

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR VINÍCIUS GABRIEL  
SEGALA SIMIONATTO E APROVADA  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 17 / 02 / 2011

  
.....  
ORIENTADOR  
Prof. Dr. Milton Dias Junior  
Matricula 18.452-7  
FEM - UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Vinícius Gabriel Segala Simionatto

Estudo da influência dos parâmetros do  
pré-amortecimento da embreagem nos  
fenômenos de *shuffle* e *clunk* em trens  
de potência

Campinas, 2011

Vinícius Gabriel Segala Simionatto

# Estudo da influência dos parâmetros do pré-amortecimento da embreagem nos fenômenos de *shuffle* e *clunk* em trens de potência

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Junior

Campinas  
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Si45e	<p>Simionatto, Vinícius Gabriel Segala Estudo da influência dos parâmetros do pré-amortecimento da embreagem nos fenômenos de shuffle e clunk em trens de potência / Vinícius Gabriel Segala Simionatto. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.</p> <p>Orientador: Milton Dias Junior. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.</p> <p>1. Automóveis - Mecânica. 2. Mecânica - Vibração. 3. Mecânica não-linear. 4. Veículos a motor - Dinâmica - Métodos de simulação. 5. Veículos a motor - Vibração. I. Dias Junior, Milton. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.</p>
-------	--

Título em Inglês: Study of the influence of the parameters of the clutch disk's pre damper on shuffle and clunk phenomena in powertrains

Palavras-chave em Inglês: Automotive - Mechanical, Mechanics - Vibration, Non-linear mechanics, Motor vehicles - Dynamics - Simulation methods, Motor vehicles - Vibration

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Agenor de Toledo Fleury, Robson Pederiva

Data da defesa: 17/02/2011

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO  
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

# Estudo da influência dos parâmetros do pré-amortecimento da embreagem nos fenômenos de *shuffle* e *clunk* em trens de potência

Autor: Vinícius Gabriel Segala Simionatto

Orientador: Prof. Dr. Milton Dias Junior

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou essa Dissertação:



---

Prof. Dr. Milton Dias Junior, Presidente  
DPM/FEM/UNICAMP



---

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury  
PME/EPUSP/USP



---

Prof. Dr. Robson Pederiva  
DPM/FEM/UNICAMP

Campinas, 17 de fevereiro de 2011.

Dedico este trabalho a meus pais, Antonio Luiz e Valéria, meu irmão, Luiz Guilherme e à minha noiva Vanessa

## Agradecimentos

Às pessoas que amo,

Todos aqueles que nos amam acabam nos ajudando, apoiando, e mesmo ouvindo, por amor, sem pedir nada em troca. Sem estas pessoas que fizeram e fazem estas “pequenas” coisas por mim, com certeza eu não seria o homem que sou, não teria feito tudo o que fiz, e provavelmente não teria a vontade e a alegria de viver que possuo em meu coração. Acredito que todas estas pessoas tão especiais só entenderão a intensidade do meu agradecimento se entenderem o quanto estas “pequenas” coisas significaram para mim.

Assim, meus primeiros agradecimentos são à minha noiva Vanessa, por todos os momentos em que me apoiou, me consolou, acreditou em mim, e por todo o carinho e amor que me dá e sempre me deu. Por seu companheirismo, seu jeito simples, alegre e simpático de ser, e por seu caráter inquestionável.

Agradeço também a meu pai, Antonio Luiz, por todo o amor e carinho que dedicou e dedica a mim, por todos os momentos que me ouviu e me deu conselhos de coração, e pela confiança creditada em mim e no meu trabalho. Agradeço-o também por ser o pai que me empenharei para ser um dia.

Agradeço muito à minha mãe, Valéria, por cuidar de mim com tanto amor, carinho, e atenção, por ser minha amiga, uma sogra muito querida e exemplar à minha noiva, e por me entender e me ouvir em todos os momentos difíceis pelos quais passei.

Devo também infinitos agradecimentos a meu irmão, Luiz Guilherme, a quem amo tanto, pelos infindáveis momentos de irreverência, humor, e pelo carinho, atenção e admiração que dedica a mim. Agradeço pelo irmão que tenho, pelo seu coração bondoso e justo, e por ser um homem digno, que segue o caminho do bem.

Todas estas pessoas me ensinaram que a vida não é feita das coisas grandiosas. O que realmente faz a vida valer a pena, o que realmente alimenta o amor, são as coisas “pequenas” e simples, pois estas são feitas todos os dias, a qualquer momento. Um gesto, um sorriso, um abraço. Isto faz a vida. Isto é a vida.

Aos professores,

Agradeço primeiramente ao meu orientador e amigo Milton Dias Jr., por ter confiado em meu potencial e por ter me ensinado tanto, em termos profissionais e pessoais. Agradeço

também por todos os momentos de irreverência e por todos os momentos de compreensão. Sem ele a execução deste trabalho seria impossível.

Agradeço também à professora Kátia pela amizade, pelos ensinamentos e por todo o apoio e solidariedade que me ofereceu nos momentos difíceis de minha jornada. Seu apoio foi fundamental à realização deste trabalho.

Aos amigos,

Gostaria de agradecer primeiramente a meu “irmão que pude escolher”, Ricardo “Sardinha” Ugliara Mendes, por toda a amizade e por todo o apoio que me deu na minha vida profissional, e muito mais na minha vida pessoal. Aproveito este agradecimento para comemorar nove anos da mais sincera amizade.

Devo também muitos agradecimentos a meu grande amigo Hugo Heidy Miyasato, pela amizade, solidariedade, paciência, humor, apoio e companheirismo nestes seis anos que possuímos de amizade e parceria profissional.

Agradeço também a meus amigos e companheiros de jornada do LDEM (*Laboratório de Dinâmica de Estruturas e Máquinas*) Allan Francisco Oliveira, Bruno Fineto, Fábio Menegatti de Melo e Leonardo Gimenes por todos os momentos de companheirismo, por todas as discussões e momentos de humor e alegria que passamos e passaremos juntos.

Finalmente, agradeço aos colegas Leandro T. R. Perestrelo e Douglas V. Lemes, da ZF Sachs do Brasil, Luiz F. Pereira, da Eaton divisão Transmissões, Leandro P. de Oliveira e Marco Barreto, da General Motors do Brasil, e Reinaldo da S. Araujo da Ford do Brasil, por todo o apoio técnico e todos os ensinamentos e experiências transmitidos a mim, que tornaram possível a realização deste trabalho.

Aos funcionários da FEM,

Devo muitos agradecimentos aos técnicos Mauro, Maurício, e Ferreira, pela amizade e pela prestatividade e prontidão em atender às nossas necessidades.

À ZF Sachs,

Agradeço fortemente pelo suporte financeiro oferecido, sem o qual este trabalho não poderia ser realizado.

A Deus,

Finalmente agradeço muito a Deus por todas as bênçãos e por toda a iluminação que tenho recebido nesta jornada.

*O fracasso jamais me surpreenderá se  
minha decisão de vencer for  
suficientemente forte. — Og Mandino em  
“O Maior Vendedor do Mundo”*

## Resumo

O desenvolvimento de novas tecnologias na área automotiva e as restrições cada vez mais apertadas com relação a emissões culminaram em veículos cada vez mais leves, silenciosos e potentes. Por este motivo, os trens de potência atuais são cada vez mais susceptíveis a fenômenos de *NVH*. Além disso, pelo fato de os motores atuais emitirem menor nível de ruído, alguns destes fenômenos tornam-se mais perceptíveis. Neste contexto se encaixa o trabalho atual. Sabe-se que muitos problemas desta área são solucionados realizando alterações no disco de embreagem, e por isto, neste trabalho estuda-se a influência dos parâmetros de seu pré amortecedor nos fenômenos de *shuffle* e *clunk*. São feitas análises do trem de potência linearizado, por este ser um procedimento muito comum na área de desenvolvimento deste sistema. Após isso, analisa-se o mesmo sistema, através de simulações numéricas, porém considerando não linearidades no disco de embreagem e nos engrenamentos, onde foi considerado o *impact damping*. Identifica-se os pares engrenados que mais contribuem para o surgimento do fenômeno de *clunk*, e a influência dos parâmetros do pré-amortecedor sobre ambos os fenômenos.

*Palavras Chave:* trem de potência; trem de força; shuffle; clunk; não linear.

## Abstract

The development of new technologies on automotive engineering and the toughening emissions laws led to the design of lighter, more silent and more powerful vehicles. For this reason, today's powertrains are more prone to *NVH* phenomena. Furthermore, the noticeability of those phenomena is increased since newer engines produce lower noise levels. This is the subject in which this work fits into. It is known that many of the *NVH* phenomena can be attenuated by performing changes on the parameters of the clutch disc, and because of it, the influence of the parameters of the clutch damper on *shuffle* and *clonk* is studied in this work. For being a widely used procedure on the development of drivelines, a linear analysis is performed on a linearized model of a powertrain. After that, using numerical integration methods, further analyses are performed on a nonlinear model of the driveline, considering that the clutch disc and the gear meshes are nonlinearities. The latter's energy loss is modeled used *impact damping*. The geared pairs that contribute most for the *clunk* phenomenon are identified, and finally the influence of the parameters of the clutch damper on both phenomena are stated.

Keywords: powertrain; driveline; shuffle; clunk; nonlinear.

## Lista de Ilustrações

2.1	Estágios de rigidez de uma embreagem. . . . .	12
2.2	Curva de torque de um motor a combustão interna (GILLESPIE,1992). . . .	13
2.3	Esquema de um diferencial. ( <i>Adaptado de <a href="http://www.2405.com/press-library/Hummer-H3-2006/HUMMER-H3-Electronic-Locking-Rear-Differential.asp">http://www.2405.com/press-library/Hummer-H3-2006 /HUMMER-H3-Electronic-Locking-Rear-Differential.asp</a></i> ). . . . .	15
2.4	Esquema de uma configuração FR (GENTA, MORELLO, 2009). . . . .	16
2.5	Esquema de uma montagem FF (GENTA, MORELLO, 2009). . . . .	17
2.6	Variação entre os estágios da embreagem, gerando o fenômeno de <i>creeping</i> . . .	21
3.1	Sistema torcional de 3GL genérico. . . . .	47
3.2	Disco de embreagem em detalhe. <i>Adaptado de Shaver, 1997</i> . . . . .	49
3.3	Curva de rigidez de um disco de embreagem sem atrito. . . . .	50
3.4	Curva de rigidez de um disco de embreagem com atrito. . . . .	50
3.5	Coeficientes de rigidez e amortecimento para o modelo Kelvin-Voight. . . . .	51
3.6	Coeficientes de rigidez e amortecimento para o modelo <i>impact damping</i> . . . .	53
3.7	Representação esquemática de um diferencial. <i>Adaptado de Hibbeler, 2006</i> .. . .	54
3.8	DCLs das engrenagens do diferencial. (a) Vista lateral da coroa. (b) Vista superior da <i>Spider Gear</i> (c) Vista superior da engrenagem de entrada. (d) Vista lateral da engrenagem do semieixo esquerdo. (e) Vista lateral da engrenagem do semieixo direito. . . . .	55
3.9	Diagrama de corpo livre do veículo. . . . .	60
3.10	Modelo completo do trem de potência.1 - Volante de inércia. 2 - Eixo de entrada da transmissão. 3 - Primeira engrenagem da árvore secundária. 4 - Segunda engrenagem da árvore secundária. 5 - Eixo de saída da transmissão. 6 - Engrenagem de entrada do diferencial. 7 - Coroa do diferencial. 8 - Spider Gear. 9 - Saída direita do diferencial. 10 - Roda direita. 11 - Saída esquerda do diferencial. 12 - Roda esquerda. . . . .	64
4.1	Primeiro modo de frequência natural nula encontrado. . . . .	68
4.2	Segundo modo de frequência natural nula encontrado. . . . .	68
4.3	Componente do modo 2 ortogonal ao modo 1. . . . .	69
4.4	Terceiro modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento. . .	70
4.5	Quarto modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento. . .	71
4.6	Quinto modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento. . .	71

4.7	Sexto modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento.	72
4.8	Sétimo modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento.	72
4.9	Terceiro modo do sistema linearizado em torno do estágio de <i>drive</i> .	74
4.10	Quarto modo do sistema linearizado em torno do estágio de <i>drive</i> .	75
4.11	Quinto modo do sistema linearizado em torno do estágio de <i>drive</i> .	75
4.12	Sexto modo do sistema linearizado em torno do estágio de <i>drive</i> .	76
4.13	Sétimo modo do sistema linearizado em torno do estágio de <i>drive</i> .	76
4.14	Frequências naturais do sistema $\times$ Rigidez do disco de embreagem.	79
4.15	Frequências naturais do sistema $\times$ Rigidez do disco de embreagem, na faixa de 0 Hz a 12 Hz.	80
4.16	Amplitude do terceiro modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.	81
4.17	Fase do terceiro modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.	81
4.18	Fase do terceiro modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem, de 0 $N.m/^\circ$ a 3 $N.m/^\circ$ .	82
4.19	Amplitude do quarto modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.	83
4.20	Fase do quarto modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.	83
5.1	Disco de embreagem conservativo genérico.	87
5.2	Resposta temporal para um disco de embreagem conservativo simétrico.	90
5.3	Resposta temporal para um disco de embreagem conservativo com pré-amortecimento deslocado.	92
5.4	Resposta temporal para um disco de embreagem conservativo com rigidez distintas.	93
5.5	Período fundamental de oscilação do sistema de 1 GL com discos de embreagem com diferentes larguras de pré-amortecimento.	94
5.6	Período fundamental de oscilação do sistema de 1 GL com discos de embreagem com pré-amortecimento em diferentes posições.	95
5.7	Período fundamental de oscilação do sistema de 1 GL com um disco de embreagem com valores de rigidez distintos.	96
5.8	Resposta temporal dos sistemas de 1 GL com um disco de embreagem com atrito somente no pré-amortecimento.	98
5.9	Diagrama <i>waterfall</i> do sistema de 1 GL com 0.25 N.m de torque de atrito no pré-amortecimento.	99

5.10	Diagrama <i>waterfall</i> do sistema de 1 GL com disco de embreagem conservativo em paralelo com um amortecedor viscoso ideal. . . . .	101
5.11	Diagrama <i>waterfall</i> do sistema de 1 GL com disco de embreagem com atrito seco apenas nos estágios de <i>drive</i> e <i>coast</i> . . . . .	101
5.12	Resposta temporal dos sistemas de 1 GL com um disco de embreagem com atrito em todos os estágios, variando a posição do estágio central. . . . .	103
5.13	Resposta temporal dos sistemas de 1 GL com um disco de embreagem com atrito em todos os estágios, variando a largura do estágio central. . . . .	104
5.14	Retrato de fase do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt conservativo. . . . .	107
5.15	Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo calculada considerando velocidades constantes. . . . .	109
5.16	Resposta temporal do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo. . . . .	110
5.17	Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo calculada com base na resposta do sistema a condições iniciais arbitrárias. . . . .	111
5.18	Retrato de fase do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo. . . . .	112
5.19	Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento <i>impact damping</i> calculada considerando velocidades constantes. . . . .	113
5.20	Resposta temporal do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento <i>impact damping</i> . . . . .	114
5.21	Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento <i>impact damping</i> calculada com base na resposta do sistema a condições iniciais arbitrárias. . . . .	115
5.22	Retrato de fase do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento <i>impact damping</i> . . . . .	116
6.1	Medições realizadas em veículo real, em primeira marcha, sujeito a <i>Tip-in/Tip-out</i> . . . . .	121
6.2	Medições realizadas em veículo real, em segunda marcha, sujeito a <i>Tip-in/Tip-out</i> . . . . .	123
6.3	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 1 a 7. . . . .	124

6.4	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 8 a 12. . . . .	124
6.5	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 13 a 15. . . . .	125
6.6	Simulação utilizando o disco de embreagem 1 e o restante do modelo linear. .	126
6.7	Deslocamento angular relativo entre o volante de inércia e a transmissão utilizando o disco de embreagem 1 e o restante do modelo linear. . . . .	127
6.8	Sobreposição entre deslocamento e velocidade angular relativos entre o volante de inércia e a transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e o restante do modelo linear. . . . .	128
6.9	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 1 a 7. . . . .	129
6.10	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 8 a 12. . . . .	130
6.11	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 13 a 15. . . . .	130
6.12	Velocidades angulares do volante de inércia e da transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e engrenamentos não lineares na caixa de marchas. . . . .	131
6.13	Sobreposição entre deslocamento e velocidade angular relativos entre o volante de inércia e a transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e o engrenamentos não lineares na caixa de marchas. . . . .	132
6.14	Velocidades relativas entre os dentes dos engrenamentos internos à transmissão.	133
6.15	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 1 a 7. . . . .	138
6.16	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 8 a 12. . . . .	138
6.17	Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 13 a 15. . . . .	139
6.18	Velocidades angulares do volante de inércia e da transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e engrenamentos não lineares na caixa de marchas e no diferencial. . . . .	140
6.19	Sobreposição entre deslocamento e velocidade angular relativos entre o volante de inércia e a transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e o engrenamentos não lineares na caixa de marchas e no diferencial. . . . .	140

6.20 Velocidades relativas entre os dentes dos pares engrenados da transmissão e do diferencial. . . . .	141
--	-----

## Lista de Tabelas

6.1	Características do pré-amortecimento dos discos de embreagem utilizados nas simulações. . . . .	119
6.2	Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da entrada da transmissão. . . . .	135
6.3	Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da saída da transmissão. . . . .	136
6.4	Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da entrada da transmissão. . . . .	142
6.5	Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da saída da transmissão. . . . .	143
6.6	Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da entrada do diferencial. . . . .	144
6.7	Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes dos engrenamentos das saídas do diferencial. . . . .	145

## Lista de Abreviaturas e Siglas

### *Letras Latinas*

- $[0_{k \times l}]$  - Matriz nula  $k \times l$ .
- $[A]$  - Matriz do sistema.
- $b_c$  - Limite inferior do pré-amortecedor.
- $b_d$  - Limite superior do pré-amortecedor.
- $[B]$  - Matriz de entrada.
- $[C]$  - Matriz de amortecimento.
- $C_{ij}$  - Amortecimento entre as inércias  $i$  e  $j$ .
- $[C_l]$  - Matriz de amortecimento linear.
- $[C_{nl}]$  - Matriz de amortecimento não linear.
- $[\bar{C}]$  - Matriz de saída.
- $[D]$  - Matriz de retroalimentação.
- $f$  - Número de graus de liberdade de deslocamento.
- $F$  - Força constante aplicada ao sistema de um grau de liberdade.
- $\{F(t)\}$  - Vetor de esforços externos.
- $\{F'(t)\}$  - Vetor de esforços externos.
- $F_{ic}$  - Força de contato entre os dentes da engrenagem de entrada e da coroa do diferencial.
- $F_s$  - Reação do suporte da *spider gear* na coroa do diferencial ou força de contato horizontal entre a suspensão e o corpo do veículo.
- $F_{sl}$  - Força de contato entre os dentes da *spider gear* e da engrenagem do semieixo esquerdo do diferencial.

- $F_{sr}$  - Força de contato entre os dentes da *spider gear* e da engrenagem do semieixo direito do diferencial.
- $g$  - Número de graus de liberdade de velocidade.
- $g(t)$  - Aceleração conhecida do volante de inércia.
- $h(y_i, y_j)$  - Função que define a primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema.
- ${}_c h^f(\delta, \dot{\delta})$  - Função que define a primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema conservativo, na zona de folga.
- ${}_c h_i^f(\delta, \dot{\delta})$  -  $i$ -ésimo termo da primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema conservativo, na zona de folga.
- ${}_c h^c(\delta, \dot{\delta})$  - Função que define a primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema conservativo, na zona de contato.
- ${}_c h_i^c(\delta, \dot{\delta})$  -  $i$ -ésimo termo da primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema conservativo, na zona de contato.
- ${}_i h^c(\delta, \dot{\delta})$  - Função que define a primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema com modelo de dissipação *impact damping*, na zona de contato.
- ${}_i h_i^c(\delta, \dot{\delta})$  -  $i$ -ésimo termo da primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema com modelo de dissipação *impact damping*, na zona de contato.
- ${}_k h^c(\delta, \dot{\delta})$  - Função que define a primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema com modelo de dissipação Kelvin-Voigt, na zona de contato.
- ${}_k h_i^c(\delta, \dot{\delta})$  -  $i$ -ésimo termo da primeira derivada temporal do vetor de estados do sistema com modelo de dissipação Kelvin-Voigt, na zona de contato.
- $[I]$  - Matriz identidade.
- $[I_c]$  - Matriz diagonal com o valor 1 apenas nas posições onde, no sistema de equações diferenciais do modelo, há uma restrição não holonômica. Os outros termos são nulos.
- $I_f$  - Momento de inércia do volante de inércia.
- $I_{fa}$  - Momento de inércia do eixo de tração do veículo com relação ao ponto de contato dos pneus com o solo.

- $[I_k]$  - Matriz diagonal com o valor 1 apenas nas posições onde, no sistema de equações diferenciais do modelo, há uma restrição holonômica. Os outros termos são nulos.
- $I_{ll}$  - Termo da matriz de inércia do diferencial.
- $I_{lr}$  - Termo da matriz de inércia do diferencial.
- $I_{rl}$  - Termo da matriz de inércia do diferencial.
- $I_{rr}$  - Termo da matriz de inércia do diferencial.
- $[I_{k \times k}]$  - Matriz identidade  $k \times k$ .
- $[J_i]$  - Matriz retangular  $N \times N_i$  com as colunas não nulas da matriz  $[I] - [I_c] - [I_k]$ .
- $[J_c]$  - Matriz retangular  $N \times N_c$  com as colunas não nulas da matriz  $[I_c]$ .
- $[J_k]$  - Matriz retangular  $N \times N_k$  com as colunas não nulas da matriz  $[I_k]$ .
- $k$  - Rigidez do sistema de um grau de liberdade linear.
- $[K]$  - Matriz de rigidez.
- $K_c$  - Rigidez do disco de embreagem no estágio de *coast* ou retração.
- $K_d$  - Rigidez do disco de embreagem no estágio de *drive* ou tração.
- $K_{ij}$  - Rigidez entre as inércias  $i$  e  $j$ .
- $[K_l]$  - Matriz de rigidez linear.
- $[K_{nl}]$  - Matriz de rigidez não linear.
- $K_p$  - Rigidez do disco de embreagem no estágio de pré-amortecimento.
- $m$  - Momento de inércia do disco do sistema de um grau de liberdade.
- $m_b$  - Massa do corpo do veículo.
- $[M]$  - Matriz de massa ou inércia.
- $n$  - Número de estados do sistema.
- $N_i$  - Número de equações diferenciais de segunda ordem.
- $N_c$  - Número de equações diferenciais de primeira ordem.

- $N_k$  - Número de equações algébricas.
- $p$  - Número de corpos do sistema.
- $q$  - Número de restrições holonômicas.
- $r$  - Número de restrições não holonômicas.
- $r_c$  - Raio da coroa do diferencial.
- $r_f$  - Distância da fixação do suporte da *spider gear* até o centro da coroa do diferencial.
- $r_i$  - Raio da engrenagem de entrada do diferencial.
- $r_l$  - Raio da engrenagem do semieixo esquerdo do diferencial.
- $r_r$  - Raio da engrenagem do semieixo direito do diferencial.
- $r_s$  - Raio da *spider gear*.
- $R_w$  - Raio das rodas de tração.
- $s$  - Número de meios graus de liberdade do sistema.
- $t$  - Tempo.
- $[T]$  - Matriz de transformação para o caso de engrenamentos ideais.
- $\{u\}$  - Vetor de entradas.
- $\{U\}$  - Vetor de esforços relativos às não linearidades.
- $v_0$  - Velocidade inicial.
- $x$  - Deslocamento do veículo.
- $x(t)$  - Resposta temporal do sistema de um grau de liberdade.
- $x(y, t)$  - Forma explícita das equações de restrição holonômicas.
- $x_0$  - Posição inicial.
- $\{x\}$  - Vetor de coordenadas físicas.
- $\{\dot{x}\}$  - Primeira derivada temporal do vetor de coordenadas físicas.
- $\{\ddot{x}\}$  - Segunda derivada temporal do vetor de coordenadas físicas.

- $\{y\}$  - Vetor de estados.
- $\dot{y}(y, z, t)$  - Forma explícita das equações de restrição não holonômicas.
- $y_i$  - i-ésimo estado do vetor  $\{y\}$ .
- $\{\dot{y}\}$  - Primeira derivada temporal do vetor de estados.
- $\{z\}$  - Vetor de saídas.
- $[Z]$  - Matriz de entrada do sistema no espaço de estados na forma  $[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = [Z]\{F(t)\}$ .

### ***Letras Gregas***

- $[\alpha]$  - Matriz auxiliar.
- $\beta$  - Coeficiente de amortecimento do modelo de *impact damping*.
- $[\beta]$  - Matriz auxiliar.
- $[\gamma]$  - Matriz auxiliar.
- $\delta$  - Deslocamento relativo entre os dentes do par engrenado.
- $[\delta]$  - Matriz auxiliar.
- $\dot{\delta}$  - Velocidade relativa entre os dentes do par engrenado.
- $\eta_{ij}$  - Relação de engrenamento entre as inércias  $i$  e  $j$ .
- $\{\Theta\}$  - Vetor de coordenadas torcionais.
- $\{\Theta'\}$  - Vetor de coordenadas torcionais reduzido.
- $\theta_i$  - Deslocamento angular na engrenagem de entrada do diferencial.
- $\theta_c$  - Deslocamento angular da coroa do diferencial.
- $\theta_f$  - Deslocamento angular do volante de inércia.
- $\theta_l$  - Deslocamento angular da engrenagem de saída esquerda do diferencial.
- $\theta_r$  - Deslocamento angular da engrenagem de saída direita do diferencial.
- $\theta_s$  - Deslocamento angular da *spider gear*.

- $\{\dot{\Theta}'\}$  - Primeira derivada temporal do vetor de coordenadas torcionais reduzido.
- $\{\ddot{\Theta}'\}$  - Segunda derivada temporal do vetor de coordenadas torcionais reduzido.
- $\theta_i$  - Deslocamento torcional da inércia  $i$ .
- $\kappa$  - Constante de ortogonalidade entre dois vetores.
- $[\Lambda]$  - Matriz espectral.
- $\lambda_i$  -  $i$ -ésimo autovalor.
- $\sigma(\cdot)$  - Função sinal.
- $\tau_m$  - Torque do motor.
- $\tau_p$  - Torque do trem de potência.
- $\Phi(x, t)$  - Forma implícita das equações de restrição holonômicas.
- $\phi$  - Ângulo de fase.
- $\Psi(y, \dot{y}, t)$  - Forma implícita das equações de restrição não holonômicas.
- $[\Psi_d]$  - Matriz dos autovetores à direita.
- $\{\psi_d^i\}$  -  $i$ -ésimo autovetor à direita.
- $[\Psi_e]$  - Matriz dos autovetores à esquerda.
- $\{\psi_e^i\}$  -  $i$ -ésimo autovetor à esquerda.
- $\{\psi_i\}$  -  $i$ -ésimo autovetor.
- $\{\tilde{\psi}_i\}$  - Modo interno a  $\{\psi_i\}$ .
- ${}_i\psi_j$  -  $i$ -ésimo autovetor regular associado ao  $j$ -ésimo autovalor.
- ${}_i\bar{\psi}_j$  -  $i$ -ésimo autovetor generalizado associado ao  $j$ -ésimo autovalor.
- $\omega_n$  - Frequência natural do sistema de um grau de liberdade.

### **Abreviações**

- DMF - *Dual mass flywheel*.
- DTA - *DriveTrain Analyzer*.

- E.T. - Entrada da transmissão.
- FF - *Front engine, front wheel drive.*
- FR - *Front engine, rear wheel drive.*
- NVH - *Noise, vibration and harshness.*
- ODS - *Operating deflection shape.*
- P.A. - Pré-amortecimento.
- R.D. - Roda direita.
- R.E. - Roda esquerda.
- RMS - *Root-mean-square.*
- S.D.D. - Saída do diferencial direita.
- S.D.E. - Saída do diferencial esquerda.
- S.T. - Saída da transmissão.
- V.I. - Volante de inércia.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
1.1	Motivação . . . . .	4
1.2	Objetivo . . . . .	5
1.3	Descrição do trabalho . . . . .	5
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>7</b>
2.1	Elementos básicos de um trem de força . . . . .	8
2.1.1	Motor . . . . .	8
2.1.2	Volante de Inércia . . . . .	9
2.1.3	Embreagem . . . . .	10
2.1.4	Transmissão . . . . .	12
2.1.5	Diferencial . . . . .	14
2.2	Configurações clássicas de um trem de potência . . . . .	15
2.2.1	Configuração FR . . . . .	15
2.2.2	Configuração FF . . . . .	16
2.3	Fenômenos de NVH . . . . .	17
2.3.1	Shuffle . . . . .	17
2.3.2	Judder . . . . .	18
2.3.3	Clunk . . . . .	19
2.3.4	Rattle noise . . . . .	20
2.3.5	Creeping . . . . .	21
<b>3</b>	<b>MODELAGEM</b>	<b>23</b>
3.1	Modelagem não linear por parâmetros concentrados . . . . .	24
3.2	Equações de restrição . . . . .	26
3.2.1	Restrições holonômicas . . . . .	26
3.2.2	Restrições não holonômicas . . . . .	27
3.2.3	Restrições reonômicas e escleronômicas . . . . .	28
3.3	Coordenadas modais e diagonalização de sistemas . . . . .	28
3.3.1	Problema de autovalores e autovetores clássico . . . . .	28
3.3.2	Problema de autovalores e autovetores generalizado . . . . .	30
3.3.3	Problema de raízes repetidas . . . . .	33
3.4	Sistemas com engrenamentos ideais . . . . .	34

3.5	Sistemas com meio grau de liberdade . . . . .	36
3.5.1	Sistemas com restrições não holonômicas . . . . .	38
3.5.2	Sistemas com restrições holonômicas . . . . .	41
3.5.3	Sistemas com restrições holonômicas e não holonômicas . . . . .	43
3.6	Modelagem dos elementos . . . . .	46
3.6.1	Volante de inércia de massa simples . . . . .	46
3.6.2	Disco de embreagem . . . . .	48
3.6.3	Engrenamento com dentes retos . . . . .	51
3.6.4	Diferencial . . . . .	53
3.6.5	Inércia do veículo . . . . .	59
3.7	Modelo completo do trem de potência . . . . .	61
<b>4</b>	<b>MODELO LINEARIZADO DO TREM DE POTÊNCIA</b>	<b>66</b>
4.1	Autovetores associados a autovalores nulos . . . . .	67
4.2	Caso 1: linearização na região de pré-amortecimento . . . . .	70
4.3	Caso 2: linearização na condição de <i>drive</i> . . . . .	74
4.4	Análise da sensibilidade dos modos do sistema à variação da rigidez do disco de embreagem . . . . .	78
<b>5</b>	<b>ANÁLISE DAS NÃO LINEARIDADES</b>	<b>85</b>
5.1	Disco de Embreagem . . . . .	86
5.1.1	Análise do disco de embreagem conservativo . . . . .	87
5.1.1.1	Cálculo da resposta analítica do disco de embreagem conservativo em vibração livre . . . . .	88
5.1.1.2	Análise da resposta do disco de embreagem conservativo em vibração livre . . . . .	89
5.1.1.3	Variação do período fundamental de oscilação do sistema . . . . .	94
5.1.2	Análise do disco de embreagem dissipativo . . . . .	97
5.1.2.1	Variação do torque de atrito no pré-amortecimento . . . . .	97
5.1.2.2	Decaimento da frequência de oscilação livre . . . . .	100
5.1.2.3	Variação da posição do estágio de pré-amortecimento com atrito em todos os estágios . . . . .	102
5.1.2.4	Variação da largura do estágio de pré-amortecimento com atrito em todos os estágios . . . . .	104
5.2	Modelos de engrenamento . . . . .	105
5.2.1	Modelo Kelvin-Voigt conservativo . . . . .	105
5.2.2	Modelo Kelvin-Voigt dissipativo . . . . .	108

5.2.3	Modelo <i>Impact Damping</i> . . . . .	113
<b>6</b>	<b>MODELAMENTO NÃO-LINEAR DO TREM DE POTÊNCIA</b>	<b>118</b>
6.1	Dados de medições em um veículo . . . . .	120
6.2	Modelo com disco de embreagem não linear . . . . .	122
6.3	Inclusão dos engrenamentos não lineares na transmissão . . . . .	128
6.4	Inclusão dos engrenamentos não lineares no diferencial . . . . .	137
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS</b>	<b>146</b>
7.1	Conclusões e comentários finais . . . . .	146
7.2	Perspectivas futuras . . . . .	148

# 1 INTRODUÇÃO

No ramo automotivo, um trem de potência é um sistema mecânico cuja função é transmitir a potência mecânica gerada pelo motor para as rodas do veículo. Este sistema também é conhecido como trem de força, *powertrain*, ou *driveline* e equipa a maioria dos veículos automotores, sejam eles veículos de passeio leves, ou caminhões da categoria “super pesado”.

Apesar da vasta faixa de atuação, principalmente com relação à capacidade de carga dos veículos em questão, todos estes trens de potência, por possuírem a mesma funcionalidade, são compostos por partes que, apesar de fisicamente diferentes por questões operacionais, possuem as mesmas funções. Por esta razão, em todos estes sistemas sempre serão encontrados eixos, engrenamentos, dispositivos de transmissão e interrupção de torque, entre outros.

Com os avanços tecnológicos nesta área e com leis ambientais cada vez mais rigorosas, o desenvolvimento de sistemas mais eficientes, com reduções de matéria prima, consumo de combustível, emissões e danos ambientais nos processos produtivos torna-se uma tarefa desafiadora para a engenharia. Além disso, o conforto, que antes era um “artigo de luxo”, hoje é essencial para que um veículo consiga adesão em um nicho específico de mercado, sendo portanto, um elemento diferencial na disputa pela preferência do consumidor. Sendo assim, no projeto de um trem de potência, devem ser levados em conta tanto requisitos de conforto e durabilidade, quanto requisitos de desempenho e segurança.

Muitas vezes estes quesitos de usabilidade geram requisitos de projeto antagônicos, deixando como única alternativa o desenvolvimento de um projeto que firme um compromisso estreito entre estas metas, como por exemplo, conforto e performance.

Além disso, este compromisso fica ainda mais estreito quando são levadas em conta as falhas inerentes a um sistema. Em alguns sistemas, como é o caso do trem de força, há certos fenômenos que ocorrem devido à presença de características que são essenciais para seu bom funcionamento. Assim, o projeto do *powertrain* deve buscar uma condição onde os efeitos desejados em sua operação sejam alcançados, e os não desejados sejam minimizados a níveis aceitáveis. Neste caso, uma solução que reduz os efeitos de uma falha em específico pode aumentar a severidade de outras falhas.

Deste modo, a predição do comportamento de um trem de potência passa a ser de grande valia para empresas desenvolvedoras de tecnologia. Realizar simulações computacionais, ao invés de construir um grande número de protótipos e realizar testes, é um grande ganho para este tipo de desenvolvedor, pois com um simples conjunto de simulações, de custo desprezível e tempo reduzido, é possível desenvolver a solução ou o conjunto de soluções que melhor atende aos requisitos do projeto.

É importante salientar que o processo de simulação computacional não elimina a necessidade de construção de protótipos e realização de testes em campo, mas é essencial para que, na fase de construção do protótipo, a solução a ser construída seja mais elaborada, e muito mais próxima da solução final, economizando recursos e tempo para a empresa.

Para a realização de simulações computacionais é fundamental que se faça uma idealização do sistema cujo comportamento se deseja prever, e esta idealização deve ser refinada a ponto de representar os fenômenos físicos observados em campo, e simples a ponto de ser computacionalmente realizável.

O trem de força dispõe de alguns elementos complexos, de comportamento essencialmente não linear, cujo objetivo é melhorar o desempenho deste sistema. Porém, a sua presença introduz efeitos à sua dinâmica que não podem ser descritos por um sistema linear. Em outras palavras, o comportamento de um trem de potência apresenta fenômenos essencialmente não lineares, e por esta razão, uma abordagem não linear se faz necessária para a sua predição.

Por esta razão, desde agosto de 2006 vem sendo desenvolvido um software de simulação dinâmica não linear de trens de potência e processamento de sinais digitais chamado *DTA* (do Inglês, *Drivetrain Analyzer*) em conjunto com os alunos Allan Francisco Oliveira e Hugo Heidy Miyasato, Engenheiros de Controle e Automação da turma de 2005 da Universidade Estadual de Campinas, Douglas Vinícius Lemes e Leandro Perestrelo, da ZF Sachs do Brasil, e Luiz F. Pereira, da Eaton Divisão Transmissões.

A necessidade do desenvolvimento deste software surgiu do fato de que atualmente há poucos programas disponíveis no mercado dedicados especificamente à análise de trens de potência, e os que estão disponíveis lidam apenas com modelos lineares. Ainda assim, a partir destes modelos lineares os profissionais da área conseguem obter uma estimativa do comportamento torcional deste sistema. Por este fato, muitas vezes neste trabalho os termos

“frequência natural” e “modo de vibrar” são relacionados a sistemas não lineares, pois isto se tornou um jargão muito comum desta área. Porém, estes termos se referem sempre a uma versão linearizada do modelo não linear em questão.

Pela grande necessidade de resultados em um curto espaço de tempo, os profissionais da área de desenvolvimento de trens de força utilizam uma abordagem de solução de problemas muitas vezes baseada em sua experiência pessoal ou em regras estabelecidas internamente à empresa para o projeto de seus produtos. Estas soluções adotadas por estes profissionais são efetivas na maioria dos casos, mas são baseadas em fatos que muitas vezes não possuem comprovação científica.

Por outro lado, o estudo de trens de potência na comunidade acadêmica feito sob uma abordagem puramente teórica, além de poder trazer resultados pouco interessantes a seus fabricantes, fica comprometido justamente pela ausência da experiência prática adquirida pelos engenheiros e técnicos que trabalham diretamente com este sistema. Sem esta experiência é praticamente impossível vislumbrar algumas soluções que, para estes profissionais, são corriqueiras.

Por isso, graças ao contato obtido principalmente com os profissionais da ZF Sachs do Brasil, mas também com os da Eaton, GM, Ford, LuK, e outras empresas do ramo, este trabalho visa agregar todo o conhecimento teórico da dinâmica de sistemas lineares e não lineares com a rica experiência fornecida por estes profissionais, de forma a embasar cientificamente algumas das soluções que são adotadas na prática, e compreender alguns fenômenos observados em medições feitas em trens de potência reais.

O *DTA* é um software de simulação de sistemas lineares e não lineares, e utiliza basicamente a abordagem de montagem da área de elementos finitos para a montagem das matrizes globais do modelo em estudo. Esta técnica, a princípio proposta para sistemas lineares foi então adaptada para que o software pudesse simular também sistemas não lineares. Com esta ferramenta ganha-se muita agilidade na simulação do comportamento de diferentes modelos, pois o processo da montagem das equações de movimento do sistema é feito automaticamente. Esta característica permite fazer um estudo detalhado sobre como cada uma das alterações feitas no sistema, como modelos de não linearidades e parâmetros físicos, influenciam seu comportamento dinâmico. Assim, é possível não só reproduzir os mesmos resultados já gerados por softwares comerciais, mas também realizar estudos mais aprofundados e compreender quais são as implicações das linearizações utilizadas até então

para o estudo do trem de força.

## 1.1 Motivação

A literatura na área de trens de potência automotivos é bastante vasta. A maioria dos livros e artigos publicados são de autores norte-americanos, japoneses, franceses e alemães, e datam das décadas de 1970, 1980 e 1990. Estes trabalhos foram produzidos por autores com características diversas, desde engenheiros da área automotiva até membros da comunidade acadêmica.

Além disso existem várias áreas, como a dinâmica, a acústica, a termodinâmica e a ciência dos materiais, cujo objeto de estudo é o trem de potência, e por isso existe um grande número de trabalhos publicados nestas áreas. Dentro da dinâmica, que é a área de concentração deste trabalho, há um muitos fenômenos que fazem parte do comportamento dinâmico deste sistema, e por este motivo também há um vários trabalhos publicados fazendo uma investigação sobre cada um destes fenômenos e suas possíveis soluções.

Deve-se atentar ao fato de que muitos dos autores destes trabalhos são provenientes de empresas do ramo, e cada uma destas empresas nomeia estes fenômenos de maneira distinta. Assim um grande esforço deve ser feito para que se possa compreender cada um de seus fenômenos e distinguir cada uma das nomenclaturas utilizadas por estes autores.

Devido à complexidade do sistema, a nomenclatura destes fenômenos é baseada sempre no comportamento que este apresenta quando eles ocorrem, ou seja, no efeito apresentado quando há ocorrência do fenômeno. Assim, a sua diagnose subjetiva é um processo relativamente simples, que demanda apenas o treinamento do profissional designado para realizá-la. Porém, por ser um sistema altamente não linear e com múltiplos graus de liberdade a compreensão do fenômeno físico é um processo complexo, a não evidenciado por muitos autores.

Pode-se dizer que, apesar de a literatura nesta área ser vasta, a compreensão física dos fenômenos físicos encontrados em um trem de potência ainda é vaga, e as informações relativas a esta compreensão se encontram esparsas dentre os trabalhos na área. Este fato, aliado à posse de uma nova ferramenta inteiramente dedicada à análise de trens de força automotivos constituem as motivações básicas para a execução desta dissertação.

Com base nesta literatura e na ferramenta desenvolvida em trabalhos anteriores, o *DTA*, são estudados neste trabalho os fenômenos de *shuffle* e *clunk* em trens de potência. Estes fenômenos são investigados pois muitos autores fazem previsões do primeiro baseados em modelos lineares, e neste trabalho busca-se entender quais as consequências de se tentar prever este fenômeno a partir de um modelo tão simplificado. O *clunk*, porém, é um fenômeno que ocorre juntamente com o *shuffle* e não pode ser reproduzido em um modelo linear pois só ocorre se o sistema possuir folgas em seus engrenamentos. Com o *DTA* o processo de simular o trem de força com diferentes modelos de engrenamento é relativamente simples, melhorando a compreensão deste fenômeno físico.

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é investigar os fenômenos de *shuffle* e *clunk* em trens de potência, e a influência dos parâmetros do pré-amortecedor do disco de embreagem sobre estes fenômenos. Nesta dissertação, esta investigação é feita através da modelagem matemática e da simulação computacional destes modelos. Por isso, busca-se também compreender quais são as limitações oferecidas pelas simplificações adotadas no estudo de *drivelines*.

## 1.3 Descrição do trabalho

Nesta seção é apresentada uma breve descrição de cada um dos capítulos. O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica feita para a execução deste trabalho. Mesmo sendo vasta a literatura na área de trens de potência, são poucos os trabalhos que apresentam alguma formulação sobre os elementos presentes neste sistema. Muitos deles possuem informações relativas à descrição dos efeitos observados no trem de potência quando sujeitos a algum fenômeno físico, o que é importante no processo de classificação e compreensão do comportamento apresentado. Em muitos o nome de cada um dos fenômenos é diferente, e nesta revisão os nomes encontrados para cada fenômeno são agrupados.

Como as equações de movimento deste trabalho são todas montadas automaticamente pelo *DTA*, no capítulo três são apresentadas todas as ferramentas necessárias para a elaboração das equações de movimento, incluindo imposição de equações de restrição e formas

de estado possíveis para a solução de cada tipo de sistema. Também é apresentada neste capítulo a formulação do problema de autovalores e autovetores para sistemas com matrizes assimétricas, e o método de cálculo de autovetores generalizados para o caso de sistemas com raízes repetidas, que ocorre neste trabalho. Finalmente é apresentada a modelagem de cada um dos elementos do trem de potência e a descrição do modelo completo e das linearizações utilizadas para o estudo em questão.

O quarto capítulo é dedicado ao estudo do modelo totalmente linear do trem de potência, que é feito em três etapas. Na primeira, estuda-se do modelo com o disco de embreagem linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento. Já na segunda etapa, o disco de embreagem é linearizado em torno da região de tração, que neste caso possui a mesma rigidez da região de retração. Na terceira etapa, utilizando o *modal assurance criterion*, apresentado por Allemang (2003), varia-se a rigidez do disco de embreagem linearizado, e então é feito um estudo sobre o comportamento das frequências naturais e dos modos de vibrar deste sistema.

Antes do estudo do modelo do trem de força completo e não linear, o quinto capítulo é dedicado ao estudo do comportamento de sistemas de um grau de liberdade que possuem um dos elementos não lineares deste trabalho, seja ele um disco de embreagem ou um modelo de engrenamento do tipo *impact damping*, ligando sua inércia a um ponto fixo. Estes sistemas são analisados para que se possa obter uma melhor compreensão dos fenômenos apresentados pelos sistemas não lineares de múltiplos graus de liberdade estudados no sexto capítulo.

Finalmente, no sétimo capítulo são apresentadas as conclusões e comentários gerais deste trabalho, e as perspectivas para estudos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O objetivo deste capítulo é apresentar uma revisão bibliográfica detalhada sobre os tópicos que serão abordados neste trabalho. Mesmo que a literatura na área de NVH e trens de potência seja vasta, é uma tarefa trabalhosa levantar as questões específicas de cada componente, de cada fenômeno, e do projeto deste sistema, de forma que seja possível compreender a sua complexidade. Muitos dos trabalhos apresentam modelagens muito simplificadas em alguns aspectos, e sua grande maioria não traz dados para que estes resultados sejam reproduzidos, o que aumenta severamente a dificuldade de realização de um trabalho deste tipo.

Um trem de potência é um sistema presente em veículos automotores cuja função é transformar a energia advinda do motor em energia cinética para o movimento do veículo. Por esta razão, todos os elementos que transmitem torque do motor até as rodas do veículo fazem parte então deste sistema.

Por esta razão, a revisão bibliográfica deste trabalho é dividida em três partes. Na primeira, serão apresentados os principais elementos que constituem um trem de força. Isto é feito pois, mesmo que haja configurações de trens de potência das mais diversas, os elementos que as constituem são os mesmos, e isto facilita na compreensão dos fenômenos em estudo.

Em seguida são apresentadas as configurações clássicas deste sistema, para que se possa compreender como cada um dos componentes do trem de força trabalha para transmitir o torque até as rodas do veículo. Além disso, há configurações que tornam o trem de potência mais sensível aos fenômenos de *shuffle* e *clunk*.

Finalmente descreve-se os principais fenômenos que o *powertrain* pode apresentar, sua caracterização e suas possíveis causas. Esta descrição é confrontada com os resultados obtidos neste trabalho.

## 2.1 Elementos básicos de um trem de força

Há alguns elementos básicos que estão presentes na maioria das configurações de trens de potência. Nesta seção são introduzidos os conceitos sobre motores a combustão interna, o volante de inércia, o sistema de embreagem, a transmissão e o diferencial.

### 2.1 Motor

A grande maioria dos trens de potência atuais é impulsionada por um motor movido a combustão interna. Segundo Balluchi (2005), existem também:

- Trens de potência híbridos, que são movidos por motores a combustão interna em conjunto com motores com outros princípios de funcionamento, normalmente elétricos.
- Trens de força elétricos, movidos unicamente por motores com este princípio de funcionamento.

O que é desejado na prática é que o torque gerado pelo motor seja composto apenas por um torque médio, sem ondulações. Porém, devido à sua característica cíclica e à forma da curva de pressão na câmara de combustão, o torque resultante de um motor a combustão interna possui flutuações, cuja frequência fundamental depende de sua velocidade de rotação e também do número de cilindros que este possui. Esta frequência é chamada de *firing frequency* (KIM et al. 2005).

Para acelerar um motor com este princípio de funcionamento é preciso enriquecer a mistura ar-combustível, de forma que as explosões gerem pulsos de torque de maior amplitude por queimarem uma quantidade maior de combustível, gerando mais potência.

Porém, de acordo com as características e mesmo com a calibração de cada tipo de motor, sua resposta pode ser mais brusca ou mais suave. Isto significa que a taxa variação do torque gerado pelo motor, caso o motorista pise ou tire o pé do pedal acelerador, é influenciada por alguns parâmetros, como é o caso do coletor de admissão em veículos com carburador, e da calibração da injeção eletrônica, em veículos que possuem este sistema.

No caso dos veículos que possuem carburador, para uma dada abertura do corpo de borboleta (“*Throttle body*”), a taxa de aumento do torque do motor é limitada pelo volume de admissão do coletor de admissão, que se enche e se esvazia exponencialmente. Quanto maior este volume, para uma mistura ar-combustível constante, mais lento será o aumento de torque do motor, quando o motorista solicitar torque máximo do motor pisando no acelerador rapidamente até o fim de seu curso (KRENZ, 1985). Pulsos muito íngremes de torque, além de gerarem desconforto aos passageiros do veículo, podem fazer com que o trem de potência apresente comportamentos indesejados.

Quanto ao caráter oscilatório do torque, sua intensidade depende do combustível do motor e de seu número de cilindros. Quanto mais cilindros este possuir, maior será a frequência da ondulação no torque de saída, e menor a sua intensidade (LIGIER, BARON, 2002). Além disso, motores que funcionam com ciclo Diesel, trabalham com pressões na câmara de explosão muito maiores, e por isso, a flutuação de torque nestes motores é maior comparada com os motores ciclo Otto e Dual (MORAN, SHAPIRO, 2006).

## 2.1 Volante de Inércia

O volante de inércia é um componente do *powertrain* cuja função é atenuar as flutuações do torque gerado pelo motor. Atualmente, há dois modelos de volante de inércia mais utilizados: o volante de inércia simples, também conhecido como *flywheel*, e o volante de dupla massa, conhecido como volante bipartido ou *dual mass flywheel*.

O volante de inércia simples é um disco que e reduz a flutuação da aceleração angular proveniente do motor pelo fato de possuir um momento de inércia elevado. Quanto maior o momento de inércia deste disco, menor a flutuação em sua aceleração angular final. Contudo, valores de inércia muito elevados podem fazer com que o sistema tenha performance indesejável, com alto consumo de combustível, e baixos níveis de aceleração (COUDERC, 1998).

Já o volante de dupla massa consiste de dois volantes de inércia interligados por uma mola de baixa rigidez e um mecanismo de atrito interno. Os principais benefícios observados no uso deste tipo de volante são a redução de algumas frequências naturais do trem de força para valores abaixo da faixa de operação do motor, a dissipação de energia pelo mecanismo de

atrito interno do componente, atenuando fenômenos como o ruído de *rattle*, e a possibilidade de uso de um disco de embreagem rígido, eliminando o fenômeno de *creeping*. Porém, do mesmo modo que algumas das frequências naturais saem da faixa de operação do *powertrain*, outras frequências naturais, anteriormente acima desta faixa crítica podem agora pertencer a este intervalo, o que não é desejável (THEODOSSIADES, 2006).

## 2.1 Embreagem

A embreagem (*clutch*) é um elemento do *driveline* que permite o acoplamento e o desacoplamento entre o volante de inércia e a transmissão do veículo. Sem isso seria impossível realizar a troca de marchas de um veículo com este em movimento, ou pará-lo completamente sem que o motor fosse desligado. Por ter esta potencialidade, este componente possui quatro funções básicas:

- a) Transmitir o torque do volante de inércia para a transmissão.
- b) Interromper a transmissão de torque entre estes componentes.
- c) Modular o torque transmitido para a transmissão.
- d) Filtrar as vibrações mecânicas vindas do motor.

Este elemento é composto por duas partes principais: o disco de embreagem e o mecanismo de acoplamento. Este disco é composto de um cubo central, ligado por um sistema de molas a um disco externo, revestido por um material de atrito. Este sistema de molas proporciona ao conjunto final uma rigidez estratificada, com região central mais flexível e extremidades com rigidez mais elevada. Esta construção caracteriza um tipo de mola conhecido como *hardening spring*, pois com o aumento do deslocamento relativo entre as extremidades do disco de embreagem (cubo e material de atrito), o valor da rigidez aumenta (DUAN, SINGH, 2007).

Para o melhor entendimento das características de rigidez e dissipação de energia do disco de embreagem, serão definidos aqui os sentidos positivo e negativo do deslocamento relativo entre as duas extremidades deste disco. Com base nestas definições, será definida a nomenclatura utilizada nesta área para cada um dos estágios em que a embreagem pode trabalhar.

O sentido positivo é caracterizado quando, em um mesmo sistema de referência, o deslocamento angular do material de atrito da embreagem é maior do que o deslocamento de seu cubo central, ou seja, considerando que o sistema esteja totalmente acoplado, o deslocamento angular do volante de inércia é maior do que o deslocamento angular do eixo de entrada da transmissão. Isto acontece quando o veículo está acelerando (para frente ou para trás). Neste sistema de referência, o sentido positivo de deslocamento é o mesmo sentido de rotação do motor.

Já o sentido negativo é definido pela situação contrária, ou seja, no caso do disco de embreagem, o deslocamento angular do material de atrito é menor do que o de seu cubo central, ou ainda, no caso de o sistema estar totalmente acoplado (sem deslizamento entre o material de atrito e o volante de inércia), o deslocamento angular do eixo de entrada da transmissão é maior do que o deslocamento angular do volante de inércia do veículo. Isto acontece em situações de freio motor, onde uma marcha está engatada, mas o motorista não pisa em nenhum pedal, e o próprio motor freia o veículo.

Definidos os sentidos positivo e negativo do disco de embreagem, apresenta-se agora a nomenclatura utilizada nesta área para denominar cada um dos estágios do disco de embreagem. Esta nomenclatura é advinda do cotidiano das empresas desenvolvedoras deste produto, e por esta razão muitas vezes estes nomes não seguem o rigor técnico. Mesmo assim, esta será utilizada por motivos práticos e para que este trabalho possa ser útil a estes fabricantes.

Sendo assim, é dito que os estágios da embreagem que se encontram na região positiva, depois do estágio central de baixa rigidez, são chamados de estágios de *drive* ou de tração; o que se encontra na região mais negativa é chamado de estágio de *coast* ou retração e os estágios intermediários, de menor rigidez, são chamados de *pré-amortecimento*. Esta nomenclatura está esquematizada na Figura 2.1.

Como já foi mencionado, além do sistema de molas, o disco de embreagem também possui dois dispositivos de atrito interno, chamados de *dampers* que introduzem amortecimento ao sistema via atrito de Coulomb. Este efeito ajuda a filtrar as flutuações do torque vindo do motor, mas pode introduzir comportamentos indesejáveis ao trem de potência em marcha lenta (COUDERC, 1998). Este sistema possui dois *dampers* distintos. Um deles confere atrito somente ao estágio de *pré-amortecimento*, e o outro, nos estágios restantes. Isto ocorre pois a energia dissipada por ciclo em um sistema oscilatório com fricção varia

com o coeficiente de atrito entre as superfícies e com a rigidez à qual o sistema está exposto, por isso as características de atrito de cada estágio devem ser distintas, como se vê na Figura 2.1.

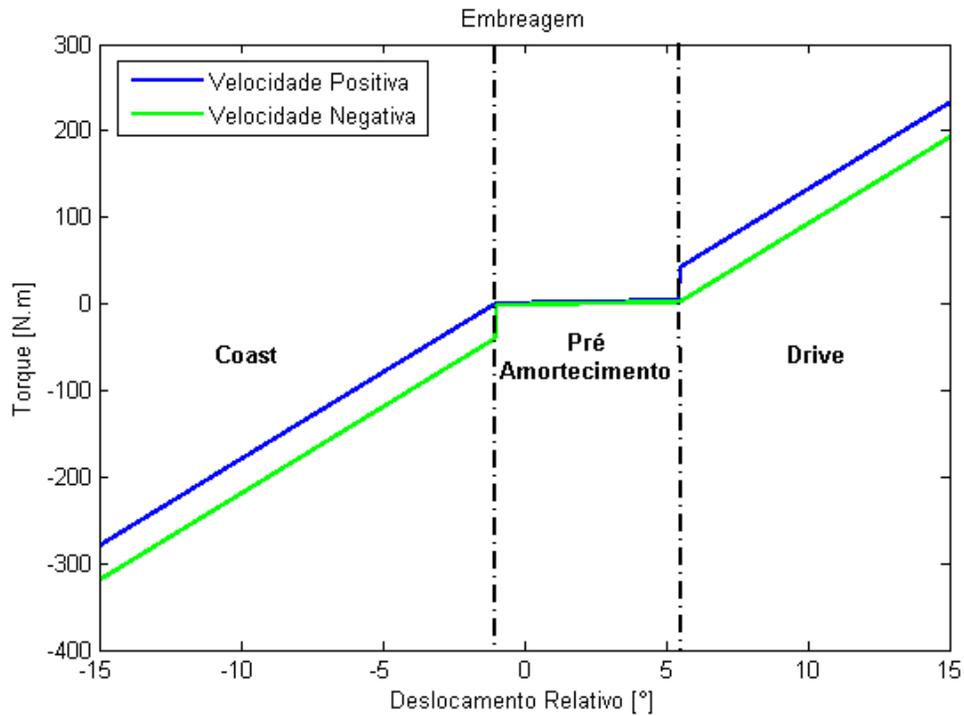


Figura 2.1: Estágios de rigidez de uma embreagem.

## 2.1 Transmissão

Dependendo da rotação em que um motor trabalha, o torque final que este pode entregar ao sistema é diferente. Assim, o torque gerado pelo motor possui uma relação direta com sua velocidade de operação, e esta relação depende do princípio de funcionamento e da concepção de cada motor. Os motores a combustão interna, e também outros tipos de motores, possuem uma curva característica chamada *curva de torque*, onde é mostrada a relação entre o torque gerado e sua velocidade angular.

No caso dos motores a combustão interna, esta curva apresenta baixos níveis de torque para velocidades angulares baixas, e um ponto ótimo de torque em uma velocidade mediana, que varia de acordo com o modelo do motor. Um exemplo de curva de torque para um motor

a combustão interna pode ser visto na Figura 2.2

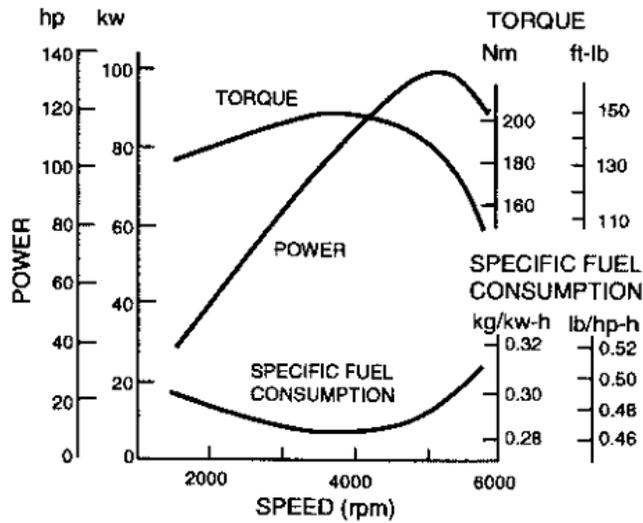


Figura 2.2: Curva de torque de um motor a combustão interna (GILLESPIE,1992).

Deste modo, sem uma relação de redução seria muito difícil tirar um veículo do repouso, pois para velocidades baixas do motor, o torque resultante é pequeno. Além disso, quando o motor atingisse seu ponto ótimo de torque, sem uma relação de multiplicação, ele estaria sendo sub utilizado, pois o veículo teria uma velocidade muito baixa, o que tornaria o seu uso limitado (LECHNER, NAUNHEIMER, 1999).

Assim, com o uso de relações de engrenamento de redução, o torque do motor é amplificado, o que torna a partida do veículo (*drive off*) mais fácil. Com o veículo em movimento, pode-se alterar esta relação para amplificar não o torque, mas a velocidade de saída do motor, fazendo com que o veículo consiga atingir seu ponto ótimo de eficiência em altas velocidades. O componente que une todos estes engrenamentos e permite que se possa alternar entre eles de acordo com a necessidade é conhecido como transmissão ou *gearbox*.

As folgas são características inerentes dos engrenamentos deste componente. Estas permitem que os dentes das engrenagens se encaixem sem interferência, e que quando o dente de uma engrenagem entre em uma cavidade de outra, o óleo lubrificante consiga sair a tempo, evitando esforços laterais nos eixos da transmissão. Além disso, com o passar do tempo, estas folgas podem aumentar devido ao desgaste do sistema.

A presença de folgas causa excitações impulsivas no sistema, e normalmente causa

ruídos, também conhecidos como *gear rattle*. No caso de reversões bruscas de torque no sistema, sua presença pode causar impactos de curta duração e alta intensidade, o que também é conhecido como *clunk* (CROWTHER et al. 2005).

## 2.1 Diferencial

Nos veículos atuais, tanto os de tração dianteira quanto os de tração traseira, o torque proveniente do motor é transmitido para mais de uma roda. Porém a transmissão deste torque para duas ou mais rodas não pode ser feita por meio de um engrenamento simples, e um eixo rígido ligando as duas rodas. Caso o veículo ande somente em linha reta, este sistema funcionará corretamente, mas em de trajetórias curvas haverá problemas. Neste caso, as rodas internas e externas à trajetória possuirão velocidades diferentes, o que causará deslizamento de uma das rodas, ou tensão cisalhante desnecessária no eixo eixo que as une, causando uma falha catastrófica (LECHNER, NAUNHEIMER, 1999).

O diferencial (*differential gear*) é um conjunto de engrenamentos que distribui o torque para as duas rodas do veículo, e que permite que elas tenham velocidades diferentes, sem causar tensões nos eixos de cada uma das rodas, também chamados de semieixos.

O torque vindo da transmissão é transmitido através de um engrenamento simples para a engrenagem principal do diferencial, chamada de coroa. Ligada a ela perpendicularmente estão duas engrenagens chamadas de *spider gears*. Estas duas estão engrenadas perpendicularmente aos semieixos das rodas direita e esquerda <sup>1</sup>. Um desenho esquemático de um diferencial pode ser visto na Figura 2.3.

O movimento de rotação das *spider gears* em torno de seu próprio eixo permite que os semieixos possuam velocidades diferentes. Já a translação sua em torno do centro geométrico dos semieixos transfere o torque para eles e conseqüentemente para as rodas do veículo, provocando o movimento e permitindo que o veículo realize trajetórias curvas (MIMURA, 2007).

---

<sup>1</sup>Rodas direita e esquerda traseiras, no caso de um veículo de tração traseira, e dianteiras, no caso de um veículo de tração dianteira

## 2.2 Configurações clássicas de um trem de potência

Além das partes que compõe os trens de força, outra característica que pode diferenciá-los é a disposição destas partes na configuração final do projeto. Apresentados os elementos de um trem de potência, existem algumas montagens clássicas, que variam com o tipo de tração do veículo e também com sua finalidade. Duas das montagens mais comuns serão apresentadas e analisadas nas próximas sessões.

### 2.2 Configuração FR

Na configuração FR (*front engine, rear wheel drive*) o motor e a transmissão são dispostos na parte dianteira do veículo, e, através de um longo eixo, chamado eixo cardã, *propellershaft* ou *driveshaft*, o torque de saída da transmissão é transmitido para o diferencial, que o distribui entre as rodas traseiras do veículo. Esta montagem é muito utilizada em caminhões articulados, unidades de tração, ônibus urbanos, caminhonetes, caminhonetas e em alguns veículos de passeio.

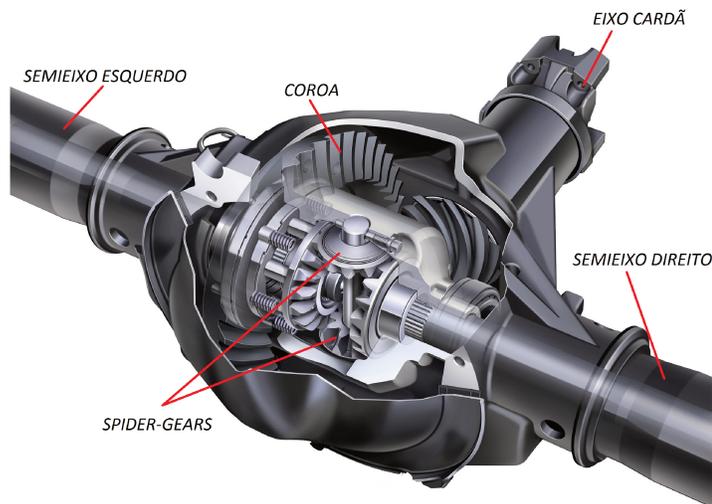


Figura 2.3: Esquema de um diferencial. (Adaptado de <http://www.2405.com/press-library/Hummer-H3-2006/HUMMER-H3-Electronic-Locking-Rear-Differential.asp>).

Por ser uma configuração mais flexível (dinamicamente) do que a configuração FF, apresentada a seguir, alguns efeitos, como o *clunk*, podem ser atenuados. Porém, se a esta for flexível sem o nível de amortecimento adequado, a performance em *shuffle* pode ser comprometida. (KRENZ, 1985) Esta configuração é mostrada na Figura 2.4.

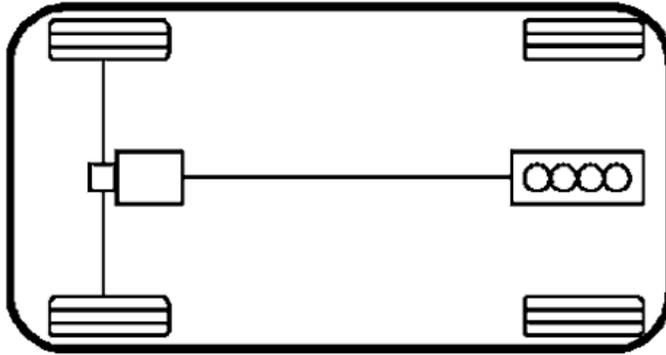


Figura 2.4: Esquema de uma configuração FR (GENTA, MORELLO, 2009).

## 2.2 Configuração FF

A configuração FF (*front engine, front wheel drive*) é caracterizada por manter todos os componentes do trem de potência na parte dianteira do veículo. O diferencial e a transmissão são montados em uma única peça, dispensando o uso do eixo cardã. Além disso, os semieixos que ligavam o diferencial às rodas tracionadas, agora são substituídos por juntas homocinéticas, permitindo que as rodas dianteiras do veículo possam girar (no sentido de realizar uma trajetória curva) e ainda assim receber torque.

Uma desvantagem desta montagem é que a distribuição de peso ao longo do veículo não é uniforme, e a suspensão precisa ser bem calibrada para atenuar os efeitos de *squat* e *dive*, ou seja, alterações no ângulo de *pitch* do veículo em condições de aceleração e frenagem, que se tornam mais críticos nesta condição (GENTA, 2003). Esta montagem é apresentada na Figura 2.5.

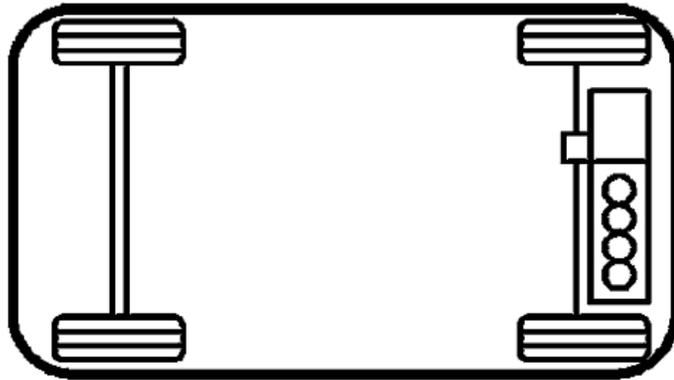


Figura 2.5: Esquema de uma montagem FF (GENTA, MORELLO, 2009).

### 2.3 Fenômenos de NVH

No desenvolvimento de veículos automotores, muito do teor de competitividade do produto está ligado ao conforto, tanto mecânico quanto sonoro.

O objeto de estudo da área de NVH (*noise, vibration and harshness*) é exatamente os problemas de vibração e ruído existentes em veículos (REITZ, BIERMANN, KELLY, 1999). Alguns dos problemas de NVH são fortemente relacionados ao trem de potência, pois este sistema interage diretamente com o motor, que é a principal fonte de vibração do veículo (BALLUCHI, 2005). Além disso, as não linearidades presentes no trem de potência contribuem para a geração de estímulos impulsivos no sistema, o que propicia a geração de ruído (GURM et al, 2007).

Serão apresentados em seguida os fenômenos de NVH mais recorrentes relacionados ao trem de potência.

#### 2.3 Shuffle

O *shuffle*, também conhecido como *surging*, não é um problema de ruído, mas um problema exclusivamente de vibração mecânica. Quando o motorista aplica pulsos de torque muito íngremes no sistema (excitação também conhecida como *tip-in/tip-out* ou *tip-in/back-*

*out*), normalmente em manobras de ultrapassagem ou reações extremas de direção, o veículo apresenta uma vibração longitudinal de grande amplitude, cuja frequência pode variar de 2 a 8 Hz, dependendo do veículo, e que pode durar até 1 segundo. Estes fatos são obtidos dos trabalhos de Reitz et al. (1999) e Biermann (2000).

Este fenômeno, além de causar desconforto, pode submeter o sistema a altos níveis de aceleração, podendo danificar os elementos do trem de força ou ainda induzir o motorista a perder o controle do veículo, ocasionando acidentes.

Dentre as características dos trens de potência mais usuais, algumas delas influenciam significativamente na resposta do veículo a este fenômeno. São elas:

- a) O uso frequente de montagens FF, mais rígidas do que as FR, o que afeta significativamente a resposta do sistema em baixas frequências (KRENZ, 1985).
- b) O uso de corpos de borboleta mais largos e de abertura rápida, com coletores de admissão de baixo volume, no caso de motores com carburador, fazendo com que a taxa de variação de torque do motor seja mais alta, em um intervalo de tempo menor. O fenômeno de *shuffle* é altamente sensível a variações bruscas de torque (KRENZ, 1985).
- c) A calibração da injeção eletrônica nos motores atuais, que faz com que o motor tenha resposta mais rápida, gerando pulsos de torque que podem provocar o *shuffle*.

### 2.3 Judder

O fenômeno de *Judder* também não é um problema de ruído, mas um problema de vibração em baixa frequência (de 5 a 20 Hz) e está essencialmente relacionado ao processo de acoplamento da embreagem.

Neste caso o motorista retira o pé do pedal de embreagem, fazendo com que o material de atrito do disco de embreagem e o volante de inércia do veículo entrem em contato, transmitido o torque à transmissão por meio de atrito. Dependendo da variação da força normal, do coeficiente de atrito, e de irregularidades entre as superfícies de atrito, este torque pode ser transmitido à transmissão de maneira pulsante, e não contínua como deveria ser, provocando oscilações no veículo.

Alguns autores afirmam que se trata de um problema de *stick-slip*, enquanto outros dizem que o que gera o problema são as características do sistema de acoplamento.

### 2.3 Clunk

O fenômeno de *clonk* ou *clunk*, também conhecido como *load shift knock*, ocorre normalmente junto com o fenômeno de *shuffle*, mas é um problema mais relacionado ao ruído do que à vibração.

Quando o trem de potência é excitado com um pulso súbito de torque, ocorre o fenômeno de *shuffle*. Deste modo, haverá um grande nível de oscilação longitudinal no veículo, o que se traduz em altos níveis de vibração torcional no trem de força.

Na presença de folgas, o sistema girará livre enquanto não houver toque entre os dentes das engrenagens. Porém, quando o toque ocorrer, devido à alta rigidez dos dentes das engrenagens, um ruído metálico será produzido. As engrenagens que se chocam, provocando este ruído, são as engrenagens que transmitem potência (OH, SINGH, 2005). As características do pré-amortecimento da embreagem são fundamentais para o controle deste fenômeno (REITZ, BIERMANN, KELLY, 1999).

As soluções práticas mais adotadas para minimizar os efeitos do *clunk* são o ajuste adequado dos parâmetros do pré-amortecedor e a diminuição das folgas no sistema. Este fenômeno é muito sensível à primeira solução, e pouco sensível à segunda, de modo que para que haja alguma alteração significativa deste ruído, uma grande mudança nas folgas do sistema deve ser realizada (KRENZ, 1985).

Além disso, há algumas questões de projeto que influenciam este fenômeno severamente. O uso recorrente de motores de quatro cilindros, cuja oscilação de torque é alta, requer o uso de um pré-amortecedor mais largo, para amenizar o *idle rattle*, o que aumenta a severidade do *clunk* (KRENZ, 1985).

O projeto da transmissão também influencia significativamente neste fenômeno. O projeto do pré-amortecedor considera, entre outros fatores, o torque de arraste da árvore primária da transmissão. Assim, quanto mais discos solidários ao eixo houver nesta árvore,

maior deve ser o pré-amortecedor para garantir que em marcha lenta, o ruído de *rattle* não ocorra. Porém, um pré-amortecedor mais extenso implica em maior severidade no *clunk*. Deste modo, o ideal para este fenômeno é que a árvore primária da transmissão concentre o maior número de sincronizadores possível, fazendo com que sua superfície de contato com o óleo lubrificante seja minimizada, e um menor pré-amortecedor seja necessário, melhorando o desempenho em *clunk* e em *idle rattle* (KRENZ, 1985).

O pré-amortecedor, por possuir rigidez muito baixa acaba por aumentar a folga total do sistema, o que piora o desempenho em *clunk*, e por isso o sistema deve ser proposto de forma a reduzir ao máximo a extensão deste estágio da embreagem.

Outro fator determinante no desempenho neste fenômeno é a flexibilidade do trem de potência. A montagem FR é mais flexível do que a montagem FF, e por isso, menos susceptível ao *clunk*. Sistemas mais flexíveis têm menor chance de apresentar este fenômeno, pois a energia dos impactos passa a ser armazenada como energia potencial no sistema, reduzindo assim a força de impacto entre os dentes dos pares engrenados, e conseqüentemente o ruído gerado. Mesmo assim, níveis baixos de rigidez, sem o amortecimento adequado, podem piorar drasticamente a resposta em *shuffle* (KRENZ, 1985).

### 2.3 Rattle noise

O *Rattle Noise* ou ruído de *rattle*, como o próprio nome já sugere, é um problema essencialmente de ruído. Este ruído tem componentes de alta frequência e é ocasionado pelas batidas dos dentes das engrenagens da transmissão, e em alguns casos do diferencial. Este fenômeno é dividido em duas categorias: *Idle gear rattle* e *Drive gear rattle*.

O *Idle gear rattle* ocorre quando o motor funciona em marcha lenta, com a embreagem totalmente acoplada e a transmissão na posição Neutro (nenhuma marcha engatada). Uma vez que em marcha lenta o torque do motor apresenta altos níveis de flutuação, e nesta condição, todas as engrenagens do sistema que sofrem ação de algum torque possuem momentos de inércia muito pequenos, o resultado é um alto nível de ruído.

Nos aspectos de ruído e suas causas, o *Idle* e o *Drive gear rattle* são similares. Porém, o segundo ocorre quando a embreagem está totalmente acoplada e uma das marchas está

engatada. Neste caso, as frequências naturais do sistema podem influenciar na ocorrência deste fenômeno. Se o sistema está sob carga, este fenômeno é conhecido como *Clattering*. Neste caso os dentes dos pares engrenados solicitados se impactam como os dentes dos outros engrenamentos, mas estes impactos são intermitentes, ao contrário do *clunk*, onde ocorrem em um intervalo curto de tempo. (DOGAN, RYBORZ, BERTSCHE, 2004).

As características do pré-amortecimento da embreagem são fundamentais para o controle deste fenômeno, tanto em *Idle* quanto em *Drive* (COUDERC, 1998).

### 2.3 Creeping

O fenômeno de *creeping* ocorre na condição de *Idle*, onde o motor se encontra em marcha lenta, e a embreagem está acoplada, com uma das marchas engatadas, normalmente a primeira. Um exemplo muito comum deste tipo de uso do veículo é o de um caminhão de entregas procurando por um domicílio na rua desejada.

A embreagem é projetada para que, na condição onde nenhuma marcha está engatada, e a embreagem está acoplada, com a oscilação de torque em marcha lenta do motor, o conjunto opere somente dentro da região de pré-amortecimento. Caso isto não ocorra, e o sistema passe a alternar sua operação entre este estágio e o de tração ou *drive*, ocorre o fenômeno de *creeping*, como ilustrado na Figura 2.6

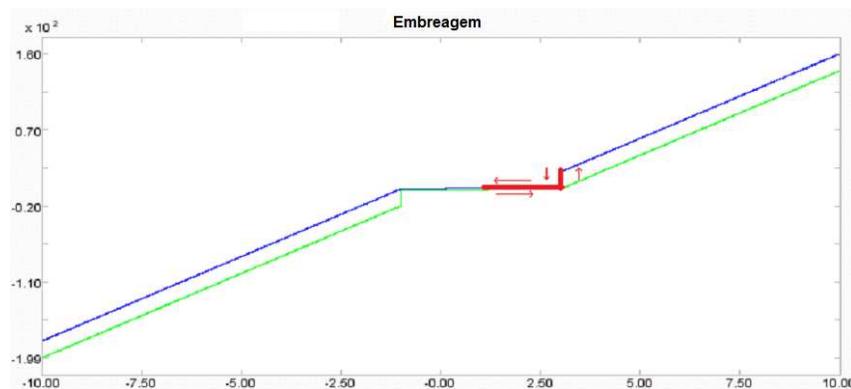


Figura 2.6: Variação entre os estágios da embreagem, gerando o fenômeno de *creeping*.

Em condições de uso comuns, o projeto do pré amortecimento prevê esta condição do caminhão de entregas, e nesta condição, o sistema ainda deveria operar fora das faixas de

*drive* e *coast*. Porém, normalmente outras cargas, que não só a inércia do próprio veículo, atuam sobre o motor, como por exemplo sistema de ar-condicionado, alternador, direção hidráulica, entre outros. Além disso, para que o motor não deixe de operar (“morrer”), o controle de rotação do motor enriquece a mistura ar-combustível para suprir o efeito destas cargas, gerando mais torque.

Isto faz com que o sistema deixe de operar somente na condição de pré-amortecimento, e sua rigidez comece a variar entre os estágios de pré-amortecimento e *drive*. Além disso, entre elas há um salto de rigidez devido à diferença entre as histereses destes estágios. Isto causa oscilação torcional em diferentes frequências, o que ocasiona batidas de dentes na transmissão, gerando ruído.

### 3 MODELAGEM

Os fenômenos apresentados são comportamentos que ocorrem essencialmente por causa das não linearidades presentes no trem de potência. Por isso, uma modelagem puramente linear não traria informações suficientes para que fosse possível prever o comportamento de um *powertrain* em estudo.

Mesmo assim, algumas partes do sistema que são menos críticas, como eixos e inércias, podem ser modeladas como elementos lineares sem que se perca muito das informações relevantes sobre o comportamento do trem de potência.

A modelagem por parâmetros concentrados apresenta boa correlação com os resultados obtidos experimentalmente por inúmeros autores, desde que se tenha uma boa compreensão do sistema para o desenvolvimento deste modelo. Além disso, com o modelo de massas concentradas se pode desenvolver elementos finitos que representam as partes do sistema, e depois montar as matrizes globais do modelo em estudo (CROWTHER, ZHANG, 2005).

O software *DTA* utiliza exatamente este princípio. Nele cada um dos elementos finitos já implementados é representado por um bloco. Para a montagem de um modelo, basta que o usuário conecte os blocos entre si e os configure, inserindo os parâmetros físicos de cada elemento. Assim, o programa realiza a montagem das matrizes globais do sistema automaticamente, baseando-se em um algoritmo adaptado de Bathe (1996). O algoritmo apresentado por este autor contemplava somente sistemas lineares, e por isso foram feitas adaptações para que este contemplasse também sistemas não-lineares.

Além disso, há outros blocos neste software que não representam elementos finitos, mas sim restrições, como é o caso do engrenamento ideal. Além disso, no processo de modelagem pode haver meios graus de liberdade, e para que o software possa montar as equações de movimento automaticamente, estas questões devem ser levadas em consideração.

Evidentemente, o uso deste programa foi essencial à realização deste trabalho, pois ele facilitou em muito a simulação de diferentes modelos, uma vez que a etapa de montagem das equações de movimento não deve mais ser feita pelo usuário. Em decorrência deste

fato, na elaboração e análise dos modelos apresentados aqui não são exibidas as equações de movimento.

Por estas razões, neste capítulo são apresentadas todas as ferramentas necessárias para que com o *DTA* fosse possível a execução deste trabalho.

### 3.1 Modelagem não linear por parâmetros concentrados

Um sistema mecânico linear, cujos coeficientes são constantes no tempo pode ser representado por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que pode ser escrito na forma matricial a seguir:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\} \quad (3.1)$$

sendo:

$[M]$  é a matriz de massa ou inércia do sistema

$[C]$  é a matriz de amortecimento do sistema

$[K]$  é a matriz de rigidez do sistema

$\{x\}$  é o vetor de coordenadas físicas adotadas

$\{\dot{x}\}$  é a primeira derivada do vetor de coordenadas físicas, e contém as velocidades de cada grau de liberdade

$\{\ddot{x}\}$  é a segunda derivada do vetor de coordenadas físicas, e contém as acelerações de cada grau de liberdade

$\{F(t)\}$  é o vetor de forças excitadoras externas

Para que este sistema possa ser integrado através de um integrador numérico de primeira ordem, utiliza-se a seguinte transformação para o espaço de estados:

$$\begin{cases} \{y\} &= [A]\{y\} + [B]\{u\} \\ \{z\} &= [\tilde{C}]\{y\} + [D]\{u\} \end{cases} \quad (3.2)$$

sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0_{n \times n}] & [I_{n \times n}] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[B] &= \begin{bmatrix} [0_{n \times n}] \\ [M]^{-1} \end{bmatrix} \\
[\bar{C}] &= [I_{2n \times 2n}] \\
[D] &= [0_{2n \times n}] \\
\{y\} &= \{x_1 \cdots x_n \quad \dot{x}_1 \cdots \dot{x}_n\}^T
\end{aligned} \tag{3.3}$$

De acordo com a teoria de análise linear de sistemas,  $[A]$  é chamada de matriz do sistema,  $[B]$  é a matriz de entrada,  $[\bar{C}]$  é a matriz de saída, e  $[D]$  a matriz de retroalimentação.

Esta é a forma de estados para um sistema linear. Pode-se considerar que as não linearidades são de tal forma que variem com os estados <sup>1</sup>. Deste modo, as matrizes de rigidez e amortecimento terão partes constantes (relativas à parte linear do sistema) e partes não constantes (relativas às não linearidades). Por isso, a equação de movimento do sistema pode ser representada da seguinte maneira:

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([C_l] + [C_{nl}(x, \dot{x})])\{\dot{x}\} + ([K_l] + [K_{nl}(x, \dot{x})])\{x\} = \{F(t)\} \tag{3.4}$$

Então, é adotado o vetor de esforços relativos às não linearidades do sistema  $\{U(x, \dot{x})\}$ , que pode ser escrito na forma:

$$\{U(x, \dot{x})\} = -[C_{nl}(x, \dot{x})]\{\dot{x}\} - [K_{nl}(x, \dot{x})]\{x\} \tag{3.5}$$

Utilizando as Equações 3.4 e 3.5, é possível então escrever a equação de movimento deste sistema não linear como:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C_l]\{\dot{x}\} + [K_l]\{x\} = \{F(t)\} + \{U(x, \dot{x})\} = \{\bar{F}(t, x, \dot{x})\} \tag{3.6}$$

Assim, se torna possível utilizar a forma de estados representada na Equação 3.2.

---

<sup>1</sup>Quanto à nomenclatura utilizada, o termo “graus de liberdade de deslocamento” refere-se às variáveis que descrevem o deslocamento nas coordenadas físicas, enquanto “graus de liberdade de velocidade” refere-se à primeira derivada temporal destas variáveis. O termo “estados” é referente a ambas, simultaneamente.

### 3.2 Equações de restrição

A dinâmica de múltiplos corpos, também conhecida como *multi-body dynamics*, é uma técnica de representação matemática muito utilizada atualmente na engenharia. Seu uso tem sido motivado pelo fato de que há muitos mecanismos em aplicações industriais que são submetidos a altas rotações e velocidades, e por isso, o interesse no projeto e simulação do comportamento deste tipo de sistema é crescente.

No processo de modelamento matemático destes sistemas é necessário visualizar o diagrama de corpo livre de cada um dos corpos, para a montagem das equações de movimento, utilizando qualquer uma das vertentes da mecânica clássica <sup>2</sup>. Porém, em muitos casos, cada parte do sistema não está apenas sujeita a esforços, mas também a restrições cinemáticas. Além disso, quando a inércia de algum dos corpos é idealizada como desprezível por alguma razão (também conhecido como “meio grau de liberdade”), as equações de movimento para este corpo passam a ser equações de restrição para o sistema. Finalmente, em modelagens multi-domínio, muitas vezes o comportamento de alguns dos elementos do sistema em questão é regido por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem ou equações algébricas, o que, neste caso, pode ser visto também como equações de restrição.

A determinação do número de graus de liberdade de velocidade e de deslocamento de um sistema é influenciado diretamente pelo número de restrições ao qual o sistema está submetido, e por suas características. Por isso, serão apresentados os tipos de restrições aplicadas a sistemas dinâmicos e suas implicações na descrição matemática destes.

### 3.2 Restrições holonômicas

Uma restrição é dita holonômica<sup>3</sup> se a equação de restrição correspondente depende exclusivamente dos graus de liberdade de deslocamento e do tempo, ou seja, não depende dos graus de liberdade de velocidade. Assim, em um sistema multi-corpos tridimensional, com  $p$  corpos e  $q$  restrições holonômicas, o número de graus de liberdade de deslocamento é dado

---

<sup>2</sup>O termo “Mecânica Clássica” se refere às três principais formulações pré-relativísticas, ou seja, as formulações de Newton-Euler, Lagrange e Hamilton

<sup>3</sup>O termo “holonômico” significa “integrável”.

por  $f = 6p - q$ , e o número de graus de liberdade de velocidade, é dado por  $g = f$ . Portanto, o número de estados do sistema holonômico correspondente é dado por  $n = 12p - 2q$ .

Todas as restrições utilizadas neste trabalho podem ser escritas nas forma implícita ou explícita. No caso das restrições holonômicas, elas são representadas, respectivamente, por:

$$\Phi(x, t) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{x} = \dot{x}(y, t)$$

sendo que  $\Phi(x, t)$  representa a forma implícita das equações de restrição.

Nas formas implícita e explícita mostradas anteriormente, o vetor de coordenadas generalizadas  $y$  contém os  $f$  graus de liberdade de deslocamento do sistema holonômico. Porém, por razão de simplicidade, somente as formas implícitas serão utilizadas.

### 3.2 Restrições não holonômicas

Se uma equação de restrição passa a depender dos graus de liberdade de velocidade, esta restrição é dita não holonômica. Esta restrição não interfere no número de graus de liberdade de deslocamento do sistema, apenas no número dos de velocidade. Deste modo, se o sistema em questão, com  $p$  corpos está submetido a  $r$  restrições não holonômicas, e  $q$  holonômicas, o número de graus de liberdade de deslocamento continua sendo dado por  $f = 6p - q$ , mas o número de graus de liberdade de velocidade passa a ser dado por  $g = 6p - q - r$ , ou seja, o número de estados do sistema holonômico correspondente é dado por  $n = 12p - 2q - r$ .

Em suas formas implícita e explícita, uma restrição não holonômica pode ser escrita da forma:

$$\Psi(y, \dot{y}, t) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y} = \dot{y}(y, z, t)$$

sendo que  $\Psi(x, t)$  representa a forma implícita das equações de restrição.

Neste caso,  $y$  é o vetor de coordenadas generalizadas de deslocamento e  $z$  o de coordenadas generalizadas de velocidade.

### 3.2 Restrições reonômicas e escleronômicas

Uma restrição holonômica ou não pode ser classificada como reonômica ou escleronômica. Uma restrição reonômica é aquela na qual a variável de tempo  $t$  aparece explícita nas equações de restrição. Já uma restrição escleronômica é aquela cujo tempo é uma variável explícita em sua expressão.

### 3.3 Coordenadas modais e diagonalização de sistemas

Para o estudo analítico de sistemas de múltiplos graus de liberdade, muitas vezes é necessário que este seja diagonalizado, de forma que se possa analisar a contribuição de cada um dos modos em sua resposta final, ou ainda o quanto uma força externa em um certo grau de liberdade pode excitar cada modo do sistema.

Como já é bem fundamentado pela literatura, para que isto possa ser feito, é necessário que se resolva o problema de autovalores e autovetores associado ao sistema em estudo. Porém, a maioria dos autores desenvolve esta formulação somente para sistemas com matrizes simétricas. Neste trabalho, as formulações para matrizes simétricas e assimétricas será apresentada, assumindo que o sistema não possua autovalores de multiplicidade maior do que um. Esta formulação é obtida de (MEIROVICH, 1980).

### 3.3 Problema de autovalores e autovetores clássico

Um sistema dinâmico linear, com coeficientes invariantes no tempo, pode ser representado na forma de estados apresentada em 3.2. Desta forma, o problema de autovetores à direita em sua forma clássica é dado por:

$$[A][\Psi_d] = [\Psi_d][\Lambda] \tag{3.7}$$

em que  $[\Psi_d]$  é a matriz dos autovetores à direita e  $[\Lambda]$  a matriz espectral.

Já o problema de autovetores à esquerda é dado por:

$$[A]^T[\Psi_e] = [\Psi_e][\Lambda] \quad (3.8)$$

sendo  $[\Psi_e]$  a matriz dos autovetores à esquerda e  $[\Lambda]$  a matriz espectral, que é a mesma encontrada ao resolver o problema dos autovetores à direita (MEIROVICH, 1980). Tomando-se um autovetor à direita  $i$  e um autovetor à esquerda  $j$  quaisquer, pode-se escrever as equações:

$$[A]\{\psi_d^i\} = \lambda_i\{\psi_d^i\} \quad (3.9)$$

$$\{\psi_e^j\}^T[A] = \lambda_j\{\psi_e^j\}^T \quad (3.10)$$

Multiplicando a Equação 3.9 por  $\{\psi_e^j\}^T$  à esquerda, e a Equação 3.10 por  $\{\psi_d^i\}$  à direita, e subtraindo ambas, chega-se a:

$$(\lambda_i - \lambda_j)\{\psi_e^j\}^T\{\psi_d^i\} = 0 \quad (3.11)$$

De onde é possível concluir que, se  $i$  e  $j$  são diferentes, o produto  $\{\psi_e^j\}^T\{\psi_d^i\}$  é nulo, e se  $i$  e  $j$  são iguais,  $(\lambda_i - \lambda_j)$  é nulo, e portanto, o produto  $\{\psi_e^j\}^T\{\psi_d^i\}$  pode assumir qualquer valor, o que prova a ortogonalidade dos autovetores à direita e à esquerda. Deve ser ressaltado que estes autovetores não são mutuamente ortogonais, como aconteceria se a matriz  $A$  fosse Hermitiana. Portanto, os conjuntos de autovetores  $\{\psi_e^j\}$  e  $\{\psi_d^i\}$  são biortogonais (MEIROVICH, 1980).

O produto  $[\Psi_e]^T[\Psi_d]$  é diagonal e os autovetores podem ser normalizados de forma que o resultado deste produto seja a matriz identidade. Assim:

$$[\Phi_e]^T[\Phi_d] = [I] \quad (3.12)$$

sendo  $[\Phi_e]$  e  $[\Phi_d]$  os autovetores à esquerda e à direita normalizados, respectivamente. Então, conclui-se que:

$$[\Phi_e]^T = [\Phi_d]^{-1} \quad (3.13)$$

Esta relação é sempre válida, pois, pelo fato de o conjunto de autovetores à direita ser sempre linearmente independente, a matriz  $[\Phi_d]$  nunca será singular. Assim, é possível

escrever a Equação 3.7 em função dos autovetores normalizados e multiplicá-la à esquerda por  $[\Phi_e]^T$ , de onde se pode obter:

$$[\Phi_e]^T[A][\Phi_d] = [\Phi_e]^T[\Phi_d][\Lambda] = [\Phi_d]^{-1}[\Phi_d][\Lambda] = [\Lambda] \quad (3.14)$$

o que prova que os autovetores normalizados à esquerda e à direita diagonalizam a matriz  $A$ , e que o resultado desta normalização é a matriz espectral  $\Lambda$ .

Se a matriz  $A$  for simétrica, a Equação 3.8 torna-se igual à Equação 3.7, e por isso os conjuntos de autovetores  $[\Psi_d]$  e  $[\Psi_e]$  são iguais.

### 3.3 Problema de autovalores e autovetores generalizado

Uma das desvantagens de se escrever o sistema de equações de movimento na forma de estados apresentada pela Equação 3.2 é que, para a montagem da matriz  $A$  pelo método direto, é necessário que a matriz de massa não seja singular. A forma de estados apresentada a seguir tem a vantagem de que nada precisa ser assumido com relação às matrizes de inércia, rigidez e amortecimento para que ela seja realizada. Deste modo, a proposta é escrever o sistema na forma:

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = [Z]\{F(t)\} \quad (3.15)$$

Utilizando a equação de movimento geral do sistema, mostrada em 3.1 e a relação mostrada a seguir:

$$[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = 0 \quad (3.16)$$

Outras relações poderiam ser utilizadas no lugar da relação mostrada em 3.16, porém, o uso desta especificamente faz com que, se as matrizes  $[M]$ ,  $[C]$  e  $[K]$  do sistema forem simétricas, as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  desta forma de estados também o sejam, o que permite que métodos numéricos simples possam ser utilizados para a obtenção dos autovalores e

autovetores do sistema.

Conseqüentemente, as matrizes  $[A]$ ,  $[B]$  e  $[Z]$  podem ser da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0]_{n \times n} \end{bmatrix} \\ [B] &= \begin{bmatrix} [K] & [0]_{n \times n} \\ [0]_{n \times n} & -[M] \end{bmatrix} \\ [Z] &= \begin{bmatrix} [I]_{n \times n} \\ [0]_{n \times n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pode-se propor para esta equação, na forma de estados, a seguinte solução homogênea:

$$\{y(t)\} = \{\psi\}e^{\lambda t} \quad (3.17)$$

sendo os vetores  $\{\psi\}$  constantes, e autovetores do sistema, enquanto os valores calculados para  $\lambda$  são seus autovalores. Substituindo estes valores na Equação 3.15 em sua forma homogênea, pode-se escrever o problema de autovalores e autovetores à direita em sua forma generalizada:

$$[A][\Psi_d][\Lambda] = -[B][\Psi_d] \quad (3.18)$$

Neste caso, a matriz  $[\Psi_d]$  é a matriz dos autovetores à direita do sistema, e  $[\Lambda]$  sua matriz espectral. Assim, o problema de autovalores e autovetores à esquerda pode ser escrito na forma:

$$[A]^T[\Psi_e][\Lambda] = -[B]^T[\Psi_e] \quad (3.19)$$

Tomando-se um autovetor à direita  $\{\psi_d^i\}$  e um à esquerda  $\{\psi_e^j\}$  quaisquer, é possível escrever as seguintes relações, baseadas nas Equações 3.18 e 3.19:

$$[A]\{\psi_d^i\}\lambda_i = -[B]\{\psi_d^i\} \quad (3.20)$$

$$\{\psi_e^j\}^T[A]\lambda_j = -\{\psi_e^j\}^T[B] \quad (3.21)$$

Multiplicando a Equação 3.20 por  $\{\psi_e^j\}^T$  à esquerda e a Equação 3.21 por  $\{\psi_d^i\}$  à direita, e subtraindo a segunda da primeira, é possível escrever a relação:

$$\{\psi_e^j\}^T[A]\{\psi_d^i\}(\lambda_i - \lambda_j) = 0 \quad (3.22)$$

de onde é possível concluir que, se os índices  $i$  e  $j$  forem diferentes, o produto dado por  $\{\psi_e^j\}^T[A]\{\psi_d^i\}$  é necessariamente nulo, mas se eles forem iguais, então o termo  $(\lambda_i - \lambda_j)$  é nulo, e o produto  $\{\psi_e^j\}^T[A]\{\psi_d^i\}$  pode assumir qualquer valor. Assim, pode-se afirmar que a matriz  $[\Psi_e]^T[A][\Psi_d]$  é diagonal.

Caso esta matriz não tenha nenhum termo nulo em sua diagonal, é possível assumir uma normalização para os autovetores tal que:

$$[\Phi_e]^T[A][\Phi_d] = [I] \quad (3.23)$$

em que a matriz  $[\Phi]$  é a matriz  $[\Psi]$  normalizada, e  $[I]$  é a matriz identidade. Desta equação é possível obter a relação:

$$[\Phi_e]^T = ([A][\Phi_d])^{-1} \quad (3.24)$$

A relação mostrada nesta equação é sempre verdadeira, pois a matriz  $[\Phi_e]$  nunca será singular, devido à ortogonalidade entre estes autovetores. Finalmente, pode-se multiplicar a Equação 3.18, porém escrita com os autovetores normalizados, à esquerda por  $[\Phi_e]^T$ , de onde se obtém:

$$- [\Phi_e]^T[B][\Phi_d] = [\Phi_e]^T[A][\Phi_d][\Lambda] = ([A][\Phi_d])^{-1}([A][\Phi_d)][\Lambda] = [\Lambda] \quad (3.25)$$

Com as Equações 3.23 e 3.25, fica provado que o sistema pode ser diagonalizado pelas matrizes dos autovetores normalizados à direita e à esquerda. Além disso, se as matrizes  $[A]$  e  $[B]$  forem simétricas, as Equações 3.18 e 3.19 tornam-se idênticas, e assim, os autovetores à direita e à esquerda também serão iguais, de forma que a formulação apresentada é válida tanto para o caso de estas duas matrizes serem simétricas, quanto para o caso contrário.

### 3.3 Problema de raízes repetidas

As formulações para o problema de autovalores e autovetores descritas até este ponto partem da premissa que todas as raízes do polinômio característico do sistema são distintas. Porém, em alguns casos o sistema em estudo pode possuir raízes repetidas, ou seja, raízes cuja multiplicidade é maior do que um.

No caso do problema com raízes distintas, cada autovalor possui um autovetor associado, e este conjunto de autovetores, além de ser linearmente independente e ortogonal, forma uma matriz quadrada, chamada de matriz modal. Utilizando a matriz modal como matriz de transformação, pode-se provar que a matriz do sistema é similar a uma matriz diagonal, como pode ser visto na Equação 3.11.

No segundo caso, se o número de autovetores linearmente independentes associados a este autovalor é menor do que a sua multiplicidade, o conjunto de autovetores não forma uma matriz quadrada, e por isso esta não pode ser utilizada como matriz de transformação por similaridade. Porém, estes autovetores que faltam podem ser substituídos por vetores chamados de autovetores generalizados<sup>4</sup>. Assim é possível montar a matriz de transformação por similaridade, com o detalhe de que a matriz do sistema não será mais similar a uma matriz diagonal, mas sim a uma matriz de Jordan (SHABANA, 1997).

Assim, quando o problema possui raízes repetidas cujo número de autovetores associados a esta raiz é menor do que sua multiplicidade, o conjunto de autovetores regulares e autovetores generalizados continua a formar uma base, ou seja, são linearmente independentes. Contudo, os autovetores generalizados são ortogonais a todos os outros autovetores, exceto aos associados a seu próprio autovalor (SHABANA, 1997).

Sendo  $[A]$  a matriz do sistema,  $\lambda_i$  o  $i$ -ésimo autovalor do sistema,  $\{\psi_j\}$  o  $j$ -ésimo autovetor regular associado a  $\lambda_i$  e  $\{\bar{\psi}_k\}$  o  $k$ -ésimo autovetor regular associado a  $\lambda_i$ , é possível calcular os autovetores generalizados de um sistema seguindo a cadeia mostrada por Bay (1999). Se  $\{\psi_1\}$  é um autovetor regular associado a  $\lambda_1$ , então  $[A] \{\psi_1\} = \lambda_1 \{\psi_1\}$ . Se a multiplicidade deste autovalor é maior do que um e a dimensão de seu autoespaço é 1, e se

---

<sup>4</sup>O termo “autovetores generalizados” não possui nenhuma relação com o problema de autovalores e autovetores generalizado

for possível achar uma solução não trivial  $\{\bar{\psi}_1\}$  para a equação

$$[A] \{\bar{\psi}_1\} = \lambda_1 \{\bar{\psi}_1\} + \{\psi_1\} \quad (3.26)$$

que seja linearmente independente de  $\{\psi_1\}$ , então  $\{\bar{\psi}_1\}$  é um autovetor generalizado. No caso de existirem mais autovetores generalizados para o mesmo autovalor, eles podem ser calculados seguindo a cadeia:

$$\begin{aligned} [A] \{\bar{\psi}_1\} &= \lambda_1 \{\bar{\psi}_1\} + \{\psi_1\} \\ [A] \{\bar{\psi}_2\} &= \lambda_1 \{\bar{\psi}_2\} + \{\bar{\psi}_1\} \\ [A] \{\bar{\psi}_3\} &= \lambda_1 \{\bar{\psi}_3\} + \{\bar{\psi}_2\} \\ [A] \{\bar{\psi}_4\} &= \lambda_1 \{\bar{\psi}_4\} + \{\bar{\psi}_3\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

### 3.4 Sistemas com engrenamentos ideais

Em um sistema torcional, um engrenamento ideal é representado por uma restrição de velocidade entre dois graus de liberdade, na forma:

$$\dot{\theta}_j = \eta_{ij} \dot{\theta}_i \quad (3.27)$$

sendo que  $\eta_{ij}$  é a relação de engrenamento entre os graus de liberdade  $i$  e  $j$ .

A princípio, esta restrição envolve as velocidades do sistema, e por isso é uma restrição não holonômica. Porém, é possível adotar um sistema de referências tal que, no instante inicial de integração, os graus de liberdade  $i$  e  $j$  estejam ambos na posição zero. A partir disso é possível escrever a equação de restrição:

$$\theta_j = \eta_{ij} \theta_i \quad (3.28)$$

Esta equação contempla a restrição imposta pela Equação 3.27, mas agora é escrita como uma restrição holonômica, e por isso a forma holonômica do sistema passa a ter dois estados a menos. Deste modo, o sistema em estudo deve passar por uma transformação



De onde é possível concluir que:

$$[T]^T \{F(t)\} = \{F'(t)\} \quad (3.33)$$

Pré multiplicando a Equação 3.30 por  $[T]^T$  se chega a:

$$[T]^T [M] [T] \{\ddot{\Theta}'\} + [T]^T [C] [T] \{\dot{\Theta}'\} + [T]^T [K] [T] \{\Theta'\} = [T]^T \{F(t)\} \quad (3.34)$$

Ou finalmente:

$$[M'] \{\ddot{\Theta}'\} + [C'] \{\dot{\Theta}'\} + [K'] \{\Theta'\} = \{F'(t)\} \quad (3.35)$$

Em que:

$$\begin{aligned} [M'] &= [T]^T [M] [T] \\ [C'] &= [T]^T [C] [T] \\ [K'] &= [T]^T [K] [T] \\ \{F'(t)\} &= [T]^T \{F(t)\} \end{aligned}$$

A partir deste procedimento é possível levar um sistema com engrenamentos ideais para sua forma holonômica, a fim de realizar simulações computacionais.

### 3.5 Sistemas com meio grau de liberdade

O termo “meio grau de liberdade” se refere a um grau de liberdade do sistema ao qual a inércia associada é nula. Neste caso, se o sistema de equações de movimento for montado tal qual visto na Equação 3.1 e tiver meios graus de liberdade, a matriz  $[M]$  teria colunas nulas, o que a tornaria singular. Se a matriz de massa é singular, então a forma de estados mostrada na Equação 3.2 não pode ser atendida, pois nesta formulação, uma das condições de existência é que a matriz de inércia seja inversível.

Uma possível abordagem é o uso destas equações dos meios graus de liberdade (que são

de ordem 1 ou mesmo algébricas) como equações de restrição, e não de movimento. Assim, uma equação de primeira ordem seria uma restrição não holonômica na forma implícita, enquanto uma equação puramente algébrica seria uma restrição holonômica na mesma forma.

Deste modo, um sistema com  $n$  equações de movimento, cuja matriz de inércia possua  $s$  colunas nulas relativas a equações de restrição, onde  $p$  é o número de restrições holonômicas, e  $q$  é o número de restrições não holonômicas<sup>5</sup>, pode ser representado em sua forma holonômica por um sistema de primeira ordem com  $2n - 2p - q$  estados.

Colunas nulas na matriz de inércia são também um problema recorrente na modelagem de sistemas multi-domínio. Neste caso, mesmo que o sistema mecânico não possua graus de liberdade sem inércia, há sensores cujo equacionamento é feito apenas com equações diferenciais de primeira ordem e algébricas. Estas equações são equações de restrição, e se inseridas no sistema de equações que representa o modelo mecânico, causariam o aparecimento de colunas nulas na matriz  $[M]$ .

Porém, os softwares que utilizam a abordagem de elementos finitos para a montagem das matrizes globais, como é o caso do *DTA*, possuem uma estrutura de dados tal que qualquer novo elemento que seja inserido em sua biblioteca deve possuir matrizes de massa, rigidez e amortecimento, para que as matrizes globais do sistema sejam montadas automaticamente. Assim, para inserir um sensor de primeira ordem, ou de ordem zero neste sistema, o único procedimento seria a criação de um novo elemento. Além disso, dependendo dos dados inseridos em cada elemento do modelo, é possível o aparecimento de meios graus de liberdade nas equações de movimento.

Por isso, nesta seção serão propostas transformações para a forma de estados mínima deste sistema. Uma das vantagens do uso desta transformação é que, mesmo que alguns nós do modelo final ainda possuam inércia zero, é possível integrar este sistema. Outra vantagem é que, o fato de possuir colunas ou linhas nulas na matriz de massa faria com que o sistema possuísse, além de seus autovalores normais, alguns autovalores indefinidos (representados computacionalmente por “infinto” ou “not a number”). Com esta redução, os autovalores normais do sistema não são alterados e os indefinidos desaparecem.

Para que a formulação seja apresentada de forma mais concisa, será definida aqui a nomenclatura utilizada nesta formulação.

---

<sup>5</sup>Portanto,  $s = p + q$ .

$N_i \equiv$  Número de equações diferenciais de segunda ordem.

$N_c \equiv$  Número de equações diferenciais de primeira ordem.

$N_k \equiv$  Número de equações algébricas.

$[I] \equiv$  Matriz identidade.

$[I_c] \equiv$  Matriz diagonal com o valor 1 apenas nas posições onde, no sistema de equações diferenciais do modelo, há uma restrição não holonômica. Os outros termos são nulos.

$[I_k] \equiv$  Matriz diagonal com o valor 1 apenas nas posições onde, no sistema de equações diferenciais do modelo, há uma restrição holonômica. Os outros termos são nulos.

$[J_i] \equiv$  Matriz retangular  $N \times N_i$  com as colunas não nulas da matriz  $[I] - [I_c] - [I_k]$ .

$[J_c] \equiv$  Matriz retangular  $N \times N_c$  com as colunas não nulas da matriz  $[I_c]$ .

$[J_k] \equiv$  Matriz retangular  $N \times N_k$  com as colunas não nulas da matriz  $[I_k]$ .

$\{x\} \equiv$  Vetor de coordenadas físicas.

$\{^I x\} \equiv$  Vetor que contém apenas as coordenadas físicas que foram derivadas duas vezes com relação ao tempo.

$\{^C x\} \equiv$  Vetor que contém apenas as coordenadas físicas que foram derivadas apenas uma vez com relação ao tempo.

$\{^K x\} \equiv$  Vetor que contém apenas as coordenadas físicas que não foram derivadas com relação ao tempo.

Neste momento serão apresentadas as transformações para sistemas com restrições não holonômicas, sistemas com restrições holonômicas, e sistemas com ambos os tipos de restrições. Estes métodos são aplicáveis a sistemas lineares com coeficientes constantes no tempo. Porém, este método pode ser facilmente estendido para contemplar também sistemas não lineares.

### 3.5 Sistemas com restrições não holonômicas

Neste caso será considerado um sistema apenas com restrições não holonômicas, ou seja, um sistema representado por um sistema de equações diferenciais de primeira e segunda ordens. Assim, algumas das colunas da matriz de massa serão nulas, e a partir deste fato é possível escrever as seguintes igualdades:

$$([I] - [I_c])\{x\} = [J_i]\{^I x\} \quad (3.36)$$

$$[I_c]\{x\} = [J_c]\{^C x\} \quad (3.37)$$

Desta forma, o vetor de coordenadas físicas pode ser visto como uma composição dos vetores  $\{^I x\}$  e  $\{^C x\}$ . Assim, somando as Equações 3.36 e 3.37 é possível obter:

$$\{x\} = ([I] - [I_c])\{x\} + [I_c]\{x\} = [J_i]\{^I x\} + [J_c]\{^C x\} \quad (3.38)$$

E, conseqüentemente:

$$\{\dot{x}\} = [J_i]\{^I \dot{x}\} + [J_c]\{^C \dot{x}\} \quad (3.39)$$

Derivar o vetor  $\{x\} = [J_i]\{^I x\} + [J_c]\{^C x\}$  duas vezes e substituí-lo da equação de movimento mostrada em 3.1 não é uma operação válida, pois o vetor  $\{^C x\}$  é o vetor das coordenadas que só foram derivadas uma vez com relação ao tempo, ou seja,  $\{^C \ddot{x}\}$  não existe. Porém, pelo fato de a matriz  $[M]$  possuir colunas nulas justamente nas posições onde as coordenadas do vetor  $\{^C x\}$  apareceriam derivadas duas vezes, pode-se escrever:

$$[M]\{\ddot{x}\} = [M]([I] - [I_c])\{\ddot{x}\} = [M][J_i]\{^I \ddot{x}\} \quad (3.40)$$

Substituindo as Equações 3.38, 3.39 e 3.40 na Equação 3.1, chega-se a:

$$\begin{aligned} [M][J_i]\{^I \ddot{x}\} + [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + [C][J_c]\{^C \dot{x}\} + \dots \\ \dots + [K][J_i]\{^I x\} + [K][J_c]\{^C x\} = \{F(t)\} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Quanto às equações do sistema, vale observar que multiplicar a Equação 3.41 à esquerda por  $[J_i]^T$  é o mesmo que selecionar todas as equações de movimento, enquanto que multiplicá-la à esquerda por  $[J_c]^T$  significa selecionar todas as restrições não holonômicas do sistema.

Realizando a seleção destas equações de restrição e isolando o termo  $\{^C \dot{x}\}$  é possível obter:

$$\begin{aligned} \{^C \dot{x}\} = ([J_c]^T [C] [J_c])^{-1} [J_c]^T (\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + \dots \\ \dots - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\} - [M][J_i]\{^I \ddot{x}\}) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Já selecionando as equações de movimento e isolando o termo  $\{^I \ddot{x}\}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \{^I \ddot{x}\} = ([J_i]^T [M] [J_i])^{-1} [J_i]^T (\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} \dots \\ \dots - [C][J_c]\{^C \dot{x}\} - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

As expressões para estes dois termos foram obtidas pois, como é possível observar eles dependem um do outro. Assim, resolvendo este sistema de equações, será possível obter a expressão para estes dois termos, apenas em função de  $\{^I x\}$ ,  $\{^C x\}$  e  $\{^I \dot{x}\}$ . Estas expressões são:

$$\{^I \ddot{x}\} = [\gamma](\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\}) \quad (3.44)$$

$$\{^C \dot{x}\} = [\alpha](\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\}) \quad (3.45)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} [\gamma] &= \left( [J_i]^T \left( [I] - [C][J_c] \left( [J_c]^T [C][J_c] \right)^{-1} [J_c]^T \right) [M][J_i] \right)^{-1} \times \dots \\ &\quad \dots \times [J_i]^T \left( [I] - [C][J_c] \left( [J_c]^T [C][J_c] \right)^{-1} [J_c]^T \right) \\ [\alpha] &= \left( [J_c]^T [C][J_c] \right)^{-1} [J_c]^T \left( [I] - [M][J_i][\gamma] \right) \end{aligned}$$

Deste modo, utilizando as Equações 3.44 e 3.45, e ainda a igualdade  $\{^I \dot{x}\} = \{^I \hat{x}\}$ , torna-se possível representar o sistema em estudo na forma vista na Equação 3.2, ou seja:

$$\begin{aligned} A_{N_s \times N_s} &= \begin{bmatrix} [0]_{N_i \times N_i} & [0]_{N_i \times N_c} & [I]_{N_i \times N_i} \\ -[\alpha][K][J_i] & -[\alpha][K][J_c] & -[\alpha][C][J_i] \\ -[\gamma][K][J_i] & -[\gamma][K][J_c] & -[\gamma][C][J_i] \end{bmatrix} \\ B_{N_s \times N} &= \begin{bmatrix} [0]_{N_i \times N} \\ [\alpha] \\ [\gamma] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E o vetor de estados utilizado é dado por:

$$y = \begin{Bmatrix} \{^I x\} \\ \{^C x\} \\ \{^I \dot{x}\} \end{Bmatrix}$$

Vale notar que o vetor de estados resultante desta formulação é diferente do proposto Equação 3.1 pois não possui os termos  $\{^C \dot{x}\}$ . Devido a este fato, a matriz  $A$ , neste caso, é formada por três linhas e três colunas de matrizes bloco, e não duas linhas e duas colunas

como em um sistema sem meios graus de liberdade. Isto se deve à presença das restrições não holonômicas neste sistema.

### 3.5 Sistemas com restrições holonômicas

Neste segundo caso, o sistema considerado possui apenas restrições holonômicas<sup>6</sup>. Isto significa que, se a matriz de massa tiver uma coluna nula, a mesma coluna na matriz de amortecimento ( $[C]$ ) deve ser nula. Neste caso, o vetor de coordenadas físicas pode ser representado como uma composição entre os vetores  $\{^I x\}$  e  $\{^K x\}$ , como pode ser visto a seguir:

$$\{x\} = ([I] - [I_k])\{x\} + [I_k]\{x\} = [J_i]\{^I x\} + [J_k]\{^K x\} \quad (3.46)$$

Devido ao fato de que, neste caso, as matrizes  $[M]$  e  $[C]$  possuem as mesmas colunas nulas, é possível escrever:

$$[M]\{\ddot{x}\} = [M]([I] - [I_k])\{\ddot{x}\} = [M][J_i]\{^I \ddot{x}\} \quad (3.47)$$

$$[C]\{\dot{x}\} = [C]([I] - [I_k])\{\dot{x}\} = [C][J_i]\{^I \dot{x}\} \quad (3.48)$$

Assim, substituindo as Equações 3.46, 3.47 e 3.48 em 3.1, obtém-se:

$$[M][J_i]\{^I \ddot{x}\} + [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + [K][J_i]\{^I x\} + [K][J_k]\{^K x\} = \{F(t)\} \quad (3.49)$$

Neste caso, novamente, pré-multiplicar a expressão 3.49 por  $[J_i]^T$  significa selecionar todas as equações de movimento do sistema, enquanto que pré-multiplicar esta expressão por  $[J_k]^T$  equivale a selecionar todas as equações de restrição, neste caso holonômicas. Assim, selecionando primeiramente as equações de restrição e isolando o termo  $\{^K x\}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \{^K x\} = & ([J_k]^T [K] [J_k])^{-1} [J_k]^T (\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + \dots \\ & \dots - [K][J_i]\{^I x\} - [M][J_i]\{^I \ddot{x}\}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

---

<sup>6</sup>Um exemplo simples de restrição holonômica é a associação de molas lineares em série.

Selecionando agora as equações de movimento do sistema, e isolando o termo  $\{^I\ddot{x}\}$ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \{^I\ddot{x}\} = & ([J_i]^T[M][J_i])^{-1} [J_i]^T(\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I\dot{x}\} + \dots \\ & \dots - [K][J_i]\{^Ix\} - [K][J_k]\{^Kx\}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Analisando as Equações 3.50 e 3.51, observa-se que os termos  $\{^Kx\}$  e  $\{^I\ddot{x}\}$  ainda dependem um do outro. Por isso, é possível escrever as equações para estes termos em função apenas de  $\{^I\dot{x}\}$  e  $\{^Ix\}$ . Assim, a equação para  $\{^I\ddot{x}\}$  fica:

$$\{^I\ddot{x}\} = [\gamma](\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I\dot{x}\} - [K][J_i]\{^Ix\}) \quad (3.52)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} [\gamma] = & \left( [J_i]^T \left( [I] - [K][J_k] ([J_k]^T[K][J_k])^{-1} [J_k]^T \right) [M][J_i] \right)^{-1} \times \dots \\ & \dots [J_i]^T \left( [I] - [K][J_k] ([J_k]^T[K][J_k])^{-1} [J_k]^T \right) \end{aligned}$$

Então, utilizando a Equação 3.52 e a igualdade  $\{^I\dot{x}\} = \{^I\dot{x}\}$ , o sistema pode ser representado na forma de estados apresentada em 3.2 desde que:

$$\begin{aligned} A_{N_s \times N_s} &= \begin{bmatrix} [0]_{N_i \times N_i} & [I]_{N_i \times N_i} \\ -[\gamma][K][J_i] & -[\gamma][C][J_i] \end{bmatrix} \\ B_{N_s \times N} &= \begin{bmatrix} [0]_{N_i \times N_i} \\ [\gamma] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E o vetor de estados seja da forma:

$$y = \begin{Bmatrix} \{^Ix\} \\ \{^I\dot{x}\} \end{Bmatrix}$$

Vale notar que o vetor de estados resultante desta formulação é diferente do proposto Equação 3.1 pois não possui os termos  $\{^Kx\}$  e  $\{^K\dot{x}\}$ . Devido a este fato, a matriz  $A$ , neste caso, é formada por duas linhas e duas colunas de matrizes bloco, pois o mesmo número de

graus de liberdade de velocidade e deslocamento foram extraídos do sistema.

### 3.5 Sistemas com restrições holonômicas e não holonômicas

No terceiro caso, considera-se um sistema que possua ambos os tipos de restrições. Neste caso, o vetor de coordenadas físicas é uma composição dos três vetores  $\{^I x\}$ ,  $\{^C x\}$  e  $\{^K x\}$ , como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\{x\} &= ([I] - [I_c] - [I_k])\{x\} + [I_c]\{x\} + [I_k]\{x\} \\ &= [J_i]\{^I x\} + [J_c]\{^C x\} + [J_k]\{^K x\}\end{aligned}\quad (3.53)$$

Levando em conta as colunas nulas da matriz de massa, é possível escrever:

$$[M]\{\ddot{x}\} = [M]([I] - [I_c] - [I_k])\{\ddot{x}\} = [M][J_i]\{^I \ddot{x}\} \quad (3.54)$$

Fazendo o mesmo procedimento para a matriz de amortecimento, chega-se a:

$$\begin{aligned}[C]\{\dot{x}\} &= [C]([I] - [I_k])\{\dot{x}\} \\ &= [C]([I] - [I_c] - [I_k])\{\dot{x}\} + [I_c]\{\dot{x}\} \\ &= [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + [C][J_c]\{^C \dot{x}\}\end{aligned}\quad (3.55)$$

Substituindo as Equações 3.53, 3.54 e 3.55 em 3.1, obtém-se a expressão:

$$\begin{aligned}[M][J_i]\{^I \ddot{x}\} + [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + [C][J_c]\{^C \dot{x}\} + [K][J_i]\{^I x\} + \dots \\ \dots + [K][J_c]\{^C x\} + [K][J_k]\{^K x\} = \{F(t)\}\end{aligned}\quad (3.56)$$

Neste caso, selecionando as restrições holonômicas, é possível deduzir a expressão para  $\{^K x\}$  pré multiplicando a Equação 3.56 por  $[J_k]^T$ . Assim:

$$\begin{aligned}\{^K x\} &= ([J_k]^T [K] [J_k])^{-1} [J_k]^T (\{F(t)\} - [K][J_i]\{^I x\} + \dots \\ &\dots - [K][J_c]\{^C x\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} - [C][J_c]\{^C \dot{x}\} - [M][J_i]\{^I \ddot{x}\})\end{aligned}\quad (3.57)$$

Além disso, neste caso, o vetor de estados é dado por:

$$y = \begin{Bmatrix} \{^I x\} \\ \{^C x\} \\ \{^I \dot{x}\} \end{Bmatrix}$$

Isto significa que o termo  $\{^K x\}$  deve ser eliminado das expressões de  $\{^C \dot{x}\}$  e  $\{^I \ddot{x}\}$ . Estas expressões são deduzidas isolando-se as restrições não holonômicas e as equações de movimento respectivamente. Deste modo, a equação do primeiro termo é dada por:

$$\begin{aligned} \{^C \dot{x}\} = & [\delta](\{F(t)\} - [M][J_i]\{^I \ddot{x}\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + \dots \\ & \dots - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\}) \end{aligned} \quad (3.58)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} [\delta] = & \left( [J_c]^T \left( [I] - [K][J_k] ([J_k]^T [K][J_k])^{-1} [J_k]^T \right) [C][J_c] \right)^{-1} \times \dots \\ & \dots [J_c]^T \left( [I] - [K][J_k] ([J_k]^T [K][J_k])^{-1} [J_k]^T \right) \end{aligned}$$

Desta forma, substituindo a Equação 3.58 em 3.57, a expressão para  $\{^K x\}$  fica:

$$\begin{aligned} \{^K \dot{x}\} = & [\beta](\{F(t)\} - [M][J_i]\{^I \ddot{x}\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} + \dots \\ & \dots - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\}) \end{aligned} \quad (3.59)$$

Sendo que:

$$[\beta] = ([J_k]^T [K][J_k])^{-1} [J_k]^T ([I] - [C][J_c][\delta])$$

Mesmo assim,  $\{^C \dot{x}\}$  e  $\{^K x\}$  ainda dependem de  $\{^I \ddot{x}\}$ . Para deduzir a expressão para este último termo, é necessário selecionar apenas as equações de movimento do sistema, ou seja, pré-multiplicar a expressão 3.56 por  $[J_i]^T$  e depois substituir nesta expressão os termos

obtidos em 3.58 e 3.59. Executando estas etapas, a expressão para  $\{^I \ddot{x}\}$  é dada por:

$$\{^I \ddot{x}\} = [\gamma](\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\}) \quad (3.60)$$

Sendo que:

$$[\gamma] = ([J_i]^T([I] - [C][J_c][\delta] - [K][J_k][\beta])[M][J_i])^{-1} \times \dots \\ \dots [J_i]^T([I] - [C][J_c][\delta] - [K][J_k][\beta])$$

Finalmente, substituindo a Equação 3.60 em 3.58, a expressão para  $\{^C \dot{x}\}$  é dada por:

$$\{^C \dot{x}\} = [\alpha](\{F(t)\} - [C][J_i]\{^I \dot{x}\} - [K][J_i]\{^I x\} - [K][J_c]\{^C x\}) \quad (3.61)$$

Sendo:

$$[\alpha] = [\delta]([I] - [M][J_i][\gamma])$$

Então o sistema pode novamente ser representado na forma de estados apresentada em 3.2, onde as matrizes  $A$  e  $B$  são dadas por:

$$A_{N_s \times N_s} = \begin{bmatrix} [0]_{N_i \times N_i} & [0]_{N_i \times N_c} & [I]_{N_i \times N_i} \\ -[\alpha][K][J_i] & -[\alpha][K][J_c] & -[\alpha][C][J_i] \\ -[\gamma][K][J_i] & -[\gamma][K][J_c] & -[\gamma][C][J_i] \end{bmatrix}$$

$$B_{N_s \times N} = \begin{bmatrix} [0]_{N_i \times N} \\ [\alpha] \\ [\gamma] \end{bmatrix}$$

Neste último caso, o vetor de estados resultante desta formulação é diferente do proposto Equação 3.1 pois não possui os termos  $\{^C \dot{x}\}$ ,  $\{^K x\}$  e  $\{^K \dot{x}\}$ . Devido a este fato, a matriz  $A$ , neste caso, é formada por três linhas e três colunas de matrizes bloco, e não duas linhas e duas colunas como em um sistema sem meios graus de liberdade. Isto se deve à presença das

restrições não holonômicas neste sistema. Diferentemente das restrições holonômicas, que extraíram  $\{^K x\}$  e  $\{^K \dot{x}\}$  do sistema, as não holonômicas extraíram  $\{^C \dot{x}\}$ , mas não  $\{^C x\}$ .

### 3.6 Modelagem dos elementos

O trem de potência é um sistema montado de maneira modularizada. Em um layout comum, pode-se encontrar subsistemas como a transmissão, o diferencial, a embreagem, o volante de inércia, entre outros. Assim, estes subsistemas são acoplados entre si, formando o *powertrain*.

O processo de modelamento matemático do trem de potência é feito de maneira análoga. Este sistema é dividido em elementos, que são modelados separadamente, e em seguida são acoplados entre si, resultando em um modelo do *driveline*.

Nesta seção serão apresentados os modelos matemáticos dos subsistemas que serão utilizados neste trabalho.

### 3.6 Volante de inércia de massa simples

No modelamento matemático o volante de inércia de massa simples é representado por um disco de inércia, e o torque gerado pelo motor é aplicado a ele como um torque externo. Também é possível impor ao volante de inércia uma aceleração torcional medida em campo. Aliado a condições iniciais de deslocamento e velocidade, a imposição da aceleração neste grau de liberdade torna-se uma restrição holonômica reonômica, e por isso, neste caso, este grau de liberdade é eliminado do modelo do trem de potência.

Considerando os dois casos descritos, o torque transmitido ao trem de potência é denominado  $\tau_p$  e o torque do motor uma excitação externa. Então a equação de movimento do sistema para o volante de inércia fica da seguinte forma:

$$I_f \ddot{\theta}_f = \tau_m - \tau_p \quad (3.62)$$

sendo  $I_f$  é o momento de inércia do volante e  $\theta_f$  seu grau de liberdade.

Já no caso onde a aceleração é imposta ao volante de inércia, há duas abordagens possíveis. A primeira é isolar o termo de aceleração na equação de movimento deste elemento, e substituí-la nas outras equações de movimento do sistema. Este procedimento é exemplificado com o sistema da Figura 3.1

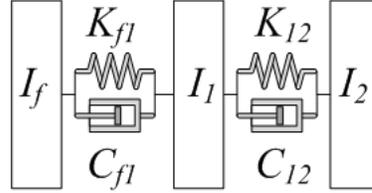


Figura 3.1: Sistema torcional de 3GL genérico.

Deste modo, as equações de movimento do sistema são:

$$I_f \ddot{\theta}_f + \overbrace{K_{f1}(\theta_f - \theta_1)}^{\tau_p} = 0 \quad (3.63)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + \overbrace{K_{f1}(\theta_1 - \theta_f)}^{-\tau_p} + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (3.64)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + K_{12}(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (3.65)$$

Pode-se observar que o termo  $\tau_p$  indicado na Equação 3.63 também aparece na Equação 3.64. Além disso, o termo de aceleração  $\ddot{\theta}_f$  será chamado de  $g(t)$ . Então, substituindo este termo na última equação por  $I_f \ddot{\theta}_f$ , o sistema de equações fica da seguinte forma:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + K_{12}(\theta_1 - \theta_2) = -I_f \ddot{\theta}_f = -I_f g(t) \quad (3.66)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + K_{12}(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (3.67)$$

A segunda abordagem é integrar o termo de aceleração sucessivamente e assim, calcular  $\dot{\theta}_f$  e  $\theta_f$ , e substituir estes termos nas equações de movimento. Assim, pode-se definir:

$$\ddot{\theta}_f = g(t) \quad (3.68)$$

$$\dot{\theta}_f = \int g(t) dt + v_0 \quad (3.69)$$

$$\theta_f = \iint g(t) dt dt + v_0 t + x_0 \quad (3.70)$$

sendo que  $v_0$  e  $x_0$  são as condições iniciais de velocidade e deslocamento de  $\theta_f$  respectivamente. Assim, substituindo os termos das Equações 3.68 e 3.70 nas Equações 3.63, 3.64 e 3.65, o sistema de equações fica da seguinte forma:

$$K_{f1} \left( \iint g(t) dt dt + v_0 t + x_0 \right) = K_{f1} \theta_1 - I_f g(t) \quad (3.71)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + (K_{f1} + K_{12}) \theta_1 - K_{12} \theta_2 = K_{f1} \left( \iint g(t) dt dt + v_0 t + x_0 \right) \quad (3.72)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + K_{12} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (3.73)$$

Finalmente, substituindo a Equação 3.71 em 3.72, o sistema é escrito da seguinte maneira:

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + K_{12} (\theta_1 - \theta_2) = -I_f g(t)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + K_{12} (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

que é o mesmo resultado apresentado nas Equações 3.66 e 3.67, mostrando que as duas abordagens são equivalentes.

### 3.6 Disco de embreagem

O disco de embreagem é um elemento não linear e pode ser modelado considerando que o material de atrito está perfeitamente acoplado ao platô, ou ainda considerando que há escorregamento entre estas duas superfícies. A grande maioria dos problemas de NVH ocorre com a embreagem acoplada, por isso a primeira abordagem é válida. Porém, quando se estuda fenômenos de acoplamento, como o *judder*, então o uso do segundo modelo se faz necessário.

O modelo do disco de embreagem totalmente acoplado será apresentado pois é o utilizado neste trabalho. Este disco é composto por duas partes, uma mais externa, chamada material de atrito, e outra mais interna, chamada cubo, como é mostrado na Figura 3.2. O cubo é ligado por meio de um estriado ao eixo de entrada da transmissão, enquanto que o material de atrito é ligado ao cubo por um sistema de molas e um mecanismo de atrito de Coulomb que permite o movimento angular relativo entre os dois. Neste caso, a função do mecanismo de atrito é a dissipação de energia.

Este sistema de molas confere ao conjunto uma rigidez estratificada, com diferentes valores de rigidez em cada um dos estágios. Nesta seção, a título de exemplificação serão mostradas as características de um disco de embreagem de três estágios. Porém, além do pré-amortecimento, outras aplicações comerciais podem possuir mais estágios de tração e de retração. Na Figura 3.3 são mostrados os estágios de rigidez do disco de embreagem, com a sua devida nomenclatura.

Além disso, este disco possui dispositivos de atrito internos. O atrito produzido por estes mecanismos tem a função de dissipar energia do sistema. Por não possuir um dispositivo único, este disco possui diferentes características de torque de atrito para o pré-amortecedor, e para os estágios de tração e retração. Assim, o gráfico da Figura 3.4 mostra a curva característica de um disco de embreagem, com as características de rigidez e amortecimento.

Nota-se que este modelo de disco de embreagem é concebido considerando que o material de atrito do disco está perfeitamente acoplado ao platô do motor. Por não haver deslizamento entre estas superfícies, este modelo não considera a dissipação de energia neste contato. Neste caso, dissipação de energia vem do fato de que o disco de embreagem é deformado, e quando isto acontece, o dispositivo de atrito de Coulomb interno ao disco dissipa energia por meio de fricção com suas paredes internas.

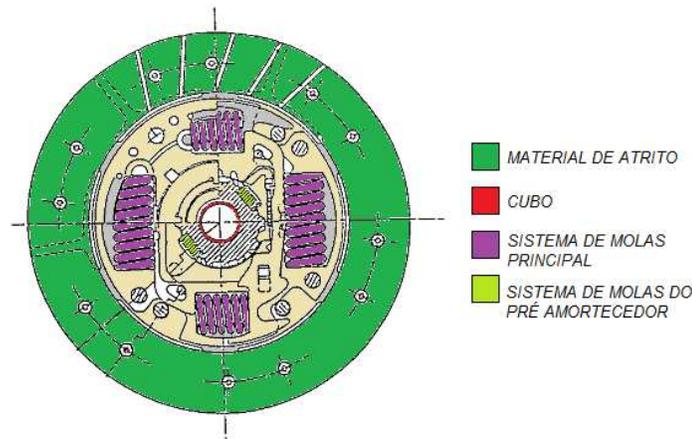


Figura 3.2: Disco de embreagem em detalhe. *Adaptado de Shaver, 1997.*

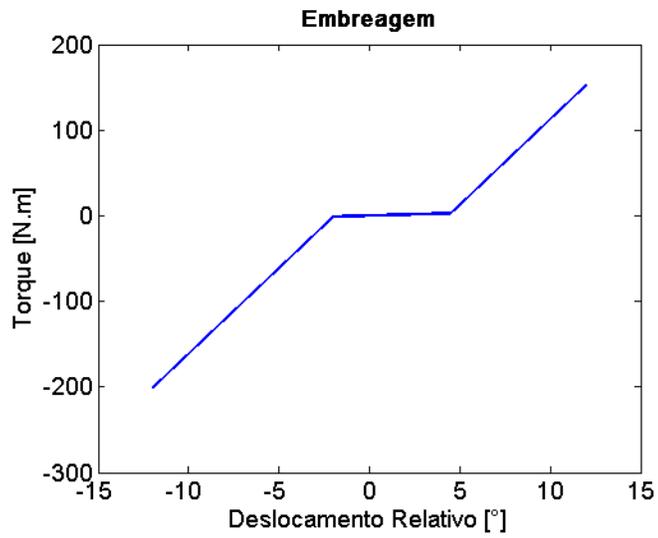


Figura 3.3: Curva de rigidez de um disco de embreagem sem atrito.

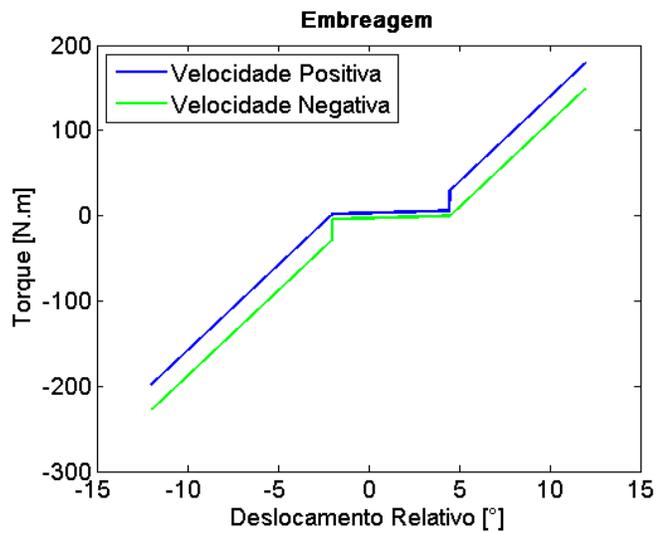


Figura 3.4: Curva de rigidez de um disco de embreagem com atrito.

### 3.6 Engrenamento com dentes retos

Os modelos de engrenamento propostos nesta seção se aplicam a pares engrenados cujos dentes têm o perfil reto. Além disso, estes modelos não levam em conta parâmetros como o fator de encobrimento dos dentes de pares engrenados, e por isso podem ser considerados apenas como uma aproximação inicial para o problema de folga em trens de potência.

O modelo de Kelvin-Voight, propõe que na região de folga (*lash zone*) a rigidez e o amortecimento do acoplamento sejam nulos, e que fora desta região estas características sejam lineares, ou seja, a rigidez e o amortecimento de contato podem ser representados por coeficientes constantes. Estas características são demonstradas na Figura 3.5.

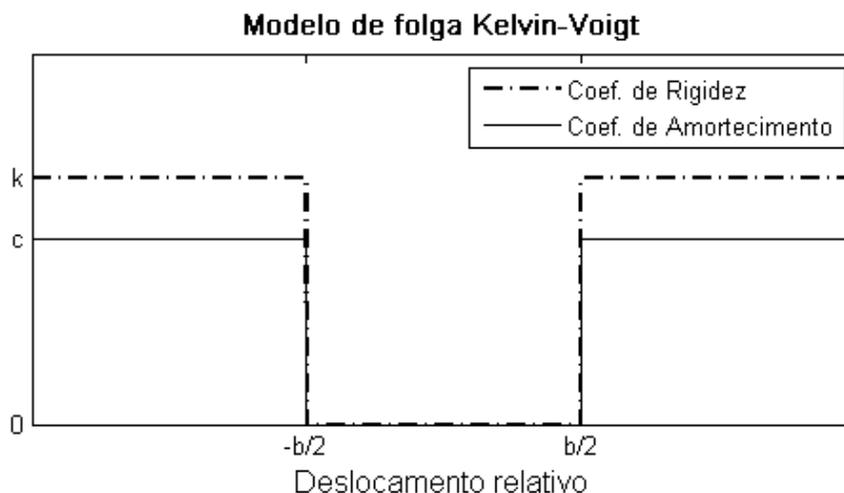


Figura 3.5: Coeficientes de rigidez e amortecimento para o modelo Kelvin-Voight.

Quanto às características de rigidez, apesar da limitação de linearidade por partes do modelo, este não apresenta nenhuma inconsistência física. Porém, com relação às características de amortecimento, o mesmo não pode ser dito. Quando o par engrenado termina de atravessar a região de folga com uma velocidade relativa não nula, há uma descontinuidade na força de contato entre estes dentes gerada pela parcela dissipativa desta força. Além disso, quando um dos dentes do engrenamento está fora da zona de folga, mas está retornando para esta região, a força de amortecimento terá sentido contrário a este movimento, simulando uma “atração” entre estes dentes, o que não ocorre fisicamente (SARKAR, ELLIS, MOORE, 1997).

Para evitar estas inconsistências, pode-se utilizar este mesmo modelo de engrenamento, porém sem amortecimento. Assim, mesmo não apresentando dissipação de energia, é possível obter um modelo de engrenamento com folga. Contudo, existem outros modelos de engrenamento que levam em conta dissipação de energia e não apresentam inconsistências como a descontinuidade na força de contato. O modelo estudado neste trabalho que tem estas características é chamado de *impact damping*.

As características de rigidez deste novo modelo são as mesmas do modelo anterior, uma vez que não trazem comportamentos indesejados ao modelo matemático. Por outro lado, o modelo de força dissipativa proposto por Kim et al.(2005), na região de contato, é da forma:

$$F_c = \beta \delta^n \dot{\delta} \quad (3.74)$$

sendo que  $\beta$  é o coeficiente de *impact damping*. Este coeficiente é calculado com base no coeficiente de restituição de impacto entre os dentes do par engrenado, levantado experimentalmente (SARKAR, ELLIS, MOORE, 1997). Sua expressão é dada por:

$$\beta = \frac{3}{2} \alpha K \quad (3.75)$$

Sendo  $\alpha$  dado a partir da aproximação linear do coeficiente de restituição em função da velocidade inicial de impacto  $\dot{\delta}_i$ , dada pela fórmula  $e = 1 - \alpha \dot{\delta}_i$  e  $K$  a rigidez de contato entre os dentes do par engrenado.

Porém, a fórmula proposta 3.74 por Kim contém um erro. Interpretando o produto  $\beta \delta^n$  como um coeficiente de amortecimento que varia com a posição relativa entre os dentes do par engrenado, caso este deslocamento relativo seja negativo, o produto  $\beta \delta^n$  será negativo se  $n$  for ímpar <sup>7</sup>. Isto tornará o sistema instável nesta região. Portanto, neste trabalho utiliza-se esta expressão com a correção:

$$F_c = \beta |\delta^n| \dot{\delta} \quad (3.76)$$

garantindo que este modelo de amortecimento não instabilizará o sistema.

Desta forma, as características de rigidez e amortecimento do modelo podem ser repre-

---

<sup>7</sup>e normalmente o valor desta variável é 1

sentadas graficamente conforme ilustra a Figura 3.6.

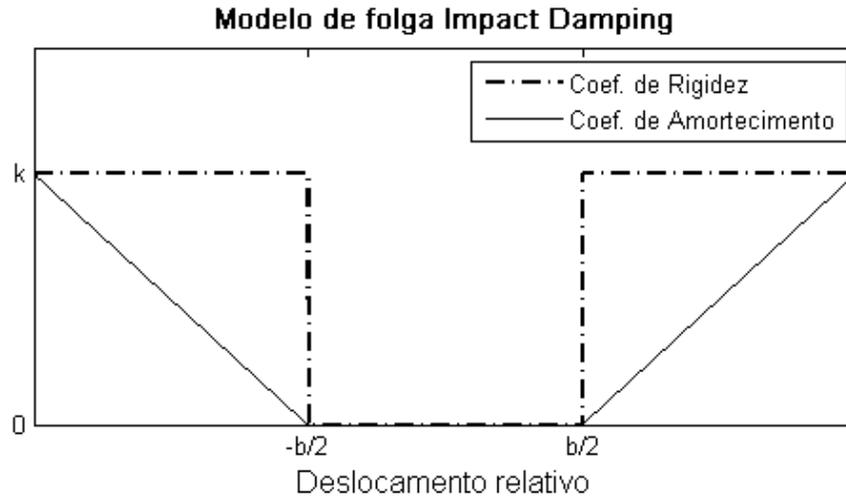


Figura 3.6: Coeficientes de rigidez e amortecimento para o modelo *impact damping*.

Este modelo, por não apresentar descontinuidades na força de contato, apresenta bom comportamento em integrações numéricas, e maior estabilidade numérica em baixas velocidades (SARKAR, ELLIS, MOORE, 1997).

### 3.6 Diferencial

O elemento diferencial, como dito anteriormente, tem a função de transmitir torque de igual intensidade para as rodas tracionadas, e ao mesmo tempo permitir que estas possuam velocidades angulares diferentes, para que o veículo possa percorrer trajetórias curvas sem nenhum dano em seu sistema.

Ele é composto basicamente pelas engrenagens mostradas na Figura 3.7. Nesta ilustração, apenas uma *spider gear* é representada, pois o efeito de todas engrenagens deste tipo, no movimento torcional do sistema, pode ser representado por apenas uma, sem perda de representatividade. Porém, em implementações reais, este sistema possui pelo menos três destas engrenagens, para suportar possíveis cargas axiais nos semieixos e para que o sistema do diferencial seja balanceado.

Para a modelagem deste elementos, serão considerados os seguintes graus de liberdade:

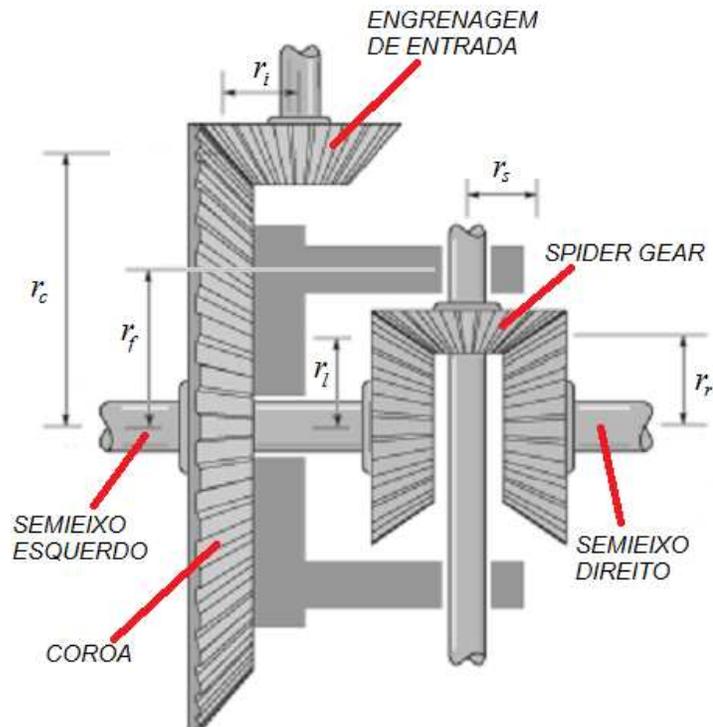


Figura 3.7: Representação esquemática de um diferencial. *Adaptado de Hibbeler, 2006.*

$\theta_i$  – Deslocamento angular da engrenagem de entrada.

$\theta_c$  – Deslocamento angular da coroa.

$\theta_s$  – Deslocamento angular da *spider gear* em relação a seu centro geométrico.

$\theta_r$  – Deslocamento angular da engrenagem do semieixo direito.

$\theta_l$  – Deslocamento angular da engrenagem do semieixo esquerdo.

Cada uma destas engrenagens possui um momento de inércia polar, respectivamente  $I_i$ ,  $I_c$ ,  $I_s$ ,  $I_r$  e  $I_l$ , e um raio primário, respectivamente  $r_i$ ,  $r_c$ ,  $r_s$ ,  $r_r$  e  $r_l$ . O raio  $r_f$  é a distância entre a fixação do suporte da *spider gear* na coroa e o centro geométrico da mesma. Na Figura 3.8 se encontram os diagramas de corpo livre de cada engrenagem. Neste diagrama, as forças encontradas são respectivamente:

$F_{ic}$  – Força de contato entre os dentes da engrenagem de entrada e da coroa.

$F_{sl}$  – Força de contato entre os dentes da *spider gear* e da engrenagem do semieixo direito.

$F_{sr}$  – Força de contato entre os dentes da *spider gear* e da engrenagem do semieixo esquerdo.

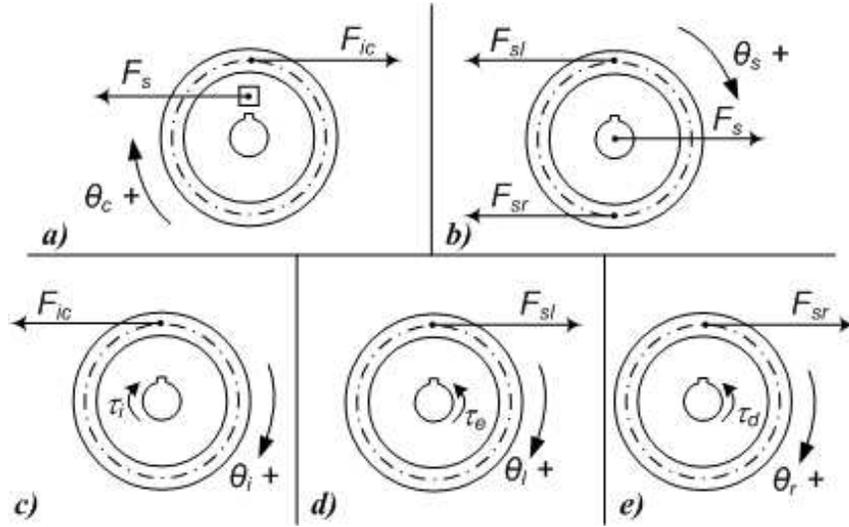


Figura 3.8: DCLs das engrenagens do diferencial. (a) Vista lateral da coroa. (b) Vista superior da *Spider Gear* (c) Vista superior da engrenagem de entrada. (d) Vista lateral da engrenagem do semieixo esquerdo. (e) Vista lateral da engrenagem do semieixo direito.

$F_s$  – Reação do suporte da *spider gear* na coroa.

Os torques  $\tau_d$  e  $\tau_e$  são os torques de entrada nos semieixos direito e esquerdo, sejam eles externos ou gerados por algum elemento, como eixos ou outros engrenamentos, e o torque  $\tau_i$  é o torque que atua na engrenagem de entrada do diferencial.

Então, realizando a somatória de momentos em torno do eixo de rotação própria de cada uma das engrenagens, é possível obter as seguintes equações de movimento:

$$I_i \ddot{\theta}_i = -F_{ic} r_i + \tau_i \quad (3.77)$$

$$I_c \ddot{\theta}_c = F_{ic} r_c - F_s r_f \quad (3.78)$$

$$I_s \ddot{\theta}_s = (F_{sr} - F_{sl}) r_s \quad (3.79)$$

$$I_r \ddot{\theta}_r = F_{sr} r_r - \tau_d \quad (3.80)$$

$$I_l \ddot{\theta}_l = F_{sl} r_l - \tau_e \quad (3.81)$$

Além disso, este sistema possui três engrenamentos ideais: entre engrenagem de entrada e coroa, *spider gear* e engrenagem do semieixo direito, e *spider gear* e engrenagem do semieixo esquerdo. Estes podem ser considerados como três restrições holonômicas escleronômicas, e por isso este sistema pode ser apresentado com apenas dois graus de liberdade. As restrições

impostas pelos engrenamentos são:

$$\theta_i r_i = \theta_c r_c \quad (3.82)$$

$$(\theta_l - \theta_c) r_l = \theta_s r_s \quad (3.83)$$

$$(\theta_c - \theta_r) r_r = \theta_s r_s \quad (3.84)$$

Os graus de liberdade escolhidos para representar o sistema após a aplicação das restrições mostradas são  $\theta_r$  e  $\theta_l$ . Por isso, os graus de liberdade que serão eliminados, ou seja,  $\theta_i$ ,  $\theta_c$  e  $\theta_s$  devem ser representados em função dos dois primeiros. Suas expressões são dadas por:

$$\theta_i = \frac{r_c}{(r_l + r_r) r_i} (\theta_l r_l + \theta_r r_r) \quad (3.85)$$

$$\theta_c = \frac{\theta_l r_l + \theta_r r_r}{r_l + r_r} \quad (3.86)$$

$$\theta_s = \frac{r_l r_r}{r_s (r_l + r_r)} (\theta_r - \theta_l) \quad (3.87)$$

Ou, na forma matricial, é possível escrever:

$$\begin{pmatrix} \theta_l \\ \theta_r \\ \theta_i \\ \theta_c \\ \theta_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{r_c r_l}{(r_l + r_r) r_i} & \frac{r_c r_r}{(r_l + r_r) r_i} \\ \frac{r_l}{r_l + r_r} & \frac{r_r}{r_l + r_r} \\ \frac{-r_r r_l}{(r_l + r_r) r_s} & \frac{r_r r_l}{(r_l + r_r) r_s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_l \\ \theta_r \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

A força  $F_s$  é uma reação aplicada à *spider gear* que deve mantê-la sempre solidária à coroa do diferencial. Por isso, pode-se afirmar que:

$$F_s = F_{sl} + F_{sr} \quad (3.89)$$

Fazendo uso das Equações 3.77, 3.78 e 3.79, é possível obter as expressões das forças

$F_{ic}$ ,  $F_{sl}$  e  $F_{sr}$ , que são dadas por:

$$F_{ic} = \frac{-(I_i \ddot{\theta}_i - \tau_i)}{r_i} \quad (3.90)$$

$$F_{sl} = -\frac{I_c}{2r_f} \ddot{\theta}_c - \frac{(I_i \ddot{\theta}_i - \tau_i)r_c}{2r_f r_i} - \frac{I_s \ddot{\theta}_s}{2r_s} \quad (3.91)$$

$$F_{sr} = -\frac{I_c}{2r_f} \ddot{\theta}_c - \frac{(I_i \ddot{\theta}_i - \tau_i)r_c}{2r_f r_i} + \frac{I_s \ddot{\theta}_s}{2r_s} \quad (3.92)$$

O que se pode observar a partir das Equações 3.91 e 3.92 é que a diferença entre a força de contato com os dentes da engrenagem do semi eixo direito e a força de contato com os dentes da engrenagem do semi eixo esquerdo é dada por:

$$F_{sr} - F_{sl} = \frac{I_s \ddot{\theta}_s}{r_s} \quad (3.93)$$

Na maioria das aplicações comerciais, os raios  $r_l$  e  $r_r$  são iguais, portanto os torques transmitidos aos semi eixos direito e esquerdo são proporcionais a  $F_{sr}$  e  $F_{sl}$  respectivamente pela mesma razão. Assim, a diferença entre estes torques também é proporcional ao valor dado por 3.93. Isto significa que quando a *spider gear* não está acelerando, o torque transmitido às rodas do veículo é igual. Além disso, o momento de inércia  $I_s$  é muito pequeno, e por isso quando esta engrenagem é acelerada, a diferença entre os torques transmitidos aos dois semi-eixos é muito pequena.

Ainda assim, as Equações 3.90, 3.91 e 3.92 ainda não estão em suas formas finais, pois elas devem ser escritas em função de  $\theta_r$  e  $\theta_l$  e suas respectivas derivadas temporais. Assim, substituindo nestas equações as restrições dadas por 3.85, 3.86 e 3.87, obtém-se:

$$F_{ic} = -\frac{I_i r_c}{r_i^2 (r_l + r_r)} (\ddot{\theta}_l r_l + \ddot{\theta}_r r_r) + \frac{\tau_i}{r_i} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned} F_{sl} = & -\frac{r_l}{2(r_l + r_r)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} + \frac{I_s r_r}{r_s^2} \right) \ddot{\theta}_l \dots \\ & \dots - \frac{r_r}{2(r_l + r_r)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} + \frac{I_s r_l}{r_s^2} \right) \ddot{\theta}_r + \frac{\tau_i r_c}{2r_f r_i} \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$F_{sr} = -\frac{r_l}{2(r_l + r_r)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} - \frac{I_s r_r}{r_s^2} \right) \ddot{\theta}_l \dots$$

$$\dots - \frac{r_r}{2(r_l + r_r)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} - \frac{I_s r_l}{r_s^2} \right) \ddot{\theta}_r + \frac{\tau_i r_c}{2r_f r_i} \quad (3.96)$$

Substituindo estas expressões para as forças  $F_{ic}$ ,  $F_{sl}$  e  $F_{sr}$  nas Equações 3.80 e 3.81 é possível obter as seguintes equações de movimento para o diferencial:

$$I_{rr} \ddot{\theta}_r + I_{rl} \ddot{\theta}_l + \tau_d = \frac{\tau_i r_c r_r}{2r_f r_i} \quad (3.97)$$

$$I_{lr} \ddot{\theta}_r + I_{ll} \ddot{\theta}_l + \tau_e = \frac{\tau_i r_c r_l}{2r_f r_i} \quad (3.98)$$

Sendo:

$$I_{rr} = \left[ I_r + \frac{r_r^2}{2(r_r + r_l)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} - \frac{I_s r_l}{r_s^2} \right) \right]$$

$$I_{ll} = \left[ I_l + \frac{r_l^2}{2(r_r + r_l)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} + \frac{I_s r_r}{r_s^2} \right) \right]$$

$$I_{rl} = \frac{r_r r_l}{2(r_r + r_l)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} - \frac{I_s r_r}{r_s^2} \right)$$

$$I_{lr} = \frac{r_r r_l}{2(r_r + r_l)} \left( \frac{I_c}{r_f} + \frac{I_i r_c^2}{r_f r_i^2} + \frac{I_s r_l}{r_s^2} \right)$$

Até este ponto são identificados principalmente os termos de inércia referentes ao diferencial. Porém, nota-se que o grau de liberdade onde era aplicado o torque de entrada no diferencial foi eliminado das equações pela aplicação das restrições. Matematicamente, isto não representa um problema, uma vez que este torque é presente nas equações 3.97 e 3.98. Porém, isto dificulta a implementação deste elemento em um programa comercial, pois, para isto, este elemento deveria possuir apenas matrizes de inércia, rigidez e amortecimento, o que ainda não é o caso.

Mesmo assim, o torque  $\tau_i$  que é aplicado no diferencial não é um torque gerado por uma fonte, como um motor, mas sim transmitido por um eixo. Assim, a solução adotada para manter a coesão deste modelo, de forma que ele possa ser implementado apenas por suas matrizes de parâmetros físicos, foi inserir mais um grau de liberdade  $\theta_e$ , que é ligado por uma mola torcional de rigidez  $K_p$  e um amortecedor torcional de rigidez  $C_p$  ao grau de liberdade

$\theta_i$  considerado no início da modelagem. O torque  $\tau_i$  agora pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}\tau_i &= K_p(\theta_e - \theta_i) + C_p(\dot{\theta}_e - \dot{\theta}_i) \\ &= K_p \left( \theta_e - \frac{r_c}{(r_l + r_r)r_i}(\theta_l r_l + \theta_r r_r) \right) + C_p \left( \dot{\theta}_e - \frac{r_c}{(r_l + r_r)r_i}(\dot{\theta}_l r_l + \dot{\theta}_r r_r) \right)\end{aligned}\quad (3.99)$$

Desta maneira, é possível agora representar este elemento com matrizes de parâmetros físicos. Estas matrizes são da forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} I_e & 0 & 0 \\ 0 & I_{rr} & I_{rl} \\ 0 & I_{lr} & I_{ll} \end{bmatrix}\quad (3.100)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-r_r r_c}{(r_l + r_r)r_i} & \frac{-r_l r_c}{(r_l + r_r)r_i} \\ \frac{-r_r r_c}{2r_f r_i} & \frac{r_r^2 r_c^2}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} & \frac{r_c^2 r_r r_l}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} \\ \frac{-r_l r_c}{2r_f r_i} & \frac{r_c^2 r_r r_l}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} & \frac{r_l^2 r_c^2}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} \end{bmatrix} C_p\quad (3.101)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-r_r r_c}{(r_l + r_r)r_i} & \frac{-r_l r_c}{(r_l + r_r)r_i} \\ \frac{-r_r r_c}{2r_f r_i} & \frac{r_r^2 r_c^2}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} & \frac{r_c^2 r_r r_l}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} \\ \frac{-r_l r_c}{2r_f r_i} & \frac{r_c^2 r_r r_l}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} & \frac{r_l^2 r_c^2}{2r_i^2 r_f (r_l + r_r)} \end{bmatrix} K_p\quad (3.102)$$

Neste caso, o vetor de coordenadas generalizadas deve estar na forma  $\{\theta_e \theta_r \theta_l\}^T$ .

### 3.6 Inércia do veículo

O principal objetivo do trem de potência é fazer com que o veículo se locomova. Para isso, é necessário que este sistema acelere todo o veículo, incluindo a massa da carcaça do

veículo, a massa da carga que este transporta, e mesmo a massa própria do *powertrain*. Por isso é de extrema importância que seja incluído o efeito destas inércias na dinâmica torcional deste sistema.

Para tanto, será considerado que os pneus do veículo não possuem flexibilidade torcional (são perfeitamente rígidos), bem como a vinculação entre a suspensão e o corpo do veículo, que no caso real é feita por buchas e coxins de borracha. Assim, uma força de contato entre ambos, chamada de  $F_s$  deve ser considerada. O diagrama de corpo livre do veículo sob estas condições pode ser visto na Figura 3.9.

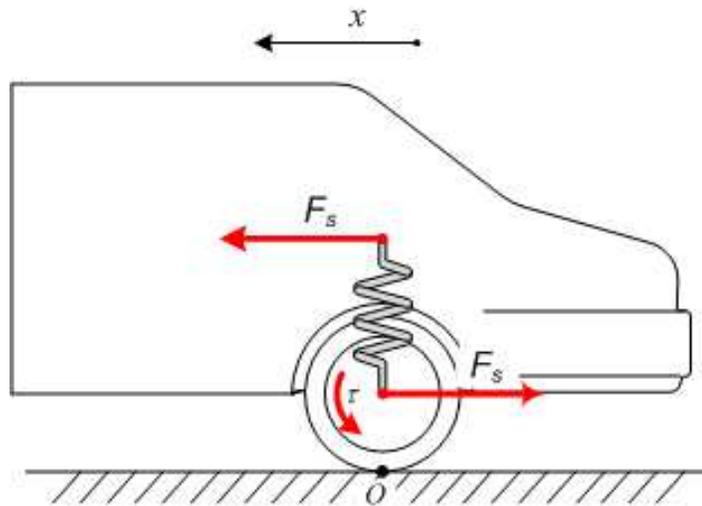


Figura 3.9: Diagrama de corpo livre do veículo.

Assim, realizando a soma das forças na direção  $x$ , que é a direção do movimento do veículo, obtém-se:

$$m_b \ddot{x} = F_s \quad (3.103)$$

sendo  $m_b$  a massa do veículo.

Calculando a somatória dos momentos em torno do ponto de contato  $O$  entre o solo e a roda do veículo, é possível chegar à expressão:

$$I_{fa} \ddot{\theta} = \tau - F_s R_w \quad (3.104)$$

sendo:

$I_{fa}$  é o momento de inércia do eixo de tração com relação ao ponto  $O$ .

$R_w$  é o raio das rodas de tração do veículo, assumido igual para todas elas.

$\tau$  é o torque que o trem de potência aplica sobre o eixo de tração

Assim, aplicando na Equação 3.103 a restrição  $\dot{x} = \dot{\theta}R_w$ , impondo que não haja deslizamento entre as rodas e o solo, e substituindo o termo  $F_s$  desta em 3.104, a relação final é:

$$(I_{fa} + m_b R_w^2) \ddot{\theta} = \tau \quad (3.105)$$

de onde se pode concluir que, para incluir a inércia do veículo no modelo torcional do trem de potência, é necessário multiplicar a massa do veículo pelo quadrado do raio de sua roda de tração.

Para efeitos de cálculo, neste trabalho as simulações são feitas considerando que o veículo se locomove em linha reta, e por isso a inércia do veículo é distribuída igualmente entre as duas rodas de tração. Isto se faz necessário pelo fato de que o modelo escolhido para o diferencial possui um grau de liberdade para cada roda tratora.

### 3.7 Modelo completo do trem de potência

Até este ponto do trabalho foram apresentadas as ferramentas necessárias para a modelagem do trem de potência, como a técnica de modelagem por parâmetros concentrados e diferentes métodos de imposição de restrições a sistemas lineares e não lineares. Depois disso foram apresentados diferentes modelos para cada uma das partes do *powertrain*, como volante de inércia, embreagem, engrenamentos, diferencial e inércia do veículo. Nesta seção serão apresentadas as premissas utilizadas para a montagem de modelos lineares e não lineares de trens de potência completos, utilizando as ferramentas e os modelos apresentados até então.

Para a melhor compreensão dos modelos que serão apresentados nas próximas seções, uma caracterização descritiva do trem de potência em estudo se faz necessária. A partir desta, serão utilizadas as ferramentas e modelos apresentados anteriormente para a montagem do modelo completo do *driveline*. É necessário observar que todos os modelos apresentados neste trabalho devem representar o mesmo veículo, sendo que as diferenças entre os modelos serão dadas sempre pelo seu nível de simplificação com relação ao objeto de estudo real.

A premissa mais básica que foi assumida neste trabalho, é a de que o trem de potência possui apenas movimento torcional, o que é impossível na prática, devido ao fato de este sistema possuir grande quantidade de eixos, que podem apresentar movimentos de precessão devido a diversas causas, como desbalanceamento, desalinhamento, folgas em mancais, características de lubrificantes, entre outros. Esta premissa foi adotada pois a maioria dos autores desta área também a adota e atinge resultados plausíveis. Além disso, o escopo deste trabalho é a compreensão de fenômenos da dinâmica torcional de trens de potência, e a presença de outros graus de liberdade não torcionais elevaria em muito a complexidade deste problema. A partir desta premissa básica, é possível fazer a descrição dos elementos do trem de força a serem modelados.

Para este estudo foi escolhido um veículo com volante de inércia simples. Esta escolha foi feita pois o volante de inércia bipartida (*Dual Mass Flywheel* ou *DMF*) não é um componente muito utilizado no mercado brasileiro devido ao seu alto custo e à motorização dos veículos brasileiros<sup>8</sup>. Além disso, este volante possui rigidez muito baixa, e o sistema em estudo seria incapaz de reproduzir o fenômeno de *clunk*.

De acordo com o fenômeno que se deseja estudar em um trem de potência, algumas simplificações podem ser adotadas no modelo, sem que se perca qualidade nos resultados obtidos. Um exemplo disso é o fenômeno de *idle rattle*, que ocorre com o veículo parado. Neste caso, não é necessário modelar as rodas do veículo, diferencial, semieixos, árvore secundária da transmissão, inércia do veículo ou cargas externas.

Os fenômenos de *shuffle* e *clunk*, apesar de poderem ocorrer durante um acoplamento de embreagem, são causados essencialmente por pulsos muito íngremes de torque aplicados no sistema, e por este motivo não é necessário que o modelo de trem de potência descreva a dinâmica deste acoplamento. Assim, o modelo de disco de embreagem utilizado partirá do pressuposto que o volante de inércia e o material de atrito do disco de embreagem estão totalmente acoplados, ou seja, não há escorregamento entre suas superfícies. Caso fossem estudados os fenômenos de *clutch judder* ou *clutch whoop*, então seria necessário que o modelo descrevesse também as características dinâmicas deste acoplamento.

Também para o modelamento matemático da transmissão, algumas simplificações podem ser assumidas. Diferentemente do fenômeno de *gear rattle*, o *clunk* é caracterizado pelos

---

<sup>8</sup>Os veículos leves brasileiros são movidos a gasolina e/ou etanol, devido à legislação do país. Estes motores possuem pouca flutuação de torque, comparados aos veículos *diesel* e dispensam o uso do *DMF*.

impactos entre os dentes dos pares engrenados que estão a transmitir torque. Somando isto ao fato de os pares de engrenagens não solicitados possuírem inércia tão baixa, com relação às rodas do veículo e ao volante de inércia, que seus impactos possuem efeito desprezível na dinâmica torcional do *driveline*, pode-se desconsiderar estes engrenamentos nos modelos desenvolvidos neste trabalho (BRANCATI, 2007).

Além disso, o veículo em estudo possui transmissão manual, e por isso as árvores de transmissão de torque possuem sincronizadores que tornarão as engrenagens solidárias a seus eixos quando necessário. Neste caso não é simulado o *shifting* (troca de marchas), e por isso os eixos internos à transmissão são idealizados como eixos discretizados, ou seja, eixos formados por segmentos de eixo que ligam os pontos onde as engrenagens seriam fixas ao eixo caso solicitadas. Por possuir diâmetro pequeno, a inércia destes segmentos de eixo é desprezível, e o modelo de eixo interno à transmissão possuirá então graus de liberdade torcionais com inércia nula, também conhecidos como meios graus de liberdade. Para eliminá-los das equações de movimento do sistema, utiliza-se a técnica demonstrada na seção 3.5.

Finalmente, os fenômenos estudados neste trabalho ocorrem em marchas baixas (primeira ou segunda), e por isso a transmissão pode ser modelada utilizando apenas dois engrenamentos, um ligando o eixo piloto à árvore secundária, e outro ligando esta ao eixo de saída da transmissão.

Como o layout de montagem do trem de potência em estudo é de motor dianteiro e tração traseira (layout *FR*), há um eixo cardã (também conhecido como *driveshaft* ou *propellershaft*) que liga a transmissão ao diferencial. Em alguns veículos, pelo fato de este eixo ser longo, ele é formado por alguns segmentos de eixo, unidos por juntas universais (*cardan joint* ou *universal joint*), que permitem que eixos desalinhados entre si transmitam torque. Para o veículo em estudo foi adotado um eixo cardã inteiriço.

Ao final do eixo cardã deve haver um diferencial, para que o veículo possa ao mesmo tempo acelerar e realizar trajetórias curvas. Em trabalhos anteriores foi realizado um estudo sobre os mesmos fenômenos analisados nesta dissertação, mas com um modelo de diferencial travado, ou seja, um modelo onde a *spider gear* não possuía movimento de rotação (SIMIONATTO, 2009). No trabalho atual, o modelo deste elemento foi refinado, e agora ele descreve também esta funcionalidade do diferencial. Contudo, no modelo linearizado, a presença deste modelo de diferencial torna as matrizes não simétricas, e por isso as análises de autovalores e autovetores devem ser feitas de maneira cautelosa.

O diferencial possui duas saídas, que são ligadas por meio dos semieixos direito e esquerdo às rodas direita e esquerda, respectivamente. A rigidez torcional dos pneus também não foi considerada e a inércia do corpo do veículo, é somada à inércia das rodas de tração, como mostrado na seção 3.6.5.

Deste modo, o modelo de trem de potência completo pode ser representado pela Figura 3.10.

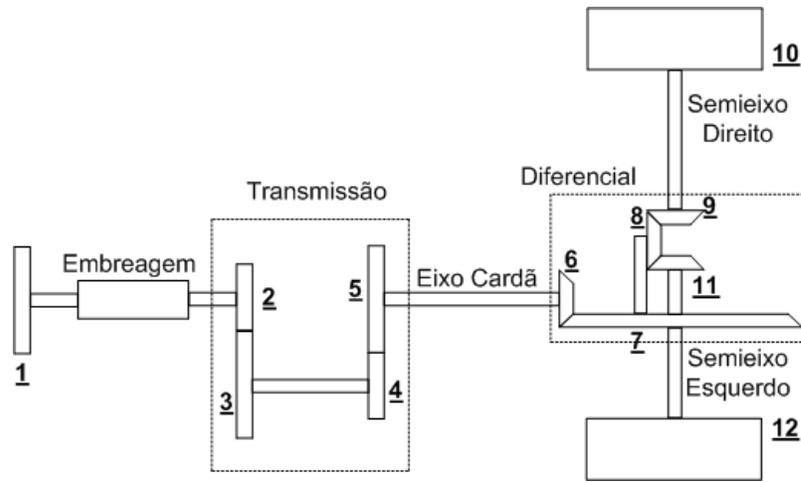


Figura 3.10: Modelo completo do trem de potência. 1 - Volante de inércia. 2 - Eixo de entrada da transmissão. 3 - Primeira engrenagem da árvore secundária. 4 - Segunda engrenagem da árvore secundária. 5 - Eixo de saída da transmissão. 6 - Engrenagem de entrada do diferencial. 7 - Coroa do diferencial. 8 - Spider Gear. 9 - Saída direita do diferencial. 10 - Roda direita. 11 - Saída esquerda do diferencial. 12 - Roda esquerda.

A partir desta idealização do trem de potência, é possível obter modelos matemáticos que o descrevam. O primeiro modelo proposto para este sistema é linear. Neste caso, os engrenamentos entre as engrenagens 2 e 3, 4 e 5, 6 e 7, 8 e 9, e 8 e 11 são considerados ideais, ou seja, podem ser interpretados como uma restrições holonômicas. Sendo assim, o número de graus de liberdade necessário para a descrição deste sistema cai de 12 para 7, pois são cinco os engrenamentos ideais. Os eixos são todos modelados como molas torcionais lineares, e a embreagem pode ser linearizada tanto no estágio de pré-amortecimento quanto no estágio de *drive*. O modelo linear de diferencial é apresentado na seção 3.6.4.

O segundo modelo matemático proposto é um refinamento do primeiro. Neste, todos os engrenamentos e eixos continuam a ser ideais. Porém, o disco de embreagem é modelado com amortecimento por atrito seco e rigidez estratificada, o mesmo modelo apresentado na seção 3.6.2.

O terceiro modelo, por sua vez, já possui 9 graus de liberdade. Neste novo modelo o disco de embreagem continua a ser não linear, e os engrenamentos entre os pares engrenados 2 e 3, e 4 e 5 passam a ser não ideais. Eles agora são modelados com folga através de um modelo de contato entre os dentes chamado *impact damping*, apresentado na seção 3.6.3. O diferencial neste caso continua a ser linear.

Finalmente, o quarto modelo difere do terceiro, pelo fato de os engrenamentos internos ao diferencial agora são descritos também com o modelo de *impact damping*. Desta forma, são necessários 12 graus de liberdade para a representação deste sistema.

Assim, de posse de quatro modelos matemáticos diferentes do trem de potência é possível realizar as simulações necessárias para a simulação dos fenômenos de *shuffle* e *clunk*.

## 4 MODELO LINEARIZADO DO TREM DE POTÊNCIA

A predictibilidade do comportamento de um trem de potência é essencial para o desenvolvimento das partes que compõe este sistema. Sabe-se que o *powertrain* é repleto de não linearidades, e a presença destas compromete em muito a previsão de seu comportamento, pois neste caso o mesmo torna-se sensível a pequenas mudanças.

Além disso, o desenvolvimento de modelos não lineares demanda um forte embasamento teórico, e pode se tornar uma tarefa de altíssima complexidade. Por isso, normalmente o desenvolvimento destes modelos é feito por membros do meio acadêmico, enquanto que as indústrias deste ramo utilizam ferramentas mais simples e robustas para o previsão do comportamento do sistema, mesmo que os resultados obtidos tenham sua precisão comprometida.

Portanto, o primeiro passo para que se possa entender parte do comportamento do sistema em estudo é a análise de um modelo linearizado. A grande vantagem em se analisar um modelo deste tipo é a de que muitos dos princípios que se pode assumir para a análise deste sistema facilitam significativamente a compreensão de seu comportamento. Alguns destes princípios são a linearidade, o princípio da superposição, que vem da linearidade mas é parte importante das análises, a solução homogênea exponencial, que dá origem ao problema de autovalores e autovetores.

Além do mais, modelos lineares são menos sensíveis à alteração de condições iniciais ou amplitude da força excitadora do que os não lineares, e possuem uma função de resposta em frequência bem definida. Assim, neste capítulo é realizada uma análise detalhada sobre o modelo de trem de potência conservativo linearizado. Nesta análise são encontrados dois autovalores nulos, que são analisados em uma seção a parte. Logo após o sistema é linearizado primeiramente em torno da condição de pré-amortecimento, depois em torno da condição de *drive* do disco de embreagem, e finalmente a rigidez da mola torcional que representa a embreagem é variada, e são feitas análises sobre o comportamento dos autovalores e autovetores deste sistema.

O sistema estudado possui sete graus de liberdade, que representam os deslocamentos angulares do volante de inércia, da entrada da transmissão, da saída da transmissão,

das saídas direita e esquerda do diferencial, e das rodas direita e esquerda. Este modelo é apresentado com mais detalhes na seção 3.7.

#### 4.1 Autovetores associados a autovalores nulos

No cálculo dos autovalores do modelo em estudo, foram encontrados dois autovalores nulos, portanto trata-se de um problema de raízes repetidas. Como os autovetores do programa foram calculados por um software interno ao Matlab<sup>®</sup>, não é possível saber se um dos autovetores é generalizado ou se ambos são regulares.

Mesmo assim, sabe-se que, se dois autovetores regulares referentes ao mesmo autovalor, eles devem ser ortogonais. Porém, se um deles for generalizados, eles são linearmente independentes, mas não necessariamente ortogonais. Considerando que estes autovetores sejam  $\{\psi_1\}$  e  $\{\psi_2\}$ , pode-se escrever a seguinte relação:

$$\{\psi_1\} \cdot (\{\psi_2\} - \kappa\{\psi_1\}) = 0 \quad (4.1)$$

sendo  $\kappa$  uma constante escalar e a operação  $\{v\} \cdot \{w\}$  o produto escalar entre  $\{v\}$  e  $\{w\}$ . Desta forma se  $\{\psi_1\}$  e  $\{\psi_2\}$  forem autovetores regulares, a constante  $\kappa$  será nula, mas se um deles for um autovetor generalizado, esta constante não é nula. Além disso, neste segundo caso, com o uso desta constante é possível determinar a componente do segundo autovetor que é ortogonal ao primeiro. Manipulando a Equação 4.1, é possível calcular a constante  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\{\psi_1\}^T \cdot \{\psi_2\}}{\{\psi_1\}^T \cdot \{\psi_1\}} \quad (4.2)$$

Portanto, no caso de estes autovetores não serem ortogonais, a parte ortogonal de  $\{\psi_2\}$  com relação a  $\{\psi_1\}$  é dada por:

$$\{\psi_2'\} = \{\psi_2\} - \kappa\{\psi_1\} \quad (4.3)$$

Os autovetores associados ao autovalor nulo encontrados neste trabalho podem ser vistos nas Figuras 4.1 e 4.2. Nota-se que a diferença de amplitude entre os graus de liberdade destes modos se dão pela presença de engrenamentos no sistema. Além disso, os autovetores completos são da forma  $\{\psi_i\} = \{\{\tilde{\psi}_i\}^T \lambda_i \{\tilde{\psi}_i\}^T\}^T$ , e  $\lambda_i$  neste caso é nulo, portanto foram exibidos nos gráficos apenas os modos ( $\{\tilde{\psi}_i\}$ ).

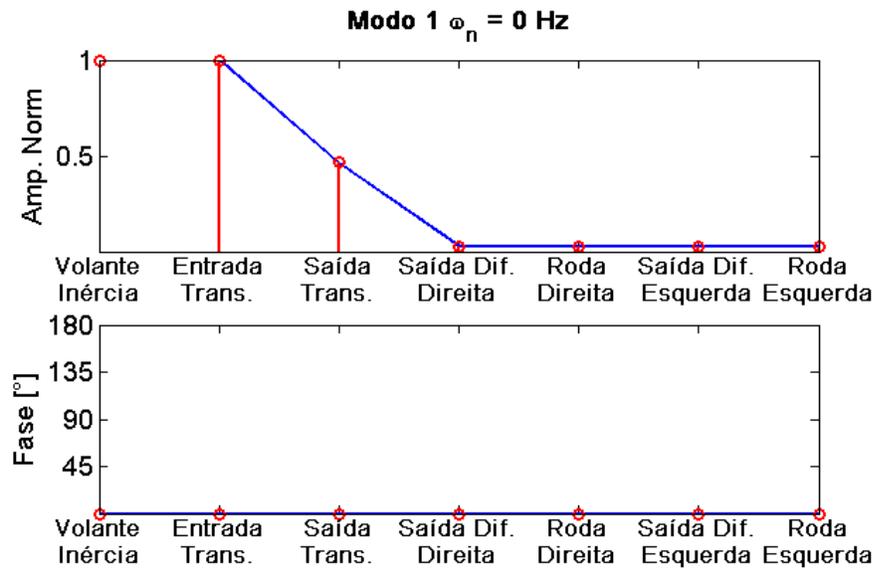


Figura 4.1: Primeiro modo de frequência natural nula encontrado.

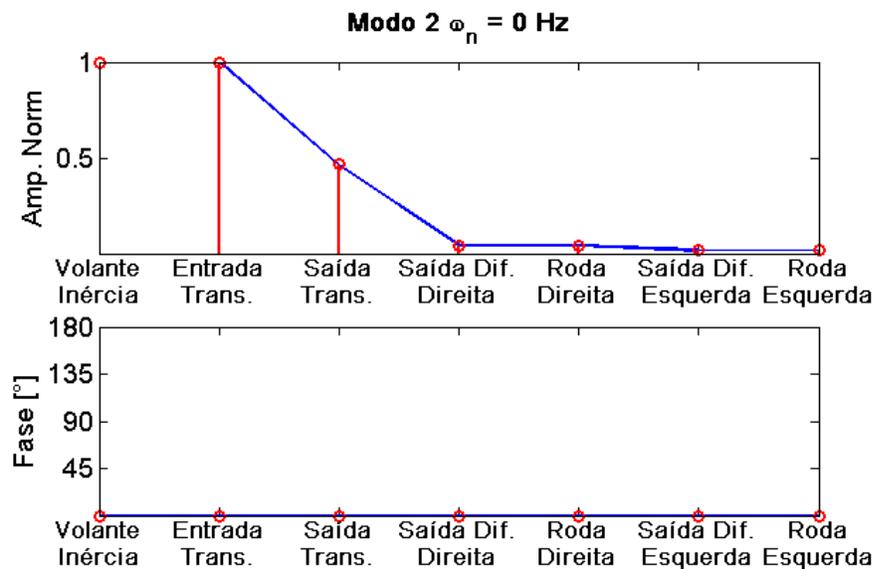


Figura 4.2: Segundo modo de frequência natural nula encontrado.

Pode-se notar a partir destes gráficos que há uma pequena diferença em relação a estes

modos. Então, aplicando a metodologia recém apresentada, a constante  $\kappa$  foi calculada, e não é nula. Naturalmente seu valor depende não só da forma dos autovetores, mas também de sua normalização. Assim, na Figura 4.3 é apresentada a componente do segundo modo que é ortogonal ao primeiro.

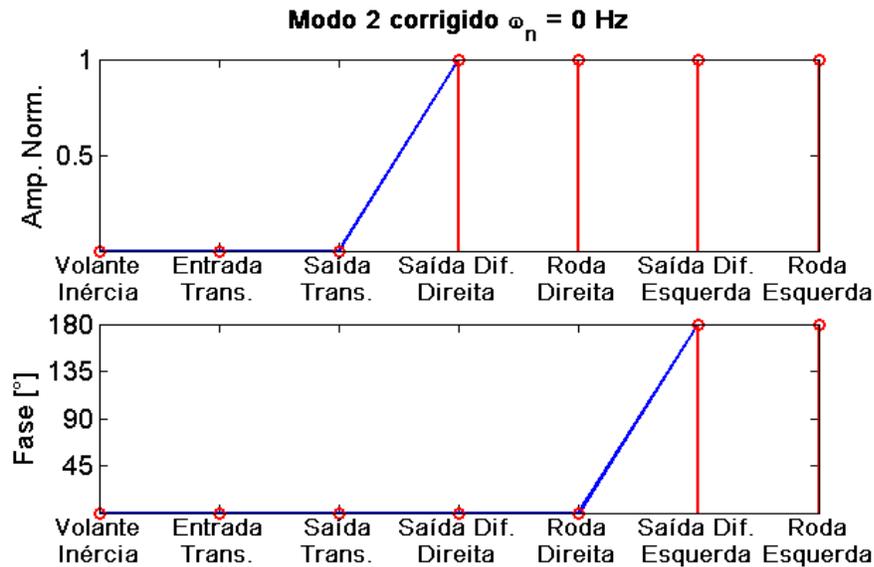


Figura 4.3: Componente do modo 2 ortogonal ao modo 1.

O vetor mostrado na Figura 4.1 representa o movimento do veículo se deslocando em linha reta, uma vez que suas rodas se deslocam com a mesma amplitude e fase entre si. Neste, todos os graus de liberdade estão em fase, e suas amplitudes são diferentes devido à presença de engrenamentos no sistema. Já no vetor mostrado na Figura 4.3, pode-se observar que os semieixos direito e esquerdo giram em oposição de fase, enquanto o restante do sistema permanece imóvel.

O movimento representado por este vetor pode ser observado na prática ao suspender a parte dianteira de um veículo tração dianteira desligado, quando se tenta girar uma de suas rodas. Neste caso, como o veículo está desligado, o motor não permite que o trem de potência se mova, até a altura da coroa do diferencial. Quando se trava a esta engrenagem, e uma das rodas se movimentar em um sentido, a *spider gear* transmite este movimento à outra roda. Como a coroa se encontra imóvel, a roda do lado contrário girará no sentido oposto. Uma vez que este modo está associado a uma frequência natural nula, a informação de fase encontrada não está relacionada à fase, pois não há movimento oscilatório, mas sim ao sentido de rotação das rodas.

Em ambos os modos associados aos autovalores nulos, pode-se observar que a mola torcional que representa uma linearização do disco de embreagem não é solicitada, e por isso qualquer uma das linearizações adotadas para este elemento culminarão na presença destes dois modos. Por isso, nas próximas sessões serão analisados apenas os cinco últimos modos.

## 4.2 Caso 1: linearização na região de pré-amortecimento

Para realizar este estudo, considerando o sistema linearizado, a mola torcional que representa o disco de embreagem foi escolhida de forma que tivesse a mesma rigidez de seu estágio de pré-amortecimento. Devido a seu baixo nível de amortecimento, o sistema linearizado foi considerado conservativo. Então, foram extraídos suas frequências naturais e seus modos de vibrar, que são representados aqui nas Figuras 4.4 a 4.8. Os modos associados a frequências naturais nulas não foram representados aqui por razões descritas na seção 4.1.

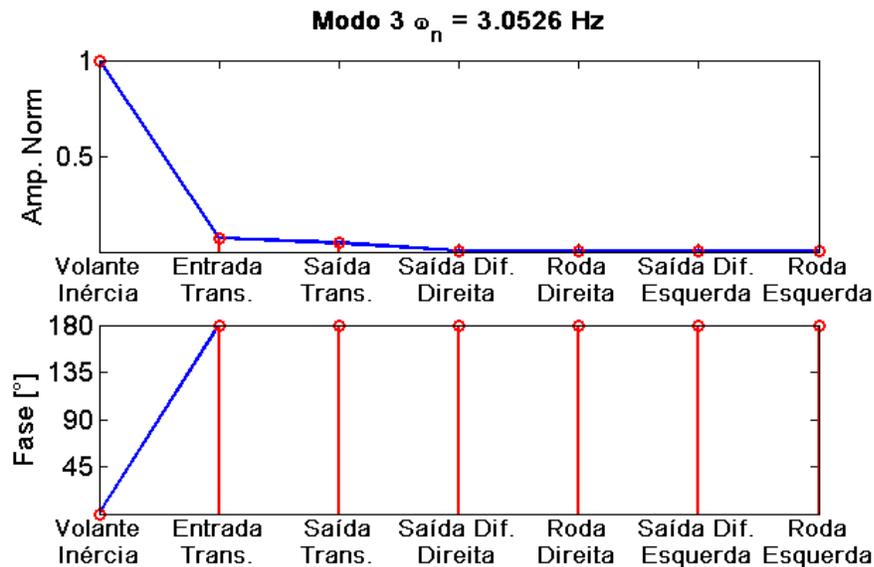


Figura 4.4: Terceiro modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento.

Na Figura 4.4 é representado o terceiro modo do sistema. A frequência natural associada a este modo é de aproximadamente 3 Hz, e seu movimento é caracterizado pelo volante de inércia vibrando em oposição de fase com o restante do veículo. As saídas do diferencial e as rodas vibram com amplitude pequena, mas não desprezível. Assim, pelas características do

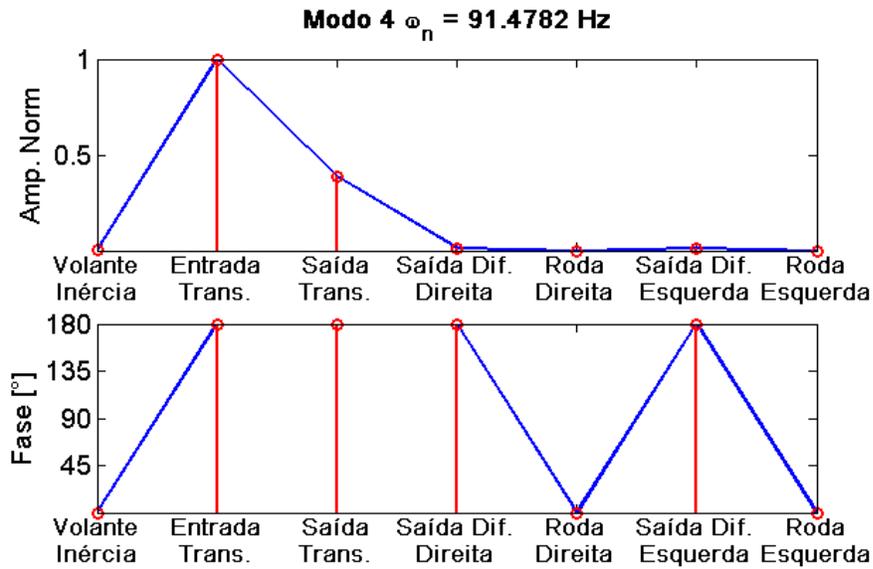


Figura 4.5: Quarto modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento.

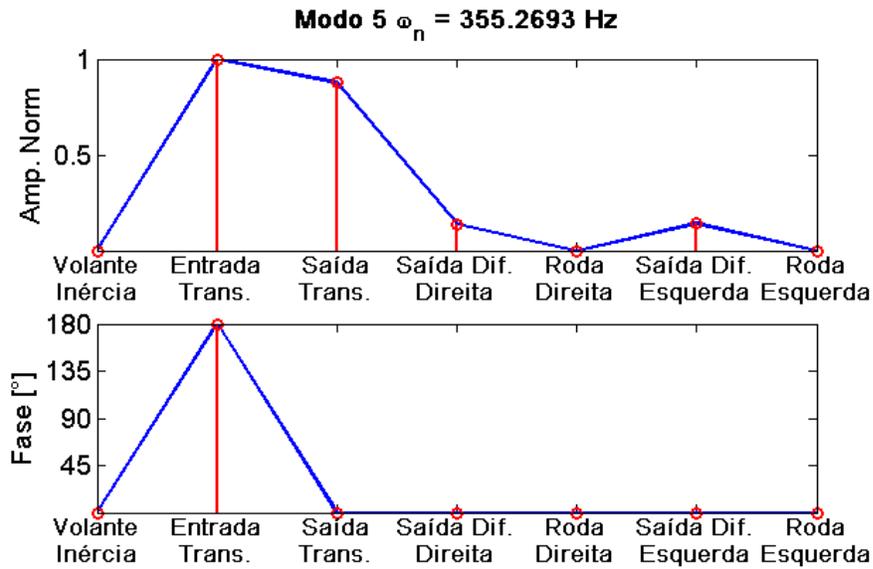


Figura 4.6: Quinto modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento.

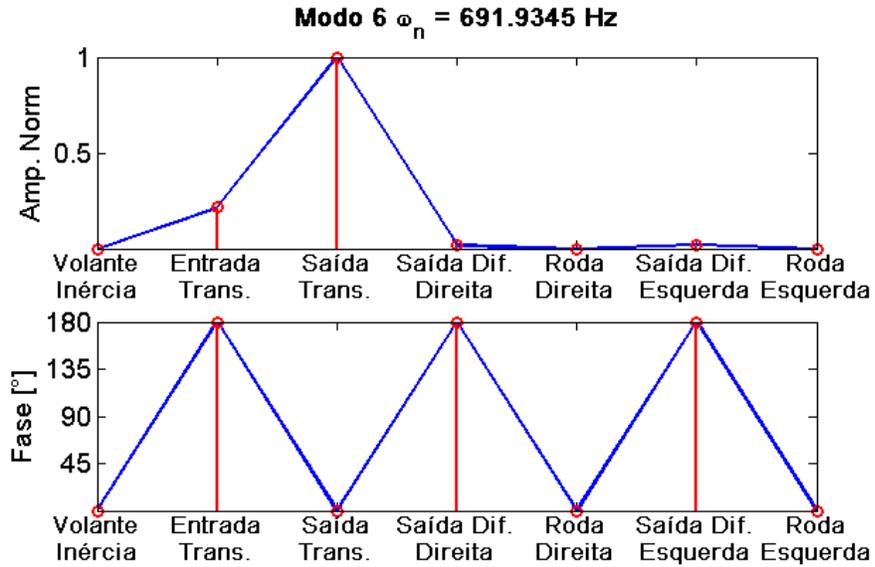


Figura 4.7: Sexto modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento.

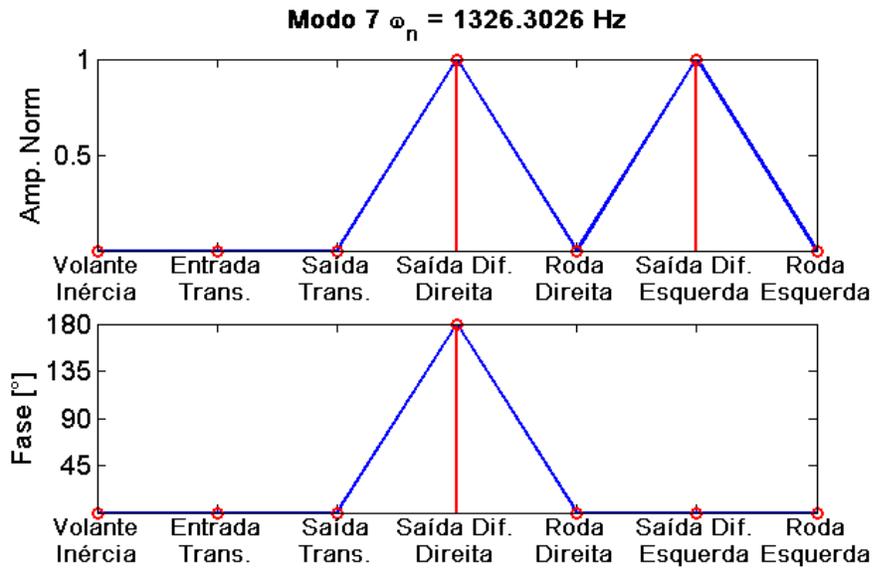


Figura 4.8: Sétimo modo do sistema linearizado em torno do estágio de pré-amortecimento.

movimento apresentado e pela frequência à qual este modo está associado, pode-se dizer que este é o modo associado ao fenômeno de *shuffle* do veículo.

Já na Figura 4.5 está representado o quarto modo deste trem de potência, que possui uma frequência natural de aproximadamente 91,5 Hz. Nesta configuração, o volante de inércia e as rodas do veículo vibram com amplitude desprezível, enquanto que a entrada e a saída da transmissão e as saídas do diferencial vibram todos em fase. Neste modo nota-se claramente um nível de vibração acentuado apenas nos pares engrenados. Caso este sistema possuísse folgas, haveria então o impacto de dentes de baixa intensidade, pois a inércia dos engrenamentos é reduzida, porém em frequência audível, podendo então ocorrer problema de ruído. Por isso, este modo pode ser associado ao fenômeno de *gear rattle*.

O quinto e o sexto modos do trem de potência, representados nas Figuras 4.6 e 4.7 possuem frequências naturais de 355.3 Hz e 691.9 Hz aproximadamente. Suas características em amplitude são análogas ao quarto modo, ou seja, o volante de inércia e as rodas do veículo possuem amplitude de vibração desprezível, enquanto que os pares engrenados vibram significativamente. Porém, no quinto modo, a entrada da transmissão está em oposição de fase com os outros pares engrenados do sistema, e no sexto modo, a saída da transmissão é que se encontra em oposição de fase com os engrenamentos restantes. Estes dois modos podem ser associados a problemas relativos ao impacto de dentes em pares engrenados.

Finalmente, o sétimo modo do sistema está associada a uma frequência natural de aproximadamente 1326,3 Hz. O volante de inércia, a entrada e a saída da transmissão e as duas rodas de tração são nós deste modo. Apenas as saídas direita e esquerda do diferencial vibram, e em oposição de fase. Este modo é chamado vulgarmente de “modo do diferencial”, e neste caso é considerado fora da faixa de operação. Porém, em aplicações onde é empregado o volante de dupla massa, o objetivo é que algumas das frequências naturais do sistema, como a frequência associada ao fenômeno de *gear rattle*, caiam abaixo da faixa de operação do trem de potência. Neste caso, a frequência natural do sétimo modo pode ser reduzida de modo a ficar dentro da faixa de operação, o que é indesejável.

### 4.3 Caso 2: linearização na condição de *drive*

O segundo estudo proposto é a análise dos autovalores e autovetores do sistema estudado na seção anterior, porém desta vez linearizado em torno da condição de *drive* do disco de embreagem. As frequências naturais e seus respectivos modos de vibrar são representados nas Figuras 4.9 a 4.13. Novamente serão apresentados apenas os modos cuja frequência natural associada não é nula.

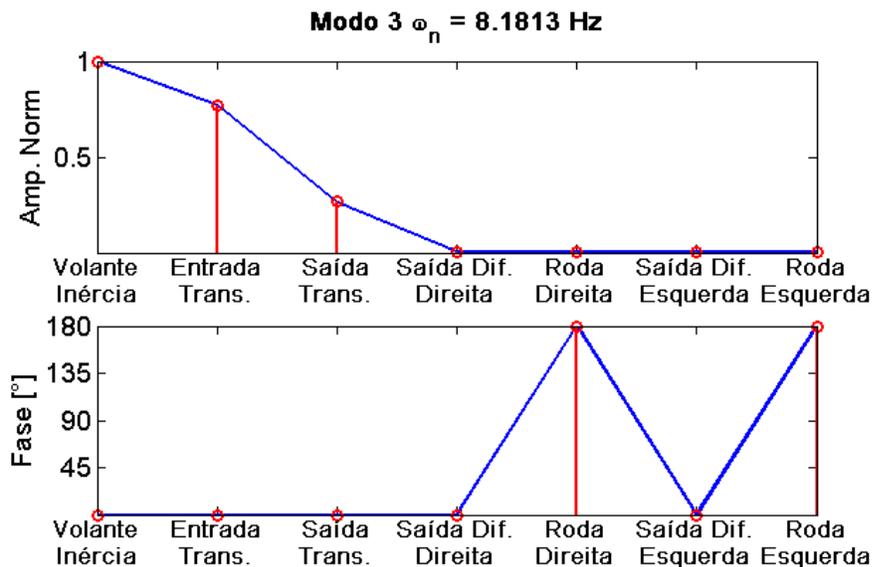


Figura 4.9: Terceiro modo do sistema linearizado em torno do estágio de *drive*.

Na Figura 4.9 é representado o terceiro modo do sistema, associado a uma frequência natural de aproximadamente 8,2 Hz. As características em amplitude são análogas às características do terceiro modo do sistema quando linearizado em torno da condição de pré-amortecimento, com grande amplitude no volante de inércia e na entrada e na saída da transmissão, e amplitude pequena, mas não desprezível nas saídas do diferencial e nas rodas do veículo.

A diferença com relação à linearização anterior se dá nas características de fase deste modo. No primeiro caso, todos os graus de liberdade estavam em oposição de fase com o volante de inércia, o que sugere uma grande sollicitação do disco de embreagem. Neste segundo caso, as rodas do veículo se encontram em oposição de fase com todos os outros graus de liberdade do sistema. Desta forma, ainda é possível associar este modo de vibração

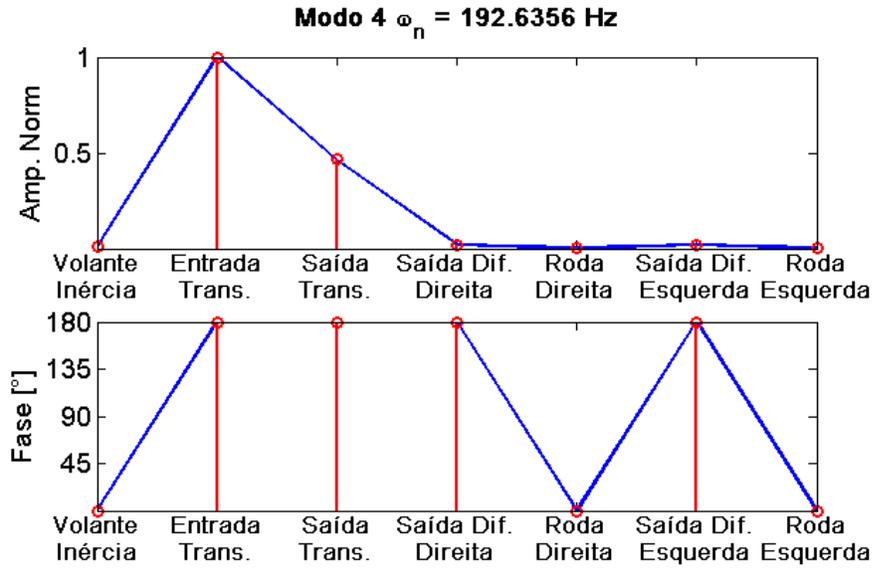


Figura 4.10: Quarto modo do sistema linearizado em torno do estágio de *drive*.

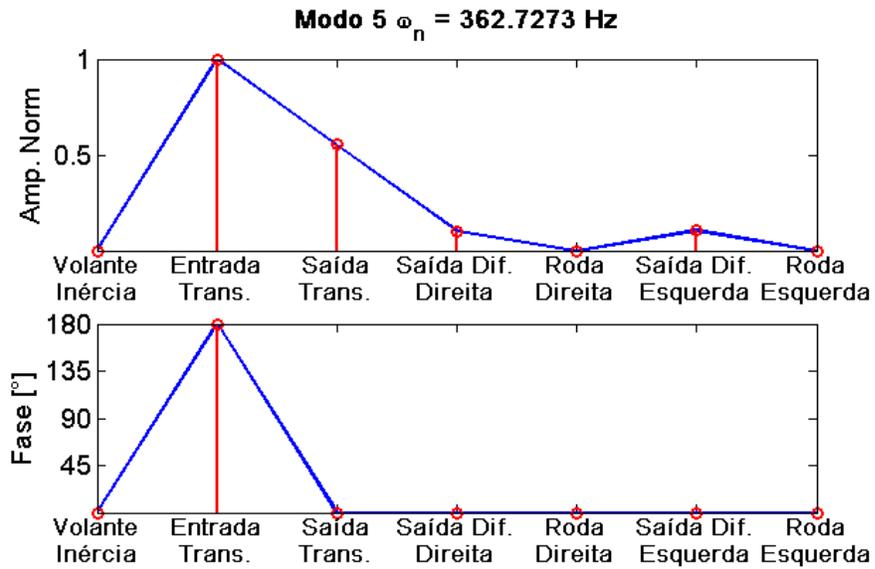


Figura 4.11: Quinto modo do sistema linearizado em torno do estágio de *drive*.

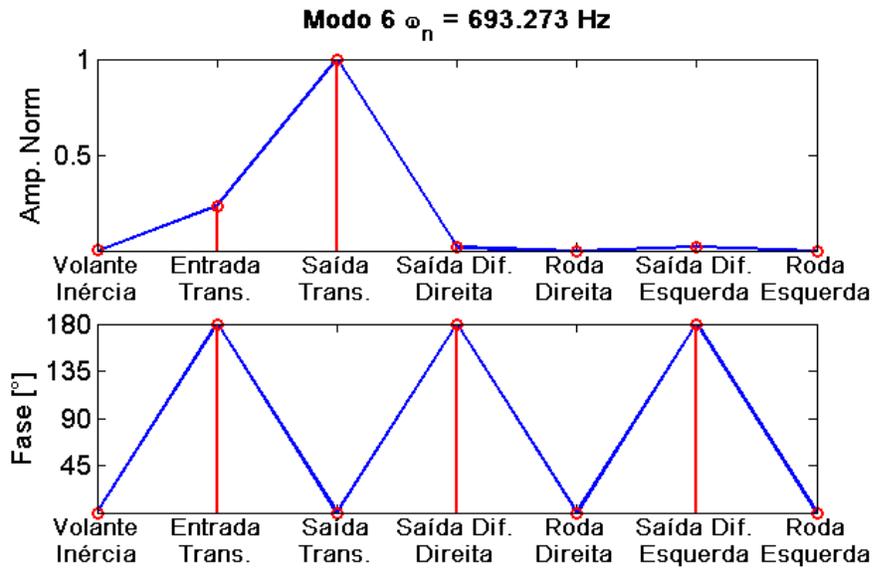


Figura 4.12: Sexto modo do sistema linearizado em torno do estágio de *drive*.

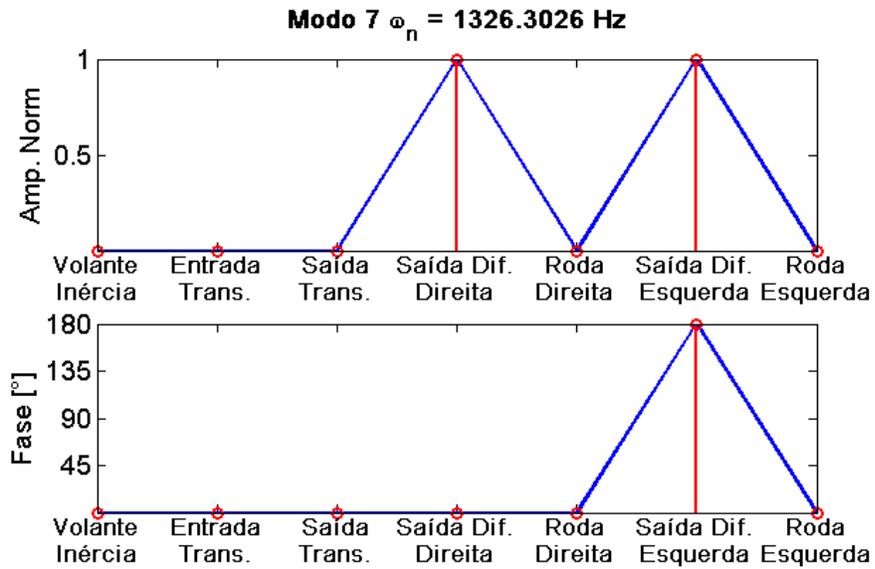


Figura 4.13: Sétimo modo do sistema linearizado em torno do estágio de *drive*.

ao fenômeno de *shuffle*, mas as características de fase indicam que os impactos do fenômeno de *clunk* possuem características diferentes com relação à primeira situação.

O quarto modo de vibrar deste sistema é apresentado na Figura 4.10. Tanto as características de amplitude quanto as características de fase deste modo são muito próximas às apresentadas no quarto modo do sistema apresentado no caso 1, e por isso as conclusões com relação às características deste movimento são exatamente as mesmas. A grande diferença é a frequência natural associada a este modo, que passou de 91,5 Hz para 192,6 Hz.

Apesar deste modo estar associado ao fenômeno de *gear rattle*, na prática este ocorre em torno de 60 a 80 Hz. Esta diferença se deve ao fato de que este modelo foi simplificado para a reprodução dos fenômenos de *shuffle* e *clunk*, e assim, linearizado ou não, a reprodução de outros fenômenos fica comprometida.

Já o quinto modo deste sistema é representado na Figura 4.11 e está associado à frequência natural de 362,7 Hz, ligeiramente maior do que a do quinto modo da seção anterior, que era de 355,3 Hz. As características de fase são idênticas às daquelas do modo correspondente no caso 1. Com relação às amplitudes, a única diferença é a de que a magnitude de vibração da saída da transmissão é ligeiramente menor. Portanto, este modo também pode estar relacionado a problemas de impactos entre os dentes dos pares engrenados, uma vez que apenas nestes graus de liberdade há amplitude de vibração não desprezível.

O sexto e o sétimo modos deste sistema nestas condições, representados nas Figuras 4.12 e 4.13 são muito próximos daqueles obtidos no caso 1. Suas frequências naturais, que eram de 691,9 Hz e 1326,3 Hz, respectivamente, passaram a 693,3 Hz e 1326,3 Hz, o que nesta faixa de frequência é uma variação desprezível. Por isso, pode-se dizer que estes modos são insensíveis à variação da rigidez da embreagem.

A sensibilidade dos modos do sistema linearizado à variação de um parâmetro do sistema é uma característica muito importante no processo do desenvolvimento do trem de potência. Com esta informação é possível ter indícios de qual seria a melhor alteração a fazer no veículo para a solução de um determinado problema. Assim, na próxima seção é estudada a sensibilidade dos modos do sistema a alterações na rigidez do disco de embreagem linearizado.

#### 4.4 Análise da sensibilidade dos modos do sistema à variação da rigidez do disco de embreagem

No processo do desenvolvimento de um trem de potência, a sensibilidade de cada um dos modos devido a uma alteração no sistema é determinante. Para uma empresa que projeta apenas um dos componentes do trem de potência, como a embreagem, esta informação é essencial para que se saiba se alterações neste componente são capazes de atenuar certos problemas de NVH, ou se outros parâmetros do veículo devem ser alterados. Esta informação pode evitar por exemplo perda de negócios para a empresa.

Para esta análise será utilizado o *MAC* (do inglês, *Modal Assurance Criterion*) desenvolvido por Allemang (2003). Neste estudo, utiliza-se o modelo de trem de potência linearizado que tem sido utilizado neste trabalho até então. Porém, a rigidez da mola torcional que representa o disco de embreagem será variada, e para cada um de seus valores serão calculados os autovalores e autovetores do sistema. Assim, com o *MAC* é possível estabelecer uma correlação entre os modos calculados a partir do mesmo sistema com dois valores de rigidez próximos, mas não iguais, no disco de embreagem. Desta forma é possível entender como o par autovalor-autovetor varia com a variação do parâmetro desejado.

Esta ferramenta é utilizada pois não se sabe, a princípio, se a variação do parâmetro de interesse fará com que haja cruzamento entre frequências naturais associadas a modos distintos. Caso haja este cruzamento, é possível saber quais são os pares autovalor-autovetor corretos. Por isso, para a obtenção dos resultados apresentados nesta seção, a utilização do *MAC* se faz necessária.

O primeiro gráfico que será apresentado é o das frequências naturais do sistema para cada um dos valores de rigidez adotados para o disco<sup>1</sup>. Este gráfico pode ser visto na Figura 4.14. Para a montagem deste gráfico, a rigidez do disco de embreagem foi variada de  $0 \text{ N.m/}^\circ$  a  $30 \text{ N.m/}^\circ$ , que são considerados valores limite para esta aplicação.

Neste gráfico é possível perceber que as frequências naturais relacionadas aos três últimos modos são pouco afetadas pela variação desta rigidez. A frequência natural do modo 4, relacionado ao *gear rattle* se demonstrou sensível a esta variação. Sabe-se dos estudos

---

<sup>1</sup>O gráfico com a variação dos fatores de amortecimento não é apresentado neste trabalho pois o sistema linearizado foi considerado conservativo, e por isso todos os fatores de amortecimento modais são nulos.

realizados em seções anteriores que o trem de potência possui frequências naturais que são inferiores a 10 Hz, e sua visualização neste gráfico fica prejudicada. Assim, na Figura 4.15 é exibido o mesmo gráfico, porém com a ordenada limitada em 12 Hz.

Neste gráfico, as frequências naturais relativas aos dois primeiros modos do *powertrain* são representadas nas cores azul e verde, e a relativa ao terceiro, na cor vermelha. A cor azul não pode ser vista neste gráfico pois os dois primeiros modos deste sistema são modos de corpo rígido, e suas frequências naturais estão sobrepostas sobre o eixo das abscissas. Já a frequência natural, relativa ao modo de *shuffle*, é bastante sensível ao valor de rigidez do disco de embreagem, variando de 0 Hz a 8 Hz, confirmando os trabalhos de Reitz (1999) e Biermann (2000), que afirmam que a frequência deste fenômeno ocorre entre 2 e 8 Hz.

Observa-se também que, para baixos valores de rigidez, região onde se encontra a rigidez do pré-amortecedor, uma pequena variação em seu valor causa uma grande mudança na frequência natural deste modo. Pode-se utilizar esta característica para que o fenômeno de *shuffle* tenda a ocorrer em frequências distantes da frequência do modo de *pitch* do veículo.

As frequências naturais que sofrem a maior influência com a variação da rigidez do

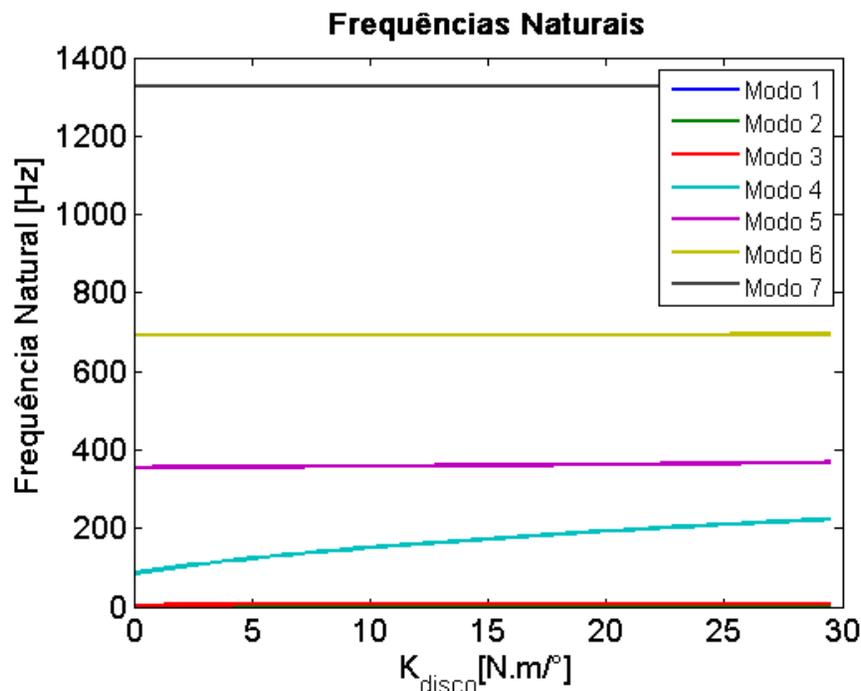


Figura 4.14: Frequências naturais do sistema  $\times$  Rigidez do disco de embreagem.

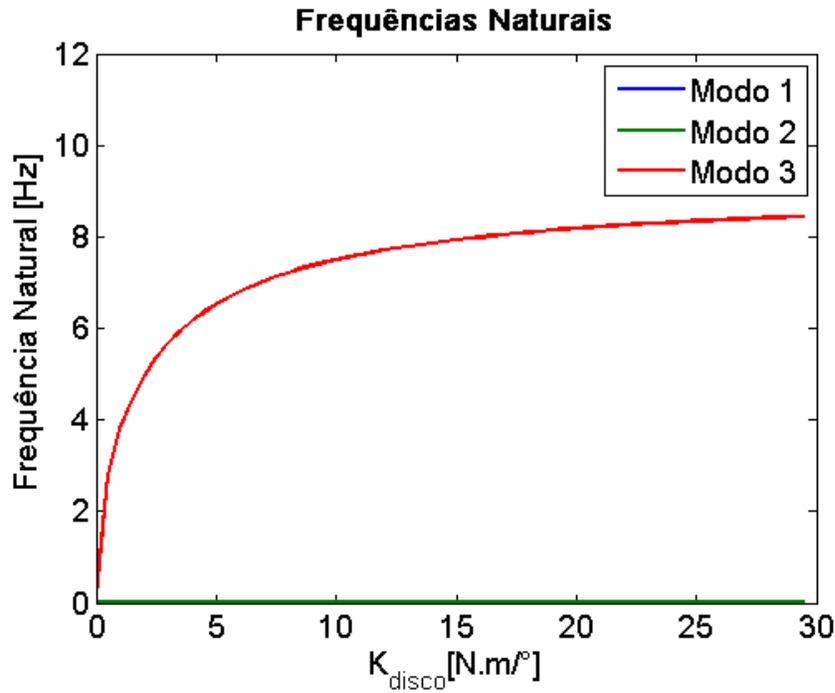


Figura 4.15: Frequências naturais do sistema  $\times$  Rigidez do disco de embreagem, na faixa de 0 Hz a 12 Hz.

disco de embreagem são as relativas aos modos 3 e 4, justamente os modos relacionados aos fenômenos de *shuffle* e *gear rattle*, respectivamente. Por isso, serão analisados os comportamentos das formas destes modos com a variação da rigidez em questão. A amplitude e a fase do terceiro modo do sistema podem ser vistos, respectivamente, nas Figuras 4.16 e 4.17.

Com relação à amplitude deste modo, pode-se dizer que houve pequenas mudanças nos graus de liberdade de entrada e saída da transmissão. Já com relação à fase do sistema, pode-se notar que na região de baixa rigidez, o volante de inércia se encontra em oposição de fase com o restante do sistema. Então, com um pequeno aumento desta rigidez, a entrada da transmissão entra em fase com o volante de inércia, e em oposição de fase com o restante do sistema. Com mais um pequeno aumento da rigidez do disco de embreagem, a saída da transmissão entra em fase com os dois primeiros graus de liberdade do *powertrain*, enquanto a fase dos outros graus de liberdade permanece inalterada. Finalmente, a partir de um certo valor de rigidez, as saídas do diferencial entram em fase simultaneamente com o restante do sistema, e as rodas do veículo ficam em oposição de fase com o restante do *driveline*. Este processo é visto em detalhe na Figura 4.18, onde a rigidez do disco de embreagem está na faixa de 0 a 3  $N.m/^\circ$ .

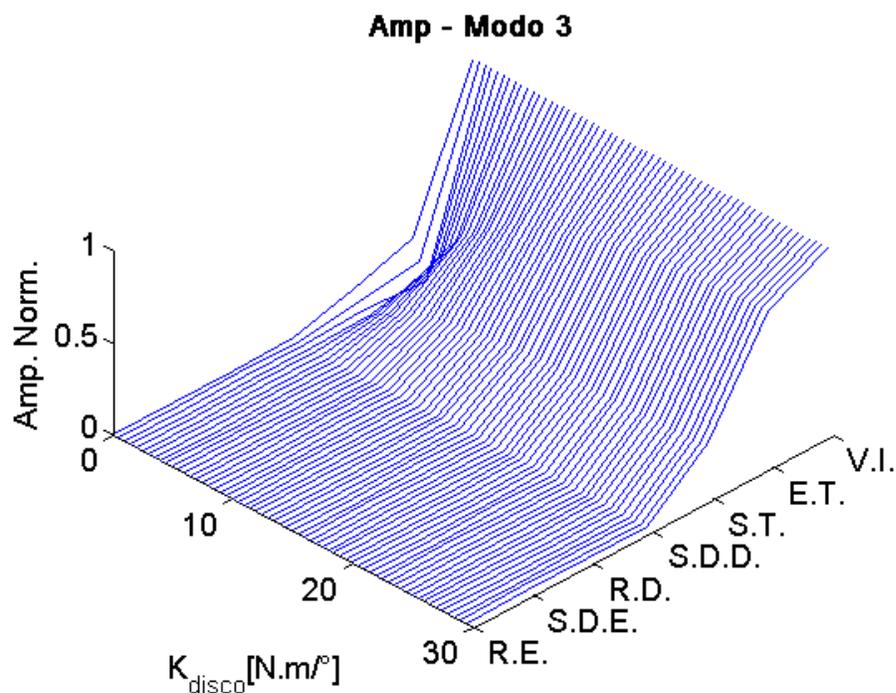


Figura 4.16: Amplitude do terceiro modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.

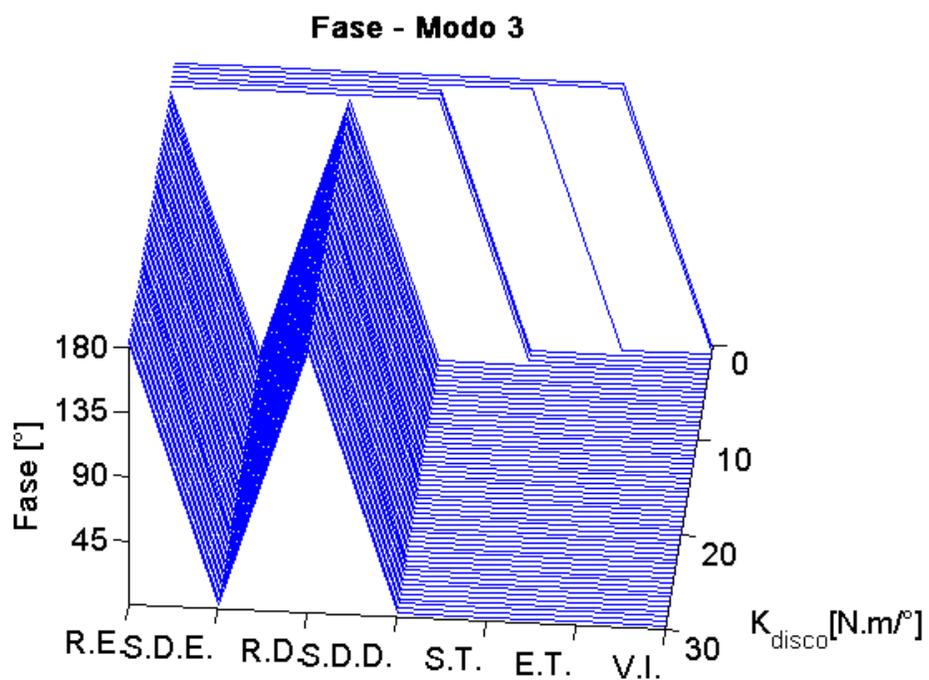


Figura 4.17: Fase do terceiro modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.

A mesma análise pode ser feita no modo 4. A amplitude e fase deste modo, em função da rigidez do disco de embreagem, se encontram, respetivamente, nas Figuras 4.19 e 4.20.

Analisando estes gráficos, é possível observar que apesar de a frequência natural relativa a este modo ser muito sensível à variação da rigidez do disco de embreagem, a forma deste modo sofre pouquíssimas alterações. Há um aumento muito sutil na amplitude de vibração do engrenamento que se encontra na saída da transmissão. Já a fase entre os graus de liberdade deste modo simplesmente não se altera.

A partir destas análises no sistema linearizado, há indícios de que os problemas de *shuffle* e *gear rattle* são sensíveis às características de rigidez da embreagem. Não foi considerado nenhum amortecimento equivalente nestas análises para a representação do atrito presente na embreagem, pois o atrito de Coulomb, diferentemente do amortecimento viscoso ideal pode causar instabilidades no sistema, portanto a análise com relação ao amortecimento ficaria extremamente comprometida.

O problema de *chunk* não pode ser analisado neste contexto pois para que ele pudesse

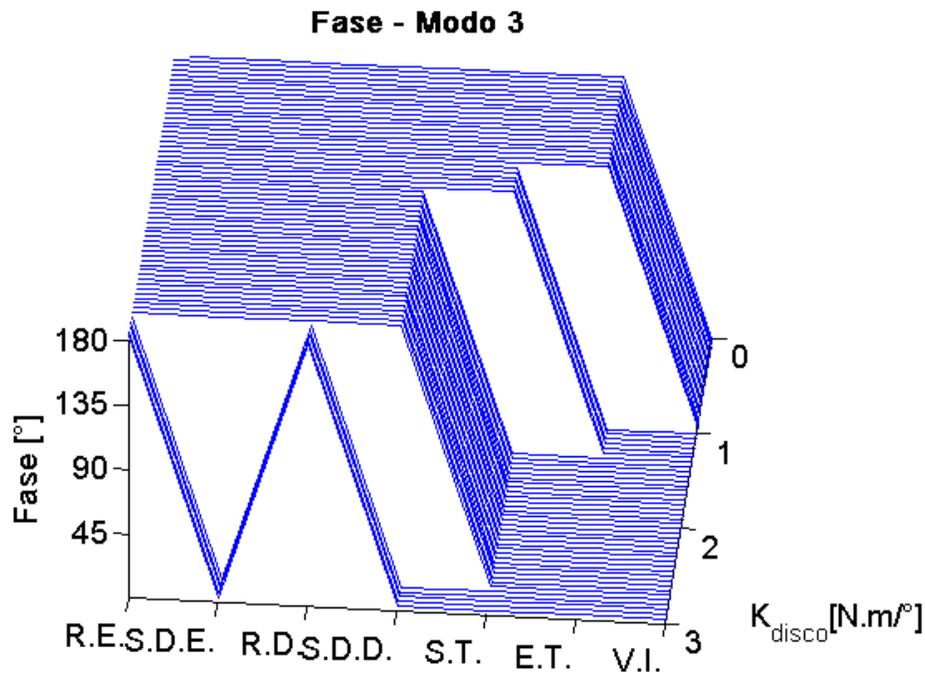


Figura 4.18: Fase do terceiro modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem, de 0  $N.m/^\circ$  a 3  $N.m/^\circ$ .

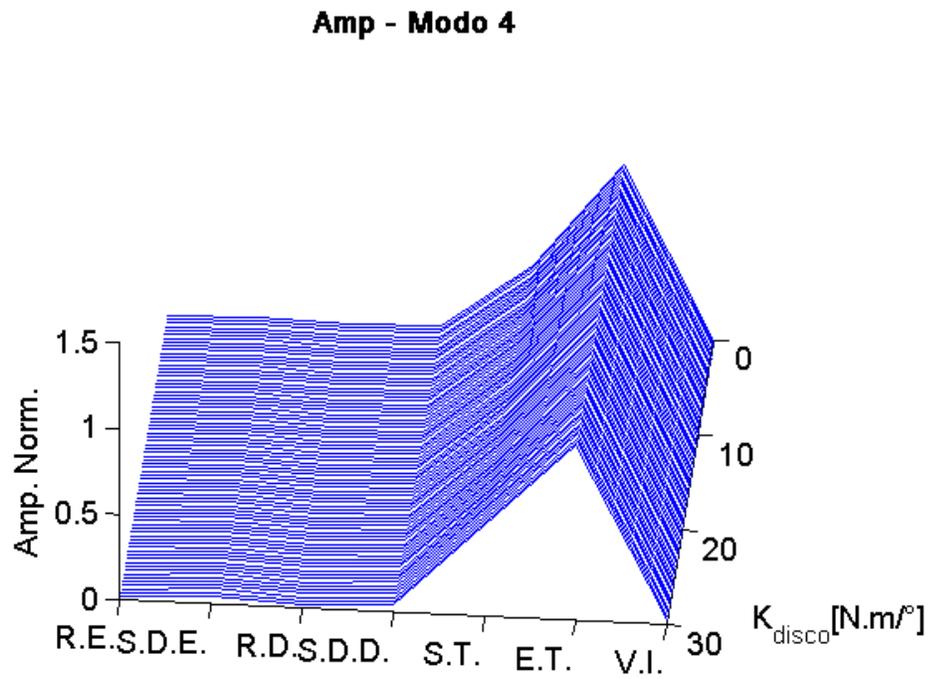


Figura 4.19: Amplitude do quarto modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.

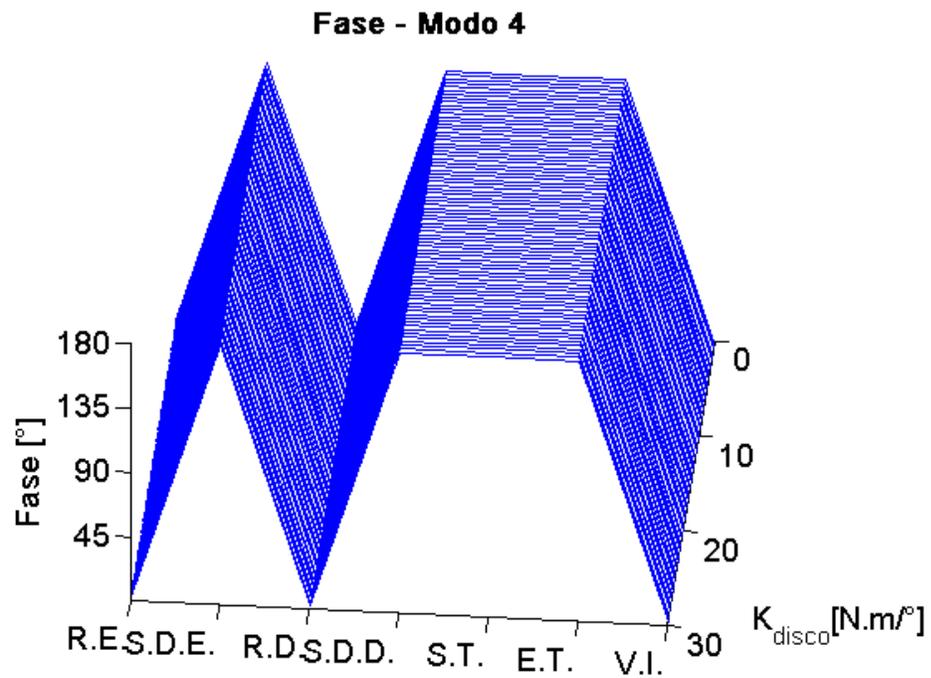


Figura 4.20: Fase do quarto modo de vibração do sistema com relação à rigidez do disco de embreagem.

ser simulado, o sistema teria que ser não linear. Algumas hipóteses podem ser feitas com relação ao problema de *gear rattle*, pois, apesar de não existirem folgas no sistema linear, há um modo de vibração associado a este fenômeno. Já o *clunk* é um fenômeno que ocorre juntamente com o *shuffle*, e este sim possui um modo de vibrar associado.

Finalmente, com esta análise, é possível compreender qualitativamente o comportamento de um trem de potência. Porém, as análises lineares se mostraram muito limitadas, e por isso uma análise de modelos não lineares com a ajuda de integradores numéricos se faz necessária, para que os fenômenos reais possam ser reproduzidos com melhor qualidade.

## 5 ANÁLISE DAS NÃO LINEARIDADES

O trem de potência é um sistema que possui não linearidades essenciais ao seu bom funcionamento. Uma destas não linearidades é a folga entre os dentes dos engrenamentos, que é necessária para que os dentes dos pares engrenados se encaixem<sup>1</sup> sem interferência, e para que o óleo presente na cavidade possa ser expulso na entrada do dente. Outra não linearidade presente no *powertrain* é a curva característica do disco de embreagem, que possui atrito de coulomb e rigidez estratificada, para que as vibrações torcionais vindas do motor sejam filtradas em diferentes regimes de operação.

A análise de sistemas não lineares deve ser feita minuciosamente, pois muitas das premissas básicas sobre sistemas lineares não são válidas neste caso. Em sistemas lineares, o princípio da superposição é sempre válido, e a resposta em regime permanente do sistema não depende de suas condições iniciais. Além disso, um sistema não linear pode assumir múltiplas posições de equilíbrio estático, o que não acontece em sistemas lineares.

Esta análise se torna ainda mais complexa quando se trata de sistemas vibratórios. Ao contrário dos sistemas lineares, a frequência de resposta em regime permanente não é única e possui componentes não necessariamente iguais à frequência de excitação. Sua resposta pode ser composta por várias componentes harmônicas e sub-harmônicas, e a amplitude de cada uma destas componentes depende fortemente das condições iniciais do sistema e da amplitude da força excitadora. Além disso, os conceitos de frequência natural, fator de amortecimento e forma modal não são mais válidos, uma vez que a solução exponencial dificilmente será válida para este sistema.

Além de ser um sistema não linear, o trem de potência possui múltiplos graus de liberdade. Por isso, uma análise deste sistema completo seria inicialmente muito complexa, de forma a comprometer identificação de cada um dos fenômenos dinâmicos. Portanto, após a análise do sistema linearizado, antes que as não linearidades sejam inseridas, foram criados sistemas de um grau de liberdade, cuja vinculação ao referencial fixo é feita por meio de um dos elementos não lineares do trabalho. Assim é possível analisar os efeitos de cada uma das não linearidades separadamente, antes de estudar o sistema completo.

---

<sup>1</sup>O encaixe dos dentes também é conhecido como *gear mesh*

As não linearidades que mais influem nos fenômenos de *shuffle* e *clunk* são as presentes no disco de embreagem e nos engrenamentos responsáveis pela transmissão de potência, ou seja, aqueles fixos a seus respectivos eixos através de um sincronizador (KRENZ, 1985). Por este motivo, os modelos não lineares estudados neste capítulo serão modelos de disco de embreagem e engrenamento.

## 5.1 Disco de Embreagem

O modelamento do disco de embreagem depende fortemente da condição de operação que se deseja simular. Há fenômenos, como o *clutch judder*, que ocorrem durante o acoplamento do disco com o volante de inércia. Por este fato, o modelo deste elemento deve considerar um grau de liberdade de deslocamento exclusivo para o deslocamento angular do material de atrito. Por outro lado, problemas como o *shuffle*, o *clunk* e o *creeping* são reproduzidos em situações onde o disco de embreagem já está totalmente acoplado com o volante de inércia<sup>2</sup>. Neste caso, pode-se considerar que o disco de inércia atua como uma rigidez estratificada, linear por partes, onde cada um de seus estágios possui um valor diferente de atrito de Coulomb, como já apresentado anteriormente na seção 2.1.3.

Os fenômenos de *shuffle* e *clunk* são causados por variações bruscas de torque no sistema, variações estas que podem ser causadas também por acoplamentos do sistema de embreagem muito rápidos. Porém, estes problemas são muito mais sensíveis à velocidade de resposta do motor do que a este tipo de operação (KRENZ, 1985), e por isso, a resposta do sistema em acoplamento não será estudada neste trabalho.

Para a melhor compreensão de cada uma das características deste modelo, será analisado nesta seção um sistema de um grau de liberdade, composto por uma inércia e um disco de embreagem, que liga esta inércia a um ponto fixo. Como ponto de partida, serão realizados estudos utilizando um disco de embreagem conservativo, e depois disso, alguns modelos de dissipação de energia serão adicionados ao modelo.

---

<sup>2</sup>O fenômeno de *rattle*, devido às suas características, pode ocorrer em situações de acoplamento do sistema, ou em situações onde o sistema já está totalmente acoplado.

## 5.1 Análise do disco de embreagem conservativo

O sistema que será estudado nesta seção é composto por uma inércia e um disco de embreagem conservativo, que a liga a um ponto fixo. Será estudado o comportamento deste sistema em vibração livre, e serão variados a largura e o posicionamento do estágio de pré amortecimento, para que sejam verificadas as influências destas variações no comportamento deste sistema.

As características deste disco estão demonstradas na Figura 5.1. Os limites inferior e superior do pré-amortecimento são chamados de  $b_c$  e  $b_d$ , respectivamente. As rigidez dos estágios de *coast*, pré-amortecimento e *drive* são chamadas de  $K_c$ ,  $K_p$  e  $K_d$ , nesta ordem.

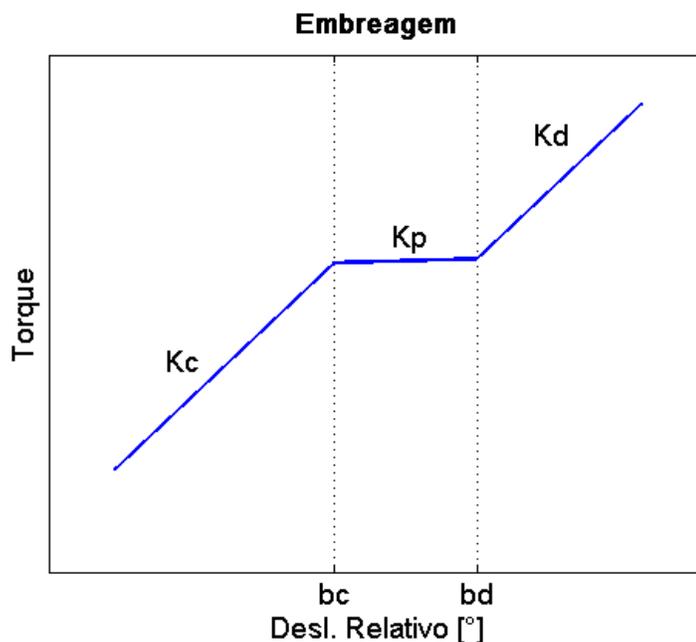


Figura 5.1: Disco de embreagem conservativo genérico.

Assim, considerando  $\delta$  o deslocamento angular da inércia deste sistema, as equações de movimento podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} m\ddot{\delta} + K_c\delta = b_c(K_c - K_p) & , se \quad \delta < b_c \\ m\ddot{\delta} + K_p\delta = 0 & , se \quad b_c \leq \delta \leq b_d \\ m\ddot{\delta} + K_d\delta = b_d(K_d - K_p) & , se \quad \delta > b_d \end{cases} \quad (5.1)$$

sendo  $m$  o momento de inércia. Utilizando-se a Equação 5.1, é possível calcular analiticamente

a resposta em vibração livre deste sistema.

### 5.1 Cálculo da resposta analítica do disco de embreagem conservativo em vibração livre

Cada uma das equações de movimento deste sistema, em separado, descreve o movimento de um sistema de um grau de liberdade linear, conservativo, e excitado por uma força constante. Então, sempre que o sistema estiver dentro de um dos estágios do disco de embreagem, é possível encontrar uma expressão analítica para seu comportamento neste instante. Quando há uma transição de estágio, então a posição e a velocidade do corpo, no momento da transição, devem ser tomados como condições iniciais para o cálculo da resposta no próximo estágio.

Desta forma, para que este cálculo possa ser realizado, é necessário saber o instante de tempo em que o sistema atingirá o próximo estágio. Além disso, com este resultado é possível calcular o período fundamental de oscilação livre deste sistema, quando sujeito a condições iniciais arbitrárias. Para o cálculo desta expressão, supõe-se um sistema de um grau de liberdade conservativo, linear, e excitado por uma força constante. Assim, sua equação de movimento é dada por:

$$m\ddot{x} + kx = F \quad (5.2)$$

em que  $m$  e  $k$  são a inércia e a rigidez do sistema, e  $F$  a força excitadora constante. Dadas as condições iniciais de deslocamento  $x_0$  e velocidade  $v_0$ , a resposta deste sistema é dada por:

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F}{k}\right) \cos(\omega_n t) + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right) \sin(\omega_n t) + \frac{F}{k} \quad (5.3)$$

sendo  $\omega_n$  a frequência natural do sistema. Esta resposta pode ser escrita ainda na forma:

$$x(t) = \sigma \left(\frac{x_0 - \frac{F}{k}}{\cos(\phi)}\right) \sqrt{\left(x_0 - \frac{F}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2} \cos(\omega_n t + \phi) + \frac{F}{k} \quad (5.4)$$

em que  $\sigma(x)$  é a função sinal e:

$$\phi = \text{atan} \left( -\frac{v_0 k}{\omega_n (kx_0 - F)} \right)$$

Neste caso, deseja-se saber o instante de tempo exato no qual o sistema atingirá uma posição genérica  $x_1$  pela primeira vez. Assim, utilizando a Equação 5.4, o instante de tempo  $\tau_1$  no qual o sistema atingirá esta posição é dado por:

$$\tau_1 = \left( \frac{1}{\omega_n} \right) \left[ \operatorname{acos} \left( \frac{x_1 - \frac{F}{k}}{\sigma \left( \frac{x_0 - \frac{F}{k}}{\cos(\phi)} \right) \sqrt{\left(x_0 - \frac{F}{k}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_n}\right)^2}} \right) - \phi \right] \quad (5.5)$$

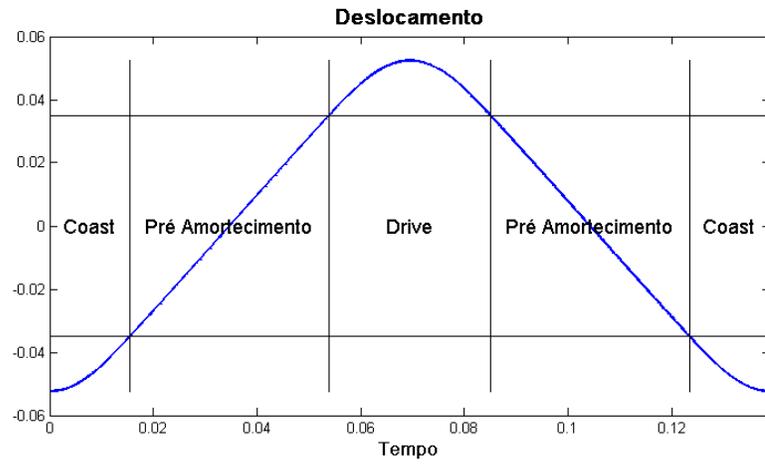
A partir das Equações 5.3 e 5.5 é possível então calcular analiticamente a resposta deste sistema a condições iniciais arbitrárias. Além disso, pelo fato de o sistema ser conservativo e possuir valores de rigidez positivos em toda a faixa de operação, a resposta em vibração livre deste sistema será periódica, mas não necessariamente harmônica. Assim, para obter uma previsão de seu comportamento, basta o cálculo de um período de sua resposta em vibração livre.

## 5.1 Análise da resposta do disco de embreagem conservativo em vibração livre

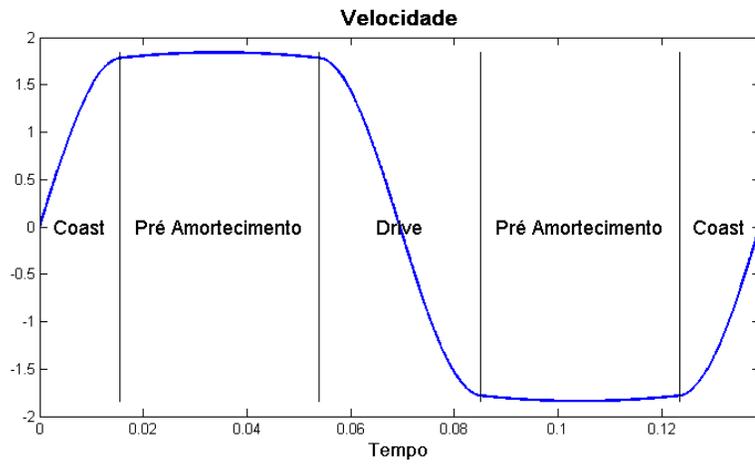
Para o entendimento do comportamento deste sistema, foi simulada a sua resposta em vibração livre considerando um disco de embreagem simétrico com relação à sua posição de equilíbrio estático, ou seja, as fronteiras  $b_c$  e  $b_d$  estão à mesma distância da origem, e as rigidez  $K_c$  e  $K_d$  têm o mesmo valor, por sua vez maior do que o valor de  $K_p$ . Assim, a resposta que se obtém do sistema em deslocamento é mostrada na Figura 5.2(a), e a resposta em velocidade é exibida na Figura 5.2(b).

Observa-se que, nas Figuras de 5.2(a) a 5.4(b) há linhas verticais que indicam os instantes de tempo nos quais o sistema passou a trabalhar em um estágio diferente do disco de embreagem. Já nas Figuras 5.2(a), 5.3(a) e 5.4(a), que exibem respostas em deslocamento, há linhas horizontais que indicam os limites do estágio de pré-amortecimento.

Para o cálculo destas respostas, foi utilizada uma condição inicial de velocidade nula, e uma condição inicial de deslocamento na qual o sistema se encontrava dentro do estágio de *coast*. Deste modo, pode-se observar em ambas as curvas que no estágio de pré-amortecimento o sistema sofre pouca aceleração, enquanto que nos outros dois estágios, devido à sua maior



(a) Deslocamento.



(b) Velocidade.

Figura 5.2: Resposta temporal para um disco de embreagem conservativo simétrico.

rigidez, a aceleração é mais intensa.

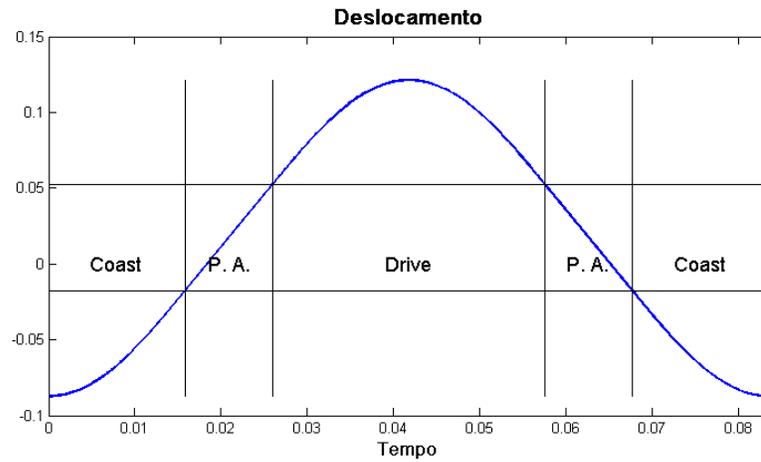
Sendo assim, a forma das ondas, tanto de deslocamento quanto de velocidade não é senoidal. Porém, pelo fato de este disco de embreagem ser simétrico, a resposta deste sistema, tanto em deslocamento quanto em velocidade possuirá simetria de meia onda (*half-wave symmetry*), e por isso ela pode ser composta apenas por componentes harmônicas ímpares.

É considerado, neste momento, um disco de embreagem com as mesmas características de rigidez que o anterior. A diferença com relação ao primeiro é que nesta simulação, o pré-amortecimento é deslocado no sentido do deslocamento positivo, ou seja,  $b_c$  fica mais próximo de zero, e  $b_d$  mais distante, uma vez que a sua largura é mantida fixa. Estes resultados são apresentados nas Figuras 5.3(a) e 5.3(b).

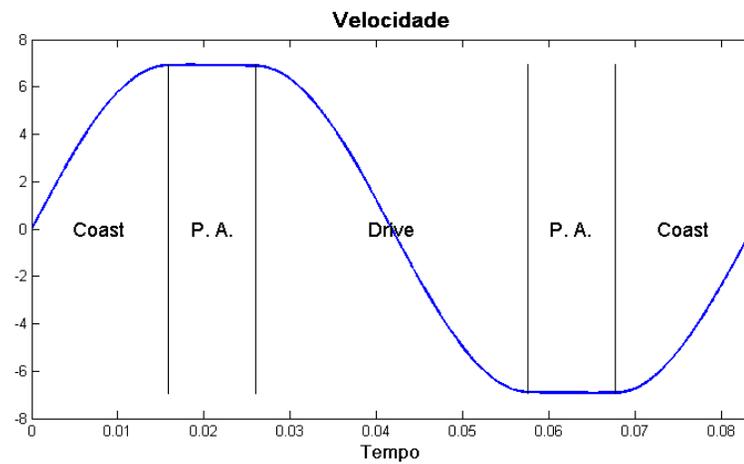
É possível observar que a resposta em deslocamento não oscila mais em torno de zero. Mesmo assim, devido às características de rigidez deste sistema, a solicitação dos estágios de *drive* e *coast* é exatamente a mesma, ou seja, a distância de um mínimo local até  $b_c$  é a mesma distância de um máximo local até  $b_d$ . Portanto, esta onda, bem como a resposta em velocidade, possui simetria de meia onda, porém no caso do deslocamento esta simetria não ocorre em torno de zero. Por isso, novamente, esta resposta não é da forma senoidal, mas pode ser representada por uma soma de componentes harmônicas ímpares apenas.

Para a terceira simulação, foi modelado um disco de embreagem que possui os limites do pré-amortecimento simétricos, porém as rigidezes dos estágios são diferentes, sendo a rigidez do *coast*, maior do que a do *drive*, por sua vez maior do que a do pré-amortecimento. Os resultados destas simulações se encontram nas Figuras 5.4(a) e 5.4(b).

Neste caso, o estágio de maior rigidez (*coast*) é menos solicitado do que o mais flexível (*drive*). Nas curvas de deslocamento e velocidade, apesar do caráter periódico, não foi encontrado nenhum tipo de simetria, então, nada se pode afirmar com relação à paridade das componentes harmônicas utilizadas para representar esta resposta. Apesar de a posição de equilíbrio estático ser localizada no deslocamento relativo nulo, a oscilação de posição não se dá ao redor de zero devido às características de rigidez deste sistema.

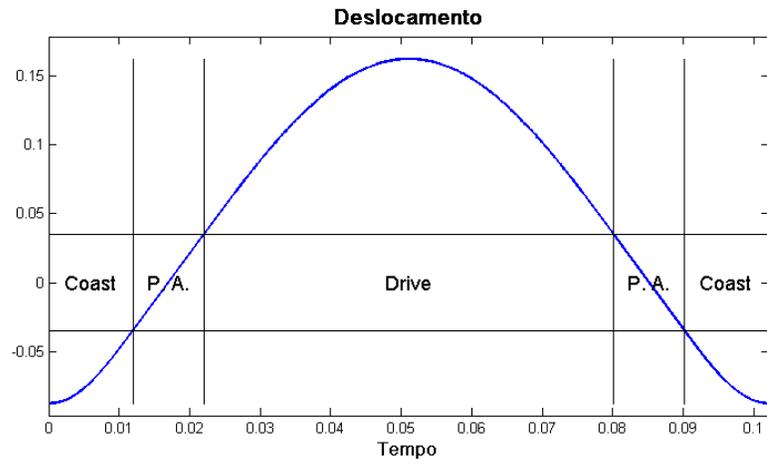


(a) Deslocamento.

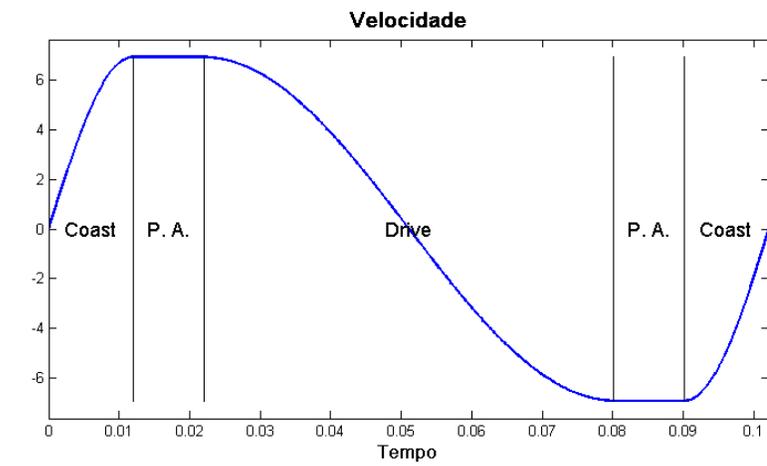


(b) Velocidade.

Figura 5.3: Resposta temporal para um disco de embreagem conservativo com pré-amortecimento deslocado.



(a) Deslocamento.



(b) Velocidade.

Figura 5.4: Resposta temporal para um disco de embreagem conservativo com rigidez distintas.

## 5.1 Variação do período fundamental de oscilação do sistema

Pelo fato de o sistema em estudo não ser linear, mesmo no caso conservativo, é esperado que o período fundamental de oscilação deste sistema varie dependendo de suas condições iniciais ou das características de rigidez de cada um dos estágios do disco de embreagem. Sendo assim, para futuras análises é necessário compreender como este período pode variar de acordo com estas características.

Para este cálculo, é proposto um disco de embreagem que possua rigidezes de *drive* e *coast* de mesmo valor. Então, uma vez que o escopo deste trabalho é entender a influência dos parâmetros do pré-amortecimento nos fenômenos de *shuffle* e *clunk*, são variados a posição e a largura do estágio de pré-amortecimento do disco de embreagem deste sistema, para que se possa estudar os efeitos desta variação sobre seu período fundamental de oscilação.

Para cada um dos discos propostos, o sistema é submetido a diferentes condições iniciais de posição, de forma que o sistema nunca trabalhe apenas no estágio central, e seu período fundamental de oscilação é calculado para cada uma dessas condições. Variando primeiramente a largura do estágio de pré amortecimento, são obtidos os resultados mostrados na Figura 5.5.

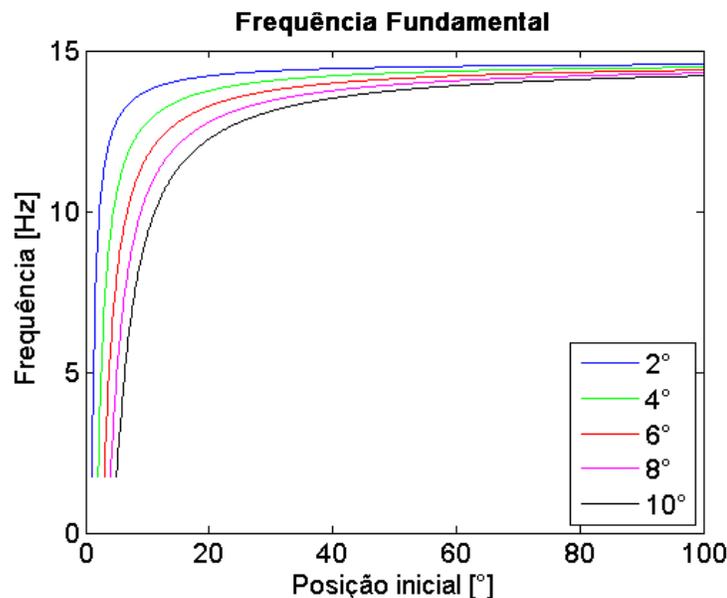


Figura 5.5: Período fundamental de oscilação do sistema de 1 GL com discos de embreagem com diferentes larguras de pré-amortecimento.

A partir deste gráfico, pode-se observar que o período de oscilação do sistema é mais sensível a uma alteração em sua condição inicial quando esta se encontra próxima ao estágio central do disco. Além disso, quanto maior for a largura do estágio de pré-amortecimento, menor o período fundamental de oscilação do sistema para uma mesma condição inicial. Finalmente, para valores de condição inicial muito altos e inatingíveis na prática, o período fundamental de oscilação do sistema sempre converge para a frequência natural do sistema com a rigidez de *drive* ou *coast*, que neste caso é a mesma.

Variando agora a posição do estágio de pré-amortecimento, e realizando os mesmos cálculos, é possível chegar aos resultados mostrados na Figura 5.6. A largura deste estágio foi mantida em 4°.

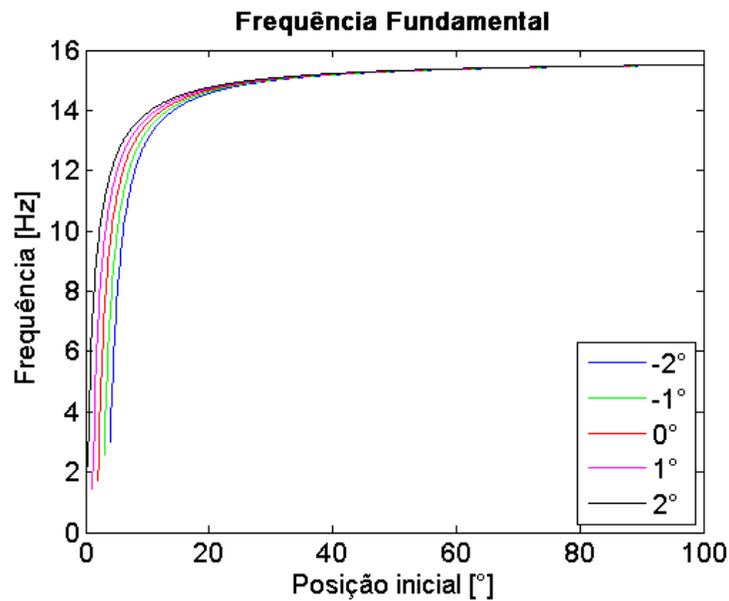


Figura 5.6: Período fundamental de oscilação do sistema de 1 GL com discos de embreagem com pré-amortecimento em diferentes posições.

Neste gráfico é possível observar que, também neste caso, a frequência fundamental de oscilação do sistema é muito mais sensível a uma alteração em sua condição inicial quando ela se encontra próxima ao estágio central de rigidez. Estes valores de frequência são bem distintos quando a condição inicial dada ao sistema equivale às condições reais de operação (até 13° em média). Acima desta faixa estes valores convergem, e para condições iniciais muito além do que se consegue com um disco de embreagem real, esta frequência de oscilação tende à frequência natural deste sistema quando linearizado em torno da condição de *drive* ou *coast*.

Deve-se observar que as rigidezes destes estágios ainda são iguais para este caso. Porém, há muitos casos na prática, como a maioria dos veículos de passeio, onde as rigidezes dos três (ou mais) estágios do disco de embreagem são diferentes. Então, no caso onde se deseja trabalhar com uma versão linearizada deste sistema, surge o questionamento sobre qual o valor de rigidez a ser utilizado como uma versão linear da embreagem.

Para o estudo deste caso é proposto um disco de embreagem conservativo com três valores de rigidez diferentes, um para cada estágio, sendo o estágio central o mais flexível. Novamente, a frequência fundamental de oscilação deste sistema é calculada, e desta vez é comparada com a frequência natural deste sistema caso a embreagem fosse substituída por uma mola ideal com a mesma rigidez de um de seus estágios. Estes resultados podem ser vistos na Figura 5.7.

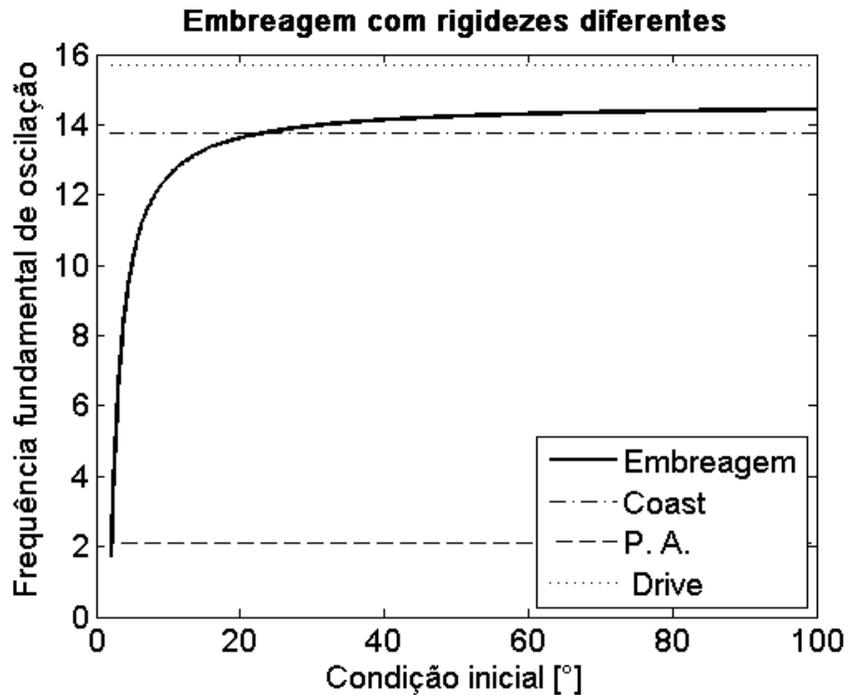


Figura 5.7: Período fundamental de oscilação do sistema de 1 GL com um disco de embreagem com valores de rigidez distintos.

Neste gráfico, as linhas horizontais representam a frequência natural deste sistema de um grau de liberdade, caso ele fosse linearizado utilizando a rigidez do pré-amortecimento, a de *coast* ou a de *drive*, respectivamente. Como nos outros gráficos, novamente a frequência fundamental de oscilação é mais sensível a uma alteração na condição inicial de deslocamento quando esta se encontra próxima ao estágio de pré-amortecimento. Porém, deve-se observar

que mesmo que as condições iniciais sejam muito altas, sua frequência fundamental não tende a se aproximar de nenhuma das frequências naturais pressupostas para o sistema, o que indica que sistemas linearizados utilizando o valor de rigidez de um dos estágios do disco não representam bem o seu comportamento.

Após a simulação do comportamento do disco de embreagem conservativo, modelos de dissipação de energia serão inseridos no sistema, e seu comportamento será analisado novamente.

## 5.1 Análise do disco de embreagem dissipativo

Os discos de embreagem que são utilizados na maioria dos veículos movidos por motores a combustão interna atuais possuem mecanismos internos de dissipação de energia, cujo princípio básico de funcionamento é o atrito seco, ou atrito de *Coulomb*. Além de possuírem estágios com valores de rigidez diferentes, estes discos possuem características de atrito diferentes em cada uma destas regiões.

Neste trabalho, o modelo de disco de embreagem possui atrito de *Coulomb*, mas com coeficiente de atrito constante, ou seja, independente de parâmetros como velocidade relativa entre as superfícies, temperatura, entre outros. Naturalmente as características de atrito do disco de embreagem variam com estes parâmetros (SHAYER, 1997), porém esta variação não será estudada neste trabalho.

### 5.1 Variação do torque de atrito no pré-amortecimento

O mecanismo de dissipação de energia do disco de embreagem é formado por uma pequena mola, chamada de “mola prato”, que pressiona um material de atrito contra uma parede interna a este disco, provocando fricção quando o disco é solicitado. Assim, esta força pode ser variada de duas maneiras: variando a força normal entre as superfícies ou o coeficiente de atrito entre elas. Porém, quanto maior a força de atrito, e conseqüentemente o torque de atrito, maior a capacidade de dissipação de energia deste disco. Por isso, no disco de embreagem o parâmetro a ser variado é o torque de atrito, e não o coeficiente de atrito

ou a força normal entre as superfícies.

O primeiro passo para o estudo da dissipação de energia neste sistema foi a utilização de discos de embreagem simétricos, com características de rigidez idênticas, e torques de atrito diferentes somente no estágio de pré amortecimento. Os outros estágios permaneceram conservativos. Assim, foi calculada a sua resposta em vibração livre, sempre a partir das mesmas condições iniciais. Estas respostas temporais podem ser vistas na Figura 5.8.

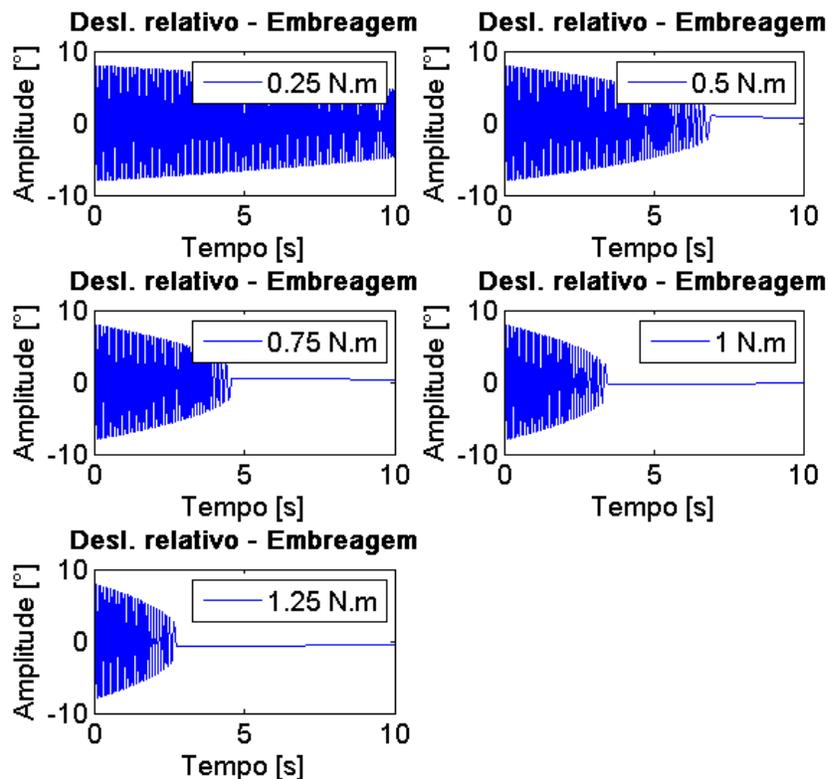


Figura 5.8: Resposta temporal dos sistemas de 1 GL com um disco de embreagem com atrito somente no pré-amortecimento.

Neste caso, como era esperado, quanto maior o nível de torque de atrito no pré-amortecimento, mais rápido o sistema retorna à sua posição de equilíbrio estático. Porém, para um melhor estudo do comportamento deste sistema, uma análise em frequência se faz necessária. Contudo, não se pode afirmar que a resposta temporal deste sistema seja harmônica ou mesmo estacionária, pois este é não linear. Por isso, uma ferramenta adequada para o processamento deste sinal é o diagrama em cascata, ou *waterfall diagram*.

Esta ferramenta foi utilizada para processar os cinco sinais de resposta temporal, e qualitativamente os resultados foram similares, com a diferença que quanto maior o nível de atrito, mais rapidamente as componentes em frequência decaíam, até se anularem completamente. Por isso, neste trabalho será apresentado apenas o diagrama em cascata obtido a partir do sistema com menor torque de atrito, pois as características que serão apresentadas aqui são mais evidentes. Este diagrama é apresentado na Figura 5.9.

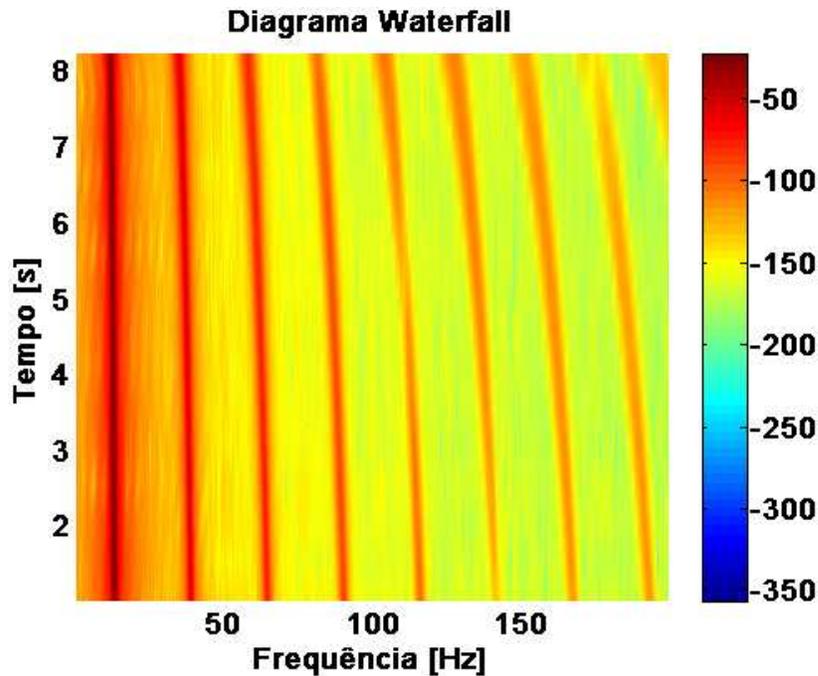


Figura 5.9: Diagrama *waterfall* do sistema de 1 GL com 0.25 N.m de torque de atrito no pré-amortecimento.

Neste diagrama é possível observar que a frequência fundamental de oscilação do sistema é de aproximadamente 11,6 Hz, e que este sinal possui somente as componentes harmônicas ímpares desta frequência. Além disso, pode-se perceber nas harmônicas mais altas que a frequência de oscilação do sistema, incluindo a frequência fundamental, decaem com o tempo, o que não ocorre em sistemas lineares, ou mesmo em discos de embreagem conservativos. Por isso, a próxima seção é dedicada ao entendimento deste fenômeno.

## 5.1 Decaimento da frequência de oscilação livre

Das análises anteriores foi observado que a frequência de oscilação livre de um sistema de um grau de liberdade com um disco de embreagem conservativo é constante no tempo, independente de suas características de rigidez, dependendo apenas das condições iniciais fornecidas ao sistema. Quando foi adicionado atrito seco ao estágio de pré-amortecimento, não só a amplitude do movimento decaiu, mas também sua frequência de oscilação.

Mesmo assim, sabe-se que um sistema de um grau de liberdade com uma mola linear sujeito a atrito seco também oscilará em frequência constante quando em vibração livre. Esta frequência de oscilação é a frequência natural do sistema conservativo equivalente.

Deste modo é possível concluir que esta queda da frequência de oscilação do sistema no tempo se deu pela inserção de dissipação de energia no sistema, mas não depende do modelo de dissipação adotado, uma vez que tanto a mola estratificada quanto o atrito seco separados não provocam este efeito. Para compreender como estas duas características geram este efeito apenas combinadas, é necessário observar atentamente os gráficos das Figuras 5.5, 5.6 e 5.7.

Em todos estes gráficos é possível observar que a frequência de oscilação do sistema decai quanto mais próxima a condição inicial de deslocamento estiver do estágio de pré-amortecimento. Assim, quando se adiciona dissipação de energia ao sistema, as condições iniciais de cada ciclo serão menores, pois a energia potencial acumulada no sistema está sendo dissipada. Se as condições iniciais de cada ciclo são subsequentemente menores, seu período fundamental será cada vez maior, e então a frequência de oscilação do sistema decairá gradativamente, até que ele opere apenas dentro do estágio de pré-amortecimento, onde a frequência de oscilação será constante, ou até que toda a energia seja dissipada e o sistema pare de oscilar.

Para a verificação destes fenômenos foram analisados dois casos: o primeiro consiste de um sistema, com um disco de embreagem conservativo associado em paralelo com um amortecedor viscoso ideal, e o segundo de um sistema, mas com um disco de embreagem que possui atrito nos estágios de *drive* e *coast*, e não no estágio central. De suas respostas temporais de deslocamento à vibração livre foram calculados os diagramas em cascata, que podem ser vistos respectivamente nas Figuras 5.10 e 5.11.

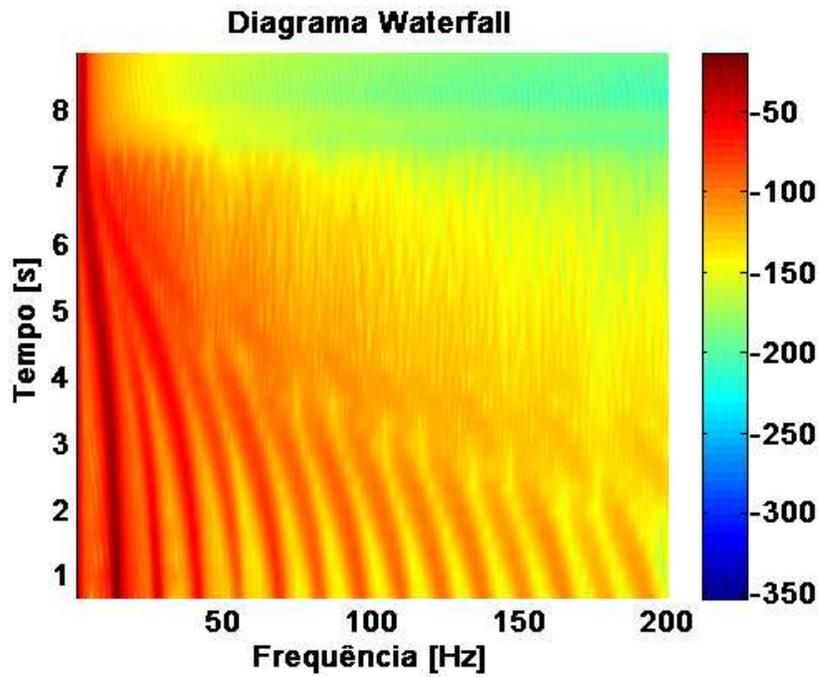


Figura 5.10: Diagrama *waterfall* do sistema de 1 GL com disco de embreagem conservativo em paralelo com um amortecedor viscoso ideal.

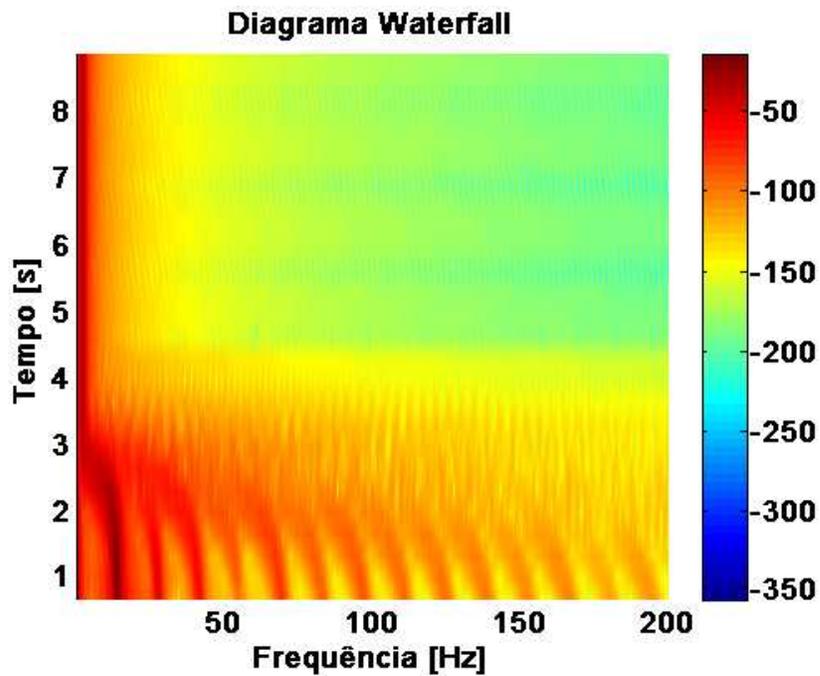


Figura 5.11: Diagrama *waterfall* do sistema de 1 GL com disco de embreagem com atrito seco apenas nos estágios de *drive* e *coast*.

Em ambos os gráficos é possível notar claramente a frequência fundamental de oscilação do sistema decaindo até que este comece a operar somente dentro do estágio de pré-amortecimento, onde seu comportamento passa a ser o comportamento de um sistema linear. Depois de atingir este estágio, as amplitudes de todas as harmônicas da resposta temporal do sistema se anulam, e o sistema passa a vibrar em uma única frequência. Desta forma fica justificada a causa do fenômeno de queda de frequência de oscilação deste sistema no tempo.

Após a compreensão dos fenômenos básicos envolvendo este sistema em estudo com a introdução da dissipação de energia, serão estudados os efeitos da variação da posição e da largura do estágio de pré-amortecimento do disco de embreagem dissipativo na dinâmica deste sistema.

### **5.1 Variação da posição do estágio de pré-amortecimento com atrito em todos os estágios**

Para este estudo são propostos cinco discos de embreagem que possuem rigidezes iguais nos estágios mais externos, e um estágio intermediário mais flexível do que os outros. Além disso, os valores de torque de atrito para cada estágio são iguais para todos os discos. A única diferença entre eles é a posição do estágio de pré-amortecimento.

Todos os sistemas foram submetidos às mesmas condições iniciais de deslocamento e suas respostas em vibração livre foram calculadas. Estas respostas podem ser vistas na Figura 5.12.

A partir destes gráficos é possível concluir que, para este sistema simples, a posição do estágio de pré amortecimento não influi significativamente na capacidade de dissipação de energia deste sistema, uma vez que, submetidos às mesmas condições iniciais, todos os sistemas demoraram aproximadamente o mesmo tempo para dissipar sua energia.

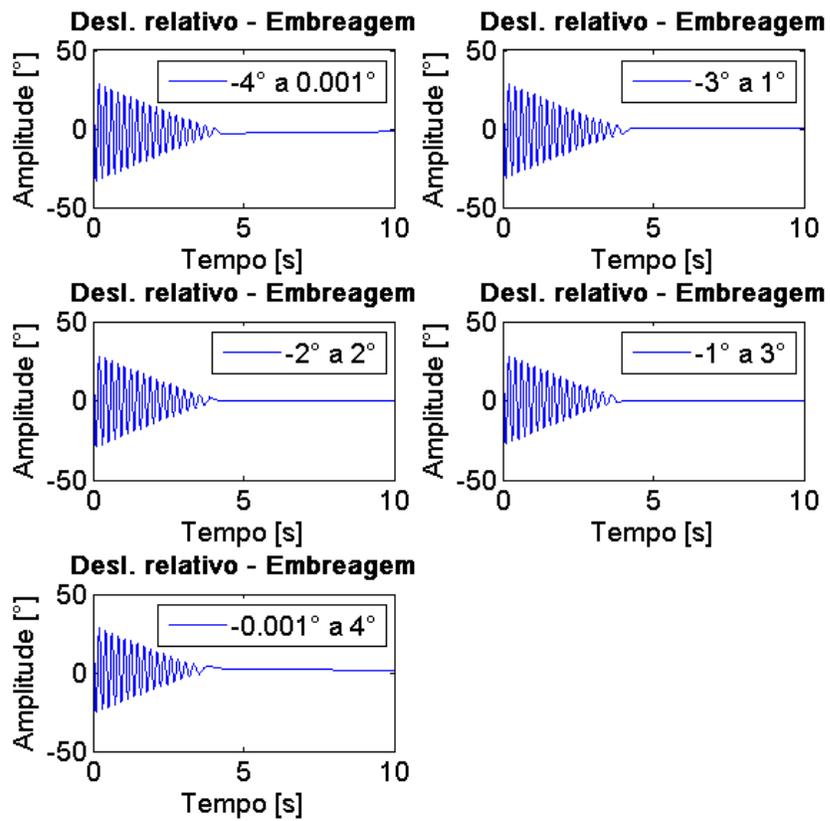


Figura 5.12: Resposta temporal dos sistemas de 1 GL com um disco de embreagem com atrito em todos os estágios, variando a posiao do estágio central.

## 5.1 Variação da largura do estágio de pré-amortecimento com atrito em todos os estágios

Para a realização deste estudo são propostos cinco discos de embreagem com a mesma rigidez nos estágios de *drive* e *coast*, e que possuam um pré-amortecedor mais flexível dos que os outros estágios. Além disso, o nível de torque de atrito para cada um destes estágios deve ser o mesmo para todos os discos. A característica que os diferenciará desta vez será a largura do estágio de pré-amortecimento de cada um.

Cada um destes discos de embreagem faz parte de um sistema de um grau de liberdade. Estes cinco sistemas foram submetidos às mesmas condições iniciais e suas respostas temporais em vibração livre foram calculadas, e são exibidas na Figura 5.13.

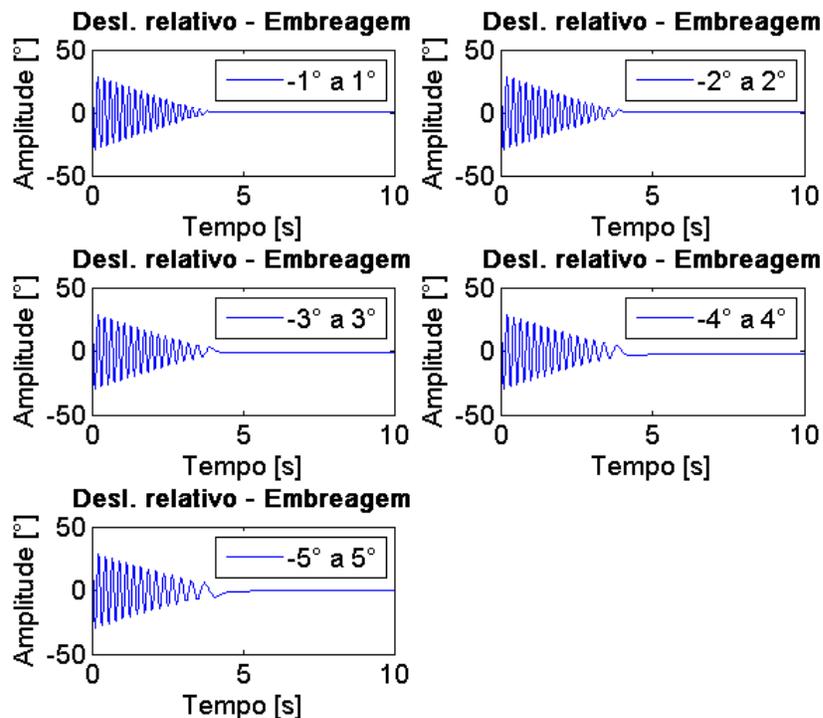


Figura 5.13: Resposta temporal dos sistemas de 1 GL com um disco de embreagem com atrito em todos os estágios, variando a largura do estágio central.

A partir destas respostas é possível concluir novamente que, para este sistema altamente simplificado, a largura do estágio de pré-amortecimento influencia muito pouco a capacidade

de dissipação de energia deste sistema, uma vez que para as mesmas condições iniciais, todos os sistemas levaram praticamente o mesmo tempo para que a oscilação cessasse.

## 5.2 Modelos de engrenamento

A segunda não linearidade inserida no trem de potência em estudo é o engrenamento com folga e com o modelo de dissipação de energia chamado *impact damping*. Da mesma maneira que na seção anterior, nesta são feitas análises sobre um modelo de um grau de liberdade no qual o elemento que liga sua inércia a um ponto fixo possui as características da não linearidade em estudo.

Compara-se um modelo de engrenamento conservativo, com um modelo do tipo Kelvin-Voigt e um do tipo *impact damping*, para que se possa compreender melhor o comportamento do último modelo. Apesar disso, somente este é utilizado para as simulações de modelos mais elaborados de trens de potência, apresentado no Capítulo 6.

## 5.2 Modelo Kelvin-Voigt conservativo

O modelo de engrenamento utilizado neste trabalho é um refinamento do modelo de Kelvin-Voigt, apresentado na seção 3.6.3. Por isso, para o melhor entendimento dos fenômenos que serão introduzidos à dinâmica do sistema, é estudado nesta seção o modelo de Kelvin-Voigt conservativo.

Uma vez que este modelo é conservativo, seu estudo dispensa o uso de integrações numéricas pois, dadas as condições iniciais, o sistema apresentará comportamento oscilatório por tempo infinito em vibração livre. Estudos de vibração forçada harmonicamente também não são necessários, devido ao fato de que os fenômenos estudados neste trabalho são respostas transientes devido a pulsos íngremes de torque.

Portanto, uma ferramenta muito adequada ao estudo deste sistema de um grau de liberdade não linear é o retrato de fase. Com esta ferramenta é possível analisar o comportamento de sistemas deste tipo, e ainda fazer inferências sobre sua estabilidade e suas posições

de equilíbrio.

O retrato de fase é um campo vetorial que representa a primeira derivada temporal dos dois estados deste sistema quando sujeito a condições iniciais arbitrárias. Matematicamente, um sistema genérico de dois estados, autônomo<sup>3</sup>, pode ser representado da forma:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{cases} = h(y_1, y_2) \quad (5.6)$$

sendo que  $y_1$  e  $y_2$  são estados do sistema,  $\dot{y}_1$  e  $\dot{y}_2$  são suas derivadas temporais, e  $h(y_1, y_2)$  é a função que as descreve. Nota-se que  $h$  é definida como uma função  $h : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ , e portanto define um campo vetorial. Define-se posição de equilíbrio qualquer ponto deste campo vetorial que obedecer à relação  $h(y_1, y_2) = \{0 \ 0\}^T$ .

Quando o sistema em estudo é sujeito a condições iniciais, a resposta temporal de seus estados será uma trajetória ditada por este campo vetorial. O diagrama contendo um esboço deste campo vetorial e de várias destas trajetórias é chamado de retrato de fase.

A representação computacional deste diagrama mostrou-se complexa, mesmo utilizando as rotinas disponíveis no software Matlab<sup>®</sup>. Sua implementação é possível, mas a visualização do diagrama fica comprometida. Assim, neste trabalho foi adotada uma solução diferente: o campo vetorial é representado em dois gráficos de superfície distintos: um ilustrando a norma de cada um dos vetores, e outro, seu divergente. A primeira grandeza indica a tendência do sistema em se mover do estado posição-velocidade em que se encontra. Assim, um ponto onde a norma é zero é uma posição de equilíbrio. Já a segunda traz informações sobre a direção no plano posição-velocidade na qual o sistema tende a se locomover. No caso de pontos de equilíbrio, se o divergente neste ponto for um mínimo local, a posição de equilíbrio é estável, enquanto que no caso contrário, ela é instável.

O retrato de fase do sistema de um grau de liberdade com o modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt conservativo é ilustrado na Figura 5.14.

Com relação à norma do campo vetorial, é possível notar claramente a zona de folga, representada pela região azul ao centro do diagrama, entre os limites  $-\frac{b}{2}$  e  $\frac{b}{2}$ . Mesmo assim, a única posição de equilíbrio do sistema está somente em sua origem. As outras regiões do

---

<sup>3</sup>Um sistema autônomo é aquele cuja resposta depende apenas de seus estados, e não entradas externas, ou seja, funções que dependem do tempo

diagrama representam as zonas de contato, e nestas, como esperado, quanto maior a distância em relação à origem, maior a norma do campo vetorial.

Já o divergente deste campo é completamente nulo. Isto pode ser explicado pelo fato de que, na zona de folga, a função que descreve a primeira derivada dos estados do sistema conservativo é dada por:

$${}_c h^f(\delta, \dot{\delta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\delta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

sendo  $\delta$  e  $\dot{\delta}$  a posição e a velocidade angulares da inércia deste sistema.

Já na região de contato esta função é definida como:

$${}_c h^c(\delta, \dot{\delta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\delta} \\ -\frac{k}{m}\delta \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

sendo  $k$  a rigidez de contato e  $m$  a inércia do sistema.

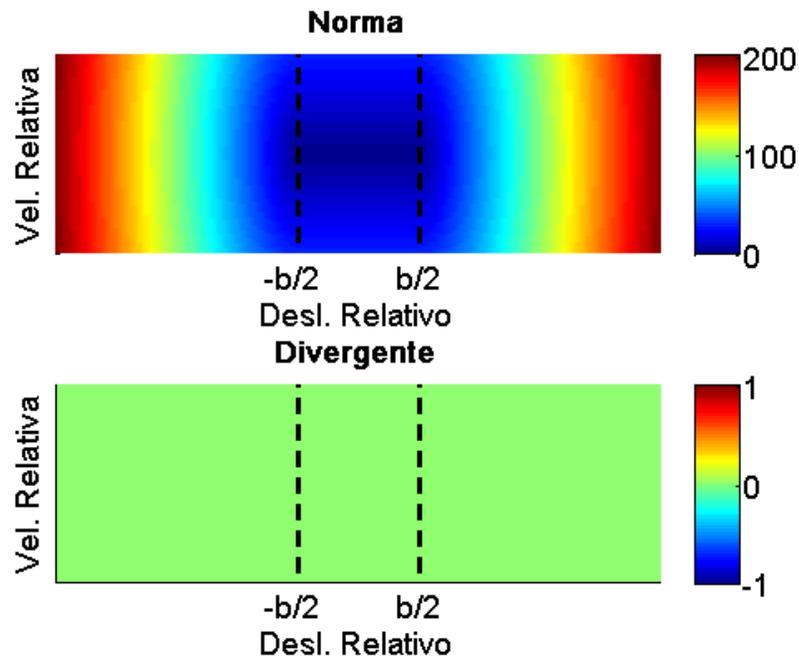


Figura 5.14: Retrato de fase do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt conservativo.

Os divergentes das funções apresentadas nas Equações 5.7 e 5.8 são respectivamente:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left( {}_c h^f(\delta, \dot{\delta}) \right) &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left( {}_c h_1^f \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} \left( {}_c h_2^f \right) = \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \dot{\delta} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} (0) = 0 \\ \nabla \cdot \left( {}_c h^c(\delta, \dot{\delta}) \right) &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left( {}_c h_1^c \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} \left( {}_c h_2^c \right) = \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \dot{\delta} \right) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} \left( -\frac{k}{m} \delta \right) = 0\end{aligned}$$

e por isso, o divergente do campo vetorial todo é nulo.

Nota-se que, ao introduzir dissipação de energia neste sistema pelos modelos de Kelvin-Voigt ou *impact damping*, o divergente deste campo vetorial continuará a ser nulo na região de folga, mas não nas regiões de contato. Na próxima seção é estudado o modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo.

## 5.2 Modelo Kelvin-Voigt dissipativo

O modelo estudado nesta seção é o mesmo da seção anterior, mas com a introdução de dissipação de energia através de um coeficiente de amortecimento constante que atua apenas nas regiões de contato. Sabe-se que, neste caso, a curva esforço-deslocamento do elemento não linear varia com a velocidade relativa entre suas extremidades. Então, considerando velocidades positivas e negativas constantes, esta curva é traçada e exibida na Figura 5.15.

Neste gráfico a descontinuidade presente na força quando o sistema dissipativo adentra uma das zonas de contato é evidente, e pelo fato de este fenômeno não ser fisicamente possível, este modelo não é utilizado nos sistemas que representam trens de potência completos. Mesmo assim, o estudo deste modelo é importante pelo fato de o *impact damping*, que será utilizado nos modelos mais elaborados, ser decorrente de um refinamento do Kelvin-Voigt dissipativo.

O próximo passo adotado para a análise deste sistema é a imposição de condições iniciais e a obtenção da resposta deste sistema em vibração livre. A resposta em deslocamento é mostrada nas Figuras 5.16(a). Como se pode observar, há decaimento na frequência fundamental de sua oscilação livre, o mesmo fenômeno apresentado na seção 5.1.2.2.

Na resposta em velocidade, ilustrada da Figura 5.16(b), também é possível observar este fenômeno. Além disso, nota-se que quando o sistema passa pela região de folga, sua

velocidade é constante.

Com estes resultados é possível calcular o torque realizado pelo elemento não linear durante esta resposta. Este esforço é representado em um gráfico cuja abscissa é o deslocamento relativo entre as extremidades do elemento, e que é reproduzido na Figura 5.17.

Neste diagrama é possível observar novamente as descontinuidades do esforço produzido pelo elemento em estudo, quando o sistema alterna entre as regiões de folga e contato. O esforço realiza ciclos quando este trabalha fora da região de folga, e eles ocorrem por causa da dissipação de energia.

Finalmente é traçado o retrato de fase deste modelo de um grau de liberdade. Este diagrama é representado na Figura 5.18.

Diferentemente do retrato de fase do sistema de um grau de liberdade conservativo mostrado na seção anterior, este não possui o divergente nulo. Seu valor é constante em cada uma das zonas, e isto pode ser provado executando o seu cálculo. Nas zonas de contato, a

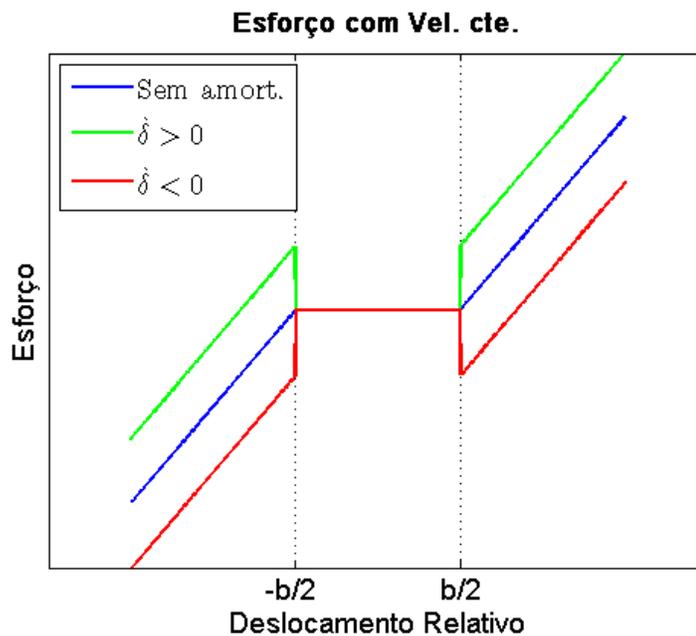
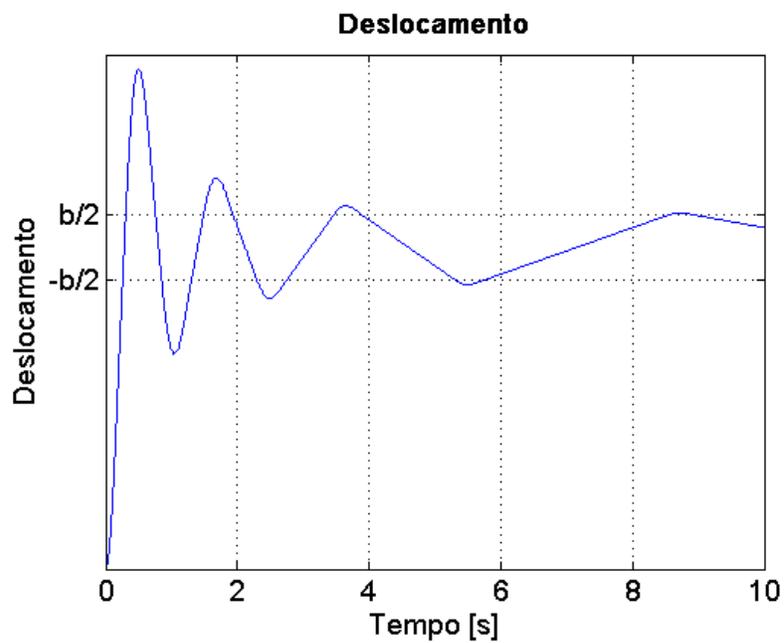
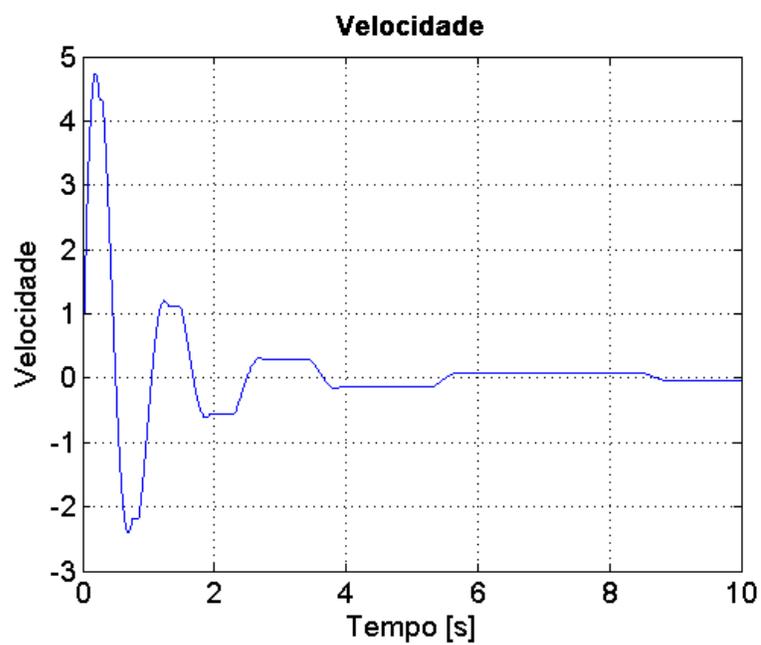


Figura 5.15: Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo calculada considerando velocidades constantes.



(a) Deslocamento.



(b) Velocidade.

Figura 5.16: Resposta temporal do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo.

função que descreve a primeira derivada do sistema é dada por:

$${}_k h^c(\delta, \dot{\delta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\delta} \\ -\frac{k}{m}\delta - \frac{c}{m}\dot{\delta} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

sendo  $c$  o coeficiente de amortecimento na zona de contato. Calculando o divergente desta função, chega-se a:

$$\nabla \cdot ({}_k h^c(\delta, \dot{\delta})) = \frac{\partial}{\partial \delta} ({}_k h_1^c) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} ({}_k h_2^c) = \frac{\partial}{\partial \delta} (\dot{\delta}) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} \left( -\frac{k}{m}\delta - \frac{c}{m}\dot{\delta} \right) = -\frac{c}{m}$$

Assim, o divergente deste campo vetorial continua sendo nulo na região de folga, mas nas regiões de contato seu valor é negativo e constante. Além disso, na parte relativa à norma do campo vetorial, nas zonas de contato há regiões onde a norma deste vetor é mínima, que neste gráfico aparecem como faixas azuis escuras.

Fazendo uma análise sobre a Equação 5.9 é possível concluir que a norma deste campo vetorial é mínima quando a sua segunda componente ( ${}_k h_2^c$ ) é nula, pois a primeira componente

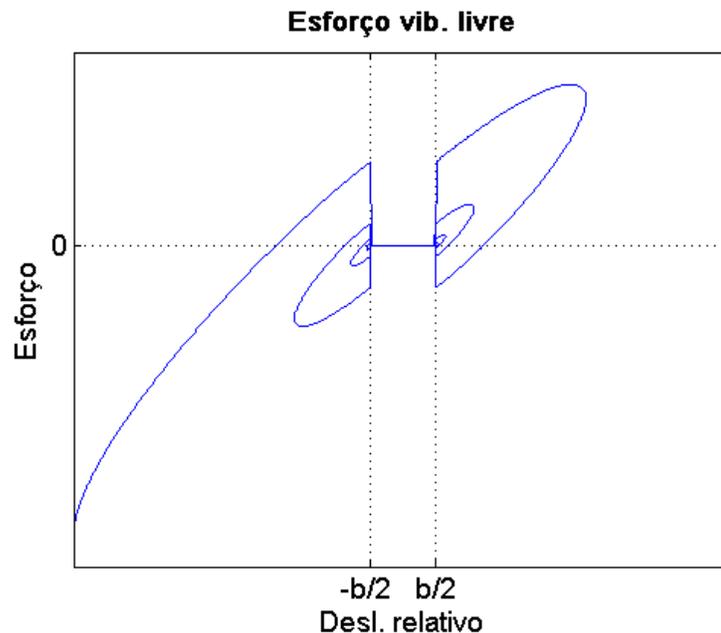


Figura 5.17: Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo calculada com base na resposta do sistema a condições iniciais arbitrárias.

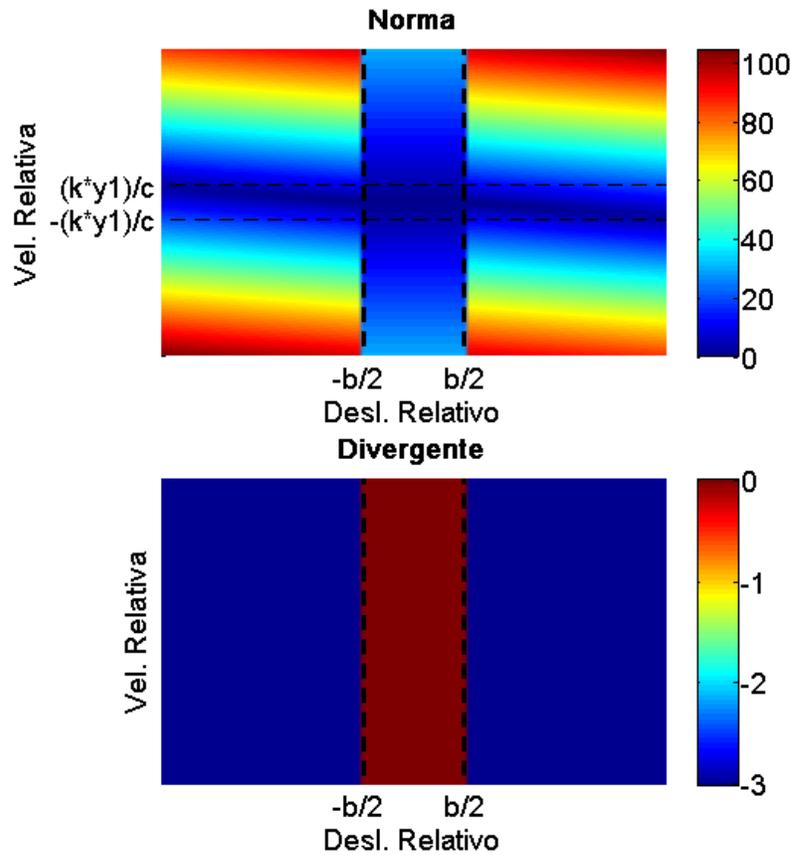


Figura 5.18: Retrato de fase do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento de Kelvin-Voigt dissipativo.

sempre será igual à velocidade do sistema em qualquer ponto do diagrama. Desta forma obtém-se:

$$\frac{k}{m}\delta + \frac{c}{m}\dot{\delta} = 0 \quad (5.10)$$

Desta expressão pode-se concluir que, nas zonas de contato, no lugar geométrico onde as velocidades são dadas por

$$\dot{\delta} = -\frac{k}{c}\delta \quad (5.11)$$

a norma do campo vetorial é mínima.

## 5.2 Modelo *Impact Damping*

Nesta seção é estudado o modelo de engrenamento que será utilizado nos modelos de trens de potência mais elaborados. Este elemento não linear possui processo de dissipação de energia representado pela Equação 3.76. Por este motivo, os esforços gerados por este elemento variam com a velocidade e a posição relativa entre suas extremidades. Considerando velocidades constantes, traça-se as curvas esforço-deslocamento para este sistema, que são representadas na Figura 5.19.

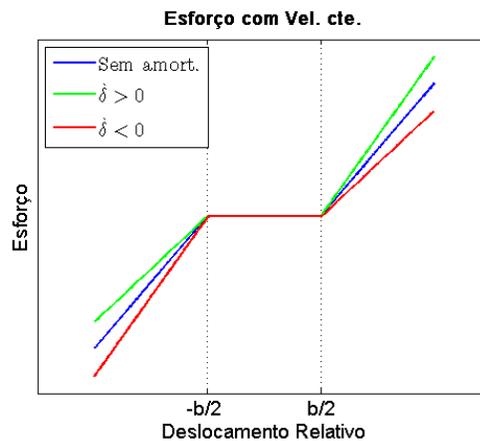
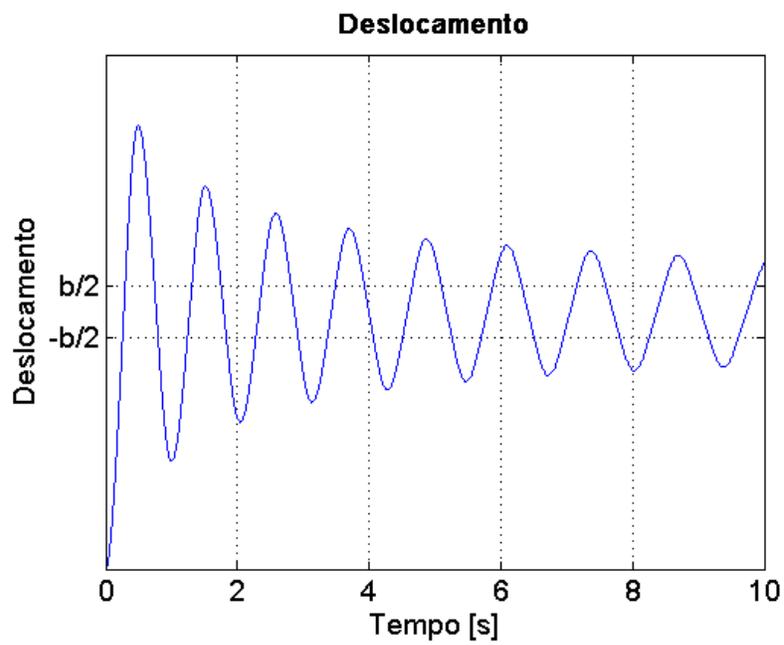


Figura 5.19: Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento *impact damping* calculada considerando velocidades constantes.

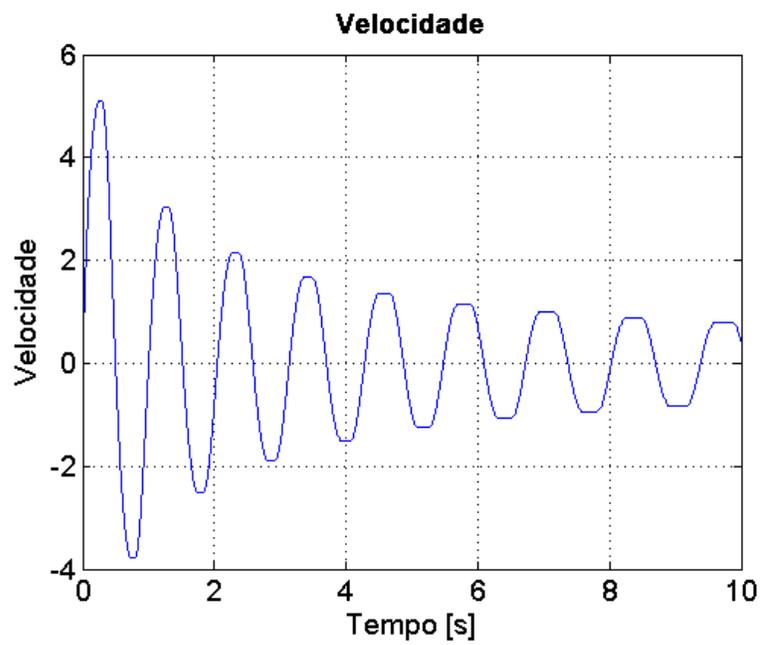
Diferentemente do modelo de Kelvin-Voigt dissipativo, este não apresenta discontinuidades nos esforços gerados quando transita entre as zonas de folga e contato. Além disso, considerando velocidades constantes, este elemento se comporta de forma que, conforme a velocidade relativa entre suas extremidades varia, a rigidez das zonas de contato também varia.

Feitas estas análises, este sistema agora é submetido a condições iniciais arbitrárias e sua resposta em vibração livre obtida é mostrada nas Figuras 5.20(a) (deslocamento) e 5.20(b) (velocidade).

Analisando a resposta deste sistema, identifica-se novamente o decaimento de sua frequência de oscilação livre. Além disso, quando o sistema passa pela região de folga, como previsto, sua velocidade se mantém inalterada até que ele atinja a nova zona de contato. Com estas respostas é possível calcular o esforço gerado pelo elemento não linear em cada



(a) Deslocamento.



(b) Velocidade.

Figura 5.20: Resposta temporal do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento *impact damping*.

instante de tempo. Este esforço é representado em um gráfico cuja abscissa é o deslocamento relativo entre as extremidades deste elemento. Este diagrama é ilustrado na Figura 5.21.

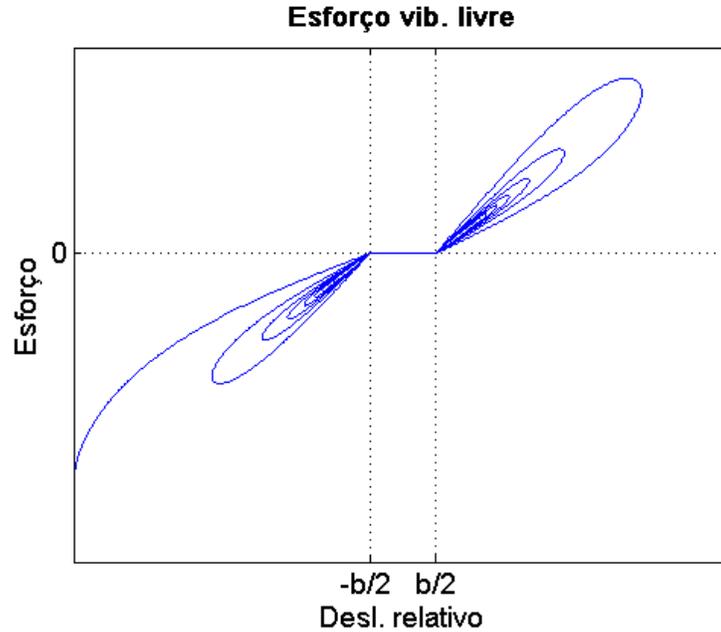


Figura 5.21: Curva esforço-deslocamento do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento *impact damping* calculada com base na resposta do sistema a condições iniciais arbitrárias.

Conforme previsto anteriormente, neste gráfico é possível observar que quando o sistema transita entre as zonas de folga e contato, não há mais discontinuidades no esforço gerado pelo elemento não linear. Ainda assim, nas regiões de contato este esforço executa ciclos, que são gerados devido à dissipação de energia do sistema.

Como última parte desta análise, é obtido o retrato de fase do sistema de um grau de liberdade em questão. Este é exibido na Figura 5.22.

Desta vez, novamente o divergente do campo vetorial é nulo na região de folga. Porém, nas zonas de contato ele não é nem nulo e nem um valor constante, mas decai com a distância em relação ao eixo  $x = 0$ . Nestas regiões a função que define a primeira derivada dos estados deste sistema é da forma:

$${}_i h^c(\delta, \dot{\delta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\beta}{m}|\delta| \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \dot{\delta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\delta} \\ -\frac{k}{m}\delta - \frac{\beta}{m}|\delta|\dot{\delta} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

sendo  $\beta$  o coeficiente do *impact damping*.

Calculando o divergente desta expressão, obtém-se:

$$\nabla \cdot \left( {}_i h^c(\delta, \dot{\delta}) \right) = \frac{\partial}{\partial \delta} ({}_i h_1^c) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} ({}_i h_2^c) = \frac{\partial}{\partial \delta} (\dot{\delta}) + \frac{\partial}{\partial \dot{\delta}} \left( -\frac{k}{m} \delta - \frac{\beta}{m} |\delta| \dot{\delta} \right) = -\frac{\beta}{m} |\delta|$$

o que prova que nas regiões de contato o valor do divergente decresce com o aumento do valor absoluto do deslocamento relativo entre as extremidades do elemento não linear.

Analisando a norma deste campo vetorial, a região central, de folga, é evidente. Além disso, nas zonas de contato há regiões onde a norma do campo vetorial é mínima. Observando a Equação 5.12, pode-se dizer que, nas regiões de contato o valor mínimo para esta medida é  $|\dot{\delta}|$  pois a componente  ${}_i h_1^c$  sempre assumirá o valor de  $\dot{\delta}$ . Sendo assim, o valor da componente  ${}_i h_2^c$  deve ser nulo. Assim:

$$\frac{k}{m} \delta + \frac{\beta}{m} |\delta| \dot{\delta} = 0 \quad (5.13)$$

Disto se segue que:

$$\dot{\delta} = -\frac{k}{\beta} \frac{\delta}{|\delta|} = -\frac{k}{\beta} \sigma(\delta) \quad (5.14)$$

sendo  $\sigma(x)$  a função sinal. Então fica provado que as regiões de mínimo na norma do campo

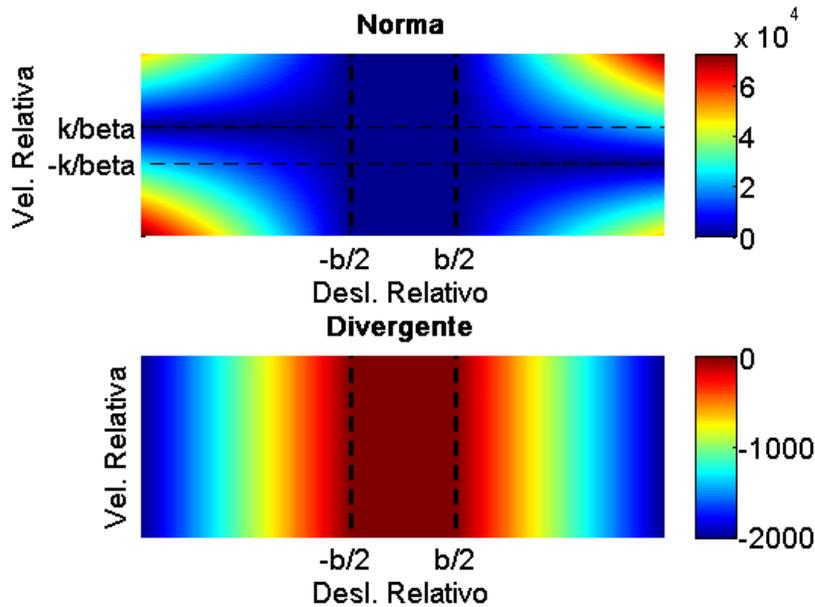


Figura 5.22: Retrato de fase do sistema de um grau de liberdade com modelo de engrenamento *impact damping*.

vetorial são retas paralelas à abscissa, e seu valor depende das constantes  $k$ ,  $\beta$  e do sinal do deslocamento relativo entre as extremidades do elemento não linear.

## 6 MODELAMENTO NÃO-LINEAR DO TREM DE POTÊNCIA

Como foi destacado no Capítulo 4, o procedimento padrão utilizado pelos desenvolvedores de trens de potência e seus componentes para a previsão do comportamento do sistema final é a análise de modelos linearizados. A vantagem em se estudar este tipo de sistema é que a sua solução é bem definida e dela se originam algumas ferramentas essenciais à análise de seu comportamento, como funções de resposta em frequência, autovalores e autovetores.

Porém, para que se realize a linearização de um modelo, algumas hipóteses simplificadoras devem ser feitas. Se estas hipóteses não forem obedecidas, os resultados da análise decorrente não corresponderão aos fenômenos observados na prática. Para a linearização de um sistema, deve-se considerar que este oscila em torno de uma posição de operação, e que a oscilação em torno desta posição é tão pequena que pode-se considerar que o sistema se comporta de forma muito próxima a um sistema linear. Neste trabalho, o trem de potência é sujeito a pulsos de torque íngremes e de grandes amplitudes, de forma que elementos mais flexíveis, como o disco de embreagem, possuam deslocamentos relativos entre suas extremidades tão grandes que nenhuma linearização possível para este elemento será capaz de aproximar seu comportamento. No caso dos engrenamentos, a variação da rigidez entre as zonas de folga e contato é muito brusca, e a linearização compromete em muito a previsão do comportamento do sistema.

Por estes motivos, o estudo do trem de potência com elementos não lineares se faz necessário. Neste caso, a solução do sistema não é mais da forma exponencial, e por isso conceitos como frequência natural, razão de amortecimento, modo de vibrar e função de resposta em frequência não são mais válidos. Além disso, nada garante que o período fundamental de oscilação do sistema seja constante, como visto na seção 5.1.2.2. O princípio da superposição também não é mais válido, e várias características da resposta em regime permanente são dependentes das condições iniciais dadas ao sistema e da amplitude da força excitadora.

O processo de elaboração do modelo utilizado neste trabalho foi gradativo, de forma que, depois da análise do trem de potência linearizado, um capítulo foi dedicado ao estudo dos elementos não lineares a serem inseridos no trem de força. Assim, na primeira seção são apresentados gráficos de velocidade angular do volante de inércia e da entrada da transmis-

são de um veículo real que apresenta os fenômenos estudados neste trabalho. Depois disso, são estudados três modelos de trem de força, sendo o primeiro apenas com o disco de embreagem não linear, o segundo com o disco não linear e engrenamentos não lineares apenas na transmissão, e o terceiro com o disco de embreagem e todos os engrenamentos não-lineares.

Cada um dos modelos de trens de potência será simulado com diferentes tipos de discos de embreagem para que se possa entender a influência dos parâmetros do pré-amortecimento sobre a dinâmica destes efeitos. As características do pré-amortecimento destes discos são exibidas na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Características do pré-amortecimento dos discos de embreagem utilizados nas simulações.

	Disco	Limites P.A. [°]	Atrito [ <i>N.m</i> ]	Rigidez [ <i>N.m/°</i> ]	
Variação da posição	1	-1,0	5,5	1,0	0,6
	2	-2,0	4,5	1,0	0,6
	3	-3,0	3,5	1,0	0,6
	4	-3,25	3,25	1,0	0,6
	5	-4,0	2,5	1,0	0,6
	6	-5,0	1,5	1,0	0,6
	7	-6,0	0,5	1,0	0,6
Variação do atrito	8	-1,0	5,5	0,0	0,6
	9	-1,0	5,5	0,5	0,6
	10	-1,0	5,5	1,5	0,6
	11	-1,0	5,5	2,0	0,6
	12	-1,0	5,5	2,5	0,6
Variação da largura	13	-0,5	5,0	1,0	0,6
	14	-2,5	7,0	1,0	0,6
	15	-4,5	9,0	1,0	0,6

Observa-se que a rigidez dos discos não foi variada pois o resultado da variação do disco de embreagem já foi apresentado na seção 4.4. Além disso, o disco 1 é utilizado em outras análises, pois ele é considerado o disco de referência neste trabalho.

## 6.1 Dados de medições em um veículo

Nesta seção são apresentados sinais adquiridos em um veículo que apresenta os fenômenos de *shuffle* e *clunk*. Este veículo, porém possuía um trem de potência de configuração FF, com características diferentes das do trem de potência estudado neste trabalho. Além disso, ele foi montado com um disco de embreagem que não faz parte de seu projeto, para que se propiciasse o surgimento destes fenômenos. Mesmo assim, a análise destes dados é importante para que se possa avaliar o quanto cada um dos modelos estudados consegue reproduzir os fenômenos em estudo.

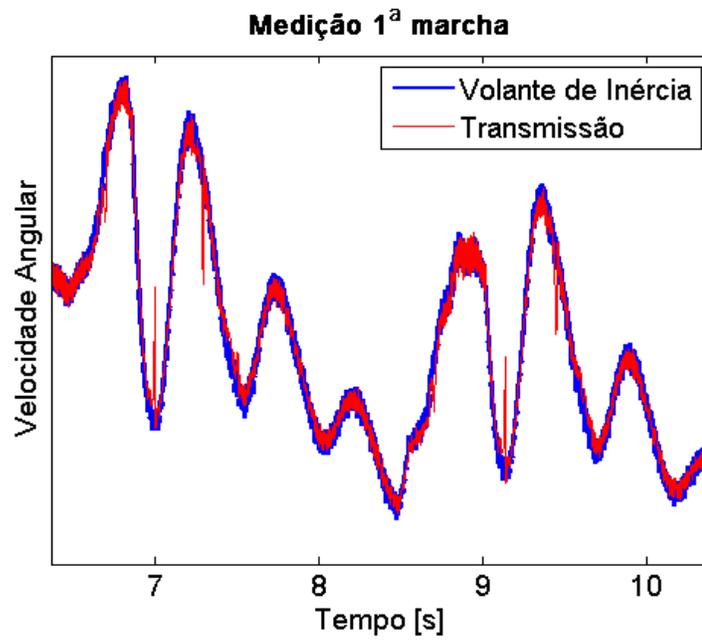
Os dados apresentados aqui foram cedidos pela ZF Sachs do Brasil e, por questões de confidencialidade, não se pode revelar as características físicas do veículo, seu nome e fabricante. Por este motivo também, foram removidos os valores das velocidades angulares medidas dos gráficos apresentados neste trabalho.

Os fenômenos de *shuffle* e *clunk* foram reproduzidos no veículo em primeira e segunda marchas, e por isso a apresentação dos dados é organizada nesta mesma ordem. As velocidades do volante de inércia e da entrada da transmissão deste trem de potência em primeira marcha, sujeito a pulsos de torque, são apresentados na Figura 6.1(a).

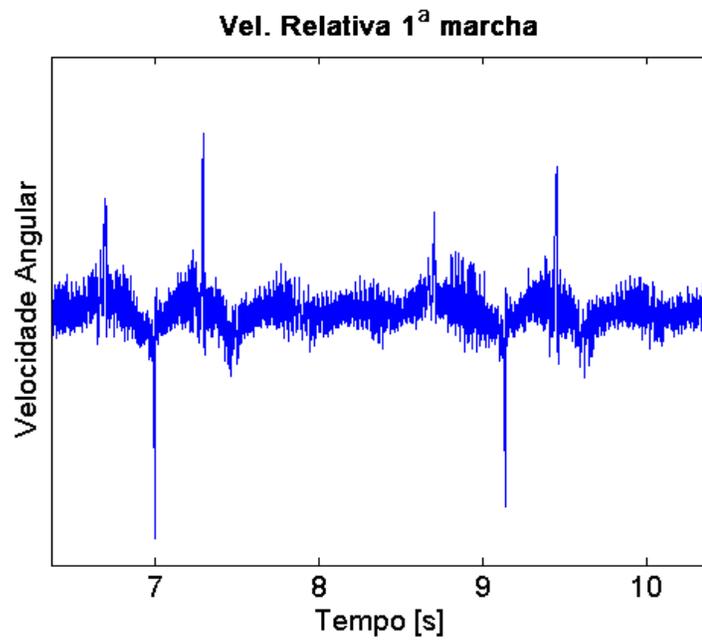
Para a obtenção deste gráfico foram aplicados dois pulsos de torque no trem de potência, um de 6,4s a 6,85s e outro de 8,55s a 9s. Pode-se observar oscilações de baixa frequência nas velocidades da transmissão e do volante de inércia, o que indica o fenômeno de *shuffle*. Além disso, nos momentos imediatamente após a aplicação destes pulsos de torque, a velocidade da transmissão apresenta variações bruscas que ocorrem em curtos intervalos de tempo e são caracterizadas por picos pontiagudos, como pode ser visto aos 7s, 7,3s, 9,1s e 9,45s. Na Figura 6.1(b) é apresentado o gráfico de velocidade relativa entre a transmissão e o volante de inércia, onde estes picos são evidenciados.

A mesma medição foi feita no veículo com a segunda marcha engatada, e os dados de velocidade angular medidos nos mesmos pontos do teste anterior podem ser vistos na Figura 6.2(a).

Para a realização desta medição foi aplicado no trem de potência um pulso de torque de 6s a 6,3s. Ambas as velocidades da transmissão e do volante de inércia apresentam oscilações



(a) Velocidades angulares do volante de inércia e da transmissão.



(b) Velocidade angular relativa entre o volante de inércia e a transmissão.

Figura 6.1: Medições realizadas em veículo real, em primeira marcha, sujeito a *Tip-in/Tip-out*.

de grande amplitude e baixa frequência, indicando novamente a ocorrência do fenômeno de *shuffle*. Comparando este gráfico com o da Figura 6.1(a) fica evidente que o veículo é mais sensível a este fenômeno em segunda marcha, uma vez que o tempo de decaimento destas oscilações de baixa frequência é maior. Além disso, os picos agudos descritos anteriormente, na análise da velocidade da transmissão em primeira marcha, também são observados nesta segunda medição. Na Figura 6.2(b) é apresentado o gráfico de velocidade relativa entre os dois pontos de medição, e estes picos são novamente evidenciados.

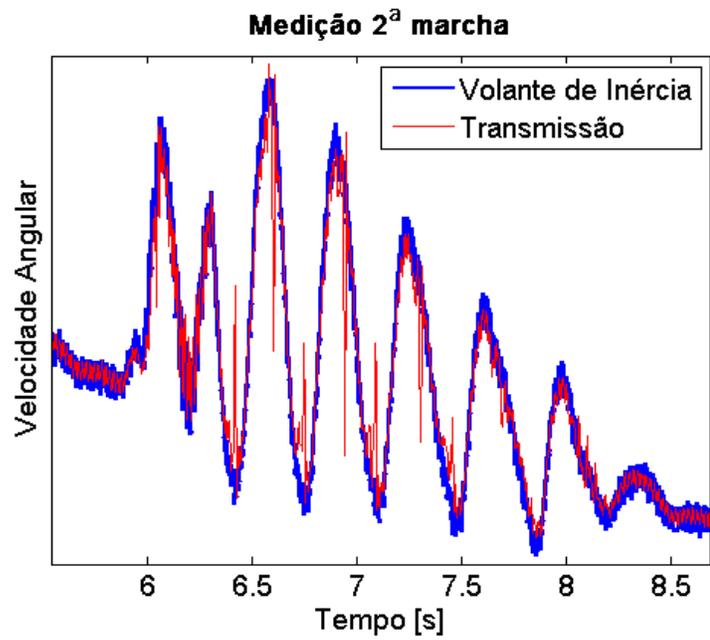
Com base nas medições realizadas nestes dois pontos é possível fazer inferências sobre o fenômeno de *shuffle*. Como não foram feitas medições em pares engrenados, não é possível fazer conclusões sobre o *clunk*, mesmo que haja suspeitas de que ele ocorra no momento em que se dão os picos agudos na velocidade da transmissão. Com o uso de simulações computacionais será indicada a causa do aparecimento destes picos, e sua relação com este fenômeno.

Nas próximas seções deste capítulo serão apresentados os resultados obtidos a partir de diferentes modelos de trens de potência. Com estes modelos, busca-se reproduzir os fenômenos observados nestas medições e compreender os fenômenos de *shuffle* e *clunk*.

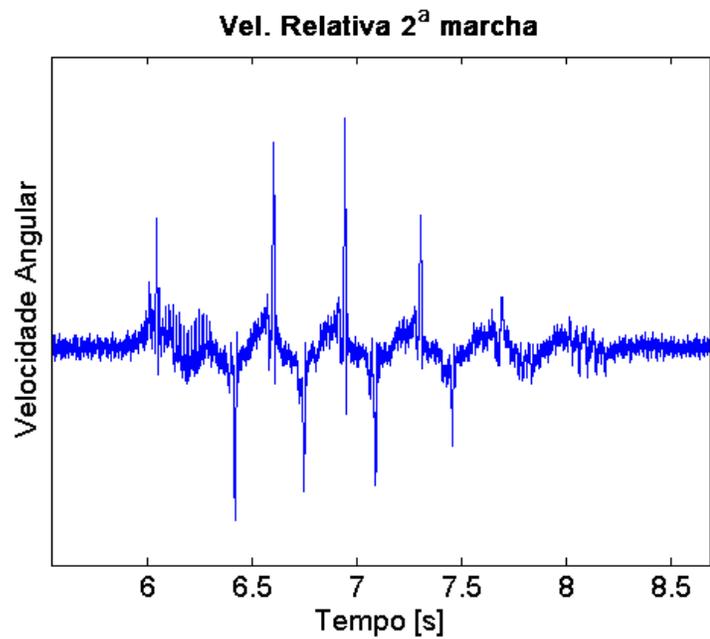
## 6.2 Modelo com disco de embreagem não linear

O modelo analisado nesta seção é idêntico ao analisado no capítulo 4, com exceção do disco de embreagem, que neste caso é não linear. Uma vez que este modelo não descreve as folgas nos engrenamentos, o fenômeno de *clunk* não ocorrerá, e por isso ele não é analisado nesta seção. Integrações numéricas são realizadas considerando a aplicação de dois pulsos de torque no volante de inércia do *powertrain*, um de 0s a 1s e um de 3s a 3,6s, de 150 *N.m* de amplitude. O modelo é simulado com todos os discos da Tabela 6.1.

Como já foi mencionado, o *shuffle* é um fenômeno caracterizado pela oscilação longitudinal do veículo, causada pela vibração torcional das rodas em baixa frequência. Por isso, para a primeira análise, serão apresentadas as velocidades angulares das rodas nas Figuras 6.3, 6.4 e 6.5. Uma vez que o veículo se locomove em linha reta, apenas a velocidade de uma das rodas é mostrada. Além disso, alguns destes gráficos não são exibidos na íntegra, mas sim em vistas aproximadas para a melhor visualização. No primeiro gráfico é mostrada



(a) Velocidades angulares do volante de inércia e da transmissão.



(b) Velocidade angular relativa entre o volante de inércia e a transmissão.

Figura 6.2: Medições realizadas em veículo real, em segunda marcha, sujeito a *Tip-in/Tip-out*.

a resposta em velocidade nas rodas, utilizando os discos de 1 a 7, no segundo utilizando os discos de 8 a 12, e no terceiro utilizando os discos de embreagem restantes.

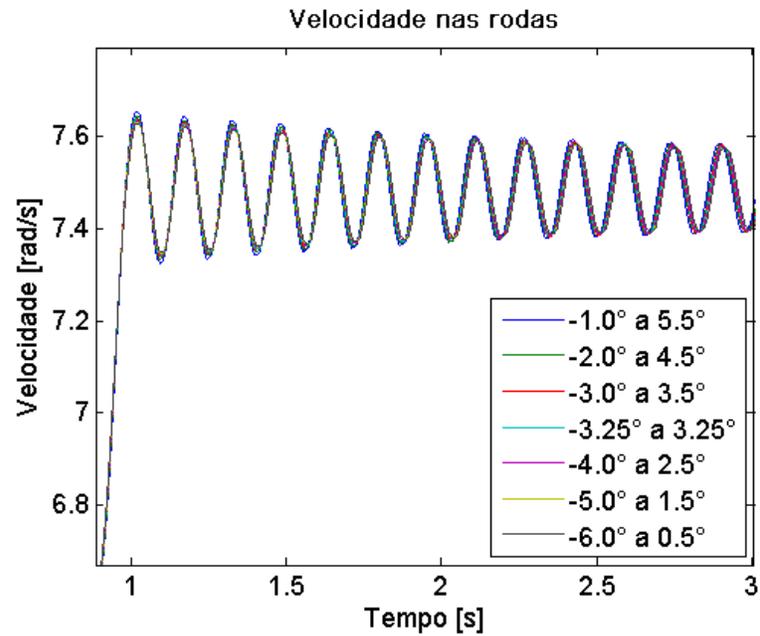


Figura 6.3: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 1 a 7.

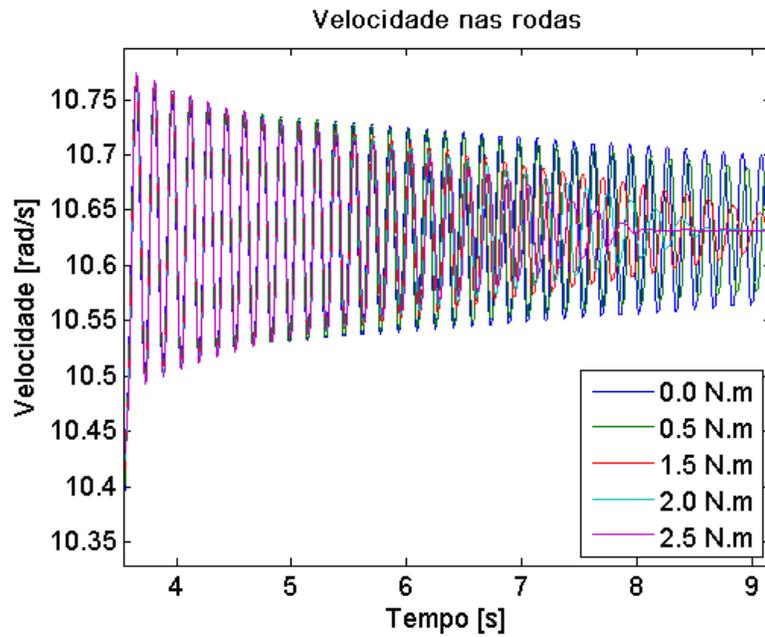


Figura 6.4: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 8 a 12.

No conjunto de discos de embreagem utilizado para gerar os resultados mostrados na Figura 6.3, varia-se a posição do pré-amortecimento. Como fica evidente nesta figura, o sistema apresentou *shuffle* mas este parâmetro não influenciou o fenômeno.

Já na Figura 6.4, o conjunto de discos de embreagem utilizados possui diferentes torques de atrito em seus estágios de pré-amortecimento. Assim, como esperado e visto nesta ilustração, o tempo de decaimento do *shuffle* é menor quanto maior for a histerese do pré-amortecimento.

No conjunto de discos utilizados para gerar os resultados da Figura 6.5, varia-se a largura de seus estágios de pré-amortecimento. Como dito na literatura por Krenz (1985), o aumento da largura do estágio de pré-amortecimento provocou maior amplitude do fenômeno de *shuffle*.

Um segundo passo para a análise deste trem de potência é a simulação deste utilizando o disco 1 da Tabela 6.1. Como resultado desta simulação, nas Figuras 6.6(a) e 6.6(b) são mostradas respectivamente as curvas de velocidade da transmissão e do volante de inércia sobrepostos, e a velocidade relativa entre estes dois graus de liberdade.

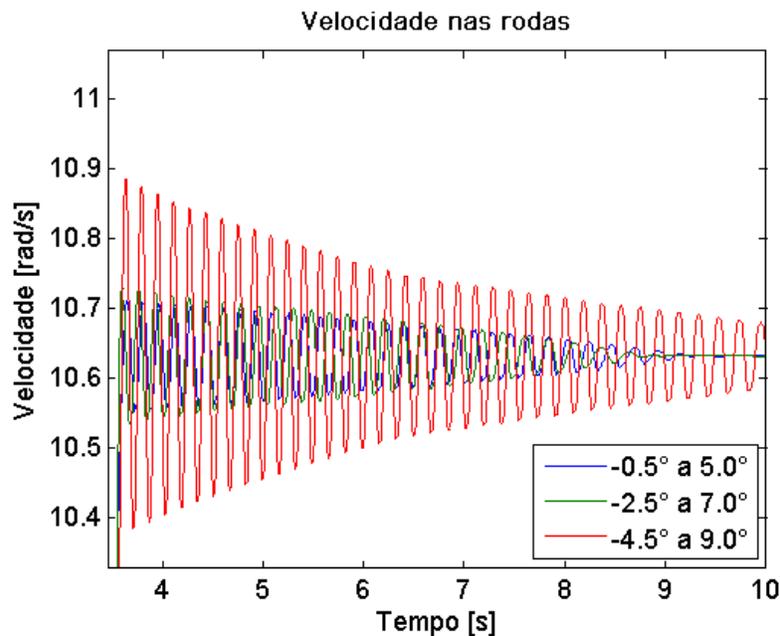
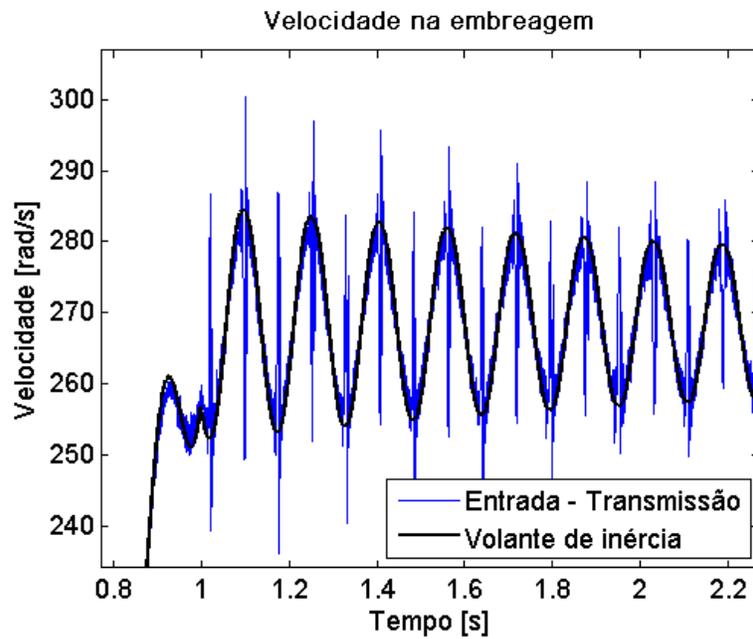
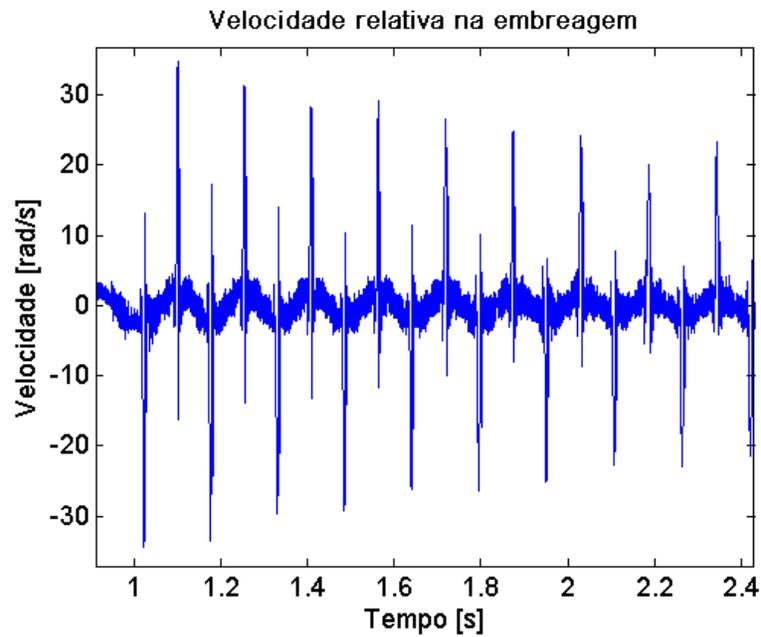


Figura 6.5: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 13 a 15.



(a) Velocidades angulares do volante de inércia e da transmissão.



(b) Velocidade angular relativa entre o volante de inércia e a transmissão.

Figura 6.6: Simulação utilizando o disco de embreagem 1 e o restante do modelo linear.

No gráfico da Figura 6.6(a) é possível observar que ambas as velocidades dos dois graus de liberdade oscilam juntos e em baixa frequência, evidenciando o fenômeno de *shuffle*. Além disso, a curva de velocidade da transmissão apresenta alguns picos agudos, os mesmos picos observados nas Figuras 6.1(a) e 6.2(a), relativas a medições reais. Estes picos ficam ainda mais evidentes na Figura 6.6(b), que remete em muito às Figuras 6.1(b) e 6.2(b).

A presença destes picos levanta uma informação muito importante com relação à suspeita descrita na seção 6.1. Uma vez que o modelo em estudo não possui folgas e reproduziu estes picos, não se pode dizer que eles ocorrem por causa do *clunk*. Mesmo assim, isto não significa que este fenômeno não possa ocorrer no momento em que ocorrem os picos, mas sim que ele não os gera. Sendo assim, para a investigação de suas causas, são apresentados os gráficos das Figuras 6.7 e 6.8.

Na Figura 6.7 é apresentado o deslocamento angular relativo entre o volante de inércia e a transmissão. Entre as linhas pretas tracejadas está o estágio de pré-amortecimento. O estágio de tração está acima e o de retração abaixo desta região.

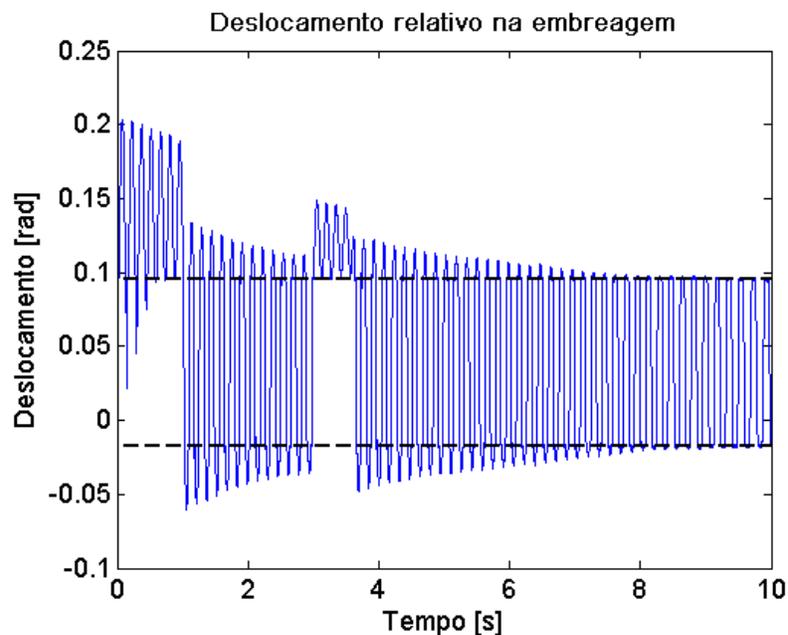


Figura 6.7: Deslocamento angular relativo entre o volante de inércia e a transmissão utilizando o disco de embreagem 1 e o restante do modelo linear.

Esta curva de deslocamento relativo é sobreposta à curva de velocidade relativa entre os mesmos graus de liberdade. Para melhor visualização, a primeira foi multiplicada por um fator de escala, que não altera as análises subsequentes. Este diagrama é mostrado na Figura

6.8.

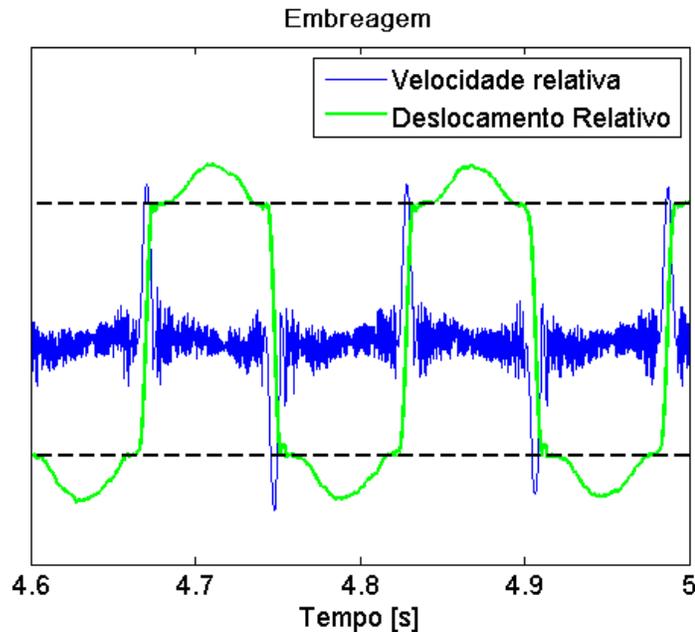


Figura 6.8: Sobreposição entre deslocamento e velocidade angular relativos entre o volante de inércia e a transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e o restante do modelo linear.

Neste gráfico é possível observar que quando o sistema passa pelo estágio de pré-amortecimento, a velocidade relativa entre estes graus de liberdade aumenta muito, devido ao baixo valor de rigidez deste estágio, e neste momento são gerados estes picos de velocidade.

### 6.3 Inclusão dos engrenamentos não lineares na transmissão

Para que se mantenha o processo de evolução gradativa dos modelos, nesta seção são incluídas as não linearidades relativas aos engrenamentos internos à transmissão do veículo. Neste caso, o trem de potência já possui alguns de seus engrenamentos com folgas. Isto significa que, na análise feita nesta seção, já é possível fazer algumas inferências sobre o *clunk*. Os modelos aqui estudados são submetidos a dois pulsos de torque, o primeiro de 0s a 1s, e o segundo de 3s a 3,6s, ambos de 150  $N.m$ .

Analogamente à seção anterior, começa-se estudando os efeitos dos parâmetros do pré-amortecimento sobre o *shuffle*, e para isso devem ser apresentadas as curvas de velocidade

nas rodas do veículo. Na Figura 6.9, são apresentadas estas curvas resultantes da simulação do sistema com os discos de embreagem de 1 a 7. Depois disso, na Figura 6.10 são exibidas estas curvas, obtidas ao simular o mesmo sistema utilizando os discos de 8 a 12. Finalmente, na Figura 6.11 encontram-se as mesmas curvas, obtidas da simulação do sistema com os discos de 13 a 15. Novamente vale lembrar que, como a velocidade nas duas rodas é sempre a mesma, somente uma delas é exibida. Além disso, nem todos os próximos gráficos são apresentados na íntegra. Alguns deles são vistas aproximadas dos gráficos originais para que se obtenha uma melhor visualização dos fenômenos.

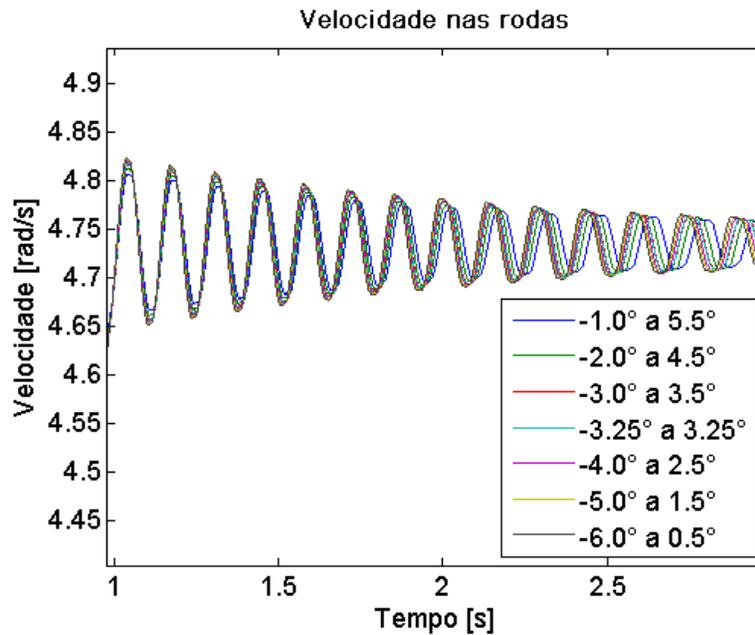


Figura 6.9: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 1 a 7.

As curvas mostradas na Figura 6.9 foram obtidas utilizando um grupo de discos de embreagem que possuía estágios de pré-amortecimento em diferentes posições. A partir destes resultados, conclui-se que, mesmo na presença de folgas, o *shuffle* não sofre influência da posição deste estágio do disco.

Já na Figura 6.10, o grupo de discos de embreagem utilizado para a simulação deste modelo de *powertrain* possuía diferentes torques de atrito em seus estágios de pré-amortecimento. Logo após a aplicação do primeiro pulso de torque não havia diferenças significativas entre as respostas observadas, pois nesta condição o disco ainda trabalhava na região de tração, que é igual para todos os modelos simulados. Depois disso, como era esperado, os sistemas passaram a trabalhar na região de pré-amortecimento, e quanto maior o torque de atrito

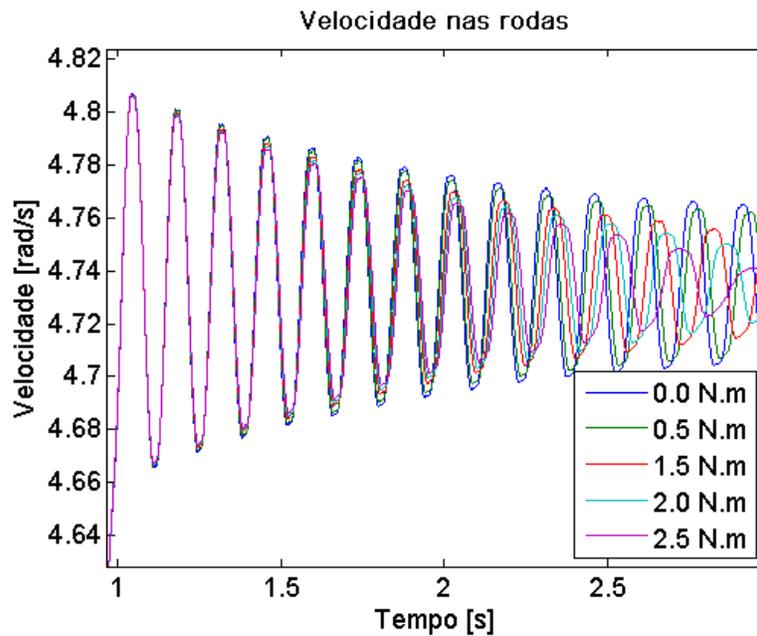


Figura 6.10: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 8 a 12.

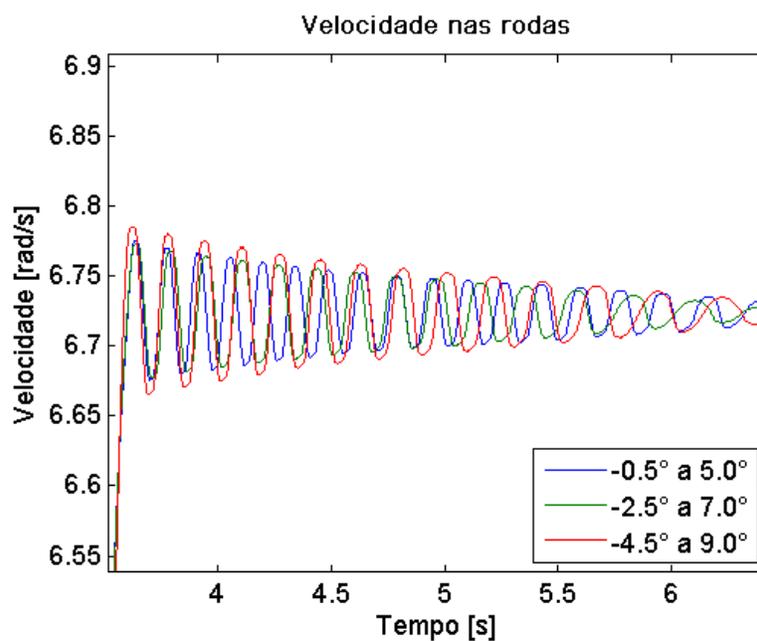


Figura 6.11: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 13 a 15.

neste estágio, menos crítica foi a ocorrência do *shuffle*.

A diferença entre os discos de embreagens do grupo utilizado para obter as respostas em velocidade mostradas na Figura 6.11 é a largura de seus estágios de pré-amortecimento. A sensibilidade do fenômeno a este parâmetro é evidenciada após a aplicação do segundo pulso de torque no sistema. No gráfico é possível notar que, para o disco com pré-amortecimento mais largo, a resposta em *shuffle* é mais crítica, mesmo que seu tempo de decaimento seja menor. Não foi encontrada diferença significativa no desempenho do sistema com os outros dois discos.

Para a obtenção das curvas vistas na Figura 6.12, o sistema é simulado utilizando o disco de embreagem de referência (o disco 1), e são sobrepostas as respostas em velocidade da entrada da transmissão e do volante de inércia.

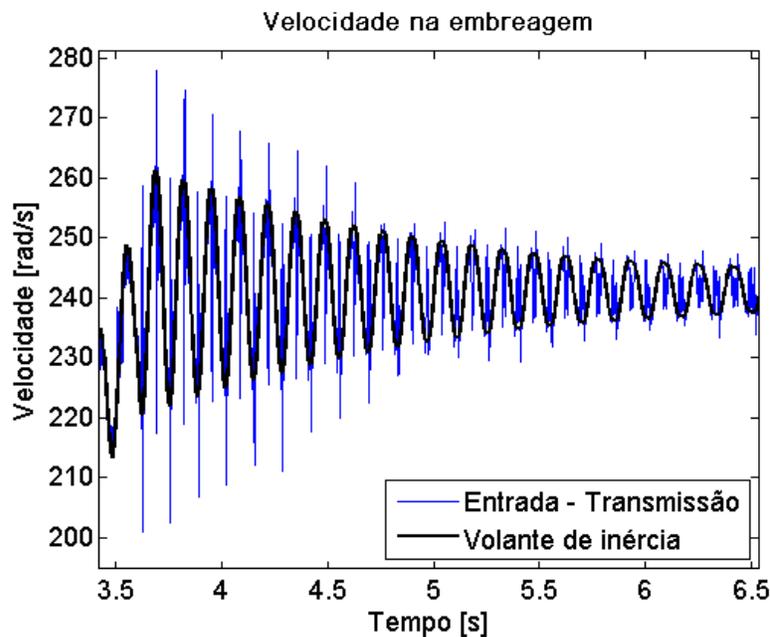


Figura 6.12: Velocidades angulares do volante de inércia e da transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e engrenamentos não lineares na caixa de marchas.

Novamente é possível observar nesta figura as oscilações de baixa frequência em ambas as respostas em velocidade, decorrentes do fenômeno de *shuffle* e os picos agudos na velocidade da transmissão, causados, como já foi visto, pela presença do estágio de pré-amortecimento no sistema.

Porém, na Figura 6.6(a), observa-se que após o primeiro pulso de torque, a velocidade

do volante de inércia oscila em torno dos  $290 \text{ rad/s}$ , enquanto que na Figura 6.12, após os dois pulsos de torque, a velocidade do mesmo grau de liberdade no novo sistema oscila em torno dos  $240 \text{ rad/s}$ . Isto decorre do fato de que o novo modelo é mais flexível por considerar folgas nos engrenamentos e rigidez nos contatos entre os dentes.

Por ser um sistema que possui folgas, busca-se agora compreender os momentos em que os impactos entre os dentes ocorrem. Para isso, a primeira curva a se traçar é a sobreposição entre a velocidade e o deslocamento relativos sobre o disco de embreagem do sistema. Este gráfico se encontra na Figura 6.13.

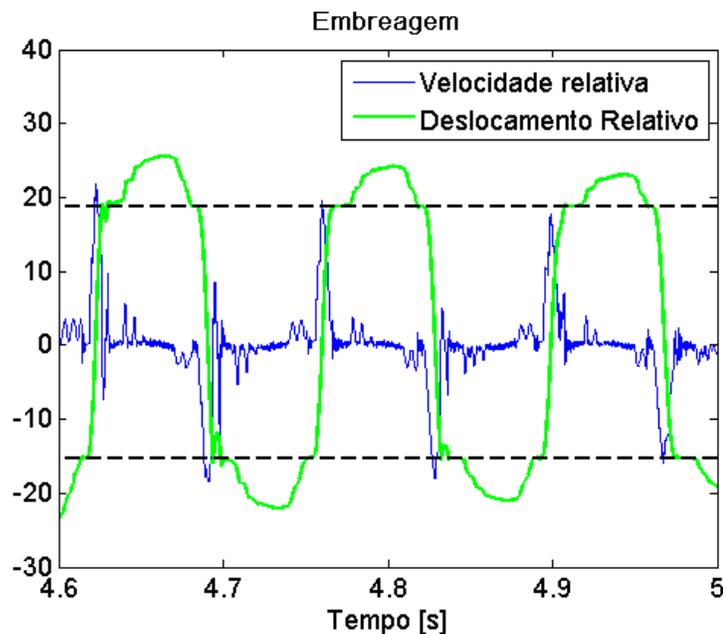


Figura 6.13: Sobreposição entre deslocamento e velocidade angular relativos entre o volante de inércia e a transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e o engrenamentos não lineares na caixa de marchas.

As curvas apresentadas nesta figura evidenciam os momentos exatos onde o disco de embreagem transita entre os estágios de tração e retração, passando pelo pré-amortecimento, e gera os picos pontiagudos na curva de resposta em velocidade da entrada da transmissão descritos anteriormente. A comparação desta curva com as curvas de velocidade relativa entre os dentes dos pares engrenados se faz necessária ao entendimento do fenômeno de *clunk*. Estas últimas curvas encontram-se na Figura 6.14.

Comparando-se as Figuras 6.13 e 6.14, conclui-se que os impactos entre os dentes dos engrenamentos ocorrem no momento em que o disco de embreagem passa a trabalhar no

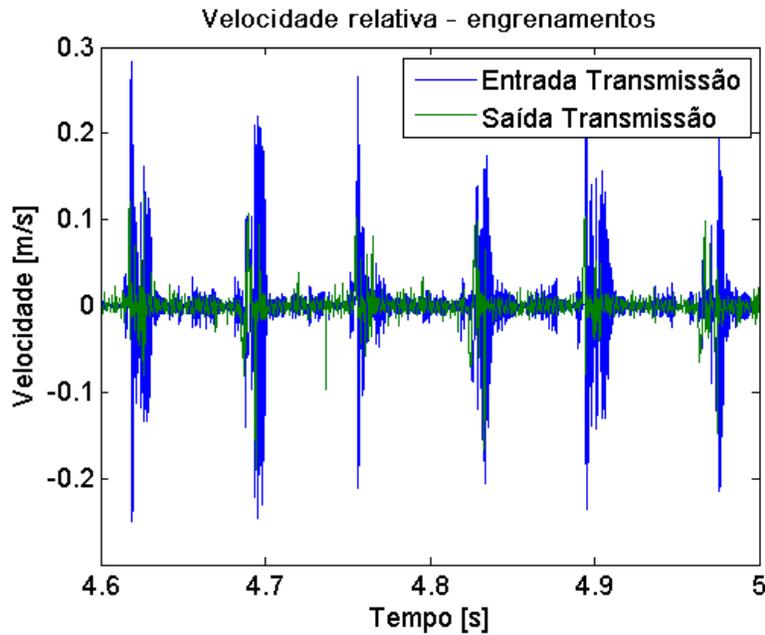


Figura 6.14: Velocidades relativas entre os dentes dos engrenamentos internos à transmissão.

estágio de tração ou de retração, o que está diretamente relacionado com o fenômeno de *shuffle*. Portanto, pode-se dizer que os impactos entre os dentes dos pares engrenados não causam os picos observados na curva de velocidade da entrada da transmissão, mas ocorrem em instantes muito próximos.

Apesar de ter sido verificado que os impactos entre os dentes ocorrem juntamente com as transições entre os estágios do disco de embreagem, que ocorrem por sua vez devido ao *shuffle*, isto é apenas uma parte do fenômeno de *chunk*. Para que seja diagnosticado este fenômeno em um trem de potência real, estes impactos entre os dentes devem gerar o ruído que do qual seu nome se origina.

Obviamente os modelos estudados neste trabalho não contemplam fenômenos acústicos. Porém, sabe-se que a intensidade dos impactos nos engrenamentos está diretamente relacionada com a geração de ruído. Por isso, neste trabalho não é possível afirmar se um trem de potência apresenta o fenômeno de *chunk*, mas pode-se fazer inferências sobre a intensidade destes impactos, o que são indícios deste fenômeno.

A partir das velocidades relativas entre os dentes das engrenagens, é possível calcular a sua aceleração relativa. Porém, pelo fato de este fenômeno acontecer em intervalos de tempo muito curtos, há imprecisões nas integrações numéricas que afetam em muito a precisão

deste resultado. Por isso, para a análise deste sinal é proposta uma técnica chamada de RMS deslizante, que é uma adaptação da técnica *mean-square acceleration*, apresentada por Crowther et al. (2007).

A técnica do RMS deslizante consiste em aplicar uma pequena janela retangular em um sinal discreto e calcular o nível RMS do segmento de sinal definido por esta janela. Deslocando esta janela pelo sinal original e repetindo este procedimento, obtém-se um novo sinal que contém os níveis RMS locais do primeiro sinal. Desta forma, possíveis distorções causadas por erros numéricos são atenuadas, e tem-se uma medida mais robusta para a comparação de sinais de impacto.

Esta técnica é aplicada nos sinais de aceleração relativa entre os dentes dos dois engrenamentos não lineares presentes neste trabalho, e destes sinais são extraídos o valor de pico, o instante em que este ocorreu, a média do sinal e seu desvio padrão. Desta forma é possível realizar uma análise mais detalhada da intensidade dos impactos na transmissão sem que seja necessário exibir estes gráficos, o que tomaria muito espaço neste trabalho.

Com relação às medidas extraídas de cada um dos conjuntos de dados, a amplitude de pico e o instante no qual ele ocorreu são indícios importantes da ocorrência do fenômeno de *clunk*. Já a média e o desvio padrão deste sinal trazem informações sobre a dispersão dos impactos no tempo.

Os resultados obtidos para os pares engrenados de entrada e de saída da transmissão são exibidos nas Tabelas 6.2 e 6.3, respectivamente.

Analisando a Tabela 6.2, observa-se que todos os picos de aceleração ocorreram logo após do término da aplicação de um dos pulsos de torque. Com exceção dos sistemas que foram simulados com os discos 1 e 15, cujos picos ocorreram após o término do segundo pulso, o pico de aceleração se deu sempre após o término do primeiro.

Observando os dados relativos à variação da posição do pré-amortecimento, o disco 4, que possui este estágio bem centrado demonstrou o melhor desempenho com relação à amplitude de pico, média e desvio padrão. Isto ocorre pois, como não foi considerado o torque de arraste na transmissão, o ponto de operação do disco em qualquer velocidade será sempre o ponto onde o deslocamento relativo entre o material de atrito e o cubo é nulo. Por isso, como o pré-amortecimento está centrado, ele atua igualmente no sentido dos estágios

de tração e retração, o que otimiza seu desempenho neste subconjunto de dados.

Quando se aumenta o torque de atrito no pré-amortecimento, é possível observar uma tendência de redução da amplitude de pico do impacto mais intenso. Mesmo assim, o sistema que utiliza o disco 11 apresenta amplitude de aceleração de pico bastante elevada com relação ao que utiliza o disco 10, com menor torque de atrito. Porém, observando a média e o desvio padrão para este conjunto de dados, observa-se que de maneira global, quanto maior for este parâmetro do pré-amortecimento, menores e menos dispersos serão os impactos ao longo do tempo, uma vez que o tempo de decaimento da resposta oscilatória do sistema diminui e sua capacidade de dissipação de energia aumenta.

Finalmente, quando se aumenta a largura do pré-amortecimento observa-se uma drástica redução na amplitude de pico do impacto mais intenso, verificando que sistema mais flexíveis tendem a armazenar a energia do impacto na forma de energia cinética, reduzindo a sua intensidade, como dito por Krenz (1985). A média e o desvio padrão dos dados também tende a diminuir com esta variação, o que indica que o trem de potência tende a se comportar como um sistema mais amortecido.

Tabela 6.2: Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da entrada da transmissão.

	Disco	Pico [g]	Instante [s]	Média [g]	Desv. Pad. [g]
Variação da posição	1	237,03	4,22	22,15	28,28
	2	180,27	1,18	17,40	20,34
	3	174,96	1,12	12,09	16,54
	4	137,25	1,25	11,34	15,20
	5	175,53	1,18	13,76	17,90
	6	186,50	1,25	14,91	18,94
	7	152,34	1,52	15,78	19,47
Variação do atrito	8	181,28	1,32	26,51	19,28
	9	176,27	1,19	21,48	20,81
	10	158,94	1,19	14,24	17,61
	11	171,15	1,12	12,41	15,28
	12	152,59	1,12	13,41	16,52
Variação da largura	13	170,60	1,05	16,84	19,71
	14	122,44	1,35	13,51	14,96
	15	110,50	3,63	13,41	15,12

Tabela 6.3: Dados obtidos a partir do RMS deslizando da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da saída da transmissão.

	Disco	Pico [g]	Instante [s]	Média [g]	Desv. Pad. [g]
Variação da posição	1	41,69	4,02	5,00	5,54
	2	57,61	7,42	4,19	4,73
	3	51,71	9,81	3,73	4,19
	4	67,88	5,63	3,37	4,48
	5	50,74	1,66	3,78	4,88
	6	72,27	4,16	3,75	4,80
	7	90,16	7,84	3,96	5,35
Variação do atrito	8	43,34	6,31	4,39	4,10
	9	69,57	8,62	4,71	5,34
	10	76,83	3,62	3,96	4,65
	11	55,58	5,97	3,49	4,22
	12	45,18	8,58	3,96	4,22
Variação da largura	13	34,09	7,66	3,94	3,92
	14	38,07	7,16	3,65	3,55
	15	27,50	0,13	3,63	3,22

Analisando a Tabela 6.3, atenta-se ao fato de que a amplitude dos impactos mais intensos é significativamente menor do que no engrenamento analisado anteriormente, e que a ocorrência destes não possui nenhuma correlação com o período no qual os pulsos de torque foram aplicados. Estes fatos já são fortes indícios de que, as causas do *clunk*, neste trem de potência, não se originam neste par engrenado. Além disso, nota-se que a variação de qualquer um dos parâmetros do pré-amortecimento não altera de maneira significativa a média e o desvio padrão dos dados apresentados, então nada se pode afirmar com relação a estas variações.

Destas análises, conclui-se que os impactos que têm maior potencial de gerar o *clunk* são os que ocorrem no par engrenado da entrada da transmissão. Neste caso, verifica-se que as condições que minimizaram a severidade destas colisões são o pré-amortecimento mais largo, centrado em torno do ponto de operação do disco de embreagem, e com torque de atrito mais elevado. Mesmo assim, a largura excessiva neste estágio piora a performance em *shuffle*, e os outros parâmetros não exercem influência significativa sobre este fenômeno.

Na próxima seção será estudado um modelo de trem de potência que, além das não

linearidades já consideradas nesta seção, inclui também engrenamentos não lineares no diferencial.

#### 6.4 Inclusão dos engrenamentos não lineares no diferencial

O último passo na evolução dos modelos do trem de potência deste trabalho é considerar que os engrenamentos internos ao diferencial também são não lineares. Os modelos estudados neste capítulo novamente sofrem a ação de dois pulsos de torque aplicados no volante de inércia, o primeiro de 0s a 1s e o segundo de 3s a 3,6s, ambos de 150 *N.m*. São feitas análises relacionadas aos efeitos de *shuffle* e *clunk* e à influência dos parâmetros do pré-amortecimento na dinâmica destes fenômenos.

A primeira das análises busca evidenciar a influência dos parâmetros do estágio de pré-amortecimento no fenômeno de *shuffle*, e por isso são mostradas nas Figuras 6.15, 6.16 e 6.17 as curvas de resposta em velocidade das rodas do veículo, quando utilizados para a simulação os grupos de discos de 1 a 7, de 8 a 12 e de 13 a 15, respectivamente. Algumas das Figuras mostradas nesta seção não serão exibidas na íntegra, mas sim apenas parte do registro temporal total para que se obtenha uma melhor visualização.

Analisando o gráfico da Figura 6.15 é possível observar pequenas diferenças entre as respostas em velocidade dos sistemas simulados com um conjunto de discos de embreagem no qual a posição do pré-amortecimento era variada. Observa-se que quanto mais o pré-amortecimento se encontra deslocado no sentido positivo, maior é a amplitude da resposta em *shuffle*. Mesmo assim, as diferenças ainda são muito pequenas.

Para obter o gráfico da Figura 6.16, foi utilizado um conjunto de discos de embreagem no qual se variava o torque de atrito no estágio de pré-amortecimento. Como já era previsto, conclui-se que este parâmetro influi pouco na amplitude inicial do fenômeno, mas reduz em muito o tempo de decaimento da oscilação do sistema.

Os gráficos da Figura 6.17 foram obtidos simulando o trem de potência com os discos de embreagem do último grupo, no qual se varia a largura dos estágios de pré-amortecimento. Neste caso, observa-se também pequenas diferenças entre as curvas de velocidade. Porém, como nos casos anteriores, é possível concluir que com o aumento da largura do estágio de

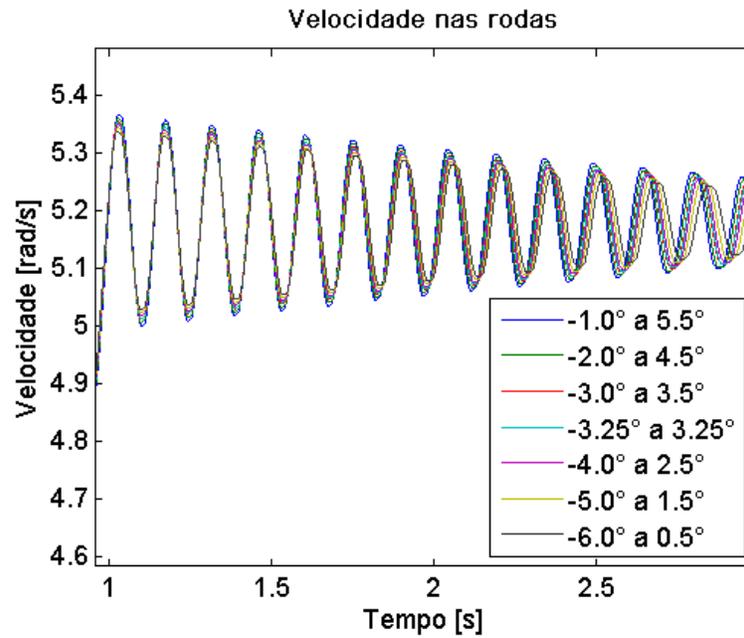


Figura 6.15: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 1 a 7.

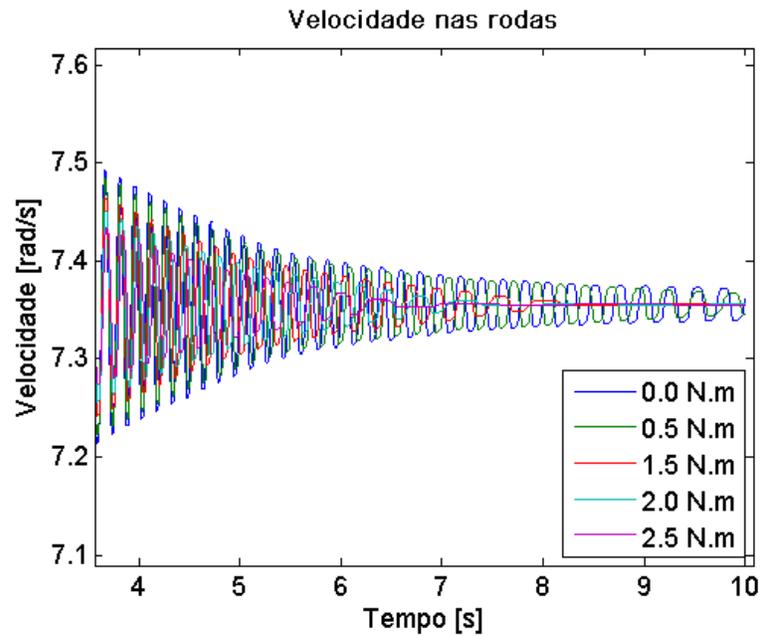


Figura 6.16: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 8 a 12.

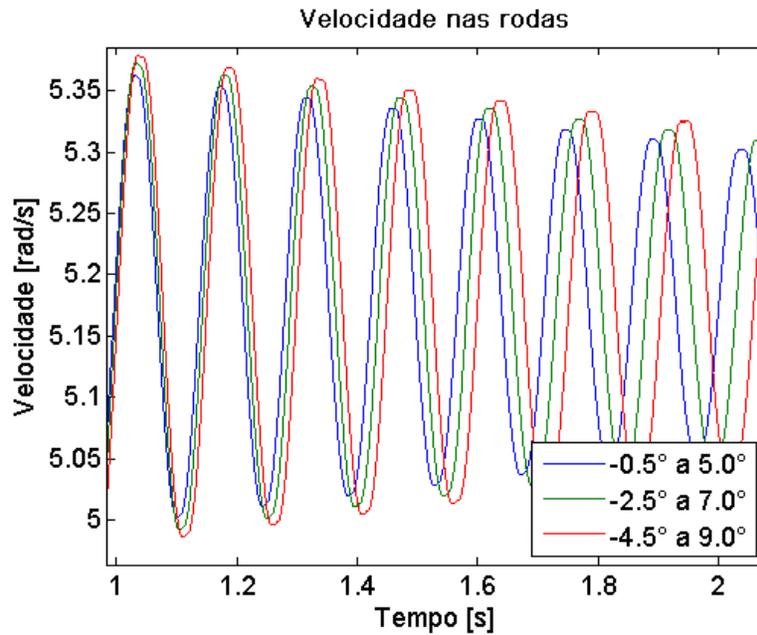


Figura 6.17: Velocidade angular simulada das rodas do veículo utilizando os discos de embreagem de 13 a 15.

pré-amortecimento a amplitude da resposta do veículo em *shuffle* também aumenta.

Para as próximas análises, é necessária a apresentação das respostas em velocidade do volante de inércia e da transmissão, que é feita na Figura 6.18.

Neste sistema mais elaborado também é possível verificar que existem os picos de curta duração na velocidade da transmissão, decorrentes da passagem do sistema pelo pré-amortecedor do disco de embreagem. Além disso, o sistema possui mais folgas do que o anterior, e é mais flexível, uma vez que são considerados mais engrenamentos não lineares. Por isso, pode-se observar que a velocidade destes dois graus de liberdade oscila em torno dos 130 *rad/s* após a aplicação dos dois pulsos de torque.

Para que seja possível verificar os instantes nos quais ocorrem os impactos entre os dentes, apresenta-se o gráfico da Figura 6.19, que é uma superposição entre a posição e a velocidade relativa entre o volante de inércia e a transmissão, e o da Figura 6.20, que é uma superposição das velocidades relativas entre os dentes de cada um dos pares engrenados deste modelo de trem de potência.

Comparando estes dois gráficos é possível observar que no momento em que o disco

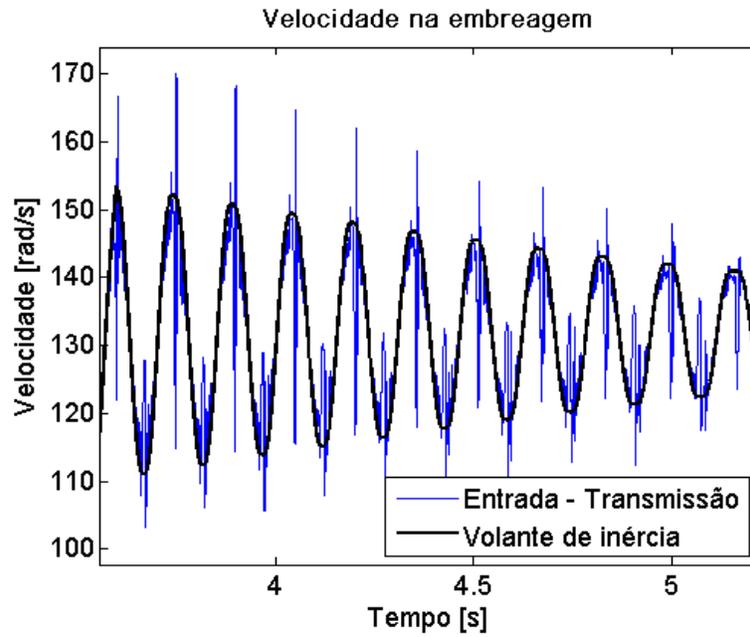


Figura 6.18: Velocidades angulares do volante de inércia e da transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e engrenamentos não lineares na caixa de marchas e no diferencial.

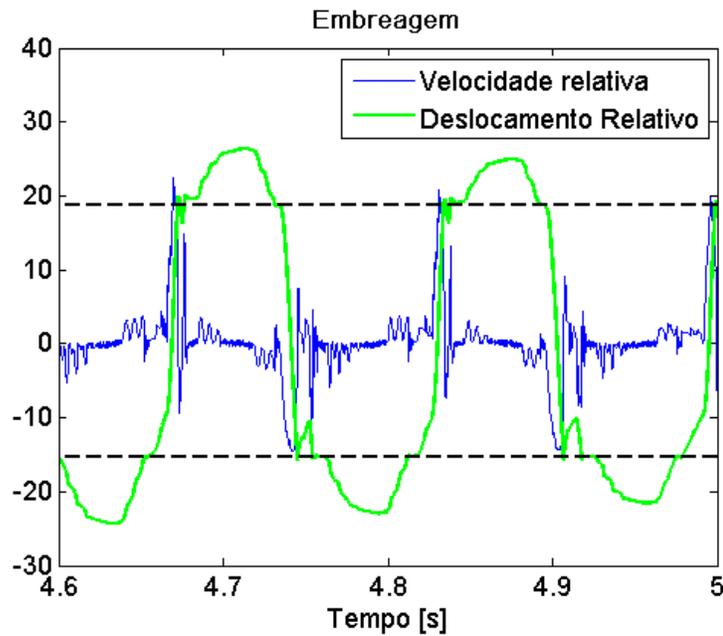


Figura 6.19: Sobreposição entre deslocamento e velocidade angular relativos entre o volante de inércia e a transmissão, obtidos utilizando o disco de embreagem 1 e o engrenamentos não lineares na caixa de marchas e no diferencial.

de embreagem transita do pré-amortecedor para o estágio de tração ou para o de retração, todos os engrenamentos presentes no trem de potência se impactam. Porém, estes impactos podem ou não gerar o ruído característico do fenômeno de *clunk*. Sabe-se que quanto maior a intensidade do impacto, maior a probabilidade de que este gere algum tipo de ruído, e por isso serão analisadas agora a severidade dos impactos e sua sensibilidade a alterações nos parâmetros do pré-amortecedor do disco de embreagem.

Para isto, será utilizada a mesma técnica apresentada na seção 6.3. Nos sinais de aceleração relativa entre os dentes dos pares engrenados é aplicada a técnica do RMS deslizante, e do sinal resultante são extraídos o valor máximo, o instante de tempo em que este valor ocorreu, a média e o desvio padrão do sinal. No sistema há cinco engrenamentos, mas dadas as condições iniciais utilizadas neste trabalho, e o grau de liberdade onde a excitação é aplicada, além de o veículo se deslocar em linha reta, a resposta das saídas direita e esquerda do diferencial são exatamente iguais, e por isso os dados obtidos da aplicação desta técnica são dispostos em apenas quatro tabelas.

A Tabela 6.4 apresenta os resultados obtidos para o par engrenado de entrada da transmissão, enquanto nas Tabelas 6.5, 6.6 e 6.7, estão os resultados obtidos para o par da saída da transmissão, para o par de entrada do diferencial e para suas saídas, respectivamente.

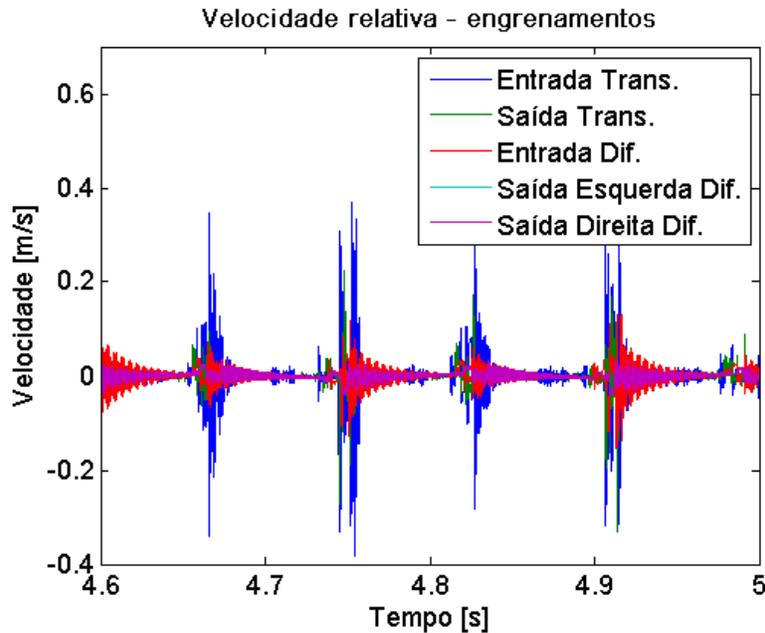


Figura 6.20: Velocidades relativas entre os dentes dos pares engrenados da transmissão e do diferencial.

Tabela 6.4: Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da entrada da transmissão.

	Disco	Pico [g]	Instante [s]	Média [g]	Desv. Pad. [g]
Variação da posição	1	280,89	1,40	24,21	37,05
	2	284,73	1,40	21,43	32,05
	3	251,15	1,32	18,50	27,70
	4	314,65	1,33	18,29	29,03
	5	224,51	3,47	15,85	24,90
	6	252,87	1,47	18,89	28,69
	7	255,62	1,47	22,23	32,37
Variação do atrito	8	310,13	1,33	29,77	37,84
	9	269,69	1,40	27,91	38,66
	10	255,47	1,54	21,20	34,72
	11	302,37	1,11	18,60	32,08
	12	244,41	2,13	15,58	26,47
Variação da largura	13	337,11	1,54	25,55	36,69
	14	306,27	1,63	15,72	31,08
	15	365,88	1,20	17,32	31,82

Analisando a Tabela 6.4, nota-se que os valores das acelerações de pico são muito mais elevados dos que os apresentados na Tabela 6.2. Isto se dá pelo fato de o sistema possuir mais engrenamentos, o que contribui para sua folga cumulativa, aumentando assim a intensidade dos impactos (KRENZ,1985). Nota-se também que quase todos os picos de impacto ocorreram após a aplicação do primeiro pulso de torque. Somente no sistema simulado com o disco 5, este pico ocorreu durante a aplicação do segundo pulso de torque.

Com relação à variação da posição do estágio de pré-amortecimento, o disco que na seção 6.3 obteve o melhor desempenho em amplitude de pico, nesta obteve o pior desempenho. Porém, o melhor desempenho neste quesito foi obtido pelo disco 5, que está deslocado  $0,75^\circ$  no sentido da retração. Isto indica que a severidade do impacto neste engrenamento depende fortemente da posição do pré-amortecedor, e conseqüentemente do ponto de operação do disco de embreagem.

Variando-se o torque de atrito do pré-amortecedor, percebe-se que há uma tendência de que a amplitude do pico mais severo diminua. Mesmo assim, como na seção anterior, a amplitude de pico para o sistema que continha o disco de embreagem 11 não seguiu esta

tendência. A média dos sinais de aceleração após a aplicação do RMS deslizante decresceu conforme o aumento deste parâmetro, o que indica uma redução no fenômeno de *clattering*, apresentado na seção 2.3.4.

Já analisando a variação da largura do pré-amortecedor, observa-se que a aceleração de pico é sensível a este parâmetro, uma vez que nesta análise tanto os discos com estágio central com largura menor do que o do disco de referência (disco 1) quanto os que possuíam este estágio mais largo obtiveram resultados piores neste quesito. Quanto às médias e desvios padrões, os discos com pré-amortecimento mais largo obtiveram melhor resultado, indicando que o aumento da largura deste estágio reduz a resposta do fenômeno de *clattering*.

Tabela 6.5: Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da saída da transmissão.

	Disco	Pico [g]	Instante [s]	Média [g]	Desv. Pad. [g]
Variação da posição	1	83,99	2,65	4,21	7,49
	2	43,80	5,11	3,63	5,25
	3	44,07	3,18	3,36	4,61
	4	39,85	3,42	3,26	4,36
	5	58,87	3,47	3,16	4,99
	6	57,49	2,60	3,49	5,51
	7	88,58	4,17	4,21	7,98
Variação do atrito	8	102,74	4,88	5,41	9,66
	9	109,58	4,73	4,87	9,21
	10	68,59	2,96	3,93	6,98
	11	56,59	4,47	3,51	6,13
	12	49,72	4,01	2,98	4,96
Variação da largura	13	77,01	2,79	4,41	7,65
	14	74,29	2,69	3,31	6,20
	15	76,92	2,26	3,55	6,14

Observando a Tabela 6.5 é possível afirmar que a amplitude dos picos de aceleração é muito menor se comparada às da entrada. Além disso, com exceção dos picos observados quando foram utilizados os discos 3, 4 e 5, que ocorreram durante a aplicação do segundo pulso de torque, os outros picos ocorreram em momentos que não estão relacionados ao início ou fim destes pulsos. Com isso, pode-se dizer que estas engrenagens se impactam, mas seus impactos não estão relacionados com o fenômeno de *clunk*.

Tabela 6.6: Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes do engrenamento da entrada do diferencial.

	Disco	Pico [g]	Instante [s]	Média [g]	Desv. Pad. [g]
Variação da posição	1	69,47	4,28	5,34	8,45
	2	48,92	4,62	4,55	6,72
	3	50,65	1,18	3,81	6,12
	4	42,59	1,33	3,61	5,91
	5	62,74	3,04	3,56	6,73
	6	53,09	2,61	4,21	6,96
	7	72,00	2,46	5,40	9,47
Variação do atrito	8	82,61	2,65	7,03	9,70
	9	77,60	4,43	6,00	9,23
	10	57,24	2,36	4,65	7,52
	11	51,63	1,25	4,30	7,26
	12	45,33	1,11	3,73	6,34
Variação da largura	13	63,64	3,96	5,53	7,96
	14	63,21	2,38	3,00	5,85
	15	64,47	2,27	3,87	7,26

Pode-se dizer o mesmo com relação ao engrenamento de entrada do diferencial. A amplitude dos picos máximos de aceleração observados não é tão grande quanto os da Tabela 6.4. Observa-se que quando foram utilizados os discos 3, 4, 11 e 12, os picos principais ocorreram logo após a aplicação do primeiro pulso de torque, e quando se utilizou o disco 5, este pico ocorreu logo após o início do segundo pico de torque. No restante das simulações, o instante no qual este pico ocorreu não é próximo do início ou do fim de qualquer um dos pulsos aplicados. Assim, os impactos deste engrenamento também não se relacionam ao *clunk*.

Finalmente, analisando a Tabela 6.7, referente aos resultados obtidos para os engrenamentos das saídas do diferencial, observa-se que as amplitudes dos picos máximos, bem como as médias das acelerações são baixas, se comparadas às vistas nas Tabelas 6.4, 6.5 e 6.6. Além disso, com exceção das situações onde se utilizava os discos 2, 3, 4 e 11, o momento nos quais estes picos ocorreram não se relacionam com os pulsos de torque aplicados no volante de inércia. Conclui-se então que há impactos entre os dentes deste par engrenado, mas eles não estão relacionados com o *clunk*.

Tabela 6.7: Dados obtidos a partir do RMS deslizante da aceleração relativa entre os dentes dos engrenamentos das saídas do diferencial.

	Disco	Pico [g]	Instante [s]	Média [g]	Desv. Pad. [g]
Variação da posição	1	31,24	4,44	2,86	3,70
	2	21,64	1,04	2,46	3,07
	3	21,54	1,04	2,12	2,73
	4	21,32	1,40	2,11	2,64
	5	18,28	3,33	1,97	2,56
	6	21,55	3,19	2,27	2,99
	7	27,07	2,31	2,73	3,94
Variação do atrito	8	31,11	4,88	3,57	4,14
	9	26,10	2,66	3,04	3,68
	10	23,48	2,66	2,61	3,44
	11	22,03	1,40	2,42	3,17
	12	23,30	2,90	2,18	3,23
Variação da largura	13	26,37	4,11	2,96	3,64
	14	22,78	2,85	2,03	2,87
	15	38,19	2,27	2,41	3,73

## 7 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e comentários finais deste trabalho, e as perspectivas para trabalhos futuros.

### 7.1 Conclusões e comentários finais

Os principais objetivos buscados neste trabalho foram a compreensão da dinâmica dos fenômenos de *shuffle* e *clunk*, e a verificação da influência dos parâmetros do pré-amortecedor do disco da embreagem em sua ocorrência. Para isso, foi adotada uma abordagem progressiva.

Primeiramente foram apresentadas as ferramentas necessárias à modelagem de sistemas lineares e não lineares, decorrente do uso do software *DTA*. Depois, foram apresentadas as possíveis modelagens para cada uma das partes do trem de potência, e finalmente foram propostos quatro modelos de trens de potência, sendo o mais simples totalmente linearizado, e o mais complexo com disco de embreagem, transmissão e diferencial não lineares.

Após a apresentação destes modelos, o Capítulo 4 deste trabalho foi dedicado exclusivamente à análise do modelo linearizado, pois apesar de ele ser simplificado, este é o procedimento mais utilizado pelos fabricantes de trens de potência e seus componentes. Além disso, esta análise trás informações muito importantes, mesmo para a interpretação dos resultados obtidos através de sistemas não lineares. Da análise linear observa-se que há alguns modos relacionados a fenômenos físicos, como o *shuffle* e o *rattle*. Em particular, estes dois modos são os mais sensíveis a alterações de rigidez no disco de embreagem. Finalmente, o modo de mais alta frequência encontrado neste modelo está associado à vibração somente no diferencial, o que confirma o conhecimento prático dos profissionais com quem se manteve contato.

Antes que fossem feitas as análises sobre os modelos não lineares, um capítulo foi dedicado à análises das não linearidades que foram utilizadas nos modelos mais refinados do trem de potência. Neste capítulo são analisados sistemas de um grau de liberdade, cada um

com uma das não linearidades consideradas. Na análise do disco de embreagem conservativo, conclui-se que o período de oscilação deste sistema não linear varia com as condições iniciais. Já na análise do disco de embreagem dissipativo é comprovado que, independente do modelo de dissipação de energia adotado, a frequência fundamental de oscilação livre deste sistema varia com o tempo. Para a análise dos modelos de engrenamento é utilizado o retrato de fase. A partir deste é possível comparar os modelos de engrenamento de *Kelvin-Voigt* e *impact damping*, e observar características como estabilidade, posição de equilíbrio e pontos onde as forças que atuam sobre o sistema são minimizadas.

Com base nas observações feitas nestes dois capítulos, no capítulo 6 são analisados três modelos de trens de potência, sendo o primeiro somente com o disco de embreagem não linear, o segundo com este disco e com engrenamentos não lineares apenas na transmissão, e o terceiro com o disco de embreagem e todos os engrenamentos, da transmissão e do diferencial, não lineares.

A partir da análise do primeiro modelo já é possível observar o fenômeno de *shuffle*, e também alguns picos pontiagudos na resposta em velocidade da entrada da transmissão, que suspeitava-se serem gerados por causa do *clunk*. Porém, provou-se que este fenômeno acontece simplesmente devido à presença do estágio de pré-amortecimento no disco de embreagem. Neste, o fenômeno de *shuffle* se mostrou sensível à largura deste estágio. O aumento de seu torque de atrito fez com que o fenômeno cessasse mais rapidamente, enquanto que sua posição não demonstrou influência significativa.

Adicionando os engrenamentos não lineares à transmissão, observou-se que o sistema se tornou mais flexível, e por isso, após a aplicação dos mesmos pulsos de torque aplicados no modelo anterior, este passou a oscilar em torno de uma velocidade mais baixa. As conclusões com relação ao *shuffle* foram as mesmas do modelo anterior. Porém, este permitia a análise da intensidade dos impactos entre os dentes dos pares engrenados, o que é um indicativo da ocorrência do *clunk*. Nesta análise concluiu-se que o par de engrenagens de entrada da transmissão é o mais propício à geração deste fenômeno. Além disso, o posicionamento e a largura do pré-amortecedor se mostraram parâmetros decisivos na severidade dos impactos, enquanto que o torque de atrito demonstrou efetividade na redução do *clattering*.

Finalmente, quando se analisou o modelo mais elaborado, com todos os engrenamentos da transmissão e do diferencial não lineares, foi observado que o modelo tornou-se ainda mais flexível, de maneira que após a aplicação dos pulsos de torque aplicados nos modelos

anteriores, este passou a oscilar em torno de uma velocidade ainda menor. As mesmas conclusões foram encontradas com relação ao fenômeno de *shuffle*. Com relação ao *clunk*, foi possível concluir que os impactos que mais propiciariam o surgimento deste fenômeno ocorreram novamente no par engrenado da entrada da transmissão. O posicionamento e a largura do pré-amortecedor se mostraram novamente muito influentes na intensidade destes impactos, enquanto que o torque de atrito se mostrou uma boa solução para a redução do *clattering*.

Com isto, acredita-se que os objetivos propostos para a dissertação de mestrado foram cumpridos integralmente e de forma satisfatória. Dois tópicos que se destacaram no conteúdo deste trabalho foram a formulação genérica para a remoção de meios graus de liberdade de sistemas lineares, facilmente adaptável para sistemas não lineares, que se mostrou inovadora e de grande utilidade para o funcionamento do *DTA*, e a identificação do par engrenado que propicia o ruído de *clunk*, ainda não feita por nenhum autor da área. Este trabalho contribui com a compreensão dos fenômenos físicos aqui estudados, e por isso fornece análises importantes para o projeto de embreagens. Além disso, mostra-se as vantagens e desvantagens da análise linear de trens de potência, e ressalta-se a importância do uso de modelos não-lineares.

## 7.2 Perspectivas futuras

Apesar do grande esforço realizado na execução deste trabalho, ainda há muito a ser pesquisado na área da dinâmica de trens de potência, e por isso apresenta-se aqui algumas perspectivas de trabalhos futuros.

- O estudo das propriedades do óleo lubrificante da transmissão: sabe-se que o óleo da transmissão exerce grande influência sobre os engrenamentos ali presentes. Além disso, suas características variam com a temperatura, velocidade, tensões de cisalhamento e envelhecimento do fluido. Portanto, a inclusão deste elemento se faz importante na dinâmica deste sistema.
- Modelamento matemático do motor: neste trabalho a excitação utilizada foram pulsos de torque ideais. Porém, por se tratar de um sistema não linear as características da excitação são muito importantes e fundamentais para a reprodução do fenômeno

observado na prática e validação ou melhoria dos modelos.

- O uso de ferramentas de identificação de modos operacionais: baseando-se em análises lineares já é possível a identificação de alguns modos que estão relacionados a fenômenos do trem de potência. Porém, ferramentas como a *ODS (Operating Deflection Shape)* podem ser aplicadas sem restrições a sistemas não lineares, e são capazes de identificar modos operacionais relacionados a estes fenômenos, o que seria fundamental para os estudos na área.
- Estudos na área de acústica: muitos dos fenômenos de *NVH* estão relacionados a ruídos, e nenhum dos modelos apresentados neste trabalho trata a emissão de som. Por isso, estudos nesta área, integrados com a dinâmica torcional de trens de potência podem trazer um grande avanço na solução destes problemas.
- Estudo do trem de potência como um sistema girante: sabe-se que o trem de potência é formado por muitos eixos e discos, e portanto é um sistema girante, porém, somente sua dinâmica torcional é estudada. Propõe-se então a modelagem deste sistema incluindo também os outros graus de liberdade de rotação e translação. Com eixos flexíveis, a distância entre os engrenamentos passa a variar, e estes fenômenos, apesar de relevantes, ainda não são considerados nesta área.
- Integração entre a dinâmica do trem de potência com a dinâmica veicular: com os modelos de diferencial desenvolvidos neste trabalho, já é possível simular um veículo realizando uma trajetória não retilínea. Com isso, é possível integrar a dinâmica do trem de potência com a dinâmica do veículo, para que se possa estudar juntamente fenômenos como por exemplo *squat/dive* e o *shuffle*.

## Referências

ALLEMANG, R.J. The Modal Assurance Criterion - Twenty Years of Use and Abuse. **Sound and Vibration**, 2003.

BALLUCHI, A. et al. Hybrid Models of an Automotive Driveline. Italia, Roma, 2005

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. Upper Saddle River, Ed. Prentice Hall, 1037p., 1996.

BAY, J.S. **Fundamentals of Linear State Space Systems**. Blacksburg, Ed. McGraw-Hill, 571p., 1999.

BIERMANN, J.W.; REITZ, A.; SCHUMACHER T. The clonk phenomenon - A load change reaction to be balanced in terms of comfort and engine response. **International Journal of Automotive Technology**, v.1, n.1, p.56-60, 2000.

BRANCATI, R.; ROCCA, E.; RUSSO, R. An analysis of the automotive driveline dynamic behaviour focusing on the influence of oil squeeze effect on the idle rattle phenomenon. **Journal of Sound and Vibration**. v.303, p.858-872, 2007.

COUDERC, P.H. et al. Vehicle Driveline Dynamic Behaviour: experimentation and simulation. **Journal of Sound and Vibration**. v.218, n.sv981808, p.133-157, 1998.

CROWTHER, A.R.; JANELLO, C.; SINGH, R. Quantification of clearance-induced impulsive sources in a torsional system. **Journal of Sound and Vibration**. v.307, p.428-451,

2007.

CROWTHER, A.R.; ZHANG, N. Torsional finite elements and nonlinear numerical modeling in vehicle powertrain dynamics. **Journal of Sound and Vibration**. v.284, p.825-849, 2005.

CROWTHER, A.R.; ZHANG, N.; SINGH, R. Development of a Clunk Simulation Model for a Rear Wheel Drive Vehicle with Automatic Transmission. **SAE Technical Paper**. v.1, n.2992, 2005.

DOGAN, S.N.; RYBORZ, J.; BERTSCHE, B. Rattling and clattering noise in automotive transmissions - Simulation of drag torque and noise. **Transient processes in tribology**, Stuttgart, Ed. Elsevier B. V., 2004.

DUAN, C.; SINGH R. Dynamic analysis of preload nonlinearity in a mechanical oscillator. **Journal of Sound and Vibration**. v.301, p.963-978, 2007.

GENTA, G. **Motor Vehicle Dynamics - Modeling and Simulation**. Londres, Ed. World Scientific Publishing, 519p., 2003.

GILLESPIE, T. D. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. Warrendale, SAE Inc.,1992.

GURM, J.S. et al. Transient Clunk Response of a Driveline System: Laboratory Experiment and Analytical Studies. **SAE Technical Paper**. v.1, n.2233, 2007.

HIBBELER, R. C. **Engineering Mechanics - Dynamics**. 11. ed. Nova Iorque : Prentice Hall, 2006. 736 p.

KIM, T.C.; ROOK, T.E.; SINGH, R. Effect of nonlinear impact damping on the frequency response of a torsional system with clearance. **Journal of Sound and Vibration**. v.281, p.995-1021, 2005.

KRENZ, R. A. Vehicle Response to Throttle Tip-in/Tip-out. **SAE Technical Paper** 850967, 1985.

LECHNER, G.; NAUNHEIMER H. **Automotive Transmissions: Fundamentals, Selection, Design and Application**. Berlin, Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 447p., 1999.

LIGIER, J.L.; BARON, E. **Acyclisme et Vibrations**. Paris, Ed. Technip, v.2, 880p., 2002.

MEIROVICH, L. **Computational methods in structural dynamics**. Alphen ann den Rijn, Ed. Sijthoff & Noordhoff International Publishers N. V., 439p., 1980.

MIMURA, K. **Differential Gear**. US Pat. 7.204.778 B1 abr. 2007. 6p.

MORAN, J.N.; SHAPIRO, H.N. **Fundamentals of Engineering Thermodynamics**. Chichester, Ed. John Wiley & Sons Ltd, 5 ed. 831p., 2006.

OH, W.; SINGH, R. Examination of Clunk Phenomena Using a Non-Linear Torsional Model of a Front Wheel Drive Vehicle with Manual Transmission. **Proceedings of the SAE** 2005-01-2291, 2005.

REITZ, A.; BIERMANN, J.W.; KELLY, P. Special test bench to investigate NVH phenomena of the clutch system. **Aachener Kolloquium Fahrzeug-und Motorentechnik**, 1999.

SARKAR, N.; ELLIS, R. E.; MOORE, T. N. Backlash Detection in Geared Mechanisms: Modeling, Simulation and Experimentation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.11, n.3, p.391-408, 1997.

SHABANA, A.A. **Vibration of Discrete and Continuous Systems**. Nova Iorque, Ed. Springer-Verlag New York Inc, 2 ed. 393p., 1997.

SHAVER, R. **Manual Transmission Clutch Systems**. Warrendale, SAE Inc.,1997.

SIMIONATTO, V.G.S. **Modelagem Torcional de Trens de Potência: Estudo analítico das condições de Shuffle e Clonk**. 2009, Trabalho de Graduação, Faculdade de Engenharia Mecânica - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

THEODOSSIADES, S. et al. Effect of a dual-mass flywheel on the impact-induced noise in vehicular powertrain systems. **IMechE**. v.220, p.747-761, 2006.