5.19), em integrais de contorno.

Considere-se, em um caso geral, a integral de domínio dada por:

$$P(Q) = \int_\Omega b(P) v^*(Q,P) d\Omega, \tag{5.20}$$

onde b e v^* são uma força de corpo genérica e a solução fundamental, respectivamente.

A força de corpo é aproximada sobre o domínio Ω como uma soma de M produtos entre funções de aproximação f_m e coeficientes desconhecidos γ_m, da mesma forma que no método dos elementos de contorno de reciprocidade dual. Esta aproximação é dada por:

$$b(P) = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m f_m \tag{5.21}$$

para as funções de aproximação baseadas em uma função de base radial pura, ou

$$b(P) = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m f_m + ax + by + c \tag{5.22}$$

com

$$\sum_{m=1}^{M} \gamma_m x_m = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m y_m = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m = 0 \tag{5.23}$$

para as funções de aproximação baseadas numa função de base radial aumentada por um polinômio de primeira ordem.

Agora, considerando que a força de corpo é aproximada, por simplicidade, pela equação (5.21), a integral de domínio (5.20) pode ser escrita como:

$$P(Q) = \int_{\Omega} b(P)v^*(Q,P)d\Omega = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m \int_{\Omega} f_m v^*(Q,P)d\Omega, \tag{5.24}$$

ou

$$P(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m \int_{\Omega} f_m v^*(Q,P)\rho d\rho d\theta, \tag{5.25}$$

ou

$$P(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m \int_{\theta} \int_{0}^{r} f_m v^*(Q,P)\rho d\rho d\theta, \tag{5.26}$$

onde r é o valor de ρ em um ponto do contorno Γ.

Definindo $F_m(Q)$ como a seguinte integral:

$$F_m(Q) = \int_{0}^{r} f_m v^*(Q,P)\rho d\rho, \tag{5.27}$$

podemos escrever:

$$P(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m \int_{\theta} F_m(Q)d\theta. \tag{5.28}$$

Considerando um ângulo infinitesimal $d\theta$ (Figure 15), a relação entre o comprimento de arco $rd\theta$ e o comprimento de arco infinitesimal no contorno $d\Gamma$, pode ser escrita como:

$$\cos\alpha = \frac{r\frac{d\theta}{2}}{\frac{d\Gamma}{2}}, \tag{5.29}$$

ou

$$d\theta = \frac{\cos\alpha}{r}d\Gamma, \tag{5.30}$$

onde α é o ângulo entre os vetores unitários $\mathbf{r}$ e $\mathbf{n}$.

Usando as propriedades do produto interno dos vetores unitários $\mathbf{n}$ e $\mathbf{r}$, mostrados na

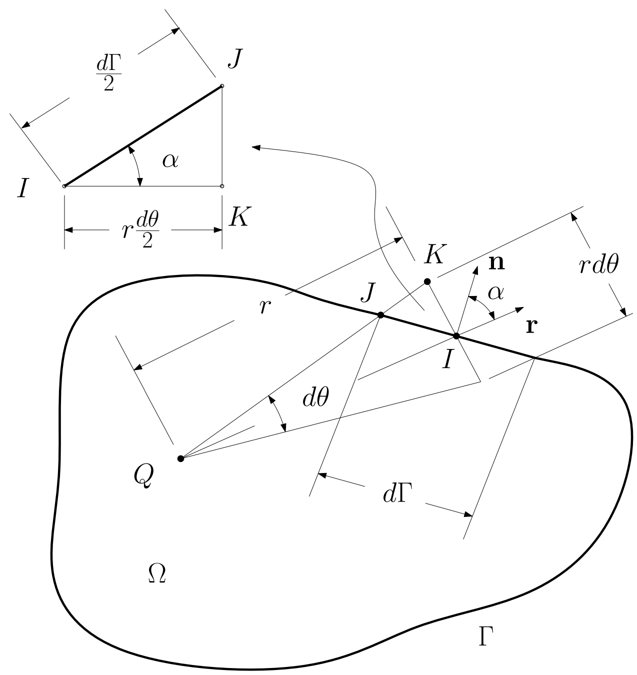

Figura 15: Relação geométrica para as transformações de domínio.

Figura 15, podemos escrever:

$$d\theta = \frac{\mathbf{n}.\mathbf{r}}{r} d\Gamma. \tag{5.31}$$

Substituindo a equação (5.31) na equação (5.28), a integral de domínio (5.20) pode ser escrita como uma integral de contorno dada por:

$$P(Q) = \sum_{m=1}^{M} \gamma_m \int_\Gamma \frac{F_m(Q)}{r} \mathbf{n}.\mathbf{r} d\Gamma, \tag{5.32}$$

ou, na forma matricial:

$$P(Q) = \left[\begin{array}{cccc} \int_\Gamma \frac{F_1(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma & \int_\Gamma \frac{F_2(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma & \ldots & \int_\Gamma \frac{F_M(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_M \end{array} \right\}. \tag{5.33}$$

Para calcular γ_m, é necessário considerar as forças de corpo em M pontos do domínio e do contorno. No caso deste trabalho, esses pontos são os nós do contorno e alguns pontos internos. Assim, a equação (5.21) pode ser escrita como:

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\boldsymbol{\gamma}, \tag{5.34}$$

e $\boldsymbol{\gamma}$ podem ser calculados como:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}. \tag{5.35}$$

Substituindo (5.35) na equação (5.33), temos:

$$P(Q) = \left[\begin{array}{cccc} \int_\Gamma \frac{F_1(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma & \int_\Gamma \frac{F_2(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma & \ldots & \int_\Gamma \frac{F_M(Q)}{r}\mathbf{n}.\mathbf{r}d\Gamma \end{array} \right] \mathbf{F}^{-1}\mathbf{b}. \tag{5.36}$$

Escrevendo a equação (5.36) para todos os pontos-fonte, ou seja, todos os nós do contorno e pontos internos, temos a seguinte equação matricial:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{b}, \tag{5.37}$$

onde $\mathbf{S} = \mathbf{R}\mathbf{F}^{-1}$, $\mathbf{P}$ é um vetor que contém o valor de $P(Q)$ em todos os pontos-fonte Q, e $\mathbf{R}$ é uma matriz que contém os valores das integrais da equação (5.36) quando esta equação é escrita para todos os pontos-fonte Q.

5.5 Equação matricial

Considerando todas as forças de corpo que aparecem nas equações (5.11), (5.13), e (5.14), o vetor $\mathbf{P}$ para estas equações é dado por:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{bb}^{mc} & \mathbf{S}_{bi}^{mc} & \mathbf{S}_{bc}^{mc} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{ib}^{mc} & \mathbf{S}_{ii}^{mc} & \mathbf{S}_{ic}^{mc} \\ \mathbf{S}_{bb}^{p1c} & \mathbf{S}_{bi}^{p1c} & \mathbf{S}_{bb}^{p1} & \mathbf{S}_{bi}^{p1} & \mathbf{S}_{bc}^{p1} \\ \mathbf{S}_{bb}^{p2c} & \mathbf{S}_{bi}^{p2c} & \mathbf{S}_{bb}^{p2} & \mathbf{S}_{bi}^{p2} & \mathbf{S}_{bc}^{p2} \\ \mathbf{S}_{ib}^{p1c} & \mathbf{S}_{ii}^{p1c} & \mathbf{S}_{ib}^{p1} & \mathbf{S}_{ii}^{p2} & \mathbf{S}_{ic}^{p1} \\ \mathbf{S}_{cb}^{p1c} & \mathbf{S}_{ci}^{p1c} & \mathbf{S}_{cb}^{p1} & \mathbf{S}_{ci}^{p1} & \mathbf{S}_{cc}^{p1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{w}_b \\ \mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} \tag{5.38}$$

onde o índice sobrescrito da matriz $\mathbf{S}$ representa o tipo de equação que está sendo utilizada, ou seja, m representa a equação da membrana dada pela equação (5.11), $p1$ representa a primeira equação da placa, dada pela equação (5.13), e $p2$ representa a segunda equação da placa, dada pela equação (5.14). A letra c no índice sobrescrito significa que estes são termos de acoplamento. Na matriz $\mathbf{S}$, o primeiro índice subscrito representa a localização dos pontos fontes (b, se os pontos fontes estão em uma parte suave do contorno, i se eles estão no domínio e c, se eles estão nos cantos). O segundo índice subscrito mostra onde estão as forças de corpo que são multiplicadas pelos termos da matriz de $\mathbf{S}$. Para o segundo índice, as mesmas letras do primeiro índice subscrito são utilizadas com o mesmo significado. O vetor do lado direito tem valores nodais das forças de corpo que, neste caso são dadas por deslocamentos (todos os demais termos das integrais de domínio são considerados como parte da solução fundamental v^*). A letra $\mathbf{u}$ representa os deslocamentos nas direções x_1 e x_2 e $\mathbf{w}$ representa o deslocamento na direção transversal. Os índices subscritos do vetor do lado direito indicam a localização dos nós, onde os deslocamentos são calculados.

Finalmente, se o contorno Γ é discretizado em elementos de contorno, as equações (5.11), (5.13), e (5.14) são escritas para todos os pontos-fonte, e a seguinte equação matricial pode ser obtida:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{bb}^{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{ib}^{m} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_{bb}^{p1c} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{bb}^{p1} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{bc}^{p1} \\ \mathbf{H}_{bb}^{p2c} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{bb}^{p2} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{bc}^{p2} \\ \mathbf{H}_{ib}^{p1c} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{ib}^{p1} & \mathbf{I} & \mathbf{H}_{ic}^{p1} \\ \mathbf{H}_{cb}^{p1c} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{cb}^{p1} & \mathbf{0} & \mathbf{H}_{cc}^{p1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_b \\ \mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{bb}^{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{ib}^{m} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb}^{p1} & \mathbf{G}_{bc}^{p1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{bb}^{p2} & \mathbf{G}_{bc}^{p2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{ib}^{p1} & \mathbf{G}_{ic}^{p1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_{cb}^{p1} & \mathbf{G}_{cc}^{p1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_b \\ \mathbf{p}_b \\ \mathbf{p}_c \end{Bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{bb}^{mc} & \mathbf{S}_{bi}^{mc} & \mathbf{S}_{bc}^{mc} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_{ib}^{mc} & \mathbf{S}_{ii}^{mc} & \mathbf{S}_{ic}^{mc} \\
\mathbf{S}_{bb}^{p1c} & \mathbf{S}_{bi}^{p1c} & \mathbf{S}_{bb}^{p1} & \mathbf{S}_{bi}^{p1} & \mathbf{S}_{bc}^{p1} \\
\mathbf{S}_{bb}^{p2c} & \mathbf{S}_{bi}^{p2c} & \mathbf{S}_{bb}^{p2} & \mathbf{S}_{bi}^{p2} & \mathbf{S}_{bc}^{p2} \\
\mathbf{S}_{ib}^{p1c} & \mathbf{S}_{ii}^{p1c} & \mathbf{S}_{ib}^{p1} & \mathbf{S}_{ii}^{p2} & \mathbf{S}_{ic}^{p1} \\
\mathbf{S}_{cb}^{p1c} & \mathbf{S}_{ci}^{p1c} & \mathbf{S}_{cb}^{p1} & \mathbf{S}_{ci}^{p1} & \mathbf{S}_{cc}^{p1}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix}
\mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_i \\ \mathbf{w}_b \\ \mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_c
\end{Bmatrix}
+\mathbf{q}
\tag{5.39}
$$

onde $\mathbf{H}$ e $\mathbf{G}$ são as matrizes de influência do método dos elementos de contorno; o vetor $\mathbf{v}$ contém deslocamentos transversais e rotações dos nós (não somente deslocamentos transversais como o vetor $\mathbf{w}$). Os vetores $\mathbf{t}$ e $\mathbf{p}$ contém reações nos nós de contorno para as equações da membrana e placa, respectivamente. O vetor $\mathbf{q}$ é devido à carga no domínio q_i. As integrais de domínio devido aos q_i's são transformados exatamente em integrais de contorno usando o procedimento apresentado em Albuquerque et al. (2006).

A equação (5.39) pode ser escrita em uma forma mais concisa como:

$$
\mathbf{Hv} = \mathbf{Gt} + \mathbf{Su} + \mathbf{q} \tag{5.40}
$$

Finalmente, as colunas de matrizes da equação (5.40) podem ser ordenadas em conformidade com as condições de contorno, obtendo-se assim um sistema de equações lineares.

5.6 Funções de aproximação

Duas funções de aproximação são usadas neste trabalho. A primeira é uma função de base radial que tem sido usada extensivamente no DRM e é dada por:

$$
f_{m_1} = 1 + R. \tag{5.41}
$$

A segunda é bem conhecida como spline de placas finas:

$$
f_{m_2} = R^2 \log(R), \tag{5.42}
$$

usada com a função de aumento dada pelas equações (5.22) e (5.23). Tem sido demonstrado em alguns trabalhos da literatura que esta função de aproximação pode dar excelentes resultados para muitas formulações diferentes (PARTRIDGE, 2000).

O método da integração radial baseia-se em duas integrais que são calculadas numericamente. A primeira é dada pela equação (5.27) que é calculada para cada ponto de integração do contorno, com ρ variando de zero a r. A segunda é dada pela equação (5.32) que é calculada ao longo do elemento. O número de pontos de integração usado nestas integrais é de fundamental importância para o método da integração radial. O uso de poucos pontos de integração torna o método impreciso. Já se muitos pontos forem usados, o custo computacional fica alto. Alguns trabalhos da literatura indicam que, para problemas isotrópicos, apenas 4 pontos de integração são suficientes para se obter resultados adequados (GAO, 2002; JESUS; ALBUQUERQUE; SOLLERO, 2010). Nesta dissertação é feita uma análise da sensibilidade do método da integração radial quanto ao número de pontos de integração considerando a formulação de cascas abatidas de compósitos laminados simétricos.

5.7 Resultados numéricos

5.7.1 Cascas abatidas quadradas esféricas de laminado cruzado

A fim de avaliar a precisão da formulação proposta, considere-se uma casca abatida quadrada esférica de um material compósito laminado simétrico com lâminas dispostas paralelas ou perpendicularmente em relação às vizinhas (laminado cruzado ou cross-ply), como mostrado na Figura 16. A geometria e as propriedades do material da casca são: razão entre o comprimento e a espessura da borda a/h =100, relações entre os módulos elásticos E_1/E_2 = 25, G_{12}/E_2 = 0,5, a razão de Poisson $\nu_{12} = 0,25$. O laminado tem quatro camadas com orientação $[0^o/90^o/90^o/0^0]$. Todas as camadas têm espessura igual de $h/4$. Duas cargas são consideradas: uma carga uniformemente distribuída na direção transversal (pressão interna) $q_3 = q_o$ ($q_1 = q_2 = 0$) e uma carga senoidal $q_3 = q_o \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{a})$ ($q_1 = q_2 = 0$), onde q_o é a amplitude máxima da carga.

Esse problema foi analisado com diferentes proporções entre o comprimento da aresta e os raios de curvatura $a/R_1 = a/R_2 = a/R$ ($R_{12} = R_{21} = 0$). Três malhas foram usadas. A malha 1 com 12 elementos de contorno quadráticos descontínuos e 9 pontos internos, a

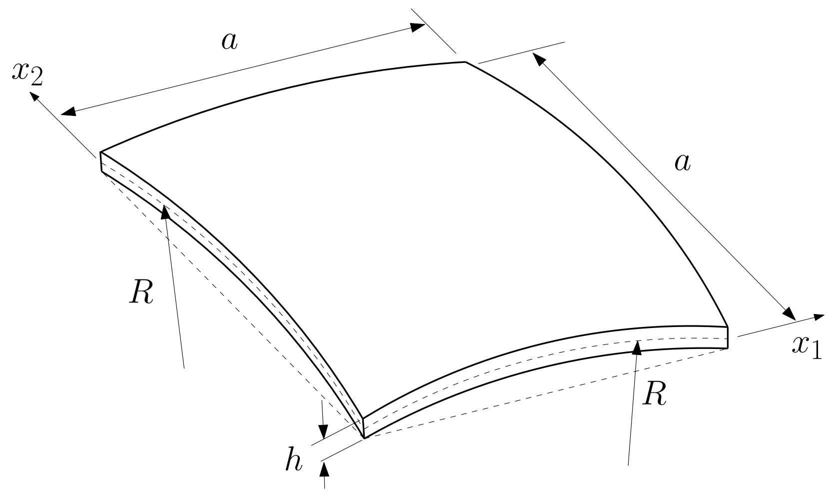

Figura 16: Casca abatida esférica.

malha 2 com 20 elementos de contorno quadráticos descontínuos e 25 pontos internos, e a malha 3 com 28 elementos de contorno quadráticos descontínuos e 49 pontos internos. A malha 3 é mostrada na Figura 17. Todas as malhas têm elementos de igual comprimento e pontos internos distribuídos uniformemente. As condições de contorno consideradas para a casca são $t_1 = u_2 = w = m_n = 0$ em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$, e $u_1 = t_2 = w = m_n = 0$ em $x_2 = 0$ e $x_2 = a$ (REDDY, 1985). As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados obtidos utilizando funções de aproximação f_{m_1} e f_{m_2}, respectivamente, para as cascas sob carga uniformemente distribuída. A Tabela 3 mostra os resultados obtidos com a função de aproximação f_{m_2} para uma casca sob carga senoidal. Estes resultados foram obtidos usando 32 pontos de integração na equação (5.27) e 16 pontos de integração na equação (5.32). Os resultados são comparados com resultados analíticos apresentados por Reddy (1985). A formulação proposta por Reddy (1985) é para as cascas genéricas (as hipóteses de cascas abatidas não foram consideradas) com várias razões de R/a .

Tabela 1: Deslocamento transversal do centro da casca abatida de laminado cruzado $\tilde{w} = 10^3 w E_2 h^3/(q_o a^4)$ sob um carregamento distribuído uniformemente. Resultados calculados usando a função de aproximação f_{m_1}.

R/a	∞	100	50	20	10	5	2	1
Reddy (1985)	6,8331	6,7772	6,6148	5,6618	3,7208	1,5358	0,2844	0,0715
$\tilde{w}$ (malha 1)	6,8100	6,7216	6,4694	5,1162	2,8988	1,0243	0,1728	0,0423
$\tilde{w}$ (malha 2)	6,8014	6,7348	6,5425	5,4488	3,3937	1,3260	0,2425	0,0611
$\tilde{w}$ (malha 3)	6,7991	6,7391	6,5650	5,5563	3,5695	1,4385	0,2657	0,0679

Como pode ser observado nas Tabelas 1 e 2, os resultados obtidos utilizando a função

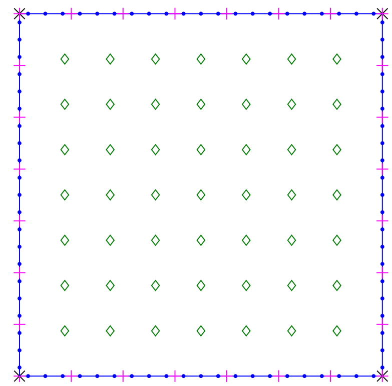

Figura 17: Malha de elementos de contorno e pontos internos para uma casca abatida quadrada esférica (malha 3: 28 elementos de contorno e 49 pontos internos.)

Tabela 2: Deslocamento transversal do centro da casca abatida de laminado cruzado $\tilde{w} = 10^3 w E_2 h^3/(q_o a^4)$ sob um carregamento distribuído uniformemente. Resultados calculados usando a função de aproximação f_{m_2}.

R/a	∞	100	50	20	10	5	2	1
Reddy (1985)	6,8331	6,7772	6,6148	5,6618	3,7208	1,5358	0,2844	0,0715
$\tilde{w}$ (malha 1)	6,8100	6,7489	6,5721	5,5495	3,5482	1,4238	0,2620	0,0649
$\tilde{w}$ (malha 2)	6,8014	6,7452	6,5817	5,6238	3,6819	1,5129	0,2800	0,0701
$\tilde{w}$ (malha 3)	6,7991	6,7437	6,5824	5,6352	3,7044	1,5290	0,2833	0,0712

de aproximação f_{m_2} convergem mais rapidamente para a solução analítica do que aqueles obtidos utilizando f_{m_1}. Também é possível observar nas Tabelas 1, 2, e 3, que existe uma boa concordância da formulação proposta com a solução analítica de Reddy (1985), mesmo para uma pequena proporção entre o raio de curvatura e o comprimento da aresta ($R/a = 1$, por exemplo). Comparando-se a última linha das Tabelas 2 e 3 (resultados obtidos com a malha mais refinada e função de aproximação f_{m_2}) com a segunda linha destas tabelas (resultados obtidos por Reddy (1985)), notamos que diferenças são sempre menores que 1 %. Como esta casca é muita fina (a/h =100), o efeito da deformação cisalhante é muito pequeno. Por causa disso, os resultados obtidos pelo método proposto, que usa a formulação de Kirchhoff para placas finas, tem uma boa concordância com resultados obtidos usando uma teoria que considera a deformação por cisalhamento.

Tabela 3: Deslocamento transversal do centro da casca abatida do tipo cross-ply $q_3 = q_o \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{a})$ sob um carregamento senoidal. Resultados calculados usando a função de aproximação f_{m_2}.

R/a	∞	100	50	20	10	5	2	1
Reddy (1985)	4,3368	4,3021	4,2015	3,6104	2,4030	1,0279	0,2054	0,0532
$\tilde{w}$ (malha 1)	4,3191	4,2815	4,1725	3,5412	2,2987	0,9561	0,1879	0,0485
$\tilde{w}$ (malha 2)	4,3136	4,2788	4,1778	3,5852	2,3791	1,0135	0,2018	0,0523
$\tilde{w}$ (malha 3)	4,3128	4,2785	4,1786	3,5919	2,3919	1,0232	0,2043	0,0530

Para avaliar a sensibilidade da formulação quanto ao número de pontos de integração, o deslocamento transversal foi calculado considerando diferentes números de integração. Para simplificar a análise, foi sempre usado o mesmo número de integração nas equações (5.32) e (5.27). A análise foi feita para diferentes razões R/a. As figuras 18, 19 e 20 mostram o deslocamento do nó central da casca sob carregamento uniformemente distribuído para $R/a = 10, 20, 50$, respectivamente, juntamente com o resultado analítico obtido por Reddy (1985).

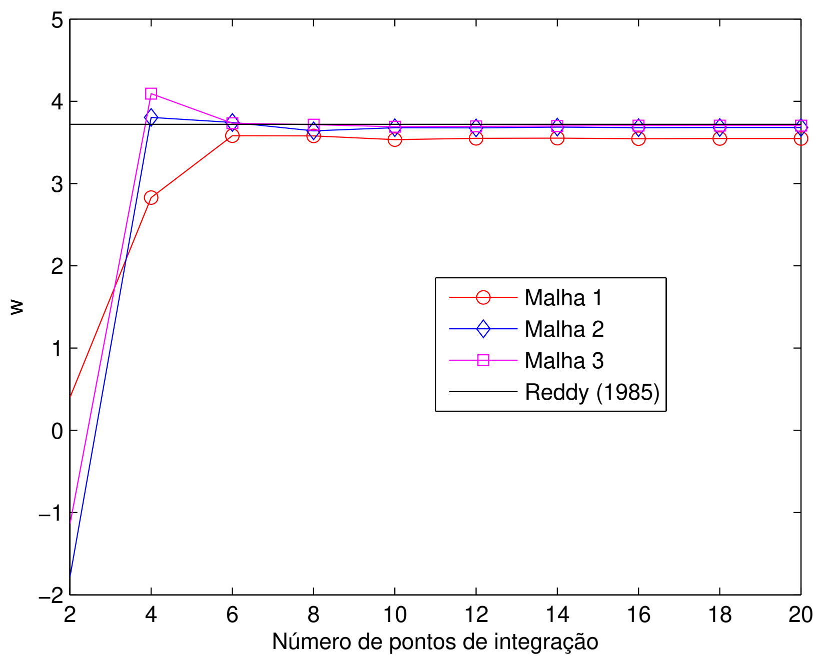

Figura 18: Sensibilidade do deslocamento transversal da casca sob carregamento uniformemente distribuído à variação do número de pontos de integração para $R/a = 10$.

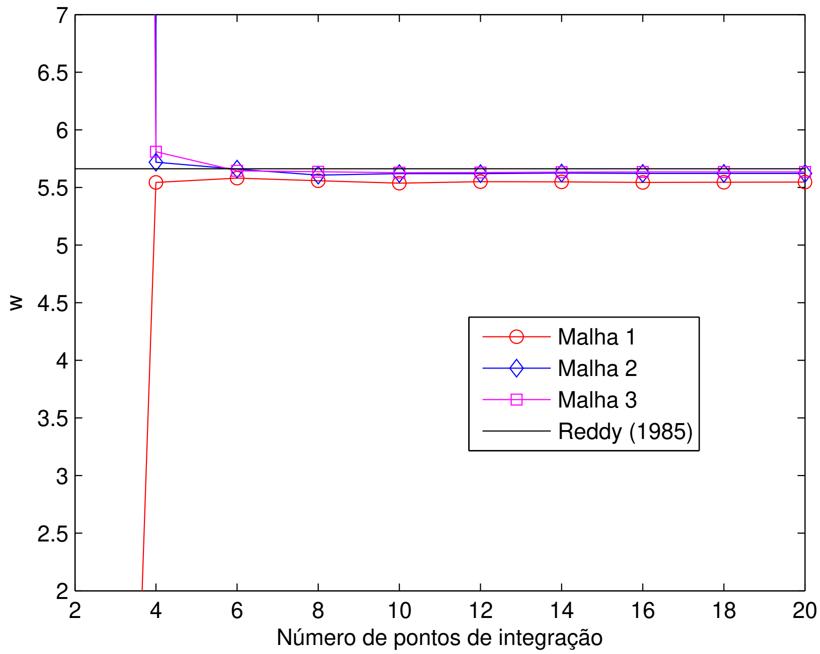

Figura 19: Sensibilidade do deslocamento transversal da casca sob carregamento uniformemente distribuído à variação do número de pontos de integração para $R/a = 20$.

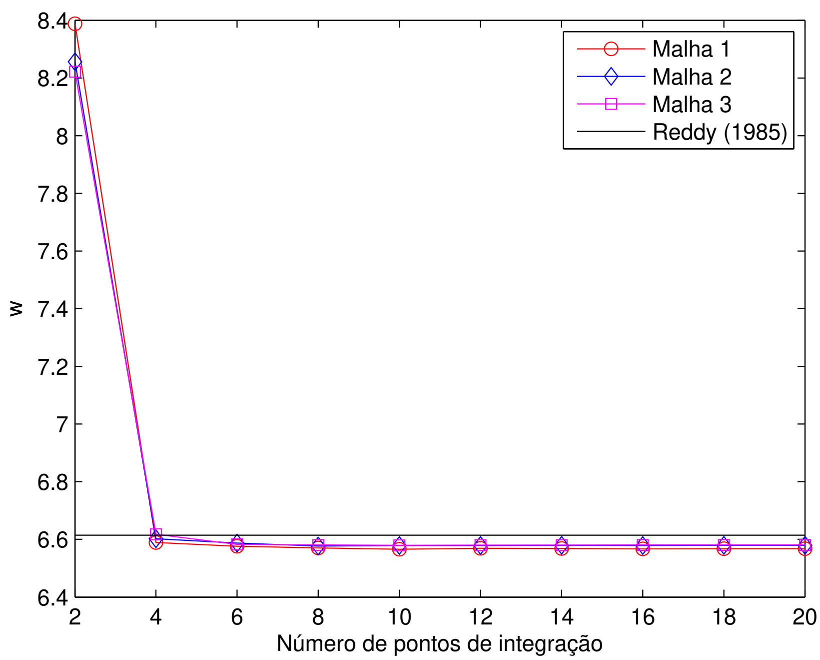

Figura 20: Sensibilidade do deslocamento transversal da casca sob carregamento uniformemente distribuído à variação do número de pontos de integração para $R/a = 50$.

Conforme mostrado nas figuras 18, 19 e 20, os resultados com poucos pontos de integração (2 ou 4 pontos) apresentam erros elevados, ficando longe do resultado obtido por Reddy (1985). Entretanto, com o aumento do número de pontos de integração, os resultados do método dos elementos de contorno convergem rapidamente para o resultado apresentado por Reddy (1985). Para estes problemas analisados, conclui-se que bons resultados são obtidos usando 6 pontos de integração. Este resultado torna o método bastante adequado para o tratamento destes tipos de problemas, uma vez que o custo computacional não é alto e o fato de não ter que calcular soluções particulares faz com que o método da integração radial seja vantajoso, dada a facilidade de implementação, quando comparado ao método dos elementos de contorno de reciprocidade dual.

5.7.2 Cascas abatidas quadradas esféricas ortotrópicas

Agora, considere uma casca abatida quadrada esférica de uma única camada ortotrópica, como mostrado na Figura 16. A geometria e as propriedades do material da casca são: comprimento da aresta da casca abatida no domínio Ω com a =0,254 m e espessura $h = 0{,}0127$ m, módulos elásticos transversal $E_2 = 6{,}895$ GPa e longitudinal $E_1 = 2E_2$, o coeficiente de Poisson $\nu_{12} = 0,3$, e o módulo de cisalhamento $G_{xy} = E_2/[2(1-\nu_{12})]$. A casca está submetida a uma carga uniformemente distribuída na direção transversal (pressão interna) $q_3 = 2{,}07$ MPa ($q_1 = q_2 = 0$). Duas razões de raios de curvatura e comprimento de aresta foram utilizados ($R/a = 5$ e $R/a = 10$).

Esse problema foi analisado considerando dois tipos de condições de contorno, ou seja, todas as bordas engastadas ($u_1 = t_2 = w = \partial w/\partial n = 0$ em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$, e $t_1 = u_2 = w = \partial w/\partial n = 0$ em $x_2 = 0$ e $x_2 = a$) e todas as bordas simplesmente apoiadas ($u_1 = t_2 = w = m_n = 0$ em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$, e $t_1 = u_2 = w = m_n = 0$ em $x_2 = 0$ e $x_2 = a$). Os resultados foram obtidos utilizando-se uma malha de 28 elementos de contorno quadráticos descontínuos e 49 pontos internos (Figura 17). Para esses problemas, apenas a função de aproximação f_{m_2} é usada.

A variação do deslocamento transversal com a coordenada x_1 em $x_2 = a/2$ (linha ao longo do centro da casca) é mostrado nas Figuras 21 e 22, considerando as bordas engastadas e simplesmente apoiadas, respectivamente. Com a finalidade de avaliar a precisão da formulação, as Figuras 21 e 22 também apresentam resultados obtidos por um método sem malha apresentado por Sladek et al. (2007) para os mesmos problemas, mas considerando uma formulação onde o efeito de cisalhamento é considerado. Os deslocamentos são normalizados pelo deslocamento central de uma placa isotrópica ($E_1 = E_2$ e todas as outras constantes do material permanecem as mesmas da casca), com o comprimento da aresta e espessura idênticas, sob a mesma carga. Esse deslocamento é igual ao w_o = 8,423 10^{-3} m para a casca engastada e igual a w_o = 27,01 10^{-3} m para a casca simplesmente apoiada.

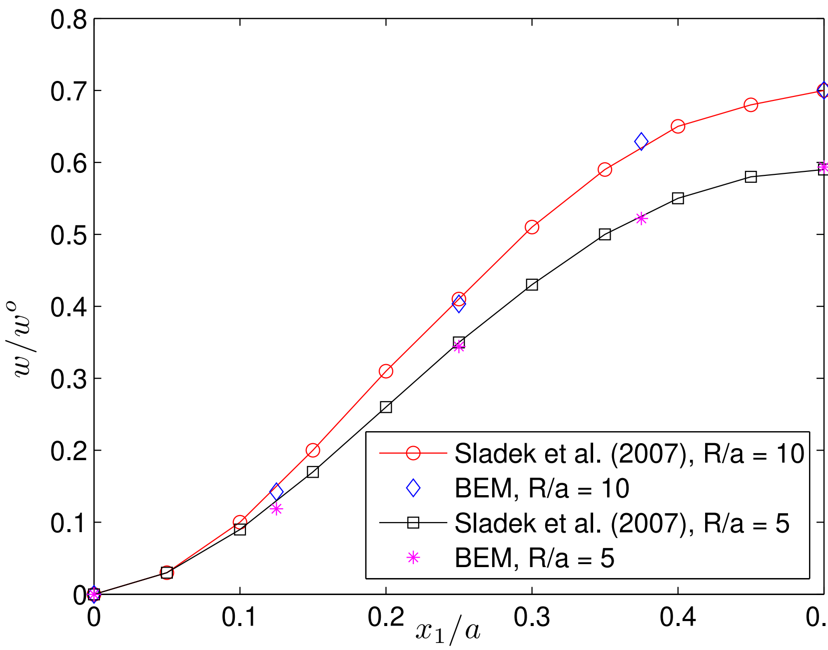

Figura 21: Variação do deslocamento transversal para a casca abatida quadrada esférica ortotrópica com arestas engastadas.

Como pode ser visto, há uma boa concordância entre os resultados calculados neste trabalho e os resultados obtidos por Sladek et al. (2007) usando o método sem malha.

5.7.3 Casca abatida quadrada esférica do tipo angly-ply

Agora, considere uma casca abatida quadrada esférica de um material compósito laminado simétrico cujas lâminas são montadas em ângulos diferentes de 0^o e 90^o (*angly-ply*). A geometria e as propriedades do material da casca são: razão entre o comprimento e a espessura de uma borda a/h =100, as relações entre os módulos elásticos E_1/E_2 = 25, G_{12}/E_y = 0,5, razão de Poisson $\nu_{12} = 0,25$. O laminado tem quatro camadas com orientações $[45^o/-45^o/-45^o/45^0]$. Todas as camadas têm espessura igual de $h/4$. A casca está sob uma carga uniformemente distribuída na direção transversal (pressão interna) $q_3 = q_o$

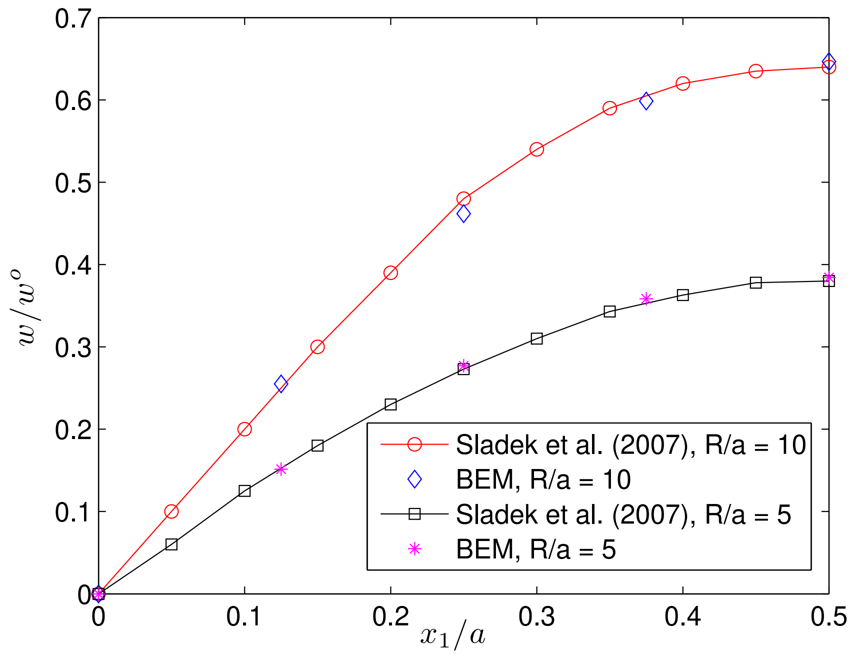

Figura 22: Variação do deslocamento transversal para a casca abatida quadrada esférica ortotrópica com arestas simplesmente apoiadas.

$(q_1 = q_2 = 0)$. A relação entre o raio de curvatura ao longo do comprimento da borda é $R/a = 5$. Esse problema foi analisado, considerando as bordas simplesmente apoiadas $t_1 = u_2 = w = m_n = 0$ em $x_1 = 0$ e $x_1 = a$, e $u_1 = t_2 = w = m_n = 0$ em $x_2 = 0$ e $x_2 = a$ (REDDY, 1985). Os resultados foram obtidos utilizando-se 28 elementos de contorno quadráticos descontínuos e 49 pontos internos (malha 3) e 44 elementos de contorno quadráticos descontínuos (11 elementos por borda) e 121 pontos internos (malha 4). Para este problema, uma única função de aproximação f_{m_2} foi usada. A variação do deslocamento transversal com a coordenada x_1 em $x_2 = a/2$ (linha ao longo do centro da casca) é mostrado na Figura 23. Resultados obtidos através de elementos finitos por Ram e Babu (2001) para os mesmos problemas, mas considerando a casca com deformação de cisalhamento, são também apresentados. Os deslocamentos são normalizados por $\tilde{w} = 10^3 w E_2 h^3/(q_o a^4)$.

Como pode ser visto, os resultados de ambas as malhas de elementos de contorno estão em boa concordância. Se comparados com os resultados de elementos finitos, os resultados de elementos de contorno são ligeiramente superiores para $0,05 \leq x_1/a \leq 0,3$. A concordância é boa próximo ao contorno e ao redor do centro da casca.

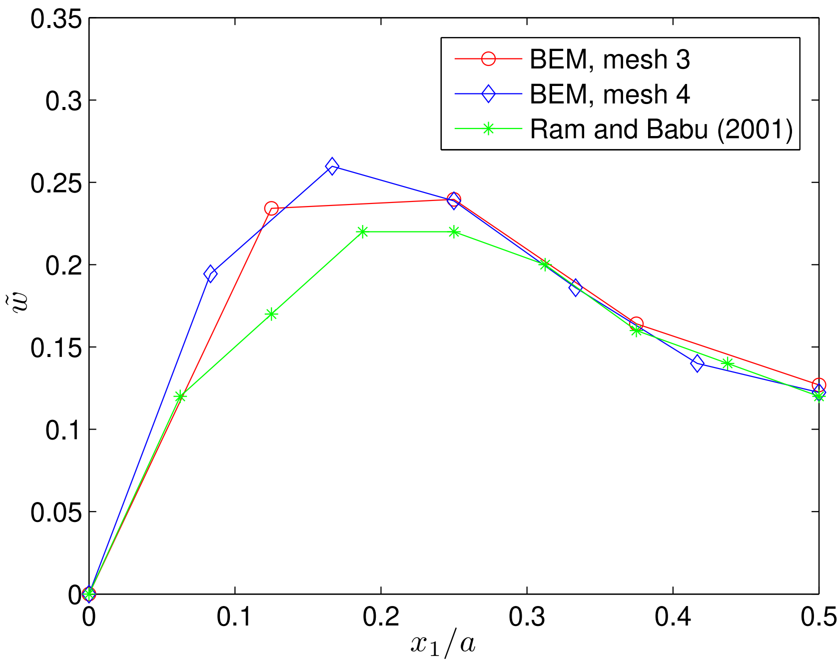

Figura 23: Variação do deslocamento transversal para uma casca esférica com sequência de empilhamento $[45^o/-45^o/-45^o/45^0]$.

6 *Considerações Finais*

6.1 Conclusões

Este trabalho apresentou uma formulação do método dos elementos de contorno para o cálculo de deslocamentos transversais em cascas abatidas de materiais compósitos. A formulação do método dos elementos de contorno para a análise de cascas abatidas de materiais anisotrópicos foi obtida usando a formulação de elasticidade plana junto com a formulação de placas finas e considerando os efeitos da curvatura como sendo forças de corpo. Foram usados elementos de contorno quadráticos descontínuos. As integrais de domínio provenientes das forças de corpo foram transformadas em integrais de contorno usando o método da integração radial.

No método da integração radial foi utilizada como função de aproximação a função de base radial spline de placas finas aumentadas por polinômios que, conforme relatado na literatura, apresenta um bom desempenho em várias formulações.

A formulação desenvolvida foi aplicada a vários problemas numéricos e mostrou boa concordância com resultados analíticos e numéricos disponíveis na literatura. Foram feitas análises de sensibilidade ao número de pontos internos e número de elementos.

O método se mostrou sensível ao número de pontos internos, exigindo, em todos os problemas um número mínimo de pontos internos a partir do qual a resposta apresenta boa concordância com os resultados da literatura. Quando são usados poucos pontos internos, os resultados tem maior discordância em relação aos resultados da literatura.

Houve pouca sensibilidade quanto ao número de elementos de contorno da malha, obtendo-se boa concordância com a literatura mesmo para malhas bastante grosseiras.

No geral, a formulação desenvolvida apresentou um bom desempenho na modelagem de cascas abatidas de materiais anisotrópicos, constituindo-se como uma alternativa para a análise de estruturas de materiais compósitos laminados.

6.2 Sugestões para trabalhos futuros

- Extensão da formulação desenvolvida para o cálculo de momentos e tensões;
- Desenvolvimento de formulações similares que considere o efeito da deformação de cisalhamento transversal (placas espessas);
- Extensão da formulação desenvolvida para problemas de cascas abatidas sob grandes deflexões.

Referências

AGARWAL, B. D.; BROUTMAN, L. J. *Analysis of performance of fiber composites*. New York: John Wiley and Sons Inc., 1990.

ALBUQUERQUE, E. L. *Numerical analysis of dynamic anisotropic problems using the boundary element method*. Tese (Doutorado) — Unicamp, Dept. Mec. Comput., July 2001. In Portuguese.

ALBUQUERQUE, E. L.; ALIABADI, M. H. A boundary element formulation for boundary only analysis of thin shallow shells. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 29, p. 63–73, 2008.

ALBUQUERQUE, E. L.; ALIABADI, M. H. A boundary element analysis of symmetric laminated composite shallow shells. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, p. 2663–2668, 2010.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic material. *International Journal of Solid and Structures*, v. 39, p. 1405–1422, 2002.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, v. 39, p. 1405–1422, 2002.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. Dual boundary method for anisotropic dynamic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 59, p. 1187–1205, 2004.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Dual reciprocity boundary element method in laplace domain applied to anisotropic dynamic crack problems. *Computers and Structures*, v. 81, p. 1703–1713, 2003.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; FEDELINSKI, P. Free vibration analysis of anisotropic material structures using the boundary element method. *Enginnering Analysis with Boundary Elements*, v. 27, p. 977–985, 2003.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P.; PAIVA, W. P. The radial integration method applied to dynamic problems of anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 23, p. 805–818, 2007.

ALBUQUERQUE, E. L. et al. Boundary element analysis of anisotropic kirchhoff plates. *International Journal of Solids and Structures*, v. 43, p. 4029–4046, 2006.

ALIABADI, M. H. *Boundary element method, the application in solids and structures*. New York: John Wiley and Sons Ltd, 2002.

BAIZ, P. M.; ALIABADI, M. H. Linear buckling of shear deformable shallow shells by the boundary domain element method. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 13, p. 19–34, 2006.

BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Element an Introductory Course*. Second. Southampton, Boston: Computation Mechanics Publications, 1989.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. [S.l.]: Computational Mechanics Publications, 1989.

DANIEL, I. M.; ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006.

DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. A new boundary element formulation for shear deformable shells analysis. *Int. J. for Numerical Methods in Engn.*, v. 45, p. 1257–1275, 1999.

DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. Crack growth analysis of plates loaded by bending and tension using dual boundary element method. *Int. J. of Fracture*, v. 105, p. 27–47, 2000.

DOMINGUEZ, J. *Boundary elements in dynamics*. Southampton, Boston: Computational Mechanics Publication, 1993.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretization. *Engn. Analysis with Boundary Elements*, v. 26, p. 905–916, 2002.

GIBSON, R. F. *Principles of composite material mechanics*. New York: McGraw Hill, 1994.

GOUVÊA, A. R. *Critérios de falha e otimizaç ao de estruturas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Dept. Projeto Mecânico., fevereiro 2006.

HOUBOLT, J. C. A reccurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. of Aeronautical and Science*, v. 17, p. 540–550, 1950.

JESUS, L. J. M.; ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P. Further developments in the radial integration method. In: *XXXI CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*. Buenos Aires, Argentina: [s.n.], 2010.

KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.

KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey: Prentice Hall, 1994.

KIRCHHOFF, G. On the equilibrium and motion of an elastic plate. *J. Math.*, v. 40, p. 51–58, 1850. In German.

KOGL, M.; GAUL, L. Free vibration analysis of anisotropic solids with the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 27, p. 107–114, 2003.

LEKHNITSKII, S. G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. [S.l.]: Holden-Day, 1963.

LEKHNITSKII, S. G. *Anisotropic plates*. New York: Gordon and Breach, 1968.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics.*, v. 18, p. 31–38, 1951.

NARDINI, D.; BREBBIA, C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, v. 7, p. 157–162, 1983.

PAIVA, J. B. *Boundary element formulation for plate bending and its aplication in engineering*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Carlos School of Engineering, 1987. In Portuguese.

PAIVA, W. P. *Análise de problemas estáticos e dinâmicos em placas anisotrópicas usando o método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) — Unicamp, Departamento de Projeto Mecânico, fevereiro 2005.

PARTRIDGE, P. W. Towards criteria for selection approximation functions in the dual reciprocity method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 24, p. 519–529, 2000.

PARTRIDGE, P. W.; BREBBIA, C. A.; WROBEL, L. C. *The dual reciprocity boundary element method*. Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1992.

POISSON, S. D. Tmemoire sur l'equilibre et le mouvement des corps solides. *Journal of Mathematics Physics*, v. 12, p. 8, 1829.

RAJAMOHAN, C.; RAAMACHANDRAN, J. Bending of anisotropic plates by charge simulation method. *Advances in Engn. Software*, v. 30, p. 369–373, 1999.

RAM, K. S. S.; BABU, T. S. Study of bending of laminated composite shells. part i: shells without a cutout. *Composite Structures*, v. 51, p. 103–116, 2001.

REDDY, J. N. Exact solution of thick laminated shells. *ASME Journal of Engineering Mechanics*, v. 323, p. 319–330, 1985.

REIS, A. *Formulações do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Placas de Materiais Compósitos Laminados*. Tese (Doutorado) — Unicamp, Departamento de Projeto Mecânico, 2010.

REIS, A. et al. Computation of moments and stresses in laminated composite plates by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 35, p. 105–113, 2011.

RIZZO, F. J.; SHYPPY, D. J. A method for stress determination in plane anistropic elastic bodies. *J. of Composite Materials*, v. 4, p. 36–61, 1970.

SANTANA, A. P. *Formulações dinâmicas do método dos elementos de contorno aplicado a análise de placas finas de compósitos laminados*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Dept. Projeto Mecânico., novembro 2008.

SHI, G.; BEZINE, G. A general boundary integral formulation for the anisotropic plate bending problems. *J. Composite Materials*, v. 22, p. 694–716, 1988.

SLADEK, J. et al. Local boundary integral equations for orthotropic shallow shells. *International Journal of Solids and Structures*, v. 44, p. 2285–2303, 2007.

SOLLERO, P. *Fracture mechanics analysis of anisotropic laminates by the boundary element method*. Tese (Doutorado) — Wessex Institute of Technology, 1994.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *Int. J. of Fracture*, v. 64, p. 269–284, 1993.

SOUZA, K. R. *Análise de Tensões em Placas Finas de Materiais Compósitos sob Carregamento Dinâmico usando o Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Dept. Projeto Mecânico., novembro 2009.

STROUD, A. H.; SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. New jersey. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1966.

TORSANI, F. L. *Implementação do cálculo de tensões em placas laminadas de materiais compósitos usando o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) — Unicamp, Dept. Projeto Mecânico., agosto 2007.

VENTSEL, E.; KRAUTHAMMER, T. *Thin plates and shells, theory, analysis, and applications*. New York: CRC Press, 2001.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. The fundamental solution of moderately thick laminated anisotropic shallow shells. *Int. J. Engng. Sci.*, v. 33, p. 995–1004, 1995.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Fundamental solutions and boundary integral equations of moderately thick symmetrically laminated anisotropic plates. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 12, p. 383–394, 1996.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Study on free vibration of moderately thick orthotropic laminated shallow shells by boundary-domain elements. *Applied Mathematical Modelling*, v. 20, p. 579–584, 1996.

WANG, J.; SCHWEIZERHOF, K. Free vibration of laminated anisotropic shallow shells including transverse shear deformation by the boundary-domain element method. *Computers and Structures*, v. 62, p. 151–156, 1997.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. A new method for transformation of domain integrals to the boundary integrals in boundary element method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v. 14, p. 1055–1065, 1998.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. Application of dual reciprocity method to plates and shells. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 24, p. 583–590, 2000.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems. *Computer Meth. in Appl. Mechanics and Engineering*, v. 25, p. 343–353, 1981.

ZHANG, J. D.; ATLURI, S. N. A boundary/interior element method for quasi-static and transient response analysis of shallow shells. *Computers and Structures*, v. 24, p. 213–223, 1986.