ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDA Q FINAL DA APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM

#### UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Autor: Caio Fernando Rodrigues dos Santos

### Funções de Interpolação e Técnicas de Solução para Problemas de Poisson usando Método de Elementos Finitos de Alta Ordem

Campinas, 2011.

Caio Fernando Rodrigues dos Santos

### Funções de Interpolação e Técnicas de Solução para Problemas de Poisson usando Método de Elementos Finitos de Alta Ordem

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

Campinas 2011

### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Sa59f	Santos, Calo Fernando Rodrigues dos Funções de interpolação e técnicas de solução para problemas de poisson usando método de elementos finitos de alta ordem / Caio Fernando Rodrigues dos Santos. – Campinas, SP: [s.n.], 2011.
	Orientador: Marco Lúcio Bittencourt. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Método dos elementos finitos. 2. Interpolação. 3. Teoria da aproximação. 4. Matrizes (Matemática). I. Bittencourt, Marco Lúcio. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título

Título em Inglês:	Interpolation functions and techniques for solving
-	poisson problems using high order finite element
	method
Palavras-chave em Inglês:	Finite element method, Interpolation,
	Approximation theory, Interpolation
Área de concentração:	Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação:	Mestre em Engenharia Mecânica
Banca Examinadora:	Carlos Alberto Cimini Junior, Saulo Pomponet Oliveira
Data da defesa:	25/02/2011
Programa de Pós Graduação:	Engenharia Mecânica

#### UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

#### DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

### Funções de Interpolação e Técnicas de Solução para Problemas de Poisson usando Método de Elementos Finitos de Alta Ordem

Autor: Caio Fernando Rodrigues dos Santos Orientador: Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

and attendent

Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt DPM/FEM/UNICAMP

Carlos Alser Counti fr.

Prof. Dr. Carlos Alberto Cimini Junior DPM/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira CP/UFPR

Campinas, 25 de Fevereiro de 2011.

Dedico esse trabalho a meus pais, Eunice e João Carlos, aos meus irmãos, Carla e Carlos e à minha sobrinha Ana Clara.

### Agradecimentos

Gostaria de registrar aqui meus agradecimentos, primeiramente à Deus, pela sabedoria e proteção.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marco Lúcio Bittencourt, pela oportunidade oferecida, pela paciência e pelo tempo dedicado à minha orientação.

Aos meus pais Eunice H. dos Santos e Santos e João Carlos Rodrigues dos Santos pela ótima formação pessoal, exemplo de família que souberam me dar, pelo apoio, carinho e incentivo que dedicaram a mim em todos os momentos deste trabalho, dando-me força para persistir.

Aos meus irmãos, Carlos e Carla Rodrigues, pela prestatividade, amizade e apoio.

Aos amigos e companheiros de trabalho, em especial, os físicos M. Sc. Fabiano Fernandes Bargos e Júnior Cintra Maurício, os engenheiros Felipe Furlan, M. Sc. Guilherme Neves, Jaime Delgado Vargas, M. Sc. Carlos Mingoto Júnior, Rodrigo Alves Augusto, M. Sc. Jaime Izuka e ao cientista da computação Gilberto Luis V. da Costa pelo companheirismo, colaboração nas horas de trabalho, estudos, discussões e pelo ótimo ambiente de trabalho.

Ao Prof. Dr. Saulo Pomponet Oliveira e ao Prof. Dr. Carlos Alberto Cimini Junior pela solicitude, discussões e pela contribuição que deram a esse trabalho.

À todos aqueles de quem eu possa não ter me lembrado e que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

Por fim, gostaria de agradecer ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo fundamental apoio financeiro.

"Algo que aprendi em uma longa vida: toda nossa Ciência, medida contra a Realidade, é primitiva e infantil, mas ainda assim é a coisa mais preciosa que temos... Imaginação é tudo, é uma prévia das atrações futuras... o sucesso é consequência" *Albert Einstein* 

### Resumo

Esse trabalho apresenta uma nova técnica de solução para o problema de Poisson, via problemas de projeção local, baseada na equivalência dos coeficientes para os problemas de Poisson e projeção. Um método de construção de matrizes de massa e rigidez, para triângulos, através do produto de matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez, usandose coordenadas baricêntricas, é também apresentado. Dois novos conjuntos de funções de interpolação para triângulos, baseado em coordenadas de área, são considerados. Discute-se a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, no domínio de integração de um triângulo na direção  $L_2 = (0, 1 - L_1)$  e ponderações ótimas dos polinômios de Jacobi para as matrizes de massa são determinadas.

Palavras Chave: Método de Elementos Finitos, Interpolação, Teoria da aproximação, Matrizes (Matemática).

### Abstract

This work presents a new solution technique to Poisson problems, using local projection solution, based on the equivalence of the coefficients for the Poisson and projection problems. A calculation method for the mass and stiffness matrices of triangles, based on the product of one-dimensional mass, mixed and stiffness matrices, using barycentric coordinates is also proposed. Two new sets of interpolation functions for triangles, based on area coordinates, are considered. The orthogonality property of Jacobi polynomials in the triangle integration domain is discussed for the direction  $L_2 = (0, 1 - L_1)$  and optimal weights of Jacobi polynomials for the mass matrices are determined.

Keywords: Finite Element Method, Interpolation, Approximation theory, Interpolation.

## Lista de Figuras

2.1	Sistema local de coordenadas $\xi_1$ (Bargos, 2009)	14
2.2	Funções de uma expansão <i>nodal</i> de ordem $P = 5$ (Bargos, 2009)	15
2.3	Sistema local unidimensional de coordenadas naturais	16
2.4	Funções de uma expansão <i>modal</i> de ordem $P = 5$ (Bargos, 2009)	19
2.5	Coordenadas baricêntricas para triângulos (Bittencourt, 1991)	20
2.6	Triângulo quadrático (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004; Vazquez, 2008). 	21
2.7	Entidades topológicas do triângulo, índices p, q, r e associação entre entidades e índices. (Vazquez, 2008)	22
3.1	Problema de projeção (Bargos, 2009)	26
3.2	Malha unidimensional com dois elementos e $P = 6$ , para o caso 1	32
3.3	Erro relativo para problema de Poisson com $u(x) = -x^6 + 6x$	33
3.4	Erro relativo para problema de Poisson com $u(x) = \frac{4}{\pi^2} x^2 (x-1)^2 \sin(\pi x)$	35
3.5	Erro relativo para problema de Poisson com $u(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin(\frac{\pi}{2}x)$	36
3.6	Malha unidimensional com dois elementos sujeita a uma carga pontual no	
	último nó de vértice.	37
3.7	Função analítica, $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - x)(y^2 - y)$ .	40
3.8	Malhas de elementos quadrados formada por quatro e seis elementos com $P = 2$ .	42
3.9	Função analítica, $u(x,y) = \frac{1}{2}x(y^2 - y)$	44
4.1	Esparsidade para as matrizes de massa calculadas usando-se polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ e $P = 4$	54
4.2	Esparsidade para as matrizes de rigidez calculadas usando-se polinômios de	01
1.2	Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ e $P = 4$ .	54
4.3	Partição topológica das matrizes de triângulos em termos de vértice (V), aresta	
	(A) e face (F)	55
4.4	Esparsidade do bloco de aresta usando-se polinômios de Jacobi com $\alpha=\beta=1$	
	$e P = 4. \dots $	57

4.5	Esparsidade do bloco de aresta usando-se polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ e $P = 4$ e substituindo-se as matrizes de massa unidimensionais pelas respec-
	tivas matrizes de rigidez
4.6	Esparsidade do bloco de face usando-se polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ e $P = 4$
4.7	Esparsidade do bloco de face usando-se polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = 1$ e P = 4 e substituindo-se as matrizes de massa unidimensionais pelas respectivas matrizes de rigidez
5.1	Modo de face $P = 3.$
5.2	Modos de face $P = 4$
5.3	Modos de face $P = 5$
5.4	Esparsidade das matrizes de massa para a Base 1 com (P = 7, 8 e 9) usando polinômios de Jacobi com ponderações $\alpha = 5$ e $\beta = 2$
5.5	Esparsidade das matrizes de massa para a base padrão com (P = 7, 8 e 9) usando polinômios de Jacobi com ponderações $\alpha = 5$ e $\beta = 2$
5.6	Esparsidade do bloco topológico de face para a matriz de massa usando a Base 2 e polinômios de Jacobi com $\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$
5.7	Esparsidade do bloco topológico de face para a matriz de massa usando a base padrão e polinômios de Jacobi com $\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$
5.8	Esparsidade do bloco topológico de face para a matriz de massa usando a base padrão e polinômios de Jacobi com $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ e $\beta_1 = \beta_2 = 2$
5.9	Esparsidade para a matriz de massa, usando-se a Base 2 e polinômios de Jacobi com $\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$
5.10	Esparsidade para a matriz de massa, usando-se a base padrão e polinômios de Jacobi com $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ e $\beta_1 = \beta_2 = 2$
5.11	Esparsidade para a matriz de rigidez, usando-se a Base 2 e polinômios de Jacobi com $\alpha_1 = 5$ e $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$
5.12	Esparsidade para a matriz de rigidez, usando-se a base padrão e polinômios de Jacobi com $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ e $\beta_1 = \beta_2 = 2$
5.13	Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez para triângulos com bases de Szabó, Carnevali, Webb, Sherwin, Lagrange, Vasquez 1, Vasquez 2 e Base 2

## Lista de Tabelas

2.1	Triângulo quadrático: índices $a b, c \in d$ (Bittencourt, 1991)	21
3.1	Coeficientes para os problemas de projeção e Poisson, usando polinômios de Jacobi para $u(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ .	30
3.2	Coeficientes para os problemas de projeção convencional e projeção proposto usando apenas o termo fonte da solução analítica $u(x) = -x^6 + 6x$ para malha com dois elementos, $P = 6$ e usando polinômios de Jacobi.	32
3.3	Coeficientes para os problemas de projeção convencional e projeção proposto usando apenas o termo fonte da solução analítica $u(x) = -x^6 + 7x$ com carga nodal $F = 1$ , aplicada em $x = 1$ , para malha com dois elementos	38
3.4	Coeficientes para os problemas de Poisson convencional e Poisson proposto com $u''(x) = -30x^4$ e carga nodal $F = 1$ , aplicada em $x = 1$ , para malha com dois elementos.	38
3.5	Coeficientes para os problemas de projeção, Poisson e projeção proposto usando- se o termo fonte da solução analítica $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - x)(y^2 - y)$ para um problema bidimensional com malha de 4 elementos e $P = 2$	41
3.6	Coeficientes internos da malha para os problemas de projeção, Poisson e projeção proposto usando o termo fonte da solução analítica $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - x)(y^2 - y)$ para um problema bidimensional com malha de 6 elementos e $P = 2$ .	43
3.7	Coeficientes para os problemas de projeção e projeção proposto usando o termo fonte da solução analítica $u(x,y) = \frac{1}{2}x(y^2-y)$ para um problema bidimensional com malha de 4 elementos e $P = 2$ .	45
3.8	Coeficientes para os problemas de projeção e projeção proposto usando o termo fonte da solução analítica $u(x, y) = \frac{1}{2}x(y^2-y)$ para um problema bidimensional com malha de 6 elementos e $P = 2$ .	46
5.1	Índices $p, q \in r$ para a base padrão (Vazquez, 2008).	62
5.2	Índices $p, q \in r$ para a Base 1	62
5.3	Resultados sobre condicionamento numérico para a base padrão e para a Base	
	1	65

5.4	Número de coeficientes não-nulos no bloco topológico de face para diferentes	
	bases e $P = 7$	67
5.5	Combinação de ponderações ótimas para os termos de aresta	68

## Símbolos

### Matrizes e Vetores

[K]	-	Matriz de rigidez
[M]	-	Matriz de massa
$\{a\}$	-	Vetor solução
[J]	-	Jacobiano da transformação do sistema de referência local para o global
n	-	Vetor normal ao contorno de $\Omega$
$[M_{1D}]$	-	Matriz de massa unidimensional
$[M_{2D}]$	-	Matriz de massa bidimensional
$[K_{1D}]$	-	Matriz de rigidez unidimensional
$[K_{2D}]$	-	Matriz de rigidez bidimensional
$[D_{1D}]$	-	Matriz mista unidimensional
$[D_{2D}]$	-	Matriz mista bidimensional
$M_{ij}$	-	Coeficientes da matriz de massa
$K_{ij}$	-	Coeficientes da matriz de rigidez
$M_{ij}^{1D}$	-	Coeficientes da matriz de massa unidimensional
$K_{ij}^{1D}$	-	Coeficientes da matriz de rigidez unidimensional
$M_{ij}^{2D}$	-	Coeficientes da matriz de massa bidimensional
$K_{ij}^{2D}$	-	Coeficientes da matriz de rigidez bidimensional
$D_{ij}^{1D}$	-	Coeficientes da matriz mista unidimensional
$D_{ij}^{2D}$	-	Coeficientes da matriz mista bidimensional
$f_j^m$	-	Elementos do vetor de carga associado à matriz de massa
$f_j^k$	-	Elementos do vetor de carga associado à matriz de rigidez

$f_{1D}^m$	-	Vetor do termo de carregamento associado à matriz de massa unidimen-
	sio	nal
$f^d_{1D}$	-	Vetor do termo de carregamento associado à matriz mista unidimensional
$f_{1D}^k$	-	Vetor do termo de carregamento associado à matriz de rigidez unidimen-
	sio	nal
$f_{2D}^m$	-	Vetor do termo de carregamento associado à matriz de massa bidimensi-
	ona	al
$f^d_{2D}$	-	Vetor do termo de carregamento associado à matriz mista bidimensional
$f_{2D}^k$	-	Vetor do termo de carregamento associado à matriz de rigidez bidimen-
	sio	nal
$f_i^{1D,m}$	-	Elementos do vetor de carga associado à matriz de massa unidimensional
$f_i^{1D,d}$	-	Elementos do vetor de carga associado à matriz mista unidimensional
$f_i^{1D,k}$	-	Elementos do vetor de carga associado $\hat{a}$ matriz de rigidez unidimensional
$f_i^{2D,m}$	-	Elementos do vetor de carga associado à matriz de massa bidimensional
$f_i^{2D,d}$	-	Elementos do vetor de carga associado à matriz mista bidimensional
$f_i^{2D,k}$	-	Elementos do vetor de carga associado â matriz de rigidez bidimensional

### Outras Notações

u(.)	-	Função polinomial qualquer
$u_{ap}(.)$	-	Solução aproximada
lpha,eta	-	Coeficientes de ponderação dos polinômios de Jacobi
Γ	-	Função Gamma
Р	-	Ordem da aproximação
e	-	Erro na aproximação polinomial
$\xi_1$	-	Coordenada local em $[-1, 1]$
$\xi_{1p}$	-	Pontos na direção $\xi_1$
v	-	Função teste
$x_{,\xi_1}$	-	Derivada parcial de $x$ na direção local $\xi_1$

xiv

$a_i,  b_j$	-	Coeficientes da aproximação
$\delta_{pq}$	-	Delta de Kronecker
$j_{ij}$	-	Coeficientes da matriz inversa do jacobiano
$\{\phi_i\}$	-	Espaço funcional
$\phi_i$	-	i-ésima função do espaço funcional $\{\phi_i\}$
$\phi_p(.)$	-	Funções de interpolação unidimensionais
p,q,r	-	Indices para a tensorização
$h_p^P$	-	Polinômio de Lagrange
$\mathcal{P}_n^{lpha,eta}$	-	Polinômio de Jacobi de grau $n$ e ponderações $\alpha$ e $\beta$
$\mathcal{L}_p$	-	Polinômio obtido através dos polinômios de Lagrange
$L_i$	-	Coordenada natural em $[0, 1]$
$N_p(.)$	-	Funções de interpolação
$\widetilde{l}_b^{(b-1)}$	-	Polinômio de Lagrange truncado
$N_{pqr}(L_i)$	-	Funções de interpolação bidimensional (Triângulo)
Ω	-	Domínio
q	-	Intensidade de carregamento
f(.)	-	Função de carregamento associada à matriz de massa
q(.)	-	Função de carregamento associada à matriz de rigidez
$f_{prop}$	-	Função de carregamento proposta associada à matriz de massa
$C, C_1, C_2$	-	Constantes de integração
C[A]	-	Condicionamento numérico da matriz $[A]$
$ \lambda_i _{max}$	-	Máximo auto-valor
$ \lambda_i _{min}$	-	Mínimo auto-valor

## Sumário

1	l Introdução				
	1.1	Método de Elementos Finitos	1		
	1.2	Revisão Bibliográfica	5		
		1.2.1 Funções de Forma	6		
		1.2.2 Aplicações	9		
	1.3	Objetivos	10		
	1.4	Organização do Texto	11		
<b>2</b>	Con	strução de Funções de Forma para MEF de Alta Ordem usando Pro-			
	dut	o Tensorial	13		
	2.1	Construção de Funções de Base Unidimensionais	14		
		2.1.1 Base Nodal	14		
		2.1.2 Base Modal	17		
	2.2	Construção Tensorial de Bases para Triângulos	19		
		2.2.1 Sistema de Coordenadas Baricêntricas	19		
		2.2.2 Produto Tensorial em Coordenadas Baricêntricas	20		
		2.2.3 Bases Nodais	23		
		2.2.4 Bases Modais	23		
3	Téc	nicas Locais de Solução para o Problema de Poisson	25		
	3.1	Problema de Projeção			
	3.2	Problema de Poisson	27		
	3.3	Norma	28		
	3.4	Coeficientes de Aproximação em Problemas de Projeção e Poisson	28		
		3.4.1 Método Proposto para Problemas Unidimensionais	30		
		3.4.2 Casos de validação	31		
		3.4.3 Caso 1	31		

		3.4.4	Caso 2	34	
		3.4.5	Caso 3	34	
		3.4.6	Caso 4	37	
	3.5	Proble	mas Bidimensionais	39	
		3.5.1	Casos de validação	39	
		3.5.2	Caso 1	40	
		3.5.3	Caso 2	43	
4	Tensorização de Matrizes de Massa e Rigidez Unidimensionais para Triân-				
	gulo	)S		47	
	4.1	Elemen	ntos unidimensionais	47	
	4.2	Triâng	ulos	49	
		4.2.1	Matriz de Massa e Rigidez para Triângulos através do Produto de Ma- trizes Unidimensionais	50	
		4.2.2	Análise por Termos Topológicos de Vértice, Aresta e Face	53	
<b>5</b>	Construção de Funções de Base para Triângulos			60	
	5.1	Ortogo	onalidade das Funções de Base	60	
	5.2	Base 1		61	
	5.3	Base 2		65	
6	Con	sidera	ções Finais e Perspectivas Futuras	71	
Re	Referências Bibliográficas 73				

### 1 Introdução

Em engenharia, uma das áreas com a maior demanda computacional está ligada à análise numérica de problemas. Dessa forma, o uso de ferramentas de simulação computacional tem se tornado cada vez mais importante em um mercado onde se valoriza a busca por soluções rápidas, seguras, de baixo custo e que facilitem a tomada de decisões ligadas ao direcionamento do projeto. Essa necessidade, aliada a um grande avanço da ciência, sobretudo nas áreas de mecânica computacional e computação científica, tem motivado um grande desenvolvimento em técnicas de simulação numérica, o que propicia modelagens mais confiáveis para aplicações práticas em engenharia.

Nesse contexto, torna-se necessária a resolução de problemas físicos descritos por equações diferenciais ordinárias (EDO) ou parciais (EDP), em geral sobre geometrias complexas (Nogueira Jr., 2002). A análise desses problemas normalmente é feita com o uso de métodos numéricos baseados na discretização do domínio, entre os quais se destaca o uso do Método de Elementos Finitos (MEF).

### 1.1 Método de Elementos Finitos

Desde a época dos filósofos gregos, já existia um esforço no sentido de se supor que a matéria era formada por inúmeras partículas discretas. Essa idéia de discretizar o contínuo permitiu, entre outras coisas, o cálculo de áreas de figuras curvilíneas e volumes de sólidos como esferas e cones, com o uso de idéias do Cálculo Diferencial e Integral.

Na década de 1930, McHenry e Hrennikoff substituíram um elemento estrutural contínuo, por uma estrutura formada por barras seguindo a geometria original e mantendo as mesmas condições de vínculo e carga (Assan, 2003), dando origem à análise matricial. Argyris e Kelsey estabeleceram na década de 1950 em uma série de trabalhos, a formulação matricial do método de Rayleigh-Ritz, que foi aplicado para analisar fuselagens e asas de aviões, simulando-as como sendo constituídas por barras e painéis (Assan, 2003). Atribui-se a (Turner, 1956), o marco inicial do desenvolvimento sistemático do MEF que consolida-se com o trabalho de (Clough, 1960) e (Oden, 1987; Clough, 2001), autor do nome "Método dos Elementos Finitos", em contraposição aos elementos infinitesimais do cálculo diferencial.

O MEF pode ser entendido como um método matemático para solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC), baseado em discretização, que utiliza funções polinomiais na aproximação da solução. Essa discretização é feita dividindo-se o domínio do problema em pequenos elementos separados por pontos nodais, ou nós, onde se supõe conhecidas as variáveis que se deseja aproximar. Esses elementos em geral estão distorcidos em um referencial global e são mapeados em um elemento local, não distorcido, sobre o qual são definidas as funções de interpolação. As funções de interpolação devem satisfazer a condição de continuidade sobre as regiões de fronteira entre os elementos e o PVC deve ser satisfeito no domínio de cada elemento. Uma vez determinadas as funções que satisfazem ambas as condições, tem-se a solução do problema (Bargos, 2009).

A idéia básica do MEF é que uma função desconhecida u(x) pode ser representada por uma combinação linear de funções conhecidas  $\phi_i(x)$ , ponderadas por coeficientes indeterminados  $a_i$ , tal que,

$$u(x) \approx u_{ap}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x),$$

onde os coeficientes  $a_i$  são determinados aplicando-se por exemplo o Método de Galerkin. O conjunto de funções  $\phi_i(x)$  também é chamado de funções de base, por constituir uma base no espaço de funções. Essas funções podem ser polinômios de Lagrange, Legendre, Chebyshev ou algum outro membro da família dos polinômios de Jacobi (Karniadakis e Sherwin, 2005; Shen e Tang, 2006).

É possível ainda distinguir algumas variantes para o MEF:

 $\bullet\,$ Versão h

Na Versão h (Hughes, 1987; Johnson, 1990; Oden et al., 1981; Zienkiewicz e Taylor,

1989), a convergência da aproximação é obtida fazendo-se o refinamento da malha de elementos, ou seja, reduzindo-se o tamanho h dos elementos de discretização da malha e mantendo-se a ordem polinomial das funções de interpolação.

• Versão p

Na versão p (Babuska et al., 1981; Babuska e Suri, 1987; Babuska e Suri, 1990; Szabó e Babuska, 1991), a convergência é obtida mantendo-se fixa a malha de discretização dos elementos e aumentando a ordem polinomial p das funções de base (global ou local) da aproximação. Esses métodos também são chamados de MEF de alta ordem.

• Versão hp

Existe ainda uma versão mista, que combina elementos das versões h e p para formar a versão hp, onde a convergência é obtida pela aplicação simultânea da redução do tamanho dos elementos e do aumento da ordem polinomial das funções de base (Babuska, 1988; Babuska e Guo, 1988; Babuska e Guo, 1989; Babuska e Suri, 1990; Szabó e Babuska, 1991).

• Versão r

Esse método re-arranja os nós da malha de acordo com a distribuição de erros. Uma vantagem de sua aplicação está no fato de manter inalterado o número de equações do problema, exigindo porém, que a malha seja refinada o suficiente para fornecer resultados satisfatórios. É mais eficiente em problemas dinâmicos, onde a distribuição de erro se modifica com o tempo (Brandão., 2008).

O entendimento de como combinar efetivamente o refinamento da malha h com o refinamento p foi conseguido durante a década de 1980 (Babuska, 1988). Em trabalhos de Dinâmica de Fluidos, a versão hp normalmente é conhecida como método espectral. (Karniadakis e Sherwin, 1999) apresentaram uma unificação entre a versão hp e os métodos espectrais, sendo o método obtido denominado MEF hp Espectral (Bargos, 2009).

Os Métodos de Alta Ordem têm se mostrado superiores com relação à versão h clássica do MEF em um número significativo de aplicações práticas, principalmente por apresentar convergência exponencial (também chamada espectral) da solução. Na prática, esse tipo de convergência implica que, para soluções suaves, o erro na solução numérica decai no mínimo de duas ordens ao se duplicar o número de pontos de colocação ou número de modos, diferentemente dos métodos de baixa ordem onde o erro diminui com um fator fixo (Karniadakis e Sherwin, 1999).

O emprego do Método de Elementos Finitos de Alta Ordem na simulação de problemas científicos nas áreas de mecânica dos sólidos, dinâmica de fluidos e problemas que envolvem interação fluido-estrutura, estão entre as aplicações que exigem grande capacidade de processamento e de armazenamento, em especial em simulações tridimensionais, em função da complexidade das geometrias estudadas, do grau de discretização dos modelos numéricos necessários e das limitações de estabilidade para avanço temporal dos esquemas explícitos usualmente empregados em modelos dinâmicos (Masuero, 2009).

Essas características fazem com que a aplicação do MEF de alta ordem esteja ligada ao uso de algoritmos eficientes para solução de grandes sistemas de equações. Essa necessidade se dá devido ao rápido aumento da ordem das matrizes dos elementos, principalmente em problemas 3D. Na maioria dos problemas 2D, os métodos diretos são mais eficientes. Entretanto, em casos 3D, a capacidade de armazenamento requerida pode tornar sua aplicação inviável. Nesses casos, os métodos iterativos se mostram mais eficientes e o método de Gradiente Conjugado Pré-condicionado (GCP) tem sido aplicado com sucesso (Nogueira Jr., 2002). Como discutido em (Bargos, 2009) existem na literatura vários trabalhos que abordam o uso de pré-condicionadores para o MEF de Alta Ordem, baseado na topologia dos elementos e relacionados à decomposição de domínio. Nesses casos, o cálculo do complemento de Schur é usado como uma maneira eficiente de se condensar os termos referentes aos modos internos dos elementos (Babuska e Helman, 1989).

Um outro aspecto importante, do ponto de vista computacional, é a escolha da base para o espaço de aproximação. Em geral, as bases de elementos finitos são funções polinomiais por partes, definidas sobre os elementos da partição e usadas para interpolar o domínio do problema. Assim, a escolha da base, o tamanho e a forma dos elementos e a regularidade da solução influenciam a precisão e a eficiência dos procedimentos numéricos adotados para o cálculo da solução aproximada (Nogueira Jr., 2002). Dessa forma, o estudo de funções que resultem em matrizes esparsas e mais bem condicionadas tem recebido grande atenção na literatura.

Nesse trabalho, discutem-se alguns aspectos voltados ao estudo, desenvolvimento e caracterização de bases polinomiais para elementos finitos uni e bi-dimensionais em domínios triangulares, onde características de condicionamento e esparsidade de matrizes de massa e rigidez dos elementos são exploradas. Além disso, uma reestruturação de algoritmo é proposta para a solução de problemas de Poisson 1D e 2D através da solução local para os coeficientes internos. Estende-se o conceito de produto de matrizes de massa e rigidez unidimensionais para a construção das matrizes 2D para triângulos usando coordenadas baricêntricas, como apresentado em (Vazquez, 2009 e Vazquez, 2008) para quadrados e em (Vazquez, 2008) para triângulos usando coordenadas colapsadas (Karniadakis e Sherwin, 1999). Uma nova base para triângulos é proposta baseada na propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi.

### 1.2 Revisão Bibliográfica

Embora o MEF tenha se consolidado com os trabalhos de Clough e Oden na década 1960, foi na década de 1970, com o uso dos chamados elementos mistos, que os primeiros passos do desenvolvimento do MEF de Alta Ordem foram apresentados. Em (Zienkiewicz et al., 1970), elementos de ordem polinomial variável foram aplicados a problemas de elasticidade 3D. O uso de polinômios de ordem superior foi usado para se criar graus de liberdade extras em regiões do domínio com elevados gradientes, em substituição ao método de se introduzir nós na malha de discretização (refinamento h). Esse foi um dos primeiros esforços no sentido de se implantar a versão p do MEF.

Em (Peano, 1975) e (Peano, 1976), algumas famílias de funções de interpolação hierárquicas para elementos triangulares de lado reto foram apresentadas. Essas funções de interpolação foram mapeadas diretamente sobre os elementos da malha física do problema, utilizando-se coordenadas de área ou baricêntricas e na teoria poderiam gerar elementos de qualquer ordem polinomial.

(Katz, 1978) e (Rossow e Katz, 1993) estenderam o trabalho de Peano, incluindo a idéia de elemento de referência com o objetivo de melhorar a eficiência computacional do

método. Foi sugerido o uso de matrizes e vetores pré-computados e observadas as vantagens de se utilizar espaços hierárquicos que, por serem aninhados, dispensam o cálculo completo das matrizes locais numa sucessão de níveis de aproximação p.

(Zienkiewicz et al., 1981) mostraram as vantagens de se usar as funções apresentadas em 1970 para elementos quadrilaterais hierárquicos, do ponto de vista do bom condicionamento das matrizes geradas e da facilidade na compatibilização da continuidade da função de aproximação global, ao se empregar malhas com ordens polinomiais não-uniformes.

Em (Babuska et al., 1981) foram apresentadas de forma pioneira (usando um formalismo matemático rigoroso) as bases para a versão p. Mostrou-se que a convergência desse tipo de método estaria assegurada quando  $p_{min} \to \infty$ , desde que as funções de interpolação do espaço de aproximação fossem construídas de forma adequada. Uma estimativa para a taxa de convergência foi apresentada e mostrou-se que, mesmo na presença de singularidades (desde que posicionadas sobre os nós físicos da malha), essa taxa era o dobro daquela apresentada pela versão h em malhas quasi-uniformes.

(Szabó e Babuska, 1991) publicaram um livro com detalhes sobre a versão p, popularizando o termo para o método. Essa obra apresenta uma investigação detalhada do método para problemas de elasticidade 2D e 3D, escoamento potencial 2D e formulação clássica de elementos de placa e casca.

(Karniadakis e Sherwin, 1999), em um trabalho pioneiro, unificaram as abordagens *hp* e espectral do MEF num livro dedicado à solução de problemas de mecânica dos fluidos computacional em malhas não-estruturadas. Do ponto de vista da implementação, esse trabalho detalhou aspectos chaves para se obter a máxima eficiência numérica nas aproximações de alta ordem.

#### 1.2.1 Funções de Forma

No MEF, é usual se empregar os termos modos, funções de interpolação ou funções de base para definir bases constituídas por funções polinomiais por partes. As funções empregadas na versão p do MEF são normalmente associadas às entidades topológicas dos elementos: vértices, arestas, faces e corpo. Vários conjuntos de funções de forma estão apresentados na literatura.

As funções hierárquicas clássicas para quadrados e hexaedros introduzidas em (Szabó e Babuska, 1991) apresentam excelente esparsidade e bom condicionamento devido ao uso de polinômios de Legendre e sua natureza tensorial (Edgar e Surana, 1996; Maitre e Pourquier, 1995).

Entretanto, as funções para triângulos e tetraedros sugeridas por esses mesmos autores (Szabó e Babuska, 1991), não têm propriedades similares e apresentam um aumento exponencial do número de condição com o aumento do grau p do elemento (Carnevali et al., 1993; Adjerid et al., 2001; Nogueira Jr., 2002).

Em (Carnevali et al., 1993) foram introduzidas funções de forma hierárquicas para triângulos e tetraedros, construídas de maneira que as funções de aresta, face e corpo de ordem p fossem ortogonais, no sentido do operador laplaciano, para essas mesmas funções com ordens não superiores a (p-2), (p-3) e (p-4), respectivamente. Esse fato resultou em matrizes locais com melhor condicionamento e esparsidade quando comparado às funções definidas em (Szabó e Babuska, 1991).

(Karniadakis e Sherwin, 1999) apresentaram funções de forma hierárquicas para triângulos e tetraedros baseadas em sistemas de coordenadas cartesianas colapsadas. Usaram produto tensorial dos polinômios ortogonais de Jacobi unidimensionais e integração numérica exata através do produto tensorial da quadratura unidimensional de Gauss-Jacobi. Os sistemas colapsados para triângulos e tetraedros são obtidos a partir de sistemas de coordenadas cartesianas definidos sobre quadrados e hexaedros, respectivamente, (Sherwin e Karniadakis, 1995).

(Webb e Abouchakra, 1995) usaram polinômios de Jacobi para definir funções de forma para o triângulo referência [0, 1]2 - simplex usando a regra de quadratura definida em (Dunavant, 1985). Em (Abouchakra, 1996) foi apresentada uma extensão das funções para tetraedros usando matrizes universais pré-computadas.

Em (Nogueira Jr. e Bittencourt, 2001) verificou-se as vantagens de se usar polinômios de Jacobi para melhorar a eficiência computacional. Estudos sobre o condicionamento de matrizes locais e globais foram feitos, onde se verificou um aumento exponencial do número de condição para as matrizes usando as funções propostas em (Carnevali et al., 1993), mas ainda assim inferior ao apresentado nas funções introduzidas por (Szabó e Babuska, 1991).

Novas funções para triângulos e tetraedros com melhores propriedades de esparsidade e condicionamento numérico, quando comparadas às apresentadas em (Szabó e Babuska, 1991) e (Carnevali et al., 1993), foram propostas em (Adjerid et al., 2001). As funções propostas são baseadas em (Szabó e Babuska, 1991) e usam a ortogonalização das funções de face (2D) e de corpo (3D).

Novas funções de interpolação foram apresentadas em (Nogueira Jr., 2002) usando polinômios de Jacobi e sistemas de coordenadas colapsadas. Ponderações específicas foram obtidas para os polinômios de Jacobi, de modo a diagonalizar as funções de face para elementos 2D e de corpo para 3D.

As funções de base modal para quadriláteros e hexaedros apresentadas em (Karniadakis e Sherwin, 1999) são construídas aplicando-se a definição padrão de produto tensorial. Dessa forma, bases de maior dimensão podem ser construídas através do produto termo a termo de base unidimensionais. Entretanto, as bases para triângulos e tetraedros são construídas usando um produto deformado, devido ao uso do sistema de coordenadas colapsadas.

(Bittencourt, 2005) apresentou funções de forma modais e nodais para triângulos e tetraedros baseadas no produto tensorial de funções unidimensionais expressas em coordenadas baricêntricas. As funções nodais utilizam polinômios de Lagrange e são as mesmas funções de forma h padrão apresentadas na literatura (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991). As bases modais utilizam polinômios de Jacobi e o procedimento para construção de funções modais e nodais é simples.

Os polinômios de Jacobi têm sido empregados na versão hp do MEF, principalmente devido às suas características de ortogonalidade, resultando em matrizes de rigidez unidimensionais quase diagonais, também ditas espectrais (Beuchler e Schöberl, 2006).

(Bittencourt et al., 2007) mostraram que a construção das funções de forma através de polinômios de Jacobi resulta em um aumento da esparsidade das matrizes de massa e rigidez, e que o número de condição depende da escolha dos pesos do polinômio. Observaram ainda que se pode obter números de condição mais favoráveis quando utilizados polinômios de Jacobi com pesos apropriados.

(Vazquez, 2008) apresentou o desenvolvimento detalhado de funções de interpolação e regras de integração tensorizáveis para o MEF de alta ordem *hp*, considerando os sistemas de referência locais dos elementos. Nesse trabalho, determinou-se as ponderações específicas para as bases de funções de triângulos e tetraedros, formada pelo produto tensorial de polinômios de Jacobi, de forma a se obter melhor condicionamento e esparsidade das matrizes de rigidez e massa dos elementos. Além disso, um procedimento para se escrever matrizes de massa e rigidez para quadrados e hexaedros em termos de matrizes unidimensionais foi apresentado. Para triângulos, o procedimento foi aplicado usando a base de Sherwin e Karniadakis escrita em coordenadas colapsadas.

(Bargos, 2009) apresentou uma implementação, desenvolvida em ambiente MatLab<sup>(R)</sup>, de códigos para o Método de Elementos Finitos de Alta Ordem, com malhas estruturadas e não estruturadas para aplicação à problemas 2D e 3D. Nesse trabalho, apresenta-se um estudo detalhado sobre a continuidade  $C^0$  da aproximação para expansões modais em quadrados, mostrando-se que, com uma numeração adequada das funções de aresta, a continuidade é automaticamente obtida.

(Vazquez, 2009) apresentou, de maneira detalhada, o processo de tensorização de matrizes de rigidez e massa de elementos locais unidimensionais para a obtenção dessas mesmas matrizes para quadrados e hexaedros não-distorcidos no problema de Poisson. Nesse mesmo trabalho, mostrou-se que a substituição das matrizes de massa unidimensionais pela matriz de rigidez unidimensional resultava em um aumento sensível da esparsidade das matrizes, levando a um aumento na eficiência computacional na resolução do sistema de equações.

#### 1.2.2 Aplicações

O uso da versão p do MEF em problemas aplicados tem se tornado mais frequente, e seu uso pode, em parte, ser justificado por uma intensiva investigação dedicada aos chamados métodos espectrais ou de alta ordem, realizada nos últimos 20 anos e que tem mostrado sua maior eficiência frente à versão h quando aplicado a um grande número de problemas (Bargos, 2009, Duster e Rank, 2001). Uma comparação entre as versões h adaptável e p do MEF, aplicado a problemas de plasticidade, foi apresentada em (Duster e Rank, 2001). Nesse trabalho, a versão pse mostrou significativamente mais precisa e verificou-se que a versão h pode apresentar vantagens somente quando a complexidade da estrutura requerer uma malha muito fina.

Uma aproximação para o estudo de placas e cascas usando hexaedros para o MEF de alta ordem foi apresentada em (Duster et al., 2007). Para ajustar o grau do polinômio em cada direção foi usado um procedimento adaptável baseado em um identificador de erro hierárquico. Essa técnica se mostrou eficiente para os problemas estudados.

Em (Dong e Yosibashi, 2009), a formulação hp do MEF foi aplicada à problemas dinâmicos de elasticidade não linear tridimensional. Ao invés dos polinômios de Legendre, comumente usados nesse tipo de aplicação, foram empregados os polinômios de Jacobi, devido à sua maior generalidade e às vantagens apresentadas, como matrizes de massa e rigidez com um número de condição mais favorável, conforme apresentado em (Bittencourt et al., 2007).

Encontram-se ainda aplicações do MEF de Alta Ordem em problemas de Dinâmica de Fluidos e Transferência de Calor (Lomtev et al., 1998; Karniadakis e Sherwin, 1999; Schwab, 1999; Beskok e Warburton, 2001; Karniadakis e Sherwin, 2005), e em problemas de eletromagnetismo (Demkowicz e Vardapetyan, 1998; Ledgera et al., 2003).

(Grinberg, 2009) empregou métodos espectrais de alta ordem a problemas de fluxo sanguíneo em uma rede arterial. Neste trabalho, foram discutidas novas técnicas de decomposição de domínio e interface com vários níveis de comunicação para simulações de fluxo ultra-pararelas, buscando-se maior eficiência computacional na resolução de vários milhões de graus de liberdade.

### 1.3 Objetivos

Os principais focos desse trabalho são:

 Apresentar uma nova maneira de solução para o problema de Poisson via problema de projeção local.

- Desenvolver uma formulação que torne possível a construção de matrizes 2D, usando o produto de matrizes unidimensionais para triângulos com bases polinomiais padrão de Jacobi e coordenadas baricêntricas ou de área. Verifica-se ainda a eficiência da substituição das matrizes de massa 1D pelas matrizes de rigidez 1D quanto às características de esparsidade e condicionamento numérico.
- Estudar a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi no intervalo  $[0, 1 L_1]$  e propor funções de base em termos das entidades topológicas de vértice, aresta e face para elementos triangulares, baseadas na escolha ótima de ponderações para os polinômios de Jacobi, na tentativa de se obter matrizes de massa e rigidez para triângulos mais esparsas e bem condicionadas.

### 1.4 Organização do Texto

No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão de procedimentos para a construção de bases de funções para o MEF de Alta Ordem unidimensionais e bi-dimensionais (triângulos) baseados no produto tensorial unidimensional usando polinômios de Jacobi e Lagrange (Vazquez, 2004; Bittencourt et al., 2007). Índices apropriados são usados para denotar o polinômio unidimensional em cada direção da tensorização.

No Capítulo 3, uma nova técnica de solução de problemas de Poisson é discutida. Usando-se as idéias apresentadas em (Vazquez, 2009) sobre equivalência dos coeficientes para os problemas de Poisson e projeção, propõe-se um método para a resolução de problemas de Poisson através da solução local de problemas de projeção. Alguns casos de validação para problemas uni e bidimensionais são apresentados.

No Capítulo 4, apresenta-se uma revisão dos processos de construção de matrizes de massa e rigidez unidimensional em coordenadas naturais. Um método de construção de matrizes de massa e rigidez para triângulos, através do produto de matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez em coordenadas baricêntricas é também apresentado. Discutese a possibilidade da substituição das matrizes unidimensionais de massa pelas respectivas matrizes de rigidez unidimensionais, como proposto em (Vazquez, 2009) para quadrados e hexaedros.

No Capítulo 5, é feita uma discussão sobre a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi e de como isso pode ser usado para a construção de matrizes de massa e rigidez mais esparsas. Novas funções de base tensorizáveis para triângulos são apresentadas e uma discussão sobre condicionamento e esparsidade é feita.

No Capítulo 6, apresentam-se as considerações finais e as perspectivas para trabalhos futuros.

# 2 Construção de Funções de Forma para MEF de Alta Ordem usando Produto Tensorial

A escolha das funções de base para a versão p do MEF desempenha um papel fundamental sob vários aspectos, tais como eficiência e flexibilidade do método de discretização. Além disso, a hierarquia dos espaços de aproximação p permite que matrizes locais não sejam totalmente reconstruídas quando se aumenta a ordem da interpolação polinomial. Sob o ponto de vista de implementação, aspectos como a propriedade de ortogonalidade de funções de base, a qual resulta em matrizes globais mais esparsas e bem condicionadas, e o produto tensorial de funções unidimensionais, que caracteriza uma forma eficiente de construção de funções de base bi e tridimensionais, tornam-se desejáveis no contexto do MEF de Alta Ordem.

Este capítulo apresenta um resumo de procedimentos para a construção de funções de interpolação unidimensionais e em triângulos, baseado no produto tensorial de polinômios unidimensionais de Jacobi e Lagrange (Karniadakis e Sherwin, 1999; Vazquez, 2004; Bit-tencourt et al., 2007). Índices apropriados são usados para denotar os polinômios em cada direção de tensorização.

#### 2.1 Construção de Funções de Base Unidimensionais

#### 2.1.1 Base Nodal

Seja um elemento unidimensional definido em  $\Omega$ , tal que,  $\Omega = \{\xi_1 | -1 \leq \xi_1 \leq 1\}$  e um conjunto de P + 1 pontos nodais desse domínio, denotados por  $\xi_{1q}$   $(0 \leq q \leq P)$ , como mostrado na Figura 2.1.



Figura 2.1: Sistema local de coordenadas  $\xi_1$  (Bargos, 2009).

Uma base nodal é formada pelas funções associadas às coordenadas  $\xi_{1p}$  com p = 0, ..., P. Essas funções são definidas em termos dos polinômios de Lagrange  $h_p^P(\xi_1)$ , os quais obedecem à propriedade de ser 1 no seu ponto de definição  $\xi_{1p} \in 0$  em todos os outros pontos  $\xi_{1q}$   $(p \neq q)$ . Pela definição anterior, tem-se a propriedade de colocação dos polinômios de Lagrange, e pode-se escrever  $h_p^P(\xi_{1q}) = \delta_{pq}$ , onde  $\delta_{pq}$  é o delta de Kronecker.

Os polinômios de Lagrange são expressos na forma de um quociente de produtos, ou seja,

$$h_p^P(\xi_1) = \frac{\prod_{q=0, q \neq p}^P(\xi_1 - \xi_{1q})}{\prod_{q=0, q \neq p}^P(\xi_{1p} - \xi_{1q})},$$
(2.1)

sendo  $h_p^0(\xi_1) = 1.$ 

As funções nodais de interpolação  $\phi_p(\xi_1)$  associadas aos nós p (p = 0, 1, ..., P) dos elementos unidimensionais são os próprios polinômios de Lagrange, ou seja,  $\phi_p(\xi_1) = h_p^P(\xi_1)$ . É comum associar as funções de interpolação às entidades topológicas do elemento que, no caso do elemento unidimensional, são os vértices (p = 0 e p = P) e corpo (0 .Pode-se fatorar a expressão geral (2.1) dos polinômios de Lagrange e empregar a seguinteexpressão para denotar as funções de forma de vértice e de corpo (Bargos, 2009)

$$N_{p}(\xi_{1}) = \phi_{p}(\xi_{1}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi_{1})\mathcal{L}_{p,P}^{P-1}(\xi_{1}) & p = 0, \\ \frac{1}{2}(1+\xi_{1})\mathcal{L}_{p,0}^{P-1}(\xi_{1}) & p = P, \\ \frac{1}{4}(1-\xi_{1})(1+\xi_{1})\mathcal{L}_{p}^{P-2}(\xi_{1}) & 0 (2.2)$$



Figura 2.2: Funções de uma expansão *nodal* de ordem P = 5 (Bargos, 2009).

sendo  $\mathcal{L}_{p,l}^{P-1}(\xi_1) \in \mathcal{L}_p^{P-2}(\xi_1)$  diretamente obtidos da expressão geral (2.1) dos polinômios de Lagrange e dados por

$$\mathcal{L}_{p,l}^{P-1}(\xi_1) = -\frac{\prod_{q=0, q \neq \{p,l\}}^{P}(\xi_1 - \xi_{1q})}{\prod_{q=0, q \neq \{p,l\}}^{P}(\xi_{1p} - \xi_{1q})},$$
(2.3)

$$\mathcal{L}_{p}^{P-2}(\xi_{1}) = -4 \frac{\prod_{q=1, q \neq p}^{P-1}(\xi_{1} - \xi_{1q})}{\prod_{q=1, q \neq p}^{P-1}(\xi_{1p} - \xi_{1q})}.$$
(2.4)

Na Figura 2.2, mostram-se as funções de forma para uma expansão unidimensional de ordem P = 5.

Para essa expansão, todas as funções associadas às coordenadas  $\xi_1$  são polinômios de ordem P. Dessa forma, diz-se que a base é não-hierárquica. Outro detalhe que pode ser observado é que todas as funções de corpo, ou seja, associadas a nós internos do domínio, são iguais a zero nas bordas do elemento.

Essas equações podem ainda ser escritas em coordenadas naturais adimensionais (Cook et al., 1991). Para isso, considere a reta de comprimento l mostrada na Figura 2.3, sendo  $l_1 + l_2 = l$ . As coordenadas naturais de qualquer ponto P são definidas como

$$L_1 = \frac{l_1}{l} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{l_2}{l}.$$

Logo,

$$L_1 + L_2 = 1.$$

Nota-se pela expressão anterior que uma das coordenadas é dependente. As coordenadas



Figura 2.3: Sistema local unidimensional de coordenadas naturais.

naturais  $L_1$  e  $L_2$  variam no intervalo [0,1] e os mapeamentos entre os referenciais locais cartesiano  $\xi_1$  e natural  $L_1$  são dados por

$$L_1(\xi_1) = \frac{1}{2}(1+\xi_1)$$
 e  $\xi_1(L_1) = 2L_1 - 1.$  (2.5)

É possível escrever a expressão geral dos polinômios de Lagrange, equação (2.1), em termos das coordenadas naturais. Considerando P + 1 pontos na direção  $L_1$ , tem-se

$$h_p^P(L_1) = \frac{\prod_{q=0, q \neq p}^P(L_1 - L_{1q})}{\prod_{q=0, q \neq p}^P(L_{1p} - L_{1q})}.$$
(2.6)

Usando as relações anteriores, escreve-se a equação (2.2) em termos das coordenadas naturais

$$N_p(L_1) = \phi_p(L_1) = \begin{cases} (1 - L_1) \mathcal{L}_{p,P}^{P-1}(L_1) & p = 0, \\ L_1 \mathcal{L}_{p,0}^{P-1}(L_1) & p = P, \\ (1 - L_1) L_1 \mathcal{L}_p^{P-2}(L_1) & 0 (2.7)$$

sendo  $\mathcal{L}_{p,l}^{P-1}(L_1) \in \mathcal{L}_p^{P-2}(L_1)$  diretamente obtidos da expressão geral (2.6) dos polinômios de Lagrange e dados por

$$\mathcal{L}_{p,l}^{P-1}(L_1) = \frac{\prod_{q=0, q \neq \{p,l\}}^{P}(L_1 - L_{1q})}{\prod_{q=0, q \neq \{p,l\}}^{P}(L_{1p} - L_{1q})},$$
(2.8)

$$\mathcal{L}_{p}^{P-2}(L_{1}) = \frac{\prod_{q=1, q \neq p}^{P-1}(L_{1} - L_{1q})}{\prod_{q=1, q \neq p}^{P-1}(L_{1p} - L_{1q})}.$$
(2.9)

Como pode-se observar pela definição dos polinômios de Lagrange, expressão (2.1) e (2.6), as funções (2.2) e (2.7) estão diretamente relacionadas aos nós do elemento. Por isso, a base é dita *nodal*.

#### 2.1.2 Base Modal

Em geral, bases modais são definidas em termos de polinômios ortogonais de Jacobi, sendo Legendre e Chebyshev casos especiais de polinômios dessa família. Para bases modais, apenas as funções de vértice estão associadas às coordenadas nodais.

Seja w uma função definida no intervalo  $[a, b], -\infty \le a < b \le \infty$ , não identicamente nula em (a, b) e ainda  $w(x) \ne 1$ . Se

$$u_p = \int_a^b x^p w(x) dx = 0,$$

para p = 0, 1, 2, ..., então w é chamada de função peso. Uma seqüência de polinômios  $\{P_p\}_{p=0}^{\infty}$ , com  $P_p$  de grau exatamente p, que satisfaz

$$\langle P_p, P_q \rangle = \int_a^b P_p(x) P_q(x) w(x) dx = 0, \quad p \neq q,$$

é chamada seqüência de polinômios ortogonais com relação à função peso w no intervalo [a, b].

Os polinômios ortogonais de Jacobi de grau p, denotados aqui por  $\mathcal{P}_p^{\alpha,\beta}(\xi_1)$ , são uma família de soluções polinomiais para o problema singular de Sturm-Liouville, o qual, para  $-1 < \xi_1 < 1$ , é escrito como (Karniadakis e Sherwin, 1999)

$$\frac{d}{d\xi_1} [(1-\xi_1)^{1+\alpha} (1+\xi_1)^{1+\alpha} \frac{d}{d\xi_1} \mathcal{P}_p^{\alpha,\beta}(\xi_1)] = \lambda_p (1-\xi_1)^{\alpha} (1+\xi_1)^{\beta} \mathcal{P}_p^{\alpha,\beta}(\xi_1),$$
(2.10)

sendo  $\lambda_p = -p(\alpha + \beta + p + 1).$ 

Esses polinômios são ortogonais, com relação à função peso  $w(\xi_1) = (1 - \xi_1)^{\alpha} (1 + \xi_1)^{\beta}$ , definida em [-1, 1], com  $\alpha, \beta \in \Re, \alpha, \beta > -1$ , isto é,

$$\int_{-1}^{1} (1-\xi_1)^{\alpha} (1+\xi_1)^{\beta} \mathcal{P}_p^{\alpha,\beta}(\xi_1) \mathcal{P}_q^{\alpha,\beta}(\xi_1) d\xi_1 = C\delta_{pq}, \quad \xi_1 \in [-1,1].$$
(2.11)

A constante C depende de  $\alpha, \beta \in p$ , ou seja,

$$C = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2p+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(p+\alpha+1)\Gamma(p+\beta+1)}{p!\Gamma(p+\alpha+\beta+1)},$$
(2.12)

sendo  $\Gamma$  a função Gama, que pode ser dada como a integral de Euler de segunda espécie por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad Re(x) > 0 \quad \text{ou} \quad x > 0$$

A relação (2.11) implica que  $\mathcal{P}_p^{\alpha,\beta}(\xi_1)$  é ortogonal a todos os polinômios de ordem menor que *p* quando integrada com respeito a  $w(\xi_1) = (1 - \xi_1)^{\alpha}(1 + \xi_1)^{\beta}$ . Uma propriedade desses polinômios é que suas raízes são reais, distintas e estão dentro do intervalo [-1, 1]. A relação de ortogonalidade pode ser mape<br/>ada para o intervalo [0,1] de coordenadas naturais<br/>  $L_1$  (Vazquez, 2004) como

$$\int_{0}^{1} (1 - L_{1})^{\alpha} L_{1}^{\beta} \mathcal{P}_{n}^{\alpha,\beta} (2L_{1} - 1) \mathcal{P}_{m}^{\alpha,\beta} (2L_{1} - 1) dL_{1} = D\delta_{nm}, L_{1} \in [0, 1],$$
(2.13)

onde

$$D = \frac{1}{2^{\alpha + \beta + 1}}C.$$
 (2.14)

Os polinômios de Jacobi e suas derivadas podem ser construídos computacionalmente através de uma relação recursiva, conforme dado em (Karniadakis e Sherwin, 1999). Logo,

$$\mathcal{P}_{0}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}) = 1,$$

$$\mathcal{P}_{1}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}) = \frac{1}{2}[\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)\xi_{1}],$$

$$a_{p}^{1}\mathcal{P}_{p+1}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}) = (a_{p}^{2} + a_{p}^{3}\xi_{1})\mathcal{P}_{p}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}) - a_{p}^{4}\mathcal{P}_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}),$$

$$b_{p}^{1}(\xi_{1})\frac{d}{d\xi_{1}}\mathcal{P}_{p}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}) = b_{p}^{2}(\xi_{1})\mathcal{P}_{p}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}) + b_{p}^{3}(\xi_{1})\mathcal{P}_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}),$$
(2.15)

 $\operatorname{sendo}$ 

$$a_{p}^{1} = 2(p+1)(p+\alpha+\beta+1)(2p+\alpha+\beta),$$

$$a_{p}^{2} = (2p+\alpha+\beta+1)(\alpha^{2}-\beta_{2}),$$

$$a_{p}^{3} = (2p+\alpha+\beta)(2p+\alpha+\beta+1)(2p+\alpha+\beta+2),$$

$$a_{p}^{4} = 2(p+\alpha)(p+\beta)(2p+\alpha+\beta+2),$$

$$b_{p}^{1}(\xi_{1}) = (2p+\alpha+\beta)(1-\xi_{1}^{2}),$$

$$b_{p}^{2}(\xi_{1}) = p(\alpha-\beta-(2p+\alpha+\beta)\xi_{1}),$$

$$b_{p}^{3}(\xi_{1}) = 2(p+\alpha)(p+\beta).$$
(2.16)

Uma base *modal*, definida nos sistemas de coordenadas  $\xi_1$  e  $L_1$ , pode ser obtida de forma análoga às equações (2.2) e (2.7). Para isso, substitui-se os polinômios de Lagrange pelos de Jacobi nas funções de corpo, mantendo-se as funções de vértices lineares, ou seja,

$$N_{p}(\xi_{1}) = \phi_{p}(\xi_{1}) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\xi_{1}) & p = 0, \\ \frac{1}{2}(1+\xi_{1}) & p = P, \\ \frac{1}{4}(1-\xi_{1})(1+\xi_{1})\mathcal{P}_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi_{1}) & 0 (2.17)$$

e

$$N_p(L_1) = \phi_p(L_1) = \begin{cases} (1 - L_1) & p = 0, \\ L_1 & p = P, \\ (1 - L_1)L_1 \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1) & 0 (2.18)$$


Figura 2.4: Funções de uma expansão modal de ordem P = 5 (Bargos, 2009).

Os modos para uma expansão modal com P = 5, normalizados para ter valor máximo igual a um, são mostradas na Figura 2.4. Os modos de vértices, p = 0 e p = P, são os mesmos do elemento linear de Lagrange. Note que os modos de corpo 0 são iguais a zeronas bordas do elemento e aumentam em ordem polinomial. Assim, o conjunto de funçõesde base que gera o espaço de aproximação para uma dada ordem <math>P contém integralmente o conjunto de funções de base do espaço de aproximação de ordem P - 1. Por isso, a base é dita hierárquica.

# 2.2 Construção Tensorial de Bases para Triângulos

#### 2.2.1 Sistema de Coordenadas Baricêntricas

Devido à sua simetria rotacional, o uso de coordenadas de área para a construção de funções de interpolação para triângulos tem se tornado comum, embora não seja obrigatório (Sherwin e Karniadakis, 1995, Nogueira Jr., 2002).

A Figura 2.5 ilustra as coordenadas baricêntricas ou de área para triângulos. Dado um triângulo qualquer de área A e um ponto qualquer P, pode-se definir três sub-triângulos com áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , de tal maneira que a soma dessas áreas seja igual à área total do triângulo dado  $A = A_1 + A_2 + A_3$ , ver Figura 2.5(a).

Essas coordenadas de área  $L_i$  (i = 1, 2, 3), ver Figura 2.5(b), definidas no intervalo



(a) Subtriângulos. (b) Coordenadas de área. (c) Coordenadas ao longo de  $L_1$ .

Figura 2.5: Coordenadas baricêntricas para triângulos (Bittencourt, 1991).

[0, 1], ficam determinadas pela razão entre as áreas dos sub-triângulos e do triângulo original (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Cook et al., 1991):

$$\frac{A_1}{A} + \frac{A_2}{A} + \frac{A_3}{A} = 1 \to L_1 + L_2 + L_3 = 1.$$
(2.19)

Observa-se pela equação (2.19) que uma das coordenadas de área é dependente das outras duas.

#### 2.2.2 Produto Tensorial em Coordenadas Baricêntricas

Em (Bittencourt, 2005) foram apresentados procedimentos de construção tensorial através de polinômios unidimensionais expressos em coordenadas de área. Para uma base nodal Lagrangiana, as funções de forma para triângulos podem ser escritas como o produto tensorial dos polinômios de Lagrange nas coordenadas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  como:

$$N_a(L_1, L_2, L_3) = \tilde{l}_b^{(b-1)}(L_1)\tilde{l}_c^{(c-1)}(L_2)\tilde{l}_d^{(d-1)}(L_3).$$
(2.20)

Na expressão (2.20), a é o número do nó, b,  $c \in d$  são os índices das coordenadas nodais nas direções  $L_1$ ,  $L_2 \in L_3$ , respectivamente, como mostrado na Figura 2.5(c) para a direção  $L_1$ . Os termos  $\tilde{l}_b^{(b-1)}(L_1)$ ,  $\tilde{l}_c^{(c-1)}(L_2)$ ,  $\tilde{l}_d^{(d-1)}(L_3)$  representam os polinômios de Lagrange truncados nas coordenadas dos números indicados por b,  $c \in d$ , respectivamente, ao invés de considerar

a	1	2	3	4	5	6
b	3	1	1	2	1	2
с	1	3	1	2	2	1
d	1	1	3	1	2	2

Tabela 2.1: Triângulo quadrático: índices a b, c e d (Bittencourt, 1991).

todas as coordenadas  $P_i + 1$  em cada direção  $L_i$ . Esses polinômios podem ser escritos como:

$$\tilde{l}_{b}^{(b-1)}(L_{1}) = \frac{(L_{1} - L_{1_{1}})(L_{1} - L_{1_{2}})\cdots(L_{1} - L_{1_{b-1}})}{(L_{1_{b}} - L_{1_{1}})(L_{1_{b}} - L_{1_{2}})\cdots(L_{1_{b}} - L_{1_{b-1}})},$$

$$\widetilde{l}_{c}^{(c-1)}(L_{2}) = \frac{(L_{2} - L_{2_{1}})(L_{2} - L_{2_{2}})\cdots(L_{2} - L_{2_{c-1}})}{(L_{2_{c}} - L_{2_{1}})(L_{2_{c}} - L_{2_{2}})\cdots(L_{2_{c}} - L_{1_{c-1}})},$$
(2.21)

$$\tilde{l}_d^{(d-1)}(L_3) = \frac{(L_3 - L_{3_1})(L_3 - L_{3_2})\cdots(L_3 - L_{3_{d-1}})}{(L_{3_d} - L_{3_1})(L_{3_d} - L_{3_2})\cdots(L_{3_d} - L_{3_{d-1}})}$$

Dessa forma, os graus dos polinômios nas direções  $L_i$  não são  $P_i$  como seria esperado, mas b-1,  $c-1 \in d-1$  respectivamente. Esse é o principal ponto usado para obter as funções de forma nodais padrão para triângulos através de produto tensorial (Bittencourt, 2005). Os mesmos polinômios truncados são também usados em (Blyth e Pozrikidis, 2006).

A Figura 2.6 ilustra o processo de construção dos índices  $a, b, c \in d$  para um triângulo quadrático. Para esse processo os índices são apresentados na Tabela 2.1.



Figura 2.6: Triângulo quadrático (Bittencourt, 1991; Vazquez, 2004; Vazquez, 2008).

As funções de forma para triângulos podem ser escritas ainda em termos das entidades topológicas do triângulo (Figura 2.7(a)), que são 3 vértices  $(V_1, V_2, V_3)$ , 3 arestas  $(E_1, E_2, E_3)$  e uma face  $(F_1)$ .



Figura 2.7: Entidades topológicas do triângulo, índices p, q, r e associação entre entidades e índices. (Vazquez, 2008).

De modo geral, as funções de interpolação do triângulo são denotadas por:

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)$$
(2.22)

sendo  $0 \le p \le P_1, 0 \le q \le P_2, 0 \le r \le P_3$ , como ilustrado na Figura 2.7(b).

Assim, as funções de vértice são obtidas a partir da equação (2.22) e

$$N_{P_{1}00}(L_{1}, L_{2}, L_{3}) = \phi_{P_{1}}(L_{1})\phi_{0}(L_{2})\phi_{0}(L_{3}),$$

$$N_{0P_{2}0}(L_{1}, L_{2}, L_{3}) = \phi_{0}(L_{1})\phi_{P_{2}}(L_{2})\phi_{0}(L_{3}),$$

$$N_{00P_{3}}(L_{1}, L_{2}, L_{3}) = \phi_{0}(L_{1})\phi_{0}(L_{2})\phi_{P_{3}}(L_{3}).$$

$$(2.23)$$

Da mesma forma, as funções de aresta são dadas por:

$$N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3)0 
$$N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3)0 
$$N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) = \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3)0 < q < P_2, 0 < r < P_3.$$
(2.24)$$$$

Finalmente, as funções de face, para  $0 , <math>0 < q < P_2$ ,  $0 < r < P_3$ , são

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3).$$
(2.25)

Considerando o grau de aproximação igual a P nas três direções  $(P_1 = P_2 = P_3 = P)$ , tem-se portanto, 3 funções de vértice, 3(P-1) funções de aresta e  $\frac{1}{2}(P-1)(P-2)$  de face.

#### 2.2.3 Bases Nodais

Usando o sistema de coordenadas de área e as definições anteriores, uma base nodal pode ser construída usando a seguinte definição:

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0, \\ L_1 \mathcal{L}_p^{p-1}(L_1) & 0 (2.26)$$

onde  $\mathcal{L}_p^{p-1}(L_1)$  são os polinômios de Lagrange determinados, em coordenadas de área, por:

$$\mathcal{L}_{p}^{p-1}(L_{1}) = \frac{\prod_{q=1}^{p-1} (L_{1} - L_{1_{q}})}{\prod_{q=0}^{p-1} (L_{1_{p}} - L_{1_{q}})}.$$
(2.27)

A definição (2.26) também é válida para  $\phi_q(L_2)$  e  $\phi_r(L_3)$ . O uso dessa definição nas equações (2.23), (2.24) e (2.25) definem uma base nodal lagrangiana para triângulos (Vazquez, 2008).

Uma outra definição pode ser usada de modo que as funções de vértice sejam sempre lineares, independentemente do grau P usado na aproximação. Para isso, emprega-se a seguinte definição:

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0, \\ L_1 & p = P, \\ L_1 \mathcal{L}_p^{p-1}(L_1) & 0 (2.28)$$

#### 2.2.4 Bases Modais

Uma base modal para elementos triangulares pode ser construída usando-se uma definição similar à apresentada em (2.28), porém usando polinômios de Jacobi (Vazquez, 2008).

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = P, \\ L_1 & p = 0, \\ L_1 \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(2L_1 - 1) & 0 (2.29)$$

As definições (2.26), (2.28) e (2.29) foram escritas para a direção  $L_1$ , mas não representam uma base usada no processo de aproximação de soluções unidimensionais, são apenas usadas no processo de tensorização para triângulos, dado por (2.22). Definições análogas são usadas para  $\phi_q(L_2)$  e  $\phi_r(L_3)$ . Assim, nesse trabalho refere-se às funções de forma  $N_{pqr}(L_1, L_2, L_3)$ , construídas usando-se a definição (2.29), como base padrão (Vazquez, 2008).

Dessa forma, usando a definição dada pelas equações (2.23) a (2.25), pode-se escrever a base padrão em termos topológicos de vértice, aresta e face. Assim, os modos de vértice ficam determinados por:

$$N_{P_{1}00}(L_{1}, L_{2}, L_{3}) = L_{1},$$

$$N_{0P_{2}0}(L_{1}, L_{2}, L_{3}) = L_{2},$$

$$N_{00P_{3}}(L_{1}, L_{2}, L_{3}) = L_{3}.$$
(2.30)

Os modos de aresta para  $(P \geq 2)$  e (0 < p,q,r < P) são

$$N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1), p + q = P,$$
  

$$N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3} (2L_3 - 1), p + r = P,$$
  

$$N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) = L_2 L_3 P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3} (2L_3 - 1), q + r = P.$$
(2.31)

Finalmente, os modos de face para  $P \geq 3, p+q+r=P, \, 0 < p, q, r < P-1$ são

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 L_3 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha_3, \beta_3} (2L_3 - 1).$$
(2.32)

# 3 Técnicas Locais de Solução para o Problema de Poisson

No contexto de desenvolvimento de códigos computacionais para simulação em métodos de alta ordem, a identificação de técnicas que reduzam o número de iterações na aproximação de soluções, a demanda com armazenamento de matrizes e o uso de técnicas de solução locais tornam-se importantes.

Nesse sentido, quando se trabalha com alta ordem, é comum a aplicação do complemento de Schur às matrizes simétricas de massa e rigidez. Esse procedimento condensa os graus de liberdade internos da matriz do elemento, diminuindo o tamanho da matriz e melhorando seu condicionamento numérico (Vazquez, 2008).

Neste capítulo, estuda-se a possibilidade de se determinar, baseando-se na equivalência dos coeficientes para os problemas de Poisson e projeção (Vazquez, 2009), uma aproximação para os coeficientes internos de problemas de Poisson 1D e 2D. Resolve-se um problema de projeção local, baseado no termo fonte (termo que independe das condições de contorno do problema) de um carregamento dado. Essa aproximação é então usada como solução para os termos internos do problema de Poisson. O cálculo dos coeficientes aproximados no contorno, fica determinado pela solução convencional do problema de Poisson. Outra possibilidade é que essa aproximação dos coeficientes, através da solução de um problema de projeção, possa ser usada como solução inicial para aplicação do método de gradientes conjugados. Com isso, espera-se reduzir o número de iterações para a convergência da solução.

# 3.1 Problema de Projeção

No MEF, uma função contínua u é aproximada por uma combinação linear de funções, ou seja,

$$u \approx u_{ap} = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i \tag{3.1}$$

As funções  $\{\phi_i\}$  definem um espaço funcional, como mostrado na Figura 3.1, onde se encontra a solução aproximada  $u_{ap}$ .



Figura 3.1: Problema de projeção (Bargos, 2009).

Para esse problema, o erro da aproximação é mínimo quando o erro  $e = u - u_{ap}$  for ortogonal ao espaço definido por  $\{\phi_i\}$ , ou seja,

$$\int_{\Omega} e\phi_i d\Omega = 0, \tag{3.2}$$

 $com \ i = 1, ..., n.$ 

Fazendo-se  $e = u - u_{ap}$  e substituindo-se na equação (3.2), obtém-se

$$\int_{\Omega} (u - u_{ap}) \phi_i d\Omega = 0, \quad i = 1, ..., n.$$
(3.3)

Substituindo (3.1) em (3.3) tem-se

$$\sum_{i=0}^{n} (\int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega) a_i = \int_{\Omega} u \phi_j d\Omega, \quad j = 1, ..., n.$$
(3.4)

A equação (3.4) pode ser escrita como

$$\sum_{i=0}^{n} M_{ij} a_i = f_j^m, (3.5)$$

 $\operatorname{sendo}$ 

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega, \tag{3.6}$$

$$f_j^m = \int_{\Omega} u\phi_j d\Omega, \tag{3.7}$$

com  $M_{ij}$  os coeficientes da matriz de massa e  $f_j^m$  os elementos do vetor de carga associados à matriz de massa.

# 3.2 Problema de Poisson

Considere o problema de Poisson com condições de contorno de Dirichlet homogêneas, definido no domínio  $\Omega$ , ou seja,

$$\nabla^2 u = q, \quad \Omega,$$
  

$$u = 0, \quad \partial\Omega.$$
(3.8)

A forma fraca respectiva é dada por

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} q v d\Omega + \int_{\Gamma} (\nabla u . \mathbf{n}) v d\Gamma, \qquad (3.9)$$

onde q é o carregamento de corpo, v é a função teste e **n** o campo vetorial normal a cada ponto do contorno  $\Gamma$ .

Lembrando que em todo o contorno  $\Gamma$ , tem-se u = 0 e aplicando o Método de Galerkin  $(v = \phi_i)$  à equação (3.9), obtém-se

$$\sum_{i=0}^{n} \left( \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega \right) a_i = \int_{\Omega} q \phi_j d\Omega, \quad j = 1, ..., n.$$
(3.10)

A equação (3.10) pode ser escrita como

$$\sum_{i=0}^{n} K_{ij} a_i = f_j^k, \tag{3.11}$$

onde

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\Omega, \qquad (3.12)$$

е

$$f_j^k = \int_{\Omega} q\phi_j d\Omega. \tag{3.13}$$

As equações (3.12) e (3.13) determinam, respectivamente, os coeficientes da matriz de rigidez  $K_{ij}$  e os elementos do vetor de carga  $f_j^k$  associados à matriz de rigidez.

е

# 3.3 Norma

Através da solução dos sistemas de equações (3.5) e (3.11), determina-se a solução aproximada  $u_{ap}$  para uma determinada solução analítica u. O conceito de norma pode ser usado para se quantificar o erro da solução aproximada por meio de  $u_{ap}$ , obtida da solução do sistema de equações.

A norma  $L_2$  da solução aproximada para um problema de projeção é dada por

$$||u_{ap}||^2 = \{a\}^T [M]\{a\}, \tag{3.14}$$

onde [M] é a matriz de massa global.

Para a solução analítica imposta u, a norma  $L_2$  é dada por

$$||u||^2 = \int_{\Omega} u^2 d\Omega. \tag{3.15}$$

Para o problema de Poisson, a norma de energia da solução aproximada é

$$||u_{ap}||^2 = \{a\}^T [K]\{a\}, \tag{3.16}$$

onde [K] é a matriz de rigidez global.

Para a solução analítica imposta u, a norma de energia fica determinada fazendo-se

$$||u||^2 = \int_{\Omega} (\nabla u)^2 d\Omega. \tag{3.17}$$

Para ambos os problemas, o erro relativo pode ser calculado por

$$||e|| = \frac{||u - u_{ap}||}{||u||}.$$
(3.18)

# 3.4 Coeficientes de Aproximação em Problemas de Projeção e Poisson

Considere um elemento finito unidimensional representado no referencial  $x \in [0, 1]$ . Sejam ainda os problemas de interpolação locais

$$u(x) = -f(x),$$
 (3.19)

$$u''(x) = -q(x). (3.20)$$

onde  $u(x) \in u^{"}(x)$  são as funções incógnitas e as funções  $f(x) \in q(x)$  os termos independentes, de modo que

$$q(x) = f''(x).$$
 (3.21)

Seja uma base qualquer  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  com *n* funções de interpolação. Nesse caso, o único coeficiente não-nulo da matriz do Jacobiano é  $x_{\xi_1}(\xi_1)$ . Portanto,

$$[J] = x_{\xi_1}(\xi_1). \tag{3.22}$$

Aplicando-se as definições de aproximação por elementos finitos e usando o Método de Galerkin, as projeções das equações (3.19) e (3.20), escritas na forma matricial, ficam determinadas por (Vazquez, 2009)

$$[M_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^m\},\tag{3.23}$$

$$[K_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^k\}.$$
(3.24)

onde  $[M_{1D}]$  e  $[K_{1D}]$  são matrizes simétricas de massa e rigidez obtidas, respectivamente por

$$M_{ij}^{1D} = \int_{-1}^{1} \phi_i(\xi_1) \phi_j(\xi_1) |J| d\xi_1$$
(3.25)

$$K_{ij}^{1D} = \int_{-1}^{1} \phi_{i,\xi_1}(\xi_1) \phi_{j,\xi_1}(\xi_1) |J| d\xi_1$$
(3.26)

Os termos  $\{f_{1D}^m\}$  e  $\{f_{1D}^k\}$  são os vetores do termo de carregamento unidimensional, respectivamente associados à matriz de massa e à matriz de rigidez e determinados através das equações (3.7) e (3.13).

Em (Vazquez, 2009), verificou-se que para soluções contínuas e suaves, o vetor solução  $\{a\}$  é o mesmo para ambos os problemas representados pelas equações (3.23) e (3.24).

Para ilustrar esse fato, considere uma solução analítica  $u(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ , satisfazendo u(0) = 0. Os coeficientes para o vetor solução dos problemas de projeção (3.23) e Poisson (3.24), usando polinômios de Jacobi com  $\alpha = 1$  e  $\beta = 1$  e P = 6, são apresentados na Tabela 3.1.

A norma  $L_2$  da solução teórica é ||u|| = 0,3651483716701107 e a de energia é ||u|| = 0,5773502691896257. O erro relativo para ambos os problemas é nulo, usando-se uma aproximação com polinômios de grau maior ou igual a 2.

Essa igualdade para os coeficientes de ambos os problemas, do ponto de vista de problemas reais, torna-se interessante uma vez que nesses casos apenas  $f'(x) \in q(x)$  são conhecidos.

	Coeficientes de projeção	Coeficientes de Poisson
1	$1,057629477510960 \times 10^{-15}$	0
2	0,50000000000013	0,500000000000000000000000000000000000
3	0,4999999999999930	0,499999999999999998
4	$-6,400519762632873 \times 10^{-16}$	$1,572093150103706 \times 10^{-17}$
5	$-4,727210617548746 \times 10^{-15}$	$-2,023844055306375 \times 10^{-17}$
6	$-5,034729957161716 \times 10^{-16}$	$-8,391724815037696 \times 10^{-17}$
7	$-2,854199804743424 \times 10^{-15}$	$-9,361608710456464 \times 10^{-16}$

Tabela 3.1: Coeficientes para os problemas de projeção e Poisson, usando polinômios de Jacobi para  $u(x) = -\frac{x^2}{2} + x$ .

#### 3.4.1 Método Proposto para Problemas Unidimensionais

Conhecendo-se apenas os termos de carregamento e as condições de contorno de um problema em geral, estudou-se a possibilidade de se obter, através da solução de um problema de projeção, usando apenas a contribuição do termo fonte do problema em questão (termo da solução analítica que independe das condições de contorno do problema), uma aproximação para os coeficientes internos dos elementos finitos unidimensionais para um problema de Poisson.

Assim, da relação (3.21) e ainda conhecendo q(x), o termo de carregamento para o problema de projeção é dado por

$$f(x) = \int \int q(x)dxdx + C_1x + C_2, \qquad (3.27)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação anterior, representa a integral dupla da carga q(x) sem considerar as constantes de integração (termo fonte).

Desprezando-se as contribuições dos termos que dependem das constantes  $C_1$  e  $C_2$ , o carregamento, para o problema de projeção, considerando-se apenas o termo fonte, pode ser escrito por

$$f_{prop}(x) = \int \int q(x) dx dx.$$
(3.28)

Assumindo-se  $f(x) = f_{prop}(x)$  na equação (3.19), os elementos do vetor de carga associados à matriz de massa  $\{f_{1D}^m\}$  podem ser calculados usando-se a equação (3.7). Conhecendo-se a matriz de massa local, os coeficientes da aproximação podem ser determinados localmente resolvendo-se a equação (3.23). Esse fato torna-se interessante na medida em que grande parte do esforço no cálculo da aproximação de um problema de Poisson é empregado na resolução de termos internos, principalmente em malhas tridimensionais. Outro ponto interessante do método, é que a solução do problema de projeção proposto para os termos internos é feita a nível local, o que do ponto de vista computacional diminui os custos com armazenamento de matrizes globais, tornando o algoritmo mais eficiente, uma vez que os sistemas de equações resolvidos envolvem matrizes de menor dimensão.

#### 3.4.2 Casos de validação

A seguir, apresenta-se a aplicação da técnica proposta para alguns casos de validação unidimensionais. Para verificar a convergência do método, consideram-se testes com diferentes funções, cada uma delas com características específicas, quanto às constantes de integração e condições de contorno no domínio. Para cada caso, os termos internos para o problema de Poisson foram aproximados resolvendo-se o problema de projeção equivalente, usando-se apenas o termo fonte como aproximação da solução analítica. Os termos de vértice foram obtidos resolvendo-se o problema convencional de Poisson.

#### 3.4.3 Caso 1

Dado o carregamento  $q(x) = -30x^4$ , com condições de contorno u'(1) = 0 e u(0) = 0, a solução convencional para o problema de projeção é dada pela solução da equação (3.23), onde o vetor dos termos de carregamento é calculado fazendo-se f(x) igual à solução analítica para o problema dado, ou seja,  $f(x) = u(x) = -x^6 + 6x$  na equação (3.7). Resolvendo-se o problema de projeção para uma malha unidimensional formada por dois elementos e com P = 6, como mostra a Figura 3.2, pelo método convencional e com o método proposto, onde o carregamento é expresso por

$$f_{prop} = \int \int q(x) dx dx,$$
  

$$f_{prop} = -x^{6},$$
(3.29)

verifica-se uma igualdade para os termos internos em cada elemento, como mostra a Tabela 3.2.



Figura 3.2: Malha unidimensional com dois elementos e P = 6, para o caso 1.

	Coeficientes de projeção convencional	Coeficientes de projeção proposto
1	$1,903635937714726 \times 10^{-15}$	$-3,186890520727778 \times 10^{-18}$
2	2,98437500000021	$-1,562499999999996\times 10^{-2}$
3	5,0000000000027	-0,9999999999999959
4	$3,348214285712952 \times 10^{-2}$	$3,348214285714279 \times 10^{-2}$
5	$1,395089285714155  imes 10^{-2}$	$1,395089285714279 \times 10^{-2}$
6	$4,34027777768471 \times 10^{-3}$	$4,340277777777737 \times 10^{-3}$
7	$8,370535714274429 \times 10^{-4}$	$8,370535714285389 \times 10^{-4}$
8	$7,440476189936840  imes 10^{-5}$	$7,440476190473886 \times 10^{-5}$
9	1,345982142856946	1,345982142857131
10	0,2762276785714621	0,2762276785714191
11	$3,55902777764939 \times 10^{-2}$	$3,55902777776980 \times 10^{-2}$
12	$2,511160714303708 \times 10^{-3}$	$2,511160714280282 \times 10^{-3}$
13	$7,440476183341530 \times 10^{-5}$	$7,440476190045995 \times 10^{-5}$

Tabela 3.2: Coeficientes para os problemas de projeção convencional e projeção proposto usando apenas o termo fonte da solução analítica  $u(x) = -x^6 + 6x$  para malha com dois elementos, P = 6 e usando polinômios de Jacobi.

Considerando a equivalência, apresentada em (Vazquez, 2009), entre os coeficientes do vetor solução  $\{a\}$  para os problemas de projeção e Poisson, assume-se a solução, obtida para os termos internos usando-se o método proposto no problema de projeção, como solução para os termos do problema de Poisson com carregamento  $q(x) = -30x^4$ . Nesse caso, os termos de vértice são calculados resolvendo-se o problema convencional de Poisson, equação (3.24). A Figura 3.3 mostra o erro relativo para soluções aproximadas pelo método convencional de solução do problema de Poisson e pelo método proposto, baseado na aproximação dos coeficientes do vetor solução do problema de Poisson, associados aos nós internos, pela solução de um problema de projeção local, usando-se apenas o termo fonte para o cálculo do vetor de carregamento. Nesse caso, usou-se polinômios de Jacobi com P = 1 a P = 6. Para ambos os casos, observa-se uma convergência exponencial da solução.



Figura 3.3: Erro relativo para problema de Poisson com  $u(x) = -x^6 + 6x$ .

A taxa de convergência inferior apresentada pela aproximação usando a técnica proposta se deve à natureza mista dos coeficientes propostos, ou seja, a igualdade dos coeficientes para o problema de projeção e Poisson fica bem estabelecida, quando a aproximação é feita com ordem polinomial próxima ou superior à ordem da solução exata. Assim, o fato de *u* ter um grande número de coeficientes para o vetor solução proposto, obtidos através da solução de um problema de projeção, influencia na taxa de convergência.

#### 3.4.4 Caso 2

Seja  $u(x) = \frac{4}{\pi^2}x^2(x-1)^2\sin(\pi x)$ , com condições de contorno homogêneas u(0) = 0 e u'(1) = 0, a solução analítica para o problema de projeção, de modo que o carregamento seja q(x) = u''(x). Para esse problema, as constantes de integração, devido às condições de contorno do problema, são nulas e dessa forma o termo fonte coincide com a solução exata. Resolvendo o problema de projeção para malhas com 2, 4, 8 e 10 elementos, e considerando a equivalência da solução, para os problemas de projeção e Poisson, assume-se a solução, obtida para os termos internos usando-se o método proposto, como solução para os termos internos do problema de Poisson com carregamento q(x) = u''(x). Nesse caso, os termos de vértice são calculados resolvendo-se o problema convencional de Poisson. A Figura 3.4 mostra o erro relativo para soluções aproximadas pelo método convencional de solução do problema de Poisson e pelo método proposto, usando-se polinômios de Jacobi com P = 1 a P = 10 para malhas com diferentes número de elementos. Nota-se taxas de convergência exponencial para todas as malhas.

#### 3.4.5 Caso 3

Dado o carregamento  $q(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}x)$ , com condições de contorno homogêneas u'(1) = 0 e u(0) = 0, a solução analítica para o problema de projeção é dada por  $u(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin(\frac{\pi}{2}x)$ . Observe que nesse caso, a solução analítica para o carregamento dado não é nula em x = 1, ou seja,  $u(1) = \frac{4}{\pi^2}$ , mesmo sendo nulas as constantes de integração como no caso anterior. Resolvendo o problema de projeção para malhas com 2 e 4 elementos. Considera-se a equivalência da solução, para os problemas de projeção e Poisson, assume-se a solução, obtida para os termos internos usando-se o método proposto, como solução para os termos internos do problema de Poisson com carregamento  $q(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}x)$ . Nesse caso, os termos de vértice são calculados resolvendo-se o problema convencional de Poisson. A Figura 3.5 mostra o erro relativo para soluções aproximadas pelo método convencional de solução do problema de Poisson e pelo método proposto, usando-se polinômios de Jacobi com P = 1a P = 10 para malhas com diferentes número de elementos. Em todos os casos, observa-se uma convergência exponencial da solução.



Figura 3.4: Erro relativo para problema de Poisson com  $u(x) = \frac{4}{\pi^2}x^2(x-1)^2\sin(\pi x)$ .



Figura 3.5: Erro relativo para problema de Poisson com  $u(x) = \frac{4}{\pi^2} \sin(\frac{\pi}{2}x)$ .

#### 3.4.6 Caso 4

Considera-se agora um caso mais geral, envolvendo uma carga axial pontual aplicada em x = 1 como ilustrado na Figura 3.6. Dado o carregamento  $q(x) = -30x^4$ , com condições de contorno u'(1) = 1 e u(0) = 0, a solução analítica para o problema de projeção é dada por  $u(x) = -x^6 + 7x$ . Resolvendo-se o problema de projeção, para uma malha unidimensional formada por dois elementos, pelo método convencional, ou seja, com

$$f(x) = u(x) = -x^6 + 7x,$$
(3.30)

e com o método proposto, onde o carregamento para o problema de projeção é expresso por

$$f(x) = f_{prop}(x) = \int \int q(x) dx dx = -x^{6},$$
(3.31)

verifica-se uma igualdade para os termos internos em cada elemento, como mostra a Tabela 3.3.



Figura 3.6: Malha unidimensional com dois elementos sujeita a uma carga pontual no último nó de vértice.

Observa-se que a aplicação de uma carga nodal na extremidade (nó de vértice) da malha não influencia na aproximação dos coeficientes internos da malha obtidos através da solução do método de projeção proposto, uma vez que para essa técnica apenas os nós interiores são utilizados na aproximação dos coeficientes do problema de Poisson. Na Tabela 3.4 são apresentados os coeficientes para o método convencional de solução do problema de Poisson e os obtidos pelo método proposto.

As soluções analíticas usadas, em cada caso de validação, foram construídas de modo que cada uma delas apresentasse características específicas quanto às constantes de integração e condições de contorno no domínio. Observa-se assim que a aplicação do método à problemas unidimensionais se mostrou satisfatória para os diferentes tipos de problemas analisados.

	Coeficientes de projeção convencional	Coeficientes de projeção proposto
1	$1,060597165298204 \times 10^{-14}$	$-3,186890520727778 \times 10^{-18}$
2	3,484374999999989	$-1,562499999999996\times 10^{-2}$
3	6,0000000000003	$-0,9999999999999959 \times$
4	$3,348214285711012  imes 10^{-2}$	$3,348214285714279 \times 10^{-2}$
5	$1,395089285716577  imes 10^{-2}$	$1,395089285714279 \times 10^{-2}$
6	$4,340277777757268 \times 10^{-3}$	$4,340277777777737 \times 10^{-3}$
7	$8,370535714405055  imes 10^{-4}$	$8,370535714285389 \times 10^{-4}$
8	$7,440476189299259  imes 10^{-5}$	$7,440476190473886 \times 10^{-5}$
9	1,345982142857204	1,345982142857131
10	$2,762276785713726 \times 10^{-1}$	$2,762276785714191 \times 10^{-1}$
11	$3,559027777781542 \times 10^{-2}$	$3,55902777776980 \times 10^{-2}$
12	$2,511160714258160 \times 10^{-3}$	$2,511160714280282 \times 10^{-3}$
13	$7,440476192296506 \times 10^{-5}$	$7,440476190045995 \times 10^{-5}$

Tabela 3.3: Coeficientes para os problemas de projeção convencional e projeção proposto usando apenas o termo fonte da solução analítica  $u(x) = -x^6 + 7x$  com carga nodal F = 1, aplicada em x = 1, para malha com dois elementos.

	Coeficientes de Poisson convencional	Coeficientes de Poisson proposto
1	0	0
2	3,48437500000001	3,48437500000001
3	6,00000000000001	6,000000000000001
4	$3,348214285714292 \times 10^{-2}$	$3,348214285714279 \times 10^{-2}$
5	$1,395089285714298 \times 10^{-2}$	$1,395089285714279 \times 10^{-2}$
6	$4,34027777778227 \times 10^{-3}$	$4,3402777777777737 \times 10^{-3}$
7	$8,370535714286798 \times 10^{-4}$	$8,370535714285389 \times 10^{-4}$
8	$7,440476189848625 \times 10^{-5}$	$7,440476190473886 \times 10^{-5}$
9	1,345982142857143	1,345982142857131
10	$2,762276785714287 \times 10^{-1}$	$2,762276785714191 \times 10^{-1}$
11	$3,55902777777796 \times 10^{-2}$	$3,55902777776980 \times 10^{-2}$
12	$2,511160714285659 \times 10^{-3}$	$2,511160714280282 \times 10^{-3}$
13	$7,440476189961343 \times 10^{-5}$	$7,440476190045995  imes 10^{-5}$

Tabela 3.4: Coeficientes para os problemas de Poisson convencional e Poisson proposto com  $u''(x) = -30x^4$  e carga nodal F = 1, aplicada em x = 1, para malha com dois elementos.

### 3.5 Problemas Bidimensionais

Seja agora um elemento finito bidimensional definido no domínio quadrangular  $\Omega = [x, y] \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Definem-se os problema de interpolação bidimensional no elemento como

$$u(x,y) = -f(x,y), (3.32)$$

$$\nabla^2 u(x,y) = -q(x,y). \tag{3.33}$$

Dada uma base qualquer  $\{\phi_i(x, y)\}_{i=1}^n$ , com *n* funções de interpolação, e aplicandose as definições de aproximação por elementos finitos, usando-se o Método de Galerkin, as projeções das equações (3.32) e (3.33), escritas na forma matricial, ficam determinadas por (Vazquez, 2009)

$$[M_{2D}]\{a\} = \{f_{2D}^m\},\tag{3.34}$$

$$[K_{2D}]\{a\} = \{f_{2D}^k\},\tag{3.35}$$

onde  $\{f_{2D}^m\}$  e  $\{f_{2D}^k\}$  são, respectivamente, os vetores dos termos de carregamento das matrizes de massa e rigidez do quadrado e  $[M_{2D}]$  e  $[K_{2D}]$  são matrizes simétricas de massa e rigidez, cujos coeficientes são obtidos, respectivamente, através das equações

$$M_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \phi_i(\xi_1, \xi_2) \phi_j(\xi_1, \xi_2) |J| d\xi_1 d\xi_2, \qquad (3.36)$$

$$K_{ij}^{2D} = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [\phi_{i,\xi_1}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_1}(\xi_1,\xi_2) + \phi_{i,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)\phi_{j,\xi_2}(\xi_1,\xi_2)] |J| d\xi_1 d\xi_2.$$
(3.37)

#### 3.5.1 Casos de validação

Tendo em vista os resultados obtidos com a aplicação da técnica para problemas unidimensionais, estudou-se a aplicação desses procedimentos a problemas bidimensionais. Assumindo-se a equivalência dos coeficientes para os problemas de projeção e Poisson, apresenta-se um estudo para dois casos envolvendo malhas bidimensionais estruturadas aplicandose diferentes funções analíticas definidas no domínio  $\Omega = [x, y] \in [0, 1] \times [0, 1]$  e usando elementos quadrados. Procurou-se verificar com os testes, a validade para malhas bidimensionais estruturadas da técnica apresentada para domínios unidimensionais. Mostra-se que, para malhas estruturadas, os coeficientes internos ou de face dos elementos da malha são aproximados de forma satisfatória quando se resolve um problema de projeção utilizando-se apenas o termo fonte para uma dada solução analítica.

#### 3.5.2 Caso 1

Dado  $q(x, y) = (x^2 - x) + (y^2 - y)$ , satisfazendo u = 0 no contorno. A solução analítica para o problema de projeção é dada por  $u(x, y) = \frac{1}{2}xy(x-1)(y-1)$  e está ilustrada na Figura 3.7.



Figura 3.7: Função analítica,  $u(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - x)(y^2 - y)$ .

Resolvendo-se o problema de projeção, para uma malha estruturada com quatro elementos e usando-se polinômios de Jacobi com P = 2, pelo método convencional, ou seja, com

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 - x)(y^2 - y), \qquad (3.38)$$

e com o método proposto, onde o carregamento para o problema de projeção é expresso por

$$f(x,y) = f_{prop}(x,y) = \frac{1}{2} (\int \int (y^2 - y) dx dx + \int \int (x^2 - x) dy dy),$$
(3.39)

$$= \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{4}x^2y,$$

verifica-se uma boa aproximação para os termos internos em cada elemento, como mostra a Tabela 3.5 para os termos internos mostrados na Figura 3.8(a).

A introdução do termo constante  $\frac{1}{2}$ , na equação (3.39), é necessária para satisfazer  $\nabla^2 u = q(x, y)$ . Sabendo-se que os coeficientes estão organizados em vértices, aresta e internos,

	Coeficientes de projeção	Coeficientes de Poisson	Coeficientes de projeção proposto
1	$-3,622792100375840 \times 10^{-17}$	0	$9,711114224141902 \times 10^{-18}$
2	$1,566864265561427 \times 10^{-16}$	0	$-1,791778337656790 \times 10^{-17}$
3	$-1,426066667290423 \times 10^{-17}$	0	$5,140898694635257 \times 10^{-17}$
4	$2,317901520792959 \times 10^{-16}$	0	$-7,303645364489235 \times 10^{-16}$
5	$-3,513008641239352 \times 10^{-17}$	0	$1,562407182686646 \times 10^{-16}$
6	$1,999972352474122 \times 10^{-16}$	0	$-6,25000000000083\times 10^{-2}$
7	$3,511667862146459 \times 10^{-17}$	0	$-6,249999999999967\times 10^{-2}$
8	$-4,938138022558907 \times 10^{-16}$	0	$-6,25000000000172 \times 10^{-2}$
9	$7,135964393608116 \times 10^{-17}$	0	$9,013887592422959 \times 10^{-17}$
10	$-6,001481593034675 \times 10^{-16}$	0	$-6,249999999999991\times 10^{-2}$
11	$3,645130913615459 \times 10^{-17}$	0	$-6,249999999999989 \times 10^{-2}$
12	$5,323872070831070 \times 10^{-16}$	0	$-6,25000000000186\times 10^{-2}$
13	$-1,172600611528766 \times 10^{-16}$	0	$3,243932900076630 \times 10^{-16}$
14	$6,909396813237034 \times 10^{-16}$	0	$-1,365151349310096 \times 10^{-15}$
15	$-1,049507702965969 \times 10^{-16}$	0	$9,336902282878643 \times 10^{-17}$
16	$2,560113345536248 \times 10^{-16}$	0	$-6,836666320466117 \times 10^{-17}$
17	$3,124999999999869 \times 10^{-2}$	$3,125000 \times 10^{-2}$	$3,12500000000044 \times 10^{-2}$
18	$3,12500000000011 \times 10^{-2}$	$3,1250000 \times 10^{-2}$	$-3,201740694359967 \times 10^{-16}$
19	$3,124999999999869 \times 10^{-2}$	$3,124999 \times 10^{-2}$	$3,12500000000396 \times 10^{-2}$
20	$3,12500000000053 \times 10^{-2}$	$3,124999 \times 10^{-2}$	$-4,935322261027478 \times 10^{-16}$
21	$3,124999999999976 \times 10^{-2}$	$3,125000 \times 10^{-2}$	$-3,12499999999983 \times 10^{-2}$
22	$3,1249999999999693 \times 10^{-2}$	$3,125000 \times 10^{-2}$	$-1,689755370495320 \times 10^{-15}$
23	$3,124999999999975 \times 10^{-2}$	$3,124999 \times 10^{-2}$	$3,12500000000747 \times 10^{-2}$
24	$3,12500000000396\times 10^{-2}$	$3,125000 \times 10^{-2}$	$-1,056852682688373 \times 10^{-15}$
25	$3,12500000000396 \times 10^{-2}$	$3,125000 \times 10^{-2}$	$3,12500000000747 \times 10^{-2}$

Tabela 3.5: Coeficientes para os problemas de projeção, Poisson e projeção proposto usandose o termo fonte da solução analítica  $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - x)(y^2 - y)$  para um problema bidimensional com malha de 4 elementos e P = 2.



(b) 6 elementos.

Figura 3.8: Malhas de elementos quadrados formada por quatro e seis elementos com P = 2.

observa-se que para os nós 17, 19, 23 e 25 da Figura 3.8(a), o método proposto ajustou de forma satisfatória os coeficientes no problema de projeção. Um comportamento semelhante para os coeficientes associados aos nós internos foi observado para uma malha com um número maior de elementos, Figura 3.8(b), como mostrado na Tabela 3.6.

	Coeficientes de projeção	Coeficientes de Poisson	Coeficientes de projeção proposto
21	$1,388888888888888896 \times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$1,388888888888888896 \times 10^{-2}$
22	$2,777777777777745 \times 10^{-2}$	$2,7777777777777 \times 10^{-2}$	$6,944444444444526 \times 10^{-3}$
23	$1,388888888889160 \times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$1,388888888888888896\times 10^{-2}$
24	$2,777777777777733 \times 10^{-2}$	$2,7777777777777 \times 10^{-2}$	$-1,3888888888888912 \times 10^{-2}$
25	$1,3888888888889160 \times 10^{-2}$	$1.38888888888 \times 10^{-2}$	$1,388888888889160  imes 10^{-2}$
26	$1,388888888888844 \times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$2,332493755244780 \times 10^{-16}$
27	$2,77777777777777787 \times 10^{-2}$	$2,7777777777777 \times 10^{-2}$	$-2,0833333333333349 \times 10^{-2}$
28	1,38888888888888847 $\times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$1,386955907812307 \times 10^{-15}$
29	$2,7777777777777784 \times 10^{-2}$	$2,7777777777777 \times 10^{-2}$	$-4,166666666666695 \times 10^{-2}$
30	$1,3888888888888859 \times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$1,318448572084491 \times 10^{-15}$
31	$1,3888888888889028 \times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$1,388888888888632 \times 10^{-2}$
32	$2,7777777777777750 \times 10^{-2}$	$2,7777777777777 \times 10^{-2}$	$6,944444444445706  imes 10^{-3}$
33	$1,388888888888888896 \times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$1,388888888887579  imes 10^{-2}$
34	$2,777777777777785 \times 10^{-2}$	$2,7777777777777 \times 10^{-2}$	$-1,3888888888888591 \times 10^{-2}$
35	$1,388\overline{888888888896} \times 10^{-2}$	$1,38888888888 \times 10^{-2}$	$1,3888888888887579 \times 10^{-2}$

Tabela 3.6: Coeficientes internos da malha para os problemas de projeção, Poisson e projeção proposto usando o termo fonte da solução analítica  $u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - x)(y^2 - y)$  para um problema bidimensional com malha de 6 elementos e P = 2.

#### 3.5.3 Caso 2

Para o teste apresentado nesta seção, usou-se o conjunto de malhas mostrado na Figura 3.8, variando-se a solução imposta no domínio.

Assim, dado q(x, y) = x, com uma carga em uma das arestas, de modo que  $u(1, y) = \frac{1}{2}(y^2 - y)$ , como mostra a Figura 3.9, a solução analítica para o problema de projeção é dada por  $u(x, y) = \frac{1}{2}x(y^2 - y)$ .

Os coeficientes aproximados, aplicando-se a técnica proposta para a solução de um problema de projeção considerando apenas o termo fonte, de tal maneira que  $f(x,y) = f_{prop}(x,y) = \frac{1}{2}xy^2$ , são apresentados na Tabela 3.7 e comparados com os coeficientes da solução de um problema de projeção convencional para uma malha estruturada com quatro



Figura 3.9: Função analítica,  $u(x,y) = \frac{1}{2}x(y^2 - y)$ .

elementos e P=2como mostrado na Figura 3.8(a), usando-se polinômios de Jacobi com  $\alpha=\beta=1.$ 

A norma da solução teórica e o erro relativo para o problema de projeção convencional são dados, respectivamente, por ||u|| = 0,0527046276 e  $||e_{Projecão}|| = 1,31656255 \times 10^{-16}$ .

De acordo com a Tabela 3.7, observa-se que uma boa aproximação foi obtida para os nós internos dos elementos (nós 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24 e 25 da Figura 3.8(a)) quando comparase os coeficientes aproximados em um problema de projeção pelo método convencional e usando-se apenas o termo fonte da solução analítica. Além disso, nesse caso, os coeficientes associados aos nós de aresta com condição de contorno imposta (nós 6 e 8 da Figura 3.8(a)) também foram aproximados.

Para a malha com um maior número de elementos (Figura 3.8(b)), um comportamento semelhante foi obtido, como observado na Tabela 3.8. De modo geral, nos casos analisados para malhas bidimensionais estruturadas, observou-se uma boa aproximação para os termos associados aos nós internos dos elementos, resolvendo-se um problema de projeção local, baseado na aproximação da solução analítica por um termo fonte, que independe das condições de contorno do problema para um carregamento dado. Do mesmo modo que em problemas unidimensionais, verificou-se que a técnica pode ser aplicada para a aproximação da solução de um problema de Poisson, determinando-se os coeficientes da aproximação associados aos nós internos dos elementos por um problema de projeção local.

	Coeficientes de projeção	Coeficientes de projeção proposto
1	$1,066276910571977 \times 10^{-16}$	$-1,696671014887824 \times 10^{-16}$
2	$-7,513521055324441 \times 10^{-16}$	$1,005055413894041 \times 10^{-15}$
3	$-4,176238202097798 \times 10^{-17}$	$-3,006342528694372 \times 10^{-16}$
4	$8,391724815037587 \times 10^{-16}$	$2,322361053463907 \times 10^{-15}$
5	$-7,211110073938366 \times 10^{-17}$	$-4,086295708565074 \times 10^{-16}$
6	-0,1249999999999993	-0,1249999999999976
7	-0,1250000000000001	0,1249999999999987
8	-0,1249999999999987	-0,1249999999999889
9	$-2,426431679346830 \times 10^{-16}$	0,4999999999999978
10	$2,498001805406563 \times 10^{-15}$	$1,077263278581581 \times 10^{-14}$
11	$-3,026165545668931 \times 10^{-16}$	0,249999999999999990
12	$-5,074066167232054 \times 10^{-16}$	$2,419939248987605 \times 10^{-15}$
13	$6,277530578690893 \times 10^{-17}$	$-3,730197574436310 \times 10^{-16}$
14	$-4,391018798566193 \times 10^{-16}$	$2,336997782792464 \times 10^{-15}$
15	$6,047137617037812 \times 10^{-17}$	$-3,391926496620884 \times 10^{-16}$
16	$-4,342229700804344 \times 10^{-16}$	$1,161180526731955 \times 10^{-15}$
17	$3,512815038852974 \times 10^{-15}$	$-7,025630077705947 \times 10^{-15}$
18	$-6,249999999999946\times 10^{-2}$	$-6,249999999999814\times 10^{-2}$
19	$-7,025630077705947 \times 10^{-15}$	$-1,405126015541189 \times 10^{-14}$
20	$-5,122855264993902 \times 10^{-16}$	$1,946685000697691 \times 10^{-15}$
21	$-6,25000000000015 \times 10^{-2}$	$6,2499999999999929 \times 10^{-2}$
22	$1,434399474198291 \times 10^{-15}$	$6,664590754268290 \times 10^{-15}$
23	$3,512815038852974 \times 10^{-15}$	$-1,405126015541189 \times 10^{-14}$
24	$-6,24\overline{9999999999838} \times 10^{-2}$	$-6,2\overline{49999999999464 \times 10^{-2}}$
$\overline{25}$	$-1,405126015541189 \times 10^{-14}$	$-5,620504062164758e \times 10^{-14}$

Tabela 3.7: Coeficientes para os problemas de projeção e projeção proposto usando o termo fonte da solução analítica  $u(x, y) = \frac{1}{2}x(y^2 - y)$  para um problema bidimensional com malha de 4 elementos e P = 2.

	Coeficientes de projeção	Coeficientes de projeção proposto
1	$-5,708212574383923 \times 10^{-17}$	$-8,081630524246372 \times 10^{-18}$
2	$4,000706016471569 \times 10^{-16}$	$8,538092108323306 \times 10^{-17}$
3	$-1,047097702943090 \times 10^{-16}$	$1,369831972068876 \times 10^{-16}$
4	$5,464378949327043 \times 10^{-16}$	$-1,502704211064930 \times 10^{-15}$
5	$-2,258375223303800 \times 10^{-16}$	$1,924023547987298 \times 10^{-16}$
6	$2,419939248987686 \times 10^{-15}$	$-3,317658647805724 \times 10^{-16}$
7	$-3,900698452042505 \times 10^{-16}$	$2,207942520024059 \times 10^{-17}$
8	-0,1249999999999966	-0,125000000000008
9	-0,1250000000000008	0,12500000000014
10	-0,124999999999999999999999999999999999999	-0,12500000000123
11	$-3,450256819115497 \times 10^{-16}$	0,50000000000018
12	$2,419939248987664 \times 10^{-15}$	$-1,327063459122267 \times 10^{-14}$
13	$-3,340841424026823 \times 10^{-16}$	0, 3333333333333352
14	$1,190453985389094 \times 10^{-15}$	$-3,610393234376755 \times 10^{-15}$
15	$-1,954659524421768 \times 10^{-16}$	$1,66666666666666676 \times 10^{-1}$
16	$1,102633609417766 \times 10^{-15}$	$-4,956972332603756 \times 10^{-15}$
17	$-2,306098020876691 \times 10^{-16}$	7,871307772244828e - 16
18	$1,551493308826772 \times 10^{-15}$	$-3,278627369596205 \times 10^{-15}$
19	$-1,899206869664295 \times 10^{-16}$	$2,534050926431228 \times 10^{-16}$
20	$4,391018798566343 \times 10^{-16}$	$-1,390489286212673 \times 10^{-16}$
21	$-2,634611279139799 \times 10^{-15}$	$6,586528197849498 \times 10^{-16}$
22	$-4,1666666666666594\times 10^{-2}$	$-4,1666666666666771 \times 10^{-2}$
23	$-5,269222558279598 \times 10^{-15}$	$1,053844511655920 \times 10^{-14}$
24	$-8,3333333333333126 \times 10^{-2}$	$-8,3333333333333487 \times 10^{-2}$
25	$-2,107689023311839 \times 10^{-14}$	$5,269222558279598 \times 10^{-15}$
26	$1,014813233446442 \times 10^{-15}$	$-1,601502134032672 \times 10^{-15}$
27	$-4,1666666666666689 \times 10^{-2}$	$4,16666666666666712 \times 10^{-2}$
28	$1,571008947931511 \times 10^{-15}$	$-2,995650602577479 \times 10^{-15}$
29	$-8,33333333333333387 \times 10^{-2}$	$8,333333333333448 \times 10^{-2}$
30	$4,878909776184808 \times 10^{-15}$	$-8,908889251313488 \times 10^{-15}$
31	$-7,903833837419398 \times 10^{-15}$	$2,107689023311839 \times 10^{-14}$
32	$-4,1666666666666510\times 10^{-2}$	$-4,16666666666667084\times 10^{-2}$
33	$-1,053844511655920 \times 10^{-14}$	$2,107689023311839 \times 10^{-14}$
34	$-8,3333333333333048\times 10^{-2}$	$-8,333333333334435\times 10^{-2}$
35	$-2,107689023311839 \times 10^{-14}$	$8,430756093247357 \times 10^{-14}$

Tabela 3.8: Coeficientes para os problemas de projeção e projeção proposto usando o termo fonte da solução analítica  $u(x, y) = \frac{1}{2}x(y^2 - y)$  para um problema bidimensional com malha de 6 elementos e P = 2.

# 4 Tensorização de Matrizes de Massa e Rigidez Unidimensionais para Triângulos

Neste capítulo, apresenta-se o processo de construção de matrizes de massa e rigidez unidimensionais em coordenadas naturais. Propõe-se uma extensão do método de construção de matrizes simétricas de massa e rigidez bidimensionais, para triângulos, através do produto de matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez, usando-se coordenadas baricêntricas. Discute-se a possibilidade da substituição das matrizes unidimensionais de massa pelas respectivas matrizes de rigidez unidimensionais, como proposto em (Vazquez, 2009) para quadrados e hexaedros.

### 4.1 Elementos unidimensionais

Seja um elemento finito considerado no sistema de coordenadas naturais,  $L_1 \in [0, 1]$ . Sejam ainda os problemas de interpolação locais

$$u(L_1) = -f(L_1), (4.1)$$

$$u'(L_1) = -f'(L_1), (4.2)$$

$$u''(L_1) = -q(L_1), (4.3)$$

onde  $u(L_1)$ ,  $u'(L_1)$ ,  $u''(L_1)$  são as funções incógnitas e  $f(L_1)$ ,  $f'(L_1)$  e  $q(L_1) = f''(L_1)$  os termos independentes. Dada uma base  $\{\phi_n\}_{i=1}^n$ , formada por *n* funções de interpolação, e

definida em  $L_1 \in [0, 1]$ , as funções incógnitas podem ser aproximadas por:

$$u(L_1) = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i(L_1), \tag{4.4}$$

$$u'(L_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_{i,i}(L_1), \tag{4.5}$$

$$u''(L_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_{i,i}(L_1).$$
(4.6)

As projeções das equações (4.1) a (4.3) no espaço definido pela bas<br/>e $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ são dadas

por

$$\int_{0}^{1} u(L_{1})v(L_{1})dL_{1} = -\int_{0}^{1} f(L_{1})v(l_{1})dL_{1},$$
(4.7)

$$\int_0^1 u'(L_1)v(L_1)dL_1 = -\int_0^1 f'(L_1)v(l_1)dL_1,$$
(4.8)

$$\int_0^1 u''(L_1)v(L_1)dL_1 = -\int_0^1 f''(L_1)v(l_1)dL_1,$$
(4.9)

onde  $v(L_1)$  é uma função teste.

Usando-se o Método de Galerkin, a função teste é aproximada usando-se as mesmas funções de interpolação, ou seja,

$$v(L_1) = \sum_{j=1}^n b_j \phi_j(L_1).$$
(4.10)

Fazendo-se a integral por parte na equação (4.9), obtém-se

$$\int_0^1 u'(L_1)v_{,}(L_1)dL_1 = \int_0^1 f''(L_1)v(L_1)dL_1 + v(L_1)u'(L_1)\mid_0^1.$$
(4.11)

Substituindo-se (4.4), (4.5) e (4.10) em (4.7), (4.8) e (4.11), e expressando-se o resultado de forma matricial, têm-se os seguintes sistemas de equações

$$[M_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^m\},\tag{4.12}$$

$$[D_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^d\},\tag{4.13}$$

$$[K_{1D}]\{a\} = \{f_{1D}^k\},\tag{4.14}$$

onde para i,j=1,...,n,os coeficientes das matrizes anteriores são

$$M_{ij}^{1D} = \int_0^1 \phi_i(L_1)\phi_j(L_1)dL_1, \tag{4.15}$$

$$D_{ij}^{1D} = \int_0^1 \phi_{i,}(L_1)\phi_j(L_1)dL_1, \qquad (4.16)$$

$$K_{ij}^{1D} = \int_0^1 \phi_{i,}(L_1)\phi_{j,}(L_1)dL_1.$$
(4.17)

Observe que  $[M_{1D}]$  e  $[K_{1D}]$  são matrizes de massa e rigidez simétricas e  $[D_{1D}]$  a matriz não simétrica mista. Os termos de carregamento ficam determinados por

$$f_i^{1D,m} = -\int_0^1 f(L_1)\phi_i(L_1)dL_1, \qquad (4.18)$$

$$f_i^{1D,d} = -\int_0^1 f'(L_1)\phi_i(L_1)dL_1,$$
(4.19)

$$f_i^{1D,k} = \int_0^1 f''(L_1)\phi_i(L_1)dL_1 + u'(L_1)\phi_i(L_1)\mid_0^1.$$
(4.20)

Os índices m,  $d \in k$ , indicam que os termos de carregamento estão relacionados às respectivas funções f,  $f' \in f''$ .

# 4.2 Triângulos

Considere agora um elemento finito triangular no sistema de coordenadas naturais definido no domínio  $\Omega = [L_1, L_2] \in [0, 1] \times [0, 1 - L_1]$ . Sejam ainda os problemas de interpolação local

$$u(L_1, L_2) = -f(L_1, L_2), (4.21)$$

$$u_{,L_1}(L_1, L_2) + u_{,L_2}(L_1, L_2) = -(f_{,L_1}(L_1, L_2) + f_{,L_2}(L_1, L_2)),$$
(4.22)

$$\nabla^2 u(L_1, L_2) = -q(L_1, L_2), \tag{4.23}$$

com  $q(L_1, L_2) = \nabla^2 f(L_1, L_2).$ 

Dada uma base  $\{N_i(L_1, L_2)\}_{i=1}^n$  formada por *n* funções de interpolação e definida no domínio  $\Omega$ , a função incógnita pode ser aproximada por

$$u(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^n a_i N_i(L_1, L_2).$$
(4.24)

As projeções das equações (4.21) a (4.23) no espaço definido pela base  $\{N_i(L_1, L_2)\}_{i=1}^n$ são dadas por

$$\int_{\Omega} u(L_1, L_2) v(L_1, L_2) d\Omega = -\int_{\Omega} f(L_1, L_2) v(L_1, L_2) d\Omega, \qquad (4.25)$$

$$\int_{\Omega} (\nabla u(L_1, L_2)) v(L_1, L_2) d\Omega = -\int_{\Omega} (f_{L_1}(L_1, L_2) + f_{L_2}(L_1, L_2)) v(L_1, L_2) d\Omega, \qquad (4.26)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(L_1, L_2) v(L_1, L_2) d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla^2 f(L_1, L_2) v(L_1, L_2) d\Omega, \qquad (4.27)$$

onde  $v(L_1, L_2)$  é uma função teste.

Usando-se o Método de Galerkin, a função teste é aproximada usando-se as mesmas funções de interpolação, ou seja,

$$v(L_1, L_2) = \sum_{j=1}^{n} b_j N_j(L_1, L_2).$$
(4.28)

Fazendo-se a integral por partes na equação (4.27), obtém-se

$$\int_{\Omega} \nabla u(L_1, L_2) \cdot \nabla v(L_1, L_2) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 f(L_1, L_2) v(L_1, L_2) d\Omega + \int_{\partial \Omega} (\nabla u(L_1, L_2) \cdot \mathbf{n}) v(L_1, L_2) \partial \Omega.$$
(4.29)

Substituindo-se (4.24) e (4.28) em (4.25), (4.26) e em (4.29), e expressando-se o resultado de forma matricial, tem-se os seguintes sistemas de equações

$$[M_{2D}]\{a\} = \{f_{2D}^m\},\tag{4.30}$$

$$[D_{2D}]\{a\} = \{f_{2D}^d\},\tag{4.31}$$

$$[K_{2D}]\{a\} = \{f_{2D}^k\},\tag{4.32}$$

onde para i, j = 1, ..., n, os coeficientes das matrizes anteriores são dados, respectivamente, por

$$M_{ij}^{2D} = \int_{\Omega} N_i(L_1, L_2) N_j(L_1, L_2) d\Omega, \qquad (4.33)$$

$$D_{ij}^{2D} = \int_{\Omega} [N_{i,L_1}(L_1, L_2) + N_{i,L_2}(L_1, L_2)] N_j(L_1, L_2) d\Omega, \qquad (4.34)$$

$$K_{ij}^{2D} = \int_{\Omega} [N_{i,L_1}(L_1, L_2)N_{j,L_1}(L_1, L_2) + N_{i,L_2}(L_1, L_2)N_{j,L_2}(L_1, L_2)]d\Omega,$$
(4.35)

sendo  $[M_{2D}]$  e  $[K_{2D}]$  as matrizes de massa e rigidez simétricas e  $[D_{2D}]$  a matriz não simétrica mista. Os termos de carregamento ficam determinados por

$$f_i^{2D,m} = -\int_{\Omega} f(L_1, L_2) N_i(L_1, L_2) d\Omega, \qquad (4.36)$$

$$f_i^{2D,d} = -\int_{\Omega} \nabla f(L_1, L_2) N_i(L_1, L_2) d\Omega, \qquad (4.37)$$

$$f_i^{2D,k} = \int_{\Omega} \nabla^2 f(L_1, L_2) N_i(L_1, L_2) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\nabla u(L_1, L_2) \cdot \mathbf{n}) N_i(L_1, L_2) \partial\Omega.$$
(4.38)

# 4.2.1 Matriz de Massa e Rigidez para Triângulos através do Produto de Matrizes Unidimensionais

Um processo semelhante foi descrito para triângulos em (Vazquez, 2008) usando-se coordenadas colapsadas e as funções de base propostas em (Karniadakis e Sherwin, 1999).

Neste trabalho, o processo é descrito usando-se coordenadas baricêntricas ou de área para a base definida em (Bittencourt, 2005).

Considerando-se um triângulo no sistema global, as equações (4.33) e (4.35) podem ser reescritas, considerando-se a transformação dada pelo Jacobiano, como

$$M_{ij}^{2D} = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-L_{1}} N_{i}(L_{1}, L_{2}) N_{j}(L_{1}, L_{2}) |J| dL_{2} dL_{1}, \qquad (4.39)$$
$$K_{ij}^{2D} = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-L_{1}} [N_{i,x}(L_{1}, L_{2}) N_{j,x}(L_{1}, L_{2}) + N_{i,y}(L_{1}, L_{2}) N_{j,y}(L_{1}, L_{2})] |J| dL_{2} dL_{1}. \qquad (4.40)$$

As coordenada globais são mapeadas com o uso das funções de forma e podem ser escritas como

$$x(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^{n} N_i(L_1, L_2) X_i,$$
(4.41)

$$y(L_1, L_2) = \sum_{i=1}^{n} N_i(L_1, L_2) Y_i,$$
(4.42)

sendo n o número de nós e  $X_i$  e  $Y_i$  as coordenadas globais dos nós.

As derivadas globais das funções de forma podem ser escritas em termos das funções locais e dos termos do inverso do jacobiano, ou seja,

$$\begin{cases} N_{i,x} \\ N_{i,y} \end{cases} = [J]^{-1} \begin{cases} N_{i,L_1} \\ N_{i,L_2} \end{cases},$$

$$(4.43)$$

com

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{,L_1} & y_{,L_1} \\ x_{,L_2} & y_{,L_2} \end{bmatrix}.$$
(4.44)

Fazendo-se o produto das matrizes e expressando-se as derivadas parciais em cada direção, tem-se

$$N_{i,x} = j_{11}N_{i,L_1} + j_{12}N_{i,L_2}, (4.45)$$

$$N_{i,y} = j_{21}N_{i,L_1} + j_{22}N_{i,L_2}, (4.46)$$

$$N_{j,x} = j_{11}N_{j,L_1} + j_{12}N_{j,L_2}, (4.47)$$

$$N_{j,y} = j_{21}N_{j,L_1} + j_{22}N_{j,L_2}.$$
(4.48)

onde  $j_{11}, j_{12}, j_{21}, j_{22}$  são os termos da matriz inversa do Jacobiano  $[J]^{-1}$ .

Como apresentado em (Bittencourt, 2005), as funções de forma para triângulos  $N_i \in N_j$ podem ser escritas como produto tensorial das respectivas funções de forma 1D

$$N_i(L_1, L_2, L_3) = \phi_a(L_1)\phi_b(L_2)\phi_c(L_3), \qquad (4.49)$$

$$N_j(L_1, L_2, L_3) = \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3).$$
(4.50)

Escrevendo-se a coordenada, na direção  $L_3$ , em termos das direções  $L_1$  e  $L_2$  de tal forma que  $L_3 = 1 - L_2 - L_1$ , as derivadas das equações (4.49) e (4.50) podem ser escritas como

$$N_{i,L_1}(L_1, L_2) = \phi_{a,L_1}(L_1)\phi_b(L_2)\phi_c(L_1, L_2) + \phi_a(L_1)\phi_b(L_2)\phi_{c,L_1}(L_1, L_2),$$
(4.51)

$$N_{i,L_2}(L_1, L_2) = \phi_a(L_1)\phi_{b,L_2}(L_2)\phi_c(L_1, L_2) + \phi_a(L_1)\phi_b(L_2)\phi_{c,L_2}(L_1, L_2),$$
(4.52)

$$N_{j,L_1}(L_1, L_2) = \phi_{p,L_1}(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_1, L_2) + \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_{r,L_1}(L_1, L_2),$$
(4.53)

$$N_{j,L_2}(L_1, L_2) = \phi_p(L_1)\phi_{q,L_2}(L_2)\phi_r(L_1, L_2) + \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_{r,L_2}(L_1, L_2).$$
(4.54)

Sejam,

$$M_{lm}^{1D}(L_i) = \phi_l(L_i)\phi_m(L_i), \tag{4.55}$$

$$D_{lm}^{1D}(L_i) = \phi_{l,L_i}(L_i)\phi_m(L_i), \tag{4.56}$$

$$K_{lm}^{1D}(L_i) = \phi_{l,L_i}(L_i)\phi_{m,L_i}(L_i), \qquad (4.57)$$

onde  $L_i$  representa as coordenadas baricêntricas com  $i = 1, 2, 3 \in (l, m)$  são os índices para a tensorização 1D. Os termos na direção  $L_3$  podem ser expressos nas direções  $L_1 \in L_2$ . Assim, por exemplo, para a rigidez na direção  $L_3$ 

$$K_{lm}^{1D,1}(L_3) = \phi_{l,L_1}(L_1, L_2)\phi_{m,L_1}(L_1, L_2), \qquad (4.58)$$

$$K_{lm}^{1D,2}(L_3) = \phi_{l,L_2}(L_1, L_2)\phi_{m,L_2}(L_1, L_2).$$
(4.59)

Dessa forma, a matriz de massa para triângulos pode ser escrita em termos de matrizes de massa unidimensionais como

$$M_{ij}^{2D} = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} M_{bq}^{1D}(L_2) M_{ap}^{1D}(L_1) M_{cr}^{1D}(L_3) |J| dL_2 dL_1.$$
(4.60)

A matriz de rigidez para triângulos também pode ser escrita em termos de suas respectivas matrizes de massa, mista e rigidez unidimensionais da seguinte forma

$$K_{ij}^{2D} = K_{ij}^{P1} + K_{ij}^{P2} + K_{ij}^{P3}, aga{4.61}$$

onde

$$K_{ij}^{P1} = |J|(j_{11}^2 + j_{21}^2) \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \mathbf{k}_1 dL_2 dL_1,$$
(4.62)

$$K_{ij}^{P2} = |J|(j_{11}j_{12} + j_{22}j_{21}) \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \mathbf{k}_2 dL_2 dL1,$$
(4.63)

$$K_{ij}^{P3} = |J|(j_{12}^2 + j_{22}^2) \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \mathbf{k}_3 dL_2 dL_1,$$
(4.64)

e  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$  e  $\mathbf{k}_3$  são, respectivamente,

$$\mathbf{k}_{1} = K_{ap}(L_{1})M_{bq}(L_{2})M_{cr}(L_{3}) + D_{pa}(L_{1})M_{bq}(L_{2})D_{rc}^{1'}(L_{3}) + D_{ap}'(L_{1})M_{bq}(L_{2})D_{rc}^{1}(L_{3}) + M_{ap}(L_{1})M_{bq}(L_{2})K_{cr}^{1}(L_{3}),$$

$$(4.65)$$

$$\mathbf{k}_{2} = D_{ap}(L_{1})D_{bq}'(L_{2})M_{cr}(L_{3}) + D_{ap}(L_{1})M_{bq}(L_{2})D_{cr}^{2'}(L_{3}) + M_{ap}(L_{1})D_{bq}'(L_{2})D_{cr}^{1}(L_{3}) + M_{ap}(L_{1})M_{bq}(L_{2})K_{cr}^{1,2}(L_{3}) + D_{ap}'(L_{1})D_{bq}(L_{2})M_{cr}(L_{3}) + M_{ap}(L_{1})D_{bq}(L_{2})D_{cr}^{1'}(L_{3}) + D_{ap}'(L_{1})M_{bq}(L_{2})D_{cr}^{2}(L_{3}) + M_{ap}(L_{1})M_{bq}(L_{2})K_{cr}^{2,1}(L_{3}),$$

$$\mathbf{k}_{3} = M_{ap}(L_{1})K_{bq}(L_{2})M_{cr}(L_{3}) + M_{pa}(L_{1})D_{bq}(L_{2})D_{rc}^{2'}(L_{3}) + M_{ap}(L_{1})D_{bq}'(L_{2})D_{rc}^{2}(L_{3}) + M_{ap}(L_{1})M_{bq}(L_{2})K_{cr}^{2}(L_{3}).$$

$$(4.67)$$

Nas equações (4.65) a (4.67), os termos que apresentam o apóstrofo (') indicam o transposto e, por conveniência, o sobrescrito 1D foi omitido dos termos que representam as matrizes unidimensionais.

Verificaram-se as expressões anteriores com o uso de um código implementado em MatLab<sup>®</sup>, para a construção das matrizes de rigidez e massa para triângulos, usando-se a base padrão com polinômios de Jacobi.

Os resultados para os coeficientes das matrizes foram comparados com os resultados obtidos através da construção convencional dos coeficientes das matrizes de massa e rigidez, usando-se coordenadas baricêntricas para triângulos, onde verificou-se a compatibilidade das soluções obtidas, como mostra as Figuras 4.1 e 4.2 para a esparsidade das matrizes de massa e rigidez.

#### 4.2.2 Análise por Termos Topológicos de Vértice, Aresta e Face

Em (Vazquez, 2009), apresentou-se uma técnica baseada na substituição das matrizes unidimensionais de massa pelas respectivas matrizes de rigidez unidimensionais, para qua-



Figura 4.1: Espar<br/>sidade para as matrizes de massa calculadas usando-se polinômios de Jacobi<br/> com  $\alpha=\beta=1$  e P=4.



Figura 4.2: Esparsidade para as matrizes de rigidez calculadas usando-se polinômios de Jacobi com  $\alpha = \beta = 1$  e P = 4.
drados e hexaedros. Baseando-se na equivalência dos coeficientes de aproximação para os problemas de projeção e Poisson, e observando-se que a matriz de rigidez unidimensional mostra-se mais esparsa que a matriz de massa, conseguiu-se com a aplicação da técnica, para o cálculo de matrizes de massa e rigidez para quadrados e hexaedros, um sensível ganho em esparsidade das matrizes bi e tri-dimensionais. No presente trabalho, faz-se uma análise para a matriz de rigidez de um elemento triangular e discute-se, através da formulação apresentada para triângulos e construída para os termos topológicos de vértice, aresta e face, a possibilidade de substituição das matrizes unidimensionais de massa pelas respectivas matrizes de rigidez.

Sejam as funções de forma para triângulos (2.23), (2.24) e (2.25), escritas em termos de suas entidades topológicas. As equações (4.65) a (4.67) para os blocos topológicos destacados na Figura 4.3 podem ser escritas como:



Figura 4.3: Partição topológica das matrizes de triângulos em termos de vértice (V), aresta (A) e face (F).

Vértice 1 :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{1} = K_{p_{1}p_{1}}(L_{1})M_{00}(L_{2})M_{00}(L_{3}), \\ \mathbf{k}_{2} = 0, \\ \mathbf{k}_{3} = 0. \end{cases}$$
(4.68)

Vértice 2 :

$$\mathbf{k}_{1} = 0,$$

$$\mathbf{k}_{2} = 0,$$

$$\mathbf{k}_{3} = M_{00}(L_{1})K_{p_{2}p_{2}}(L_{2})M_{00}(L_{3}).$$
(4.69)

Vértice 3 :

$$\mathbf{k}_{1} = M_{00}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{p_{3}p_{3}}^{1}(L_{3}),$$
  

$$\mathbf{k}_{2} = M_{00}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{p_{3}p_{3}}^{1,2}(L_{3}) + M_{00}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{p_{3}p_{3}}^{2,1}(L_{3}),$$
  

$$\mathbf{k}_{3} = M_{00}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{p_{3}p_{3}}^{2}(L_{3}).$$
  
(4.70)

Aresta 1 :

$$\mathbf{k}_{1} = K_{pp}(L_{1})M_{qq}(L_{2})M_{00}(L_{3}),$$
  

$$\mathbf{k}_{2} = D_{pp}(L_{1})D'_{qq}(L_{2})M_{00}(L_{3}) + D'_{pp}(L_{1})D_{qq}(L_{2})M_{00}(L_{3}),$$
  

$$\mathbf{k}_{3} = M_{pp}(L_{1})K_{qq}(L_{2})M_{00}(L_{3}).$$
(4.71)

Aresta 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{1} = K_{pp}(L_{1})M_{00}(L_{2})M_{rr}(L_{3}) + D_{pp}(L_{1})M_{00}(L_{2})D_{rr}^{1'}(L_{3}) + \\ D_{pp}^{'}(L_{1})M_{00}(L_{2})D_{rr}^{1}(L_{3}) + M_{pp}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{rr}^{1}(L_{3}), \\ \mathbf{k}_{2} = D_{pp}(L_{1})M_{00}(L_{2})D_{rr}^{2'}(L_{3}) + M_{pp}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{rr}^{1,2}(L_{3}) + \\ D_{pp}^{'}(L_{1})M_{00}(L_{2})D_{rr}^{2}(L_{3}) + M_{pp}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{rr}^{2,1}(L_{3}), \\ \mathbf{k}_{3} = M_{pp}(L_{1})M_{00}(L_{2})K_{rr}^{2}(L_{3}). \end{cases}$$

$$(4.72)$$

Aresta 3 :

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{1} = M_{00}(L_{1})M_{qq}(L_{2})K_{rr}^{1}(L_{3}), \\ \mathbf{k}_{2} = M_{00}(L_{1})D_{qq}^{'}(L_{2})D_{rr}^{1}(L_{3}) + M_{00}(L_{1})M_{qq}(L_{2})K_{rr}^{1,2}(L_{3}) + \\ M_{00}(L_{1})D_{qq}(L_{2})D_{rr}^{1'}(L_{3}) + M_{00}(L_{1})M_{qq}(L_{2})K_{rr}^{2,1}(L_{3}), \\ \mathbf{k}_{3} = M_{00}(L_{1})K_{qq}(L_{2})M_{rr}(L_{3}) + M_{00}(L_{1})D_{qq}(L_{2})D_{rr}^{2'}(L_{3}) + \\ M_{00}(L_{1})D_{qq}^{'}(L_{2})D_{rr}^{2}(L_{3}) + M_{00}(L_{1})M_{qq}(L_{2})K_{rr}^{2}(L_{3}). \end{cases}$$

$$(4.73)$$

As equações para os termos de face podem ser consideradas um caso geral e são descritas pelas equações (4.65) a (4.67).

Observa-se para triângulos que, em geral, as bases nodais e modais são construídas fixando-se 1 para um dos termos de vértices, como mostrado nas equações (2.28) e (2.29). Essa construção, produz matrizes de rigidez unidimensionais que possuem pelo menos uma linha e coluna nulas, resultado do produto tensorial de vetores de base com um termo nulo proveniente da derivada do fator constante. Dessa forma, verificou-se que a substituição das matrizes de massa unidimensionais pelas respectivas matrizes de rigidez torna nulo o bloco topológico de vértice, como pode ser observado através das equações (4.68) a (4.70) com a substituição dos termos de massa.

A Figura 4.4 ilustra a esparsidade para o bloco de aresta da matriz de rigidez, construída pelo método convencional. Nesse caso, a substituição torna nulo todos os blocos de aresta destacados na Figura 4.3, como mostra a Figura 4.5.



Figura 4.4: Esparsidade do bloco de aresta usando-se polinômios de Jacobi com  $\alpha = \beta = 1$  e P = 4.

Observou-se ainda, para o bloco de face, uma diminuição da esparsidade do bloco com a substituição das matrizes unidimensionais de massa, como mostra a Figura 4.7 quando comparada com a Figura 4.6, que ilustra a esparsidade do bloco de face construída pelo método convencional.

Dessa forma, verificou-se que para elementos triangulares e usando-se coordenadas baricêntricas, a substituição não é possível devido, principalmente, ao fato de que para triângulos, diferentemente de elementos quadrados, as coordenadas naturais não são de-



Figura 4.5: Esparsidade do bloco de aresta usando-se polinômios de Jacobi com  $\alpha = \beta = 1$  e P = 4 e substituindo-se as matrizes de massa unidimensionais pelas respectivas matrizes de rigidez.



Figura 4.6: Esparsidade do bloco de face usando-se polinômios de Jacobi com  $\alpha = \beta = 1$  e P = 4.



Figura 4.7: Esparsidade do bloco de face usando-se polinômios de Jacobi com  $\alpha = \beta = 1$  e P = 4 e substituindo-se as matrizes de massa unidimensionais pelas respectivas matrizes de rigidez.

sacopladas.

# 5 Construção de Funções de Base para Triângulos

A base de funções para triângulos apresentada no Capítulo 2 utiliza três coordenadas baricêntricas  $L_i$  (i = 1, 2, 3), sendo  $L_3 = 1 - L_1 - L_2$  a coordenada dependente. Esse fato, dificulta a obtenção de ponderações ótimas dos polinômios de Jacobi, visando melhorar a esparsidade das matrizes dos elementos. Uma outra dificuldade com triângulos é o limite de integração variável  $1 - L_1$  na direção  $L_2$ .

Neste capítulo, dois novos conjuntos de funções de interpolação, baseado em coordenadas de área, são apresentados. Discute-se a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, no domínio de integração de um de triângulo na direção  $L_2 = (0, 1-L_1)$ . Ponderações ótimas dos polinômios de Jacobi para as matrizes de massa, usando as base propostas, são determinadas.

### 5.1 Ortogonalidade das Funções de Base

Do ponto de vista de condicionamento numérico e esparsidade das matrizes, a propriedade de ortogonalidade entre as funções de base é bastante desejável em métodos de alta ordem. Essa propriedade pode ser observada ao se tomar como exemplo o produto entre as funções de face para uma determinada base de funções (Nogueira Jr., 2002).

Seja a base padrão dada pelas equações (2.30) a (2.32). Os coeficientes para o bloco de face da matriz de massa, são construídos tomando-se o produto interno usual entre duas

funções de face e integrando-se no domínio do triângulo (Vazquez, 2008)

$$M_{ij}^{2D} = \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-L_{1}} L_{1}^{2} L_{2}^{2} L_{3}^{2} \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_{1},\beta_{1}} \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha_{2},\beta_{2}} \mathcal{P}_{r-1}^{\alpha_{3},\beta_{3}} \mathcal{P}_{a-1}^{\alpha_{1},\beta_{1}} \mathcal{P}_{b-1}^{\alpha_{2},\beta_{2}} \mathcal{P}_{c-1}^{\alpha_{3},\beta_{3}} dL_{2} dL_{1},$$
(5.1)

$$= \int_{0}^{1} L_{1}^{2} \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_{1},\beta_{1}} \left( \int_{0}^{1-L_{1}} L_{2}^{2} L_{3}^{2} \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha_{2},\beta_{2}} \mathcal{P}_{r-1}^{\alpha_{3},\beta_{3}} \mathcal{P}_{a-1}^{\alpha_{1},\beta_{1}} \mathcal{P}_{b-1}^{\alpha_{2},\beta_{2}} \mathcal{P}_{c-1}^{\alpha_{3},\beta_{3}} dL_{2} \right) dL_{1},$$
(5.2)

$$= \int_0^1 (1 - L_1)^5 L_1^2 \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} \Pi_{q+r+a+b+c-5}(L_1) dL_1,$$
(5.3)

onde  $\Pi$  é uma função polinomial de grau indicado.

Dessa forma, de acordo com a equação (2.13), a integral (5.3) é nula se  $\alpha_1 = 5$ ,  $\beta_1 = 2$ e  $p \neq q + r + a + b + c - 4$ . Nota-se que a escolha ótima de  $\alpha$  e  $\beta$  só foi possível, resolvendo-se analiticamente a integral na direção  $L_2$ , ou seja, a seleção das ponderações dos polinômios de Jacobi para bases modais de triângulos não é trivial, devido ao acoplamento das coordenadas de área e consequente limite de integração não fixo na variável  $L_2$  (Vazquez, 2008). Observa-se, porém, que ponderações específicas podem ser usadas para se obter matrizes mais esparsas. Nesse sentido, duas novas construções para as funções de interpolação são propostas, procurando minimizar a influência da coordenada dependente  $L_3$ .

#### **5.2 Base** 1

Nas funções de base padrão  $N_{pqr}(L_1, L_2, L_3)$ , construídas usando-se a definição (2.29),  $L_3$  aparece como termo de ponderação no cálculo das matrizes de massa e rigidez. Essa contribuição em  $\phi_r(L_3)$  pode ser minimizada fazendo-se (Vazquez, 2008)

$$\phi_r(L_3) = \begin{cases} 1 & r = P, \\ L_3 & r = 0, \\ L_3^r & 0 < r < P. \end{cases}$$
(5.4)

Essa opção, fornece uma maior flexibilidade no processo de tensorização (Vazquez, 2008). Assim, os modos de vértice ficam determinados por:

$$N_{P_100}(L_1, L_2, L_3) = L_1,$$

$$N_{0P_20}(L_1, L_2, L_3) = L_2,$$

$$N_{00P_3}(L_1, L_2, L_3) = L_3.$$
(5.5)

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	2	1	1	3	3	4	1	1	1	3	3	4	3	3	3
q	1	2	1	3	4	4	3	3	4	1	1	1	3	4	3
r	1	1	2	1	1	1	3	4	4	3	4	4	3	3	4

Tabela 5.1: Índices  $p, q \in r$  para a base padrão (Vazquez, 2008).

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	2	1	1	3	3	4	1	1	1	3	3	4	3	3	4
q	1	2	1	3	4	4	3	3	4	1	1	1	3	4	3
r	1	1	2	1	1	1	3	4	4	3	4	4	3	3	3

Tabela 5.2: Índices  $p, q \in r$  para a Base 1.

Os modos de aresta para  $P \geq 2, \, 0 < p, q, r < P$ são

$$N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1), \quad p + q = P,$$
  

$$N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_3^r P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1), \qquad p + r = P,$$
  

$$N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) = L_2 L_3^r P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1), \qquad q + r = P.$$
(5.6)

Finalmente, os modos de face para  $P \geq 3, p+q+r = P$  e 0 < p,q,r < P-1são

$$N_{pqr}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 L_3^r P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} (2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2} (2L_2 - 1).$$
(5.7)

Essa base perde a propriedade de simetria rotacional e possui condicionamento numérico inferior à base original (Vazquez, 2008).

Uma outra alternativa é manter a definição (2.29), usada para a construção das funções de interpolação padrão para triângulos, e com um arranjo correto dos índices de tensorização eliminar a contribuição polinomial de  $L_3$  nos termos de face. Na prática, isso significa fixar o valor do índice r = 1 para os termos de face e reordenar os índices  $p \in q$ , como mostram as Tabelas 5.1 e 5.2 para as colunas 13, 14 e 15, de modo que, após o processo de tensorização, a contribuição polinomial em  $L_3$  para os termos de face seja linear.

Para esse novo arranjo, denominado daqui em diante de Base 1, os modos de face são

$$N_{pq1} = L_1 L_2 L_3 \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1} (2L_1 - 1) \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2} (2L_2 - 1).$$
(5.8)

Nesse caso, as funções de vértice e aresta ficam inalteradas e podem ser calculadas da mesma forma como no processo de construção da base padrão. Nas Figuras 5.1 a 5.3, mostram-se as funções de face para P = 3, P = 4 e P = 5, respectivamente, usando-se polinômios de Jacobi com ponderações  $\alpha = 5$  e  $\beta = 2$ .



(a)

Figura 5.1: Modo de face P = 3.



Figura 5.2: Modos de face P = 4.



Figura 5.3: Modos de face P = 5.

Os coeficientes para o bloco de face da matriz de massa são determinados, fazendo-se o produto interno entre as funções de face definidas na equação (5.8), ou seja,

$$M_{ij}^{2D} = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} L_1^2 L_2^2 L_3^2 \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1} \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2} \mathcal{P}_{a-1}^{\alpha_1,\beta_1} \mathcal{P}_{b-1}^{\alpha_2,\beta_2} dL_2 dL_1,$$
(5.9)

$$= \int_{0}^{1} L_{1}^{2} \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_{1},\beta_{1}} \left( \int_{0}^{1-L_{1}} L_{2}^{2} L_{3}^{2} \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha_{2},\beta_{2}} \mathcal{P}_{a-1}^{\alpha_{1},\beta_{1}} \mathcal{P}_{b-1}^{\alpha_{2},\beta_{2}} dL_{2} \right) dL_{1},$$
(5.10)

$$= \int_0^1 (1 - L_1)^5 L_1^2 \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1} \Pi_{q+a+b-3}(L_1) dL_1,$$
(5.11)

obtendo-se  $\alpha_1 = 5$ ,  $\beta_1 = 2$  para  $p \neq q + a + b - 2$  como ponderações ótimas para os termos de face. Nota-se, porém, que a eliminação da contribuição polinomial de  $L_3$  para os termos de face, não permitiu que as ponderações fossem determinadas sem o cálculo analítico da integral em  $L_2$ .



Figura 5.4: Esparsidade das matrizes de massa para a Base 1 com (P = 7, 8 e 9) usando polinômios de Jacobi com ponderações  $\alpha = 5$  e  $\beta = 2$ .



Figura 5.5: Esparsidade das matrizes de massa para a base padrão com (P = 7, 8 e 9) usando polinômios de Jacobi com ponderações  $\alpha = 5$  e  $\beta = 2$ .

Usando-se as ponderações específicas, obtidas através da análise da propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, observou-se um aumento da esparsidade para os

Base	$\mathbf{P}=7$	$\mathbf{P}=8$	$\mathbf{P} = 9$		
Padrão	$1,12 \times 10^{8}$	$4,3 \times 10^{7}$	$3,7 \times 10^7$		
Base $1$	$2,6351 \times 10^{6}$	$3,6041 \times 10^{7}$	$5,8467 \times 10^{8}$		

Tabela 5.3: Resultados sobre condicionamento numérico para a base padrão e para a Base 1. termos de face, quando comparadas à base padrão apresentada em (Vazquez, 2008), como pode ser observado nas Figuras 5.4 e 5.5.

O número de condição para as matrizes de massa são apresentados na Tabela 5.3 para P = 7, 8 e 9. O condicionamento numérico de matrizes pode ser entendido como uma estimativa para a amplificação das perturbações  $\{\delta b\}$  ou  $[\delta A]$  na solução  $\{x\}$  de um sistema de equações  $[A]\{x\} = \{b\}$ , onde  $[\delta A]$  é uma perturbação nos coeficientes de  $[A] e \{\delta b\}$  uma perturbação nos coeficientes de  $\{b\}$ . Dessa forma, quanto menor o número de condição, mais bem condicionado será a matriz para a resolução numérica do sistema.

De modo geral, o condicionamento numérico pode ser determinado por

$$C[A] = \frac{|\lambda_i|_{max}}{|\lambda_j|_{min}},\tag{5.12}$$

onde  $|\lambda_i|_{max}$  é o máximo auto-valor e  $|\lambda_j|_{min}$  o menor auto-valor não singular da matriz [A].

Observou-se, portanto, para a Base 1, bons resultados para condicionamento numérico quando comparado aos obtidos para a base padrão.

#### **5.3 Base** 2

Como observado na seção anterior, o estudo de ponderações específicas para bases de elementos triangulares fica limitado ao estudo de ponderações considerando-se apenas a integral de limite fixo em  $L_1$ , sendo necessário a determinação analítica dos termos obtidos a partir da integral de limite variável em  $L_2$ . Com a determinação analítica da integral em  $L_2$ , pode-se fazer um estudo, usando-se a relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi mapeada no intervalo [0, 1].

Estuda-se nesta seção, a possibilidade de se mapear essa propriedade, definida no domínio fixo [0, 1] e dada pela equação (2.13), no domínio variável  $[0, 1 - L_1]$  e propor funções de base para triângulos, que com um arranjo específico de ponderações, satisfaçam a pro-

priedade de ortogonalidade para a integral em  $L_2$  dos termos de aresta e face da matriz de massa.

Assim, seja uma variável qualquer z no intervalo  $[0, 1 - L_1]$ . A equação (2.13), mapeada nesse intervalo pode ser escrita como

$$\frac{2}{1-L_1} \int_0^{1-L_1} \left(1 - \frac{z}{1-L_1}\right)^{\alpha} \left(\frac{z}{1-L_1}\right)^{\beta} \mathcal{P}_n^{\alpha,\beta}(\overline{z}) \mathcal{P}_m^{\alpha,\beta}(\overline{z}) dz$$
(5.13)  
com  $L_1 \in [0,1]$  e  $z \in [0, 1-L_1]$  e  $\overline{z} = \frac{2z}{1-L_1} - 1.$ 

Com base no mapeamento apresentado na equação (5.13), propõe-se um novo arranjo de funções de base para elementos triangulares. Assim, as funções de vértice são dadas por:

$$N_{P_100}(L_1, L_2, L_3) = L_1,$$

$$N_{0P_20}(L_1, L_2, L_3) = L_2,$$

$$N_{00P_3}(L_1, L_2, L_3) = L_3.$$
(5.14)

Da mesma forma, as funções de aresta, são expressas por:

$$N_{pq0}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 (1 - L_1)^{q-1} \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha,\beta} (2L_1 - 1) \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha,\beta} (\frac{2L_2}{1 - L_1} - 1),$$
  

$$N_{p0r}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_3 (1 - L_1)^{r-1} \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha,\beta} (2L_1 - 1) \mathcal{P}_{r-1}^{\alpha,\beta} (\frac{2L_3}{1 - L_1} - 1),$$
  

$$N_{0qr}(L_1, L_2, L_3) = L_2 L_3 (1 - L_1)^{q+r-2} \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha,\beta} (\frac{2L_2}{1 - L_1} - 1) \mathcal{P}_{r-1}^{\alpha,\beta} (\frac{2L_3}{1 - L_1} - 1).$$
(5.15)

As multiplicações por  $(1 - L_1)^{r-1}$  e  $(1 - L_1)^{q+r-2}$  nas funções de aresta são necessárias para manter as funções de forma como polinômios.

Finalmente, as funções de face são

$$N_{pq1}(L_1, L_2, L_3) = L_1 L_2 (1 - L_1)^{q+1} \left(\frac{L_3}{(1 - L_1)^2}\right) \mathcal{P}_{p-1}^{\alpha, \beta} (2L_1 - 1) \mathcal{P}_{q-1}^{\alpha, \beta} \left(\frac{2L_2}{1 - L_1} - 1\right). (5.16)$$

Para que a contribuição polinomial em  $L_3$  nos termos de face seja linear, manteve-se o conjunto de índices usados para a construção da Base 1.

Dessa forma, estudou-se, com base na propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi dada pela equação (5.13), ponderações ótimas para o bloco topológico de face da matriz de massa. Nesse caso, as ponderações ótimas ficam determinadas por

$$\beta_1 = \beta_2 = \alpha_2 = 2,$$
  

$$\alpha_1 = 2(q+1) + 1.$$
(5.17)

Na equação (5.17), q é o índice usado para a tensorização na direção  $L_2$ . Essa escolha, à primeira vista, fica condicionada à ordem polinomial usada na aproximação. O fato é que, após alguns testes, verificou-se que independentemente do grau do polinômio usado, a escolha

Base	$\alpha_1, \alpha_2$	$\beta_1, \beta_2$	Número de não-zero		
Padrão	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5$	$\beta_1 = \beta_2 = 2$	163		
Padrão	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$	221		
1	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$	175		
1	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5$	$\beta_1 = \beta_2 = 2$	129		
2	$\alpha_1 = 5$	$\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$	33		
2	$\alpha_1 = \alpha_2 = 5$	$\beta_1 = \beta_2 = 2$	177		

Tabela 5.4: Número de coeficientes não-nulos no bloco topológico de face para diferentes bases e P = 7.

de  $\alpha_1 = 5$  é o que torna nulo o maior número de termos do bloco topológico de face como mostra a Tabela 5.4 para P = 7.



Figura 5.6: Esparsidade do bloco topológico de face para a matriz de massa usando a Base 2 e polinômios de Jacobi com  $\alpha_1 = 5$  e  $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$ .

Usando-se as ponderações ótimas, obtidas através da análise da propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, observou-se um aumento significativo da esparsidade para os termos de face, quando comparado com a base padrão apresentada em (Vazquez, 2008), adotando-se para ambas as bases os mesmos valores de ponderação para os polinômios de Jacobi, como pode ser observado nas Figuras 5.6 e 5.7.

A Base 2, para o bloco de face, se mostrou mais esparsa mesmo quando comparada com a base padrão utilizando-se as ponderações ótimas determinadas para essa base, como pode ser visto nas Figuras 5.6 e 5.8.

Para os termos de aresta, pode-se determinar ponderações específicas para cada subdivisão do bloco topológico de aresta, mostrado na Figura 4.3. Verificou-se, no estudo dessas ponderações, que o maior número de coeficientes nulos, é obtido fazendo-se as combinações de ponderação apresentadas na Tabela 5.5.



Figura 5.7: Esparsidade do bloco topológico de face para a matriz de massa usando a base padrão e polinômios de Jacobi com  $\alpha_1 = 5$  e  $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$ .



Figura 5.8: Esparsidade do bloco topológico de face para a matriz de massa usando a base padrão e polinômios de Jacobi com  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$  e  $\beta_1 = \beta_2 = 2$ .

Combinação 1	Combinação 2
$\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1$	$\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 1$
$\beta_1 = \beta_2 = 2$	$\beta_1 = 1, \beta_2 = 2$

Tabela 5.5: Combinação de ponderações ótimas para os termos de aresta.

Observa-se que a escolha ótima das ponderações para a Base 2 contribuiu para um aumento significativo nos padrões de esparsidade da matriz de massa, como mostrado nas Figuras 5.9 e 5.10, para os resultados obtidos, respectivamente, usando-se a Base 2 e a base padrão.



Figura 5.9: Esparsidade para a matriz de massa, usando-se a Base 2 e polinômios de Jacobi com  $\alpha_1 = 5$  e  $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$ .



Figura 5.10: Esparsidade para a matriz de massa, usando-se a base padrão e polinômios de Jacobi com  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$  e  $\beta_1 = \beta_2 = 2$ .

Para a matriz de rigidez, aplicou-se o mesmo conjunto de ponderações obtidos no estudo de ponderações ótimas para as matrizes de massa. Nesse caso, observou-se melhores resultados para os padrões de esparsidade apresentados pela Base 2, principalmente para o bloco topológico de face, como observado nas Figuras 5.11 e 5.12, para os resultados obtidos, respectivamente, usando-se a Base 2 e a base padrão.

Para a Base 2, como mostrado na Figura 5.13, observou-se excelentes padrões de condicionamento numérico para as matrizes de massa e rigidez, quando comparado à bases tradicionais da literatura. No entanto, a propriedade de simetria rotacional foi perdida.



Figura 5.11: Esparsidade para a matriz de rigidez, usando-se a Base 2 e polinômios de Jacobi com  $\alpha_1 = 5$  e  $\alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 2$ .



Figura 5.12: Esparsidade para a matriz de rigidez, usando-se a base padrão e polinômios de Jacobi com  $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$  e  $\beta_1 = \beta_2 = 2$ .



Figura 5.13: Condicionamento numérico das matrizes de massa e rigidez para triângulos com bases de Szabó, Carnevali, Webb, Sherwin, Lagrange, Vasquez 1, Vasquez 2 e Base 2.

# 6 Considerações Finais e Perspectivas Futuras

Neste trabalho, uma nova estratégia para solução de problemas de Poisson via problemas de projeção local foi apresentada. Essa técnica se mostrou viável para aplicação em domínios uni e bidimensionais, para os casos analisados. Uma certa dificuldade para se quantificar o erro na aproximação foi observada. Isso se deve ao fato de o vetor de coeficientes, obtido através do método proposto, ser formado por termos calculados via projeção (internos) e termos calculados via Poisson (vértice), o que explica a taxa de convergência inferior observada para o erro relativo da solução de problemas de Poisson pelo método proposto.

A formulação de construção das matrizes de massa e rigidez bidimensionais, através do produto de matrizes unidimensionais de massa, mista e rigidez, foi estendida para domínios triangulares, usando-se coordenadas naturais. Verificou-se que para elementos triangulares e usando-se coordenadas baricêntricas, a substituição das matrizes de massa unidimensionais pelas respectivas matrizes de rigidez, não é trivial devido, principalmente, ao fato de que para triângulos, diferentemente de elementos quadrados, as coordenadas não são desacopladas.

Discutiu-se ainda, aspectos sobre construção de bases polinomiais para interpolação em domínios triangulares, onde duas novas formas de construção de funções de interpolação para triângulos foram propostas, procurando-se minimizar a influência da coordenada dependente  $L_3$ . Para a Base 1, um rearranjo dos índices, usados na tensorização para os termos de face, foi usado. A Base 2 foi construída baseada na propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, mapeada no domínio  $[0, 1 - L_1]$ , de modo que, com um arranjo ótimo de ponderações, pudesse satisfazer a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi para a integral de domínio não fixo em  $L_2$  dos termos de aresta e face da matriz de massa. Para as bases propostas, foram feitos estudos de condicionamento e esparsidade, onde verificou-se bons resultados quando comparadas às bases de interpolação padrão encontradas na literatura. No entanto, para a Base 2, a propriedade de simetria rotacional foi perdida.

Como sugestão para continuidade desse trabalho propõem-se:

- Estudar a viabilidade de aplicação da técnica proposta para solução de problemas de Poisson, via problemas de projeção local, para malhas bidimensionais distorcidas e com outras formas de carregamento aplicado.
- Estudar procedimentos de colagem para as novas bases e analisar exemplos com um número maior de elementos.
- Implementar os resultados obtidos para a técnica de solução de problemas de Poisson e as novas bases de interpolação para triângulos no código (hp)<sup>2</sup>FEM, para que se possa realizar testes com exemplos maiores.

### **Referências Bibliográficas**

- Abouchakra, R. Hierarchal tetrahedral elements using orthogonal polynomials. In: 1996 Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering (CCECE'96), v. 18, p. 525–528, Calgary. part 2 (of 2), 1996.
- Adjerid, S., Aiffa, M., Flaherty, J. E. Hierarchical finite element bases for triangular and tetrahedral elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190p.2925–2941, 2001.
- Assan, A. E. Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos. Unicamp, 2003.
- Babuska, I. The p and h-p versions of the finite element method: the state of the art. In: Dwoyer, D. L., Hussaini, M. Y., Voigt, R. G., (Eds.), *Finite Elements: Theory and Applications*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- Babuska, I., Guo, B. Q. The *h-p* version of the finite element method for domains with curved boundaries. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 25, n.4, p.837–861, 1988.
- Babuska, I., Guo, B. Q. The h-p version of the finite element method for problems with nonhomogeneous essential boundary condition. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 74p.1–28, 1989.
- Babuska, I., Helman, H. C. Some aspects of parallel implementation of the finite element method on message passing architectures. J. Comput. Appl. Math., v. 27p.157–187, 1989.
- Babuska, I., Suri, M. The optimal convergence rate of the p-version of the finite element method. SIAM J. Numer. Anal., v. 24p.750–776, 1987.
- Babuska, I., Suri, M. The *p* and *h-p* versions of the finite element method, an overview. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 80p.5–26, 1990.
- Babuska, I., Szabó, B. A. , Katz, I. N. The p-version of the finite element method. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 18, n.3, p.515–545, 1981.
- Bargos, F. F. Implementação de elementos finitos de alta ordem baseado em produto tensorial. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2009., Tese (mestrado).
- Beskok, A., Warburton, T. C. An unstructured hp finite-element scheme for fluid flow and heat transfer in moving domains. *Journal of Computational Physics*, v. 174p.492–509, 2001.

- Beuchler, S., Schöberl, J. New shape functions for triangular p-fem using integrated jacobi polynomials. *Numerische Mathematik*, v. 103p.339–366, 2006.
- Bittencourt, M. L. Introdução ao Método dos Elementos Finitos Aplicado à Análise Estrutural. Campinas, 1991.
- Bittencourt, M. L. Fully tensorial nodal and modal shape functions for triangles and tetrahedra. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 63p.1530–1558, 2005.
- Bittencourt, M. L., Vazquez, M. G., Vazquez, T. G. Construction of shape functions dor the h- and p-versions of the fem using tensorial product. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 71p.529–563, 2007.
- Blyth, M. G., Pozrikidis, C. A lobatto interpolation grid over the triangle. *IMA Journal of Applied Mathematics*, v. 71, 2006.
- Brandão., D. N. Um Refinamento h-Adaptativo de Malhas para o Método dos Elementos Finitos utilizando uma Estrutura de Grafo. Universidade Federal Fluminense, Niterói, Brasil, 2008., Dissertação (mestrado).
- Carnevali, P., Morris, R. B., Tsuji, Y., Taylor, G. New basis functions and computational procedures for *p*-version finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 36p.3759–3779, 1993.
- Clough, R. The finite element method in plane stress analysis. *Proceedings 2nd ASCE Conference on Electronic Computation*, 1960.
- Clough, R. W. Thoughts about the origin of the finite element method. Computers & Structures, v. 79p.2029–2030, 2001.
- Cook, R., Malkus, D. , Plesha, M. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, USA, third ed., 1991.
- Demkowicz, L., Vardapetyan, L. Modeling of electromagnetic absorption / scattering problems using hp-adaptive finite elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 152p.103–124, 1998.
- Dong, S., Yosibashi, Z. A parallel spectral element method for dynamic three-dimensional nonlinear elasticity problems. *Computers and Structures*, v. 87p.59–72, 2009.
- Dunavant, D. A. High degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle. Int. J. Numer. Methods Engrg., v. 21p.1129–1148, 1985.

- Duster, A., Rank, E. The p-version of the finite element method compared to an adaptive hversion for the deformation theory of plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, v. 190p.1925–1935, 2001.
- Duster, A., Scholza, D., Ranka, E. pq-adaptive solid finite elements for three-dimensional plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197p.243– 254, 2007.
- Edgar, N. B., Surana, K. S. On the conditioning number and the selection criteria for pversion approximation functions. *Computers & Structures*, v. 60, n.4, p.521–530, 1996.
- Grinberg, L. Topics in Ultrascale Scientific Computing with Application in Biomedical Modeling. Division of Applied Mathematics, Brown University, 2009., Tese (Doutorado), Providence, E.U.A.
- Hughes, T. J. R. The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. New York, 1987.
- Johnson, C. Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J. Spectral/hp Element Methods for CFD. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- Karniadakis, G. E., Sherwin, S. J. Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics. Oxford University Press, Oxford, 2005.
- Katz, I. Nodal variables for complete conforming finite elements of arbitrary polynomial order. Computers and Mathematics with Applications, v. 4p.85–112, 1978.
- Ledgera, P. D., Morgana, K., Peraireb, J., Hassana, O., Weatherilla, N. The development of an hp-adaptive finite element procedure for electromagnetic scattering problems. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 39p.751–764, 2003.
- Lomtev, I., Quillen, C. B., Karniadakis, G. E. Spectral/hp methods for viscous compressible flows on unstructured 2d meshes. *Journal of Computational Physics*, v. 144p.325–357, 1998.
- Maitre, J. F., Pourquier, O. About the conditioning of matrices in the p-version of the finite element method for second order elliptic problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 63p.341–348, 1995.

- Masuero, J. R. Computação paralela na análise de problemas de engenharia utilizando o método dos elementos finitos. Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009., Tese (doutorado), Porto Alegre, Brasil.
- Nogueira Jr., A. C. Formulação p do Método de Elementos Finitos em problemas de elasticidade linear e não-linear com malhas 3D não-estruturadas e em métodos multigrid algébricos. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002., Tese (Doutorado), Campinas, Brasil.
- Nogueira Jr., A. C., Bittencourt, M. Hierarchical basis functions for the p-version of the finite element method (in portuguese). Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, v. 17, n.1, p.37–59, 2001.
- Oden, J., Carey, G., Becker, E. Finite Elements: An Introduction, v. 1 de Texas Finite Element Series. Englewood-Cliffs, New Jersey, USA, 1981.
- Oden, J. T. Some historic comments on finite elements. Proceedings of the ACM conference on History of scientific and numeric computation, v. 79p.125–130, 1987.
- Peano, A. *Hierarchies of conforming finite elements*. Washington University, St. Louis, 1975., Dissertação (mestrado).
- Peano, A. Hierarchies of conforming finite elements for plane elasticity and plate bending. Computers and Mathematics with Applications., v. 2p.211–224, 1976.
- Rossow, M., Katz, I. Hierarchical finite elements and precomputed arrays. Int. J. Numer. Methods Eng., v. 12p.977–999, 1993.
- Schwab, C. P- And Hp- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics. Oxford University Press, Oxford, 1999.
- Shen, J., Tang, T. Spectral and High-Order Methods with Applications. Science Press, first ed., 2006.
- Sherwin, S. J., Karniadakis, G. A new triangular and tetrahedral basis for high-order (hp) finite element methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38p.3775–3802, 1995.
- Szabó, B., Babuska, I. Finite Element Analysis. Wiley Interscience, New York, 1991.
- Turner, M. Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of the Aeronautical Sciences, v. 23p.805–823, 1956.

- Vazquez, M. Construção de funções de interpolação para as versões h e p do MEF através de produto tensorial. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2004., Dissertação (mestrado).
- Vazquez, M. Tensorização de matrizes de rigidez unidimensionais para quadrados e hexaedros usando método de Elementos Finitos de Alta Ordem. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2009., Tese (doutorado), Campinas, Brasil.
- Vazquez, T. Funções de Base e Regras de Integração Tensorizáveis para o MEF de Alta Ordem. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008., Tese (doutorado), Campinas, Brasil.
- Webb, J. P., Abouchakra, R. Hierarchal triangular elements using orthogonal polynomials. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 38p.245–257, 1995.
- Zienkiewicz, O., Irons, B., Scott, F., Campbell, J. Tree-dimensional stress analysis. In Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures (IUTAM), p. 413–431, 1970.
- Zienkiewicz, O., Kelly, D., de S.R. Gago J., Babuska, I. Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. *In: MAFELAP*, p. 313–346, 1981.
- Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. The Finite Element Method, v. 1. McGraw-Hill International Editions, fourth ed., 1989.