ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR Estaner Claro Romão E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 08/02/2011

Luiz Felipe Moura

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Estaner Claro Romão

Estudo Numérico da Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados na Solução da Equação da Convecção-Difusão-Reação Tridimensional

Campinas, 2011

25/2011

Estaner Claro Romão

Estudo Numérico da Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados na Solução da Equação da Convecção-Difusão-Reação Tridimensional

Tese apresentada ao Curso de Doutorado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: **Térmica e Fluidos**

Orientador: **Luiz Felipe Mendes de Moura**

Campinas
2011

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R662e

Romão, Estaner Claro
Estudo numérico da aplicação do método dos elementos finitos de Galerkin e dos mínimos quadrados na solução da equação da convecção-difusão-reação tridimensional / Estaner Claro Romão. --Campinas, SP: [s.n.], 2011.

Orientador: Luiz Felipe Mendes de Moura.
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Galerkin, Métodos de. 3. Mínimos quadrados. 4. Métodos numéricos. 5. Equações diferenciais parciais. I. Moura, Luiz Felipe Mendes de. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Numerical study of the application of Galerkin and least squares finite element methods in the solution of the tridimentional convection-diffusion-reaction equation
Palavras-chave em Inglês: Finite element method, Galerkin, Methods, Least squares, Numerical methods, Partial differential equations
Área de concentração: Térmica e Fluídos
Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Kamal Abdel Radi Ismail, Renato Pavanello, Marcelo Messias, Vicente Luiz Scalon
Data da defesa: 08/02/2011
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E DE FLUÍDOS

TESE DE DOUTORADO

Estudo Numérico da Aplicação do Método dos Elementos Finitos de Galerkin e dos Mínimos Quadrados na Solução da Equação da Convecção-Difusão-Reação Tridimensional

Autor: **Estaner Claro Romão**
Orientador: **Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:

Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura, Presidente
DETF/FEM-UNICAMP/Campinas-SP

Prof. Dr. Kamal Abdel Radi Ismail
DETF/FEM-UNICAMP/Campinas-SP

Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM-UNICAMP/Campinas-SP

Prof. Dr. Vicente Luiz Scalon
FEB-UNESP-Dep. Eng. Mecânica/Bauru-SP

Prof. Dr. Marcelo Messias
FCT-UNESP-Dep. Matematica/Pres. Prudente-SP

Campinas, 08 de Fevereiro de 2011

Dedicatória

Dedico este trabalho as quatro mulheres da minha vida:

Antonia Romão (*esposa*)
Dilce Claro (*mãe*)
Jaqueline Claro (*irmã*)
Yasmin Romão (*filha*)

Agradecimentos

Agradeço acima de tudo a Deus pelas condições que me proporcionou e pelos desafios que colocou em meu caminho, proporcionando tudo que eu sou hoje.

Agradeço inicialmente ao amigo João Batista Campos Silva, o qual me incentivou a iniciar o Doutorado, me indicando o caminho inicial, além de vários trabalhos realizados juntos nos últimos 3 anos.

Ao meu orientador, e quero deixar bem claro que espero, a partir de agora, não citar mais formalmente o mesmo como meu orientador e sim como um grande amigo que fiz, me orientando divinamente em meu doutorado, não somente com assuntos técnicos, mas com assuntos profissionais e pessoais. Este é o Prof. Luiz Felipe Mendes de Moura, simples, discreto, porém um excelente amigo e profissional.

Aos amigos de pós graduação, Renata Figueiredo, Flávio Figueiredo e Fábio Nascimento, os meus primeiros amigos de pós graduação no DETF/FEM/UNICAMP, agradeço pelo companheirismo, pela ajuda e pelos bons momentos vividos juntos.

Recentemente, ao amigo Marco Doniseti pela amizade e pelo companheiro de trabalho e pesquisa que ele é.

A todo o pessoal do SIFEM e da Seção de Pós Graduação.

A Cleusinha (secretaria do DETF/FEM/UNICAMP) por todo o apoio prestado com dedicação e empenho.

Não é o que eu sou por dentro,
mas o que eu faço que me define.
Batman Begins

Resumo

Este trabalho trata da aplicação do Método dos Elementos Finitos nas variantes Galerkin e Mínimos Quadrados com equações auxiliares para a solução numérica da equação diferencial parcial que modela a convecção-difusão-reação definida sobre um domínio tridimensional em regime permanente. Na discretização espacial foram utilizados elementos hexaedrais com oito (elemento linear) e vinte e sete (elemento quadrático) nós, no qual foram adotadas funções de interpolação de Lagrange nas coordenadas locais. Transformando toda a formulação do problema das coordenadas globais para as coordenadas locais, o Método da Quadratura de Gauss-Legendre foi utilizado para integração numérica dos coeficientes das matrizes dos elementos. Adicionalmente, à formulação pelos dois métodos, um código computacional foi implementado para simular o fenômeno proposto. Dispondo de soluções analíticas, várias análises de erro numérico foram realizadas a partir das normas L_2 (erro médio no domínio) e L_∞ (maior erro cometido no domínio), validando assim os resultados numéricos. Um caso real é proposto e analisado.

Palavras chave: Convecção-Difusão-Reação, Elementos Finitos, Galerkin, Elementos Hexaedrais, Mínimos Quadrados.

Abstract

This paper the application of the Finite Element Method in variants Galerkin and Least Squares with auxiliary equations for the numerical solution of partial differential equation that models the convection-diffusion-reaction defined over a three-dimensional domain in steady state. In the spatial discretization were used hexahedrons elements with eight (linear element) and twenty-seven (quadratic element) nodes, which were adopted Lagrange interpolation functions in local coordinates. Transforming the problem of global coordinates to local coordinates, the method of Gauss-Legendre quadrature was used for numerical integration of the coefficients of the matrices of the elements. Additionally, the formulation by the two methods, a computer code was implemented to simulate the phenomenon proposed. Offering analytical solutions, several numerical error analysis were performed from L_2 norms (average error in the domain) and L_∞ (higher error in the domain), thus validating the numerical results. A real case is proposed and analyzed.

Key words: Convection-Diffusion-Reaction, Finite Element, Galerkin, Hexaedrons Element, Least Squares.

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Lista de Abreviaturas e Siglas

Letras Latinas

A – coeficientes dos termos convectivos

B – coeficiente do termo reativo

$\mathbf{c_p}$ **–** calor específico

H – espaço de Hilbert

I – funcional quadrático

J – jacobiano

k – coeficientes dos termos difusivos

q – equações auxiliares

$\dot{q}$ - fluxo de calor

$\Re$ – números reais

R **–** resíduo

T - Temperatura

u – velocidade na direção x

v – velocidade na direção y

w – velocidade na direção z

w **–** pesos de Gauss

Letras Gregas

ρ - densidade

μ - viscosidade dinâmica

Ω - domínio tridimensional pertencente ao $\Re^3$

Γ **-** contorno do domínio Ω

δ **-** variação do resíduo

ξ **-** coordenada local da coordenada global x

η **-** coordenada local da coordenada global y

ζ - coordenada local da coordenada global z

Superescritos

e - elemento

Subscritos

x - representa que o coeficiente pertence ao eixo x

y - representa que o coeficiente pertence ao eixo y

z - representa que o coeficiente pertence ao eixo z

i – indexador para quantidade de nós

Abreviações

GFEM – Galerkin Finite Element Method

LSFEM – Least Squares Finite Element Method

$N_{nós}$ – número de nós no elemento

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto

As diversas atividades relacionadas a engenharia, e as pesquisas relacionadas a ela, não são motivadas única e exclusivamente pela curiosidade humana, mas principalmente por necessidades reais, que muitas vezes precisam ser resolvidas com rapidez e precisão. O estudo da transferência de calor é de grande importância em vários ramos da engenharia. O interesse de conhecer os mecanismos da transferência de calor pode envolver operações de equipamentos, como por exemplo em caldeiras, condensadores, pré-aquecedores de ar. Em sistemas de refrigeração e de ar condicionado que envolvem trocadores de calor, o estudo da transferência de calor é de suma importância para a Engenharia Mecânica.

Na Engenharia Elétrica, por sua vez, há o interesse de conhecer a dissipação de calor por chips e dispositivos semicondutores. Na Engenharia Química merece destaque os processos de transferência de calor em várias reações química. Também na Engenharia Ambiental em que há o interesse em estudar o efeito do calor na dispersão de poluentes no ar, na difusão de poluentes em solos e na poluição térmica em lagos e mares e seu impacto na vida humana. Além destas, existem ramos da engenharia.

A grande maioria dos problemas físicos são governados, ou podem ser representados por Equações Diferenciais Parciais. Alguns métodos matemáticos são capazes de produzir soluções analíticas de problemas físicos, mais precisamente de problemas da transferência de calor (Arpaci (1966), Bejan (1996), Carslaw e Jaeger (1986)), mas apenas de alguns, e de problemas muito simplificados. Por isso, toma-se como ferramenta fundamental para solução de problemas de transferência de calor os *métodos numéricos*.

Por décadas os métodos numéricos vem sendo utilizados na solução de tais problemas, dentre eles destacam-se o Método das Diferenças Finitas (Smith, 1971), dos Volumes Finitos (Chung, 2002) e dos Elementos Finitos (Lewis et al. (2004), Donea e Huerta (2003), Reddy (1993)). Neste trabalho será utilizado o Método dos Elementos Finitos em duas de suas variantes, sendo elas o tão conhecido Método dos Elementos Finitos de Galerkin (GFEM) e o Método dos Elementos Finitos dos Mínimos Quadrados (LSFEM) com equações auxiliares.

1.2 Métodos Numéricos – Uma breve revisão

Desde de o início da década de 50 com Turner et al. (1956), Clough (1960), Argyris (1963), Zienkiewicz e Cheung (1965), Oden e Wellford (1972) o Método dos Elementos Finitos vem sendo utilizado com grande sucesso em vários ramos da engenharia. Porém, apesar de que neste trabalho ter sido utilizado o Método dos Elementos Finitos, nessa breve revisão será destacados alguns trabalhos com o enfoque na solução de fenômenos convectivos-difusivos-reativos independente do método utilizado.

Em Donea e Quartapelle (1992) os autores apresentam um Método dos Elementos Finitos para resolver problemas transientes governados por equações lineares ou não-lineares com termos advectivos dominantes. Em razão das inúmeras dificuldades numéricas na simulação de problemas permanentes e transientes com termo advectivo dominante apresentadas na aplicação do método clássico de Galerkin, os autores utilizam-se de alguns métodos para a solução de tais problemas. O primeiro deles é o Método de Galerkin Generalizado, que fornece excelentes resultados em razão de uma correta relação entre as variações espaciais e temporais expressas por meio da teoria das características. Os autores também citam métodos de discretização no tempo, dentre eles, o Método Explícito de Euler que não apresenta bons resultados quando o problema é avaliado por malhas de elementos finitos não-estruturados. Entretanto, quando são utilizados métodos baseados nas Séries de Taylor no tempo, Método Taylor-Galerkin, são apresentadas vantagens significativas, entre elas uma simples implementação e precisão de terceira ordem em problemas não-lineares. Para finalizar, o Método dos Mínimos Quadrados utilizado apresenta a simplicidade do método Taylor-Galerkin e a estabilidade incondicional dos Métodos das Características, no entanto, sua precisão é comprometida para números de Courant maiores que a unidade.

Winterscheidt e Surana (1993) apresentaram uma versão-p da formulação dos elementos finitos dos mínimos quadrados da equação de convecção-difusão bidimensional. A equação diferencial de segunda ordem que governa o problema convectivo-difusivo é reduzida a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, para o qual a formulação dos mínimos quadrados é construída usando a mesma ordem de aproximação para cada variável dependente. Nesse trabalho, os autores utilizam-se da Regra da Quadratura de Gauss para calcular os valores numéricos dos elementos de matrizes e vetores. Uma das vantagens apresentadas, é o uso de uma regra de integração acurada, Quadratura de Gauss, levando a erros funcionais muito menores quando comparados com regras de integração reduzidas.

É importante destacar o trabalho de Burrel et al. (1995), onde os autores apresentam a solução numérica via Método dos Elementos Finitos dos Mínimos Quadrados (*LSFEM*) de um caso de transporte advectivo de um poluente em um domínio unidimensional. Utilizando na formulação o Método de Cranck-Nicolson para a discretização temporal, os autores comparam os resultados obtidos pelo LSFEM com o Método de Galerkin, apresentando bons resultados, principalmente quando do uso de funções de interpolação de quarta ordem, fato esse destacado como fundamental pelos autores.

Howle (1996) faz um estudo da eficiência computacional de dois métodos numéricos baseados na técnica Galerkin/Diferenças Finitas: Galerkin Reduzido e Pseudo-Espectral na solução do problema de convecção no regime permanente de Rayleigh-Bénard. O autor, após apresentar a formulação de ambos os métodos, mostra um teste numérico em que o método Pseudo-Espectral utiliza um número maior de iterações que o de Galerkin Reduzido para a convergência da solução.

Bramble et al. (1998), introduzem e analisam dois Métodos dos Mínimos Quadrados para equações diferenciais elípticas de segunda-ordem com condições de contorno mistas. A principal diferença entre os dois métodos é a utilização ou não de uma variável adicional ao fluxo de calor. Os autores analisam a convergência de duas soluções, uma suave e outra singular, apresentando tabelas e fazendo uma comparação entre os refinamentos da malha, o erro discreto L_2 e a norma do erro máximo. Esse exemplo é solucionado sem nenhuma variável adicional.

Em Gupta e Kouatchou (1998), uma análise de precisão na solução numérica da equação de Poisson tridimensional (Equação de Difusão) é realizada, utilizando-se várias ordens de precisão do método das diferenças finitas, sendo elas: esquema de segunda ordem padrão (7 pontos), três esquemas de diferenças finitas de quarta ordem (15, 19 e 21 pontos) e um de sexta ordem (27 pontos). Duas aplicações são apresentadas, e com o auxílio de suas soluções analíticas, os esquemas são validados e comparados. Os autores mostram que os esquemas que apresentam maiores ordens de precisão alcançam bons resultados já com malhas consideradas não tão refinadas, enquanto que os esquemas com baixas ordens de precisão necessitam de altos refinamentos. Alguns resultados do trabalho de Gupta e Kouatchou são utilizados em forma de comparação com os desta tese (Aplicação 1).

Codina (1998) compara vários métodos de elementos finitos para a solução da equação de difusão-convecção-reação. Entre eles, o autor mostra que o Método Clássico de *Streamline Upwind* Petrov-Galerkin (SUPG) é similar à versão explícita do Método de Galerkin Característico (CG) e que o Método Taylor-Galerkin (TG) tem um efeito de estabilização similar ao modelo de Escala Sub-Malha (SGS) e por fim, o autor desenvolve o Método Galerkin/Mínimos Quadrados. Após descrever os conceitos básicos e as formulações dos métodos citados anteriormente e realizar alguns testes numéricos, o autor faz uma comparação entre os métodos e cita conclusões importantes, como no Método Petrov-Galerkin que, pode gerar uma modificação na matriz massa associada com o Método de Galerkin original, tornando-a não-simétrica caso a discretização no tempo seja aplicada no resíduo *R*. O mesmo ocorre com o Método Galerkin/Mínimos Quadrados.

Gupta e Zhang (2000) utilizam um esquema de diferenças finitas compacto de quarta ordem explícito para solucionar o caso de convecção-difusão com coeficientes variáveis, dependentes do espaço. Com o auxílio do *Multigrid Method* e do *Four-color Gauss-Seidel Relaxation* este trabalho apresenta aplicações com número de Reynolds médio. A conclusão apresentada pelos autores é que para casos difusivos dominantes uma discretização pelos métodos de diferenças finitas de ordem 1 ou 2, apresentam resultados satisfatórios, porém, quando o problema se torna convectivo dominante para Reynolds médios, o uso do esquema de quarta ordem se torna necessário para obtenção de bons resultados.

Camprub et al. (2000) apresentam um estudo de três formulações numéricas de elementos finitos: Galerkin, Mínimos Quadrados e Galerkin/Mínimos Quadrados, aplicados a problemas convectivo-difusivos. Os autores detalham exemplos que implicam nas seguintes conclusões: enquanto o Método de Galerkin leva a soluções oscilalórias, os Métodos dos Mínimos Quadrados e o Galerkin/Mínimos Quadrados atingem a estabilidade. Porém, o LSFEM possui duas notáveis desvantagens: um alto custo computacional e soluções divergentes para malhas menos refinadas. O Método Galerkin/Mínimos Quadrados leva a soluções estáveis sem notável aumento no custo computacional e menor divergência da solução numérica. Finalmente, os autores concluem que o Método dos Mínimos Quadrados possui maiores custos computacionais do que os Métodos de Galerkin e de Galerkin/ Mínimos Quadrados.

Pillai (2001) é apresenta a solução numérica da convecção-difusão uni e bidimensional em regime permanente pelo método das diferenças finitas exponencial com precisão de ordem 4. Pillai apresenta tabelas de resultados do erro máximo cometido utilizando-se de solução analítica dos casos testes para comparação, validando assim seus resultados. Porém, nenhuma comparação com outros métodos numéricos é realizada.

Hon e Chen (2003) apresenta a solução numérica de problemas de convecção-difusão em regime permanente pelo BKM (Boundary Knot Method) em domínios bi e tridimensionais. Os autores apresentam várias aplicações, sendo que uma delas é em uma geometria esférica e as demais são em geometrias cartesianas. Os resultados são discutidos e validados analisando o erro cometido em alguns pontos da discretização, os quais são comparados com a solução analítica do mesmo. O trabalho apresenta boas aplicações (sendo uma delas utilizada neste trabalho, Aplicação 2) apesar da análise ser pontual e não abrangente, além do título do trabalho indicar que o mesmo analisa problemas em geometrias complicadas, sendo que isto não acontece nas aplicações.

Vujicic e Brown (2004) apresentam a solução numérica de um caso de condução de calor tridimensional transiente, no qual vários métodos de discretização temporal são testados, dentre eles destaque para o Método β onde o valor de β é admitido como 0; 0,5; 0,75 e 1 além da utilização do Método dos Mínimos Quadrados (LSM). Na discretização espacial pelo método dos elementos finitos, são utilizados na malha elementos hexaedrais lineares (8 nós) e quadráticos (vinte nós), no qual são feitas comparações de malhas com 1000, 8000, 27000, 64000 e 125000 elementos. Resultados importantes são apresentados neste trabalho, porém o autor não compara seus resultados nem com uma solução analítica e nem com resultados numéricos de outros trabalhos encontrados na bibliografia aberta.

Wang et al. (2006) utilizaram um esquema de diferenças compacto de ordem 4 para discretizar a equação de Poisson tridimensional. Dois problemas testes são utilizados para demonstrar a eficiência do método. O destaque fica na comparação feita através da existência da solução analítica dos dois problemas teste, os quais são soluções em seno. Com o auxílio do método dos gradientes conjugados precondicionado na solução do sistema linear esparso proveniente da discretização espacial, os autores demonstram em seus resultados que o método apresenta bom resultados para fenômenos físicos governados pela equação de Poisson.

Catabriga et al. (2006) apresentam a solução numérica dos problemas de convecção-difusão bidimensional linear e não linear, ambos em regime permanente. Apesar dos autores utilizarem neste trabalho os métodos dos elementos finitos e das diferenças finitas para discretização espacial, o foco principal é o método de solução do sistema linear provindo da discretização espacial. A proposta principal é utilizar o LCD (left conjugate direction method), onde para validar o método, realiza-se uma comparação com o conhecido GMRES (Generalized Minimal Residual). Os autores concluem neste trabalho, que na utilização do GMRES o método dos elementos finitos apresenta uma solução "mais rápida" enquanto que o LCD se apresenta mais rápido com o método das diferenças finitas.

No mesmo ano, You (2006) apresenta um trabalho voltado a solucionar o caso de convecção-difusão transiente 2D através do uso do *Cranck-Nicolson Method* e do *high order Padé ADI Method* para a discretização temporal e de um esquema de quarta ordem para a discretização espacial. O autor valida sua formulação aplicando-a na solução de um caso de convecção-difusão transiente de um pulso Gaussiano (*Gaussian pulse*) em um domínio quadrado [0,2] x [0,2]. Comparando com outros dois trabalhos, os quais utilizam HOC-ADI scheme (Karaa and Zhang, 2004) e PR-ADI scheme (Peaceman and Rachford Jr., 1959), o autor mostra que seus resultados são melhores para os mesmos refinamentos no espaço e no tempo.

Ainda neste ano, Dag et al. (2006) apresentam a solução numérica do problema de convecção-difusão unidimensional transiente pelo Método dos Elementos Finitos dos Mínimos Quadrados utilizando-se de funções de interpolação lineares e quadráticas (*B-spline*). Para validação de seus resultados numéricos, os autores utilizam a norma L_2 e a norma L_∞ para comparar seus resultados com uma solução analítica. Como era de se esperar, os resultados numéricos foram melhores quando no uso de funções de interpolação quadrática, porém os autores não fazem uma comparação precisão/tempo para que se possa ter uma noção exata de qual caminho é mais aconselhável, função de interpolação linear ou quadrática.

Asensio et al. (2007) a advecção-difusão-reação unidimensional transiente é estudada. Os autores utilizam-se do Método de Crank-Nicolson para a discretização temporal, enquanto que para a discretização espacial alguns esquemas de elementos finitos são utilizados, entre eles o Streamline-Upwind Petrov-Galerkin (SUPG), DWG Method (inicialmente proposto por Douglas e Wang, 1989), o Galerkin-Least Squares (GLS), e em destaque a estratégia de Link-Cutting Bubble (LCB). Os autores apresentam aplicações com advecção-difusão-reação e dispersão de poluentes 1D transientes. Os métodos apresentam bons resultados para malhas refinadas, com especial destaque para o LCB que de modo geral apresenta os melhores resultados.

Em Si et al. (2008), os autores utilizam um método dos elementos finitos semi-discreto utilizando o elemento P_1 para resolverem numericamente problemas de convecção-difusão unidimensional transiente, os resultados obtidos são comparados com a solução analítica do problema e com o *finite difference streamline diffusion method*. Excelentes resultados são obtidos, mesmo quanto mais convectivo dominante o problema se apresentar. Neste caso, os autores testam alguns valores para o termo de condutividade, deixando fixo e unitário a constante que acompanha o termo convectivo.

Em Hannukainen et al. (2010), os autores apresentam a aplicação de um esquema de elementos finitos com superconvergência de ordem 4 para solucionar o problema de difusão tridimensional em regime permanente. Duas aplicações são apresentadas, nas quais o erro máximo é apresentado para alguns tipos de refinamento da malha. A análise do erro máximo cometido é possível devido ao fato de que os dois casos propostos possuem solução analítica. Além de uma análise conforme alguns tipos de refinamento, os autores também analisam os refinamentos realizados a partir de certos tipos de elementos, sendo eles o cubo, o tetraedro e o prisma, onde o último é o que apresenta os melhores resultados em todos os refinamentos propostos no trabalho.

Em Bruno e Lyon (2010), os autores baseiam seus algoritmos na aproximação ADI (Alternating Direction Implicit) em conjunção com o método de continuação de Fourier para resolução de problemas convectivo-difusivos. Os autores apresentam aplicações bi e tridimensionais, em regime permanente e transiente obtendo bons resultados.

Em Ma e Ge (2010), um método de diferenças finitas de alta ordem baseado na técnica de extrapolação de Richardson é utilizado para solucionar o caso de convecção-difusão tridimensional. Os autores comparam seus resultados com a solução analítica e com outro trabalho numérico, demonstrando excelentes resultados. Os autores propõem esta alternativa para problemas de escoamentos incompressíveis, visto que apesar do custo computacional, o método de sexta ordem utilizado é confiável e apresenta excelentes resultados.

1.3 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é aplicar o Método dos Elementos Finitos nas variantes GFEM e LSFEM com três equações auxiliares na solução numérica de fenômenos convectivos-difusivos-reativos tridimensionais. Destaque para o LSFEM com três equações auxiliares proporcionando, não somente a solução numérica da temperatura, *T*, mas também de suas três derivadas parciais. Esta proposta visa enriquecer a bibliografia aberta, principalmente no que diz respeito a aplicação do LSFEM, o qual, como foi demonstrado na revisão bibliográfica deste trabalho, é muito pobre.

Para tal estudo, serão estudadas nove aplicações, sendo elas: Difusão Pura, Difusão-Reação, Convecção-Difusão, Convecção-Reação, Convecção-Difusão-Reação, Convecção-Difusão com convecção dominante, Convecção-Difusão com coeficientes lineares, Convecção-Difusão com coeficientes quadráticos e Convecção-Difusão – um caso prático onde ar escoa em um canal retangular com um perfil parabólico de velocidade conhecido.

2 MODELOS NUMÉRICOS

2.1 Modelo Matemático

O estudo de problemas convectivos, difusivos e reativos são de suma importância na engenharia. Para tal estudo na área de Transferência de Calor, toma-se como ponto de partida a *Equação da Energia* (Bejan, 1996, pg. 178), como segue:

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k_x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+k_z\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\dot{q}+\mu\Phi\,, \qquad (2.1)$$

onde $\Phi=2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$

Neste trabalho serão adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- a transferência de calor ocorre em regime permanente e, portanto, $\partial T / \partial t = 0$ (*pois neste trabalho não objetiva-se estudar métodos de discretização temporal*);
- o campo de velocidades é conhecido (*pois neste trabalho não será calculado o campo de velocidade através das equações da conservação da massa e da quantidade de movimento*;
- o termo de dissipação viscosa ($\mu\Phi$) será desprezado (*pois este contém termos não lineares, os quais não serão estudados neste trabalho*);
- o termo reativo, ou de geração de calor, será modelado na forma: $\dot{q} = BT$.

Vamos utilizar, por simplicidade, as seguintes funções:

- $\rho c_p u = A_x(x, y, z)$;
- $\rho c_p v = A_y(x, y, z)$;
- $\rho c_p w = A_z(x, y, z)$.

Com as considerações feitas obtemos nosso modelo matemático através da seguinte equação diferencial,

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A_x \frac{\partial T}{\partial x} + A_y \frac{\partial T}{\partial y} + A_z \frac{\partial T}{\partial z} + BT = 0, \tag{2.2}$$

onde a equação diferencial parcial acima modela o fenômeno convectivo-difusivo-reativo tridimensional genérico em regime permanente definida no domínio $\Omega \subset \Re^3$, no qual Ω é um domínio limitado e fechado. Assume-se $k_x, k_y, k_z =$ constantes $\neq 0$ e $B = B(x, y, z)$ com $x, y, \mathrm{z} \in \Re$. Para este trabalho serão adotadas condições de contorno de primeiro e segundo tipos.

2.2 Método dos Resíduos Ponderados

Neste trabalho, o objetivo é utilizar o *Método dos Resíduos Ponderados* para obter uma solução aproximada para a equação diferencial (2.2).

Para isso será introduzido, para cada elemento, o seguinte conjunto de funções na forma,

$$T \approx \bar{T} = \sum_{i=1}^{Nnós} T_i N_i \ , \tag{2.3}$$

no qual T_{i} são os valores da função nos nós do elemento e N_{i} são as funções de interpolação descritas no Anexo B. Tendo em vista que a equação (2.3) é uma solução aproximada, nota-se que, substituindo-se a equação (2.3) na equação (2.2), ela não satisfaz exatamente a equação diferencial governante. Assim define-se um resíduo R como

$$R \approx k_x \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} + A_x \frac{\partial \overline{T}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + B\overline{T} \ . \tag{2.4}$$

Logo depois, introduz-se um conjunto de funções peso v_i $\left(i = 1,2,\ldots, Nnós\right)$ e define-se um produto interno $\left(R, v_i\right)$. Em seguida determina-se que este produto interno seja igual a zero,

$$\int_{\Omega} R\, v_i d\Omega = 0 \tag{2.5}$$

que é equivalente a forçar o erro de aproximação da equação diferencial ser igual a zero na média.

Há vários caminhos para se escolher as funções peso v_i. Neste trabalho serão utilizadas as seguintes formulações:

(1) Método de Galerkin;

(2) Método dos Mínimos Quadrados.

Estes dois métodos estão descritos a seguir.

2.2.1 Método de Galerkin

Para a introdução desta aproximação, é necessário definir a formulação variacional do problema (2.2), como segue: deve-se encontrar $\overline{T}^e \in V^e$, com $V^e \in H^1(\Omega)$ tal que,

$$\int_{\Omega^e} R\, v_i^e d\Omega = 0\,, \quad \forall v_i^e \in V^e\,,\ i = 1,2,\ldots, N_{nós} \tag{2.6}$$

visto que

$$T \approx \overline{T}^e = \sum_{j=1}^{N_{nós}} N_j \overline{T}_j^e \tag{2.7}$$

no qual $N_{nós}$ é o número de nós em cada elemento.

A equação (2.6) será válida para $v_i^e = N_i$, $i = 1,2,...,N_{nós}$, ou seja, a função peso é igual à função de interpolação. A formulação pelo Método de Galerkin será simétrica e positiva-definida apenas para problemas puramente difusivos.

2.2.2 Método dos Mínimos Quadrados

A outra alternativa utilizada neste trabalho para obter a solução aproximada do problema (2.2) é o Método dos Mínimos Quadrados, cuja idéia básica é determinar $T^e \in V^e$ para a minimização da integral do quadrado do resíduo definido pela equação (2.4).

Para tal, define-se um funcional quadrático,

$$I(T) = \left\| R(T) \right\|_0^2 = \int_{\Omega^e} \left\{ k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A_x \frac{\partial T}{\partial x} + A_y \frac{\partial T}{\partial y} + A_z \frac{\partial T}{\partial z} + BT \right\}^2 d\Omega , \quad (2.8)$$

para todo $T \in H^1$, no qual H^1 é o espaço de Hilbert de ordem 1.

A condição necessária para que $T \in V$ seja um minimizador do funcional I na equação (2.8) é que na primeira variação de T resultem,

$$\delta I(T) = 2\int_{\Omega^e} (\delta R) R d\Omega = 0 \text{ ou } \int_{\Omega^e} (\delta R) R d\Omega = 0 . \qquad (2.9)$$

Neste método, utiliza-se um artifício para diminuir a ordem do problema e conseqüentemente das funções peso e de interpolação envolvidas, da seguinte maneira,

$$q_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad i = 1,3. \qquad (2.10)$$

Observa-se que aplicando a equação (2.10) na equação (2.2), tem-se que,

$$\sum_{i=1}^{w}\left[k_{x_i}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+A_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\right]+BT=0\text{, com } i=1{,}3, \tag{2.11}$$

resultando em um problema representado por um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem com 4 incógnitas, T e q_i, i = 1,3.

Fazendo-se uma analogia com a formulação (2.6) do Método de Galerkin, a equação (2.9) pode ser reescrita da seguinte maneira,

$$\int_{\Omega^e} R v_i^e d\Omega = 0\,, \tag{2.12}$$

no qual $v_i^e = \delta R$. O sistema algébrico gerado pela formulação pelo Método dos Mínimos Quadrados é simétrico e positivo-definido para quaisquer valores dos coeficientes da equação (2.2), de acordo com Jiang (1998), página 24.

2.3 Integração Numérica

2.3.1 Quadratura de Gauss-Legendre

A avaliação da integral da forma

$$\int_a^b\int_c^d\int_e^f F(x,y,z)dxdydz\,, \tag{2.13}$$

de modo geral é difícil em razão da forma complexa do integrando F.

Neste trabalho será utilizada uma das fórmulas de quadraturas numéricas mais comumentes usadas, a *quadratura de Gauss-Legendre*. A fórmula requer que a integral designada seja avaliada sobre uma região limitada e fechada $[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$, visto que neste trabalho será utilizado elementos hexaedrais. Isso requer uma transformação do problema de coordenadas x

para as coordenadas locais ξ, das coordenadas y para as coordenadas locais η e também das coordenadas z para as coordenadas locais ζ .

Os elementos de referência e suas respectivas funções de interpolação estão detalhados no Anexo B.

2.3.2 Aproximação da Geometria

Nos itens 2.4 e 2.5, será mostrado que as formulações pelos Métodos dos Mínimos Quadrados e de Galerkin geram um sistema algébrico de equações e que em cada coeficiente dessas matrizes proveniente dessas formulações estão envolvidas integrais nas quais alguns termos são derivados das funções de interpolação com relação às coordenadas globais de x, y e z, para isso serão necessárias transformações da forma (Reddy, 1993),

$$x = f_1(\xi,\eta,\zeta), \qquad y = f_2(\xi,\eta,\zeta) \qquad \text{e} \qquad z = f_3(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.14a-c}$$

que são requeridas a fim de reescrever as integrais em termos de ξ, η e ζ $(-1 \le \xi,\eta,\zeta \le 1)$. As funções f_1, f_2 e f_3 são assumidas sendo transformações bijetoras (Lima (1998)).

Aqui, será aproximada a geometria da mesma maneira que são aproximadas as variáveis dependentes. Esta aproximação pode ser escrita da seguinte forma

$$x = \sum_{i=1}^{Nnós} x_i^e N_i^e(\xi,\eta,\zeta), \; y = \sum_{i=1}^{Nnós} y_i^e N_i^e(\xi,\eta,\zeta) \text{ e } z = \sum_{i=1}^{Nnós} z_i^e N_i^e(\xi,\eta,\zeta) \tag{2.15a-c}$$

na qual x_i^e (y_i^e e z_i^e) é a coordenada global do i- ésimo nó do elemento Ω^e e N_i^e são as funções interpolantes de Lagrange de grau $(a-1)$, no qual a é igual a quantidade de nós em cada direção no elemento. As equações (2.15a-c) mapeiam a forma geométrica do espaço (x,y,z) no espaço (ξ , η , ζ), isto é, para qualquer dado ξ, a equação (2.15a) leva ao correspondente x, e assim analogamente para y e z. A transformação dada por essa equação é essencial na avaliação das integrais pela Quadratura Gauss-Legendre.

Neste trabalho serão adotados elementos hexaedrais para a discretização espacial. Devido às transformações das coordenadas globais, x, y e z, para as coordenadas locais, ξ, η e ζ é necessário definir as transformações das derivadas das funções de interpolação. Pela regra da cadeia da diferenciação parcial, tem-se

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi} \tag{2.16a}$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} \tag{2.16b}$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta} \tag{2.16c}$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{2.17}$$

a qual relaciona as derivadas de N_i^e com relação as coordenadas globais e locais.

A matriz (2.17) é chamada de *matriz Jacobiana* da transformação (2.16a-c)

$$
(J^e) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^e \tag{2.18}
$$

No entanto, (2.17) deve ser invertido, da seguinte maneira,

$$
\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial z} \end{Bmatrix} = (J^e)^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i^e}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{2.19}
$$

Isto requer que a matriz Jacobiana seja não singular.

Então, é possível escrever a relação (2.19) da seguinte forma,

$$
\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x} \tag{2.20a}
$$

$$
\frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y} \tag{2.20b}
$$

$$
\frac{\partial N_i^e}{\partial z} = \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z} \tag{2.20c}
$$

no qual,

$$
\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{Nnós} x_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{Nnós} y_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{j=1}^{Nnós} z_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} \tag{2.21a-c}
$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{Nnós} x_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{Nnós} y_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{Nnós} z_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} \tag{2.21d-f}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{Nnós} x_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{Nnós} y_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \zeta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum_{j=1}^{Nnós} z_j^e \frac{\partial N_j^e}{\partial \zeta} \tag{2.21g-i}$$

Para que seja realmente possível o cálculo das derivadas das funções de interpolação, uma condição necessária e suficiente para que a inversa da matriz Jacobiana exista, é que o determinante de (J), chamado de *Jacobiano*, seja não nulo em todos os pontos (ξ,η,ζ) em $\overline{\Omega}^e$, ou seja

$$\det(J) = \frac{\partial x}{\partial \xi}\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial x}{\partial \eta}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) + \frac{\partial x}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right) \neq 0 \tag{2.22}$$

As equações (2.21a-i) expressam as derivadas das funções de interpolação em relação a *x*, *y* e *z*, nas quais estão envolvidos os termos $\partial\xi/\partial x$, $\partial\xi/\partial y$, $\partial\xi/\partial z$, $\partial\eta/\partial x$, $\partial\eta/\partial y$, $\partial\eta/\partial z$, $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y$ e $\partial\zeta/\partial z$ que podem apresentar divisões por zero, por exemplo da seguinte maneira

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi}}, \text{ se } \frac{\partial x}{\partial \xi} = 0, \text{ tem-se } \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{0}.$$

Para evitar este fato, neste trabalho serão adotadas as seguintes transformações,

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial x} = \frac{1}{\det(J)}\left[A_1\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + A_2\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} + A_3\frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\right] \tag{2.23a}$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{1}{\det(J)}\left[A_4\frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + A_5\frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} + A_6\frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\right] \tag{2.23b}$$

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial z} = \frac{1}{\det(J)}\left[A_7 \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + A_8 \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} + A_9 \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta} \right] \tag{2.23c}$$

nos quais

$$A_1 = \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}, \quad A_2 = \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad A_3 = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

$$A_4 = \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta}, \quad A_5 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \quad A_6 = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \xi}$$

$$A_7 = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad A_8 = \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad A_9 = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

Maiores detalhes das equações anteriores podem ser encontradas em Dhatt and Touzot (1984), páginas 43 e 44.

Como já foi observado, neste trabalho, os domínios tridimensionais serão discretizados com elementos hexaedrais. Por isso, a seguir serão apresentadas as integrações para o elemento hexaedral.

2.3.3 Integração sobre o Elemento Hexaedral

A fórmula da quadratura para integrais definidas sobre um elemento hexaedral $\overline{\Omega}_R$ é apresentada da seguinte forma:

$$\int_{\overline{\Omega}_R} \overline{F}(\xi,\eta,\zeta) d\xi\, d\eta d\zeta = \int_{-1}^{+1}\left[\int_{-1}^{+1}\left(\int_{-1}^{1} \overline{F}(\xi,\eta,\zeta) d\zeta\right) d\eta \right] d\xi \approx$$

$$\approx \sum_{I=1}^{M}\sum_{J=1}^{N}\sum_{K=1}^{P} \overline{F}(\xi_I, \eta_J, \zeta_K) w_I w_J w_K \tag{2.24}$$

nos quais M, N e P denotam os números de pontos da quadratura nas direções ξ, η e ζ, (ξ_I, η_J, ζ_K) denotam os pontos de Gauss, e w_I, w_J e w_K denotam os correspondentes pesos de Gauss. Os pontos e os pesos de Gauss estão detalhados no Anexo C.

2.4 Formulação pelo Método dos Mínimos Quadrados

A aplicação do Método dos Mínimos Quadrados para fenômenos tridimensionais utilizará a adição de três equações auxiliares, gerando um sistema de quatro equações diferenciais parciais com quatro incógnitas, definidas como segue,

$$k_x \frac{\partial q_x}{\partial x} + k_y \frac{\partial q_y}{\partial y} + k_z \frac{\partial q_z}{\partial y} + A_x \frac{\partial T}{\partial x} + A_y \frac{\partial T}{\partial y} + A_z \frac{\partial T}{\partial z} + BT = 0\,, \tag{2.25a}$$

$$q_x - \frac{\partial T}{\partial x} = 0\,, \qquad q_y - \frac{\partial T}{\partial y} = 0\,, \qquad q_z - \frac{\partial T}{\partial z} = 0\,. \tag{2.25b-d}$$

Fazendo-se as aproximações espaciais em cada elemento das funções T, q_x, q_y e q_z pelas funções $\hat{T}^e$, $\hat{q}_x^e$, $\hat{q}_y^e$ e $\hat{q}_z^e$, da seguinte forma,

$$T \cong \hat{T}^e = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{T}_i^e \;;\; q_x \cong \hat{q}_x^e = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{xi}^e \;;\; q_y \cong \hat{q}_y^e = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{y_i}^e \;;\; q_z \cong \hat{q}_z^e = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{zi}^e\,, \tag{2.26a-d}$$

com $Nnós$ sendo o número de nós em cada elemento.

Depois de definidas as aproximações espaciais, podem-se escrever as equações residuais das equações (2.25a-d) como segue,

$$R_1(x,y,z) = k_x \frac{\partial \hat{q}_x}{\partial x} + k_y \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial y} + k_z \frac{\partial \hat{q}_y}{\partial z} + A_x \frac{\partial \hat{T}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \hat{T}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \hat{T}}{\partial z} + B\hat{T}\,, \tag{2.27a}$$

$$R_2(x,y,z) = \hat{q}_x - \frac{\partial \hat{T}}{\partial x}, \qquad (2.27b)$$

$$R_3(x,y,z) = \hat{q}_y - \frac{\partial \hat{T}}{\partial y}, \qquad (2.27c)$$

$$R_4(x,y,z) = \hat{q}_z - \frac{\partial \hat{T}}{\partial z}. \qquad (2.27d)$$

Substituindo-se as aproximações (2.26a-d) nas equações (2.27a-d), obtém-se

$$R_1(x,y,z) = k_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{x\,i}^{e} + k_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_{y\,i}^{e} + k_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{q}_{z\,i}^{e} + A_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{T}_i^{e} +$$
$$+ A_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{T}_i^{e} + A_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{T}_i^{e} + B \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{T}_i^{e}\ , \qquad (2.28a)$$

$$R_2(x,y,z) = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{x\,i}^{e} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{T}_i^{e}\ , \qquad (2.28b)$$

$$R_3(x,y,z) = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{y\,i}^{e} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{T}_i^{e}\ , \qquad (2.28c)$$

$$R_4(x,y,z) = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{z\,i}^{e} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{T}_i^{e}\ . \qquad (2.28d)$$

Como este problema é composto por quatro equações, o funcional é definido da seguinte maneira,

$$I(R_1, R_2, R_3, R_4) = \int_{\Omega^e} R_1^2(x,y)\,d\Omega + \int_{\Omega^e} R_2^2(x,y)\,d\Omega + \int_{\Omega^e} R_3^2(x,y)\,d\Omega + \int_{\Omega^e} R_4^2(x,y)\,d\Omega\,,$$

e sua primeira variação é escrita da forma

$$\delta I(R_1, R_2, R_3, R_4) = 2\int_{\Omega^e} (\delta R_1) R_1 \; d\Omega + 2\int_{\Omega^e} (\delta R_2) R_2 \; d\Omega +$$

$$+ 2\int_{\Omega^e} (\delta R_3) R_3 \; d\Omega + 2\int_{\Omega^e} (\delta R_4) R_4 \; d\Omega = 0 \,,$$

ou

$$\int_{\Omega^e} (\delta R_1) R_1 \; d\Omega + \int_{\Omega^e} (\delta R_2) R_2 \; d\Omega + \int_{\Omega^e} (\delta R_3) R_3 \; d\Omega + \int_{\Omega^e} (\delta R_4) R_4 \; d\Omega = 0 \,, \tag{2.29}$$

com as seguintes propriedades,

$$\delta R_1 = \frac{\partial R_1}{\partial T_i^e} \delta\, T_i^e + \frac{\partial R_1}{\partial q_{x\,i}^e} \delta\, q_{x\,i}^e + \frac{\partial R_1}{\partial q_{y_i}^e} \delta\, q_{y_i}^e + \frac{\partial R_1}{\partial q_{z\,i}^e} \delta\, q_{z\,i}^e \,, \tag{2.30a}$$

$$\delta R_2 = \frac{\partial R_2}{\partial T_i^e} \delta\, T_i^e + \frac{\partial R_2}{\partial q_{x\,i}^e} \delta\, q_{x\,i}^e + \frac{\partial R_2}{\partial q_{y_i}^e} \delta\, q_{y_i}^e + \frac{\partial R_2}{\partial q_{z\,i}^e} \delta\, q_{z\,i}^e \,, \tag{2.30b}$$

$$\delta R_3 = \frac{\partial R_3}{\partial T_i^e} \delta\, T_i^e + \frac{\partial R_3}{\partial q_{x\,i}^e} \delta\, q_{x\,i}^e + \frac{\partial R_3}{\partial q_{y_i}^e} \delta\, q_{y_i}^e + \frac{\partial R_3}{\partial q_{z\,i}^e} \delta\, q_{z\,i}^e \,, \tag{2.30c}$$

$$\delta R_4 = \frac{\partial R_4}{\partial T_i^e} \delta\, T_i^e + \frac{\partial R_4}{\partial q_{x\,i}^e} \delta\, q_{x\,i}^e + \frac{\partial R_4}{\partial q_{y_i}^e} \delta\, q_{y_i}^e + \frac{\partial R_4}{\partial q_{z\,i}^e} \delta\, q_{z\,i}^e \,, \tag{2.30d}$$

onde

$$\frac{\partial R_1}{\partial \hat{T}_i^e} = A_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} + A_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} + A_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} + B \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \,, \tag{2.31a}$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \hat{q}_{x\,i}^e} = k_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \,; \qquad \frac{\partial R_1}{\partial \hat{q}_{y_i}^e} = k_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \,; \qquad \frac{\partial R_1}{\partial \hat{q}_{z\,i}^e} = k_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \,, \tag{2.31b-d}$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial \hat{T}_i^e} = -\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x}\,; \qquad \frac{\partial R_2}{\partial \hat{q}_{x\,i}^e} = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i\,; \qquad \frac{\partial R_2}{\partial \hat{q}_{y_i}^e} = 0\,; \qquad \frac{\partial R_2}{\partial \hat{q}_{z\,i}^e} = 0\,, \tag{2.31e-h}$$

$$\frac{\partial R_3}{\partial \hat{T}_i^e} = -\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y}\,; \qquad \frac{\partial R_3}{\partial \hat{q}_{x\,i}^e} = 0\,; \qquad \frac{\partial R_3}{\partial \hat{q}_{y_i}^e} = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i\,; \qquad \frac{\partial R_3}{\partial \hat{q}_{z\,i}^e} = 0\,, \tag{2.31i-l}$$

$$\frac{\partial R_4}{\partial \hat{T}_i^e} = -\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z}\,; \qquad \frac{\partial R_4}{\partial \hat{q}_{x\,i}^e} = 0\,; \qquad \frac{\partial R_4}{\partial \hat{q}_{y_i}^e} = 0\,; \qquad \frac{\partial R_3}{\partial \hat{q}_{z\,i}^e} = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i\,. \tag{2.31m-p}$$

Substituindo-se as Eqs. (2.30a-d) e (2.31a-p) na Eq. (2.29) tem-se,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left\{ \left[A_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} + A_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} + A_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} + B \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \right] \delta\, \hat{T}_i^e + k_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta\, \hat{q}_{x\,i}^e + \right. \\
&+ k_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta\, \hat{q}_{y\,i}^e + k_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta\, \hat{q}_{z\,i}^e \Bigg\} \times \Bigg\{ k_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_{x\,i}^e + k_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_{y\,i}^e + k_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{q}_{z\,i}^e + \\
&\qquad + A_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{T}_i^e + A_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{T}_i^e + A_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{T}_i^e + B \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{T}_i^e \Bigg\} d\Omega + \\
&\qquad + \int_{\Omega^e} \left[-\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta\, \hat{T}_i^e + \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \delta\, \hat{q}_{x\,i}^e \right] \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{x\,i}^e - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{T}_i^e \right] d\Omega + \\
&\qquad + \int_{\Omega^e} \left[-\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta\, \hat{T}_i^e + \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \delta\, \hat{q}_{y\,i}^e \right] \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{y\,i}^e - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{T}_i^e \right] d\Omega + \\
&\qquad + \int_{\Omega^e} \left[-\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \delta\, \hat{T}_i^e + \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \delta\, \hat{q}_{y\,i}^e \right] \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{z\,i}^e - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{T}_i^e \right] d\Omega = 0\,.
\end{aligned}$$

Reorganizando-se a equação anterior, pode-se obter,

$$\begin{aligned}
&\delta\, \hat{T}_i^e \times \int_{\Omega^e} \left(U_1 \times U_2 + U_3 + U_4 + U_5 \right) d\Omega + \delta\, \hat{q}_{x\,i}^e \times \int_{\Omega^e} \left(U_6 \times U_2 + U_7 \right) d\Omega + \\
&\qquad \delta\, \hat{q}_{y\,i}^e \times \int_{\Omega^e} \left(U_8 \times U_2 + U_9 \right) d\Omega + \delta\, \hat{q}_{z\,i}^e \times \int_{\Omega^e} \left(U_{10} \times U_2 + U_{11} \right) d\Omega = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

na qual

$$U_1 = A_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} + A_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} + A_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} + B \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \ , \tag{2.33a}$$

$$\begin{aligned} U_2 = {} & k_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}^e_{x\,i} + k_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}^e_{y\,i} + k_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{q}^e_{z\,i} + A_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{T}^e_i + \\ & + A_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{T}^e_i + A_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{T}^e_i + B \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{T}^e_i \ , \end{aligned} \tag{2.33b}$$

$$U_3 = -\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}^e_{x\,i} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{T}^e_i \right], \tag{2.33c}$$

$$U_4 = -\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}^e_{y\,i} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{T}^e_i \right], \tag{2.33d}$$

$$U_5 = -\sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}^e_{z\,i} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{T}^e_i \right], \tag{2.33e}$$

$$U_6 = k_x \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \,, \tag{2.33f}$$

$$U_7 = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}^e_{x\,i} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{T}^e_i \right], \tag{2.33g}$$

$$U_8 = k_y \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \,, \tag{2.33h}$$

$$U_9 = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}^e_{y\,i} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{T}^e_i \right], \tag{2.33i}$$

$$U_{10} = k_z \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z}, \tag{2.33j}$$

$$U_{11} = \sum_{i=1}^{Nnós} N_i \times \left[\sum_{i=1}^{Nnós} N_i \hat{q}_{z\,i}^{e} - \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial z} \hat{T}_i^{e} \right]. \tag{2.33l}$$

Para que a equação (2.32) seja satisfeita, deve-se ter, simultaneamente,

$$\int_{\Omega^e} \left(U_1 \times U_2 + U_3 + U_4 + U_5 \right) d\Omega = 0, \tag{2.34a}$$

$$\int_{\Omega^e} \left(U_6 \times U_2 + U_7 \right) d\Omega = 0, \tag{2.34b}$$

$$\int_{\Omega^e} \left(U_8 \times U_2 + U_9 \right) d\Omega = 0, \tag{2.34c}$$

$$\int_{\Omega^e} \left(U_{10} \times U_2 + U_{11} \right) d\Omega = 0. \tag{2.34d}$$

ou seja, δT_i^e, $\delta q_{x\,i}^e$, $\delta q_{y\,i}^e$ e $\delta q_{z\,i}^e$ não são identicamente nulos em todo o domínio.

As equações (2.34a-d) geram o seguinte sistema linear matricial

$$\begin{bmatrix} A & B & C & D \\ B^T & E & G & H \\ C^T & G^T & I & J \\ D^T & H^T & J^T & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{T}^e \\ \hat{q}_x^e \\ \hat{q}_y^e \\ \hat{q}_z^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.35}$$

no qual

$$A_{ij} = \int_{\Omega^e} \left\{ \left[A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + A_z \frac{\partial N_i}{\partial z} + BN_i \right] \times \left[A_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + A_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + A_z \frac{\partial N_j}{\partial z} + \right.\right.$$

$$+BN_j\Big]+\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\Bigg\}\,d\Omega\,, \tag{2.36a}$$

$$B_{ij}=\int_{\Omega^e}\left\{\left[A_x\frac{\partial N_i}{\partial x}+A_y\frac{\partial N_i}{\partial y}+\alpha A_z\frac{\partial N_i}{\partial z}+BN_i\right]\times\left[k_x\frac{\partial N_j}{\partial x}\right]-\frac{\partial N_i}{\partial x}N_j\right\}d\Omega\,, \tag{2.36b}$$

$$C_{ij}=\int_{\Omega^e}\left\{\left[A_x\frac{\partial N_i}{\partial x}+A_y\frac{\partial N_i}{\partial y}+A_z\frac{\partial N_i}{\partial z}+BN_i\right]\times\left[k_y\frac{\partial N_j}{\partial y}\right]-\frac{\partial N_i}{\partial y}N_j\right\}d\Omega\,, \tag{2.36c}$$

$$D_{ij}=\int_{\Omega^e}\left\{\left[A_x\frac{\partial N_i}{\partial x}+A_y\frac{\partial N_i}{\partial y}+A_z\frac{\partial N_i}{\partial z}+BN_i\right]\times\left[k_z\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]-\frac{\partial N_i}{\partial z}N_j\right\}d\Omega\,, \tag{2.36d}$$

$$E_{ij}=\int_{\Omega^e}\left[k_x^2\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+N_iN_j\right]d\Omega\,, \tag{2.36e}$$

$$G_{ij}=\int_{\Omega^e}k_xk_y\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}\,d\Omega\,, \tag{2.36f}$$

$$H_{ij}=\int_{\Omega^e}k_xk_z\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}\,d\Omega\,, \tag{2.36g}$$

$$I_{ij}=\int_{\Omega^e}\left[k_y^2\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+N_iN_j\right]d\Omega\,, \tag{2.36h}$$

$$J_{ij}=\int_{\Omega^e}k_yk_z\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial z}\,d\Omega\,, \tag{2.36i}$$

$$K_{ij}=\int_{\Omega^e}\left[k_z^2\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}+N_iN_j\right]d\Omega\,. \tag{2.36j}$$

A partir das transformações de coordenadas globais para locais ($x \to \xi$, $y \to \eta$, $z \to \zeta$) descritas no item 2.3.2, as equações (2.36a-j) são reescritas da forma:

$$A_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \left\{ \left[\frac{A_x \Phi_1}{\det(J)} + \frac{A_y \Phi_2}{\det(J)} + \frac{A_z \Phi_3}{\det(J)} + BN_i \right] \times \left[\frac{A_x \Phi_4}{\det(J)} + \frac{A_y \Phi_5}{\det(J)} + \frac{A_z \Phi_6}{\det(J)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + BN_j \right] + \frac{\Phi_1 \Phi_4}{\det(J)^2} + \frac{\Phi_2 \Phi_5}{\det(J)^2} + \frac{\Phi_3 \Phi_6}{\det(J)^2} \right\} \det(J) d\overline{\Omega}, \qquad (2.37a)$$

$$B_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \left\{ \left[\frac{A_x \Phi_1}{\det(J)} + \frac{A_y \Phi_2}{\det(J)} + \frac{A_z \Phi_3}{\det(J)} + BN_i \right] \times \left[\frac{k_x \Phi_4}{\det(J)} \right] - \frac{\Phi_1}{\det(J)} N_j \right\} \det(J) d\overline{\Omega}, \qquad (2.37b)$$

$$C_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \left\{ \left[\frac{A_x \Phi_1}{\det(J)} + \frac{A_y \Phi_2}{\det(J)} + \frac{A_z \Phi_3}{\det(J)} + BN_i \right] \times \left[\frac{k_y \Phi_5}{\det(J)} \right] - \frac{\Phi_2}{\det(J)} N_j \right\} \det(J) d\overline{\Omega}, \qquad (2.37c)$$

$$D_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \left\{ \left[\frac{A_x \Phi_1}{\det(J)} + \frac{A_y \Phi_2}{\det(J)} + \frac{A_z \Phi_3}{\det(J)} + BN_i \right] \times \left[\frac{k_z \Phi_6}{\det(J)} \right] - \frac{\Phi_3}{\det(J)} N_j \right\} \det(J) d\overline{\Omega}, \qquad (2.37d)$$

$$E_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \left[\frac{k_x^2 \Phi_1 \Phi_4}{\det(J)^2} + N_i N_j \right] \det(J) d\overline{\Omega}, \qquad (2.37e)$$

$$G_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \frac{k_x k_y \Phi_1 \Phi_5}{\det(J)} d\overline{\Omega}, \qquad (2.37f)$$

$$H_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \frac{k_x k_z \Phi_1 \Phi_6}{\det(J)} d\overline{\Omega}, \qquad (2.37g)$$

$$I_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \left[\frac{k_y^2 \Phi_2 \Phi_5}{\det(J)^2} + N_i N_j \right] \det(J)\, d\overline{\Omega}, \qquad (2.37h)$$

$$J_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \frac{k_y k_z \Phi_2 \Phi_6}{\det(J)} d\overline{\Omega}\,, \tag{2.37i}$$

$$K_{ij} = \int_{\overline{\Omega}^e} \left[\frac{k_z^2 \Phi_3 \Phi_6}{\det(J)^2} + N_i N_j \right] \det(J) d\overline{\Omega}\,, \tag{2.37j}$$

nos quais, $d\overline{\Omega} = d\zeta d\eta d\xi$, $\overline{\Omega} = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ e

$$\Phi_1 = A_1 \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + A_2 \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} + A_3 \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\,, \tag{2.38a}$$

$$\Phi_2 = A_4 \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + A_5 \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} + A_6 \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\,, \tag{2.38b}$$

$$\Phi_3 = A_7 \frac{\partial N_i^e}{\partial \xi} + A_8 \frac{\partial N_i^e}{\partial \eta} + A_9 \frac{\partial N_i^e}{\partial \zeta}\,, \tag{2.38c}$$

$$\Phi_4 = A_1 \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} + A_2 \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} + A_3 \frac{\partial N_j^e}{\partial \zeta}\,, \tag{2.38d}$$

$$\Phi_5 = A_4 \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} + A_5 \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} + A_6 \frac{\partial N_j^e}{\partial \zeta}\,, \tag{2.38e}$$

$$\Phi_6 = A_7 \frac{\partial N_j^e}{\partial \xi} + A_8 \frac{\partial N_j^e}{\partial \eta} + A_9 \frac{\partial N_j^e}{\partial \zeta}\,, \tag{2.38f}$$

nos quais $A_1, \ldots, A_9$ são definidos no Capítulo 3.

2.5 Formulação pelo Método de Galerkin

Tomando como equação residual a equação a seguir,

$$R = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A_x \frac{\partial T}{\partial x} + A_y \frac{\partial T}{\partial y} + A_z \frac{\partial T}{\partial z} + BT \, , \tag{2.39}$$

e substituindo (2.39) na equação (2.6) tem-se a seguinte integral no elemento,

$$\int_{\Omega^e} \left[k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + A_x \frac{\partial T}{\partial x} + A_y \frac{\partial T}{\partial y} + A_z \frac{\partial T}{\partial z} + BT \right] N_j d\Omega = 0 \, . \tag{2.40}$$

Para a integração do trecho

$$\int_{\Omega^e} \left[k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] . N_j d\Omega \tag{2.41}$$

será utilizado integração por partes conforme o definido na página 153 de Lewis et al. (2004), assim o trecho descrito na equação (2.41) pode ser escrito da forma,

$$\int_{\Omega^e} \left[k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] . N_j d\Omega = -\int_{\Omega^e} \left[k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma_q} N_i k_x \frac{\partial T}{\partial x} l d\Gamma_q + \int_{\Gamma_q} N_i k_y \frac{\partial T}{\partial y} m d\Gamma_q + \int_{\Gamma_q} N_i k_z \frac{\partial T}{\partial z} n d\Gamma_q \, . \tag{2.42}$$

Porém, como definido no início deste capítulo, serão consideradas condições de contorno de primeiro e de segundo tipo, que podem ser escritas matematicamente da seguinte maneira,

$$T = T_b \text{ em } \Gamma_b \tag{2.43a}$$

e

$$k_x \frac{\partial T}{\partial x} l + k_y \frac{\partial T}{\partial y} m + k_z \frac{\partial T}{\partial z} n + q + h(T - T_a) = 0 \qquad \text{em } \Gamma_q. \tag{2.43b}$$

onde $\Gamma_b \cup \Gamma_q = \Gamma$ e $\Gamma_b \cap \Gamma_q = 0$, Γ representa o contorno, l, m e n representam os cossenos diretores, h é o coeficiente de transferência de calor, T_a é a temperatura do meio e q é o fluxo de calor no contorno. Agora, aplicando (2.43b) em (2.41), teremos,

$$\int_{\Omega^e} \left[k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] . N_j d\Omega = -\int_{\Omega^e} \left[k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} \right] d\Omega +$$
$$- \int_{\Gamma_q} N_j (q + h(T - T_a)) d\Gamma_q \ . \tag{2.44}$$

Aplicando (2.44) em (2.40), temos:

$$\int_{\Omega^e} \left[-k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} - k_z \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + A_x \frac{\partial T}{\partial x} + A_y \frac{\partial T}{\partial y} + A_z \frac{\partial T}{\partial z} + BT \right] . N_j d\Omega =$$
$$= \int_{\Gamma_q} N_j (q + h(T - T_a)) d\Gamma_q \ . \tag{2.45}$$

Agora, faz-se a aproximação da função T pela função $\hat{T}^e$ da seguinte forma,

$$T \cong \hat{T}^e = \sum_{i=1}^{NNós} N_i \hat{T}_i^e \ , \tag{2.46}$$

com *NNós* sendo o número de nós em cada elemento. Substituindo a equação (2.46) na equação (2.45) temos,

$$\int_{\Omega^e} \left[-k_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} - k_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} - k_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} A_x \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + A_y \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j + A_z \frac{\partial N_i}{\partial z} N_j + \right.$$
$$\left. + BN_i N_j \right] d\Omega . \hat{T}_i^e + = \int_{\Gamma_q} N_j (q + h(T - T_a)) d\Gamma_q \ , \tag{2.47}$$

com $i, j = 1, \ldots, NNós$.

A equação (2.47) gera o seguinte sistema linear,

$$[K]\{T_i^e\}=\{F\}, \tag{2.48}$$

no qual

$$K_{ij}=-\int_{\Omega^e}k_x\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}d\Omega-\int_{\Omega^e}k_y\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}d\Omega-\int_{\Omega^e}k_z\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}d\Omega+\int_{\Omega^e}A_x\frac{\partial N_i}{\partial x}N_j d\Omega+$$

$$+\int_{\Omega^e}A_y\frac{\partial N_i}{\partial y}N_j d\Omega+\int_{\Omega^e}A_z\frac{\partial N_i}{\partial z}N_j d\Omega+\int_{\Omega^e}BN_iN_j d\Omega, \tag{2.49a}$$

$$F_i=\int_{\Gamma_q}N_j(q+h(T-T_a))d\Gamma_q\ . \tag{2.49b}$$

Assim como no Método dos Mínimos Quadrados, utiliza-se a transformação de coordenadas globais para locais ($x\to\xi$, $y\to\eta$, $z\to\zeta$) descritas no item 2.3.2, reescrevendo a equação (2.49a) da seguinte forma:

$$K_{ij}=-\int_{\overline{\Omega}^e}\frac{k_x}{\det(J)}\Phi_1\Phi_4 d\overline{\Omega}-\int_{\overline{\Omega}^e}\frac{k_y}{\det(J)}\Phi_2\Phi_5 d\overline{\Omega}-\int_{\overline{\Omega}^e}\frac{k_z}{\det(J)}\Phi_3\Phi_6 d\overline{\Omega}+\int_{\overline{\Omega}^e}A_x\Phi_1N_j d\overline{\Omega}+$$

$$+\int_{\overline{\Omega}^e}A_y\Phi_2N_j d\overline{\Omega}+\int_{\overline{\Omega}^e}A_z\Phi_3N_j d\overline{\Omega}+\int_{\overline{\Omega}^e}BN_iN_j d\overline{\Omega}, \tag{2.50}$$

no qual Φ_i, i = 1,..,6 são definidas da mesma forma que o apresentado nas equações (2.38a-f), $d\overline{\Omega}=d\zeta d\eta d\xi$ e $\overline{\Omega}=[-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$.

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

3.1 Introdução

Os coeficientes das matrizes (2.35) e (2.48) serão obtidos através de integração numérica de Gauss (Reddy, 1993) e mapeando os elementos reais através dos elementos de referência em coordenadas locais ξ, η e ζ ($-1 \le \xi,\eta,\zeta \le 1$). As funções de interpolação e suas derivadas estão detalhadas no Anexo A e podem ser conferidas em Dhatt et al. (1984).

Os sistemas de equações algébricas representados em (2.48) para GFEM e em (2.35) para o LSFEM serão resolvidos através do método de Gauss-Seidel e com critério de parada com erro máximo de $E_{max} \le 10^{-10}$. O código computacional foi desenvolvido em linguagem Fortran em um computador com as características: Intel Corel 2 Duo, 2,19 GHz, 8GB de RAM. As malhas foram geradas internamente para domínios cartesianos, os elementos reais são tomados como prismas retos e refinadas dentro de um limite de capacidade de memória computacional disponível.

Neste capítulo serão apresentadas várias aplicações de problemas convectivos-difusivos-reativos, sendo que na maioria, será comparado o resultado numérico com uma solução analítica. Para os casos com solução analítica, as condições de contorno serão adotadas para satisfazerem a própria solução analítica. Com relação a análise do erro cometido na solução numérica serão utilizados dois tipos de normas, sendo elas a norma L_2 do erro definido em Zlhmal (1978) como $\|e\| = \left[\left(\sum_{i=1}^{Nnost} e_i^2 \right) / Nnost \right]^{1/2}$, com *Nnost* o número de nós em toda a malha e $e_i = T_{(num)i} - T_{(an)i}$, sendo $T_{(num)}$ o resultado da solução numérica e $T_{(an)}$ o resultado da solução analítica. Esta norma tem como finalidade dar uma noção do erro médio cometido em todo o domínio analisado.

Além da norma L_2 será utilizada a norma L_∞ definida como: $e_i = | T_{(num)_i} - T_{(an)_i} |$. A norma L_∞ representa o maior erro cometido em toda a malha para cada tipo de refinamento.

Nas aplicações a seguir será adotado que $h = \Delta x = \Delta y = \Delta z$, sendo Δx, Δy, e Δz as arestas do hexaedro.

3.2 Aplicação 1 – Difusão Pura.

Nesta aplicação os coeficientes A_x, A_y, A_z e B na equação (2.2) são nulos e k_x, k_y e k_z unitários. Sendo a aplicação realizada em um cubo unitário $\Omega = [0,1]^3$ a equação governante para esta aplicação será:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 .$$

As soluções analíticas da função *T* e de suas primeiras derivadas parciais nas três direções podem ser escritas como segue,

$$T(x,y,z) = \frac{sen(\pi.y)sen(\pi.z)}{senh(\pi\sqrt{2})}\left[2senh(\pi\sqrt{2}x) + senh(\pi\sqrt{2}(1-x))\right],$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} = \frac{sen(\pi.y)sen(\pi.z)}{senh(\pi\sqrt{2})}\left[2\sqrt{2}\pi\cosh(\pi\sqrt{2}x) - \sqrt{2}\pi\cosh(\pi\sqrt{2}(1-x))\right],$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\pi\cos(\pi.y)sen(\pi.z)}{senh(\pi\sqrt{2})}\left[2senh(\pi\sqrt{2}x) + senh(\pi\sqrt{2}(1-x))\right],$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = \frac{sen(\pi.y)\pi\cos(\pi.z)}{senh(\pi\sqrt{2})}\left[2senh(\pi\sqrt{2}x) + senh(\pi\sqrt{2}(1-x))\right].$$

As condições de contorno são escolhidas para satisfazer a solução analítica proposta neste problema. Nesta aplicação foi escolhida a solução analítica de $T(x,y,z)$ descrita acima com o objetivo de compararmos os resultados deste trabalho com os apresentados em Spotz e Carey (1996) e em Gupta e Kouatchou (1998).

Tabela 3.1 Norma L_2 do erro na solução de $T(x,y,z)$, Aplicação 1.

h	**Spotz e Carey (1996)**		**LSFEM**		**GFEM**	
	CDS	**HOC4**	**8 nós**	**27 nós**	**8 nós**	**27 nós**
1/4	1,34E-02	3,29E-03	1,76E-02	6,10E-04	1,83E-02	1,97E-04
1/6	6,50E-03	6,77E-04	8,43E-03	1,37E-04	8,78E-03	4,15E-05
1/8	3,84E-03	2,21E-04	4,93E-03	4,64E-05	5,14E-03	1,35E-05
1/10	2,53E-03	9,28E-05	3,24E-03	1,98E-05	3,38E-03	5,67E-06

Na tabela 3.1, comparamos os resultados deste trabalho com os apresentados em Spotz e Carey (1996), no qual os autores apresentam a análise da norma L_2 do erro cometido na solução numérica de $T(x,y,z)$ para malhas com valores de h iguais a 1/4, 1/6, 1/8 e 1/10 pelos métodos CDS (standard central differencing schemes) e HOC (high-order compact schemes). Os resultados apresentados pelos GFEM e o LSFEM com 8 nós apresentaram resultados semelhantes com o trabalho de Spotz e Carey quando comparados com o CDS, mas em contrapartida, quando o GFEM e o LSFEM se utilizaram de hexaedros com 27 nós, os resultados são significativamente melhores (em torno de uma ordem de precisão a mais) do que os apresentados por Spotz e Carey no uso do HOC.

Tabela 3.2 Norma L_∞ do erro na solução de $T(x,y,z)$, Aplicação 1.

h	**Gupta e Kouatchou (1998)**			**LSFEM**		**Galerkin**	
	7 pontos	**15 pontos**	**19 pontos**	**8 nós**	**27 nós**	**8 nós**	**27 nós**
1/4	5,84E-02	7,93E-03	5,13E-03	7,68E-02	2,33E-03	7,06E-02	8,29E-04
1/8	1,55E-02	4,92E-04	3,24E-04	1,75E-02	2,04E-04	1,62E-02	7,00E-05
1/16	3,94E-03	3,06E-05	2,04E-05	4,30E-03	1,52E-05	3,99E-03	5,62E-06

Na tabela 3.2 comparamos os resultados deste trabalho com os apresentados por Gupta and Kouatchou (1998). Os autores deste trabalho apresentam uma análise da norma L_∞ do erro cometido na solução de $T(x,y,z)$ pelo *second-order scheme* (7-*point*) e *two fourth-order finite difference schemes* (15-*point*, 19-*point*) utilizando malhas com h iguais a 1/4, 1/8 e 1/16. Quando utilizam-se hexaedros com 8 nós os resultados de GFEM e LSFEM são semelhantes aos apresentados pelo *second-order scheme*, entretanto, quando analisamos o uso do GFEM e do LSFEM com hexaedros com 27 nós, os resultados são significativamente melhores para os dois *fourth-order finite difference schemes* apresentados por Gupta e Kouatchou, com especial destaque para o GFEM com hexaedros com 27 nós que para as três malhas apresenta uma ordem de precisão a mais que *fourth-order scheme* (19-*point*).

Uma contribuição especial deste trabalho é a análise das normas L_2 e L_∞ do erro cometido na solução numérica das derivadas primeiras de T nas três direções. Este resultado é de suma importância em problemas de transferência de calor, pois assim é possível analisar os fluxos em qualquer ponto do domínio de análise. No LSFEM, as derivadas saem imediatamente nas variáveis denominadas como q_x, q_y e q_z conforme apresentadas nas equações. (2.25b-d). Ao contrário disso, no GFEM será necessário utilizar algum artifício para que sejam calculadas as derivadas a partir dos valores encontrados em $T(x,y,z)$. A alternativa utilizada neste trabalho foi semelhante a idéia de aproximação apresentada na equação (2.3), da seguinte maneira,

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} \approx \frac{\partial \hat{T}^e}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{Nnós} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \hat{T}_i^e \,,$$

onde k = 1, 2 ou 3, sendo $x_1 = x$, $x_2 = y$ e $x_3 = z$.

Nas figuras 3.1 e 3.2, apresentam-se as normas L_2 e L_∞ da primeira derivada em x, enquanto que nas figuras 3.3 e 3.4 apresentam-se as mesmas normas, mas para as derivadas primeiras em y e z, com a observação que devido a solução analítica adotada nesta aplicação, os resultados apresentados para as derivadas em y e z são iguais.

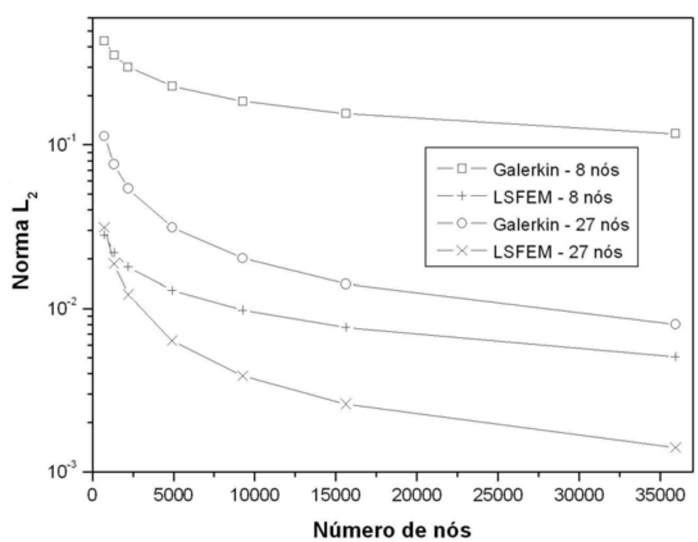

Figura 3.1 Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial x$, Aplicação 1.

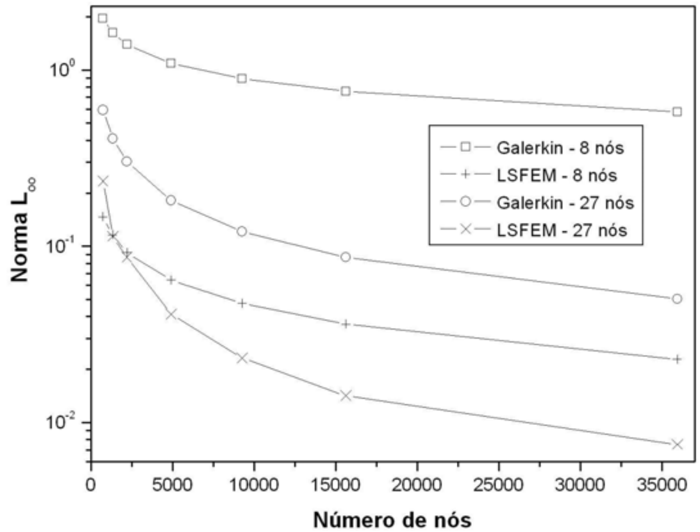

Figura 3.2 Norma L_∞ de $\partial T(x,y,z)/\partial x$, Aplicação 1.

As figuras que avaliam as normas L_2 e L_∞ do erro na solução numérica apresentadas neste trabalho, foram dispostas a apresentar no eixo horizontal o refinamento da malha a partir da sua quantidade de nós, enquanto que no eixo vertical ficou responsável pelo norma do erro, assim quanto mais a curva se aproxima do canto inferior direito do gráfico, menor será o erro.

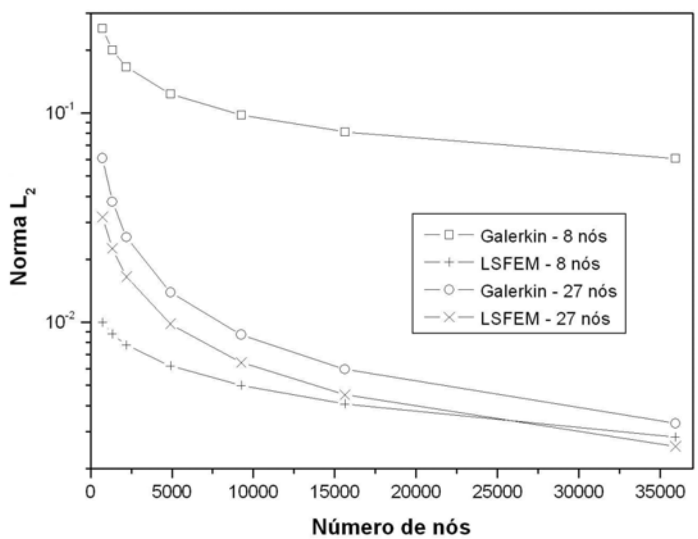

Figura 3.3 Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 1.

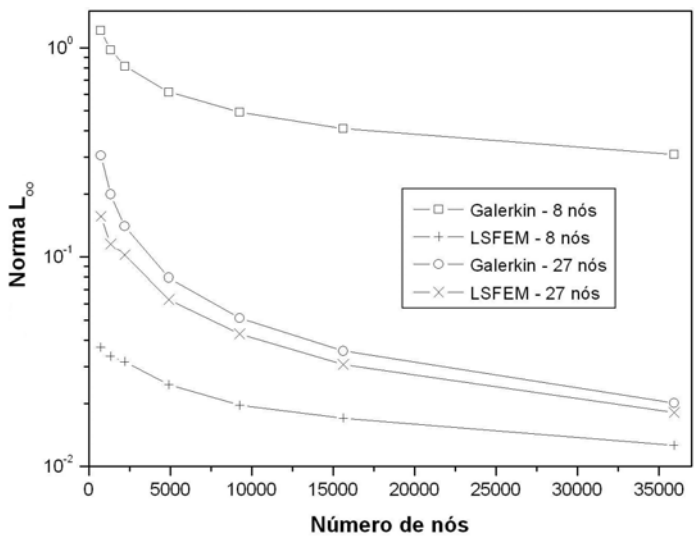

Figura 3.4 – Norma L_∞ de $\partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 1.

Uma característica importante apresentada nas tabelas 3.1 e 3.2 é que o GFEM de modo geral, apresenta resultados ligeiramente melhores que o LSFEM na análise dos resultados numéricos de $T(x,y,z)$, porém, devido ao fato da utilização de três equações auxiliares pelo LSFEM, equações essas que já retornam imediatamente os valores das três derivadas primeiras em cada nó do domínio/malha adotada, o LSFEM apresenta resultados expressivamente melhores que os apresentados pelo GFEM (Figuras 3.1 a 3.4) quando se avalia a solução numérica das derivadas de T, sendo que em alguns casos, como no uso de hexaedros de 8 nós com h = 1/32 o LSFEM apresenta duas ordens de precisão a mais que o GFEM, veja Anexo A, nas Tabelas A3 a A6.

Na figura 3.5 é possível visualizar a distribuição de temperatura no plano xz com y = 0,5. Na região próxima a x = 1 e z = 0,5 a temperatura se aproxima de $T(1;0,5;0,5) = 2$, e nas proximidades de x = 0 e z = 0,5 a temperatura se aproxima de T(0;0,5;0,5) = 1, conforme solução analítica. Para este caso foi utilizado o LSFEM para a simulação numérica.

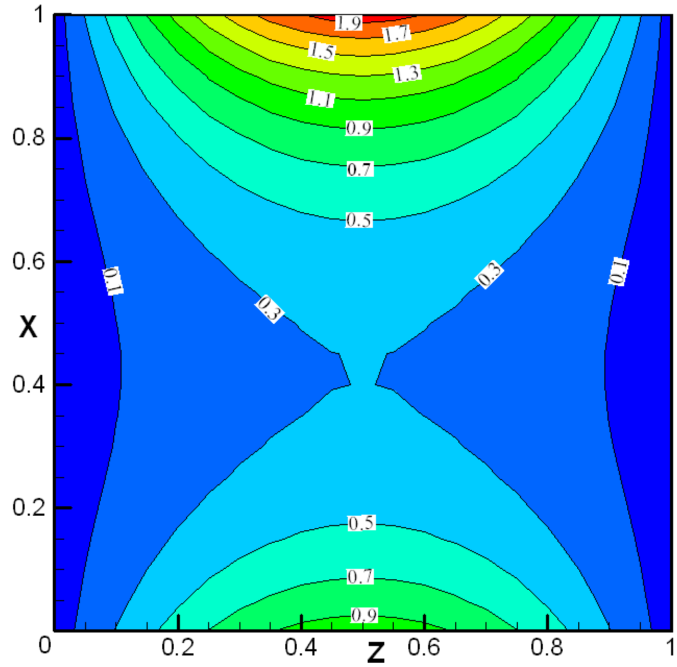

Figura 3.5 Distribuição de Temperatura no plano xz com y = 0,5 pelo LSFEM a partir de uma malha com 4913 nós (h=1/16) utilizando-se hexaedros com 8 nós, Aplicação 1.

3.3 Aplicação 2 – Difusão-Reação

Nesta aplicação os coeficientes A_x, A_y, A_z na equação (2.2) são nulos e B, k_x, k_y e k_z unitários. Sendo a aplicação realizada em um cubo unitário $\Omega = [0,1]^3$ a equação governante para esta aplicação será:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + T = 0 .$$

Nesta aplicação será utilizada a solução analítica abaixo, a mesma pode ser encontrada em Hon e Chen (2003),

$$T(x, y, z) = senx + seny + senz .$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} = \cos x \, , \; \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} = \cos y \, , \; \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = \cos z \, .$$

Nas figuras 3.6 e 3.7, uma análise dos resultados numéricos de *T*(*x,y,z*) é realizada. Nestes resultados, pode-se constatar que para as duas normas analisadas, o GFEM apresenta resultados melhores que os resultados pelo LSFEM. Para hexaedros com 8 nós os dois métodos apresentam resultados na mesma ordem de precisão, porém, para hexaedros com 27 nós, o GFEM apresenta uma ordem de precisão a mais que o LSFEM, maiores detalhes veja Tabelas A7 e A8.

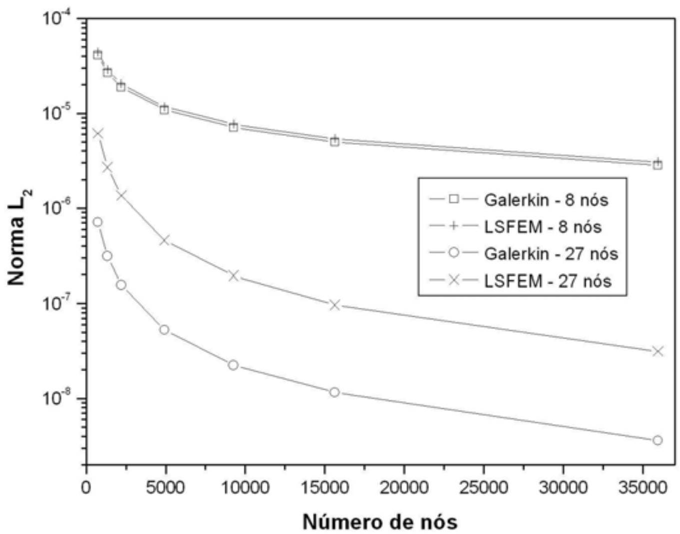

Figura 3.6 Norma L_2 de T(x,y,z), Aplicação 2.

Em contrapartida, assim como na aplicação 1, o LSFEM apresenta melhores resultados na análise do erro das soluções numéricas das derivadas primeiras de *T*(*x,y,z*) (Figuras 3.8 e 3.9, os resultados das três derivadas são aproximadamente iguais, novamente devido ao tipo de solução analítica adotada). O que se torna mais expressivo, é que nesta aplicação, o LSFEM apresenta em torno de *três* ordens de precisão a mais que o GFEM na maioria dos valores de h, tanto na norma L_2 quanto na norma L_∞. Pode-se, por exemplo, analisando as Tabelas A9 e A10 constatar que o LSFEM com hexaedros com 8 nós para h = 1/8 e 729 nós na malha (tempo computacional = 108s) apresenta um resultado melhor (duas ordens de precisão a mais) do que o apresentado pelo GFEM com hexaedros com 8 nós para h = 1/32 e 35937 nós na malha (tempo computacional = 1472s). Algo parecido acontece quando analisado GFEM e LSFEM com hexaedros com 27 nós, respectivamente com h = 1/16 e 35937 nós na malha (tempo computacional = 5290s) e h = 1/4 e 729 nós na malha (tempo computacional = 352s).

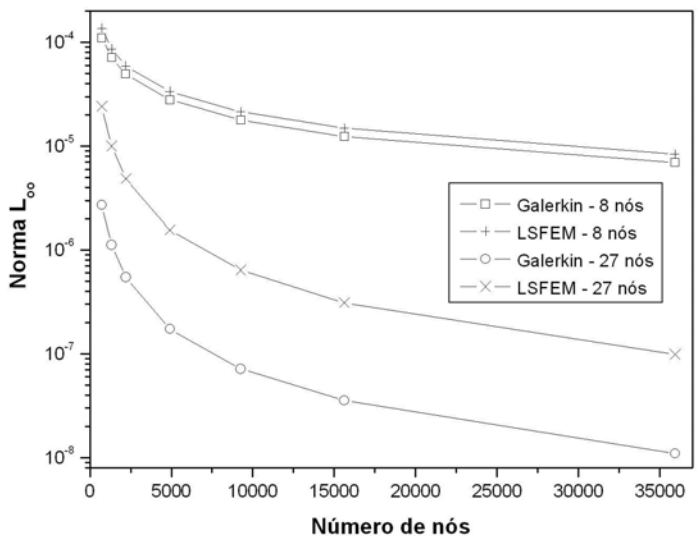

Figura 3.7 Norma L_∞ de T(x,y,z), Aplicação 2.

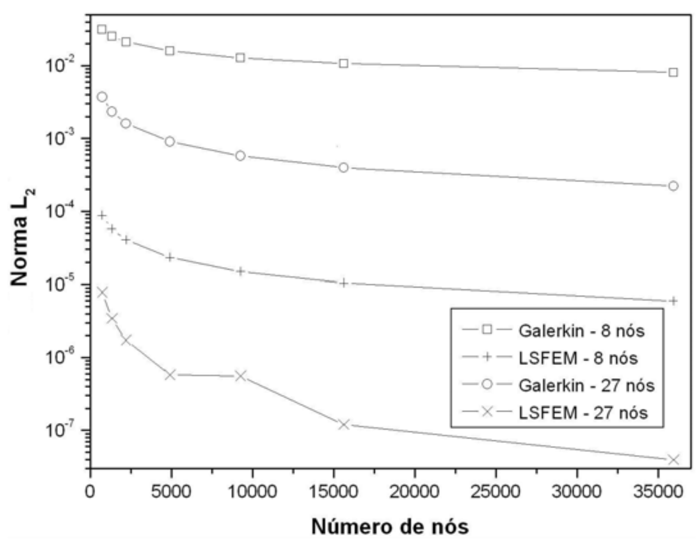

Figura 3.8 Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 2.

Na Fig. 3.10 apresenta-se a distribuição de temperatura no plano xz com y = 0,5. Na região próxima a x = 1 e z = 1 a temperatura se aproxima de $T(1;0,5;1) \approx 2,16$, e nas proximidades de x = 0 e z = 0 a temperatura se aproxima de $T(0;0,5;0) \approx 0,48$, conforme solução analítica. Neste caso adotamos o LSFEM para encontrar a solução numérica.

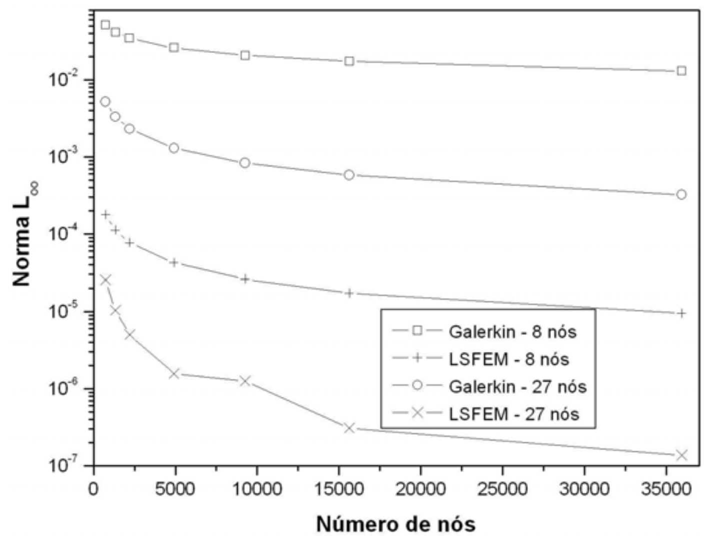

Figura 3.9 Norma L_∞ de $\partial T(x,y,z)/\partial x=\partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 2.

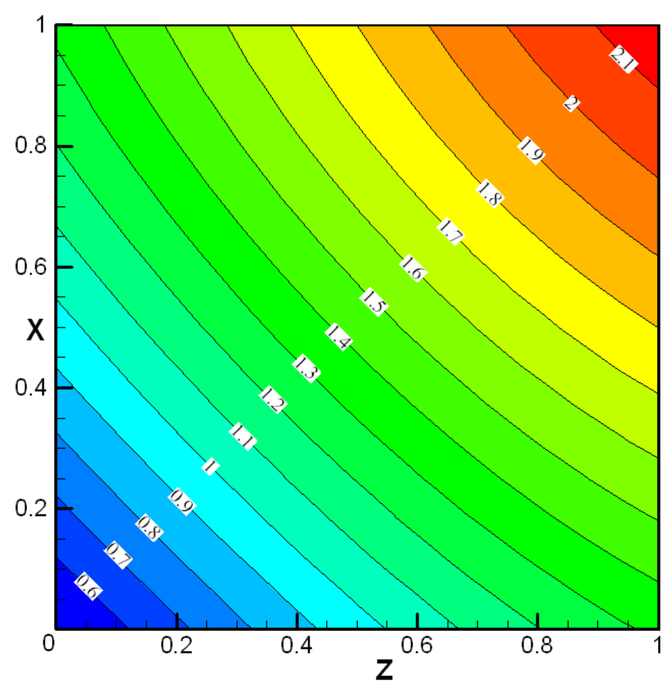

Figura 3.10 Distribuição de Temperatura no plano xz com y = 0,5 pelo LSFEM a partir de uma malha com 4913 nós (h =1/16) utilizando-se hexaedros com 8 nós, Aplicação 2.

3.4 Aplicação 3 – Convecção-Difusão.

Nesta aplicação os coeficientes A_x, A_y, A_z, k_x, k_y e k_z na equação (2.2) são todos unitários, sendo nulo somente o coeficiente B. A aplicação é realizada em um cubo unitário $\Omega = [0,1]^3$ sendo sua equação governante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0 .$$

Nesta aplicação será utilizada a solução analítica abaixo, a mesma pode ser encontrada em Hon e Chen (2003),

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-y} + e^{-z} .$$

$$\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial x} = -e^{-x} ; \quad \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y} = -e^{-y} ; \quad \frac{\partial T(x, y, z)}{\partial z} = -e^{-z} .$$

Nesta aplicação os coeficientes que acompanham os termos difusivos são iguais aos que acompanham os termos convectivos. Se notarmos que os coeficientes k_x, k_y e k_z poderiam ser analisados como iguais a 1/Pe (Pe é o número de Peclet que será mais detalhado na Aplicação 9) e que os coeficientes A_x, A_y e A_z são as velocidades em cada uma das três direções do espaço cartesiano, seria o mesmo que Pe = 1 e as velocidades = 1 também, ou por exemplo, Pe = 10 e as velocidades = 0,1, e assim por diante.

Nas aplicações 1 e 2, notamos que quando analisado os resultados numéricos de $T(x,y,z)$ o GFEM apresentou melhores resultados que o LSFEM, o mesmo já não acontece nesta aplicação. Para o uso de hexaedros com 8 nós, os dois métodos são rigorosamente semelhantes em seus resultados (Figuras 3.11 e 3.12), o mesmo não acontece com o uso de hexaedros com 27 nós, onde o LSFEM apresenta resultados com uma ordem de precisão a mais que o GFEM (Tabelas A11 e A12).

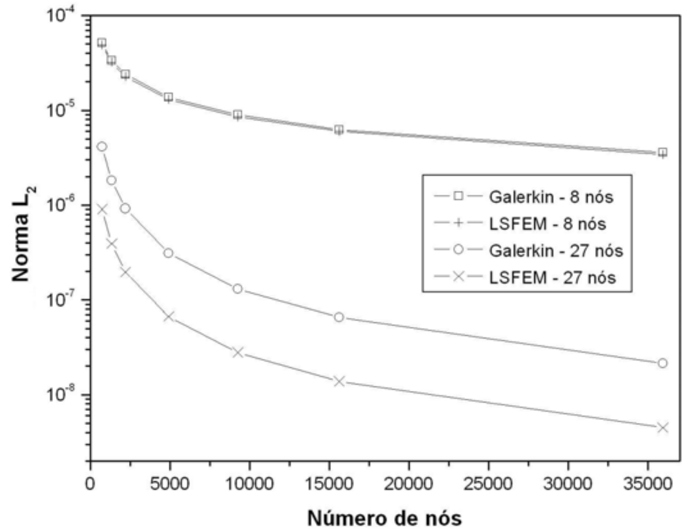

Figura 3.11 Norma L_2 de T(x,y,z), Aplicação 3.

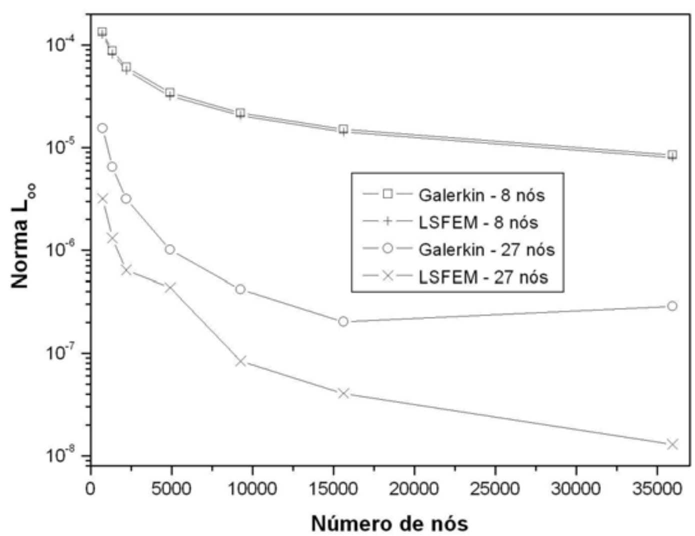

Figura 3.12 – Norma L_∞ de T(x,y,z) , Aplicação 3.

Para comparar os resultados dos dois métodos, suponha-se que para esta aplicação o objetivo fosse encontrar resultados com precisão de 10^{-4} (na norma L_∞). Se o foco for somente a variável $T(x,y,z)$, o GFEM com hexaedros com 8 nós e h = 1/8 (tempo computacional = 6s) já seria suficiente. Porém, se além de $T(x,y,z)$ necessita-se que as três derivadas tenham a mesma ordem de precisão, no GFEM seria necessário utilizar uma malha com hexaedros com 27 nós e h = 1/10 (tempo computacional = 598s), enquanto que o LSFEM com hexaedros com 8 nós e h = 1/8 (tempo computacional = 106s) apresenta resultados até um pouco melhores que uma precisão de 10^{-4} nas quatro variáveis T, q_x, q_z e q_z, com um tempo computacional muito menor (quase 6 vezes menor).

Como já havia acontecido nas aplicações 1 e 2, o LSFEM novamente apresentou resultados significativamente melhores que o GFEM na análise do erro na solução numérica das derivadas (Figuras 3.13 e 3.14), com a ressalva que na maioria dos valores de h, tanto para hexaedros com 8 nós como com 27 nós, a diferença chegou a ser "quatro" ordens de precisão a mais para este caso.

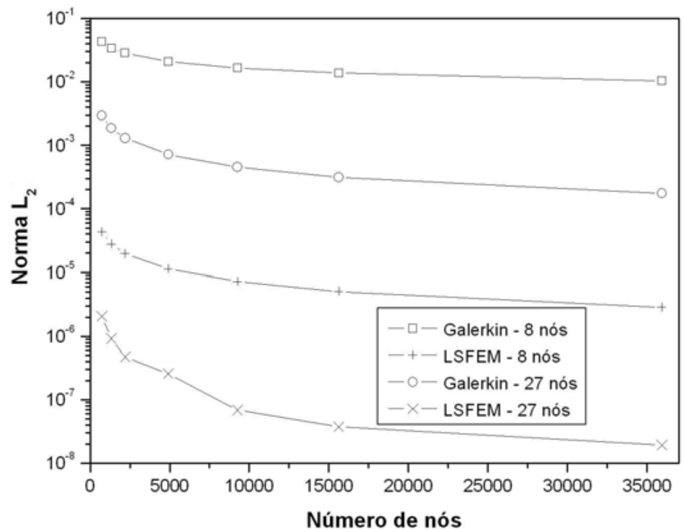

Figura 3.13 – Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 3.

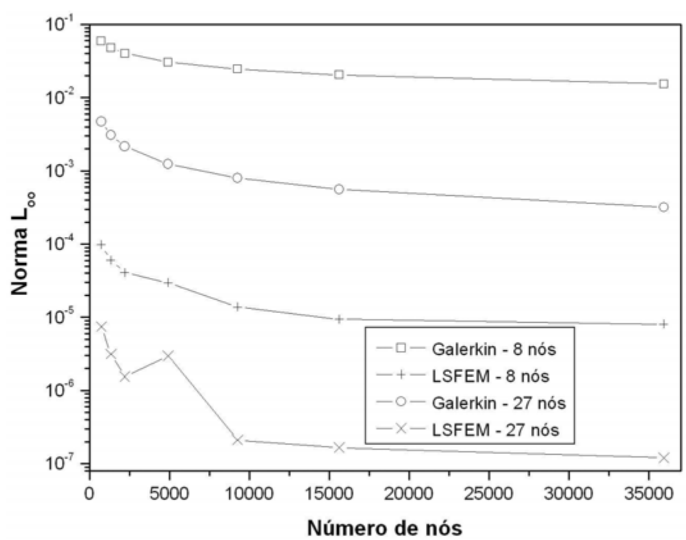

Figura 3.14 – Norma L_∞ de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 3.

Na Fig. 3.15 apresenta-se a distribuição de temperatura no plano xz com y = 0,5. Na região próxima a x = 1 e z = 1 a temperatura se aproxima de $T(1;0,5;1) \approx 1,34$, e nas proximidades de x = 0 e z = 0 a temperatura se aproxima de T(0;0,5;0) ≈ 2,61, conforme solução analítica. Neste caso adotamos o GFEM para encontrar a solução numérica.

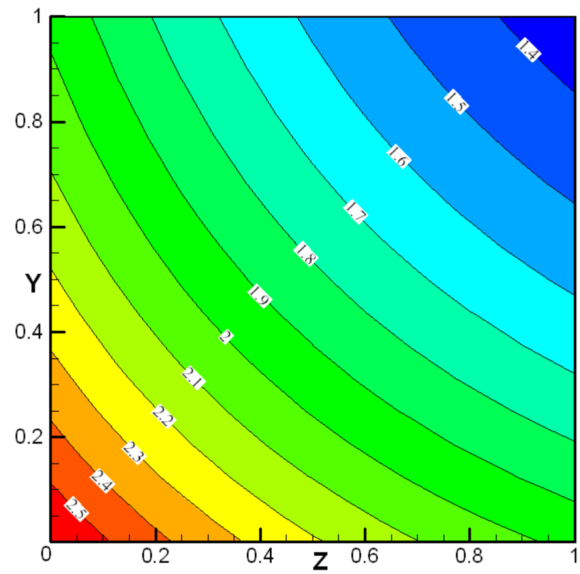

Figura 3.15 Distribuição de Temperatura da Aplicação 3 no plano yz com x = 0,5 pelo GFEM a partir de uma malha com 4913 nós (h =1/16) utilizando-se hexaedros com 8 nós.

3.5 Aplicação 4 – Convecção-Reação.

Nesta aplicação os coeficientes A_x, A_y, A_z na equação (2.2) são todos unitários, k_x, k_y e k_z são nulos e B = -3. A aplicação é realizada em um cubo unitário $\Omega = [0,1]^3$ sendo sua equação governante:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} - 3T = 0\,.$$

Na aplicação 1 (T(x, y=0 ou z = 0) = 0 à T(1; 0,5; 0,5) = 2), aplicação 2 (T(0,0,0) = 0 à T(1,1,1) ≈ 2,52) e aplicação 3 (T(1,1,1) ≈ 1,1 à T(0,0,0) = 3) a diferença do maior para o menor valor de $T(x,y,z)$ era muito pequena, nesta aplicação será analisado um caso de convecção-reação com uma menor temperatura de T(0,0,0) = 1 e a maior de T(1,1,1) ≈ 20,08. Para isso será adotada a seguinte solução analítica:

$$T(x,y,z) = e^{x+y+z}\ ; \quad \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} = e^{x+y+z}\ ; \quad \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} = e^{x+y+z}\ ; \quad \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = e^{x+y+z}\ .$$

Nesta aplicação notou-se algo diferente que nas aplicações anteriores. Analisando as normas do erro para $T(x,y,z)$ o GFEM com hexaedros com 8 nós apresentou resultados extremamente melhores que as outras três situações (Figuras 3.16 e 3.17). Entretanto, para uma malha com h = 1/20 com hexaedros com 8 nós (9261 nós em toda a malha), o erro analisado através da norma L_2 é 1,75E-07 (confira nas Tabelas A15 e A16) enquanto que para uma malha com h = 1/24 com hexaedros com 8 nós (15625 nós em toda a malha) o erro foi de 4,98E-07, ou seja, houve um pequeno aumento do erro com o refinamento.

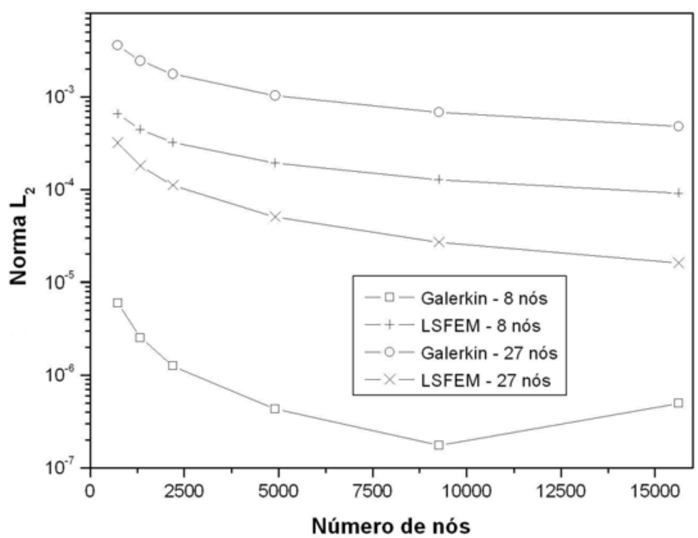

Figura 3.16 Norma L_2 de T(x,y,z), Aplicação 4.

Para analisar mais detalhadamente esta situação, rodou-se casos com h = 1/22 (12167 nós em toda a malha) e h = 1/26 (19683 nós em toda a malha), e constatou-se as seguintes normas L_2 1,92E-07 e 3,76E-06, respectivamente, o que leva-se a concluir que neste caso, a partir de um certo refinamento os resultados pelo GFEM alcançam uma eficiência máxima a ponto de com um maior refinamento, comecem a surgir erros de arredondamento.

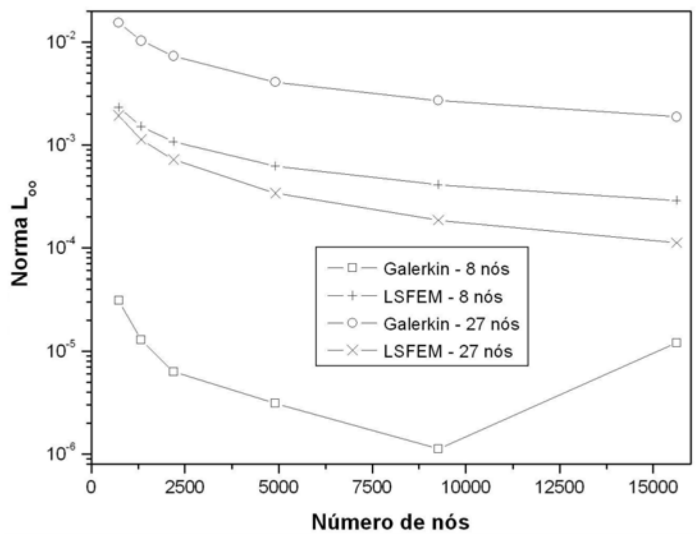

Figura 3.17 Norma L_∞ de T(x,y,z), Aplicação 4.

Para a análise da solução numérica das derivadas de *T* (Figuras 3.18 e 3.19), novamente o LSFEM apresentou resultados expressivamente melhores que o GFEM. Porém, para o LSFEM, os melhores resultados foram apresentados no uso de hexaedros com 8 nós, o que leva a crer, pelo menos nesta situação de convecção-reação sem difusão, que os resultados apresentados são de modo geral melhores com hexaedros com 8 nós, o que proporciona também, além de bons resultados numéricos (erros menores que 10^{-3}), um baixo tempo computacional quando comparados com hexaedros com 27 nós para o mesmo número de nós na malha.

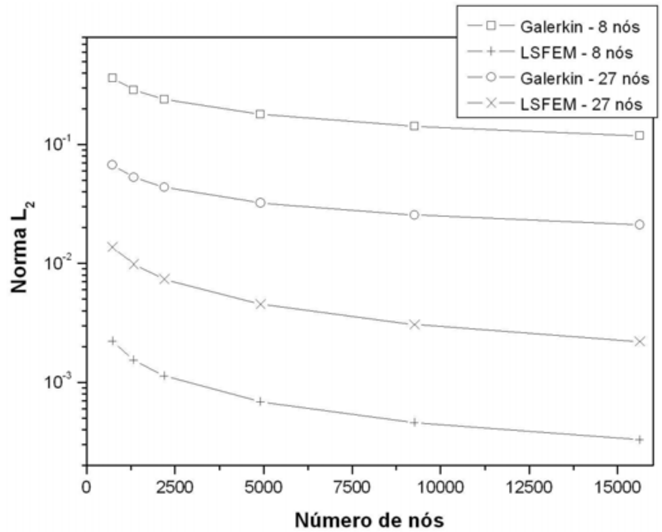

Figura 3.18 Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 4.

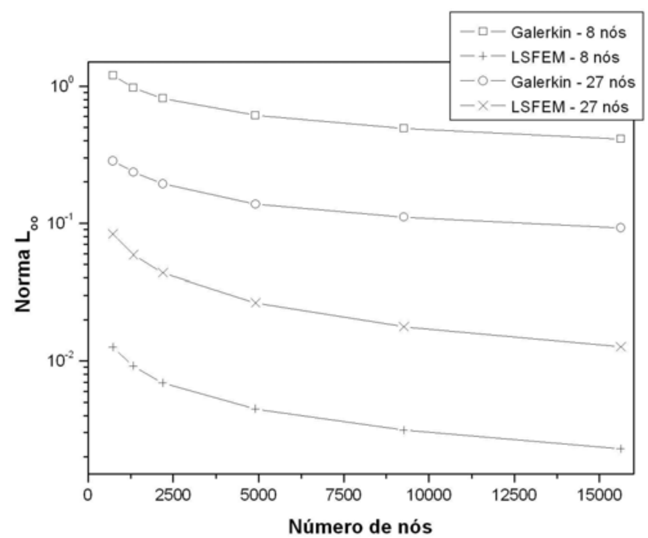

Figura 3.19 Norma L_∞ de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 4.

Na figura 3.20 apresenta-se a solução numérica de $\partial T/\partial x$ no plano xz com y = 0,5. Na região próxima a x = 1 e z = 1 a derivada em x se aproxima de $\partial T(1;0,5;1)/\partial x \approx 12,18$, e nas proximidades de x = 0 e z = 0 a temperatura se aproxima de $\partial T(0;0,5;0)/\partial x \approx 1,65$, conforme solução analítica. Neste caso adotamos o LSFEM para encontrar a solução numérica.

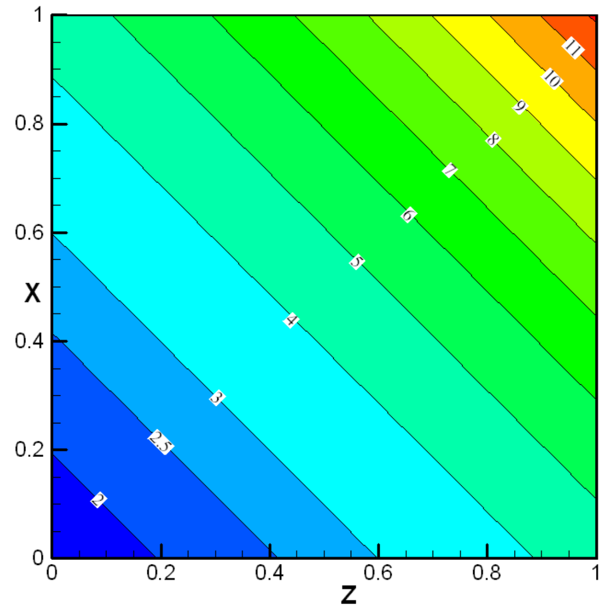

Figura 3.20 Distribuição de $\partial T/\partial$x no plano xz com y = 0,5, pelo LSFEM, com uma malha de h=1/20, 9261 nós, norma L_2 = 4,58E-04 e norma L_∞ =3,12E-03, Aplicação 4.

3.6 Aplicação 5 – Convecção-Difusão-Reação.

Nesta aplicação os coeficientes A_x, A_y, A_z na equação (2.2) são iguais a 10, k_x, k_y e k_z são unitários e B = 9. A aplicação é realizada em um cubo unitário $\Omega = [0,1]^3$ sendo sua equação governante:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 10\frac{\partial T}{\partial x} + 10\frac{\partial T}{\partial y} + 10\frac{\partial T}{\partial z} + 9T = 0$$

Por simplicidade, a solução analítica adotada nesta aplicação é a mesma adotada na aplicação 3.

Nas figuras 3.21 e 3.22 analisam-se as normas L_2 e L_∞ do erro cometido na solução de $T(x,y,z)$. Nota-se que o GFEM com hexaedros de 27 nós destaca-se com os melhores resultados dentre as quatro opções propostas neste trabalho. Nesta aplicação, os coeficientes que acompanham os termos convectivos são 10 vezes maiores que o que acompanha os termos difusivos, com isso esperava-se que as soluções numéricas apresentariam dificuldades por se tratar de um problema convectivo dominante, porém isto não aconteceu. Uma justificativa para este fato está na existência de um termo reativo com coeficiente B = 9, que acredita-se que ameniza o fato do caso ser convectivo dominante. Foi esta situação que motivou a análise que será feita posteriormente na aplicação 6.

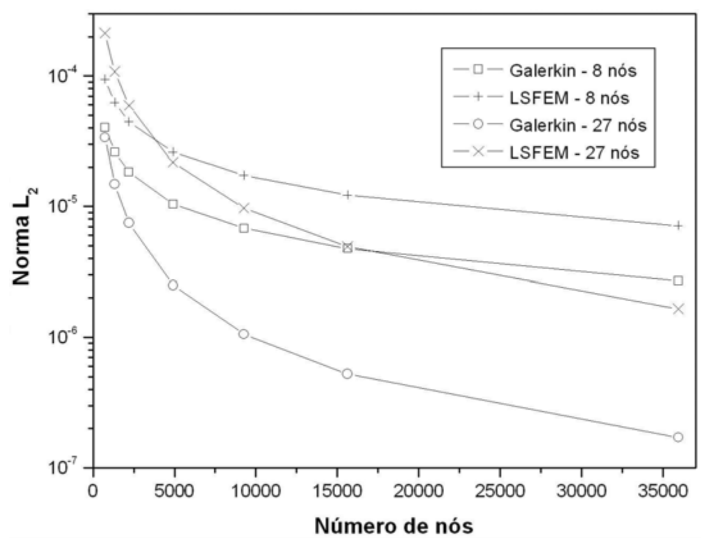

Figura 3.21 Norma L_2 de T(x,y,z), Aplicação 5.

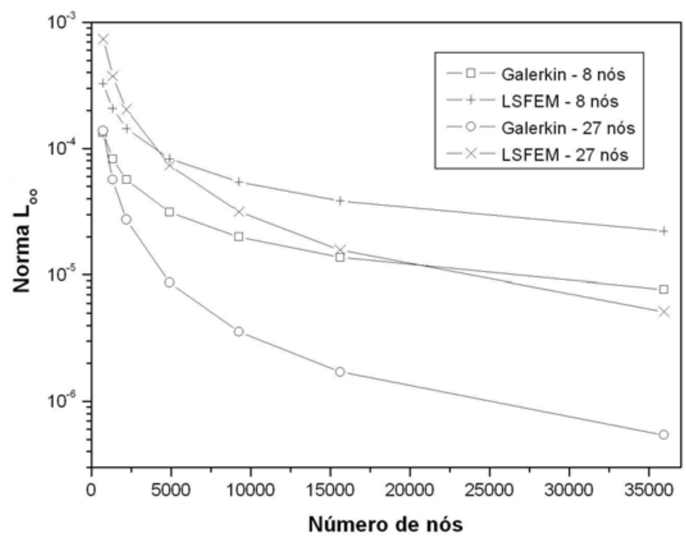

Figura 3.22 Norma L_∞ de T(x,y,z) , Aplicação 5.

Pode-se observar que o LSFEM até este momento está apresentando melhores resultados na solução numérica das derivadas de $T(x,y,z)$ (Figuras 3.23 e 3.24). Entretanto, nesta aplicação o LSFEM com hexaedros com 8 nós apresenta resultados melhores que o GFEM com 27 nós, e para mostrar a vantagem, por exemplo, tomando como referência uma malha que apresente pelo menos uma precisão de 10^{-4} (GFEM com hexaedros com 27 nós, h = 1/8, 4913 nós na malha, norma L_2 = 7,52E-04, tempo computacional = 244s e LSFEM com hexaedros com 8 nós, h = 1/8, 729 nós na malha, norma L_2 = 7,08E-04, tempo computacional = 114s) o GFEM utilizou um tempo computacional mais do que o dobro do LSFEM para alcançar uma norma L_2 aproximadamente igual.

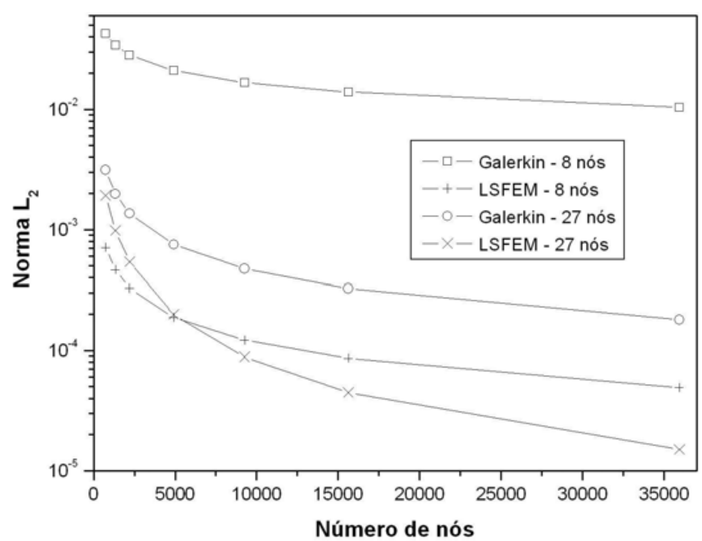

Figura 3.23 Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 5.

A análise de qual método custa um tempo computacional maior ou menor que o outro, é relativa, pois para problemas convectivos-difusivos-reativos se o objetivo for apenas o cálculo de $T(x,y,z)$, nesta aplicação o GFEM com h = 1/8 com hexaedros com 8 nós alcança uma norma L_2 = 4,02E-05 com um tempo computacional de 9s enquanto que na mesma situação o LSFEM apresenta norma L_2 = 9,41E-05 com um tempo computacional = 105s, porém o LSFEM tem nesta análise, quatro vezes mais graus de liberdade que o GFEM. Para equipara-los no número de graus de liberdade, o GFEM deveria ser utilizado com um h = 1/32 o que custaria um tempo computacional de 1420s.

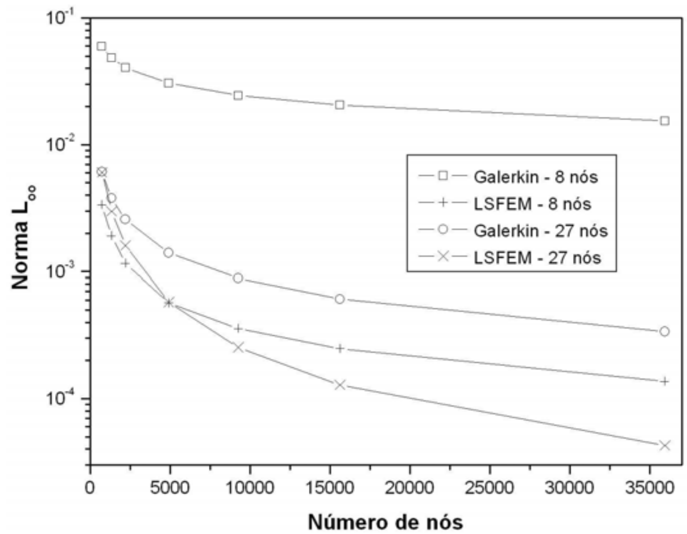

Figura 3.24 Norma L_∞ de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 5.

Na figura 3.25 apresenta-se a solução numérica de $\partial T/\partial x$ no plano xz com y = 0,5. Na região próxima a x = 1 e z = 1 a derivada em x se aproxima de $\partial T(1;0,5;1)/\partial x \approx -0,367$, e nas proximidades de x = 0 e z = 0 a temperatura se aproxima de $\partial T(0;0,5;0)/\partial x = 1$, conforme solução analítica. Neste caso adotamos o LSFEM para encontrar a solução numérica.

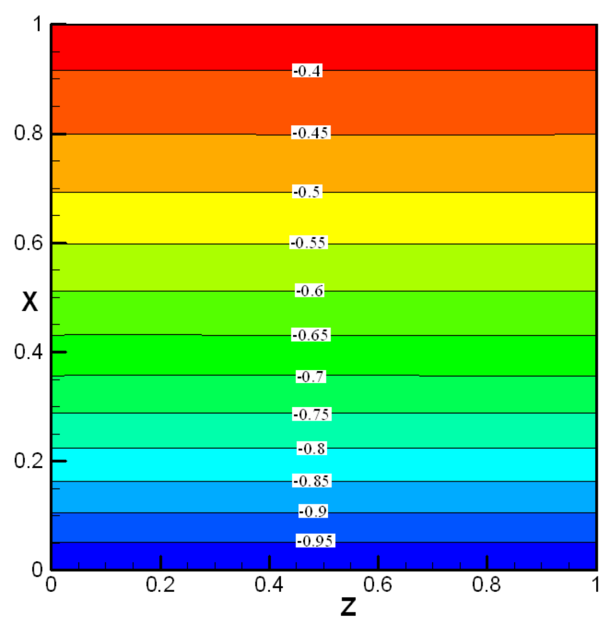

Figura 3.25 Distribuição de $\partial T/\partial x$ no plano xz com y = 0,5, pelo LSFEM, com uma malha de h=1/20, 9261 nós na malha, norma L_2 = 1,22E-04 e norma L_∞ = 3,57E-04, Aplicação 5.

3.7 Aplicação 6 – Convecção-Difusão com Convecção Dominante.

Nesta aplicação os coeficientes A_x, A_y, A_z na equação (2.2) são unitários, k_x, k_y e k_z são iguais a 1/A, onde "A" será variado e B é nulo. A aplicação é realizada em um cubo unitário $\Omega = [0,1]^3$ sendo sua equação governante:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0 .$$

Para solução analítica da equação acima, será adotada uma expressão semelhante a utilizada na aplicação 3, inserindo apenas o termo A, que será variado com o intuito de tornar a aplicação cada vez mais convectivo dominante, da seguinte forma:

$$T(x,y,z) = e^{-Ax} + e^{-Ay} + e^{-Az}$$

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} = -Ae^{-Ax}; \quad \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} = -Ae^{-Ay}; \qquad \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z} = -Ae^{-Az}.$$

Nas tabelas 3.3 e 3.4, apresenta-se a norma L_2 do erro cometido na solução numérica de *T* e de suas derivadas primeiras. Os valores de A foram adotados como 1, 5, 10, 25, 50, 100, 500 e 1000. Nota-se que na solução numérica de *T* ainda é possível alcançar para uma malha com h = 1/25 erros na ordem de 10^{-2} para o GFEM e o LSFEM para A = 50. A partir de A = 100, os dois métodos já começam a apresentar resultados não tão precisos, fato esperado pois o problema começa a ficar altamente convectivo. Apesar disso o GFEM ainda é capaz com uma malha com h = 1/25 e hexaedros com 8 nós obter uma precisão de ordem 10^{-1} na solução de *T* quando A = 1000. Isso não acontece na análise do erro da derivadas primeiras de *T*, onde erros muito expressivos são encontrados para as malhas adotadas.

Tabela 3.3 Norma L_2 – Solução $T(x, y, z)$ com hexaedros com 8 nós, Aplicação 6.

A	GFEM				LSFEM			
	h=1/4	**h=1/8**	**h=1/16**	**h=1/25**	**h=1/4**	**h=1/8**	**h=1/16**	**h=1/25**
1	1,88E-04	5,15E-05	1,37E-05	5,80E-06	1,77E-04	4,87E-05	1,30E-05	5,52E-06
5	2,38E-02	6,30E-03	1,64E-03	6,90E-04	1,83E-02	5,25E-03	1,42E-03	6,02E-04
10	9,85E-02	2,65E-02	6,68E-03	2,76E-03	8,06E-02	2,52E-02	6,93E-03	2,95E-03
25	3,82E-01	1,28E-01	3,37E-02	1,34E-02	3,48E-01	1,46E-01	4,65E-02	2,02E-02
50	8,19E-01	3,06E-01	1,02E-01	4,30E-02	8,12E-01	4,16E-01	1,62E-01	7,73E-02
100	1,66E-00	5,81E-01	2,36E-01	1,19E-01	1,73E-00	9,83E-01	4,57E-01	2,48E-01
500	8,67E-00	2,53E-00	8,26E-01	4,73E-01	9,16E-00	5,57E-00	3,02E-00	1,93E-00
1000	1,75E+01	5,08E-00	1,46E-00	6,99E-01	1,84E+01	1,13E+01	6,25E-00	4,09E-00

Tabela 3.4 Norma L_2 – Solução $\partial T/\partial x=\partial T/\partial y=\partial T/\partial z$ com hexaedros com 8 nós, Aplicação 6.

A	GFEM				LSFEM			
	h=1/4	**h=1/8**	**h=1/16**	**h=1/25**	**h=1/4**	**h=1/8**	**h=1/16**	**h=1/25**
1	8,70E-02	4,28E-02	2,10E-02	1,33E-02	1,62E-04	4,31E-05	1,14E-05	4,68E-06
5	1,15E-00	5,90E-01	2,84E-01	1,76E-01	3,70E-02	9,72E-03	2,54E-03	1,06E-03
10	3,06E-00	1,71E-00	8,59E-01	5,33E-01	1,91E-01	5,33E-02	1,36E-02	5,69E-03
25	9,40E-00	6,02E-00	3,43E-00	2,24E-00	1,18E-00	4,70E-01	1,24E-01	5,06E-02
50	20,35E-00	1,38E+01	8,67E-00	6,10E-00	3,12E-00	1,80E-00	6,40E-01	2,64E-01
100	4,24E+01	3,00E+01	18,89E-00	14,78E-00	6,90E-00	4,71E-00	2,49E-00	1,29E-00
500	2,18E+02	1,61E+02	1,15E+02	9,10E+01	3,67E+01	2,69E+01	1,81E+01	1,34E+01
1000	4,39E+02	3,26E+02	2,36E+02	1,88E+02	7,38E+01	5,45E+01	3,71E+01	2,81E+01

Para analisar os altos erros apresentados nas tabelas 3.5 e 3.6, utiliza-se como exemplo, o LSFEM com hexaedros com 8 nós, h = 1/25 e A = 1000, a norma L_2 para este caso é igual 1,71E+01, ou seja, 17,10. Pode parecer um valor muito alto, mas vale ressaltar que este é um valor absoluto, positivo, e que as derivadas primeiras para um A = 1000, tem seus valores em módulo variando de 0 (quando x, y ou z são iguais a 1) e 1000 (quando x, y e z são iguais a 0), se for feito a relação 17,10/1000 = 1,71%.

Tabela 3.5 Norma L_2 – Solução $T(x,y,z)$ com hexaedros com 27 nós, Aplicação 6.

A	**GFEM**				**LSFEM**			
	h=1/4	**h=1/6**	**h=1/8**	**h=1/10**	**h=1/4**	**h=1/6**	**h=1/8**	**h=1/10**
1	4,14E-06	9,23E-07	3,10E-07	1,31E-07	9,03E-07	1,97E-07	6,69E-08	2,79E-08
5	1,19E-03	2,87E-04	9,93E-05	4,27E-05	5,60E-04	1,27E-04	4,31E-05	1,83E-05
10	1,02E-02	2,88E-03	1,06E-03	4,72E-04	7,07E-03	1,91E-03	6,92E-04	3,04E-04
25	8,32E-02	3,50E-02	1,63E-02	8,36E-03	8,22E-02	3,42E-02	1,60E-02	8,28E-03
50	2,11E-01	1,21E-01	7,17E-02	4,42E-02	2,76E-01	1,53E-01	9,02E-02	5,60E-02
100	3,99E-01	2,56E-01	1,81E-01	1,31E-01	6,93E-01	4,46E-01	3,05E-01	2,18E-01
500	1,78E-00	8,94E-01	5,99E-01	4,68E-01	4,10E-00	2,93E-00	2,24E-00	1,79E-00
1000	3,61E-00	1,72E-00	1,04E-00	7,48E-01	8,36E-00	6,06E-00	4,70E-00	3,81E-00

E mais, os valores das derivadas primeiras são próximos de -1000 na região de (x,y,z)=(0,0,0) e em praticamente todo o restante do domínio próximos de zero, veja que $\frac{\partial T(0{,}1;0{,}1;0{,}1)}{\partial x} = -3{,}72\text{E-}41$ e $\frac{\partial T(0{,}01;0{,}01;0{,}01)}{\partial x} = -0{,}045$ estão próximos de $\frac{\partial T(0;0;0)}{\partial x} = -1000$. O mesmo raciocínio é válido quando do uso de hexaedros com 27 nós (Tabelas 3.5 e 3.6).

Tabela 3.6 Norma L_2 – Solução $\partial T/\partial x=\partial T/\partial y=\partial T/\partial z$ com hexaedros com 27 nós, Aplicação 6.

A	**GFEM**				**LSFEM**			
	h=1/4	**h=1/6**	**h=1/8**	**h=1/10**	**h=1/4**	**h=1/6**	**h=1/8**	**h=1/10**
1	2,95E-03	1,29E-03	7,18E-04	4,55E-04	2,07E-06	4,70E-07	2,57E-07	6,87E-08
5	1,86E-01	8,59E-02	4,83E-02	3,07E-02	2,28E-03	5,84E-04	2,07E-04	9,02E-05
10	8,92E-01	4,58E-01	2,71E-01	1,77E-01	2,65E-02	9,37E-03	3,81E-03	1,78E-03
25	4,65E-00	2,95E-00	2,02E-00	1,45E-00	1,91E-01	1,17E-01	7,71E-02	4,92E-02
50	1,23E+01	8,80E-00	6,67E-00	5,25E-00	8,14E-01	4,11E-01	2,60E-01	2,10E-01
100	2,86E+01	2,19E+01	17,64E-00	1,46E+01	2,37E-00	1,62E-00	1,09E-00	7,34E-01
500	1,59E+02	1,31E+02	1,13E+02	1,00E+02	1,42E+01	1,14E+01	9,52E-00	8,17E-00
1000	3,21E+02	2,67E+02	2,33E+02	2,08E+02	2,88E+01	2,33E+01	1,97E+01	1,71E+01

Nas primeiras seis aplicações, os coeficientes da equação eram todos “constantes”. Nas aplicações 7 e 8, destacaremos duas aplicações onde os coeficientes são variáveis. Na aplicação 7 os coeficientes são funções lineares e na aplicação 8 serão funções quadráticas, para os dois casos apresentaremos um tipo de solução analítica para que seja possível a análise das normas dos erros na solução numérica.

3.8 Aplicação 7 – Convecção-Difusão-Reação com coeficientes variáveis (funções lineares).

Como foi dito anteriormente, nesta aplicação adotaremos coeficientes variáveis para A_x, A_y, A_z e B, enquanto que k_x, k_y e k_z são unitários. O domínio é um cubo unitário e a equação governante é a seguinte:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+10x\frac{\partial T}{\partial x}+10y\frac{\partial T}{\partial y}+10z\frac{\partial T}{\partial z}-BT=0\,,$$

com $B=10(x+y+z)+3$

Para esta aplicação será adotada a solução analítica da aplicação 4. O mesmo será feito posteriormente na aplicação 8.

Nas figuras 3.26 e 3.27 são apresentados os resultados numéricos de $T(x,y,z)$. Quando os coeficientes eram constantes de modo geral os resultados apresentados com hexaedros com 27 nós eram melhores que os com 8 nós para os dois métodos (GFEM e LSFEM). Porém nesta aplicação isso não acontece, o GFEM apresenta melhores resultados nos dois hexaedros, e de modo geral apresenta uma precisão de uma a duas ordens a mais que o LSFEM.

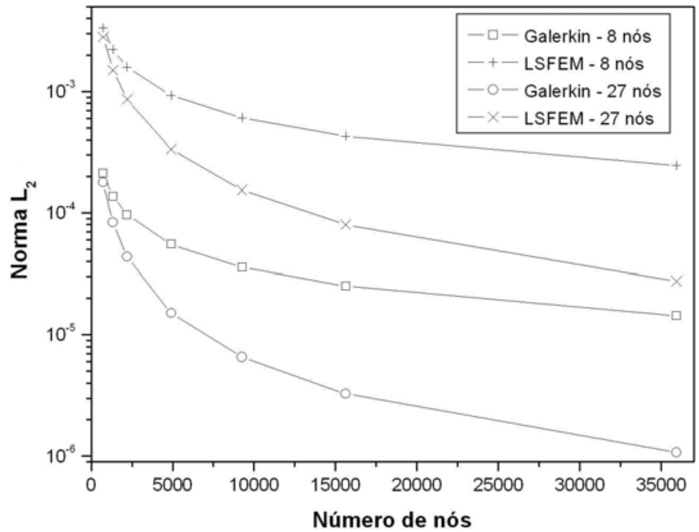

Figura 3.26 Norma L_2 de T(x,y,z), Aplicação 7.

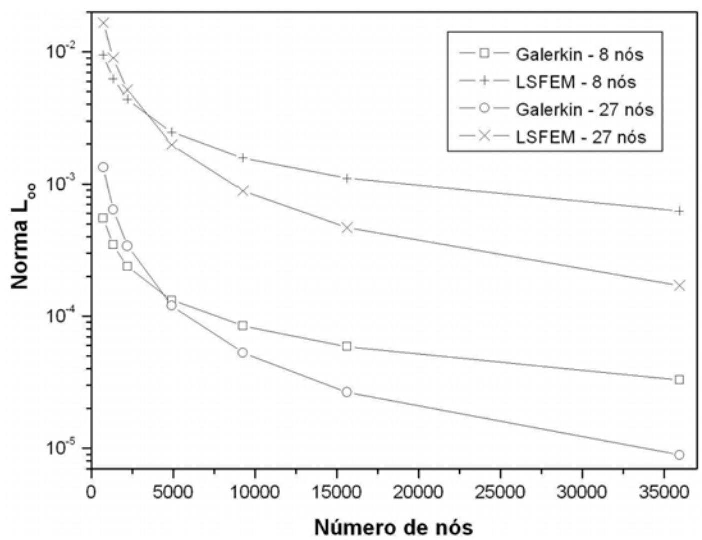

Figura 3.27 Norma L_∞ de T(x,y,z), Aplicação 7.

Ao contrário de *T*(*x,y,z*), nas derivadas primeiras (Figuras 3.28 e 3.29), o LSFEM continua apresentado melhores resultados, com o especial destaque que com hexaedros com 8 ou 27 nós os resultados são semelhantes.

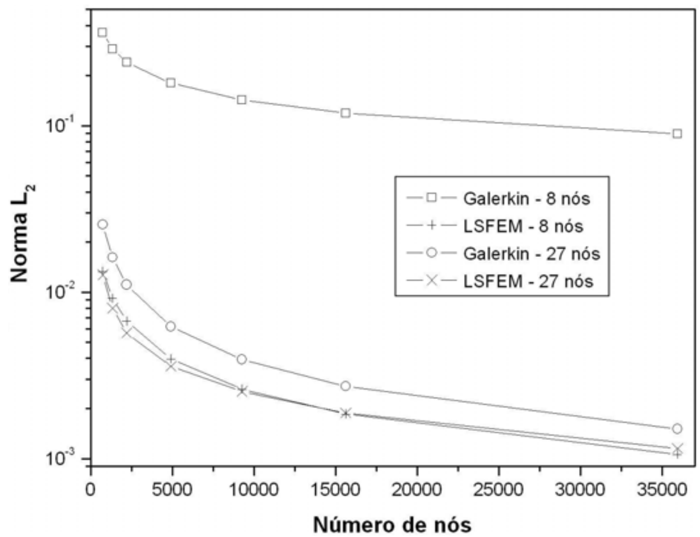

Figura 3.28 Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 7.

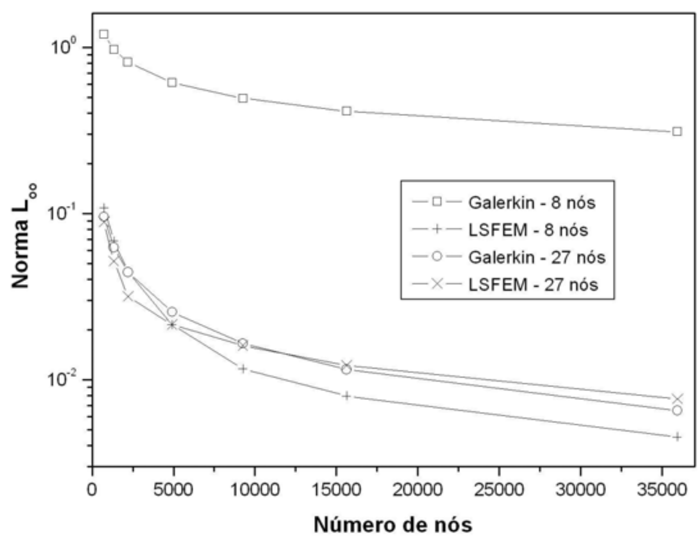

Figura 3.29 Norma L_∞ de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 7.

Um diferencial na solução numérica de problemas com coeficientes variáveis, é a necessidade da resolução de todas as matrizes dos elementos, isso não acontecia nas primeiras seis aplicações pois sendo os coeficientes constantes, as matrizes dos elementos eram todas iguais, sendo necessário calcular apenas a primeira matriz. Por exemplo, para o GFEM com hexaedros com 27 nós e h = 1/8, tem-se matrizes do elemento de ordem 27x27, onde será necessário construir 512 matrizes do elemento com um tempo computacional de 291s. Se não fosse necessário calcular todas as matrizes, sendo apenas necessário calcular a primeira como nas seis primeiras aplicações, o tempo computacional seria de 246s, em torno de 15,46% a menos.

Para o LSFEM, toma-se como exemplo um caso com hexaedros com 27 nós e h = 1/6, onde as matrizes do elemento são de ordem 104x104 e serão construídas 216 matrizes do elemento com um tempo computacional de 2250s, enquanto que se fosse apenas calculada uma matriz do elemento o tempo computacional seria de 1706s, ou seja, 24,17% mais rápido.

3.9 Aplicação 8 - Convecção-Difusão-Reação com coeficientes variáveis (funções quadráticas).

Como já havia sido previsto, nesta aplicação serão utilizados coeficientes variáveis, sendo estes funções quadráticas, com o intuito de avaliar o comportamento dos dois métodos nesta situação. A equação governante proposta nesta aplicação (em um domínio cubo unitário) é:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+100(-x^2+x)\frac{\partial T}{\partial x}+100(-y^2+y)\frac{\partial T}{\partial y}+100(-z^2+z)\frac{\partial T}{\partial z}-BT=0,$$

com $B=100[(-x^2+x)+(-y^2+y)+(-z+z^2)]+3$.

A solução analítica adotada para esta aplicação é igual a das aplicações 4 e 7.

Assim como na aplicação 7, o GFEM apresenta melhores resultados nos dois hexaedros adotados neste trabalho (Figuras 3.30 a 3.33), com a ressalva que o LSFEM com hexaedros com 27 nós o refinamento demonstra que os resultados tendem a melhorar, enquanto que com hexaedros com 8 nós além dos erros serem altos (na ordem de 10^{-1}), os valores começam a ficar constante. As aplicações 7 e 8 nos levam a crer que o LSFEM não é adequado para o caso de coeficientes variáveis do tipo funções lineares ou quadráticas, principalmente com o uso de hexaedros com 8 nós (funções de interpolação lineares).

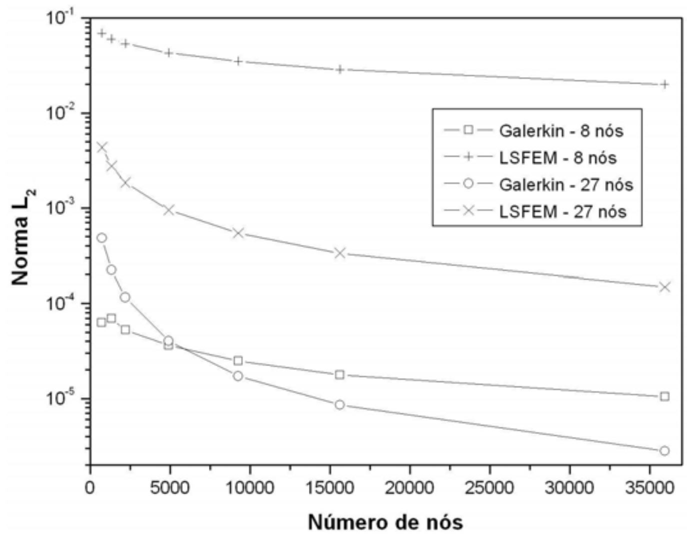

Figura 3.30 Norma L_2 de T(x,y,z), Aplicação 8.

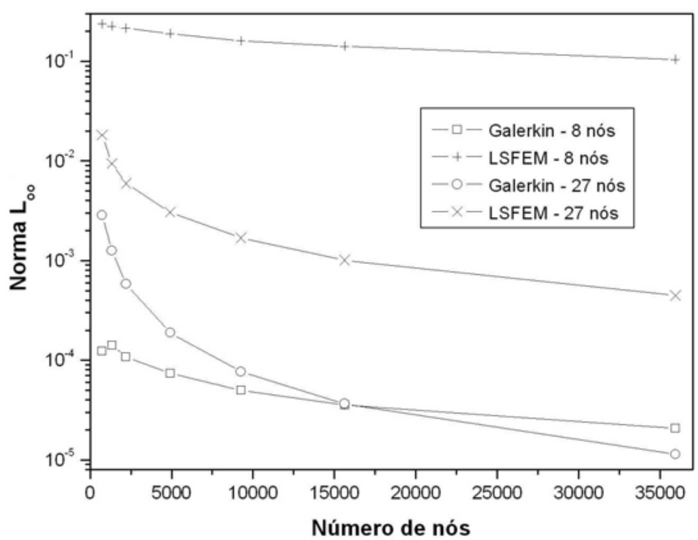

Figura 3.31 Norma L_∞ de T(x,y,z), Aplicação 8.

Até a aplicação 7, era repetitivo dizer que o LSFEM fornecia melhores resultados que o GFEM na análise do erro na solução numérica das derivadas primeiras de $T(x,y,z)$. Neste caso isso não aconteceu, pois com o uso de hexaedros com 8 nós o GFEM apresentou resultados melhores que o LSFEM, apesar dos erros estarem na melhor das situações na ordem de 10^{-1} (Figuras 3.32 e 3.33). Com o uso de hexaedros com 27 nós, o GFEM também apresentou os melhores resultados que o LSFEM, chegando a uma ordem de precisão de 10^{-2} somente com uma malha com h = 1/16.

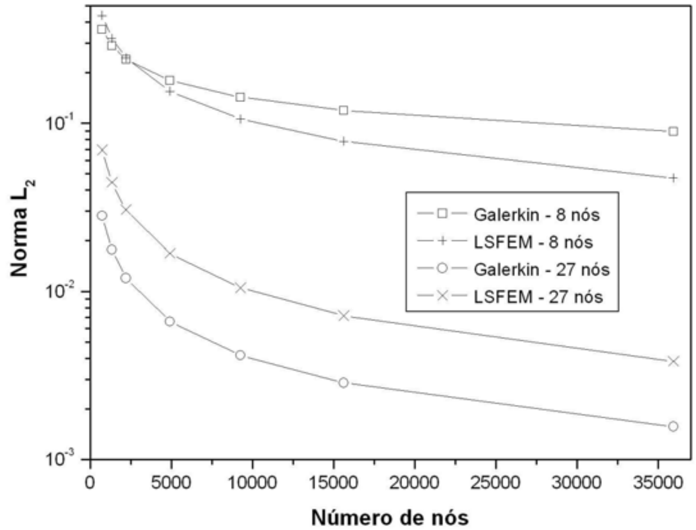

Figura 3.32 Norma L_2 de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 8.

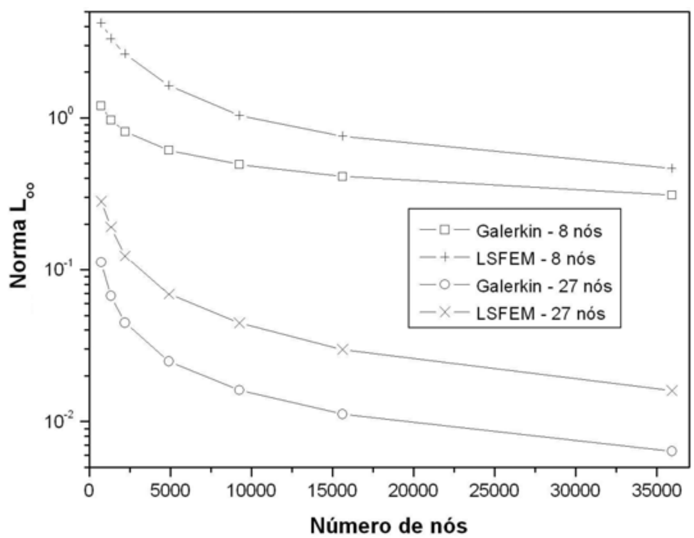

Figura 3.33 Norma L_{∞} de $\partial T(x,y,z)/\partial x = \partial T(x,y,z)/\partial y = \partial T(x,y,z)/\partial z$, Aplicação 8.

3.10 Aplicação 9 – Escoamento de Ar em um Canal Retangular.

Nesta aplicação será proposta uma aplicação prática. Será considerado um escoamento de ar em um canal retangular ($0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$ e $0 \leq z \leq L_z$). Foi definido um perfil de velocidades parabólico, representando um escoamento laminar completamente desenvolvido:

$$A_z = \frac{16U}{L_x \cdot L_y}\left(\frac{-x^2}{L_x} + x\right)\left(\frac{-y^2}{L_y} + y\right)$$

onde U é a velocidade máxima na linha de centro do escoamento.

Assim apresenta-se a equação governante na forma:

$$\frac{1}{Pe}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) - A_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

onde $Pe = \frac{\rho . U . c_p . L}{k}$, com ρ a densidade em kg/m^3, U a velocidade máxima em m/s, c_p o calor específico em J/kg.K, L a largura do canal em m e k a condutividade térmica em W/m.K.

As condições de contorno foram adotadas de tal maneira a representar um problema de aquecimento ao longo do canal retangular da seguinte maneira:

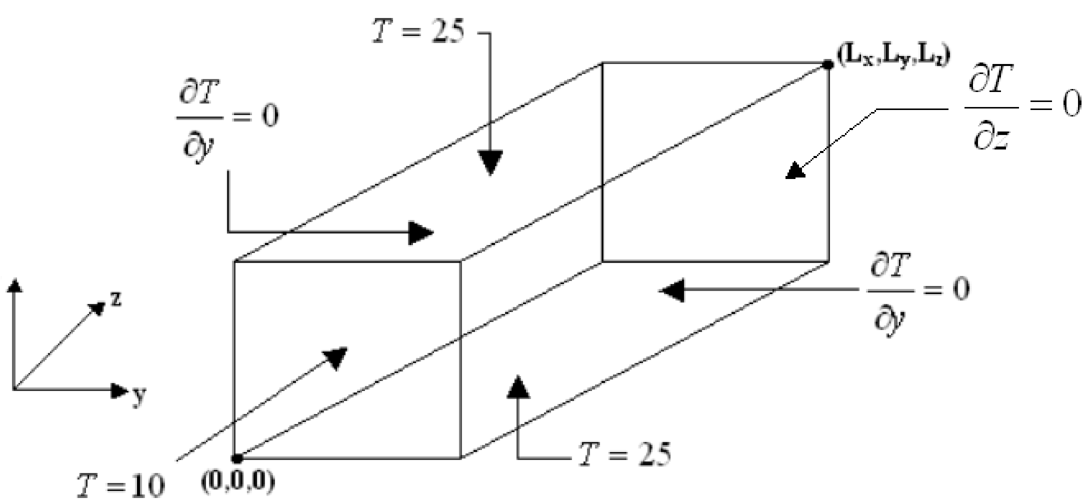

Figura 3.34 Condições de contorno, Aplicação 9.

Faces **x = 0 e x = L_x** $\Rightarrow$ $T(x, y, z)$ **= 25.**

Faces **y = 0 e y = L_y** $\Rightarrow$ $\frac{\partial T(x, y, z)}{\partial y}$ **= 0.**

Face $\mathbf{z = 0} \Rightarrow T(x, y, z) = 10$.

Para os valores das propriedades do fluido (ar), utiliza-se dados de Çengel e Cimbala (2007). Para T = 10ºC, e utilizando valores tabelados, temos:

$$Pe_{10°C} = \frac{1{,}246 \times 0{,}1 \times 1006 \times 0{,}1}{0{,}02439} = 513{,}93$$

e para T = 25ºC, e também utilizando valores tabelados, temos:

$$Pe_{25°C} = \frac{1{,}184 \times 0{,}1 \times 1007 \times 0{,}1}{0{,}02551} = 467{,}38.$$

Como a variação das propriedades do ar entre as temperaturas 10º e 25ºC é pequena, será adotado um Peclet médio da seguinte maneira: $Pe = \frac{513{,}93 + 467{,}38}{2} = 490{,}65$. Os cálculos acima servem apenas como exemplo, visto que para este exemplo foram adotados L = 0,1m e $U = 0{,}1$m/s.

A primeira análise feita nesta aplicação foi refinar a malha (no eixo z) até constatar que a diferença entre os resultados ficassem abaixo de um erro aceitável (para analisar este erro, comparamos para vários refinamentos o valor de T para valores de z = 0,1; 0,2; ..., 0,9; 1,0 e x = y = 0,1 com a solução considerada ótima). Para isso adotados como malha ótima, uma malha com 176841 nós (Δx=Δy=0,01, Δz=1/400, L_x=L_y= 0,2 e L_z=1).

Notou-se que a partir de uma malha com 71001 nós (Δx=Δy=0,01, Δz=1/160) o "erro" já estava na ordem de 10^{-4} (Figura 3.35), que pode ser considerado um erro aceitável. Mas vale ressaltar que neste caso, com uma malha com 18081 nós (Δx=Δy=0,01, Δz=1/40) já se alcançou um "erro" na ordem de 10^{-3} (erro = 3,57E-03).

Agora, serão apresentados dois estudos: (a) para uma mesma velocidade máxima qual a influência da largura de entrada do canal; (b) para uma mesma secção de entrada, qual a influência da velocidade máxima do escoamento ao longo do canal.

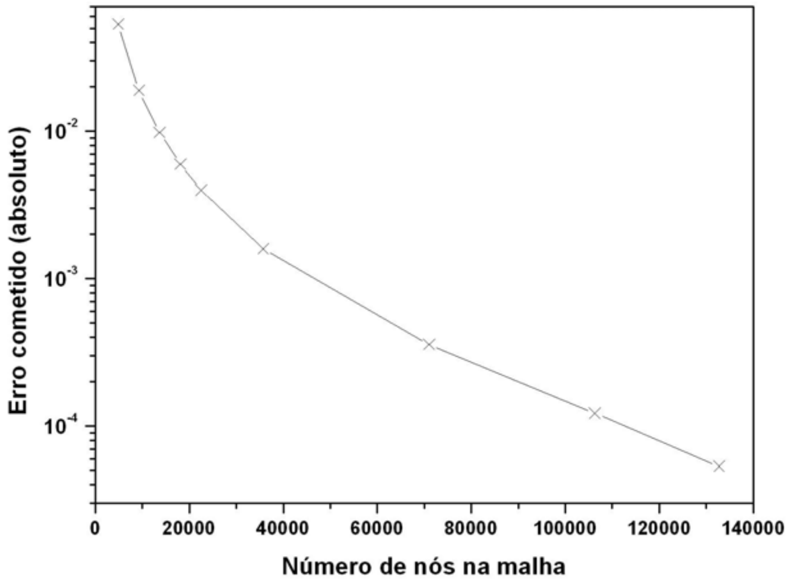

Figura 3.35 Análise de erro ao longo do eixo z para x=y=0,1 pelo GFEM, hexaedros com 8 nós, Pe = 981,31, v_{max} = 0,1m/s, Aplicação 9.

Para analisar o caso (a), escolheu-se o GFEM com hexaedros com 8 nós e uma malha com 71001 nós, conforme figuras 3.36, 3.37 e 3.38.

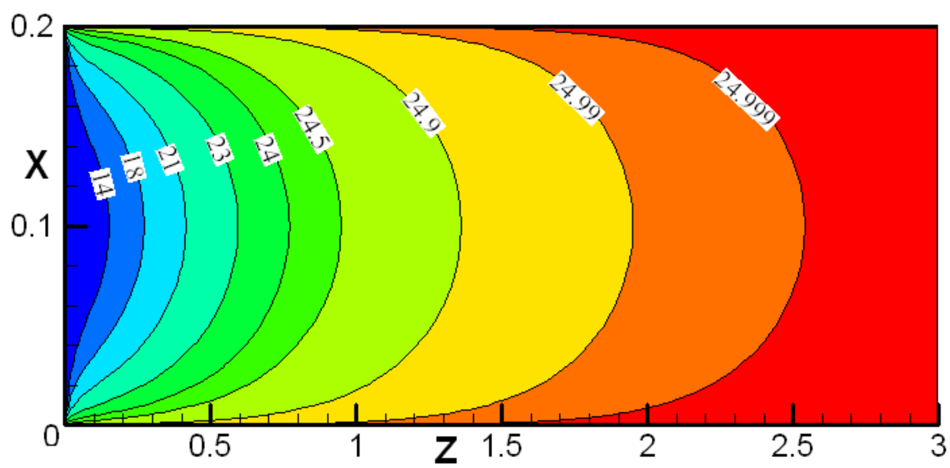

Figura 3.36 Perfil de Temperatura no plano xz para y = 0,1 pelo GFEM a partir de uma malha com Δx=Δy=0,01 e Δz=1/75 (71001 nós), elementos com 8 nós, secção de entrada de 20cm × 20cm, Pe = 981,33, v_{max} = 0,1 m/s, Aplicação 9.

Analisando-se as figuras 3.36, 3.37 e 3.38, nota-se a influência da secção de entrada no perfil de temperatura. No caso de uma secção de entrada 20cm × 20cm (Figura 3.35), foi necessário em torno de 1,5m de comprimento de canal (eixo z) para obter uma temperatura de 24,9ºC. Na secção de entrada 30cm × 30cm (Figura 3.37), por sua vez, foi necessário em torno de 4m de canal, enquanto que na secção de entrada 40cm × 40cm (Figura 3.38) foi necessário quase 10m de comprimento de canal, ou seja, quanto maior a secção do canal analisado maior será o comprimento para que o fluido seja aquecido até a temperatura desejada, sendo isto um resultado termicamente já esperado.

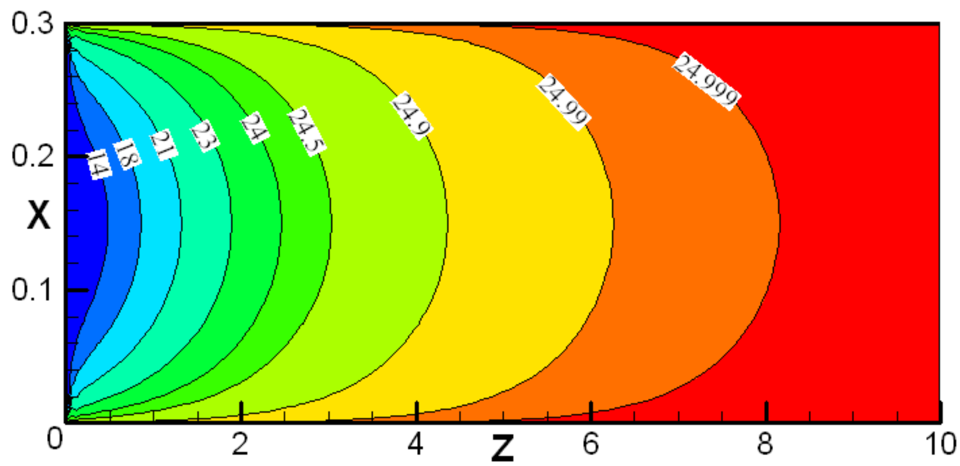

Figura 3.37 Perfil de Temperatura no plano xz para y = 0,15 pelo GFEM a partir de uma malha com $\Delta x = \Delta y = 0{,}015$ e $\Delta z = 1/30$ (71001 nós), elementos com 8 nós, secção de entrada de 30cm × 30cm, Pe = 1471,98, v_{max} = 0,1 m/s, Aplicação 9.

Para analisar o caso (b), utilizou-se o LSFEM com hexaedros com 8 nós para velocidades de 0,2 e 0,5m/s. Para a velocidade máxima igual a 0,1m/s, tem-se a figura 3.36 (pelo Método de Galerkin), que já foi dito, necessitou de 1,5m de comprimento de canal para alcançar uma temperatura de 24,9ºC, agora para uma velocidade máxima de 0,2m/s utilizou-se 22491 nós (Figura 3.39) e necessitou-se de um pouco mais que 5m de comprimento de canal para alcançar a mesma temperatura. Por fim, utilizou-se 25519 nós para analisar um caso com velocidade máxima igual a 0,5m/s (Figura 3.40) e o comprimento necessário foi de aproximadamente 30m, ou seja, quanto maior a velocidade, maior deverá ser o comprimento do canal para alcançar 24,9ºC.

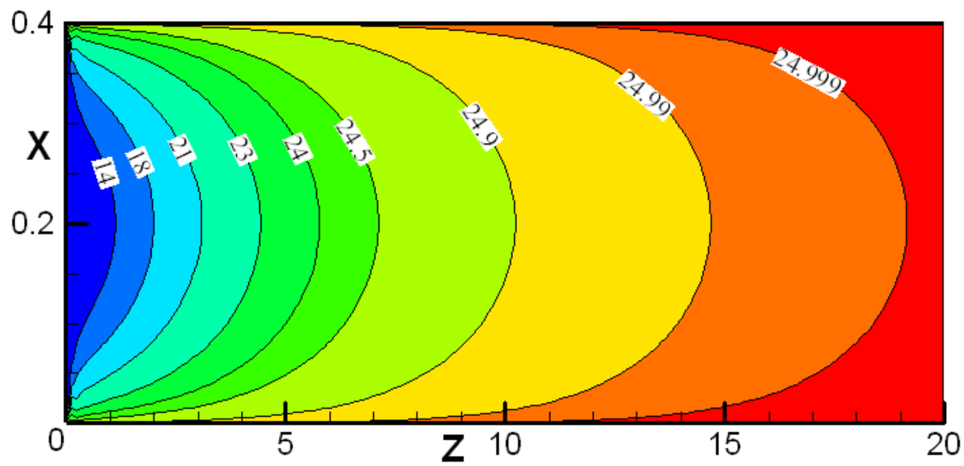

Figura 3.38 Perfil de Temperatura no plano xz para y = 0,2 GFEM a partir de uma malha com Δx=Δy=0,02 e Δz=0,125 (71001 nós), elementos com 8 nós, secção de entrada de 40cm × 40cm, Pe = 1962,64, v_{max} = 0,1 m/s, Aplicação 9.

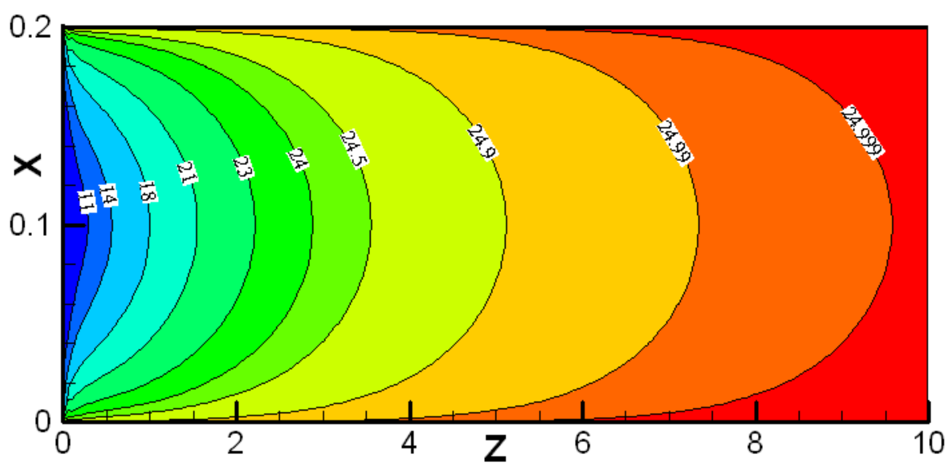

Figura 3.39 Perfil de Temperatura no plano xz para y = 0,1 pelo LSFEM a partir de uma malha com Δx=Δy=0,01 e Δz=0,05 (88641 nós), elementos com 8 nós, secção de entrada de 20cm × 20cm, Pe = 1962,62, v_{max} = 0,2 m/s.

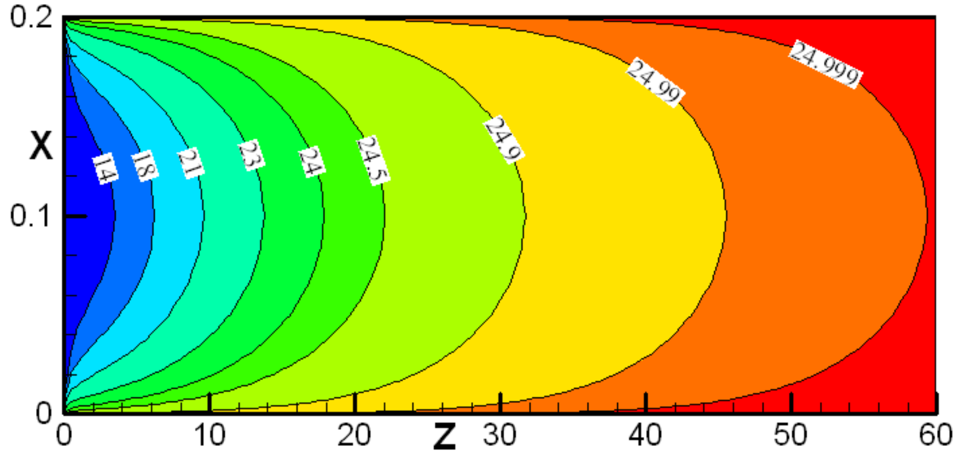

Figura 3.40 Perfil de Temperatura no plano xz para y = 0,1 pelo LSFEM a partir de uma malha com Δx=Δy=1/60 e Δz=0,4 (25519 nós), elementos com 8 nós, secção de entrada de 20cm × 20cm, Pe = 4906,55, v_{max} = 0,5 m/s.

Conclusões e Sugestões

Neste trabalho o Método dos Elementos Finitos nas variantes Galerkin e Mínimos Quadrados mostrou-se uma poderosa ferramenta na solução da equação de convecção-difusão-reação tridimensional em regime permanente.

Para problemas de difusão pura e difusão-reação com coeficientes constantes, os dois métodos apresentaram resultados semelhantes na análise da solução de $T(x,y,z)$, com ligeira vantagem para o Método de Galerkin. Porém, para estes dois tipos de problemas, o Método dos Mínimos Quadrados, que prove o cômputo direto das derivadas primeiras de $T(x,y,z)$, apresenta resultados expressivamente melhores que o Galerkin na análise do erro da solução numérica das derivadas primeiras de $T(x,y,z)$, chegando em alguns refinamentos a apresentar quatro ordens de precisão a mais.

Por sua vez, para problemas de convecção-difusão com coeficientes constantes, os dois métodos apresentaram resultados muito semelhantes quando utilizados hexaedros com 8 nós para solução numérica de $T(x,y,z)$, enquanto que para hexaedros com 27 nós o Método dos Mínimos Quadrados apresentou resultados ligeiramente melhores. Para este problema o Método dos Mínimos Quadrados não só apresentou os resultados mais precisos na solução numérica das derivadas, como para hexaedros com 8 nós o Método dos Mínimos Quadrados obteve em torno de uma ordem de precisão a mais que o Método de Galerkin com hexaedros com 27 nós.

Para o caso de convecção-reação (para os refinamentos adotados), o Método de Galerkin com hexaedros com 8 nós apresentou resultados expressivamente melhores. Porém, nota-se que a partir de um certo refinamento o erro começa a aumentar em vez de continuar a diminuir, o que leva a crer que para esse caso, o Método de Galerkin funciona bem apenas com malhas relativamente grosseiras. Em contrapartida, na análise da solução numérica das derivadas, o Método dos Mínimos Quadrados obteve seus melhores resultados com hexaedros com 8 nós. Isso nos leva a crer que nos dois métodos, o uso de hexaedros com 8 nós é o mais aconselhável para problemas de convecção-reação.

Na convecção-difusão-reação, notou-se que o Método de Galerkin na solução numérica de $T(x,y,z)$ obteve os melhores resultados assim como nos casos de difusão pura e difusão-reação. Acredita-se que o termo reativo ameniza o termo convectivo, responsável pelas maiores oscilações numéricas, não tornando o caso convectivo dominante. Em contrapartida, o Método dos Mínimos Quadrados continua apresentando os melhores resultados na solução das derivadas.

Quando o problema analisado foi de convecção-difusão-reação com os coeficientes variáveis o Método de Galerkin apresentou melhores resultados que o Método dos Mínimos Quadrados na solução de $T(x,y,z)$, resultados compatíveis na solução das derivadas quando os coeficientes eram funções lineares, e melhores resultados na solução das derivadas quando os coeficientes eram funções quadráticas. É importante destacar também, que para coeficientes variáveis surgirá a necessidade de calcular todas as matrizes dos elementos, tornando assim maior o tempo computacional.

Após os comentários gerais dos tipos de problemas envolvidos neste trabalho podemos fazer as seguintes conclusões:

- se for necessário apenas encontrar a solução de $T(x,y,z)$, de modo geral sugere-se o Método de Galerkin, por ser eficiente e apresentar um baixo tempo computacional;

- se for necessário encontrar as soluções das derivadas primeiras de $T(x,y,z)$ para problemas com coeficientes constantes, aconselha-se o Método dos Mínimos Quadrados que prove diretamente esta solução e apresenta bons resultados sem a necessidade de malhas muito refinadas, conseqüentemente com um baixo tempo computacional;

- para casos com coeficientes variáveis, aconselha-se o Método de Galerkin que apresenta melhores resultados na solução de $T(x,y,z)$ e de suas derivadas primeiras.

Uma pergunta importante que surgiu no final deste estudo foi: aplicando-se o Método dos Mínimos Quadrados sem equações auxiliares e utilizando-se o mesmo esquema utilizado no Método de Galerkin para encontrar a solução das derivadas primeiras de $T(x,y,z)$ como seriam os resultados? Esta é uma das sugestões para trabalhos futuros, visando a continuidade deste trabalho. As sugestões podem ser resumidas pelos seguintes itens:

- estender este problema para o regime transiente;

- analisar a condução de calor em meios sólidos em domínios multiplamente conexos;

- utilizar os modelos desenvolvidos para simular problemas de dispersão de poluentes com perfis de velocidade conhecidos;

- avaliar o Método dos Mínimos Quadrados sem equações auxiliares, comparando com os resultados do presente trabalho.

Referências

Argyris, J. H. **Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis**. Progress in Aeronautical Science, vol.4, Pergamon Press, Elmsford, New York, 1963.

Arpaci, V. S. **Conduction Heat Transfer**. Addison-Wesley Publishing Company, 1966. 550p.

Asensio, M. I.; Ayuso, B. ; Sangalli, G. Coupling stabilized finite element methods with finite difference time integration for advection–diffusion–reaction problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**, vol. 196, p. 3475–3491, 2007.

Bejan, A. **Transferência de Calor**. Editora Edgard Blücher Ltda, 1996. 540p.

Bramble, J. H.; Lazarov, R. D.; Pasciak, J. E. Least Squares for second-order elliptic problems. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, vol. 152, p. 195-210, 1998.

Bruno, O. P.; Lyon, M. High-order unconditionally stable FC-AD solvers for general smooth domains I. Basic elements. **Journal of Computational Physics**, vol. 229, n.6, p 2009-2033, 2010.

Burrel, L. L.; Tang, L. Q.; Tsang, T. T. H. On a Least-Squares Finite Element Method for Advective Transport in Air Pollution Modeling. **Atmospheric Environment**, vol. 29, n.12, p. 1425-1439, 1995.

Camprub, N.; Colominas, I.; Navarrina, F; Casteleiro, M. Galerkin, Least-Squares and G.L.S. numerical approaches for convective-diffusive transport problems in engineering. **European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering**, 2000.

Catabriga, L.; Valli, A. M. P.; Melotti, B. Z.; Pessoa, L. M.; Coutinho, A. L. G. A. Performance of LCD iterative method in the finite element and finite difference solution of convection–diffusion equations. **Commun. Numer. Meth. Engng**, vol. 22, p. 643–656, 2006.

Carslaw, H. S.; Jaeger, J. C.. **Conduction of Heat in Solids**. 2ª Edition, Claredon Press – Oxford, 1986. 260p.

Çengel, Y. A.; Cimbala, J. M. **Mecânica dos Fluidos – Fundamentos e Aplicações**. McGrawHill, 2007. 816p.

Chung, T. J. **Computational Fluid Dynamics**. Cambridge University Press, 2002. 1012p.

Clough, R. W. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. **Proceedings of 2nd Conf. on Electronic Computation**, American Society of Civil Engineers, Pittsburg, Penn., p. 345-378, 1960.

Codina, R. Comparison of some finite element methods for solving the diffusion-convection-reaction equation. **Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.**, vol. 156, p. 185-210, 1998.

Dag, I. ; Irk, D.; Tombul, M. Least-squares finite element method for the advection–diffusion equation. **Applied Mathematics and Computation**, vol. 173, p. 554–565, 2006.

Dhatt, G.; Touzot, G. **The Finite Element Method Displayed.** John Wiley & Sons, 1984. 580p.

Donea, J; Quartapelle, L. An introduction to finite element methods for transient advection problems. **Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. 95, p. 169-203, 1992.

Donea, J.; Huerta A. **Finite Element Methods for Flow Problems.** John Wiley & Sons, Ltd, 2003. 350p.

Douglas Jr., J.; Wang, J. P. An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem. **Math. Comput.**, vol. 52, p. 495–508, 1989.

Figueiredo, D. G.. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais.** 4 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 274p.

Gupta, M. M.; Kouatchou, J. Symbolic Derivation of Finite Difference Approximations for the Three-Dimensional Poisson Equation. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, vol. 14, n.5, p. 593-606, 1998.

Gupta, M. M.; Zhang, J. High accuracy multigrid solution of the 3D convection-diffusion equation. **Applied Mathematics and Computation**, vol. 113, p. 249-274, 2000.

Hannukainen, A; Korotov, S.; Krizek, M. Nodal $O(h^4)$-superconvergence in 3D by averaging piecewise linear, bilinear and trilinear FE approximations. **Journal of Computational Mathematics**, vol. 28, n.1, p. 1-10, 2010.

Hon, Y. C.; Chen, W. Boundary knot method for 2D and 3D Helmholtz and convection–diffusion problems under complicated geometry. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, 2003; vol. 56, p. 1931–1948, 2003.

Howle, L. E. A comparison of the reduced Galerkin and pseudo-spectral methods for simulation of steady Rayleigh-Bénard convection. **International Journal Heat Mass Transfer**, vol. 39, n. 12, p. 2401-2407, 1996.

Iório, V. **EDP: Um curso de graduação.** 2 ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 300p.

Jiang, B. N. **The Least-Squares Finite Element Method**: Theory and Aplications in Computational Fluid Dynamics and Electromagnetics. Springer, 1998. 416p.

Karaa, S.; Zhang, J. High order ADI method for solving unsteady convection-diffusion problems. **J. Comp. Phys.**, vol. 198, p. 1-9, 2004

Lewis, R. W.; Niyhiarasu, P.; Seetharamu, K. N. **Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow**, John Wiley & Sons, Ltd, 2004. 341p.

Lima, E. L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, Brasil, 1998. 357p.

Ma, Y. ; Ge, Y. A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 215, p. 3408–3417, 2010.

Oden, J. T.; Wellford Jr, L. C. Analysis of Flow of Viscous Fluids by the Finite Element Method. **AIAA J.**, vol. 10, n.12, p. 1590-1599, 1972.

Peaceman, D. W.; Rachford Jr., H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. **J. Soc. Ind. App. Math.**, vol. 3, 28-41, 1959.

Pillai, A. C. R. Fourth-order exponential finite difference methods for boundary value problems of convective diffusion type. **Int. J. Numer. Meth. Fluids**, vol. 37, p. 87–106, 2001.

Reddy, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method.** Second Edition, McGraw-Hill, 1993. 684p.

Si, Z.; Feng, X.; Abduwali, A. The semi-discrete streamline diffusion finite element method for time-dependented convection–diffusion problems. **Applied Mathematics and Computation**, vol. 202, p. 771–779, 2008.

Smith, G. D. **Numerical Solution of Partial Differential Equations.** Oxford Mathematical Handbooks, NewYork, 1971. 179 p.

Spotz, W. F.; Carey, G. F. A High-Order Compact Formulation for the 3D Poisson Equation. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, vol. 12, p. 235-243, 1996.

Turner, M. J.; Clough, R. W.; Martin, H. C.; Topp, L. P. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **J. Aeron, Sci.**, vol. 23, n.9, p. 805-823, 1956.

Vujicic, M. R.; Brown, S. G. R. Iterative Solvers in the Finite Element Solution of Transient Heat Conduction. **FME Transactions**, vol. 32, p. 61-68, 2004.

Wang, J.; Zhong, W. ; Zhang, J. A general meshsize fourth-order compact difference discretization scheme for 3D Poisson equation. **Applied Mathematics and Computation**, vol. 183, p. 804–81, 2006.

Winterscheidt, D.; Surana, K. S. p-Version Least-Squartes Finite Element formulation for convection-diffusion problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering,** vol. 36, p. 111-133, 1993.

Zienkiewicz, O. C.; Cheung, Y. K. Finite Element in the solution of field problems. **The Engineer**, p. 507-510, 1965.

Zwillinger, D. **Handbook of Differential Equations**. 3rd. edition, Academic Press, 1997. 870p.

Zlhmal, M. Superconvergence and reduced integration in the finite element method. **Math. and Comput.**, vol. 32, n. 143, p. 663-685, 1978.

You, D. A high-order Padé ADI method for unsteady convection–diffusion equations. **Journal of Computational Physics**, vol. 214, n.1, p. 1-11, 2006.

ANEXO A – Resultados Numéricos das Aplicações

Tabela A.1 – Norma L_2 do erro cometido em T – Aplicação 1.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	5,14E-03	4,93E-03	1/4	1,97E-04	6,10E-04
1331	1/10	3,38E-03	3,24E-03	1/5	8,40E-05	2,70E-04
2197	1/12	2,39E-03	2,29E-03	1/6	4,15E-05	1,37E-04
4913	1/16	1,38E-03	1,31E-03	1/8	1,35E-05	4,64E-05
9261	1/20	8,89E-04	8,57E-04	1/10	5,67E-06	1,98E-05
15625	1/24	6,30E-04	6,01E-04	1/12	2,77E-06	9,85E-06
35937	1/32	3,59E-04	3,42E-04	1/16	8,92E-07	3,26E-06

Tabela A.2 – Norma L_∞ do erro cometido em T – Aplicação 1.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,62E-02	4,93E-03	1/4	8,29E-04	2,33E-03
1331	1/10	1,02E-02	3,24E-03	1/5	3,79E-04	1,14E-03
2197	1/12	7,13E-03	7,65E-03	1/6	1,88E-04	5,76E-04
4913	1/16	3,99E-03	1,31E-03	1/8	7,00E-05	2,04E-04
9261	1/20	2,54E-03	2,75E-03	1/10	3,16E-05	8,98E-05
15625	1/24	1,76E-03	1,91E-03	1/12	1,63E-05	4,53E-05
35937	1/32	9,93E-04	1,07E-03	1/16	5,62E-06	1,52E-05

Tabela A.3 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial x$ – Aplicação 1.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	4,33E-01	2,80E-02	1/4	1,13E-01	3,12E-02
1331	1/10	3,55E-01	2,19E-02	1/5	7,59E-02	1,87E-02
2197	1/12	3,00E-01	1,79E-02	1/6	5,40E-02	1,22E-02
4913	1/16	2,29E-01	1,29E-02	1/8	3,12E-02	6,36E-03
9261	1/20	1,85E-01	9,77E-03	1/10	2,02E-02	3,87E-03
15625	1/24	1,55E-01	7,67E-03	1/12	1,41E-02	2,60E-03
35937	1/32	1,17E-01	5,07E-03	1/16	8,01E-03	1,41E-03

Tabela A.4 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial x$ – Aplicação 1.

Nnós	**8 nos**			**27 nos**		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,96E+00	1,47E-01	1/4	5,93E-01	2,34E-01
1331	1/10	1,63E+00	1,16E-01	1/5	4,08E-01	1,14E-01
2197	1/12	1,40E+00	9,20E-02	1/6	3,02E-01	8,68E-02
4913	1/16	1,09E+00	6,43E-02	1/8	1,82E-01	4,12E-02
9261	1/20	8,95E-01	4,74E-02	1/10	1,21E-01	2,32E-02
15625	1/24	7,57E-01	3,62E-02	1/12	8,68E-02	1,42E-02
35937	1/32	5,79E-01	2,28E-02	1/16	5,02E-02	7,49E-03

Tabela A.5 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 1.

	8 nos			**27 nos**		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	2,53E-01	9,99E-03	1/4	6,08E-02	3,18E-02
1331	1/10	2,00E-01	8,79E-03	1/5	3,77E-02	2,25E-02
2197	1/12	1,66E-01	7,79E-03	1/6	2,55E-02	1,65E-02
4913	1/16	1,23E-01	6,19E-03	1/8	1,39E-02	9,82E-03
9261	1/20	9,80E-02	4,98E-03	1/10	8,72E-03	6,42E-03
15625	1/24	8,13E-02	4,07E-03	1/12	5,96E-03	4,50E-03
35937	1/32	6,06E-02	2,83E-03	1/16	3,29E-03	2,55E-03

Tabela A.6 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 1.

Nnós	**8 nos**			**27 nos**		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,21E+00	3,71E-02	1/4	3,05E-01	1,56E-01
1331	1/10	9,78E-01	3,36E-02	1/5	1,99E-01	1,15E-01
2197	1/12	8,17E-01	3,16E-02	1/6	1,40E-01	1,02E-01
4913	1/16	6,14E-01	2,46E-02	1/8	7,96E-02	6,27E-02
9261	1/20	4,92E-01	1,96E-02	1/10	5,12E-02	4,30E-02
15625	1/24	4,10E-01	1,70E-02	1/12	3,56E-02	3,07E-02
35937	1/32	3,08E-01	1,26E-02	1/16	2,01E-02	1,81E-02

Tabela A.7 – Norma L_2 do erro cometido em T – Aplicação 2.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	4,09E-05	4,39E-05	1/4	7,10E-07	6,14E-06
1331	1/10	2,68E-05	2,88E-05	1/5	3,12E-07	2,69E-06
2197	1/12	1,89E-05	2,04E-05	1/6	1,57E-07	1,36E-06
4913	1/16	1,09E-05	1,17E-05	1/8	5,29E-08	4,59E-07
9261	1/20	7,11E-06	7,67E-06	1/10	2,24E-08	1,95E-07
15625	1/24	4,99E-06	5,38E-06	1/12	1,16E-08	9,64E-08
35937	1/32	2,84E-06	3,07E-06	1/16	3,61E-09	3,14E-08

Tabela A.8 – Norma L_∞ do erro cometido em T – Aplicação 2.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,10E-04	1,36E-04	1/4	2,72E-06	2,41E-05
1331	1/10	7,08E-05	8,63E-05	1/5	1,12E-06	1,00E-05
2197	1/12	4,95E-05	5,91E-05	1/6	5,45E-07	4,86E-06
4913	1/16	2,79E-05	3,36E-05	1/8	1,74E-07	1,55E-06
9261	1/20	1,78E-05	2,14E-05	1/10	7,17E-08	6,40E-07
15625	1/24	1,23E-05	1,49E-05	1/12	3,55E-08	3,10E-07
35937	1/32	6,94E-06	8,38E-06	1/16	1,10E-08	9,89E-08

Tabela A.9 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 2.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	3,16E-02	8,79E-05	1/4	3,70E-03	7,88E-06
1331	1/10	2,54E-02	5,73E-05	1/5	2,34E-03	3,44E-06
2197	1/12	2,12E-02	4,05E-05	1/6	1,60E-03	1,73E-06
4913	1/16	1,60E-02	2,32E-05	1/8	9,04E-04	5,79E-07
9261	1/20	1,28E-02	1,50E-05	1/10	5,75E-04	5,60E-07
15625	1/24	1,07E-02	1,05E-05	1/12	3,98E-04	1,20E-07
35937	1/32	8,09E-03	5,97E-06	1/16	2,22E-04	3,95E-08

Tabela A.10 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 2.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	5,16E-02	1,79E-04	1/4	5,19E-03	2,56E-05
1331	1/10	4,14E-02	1,12E-04	1/5	3,32E-03	1,04E-05
2197	1/12	3,46E-02	7,64E-05	1/6	2,31E-03	5,02E-06
4913	1/16	2,60E-02	4,25E-05	1/8	1,30E-03	1,57E-06
9261	1/20	2,08E-02	2,62E-05	1/10	8,33E-04	1,25E-06
15625	1/24	1,74E-02	1,73E-05	1/12	5,79E-04	3,08E-07
35937	1/32	1,30E-02	9,50E-06	1/16	3,24E-04	1,37E-07

Tabela A.11 – Norma L_2 do erro cometido em T – Aplicação 3.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	5,15E-05	4,87E-05	1/4	4,14E-06	9,03E-07
1331	1/10	3,38E-05	3,20E-05	1/5	1,82E-06	3,93E-07
2197	1/12	2,39E-05	2,26E-05	1/6	9,23E-07	1,97E-07
4913	1/16	1,37E-05	1,30E-05	1/8	3,10E-07	6,69E-08
9261	1/20	8,95E-06	8,51E-06	1/10	1,31E-07	2,79E-08
15625	1/24	6,28E-06	5,98E-06	1/12	6,53E-08	1,38E-08
35937	1/32	3,58E-06	3,41E-06	1/16	2,14E-08	4,49E-09

Tabela A.12 – Norma L_∞ do erro cometido em T – Aplicação 3.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,35E-04	1,28E-04	1/4	1,55E-05	3,18E-06
1331	1/10	8,78E-05	8,18E-05	1/5	6,48E-06	1,31E-06
2197	1/12	6,11E-05	5,66E-05	1/6	3,16E-06	6,39E-07
4913	1/16	3,43E-05	3,19E-05	1/8	1,01E-06	4,37E-07
9261	1/20	2,18E-05	2,05E-05	1/10	4,18E-07	8,39E-08
15625	1/24	1,51E-05	1,42E-05	1/12	2,03E-07	4,06E-08
35937	1/32	8,53E-06	8,04E-06	1/16	2,87E-07	1,29E-08

Tabela A.13 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 3.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	4,28E-02	4,31E-05	1/4	2,95E-03	2,07E-06
1331	1/10	3,40E-02	2,80E-05	1/5	1,87E-03	9,24E-07
2197	1/12	2,87E-02	1,97E-05	1/6	1,29E-03	4,70E-07
4913	1/16	2,10E-02	1,14E-05	1/8	7,18E-04	2,57E-07
9261	1/20	1,67E-02	7,26E-06	1/10	4,55E-04	6,87E-08
15625	1/24	1,39E-02	5,07E-06	1/12	3,14E-04	3,74E-08
35937	1/32	1,04E-02	2,87E-06	1/16	1,75E-04	1,92E-08

Tabela A.14 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 3.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**H**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	5,99E-02	9,82E-05	1/4	4,74E-03	7,45E-06
1331	1/10	4,83E-02	6,02E-05	1/5	3,09E-03	3,15E-06
2197	1/12	4,05E-02	4,07E-05	1/6	2,17E-03	1,55E-06
4913	1/16	3,06E-02	2,97E-05	1/8	1,24E-03	2,98E-06
9261	1/20	2,45E-02	1,38E-05	1/10	8,02E-04	2,10E-07
15625	1/24	2,05E-02	9,43E-06	1/12	5,60E-04	1,66E-07
35937	1/32	1,54E-02	8,04E-06	1/16	3,18E-04	1,20E-07

Tabela A.15 – Norma L_2 do erro cometido em T – Aplicação 4.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**H**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	6,03E-06	6,53E-04	1/4	3,60E-03	3,19E-04
1331	1/10	2,55E-06	4,45E-04	1/5	2,45E-03	1,80E-04
2197	1/12	1,26E-06	3,23E-04	1/6	1,76E-03	1,11E-04
4913	1/16	4,34E-07	1,93E-04	1/8	1,03E-03	5,06E-05
9261	1/20	1,75E-07	1,28E-04	1/10	6,81E-04	2,70E-05
15625	1/24	4,98E-07	9,11E-05	1/12	4,80E-04	1,61E-05

Tabela A.16 – Norma L_∞ do erro cometido em T – Aplicação 4.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	Galerkin	LSFEM	H	Galerkin	LSFEM
729	1/8	3,13E-05	2,32E-03	1/4	1,55E-02	1,93E-03
1331	1/10	1,29E-05	1,51E-03	1/5	1,03E-02	1,13E-03
2197	1/12	6,31E-06	1,08E-03	1/6	7,33E-03	7,20E-04
4913	1/16	3,12E-06	6,24E-04	1/8	4,09E-03	3,39E-04
9261	1/20	1,12E-06	4,10E-04	1/10	2,71E-03	1,85E-04
15625	1/24	1,21E-05	2,89E-04	1/12	1,88E-03	1,12E-04

Tabela A.17 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 4.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	Galerkin	LSFEM	h	Galerkin	LSFEM
729	1/8	3,63E-01	2,22E-03	1/4	6,75E-02	1,37E-02
1331	1/10	2,89E-01	1,54E-03	1/5	5,32E-02	9,86E-03
2197	1/12	2,40E-01	1,13E-03	1/6	4,38E-02	7,37E-03
4913	1/16	1,80E-01	6,85E-04	1/8	3,23E-02	4,53E-03
9261	1/20	1,43E-01	4,58E-04	1/10	2,56E-02	3,06E-03
15625	1/24	1,19E-01	3,28E-04	1/12	2,12E-02	2,20E-03

Tabela A.18 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 4.

Nnós	8 nós			27 nós		
	h	Galerkin	LSFEM	h	Galerkin	LSFEM
729	1/8	1,20E+00	1,26E-02	1/4	2,85E-01	8,35E-02
1331	1/10	9,71E-01	9,18E-03	1/5	2,36E-01	5,89E-02
2197	1/12	8,14E-01	6,91E-03	1/6	1,94E-01	4,36E-02
4913	1/16	6,14E-01	4,46E-03	1/8	1,38E-01	2,65E-02
9261	1/20	4,93E-01	3,13E-03	1/10	1,11E-01	1,78E-02
15625	1/24	4,12E-01	2,29E-03	1/12	9,28E-02	1,27E-02

Tabela A.19 – Norma L_2 do erro cometido em T – Aplicação 5.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	Galerkin	LSFEM	h	Galerkin	LSFEM
729	1/8	4,02E-05	9,41E-05	1/4	3,38E-05	2,13E-04
1331	1/10	2,61E-05	6,26E-05	1/5	1,48E-05	1,08E-04
2197	1/12	1,83E-05	4,47E-05	1/6	7,47E-06	5,95E-05
4913	1/16	1,04E-05	2,62E-05	1/8	2,50E-06	2,18E-05
9261	1/20	6,79E-06	1,73E-05	1/10	1,06E-06	9,72E-06
15625	1/24	4,75E-06	1,22E-05	1/12	5,25E-07	4,93E-06
35937	1/32	2,70E-06	7,12E-06	1/16	1,71E-07	1,65E-06

Tabela A.20 – Norma L_∞ do erro cometido em T – Aplicação 5.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	Galerkin	LSFEM	h	Galerkin	LSFEM
729	1/8	1,34E-04	3,27E-04	1/4	1,38E-04	7,38E-04
1331	1/10	8,29E-05	2,07E-04	1/5	5,68E-05	3,74E-04
2197	1/12	5,67E-05	1,44E-04	1/6	2,74E-05	2,04E-04
4913	1/16	3,13E-05	8,29E-05	1/8	8,70E-06	7,33E-05
9261	1/20	1,99E-05	5,43E-05	1/10	3,56E-06	3,15E-05
15625	1/24	1,37E-05	3,84E-05	1/12	1,71E-06	1,57E-05
35937	1/32	7,72E-06	2,22E-05	1/16	5,42E-07	5,14E-06

Tabela A.21 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 5.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	Galerkin	LSFEM	h	Galerkin	LSFEM
729	1/8	4,28E-02	7,08E-04	1/4	3,13E-03	1,92E-03
1331	1/10	3,40E-02	4,65E-04	1/5	1,98E-03	9,80E-04
2197	1/12	2,82E-02	3,28E-04	1/6	1,36E-03	5,40E-04
4913	1/16	2,10E-02	1,88E-04	1/8	7,52E-04	1,99E-04
9261	1/20	1,67E-02	1,22E-04	1/10	4,75E-04	8,84E-05
15625	1/24	1,39E-02	8,60E-05	1/12	3,26E-04	4,48E-05
35937	1/32	1,04E-02	4,92E-05	1/16	1,80E-04	1,50E-05

Tabela A.22 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 5.

Nnós	**8 nos**			**27 nos**		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	5,99E-02	3,36E-03	1/4	6,12E-03	6,03E-03
1331	1/10	4,83E-02	1,91E-03	1/5	3,79E-03	2,98E-03
2197	1/12	4,05E-02	1,16E-03	1/6	2,57E-03	1,60E-03
4913	1/16	3,06E-02	5,70E-04	1/8	1,40E-03	5,77E-04
9261	1/20	2,45E-02	3,57E-04	1/10	8,88E-04	2,54E-04
15625	1/24	2,05E-02	2,48E-04	1/12	6,10E-04	1,28E-04
35937	1/32	1,54E-02	1,37E-04	1/16	3,38E-04	4,27E-05

Tabela A.23 – Norma L_2 do erro cometido em T – Aplicação 7.

Nnós	**8 nos**			**27 nos**		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	2,12E-04	3,35E-03	1/4	1,79E-04	2,82E-03
1331	1/10	1,37E-04	2,22E-03	1/5	8,35E-05	1,50E-03
2197	1/12	9,66E-05	1,59E-03	1/6	4,36E-05	8,65E-04
4913	1/16	5,53E-05	9,30E-04	1/8	1,51E-05	3,35E-04
9261	1/20	3,58E-05	6,09E-04	1/10	6,54E-06	1,54E-04
15625	1/24	2,51E-05	4,29E-04	1/12	3,26E-06	7,99E-05
35937	1/32	1,43E-05	2,46E-04	1/16	1,07E-06	2,76E-05

Tabela A.24 – Norma L_∞ do erro cometido em T – Aplicação 7.

Nnós	**8 nos**			**27 nos**		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	5,52E-04	9,46E-03	1/4	1,34E-03	1,66E-02
1331	1/10	3,46E-04	6,23E-03	1/5	6,39E-04	9,00E-03
2197	1/12	2,38E-04	4,37E-03	1/6	3,40E-04	5,16E-03
4913	1/16	1,32E-04	2,47E-03	1/8	1,20E-04	1,98E-03
9261	1/20	8,48E-05	1,58E-03	1/10	5,29E-05	8,87E-04
15625	1/24	5,88E-05	1,10E-03	1/12	2,66E-05	4,68E-04
35937	1/32	3,30E-05	6,24E-04	1/16	8,90E-06	1,71E-04

Tabela A.25 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 7.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	3,63E-01	1,33E-02	1/4	2,55E-02	1,27E-02
1331	1/10	2,89E-01	9,19E-03	1/5	1,62E-02	7,99E-03
2197	1/12	2,40E-01	6,69E-03	1/6	1,11E-02	5,69E-03
4913	1/16	1,80E-01	3,97E-03	1/8	6,22E-03	3,58E-03
9261	1/20	1,43E-01	2,61E-03	1/10	3,94E-03	2,53E-03
15625	1/24	1,19E-01	1,85E-03	1/12	2,72E-03	1,88E-03
35937	1/32	8,95E-02	1,06E-03	1/16	1,51E-03	1,15E-03

Tabela A.26 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 7.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,20E+00	1,08E-01	1/4	9,53E-02	8,87E-02
1331	1/10	9,71E-01	6,81E-02	1/5	6,24E-02	5,16E-02
2197	1/12	8,14E-01	4,46E-02	1/6	4,43E-02	3,17E-02
4913	1/16	6,14E-01	2,14E-02	1/8	2,55E-02	2,14E-02
9261	1/20	4,93E-01	1,16E-02	1/10	1,65E-02	1,60E-02
15625	1/24	4,12E-01	7,97E-03	1/12	1,15E-02	1,22E-02
35937	1/32	3,10E-01	4,52E-03	1/16	6,52E-03	7,65E-03

Tabela A.27 – Norma L_2 do erro cometido em T – Aplicação 8.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	6,34E-05	6,88E-02	1/4	4,83E-04	4,35E-03
1331	1/10	6,97E-05	6,02E-02	1/5	2,23E-04	2,76E-03
2197	1/12	5,29E-05	5,37E-02	1/6	1,16E-04	1,85E-03
4913	1/16	3,64E-05	4,29E-02	1/8	4,03E-05	9,47E-04
9261	1/20	2,49E-05	3,49E-02	1/10	1,72E-05	5,42E-04
15625	1/24	1,77E-05	2,87E-02	1/12	8,57E-06	3,35E-04
35937	1/32	1,05E-05	2,00E-02	1/16	2,80E-06	1,49E-04

Tabela A.28 – Norma L_∞ do erro cometido em T – Aplicação 8.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,23E-04	2,37E-01	1/4	2,85E-03	1,82E-02
1331	1/10	1,42E-04	2,25E-01	1/5	1,26E-03	9,41E-03
2197	1/12	1,08E-04	2,15E-01	1/6	5,82E-04	5,95E-03
4913	1/16	7,40E-05	1,89E-01	1/8	1,89E-04	3,05E-03
9261	1/20	4,99E-05	1,61E-01	1/10	7,67E-05	1,69E-03
15625	1/24	3,53E-05	1,41E-01	1/12	3,65E-05	1,01E-03
35937	1/32	2,07E-05	1,04E-01	1/16	1,14E-05	4,46E-04

Tabela A.29 – Norma L_2 do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 8.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	3,63E-01	4,37E-01	1/4	2,82E-02	6,93E-02
1331	1/10	2,89E-01	3,20E-01	1/5	1,77E-02	4,45E-02
2197	1/12	2,40E-01	2,45E-01	1/6	1,20E-02	3,06E-02
4913	1/16	1,80E-01	1,55E-01	1/8	6,62E-03	1,68E-02
9261	1/20	1,43E-01	1,06E-01	1/10	4,16E-03	1,05E-02
15625	1/24	1,19E-01	7,81E-02	1/12	2,85E-03	7,16E-03
35937	1/32	8,96E-02	4,72E-02	1/16	1,57E-03	3,84E-03

Tabela A.30 – Norma L_∞ do erro cometido em $\partial T/\partial x = \partial T/\partial y = \partial T/\partial z$ – Aplicação 8.

Nnós	8 nos			27 nos		
	h	**Galerkin**	**LSFEM**	**h**	**Galerkin**	**LSFEM**
729	1/8	1,20E+00	4,22E+00	1/4	1,12E-01	2,82E-01
1331	1/10	9,71E-01	3,33E+00	1/5	6,72E-02	1,91E-01
2197	1/12	8,14E-01	2,64E+00	1/6	4,48E-02	1,23E-01
4913	1/16	6,14E-01	1,63E+00	1/8	2,49E-02	6,90E-02
9261	1/20	4,93E-01	1,04E+00	1/10	1,61E-02	4,45E-02
15625	1/24	4,12E-01	7,59E-01	1/12	1,12E-02	2,99E-02
35937	1/32	3,10E-01	4,65E-01	1/16	6,38E-03	1,60E-02

ANEXO B – Elementos de Referência e suas Funções de Interpolação

A seguir, apresentam-se os elementos de referência (hexaedros) com suas respectivas funções de interpolação e as derivadas das funções de interpolação para hexaedros com 8 e 27 nós.

B1 – Hexaedro com 8 nós.

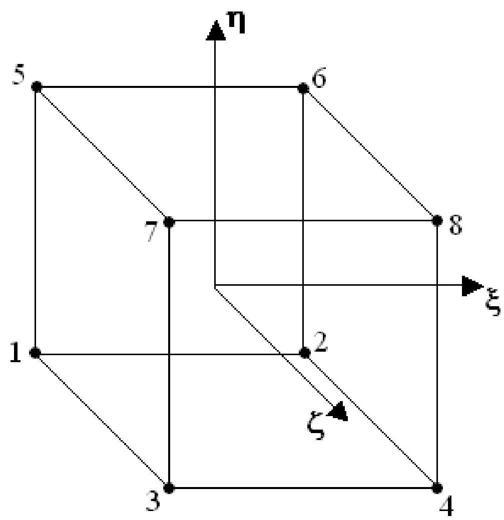

Figura B1 – Elemento de Referência – Hexaedro com 8 nós.

$$N_1 = (1/8)(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_2 = (1/8)(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3 = (1/8)(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_4 = (1/8)(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_5 = (1/8)(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_6 = (1/8)(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_7 = (1/8)(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_8 = (1/8)(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -(1/8)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = (1/8)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = -(1/8)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = (1/8)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = -(1/8)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = (1/8)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = -(1/8)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = (1/8)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -(1/8)(1-\xi)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -(1/8)(1+\xi)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = (1/8)(1-\xi)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = (1/8)(1+\xi)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \eta} = -(1/8)(1-\xi)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \eta} = -(1/8)(1+\xi)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \eta} = (1/8)(1-\xi)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \eta} = (1/8)(1+\xi)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = -(1/8)(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = -(1/8)(1+\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = -(1/8)(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = -(1/8)(1+\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = (1/8)(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = (1/8)(1+\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \zeta} = (1/8)(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \zeta} = (1/8)(1+\xi)(1+\eta)$$

B2 – Hexaedro com 27 nós

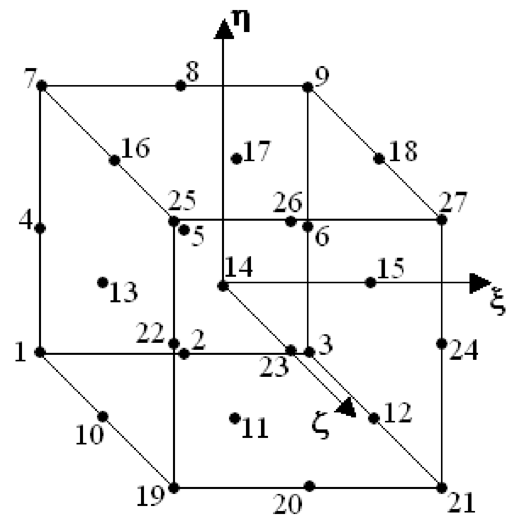

Figura B2 – Elemento de Referência – Hexaedro com 27 nós.

$$N_1 = (-1/8)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_2 = (1/4)\eta\zeta(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_3 = (1/8)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$N_4 = (-1/4)\xi\zeta(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)$$

$$N_5 = (-1/8)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_6 = (-1/4)\eta\zeta(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_7 = (1/8)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$N_8 = (1/4)\xi\zeta(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)$$

$$N_9 = (-1/2)\zeta(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta)$$

$$N_{10} = (1/4)\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{11} = (-1/2)\eta(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{12} = (-1/4)\xi\eta(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{13} = (1/2)\xi(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$$

$$N_{14} = (1/4)\xi\eta(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{15} = (1/2)\eta(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{16} = (-1/4)\xi\eta(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{17} = (-1/2)\xi(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$$

$$N_{18} = (1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$$

$$N_{19} = (1/8)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{20} = (-1/4)\eta\zeta(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{21} = (-1/8)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{22} = (1/4)\xi\zeta(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$N_{23} = (1/8)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{24} = (1/4)\eta\zeta(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{25} = (-1/8)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$N_{26} = (-1/4)\xi\zeta(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$N_{27} = (1/2)\zeta(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = (-1/8)\eta\zeta(1-2\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = (-1/2)\xi\eta\zeta(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \xi} = (1/8)\eta\zeta(1+2\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \xi} = (-1/4)\zeta(1+2\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \xi} = (-1/8)\eta\zeta(1+2\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \xi} = (1/2)\xi\eta\zeta(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \xi} = (1/8)\eta\zeta(1-2\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \xi} = (1/4)\zeta(1-2\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \xi} = \xi\zeta(1-\eta^2)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial \xi} = (1/4)\eta(1-2\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \xi} = \xi\eta(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial \xi} = (-1/4)\eta(1+2\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial \xi} = (1/2)(1+2\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{14}}{\partial \xi} = (1/4)\eta(1+2\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{15}}{\partial \xi} = -\xi\eta(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{16}}{\partial \xi} = (-1/4)\eta(1-2\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{17}}{\partial \xi} = (-1/2)(1-2\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{18}}{\partial \xi} = -2\xi(1-\eta^2)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{19}}{\partial \xi} = (1/8)\eta\zeta(1-2\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{20}}{\partial \xi} = (1/2)\xi\eta\zeta(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{21}}{\partial \xi} = (-1/8)\eta\zeta(1+2\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial \xi} = (1/4)\zeta(1+2\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{23}}{\partial \xi} = (1/8)\eta\zeta(1+2\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{24}}{\partial \xi} = (-1/2)\xi\eta\zeta(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{25}}{\partial \xi} = (-1/8)\eta\zeta(1-2\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{26}}{\partial \xi} = (-1/4)\zeta(1-2\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{27}}{\partial \xi} = -\xi\zeta(1-\eta^2)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{1}}{\partial \eta} = (-1/8)\xi\zeta(1-\xi)(1-2\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{2}}{\partial \eta} = (1/4)\zeta(1-\xi^2)(1-2\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{3}}{\partial \eta} = (1/8)\xi\zeta(1+\xi)(1-2\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{4}}{\partial \eta} = (1/2)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{5}}{\partial \eta} = (-1/8)\xi\zeta(1+\xi)(1+2\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{6}}{\partial \eta} = (-1/4)\zeta(1-\xi^2)(1+2\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{7}}{\partial \eta} = (1/8)\xi\zeta(1-\xi)(1+2\eta)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{8}}{\partial \eta} = (-1/2)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{9}}{\partial \eta} = \eta\zeta(1-\xi^2)(1-\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial \eta} = (1/4)\xi(1-\xi)(1-2\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \eta} = (-1/2)(1-\xi^2)(1-2\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial \eta} = (-1/4)\xi(1+\xi)(1-2\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial \eta} = -\xi\eta(1+\xi)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{14}}{\partial \eta} = (1/4)\xi(1+\xi)(1+2\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{15}}{\partial \eta} = (1/2)(1-\xi^2)(1+2\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{16}}{\partial \eta} = (-1/4)\xi(1-\xi)(1+2\eta)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{17}}{\partial \eta} = \xi\eta(1-\xi)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{18}}{\partial \eta} = -2\eta(1-\xi^2)(1-\zeta^2)$$

$$\frac{\partial N_{19}}{\partial \eta} = (1/8)\xi\zeta(1-\xi)(1-2\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{20}}{\partial \eta} = (-1/4)\zeta(1-\xi^2)(1-2\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{21}}{\partial \eta} = (-1/8)\xi\zeta(1+\xi)(1-2\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial \eta} = (-1/2)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{23}}{\partial \eta} = (1/8)\xi\zeta(1+\xi)(1+2\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{24}}{\partial \eta} = (1/4)\zeta(1-\xi^2)(1+2\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{25}}{\partial \eta} = (-1/8)\xi\zeta(1-\xi)(1+2\eta)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{26}}{\partial \eta} = (1/2)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{27}}{\partial \eta} = -\eta\zeta(1-\xi^2)(1+\zeta)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \zeta} = (-1/8)\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \zeta} = (1/4)\eta(1-\xi^2)(1-\eta)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \zeta} = (1/8)\xi\eta(1+\xi)(1-\eta)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \zeta} = (-1/4)\xi(1+\xi)(1-\eta^2)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial \zeta} = (-1/8)\xi\eta(1+\xi)(1+\eta)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial \zeta} = (-1/4)\eta(1-\xi^2)(1+\eta)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_7}{\partial \zeta} = (1/8)\xi\eta(1-\xi)(1+\eta)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_8}{\partial \zeta} = (1/4)\xi(1-\xi)(1-\eta^2)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_9}{\partial \zeta} = (-1/2)(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1-2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{10}}{\partial \zeta} = (-1/2)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial \zeta} = \eta\zeta(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_{12}}{\partial \zeta} = (1/2)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1-\eta)$$

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial \zeta} = -\xi\zeta(1+\xi)(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial N_{14}}{\partial \zeta} = (-1/2)\xi\eta\zeta(1+\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_{15}}{\partial \zeta} = -\eta\zeta(1-\xi^2)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_{16}}{\partial \zeta} = (1/2)\xi\eta\zeta(1-\xi)(1+\eta)$$

$$\frac{\partial N_{17}}{\partial \zeta} = \xi\zeta(1-\xi)(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial N_{18}}{\partial \zeta} = -2\zeta(1-\xi^2)(1-\eta^2)$$

$$\frac{\partial N_{19}}{\partial \zeta} = (1/8)\xi\eta(1-\xi)(1-\eta)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{20}}{\partial \zeta} = (-1/4)\eta(1-\xi^2)(1-\eta)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{21}}{\partial \zeta} = (-1/8)\xi\eta(1+\xi)(1-\eta)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial \zeta} = (1/4)\xi(1+\xi)(1-\eta^2)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{23}}{\partial \zeta} = (1/8)\xi\eta(1+\xi)(1+\eta)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{24}}{\partial \zeta} = (1/4)\eta(1-\xi^2)(1+\eta)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{25}}{\partial \zeta} = (-1/8)\xi\eta(1-\xi)(1+\eta)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{26}}{\partial \zeta} = (-1/4)\xi(1-\xi)(1-\eta^2)(1+2\zeta)$$

$$\frac{\partial N_{27}}{\partial \zeta} = (1/2)(1-\xi^2)(1-\eta^2)(1+2\zeta)$$

ANEXO C – Pontos e Pesos de Gauss

Nas Tabelas C1 e C2 estão apresentadas as quantidades de pontos e pesos de Gauss para os elementos hexaedrais de 8 e 20 nós, e seus respectivos valores a partir de uma extensão das tabelas para quadriláteros de 4 e 8 nós apresentadas em Reddy (1993), página 431.

Tabela C1 – Pontos e pesos de Gauss para um hexaedro com 8 nós.

nº do ponto de Gauss (*I,J*)	ξ_I	η_J	ζ_K	$w_I \times w_J \times w_K$
1	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
3	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
4	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
5	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
6	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
7	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
8	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

Tabela C2 – Pontos e pesos de Gauss para o hexaedro com 27 nós.

nº do ponto de Gauss (*I,J*)	ξ_I	η_J	ζ_K	$w_I \times w_J \times w_K$
1	A	A	A	125/729
2	A	0	A	200/729
3	A	-A	A	125/81
4	0	A	A	200/729
5	0	0	A	320/729
6	0	-A	A	200/729
7	-A	A	A	125/729
8	-A	0	A	200/729
9	-A	-A	A	125/729
10	A	A	0	200/729
11	A	0	0	320/729
12	A	-A	0	200/729
13	0	A	0	320/729
14	0	0	0	512/729
15	0	-A	0	320/729
16	-A	A	0	200/729
17	-A	0	0	320/729
18	-A	-A	0	200/729
19	A	A	-A	125/729
20	A	0	-A	200/729
21	A	-A	-A	125/729
22	0	A	-A	200/729
23	0	0	-A	320/729
24	0	-A	-A	200/729
25	-A	A	-A	125/729
26	-A	0	-A	200/729
27	-A	-A	-A	125/729

com $A = \sqrt{3/5}$.