

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Khaled Mohamed
Ahmida E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 23 08 2001

José Roberto de França Arruda
ORIENTADOR
Prof. Dr. José Roberto F. Arruda
DMC - FEM - UNICAMP
Matrícula 06087-9

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Análise Dinâmica de Pórticos em Médias e Altas Frequências

Autor: **Khaled Mohamed Ahmida**

Orientador: **José Roberto de França Arruda**

82/2001

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise Dinâmica de Pórticos em Médias e Altas Frequências

Autor: **Khaled Mohamed Ahmida**

Orientador: **José Roberto de França Arruda**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, Agosto de 2001

S.P. - Brasil

000220029

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	UNICAMP Ah55a
V	EX
TORNO	48983
PLANO	16-837102
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	10/05/02
Nº CPD	

CM00167291-4

BIB ID 239948

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

Ah55a Ahmida, Khaled Mohamed
Análise dinâmica de pórticos em médias e altas
frequências / Khaled Mohamed Ahmida. --Campinas, SP:
[s.n.], 2001.

Orientador: José Roberto de França Arruda.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise espectral. 2. Espectros de potência. 3.
Método dos elementos finitos. 4. Estatística - Análise. I.
Arruda, José Roberto de França. II. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

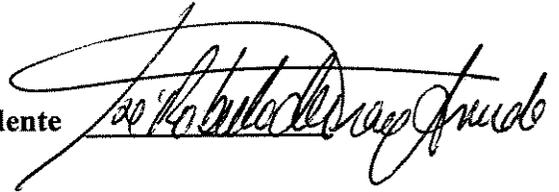
TESE DE DOUTORADO

Análise Dinâmica de Pórticos em Médias e Altas Frequências

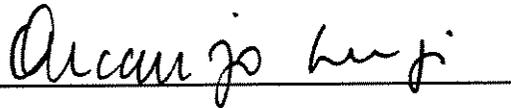
Autor: Khaled Mohamed Ahmida

Orientador: José Roberto de França Arruda

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda, Presidente
DMC/FEM/Unicamp



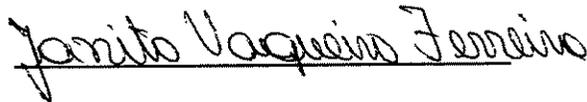
Prof. Dr. Arcanjo Lenzi
LAE/UFSC



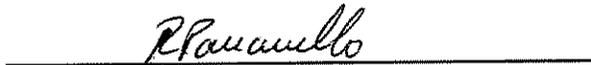
Prof. Dr. Arthur Martins Braga
MEC/PUC-RIO



Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira
DMC/FEM/Unicamp

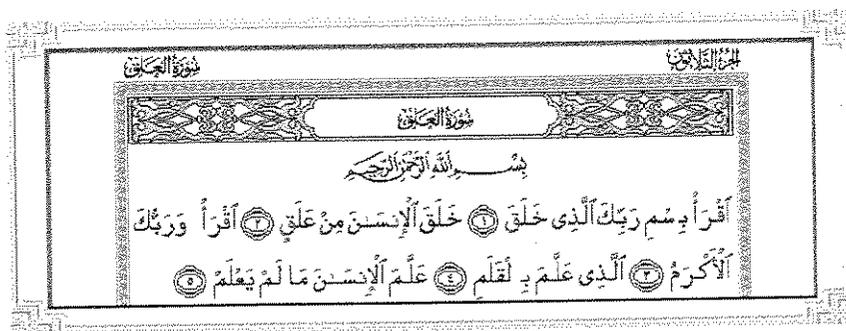


Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM/Unicamp



Campinas, 23 de Agosto de 2001.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



a tradução:

Em nome de Deus, o Clemente, o Misericordioso.

“Lê (recita), em nome do teu Senhor Que criou, Criou o homem de algo que se agarra, Lê, que o teu Senhor é Generosíssimo, Que ensinou através do cálamo, Ensinou ao homem o que este não sabia”. "Al ‘Alac" (O Coágulo), 96ª Sura.

Dedicatória

Aos meus queridos pais, à meu irmão e às minhas irmãs, com amor, admiração, e gratidão.

Agradecimentos

Primeiramente, e antes de tudo, os agradecimentos vão a todo o poderoso Deus por dar-me a oportunidade, saúde, e a fé para concluir este trabalho, por ser onde eu estou agora, e por tudo. Gostaria de agradecer o meu orientador Dr. Arruda por sua ilimitada orientação durante a conclusão do meu doutoramento. O seu incentivo, voluntariedade para ajudar são profundamente apreciados. A sua paciência, e dedicação são admirados. Foi meu prazer tê-lo como um orientador.

Gostaria de agradecer a CNPq, a FAPESP, e gostaria de agradecer todos os professores que fazem parte do departamento de mecânica computacional DMC por cada letra e equação que me ensinaram. Meus agradecimentos vão também para os meus colegas no DMC, para a nossa secretária, e para os técnicos do DMC e do DPM. Gostaria de agradecer o Prof. Dr. Rahoma Mohamed por seus incentivos e suportes.

E finalmente, gostaria de agradecer a minha família, simplesmente por tudo que fizeram por mim durante toda a minha vida, obrigado.

Resumo

AHMIDA, Khaled Mohamed, *Análise Dinâmica de Pórticos em Médias e Altas Freqüências*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001, 270p., tese de Doutorado.

Neste trabalho procurou-se estudar os problemas de vibração em médias e altas freqüências. O enfoque deste trabalho concentra-se em revisar, investigar, implementar, e comparar algumas das metodologias mais utilizadas para a modelagem de vibrações estruturais para tais faixas de freqüência. Entre estas, o método dos elementos finitos (FEM), o método dos elementos espectrais (SEM), o método de análise estatística de energia (SEA), e a técnica de intensidade estrutural (SI). Procurou-se estabelecer uma conexão entre estas metodologias e fazer a validação através da simulação numérica e, em alguns casos, a validação experimental. Estruturas treliçadas lineares uni-, bi-, e tri-dimensionais foram utilizadas. O enfoque maior é dado às diversas aplicações do método dos elementos espectrais, utilizando a sua característica de modelagem de estruturas infinitas. Entre estas aplicações destacam-se a obtenção dos fatores de acoplamentos usados na SEA e a análise dos fenômenos de propagação de ondas estruturais, importantes para um entendimento aprofundado de dinâmica de estruturas.

Palavras Chave

Método dos elementos espectrais, propagação de ondas, fluxo de potência, energia vibracional, método dos elementos finitos.

Abstract

AHMIDA, Khaled Mohamed, *Dynamic Analysis of Truss-type Structures at medium and high frequencies*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001, 270p., Ph.D. Thesis.

In this thesis, a study of vibration problems in medium- and high-frequency excitation ranges has been conducted. This work focuses on revising, investigating, implementing, and comparing some of the methodologies for modeling structural vibrations in such frequency ranges. Among those, the Finite Element Method (FEM), the Spectral Element method (SEM), the Statistical Energy Analysis (SEA), and the Structural Intensity techniques (SI). This work is an attempt to establish a connection among these methodologies and to validate them through numerical simulations and, in some cases, experimental work. Truss-type linear models of uni-, bi-, and tri-dimensional structures have been used. A large part of the work is focused on the different applications of the SEM, using its characteristic of modeling infinite wave-guides. Among these applications, the use of the SEM was highlighted for obtaining the coupling loss factors used in SEA and for the analysis of structural wave-propagation phenomena. The latter is important to better conceiving and apprehending the dynamics of vibrating structures.

Key Words

Spectral elements method, wave propagation, structural intensity, vibrational energy, finite elements method.

Índice

Capítulo 1	1.1
Introdução e revisão bibliográfica	1.1
1.1 Introdução e motivação	1.1
1.2 Metodologias para análise em médias e altas frequências.....	1.5
1.3 Métodos investigados neste trabalho	1.9
1.4 Organização da tese.....	1.12
Capítulo 2	2.1
O Método dos Elementos Espectrais	2.1
2.1 Introdução.....	2.1
2.2 As formulações diferenciais.....	2.4
2.2.1 Elemento de barra em tração-compressão.....	2.4
2.2.1.1 A matriz de rigidez dinâmica de elemento de barra em tração-compressão– 2 nós ..	2.6
2.2.1.2 A matriz de rigidez dinâmica de elemento de Barra em Tração-Compressão – elemento “throw-off”.....	2.9
2.2.2 Elemento de viga – via teoria de Timoshenko	2.11
2.2.2.1 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Timoshenko – 2 nós	2.13
2.2.2.2 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Timoshenko – elemento “throw-off”.....	2.17
2.2.3 Elemento de viga – via a teoria de Bernoulli-Euler	2.20
2.2.3.1 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Bernoulli-Euler– 2 nós	2.21
2.2.3.2 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Bernoulli-Euler – elemento “throw-off”	2.24
2.2.4 Elemento de barra em torção.....	2.26
2.2.4.1 Rigidez dinâmica de elemento de barra em torção – 2 nós	2.27
2.2.4.2 Rigidez dinâmica de elemento de barra em torção – elemento “throw-off”	2.28
2.3 Representação do elemento “throw-off” por um sistema dinâmico.....	2.28

2.4	Acoplamento entre SEM e FEM	2.30
2.5	Comparação de propagação de onda em vigas de Bernoulli-Euler e de Timoshenko.....	2.31
2.6	Estruturas do tipo pórtico espacial	2.36
2.6.1	Montagem da matriz de rigidez dinâmica global.....	2.37
2.6.2	Programação computacional	2.39
Capítulo 3		3.1
A Análise Estatística de Energia		3.1
3.1	Introdução	3.1
3.2	Energia de vibração em ressonadores modais	3.3
3.2.1	Sistemas lineares de um grau de liberdade.....	3.3
3.2.2	Sistemas lineares de vários graus de liberdade	3.9
3.3	A avaliação de fator de perda por acoplamento.....	3.11
3.3.1	Sistemas conectadas via ponto	3.12
3.3.2	Sistemas conectadas ao longo de uma linha	3.13
3.4	A avaliação analítica dos coeficientes de transmissão e de reflexão	3.16
3.4.1	Caso de ondas incidentes longitudinais em barras retas	3.17
3.4.2	Caso de ondas incidentes transversais em vigas retas.....	3.19
3.4.3	Caso de ondas incidentes torcionais em barras retas	3.22
3.4.4	Caso de ondas incidentes no plano x-y em barras do tipo L ("right angle")	3.24
3.4.4.1	Onda incidente transversal no plano x-y	3.25
3.4.4.2	Onda incidente longitudinal	3.31
3.4.5	Caso de ondas incidentes fora do plano x-y	3.34
3.4.5.1	Onda incidente transversal fora do plano x-y	3.35
3.4.5.2	Onda incidente torcional	3.38
3.5	Os procedimentos gerais de SEA	3.40
3.5.1	As equações básicas de SEA.....	3.41
3.5.2	A avaliação da potência injetada	3.44
3.6	O Método de Potência Injetada (PIM)	3.46
3.6.1	Um exemplo de viga-L	3.47
3.6.2	O PIM em grandes modelos de SEA	3.49
3.6.3	Análise de sensibilidade dos parâmetros de SEA	3.53
3.7	Considerações gerais de SEA.....	3.54
3.8	Desvantagens da SEA.....	3.56
3.9	Vantagens da SEA	3.57
3.10	Evolução da SEA e estado da arte.....	3.58

Capítulo 4	4.1
Fluxo de potência e energia em pórticos tridimensionais	4.1
4.1 Conceitos de fluxo de potência estrutural	4.1
4.2 O fluxo de potência em estruturas do tipo pórtico tridimensional	4.6
4.2.1 Propagação de energia em barras.....	4.7
4.2.2 Propagação de energia em vigas de Timoshenko.....	4.8
4.2.3 Propagação de energia em vigas de Bernoulli-Euler.....	4.10
4.2.4 Propagação de energia por rotação em barras	4.11
4.3 O cálculo de fluxo de potência total em estruturas do tipo pórtico tridimensional	4.12
4.4 O cálculo de energia em estruturas do tipo pórtico espacial.....	4.13
4.4.1 Energia cinética no elemento de barra em tração-compressão	4.13
4.4.2 Energia potencial no elemento de barra	4.15
4.4.3 Energia cinética no elemento de viga de Bernoulli-Euler	4.17
4.4.4 Energia potencial no elemento de viga de Bernoulli-Euler	4.19
4.4.5 Energia cinética no elemento de viga de Timoshenko	4.22
4.4.6 Energia potencial no elemento de viga de Timoshenko	4.24
4.4.7 Cuidados que devem ser tomados no cálculo das funções integrais	4.28
4.5 A medição de fluxo de potência em estruturas do tipo pórtico espacial	4.29
4.5.1 A medição de fluxo de potência em vigas	4.30
4.5.1.1 Determinação de fluxo de potência utilizando as componentes de onda A e B	4.32
4.5.1.2 Determinação de fluxo de potência por diferenças finitas.....	4.32
4.5.2 A medição de fluxo de potência em elementos de barra em tração-compressão e em torção	4.34
4.6 Vibrações aleatórias	4.35
4.6.1 Fluxo de potência em vigas	4.37
4.6.2 Fluxo de potência em elementos de barra.....	4.38
4.6.3 Medição de potência injetada	4.38
4.7 Aplicação I: comparação do fluxo de potência via FEM e SEM em vigas – análise unidimensional.....	4.39
4.7.1 Comentários gerais	4.45
4.8 Aplicação II: estudo de fluxo de potência e energia em uma viga em configuração T – análise bidimensional.....	4.45
4.8.1 Descrição da estrutura	4.46
4.8.2 Modelagem via FEM e SEM	4.47
4.8.3 Modelagem via SEA.....	4.47
4.8.4 Modelo de Hambric	4.48

4.8.5	Resultados e comparações.....	4.49
4.8.6	Alternativa para o cálculo da potência dissipada através de fluxo de potência	4.51
4.8.7	A distribuição de velocidades via SEM e SEA.....	4.53
Capítulo 5	5.1
Outras aplicações do método dos elementos espectrais	5.1
5.1	Os modos complexos e o fenômeno de propagação de ondas.....	5.1
5.1.1	Introdução	5.1
5.1.2	O fator de complexidade modal	5.4
5.1.3	Identificação dos modos naturais.....	5.5
5.1.4	Modelos de propagação de onda unidimensionais.....	5.6
5.1.4.1	Viga engastada-livre (a).....	5.7
5.1.4.2	Viga semi-infinita (b)	5.9
5.1.4.3	Viga semi-infinita com descontinuidade (c)	5.11
5.1.4.4	Viga infinita (d)	5.14
5.1.5	Modelo de propagação de onda bidimensional	5.19
5.1.6	Modelo de propagação em pórtico tridimensional	5.25
5.1.7	Modelo de uma placa infinita - amortecimento geométrico	5.31
5.1.8	Experimento de viga enfiada em caixa de areia	5.34
5.2	Obtenção dos fatores de perda por acoplamento da SEA através de simulação numérica usando o SEM	5.38
5.2.1	Introdução	5.38
5.2.1.1	Revisão bibliográfica.....	5.39
5.2.1.2	Objetivos e metodologia	5.43
5.2.2	Alternativa para o obtenção dos fatores de perda por acoplamento	5.44
5.2.3	Modelo de viga L para a obtenção dos fatores de perda por acoplamento.....	5.47
5.2.4	Estimação dos η_{ij} via PIM	5.50
5.2.5	Estimação simplificada dos η_{ij} via método de Stimpson e Lalor.....	5.55
5.2.5.1	Comentários gerais.....	5.59
5.2.6	O uso dos fatores η_{ij} obtidos via SEM/S&L no modelo da viga-T.....	5.59
5.3	Obtenção de impedância e condições de contorno experimentais através do SEM.....	5.61
5.3.1	Introdução	5.61
5.3.2	Metodologia e solução	5.62
5.3.2.1	Caracterização de engaste de uma viga	5.62
5.3.2.2	Caracterização dinâmica de caixa de areia.....	5.68
5.3.2.1	Caixa pequena.....	5.68

5.2.2.2	Caixa grande.....	5.70
5.2.2.3	Modelo de FEM para a caixa grande.....	5.71
5.3.2.3	Comparação com o elemento espectral “throw-off”	5.74
Capítulo 6		6.1
Conclusões e perspectivas		6.1
6.1	Em relação ao cálculo da intensidade estrutural.....	6.3
6.2	Em relação ao cálculo da energia mecânica.....	6.4
6.3	Em relação aos modos complexos.....	6.5
6.4	Contribuições.....	6.5
6.5	Sugestões para pesquisas futuras	6.6
6.6	Trabalhos publicados.....	6.6
6.6.1	Periódicos internacionais	6.6
6.6.2	Anais de congressos internacionais.....	6.7
Apêndice A.....		A.1
Programas desenvolvidos		A.1
A.1	Programa para análise dinâmica usando o SEM	A.1
A.2	Programa para análise dinâmica usando o FEM	A.4
A.3	Modelo de arquivo de entrada de dados para os programas de SEM e FEM	A.4
A.4	Programa para análise dinâmica usando a SEA.....	A.7
Apêndice B.....		B.1
Acoplamento em viga-L		B.1
B.1	Análise do modelo estático.....	B.2
B.2	Análise do modelo dinâmico.....	B.4
B.2.1	Observações gerais.....	B.6
Apêndice C.....		C.1
Estimação dos coeficientes de acoplamento via SEM e a intensidade estrutural		
.....		C.1
C.1	O modelo de viga-L	C.1

C.2 Comentários e conclusões C.3

Referencias

Lista de Figuras

Capítulo 1

- Figura 1.1 – FRFs de uma estrutura do tipo pórtico espacial, com variações aleatórias nos parâmetros. 1.4
 Figura 1.2 – A relação entre os diferentes métodos para análise dinâmica (MÜLLER,2000)..... 1.11

Capítulo 2

- Figura 2.1 – A relação entre os modelos FEM e SEM.....2.2
 Figura 2.2 – Modelo físico e modelo de elemento espectral de uma estrutura 3-D.2.3
 Figura 2.3 – Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de barra.....2.5
 Figura 2.4 – As funções de forma para um elemento espectral de barra em tração-compressão de 2 nós.
2.7
 Figura 2.5 – A função de forma de elemento de barra em tração-compressão do tipo “throw-off”2.10
 Figura 2.6 – A função de forma de elemento de barra em tração-compressão do tipo “throw-off”, para
 $\eta=10\%$2.10
 Figura 2.7 – Deformação da seção de viga de Timoshenko, incluindo os efeitos de cisalhamento.2.11
 Figura 2.8 – Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de viga.2.12
 Figura 2.9 – Parte real das funções de forma para uma viga de Timoshenko de 2 nós.2.15
 Figura 2.10 – Parte real das funções de forma para um elemento de viga de Timoshenko de 2 nós. ...2.15
 Figura 2.11 – Parte real das funções de forma e para um elemento de viga de Timoshenko do tipo
 “throw-off”.2.18
 Figura 2.12 – Parte imaginária das funções de forma e para um elemento de viga de Timoshenko do
 tipo “throw-off”.2.19
 Figura 2.13 – Deformação da seção de viga de Bernoulli-Euler.2.20
 Figura 2.14 – Parte real das funções de forma para o elemento de viga de Bernoulli-Euler de 2 nós. ...2.23
 Figura 2.15 – Parte real e imaginária das funções de forma para o elemento de viga de Bernoulli-Euler do
 tipo “throw-off”.2.25
 Figura 2.16 – Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de barra em torção.2.26
 Figura 2.17 – Excitação de sistema dinâmico de rigidez e amortecimento, e de elemento infinito.2.29

Figura 2.18 – A comparação entre a resposta do sistema dinâmico amortecido e do elemento infinito.	2.29
Figura 2.19 – O modelo das vigas acopladas, modeladas via SEM e FEM.	2.30
Figura 2.20 – A resposta calculada com via SEM e via SEM+FEM.	2.31
Figura 2.21 – Número de onda em viga de Bernoulli-Euler.	2.32
Figura 2.22 – Número de onda em viga de Timoshenko, com $\eta=0$.	2.33
Figura 2.23 – Modelo de duas vigas, finita e infinita.	2.34
Figura 2.24 – O impulso periódico e seu espectro.	2.34
Figura 2.25 – A mobilidade no nó 2 calculada usando os modelos de viga de Bernoulli-Euler e de Timoshenko.	2.35
Figura 2.26 – A variação da velocidade de propagação de onda de flexão com a frequência.	2.36
Figura 2.27 – Sistema de coordenadas e os GDL's de um membro 3-D.	2.36
Figura 2.28 – Comparação entre a resposta analítica, via SEM, e via FEM, de uma barra em tração-compressão, em torção, e em flexão.	2.41

Capítulo 3

Figura 3.1 – Ressonador linear de 1 GDL.	3.3
Figura 3.2 – Sistema Acoplado de dois Ressonadores lineares.	3.6
Figura 3.3 – Interação dos modos de dois subsistemas com vários GDLs.	3.9
Figura 3.4 – Propagação de energia para o cálculo de coeficiente de acoplamento.	3.12
Figura 3.5 – Duas placas acopladas ao longo de uma linha.	3.14
Figura 3.6 – Diferentes acoplamentos em estruturas treliçadas tridimensionais.	3.17
Figura 3.7 – Duas barras retas conectadas via um ponto.	3.17
Figura 3.8 – Duas vigas retas conectadas em um ponto.	3.19
Figura 3.9 – Duas vigas retas conectadas em um ponto.	3.22
Figura 3.10 – Vigas conectadas em ângulo reto. Propagação no plano x-y.	3.24
Figura 3.11 – Comportamento dos coeficientes de acoplamento com a frequência.	3.31
Figura 3.12 – Comportamento dos coeficientes de acoplamento com a frequência.	3.33
Figura 3.13 – Vigas conectadas em ângulo reto. Propagação fora do plano x-y.	3.34
Figura 3.14 – Um modelo de SEA de 2 subsistema acoplados.	3.42
Figura 3.15 – Duas vigas conectada na forma L, no plano x-y.	3.47
Figura 3.16 – O modelo de SEA para viga do tipo L. Acoplamento conservativo.	3.47
Figura 3.17 – Modelo de SEA com três subsistemas. Acoplamento conservativo.	3.50

Capítulo 4

Figura 4.1 – A relação entre força, velocidade e potência.	4.3
Figura 4.2 – A relação entre a parte ativa e a parte oscilante da potência.	4.4

Figura 4.3 – Componentes ativas e reativas de potência.....	4.5
Figura 4.4 – Mapa de fluxo de potência [Hambric e Taylor, 1994].....	4.6
Figura 4.5 – Componentes de onda em elementos de barra.....	4.7
Figura 4.6 – Componentes de onda em elementos de viga.....	4.9
Figura 4.7 – Discretização da estrutura, via FEM e SEM.....	4.39
Figura 4.8 – A receptância da estrutura calculada via FEM e SEM.....	4.41
Figura 4.9 – Comparação das predições do FEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.....	4.41
Figura 4.10 – Comparação das predições do SEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.....	4.42
Figura 4.11 – O erro absoluto entre a potência injetada e a intensidade estrutural, calculado usando FEM e SEM.....	4.42
Figura 4.12 – Comparação das predições do FEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.....	4.43
Figura 4.13 – Comparação das predições do SEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.....	4.43
Figura 4.14 – O erro absoluto entre a potência injetada e a intensidade estrutural, calculado usando FEM e SEM.....	4.44
Figura 4.15 – Receptância da estrutura calculada via FEM e SEM.....	4.45
Figura 4.16 – A viga-T.....	4.46
Figura 4.17 – A viga-T discretizada via FEM e SEM.....	4.47
Figura 4.18 – O modelo de SEA para a viga-T.....	4.48
Figura 4.19 – Razão de potência na viga A por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.149), e comparada com resultados do Hambric.....	4.49
Figura 4.20 – Razão de potência na viga B por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.149), e comparada com resultados do Hambric.....	4.50
Figura 4.21 – Razão de potência na viga C por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.149), e comparada com resultados do Hambric.....	4.50
Figura 4.22 – Razão de potência na viga A por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.150), e comparada com resultados do Hambric.....	4.52
Figura 4.23 – Razão de potência na viga B por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.150), e comparada com resultados do Hambric.....	4.52
Figura 4.24 – Razão de potência na viga C por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.150), e comparada com resultados do Hambric.....	4.53
Figura 4.25 – Nível de velocidade por SEM.....	4.53
Figura 4.26 – Nível de velocidade por SEA.....	4.54

Capítulo 5

Figura 5.1 – Exemplos de vigas retas: (a) engastada-livre; (b) semi-infinita;5.7

Figura 5.2 – FRF da viga engastada-livre da Figura 5.1 (a).5.7

Figura 5.3 – O comportamento das ondas estacionárias da terceira ressonância da viga engastada-livre.
.....5.8

Figura 5.4 – O terceiro modo natural da viga engastada-livre, no plano complexo.5.9

Figura 5.5 – Amplitude e fase do terceiro modo natural da viga engastada-livre.....5.9

Figura 5.6 – A resposta em frequência da viga semi-infinita.5.10

Figura 5.7 – O padrão de onda propagante na viga semi-infinita para ODS em 173 Hz.5.10

Figura 5.8 – ODS de 173 Hz da viga semi-infinita, no plano complexo.5.11

Figura 5.9 – Amplitude e fase do ODS 173 Hz da viga semi-infinita.5.11

Figura 5.10 – A resposta em frequência da viga semi-infinita com descontinuidade.....5.12

Figura 5.11 – O padrão dos modos locais e propagação de onda na viga semi-infinita com
descontinuidade para ODS em 176.4 Hz.....5.13

Figura 5.12 – ODS de 176.4 Hz no plano complexo da viga semi-infinita com descontinuidade.5.14

Figura 5.13 – Amplitude e fase do ODS em 176.4 Hz da viga semi-infinita com descontinuidade.....5.14

Figura 5.14 – ODS de 1 kHz no plano complexo.....5.15

Figura 5.15 – Propagação de ondas para a esquerda e para a direita no ODS de 1 kHz da viga infinita.
.....5.15

Figura 5.16 – Amplitude e fase do ODS em 1 kHz da viga infinita.....5.16

Figura 5.17 – O fator β para as vigas da Figura 5.1 (a), (b), (c), e (d).....5.16

Figura 5.18 – A transição do ODS passando pela singularidade na ressonância 557.7Hz, somente para a
parte finita da estrutura.....5.18

Figura 5.19 – Os fatores β e o coeficiente de correlação na faixa de 551 Hz a 561 Hz, passando pela
ressonância de 557.7 Hz.....5.18

Figura 5.20 – Exemplo da viga-L.5.19

Figura 5.21 – A resposta em frequência da viga-L calculado no ponto p1 para os GDLs longitudinais e
transversais.5.20

Figura 5.22 – ODS de 5.5 Hz da viga-L.5.21

Figura 5.23 – ODS de 5.5 Hz no plano complexo, na Viga 1 do modelo viga-L.5.21

Figura 5.24 – ODS de 5.5 Hz no plano complexo, na Viga 2 do modelo viga-L.5.22

Figura 5.25 – ODS de 474.5 Hz da viga-L.5.23

Figura 5.26 – ODS de 474.5 Hz no plano complexo. Viga 1 do modelo viga-L.5.23

Figura 5.27 – ODS de 474.5 Hz no plano complexo. Viga 2 do modelo viga-L.5.24

Figura 5.28 – O fator β calculado para a viga-L em toda a faixa de frequência.5.25

Figura 5.29 – Exemplo de pórtico espacial.....5.26

Figura 5.30 – Malha do SEM utilizada para o pórtico espacial.....5.26

Figura 5.31 – Resposta em frequência no ponto de excitação, nas 3 direções	5.27
Figura 5.32 – O ODS na frequência 2.98 Hz.	5.27
Figura 5.33 – ODS na frequência 2.98 Hz.	5.28
Figura 5.34 – O ODS de 2.98 Hz no plano complexo.....	5.28
Figura 5.35 – O ODS na frequência 33.17 Hz.	5.29
Figura 5.36 – ODS na frequência 33.17 Hz.	5.30
Figura 5.37 – O ODS de 33.17 Hz no plano complexo.....	5.30
Figura 5.38 – Modelo de uma placa infinita com força pontual.	5.31
Figura 5.39 – ODS de 1 kHz de uma placa infinita, com força concentrada.	5.34
Figura 5.40 – A vibração e o amortecimento geométrico na placa infinita.	5.34
Figura 5.41 – A FRF e função de coerência medidas no ponto de excitação.	5.35
Figura 5.42 – O padrão dos modos locais na viga enfiada em caixa de areia. ODS de 43 Hz.....	5.36
Figura 5.43 – ODS de 43 Hz no plano complexo da viga enfiada em caixa de areia.	5.36
Figura 5.44 – Amplitude e fase do ODS em 43 Hz da viga enfiada em caixa de areia.....	5.37
Figura 5.45 – O padrão dos modos locais na viga enfiada em caixa de areia. ODS de 510 Hz.....	5.37
Figura 5.46 – O ODS em 510 Hz da viga enfiada em caixa de areia.	5.38
Figura 5.47 – Fase e amplitude normalizada do ODS em 510 Hz da viga enfiada em caixa de areia.	5.38
Figura 5.48 – Modelo de viga-L; (a) modelo do SEM, (b) excitação nos diferentes subsistemas.....	5.48
Figura 5.49 – Modelo para o acoplamento dos subsistemas na viga-L.	5.48
Figura 5.50 – Os diferentes fatores η_{ij} estimados por SEM/PIM e pela formulação analítica de CREMER e sua diferença.	5.51
Figura 5.51 – O número de condição da matriz de energia.....	5.54
Figura 5.52 – Nível de energia na viga A quando uma potência é injetada no subsistema 1 do modelo da Figura 5.48.	5.55
Figura 5.53 – Nível de energia na viga B quando uma potência é injetada no subsistema 1 do modelo da Figura 5.48.	5.55
Figura 5.54 – Os diferentes fatores η_{ij} estimados por SEM/S&L e pela a formulação analítica de CREMER e sua diferença.	5.56
Figura 5.55 – O espectro de energia na viga-A, calculado via SEA.	5.60
Figura 5.56 – O espectro de energia na viga-B, calculado via SEA.	5.60
Figura 5.57 – O espectro de energia na viga-C, calculado via SEA.	5.61
Figura 5.58 – Configuração experimental da viga engastada-livre e seus GDLs.....	5.63
Figura 5.59 – Modelo de SEM, com os 6 GDLs.	5.63
Figura 5.60 – Configuração do experimento da viga engastada.	5.66
Figura 5.61 – A função de coerência medida no ponto de excitação da viga engastada.	5.66
Figura 5.62 – As rigidez dinâmicas, de translação e de rotação, que caracterizam o engaste estimadas por SEM.....	5.67

Figura 5.63 – A FRF (GDL:v2) no ponto de excitação, experimental, engaste numérico, e engaste ajustado da viga engastada-livre, estimadas por SEM.	5.67
Figura 5.64 – Configuração experimental do experimento de caixa de areia pequena.	5.69
Figura 5.65 – A função de coerência medida no ponto de excitação da viga com caixa de areia.	5.69
Figura 5.66 – As FRFs (GDL:v2) no ponto de excitação, experimental e ajustada, da viga com caixa de areia pequena. Estimação por SEM.	5.70
Figura 5.67 – Configuração experimental do experimento de caixa de areia grande.	5.70
Figura 5.68 – As FRFs (GDL:v2) no ponto de excitação, experimental e ajustada, da viga com caixa de areia grande estimada via SEM, juntamente com o erro.	5.71
Figura 5.69 – As FRFs (GDL:v2) no ponto de excitação, experimental e ajustada, da viga com caixa de areia grande estimada via FEM, juntamente com o erro.	5.72
Figura 5.70 – A rigidez dinâmica Kv_1 estimada por FEM e SEM, e a diferença entre as duas estimativas. Modelo de caixa grande de areia.	5.72
Figura 5.71 – A rigidez dinâmica $K_{\square 1}$ estimada por FEM e SEM, e a diferença entre as duas estimativas. Modelo de caixa grande de areia.	5.73
Figura 5.72 – FRF (GDL:v2) do modelo de SEM ajustado com as rigidez dinâmicas obtidas através do modelo de FEM.	5.73
Figura 5.73 – FRF (GDL:v2) do modelo de FEM ajustado com as rigidez dinâmicas obtidas através do modelo de SEM.	5.74
Figura 5.74 – Modelo de SEM para a viga enfiada em caixa de areia.	5.74
Figura 5.75 – As FRFs no ponto de excitação, usando elemento “throw-off”, e experimental usando caixa de areia pequena e grande.	5.75

Capítulo 6

Figura 6.1 – As diferentes metodologias, e a relação estabelecida entre elas, e conduzida neste trabalho.	6.3
--	-----

Apêndice A

Figura A.1 – Blocos de programação usando as formulações de SEM.	A.4
Figura A.2 – Estrutura do tipo pórtico tridimensional.	A.5
Figura A.3 – Exemplo de arquivo de entrada de dados do programa.	A.6
Figura A.4 – Definição de linhas de frequência.	A.7
Figura A.5 – As anotações do R. H. LYON sobre o balanço de energia, 1960.	A.7
Figura A.6 – Exemplo de arquivo de entrada de dados do programa SEA.	A.9
Figura A.7 – Viga do tipo T.	A.9

Apêndice B

Figura B.1 – Excitação de viga-L, e seus graus de liberdade.....	B.1
Figura B.2 – Gráfico da matriz esparsa de rigidez estática.	B.3
Figura B.3 – Gráfico da matriz esparsa de flexibilidade estática.	B.3
Figura B.4 – Deslocamentos estáticos nos graus de liberdade.....	B.4
Figura B.5 – Gráfico da matriz esparsa de rigidez dinâmica.	B.5
Figura B.6 – Gráfico da matriz esparsa de flexibilidade dinâmica.	B.5
Figura B.7 – Deslocamentos dinâmicos nos graus de liberdade.....	B.6
Figura B.8 – FRF em duas direções.	B.6

Apêndice C

Figura C.1 – Excitação e as componentes de fluxo de potência no modelo de viga-L.	C.2
Figura C.2 – Os diferentes coeficientes de acoplamento η_{ij} estimados por fluxo de potência via SEM, e comparados com os de CREMER.	C.3

Lista de Tabelas

Capítulo 3

Tabela 3.1 – Valores típicos de fator de perda de alguns materiais.....3.41

Tabela 3.2 – Número de condição da matriz de energia.3.52

Capítulo 5

Tabela 5.1 – Propriedades das vigas usadas nos modelo unidimensionais.5.6

Capítulo 1

Introdução e revisão bibliográfica

Neste capítulo, uma introdução ao problema de vibrações em altas frequências será apresentada, e na seqüência será apresentada uma revisão bibliográfica dos trabalhos relacionados a vibração em médias e altas frequências. As justificativas para revisar, investigar, implementar e comparar as técnicas e metodologias mais recentes para a modelagem de vibrações estruturais em médias e altas frequências serão apresentadas.

1.1 Introdução e motivação

Muitas situações surgem em que estruturas são sujeitas a excitações de médias ou altas frequências. Estas excitações pode ter diferentes formas, mecânica ou acústica. Estruturas espaciais, aeronaves veículos, por exemplo, podem estar sujeitas a estes tipos de excitações. Estas excitações podem conduzir a problemas de fadiga, ruídos, e níveis excessivos de vibrações em algumas partes da estrutura. A predição da resposta dinâmica em altas frequências não é uma tarefa fácil, e exige a utilização de metodologias específicas para obtê-la.

Ferramentas para predição de vibrações em médias e altas frequências são necessárias para o controle de ruídos e níveis de vibração excessivos. Um dos assuntos mais críticos neste área de pesquisa é a identificação dos trajetos de transmissão de vibração (ou energia). Identificando estes trajetos, o controle de vibração e ruído pode ser feito eficientemente. Pode-se, por exemplo, otimizar o peso de uma estrutura aeronáutica mantendo-se os níveis de ruído e de vibração nos

limites desejados. Os ruídos carregados pelas estruturas, a que se refere como “structure-borne noise”, normalmente acontecem em altas frequências, o que torna a análise dinâmica de estruturas em altas frequências um assunto importante para ser investigado.

Não existe um esquema claro e absoluto para definir se a excitação é de baixa, média, ou alta frequência, mas cada faixa destas é ligada ao tipo de estrutura, e aos seus modos de vibrar (LANGLEY, 1998). Talvez a melhor maneira para definir estas faixas seja através da densidade modal (o número de modos por faixa de frequência). As frequências baixas podem incluir até os primeiros dez ou vinte modos naturais, em que a resposta dinâmica pode ser conduzida normalmente via o Método dos Elementos Finitos (FEM). As médias frequências incluem os modos de ordem mais elevada, onde o FEM ainda pode ser usado mas com alto custo computacional, e em altas frequências o custo computacional é ainda maior, e podem surgir outros tipos de problemas que serão discutidos em seguida. Uma forma de definir isto é a partir da definição de um mínimo para a densidade modal. No método de Análise Estatística de Energia (SEA), por exemplo, a mínima densidade modal recomendada na literatura varia de seis a dez modos por banda de 1/3 de oitava, o que é a banda mais utilizada.

Outro problema que também surge em análise dinâmica em médias e altas frequências é quando o comprimento de onda na frequência analisada é pequeno em relação à dimensão da estrutura analisada, o que torna o modelo determinístico (FEM) grande para ser resolvido, com grande número de graus de liberdade. O seguinte exemplo mostra o excessivo número de graus de liberdade que poderia ser requisitado no modelo de FEM. O número de nós de FEM necessário para a modelagem de uma estrutura de comprimento L e um comprimento de onda característico λ é da ordem de $(8L/\lambda)^r$, onde o r representa a dimensão da estrutura, sendo que $r=1$ para vigas, e $r=2$ para placas (LANGLEY, 1998). Neste caso foi utilizada a regra típica (“rule-of-thumb”) de que oito elementos por comprimento de onda são suficientes para uma modelagem dinâmica (BATHE, 1996). Desta forma, para uma placa de alumínio de espessura $h=2$ mm, o número de onda para os modos de flexão da placa de Kirschhoff é $k = 1.3347\sqrt{f}$ com f sendo a frequência de vibração em Hz. Assim, o comprimento de onda (em metros) é $\lambda = 4.707/\sqrt{f}$. Considerando uma dimensão $L=10$ m, o que é uma dimensão típica em aeronaves, o número de nós necessário para a modelagem desta placa é igual a 289f. Para uma análise tridimensional

existem seis graus de liberdade por nó, e desta forma o modelo do FEM envolve o total de 1734f graus de liberdade, resultando em quase dois milhões de graus de liberdade para uma análise em 1 kHz. Desta forma as matrizes de rigidez e de massa do FEM têm a ordem de dois milhões, o que torna-se difícil de ser resolvido, mesmo utilizando algoritmos específicos para a resolução de sistemas simétricos, esparsos e com forma de matrizes de banda, e usando métodos de redução.

A forma em que o número de modos naturais, ou a densidade modal, aumenta com a frequência depende do tipo da estrutura analisada. Em estruturas simples como, por exemplo, vigas unidimensionais, o número de modos por banda aumenta gradualmente. Por outro lado, estruturas do tipo pórticos e placas, este número aumenta rapidamente com a frequência de excitação. Desta forma, um problema de maior interesse e também de maior dificuldade de ser resolvido pode surgir, que é a análise dinâmica em médias e alta frequência de uma placa grande e fina reforçada com elementos de viga. Este tipo de estrutura pode ser encontrada em, por exemplo, aeronaves e navios. Neste caso, a dificuldade surge devido à diferença entre o número de modos da placa e o da viga, em uma determinada faixa de frequência. A placa exibe grande número de modos de flexão, enquanto a viga exibe um número de modos muito menor, na mesma faixa de frequência. Assim, um grande desafio hoje é conduzir uma análise dinâmica deste tipo de estruturas em médias e altas faixas de frequência. Uma das linhas de pesquisa é realizar o acoplamento entre os elementos de viga, modeladas via FEM ou SEM (Método dos Elementos Espectrais), com os subsistemas de placa modelados via SEA, o que é adequado para análise em médias e altas frequências. Este tipo de acoplamento é o chamado modelos *híbridos*.

Talvez um dos grandes problemas em análise dinâmica em altas frequências é relacionado às variações dos parâmetros estruturais, como por exemplo, a área de seção, o comprimento da estrutura, propriedades do material, ...etc. Estas variações nos parâmetros podem acontecer devido aos fatores de tempo de uso, mudanças de temperatura, condições de uso, ou também devido a variabilidade na fase de produção, ou seja, na fabricação de vários exemplares. De qualquer modo, e devido a estas variações, as matrizes de massa, rigidez, e amortecimento sofrem mudanças pequenas mas elas são significativas para uma análise dinâmica em altas frequências, onde o comportamento dinâmico da estrutura pode mudar drasticamente. Isto é mostrado na seguinte figura onde a resposta de uma estrutura do tipo pórtico espacial formada de

16 vigas é analisada. Uma força periódica é aplicada a estrutura, e a resposta em frequência é calculada (usando SEM) no ponto de excitação. Pequenas variações ($\pm 1\%$) nos parâmetros da estrutura (ρ , A , E , L) são induzidas em forma aleatória, e a resposta para cada uma destas variações é então novamente calculada,

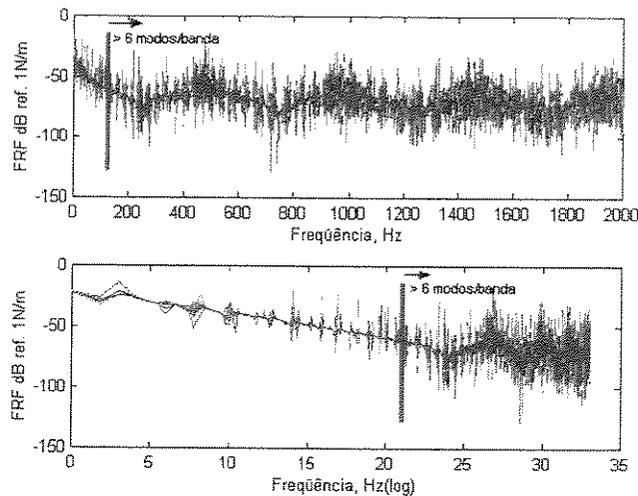


Figura 1.1 – FRFs de uma estrutura do tipo pórtico espacial, com variações aleatórias nos parâmetros.

As FRFs são mostradas em duas escalas de frequência: linear, em que $\Delta\omega$ é constante, e logarítmica, em que $\Delta\omega/\omega$ é constante, para mostrar a densidade modal. Nesta faixa de frequência, a estrutura exibe aproximadamente 380 modos naturais. Observa que a linha vertical mostra a posição onde a densidade modal é igual a 6 modos por banda de 1/3 de oitava. Desta figura, e em geral, pode-se ressaltar que torna-se inútil calcular a resposta dinâmica e calcular os modos naturais se a variação de frequência natural ω_n é maior do que o espaçamento na frequência $\Delta\omega$. Uma discretização menor de $\Delta\omega$ pode ser usada mas não seria significativo por razões de aumento de tempo de processamento numérico. Além deste problema, o modelo modal pode ser reduzido em relação ao modelo espacial, devido ao alto número de modos em altas frequências, mas esta redução resultará em número ainda alto de modos e não muito diferente do número original. Isto faz com que o processo de redução de modelo seja insignificante.

Além dos métodos determinísticos, também não existe um método experimental modal apropriado para analisar o comportamento dinâmico de uma estrutura complexa em altas faixas de frequência. O método de análise modal experimental tem o objetivo de determinar e analisar o comportamento dinâmico de uma estrutura, através da identificação das características modais (modos e frequências naturais). Este método é aplicável somente em baixas frequências de excitação. Em frequências mais altas, o número de modos aumenta, e os modos tendem a sobrepôr (“mode overlap”). Assim, a análise modal experimental começa a produzir resultados incorretos e enganadores.

1.2 Metodologias para análise em médias e altas frequências

Os métodos chamados *determinísticos*, tais como o FEM e o Método dos Elementos de Contorno (BEM), são as técnicas mais utilizadas para predição de ruídos acústicos e vibrações estruturais. Teoricamente, estas técnicas não exibem limites para a análise em faixas largas de frequência. O Método dos Elementos Espectrais (SEM) é também um método determinístico, mas com características diferentes e é baseado em funções de forma exatas, como será explicado nos próximos capítulos. O FEM pode ser usado para obter as funções de resposta em frequência (FRF), as funções de resposta transiente, os autovalores e os autovetores, e que são calculados como sendo valores discretos.

O FEM foi implementado em vários pacotes computacionais comerciais que usam a chamada versão-h. Em geral, esta versão é baseada em elementos com baixo grau de polinômio para descrever as funções de deslocamento, onde a convergência é requisitada através de refinamento de malha, ou seja, usar elemento com tamanhos menores (ZIENKIEWICZ, 1977). A análise de vibração é então feita através da construção das matrizes globais de massa e rigidez, resolver o problema de autovalor/autovetor, e em seguida a resposta forçada pode ser obtida (MEIROVITCH, 1986). A versão-h de FEM é adequada para análise em baixas frequências mas não é bem adequada para médias e altas frequências. Durante os anos 70, mais estudos foram feitas para contornar este problema, e isto resultou em desenvolver a versão-p de FEM (BABUSKA ET AL. (1981), MEIROVITCH E BAHRUH (1983), ZIENKIEWICZ ET AL. (1983)). Esta versão consiste em usar elementos com grau de polinômio mais alto, sem refinamento de malha, o que tem a

vantagem de usar a mesma malha sucessivamente. Com a versão-p, a análise via FEM pode se estender para frequências mais altas, mas assim, levou-se mais de 15 anos para que esta versão seja reconhecida e aplicada comercialmente. A versão, relativamente, mais nova é a versão híbrida h-p. Ela consiste em usar as duas versões anteriores simultaneamente, e assim, análises de vibração em frequências mais altas podem ser conduzidas, mas esta versão ainda está em fase de estudos e desenvolvimento (LANGLEY, 1998).

Praticamente, entretanto, o FEM não é efetivo em altas frequências. DE LANGHE (1996) escreveu: *embora o método dos elementos finitos seja efetivo em baixas frequências para a predição do ruído propagado por via estrutural ("structure-borne noise") e da vibração estrutural, não foi efetivo em altas frequências mesmo com a crescente velocidade computacional e o sofisticado desenvolvimento do FEM*. Em altas frequências, o comprimento de onda tende a diminuir, e o tamanho do elemento finito deve ser reduzido da mesma proporção para se obter soluções mais robustas. Isto resulta em sistemas matriciais extremamente grandes para serem resolvidos. DE LANGHE (1996) mostra um exemplo de um veículo modelado com o FEM com resultados aceitáveis até 200 Hz e com densidade modal excessivamente alta além desta frequência. PERETTI E DOWELL (1992) mostraram que a análise dinâmica de um automóvel via o FEM pode ser realizada com eficiência na faixa de 0-200 Hz, enquanto o ruído e os principais problemas de vibração aparecem na faixa de 200-1000 Hz.

Grandes estruturas espaciais do tipo pórtico com dimensões de dezenas de metros são ainda mais difíceis de serem analisadas. As características dinâmicas deste tipo de estruturas devem ser preditas com exatidão suficiente na fase inicial de projeto uma vez que, normalmente, não podem ser analisadas experimentalmente na fase de operação. LEE E LEE (1996) afirmam que o uso do FEM para a análise dinâmica deste tipo de estruturas pode ter um custo computacional muito alto.

KULLA (1997) comenta que o FEM estabeleceu-se como uma ótima técnica para a análise estrutural mas os resultados do FEM continuam sendo, em vários casos, não satisfatórios devido ao fato que os elementos finitos somente aproximam as equações diferenciais parciais que descrevem a estrutura. A qualidade desta aproximação depende da malha discretizada. No seu

artigo, ele propõe a utilização de um método de precisão mais alta do que o FEM, o que ele chamou do método de alta precisão de elementos finitos (“High-precision Finite Element Method”, HPFEM). Este método tem a mesma formulação do Método do Elemento Espectral (SEM) a ser apresentado nos próximos capítulos. A única diferença é que os elementos de HPFEM são descritos com funções de forma do tipo funções trigonométricas hiperbólicas.

KIM ET AL. (1997) fizeram o cálculo de mobilidade de uma fundação formada de várias placas. Eles usaram o FEM, utilizando o pacote ANSYS, e compararam os resultados numéricos com outros obtidos experimentalmente. Eles, então, afirmam que o FEM apresentou resultados razoáveis em baixas frequências, até cerca de 300Hz. Oitenta modos foram usados para obter a mobilidade do modelo, o que precisou de aproximadamente dez horas em uma estação de trabalho tipo HP-WS-C110. Eles recomendam o uso do método de Análise Estatística de Energia (SEA) para frequências mais elevadas.

CHOI ET AL. (1997) também utilizaram o SEA em formulação diferente, o chamado “Parameter-based SEA (PSEA)”. Eles afirmam que em frequências onde começa a faixa média de frequência, os modelos determinísticos começam a falhar em prever uma resposta com exatidão suficiente. UNGAR (1997) também comentou sobre as limitações do FEM não somente em relação ao custo computacional mas também em relação às detalhadas especificações de condições de inter-conexão que geralmente não são modeladas de uma forma realística. Uma destas condições de contorno são as chamadas terminações anecóicas. Um exemplo de condição de contorno deste tipo pode ser encontrado em estacas de construção civil.

O fluxo de energia em estruturas foi estudado utilizando métodos que combinam o SEA e o FEM. WILSON (1997) estudou o fluxo de energia em estruturas acopladas e com rigidez diferentes. Ele afirma que, *para estruturas do tipo placas finas, o FEM apresentou resultados relativamente pobres em frequências que correspondem à faixa que vai do 10º ao 20º modos de vibração. Os modos acústicos mais importantes podem chegar até ao 100º modo, e, mesmo com a utilização dos métodos de redução dos modelos numéricos, os resultados obtidos para altas frequências ainda não seriam satisfatórios.*

SESTIERI E CARCATERRA (1996) escreveram que o FEM foi usado por muito tempo como sendo o único método para fazer este tipo de análise, mas continua tendo limitações em altas frequências. Em seu trabalho foi feita uma revisão de diferentes técnicas numéricas para a solução de problemas de vibração em altas frequências, entre elas o SEA, a analogia térmica, as formulações alternativas de energia tal como a análise de intensidade de ondas (“Wave Intensity Analysis (WIA)”) proposto por LANGLEY (1989), e as formulações geral e suave de energia (“General and Smooth Energy Formulations”) proposto por LE BOT E JEZEQUEL (1994). O SEA será apresentado com mais detalhes nos próximos capítulos. A metodologia de analogia térmica, ou a chamada Análise de Fluxo de Energia por FEM (EFFEA) foi primeiramente apresentada por BELOV ET AL. (1977) e BUVAILO E IONOV (1980) como sendo uma extensão do SEA. Esta metodologia envolve a modelagem da energia vibracional em uma estrutura de uma forma semelhante a propagação de calor via condução térmica, ou seja, através de uma equação que relaciona a densidade de energia de um sistema com a densidade de potência injetada no mesmo.. NEFSKE E SUNG (1989) e BOUTHIER ET AL. (1990) mostraram a aplicação deste método em vigas e placas. Eles utilizaram o FEM, usando MSC/NASTRAN, para resolver a equação diferencial. WOHLEVER E BERNHARD (1992) mostraram as limitações da aproximação via analogia térmica para que a energia seja calculada como média espacial e como média na frequência (BOUTHIER E BERNHARD (1995A) E BOUTHIER E BERNHARD (1995B)). O cálculo destas médias na metodologia EFFEA foi aplicado em sistemas unidimensionais e sistemas caracterizados pela propagação de ondas planas. Para sistemas reverberantes no espaço 1-, 2-, ou 3-D, a aproximação de ondas planas ainda é válida no campo próximo, onde o BEM pode ser utilizada para resolver as equações diferenciais. Uma revisão geral deste método, com aplicação em juntas estruturais, foi feita no trabalho de BERNHARD E HUFF (1999). A equação principal descreve a densidade da variação de energia de um sistema como sendo a diferença entre a densidade de fluxo de energia e a potência dissipada no mesmo. Esta equação é então escrita em forma análoga da forma usada em problema de condução de calor.

Métodos baseados no FEM, tais como o Galerkin/Mínimos Quadrados (GLS) (THOMPSON E PINSKY (1995), IHLENBURG E BABUSKA (1995)) e o Galerkin/Gradiente Mínimos Quadrados (GGLS) (FRANCA E DUTRA DO CARMO, 1989) também foram pesquisados para obter uma solução da equação de Helmholtz em números elevados de onda. Além dos problemas

computacionais do FEM, existe ainda o problema de análise de sensibilidade da resposta modal às variações das propriedades do modelo. Isto é, o modelo de FEM em altas frequências torna-se muito sensível a qualquer mudança na estrutura, e assim, um estudo de sensibilidade deve ser conduzido.

Apesar das limitações do FEM, mostradas nas publicações acima mencionadas, em estudos de altas frequências ou elevados números de onda, ele continua sendo o método mais utilizado para resolver problemas estáticos e dinâmicos da engenharia. Pacotes computacionais, tais como ANSYS e NASTRAN, predominam em várias áreas de engenharia. Portanto, as técnicas numéricas, apresentadas neste trabalho para análise em altas frequências, podem ser consideradas como sendo técnicas complementares ao FEM. Por outro lado, os métodos de energia vêm tendo aceitação crescente na indústria. Por exemplo, o SEA está sendo muito utilizado para a análise dinâmica de estruturas veiculares. Pacotes comerciais foram feitos para a análise via SEA, entre eles o AUTOSEA, AUTOSEA-X, e SEADS. O SEA é hoje alvo de uma corrida das empresas de software na área de vibrações e acústica devido ao sucesso comercial do software AUTOSEA.

1.3 Métodos investigados neste trabalho

Devido às discussões acima mostradas em relação aos métodos determinísticos mais conhecidos, foram investigadas nesta tese técnicas de modelagem de estruturas melhor adaptadas às médias e altas frequências do que o FEM. Inicialmente foi investigado o Método dos Elementos Espectrais (SEM) (DOYLE, 1997). Este método é baseado na construção da matrizes de rigidez dinâmica que relacionam as forças aplicadas a uma estrutura com os deslocamentos resultantes. Esta matriz é calculada no domínio de frequência. Neste método, a estrutura é dividida em um número de elementos estruturais dependendo das discontinuidades existentes na estrutura original, e cada elemento destes é então modelado com apenas um elemento espectral para cada tipo de onda.

O outro método que foi investigado é o método de Análise Estatística de Energia (SEA) primeiramente proposto nos anos 60. Um dos primeiros trabalhos feitos usando este método é do LYON E MAIDANIK (1962). Eles utilizaram o SEA para estudar o fluxo de energia entre dois sub-

sistemas. Desde então, O SEA é usado na solução de diversos problemas de vibração e acústica. Através desta técnica, o sistema é modelado como sendo um conjunto de sub-sistemas. A vantagem deste método é que a sua formulação é considerada simples e direta. Cada sub-sistema exibe um único grau de liberdade, o que resulta em baixo custo computacional. A distribuição da resposta dinâmica do sistema é obtida através da distribuição de energia entre os sub-sistemas baseando-se nas equações de equilíbrio de energia destes sub-sistemas. Estas características podem ser muito benéficas para sistemas grandes e complexos quando comparadas com as dos métodos numéricos tipo FEM e BEM (UNGAR, 1997). A desvantagem deste método é a deficiência nas faixas de baixa frequência, com resultados não muito precisos. Além disso, somente respostas estatísticas podem ser obtidas, o que significa que estas respostas são valores médios aproximados. Isso pode ser menos significativo em sistemas de ordem elevada, e para superar este tipo de problema, as variâncias são também calculadas. É importante lembrar que existem congressos internacionais para os usuários do SEA, e que as últimas pesquisas relacionadas ao SEA podem ser encontradas nos anais do recente criado congresso IUTAM.

A outra técnica que também foi investigada neste trabalho é a técnica de fluxo de potência estrutural, ou a intensidade estrutural. A medição do fluxo de potência estrutural foi primeiramente apresentada por NOISEUX (1970) onde ele descreveu as ondas de flexão em termos de vibrações de superfícies, o que facilita o cálculo de fluxo de potência utilizando acelerômetros lineares e de rotação considerando a condição do campo distante. Além disso, a análise numérica de fluxo de potência estrutural é considerada relativamente nova (HAMBRIC E TAYLOR, 1994). O estudo de fluxo de potência em estruturas pode ser proveitoso na identificação de como a energia se propaga em estruturas e então ajudar a fazer as apropriadas mudanças para diminuir o nível de energia de vibração. Vigas e placas podem ser analisadas em médias e altas frequências considerando somente a condição de campo distante, o que, ainda, pode resultar numa aproximação bastante razoável (BOUTHIER ET AL. (1990), CARCATERRA E SESTIERI (1995), e CARCATERRA E ADAMO (1996)).

Os trabalhos encontrados na literatura mostram como as metodologias para análise dinâmica em médias e altas frequências têm sido alvo de recentes pesquisas. Pode-se dizer que os métodos de análise de vibrações em médias e altas frequências é uma das principais áreas de

pesquisa dos grupos com tradição na análise experimental e numérica de vibrações, o que justifica a investigação conduzida neste trabalho. Em geral, as principais metodologias usadas para análise numérica de estruturas e de sistemas acústicos podem ser classificadas e resumidas conforme mostrado na Figura 1.2. Nesta figura, adaptada de MÜLLER (2000), são mostradas as limitações de cada metodologia conforme a faixa de frequência, as condições de contorno, e o número de sistemas que podem ser modelados. Observa que, pode exemplo, a limitação em frequência do FEM e BEM, por outro lado o SEA exige uma limitação em baixas frequências de excitação.

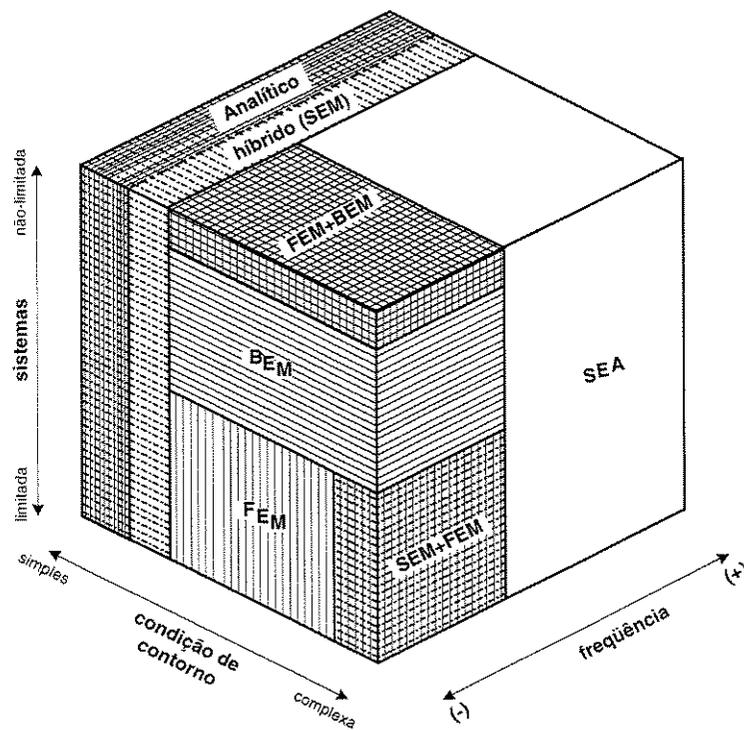


Figura 1.2 – A relação entre os diferentes métodos para análise dinâmica (MÜLLER,2000).

O enfoque deste trabalho concentra-se em revisar, investigar, implementar e comparar algumas das técnicas e metodologias mais recentes para a modelagem de vibrações estruturais em médias e altas frequências, estabelecer uma conexão entre elas e fazer a validação destas metodologias através da simulação de casos reais via a implementação em estruturas do tipo pórtico, uni-, bi-, e tri-dimensionais. Um enfoque maior é dado às diversas aplicações do método

dos elementos espectrais (SEM), utilizando a sua característica de modelagem de estruturas infinitas. A relação, e possível ligação, entre estas técnicas são investigadas neste trabalho.

Três programas foram desenvolvidos neste trabalho, e implementados em ambiente MATLAB[®]. O primeiro é um programa para análise de pórticos espaciais utilizando as formulações de SEM. O programa foi escrito para análise dinâmica através do cálculo da resposta em frequência, fluxo de potência estrutural, as energias potencial e cinética, e o cálculo e animação dos modos operacionais. A análise inclui todos os possíveis tipos de ondas que se propagam em estruturas do tipo pórticos espaciais. O segundo é um programa para a análise via FEM, que também calcula a FRF, o fluxo de potência, a energia, e os modos operacionais. O terceiro programa é para a análise via o SEA de estruturas do tipo pórticos espaciais.

1.4 Organização da tese

É importante ressaltar que uma revisão bibliográfica é apresentada no começo de cada capítulo que apresenta cada uma das três metodologias acima mencionadas, o SEM, o SEA, e o fluxo de potência.

O segundo capítulo deste trabalho apresenta as formulações do método dos elementos espectrais para a modelagem de estruturas do tipo pórticos espaciais definidas no espaço tridimensional. O elemento de pórtico (ou viga) 3-D com seis graus de liberdade por nó é estudado. As teorias de Timoshenko e de Bernoulli-Euler para vigas são usadas. As formulações para a modelagem de membros semi-infinitos, que são uma vantagem única deste método, são também mostradas. As funções de forma destes elementos, finitos e infinitos, são também apresentados.

No terceiro capítulo serão mostradas as formulações do método de Análise Estatística de Energia (SEA). Um estudo da energia de vibração em ressonadores modais de um grau e de vários graus de liberdade é apresentado. Este estudo constitui a base para a formulação do SEA. As metodologias adotadas para o cálculo dos fatores de perda por acoplamento para vários tipos de acoplamentos são mostradas. Os coeficientes de transmissão e de reflexão em diferentes tipo

de acoplamento são mostrados para vários tipos de ondas incidentes: longitudinais, transversais em dois planos, e torcionais. Em seguida, as formulações básicas do SEA são dadas. A formulação do método de potência injetada (PIM), que é a base da SEA experimental, é apresentada, e as vantagens e desvantagens do SEA são discutidas.

No capítulo 4, são mostrados os conceitos básicos da técnica de fluxo de potência estrutural. Estruturas do tipo pórtico espacial são estudadas. Portanto, as formulações para o cálculo de fluxo de potência neste tipo de estruturas são desenvolvidas. Assim, as formulações para o cálculo de fluxo de potência via o método dos elementos finitos e via o método dos elementos espectrais são desenvolvidas. A fim de fazer a comparação com outras metodologias de energia para a análise dinâmica estrutural, o cálculo de energia cinética e potencial é necessário. As formulações para o cálculo destas energias em estruturas do tipo pórticos espaciais são desenvolvidas para o método dos elementos finitos e para o método dos elementos espectrais. As formulações para a medição experimental dos diferentes componentes de fluxo de potência; longitudinais, transversais, e torcionais, são mostradas.

Sendo o principal enfoque deste trabalho, algumas aplicações do SEM na área da dinâmica estrutural são apresentadas. O quinto capítulo apresenta estas aplicações. A primeira aplicação é relacionada ao estudo de propagação de ondas em estruturas do tipo pórticos uni-, bi-, e tridimensionais. Uma análise dos modos complexos deste tipo de estrutura é conduzida. Estruturas com partes infinitas, onde a análise modal tradicional não se aplica, são analisadas. Os modos complexos são interpretados como sendo fenômenos de propagação de ondas estruturais. Coeficientes para a quantificação da complexidade modal são apresentados. A outra aplicação do SEM é relacionada aos fatores de acoplamento entre os diferentes subsistemas utilizados especificamente no método de análise estatística de energia (SEA). Estes fatores são obtidos via o SEM para acoplamentos simples, a fim de comparar com fatores obtidos analiticamente. A terceira aplicação é um estudo de dois tipos de condições de contorno estrutural. Modelos de engaste de vigas e vigas com terminações anecóicas são analisados para a obtenção das impedâncias e condições de contorno experimentais. O FEM é também utilizado para a caracterização destas condições de contorno a fim de ser comparado com os resultados obtidos via o SEM.

O capítulo 6 apresenta as conclusões extraídas do trabalho, os comentários gerais, e algumas sugestões para a continuidade de pesquisa nesta área. São apresentados os artigos publicados em anais de congressos nacionais e internacionais e em periódicos internacionais. O apêndice apresenta as várias etapas de programação feitas durante o trabalho.

Capítulo 2

O Método dos Elementos Espectrais

Neste capítulo serão mostradas as formulações exponenciais do método dos elementos espectrais (SEM) para a modelagem de estruturas do tipo pórtico espacial. Elementos de barra em tração-compressão, barra em torção, viga de Bernoulli-Euler, e viga de Timoshenko são estudados. As formulações para a modelagem de membros semi-infinitos, que são uma vantagem excepcional e poderosa deste método, são também mostradas através da formulação de elementos semi-infinitos. As funções de forma destes elementos são também estudadas.

2.1 Introdução

Membros estruturais tipo barras, vigas e placas são frequentemente utilizados em sistemas estruturais. Elementos como barras e vigas são normalmente usados em pórticos espaciais. O estudo de otimização das vibrações destas estruturas é importante tanto quando as vibrações são desejáveis, como no caso dos instrumentos musicais, como quando são indesejáveis, como no caso de vibrações de estruturas espaciais e de automóveis.

Várias teorias e metodologias numéricas foram utilizadas para estudar as vibrações destas estruturas. Um dos métodos mais utilizados na realização destes estudos numéricos é o Método dos Elementos Finitos (FEM). Neste método as equações diferenciais que governam o problema dinâmico são transformadas em equações integrais e então são resolvidas, via a técnica de

resíduos ponderados, fazendo uma discretização de estrutura em um número finito de elementos com tamanhos finitos.

Outras técnicas, como o Método dos Elementos de Contorno (BEM), são também utilizadas. Entretanto, para frequências médias e altas estas técnicas tornam-se computacionalmente mais caras porque precisam de uma discretização mais refinada para modelar o comportamento dinâmico destas estruturas com exatidão. O Método dos Elementos Espectrais (SEM) é uma técnica relativamente nova que, de algum modo, combina a flexibilidade geométrica, as características comuns e as vantagens competitivas dos métodos de ordem mais baixa (FEM) com a exatidão e a convergência rápida dos métodos de ordem mais alta (métodos espectrais). O SEM é semelhante ao método dos elementos finitos em alguns aspectos, mas a grande diferença é que no SEM a matriz de rigidez elementar é escrita no domínio de frequência (Figura 2.1). Isso permite que a inércia da massa distribuída seja representada de uma forma exata. Conseqüentemente, esta formulação espectral permite a descrição exata da dinâmica de propagação de ondas nestes elementos. As respostas dinâmicas de uma estrutura são então obtidas no domínio de frequência. As respostas no domínio de tempo podem ser obtidas através de transformada inversa de Fourier.

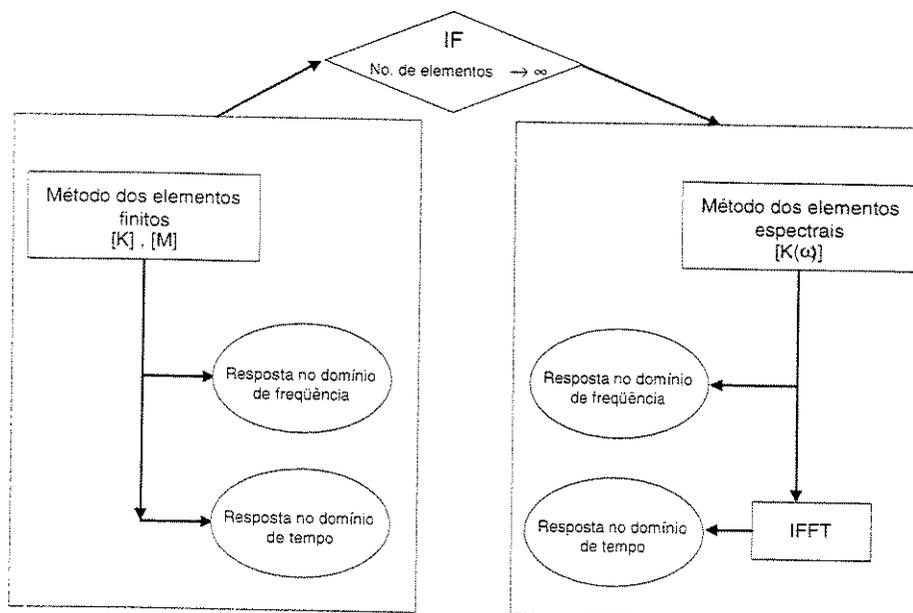


Figura 2.1 – A relação entre os modelos FEM e SEM.

Uma das vantagens do SEM é que o número de elementos a ser usado precisa coincidir somente com o número de discontinuidades da estrutura a ser analisada. No caso do método dos elementos finitos, matrizes de massa e de rigidez são normalmente construídas. Através destas matrizes a solução é calculada. A resposta no FEM pode ser obtida no domínio do tempo ou da frequência. A diferença entre o SEM e o FEM é que no FEM precisa-se um número muito elevado (\sim infinito) de elementos para obter a solução com a mesma exatidão do SEM, ou seja, somente um elemento espectral é equivalente a um número infinito dos elementos finitos convencionais (DOYLE (1997)).

Outra vantagem significativa deste método é o uso do assim chamado elemento 'throw-off'. Este elemento comporta-se no sentido que é um conduto para propagação de energia para fora do sistema. Ele pode ser usado especialmente quando o tempo de interesse é curto e a estrutura é grande. Cabe notar que, este tipo de elemento não pode ser modelado pela rigidez do elemento finito convencional, fazendo que o comprimento deste elemento seja muito grande.

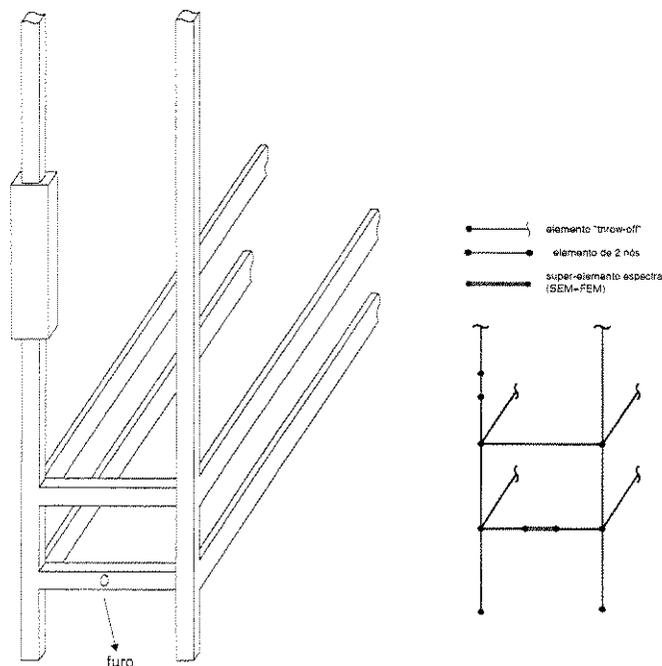


Figura 2.2 – Modelo físico e modelo de elemento espectral de uma estrutura 3-D.

A Figura 2.2 mostra um exemplo de modelo físico de pórtico espacial e a malha de elementos espectrais. Observa-se que somente um elemento espectral é preciso entre cada duas discontinuidades. Os elementos do tipo “throw-off” são utilizados para indicar que o membro é semi-infinito, ou para modelar um amortecimento muito alto localizado na extremidade. A discontinuidade é mostrada na Figura 2.2 em duas formas, a primeira é através de um membro com geometria diferente. A segunda discontinuidade é devido ao furo, e neste caso pode-se usar o super-elemento espectral, isto é, a região do furo é modelada via o FEM usando vários graus de liberdade (GDLs) e então estes GDLs são condensados para serem compatíveis os GDLs do elemento espectral utilizado no modelo. O assunto do super-elemento espectral não será tratado neste trabalho.

2.2 As formulações diferenciais

Nesta seção, as formulações do SEM são desenvolvidas para três tipos de elementos: barras em tração-compressão, vigas, e barras em torção. As matrizes dinâmicas destes elementos são desenvolvidas separadamente e para dois tipos de “waveguides”, elementos de 2 nós e elementos “throw-off”. A matriz global para estruturas espaciais 3D é também desenvolvida.

2.2.1 Elemento de barra em tração-compressão

Há várias maneiras para chegar à equação de movimento de uma barra em tração-compressão e aqui a teoria elementar de barra será utilizada. Esta teoria considera uma barra longa e esbelta que suporta somente uma tensão axial unidimensional, ou seja, como “waveguide” esta barra conduz somente as ondas longitudinais. Esta teoria também despreza a contração lateral (o efeito da razão Poisson). Ela tem limite em frequência, mas é geralmente satisfatória na faixa de frequência de análise que é objeto de interesse neste trabalho, ou seja, o que chamamos de alta frequência se limita a 20kHz. Em frequências muito mais altas, também existem deslocamentos transversais, além dos longitudinais. O efeito destes movimentos transversais quando adicionado aos termos da energia cinética de barra, e desprezando as mudanças nos termos da energia potencial, resulta na teoria de um modo, chamada a *teoria de barras de Love* (DOYLE (1997)). Desta forma, existem somente deslocamentos longitudinais, mas

a equação diferencial é função da razão de Poisson. Existe também a teoria de Mindlin-Herrmann de barras, que usa a formulação de Love, mas considerando também os efeitos de cisalhamento, onde neste caso as deformações longitudinais e transversais são independentes (teoria de dois modos). É importante ressaltar que a necessidade de utilizar teorias de ordem alta em vigas (teoria de Timoshenko) acontece em frequências bem mais baixas do que em elementos de barra.

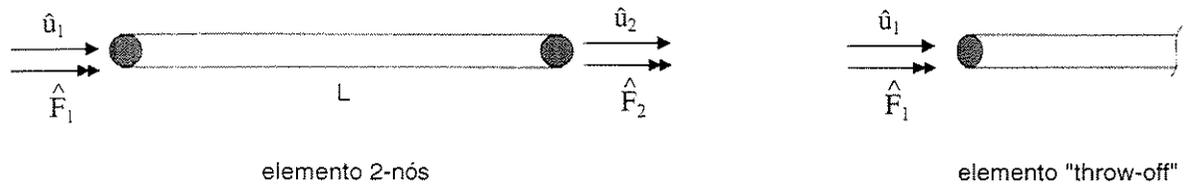


Figura 2.3 – Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de barra.

Considerando uma força axial externa $q(x,t)$ aplicada a esta barra, que resulta em um deslocamento $u(x,t)$ na direção x , e fazendo o balanço das forças atuantes tem-se a seguinte equação de movimento (CRAIG (1981)),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \eta A \frac{\partial u}{\partial t} - q \quad (2.1)$$

onde, EA é a rigidez axial, ρA é a massa por unidade de comprimento e η é o fator de amortecimento estrutural por unidade de volume. Usando uma representação espectral de deslocamento do tipo,

$$u(x, t) = \sum_n \hat{u}_n(x, \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2.2)$$

tem-se a equação homogênea de movimento escrita na forma espectral,

$$EA \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} + (\omega^2 \rho A - i\omega \eta A) \hat{u} = 0 \quad (2.3)$$

Esta equação tem uma solução exponencial harmônica do tipo e^{-ikx} que resulta na seguinte representação geral de deslocamento longitudinal, para um elemento de comprimento L ,

$$\hat{u}(x) = \mathbf{A} e^{-ikx} + \mathbf{B} e^{-ik(L-x)} \quad (2.4)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são constantes determinadas após a aplicação das condições de contorno e k é o número de onda dado pela relação espectral,

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho A - i\omega \eta A}{EA}} \quad (2.5)$$

onde, no caso de sistema não amortecido, η assume um valor nulo e neste caso esta relação fica linear na frequência, o que resulta em velocidades constantes de fase e de grupo. A combinação de solução da equação (2.4) com a variação temporal resulta numa solução do tipo,

$$u(x, t) = \sum \mathbf{A} e^{-i(kx - \omega t)} + \sum \mathbf{B} e^{i(kx + \omega t)} \quad (2.6)$$

que representa dois tipos de ondas: uma que propaga para a direita (sentido de x positivo) e outra que propaga para a esquerda (sentido de x negativo).

2.2.1.1 A matriz de rigidez dinâmica de elemento de barra em tração-compressão— 2 nós

Considerando um elemento (“waveguide”) de barra de comprimento L , os deslocamentos nodais nas extremidades desta barra, ver Figura 2.3, são dados por,

$$\hat{u}(0) \equiv \hat{u}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B} e^{-ikL} \quad , \quad \hat{u}(L) \equiv \hat{u}_2 = \mathbf{A} e^{-ikL} + \mathbf{B} \quad (2.7)$$

A partir das equações (2.4) e (2.7) o deslocamento em qualquer ponto arbitrário na barra pode ser calculado através das funções de forma utilizando a seguinte expressão,

$$\hat{u}(x) = \hat{g}_1(x)\hat{u}_1 + \hat{g}_2(x)\hat{u}_2 \quad (2.8)$$

onde as funções $\hat{g}_1(x)$ e $\hat{g}_2(x)$ são as funções de forma de barra dadas por,

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(x) &= \left(e^{-ikx} - e^{-ik(2L-x)} \right) / \Delta \\ \hat{g}_2(x) &= \left(-e^{-ik(L+x)} + e^{-ik(L-x)} \right) / \Delta, \quad \Delta = 1 - e^{-i2kL} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Estas funções são funções da frequência e exibem a mesma característica das funções de forma do elemento finito de barra em tração-compressão, onde a função de forma no nó arbitrário i tem valor unitário no mesmo e valor nulo no outro nó do elemento. Estas funções de forma podem ser usadas para calcular a resposta em qualquer ponto entre os dois nós. As funções de forma $\hat{g}_1(x)$ e $\hat{g}_2(x)$ são mostradas na Figura 2.4 para uma barra de alumínio de 10 m, com seção de 10^{-2} m^2 , e para a frequência 900Hz. Somente a parte real é mostrada na figura observando-se que a parte imaginária é nula neste caso. Isto é devido ao valor nulo de η , ou seja, estrutura não amortecida. Observa-se que $\hat{g}_2(x)$ é uma função espelho de $\hat{g}_1(x)$, isto é, $\hat{g}_2(x) = \hat{g}_1(L-x)$.

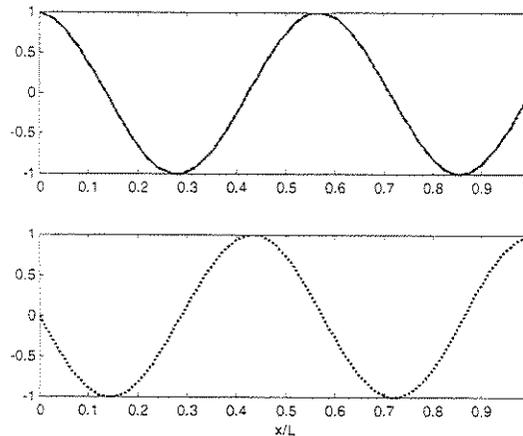


Figura 2.4 – As funções de forma para um elemento espectral de barra em tração-compressão de 2 nós.

Os carregamentos nodais são relacionados aos deslocamentos nodais via as seguintes expressões,

$$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= -\hat{F}(0) = -EA(\hat{g}'_1(0)\hat{u}_1 + \hat{g}'_2(0)\hat{u}_2) \\ \hat{F}_2 &= \hat{F}(L) = EA(\hat{g}'_1(L)\hat{u}_1 + \hat{g}'_2(L)\hat{u}_2)\end{aligned}\quad (2.10)$$

Escrevendo estas equações em uma forma matricial tem-se o seguinte sistema de equações,

$$\begin{Bmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \frac{ikL}{(1 - e^{-i2kL})} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i2kL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1 + e^{-i2kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{Bmatrix} = [\hat{k}^R] \{\hat{u}\} \quad (2.11)$$

onde $[\hat{k}^R]$ é a matriz elementar de rigidez dinâmica para o elemento de barra. Esta matriz é uma função dependente de frequência. Ela é simétrica e geralmente complexa. No caso especial de uma barra sem amortecimento esta matriz torna-se somente real. Nota-se que estes amortecimentos estruturais podem ser introduzidos nos membros pela própria modificação da relação espectral usando-se um número de onda K complexo, ou seja,

$$k \rightarrow k(1 - i\eta_v) \quad (2.12)$$

onde η_v é o fator de perda ou seja, o fator de amortecimento estrutural. A forma mais utilizada para introduzir o fator de perda interno ou seja, o amortecimento do material é através de módulo do Young E . Desta forma, E passa a ser complexo,

$$E \rightarrow E(1 + i\eta) \quad (2.13)$$

e, neste caso, η corresponde ao fator de perda, cuja relação com o coeficiente de amortecimento viscoso é dada como $\eta = 2\xi$, onde ξ é definido como a razão de amortecimento crítico, $\xi = c/c_{crit}$.

A matriz dinâmica do elemento espectral de 2-nós exibe uma faixa dinâmica muito grande, ou seja, esta matriz para vários elementos espectrais compridos ou longos seria a mesma para um só elemento espectral. Pode-se provar também que este elemento espectral corresponde a um número infinito de elementos finitos. Nas próximas seções será mostrado que a solução obtida através de uso de um só elemento espectral é equivalente a solução obtida através de uso de

vários elementos espectrais. Isto é válido para todos os elementos, elemento de barra em tração-compressão, elemento de viga, e elemento de barra em torção.

É importante ressaltar que o caso de cargas distribuídas num elemento pode ser facilmente incorporado na formulação espectral. Para um elemento de barra com comprimento L e uma carga distribuída $q(x)$, pode-se escrever a seguinte relação,

$$\{\hat{F}\} + \int_0^L \begin{Bmatrix} \hat{g}_1(x) \\ \hat{g}_2(x) \end{Bmatrix} \hat{q}(x) dx = [\hat{k}^R] \{\hat{u}\} \quad (2.14)$$

2.2.1.2 A matriz de rigidez dinâmica de elemento de Barra em Tração-Compressão – elemento “throw-off”

Como este tipo de elemento só exhibe ondas propagantes em uma direção (sentido de x positivo), então o termo \mathbf{B} da equação (2.7) pode ser desprezado. Desta forma, a condição de deslocamento nodal pode ser escrita como,

$$\hat{u}(0) \equiv \hat{u}_1 \quad (2.15)$$

A partir desta equação e da equação (2.4) o deslocamento em qualquer ponto arbitrário na barra semi-infinita é calculado pela seguinte expressão

$$\hat{u}(x) = \hat{g}_1(x) \hat{u}_1 \quad (2.16)$$

onde a função $\hat{g}_1(x)$ é a função de forma do elemento tipo “throw-off”, que é uma função sempre complexa, dada por,

$$\hat{g}_1(x) = e^{-ikx} \quad (2.17)$$

Esta função de forma calculada (normalizada) para um elemento de barra de alumínio, com seção de 10^{-2} m^2 , e para a frequência 1kHz, é mostrada na seguinte figura. Observa-se que a parte real desta função tem um valor unitário no único nó do elemento.

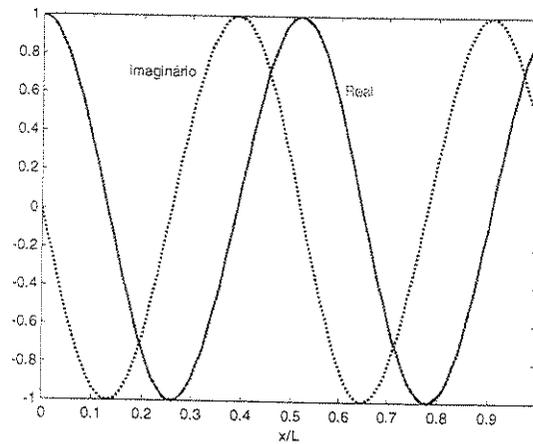


Figura 2.5 – A função de forma de elemento de barra em tração-compressão do tipo “throw-off”.

Através da equação (2.13) pode-se atribuir um fator de amortecimento interno de material da barra. Para, por exemplo, um fator de 10%, as amplitudes das funções de forma tendem-se a diminuir, e isto é mostrado na figura abaixo para um elemento de barra do tipo “throw-off”. O efeito de uso de amortecimento interno pode ser visto também nos elementos espectrais de viga e de barra em torção.

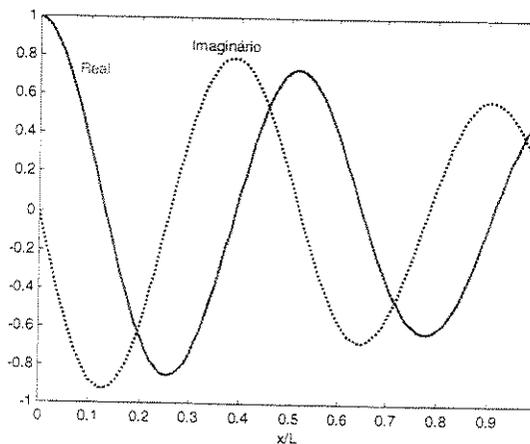


Figura 2.6 – A função de forma de elemento de barra em tração-compressão do tipo “throw-off”, para $\eta=10\%$.

A força e o deslocamento nodais são relacionados via a seguinte expressão,

$$\{\hat{F}_i\} = EA[ik]\{\hat{u}_i\} = [\hat{k}]\{\hat{u}\} \quad (2.18)$$

onde $[\hat{k}]$ é sempre complexa o que implica que este elemento dissipa energia, levando-a para fora do sistema.

2.2.2 Elemento de viga – via teoria de Timoshenko

A teoria de Timoshenko para vigas leva em consideração a deformação de cisalhamento, onde a hipótese de teoria elementar, de que os planos da seção são normais ao eixo neutro, não é mais válida, Figura 2.7. Isso implica que a função de inclinação $\phi(x,t)$ de qualquer seção ao longo de viga não pode mais ser obtida via a diferenciação de deslocamento transversal $v(x,t)$. Os dois graus de liberdade, deslocamento transversal e rotação, são independentes.

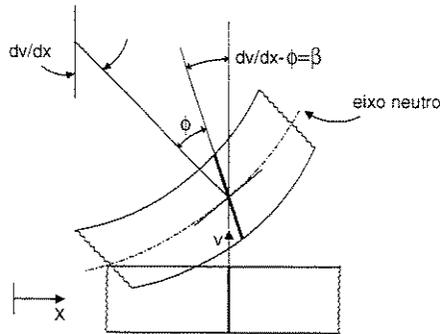


Figura 2.7 – Deformação da seção de viga de Timoshenko, incluindo os efeitos de cisalhamento.

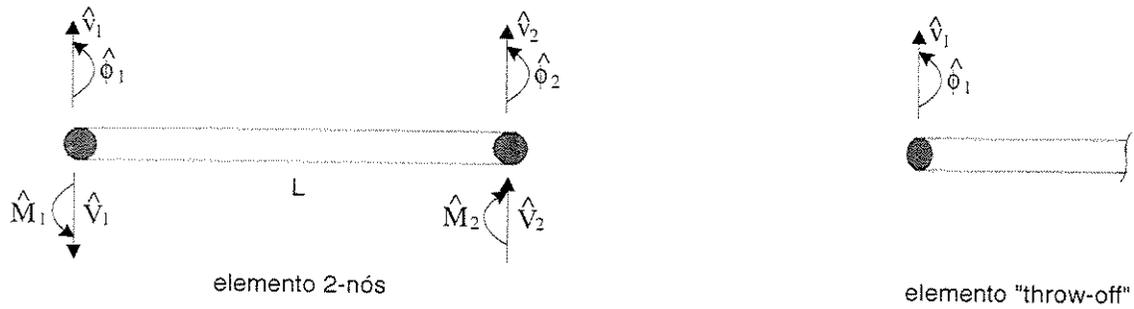


Figura 2.8 – Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de viga.

As equações de movimento para estes GDL's, sem a consideração do amortecimento estrutural, são definidas por,

$$\begin{aligned}
 GA\kappa \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] &= \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + GA\kappa \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right] &= \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

onde $GA\kappa$ é a rigidez de cisalhamento, EI é a rigidez de flexão e ρI é a inércia rotacional, G é o módulo de cisalhamento e κ é uma constante que depende do tipo de seção e é definida como o fator de correção de cisalhamento; por exemplo, para seção retangular $\kappa=5/6$. Usando uma representação espectral dos dois GDL's do tipo,

$$\begin{aligned}
 v(x, t) &= \sum \hat{v} e^{-i(kx - \omega t)} \\
 \phi(x, t) &= \sum \hat{\phi} e^{-i(kx - \omega t)}
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

que é uma solução do sistema de equações (2.19), resulta na seguinte representação espectral dos GDL's,

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}(x) &= \mathbf{A} e^{-ik_1 x} + \mathbf{B} e^{-ik_2 x} + \mathbf{C} e^{-ik_1(L-x)} + \mathbf{D} e^{-ik_2(L-x)} \\
 \hat{v}(x) &= P_1 \mathbf{A} e^{-ik_1 x} + P_2 \mathbf{B} e^{-ik_2 x} - P_1 \mathbf{C} e^{-ik_1(L-x)} - P_2 \mathbf{D} e^{-ik_2(L-x)}
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

onde **A**, **B**, **C** e **D** são coeficientes determinados após a aplicação das condições de contorno, P_1 e P_2 são as razões de amplitude entre \hat{v} e $\hat{\phi}$, e k é o número de onda que corresponde aos quatro possíveis modos, dado pela seguinte relação espectral

$$k(\omega) = \pm \left[\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{c_s} \right)^2 + \left(\frac{Q}{c_0} \right)^2 \right\} \omega^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 + \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{c_s} \right)^2 - \left(\frac{Q}{c_0} \right)^2 \right\}^2} \omega^4 \right]^{1/2} \quad (2.22)$$

onde,

$$c_0 \equiv \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad c_s \equiv \sqrt{\frac{GA\kappa}{\rho A}}, \quad Q \equiv \sqrt{\frac{\rho I}{\rho A}}$$

$$P_1 = \frac{iL}{GA\kappa\xi_1} \left(\frac{EI}{L^2} \xi_1^2 + GA\kappa - \rho I \omega^2 \right) \quad P_2 = \frac{iL}{GA\kappa\xi_2} \left(\frac{EI}{L^2} \xi_2^2 + GA\kappa - \rho I \omega^2 \right) \quad \xi_1 \equiv k_1 L, \quad \xi_2 \equiv k_2 L$$

2.2.2.1 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Timoshenko – 2 nós

Considerando um elemento de viga de comprimento L , os deslocamentos e as rotações nodais nas extremidades desta viga (Figura 2.8) são dados por,

$$\hat{v}(0) \equiv \hat{v}_1, \quad \hat{\phi}(0) \equiv \hat{\phi}_1, \quad \hat{v}(L) \equiv \hat{v}_2, \quad \hat{\phi}(L) \equiv \hat{\phi}_2 \quad (2.23)$$

A partir das equações (2.21) e (2.23) pode-se calcular as coeficientes **A**, **B**, **C** e **D**, assim,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & -P_1 e_1 & -P_2 e_2 \\ 1 & 1 & e_1 & e_2 \\ P_1 e_1 & P_2 e_2 & -P_1 & -P_2 \\ e_1 & e_2 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{P}] \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

onde $e_i = e^{-ik_i L}$. Substituindo novamente na equação (2.21), encontram-se expressões para calcular os deslocamentos e as rotações em qualquer ponto arbitrário da viga escritas na seguinte forma matricial compacta,

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}(x) \\ \hat{\phi}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 e^{-ik_1 x} & P_2 e^{-ik_2 x} & -P_1 e^{-ik_1(L-x)} & -P_2 e^{-ik_2(L-x)} \\ e^{-ik_1 x} & e^{-ik_2 x} & e^{-ik_1(L-x)} & e^{-ik_2(L-x)} \end{bmatrix} [P] \begin{Bmatrix} \hat{v}_1(x) \\ \hat{\phi}_1(x) \\ \hat{v}_2(x) \\ \hat{\phi}_2(x) \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \hat{v}(x) \\ \hat{\phi}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{g}_{v1} & \hat{g}_{v2} & \hat{g}_{v3} & \hat{g}_{v4} \\ \hat{g}_{\phi1} & \hat{g}_{\phi2} & \hat{g}_{\phi3} & \hat{g}_{\phi4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1(x) \\ \hat{\phi}_1(x) \\ \hat{v}_2(x) \\ \hat{\phi}_2(x) \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} \hat{g}_{v1} \\ \hat{g}_{v2} \\ \hat{g}_{v3} \\ \hat{g}_{v4} \end{Bmatrix} = [P]^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_2 \end{bmatrix} \{N\} \quad (2.27)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{g}_{\phi1} \\ \hat{g}_{\phi2} \\ \hat{g}_{\phi3} \\ \hat{g}_{\phi4} \end{Bmatrix} = [P]^T \{N\} \quad (2.28)$$

onde \hat{g}_{v_i} e \hat{g}_{ϕ_i} são as funções de forma para $\hat{\phi}(x)$ e $\hat{v}(x)$, respectivamente, e $\{N\}$ é um vetor (4x1) definido por,

$$\{N\}^T = \begin{bmatrix} e^{-ik_1 x} & e^{-ik_2 x} & e^{-ik_1(L-x)} & e^{-ik_2(L-x)} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Estas funções de forma são funções da frequência e exibem também a mesma característica das funções de forma do FEM, como no caso de elemento de barra. As quatro funções são mostradas nas figuras abaixo para uma viga de alumínio de 1 m de comprimento, com seção de

10^{-3} m^2 , e calculadas numa frequência de 1kHz. Observa-se que estas funções de forma são pares de funções, onde \hat{g}_{v3} e \hat{g}_{v4} são funções espelhos de \hat{g}_{v1} e \hat{g}_{v2} , respectivamente, e $\hat{g}_{\phi3}$ e $\hat{g}_{\phi4}$ são espelhos de $\hat{g}_{\phi1}$ e $\hat{g}_{\phi2}$, respectivamente.

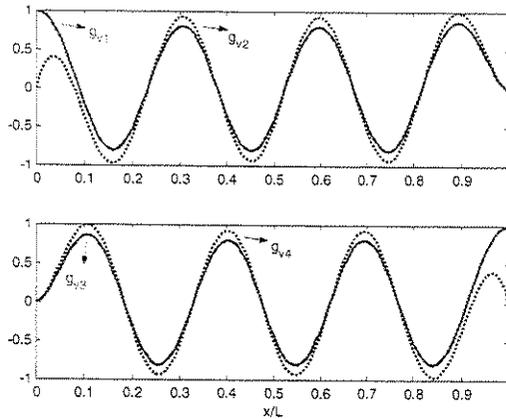


Figura 2.9 – Parte real das funções de forma $\Re(\hat{g}_{vi})$ para uma viga de Timoshenko de 2 nós.

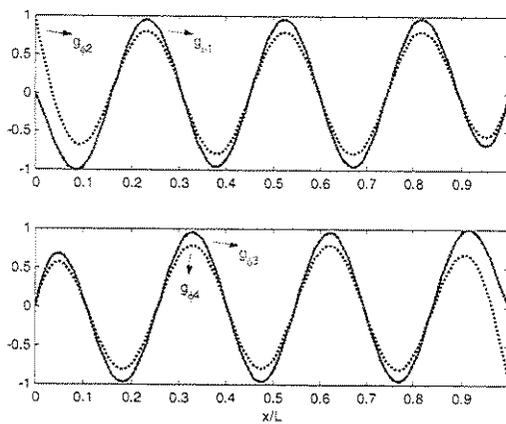


Figura 2.10 – Parte real das funções de forma $\Re(\hat{g}_{\phi i})$ para um elemento de viga de Timoshenko de 2 nós.

As forças de cisalhamento e os momentos de flexão nodais são relacionados aos \hat{v} e $\hat{\phi}$ nodais via as seguintes expressões,

$$\begin{aligned}\hat{V}(x) &= GA\kappa \left[\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \hat{\phi} \right] = -EI \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} \\ \hat{M}(x) &= EI \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}\end{aligned}\tag{2.30}$$

Da avaliação destas duas equações para $x=0$ e $x=L$, tem-se que,

$$\begin{aligned}\hat{V}_1 &= -\hat{V}(0), \quad \hat{M}_1 = -\hat{M}(0), \quad \hat{V}_2 = +\hat{V}(L), \quad \hat{M}_2 = +\hat{M}(L) \\ \hat{v}_1 &= \hat{v}(0), \quad \hat{\phi}_1 = \hat{\phi}(0), \quad \hat{v}_2 = \hat{v}(L), \quad \hat{\phi}_2 = \hat{\phi}(L)\end{aligned}\tag{2.31}$$

Daí resulta a seguinte relação entre os carregamentos nodais e os GDL's,

$$\begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} [\hat{k}^B] \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix}\tag{2.32}$$

ou, simplesmente,

$$\{\hat{F}\} = \frac{EI}{L^3} [\hat{k}^B] \{\hat{u}\}\tag{2.33}$$

onde $\frac{EI}{L^3} [\hat{k}^B]$ é a matriz de rigidez dinâmica para o elemento de viga de Timoshenko. Ela é uma matriz simétrica (4x4) e em geral é complexa. Os termos individuais da matriz $[\hat{k}^B]$ são dados por,

$$\begin{aligned}
\hat{k}_{11} &= (\xi_2^2 - \xi_1^2)(r_1 z_{22} + r_2 z_{21})L / \Delta \\
\hat{k}_{12} &= [-i\xi_2(r_1 z_{11} + r_2 z_{12}) + i\xi_1(r_1 z_{11} - r_2 z_{12})]L^2 / \Delta \\
\hat{k}_{13} &= (\xi_1^2 - \xi_2^2)(r_1 z_{21} + r_2 z_{22})L / \Delta \\
\hat{k}_{14} &= [-i\xi_1(r_1 z_{12} - r_2 z_{11}) - i\xi_2(r_1 z_{12} + r_2 z_{11})]L^2 / \Delta \\
\hat{k}_{22} &= (-i\xi_1 P_2 + i\xi_2 P_1)(r_1 z_{22} - r_2 z_{21})L^2 / \Delta \\
\hat{k}_{23} &= -\hat{k}_{14} \\
\hat{k}_{24} &= (i\xi_1 P_2 - i\xi_2 P_1)(r_1 z_{21} - r_2 z_{22})L^2 / \Delta \\
\hat{k}_{33} &= \hat{k}_{11} \\
\hat{k}_{34} &= -\hat{k}_{12} \\
\hat{k}_{44} &= \hat{k}_{22}
\end{aligned}$$

com as seguintes constantes definidas,

$$r_1 = (P_1 - P_2)z_{11}, \quad r_2 = (P_1 + P_2)z_{12}, \quad \Delta = r_1^2 - r_2^2$$

$$\text{com, } z_{11} = (1 - e^{-i\xi_1} e^{-i\xi_2}), \quad z_{12} = (e^{-i\xi_1} - e^{-i\xi_2}), \quad z_{21} = (e^{-i\xi_1} + e^{-i\xi_2}), \quad z_{22} = (1 + e^{-i\xi_1} e^{-i\xi_2})$$

2.2.2.2 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Timoshenko – elemento “throw-off”

Considerando um elemento de viga tipo “throw-off”, Figura 2.8. Como não existem reflexões neste tipo do elemento, os coeficientes **C** e **D** da equação (2.21) são nulas e então os deslocamentos nodais podem ser escritos da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(0) &= \hat{\phi}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{B} \\
\hat{v}(0) &= \hat{v}_1 = P_1 \mathbf{A} + P_2 \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{2.34}$$

A partir destas equações e da equação (2.21), a solução de deslocamentos em qualquer ponto arbitrário deste elemento semi-infinito pode ser calculada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}\hat{v}(x) &= \hat{g}_{v1}(x)\hat{v}_1 + \hat{g}_{v2}(x)\hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}(x) &= \hat{g}_{\phi1}(x)\hat{v}_1 + \hat{g}_{\phi2}(x)\hat{\phi}_1\end{aligned}\tag{2.35}$$

onde as funções $\hat{g}_i(x)$ são as funções de forma do elemento de viga do tipo “throw-off”. Elas são dadas por,

$$\begin{aligned}\hat{g}_{v1}(x) &= [P_1e^{-ik_1x} - P_2e^{-ik_2x}] / \Delta \\ \hat{g}_{v2}(x) &= [-P_1P_2e^{-ik_1x} + P_1P_2e^{-ik_2x}] / \Delta \\ \hat{g}_{\phi1}(x) &= [e^{-ik_1x} - e^{-ik_2x}] / \Delta \\ \hat{g}_{\phi2}(x) &= [-P_2e^{-ik_1x} + P_1e^{-ik_2x}] / \Delta\end{aligned}\tag{2.36}$$

onde, $\Delta = (P_1 - P_2)$.

O comportamento destas funções de forma pode ser visto na Figura 2.11 e na Figura 2.12. Estas funções foram calculadas para a mesma viga utilizada para mostrar as funções de forma do elemento de viga de 2 nós. Como as funções de forma são complexas, as partes reais e imaginárias das mesmas são mostradas. Nota-se que, para este elemento semi-infinito $\Re(\hat{g}_{v1}) = \Re(\hat{g}_{\phi2}) = 1$, e $\Re(\hat{g}_{v2}) = \Re(\hat{g}_{\phi1}) = 0$ no único nó do elemento definido no $x=0$ (Figura 2.11). A parte imaginária é sempre nula em $x=0$ (Figura 2.12). Nota-se também que as funções de forma para este elemento (e para todos os elementos espectrais) são funções senoidais e, portanto, elas descrevem o fenômeno de propagação de onda estrutural.

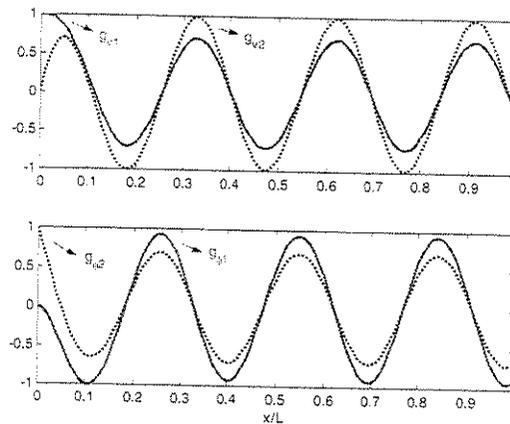


Figura 2.11 – Parte real das funções de forma $\Re(\hat{g}_{v1})$ e $\Re(\hat{g}_{\phi1})$ para um elemento de viga de Timoshenko do tipo “throw-off”.

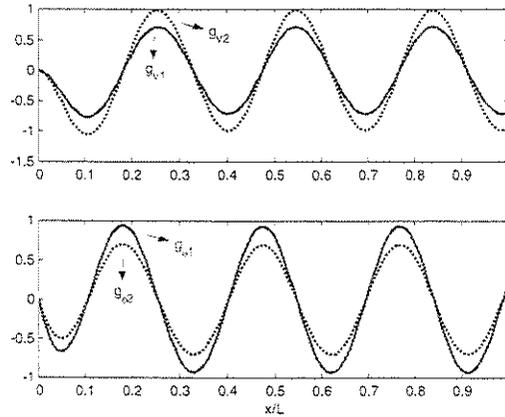


Figura 2.12 – Parte imaginária das funções de forma $\Im(\hat{g}_{v_i})$ e $\Im(\hat{g}_{o_i})$ para um elemento de viga de Timoshenko do tipo “throw-off”.

Os carregamentos nodais são expressados em termos de GDL’s dos deslocamentos através da equação (2.30). Usando uma solução do tipo,

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(x, t) &= \mathbf{A} e^{-ik_1 x} + \mathbf{B} e^{-ik_2 x} \\ \hat{v}(x, t) &= P_1 \mathbf{A} e^{-ik_1 x} + P_2 \mathbf{B} e^{-ik_2 x}\end{aligned}\quad (2.37)$$

Substituindo na equação (2.30) e avaliando estes GDL’s no ponto $x=0$ resulta na seguinte relação de rigidez,

$$\begin{Bmatrix} -\hat{V}(0) \\ -\hat{M}(0) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \end{Bmatrix}\quad (2.38)$$

ou, simplesmente,

$$\{\hat{\mathbf{F}}\} = EI \hat{\mathbf{k}}^B \{\hat{\mathbf{u}}\}\quad (2.39)$$

onde $EI \hat{\mathbf{k}}^B$ é a matriz dinâmica de rigidez para o elemento “throw-off”. Ela é simétrica e sempre complexa, o que significa que ela exhibe o comportamento de amortecimento. Os termos individuais desta matriz são definidos por,

$$\hat{k}_{11} = \frac{k_2^2 - k_1^2}{P_1 - P_2}$$

$$\hat{k}_{12} = \hat{k}_{21} = \frac{i(k_1 - k_2)}{P_1 - P_2}$$

$$\hat{k}_{22} = \frac{i(P_1 k_2 - P_2 k_1)}{P_1 - P_2}$$

2.2.3 Elemento de viga – via a teoria de Bernoulli-Euler

A teoria da viga de Bernoulli-Euler pode ser obtida através de simplificação da teoria de Timoshenko. Para isso é necessário desprezar a rigidez de cisalhamento ($GA\kappa \Rightarrow \infty$) e não considerar a inércia rotacional ($\rho I \Rightarrow 0$). Isso quer dizer que não há deformação de cisalhamento mesmo tendo forças de cisalhamento atuando, Figura 2.13. Aplicando estas condições para a equação (2.19) tem-se,

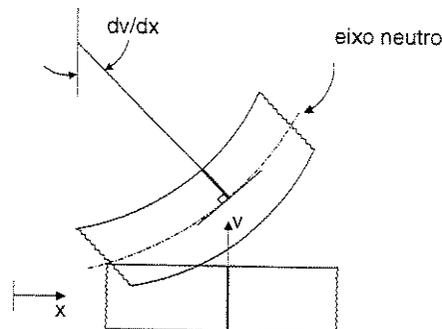


Figura 2.13 – Deformação da seção de viga de Bernoulli-Euler.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q \quad (2.40)$$

onde q é a força externa. Usando a soluções para $v(x,t)$ da equação (2.20) tem-se a seguinte representação espectral,

$$\hat{v}(x) = \mathbf{A} e^{-ik_1 x} + \mathbf{B} e^{-k_2 x} + \mathbf{C} e^{-ik_1(L-x)} + \mathbf{D} e^{-k_2(L-x)} \quad (2.41)$$

com $\hat{\phi}(x) = \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$, e a equação diferencial homogênea é dada por,

$$\frac{d^4 \hat{v}}{dx^4} - \hat{\beta}^4 \hat{v} = 0 \quad (2.42)$$

Soluções particulares desta equação podem ser obtidas através das soluções particulares das seguintes equações,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} + \hat{\beta}^2 \hat{v} &= 0 \\ \frac{d^2 \hat{v}}{dx^2} - \hat{\beta}^2 \hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

com o número de onda dado por,

$$k_1 = \pm \beta \quad , \quad k_2 = \mp i\beta \quad \text{e} \quad \beta^2 \equiv \sqrt{\frac{\omega^2 \rho A - i\omega \eta A}{EI}} \quad (2.44)$$

2.2.3.1 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Bernoulli-Euler– 2 nós

Considerando um elemento de viga de comprimento L , os deslocamentos e as rotações nodais nas extremidades desta viga (ver Figura 2.8) são dados por,

$$\hat{v}(0) \equiv \hat{v}_1 \quad , \quad \hat{\phi}(0) \equiv \hat{\phi}_1 \quad , \quad \hat{v}(L) \equiv \hat{v}_2 \quad , \quad \hat{\phi}(L) \equiv \hat{\phi}_2 \quad (2.45)$$

A partir desta equação e da equação (2.41) pode-se calcular os coeficientes **A**, **B**, **C** e **D**. Substituindo novamente na equação (2.41) encontram-se expressões para calcular os deslocamentos e as rotações em qualquer ponto arbitrário de viga escritas na seguinte forma,

$$\hat{v}(x) = \hat{g}_1(x)\hat{v}_1 + \hat{g}_2(x)\hat{\phi}_1 + \hat{g}_3(x)\hat{v}_2 + \hat{g}_4(x)\hat{\phi}_2 \quad (2.46)$$

e com $\hat{\varphi}(x) = \frac{\partial \hat{v}(x)}{\partial x}$. As funções de forma \hat{g}_i são definidas por,

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(x) &= (r_1 \hat{h}_1(x) + r_2 \hat{h}_2(x)) / \Delta \\ \hat{g}_2(x) &= (r_1 \hat{h}_3(x) + r_2 \hat{h}_4(x)) / \Delta \\ \hat{g}_3(x) &= (r_1 \hat{h}_2(x) + r_2 \hat{h}_1(x)) / \Delta \\ \hat{g}_4(x) &= (-r_1 \hat{h}_4(x) - r_2 \hat{h}_3(x)) / \Delta\end{aligned}\tag{2.47}$$

com,

$$\Delta = -r_1^2 + r_2^2$$

$$r_1 = i(k_1 - k_2)(1 - e^{-ik_1 L} e^{-ik_2 L})$$

$$r_2 = i(k_1 + k_2)(e^{-ik_1 L} - e^{-ik_2 L})$$

$$\hat{h}_1(x) = ik_2 (e^{-ik_1 x} - e^{-ik_2 L} e^{-ik_1(L-x)}) - ik_1 (e^{-ik_2 x} - e^{-ik_1 L} e^{-ik_2(L-x)})$$

$$\hat{h}_2(x) = -ik_2 (e^{-ik_2 L} e^{-ik_1 x} - e^{-ik_1(L-x)}) + ik_1 (e^{-ik_1 L} e^{-ik_2 x} - e^{-ik_2(L-x)})$$

$$\hat{h}_3(x) = (e^{-ik_1 x} + e^{-ik_2 L} e^{-ik_1(L-x)}) - (e^{-ik_2 x} + e^{-ik_1 L} e^{-ik_2(L-x)})$$

$$\hat{h}_4(x) = (e^{-ik_2 L} e^{-ik_1 x} + e^{-ik_1(L-x)}) - (e^{-ik_1 L} e^{-ik_2 x} + e^{-ik_2(L-x)})$$

$$k_1 = k$$

$$k_2 = -ik$$

As funções de forma deste elemento dadas pela equação (2.47) são calculadas para a mesma viga utilizada na seção anterior. O comportamento destas funções de forma são mostradas na Figura 2.14. Nota-se que a parte imaginária das quatro funções de forma é nula. De forma análoga às funções de forma de elemento de viga de Timoshenko, as funções \hat{g}_3 e \hat{g}_4 são espelhos das funções \hat{g}_1 e \hat{g}_2 , respectivamente.

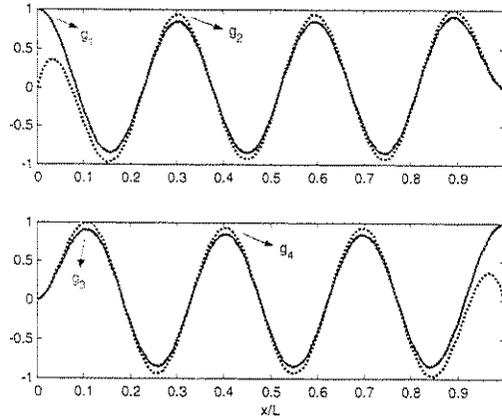


Figura 2.14 – Parte real das funções de forma para o elemento de viga de Bernoulli-Euler de 2 nós.

Os carregamentos nodais e os GDL's são relacionados via as seguintes expressões,

$$\hat{V}(x) = -EI \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2}, \quad \hat{M}(x) = +EI \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (2.48)$$

Aplicando as condições de contorno para uma viga de comprimento L tem-se a seguinte equação matricial,

$$\begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \\ \hat{V}_2 \\ \hat{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} [\hat{k}^B] \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

ou seja,

$$\{\hat{F}\} = \frac{EI}{L^3} [\hat{k}^B] \{\hat{u}\} \quad (2.50)$$

onde $\frac{EI}{L^3} [\hat{k}^B]$ é a matriz de rigidez dinâmica para o elemento de viga de Bernoulli-Euler. Ela é uma matriz simétrica (4x4) e em geral é complexa. Os termos individuais da matriz $[\hat{k}^B]$ são dados por,

$$\begin{aligned}\hat{k}_{11} &= (z_{11}z_{22} - iz_{12}z_{21})\xi^3 / \Delta \\ \hat{k}_{12} &= 0.5(i+1)(z_{12}^2 - z_{11}^2)\xi^2 L / \Delta \\ \hat{k}_{13} &= (iz_{12}z_{22} - z_{11}z_{21})\xi^3 / \Delta \\ \hat{k}_{14} &= -(1-i)z_{11}z_{12}\xi^2 L / \Delta \\ \hat{k}_{22} &= (iz_{11}z_{22} - z_{12}z_{21})\xi L^2 / \Delta \\ \hat{k}_{23} &= -\hat{k}_{14} \\ \hat{k}_{24} &= (z_{12}z_{22} - iz_{11}z_{21})\xi L^2 / \Delta \\ \hat{k}_{33} &= \hat{k}_{11} \\ \hat{k}_{34} &= -\hat{k}_{12} \\ \hat{k}_{44} &= \hat{k}_{22}\end{aligned}$$

com

$$z_{11} = (1 - e^{-i\xi} e^{\xi}), \quad z_{12} = (e^{-i\xi} - e^{\xi}), \quad z_{21} = (e^{-i\xi} + e^{\xi}), \quad z_{22} = (1 + e^{-i\xi} e^{\xi}), \quad \Delta = \frac{(z_{11}^2 + z_{12}^2)}{(1+i)}, \quad \xi = kL.$$

2.2.3.2 Rigidez dinâmica de elemento de viga de Bernoulli-Euler – elemento “throw-off”

Da mesma forma, pode-se escrever a equação para a solução de deslocamentos em qualquer ponto arbitrário deste elemento da seguinte maneira,

$$\hat{v}(x) = \hat{g}_1(x)\hat{v}_1 + \hat{g}_2(x)\hat{\phi}_1 \quad (2.51)$$

onde as funções $\hat{g}_i(x)$ são as funções de forma deste elemento, que são dadas por

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(x) &= [-k_2 e^{-ik_1 x} + k_1 e^{-ik_2 x}] / \Delta \\ \hat{g}_2(x) &= [i(e^{-ik_1 x} - e^{-ik_2 x})] / \Delta\end{aligned} \quad (2.52)$$

onde $\Delta \equiv (k_1 - k_2)$ e $k_1 = k$, $k_2 = -ik$. Nota-se que, na viga de Bernoulli-Euler as soluções de rotação podem ser encontradas através da derivada parcial do deslocamento transversal,

$\hat{\phi}(x) = \frac{\partial \hat{v}(x)}{\partial x}$. Para a mesma viga usada anteriormente, as partes reais e imaginárias das funções de forma da equação (2.52) exibem o comportamento descrito na Figura 2.15.

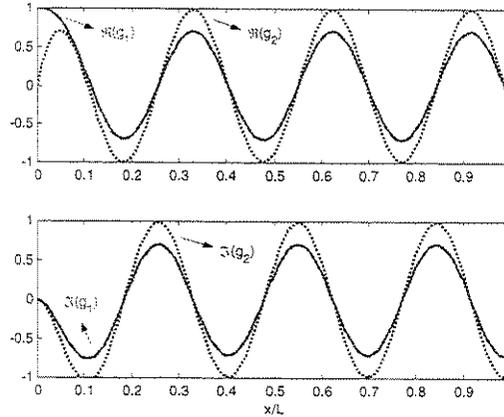


Figura 2.15 – Parte real e imaginária das funções de forma para o elemento de viga de Bernoulli-Euler do tipo “throw-off”.

Para um elemento de viga tipo “throw-off”, os carregamentos nodais são dados em termos dos GDL’s dos deslocamentos através da equação (2.48). Usando uma solução do tipo,

$$\hat{v}(x, t) = \mathbf{A} e^{-ik_1 x} + \mathbf{B} e^{-ik_2 x} \tag{2.53}$$

e substituindo na equação (2.48) e avaliando estes GDL’s no ponto $x=0$ resulta na seguinte relação,

$$\begin{Bmatrix} -\hat{V}(0) \\ -\hat{M}(0) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} \hat{V}_1 \\ \hat{M}_1 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} (i-1)k^3 & ik^2 \\ ik^2 & (i-1)k^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{\phi}_1 \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

ou simplesmente,

$$\{\hat{F}\} = EI [k^B] \{\hat{u}\} \tag{2.55}$$

onde $EI[\hat{k}^B]$ é a matriz dinâmica de rigidez para o elemento de viga de Bernoulli-Euler tipo "throw-off". Ela é simétrica e complexa e exibe o comportamento de amortecimento no domínio de tempo.

É importante ressaltar que é preciso somente um elemento espectral do tipo 2-nós para modelar uma viga finita com duas discontinuidades e de qualquer comprimento L . Porém, a única restrição é a limitação numérica da teoria de Bernoulli-Euler para vigas. Observa-se que a matriz dinâmica do elemento espectral de viga de Bernoulli-Euler contém o termo e^{ξ} . Numericamente este termo exibe uma limitação computacional para altos valores de número de onda k ou grandes comprimentos L . Neste caso, a inversa da matriz de rigidez dinâmica aproxima-se da singularidade.

2.2.4 Elemento de barra em torção

Este tipo de elemento, como um guia de ondas ("waveguide"), exibe somente rotações em relação ao eixo longitudinal (principal), veja Figura 2.16. O comportamento deste elemento é muito semelhante ao elemento de barra. A equação de movimento pode ser escrita da seguinte forma (CRAIG (1981)),

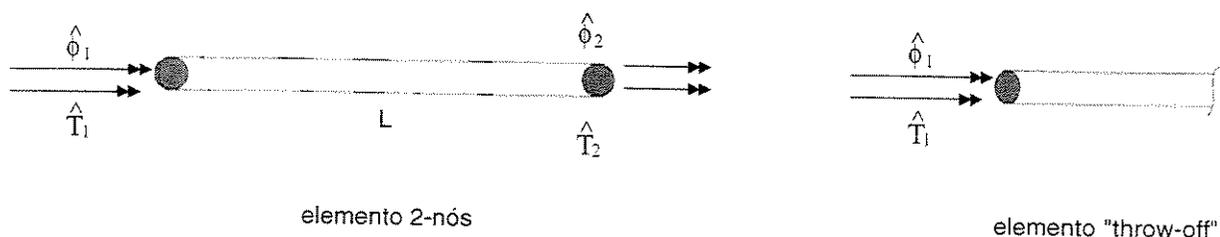


Figura 2.16 – Carregamento nodal e graus de liberdade para o elemento de barra em torção.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = \rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (2.56)$$

onde GJ é a rigidez rotacional e ρI_p é a inércia rotacional por unidade de comprimento. Esta equação tem uma solução harmônica do tipo,

$$\hat{\phi}(x) = \mathbf{A} e^{-ikx} + \mathbf{B} e^{-ik(L-x)} \quad (2.57)$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são constantes determinadas através da aplicação das condições de contorno e k é o número de onda de torção para um sistema amortecido dado pela seguinte relação espectral (DOYLE (1997)),

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho I_p - i\omega \eta J}{GJ}} \quad (2.58)$$

Nota-se também que, como no caso de elemento de barra, esta relação espectral é linear na frequência, o que resulta em velocidades de fase e de grupo iguais e constantes (propagação não-dispersiva).

2.2.4.1 Rigidez dinâmica de elemento de barra em torção – 2 nós

A matriz de rigidez dinâmica é obtida analogamente ao elemento de barra e pode ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} \hat{T}_1 \\ \hat{T}_2 \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \frac{ikL}{(1 - e^{-i2kL})} \begin{bmatrix} 1 + e^{-i2kL} & -2e^{-ikL} \\ -2e^{-ikL} & 1 + e^{-i2kL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{Bmatrix} = [\hat{k}^S] \{\hat{u}\} \quad (2.59)$$

onde $\{\hat{T}\}$ é o vetor dos torques aplicados e a matriz $[\hat{k}^S]$ é a matriz de rigidez dinâmica que exhibe características análogas às da matriz de rigidez dinâmica do elemento de barra em tração-compressão. A solução em qualquer ponto arbitrário neste elemento pode ser calculada pela seguinte expressão,

$$\hat{\phi}(x) = \hat{g}_1(x) \hat{\phi}_1 + \hat{g}_2(x) \hat{\phi}_2 \quad (2.60)$$

onde as funções $\hat{g}_1(x)$ e $\hat{g}_2(x)$ são as funções de forma dadas anteriormente para o elemento de barra.

2.2.4.2 Rigidez dinâmica de elemento de barra em torção – elemento “throw-off”

Como este tipo de elemento também não exhibe reflexão, ou seja ondas propagantes no sentido de x negativo, o termo \mathbf{B} da equação (2.57) pode ser desprezado. Desta forma, a condição de rotação nodal pode ser escrita como $\hat{\phi}(0) \equiv \hat{\phi}_1$. A partir desta equação e da equação (2.57) a solução da rotação em qualquer ponto arbitrário neste elemento semi-infinito é calculado pela seguinte expressão,

$$\hat{\phi}(x) = \hat{g}_1(x)\hat{\phi}_1 \quad (2.61)$$

onde a função $\hat{g}_1(x)$ é a função de forma do elemento tipo “throw-off”, que é uma função sempre complexa, dada por,

$$\hat{g}_1(x) = e^{-ikx} \quad (2.62)$$

De uma forma análoga àquela do elemento de barra em tração-compressão, pode-se escrever,

$$\{\hat{T}_1\} = GJ[ik]\{\hat{u}_1\} = [\hat{k}^S]\{\hat{\phi}\} \quad (2.63)$$

onde $[\hat{k}^S]$ é a matriz de rigidez dinâmica para o elemento “throw-off”. Ela é sempre complexa, o que implica que este elemento dissipa energia levando-a para fora do sistema.

2.3 Representação do elemento “throw-off” por um sistema dinâmico

O elemento “throw-off” representa a propagação de ondas estruturais em somente uma direção, ou seja, sem reflexões nas extremidades. Este elemento pode ser representado por um sistema dinâmico, conforme mostrado na Figura 2.17.

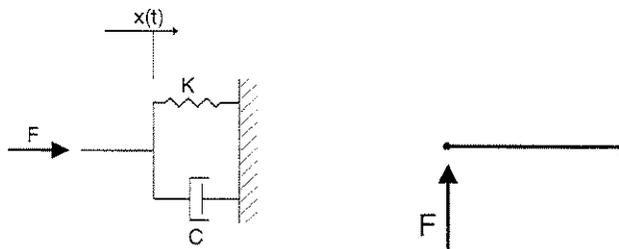


Figura 2.17 – Excitação de sistema dinâmico de rigidez e amortecimento, e de elemento infinito.

Uma força harmônica é aplicada neste sistema, e a mesma é aplicada a um elemento de viga do tipo “throw-off”. Os valores de rigidez $K=1000$ N/m e de amortecimento $C=1400$ N/m/s foram escolhidos de tal forma que o sistema esteja altamente amortecido. A resposta de deslocamento deste sistema foi calculada usando a expressão,

$$\frac{x}{F} = \frac{1}{K + i\omega C} \quad (2.64)$$

Esta resposta é comparada com a resposta de um elemento “throw-off” de viga com as propriedades; $A=0.01 \times 0.01$ m², $\rho=7800$ Kg/m³, e $E=7 \times 10^{10}$ N/m², conforme mostrado na figura abaixo. Nota que, neste caso, as duas respostas são idênticas, assim, um elemento infinito do tipo “throw-off” pode, em casos simples, ser representado por um sistema dinâmico altamente amortecido.

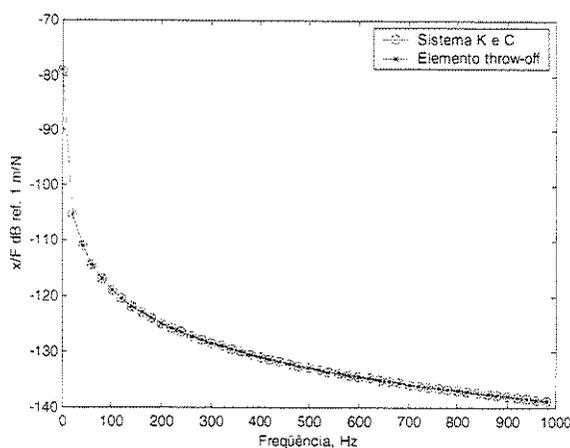


Figura 2.18 – A comparação entre a resposta do sistema dinâmico amortecido e do elemento infinito.

2.4 Acoplamento entre SEM e FEM

O SEM é baseado na montagem de matriz dinâmica da estrutura e não na montagem das matrizes de massa e rigidez. Assim, ele pode ser acoplado com outra matriz de rigidez dinâmica construída através da formulação do FEM. Isto pode ser benéfico no caso que não exista um elemento espectral que represente uma específica estrutura ou fenômeno. A outra possibilidade seria o uso dos elementos espectrais infinitos (“throw-off”) em malhas de elementos finitos, desde que não exista um elemento finito que represente o fenômeno de propagação de ondas para o infinito, ou seja, sem reflexões nas extremidades.

Para demonstrar isto, adotou-se um modelo de duas vigas de alumínio, cada uma tem um comprimento $L=1$ m e área da seção $A=0.01 \times 0.001 \text{ m}^2$, e acopladas com outra viga com o mesmo comprimento e a mesma área da seção,

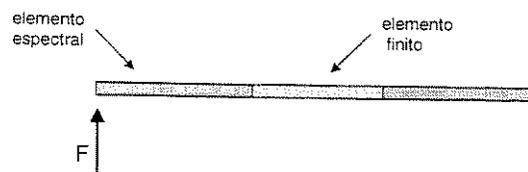


Figura 2.19 – O modelo das vigas acopladas, modeladas via SEM e FEM.

Cada uma das duas vigas nas extremidades é modelada com um elemento espectral de viga, e a viga do meio é modelada com 10 elementos finitos de viga. Uma força é aplicada na extremidade da estrutura, conforme mostrado na figura. Para comparar com uma solução melhor, a estrutura é também modelada com um só elemento espectral de comprimento $L=3$ m. A resposta no ponto da excitação é então calculada e mostrada na seguinte figura.

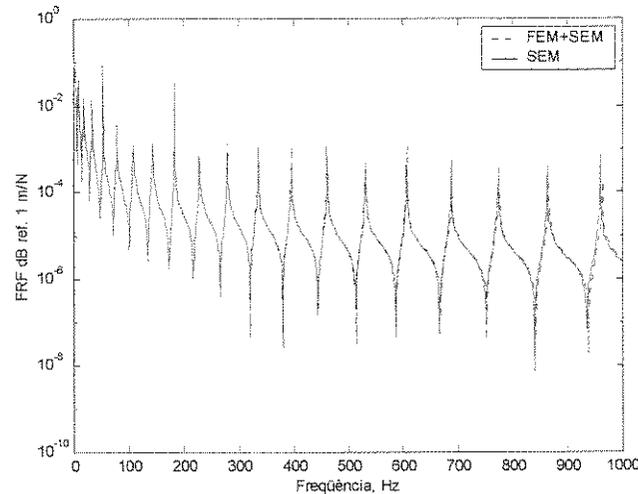


Figura 2.20 – A resposta calculada com via SEM e via SEM+FEM.

Pode-se observar dessa figura que a resposta do modelo com malha de SEM e FEM é diferente a partir do 15º modo, o que é esperado devido a malha dos elemento finitos, e que poderia ser melhorado com uma malha mais refinada. Assim, os elementos espectrais do SEM podem ser acoplados com malhas dos elementos finitos. Estruturas complicadas com, por exemplo, juntas complexas serão difíceis de serem modeladas com SEM. O chamado *super-elemento espectral* pode, neste caso, ser usado. Ele consiste em primeiramente modelar a junta usando vários elementos finitos convencionais do FEM. Os graus de liberdade dos nós interiores são condensados para os graus de liberdade da fronteira com o elemento espectral. Em seguida, estes graus de liberdade são ainda condensados para o número dos graus de liberdade do elemento espectral usado.

2.5 Comparação de propagação de onda em vigas de Bernoulli-Euler e de Timoshenko

A teoria de ordem mais elevada de Timoshenko não introduz nenhum modo adicional quando comparada com a teoria elementar de Bernoulli-Euler; entretanto, o comportamento dos modos é diferente nas duas teorias. Para frequências muito baixas não há muita diferença entre as duas formulações, mas para altas frequências existe uma grande diferença. Em problemas de

propagação de onda estrutural existem duas ondas: uma propagando para a direita (sentido de x positivo) e outra propagando para a esquerda (sentido de x negativo). Através das expressões de Bernoulli-Euler (equação (2.44)), o número de onda para a onda que propaga para a esquerda (k_2) é relacionado com o número de onda para aquela que propaga para a direita (k_1). As características destes números de onda são aqui estudados para uma viga de Alumínio em flexão com módulo de Young 7×10^{10} N/m², seção 0.1×0.1 m, massa per unidade de volume 2700 Kg/m³, e comprimento de 1 m. O fator de perda do material η é considerado nulo. Os números de onda são calculados para as duas ondas (em relação ao sentido de propagação) e usando as formulações de Bernoulli-Euler e de Timoshenko. Os resultados obtidos são mostrados nas figuras a seguir.

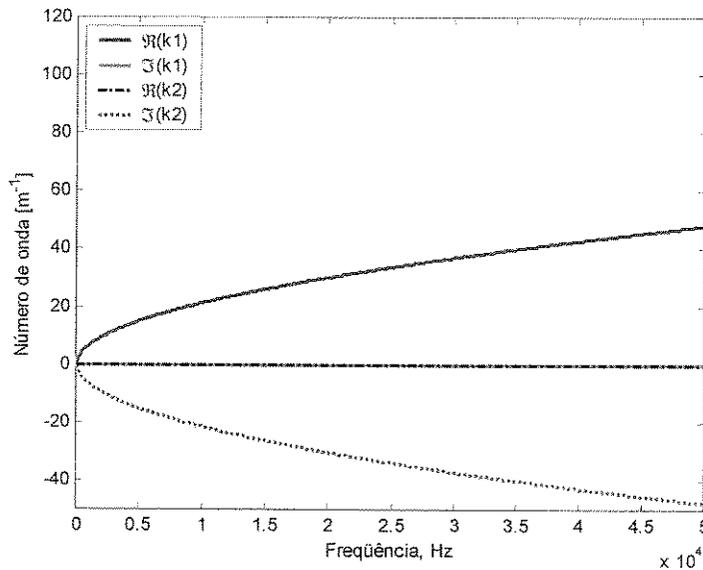


Figura 2.21 – Número de onda em viga de Bernoulli-Euler.

Observa-se que no caso de viga de Bernoulli-Euler, o número de onda para as ondas que propagam para a direita (k_1) é o mesmo (mas com sinal invertido) para as ondas que propagam para a esquerda (k_2). Observa-se também que ambos k_1 e k_2 exibem uma freqüência de corte infinita (a freqüência quando o número de onda é nulo). Observa também que a parte real de k_2 é nula e continua assim mesmo com o aumento de freqüência. Desta forma, as ondas evanescentes

continuam evanescentes com o aumento de frequência, ou que é diferente para a viga de Timoshenko.

No caso de viga de Timoshenko, os números de onda, calculados através da equação (2.22) com $\eta=0$, são mostrados na Figura 2.22. Observa nesta figura os números de onda que representam as ondas que se propagam para a direita e para a esquerda, dados como k_1 e k_2 , respectivamente. Nota-se que as ondas evanescentes tornam-se propagantes a partir de uma frequência. Esta frequência de corte, neste caso, é aproximadamente igual a 15 kHz. Esta frequência é relacionada aos modos de cisalhamento.

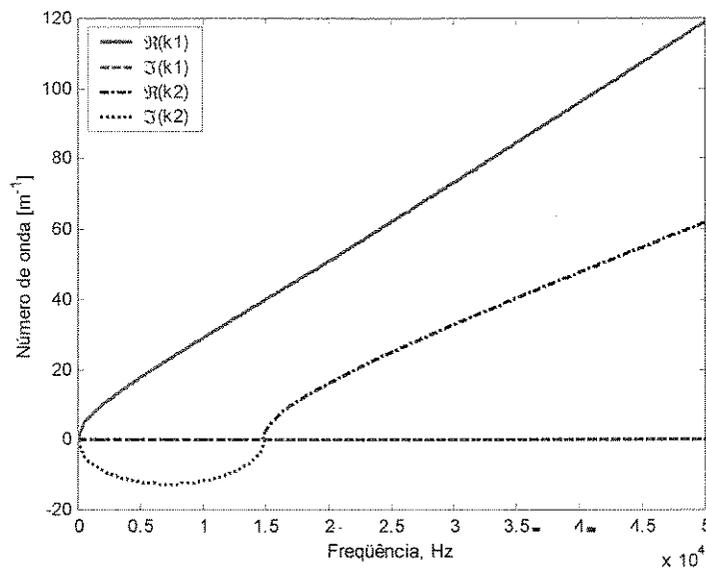


Figura 2.22 – Número de onda em viga de Timoshenko, com $\eta=0$.

Em geral, pode-se destacar que a influência dos efeitos de cisalhamento e inércia de rotação em análises em baixa frequência é desprezível. Entretanto, em análises em alta frequência estes efeitos não devem ser desprezados. Uma maneira para saber se a teoria de Timoshenko precisa ser usada é através das curvas de dispersão acima mostradas.

As diferenças entre os modelos numéricos de viga de Bernoulli-Euler e de viga de Timoshenko podem ainda ser analisadas no domínio do tempo. Para isso, considerou-se um

modelo de duas vigas, uma finita e outra infinita. Este modelo é discretizado com dois elementos espectrais, um do tipo 2-nós e outro do tipo throw-off (Figura 2.23).

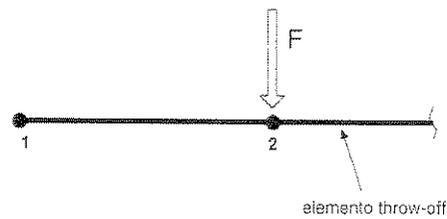


Figura 2.23 – Modelo de duas vigas, finita e infinita.

As duas vigas têm as mesmas propriedades, sendo o módulo de Young $E=2.1 \times 10^{11}$ N/m², a densidade $\rho=7800$ Kg/m³, a razão de Poisson $\nu=0.3$, a área de seção $A=0.03 \times 0.03$ m², o momento de inércia $I=6.75 \times 10^{-8}$ m⁴, e o comprimento da viga finita $L=0.3$ m. Uma força transitória é aplicada no nó 2 (Figura 2.23), e consiste de um impulso periódico com tempo de periodização de 0.03 segundos. Foram utilizadas 4096 amostras na transformada de Fourier discreta. A força transitória e seu espectro são mostrados na Figura 2.24.

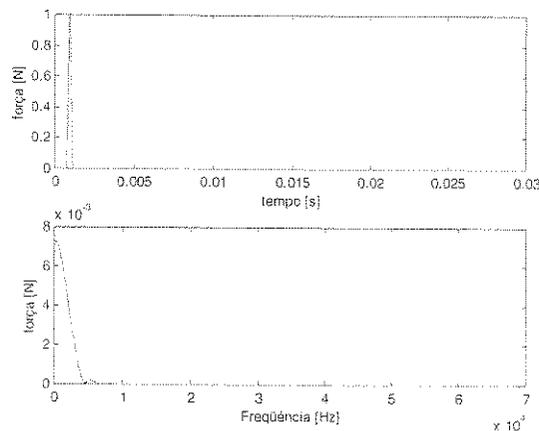


Figura 2.24 – O impulso periódico e seu espectro.

As repostas em frequência de velocidade são calculadas no nó 2 utilizando os modelos de viga de Bernoulli-Euler e de Timoshenko. A respostas no domínio de tempo são obtidas através

da transformação inversa de Fourier. Estas respostas são mostradas para o modelo de Bernoulli-Euler e para o modelo de Timoshenko na Figura 2.25.

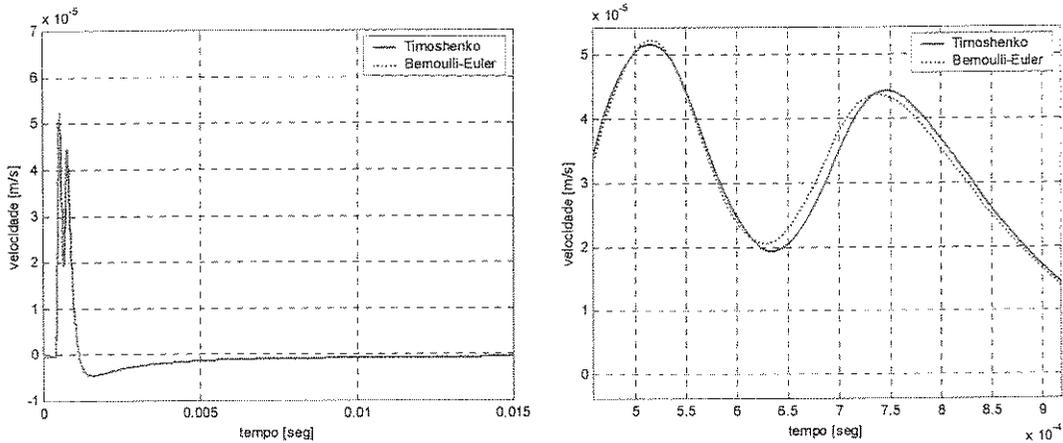


Figura 2.25 – A mobilidade no nó 2 calculada usando os modelos de viga de Bernoulli-Euler e de Timoshenko.

A excitação aplicada no nó 2 gera ondas de flexão que se propagam para as duas extremidades, finita e infinita. As ondas incidentes na extremidade finita (nó 1) se refletem, e se propagam para a extremidade infinita. Apesar de ser um modelo simples de viga, pode-se observar da Figura 2.25 que o comportamento inicial do modelo de Bernoulli-Euler é igual ao do modelo de Timoshenko. Após a reflexão no nó 1 acontecer, o comportamento temporal nos dois modelos torna-se diferente. Isto é devido à velocidade de propagação segundo a teoria de Bernoulli-Euler que é maior do que aquela da teoria de Timoshenko, o que pode ser visto na Figura 2.26.

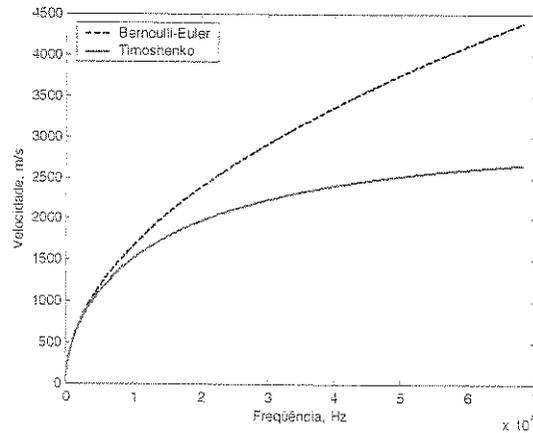


Figura 2.26 – A variação da velocidade de propagação de onda de flexão com a frequência.

2.6 Estruturas do tipo pórtico espacial

O caso mais geral é quando um membro de uma estruturas do tipo pórtico espacial é analisado. Normalmente, este tipo de estruturas contém vários membros rigidamente conectados nas juntas. Cada membro destes é tratado como sendo um guia de ondas (“waveguide”) que suporta movimentos longitudinais, rotacionais e também movimentos de flexão em dois planos. veja a Figura 2.27. O deslocamento de cada nó é definido por 6 GDL’s, 3 translações e 3 rotações. Na análise dinâmica deste tipo de estrutura através do uso do Método dos Elementos Espectrais (SEM), o problema dinâmico é tratado como sendo um grupo de problemas pseudo-estáticos.

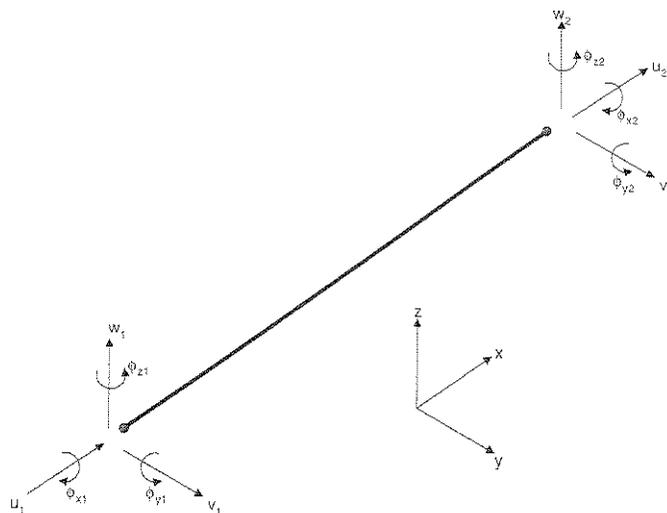


Figura 2.27 – Sistema de coordenadas e os GDL's de um membro 3-D.

2.6.1 Montagem da matriz de rigidez dinâmica global

Em estruturas 3-D, os seis deslocamentos nodais e o vetor de força nodal são definidos como,

$$\begin{aligned} \{\hat{u}\} &= \{\hat{u} \quad \hat{v} \quad \hat{w} \quad \hat{\phi}_x \quad \hat{\phi}_y \quad \hat{\phi}_z\}^T \\ \{\hat{F}\} &= \{\hat{F}_x \quad \hat{F}_y \quad \hat{F}_z \quad \hat{M}_x \quad \hat{M}_y \quad \hat{M}_z\}^T \end{aligned} \quad (2.65)$$

onde o vetor de deslocamentos consiste de três translações e três rotações nas três direções locais $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ em cada nó e o vetor de força é formado também pelas três forças axiais e três momentos nas três direções locais $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ aplicados em cada nó.

Para um membro de dois nós qualquer, o vetor de deslocamentos e o vetor de forças aplicadas definidos para cada nó são relacionados via a seguinte matriz local de rigidez dinâmica

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{aa} & \bar{k}_{ab} & \bar{k}_{ac} & \bar{k}_{ad} \\ \bar{k}_{ba} & \bar{k}_{bb} & \bar{k}_{bc} & \bar{k}_{bd} \\ \bar{k}_{ca} & \bar{k}_{cb} & \bar{k}_{cc} & \bar{k}_{cd} \\ \bar{k}_{da} & \bar{k}_{db} & \bar{k}_{dc} & \bar{k}_{dd} \end{bmatrix} \{\bar{u}\} = \{\bar{F}\} \quad (2.66)$$

onde a barra implica que o termo refere ao sistema de coordenada local e cada termo \bar{k} da matriz de rigidez é uma sub-matriz (3x3). Em uma forma expandida, a primeira quadra da matriz de rigidez deste sistema é definida por,

$$\begin{bmatrix} \bar{k}_{aa} & \bar{k}_{ab} \\ \bar{k}_{ba} & \bar{k}_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11}^R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{k}_{11}^B & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{12}^B \\ 0 & 0 & \hat{k}_{11}^B & 0 & \hat{k}_{12}^B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_{21}^B & 0 & \hat{k}_{22}^B & 0 \\ 0 & \hat{k}_{21}^B & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{22}^B \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Os subscritos R, S e B referem-se aos elementos de barra em tração-compressão, barra em torção e viga, respectivamente (do inglês “Rod”, “Shaft” e “Beam”). A matriz de rigidez do membro (12x12) é dada normalmente no referencial da coordenada local $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ que deve ser transformada para o referencial global (x, y, z) . Esta transformação de coordenadas é feita através da matriz de transformação definida como,

$$[T] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

onde as translações e as rotações e o vetor de força são transformados via a seguinte relações,

$$\{u\} = [T]\{\bar{u}\} \quad (2.69)$$

$$\{F\} = [T]\{\bar{F}\} \quad (2.70)$$

A matriz de transformação para transformar um sistema de coordenadas cartesianas é definida por,

$$[R] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y \cos(\alpha) - C_z \sin(\alpha)}{D} & D \cos(\alpha) & \frac{-C_y C_z \cos(\alpha) + C_x \sin(\alpha)}{D} \\ \frac{C_x C_y \sin(\alpha) - C_z \cos(\alpha)}{D} & D \sin(\alpha) & \frac{C_y C_z \sin(\alpha) + C_x \cos(\alpha)}{D} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

onde $D = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$ e C_x , C_y e C_z são os cossenos diretores que o membro faz com os eixos globais x, y e z , respectivamente, e α é o ângulo que especifica a rotação em torno do eixo principal do membro (DOYLE (1997)). Assim, a relação dos deslocamentos e das forças no sistema global de coordenadas pode ser escrita da seguinte forma,

$$[\hat{k}]\{\hat{u}\} = \{\hat{F}\} \quad (2.72)$$

$$[\hat{k}] = [T]^T [\bar{k}] [T] \quad (2.73)$$

onde $[\hat{k}]$ é uma matriz simétrica complexa de tamanho (12x12). No caso de elemento tipo “throw-off”, esta matriz é simplesmente completada com zeros.

Para uma estrutura 3-D formada por vários membros, a matriz de rigidez dinâmica global pode ser construída em uma maneira análoga àquela usada no FEM, onde considera-se que a estrutura esteja em equilíbrio dinâmico e, portanto, cada nó está em estado do equilíbrio e então as forças nodais para cada membro são calculadas em termos das matrizes de rigidez. O vetor global das forças aplicadas é também calculado, o que resulta no seguinte sistema matricial,

$$[\hat{K}]\{\hat{u}\} = \{\hat{F}\} \quad (2.74)$$

onde $\{\hat{u}\}$ contém o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura, $\{\hat{F}\}$ é o vetor global das forças nodais aplicadas e $[\hat{K}]$ é a matriz de rigidez dinâmica estrutural. Nota-se que esta matriz é simétrica, tipo matriz banda e geralmente complexa.

2.6.2 Programação computacional

Assim que a matriz global de rigidez é construída, pode-se calcular a resposta nos nós. Esta matriz é construída em forma análoga à do FEM. A diferença principal é que a matriz de rigidez é calculada para cada frequência desejada. Para cada membro a matriz de rigidez local é calculada e então transformada para o sistema de coordenadas global. A matriz de rigidez global é então construída e o sistema matricial é resolvido para achar o vetor dos deslocamentos para cada frequência. Um método próprio de solução deve ser escolhido para esta matriz simétrica de banda que normalmente contém muitos zeros. Geralmente, no método SEM, a estrutura contém poucos nós e então a solução completa de todos os nós para todas as componentes de frequência

pode ser guardada no disco rígido do computador. O pós-processamento destes dados pode ser realizado facilmente. A resposta em frequência em qualquer nó desejado pode ser obtida. A possibilidade de calcular a resposta entre dois nós é também possível usando as funções de forma. Este cálculo é mais freqüente no SEM que no FEM pois o comprimento do elemento espectral pode ser muito grande e então torna-se necessário obter a resposta em pontos localizados entre os nós. O SEM foi implementado em um programa, utilizando o ambiente Matlab[®], que resolve problemas dinâmicos de estruturas tri-dimensionais tipo pórtico. A comparação das soluções deste método com as de FEM e a solução analítica também foi feita para validação. Para isto, uma barra de alumínio, com comprimento $L=1$ m e área de seção $A=0.01 \times 0.0005$ m², foi usada. Uma força periódica foi aplicada na barra nas três direções: longitudinal, transversal, e torcional. A barra foi modelada com SEM usando um elemento espectral, e com FEM usando 20 elementos finitos, e as respostas nas três direções foram calculadas. As respostas analíticas foram calculadas utilizando a superposição modal, e usando 40 modos no cálculo destas respostas. Os autovetores e os autovalores analíticos foram obtidos através da formulação dada por BLEVINS (1995). As comparações entre as respostas analíticas e as respostas numéricas (SEM e FEM) são mostradas na Figura 2.28, onde a boa concordância entre elas pode-se observar. A diferença observada na resposta via FEM é devido a malha grossa utilizada, e poderia ser melhorada com uma malha mais refinada. As diferenças nas anti-ressonâncias são devido ao número de modos usados no cálculo da resposta analítica via a superposição modal.

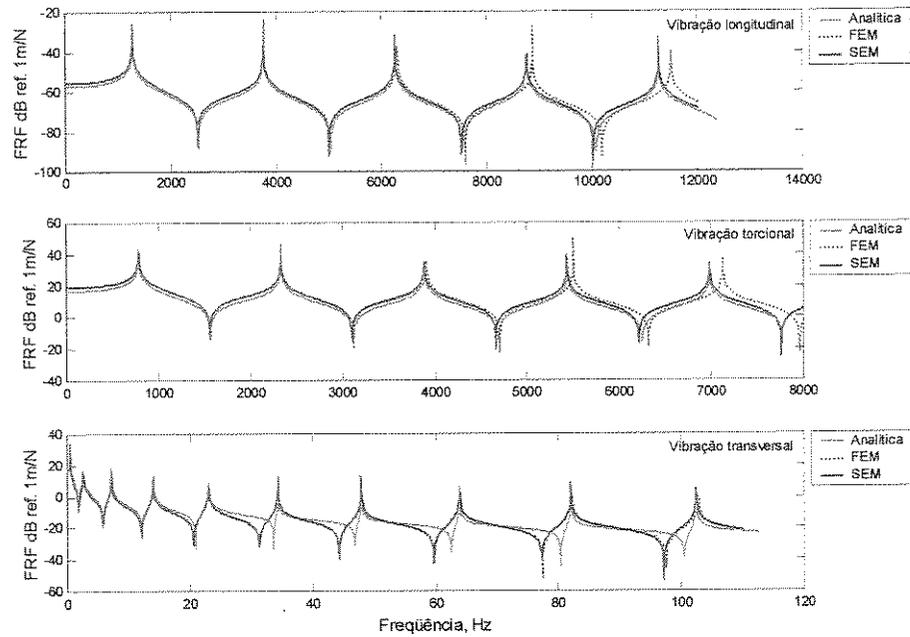


Figura 2.28 – Comparação entre a resposta analítica, via SEM, e via FEM, de uma barra em tração-compressão, em torção, e em flexão.

Capítulo 3

A Análise Estatística de Energia

Neste capítulo serão mostradas as formulações do método de Análise Estatística de Energia (SEA). Primeiramente, são estudados a energia modal em ressonadores de um grau de liberdade e o acoplamento em ressonadores de múltiplos graus de liberdade. Estes estudos serão a base para a formulação de fluxo de potência na SEA. As metodologias adotadas para o cálculo dos fatores de perda por acoplamento para vários tipos de acoplamentos são mostradas. Os coeficientes de transmissão e de reflexão em diferentes tipos de acoplamento são mostrados para vários tipos de ondas incidentes, longitudinais, transversais em dois planos, e torcionais. Em seguida, as formulações básicas da SEA são dadas. O Método de Potência Injetada (PIM), para a avaliação dos fatores de perda, é mostrado, e as vantagens e desvantagens da SEA são discutidas. O desenvolvimento teórico neste capítulo foi feito baseando-se em CREMER ET AL. (1988), LYON E DEJONG (1995), e alguns outros artigos citados no texto a seguir.

3.1 Introdução

Nos últimos anos há um crescente interesse pelo método de Análise Estatística de Energia (SEA), principalmente devido à possibilidade de utilização em vários setores da engenharia tais como civil, automobilística, aeronáutica, e naval. Uma das principais razões para o uso crescente da SEA tem a ver com a limitação dos métodos determinísticos como o Método dos Elementos Finitos (FEM). Para estudar problemas de propagação de vibração estrutural em altas frequências via o FEM, terá que subdividir a estrutura a ser analisada em elementos muito pequenos, o que,

eventualmente, pode impossibilitar que o cálculo seja feito, mesmo em grandes computadores. O custo computacional via o FEM pode ser muito alto. Além deste problema, existem outras limitações relacionados com a descrição específica das condições de contorno as quais, geralmente, não são perfeitamente conhecidas.

O método de análise estatística de energia surgiu primeiramente no início dos anos 60, sendo o primeiro trabalho de LYON E MAIDANIK (1962). Ele surgiu como uma alternativa para a resolução de problemas de vibroacústica na área de engenharia aeroespacial. Ele ganhou importância na área militar como uma ferramenta para a predição dos níveis de ruído acústico e da distribuição dos níveis de energia de vibração em grandes estruturas tais como navios e submarinos, desde a fase inicial de projeto. Na área de engenharia, a SEA pode ser usada para obter estimativas quantitativas da resposta dinâmica média de um sistema. A distribuição da resposta dinâmica do sistema é obtida através da distribuição de energia entre os sub-sistemas que o compõem baseando-se nas equações de equilíbrio de energia destes sub-sistemas. A SEA pode ser usada para traçar o fluxo de energia no sistema e identificar os principais trajetos de transmissão de energia do ponto de fonte ao ponto de dissipação. Estas características podem ser muito benéficas para sistemas grandes e complexos quando comparadas com as dos métodos numéricos determinísticos como o FEM e o método dos elementos de contorno (BEM).

O nome Análise Estatística de Energia foi dado logo depois do trabalho de LYON E MAIDANIK (1962). Os três termos do nome foram escolhidos na base das seguintes definições:

- Análise, para enfatizar sua utilização como uma grande filosofia de cálculo, muito mais o que um método numérico em particular.
- Estatística, para enfatizar que os resultados são obtidos em termos de valores médios.
- Energia, para enfatizar que a variável principal que caracteriza a resposta dinâmica do sistema é a distribuição de energia.

Devido à característica estatística do método, ele é considerado adequado à análise de estruturas complexas, com excitações aleatórias de banda larga de frequência. Portanto, não haverá preocupação com problemas localizados mas sim com o comportamento global do

sistema. As predições de distribuição de energia no sistema analisado são mais confiáveis quanto maior for a diversidade e a extensão do sistema real, representado pelo modelo matemático.

Devido ao modelo relativamente pequeno de SEA, quando comparado com os demais métodos numéricos, ele oferece a vantagem de analisar e estudar um sistema mecânico nos primeiros estágios de um projeto. Com isso fica mais fácil verificar a sensibilidade da distribuição de energia à variação dos parâmetros envolvidos. A SEA também pode ser usado como uma ferramenta para a determinação e quantificação das trajetórias de propagação de vibração (HECKL E LEWIT, 1994).

3.2 Energia de vibração em ressonadores modais

Como a energia é a principal variável da resposta em SEA, o uso desta variável para descrever a vibração de sistemas acoplados é apresentado primeiramente. Maneiras comuns de analisar tais sistemas empregam osciladores modais ou descrição de movimentos destes sistemas em termos de propagação de ondas de vibração.

3.2.1 Sistemas lineares de um grau de liberdade

Para começar, um estudo de energia de vibração em ressonador de um grau de liberdade é realizado. Considere um simples ressonador linear mostrado na Figura 3.1.

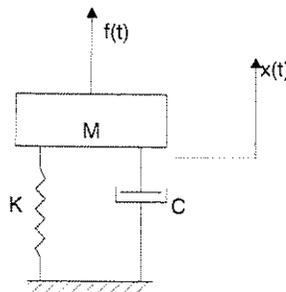


Figura 3.1 – Ressonador linear de 1 GDL.

No sistema acima mostrado, o amortecedor ou a resistência mecânica C produz uma força $-C\dot{x}$ que atua na direção contrária de deslocamento x da massa M . O elemento de rigidez K produz uma força $-Kx$ na direção contrária de deslocamento x . Escrevendo a equação de balanço de forças tem-se,

$$\ddot{x} + \omega_n \eta \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{f(t)}{M} \quad (3.1)$$

onde ω_n é a frequência natural em rad/seg, e $\eta = \frac{C}{\omega_n M}$ é o fator de perda. Para um sistema não amortecido vibrando livremente, esta equação pode ser escrita na seguinte forma,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (3.2)$$

A solução geral desta equação pode ser dada por,

$$x = B \sin(\omega_n t) + C \cos(\omega_n t) = A \sin(\omega_n t + \phi) \quad (3.3)$$

onde os amplitudes A , B , C e ϕ são reais e arbitrários, e podem ser determinados através de valores conhecidos de deslocamento x e velocidade \dot{x} . Expressões para a energia cinética da massa e a energia potencial no elemento de rigidez podem ser dadas em qualquer instante t como sendo, respectivamente,

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M A^2 \omega_n^2 \cos^2(\omega_n t + \phi) \quad (3.4)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2 \sin^2(\omega_n t + \phi) \quad (3.5)$$

A energia total é a soma da energia cinética e a energia potencial. Calculando esta energia total como sendo a média no tempo, ela pode ser escrita da seguinte forma,

$$\langle E_t \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T (E_k + E_p) dt = \frac{1}{4} M A^2 \omega_n^2 + \frac{1}{4} K A^2 = \frac{1}{2} K A^2 \quad (3.6)$$

Assim, as energias cinética e potencial calculadas como médias no tempo são iguais, e cada uma é igual à metade da energia total do sistema. Este resultado é considerado importante e será utilizado na SEA. A energia total de um sistema pode ser calculada através do cálculo somente da energia cinética, que é geralmente a mais fácil a ser calculada. Na presença de amortecimento, uma solução diferente pode ser assumida do tipo,

$$x \cong X e^{\alpha t}, \text{ com } \alpha = -\frac{1}{2} \omega_n \eta \pm i \omega_d \quad (3.7)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{4}}$. Desta forma, a solução é dada por,

$$x(t) = A e^{-0.5 \omega_n \eta t} \sin(\omega_d t + \phi) \quad (3.8)$$

Neste caso, as oscilações livres acontecem em frequências ω_d , chamadas de frequências naturais amortecidas, sendo que a amplitude das oscilações diminuem exponencialmente com tempo. A energia cinética é dada por,

$$E_k = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 = \frac{1}{2} M A^2 \omega_n^2 e^{-\omega_n \eta t} \left(-\frac{\omega_d}{\omega_n} \cos(\omega_d t + \phi) + \frac{1}{2} \eta \sin(\omega_d t + \phi) \right)^2 \quad (3.9)$$

A energia potencial é dada por,

$$E_p = \frac{1}{2} K x^2 = \frac{1}{2} K A^2 e^{-\omega_n \eta t} \sin^2(\omega_d t + \phi) \quad (3.10)$$

Estas expressões podem ser escritas de forma simplificada se uma média é calculada sobre um ciclo de oscilações, desconsiderando a pequena mudança de amplitude neste período devido ao multiplicador exponencial. Com esta hipótese, a energia cinética é igual a energia potencial, e a energia total pode ser considerada simplesmente como sendo o dobro da energia potencial ou da energia cinética.

LYON E DEJONG (1995) mostraram que, para excitações aleatórias, pode-se definir que,

$$\langle \ddot{x}^2 \rangle_t \cong \omega_n^2 \langle \dot{x}^2 \rangle_t \quad (3.11)$$

o que mostra que, para excitação senoidal ou aleatória, a relação entre a média temporal de aceleração e de velocidade é constante. Esta hipótese é importante na SEA porque ela permite a transformação de uma variável para outra sem levar em conta a forma e a natureza da excitação utilizada.

Sistemas acoplados mais complexos podem ser desenvolvidos através das equações do sistema simples de ressonador linear apresentado anteriormente. Para estudar a interação de energia entre sistemas acoplados, consideram-se os sistemas de dois ressonadores lineares acoplados via elementos de rigidez e massa, Figura 3.2.

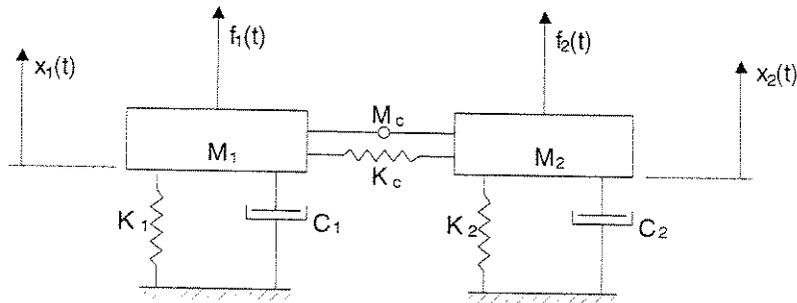


Figura 3.2 – Sistema Acoplado de dois Ressonadores lineares.

Da mesma forma descrita anteriormente, a energia cinética e a energia potencial do sistema podem ser escritas das seguintes formas, respectivamente,

$$E_k = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{8} M_c (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 \quad (3.12)$$

$$E_p = \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2 + \frac{1}{2} K_c (x_2 - x_1)^2 \quad (3.13)$$

As equações de movimento podem ser escritas utilizando o princípio de Lagrange. Neste caso, considerando que as duas forças f_1 e f_2 são forças independentes do tipo ruído branco, e que são independentes do vetor de velocidades, pode-se escrever para cada ressonador i ,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + \frac{\partial E_p}{\partial x_i} = f_i \quad (3.14)$$

Usando as equações (3.12) e (3.13), e levando em conta as forças de amortecedores $C_1 \dot{x}_1$ e as forças do acoplamento, tem-se,

$$f_1 = \left(M_1 + \frac{1}{4} M_c \right) \ddot{x}_1 + \frac{1}{4} M_c \ddot{x}_2 + C_1 \dot{x}_1 + (K_1 + K_c) x_1 - K_c x_2 \quad (3.15)$$

$$f_2 = \left(M_2 + \frac{1}{4} M_c \right) \ddot{x}_2 + \frac{1}{4} M_c \ddot{x}_1 + C_2 \dot{x}_2 + (K_2 + K_c) x_2 - K_c x_1 \quad (3.16)$$

Estas duas equações representam o movimento do sistema acoplado. Elas demonstram que o movimento (deslocamento ou velocidade) em um sistema resulta em força ou potência injetada no outro. Os dois sistemas acoplados podem ser matematicamente desacoplados de duas maneiras: considerando deslocamentos, velocidades, e acelerações do sistema 2 nulas; ou atribuindo valores nulos aos parâmetros de acoplamento K_c e M_c .

A potência instantânea injetada no sistema pela força f_1 é $f_1 \dot{x}_1$ e, então, calcula-se esta potência como média no tempo usando as equações anteriores como,

$$\langle f_1 \dot{x}_1 \rangle_t = \left(M_1 + \frac{1}{4} M_c \right) \langle \ddot{x}_1 \dot{x}_1 \rangle_t + \frac{1}{4} M_c \langle \ddot{x}_2 \dot{x}_1 \rangle_t + C_1 \langle \dot{x}_1 \dot{x}_1 \rangle_t + (K_1 + K_c) \langle x_1 \dot{x}_1 \rangle_t - K_c \langle x_2 \dot{x}_1 \rangle_t \quad (3.17)$$

$$\langle f_2 \dot{x}_2 \rangle_t = \left(M_2 + \frac{1}{4} M_c \right) \langle \ddot{x}_2 \dot{x}_2 \rangle_t + \frac{1}{4} M_c \langle \ddot{x}_1 \dot{x}_2 \rangle_t + C_2 \langle \dot{x}_2 \dot{x}_2 \rangle_t + (K_2 + K_c) \langle x_2 \dot{x}_2 \rangle_t - K_c \langle x_1 \dot{x}_2 \rangle_t \quad (3.18)$$

Nota-se que o termo $C_i \langle \dot{x}_i \dot{x}_i \rangle_t$ representa a potência dissipada pelo elemento amortecedor C_i . Para um processo estacionário, onde $\langle dx_i^2/dt \rangle_t = \langle dx_i^2/dt \rangle_t = 0$, as equações (3.17) e (3.18) podem ser usadas para escrever uma forma de calcular o fluxo de potência do sistema 1 para o sistema 2 dada por (LYON E DEJONG (1995)),

$$\langle P_{12} \rangle_t = K_c \langle \dot{x}_1 (x_2 - x_1) \rangle_t + \frac{1}{4} M_c \langle \dot{x}_1 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \rangle_t \quad (3.19)$$

O fluxo de potência do sistema 1 para o sistema 2 pode ser calculado também como sendo proporcional à diferença entre a média temporal de energia total dos sistemas 1 e 2 definidas anteriormente. Assim, tem-se a seguinte expressão,

$$\langle P_{12} \rangle_t = g_{12} (E_1 - E_2) \quad (3.20)$$

Nota-se que E_i é a média temporal da energia do sistema i escrita sem $\langle \rangle_t$ somente para simplificar a notação das expressões envolvidas. O parâmetro g_{12} depende somente das propriedades do sistema em questão, e dado por LYON E DEJONG (1995),

$$g_{12} = \frac{\zeta^2 (\beta_1 + \beta_2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)(\beta_1 \omega_2^2 + \beta_2 \omega_1^2)} \quad (3.21)$$

onde, $\zeta = \frac{K_c}{\sqrt{M_1 M_2}}$, $\beta_i = \eta_i \omega_i$, $\eta_i = \frac{C_i}{M_i}$, $\omega_i^2 = \frac{(K_i + K_c)}{M_i}$. A equação (3.12) é fácil a ser usada já que a média temporal da energia total de sistema i pode ser, como foi mostrado anteriormente, calculada como sendo o dobro de energia cinética ou o dobro de energia potencial. Nota-se desta expressão que g_{12} é positiva definida e, então, a direção de fluxo de potência é do

sistema com maior energia para o sistema com menor energia, e ela é uma função dos parâmetros de acoplamento e dos fatores de amortecimento dos dois sistemas. Nota-se também que g_{12} é simétrica ($g_{12}=g_{21}$), ou seja, o fluxo de potência neste caso é recíproco.

3.2.2 Sistemas lineares de vários graus de liberdade

A interação de dois subsistemas acoplados é analisada. Cada um dos subsistemas é representado por vários graus de liberdade. O acoplamento dos dois subsistemas é considerado não-dissipativo. Assume-se que a excitação utilizada é do tipo ruído branco dentro da faixa de frequência $\Delta\omega$, e que dentro desta banda de frequência existem $N_i = n_i\Delta\omega$ modos em cada subsistema, onde $n_i(\omega)$ é definido como a densidade modal de subsistema i , veja Figura 3.3.

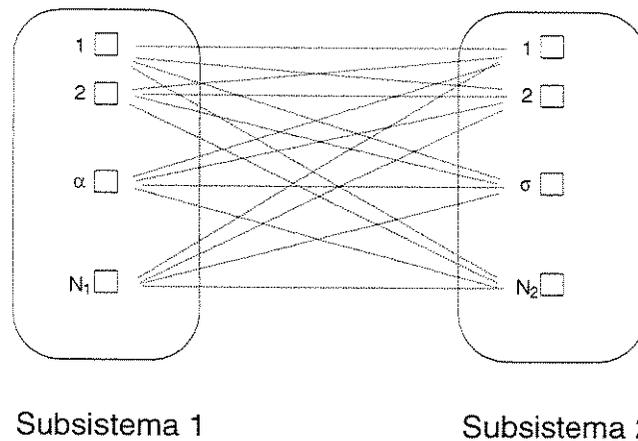


Figura 3.3 – Interação dos modos de dois subsistemas com vários GDLs.

Dentro desta definição, algumas hipóteses devem ser feitas:

1. Cada modo α de um subsistema i é descrito por uma frequência natural $\omega_{\alpha i}$ que é definida dentro da faixa $\Delta\omega$. Isto é, cada subsistema é um membro de conjunto de sistemas que são fisicamente similares.
2. Todos os modos de um subsistema são igualmente energéticos e suas respostas modais são incoerentes. Isto é, as energias dentro de cada subsistema são iguais. Por exemplo, uma viga exhibe quatro grupos de modos: um grupo envolvendo movimentos

longitudinais, um grupo de movimentos torcionais, e outro grupo que envolve movimentos de flexão nos dois planos ortogonais.

3. O valor de amortecimento de cada modo em um subsistema é o mesmo. Isto não é essencial, mas tende a simplificar a formulação.

Estas hipóteses são consideradas importantes na formulação da SEA. O termo “estatística” da SEA pode ser observado através destas hipóteses. Baseando-se na hipótese 2, pode-se escrever,

$$E_{1,1} = E_{2,1} = \dots = E_{\alpha,1} = \dots = E_{N_1,1} = \frac{E_1}{N_1}, \quad \text{para o subsistema 1}$$

$$E_{1,2} = E_{2,2} = \dots = E_{\sigma,2} = \dots = E_{N_2,2} = \frac{E_2}{N_2}, \quad \text{para o subsistema 2}$$

onde, $E_{i,1}$ é a energia modal (energia/modo) do modo 1 no subsistema i . Como foi mencionado anteriormente, a energia modal é calculada através da média temporal da energia total do subsistema (E_i) dividida pelo número de modos (N_i) neste subsistema. A troca de energia entre os dois subsistemas é caracterizada pela soma da troca de energia entre os diferentes modos de cada subsistema.

Da mesma forma feita para os ressonadores de um GDL, pode-se definir o fluxo de potência total de todos os modos N_1 de um subsistema 1 para o modo σ de um subsistema 2, como sendo,

$$P_{1,\alpha} = \langle g_{\alpha\sigma} \rangle N_1 \left(\frac{E_1}{N_1} - \frac{E_2}{N_2} \right) \quad (3.22)$$

onde, $\langle g_{\alpha\sigma} \rangle$ é a média calculada em relação às frequências ω_α e ω_σ , e calculada através da equação (3.21). O fluxo total de energia de subsistema 1 para subsistema 2 é calculada via a soma de todos os modos N_2 de subsistema 2, resultando na seguinte expressão,

$$P_{12} = \langle g_{\alpha\sigma} \rangle N_1 N_2 \left(\frac{E_1}{N_1} - \frac{E_2}{N_2} \right) \quad (3.23)$$

Nota-se desta equação que o fluxo de potência P_{12} é proporcional à diferença das energias modais dos dois subsistemas, mas não é proporcional à diferença das energias totais dos subsistemas. Substituindo N_i pela densidade modal n_i definida anteriormente como $N_i = n_i \Delta f$, pode-se escrever P_{12} como,

$$P_{12} = \omega(\eta_{12}E_1 - \eta_{21}E_2) \quad (3.24)$$

onde, foi usada a expressão $\eta_{ij} = \frac{\langle g_{ij} \rangle n_j \Delta f}{\omega}$, com η_{ij} definido como o fator de perda por acoplamento do subsistema i para o subsistema j . Esta expressão é considerada útil já que ela permite achar um modo de acoplamento desconhecido de um acoplamento conhecido. Assim, pode-se escrever a relação,

$$\frac{\eta_{12}}{\eta_{21}} = \frac{\langle g_{12} \rangle n_2}{\langle g_{21} \rangle n_1} \quad (3.25)$$

e, notando-se a simetria da função $\langle g_{ij} \rangle$, pode-se escrever que,

$$n_1 \eta_{12} = n_2 \eta_{21} \quad (3.26)$$

Esta relação básica é conhecida como a relação de reciprocidade. Ela originou-se do fato que a troca de potência entre dois subsistemas depende da diferença entre as energias modais dos dois subsistemas.

3.3 A avaliação de fator de perda por acoplamento

Talvez o fator mais importante na SEA seja o fator de perda via acoplamento η_{ij} . Ele caracteriza o comportamento dinâmico nas juntas entre dois subsistemas, estruturais ou acústicos. As juntas podem ser de vários tipos: juntas via pontos, juntas via linhas, e juntas via superfícies. Este parâmetro é uma medida da taxa de energia que flui fora de um subsistema para outro via acoplamento. A avaliação deste fator analiticamente e experimentalmente é discutida em seguida. Neste trabalho, estruturas treliçadas do tipo pórtico plano e espacial serão utilizadas. Contudo,

estruturas do tipo placas planas são também de importância indiscutível em problemas de engenharia. Portanto, formulações para acoplamento de placas são também mostradas.

3.3.1 Sistemas conectadas via ponto

Teoricamente, a avaliação de fator de perda por acoplamento é relacionada a um coeficiente conhecido como o coeficiente de transmissão. Existem duas maneiras ou aproximações para achar expressões para avaliar este coeficiente; a aproximação modal e a aproximação via propagação de ondas. Neste trabalho, a última aproximação será utilizada e aplicada em dois subsistemas conectados via um ponto, e os resultados obtidos serão usados para obter formulações de fator de acoplamento para outros tipos de conexão. Para isso, considera-se um sistema uni-dimensional de duas vigas conectadas, veja Figura 3.4.

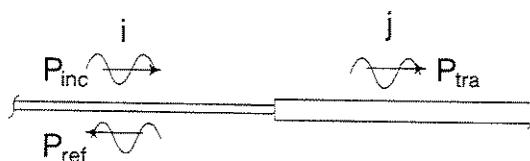


Figura 3.4 – Propagação de energia para o cálculo de coeficiente de acoplamento.

Na figura acima, a energia reverberante no subsistema i é representada por E_i . A velocidade de grupo da onda correspondente é $c_{g,i}$, e o comprimento do subsistema i é dado por L_i . Supondo que o fluxo de potência no subsistema i for P_{inc} para ondas incidentes, e P_{ref} para ondas refletidas, e que estas ondas são incoerentes, pode-se definir (hipótese da SEA) que o fluxo de potência do subsistema i para o subsistema j é dada por,

$$P_{i \rightarrow j} = \omega \eta_{ij} E_i \quad (3.27)$$

A potência transmitida para o subsistema j, pela definição do coeficiente de transmissão τ_{ij} , é dada por,

$$P_{tra} = \tau_{ij} P_{inc} \quad (3.28)$$

e, por outro lado, a potência refletida pode ser dada por $P_{ref} = |r|^2 P_{inc}$, onde r é a amplitude do coeficiente de reflexão. Considerando que a potência não está sendo dissipada na interface dos dois sistemas (acoplamento conservativo), este coeficiente pode ser definido como $|r|^2 = 1 - \tau_{ij}$.

Para os subsistemas infinitos da Figura 3.4, e igualando as equações (3.27) e (3.28), tem-se o fator de acoplamento dado por,

$$\eta_{ij} = \frac{\tau_{ij} P_{inc}}{\omega E_i} \quad (3.29)$$

Usando expressão para a energia no subsistema i dada como $E_i = \frac{L_i}{c_{g,i}} (P_{inc} + P_{ref})$ (LYON E DEJONG (1995)), e considerando o caso de acoplamento fraco, que é uma hipótese na SEA, pode-se escrever que,

$$\eta_{ij} = \frac{\tau_{ij} c_{g,i}}{2\omega L_i} \quad (3.30)$$

Nota-se que essa relação não é simétrica, sendo que τ_{ij} é simétrica, ou seja, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Nas próximas seções serão estudadas formulações para avaliar teoricamente o coeficiente τ_{ij} . Em geral, e para m subsistemas conectadas via um ponto, o coeficiente τ_{12} pode ser calculado através da seguinte equação,

$$\tau_{12} = \frac{4R_1 R_2}{|Z_1 + Z_2|^2} \quad (3.31)$$

onde R_i é a parte real da impedância Z_i do subsistema i .

3.3.2 Sistemas conectadas ao longo de uma linha

Este tipo de acoplamento pode ser observado em sistema de duas placas (Figura 3.5).

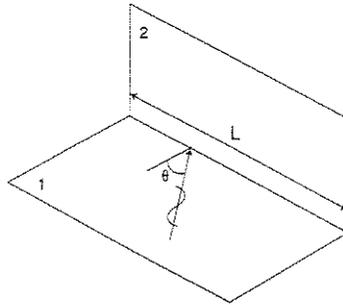


Figura 3.5 – Duas placas acopladas ao longo de uma linha.

Neste caso específico, as seguintes hipóteses são consideradas:

- somente as ondas de flexão são levadas em conta.
- a resposta dinâmica de cada placa pode ser representada por uma combinação de ondas planas de flexão. Esta suposição requer a presença de número suficiente de modos naturais em um subsistema, dentro da largura de banda de frequência utilizada.
- As ondas de flexão não são correlacionadas, o que significaria que a energia total é igual à soma linear das energias em cada onda. Na prática, três argumentos podem ser levantados através desta hipótese. O primeiro é que ondas correlacionadas podem resultar em média na frequência que poderia ser nula. O segundo tem a ver com a média espacial, e se baseia no fato que o comprimento de onda de flexão é pequeno em altas frequências. Então, qualquer correlação entre estas ondas pode resultar em uma média espacial nula. O terceiro argumento é relacionado à média de vários registros ou conjunto de dados (“ensemble averaging”). Para ondas correlacionadas, este tipo de média pode ser também nulo. Esta hipótese é equivalente a assumir que os modos naturais não são correlacionados.
- As ondas de flexão são difusas no sentido que a energia em uma onda é a mesma em todas as direções.

Para ondas de flexão em placas, a densidade modal pode ser calculada via a seguinte expressão (LANGLEY E BARDELL (1998)),

$$n = \frac{\omega A}{2\pi c c_g} \quad (3.32)$$

onde, c é a velocidade de fase das ondas de flexão, $c_g=2c$ é a velocidade de grupo, e A é a área de placa. Da Figura 3.5, as ondas incidentes de flexão com direção entre θ e $\theta+d\theta$ na placa 1 exibem densidade de energia (energia por unidade de área) dada por (LANGLEY E BARDELL (1998)),

$$E_d = \frac{E_1}{2\pi A_1} d\theta \quad (3.33)$$

A média no tempo do fluxo de energia na direção θ é então,

$$\langle E_d \rangle_t = c_{g1} \frac{E_1}{2\pi A_1} d\theta \quad (3.34)$$

A potência transmitida por estas onda para a fronteira da placa 2 é então dada por,

$$\langle P_L \rangle_t = c_{g1} \frac{E_1}{2\pi A_1} L \cos(\theta) d\theta \quad (3.35)$$

A potência transmitida para a placa 2 pode ser calculada através do coeficiente de transmissão $\tau_{12}(\theta)$ da fronteira multiplicado pela potência incidente. Deste modo, a potência total transmitida para a placa 2 pode ser escrita na seguinte forma,

$$P_{1 \rightarrow 2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c_{g1} \frac{E_1}{2\pi A_1} L \tau_{12}(\theta) \cos(\theta) d\theta = \omega E_1 \left(\frac{\langle \tau_{12} \rangle c_{g1} L}{\omega \pi A_1} \right) \quad (3.36)$$

$$\text{com } \langle \tau_{12} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tau_{12}(\theta) \cos(\theta) d\theta.$$

A potência líquida transmitida entre as duas placas é então calculada como,

$$P_{12} = P_{1 \rightarrow 2} - P_{2 \rightarrow 1} = \omega E_1 \left(\frac{\langle \tau_{12} \rangle c_{g1} L}{\omega \pi A_1} \right) - \omega E_2 \left(\frac{\langle \tau_{21} \rangle c_{g2} L}{\omega \pi A_2} \right) \quad (3.37)$$

Usando-se a relação de reciprocidade da equação (3.26), e escrevendo-se a equação (3.37) na forma da equação (3.24), tem-se de novo a seguinte relação,

$$P_{12} = \omega (\eta_{12} E_1 - \eta_{21} E_2) \quad (3.38)$$

com o coeficiente de transmissão definido por,

$$\eta_{ij} = \frac{\langle \tau_{ij} \rangle c_{gi} L}{\omega \pi A_i} \quad (3.39)$$

É importante ressaltar que o coeficiente de transmissão é a chave para calcular o fator de perda por acoplamento na SEA. Vários tipos de juntas estruturais podem ser analisadas para o cálculo deste coeficiente, e podem ser encontradas em trabalhos publicados (LYON E DEJONG (1995), LANGELY ET AL. (1990)).

3.4 A avaliação analítica dos coeficientes de transmissão e de reflexão

Discontinuidades geométricas podem ser vistas em componentes estruturais que se encontram em ângulos retos como, por exemplo, paredes de uma sala, barras de suporte, e vigas formando estruturas do tipo pórticos. Outras discontinuidades podem ser encontradas em estruturas unidimensionais, com materiais ou geometrias diferentes, conectadas no mesmo plano. Um exemplo destas estruturas unidimensionais é quando duas vigas com áreas de seção diferentes são conectadas na mesma linha, veja a Figura 3.6 . As estruturas do tipo pórtico espacial, bidimensional e tridimensional, constituem o enfoque central deste trabalho. Em estruturas deste tipo, as ondas incidentes são parcialmente refletidas dependendo da discontinuidade envolvida. Portanto, as energias de propagação são parcialmente reduzidas e/ou

transmitidas através desta discontinuidade. Alguns dos diferentes acoplamentos que poderiam acontecer em estruturas treliçadas são mostrados na Figura 3.6.

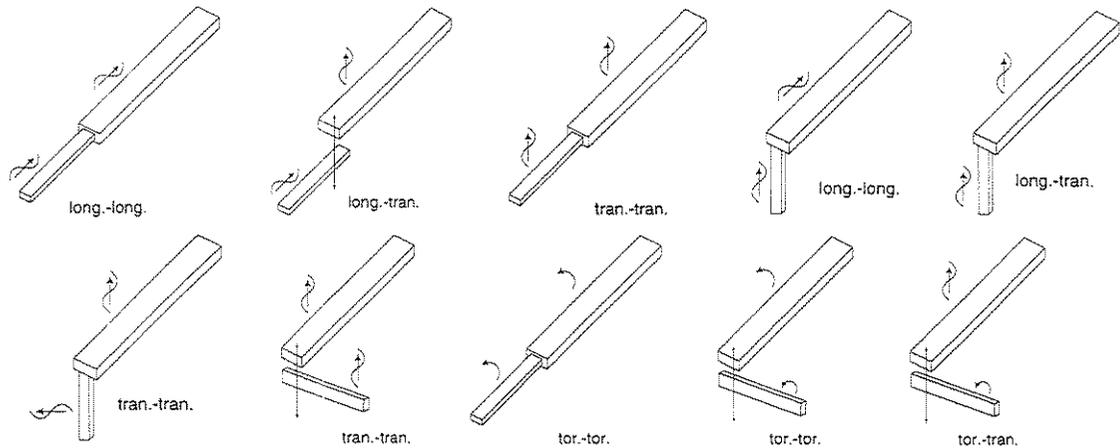


Figura 3.6 – Diferentes acoplamentos em estruturas treliçadas tridimensionais.

Em estruturas tridimensionais as ondas incidentes podem ser no plano da junta ou fora do plano. Para estudar estes acoplamentos, os casos de onda incidente longitudinal, onda incidente torcional, onda incidente transversal no plano, e onda incidente transversal fora do plano serão estudados.

3.4.1 Caso de ondas incidentes longitudinais em barras retas

Considera duas barras retas e semi-infinitas com seções diferentes, e possivelmente com materiais diferentes, conectadas na forma mostrada na figura abaixo, a chamada “butt joint”.

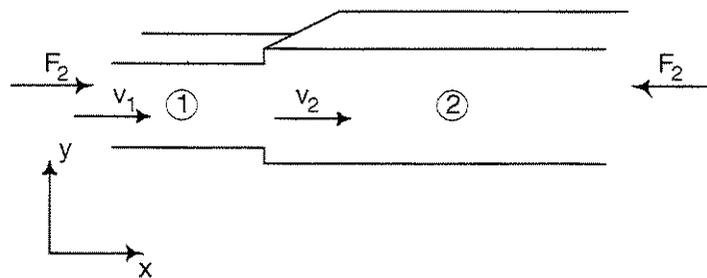


Figura 3.7 – Duas barras retas conectadas via um ponto.

Estas barras são firmemente conectadas de tal forma que as componentes de velocidade na discontinuidade podem ser transmitidas de uma barra para a outra. As tensões nos dois lados da junta são também iguais. Isso resultará nas seguintes condições de contorno na junta, ou seja, no plano imaginário da junta,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_2 \\ F_1 &= F_2 \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde v_1 é a velocidade da onda longitudinal na viga 1 devido à força axial F_1 , e v_2 é a velocidade da onda longitudinal na viga 2 devido à força axial F_2 . Tendo em vista que as ondas na barra 1 incidentes na barra 2 são parcialmente refletidas e parcialmente transmitidas, da segunda condição de contorno pode-se escrever que,

$$F_1 = F_{1+} + F_{1-} = Z_1(v_{1+} - v_{1-}) = F_2 = Z_2 v_{2+} \quad (3.41)$$

onde Z_1 e Z_2 são as impedâncias mecânicas nas barras 1 e 2 respectivamente, v_{1+} é o campo de velocidade das ondas longitudinais incidentes na barra 1, v_{1-} é o campo de velocidade das ondas refletidas, e v_{2+} é o campo de velocidade das ondas transmitidas. Usando a primeira condição de contorno pode-se obter,

$$v_{2+} = v_{1+} \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad (3.42)$$

Desta forma, pode-se calcular a eficiência de transmissão τ_L como a razão entre a potência transmitida e a potência incidente, e então,

$$\tau_L = \frac{P_{2+}}{P_{1+}} = \frac{Z_2 v_{2+}^2}{Z_1 v_{1+}^2} = \frac{4}{\left(\sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} + \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \right)^2} \quad (3.43)$$

Tendo em vista a definição da amplitude do coeficiente de reflexão de energia, r , como a razão entre a potência refletida e a potência transmitida, tem-se,

$$r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad (3.44)$$

E, por definição, o coeficiente de reflexão de energia, também chamado de eficiência de reflexão ρ_L , é calculada como sendo igual a $|r|^2$ e, desta forma,

$$\tau_L = 1 - \rho_L = 1 - |r|^2 \quad (3.45)$$

Observa-se que neste caso foi considerada a ausência de absorção de energia na junção das duas barras e, desta forma, a energia que não está refletida deve ser transmitida. Observa-se também que, no caso de barras idênticas, com a mesma seção e o mesmo material, o coeficiente de reflexão é nulo e, portanto, o coeficiente de transmissão é igual a 1. É importante ressaltar que os coeficientes τ_L e ρ_L são constantes em relação à frequência de excitação.

3.4.2 Caso de ondas incidentes transversais em vigas retas

Consideram-se duas vigas retas e semi-infinitas conectadas na forma mostrada na figura abaixo.

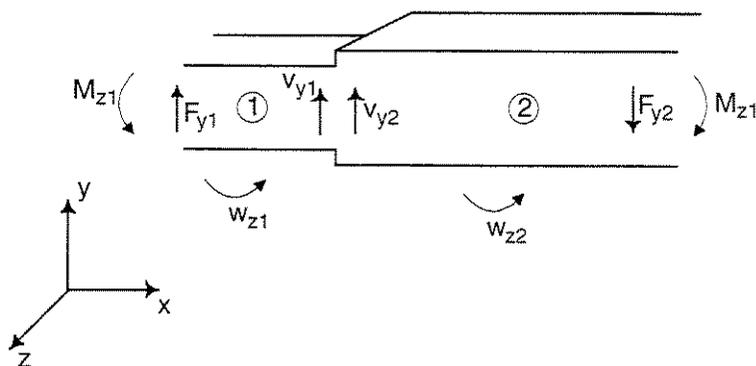


Figura 3.8 – Duas vigas retas conectadas em um ponto.

Estas vigas, que possivelmente podem ser de diferentes geometrias e materiais, são firmemente conectadas de tal forma que os momentos e as componentes de velocidade podem ser

transmitidas de uma viga para outra. Isso resultará nas seguintes condições de contorno válidas na junta,

$$\begin{aligned}v_{y1} &= v_{y2} \\ F_{y1} &= F_{y2} \\ w_{z1} &= w_{z2} \\ M_{z1} &= M_{z2}\end{aligned}\tag{3.46}$$

onde v_{yi} é a velocidade transversal, F_{yi} é a força de cisalhamento, w_{zi} é a velocidade angular, e M_{zi} é o momento, todos definidos para a viga i . Observe-se da Figura 3.8 que, por exemplo, v_{y1} é a velocidade transversal das ondas na direção y definida para $x < 0$, a região antes da discontinuidade, enquanto v_{y2} é definida para $x > 0$, a região depois da discontinuidade. Observe-se também que este problema só pode ser analisado separando as variáveis dadas como funções do tempo nas suas componentes senoidais. Assim, uma onda incidente senoidal na região 1 ($x < 0$) pode ser representada por $v_{y1}e^{-ik_1x}$, com k_i definido como o número de onda transversal na viga i . Nesta região, esta onda incidente resulta em uma onda refletida definida como,

$$v_{y1-}e^{ik_1x} = r v_{y1+}e^{ik_1x}\tag{3.47}$$

onde r é uma quantidade complexa definida como a amplitude do coeficiente de reflexão. As componentes evanescentes de campo próximo podem ser representadas analogamente como,

$$v_{y1-}e^{k_1x} = r_i v_{y1+}e^{k_1x}\tag{3.48}$$

onde r_i é definida como a amplitude do coeficiente de reflexão das ondas evanescentes. Desta forma, a velocidade transversal na região 1 ($x < 0$) é dada por,

$$v_{y1}(x) = v_{y1+} \left(e^{-ik_1x} + r e^{ik_1x} + r_i e^{-k_1x} \right)\tag{3.49}$$

Da mesma forma, as ondas na região 2 ($x > 0$) se transmitem com número de onda k_2 diferente, é então pode-se escrever que,

$$v_{y2+} e^{-ik_2x} = v_{y1+} t e^{-ik_2x} \quad (3.50)$$

$$v_{y2i} e^{-k_2y} = v_{y1+} t_i e^{-k_2y} \quad (3.51)$$

Desta forma, o campo de velocidade transversal na região 2 é então dado por,

$$v_{y2}(x) = v_{y1+} (t e^{-ik_2y} + t_i e^{-k_2y}) \quad (3.52)$$

Tem-se, então, quatro incógnitas - r , r_i , t , e t_i - que devem ser resolvidas usando as quatro condições de contorno acima dadas. Observa-se que a coordenada espacial y foi introduzida para indicar a direção de propagação, onde a direção positiva de velocidade v_y tem a direção positiva da coordenada x . Da primeira condição de contorno tem-se a seguinte expressão,

$$1 + r + r_i = t + t_i \quad (3.53)$$

Usando a teoria de Bernoulli-Euler para vigas tem-se as seguintes equações,

$$w = \frac{dv}{dx}, \quad M = -\frac{B}{i\omega} \frac{dw}{dx}, \quad F = -\frac{dM}{dx}, \quad v = -\frac{1}{i\omega m'} \quad (3.54)$$

onde m' é a massa por unidade de comprimento, B é definida como a rigidez de flexão dada por $B=EI$, com E o módulo de Young e I o momento de inércia da área. Assim, as outras três equações de contorno resultam nas seguintes expressões, respectivamente,

$$\begin{aligned} (i - ir + r_i) &= \chi \psi(it - rt) \\ (-i + ir + r_i) &= \chi(-it - t_i) \\ (-1 - r + r_i) &= \psi(-t + t_i) \end{aligned} \quad (3.55)$$

com $\chi = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ e $\psi = \frac{k_2^2 B_2}{k_1^2 B_1}$, onde λ é o comprimento de onda. Resolvendo estas equações pode-se determinar as incógnitas envolvidas. As duas incógnitas mais importantes são dadas por,

$$\begin{aligned} t &= \frac{2(1+\chi)(1+\psi)}{\chi(1+\psi)^2 + 2\psi(1+\chi^2)} \\ r &= \frac{2\psi(1-\chi^2) - i\chi(1-\psi)^2}{\chi(1+\psi)^2 + 2\psi(1+\chi^2)} \end{aligned} \quad (3.56)$$

E, por definição, o coeficiente de transmissão, também chamado de eficiência de transmissão, τ_B , é calculado como sendo igual a $(1 - |r|^2)$ e, desta forma,

$$\tau_B = \left(\frac{2\sqrt{\chi\psi}(1+\chi)(1+\psi)}{\chi(1+\psi)^2 + 2\psi(1+\chi^2)} \right)^2 \quad (3.57)$$

Observa-se que o coeficiente de reflexão ρ_B pode ser determinado por $\rho_B = 1 - \tau_B$, e que os coeficientes τ_B e ρ_B são constantes em relação à frequência.

3.4.3 Caso de ondas incidentes torcionais em barras retas

Consideram-se duas vigas retas e semi-infinitas conectadas na forma mostrada na Figura 3.9,

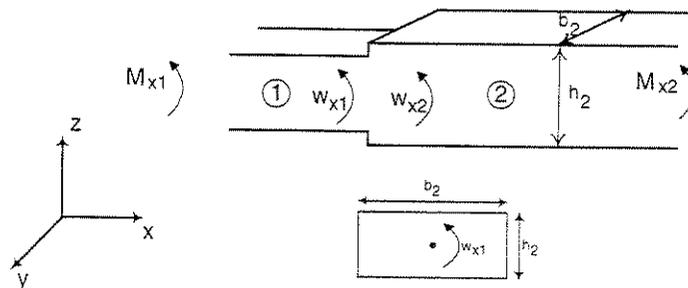


Figura 3.9 – Duas vigas retas conectadas em um ponto.

Neste caso, e da mesma forma feita na seção anterior, existem duas condições de contorno definidas como,

$$\begin{aligned} w_{x1} &= w_{x2} \\ M_{x1} &= M_{x2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde w_{xi} é a velocidade angular, e M_{xi} é o momento de torção, definidos para viga i . Assim, as ondas torcionais na região 1 e 2 podem ser representadas por,

$$\begin{aligned} w_{x1}(x) &= w_{x1+} \left(e^{-ik_1^T x} + r_1 e^{ik_1^T x} \right) \\ w_{x2}(x) &= w_{x1+} \left(t_1 e^{-ik_2^T x} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde r_1 é a amplitude do coeficiente de reflexão, t_1 é a amplitude do coeficiente de transmissão de ondas torcionais, e k^T é o número de onda para ondas torcionais. Aplicando as condições de contorno acima tem-se,

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{c_{T_1} I'_1 - c_{T_2} I'_2}{c_{T_1} I'_1 + c_{T_2} I'_2} \\ t_1 &= \frac{2c_{T_1} I'_1}{c_{T_1} I'_1 + c_{T_2} I'_2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde I' é o momento de inércia por unidade de comprimento e c_T é a velocidade de propagação de ondas torcionais no meio. I' pode ser calculado, por exemplo, para seções retangulares, é dado por $I' = \rho/12(bh^3 + hb^3)$. Destas equações pode-se escrever, finalmente, os coeficientes de transmissão e de reflexão respectivamente como,

$$\tau_T = \frac{c_{T_2} I'_2}{c_{T_1} I'_1} |t_1|^2 \quad (3.61)$$

$$\rho_T = |r_1|^2 \quad (3.62)$$

onde τ_T é o coeficiente de transmissão de uma onda incidente torcional na viga 1 para uma onda torcional na viga 2, e ρ_T é o coeficiente de reflexão. Observa-se que ρ_T também pode ser calculado simplesmente como $\rho_T=1-\tau_T$, já que por hipótese nenhuma energia é absorvida na junta. Observa-se também que τ_T e ρ_T são constantes em relação à frequência.

3.4.4 Caso de ondas incidentes no plano x-y em barras do tipo L (“right angle”)

Consideram-se duas vigas semi-infinitas conectadas em ângulo reto (CREMER ET AL. (1988)), ou seja, as linhas neutras das duas vigas são ortogonais, veja a Figura 3.10.

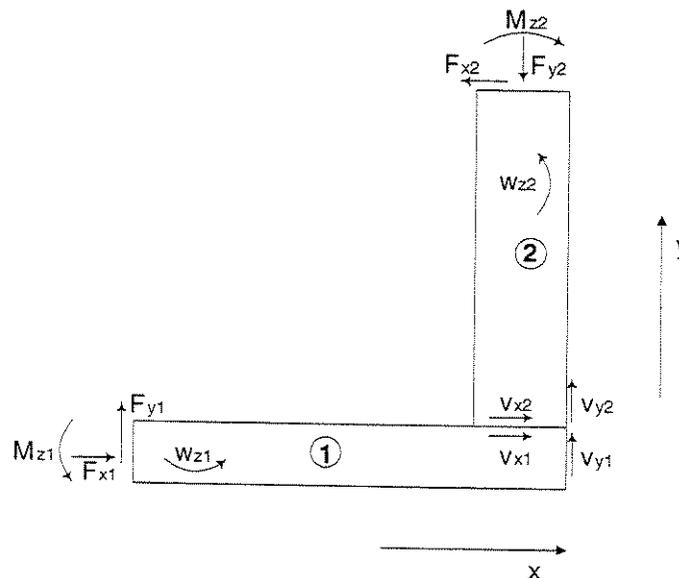


Figura 3.10 – Vigas conectadas em ângulo reto. Propagação no plano x-y.

Estas duas vigas, que possivelmente podem ser de diferentes geometrias e materiais, são firmemente conectadas de tal forma que os momentos e as componentes de velocidade podem ser transmitidas de uma viga para outra. Isso resultará nas seguintes condições de contorno válidas na junta,

$$v_{x1} = v_{x2}, \quad v_{y1} = v_{y2}, \quad F_{x1} = F_{x2}, \quad F_{y1} = F_{y2}, \quad w_{z1} = w_{z2}, \quad M_{z1} = M_{z2} \quad (3.63)$$

onde v_{xi} é a velocidade de propagação ao longo do eixo x , v_{yi} é a velocidade ao longo do eixo y , F_{y1} é a força de cisalhamento na viga 1, w_{z1} é a velocidade angular na viga 1. Observe-se da figura acima que, por exemplo, v_{y1} é a velocidade transversal das ondas na direção y definida para $x < 0$, a região antes da junta, enquanto v_{y2} é definida para $x > 0$, a região depois da discontinuidade. Neste caso de juntas definidas no plano x - y , dois tipos de ondas podem ser incidentes na junta, na região da viga 1; onda longitudinal ou onda transversal. A seguir, estas duas possibilidades serão estudadas, e os coeficientes de transmissão e de reflexão serão obtidas.

3.4.4.1 Onda incidente transversal no plano x - y

Primeiramente, a onda inicial incidente será considerada como sendo uma onda transversal (flexão) no plano x - y na região 1. É importante notar também que as ondas longitudinais, refletidas ou transmitidas, só podem ser geradas em faixas de frequência mais elevadas. Utilizando a mesma metodologia usada na seção anterior, pode-se definir que as ondas na região 1 ($x < 0$) se transmitem com velocidade dada por,

$$v_{y1}(x) = v_{y1+} \left(e^{-ik_1x} + r_1 e^{ik_1x} + t_1 e^{k_1x} \right) \quad (3.64)$$

Da mesma forma, as ondas na região 2 ($x > 0$) se transmitem com velocidade dada por,

$$v_{x2}(y) = v_{y1+} \left(t_2 e^{-ik_2y} + t_1 e^{-k_2y} \right) \quad (3.65)$$

onde a coordenada espacial y foi introduzida para indicar a direção diferente de propagação. Escolhendo a direção positiva de velocidade v_x como sendo a mesma direção positiva da coordenada x , pode-se escrever a seguinte relação entre w_{z2} e v_{x2} , utilizando a teoria simples de Bernoulli-Euler para vigas,

$$w_{z2} = -\frac{dv_{x2}}{dy} \quad (3.66)$$

$$M_{z2} = -\frac{B_2}{i\omega} \frac{dw_{z2}}{dy} = \frac{B_2}{i\omega} \frac{d^2v_{x2}}{dy^2} \quad (3.67)$$

Usando as condições de contorno anteriormente mencionadas, os coeficientes incógnitos r , r_i , t , e t_i podem ser determinados. Aplicando a primeira condição, $w_{z1}=w_{z2}$, que é verdadeira na fronteira das duas vigas ($x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$), tem-se,

$$ir + r_i - i\chi t - \chi t_i = i \quad (3.68)$$

Da mesma forma, a outra condição de contorno, $M_{z1}=M_{z2}$, resultará na seguinte equação,

$$-r + r_i - \psi t + \psi t_i = 1 \quad (3.69)$$

As outras duas condições de contorno têm uma característica diferente. A força de cisalhamento F_{y1} na viga 1 não gera ondas transversais na viga 2, mas, do outro lado, gera ondas longitudinais com a mesma amplitude na viga 2. A força F_{y1} pode ser dada através da lei de Newton como,

$$F_{y1} = -i\omega m'_1 \int v_{y1} dx = c_{B1} m'_1 (1 - r - ir_i) \quad (3.70)$$

onde c_{B1} é uma constante definida como a velocidade de propagação de onda transversal do meio da região 1. A amplitude da velocidade v_{y1} é igual a v_{y2} , e pode ser escrita como,

$$v_{y1} = v_{y2} = \frac{F_{y2}}{c_{L2} m'_2} \quad (3.71)$$

onde, c_{L2} é a velocidade de propagação de onda longitudinal na região 2. Assim, na junta pode-se escrever,

$$F_{y2} = c_{L2} m'_2 (1 + r + r_i) \quad (3.72)$$

Usando a condição de contorno $F_{y2}=F_{y1}$ tem-se,

$$1 + r + r_i = \beta_2 (1 - r - ir_i) \quad (3.73)$$

onde $\beta_2 = \frac{c_{B1} m'_1}{c_{L2} m'_2}$.

Um problema similar pode ser analisado em relação às ondas longitudinais na região 1. Estas ondas são geradas devido às ondas transversais secundárias na região 2 que são relacionadas à força F_{x2} . Esta força é igual à força F_{x1} na região 1, mas com direção contrária (condição de contorno 3). Da mesma forma feita anteriormente, a componente longitudinal de velocidade na região 1 é igual à componente transversal de velocidade na região 2, isto é,

$$v_{x1} = -\frac{F_{x1}}{m'_1 c_{L1}} = v_{x2} \quad (3.74)$$

onde o sinal negativo corresponde à transmissão de potência na direção negativa. Usando de novo a lei de Newton para representar a força F_{x2} junto com a condição de contorno 2, tem-se,

$$F_{x2} = -i\omega m'_2 \int v_{x2} dy \quad (3.75)$$

$$-t - t_i = \beta_1 (t + it_i) \quad (3.76)$$

onde $\beta_1 = \frac{c_{B2} m'_2}{c_{L1} m'_1}$.

Resolvendo as equações (3.68), (3.69), (3.73), e (3.76), as expressões para as amplitudes das coeficientes de transmissão r , e de reflexão t podem ser escritas nas seguintes formas,

$$r = \frac{[\psi(1 - 2\beta_2 - \beta_1\beta_2) + \chi(1 + 2\beta_1 - \beta_1\beta_2)] + i[\psi(1 + \beta_1 - \beta_1\beta_2) + \chi(-1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2)]}{[\psi(-1 - \beta_1 - 2\beta_2 - \beta_1\beta_2) + \chi(-1 - 2\beta_1 - \beta_2 - \beta_1\beta_2)] + i[(\chi + \psi)(1 - \beta_1\beta_2)]} \quad (3.77)$$

$$t = \frac{2(\beta_1 + \beta_2) - i2(1 - \beta_1\beta_2)}{[\psi(-1 - \beta_1 - 2\beta_2 - \beta_1\beta_2) + \chi(-1 - 2\beta_1 - \beta_2 - \beta_1\beta_2)] + i[(\chi + \psi)(1 - \beta_1\beta_2)]} \quad (3.78)$$

É importante notar que a soma destes dois coeficientes definidos desta maneira é diferente de 1. Essa diferença é relacionada aos diferentes tipos de ondas transmitidas e refletidas que são levadas em conta, onde ondas longitudinais, transmitidas e refletidas, não são consideradas até

este ponto. Da mesma forma feita anteriormente, a razão entre a energia da onda transversal refletida e a energia de onda transversal incidente é conhecida como a eficiência de reflexão ou coeficiente de reflexão dado como $|r|^2$. Sendo assim,

$$\rho_{BB} = |r|^2 \quad (3.79)$$

onde ρ_{BB} é a coeficiente de reflexão de ondas transversais, sendo que a onda incidente é também uma onda transversal. O outro coeficiente definido como a eficiência de transmissão, ou coeficiente de transmissão, é calculado como a razão entre a potência de onda transversal transmitida e a potência de onda transversal incidente. Esta eficiência, da mesma forma, é dada por,

$$\tau_{BB} = \frac{2m'_2 c_{B2} |v_{2+}|^2}{2m'_1 c_{B1} |v_{1+}|^2} \quad (3.80)$$

Usando a equação (3.50), e observando que $\chi\psi = \frac{m'_2 c_{B2}}{m'_1 c_{B1}}$, tem-se,

$$\tau_{BB} = \chi\psi |t|^2 \quad (3.81)$$

Em relação às ondas longitudinais refletidas e transmitidas e às ondas transversais incidentes, pode-se calcular os coeficientes de reflexão (ρ_{BL}) e de transmissão (τ_{BL}) através da razão de potências de ondas longitudinais refletidas e transmitidas, ou seja,

$$\rho_{BL} = \frac{m'_1 c_{L1} |v_{1+}(te^{-ik_2 x} + t_i e^{-k_2 x})|^2}{2m'_1 c_{B1} |v_{1+}|^2} \Bigg|_{x \rightarrow 0} = \frac{c_{L1}}{2c_{B1}} |t + t_i|^2 \quad (3.82)$$

Correspondentemente, o coeficiente de transmissão τ_{BL} é dado por,

$$\tau_{BL} = \frac{m'_2 c_{L2}}{2m'_1 c_{B1}} \left| \frac{v_{1+}(e^{-ik_1 x} + re^{ik_1 x} + r_1 e^{k_1 x})}{|v_{1+}|^2} \right|_{x \rightarrow 0}^2 = \frac{m'_2 c_{L2}}{2m'_1 c_{B1}} |1 + r + r_1|^2 \quad (3.83)$$

Em uma forma mais simples, este coeficiente pode ser dado como,

$$\tau_{BL} = \frac{1}{2\beta_2} |1 + r + r_1|^2 \quad (3.84)$$

Lembra-se que o objetivo aqui é achar expressões para avaliar teoricamente os coeficientes de acoplamento dos diferentes tipos de onda, especificamente para fazer uma análise do tipo Análise Estatística de Energia (SEA). Para uma análise deste tipo, a propagação de ondas longitudinais deve ser levada em conta. As expressões acima dadas podem ser escritas em forma mais simplificada para o caso especial de duas barras iguais, em relação às propriedades de material e de seção. Neste caso, a hipótese que deve ser considerada é que as impedâncias de flexão nas duas vigas são iguais, e portanto, pode-se definir que $\chi = \psi$ e $\beta_1 = \beta_2$. Usando esta hipótese e as equações (3.78) e (3.81), o coeficiente de transmissão τ_{BB} pode ser calculado através da seguinte expressão,

$$\tau_{BB} = \frac{\beta^4 + 2\beta^2 + 1}{2\beta^4 + 6\beta^3 + 9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.85)$$

O fato de assumir que $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ em altas frequências é importante. Para achar o maior valor que pode ser atribuído a β , considera-se a regra que limita o comprimento de onda λ_B em relação à seção de viga. Esta regra, que pode ser considerada como empírica (“rule of thumb”) e que é válida para a viga de Bernoulli-Euler, limita λ_B a um valor mínimo de $6h$, ou seja, $\lambda_B > 6h$, onde h é a espessura da viga. Portanto, em altas frequências, β pode ser determinado através da seguinte expressão,

$$\beta = \frac{c_B}{c_L} = \frac{2h}{\lambda_B} \quad (3.86)$$

Da mesma forma, os outros coeficientes podem ser calculados usando as seguintes expressões,

$$\rho_{BB} = \frac{\beta^4 - \beta^2 + 1}{2\beta^4 + 6\beta^3 + 9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.87)$$

$$\rho_{BL} = \frac{\beta^3 + \beta}{2\beta^4 + 6\beta^3 + 9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.88)$$

$$\tau_{BL} = \frac{5\beta^3 + 8\beta^2 + 5\beta}{2\beta^4 + 6\beta^3 + 9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.89)$$

Nota-se que a soma dos coeficientes definidos nas equações (3.85), (3.87), (3.88), e (3.89) é igual a 1, ou seja,

$$\tau_{BB} + \rho_{BB} + \rho_{BL} + \tau_{BL} = 1 \quad (3.90)$$

Utilizando esta fórmula, pode-se verificar quaisquer outras diferentes metodologias que podem ser utilizadas para obter formas analíticas para o cálculo dos coeficientes de transmissão e reflexão. As equações (3.85), (3.87), (3.88), e (3.89) podem ainda ser escritas em uma forma mais simples, desprezando as potências de β de ordem superior a 2 (CREMER ET AL. (1988)).

A seguinte figura mostra como estes coeficientes variam com a frequência, calculados para uma viga do tipo L com as seguintes propriedades: $\rho=1280 \text{ Kg/m}^3$, $A=0.0017 \text{ m}^2$, $E=2.62 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $I=1.43 \times 10^{-7} \text{ m}^4$,

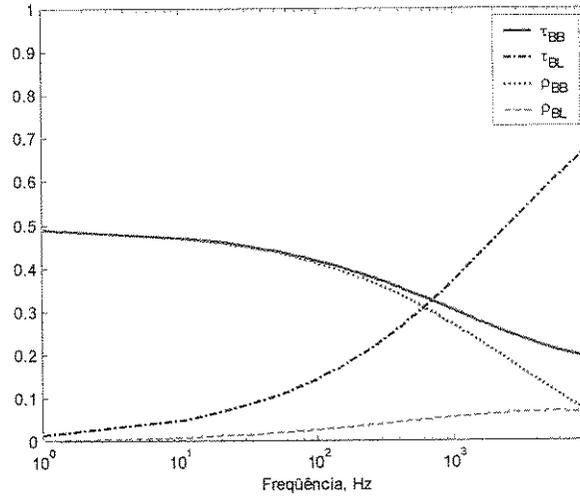


Figura 3.11 – Comportamento dos coeficientes de acoplamento com a frequência.

Caso de onda incidente transversal.

Observa-se desta figura que, por exemplo, τ_{BL} tende a aumentar com a frequência. Isso indica que a energia das ondas longitudinais transmitida devido a uma onda transversal incidente aumenta com o aumento de frequência de excitação. O mesmo acontece com ρ_{BL} .

3.4.4.2 Onda incidente longitudinal

No caso de uma análise em altas frequências, ondas incidentes longitudinais podem ter uma influência não desprezível. Por exemplo, em estruturas do tipo pórtico, uma onda incidente longitudinal pode gerar na junta outra onda transversal, refletida ou transmitida. Neste caso, os coeficientes de reflexão e transmissão devem ser também calculados e levados em conta no modelo da SEA. Para uma onda incidente longitudinal na região 1 com velocidade v_{x1+} , as outras componentes de velocidade geradas na junta podem ser escritas como,

$$\begin{aligned}
 v_{x1}(x) &= v_{x1+} \left(e^{-ik_L x} + r_{LL} e^{ik_L x} \right) \\
 v_{y1}(x) &= v_{x1+} \left(r_{LB} e^{ik_B x} + r_{ILB} e^{k_B x} \right) \\
 v_{x2}(y) &= v_{x1+} \left(t_{LB} e^{-ik_B y} + t_{ILB} e^{-k_B y} \right) \\
 v_{y2}(y) &= v_{x1+} \left(t_{LL} e^{-ik_L y} \right)
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

onde k_{L1} é o número de onda das ondas longitudinais na viga 1, k_{L2} é o número de onda das ondas longitudinais na viga 2, k_{B1} é o número de onda das ondas transversais na viga 1, r_{LL} é a amplitude de coeficiente de reflexão da onda longitudinal para uma onda incidente longitudinal, r_{iLB} é a amplitude de coeficiente de reflexão da onda longitudinal para uma onda incidente evanescente transversal, t_{LL} é a amplitude de coeficiente de transmissão da onda longitudinal para uma onda incidente longitudinal, etc. Utilizando estas equações junto com as mesmas condições de contorno dadas pela equação (3.63) obtém-se estes coeficientes, respeitando a condição de reciprocidade, para duas vigas iguais dados por,

$$\tau_{LB} = \tau_{BL} = \frac{8\beta^2 + 5\beta}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.92)$$

$$\rho_{LB} = \rho_{BL} = \frac{\beta}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.93)$$

Os outros dois coeficientes podem ser determinados através da definição de que todos os quatro coeficientes somam a 1. Portanto, pode-se definir,

$$\tau_{LL} + \rho_{LL} = 1 - \tau_{LB} = \rho_{LB} = \frac{\beta^2 + 2}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.94)$$

A hipótese que será usada em seguida para a estrutura em questão (Figura 3.10) é que uma onda longitudinal poderia ser gerada de uma outra onda longitudinal incidente, e que a energia desta onda, gerada ou transmitida, é muito menor do que a incidente. De acordo com CREMER ET AL. (1988), esta hipótese tem uma base fisicamente sólida e pode ser provada. Observa-se também que $\beta^2 \ll 2$ e, portanto, o coeficiente $\tau_{LL} \ll \rho_{LL}$. Utilizando estas hipóteses, pode-se escrever,

$$\rho_{LL} = \frac{2}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.95)$$

e conseqüentemente,

$$\tau_{LL} = \frac{\beta^2}{9\beta^2 + 6\beta + 2} \quad (3.96)$$

Observa-se de novo que $(\tau_{LB} + \rho_{LB} + \rho_{LL} + \tau_{LL}) = 1$. A Figura 3.12 mostra como estes coeficientes variam com a frequência, calculados para uma viga do tipo L com as seguintes propriedades: $\rho = 1280 \text{ Kg/m}^3$, $A = 0.0017 \text{ m}^2$, $E = 2.62 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $I = 1.43 \times 10^{-7} \text{ m}^4$,

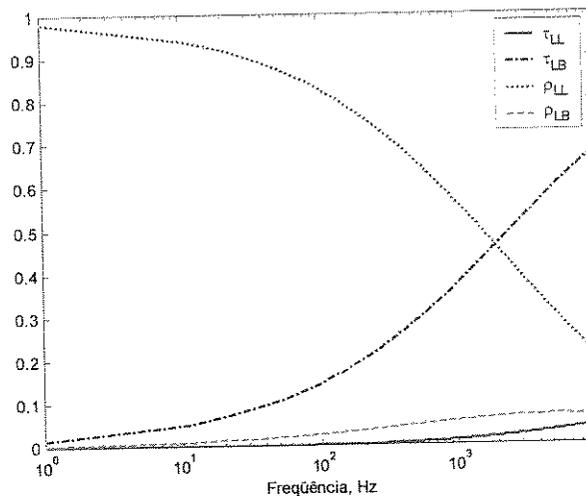


Figura 3.12 – Comportamento dos coeficientes de acoplamento com a frequência.

Caso de onda incidente longitudinal.

Observa-se que, por exemplo, τ_{LB} tende a aumentar com a frequência. Isso indica que a energia das ondas transversais transmitidas devido a uma onda longitudinal incidente aumenta com a frequência de excitação. O contrário acontece com ρ_{LL} . Por outro lado, a variação dos coeficientes τ_{LL} e ρ_{LB} com a frequência é relativamente pequena em relação ao τ_{LB} e ρ_{LL} . Observa-se também que, em baixas frequência ($\beta \rightarrow 0$), reflexão total das ondas longitudinais incidentes pode ser obtida.

Para estruturas simples e barras conectadas na forma mostrada até agora, os coeficientes de acoplamento podem ser facilmente calculados utilizando as expressões simples acima dadas. Para estruturas ou juntas mais complexas, não se encontram na literatura expressões teóricas para o cálculo destes coeficientes. Existem métodos numéricos e experimentais para a avaliação destes

coeficientes. Estes métodos geralmente dependem das medidas (ou formulações analíticas) da resposta da estrutura em questão. Um destes métodos mais utilizados é o método da potência injetada, conhecido como “Power Injection Method” (PIM). Este e outros serão explorados nas próximas seções.

3.4.5 Caso de ondas incidentes fora do plano x-y

Na seção anterior, o acoplamento de ondas propagando no plano da viga-L foi analisado. Os coeficientes de acoplamento foram mostrados. No caso de propagação de ondas em estruturas treliçadas tridimensionais, a estrutura pode sofrer uma força transversal atuando em qualquer direção e, portanto, gerando ondas que propagam em qualquer direção. Assim, os acoplamentos de ondas torcionais em torno do eixo neutro de um membro tornam-se importantes e devem ser levadas em conta. Para mostrar estes acoplamentos consideram-se duas vigas conectadas em ângulo reto, Figura 3.13

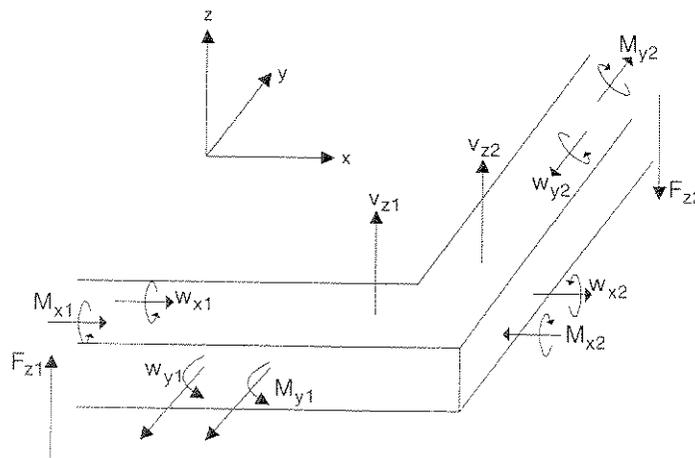


Figura 3.13 – Vigas conectadas em ângulo reto. Propagação fora do plano x-y.

Serão considerados também os casos de uma onda incidente transversal que propaga fora do plano x-y, e o caso de uma onda incidente de torção. As condições de contorno neste caso são dadas por,

$$\begin{aligned} v_{z1} &= v_{z2}, & w_{y1} &= w_{y2}, & w_{x1} &= w_{x2} \\ M_{y1} &= M_{y2}, & M_{x1} &= M_{x2}, & F_{z1} &= F_{z2} \end{aligned} \quad (3.97)$$

onde v_{z1} , v_{z2} e F_{z1} , F_{z2} são as velocidades de translação fora do plano e as relacionadas forças, w_{y1} , w_{x2} e M_{y1} , M_{x2} são as velocidades angulares de flexão e os relacionados momentos de flexão, e w_{x1} , w_{y2} e M_{x1} , M_{y2} são as velocidades angulares torcionais e seus momentos relacionados.

3.4.5.1 Onda incidente transversal fora do plano x-y

Neste caso, as ondas de flexão nas duas vigas são representadas por,

$$\begin{aligned} v_{z1}(x) &= v_{z1+} \left(e^{-ik_1x} + r_f e^{ik_1x} + r_{if} e^{k_1x} \right) \\ v_{z2}(y) &= v_{z1+} \left(t_f e^{-ik_2y} + t_{if} e^{-k_2y} \right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

onde $v_{z1+} r_f e^{ik_1x}$ é a componente refletida na viga 1, $v_{z1+} r_{if} e^{k_1x}$ é a componente refletida no campo próximo na viga 1, $v_{z1+} t_f e^{-ik_2y}$ é a componente transmitida na viga 2, $v_{z1+} t_{if} e^{-k_2y}$ é a componente refletida no campo próximo na viga 2, e k_1 k_2 são os números de onda para as ondas de flexão.

Por outro lado, as ondas de torção são representadas por,

$$\begin{aligned} w_{x1}(x) &= \kappa_1 v_{z1+} r_t e^{ik_1^t x} \\ w_{y2}(y) &= -\kappa_2 v_{z1+} t_t e^{-ik_2^t y} \end{aligned} \quad (3.99)$$

onde um sinal negativo é introduzido na segunda equação para enfatizar que a rotação em torno do eixo positivo y é no sentido horário, k_1^t e k_2^t são os números de onda para as ondas de torção, e κ_1 e κ_2 são fatores de escala que serão definidos em seguida. Da mesma forma feita anteriormente, pode-se definir que,

$$\begin{aligned}
F_{z1} &= \frac{dM_{y1}}{dx} \\
F_{z2} &= -\frac{dM_{x2}}{dy} \\
w_{y1} &= -\frac{dv_{z1}}{dx} \\
w_{x2} &= \frac{dv_{z2}}{dy} \\
M_{y1} &= -\frac{B_1}{i\omega} \frac{dw_{y1}}{dx} \\
M_{x2} &= -\frac{B_2}{i\omega} \frac{dw_{x2}}{dy}
\end{aligned} \tag{3.100}$$

onde, como foi definido anteriormente, B_1 e B_2 são a rigidez de flexão nas vigas 1 e 2. Observa-se que o sinal negativo na primeira equação é introduzido devido à direção negativa do w_{y1} . As equações de movimento torcional podem ser escritas da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
\frac{dM_x}{dt} &= -T_t \frac{dw_x}{dx} \\
\frac{dM_x}{dx} &= -I' \frac{dw_x}{dt}
\end{aligned} \tag{3.101}$$

onde $T_t = GJ$ é a rigidez de torção, G é o módulo de elasticidade torcional, J é o momento de inércia torcional, e I' é o momento de inércia por unidade de comprimento. Destas equações pode-se calcular os momentos da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
M_{x1} &= -i\omega I'_1 \int w_{x1} dx = -\frac{\omega}{k'_1} I'_1 w_{x1} \\
M_{y2} &= -i\omega I'_2 \int w_{y2} dx = \frac{\omega}{k'_2} I'_2 w_{y2}
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Substituindo as equações (3.98), (3.99), (3.100), e (3.102) nas seis condições de contorno, equação (3.97), e escrevendo as equações resultantes em forma matricial, tem-se,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 & -\gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & \gamma_{21} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & i\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -i\alpha_{21} \\ -i & 1 & -i\beta & \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_f \\ r_{if} \\ t_f \\ t_{if} \\ t_t \\ r_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -i \end{Bmatrix} \quad (3.103)$$

onde foram definidos os seguintes parâmetros,

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{\omega^2 I'_j \kappa_j}{B_i k_i^2 k_j^t} \\ \beta &= \frac{B_2 k_2^3}{B_1 k_1^3} \\ \gamma_{ij} &= \frac{\kappa_j}{k_i} \end{aligned} \quad (3.104)$$

e a equação (3.103) pode ser resolvida para achar os coeficientes r_f , r_{if} , t_f , t_{if} , t_t , e r_t .

Para obter os coeficientes de transmissão e reflexão serão usadas as seguintes expressões da potência das ondas de flexão e da potência de torção, respectivamente,

$$\begin{aligned} P_B &= 2c_B m' |v_z|^2 \\ P_T &= c_T I' |w_T|^2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

e como foi definido anteriormente, por exemplo, a razão entre a energia de onda refletida e a energia de onda incidente é o coeficiente de reflexão, sendo assim, pode-se definir os seguintes coeficientes,

$$\tau_{BT} = \frac{c_{T_2} I'_2}{2c_{B_1} m'_1} \kappa_2^2 |t_t|^2 \quad (3.106)$$

$$\rho_{BT} = \frac{c_{T_1} I_1'}{2c_{B_1} m_1'} \kappa_1^2 |r_t|^2 \quad (3.107)$$

$$\tau_{BB} = \frac{c_{B_2} m_2'}{c_{B_1} m_1'} |t_f|^2 \quad (3.108)$$

$$\rho_{BB} = |r_f|^2 \quad (3.109)$$

onde τ_{BT} é o coeficiente de transmissão de uma onda incidente transversal na viga 1 a uma onda de torção na viga 2, ρ_{BT} é o coeficiente de reflexão de uma onda transversal incidente na viga 1 a uma onda de torção na viga 2, τ_{BB} é o coeficiente de transmissão de uma onda incidente transversal na viga 1 que gera uma onda transversal na viga 2, e ρ_{BB} é o coeficiente de reflexão de uma onda incidente transversal na viga 1 que gera uma onda refletida transversal na viga 2. Nota-se que estes coeficientes também são simétricos. Nota-se, também, que os fatores de escala κ_1 e κ_2 podem ser igualados aos números de onda k_1 e k_2 ou k_1' e k_2' , respectivamente. SABLİK (1982) mostrou que estas duas escolhas produzem o mesmo resultado numérico. Da mesma maneira feita para acoplamento de onda no plano x-y, pode-se provar que a soma deles é igual a 1, isto é,

$$\tau_{BT} + \rho_{BT} + \tau_{BB} + \rho_{BB} = 1 \quad (3.110)$$

3.4.5.2 Onda incidente torcional

Da mesma forma, a onda incidente pode ser uma onda de torção. Neste caso, as ondas de flexão e de torção podem ser representadas por,

$$\begin{aligned} v_{z1}(x) &= w_{x1+} (r_f e^{ik_1 x} + r_{if} e^{k_1 x}) \\ v_{z2}(y) &= w_{x1+} (t_f e^{-ik_2 y} + t_{if} e^{-k_2 y}) \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} w_{x1}(x) &= \kappa_1 w_{x1+} (e^{-ik_1' x} + r_t e^{ik_1' x}) \\ w_{y2}(y) &= -\kappa_2 w_{x1+} t_t e^{-ik_2' y} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Para as ondas de flexão as equações (3.100) são ainda válidas, mas para os momentos deve-se definir,

$$\begin{aligned} M_{x1} &= -\frac{\omega I_1'}{k_1'} \left(-e^{-ik_1'x} + r_t e^{-ik_1'x} \right) (\kappa_1 w_{x1+}) \\ M_{y2} &= \frac{\omega I_2'}{k_2'} \left(t_t e^{-ik_2'y} \right) (-\kappa_2 w_{x1+}) \end{aligned} \quad (3.113)$$

Substituindo estas equações nas equações de contorno (equação (3.97)) resulta em equações lineares escritas na seguinte forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 & -\gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & \gamma_{21} \\ -1 & 1 & 0 & 0 & i\alpha_{12} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -i\alpha_{21} \\ -i & 1 & -i\beta & \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_f \\ r_{if} \\ t_f \\ t_{if} \\ t_t \\ r_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_{21} \\ 0 \\ -i\alpha_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

Este novo sistema de equações pode ser facilmente resolvido para achar os novos coeficientes r_f , r_{if} , t_f , t_{if} , t_t , e r_t . Da mesma maneira feita anteriormente, os coeficientes de transmissão e de reflexão podem ser obtidos como sendo,

$$\tau_{TT} = \frac{c_{T_2} I_2' \kappa_2^2}{c_{T_1} m_1' \kappa_1^2} |t_r|^2 \quad (3.115)$$

$$\tau_{TB} = \frac{2c_{B_2} m_2'}{c_{T_1} I_1' \kappa_1^2} |t_f|^2 \quad (3.116)$$

$$\rho_{TT} = |r_t|^2 \quad (3.117)$$

$$\rho_{TB} = \frac{2c_{B_1} m_1'}{c_{T_1} I_1' \kappa_1^2} |t_r|^2 \quad (3.118)$$

onde τ_{TB} é o coeficiente de transmissão de uma onda incidente torcional na viga 1 para uma onda transversal na viga 2, e os outros coeficientes são definidos de forma análoga. De novo, pode-se provar que,

$$\tau_{TB} + \rho_{TB} + \tau_{TT} + \rho_{TT} = 1 \quad (3.119)$$

Através destas formulações, pode-se calcular os coeficientes de transmissão e mostrar que τ_{BT} domina em baixas frequências, enquanto τ_{TB} exibe influência maior em altas frequências.

3.5 Os procedimentos gerais de SEA

Nesta seção, o procedimento geral para montar um modelo de SEA será explorado. Em uma forma simples, a SEA resulta em um procedimento para calcular a distribuição de energia dinâmica em um sistema complexo. O procedimento de SEA consiste em três etapas: definição de modelo, avaliação dos parâmetros do modelo, e avaliação das variáveis de resposta.

O modelo de SEA é baseado no balanço de energia e de fluxo de potência entre os diferentes grupos de modos em um sistema dinâmico. Um sistema complexo pode ser modelado como um conjunto de grupos modais (subsistemas). Um modelo é definido seguindo os seguintes procedimentos:

- Dividir o sistema dinâmico em diferentes subsistemas. Cada subsistema deve combinar modos naturais com características semelhantes. Por exemplo, modos transversais (flexão) e modos longitudinais (tração-compressão) devem ser dois subsistemas diferentes.
- Definir o acoplamento físico entre estes subsistemas.
- Definir a excitação externa.

Assim que o modelo é definido, os parâmetros dos subsistemas devem ser avaliados. Estes parâmetros, em geral, são o fator de perda interno (amortecimento interno), os coeficientes de acoplamento, e a densidade modal. O fator de perda interno estrutural é uma função das propriedades do material utilizado, e pode ser avaliado através dos métodos experimentais. Ele é definido como igual a duas vezes o fator de amortecimento viscoso ξ . Valores típicos dos fatores

de perda podem ser encontrados na literatura. Valores deste fator para os materiais mais usados são dados na Tabela 3.1 (CREMER ET AL. (1988)).

Tabela 3.1 – Valores típicos de fator de perda de alguns materiais.

Material	Fator de perda η
Alumínio	10^{-4}
Aço	$2 \times 10^{-4} - 6 \times 10^{-4}$
Cobre	10^{-3}
PVC	0.3
Areia	0.02-0.2
Vidro	0.001

O fator de perda para materiais compostos formados como sanduíches ou com camadas diferentes pode ser calculado via formulas teóricas. Estas formulações não são mostrados neste trabalho, mas podem ser encontradas em LYON E DEJONG (1995) ou em CREMER ET AL. (1988).

Os coeficientes de acoplamento podem ser avaliados através dos coeficientes de transmissão e de reflexão anteriormente discutidos. Assim que todos os parâmetros envolvidos são obtidos, pode-se montar o sistema matricial do modelo, e então resolver para achar a distribuição de energia nos diferentes subsistemas.

3.5.1 As equações básicas de SEA

A troca de energia entre dois subsistemas (ou ressonadores) foi analisada nas seções anteriores, onde foi definida a variável P_{12} que enfatiza o fluxo de potência do subsistema 1 ao subsistema 2. P_{12} é proporcional à diferença das energias modais dos dois subsistemas e é dada por,

$$P_{12} = \omega_c (\eta_{12} E_1 - \eta_{21} E_2) \quad (3.120)$$

Observa-se que, nesta equação, ω foi substituída por ω_c . No método de SEA a escala de frequência utilizada é do tipo banda de oitava ou banda de 1/3 oitava. Então, ω_c é definida como a frequência central da banda utilizada. Esta troca de potência acontece dividido a uma excitação

aplicada em um ou mais dos subsistemas envolvidos. A excitação é dada pela potência injetada em cada subsistema. Esta potência pode ser proveniente de forças concentradas ou forças distribuídas.

Assumindo um sistema em equilíbrio dinâmico, a potência injetada neste sistema é igual à potência que está sendo retirada do sistema. A potência é injetada em um sistema através de cargas externas ou através de transmissão de potência de outro sistema via acoplamento. Do outro lado, a potência é retirada de um sistema através de dissipação interna ou através de transmissão para outro sistema via acoplamento. Para melhor esclarecer este balanço de potências, considere o seguinte modelo de SEA de dois subsistema,

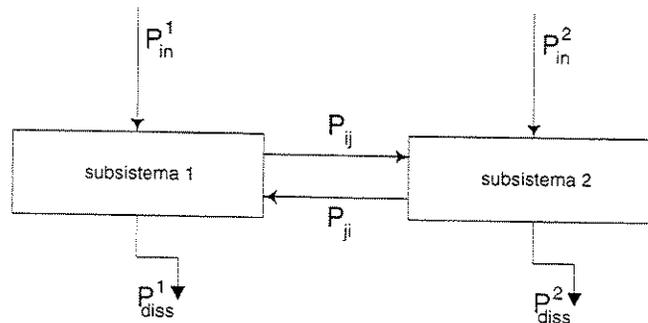


Figura 3.14 – Um modelo de SEA de 2 subsistema acoplados.

A equação de balanço das potências para cada subsistema i pode ser escrito na seguinte forma,

$$P_{in}^i = P_{diss}^i + P_{ij} - P_{ji} \quad (3.121)$$

onde P_{in}^i é a potência injetada no subsistema i , P_{diss}^i é a potência internamente dissipada no subsistema i , P_{ij} é o fluxo de potência do subsistema i ao subsistema j , e P_{ji} é o fluxo de potência do subsistema j ao subsistema i . A potência dissipada no subsistema i pode ser dada por,

$$P_{diss}^i = \omega_c \eta_{ij} E_i \quad (3.122)$$

onde η_{ii} é o fator de perda por dissipação interna do subsistema i , e E_i é a energia dinâmica total do subsistema i na frequência ω_c . A equação (3.121), para $i=1,2$ e $j=1,2$ pode ser representada na seguinte maneira,

$$\begin{aligned} P_{in}^1 &= P_{diss}^1 + P_{12} - P_{21} = \omega_c \eta_{11} E_1 + \omega_c (\eta_{12} E_1 - \eta_{21} E_2) \\ P_{in}^2 &= P_{diss}^2 + P_{21} - P_{12} = \omega_c \eta_{22} E_2 + \omega_c (\eta_{21} E_2 - \eta_{12} E_1) \end{aligned} \quad (3.123)$$

Em situações práticas, um sistema dinâmico pode incluir vários subsistemas, como foi enfatizado anteriormente. Cada subsistema destes pode ser acoplado a mais de um subsistema. Neste caso, a equação de balanço, para o subsistema i acoplado com n subsistemas, pode ser escrita na seguinte forma,

$$P_{in}^i = P_{diss}^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ji} \quad (3.124)$$

Substituindo a equação que descreve P_{12} , definida anteriormente, a equação (3.122) e a equação de reciprocidade na última equação resulta em,

$$P_{in}^i = \omega_c \eta_{ii} E_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \omega_c (\eta_{ij} E_i - \eta_{ji} E_j) \quad (3.125)$$

Usando a simplificação que segue a baixo, podem-se escrever as equações de balanço de potência em uma forma matricial, mais prática, com n equações lineares,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \omega_c \begin{bmatrix} \eta_{11}^{tot} & -\eta_{21} & -\eta_{31} & \cdots & -\eta_{n1} \\ -\eta_{12} & \eta_{22}^{tot} & \ddots & \ddots & -\eta_{n2} \\ -\eta_{13} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & \eta_{nn}^{tot} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_n \end{Bmatrix} \quad (3.126)$$

onde,

$$\eta_{ii}^{tot} = \eta_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \eta_{ji} \quad (3.127)$$

ou, genericamente,

$$\{P_{in}^{tot}\} = \omega_c [\eta^{tot}] \{E^{tot}\} \quad (3.128)$$

onde $[\eta^{tot}]$ é a matriz dos fatores de perda (acoplamento e interna). O vetor das energias $\{E^{tot}\}$ pode ser simplesmente calculado da equação matricial anterior. Uma vez calculado, os níveis médios de velocidades, acelerações, ou tensões na estrutura podem ser estimados.

3.5.2 A avaliação da potência injetada

A potência injetada é um parâmetro importante na SEA e a sua avaliação pode ser crítica quando a SEA é usada como uma ferramenta para prever a resposta de um sistema a uma potência injetada no mesmo. Em alguns casos, a potência injetada pode ser calculada via expressões teóricas ou pode ser medida experimentalmente. Em outros casos, esta potência deve ser calculada através de uma resposta dinâmica (força ou velocidade). Em estruturas, o caso específico neste trabalho, e para excitação em um ponto da estrutura, a potência injetada pode ser calculada pela definição como sendo a média no tempo do produto de força F e a velocidade v . Assim, pode-se escrever que,

$$P_{in} = \langle f(t)v(t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re\{F(\omega)v^*(\omega)\} = \frac{1}{2} \Re\{F^*(\omega)v(\omega)\} \quad (3.129)$$

onde (*) representa o conjugado complexo, e $F(\omega)$ e $v(\omega)$ são as amplitudes complexas das harmônicas de força e velocidade. A prova desta equação é simples e direta. Consideram-se os harmônicos $x(t)$ e $y(t)$ descritos no domínio de tempo. Estes harmônicos pode ser representados por,

$$\begin{aligned} x &= X \cos(\omega t + \psi_1) = \Re\{X e^{i\psi_1} e^{i\omega t}\} \\ y &= Y \cos(\omega t + \psi_2) = \Re\{Y e^{i\psi_2} e^{i\omega t}\} \end{aligned} \quad (3.130)$$

Calculando a média do produto em um período T , tem-se,

$$\langle x(t)y(t) \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T XY \cos(\psi_1 - \psi_2) dt = XY \cos(\psi_1 - \psi_2) \quad (3.131)$$

ou seja,

$$\langle x(t)y(t) \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ X e^{i\psi_1} Y e^{-i\psi_2} \} = \frac{1}{2} \Re \{ X(\omega) Y^*(\omega) \} = \frac{1}{2} \Re \{ X^*(\omega) Y(\omega) \} \quad (3.132)$$

Experimentalmente, a potência injetada é calculada através de medidas de força e velocidade ou aceleração de uma estrutura devido a uma excitação. Esta excitação é normalmente do tipo aleatório. A vibração neste caso é do tipo ergódica, estacionária. Neste caso, uma média adicional deve ser feita. Esta média é feita em um conjunto de dados ou medidas e chamada média de conjunto (“ensemble average”). Utilizando este tipo de processo, tem-se,

$$\langle X(\omega)^* Y(\omega) \rangle_e = 4S_{XY}(\omega) \quad (3.133)$$

onde $S_{xy}(\omega)$ é o espectro cruzado. Então, a potência injetada pode ser calculada como sendo,

$$P_{in} = \frac{1}{2} \Re \left\{ \langle F^*(\omega) v(\omega) \rangle_e \right\} = 2\Re \{ S_{Fv}(\omega) \} = \frac{-2}{\omega} \Im \{ S_{Fa}(\omega) \} \quad (3.134)$$

onde $\langle \rangle_e$ significa a média de conjunto, e S_{Fv} é definido como o espectro da potência cruzado entre a força e a velocidade. No caso em que acelerômetros são usados para fazer a medida em uma estrutura, o espectro da potência cruzada entre a força e a aceleração, S_{Fa} , pode ser usado, com $S_{Fa} = i\omega S_{Fv}$.

Nota-se, claramente, que medidas de potência injetada estrutural requerem a avaliação da parte imaginária do espectro da potência cruzado. Desta maneira, o conhecimento da fase entre a força e a componente de resposta de aceleração no ponto de excitação é vital. Qualquer mudança desta fase, usualmente erro de polarização (“bias error”), pode resultar em erro significativo na medida de potência injetada, especialmente em altas frequências. A outra causa de erro na medida de potência injetada pode ser relacionada à má calibração dos transdutores de força ou dos acelerômetros usados. Uma calibração adequada deve ser feita para evitar este tipo de erro na medida. Outros parâmetros podem ter influência na medida da potência injetada, entre eles o

Em geral, no PIM cada subsistema é excitado e então as respostas dinâmicas de todos os subsistemas é medida e transformada em energias de vibração. Matematicamente, a técnica do PIM corresponde à identificação da matriz de transformação que atua no vetor de energia $\{E\}$ para produzir o vetor de potência injetada $\{P\}$, segundo a equação de SEA (3.126).

3.6.1 Um exemplo de viga-L

Para melhor ilustrar o PIM, considera-se o seguinte modelo de duas vigas conectadas em forma L,

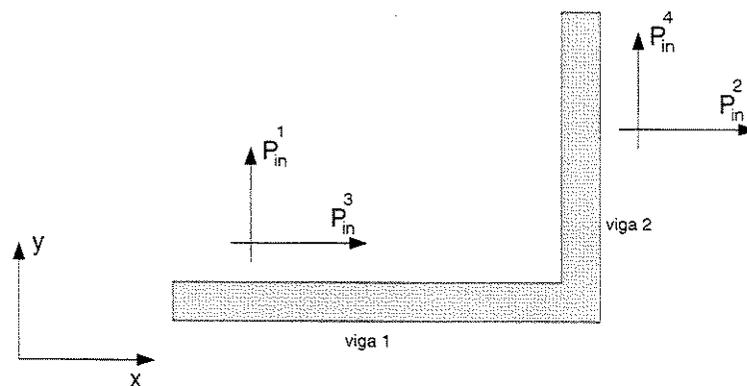


Figura 3.15 – Duas vigas conectada na forma L, no plano x-y.

Considera-se que as ondas transversais e longitudinais propagam-se somente no plano x-y. Neste caso, o modelo é então dividido em quatro subsistemas acoplados na forma mostrada na seguinte figura,

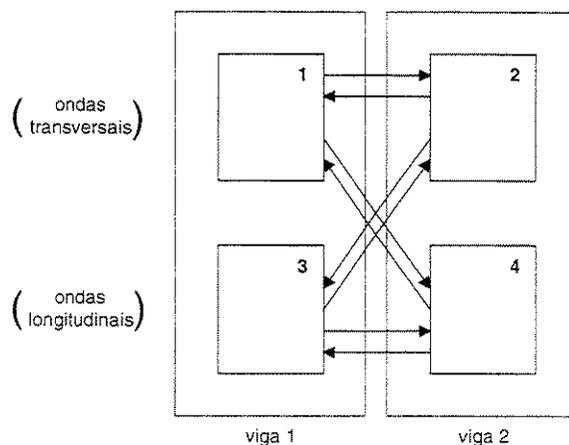


Figura 3.16 – O modelo de SEA para viga do tipo L. Acoplamento conservativo

alinhamento do “stinger” (fixação entre excitador e a estrutura) e a rigidez do “stinger”. O “stinger” é usado quando se aplica uma força usando um shaker eletrodinâmico, e o alinhamento é necessário para não transmitir outro esforço que não seja o esforço desejado.

3.6 O Método de Potência Injetada (PIM)

Os parâmetros mais importantes na SEA são os fatores de perda por dissipação (DLF) e os fatores de perda por acoplamento (CLF) dos diferentes subsistemas. Para diversas estruturas complexas, os parâmetros de SEA não podem ser determinados via expressões teóricas, mostradas anteriormente. Nestes casos, estes parâmetros devem ser identificados usando novas metodologias. Um dos métodos mais utilizados para a determinação dos parâmetros CLF e DLF é conhecido como o Método de Potência Injetada (PIM). Ele é baseado na injeção seqüencial da potência vibracional ou acústica em cada subsistema do modelo SEA. A resposta é então medida em vários pontos de cada subsistema e a equação (3.126) é usada para resolver o problema inverso.

O PIM pode ser aplicado baseando-se em resultados de simulações numéricas ou baseando-se em resultados experimentais. No caso de PIM experimental, algumas dificuldades podem surgir. Uma destas está relacionada à determinação da potência injetada experimentalmente, que pode ser sujeita a vários erros, conhecidos ou desconhecidos. A técnica de PIM experimental também depende das matrizes das energias dos subsistemas envolvidos. A energia de um subsistema não pode ser diretamente medida mas pode ser calculada através de medidas de um conjunto de variáveis dinâmicas deste subsistema. A medida destes variáveis pode estar sujeita a erros também.

Em geral, outras dificuldades podem surgir. A escolha não apropriada dos subsistemas pode resultar em matriz de energia mal-condicionada. Esta matriz, quando for invertida numericamente, pode resultar em grandes erros nos parâmetros estimados (DLF e CLF). A restrição numérica mais relatada na literatura, FAHY E RUIVO (1997), é relacionada ao alto custo computacional quando o sistema é dividido em grandes números de subsistemas.

Observa-se que as ondas de flexão em cada viga são desacoplados das ondas longitudinais na mesma. Desta forma, os acoplamentos são como mostrados com as setas na Figura 3.16, formando desta forma os quatro subsistemas. A potência injetada é medida ou calculada em cada subsistema por sua vez.

Primeiramente, potência é injetada no subsistema 1 e, então, as quatro equações de balanço de potência podem ser escritas na seguinte forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} P_{in}^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} & \eta_{42} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} & \eta_{43} \\ \eta_{14} & \eta_{24} & \eta_{34} & \eta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{21} \\ E_{31} \\ E_{41} \end{Bmatrix} \quad (3.135)$$

onde ω é a frequência em rad/s (ou pode ser a frequência central da banda), e E_{ij} é a energia de vibração (como média no tempo e espaço) do subsistema i quando a potência é injetada no subsistema j . Desta forma, quando a potência é injetada nos subsistemas 2,3,e 4, equações matriciais semelhantes podem ser escritas nas seguintes formas,

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ P_{in}^2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} & \eta_{42} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} & \eta_{43} \\ \eta_{14} & \eta_{24} & \eta_{34} & \eta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{12} \\ E_{22} \\ E_{32} \\ E_{42} \end{Bmatrix} \quad (3.136)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{in}^3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} & \eta_{42} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} & \eta_{43} \\ \eta_{14} & \eta_{24} & \eta_{34} & \eta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{13} \\ E_{23} \\ E_{33} \\ E_{43} \end{Bmatrix} \quad (3.137)$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{in}^4 \end{Bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} & \eta_{41} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} & \eta_{42} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} & \eta_{43} \\ \eta_{14} & \eta_{24} & \eta_{34} & \eta_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{14} \\ E_{24} \\ E_{34} \\ E_{44} \end{Bmatrix} \quad (3.138)$$

Estas matrizes podem ser combinadas em uma só matriz,

$$\omega \begin{bmatrix} E_{11} & E_{11} & E_{11} & -E_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{41} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{11} & 0 & E_{21} & E_{21} & E_{21} & -E_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{21} & E_{31} & E_{31} & E_{31} & 0 & -E_{41} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{31} & E_{41} & E_{41} & E_{41} \\ E_{12} & E_{12} & E_{12} & -E_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{42} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{12} & 0 & E_{22} & E_{22} & E_{22} & -E_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{22} & E_{32} & E_{32} & E_{32} & 0 & -E_{42} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{32} & E_{42} & E_{42} & E_{42} \\ E_{13} & E_{13} & E_{13} & -E_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{43} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{13} & 0 & E_{23} & E_{23} & E_{23} & -E_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{23} & E_{33} & E_{33} & E_{33} & 0 & -E_{43} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{33} & E_{43} & E_{43} & E_{43} \\ E_{14} & E_{14} & E_{14} & -E_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{14} & 0 & E_{24} & E_{24} & E_{24} & -E_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{24} & E_{34} & E_{34} & E_{34} & 0 & -E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{34} & E_{44} & E_{44} & E_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{14} \\ \eta_{21} \\ \eta_{22} \\ \eta_{23} \\ \eta_{32} \\ \eta_{33} \\ \eta_{34} \\ \eta_{44} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{in}^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{in}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{in}^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{in}^4 \end{Bmatrix} \quad (3.139)$$

O vetor dos fatores de perda por dissipação e os fatores de perda por acoplamento dos diferentes subsistemas podem ser achados através da resolução do sistema matricial acima dado. Observa-se que o modelo acima mencionado de 4 subsistemas resultou em uma matriz de energia não simétrica de tamanho 16x12. Neste caso, existem 16 equações para resolver os 12 fatores de perda. Este sistema matricial pode ser resolvido através da técnica de mínimos quadrados. Para tornar a solução numérica mais robusta pode-se usar a matriz pseudo-inversa baseando-se no algoritmo da decomposição de valores singulares (SVD). Além disso, o sistema matricial acima dado pode ser escrito em termos da energias dos subsistemas normalizados em relação à potência injetada, ou seja,

$$E_{ij}^n = \frac{\omega E_{ij}}{P_{in}^j} \quad (3.140)$$

3.6.2 O PIM em grandes modelos de SEA

Normalmente, um modelo de n subsistemas resultará em matriz das energias dos subsistemas envolvidos de tamanho $n^2 \times n^2$. A matriz de energia geral, neste caso, tem a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{11} & \dots & E_{11} & -E_{21} & 0 & \dots & 0 & \dots & -E_{n1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -E_{11} & \dots & 0 & E_{21} & E_{21} & \dots & E_{21} & \dots & 0 & -E_{n1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -E_{11} & 0 & 0 & \dots & -E_{21} & \dots & E_{n1} & E_{n1} & \dots & E_{n1} \\ E_{12} & E_{12} & \dots & E_{12} & -E_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & -E_{n2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -E_{12} & \dots & 0 & E_{22} & E_{22} & \dots & E_{22} & \dots & 0 & -E_{n2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -E_{12} & 0 & 0 & \dots & -E_{22} & \dots & E_{n2} & E_{n2} & \dots & E_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E_{1n} & E_{1n} & \dots & E_{1n} & -E_{2n} & 0 & \dots & 0 & \dots & -E_{nn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -E_{1n} & \dots & 0 & E_{2n} & E_{2n} & \dots & E_{2n} & \dots & 0 & -E_{nn} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -E_{1n} & 0 & 0 & \dots & -E_{2n} & \dots & E_{nn} & E_{nn} & \dots & E_{nn} \end{bmatrix}$$

O sistema matricial a ser resolvido torna-se grande e, portanto, o custo computacional será maior. Além disso, a matriz de energia é não simétrica e exibe a tendência de ser mal condicionada. Este mal condicionamento é relacionado à singularidade da mesma. Isso é devido aos grandes valores numéricos fora da diagonal da matriz de energia.

Para mostrar este mal condicionamento da matriz de energia, considera-se um modelo de SEA que consiste em três subsistemas conectados (Figura 3.17).

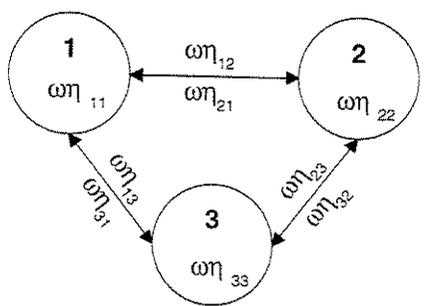


Figura 3.17 – Modelo de SEA com três subsistemas. Acoplamento conservativo.

O sistema matricial de equações para este modelo pode ser dado por,

$$\omega \begin{bmatrix} E_{11} & E_{11} & E_{11} & -E_{21} & 0 & 0 & -E_{31} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{11} & 0 & E_{21} & E_{21} & E_{21} & 0 & -E_{31} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{11} & 0 & 0 & -E_{21} & E_{31} & E_{31} & E_{31} \\ E_{12} & E_{12} & E_{12} & -E_{22} & 0 & 0 & -E_{32} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{13} & 0 & E_{22} & E_{22} & E_{22} & 0 & -E_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{12} & 0 & 0 & -E_{22} & E_{32} & E_{32} & E_{32} \\ E_{13} & E_{13} & E_{13} & -E_{23} & 0 & 0 & -E_{33} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{13} & 0 & E_{23} & E_{23} & E_{23} & 0 & -E_{33} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{13} & 0 & 0 & -E_{23} & E_{33} & E_{33} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{13} \\ \eta_{21} \\ \eta_{22} \\ \eta_{23} \\ \eta_{31} \\ \eta_{32} \\ \eta_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{in}^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{in}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{in}^3 \end{Bmatrix} \quad (3.141)$$

O procedimento numérico aqui realizado pode ser descrito da seguinte maneira:

- A potência é injetada no subsistema 1, onde a sua energia relativa E_{11} é considerada igual a 1. As energias E_{21} e E_{31} são consideradas iguais a ε (definido em seguida).
- A potência é injetada no subsistema 2, onde a sua energia relativa E_{22} é considerada igual a 1. As energias E_{12} e E_{32} são consideradas iguais a ε .
- A potência é injetada no subsistema 3, onde a sua energia relativa E_{33} é considerada igual a 1. As energias E_{13} e E_{23} são consideradas iguais a ε .

Em todos os casos o valor de ε varia de 0.05 a 0.9. O número de condição da matriz de energia é calculado para cada ε . O número de condição de uma matriz é uma indicação da grau de singularidade e tem implicação na exatidão dos resultados obtidos através de cálculo da inversa desta matriz. Ele é, geralmente, calculado como sendo a razão entre o maior valor singular e o menor valor singular. Valores de número de condição próximos de 1 indicam melhor condicionamento da matriz a ser invertida. Para o modelo acima mostrado, os resultados mostrados na Tabela 3.2 foram obtidos.

Nota-se que o condicionamento numérico da matriz de energia tende a aumentar com o aumento da razão de energia E_{ij}/E_j . Observa-se também que os menores valores de ε correspondem ao acoplamento fraco entre os subsistemas, e os altos valores de ε correspondem

ao acoplamento forte. O condicionamento da matriz de energia pode ser relacionado ao grau de acoplamento dos subsistemas envolvidos no modelo de SEA. A escolha imprópria dos subsistemas também pode causar o mal condicionamento de matriz de energia.

Tabela 3.2 – Número de condição da matriz de energia.

No.	Razão de energia (ϵ)	Número de condição
1	0.05	4.04
2	0.10	4.43
3	0.30	6.97
4	0.60	16.26
5	0.90	82.32

O problema de mal condicionamento da matriz de energia pode ser evitado através da eliminação dos fatores de perda por dissipação interna (η_{ii}) das equações de balanço de potência. Desta forma, e para o caso de n subsistemas, pode-se escrever que (DELANGHE (1996)),

$$\omega E_{ii} \begin{bmatrix} \frac{E_{11}}{E_{i1}} - \frac{E_{1i}}{E_{ii}} & \dots & \frac{E_{n1}}{E_{i1}} - \frac{E_{ni}}{E_{ii}} \\ \frac{E_{i1}}{E_{i1}} - \frac{E_{ii}}{E_{ii}} & \dots & \frac{E_{i1}}{E_{i1}} - \frac{E_{ii}}{E_{ii}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{E_{1n}}{E_{in}} - \frac{E_{1i}}{E_{ii}} & \dots & \frac{E_{nn}}{E_{in}} - \frac{E_{ni}}{E_{ii}} \\ \frac{E_{in}}{E_{in}} - \frac{E_{ii}}{E_{ii}} & \dots & \frac{E_{in}}{E_{in}} - \frac{E_{ii}}{E_{ii}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{1i} \\ \vdots \\ \eta_{ni} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{in}^i \\ \vdots \\ P_{in}^i \end{Bmatrix} \quad (3.142)$$

Neste caso, a matriz de energia tem a dimensão de $n \times n$, e subseqüentemente é uma matriz melhor condicionada. Isto é devido ao fato de que neste caso os valores numéricos da diagonal principal desta matriz são maiores do que os valores fora de diagonal. Este sistema matricial pode ser resolvido para achar os fatores de perda por acoplamento, e então, os fatores de perda por dissipação podem ser calculados através da substituição nas equações básicas de SEA. Desta forma tem-se,

$$\eta_{ii} = \frac{P_{in}^i}{\omega E_{ii}} - \sum_{j \neq i}^n \eta_{ij} + \sum_{j \neq i}^n \frac{E_{ji}}{E_{ii}} \eta_{ji} \quad (3.143)$$

Observa-se que mesmo com o possível problema de mal condicionamento da matriz de energia, segundo a literatura, a equação (3.139) continua sendo utilizada. Uma formulação semelhante será demonstrada e utilizada nos próximos capítulos como alternativa ao PIM.

3.6.3 Análise de sensibilidade dos parâmetros de SEA

Através do PIM podem-se utilizar os resultados obtidos de distribuição de energia dos diferentes subsistemas e então utilizá-los para a identificação de fontes de potência. A contribuição de uma fonte específica para o nível de energia ou vibração em um subsistema qualquer pode ser estimada. Devido ao pequeno número de parâmetros envolvidos na análise PIM ou SEA, uma análise de sensibilidade dos diversos parâmetros pode ser facilmente realizada. Por outro lado, a mesma análise poderia ser feita via métodos determinísticos (FEM) mas o custo computacional é muito maior. Para o PIM, análise de sensibilidade é matematicamente direta. Por exemplo, a sensibilidade de nível de energia no subsistema i a uma modificação do parâmetro η_{jk} pode ser calculada através da seguinte expressão,

$$\mu_{i,jk} = \frac{\partial E_i}{\partial \eta_{jk}} \quad (3.144)$$

onde η_{jk} é o fator de perda por dissipação (se $j=k$) ou por acoplamento ($j \neq k$). Sabendo-se que, para um sistema dinâmico formado por n subsistemas,

$$E_j = \frac{1}{\omega} \sum_{m=j}^n \frac{P_{in}^m}{\eta_{im}^{tot}} = \frac{1}{\omega} \sum_{m=j}^n \bar{E}_{im} P_{in}^m, \text{ com } \bar{E}_{im} = \frac{\omega E_{im}}{P_{in}^m} \quad (3.145)$$

pode-se escrever que, para o caso de fator de perda por dissipação, $j=k$,

$$\mu_{i,jj} = \frac{\partial E_j}{\partial \eta_{jj}} = -\bar{E}_{ij} E_j \quad (3.146)$$

e para o caso de fator de perda por acoplamento, $j \neq k$,

$$\mu_{i,jk} = \frac{\partial E_i}{\partial \eta_{jk}} = (\bar{E}_{ik} - \bar{E}_{ij})E_j \quad (3.147)$$

Observa-se, neste caso, que esta sensibilidade depende da energia do subsistema j e da potência injetada no subsistema i . Os resultados que podem ser obtidos das diferentes sensibilidades correspondem em primeiro lugar ao nosso entendimento físico do problema tratado. O parâmetro de sensibilidade pode ser utilizado para identificar o grau de acoplamento entre dois subsistemas.

3.7 Considerações gerais de SEA

A formulação matricial das equações básicas de SEA é, como foi apresentada anteriormente,

$$\{P_{in}^{tot}\} = \omega_c \{ \eta^{tot} \} \{E^{tot}\} \quad (3.148)$$

ou, em função da densidade modal n_i de cada subsistema i e das energias modais, utilizando a equação de reciprocidade,

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{Bmatrix} = \omega_c \begin{bmatrix} \eta_{11}^{tot} n_1 & -\eta_{21} n_1 & -\eta_{31} n_1 & \cdots & -\eta_{n1} n_1 \\ -\eta_{12} n_2 & \eta_{22}^{tot} n_2 & \ddots & \ddots & -\eta_{n2} n_2 \\ -\eta_{13} n_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -\eta_{1n} n_n & \cdots & \cdots & \cdots & \eta_{nn}^{tot} n_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1/n_1 \\ E_2/n_2 \\ E_3/n_3 \\ \vdots \\ E_n/n_n \end{Bmatrix} \quad (3.149)$$

Esta equação última descreve o comportamento de um sistema dinâmico descrito através de médias em tempo e espaço de distribuição de energia em cada subsistema. Observa-se que esta equação descreve somente um sistema cujos parâmetros são independentes do tempo (SEA estacionário). Por outro lado, problemas transientes, ou sistemas com excitações transientes, são comuns em várias áreas da vibro-acústica, como ruído acústico gerado em problemas de impacto e respostas a terremotos. Problemas transientes também podem ser modelados via SEA através de

formulações diferentes (LYON E DEJONG (1995)). Estas formulações não são o objetivo neste trabalho.

A equação básica matricial de SEA deve ser resolvida numericamente para achar a distribuição de energia total (cinética+potencial) nos subsistemas. Ela é formada de um sistema de equações algébricas lineares. A sua resolução é direta e simples. A matriz dos fatores de perda (por acoplamento e por dissipação) é simétrica, positiva definida, e geralmente esparsa. Estas são características matematicamente positivas, ou seja, a inversão desta matriz é estável. Bandas de frequência de 1/3 de oitava são normalmente utilizadas em análises de SEA, com a restrição da densidade modal mínima discutida anteriormente.

Mesmo no caso de grandes sistemas, com grande número de subsistemas, a resolução da equação matricial via a inversão direta exhibe ainda baixo custo computacional quando comparado com métodos determinísticos como o FEM. Além disso, o espaço necessário para armazenar as matrizes na memória é relativamente pequeno devido à esparsidade da matriz dos fatores de perda.

Como foi acima mencionado, a variável principal na SEA é o nível de energia nos diferentes subsistemas do modelo analisado. Através desta energia pode-se calcular o fluxo de potência entre os subsistemas envolvidos, e a potência dissipada em cada subsistema. Além disso, a vetor de nível de energia nos subsistemas pode ser transformado em outras variáveis como velocidade, aceleração, deslocamento, ou então em nível de pressão acústica no caso de análise acústica. Usando a relação fundamental,

$$E = M \langle v^2 \rangle \quad (3.150)$$

onde $\langle v^2 \rangle = v_{\text{rms}}^2$ é a média quadrada da velocidade, calculada como média na frequência e no espaço, de um subsistema com massa M uniformemente distribuída. Se a massa de subsistema não for uniformemente distribuída, a densidade de massa deve ser incluída na média espacial. Normalmente, a variável de energia na SEA é calculada como nível de energia dado por,

$$L_E = 10 \log_{10} \left(\frac{E}{E_{ref}} \right) \quad (3.151)$$

onde E_{ref} é o nível de referência (valor normalmente usado é 10^{-12} J). O nível de velocidade pode ser dado como sendo,

$$L_v = 10 \log_{10} \left(\frac{v_{rms}^2}{v_{ref}^2} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{E}{M} \frac{1}{v_{ref}^2} \right) = L_E + 10 \log_{10} \left(\frac{1}{M} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{E_{ref}}{v_{ref}^2} \right) \quad (3.152)$$

onde v_{ref} é o nível de referência de velocidade (valor normalmente usado é 1m/s). Em movimentos harmônicos em estruturas, a aceleração é relacionada com a velocidade via $a=2\pi f v$. Desta forma, podem-se escrever fórmulas para o cálculo dos níveis de aceleração e deslocamento para frequências centrais de banda f_c dados como,

$$L_a = L_v + 20 \log_{10}(f_c) + 20 \log_{10} \left(\frac{v_{ref}}{a_{ref}} \right) + 16 \quad (3.153)$$

$$L_d = L_v - 20 \log_{10}(f_c) - 20 \log_{10} \left(\frac{d_{ref}}{v_{ref}} \right) - 16 \quad (3.154)$$

onde a_{ref} é o nível de referência de aceleração (valor normalmente usado é 10^{-6} m/s²), e d_{ref} é o nível de referência de deslocamento (10^{-12} m).

3.8 Desvantagens da SEA

Embora a SEA traga benefícios notáveis na modelagem de estruturas em altas frequências, ela ainda sofre de algumas desvantagens. Entre estas, as dificuldades que podem ser encontradas para ter uma estimativa dos níveis de confiança, particularmente nas respostas obtidas em média frequência. Este nível de confiança depende do número de modos naturais (densidade modal) na

banda de frequência utilizada. Algumas metodologias ainda estão sendo pesquisadas para a análise em médias frequências via SEA.

Outra desvantagem de SEA é quando aplicada em sistemas pouco reverberantes. A teoria de SEA é baseada em sistemas reverberantes e, portanto, as equações de troca de energia são a principal hipótese na aplicação do método. Em sistemas muito amortecidos, como por exemplo em fuselagem de aviões, as ondas propagantes são muito amortecidas, e conseqüentemente pouca energia é transmitida de um sistema para outro e, portanto, as equações de SEA tornam-se menos aplicáveis.

Além disso, a escolha dos subsistemas envolvidos no modelo de SEA parece ser muito crítica. Não existem métodos sistemáticos para a escolha apropriada dos subsistemas. Um bom modelo de SEA depende da experiência do programador ou do usuário dos pacotes comerciais de SEA. Outras dificuldades podem ser ainda encontradas na medida de potência injetada, como foi anteriormente mencionado.

A desvantagem mais óbvia da SEA é que as respostas são baseadas em análise estatística e, portanto, são sujeitas a incerteza. Esta desvantagem não é de grande importância em sistemas de alta ordem (alta densidade modal). Como um índice de nível de confiança, a variância e a média podem ser calculados. Em relação à sensibilidade, é mais fácil calcular a sensibilidade de energia em relação aos parâmetros de SEA, por exemplo o fator de perda por acoplamento, do que calcular a sensibilidade em relação aos parâmetros físicos do problema (por exemplo a propriedade física de uma junta). Isso é relacionado ao fato de que nem sempre existe uma relação conhecida entre o fator de perda, neste caso, e as propriedades físicas de junta (por exemplo a geometria, as propriedades de materiais, etc).

3.9 Vantagens da SEA

A vantagem deste método é que a formulação dele é considerada simples e direta. O sistema é modelado como sendo uma interação de um conjunto de sub-sistemas. Esta interação é descrita estatisticamente através de valores médios e através de variâncias. Cada subsistema exhibe

um único grau de liberdade, o que resulta em custo computacional baixo. Devido ao pequeno número de graus de liberdade, a modificação deste modelo e a análise de sensibilidade dos parâmetros podem ser diretas e computacionalmente baratos. Desta maneira, a análise via SEA pode ser muito prática nas primeiras etapas de um projeto. A outra vantagem da SEA é que ela pode ser usada para traçar o fluxo de energia no sistema e identificar os principais trajetos de transmissão de energia do ponto de fonte ao ponto de dissipação. Estas características podem ser muito benéficas para sistemas grandes e complexos quando comparadas com as dos métodos numéricos do tipo FEM e BEM.

3.10 Evolução da SEA e estado da arte

Mesmo que a SEA esteja sendo bastante desenvolvida durante os últimos anos, ela ainda não está sendo utilizada de forma generalizada como no caso do FEM, por exemplo. A razão para isso é clara: enquanto o FEM é baseado nos princípios básicos e bem conhecidas da mecânica aplicada, a SEA é baseada em hipóteses estatísticas que são sujeitas a incertezas. Estas incertezas são principalmente devidas à hipótese da validade da equação $P_{ij} = \omega(\eta_{ij}E_i - \eta_{ji}E_j)$ e à hipótese da relação de reciprocidade. Além disso, estabelecer valores apropriados para os fatores de perda por acoplamento é, em alguns casos, uma tarefa difícil.

Ao longo dos últimos anos foram desenvolvidos alguns pacotes computacionais comerciais baseados na SEA. Estes pacotes contêm diferentes bibliotecas de dados para o cálculo dos fatores de perda por acoplamento. A empresa “Vibro-Acoustic Sciences, Inc.” está tendo muito sucesso com seus produtos: AutoSEA, que é feito para análise vibro-acústica teórica, e AutoSEA-X que é feito para análise experimental. O AutoSEA é atualmente disponível para o MS\Windows, Unix, e Macintosh. Ele oferece uma interface gráfica e uma biblioteca de dados, além da interface com outros pacotes computacionais como NASTRAN, I-DEAS, IGES. As outras vantagens do AutoSEA são relacionadas a capacidades de mostrar resultados com saídas gráficas e com áudio. O primeiro congresso internacional dos usuários do AutoSEA foi realizado no ano 2000. Outras empresas importantes que desenvolvem software na área de análise vibroacústica, como é o caso da “Leuven Measurement Systems (LMS)”, já estão também comercializando os produtos para

SEA (SEADS). Várias instituições estão usando estes pacotes, entre elas a “UK Defense and Evaluation Research Agency (DERA)”, a “NASA”, a “Ford Motor Company” e a “BOEING”.

É importante ressaltar que o uso destes pacotes comerciais de SEA pode ser muito benéfico no sentido que eles são utilizados como uma ferramenta para prever os diferentes fluxos de potência em um sistema dinâmico. Sendo assim, estes pacotes são usados, junto com dados experimentais, para identificar os principais trajetos de dissipação em uma estrutura, especialmente grandes estruturas como navios, estruturas aeroespaciais, etc. Os resultados obtidos através destes pacotes, e através da SEA em geral, dependem da experiência do usuário e da escolha apropriada do modelo.

Capítulo 4

Fluxo de potência e energia em pórticos tridimensionais

Neste capítulo serão mostrados conceitos básicos da técnica de fluxo de potência estrutural. Estruturas do tipo pórtico definidas no espaço tridimensional serão estudadas. As formulações para o cálculo das componentes de fluxo de potência neste tipo de estrutura serão desenvolvidas para o método dos elementos finitos (FEM) e o método dos elementos espectrais (SEM). A fim de fazer a comparação com outras metodologias de energia para a análise dinâmica estrutural, o cálculo de energia cinética e potencial também será estudado. As formulações para o cálculo destas energias nos membros de uma estrutura do tipo pórtico tridimensional serão desenvolvidas para os métodos FEM e SEM. As formulações para a medição experimental dos diferentes componentes de fluxo de potência, longitudinais, transversais e torcionais são mostradas.

4.1 Conceitos de fluxo de potência estrutural

A propagação de energia ativa em estruturas pode ser uma alternativa de grande utilidade em problemas de vibração. O fluxo de potência estrutural pode ser obtido através de pós-processamento de medidas de vibração. O fluxo de potência em contínuos elásticos pode ser obtido de simulações através dos métodos numéricos ou experimentalmente através de medidas de força e velocidade (ALVES ET AL., 2000, ALFREDSSON, 1997 e XING E PRICE, 1999). A força atuando em uma estrutura e a velocidade em um ponto da estrutura, descritas na mesma frequência ω , podem ser representadas por,

$$\begin{aligned} f(t) &= F \cos(\omega t + \alpha) \\ v(t) &= V \cos(\omega t + \beta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde F e V são as magnitudes de força e velocidade e α e β são as suas relativas fases. Os campos de força e velocidade podem ser escritos em forma exponencial complexa como sendo,

$$\begin{aligned} f(t) &= \Re\{F e^{i(\omega t + \alpha)}\} = \Re\{F(\omega) e^{i\omega t}\} \\ v(t) &= \Re\{V e^{i(\omega t + \beta)}\} = \Re\{V(\omega) e^{i\omega t}\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $F(\omega)$ e $V(\omega)$ são definidas como as amplitudes complexas de força e velocidade, respectivamente.

Dadas estas expressões, a potência estrutural pode ser calculada como sendo o produto de $f(t)$ e $v(t)$, ou seja,

$$P_t(t) = f(t)v(t) = FV \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \quad (4.3)$$

Após algumas simplificações algébricas das funções trigonométricas envolvidas, a potência estrutural pode ser escrita na seguinte forma compacta,

$$P_t(t) = \frac{FV}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)) \quad (4.4)$$

Nota-se que esta expressão envolve duas partes: uma é constante e a outra é oscilante. Nota-se, também, que a parte oscilante exibe uma frequência que é duas vezes a frequência da força (ou velocidade). Para mostrar isto com mais clareza, considera-se um sinal de força com amplitude real $F=3$ N, e um medido sinal de velocidade com amplitude real $V=4$ m/s. Os dois sinais são definidos na frequência $\omega=1$ rad/s, e com diferença de fase de 60 graus. A relação entre estes sinais e a potência é mostrada na Figura 4.1.

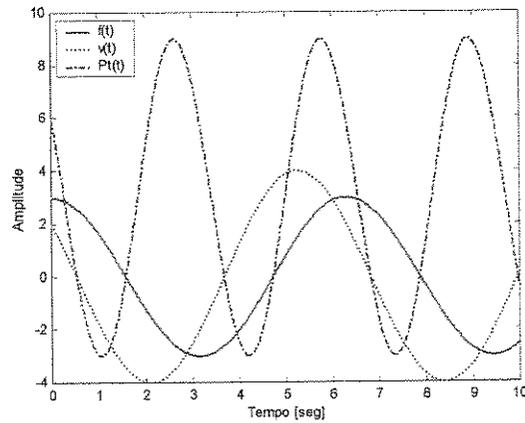


Figura 4.1 – A relação entre força, velocidade e potência.

Calculando a média temporal da potência tem-se,

$$\langle Pt \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{FV}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)) dt \quad (4.5)$$

ou seja,

$$\langle Pt \rangle_t = \frac{FV}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{FV}{2} (\cos(2\omega t + \alpha + \beta)) dt \quad (4.6)$$

Observa-se que a primeira parte desta expressão é constante. Esta parte representa a parte ativa $\langle P_{at} \rangle_t$ da potência. A figura abaixo mostra a parte ativa e a parte oscilante da potência (equação (4.4)). Nota-se que a amplitude da potência ativa é dada por $\frac{FV}{2} \cos(\alpha - \beta)$, o que é igual a 3 W neste caso.

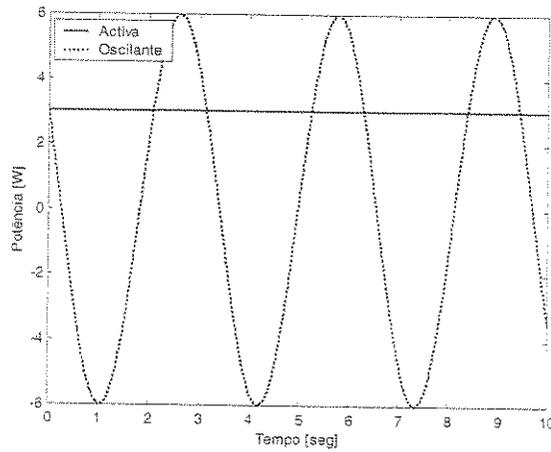


Figura 4.2 – A relação entre a parte ativa e a parte oscilante da potência.

Utilizando a equação (4.6), a potência ativa pode ainda ser escrita da seguinte forma,

$$\langle P_{at} \rangle_t = \frac{FV}{2} \cos(\alpha - \beta) \equiv \frac{1}{2} \Re \{ F(\omega) V^*(\omega) \} = \frac{1}{2} \Re \{ F^*(\omega) V(\omega) \} \quad (4.7)$$

onde $F(\omega)$ e $V(\omega)$ são as amplitudes complexas definidas anteriormente, e $*$ representa o conjugado complexo da variável em questão. Desta forma, medidas de campo de força atuante e de campo de velocidade resultante no domínio de frequência podem ser diretamente utilizadas para a predição de fluxo de potência, ou seja, a potência estrutural ativa (cujo valor per unidade de área é a intensidade estrutural). Para simplificação das equações envolvidas, daqui em diante a potência ativa será representada como $\langle P \rangle_t$.

Observa-se, também, que a segunda parte da equação (4.6) é relacionada com, mas não representa, a potência reativa. Entretanto, e por definição, a potência estrutural reativa pode ser simplesmente calculada como sendo a parte imaginária do produto das amplitudes complexas de força e velocidade, ou seja,

$$\langle P_{rt} \rangle_t = \frac{1}{2} \Im \{ F(\omega) V^*(\omega) \} = \frac{1}{2} \Im \{ F^*(\omega) V(\omega) \} \quad (4.8)$$

e assim definida,

$$|Pt|^2 = \langle P_{at} \rangle_t^2 + \langle P_{rt} \rangle_t^2 \quad (4.9)$$

Esta potência reativa representa as ondas estacionárias e, portanto, ela representa a variação de campo de velocidade da estrutura analisada. Desta forma, esta potência pode representar os modos operacionais (“Operational Deflection Shape, ODS”) de uma estrutura (ALVES ET AL., 2000).

O termo fluxo de potência, ou a potência ativa, é freqüentemente usado para descrever o fluxo de energia em uma estrutura. Os termos: potência, fluxo de potência, intensidade estrutural e fluxo de energia são termos relacionados uns aos outros. A intensidade tem partes ativa e reativa, com unidade de potência por unidade de área. Para meios bidimensionais (como placas), a intensidade é definida como a potência por unidade de espessura por unidade de comprimento. Desta maneira, o fluxo de potência em um membro de uma estrutura do tipo pórtico pode ser chamado intensidade estrutural, definida como a potência por unidade de área da seção deste membro. O fluxo de potência é a potência com direção e sentido.

É importante ressaltar que a parte ativa de potência é relacionada a dissipação de energia enquanto a parte reativa é não dissipativa. Isto pode ser visto para o caso de um ressonador simples de um grau de liberdade (Figura 4.3).

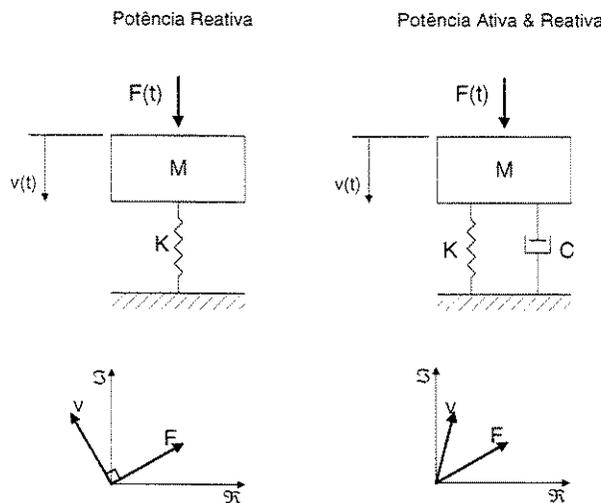


Figura 4.3 – Componentes ativas e reativas de potência.

O fluxo de potência estrutural é normalmente ilustrado por um mapa de setas, como mostrado na Figura 4.4. Nota-se que, devido à dissipação interna no sistema dinâmico, o tamanho das setas, que é proporcional à magnitude do fluxo de potência, diminui à medida que nos afastamos da fonte. De uma forma análoga ao princípio de fluxo térmico, a direção de fluxo de potência tende a ser da região de alta energia para a região de baixa energia. O fenômeno da circulação de fluxo de potência em algumas regiões é conhecido como vórtice. Este fenômeno acontece em estruturas bidimensionais do tipo placas, e está relacionado ao fato que, neste tipo de estruturas a energia se propaga em duas direções o que, como combinação destes, pode resultar neste tipo de circulação. Esta circulação não será aqui estudada já que este trabalho tem o enfoque especial de análise de elementos estruturais unidimensionais (pórtico).

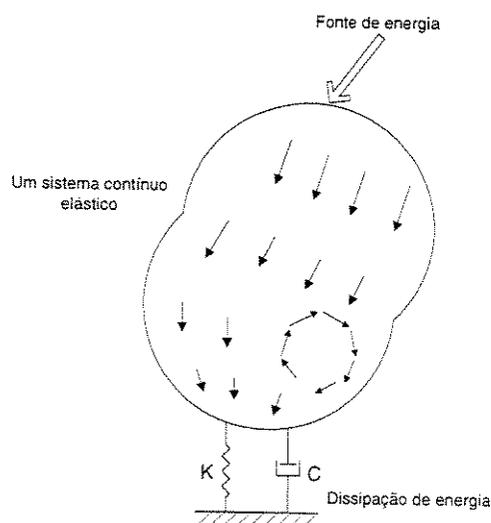


Figura 4.4 – Mapa de fluxo de potência [Hambric e Taylor, 1994].

A técnica de fluxo de potência tem várias utilidades como o uso para a compreensão dos fenômenos de propagação de energia, identificação de fontes sorvedouros de energia, estimação dos fatores de perda da SEA e Bond Graphs.

4.2 O fluxo de potência em estruturas do tipo pórtico tridimensional

Em estruturas do tipo pórtico tridimensional, o fluxo de potência é devido à propagação de três tipos de ondas; ondas longitudinais, ondas transversais nos dois planos de propagação, e

ondas de torção. Estes tipos de onda propagam-se nos membros do tipo pórtico que reúnem as características de barras, vigas e elementos de torção. As formulações teóricas para o cálculo de fluxo de potência neste tipo de elemento estrutural são discutidas separadamente em seguida e depois combinadas no elemento pórtico 3-D.

4.2.1 Propagação de energia em barras

Considerando uma força axial externa $F(x,t)$ (definida por unidade de comprimento) atuando em uma barra com área de seção A , rigidez axial EA , e massa por unidade de comprimento ρA . A aplicação desta força resultará em um deslocamento $u(x,t)$ na direção x . A equação de movimento desta barra, desprezando o amortecimento interno da barra, pode ser escrita como,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F \quad (4.10)$$

As forças axiais são relacionadas aos deslocamentos axiais via a seguinte equação,

$$F = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.11)$$

O fluxo de potência nos elementos de barra é unidimensional. Para cada elemento de barra existem duas componentes de onda; uma relacionada as ondas que propagam para o sentido positivo da coordenada da barra e outra para o sentido contrário (Figura 4.5).



Figura 4.5 – Componentes de onda em elementos de barra.

Como visto anteriormente, o fluxo de potência ativa $\langle P \rangle_t$ pode ser escrito como sendo a média no tempo do produto da força aplicada e a componente de velocidade em fase. Desta forma,

$$\langle P \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \dot{u}(t) dt \quad (4.12)$$

onde $F(t)$ é a força e $\dot{u}(t)$ é a velocidade. Para análise harmônica, a componente que propaga na barra é a componente ativa definida pela parte real da potência, ou seja,

$$\langle P_R \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \hat{F} \hat{u}^* \} \quad (4.13)$$

onde $*$ é o conjugado complexo, e $\hat{u} = i\omega \hat{u}$. Nota-se que, neste trabalho adotou-se o símbolo $\hat{}$ acima das variáveis para identificar que são variáveis espectrais. Assim,

$$u(t) = \Re \{ \hat{u} e^{i\omega t} \} \Rightarrow \dot{u}(t) = \Re \{ i\omega \hat{u} e^{i\omega t} \} \quad (4.14)$$

Usando a equação (4.11), tem-se a equação para o cálculo de fluxo de potência ativa em barras dada por,

$$\langle P_R \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \left\{ EA \frac{\partial u(\omega)}{\partial x} (i\omega u(\omega))^* \right\} \quad (4.15)$$

4.2.2 Propagação de energia em vigas de Timoshenko

Para uma viga, existem quatro componentes de onda; duas propagantes (**A** e **B**) e duas evanescentes (**C** e **D**). As componentes evanescentes têm um efeito maior no campo próximo das extremidades da viga. Ao determinar o fluxo de potência experimentalmente, as componentes evanescentes são geralmente desprezadas. Isso é feito através de posicionamento dos transdutores de aceleração ou velocidade longe das extremidades da viga em questão.

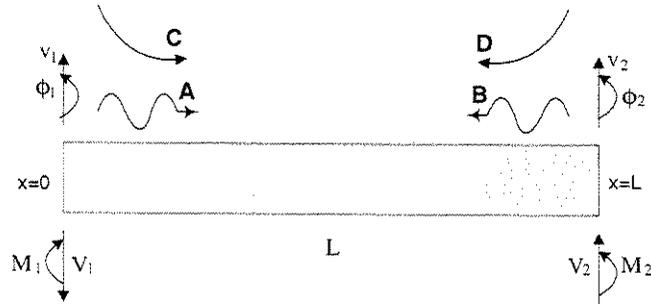


Figura 4.6 – Componentes de onda em elementos de viga.

As equações de movimento para estes GDL's, sem a consideração de amortecimentos viscosos de material, são dadas por (CRAIG, 1981),

$$\begin{aligned}
 GA\kappa \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] &= \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\
 EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + GA\kappa \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right] &= \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

onde $GA\kappa$ é a rigidez de cisalhamento, EI é a rigidez de flexão e ρI é a inércia rotacional, G é o módulo de elasticidade rotacional e κ é um constante dependente da geometria da seção de viga; por exemplo, para seção retangular $\kappa=5/6$.

As forças de cisalhamento e os momentos de flexão nodais são relacionados aos v e ϕ nodais via as seguintes expressões

$$\begin{aligned}
 \hat{V}(x) &= GA\kappa \left[\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \hat{\phi} \right] = -EI \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} \\
 \hat{M}(x) &= +EI \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{4.17}$$

A potência ativa ao longo de uma viga contém dois termos: forças de flexão multiplicadas pela velocidade e os momentos de flexão multiplicados pela velocidade angular. Desta forma, o fluxo de potência em uma viga é dado por,

$$\langle P_B \rangle_t = \left\langle \hat{V}(x)\hat{v} + \hat{M}(x)\dot{\hat{\phi}} \right\rangle_t \quad (4.18)$$

onde as forças e os momentos de flexão são definidos por,

$$\hat{V}(x) = -EI \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} \quad (4.19)$$

$$\hat{M}(x) = EI \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (4.20)$$

Desta forma, a potência ativa ao longo da viga de Timoshenko pode ser calculada como sendo,

$$\langle P_{Bt} \rangle_t = \left\langle \left(-EI \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \rho I \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \left(EI \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right\rangle_t \quad (4.21)$$

Para uma solução harmônica, onde $\hat{v} = i\omega\hat{v}$, $\dot{\hat{v}} = -\omega^2\hat{v}$, $v(t) = \Re\{\hat{v}e^{i\omega t}\}$ e $\phi(t) = \Re\{\hat{\phi}e^{i\omega t}\}$, pode-se calcular a potência ativa ao longo da viga de Timoshenko como sendo,

$$\langle P_{Bt} \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \left\{ \left(-EI \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - \omega^2 \rho I \hat{\phi} \right) (i\omega\hat{v})^* + \left(EI \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right) (i\omega\hat{\phi})^* \right\} \quad (4.22)$$

4.2.3 Propagação de energia em vigas de Bernoulli-Euler

A teoria de Timoshenko não introduz nenhum modo adicional quando comparada com a teoria elementar; entretanto, o comportamento dos modos é diferente nas duas teorias. Para frequências muito baixas não há muita diferença entre as duas formulações, o que ocorre para altas frequências (veja o capítulo anterior). A teoria da viga de Bernoulli-Euler pode ser obtida através de simplificação da teoria de Timoshenko. Para isso é necessário desprezar a rigidez de cisalhamento ($GA\kappa \Rightarrow \infty$) e não considerar a inércia rotacional ($\rho I \Rightarrow 0$). Isso quer dizer que não há

deformação de cisalhamento mesmo havendo forças de cisalhamento atuando. Aplicando estas condições para a equação (4.16) tem-se,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4.23)$$

As forças de cisalhamento e os momentos de flexão nodais são relacionados aos v e ϕ nodais via as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} \hat{M}(x) &= +EI \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \\ \hat{V}(x) &= -\frac{\partial \hat{M}}{\partial x} = -EI \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde, $\hat{\phi} = i\omega \hat{\phi} = i\omega \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}$. Desta forma, o fluxo de potência na viga de Bernoulli-Euler pode ser calculado como,

$$\langle P_{Bb} \rangle_t = \left\langle \left(-EI \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial x^3} \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} \right) - \left(EI \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t \quad (4.25)$$

ou seja,

$$\langle P_{Bb} \rangle_t = \frac{-I}{2} \Re \left\{ E \frac{\partial^3 \hat{v}}{\partial x^3} (i\omega \hat{v})^* - E \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} (i\omega \hat{\phi})^* \right\} \quad (4.26)$$

4.2.4 Propagação de energia por rotação em barras

Os elementos de barra em torção, e de uma forma análoga aos elementos de barra em tração-compressão, respeitam uma equação diferencial de segunda ordem. Para um torque $q(x)$ aplicado a uma barra com rigidez torcional GJ e inércia por unidade de comprimento ρI_p , que resulta em um deslocamento rotacional $\phi(x,t)$ na direção x , a equação de movimento desta barra, desprezando o amortecimento interno, é dada por,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] = \rho I_p \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - q \quad (4.27)$$

Os torques são relacionados aos deslocamentos torcionais via $T = GJ \frac{\partial \phi}{\partial x}$. Desta forma, o fluxo de potência ativa para o elemento de rotação pode ser escrito simplesmente da seguinte forma,

$$\langle P_s \rangle_t = J \left\langle G \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right\rangle_t \quad (4.28)$$

ou em uma forma simplificada,

$$\langle P_s \rangle_t = \frac{J}{2} \Re \left\{ G \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} (i\omega \hat{\phi})^* \right\} \quad (4.29)$$

4.3 O cálculo de fluxo de potência total em estruturas do tipo pórtico tridimensional

Na aplicação numérica das equações acima dadas para o cálculo de fluxo de potência ativa no elementos de barra, de viga, e de torção, precisa-se saber *a priori* as funções de forma destes elementos para poder calcular as derivadas espaciais. As componentes de fluxo de potência são funções da frequência. Estes componentes serão numericamente calculados utilizando o método dos elementos finitos (FEM) e o método dos elementos espectrais (SEM). A diferença entre estes dois modelos para o cálculo de fluxo de potência será analisada. As funções de forma para os elementos espectrais de barra, viga de Bernoulli-Euler, viga de Timoshenko, e elemento de torção foram dadas nos capítulos anteriores. As funções de forma para os elementos finitos convencionais de barra, viga de Bernoulli-Euler, viga de Timoshenko, e elemento de torção utilizadas neste trabalho são mostradas nas seções a seguir.

Para uma estrutura do tipo pórtico, definida em espaço tridimensional, o fluxo de potência total é calculado como a soma das contribuições de todos os tipos de ondas existentes. Assim, em

uma estrutura deste tipo o fluxo de potência ativa total em uma seção arbitrária de um membro é dado por,

$$\langle P_{tot} \rangle_t = \langle P_R \rangle_t + \langle P_B \rangle_t|_{plano1} + \langle P_B \rangle_t|_{plano2} + \langle P_S \rangle_t \quad (4.30)$$

É importante ressaltar que a componente de fluxo de potência ativo é existente somente quando há dissipação de energia. Esta dissipação pode ser introduzida com o uso de elementos localizados de amortecimento e com a consideração do amortecimento interno do material da estrutura em questão. O amortecimento interno, como foi mencionado anteriormente, pode ser introduzido através do valor complexo de módulo de Young. Para um sistema anecóico ou semi-anecóico, e com amortecimento interno nulo, também existe fluxo de potência ativo. Desta maneira, pode-se verificar o cálculo de fluxo de potência ativo o qual, neste caso, deveria ser igual à potência injetada. Esta idéia é utilizada nos próximos capítulos de resultados para a comparação entre os métodos FEM e SEM para o cálculo de fluxo de potência.

4.4 O cálculo de energia em estruturas do tipo pórtico espacial

No capítulo de resultados são calculados as energias cinéticas e potenciais em membros de pórticos tridimensionais. Estas energias são calculadas através das formulações do método dos elementos finitos e do método dos elementos espectrais. Assim, precisam-se desenvolver as formulações necessárias para realizar estas modelagens, as quais são mostradas em seguida.

4.4.1 Energia cinética no elemento de barra em tração-compressão

A energia cinética em barras é devida à propagação de ondas longitudinais (axiais). Esta energia pode ser calculada através da seguinte expressão,

$$E_R^K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{u}^2 dx \quad (4.31)$$

A energia calculada como média no tempo é então dada por,

$$\langle E_R^K \rangle_t = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \langle \dot{u}^2 \rangle_t dx \quad (4.32)$$

mas,

$$\langle \dot{u}^2 \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \dot{\hat{u}} \dot{\hat{u}}^* \} = \frac{1}{2} \Re \{ (i\omega \hat{u}) (i\omega \hat{u})^* \} = \frac{1}{2} \omega^2 \Re \{ \hat{u}(x) \hat{u}^*(x) \} \quad (4.33)$$

e, desta forma, pode-se escrever que,

$$\langle E_R^K \rangle_t = \frac{1}{4} \omega^2 \rho A \int_0^L \Re \{ \hat{u}(x) \hat{u}^*(x) \} dx \quad (4.34)$$

A solução de deslocamento $\hat{u}(x)$ em qualquer ponto arbitrário ao longo da barra pode ser calculada através das funções de forma. Desta forma, e para um elemento do tipo 2-nós, tem-se,

$$\hat{u}(x) = \hat{g}_1(x) \hat{u}_1 + \hat{g}_2(x) \hat{u}_2 \quad (4.35)$$

Desta maneira tem-se a seguinte fórmula para o cálculo de energia cinética,

$$\langle E_R^K \rangle_t = \frac{1}{4} \omega^2 \rho A \Re \{ E_R^{11} |\hat{u}_1|^2 + E_R^{22} |\hat{u}_2|^2 + E_R^{12} \hat{u}_1 \hat{u}_2^* + E_R^{21} \hat{u}_1^* \hat{u}_2 \} \quad (4.36)$$

tendo-se as seguintes simplificações dos termos envolvidos,

$$E_R^{11} = \int_0^L \hat{g}_1 \hat{g}_1^* dx \quad (4.37)$$

$$E_R^{22} = \int_0^L \hat{g}_2 \hat{g}_2^* dx \quad (4.38)$$

$$E_R^{12} = \int_0^L \hat{g}_1 \hat{g}_2^* dx \quad (4.39)$$

$$E_R^{12} = \int_0^L \hat{g}_2 \hat{g}_1^* dx \quad (4.40)$$

onde a estrela representa o conjugado complexo. Nota-se que pode ser provado facilmente que $E_R^{12} = E_R^{21}$. Observa-se que esta simetria é da mesma forma vista na matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de barra. As funções de forma para o elemento espectral de barra são como definidas no capítulo anterior.

4.4.2 Energia potencial no elemento de barra

$$E_R^p = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (4.41)$$

A energia calculada como média no tempo é então dada por,

$$\langle E_R^p \rangle_t = \frac{1}{2} \int_0^L A \langle Eu'^2 \rangle_t dx \quad (4.42)$$

mas,

$$\langle u'^2 \rangle_t = \frac{1}{2} \Re \{ \hat{u}'(x) \hat{u}'^*(x) \} \quad (4.43)$$

e, desta forma, pode-se escrever que,

$$\langle E_R^p \rangle_t = \frac{1}{4} A \int_0^L \Re \{ E \hat{u}'(x) \hat{u}'^*(x) \} dx \quad (4.44)$$

Nota-se que o módulo de elasticidade E pode ser complexo e, portanto, deveria ser calculado dentro dos parêntesis da quantidade calculada como média no tempo. Desta forma, o amortecimento interno do material será levado em conta. Da mesma forma feita anteriormente para o cálculo de energia cinética, as funções de forma são utilizadas para calcular as derivadas

esaciais da equação (4.44), assim, a derivada espacial de deslocamento em qualquer ponto x ao longo da barra é dada por,

$$\hat{u}'(x) = \hat{g}'_1(x)\hat{u}_1 + \hat{g}'_2(x)\hat{u}_2 \quad (4.45)$$

Desta maneira, pode calcular a energia potencial usando a seguinte equação,

$$\langle E_R^P \rangle_t = \frac{1}{4} A \Re \left\{ E (E_{dR}^{11} |\hat{u}_1|^2 + E_{dR}^{22} |\hat{u}_2|^2 + E_{dR}^{12} \hat{u}_1 \hat{u}_2^* + E_{dR}^{21} \hat{u}_1^* \hat{u}_2) \right\} \quad (4.46)$$

sendo que, $E_{dR}^{12} = E_{dR}^{21}$ e,

$$E_{dR}^{11} = \int_0^L \hat{g}'_1 \hat{g}'_1^* dx \quad (4.47)$$

$$E_{dR}^{22} = \int_0^L \hat{g}'_2 \hat{g}'_2^* dx \quad (4.48)$$

$$E_{dR}^{12} = \int_0^L \hat{g}'_1 \hat{g}'_2^* dx \quad (4.49)$$

$$E_{dR}^{21} = \int_0^L \hat{g}'_2 \hat{g}'_1^* dx \quad (4.50)$$

As energias cinética e potencial nos membros de um pórtico definido no espaço tridimensional podem ser calculadas através da discretização da estrutura. Neste trabalho, a discretização será feita usando as formulações do FEM e do SEM. As funções de forma para o elemento espectral de barra necessárias para este cálculo foram mostradas e explicadas nos capítulos anteriores. Para um elemento finito convencional de barra com comprimento L ao longo do eixo x , as seguintes funções de forma são utilizadas,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= 1 - \frac{x}{L} \\ g_2(x) &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (4.51)$$

Nota-se que, neste caso, estas funções de forma são funções independentes da frequência. Portanto, as mesmas formulações para o cálculo das energias cinética e potencial acima dadas são usadas sem a necessidade de calcular o conjugado complexo das funções de forma.

Para o cálculo das energias cinética e potencial no elemento de barra em torção, as mesmas expressões dadas para o elemento de barra em tração-compressão podem ser usadas trocando as constantes ρA por ρJ , e EA por GJ , onde J é o momento de inércia polar e G é o módulo de cisalhamento. Nota-se que a constante G torna-se também complexa no caso de amortecimento interno (histerético). As mesmas funções de forma para um elemento finito convencional de barra em tração-compressão podem ser usadas para o elemento finito de torção, mas com o grau de liberdade de deslocamento definido como deslocamento angular.

4.4.3 Energia cinética no elemento de viga de Bernoulli-Euler

A energia cinética na viga que respeita a teoria elementar de Bernoulli-Euler é somente devido aos movimentos de translação. A inércia de rotação é desprezada. Desta forma, a energia cinética para uma viga de comprimento L é dada por,

$$E_B^K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx \quad (4.52)$$

A energia calculada como média no tempo é então dada por,

$$\langle E_B^K \rangle_t = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \langle \dot{v}^2 \rangle_t dx \quad (4.53)$$

A solução de deslocamento transversal $\hat{v}(x)$ em qualquer ponto arbitrário ao longo da viga pode ser calculada através das funções de forma. Desta forma, e para um elemento do tipo 2-nós, tem-se,

$$\hat{v}(x) = \hat{g}_1(x)\hat{v}_1 + \hat{g}_2(x)\hat{\phi}_1 + \hat{g}_3(x)\hat{v}_2 + \hat{g}_4(x)\hat{\phi}_2 \quad (4.54)$$

Observa-se que as funções de forma $\hat{g}_i(x)$ para um elemento espectral de viga já foram dadas num capítulo anterior e são aqui mostradas novamente de forma resumida. Estas funções de forma podem ser escritas como,

$$\begin{Bmatrix} \hat{g}_1(x) \\ \hat{g}_2(x) \\ \hat{g}_3(x) \\ \hat{g}_4(x) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_1 & r_2 \\ r_2 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r_2 & -r_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ h_3(x) \\ h_4(x) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} [r] \{h(x)\} \quad (4.55)$$

Observa-se que as constantes Δ , r_1 e r_2 e as funções $h_i(x)$ foram definidas no Capítulo 2. Desta maneira, e substituindo na equação acima, tem-se a seguinte fórmula para o cálculo de energia cinética no elemento de viga do tipo Bernoulli-Euler,

$$\begin{aligned} \langle E_B^K \rangle_i = \frac{1}{4} \omega^2 \rho A \mathfrak{R} \left\{ E_B^{11} |\hat{v}_1|^2 + E_B^{12} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_B^{13} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_B^{14} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \right. \\ E_B^{21} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_B^{22} |\hat{\phi}_1|^2 + E_B^{23} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_B^{24} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\ E_B^{31} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_B^{32} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{33} |\hat{v}_2|^2 + E_B^{34} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\ \left. E_B^{41} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_B^{42} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{43} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_B^{44} |\hat{\phi}_2|^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde os termos de energia envolvidos são dados por,

$$E_B^{ij} = \int_0^L \hat{g}_i(x) \hat{g}_j^*(x) dx = \int_0^L \left(\frac{1}{\Delta} r_{ij} h_j \right) \left(\frac{1}{\Delta^*} r_{ij}^* h_j^* \right) dx \quad (4.57)$$

Estes termos podem ser escritos na seguinte forma matricial compacta,

$$\begin{bmatrix} E_B^{11} & E_B^{12} & E_B^{13} & E_B^{14} \\ E_B^{21} & E_B^{22} & E_B^{23} & E_B^{24} \\ E_B^{31} & E_B^{32} & E_B^{33} & E_B^{34} \\ E_B^{41} & E_B^{42} & E_B^{43} & E_B^{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\Delta|^2} \int_0^L \{[r]\{h\}\}\{[r^*]\{h^*\}\}^T dx \quad (4.58)$$

ou, em uma forma mais simples,

$$[E_B] = \frac{1}{|\Delta|^2} [r] \left[\int_0^L \{h\}\{h\}^H dx \right] [r]^H \quad (4.59)$$

onde o sobrescrito H representa a matriz hermitiana, ou seja, $[r]^H = [r^*]^T$. Nota-se também que a matriz $[E_B]$ tem as seguintes características,

$$E_B^{ij} = E_B^{ji}, \quad \forall i \neq j \quad (4.60)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} E_B^{23} &= -E_B^{14} \\ E_B^{33} &= E_B^{11} \\ E_B^{34} &= -E_B^{12} \\ E_B^{44} &= E_B^{22} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Observa-se que a simetria (equação (4.60)) e as características da equação (4.61) são as mesmas vistas anteriormente na matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de viga de Bernoulli-Euler.

4.4.4 Energia potencial no elemento de viga de Bernoulli-Euler

A energia potencial é relacionada a energia de deformação transversal. Desta forma, a energia potencial em uma viga de comprimento L é dada por,

$$E_B^p = \frac{1}{2} \int_0^L EI \phi'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4.62)$$

Esta energia calculada como média no tempo é então dada por,

$$\langle E_B^p \rangle_t = \frac{1}{2} I \int_0^L \langle E(v'')^2 \rangle_t dx \quad (4.63)$$

Da mesma forma feita anteriormente, a segunda derivada da solução pode ser encontrada através das funções de forma, sendo que,

$$\hat{v}''(x) = \hat{g}_1''(x) \hat{v}_1 + \hat{g}_2''(x) \hat{\phi}_1 + \hat{g}_3''(x) \hat{v}_2 + \hat{g}_4''(x) \hat{\phi}_2 \quad (4.64)$$

Assim, a energia potencial é calculada através da seguinte expressão,

$$\begin{aligned} \langle E_B^p \rangle_t = \frac{1}{4} \omega^2 I \mathcal{R} \{ & E_{dB}^{11} |\hat{v}_1|^2 + E_{dB}^{12} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_{dB}^{13} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_{dB}^{14} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \\ & E_{dB}^{21} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_{dB}^{22} |\hat{\phi}_1|^2 + E_{dB}^{23} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_{dB}^{24} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\ & E_{dB}^{31} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{32} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{33} |\hat{v}_2|^2 + E_{dB}^{34} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\ & E_{dB}^{41} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{42} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{43} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_{dB}^{44} |\hat{\phi}_2|^2 \} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Para um elemento espectral de viga, os termos envolvidos nesta expressão são dados como,

$$\begin{bmatrix} E_{dB}^{11} & E_{dB}^{12} & E_{dB}^{13} & E_{dB}^{14} \\ E_{dB}^{21} & E_{dB}^{22} & E_{dB}^{23} & E_{dB}^{24} \\ E_{dB}^{31} & E_{dB}^{32} & E_{dB}^{33} & E_{dB}^{34} \\ E_{dB}^{41} & E_{dB}^{42} & E_{dB}^{43} & E_{dB}^{44} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\Delta|^2} \int_0^L \{ [r] \{ h'' \} \{ [r^*] \} \{ h''^* \} \}^T dx \quad (4.66)$$

ou em uma forma mais simples,

$$[E_{dB}] = \frac{1}{|\Delta|^2} [r] \left[\int_0^L \{ h'' \} \{ h'' \}^H dx \right] [r]^H \quad (4.67)$$

Nota-se que a matriz $[E_{dB}]$ é simétrica e exibe as mesmas características da matriz $[E_B]$ (equação (4.61)) definida para o cálculo de energia cinética.

No caso de FEM, e para um elemento finito convencional de viga de Bernoulli-Euler, a mesma equação (4.56) é usada para o cálculo da energia cinética, e a equação (4.65) é usada para o cálculo da energia potencial, tendo em vista que,

$$E_B^{ij} = \int_0^L \hat{g}_i(x) \hat{g}_j^*(x) dx \quad (4.68)$$

$$E_{dB}^{ij} = \int_0^L \hat{g}_i''(x) \hat{g}_j''^*(x) dx \quad (4.69)$$

e as funções de forma $g_i(x)$ e $i=1,2,3,4$ são as funções de forma do elemento finito de viga de Bernoulli-Euler, onde a solução em ponto arbitrário x ao longo da viga é representado, neste caso, por um polinômio de terceiro grau. Desta maneira, as funções de forma utilizadas neste trabalho para este tipo de elemento são dadas por,

$$g_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad (4.70)$$

$$g_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (4.71)$$

$$g_3(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (4.72)$$

$$g_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (4.73)$$

É importante ressaltar que as funções de forma do elemento finito convencional utilizadas neste trabalho são baseadas em polinômio de grau 3. Soluções mais precisos podem ser encontradas utilizando funções de forma de ordem maior.

4.4.5 Energia cinética no elemento de viga de Timoshenko

A energia cinética na viga que respeita a teoria de ordem mais alta de Timoshenko é devida aos movimentos de translação e à inércia de rotação. Desta forma, a energia cinética para uma viga de comprimento L é dada pela soma de dois termos, ou seja,

$$E_B^K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \dot{v}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L \rho I \dot{\phi}^2 dx \quad (4.74)$$

Calculando a média no tempo desta energia tem-se a seguinte expressão,

$$\langle E_B^K \rangle_t = \frac{1}{2} \rho A \int_0^L \langle \dot{v}^2 \rangle_t dx + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L \langle \dot{\phi}^2 \rangle_t dx \quad (4.75)$$

A solução dos deslocamentos transversais e rotacionais, $\hat{v}(x)$ e $\hat{\phi}(x)$, em qualquer ponto arbitrário x ao longo da viga pode ser calculada através das funções de forma. Para um elemento do tipo 2-nós de viga de Timoshenko, tem-se,

$$\hat{v}(x) = \hat{g}_{v1}(x) \hat{v}_1 + \hat{g}_{v2}(x) \hat{\phi}_1 + \hat{g}_{v3}(x) \hat{v}_2 + \hat{g}_{v4}(x) \hat{\phi}_2 \quad (4.76)$$

$$\hat{\phi}(x) = \hat{g}_{\phi1}(x) \hat{v}_1 + \hat{g}_{\phi2}(x) \hat{\phi}_1 + \hat{g}_{\phi3}(x) \hat{v}_2 + \hat{g}_{\phi4}(x) \hat{\phi}_2 \quad (4.77)$$

As funções de forma $\hat{g}_{vi}(x)$ e $\hat{g}_{\phi i}(x)$ para um elemento spectral de viga em uma forma compacta são definidas como,

$$\begin{Bmatrix} \hat{g}_{v1}(x) \\ \hat{g}_{v2}(x) \\ \hat{g}_{v3}(x) \\ \hat{g}_{v4}(x) \end{Bmatrix} = [P]^T \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_2 \end{bmatrix} \{N(x)\} = [P]^T \{N_v(x)\} \quad (4.78)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{\phi_1}(x) \\ \hat{\sigma}_{\phi_2}(x) \\ \hat{\sigma}_{\phi_3}(x) \\ \hat{\sigma}_{\phi_4}(x) \end{Bmatrix} = [P]^T \{N(x)\} \quad (4.79)$$

Observa-se que as matrizes $[P]$ e $\{N\}$ já foram definidas no Capítulo 2. Substituindo estas funções de forma na equação (4.75) para o cálculo de energia cinética, tem-se,

$$\begin{aligned} \langle E_B^K \rangle_t &= \frac{1}{4} \omega^2 \rho A \mathfrak{R} \left\{ E_B^{11v} |\hat{v}_1|^2 + E_B^{12v} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_B^{13v} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_B^{14v} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \right. \\ & E_B^{21v} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_B^{22v} |\hat{\phi}_1|^2 + E_B^{23v} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_B^{24v} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\ & E_B^{31v} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_B^{32v} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{33v} |\hat{v}_2|^2 + E_B^{34v} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\ & \left. E_B^{41v} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_B^{42v} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{43v} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_B^{44v} |\hat{\phi}_2|^2 \right\} + \\ & + \frac{1}{4} \omega^2 \rho I \mathfrak{R} \left\{ E_B^{11\phi} |\hat{v}_1|^2 + E_B^{12\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_B^{13\phi} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_B^{14\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \right. \\ & E_B^{21\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_B^{22\phi} |\hat{\phi}_1|^2 + E_B^{23\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_B^{24\phi} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\ & E_B^{31\phi} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_B^{32\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{33\phi} |\hat{v}_2|^2 + E_B^{34\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\ & \left. E_B^{41\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_B^{42\phi} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{43\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_B^{44\phi} |\hat{\phi}_2|^2 \right\} \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde os termos E_B^{ijv} e $E_B^{ij\phi}$ são definidos como,

$$\begin{bmatrix} E_B^{11v} & E_B^{12v} & E_B^{13v} & E_B^{14v} \\ E_B^{21v} & E_B^{22v} & E_B^{23v} & E_B^{24v} \\ E_B^{31v} & E_B^{32v} & E_B^{33v} & E_B^{34v} \\ E_B^{41v} & E_B^{42v} & E_B^{43v} & E_B^{44v} \end{bmatrix} = [P]^T \left[\int_0^L \{N_v(x)\} \{N_v(x)\}^H dx \right] [P^*] \quad (4.81)$$

$$\begin{bmatrix} E_B^{11\phi} & E_B^{12\phi} & E_B^{13\phi} & E_B^{14\phi} \\ E_B^{21\phi} & E_B^{22\phi} & E_B^{23\phi} & E_B^{24\phi} \\ E_B^{31\phi} & E_B^{32\phi} & E_B^{33\phi} & E_B^{34\phi} \\ E_B^{41\phi} & E_B^{42\phi} & E_B^{43\phi} & E_B^{44\phi} \end{bmatrix} = \int_0^L \hat{g}_{\phi i}(x) \hat{g}_{\phi j}^*(x) dx = [P]^T \left[\int_0^L \{N(x)\} \{N(x)\}^H dx \right] [P^*] \quad (4.82)$$

Nota-se também que as matrizes $[E_B^{ijv}]$ e $[E_B^{ij\phi}]$ têm as seguintes características,

$$\begin{aligned} E_B^{ijv} &= E_B^{jiv}, \forall i \neq j \\ E_B^{ij\phi} &= E_B^{ji\phi}, \forall i \neq j \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} E_B^{23v} &= -E_B^{14v}, E_B^{33v} = E_B^{11v}, E_B^{34v} = -E_B^{12v}, E_B^{44v} = E_B^{22v} \\ E_B^{23\phi} &= -E_B^{14\phi}, E_B^{33\phi} = E_B^{11\phi}, E_B^{34\phi} = -E_B^{12\phi}, E_B^{44\phi} = E_B^{22\phi} \end{aligned} \quad (4.84)$$

Observa-se que esta simetria e as características da equação (4.84) são as mesmas vistas anteriormente na matriz de rigidez dinâmica do elemento espectral de viga de Timoshenko (Capítulo 2).

4.4.6 Energia potencial no elemento de viga de Timoshenko

A energia potencial na viga de Timoshenko é a soma da energia relacionada com as deformações devidas aos deslocamentos transversais e a energia devida às deformações de cisalhamento. Assim, pode-se escrever que a energia potencial, calculada como média no tempo, é dada por,

$$\langle E_B^p \rangle_t = \frac{1}{2} I \int_0^L \langle E \phi'^2 \rangle_t dx + \frac{1}{2} \kappa A \int_0^L \left\langle G \left(\phi - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\rangle_t dx \quad (4.85)$$

ou seja,

$$\langle E_B^p \rangle_t = \frac{1}{4} I \Re \left\{ \int_0^L E \hat{\phi}' \hat{\phi}'^* dx \right\} + \frac{1}{4} \kappa A \Re \left\{ G \int_0^L (\hat{\phi} - \hat{v}') (\hat{\phi}^* - \hat{v}'^*) dx \right\} \equiv Q1 + Q2 \quad (4.86)$$

Usando as funções de forma dadas pelas equações (4.76) e (4.77), e substituindo na equação acima pode-se obter uma expressão para o cálculo de energia potencial. Esta expressão é extensa e, portanto, será dividida em várias partes. Desta forma, a primeira parte da equação (4.86), que chamamos Q1, é definida como,

$$\begin{aligned}
Q1 = \frac{1}{4} I \Re \left\{ \int_0^L E \hat{\phi}' \hat{\phi}'^* dx \right\} = \frac{1}{4} I \Re \left\{ E (E_{dB}^{11\phi} |\hat{v}_1|^2 + E_{dB}^{12\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_{dB}^{13\phi} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_{dB}^{14\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \right. \\
E_{dB}^{21\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_{dB}^{22\phi} |\hat{\phi}_1|^2 + E_{dB}^{23\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_{dB}^{24\phi} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\
E_{dB}^{31\phi} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{32\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{33\phi} |\hat{v}_2|^2 + E_{dB}^{34\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\
\left. E_{dB}^{41\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{42\phi} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{43\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_{dB}^{44\phi} |\hat{\phi}_2|^2 \right\} \quad (4.87)
\end{aligned}$$

e a segunda parte, Q2, é dada por,

$$Q2 = \frac{1}{4} \kappa A \Re \left\{ G \int_0^L (\hat{\phi} - \hat{v}') (\hat{\phi}^* - \hat{v}'^*) dx \right\} = \frac{1}{4} \kappa A \Re \left\{ G \int_0^L (\hat{\phi} \hat{\phi}^* + \hat{v}' \hat{v}'^* - \hat{\phi} \hat{v}'^* - \hat{v}' \hat{\phi}^*) dx \right\} \quad (4.88)$$

ou, numa forma mais simplificada,

$$Q2 = \frac{1}{4} \kappa A \Re [G (I1 + I2 + I3 + I4)] \quad (4.89)$$

onde os termos I1, I2, I3, e I4 são definidos por,

$$\begin{aligned}
I1 = \int_0^L \hat{\phi} \hat{\phi}^* dx = (E_B^{11\phi} |\hat{v}_1|^2 + E_B^{12\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_B^{13\phi} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_B^{14\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \\
E_B^{21\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_B^{22\phi} |\hat{\phi}_1|^2 + E_B^{23\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_B^{24\phi} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\
E_B^{31\phi} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_B^{32\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{33\phi} |\hat{v}_2|^2 + E_B^{34\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\
E_B^{41\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_B^{42\phi} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_B^{43\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_B^{44\phi} |\hat{\phi}_2|^2) \quad (4.90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I2 = \int_0^L \hat{v}' \hat{v}'^* dx = (E_{dB}^{11v} |\hat{v}_1|^2 + E_{dB}^{12v} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_{dB}^{13v} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_{dB}^{14v} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \\
E_{dB}^{21v} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_{dB}^{22v} |\hat{\phi}_1|^2 + E_{dB}^{23v} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_{dB}^{24v} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\
E_{dB}^{31v} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{32v} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{33v} |\hat{v}_2|^2 + E_{dB}^{34v} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\
E_{dB}^{41v} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{42v} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{43v} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_{dB}^{44v} |\hat{\phi}_2|^2) \quad (4.91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I3 = \int_0^L \hat{\phi} \hat{v}^* dx = & (E_{dB}^{11\phi v} |\hat{v}_1|^2 + E_{dB}^{12\phi v} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_{dB}^{13\phi v} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_{dB}^{14\phi v} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \\
& E_{dB}^{21\phi v} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_{dB}^{22\phi v} |\hat{\phi}_1|^2 + E_{dB}^{23\phi v} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_{dB}^{24\phi v} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\
& E_{dB}^{31\phi v} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{32\phi v} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{33\phi v} |\hat{v}_2|^2 + E_{dB}^{34\phi v} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\
& E_{dB}^{41\phi v} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{42\phi v} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{43\phi v} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_{dB}^{44\phi v} |\hat{\phi}_2|^2)
\end{aligned} \quad (4.92)$$

$$\begin{aligned}
I4 = \int_0^L \hat{v} \hat{\phi}^* dx = & (E_{dB}^{11v\phi} |\hat{v}_1|^2 + E_{dB}^{12v\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_1^* + E_{dB}^{13v\phi} \hat{v}_1 \hat{v}_2^* + E_{dB}^{14v\phi} \hat{v}_1 \hat{\phi}_2^* + \\
& E_{dB}^{21v\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_1 + E_{dB}^{22v\phi} |\hat{\phi}_1|^2 + E_{dB}^{23v\phi} \hat{\phi}_1 \hat{v}_2 + E_{dB}^{24v\phi} \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 + \\
& E_{dB}^{31v\phi} \hat{v}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{32v\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{33v\phi} |\hat{v}_2|^2 + E_{dB}^{34v\phi} \hat{v}_2 \hat{\phi}_2 + \\
& E_{dB}^{41v\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_1 + E_{dB}^{42v\phi} \hat{\phi}_2 \hat{\phi}_1 + E_{dB}^{43v\phi} \hat{\phi}_2 \hat{v}_2 + E_{dB}^{44v\phi} |\hat{\phi}_2|^2)
\end{aligned} \quad (4.93)$$

Os termos envolvidos nestas expressões são dados por,

$$\begin{bmatrix} E_{dB}^{11\phi} & E_{dB}^{12\phi} & E_{dB}^{13\phi} & E_{dB}^{14\phi} \\ E_{dB}^{21\phi} & E_{dB}^{22\phi} & E_{dB}^{23\phi} & E_{dB}^{24\phi} \\ E_{dB}^{31\phi} & E_{dB}^{32\phi} & E_{dB}^{33\phi} & E_{dB}^{34\phi} \\ E_{dB}^{41\phi} & E_{dB}^{42\phi} & E_{dB}^{43\phi} & E_{dB}^{44\phi} \end{bmatrix} = \int_0^L \hat{g}'_{\phi i}(x) \hat{g}'_{\phi j}(x) dx = [P]^T \left[\int_0^L \{N'\} \{N'\}^H dx \right] [P^*] \quad (4.94)$$

$$\begin{bmatrix} E_{dB}^{11v} & E_{dB}^{12v} & E_{dB}^{13v} & E_{dB}^{14v} \\ E_{dB}^{21v} & E_{dB}^{22v} & E_{dB}^{23v} & E_{dB}^{24v} \\ E_{dB}^{31v} & E_{dB}^{32v} & E_{dB}^{33v} & E_{dB}^{34v} \\ E_{dB}^{41v} & E_{dB}^{42v} & E_{dB}^{43v} & E_{dB}^{44v} \end{bmatrix} = \int_0^L \hat{g}'_{vi}(x) \hat{g}'_{vj}(x) dx = [P]^T \left[\int_0^L \{N'_v\} \{N'_v\}^H dx \right] [P^*] \quad (4.95)$$

$$\begin{bmatrix} E_{dB}^{11\phi v} & E_{dB}^{12\phi v} & E_{dB}^{13\phi v} & E_{dB}^{14\phi v} \\ E_{dB}^{21\phi v} & E_{dB}^{22\phi v} & E_{dB}^{23\phi v} & E_{dB}^{24\phi v} \\ E_{dB}^{31\phi v} & E_{dB}^{32\phi v} & E_{dB}^{33\phi v} & E_{dB}^{34\phi v} \\ E_{dB}^{41\phi v} & E_{dB}^{42\phi v} & E_{dB}^{43\phi v} & E_{dB}^{44\phi v} \end{bmatrix} = \int_0^L \hat{g}'_{\phi i}(x) \hat{g}'_{vj}(x) dx = [P]^T \left[\int_0^L \{N\} \{N'_v\}^H dx \right] [P^*] \quad (4.96)$$

$$\begin{bmatrix} E_{dB}^{11v\phi} & E_{dB}^{12v\phi} & E_{dB}^{13v\phi} & E_{dB}^{14v\phi} \\ E_{dB}^{21v\phi} & E_{dB}^{22v\phi} & E_{dB}^{23v\phi} & E_{dB}^{24v\phi} \\ E_{dB}^{31v\phi} & E_{dB}^{32v\phi} & E_{dB}^{33v\phi} & E_{dB}^{34v\phi} \\ E_{dB}^{41v\phi} & E_{dB}^{42v\phi} & E_{dB}^{43v\phi} & E_{dB}^{44v\phi} \end{bmatrix} = \int_0^L \hat{g}'_{vi}(x) \hat{g}_{\phi j}(x) dx = [P]^T \left[\int_0^L \{N'_v\} \{N\}^H dx \right] [P^*] \quad (4.97)$$

Observa-se que as matrizes E_{dB}^{ijv} , $E_{dB}^{ij\phi}$, $E_{dB}^{ijv\phi}$, $E_{dB}^{ij\phi v}$, $E_{dB}^{ij\phi v}$, e $E_{dB}^{ijv\phi}$ são simétricas e respeitam todas as condições dadas na equação (4.84).

No caso de modelagem estrutural utilizando o método dos elementos finitos, as energias cinética e potencial no elemento de viga de Timoshenko podem ainda ser calculadas utilizando as mesmas expressões acima dadas. Entretanto, as funções integrais E_{dB}^{ijv} , $E_{dB}^{ij\phi}$, $E_{dB}^{ijv\phi}$, $E_{dB}^{ij\phi v}$, $E_{dB}^{ij\phi v}$, e $E_{dB}^{ijv\phi}$ são calculadas em função das funções de forma. Neste trabalho serão utilizadas como funções de forma para o elemento finito (FEM) de viga de Timoshenko polinômios de grau 3, tanto para relacionar o ângulo de inclinação ϕ quanto a deflexão v com relação aos deslocamentos nodais. Assim,

$$\begin{aligned} v(x) &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\ \phi(x) &= A_1 a_1 + A_2 a_2 x + A_3 a_3 x^2 + A_4 a_4 x^3 \end{aligned} \quad (4.98)$$

onde as constantes a_i e A_i podem ser encontradas através das condições de contorno. Desta maneira, as soluções em qualquer ponto x ao longo da viga podem ser calculadas a partir das seguintes equações,

$$v(x) = g_{v1}(x)v_1 + g_{v2}(x)\phi_1 + g_{v3}(x)v_2 + g_{v4}(x)\phi_2 \quad (4.99)$$

$$\phi(x) = g_{\phi1}(x)v_1 + g_{\phi2}(x)\phi_1 + g_{\phi3}(x)v_2 + g_{\phi4}(x)\phi_2 \quad (4.100)$$

e desta forma, as funções de forma do elemento de viga de Timoshenko são dadas por,

$$g_{v1} = \frac{1 - 3\vartheta^2 + 2\vartheta^3 + \Phi(1 - \vartheta)}{(1 + \Phi)} \quad (4.101)$$

$$g_{v2} = \frac{\vartheta - 2\vartheta^2 + \vartheta^3 + \frac{1}{2}\Phi(\vartheta - \vartheta^2)}{(1 + \Phi)} L \quad (4.102)$$

$$g_{v3} = \frac{3\vartheta^2 - 2\vartheta^3 + \Phi\vartheta}{(1 + \Phi)} \quad (4.103)$$

$$g_{v4} = \frac{-\vartheta^2 + \vartheta^3 - \frac{1}{2}\Phi(\vartheta - \vartheta^2)}{(1 + \Phi)} L \quad (4.104)$$

$$g_{\phi1} = \frac{6(-\vartheta + \vartheta^2)}{(1 + \Phi)} \frac{1}{L} \quad (4.105)$$

$$g_{\phi2} = \frac{1 - 4\vartheta + 3\vartheta^2 + \Phi(1 - \vartheta)}{(1 + \Phi)} \quad (4.106)$$

$$g_{\phi3} = \frac{6(\vartheta - \vartheta^2)}{(1 + \Phi)} \frac{1}{L} \quad (4.107)$$

$$g_{\phi4} = \frac{-2\vartheta + 3\vartheta^2 + \Phi\vartheta}{(1 + \Phi)} \quad (4.108)$$

com, $\vartheta = \frac{x}{L}$ e $\Phi = \frac{12EI}{\kappa AGL^2}$.

4.4.7 Cuidados que devem ser tomados no cálculo das funções integrais

É importante ressaltar que as funções integrais para os elementos espectrais E_R^{ii} , E_S^{ii} e E_B^{ii} são funções complexas. No caso de análise de estruturas com a consideração de amortecimento interno, o módulo de Young e o módulo de elasticidade polar tornam-se complexos. Neste caso, na obtenção analítica destas funções, que envolve o cálculo de conjugados complexos, deve-se levar em conta que o número de onda torna-se também complexo. Estas funções integrais foram obtidas analiticamente através do uso de um software para a manipulação algébrica (Maple[®]).

A potência dissipada em um membro pode ser calculada através da seguinte equação,

$$P_{\text{diss}} = \omega\eta(E^K + E^P) = \omega\eta E^{\text{total}} \quad (4.109)$$

onde η é o fator de perda por amortecimento interno do material do membro. A potência em uma estrutura do tipo pórtico tridimensional é calculada como sendo a soma de potência dissipada de cada tipo de onda existente. Desta forma, a potência dissipada total pode ser calculada como sendo,

$$P_{\text{diss}}^{\text{total}} = \omega\eta(E_R^{\text{total}} + E_{B1}^{\text{total}} + E_{B2}^{\text{total}} + E_S^{\text{total}}) \quad (4.110)$$

onde E_R^{total} é a energia total devido às ondas longitudinais, E_{B1}^{total} e E_{B2}^{total} é a energia total devido às ondas transversais nos planos 1 e 2, e E_S^{total} é a energia total devido às ondas propagantes por torção. Para um tipo de onda, a energia total representa a energia de um elemento espectral (um elemento pórtico), enquanto ela representa a soma de energias de um conjunto de elementos finitos que representam um elemento pórtico em FEM.

4.5 A medição de fluxo de potência em estruturas do tipo pórtico espacial

O fluxo de potência estrutural pode ser calculado através de medidas de vibração usando uma aproximação para as derivadas espaciais que aparecem nas formulações analíticas. No caso de ondas de flexão em vigas e usando uma aproximação por diferenças finitas para as derivadas espaciais, o número de medidas de aceleração (via acelerômetros) ou de velocidade (via o vibrômetro laser Doppler, LDV) varia de duas a cinco medidas, dependendo da aproximação considerada. A formulação espectral analítica de vigas contém quatro termos, como foi mencionado anteriormente. Dois destes descrevem os termos propagantes de ondas transversais e os outros dois descrevem os termos evanescentes. No caso da condição de campo distante, os termos evanescentes são desprezados. Se a condição de campo distante for considerada e a relação espectral analítica (relação entre o número de onda e a frequência) for utilizada, duas medidas adjacentes de vibração são suficientes para a determinação das componentes de fluxo de potência. Se a relação espectral for estimada, três medidas são necessárias. Se o campo próximo for considerado e a relação de dispersão for estimada, então cinco medidas são necessárias.

Nesta seção, são mostradas as formulações para o cálculo de fluxo de potência através de medidas das vibrações transversais em vigas. As medidas são de campo de velocidade já que o vibrômetro de laser Doppler será utilizado nos experimentos mostrados no capítulo de resultados. Nota-se que a teoria de Bernoulli-Euler para vigas será utilizada. Esta teoria é de ordem baixa quando comparada com aquela de Timoshenko. O campo de deslocamento angular em viga de Bernoulli-Euler é simplesmente representado pela derivada do campo do deslocamento transversal enquanto na teoria de Timoshenko isto não é mais válido. Portanto, na utilização da formulação de Bernoulli-Euler para o caso de campo distante, somente duas medidas são necessárias, por outro lado, utilizando a formulação de Timoshenko no caso de campo distante serão necessárias quatro medidas. Estas medidas envolvem o campo de deslocamento angular, que não é medido diretamente. Nota-se também que, na utilização da teoria de Bernoulli-Euler, a deformação de cisalhamento é desprezada. Entretanto, para o cálculo de fluxo de potência, a tensão de cisalhamento é levada em conta como sendo constante ao longo da viga.

4.5.1 A medição de fluxo de potência em vigas

A equação diferencial que representa a viga de Bernoulli-Euler é dada pela equação (4.23) e com o termo da força definido como $F(t)\delta(x-x_0)$, que é uma força localizada definida em $x=x_0$. A solução harmônica desta equação é, como foi dada anteriormente,

$$\hat{v}(x, \omega) = \mathbf{A}(\omega)e^{-ikx} + \mathbf{B}(\omega)e^{ikx} + \mathbf{C}(\omega)e^{-kx} + \mathbf{D}(\omega)e^{kx} \quad (4.111)$$

onde k é o número de onda definido anteriormente para a viga de Bernoulli-Euler. Nesta equação, os dois primeiros termos representam a contribuição do campo distante, e os dois últimos representam a contribuição do campo próximo. Desprezando os termos do campo próximo, a solução para o campo distante é então dada por,

$$v_{ff}(x, t) = \Re \left\{ \left[\mathbf{A}(\omega)e^{-ikx} + \mathbf{B}(\omega)e^{ikx} \right] e^{i\omega t} \right\} \quad (4.112)$$

$$\hat{v}_{ff}(x) = \mathbf{A}e^{-ikx} + \mathbf{B}e^{ikx} \quad (4.113)$$

O fluxo de potência como média no tempo na viga de Bernoulli-Euler é dado pela equação (4.25), onde o primeiro termo desta equação é definido por,

$$\left\langle \frac{\partial^3 v_{ff}}{\partial x^3} \frac{\partial v_{ff}}{\partial t} \right\rangle_t \equiv \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\partial^3 \hat{v}_{ff}}{\partial x^3} \left(\frac{\partial \hat{v}_{ff}}{\partial t} \right)^* \right) \quad (4.114)$$

de onde, substituindo a expressão (4.112), pode-se chegar facilmente a,

$$\left\langle \frac{\partial^3 v_{ff}}{\partial x^3} \frac{\partial v_{ff}}{\partial t} \right\rangle_t = \frac{1}{2} \omega \Re \left(k^3 (\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{B}\mathbf{B}^*) - k^3 (\mathbf{A}\mathbf{B}^* e^{-i2kx} - \mathbf{A}^* \mathbf{B} e^{i2kx}) \right) \quad (4.115)$$

Observa-se que o segundo termo desta equação representa uma quantidade complexa do tipo $\Re(z - z^*) = 0$, o que resulta em,

$$\left\langle \frac{\partial^3 v_{ff}}{\partial x^3} \frac{\partial v_{ff}}{\partial t} \right\rangle_t = \frac{1}{2} \omega k^3 \Re(\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{B}\mathbf{B}^*) = \frac{1}{2} \omega k^3 (|\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2) \quad (4.116)$$

Pode-se provar da mesma forma que esta equação é igual ao segundo termo da equação (4.25) mas com sinal negativo, ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial^2 v_{ff}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t = -\frac{1}{2} \omega k^3 (|\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2) \quad (4.117)$$

Desta maneira, o fluxo de potência em vigas dado pela equação (4.25) pode ser escrito como,

$$\langle P_B(t) \rangle_t = EI\omega k^3 (|\mathbf{A}|^2 - |\mathbf{B}|^2) \quad (4.118)$$

4.5.1.1 Determinação de fluxo de potência utilizando as componentes de onda A e B

Para medidas v_1 e v_2 em dois pontos adjacentes x_1 e x_2 ao longo de viga, pode-se escrever o campo de deslocamento em cada ponto da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\hat{v}_1(x, \omega) &= \mathbf{A}(\omega)e^{-ikx_1} + \mathbf{B}(\omega)e^{ikx_2} \\ \hat{v}_2(x, \omega) &= \mathbf{A}(\omega)e^{-ikx_2} + \mathbf{B}(\omega)e^{ikx_1}\end{aligned}\quad (4.119)$$

Escrevendo esta equação em uma forma matricial e resolvendo-a para achar os parâmetros **A** e **B**, tem-se,

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{Bmatrix} = \frac{-i}{\Delta} \begin{bmatrix} e^{ikx_2} & -e^{ikx_1} \\ -e^{-ikx_2} & e^{-ikx_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \end{Bmatrix}\quad (4.120)$$

com, $\Delta = 2\sin(k(x_2 - x_1))$ e $\Delta x = (x_2 - x_1)$. Substituindo estes parâmetros na equação de fluxo de potência, equação (4.118), tem-se,

$$\langle P_B(t) \rangle_t = -\frac{EI k^3}{\omega \sin(k\Delta x)} \Im \left\{ \hat{v}_1^* \hat{v}_2 \right\}\quad (4.121)$$

Esta equação pode ser usada para o cálculo de fluxo de potência de flexão em vigas. É importante ressaltar que, para altos números de onda k , a distância Δx deve ser suficientemente pequena para evitar problemas numéricos.

4.5.1.2 Determinação de fluxo de potência por diferenças finitas

O método das diferenças finitas pode ser utilizado para o cálculo das derivadas espaciais, mas deve-se lembrar que este método é aproximado. Usando o fato de que as duas partes da equação (4.25) são iguais quando calculadas como média no tempo com hipótese de campo distante, o fluxo de potência é então dado pela seguinte equação,

$$\langle P_B(x, t) \rangle_t = -2EI \left\langle \frac{\partial^2 v_{ff}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v_{ff}}{\partial x \partial t} \right\rangle_t \quad (4.122)$$

Da equação (4.112) pode-se escrever também que,

$$k^2 = -\frac{1}{\hat{v}_{ff}} \frac{\partial^2 \hat{v}_{ff}}{\partial x^2} \quad (4.123)$$

onde \hat{v}_{ff} representa, no domínio de frequência, a primeira derivada no tempo de $v_{ff}(x, t)$, ou seja, o campo de velocidade transversal no ponto x com hipótese de campo distante ("far field"). Desta forma, a componente transversal de fluxo de potência no campo distante da viga, ignorando o subscrito ff para simplificar, é dada por,

$$\langle P_B(t) \rangle_t = -2 \frac{EI}{\omega} k^2 \left\langle i \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \hat{v} \right\rangle_t \quad (4.124)$$

A derivada espacial é então representada pelo método das diferenças finitas. Para medidas \hat{v}_1 e \hat{v}_2 em dois pontos adjacentes ao longo de viga, o fluxo de potência é dado por,

$$\langle P_B(t) \rangle_t = -2 \frac{EI}{\omega} k^2 \left\langle i \frac{\hat{v}_2 - \hat{v}_1}{\Delta x} \hat{v}_1 \right\rangle_t = -\frac{EI}{\omega} \frac{k^2}{\Delta x} \Re \{ i \hat{v}_2 \hat{v}_1^* - i \hat{v}_1 \hat{v}_1^* \} \quad (4.125)$$

Observando que o segundo termo desta equação é sempre imaginário, e usando o fato de que $\Re \{ i \hat{v}_2 \hat{v}_1^* \} = -\Im \{ \hat{v}_2 \hat{v}_1^* \}$, tem-se,

$$\langle P_B(t) \rangle_t = -\frac{EI}{\omega} \frac{k^2}{\Delta x} \Re \{ i \hat{v}_1 \hat{v}_2 \} = \frac{EI}{\omega} \frac{k^2}{\Delta x} \Im \{ \hat{v}_1^* \hat{v}_2 \} \quad (4.126)$$

É importante ressaltar que a aproximação de campo distante em vigas exige medidas suficientemente longe de discontinuidades da estrutura analisada. Segundo o NOISEUX (1970) deve-se respeitar a relação de que a distância entre o ponto de medida e a discontinuidade mais próxima deve ser maior do que $\lambda/2$, onde λ é o comprimento da onda de flexão.

4.5.2 A medição de fluxo de potência em elementos de barra em tração-compressão e em torção

Da mesma forma dada acima, o fluxo de potência em uma barra, propagando longitudinalmente ao longo da barra, é dado por,

$$\langle P_R(t) \rangle_t = AE \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_t \quad (4.127)$$

Usando uma solução para $u(x,t)$ da mesma forma dada na equação (4.112), tem-se,

$$\langle P_R(t) \rangle_t = \frac{1}{2} AE \omega k \Re(-AA^* + BB^* + A^* B e^{i2kx} - AB^* e^{-i2kx}) = -\frac{1}{2} AE \omega k \Re(AA^* - BB^*) \quad (4.128)$$

Os parâmetros A e B podem ser calculados através da equação que descreve a componente de onda em barras. Esta equação é simplesmente a mesma definida para vigas com a aproximação de campo distante. Desta forma, o fluxo de potência devido aos esforços longitudinais em barras é dado por,

$$\langle P_R(t) \rangle_t = \frac{AEk}{2\omega \sin(k\Delta x)} \Im(\hat{u}_1^* \hat{u}_2) \quad (4.129)$$

onde k é o número de onda para ondas longitudinais e \hat{u} é a amplitude complexa da componente de velocidade axial ao longo da barra, descrita na frequência. Para elementos de torção, o fluxo de potência é dado em forma análoga substituindo a rigidez axial AE pela rigidez torcional GJ , com o k sendo o número de onda das ondas torcionais, ou seja,

$$\langle P_S(t) \rangle_t = \frac{GJk}{2\omega \sin(k\Delta x)} \Im(\hat{\phi}_1^* \hat{\phi}_2) \quad (4.130)$$

onde $\hat{\phi}$ é a amplitude complexa da velocidade angular ao longo da barra. Aproximando a derivada espacial de primeira ordem na equação (4.127) por diferenças finitas, o fluxo de potência ativa é dado por,

$$\langle P_R(t) \rangle_t = AE \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_t = \frac{AE}{\omega \Delta x} \langle -i(\dot{u}_2 - \dot{u}_1)\dot{u}_1 \rangle_t = \frac{AE}{\omega \Delta x} \Re \{ -i \hat{u}_1^* \dot{\hat{u}}_2 \} = \frac{AE}{\omega \Delta x} \Im (\hat{u}_1^* \dot{\hat{u}}_2) \quad (4.131)$$

Analogamente, o fluxo de potência ativa em elementos de torção pode ser dado simplesmente por,

$$\langle P_S(t) \rangle_t = GJ \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle_t = \frac{GJ}{\omega \Delta x} \Im (\hat{\phi}_1^* \dot{\hat{\phi}}_2) \quad (4.132)$$

onde ϕ é o deslocamento angular de torção ao longo da barra. Observe que, para vigas e barras, a fórmula para calcular o fluxo de potência ativa via as componentes de onda A e B resulta na mesma fórmula para a estimação de fluxo de potência usando o método de diferenças finitas quando a distância Δx é muito pequena.

4.6 Vibrações aleatórias

Em caso de medição de vibrações estruturais excitadas com forças aleatórias deve-se fazer, além da média no tempo, mais uma média de amostras (“ensemble average”). Dados aleatórios estacionários são aqueles que têm propriedades estatísticas invariantes no tempo. Se, além disso, as propriedades estatísticas forem invariantes em cada amostra quando uma média das amostras é calculada o sinal é dito ergódico (BENDAT, 1986). Portanto, para um sinal estacionário, o valor médio de N amostras calculado no instante $t = t_1$ é constante,

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) \equiv \mu_x \quad (4.133)$$

e a função de autocorrelação também é constante,

$$R_{xx}(t_1, t_1 + \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t_1) x_k(t_1 + \tau) = R_{xx}(\tau) \quad (4.134)$$

Se os dados são ergódicos, a média no tempo e a função de autocorrelação da amostra k são constantes, independentes da amostra, ou seja,

$$\mu_x(k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) dt = \mu_x \quad (4.135)$$

$$R_{xx}(\tau, k) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_k(t) x_k(t + \tau) dt = R_{xx}(\tau) \quad (4.136)$$

Nota-se que somente os processos estacionários podem ser ergódicos. Para o cálculo de fluxo de potência com dados aleatórios ergódicos, deve-se definir as seguintes funções de densidade espectral:

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ S_{yy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \\ S_{xy}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.137)$$

onde $S_{xx}(f)$ e $S_{yy}(f)$ são chamadas auto-funções da densidade espectral de potência, ou simplesmente auto-espectros, e $S_{xy}(f)$ é chamada função da densidade espectral cruzada entre os sinais $x(t)$ e $y(t)$. Nota-se que as funções de autocorrelação $R_{xx}(\tau)$ e $R_{yy}(\tau)$, e a função de correlação cruzada $R_{xy}(\tau)$ podem ser calculadas através da transformação inversa de Fourier das funções $S_{xx}(f)$, $S_{yy}(f)$, $S_{xy}(f)$. Nota-se, também, que as funções $S_{xx}(f)$ e $S_{yy}(f)$ são chamadas autoespectros do tipo “two-sided”, e que pode-se definir outras funções do tipo “one-sided”, $G_{xx}(f)$ e $G_{yy}(f)$, definidas só para frequências positivas, ou seja,

$$G_{xx}(f) = 2S_{xx}(f), \quad \begin{cases} 0 \leq f < \infty \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.138)$$

4.6.1 Fluxo de potência em vigas

O fluxo de potência pode ser escrito em termos da função de densidade espectral cruzada e do autoespectro. Neste trabalho, adotou-se a formulação de componentes de onda para o cálculo das medidas dos diferentes componentes de fluxo de potência; transversais, longitudinais e torcionais. Usando a transformada inversa de Fourier nas definições das equações (4.137), tem-se,

$$\langle u_1 u_2 \rangle_t = R_{12}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{12} df = \int_0^{+\infty} \Re\{2S_{12}\} df \quad (4.139)$$

Em termos de densidade espectral podemos, portanto, usar S_{12} no lugar de $\langle u_1 u_2 \rangle_t$. De outra forma, usando a amplitude complexa, ainda que esta não seja rigorosamente definida neste caso, podemos escrever,

$$\langle \langle u_1 u_2 \rangle_t \rangle_e = \frac{1}{2} \Re\{ \langle \hat{u}_1^* \hat{u}_2 \rangle_e \} = \frac{1}{2} \Re\{4S_{12}\} = \Re\{2S_{12}\} \quad (4.140)$$

o que nos leva ao mesmo resultado, já que a amplitude complexa é o dobro da transformada de Fourier finita e podemos escrever,

$$\langle \hat{u}_1^* \hat{u}_2 \rangle_e = 4S_{12} \quad (4.141)$$

onde $\langle \rangle_e$ denota a média de amostras.

Em elementos de viga, o fluxo de potência é então dado por,

$$\langle \langle P_B \rangle_t \rangle_e = \frac{2EI k_B^3}{\omega \sin(k\Delta x)} \Im(S_{12}) \quad (4.142)$$

onde k_B é o número de onda para as ondas transversais e S_{12} é a função de densidade espectral cruzada de potência entre as medidas nos pontos 1 e 2. Se as densidades espectrais cruzadas forem medidas em relação a um sinal de referência f , a seguinte relação pode ser facilmente estabelecida,

$$S_{12}(f) = \frac{S_{f1}^* S_{f2}}{S_{ff}} \quad (4.143)$$

onde S_{ff} é o autoespectro do sinal de referência e S_{fi} é a função de densidade espectral cruzada de potência entre a medida no ponto i e o sinal de referência. Usando a resposta em frequência (H_{fi}) medida entre o ponto i e a referência f pode-se escrever,

$$S_{fi} = S_{ff} H_{fi} \quad (4.144)$$

As relações (4.143) e (4.144) são muito úteis na obtenção experimental do fluxo de potência com sinais aleatórios uma vez que os espectros cruzados têm a propriedade de filtrar o ruído de medida não correlacionado (BENDAT, 1986).

4.6.2 Fluxo de potência em elementos de barra

Da mesma forma, nos elementos de barra em tração-compressão e em torção, o fluxo de potência é então dado por, respectivamente,

$$\langle\langle P_R \rangle\rangle_e = \frac{AEk_R}{2\omega \sin(k_R \Delta x)} \Im(S_{12}) \quad (4.145)$$

$$\langle\langle P_S \rangle\rangle_e = \frac{GJk_S}{2\omega \sin(k_S \Delta x)} \Im(S_{12}) \quad (4.146)$$

onde k_R e k_S são os números de onda para as ondas longitudinais e torcionais respectivamente.

4.6.3 Medição de potência injetada

Como foi visto anteriormente, a potência injetada, como média no tempo, em uma estrutura é dada por,

$$P_{in} = \frac{1}{2} \Re(F(\omega)v^*(\omega)) \quad (4.147)$$

onde F é a amplitude complexa da força aplicada na estrutura e v^* é o complexo conjugado da amplitude complexa da velocidade medida no ponto da excitação. Em vibrações aleatórias para sinais ergódicos, deve-se fazer a média das amostras que resultará na seguinte expressão,

$$P_{in} = 2\Re(S_{fv}) \equiv -2\Im(iS_{fv}) \quad (4.148)$$

com $i = \sqrt{-1}$.

4.7 Aplicação I: comparação do fluxo de potência via FEM e SEM em vigas – análise unidimensional

Nesta seção, a formulação para o cálculo da intensidade estrutural em vigas, já apresentada neste capítulo, será utilizada. A teoria de Timoshenko para vigas será utilizada. A intensidade estrutural é calculada via os métodos FEM e SEM para comparação. Uma estrutura composta de duas vigas retas diferentes é usada na demonstração. Uma das vigas é modelada com um fator de dissipação nulo, e a outra com um fator relativamente grande, para que haja um fluxo de potência ativa e então uma potência possa ser injetada na estrutura. As duas vigas têm área de seção de (0.025 m x 0.0034 m). A *viga a* é de aluminum com comprimento de $L=1.1$ m, e com as seguintes propriedades: $\rho=2711$ Kg/m³, $E=61 \times 10^9$ N/m², e um fator de dissipação nulo ($\eta=0$). A *viga b* é de Lexan com comprimento $L=0.4$ m, e com as seguintes propriedades: $\rho=1280$ Kg/m³, $E=2.62 \times 10^9$ N/m², e $\eta=10\%$. Uma carga de excitação de espectro constante é aplicada na extremidade livre da *viga a*, conforme mostrado na Figura 4.7.

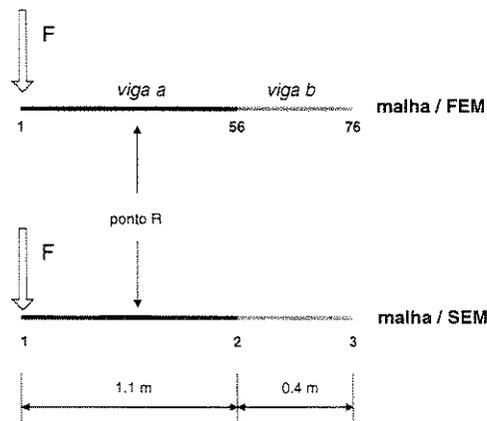


Figura 4.7 – Discretização da estrutura, via FEM e SEM.

A *viga a* é discretizada com 55 elementos finitos de Timoshenko, e a *viga b* é discretizada com 20 elemento. Por outro lado, somente dois elementos espectrais são usados, um para a *viga a* e outro para a *viga b*. O fluxo de potência ativa é calculado no ponto R localizado a uma distância de 0.5 m do ponto da excitação. Como o fator de dissipação na *viga a* é nulo, eventualmente é esperado que o fluxo de potência ativa seja o mesmo em qualquer ponto ao longo da *viga a* e também igual à potência injetada na estrutura. Esta comparação entre a potência injetada e o fluxo de potência ativa pode ser usado como uma ferramenta para a validação de predições das diferentes componentes de intensidade estrutural.

Deve-se aqui mencionar que o elemento espectral do tipo “throw-off” não foi utilizado porque ele representa uma condição de contorno totalmente anecóica, o que redirecionaria toda a energia injetada, ou seja, a energia se propagará em uma só direção. Este tipo de modelagem não seria possível ser feito via o FEM em sua forma tradicional. Seria necessário utilizar elementos infinitos (BATHE, 1996).

Uma faixa de frequências de 0 a 1 kHz, com uma resolução de $\Delta f=1$ Hz, é primeiramente analisada. Esta faixa abrange os primeiros 15 modos de flexão. As FRFs calculadas via FEM são computadas pela inversão direta da matriz dinâmica $[K - \omega^2 M]$. A intensidade estrutural é então calculada a partir destas FRFs. As FRFs calculadas por FEM e SEM nesta faixa de frequência são mostradas na seguinte figura. Observa-se que as duas FRFs são próximas, o que indica que a discretização de FEM foi suficiente nesta faixa de frequência. Ainda assim a diferença entre as curvas chega a ser de até cerca de 3 dB.

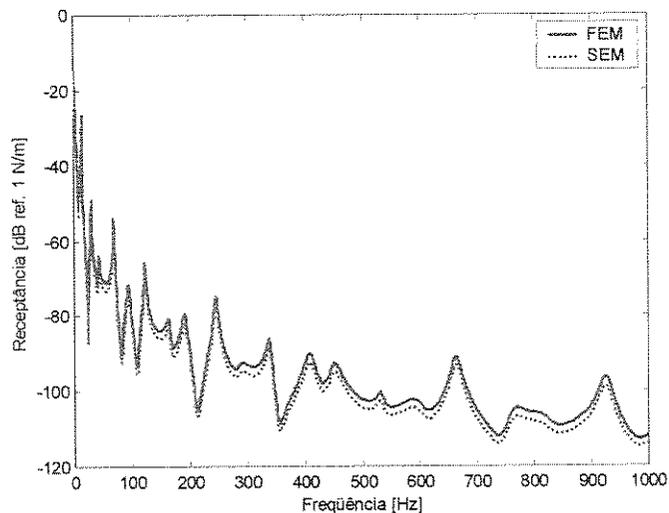


Figura 4.8 – A receptância da estrutura calculada via FEM e SEM.

A comparação da potência injetada com a intensidade estrutural, calculadas via FEM e SEM é mostrada nas figuras a seguir.

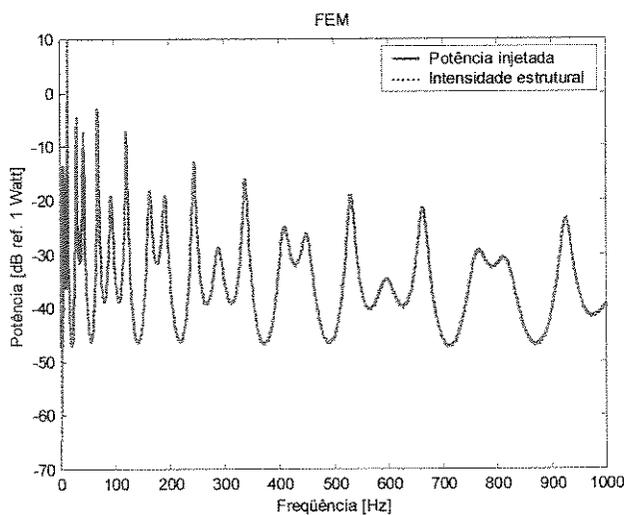


Figura 4.9 – Comparação das previsões do FEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.

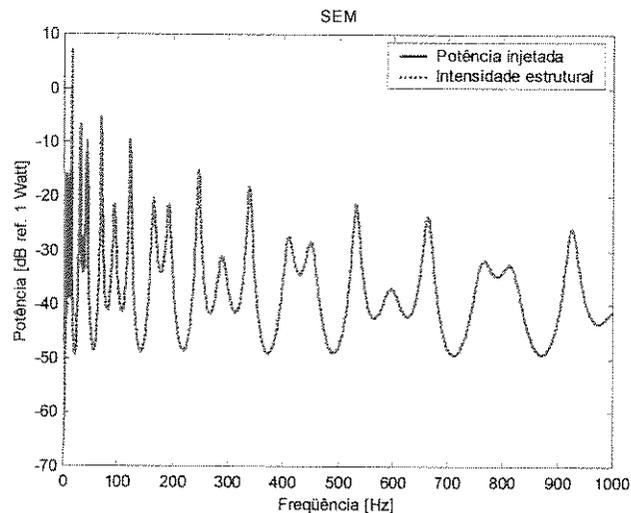


Figura 4.10 – Comparação das previsões do SEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.

Observa-se que, as duas curvas de potência injetada e a intensidade do modelo de FEM estrutural parecem ser exatamente iguais, mas existe uma diferença entre elas. Esta diferença, computada como erro percentual, é mostrada na Figura 4.11, observando-se que ela é nula no caso do modelo de SEM.

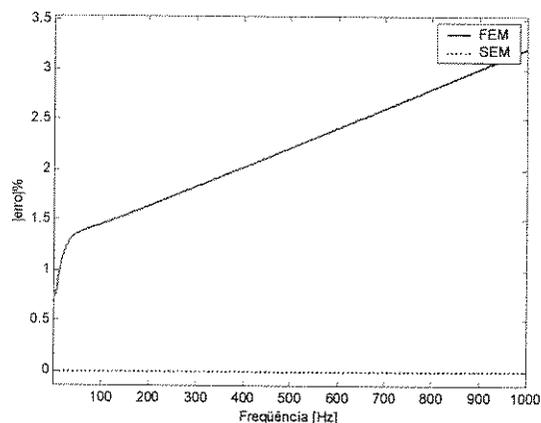


Figura 4.11 – O erro absoluto entre a potência injetada e a intensidade estrutural, calculado usando FEM e SEM.

Análise em frequências mais elevadas também é conduzida. Uma faixa de frequência de 1kHz a 10kHz, com $\Delta f=1$ Hz, é usada. A comparação da potência injetada com a intensidade estrutural, calculadas via FEM e SEM é mostrada nas figuras a seguir.

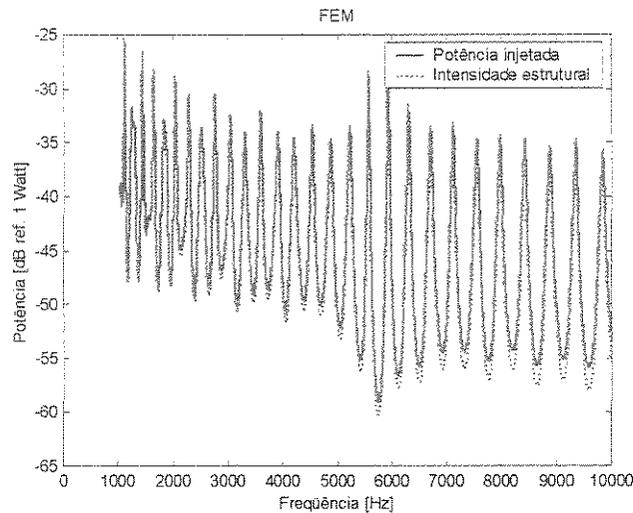


Figura 4.12 – Comparação das previsões do FEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.

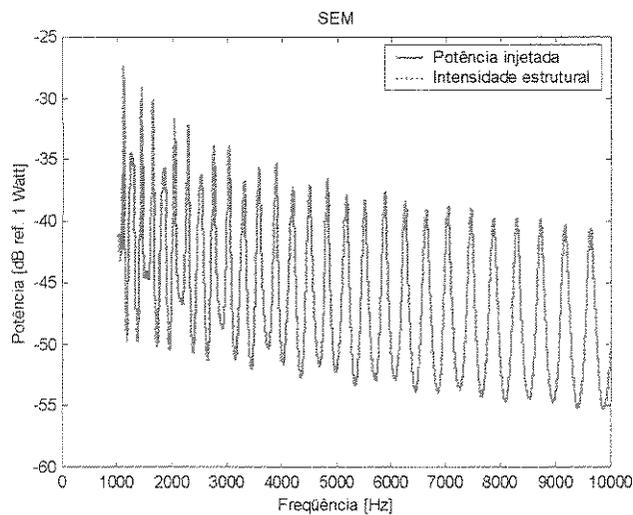


Figura 4.13 – Comparação das previsões do SEM entre a potência injetada e a intensidade estrutural calculada no ponto R.

Neste caso, o erro do modelo de FEM tende a aumentar significativamente com a frequência. Isto é esperado desde que a mesma malha usada anteriormente é também usada para uma faixa maior de frequência. Por outro lado, o erro no modelo de SEM continua praticamente nulo, conforme mostrado na Figura 4.14.

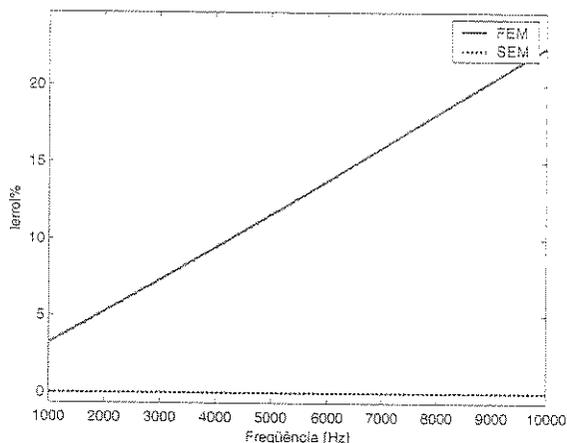


Figura 4.14 – O erro absoluto entre a potência injetada e a intensidade estrutural, calculado usando FEM e SEM.

As FRFs calculadas por FEM e SEM nesta faixa de frequência são mostradas na Figura 4.15. Pode-se também observar que as ressonâncias são diferentes nas predições de FEM e de SEM. Isto é relacionado ao fato que a resposta em frequência calculada via o SEM é baseada em funções da forma exatas do elemento espectral. Por outro lado, a predição de FEM é baseada na ordem do elemento finito utilizado. Em FEM o erro na aproximação pode ser controlado pelo refinamento da malha (versão-h) e pelo grau do polinômio de elemento (versão-p). As aproximações de FEM podem ser melhoradas adotando versões mais elevadas do método (versão -p -, -h ou -hp). Entretanto, isto eventualmente resultaria em um custo computacional muito elevado e indesejável.

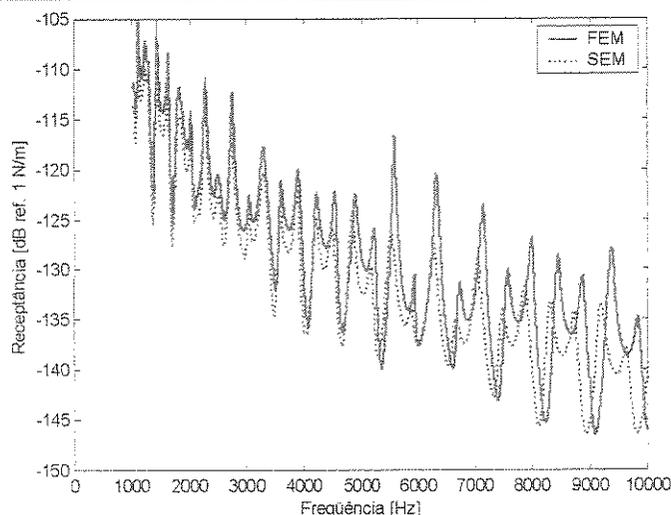


Figura 4.15 – Receptância da estrutura calculada via FEM e SEM.

4.7.1 Comentários gerais

Estudos relacionados ao fluxo de potência ativa estrutural quando conduzidos via o FEM, apresentam algumas dificuldades em altas frequências devido à alta densidade modal. O SEM, por outro lado, é formulado no domínio de frequência e, portanto, apresenta vantagens consideráveis no tratamento de tais problemas. A diferença entre a potência injetada e a intensidade estrutural em um ponto da estrutura calculados via FEM e SEM indica a exatidão do SEM quando comparado ao FEM.

4.8 Aplicação II: estudo de fluxo de potência e energia em uma viga em configuração T – análise bidimensional

A análise da intensidade estrutural e de energia vibracional em estruturas pode ser uma ferramenta para entender e identificar as fontes dos altos níveis de vibração em uma estrutura, como também as principais trajetórias de propagação destas energias. Isto pode permitir projetar e controlar as vibrações indesejáveis. Por este motivo foi projetada uma estrutura, do tipo “round-robin”, de vigas que formam um ‘T’ no “Naval Surface Warfare Center” em Bethesda, Maryland,

sob a orientação do Dr. R. P. SZWERC. O estudo nesta viga foi inicialmente sugerido por BURROUGHS ET. AL (1994) entre outras estruturas sugeridas para realizar um estudo de ruído gerado por vibrações carregadas por meio estrutural (“structure-borne”) em frequências audíveis. o chamado “Structure-borne Noise”. A viga-T é feita de um material termo-plástico chamado Lexan. Este material é leve e tem um alto fator de dissipação, o que resulta em reduzir a amplitude das ondas estacionárias em relação às ondas propagantes. Conseqüentemente, os níveis de fluxo de potência em uma viga feita deste material serão funções da posição ao longo da viga. Com materiais com baixa dissipação, ondas estacionárias de alta amplitude podem ser geradas e não teríamos praticamente fluxo de potência.

4.8.1 Descrição da estrutura

A viga-T, conforme mostrado na Figura 4.16, é formada de três vigas retas. As propriedades da estrutura são : módulo de Young $E=2.62 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, momento de inércia $I=1.43 \times 10^{-7} \text{ m}^4$, Poisson $\nu=0.25$, fator de dissipação $\eta=0.01$, o comprimento das vigas A, B e C respectivamente $L_A=0.779 \text{ m}$, $L_B=1.0827 \text{ m}$, $L_C=0.9303 \text{ m}$, área da seção $A=0.0317 \times 0.054 \text{ m}^2$. As seções das vigas A, B e C são retangulares.

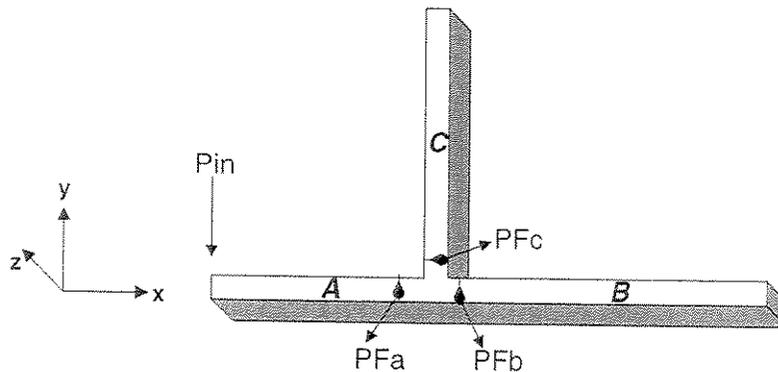


Figura 4.16 – A viga-T.

A viga-T foi modelada usando os métodos FEM, SEM e SEA através dos programas desenvolvidos nesta tese. Uma força de excitação de um espectro constante é aplicada na extremidade livre da viga A. Esta força resulta em vibrações somente no plano x-y da estrutura. Desta forma, ondas de vibração do tipo longitudinal e transversal são geradas.

4.8.2 Modelagem via FEM e SEM

A estrutura foi discretizada com 110 elementos finitos. Cada elemento representa movimentos axiais representados por elementos de barra e movimentos transversais representados por elementos finitos de viga de Timoshenko. Por outro lado, a malha de SEM contém somente três elementos.

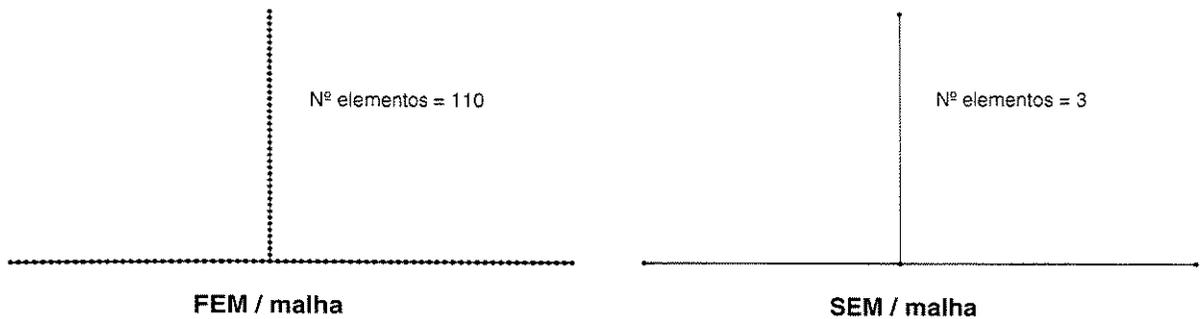


Figura 4.17 – A viga-T discretizada via FEM e SEM.

A estrutura foi analisada na faixa de frequência de 1 Hz a 1 kHz, com uma resolução de 1Hz. A energia total (cinética e potencial) foi calculada em cada uma das vigas A, B e C. Através desta energia, a potência dissipada em cada viga foi computada através da seguinte expressão,

$$P_{\text{diss}} = \omega \eta (E_{\text{tot}}^L + E_{\text{tot}}^B) \quad (4.149)$$

onde P_{diss} é a potência dissipada na viga e $E_{\text{tot}}^L, E_{\text{tot}}^B$ é a energia total das ondas vibracionais longitudinais e transversais, respectivamente. A potência injetada também foi computada.

4.8.3 Modelagem via SEA

Para uma modelagem das energias que se propagam no plano desta estrutura, o modelo de SEA consiste em seis subsistemas (dois para cada viga). O acoplamento destes subsistemas é mostrado na Figura 4.18. Nota-se que as setas mostradas na figura indicam o acoplamento entre

os diferentes subsistemas. Observa-se também que não há nenhum acoplamento entre as ondas longitudinais e transversais do mesmo subsistema.

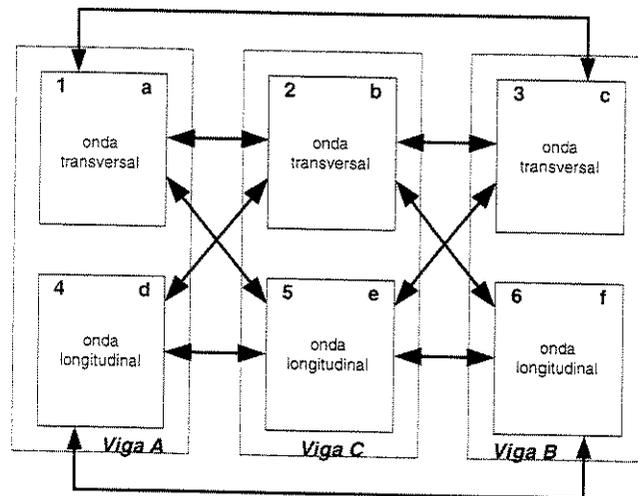


Figura 4.18 – O modelo de SEA para a viga-T.

As equações de balanço de energia são escritas para cada subsistema, e as seis equações resultantes são escritas em forma matricial e então o sistema matricial é resolvido para obter a distribuição de energia em cada viga da estrutura. A razão entre a potência dissipada e a potência injetada é calculada. Nota-se que a escala de frequência utilizada no SEA é logarítmica, normalmente de 1/3 de oitava. Neste estudo, uma escala linear foi utilizada com o objetivo de poder comparar a distribuição de energia nas três viga com os resultados obtidos por HAMBRIC (1995).

4.8.4 Modelo de Hambric

HAMBRIC (1995) calculou a distribuição de potência na mesma viga-T usando o método dos elementos finitos. Ele desenvolveu um pós-processamento, conhecido mais tarde como McPOW (Mechanical POWER) feito no ambiente do conhecido pacote comercial MSC/NASTRAN[®]. Ele utilizou o elemento BAR do NASTRAN para modelar as três vigas da estrutura, usando um tamanho de 0.0254m para cada elemento. Segundo HAMBRIC (1995), esta discretização foi suficiente para resolver as ondas de flexão até uma frequência maior do que 1000 Hz. O elemento

BAR do NASTRAN é um elemento geral de pórtico que suporta tração, torção, flexão em dois planos, e cisalhamento em dois planos ortogonais. É um elemento para análise tridimensional de vigas com seis GDLs por nó. A descrição matemática deste elemento pode ser encontrada no manuais de usuário do NASTRAN.

4.8.5 Resultados e comparações

As distribuições de energia dissipada calculadas via FEM, SEM, SEA, através dos programas desenvolvidos neste trabalho são comparadas com as obtidas por HAMBRIC (1995). A potência dissipada em cada um dos segmentos da viga-T calculada através da equação (4.149) é mostrada na Figura 4.19, Figura 4.20 e Figura 4.21.

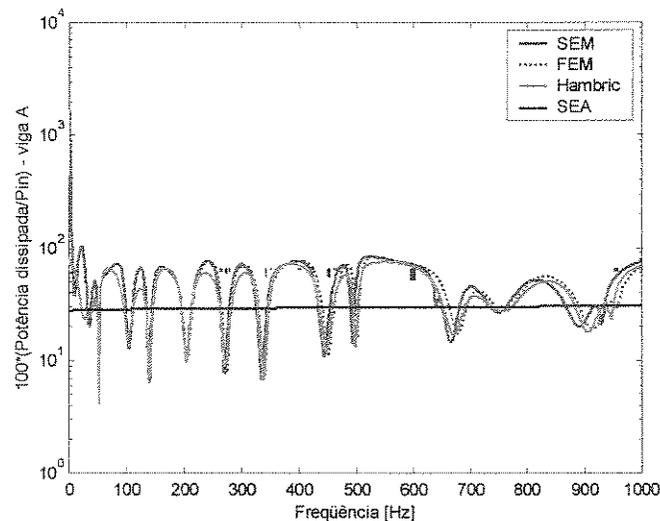


Figura 4.19 – Razão de potência na viga A por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.149), e comparada com resultados do Hambric.

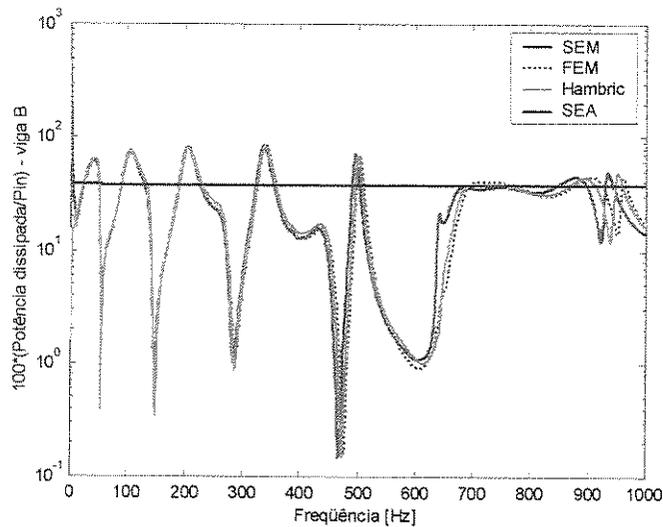


Figura 4.20 – Razão de potência na viga B por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.149), e comparada com resultados do Hambric.

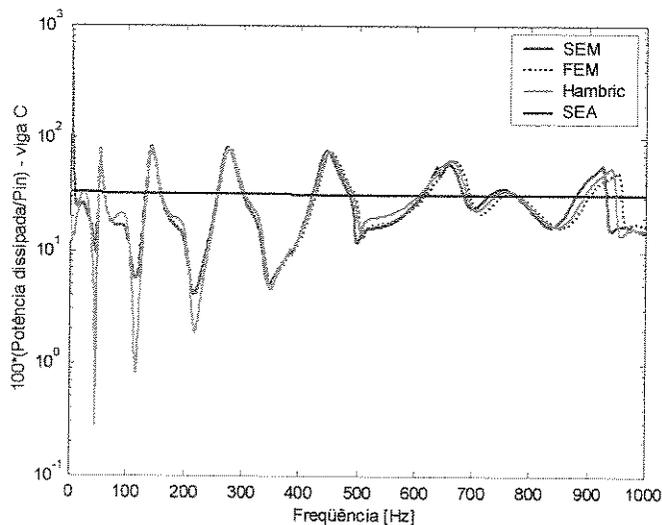


Figura 4.21 – Razão de potência na viga C por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.149), e comparada com resultados do Hambric.

Nas três figuras acima mostradas observa-se que os níveis de potência dissipada calculados via FEM e SEM se comparam bem com os níveis estatísticos de SEA e com as estimativas de HAMBRIC (1995). Observa-se, também, que as estimativas via FEM são um pouco diferentes daquelas do SEM especialmente em altas frequências, o que é esperado desde que o método SEM oferece uma solução exata para a equação de movimento.

Um estudo experimental foi realizado para a medição de fluxo de potência na viga-T, ver HAMBRIC (1995), CUSCHIERI (1996) e SZWERC E HAMBRIC (1996). A análise por SEA foi também feita por CUSCHIERI ET. AL (1996). Os resultados experimentais obtidos por HAMBRIC (1995). e do SEA obtidos por CUSCHIERI (1996) se comparam muito bem com os resultados obtidos neste trabalho por SEA, SEM, e FEM. Deve-se ressaltar que os resultados experimentais de SZWERC E HAMBRIC (1996) foram avaliados e validados por CIMERMAN E BURTON (1997) usando o programa comercial AUTOSEA®.

4.8.6 Alternativa para o cálculo da potência dissipada através de fluxo de potência

A fim de verificar o uso da equação (4.149), outra alternativa é adotada para o cálculo da potência dissipada em cada membro da estrutura. A potência dissipada é calculada através de fluxo de potência computado em três pontos da estrutura próximos da junta-T a uma distância de aproximadamente 0.025m da junta, veja a Figura 4.16. Os componentes de fluxo de potência nestes pontos são identificados como PFa, PFb, e PFc. Estes fluxos de potência foram calculados via FEM e SEM. Estes componentes foram então usados para calcular a potência dissipada em cada viga como,

$$\begin{aligned} P_{diss}^A &= P_{in} - PFa \\ P_{diss}^B &= PFb \\ P_{diss}^C &= PFc \end{aligned} \quad (4.150)$$

A razão entre a potência dissipada e a potência injetada em cada viga é mostrada na Figura 4.22, Figura 4.23 e Figura 4.24. Observa-se que estas estimações também mostram uma concordância com as estimações de HAMBRIC (1995) e do método SEA. Nota-se que provavelmente HAMBRIC (1995) usou o fluxo de potência para calcular a potência dissipada já que a concordância dos resultados é melhor na Figura 4.22, Figura 4.23 e Figura 4.24, principalmente em baixas frequências.

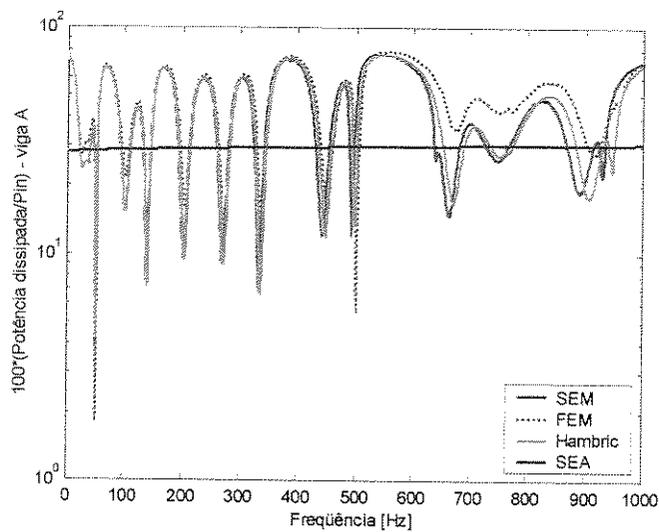


Figura 4.22 – Razão de potência na viga A por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.150), e comparada com resultados do Hambric.

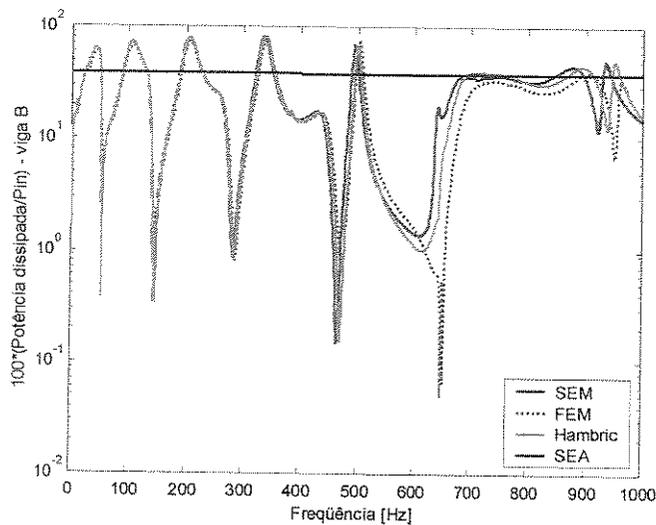


Figura 4.23 – Razão de potência na viga B por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.150), e comparada com resultados do Hambric.

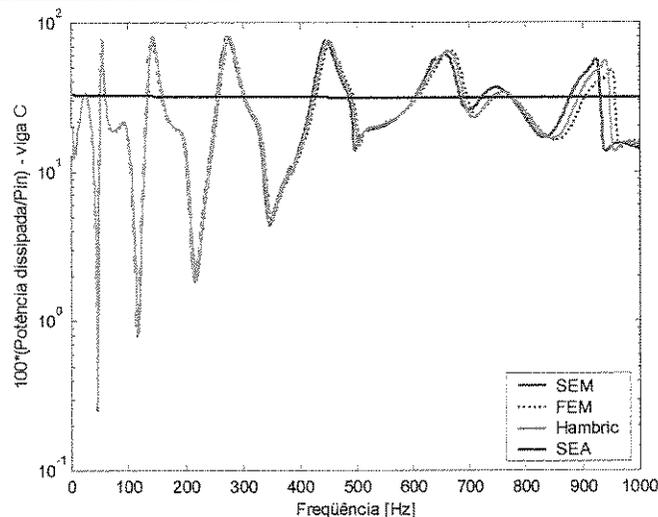


Figura 4.24 – Razão de potência na viga C por SEM, FEA, SEA computada via Eq. (4.150), e comparada com resultados do Hambric.

4.8.7 A distribuição de velocidades via SEM e SEA

A partir das componentes de energia calculadas via SEM, pode-se calcular os níveis de velocidade nas três vigas da estrutura. Estes níveis podem ser calculados através das expressões mostradas no Capítulo 3, que trata de SEA. Os níveis de velocidade via SEM podem ser vistos na Figura 4.25.

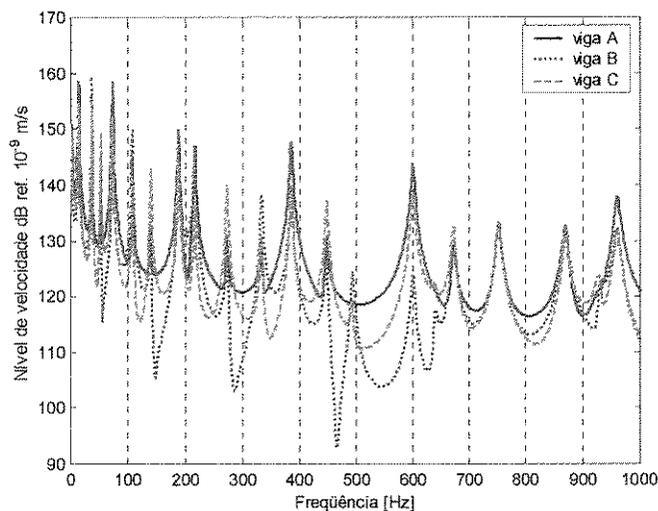


Figura 4.25 – Nível de velocidade por SEM.

Observa-se que os níveis de velocidade nas vigas A e C são superiores ao da viga B. Isto é devido à potência ser injetada transversalmente na viga A, o que causa amplitudes de vibração mais altas na viga C do que na viga B, mesmo que a viga B esteja com comprimento maior. Isso é também devido à forma dos modos vibracionais, e que deve ser claro através de uma análise modal da estrutura. Estes níveis computados via SEA são mostrados na Figura 4.26.

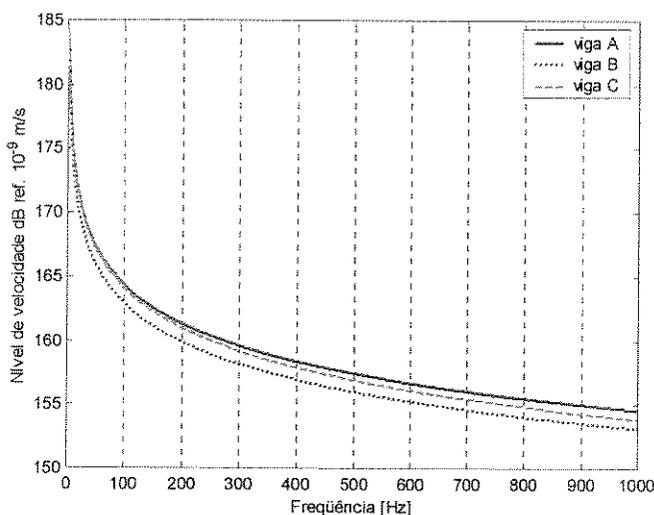


Figura 4.26 – Nível de velocidade por SEA.

Observa-se que nesta simulação que os níveis de velocidade nas vigas A e C são superiores ao da viga B, de forma análoga ao resultado obtido via SEM. Observa-se também que, devido a característica de SEA, onde se calcula os níveis de energia como média na frequência e espaço, a Figura 4.26 não mostra os picos das ressonâncias observadas na Figura 4.25.

Capítulo 5

Outras aplicações do método dos elementos espectrais

A análise modal é uma ótima ferramenta para análise de modos de vibração de estruturas, entretanto, no caso de alta densidade modal ou em casos de estruturas de grande extensão e/ou amortecimento localizado, a análise modal torna-se menos eficiente. Modos complexos podem ser interpretados como fenômenos de propagação de ondas estruturais. O SEM oferece uma formulação para modelagem de estruturas infinitas e, desta forma, uma das aplicações do SEM será o estudo dos modos estruturais fortemente complexos. Um coeficiente para quantificar a complexidade modal será apresentado. Estruturas uni-, bi-, e tridimensionais do tipo pórtico serão estudados. A outra aplicação do SEM é relacionada aos fatores de acoplamento entre os diferentes subsistemas utilizados especificamente no método de análise estatística de energia (SEA). Estes fatores são obtidos via o SEM de forma exata e sem restrição de frequência. Assim, a segunda aplicação do SEM apresentada neste trabalho é para a obtenção dos fatores de acoplamento da SEA. A terceira aplicação é a obtenção das impedâncias e condições de contorno experimentais. Modelos de engaste de vigas e vigas com terminações anecóicas são apresentados.

5.1 Os modos complexos e o fenômeno de propagação de ondas

5.1.1 Introdução

Nos últimos anos a comunidade de dinâmica estrutural tem se afastado das técnicas relacionadas ao fenômeno de propagação de ondas. O tópico de propagação de ondas estruturais

tinha praticamente desaparecido dos livros de dinâmica estrutural, sendo substituído pelas teorias de análise modal. Com o crescente interesse na dinâmica estrutural em altas frequências, com alta densidade modal para aplicações em vibro-acústica, a análise de sistemas dinâmicos usando as metodologias de propagação de ondas está voltando a ser utilizada. Em altas frequências as condições de contorno não podem ser idealmente modeladas como sendo simplesmente apoiadas ou fixas. Estruturas reais não se encontram isoladas do meio. A interação com o meio adjacente, fluido ou sólido, deve ser levada em consideração. As ondas estruturais que se propagam para o meio adjacente representam dissipação de energia, e esta dissipação é normalmente considerada em modelos modais com o uso dos coeficientes de amortecimento modal. O amortecimento pode ser causado pelo fenômeno de propagação de ondas em estruturas, assim como existe um amortecimento devido à geometria da estrutura, chamado o *amortecimento geométrico*. Estruturas infinitas também causam o direcionamento de ondas propagantes. Este tipo de estrutura e o amortecimento geométrico são importantes fontes para a complexidade modal. O termo *complexidade modal* representa a dispersão na fase de um autovetor ou modo operacional (“Operational Deflection Shape (ODS)”). Vários fatores podem ser responsáveis em gerar modos complexos entre eles, o amortecimento não-proporcional, o comportamento estrutural não-linear, os efeitos de ruído experimental, os efeitos de aerodinâmica, “leakage”, e “aliasing” (IMREGUN E EWINS (1995), IBRAHIM E SESTIERI (1995), LALLEMENT E INMAN (1995)).

Modos naturais são gerados através da superposição de ondas que refletem nas extremidades de uma estrutura finita formando ondas estacionárias, ou reverberantes. Desta forma, e considerando que o amortecimento é pequeno e bem distribuído na estrutura analisada, modos reais são gerados. Isto significa que, para um sistema discreto, a matriz de amortecimento é uma combinação linear das matrizes de rigidez e de massa, ou, em forma mais geral, as três matrizes satisfazem uma relação algébrica bem conhecida (EWINS, (1984)). Para uma estrutura discreta linear representada por estas três matrizes, os modos complexos podem ser calculados através da transformação do sistema de equações algébricas ordinárias de equilíbrio de segunda ordem para um sistemas de equações algébricas de primeira ordem mas com tamanho duplicado. Dependendo da escolha das variáveis de estado, um sistema simétrico ou não-simétrico é obtido e então o problema de autovalor pode ser resolvido. Os autovalores e autovetores exibem a propriedade de ortogonalidade e podem ser tratados como modos naturais. Estes autovetores são

geralmente complexos. Nesta seção, a questão que surge e será tratada é de como interpretar fisicamente estes modos complexos. Estruturas semi-infinitas podem exibir modos locais, definidos somente em uma parte da estrutura. Estruturas deste tipo, semi-infinitas, devem ser tratadas de uma forma diferente, utilizando a abordagem de propagação de ondas ou as formulações espectrais.

Várias tipos de estruturas lineares, sendo finitas ou infinitas, quando excitadas com uma força senoidal com uma certa frequência que não seja a frequência natural da estrutura apresentam uma forma de vibrar. Esta forma de vibração é usualmente conhecida como ODS. O ODS pode ser definido como sendo a distribuição espacial da magnitude e da fase da deflexão da estrutura em questão em uma frequência específica. O ODS pode ser medido experimentalmente e pode fornecer informações importantes para compreender e analisar o comportamento dinâmico de estruturas. Os modos operacionais são geralmente quantidades complexas, mesmo no caso de amortecimentos estruturais proporcionais mas, neste caso, a fase é constante ao longo da estrutura.

Vários trabalhos foram escritos para tratar do assunto de modos complexos. MITCHELL (1990) revisou o conceito de modos complexos e descreveu as equações no espaço do estado de um sistema dinâmico não-proporcional, e apresentou uma metodologia para resolver o sistema de equações de estado usando um procedimento iterativo. PRATER JR. (1991) apresentou uma análise de modos complexos em sistemas com amortecimento não-proporcional. Modelos unidimensionais do tipo barra que exibe propagação de ondas longitudinais foram utilizadas como exemplos. Ele utilizou um amortecimento localizado de tipo viscoso e amortecimento distribuído ao longo da barra, e mostrou como os autovalores e os autovetores variam com o grau de proporcionalidade do amortecimento não-proporcional. IBRAHIM E SESTIERI (1995) realizarem mais um estudo sobre os modos complexos gerados em sistemas com amortecimento não-proporcional, e mostraram como estes modos complexos podem ser utilizados na atualização dos modelos analíticos. IMREGUN E EWINS (1995) investigaram a origem da complexidade modal, e mostrarem as diversas causas deste tipo de modo, como amortecimentos não-proporcionais, efeitos geroscópicos, efeitos aerodinâmicos, etc. Dois parâmetros para quantificar a complexidade de modos foram apresentados; o fator de complexidade modal em relação de fase e

o fator de complexidade modal em relação de amplitude dos modos. O cálculo dos autovalores e autovetores em sistemas amortecidos, proporcional e não-proporcional, e sistemas não-amortecidos foram também estudados por LALLEMENT E INMAN (1995). Oliveto et al. (1997) apresentaram uma metodologia numérica baseada na superposição modal para a avaliação das frequências e modos complexos de uma viga simplesmente apoiada com amortecimentos viscosos rotacionais nas suas extremidades. A relação entre as componentes reais e imaginárias foi tratada no trabalho de GARVEY ET AL. (1998).

A seguir será proposto um coeficiente para quantificar os modos complexos. Serão analisados modelos unidimensionais de viga: finita, semi-infinita, e infinita, modelos bidimensionais de pórtico que envolvem a propagação de ondas longitudinais e transversais, modelos tridimensionais do tipo pórtico espacial que envolvem todos os tipos de ondas estruturais e, finalmente, um modelo de placa infinita com uma excitação pontual fora do plano. O método dos elementos espectrais (SEM) oferece uma solução exata para os problemas de propagação de ondas e, portanto, ele é uma excelente ferramenta para o estudo de propagação de ondas em estruturas. O SEM será usado na modelagem destas estruturas. Elementos espectrais de barra, viga de Timoshenko, e de torção serão usados. Para finalizar este estudo, um experimento simples de uma viga reta enfiada em uma caixa de areia é conduzido.

5.1.2 O fator de complexidade modal

A quantificação de complexidade de um modo natural ou de um ODS tem o objetivo de mostrar a relação entre as partes reais e imaginárias. Um modo é considerado complexo quando ele exibe partes imaginárias relativamente significativas em relação às partes reais após uma normalização fazendo um dos elementos do autovetor ser real.. Neste trabalho adotou-se o quadrado do coeficiente de correlação entre as componentes reais e imaginários para quantificar a complexidade modal. Este coeficiente, aqui chamado de fator de complexidade modal, β_r^2 , de um dado modo r ou de um ODS, é calculado como,

$$\beta_r^2 = \frac{|X_r^T Y_r|^2}{|X_r^T X_r| |Y_r^T Y_r|} \quad (5.1)$$

onde X_r é a parte real e Y_r é a parte imaginária do $r^{\text{ésimo}}$ modo (ou ODS), incluídos todos os graus de liberdade da estrutura analisada. Nota-se que β_r^2 varia de 0 a 1, onde para modos puramente reais β_r^2 é igual a 1. Por outro lado, β_r^2 é menor do que 1 para modos complexos. Nos modelos abaixo analisados será mostrado que no caso de ODS que exhibe o fenômeno de pura propagação de ondas o fator β_r^2 tem que ser teoricamente igual a zero. Este fator exhibe valores que variam de 0 a 1. Entretanto, outro fator para a quantificação da complexidade modal é também proposto. Este fator pode ser usado em problemas de vibrações unidimensionais, ou seja, vibrações caracterizadas por somente um tipo de onda. Para este tipo de vibração, o modo tem normalmente a forma elíptica quando mostrado no plano complexo. O fator de complexidade é calculado através de ajuste de curva desta elipse, usando os dois raios da mesma. O ajuste de curva é feito usando um algoritmo de ajuste de mínimos quadrados não lineares. Este fator é então calculado como sendo uma medida da abertura desta elipse, ou seja,

$$\gamma_r = 1 - \frac{r_a}{r_b} \quad (5.2)$$

onde r_a e r_b são os raios menor e maior da elipse, respectivamente. Observa que, para $\gamma_r=1$ a elipse degenera á uma linha (modo puramente real), e para $\gamma_r=0$ degenera á um círculo (modo puramente imaginário). É importante ressaltar que esta forma de elipse pode ser observada somente em estruturas simples ou quando a análise é feita para um só tipo de onda, que se propaga na estrutura.

5.1.3 Identificação dos modos naturais

Como foi mencionado nos capítulos anteriores, o SEM não descreve um problema dinâmico como o usual problema de autovalor/autovetor. Em vez disso, ele oferece a resposta em

freqüência em todos os graus de liberdade envolvidos. A partir da Função de Resposta em Freqüência (FRF), podem-se identificar os modos naturais, i.e., os autovalores e os autovetores. Neste trabalho, os parâmetros modais são identificados usando o método de polinômios ortogonais de Chebychev. Este método não é o objetivo neste trabalho e, portanto, não vai ser detalhado aqui podendo ser revisado na referência ARRUDA ET AL. (1996).

5.1.4 Modelos de propagação de onda unidimensionais

Para mostrar o comportamento dos sistemas finitos, semi-infinitos, e infinitos, quatro estruturas simples de vigas são modeladas via SEM. Todas as vigas têm as propriedades mostradas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades das vigas usadas nos modelo unidimensionais.

Propriedade	Valor
Módulo de Young E	$2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Densidade ρ	7800 Kg/m^3
Área da seção A	$0.01915 \times 0.0031 \text{ m}^2$
Comprimento finito L	0.5 m
Coefficiente de Poisson ν	0.30
Amortecimento estrutural η	0

As vigas são definidas na seguinte seqüência: viga finita, semi-infinita, semi-infinita com descontinuidade e viga infinita. Em todas os modelos de viga é aplicada uma força pontual de espectro constante na freqüência conforme mostrado na Figura 5.1. A faixa de freqüência usada na análise é de 1 Hz a 1 kHz, com resolução de 0.5 Hz. As FRFs, os modos naturais e os ODSs são avaliados com uma resolução espacial de 0.01 m, em todos as vigas (usando as funções de interpolação do SEM).

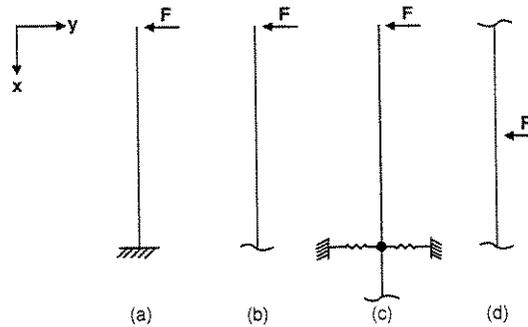


Figura 5.1 – Exemplos de vigas retas: (a) engastada-livre; (b) semi-infinita; (c) semi-infinita com descontinuidade; (d) infinita.

5.1.4.1 Viga engastada-livre (a)

Para investigar o conceito de modo natural e ondas estacionárias, o exemplo da Figura 5.1 (a) é primeiramente usado. Somente um elemento espectral de viga de Timoshenko é usado na modelagem numérica. A resposta em frequência desta viga é mostrada na Figura 5.2. Nota-se que todas as ressonâncias exibem picos afinados devido ao modelo não-amortecido aqui considerado.

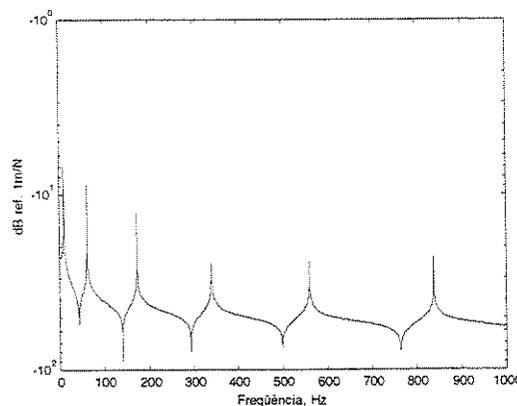


Figura 5.2 – FRF da viga engastada-livre da Figura 5.1 (a).

Devido à força aplicada na extremidade da viga, as componentes de velocidade ou de energia propagam-se ao longo da viga, chegam à outra extremidade e se refletem. As ondas são aprisionadas na estrutura, refletem-se para a frente e para trás formando ondas espacialmente estacionárias (“standing-wave pattern”). Como resultado disto formam-se os modos naturais na faixa de frequência analisada. O comportamento das ondas estacionárias da terceira ressonância

(173 Hz), que é aproximadamente o terceiro modo natural, é mostrado na Figura 5.3. Observa-se nesta figura como a forma deste modo muda com tempo.

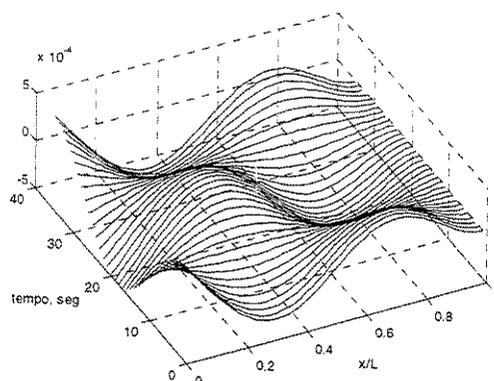


Figura 5.3 – O comportamento das ondas estacionárias da terceira ressonância da viga engastada-livre.

Com o objetivo de calcular o fator de complexidade modal, alguns dos modos naturais foram identificados usando o método de polinômios ortogonais de Chebychev. O terceiro modo foi identificado na frequência 173.3 Hz. O modo neste caso é puramente real, e o coeficiente de correlação β (fator de complexidade modal) é igual a 1. O fator γ é também igual a 1, desde que o raio menor $r_a=0$. Isto pode ser claramente visto da figura do autovetor identificado representado no plano complexo (Nyquist), Figura 5.4. Observa-se que a linha reta mostra que este modo é um modo real. É importante aqui ressaltar que todas as figuras de Nyquist deste capítulo são mostradas com eixos igualmente escalonados (“equal aspect ratio”). O fato do autovetor real ser representado por coeficientes complexos devem-se ao método de estimação e da normalização utilizados. O modo real é, neste caso, um vetor real multiplicado por uma constante complexa.

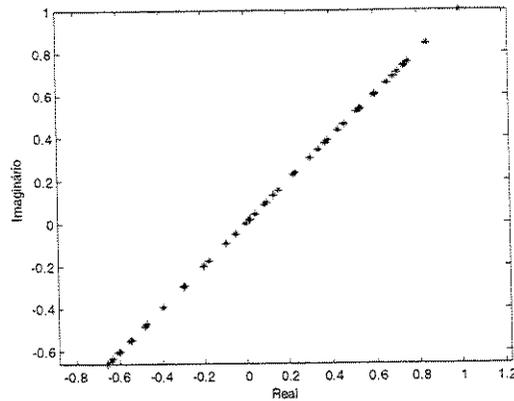


Figura 5.4 – O terceiro modo natural da viga engastada-livre, no plano complexo.

O fenômeno de ondas espacialmente estacionárias pode também ser visto na figura da fase do modo identificado, Figura 5.5.

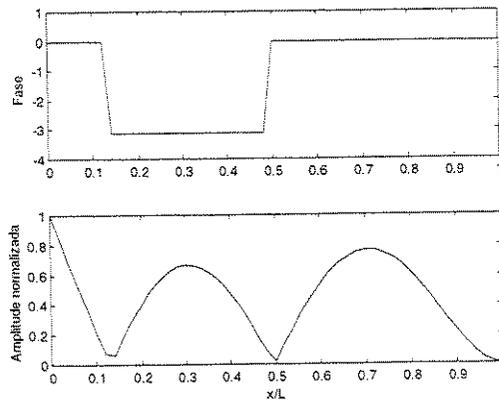


Figura 5.5 – Amplitude e fase do terceiro modo natural da viga engastada-livre.

5.1.4.2 Viga semi-infinita (b)

Neste exemplo, em vez de ondas estacionárias há um padrão de ondas propagantes. A energia já não é mais presa na estrutura mas ela se propaga para a extremidade infinita. Neste caso, nenhum modo natural é formado mas, ao invés disso, somente ODSs que podem ser excitados. A FRF calculada no ponto da excitação é mostrada na Figura 5.6. Somente um elemento espectral de dois nós e um elemento “throw-off“ são usados na modelagem numérica.

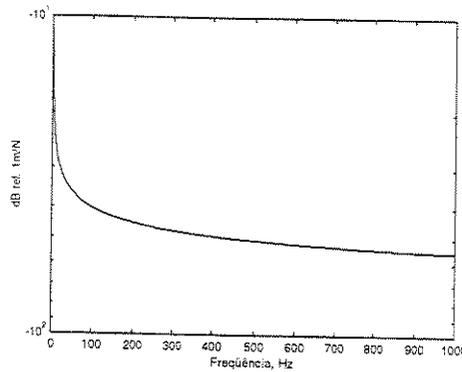


Figura 5.6 – A resposta em frequência da viga semi-infinita.

Observa-se que, neste caso, a FRF não mostra nenhum pico de ressonância e que a magnitude da resposta diminui exponencialmente com a frequência. Isto é devido ao fato de que a energia se propaga sem reflexão. O ODS na frequência 173 Hz foi calculado via o SEM, e o padrão da onda propagando para a extremidade infinita pode ser observado na Figura 5.7.

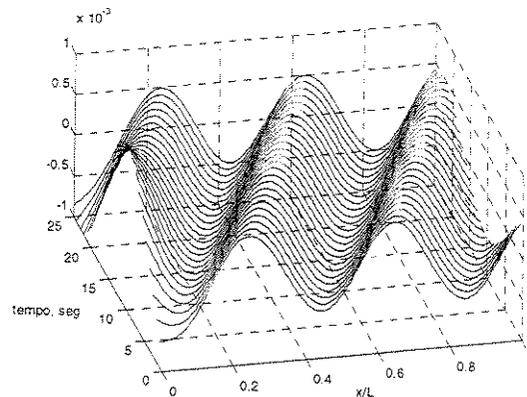


Figura 5.7 – O padrão de onda propagante na viga semi-infinita para ODS em 173 Hz.

Devido ao fenômeno de propagação de onda neste modelo, este modo operacional é complexo. Neste caso, o fator de complexidade modal β^2 é igual a 0.0114. O fator γ_r , quando calculado usando os pontos longe da descontinuidade, é aproximadamente nulo. Isto também pode ser visto da figura de plano complexo deste ODS, Figura 5.8. Observa-se desta figura que o ODS no plano complexo não forma um círculo perfeito. Isto é relacionado ao fato da existência de uma descontinuidade representada pela força aplicada na extremidade da viga ($x=0$). Devido a este fato os fatores de complexidade modal, β^2 e γ_r , são *aproximadamente* nulos.

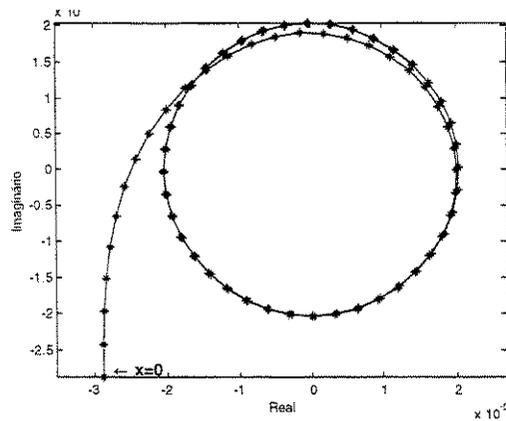


Figura 5.8 – ODS de 173 Hz da viga semi-infinita, no plano complexo.

Este fenômeno de propagação de ondas pode também ser notado do gráfico da fase deste ODS, Figura 5.9. Pode-se observar que os ângulos da fase variam linearmente com a frequência indicando, desta forma, o movimento das ondas de flexão ao longo da viga. Comparando esta figura com a Figura 5.5, pode-se observar o efeito de se ter sistemas semi-infinitas na obtenção dos modos operacionais.

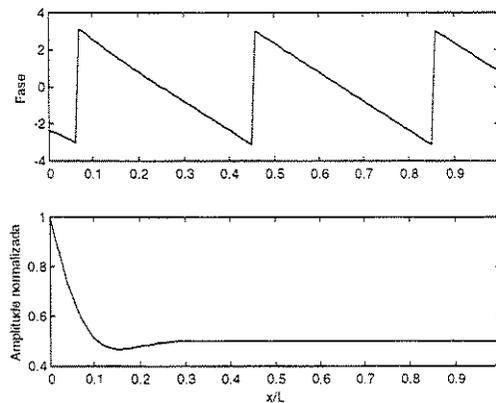


Figura 5.9 – Amplitude e fase do ODS 173 Hz da viga semi-infinita.

5.1.4.3 Viga semi-infinita com descontinuidade (c)

Em estruturas reais, normalmente existem casos em que há uma combinação dos dois tipos de ondas mostradas acima, ondas estacionárias e ondas propagantes. Um destes casos ocorre quando uma descontinuidade é imposta em uma viga reta semi-infinita, como mostrado na Figura

5.1 (c). A descontinuidade é introduzida através de uma massa concentrada de 0.1 Kg e elementos de rigidez linear de 1000 N/m. A parte finita da viga tem comprimento de $L=0.5$ m. Este tipo de estrutura pode ser considerado semelhante ao caso de uma viga reta enfiada em uma caixa de areia. Os elementos de rigidez localizados são usados para gerar o efeito de reflexão de ondas e, portanto, gerar modos *locais* na parte finita. Por outro lado, em geral, esta descontinuidade poderia ser, por exemplo, uma variação na seção transversal ou no material da viga.

Nesta estrutura, as ondas incidentes de flexão se propagam dispersivamente na viga finita, chegam à descontinuidade (massa) e, então, são parcialmente refletidas e parcialmente transmitidas para a parte infinita. A viga foi modelada via o SEM usando somente dois elementos espectrais, um de dois nós e outro do tipo “throw-off”. A resposta em frequência foi calculada no ponto de excitação, que é a extremidade livre, e mostrada na Figura 5.10.

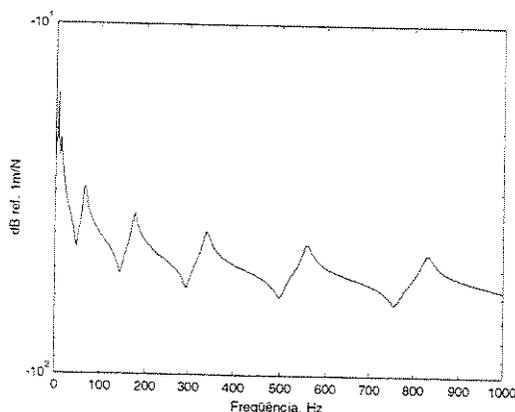


Figura 5.10 – A resposta em frequência da viga semi-infinita com descontinuidade.

O ODS na frequência 176.4 Hz, que corresponde aproximadamente à quarta ressonância, foi calculado via o SEM, através das funções de interpolação, é mostrada na Figura 5.11.

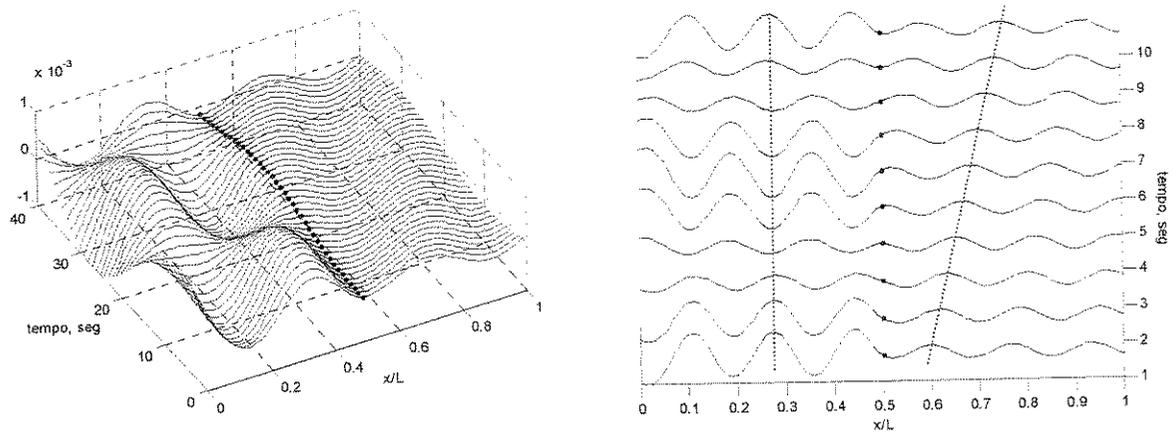


Figura 5.11 – O padrão dos modos locais e propagação de onda na viga semi-infinita com descontinuidade para ODS em 176.4 Hz.

A Figura 5.12 mostra este ODS no plano complexo para as duas partes da estrutura. A forma elíptica da parte finita da estrutura (mostrada com '*') identifica os modos locais. Estes modos são complexos e exibem um padrão similar a um modo real, de tal forma que os pontos ao longo desta parte finita movimentam-se em uma forma quase sincronizada (observe a linha vertical na Figura 5.11). O fato de ter uma forma elíptica e não uma linha reta deve-se ao acoplamento com uma viga infinita por onde parte da energia é perdida. O fator de complexidade modal β^2 da parte finita deste ODS é igual a 0.075. Este valor é pequeno devido à forma da elipse, que é praticamente normal ao plano real. Assim, o fator β^2 não representa a complexidade de forma certa, mas deve ser usado em estruturas tridimensionais analisadas a seguir. Por outro lado, o fator γ é igual a 0.91. A parte infinita exibe um padrão de propagação de onda para a extremidade infinita, o que pode ser observado da forma circular (mostrada com 'o') no plano complexo (observe a linha inclinada na Figura 5.11). O fator de complexidade modal para a parte infinita deste ODS é igual a 0.01. O fator γ é igual a 0.02.

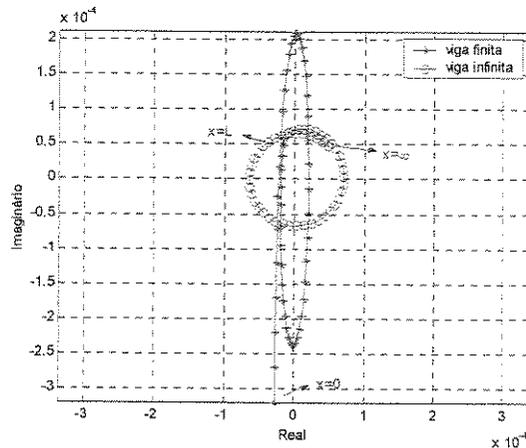


Figura 5.12 – ODS de 176.4 Hz no plano complexo da viga semi-infinita com descontinuidade.

O fenômeno de propagação de ondas nesta estrutura pode ser visto também do gráfico da fase, mostrado na Figura 5.13. Nota-se que, a partir da posição da massa ($x=0.5$), os ângulos de fase variam linearmente com a posição, o que indica a propagação de ondas de flexão na direção da extremidade infinita.

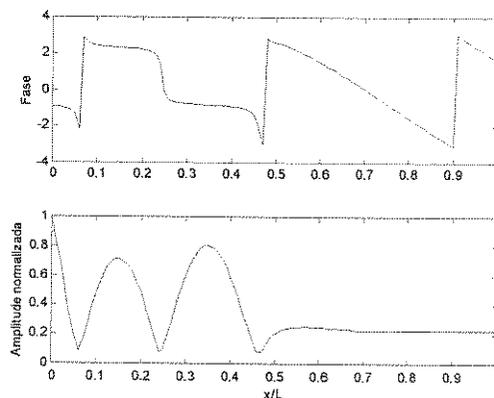


Figura 5.13 – Amplitude e fase do ODS em 176.4 Hz da viga semi-infinita com descontinuidade.

5.1.4.4 Viga infinita (d)

O último exemplo unidimensional a ser investigado é de uma viga infinita excitada com uma força em um ponto arbitrário ($x=0$), Figura 5.1(d). Somente um elemento espectral do tipo “throw-off” é necessário para a modelagem numérica. A resposta em frequência no ponto de

excitação desta viga não exibe nenhum pico de ressonância, sendo semelhante à da viga semi-infinita, Figura 5.6. Pode-se pensar, neste caso, que o gráfico de um ODS no plano complexo seria um círculo perfeito com fator de complexidade nulo. Isto é o caso para as partes da estrutura longe do ponto de excitação. Como foi mencionado anteriormente, o ponto de excitação é uma descontinuidade e, por isso, o círculo é distorcido nos pontos perto do ponto de excitação. A Figura 5.14 mostra o ODS de 1 kHz no plano complexo.

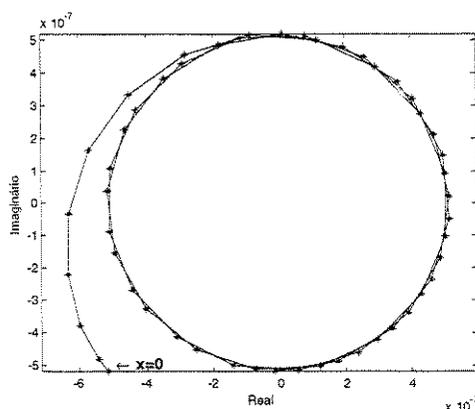


Figura 5.14 – ODS de 1 kHz no plano complexo.

Este ODS é caracterizado pelo fenômeno de propagação de ondas, o que pode ser observado da Figura 5.15, e do gráfico da fase mostrado na Figura 5.16. O fator de complexidade modal β^2 é igual a 0.0025, enquanto o fator γ é aproximadamente nulo.

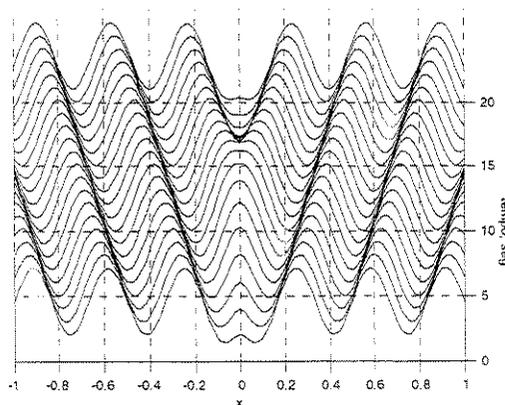


Figura 5.15 – Propagação de ondas para a esquerda e para a direita no ODS de 1 kHz da viga infinita.

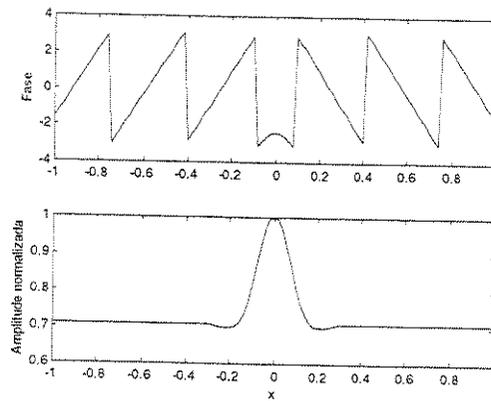


Figura 5.16 – Amplitude e fase do ODS em 1 kHz da viga infinita.

Finalmente, com o objetivo de investigar a variação do fator de complexidade modal β_r^2 , este fator foi calculado para os quatro modelos das vigas (a), (b), (c), e (d), e é mostrado na Figura 5.17 (a-d).

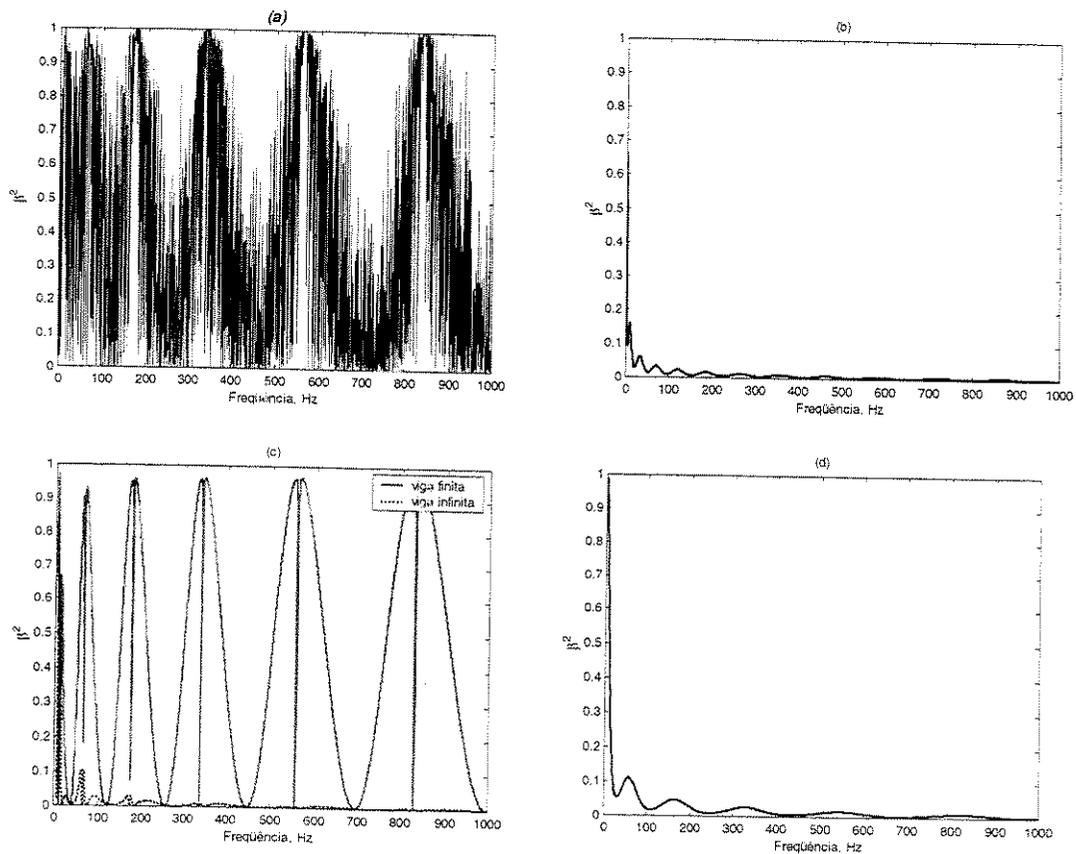


Figura 5.17 – O fator β_r^2 para as vigas da Figura 5.1 (a), (b), (c), e (d).

Das figuras acima mostradas, pode-se fazer as seguintes observações:

- Para a viga finita engastada-livre, a Figura 5.17 (a) mostra que os modos naturais (as ressonâncias da FRF) são reais. O fator β_r^2 é igual a 1 somente nas frequências naturais e aproximadamente igual a 1 nas ressonâncias. Os modos operacionais definidos em frequências diferentes das frequências naturais (ou frequências de ressonância) são complexos e exibem valores de β_r^2 diferentes de 1.
- Para as duas vigas semi-infinita e infinita, a Figura 5.17 (b) e (d) mostram que o fator β_r^2 tem valores mais altos em baixa frequência. Em geral, β_r^2 tem valores baixos que tendem a ser nulos. Isto significa que os modos operacionais são completamente complexos e definidos somente com o fenômeno de propagação de ondas. Os picos que aparecem nas frequências mais baixas são devido ao efeito de campo próximo, o que diminui a medida que a frequência aumenta.
- Para a viga semi-infinita com a descontinuidade, a parte infinita da viga tem valores de β_r^2 próximos a zero (devido à propagação de ondas). A parte finita mostrou valores de β_r^2 elevados nas frequências próximas à ressonância, mas aproximadamente nulos nas frequências de ressonância. Isto é devido ao fato que, nas ressonâncias o ODS mudará a sua fase em torno de 180° e, então, em alguns pontos a elipse torna-se exatamente vertical ou horizontal com correlação nula ainda que o modo não seja puramente real. Isto resulta em alguma singularidades numéricas no cálculo do fator β_r^2 .

Devido à singularidade numérica mencionada na última observação, o modelo é analisado em mais detalhe na faixa de frequência de 551 Hz a 561 Hz, que inclui a ressonância 557.7 Hz. O comportamento desta ressonância no plano complexo, somente para a parte finita da estrutura, é mostrado na Figura 5.18. Observa-se que, com o aumento da frequência, o ODS passa pelo eixo imaginário (na ressonância de 557.7 Hz), causando a anulação do fator β_r^2 .

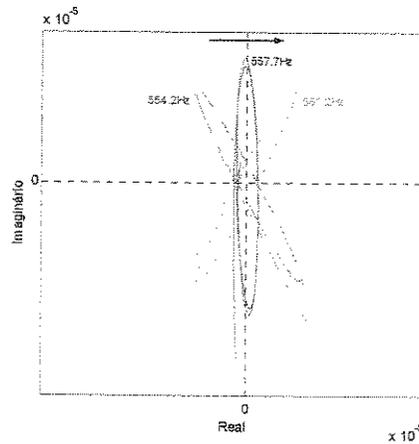


Figura 5.18 – A transição do ODS passando pela singularidade na ressonância 557.7Hz, somente para a parte finita da estrutura.

O coeficiente de correlação pode ser calculado, usando médias, como,

$$\beta_r = \frac{\sum_i (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad (5.3)$$

onde \bar{X} e \bar{Y} são os valores médios das distribuições X e Y, respectivamente. Este coeficiente de correlação exibe valores que variam de -1 a 1 , passando desta forma pelo valor nulo. Os dois coeficientes foram calculados para a faixa de frequência analisada como é mostrado na Figura 5.19.

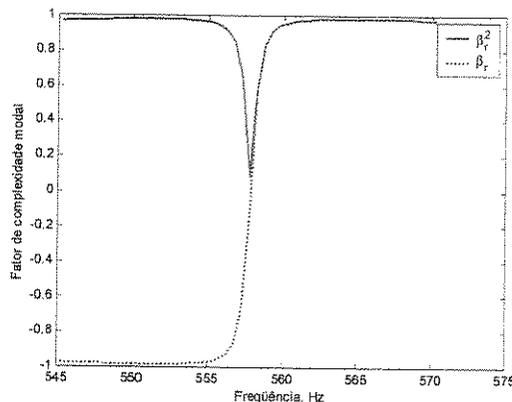


Figura 5.19 – Os fatores β_r e o coeficiente de correlação na faixa de 551 Hz a 561 Hz, passando pela ressonância de 557.7 Hz.

É importante notar, das figuras que mostram o plano complexo dos modelo (b), (c) e (d), Figura 5.8, Figura 5.12 e Figura 5.14, que o círculo (ou elipse) formado é devido ao fenômeno de propagação de ondas, e que o raio do círculo é constante. Isto significa um modelo não amortecido geometricamente. O amortecimento geométrico, mencionado anteriormente, será mostrado na seção 5.1.7 para o caso de uma placa infinita.

5.1.5 Modelo de propagação de onda bidimensional

Este exemplo é de uma viga do tipo L. Este tipo de estrutura, devido a uma excitação em um ponto conforme mostrado na Figura 5.20, exibe dois tipo de ondas propagando ao longo de cada viga; ondas longitudinais e ondas de flexão. Isto é devido ao acoplamento na junta das duas vigas.

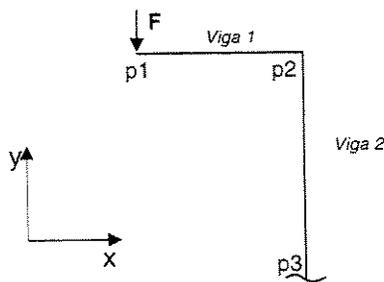


Figura 5.20 – Exemplo da viga-L.

Viga 1 é finita com comprimento $L=5$ m, e viga 2 é semi-infinita. Um comprimento $L=10$ m da viga 2 é considerado somente no traçado dos ODSs. As duas vigas têm as mesmas propriedades da seção e do material usados nas estruturas do primeiro modelo, dadas na Tabela 5.1. A faixa de frequência usada na análise é de 1 a 500 Hz, com uma resolução de 0.5 Hz. Os comprimentos foram escolhidos de tal forma que as ondas longitudinais geradas na junta podem ter comprimentos de onda compatíveis com os comprimentos das vigas 1 e 2. Por exemplo, na frequência $f=50$ Hz o número de onda (longitudinal) é $k=0.064$ m^{-1} e, portanto, o comprimento de onda longitudinal é $\lambda=98.8$ m. Da mesma forma, na frequência $f=500$ Hz, o número de onda $k=0.635$ m^{-1} e $\lambda=9.87$ m, o que significa que o comprimento da viga 2 ($L=10$ m) utilizado na

obtenção dos modos operacionais é suficiente para mostrar uma onda longitudinal propagante. Isto será mais claro nas figuras de plano complexo de alguns ODSs mostrados em seguida.

A estrutura é excitada com uma força unitária pontual de um espectro constante aplicada na viga 1, conforme mostrado na Figura 5.20. A simulação numérica é feita usando um elemento de pórtico (longitudinal e viga de Timoshenko) do tipo 2-nós para a modelagem da viga 1, e outro elemento de pórtico do tipo “throw-off” para a modelagem da viga 2. Desta forma, somente três graus de liberdade são considerados em cada nó, transversal, axial e torção (em torno do eixo perpendicular ao plano x-y). A FRF e os modos operacionais são avaliados com uma resolução espacial de 0.05 m. A resposta em frequência no ponto de excitação é mostrada na Figura 5.21.

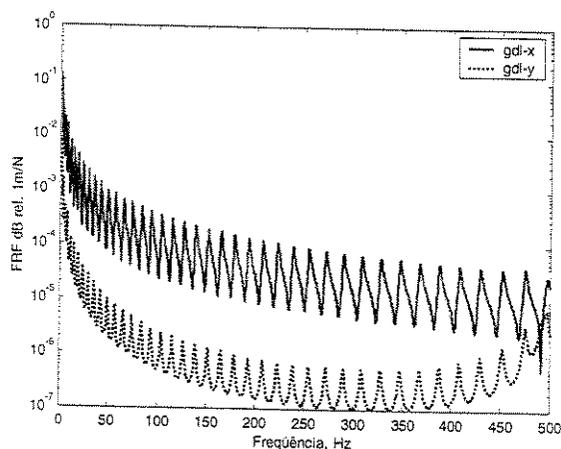


Figura 5.21 – A resposta em frequência da viga-L calculado no ponto p1 para os GDLs longitudinais e transversais.

Observa-se que os picos demonstram os modos locais (locais pois na viga vertical há propagação pura) na estrutura. As ondas longitudinais que propagam-se axialmente ao longo de cada viga são mais significativas nas altas frequências. O primeiro ODS a ser analisado é na frequência $f=5.5$ Hz, o que representa a terceira ressonância na Figura 5.21. Este modo é caracterizado por modos locais na viga 1, e pelo fenômeno de propagação de ondas na viga 2. Isto pode ser observado claramente da Figura 5.22.

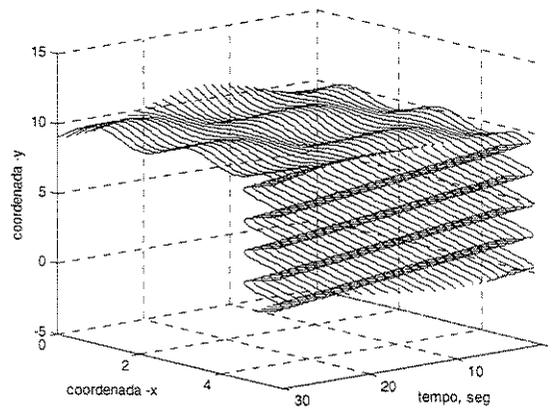


Figura 5.22 – ODS de 5.5 Hz da viga-L.

Este modo é complexo e tem um valor de β_r^2 igual a 0.28797. Os gráficos a seguir mostram este modo operacional no plano complexo (Nyquist), onde podem ser vistos modos locais e propagação de ondas, longitudinais e transversais nas duas vigas, conforme mostrado na Figura 5.23 e Figura 5.24.

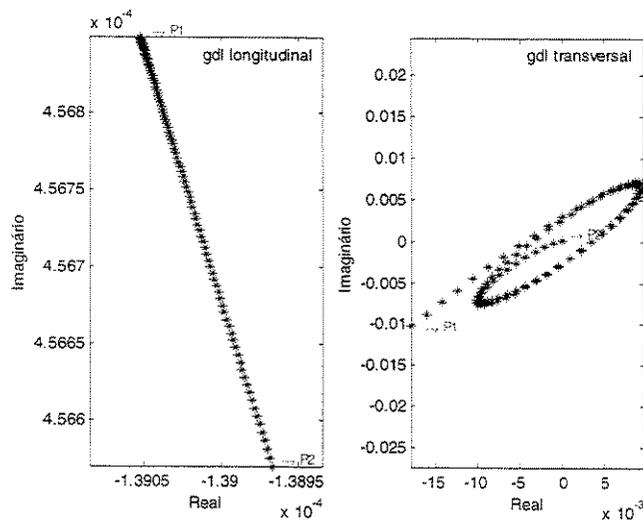


Figura 5.23 – ODS de 5.5 Hz no plano complexo, na Viga 1 do modelo viga-L.

Os deslocamentos longitudinais em baixas frequências podem ser considerados desprezíveis em relação aos deslocamentos transversais. O efeito da descontinuidade no ponto p1 pode ser observado dos GDLs transversais onde eles são representados pela forma elíptica. Por

outro lado, as componentes longitudinais formam uma linha reta o que indica a formação de ondas espacialmente estacionárias.

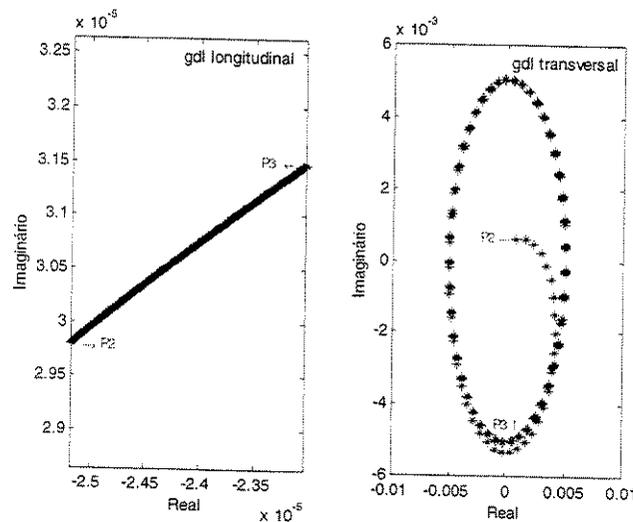


Figura 5.24 – ODS de 5.5 Hz no plano complexo, na Viga 2 do modelo viga-L.

Nota-se da Figura 5.24 que, a magnitude dos deslocamentos longitudinais na *viga 2* é muito menor do que os na *viga 1*. Pode-se notar também que nesta frequência as componentes longitudinais na *viga 2*, formam uma linha reta. Por outro lado, as componentes transversais na *viga 2* formam um círculo. Isto, por outro lado, significa o fenômeno de propagação destas ondas para a extremidade infinita. É importante dizer que as figura de Nyquist das ondas longitudinais na *viga 2* mostrada na Figura 5.24 pode ser mal interpretada. De fato, o que está sendo mostrado é um segmento de um círculo, porque o comprimento desta onda longitudinal nesta frequência é igual a 898.1m, e somente um segmento de 10m está sendo mostrado.

A dinâmica desta estrutura foi analisada também em frequência mais alta, onde as componentes longitudinais tornam-se mais significativas. O ODS de 474.5 Hz foi analisado. As ondas estacionárias na *viga 1* e o fenômeno de propagação de ondas na *viga 2* podem ser observados na Figura 5.25.

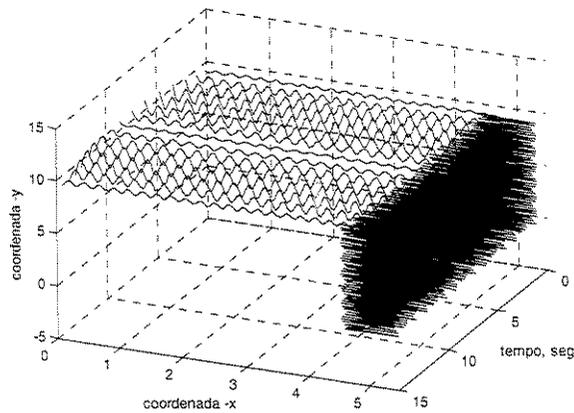


Figura 5.25 – ODS de 474.5 Hz da viga-L.

Este modo é complexo. O fator β_r^2 foi calculado usando todos os GDLs da estrutura e é igual a 0.03578. Os gráficos a seguir mostram este modo operacional no plano complexo onde pode ser visto modos locais e propagação de ondas, longitudinais e transversais, nas duas vigas conforme mostrado na Figura 5.26 e na Figura 5.27.

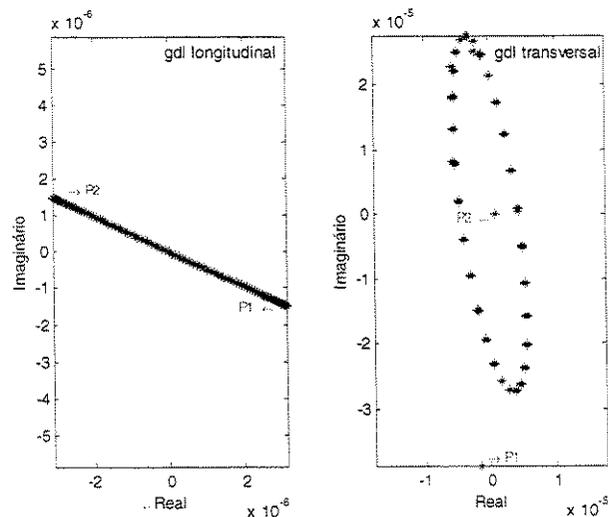


Figura 5.26 – ODS de 474.5 Hz no plano complexo. Viga 1 do modelo viga-L.

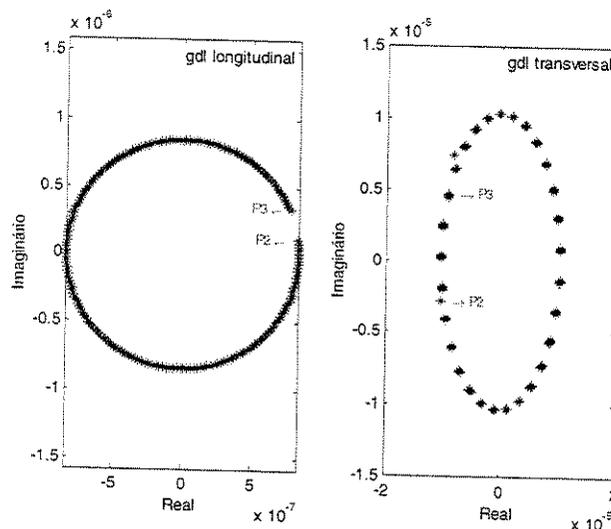


Figura 5.27 – ODS de 474.5 Hz no plano complexo. Viga 2 do modelo viga-L.

Observa-se da Figura 5.26 que as ondas longitudinais na *viga 1* são caracterizadas por ondas estacionárias formando desta maneira um padrão de modos locais, da mesma forma que foi mostrada para o ODS de 5.5 Hz. Os modos transversais exibem o mesmo comportamento visto para o ODS de 5.5 Hz. Da Figura 5.27 pode-se notar que, nesta faixa de frequência, os modos longitudinais são mais significativos. As ondas transversais na *viga 1* incidentes na junta formam ondas longitudinais na *viga 2* (acoplamento). Observe-se também que estas componentes longitudinais são completamente caracterizadas pelo fenômeno de propagação de ondas, ou seja, todas as ondas longitudinais transmitidas para a *viga 2* se propagam para a extremidade infinita. Isto pode ser visto do círculo perfeito mostrado no plano complexo deste ODS, Figura 5.27. Este círculo é quase um círculo fechado devido ao comprimento de onda longitudinal nesta frequência, neste caso $k=0.604$ e $\lambda=10.4$ m, que é um pouco maior do comprimento da *viga 2* utilizado na simulação numérica ($L=10$ m). Observa-se também que as ondas longitudinais são não-dispersivas e não há efeito de campo próximo e, por isso, o círculo é perfeito mesmo com a descontinuidade.

O fator de complexidade modal β_r^2 foi calculado para toda a faixa de frequências analisada, conforme mostrado na Figura 5.28. Observa-se que o fator β_r^2 tem valores muito pequenos nas ressonâncias, o que indica os modos complexos. Nas ressonâncias de frequências mais altas, o fator β_r^2 exibe valores muito pequenos em relação aos das baixas frequências. Estes valores são

aproximadamente nulos. Isto é devido ao fato de que, nas ressonâncias, o modo mudará a sua fase em torno de 180° e, então, em alguns pontos, torna-se puramente real ou puramente complexo. Isto resulta em fator β_r^2 nulo. O mesmo fato foi anteriormente observado para o caso da viga reta com a descontinuidade de massa, e que pode ser observado da Figura 5.19.

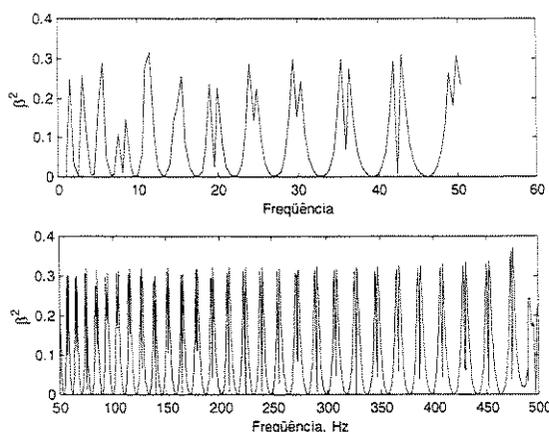


Figura 5.28 – O fator β_r^2 calculado para a viga-L em toda a faixa de frequência.

Nota que, o coeficiente de correlação β_r^2 deve ser usado para a quantificação de complexidade se o ODS, com todos os GDLs incluídos, for analisado. Neste caso, o ODS exhibe formas mistas de círculos e elipses no plano complexo, o que torna impossível fazer ajuste de curva para uma elipse. O outro fator γ_r deve ser usado se somente um tipo de onda (longitudinal ou transversal) for analisado.

5.1.6 Modelo de propagação em pórtico tridimensional

O modelo a ser analisado é de uma estrutura do tipo pórtico espacial. Todas as barras têm comprimento igual, $L=5$ m, e com as seguintes propriedades: módulo de Young $E=2.1 \times 10^{11}$ N/m², densidade $\rho=7800$ Kg/m³, área da seção $A=0.05 \times 0.05$ m², Poisson $\nu=0.30$. Para que haja um efeito de reflexão de ondas, foram utilizados massas concentradas de 1 Kg e elementos de rigidez localizada de 1×10^6 N/m em alguns nós, conforme mostrado na Figura 5.29. O valor da rigidez localizada foi escolhido de forma a representar a rigidez de uma caixa de areia. Uma força concentrada é aplicada na estrutura conforme mostrado na figura. Esta estrutura pode ser vista

como sendo uma estrutura do tipo pórtico espacial, com suas quatro barras verticais enfiadas na areia.

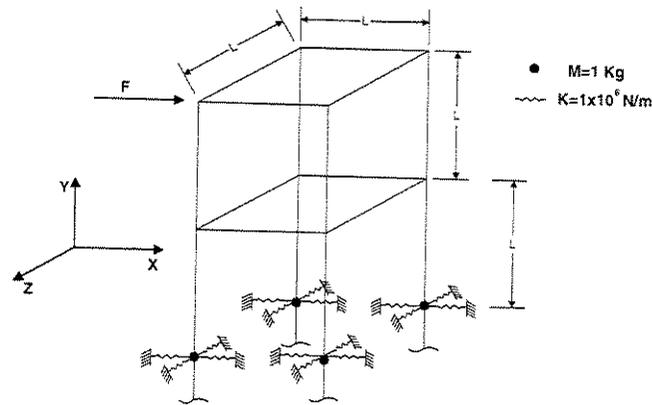


Figura 5.29 – Exemplo de pórtico espacial.

A estrutura foi modelada com um total de somente 16 elementos espectrais de 2-nós, e quatro elementos do tipo “throw-off”. Isso resulta em um total de 12 nós com seis graus de liberdade por nó (Figura 5.30).

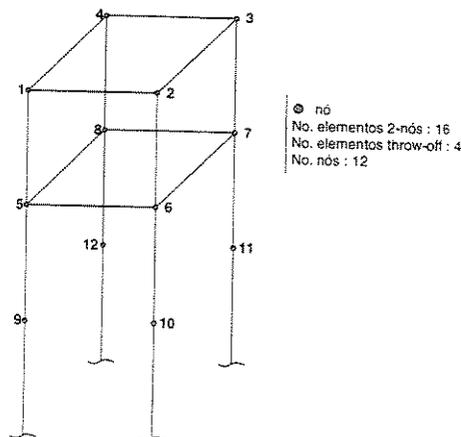


Figura 5.30 – Malha do SEM utilizada para o pórtico espacial.

A faixa de frequência utilizada na análise é de 1 a 50 Hz, com uma resolução de 0.5 Hz. A resposta em frequência no ponto de excitação para os três graus de liberdade de translação é mostrada na Figura 5.31. Os modos operacionais são avaliados com uma resolução espacial de 0.05 m.

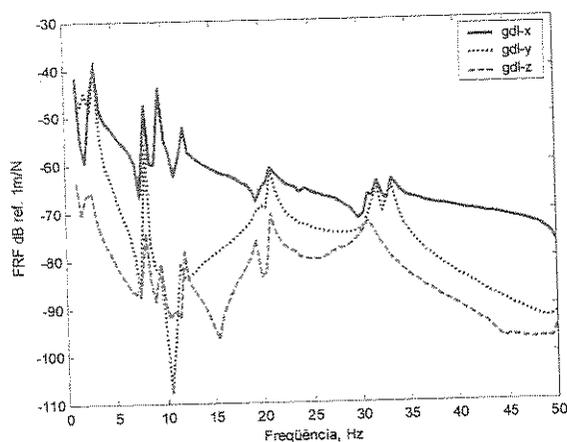


Figura 5.31 – Resposta em frequência no ponto de excitação, nas 3 direções.

Observa-se que os picos demonstram os modos da estrutura. Observa-se também que algumas ressonâncias têm a característica de serem mais amortecidas do que as outras. Analisando um ODS numa das primeiras ressonâncias, seja o ODS na frequência 2.98 Hz que corresponde à segunda ressonância, este ODS se comporta conforme mostrado na Figura 5.32 e na Figura 5.33.

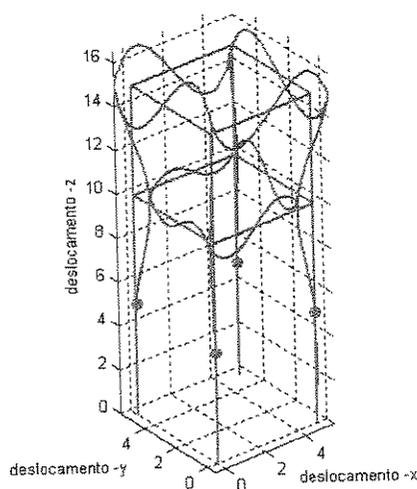


Figura 5.32 – O ODS na frequência 2.98 Hz.

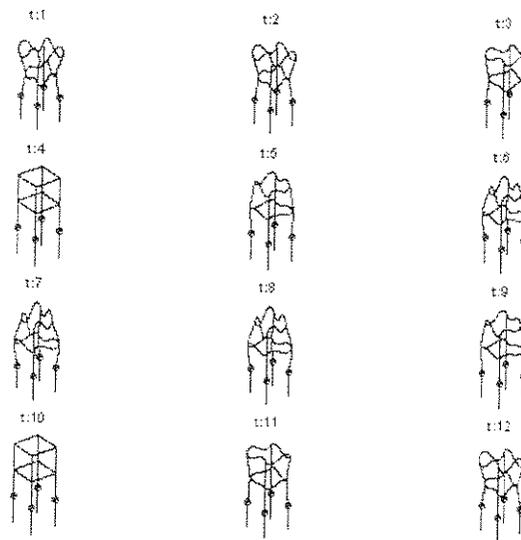


Figura 5.33 – ODS na frequência 2.98 Hz.

Pode-se observar desta figura que o ODS nesta baixa frequência é caracterizado por ondas estacionárias nos membros finitos. Os quatro membros infinitos têm a função de dissipar a energia para fora da estrutura, o que praticamente não acontece nesta frequência. Isto é devido ao uso das massas e dos elementos localizadas de rigidez nos nós conforme mostrado na Figura 5.32. O fator β_r^2 para este ODS, calculado somente nos membros finitos, é igual a 0.996, o que indica que este ODS é um modo praticamente real. A Figura 5.34 mostra os três tipos de ondas, longitudinal, transversal, e torcional, no plano complexo. Nota-se que a linha reta indica que nenhuma energia está se propagando para fora da estrutura.

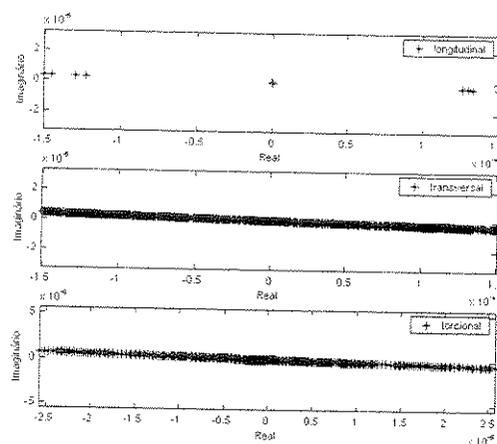


Figura 5.34 – O ODS de 2.98 Hz no plano complexo.

Em frequências mais altas, por exemplo o ODS próximo da ressonância 33.17 Hz, o comportamento da estrutura é diferente em termos de propagação de ondas. O fator β_r^2 para este ODS, calculado somente nos membros finitos, é igual a 0.557. A forma deste ODS é mostrada na Figura 5.35 e na Figura 5.36. Observa-se que existe um padrão de propagação de energia nos quatro membros infinitos da estrutura, o que seria mais fácil a ser observado através de uma animação deste ODS. Em frequências mais altas, a propagação de ondas para fora do sistema dinâmico torna-se mais importante. Este fenômeno é responsável pela formação de modos mais complexos.

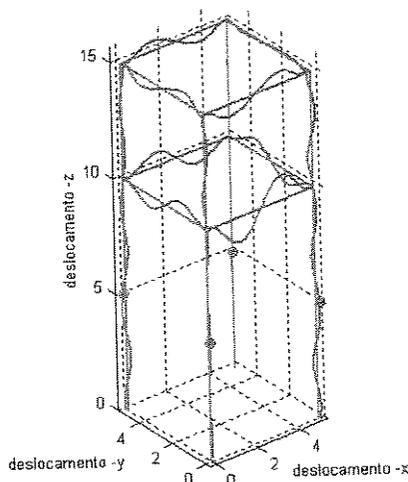


Figura 5.35 – O ODS na frequência 33.17 Hz.

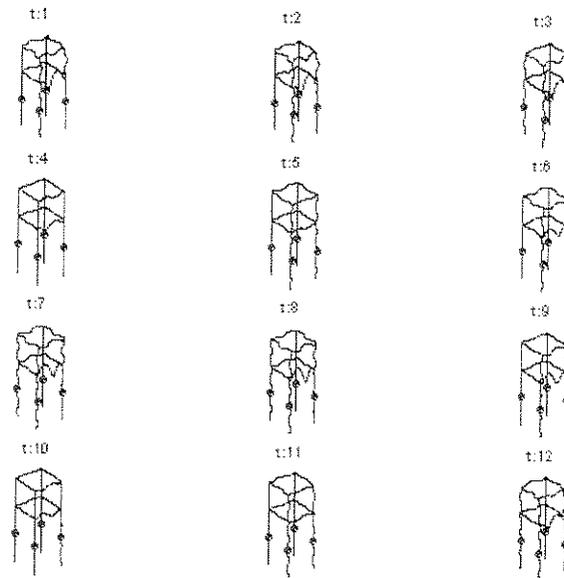


Figura 5.36 – ODS na frequência 33.17 Hz.

O fato de ter um padrão de propagação de ondas pode ser observado no gráfico do plano complexo deste ODS, conforme mostrado na Figura 5.37. Observa-se que a distribuição aleatória deste ODS identifica a sua complexidade.

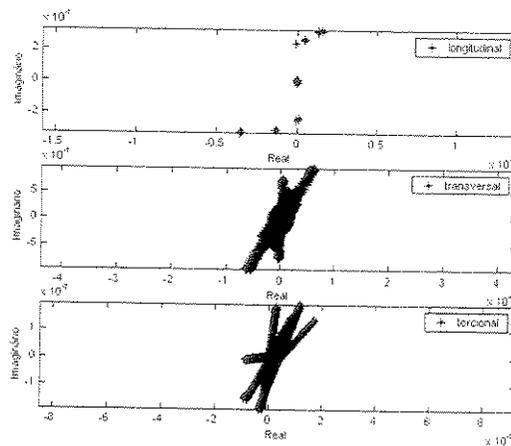


Figura 5.37 – O ODS de 33.17 Hz no plano complexo.

5.1.7 Modelo de uma placa infinita - amortecimento geométrico

Talvez o modelo mais clássico de propagação de ondas para o meio infinito e de amortecimento por propagação de onda (amortecimento geométrico) seja de flexão de uma placa infinita. É considerada uma placa fina infinita com uma força concentrada conforme mostrado na Figura 5.38.

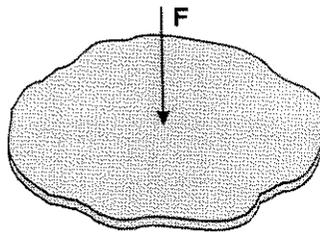


Figura 5.38 – Modelo de uma placa infinita com força pontual.

A resposta de flexão de uma placa fina pode ser representada pela teoria clássica de placas de Kirchhoff. Desprezando o amortecimento interno do material, a equação de movimento para uma placa é dada por,

$$D\nabla^2(\nabla^2 w) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F \quad (5.4)$$

onde $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ é a rigidez de flexão da placa, E é o módulo de Young, w é o deslocamento transversal, e h é a espessura da placa. A forma espectral desta equação pode ser escrita como,

$$(D\nabla^2\nabla^2 - \rho h\omega^2)\hat{w} = 0 \quad (5.5)$$

A solução desta equação pode ser escrita como sendo a soma linear das soluções de duas equações espectrais, ou seja, para uma onda plana a equação diferencial espectral é então dada como,

$$\begin{aligned}(\nabla^2 + \zeta^2)\hat{w} &= 0 \\ (\nabla^2 - \zeta^2)\hat{w} &= 0\end{aligned}\tag{5.6}$$

onde $\zeta^2 = \sqrt{\frac{\rho h \omega^2}{D}}$ é uma função de frequência. Para ondas planas $\hat{w}(x, y) = \hat{w}(x)$ e, então, os números de onda para as ondas de flexão são dados por, com $i = \sqrt{-1}$,

$$k_1 = \pm \sqrt{\omega \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{0.25}}, \quad k_2 = \pm i \sqrt{\omega \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{0.25}}\tag{5.7}$$

onde k_1 e k_2 representando as ondas propagantes e evanescentes. Devido à força concentrada, as frentes de onda resultantes têm simetria circular, e os campos de deslocamento (ou velocidade) são axi-simétricos. Desta forma, o operador diferencial da equação (5.5) para a variação espacial é dado por,

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\tag{5.8}$$

onde r é a distância radial do ponto de excitação. Usando esta distribuição espacial, a solução axi-simétrica do deslocamento transversal da equação (5.5) é então dada por (DOYLE, 1997),

$$\hat{w}(r) = \mathbf{A}J_0 + \mathbf{B}Y_0 + \mathbf{C}K_0 + \mathbf{D}I_0\tag{5.9}$$

onde J_0 é a função de Bessel do 1º tipo, Y_0 é a função do Bessel do 2º tipo, I_0 é a função de Bessel modificada do 1º tipo, e K_0 é a função do Bessel do 2º tipo, todas definidas com os argumentos $z = \zeta r$ e ζ . Para tratar o modelo de placa infinita considera-se as condições que (i) o deslocamento \hat{w} transversal é finito em $r=0$, (ii) $\hat{w} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Desta maneira pode-se escrever a solução de seguinte forma,

$$\hat{w}(r) = \mathbf{A} \left(J_0 - iY_0 - i^2 \frac{2}{\pi} K_0 \right)\tag{5.10}$$

A constante \mathbf{A} pode ser determinada através da condição de contorno da força. Para isto, considera-se o caso de equilíbrio de uma pequena seção de um cilindro definido na placa e em torno do ponto de excitação. A força de cisalhamento no cilindro por unidade de comprimento pode ser relacionada à força F , sendo que $\hat{Q} = \hat{F}/2\pi r$. Por outro lado, a força de cisalhamento escrita na forma da equação de Bessel pode ser relacionada ao deslocamento usando a seguinte expressão,

$$\hat{Q} = \zeta^3 \mathbf{D} \left(\frac{d^3 \hat{w}}{dz^3} + \frac{1}{z} \frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} - \frac{1}{z^2} \frac{d\hat{w}}{dz} \right) = \mathbf{A} \left(J_1 - iY_1 + \frac{2i}{\pi} K_1 \right) \quad (5.11)$$

Usando as duas definições dadas para \hat{Q} e fazendo que r aproxime-se do zero, pode-se determinar a constante \mathbf{A} , e assim a solução espectral fica da seguinte forma,

$$\hat{w}(r, \omega) = \frac{-i\hat{F}}{8\zeta^2 \mathbf{D}} \left(J_0 - iY_0 - i\frac{2}{\pi} K_0 \right) \quad (5.12)$$

Esta equação oferece a solução de deslocamento como função do raio e da frequência. A placa usada na simulação numérica tem as seguintes propriedades: módulo de Young $E=2.1 \times 10^{11}$ N/m², Poisson $\nu=0.30$, densidade $\rho=7800$ Kg/m³ e espessura $h=1$ mm. Uma força concentrada unitária foi aplicada no centro da placa. A resposta em frequência é semelhante a do modelo de viga semi-infinita mostrada na Figura 5.6. A solução foi calculada para o ODS de 1 kHz em 100 pontos ao longo de raios e com resolução de 10 cm. Este ODS é mostrado na Figura 5.39 no plano complexo.

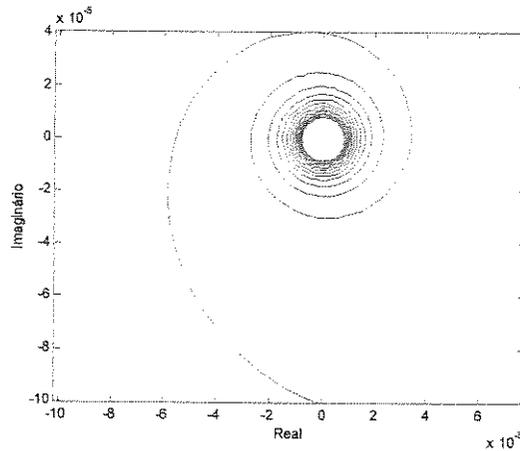


Figura 5.39 – ODS de 1 kHz de uma placa infinita, com força concentrada.

Observa-se da Figura 5.39 que, na região longe da descontinuidade (causada pela força concentrada), este ODS forma círculos concêntricos cujos raios diminuem longe do ponto de excitação, e que estes círculos tendem a um ponto quando r se aproxima do infinito. Este fato é devido ao amortecimento geométrico na placa, isto é, a amplitude de deslocamento decai e tende a ser zero no infinito.

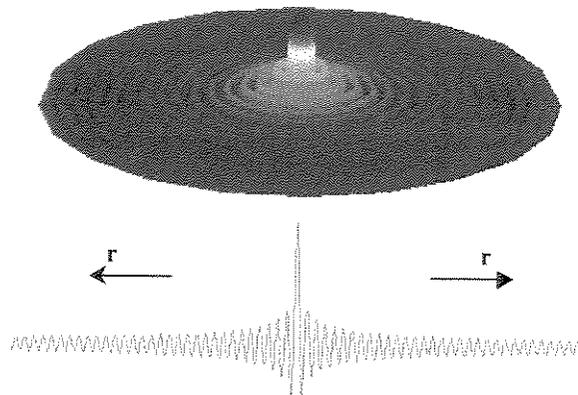


Figura 5.40 – A vibração e o amortecimento geométrico na placa infinita.

5.1.8 Experimento de viga enfiada em caixa de areia

Neste ensaio, a estrutura usada é uma viga de alumínio com comprimento total de 1.55 m, e com área de seção $A=(0.025 \times 0.0034) \text{m}^2$. A viga foi enfiada em uma caixa de areia, onde a parte

da viga fora da caixa é de comprimento $L=1.25\text{m}$, e uma excitação aleatória foi aplicada na extremidade livre da mesma, através de um excitador eletrodinâmico (“shaker”). A faixa de frequências usada no ensaio é de 1 a 800 Hz, com 3200 linhas. Um sistema de aquisição de dados do tipo HP foi usado, e as resposta em frequência foi medida em 51 pontos ao longo da viga, usando um Vibrômetro Laser Doppler (LDV) Polytec OFV330. A resposta medida no ponto de excitação e a função de coerência são mostradas na Figura 5.41.

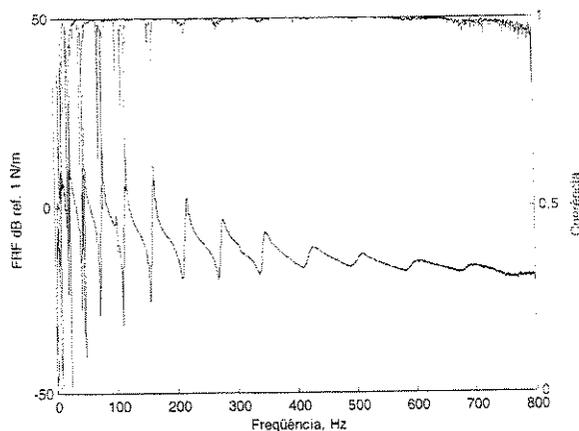


Figura 5.41 – A FRF e função de coerência medidas no ponto de excitação.

Nesta estrutura, as ondas de flexão se propagam na viga em direção a caixa de areia, e então são refletidas ou parcialmente transmitidas para a caixa de areia, dependendo da frequência. Observa-se da Figura 5.41 que a resposta em frequência mostra ressonâncias mais amortecidas em frequências acima de 200 Hz, quando comparadas com as ressonâncias em frequências mais baixas. Isto é devido ao efeito da caixa de areia que atua como amortecimento. O ODS na frequência de 43 Hz é primeiramente analisado. A forma deste ODS é mostrada na Figura 5.42, onde pode-se observar que este ODS é predominado por ondas espacialmente estacionárias, formando o padrão do terceiro modo de uma viga engastada.

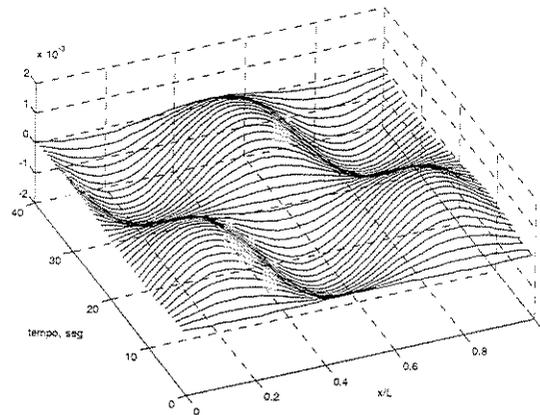


Figura 5.42 – O padrão dos modos locais na viga enfiada em caixa de areia. ODS de 43 Hz.

A Figura 5.43 mostra o mesmo ODS no plano complexo, onde a sua forma indica que este ODS é real, com pequenas componentes complexas devido ao amortecimento induzido pela caixa de areia. As partes reais e complexas foram ajustadas para uma elipse-, e o fator de complexidade γ_r foi igual a 0.94608, enquanto o fator β foi igual a 0.7683.

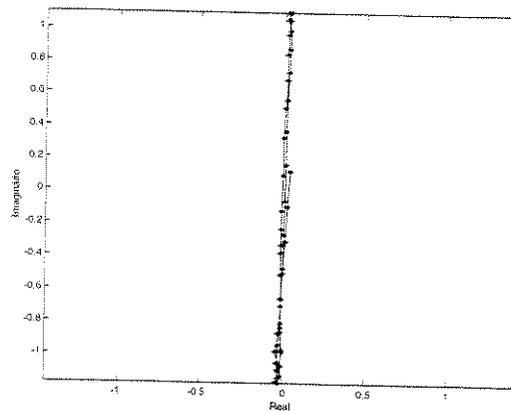


Figura 5.43 – ODS de 43 Hz no plano complexo da viga enfiada em caixa de areia.

O padrão deste ODS, que exibe a forma parecida com o quarto modo natural de uma viga engastada-live, pode ser melhor observado no gráfico da fase mostrado na Figura 5.44. Nota-se que, a amplitude na posição $x/L=1$ não é nula. Isso é devido ao fato de usar material absorvente na tampa da caixa de areia, o que torna a viga flexível no ponto da entrada da caixa.

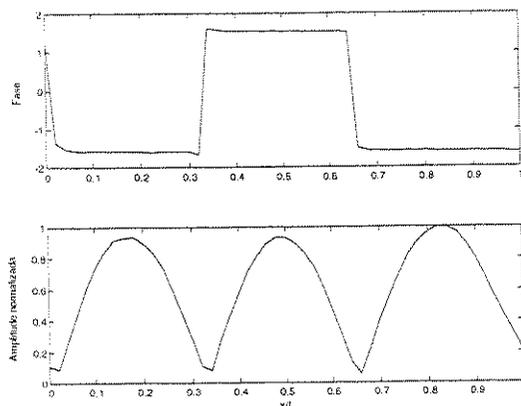


Figura 5.44 – Amplitude e fase do ODS em 43 Hz da viga enfiada em caixa de areia.

O efeito de propagação de ondas de flexão para a caixa de areia foi melhor observado em frequências mais altas. Para isso, o ODS em 510 Hz foi também analisado. A forma deste ODS é mostrada na Figura 5.45, onde é claramente observado que este ODS é predominado por ondas propagantes para a extremidade $x/L=1$.

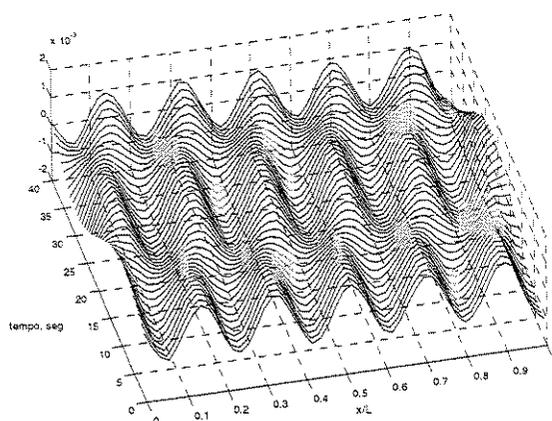


Figura 5.45 – O padrão dos modos locais na viga enfiada em caixa de areia. ODS de 510 Hz.

Este ODS é altamente complexo, e com fatores de complexidade β e γ_r iguais a 0.24288 e 0.26881, respectivamente, o que pode ser observado da forma elíptica da Figura 5.46. O gráfico de fase e amplitude deste ODS é mostrado na Figura 5.47.

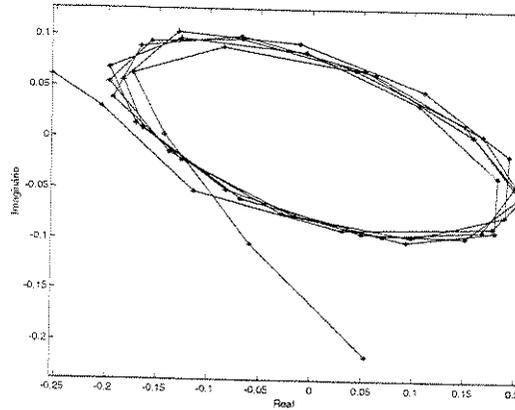


Figura 5.46 – O ODS em 510 Hz da viga enfiada em caixa de areia.

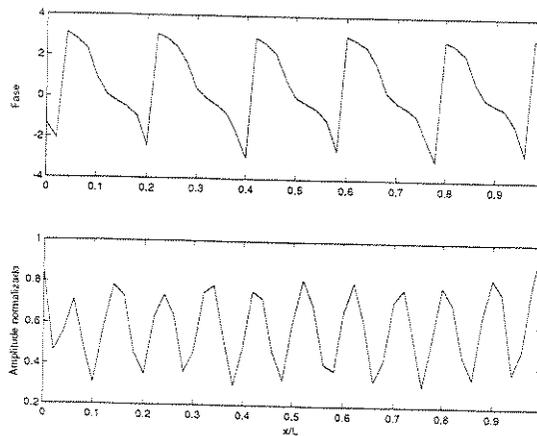


Figura 5.47 – Fase e amplitude normalizada do ODS em 510 Hz da viga enfiada em caixa de areia.

5.2 Obtenção dos fatores de perda por acoplamento da SEA através de simulação numérica usando o SEM

5.2.1 Introdução

Os fatores de perda por acoplamento (CLF, do inglês “Coupling Loss Factor”) entre os diferentes subsistemas utilizados no método de análise estatística de energia (SEA) são obtidos analiticamente no caso de acoplamentos simples como por exemplo, o acoplamento de duas barras que se encontram em forma de ‘L’ (“right-angle”), e acoplamentos simples de placas em

'L' (LYON E DEJONG (1995)). Para acoplamentos complexos eles podem ser obtidos experimentalmente ou através de uma modelagem numérica usando, por exemplo, o método dos elementos finitos. Até esta data, poucos artigos foram escritos que tratam da obtenção experimental dos fatores de perda por acoplamento para estruturas complexas. A otimização das técnicas de identificação experimental é cada vez mais necessária. Neste capítulo, a aplicação do SEM para a obtenção destes fatores de acoplamento entre subsistemas do tipo barras ("right-angle") será mostrada.

5.2.1.1 Revisão bibliográfica

Vários trabalhos foram escritos e realizados na tentativa de obter uma metodologia simples e eficaz para obter estes fatores de perda por acoplamento. A maioria destes trabalhos utilizam duas abordagens; numérica e experimental, nos quais o Método de Injeção de Potência (PIM) é geralmente utilizado. SATO E LALOR (1994) utilizaram um martelo instrumentado para excitar a estrutura. As medidas foram feitas em duas placas finas soldadas. Eles calcularam os fatores de perda internos e os fatores de perda por acoplamento e compararam com outros resultados obtidos com excitação harmônica com shaker. Eles mostraram que a diferença entre estes fatores calculados com as duas metodologias fica na faixa aceitável de 3 dB. A desvantagem de uso de martelo instrumentado é que a sua excitação é de pouca energia e a energia injetada na estrutura pode não ser suficiente para excitar os subsistemas longe de ponto de excitação, particularmente no caso de estruturas muito amortecidas.

O uso da SEA em estruturas do tipo máquinas rotativas foi realizado no trabalho de CUSCHIERI E SUN (1994). Neste trabalho, um método baseado em medidas experimentais das energias é usado para a determinação dos fatores de dissipação e dos fatores de perda por acoplamento. Eles mostraram que a sua metodologia, chamada de método das razões de energia, pode ser usado para sistemas de acoplamento conservativo (sem dissipação de energia na junta) e não conservativo (com dissipação na junta). A formulação do PIM foi utilizada.

A estimação dos fatores de perda por acoplamento via PIM em baixas frequências é considerada não correta devido à incerteza no processo estatístico. STEEL E CRAIK (1994)

mostraram um estudo para a obtenção dos fatores de perda por acoplamento em análises de baixa frequência. Este estudo se baseia no cálculo destes fatores através das funções de mobilidade do sistema receptor. O método dos elementos finitos foi utilizado neste trabalho.

SHANKAR E KEANE (1995) estudaram as energias vibracionais em uma estrutura de duas vigas conectadas via uma linha (paralelamente) e via um ponto (uma viga é ortogonal a outra). Eles utilizaram o método dos elementos finitos (FEM) e a função de Green dos dois subsistemas. Eles mostraram a concordância das duas metodologias em estudar o acoplamento das vigas até um certo grau de acoplamento. Para o caso de forte acoplamento o número de modos desacoplados usado exibe um efeito significativo nos resultados obtidos pela função de Green. Os fatores de perda por acoplamento foram calculados via o PIM e via métodos modais determinísticos.

O fato de que dois subsistemas sejam fracamente ou fortemente acoplados é importante na aplicação do PIM. Segundo FAHY E JAMES (1996), não existe nenhuma definição clara, definitiva, e mundialmente aceita para o grau de acoplamento, como também não existe nenhuma medida prática para o grau de acoplamento entre dois subsistemas. No trabalho de FAHY E JAMES (1996) foi apresentada uma maneira para medir este grau de acoplamento através da energia cinética. Foram estudados três tipos de acoplamentos; acoplamento barra-barra, via mola, acoplamento viga-viga via mola, e acoplamento de duas placas. Desta maneira, três tipos de ondas estão envolvidos, transversais, longitudinais, e torcionais. Eles mostraram que o grau de acoplamento pode ser identificado através do cálculo das energias cinéticas dos relativos subsistemas.

O acoplamento de ondas vibracionais em estruturas periódicas unidimensionais foi analisado por LANGLEY (1996). Ele apresentou um estudo sobre o acoplamento em bandas largas e estreitas de frequência, e sobre o efeito de amortecimento interno dos subsistemas, quando o número de onda torna-se complexo, em estruturas periódicas na obtenção dos coeficientes de acoplamento.

Outros tipos de acoplamento de diferentes subsistemas, i.e., diferentes dos sistemas tratados neste trabalho, foram analisados na literatura. TSO E HANSEN (1997) apresentaram um estudo

teórico e experimental sobre a transmissão da energia de vibração em estrutura acoplada de um cilindro e uma placa. Os fatores de perda por acoplamento para este sistema é baseado na teoria de acoplamento de duas placas do tipo L. Eles mostraram que seus resultados tiveram boa concordância quando comparados com os fatores de perda por acoplamento obtidos analiticamente. Eles também mostraram que a teoria de reciprocidade neste caso é ainda válida.

FAHY E RUIVO (1997) apresentaram uma metodologia baseada na modulação da potência injetada em um sistema. Eles mostraram que através desta modulação é possível calcular os fatores de perda por acoplamento (CLF) e perda por amortecimento (DLF, do inglês "Damping Loss Factor") sem a necessidade de quantificar a potência injetada, e com a condição de ter estimativas confiáveis das densidades modais. A modulação de potência injetada foi feita através de um circuito analógico elétrico construído para este propósito. Dois modelos foram estudados, um modelo de duas placas conectadas, e um modelo de duas cavidades acústicas reverberantes conectadas através de uma abertura (janela). Os CLFs e DLFs foram também calculados via o PIM. Os resultados mostraram muita concordância. A desvantagem desta metodologia é a condição matemática das equações envolvidas que dependem dos dados experimentais medidos.

FAHY (1998), apresentou uma outra metodologia para modelar o acoplamento dos diferentes subsistemas na SEA. Baseado nas equações básicas de SEA, como foi mostrado anteriormente, a matriz de energia é simétrica quando a relação de reciprocidade é usada. Desta forma, FAHY sugere utilizar o termo $M_{ij} = \omega \eta_{ij} n_i = \omega \eta_{ji} n_j = M_{ji}$ onde o novo termo M_{ij} representa o 'coeficiente de transferência de potência'. Da mesma forma, ele definiu o termo $M_i = \omega \eta_i n_i$ que representa o 'coeficiente de dissipação de potência'. Desta maneira, as equações de SEA podem ser escritas em uma forma análoga, mas com matrizes neste caso simétricas. A justificativa de usar M_{ij} no lugar de η_{ij} é que o coeficiente M_{ij} não depende das propriedades físicas dos subsistemas envolvidos (comprimento, área, etc). Por outro lado, a dependência de η_{ij} nas quantidades físicas dos subsistemas, que não influenciam diretamente na transmissão de energia entre subsistemas, foi criticada por vários autores. Para problemas de baixas frequências, os fatores de perda acima apresentados não se aplicam. HUGIN (1998) apresentou um metodologia melhorada para calcular os fatores de perda por acoplamento em problemas de baixa densidade modal, formulados para problemas unidimensionais.

Na literatura, alguns trabalhos relataram que os fatores de perda estimados via o PIM podem ser negativos, o que é considerado inconsistente. SHENG ET AL. (1998) mostraram que estes valores negativos são relacionados aos acoplamentos não-conservativos dos subsistemas. Eles sugeriram novos modelos de SEA para este tipo de acoplamento. As perdas de energia nos elementos de acoplamento são levados em conta. O efeito dos parâmetros de acoplamento, conservativo e não-conservativo, foram estudados. No caso de acoplamento não-conservativo, o fluxo de energia entre dois subsistemas não é somente proporcional às energias modais destes subsistemas, mas também depende do fator de perda no elemento de conexão. Neste caso, a relação de reciprocidade não é mais válida.

A transmissão de energia em estruturas acopladas do tipo placa e viga foi também analisada por ZALIZNIAK ET AL. (1999). Neste estudo numérico, os coeficientes de transmissão de reflexão foram comparados com os apresentados por LANGLEY E HERON (1990). A análise via SEA de duas placas acopladas do tipo L em médias frequências foi feita por DELANGHE (1996), onde foram usadas as matrizes de impedância obtidas via o FEM através do pacote NASTRAN[®]. Os resultados foram verificados experimentalmente.

Os trabalhos mais recentes para a identificação dos fatores de perda por acoplamento são em seguida apresentados. MAXIT E GUYADER (2001) apresentaram uma metodologia baseada no FEM para a estimação dos fatores de perda por acoplamento em estruturas complexas. A sua aproximação é baseada no uso de uma formulação modal dual para descrever a vibração dos subsistemas acoplados. Simulações numéricas de acoplamentos de duas vigas e duas placas foram apresentadas. IADEVAIA ET AL. (2000) discutiram o efeito da massa dos transdutores de força normalmente usados na obtenção experimental dos fatores de perda por acoplamento, principalmente via o PIM. Um sistema de duas placas acopladas foi utilizado neste estudo numérico e experimental. Eles mostraram que a massa dinâmica usada no transdutor de força do shaker pode induzir erros significativos na estimação dos fatores de perda por acoplamento. Os resultados obtidos utilizando um excitador eletrodinâmico foram comparados com outros usando um martelo como excitação. Os efeitos da escolha dos pontos de medida e do ponto de excitação na estimação dos fatores de acoplamento foi também pesquisado por PARK ET AL. (2000) e YAMAZAKI ET AL. (2000). Outra aplicação do FEM é apresentada por BALDANZINI ET AL. (2000)

na obtenção dos fatores de perda por acoplamento em modelo de três placas acopladas na configuração 'T'.

Nos capítulos anteriores foi mostrado como o fator de perda por acoplamento pode ser calculado através dos coeficientes de transmissão em juntas. Esta relação está sendo utilizada na maioria dos trabalhos relacionados a SEA e nos programas comerciais de SEA. SARRADJ (2000) mostrou que esta relação pode ser influenciada por parâmetros como o amortecimento interno e a topologia ou a forma dos diferentes subsistemas envolvidos.

5.2.1.2 Objetivos e metodologia

Neste trabalho, o PIM será utilizado para a obtenção dos fatores de perda por acoplamento de um modelo de duas vigas que se encontram em um ângulo de 90° . Os fatores de perda por acoplamento para este modelo podem ser calculados analiticamente usando as fórmulas dadas por CREMER (1988). Portanto, este modelo foi escolhido de tal forma que os fatores obtidos numericamente via o SEM pudessem ser comparados com os obtidos analiticamente via a formulação de CREMER (1988). Com a metodologia aqui mostrada validada, esta poderá ser utilizada para obter fatores de perda por acoplamento para diferentes tipos de acoplamento, não necessariamente de vigas em configuração 'L'.

Quando o PIM é aplicado em sistemas pequenos, com poucos subsistemas, ele pode ser usado com um certo grau de confiança e oferece boas estimativas para os fatores de perda por acoplamento devido ao pequeno tamanho da matriz de energia envolvida. Para sistemas grandes e complexos, a matriz de energia pode ter problema de mal condicionamento numérico. Além disso, em sistemas grandes, se o acoplamento entre dois subsistemas for especificamente estudado, todo o sistema de equações lineares deve ser resolvido novamente para obter os novos valores destes fatores. Isto acontece, por exemplo, no caso de validação de uma modificação estrutural. Este processo é computacionalmente caro. Se esta modificação é relacionada a um fator de perda específico, este novo fator pode ser estimado sem a necessidade de resolver o sistema inteiro do PIM novamente (STIMPSON E LALOR (1991)). Esta metodologia será mostrada em seguida.

5.2.2 Alternativa para o obtenção dos fatores de perda por acoplamento

A fim de mostrar esta alternativa para obter os fatores η_{ij} , consideram-se dois subsistemas acoplados i e j . Para montar o sistema de equações do PIM, potência é injetada em cada subsistema por vez, e a energia total em cada subsistema é então calculada. Desta forma, as quatro equações de balanço de energia são dadas em forma matricial como,

$$\begin{bmatrix} E_{11}^n & E_{11}^n & -E_{21}^n & 0 \\ 0 & -E_{11}^n & E_{21}^n & E_{21}^n \\ E_{12}^n & E_{12}^n & -E_{22}^n & 0 \\ 0 & -E_{12}^n & E_{22}^n & E_{22}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{12} \\ \eta_{21} \\ \eta_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

onde E_{ij}^n é a potência do subsistema i devido a uma potência injetada no subsistema j . Esta potência é calculada como média no tempo e normalizada em relação à potência injetada, ou seja,

$$E_{ij}^n = \frac{\omega E_{ij}}{P_{in}^i} \quad (5.14)$$

A equação (5.13) representa o sistema de equações do PIM para um modelo de dois subsistemas, e ela é normalmente utilizada para obter os fatores η_{ij} . A dependência do fator, por exemplo, η_{21} nos outros parâmetros da matriz de energia e nos outros fatores é mostrada em seguida através de estudo de sensibilidade.

Em geral, para uma matriz $[A]$ quadrada de tamanho N , e com x como sua variável dependente, a derivada da inversa desta matriz em relação à variável x é dada por,

$$\frac{\partial}{\partial x} [A]^{-1} = -[A]^{-1} \frac{\partial}{\partial x} [A] [A]^{-1} \quad (5.15)$$

Esta equação mostra a sensibilidade da matriz $[A]^{-1}$ em relação à variável x . A equação (5.13) deve ser resolvida para obter os fatores de perda. Da mesma forma, a sensibilidade da

inversa da matriz de energia em relação às energias dos diferentes subsistemas pode ser calculada fazendo,

$$\frac{\partial [E^n]^{-1}}{\partial E_{mn}^n} = -[E^n]^{-1} \frac{\partial [E^n]}{\partial E_{mn}^n} [E^n]^{-1} \quad (5.16)$$

Para um elemento específico E_{ij} da matriz de energia normalizada pode-se escrever que a sensibilidade do elemento E_{ij} em relação ao elemento E_{mn} pode ser dada por,

$$\frac{\partial [E^n]_{ij}^{-1}}{\partial E_{mn}^n} = -\sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N [E^n]_{pq}^{-1} \frac{\partial [E^n]_{pq}}{\partial E_{mn}^n} [E^n]_{ij}^{-1} \quad (5.17)$$

onde a contribuição das p e q linhas e das p e q colunas da matriz de energia foi incorporada. Para os fatores de perda η_{ij} , uma relação semelhante pode ser escrita da seguinte maneira (DELANGHE, 1996),

$$\frac{\partial \eta_{ji}}{\partial E_{mn}^n} = \sum_p \sum_q \eta_{jq} \delta_{mp} \delta_{nq} \eta_{pi} \quad , i \neq j \quad (5.18)$$

onde δ_{ij} é delta de Kronecker. Esta relação ainda pode ser escrita em uma forma mais simplificada como sendo,

$$\frac{\partial \eta_{ji}}{\partial E_{mn}^n} = \eta_{mi} \eta_{jn} \quad , i \neq j \quad (5.19)$$

o que poderia ser observado do sistema de equações de SEA para estes dois subsistemas, ou seja, o sistema que é normalmente é resolvido na SEA para obter a distribuição de energia nos diferentes subsistemas, é dado por,

$$\begin{bmatrix} (\eta_{11} + \eta_{12}) & -\eta_{21} & 0 & 0 \\ -\eta_{12} & (\eta_{21} + \eta_{22}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\eta_{11} + \eta_{12}) & -\eta_{21} \\ 0 & 0 & -\eta_{12} & (\eta_{21} + \eta_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11}^n \\ E_{21}^n \\ E_{12}^n \\ E_{22}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

Desta forma, a contribuição de um termo de E_{mn} nos parâmetros η_{ji} é aproximadamente,

$$\frac{\partial \eta_{ji}}{\partial E_{mn}^n} \cong E_{mn} \eta_{mi} \eta_{jn}, \quad i \neq j \quad (5.21)$$

Os fatores de perda interna η_{ii} são normalmente maiores do que os fatores de perda por acoplamento η_{ij} . Desta forma, a matriz dos fatores de perda da equação (5.20) é predominada pela diagonal principal, e então pode-se dizer que a equação (5.21) é dominada pelos termos $n=j$ e $m=i$, ou seja,

$$\Delta \eta_{ji} \cong E_{ij} \eta_{ii} \eta_{jj}, \quad i \neq j \quad (5.22)$$

Portanto, pode-se observar que, por exemplo, a variação do fator η_{21} depende dos parâmetros η_{11} , η_{22} , e E_{12} , mas não depende no parâmetro η_{12} . Assim, a equação (5.13) pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} E_{11}^n & -E_{21}^n \\ E_{12}^n & -E_{22}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{11} \\ \eta_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

ou na forma genérica,

$$\begin{bmatrix} E_{ii}^n & -E_{ji}^n \\ E_{ij}^n & -E_{jj}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_{ii} \\ \eta_{ji} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

A matriz da energia na formulação do PIM é também diagonalmente predominante e, então, a solução deste sistema pode ser estimada pela seguinte expressão, com SL indicando a metodologia do STIMPSON E LALOR (1991),

$$\eta_{ji}^{SL} \cong \frac{E_{ij}^n}{E_{ii}^n E_{jj}^n} \quad (5.25)$$

Esta aproximação dos fatores de perda não leva em conta os termos de energia E_{ji} que poderiam ser muito menores do que os termos E_{ij} , e desta forma o condicionamento da matriz de energia não afeita a estimação destes fatores. Para sistemas mais complexas e com vários subsistemas envolvidos, a estimação de fator de acoplamento η_{ji} pode ser melhorada levando em conta a contribuição de outros termos da matriz de energia. Esta formulação simplificada foi primeiramente mencionada pelo STIMPSON E LALOR (1991), é será usada em seguida junto com o método clássico do PIM para obter os fatores de perda por acoplamento de uma estrutura de viga do tipo L.

5.2.3 Modelo de viga L para a obtenção dos fatores de perda por acoplamento

Na maioria dos trabalhos relacionados à análise de modelos de vigas do tipo 'L' por SEA, os fatores de perda por acoplamento são calculados analiticamente através dos coeficientes de transmissão apresentados por CREMER (1988), os quais foram mostrados em forma mais clara no capítulo que trata do método SEA. Estes fatores de perda via CREMER (1988) serão usados para a comparação com os novos fatores obtidos numericamente via SEM.

O modelo numérico aqui usado consiste em duas viga semi-infinitas acopladas em forma L. O modelo do SEM para esta estrutura consiste de quatro elementos espectrais, nos quais dois destes são do tipo 2-nós, e os outros dois são do tipo "throw-off", conforme mostrado na Figura 5.48.

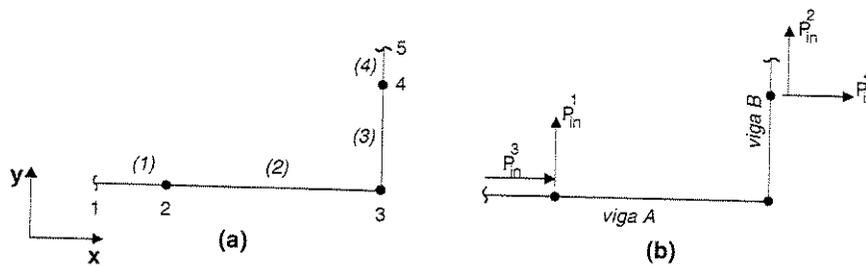


Figura 5.48 – Modelo de viga-L; (a) modelo do SEM, (b) excitação nos diferentes subsistemas.

Esta estrutura será analisada somente no plano x-y e, desta forma, quatro subsistemas são considerados neste modelo: dois representando a propagação das energias longitudinais nas duas vigas e dois representando a propagação das ondas transversais. Para a utilização do método PIM, uma potência estrutural unitária é aplicada em cada subsistema por vez. A configuração dos subsistemas envolvidos pode ser observada do modelo da SEA para esta estrutura, conforme a Figura 5.49, onde os números 1, 2, 3 e 4 representam os números dos subsistemas.

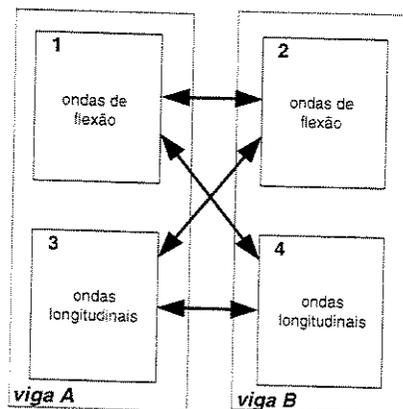


Figura 5.49 – Modelo para o acoplamento dos subsistemas na viga-L.

Observa-se que a energia das ondas de flexão não é acoplada com a energia das ondas longitudinais na mesma viga, conforme mostrado com as setas na Figura 5.49. Por outro lado, a energia de flexão de uma viga é linearmente acoplada com a energia das ondas longitudinais da outra. Os subsistemas são excitadas alternativamente, e quatro equações de balanço de energia são escritas para cada excitação. O conjunto das equações envolvidas pode ser escrito em forma matricial da seguinte forma (conforme anteriormente mostrado no capítulo 3),

$$\begin{bmatrix}
 E_{11}^n & E_{11}^n & E_{11}^n & -E_{21}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{41}^n & 0 & 0 \\
 0 & -E_{11}^n & 0 & E_{21}^n & E_{21}^n & E_{21}^n & -E_{31}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{21}^n & E_{31}^n & E_{31}^n & E_{31}^n & 0 & -E_{41}^n & 0 \\
 0 & 0 & -E_{11}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{31}^n & E_{41}^n & E_{41}^n & E_{41}^n \\
 \hline
 E_{12}^n & E_{12}^n & E_{12}^n & -E_{22}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{42}^n & 0 & 0 \\
 0 & -E_{12}^n & 0 & E_{22}^n & E_{22}^n & E_{22}^n & -E_{32}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{22}^n & E_{32}^n & E_{32}^n & E_{32}^n & 0 & -E_{42}^n & 0 \\
 0 & 0 & -E_{12}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{32}^n & E_{42}^n & E_{42}^n & E_{42}^n \\
 \hline
 E_{13}^n & E_{13}^n & E_{13}^n & -E_{23}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{43}^n & 0 & 0 \\
 0 & -E_{13}^n & 0 & E_{23}^n & E_{23}^n & E_{23}^n & -E_{33}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{23}^n & E_{33}^n & E_{33}^n & E_{33}^n & 0 & -E_{43}^n & 0 \\
 0 & 0 & -E_{13}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{33}^n & E_{43}^n & E_{43}^n & E_{43}^n \\
 \hline
 E_{14}^n & E_{14}^n & E_{14}^n & -E_{24}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{44}^n & 0 & 0 \\
 0 & -E_{14}^n & 0 & E_{24}^n & E_{24}^n & E_{24}^n & -E_{34}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{24}^n & E_{34}^n & E_{34}^n & E_{34}^n & 0 & -E_{44}^n & 0 \\
 0 & 0 & -E_{14}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E_{34}^n & E_{44}^n & E_{44}^n & E_{44}^n
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \eta_{11} \\
 \eta_{12} \\
 \eta_{14} \\
 \eta_{21} \\
 \eta_{22} \\
 \eta_{23} \\
 \eta_{32} \\
 \eta_{33} \\
 \eta_{34} \\
 \eta_{41} \\
 \eta_{43} \\
 \eta_{44}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 1
 \end{Bmatrix}
 \quad (5.26)$$

Esta equação matricial é então resolvida para obter os fatores de perda η_{ij} . Observa-se que este sistema pode ter mais equações descrevendo o problema do que as incógnitas a serem resolvidas, tornando-se um sistema super-determinado cuja solução de mínimos quadrados pode ser obtida com um algoritmo que usa a decomposição em valores singulares (SVD).

A estrutura foi modelada via o SEM usando a malha mostrada na Figura 5.48 (a). As vigas usadas têm as seguintes propriedades: área da seção $A=0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$, módulo de Young $E=2.62 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ e densidade $\rho=1280 \text{ Kg/m}^3$. O comprimento $L=100 \text{ m}$ foi usado para as duas vigas. O programa de computador desenvolvido neste trabalho para a análise dinâmica de estruturas treliçadas foi utilizado. A teoria de Timoshenko para vigas foi usada, e a faixa de frequência analisada foi de 1 Hz a 5 kHz. As energias transversais e longitudinais nas vigas A e B foram calculadas na faixa de frequência. A faixa de frequência utilizada é logarítmica do tipo 1/Q de oitava, com $Q=150$, resultando desta forma em 50 linhas de frequência para cada banda de 1/3 de oitava. Assim, existe um número fixo de linhas de frequência para cada banda. As energias foram calculadas nesta faixa logarítmica e em seguida uma média quadrática (r.m.s.) em bandas de 1/3 de oitava foi calculada. Isso pode ser visto como um filtro para calcular a média quadrática de dados representados em escala logarítmica de frequência.

Os elementos do tipo “throw-off” foram usados para que não haja reflexões na extremidade livre dos dois membros. Desta forma, as ondas refletidas na junta (nó #3 da Figura 5.48 (a)) são completamente transmitidas para a extremidade infinita nos dois membros da estrutura. As energias longitudinais e transversais nos dois membros finitos foram calculadas para cada componente de frequência.

5.2.4 Estimação dos η_{ij} via PIM

O sistema matricial do PIM, mostrado na equação (5.26), foi montado e resolvido, e os diferentes fatores de perda por acoplamento obtidos são mostrados nas figuras seguintes (Figura 5.50), comparado-os com os fatores calculados via a formulação analítica de CREMER (1988). A diferença entre a estimação via SEM/PIM e a analítica para cada fator é calculada como sendo,

$$\Delta\eta_{ij} = \sqrt{(\eta_{ij}^{\text{Cremer}} - \eta_{ij}^{\text{SEM-PIM}})^2} \quad (5.27)$$

Nota-se que, nas seguintes figuras, os fatores de perda por acoplamento são definidas como:

- η_{B1B2} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente transversal na viga 1 (viga A) e uma onda transversal transmitida para a viga 2 (viga B),
- η_{B1L2} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente transversal na viga 1 e uma onda longitudinal transmitida para a viga 2,
- η_{B2B1} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente transversal na viga 2 e uma onda transversal transmitida para a viga 1,
- η_{B2L1} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente transversal na viga 2 e uma onda longitudinal transmitida para a viga 1,
- η_{L1B2} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente longitudinal na viga 1 e uma onda transversal transmitida para a viga 2,
- η_{L1L2} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente longitudinal na viga 1 e uma onda longitudinal transmitida para a viga 2,

- η_{L2B1} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente longitudinal na viga 2 e uma onda transversal transmitida para a viga 1,
- η_{L2L1} representa o fator de perda por acoplamento de uma onda incidente longitudinal na viga 2 e uma onda longitudinal transmitida para a viga 1.

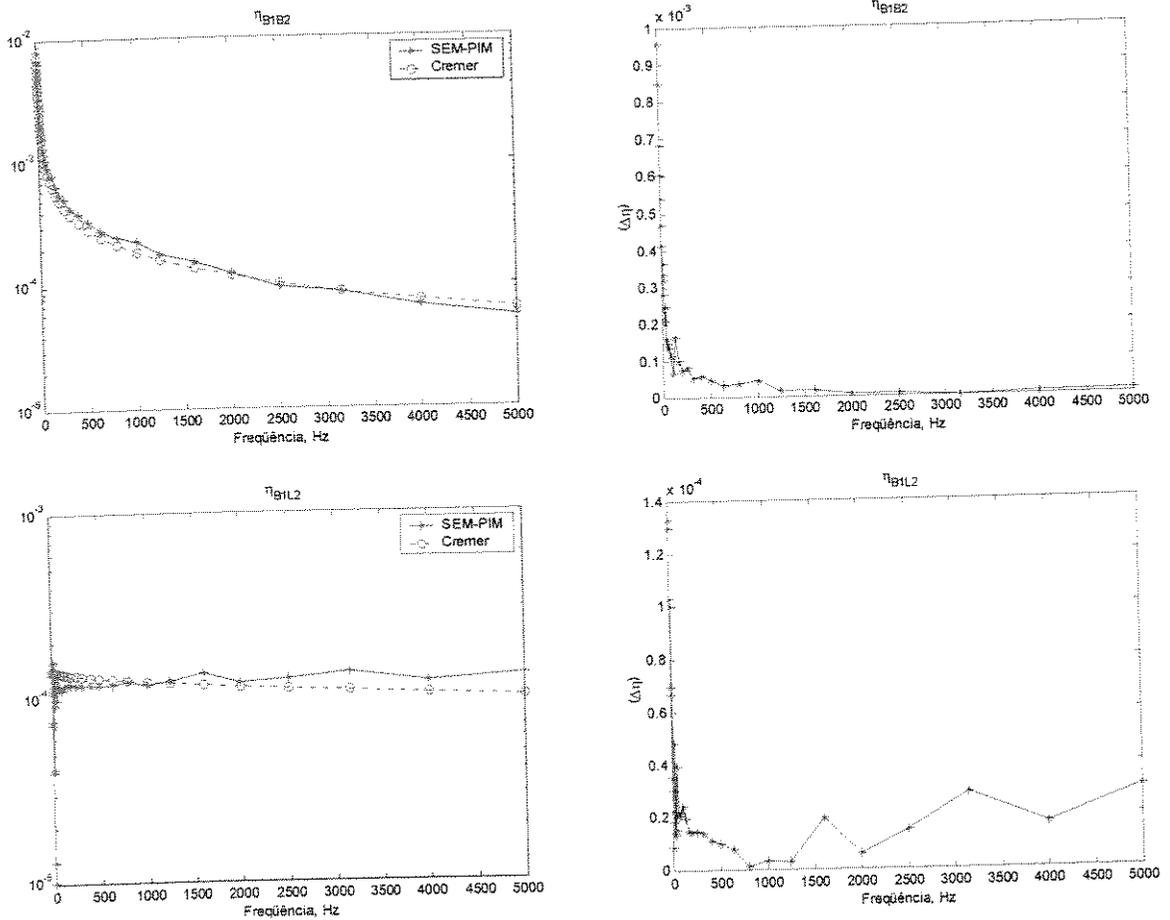


Figura 5.50 – Os diferentes fatores η_{ij} estimados por SEM/PIM e pela formulação analítica de CREMER e sua diferença.

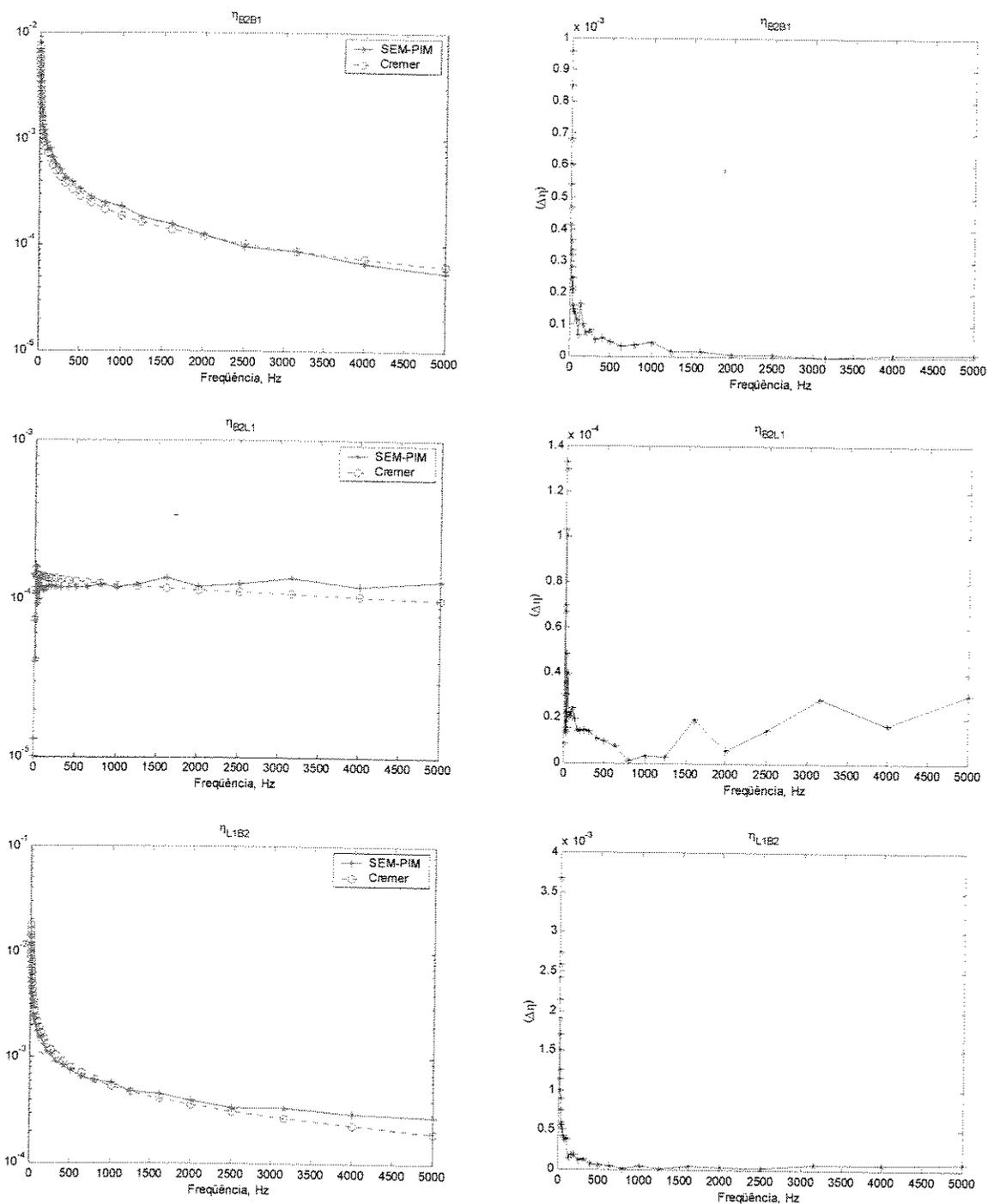


Figura 5.50 (cont.) – η_{ij} estimados por SEM/PIM e pela formulação analítica de CREMER e sua diferença.

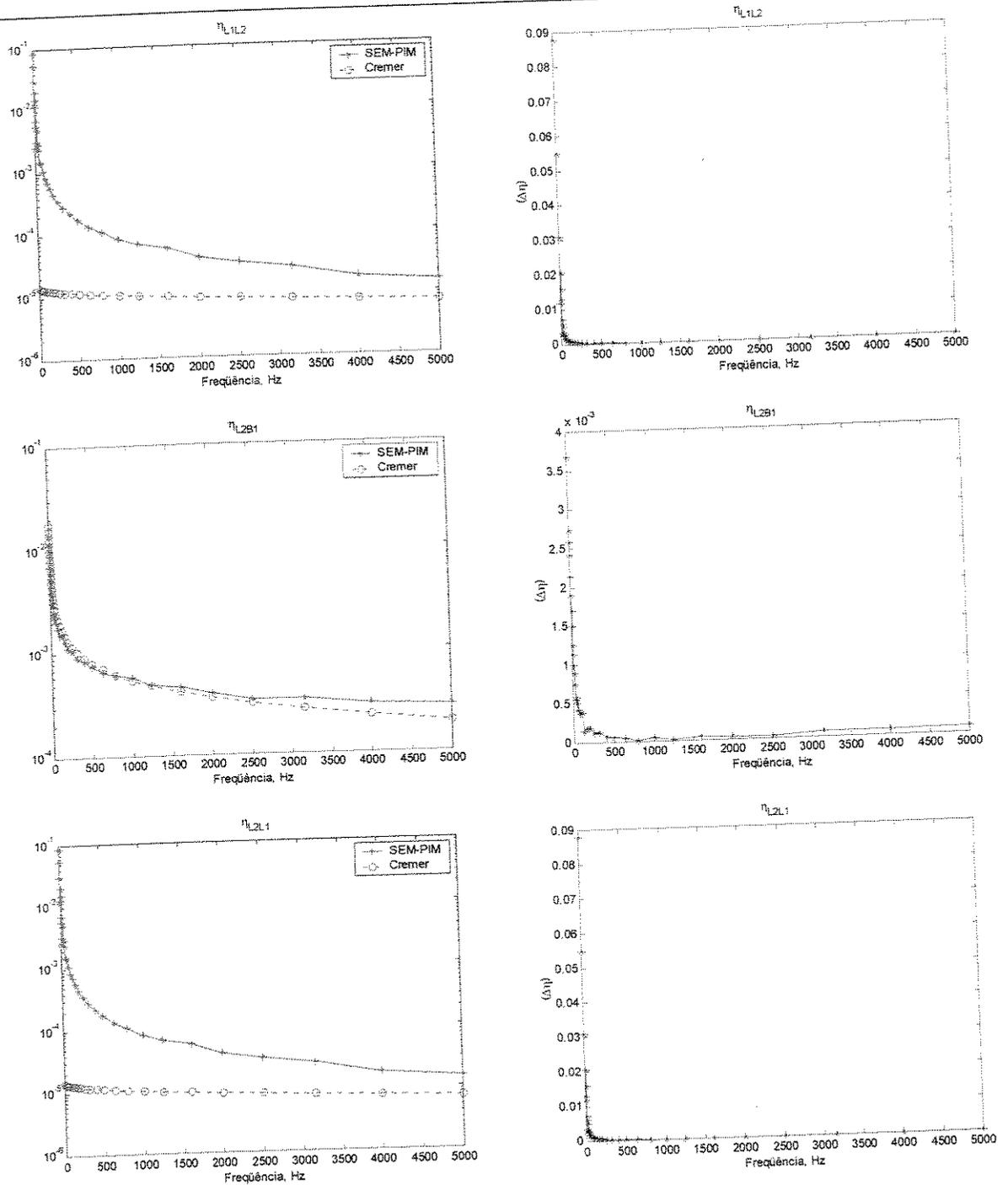


Figura 5.50 (cont.) – η_{ij} estimados por SEM/PIM e pela formulação analítica de CREMER e sua diferença.

Observa-se que os fatores de perda por acoplamento relacionados às energias incidentes e transmitidas de flexão são melhor estimados do que os que incluem as ondas longitudinais. Os fatores de acoplamento das ondas incidentes longitudinais e as ondas transmitidas longitudinais

são obtidos com uma margem de erro maior. Observa-se também, das figuras que mostram as diferenças entre os fatores obtidos pelas duas metodologias, que o fator de acoplamento estimado via SEM/PIM tem a tendência de se aproximar do analítico em altas frequências. Isto pode ser relacionado ao baixo nível de energia longitudinal transmitido de um membro para o outro comparado com o nível da energia de flexão. Esta diferença das energias resulta em mal-condicionamento da matriz de energia, o que pode ser notado do número de condição da matriz de energia mostrado na Figura 5.51. O número de condição de uma matriz é uma medida da sensibilidade da solução de um sistema linear de equações aos erros nos dados da matriz. O número de condição fornece uma indicação da exatidão dos resultados obtidos através da inversão desta matriz. Um número alto indica o mal-condicionamento da matriz a ser resolvida (STEWART, 1973). Neste caso, o número de condição de norma 2 foi usado, ou seja, a razão entre o maior valor singular (norma 2 da matriz) e o menor valor singular (norma 2 da matriz inversa).

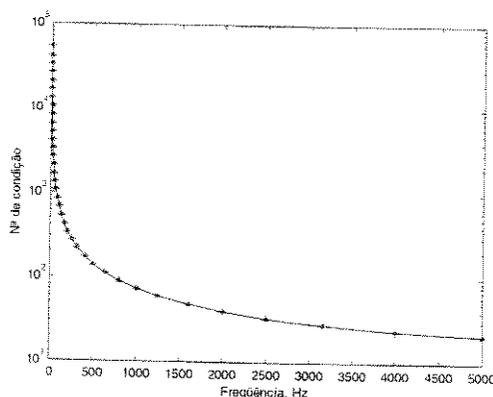


Figura 5.51 – O número de condição da matriz de energia.

Observa-se que o número de condição diminui com a frequência, o que é implícito na hipótese de que a SEA é um método para análise em altas frequências (e/ou alta densidade modal). Sempre parece ideal e importante acompanhar o cálculo da inversa da matriz e do cálculo de número de condição. Segundo LEWIT E HECKL (1994) não é sempre possível determinar um limite máximo para o número de condição, mas é possível estimar limites de confiança para os valores identificados. A distribuição das energias longitudinais e transversais de vibração na estrutura pode ser observada nas figuras que sequeem.

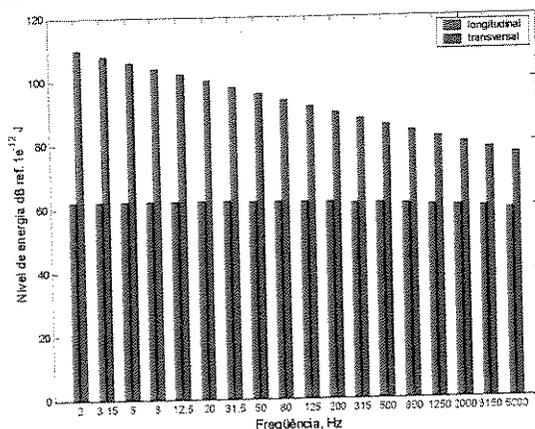


Figura 5.52 – Nível de energia na viga A quando uma potência é injetada no subsistema 1 do modelo da Figura 5.48.

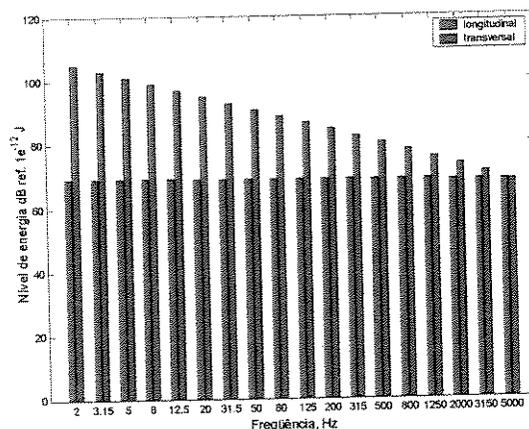


Figura 5.53 – Nível de energia na viga B quando uma potência é injetada no subsistema 1 do modelo da Figura 5.48.

5.2.5 Estimação simplificada dos η_{ij} via método de Stimpson e Lalor

A formulação alternativa de STIMPSON E LALOR (1991) também foi utilizada na obtenção dos mesmos fatores de perda (SEM/S&L), e comparados com os fatores calculados via a formulação analítica de CREMER (1988). Os mesmos fatores são calculados e mostrados nas figuras que seguem juntamente com a diferença entre os fatores das duas maneiras calculadas através da equação (5.27).

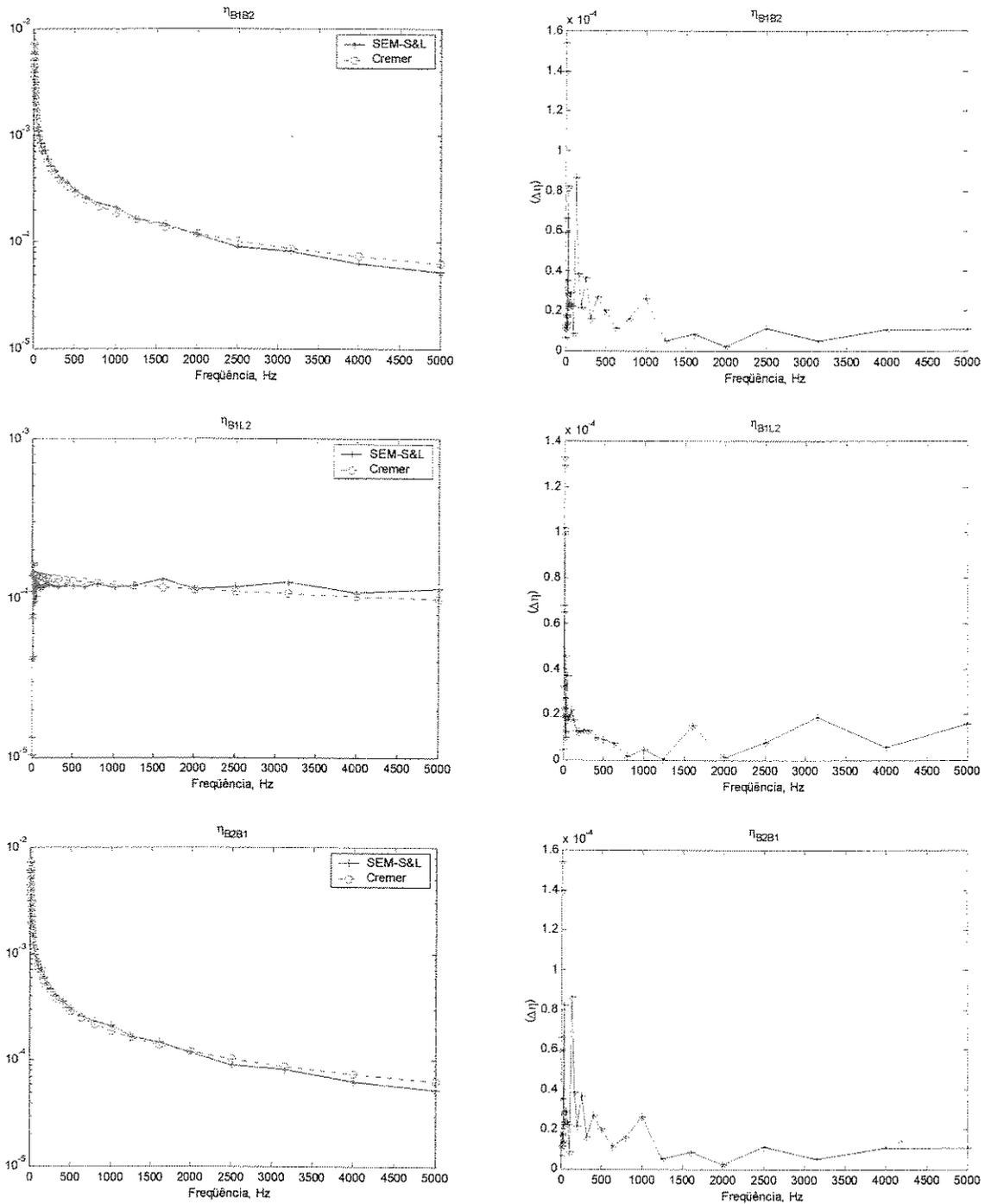


Figura 5.54 – Os diferentes fatores η_{ij} estimados por SEM/S&L e pela a formulação analítica de CREMER e sua diferença.

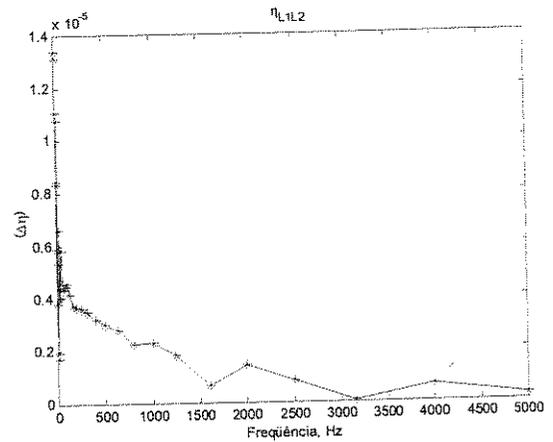
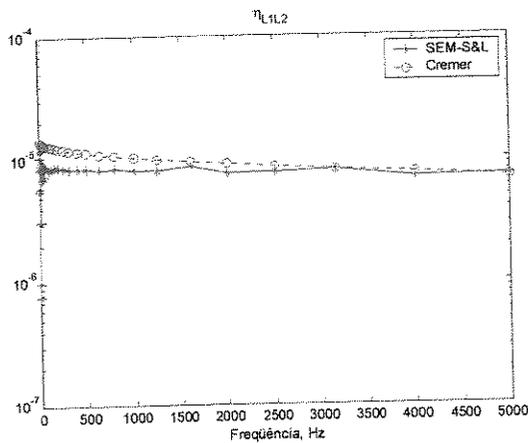
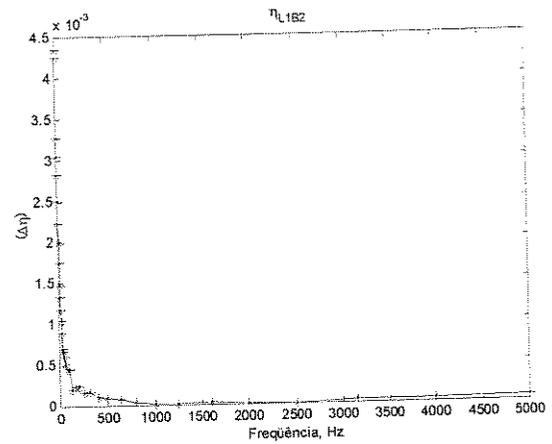
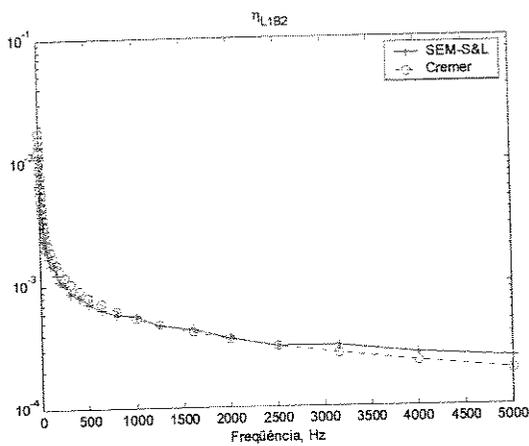
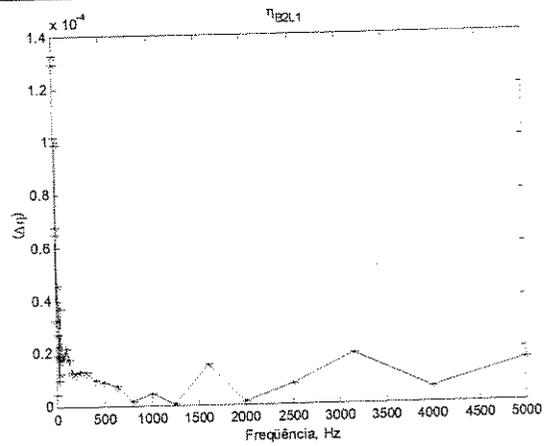
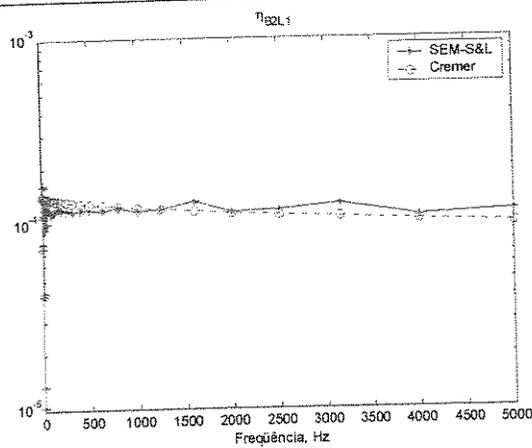


Figura 5.54 (cont.) – η_{ij} estimados por SEM/S&L e pela a formulação analítica de Cremer e sua diferença.

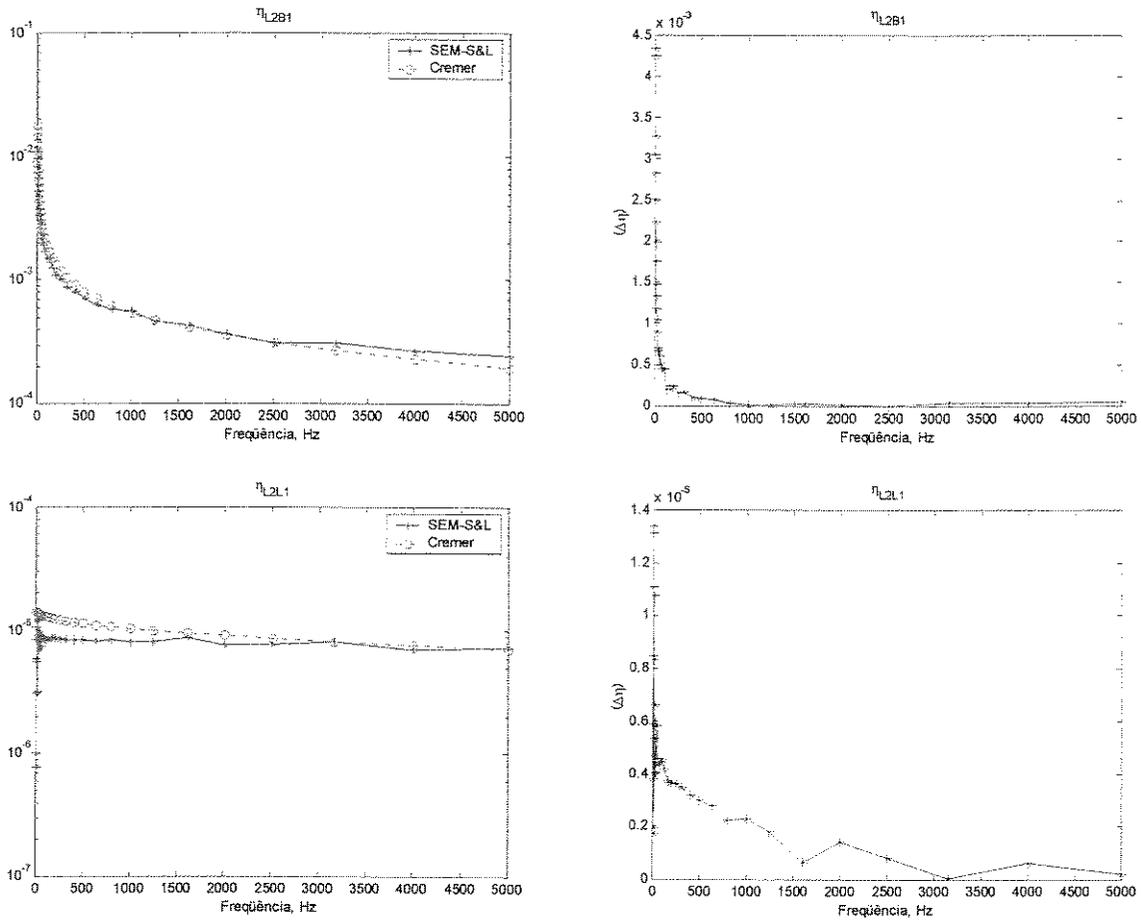


Figura 5.54 (cont.) – η_{ij} estimados por SEM/S&L e pela a formulação analítica de Cremer e sua diferença.

Das figuras acima pode-se observar que os fatores obtidos pelo método SEM/S&L mostram uma melhor estimativa do que os obtidos via SEM/PIM, principalmente os fatores relacionados ao caso de ondas incidentes longitudinais com ondas transmitidas do mesmo tipo. Este melhoramento é atribuído ao fato de não se resolver o sistema de equações completo com uma simples inversa da matriz de energia. Os termos que podem causar o mal-condicionamento da matriz de energia não estão considerados na metodologia SEM/S&L, ou seja, o sistema resolvido é um sistema reduzido. A outra vantagem é que o SEM/S&L é um método direto e que, com um algebrismo mais elaborado, outros termos da matriz de energia podem ser usados para melhorar a estimativa dos fatores de acoplamento.

5.2.5.1 Comentários gerais

Observa-se que as energias transversais e longitudinais foram calculadas somente nos elementos finitos 2 e 3 do modelo mostrado na Figura 5.48 (a) mas com um comprimento de 100m. As energias nos elementos semi-infinitos 1 e 4 não foram usadas devido ao comprimento infinito dos elementos que dificulta a estimação dos fatores de perda por acoplamento, isto é, os fatores de perda são calculados através da expressão dada por LYON E DEJONG (1995) como função de comprimento L de subsistema envolvido.

Observa-se também que a formulação do elemento espectral de viga de Timoshenko foi usada na modelagem numérica, e seus resultados são comparados com os resultados obtidos via as expressões dadas por CREMER (1988), que são baseadas na teoria simples de Bernoulli-Euler, conforme mostrado nos capítulos anteriores. Os coeficientes de acoplamento não foram calculados usando o elemento espectral de viga de Bernoulli-Euler pois este inclui um termo exponencial de kL , onde L é o comprimento do elemento, e este termo fica muito grande quando k e L são elevados, causando problemas numéricos. No nosso caso um $L=100m$ foi usado.

5.2.6 O uso dos fatores η_{ij} obtidos via SEM/S&L no modelo da viga-T

A fim de verificar os fatores de perda η_{ij} obtidos via SEM/S&L, o modelo, anteriormente analisado, da viga-T é novamente usado. A viga-T é modelada via a SEA, onde o acoplamento entre os diferentes subsistemas é modelado em duas maneiras: (i) através dos fatores obtidos usando a formulação analítica de CREMER (1988), e (ii) através dos fatores obtidos via a análise de energia no modelo usando o SEM e a formulação do SIMPSON E LALOR (1991). Uma potência unitária é injetada na viga-A, e a faixa de frequência analisada foi de 1 Hz a 5 kHz. Os níveis de energia nos três membros da estrutura são mostrados nas figuras que seguem.

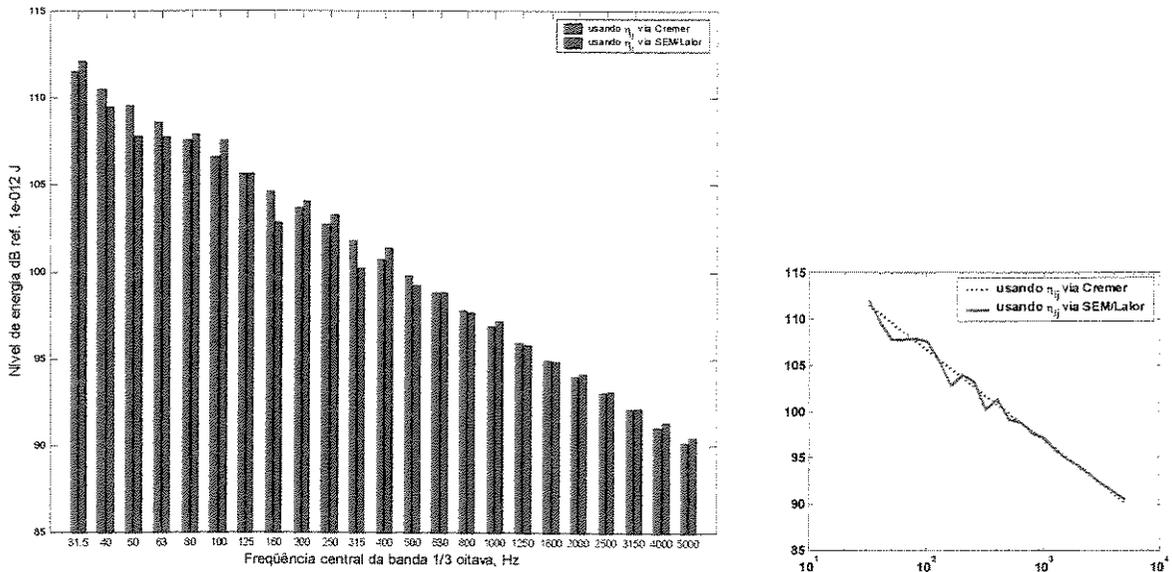


Figura 5.55 – O espectro de energia na viga-A, calculado via SEA.

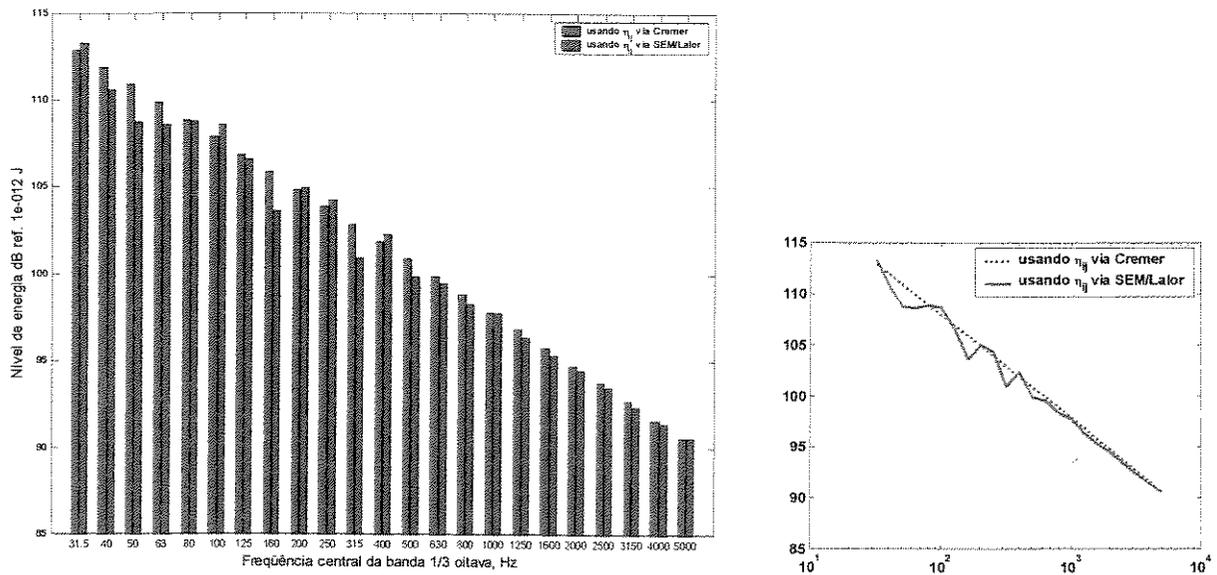


Figura 5.56 – O espectro de energia na viga-B, calculado via SEA.

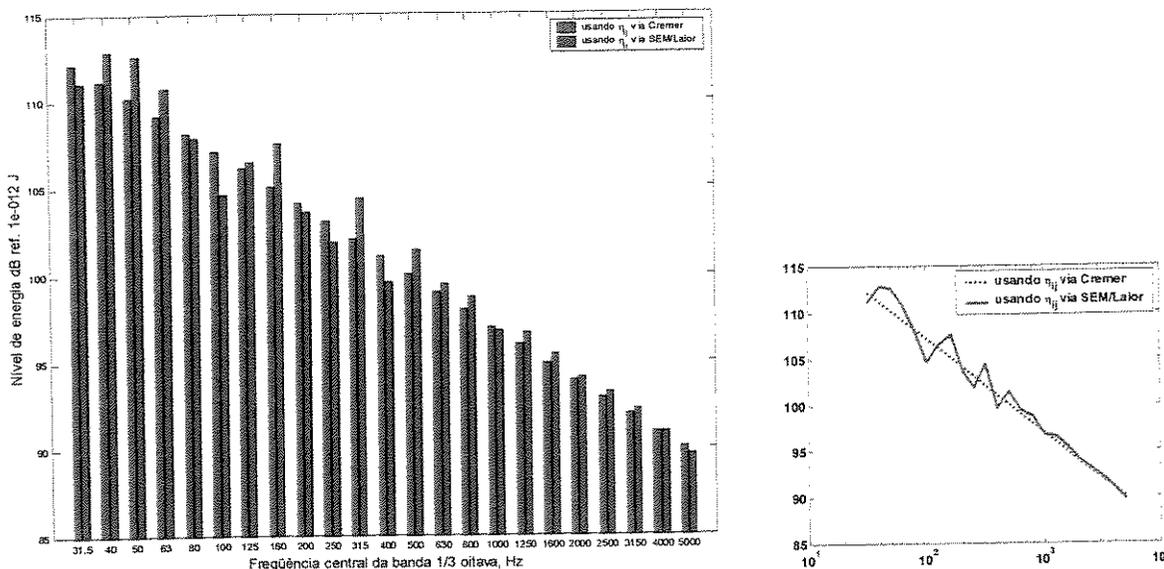


Figura 5.57 – O espectro de energia na viga-C, calculado via SEA.

Observa-se que a distribuição de energia nas vigas A, B, e C, calculada usando os fatores de CREMER e pelo método SEM/S&L exibem uma boa concordância. Especificamente, e em todas as vigas, a distribuição de energia calculada via os fatores do SEM/S&L mostrou uma melhor concordância em frequências acima de 200 Hz, e que tende a melhorar com frequências mais altas. É importante notar que este melhoramento é devido à densidade modal que aumenta com a frequência.

5.3 Obtenção de impedância e condições de contorno experimentais através do SEM

5.3.1 Introdução

Os métodos numéricos baseados em formulações matemáticas, como por exemplo o FEM e o BEM, estão sendo cada vez mais utilizados para a análise dinâmica de estruturas, principalmente as mais complexas. Metodologias como estas fornecem uma boa ferramenta para os estudos relacionados a dinâmica estrutural. Entretanto, às vezes estas metodologias produzem um comportamento diferente do comportamento dinâmico experimental (real). Esta discrepância pode surgir devido às diferenças relacionadas a parâmetros de massa, rigidez, e amortecimento e

às condições de contorno incorporadas no modelo numérico que podem não ser realistas. Um exemplo disto é o de uma viga engastada (ou simplesmente apoiada), observando que um engaste real não é nunca um engaste perfeito, principalmente em frequências mais altas. Esta viga engastada é normalmente modelada via FEM como sendo perfeitamente engastada, o que representa muitas vezes a principal fonte de discrepância.

Metodologias para caracterizar as condições de contorno podem ser conduzidas usando o método dos elementos finitos. Entretanto, e como foi mostrado anteriormente, o método dos elementos espectrais é formulado no domínio de frequência e é baseado em funções de forma exatas. Desta forma, o SEM torna-se uma melhor opção para caracterizar as condições de contorno.

5.3.2 Metodologia e solução

Neste trabalho, o SEM é usado para a caracterização da condição de engaste de uma viga através da determinação das impedâncias mecânicas (ou rigidez dinâmica) do engaste. Outro estudo que envolve a caracterização de duas diferentes caixas de areia é conduzido. Elementos espectrais de viga de Timoshenko são utilizados. O SEM é formulado no domínio da frequência e será usado junto com medidas experimentais, também no domínio da frequência.

5.3.2.1 Caracterização de engaste de uma viga

O caso menos complexo é a caracterização do engaste de uma viga. Para isto, considera-se uma viga reta que é engastada em uma das extremidades e livre na outra. Uma excitação é aplicada transversalmente em um ponto x ao longo da viga, conforme mostrado na figura abaixo. Esta força de excitação é representada no modelo de SEM por uma força de um espectro constante unitário.

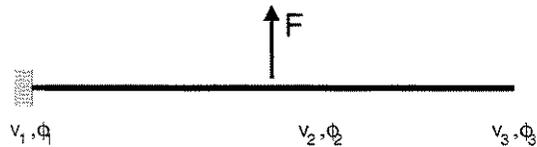


Figura 5.58 – Configuração experimental da viga engastada-livre e seus GDLs.

O modelo de SEM consiste de dois elementos espectrais com condição de contorno do tipo livre-livre. Devido à força transversal aplicada, dois GDLs por nó de deslocamento são definidos, v e ϕ , ver a Figura 5.59.

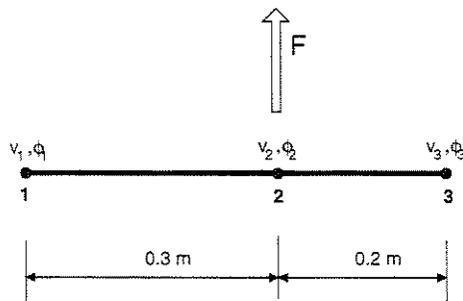


Figura 5.59 – Modelo de SEM, com os 6 GDLs.

A matriz dinâmica global destes dois elementos e o vetor dos GDLs são montados da seguinte forma,

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\
 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\
 & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\
 & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\
 \text{sim.} & & & & K_{55} & K_{56} \\
 & & & & & K_{66}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 v_1 \\
 \phi_1 \\
 v_2 \\
 \phi_2 \\
 v_3 \\
 \phi_3
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 -K_{v1}v \\
 -K_{\phi1}\phi_1 \\
 F \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{Bmatrix}
 \quad (5.28)$$

onde o esforço no nó 1 é representado por uma força dinâmica de reação à translação $-K_{v1}v$ e outra de rotação $-K_{\phi1}\phi_1$, com K_{v1} e $K_{\phi1}$ definidas como as rigidez dinâmica de translação e rotação no nó 1, respectivamente. Os graus de liberdade deste modelo são descritos como:

- v_2 e v_3 são os GDLs que podem ser facilmente medidos,
- v_1 e ϕ_1 são os GDLs do engaste que não podem ser medidos.
- ϕ_2 e ϕ_3 são os GDLs que normalmente são difíceis para serem medidos.

A equação (5.28) pode ser rearrangada e reescrita na seguinte forma, onde as variáveis conhecidas $\{v_2 \ v_3\}^T$ e desconhecidas $\{v_1 \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3\}^T$ são separadas,

$$\begin{bmatrix} K_{13} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{16} \\ K_{23} & K_{25} & K_{21} & K_{22} & K_{24} & K_{26} \\ K_{33} & K_{35} & K_{31} & K_{32} & K_{34} & K_{36} \\ K_{43} & K_{45} & K_{41} & K_{42} & K_{44} & K_{46} \\ K_{53} & K_{55} & K_{51} & K_{52} & K_{54} & K_{56} \\ K_{63} & K_{65} & K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \\ v_1 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -K_{v_1} v \\ -K_{\phi_1} \phi_1 \\ F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

Esta equação ainda pode ser escrita em forma mais simplificada como,

$$\begin{bmatrix} [M_{11}] & [M_{12}] \\ [M_{21}] & [M_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_1\} \\ \{U_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_1\} \\ \{f_2\} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

onde,

$$\begin{aligned} [M_{11}] &= \begin{bmatrix} K_{13} & K_{15} \\ K_{23} & K_{25} \end{bmatrix}, & [M_{12}] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{14} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{24} & K_{26} \end{bmatrix} \\ [M_{21}] &= \begin{bmatrix} K_{33} & K_{35} \\ K_{43} & K_{45} \\ K_{53} & K_{55} \\ K_{63} & K_{65} \end{bmatrix}, & [M_{22}] &= \begin{bmatrix} K_{31} & K_{32} & K_{34} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{44} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{54} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{64} & K_{66} \end{bmatrix} \\ \{U_1\} &= \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}, & \{U_2\} &= \begin{Bmatrix} v_1 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}, & \{f_1\} &= \begin{Bmatrix} -K_{v_1} v_1 \\ -K_{\phi_1} \phi_1 \end{Bmatrix}, & \{f_2\} &= \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Usando a segunda equação matricial da equação (5.30), pode-se resolvê-la para achar as variáveis $\{U_2\}$ da seguinte forma,

$$\{U_2\} = [M_{22}]^{-1} \{f_2\} - [M_{22}]^{-1} [M_{21}] \{U_1\} \quad (5.31)$$

E usando a primeira equação matricial da equação (5.30) pode-se achar a rigidez dinâmica de translação K_{v1} e de rotação $K_{\phi 1}$, que caracterizam a condição do engaste do nó 1, ou seja,

$$\{f_1\} = [M_{11}] \{U_1\} + [M_{12}] \{U_2\} \quad (5.32)$$

e então,

$$K_{v1} = -\frac{f_1(1)}{v_1}, \quad K_{\phi 1} = -\frac{f_1(2)}{\phi_1} \quad (5.33)$$

Após a determinação da rigidez dinâmica de translação e de rotação do engaste (ou de qualquer condição de contorno), as mesmas podem ser utilizadas para modelar uma condição de contorno da mesma característica. Para isso, a viga é modelada via SEM com a condição de livre-livre, e o sistema matricial de rigidez dinâmica global é montado, e então a rigidez (ou impedância) é adicionada à rigidez dinâmica do nó, ou do grau de liberdade, onde o engaste (ou uma outra condição de contorno) será considerado.

Para isto, considera-se uma viga reta de alumínio com seção retangular e com as seguintes propriedades: $L=0.685\text{m}$, $E=7 \times 10^{10}\text{N/m}^2$, $\rho=2800\text{Kg/m}^3$, $A=25.6 \times 3.3\text{mm}^2$, momento de inércia $I=7.666 \times 10^{-11}\text{m}^4$, $\nu=0.3$, e com um fator de dissipação $\eta=10^{-6}$. Uma excitação aleatória através de um excitador eletrodinâmico é aplicada transversalmente num ponto $x=0.27\text{m}$ longe do engaste, conforme mostrado na Figura 5.60. Uma faixa de frequência de 1Hz a 3200Hz, com uma resolução de 3200 linhas de frequência, foi utilizada. As FRFs foram medidas em dois pontos: no ponto da excitação e na extremidade livre da viga. As medidas foram feitas na superfície da viga através de um Vibrômetro Laser Doppler (LDV) Polytec OFV330, usando uma sensibilidade de 40V/m/s. O LDV é conectado a um sistema de aquisição de dados de HP de 16 canais.

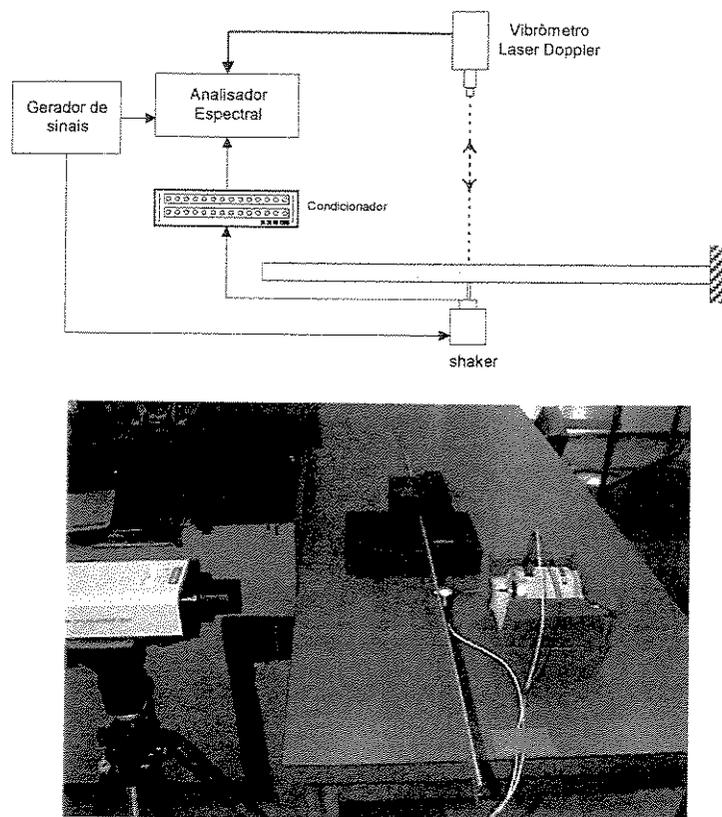


Figura 5.60 – Configuração do experimento da viga engastada.

A partir da função de coerência mostrada na Figura 5.61, as medidas feitas podem ser consideradas satisfatórias. As medidas das FRFs são usadas nas equações (5.30) a (5.33), e então a rigidez dinâmica de translação e de rotação, que caracterizam o engaste, são obtidas e são mostradas na Figura 5.62.

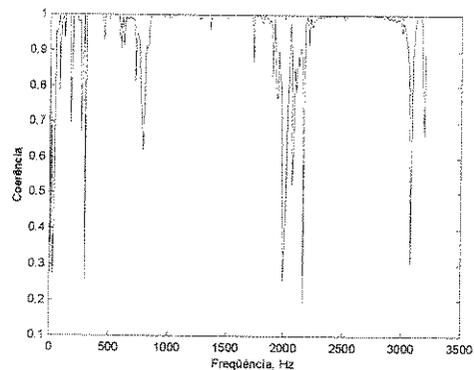


Figura 5.61 – A função de coerência medida no ponto de excitação da viga engastada.

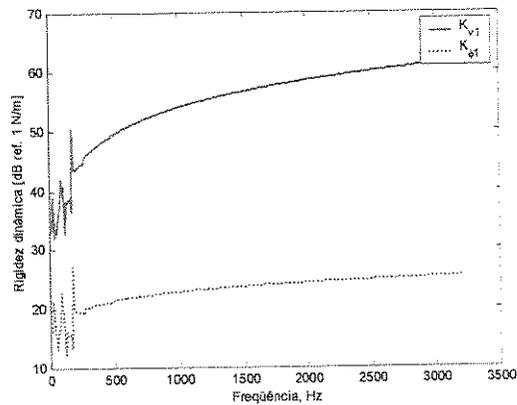


Figura 5.62 – As rigidez dinâmicas, de translação e de rotação, que caracterizam o engaste estimadas por SEM.

A mesma viga foi modelada via SEM com a condição livre-livre, e então a rigidez dinâmica do engaste foi adicionada à rigidez dinâmica em um dos nós da viga, e a resposta no ponto de excitação foi calculada. A condição de contorno da mesma viga também foi modelada como viga engastada-livre da maneira mais comum e mais usual na análise numérica, ou seja, eliminando as linhas e colunas dos graus de liberdade do engaste da matriz de rigidez global da vigas livre-livre. Esta eliminação representa uma rigidez infinita imposta nos graus de liberdade do engaste. A comparação da FRF no ponto de excitação das três configurações; (i) medida experimentalmente, (ii) calculada como usual condição de engaste, (iii) e com a condição de engaste ajustada com a rigidez dinâmicas identificada, são mostradas na Figura 5.63.

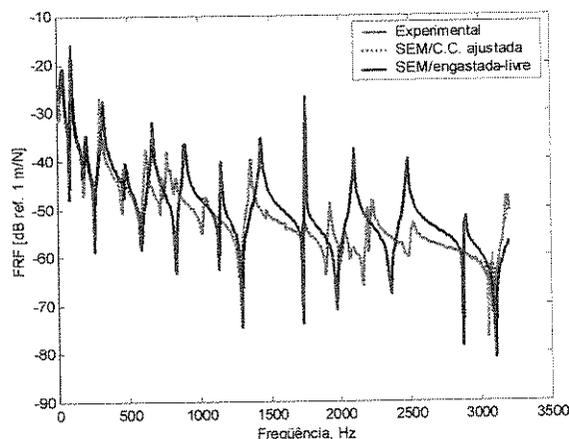


Figura 5.63 – A FRF (GDL:v) no ponto de excitação, experimental, engaste numérico, e engaste ajustado da viga engastada-livre, estimadas por SEM.

Observa-se que as FRFs experimental e ajustada exibem uma ótima concordância com uma diferença desprezível. A FRF calculada com a condição de engaste numérica (simples eliminação de linhas e colunas da matriz dinâmica) coincide com a FRF experimental somente em baixas frequências, até o terceiro modo natural de flexão da viga. A diferença começa a aumentar com a frequência de excitação a partir do quarto modo. Isso mostra claramente a importância da caracterização das condições de contorno para serem usadas nos modelos numéricos a fim de representar a real condição de contorno.

5.3.2.2 Caracterização dinâmica de caixa de areia

As caixas de areia podem ser usadas em estudos relacionados com a intensidade estrutural, em estudos de terminações anecóicas, ou em modelos de estruturas civis com fundações. A modelagem numérica torna-se mais realista e mais exata quando este tipo de condição de contorno é melhor representada. A mesma metodologia apresentada na seção anterior, e que foi utilizada para o caso da viga engastada, foi também usada para o caso da caixa de areia. Para isso, foram realizados dois experimentos com o objetivo de caracterizar duas caixas de areia diferentes.

5.2.2.1 Caixa pequena

A primeira caixa de areia consiste em uma caixa pequena de aço cheia de areia fina do tipo que é normalmente usado em construção. Esta caixa tem a seção quadrada de 0.25m de lado, e uma altura de 0.30m. Uma viga de alumínio com uma seção circular foi enfiada nesta caixa. Esta viga tem as seguintes propriedades: diâmetro externo $\phi_1 = 11.175\text{mm}$, diâmetro interno $\phi_2 = 9.375\text{mm}$, $A = 1.1620 \times 10^{-4}\text{m}^2$, $E = 7 \times 10^{10}\text{N/m}^2$, $\rho = 2800\text{Kg/m}^3$, $\nu = 0.3$, e com um fator de dissipação $\eta = 10^{-6}$. O comprimento total da viga é 0.66m, sendo assim que o comprimento de viga fora da caixa de areia é $L = 0.36\text{m}$. Uma excitação através de um excitador eletrodinâmico é aplicada transversalmente no ponto $x = 0.17\text{m}$ longe da caixa de areia, conforme mostrado na Figura 5.64.

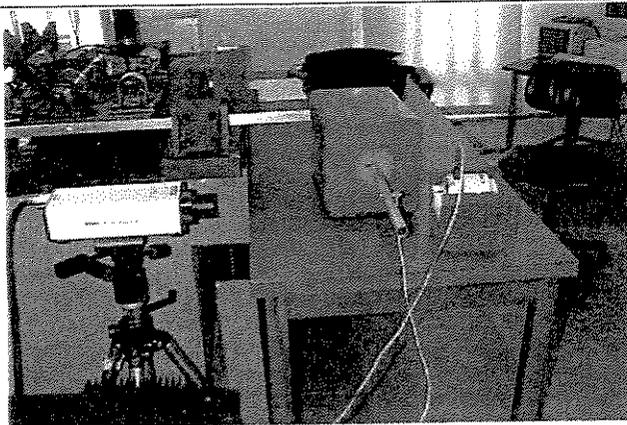


Figura 5.64 – Configuração experimental do experimento de caixa de areia pequena.

Uma faixa de frequências de 1Hz a 3200Hz com uma resolução de 3200 linhas de frequência foi utilizada. As FRFs foram medidas no ponto da excitação e na extremidade livre da viga. As medidas foram feitas na superfície da viga com o LDV. A rigidez dinâmica que representa a condição de contorno na caixa de areia foi calculada usando a mesma formulação e o método SEM. Esta rigidez foi adicionada aos graus de liberdade correspondentes da matriz dinâmica da mesma viga modelada como livre-livre. As FRFs medidas e numericamente ajustadas são mostradas nas figura abaixo. Pode se observar das figuras a ótima concordância entre a FRF medida experimentalmente e a FRF calculada numericamente via SEM com o ajuste de condição de contorno.

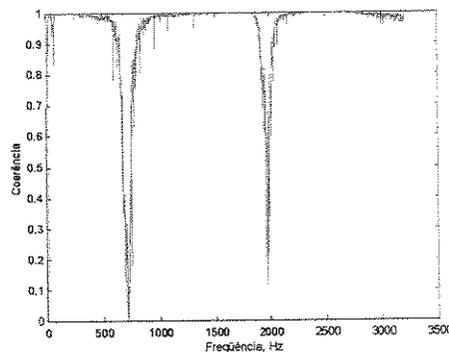


Figura 5.65 – A função de coerência medida no ponto de excitação da viga com caixa de areia.

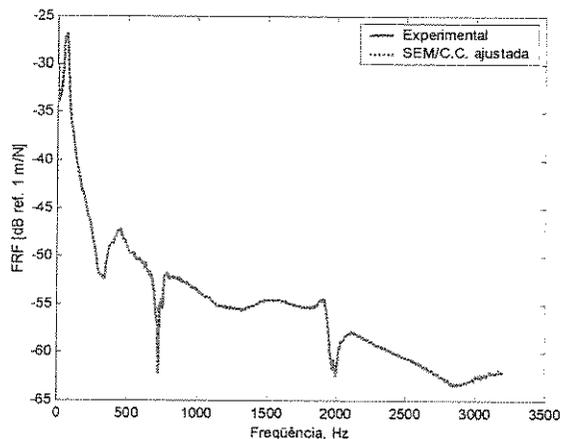


Figura 5.66 – As FRFs (GDL: v_2) no ponto de excitação, experimental e ajustada, da viga com caixa de areia pequena. Estimção por SEM.

5.2.2.2 Caixa grande

Outra caixa de areia maior foi também utilizada com a mesma viga, Figura 5.67. Esta caixa foi feita de madeira, e o mesmo tipo de areia foi usada. Ela tem a seção quadrada de 0.30m de lado, e uma altura de 1.0m. É importante ressaltar que a areia nesta caixa foi colocada em forma cônica na entrada da viga, diferente da caixa pequena. Isso foi feito para diminuir os efeitos de reflexão de ondas na entrada da caixa, ou seja, fazer com que a mudança da impedância na entrada da caixa seja gradual. Os mesmos procedimentos foram feitos a fim de caracterizar esta caixa de areia, usando o SEM. As FRFs medidas e numericamente ajustadas são mostradas na figura abaixo.

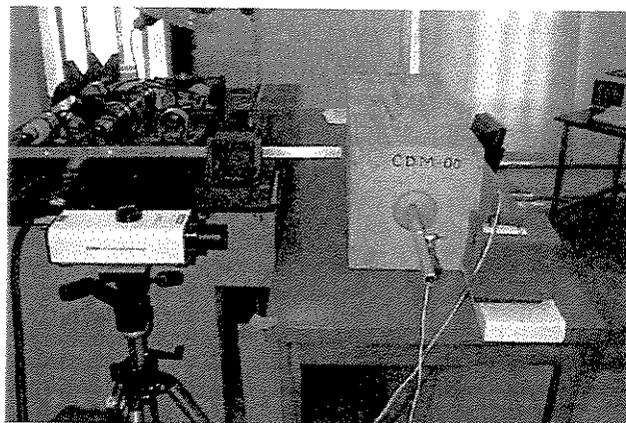


Figura 5.67 – Configuração experimental do experimento de caixa de areia grande.

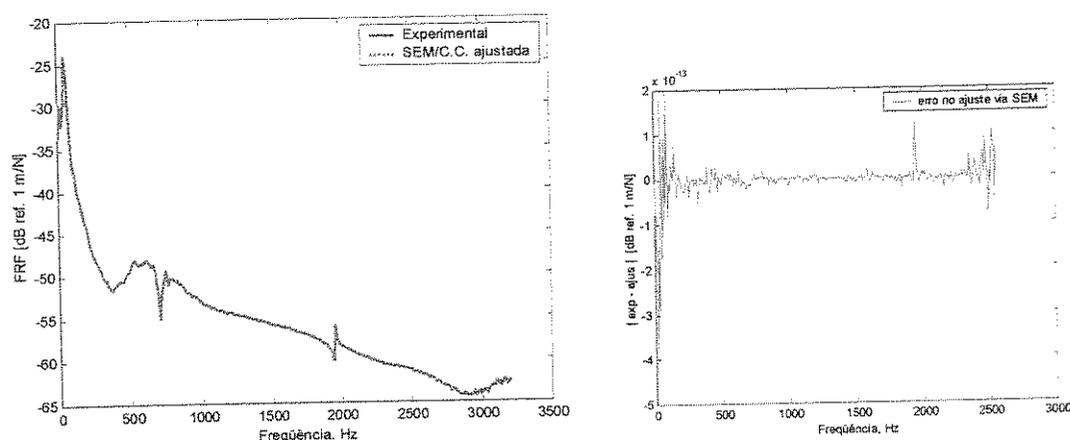


Figura 5.68 – As FRFs (GDL: v_2) no ponto de excitação, experimental e ajustada, da viga com caixa de areia grande estimada via SEM, juntamente com o erro.

Pode-se observar da Figura 5.68 a ótima concordância entre a FRF medida experimentalmente e a FRF calculada numericamente via SEM com o ajuste de condição de contorno.

5.2.2.3 Modelo de FEM para a caixa grande

Um modelo de FEM também foi usado para a caracterização da condição de engaste da mesma caixa de areia grande com a mesma viga a fim de mostrar a diferença entre as estimativas pelo o FEM e pelo SEM. O modelo foi montado da mesma forma, observando os relativos GDLs, e usando 50 elementos finitos da viga de Timoshenko. Usando a mesma metodologia, a rigidez dinâmica de translação e de rotação na entrada da caixa foi estimada e utilizada no modelo de viga livre-livre a ser ajustado. As FRFs medidas e numericamente ajustada são mostradas na Figura 5.69.

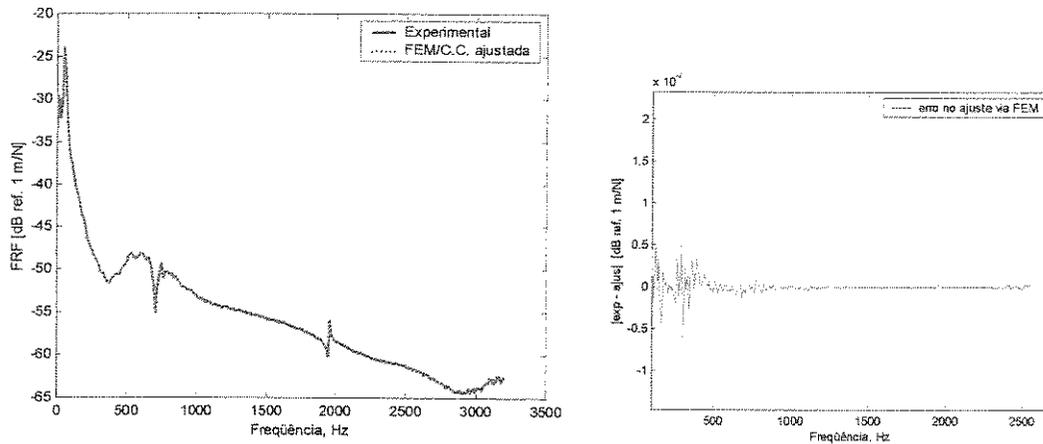


Figura 5.69 – As FRFs ($G_{DL:v_2}$) no ponto de excitação, experimental e ajustada, da viga com caixa de areia grande estimada via FEM, juntamente com o erro.

Pode ser observado que existe pequena discrepância da FRF ajustada via FEM em relação à FRF experimental. Esta diferença pode ser atribuída ao refinamento da malha e às funções de forma não-exatas do método dos elementos finitos. Por outro lado, o SEM fornece uma metodologia simples, exata, e com uma malha bem menor do que o FEM.

Apesar de ser a mesma viga e mesma caixa de areia, observou-se uma pequena diferença entre as rigidez dinâmicas estimadas por FEM e por SEM, conforme mostrado na Figura 5.70 e na Figura 5.71 para as rigidez dinâmicas de translação K_{v1} e de rotação $K_{\phi 1}$.

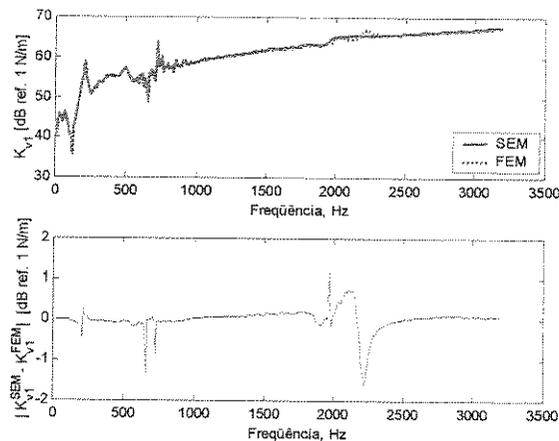


Figura 5.70 – A rigidez dinâmica K_{v1} estimada por FEM e SEM, e a diferença entre as duas estimativas. Modelo de caixa grande de areia.

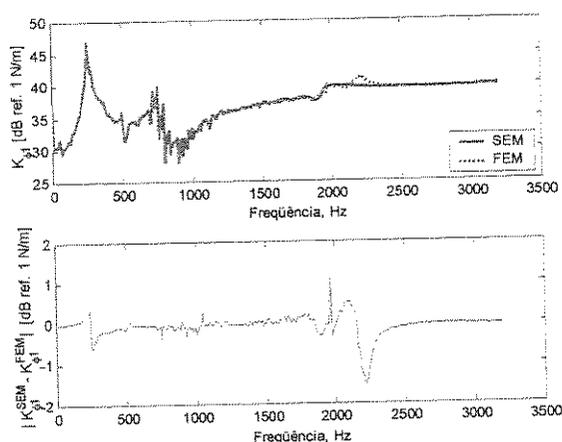


Figura 5.71 – A rigidez dinâmica $K_{\phi 1}$, estimada por FEM e SEM, e a diferença entre as duas estimativas. Modelo de caixa grande de areia.

Observa-se que as rigidez dinâmicas obtidas via o modelo de FEM são válidas para ajustar um modelo de SEM, e da mesma maneira as rigidez dinâmicas obtidas via o modelo de SEM são também válidas somente para um modelo de SEM. Para mostrar estas diferenças usaram-se a rigidez dinâmica obtida via o FEM no modelo de SEM, e também usaram-se a rigidez dinâmica obtida via o SEM no modelo de FEM. As FRFs ajustadas são mostradas nas duas figuras a seguir. Pode-se observar a discrepância nas FRFs ajustadas devido à incompatibilidade dos modelos e dos parâmetros ajustados, principalmente em frequências acima de 2kHz.

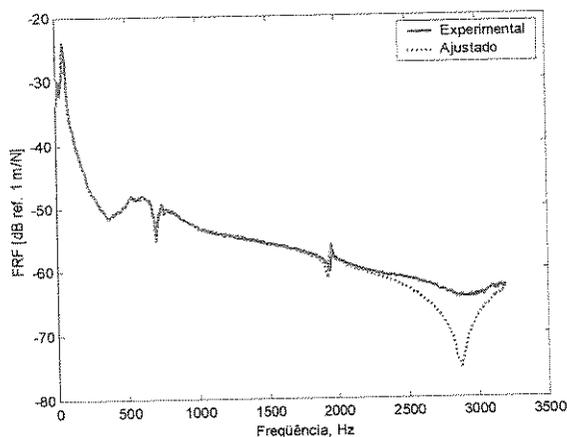


Figura 5.72 – FRF (GDL: v_2) do modelo de SEM ajustado com as rigidez dinâmicas obtidas através do modelo de FEM.

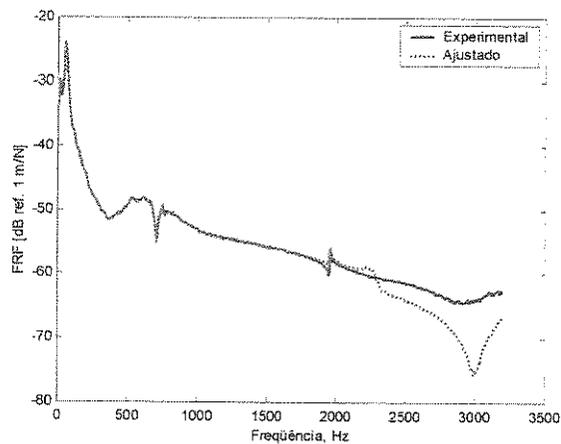


Figura 5.73 – FRF (GDL: v_2) do modelo de FEM ajustado com as rigidez dinâmicas obtidas através do modelo de SEM.

5.3.2.3 Comparação com o elemento espectral “throw-off”

Como foi mencionada nos capítulos anteriores, o elemento espectral do tipo “throw-off” é usado para a dissipação de energia para fora do sistema dinâmico. Desta forma, este tipo de elemento pode ser usado para representar uma terminação do tipo caixa de areia, com a condição de que esta caixa seja uma perfeita terminação anecóica, ou seja, dissipando toda a energia ou a potência injetada na estrutura. A fim de mostrar estas diferenças, a mesma viga foi também modelada como sendo um elemento “throw-off” conforme a malha do SEM da Figura 5.74. A comparação destes resultados é mostrada na Figura 5.75.

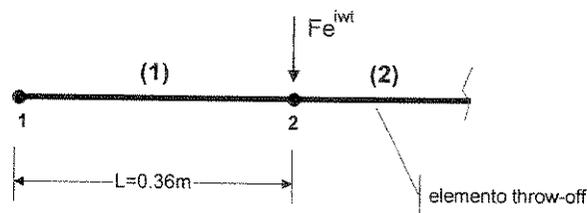


Figura 5.74 – Modelo de SEM para a viga enfiada em caixa de areia.

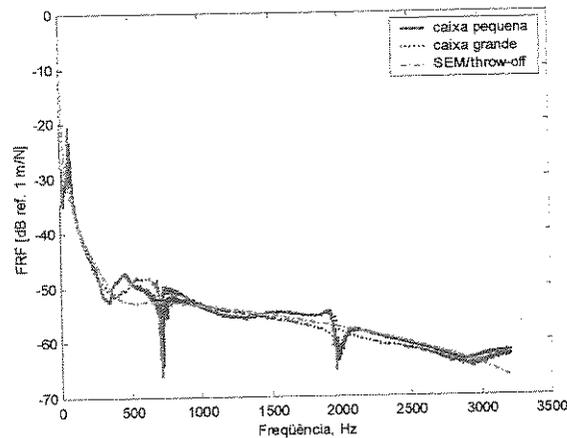


Figura 5.75 – As FRFs no ponto de excitação, usando elemento “throw-off”, e experimental usando caixa de areia pequena e grande.

Observa-se da Figura 5.75 que existe uma pequena diferença entre as FRFs medidas com caixa pequena e as FRFs medidas com caixa grande. Comparando estas duas FRFs com a resposta do elemento espectral pode-se observar que as medidas das FRFs com caixa de areia mostram alguns picos enquanto a FRF calculada com o modelo de elemento espectral não apresenta nenhum pico (ou modo). Os picos experimentais são divididos às reflexões de ondas na entrada das caixas. De um modo geral, as três respostas podem ser consideradas compatíveis.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Estruturas do tipo pórtico tridimensional são normalmente encontradas na prática em várias aplicações de engenharia. A vibração destas estruturas pode ser representada em modelos de barra (tração-compressão e torção) e viga em torno do eixo neutro de cada membro da estrutura. A otimização do comportamento dinâmico destas estruturas é importante no sentido que algumas vibrações são indesejáveis gerando ruído, desconforto e falhas por fadiga. Várias teorias e metodologias numéricas têm sido utilizadas para estudar as vibrações destas estruturas. O Método dos Elementos Finitos (FEM) é um dos métodos mais utilizados na realização destes estudos numéricos. Entretanto, para análise dinâmica em médias e altas frequências, o FEM torna-se computacionalmente proibido porque precisa de uma discretização muito refinada para modelar o comportamento dinâmico destas estruturas com exatidão. Além disso há o problema de alta sensibilidade da resposta às pequenas mudanças nos parâmetros da estrutura em altas frequências, que torna supérfluo o cálculo preciso de resposta por métodos determinísticos.

Investigaram-se neste trabalho técnicas alternativas para conduzir uma análise dinâmica de estruturas do tipo pórtico espacial, especialmente em médias e altas frequências. Três metodologias foram investigadas: o Método dos Elementos Espectrais (SEM), o método de Análise Estatística de Energia (SEA), e a técnica de Intensidade Estrutural (SI). O SEM, de algum modo, combina a flexibilidade geométrica, as características comuns e as vantagens competitivas dos métodos de ordem mais baixa (FEM) com a exatidão alta e a convergência rápida dos métodos de ordem mais alta (métodos espectrais). O SEM representa a matriz dinâmica de estrutura como função de frequência, e ele, portanto, permite a descrição exata da

dinâmica de propagação de ondas de vibração na estrutura analisada. Desta forma, a dinâmica de estruturas não pode ser representada como um problema de autovalor/autovetor, como é o caso no FEM. Somente a resposta em frequência é obtida no SEM, e a resposta no domínio de tempo pode ser calculada em alguns casos através da transformada inversa de Fourier.

Demonstraram-se, neste trabalho, as formulações exponenciais e complexas do SEM. As matrizes dinâmicas dos elementos de barra, viga, e elemento de torção foram demonstradas. Os elementos de viga de Bernoulli-Euler e de Timoshenko foram apresentados. As formulações necessárias para a análise dinâmica via o FEM deste tipo de estruturas também foi mostrada.

Desenvolveram-se, nesta tese, dois programas escritos na linguagem do MATLAB para a análise dinâmica estrutural. O primeiro usa os elementos espectrais, e o outro usa os elementos finitos, além disso, desenvolveu-se um programa para a análise estatística de energia. Todos os programas foram feitos para conduzir uma análise de estruturas de pórtico definidas no espaço tridimensional.

Mostrou-se que o SEM é mais adequado para conduzir uma análise dinâmica de estruturas do tipo pórticos espaciais em médias e altas frequências, com resultados mais precisos e com matrizes muito mais reduzidas em relação ao número de graus de liberdade, quando comparado com o FEM.

Em geral, procurou-se estabelecer uma relação entre as diferentes técnicas para a análise dinâmica de estruturas do tipo pórticos espaciais em médias e altas frequências. Esta relação é estabelecida principalmente entre o SEM, a SEA e o SI. Observa-se que as etapas acima mencionadas e concluídas nesta tese podem ser vistas em forma compacta mostrada na seguinte figura.

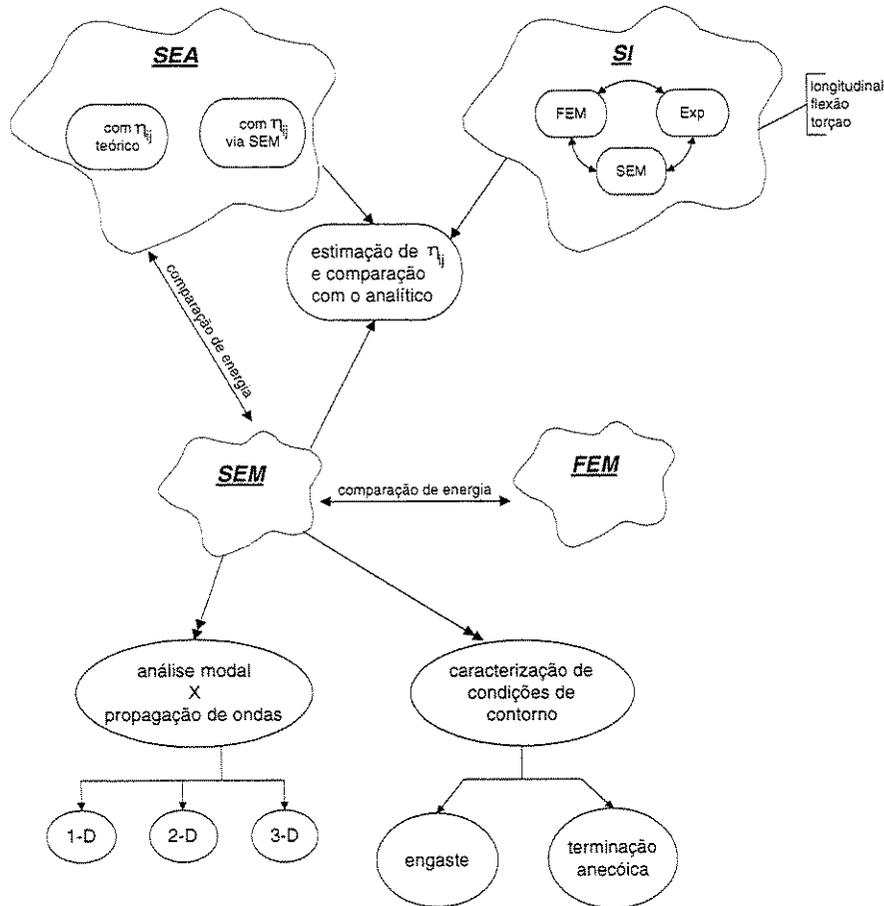


Figura 6.1 – As diferentes metodologias, e a relação estabelecida entre elas, e conduzida neste trabalho.

6.1 Em relação ao cálculo da intensidade estrutural

A técnica de fluxo de potência, ou intensidade estrutural, é uma alternativa para estudar problemas de vibração estrutural amortecida. O uso do SEM para o cálculo de fluxo de potência estrutural mostrou-se mais adequado comparando-o com o FEM. Um modelo de viga reta foi usado na modelagem numérica. O fluxo de potência foi calculado via SEM e via FEM. O SEM mostrou resultados mais precisos. A diferença entre a intensidade estrutural (SI) ao longo da viga e a potência injetada no ponto de excitação (P_{in}) foi observada e analisada. Esta diferença era significativa no modelo de FEM, mesmo com número suficiente de elementos, enquanto ela era nula no modelo de SEM. Esta diferença aumenta com a frequência de excitação. Uma outra análise numérica semelhante foi feita usando um modelo do tipo viga-T. Esta estrutura foi

submetida a ensaios em vários laboratórios de diferentes países para comparação de resultados, no que se chama de operação "Round Robin". É importante ressaltar que várias tentativas foram feitas para conduzir uma análise experimental na estrutura aqui nos laboratórios do DMC, mas não tivemos sucesso devido às dificuldades burocráticas de importação. Algumas medidas feitas na viga pelo Prof. Dr. Stephen Hambric (Pensilvania State University), foram usadas para comparação. Os resultados numéricos via o SEM mostraram ser melhores quando comparados com os de FEM. Uma boa concordância com os resultados obtidos via SEA foi observada. As diferenças entre o SI e o Pin via SEM foi nula, o que permite concluir do que o SEM é mais adaptado a análises de médias e altas frequências. A principal limitação do SEM é a dificuldade para estendê-lo a guias de onda bi- e tri-dimensionais.

O cálculo da SI via SEM em estruturas do tipo pórtico tridimensional foi também validado usando uma estrutura do tipo viga-Z em caixa de areia. Esta estrutura, após a excitação, apresenta todos os tipos de ondas de propagação propagando-se no sentido da fonte para a caixa de areia. O SEM mostrou uma boa concordância com as medidas do SI. Este estudo não foi descrito na tese, mas foi publicado no congresso InterNoise-98 (AHMIDA ET AL., 1998).

6.2 Em relação ao cálculo da energia mecânica

A formulação necessária para o cálculo de energia potencial e cinética em pórticos espaciais foi desenvolvida usando os elementos espectrais do SEM e os elementos convencionais do FEM, e usando o método SEA. Através de exemplos numéricos, foi verificada a concordância entre as três metodologias, mostrando a importância de usar o SEM e a SEA em análises de média e alta frequência.

O SEM ainda foi usado para obter os fatores de perda por acoplamento usados no método SEA. Os fatores de acoplamento são considerados o ponto crítico na formulação da SEA, sendo os parâmetros mais difíceis de serem estimados. Estes fatores foram calculados para modelos simples de vigas do tipo viga-L, ou seja, vigas que se encontram em ângulos de 90°. Estes fatores foram comparados com outros obtidos analiticamente. O SEM mostrou ser uma ferramenta efetiva para a obtenção destes fatores de acoplamento.

6.3 Em relação aos modos complexos

Utilizou-se o SEM para esclarecer as idéias sobre os modos reais e complexos, e como estes últimos podem ser relacionados ao fenômeno de propagação de ondas estruturais. Foi mostrado como o SEM, que é baseado em formulações que descrevem a propagação de ondas, pode ser usado para conduzir tais estudos. Desta forma, o SEM pode ser usado no ensino dos conceitos básicos de propagação de ondas e análise modal, principalmente para estruturas infinitas, o que seria inviável fazer usando o FEM em sua forma convencional (mais recentemente elementos infinitos têm sido propostos no contexto do FEM (BATHE, 1996)).

Um fator para a quantificação da complexidade modal foi apresentado. Ele consiste em calcular o coeficiente de correlação entre as partes reais e imaginárias de um modo natural ou de um modo operacional (ODS). Há casos em que não existe modo, ou seja, não existem ondas espacialmente estacionárias, mas apenas ondas propagando-se. Neste caso, a vibração se manifesta somente através do fenômeno de propagação de ondas. Isto pode ser observado no plano de Nyquist do ODS, que resultaria em círculos perfeitos.

6.4 Contribuições

As demonstrações matemáticas, as simulações numéricas, e os ensaios experimentais neste trabalho resultaram nas seguintes contribuições:

- Desenvolver as equações matriciais necessárias para o cálculo de fluxo de potência em elementos espectrais, e em elementos finitos, usando elementos de barra em tração-compressão e torção, viga de Bernoulli-Euler e viga de Timoshenko.
- Desenvolver as equações matriciais para o cálculo das energias cinética e potencial, usando os diferentes elementos espectrais e finitos.
- Desenvolver um programa estruturado no MATLAB[®] para a análise dinâmica de pórticos espaciais, incluindo o cálculo da resposta em frequência, fluxo de potência, energia cinética e potencial, e o cálculo dos modos operacionais com animação.

- Obtenção dos fatores de perda por acoplamento, utilizados na SEA, através da modelagem via o SEM.
- Caracterização da condição de engaste de vigas, e da condição de vigas com terminações anecóicas, usando o SEM.
- Utilização do SEM como uma ferramenta para fazer a ligação entre os modos complexos e a abordagem de propagação de ondas. Com o SEM torna-se fácil modelar sistemas infinitos, e mostrar o amortecimento causado por propagação de onda, que pode ser observado em várias aplicações práticas mas é pouco utilizado.

6.5 Sugestões para pesquisas futuras

Para que o método dos elementos espectrais venha a se tornar mais atraente para aplicações industriais, a biblioteca dos elementos espectrais deve ser enriquecida através de desenvolvimento de outros elementos. Precisa-se desenvolver elementos de placa com condições de contorno arbitrárias (o elemento de placa finito-infinito já pode ser encontrado na literatura) e elementos espectrais tridimensionais para a análise de estruturas volumétricas definidas no espaço 3-D. A associação de elementos espectrais com macro elementos finitos e com modelagem via análise estatística de energia tendo em vista a obtenção de modelos híbridos para baixas e altas frequências é um tema que merece ser aprofundado.

6.6 Trabalhos publicados

Durante a realização desta tese, foram publicados os seguintes artigos em anais de congressos nacionais e internacionais, e em periódicos internacionais:

6.6.1 Periódicos internacionais

- Ahmida, K. M. and Arruda, J. R. F., "Spectral Element-Based Prediction of Active Power Flow in Timoshenko Beams", International, Journal of Solids and Structures, V38, No. 10-13, pp. 1669-1679, 2001.

- Ahmida, K. M. and Arruda, J. R. F., "On the Relation Between Complex Modes and Wave Propagation Phenomena", aceito para publicação em Journal of Sound and Vibration.
- Ahmida, K. M. and Arruda, J. R. F., "Estimation of the SEA Coupling Loss Factors by Means of Spectral Element Modeling", submetido para publicação em Journal of Sound and Vibration.
- Freschi, A. A., Pereira, A. K., Ahmida, K. M., Frejlich, J., and Arruda, J. R. F., "Analyzing the Total Structural Intensity in Beams Using a Homodyne Laser Doppler Vibrometer", Shock & Vibration, V7, pp. pp.299-308, 2000.

6.6.2 Anais de congressos internacionais

- Freschi, A. A., Pereira, A. K., Ahmida, K. M., Frejlich, J., and Arruda, J. R. F., "Analyzing the Total Structural Intensity in Beams Using a Homodyne Laser Doppler Vibrometer", Proceedings of the 3rd International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques, Advances and Applications, ISBN 0-8194-2863-9, Ancona-Italy, June 16-19, SPIE Vol. 3411, pp. 366-375, 1998.
- Ahmida, K. M., and Arruda, J. R. F., "Predicting the Power Flow in Beam Structures using the Spectral Element Method", In Computational Mechanics: New Trends and Applications, E. Onate and S. R. Idelsohn (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain. Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, WCCM IV, Buenos Aires, 29 June-2 July, CD-ROM, 13pp, 1998.
- Ahmida, K. M., Pereira, A. K., and Arruda, J. R. F., "Predicting the Total Structural Intensity in Beam Structures using the Spectral Element Method", Proceedings of the 1998 International Congress on Noise Control Engineering (Inter-Noise 98), ISBN 0473054434, Christchurch, New Zealand, November 16-18, paper 144, CD-ROM, 6pp, 1998.

- Ahmida, K. M., and Arruda, J. R. F., “Computing the Flexural Power Flow in Timoshenko Beams using Spectral Element and Finite Element Methods”, 6th Pan American Congress of Applied Mechanics, PACAM VI and 8th International Conference on Dynamic Problems in Mechanics, DINAME 99, Rio de Janeiro, January 4-8, CR-ROM, 4pp, 1999.
- Ahmida, K. M., and Arruda, J. R. F., “Spectral Element Modeling of the Power Flow in a T-beam Structure: a Computational Experiment”, ASME Paper DETC99/VIB-8113, Proceedings of the 17th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME Design Engineering Technical Conference, Las Vegas, September 12-15, CR-ROM, 7pp, 1999.
- Pereira, A. K., Ahmida, K. M., and Arruda, J. R. F., “Active Vibration and Noise Control using a Generalized Intensity Controller”, Proceedings of the 1999 International Symposium on Active Control of Sound and Vibration (ACTIVE 99), Fort Lauderdale, Florida, USA, December 4-6, pp.1035-1046, 1999.
- Ahmida, K. M. and Arruda J.R.F, Interpreting Complex Modes as a Wave Propagation Phenomenon, International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA, September 13-15, Leuven, CR-ROM, 8pp, 2000.
- Ahmida, K. M. and Arruda J.R.F, The Relation Between Complex Vibrational Modes and Wave Propagation Phenomenon, IX International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, IX-DINAME, Florianópolis, March 5-9, pp. 359-364,2001.

Apêndice A

Programas desenvolvidos

Apresenta-se neste apêndice uma descrição dos programas desenvolvidos neste trabalho, os quais foram utilizados para realizar todas as modelagens numéricas. Todos os programas foram escritos no conhecido ambiente MATLAB^(R) para conduzir uma análise dinâmica de estruturas do tipo pórtico espacial. Programas para a análise dinâmica de estruturas usando três métodos foram desenvolvidos: análise via SEM, análise via FEM e análise via SEA.

A.1 Programa para análise dinâmica usando o SEM

Uma das técnicas de modelagem de estruturas que é melhor adaptada às médias e altas frequências é àquela conhecida como o Método dos Elementos Espectrais (SEM). Foi desenvolvido um programa utilizando o ambiente MATLAB^(R) para a modelagem numérica de estruturas do tipo pórtico espacial, baseando-se nas formulações matriciais do SEM. Aproximadamente 8000 linhas de programação foram escritas, somando a 88 funções em linguagem MATLAB^(R). A seguir é feita uma descrição dos diferentes blocos do programação desenvolvidos :

- Leitura de arquivo de entrada de dados da estrutura a ser analisada, incluindo a possibilidade de ter elementos com diferentes propriedades de material e de geometria.
- Reprodução gráfica da estrutura treliçada em espaço 2-D ou 3-D e escolha da faixa de frequência a ser usada na análise.

- Montagem da matriz dinâmica e resolução do sistema matricial para cada componente de frequência. Foi implementada a opção de utilizar elementos de rigidez localizados em graus de liberdade (GDL) escolhidos. O opção de adicionar elementos de massa concentrada nos nós também foi implementada.
- Reprodução gráfica da resposta em frequência de um grau de liberdade específico. Foi implementado um algoritmo para identificar as frequências naturais (não amortecidas) usando a resposta em um só grau de liberdade em um determinado pico da FRF através da equação de um sistema de um grau de liberdade,

$$H_i = \frac{A_r}{(\bar{\omega}_r^2 - \omega^2)} \quad (\text{A.1})$$

onde H_i é a FRF no grau de liberdade i , A_r é a amplitude da resposta do modo r , ω_r é a frequência natural complexa do modo r ($\bar{\omega}_r = \omega_r(1 + i\eta_r)$), e ω é uma frequência arbitrária. Pelo menos três equações são escritas em três linhas de frequência próximas de uma ressonância, e então resolvidas para achar ω_r e η_r .

- Cálculo e reprodução gráfica da função de resposta em frequência, em um grau de liberdade específico, de um ponto arbitrário ao longo de um elemento escolhido da estrutura. Este cálculo é necessário já que o tamanho dos elementos espectrais é controlado somente pelo número das discontinuidades na estrutura. Ele é feito através das funções de forma do elemento espectral para cada tipo de onda propagante, ou seja, elemento de barra para movimentos axiais, elemento de viga para momentos transversais nos dois planos de propagação, e elemento de barra em torção para movimentos torsionais em torno do eixo principal de membro.
- Cálculo e reprodução gráfica de potência total injetada na estrutura em toda a faixa de frequência analisada. Esta potência é calculada como sendo a soma das contribuições das ondas longitudinais, transversais nos dois planos ortogonais, e torcionais.
- Cálculo e reprodução gráfica de fluxo de potência (potência ativa) em um ponto arbitrário ao longo de um membro da estrutura. O fluxo de potência devido à contribuição de todos os tipos de propagação é calculado, isto é, devido às ondas longitudinais, transversais nos dois planos ortogonais, e torcionais.

- Cálculo e reprodução gráfica das médias numéricas destas potências (injetada e ativa) como sendo valores r.m.s. e com a opção de usar escala de oitavas ou 1/3 de oitava.
- Cálculo e reprodução gráfica da energia potencial e da energia cinética em um ou vários membros da estrutura, em toda a faixa de frequência. Estas energias são calculadas através da contribuição de cada tipo de onda (longitudinal, flexão, e torsional). Cálculo e reprodução gráfica da potência dissipada em um membro da estrutura.
- Cálculo e reprodução gráfica da média desta energia como sendo valores r.m.s. e com a opção de usar escala de oitavas ou 1/3 de oitava.
- Cálculo e reprodução gráfica de um modo operacional (“Operational Deflection Shape” ODS). Para que isso seja feito, e devido ao pequeno número de elementos utilizado no SEM, precisa-se calcular a resposta em vários pontos ao longo de cada membro da estrutura. Isso é feito através das funções de forma. O programa oferece a opção de escolher o número dos pontos usados para o cálculo destas respostas. Alguns algoritmos foram feitos para a criação da matriz de coordenadas e da matriz de conectividade da nova malha, isso é, a *geração automática da malha*.
- Reprodução gráfica deste ODS em forma de animação (2-D ou 3-D) para que este modo seja visto e estudado em forma mais elaborada.

Deve-se enfatizar que a modelagem de vigas pode ser feita utilizando, como opção, a teoria simples de Bernoulli-Euler, ou a teoria da ordem mais elevada de Timoshenko que leva em conta a inércia de rotação e a deformação de cisalhamento. Este procedimento de programação é mostrado em blocos da seguinte forma:

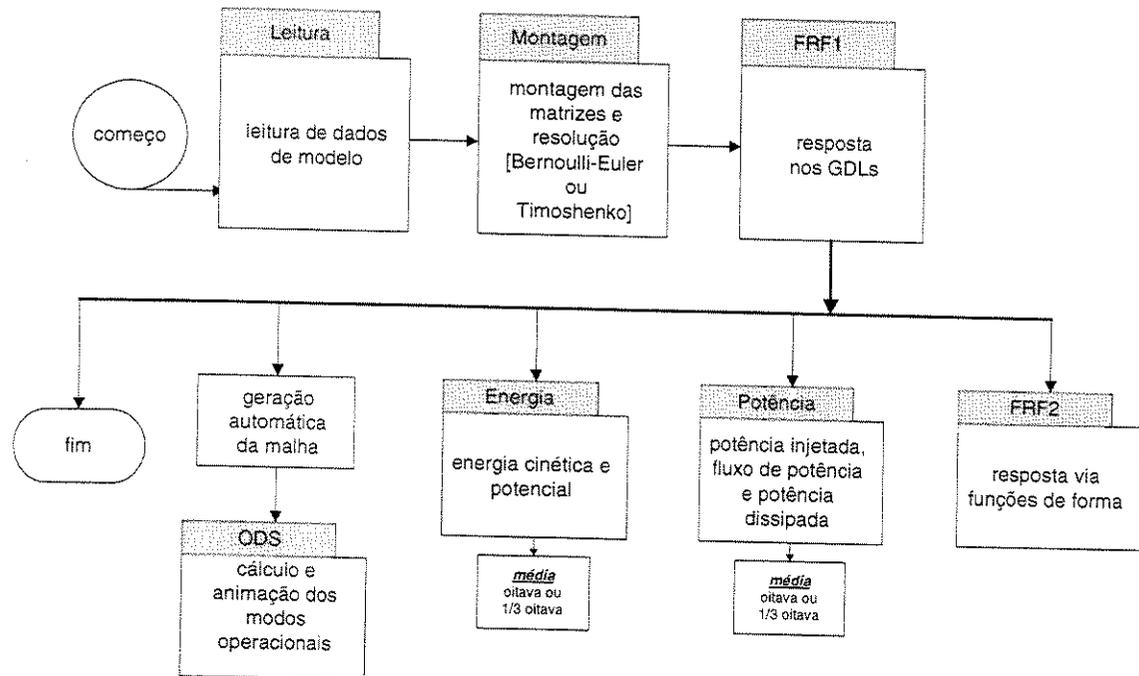


Figura A.1 – Blocos de programação usando as formulações de SEM.

A.2 Programa para análise dinâmica usando o FEM

Outro programa semelhante utilizando a formulação do Método dos Elementos Finitos (FEM) também foi desenvolvido. Este programa tem os mesmos objetivos e com blocos de algoritmos semelhantes àqueles do programa via o SEM mostrados na Figura A.1. A validação destes dois programas foi feita através de comparação de resultados com um modelo de estrutura do tipo pórtico tridimensional usando o pacote comercial ANSYS®.

A.3 Modelo de arquivo de entrada de dados para os programas de SEM e FEM

A seguir é mostrado um modelo de um arquivo de entrada de dados para o programa desenvolvido para o SEM. Deve-se enfatizar que a estrutura deste arquivo é a mesma usada no programa semelhante via o FEM. A única diferença é que o tipo do elemento é sempre do tipo 2-nós (tipo 3), enquanto no SEM o elemento pode ser do tipo 2-nós (tipo 3) ou “throw-off” (tipos 1 e 2). Um modelo de uma estrutura de pórtico tridimensional com os números dos elementos e dos

nós é mostrado na Figura A.2. Observa-se que o elemento número 9 é do tipo “throw-off”, e que o nó número 9 é um nó imaginário, pois o elemento “throw-off” contém somente um nó (#3). Portanto, o nó número 9 é usado somente para obter a matriz de transformação das coordenadas relacionada ao elemento.

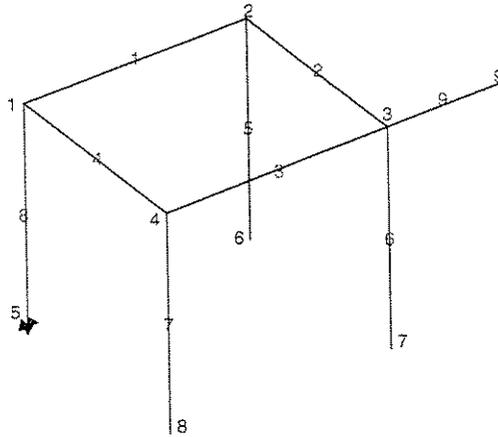


Figura A.2 – Estrutura do tipo pórtico tridimensional.

```

TITLE
Um demo para o arquivo de entrada de dados

MODEL
3-D portal frame

GENERAL
5
nelem          9
mnode          9
nod_cons       1
nod_forc       1
beam_typ       1

MATERIALS
4
gem_typ        2
mat_typ        2
gem_parm       6
mat_parm       4
XArea          1.711800e-3      1.4000e-3
Jpolar         3.634300e-7      2.929616e-7
Iner_y         4.159674e-7      1.737613e-7
Iner_z         1.433475e-7      1.737613e-7
Alfaa          0.0              0.0
Kapp           0.8333333        0.8333333
Young          2.1e11           7.01e10
Dens           7800             2700
nii            0.33             0.30
Etaa           1e-6             1e-4

COORDINATES
1      0.00000  1.00000  1.00000
2      1.00000  1.00000  1.00000
3      1.00000  0.00000  1.00000
4      0.00000  0.00000  1.00000
5      0.00000  1.00000  0.00000
6      1.00000  1.00000  0.00000
7      1.00000  0.00000  0.00000
8      0.00000  0.00000  0.00000
9      1.40000  0.00000  1.00000

CONNECTIVITY
Elem      tipo      CONEC      GEOM      MAT
1         3         1 2         1         1
2         3         2 3         1         1
3         3         4 3         1         1
4         3         1 4         2         2
5         3         6 2         2         1
6         3         7 3         2         1
7         3         8 4         1         2
8         3         5 1         1         2
9         1         5 1         1         1

CONSTRAINTS
5      1      1      1      1      1      1

FORCES
1      1      1      1      1      0      0      0

```

Figura A.3 – Exemplo de arquivo de entrada de dados do programa.

A análise dinâmica, via SEM ou FEM, pode ser feita em escala linear de frequência (largura de banda fixa), oitava, ou 1/Q de oitava. Esta última é uma escala do tipo percentagem de largura de banda constante com um número Q de linhas para cada oitava ($\frac{\Delta f}{f} = 2^{1/Q}$).

Figura A.4 – Definição de linhas de frequência.

A.4 Programa para análise dinâmica usando a SEA

Baseando-se na literatura, pode-se afirmar que a SEA é o único método para a predição de vibração em altas frequências de estruturas complexas. Sendo assim, é importante ressaltar que a SEA foi primeiramente desenvolvida e apresentada por Dr. R. H. LYON nos anos 60, quando ele escreveu as primeiras equações de balanço de energia (Figura A.5), e deu os primeiros passos para a formulação completa da metodologia.

6 February, 1960

Energy Flow between Linearly Coupled Modes.

Consider the two mode system defined by

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -2\alpha_1 x_1 - \omega_1^2 y_1 - \omega_{12}^2 y_2 + f_1 \\ y_1 = x_1 \\ \ddot{x}_2 = -2\alpha_2 x_2 - \omega_2^2 y_2 - \omega_{12}^2 y_1 + f_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \quad (1)$$

where f_1 and f_2 are purely random processes independent

Figura A.5 – As anotações do R. H. LYON sobre o balanço de energia, 1960.

Neste trabalho, a análise numérica via o método da análise estatística de energia (SEA) de estruturas de tipo pórticos espaciais foi feita através de um programa desenvolvido para tal objetivo. A estrutura do arquivo de entrada de dados para este programa é diferente dos outros acima mencionados. Este programa tem o objetivo de calcular a energia total em cada membro de estrutura, calculada como média em bandas de oitava ou 1/3 de oitava. O procedimento de programa é descrito da seguinte forma:

- Leitura de arquivo de dados da estrutura, incluindo a possibilidade de ter membros com diferentes propriedades de material e de geometria.
- Definição da faixa de frequência a ser analisada e o tipo de banda, linear ou logarítmica. Figura A.4.
- Montagem da matriz global dos fatores de perda (interna e por acoplamento), e montagem do vetor de potências injetadas na estrutura.
- Resolução do sistema matricial para obter a distribuição de energia total, e a potência dissipada em cada membro da estrutura. A resolução do sistema de equações é feita através de um algoritmo do Gauss ou de um algoritmo de decomposição em valores singulares (SVD), dependendo de número de incógnitas e equações envolvido.

Um exemplo de arquivo de entrada de dados para uma estrutura do tipo viga-T, mostrada na Figura A.6, tem a seguinte forma:

```

MODEL
Round-Robin T-beam

GENERAL
Nmemb      3
Tnode      4
Nod_pin    1

MATERIALS
Gem_typ    1
Mat_typ    2
XArea      1.7118000e-3
Jpolar     3.6588149e-7
Iner_z     1.4334755e-7
Iner_y     4.1596740e-7
Young      2.1e9  7e11
Dens       7800  2800
Nii        0.30  0.33
Etaa       1e-6  1e-4

MEMBCON
#memb      # de memb conectado a ele
1          2
2          2
3          2

CONTYPE
Mem#  geom  mat  length  mem/type1  mem/type2  mem/type3
1     1     1     0.7779    2           0           3           90
2     1     1     1.0827    1           0           3           90
3     1     2     0.9303    1           90          2           90

PIN
Mem  Pinx  Piny  Pinz  Pinx
1    0     1     0     0

```

Figura A.6 – Exemplo de arquivo de entrada de dados do programa SEA.

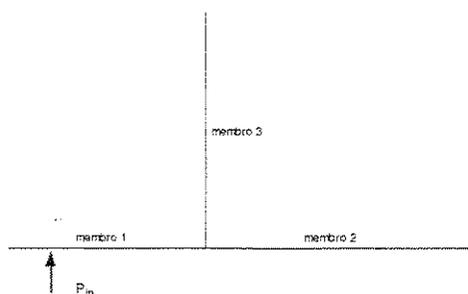


Figura A.7 – Viga do tipo T.

Apêndice B

Acoplamento em viga-L

Em modelos estruturais de pórticos, pode existir um acoplamento de ondas de vibração, dependendo da direção de carga aplicada. Por exemplo, no modelo da viga em configuração 'L' mostrada na Figura B.1, e devido a carga aplicada na viga 1, existe um acoplamento entre as ondas longitudinais e as ondas transversais no plano da força aplicada. Por outro lado, isso não deve significar a existência de acoplamento estático entre as vigas 1 e 2.

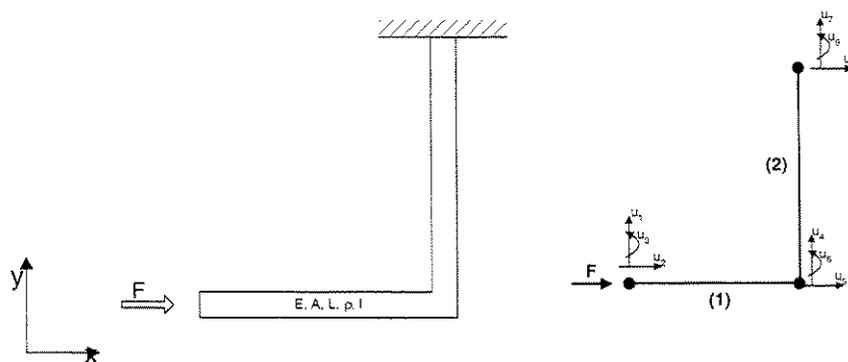


Figura B.1 – Excitação de viga-L, e seus graus de liberdade.

Para isso, o modelo da Figura B.1 é modelado via SEM e FEM, com uma força aplicada no nó 1, conforme mostrado na figura. Em seguida, os modelos estático e dinâmico são analisados.

B.1 Análise do modelo estático

A modelagem foi feita via o FEM, usando dois elementos para cada viga da estrutura. Cada elemento foi modelado com matriz de elemento de barra em tração-compressão e matriz de elemento de viga. Desta forma, o modelo contém 9 graus de liberdade, com uma matriz global de tamanho (9x9). A matriz de rigidez do elemento definida na coordenada local é dada por,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^R & K_{21}^R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^R & K_{22}^R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^B & K_{12}^B & K_{13}^B & K_{14}^B \\ 0 & 0 & K_{21}^B & K_{22}^B & K_{23}^B & K_{24}^B \\ 0 & 0 & K_{31}^B & K_{32}^B & K_{33}^B & K_{34}^B \\ 0 & 0 & K_{41}^B & K_{42}^B & K_{43}^B & K_{44}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_5 \\ u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (B.1)$$

onde os sobrescritos R e B representam os elementos de barra e de viga, respectivamente., e os seis graus de liberdade de deslocamento são definidos conforme mostrado na Figura B.1. Desta forma, a matriz global da estrutura, após a transformação das coordenadas, é dada por,

$$\begin{bmatrix} K_{11}^B & 0 & K_{12}^B & K_{13}^B & 0 & K_{14}^B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^R & 0 & 0 & K_{12}^R & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21}^B & 0 & K_{22}^B & K_{23}^B & 0 & K_{24}^B & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^B & 0 & K_{32}^B & K_{33}^B + K_{11}^R & 0 & K_{34}^B & K_{12}^R & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^R & 0 & 0 & K_{22}^R + K_{11}^B & K_{12}^B & 0 & K_{13}^B & K_{14}^B \\ K_{41}^B & 0 & K_{42}^B & K_{43}^B & K_{21}^B & K_{44}^B + K_{22}^B & 0 & K_{23}^B & K_{24}^B \\ 0 & 0 & 0 & K_{21}^R & 0 & 0 & K_{22}^R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{31}^B & K_{32}^B & 0 & K_{33}^B & K_{34}^B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{41}^B & K_{42}^B & 0 & K_{43}^B & K_{44}^B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (B.2)$$

Este sistema de equações foi resolvido, considerando a condição de engaste no nó 3 (GDLs 7,8,9). Como resultado, o vetor das reações nos GDLs 7, 8, e 9 foi igual a [0,-1,+1], respectivamente, o que indica que a reação no nó 3 na direção y é nula. Observou-se que a matriz de rigidez da equação (B.2) não acopla o grau de liberdade na direção x no nó 1 (GDL 2) com o graus de liberdade na direção y no nó 2 (GDL 4), conforme mostrado na Figura B.2 que indica a

distribuição dos valores numéricos, onde os pontos mostram as posições cujos valores numéricos são diferentes de zero, e os pontos restantes têm valores nulos (matriz esparsa).

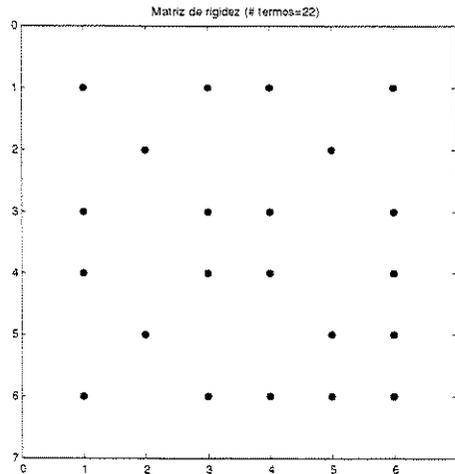


Figura B.2 – Gráfico da matriz esparsa de rigidez estática.

Observou-se que, a matriz de flexibilidade (K^{-1}) também não acopla o grau de liberdade na direção x no nó 1 (GDL 2) com o grau de liberdade na direção y no nó 2 (GDL 4), conforme mostrado na Figura B.3. Como resultado disso, os deslocamentos nos GDLs 1 a 6 são mostrados na Figura B.4, observando-se o nulo deslocamento no GDL 4.

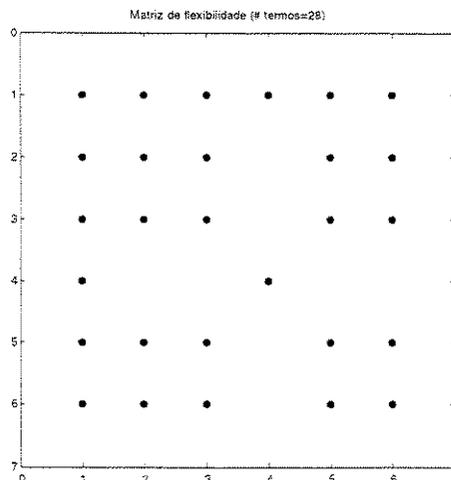


Figura B.3 – Gráfico da matriz esparsa de flexibilidade estática.

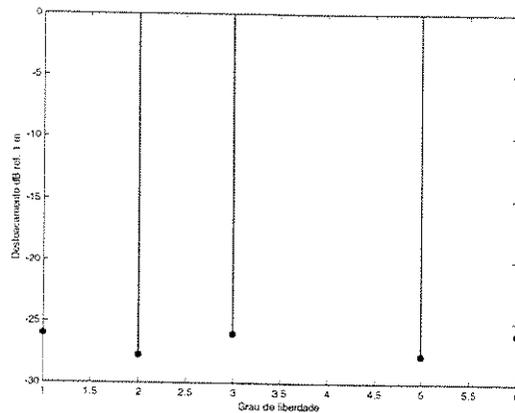


Figura B.4 – Deslocamentos estáticos nos graus de liberdade.

B.2 Análise do modelo dinâmico

Uma análise dinâmica foi conduzida na frequência 200 Hz via o FEM e o SEM, com a condição de engaste no nó 3 (GDLs 7,8,9). Matrizes de massa do tipo distribuída e do tipo concentrada foram usadas, e produziram os mesmos resultados. A Figura B.7 mostra a distribuição dos valores numéricos na matriz de rigidez dinâmica. Observa-se que a matriz de rigidez dinâmica não acopla o grau de liberdade na direção x no nó 1 (GDL 2) com o grau de liberdade na direção y no nó 2 (GDL 4), como foi observado no caso estático. Por outro lado, a matriz de flexibilidade dinâmica acopla o grau de liberdade na direção x no nó 1 (GDL 2) com o grau de liberdade na direção y no nó 2 (GDL 4), resultando em matriz cheia, conforme mostrado na Figura B.6.

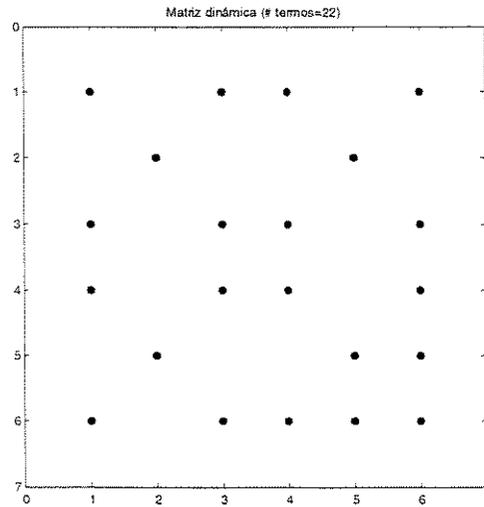


Figura B.5 – Gráfico da matriz esparsa de rigidez dinâmica.

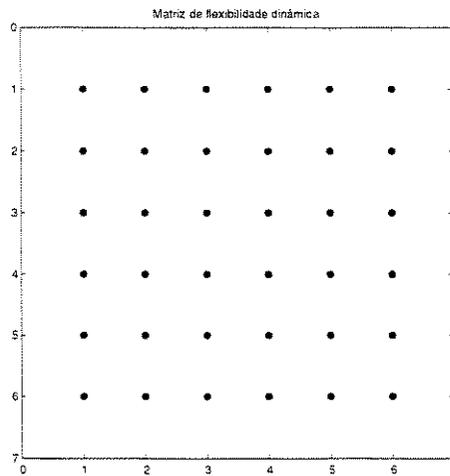


Figura B.6 – Gráfico da matriz esparsa de flexibilidade dinâmica.

Os deslocamento nos GDLs 1 a 6, neste caso, são mostrados na Figura B.7, observando-se a existência de todos os deslocamento na direção y nos nós 1 e 2 (GDLs 1 a 6).

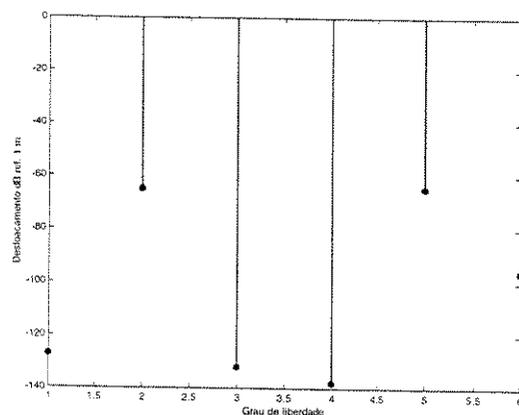


Figura B.7 – Deslocamentos dinâmicos nos graus de liberdade.

A resposta em frequência foi calculada em dois graus de liberdade, GDL 1 e GDL 4, conforme mostrado na Figura B.8.

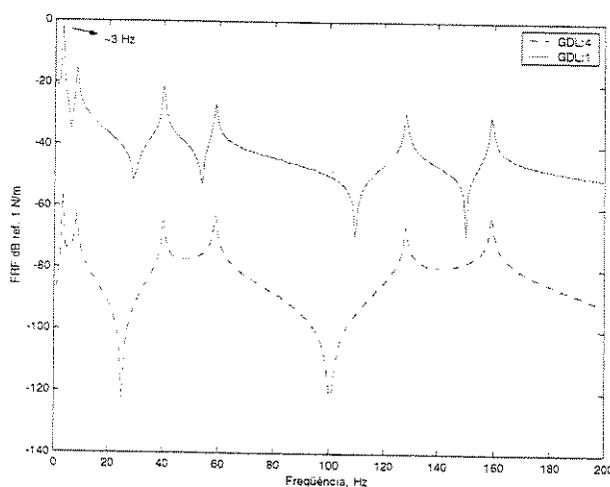


Figura B.8 – FRF em duas direções.

B.2.1 Observações gerais

Desta análise, pode-se concluir que o acoplamento estático não existe em estruturas de vigas que se encontram em forma L, com uma excitação aplicada no GDL acima mostrado. Outras formas de excitação podem gerar reações e deslocamento na direção y, ou seja, nos GDL 4. Por outro lado, as ondas de vibração se propagam ao longo da estrutura formando um esquema

de ondas espacialmente estacionárias, e então formam-se os modos de vibração. Isso pode ser observado da resposta do modelo de viga L mostrado na Figura B.8. Em geral, o acoplamento estático não fornece nenhuma informação sobre como as interações puderam se comportar no runtime, por outro lado, o acoplamento dinâmico fornece esta informação.

Apêndice C

Estimação dos coeficientes de acoplamento via SEM e a intensidade estrutural

C.1 O modelo de viga-L

Normalmente, os fatores de perda por acoplamento em modelos de vigas do tipo L são calculados analiticamente através dos coeficientes de transmissão dados por CREMER (1988), os quais foram mostrados anteriormente. Estes coeficientes são aqui obtidos numericamente via SEM, e comparados com os de Cremer. Tendo estes coeficientes para qualquer tipo de acoplamento, pode-se calcular os fatores de acoplamento η_{ij} , e, portanto, a modelagem via SEA fica mais fácil a ser conduzida.

O modelo numérico consiste em duas viga semi-infinitas acopladas em forma L. O modelo do SEM para esta estrutura consiste em quatro elementos: dois são do tipo 2-nós e os outros dois são do tipo “throw-off”. Esta estrutura será analisada no plano x-y, e desta forma, quatro subsistemas são considerados neste modelo, dos quais dois representam a propagação das energias longitudinais nas duas vigas, e os outros representam a propagação das ondas transversais. Uma força é aplicada em cada subsistema por sua vez, e a potência injetada (P_{in}) e o fluxo de potência são calculados em cada viga, considerando as componentes longitudinais e transversais, conforme mostrado na Figura C.1.

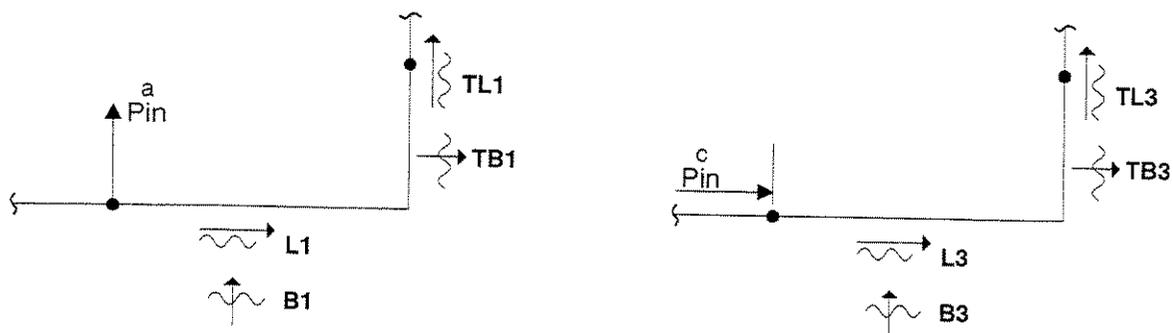


Figura C.1 – Excitação e as componentes de fluxo de potência no modelo de viga-L.

Nota que, $L1$ e $B1$ representam as componentes longitudinal e transversal do fluxo de potência calculadas na parte finita da viga-A, e $TL1$ e $TB1$ representam as componentes longitudinal e transversal do fluxo de potência calculadas na parte finita da viga-B, todas calculadas devido a uma potência injetada na viga-A (P_{in}^a). Da mesma forma, as componentes $L3$, $B3$, $TL3$, e $TB3$ são calculadas. Assim, pode-se escrever as seguintes relações, com τ_{BB} representa o coeficiente de transmissão das ondas incidentes transversais para ondas transmitidas transversais, e τ_{LB} representa o coeficientes de transmissão das ondas incidentes longitudinais para ondas transmitidas transversais, etc,

$$\begin{aligned} TB1 &= \tau_{BB} B1 + \tau_{LB} L1 & TB3 &= \tau_{BB} B3 + \tau_{LB} L3 \\ TL1 &= \tau_{BL} B1 + \tau_{LL} L1 & TL3 &= \tau_{BL} B3 + \tau_{LL} L3 \end{aligned} \quad (5.1)$$

ou em forma matricial,

$$\begin{Bmatrix} TB1 \\ TL1 \\ TB3 \\ TL3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B1 & L1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B1 & L1 \\ B3 & L3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B3 & L3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{BB} \\ \tau_{LB} \\ \tau_{BL} \\ \tau_{LL} \end{Bmatrix} \quad (5.2)$$

Para obter estes coeficientes, foi usado um modelo de viga-L discretizado via o SEM. O sistema foi analisado na faixa de frequência de 1 a 5kHz, usando uma escala logaritmica de 1/3

de oitava, com 50 linhas de frequência por banda, e a média quadrática (r.m.s.) em bandas de 1/3 de oitava foi calculada. Este sistema de equações foi resolvido, e os coeficientes τ_{ij} foram obtidos e são mostrados e comparados com os de CREMER (1988) nas seguintes figuras.

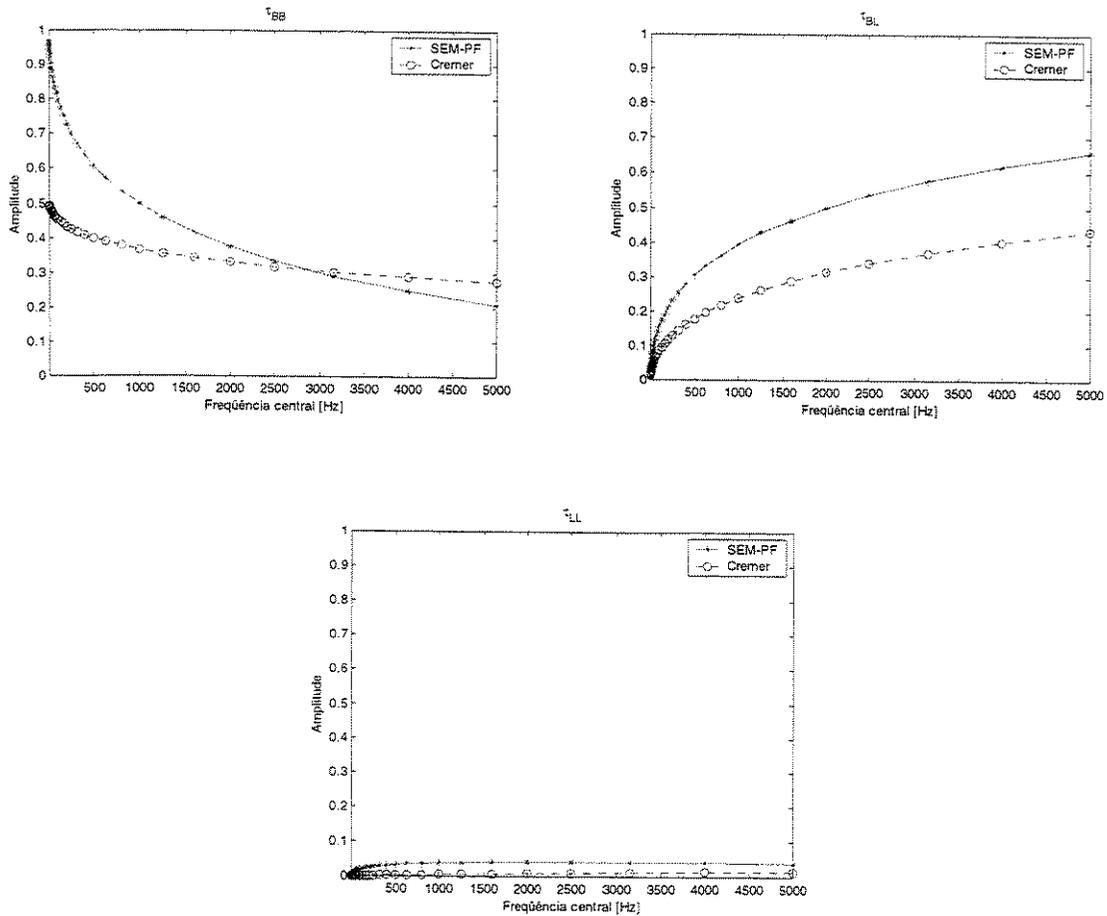


Figura C.2 – Os diferentes coeficientes de acoplamento τ_{ij} estimados por fluxo de potência via SEM, e comparados com os de CREMER.

C.2 Comentários e conclusões

É importante ressaltar que, apesar da discrepância entre os coeficientes estimados por SEM via o fluxo de potência e os coeficientes obtidos via as formulas analíticas de Cremer, a forma utilizada poderia ainda ser melhorada para obter coeficientes mais robustos. A obtenção dos coeficientes de transmissão (τ_{ij}) e em seguida calcular os fatores de acoplamento (η_{ij}) deve ser melhor o que obter diretamente os fatores η_{ij} . Ao obter os coeficientes τ_{ij} para elementos de

C.4 ESTIMAÇÃO DOS COEFICIENTES DE ACOPLAMENTO VIA SEM E A INTENSIDADE ESTRUTURAL

pórtico espacial, o cálculo dos fatores η_{ij} torna-se direto através das expressões encontradas na literatura.

Referências Bibliográficas

- Alfredsson, K. S., *Active and Reactive Structural Energy Flow*, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, V119, 70-79, 1997.
- Alves, P. S. L., Arruda, J. R. F., Gaul, L., Hurlebaus, S., *Power Flow Estimation Using Pulse ESPI*, Proceedings of the 4th International Conference on Vibration Measurements by Laser Techniques: Advances and Applications, pp. 362-373, Ancona, Italy, 2000.
- Arruda, J. R. F., Rio S. A., Santos L. A., *A Space-frequency Data Compression Method for Spatially Dense Laser Doppler Vibrometer Measurements*, Shock and Vibration, V3, pp. 127-133 1996.
- Arruda, J. R. F., Campos, J. P. R., Piva, J. I., *Experimental Determination of Flexural Power Flow in Beams Using A Modified Prony Method*, Journal of Sound and Vibration, V197(3), pp. 309-328 1996.
- Arruda, J. R. F., Campos, J. P. R., Piva, J. I., *Measuring Flexural Power Flow in Beams Using A Spatial-Domain Regressive Discrete Fourier Series*, Proc. of the 21st. Int. Conf. on Noise and Vibration Engineering, ISBN 90-73802-59-8, Leuven, Belgium, September 18-20, pp. 641-652, 1996.
- Babuska, I., Szabo, B. A., Katz, I. N., *The p-version of the Finite Element Method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, V18(3), pp. 515-545, 1981.

- Baldanzini, N., Pierini, M., DeLanghe, K., *A New Application of the Finite Element Method for Characterizing Joints in Statistical Energy Analysis (SEA) Models*, Proceedings of NOVEM2000, International Conference on Noise and Vibration pre-design and Characterization using Energy Methods, August 31-September 2, Lyon, France, 2000.
- Bathe, K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 1996.
- Bauman, P. D., *Measurement of Structural Intensity: Analytic and Experimental Evaluation of Various Techniques for the Case of Flexural Waves in one-Dimensional Structures*, Journal of Sound and Vibration, V174(5), pp. 677-694, 1994.
- Belov, V. D., Rybak, S. A., Tartakovskii, B. D., *Propagation of Vibrational Energy in Absorbing Structures*, Soviet Physics Acoustics, V23(2), pp. 115-119, 1977.
- Bendat, J. S., *Random Data : Analysis and Measurement Procedures*, 2nd edition, John Wiley & Sons, 1986.
- Bernhard, R. J., Huff, J. E. Jr., *Structural-Acoustic Design at High Frequency Using the Energy Finite Element Method*, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, V121, pp. 295-301, 1999.
- Blevins, R. D., *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, 2nd edition, Krieger Publishing, Melbourne, FL, 1995.
- Bouthier, O. M., Bernhard, R. J., *A Study of Methods to Predict and Measure the Transmission of Sound Through the Walls of Light Aircraft, Energetics of Vibrating Systems*, NASA report No. 0353-15 HI 92-18, 1992.
- Bouthier, O. M., Bernhard, R. J., *Simple Models of Energy Flow in Membranes*, Journal of Sound and Vibration, V182(1), pp. 129-147, 1995a.

-
- Bouthier, O. M., Bernhard, R. J., *Simple Models of Energy Flow in Plates*, Journal of Sound and Vibration, V182(1), pp. 149-166, 1995b.
- Bouthier, O., Bernhard, R., Wohlever, C., *Energy and Structural Intensity Formulations of Beam and Plate Vibrations*, Proceedings of the International Congress on Intensity Techniques, France, 1990.
- Burroughs, C., Cuschieri, J. M., Carroll, G. P., *Evaluation of Structure-Borne Noise Prediction Techniques*, Proceedings of Noise-Con 94, pp. 541-544, 1994.
- Buvailo, L. E., Ionov, A. V., *Application of the Finite Element Method to the Investigation of the Vibroacoustical Characteristics of Structures at High Audio Frequencies*, Soviet Physics – Acoustics, V26(4), pp. 277-279, 1980.
- Carcaterra, A., Adamo, L., *Wave Energy Propagation in Vibrating Systems*, Structural Dynamics, Energy Methods in Vibroacoustics, 1996.
- Carcaterra, A., Sestieri, A., *Energy Density Equations and Power Flow in Structures*, Journal of Sound and Vibration, V188(2), pp. 269-282, 1995.
- Carniel, X., *Mesure de la Propagation de L'énergie Vibratoire dans les Barres, Méthodes Intensimétriques*, doctorate dissertation, Université du Maine, France, 1987.
- Choi, S., Castanier, M. P., Pierre, C., *A Parameter-Based Statistical Energy Methods for Mid-Frequency Vibration Transmission Analysis*, Proceedings of the 6th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics, Southampton, England, 1997.
- Cimerman, B., Burton, T., *An Improved Formulation for the SEA Modeling of Beams: Application to a T-Beam*, Proceedings of Noise-Con97, pp. 233-237, 1997.

- Craig, R. R. Jr., *Structural Dynamics: an Introduction to Computer Methods*, John Wiley, New York, 1981.
- Cremer, L., Heckl, M., Ungar, E. E., *Structure-Borne Sound*, Springer Verlag, 2nd edition, 1988.
- Cuschieri, J. M., *Analysis of the Discrepancies between Prediction and Experimental Results for a T-Beam*, Proceedings of Inter-Noise, pp. 3053-3056, 1996.
- Cuschieri, J. M., Castagnet, E. ElMoutia, LeFevre, T. A., Wilcox, T. E., *SEA Modeling of the T-Beam*, Proceedings of Noise-Con96, Bellevue, Wa., pp. 467-472, 1996.
- Cuschieri, J. M., Sun, J. C., *Use of Statistical Energy Analysis for Rotating Machinery, part I: Determination of Dissipation and Coupling Loss Factors using Energy Ratios*, Journal of Sound and Vibration, V170 (2), pp. 181-190, 1994.
- DeLanghe, K. Sas, P., *Statistical Analysis of the Power Injection Method*, Journal of the Acoustical Society of America, V100, pp. 291-303, 1996.
- DeLanghe, K., *High Frequency Vibrations: Contributions to Experimental and Computational SEA Parameter Identification Techniques*, Tese de Doutorado, K.U. Leuven, department of mechanical engineering, Belgium, 1996.
- Doyle, J. F., *A Spectrally Formulated Element for Wave propagation in 3-D Frame Structures*, The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(4), pp. 223-237, 1990.
- Doyle, J. F., *A Spectrally Formulated Finite Element for Flexural Wave Propagation in Beams*, The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, 5(2), pp. 99-107, 1990.
- Doyle, J. F., *Wave Propagation in Structures: a Spectral Analysis Approach*, 2nd edition, 1997.

-
- Ewins, D. J. , *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley, New York, 1984.
- Fahy, F. J., *Statistical Energy Analysis: a Critical Overview*, Philosophical transactions of Royal Society of London, Mathematical, Physical and Engineering Sciences, series A, V346, pp. 431-447, 1994.
- Fahy, F. J., *Statistical Energy Analysis: a wolf in a sheep clothing*, Proc. Inter-Noise 93, Leuven, Belgium, 1997.
- Fahy, F. J. James, P. P., *A Study of the Kinetic Energy Impulse Response as an Indicator of the Strength of Coupling Between SEA Subsystems*, Journal of Sound and Vibration, V190 (3), pp. 363-386, 1996.
- Fahy, F. J. Ruivo, H. M., *Determination of Statistical Energy Analysis Loss Factors by Means of an Input Power Modulation Technique*, Journal of Sound and Vibration, V203 (5), pp. 763-779, 1997.
- Fahy, F. J., *An Alternative to the SEA Coupling Loss Factor: Rationale and Method for Experimental Determination*, Journal of Sound and Vibration, V214 (2), pp. 261-267, 1998.
- Franca, L. P., Dutra Do Carmo, E., *The Galerkin Gradient Least-Square Method*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., V74, pp. 41-54, 1989.
- Garvey S. D., Penny J. E. T., Friswell M. I., *The Relationship Between the Real and Imaginary Parts of Complex Modes*, Journal of sound and vibration V212(1), pp. 75-83, 1998.
- Goyder, H. G. D., *Methods and Application of Structural Modeling from Measured Structural Frequency Response Data*, Journal of Sound and Vibration, V68(2), PP. 209-230, 1980.

- Goyder, H. G. D., White, R. G., *Vibrational Power Flow from Machines into Built-up Structures, Part I: Introduction and Approximate Analyses of Beam and Plate-Like Foundations*, Journal of Sound and Vibration, V68(1), PP. 59-75, 1980.
- Hambric, S. A., *Comparison of Finite Element Predictions and Experimental Measurements of Structure-Borne Powers in a T-Shaped Beam*, Proceedings of Inter-Noise 95, pp. 591-596, 1995.
- Hambric, S. A., *Influence of Different Wave Motion Types on Finite Element Power Flow Calculations*, International congress on intensity techniques, France, 1990.
- Hambric, S. A., Taylor, P. D., *Comparison of Experimental and Finite Element Structure-Borne Flexural Power Measurement for a Straight Beam*, Journal of Sound and Vibration, V170(5), PP. 595-605, 1994.
- Heckl, M., Lewit, M., *Statistical Energy Analysis as a Tool for Quantifying Sound and Vibration Transmission Paths*, Philosophical transactions of Royal Society of London, Mathematical, Physical and Engineering Sciences, series A, V346, pp. 449-464, 1994.
- Hugin, C. T., *Power Transmission Between Two Finite Beams at Low Modal Overlap*, Journal of Sound and Vibration, V212 (5), pp. 829-854, 1998.
- Iadevaia, M., Desmet, W., Moens, I. Sas, P., *On the Influence of Transducer Mass on the Experimental Identification of SEA Loss Factors*, Proceedings do NOVEM2000, International Conference on Noise and Vibration pre-design and Characterization using Energy Methods, August 31-September 2, Lyon, France, 2000.
- Ibrahim, S. R., Sestieri A., *Existence and Normalization of Complex Modes in Post-experimental use in Modal Analysis*, Proc. 13th Int. Modal Analysis Conference, Nashville, USA, 1995.

-
- Ihlenburg, F., Babuska, I., *Dispersion Analysis and Error Estimation of Galerkin Finite Element Methods for the Helmholtz Equation*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, V38, pp. 3745-3774, 1995.
- Imregun, I., Ewins D. J., *Complex Modes - Origins and Limits*, Proc. 13th Int. Modal Analysis Conference, Nashville, USA, 1995.
- Kim, S. R. et al., *Method to Determine Structure-Borne Noise Level from Machinery in SEA Application*, Proceeding of the 5th international congress on sound and vibration, Adelaide, Australia, 1997.
- Kulla, P. H., *High Precision Finite Elements*, Finite Elements in Analysis and Design, V26, pp. 97-114, 1997.
- Lallement, G., Inman D. J., *A Tutorial on Complex Eigenvalues* Proc. 13th Int. Modal Analysis Conference, Nashville, USA, 1995.
- Langley, R.S., Bardell, N. S., *A Review of Current Analysis Capabilities Applicable to High Frequency Vibration Prediction of Aerospace Structures*, Aeronautical Journal, pp. 287-297, 1998.
- Langley, R. S., *A Wave Intensity Technique for the Analysis of High Frequency Vibrations*, Journal of Sound and Vibration, V135(3), pp. 483-502, 1989.
- Langely, R. S., Heron, K. H., *Elastic Wave Transmission Through Plate-Beam Junctions*, Journal of Sound and Vibration, V143, pp. 241-253, 1990.
- Langley, R. S., *Analysis of Beam and Plate Vibrations by using the Wave Equation*, Journal of Sound and Vibration, V150(1), PP. 47-65, 1991.

- Langley, R. S., *The Frequency Band-Averaged Wave Transmission Coefficient of a Periodic Structure*, Journal of the Acoustical Society of America, V100 (1), pp. 304-311, 1996.
- Le Bot, A., Luzzato, E., *Smooth Energy Formulation for Multi Dimension Problem*, Workshop on Methods in Medium and High Frequencies. An Alternate to SEA, Clamart, France, 1994.
- Lee, U., Lee, J., *Dynamic Continuum Modeling of Truss-Type Space Structures Using Spectral Elements*, Journal of Spacecraft and Rockets, V33, pp. 404-409, 1996.
- Lyon, R. H., DeJong, R. G., *Theory and Applications of Statistical Energy Analysis*, Butterworth-Heinemann, 2nd edition, 1995.
- Lyon, R. H., Maidanik, G., *Power Flow Between Linearly Coupled Oscillators*", Journal of Acoustical Society of America, V34, pp. 623-639, 1962.
- Maxit, L., Guyader, J. L., *Estimation of Coupling Loss Factors using a Dual Formulation and FEM Modal Information, part I: Theory*, Journal of Sound and Vibration, V239(5), pp. 907-930, 2001.
- Maxit, L., Guyader, J. L., *Estimation of Coupling Loss Factors using a Dual Formulation and FEM Modal Information, part II: Numerical Applications*, Journal of Sound and Vibration, V239(5), pp. 931-948, 2001.
- Meirovitch, L. L., *Elements of Vibration Analysis*, 2nd edition, McGraw-Hill, 1986.
- Meirovitch, L., Bahruh, H., *On the Inclusion Principle for the Hierarchical Finite Element Method*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, V19, pp. 281-291, 1983.
- Mitchell, L. D., *Complex Modes: a review*, Proc. 8th Int. Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida 1990.

-
- Müller, G., *The Statistical Energy Analysis*, Proceedings do NOVEM2000, International Conference on Noise and Vibration pre-design and Characterization using Energy Methods, August 31-September 2, Lyon, France, 2000.
- Nefske, D. J., Sung, S. H., *Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams*, Journal of vibration, acoustics, stress and reliability in design, V111, pp. 94-100, 1989.
- Noiseux, D. U. , *Measurement of Power Flow in Uniform Beams and Plates*, Journal of the acoustical society of america, V47, pp. 238-247, 1970.
- Oliveto, G., Santini A., Tripodi E., *Complex Modal Analysis of a Flexural Vibrating Beam with Viscous End Conditions*, Journal of sound and vibration V200(3), pp. 327-345, 1997.
- Peretti, L. F., Dowell, E. H., *Experimental Verification of the Asymptotic Modal Analysis Method as Applied to a Rectangular Acoustic Cavity Excited by Structural Vibration*, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, V114, pp. 546-554, 1992.
- Park, W. S., Thompson D. J., Ferguson, N. S., *Sources of Error and Confidence intervals for SEA parameters*, Proceedings do NOVEM2000, International Conference on Noise and Vibration pre-design and Characterization using Energy Methods, August 31-September 2, Lyon, France, 2000.
- Piva, J. I., Campos, J. P. R., Arruda, J. R. F., *Vibration Intensity Measurement in Beams*, Proceedings of DINAME 95, VI Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, ABCM, pp. 177-179, 1995.
- Prater Jr. G., *Complex Modes Analysis of Non-proportionally Damped Continuous Rods*, Int. J. analytical and experimental modal analysis V6 (1), pp. 13-24, 1991.

- Richards, T. H., *An Accurate Method in Structural Vibration Analysis*, Journal of sound and vibration, 55(3), pp. 363-376, 1977.
- Sablik, M. J., *Coupling Loss Factors at a Beam L-joint Revisited*, Journal of Acoustical Society of America, V72(4), pp. 1285-1288, 1982.
- Sarradj, E., *The Uncertain Relationship between Transmission Coefficient and Coupling Loss Factor*, Proceedings do NOVEM2000, International Conference on Noise and Vibration pre-design and Characterization using Energy Methods, August 31-September 2, Lyon, France, 2000.
- Sato, K., Lalor, N., *Measurement of Statistical Energy Analysis Parameters by a Transient Test Method*, Institute of Sound and Vibration research ISVR, 1994.
- Sestieri, A., Carcaterra, A., *Circumventing Space Sampling Limitations in Mechanical Vibrations*, Meccanica, V31, pp. 163-176, 1996.
- Shankar, K., Keane, ^a J., *A Study of the Vibrational Energies of Two Coupled Beams by Finite Element and Green Function (Receptance) Methods*, Journal of Sound and Vibration, V181 (5), pp. 801-838, 1995.
- Sheng, M. P., Wang, M. Q., Sun, J. C., *Effective Internal Loss Factors and Coupling Loss Factors for Non-Conservatively Coupled Systems*, Journal of Sound and Vibration, V209 (4), pp. 685-694, 1998.
- Steel, J.A., Craik, R. J. M., *Statistical Energy Analysis of Structure-Borne Sound Transmission by Finite Element Methods*, Journal of Sound and Vibration, V178 (4), pp. 553-561, 1994.
- Stewart, G. W., *Introduction to Matrix Computation*, New York, Academic press, 1973.

-
- Stewart, G. W., *Matrix Algorithm: Basic Decompositions*, Society for Industrial & Applied Mathematics, SIAM, 1998.
- Stimpson, G., Lalor, N., *Practical Noise Modelling of a Car Body Structures using Energy Flow Analysis*, Proceedings Internoise, pp. 1233-1236, 1991.
- Szwerc, R. P., Hambric, S. A., *The Calculation and Measurement of Flexural and Longitudinal Structural Power Flow on a Tee-Shaped Beam*, NSWCCD Technical Report, SIG-96/014-7250, Carderock division, Naval Surface Warfare Center, Bethesda, Maryland, February 1996.
- Thompson, L. L., Pinsky, P. M., *A Galerkin Least-Square Finite Element Method for the Two-Dimensional Helmholtz Equation*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, V38, pp. 371-397, 1995.
- Tso, Y. K., Hansen, C. H., *An Investigation of the Coupling Loss Factor for a Cylinder/Plate Structure*, Journal of Sound and Vibration, V199 (4), pp. 629-643, 1997.
- Tso, Y. K., Hansen, C. H., *The Transmission of Vibration Through a Coupled Periodic Structure*, Journal of Sound and Vibration, V215 (1), pp. 63-79, 1998.
- Ungar, E. E., *Statistical Energy Analysis*, Journal of Sound and Vibration, pp. 28-32, 1997.
- Verheij, J. W., *Cross Spectral Density Methods for Measuring Structure Borne Power Flow on Beams and Pipes*, Journal of Sound and Vibration, V70 (1), PP. 133-139, 1980.
- Wilson, A. M., *Combined FEA/SEA Vibration Analysis*, Proceedings of the 5th International congress on sound and vibration, Adelaide, Australia, 1997.
- Wohlever, C. J., Bernhard, R. J., *Mechanical Energy Flow Models of Rods and Beams*, Journal of Sound and Vibration, V153 (1), pp. 1-19, 1992.

- Xing, J. T., Price, W. G., *A Power-flow Analysis Based on Continuum Dynamics*, Proceedings of the Royal Society of London, Mathematical, Physical and Engineering Sciences, series A, V455, number 1982, pp. 401-436, 1999.
- Yamazaki, T., Kamata, M., Ohno, S., *Construction of SEA Models using FEA Software*, Proceedings do NOVEM2000, International Conference on Noise and Vibration pre-design and Characterization using Energy Methods, August 31-September 2, Lyon, France, 2000.
- Yan, H., Parrett, A., Nack, W., *Statistical Energy Analysis by Finite Elements for Middle Frequency Vibration*, Finite Elements in Analysis and Design, V35, pp. 297-304, 2000.
- Zalizniak, V., Tso, Y., Wood, L. A., *Waves Transmission through Plate and Beam Junctions*, International Journal of Mechanical Sciences, V41, pp. 831-843, 1999.
- Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1977.
- Zienkiewicz, O. C., Gago, F. E., Kelly, D. W., *The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis*, Computers and Structures, V16, pp. 53-65, 1983.