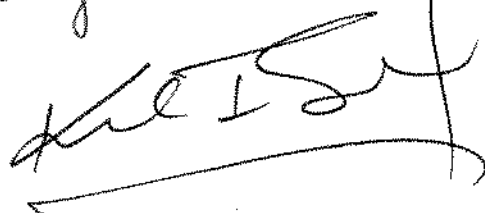


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
SETEMBRO DE 1989

Este exemplar corresponde à redação final,
defendida por Ana Cervigni Guerra e aprova-
do pela comissão julgadora em 12/09/1989



TRANSFERENCIA DE CALOR EM CORPOS
TRIDIMENSIONAIS ENBEBIDOS EM MEIO POROSO

Por : Ana Cervigni Guerra

6/89

Orientador : Prof. Dr. Kamal Abel Radi Ismail

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
Mecânica da Universidade Estadual de Campinas,
como parte dos requisitos exigidos para
obtenção do título de Doutor em Engenharia
Mecânica.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

Tese de : Doutorado

Título da Tese: "Transferência de Calor em Corpos Tridimensionais
Embebidos em Meio Poroso"

Autor : Ana Cervigni Guerra

Orientador : Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail

Aprovado por:

Prof. Dr. KAMAL ABDEL RADÍ ISMAIL, Presidente

Prof. Dr. NELSON MURCIA

Prof. Dr. JOSÉ VITÓRIO ZAGO

Prof. Dr. CÉSAR COSTAPINTO SANTANA

Prof. Dr. LEONARDO GOLDSTEIN JUNIOR

Campinas, 18 de setembro de 1989.

Aos meus pais:
Linda e Genaro

A G R A D E C I M E N T O S

Gostaria de expressar aqui meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Liu y Chang pela seriedade e paciência que dedicou a este trabalho.

Quero agradecer ao Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail pela orientação.

Aos pesquisadores da Divisão de Metodologia Aplicada do Centro Tecnológico para Informática e ao próprio CTI pelo apoio institucional.

Ao Prof. Dr. Plínio Stange pela tradução.

Ao engenheiro Felício Cestari Filho pelas discussões.

Ao Romualdo, meu marido, pelo amor, apoio e incentivo.

Aos meus filhos, Maitê, Denis e Thales pela paciência e pelos momentos felizes.

A amiga Célia Maria Dorázio.

RESUMO

Neste trabalho estudamos e analisamos a transferência de calor por convecção livre, próximo a uma quina formada por dois planos verticais perpendiculares embebidos em meio poroso.

Apresentamos a solução de similaridade local para o caso em que a temperatura da parede varia com a seguinte equação:

$T_w = T_\infty + Ax^\lambda$. Baseados em uma função de corrente que satisfaz a equação da continuidade, da energia e as condições de contorno assintóticas no infinito, apresentamos os perfis de velocidade e as características de transferência de calor. Além disso apresentamos também a solução para a temperatura na parede igual a constante ou seja o caso onde λ é igual a zero.

Neste trabalho também foi encontrada a solução do problema com sucção assintótica e ângulo arbitrário, solução esta encontrada analiticamente.

ABSTRACT

In this work we studied and analysed the free convection heat transfer near a corner formed by mutually perpendicular flat plates embedded in porous medium. We presented the local similarity solution for the case in which the wall temperature varies as follows : $T_w = T_\infty + A x^\lambda$. Based in a stream function that satisfies the continuity equation, the energy equation and the asymptotic boundary conditions at infinity, we presented the velocity profiles and heat transfer characteristics. So on we presented the solution for the case of constant wall temperature or when λ is zero.

In this work we found too results for the problem of free convection near the corner of an arbitrary angle and in this case we had the analitical solution.

NOMENCLATURA

- T_w - temperatura na parede
- T_∞ - temperatura ambiente
- k - permeabilidade do meio poroso
- g - aceleração gravitacional
- P - pressão do fluido
- $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ - componentes de velocidade de Darcy
- $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ - coordenadas cartesianas definidas na Figura 4.1
- u, v, w - componentes de velocidade adimensionais
- x, y, z - coordenadas cartesianas adimensionais
- U - velocidade de referência
- L - comprimento de referência
- u_w - componente de velocidade na parede
- u_1, v_1, w_1 - componentes de velocidade nas coordenadas η e ξ
- $Ra = \frac{UL}{\alpha}$ - número de Rayleigh
- f' - solução de primeira ordem
- G - função de fluxo
- G_o - função de fluxo enfraquecida
- u_o - componente de velocidade enfraquecida
- V_o - velocidade de sucção
- q - taxa de transferência de calor
- Nu - número de Nusselt

Símbolos gregos:

δ - espessura da Camada Limite

μ - viscosidade do fluido

τ - tensão de cisalhamento

ρ - densidade do fluido

β - coeficiente de expansão térmica do fluido

α - difusividade térmica do meio poroso

θ - temperatura adimensional

η, ξ - variáveis de similaridade

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Apresentação do Problema.....	2
1.2. Aplicações do Presente Estudo.....	3
1.3. Objetivos do Trabalho.....	3
1.4. Estrutura do Trabalho.....	5
 CAPÍTULO II - REVISÃO DA LITERATURA.....	6
2.1. Introdução.....	7
2.2. Fluido Puro em Três Dimensões.....	8
2.3. Convecção em Meio Poroso.....	13
2.4. O Problema Tridimensional em Meio Poroso.....	21
2.5. Contribuições mais Recentes	24
2.6. Comentários.....	27
 CAPÍTULO III - CONCEITOS UTILIZADOS.....	28
3.1. Equações de Darcy e seus Limites.....	29
3.2. Conceitos de Camada Limite.....	33
3.2.1. Camada Limite Tridimensional.....	35
 CAPÍTULO IV - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	38
4.1. Considerações Gerais.....	39
4.1.1. Simplificações da Camada Limite.....	41
4.1.2. Transformações Adimensionais.....	42
4.1.3. Transformações de Similaridade.....	44
4.1.4. Aplicação das Transformações de Similaridade.....	45
4.2. Cálculo da Equação de Primeira Ordem.....	49
4.3. Determinação da Função Composta.....	51
4.4. Método Computacional.....	55
4.5. Descrição do Programa.....	60
4.5.1. Teste de Convergência.....	63

CAPÍTULO V - CASOS ESPECIAIS.....	64
5.1. Introdução.....	65
5.2. Convecção Livre com Sucção Assintótica.....	65
5.3. Convecção Livre com Temperatura Constante.....	70
 CAPÍTULO VI - RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	 71
 CAPÍTULO VII - CONCLUSÃO.....	 93
 CAPÍTULO VIII - SUGESTÕES.....	 95
 BIBLIOGRAFIA.....	 98

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1. APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

O estudo da convecção livre em uma quina formada por planos verticais é um problema clássico e se caracteriza pela presença de uma fina Camada Limite ao longo da parede. O fenômeno de interação das Camadas Limites na quina foi apresentado por Carrier (1947) e oferece campo a várias considerações e abordagens, uma das quais constitui a essência deste trabalho.

A contribuição inicial de Carrier buscou oferecer uma solução genérica para o problema do fluxo em uma quina usando as equações de Navier-Stokes. Aqui, estudaremos situações onde o fluido se apresenta saturando um meio poroso e desse modo podemos utilizar as equações experimentais de Darcy. O esquema físico do nosso problema se apresenta na fig 1.1.

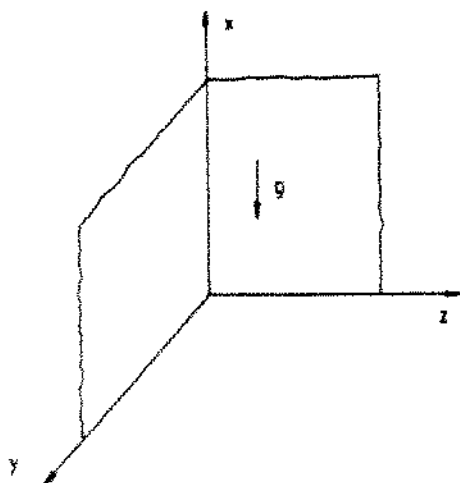


Figura 1.1 - Esquema físico da quina

Mais especificamente o que faremos aqui será estudar o comportamento da velocidade e da temperatura para uma quina quando a variação entre a temperatura da parede e a temperatura no infinito é uma função potência da distância até a origem.

1.2. APLICAÇÕES DO PRESENTE ESTUDO

O movimento de um fluido através de meio poroso é de fundamental importância devido à vasta variedade de aplicações práticas. O escoamento de água subterrâneo é um exemplo de fluido em meio poroso de considerável importância [Cheng e Minkowycz, 1977]. Também a indústria petrolífera tem mostrado interesse no problema devido à produção de óleo bruto proveniente de reservas naturais [Holst e Aziz, 1971]. A indústria têxtil está interessada no escoamento através de fibras e os biólogos se interessam pelo movimento da água dentro das raízes das plantas e no sistema de células vivas.

No aquecimento e na engenharia térmica, um tubo de calor e um coletor solar são exemplos práticos que envolvem o problema de escoamento através de meios porosos.

Recentemente, uma nova aplicação foi apresentada. Produtos agrícolas armazenados por longos períodos podem se deteriorar devido ao calor gerado pelo metabolismo desses produtos. Para solucionar este problema a armazenagem deve ser feita a baixas temperaturas e como consequência desse resfriamento aparece a convecção natural em meio poroso [Beukema e Bruin, 1983].

1.3. OBJETIVOS DO TRABALHO

O objetivo deste trabalho é aplicar condições de contorno tridimensionais para obter soluções de casos específicos. Mostraremos que existe a solução de similaridade local para o problema da convecção livre próxima à uma quina formada por dois planos verticais embebidos em meio poroso. Simplificando o problema para a Camada Limite, usando variáveis adimensionais e transformações de similaridade [Vasanta, 1966] pudemos obter equações com apenas duas variáveis independentes e resolvemos o problema com o método das Diferenças Finitas.

Além disso, o trabalho pretende ser uma contribuição a mais ao estudo de problemas clássicos. A abordagem traz resultados inexistentes na literatura; por isso acreditamos que a contribuição seja válida.

Como este trabalho não esgota o assunto, podemos ainda incluir entre seus objetivos o fato de indicar a metodologia para

resolver outros problemas como por exemplo da convecção livre com pressão variável.

1.4. ESTRUTURA DO TRABALHO

No capítulo II apresentamos uma revisão da literatura sobre o assunto. Embora muitos dos títulos citados não tenham relação direta com o objetivo do nosso trabalho, foram analisados para oferecer um levantamento razoável sobre o que existe a respeito.

No capítulo III procuramos apresentar alguns conceitos básicos fundamentais para o entendimento das equações do problema. Falamos sobre as leis de Darcy e suas limitações. Apresentamos também os conceitos de Camada Limite e apresentamos a Camada Limite Tridimensional.

No capítulo IV apresentamos as simplificações envolvidas e as transformações usadas, fazendo o cálculo da equação de primeira ordem que será usada na determinação da *função de fluxo enfraquecida*.

No capítulo V mostramos o problema da convecção livre com sucção assintótica e o problema da convecção com temperatura constante na parede.

No capítulo VI apresentamos as curvas que foram obtidas com o método computacional do capítulo IV.

No capítulo VII as conclusões finais que julgamos conveniente tecer a respeito do trabalho.

Finalmente no capítulo VIII encerramos fazendo sugestões para outros trabalhos.

CAPÍTULO II

REVISÃO DA LITERATURA

2.1. INTRODUÇÃO

No presente capítulo apresentamos uma sinopse dos trabalhos encontrados na literatura sobre o problema do fluido em convecção livre e mais alguns trabalhos que de algum modo se relacionam com o presente estudo.

A revisão é apresentada de modo a dar ao leitor uma visão razoavelmente completa das várias formas pelas quais o assunto foi abordado. Entretanto, por ser muito extensa a lista de referências, damos ênfase especial apenas aos resultados mais significativos e com maior relacionamento com o presente trabalho.

Do mesmo modo, achamos de grande valia organizar essa revisão em quatro grandes grupos:

1 - Fluido Puro em três dimensões

Neste item coletamos informações de artigos referentes a fluido viscoso, fluido incompressível e método de solução para tais problemas tridimensionais;

2 - Convecção em Meio Poroso

Aqui apresentamos artigos cujo principal tema aborda convecção bidimensional em meio poroso, tanto livre como forçada, e também examina o problema da solução de similaridade para casos particulares;

3 - O Problema Tridimensional em Meio Poroso

Apresentamos uma relação de artigos referentes à convecção natural, soluções assintóticas, convecção tridimensional para casos particulares;

4 - Contribuições mais recentes

Artigos publicados em 1987 e 1988.

2.2. FLUIDO PURO EM TRÊS DIMENSÕES

O estudo de um fluido em um canto formado pela intersecção de dois semi-planos foi feito pela primeira vez em 1947 por Carrier e aperfeiçoado por outros autores ao longo dos anos, até que em 1966 Stanley Rubin determinou o efeito da geometria tridimensional no comportamento do escoamento de segunda ordem da Camada Limite na quina. Também foram pesquisadas por ele as condições de contorno assintóticas necessárias para que as equações governantes do escoamento na quina fossem solucionadas. A ligação criada pela interação mútua do movimento da Camada Limite em diferentes pontos ao longo da superfície dificulta a análise da configuração. O resultado dessa interação é um escoamento cruzado que induz na Camada Limite um movimento de segunda ordem que não está presente nas equações ordinárias da teoria bidimensional.

A uma distância finita da linha de intersecção, a Camada Limite é tridimensional e somente se torna assintoticamente bidimensional para distâncias longe da intersecção ao longo da parede. Esta é uma conclusão muito forte e que foi usada por muitos outros autores.

Para a solução de seu problema Rubin usou o procedimento de ajustamento das soluções nas três regiões por ele consideradas como mostra a figura 2.1

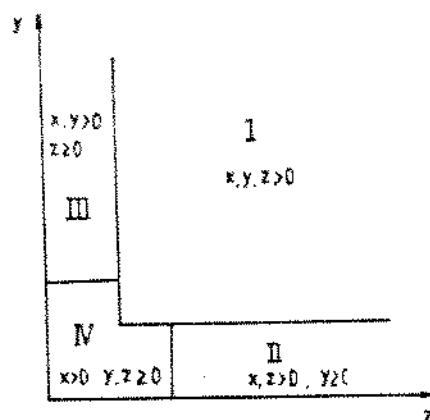


Figura 2.1 - Geometria da quina

- Região I - Fluido na Corrente Livre
- Região II e III - Camadas Limites bidimensionais
- Região IV - A quina propriamente dita.

Para resolver as equações de fluxo potencial usou Funções de Green apropriadas.

Em 1971, Pal e Rubin voltam a falar nas regiões I, II, III e VI. As soluções para a região II e III são obtidas usando parâmetros com ordem de grandeza de $Re^{-1/2}$ (numero de Reynolds) e expansões assintóticas para os componentes de velocidade:

$$U(x,y,z) = U_0 u(\eta, \xi) [1 + O(Re^{-1/2})] \quad 2.1$$

$$V(x,y,z) = U_0 Re^{-1/2} v(\eta, \xi) [1 + O(Re^{-1/2})] \quad 2.2$$

$$W(x,y,z) = U_0 Re^{-1/2} w(\eta, \xi) [1 + O(Re^{-1/2})] \quad 2.3$$

onde U_0 é a velocidade para $x \rightarrow \infty$ e

$$\eta = \frac{Re^{-1/2}}{2x} y \quad \text{e} \quad \xi = \frac{Re^{-1/2}}{2x} z$$

variáveis de similaridade.

Este tipo de expansão em série sendo substituído nas equações governantes nos possibilita extrair soluções com mesma ordem de grandeza como por exemplo soluções com ordem de grandeza de Re^0 , Re^{-1} e Re^{-2} (Re = numero de Reynolds) o que são chamadas de soluções com ordem um ou mesmo soluções de primeira ou segunda ordem dependendo do expoente.

Na quina propriamente dita as soluções não podem ser obtidas do mesmo modo, devido a interação das Camadas Limites e somente pode-se considerar solução assintótica de similaridade.

Na Canada Limite da região II e III as derivadas normais à superfície são muito maiores que as derivadas no plano da superfície e na quina os gradientes do eixo x são muito pequenos.

Os resultados são apresentados como soluções de primeira e segunda ordem mas fazem somente uma análise teórica.

No mesmo ano, Rubin e Grossman voltam agora para uma análise do ponto de vista numérico e procuram soluções pelo método iterativo de Gauss-Seidel explícito devido à natureza algébrica do campo de escoamento assintótico. Utilizando dados teóricos do artigo anterior e o método das Diferenças Finitas apresentam resultados numéricos e o perfil das soluções.

Em 1972, Tokuda apresentou a região dos escoamentos lentos de Stokes, uma região construída dentro da região IV de Rubin figura 2.1. Esta região de Stokes revela a estrutura complexa do escoamento caracterizado pela superposição de domínios ao longo dessa região.

Tokuda mostrou detalhes sobre a estrutura desse escoamento interno e discutiu a possibilidade de um outro sistema de coordenadas mais apropriado para representar o problema. Cita alguns sistemas de coordenadas mas não conclui nada a esse respeito.

Em 1974, Ghia e Davis analisam o problema no sentido de mostrar a superioridade do método ADI - *Alternating Direction Implicit Method* - em relação ao método de Gauss-Seidel explícito utilizado no passado. As equações governantes são obtidas sem restrições de leis sobre viscosidade linear e número de Prandtl.

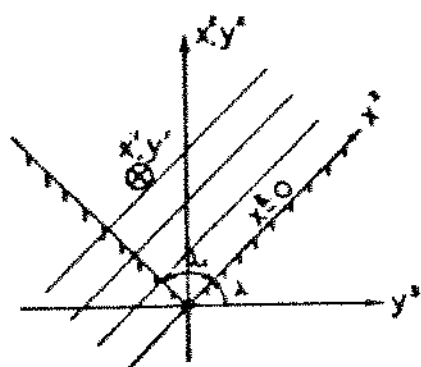
O método de ajustamento e a divisão da quina em quatro regiões são os mesmos usados por Rubin, mas o método de solução é um método de otimização numérica. O método apresentado mostra ser a melhor alternativa pois torna possível determinar precisa e rapidamente a solução convergente e mostra ser possível obter soluções estáveis para regiões longe da quina. Faz isso expandindo as variáveis de escoamento em série de potência como

já foi explicado anteriormente. Do ponto de vista algébrico das variáveis de escoamento, se faz necessário determinar altas ordens de soluções assintóticas dependendo da localização das fronteiras.

Em 1976, Ghia mostra que o método *ADI* é eficiente para resolver equações diferenciais parciais parabólicas e elípticas e apresenta a concordância de seus resultados com a teoria apresentada por Tokuda. Fala sobre a dificuldade de se encontrar soluções de altas ordens mesmo para geometrias simples.

Em 1980, Barclay e Ridha apresentam o problema da quina formada por dois semi-planos infinitos com um ângulo arbitrário entre eles. Os resultados numéricos são dados na forma de velocidade e distribuição da tensão de cisalhamento na parede, para diferentes ângulos e os resultados são compatíveis com o caso do ângulo reto já disponível.

Uma nova formulação do problema é apresentada e o resultado são equações que quando juntas de modo especial representam a situação da quina. Os métodos numéricos adotados são similares aos usados por Ghia. Usam um sistema de coordenadas apropriado, o qual possui um dos eixos com ângulo arbitrário figura 2.2.



x_1, x_2, x_3 - Sistema de coordenadas
Oblíquo.

y_1, y_2, y_3 - Sistema de coordenadas
Cartesiano.

Figura 2.2 - Sistema de Coordenadas de Ridha.

As equações do fluido puro são elaboradas e com atenção especial à situação onde o número de Reynolds é muito maior do que a unidade. As incógnitas são desenvolvidas em série de potência em função de novas variáveis. Rhida faz um trabalho

laborioso no sentido de calcular soluções de ordem zero, ordem um e mostrar que as equações de ordem maior possuem somente soluções triviais.

A grande contribuição de Rhida neste trabalho foi o sistema de coordenadas já necessário em 1972 quando Tokuda analisou o problema e chamou atenção para esse fato.

No mesmo ano Aryadi Suwono apresenta uma tentativa de prever o coeficiente de transferência de calor e mostra o perfil de temperatura e o de velocidade para convecção livre em corpos tridimensionais de forma arbitrária. Baseia-se na noção de que a solução de equações diferenciais parciais de muitas variáveis pode ser expressa em forma de série. Analisa também a utilidade e as limitações da solução encontrada aplicando a solução a um cilindro circular inclinado.

Em 1982 Barclay mostra a solução do problema tridimensional quando a quina apresenta um canto arredondado e utiliza o mesmo sistema de coordenadas apresentado em 1980 e faz comparações dos resultados. Denomina os problemas como *sharp corner* e *radius corner* figura 2.3 e faz comparações com a placa plana.

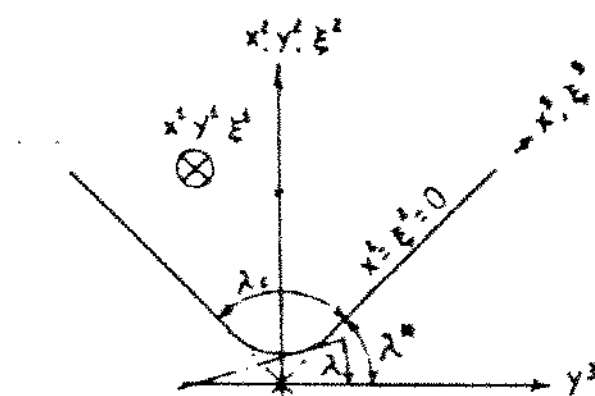


Figura 2.3 - Esquema do "radius corner".

Finalmente em 1983 Barclay e El-Gamal apresentam o escoamento numa quina com sucção na parede. Assumem que a sucção é independente das coordenadas das linhas de corrente, as quais são mais expressivas próximas à quina. Separam soluções para pequenos e grandes valores do parâmetro de sucção.

2.3. CONVECÇÃO EM MEIO POROSO

A bibliografia pesquisada referente à convecção em meio poroso que será relacionada neste item descreve fenômenos físicos de grande importância geotérmica e estas pesquisas em sua maioria foram patrocinadas por centros de pesquisas e outras entidades interessadas no assunto.

Em 1977, Cheng e Minkowycz analisaram a convecção livre num plano vertical embebido em meio poroso saturado com número de Rayleigh alto. Com aproximações da Camada Limite puderam obter a solução de similaridade para uma classe de problemas onde a temperatura da parede varia com a função x^λ , isto é, uma função potência da distância do ponto até a origem.

Com as simplificações da Camada Limite as equações governantes foram solucionadas e depois foi feita uma avaliação para saber da consistência física da solução. Uma das condições é avaliar λ para satisfazer a equação da Energia Convectiva que deve crescer com x para o caso onde a temperatura da parede T_v é maior que a temperatura na corrente livre T_∞ .

Neste artigo vemos também um exemplo numérico onde os dados apresentados foram baseados em valores possíveis para uma reserva geotérmica real. Os resultados destes cálculos sugerem que se a transferência de calor em um dique num aquífero for governada por convecção livre com alto número de Rayleigh a zona de água quente será muito pequena e exploradores terão dificuldades em detectá-la.

No mesmo ano (1977a), Ping Cheng apresenta um estudo analítico do escoamento em meio poroso onde existe sucção ou injeção na parede, figura 2.4, ou seja o problema tem condição de contorno não trivial para a velocidade na direção y .

Esse escoamento na direção y é proporcional a x^n e a temperatura é função de x^λ . Para que o problema tenha solução de similaridade foi estabelecida uma relação $n = (\lambda - 1)/2$. Mostra um exemplo para descarga de água quente em poços ou fendas em aquíferos de extensão infinita. Se a temperatura de injeção do fluido for diferente da temperatura da água do subsolo o fluido injetado pode sofrer uma força de empuxo positiva ou negativa dependendo das faixas de temperatura e tem como resultado o movimento convectivo da água no subsolo próxima ao poço.

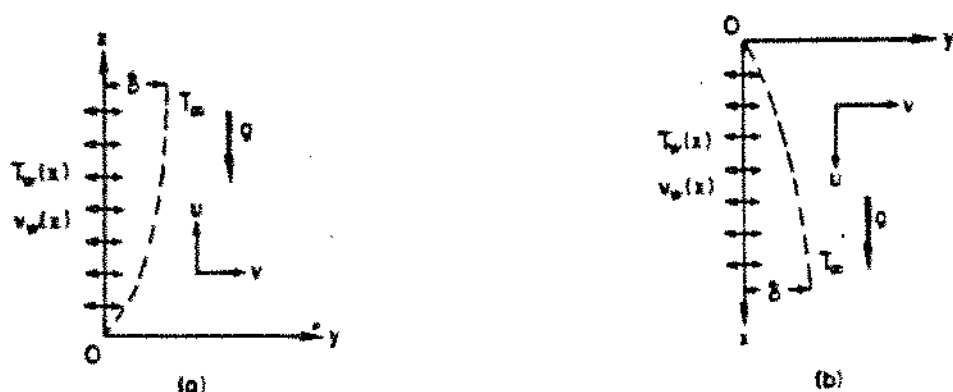


Figura 2.4 - a) Sistema de coordenadas para $T_v > T_\infty$
b) Sistema de coordenadas para $T_v < T_\infty$

O autor usa o método de Runge-Kutta associado ao método shooting para estabelecer os resultados numéricos.

Ainda em 1977b o mesmo autor mostra a solução para a convecção livre associada à convecção forçada na Camada Limite de uma placa horizontal em meio poroso saturado. Nesse estudo, os parâmetros governantes são função de $Ra/(Re Pr)^{3/2}$ (Ra = número de Rayleigh, Re = número de Reynolds, Pr = número de Prandtl).

São obtidas soluções de similaridade para dois casos diferentes:

Sendo a temperatura na parede $T_v = T_\infty + A x^\lambda$ e a velocidade da corrente livre $u_\infty = B x^m$ para $m = 0$ e $\lambda = 1/2$ temos o caso de plano horizontal com ângulo zero e fluxo de calor constante. Quando $m = 1$ e $\lambda = 2$ corresponde ao problema do ponto de estagnação no plano horizontal figura 2.5.

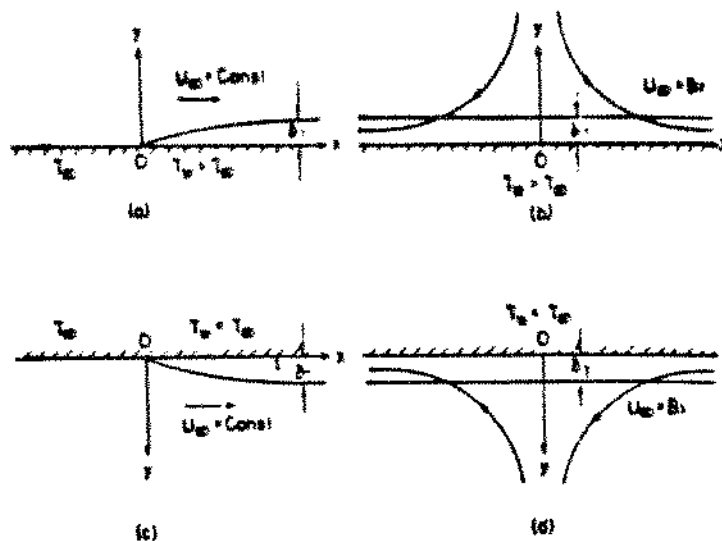


Figura 2.5 - Sistema de coordenada
a e c) Plano Horizontal
b e d) Ponto de Estagnação

Para encontrar a solução de similaridade, estabelece a relação entre m e λ a saber $\lambda = (3m + 1)/2$. O autor chama atenção para o fato de que muitas análises para convecção mista em superfícies inclinadas desprezam a força de empuxo normal à superfície. Esta aproximação falha completamente quando a superfície inclinada se torna horizontal pois a força de empuxo atua perpendicularmente à superfície. Assim convecção mista sobre superfícies horizontais tem que ser tratada separadamente das superfícies inclinadas.

Também neste artigo o interesse maior está voltado para o problema das reservas geotérmicas e o autor fala sobre retirada, injeção artificial ou reposição natural de água em aquíferos como sendo exemplo de fenômenos que acarretam gradiente de pressão.

No mesmo ano Cheng e Teckchandani voltam a falar sobre as reservas geotérmicas mas agora sob o ponto de vista numérico. Estudam as respostas transientes do líquido em reservas geotérmicas resultantes do súbito aquecimento e retirada de fluido. O número de Rayleigh é agora um dos parâmetros que governa a convecção livre em meio poroso. Foi feito um modelo matemático baseado nas leis de Darcy junto com a lei da conservação de massas em meio poroso saturado com propriedades

constantes. Com aproximações adequadas as equações puderam ser combinadas e formar um sistema de duas equações diferenciais parciais não lineares do tipo parabólicas em termos das variáveis adimensionais de temperatura e pressão.

A equação de temperatura foi resolvida pelo método ADI já citado nesta revisão, enquanto a equação de pressão foi resolvida pelo método de Crank-Nicholson do tipo implícito.

Tiram conclusões sobre convecção oscilatória em um aquífero retangular mostrando assim aplicação direta da teoria de convecção em meio poroso com a atividade prática.

Em 1978 Johnson e Cheng mostram a condição para que haja solução de similaridade na Camada Limite de uma placa plana adjacente ao meio poroso. A placa apresenta uma inclinação com a horizontal, assunto já abordado por Cheng em artigo anterior.

Aqui se obteve, através de um enfoque formal, todas as possíveis soluções de similaridade para o problema. Na solução apresentada não foi assumida distribuição de temperatura específica, mas uma derivação da forma de solução para obtenção da solução de similaridade.

O método consiste em definir uma nova variável independente e duas dependentes de similaridade em termos das variáveis de transformação generalizada. Quando estas variáveis são substituídas nas equações da Camada Limite, reduzem a um conjunto a equações diferenciais ordinárias somente se os coeficientes das variáveis de similaridade e suas derivadas ficam constantes.

Encontrados os parâmetros que definem a soluções de similaridade analisam seis casos particulares:

- 1 - Convecção livre em estado estável em placa plana vertical.
- 2 - Convecção livre em estado estável em placa plana inclinada.
- 3 - Convecção livre em estado estável em placa plana horizontal.

- 4 - Solução assintótica do transiente da convecção livre em plano inclinado.
- 5 - Transiente da convecção livre em placa plana vertical.
- 6 - Transiente da convecção livre em placa plana horizontal.

Esta publicação de Cheng abrange vários casos já publicados e inclui os casos de solução de estado instável.

No mesmo ano, Merkin volta ao problema já apresentado por Cheng em 1977a, considerando agora a temperatura da parede constante. Neste artigo, Merkin faz uma análise mais profunda sobre o escoamento referenciado na figura 2.4 sendo agora a temperatura da parede constante. Nesta análise conclui que expansões assintóticas são válidas para grandes distâncias ao longo do plano. No caso da retirada de fluido, a Camada Limite tem espessura constante, o que não ocorre no caso da injeção onde existe uma região de temperatura constante próxima à parede ocasionada pelo fluido injetado, pois ocorre uma difusão térmica que deve ser analisada mais criteriosamente.

Em 1979, Merkin apresenta a Convecção Livre ao redor de corpos com forma arbitrária mas com simetria axial figura 2.6. Dois tipos de corpos são discutidos. Primeiro um cilindro infinito com escoamento horizontal tal que o escoamento seja bidimensional ao redor do cilindro. O segundo caso um corpo com simetria vertical.

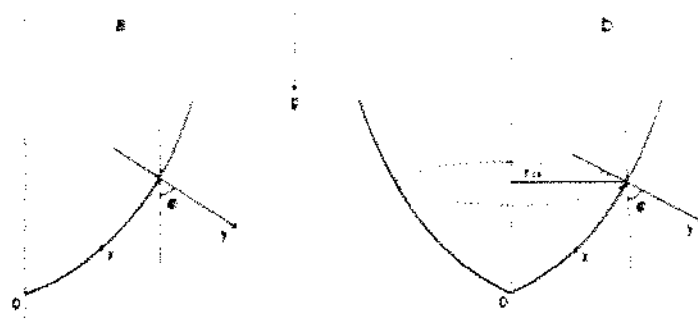


Figura 2.6 - Sistema de coordenada
a) corpos bidimensionais b) corpos axisimétricos

Trabalha com coordenadas cilíndricas, faz transformações adimensionais e mostra solução de similaridade através da definição de uma função de corrente. Fala ainda sobre a reconstrução dos resultados de Ping Cheng e Minkowycz 1977.

Em 1984, Pascal pesquisa o comportamento de fluidos não Newtonianos em meio poroso e faz uma comparação com o comportamento dos fluidos Newtonianos. Para isso analisa a variação de viscosidade aparente com a tensão de cisalhamento, o que caracteriza os fluidos não Newtonianos. Mostra uma aplicação direta em reservas de óleo bruto.

No mesmo ano, Yücel estuda a influência da injeção de massa lateral na Convecção Livre em estado estável num cilindro vertical embebido em meio poroso. Analisa o caso da temperatura e do fluxo de calor constante na parede com retirada ou injeção de massa.

As equações da Camada Limite que não admitem solução de similaridade, são resolvidas pelo método das Diferenças Finitas. Apresenta perfis de temperatura e faz análises do número de Nusselt.

Em 1985, Blake, Bejan e Poulikakos mostram o estudo numérico da Convecção Natural em meio poroso horizontal aquecido no fundo e saturado com água fria. A densidade máxima da água ocorre a $3,98^{\circ}\text{C}$ sob pressão atmosférica normal. Na superfície o problema apresenta temperatura de zero grau e no fundo a temperatura varia entre 4 e 8 graus. Três séries de simulações numéricas documentaram o efeito do número de Rayleigh, razão de transferência de calor vertical. A faixa numérica destes experimentos é $200 < Ra < 10000$, $4^{\circ}\text{C} < T_H < 8^{\circ}\text{C}$, $0.167 < H/L < 1$, onde:

Ra - número de Rayleigh modificado para fluidos com densidade máxima.

T_H - temperatura no fundo.

H/L - raio geométrico - altura/comprimento.

No mesmo ano, Joshi e Gebhart analisam a Convecção

Mista em uma superfície com fluxo de calor uniforme. Usando o método de ajustamento com expansão assintótica obtiveram termos de ordem zero correspondentes à Convecção Natural do escoamento na Camada Limite, iguais aos obtidos por Merkin mas, depois da correção com termos de maior ordem seus resultados se tornaram mais precisos. Com esses dados faz uma análise do número de Nusselt.

Ainda em 1985 Minkowycz, Cheng e seus colaboradores apresentam a solução de similaridade para uma classe de problemas com aplicações específicas em geotermia. Analisa uma aleta vertical embebida em meio poroso com alto número de Rayleigh. São obtidas expressões analíticas para a taxa local de transferência de calor, número de Nusselt local e espessura da Camada Limite ao longo da aleta. Analisam um exemplo numérico e apresentam gráfico de linhas de corrente e isotermas. As temperatura giram em torno de 200°C .

Ainda neste ano Raptis e Perdikins consideram o problema em regime transiente. O fluido é absorvido pela parede com velocidade constante e longe da superfície o fluido vibra na direção paralela ao eixo. Faz isso colocando na corrente livre uma função oscilante. Todas as propriedades do fluido são constantes exceto a influência da variação de densidade e da temperatura. Analisam o problema do ponto de vista teórico não utilizando as equações de Darcy.

Em 1986, Raptis e Takhar analisaram o problema do ponto de vista da permeabilidade. O escoamento é forçado e temos a presença da força de empuxo já abordado por Ping Cheng em 1977a. Resolvem o problema com métodos numéricos. Analisam situações variando a permeabilidade do meio poroso.

No mesmo ano Liu, Minkowycz e Cheng apresentam o problema da convecção livre em meio poroso associado as teorias de transferência de calor por condução. Foi necessário resolver o problema do escoamento na Camada Limite e o da condução de calor acopladamente, pois o problema do escoamento em convecção mista não tem solução de similaridade. O conjunto de equações

diferenciais ordinárias resultante são acopladas através das condições de contorno. O sistema foi resolvido por métodos iterativos.

Nessa sequência aparece também em 1986 Merkin abordando um problema já mencionado por ele em 1979 e que se refere a problema com corpos de geometria axisimétrica. Faz expansões em série com ordem de grandeza de $1/\log \delta$ onde δ é determinado pela expansão. Conclui que um método de simples aproximação pode dar melhores resultados que métodos numéricos completos. Fez comparações com seus próprios artigos.

Finalizando este item da revisão aparecem no mesmo ano Liu e Minkowycz que apresentam os efeitos do fluxo de massa ao longo de uma placa plana vertical com convecção livre na Camada Limite em meio poroso. Foi concluído que devido à forte interação entre a convecção na Camada Limite e a condução nas fronteiras sólidas, os resultados são intrinsecamente diferentes dos prescritos nas condições de contorno. Esta classe de problemas que relaciona condução e convecção já foi citada nesta revisão e faz análises da transferência de calor com vários mecanismos de convecção (forçada, natural e mista) com diferentes fluidos como água e ar, mas só neste artigo o autor inclui o fluxo de massa lateral.

Devido à não linearidade das equações não foi possível obter solução exata e todo processo numérico foi descrito por Liu, Minkowycz e Cheng em 1986. As equações governantes são resolvidas por métodos de não-similaridade local. Os autores concluem entre outras coisas que a injeção de fluido aumenta a espessura da Camada Limite e a retirada de fluido inverte os resultados.

2.4. O PROBLEMA TRIDIMENSIONAL EM MEIO POROSO

Até 1971, o problema do escoamento tridimensional em meio poroso era tratado de maneira experimental examinando o comportamento do fluido e também estudando os transientes que descrevem a convecção natural. Um exemplo disso é o artigo de Katto e Massuoka em 1967 que examina a quebra de estabilidade das leis que governam esse tipo de escoamento quando sujeito a gradientes de temperatura verticais. Examinando a teoria, os autores concluem que o fenômeno é afetado pela difusividade térmica e que há possibilidade das teorias ordinárias baseadas nas leis de Darcy serem aplicadas, mesmo quando a permeabilidade do meio poroso fica consideravelmente alta. Este artigo trata de experiências realizadas em meio poroso de alta permeabilidade com fluido convectivo sob razoável gradiente de temperatura usando gás compressível como fluido.

Resultados experimentais concordam com a teoria concluindo que o critério de investigação em fluido convectivo é dado pela equação $Ra \cdot k/l^2 = 4\pi^2$ onde Ra é o número de Rayleigh, k a permeabilidade do meio poroso e l a espessura vertical.

Em 1971, Holst e Aziz fizeram uma pesquisa experimental sobre convecção natural em meio poroso confinado bi e tridimensional. O artigo trata dos resultados teóricos obtidos através de diferenças finitas das equações que descrevem os transientes de convecção natural em meio poroso. As equações se tornaram mais acessíveis numericamente pela introdução do vetor potencial, que pode ser visto como complemento tridimensional da função corrente.

Rayleigh pesquisando o problema teórico escreveu as equações de massa, momentum e balanço de energia apropriadamente. Depois de uma série de simplificações ele chegou a critérios para predição do comportamento da convecção para casos hipotéticos de fluidos em superfícies horizontais. Também derivado de grupos adimensionais estabeleceu o que hoje chamamos de número de

Rayleigh o qual determina a magnitude do movimento na convecção.

Assim foram surgindo trabalhos mais realistas e através dessa necessidade de realismo foi preciso investir em soluções tridimensionais e os sistemas físicos foram modelados matematicamente pelas equações de massa e energia com diferenciais de volume. As leis de Darcy foram empregadas no balanço de forças e as equações foram simplificadas desprezando a dependência da temperatura nas propriedades dos fluidos, exceto a densidade. As equações são linearizadas e resolvidas para obter número de Rayleigh crítico como função das dimensões físicas do meio poroso. Depois as equações não lineares são resolvidas pelo método das Diferenças Finitas.

Os autores concluem que o movimento tridimensional pode resultar numa alta taxa de transferência de calor através do meio poroso. Outra conclusão interessante é que como toda solução bidimensional sempre satisfaz as equações tridimensionais, existe uma multiplicidade nas soluções se o movimento tridimensional for possível.

Em 1980, Liu e Ismail apresentaram a solução assintótica da convecção livre próxima a uma quina vertical embebida em meio poroso. O problema foi formulado com as leis de Darcy, a equação da continuidade, equação da energia, foram usadas as aproximações de Boussinesq e alguma álgebra para obter equações mais compactas.

A partir daí foram estabelecidas conclusões sobre as velocidades. Com estas conclusões foi possível resolver analiticamente a equação que mostra o perfil de temperatura.

Em 1983, Beukema, Bruin e Schenk apresentam um modelo de convecção natural em meio poroso confinado com uma fonte de calor interna. As equações governantes foram reduzidas a uma equação diferencial parabólica e uma equação diferencial elíptica. Os autores tratam o problema considerando o efeito da convecção natural, o que normalmente é desprezível, e concluem

que os resultados melhoram em 11% se a convecção natural for incluída nos cálculos.

O artigo fala de uma aplicação prática interessante. Produtos agrícolas são estocados em containers por longos períodos. Durante a estocagem os produtos geram calor, resultante do metabolismo dos mesmos. Assim estocá-los em torno de zero grau normalmente preserva os produtos por um tempo considerado razoável. Desse modo é necessário resfriá-los a temperaturas abaixo de zero grau.

Quando o ar frio sopra ao redor do container, as paredes esfriam e provocam diferenças de temperatura, o que ocasiona a convecção natural. Este artigo enfoca a importância da convecção natural no resfriamento do container e calcula a distribuição de temperatura durante a estocagem.

Em 1984, Altimir faz um estudo numérico dos efeitos da inversão de densidades sobre a transferência de calor em meio poroso. Considera o problema dentro de um paralelepípedo de altura H cujas paredes horizontais ($z = 0$ e $z = H$) tem temperaturas T_1 e T_2 podendo também haver uma inclinação com a horizontal. Resolve o problema pelo método de Galerkin com um esquema de integração temporal do tipo explícito.

Em 1985, Liu e Guerra apresentaram o problema da quina em meio poroso com ângulo arbitrário e sucção na parede. Baseados no sistema de coordenadas apresentado por Barclay e Rhida em 1980 para fluido puro os autores chegaram à solução analítica do problema, ou seja conseguiram uma expressão analítica para o perfil de temperatura. Nessa expressão aparece o ângulo que separa os planos de fronteira do meio poroso. Os autores mostram que se esse ângulo for nulo pode-se recuperar a solução bidimensional de Merkin e para 45° a solução de Liu e Ismail.

No mesmo ano, Caltagirone e Borjes abordam o problema sob o ponto de vista da estabilidade da solução. Resolvem o problema de modo similar ao apresentado por Altimir em 1983. Ambos usam o método de Galerkin sendo que Altimir faz também uma análise bidimensional. Caltagirone ressalta a vantagem desse método ser semi-analítico onde coeficientes podem ser recriados. Também se torna fácil introduzir equações de perturbação para análise de estabilidade.

2.5. CONTRIBUIÇÕES MAIS RECENTES

Seguindo a linha de Ping Cheng 1977a, Merkin 1978, Gavindarajulu e Malarvizhi 1987 publicaram um artigo tratando o problema da convecção livre na Camada Limite em meio poroso saturado bidimensional. Os autores fazem transformações do tipo usadas por Merkin 1978 e depois expandem as incógnitas em série de potência concluindo que poucos termos da série podem reconstruir a solução de Cheng.

Ingham e Pop em 1987 consideram a Convecção Livre ao longo de um plano semi-infinito vertical com distância d acima de uma superfície isolada horizontal infinita, a qual está imersa em meio poroso saturado. Duas situações práticas são analisadas: i) escoamento isotérmico, ii) escoamento uniforme. Os dois casos são analisados pelo método *matched asymptotic expansions*. O parâmetro de perturbação é o inverso da raiz quadrada do número de Rayleigh que é tomado grande para assegurar a existência de Convecção Livre na Camada Limite.

Nakayama e Koyama 1987 tratam o problema da Convecção Livre bidimensional ou seja para corpos axisimétricos de forma arbitrária. Aqui eles mostram como conseguir a solução de similaridade para esta classe de problemas. Também recuperam a partir desse teoria os resultados de Cheng e Minkowycz 1977.

Moya, Ramos e Sen 1987 abordam o mesmo tema da Convecção Livre bidimensional, agora em um retângulo inclinado. Apresentam o número de Nusselt local e global em função de parâmetros externos. O objetivo dos autores foi analisar numericamente o comportamento do escoamento dentro do retângulo constituído de material poroso, obtendo assim as isotermas e as linhas de corrente dentro do retângulo, entre outras coisas.

Liu, Lam e Guerra, 1987 analisaram o problema da Convecção Livre tridimensional em semi-planos perpendiculares entre si. Trataram o problema para temperatura da parede constante e obtiveram a solução de similaridade local. Para grandes distâncias chegaram à conclusão de que o número de Nusselt se aproxima do valor apresentado por Cheng e Minkowycz 1977 para o caso bidimensional.

Raptis e Perdikis 1987 fazem uma análise teórica da Convecção Livre quando um fluido viscoso e incompressível ocupa uma região semi infinita de um meio poroso, espaço limitado por planos porosos verticais. O fluido está sujeito à velocidade de sucção normal e a um fluxo de calor constante nos planos. O artigo mostra o perfil de velocidade e a razão de transferência de calor através do número de Nusselt, no caso de resfriamento do plano com a Corrente Livre. Escreveram as equações do movimento bidimensional com sucção na parede. Este artigo trata o problema apresentado pelos mesmos autores em 1985 só que agora apresentam a solução independente do tempo e sem o fluxo oscilatório. Este mesmo problema foi abordado por Chang e Ismail em 1980 em três dimensões, usando as equações de Darcy e obtendo solução analítica.

Finalmente em 1988 Hoe Kim e Uhn Kim apresentam um trabalho tridimensional para fluido puro, utilizando número de Grashof como parâmetro na redução das equações. Os autores usam para este estudo a mesma geometria utilizada por Rubin (1966) dividindo a quina em regiões como foi descrito no item 2.2.

Estes autores citam o trabalho de sucção assintótica e ângulo arbitrário, Liu e Guerra 1985, como um dos poucos exemplos na literatura sobre Camada Limite tridimensional.

2.6. COMENTARIOS

Vemos que foi possível encontrar na literatura um número razoável de autores interessados no assunto, usando enfoques dos mais variados. Não temos, evidentemente, a pretensão de afirmar que a relação apresentada seja completa mas estamos convencidos de que ela engloba o que há de mais relevante no assunto.

Na apresentação anterior procuramos ilustrar apenas os pontos principais de cada artigo. Não teria sentido, é claro, nos estendermos exageradamente sobre os mesmos. A pesquisa no entanto buscou ser minuciosa, com a finalidade de oferecer ao leitor uma apreciação ampla sobre o que existe a respeito.

Dessa forma, é possível notar que há pouquíssima pesquisa realizada na quina em meio poroso, devido à grande dificuldade matemática de tratar os problemas tridimensionais. As soluções encontradas na literatura se referem à convecção em fluido puro e estão descritas no item 2.2 deste capítulo.

CAPÍTULO III

CONCEITOS UTILIZADOS

3.1. EQUAÇÕES DE DARCY E SEUS LIMITES

H. Darcy foi quem realizou pela primeira vez experiências clássicas sobre as quais estão baseadas a teoria do escoamento laminar em meio poroso. Estes experimentos foram feitos com filtros de areia através dos quais a água penetrou na direção vertical [Longwell, 1966].

O escoamento era linear, a área do corte transversal do filtro era constante em relação à altura. Foi encontrado que a razão de penetração era diretamente proporcional à área de secção transversal e à diferença de pressão através do filtro, do termo proporcional à pressão e inversamente proporcional à espessura do filtro.

Este resultado de Darcy não foi completo porque sua experiência não descobriu o efeito que a permeabilidade e a viscosidade têm se forem variáveis. Entretanto é habitual generalizar a lei de Darcy de modo equivalente ao que segue:

A razão volumétrica do escoamento de um fluido homogêneo através de um meio poroso: é diretamente proporcional à força por unidade de volume que atue no fluido, normal à área de secção transversal na direção do escoamento, e inversamente proporcional à viscosidade do fluido.

Rigorosamente falando, a validade desta lei está sujeita às seguintes limitações:

- 1 - O fluido ser homogêneo ou de uma só fase. Devemos estender a lei para casos mais complicados.
- 2 - Não existe interação do fluido e do meio poroso. Hidratação, inchaço e solução são exemplos de interação que fogem às condições da lei de Darcy, a menos que se façam correções.
- 3 - As taxas de fluxo são relativamente pequenas. Se a taxa

de fluxo aumenta indefinidamente, haverá uma descontinuidade nas relações determinadas por Darcy. Análogo ao que acontece com a hidráulica, a região na qual a lei de Darcy é válida, é chamada de "viscous" ou "laminar" e a faixa de fluxo com taxa mais alta onde a lei de Darcy não vale, é conhecida como "turbulenta", mas esta característica não é precisa.

Expressões para escoamento laminar uniforme, entre placas paralelas encontra-se também que a velocidade é diretamente proporcional ao gradiente de potencial P , o qual é dirigido à viscosidade do fluido. Isto é análogo à lei de Darcy, a qual pode ser expressa na forma vetorial como:

$$\vec{V} = - \frac{k}{\mu} (\nabla P + \sigma \nabla h) \quad (3.1)$$

$$\sigma = \rho g$$

onde :

- $\vec{V}$: velocidade média do fluido;
- k : permeabilidade do meio poroso;
- μ : viscosidade do fluido;
- P : Pressão;
- h : Perda de Carga;
- ρ : densidade do fluido;
- g : aceleração da gravidade;
- ∇ : $\partial/\partial x$

para a qual o meio poroso deve ser isotrópico tendo a mesma permeabilidade no escoamento em todas as direções. A permeabilidade pode ser função da posição. A força por unidade de volume na equação (3.1) mostra como obtê-la vindo da pressão e das forças gravitacionais.

Se outras forças, tais como força centrífuga por exemplo estão presentes, seus efeitos devem ser incluídos.

Se o peso específico for função somente da pressão, ou se for constante, pode-se usar a função potencial ϕ que permitirá

escrever a equação (3.1) de maneira diferente:

$$\phi = h + \int_{p_0}^p \frac{\partial P}{\partial \sigma} \quad (3.2)$$

substituindo em (3.1), temos :

$$\dot{V} = - \frac{k}{\mu} \sigma \nabla \phi \quad (3.3)$$

A equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \sigma^k \frac{k}{\mu} \nabla \phi = \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \quad (3.4)$$

Se o meio em questão for isotrópico (3.4) fica :

$$\nabla \cdot \frac{k}{\mu} \nabla \phi = 0 \quad (3.5)$$

mas frequentemente a permeabilidade e a viscosidade são também constantes e (3.5) se reduz à equação de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.6)$$

Esta equação é encontrada na representação de muitos fenômenos físicos e como resultado muitas soluções são conhecidas.

O fato de que a mesma equação diferencial descreve vários tipos de fenômenos, significa que a solução de um problema particular em termos de um fenômeno é também solução de um problema tendo condições de contorno semelhante em termos de outro fenômeno.

No nosso estudo (escoamento em meio poroso) se tivermos velocidades pequenas, as forças viscosas serão muito maiores que as forças inerciais, entretanto esta última não será identicamente nula. O escoamento de um fluido através de passagem tortuosas às quais mudam na direção e na área da secção

transversal, será a experiência de um escoamento acelerado. O que não acontece no caso estável, onde o escoamento é laminar com aceleração nula.

A lei clássica de Darcy foi aperfeiçoado por vários pesquisadores sendo que um deles generalizou para um escoamento de fluido viscoso em meio poroso.

A generalização proposta da lei de Darcy para estudo do escoamento de um líquido viscoso em meio poroso foi:

$$-\nabla P - \frac{\mu}{k} \bar{V} + \mu \nabla^2 \bar{V} = 0 \quad (3.7)$$

Esta equação satisfaz também a condição de "no-slip" (Walz, 1969) na parede. Em uma região altamente porosa o termo de aceleração deve ser levado em conta. Assim a equação fica:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V}(\nabla \bar{V}) = \frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \bar{V} - \frac{\nu}{k} \bar{V} \quad (3.8)$$

onde:

t : tempo;

ν : viscosidade cinemática.

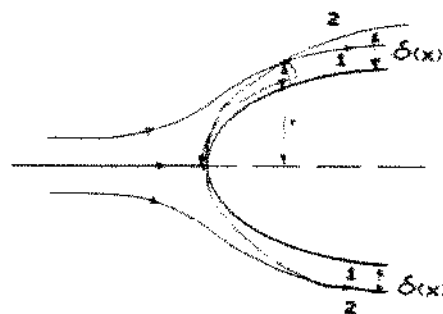
Esta é portanto a equação generalizada do escoamento em meio poroso.

Outros pesquisadores usaram essa equação sem os termos referentes à aceleração e resolveram problemas deste modo. Por outro lado pesquisadores orientais resolveram as mesmas equações sem os termos viscosos.

3.2 CONCEITOS DE CAMADA LIMITE

Quando um fluido escoar sobre uma superfície e este fluido tem uma viscosidade mesmo que pequena (número de Reynolds grande), sem grandes esforços pode-se verificar que junto à superfície o fluido mantém uma certa inércia em relação à corrente potencial, ou seja existe uma faixa onde o fluido sai da velocidade zero e atinge a velocidade do escoamento potencial (condição de "no-slip"). Esta transição da velocidade nula junto à parede até a velocidade máxima a certa distância do objeto, ocorre dentro de uma fina camada denominada Camada Limite (figura 3.1). Desse modo problemas que levam em conta o efeito viscoso apresentam soluções dentro da Camada Limite e envolvem grandes dificuldades matemáticas. Assim sendo, duas regiões são distintas nesse contexto:

- 1 - Uma camada muito fina em contacto direto com a parede, onde o gradiente de velocidade na direção perpendicular à parede $\partial u / \partial y$ é muito grande (Camada Limite). Como consequência desse gradiente, a tensão de cisalhamento na parede $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$ (μ = viscosidade) , é considerável.
- 2 - O restante do campo fora da Camada Limite onde o gradiente é bem menor resultando a tensão de cisalhamento praticamente sem importância.



- 1- Região de escoamento em camada limite
2- Região de escoamento potencial
 $\delta(x)$ - Espessura da camada limite

Figura 3.1 - Camada Limite

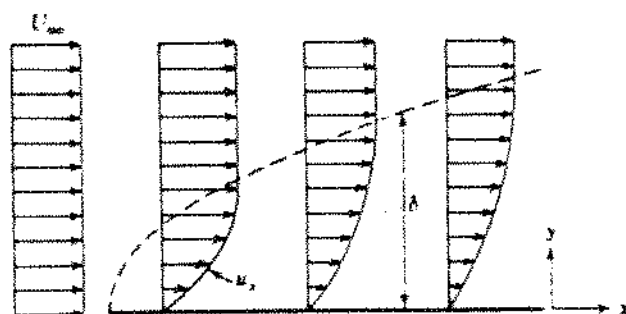


Figura 3.2 - Escoamento na Camada Limite

Com este conceito de Camada Limite e uma teoria matemática apropriada, podemos executar transformações adequadas para que as equações diferenciais parciais, que governam o movimento do fluido nessa região, se transformem em equações diferenciais ordinárias e sejam resolvidas por métodos analíticos ou numéricos dependendo das dificuldades associadas às novas equações.

A solução de alguns tipos de problemas envolvendo Camadas Limites e fluido puro são apresentadas por Herman Schlichting (1972).

3.2.1. Camada Limite Tridimensional

Os cálculos das soluções de equações da Camada Limite até agora publicados envolvem problemas quase que exclusivamente bidimensionais, onde os componentes de velocidade dependem somente de duas coordenadas, o que equivale a dizer que não existe componente de velocidade na terceira direção. Um caso real de velocidade na Camada Limite envolveria uma terceira coordenada e é o caso que apresenta grande dificuldade matemática para ser solucionado.

Existem algumas publicações na área de Camada Limite tridimensional com fluido puro como é o caso de [Vasanta, 1966 e Barclay, 1980], mas em meio poroso, as publicações se limitam a casos com condições de contorno simplificadas [Chang e Ismail, 1980].

Para o problema em questão temos dois planos perpendiculares e um fluido que escoar próximo a esses planos. Se considerarmos cada parede individualmente teríamos o caso da Camada Limite na placa plana. Mas devemos encontrar a solução da Camada Limite tridimensional que aparece quando o fluido escoar próximo à intersecção de dois planos (Figura 3.3a). Nessa intersecção surge então uma forte influência de uma superfície limite sobre a outra, o que causa um comportamento da corrente muito complexo. A quina é definida pelas coordenadas $y = 0$ e $z = 0$. A corrente principal segue a direção da coordenada x . A corrente ao longo de uma quina desse tipo com ângulo reto, pode ser caracterizada grosseiramente pela interferência das duas Camadas Limites ao longo das duas paredes plans segundo a Figura 3.3a . Cada uma por si, no entanto, obedece às equações de correntes tridimensionais, às equações de Darcy e Continuidade.

O campo total da corrente no espaço considerado segundo a Figura 3.3b, pode ser dividido em quatro regiões: na região I pode-se abandonar todas as forças de atrito com a parede. Trata-se aí de uma corrente potencial onde não existe nenhum

intercâmbio de impulso devido ao atrito com as paredes. Podemos chamar essa região de corrente livre.

A região II é a Camada Limite na parede $y = 0$, a qual está submetida à distribuição de pressões nessa parede, devido à corrente livre (região I).

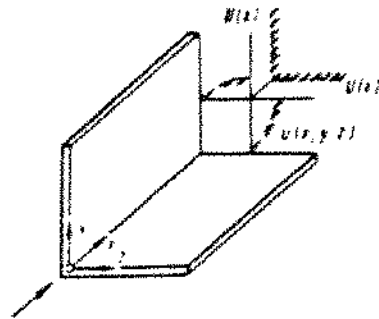


Figura 3.3a - Interferência das camadas limites

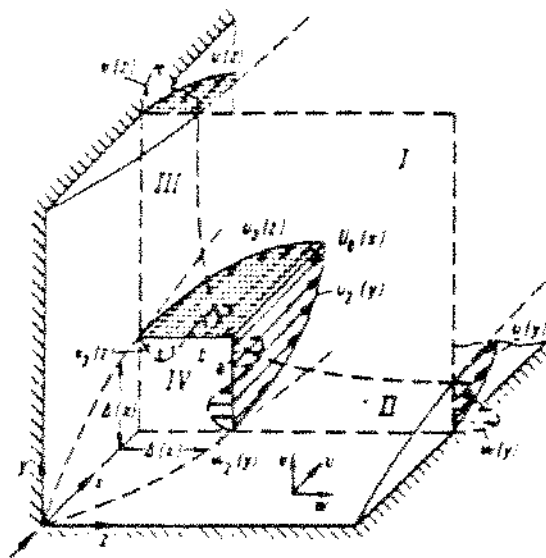


Figura 3.3b - Subdivisões das regiões de corrente

A Figura 3.4 fornece um quadro qualitativo do que ocorre com as linhas de fluxo nas regiões II e III devido ao escoamento potencial da região I. Apresentação corresponde aos três casos seguintes: queda de pressão ao logo da quina, pressão decrescente $dP_0/dx < 0$, pressão constante $dP_0/dx = 0$ ou pressão crescente $dP_0/dx > 0$.

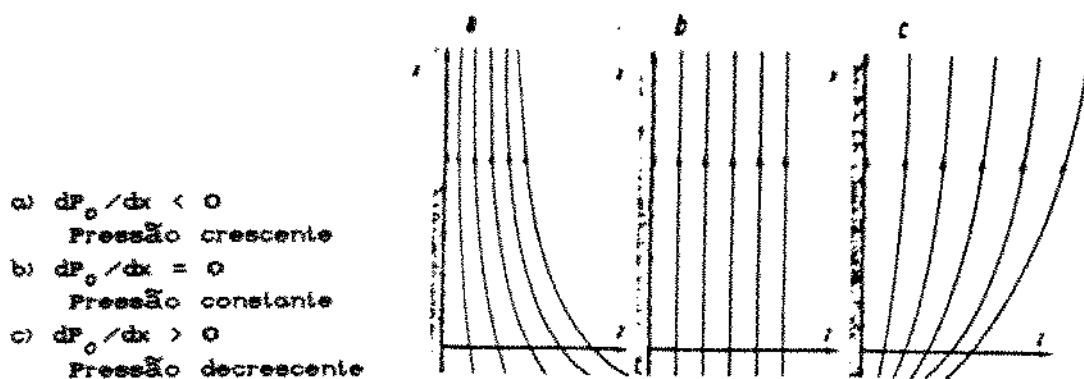


Figura 3.4 - Representação das linhas de corrente na parede $y = 0$ ou $z = 0$

Na Camada Limite II os gradientes de velocidade são perpendiculares à parede $y = 0$, isto é, $\partial u / \partial y > 0$.

A região III é a Camada Limite na parede $z = 0$. Analogamente à Camada Limite II esta Camada Limite também tem caráter bidimensional. Em ambas as regiões as forças de atrito são perpendiculares à parede devido aos gradientes de velocidade $\partial u / \partial z > 0$.

Para a região IV, a Camada Limite da quina propriamente dita, é característico que aí as forças de atrito devidas ao gradiente de velocidade devem ser consideradas tanto na direção y como na direção z . É claro que as forças de atrito devidas aos gradientes de velocidade na direção x são desprezíveis. É nesta região que o gradiente de velocidade em ambas as direções y e z se tornam comparáveis com o gradiente de velocidade na direção x .

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

4.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Apresentamos aqui a análise da convecção livre próxima a uma quina tridimensional, formada por dois planos verticais envolvendo um meio poroso.

As seguintes hipóteses são assumidas:

- 1- O fluido e o meio poroso estão sempre em equilíbrio termodinâmico.
- 2- A temperatura do fluido está sempre abaixo do ponto de ebulição.
- 3- As propriedades termofísicas do fluido e do meio poroso são constantes.
- 4- São aplicáveis às aproximações de Boussinesq [Kays, 1980]. Que desprezam o efeito de todas as propriedades variáveis e aproximam a densidade usando a equação 4.5.
- 5- O ângulo entre os dois planos verticais é reto.

Assim as equações governantes para o problema são:

A equação da continuidade para garantir o princípio da conservação de massa:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

As equações de Darcy nas suas respectivas direções:

$$\bar{u} = - \frac{k}{\mu} \left[\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \rho g \right] \quad (4.2)$$

$$\bar{v} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} \quad (4.3)$$

$$\bar{w} = - \frac{k}{\mu} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \quad (4.4)$$

$$\rho = \rho_{\infty} \left[1 - \beta (T - T_{\infty}) \right] \quad (4.5)$$

A equação da energia:

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (4.6)$$

onde:

$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$: são as velocidades de Darcy nas respectivas direções $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$;

ρ , μ , β : são densidade, viscosidade cinemática e coeficiente de expansão térmica do fluido;

k : permeabilidade do meio poroso;

α : difusividade térmica do meio poroso;

T , P , g : temperatura, pressão e aceleração gravitacional.

O subscrito ∞ caracteriza a condição de $\bar{y} = \infty$ e $\bar{z} = \infty$. A coordenada $\bar{x}$ é medida ao longo da linha de intersecção dos planos com direção vertical, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ são coordenadas medidas ao longo desses planos.

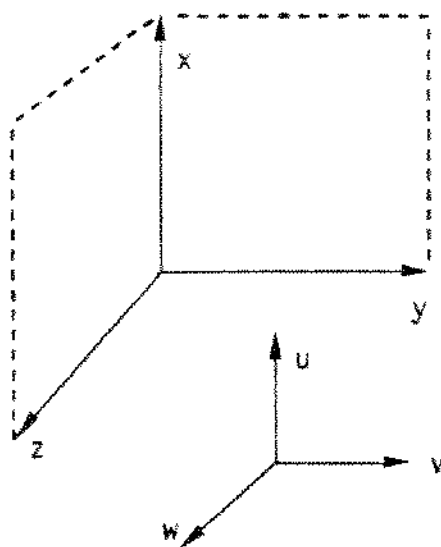


Figura 4.1 - Quina formada por dois planos verticais

Para as coordenadas da Figura 4.1 as condições de contorno do problema são:

$$\bar{y} = 0 \quad \bar{v} = 0 \quad T_v = T_\infty + Ax^\lambda \quad (4.7)$$

$$\bar{z} = 0 \quad \bar{w} = 0 \quad T_v = T_\infty + Ax^\lambda \quad (4.8)$$

$$\bar{y} \rightarrow \infty \text{ e } \bar{z} \rightarrow \infty \quad \bar{u} = 0 \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad T = T_\infty \quad (4.9)$$

T_v : temperatura na parede;

T_∞ : temperatura no infinito;

$A > 0$ e consideramos a temperatura como numa função de potência da distância até a origem.

4.1.1. SIMPLIFICAÇÕES DA CAMADA LIMITE

As equações de (4.1) a (4.9) descrevem o problema sobre a convecção livre na Camada Limite de uma parede impermeável vertical em meio poroso saturado. Assumindo que a convecção ocorre numa fina camada em torno da parede, podemos usar a aproximação da Camada Limite que deixa a equação (4.6) da seguinte forma:

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} + \bar{w} \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{z}^2} \right) \quad (4.10)$$

pois na Camada Limite $\bar{x} \gg \bar{y}$ e portanto $\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}$ podendo ser desprezado $\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2}$ em relação aos outros termos com ordens de grandeza muito maiores.

4.1.2. TRANSFORMAÇÕES ADIMENSIONAIS

Usando variáveis adimensionais tais que:

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_v - T_{\infty}}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad y = \frac{\bar{y}}{L}, \quad z = \frac{\bar{z}}{L}$$

$$u = \frac{\bar{u}}{U}, \quad v = \frac{\bar{v}}{U}, \quad w = \frac{\bar{w}}{U} \quad (4.11)$$

$$P = \frac{\bar{P}}{\rho_{\infty} g \beta (T_v - T_{\infty}) L}$$

onde L é um comprimento de referência e U uma velocidade de referência definida como:

$$U = \rho_{\infty} g \beta (T_v - T_{\infty}) \frac{k}{\mu} \quad (4.12)$$

Assim as equações (4.1), (4.2), (4.3), (4.4) e (4.6) ficam:

$$u = - \frac{\partial P}{\partial x} + \theta \quad (4.13)$$

$$v = - \frac{\partial P}{\partial y} \quad (4.14)$$

$$w = - \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.16)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Ra} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (4.17)$$

onde Ra é o número de Rayleigh modificado e definido por:

$$Ra = \frac{UL}{\alpha} \quad (4.18)$$

Fazendo diferenciação cruzada eliminamos P do sistema e obtemos de (4.13) e (4.14):

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4.18)$$

e de (4.14) e (4.15):

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (4.20)$$

Assim as equações (4.16), (4.17) (4.19) e (4.20) formam as equações governantes do movimento.

O segundo termo da equação (4.19) é muito pequeno em relação aos outros dois termos pois $x \gg y$ e portanto $\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x} \ll \frac{\partial \theta}{\partial y}$.

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (4.21)$$

integrando temos:

$$u = \theta + F(x, z) \quad (4.22)$$

onde $F(x, z)$ é uma função de integração.

Para qualquer valor de x , u e θ são simétricos em relação ao plano de intersecção. Assim $F(x, z)$ deve ser constante. Quando $y \rightarrow \infty$ e $z \rightarrow \infty$, $u = 0$ e $T = T_\infty$, logo $\theta = 0$. Assim podemos tomar $F(x, z)$ como uma constante nula, ficando a equação

$$u = \theta \quad (4.23)$$

Neste ponto podemos reformular a condição de contorno (4.7) e (4.8) para:

$$y = 0, \quad v = 0, \quad T_v = T_\infty + Ax^\lambda, \quad u = u_v = 1 \quad (4.24)$$

$$z = 0, \quad w = 0, \quad T_v = T_\infty + Ax^\lambda, \quad u = u_v = 1 \quad (4.25)$$

4.1.3. TRANSFORMAÇÕES DE SIMILARIDADE

Uma maneira muito importante para solucionar problemas na Camada Limite é saber sob que condições podem existir as chamadas soluções de similaridade. Entendemos por soluções de similaridade aquelas para as quais o componente longitudinal da velocidade tem a propriedade de que o perfil $u(x,y,z)$ em dois pontos x distintos só se diferenciam por um fator de escala. Para isso devemos trabalhar com grandezas adimensionais, fazendo uso dos fatores de escala. Como fator de escala para velocidade podemos usar o valor da velocidade na corrente livre. Como fator de escala para y escolhemos uma medida como função de x e y e para z uma medida como função de x e z .

Solução de similaridade para placa plana submersa foi publicada por Schlichting. Solução de similaridade para quina em meio poroso bidimensional foi publicada por Cheng e Minkowycz, 1977.

As questões de similaridade de soluções são importantes do ponto de vista matemático. Quando existem soluções de similaridade o sistema de equações diferenciais parciais pode ser reduzido a um sistema de equações diferenciais ordinárias, o que significa uma grande simplificação em termos matemáticos.

Assim sendo, uma transformação de similaridade consiste em determinar uma nova variável independente através de duas variáveis dependentes em termos das variáveis de transformações generalizadas. Quando estas variáveis são substituídas nas equações governantes, elas reduzem o conjunto às equações diferenciais ordinárias se os coeficientes das novas equações e suas derivadas ficarem constantes. Estes coeficientes são referenciados à seguinte condição de similaridade quando constantes: os coeficientes contêm derivadas das variáveis de transformação e desse modo são equações diferenciais propriamente ditas.

Qualquer solução para a condição de similaridade resulta na forma explícita da variável de transformação que deverá transformar o conjunto de equações originais num conjunto de equações diferenciais ordinárias e a este resultado chamamos de equação de similaridade. Após obter a solução devemos examinar sua validade física.

Johnson e Cheng 1978 mostraram um método sistemático para encontrar as possíveis soluções de similaridade para convecção livre na Camada Limite em meio poroso adjacente a planos verticais (bidimensional). Faz transformações em termos de funções e obtém uma equação em termos de coeficientes, depois faz a análise desses coeficientes para casos específicos. Este estudo é mais completo mas o artigo apresentado por Cheng 1977b é mais compreensível do ponto de vista de como aparecem as condições de similaridade. Neste artigo Cheng analisa o caso para convecção mista (livre e forçada) onde a velocidade da corrente livre é $U_{\infty} = Bx^m$ e a temperatura da parede é $T_v = T_{\infty} + Ax^{\lambda}$. Cheng estabelece uma relação entre λ e m para que exista a solução de similaridade.

4.1.4. APLICAÇÃO DAS TRANSFORMAÇÕES DE SIMILARIDADE

Uma transformação de similaridade aplicada às equações governantes do escoamento na quina reduz as três variáveis independentes x, y, z a um sistema de duas variáveis independentes η e ξ . Assim definimos as seguintes variáveis de similaridade:

$$\eta = \frac{\sqrt{Ra}}{\sqrt{x}} y \quad \xi = \frac{\sqrt{Ra}}{\sqrt{x}} z \quad (4.26)$$

$$u(x, y, z) = u_1(\eta, \xi) \quad (4.26)$$

$$v(x,y,z) = - \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{1}{\sqrt{x}} v_1(\eta, \xi) \quad (4.26)$$

$$w(x,y,z) = - \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{1}{\sqrt{x}} w_1(\eta, \xi) \quad (4.26)$$

As equações (4.16), (4.17) e (4.20) ficam após a substituição de (4.26) com as seguintes variáveis auxiliares:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\lambda-1}{2x} \eta \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\lambda-1}{2x} \xi$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{Ra}{x}} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \sqrt{\frac{Ra}{x}}$$

em (4.16) temos:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

$$\left[\frac{\lambda-1}{2x} \right] \eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \left[\frac{\lambda-1}{2x} \right] \xi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \sqrt{\frac{Ra}{x}} -$$

$$\frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{\partial w_1}{\partial \xi} \sqrt{\frac{Ra}{x}} = 0$$

$$\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)\eta \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)\xi \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0 \quad (4.28)$$

em (4.20) temos:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = 0 \quad (4.29)$$

De (4.17) usando (4.23) temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\lambda-1}{2x}\right)\eta u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \left(\frac{\lambda-1}{2x}\right)\xi u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{1}{\sqrt{x}} v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \sqrt{\frac{Ra}{x}} + \\ & - \frac{1}{\sqrt{Ra}} \frac{1}{\sqrt{x}} w_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \sqrt{\frac{Ra}{x}} = \frac{\alpha}{LU} \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} \sqrt{\frac{Ra}{x}} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \sqrt{\frac{Ra}{x}} \sqrt{\frac{Ra}{x}} \right] \\ & \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)\eta u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \left(\frac{\lambda-1}{2}\right)\xi u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - w_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

O número de equações governantes foi reduzido de 4 para 3 e podemos ver que a solução agora é uma função de η e ξ apenas. Desse modo podemos concluir que a solução de similaridade existe.

As equações (4.28), (4.29) e (4.30) compõem o novo sistema de equações e devemos lembrar o que foi considerado na secção 2.1. Todo o escoamento na quina foi dividido em quatro

regiões como mostra a Figura 4.2. A primeira região está a uma grande distância dos dois planos e onde o componente de velocidade u_1 é nulo para o caso em questão.

Na segunda e na terceira região, as Camadas Limites têm o comportamento da solução de primeira ordem ou seja do fluxo bidimensional, sendo que o efeito tridimensional apenas aparece nas soluções de ordem mais elevada. Este comportamento é muito importante do ponto de vista da função corrente que deve satisfazer a região II e IV ou III e IV com base nas componentes de velocidade u, v, w .

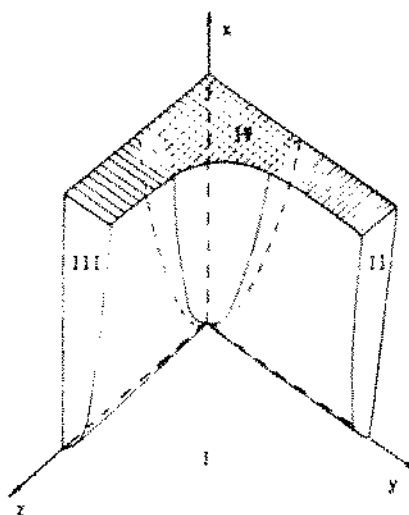


Figura 4.2 - Quatro regiões da quina

Os componentes de velocidade das regiões II e IV ou III e IV devem ter igual comportamento somente no ponto onde elas se tocam. A equação (4.28) e (4.30) tem a mesma forma das equações apresentadas por Vasanta 1966 e podemos ver que a solução depende apenas das variáveis η e ξ .

Desse modo podemos definir segundo Vasanta as seguintes relações:

$$u_1(\eta, \xi) = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \quad (4.31)$$

$$v_1(\eta, \xi) = -\left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial G}{\partial \xi} + \eta \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \quad (4.32)$$

$$w_1(\eta, \xi) = -\left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial G}{\partial \eta} + \xi \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \quad (4.33)$$

É fácil verificar que estas relações satisfazem identicamente a equação (4.28) e (4.29) no plano de simetria, sendo que da equação (4.30) vamos obter a equação que define a função $G(\eta, \xi)$. Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda-1}{2} \eta \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^2 \partial \xi} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\lambda-1}{2} \xi \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial \xi^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} - \\ & \left[-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial G}{\partial \xi} + \eta \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \right] \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^2 \partial \xi} - \\ & \left[-\left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial G}{\partial \eta} + \xi \left(\frac{\lambda-1}{2}\right) \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \right] \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial \xi^2} = \frac{\partial^4 G}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \frac{\partial^4 G}{\partial \eta \partial \xi^3} \end{aligned}$$

nos dá uma equação diferencial parcial de quarta ordem:

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \frac{\partial^4 G}{\partial \eta \partial \xi^3} = \frac{\lambda-1}{2} \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial \xi^2} + \frac{\lambda-1}{2} \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^2 \partial \xi} \quad (4.34)$$

4.2. CÁLCULO DA EQUAÇÃO DE PRIMEIRA ORDEM

A equação governante do escoamento na região II e III já foi apresentada por Cheng e Minkowycz 1977, no caso em que a temperatura na parede é $T_w = T_\infty + Ax^\lambda$. Nessa região as Camadas Limites não sofrem interferência uma sobre a outra e temos a solução bidimensional ou a solução da placa plana. Para esse resultado os autores utilizam uma definição usual onde $u = \partial \phi / \partial y$

e $v = - \partial \phi / \partial x$ sendo u e v as velocidades de Darcy e ϕ a 1 função corrente (bidimensional) definida como:

$$\phi = \alpha Ra^{1/2} f(\eta)$$

onde α , Ra e η já foram definidos anteriormente neste trabalho. Estas equações substituídas adequadamente nas equações governantes do escoamento bidimensional vão resultar na seguinte equação diferencial ordinária de terceira ordem:

$$f'''' + \left[\frac{\lambda+1}{2} \right] f f'' - \lambda f'^2 = 0 \quad (4.35)$$

com as condições de contorno:

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1 \quad f''(\infty) = 0.$$

Esta equação foi resolvida pelo método de Runge-Kutta e foi usado o método de shooting para obter $f''(\infty) = 0$ a partir de $f''(0) = a$ ($a = cte$).

A solução dessa equação, $f(\eta)$ vai compor a solução da equação (4.34) ou seja, agora devemos resolver o seguinte equação diferencial parcial de quarta ordem:

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta^3 \partial \xi} + \frac{\partial^4 G}{\partial \eta \partial \xi^3} = \frac{\lambda-1}{2} \frac{\partial G}{\partial \xi} \frac{\partial^3 G}{\partial \eta \partial \xi^2} + \frac{\lambda-1}{2} \frac{\partial G}{\partial \eta} \frac{\partial^3 G}{\partial \eta^2 \partial \xi}$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} &= 1 \quad \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \\ \eta = 0 \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} &= 1 \quad \frac{\partial G}{\partial \xi} = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\xi \rightarrow \infty \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \rightarrow f'(\eta)$$

$$\eta \rightarrow \infty \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \rightarrow f'(\xi)$$

$$\xi \rightarrow \infty \quad \bullet \quad \eta \rightarrow \infty \quad \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} = 0$$

onde f' é a solução da equação (4.35).

4.3. DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO COMPOSTA

Assumindo que a função $G(\eta, \xi)$ será representada por:

$$G(\eta, \xi) = \xi f(\eta) + \eta f(\xi) - f(\eta)f(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} G_a(\eta, \xi) \quad (4.37)$$

usando (4.31) temos:

$$u_1(\eta, \xi) = f'(\eta) + f'(\xi) - f'(\eta)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 G_a}{\partial \eta \partial \xi} \quad (4.38)$$

Este perfil de velocidade satisfaz as condições de contorno e a função G_a deve ser considerada como uma função de correção ou função de fluxo enfraquecida.

Substituindo (4.38) em (4.36) e usando as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = f(\eta) + \eta f'(\xi) - f(\eta)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial G_a}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = \xi f'(\eta) + f(\xi) - f'(\eta)f(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial G_a}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} = \eta f''(\xi) - f(\eta)f''(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 G_a}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi^2} = f'(\xi) - f'(\eta)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 G_a}{\partial \eta \partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} = \xi f''(\eta) - f''(\eta)f(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^2 G_a}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial \xi \partial \eta^2} = f''(\eta) - f''(\eta)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^3 G_a}{\partial \eta^2 \partial \xi}$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \xi^2 \partial \xi} = f'''(\xi) - f'(\eta)f'''(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^4 G_a}{\partial \xi \partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^4 G}{\partial \eta \partial \xi^2} = f'''(\eta) - f'(\xi)f'''(\eta) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + \frac{\partial^4 G_a}{\partial \xi^2 \partial \eta}$$

temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left[\frac{\partial^4 G_a}{\partial \eta \partial \xi^3} + \frac{\partial^4 G_a}{\partial \eta^3 \partial \xi} \right] + \\
& + f'''(\xi) - f'(\eta) f'''(\xi) + f'''(\eta) - f'(\xi) f'''(\eta) + \\
& - \left[\frac{\lambda-1}{2} \right] \left[f(\eta) + \eta f'(\xi) - f(\eta) f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial G_a}{\partial \xi} \right] \\
& \left[f''(\eta) - f''(\eta) f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^3 G_a}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right] + \\
& - \left[\frac{\lambda-1}{2} \right] \left[f(\xi) + \xi f'(\eta) - f'(\eta) f(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial G_a}{\partial \eta} \right] \\
& \left[f''(\xi) - f''(\xi) f'(\eta) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial^3 G_a}{\partial \eta \partial \xi^2} \right] = 0
\end{aligned}$$

usando que $f'''(\eta) = - \left[\frac{\lambda+1}{2} \right] f(\eta) f''(\eta) + \lambda f'^2(\eta)$, o mesmo para ξ

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left[\frac{\partial^4 G_a}{\partial \eta \partial \xi^3} + \frac{\partial^4 G_a}{\partial \eta^3 \partial \xi} \right] + \\
& - \left[\frac{\lambda+1}{2} \right] f(\xi) f'(\xi) + \lambda f'^2(\xi) - \left[\frac{\lambda+1}{2} \right] f(\eta) f''(\eta) + \lambda f'^2(\eta) + \\
& + \left[\frac{\lambda+1}{2} \right] f(\xi) f''(\xi) f'(\eta) - \lambda f'^2(\xi) f'(\eta) + \\
& + \left[\frac{\lambda+1}{2} \right] f'(\xi) f(\eta) f''(\eta) - \lambda f'^2(\eta) f'(\xi) + \\
& - \left[\frac{\lambda-1}{2} \right] \left[f(\eta) (1 - f'(\xi)) + \eta f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial G_a}{\partial \xi} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[f'''(\eta) - f'''(\eta)f'(\xi) + \frac{\partial^3 G_a}{\partial \eta^2 \partial \xi} \right] + \\
& - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left[f(\xi)(1-f'(\eta)) + \xi f'(\eta) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial G_a}{\partial \eta} \right] \\
& \left[f'''(\xi) - f'''(\xi)f'(\eta) + \frac{\partial^3 G_a}{\partial \eta \partial \xi^2} \right] = 0
\end{aligned}$$

usando que $u_a = \frac{\partial^2 G_a}{\partial \eta \partial \xi}$ - velocidade enfraquecida

$$\begin{aligned}
& \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left[\frac{\partial^2 u_a}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial \eta^2} \right] + \\
& - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left\{ [f(\eta)(1-f'(\xi)) + \eta f'(\xi)] \frac{\partial u_a}{\partial \eta} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + \right. \\
& \quad + (1-f'(\xi))f''(\eta) \int_0^\eta u_a \partial \eta \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) + \\
& \quad + [f(\xi)(1-f'(\eta)) + \xi f'(\eta)] \frac{\partial u_a}{\partial \xi} \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + \\
& \quad + (1-f'(\eta))f''(\xi) \int_0^\xi u_a \partial \xi \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) + \\
& \quad + \left. \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right)^2 \left[\frac{\partial u_a}{\partial \eta} \int_0^\eta u_a \partial \eta + \frac{\partial u_a}{\partial \xi} \int_0^\xi u_a \partial \xi \right] \right\} + \\
& - \left(\frac{\lambda+1}{2} \right) [f(\xi)f'''(\xi) + f(\eta)f'''(\eta) - f(\xi)f'''(\xi)f'(\eta) - f'(\xi)f(\eta)f''(\eta)] + \\
& + \lambda [f'^2(\xi) + f'^2(\eta) - f'^2(\xi)f'(\eta) - f'^2(\eta)f'(\xi)] + \\
& - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left\{ [f(\eta)(1-f'(\xi)) + \eta f'(\xi)] [f'''(\eta) - f'''(\eta)f'(\xi)] + \right. \\
& \quad + [f(\xi)(1-f'(\eta)) + \xi f'(\eta)] [f'''(\xi) - f'''(\xi)f'(\eta)] \left. \right\} = 0 \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Resolvendo esta equação temos o valor de u_0 . É uma equação não homogênea com condições de contorno homogêneas, ou seja:

$$\begin{array}{ll} \xi = 0 & u_0 = 0 \\ \eta = 0 & u_0 = 0 \\ \xi = \infty & u_0 = 0 \\ \eta = \infty & u_0 = 0 \end{array}$$

4.4. MÉTODO COMPUTACIONAL

A equação (4.39) pode ser resolvida pelo método das Diferenças Finitas, que utiliza uma grade de pontos (i,j) , cuja vizinhança é mostrada na Figura 4.3.

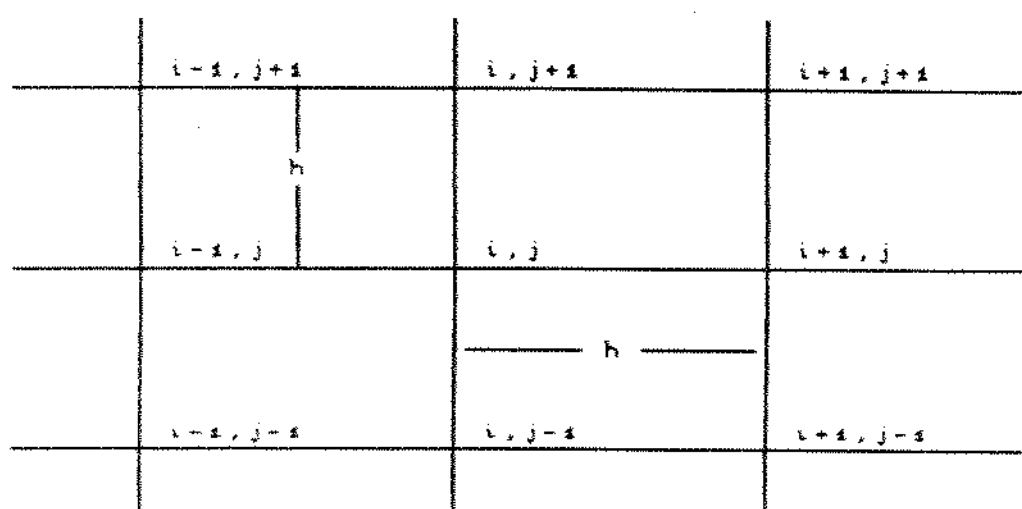


Figura 4.3 - Pontos da grade

Expandindo em série de Taylor para $u_{i-1,j}$ e $u_{i+1,j}$ no ponto central $u_{i,j}$ obtemos:

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - hu_{\eta} + \frac{h^2}{2!} u_{\eta\eta} - \frac{h^3}{3!} u_{\eta\eta\eta} \dots$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + hu_{\eta} + \frac{h^2}{2!} u_{\eta\eta} + \frac{h^3}{3!} u_{\eta\eta\eta} \dots$$

$$\text{onde } u_{\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \bullet \quad u_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Substituindo e depois somando uma equação à outra temos:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \eta} \right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \quad (4.40)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (4.41)$$

De modo semelhante obtém-se as derivadas com relação a ξ , ou seja:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \quad (4.42)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right]_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad (4.43)$$

Utilizando a regra do trapezóide, podemos escrever as integrais como:

$$\int_0^{\eta_i} u \partial \eta = \frac{h}{2} u_{i,j} + h \sum_{i'=2}^{i-1} u_{i',j} \quad (4.44)$$

e

$$\int_0^{\xi_j} u \partial \xi = \frac{h}{2} u_{i,j} + h \sum_{j'=2}^{j-1} u_{i,j'} \quad (4.45)$$

Substituindo as equações (4.40) a (4.45) em (4.39) temos:

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{4}{h^2} - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \delta \left(\frac{u_{a_{i+1,j}} - u_{a_{i-1,j}}}{4} + \frac{u_{a_{i,j+1}} - u_{a_{i,j-1}}}{4} \right) + \right. \\
& \left. + \left(f_i' \left(1-f_j \right) \frac{h}{2} + f_j' \left(1-f_i \right) \frac{h}{2} \right) \delta u_{a_{i,j}} + \right. \\
& \left. \left(u_{a_{i+1,j}} + u_{a_{i-1,j}} + u_{a_{i,j+1}} + u_{a_{i,j-1}} \right) \frac{1}{h^2} \delta + \right. \\
& - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left[\delta^2 \sum_{i=2}^{i-1} u_{a_{i,j}} \left(\frac{u_{a_{i+1,j}} - u_{a_{i-1,j}}}{2} \right) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad + f_i' \left(1-f_j \right) h \delta \sum_{i=2}^{i-1} u_{a_{i,j}} + \\
& \qquad \qquad \qquad + \delta^2 \sum_{j=2}^{j-1} u_{a_{i,j}} \left(\frac{u_{a_{i,j+1}} + u_{a_{i,j-1}}}{2} \right) + \\
& \qquad \qquad \qquad + f_j' \left(1-f_i \right) h \delta \sum_{j=2}^{j-1} u_{a_{i,j}} + \\
& + \left(f_i \left(1-f_j \right) + \eta f_j' \right) \frac{u_{a_{i+1,j}} - u_{a_{i-1,j}}}{2h} + \\
& + \left(f_j \left(1-f_i \right) + \xi f_i' \right) \frac{u_{a_{i,j+1}} - u_{a_{i,j-1}}}{2h} \Big] + \\
& + \lambda \left[f_j'^2 \left(1-f_i \right) + f_i'^2 \left(1-f_j \right) \right] + \\
& - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left[f_j f_j' \left(1-f_i \right) + f_i f_i' \left(1-f_j \right) \right] + \\
& - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \left[\left(1-f_j \right) \left(f_i f_i' - f_i f_i' f_j \right) + \eta f_j' f_i' \left(1-f_j \right) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad + \left(1-f_i \right) \left(f_j f_j' - f_j f_j' f_i \right) + \xi f_j' f_i' \left(1-f_i \right) \Big] = 0 \quad (4.46)
\end{aligned}$$

para $\delta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$.

Uma grade uniforme com $h = 0.5$ foi escolhida. Usamos para o ponto (i, j) , $\eta_i = (i-1)h$ e $\xi_j = (j-1)h$, $\eta_\infty = 10$ e $\xi_\infty = 10$. Desse modo a grade consiste de 21×21 pontos.

Condições de Contorno:

$$u_{1,j} = u_{i,1} = u_{21,j} = u_{i,21} = 0 \quad (4.47)$$

As funções f , f' , f'' foram encontradas resolvendo a equação (4.35) pelo método de Runge-Kutta e a equação (4.46) foi resolvida usando o método iterativo de Gauss-Seidel. Com isso obtemos o valor de

$$\frac{\partial^2 G_a}{\partial \eta \partial \xi}$$

que irá compor as equações:

$$u_1(\eta, \xi) = \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi}$$

$$u_1(\eta, \xi) = f'(\eta) + f'(\xi) - f'(\eta)f'(\xi) + \delta \frac{\partial^2 G_a}{\partial \eta \partial \xi}$$

$$v_1(\eta, \xi) = -\left[\frac{\lambda-1}{2}\right] \frac{\partial G}{\partial \xi} + \eta \left[\frac{\lambda-1}{2}\right] \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi}$$

$$\begin{aligned} v_1(\eta, \xi) = & -\left[\frac{\lambda-1}{2}\right] \left[f(\eta) + \eta f'(\xi) - f(\eta)f'(\xi) + \delta \int u_a \partial \eta \right] + \\ & + \eta \left[\frac{\lambda-1}{2}\right] u_1(\eta, \xi) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned}
 w_i(\eta, \xi) &= - \left[\frac{\lambda-1}{2} \right] \frac{\partial G}{\partial \eta} + \xi \left[\frac{\lambda-1}{2} \right] \frac{\partial^2 G}{\partial \eta \partial \xi} \\
 w_i(\eta, \xi) &= - \left[\frac{\lambda-1}{2} \right] \left[f(\xi) + \xi f'(\eta) \cdot f(\xi) f'(\eta) + \delta \int u_0 d\xi \right] + \\
 &+ \xi \left[\frac{\lambda-1}{2} \right] u_i(\eta, \xi) \quad (4.49)
 \end{aligned}$$

A partir da equação (4.48) foi obtido um sistema de 441 equações e 441 incógnitas. Este sistema é do tipo $AX = B$ onde a matriz A é uma matriz de Banda, como mostra a Figura 4.4, onde os coeficientes são:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{\delta}{h^2} - \left[\frac{\lambda-1}{4} \right] \left[\delta^2 \sum_{j=2}^{j-1} u_{i,j} + \frac{\delta f(\xi)(1-f'(\eta)) + \xi f'(\eta)}{h} \right] \\
 C_2 &= \frac{\delta}{h^2} + \left[\frac{\lambda-1}{4} \right] \left[\delta^2 \sum_{v=2}^{v-1} u_{v,i} + \frac{\delta f(\eta)(1-f'(\xi)) + \eta f'(\xi)}{h} \right] \\
 C_3 &= \frac{\delta}{h^2} + \left[\frac{\lambda-1}{4} \right] \left[\delta^2 \sum_{j=2}^{j-1} u_{i,j} + \frac{\delta f(\xi)(1-f'(\eta)) + \xi f'(\eta)}{h} \right] \\
 C_4 &= \frac{\delta}{h^2} - \left[\frac{\lambda-1}{4} \right] \left[\delta^2 \sum_{v=2}^{v-1} u_{v,i} + \frac{\delta f(\eta)(1-f'(\xi)) + \eta f'(\xi)}{h} \right] \\
 C_5 &= \delta \left[- \left[\frac{\lambda-1}{8} \right] \left[u_{i,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + u_{i+1,j} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{h^2} + f''(\eta) (1-f'(\xi)) \frac{h}{2} + f''(\xi) (1-f'(\eta)) \frac{h}{2} \right] \quad (4.50)
 \end{aligned}$$

Para resolução desse sistema de equações simultâneas foi utilizada uma subrotina sugerida por Brebbia e Ferrante (1978)

que usa o método da Eliminação de Gauss para matrizes de banda, e os resultados são apresentados no Capítulo IV. Foi utilizada uma discretização de passo relativamente grande para que as curvas fossem compatíveis com o desenho das superfícies apresentadas nas Figuras 6.9 a 6.14. Este tamanho de passo foi escolhido de modo a utilizar a máxima capacidade do software Energraf-3D.

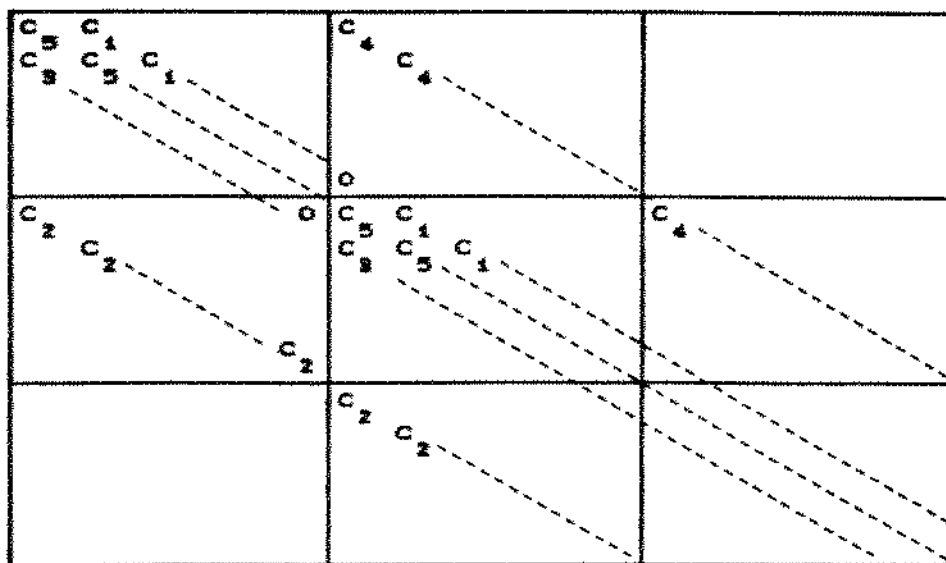


Figura 4.4 - Matriz de Banda para resolução da equação (4.46)

4.5. DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

Nesta secção será apresentado esquematicamente o programa usado para o cálculo das soluções, e na Figura 4.5 temos um diagrama funcional do software.

A linguagem usada foi o FORTRAN-77 e o programa foi implementado num VAX/VMS-785 com terminal gráfico Tektronix, para interface bidimensional. As superfícies foram plotadas em PC de 16 bits. Todas as variáveis reais foram usadas em precisão dupla.

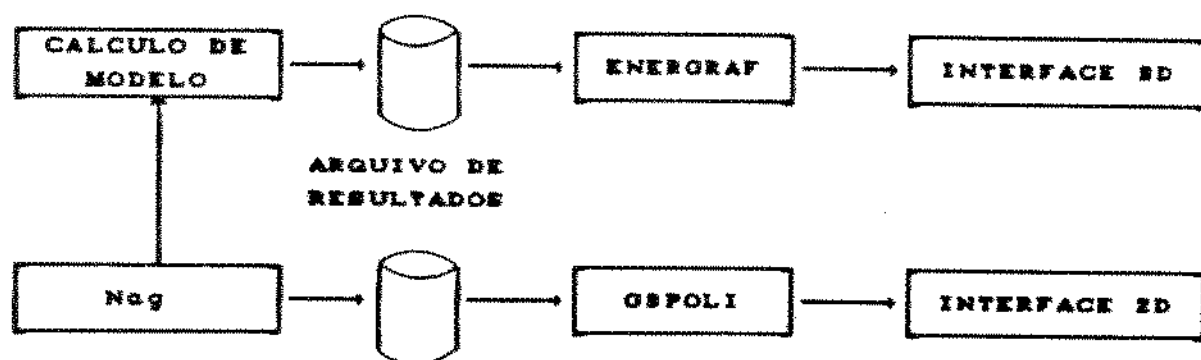


Figura 4.5 - Fluxo de dados para a simulação gráfica

Este fluxograma foi elaborado para representar cada uma das simulações, ou seja, para cada λ foi realizado um experimento.

A seguir apresentamos na Figura 4.6 o diagrama de blocos do modelo matemático, com suas respectivas subrotinas.

Observação: Nag - Numerical Algorithms Group
 G3poli - Nucleo para aplicações gráficas em equipamentos tektronix.
 Energraf- Software para aplicações em geral.

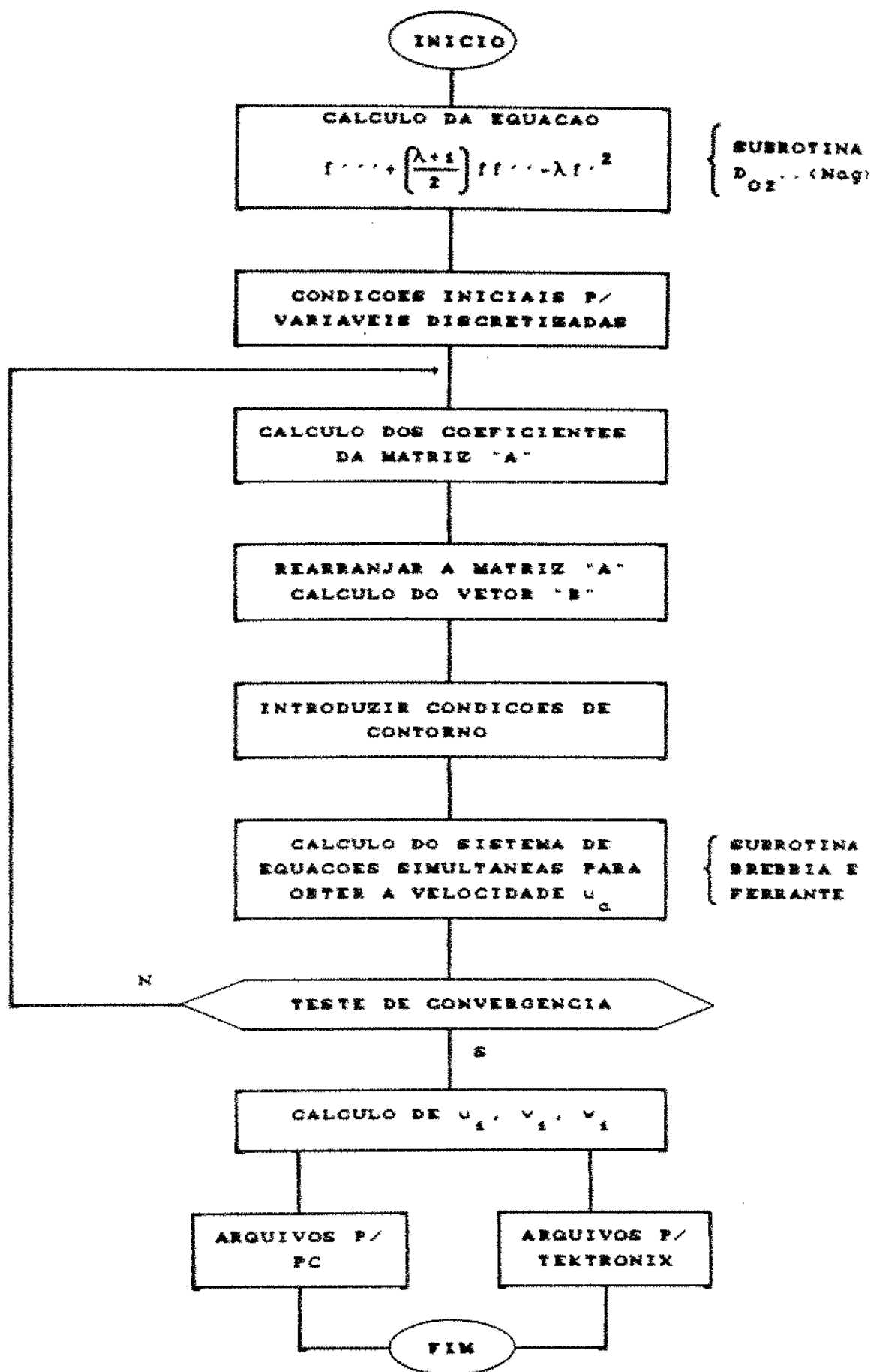


Figura 4.6 - Fluxograma da função de fluxo enfraquecida

4.5.1. TESTE DE CONVERGÊNCIA

$$\max \left[\frac{u_{a_{i,j}}^{k+1} - u_{a_{i,j}}^k}{u_{a_{i,j}}^{k+1}} \right] < 0.01. \quad (4.51)$$

Os programas convergiram com número de iterações $6 < N < 8$ e o tempo de CPU médio 7:00 minutos.

No capítulo seguinte faremos a apresentação de dois casos especiais:

- a convecção livre entre planos com ângulo arbitrário entre eles e sucção assintótica;
- o problema de convecção livre quando a temperatura na parede é constante.

CAPITULO V

CASOS ESPECIAIS

5.1. INTRODUÇÃO

Trataremos neste capítulo do problema da convecção livre em meio poroso próximo a uma quina formada com dois planos verticais e ângulo arbitrário entre eles.

Este problema foi tratado por Liu e Ismail em 1980 que abordaram o problema para ângulo de 90° . Foi encontrada a solução analítica com condições assintóticas para os perfis de velocidade e temperatura.

Aqui estendemos o problema para ângulo arbitrário e provamos que os resultados são compatíveis para ângulos zero e noventa graus.

Também tratamos do problema da convecção livre quando a diferença da temperatura na parede e a temperatura ambiente é uma constante. Este caso foi abordado por Liu, Lam e Guerra em 1987 e pode ser obtido a partir deste trabalho.

5.2. CONVECÇÃO LIVRE COM SUCÇÃO ASSINTÓTICA

Na formulação deste problema são assumidas todas as hipóteses descritas no Capítulo IV, mas observamos que o ângulo entre os dois planos verticais pode ser qualquer. O caso do ângulo reto foi resolvido por Liu e Ismail (1980). Obtidas as mesmas equações governantes ((4.1) a (4.6)) somente as condições de contorno são diferentes de (4.7), (4.8) e (4.9).

$$y = 0 \quad v = V_0 = \text{cte} \quad T = T_v = \text{cte} \quad (5.1)$$

$$z = 0 \quad w = W_0 = \text{cte} \quad T = T_v \quad (5.2)$$

$$y \rightarrow \infty \quad e \quad z \rightarrow \infty \quad u = 0 \quad T = T_\infty \quad (5.3)$$

A partir disso, foram feitas simplificações como: a grandes distâncias $x \rightarrow \infty$ a velocidade de u fica constante com relação a esse eixo, logo $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Desse modo temos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (5.4)$$

$$u = \frac{g\beta K\rho_{\infty}}{\mu} (T - T_{\infty}) \quad (5.5)$$

$$v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5.6)$$

Seguindo o raciocínio de Liu e Ismail (1980), ao longo do plano de simetria $w = 0$ e v é uma constante. Na parede, a velocidade de sucção V_0 é também constante mas podemos expressar v como função de V_0 , como na Figura 5.1. $V = V_0 / \cos \lambda$.

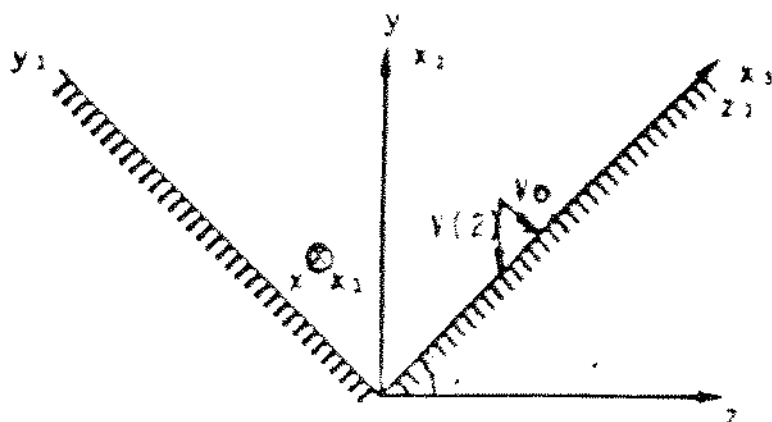


Figura 5.1 - Sistema de coordenadas oblíquo

Assim a equação da energia térmica (5.6) fica:

$$v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (5.7)$$

Esta equação se torna difícil de ser resolvida devido à condição de contorno na parede, ou seja, $y = z \tan \lambda$, $T = T_w$. Para isso, usamos as coordenadas de Barclay e Ridha (1980), cuja relação com as coordenadas cartesianas é a seguinte: Veja Figura 5.1:

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\x_2 &= y - z \tan \lambda \\x_3 &= z / \cos \lambda\end{aligned}\tag{5.8}$$

e as respectivas componentes de velocidade

$$\begin{aligned}v(1) &= u \\v(2) &= v - w \tan \lambda \\v(3) &= w / \cos \lambda\end{aligned}\tag{5.9}$$

usando estas transformações, a equação (5.7) fica:

$$v(2) \frac{\partial T}{\partial x_2} = \frac{\alpha}{c^2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} - 2s \frac{\partial^2 T}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right]\tag{5.10}$$

onde $c = \cos \lambda$ e $s = \sin \lambda$. Esta equação é uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem e para resolvê-la escolhemos novas variáveis independentes (veja Hildebrand, 1952).

$$\begin{aligned}\bar{x} &= s x_2 + x_3 \\ \bar{y} &= c x_2\end{aligned}\tag{5.11}$$

Assim temos:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{\alpha} v(2)s \frac{\partial T}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\alpha} v(2)c \frac{\partial T}{\partial \bar{y}} = 0\tag{5.12}$$

usando a equação que deixa a temperatura adimensional

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_v} \quad (5.13)$$

$$V(z) = V_0 / \cos \lambda \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{sv_0}{c\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{v_0}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (5.15)$$

usando o método de separação de variáveis, a solução geral em termos das coordenadas oblíquas fica:

$$\theta = \left(A + B e^{\frac{sv_0}{c\alpha} (x_2 + x_3)} \right) \left(C + D e^{\frac{cv_0}{\alpha} x_2} \right) \quad (5.16)$$

As condições de contorno são:

$$\begin{aligned} x_2 = 0 & & \theta = 0 \\ x_2 \rightarrow \infty & & \theta = 1 \\ x_3 = 0 & & \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para que as condições de contorno sejam possíveis, precisamos ter as relações: $AD = BC$ e $C = 1/A = -D$. Se tomarmos essas constantes iguais a 1 podemos escrever a solução como:

$$\theta = \left(1 - e^{\frac{V_0 s}{c\alpha} (x_2 + x_3)} \right) \left(1 - e^{\frac{cv_0}{\alpha} x_2} \right) \quad (5.18)$$

Esta solução pode ser comparada com o perfil bidimensional para $\lambda = 0$ publicado por Shiliching H. (1972) e Merkin (1978).

$$\theta = 1 - e^{-\frac{v_0}{\alpha} y} \quad (5.19)$$

Para $\lambda = 45^\circ$ temos a solução obtida por Liu e Ismail (1980):

$$\theta = \left(1 - e^{-\frac{v_0}{\alpha\sqrt{2}} (y+z)} \right) \left(1 - e^{-\frac{v_0}{\alpha\sqrt{2}} (y-z)} \right) \quad (5.20)$$

A equação (5.20) apresenta o perfil em coordenadas cartesianas, portanto, fazendo rotação de 45° teremos:

$$\theta = \left(1 - e^{-\frac{v_0}{\alpha} y_1} \right) \left(1 - e^{-\frac{v_0}{\alpha} z_1} \right)$$

A solução geral pode ser escrita como:

$$\theta = \left(1 - e^{-\frac{v_0}{c} (R_2 P_r + R_3 P_r)} \right) \left(1 - e^{-\frac{v_0}{c} R_2 P_r} \right)$$

onde:

$$R_2 = \frac{V_0 x_2}{\mu} = \text{número de Reynolds para sucção no eixo } x_2$$

$$R_3 = \frac{V_0 x_3}{\mu} = \text{número de Reynolds para sucção no eixo } x_3$$

$$P_r = \frac{\mu}{\alpha} = \text{número de Prandtl.}$$

5.3. CONVECÇÃO LIVRE COM TEMPERATURA CONSTANTE

A solução para o caso da convecção livre próxima a uma quina formada por dois planos verticais embebidos em meio poroso é um caso particular deste trabalho e pode ser obtido a partir dele fazendo $\lambda = 0$. Com isso podemos obter os resultados apresentados na Figura 6.1, 6.9a e 6.9b.

CAPITULO VI

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O objetivo deste capítulo é analisar as soluções numéricas obtidas através do programa do Capítulo IV.

Foram realizadas experiências para valores de λ que aparecem no artigo de Cheng e Minkowycz. Primeiramente foi analisada a equação da energia convectiva

$$E(x) = \rho_{\infty} C \int_0^{\infty} u(T - T_{\infty}) dy \quad (6.1)$$

onde

$$u = \alpha Ra f'(\eta) \quad (6.2)$$

$$Ra = \rho_{\infty} g \beta \frac{k}{\mu \alpha} (T_v - T_{\infty}) \quad (6.3)$$

$$T = T_v = T_{\infty} + Ax^{\lambda} \quad (6.4)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{Ra}{x}} y, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{Ra}{x}} \quad (6.5)$$

Então substituindo u temos:

$$E(x) = \rho_{\infty} C \int_0^{\infty} \alpha Ra f'(\eta) (T - T_{\infty}) dy$$

usando a transformação adequada:

$$E(x) = \rho_{\infty} C \frac{\alpha Ra (T - T_{\infty})}{\sqrt{\frac{Ra}{x}}} \int_0^{\infty} f'(\eta) d\eta$$

Substituindo Ra

$$E(x) = \rho_{\infty} C \rho_{\infty} g \beta \frac{k}{\mu} A^2 x^{2\lambda} \frac{1}{\left(\rho_{\infty} g \beta \frac{k}{\mu \alpha} A \right)^{1/2} x^{\frac{\lambda-1}{2}}} \int_0^{\infty} f'(\eta) d\eta$$

com pequena álgebra temos:

$$E(x) = \rho_{\infty} C \left(\rho_{\infty} g \beta \frac{k}{\mu} \alpha A^* \right)^{1/2} x^{\frac{3\lambda+1}{2}} \int_0^{\infty} f'(\eta) d\eta \quad (6.6)$$

Logo $E(x)$ aumenta com x para $\lambda > -\frac{1}{3}$. Por outro lado, se a temperatura começa a se modificar a partir de T_v em $x = 0$ até T_{∞} , o fluxo convectivo deve se iniciar nesse ponto e assim a velocidade e a espessura da Camada Limite devem aumentar ou no mínimo permanecer constante com x . Logo, o expoente de x deve ser $0 \leq \lambda \leq 1$. Como este caso não invalida o anterior, temos que λ varia entre $-\frac{1}{3} \leq \lambda \leq 1$ (veja Figura 6.20). Façamos então a respeito dos extremos.

O caso para $\lambda = 1$ é crítico pois para encontrarmos a solução de similaridade trabalhamos com coeficientes $\frac{\lambda-1}{2}$ como é o caso da equação (4.28) e (4.30) ou ainda (4.32) e (4.33) que teriam seus termos zerados. O programa foi executado e seus resultados apresentados nas Figuras 6.6 e 6.7. V_f e W_f são nulos.

O caso para $\lambda = -\frac{1}{3}$ o problema é também um caso particular pois a $E(x)$ energia convectiva é constante com x e temos que analisar a equação para o cálculo da taxa local de transferência de calor. Assim,

$$q = -K_m \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (6.7)$$

$$\Theta(\eta) = \frac{T - T_{\infty}}{T_v - T_{\infty}} \quad \therefore T = \Theta(\eta)(T_v - T_{\infty}) + T_{\infty} \quad (6.8)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{Ra}{x}} y$$

fazendo a derivada com relação a η

$$q = -K_m \left[(T_v - T_\infty) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right]_{\eta=0}$$

usando uma das equações (4.27) temos:

$$q = -K_m \left[T_v - T_\infty \sqrt{\frac{Ra}{x}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}$$

usando (6.2):

$$q = -K_m \left[Ax^\lambda \left(\rho_\infty g \beta \frac{K}{\mu \alpha} A \right)^{1/2} x^{\frac{\lambda-1}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}$$

agrupando os termos A e x

$$q = -K_m \left[A^{3/2} \left(\rho_\infty g \beta \frac{K}{\mu \alpha} \right)^{1/2} x^{\frac{3\lambda-1}{2}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \quad (6.9)$$

temos da equação de Ping Cheng que $f'' = \theta'$ e com a Tabela 6.1 podemos ver que $\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0$, logo a taxa local de transferência de calor será zero, o que significa um caso especial.

Desse modo concluímos que os valores de λ para os quais devo calcular os valores de velocidade estão $-\frac{1}{3} < \lambda < 1$.

A seguir os gráficos das figuras apresentam resultados para $\lambda = -\frac{1}{4}$, $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{1}{8}$, $\lambda = \frac{1}{2}$.

solucao de equacao diferencial por Runge Kutta
 calculo feito com tol = 0.1D-05

x e a solucao com pontos de igual espacamento

x	f	f'	f''
0.00	0.00000D+00	0.10000D+01	0.00000D+00
0.50	0.49317D+00	0.95947D+00	-0.15771D+00
1.00	0.94792D+00	0.85026D+00	-0.25863D+00
1.50	0.13369D+01	0.70214D+00	-0.31286D+00
2.00	0.16489D+01	0.54590D+00	-0.30054D+00
2.50	0.18885D+01	0.40697D+00	-0.25585D+00
3.00	0.20602D+01	0.29270D+00	-0.20094D+00
3.50	0.21837D+01	0.20541D+00	-0.14945D+00
4.00	0.22696D+01	0.14170D+00	-0.10712D+00
4.50	0.23285D+01	0.96597D-01	-0.74897D-01
5.00	0.23685D+01	0.65327D-01	-0.51497D-01
5.50	0.23955D+01	0.43948D-01	-0.35012D-01
6.00	0.24136D+01	0.29467D-01	-0.23627D-01
6.50	0.24257D+01	0.19720D-01	-0.15864D-01
7.00	0.24338D+01	0.13186D-01	-0.10617D-01
7.50	0.24392D+01	0.88185D-02	-0.70891D-02
8.00	0.24429D+01	0.59044D-02	-0.47267D-02
8.50	0.24453D+01	0.39623D-02	-0.31484D-02
9.00	0.24469D+01	0.26691D-02	-0.20957D-02
9.50	0.24481D+01	0.18085D-02	-0.13945D-02
10.00	0.24488D+01	0.12361D-02	-0.92755D-03
O VALOR DE LAMBD =		-0.333300000000000000	

Tabela 6.1 - Valores de $f(\eta)$, $f'(\eta)$ e $f''(\eta)$ para
 $\lambda = -\frac{1}{3}$, $h = 0.5$.

Para $\lambda = 0$ (Figura 6.1) temos particular interesse pois é o caso onde a diferença entre a temperatura da parede e a temperatura ambiente é uma constante. Este caso concorda com os resultados de Liu e Lam (1987) lembrando que o valor de η usado aqui é $\sqrt{2}$ vezes o valor usado no artigo. Como consequência a espessura da Camada Limite ficou multiplicada por $\sqrt{2}$ e agora os resultados concordam com Ping Cheng (1977), o que pode ser observado no gráfico do número de Nusselt.

O número de Nusselt merece especial atenção nos nossos resultados, devido ao fato da discretização ter sido feita com passo $h = 0.5$, o que resulta um pequeno erro devido ao gradiente

acentuado. A equação (6.9) ajuda-nos a calcular o número de Nusselt.

$$Nu_x = \frac{h_x}{K_m} = \frac{q_x}{K_m (T_v - T_\infty)} = \frac{-K_m (T_v - T_\infty)}{K_m (T_v - T_\infty)} \sqrt{\frac{Ra}{x}} \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (6.10)$$

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Rax}} = - \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \quad (6.11)$$

sabemos que: $u = 0$, $u = u_1$ e

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = f''(\eta) - f''(\eta)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial u_a}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta}$$

logo

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Rax}} = \left[f''(\eta) - f''(\eta)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \frac{\partial u_a}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}$$

De (4.40) temos:

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Rax}} = f''(0) - f''(0)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left[\frac{u_{a_{i+1,j}} - u_{a_{i-1,j}}}{2h} \right]$$

Como $\eta_i = (i-1)h$ se $\eta = 0$, $i = 1$, logo

$$\frac{Nu_x}{\sqrt{Rax}} = f''(0) - f''(0)f'(\xi) + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \left[\frac{u_{a_{2,j}}}{2h} \right]$$

Foram feitas experimentos numéricos com valores de h para obter precisãopre-estabelecida de ordem 0.01. Variamos h para diferentes valores de λ e mostramos aqui um exemplo para $\lambda = 1/2$

na figura 6. Podemos notar que $u_a(1,1)$ varia pouco para $h = 0.5$.

Portanto $h = 0.5$ foi adotado para todos os valores de λ .

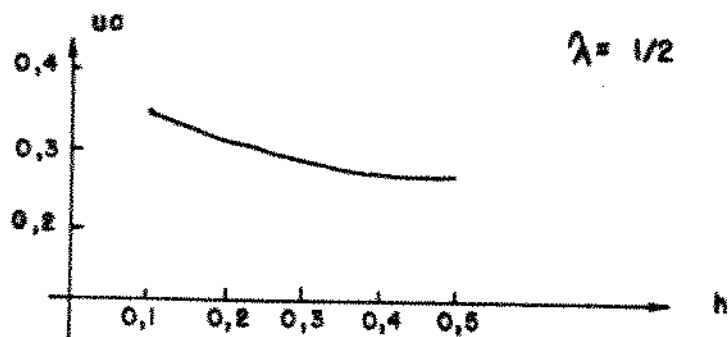


Figura 6 - Valores de $u_0(1,1)$ para vários h .

Fizemos uma avaliação do número de Nusselt na quina, para $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\lambda = 0$ com diferentes valores de h . Os valores do número de Nusselt encontrados são apresentados na Tabela 6.2.

h	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\lambda = 0$
1.0	0.6898	0.4459
0.7	0.6799	0.4448
0.5	0.6177	0.4450
0.4	0.5799	0.445
CHENG	0.7615	0.444

Tabela 6.2 - Diferentes valores do número de Nusselt

Esta tabela mostra que o número de Nusselt difere do valor de Ping Cheng na quina propriamente dita. O que ocorre é que o componente de velocidade de segunda ordem para $\lambda \neq 0$ tem um ponto de singularidade em $x = 0$ e sua solução torna-se imprecisa próxima a este ponto, o que concorda com a teoria clássica de Camada Limite.

Também foi feito um estudo nos coeficientes (4.50) da matriz da Figura 4.4, e observamos que é uma matriz de diagonal dominante, ou seja, os coeficientes da diagonal principal chegam a ser 5 vezes maior que os elementos das outras

diagonais. E numa análise grosseira desprezando-se os termos fora da diagonal principal pudemos discretizar o problema para $h = 0.1$, $\lambda = 1/2$ e obtivemos resultados apresentados na Figura 6.8. Esta figura mostra como as curvas u_0 , Figura 6.4, deveriam se comportar qualitativamente. Mas o número de Nusselt na Figura 6.8 aparece mais próximo do valor de Ping Cheng, pois ele precisa do valor da derivada de u_0 muito perto da parede e nessa discretização ele é bem mais próximo do valor real. A Figura 6.6 e 6.7 tratam do caso $\lambda = 1$ e aí a derivada não influencia o número de Nusselt.

Nos gráficos u_1 , v_1 e w_1 temos os resultados plotados em função da variável η , para alguns valores de λ . Estas figuras são derivadas do primeiro gráfico f' - função f' , solução da equação (4.3), e que representa a solução de ordem zero de nosso problema.

A velocidade $v(x,y,z)$ da equação (4.26) foi plotada para $\lambda = 0$ (Figura 6.15a-b), $\lambda = 1/2$ (Figura 6.16a-b) e $\lambda = -1/4$ (Figura 6.17a-b) e as curvas se apresentam para valores de Rayleigh diferentes, fixados em $\eta = 3$, $\xi = 5$ e $\eta = 5$, $\xi = 5$.

Devemos notar que para $\lambda = -1/4$ a velocidade é reduzida de modo acentuado. Também deve ser observado que para $Ra = 100$ as velocidades são as de maior valor, podendo não obedecer as condições de comportamento de Camada Limite.

A temperatura em função da coordenada y apresentamos na Figura 6.18a. Podemos observar que para valores de $\xi = 2$ e $x = .5$ temos a temperatura dentro da camada limite, ou seja, não assume valores nulos no infinito porque para esse valor de ξ a temperatura sofre influência da outra parede. Isto comprova o comportamento da quina (Figura 6.18b). Aí temos $\xi = 8$ onde observamos o comportamento da placa plana.

Outros gráficos de temperatura podem ser observados para $\lambda = 1/2$ na Figura 6.19a-b.

Outro ponto a ser observado é a espessura da Camada Limite. Na Figura 6.18.b se tomarmos $Ra = 575$ e calcularmos o valor de η para $y = 0.17$, que é o valor onde a temperatura se anula, vamos obter $\eta_\delta = 6.4$, valor compatível com Ping Cheng e Minkowycz.

Isto pode ser verificado para outros valores de λ e também outros valores de Rayleigh.

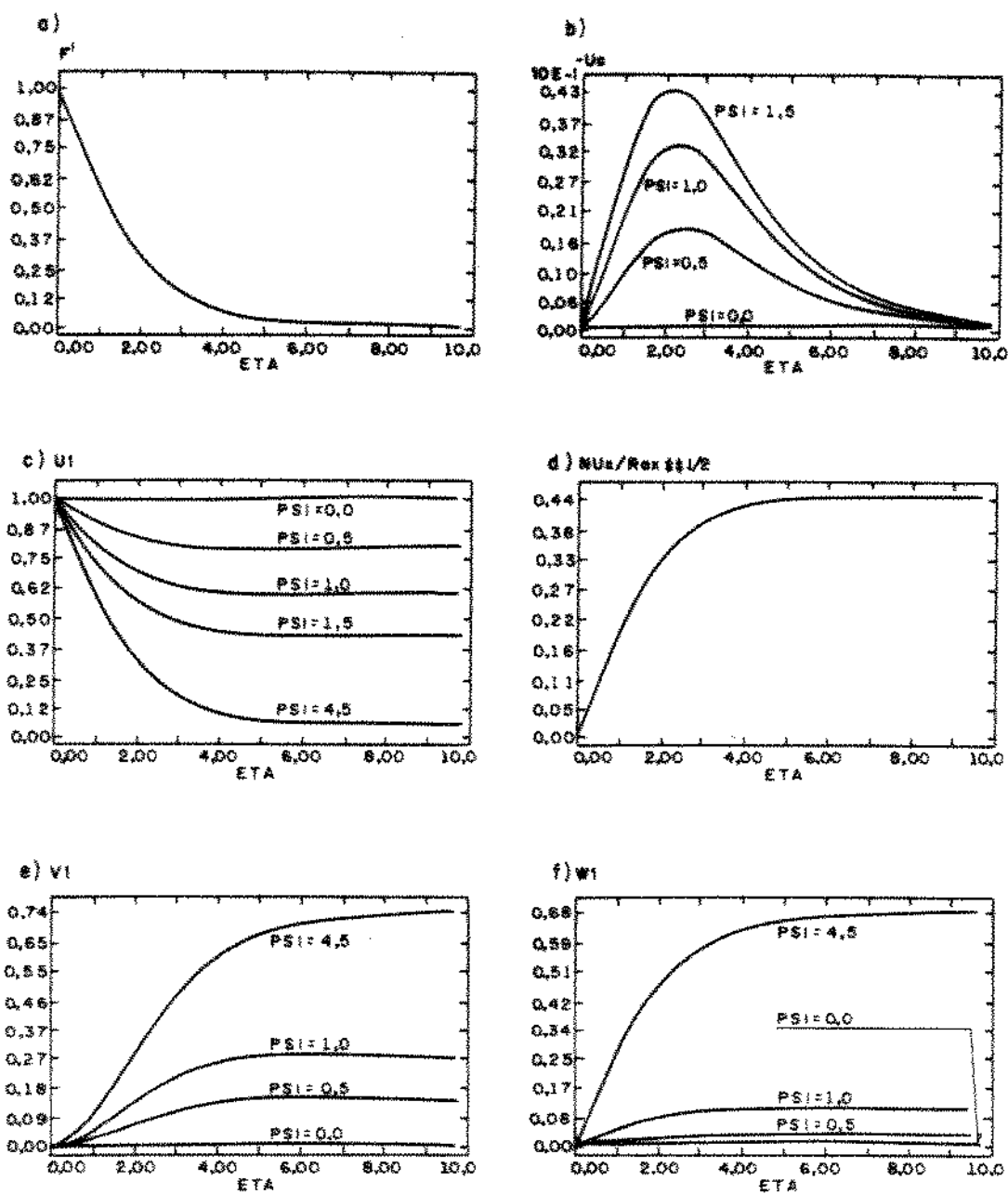


Figura 6.1 - Representação das soluções para $\lambda = 0.0$

a) distribuição adimensional da velocidade versus η

b) distribuição de u_2 para diferentes valores de ξ

c) perfil de velocidade u_1 para diferentes valores de ξ

d) variação do número de Nusselt com η

e) perfil de velocidade v_1

f) perfil de velocidade w_1

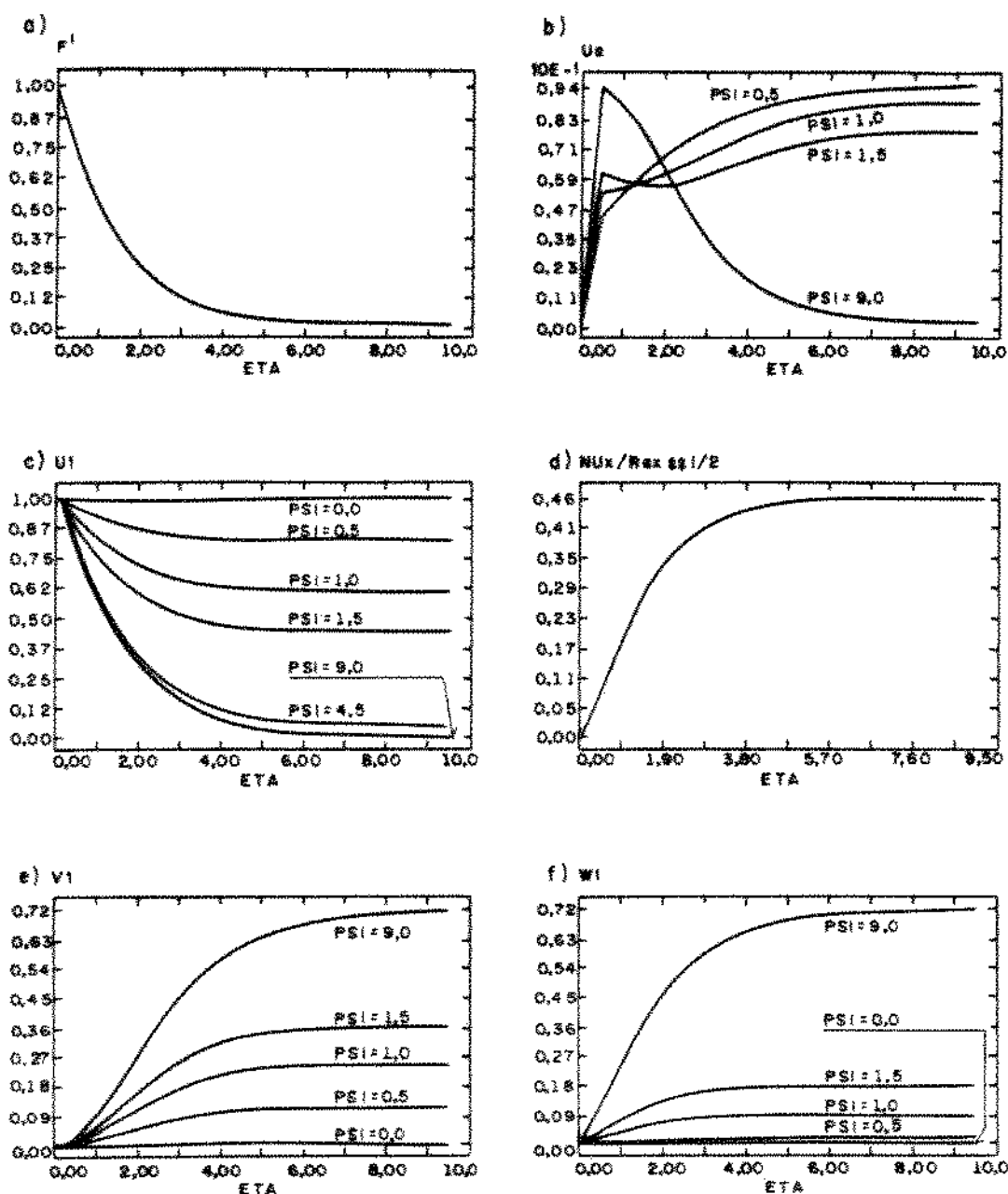


Figura 6.2 - Representação das soluções para $\lambda = 1/8$

- a) distribuição adimensional da velocidade versus η
- b) distribuição de u_e para diferentes valores de ξ
- c) perfil de velocidade u_i para diferentes valores de ξ
- d) variação do número de Nusselt com η
- e) perfil de velocidade v_i
- f) perfil de velocidade w_i

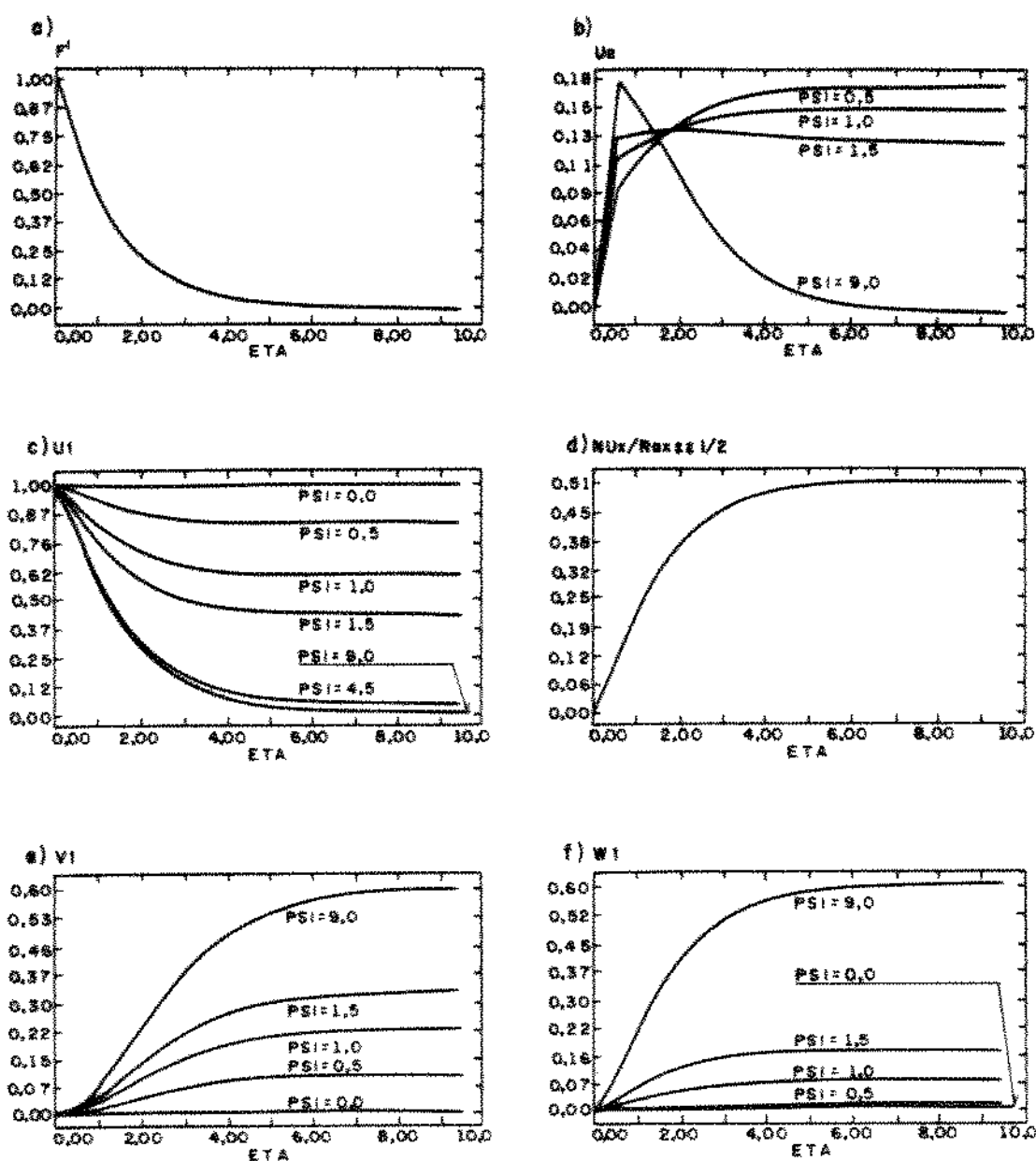


Figura 6.3 - Representação das soluções para $\lambda = 1/4$

- a) distribuição adimensional da velocidade versus η
- b) distribuição de u_a para diferentes valores de ξ
- c) perfil de velocidade u_i para diferentes valores de ξ
- d) variação do número de Nusselt com η
- e) perfil de velocidade v_i
- f) perfil de velocidade w_i

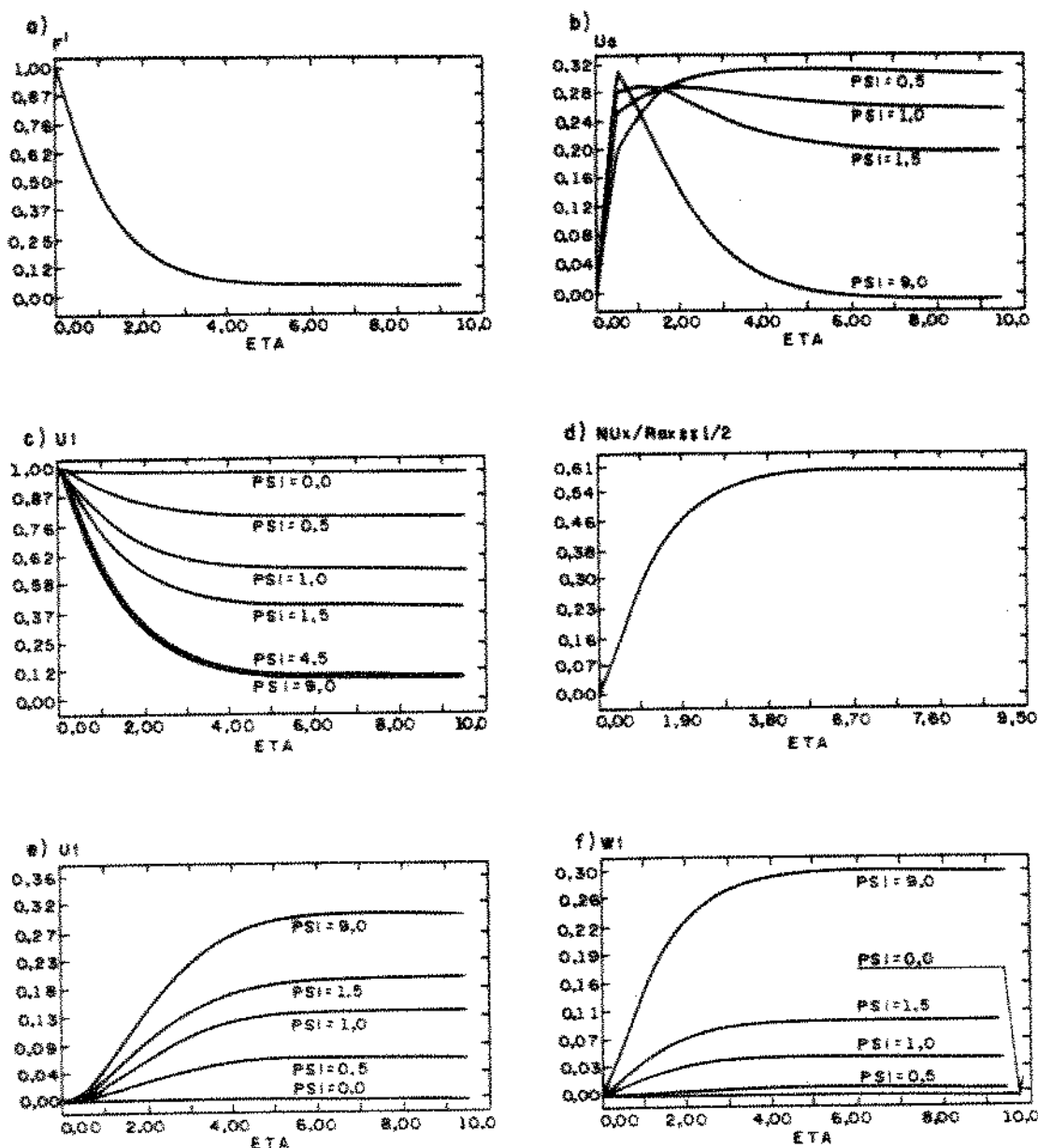


Figura 6.4 - Representação das soluções para $\lambda = 1/2$

- a) distribuição adimensional da velocidade versus η
- b) distribuição de u_s para diferentes valores de ξ
- c) perfil de velocidade u_1 para diferentes valores de ξ
- d) variação do número de Nusselt com η
- e) perfil de velocidade v_1
- f) perfil de velocidade w_1

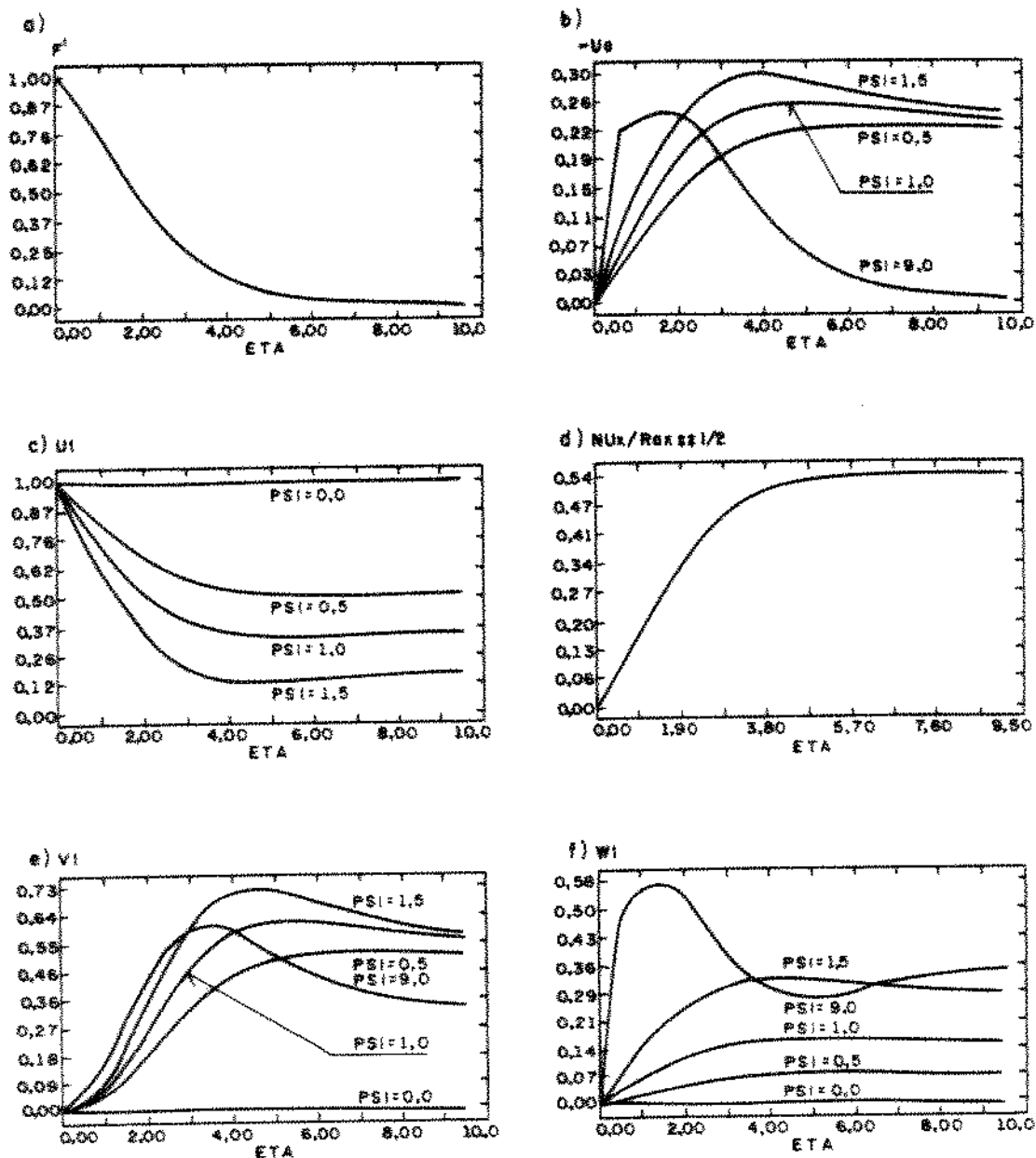


Figura 6.5 - Representação das soluções para $\lambda = -1/4$

- a) distribuição adimensional da velocidade versus η
- b) distribuição de u_0 para diferentes valores de ψ
- c) perfil de velocidade u_1 para diferentes valores de ψ
- d) variação do número de Nusselt com η
- e) perfil de velocidade v_1
- f) perfil de velocidade w_1

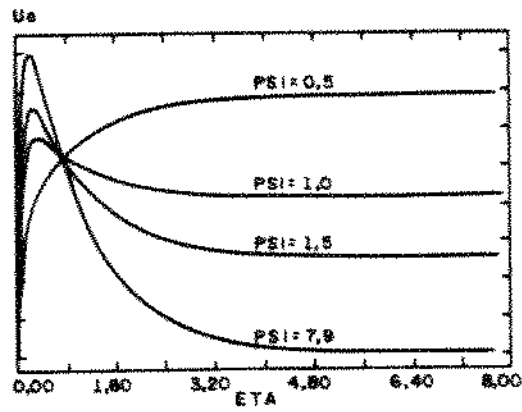


Figura 6.6 - Usando só a diagonal principal da matriz de Banda

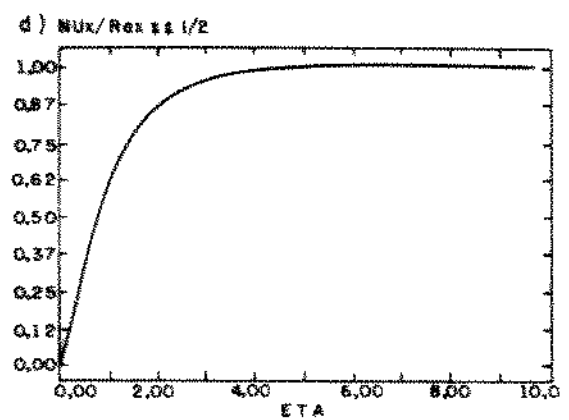
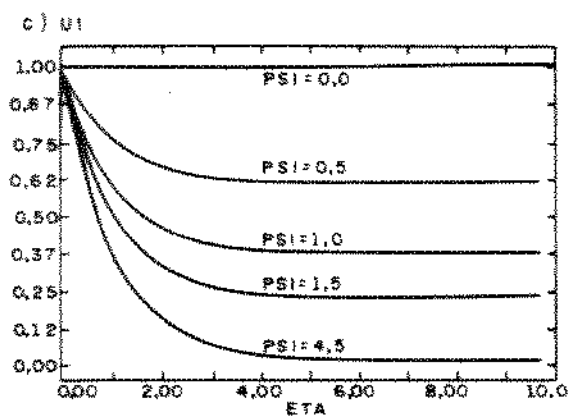
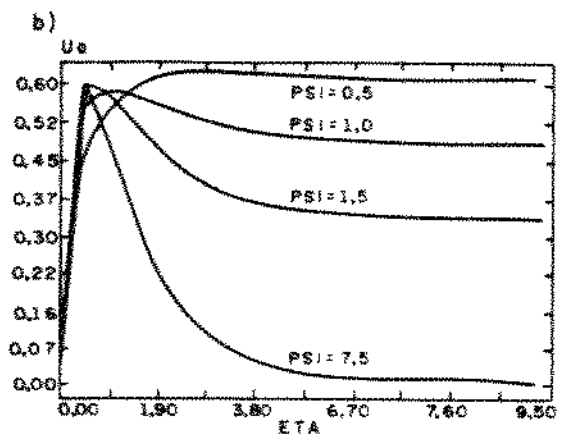
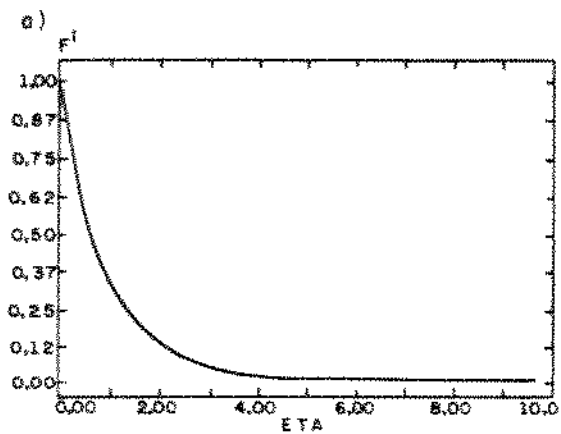


Figura 6.7 - Representação da solução para $\lambda = 1$
 v_1 e w_1 são nulos

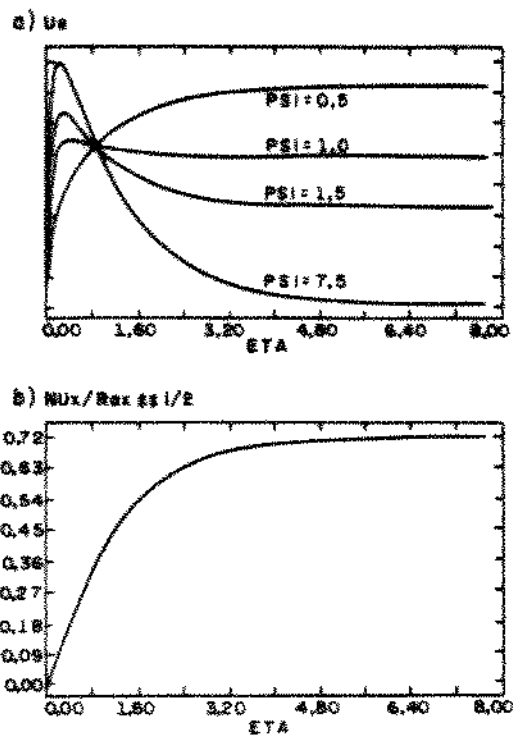
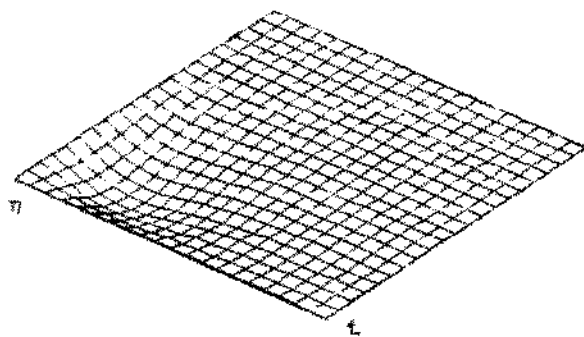


Figura 6.8 - Perfil da velocidade u_a e número de Nusselt considerando somente a diagonal principal da matriz A

OBSERVAÇÃO: Nas figuras 6.9 a 6.13 a velocidade de fluxo enfraquecida está em escala 5 vezes maior que a velocidade resultante.

a)



b)

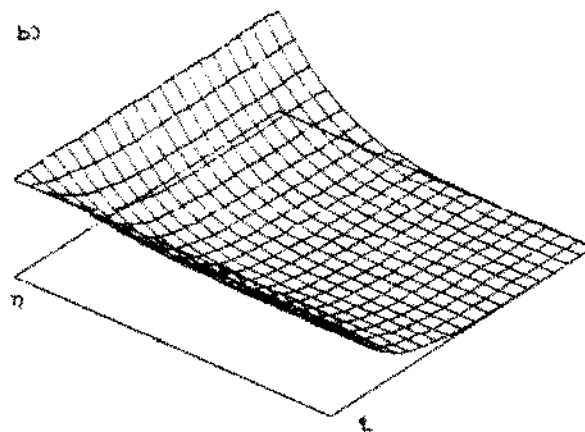
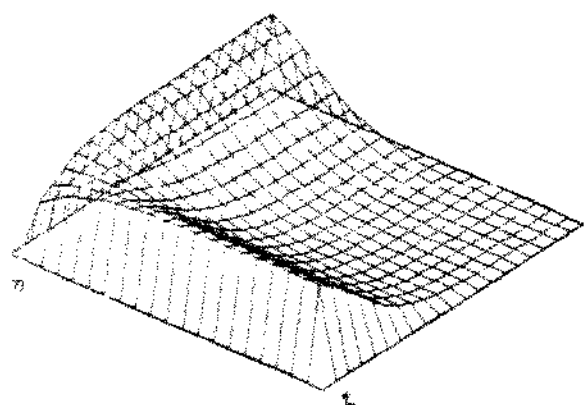


Fig. 6.9 - Perfis de velocidade para $\lambda = 0$

a) Velocidade de fluxo enfraquecida

b) Velocidade resultante

a)



b)

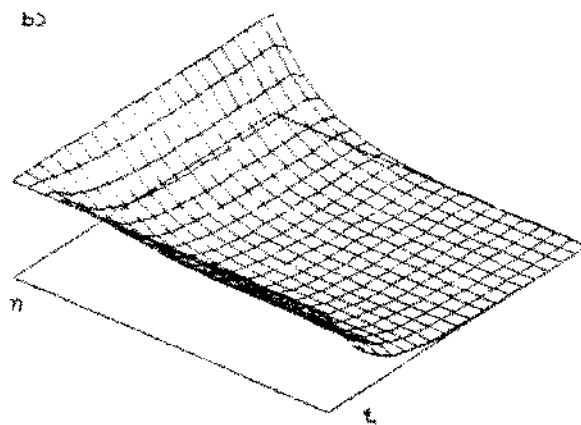


Fig. 6.10 - Perfis de velocidade para $\lambda = 1/4$

a) Velocidade de fluxo enfraquecida

b) Velocidade resultante

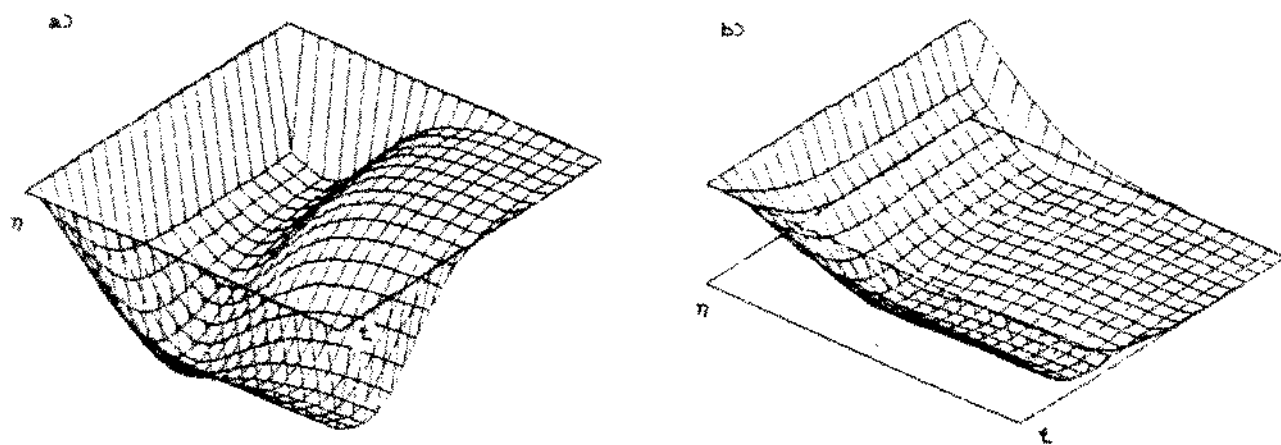


Fig. 6.11 - Perfis de velocidade para $\lambda = -1/4$
 a) Velocidade de fluxo enfraquecida
 b) Velocidade resultante

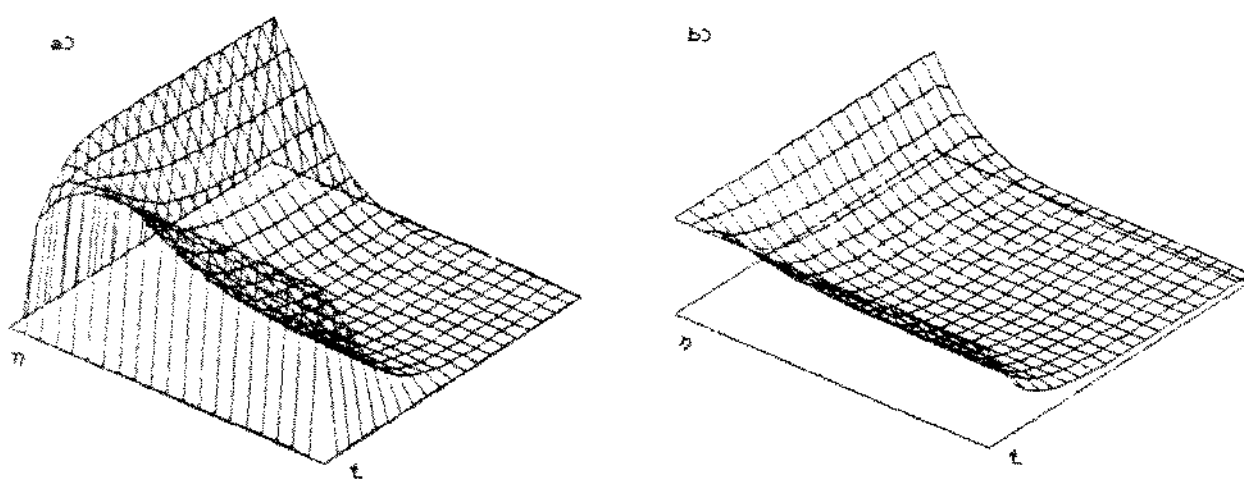


Fig. 6.12 - Perfis de velocidade para $\lambda = 1/2$
 a) Velocidade de fluxo enfraquecida
 b) Velocidade resultante

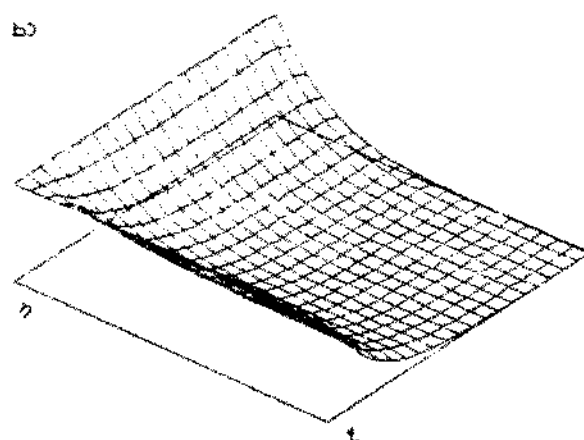
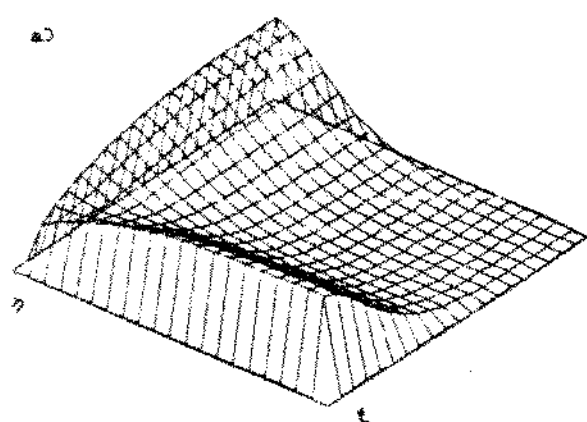


Fig. 6.13 - Perfis de velocidade para $\lambda = 1/8$
a) Velocidade de fluxo enfraquecida
b) Velocidade resultante

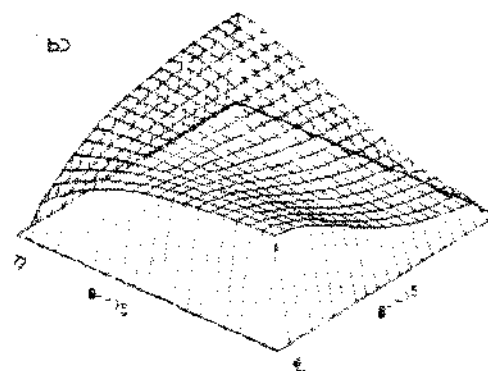
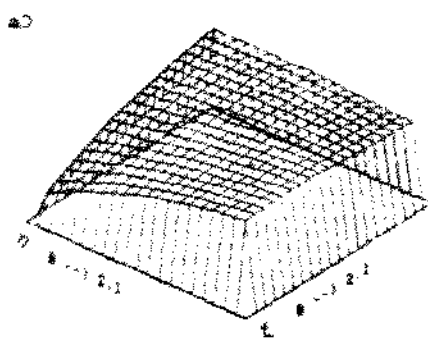


Fig. 6.14 - Perfis de velocidade para $\lambda = 1/4$
a) Velocidade de fluxo enfraquecida com discretização $h = 0.1$
b) Velocidade de fluxo enfraquecida com discretização $h = 0.25$

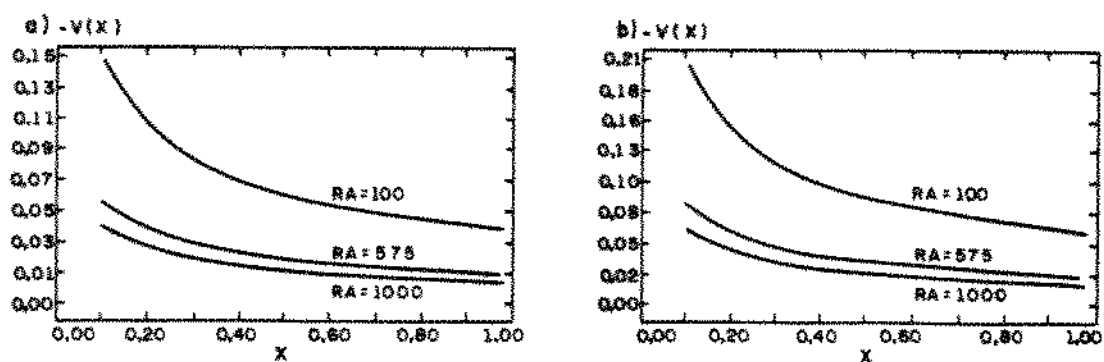


Figura 6.15 - Perfil de velocidade $V(x,y,z)$ para $\lambda = 0$

a) $\eta = 3.0$ e $\xi = 5.0$

b) $\eta = 5.0$ e $\xi = 5.0$

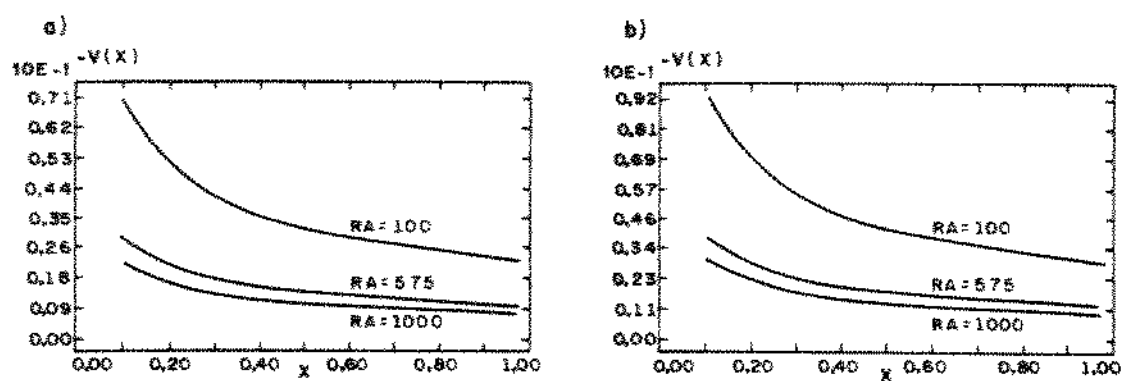


Figura 6.16 - Perfil de velocidade $V(x,y,z)$ para $\lambda = 1/2$

a) $\eta = 3.0$ e $\xi = 5.0$

b) $\eta = 5.0$ e $\xi = 5.0$

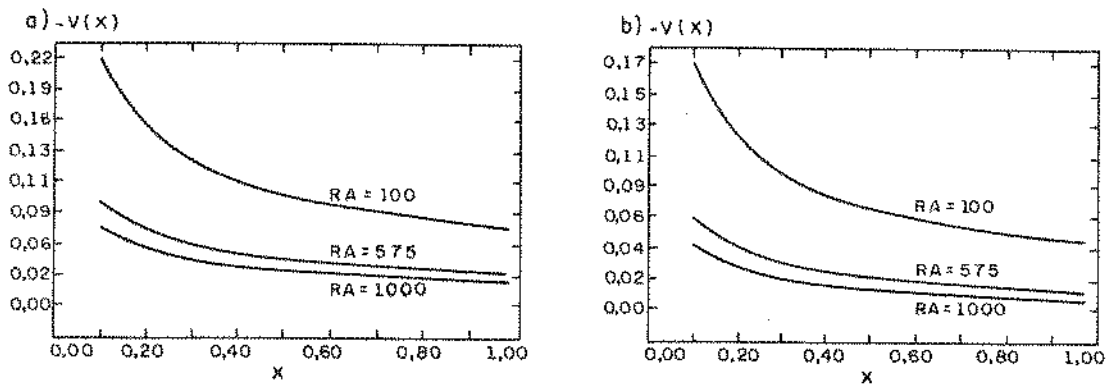


Figura 6.17 - Perfil de velocidade $V(x,y,z)$ para $\lambda = -1/4$

a) $\eta = 3.0$ e $\xi = 5.0$

b) $\eta = 5.0$ e $\xi = 5.0$

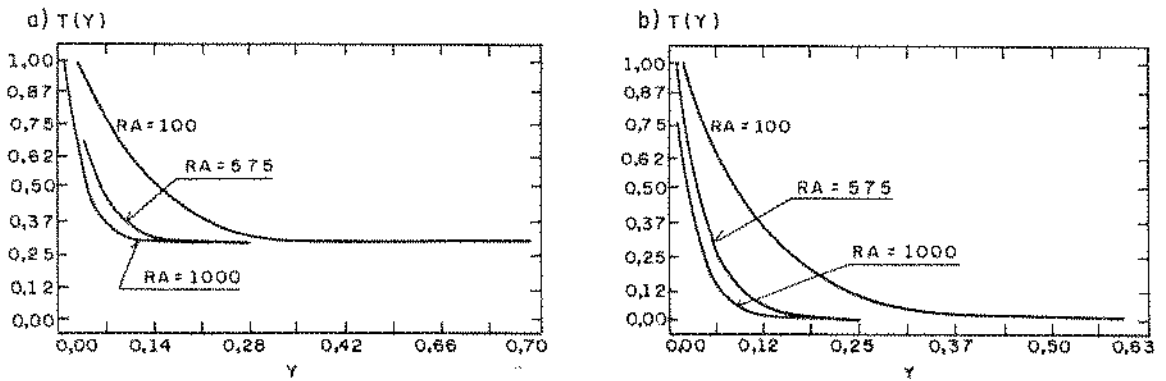


Figura 6.18 - Perfil de temperatura $T(x,y,z)$ para $\lambda = 0$

a) $x = 0.5$ e $\xi = 2.0$

b) $x = 0.4$ e $\xi = 8.0$

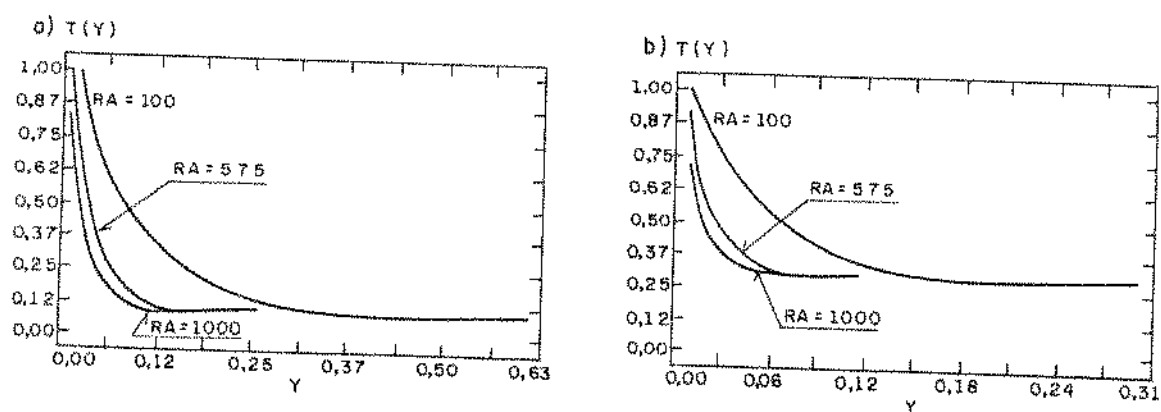


Figura 6.19 - Perfil de temperatura $T(x,y,z)$ para $\lambda = 1/2$

a) $x = 0.4$ e $\xi = 8.0$

b) $x = 0.1$ e $\xi = 2.0$

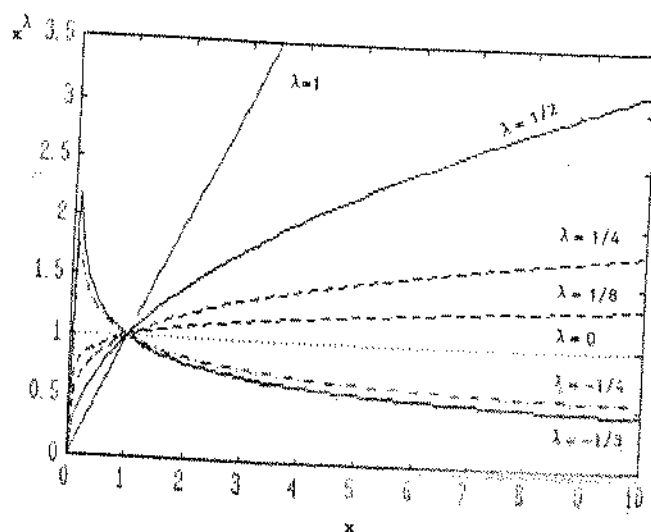


Figura 6.20 - Função de x^λ

CAPITULO VII

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi analisada a solução de uma classe de problemas tridimensionais em meios porosos, onde a convecção livre ocorre numa fina camada próxima à parede. Nessa região são válidas as aproximações da teoria clássica de Camada Limite e deve-se salientar que sob estas condições o número de Rayleigh deve ser elevado para garantir o comportamento da Camada Limite.

A principal conclusão deste estudo é que a solução de similaridade na quina propriamente dita existe. O fluxo de calor tem comportamento tridimensional e assintoticamente se aproxima do comportamento bidimensional para grandes distâncias da origem, ou seja, quando não há mais influência de uma parede sobre a outra.

Problemas tridimensionais em meio poroso são problemas de difícil solução devido aos recursos matemáticos e computacionais disponíveis, mas acreditamos que com este trabalho se inicie uma série de investigações nesta área.

CAPÍTULO VIII

SUGESTÕES

Durante o presente estudo vimos a possibilidade de observar outros fenômenos, mas como o assunto é extenso, fomos deixando de lado e aproveitamos aqui para propor estudos sobre o seguinte problema:

- 1) Cálculo de perfis de velocidade e temperatura para Camada Limite na quina com gradiente de pressão qualquer (Figura 3.4a e c).

Um gradiente de pressão ao longo da quina na corrente livre ($dP_o/dx \neq 0$ ou $dU_o/dx \neq 0$) influi de duas maneiras no escoamento do fluxo da Camada Limite:

A força da pressão causada pela corrente livre precisa ser considerada nas equações simplificadas do movimento na Camada Limite.

O gradiente de pressão na corrente livre tem influência decisiva sobre o comportamento assintótico da Camada Limite, ou seja, sobre as condições de contorno externas à Camada Limite.

Este problema também pode ser visto sob o título de convecção mista (livre e forçada) e deve-se separar o estudo de superfícies inclinadas do estudo do problema em superfícies horizontais. Ping Cheng (1977b) trata esse problema do ponto de vista bidimensional.

- 2) Cálculo dos perfis de velocidade e temperatura com fluxo de massa lateral. Este problema pode ser visto de dois modos, com injeção de fluxo ou retirada de fluxo. Ping Cheng (1977a) abordou o problema.
- 3) Estudo do efeito da permeabilidade no fluxo tridimensional em meio poroso. Raptis (1984) tratou o assunto.

4) Convecção livre sobre um cilindro vertical.

A análise deve ser feita partindo das mesmas equações usadas neste trabalho e tomando como referência o artigo de Cheng e Minkowycz (1978) para fluxo bidimensional.

- 5) Com o intuito de melhorar tempo de CPU e armazenamento de dados propõe-se a utilização de algoritmos mais sofisticados para resolução do sistema de equações simultâneas. Como exemplo temos o algoritmo de Zollenkopf utilizado em sistemas de potência. Este algoritmo só trabalha com os elementos diferentes de zero, levando em conta toda a esparsidade da matriz.

Para sistemas de grande porte, originários de malhas mais finas são recomendadas métodos iterativos, como por exemplo SOR, Gradientes Conjugados ou ainda Gradientes Conjugados Pre-Condicionados.

Outra sugestão é a utilização de malhas mais finas apenas perto das paredes.

- 6) Como última sugestão poderia ser acrescentado um trabalho experimental com o objetivo principal de construir uma bancada de testes para convecção livre em meio poroso. Poderia-se usar uma caixa retangular construída de chapas em cobre envoltas em material isolante. Dentro da caixa o espaço seria preenchido com esferas de vidro como meio poroso. O fluido poderia ser etano ou etanol devido às suas propriedades não tóxicas, não corrosivas e cujas propriedades físicas são apropriadas para o experimento.

As placas seriam aquecidas eletricamente de modo a obter temperatura uniforme. Também devem ser espalhados termopares na placa e no meio poroso.

Outro experimento que deve ser realizado apriori seria encontrar a porosidade e a permeabilidade do meio poroso.

BIBLIOGRAFIA

- ALFRED, W. (1969): *Boundary Layers of Flows and Temperature*. MIT Press.
- ALTIMIR, I. (1984): *Convection Naturelle Tridimensionnelle en Milieu Poreux Sature par un Fluide Presentant un Maximum de Densité*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 27, no. 10, pp. 1813-1824.
- BARCLAY, W.H. & RIDHA, A.H. (1980): *Flow in Streamwise Corners of Arbitrary Angle*. AIAA Journal, vol. 18, no. 12, pp. 1413-1420.
- BARCLAY, W.H. (1982): *Flow in Streamwise Corners Having Large Transverse Curvature*. AIAA Journal, vol. 20, no. 5, pp. 726-728.
- BARCLAY, W.H. & GAMAL, H.A. (1983): *Streamwise Corner Flow with Wall Suction*. AIAA Journal, vol. 21, no. 1, pp. 31-37.
- BEUKEMA, K.J.; BRUIN, S. & SCHENK, J. (1983): *Three-Dimensional Natural Convection in a Confined Porous Medium with Internal Heat Generation*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 26, no. 3, pp. 451-458.
- BLAKE, K.R.; BEJAN, A. & POULIKAKOS, D. (1984): *Natural Convection Near 4°C in a Water Saturated Porous Layer Heated from Below*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 27, no. 12, pp. 2355-2364.
- BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. (1978): *Computation of Methods for the Solution of Engineering Problems*. Pentech Press. London: Plymouth.
- CALTAGIRONE, J.P. & BORIES, S. (1985): *Solutions and Stability Criteria of Natural Convective Flow in an Inclined Porous Layer*. J. Fluid Mech., vol. 155, pp. 267-287.

- CARRIER, G.F. (1947): *The Boundary Layer in a Corner-Quart.* Appli. Math., vol. IV, 4.
- CHENG, P. (1977a): *The Influence on Lateral Mass Flux on Free Convection Boundary Layers in a Saturated Porous Medium.* Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 20, pp. 201-206.
- CHENG, P. (1977b): *Similarity Solutions for Mixed Convection from Horizontal Impermeable Surfaces in Saturated Porous Media.* J. Heat Mass Transfer, vol. 20, pp. 893-898.
- CHENG, P. (1977c): *Combined Free and Forced Convection Flow about Inclined Surfaces in Porous Media.* Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 20, pp. 807-814.
- CHENG, P. & MINKOWYCZ, W.J. (1976): *Free Convection about a Vertical Cylinder Embedded in a Porous Medium.* Int. J. Heat Transfer, vol. 19, pp. 805-813.
- CHENG, P. & MINKOWYCZ, W.J. (1977): *Free Convection about a Vertical Flat Plate Embedded in a Porous Medium with Application to Heat Transfer from a Dike.* Journal of Geophysical Research, vol. 82, no. 14, pp. 2040-2044 .
- CHENG, P. & TECKCHANDANI, L. (1977): *Numerical Solutions for Transient Heating and Fluid Withdrawal in a Liquid Dominated Geothermal Reservoir.* The Earth's Crust, pp. 705-721.
- GHIA, K.N. & DAVIS, R.T. (1974): *Corner Layer Flow: Optimization of Numerical Method of Solution.* Computers and Fluids, vol. 2, pp. 17-34.
- GHIA, K.N. (1975): *Incompressible Streamwise Flow Along an Unbounded Corner.* AIAA Journal, vol. 13, no. 7, pp. 902-907.

- GOVINDARAJULU, T. & MALARVIZHI, G. (1987): *A Note on the Solution of the Free Convection Boundary Layer Flow in a Saturated Porous Medium*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, no. 8, pp. 1769-1771.
- HILDEBRAND, F.B. (1962): *Advanced Calculus for Application*. Prentice Hall Inc., New York, N.Y., p. 406.
- HOE KIM & UHN KIM (1988): *Natural Convection near a Rectangular Corner*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 31, no. 7, pp. 1357-1364.
- HOLST, P.H. & AZIZ, K. (1971): *Transient Three-Dimensional Natural Convection in Confined Porous Media*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 15, pp. 73-90.
- INGHAM, D.B. & POP, I. (1987): *Free Convection from a Semi-Infinite Vertical Surface-Bounded by a Horizontal Wall in a Porous Medium*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 30, no. 8, pp. 1615-1622.
- JOHNSON, C.H. & CHENG, P. (1987): *Possible Similarity Solutions for Free Convection Boundary Layers Adjacent to Flat in Porous Media*. J. Heat Mass Transfer, vol. 21, pp. 709-718.
- JOSHI, Y. & GEBHART, B. (1985): *Mixed Convection in Porous Media Adjacent to a Vertical Uniform Heat Flux Surface*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 28, no. 9, pp. 1783-1786.
- KATTO, Y. & MASUOKA, T. (1987): *Criterion for the Onset of Convective Flow in a Fluid in a Porous Medium*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 10, pp. 297-309.
- KAYS, W.M. & CRAWFORD, M.E. (1980): *Convective Heat and Mass Transfer*. Mac-Graw Hill.

- LONGWELL, P.A. (1968): *Mechanics of Fluid Flow*. Mac-Graw Hill.
- LIU, C.Y. & ISMAIL, K.A.R. (1980): *Asymptotic Solution of Free Convection Near a Corner of Two Vertical Porous Plates Embedded in Porous Medium*. *Letters in Heat Mass Transfer*, vol. 7, no. 6, pp. 457-463.
- LIU, C.Y. & GUERRA, A.C. (1985): *Free Convection in a Porous Medium Near the Corner of Arbitrary Angle Formed by Two Vertical Plates*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 12, no. 4, pp. 431-440.
- LIU, C.Y.; LAM, C.Y. & GUERRA, A.C. (1987): *Free Convection Near a Corner Formed by Two Vertical Plates Embedded in Porous Medium*. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, vol. 14, pp. 125-136.
- LIU, J. & MINKOWYCZ, W.J. (1986): *The Influence of Lateral Mass Flux on Conjugate Natural Convection from a Vertical Plate Fin in a Saturated Porous Medium*. *Numerical Heat Transfer*, vol. 10, pp. 507-520.
- LIU, J.; MINKOWYCZ, W.J. & CHENG, P. (1986): *Conjugated Mixed Convection - Conduction Heat Transfer Along a Cylindrical Fin in a Porous Medium*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 29, no. 5, pp. 769-775.
- MERKIN, J.H. (1978): *Free Convection Boundary Layers in a Saturated Porous Medium with Lateral Mass Flux*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 21, pp. 1499-1504.
- MERKIN, J.H. (1979): *Free Convection Boundary Layers on Axi-Symmetric and Two-Dimensional Bodies on Arbitrary Shape in a Saturated Porous Medium*. *J. Heat Mass Transfer*, vol. 22, pp. 1461-1462.

- MERKIN, J.H. (1986): *Free Convection from a Vertical Cylinder Embedded in a Saturated Porous Medium*. *Acta Mechanica*, vol. 62, no. 1-4, pp. 19.
- MOYA, S.L.; RAMOS, E. & SEN, M. (1987): *Numerical Study of Natural Convection in a Tilted Rectangular Porous Material*. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, no. 4, pp. 741-756.
- NAKAYAMA, A & KOYAMA, H. (1987): *Free Convective Heat Transfer Over a Nonisothermal Body of Arbitrary Shape Embedded in a Fluid - Saturated Porous Medium*. *Journal of Heat Transfer*, vol. 109, pp. 125-130.
- PAL, A. & RUBIN, S.G. (1971): *Asymptotic Features of Viscous Flow Along a Corner*. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 29, pp. 91-108.
- PASCAL, H. (1984): *Rheological Effects of Non-Newtonian Fluids on Gravitational Segregation Mechanism in a Porous Medium*. *Int. J. Enge. Scien.*, vol. 22, no. 7, pp. 857-866.
- POP, I.; SUNADA, J.K.; CHENG, P. & MINKOWYCZ, W.J. (1985): *Conjugate Free Convection from Long Vertical Plate Fins Embedded in a Porous Medium at High Rayleigh Numbers*. *Int. J. Mass Transfer*, vol. 28, no. 9, pp. 1529-1536.
- RAPTIS, A. (1984): *Flow Through a Porous Medium Bounded by a Semi Infinite Surface*. *Mechanics Research Communications*, vol. 11, pp. 277-279.
- RAPTIS, A. & PERDIKIS, C.P. (1985): *Oscillatory Flow Through a Porous Medium by the Presence of Free Convective Flow*. *Internat. Journal of Engineering Science*, vol. 23, no. 23, no. 1, pp. 51-55.

- RAPTIS, A. & TAKHAR, H.S. (1985): *Combined Mass Transfer and Forced Flow Through a Porous Medium*. Int. Comm. Heat Mass Transfer, vol. 13, pp. 800-803.
- RAPTIS, A. & PERDIKIS, C. (1987): *Mass Transfer and Free Convection Flow Through a Porous Medium*. Energy Research, vol. II, pp. 423-428.
- RUBIN, S.G. (1966): *Incompressible Flow Along a Corner*. J. Fluid Mech., vol. 26, parte 1, pp. 97-110.
- RUBIN, S.G. & GROSSMAN, B. (1971): *Viscous Flow Along a Corner: Numerical Solution of the Corner Layer Equations*. Quarterly of Applied Mathematics, vol. 29, no. 2.
- SCHLICHTING, H. (1972): *Teoria de la Capa Limite*. Ediciones Urmo, Bilbao, Espanha.
- SUWOND, A. (1980): *Laminar Free Convection Boundary-Layer in Three-Dimensional Systems*. Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 23, pp. 53-61.
- TOKUDA, N. (1972): *Viscous Flow Near a Corner in Three Dimensions*. J. Fluid Mech., vol. 53, parte 1, pp. 129-148.
- VASANTA, R. (1966): *Ahnliche Lösungen für die Geschwindigkeits und Temperaturverteilung in der Inkompressible Laminaren Grenzschicht Entlang einer Rechtwinkligen Ecke*, Jahrbuch 1966 der WGLR.
- WALZ, A. (1969): *Boundary Layer of Flows and Temperature*. MIT PRESS.
- YÜCEL, A. (1984): *The Influence of Injection or Withdrawal of Fluid on Free Convection About a Vertical Cylinder in a Porous Medium*. Numerical Heat Transfer, vol. 7, 483-493.

ZOLLENKOPF, K. (1971): Proceeding of the Oxford Conference of the
Institute of Mathematics and its Applications, J.K. Reid
Academic Press, pp. 75-95.