UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Kellen Aparecida Brol

Modelagem de Estrutura de Suporte

Campinas, 2011.

38/2011

Kellen Aparecida Brol

Modelagem de Estrutura de Suporte

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Campinas
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

	Brol, Kellen Aparecida
B787m	Modelagem de estruturas de suporte / Kellen Aparecida Brol. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.
	Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	1. Fundações. 2. Rotores - Dinâmica. 3. Engenharia - Modelos matemáticos. 4. Análise modal. I. Dedini, Katia Lucchesi Cavalca. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Modeling of support structures
Palavras-chave em Inglês: Foundations, Rotors - Dynamic, Engineering - Mathematical models, Modal analysis
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Auteliano Antunes dos Santos Júnior, Zilda de Castro Silveira
Data da defesa: 21/02/2011
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Modelagem de Estrutura de Suporte

Autora: Kellen Aparecida Brol
Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Katia Lucchesi Cavalca

Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Júnior
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Profa. Dra. Zilda de Castro Silveira
Universidade de São Paulo – USP/EESC

Campinas, 21 de fevereiro de 2011.

Dedico este trabalho a minha família (Elzidio, Claci, Keteren e Keila).

Agradecimentos

O meu agradecimento especial pela realização deste trabalho será dedicado as seguintes pessoas que foram importantes durante essa caminhada:

Agradeço primeiramente a Deus por estar presente em todos os momentos da minha vida, me inspirando e dando forças.

A minha família pelo amor, confiança e alicerce fundamental na formação do meu caráter. Pelo constante incentivo na realização dos meus objetivos pessoais. O amor e a união principalmente nos momentos que exigiram superação. Vocês são as pessoas mais importantes na minha vida, porque sem vocês a minha existência não seria completa.

A todos os profissionais e professores responsáveis pela minha formação pessoal e profissional por me orientarem e incentivarem. Aos colegas de laboratório e as amizades conquistadas durante o período do mestrado pela companhia e amizade.

A minha orientadora pela confiança, amizade e orientação na formação pessoal e acadêmica.

A todos vocês fica meu agradecimento.

“Não há sujeição tão perfeita quanto a que se conserva a aparência de vontade, subjuga-se à própria vontade”
(Rousseau).

Resumo

Uma máquina rotativa é composta por muitos componentes interconectados, que atuam em conjunto e a influência mútua ocasiona uma grande variedade de fenômenos durante seu funcionamento. Os modelos matemáticos visam simular o comportamento dinâmico destes sistemas, com o objetivo de representar uma condição real, e para ser útil na previsão da resposta do sistema. Esse tipo de informação pode ser aplicado na solução de problemas durante a fase de projeto, e, além disso, pode servir como entrada em modelos baseados nas técnicas de diagnósticos de falhas. Neste caso, um modelo computacional robusto permite um "design" otimizado, redução de custos e melhoria da confiabilidade. O objetivo deste trabalho é observar a influência da estrutura de suporte ou fundação no comportamento dinâmica de uma estrutura através dos métodos de impedância mecânica e coordenadas modais, sendo neste último caso, aplicando a redução modal e análise de sensibilidade qualitativa da mesma na influência da resposta dinâmica do sistema. A fundação é responsável pelo suporte do rotor, através da interconexão com os mancais. Os mancais transmitem à fundação, as forças causadas pelo movimento do rotor, como no desbalanceamento e vice-versa. Os modos de vibrar da fundação são excitados no intervalo de freqüência do rotor são também transmitidos através dos mancais de volta ao rotor. O método de coordenadas mistas usualmente considera o amortecimento estrutural proporcional e, portanto, ele representa o sistema em coordenadas modais desacopladas. Assim, foi verificada a igualdade entre os métodos de análise considerando todos os modos; para a combinação de modos reduzidos foi determinado o número mínimo de modos que representam a estrutura de suporte com amortecimento proporcional e não proporcional e a maneira como o amortecimento ficava acoplado ao sistema; e no caso do método das coordenadas mistas com uma fundação experimental de entrada, determinou-se o número mínimo de modos quando acoplados ou desacoplados ao sistema e tipo de amortecimento estrutural da fundação.

Palavras Chave: Fundações, Rotores – Dinâmica, Engenharia – Modelos Matemáticos, Análise Modal.

Abstract

A rotating machine is composed by many interconnected components that work together and therefore they influence each other causing a wide range of phenomena during operation. The mathematical models allow to simulate the dynamic behavior of these systems in order to represent the reality, and, then, to be useful in predicting the system response. Such information can be applied to solve problems during the design phase, and, moreover, it can be the input to model based on failure diagnosis techniques. In this case, a robust computational model also enables the design optimization, cost reduction and reliability improvement. The objective of this work is to observe the support structure, or foundation , influence in the dynamic behavior of a structure through the methods of mechanical impedance and modal coordinates, and in the latter case, applying the reduced modal and sensitivity analysis of the same qualitative influence on the system dynamics response. The foundation is responsible for supporting the rotor, through interconnection with the bearings. The bearings transmit the foundation forces caused by the rotor movement, as those due to the mass imbalance, and vice versa. The vibration modes of the foundation are excited in the rotor frequency range also transmitted through the bearings back into the rotor. The coordinate method usually considers the mixed proportional structural damping, and therefore it represents the system in modal coordinates uncoupled. Thus was established the equality between the analysis methods for all modes; for the reduced modes combination was determined the minimum modes number that represent the support structure with proportional damping and non-proportional damping and the way that was connected to the system; and in the case the mixed coordinates method with a experimental foundation input, it was determined the minimum modes number when coupled and uncoupled system and the type of foundation structural damping.

Key Words: Foundations, Rotors – Dynamic, Engineering – Mathematical Models, Modal Analysis.

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A - área da seção transversal do elemento

[A] - matriz adjunta

$\overline{A_{\Omega_{en}}}$ - média dos componentes imaginários (MQCI) da função de transferência na n-ésima freqüência de excitação (Ω_{en})

$\mathbf{B_i}$ - deslocamentos angulares do eixo Y

$\lfloor C_{ij} \rfloor$ - matriz de amortecimento do rotor (r) e dos mancais (f)

d - diâmetro do elemento

d_i - diâmetro interno

d_o - diâmetro externo do disco

E - módulo de elasticidade

$[E(\Omega_e, p)]$ - matriz elastodinâmica do sistema completo rotor-mancais-fundação

{F} - vetor de excitação externa que contém forças de desbalanceamento e a força peso

F_f - força transmitida pela fundação ao rotor através dos nós de conexão (mancais)

F_q - força generalizada atuando em q_i

F_r - força externa aplicado ao rotor devido ao desbalanceamento

$[G_E]$ - matriz giroscópica do elemento da viga

$[G_D]$ - matriz giroscópica do disco

$\mathbf{h_{kj}}$ - elementos da matriz de flexibilidade

$[H(\Omega_e, p)]$ - matriz de flexibilidade

I_{dx} - momento de inércia polar

I_{dy} - momento de inércia transversal ou diametral

$[I(\Omega_e, p)]$ - impedância mecânica

$[K_E]$ - matriz de rigidez do elemento da viga

$\lfloor K_{ij} \rfloor$ - matriz de rigidez do rotor (r) e dos mancais (f)

L_D - espessura do disco

L_e - comprimento do elemento

m - número de funções de transferência

$\boldsymbol{m_D}$ - massa do disco

$\mathbf{m_i}$, $\mathbf{c_i}$ e $\mathbf{k_i}$ - termos de massa generalizada, amortecimento modal e rigidez modal associadas a i-ésima freqüência natural da fundação

[M], **[C]**, **[K]** e **[G]** - matrizes globais de massa, amortecimento, rigidez e efeito giroscópico, respectivamente

$[\boldsymbol{M_f}]$, $[\boldsymbol{C_f}]$ e $[\boldsymbol{K_f}]$ - matriz de massa, amortecimento e rigidez da fundação, respectivamente

$[\boldsymbol{M_{DR}}]$ - matriz de inércia de rotação do disco

$[\boldsymbol{M_{DT}}]$ - matriz de inércia de translação do disco

$[\mathbf{M_E}]$ - matriz de inércia do elemento da viga composto pela matriz de inércia de translação e de rotação

$[\mathbf{m_f}]$, **$[\mathbf{c_f}]$** e **$[\mathbf{k_f}]$** - matrizes diagonais contendo os parâmetros modais de massa, rigidez e amortecimento da fundação

$\lfloor \mathrm{M}_{i\,j} \rfloor$ - matriz de massa do rotor (r) e dos mancais (f)

$[\mathrm{M}_R]$- matriz de inércia de rotação

$[\mathrm{M}_T]$ - matriz de inércia de translação

N - número de modos de vibrar

p - grau de liberdade

{q} - vetor de excitação externa que contém forças de desbalanceamento e a força peso

$\mathbf{q_h}$ e **$\mathbf{q_v}$** - coordenadas modais ou principais da fundação na direção horizontal e vertical, respectivamente

r - razão entre a velocidade de rotação do eixo e a primeira freqüência natural deste

Ri - função de dissipação de cada elemento *i*

Ti - energia cinética para cada elemento i

Ui - energia de deformação para cada elemento i

$\boldsymbol{V_i}$ e $\boldsymbol{W_i}$ - deslocamentos na direção horizontal *Y* e direção vertical *Z,* respectivamente

$\boldsymbol{V_p}$ - energia potencial

X, **Y** e **Z** - coordenada axial, transversal horizontal e vertical do sistema de referencial fixo

x, **y** e **z** - sistema de coordenadas do sistema de referencial rotacional

$\mathbf{x_k^i}$, $\mathbf{x_j^i}$ - componentes dos nós k e j relativas ao i-ésimo modo de vibrar da estrutura

$\mathbf{x_p}$ - vetor dos parâmetros modais

$\{X_f\}$ - vetor da coordenada dos deslocamentos da fundação, associados aos pontos de localização dos mancais

$\{X_r\}$ - vetor da coordenada dos deslocamentos do rotor

$\mathbf{Z_0}$ - vetor das coordenadas mistas

•••

Letras Gregas

$[\boldsymbol{\phi}]^t$ - transposta da matriz modal.

$\{\Psi\}_r$ - autovetores

$\boldsymbol{\Gamma_i}$ - deslocamentos angulares do eixo Z

$\boldsymbol{\Omega_e}$ - freqüência de excitação, neste caso, a freqüência de rotação do rotor Ω

$\boldsymbol{\zeta_i}$ - fator de amortecimento estrutural

$[\boldsymbol{\Phi_h}]$ e $[\boldsymbol{\Phi_v}]$ - matriz dos autovetores da fundação ou matriz modal da fundação na direção horizontal e vertical, respectivamente

$[\boldsymbol{\Lambda}]$ - matriz espectral

$[\boldsymbol{\phi}]$ - matriz modal ou matriz dos modos da fundação

α e β - amortecimento estrutural proporcional

ξ - fator de amortecimento

$\boldsymbol{\rho}$ - densidade do material

$\boldsymbol{\omega_n}$ - frequência natural do rotor

$\boldsymbol{\phi}$ - ângulo de rotação própria

•••

Subscritos

D - disco

E - elemento

f - fundação

h - horizontal

i - elemento

o - externo

R - rotação

r - rotor

T - translação

v - vertical

•••

Siglas

FRF - Função de Resposta em Freqüência

GDL - Graus de Liberdade

LAMAR - Laboratório de Máquinas Rotativas

LMARC - Laboratoire de Mécanique Appliqueé R. Chaléat

MODAN® - Software de Análise Modal

MQCI - Média Quadrática dos Componentes Imaginários

NASTRAN - Nasa Structural Analysis

Rotortest® - Software de Projeto e Análise de Máquinas Rotativas

•••

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As máquinas rotativas têm um papel vital nos sistemas de geração de energia elétrica com aplicações nos setores hidroelétricos, eólicos, termoelétricos e nucleares. Turbomáquinas de geração a gás, vapor ou ambos que se aplicam a usinas termoelétricas e nucleares, são formadas por turbinas horizontais de grande porte e transformam combustíveis (gás natural, derivados de petróleo, bagaço de cana, biogás, etc) em energia elétrica.

Essas turbinas horizontais apresentam componentes que interagem com o rotor e influenciam o comportamento dinâmico. Desta forma, é importante estudar a manifestação destes fenômenos neste tipo de máquina.

Máquinas rotativas são formadas por sistemas interconectados, que ao interagir geram uma variedade de fenômenos durante a condição operacional. Um modelo matemático visa representar um sistema real complexo, mas com algumas limitações físicas. Dessa forma, os modelos são úteis na simulação de um comportamento dinâmico e são ferramentas aplicadas na fase de projeto, com o objetivo de otimizar e reduzir custos do projeto, e prever falhas.

O modelo que será avaliado, considera a interação entre dois subsistemas: o subsistema rotor-mancal e o subsistema fundação. A fundação é responsável pelo suporte do rotor, através da interconexão com os mancais. Os mancais, por sua vez, transmitem os efeitos produzidos no rotor, como o desbalanceamento, para a fundação. A análise será realizada considerando dois métodos de análise para os sistemas: impedância mecânica e coordenada mistas.

O método da impedância mecânica é um método clássico, preciso e conhecido. Como aplica a inversão da matriz de flexibilidade, todos os modos que representam a estrutura precisam ser definidos, para que seja possível existir a inversa da matriz. Determina os parâmetros modais de uma estrutura aplicando coordenadas físicas em ambos os subsistemas: rotor-mancal e fundação. Posteriormente, a matriz de impedância mecânica é aplicada, para obter as funções de resposta em freqüência do sistema completo.

No entanto, existem algumas implicações que limitam a aplicação deste método, principalmente numa condição experimental. Existe a dificuldade de identificar todos os modos da estrutura, porque experimentalmente é difícil de obtê-los, principalmente devido ao alto custo da medição que inclui os equipamentos, pois é necessário medir termo por termo da matriz da flexibilidade. Há também a dificuldade de se posicionar o ponto de medição na estrutura, devido a sua configuração física. Ainda assim, em uma condição teórica, os modos de uma fundação poderiam ser determinados por uma modelagem de elementos finitos. Mas, conforme a complexidade envolvida da estrutura, o custo da modelagem e computacional poderia ser muito elevado.

Uma alternativa proposta por CAVALCA (1993) foi a utilização do método das coordenadas mistas. O subsistema fundação utiliza a coordenada modal ou generalizada e o subsistema rotor-mancal utiliza a coordenada física. Desta forma, não apresenta as dificuldades citadas do método anterior porque só aplica os modos identificados na medição experimental, independente do número de modos totais.

O objetivo geral deste trabalho é verificar o comportamento da fundação com parâmetros conhecidos através dos métodos de solução de impedância mecânica e coordenadas mistas e aplicar redução modal no método de coordenadas mistas realizando uma análise de sensibilidade. Assim, o objetivo geral pode ser fragmentado nos seguintes tópicos.

Verificar se os resultados obtidos com um modelo teórico conhecido, sistema massa-mola-amortecedor para fundação, serão os mesmos para o método de impedância mecânica e coordenadas mistas, que deve conter todos os modos. Todos os modos são conhecidos e foram obtidos analiticamente. O sistema é composto por um eixo suportado por dois mancais, cada mancal apresenta restrição (sistema massa-mola-amortecedor) na direção horizontal e vertical.

Contudo, mesmo que o método das coordenadas mistas só aplique os modos identificados, o questionamento está em quantos modos realmente são significativos pra representar o sistema completo em uma condição mais aproximada do método de impedância mecânica, sem que haja perda de informação. Para uma condição teórica, o modelo cujos modos são conhecidos pode fornecer os modos mais significativos, avaliando a influência da retirada dos mais fracos na condição avaliada, através da seleção dos modos.

Assim, complementando esse estudo procura-se reduzir o número de modos e fazer uma análise de sensibilidade, a partir da seleção dos modos na condição teórica. Para fazer a seleção dos modos, uma ferramenta de seleção de modos foi elaborada, através da técnica da média quadrática dos componentes imaginários (MQCI).

Dessa forma, o método das coordenadas mistas foi aplicado em numa condição experimental, de modo a obter o amortecimento estrutural da bancada. O experimento foi realizado. O banco de ensaio utilizado foi validado experimentalmente, mancais e rotor, em trabalhos anteriores como Castro (2007), Okabe (2007) e Cavalcante (2001).

Os dados obtidos experimentalmente foram avaliados com o pacote de análise modal, Modan®. O Modan® utiliza o método de seleção *global ranke,* que apresenta características muito aproximadas do MQCI.

Os dados experimentais da fundação foram aplicados como entradas para o subsistema fundação em coordenada modal. O subsistema rotor-mancal será modelado teoricamente, em coordenada física através do software Rotortest® (TUCKMANTEL, 2010). Foi realizada uma análise e determinado o número mínimo de modos, que representam a fundação com modos acoplados e desacoplados. Bem como, o tipo de amortecimento estrutural da fundação.

As figuras 1.1 e 1.2 apresentam os diagramas esquemáticos da avaliação teórica e experimental realizadas neste trabalho. A figura 1.3 permite esclarecer nos modelos, quais coordenadas foram adotadas em cada caso, assim como os programas utilizados e desenvolvidos.

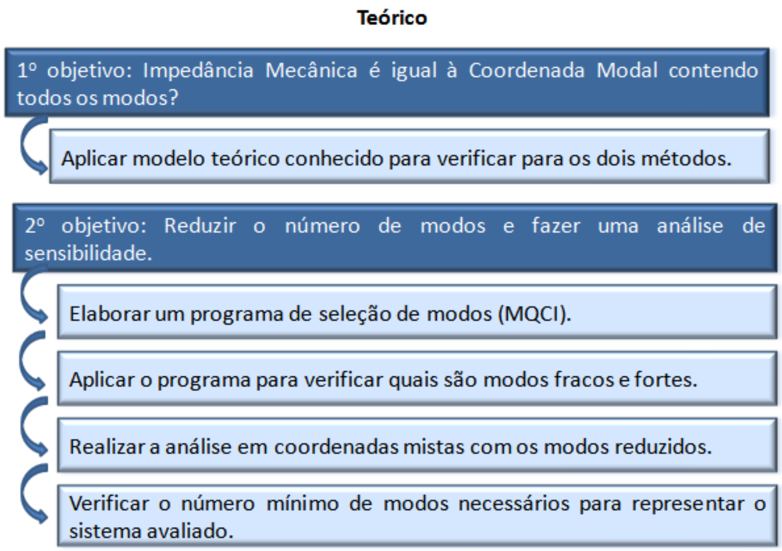

Figura 1.1 – Etapas da avaliação teórica.

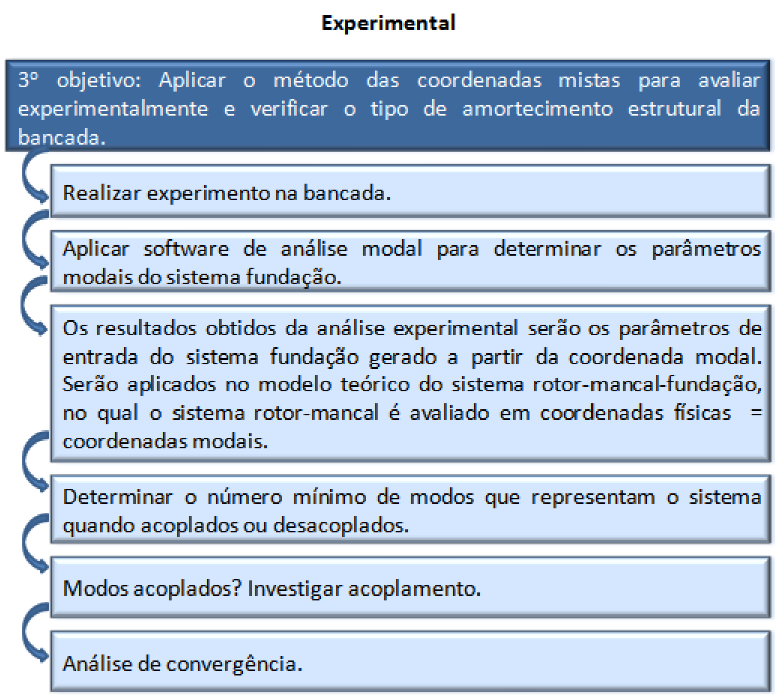

Figura 1.2 – Etapas da avaliação experimental.

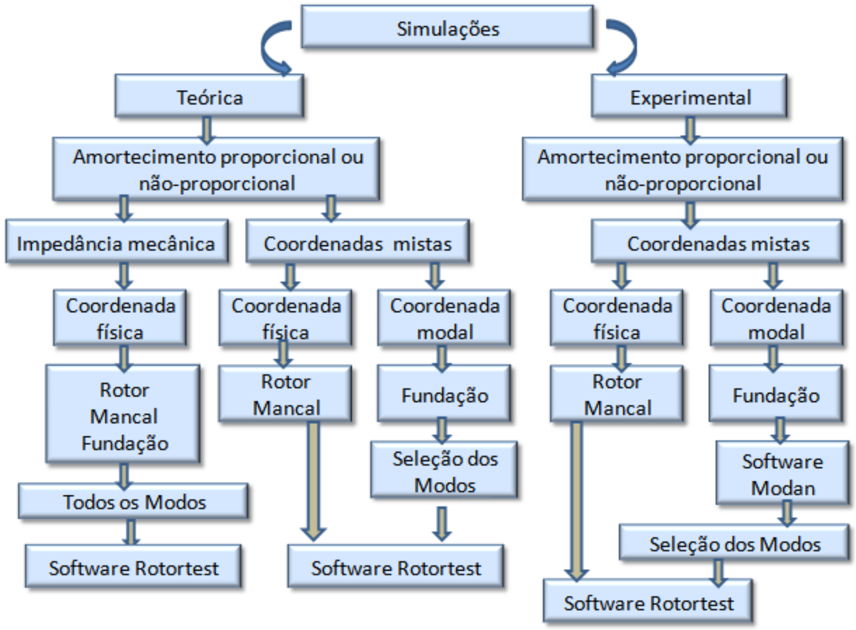

Figura 1.3 – Sistemas de coordenadas adotados e softwares.

1.1 Justificativa e objetivo do trabalho

O comportamento dinâmico das máquinas rotativas é influenciado significativamente pelo comportamento de uma fundação flexível. A fundação deve ser estudada, de modo que os limites de vibrações aceitáveis sejam estimados com o objetivo de reduzir a energia transmitida ao solo. (MAKRIS et al., 1997)

O objetivo deste trabalho é avaliar o comportamento da fundação modelada com parâmetros do sistema conhecidos através de dois métodos de solução: impedância mecânica e coordenadas mistas e aplicar a redução modal para o caso de coordenadas mistas com amortecimento proporcional. Sendo assim, os objetivos específicos são:

- Verificar se o resultado obtido da simulação através do método da impedância mecânica é igual à coordenada mista contendo todos os modos, no caso teórico, com um modelo cujos parâmetros são conhecidos;

- Reduzir para o caso teórico o número de modos, através do emprego de um software de seleção dos modos desenvolvido para esse trabalho e fazer uma análise de sensibilidade;

- Aplicar o método das coordenadas modais nos dados experimentais da fundação e verificar o tipo de amortecimento estrutural da bancada observado pelo acoplamento dos modos.

1.2 Descrição do trabalho e dos capítulos

A presente dissertação é composta por sete capítulos e anexo. O conteúdo de cada capítulo e do apêndice são descritos abaixo.

O capítulo 1 apresenta o objetivo do trabalho e a visão geral do tema desenvolvido nesta dissertação de mestrado.

O capítulo 2 dispõe uma revisão bibliográfica acerca do histórico do desenvolvimento da modelagem das estruturas de suporte, fundações e da sua influência no comportamento dinâmico das máquinas rotativas.

O capítulo 3 aborda a modelagem matemática adotada na solução deste trabalho. Inicialmente, contextualiza o método de elementos finitos que será aplicado no sistema rotor-mancal-fundação. Apresenta a modelagem de um rotor Jeffcott e a influência do desbalanceamento, causa comum de fonte de excitação externa. O equacionamento da modelagem completa do sistema rotor-mancal-fundação é realizado pelos métodos de impedância mecânica e coordenadas mistas com amortecimentos proporcional e não-proporcional. Nas coordenadas mistas, o subsistema fundação é representada pelo método de coordenadas modais ou principais e o subsistema rotor-mancal pelas coordenadas físicas.

O capítulo 4 descreve o modelo teórico do sistema e o equacionamento do sistema massa-mola-amortecedor aplicado no subsistema fundação pelos métodos de coordenadas mistas, avaliando a coordenada modal, e para impedância mecânica nos casos de amortecimento proporcional e não-proporcional. Posteriormente, é descrito o método de seleção dos modos para coordenadas modais na fundação.

O capítulo 5 contém os resultados obtidos do modelo teórico. Os parâmetros aplicados nos coeficientes dos modelos foram ajustados para serem inseridos no modelo do subsistema fundação, assim, o sistema tem parâmetros previamente conhecidos. O subsistema rotor-mancal foi realizado teoricamente através do software Rotortest®. A seqüência de montagem e integração dos dois subsistemas é apresentada. Em seguida, as respostas em freqüência do rotor são expostas com a fundação modelada com amortecimento proporcional, modos desacoplados, para os casos de impedância mecânica e coordenadas modais, neste último caso, contendo todos os modos e os modos reduzidos. Assim como, impedância mecânica e coordenadas mistas com amortecimento não-proporcional, modos acoplados fracamente.

O capítulo 6 apresenta os resultados com os dados do subsistema fundação obtidos experimentalmente. Na análise foi aplicado o software de análise modal Modan®. O experimento de medição é descrito e a forma de seleção dos modos experimentais. Posteriormente, aplica-se o método das coordenadas mistas nos modos acoplados e desacoplados. E verifica o tipo de amortecimento existente na fundação.

O capítulo 7 contém as observações, as conclusões finais da dissertação e as sugestões de trabalhos futuros.

Por último, no apêndice é avaliado o efeito do amortecimento estrutural para os casos proporcional e não-proporcional, assim como, a ortogonalização dos modos e a normalização dos modos pela matriz de massa.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A fundação é a estrutura responsável pela sustentação do rotor. O elemento que faz a interface de conexão entre a fundação e o rotor é o mancal. Durante o movimento de rotação do rotor, forças como as de desbalanceamento são transmitidas à fundação. No entanto, devido à presença dos mancais, a fundação interfere na resposta do rotor. A influência da fundação depende do seu amortecimento e da sua rigidez. Se a mesma for de rigidez elevada, será considerada infinita.

Para caracterizar o comportamento da fundação e compreender a interação que este elemento apresenta num sistema composto por eixo, rotor e mancais, diversos autores se dedicaram a essa tarefa. Serão apresentados a seguir alguns dos principais responsáveis por essa análise.

2.1 Modelos da fundação

Weber (1961), com o intuito de compreender o comportamento de uma fundação, aplicou o método da matriz de transferência em um modelo de duas vigas com rotor e fundação de mesa. Obteve assim, uma combinação do comportamento vibratório do rotor e da fundação e demonstrou a influência da estrutura de suporte.

Poulos (1968) utilizou a teoria da elasticidade para avaliar o comportamento de um pilar simples e, posteriormente, aplicou o estudo na avaliação de um grupo de pilares e a interrelação entre os mesmos. Em função da limitação de técnicas na análise modal e do custo operacional, Sloane em (1975) aplicou uma solução analítica que utiliza a transformada de Laplace na análise de funções de transferência medidas na estrutura, sem necessidade do conhecimento das propriedades modais da estrutura.

Wilson e Brebbia (1971) representaram o comportamento de fundações de aço em máquinas rotativas. Aplicaram o método de elementos finitos para obter as matrizes de rigidez e massa e, conseqüentemente, calcularam as freqüências naturais e os modos de vibrar com o uso dos auto-valores e auto-vetores.

Morton (1972) representou um modelo matemático cujo rotor estava suportado por vários mancais com acoplamentos entre os movimentos horizontais e verticais dos mesmos. Os termos dos coeficientes de rigidez e amortecimento lineares do filme de óleo dos mancais hidrodinâmicos foram incorporados ao sistema e a estrutura de suporte foi representada pelo sistema massa-mola.

Gasch (1976) representou as matrizes de rigidez dinâmica obtidas através da inversão da soma das matrizes de receptância dos deslocamentos horizontais e verticais da fundação obtidas, experimentalmente.

Diana e Bachschmid (1978) propuseram uma metodologia para solucionar a interação entre o eixo de uma bomba centrífuga e sua fundação de concreto. Constataram a importância e a influência da fundação no comportamento do rotor na determinação da velocidade crítica. As forças exercidas pela fundação foram descritas em função da velocidade de rotação do eixo e das impedâncias mecânicas da fundação. Assim, quando não se dispõe de um modelo numérico adequado da estrutura, é possível determinar a impedância mecânica experimentalmente excitando os pontos de conexão com o rotor. No entanto, nem sempre era possível obter o número de medições necessários para a obter as impedâncias mecânicas porque as estruturas apresentam limitações físicas.

Aboul-Ella e Novak (1980) propuseram uma fundação composta por um grande número de pilares encravados no solo que influenciavam na resposta dinâmica da fundação e dos rotores. A análise do sistema completo foi avaliada em subsistemas e aplicou-se o método de elementos finitos na obtenção da matriz de rigidez.

Até então, as funções de impedância mecânica representavam a fundação completa com o efeito da interação solo-pilar-fundação. No entanto, Chen et al. e Bachschmid et al. (1982) aplicaram ferramentas computacionais para calcular as freqüências naturais do sistema amortecido e da fundação para o sistema completo ou subdividido. Uma formulação simples estimava os valores de rigidez e de amortecimento do solo e dos pilares e as freqüências naturais do sistema, na faixa de velocidade de operação do rotor, foram solucionadas com os critérios de freqüência e das amplitudes.

Aneja (1982) e Jainski (1982) avaliaram o efeito das fundações flexíveis para grandes turbogeradores. A fundação foi analisada com a técnica de elementos finitos através do software NASTRAN (Nasa Structural Analysis). Os parâmetros do modelo foram obtidos com um modelo físico.

Beolchini (1982) propôs um sistema de parâmetros de massa e realizou uma análise paramétrica para demonstrar a influência dos parâmetros da fundação.

Nordmann (1982) introduziu melhorias na análise modal clássica. Investigou os parâmetros modais, assim como auto-valores e freqüências naturais de um eixo simples, considerando efeitos peculiares do sistema rotativo (matrizes não simétricas e velocidade dependente dos parâmetros modais). Uma combinação dos métodos experimental e analítico foi usada para identificar esses parâmetros e uma análise de sensibilidade, aplicada ao estudo da influência dos parâmetros dinâmicos do rotor.

Curami e Pizzigoni (1985) determinaram os parâmetros modais da fundação com amortecimento proporcional através de técnicas de análise modal e aplicaram as funções de transferência da estrutura obtidas no modelo de elementos finitos.

Cheli et al. (1987) desenvolveu uma metodologia para cálculo dos parâmetros modais da fundação e descreveu os deslocamentos em coordenadas principais. A fundação é descrita com a matriz de impedância mecânica que relaciona os deslocamentos dos nós de conexão com as forças transmitidas pela fundação nestes nós. Foi possível simular o sistema completo, rotor-suportes-fundação, pois identificaram os parâmetros modais da fundação (massa, rigidez e amortecimento).

Crags (1987) propôs um método de montagem do sistema completo de um turbo-gerador. A fundação e os mancais hidrodinâmicos foram representados por coordenadas generalizadas e acopladas ao eixo pelos nós de conexão. O modelo do rotor por elementos finitos agregou-se ao uso das coordenadas generalizadas que contém os modos mais significativos. Desta forma, é possível calcular os deslocamentos das coordenadas de interesse.

Diana et al (1988) por intermédio das medições das vibrações dos mancais, calcularam os parâmetros modais da fundação, minimizando as funções das derivadas da resposta experimental e analítica do sistema completo, e representou a fundação com a matriz de impedâncias mecânicas.

Subbiah e Rajakumar (1990) analisaram o efeito das deformações na estrutura de suporte e as conseqüentes tensões internas ocasionadas nas máquinas e como os modos de vibrar da fundação afetam as máquinas rotativas.

Zheng, Zhao-Chang, Wu e Nan-Ping (1990) avaliaram o comportamento dinâmico do sistema rotor-fundação-solo com amortecimento proporcional. Os parâmetros de rigidez e amortecimento da fundação incluíram os parâmetros do solo e dos pilares.

Aljanabi et al (1990) discretizou o modelo da fundação com elementos de viga que consideravam as deformações tangenciais para determinar a matriz de rigidez exata, pois foi possível investigar os efeitos das reações e dos momentos de uma viga com carregamento vertical e/ou vertical e horizontal.

Lee (1991) introduziu os testes modais complexos para máquinas rotativas e comparou o modelo clássico de análise modal baseado na notação complexa. Este método permite distinguir os modos diretos e retrógrados e, assim, separá-los no domínio da freqüência. Desta forma, os parâmetros modais e adjuntos podem ser identificados.

Sargand e Shad (1992) analisaram as vibrações livres da viga de Timoshenko para fundações elásticas em um modelo bi-paramétrico na estrutura de suporte. A taxa de decaimento dos deslocamentos da fundação, geralmente constante, variaram e dependeram de parâmetros da fundação como freqüência natural e dos modos de vibrar da fundação.

Stephenson e Rouch (1992) adicionaram os efeitos da fundação no modelo da máquina rotativa com o uso dos parâmetros modais. A FRF da estrutura de fundação foi medida e a massa, o amortecimento e a rigidez da fundação foram calculados através da análise modal. Esse método apresenta o inconveniente de necessitar de uma matriz quadrada de auto-vetores para ser invertida. Sendo assim, quando o número de modos identificados for menor que o número de pontos medidos, modos fictícios precisam ser criados.

Cheli et al (1992), Feng e Hahn (1994), com base nos parâmetros modais, consideraram o efeito da fundação na resposta vibracional do sistema, calculados com termos modais da estrutura para descrever o comportamento da estrutura de suporte e a resposta do rotor em função de coordenadas físicas.

Cavalca (1993) aplicou o método das coordenadas mistas para incluir o efeito da fundação nos rotores. As coordenadas físicas são utilizadas no rotor e as coordenadas modais na fundação. Esse método não necessita da inversão da matriz de flexibilidade para obter a matriz de impedância mecânica da fundação. Portanto, não exige a inversão da matriz dos auto-vetores para o cálculo do sistema.

Dedini e Cavalca (1993) e Dedini e Cheli (1994) propuseram uma metodologia de otimização de funções objetivo na determinação dos parâmetros modais da fundação, definidas através da resposta do rotor ou do suporte nos pontos de conexão.

Makris (1994) analisou a resposta do sistema solo-pilares-estrutura e a interação entre seus elementos. Aplicou um modelo estrutural de 6 graus de liberdade com o método de cálculo já existente das impedâncias mecânicas. Considerou a impedância dos pilares da fundação dependente da freqüência para prever a resposta da estrutura.

Feng e Hahn (1995) aplicaram medições de uma máquina rotativa desbalanceada e suportada por mancais. Somente as características dos mancais e as medidas dos deslocamentos do rotor e da fundação nos pontos de conexão e nas freqüências selecionadas são utilizadas. Esse método não necessita no modelo apurado do rotor e da distribuição do desbalanceamento.

Weiming, Liu e Novak (1995) determinaram o comportamento da interação do sistema turbina-gerador-fundação com um método híbrido. Smart (1996) estimou os parâmetros modais da fundação de um turbo-gerador montado sobre uma fundação flexível. Os parâmetros são obtidos com um modelo de rotor definido e com as medidas dos deslocamentos dos mancais. Smart (1998), em seguida, determinou um modelo de rotor refinado com modelo de mancais desconhecidos. A contribuição do modelo completo utilizava de estimativa um modelo de fundação real para estabelecer a matriz de rigidez dinâmica com medições de excitação e resposta.

Feng e Hahn (1998) e (2001) relacionaram a função de transferência do sistema com a matriz de rigidez dinâmica da fundação através de uma transformação dependente apenas do rotor e dos mancais. Assumiram a localização dos eixos principais de inércia da fundação e as forças transmitidas entre rotor e fundação são expressas em função dos deslocamentos relativos entre rotor e fundação nos pontos de conexão. Os parâmetros modais foram identificados com base nas coordenadas do centro de massa da carcaça do rotor.

Cavalca et al.(2005) analisou a influência da fundação no sistema rotor-mancais-fundação e comparou a resposta do sistema rotor-mancal com o sistema rotor-mancais-fundação. Aplicaram um modelo de elementos finitos ao rotor e um modelo experimental na fundação.

Okabe (2007) avaliou os efeitos da fundação e dos mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de uma máquina rotativa. A fundação foi analisada experimentalmente e os parâmetros modais obtidos da análise modal das funções de resposta em freqüência. Aplicou o método de coordenadas mistas proposto por Cavalca (1993) para incorporar a fundação no sistema rotor-mancais. Realizou a análise modal complexa no sistema rotor-mancais-fundação e avaliou a influência dos efeitos da fundação na resposta do rotor.

O sistema rotor-mancal-fundação é um modelo mais complexo com um número de graus de liberdade maior. O método de coordenadas mistas visa reduzir o número dos graus de liberdade com técnicas de aproximação modal sem reduzir a representatividade dos resultados. Consideram-se apenas os modos de vibrar mais significativos na faixa de freqüências do rotor, os graus de liberdade relacionados aos modos mais significativos são transformados para coordenadas principais, que assim, representam diretamente esses modos. Os parâmetros modais são obtidos da análise modal. O sistema completo é representado em coordenadas mistas, sendo as coordenadas principais para o sistema fundação e as coordenadas físicas para o sistema rotor-mancais. As coordenadas principais possibilitam a diagonalização das matrizes de massa, rigidez e amortecimento da fundação para amortecimento proporcional. O sistema completo é subdivido em dois subsistemas (rotor-mancais e fundação) e são analisados separadamente. A resposta do sistema total é obtida da integração destes subsistemas.

Um sistema rotativo pode ter o movimento de precessão na mesma direção do movimento de rotação sendo neste caso, direto ("foward") ou em direção oposta, retrógrado ("backward"). Esse movimento definirá o comportamento vibratório do rotor. Uma formulação direcional é utilizada na análise modal para determinar os modos de precessão com as respostas separadas para as duas direções no domínio da freqüência. O movimento retrógrado pode existir em resposta a anisotropia do sistema e deve ser previsto, pois gera variações alternadas do estado de tensões do eixo, ocasionando assim, fadiga. Santana (2010) analisou a influência do grau de anisotropia dos mancais e da estrutura de suporte no movimento de precessão retrógrado. Concluiu que a anisotropia dos mancais influencia nos modos retrógrados do movimento de precessão dos mancais hidrodinâmicos constituído de excitação harmônica como desbalanceamento. O sistema rotor-mancais-fundação mostrou que a flexibilidade da fundação pode aumentar a rigidez e os modos de flexão da resposta do sistema e, conseqüentemente, aumenta o grau de anisotropia do sistema, uma vez que pode causar modos retrógrados em uma certa faixa de freqüência. A fundação é, neste caso, a maior fonte de modos de precessão retrógrados que os mancais. Ainda é possível encontrar, nos mancais anisotrópicos, algumas freqüências nas quais o disco tem movimento de precessão direto e o eixo, nos mancais, movimento de precessão retrógrado, que ocasiona elevadas tensões que podem causar trincas e submete o material ao processo de fadiga.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Os modelos de sistemas rotativos avaliam as interações entre os componentes ou subsistemas como o eixo, rotor, acoplamentos, selos de fluxo, mancais e fundação. O método de elementos finitos é amplamente aplicado na análise dinâmica de rotores devido aos bons resultados obtidos deste método de análise, que tem por objetivo discretizar um sistema contínuo, aproximando-o da condição real de operação. Discretiza-se o eixo em um conjunto de elementos de viga que, individualmente são tratados como contínuos. Relaciona-se o deslocamento de qualquer ponto do sistema contínuo em termos de deslocamentos de um conjunto finito de pontos.

A seguir, descreve-se a maneira utilizada para discretizar o sistema rotativo com composição típica de eixo, rotor e mancais. Assim como, a descrição do rotor Jeffcott e a força de desbalanceamento.

3.1 Elementos finitos

Nelson (1980) modelou por elementos finitos um sistema com configuração típica representada na figura 3.1.

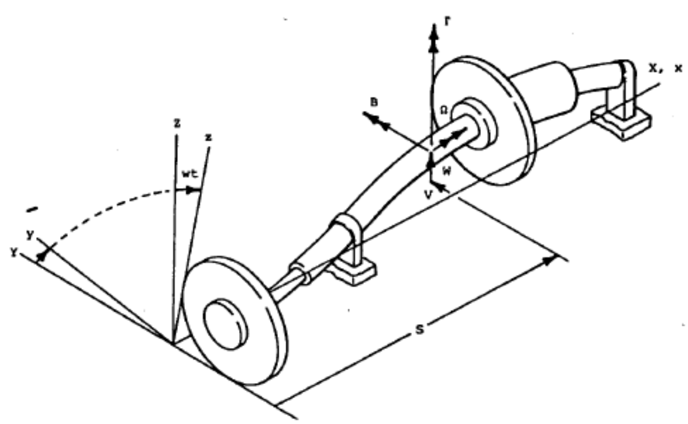

Figura 3.1 – Sistema rotativo – coordenadas aplicadas ao sistema (NELSON E McVAUGH, 1976).

O sistema de referência inercial XYZ (F) apresentado na Figura 3.1 é o adotado neste trabalho, nos quais os eixos X, Y e Z são respectivamente o axial, o transversal horizontal e o transversal vertical. O sistema de referencial rotacional xyz (R) é definido em relação ao referencial fixo (F) pela rotação ωt ao redor do eixo X, sendo ω a velocidade de rotação do rotor (rotação de precessão) tendo em vista que os eixos X e x são colineares e coincidentes com a linha de centro do rotor não-deformado.

No caso de pequenas deformações transversais, os deslocamentos angulares (B_i, Γ_i) são aproximadamente colineares com os eixos Y e Z. Portanto, o ângulo de rotação própria ϕ, no caso de velocidade do sistema constante e deformação torsional despresível, é Ωt sendo Ω a velocidade de rotação própria do rotor.

Os deslocamentos relativos do sistema de coordenadas físicas ou graus de liberdade (V_i, W_i, B_i, Γ_i) da secção transversal a F são transformados para deslocamentos relativos ao sistema de coordenadas rotacional (v_i, w_i, β_i, γ_i) pela matriz de transformação [R] representada a seguir:

$$\{q\} = [R]\{p\} \tag{3.1}$$

Ou seja,

$$\begin{Bmatrix} V_i \\ W_i \\ B_i \\ \Gamma_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega t & -sin\omega t & 0 & 0 \\ sin\omega t & \cos\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\omega t & -sin\omega t \\ 0 & 0 & sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ w_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{Bmatrix} \tag{3.2}$$

Os graus de liberdade V_i e W_i são os deslocamentos na direção horizontal *Y* e direção vertical *Z*, respectivamente. B_i e Γ_i são os deslocamentos angulares dos eixos *Y* e *Z*, respectivamente. Essa condição também é valida para os graus de liberdade de {p} referentes ao sistema de coordenadas rotacional *R*.

As derivadas de primeira e segunda ordem são:

$$\{\dot{q}\} = \omega[S]\{p\} + [R]\{\dot{p}\} \tag{3.3}$$

$$\{\ddot{q}\} = [R](\{\ddot{p}\} - \omega^2\{p\}) + 2\omega[S]\{\dot{p}\} \tag{3.4}$$

Na qual,

$$[\mathrm{S}] = \frac{1}{\omega}[\dot{\mathrm{R}}] = \begin{bmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 & 0 \\ \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\omega t & -\cos\omega t \\ 0 & 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Para efeitos de modelagem através do método dos elementos finitos, o sistema contínuo é dividido em um número finito de elementos, os quais são conectados entre si por nós. Desta forma, pode-se determinar a energia cinética (*Ti*), energia de deformação (*Ui*) e função de dissipação (*Ri*) de cada elemento *i*, em função dos deslocamentos dos nós em sua fronteira. Portanto, para uma estrutura com N elementos, a soma das energias de cada elemento determina a energia estrutural global.

$$T_c = \sum_{i=1}^{N} T_i \qquad U = \sum_{i=1}^{N} U_i \qquad R = \sum_{i=1}^{N} R_i \tag{3.6}$$

A energia cinética, a energia de deformação e a energia de dissipação globais são,

$$\mathrm{T_c} = \frac{1}{2}\{\dot{\mathrm{q}}\}^{\mathrm{T}}[\mathrm{M}]\{\dot{\mathrm{q}}\} \qquad U = \frac{1}{2}\{q\}^T[K]\{q\} \qquad R = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T[C]\{\dot{q}\} \tag{3.7}$$

As matrizes são obtidas a partir da aplicação da Equação de Lagrange (Equação 3.8) nos elementos de viga e de disco. Essa metodologia foi proposta por diversos autores como Lallane e Ferraris (1998).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T_c}{\partial q_i} + \frac{\partial V_p}{\partial q_i} = Fq_i \tag{3.8}$$

sendo,

T_c energia cinética;

V_p energia potencial (somatório da energia de deformação);

q_i i-ésima coordenada generalizada;

F_q força generalizada atuando em q_i.

A equação de movimento resultante do sistema completo é (KRAMER, 1993):

$$[M](\ddot{q}) + ([C] + [G])(\dot{q}) + [K](q) = [F] \tag{3.9}$$

onde,

[M], [C], [K] e [G]	matrizes globais de massa, amortecimento, rigidez e efeito giroscópico, respectivamente;
{F}	vetor de excitação externa que contém forças de desbalanceamento e a força peso;
{q}	vetor dos graus de liberdade ou vetor de deslocamento relativo do sistema de coordenadas inerciais;

A matriz de massa é o somatório da matriz de inércia de translação e da matriz de inércia de rotação:

$$[M] = [M_T] + [M_R] \tag{3.10}$$

A matriz de amortecimento estrutural do rotor é considerada proporcional às matrizes de massa e de rigidez:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{3.11}$$

As equações de movimento do disco, apresentadas por Nelson e Mac Vaugh (1976), consideram um disco rígido, cujo centro de massa coincide com a linha de centro elástica do rotor. Elementos de disco são elementos cilíndricos cuja dimensão do diâmetro predomina com relação à dimensão do comprimento axial do elemento.

A equação de movimento, resultante do desenvolvimento da Equação de Lagrange referenciada no sistema inercial (X,Y,Z) para uma velocidade de rotação própria constante fornece a seguinte equação de movimento não amortecida:

$$\left(\left[M_{DT}\right]+\left[M_{DR}\right]\right)\left(\ddot{q}_i\right)+\left[G_D\right]\left(\dot{q}_i\right)=\{F\} \tag{3.12}$$

assim,

$\{F\}$	forças externas, como a força de desbalanceamento;
$[M_{DT}]$	matriz de inércia de translação do disco;
$[M_{DR}]$	matriz de inércia de rotação do disco;
$[G_D]$	matriz giroscópica.

De acordo com Nelson e McVaugh (1976):

$$\left[M_{DT}\right]=\begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \left[M_{DR}\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{dy} \end{bmatrix} \quad \left[G_D\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{dx} \\ 0 & 0 & I_{dx} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

$$I_{dy}=I_{dz}=\frac{m_D}{12}\left(\frac{3}{4}\left(d_o^2+d_i^2\right)+L_D^2\right) \tag{3.14}$$

$$I_{dx}=\frac{m_D}{8}\left(d_o^2+d_i^2\right) \tag{3.15}$$

No qual, m_D é a massa do disco, I_{dy} é o momento de inércia transversal ou diametral, I_{dx} o momento de inércia polar, d_o o diâmetro externo do disco, d_i o diâmetro interno e L_D a espessura do disco.

O eixo é modelado com elementos de viga cilíndricas com massa contínua e seção transversal constante. As translações e rotações dos elementos de viga são calculadas a partir das coordenadas generalizadas dos extremos dos elementos, utilizando-se funções de forma. Funções de forma representam os modos de deslocamentos estáticos associados com deslocamento unitário de uma das coordenadas da extremidade com todas as outras restritas a zero.

O elemento de viga de Timoshenko apresenta quatro graus de liberdade por nó, sendo dois de translação e dois de rotação. O elemento engloba os efeitos das inércias de translação e de rotação, momentos giroscópicos, energia elástica de flexão, carregamento axial, torque axial, energia de deformação por cisalhamento e amortecimento interno. Nas funções de forma dos deslocamentos translacionais, os termos estão associados com energia de deformação por flexão e por cisalhamento de uma viga de Timoshenko. Nas funções de forma dos deslocamentos rotativos, os termos estão associados à flexão e à deformação por cisalhamento de uma viga de Timoshenko.

Aplicando a Equação de Lagrange para um elemento de viga entre os nós *i* e *j*, obtém-se:

$$[M_E]\begin{pmatrix}\ddot{q}_i\\ \ddot{q}_j\end{pmatrix}+[G_E]\begin{pmatrix}\dot{q}_i\\ \dot{q}_j\end{pmatrix}+[K_E]\begin{pmatrix}q_i\\ q_j\end{pmatrix}=[F] \tag{3.16}$$

onde,

- $[M_E]$ matriz de inércia do elemento da viga composto pela matriz de inércia de translação e de rotação;
- $[G_E]$ matriz giroscópica do elemento da viga;
- $[K_E]$ matriz de rigidez do elemento da viga;

[F] vetor das forças externas.

As matrizes [M_E], [G_E] e [K_E] são (NELSON e MCVAUGH, 1976):

$$[M_{ET}] = \frac{\rho A L_e}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & \mathit{sim.} & \\ 0 & -22L_e & 4L_e^2 & & & & & \\ 22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & & & & \\ 54 & 0 & 0 & 13L_e & 156 & & & \\ 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 156 & & \\ 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 22L_e & 4L_e^2 & \\ -13L_e & 0 & 0 & -3L_e^2 & -22L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$[M_{ER}] = \frac{\rho d^2}{480L_e} \cdot \begin{bmatrix} 36 & & & & & & & \\ 0 & 36 & & & & & \mathit{sim.} & \\ 0 & -3L_e & 4L_e^2 & & & & & \\ 3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3L_e & 36 & & & \\ 0 & -36 & 3L_e & 0 & 0 & 36 & & \\ 0 & -3L_e & -L_e^2 & 0 & 0 & 3L_e & 4L_e^2 & \\ 3L_e & 0 & 0 & -L_e^2 & -3L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$[G_E] = \frac{\rho A d^2}{240L_e} \cdot \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ 36 & 0 & & & & & \mathit{anti.sim.} & \\ -3L_e & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -3L_e & 4L_e^2 & 0 & & & & \\ 0 & 36 & -3L_e & 0 & 0 & & & \\ -36 & 0 & 0 & -3L_e & 36 & 0 & & \\ -3L_e & 0 & 0 & L_e^2 & 3L_e & 0 & 0 & \\ 0 & -3L_e & -L_e^2 & 0 & 0 & 3L_e & 4L_e^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$K_E = \frac{EI_{yy}}{L_e^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & & & & & & & \\ 0 & 12 & & & & & \text{sim.} & \\ 0 & -6L_e & 4L_e^2 & & & & & \\ 6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 & & & & \\ -12 & 0 & 0 & -6L_e & 12 & & & \\ 0 & -12 & 6L_e & 0 & 0 & 12 & & \\ 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 6L_e & 4L_e^2 & \\ 6L_e & 0 & 0 & 2L_e^2 & -6L_e & 0 & 0 & 4L_e^2 \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

sendo,

L_e	comprimento do elemento;
A	área da seção transversal do elemento;
ρ	densidade do material;
d	diâmetro do elemento;
E	módulo de elasticidade;

As matrizes de cada elemento são agrupadas em matrizes globais e suas posições nas matrizes globais estão relacionadas aos graus de liberdade. O agrupamento das matrizes elementares na matriz global é realizado através da superposição dessas matrizes. No agrupamento, os termos das matrizes elementares são somados aos termos do grau de liberdade de outra matriz elementar. Efetuando a sobreposição de todas as matrizes elementares relativos ao eixo, mancais e disco, determina-se a matriz global conforme a Figura 3.2.

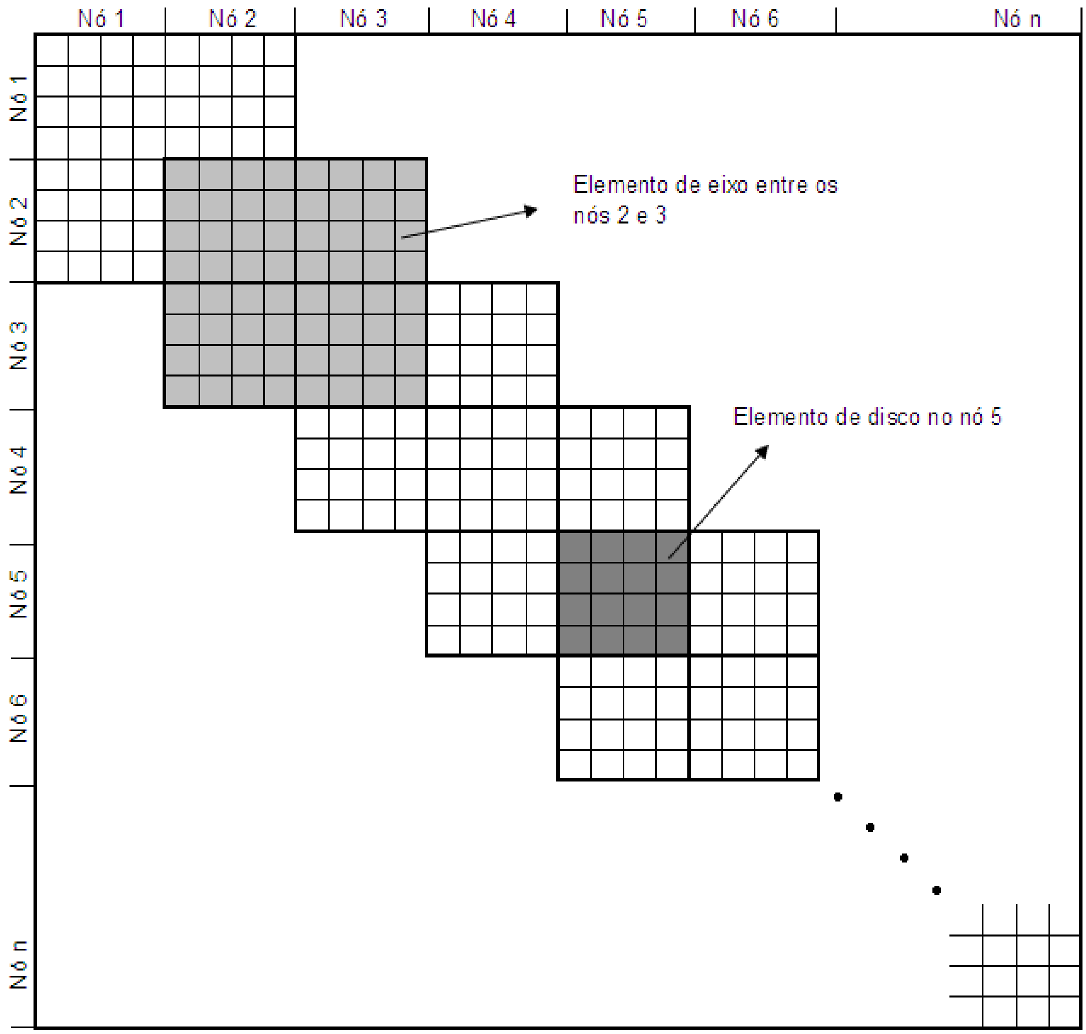

Figura 3.2 – Arranjo das matrizes de cada elemento na matriz global (CASTRO, 2007).

3.2 Força peso

Os rotores verticais desconsideram, nas vibrações laterais, o efeito da gravidade, pois esta age no sentido axial do eixo. O mesmo não ocorre em rotores horizontais.

A força peso é incluída no modelo através do cálculo da massa de cada elemento multiplicado pela gravidade. Assim, o peso total do elemento é igualmente distribuído e somado ao vetor de força externa na posição relativa aos dois nós adjacentes.

3.3 Rotor de Jeffcott e desbalanceamento

O rotor de Jeffcott (ou rotor Laval) é um modelo de máquina rotativa com dois graus de liberdade com um eixo de massa desprezível e um disco rígido posicionado no centro da linha axial que une os mancais. Os mancais são mais rígidos que o eixo, a rigidez do eixo é calculada através da equação da viga bi-apoiada com uma carga no centro, conforme Equação 3.21 (RAO, 2001). Neste caso, o amortecimento é viscoso.

$$k = \frac{48EI_{yy}}{L^3} \tag{3.21}$$

sendo que,

$$I_{yy} = I_{zz} = \frac{\pi}{6} d^4 \tag{3.22}$$

E módulo de elasticidade;

I_{yy} momento de inércia da área do eixo;

L comprimento do eixo;

d diâmetro.

A Figura 3.3 representa o sistema de coordenadas do plano yz. *O* é o centro geométrico do disco e a origem do sistema de coordenadas móvel, *O'* é a origem do referencial inercial, localizado na linha que une o centro dos dois mancais, *e* é a posição do centro de massa (m) do disco e θ é o deslocamento angular do disco devido à rotação do eixo.

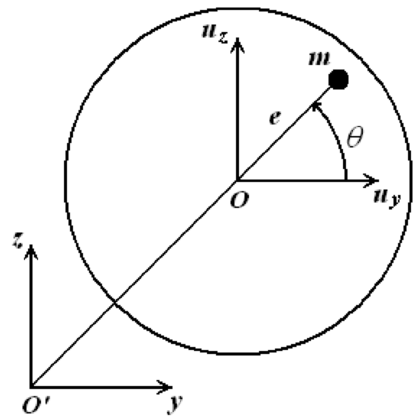

Figura 3.3 – Representação do desbalanceamento rotativo residual de massa.

As equações de movimento são (KRAMER, 1993):

$$m\ddot{y}_R = -C\dot{y}_0 - Ky_0 \tag{3.23}$$

$$m\ddot{z}_R = -C\dot{z}_0 - Kz_0 \tag{3.24}$$

As forças devido às rigidezes e amortecimentos dependem do deslocamento do centro geométrico do eixo, e não do centro de massa, pois dependem da deflexão do eixo. Segundo Lalane e Ferraris (1998), para derivar a força de desbalanceamento, é necessário determinar a posição e a velocidade da massa residual em relação ao referencial inercial. Determina-se a energia cinética do ponto material e, conseqüentemente, a força de desbalanceamento. Assim, temos:

$$y_R = y_0 + e \cdot \cos\theta \tag{3.25}$$

$$\dot{y}_R = \dot{y}_0 - e \cdot \dot{\theta} \cdot \mathrm{sen}\theta \tag{3.26}$$

$$\ddot{y}_R = \ddot{y}_0 - e \cdot \ddot{\theta} \cdot \mathrm{sen}\theta - e \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta \tag{3.27}$$

$$z_R = z_0 + e \cdot \mathrm{sen}\theta \tag{3.28}$$

$$\dot{z}_R = \dot{z}_0 + e \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \tag{3.29}$$

$$\ddot{z}_R = \ddot{z}_0 + e \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - e \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \mathrm{sen}\theta \tag{3.30}$$

O efeito da massa desbalanceada no referencial inercial é descrito a seguir:

$$m\ddot{y}_0 + C\,\dot{y}_0 + Ky_0 = me\left(\ddot{\theta} \cdot sen\theta + \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta\right) \tag{3.31}$$

$$m\ddot{z}_0 + C\,\dot{z}_0 + Kz_0 = -me\left(\ddot{\theta} \cdot \cos\theta - \dot{\theta}^2 \cdot \mathrm{sen}\theta\right) \tag{3.32}$$

Da mesma forma, representando o mesmo na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} F_{dy} \\ F_{dz} \end{bmatrix} = me \cdot \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} \cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} + me \cdot \ddot{\theta} \begin{bmatrix} sen\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

Com o movimento do rotor surgem forças radiais centrípetas, pois o centro de massa não coincide com o centro geométrico do disco. O desbalanceamento produz um vetor girante que produz uma excitação harmônica. É válido na velocidade síncrona para a primeira harmônica, assim, o movimento de precessão do rotor é sincronizado com o a primeira harmônica (WOWK, 2000; RAO, 2001).

O desbalanceamento é uma das causas mais comuns e significativas de vibrações de máquinas rotativas. Produz uma força centrípeta que atuará nos mancais e na estrutura de suporte da máquina de maneira periódica, quando medida em um ponto estacionário, e gira na velocidade de rotação do eixo com freqüência síncrona.

Se a rotação do sistema for constante ($\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = \Omega$ e $\theta = \Omega t$), o termo de aceleração angular da Equação 3.33 é nulo. Desta forma,

$$m\ddot{y}_0 + C\,\dot{y}_0 + Ky_0 = me\Omega^2 \cos\Omega t \tag{3.34}$$

$$m\ddot{z}_0 + C\,\dot{z}_0 + Kz_0 = me\Omega^2 sen\Omega t \tag{3.35}$$

A resposta em regime permanente do sistema, conforme o Kramer (1993) será:

$$y_0 = A \cdot \cos(\Omega t - \phi) \tag{3.36}$$

$$z_0 = A \cdot sen(\Omega t - \phi) \tag{3.37}$$

As amplitudes e as fases em ambas as direções são iguais e representadas por:

$$A = \frac{er^2}{\sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\xi \cdot r\right)^2}} \tag{3.38}$$

$$\phi = tg^{-1}\left(\frac{2\xi \cdot r}{1 - r^2}\right) \tag{3.39}$$

sendo,

$$r = \frac{\Omega}{\omega_n} \qquad \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2\,\omega_n\,m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3.40}$$

onde,

r razão entre a velocidade de rotação do eixo e a primeira freqüência natural deste;
ω_n freqüência natural;
ξ fator de amortecimento.

3.4 Modelo completo: Equação fundamental

A seguir, serão descritas as metodologias de resolução da impedância mecânica e das coordenadas mistas. A modelagem matemática adotada soluciona o sistema completo rotor-mancais-fundação como dois subsistemas (WEIMING e NOVAK, 1996): subsistema rotor-mancais e subsistema fundação. A resposta completa do sistema é obtida da união das respostas dinâmicas de ambos subsistemas.

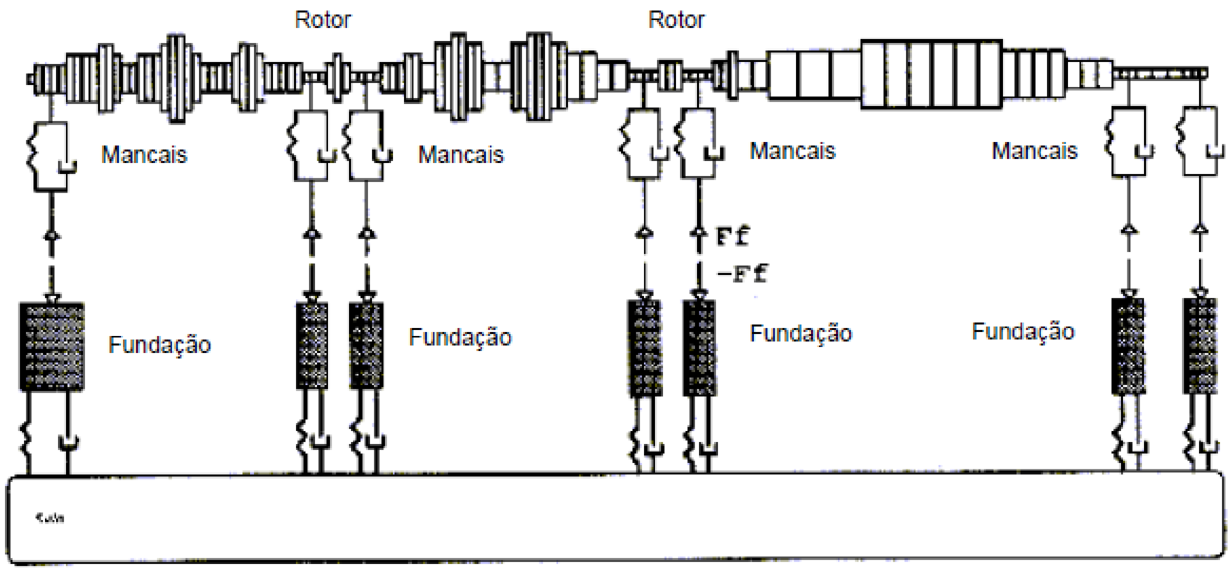

Figura 3.4 – Sistema rotor-mancais-fundação (CAVALCA, 1993).

3.4.1 Equação de movimento para o subsistema rotor-mancais em coordenadas físicas

A equação de movimento para o subsistema rotor-mancais na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} [M_{rr}] & [0] \\ [0] & [M_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{X}_r(t)\} \\ \{\ddot{X}_f(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{rr}] & [C_{rf}] \\ [C_{fr}] & [C_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{X}_r(t)\} \\ \{\dot{X}_f(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rf}] \\ [K_{fr}] & [K_{ff}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{X_r(t)\} \\ \{X_f(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_r\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_f\} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

sendo,

$M_{i\,j}$ matriz de massa do rotor (r) e dos mancais (f);

$C_{i\,j}$ matriz de amortecimento do rotor (r) e dos mancais (f);

$K_{i\,j}$ matriz de rigidez do rotor (r) e dos mancais (f);

X_r coordenadas do rotor;

X_f coordenada dos nós de conexão (mancais) entre rotor e fundação;

F_r força externa aplicada ao rotor devido ao desbalanceamento;

F_f força transmitida pela fundação ao rotor através dos nós de conexão (mancais).

As forças transmitidas entre rotor e mancais (F_f) são incógnitas. Através da aproximação modal essas forças podem ser expressas em termos de deslocamentos relativos entre o rotor e a fundação.

$$X_f = [\phi]q \tag{3.42}$$

no qual,

Q vetor das coordenadas principais;

$[\phi]$ matriz modal ou matriz dos modos da fundação, construída aproximando-se os autovetores que definem os modos próprios da estrutura com relação ao deslocamento dos nós de conexão entre o rotor e a estrutura.

3.4.2 Equação de movimento da fundação em coordenadas físicas

Equação de movimento para a fundação:

$$[M_f]\ddot{X}_f + [C_f]\dot{X}_f + [K_f]X_f = F_f(t) \tag{3.43}$$

onde,

$[M_f]$, $[C_f]$ e $[K_f]$	matriz de massa, amortecimento e rigidez da fundação, respectivamente;
X_f	vetor dos deslocamentos dos nós da fundação, associados aos pontos de localização dos mancais.

A equação 3.43 é resolvida no domínio da freqüência, assumindo uma força de excitação harmônica, devido ao desbalanceamento:

$$F_f = F_{f0}\, e^{i\Omega_{\mathrm{e}}\mathrm{t}} \tag{3.44}$$

sendo,

Ω_e freqüência de excitação, neste caso, a freqüência de rotação do rotor Ω.

Se a resposta da estrutura for proporcional a excitação, então os deslocamentos dos nós de conexão da fundação serão:

$$X_f = X_{f0}\, e^{i\Omega_{\mathrm{e}}\mathrm{t}} \tag{3.45}$$

Derivando os termos da equação 3.45 e aplicando na equação 3.43 tem-se,

$$\left(-\Omega_{\mathrm{e}}^2[\mathrm{M_f}] + \mathrm{i}\Omega_{\mathrm{e}}[\mathrm{C_f}] + [\mathrm{K_f}]\right)\{X_{f0}\} = \{F_{f0}\} \tag{3.46}$$

A equação 3.46 fornece a função de resposta em freqüência (FRF) da fundação. A partir desta equação os parâmetros modais (freqüências naturais, fatores de amortecimento e massas generalizadas) da estrutura podem ser determinados através de técnicas modais. O termo entre parênteses é a impedância mecânica, ou ainda, a rigidez dinâmica da fundação.

3.4.3 Equação de movimento da fundação obtida a partir de análise modal experimental

Aplicando a aproximação modal (CAVALCA, 1993) a equação matricial de movimento do subsistema fundação, para amortecimento estrutural proporcional, é:

$$[m_f]\ddot{q} + [c_f]\dot{q} + [k_f]q = -[\Phi]^t F_f \qquad (3.47)$$

tal que,

$[m_f]$, $[c_f]$ e $[k_f]$	matrizes diagonais contendo os parâmetros modais de massa, rigidez e amortecimento da fundação;
$[\Phi]^t$	transposta da matriz modal.

Geralmente, as matrizes são retangulares e existem tantas colunas quanto são os modos de vibrar considerados e tantas linhas quanto são os graus de liberdade totais, associados aos nós de conexão entre o rotor e a fundação. Se o número de modos próprios da estrutura é igual ao número dos graus de liberdade associados aos nós de conexão, a matriz [Φ] é uma matriz quadrada (CAVALCA, 1993) e desta forma é possível inverter e realizar a transformação seguinte:

$$q = [\Phi]^{-1} X_f \qquad (3.48)$$

É possível descrever um vetor de forças de conexão F_f em função das coordenadas físicas X_f, sendo assim:

$$[\Phi^t]^{-1}[m_f][\Phi]^{-1}\ddot{X}_f + [\Phi^t]^{-1}[c_f][\Phi]^{-1}\dot{X}_f + [\Phi^t]^{-1}[k_f][\Phi]^{-1}X_f = -F_f \qquad (3.49)$$

Esta equação estabelece a relação de deslocamento dos nós de conexão (X_f) da fundação e da força (F_f) transmitida ao rotor através desses nós.

Definindo:

$$[M_f] = [\Phi^t]^{-1}[m_f][\Phi]^{-1} \tag{3.50}$$

$$[C_f] = [\Phi^t]^{-1}[c_f][\Phi]^{-1} \tag{3.51}$$

$$[K_f] = [\Phi^t]^{-1}[k_f][\Phi]^{-1} \tag{3.52}$$

A equação de movimento da fundação, portanto, é idêntica à equação 3.43 anteriormente introduzida e aqui repetida por comodidade:

$$[M_f]\ddot{X}_f + [C_f]\dot{X}_f + [K_f]X_f = -F_f \tag{3.53}$$

Essa transformação pode ser aplicada quando a matriz modal [Φ] é quadrada, ou seja, se o número de modos próprios da fundação é igual ao número dos graus de liberdade associados aos nós de conexão entre o rotor e a estrutura. Substituindo a equação 3.53 na de movimento do sistema completo rotor-mancais-fundação, equação 3.41, tendo como incógnitas as coordenadas físicas do rotor X_r e da fundação X_f nos pontos de conexão (mancais):

$$\begin{bmatrix} [M_{rr}] & [M_{rf}] \\ [M_{fr}] & [M_{ff}] + [M_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_r \\ \ddot{X}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{rr}] & [C_{rf}] \\ [C_{fr}] & [C_{ff}] + [C_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_r \\ \dot{X}_f \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rf}] \\ [K_{fr}] & [K_{ff}] + [K_f] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_r \\ X_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_r \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.54}$$

Desta forma, o sistema pode ser resolvido pelo método direto das impedâncias mecânicas.

3.4.4 Método das impedâncias mecânicas

Para solucionar a equação 3.54 é necessário representar a fundação em função de sua impedância mecânica e solucioná-la através da análise da resposta em freqüência, conforme apresentado nas equações 3.44 a 3.46:

A matriz de flexibilidade de uma estrutura elástica apresenta uma relação de proporcionalidade entre o deslocamento de uma estrutura e o vetor de força aplicado à fundação.

$$[H(\Omega_\mathrm{e},\mathrm{p})] = -\frac{\{X_{f0}\}}{\{F_{f0}\}} \tag{3.55}$$

A matriz de flexibilidade pode ser expressa como:

$$[H(\Omega_\mathrm{e},\mathrm{p})] = \frac{[\Phi^t][\Phi]}{\left[-\Omega_e^2\left[m_f\right] + i\Omega_e\left[c_f\right] + \left[k_f\right]\right]} \tag{3.56}$$

O termo genérico da matriz de flexibilidade h_{ki} (Ω_e) é definido como:

$$h_{kj} = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_k^i X_j^i}{-\Omega_e^2\, m_i + i\,\Omega_e\, c_i + k_i} \tag{3.57}$$

Os termos das equações 3.56 e 3.57 definidos como:

h_{kj}	elementos da matriz de flexibilidade;
x_k^i, x_j^i	componentes dos nós k e j relativas ao i-ésimo modo de vibrar da estrutura;
m_i, c_i e k_i	termos de massa generalizada, amortecimento modal e rigidez modal

associadas a i-ésima freqüência natural da fundação;

Ω_e freqüência de excitação;

N número de modos de vibrar;

$[\Phi]$ matriz modal;

x_p vetor dos parâmetros modais.

A matriz de flexibilidade, expressa em função dos parâmetros modais:

$$h_{kj} = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_k^i X_j^i}{m_i(\omega_i^2 - \Omega_e^2 + 2i\zeta_i\omega_i)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_k^i X_j^i}{m_i(\omega_i^2 - \Omega_e^2 + 2i\xi_i\Omega_e\,)} \tag{3.58}$$

onde,

ξ_i decremento logarítmico;

ζ_i fator de amortecimento estrutural;

ω_i freqüência natural.

3.4.4.1 Determinação da solução do sistema global pelo método de impedâncias mecânicas da fundação

A matriz de impedância mecânica é calculada da inversão da matriz de flexibilidade (equação 3.56) definida a partir dos parâmetros modais da fundação, obtidos analiticamente ou experimentalmente. Para calcular a matriz de impedância mecânica, a partir da matriz $[H(\Omega_e\,,\, p)]$, é necessário identificar antecipadamente, os números de modos próprios de vibração da estrutura iguais aos números de graus de liberdade associados aos nós de conexão do rotor e da estrutura.

A matriz de impedância mecânica da fundação $[I(\Omega_e, p)]$ é obtida da inversão da matriz de flexibilidade.

$$F_{f0} = -[H(\Omega_e, p)]^{-1}\left\{X_{f0}\right\} = -[I(\Omega_e, p)]\left\{X_{f0}\right\} \tag{3.59}$$

Desta forma, a solução da equação 3.54 do sistema global é dada assumindo-se:

$$X_r = \{X_{ro}\}\, e^{i\Omega_e t} \tag{3.60}$$

De onde obtém-se a matriz elastodinâmica do sistema completo:

$$(-\Omega_e^2[\mathrm{M}] + \mathrm{i}\Omega_e[\mathrm{C}] + [\mathrm{K}] + [\bar{\mathrm{I}}(\Omega_e, \mathrm{p})]) = [E(\Omega_e, p)] \tag{3.61}$$

sendo,

$$[\bar{I}(\Omega_e, p)] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [I(\Omega_e, p)] \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

A solução do sistema completo rotor-mancais-fundação é:

$$[E(\Omega_e, p)]\, X_{ro} = F_{r0} \tag{3.63}$$

de tal forma que,

$[E(\Omega_e, p)]$	matriz elastodinâmica do sistema completo rotor-mancais-fundação;
Fr_0	vetor de forças externas aplicadas ao rotor;
Xr_0	vetor dos deslocamentos dos nós do rotor.

A equação 3.63 representa a resposta em freqüência do sistema a uma força de excitação externa aplicada ao rotor Fr_0. Representando na forma matricial tem-se

$$
\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ Rotor & \\ \hline \overline{C} & \overline{D} \\ & Fundação \end{array}\right] . \begin{Bmatrix} X_{r0} \\ X_{f0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{r0} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.64}
$$

Sendo,

$$A = -\Omega_e^2[M_{rr}] + i\Omega_e[C_{rr} + G_{rr}] + [K_{rr}]$$

$$B = i\Omega_e\left[C_{rf}\right] + [K_{rf}]$$

$$C = i\Omega_e\left[C_{fr}\right] + [K_{fr}]$$

$$D = \left(-\Omega_e^2\left[M_{ff}\right] + i\Omega_e\left[C_{ff}\right] + \left[K_{ff}\right]\right) + ([I(\Omega_e, p)])$$

$$[I(\Omega_e, p)] = -\Omega_e^2\left[M_f\right] + i\Omega_e\left[C_f\right] + [K_f]$$

Esse procedimento necessita dispor de tantos modos de vibrar da estrutura quanto são os graus de liberdade associados aos pontos de conexão com o rotor. Mesmo que esse método identifique todos os modos próprios, ainda pode apresentar problemas devido à inversão da matriz [H(Ω_e)].

3.4.5 Método das coordenadas mistas

O método das coordenadas mistas não necessita da inversão da matriz de flexibilidade da fundação. Não necessita utilizar os números dos modos próprios identificados iguais ao número de graus de liberdade associados aos nós de conexão do rotor. Com isso evita problemas de inversão de ordem numérica.

Este método permite utilizar apenas os modos com participação significativa na resposta em freqüência dos nós de conexão, pertencente ao campo de freqüências analisado.

A transformação da coordenada física em coordenada modal é efetuada pela matriz modal $[\Phi]$ que multiplica a matriz elastodinâmica geral do sistema. O modelo matemático descreve o sistema em coordenadas mistas, ou seja, o subsistema rotor-mancal em coordenadas físicas X_r e o subsistema fundação em coordenadas modais q. A matriz elastodinâmica do rotor será sempre a mesma, os coeficientes de rigidez e amortecimento do filme de óleo serão parcialmente alterados e a matriz de impedância mecânica da estrutura torna-se diagonal em função das coordenadas modais assumidas (CAVALCA, 1993).

A aproximação modal permite a diagonalização das matrizes de massa e rigidez da fundação, através da matriz modal, devido à ortogonalidade dos modos próprios de vibrar. A utilização das coordenadas modais tem a vantagem de dispensar a inversão da matriz de flexibilidade para se obter a matriz de impedância mecânica da fundação. Vale destacar que a matriz de amortecimento estrutural da fundação será diagonalizada pela matriz modal somente se o amortecimento estrutural for do tipo proporcional às matrizes de massa e rigidez da fundação (equação 3.11).

Os parâmetros modais da fundação podem ser obtidos experimentalmente, através de técnicas clássicas de análise modal.

A equação matricial de movimento completa obtida com coordenadas mistas será (CAVALCA, 1993):

$$\begin{bmatrix} [M_{rr}] & [0] \\ [0] & [m_f]+[\Phi]^t M_{ff}[\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{x}_r(t)\} \\ \{\ddot{q}(t)\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{rr}] & [C_{rf}][\Phi] \\ [\Phi]^T[C_{fr}] & [C_f]+[\Phi]^T[C_{ff}][\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{x}_r(t)\} \\ \{\dot{q}(t)\} \end{Bmatrix} + \cdots$$
$$+ \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rf}][\Phi] \\ [\Phi]^T[K_{fr}] & [k_f]+[\Phi]^T[K_{ff}][\Phi] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{x_r(t)\} \\ \{q(t)\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_r\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \qquad (3.65)$$

Reescrevendo a equação 3.65 na forma:

$$[M_t]\ddot{Z} + [C_t]\dot{Z} + [K_t]Z = F \tag{3.66}$$

sendo,

Z vetor de coordenadas mistas.

Considerando uma força de excitação harmônica e um deslocamento harmônico, a representação da equação no domínio da freqüência torna-se:

$$\left(-\Omega_e^{\,2}[M_t] + i\Omega_e[C_t] + [K_t]\right)Z_0 = F_0 \tag{3.67}$$

A equação 3.67 pode ser escrita como:

$$\left[\overline{E}(\Omega_e, p)\right]\{Z_o\} = F_o \tag{3.68}$$

sendo,

$\left[\overline{E}(\Omega_e, p)\right]$ matriz elastodinâmica modificada do sistema completo rotor-mancais-fundação;

Z_0 vetor das coordenadas mistas;

A equação 3.68 escrita na forma matricial é:

$$\left[\begin{array}{c|c} E & F \\ Rotor & \\ \hline G & H \\ & Fundação \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} X_{r0} \\ q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{r0} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.69}$$

onde,

$$[E] = -\Omega_e{}^2[M_{rr}] + i\Omega_e([C_{rr}] + [G_{rr}] + [K_{rr}]$$

$$[F] = (i\Omega_e[C_{rf}] + [K_{rf}])[\Phi]$$

$$[G] = [\Phi]^T(i\Omega_e[C_{fr}] + [K_{fr}])$$

$$[H] = [\Phi]^T(i\Omega_e[C_{ff}] + [K_{ff}])[\Phi] + ([\bar{I}(\Omega_e, p)])$$

Sendo $[\bar{I}(\Omega, p)]$ a matriz de impedância mecânica em coordenadas generalizadas:

$$[\bar{I}(\Omega_e, p)] = -\Omega_e{}^2[m_f] + i\Omega_e[c_f] + [k_f] \tag{3.70}$$

Uma vez obtidos os parâmetros modais da fundação, esta poderá ser representada apenas pelos modos mais significativos, presentes na faixa de freqüências analisada, independentemente do número de graus de liberdade associados aos pontos de conexão (mancais).

4 DESCRIÇÃO DO MODELO TEÓRICO DO SISTEMA

Neste capítulo serão descritos os conceitos básicos sobre a obtenção de parâmetros modais e o modelo teórico aplicada no subsistema fundação, no caso massa-mola-amortecedor. As coordenadas mistas e impedância mecânica consideraram amortecimento proporcional e não-proporcional. Posteriormente, como será realizada a redução do número de modos menos significativos do subsistema fundação para realizar uma análise de sensibilidade, o programa aplicado na seleção dos modos para coordenadas modais será descrito.

4.1 Sistemas de N graus de liberdade – conceitos fundamentais.

Sistemas contínuos são aproximados por sistemas de massas concentradas (discretizados) de múltiplos graus de liberdade. Abordando inicialmente uma modelagem simples de sistemas de múltiplos graus de liberdade, conservativo (não amortecido) composto de *n* equações diferenciais de segunda ordem, linear e invariante no tempo (coeficientes constantes) representado pela seguinte equação matricial:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \tag{4.1}$$

na qual,

[M] e [K]	matrizes simétricas de massa e rigidez, respectivamente;
$\{\ddot{x}\}$ e $\{x\}$	vetores de aceleração e deslocamento de n graus de liberdade x 1;
{F}	vetor de forças externas aplicadas.

O comportamento vibratório de um sistema é caracterizado completamente pelos parâmetros modais, como freqüências naturais e modos, obtidos da análise de vibração livre.

Considere um sistema livre, {F}={0}. A equação que descreve a vibração livre de um sistema de NGL será:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \tag{4.2}$$

Propondo uma solução geral do deslocamento do tipo,

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{st} \tag{4.3}$$

sendo,

{X} vetor de amplitudes de resposta independente do tempo.

Essa solução impõe que todo o sistema vibra harmonicamente na mesma freqüência. Os vetores de velocidade e aceleração são respectivamente,

$$\{\dot{x}(t)\} = s\{X\}e^{st} \qquad \{\ddot{x}(t)\} = s^2\{X\}e^{st} \tag{4.4}$$

Aplicando as equações 4.3 e 4.4 na equação 4.2, a equação de movimento será,

$$([M]s^2 + [K])\{X\}e^{st} = \{0\} \tag{4.5}$$

Considerando o caso de s complexo para $|e^{st}| = 1\ \forall t$, caso em que as partes real e imaginária de e^{st} podem valer zero em alguns instantes de tempo, mas não para todo t, obtém-se:

$$([M]s^2 + [K])\{X\} = \{0\} \tag{4.6}$$

A equação 4.6 representa um sistema de equações algébricas em {X}. As incógnitas são os valores de {X} e s. Assim, o problema é de autovalor generalizado, com s sendo os autovalores e {X} os autovetores associados.

A primeira solução para a equação 4.6 é a solução trivial obtida da pré-multiplicação da equação anterior por $([M]s^2 + [K])^{-1}$, assim

$$([M]s^2 + [K])^{-1}([M]s^2 + [K])\{X\} = \{0\} \tag{4.7}$$

Sendo,

$$[I]\{X\} = 0 \; ou \; \{X\} = \{0\}$$

Essa solução representa um sistema em repouso (ausência de movimento). A outra solução exige que a inversa da matriz $([M]s^2 + [K])$ não exista.

O cálculo da inversa de uma matriz é obtido da inversão da matriz [A]. A inversa da matriz [A] será

$$[A]^{-1} = \frac{adj([A])}{\det([A])} \tag{4.8}$$

A adj ([A]) representa a matriz adjunta de [A] e det ([A]) o determinante da matriz [A]. Para que não exista a inversa da matriz [A], o determinante da matriz [A] deve ser nulo. Assim, para a segunda solução, o determinante de $([M]s^2 + [K])$ deve ser igual a zero.

A equação resultante do determinante é a equação característica. Um polinômio de ordem 2N cujas raízes são os autovalores do sistema, ou seja, as freqüências modais complexas,

$$s_r = \sigma_r + j\omega_r \tag{4.9}$$

Se todos os coeficientes do polinômio característico forem positivos, as raízes não nulas não podem ser reais e positivas, nem complexas com parte real positiva. As raízes devem ser reais e negativas ou complexas com parte real negativa.

A parte real de um polinômio é responsável pelo decaimento da resposta temporal (amortecimento) e a parte imaginária é responsável pelo caráter oscilatório do movimento.

No caso de sistemas conservativos, a parte real das raízes deve ser obrigatoriamente nula. As n raízes da equação de freqüência serão:

$$s_1 = -j\omega, s_2 = -j\omega_2, \dots, s_N = -j\omega_N, s_{N+1} = s_1^*, s_{N+2} = s_2^*, \dots, s_{2N} = s_N^* \tag{4.10}$$

Os valores de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ representam as freqüências naturais do sistema. Aplicando os autovalores, s_r, na equação

$$([M]s_r^2 + [K])\{X\}_r = \{0\} \tag{4.11}$$

Obtém-se assim, os autovetores $\{\Psi\}_r$ que representam os modos próprios do sistema. Para esse caso de sistema não amortecido,

$$s_1^2 = s_1^{*2} = -\omega_1^2,\ s_2^2 = s_2^{*2} = -\omega_2^2, \dots, s_N^2 = s_N^{*2} = -\omega_N^2 \tag{4.12}$$

Possuem assim, N vetores solução possíveis que representam o deslocamento relativo de cada um dos NGL do sistema, quando este vibra em uma das freqüências naturais. Desta forma, no movimento livre, um sistema pode vibrar de forma harmônica para N freqüências específicas ω_r associado ao respectivo modo de vibrar $\{\Psi\}_r$ do sistema.

Sendo assim, a matriz espectral $[\Lambda]$ e a matriz modal $[\Psi]$ são dadas por:

$$[\Lambda]_d = \begin{bmatrix} s_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & s_N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_{N+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & s_{2N} \end{bmatrix} \qquad [\Psi] = [\{\Psi\}_1 \dots \{\Psi\}_N \{\Psi\}_{N+1} \dots \{\Psi\}_{2N}] \tag{4.13}$$

Aplicando o conceito visto na equação 4.12, as matrizes modal e espectral serão:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\omega_N^2 \end{bmatrix} \qquad [\Psi] = [\{\Psi\}_1 \dots \{\Psi\}_N] \tag{4.14}$$

4.2 Modelo teórico do subsistema fundação

O comportamento de uma fundação, cujos parâmetros do sistema são conhecidos através de dois métodos de solução: impedância mecânica e coordenadas mistas (coordenada física e modal), foram avaliados e aplicou-se redução modal para o caso de coordenadas mistas com amortecimento proporcional, pois o sistema é descrito por N equações desacopladas. No caso do sistema acoplado, deve-se, inicialmente, avaliar o efeito desta redução. Assim, será possível compreender o efeito da seleção dos modos na representação da resposta do modelo da fundação no sistema. Outra verificação do modelo será realizada experimentalmente para o caso de coordenadas mistas com modos acoplados e desacoplados.

4.2.1 Coordenadas modais no subsistema fundação

O modelo do subsistema fundação considerou a formulação de um sistema massa-mola-amortecedor com dois graus de liberdade na direção horizontal (y) e vertical (z) do rotor, conforme figura 4.1, aplicados aos pontos de conexão entre rotor e fundação (mancais). O modelo completo apresenta um eixo suportado por dois mancais simétricos. Os mancais apresentam as mesmas características.

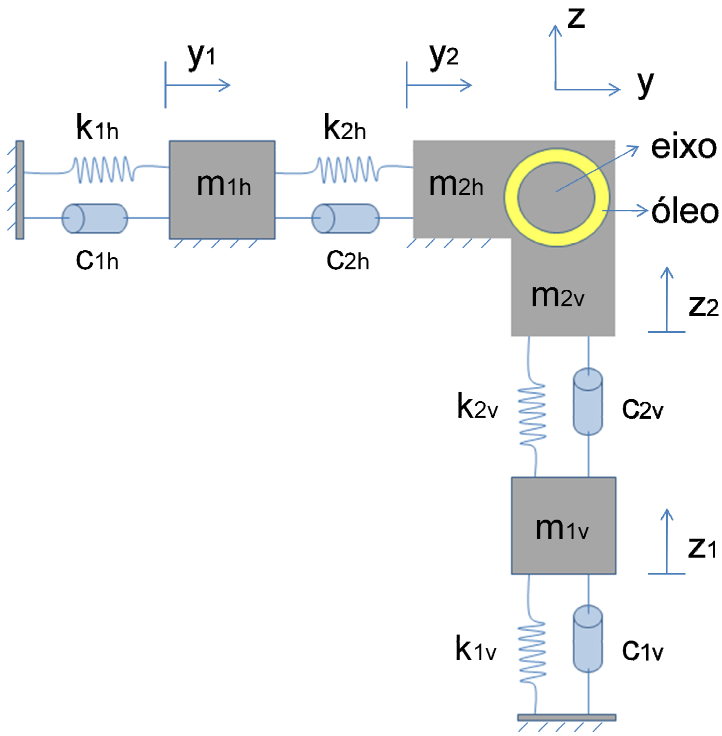

Figura 4.1 – Modelo teórico do subsistema fundação (vista lateral).

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1h}^{(1)} \\ x_{2h}^{(1)} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} x_{1h}^{(2)} \\ x_{2h}^{(2)} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{1h} \\ q_{2h} \end{Bmatrix} = [\phi_h]\{q_h\} \tag{4.15}$$

$$\begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{1h}^{(1)} \\ x_{2h}^{(1)} \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} x_{1h}^{(2)} \\ x_{2h}^{(2)} \end{Bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{1h} \\ q_{2h} \end{Bmatrix} = [\phi_v]\{q_v\} \tag{4.16}$$

Sendo assim,

y e z	coordenadas físicas da fundação na direção horizontal e vertical, respectivamente;
$[\Phi_h]$ $[\Phi_v]$	matriz dos autovetores da fundação ou matriz modal da fundação na direção horizontal e vertical, respectivamente;
q_h e q_v	coordenadas modais ou principais da fundação na direção horizontal e vertical, respectivamente.

O subíndice da coordenada física corresponde ao número de graus de liberdade do sistema na direção analisada.

O número de suportes ou mancais acoplados com a fundação são dois, cada suporte apresenta dois graus de liberdade e o número de modos associados aos GDL do sistema completo, corresponde a quatro por mancal. Portanto, a matriz completa do sistema para um mancal será:

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}_{(4x1)} = \begin{bmatrix} X_{1h}^{(1)} & X_{1h}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{1v}^{(1)} & X_{1v}^{(2)} \\ X_{2h}^{(1)} & X_{2h}^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_{2v}^{(1)} & X_{2v}^{(2)} \end{bmatrix}_{(4x4)} \begin{Bmatrix} q_{1h} \\ q_{2h} \\ q_{1v} \\ q_{2v} \end{Bmatrix}_{(4x1)} \tag{4.17}$$

As matrizes de massa e rigidez utilizadas para determinar os parâmetros da fundação para um mancal, como autovalores e autovetores, são descritas a seguir, para o sistema incluindo as direções verticais e horizontais.

$$M_f = \begin{bmatrix} m_{1h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{1v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{2v} \end{bmatrix} \qquad K_f = \begin{bmatrix} k_{1h} + k_{2h} & -k_{2h} & 0 & 0 \\ -k_{2h} & k_{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1v} + k_{2v} & -k_{2v} \\ 0 & 0 & -k_{2v} & k_{2v} \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

A matriz de amortecimento foi avaliada para duas condições: com amortecimento proporcional e com amortecimento não proporcional. Sendo essas matrizes respectivamente,

$$C_f = \alpha[M_f] + \beta[K_f] \tag{4.19}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix} m_{1h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{1v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{2v} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} k_{1h}+k_{2h} & -k_{2h} & 0 & 0 \\ -k_{2h} & k_{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{1v}+k_{2v} & -k_{2v} \\ 0 & 0 & -k_{2v} & k_{2v} \end{bmatrix}$$

$$C_f = \begin{bmatrix} c_{1h}+c_{2h} & -c_{2h} & 0 & 0 \\ -c_{2h} & c_{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{1v}+c_{2v} & -c_{2v} \\ 0 & 0 & -c_{2v} & c_{2v} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Percebe-se, pelo equacionamento, que as matrizes de massa, rigidez e amortecimento para a direção horizontal são desacopladas das matrizes na direção vertical.

4.2.1.1 Amortecimento proporcional em coordenadas modais no subsistema fundação

Aplicando a transformação de coordenadas físicas para coordenadas modais na fundação, conforme observado no Apêndice A, nas equações A22a-c, para o caso de amortecimento proporcional, as matrizes resultantes de massa, amortecimento e rigidez serão, respectivamente:

$$m_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

$$c_f = \begin{bmatrix} \alpha+\beta\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta\omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+\beta\omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta\omega_4^2 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$k_f = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_4^2 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

4.2.1.2 Amortecimento não-proporcional em coordenadas modais no subsistema fundação

Aplicando a transformação de coordenadas físicas para coordenadas modais na fundação, conforme Apêndice A, para o caso de amortecimento não-proporcional, as matrizes resultantes de massa e rigidez serão equivalentes as representadas nas equações 4.21 e 4.23. No entanto, a matriz de amortecimento resultante da transformação $[c_f] = [\Phi]^t[C_f][\Phi]$ será uma matriz não diagonalizada.

4.2.2 Impedância mecânica

O método da impedância mecânica simula uma medição experimental realizada nas coordenadas físicas. No entanto, os parâmetros do sistema são conhecidos. Desta forma, permite comparar os métodos de impedância mecânica e de coordenadas mistas que devem ser equivalentes quando aplicados todos os modos. Vale ressaltar novamente que este método exige dispor de tantos modos de vibrar da estrutura quanto são os graus de liberdade associados aos pontos de conexão com o rotor, ou seja, aos mancais.

4.2.2.1 Impedância mecânica com amortecimento não-proporcional

As matrizes de massa, rigidez e amortecimento não-proporcional da fundação, considerando as direções verticais e horizontais, são:

$$[M_f] = \begin{bmatrix} m_{1h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{1v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{2h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{2v} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$[K_f] = \begin{bmatrix} k_{1h} + k_{2h} & 0 & -k_{2h} & 0 \\ 0 & k_{1v} + k_{2v} & 0 & -k_{2v} \\ -k_{2h} & 0 & k_{2h} & 0 \\ 0 & -k_{2v} & 0 & k_{2v} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$[C_f] = \begin{bmatrix} c_{1h} + c_{2h} & 0 & -c_{2h} & 0 \\ 0 & c_{1v} + c_{2v} & 0 & -c_{2v} \\ -c_{2h} & 0 & c_{2h} & 0 \\ 0 & -c_{2v} & 0 & c_{2v} \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

A seqüência do vetor de coordenadas físicas para esta organização das matrizes é

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \tag{4.27}$$

Essa seqüência precisa ser considerada desta forma em função dos parâmetros de entrada aplicados no programa Rotortest®. Software implementado pelo LAMAR-Laboratório de Máquinas Rotativas. O software Rotortest® modela a interação dinâmica entre os componentes de uma máquina rotativa, a partir da seleção e montagem dos elementos desejados no software, tais como, mancais, selo de fluxo, acoplamento, eixos, etc. Dessa forma, é obtida a resposta dinâmica do sistema.

4.2.2.2 Impedância mecânica com amortecimento proporcional

As equações 4.24, 4.25 e 4.27 correspondentes, respectivamente, as matrizes de massa e rigidez e vetor de coordenadas físicas da fundação permanecem as mesmas. A matriz de amortecimento proporcional será:

$$[C_f] = \alpha[M_f] + \beta[K_f] \tag{4.28}$$

4.3 Método de seleção dos modos para coordenadas modais no subsistema fundação

A transformação para as coordenadas modais permite analisar o subsistema fundação como n equações de um grau de liberdade independentes. Permite, assim, que o número de modos de vibrar possa ser diferente do número de graus de liberdade associados nos pontos de conexão com o rotor. A seleção dos modos mais significativos no sistema de coordenadas modais da fundação será aplicada para avaliar o efeito da retirada dos modos com menor influencia, assim como, estabelecer um número mínimo de modos necessários para representar o sistema avaliado em questão.

O critério para seleção é iniciado com o cálculo da função de resposta em freqüência para os múltiplos modos conforme equação 3.57.

Para determinar as freqüências naturais predominantes de uma estrutura (ω_i), calcula-se a média quadrática dos componentes imaginários (MQCI) da função de resposta em freqüência, e selecionam-se as freqüências onde existam picos na média quadrática. O sistema em questão apresentará na resposta os dois modos correspondentes a direção vertical, assim como na horizontal para cada mancal.

A média dos componentes imaginários será realizada para cada direção:

$$\overline{A_{\Omega_{en}}} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(h_{Ij})^2$$

sendo,

$\overline{A_{\Omega_{en}}}$	média quadrática dos componentes imaginários (MQCI) da função de transferência na n-ésima freqüência de excitação (Ω_{en});
Ω_{en}	n-ésima freqüência de excitação;
h_{Ij}	componente imaginária da j-ésima função de transferência na n-ésima freqüência de excitação (Ω_{en});
M	número de funções de transferência.

Desta forma, a maior amplitude obtida para o valor de freqüência analisado para a direção vertical ou horizontal será o modo com maior influência na resposta do sistema.

A interface do programa desenvolvido para este trabalho com a utilização do software Matlab® é apresentada na figura 4.2. Os dados de entrada (FRF) são lidos e o sinal pode ser visualizado para cada mancal e direção, horizontal ou vertical. Neste modo, a interface permite visualizar as funções de resposta em freqüência e a fase. Em seguida, a direção que será aplicada a média quadrática dos componentes imaginários é selecionada, assim como a opção para realização da MQCI e o programa será atualizado. Isto pode ser observado da figura 4.3. Posteriormente, o número de modos que deseja selecionar será passado na janela de opção correspondente e aparecerá um cursor (figura 4.4) para que o usuário selecione os modos de interesse. Os resultados selecionados aparecerão nas janelas correspondentes à freqüência e amplitude do software. Desta forma é possível determinar os modos mais fortes na direção horizontal e vertical e esses valores podem ser salvos.

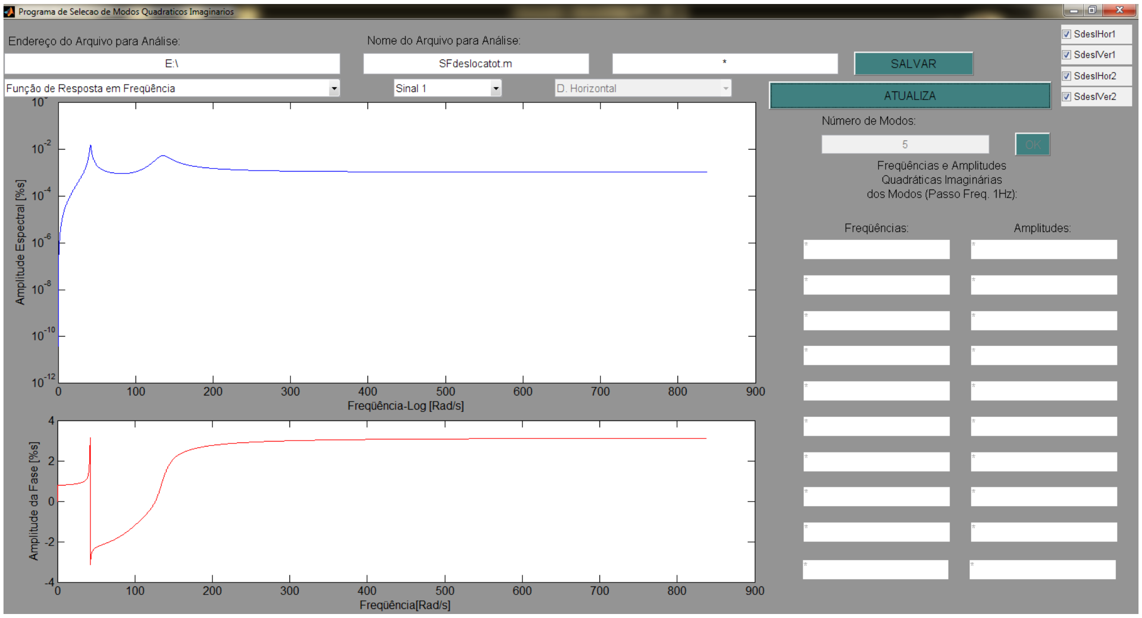

Figura 4.2 – Interface do software de seleção dos modos.

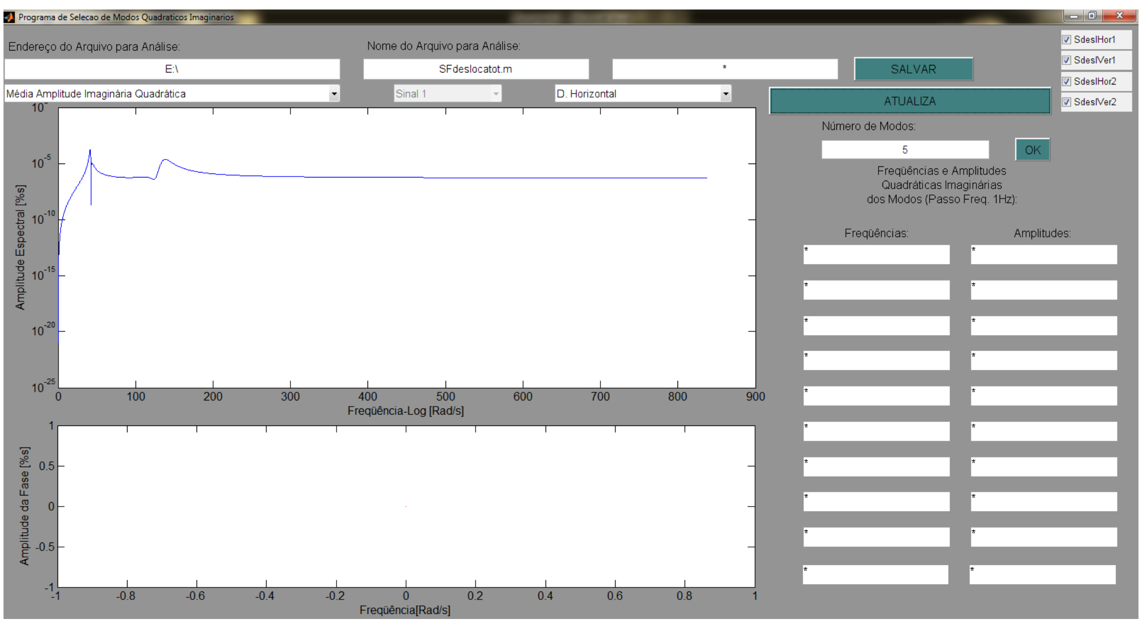

Figura 4.3 – Interface do software no modo MQCI na direção horizontal.

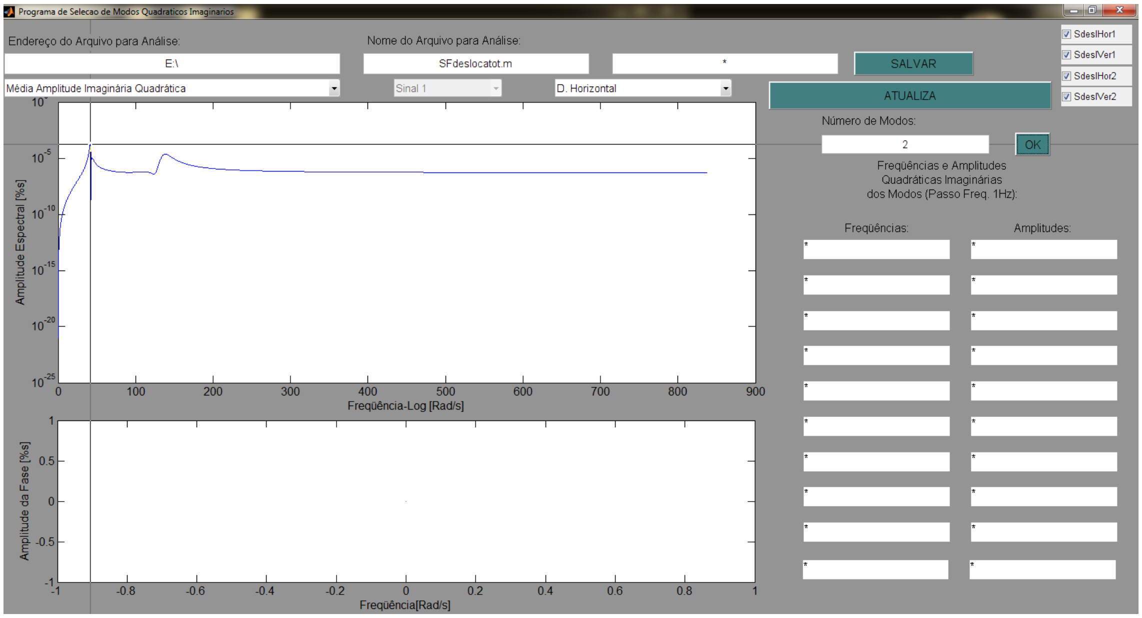

Figura 4.4 – Ferramenta de seleção ativada para a direção horizontal.

5 RESULTADOS OBTIDOS DO MODELO TEÓRICO

Este capítulo contém os resultados obtidos no modelo teórico. Os parâmetros do modelo foram determinados para que os valores de massa, rigidez e amortecimento gerassem um sistema com propriedade de rigidez na direção vertical da fundação maior que na direção horizontal para que os efeitos de fundação pudessem ser transmitidos para o rotor na faixa de interesse da rotação do rotor. O subsistema rotor-mancal foi modelado teoricamente através do software Rotortest®.
A seqüência de montagem e integração dos dois subsistemas é apresentada. Em seguida, as respostas em freqüência do rotor são expostas com a fundação modelada com amortecimento proporcional, modos desacoplados, para os casos de impedância mecânica e coordenadas modais, neste último caso contendo todos os modos e os modos reduzidos. Assim como, impedância mecânica e coordenadas mistas com amortecimento não-proporcional, modos acoplados fracamente.

Os valores adotados foram:

Tabela 5. 1 – Propriedades da fundação nas direções horizontal e vertical.

Direção Horizontal	Direção Vertical
$m_{1h} = 1000$ kg	$m_{1v} = 1000$ kg
$m_{2h} = 1000$ kg	$m_{2v} = 1000$ kg
$k_{1h} = 4x10^6$ N.m	$k_{1v} = 6x10^7$ N.m
$k_{2h} = 8x10^6$ N.m	$k_{2v} = 7x10^7$ N.m
$c_{1h} = 0{,}35x10^3$ N.m/s^2	$c_{1v} = 0{,}35x10^2$ N.m/s^2
$c_{2h} = 0{,}4x10^3$ N.m/s^2	$c_{2v} = 0{,}4x10^2$ N.m/s^2
$\alpha_h = 1x10^{-5}$	$\alpha_v = 1x10^{-5}$
$\beta_h = 1x10^{-3}$	$\beta_v = 0{,}5x10^{-4}$

A faixa de variação de Ω_e foi de 0 a 3600 rpm, faixa de interesse de operação do rotor.

O eixo foi modelado por elementos finitos com a utilização de elementos de viga cilíndrica e massa concentrada, conforme figura 5.1. Uma excitação por desbalanceamento foi posicionada no meio do rotor com 0,001kg de massa residual, excentricidade de 37 mm e 0^{o} de defasagem. Os locais verificados na análise serão os pontos de conexão do mancal com a fundação, localizados nos nós 3 e 17. Os mancais são constituídos por apenas um lóbulo, com 30 mm de diâmetro, 90 μm de folga radial, 20 mm de largura axial, conforme observado na figura 5.2. O mancal é lubrificado pelo óleo ISO VG 32, temperatura de 25^{o} C e rugosidade de 0,05 mícrons. As propriedades de amortecimento do rotor são: $\alpha = 0$ e $\beta = 0{,}0002$.

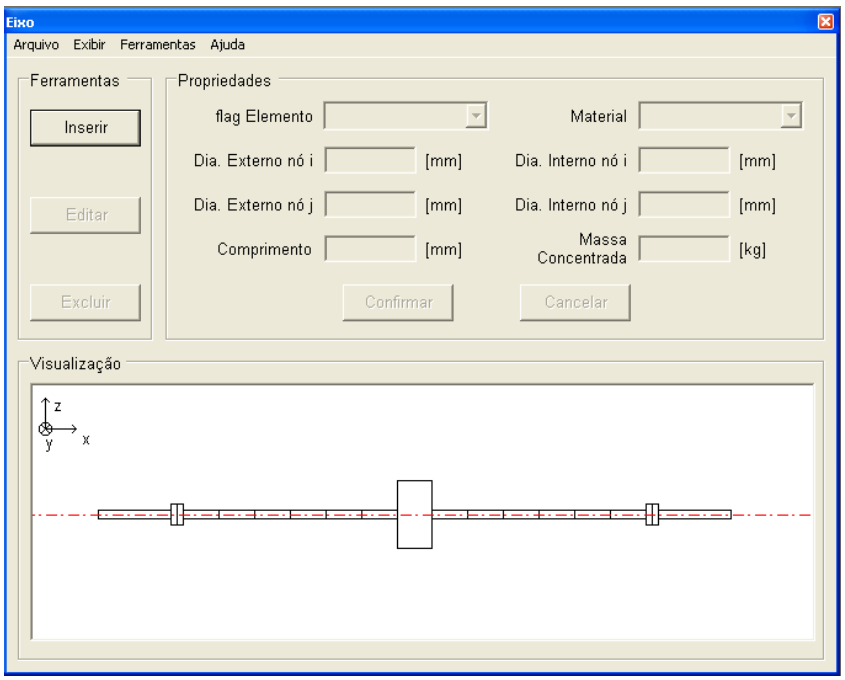

Figura 5.1 – Modelagem do eixo na interface do Rotortest®.

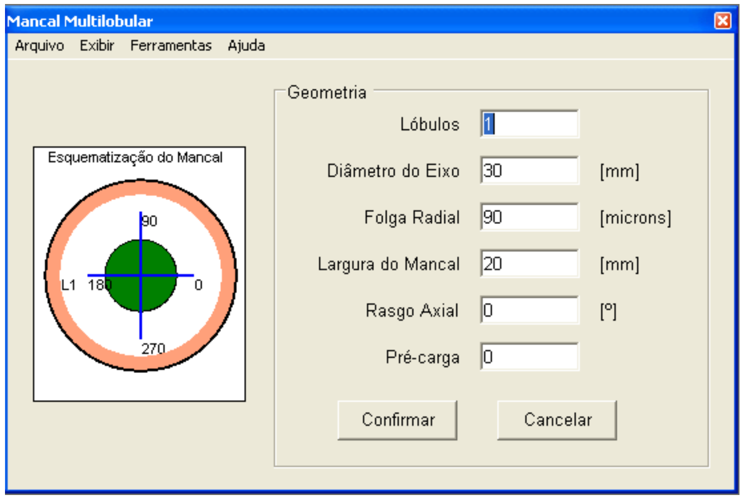

Figura 5.2 – Mancal multilobular na interface do Rotortest®.

Os elementos como eixo e mancal são modelados separadamente. Posteriormente, um rotor é montado integrando esses elementos, como na figura 5.3. Ainda nessa fase, é possível inserir excitação no rotor e incluir a fundação. Uma análise de equilíbrio estático é aplicada nos suportes. A força resultante na interface entre mancal e fundação é determinada, figura 5.4. Posteriormente, as propriedades do suporte ou dos mancais são inseridas no programa e os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais são calculados, figura 5.5. Em uma etapa posterior, os valores dos coeficientes de rigidez dos mancais podem ser aproximados para intervalos de rotação menores.

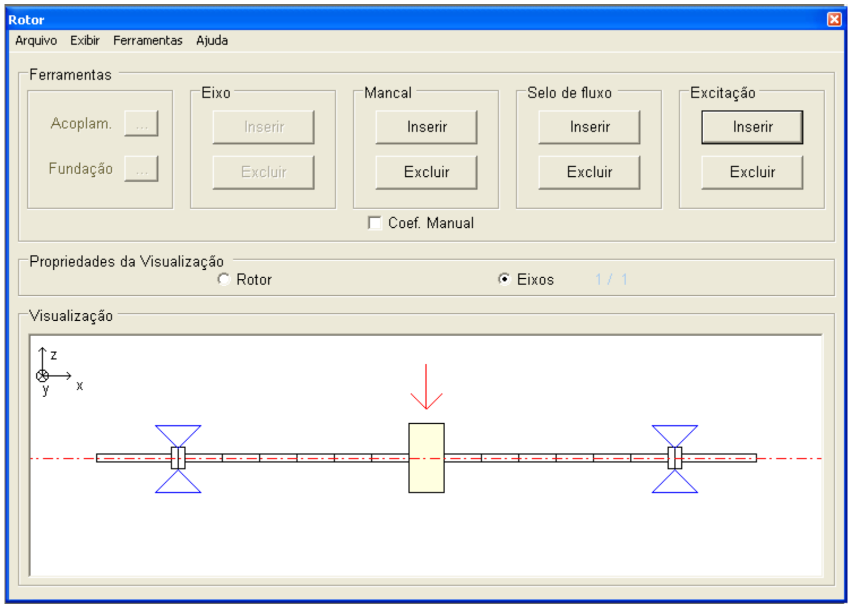

Figura 5.3 - Montagem do rotor na interface do Rotortest®.

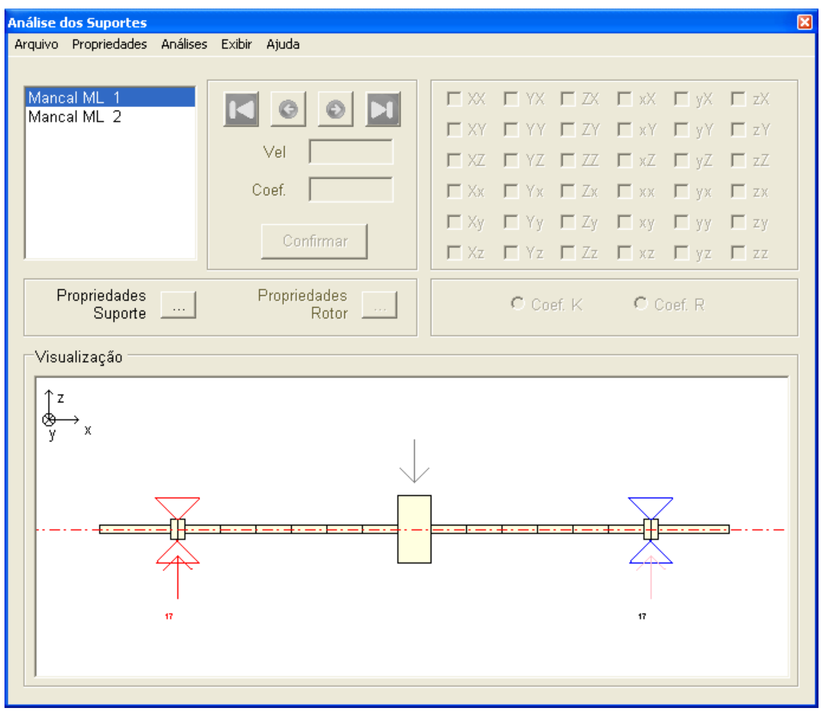

Figura 5.4 – Análise dos suportes na interface no Rotortest®.

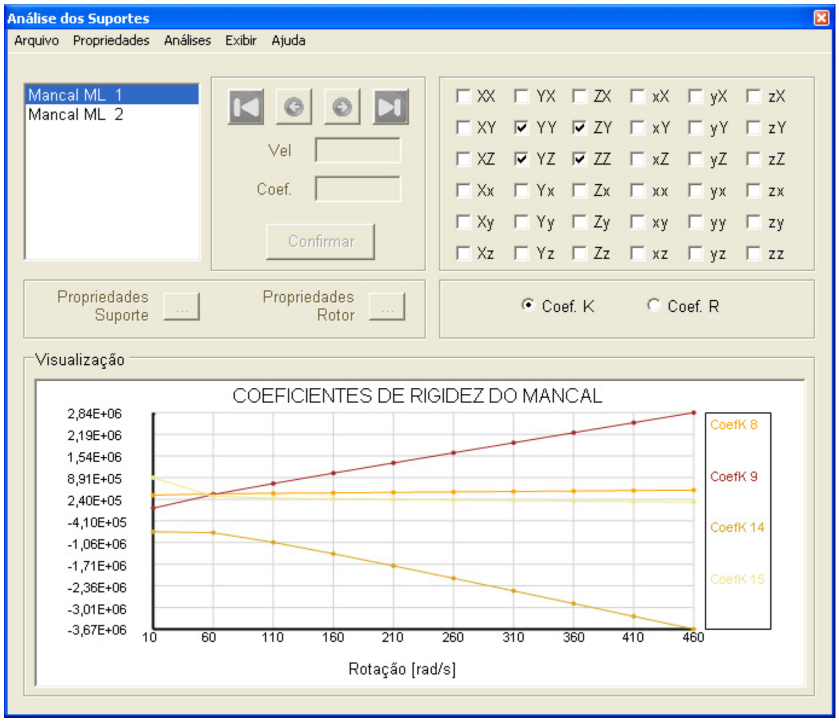

Figura 5.5 – Coeficientes de rigidez dos mancais.

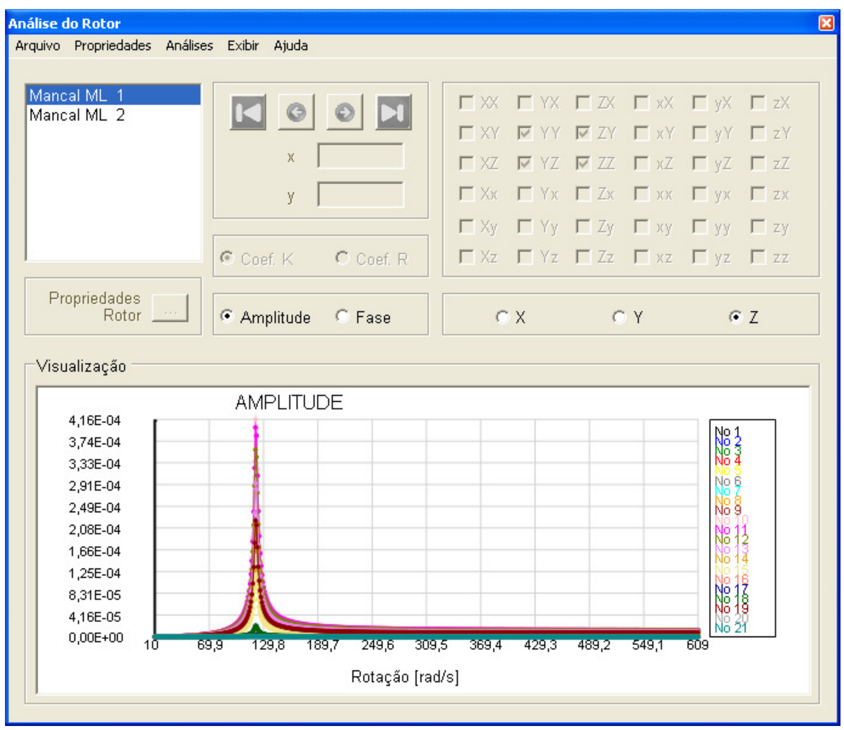

Figura 5.6 – Resposta em freqüência do subsistema rotor-mancais (mancal 1 – nó 3).

Assim, a segunda análise aplicada ao subsistema rotor-mancais é o cálculo da resposta em freqüência, figura 5.6.

5.1 Resposta do subsistema rotor-mancais

A análise individual do subsistema rotor-mancais e excitação por desbalanceamento permite determinar a freqüência natural do rotor que está em torno de 19 Hz. Conforme as figuras 5.7 e 5.8 as respostas são semelhantes em ambos os mancais com amplitudes levemente superiores ao caso do rotor com amortecimento proporcional em coordenadas físicas ou mistas compostas dos 4 modos devido à fundação rígida (sem deslocamento relativo do eixo em relação ao suporte do mancal).

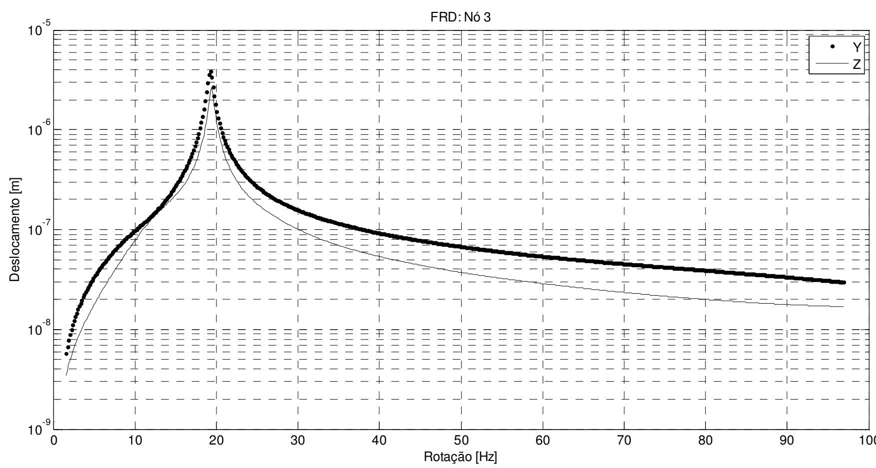

Figura 5.7 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Subsistema rotor-mancais.

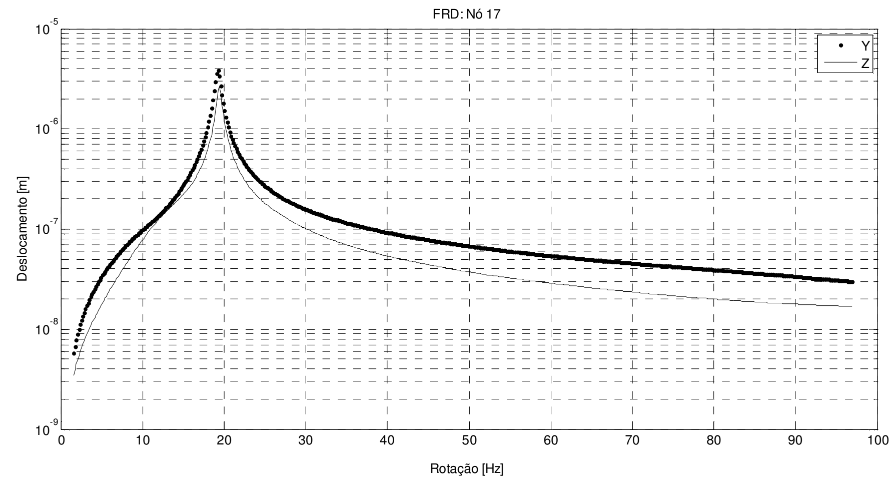

Figura 5.8 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Subsistema rotor-mancais.

5.2 Resposta do sistema rotor-mancais-fundação com amortecimento proporcional

As respostas das figuras 5.9 e 5.10 são correspondentes ao sistema rotor-mancais-fundação. O rotor é composto por uma fundação com amortecimento proporcional, solucionadas através da impedância mecânica em coordenadas físicas. A freqüência natural do rotor é de 19 Hz, os modos horizontais da fundação encontram-se, aproximadamente, a 7 Hz e 21 Hz.Os modos verticais, aproximadamente a 25 Hz e 66 Hz. Verifica-se que o sistema é mais flexível na direção horizontal do que na vertical.

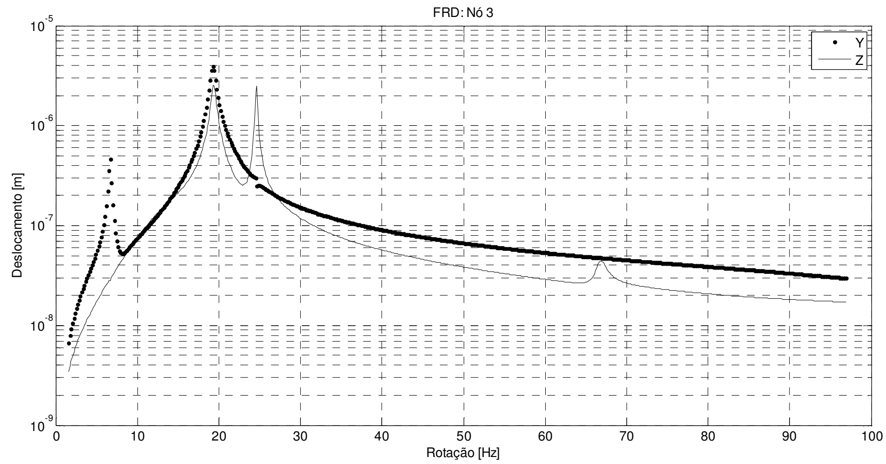

Figura 5.9 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Impedância mecânica com amortecimento proporcional.

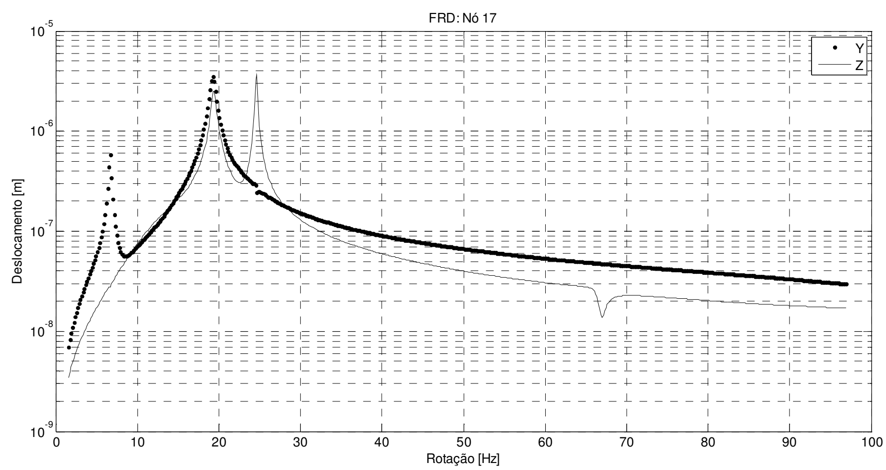

Figura 5.10 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Impedância mecânica com amortecimento proporcional.

Para ambos os sistemas massa-mola-amortecedor de 2 GDL (um sistema horizontal e outro vertical), a solução por impedâncias mecânicas (simuladas para representar a inversa da matriz de flexibilidade experimental) apresenta o mesmo resultado que a solução pelo método das coordenadas mistas, o qual utiliza coordenadas modais (principais ou generalizadas) para a fundação. Esta comparação pode ser feita entre as figuras 5.9 e 5.11 e entre as figuras 5.10 e 5.12.

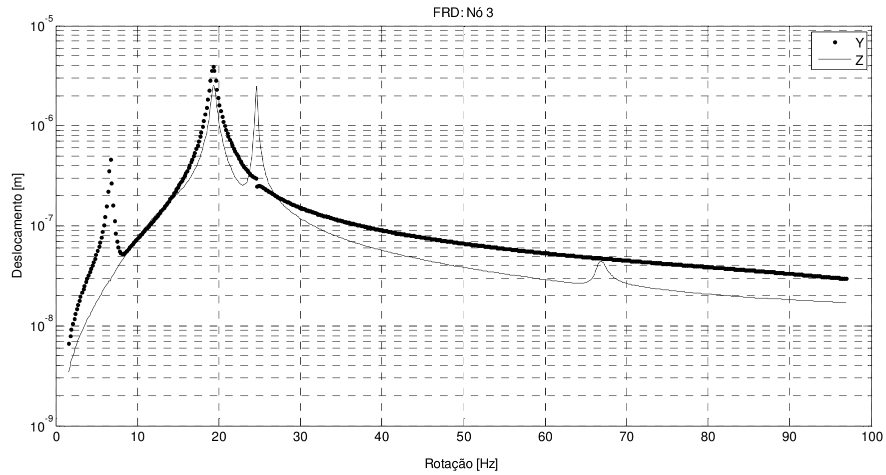

Figura 5.11 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Coordenadas mistas para os 4 modos com amortecimento proporcional.

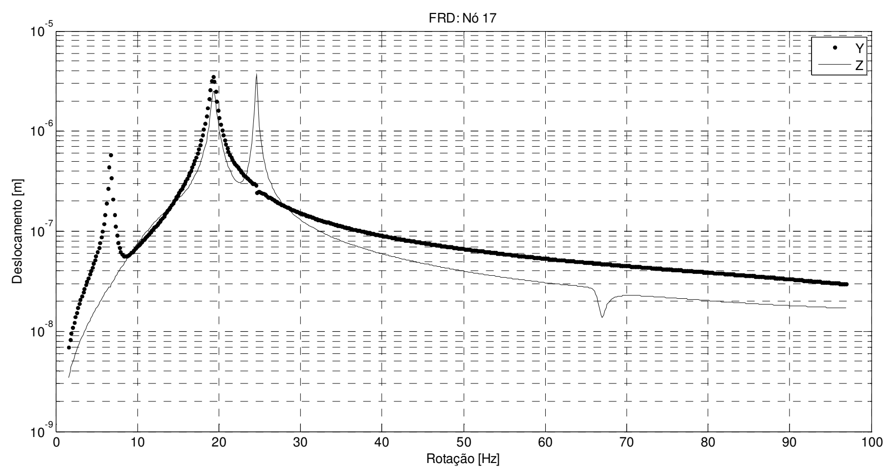

Figura 5.12 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Coordenadas mistas para os 4 modos com amortecimento proporcional.

Aplicando a ferramenta de seleção dos modos, que utiliza a média quadrática dos componentes imaginários (MQCI), os valores das amplitudes, obtidos para as freqüências naturais correspondentes, demonstrado na Tabela 5.2, serão:

Tabela 5.2 – Seleção dos modos aplicando a média quadrática dos componentes imaginários.

	Freqüências [Hz]	Amplitude [m]
Direção Horizontal	7	$1{,}65\text{x}10^{-4}$
	21	$2{,}25\text{x}10^{-5}$
Direção Vertical	25	$5{,}3\text{x}10^{-3}$
	66	$1{,}02\text{x}10^{-3}$

O modo mais fraco na direção horizontal é o segundo modo, assim como na direção vertical.

Quando o modo mais fraco horizontal é eliminado, no caso 21 Hz, a resposta vertical não se altera, pois o sistema é desacoplado. Contudo, a amplitude de 19 Hz em y aumenta, uma vez que o deslocamento relativo do rotor em relação à estrutura, neste modo, passa a ser absoluto, ou seja, a fundação não possui mais o modo de 21 Hz em sua representação matemática e, portanto, não há deslocamento relativo entre esta e o rotor. O efeito é observado em ambos os mancais, nas figuras 5.13 e 5.14.

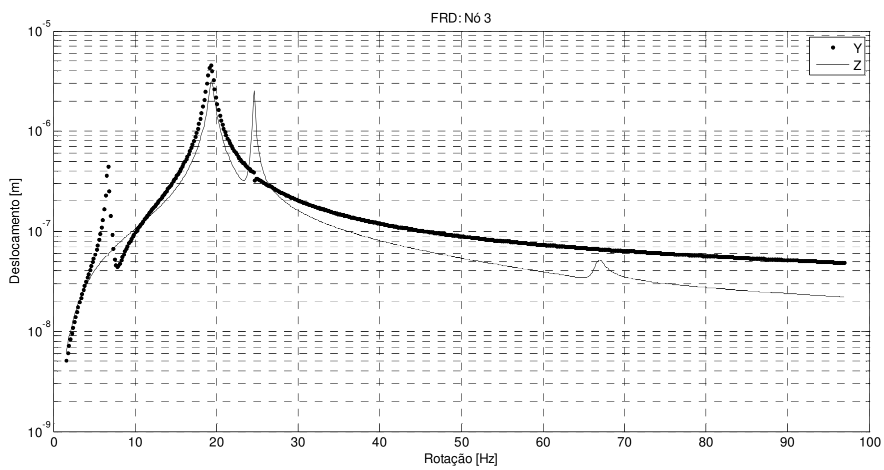

Figura 5.13 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Coordenadas mistas sem o modo mais fraco na horizontal com amortecimento proporcional.

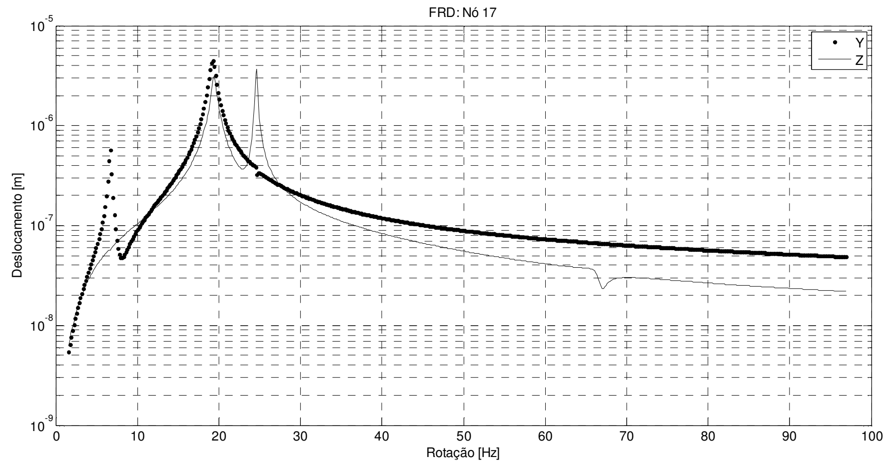

Figura 5.14 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Coordenadas mistas sem o modo mais fraco na horizontal com amortecimento proporcional.

O modo mais fraco na vertical ocorre em 66 Hz, ou seja, numa freqüência bem mais elevada que as anteriores, porém com modo muito amortecido. Desta forma, sua influência não é observável em escala linear, mas apenas em escala logarítmica. Como observado nas figuras 5.15 e 5.16, o modo mais fraco foi retirado. Ainda assim, seu efeito de fato, é desprezível.

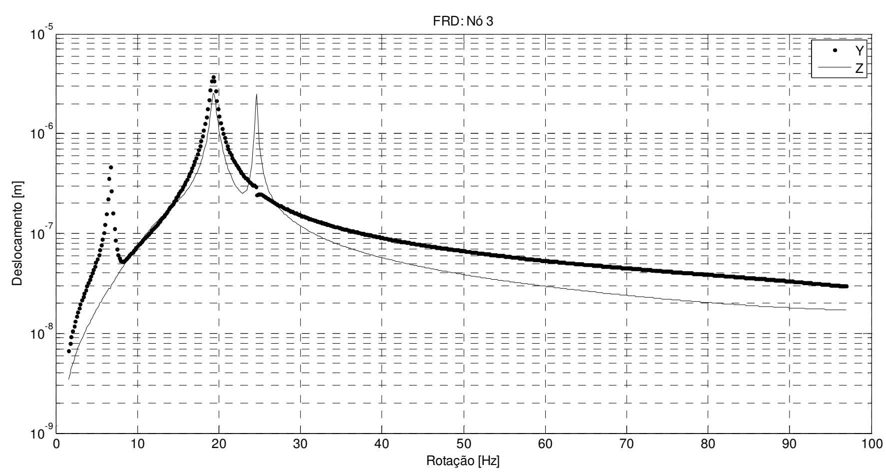

Figura 5.15 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Coordenadas mistas sem o modo mais fraco na vertical com amortecimento proporcional.

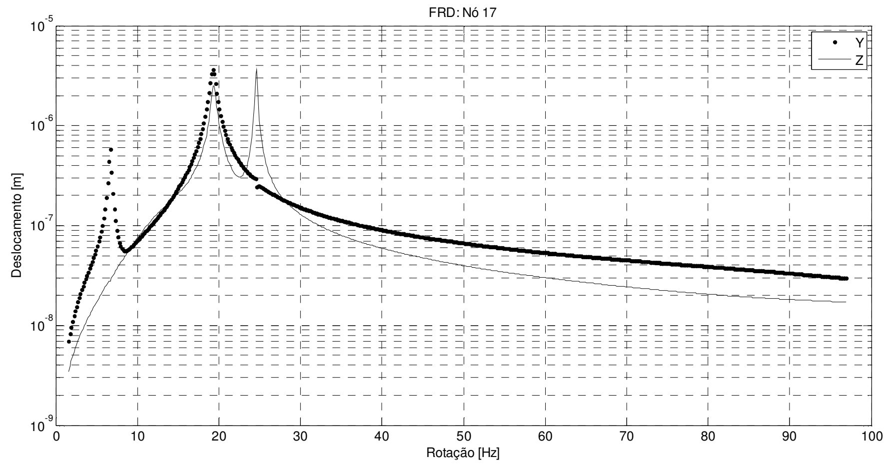

Figura 5.16 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Coordenadas mistas sem o modo mais fraco na vertical com amortecimento proporcional.

Quando os modos fracos na horizontal e na vertical são retirados, os dois efeitos citados anteriormente se sobrepõem neste resultado, conforme figuras 5.17 e 5.18. Desta forma, a análise de convergência para o método de coordenadas mistas mostrou-se bem satisfatória, no sentido que os mais significativos em espectro em freqüência são suficientes para representar a estrutura de fundação na resposta do rotor.

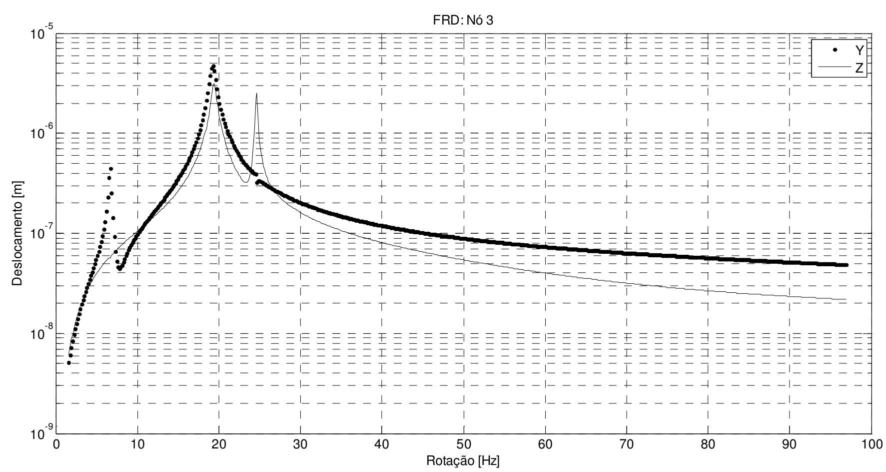

Figura 5.17 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Coordenadas mistas sem o modo mais fraco na vertical e na horizontal com amortecimento proporcional.

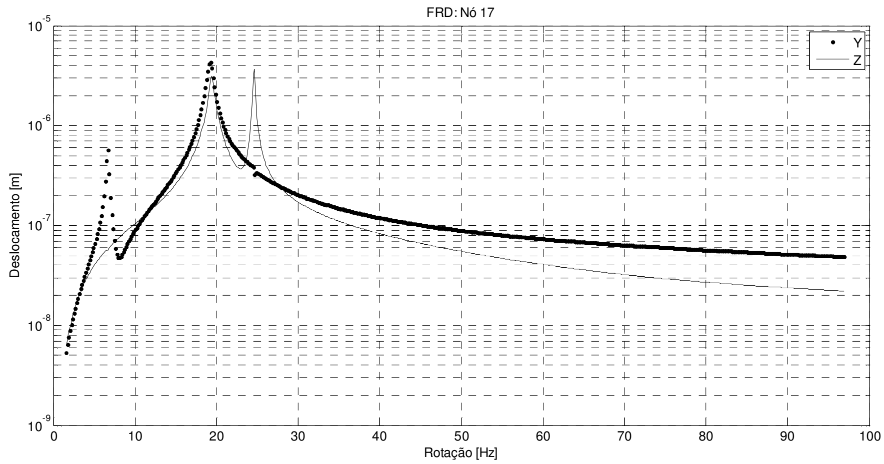

Figura 5.18 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Coordenadas mistas sem o modo mais fraco na vertical e na horizontal com amortecimento proporcional.

A seguir serão validados os testes de consistência dos programas implementados. A retirada dos modos horizontais permite concluir que a fundação é rígida na direção horizontal e flexível na vertical com modos de 25 Hz e 66 Hz, de acordo com as figuras 5.19 e 20.

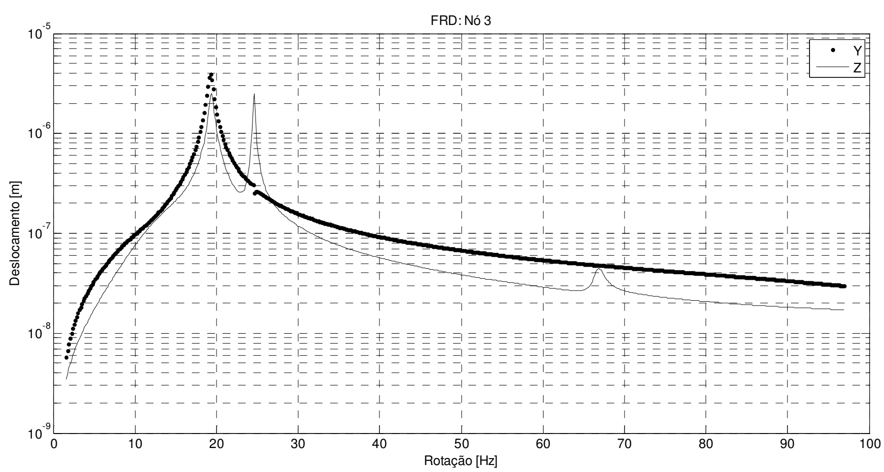

Figura 5.19 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Coordenadas mistas sem os modos horizontais com amortecimento proporcional.

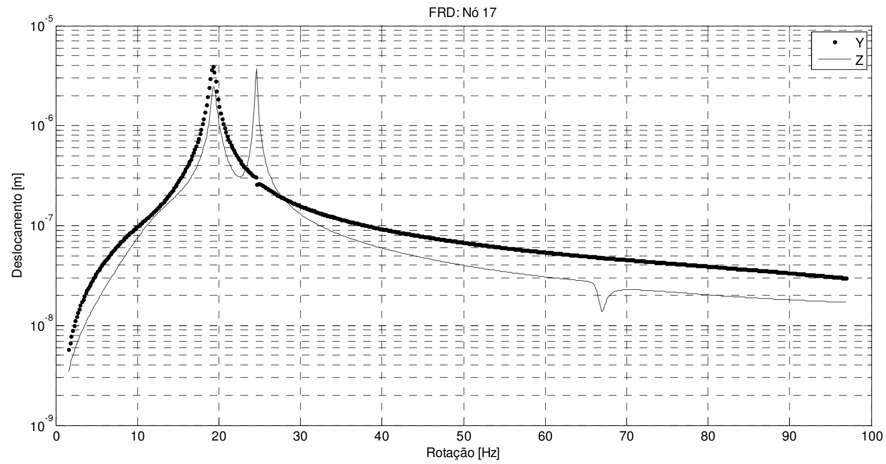

Figura 5.20 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Coordenadas mistas sem os modos horizontais com amortecimento proporcional.

A retirada dos modos verticais permite concluir que a fundação é rígida na vertical e somente os modos horizontais, 6,6 Hz e 21 Hz, estão presentes de acordo com as figuras 5.21 e 5.22.

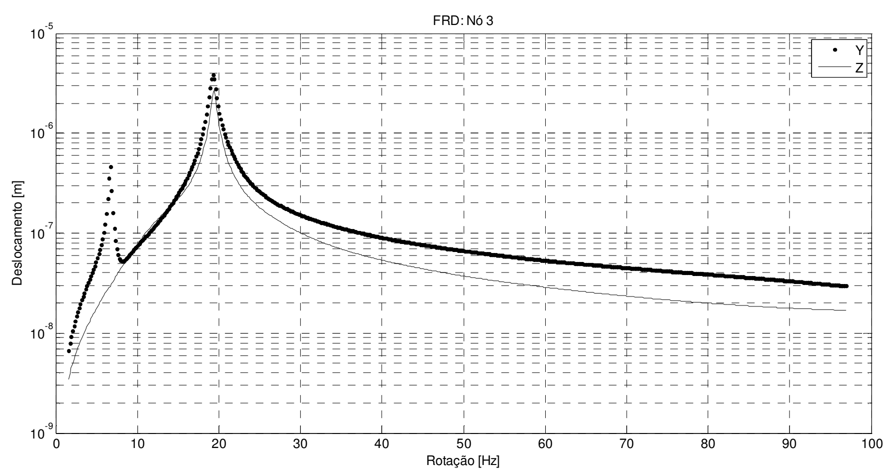

Figura 5.21 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Coordenadas mistas sem os modos verticais com amortecimento proporcional.

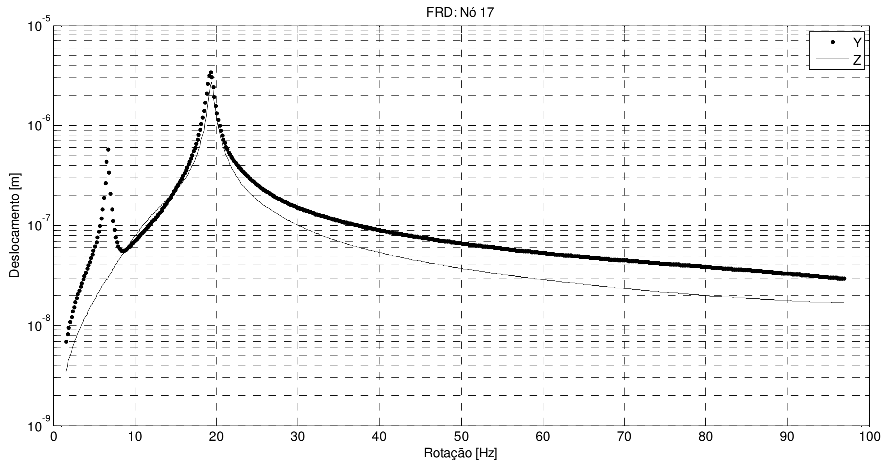

Figura 5.22 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Coordenadas mistas sem os modos verticais com amortecimento proporcional.

5.3 Resposta do sistema rotor-mancais-fundação com amortecimento não-proporcional

A resposta resultante do amortecimento $\bar{C} = [\Phi]^t C[\Phi]$ é fracamente acoplada. Para sistemas fracamente acoplados as respostas obtidas pelos métodos de impedância e coordenadas mistas ainda são semelhantes. Devido ao fraco acoplamento, a eliminação de modos corresponde aos mesmos efeitos observados para o modelo de modos desacoplados, visto anteriormente, no caso de amortecimento proporcional. Porém nesse caso, os valores da matriz de amortecimento não proporcional não corresponde à uma relação com elasticidade e a inércia do sistema, pois os valores escolhidos para o amortecimento são diferentes. Desta forma, as amplitudes são diferentes, mas as freqüências do rotor, dos modos horizontais e verticais são coincidentes ao caso do amortecimento proporcional. As figuras 5.23 e 5.24 representam as respostas para impedância mecânica nos nós 3 e 17, respectivamente e as figuras 5.25 e 5.26 são o resultado da solução pelo método das coordenadas mistas nos nós 3 e 17, respectivamente.

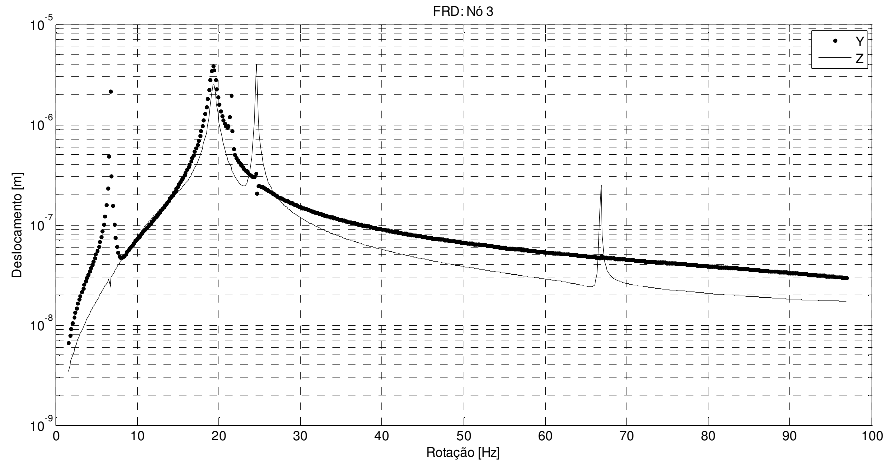

Figura 5.23 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Impedância mecânica com amortecimento não-proporcional.

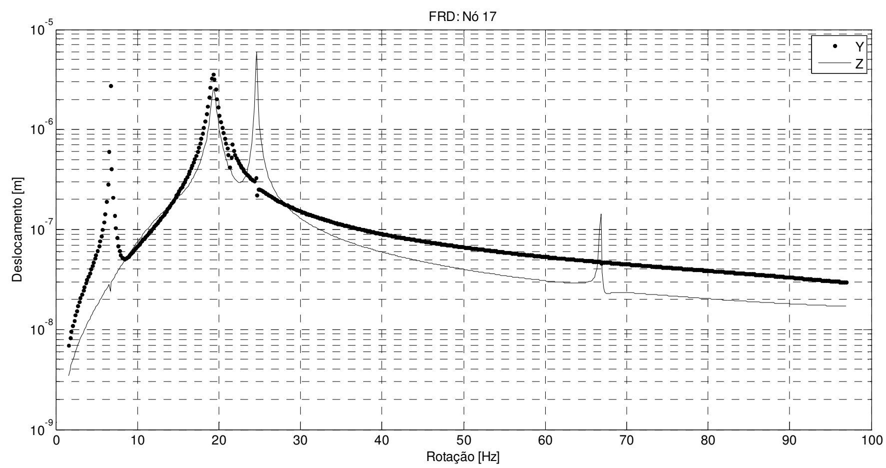

Figura 5.24 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Impedância mecânica com amortecimento não-proporcional.

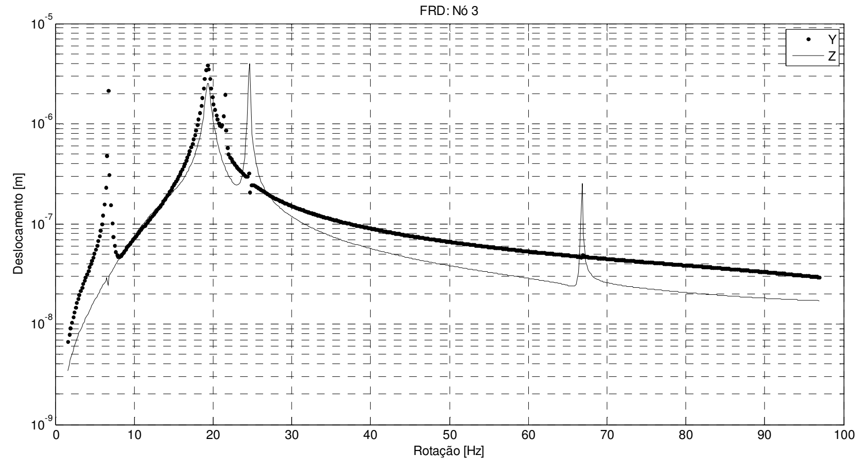

Figura 5.25 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Coordenadas mistas para os 4 modos com amortecimento não-proporcional.

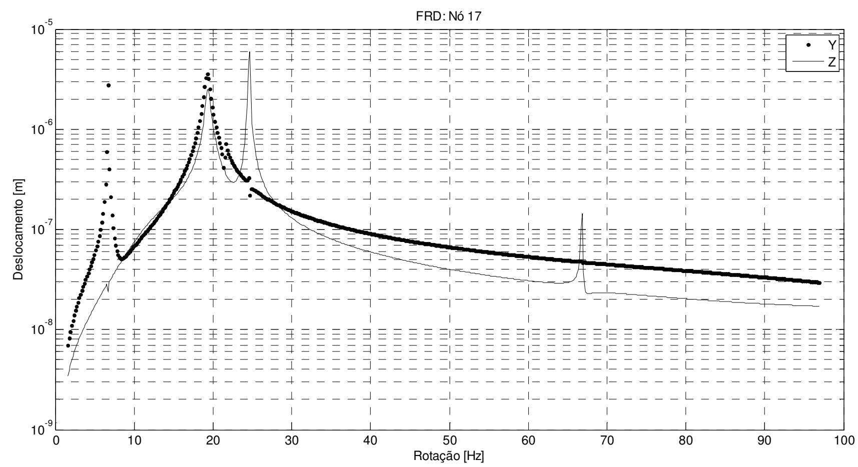

Figura 5.26 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 2): Coordenadas mistas para os 4 modos com amortecimento não-proporcional.

6 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A seguir serão apresentados os resultados obtidos a partir dos dados experimentais. Para calcular os parâmetros modais da fundação foi aplicado o software de análise modal Modan® que foi elaborado pela Universidade . Os resultados foram integrados ao modelo teórico do subsistema rotor-mancais elaborado no software Rotortest® e as respostas do sistema completo foram calculadas. A seleção dos modos foi aplicada através do software Modan®. O experimento de medição é descrito e a forma como é realizada a seleção dos modos. Aplicou-se o método das coordenadas mistas nos modos acoplados e desacoplados e desta forma, plotou-se os resultados.

6.1 Software de análise modal Modan®

As funções de transferências obtidas nos testes experimentais foram analisadas no software Modan® 3.0, onde modos de vibração, freqüências críticas e amortecimentos são estimados pelo método de análise modal. Este software de análise modal foi desenvolvido pelo Laboratório de Mecânica Aplicada R. Chaléat da Université de Franche-Comté na cidade de Besançon.

O software Modan® (MODAN®, Version 3.0) analisa as funções de transferência medidas de uma estrutura e permite:

- Visualizar as funções de transferência como diagramas de Bode ou de Nyquist;

- Extrair freqüências e modos de vibração complexos através de três métodos, que são selecionados para uma melhor adaptação da técnica de identificação do tipo de estrutura a ser considerada:

- Suavização linear: nivelamento por funções de transferência de estruturas com comportamento linear;

- Suavização não-linear: nivelamento por funções de transferência de estruturas de comportamento não-linear;

- Método global: consideração simultânea de informações espaciais (amplitudes) e freqüência.

Resume os resultados obtidos, e permite que as forças de excitação possam ser aplicadas em todos os pontos previamente identificados.

A resposta harmônica forçada de uma estrutura envolve todos os seus modos. Para um sistema contínuo, o número de modos é infinito. O número de modos não necessita ser limitado necessariamente. Para uma dada faixa de freqüências, a resposta forçada depende principalmente da contribuição dos modos presentes nesta faixa e também de todos os modos externos, incluindo os modos combinados. Teoricamente pode-se identificar simultaneamente um grande número de modos. No entanto, na prática, trabalha-se com faixas de freqüências contendo um modo único ou vários modos com freqüências vizinhas.

O procedimento de análise aplicado na determinação dos parâmetros representa as funções de transferência de cada sensor na faixa analisada na suavização linear. Primeiramente, o número de modos deve ser identificado e a freqüência aproximada na banda analisada, com a seleção destes modos na interface do programa. A identificação é feita em duas passagens. Na primeira, cada sensor é processado de forma independente através da resolução de um sistema não-linear que fornece autovalores complexos e numerados. Posteriormente, calcula-se a média para cada modo de autovetor, removendo os sensores individualmente, assim como, os resultados que estão distantes da média inicial. O número de pontos de medição deve ser definido nesta primeira etapa. Assim, é possível selecionar um número reduzido de pontos para determinar os valores próprios complexos, o que reduz o tempo de identificação. A segunda passagem aplica a média dos autovalores.

No caso não-linear, o procedimento é idêntico ao linear, anteriormente citado. A diferença está nos termos utilizados para aproximação do termo não-linear, cujos expoentes são p e q e podem ser ajustados.

O método global pode levar em conta todos os setores em uma dada faixa de freqüências. Este método permite o cálculo da classificação numérica das matrizes em função do número de modos presentes em uma faixa de freqüência.

Desta forma, o método adotado na seleção deste trabalho corresponde ao caso linear.

6.2 Análise modal da fundação

A estrutura de fundação do banco de testes do LAMAR foi testada para a configuração flexível. A placa da fundação estava sustentada por quatro colunas, cada uma posicionada em uma extremidade da mesma para que os modos flexionais da fundação afetem a resposta do rotor. Sobre a placa metálica estão posicionados dois mancais e um atuador magnético como observado na figura 6.1. A bancada já foi validada experimentalmente em trabalhos anteriores como Castro (2007), Okabe (2007) e Cavalcante (2001).

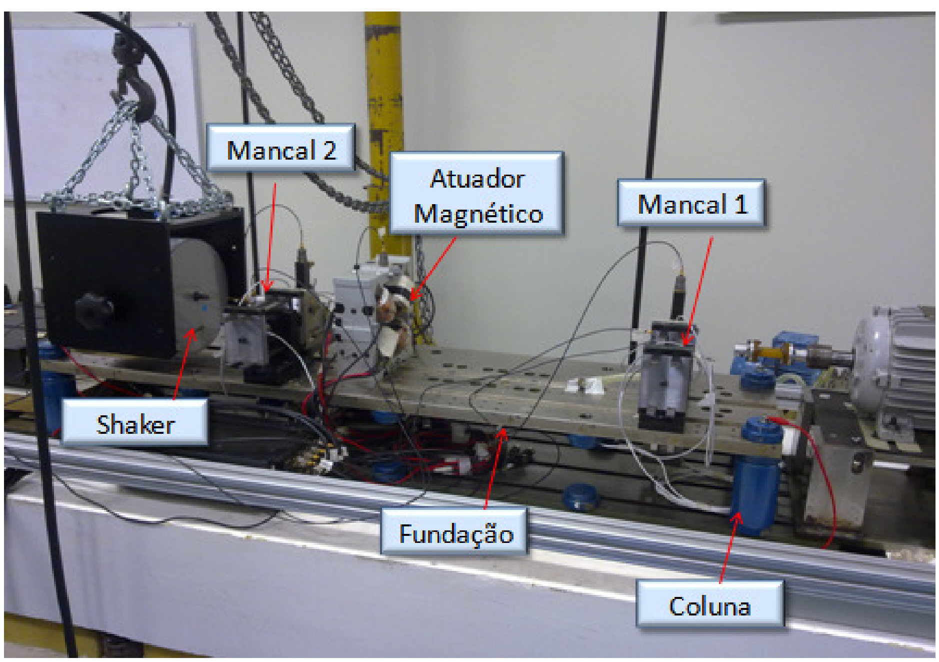

Figura 6.1 – Elementos da bancada simulada para configuração flexível.

Os pontos de interesse foram excitados nas direções horizontal, vertical e axial de cada mancal, vertical e horizontal do atuador magnético e vertical na placa de suporte (entre os mancais e após o segundo mancal). A figura 6.2 apresenta a imagem de uma destas configurações do ensaio, no qual o mancal está sendo excitado na direção vertical.

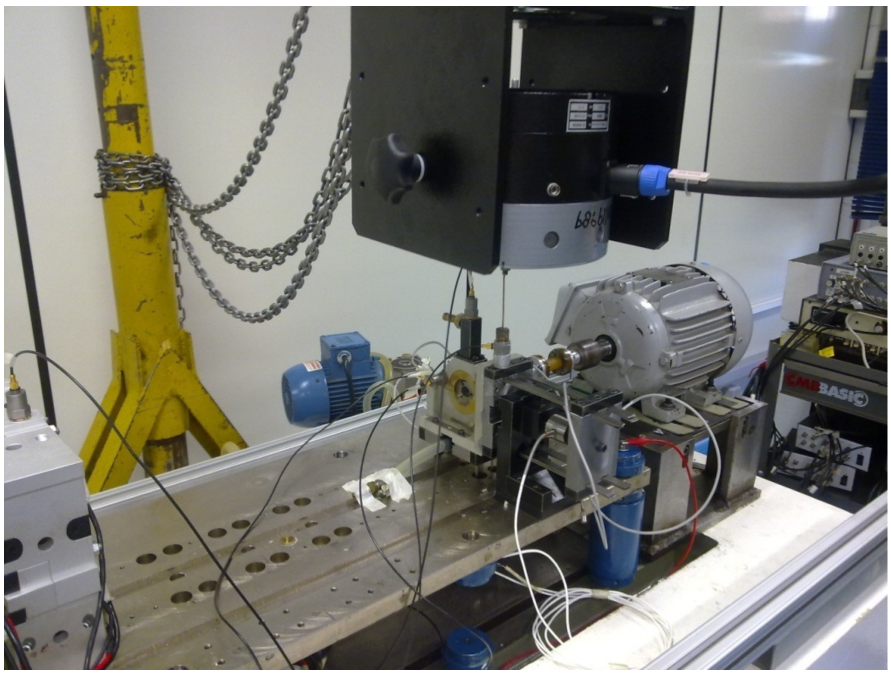

Figura 6.2 – Teste na estrutura de fundação da bancada experimental – excitação na direção vertical no mancal.

Para excitar a estrutura foi utilizado o atuador eletromecânico (*shaker*) da marca *Bruel & Kjaer* modelo 4824, alimentados por um amplificador de potência que utilizou o sinal gerado pela placa de aquisição da *National Instruments* modelo PCIe - 6259. Os sinais adquiridos dos acelerômetros passaram pelo condicionador de sinais *Bruel & Kjaer*, pela placa de aquisição da *National Instruments* modelo AT-MIO-16E2 e foram registrados através do computador com a utilização do software LabView 7.1 (figura 6.3) para serem processados posteriormente. Os sinais foram amostrados até 1000 Hz e também com *resample* até 250 Hz.

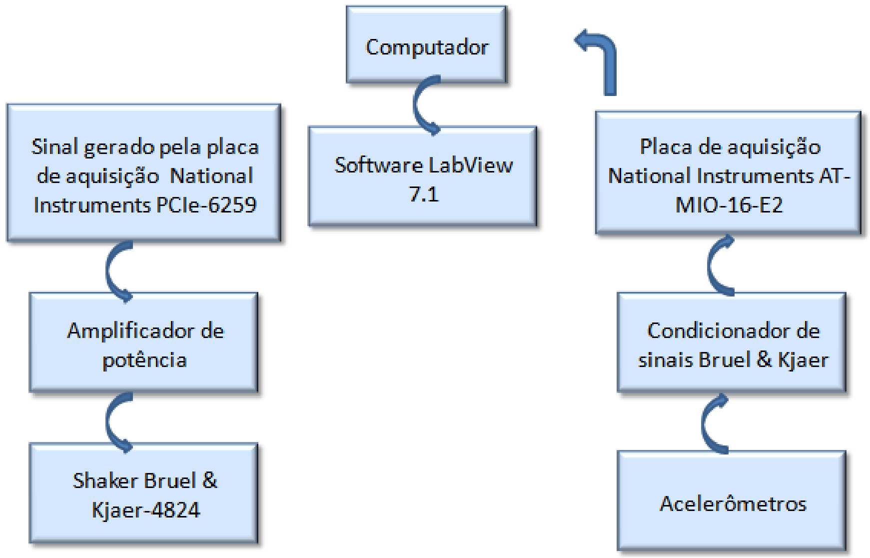

Figura 6.3 – Configuração do sistema de medição.

Os acelerômetros foram utilizados para medir a resposta da fundação à excitação provida pelo atuador, e foram posicionados sobre os suportes dos mancais, que são os elementos de interface entre o rotor e estrutura.

A tabela 6.1 mostra as freqüências críticas na faixa de 0 a 100 Hz (faixa de operação do rotor), as quais foram classificadas pela ordem de importância pelo método *Global Mode Rank* (Proto-Dynamique V4.0, Intespace et LMARC, 1997).

Tabela 6.1 – Freqüência dos 8 modos na faixa de 0 a 100 Hz (na ordem de importância).

Importância	**Frequência**
1	7,8100 Hz
2	79,5191 Hz
3	72,1494 Hz
4	83,3775 Hz
5	42,7215 Hz
6	67,2632 Hz
7	47,5412 Hz
8	46,0553 Hz

O gráfico de barra mostrado na figura 6.4, representa a matriz modal (com 8 modos na faixa de freqüência considerada) obtida na análise global. Os quatro graus de liberdade considerados são os deslocamentos na horizontal e vertical do ponto de conexão entre a fundação e o rotor, ou seja, os mancais. Através deste gráfico, é possível determinar quais os modos predominantemente horizontais (H), verticais (V) e acoplados (HV). A inversão observada na figura 6.4 apenas indica uma oposição de fase deste modo com relação aos demais.

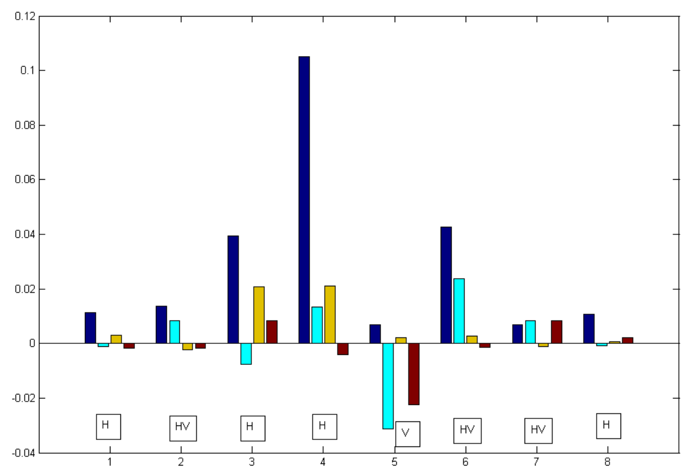

Figura 6.4 – Influência dos modos nos graus de liberdade: mancal 1 horizontal (azul escuro), mancal 1 vertical (azul claro), mancal 2 horizontal (amarelo) e mancal 2 vertical (vermelho).

6.3 Aplicação do método das coordenadas mistas – modos acoplados

A primeira análise realizada, considerou os 8 modos como sendo acoplados, desta forma cada modo tem alguma influência da vibração do sistema rotativo em ambas direções.

A figura 6.5 mostra a resposta ao desbalanceamento do sistema no mancal 1 (próximo ao motor). Como os efeitos dos 8 modos da fundação são mais expressivos, no mancal 1 (nó 3), este foi escolhido para a análise. Esta resposta é mostrada em uma escala logarítmica, com o objetivo de melhor visualizar os efeitos dos modos da fundação na resposta do sistema. O pico de amplitude em 19 Hz ocorre em função da freqüência natural do eixo, enquanto que os demais picos de freqüência são relacionados aos modos da fundação.

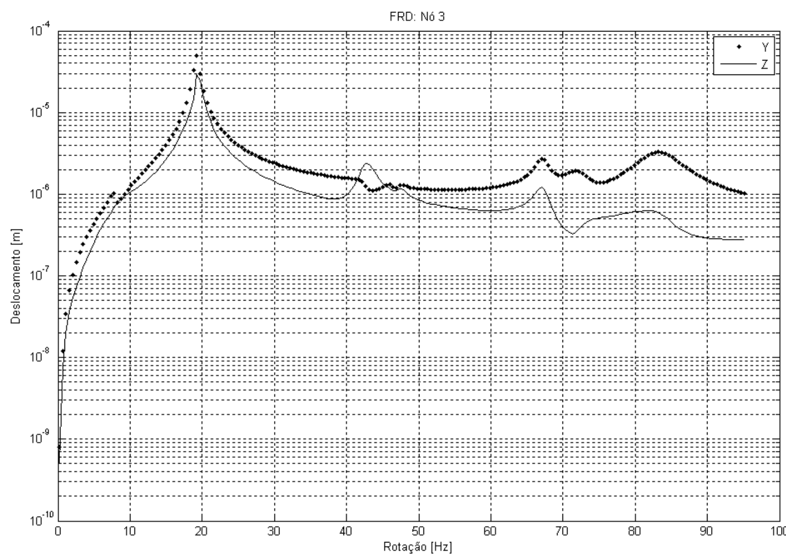

Figura 6.5 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 8 modos acoplados.

Quando o modo menos significativo (freqüência de 46,0553 Hz) é desconsiderado, a mudança da resposta do sistema é praticamente desprezível, como mostrado na figura 6.6. O mesmo efeito é percebido quando o modo relacionado à freqüência de 47,5412 Hz é desconsiderado (figura 6.7). Entretanto, uma mudança importante ocorre na direção vertical (Z) quando o modo da freqüência de 67,2632 Hz é desconsiderado, como mostrado na figura 6.8.

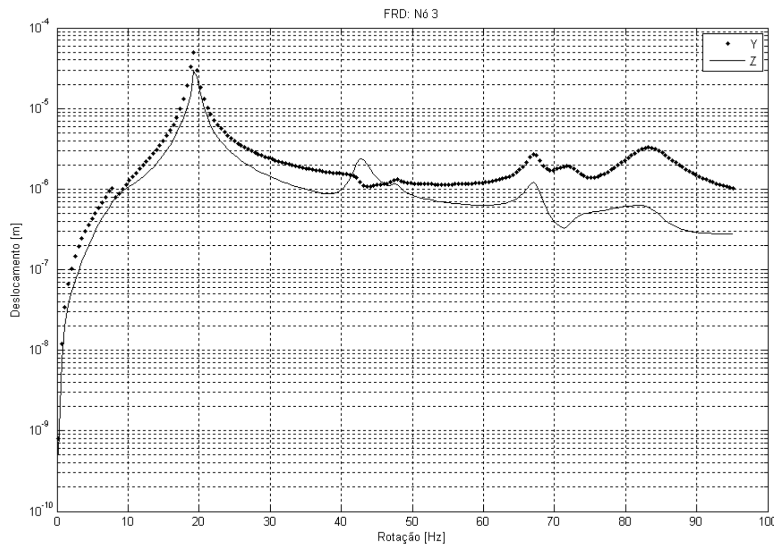

Figura 6.6 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 7 modos acoplados.

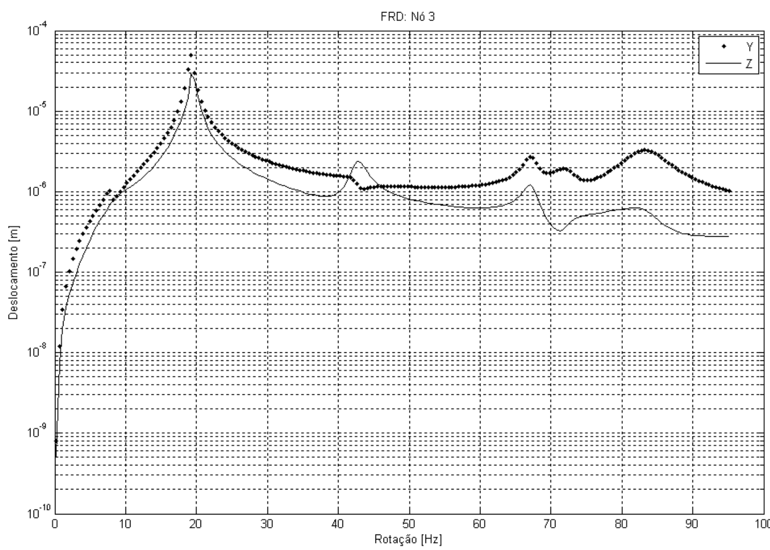

Figura 6.7 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 6 modos acoplados.

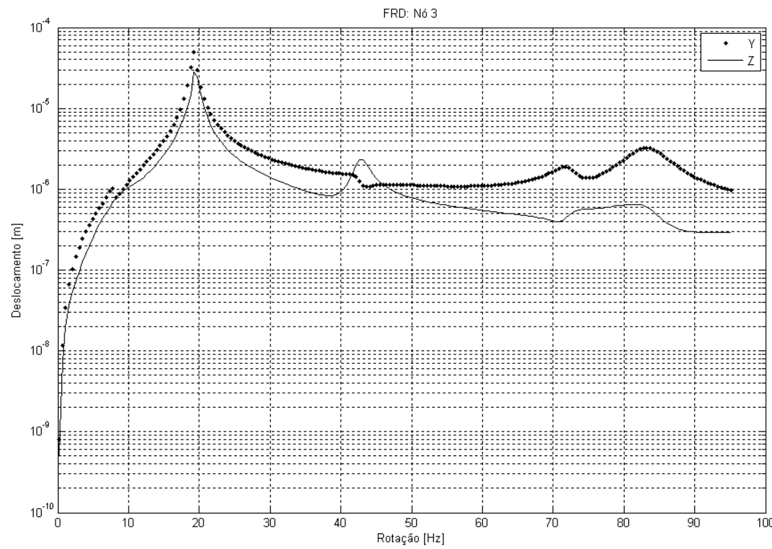

Figura 6.8 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 5 modos acoplados.

Desta forma, mostrou-se que os modos da fundação podem ser reduzidos a 6 modos significativos, para esta abordagem.

6.4 Aplicação do método das coordenadas mistas – modos desacoplados

Uma segunda análise dos métodos das coordenadas mistas é realizada considerando os modos desacoplados. Desta forma, ao invés de se considerar 8 modos com influência em ambas direções, leva-se em conta 8 modos na horizontal e 8 modos na vertical, totalizando 16 modos da fundação, desta forma, desacoplados. A comparação das figuras 6.9 e 6.5 mostra que esta nova abordagem apresenta mudanças desprezíveis na resposta do sistema.

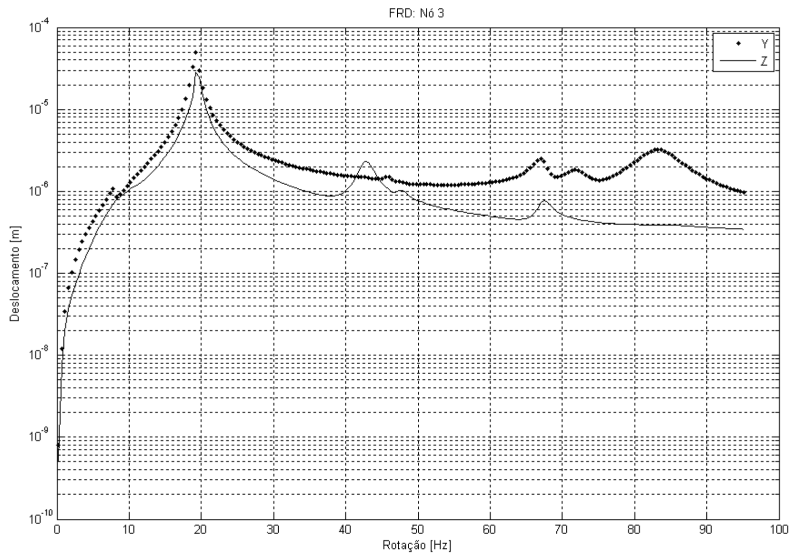

Figura 6.9 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 16 modos desacoplados.

Além disto, como mostrado no diagrama da figura 6.4, alguns modos podem ser considerados importantes apenas na horizontal ou na vertical. Como os modos 1, 3, 4 e 8 são predominantes na horizontal, o modo 5, na vertical, e os modos 2, 6 e 7 em ambas as direções, podem ser considerados 11 modos desacoplados, sendo 7 horizontais e 4 verticais (repetindo os modos 2, 6 e 7 para ambas direções). A resposta da figura 6.10 mostra que esta redução pode ser aplicada, pois não há diferença significativa na resposta. Por isso, os modos acoplados são fracamente acoplados. Conclui-se então, que o amortecimento estrutural da fundação é proporcional.

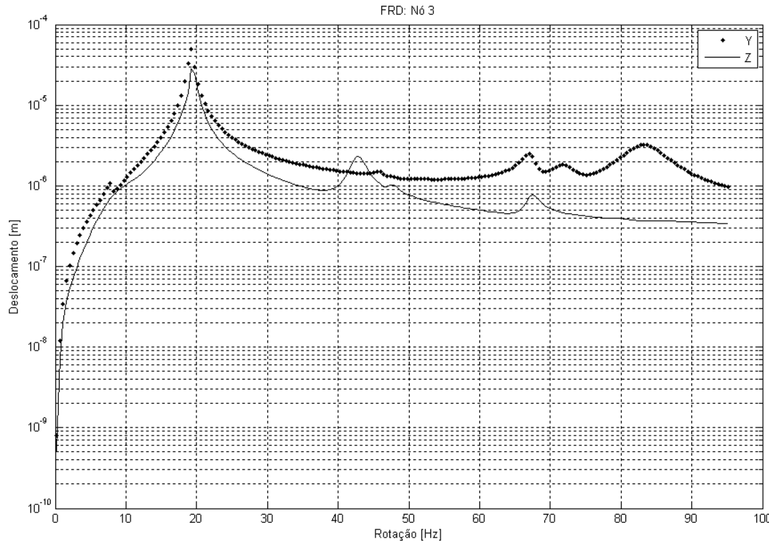

Figura 6.10 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 11 modos desacoplados.

Como na análise anterior, os modos menos significativos são reduzidos sucessivamente, até que uma mudança na resposta do sistema seja identificada. Desta forma, as figuras 6.11, 6.12 e 6.13 mostram a resposta do sistema, excluindo os modos menos significativos. Quando o modo menos significativo é desconsiderado (freqüência de 46,0553 Hz, figura 6.11), o sistema passa a considerar 10 modos, pois sua influência acontece apenas na horizontal. Na desconsideração do segundo modo menos significativo (47,5412 Hz), o sistema passa a ter 8 modos, visto que tanto as direções horizontal e vertical são afetadas por este modo (figura 6.12). A primeira mudança significativa ocorre na redução do modo relativo à frequência de 67,2632 Hz, como ocorreu na análise anterior. Neste caso, o sistema passou a ter 6 modos significativos (figura 6.13).

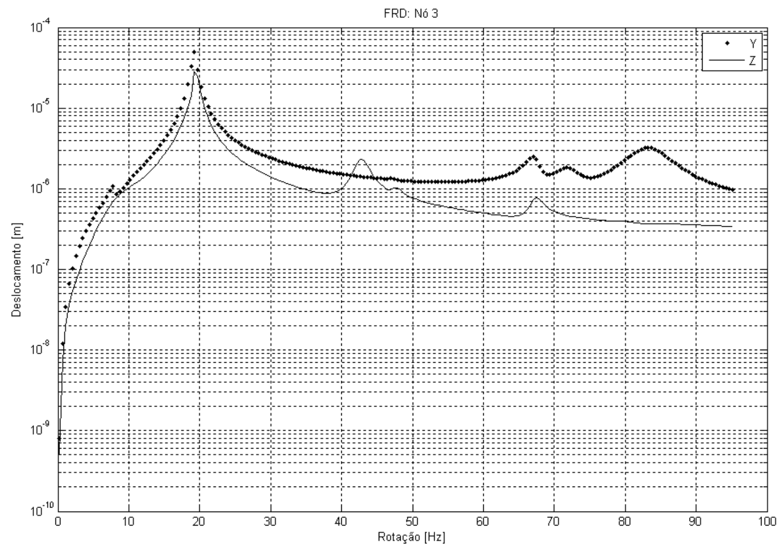

Figura 6.11 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 10 modos desacoplados.

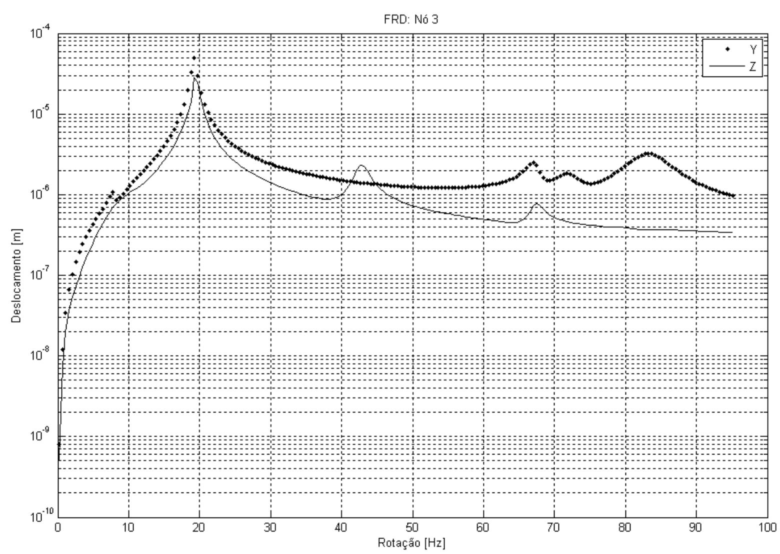

Figura 6.12 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 8 modos desacoplados.

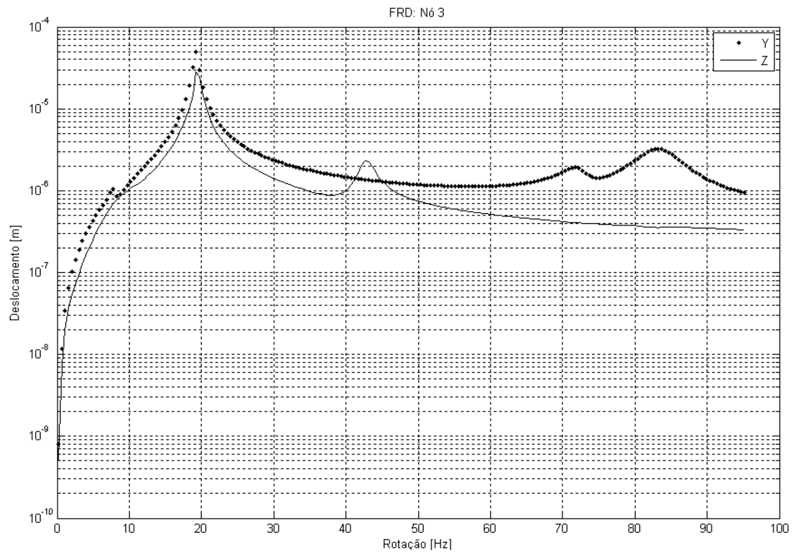

Figura 6.13 – Resposta ao desbalanceamento (mancal 1): Rotor-mancal-fundação com 6 modos desacoplados.

Então, para o sistema desacoplado, devem ser considerados 8 modos, sendo cinco modos na horizontal (frequências de 7,8100 Hz, 79,5191 Hz, 72,1494 Hz, 83,3775 Hz e 67,2632 Hz) e três na vertical (79,5191 Hz, 42,7215 Hz e 67,2632 Hz).

7 CONCLUSÕES

O modelo em questão avaliou a interação entre dois subsistemas, o subsistema rotor-mancal e o subsistema fundação. A influência da fundação no rotor foi introduzida no sistema e a concordância entre os métodos de coordenadas mistas e impedância mecânica foi analisada.

O método da impedância mecânica considera as coordenadas físicas para ambos os subsistemas. Aplica a inversa da matriz de flexibilidade e para isso necessita que todos os modos da estrutura estejam presentes. A matriz de impedância mecânica é aplicada para obter as funções de resposta em freqüência do sistema. A dificuldade deste método está em obter experimentalmente todos os modos da estrutura devido às limitações físicas, custos da medição e dos equipamentos. No caso de uma condição simulada por elementos finitos para determinar os modos da estrutura, se a complexidade da estrutura for elevada, o custo se torna elevado.

A opção está em aplicar o método das coordenadas mistas que considera para o subsistema rotor-mancal, coordenadas físicas e para o subsistema fundação, as coordenadas modais, chamado de coordenadas mistas. Esse método, portanto, não exige que todos os modos da fundação sejam conhecidos. A questão está em quantos modos são realmente necessários para representar significativamente as informações correspondentes a fundação. Por isso, foi feito um estudo comparativo entre os métodos de coordenadas modais e impedância mecânica. Mas, para comparar os métodos, o sistema precisa ter suas características conhecidas. Desta forma, a primeira análise considerou um modelo teórico conhecido da fundação.

A primeira etapa foi verificar se esse modelo apresenta a mesma resposta simulada para o método de impedância mecânica e coordenadas mistas. Esta condição ocorrerá quando o número de modos pelo método de impedância for igual ao das coordenadas mistas, ou seja, todos os modos da estrutura. Com isso, é possível fazer a verificação de que o modelo simulado estava correto através de comparações qualitativas dos resultados obtidos. Portanto, as respostas obtidas para ambos os métodos foram iguais assim, o subsistema fundação foi montado corretamente.

A segunda etapa consistiu em reduzir o número de modos com influência menos significativa na resposta do modelo e comparar sua influência com a impedância mecânica, para este mesmo modelo teórico. Para reduzir os modos foi necessário desenvolver uma ferramenta de seleção de modos que aplicou o método da média quadrática dos componentes imaginários. Como o modelo é conhecido, verificou-se através das respostas obtidas que a ferramenta estava funcionando corretamente. Desta forma, os modos foram reduzidos em diversas configurações e sua influência entre as direções horizontal e vertical verificadas, conforme pode ser observado nos resultados. Ainda foi realizado uma variação no tipo de amortecimento aplicado no subsistema fundação. Foi verificado que o amortecimento proporcional tem modos desacoplados e o amortecimento não-proporcional ficou fracamente acoplado. Sendo assim, a comparação entre ambos apresentou pouca diferença em termos qualitativos.

A terceira etapa foi aplicar o método das coordenadas mistas numa fundação obtida experimentalmente. O modelo do subsistema rotor-mancal foi implementado em um modelo teórico através do software Rotortest® e a o subsistema fundação aplicou os parâmetros modais obtidos a partir do ensaio experimental. Foi determinado o número mínimo de modos que representam a estrutura quando acoplados. Em outra aplicação, o sistema foi considerado desacoplado e da mesma forma, foi determinado o número mínimo de modos que a representam nessa condição através de um estudo comparativo qualitativo. Como a diferença de resposta entre ambos foi pequena para os modos avaliados, o amortecimento estrutural da fundação pode ser considerado proporcional. A redução foi coerente para ambas as abordagens analisadas.

Em análises paralelas, os resultados se apresentaram coerentes e satisfatórios em ambos as formas analisadas, considerando um subsistema fundação teórico ou experimental, alcançando assim, o objetivo deste trabalho.

7.1 Sugestões de trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros segure:

- Aperfeiçoar o software desenvolvido para selecionar os principais modos da fundação de maneira automática e integrada ao software Rotortest®;
- Implementar outros métodos de seleção dos modos e compará-los com o intuito de encontrar o método que melhor represente os resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABOUL-ELLA, F.; NOVAK, M. Dynamic response of pile-supported frame foundation. **Jounal of the Engineering Mechanics Division**, Proc. ASCE, v. 106, n. EM6, Dezembro 1980, p.1215-1232.

ALJANABI, A. I. M.; FARID, B. J. M.; ALI, A. A. A. M. **The interaction of plane frames with elastic foundation having normal and shear moduli of sugrade reactions computers and structures.** v. 36 n 61990 p. 1047-1056.

ANEJA, I. A. Dynamic interacting response of large turbine-generators supported on foundations of different flexibilities. In: **IFToMM – Internacional Conference on Rotordynamics,** 1982, Rome-Italy, Setembro, 1982, p. 129-138.

BACHSCHMID, N.; BERNANTE, R.; FRIGERI, C. Dynamics interacting response of a 660 MW turbogenerator foundation. In: **IFToMM - Internacional Conference on Rotordynamics**, 1982, Rome-Italy, Setembro, 1982, p. 151-161.

BEOLCHINI, G. C. A parametric analysis for vibrating machine foundations. In: International Conference Rotordynamic Problems in Power Plants, 1982, Rome. **Proceedings...** Rome: International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science, 1982, p. 191-201.

CASTRO, H. F. di. **Análise de mancais hidrodinâmicos em rotores sob instabilidade fluido-induzida.** 2007. Tese (Doutorado em engenharia mecânica). UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas.

CAVALCA, K. L. **L'Interazione tra rotori e struttura portante: metodologie per la sua modellazione**. 1993. 143 p. Tese (Doutorado) - Milano: Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano.

CAVALCA, K. L.; CAVALCANTE, P. F.; OKABE, E. P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. **Mechanical Systems And Signal Processing**, Cambridge, UK, v. 19, n. 1, p. 157-174, 2006.

CAVALCANTE, P. F. **Método de solução para estudo da influência da estrutura de suporte no comportamento dinâmico de máquinas rotativas.** 2001. Tese (Doutorado em engenharia mecânica) UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas.

CHELI, F.; DIANA, G.; VANIA, A. Identificazione del parametri modali delle fondazione di macchine rotanti. **L'energia Elletrica**, n. 6, p. 229-236, 1987.

CHELI, F.; CAVALCA, K. L.; DEDINI, F. G.; VANIA, A. Supporting structure effects on rotating machinery vibrations. INTERNACIONAL CONFERENCE – VIBRATIONS IN ROTATING MACHINERY, 1992. **Proceedings of the institute of mechanical engineers**, IMechE, 1992, p. 543-548.

CHEN, H; MING, SCROI, V.; MALANOSKI, S. B. Fan / Foundation interaction – A computerized solution. In: **IFToMM – Internacional Conference on Rotordynamics**, Rome-Italy, Setembro, 1982, p.139-149.

CRAGGS, A. A component mode method for modeling dynamics of turbo-generator sets. **Journal of Sound and Vibration**, v. 117, n.2, p. 277-288, 1987.

CURAMI, A.; PIZZIGONI, B. An application of modal analysis techniques. **L'energia Elettrica**, v. LXII, n. 7, p. 294-307, 1985.

DEDINI, F. G., CHELI, F. **Modal parameters identification tecniques for supporting structure in rotating machinery vibrations.** RBCM, Rio de Janeiro, 1994.

DEDINI, F. G.; CAVALCA, K. L. Aplicação de métodos de identificação teórico experimentais na análise de um turbogerador com sete mancais. **XII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. Brasília** – Brasil, Dezembro, p. 1241-1244, 1993.

DIANA, G.; CHELI, F.; VANIA, A. A method to identify the foundation modal parameters through measurements of rotor vibrations. INTERNACIONAL CONFERENCE – VIBRATIONS IN ROTATING MACHINERY, 1988, Cambridge, UK. **Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers,** IMechE, 1988-7, p. 217-222.

DIANA, G.; BACHSCHMID, N. **Influenza della estrutura portante sulle velocitá critiche flessional di alberi rotanti L'energia Elletrica**, v. LV, n. 9, p. 411-418, 1978.

EWINS, D. J. **Modal testing: Theory and practice.** RSB-Research Studies Press LTD, John Wiley & Sons Inc. 269 p, 1984.

FENG, N. S.; HAHN, E. J. On the identification of a flexibly supported rigid foundation with unknown location of the principal axes of inercia. **ISROMAC-7 – The 7th Internacional Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery**, Honolulu, Hawai-USA, Fevereiro, 1998, v. B, p.705-714.

FENG, N. S.; HAHN, E. J. Including foundation effects on vibration behavior of rotating machinery. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.9, p.243-256, 1994-5.

FENG, N. S.; HAHN, E. J. Experimental evaluation of linear and non-linear pedestal identification. **IMAC**, Los Angeles, Califórnia, 7 p. 2001.

FENG, N. S.; HAHN, E. J. **Identification of pedestal parameters in rotor-bearing-pedestal systems** – Part 1 and 2. Report, Sydney, Australia, Part 1-45 p. e Part 2-25 p, 1998.

FRISWELL, M. I.; LESS, A. W.; SMART, M. G. Modal updating techniques applied to turbo-generators mounted on flexible foundations. **NAFEMS – Second Internacional Conference Structural Dynamics Modelling Test**, Analysis and Correlation, Glasgow, p. 461-472, 1996.

GASCH, R. Vibration of large turbo-rotors in fluid film bearings on an elastic foundation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 47, p. 53-73, 1976.

JAINSKI, T. Modal resolution of transient vibrations in rotor-bearings-foundation systems caused by electrical system faults. In: **IFToMM – Internacional Conference on Rotordynamics**, Rome-Italy, Setembro, 1982, p. 177-189.

KRÄMER, E. **Dynamics of Rotors and Foundations.** New York: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993. 383p.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering.** Chichester: John Wiley & Sons, 1998, 266 p.

LEE, C. W. A complex modal testing theory for rotating machinery. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.5, 1991, p. 119-137.

MAKRIS, N.; BANDONI, D.; DELIS, E.; GAZETAS, G. Prection of observed bridge response with soil-pile-structure interaction. **Journal of Structural Engineering**, v. 120, n. 10, p. 2992-3011, outubro, 1994.

MODAN®. Logiciel d'analyse modale. **Notice d'utilisation.** Version 3.0. LMAR – Laboratorie de Mecánique Appliquée R Chaléat. Université de Franche – Comté – Besançon.

MORTON, P. G. Analysis of rotors supported upon many bearings. **Journal of Mechanical Enginnering Science**, v. 14, n. 1, p. 25-33, 1972.

NELSON, H. D. A finite rotating shaft element using Timoshenko beam theory. **Journal of Mechanical Design**, v. 102, p. 793-803, Outubro, 1980.

NORDMANN, R. **Modal parameter identification and sensitivity analysis in rotating machinery.** University of Kaiserlautern, Department of Mechanical Engineering, German Federal Republic, 1982.

NELSON, H. D.; McVAUGH, J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **ASME Jounal of Engineering for Industry**, v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976.

OKABE, E. P. **Interação rotor-estrutura: modelo teórico-experimental**. 2007. 154 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

POULOS, H. G. Analysis of the setilement of pipe groups. **Géotechnique,** n. 18, p. 449-471, 1968.

PRZEMIENIECKI, J. S. **Theory of matrix structural analysis.** New York: Mc Graw-Hill, 1985, 468 p.

RAO, J. S. **A note on Jeffcott warped rotor. Mechanism and machine theory**, n. 36, n. 5, p. 563-575, 2001.

SANTANA, P. M.; CAVALCA, K. L.; OKABE, E. P.; MACHADO, T. H. Complex response of a rotor-bearing-foundation system. In: **IFToMM – Internacional Conference on Rotor Dynamics**, p. 231-238, Seoul, Korea. Setembro, 2010.

SARGAND, S. M; DAS, YELLAPPA, C.; LIU, X. New approach for dynamic analysis of Timoshenko beams on elastic foundations-Dynamic and Vibrations. **ASME**, New York, v. 44 Jan 1992, p. 97-102.

SLOANE, E. & McKEEVER, B. Modal survey techniques and theory. **SAE: Society of Automotive Engineers**, Inc., 1975, v. 84, Section 4, paper n. 751067, p. 2963-2988.

SMART, M. G.; FRISWELL,M. I.; LEES, A. W.; PRELLS, U. Estimating turbo-generator foundation parameters. **IMechE Journal of Science**, 212 (C8), 1998, p. 653-665.

SMART, M. G.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. L.; PRELLS, U. The identification of Turbogenerator Foundation Models from run-down Data**. 6th Interncional conference on Recent Advances in Structural Parameters.**

SMART, M. G.; LEES, A. W.; FRISWELL, M. L The sensivity of updating turbo-generator foundation parameters to measurement and rotor-bearing modeling errors. **21st Internacional Seminar on Modal Analysis**, Leuven-Belgium, 1996.

STEPHENSON, R. W.; ROUCH, K. E. Generating matrices of the foundation structure of a rotor system from test data. **Journal of Sound and Vibration**, v. 154, n. 3, p. 467-484, 1992.

SUBBIAH, R.; RAJAKUMAR, C. Response analysis of three-level rotor systems using ANSYS. **4h Internacional Ansys Conference and Exibition.** 1989, part. 2 Pittsburgh, PA, USA, 1989.

TUCKMANTEL, F. W. da S. **Integração de sistemas rotor-mancais hidrodinâmicos-estrutura de suporte para a resolução numérica.** 2010. Dissertação (Mestrado em engenharia mecânica). UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas.

WEBER, H. Über das gemeinsame Schwingungsverhalten von Welle und Fundament bei Turbinenanlagen. **VDI-Berichte**, n. 48, p. 55-62, 1961.

WEIMING, L.; NOVAK, M. Dynamic behavior of turbine-generator foundation systems. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 24, n.3, p.339-360, 1996.

WILSON, R. R.; BREBBIA, C. A. Dynamic behaviour of steel foundations for turbo-alternators. **Journal of Sound and Vibration**, v. 18, n. 3, p. 405-416, 1971.

WOWK, V. **Machine vibration: alligment.** New York: McGraw-Hill, 2000.

ZHENG, Z.; WU, N. Dynamics analysis of the large rotor-foundation-soil system. **IFToMM – Internacional Conference,** 1990, Lyon-France, Setembro, 1990, p. 347-352.

APÊNDICE A – AMORTECIMENTO ESTRUTURAL

No apêndice será descrito a ortogonalização dos modos, a normalização dos modos pela matriz dos modos e o efeito do amortecimento estrutural para os casos de amortecimento proporcional e não-proporcional.

A.1 Ortogonolidade dos modos

Os modelos modais apresentam algumas características muito importantes conhecidas como propriedades de ortogonalidade. Conforme Ewins (1984), os autovalores (modos), obtidos na solução do problema de autovalor, satisfazem a propriedade de ortogonalidade ponderada dos vetores modais.

$$(-[M]\omega_r^2 + [K])\{\Psi\}_r = \{0\} \tag{A.1}$$

sendo,

Ψ autovetores.

Para valores distintos de $\{\Psi\}_s$ e $\{\Psi_s\}$, esta propriedade matemática é expressa como:

$$\{\Psi\}_s^T[M]\{\Psi\}_r = \{0\} \qquad \{\Psi\}_s^T[K]\{\Psi\}_r = \{0\} \tag{A.2}$$

A ortogonalidade pode ser analisada vetorialmente, pois quando dois vetores são ortogonais o produto escalar é nulo. Assim, a projeção de um vetor sobre o outro será nula ou os dois vetores são perpendiculares entre si. Os versores $\underset{i}{\rightarrow}$, $\underset{j}{\rightarrow}$ e $\underset{k}{\rightarrow}$ do sistema de coordenadas cartesiano são ortogonais entre si e formam a base do sistema tridimensional.

Considere dois modos particulares $\{\Psi\}_r$ e $\{\Psi\}_s$ associados aos autovalores distintos s_r e s_s (ou seja, ω_r^2 e ω_s^2), respectivamente. Sendo assim, $s_r \neq s_s$.

$$(-\omega_r^2[M] + [K])\{\Psi\}_r = \{0\} \qquad (-\omega_s^2[M] + [K])\{\Psi\}_s = \{0\} \tag{A.3}$$

Pré-multiplicando a equação do modo r pelo transposto de $\{\Psi\}_s$ obtém-se

$$\{\Psi\}_s^T(-\omega_r^2[M] + [K])\{\Psi\}_r = \{0\} \tag{A.4}$$

A propriedade algébrica estabelece que,

$$([A][B][C])^T = [C]^T[B]^T[A]^T$$

Aplicando-se essa propriedade através do cálculo da transposta da equação do modo s e pós-multiplicando o resultado por $\{\Psi\}_r$, obtém-se,

$$\{\Psi\}_s^T(-\omega_s^2[M]^T + [K]^T)\{\Psi\}_r = \{0\} \tag{A.5}$$

As matrizes de [M] e [K] são simétricas e, portanto iguais as suas transpostas. Reescrevendo a equação A.5, tem-se:

$$\{\Psi\}_s^T(-\omega_s^2[M] + [K])\{\Psi\}_r = \{0\} \tag{A.6}$$

As equações resultantes são:

$$\{\Psi\}_s^T(-\omega_r^2[M] + [K])\{\Psi\}_r = \{0\} \qquad \{\Psi\}_s^T(-\omega_s^2[M] + [K])\{\Psi\}_r = \{0\} \tag{A.7}$$

Subtraindo as equações A.7, obtém-se:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2)\{\Psi\}_s^T[M]\{\Psi\}_r = 0 \tag{A.8}$$

Assumiu-se que $s_r \neq s_s$, ou seja, $\omega_r^2 \neq \omega_s^2$. Assim a equação A.8 só pode ser satisfeita se,

$$\{\Psi\}_s^T[M]\{\Psi\}_r = 0 \tag{A.9}$$

Aplicando esse resultado em qualquer das duas equações resultantes, obtém-se

$$\{\Psi\}_s^T[K]\{\Psi\}_r = 0 \tag{A.10}$$

Prova-se então, a propriedade de ortogonalidade ponderada dos vetores modais (autovetores).

Dois vetores modais associados a autovalores iguais, ou seja, com a mesma freqüência natural, não são necessariamente ortogonais entre si. É a condição de raízes ou pólos repetidos que, neste caso, define os vetores modais associados às mesmas como ortogonais aos demais vetores modais do sistema, sendo estes independentes um do outro.

Considere r igual a s. Sendo assim, para modos iguais:

$$\{\Psi\}_r^T[K]\{\Psi\}_r = \omega_r^2\{\Psi\}_r^T[M]\{\Psi\}_r \tag{A.11}$$

sendo,

$$\{\Psi\}_r^T[M]\{\Psi\}_r = m_r \qquad \{\Psi\}_r^T[K]\{\Psi\}_r = k_r \tag{A.12}$$

Desta forma:

$$\omega_r^2 = \frac{\{\Psi\}_r^T[K]\{\Psi\}_r}{\{\Psi\}_r^T[M]\{\Psi\}_r} = \frac{k_r}{m_r} \tag{A.13}$$

Ou ainda, k_r e m_r são rigidez e massa generalizadas ou modais do modo r.

A.2 Normalização pela matriz de massa

O vetor modal $\{\Psi\}$ representa o deslocamento relativo e cada num dos n graus de liberdade do sistema quando este vibra em uma de suas freqüências naturais. A direção do vetor é conhecida e é característica do sistema, mas a magnitude dependerá da normalização aplicada.

Segundo Ewins(1984) o autovetor pode ser normalizado pela matriz de massa, um dos métodos mais aplicados na análise modal.

Para se obter um vetor modal $\{\Phi\}_r$ normalizado pela matriz de massa a partir de um autovetor qualquer $\{\Psi\}_r$, a propriedade de ortogonalidade ponderada dos modos é aplicada em relação à matriz de massa (equação A.12).

Se o autovetor for normalizado pela matriz de massa, a relação torna-se:

$$\{\Phi_r\}^T[M]\{\Phi_r\} = [I] = 1 \tag{A.14}$$

Assim, definindo $\{\Phi\}_r = \gamma_r\{\Psi\}_r$, obtém-se:

$$\{\Phi_r\}^T[M]\{\Phi_r\} = \gamma_r\{\Psi_r\}^T[M]\gamma_r\{\Psi_r\} = \gamma_r^2\{\Psi_r\}^T[M]\{\Psi_r\} = \gamma_r^2\, m_r = 1 \tag{A.15}$$

Portanto:

$$\gamma_r = \frac{1}{\sqrt{\{\Psi_r\}^T[M]\{\Psi_r\}}} = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \tag{A.16}$$

Como conseqüência da normalização pela matriz de massa, tem-se:

$$\{\Phi_r\}^T[K]\{\Phi_r\} = \gamma_r^2\{\Psi_r\}^T[K]\{\Psi_r\} = \frac{k_r}{m_r} = \omega_r^2 \tag{A.17}$$

As propriedades de ortogonalidade ponderada dos autovetores normalizado pela matriz de massa pode ser escrita, como:

$$[\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \qquad\qquad [\Phi]^T[K]\,[\Phi] = [\omega_r^2]_d \tag{A.18}$$

Nas equações de movimento não amortecido, o problema de obter o vetor resposta temporal do sistema, submetido às condições iniciais ou excitações externas, será o acoplamento do conjunto de equações, pois os termos da equação fora da diagonal principal não são nulos. Se a matriz de massa não for diagonal, o acoplamento é dinâmico, e se a matriz de rigidez não for diagonal, o acoplamento é estático.

A.3 Amortecimento estrutural

Um sistema com amortecimento estrutural proporcional apresenta a característica de que os modos do sistema amortecido são os mesmos do sistema conservativo associado, e as freqüências naturais são similares.

A equação de movimento, para a estrutura da fundação, é escrita conforme a equação 3.43.

Assumindo um amortecimento estrutural proporcional, descrito em função das matrizes de massa e de rigidez, a matriz de amortecimento será da forma:

$$[C_f] = \alpha[M_f] + \beta[K_f] \tag{A.19}$$

Sendo α e β constantes, obtidos através do método de minimização ou cálculo das derivadas parciais da função erro quadrático (CAVALCA, 1993).

Utilizando a matriz modal como matriz de transformação de coordenadas:

$$X_f = [\Phi]q \tag{A.20}$$

onde,

[Φ] matriz dos modos de vibração ou dos autovetores do sistema (matriz modal);

q vetor das coordenadas principais ou modais.

Aplicando as equações A.19 e A.20 na equação 3.43, e pré-multiplicando ambos os lados por $[\Phi]^T$ obtém-se:

$$[\Phi]^T[M_f][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T\left(\alpha[M_f] + \beta[K_f]\right)[\Phi]\{\dot{q}\} + [\Phi]^T[K_f][\Phi]\{q\} \\ = -[\Phi]^T F_f(t) \tag{A.21}$$

Ou seja, a equação do sistema desacoplado será:

$$[m_f]\ddot{q} + [c_f]\dot{q} + [k_f]q = f_f(t) \tag{A.22}$$

A matriz [Φ] diagonaliza as matrizes, então, das propriedades de ortogonalidade ponderada dos autovetores e da normalização em relação à matriz de massa:

$$[m_f] = [\Phi]^T[M_f][\Phi] = [I] \tag{A.22a}$$

$$[c_f] = [\Phi]^T\left(\alpha[M_f] + \beta[K_f]\right)[\Phi] = \alpha[I] + \beta[\omega_i^2] \tag{A.22b}$$

$$[k_f] = [\Phi]^T[K_f][\Phi] = [\omega_i^2] \tag{A.22c}$$

sendo,

[c] coeficiente de amortecimento equivalente do i-ésimo modo;

[I] matriz identidade;

$[\omega_i^2]$ matriz diagonal, cujos elementos são as freqüências próprias do sistema não amortecido.

A equação do sistema desacoplado,

$$\ddot{q} + (\alpha + \beta[\omega_i^2])\dot{q} + [\omega_i^2]q = f_f(t) \tag{A.23}$$

A equação A.23 representa um sistema de equações desacopladas, que representa um conjunto de n sistemas de 1 grau de liberdade com amortecimento viscoso. Todas as matrizes são diagonais.

No caso de um amortecimento viscoso genérico ou não proporcional, aplicando o mesmo princípio, utiliza-se a matriz modal do sistema conservativo associado (modos normalizados pela matriz de massa) como matriz de transformação das coordenadas físicas para coordenadas principais ou modais. A equação de movimento do sistema para essa condição será:

$$[\Phi]^T[M_f][\Phi]\{\ddot{q}\} + [\Phi]^T[C_f][\Phi]\{\dot{q}\} + [\Phi]^T[K_f][\Phi]\{q\} = -[\Phi]^T F_f(t) \tag{A.24}$$

ou ainda,

$$\ddot{q} + [C']\dot{q} + [\omega_i^2]q = f_f(t) \tag{A.25}$$

Desta forma, o amortecimento viscoso é não proporcional, então [C’] é uma matriz N x N não diagonal e o sistema permanece acoplado.