

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
como Requisito Parcial à Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

ANÁLISE DINÂMICA DE COLUNAS DE PERFURAÇÃO
VIA SUPERPOSIÇÃO MODAL

*Este exemplar corresponde à redação
final da tese defendida pelo Eng.º André
Gustavo Di Palma Cordovil e aprovada pela
Comissão julgadora em 21/11/91.*

Victor Prodonoff

PROF. DR. VICTOR PRODONOFF

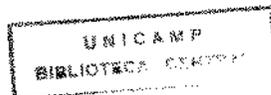
49/91

Autor : André Gustavo Di Palma Cordovil
Orientador : Victor Prodonoff
Co-orientador : Fernando Iguti
Colaborador : Jayme Pereira de Gouvêa

21/11/91

90.007.39486

Novembro de 1991



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

A Dissertação "Análise Dinâmica de Colunas de Perfuração Via Superposição Modal" elaborada por André Gustavo Di Palma Cordovil e aprovada por todos os membros da Banca Examinadora foi aceita pela Comissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 21 de Novembro de 1991

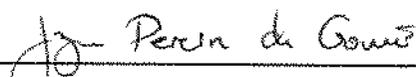
Banca Examinadora :



Victor Prodonoff, PhD.



Fernando Iguti, PhD.



Jayme Pereira de Gouvêa, DC.

"... e o semeador
saiu a semear ..."

Mateus, XII:3

À minha família
e ao Pai.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Victor Prodonoff, pela orientação e dedicação ao longo do trabalho.

Ao Prof. Fernando Iguti, pelas sugestões oportunas e pelo esclarecimento de dúvidas.

Ao Prof. Jayme Pereira de Gouvêa, pelo apoio desde o tempo do curso de graduação.

A todos os amigos, colegas de estudo, professores e funcionários, pelo apoio no dia a dia, que tornaram possível o término deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho discute o uso da superposição modal como técnica de obtenção da resposta dinâmica de uma coluna de perfuração. São apresentadas as formulações da resposta a alguns carregamentos simples, a um carregamento transiente e é realizada a análise no domínio da frequência.

Um programa de computador, já existente, foi usado como base das alterações feitas, seguindo os objetivos da tese.

Foram simulados alguns exemplos simples e um exemplo de aproximação da resposta não linear de uma coluna de perfuração. Os resultados são mostrados na forma de tabelas comparativas e gráficos.

ABSTRACT

In this study, the dynamic behavior of a drill string is analyzed using the modal superposition technique. The dynamic responses for simple input loadings, for the transient loading and a analysis in the frequency domain are discussed.

The final computer program is based on a previous one, modified according to the objective of this thesis.

Some simple cases and an example of approximation for the non-linear response of a drillstring are discussed. Graphics and tables are used to show the final results.

RESUMÉ

Le travail développé démontre l'utilisation de la superposition modal comme technique d'obtention de la réponse dynamique d'une colonne de forage. Réponses à quelques forces simples sont présentées, aussi bien qu'à force générique et dans le domaine de la fréquence.

Un logiciel d'ordinateur déjà développé a été perfectionné, selon les objectifs du travail.

Quelques exemples ont été exécutés, aussi bien l'exemple de la approximation de la réponse non-linéaire d'une colonne de forage. Tables et graphiques sont utilisés pour démontrer les résultats.

LISTA DE TABELAS

Tabela	Página
8.1 - Freqüências Naturais dos Modos Longitudinais	85
8.2 - Freqüências Naturais dos Modos Transversais	98
8.3 - Freqüências Naturais da Viga-Coluna	101
8.4 - Freqüências Naturais da Viga Biapoiada	105
8.5 - Freqüências Naturais do Teste 10	108
8.6 - Coluna do Exemplo de Campo 1	113
8.7 - Freqüências Naturais do Teste 12	118

LISTA DE FIGURAS

Figura	Página
2.1 - Elemento Finito Simples	7
2.2 - Elemento de Barra	12
2.3 - Elemento de Viga	12
2.4 - Elemento de Viga-Coluna	13
3.1 - Elemento de Mola	17
3.2 - Elemento de Amortecedor	18
3.3 - Elemento de Massa	18
3.4 - Solução por Laplace	22
3.5 - Sistemas com Dois Graus de Liberdade	22
5.1 - Composição dos Modos de Vibração	45
8.1 - Viga Engastada com Carga Axial	81
8.2 - Série de Teste das Freqüências Naturais	86
8.3 - Deslocamento ao Degrau Unitário	87
8.4 - Velocidade ao Degrau Unitário	88
8.5 - Aceleração ao Degrau Unitário	88
8.6 - Influência do Amortecimento ao Degrau Unitário	89
8.7 - Deslocamento ao Impacto	91
8.8 - Velocidade ao Impacto	92
8.9 - Influência do Amortecimento ao Impacto	92
8.10 - Comparação de Resultados	93
8.11 - Deslocamento à Rampa Unitária	94
8.12 - Comparação das Formulações	95
8.13 - Deslocamento à Força Harmônica	96

8.14 - Ressonância	97
8.15 - Freqüências Naturais dos Modos Transversais	99
8.16 - Freqüências Naturais da Viga-Coluna	100
8.17 - Influência da Inclinação	102
8.18 - Viga com Pulso Harmônico	103
8.19 - Deslocamento ao Pulso Harmônico	104
8.20 - Viga Biapoiada	104
8.21 - Freqüências Naturais da Viga Biapoiada	106
8.22 - Viga Engastada Apoiada em Mola	106
8.23 - Freqüências Naturais do Teste 10	108
8.24 - Valores Analíticos de $\zeta \times \beta$	110
8.25 - Valores Analíticos de $\phi \times \beta$	110
8.26 - Comparação dos Valores de $\zeta \times \beta$	111
8.27 - Comparação dos Valores de $\phi \times \beta$	111
8.28 - Localização dos Harmônicos	112
8.29 - Exemplo de Campo 1 - Burgess	114
8.30 - Exemplo de Campo 1 - Burgess (Rotações)	115
8.31 - Esquema Básico do Exemplo de Campo 3	116
8.32 - Aproximação da Resposta Não Linear	119
A.1 - Gráfico de $f(\tau) \times \tau$	134

NOMENCLATURA

Notação

- (\quad) - Vetor
- $(\quad)^t$ - Vetor transposto
- $[\quad]$ - Matriz
- $[\quad]^{-1}$ - Matriz inversa
- $[\quad]^t$ - Matriz transposta
- $(\quad)^{\cdot}$ - Primeira derivação no tempo
- $(\quad)^{\ddot{\quad}}$ - Segunda derivação no tempo

Símbolos Romanos

- $\{0\}$ - Vetor nulo
- a - Coeficiente angular da rampa, N/s
- a_0, a_1, a_b - Multiplicadores de $[K]$, $[M]$ e $[C]$
- A - Área transversal, m^2
- A_0 - Amplitude da excitação harmônica, m
- $[A]$ - Matriz de influência, matriz do autoproblema
- $[\tilde{A}]$ - Matriz do autoproblema transformado
- $[A]^{(n)}$ - Matriz do autoproblema derivado
- $[B]$ - Matriz do autoproblema
- c - Velocidade de propagação, m/s
- C - Constante do amortecedor, N s/m
- C_i - Amortecimento modal
- $[C]$ - Matriz de amortecimento

- [D] - Matriz elástica
- E - Módulo de Young, Pa
- $f(u)$ - Operador linear de u
- $f_n, f(t)$ - Valor da força transiente, N
- $f(\omega)$ - Amplitude da força para a frequência ω , N
- F_c - Força do amortecedor, N
- F_m - Força da mola, N
- $F(t)$ - Força de excitação, N
- $F_i(t)$ - Força de excitação no espaço modal, m/s^2
- $\{f\}$ - Vetor de cargas locais
- $\{F\}$ - Vetor de cargas globais
- $\{F_e\}$ - Vetor de forças elásticas
- $G(t)$ - Resposta ao impulso unitário, m
- $G(s)$ - Função de transferência
- I - Valor do impulso, momento de inércia, $kg\ m/s, m^4$
- k - Número da iteração
- $k_s^{(l+1)}$ - s-ésimo elemento da matriz diagonal de rigidez
- K - Constante de mola, N/m
- K_b - Constante equivalente de mola da barra, N/m
- K_i - Coeficiente de rigidez modal
- $K_{ij}^{(k)}$ - Elemento i,j de [K] na k-ésima iteração
- [K] - Matriz de rigidez
- $[K_{ct}]$ - Matriz de condutividade
- $[-K_g]$ - Matriz de rigidez geométrica
- $[K^*]$ - Matriz de rigidez com aceleração de convergência
- l - Última iteração
- L - Comprimento da barra/viga, m

\mathcal{L}	- Transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	- Transformada inversa de Laplace
$[\ell]$	- Matriz nodal de rotação
$[L]$	- Matriz de rotação do elemento
m	- Massa específica linear, kg/m
$m_s^{(i+1)}$	- s-ésimo elemento da matriz diagonal de massa
M	- Massa, kg
M_i	- Massa modal
$M_{ij}^{(k)}$	- Elemento i, j de $[M]$ na k -ésima iteração
$[M]$	- Matriz de massa
$N_i(t)$	- Carga no espaço modal, m/s^2
$p(\lambda)$	- Polinômio característico
$p_i(t)$	- i -ésimo polinômio de Sturm
P_0	- Valor da carga súbita, N
$[P]_i$	- Matriz de transformação
s	- Variável no espaço de Laplace
t	- Tempo, s
T_{\min}	- Período da maior frequência natural, s
$[T]$	- Matriz tridiagonal
$u(x, t)$	- Deslocamento axial, m
$\{u\}$	- Vetor de deslocamentos locais
$\{\dot{u}\}$	- Vetor de velocidades locais
$\{U\}$	- Vetor de deslocamentos globais
$\{\dot{U}\}$	- Vetor de velocidades globais
$\{\ddot{U}\}$	- Vetor de acelerações globais
$v(t)$	- Velocidade da extremidade livre da viga, m/s
$v(x, t)$	- Deslocamento transversal da viga, m

- (v) - Vetor genérico
- X_i - Deslocamento do ponto i , m
- \dot{X}_i - Velocidade do ponto i , m/s
- \ddot{X} - Aceleração, m/s^2
- X_0 - Resposta dinâmica em frequência, m
- X_e - Deflexão estática, m
- $X(t)$ - Grau de liberdade
- $\dot{X}(t)$ - Primeira derivada temporal de $X(t)$
- $\ddot{X}(t)$ - Segunda derivada temporal de $X(t)$
- $\{\bar{X}\}_k$ - k -ésima aproximação de $\{X\}$
- Y_i - i -ésima coordenada no espaço modal
- $\{Y\}$ - Vetor das coordenadas modais
- $\{Y\}_k$ - Vetor da iteração vetorial
- $\{\bar{Y}\}_k$ - Aproximação de $\{Y\}_k$

Símbolos gregos

- α - Escalar multiplicador de u
- $\{\alpha\}$ - Vetor qualquer
- β, β_i - Razão das frequências ω_e e ω_i
- γ_i - Razão das frequências ω_e e ω_{di}
- $\{\gamma\}$ - Autovetor com aceleração de convergência
- δ_{ij} - Delta de Kroeneker
- Δt - Intervalo de tempo
- ζ - Razão entre X_0 e X_e
- η_i - Deslocamento no espaço modal
- $\dot{\eta}_i$ - Velocidade no espaço modal

- $\ddot{\eta}_i$ - Aceleração no espaço modal
- η_{hi} - Deslocamento (solução homogênea)
- $\dot{\eta}_{hi}$ - Velocidade (solução homogênea)
- $\ddot{\eta}_{hi}$ - Aceleração (solução homogênea)
- $\{\eta\}$ - Vetor de deslocamentos no espaço modal
- θ - Ângulo genérico, rd
- θ_k - Ângulo da k-ésima rotação de Jacobi, rd
- $\lambda, \lambda_i, \lambda_n$ - Autovalor
- $\tilde{\lambda}$ - Autovalor do autoproblema transformado
- λ_t - Autovalor do autoproblema térmico
- $\lambda^{(m)}$ - Autovalor dos autoproblemas derivados
- $[A]$ - Matriz diagonal com os autovalores
- ξ, ξ_i - Razão de amortecimento modal
- ζ - Razão entre X_0 e X_e
- π - Pi = 3.14159265.....
- ρ - Massa específica volumétrica, kg/m³
- $\rho(\{\alpha\})$ - Quociente de Rayleigh de $\{\alpha\}$
- $\{\sigma\}$ - Vetor de tensões
- τ - Variável muda em Duhamel, tempo, s
- ϕ - Ângulo de defasagem, rd
- $\{\phi\}, \{\phi\}$ - Autovetor
- $\{\phi_t\}$ - Autovetor do autoproblema térmico
- $\{\bar{\phi}\}$ - Aproximação de $\{\phi\}$
- $\{\tilde{\phi}\}$ - Autovetor do autoproblema transformado
- $\{\phi\}^{(m)}$ - Autovetor do autoproblema derivado
- $[\Phi]$ - Matriz modal
- φ - Autovalor com aceleração de convergência

- ω - Freqüência angular genérica, rd/s
- ω_d, ω_{di} - Freqüência natural amortecida, rd/s
- ω_e - Freqüência de excitação, rd/s
- ω_i, ω_n - Freqüência natural, rd/s
- ω_r - Freqüência de ressonância, rd/s

ÍNDICE

LISTA DE TABELAS	viii
LISTA DE FIGURAS	ix
NOMENCLATURA	xi
ÍNDICE	xvii
I) INTRODUÇÃO	1
1.1 - Histórico	2
1.2 - Organização do Trabalho	4
II) MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	6
2.1 - O Método	6
2.2 - Elementos Utilizados	10
III) ANÁLISE DINÂMICA	14
3.1 - Introdução	14
3.2 - Sistemas com Um Grau de Liberdade	17
3.3 - Equacionamento	19
3.4 - Sistemas com Muitos Graus de Liberdade	22
IV) PROBLEMAS DE AUTOVALORES	25
4.1 - Introdução	25
4.2 - Propriedades dos Autopares	27

4.3	- Sequência de Sturm	29
4.4	- Quociente de Rayleigh	29
4.5	- Aceleração da Convergência	29
4.6	- Métodos de Resolução	30
4.7	- Métodos de Iteração Vetorial	31
4.7.1	- Iteração Inversa	32
4.7.2	- Iteração à Frente	34
4.8	- Transformação Matricial	35
4.8.1	- Método de Jacobi	36
4.8.2	- Método de Jacobi Generalizado	37
4.8.3	- Método de Givens	38
4.8.4	- Método de Householder	38
4.8.5	- Método QR	39
4.8.6	- Método HQRI (Householder-QR-Iteração Inversa)	39
4.9	- Técnicas de Iteração Polinomial	39
4.9.1	- Métodos Explícitos	39
4.9.2	- Métodos Implícitos	40
4.10	- Métodos Baseados em Sturm	40
4.11	- Métodos Aproximados	41
4.11.1	- Método de Rayleigh-Ritz	41
4.11.2	- Método de Lanczos	42
4.11.3	- Método da Síntese dos Modos Componentes	43
4.12	- Métodos Combinados para Grandes Sistemas	43
4.12.1	- Busca do Determinante	43
4.12.2	- Iteração no Subespaço	44

V) ANÁLISE MODAL	45
5.1 - Introdução	45
5.2 - Formulação Empregada	47
5.2.1 - Sistemas sem Amortecimento	47
5.2.2 - Sistemas com Amortecimento	48
5.3 - Sumário do Procedimento da Superposição Modal	50
5.4 - Equacionamento da Resposta Dinâmica	52
5.4.1 - Solução Homogênea	53
5.4.2 - Carregamento Subitamente Aplicado	53
5.4.3 - Impacto	54
5.4.4 - Carregamento Crescendo Linearmente (Rampa)	56
5.4.5 - Relação entre Formulações	56
5.4.6 - Excitação Harmônica	57
5.4.7 - Solução Numérica	58
5.4.8 - Resposta no Domínio da Freqüência	60
5.5 - Comentários Finais	61
 VI) O PROGRAMA ANESDE	 62
6.1 - Histórico	62
6.2 - Estrutura do Programa	64
6.3 - Arquivos Manipulados	69
6.4 - Comentários Finais	71
 VII) IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	 73
7.1 - Introdução	73
7.2 - Histórico do Trabalho	73
7.3 - Metodologia Empregada	74

7.4 - Procedimentos Implementados	76
VIII) RESULTADOS	80
8.1 - Introdução	80
8.2 - Teste 1: Barra Subitamente Tracionada	81
8.3 - Teste 2: Carregamento Impulsivo	90
8.4 - Teste 3: Carregamento Rampa	93
8.5 - Teste 4: Comparação entre Métodos de Cálculo	95
8.6 - Teste 5: Carregamento Harmônico	96
8.7 - Teste 6: Freqüências da Viga Engastada ...	98
8.8 - Teste 7: Freqüências da Viga-Coluna	99
8.9 - Teste 8: Viga Engastada com Pulso Harmônico	102
8.10 - Teste 9: Freqüências da Viga Biapoiada ...	104
8.11 - Teste 10: Viga Engastada Apoiada em Mola ..	106
8.12 - Teste 11: Resposta em Freqüência	109
8.13 - Teste 12: Aproximação da Resposta Não Linear	112
8.14 - Comentários Finais	119
IX) CONCLUSÕES / RECOMENDAÇÕES	120
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	122
APÊNDICE - Integral de Duhamel	134

O projeto de estruturas e equipamentos para a indústria em geral e, em especial para a petrolífera, baseia-se geralmente na análise estática acrescida de coeficientes de segurança, tentando compensar os efeitos dinâmicos. Este expediente pode levar ao superdimensionamento ou à não consideração de fatores de grande importância.

Contudo, a desconsideração do efeito dinâmico é um dos mais prejudiciais, pois pode causar a falha estrutural com carregamentos que, se fossem estáticos, seriam facilmente suportados. Um exemplo disto é a diferença entre o resultado da aplicação lenta e gradual de uma força e de sua aplicação repentina; a vibração resultante pode causar a falha.

Na indústria de equipamentos pesados e petrolífera, entre outras, os carregamentos dinâmicos são os mais comuns. Um exemplo é o projeto de colunas de perfuração. Os esforços são muito grandes e muitas situações críticas ocorrem, tais como operação de "jars" (utilização de martelos hidráulicos para retiradas de colunas presas) , "pescaria" e prisão de coluna, aumentando ainda mais os esforços a serem resistidos.

Torna-se então necessário o estudo da resposta dinâmica, aplicado ao projeto e desenvolvimento. A maior dificuldade é como modelar a estrutura ou componente. A modelagem analítica geralmente é inadequada, devido à sua complexidade e até

impossibilidade de resolução, para sistemas reais. Destacam-se assim os métodos aproximados, onde o sistema real é discretizado e resolvido mais facilmente.

Esta é a motivação desta tese, que propõe uma metodologia de análise dinâmica e desenvolve o programa de computador necessário : o programa ANESDE.

É utilizado o método dos elementos finitos (MEF) para a montagem e resolução da resposta dinâmica. Existem outras técnicas, tais como as diferenças finitas e o método dos elementos de contorno, também aplicáveis aos casos estudados. A idéia de usar o MEF não é nova, como será visto no item 1.1, sendo desenvolvida a algumas décadas.

No item seguinte, uma breve apresentação das referências consultadas é apresentada, seguida da organização dos capítulos.

1.1 - Histórico

O estudo da teoria de vibrações é bem antigo, havendo muitos livros, teses e artigos a respeito (refs.[01] a [17]), assim como sua aplicação ao estudo do comportamento dinâmico das estruturas (refs. [18] a [21]).

Baseando a análise estrutural, muitos textos contendo as formulações básicas foram escritos, dentre eles as referências

[22], [25], [26] e [27]. Alguns trabalhos são mais específicos sem porém isolarem-se (refs. [23] e [24]).

Resumindo muitos trabalhos em um só, alguns autores criaram formulários muito completos, facilitando o uso rápido das equações (refs. [28] e [29]).

Quanto ao MEF, são muitos os textos já escritos, revelando o adiantado desenvolvimento atual. Muitos livros, desde os básicos até os mais avançados, foram publicados (refs. [30] a [34]), além de vários programas, acadêmicos e comerciais, serem divulgados (refs. [35] e [36]). Na área acadêmica, muitas teses e trabalhos de pesquisa, incluindo-se esta, foram escritas (refs. [37], [38], [39] e [41]) e vários cursos lecionados e em andamento (ref. [40]).

A base matemática não foi esquecida, sendo numerosos os trabalhos nesta área (refs. [42] a [45]).

A referência [48] apresenta um histórico bem completo do estudo do MEF e dos problemas de autovalores, básicos na técnica de superposição modal .

Acerca desta técnica, as referências possíveis também são inúmeras (refs. [46] a [49]) , pois os livros sobre análise de vibrações, MEF e análise dinâmica de estruturas geralmente a apresentam, variando-se a profundidade do estudo.

Na literatura da engenharia de petróleo, o estudo do comportamento dinâmico de estruturas, principalmente da coluna de perfuração e de plataformas "off-shore", está bastante desenvolvido. São cobertas diversas áreas, tais como vibração de colunas de perfuração (refs. [50] a [52], [57] a [63], [65] a [70]), sistemas rotativos ([53] e [56]), estruturas estaiadas ([54]), estudo de efeitos não lineares ([55]) e de estruturas off-shore ([64] e [71]).

1.2 - Organização do Trabalho

É estudada a resposta dinâmica das estruturas a excitações simples (carga de impacto, subitamente aplicada, crescente linearmente e harmônica), além de carregamentos transientes, fornecidos discretamente ao programa e da análise no domínio da frequência.

Neste trabalho é utilizado o programa ANESDE, desenvolvido pelo CENPES. A análise modal é a formulação utilizada para a obtenção da resposta dinâmica, tanto exata como numérica. Várias opções de entrada (seção reta, leitura externa de dados, exclusão de modos, etc.) e de análise dinâmica (quatro casos simples, análise transiente e no domínio da frequência) são apresentados e implementados.

Este trabalho apresenta primeiramente capítulos dedicados às teorias aqui utilizadas, seguindo-se a apresentação do programa e das alterações nele realizadas.

Logo após, são mostrados e comentados os resultados, e são feitas as conclusões. O Apêndice apresenta uma dedução mais completa da integral de Duhamel, básica neste trabalho, pois a maioria das referências a deduz intuitivamente, sem aprofundarem-se.

O trabalho é dividido nos seguintes capítulos :

- Cap. 1 : Introdução ;
- Cap. 2 : Método dos Elementos Finitos ;
- Cap. 3 : Resumo da Teoria da Dinâmica ;
- Cap. 4 : Métodos de Solução dos Problemas de AutoValores;
- Cap. 5 : Teoria da Análise Modal e Formulação Empregada;
- Cap. 6 : O Programa ANESDE ;
- Cap. 7 : Implementação Numérica ;
- Cap. 8 : Resultados Obtidos ;
- Cap. 9 : Conclusões e Recomendações ;
- Referências Bibliográficas ;
- Apêndice : Integral de Duhamel .

2.1 - O Método

Entre os métodos de resolução da resposta estrutural, foi usado neste trabalho o método dos elementos finitos (MEF), devido à já existência de um programa inicial com todos as rotinas básicas necessárias.

Inicialmente o desenvolvimento do MEF foi baseado nas técnicas de minimização de funcionais, sendo depois expandido com a utilização de procedimentos de resíduos ponderados (Galerkin, mínimos quadrados, etc).

Este método baseia-se na discretização de um meio contínuo em divisões deste meio (elementos). Os elementos são definidos e unidos por pontos (nós). Assim o espaço que define o meio contínuo é substituído por um espaço discreto, formado pelos espaços de definição dos elementos.

A função que descreve os deslocamentos dos nós também é substituída pelas funções de aproximação dos elementos (funções de forma ou interpoladoras), contínuas por partes.

Um conceito importante é o grau de liberdade. Representa o número de coordenadas independentes necessárias para definir uma configuração da estrutura. Cada tipo e direção de movimento permitido representa uma coordenada, que pode ser

cartesiana (deslocamento) ou esférica (rotação), recebendo a denominação de coordenada generalizada. Na montagem do sistema a ser resolvido são estas coordenadas que constituirão as variáveis a serem determinadas.

São também fornecidas as condições de contorno, para que os graus de liberdade restringidos não sejam incluídos nas variáveis a serem calculadas, poupando espaço de memória e evitando cálculo inúteis.

A figura 2.1 mostra um elemento finito simples, com os sistemas de coordenadas usados na sua definição.

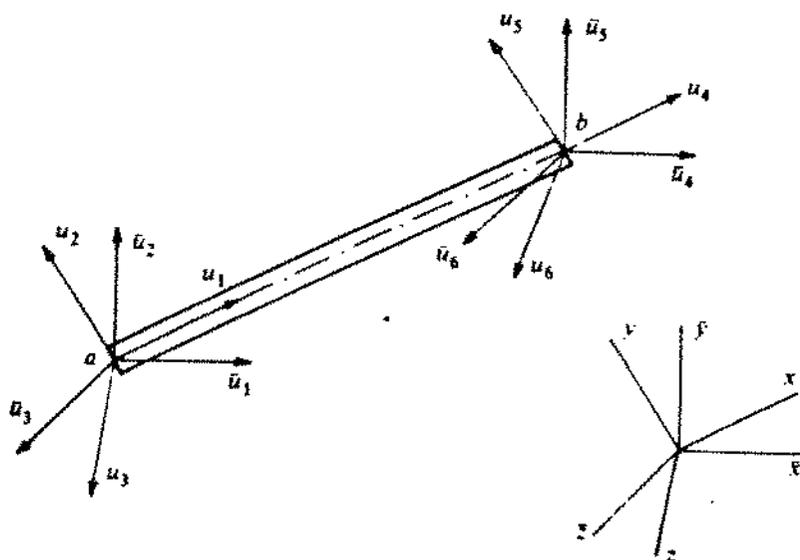


Figura 2.1 - Elemento Finito Simples

A partir da discretização em elementos e nós, são montadas as matrizes de rigidez, amortecimento e massa, para análise dinâmica ou só a primeira, para análise estática.

Estas matrizes são montadas primeiramente no sistema de coordenadas do elemento (sistema local), sendo depois unidas na matriz global, já no sistema de coordenadas da estrutura (sistema global). Para a montagem das matrizes globais é necessária a rotação das locais, devido à inclinação dos elementos, quando existente.

Uma vez montadas as matrizes, é montado o vetor de carregamento. Sua montagem é feita considerando-se a influência de cada força/momento nos graus de liberdade livres.

No caso da análise estática, o sistema a ser resolvido é:

$$[K] \{U\} = \{F\} \quad (2.1)$$

Na análise dinâmica, resolve-se :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} \quad (2.2)$$

Onde : $[M]$ = matriz global de massa

$[C]$ = matriz global de amortecimento

$[K]$ = matriz global de rigidez

$\{\ddot{U}\}$ = vetor de acelerações globais

$\{\dot{U}\}$ = vetor de velocidades globais

$\{U\}$ = vetor de deslocamentos globais

$\{F\}$ = vetor de carregamentos globais

Resolvido o sistema de equações, têm-se os deslocamentos, velocidades e acelerações globais, que são transformados para o sistema local através da matriz:

$$[\ell] = \begin{bmatrix} \ell_{xx}^- & \ell_{xy}^- & \ell_{xz}^- \\ \ell_{yx}^- & \ell_{yy}^- & \ell_{yz}^- \\ \ell_{zx}^- & \ell_{zy}^- & \ell_{zz}^- \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Com $\ell_{xx}^- = \text{ângulo entre } x \text{ e } \bar{x}$, e assim por diante.

Esta passagem é necessária para o cálculo das forças que agem em cada elemento ($\{f\}$), para os quais são precisos os deslocamentos locais ($\{u\}$).

Tendo a matriz $[\ell]$, definimos outra matriz, $[L]$ por :

$$[L] = \left[\begin{array}{c|c} [\ell] & [0] \\ \hline [0] & [\ell] \end{array} \right] \quad (2.4)$$

E, a partir dela :

$$\begin{aligned} \{u\} &= \text{vetor deslocamento local} = [L] \{U\} \\ \{\dot{u}\} &= \text{vetor velocidade local} = [L] \{\dot{U}\} \\ \{F\} &= \text{vetor força global} = [L]^t \{f\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Falta apenas o cálculo das tensões, usando os deslocamentos locais :

$$\{\sigma\} = [D] \{u\} \quad (2.6)$$

onde $[D]$ é a matriz elástica.

Cabe ressaltar que os sistemas descritos pelas equações (2.1) e (2.2) são algébricos, e que as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são simétricas (para análise linear), o que facilita sua solução.

Uma técnica auxiliar é a condensação estática. Consiste na eliminação dos graus de liberdade não necessários na formulação global, com diminuição na dimensão do sistema e, como consequência, do tempo e memória requeridos.

2.2 - Elementos Utilizados

Os elementos são definidos pelos graus de liberdade que apresentam e pelos carregamentos que podem suportar (em relação direta com os graus de liberdade).

São estes os elementos básicos :

- i) Treliça (Barra) : permite somente deslocamentos e carregamentos longitudinais nos nós de definição. Não tem resistência à flexão. Pode ser plana ou espacial;
- ii) Viga : permite deslocamento transversal e rotação dos nós. Suporta cargas transversais e momentos. Também pode ser plana ou espacial;

- iii) Viga-coluna : une os dois elementos acima. Pode ser considerado o efeito das cargas axiais no deslocamento transversal, o que é mais preciso, caso contrário a força axial somente afeta o deslocamento axial. Neste trabalho, é suposto o segundo caso;
- iv) Placa : elemento contido em um plano e formado por quatro nós. Pode suportar cargas transversais e momento nas bordas. São permitidos seis graus de liberdade por nó (três deslocamentos e três rotações) para o caso espacial e três para o plano;
- v) Estado Plano de Tensões : só permite tensões no plano;
- vi) Estado Plano de Deformações : só permite deformações planas.
- vii) Sólido : formado por 8 nós e com seis graus de liberdade por nó.

As figuras 2.2, 2.3 e 2.4 mostram os elementos de barra, viga e viga-coluna, respectivamente, com os dois sistemas de eixos.

Neste trabalho, serão utilizados os elementos de barra, viga e viga-coluna (sem influência da força axial no deslocamento transversal).

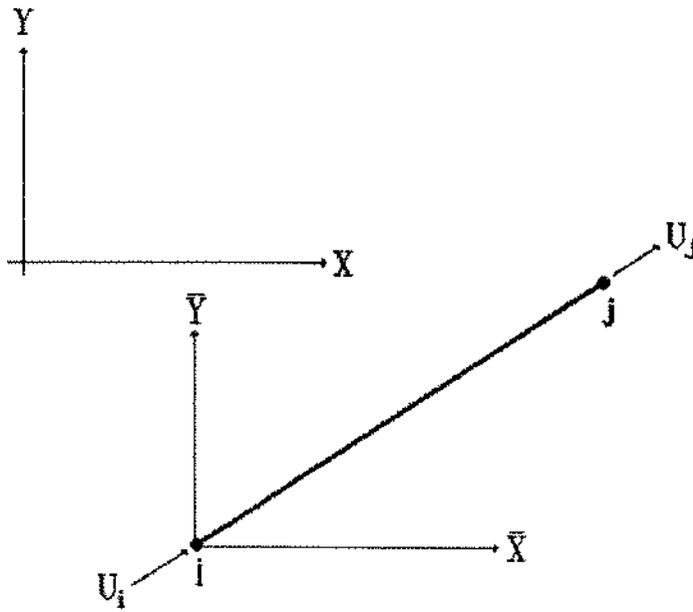


Figura 2.2 - Elemento de Barra

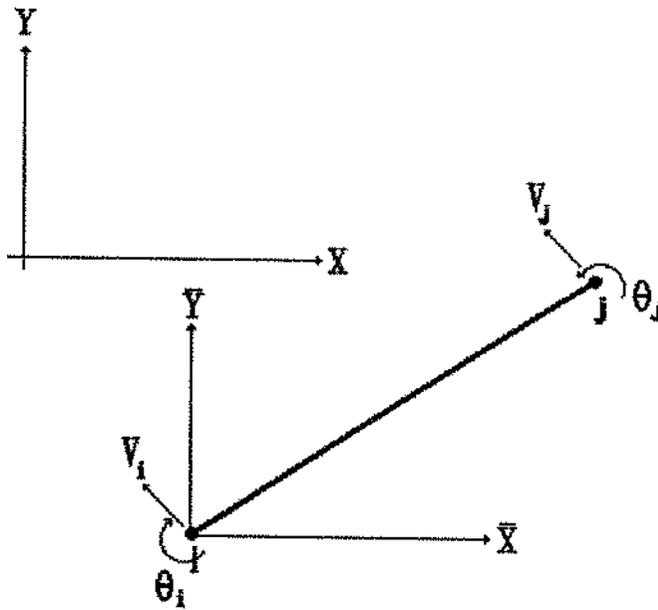


Figura 2.3 - Elemento de Viga

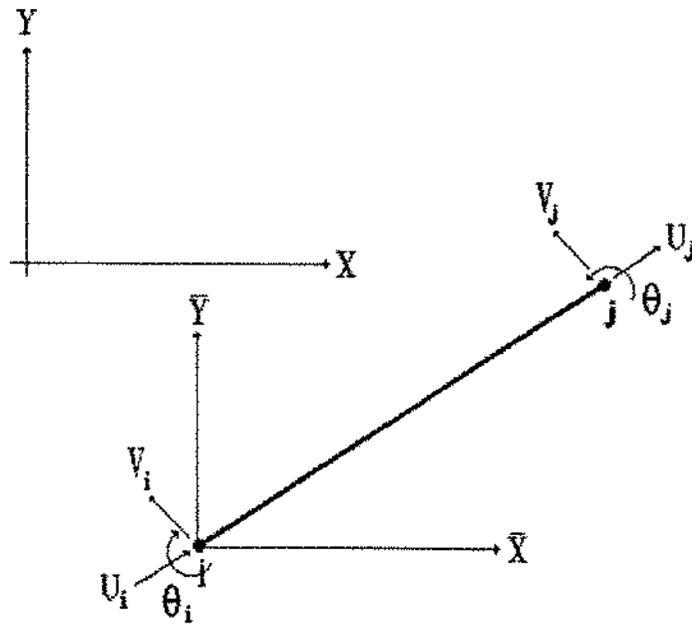


Figura 2.4 - Elemento de Viga-Coluna

3.1 - Introdução

Um exemplo simples do efeito das cargas dinâmicas consiste em comparar-se os resultados dos carregamentos lento e repentino de uma placa. No primeiro caso a deformação é lenta e gradual. Porém, no segundo caso, a deformação inicial é rápida e bem maior do que no caso anterior, embora a deformação final seja a mesma, supondo-se que haja amortecimento.

Para estudar casos como este foram desenvolvidas técnicas de análise dinâmica, mesmo porque muito poucas forças reais são aplicadas suavemente.

A análise da resposta dinâmica das estruturas pode ser dividida de acordo com diversos parâmetros. Um desses é a modelagem do corpo como discreto ou contínuo. Quando se escolhe o modelo contínuo, assume-se que o corpo seja um meio contínuo, levando à formulação da equação de movimento em forma de equações diferenciais parciais. Esta abordagem geralmante é inadequada, devido à complexidade e dificuldade de resolução. Já na hipótese discreta, o corpo é dividido em elementos e nós, levando à equações diferenciais ordinárias. Assim, é indicado para análise numérica, como nos métodos das diferenças finitas e dos elementos finitos. Sua solução é mais fácil, embora aproximada.

Outro aspecto relacionado com a continuidade ou não do sistema é a continuidade no tempo. A maioria dos sistemas é contínuo no tempo, mas o uso de computadores requer que sejam tratados como discretos, com o valor do incremento do tempo adequado à cada caso.

Outra divisão é entre sistemas lineares e não lineares. Cabe aqui definir alguns termos importantes. As variáveis dependentes são aquelas que descrevem completamente o comportamento dinâmico, enquanto que as independentes definem os coeficientes das equações. Se as variáveis dependentes aparecerem elevadas ao expoente 1, o sistema é dito linear, mesmo que as independentes apareçam com expoentes maiores ou fracionários (sistemas com coeficientes variáveis). No caso contrário o sistema é não linear, sendo de solução mais trabalhosa.

Outro modo de diferenciar é usar a definição de operador linear, aplicada à equação do sistema :

$$\begin{aligned} f(u) \text{ é linear} \Leftrightarrow & \text{ i) } f(u + v) = f(u) + f(v) \\ & \text{ ii) } f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{aligned} \quad (3.1)$$

A definição acima representa o princípio da superposição, usado para compor a resposta de sistemas lineares partindo das respostas parciais, simplificando em muito a resolução.

Deve-se considerar ainda a faixa de variação das variáveis. Por exemplo, se um pêndulo realiza pequenas

oscilações, o sistema é dito linear ($\sin e \approx e$). Mas para grandes oscilações, é não linear.

A excitação do sistema também representa importante papel na resposta dinâmica. Se for conhecida e equacionada, é dita determinística, assim como a resposta correspondente. No caso contrário é não-determinística, necessitando de técnicas estatísticas para sua aplicação (vibrações randômicas). Também deve ser comentado que algumas forças são periódicas, isto é, são representadas por ciclos que se repetem, tendo como resposta deslocamentos igualmente cíclicos, no caso de não haver amortecimento - resposta permanente.

A resposta dinâmica ocorre em dois domínios: o do tempo e o da frequência. Usa-se o domínio do tempo quando é desejada a resposta ao longo do tempo, como no caso de forças transientes. O domínio da frequência é usado quando se quer analisar o comportamento do sistema para um espectro de frequências, para verificar as ressonâncias, por exemplo.

Os sistemas com um grau de liberdade são os mais simples, pois são formulados com apenas uma equação diferencial ordinária. Embora pareçam ser somente uma aproximação inicial, seu estudo é muito importante. Um sistema linear com muitos graus de liberdade pode ser decomposto em um conjunto de equações diferenciais desacopladas independentes, com um grau de liberdade cada, através de técnicas tais como a análise modal (princípio da superposição).

3.2 - Sistemas com Um Grau de Liberdade

Na análise de sistemas com um grau de liberdade discretos, são definidos três elementos básicos [17] :

1) Mola : elemento que relaciona força com deslocamento de forma linear, conforme a figura 3.1. Sua equação é:

$$F_m = K (X_2 - X_1) \quad (3.2)$$

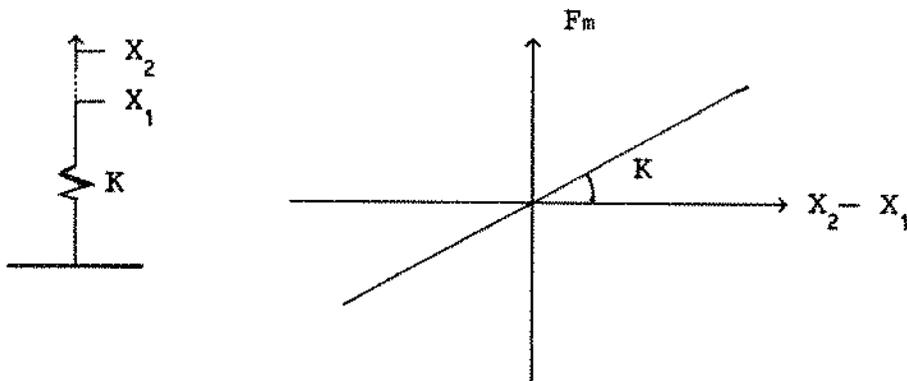


Figura 3.1 - Elemento de Mola

2) Amortecedor Viscoso : Relaciona força com velocidade. Representa um amortecimento do movimento. É suposto proporcional à velocidade. Seu desenho e curva característica encontram-se na figura 3.2 e sua equação é :

$$F_a = C (\dot{X}_2 - \dot{X}_1) \quad (3.3)$$

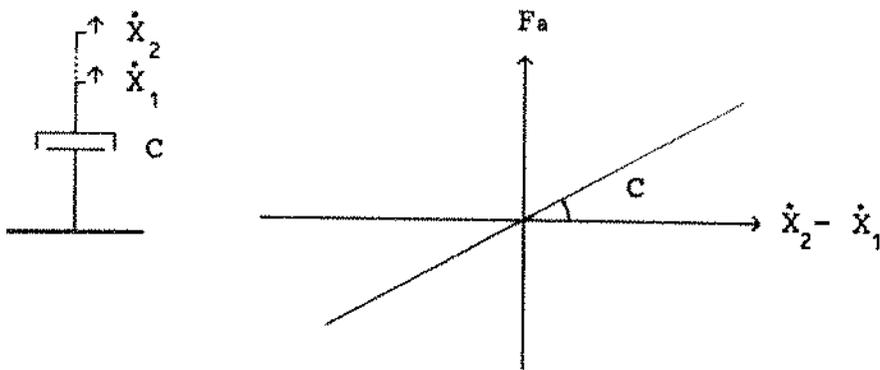


Figura 3.2 - Elemento de Amortecedor

3) Massa : Relaciona força com aceleração. Representa a inércia ou resistência do sistema a alterar seu estado de movimento. Seu símbolo é mostrado na figura 3.3 e é regido pela equação :

$$F = M \ddot{X} \quad (3.4)$$

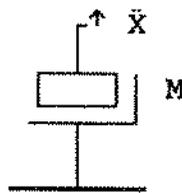


Figura 3.3 - Elemento de Massa

Qualquer sistema pode ser montado a partir da combinação destes elementos (combinação em paralelo ou em série de molas, etc.), e as equações resultantes são também combinações lineares das elementares.

Outra grandeza importante é a ordem do sistema. É dada pela maior ordem de derivação presente na equação. Se em uma equação aparecem termos derivados duas vezes, em relação ao tempo, o sistema é de segunda ordem.

3.3 - Equacionamento

De uma maneira geral, a equação do movimento de um sistema é dada por:

$$M \ddot{X}(t) + C \dot{X}(t) + K X(t) = F(t) \quad (3.5)$$

Onde M = Massa

C = Amortecimento

K = Rigidez

X(t) = Grau de Liberdade

F(t) = Força de Excitação

A equação 3.5 pode ser simplificada considerando F(t) nula e C=0 (sem amortecimento). Assim tem-se uma equação diferencial homogênea, cuja solução representa a frequência natural e o modo de vibração correspondente. Esta solução é obtida colocando como solução a função:

$$X(t) = e^{st} \quad (3.6)$$

na equação 3.5:

$$\ddot{X}(t) + \omega_n^2 X(t) = 0 \quad (3.7)$$

(ω_n = frequência natural)

Chega-se à seguinte solução final:

$$X(t) = A_1 e^{i\omega_n t} + A_2 e^{-i\omega_n t} \quad (3.8)$$

Os expoentes da expressão (3.8) são imaginários, representando um movimento estável, consistindo de pura oscilação. Daí a frequência natural e o modo de vibração.

O mesmo procedimento pode ser realizado com C não nulo, resultado nas seguintes expressões:

$$\ddot{X}(t) + 2\xi\omega_n \dot{X}(t) + \omega_n^2 X(t) = 0 \quad (3.9)$$

Onde : $\xi = \frac{C}{2M\omega_n} =$ razão de amortecimento

Resultando :

$$\omega_d = (1 - \xi^2)^{1/2} \omega_n \quad (3.10)$$

(ω_d = frequência natural amortecida)

Quando a excitação não é nula, pode aparecer como deslocamentos impostos, acelerações dos suportes e forças externas. A solução completa é obtida superpondo as respostas para cada excitação (supondo sistema linear) com a homogênea.

As forças externas podem ser : harmônicas, permitindo uma análise análoga à de frequências naturais; periódicas, usando-se séries de Fourier; ou genérica, podendo ainda ser usadas outras técnicas como a transformada de Laplace, a integral de convolução e a integral de Fourier.

A integral de convolução representa a resposta correspondente a uma força qualquer como uma superposição de respostas ao impulso e é expressa por :

$$X(t) = \int_0^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau = \int_0^t F(t-\tau) G(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

Na apêndice esta integral é deduzida e explicada.

Cabe ainda ressaltar a importância da transformada de Laplace na análise dinâmica. O motivo disto é a capacidade de transformar equações diferenciais lineares em equações algébricas, de tratamento muito mais fácil. O inconveniente é a volta ao espaço real, que pode ser muito complexa.

Analisando-se por Laplace, chega-se à:

$$X(s) = \mathcal{L} [x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (3.12)$$
$$X(s) = G(s) F(s)$$

onde : $X(s)$ = Grau de Liberdade no Espaço de Laplace

$G(s)$ = Função de Transferência

$F(s)$ = Força de Excitação

Daí:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} G(s) F(s) \quad (3.13)$$

A figura 3.4 ilustra graficamente as expressões acima :

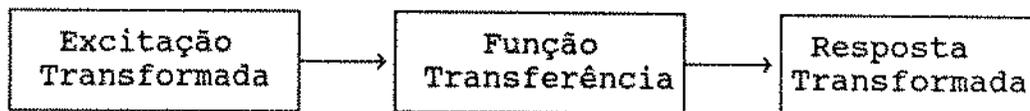


Figura 3.4 - Solução por Laplace

3.4 - Sistemas com Muitos Graus de Liberdade

Para começar a estudar os sistemas dinâmicos com muitos graus de liberdade, inicia-se com apenas dois graus.

Os sistemas com dois graus de liberdade são representados por equações análogas, porém com dois deslocamentos generalizados. A figura 3.5 mostra um exemplo disto.

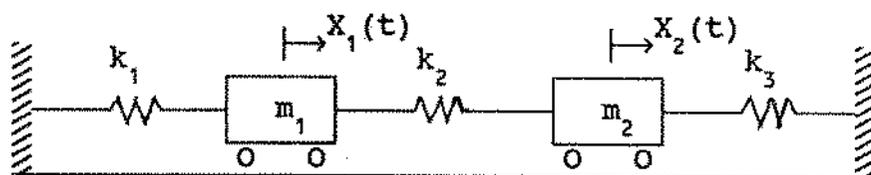


Figura 3.5 - Sistema com Dois Graus de Liberdade

A equação geral é:

$$[M] (\ddot{X}) + [C] (\dot{X}) + [K] (X) = (F) \quad (3.14)$$

onde os termos entre colchetes são matrizes 2x2, e os entre chaves, vetores com duas componentes .

Uma consequência é que existem duas frequências naturais e dois modos de vibração, ortogonais entre si. A ortogonalidade implica que um modo não pode ser obtido a partir do outro, e é equacionada por:

$$\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_j = \delta_{ij} \quad (3.15)$$

Valem aqui as mesmas considerações quanto à superposição de resultados e tipos de solução citadas no caso de sistemas com um só grau de liberdade.

No caso mais geral, o sistema com muitos graus de liberdade, a expressão é a mesma de dois graus, com os vetores contendo mais de dois componentes (analogamente para as matrizes). Tem-se um número máximo de modos de vibração e frequências naturais igual ao número de graus de liberdade.

Outra maneira de analisar é através das equações generalizadas de movimento, utilizando a lei de Newton em cada nó, resultando um sistema de equações diferenciais.

Em qualquer metodologia, a maior dificuldade ao se resolver as equações é que elas estão acopladas, isto é, relacionadas entre si, o que obriga a uma resolução simultânea. A análise modal, entre outras técnicas, desacopla

as equações, gerando um conjunto de equações independentes, facilitando a resolução.

Um conceito importante é o de coeficientes de influência. Eles representam a influência das componentes de uma grandeza nas componentes de outra.

Simplificando a equação geral, tem-se :

$$[K] \{X\} = \{F\} \quad (3.16)$$

Dai:

$$\{X\} = [K]^{-1} \{F\} = [A] \{F\} \quad (3.17)$$

Assim, A_{ij} é o deslocamento generalizado X_i devido à uma força unitária F_j aplicada em X_j .

Para a análise dinâmicas de sistemas lineares em computadores, podem ser citados dois métodos de solução : integração direta e análise modal. A primeira baseia-se na integração das equações, passo a passo. A segunda técnica baseia-se na superposição dos modos de vibração para a montagem da resposta forçada, por esse motivo denominada superposição modal. Neste trabalho será estudada a última técnica, no capítulo cinco.

4.1 - Introdução

Como na superposição modal, a resposta dinâmica é obtida através dos modos de vibração, a etapa básica é resolver o problema de autovalores e autovetores (autopares), visando a obtenção destes e das frequências naturais. Os problemas de autovalores (autoprobemas) são assim formulados :

i) Autoproblema padrão :

$$[A] \{ \phi \} = \lambda \{ \phi \} \quad (4.1)$$

A equação (4.1) pode ser reescrita unindo-se todos os modos de vibração $\{ \phi \}$ em uma matriz, a matriz modal $[\Phi]$, e todos os autovalores em uma matriz diagonal $[\Lambda]$:

$$[A] [\Phi] = [\Phi] [\Lambda] \quad (4.2)$$

ii) Autoproblema generalizado :

$$[A] \{ \phi \} = \lambda [B] \{ \phi \} \quad (4.3)$$

ou :

$$[A] [\phi] = [B] [\Phi] [\Lambda] \quad (4.4)$$

O autoprobema generalizado pode ser reduzido ao padrão, gerando outro problema de autovalores da forma :

$$[\tilde{A}] \{ \tilde{\phi} \} = \lambda \{ \tilde{\phi} \} \quad (4.5)$$

com os mesmos autovalores e com os autovetores relacionados.

Neste trabalho, a matriz [A] é a de rigidez [K], e a [B] é a matriz de massa [M].

Existem ainda outras formulações que recaem em equações análogas à (4.3). Por exemplo, no estudo da flambagem :

$$[-K_g] \{\phi\} = \lambda [K] \{\phi\} \quad (4.6)$$

onde $[-K_g]$ representa a matriz de rigidez geométrica, [K] a matriz de rigidez linear, $\{\phi\}$ a configuração depois da flambagem e λ a carga crítica.

Outro exemplo é a obtenção das "frequências térmicas" :

$$[K_{ct}] \{\phi_t\} = \lambda_t [C_t] \{\phi_t\} \quad (4.7)$$

onde $[K_{ct}]$ é a matriz de condutividade térmica, $[C_t]$ a de capacidade térmica e $(\lambda_t, \{\phi_t\})$ o "autopar térmico".

Na prática, a solução de um autoproblema corresponde a obtenção das raízes do polinômio característico :

$$p(\lambda) = \det ([K] - \lambda [M]) = 0 \quad (4.8)$$

o que equivale a resolver:

$$([K] - \lambda_i [M]) \{\phi\}_i = \{0\} \quad (4.9)$$

Assim, a solução tem que seguir um algoritmo iterativo, usando as propriedades dos autovalores e autovetores para simplificações e otimização dos métodos.

4.2 - Propriedades dos Autopares

Supondo-se que a matriz de rigidez $[K]$ é simétrica, definida positiva ou semidefinida positiva, e que a matriz de massa $[M]$ é positiva definida e simétrica, os autovalores têm as seguintes propriedades :

- i) Ortogonalidade : dois autovetores são ortogonais entre si :

$$\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_j = 0 , i \neq j \quad (4.10)$$

- ii) Multiplicidade : caso λ_i seja raiz múltipla, não é possível a determinação de um conjunto único de autovetores correspondentes, ortogonais aos demais autovetores (dos outros autovalores) mas não ortogonais entre si.

- iii) Módulo e direção dos autovetores : só é possível obter-se a direção dos autovetores, pois que um vetor múltiplo dele também é autovetor. Neste caso usa-se a normalização em relação à matriz de massa :

$$\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_j = \delta_{ij} \quad (4.11)$$

- iv) Ordenação dos autovalores : os autovalores (e os autovetores correspondentes) são ordenados em ordem crescente.
- v) Condição necessária e suficiente para a caracterização de autovetores : um conjunto de p vetores satisfazendo (4.1) e (4.2), ou (4.3) e (4.4) só são autovetores se $p = n =$ dimensão das matrizes $[K]$ e $[M]$.
- vi) Raízes do polinômio característico : os autovalores são raízes do polinômio característico.
- vii) Separação dos autovalores : seja o seguinte autoproblema :

$$[A] \{\phi\} = \lambda \{\phi\} \quad (4.1)$$

A partir dele são montados outros autoproblemas :

$$[A]^{(m)} \{\phi\}^{(m)} = \lambda^{(m)} \{\phi\}^{(m)} \quad (4.12a)$$

Com $[A]^{(m)}$ obtida de $[A]$ eliminando as últimas m linhas e colunas. A propriedade estabelece que, quando $[M] = [I]$, os autovalores de (4.12a) com $l = m + 1$ separam os de (4.1), expressa por :

$$\lambda_1^{(m)} \leq \lambda_1^{(l)} \leq \lambda_2^{(m)} \leq \lambda_2^{(l)} \leq \dots \leq \lambda_{n-m-1}^{(m)} \leq \lambda_{n-m-1}^{(l)} \leq \lambda_{n-m}^{(m)} \quad (4.12b)$$

4.3 - Seqüência de Sturm

A seqüência de Sturm é uma série de polinômios $p_i(\lambda)$, nos quais as raízes de $p_{i+1}(\lambda)$ separam as de $p_i(\lambda)$. Deduz-se que o polinômio característico e os dele reduzidos formam uma seqüência de Sturm.

4.4 - Quociente de Rayleigh

Seja $\{\alpha\}$ um vetor qualquer, o quociente de Rayleigh para este vetor, no problema de vibrações livres, é definido por :

$$\rho(\{\alpha\}) = \frac{\{\alpha\}^t [K] \{\alpha\}}{\{\alpha\}^t [M] \{\alpha\}} \quad (4.13)$$

Quando $\{\alpha\} = \{\phi\}$ = autovetor, $\rho(\{\alpha\}) = \lambda$ = autovalor.

4.5 - Aceleração da Convergência

Uma das maneiras de acelerar a convergência das iterações consiste na substituição de variáveis em (4.3). Seja :

$$[K^*] = [K] - \rho [M] \quad (4.14)$$

Usando-se (4.14), (4.3) fica :

$$[K^*] \{\gamma\} = \varphi [M] \{\gamma\} \quad (4.15)$$

Os autovalores de (4.15) são relacionados com os de (4.3) da seguinte forma :

$$\lambda_i = \rho + \varphi_i \quad (4.16)$$

4.6 - Métodos de Resolução

Os métodos para resolução dos autoproblemas podem ser divididos em quatro grupos principais : 1) usando iteração nos autovetores (iteração vetorial), 2) transformando linearmente as matrizes , 3) iterando no polinômio característico e 4) usando as propriedades da seqüência de Sturm.

Na primeira classe aparecem^{[30], [31] e [48]} : redução de Rayleigh-Ritz, redução de Irons-Guyan, iteração inversa e iteração avante. Na segunda classe, tem-se : método de Jacobi, Jacobi generalizado e iteração inversa de Householder e, na terceira : método explícito e implícito. Para grandes sistemas são usados métodos mistos, tais como a iteração de subespaços e algoritmo de Lanczos.

Nem todos os métodos acima citados fornecem os autovalores e autovetores simultaneamente; alguns só fornecem um ou outro, necessitando de um método complementar.

Na escolha do método a ser usado na solução do autoproblema, deve-se considerar alguns fatores :

- Dimensão do sistema;

- Precisão requerida;
- Faixa de frequências desejada;
- Disponibilidade de memória e tempo de execução;
- Cálculo prévio dos autovalores ou autovetores;
- Rotinas já implementadas.

Cada método possui sua característica própria, sendo necessário um estudo prévio de cada caso, antes da escolha.

Neste trabalho foi utilizado o método da iteração no subespaço com esquema de iteração baseado no método de Jacobi, por já estar implementado na estrutura do programa. Para trocar de método seriam necessárias muitas mudanças na estrutura básica do ANESDE, além de que os resultados serem suficientemente precisos.

4.7 - Métodos de Iteração Vetorial

Baseiam-se principalmente em duas afirmações :

i) Qualquer vetor pode ser representado como combinação linear dos autovetores, pois compõem uma base para um subespaço, no qual a resposta do autoproblema sairá;

ii) Após transformações lineares convenientes, um vetor do subespaço dos autovetores pode ser transformado em um deles.

Partem da relação :

$$[A] \{\phi\}_i = \lambda_i \{\phi\}_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.17)$$

Esta equação é derivada de (4.1), somente colocando-se o índice i no vetor $\{\phi\}$.

Variando-se a matriz $[A]$, têm-se os diferentes métodos derivados, alterando o algoritmo utilizado na resolução do sistema.

4.7.1 - Iteração Inversa

A matriz $[A]$ usada é da forma:

$$[A] = [K]^{-1} [M] \quad (4.18)$$

Resultando do seguinte autoproblema :

$$[K]^{-1} [M] \{\phi\}_i = \frac{1}{\omega_i^2} \{\phi\}_i \quad (4.19)$$

Usa-se o seguinte algoritmo :

Fornece-se um vetor inicial $\{X\}_1$ e, a partir dele :

$$\{Y\}_1 = [M] \{X\}_1 \quad (4.20)$$

A partir de $\{Y\}_1$, segue-se :

Para $k=1,2,\dots$

$$[K] \{\bar{X}\}_{k+1} = \{Y\}_k$$

$$\{\bar{Y}\}_{k+1} = [M] \{\bar{X}\}_{k+1}$$

$$\rho(\{\bar{X}\}_{k+1}) = \frac{(\bar{X})_{k+1}^t \{Y\}_k}{(\bar{X})_{k+1}^t \{\bar{Y}\}_{k+1}} = \lambda_k \quad (4.21)$$

$$\{Y\}_{k+1} = \frac{\{\bar{Y}\}_{k+1}}{\left[(\bar{X})_{k+1}^t \cdot \{\bar{Y}\}_{k+1} \right]^{1/2}}$$

$$\text{Se } \{Y\}_1^t \{\phi\}_1 \neq 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \{Y\}_{k+1} \rightarrow [M] \{\phi\}_1 \\ \rho(\{\bar{X}\}_{k+1}) \rightarrow \lambda_1 \end{cases} \quad (4.22)$$

A convergência é testada comparando-se o valor atual e o anterior de λ , até que o erro relativo seja menor ou igual que a tolerância.

4.7.2 - Iteração à Frente (Método da Potência)

Agora usa-se a matriz $[A]$ da forma:

$$[A] = [M]^{-1} [K] \quad (4.23)$$

Fornece-se um vetor inicial $\{X\}_1$ e, a partir dele :

$$\{Y\}_1 = [M] \{X\}_1 \quad (4.24)$$

Para $k=1,2,\dots$

$$\begin{aligned} [M] \{\bar{X}\}_{k+1} &= \{Y\}_k \\ \{\bar{Y}\}_{k+1} &= [K] \{\bar{X}\}_{k+1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\rho(\{\bar{X}\}_{k+1}) = \frac{\{\bar{X}\}_{k+1}^t \{\bar{Y}\}_{k+1}}{\{\bar{X}\}_{k+1}^t \{Y\}_k} = \lambda_k$$

$$\{Y\}_{k+1} = \frac{\{\bar{Y}\}_{k+1}}{\left(\{\bar{X}\}_{k+1}^t \{Y\}_{k+1} \right)^{1/2}}$$

$$\text{Se } \{\phi\}_n^t \{Y\}_1 \neq 0, k \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \{Y\}_{k+1} \rightarrow [K] \{\phi\}_n \\ \rho(\{\bar{X}\}_{k+1}) \rightarrow \lambda_n \end{cases} \quad (4.26)$$

O critério de convergência é o mesmo do método anterior.

4.8 - Transformação Matricial (Similar e Unitária)

Neste grupo de métodos, as matrizes são transformadas linearmente, para diagonalizá-las. A matriz de massa tende para a matriz identidade ($[I]$) e a de rigidez para uma matriz contendo os autovalores na diagonal principal ($[\Lambda]$). A matriz de transformação torna-se a matriz dos autovetores $[\Phi]$, pois só ela pode realizar a diagonalização.

O nome similar provém do uso das relações de similaridade que baseam esses métodos e o termo unitária é usado quando a matriz de transformação é ortogonal.

Esta transformação é feita pré e pós multiplicando as matrizes por uma matriz de transformação ($[P]_i$).

Na prática, chega-se às matrizes diagonais para $[K]_{k+1}$ e $[M]_{k+1}$, ao invés de $[I]$, $[\Lambda]$ e $[\Phi]$. Com base nas primeiras pode-se obter os autopares :

Sendo l a última iteração :

$$[\Lambda] = \text{diagonal} \left(\frac{k_s^{(l+1)}}{m_s^{(l+1)}} \right) \quad (4.27)$$

$$[\Phi] = [P]_1 [P]_2 \dots [P]_l \text{ diagonal} \left(\frac{1}{[m_s^{(l+1)}]^{1/2}} \right) \quad (4.28)$$

4.8.3 - Método de Givens

Neste caso, obtém-se uma matriz tridiagonal, ao invés de diagonal, em um número finito de passos, sem iteração. O método não resolve o autoproblema, sendo necessário um método complementar.

A matriz $[P]_k$ utilizada é quase igual à de Jacobi, com exceção do elemento $+\text{sen}(\theta_k)$, que troca de sinal, tornando $[P]$ simétrica.

O elemento zerado é o $K_{qj}^{(k)}$, $q \neq i, j$, zerando o elemento $K_{jq}^{(k)}$ por simetria.

4.8.4 - Método de Householder

É análogo ao anterior, diferindo no fato de que se anula uma coluna ou linha por vez, ao invés de um elemento. Para tal a matriz sofre uma reflexão por um plano, em vez de rotações. Isto é expresso por :

$$[K]_k = [P]_k^t [K]_{k-1} \quad (4.33)$$

$$[P]_k = [I] - 2 (v)_k (v)_k^t$$

Os vetores $(v)_k$ são obtidos a partir de $K_{ij}^{(k-1)}$.

4.8.5 - Método QR

Baseia-se em relações de similaridade que reduzem uma matriz, não necessariamente simétrica ou real, a uma matriz triangular. Seu apoio teórico é o teorema de Algebra, segundo o qual toda matriz possui uma matriz triangular superior similar a ela.

4.8.6 - Método HQRI (Householder-QR-Iteração Inversa)

Resulta da combinação do método de Householder para a tridiagonalização da matriz $[K]$, do cálculo dos autovalores usando o método QR, e da obtenção dos autovetores da matriz tridiagonal (e, conseqüentemente, de $[K]$), usando a iteração inversa.

4.9 - Técnicas de Iteração Polinomial

Esse grupo de métodos resolve a equação característica para obter os autovalores. Para o cálculo dos autovetores, pode-se usar um método de iteração vetorial.

De acordo com a montagem ou não dos coeficientes do polinômio característicos, separam-se em : 1) explícitos, com cálculo dos coeficientes, e 2) implícitos, sem este cálculo.

4.9.1 - Métodos Explícitos

Consistem de duas etapas: 1) cálculos dos coeficientes, e 2) resolução da equação. Só é adequado para sistemas pequenos, devido aos acúmulo de erros no cálculo dos coeficientes.

4.9.2 - Métodos Implícitos

Neste caso, obtém-se o valor do polinômio característico sem sua montagem. O procedimento empregado é :

- i) Decompor ($[K] - \lambda [M]$) em $[L] [S]$, sendo $[L]$ uma matriz triangular inferior e $[S]$ triangular superior;
- ii) Usar o método da secante para obter a primeira aproximação de uma raiz do polinômio;
- iii) Calcula-se $p(\lambda)$ para essa aproximação até que se consiga um valor de λ que torne $p(\lambda)$ pequeno o suficiente.

4.10 - Métodos Baseados em Sturm

Usam a propriedade que o polinômio característico e os dele reduzidos constituem uma seqüência de Sturm. Calculam somente os autovalores, sendo necessária outra técnica para obterem-se os autovetores.

Usa a fatorização de Gauss para determinar quantos autovalores são menores que um valor μ_k e aplica a bissecção

para achar os intervalos onde estão os autovalores. Logo após reduz-se o intervalo até a obtenção das raízes com a precisão desejada, e, finalmente, calculam-se os autovetores usando iteração inversa com aceleração (vide item 4.5) com :

$$\rho = \mu_k$$

4.11 - Métodos Aproximados

Os métodos até aqui citados são exatos, isto é, calculam diretamente os autovalores, obtendo-se todos os autovalores; porém, quando é desejado um número de autopares menor do que a dimensão do sistema, é possível a utilização de métodos aproximados.

4.11.1 - Método de Rayleigh-Ritz

São escolhidos m vetores (vetores de Ritz), que constituem uma base para um subespaço contido no espaço vetorial da solução do autop problema. Combinando-se linearmente estes vetores, buscam-se aproximações para os autovetores, gerando valores sempre superiores aos reais.

Chega-se então a um autop problema reduzido :

$$([K]_m - \rho [M]_m) \{X\} = \{0\} \quad (4.34)$$

Neste, as aproximações de $\{\phi\}_i$, $\{\bar{\phi}\}_i$, são obtidas a partir de $\{X\}$.

Pode-se ainda chegar a (4.34) usando o princípio de mínimo de Rayleigh, segundo o qual :

$$\lambda_1 = \text{mínimo} (\rho(\phi)), \text{ para qualquer } \{\phi\} \quad (4.35)$$

onde ρ é o quociente de Rayleigh definido no item 4.4 .

Assim, busca-se o valor de X_i , componentes de $\{X\}$ que satisfaçam :

$$\frac{\partial \rho(\{\bar{\phi}\})}{\partial X_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,m \quad (4.36)$$

4.11.2 - Método de Lanczos

Analogamente ao método anterior, são definidos vetores (vetores de Lanczos) para calcular as aproximações dos autovetores. A diferença é a matriz é tridiagonalizada.

Chega-se ao seguinte autoproblema padrão :

$$[T] \{\tilde{\phi}\} = \frac{1}{\lambda} \{\tilde{\phi}\} \quad (4.37)$$

que, resolvido, fornece os recíprocos dos autovalores e autovetores que, transformados por :

$$\{\phi\} = [X] \{\tilde{\phi}\} \quad (4.38)$$

onde $[X]$ é obtida do vetor de partida.

4.11.3 - Método da Síntese dos Modos Componentes

Este método é uma extensão de Rayleigh-Ritz, na qual cada componente/subestrutura é analisada separadamente e analisa-se a estrutura toda.

4.12 - Métodos Combinados para Grandes Sistemas

Visando suprir as deficiências de alguns métodos e aproveitando os benefícios de outros, foram criadas técnicas mistas de obtenção dos autopares.

A utilização destas técnicas mistas é no processamento de sistemas que não podem ser resolvidos pelo HQRI (item 4.8.6), nem por Jacobi generalizado (4.8.1), considerados grandes sistemas ^[30,31]. São apresentados apenas dois desses métodos: o de busca do determinante e o de iteração no subespaço.

4.12.1 - Busca de Determinante

Combinam-se os seguintes métodos :

- i) Iteração polinomial para obtenção de um autovalor desejado;
- ii) Seqüência de Sturm, para verificar a perda de algum autovalor no intervalo fornecido;

iii) Iteração vetorial inversa com substituição, para a obtenção dos autovetores, usando a ortogonalização de Gram-Schmidt.

4.12.2 - Iteração no Subespaço^[30,31]

Visando suplantiar a deficiência do método anterior para sistemas muito grandes, Bathe desenvolveu este, que combina os seguintes métodos :

- i) Iteração vetorial inversa sobre q vetores iniciais, com $q < p$ = número de autopares desejados, e análise de Ritz, para extração das melhores aproximações dos autopares;
- ii) Sequência de Sturm, para verificação do cálculo de todos os autopares desejados, contando-se quantos números negativos estão na diagonal principal.

O esquema de iteração utilizado é o de Jacobi generalizado, sobre a matriz formada pelos vetores iniciais.

5.1 - Introdução

Continuando a idéia apresentada no capítulo três, considere-se uma viga vertical, fixada no solo. A conformação final pode ser definida por três deslocamentos, referenciados à três modos de vibração, conforme a figura 5.1.

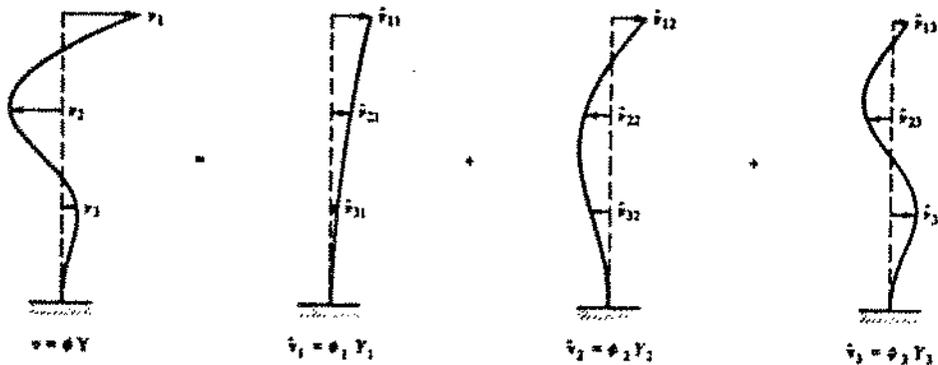


Figura 5.1 - Composição dos Modos de Vibração

Como este, qualquer vetor $\{v\}$ pode ser obtido através da conveniente superposição dos três modos de vibração, assim expressa :

$$\{v_i\} = Y_i \{\phi\}_i \tag{5.1}$$

Esta representação é baseada no fato que os modos de vibração são ortogonais em relação às matrizes $[M]$ e $[K]$, formando um conjunto linearmente independente, e, portanto, podendo-se constituir em uma base para a representação de qualquer vetor pertencente àquele espaço vetorial.

O vetor $\{v\}$ completo passa a ser expresso por:

$$\{v\} = \sum y_i \{\phi\}_i = [\Phi] \{Y\} \quad (5.2)$$

Onde : $\{Y\}$ = coordenadas no espaço dos modos
 $[\Phi]$ = Matriz modal (dos modos de vibração)
 $\{v\}$ = Vetor genérico

As coordenadas y_i é dado o nome de coordenadas modais (naturais) da estrutura.

A matriz $[\Phi]$ é não singular, pois é composta de n vetores linearmente independentes, logo é inversível. Pode-se então resolver a equação geral (3.5), multiplicando-se toda ela pela transposta do modo correspondente e pela matriz de massa :

$$\{\phi\}_i^t [M] \{v\} = \{\phi\}_i^t [M] [\Phi] \{Y\} \quad (5.3)$$

O lado direito da equação acima pode ser expandido em:

$$\begin{aligned} \{\phi\}_i^t [M] [\Phi] \{Y\} &= \underbrace{\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_1}_{\text{...}} y_1 + \dots \\ &+ \underbrace{\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_j}_{\text{...}} y_j + \dots + \underbrace{\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_n}_{\text{...}} y_n \end{aligned} \quad (5.4)$$

Os termos destacados são nulos se $i \neq j$, obtendo-se:

$$\{\phi\}_i^t [M] \{v\} = \{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_i Y_i \quad (5.5)$$

Daí:

$$Y_i = \frac{\{\phi\}_i^t [M] \{v\}}{\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_i} \quad (5.6)$$

5.2 - Formulação Empregada

5.2.1 - Sistemas sem Amortecimento

O primeiro caso a ser estudado é o caso sem amortecimento. A equação inicial é:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [K] \{U\} = \{F(t)\} \quad (5.7)$$

Usando o resultado do item 5.1 ($\{U\} = [\Phi] \{Y\}$):

$$\begin{aligned} [M] [\Phi] \{\ddot{Y}\} + [K] [\Phi] \{Y\} &= \{F(t)\} \Rightarrow \\ \{\phi\}_i^t [M] [\Phi] \{\ddot{Y}\} + \{\phi\}_i^t [K] [\Phi] \{Y\} &= \{\phi\}_i^t \{F(t)\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Simplificando os dois termos destacados (pela ortogonalidade) tem-se:

$$\{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_i \ddot{Y}_i + \{\phi\}_i^t [K] \{\phi\}_i Y_i = \{\phi\}_i^t \{F(t)\} \quad (5.9)$$

Agrupando termos :

$$\begin{aligned} M_i &= \{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_i \\ K_i &= \{\phi\}_i^t [K] \{\phi\}_i \\ F_i(t) &= \{\phi\}_i^t \{F(t)\} \end{aligned}$$

Estas novas constantes são chamadas massa, rigidez e cargas modais, respectivamente. Usando-as tem-se :

$$M_i \ddot{y}_i + K_i y_i = F_i(t) \quad (5.10)$$

A qual é uma equação análoga à de um sistema com um grau de liberdade (eq. diferencial ordinária). Pode-se ainda relacionar K e M através de:

$$K_i = \omega_i^2 M_i \quad (5.11)$$

e resolver da mesma maneira que um sistema de um grau de liberdade para cada frequência natural.

No trabalho em curso, a matriz de massa é consistente e, após a normalização em relação à matriz de massa :

$$[\Phi] [M] [\Phi]^t = [I] \quad (5.12)$$

Daí :

$$K_i = \omega_i^2 \quad (5.13)$$

Usando (5.12) e (5.13), e trocando a variável y_i por η_i :

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = N_i(t) \quad (5.14)$$

5.2.2 - Sistemas com Amortecimento

A equação inicial é:

$$[M] (\ddot{U}) + [C] (\dot{U}) + [K] (U) = \{F(t)\} \quad (5.15)$$

A relação de ortogonalidade é válida também para as matrizes de rigidez [K] e de amortecimento [C], logo esta equação, após tratamento análogo ao do item 5.1 fica:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = F_i(t) \quad (5.16)$$

Com :

$$C_i = (\phi)_i^t [C] (\phi)_i = 2 \xi_i \omega_i M_i \quad (5.17)$$

No termo da direita na equação (5.17), ξ_i é a definição da i-ésima razão de amortecimento, e os demais fatores são conhecidos. Assim é mais conveniente e fisicamente razoável definir o amortecimento pela variável ξ_i , que calcular os elementos da matriz [C]. O fator ξ_i representa a razão entre o amortecimento real e o crítico e, neste trabalho, é menor do que 1 e maior ou igual a zero.

Na derivação das equações deste caso, foi suposto que as transformações que desacoplam o sistema sem amortecimento, também o fazem para o amortecido.

Isto ocorre, segundo Rayleigh, se [C] é da forma^[09] :

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (5.18)$$

Outra forma de [C] que também satisfaz a ortogonalidade (mais genérica) é^[09] :

$$[C] = [M] \sum_{b=1}^n a_b ([M]^{-1} [K])^b = \sum_1^n [C]_b \quad (5.19)$$

com a_b obtidos de :

$$\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum_1^n a_b \omega_i^{2b} \quad (5.20)$$

$$\zeta_i = \frac{2\xi_i \omega_i}{M_i} \quad (5.21)$$

Novamente, normalizando em relação à matriz de massa, fica-se com a seguinte equação, semelhante à (5.14) :

$$\ddot{\eta}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = N_i(t) \quad (5.22)$$

5.3 - Sumário do Procedimento da Superposição Modal [09]

a) Equação do movimento :

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F(t)\} \quad (5.23)$$

b) Obtenção das frequências naturais/modos de vibração :

Resolução de :

$$([K] - \omega^2[M]) \{U\} = \{0\} \quad (5.24)$$

c) Massa e cargas generalizadas:

Para cada $\{\phi\}_i$ obtido :

$$\begin{aligned} M_i &= \{\phi\}_i^t [M] \{\phi\}_i \\ F_i &= \{\phi\}_i^t \{F(t)\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

d) Normalização da matriz modal :

$$[\Phi] [M] [\Phi]^t = [I] \quad (5.26)$$

e) Equações desacopladas para cada frequência natural :

$$\ddot{\eta}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = N_i(t) \quad (5.27)$$

f) Resposta modal para carga : utiliza-se a solução geral proposta por Duhamel em forma de integral (para cada modo) :

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t N_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \text{sen}[\omega_{di} (t-\tau)] d\tau \quad (5.28)$$

onde ω_{di} é a frequência natural amortecida

g) Se a velocidade inicial ($\dot{\eta}_i(0)$) e/ou deslocamento inicial ($\eta_i(0)$) não são nulos, uma resposta de vibração livre deve ser adicionada para cada modo, na forma genérica:

$$\eta_i(t) = \quad (5.29)$$

$$e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\frac{\dot{\eta}_i(0) + \eta_i(0) \xi_i \omega_i}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t) + \eta_i(0) \cos(\omega_{di} t) \right]$$

$$\eta_i(0) = \frac{(\phi)_i^t [M] \{U(0)\}}{M_i}, \quad \dot{\eta}_i(0) = \frac{(\phi)_i^t [M] \{\dot{U}(0)\}}{M_i}$$

h) Resposta nas coordenadas geométricas

Tendo a resposta nas coordenadas modais $\{\eta\}$, obtem-se:

$$\{U(t)\} = \quad \quad \quad (5.30)$$
$$[\Phi] \{\eta(t)\} = \{\phi\}_1 \eta_1(t) + \dots + \{\phi\}_n \eta_n(t)$$

i) Resposta de força elástica

A força elástica pode ser obtida a partir de :

$$\{F_e\} = [K] \{U(t)\} =$$
$$[K] [\Phi] \{\eta_i(t)\} = [M] [\Phi] (\omega_i^2 \eta_i(t)) \quad (5.31)$$

Observa-se das expressões encontradas, que o termo ω_i aparece ao quadrado, logo os modos de maior ordem são de maior importância na definição das forças do que na definição dos deslocamentos, supondo-se que todos os modos tenham igual peso. Conseqüentemente, é necessário colocar mais modos se é desejada uma melhor precisão. Na prática, porém, os pesos são diferentes, o que implica em buscar um número de modos que permita um cálculo preciso sem acarretar erros numéricos exagerados.

5.4 - Equacionamento da Resposta Dinâmica

É apresentado a seguir o equacionamento utilizado na obtenção das expressões do programa, para as seis forças de excitação consideradas.

5.4.1 - Solução Homogênea (Regime Transiente)

A solução homogênea consiste na expressão apresentada no sub-item g) do item 5.4 :

$$\eta_{hi}(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\frac{\dot{\eta}_i(0) + \eta_i(0) \xi_i \omega_i}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t) + \eta_i(0) \cos(\omega_{di} t) \right] \quad (5.32)$$

Derivando em relação ao tempo, tem-se a velocidade :

$$\dot{\eta}_{hi}(t) = -e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\left[\frac{\dot{\eta}_i(0) + \eta_i(0) \xi_i \omega_i}{\omega_{di}} \xi_i \omega_i + \eta_i(0) \omega_{di} \right] \text{sen}(\omega_{di} t) + \dot{\eta}_i(0) \cos(\omega_{di} t) \right] \quad (5.33)$$

Novamente derivando, chega-se à aceleração :

$$\ddot{\eta}_{hi}(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} \left[\left[\left[\frac{\dot{\eta}_i(0) + \eta_i(0) \xi_i \omega_i}{\omega_{di}} \xi_i \omega_i + \eta_i(0) \omega_{di} \right] \xi_i \omega_i - \dot{\eta}_i(0) \omega_{di} \right] \text{sen}(\omega_{di} t) - [2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(0) + 2\xi_i^2 \omega_i^2 \eta_i(0) - \omega_i^2 \eta_i(0)] \cos(\omega_{di} t) \right] \quad (5.34)$$

5.4.2 - Carregamento Subitamente Aplicado

Seja uma força de módulo P_0 subitamente aplicada. Utilizando Duhamel, tem-se :

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t P_0 e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \text{sen}[\omega_{di}(t-\tau)] d\tau \quad (5.35)$$

que, resolvida :

$$\eta_i(t) = \frac{P_0}{\omega_{di} \omega^2} \left[\omega_{di} - [\omega_{di} \cos(\omega_{di} t) + \xi_i \omega_i \text{sen}(\omega_{di} t)] \right] e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (5.36)$$

Dai a velocidade e a aceleração:

$$\dot{\eta}_i(t) = \frac{P_0}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t) e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (5.37)$$

$$\ddot{\eta}_i(t) = \frac{P_0}{\omega_{di}} [\omega_{di} \cos(\omega_{di} t) - \xi_i \omega_i \text{sen}(\omega_{di} t)] e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (5.38)$$

5.4.3 - Impacto

O carregamento de impacto é definido como um carregamento tipo pulso com duração tendendo a zero [13].

Sua formulação começa com :

$$I = \int_0^{t_1} N_i(t) dt \quad (5.39)$$

A força $N_i(t) = P$ é assumida constante durante o pulso, então, para $t = t_1$:

$$\eta_i(t_1) = \frac{P}{K} [1 - \cos(\omega_n t_1)] \quad (5.40)$$

$$\dot{\eta}_i(t_1) = \frac{P}{K} \text{sen}(\omega_n t_1) \quad (5.41)$$

Como $t \ll t_1$, $\omega_n t_1 \ll 2\pi \Rightarrow \cos(\omega_n t_1) \approx 1$ e $\text{sen}(\omega_n t_1) \approx \omega_n t_1$

$$\text{Assim : } \eta_i(t_1) = 0 \quad (t_1 \rightarrow 0) \quad (5.42)$$

$$\dot{\eta}_i(t_1) = \frac{P}{K} \omega_n \omega_n t_1 = \frac{P}{M} t_1$$

Daí :

$$I = P t_1 \quad (5.43)$$

Finalmente :

$$\dot{\eta}_i(t) = \frac{I}{M} \quad (5.44)$$

Usando as equações (5.42) e (5.44) em (5.32), (5.33) e (5.34), chega-se às expressões do deslocamento, velocidade e aceleração (com $K = \omega_n^2$ e $M = 1$).

$$\eta_i(t) = \frac{I}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t) e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (5.45)$$

$$\dot{\eta}_i(t) = \frac{I}{\omega_{di}} [\omega_{di} \cos(\omega_{di} t) - \xi_i \omega_i \text{sen}(\omega_{di} t)] e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (5.46)$$

5.4.4 - Carregamento Crescendo Linearmente (Rampa)

Colocando-se $N_i(\tau) = a \cdot \tau$ na integral de Duhamel e, resolvendo-a, tem-se :

$$\eta_i(t) = \frac{a}{\omega_d \omega^3} \left[[2\xi_i \omega_{di} \cos(\omega_{di} t) + \omega_i (2\xi_i^2 - 1) \text{sen}(\omega_{di} t)] e^{-\xi_i \omega_i t} + \omega_{di} (\omega_i t - 2\xi_i) \right] \quad (5.47)$$

Calculando a primeira e segundas derivadas :

$$\dot{\eta}_i(t) = \frac{-a}{\omega_{di} \omega^2} \left[[\omega_{di} \cos(\omega_{di} t) + \xi_i \omega_i \text{sen}(\omega_{di} t)] e^{-\xi_i \omega_i t} - \omega_{di} \right] \quad (5.48)$$

$$\ddot{\eta}_i(t) = \frac{a}{\omega_{di}} \text{sen}(\omega_{di} t) e^{-\xi_i \omega_i t} \quad (5.49)$$

5.4.5 - Relação Entre Formulações

Observando-se os termos da direita das equações (5.37), (5.45) e (5.49), nota-se que são iguais, o mesmo ocorrendo com (5.36) e (5.48), (5.38) e (5.46), sendo necessário apenas mudar P_0 , a e I . Isto é, o deslocamento do impacto, a velocidade do degrau e a aceleração da rampa têm a mesma formulação, como também ocorre com o deslocamento do degrau e a velocidade da rampa, e com velocidade do impacto e a aceleração do degrau.

O motivo fica claro quando se lembra que as equações que definem o carregamento $N_i(\tau)$ em Duhamel são relacionadas por derivação : derivando-se $N_i(\tau) = a \tau$ (rampa), tem-se $N_i(\tau) = a = P_0$ (degrau), que novamente derivado, gera $N_i(\tau) = I = \delta$ (delta de Dirac - impacto).

5.4.6 - Excitação Harmônica

Seja $N_i(\tau) = A_0 \text{ sen}(\omega_e \tau)$ na integral de Duhamel. Daí :

$$\eta_i(t) = \frac{A_0 / \omega_i^2}{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\xi_i \beta_i)^2} \left[[2\xi_i \beta_i \cos(\omega_{di} t) + \gamma_i (2\xi_i^2 - 1 + \beta_i^2) \text{ sen}(\omega_{di} t)] e^{-\xi_i \omega_i t} - [2\xi_i \beta_i \cos(\omega_e t) - (1 - \beta_i^2) \text{ sen}(\omega_e t)] \right] \quad (5.50)$$

$$\text{Com } \beta_i = \frac{\omega_e}{\omega_i} \quad \text{e} \quad \gamma_i = \frac{\omega_e}{\omega_{di}}$$

Na expressão implementada, os termos em ω_{di} foram desprezados, para que ficasse apenas a solução permanente :

$$\eta_i(t) = \frac{A_0 / \omega_i}{(1 - \beta_i^2)^2 + (2\xi_i \beta_i)^2} \left[2\xi_i \beta_i \cos(\omega_e t) - (1 - \beta_i^2) \text{ sen}(\omega_e t) \right] \quad (5.51)$$

Derivando-se a expressão acima, tem-se a velocidade e a aceleração.

5.4.7 - Solução Numérica

Neste caso não se tem $N_i(\tau)$ como uma função definida, mas fornecida em forma de um conjunto de pontos $(t, N_i(t))$, ou quando a solução analítica não for conhecida.

É necessário, então, realizar a integral de Duhamel numericamente (detalhes da implementação numérica no capítulo sete).

Para melhor compreensão repete-se a expressão da integral de Duhamel :

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t N_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \text{sen}[\omega_{di}(t-\tau)] d\tau \quad (5.28)$$

Para derivar a equação acima, é necessário usar a regra de Leibnitz^[45] :

Para $a \leq x \leq b$ e $A \leq t \leq B$:

$$\frac{d}{dx} \int_A^B f(x,t) dt = \int_A^B \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt + f(x,B) \frac{dB}{dx} - f(x,A) \frac{dA}{dx} \quad (5.52)$$

Fazendo $t \equiv \tau$ e $x \equiv t$, tem-se :

$$\dot{\eta}_i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t,\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t} d\tau + \underbrace{f(t,t) \frac{dt}{dt}}_{\text{L}_0} - \underbrace{f(t,0) \frac{d0}{dt}}_{\text{L}_0} \quad (5.53)$$

Aplicando em Duhamel :

$$\dot{\eta}_i(t) = \int_0^t \frac{N_i(\tau)}{\omega_{di}} \left[\omega_{di} \cos[\omega_{di}(t-\tau)] - \xi_i \omega_i \text{sen}[\omega_{di}(t-\tau)] \right] e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} d\tau \quad (5.54)$$

Abrindo em duas integrais, aparece novamente a integral inicial, resultando em :

$$\dot{\eta}_i(t) = -\xi_i \omega_i \eta_i(t) + \int_0^t N_i(\tau) \cos[\omega_{di}(t-\tau)] e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} d\tau \quad (5.55)$$

Reaplicando Leibnitz :

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_i(t) = & \overbrace{-\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) - \int_0^t N_i(\tau) \cos[\omega_{di}(t-\tau)] e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} d\tau}^{\text{I1}} - \\ & \overbrace{-\omega_{di}^2 \int_0^t \frac{N_i(\tau)}{\omega_{di}} \text{sen}[\omega_{di}(t-\tau)] e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} d\tau + N_i(t)}^{\text{I2}} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Nota-se que a primeira integral já apareceu na obtenção da velocidade, logo :

$$\text{I1} = \dot{\eta}_i(t) + \xi_i \omega_i \eta_i(t) \quad (5.57)$$

Também observa-se que I2 é a integral do deslocamento :

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_i(t) = & \\ & -\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) - \xi_i \omega_i [\dot{\eta}_i(t) + \xi_i \omega_i \eta_i(t)] - \omega_{di}^2 \eta_i(t) + N_i(t) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Como $\omega_{di} = \omega_i (1 - \xi_i^2)^{1/2}$, tem-se :

$$\ddot{\eta}_i(t) = -2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) - \omega_i^2 \eta_i(t) + N_i(t) \quad (5.59)$$

A expressão (5.59) pode ser obtida de um modo bem mais fácil, pois é a própria equação diferencial do movimento:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\xi_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = N_i(t) \quad (5.22)$$

5.4.8 - Resposta no Domínio da Frequência

A resposta em frequência implementada consiste na solução da equação geral para $N_i(t) = A_0 \text{sen}(\omega_e t)$, ou seja:

$$\ddot{\eta}_i + 2 \xi_i \omega_i \dot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = A_0 \text{sen}(\omega_e t) \quad (5.60)$$

A solução na forma adimensional fica :

$$\zeta = \frac{X_0}{X_e} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (5.61)$$

$$\text{tg}(\phi) = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2} \quad (5.62)$$

onde : X_e = Deflexão estática

X_0 = Resposta dinâmica

ξ = Razão de Amortecimento = $\frac{C}{C_c}$

$\beta = \frac{\omega_e}{\omega_n}$

5.5 - Comentários Finais

As expressões para o deslocamento, velocidade e aceleração obtidas foram comparadas com as encontradas na literatura^{[01] a [21]}, inclusive nos casos mais simples, sem amortecimento ou em regime permanente, não havendo discrepâncias.

Cabe, finalmente, definir algumas grandezas :

- i) Freqüência Natural (sem e com amortecimento) : Uma propriedade do sistema.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (5.63)$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{K}{M} - \left(\frac{C}{2M}\right)^2} \quad (5.64)$$

- ii) Freqüência de Ressonância : Freqüência onde ocorre a maior amplitude :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K}{M} - 2\left(\frac{C}{2M}\right)^2} \quad (5.65)$$

Percebe-se que a freqüência de ressonância é um pouco menor do que a natural amortecida.

6.1 - HISTÓRICO

O programa ANESDE teve sua origem naquele iniciado na Universidade de Berkeley, resultando no SAP IV. Após extenso aperfeiçoamento no Instituto Militar de Engenharia (IME), foi levado para o CENPES.

Na UNICAMP, foi base para duas teses de mestrado : uma implementando o elemento de viga-coluna, com consideração do efeito da carga axial nas deflexões transversais^[39], e esta tese, implantando a resposta dinâmica.

Seu desenvolvimento no IME foi no ambiente BURROUGHS B6800, sendo depois transportado para o CDC (no CENPES). Neste transporte necessitou-se de algumas alterações, explicadas no próximo item. Atualmente é executado no fortran 77, pois este é de uso comum e já apresenta alguma estruturação.

Atualmente está implementado em micro-computador, sendo utilizado o compilador MICROSOFT FORTRAN 5.0, embora também possa ser executado na placa MOTOROLA 60820 20 MHz (compilador SVS FORTRAN-77), na estação de trabalho SUN SPARK STATION 1+ (compilador F77) e no IBM 3090 (compilador FORTVS2). A estação SUN foi o ambiente mais utilizado, devido à sua velocidade, recursos gráficos, capacidade de memória e ambiente de trabalho SUNVIEW (estilo WINDOWS), permitindo em uma mesma

tela (e simultaneamente) editar um ou mais arquivos e executar um caso, além da possibilidade de usar outras máquinas da rede da UNICAMP.

A compilação é realizada nos quatro ambientes citados no parágrafo anterior, para que os erros não detetados por cada compilador sejam localizados por outro. Para a execução ou compilação de pequenas alterações, preferiu-se a estação de trabalho e, em segunda opção, a placa. A versão instalada no IBM 3090 é a final, visando o uso do programa para casos mais complexos no CENPES.

Cabe aqui explicar que o uso da estação de trabalho SUN, do IBM e da placa MOTOROLA é necessário apenas para casos mais complexos (resposta transiente ou no domínio da frequência com muitos graus de liberdade), podendo-se executar casos simples no microcomputador. Isto devido ao dimensionamento dos vetores de trabalho, que gera um arquivo executável que o sistema operacional DOS da MICROSOFT não consegue acessar completamente.

O ANESDE conta atualmente com as opções de análise estática linear e não linear (elemento de viga-coluna), e dinâmica linear. Os elementos disponíveis são : treliça plana e espacial, viga plana e espacial de dois e três nós, placa retangular de quatro nós e a viga-coluna (com e sem consideração do efeito da carga axial nas deflexões transversais).

Na análise dinâmica existem as alternativas : integração direta (Newmark), obtenção dos autovalores e autovetores, superposição modal com forças de excitação simples , análise numérica (para carregamentos transientes) e análise no domínio da frequência.

6.2 - Estrutura do Programa

Sua estrutura é dividida em rotinas e usa um vetor de alocação dinâmica para o armazenamento das suas variáveis, intermediárias ou não. Este vetor de trabalho (vetor dinâmico) está armazenado em um bloco COMMON, para sua passagem para as rotinas.

Esta característica permite um melhor aproveitamento da memória, pois não é preciso redimensionar todas as variáveis vetoriais e matriciais para se poder aumentar sua capacidade de nós e elementos. Basta aumentar o tamanho do vetor dinâmico suficientemente para comportar o caso desejado.

Outra característica importante é o dimensionamento dinâmico dos vetores e matrizes armazenados no vetor de trabalho. Para isto passa-se o vetor e sua dimensão para a rotina, só criando o número de elementos necessários. Uma outra maneira é dimensionar com "*", ficando o vetor ou matriz dimensionado com o tamanho anterior à chamada da rotina.

Também é muito utilizado a especificação COMMON para passagem das variáveis simples (inteiras e reais), assim como para a passagem do vetor dinâmico para as rotinas, quando necessário. Assim diminui-se o número de parâmetros passados para as rotinas, resultando em uma listagem mais fácil de ser entendida.

As características acima, além de outras conseqüentes da estrutura modular, permitem que qualquer alteração seja realizada sem grandes problemas, desde que não se altere a alocação dos vetores e matrizes no vetor de trabalho, na posição em que é inserida a alteração. Especial cuidado deve ser tomado ao inserir ou retirar variáveis do vetor dinâmico, evitando invasão de área.

Quando foi transportado para o CDC precisou-se alterar algumas definições e formatos, visando a sua execução. Também foi necessário a separação do vetor de trabalho em dois : A (para variáveis reais) e IA (para inteiras), pois o CDC não permite que sejam armazenadas no mesmo vetor. Esta mudança foi mantida após a passagem das variáveis reais para dupla precisão, pois não é preciso definir as variáveis inteiras desta maneira.

Visto que algumas rotinas necessitam de grande precisão nos cálculos, as variáveis reais foram definidas como dupla precisão. No CDC e no BURROUGHS não foi preciso fazer esta alteração, pois os números reais ocupam 14 bits, mas no micro

e na estação SUN, a definição com precisão dupla é imprescindível pois os reais ocupam apenas 8 bits, passando a ocupar 16 bits. O resultado do uso da precisão simples é a restrição do número de modos de vibração em relação ao número total de graus de liberdade, não permitindo serem iguais, se o número de elementos for maior que 30.

Devido ao método de obtenção dos autovalores-autovetores, é necessário aumentar o número de elementos quando é desejado um maior número de modos de vibração. Deve-se respeitar a relação de pelo menos oito graus de liberdade para um modo desejado, conforme os resultados dos testes realizados pelo autor.

Outro aspecto importante é o uso de arquivos para o armazenamento temporário de variáveis. O vetor dinâmico é limpo algumas vezes para que outras variáveis ocupam seu espaço. Se alguns valores são importantes para uma fase posterior, estes são armazenados em arquivos, e lidos quando necessário. Como exemplos cita-se as matrizes de massa e rigidez, o vetor (ou matriz) de carregamento, os auto-pares, os dados dos nós e elementos.

Um recurso importante é a possibilidade de executar vários casos de carregamento seguidos. Com isso pode-se simular carregamentos diversos e somar os resultados de cada um, desde que somente sejam usadas soluções lineares, valendo o princípio da superposição.

No programa alterado para este trabalho, várias opções foram criadas :

- Leitura das matrizes de massa e rigidez externas;
- Leitura dos auto-pares externos;
- Consideração ou não do amortecimento;
- Leitura das razões de amortecimento modais;
- Escolha entre 4 funções excitadoras simples;
- Eliminação pelo usuário de modos de vibração no cálculo da resposta dinâmica;
- Entrada das características do material e da seção reta de três modos diferentes: seção retangular, tubular ou genérica;
- Possibilidade de fornecimento da excitação por pontos discretos no tempo (análise transiente);
- Análise no domínio da frequência;
- Impressão selecionada dos resultados de alguns nós e elementos;
- Criação de um arquivo de saída contendo os resultados de um grau de liberdade especificado, para plotagem.

Para isto foram criadas novas rotinas, sem que interferissem com as anteriores, e novos arquivos foram criados.

Destaca-se, na sua atual versão, a sua transportabilidade entre a estação de trabalho, o MICROSOFT FORTRAN e a placa MOTOROLA, sem nenhuma modificação e, com poucas alterações,

sua implementação no IBM 3090, já que não foi utilizado nenhum comando ou função específica deste ou daquele ambiente. A instalação em outro ambiente também é fácil, apenas atentando-se para alguma característica particular.

O programa está dividido nos seguintes arquivos :

- ELFIN.FOR : contém o programa principal e a maioria das rotinas básicas de leitura e manipulação dos dados;
- BARRA.FOR : contém as rotinas referentes à formulação do elemento de barra;
- VIGA.FOR : analogamente para o elemento de viga;
- QUAD.FOR : idem para o elemento de quadrilátero;
- GENER.FOR : contém as rotinas referentes à leitura dos dados, sua manipulação e resolução para o caso dinâmico transiente;
- FREQ.FOR : análoga à anterior, para a análise no domínio da frequência.

Os dados de entrada estão no arquivo BATEIN e são :

- Título;
- Cartão de controle, com o número de nós, de grupos de elementos, de casos de carregamento, análise desejada, modo de execução, função excitadora e opção de leitura das matrizes de massa e rigidez externa;
- Dados dos nós (caso sem leitura externa das matrizes);

- Dados do(s) carregamento(s);
- Dados dos elementos (análoga aos dados dos nós);
- Dados da solução dinâmica;

Obviamente o conteúdo do arquivo de dados varia de acordo com a análise desejada. Deve-se também atentar para o fornecimento dos arquivos contendo as matrizes de massa e rigidez, e os auto-pares, se assim for necessário.

O arquivo de saída (BATEOUT) contém os dados de entrada repetidos e os gerados (quando a geração de nós e elementos é usada), a numeração das equações a serem resolvidas, os valores intermediários (largura média e máxima de banda, etc), os autopares (quando pedidos) e a resposta dinâmica ou estática. Além deste outros arquivos são criados contendo as matrizes de massa e rigidez, o carregamento, os dados dos nós e elementos e os resultados de um grau de liberdade especificado, conforme apresentado no item 6.3.

6.3 - Arquivos Manipulados

Os arquivos criados e/ou lidos durante a execução do programa são :

- BATEIN : arquivo de dados de entrada;
- BATEOUT : arquivo do relatório de saída;
- IELMNT : contém os dados já manipulados dos elementos;
- ILOAD : armazena os valores do carregamento;

- IMASS : contém os valores das massas concentradas (ainda não utilizadas);
- IMTUM : armazena os dados dos momentos localizados (ainda não utilizados);
- NSTIF : contém a matriz de rigidez global e a matriz ID (identificação dos graus de liberdade);
- NSTR : armazena a matriz para o cálculo das tensões;
- NMASS : armazena a matriz de massa global;
- IFREQ : contém os auto-pares;
- INODE : armazena os dados manipulados dos nós;
- ICONTR : contém as variáveis necessárias para a opção de leitura de matrizes externas;
- GRAF : guarda os tempos, deslocamentos, velocidades e acelerações de um determinado grau de liberdade para posterior plotagem.

Além dos arquivos acima descritos, foram criados alguns arquivos, formando um "ambiente de trabalho". São arquivos de processamento em lote (.BAT) que simplificam em muito a edição, compilação, execução e manipulação dos arquivos de entrada e saída. São eles :

- EDIN.BAT : chama o editor de textos para o arquivo de entrada;
- EDOUT.BAT : análogo para o arquivo de saída;
- EDFOR.BAT : análogo para ELFIN.FOR;
- EDBAR.BAT : análogo para BARRA.FOR;
- EDGEN.BAT : análogo para GENER.FOR;

- EDVIG.BAT : análogo para VIGA.FOR;
- COMP.BAT : compilação no MICROSOFT FORTRAN 5.0;
- RUN.BAT : execução neste ambiente;
- COMPL.BAT : compilação na placa MOTOROLA;
- RUNPL.BAT : execução neste ambiente;
- DELBAK.BAT : apaga os arquivos de backup;
- DELET.BAT : apaga os arquivos de saída antes de nova execução;
- DATA.BAT : preserva o arquivo GRAF com outro nome contra a ação de DELET.BAT;
- IN.OLD : último arquivo de dados (cópia backup);
- COP.BAT : copia IN.OLD para BATEIN.

Programas análogos foram criados para a estação de trabalho SUN, devido ao sistema operacional diferente.

Com este "ambiente de trabalho" é fácil e rápido alterar ou rodar o programa, em qualquer ambiente dos citados, à exceção do IBM 3090, onde apenas foi criado um arquivo para execução do programa.

6.4 - Comentários Finais

Para finalizar este capítulo, ressalta-se as boas qualidades do programa e do ambiente criado, permitindo que sejam feitas alterações sem grande esforço.

O programa permite grande redução do tempo de execução, através da leitura das matrizes de massa e rigidez, e dos auto-pares externos.

E, finalmente, destaca-se a grande potencialidade do programa, com a implementação de novas rotinas.

No capítulo seguinte é analisada a implementação numérica da formulação analítica.

7.1 - Introdução

Neste capítulo, descrevem-se os procedimentos implementados na confecção do programa final da tese e um breve histórico das modificações no código.

7.2 - Histórico do Trabalho

Quando o programa inicial foi entregue, possuía as rotinas básicas de leitura dos dados e montagem das matrizes, além dos elementos de barra, viga e quadrilátero.

A análise dinâmica só abrangia a integração passo a passo (método de Newmark) para cargas subitamente aplicadas e superposição modal para o mesmo carregamento, com um algoritmo acumulativo que usava a resposta no tempo anterior para cálculo no instante em estudo.

Não havia leitura externa das matrizes nem dos autopares, além de alguns erros na análise dinâmica, corrigidos no decorrer do trabalho.

A primeira etapa do trabalho foi o estudo do programa, principalmente do uso do vetor de trabalho. Foram realizados alguns testes para melhor entendimento, visando o intensivo esforço de modificação posterior.

Finda esta etapa, as rotinas de resposta dinâmica para casos simples (impacto, degrau, rampa e harmônica) foram instaladas, seguidas das relacionadas à leitura das matrizes de massa e rigidez, e dos autopares externos.

A terceira etapa consistiu na revisão das rotinas de cálculo dos autopares e a implantação da resposta numérica (excitação transiente).

Logo após as rotinas de análise no domínio da frequência foram criadas e testadas, seguidas da próxima etapa : a revisão dos elementos de barra e viga, e instalação do elemento de viga-coluna com deslocamentos axial e transversal independentes.

Na última etapa, o programa foi todo revisto e as últimas opções (citadas no item 6.2) foram instaladas, assim como a eliminação de linhas de comentário não necessárias foi realizada, visando diminuir o tamanho do arquivo-fonte.

Finalmente, destaca-se que a análise estática não foi alterada, melhor ainda, também ganhou a opção da leitura externa da matriz de rigidez.

7.3 - Metodologia Empregada

Na análise dinâmica, foi usada a formulação apresentada no capítulo 5. A metodologia utilizada é descrita a seguir.

O algoritmo programado foi a tradicional na análise dinâmica : primeiramente, são lidos os dados de entrada, de acordo com as opções desejadas; em seguida montam-se as matrizes de massa, amortecimento e rigidez globais, ou são lidas de arquivos.

Utilizando as matrizes de massa e rigidez e os vetores e matrizes auxiliares (definindo o carregamento, graus de liberdade, posições dos elementos da diagonal principal, etc), os autopares são obtidos (ou lidos) e são enviados para a rotina da resposta dinâmica adequada.

Nesta é obtido o comportamento dinâmico no sistema de coordenadas modais (vide capítulo 5). O próximo passo é a obtenção do vetor deslocamento nas coordenadas originais ou geométricas. Finalmente as tensões, momentos e/ou forças axiais são calculadas e os resultados são gravados de acordo com as opções escolhidas pelo usuário.

Este procedimento é realizado por todos os pacotes para cálculos estruturais, como o COSMOS, o ANSYS e o SAP IV/80/90, que oferecem a mais um pré-processador (interface amigável com o usuário facilitando a entrada dos dados) e um pós-processador, que trata os resultados e os mostra em forma de gráficos comuns (deslocamento x tempo, por exemplo) ou mais sofisticados (animação, curvas ou regiões coloridas com escalas de tensão, etc).

7.4 - Procedimentos Implementados

É apresentado a seguir um resumo dos procedimentos instalados para concretizar a metodologia supra citada.

Na implementação da leitura das matrizes de massa e rigidez externas, foi necessário identificar que rotinas podem ser evitadas e qual deve ser a organização do vetor dinâmico em cada fase analisada. As rotinas não foram alteradas em sua estrutura, apenas inseriram-se algumas linhas visando a análise numérica.

Este mesmo procedimento foi realizado na implementação da leitura dos autovalores e autovetores. Foi necessária uma análise detalhada da estrutura do programa para evitar-se um erro na montagem do vetor dinâmico e, com isso, invasão de área.

Para os casos de forças de excitação simples (degrau, impacto, rampa e harmônica), a rotina original de superposição modal foi quase totalmente aproveitada, com exceção do trecho de cálculos dos coeficientes de influência (solução das equações no espaço modal). Esta teve que ser refeita, deixando de ser acumulativa para calcular os coeficientes em valores de tempo exatos, configurando uma solução fechada ou exata.

Já para a análise numérica, foi necessária a confecção de rotinas próprias e redefinição do vetor dinâmico, visto que

são armazenados valores de carregamento no espaço (nos nós) e no tempo, configurando uma matriz, ao invés do vetor anteriormente usado. Foi criada uma rotina para leitura, preparação e gravação dos dados do carregamento em arquivo, o mesmo usado anteriormente. Também desenvolveu-se uma rotina para leitura dos dados do arquivo, quando da chamada da rotina dinâmica.

O processamento da matriz de carregamento consiste na transformação da matriz lida em termos dos nós em outra em termos dos graus de liberdade, através da análise da influência de cada força em cada grau. Forças relacionadas a um certo grau de liberdade são somadas.

Para a resolução da resposta dinâmica transiente, foram criadas duas rotinas: SIMPSON, calculando o valor da integral e GENER, realizando o cálculo da resposta. A rotina SIMPSON permite o uso de um número par de pontos, pois, neste caso, repete-se o último ponto e depois retira da área calculada o retângulo incluído ($f_n \cdot \Delta t$).

A rotina GENER recebe os dados básicos do principal (número de nós, graus de liberdade e outras variáveis de controle, a matriz de cargas e as matrizes de massa e rigidez) e os processa. O cálculo dos autovalores e autovetores só é feito se desejado, havendo a opção da leitura externa.

Com os autovalores e autovetores, a matriz de cargas é passada para o espaço modal e cada coluna (representando um tempo) é processada. Após o cálculo dos deslocamentos, velocidades e acelerações, obtém-se as tensões, com base nos primeiros.

Na solução das excitações simples como na análise numérica, a seqüência geral é a mesma : calcular o efeito das condições iniciais - solução homogênea; de acordo com a opção fornecida, calcular a solução particular - regime permanente; unir as duas e passar para o espaço real; calcular as tensões, e repetir até que o número de iterações chegue ao máximo pedido. Cabe ressaltar que a impressão dos resultados e o cálculo das tensões só são realizadas quando dos intervalos de impressão, definidos pelo usuário.

Na solução no domínio de freqüência, o procedimento é análogo, porém são calculadas a amplitude dinâmica, a estática, a razão entre elas e a defasagem para cada freqüência. O carregamento é dado por pares $[\omega, F(\omega)]$.

O processo de cálculo pode ser assim resumido : 1) são calculadas a amplitude e defasagem para cada freqüência/modo natural; 2) os componentes real e imaginário são obtidos através da amplitude e defasagem, e armazenados em vetores; 3) estes vetores são transportados do sistema modal para o geométrico e as amplitudes e defasagens finais são calculadas e gravadas.

A gravação dos resultados de um grau de liberdade especificado pelo usuário é realizada usando a matriz que define os graus de liberdade (no caso ID (6,número de nós)). São fornecidos o número do nó e a direção desejados e localiza-se qual o número da equação correspondente ao grau de liberdade, gravando-se os resultados desta equação.

Neste trabalho, são calculadas duas respostas dinâmicas diferentes : a exata e a numérica. É necessário diferenciá-las para melhor entendimento dos resultados apresentados no próximo capítulo. A diferença consiste na obtenção da resposta: integração numérica sobre os pontos de carregamento na numérica, e uso das expressões obtidas através de Duhamel na exata.

Também foram obtidos resultados aqui denominados analíticos, calculados usando-se a formulação analítica relativa a cada exemplo executado, retirada da literatura e programada à parte, ou são consultados os valores numéricos.

8.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores, os conceitos básicos, a formulação empregada e a implementação numérica foram apresentados. Neste, são mostrados os resultados até agora obtidos.

Cada item seguinte apresenta um teste realizado, explicando o problema, sua formulação, a simulação realizada e os resultados alcançados, seguido de uma breve análise do caso.

Cabe aqui relembrar as respostas dinâmicas consideradas :

- i) Analítica : calculada por expressões ou algoritmos não instalados no programa fonte e baseados nas formulações analíticas propostas na literatura;
- ii) Exata : obtida através das expressões resultantes da integração analítica de Duhamel para os casos simples e instaladas no programa. Constitue uma solução fechada (pontual);
- iii) Numérica : calculada através da integração numérica por Simpson pelo programa da tese.

Foram executados exemplos com elementos de barra, viga e ambos combinados. Em alguns, somente os autopares foram obtidos. No último exemplo, uma aproximação da análise não linear é apresentado, aplicado a uma coluna de perfuração.

8.2 - Teste 1: Barra Subitamente Tracionada

Este exemplo consta na referência [02], na página 342 (exemplo 8.1). Consiste em uma barra horizontal engastada em uma extremidade e tracionada na outra. É suposta homogênea e uniforme, com os valores da área transversal e do módulo de Young constantes. A figura 8.1 ilustra o explicado.

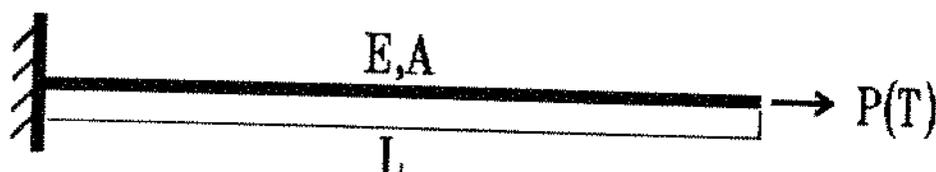


Figura 8.1 - Barra Engastada com Carga Axial

Os valores do módulo de Young (E), da área transversal (A), comprimento (L) e da massa específica linear (m) são iguais a um ($E = A = L = m = 1.0$).

A equação que rege a deformação axial é :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (8.1)$$

com :

$$c = \sqrt{\frac{EA}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (8.2)$$

Onde m = massa específica linear

ρ = massa específica volumétrica

As condições de contorno são : $u(0,t) = 0$

(8.3)

$$EA \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = P(t)$$

As condições iniciais são : $u(x,0) = 0$

(8.4)

$$\left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Este sistema pode ser resolvido através de três meios : transformada finita em seno, solução da onda estacionária e onda itnerante por Laplace.

Os dois primeiros meios fornecem o mesmo resultado, visto assumirem as mesmas hipóteses, já o terceiro devolve um resultado muito complexo e de difícil programação. Neste estudo é usada a solução gerada pelos dois primeiros meios, que é :

$$u(x,t) = \frac{4c}{\pi EA} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \text{sen}\left[(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right] \cdot \int_0^t F(\tau) \text{sen}\left[(2n-1)\frac{\pi c}{2L}(t-\tau)\right] d\tau \quad (8.5)$$

Fazendo $P(\tau) = P_0$:

$$u(x,t) = \frac{P_0}{EA} x - \quad (8.6)$$

$$\frac{8 P_0 L}{\pi^2 E A} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \text{sen}\left[(2n-1)\frac{\pi x}{2L}\right] \cos\left[(2n-1)\frac{\pi c}{2L}t\right]$$

Esta série foi derivada uma e duas vezes, para ter-se a velocidade e a aceleração. As expressões resultantes e a inicial foram programadas à parte e serviram como padrão de comparação (solução analítica).

Na simulação numérica foram utilizadas as opções de carga subitamente aplicada (solução exata) e análise numérica, colocando-se $F(t) = 1.0$ para todos os pontos de carregamento.

O valor do incremento de tempo (Δt) utilizado foi obtido através da seguinte expressão ^[30,31] :

$$\Delta t = \frac{T_{\min}}{20} \quad (8.7)$$

onde T_{\min} = período da maior freqüência natural considerada.

O cálculo analítico dos autovalores foi realizado de acordo com [02], [04] e [29], que propõem a seguinte fórmula :

$$\omega_n = \frac{(2n-1) \pi}{2 L} c \quad (8.8)$$

A precisão do cálculo das frequências naturais depende, entre outros fatores, do número de graus de liberdade do sistema (neste exemplo, havia dois graus por elemento). É recomendada a relação de oito graus por cada frequência desejada ou maior ainda, como já comentado no item 6.2.

Cabe ressaltar que não é necessário incluir muitos modos de vibração. Deve-se usar o mínimo que forneça um bom resultado, pois os modos superiores podem interferir negativamente nos valores de saída. Isto devido à sua elevada frequência, aumentando oscilações indesejáveis, acumulando erros, e à influência de modos de torção, quando não forem desejados.

Assim, para poder-se calcular 40 modos com boa precisão, foi necessário utilizar 200 elementos, conforme a tabela 8.1, onde são comparados os resultados com oitenta, cem e duzentos elementos. Neste e em todos os testes foram usados 12 modos de vibração, por serem suficientes.

Como pode-se observar, o aumento do número de elementos melhorou em muito a precisão, resultando em resultados bem mais próximos.

i	Analit ω_i (rd/s)	80 Elementos		100 Elementos		200 Elementos	
		ω_i (rd/s)	Erro %	ω_i (rd/s)	Erro %	ω_i (rd/s)	Erro %
1	1,571	1,571	0,002	1,571	0,001	1,571	0,000
2	4,712	4,713	0,014	4,713	0,009	4,712	0,002
3	7,854	7,857	0,040	7,856	0,026	7,854	0,006
4	10,996	11,004	0,079	11,001	0,050	10,997	0,013
5	14,137	14,156	0,130	14,149	0,083	14,140	0,021
6	17,279	17,312	0,194	17,300	0,124	17,284	0,031
7	20,420	20,476	0,272	20,456	0,174	20,429	0,043
8	23,562	23,647	0,362	23,616	0,231	23,576	0,058
9	26,704	26,828	0,465	26,783	0,297	26,723	0,074
10	29,845	30,018	0,581	29,956	0,372	29,873	0,093
11	32,987	33,221	0,710	33,136	0,454	33,024	0,113
12	36,128	36,436	0,852	36,325	0,545	36,177	0,136
13	39,270	39,665	1,007	39,523	0,644	39,333	0,161
14	42,412	42,910	1,175	42,730	0,751	42,491	0,187
15	45,553	46,171	1,356	45,948	0,867	45,652	0,216
16	48,695	49,449	1,550	49,177	0,991	48,815	0,247
17	51,836	52,747	1,757	52,418	1,123	51,981	0,280
18	54,978	56,065	1,978	55,673	1,264	55,151	0,315
19	58,119	59,405	2,211	58,941	1,413	58,324	0,352
20	61,261	62,767	2,458	62,223	1,570	61,501	0,391
21	64,403	66,153	2,717	65,521	1,736	64,681	0,433
22	67,544	69,564	2,990	68,834	1,910	67,866	0,476
23	70,686	73,002	3,276	72,165	2,093	71,054	0,521
24	73,827	76,467	3,575	75,513	2,284	74,247	0,569
25	76,969	79,961	3,887	78,880	2,483	77,445	0,618
26	80,111	83,485	4,212	82,266	2,691	80,647	0,670
27	83,252	87,040	4,550	85,672	2,907	83,854	0,723
28	86,394	90,627	4,900	89,099	3,132	87,067	0,779
29	89,535	94,248	5,263	92,548	3,364	90,285	0,837
30	92,677	97,903	5,639	96,019	3,606	93,508	0,897
31	95,819	101,594	6,027	99,513	3,855	96,737	0,959
32	98,960	105,320	6,427	103,031	4,113	99,973	1,023
33	102,102	109,084	6,839	106,573	4,379	103,214	1,089
34	105,243	112,887	7,262	110,141	4,654	106,461	1,157
35	108,385	116,727	7,697	113,735	4,936	109,716	1,228
36	111,527	120,607	8,142	117,356	5,227	112,977	1,300
37	114,668	124,527	8,598	121,004	5,525	116,244	1,375
38	117,810	128,487	9,063	124,680	5,832	119,520	1,451
39	120,951	132,488	9,538	128,385	6,146	122,802	1,530
40	124,093	136,529	10,021	132,119	6,468	126,092	1,611

Tabela 8.1 - Freqüências Naturais dos Modos Longitudinais

Foi também criado um programa para teste das frequências calculadas pelo programa. Consiste na geração da série de

Fourier que representa a velocidade da extremidade livre (sem amortecimento) resultante do carregamento considerado. Esta série apresenta a seguinte expressão :

$$v(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}[(2n-1)\omega t]}{(2n-1)} \quad (8.9)$$

Com $\omega = \frac{2\pi}{T}$; T sendo o período de $v(t)$.

A figura 8.2 compara os valores da série (8.9) obtidos com as frequências analíticas e com as calculadas pelo programa. Nota-se a perfeita superposição no início, com erros crescentes ao longo do tempo, comportamento já esperado.

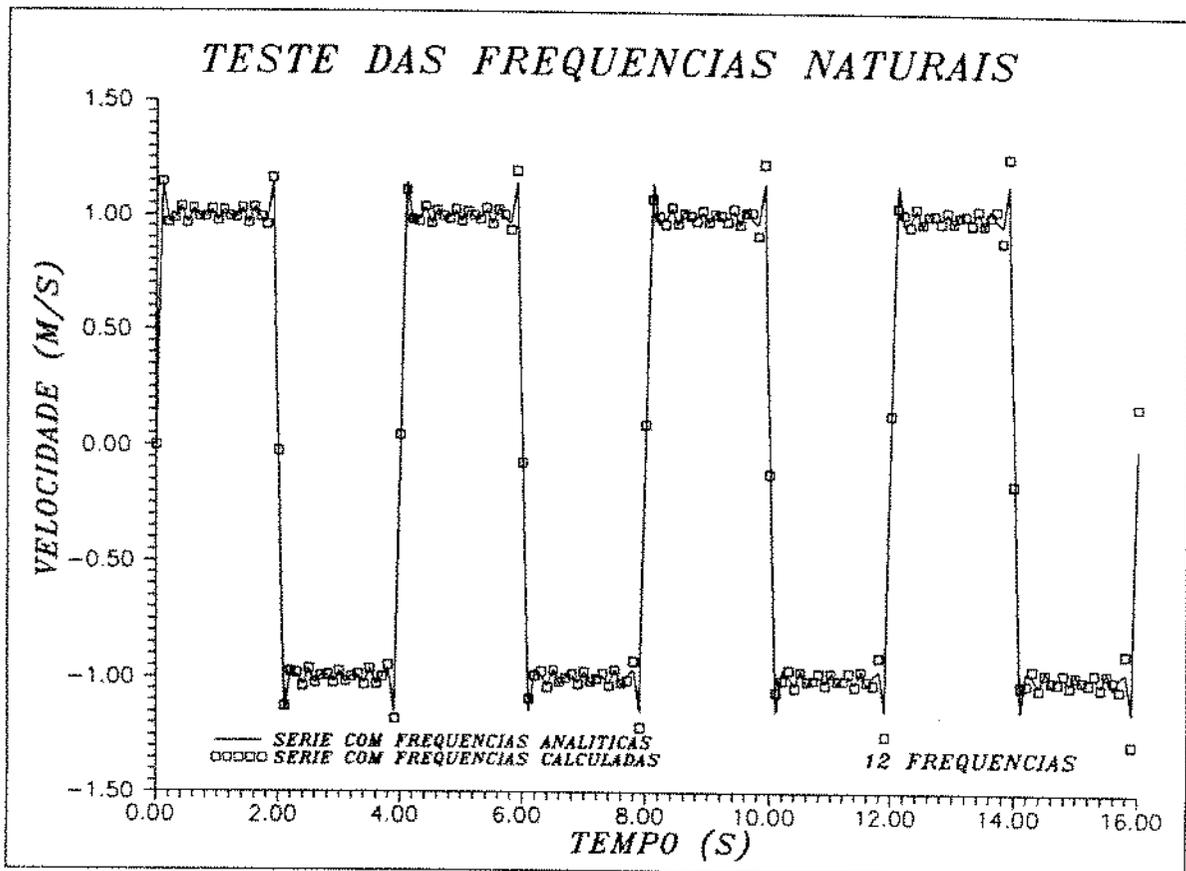


Figura 8.2 - Série de Teste das Frequências Naturais

Somente foi encontrada uma solução analítica para o caso sem amortecimento, limitando as comparações. As soluções analítica, exata e numérica foram calculadas com duzentos elementos.

Os gráficos das figuras 8.3, 8.4 e 8.5 ilustram a comparação entre os valores do deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente, analíticos, exatos e numéricos. Nota-se a desprezível diferença entre os valores exatos e os numéricos e, ainda, o pequeno erro entre os dois anteriores e os analíticos. Comprova-se assim a eficácia do programa.

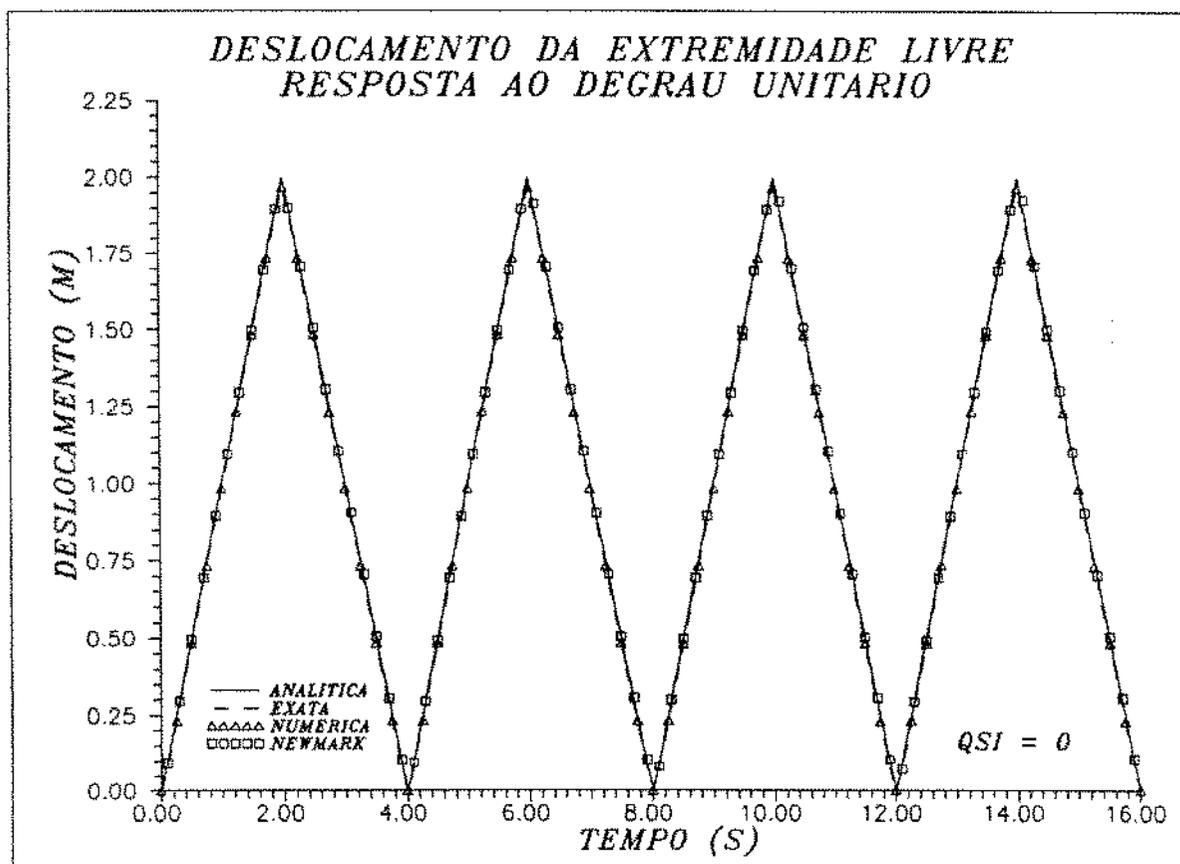


Figura 8.3 - Deslocamento ao Degrau Unitário

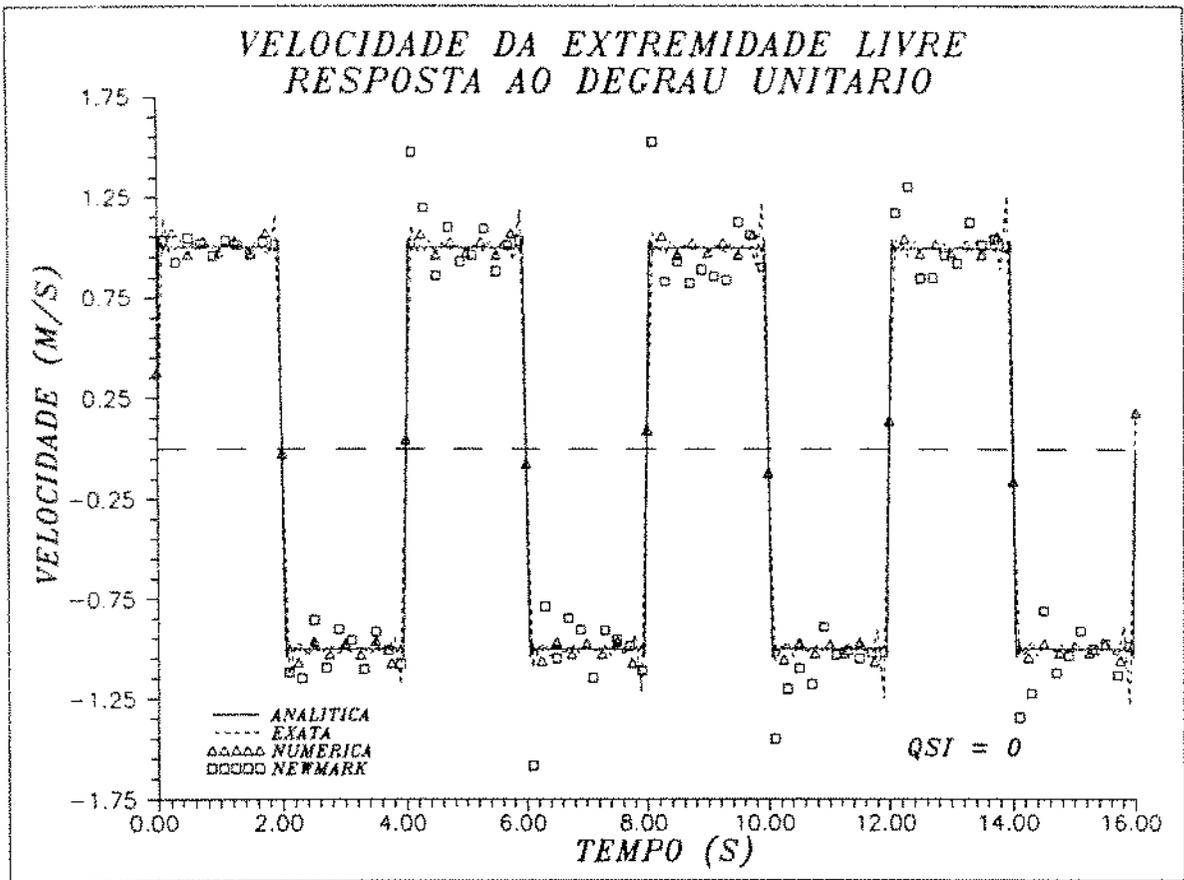


Figura 8.4 - Velocidade ao Degrau Unitário

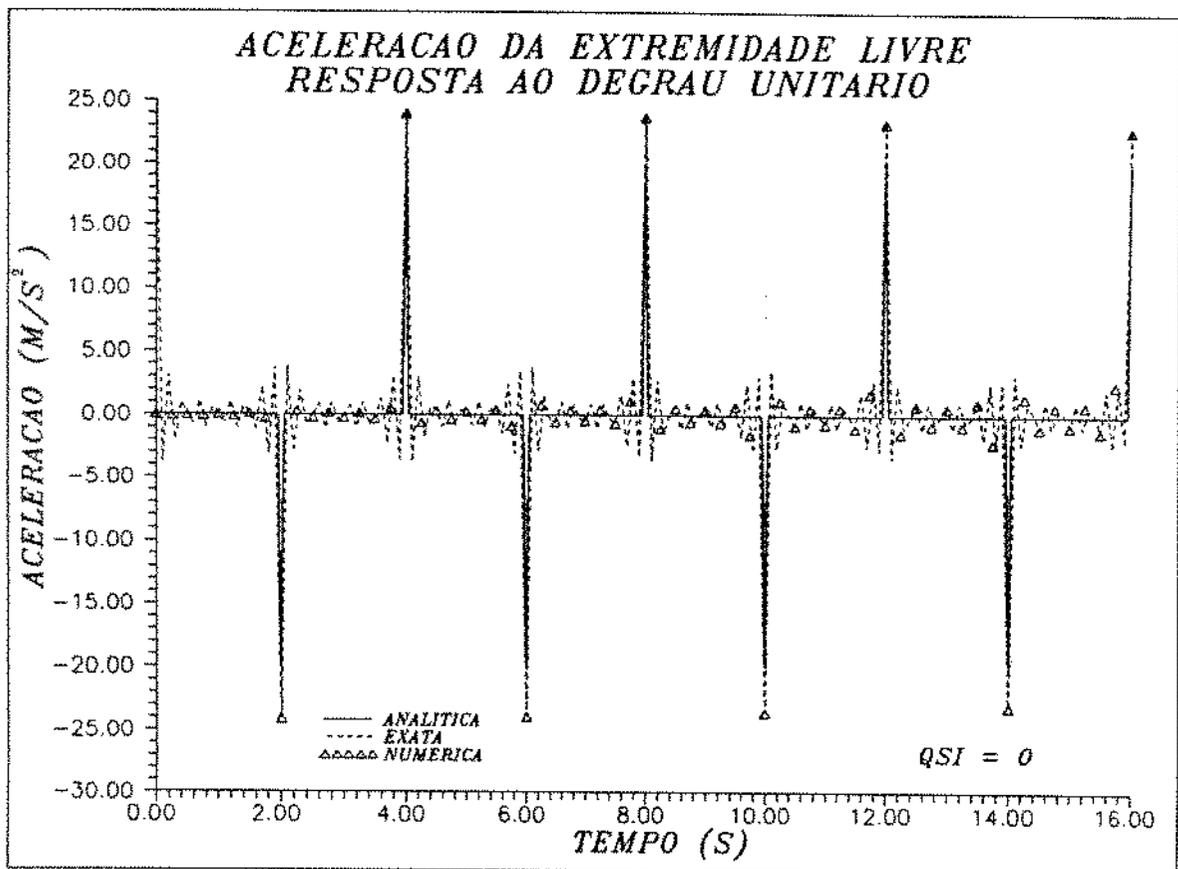


Figura 8.5 - Aceleração ao Degrau Unitário

É na vibração livre ($\xi = 0$) que mede-se realmente a precisão e eficácia do programa, pois quando o amortecimento é incluído, os picos que diferenciam as soluções são anulados, como pode ser notado na figura 8.6. Nesta, varia-se o fator de amortecimento (ξ). Os valores plotados são obtidos via solução exata e uma curva da solução numérica é apresentada ($\xi = 0.10$), mostrando a sobreposição das curvas.

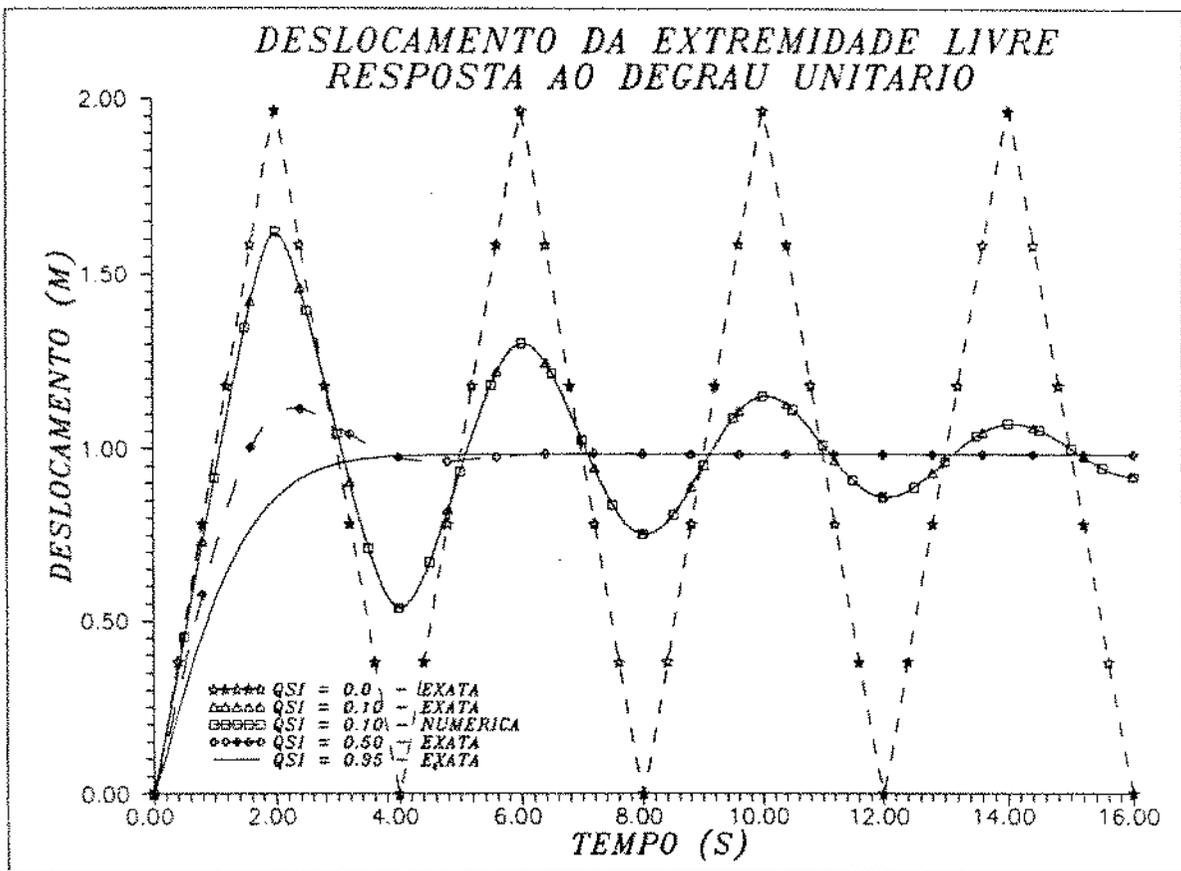


Figura 8.6 - Influência do Amortecimento ao Degrau Unitário

Pode-se afirmar que os resultados são plenamente aceitáveis, principalmente considerando o amortecimento.

Nas figuras 8.2 a 8.6, observa-se uma oscilação mais forte perto das descontinuidades. Este comportamento chama-se fenômeno de Gibbs, e ocorre com qualquer série de senos e cossenos. O intervalo de perturbação é denominado intervalo de Gibbs. Não pode ser evitado, pois só com infinitos termos é que desaparece.

8.3 - Teste 2: Carregamento Impulsivo.

É a mesma geometria anterior, apenas mudando o carregamento. Os valores analíticos são retirados da velocidade da resposta ao degrau unitário, pois a formulação do impacto pode ser obtida derivando-se a do degrau, conforme apresentado no item 5.4.5 .

A solução numérica pode ser obtida facilmente colocando-se uma força que, multiplicada pelo intervalo de tempo desejado, resulte em 3, em $t=0$ e $F(t) = 0$ nos tempos restantes. Isto porque, primeiramente, tem que resultar em 1, para configurar o impulso unitário, ou seja :

$$I = \int_0^t F(t) dt = 1 \quad (8.10)$$

E, como o método de integração (Simpson) usa um fator 1/3, deve-se multiplicar por 3, resultando no próprio valor 3.

São montados então os gráficos das figuras 8.7 e 8.8. A figura 8.7 compara os três deslocamentos e a 8.8 as três

velocidades, repetindo-se o resultado do teste 1, ou seja, quase superposição das soluções exata e numérica e e pequenos erro de ambas em relação à analítica. Não foi considerado o amortecimento.

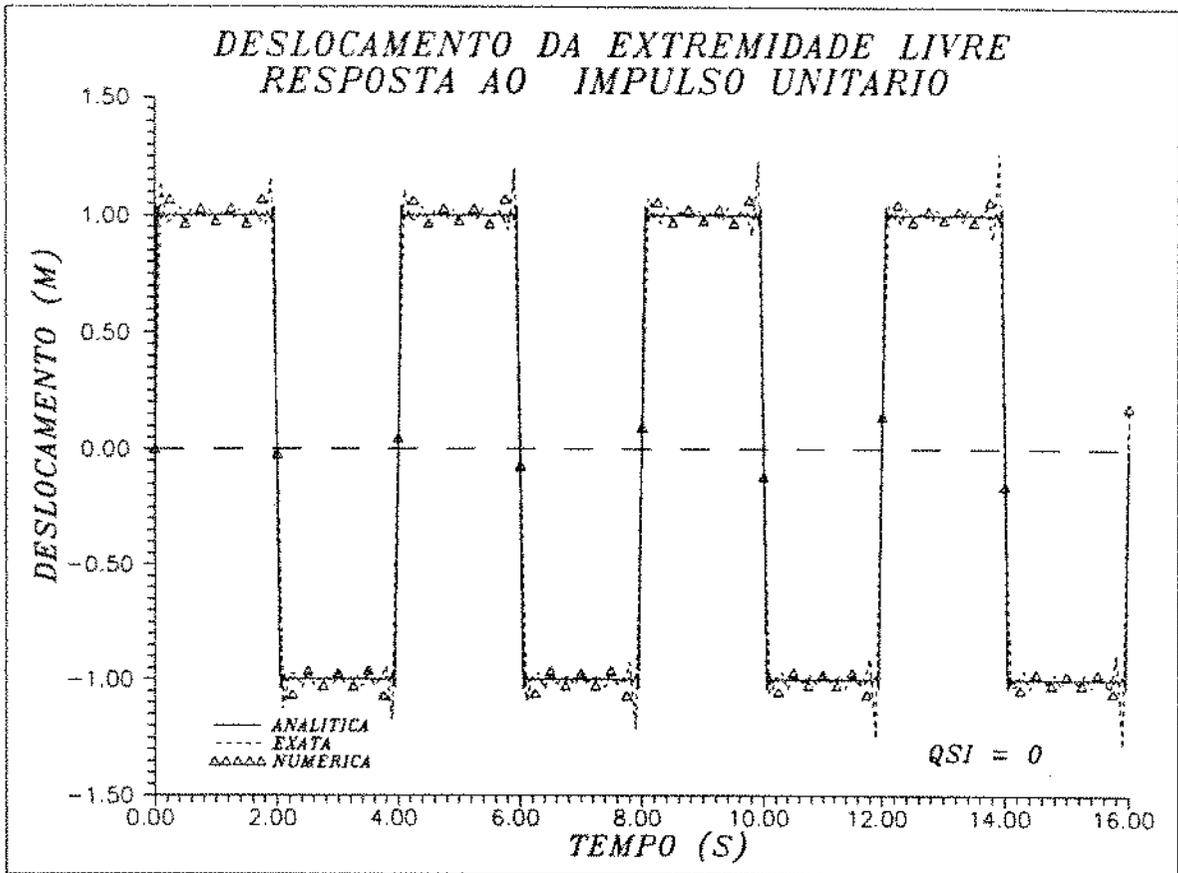


Figura 8.7 - Deslocamento ao Impacto

Já a figura 8.9 ilustra a influência do amortecimento na resposta dinâmica. Novamente são plotadas duas curvas com o mesmo fator de amortecimento, uma exata e outra numérica, para mostrar a perfeita superposição.

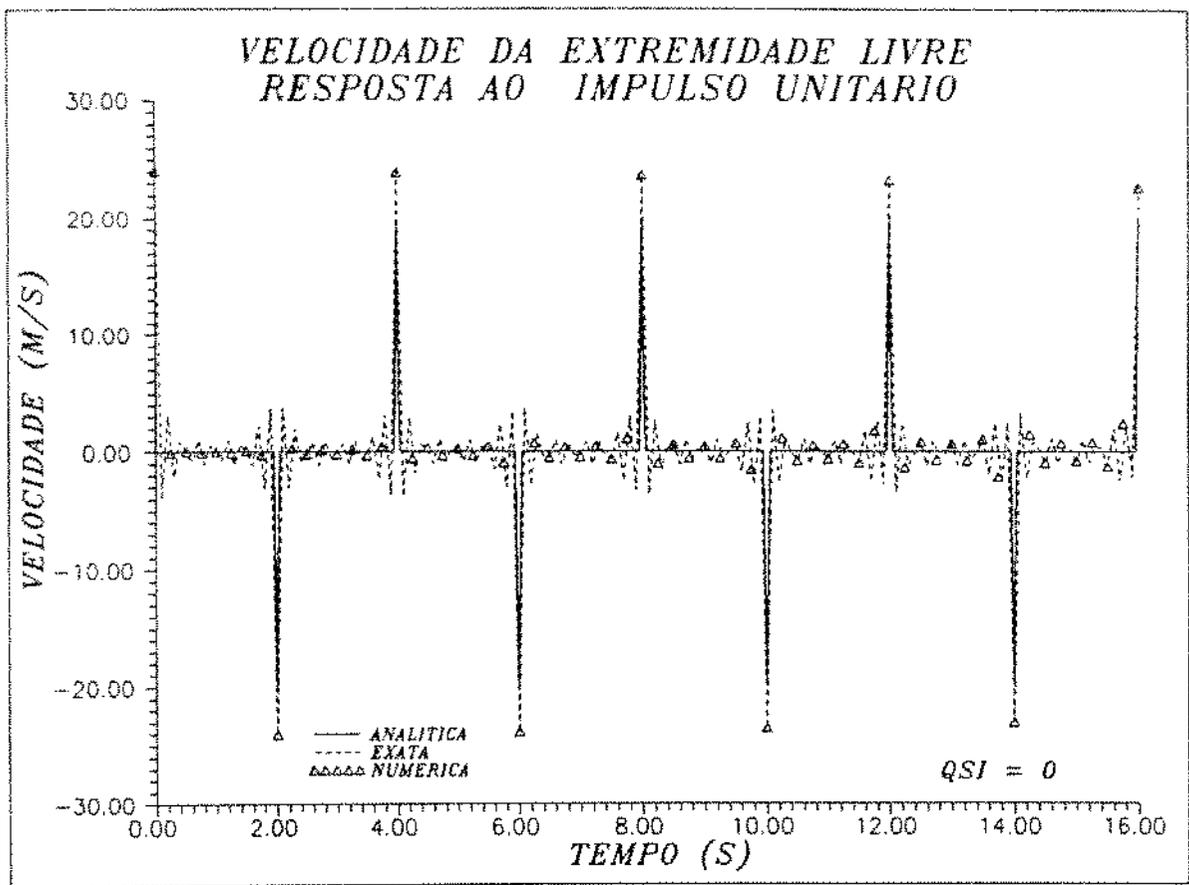


Figura 8.8 - Velocidade ao Impulso

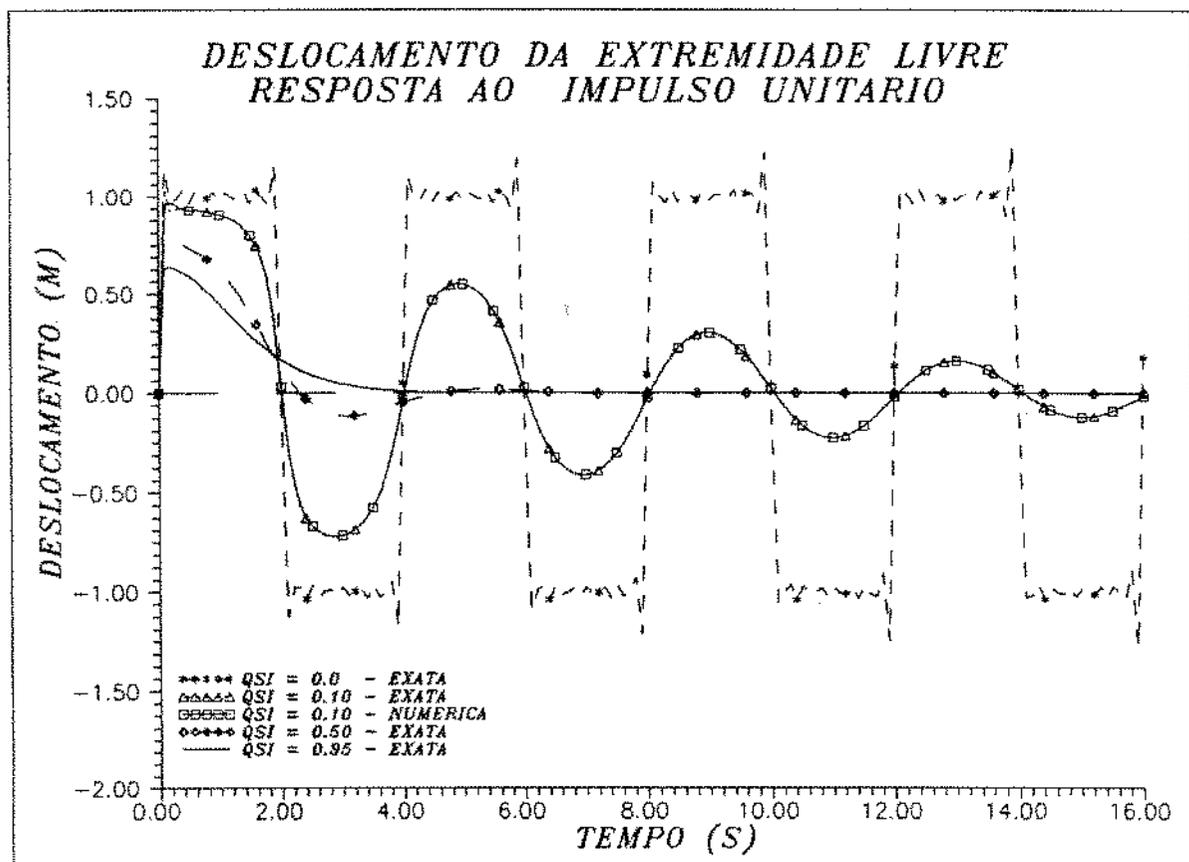


Figura 8.9 - Influência do Amortecimento ao Impulso

Finalmente a figura 8.10 compara o deslocamento da extremidade livre obtido pelo programa ANESDE e pela série (8.9) com as frequências calculadas analiticamente.

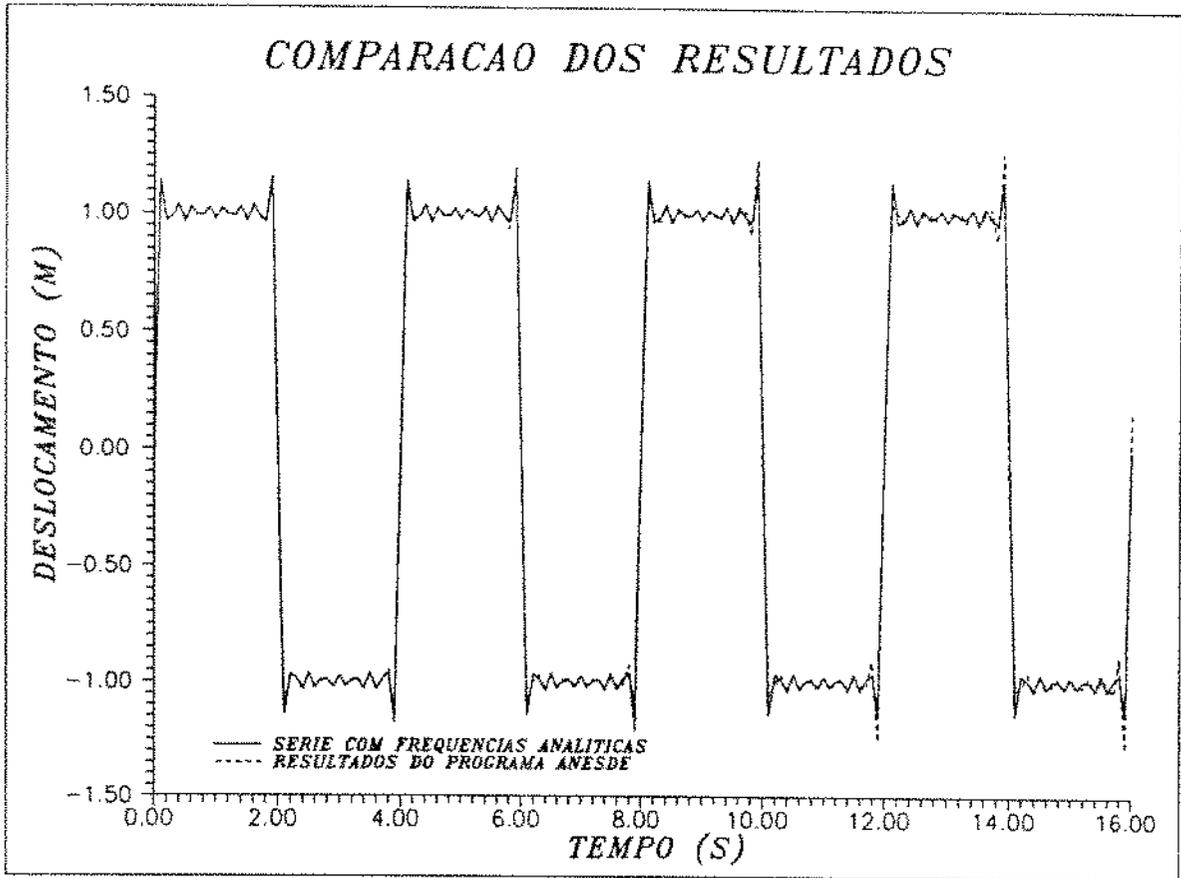


Figura 8.10 - Comparação de Resultados

8.4 - Teste 3: Carregamento Rampa

Usando a mesma geometria, aplicando um carregamento crescendo linearmente, do tipo :

$$F(t) = a t \quad (8.11)$$

Não foi encontrada uma solução analítica, limitando a comparação entre as análises exata e numérica. A figura 8.11 apresenta os resultados.

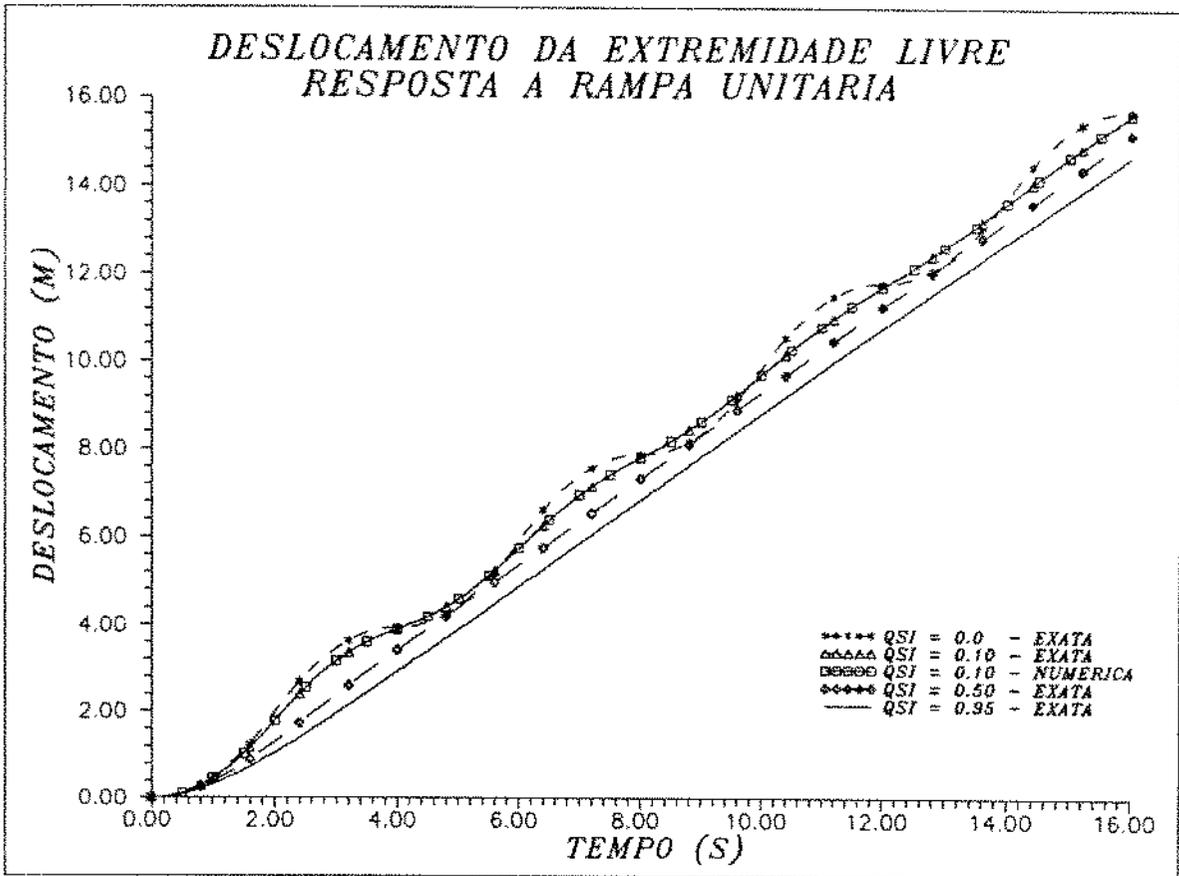


Figura 8.11 - Deslocamento à Rampa Unitária

Nota-se a superposição das curvas exata e numérica para $\xi=0.10$, e a proximidade do comportamento das curvas com o previsto pela teoria. Isto é, oscilação em torno de uma reta inclinada de 45 graus e uma defasagem inicial, devido ao amortecimento.

8.5 - Teste 4: Comparação entre Métodos de Cálculo

Analisando as formulações da resposta à rampa, degrau e impacto, nota-se uma relação com base nas derivadas : a velocidade da rampa é o deslocamento do degrau; a aceleração da rampa é o deslocamento do impacto, e a velocidade do degrau é o deslocamento do impacto, como já citado em 5.4.5 .

Esta relação está clara na figura 8.12, onde são plotadas as curvas referentes ao deslocamento do impacto, velocidade do degrau e a aceleração da rampa. Nota-se a perfeita superposição, ratificando as formulações empregadas.

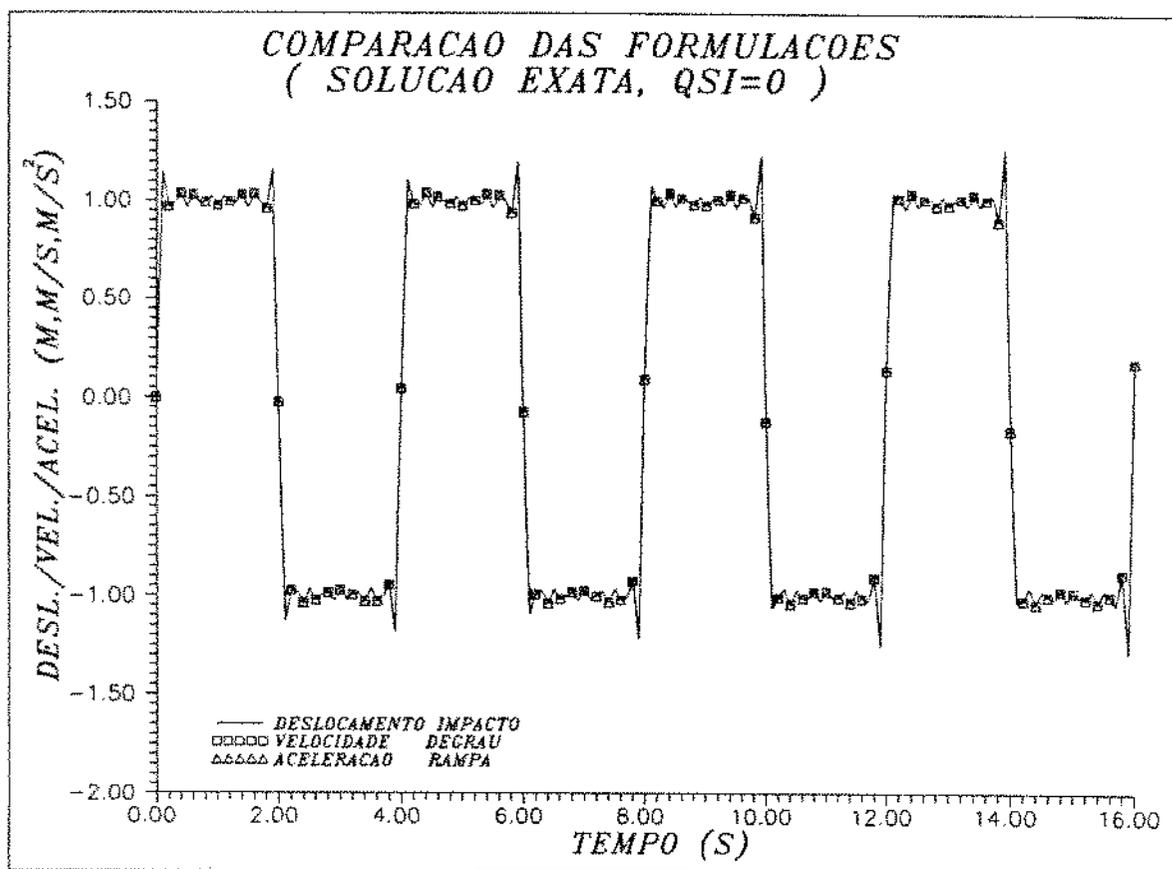


Figura 8.12 - Comparação das Formulações

8.6 - Teste 5: Carregamento Harmônico

Novamente a única alteração é o carregamento. Neste caso

$$F(t) = A_0 \text{ sen}(\omega_e t) \quad (8.12)$$

Foram obtidos apenas os resultados exatos para comparação. A figura 8.13 mostra as curvas para $\omega_e = 2 \text{ rd/s}$ com três fatores de amortecimento, sendo plotados apenas os valores exatos.

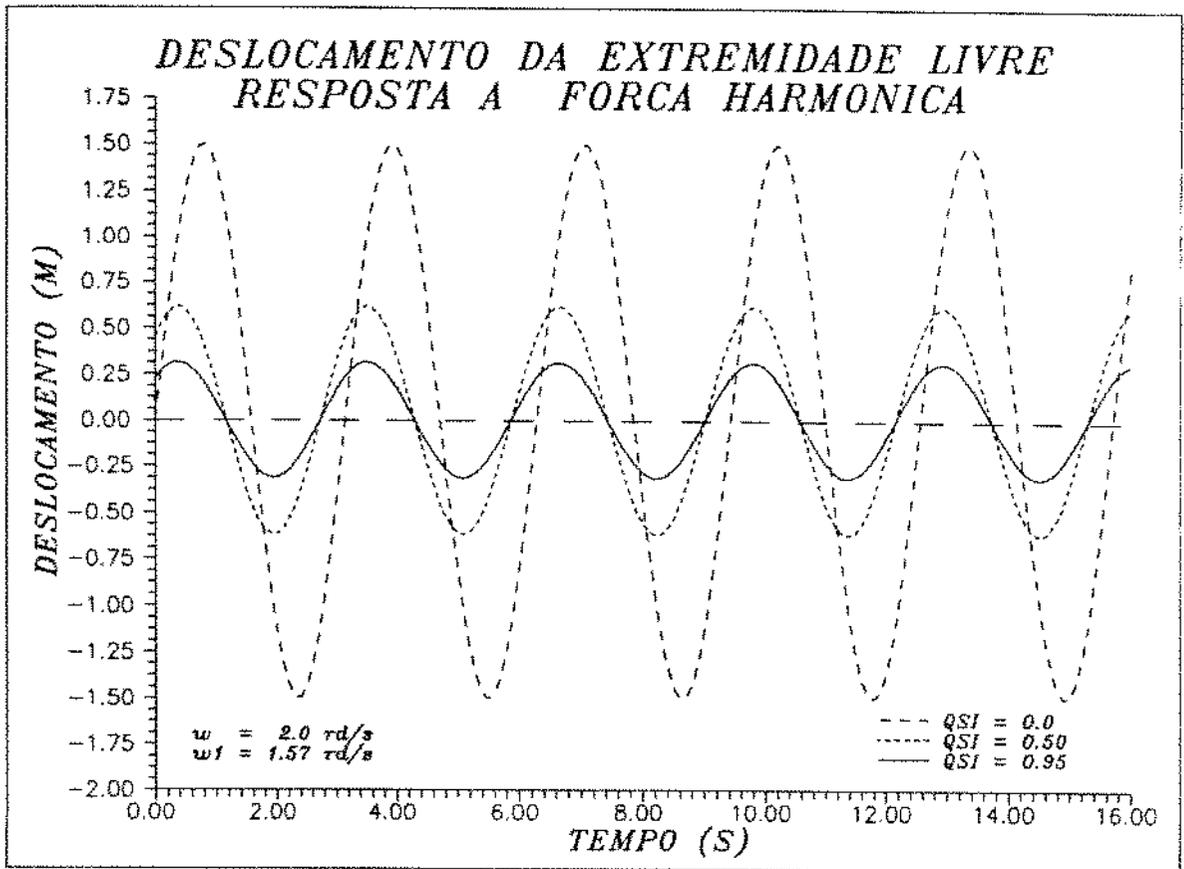


Figura 8.13 - Deslocamento à Força Harmônica

Pode ser observado que a curva de $\xi = 0$ apresenta-se como esperado, ou seja, uma senóide; porém as curvas com amortecimento, além da menor amplitude, começam com uma defasagem crescente com ξ . Isto já era esperado, devido ao aparecimento desta defasagem na equação da resposta.

Na figura 8.14 é ilustrada o efeito de ressonância, quando a frequência de excitação (ω_e) se aproxima de uma natural (no caso a primeira - ω_1). Matematicamente a causa reside nas variáveis β_i e γ_i em (5.50), que são razões entre a frequência de excitação (ω_e) e a natural (ω_i), e a amortecida (ω_{di}), respectivamente.

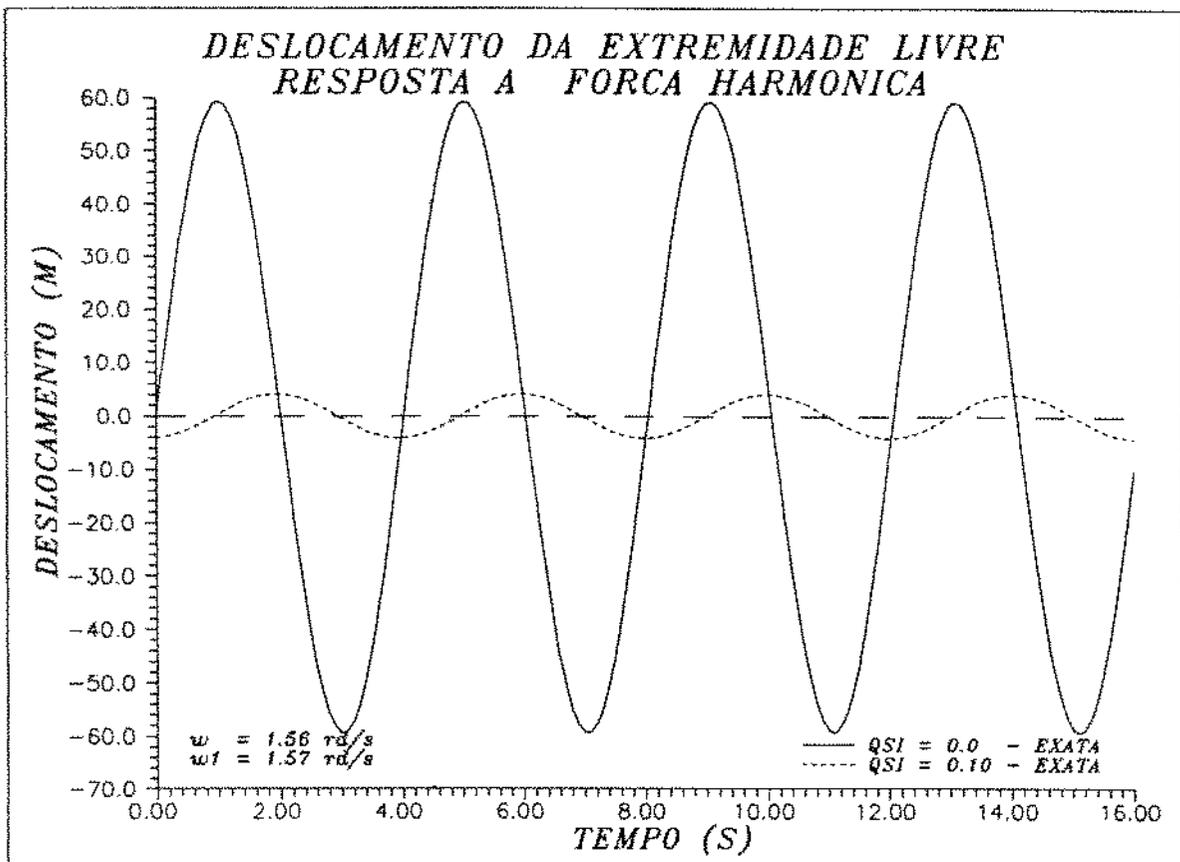


Figura 8.14 - Ressonância

8.7 - Teste 6: Freqüências da viga Engastada

Usando a mesma geometria até agora utilizada, muda-se a simulação para elemento de viga, com o cálculo das freqüências dos modos transversais. Foi usada a rotina de viga, original, que não permite a rotação no plano, só funcionando quando os elementos estão alinhados com os eixos. Os valores obtidos são organizados e comparados na tabela 8.2 e o gráfico correspondente está na figura 8.15.

i	Analit ω_i (rd/s)	80 Elementos		100 Elementos		200 Elementos	
		ω_i (rd/s)	Erro %	ω_i (rd/s)	Erro %	ω_i (rd/s)	Erro %
1	1,015	1,015	0,000	1,015	0,000	1,015	0,000
2	6,361	6,361	0,000	6,361	0,000	6,361	0,000
3	17,810	17,810	0,000	17,810	0,000	17,810	0,000
4	34,901	34,901	0,000	34,901	0,000	34,901	0,000
5	57,694	57,695	0,000	57,694	0,000	57,694	0,000
6	86,185	86,186	0,000	86,186	0,000	86,186	0,000
7	120,375	120,375	0,000	120,375	0,000	120,375	0,000
8	160,262	160,263	0,001	160,263	0,000	160,262	0,000
9	205,848	205,850	0,001	205,849	0,001	205,848	0,000
10	257,132	257,136	0,002	257,134	0,001	257,132	0,000
11	314,114	314,121	0,002	314,117	0,001	314,114	0,000
12	376,794	376,806	0,003	376,799	0,001	376,795	0,000
13	445,172	445,191	0,004	445,181	0,002	445,174	0,000
14	519,249	519,278	0,006	519,262	0,002	519,251	0,000
15	599,024	599,068	0,007	599,043	0,003	599,026	0,000
16	684,497	684,563	0,010	684,525	0,004	684,500	0,000

Tabela 8.2 - Freqüências Naturais dos Modos Transversais

Percebe-se que os erros são desprezíveis, principalmente quando comparados aos da tabela 8.1, para as freqüências dos modos longitudinais.

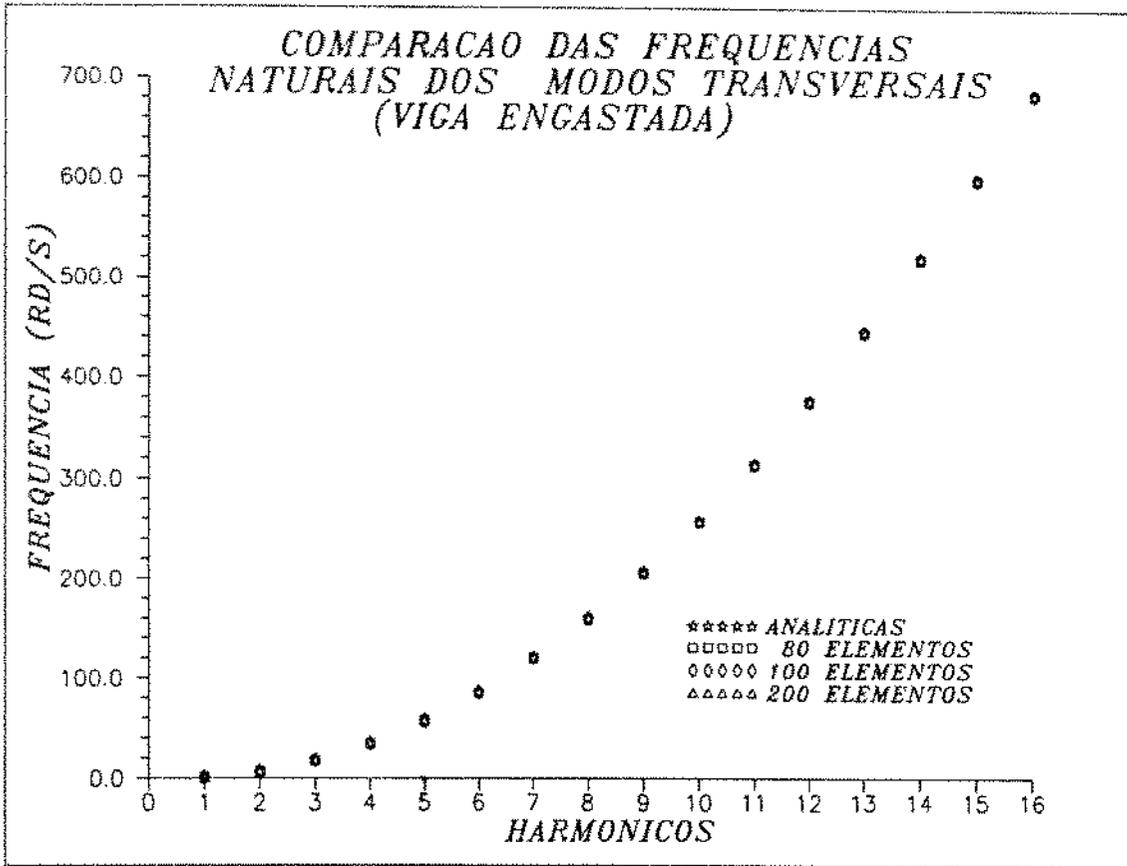


Figura 8.15 - Freqüências Naturais dos Modos Transversais

8.8 - Teste 7: Freqüências da Viga-Coluna

Faz-se agora um teste do elemento de viga-coluna, calculando-se as freqüências dos modos longitudinais. As dos transversais são as mesmas, pois não há influência entre os graus de liberdade axial e transversal.

Para tal, os graus de liberdade transversal e rotacional foram restringidos, no caso de alinhamento com um eixo, ou só o último, quando a viga é rodada no plano. Outro modo de evitar o cálculo das freqüências transversais é usar a opção

de fornecer a área e o momento de inércia, e colocar um momento grande, mantendo todos os deslocamentos e rotações planos livres, elevando as transversais para fora da faixa analisada.

Os valores das freqüências dos modos longitudinais obtidos são muito próximos dos da tabela 8.1, não necessitando serem repetidos, sendo plotados na figura 8.16.

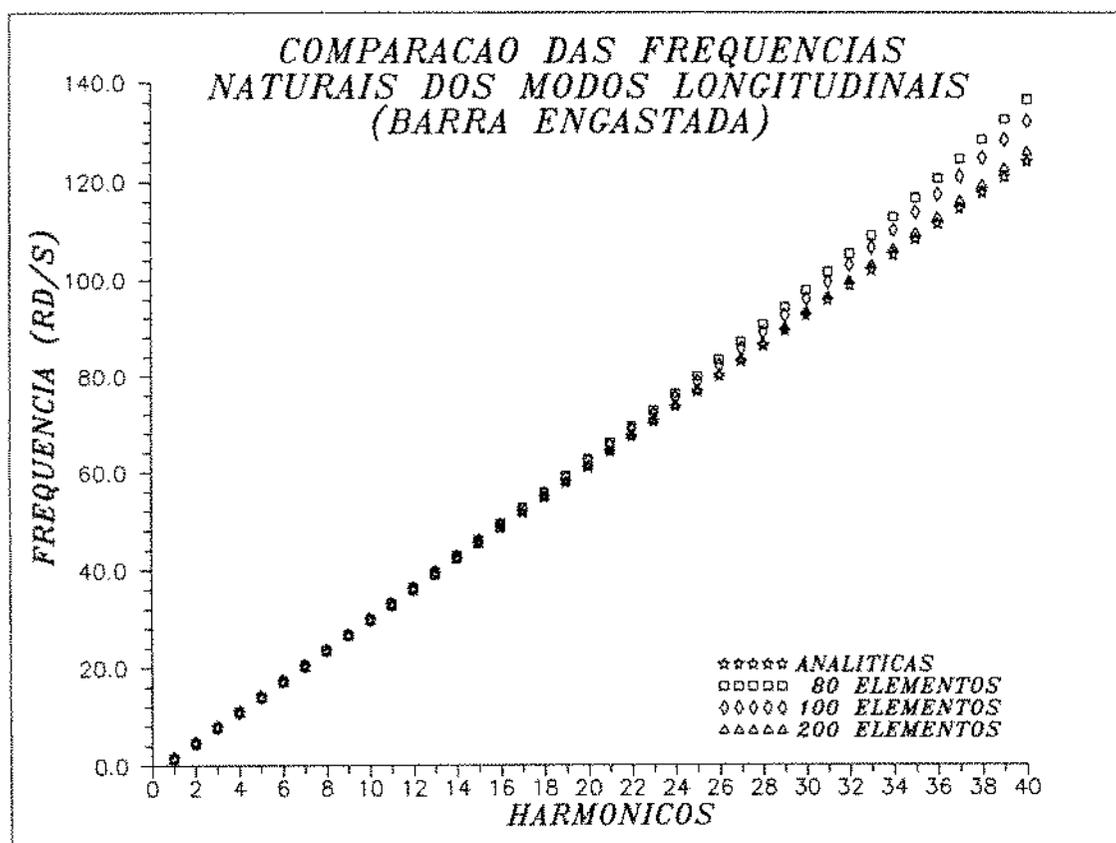


Figura 8.16 - Freqüências Naturais da Viga-Coluna

Outro teste realizado foi o efeito da rotação no cálculo das freqüências. A viga-coluna foi rodada de 30 graus e o

contorno foi feito segundo já explicado. A figura 8.17 compara os resultados da viga na horizontal, inclinada sem rotação e inclinada com grande momento de inércia, e a tabela 8.3 apresenta os valores.

i	Analit. ω_i (rd/s)	Horizontal		Incl. s/ Rot.		Incl. c/ I ω	
		ω_i (rd/s)	Erro%	ω_i (rd/s)	Erro%	ω_i (rd/s)	Erro%
1	1,5708	1,5708	0,000	1,5708	0,002	1,5708	0,002
2	4,7124	4,7125	0,002	4,7126	0,005	4,7126	0,005
3	7,8540	7,8545	0,006	7,8547	0,009	7,8547	0,009
4	10,9956	10,9970	0,013	10,9972	0,015	10,9972	0,015
5	14,1372	14,1401	0,021	14,1404	0,023	14,1404	0,023
6	17,2788	17,2841	0,031	17,2845	0,033	17,2845	0,033
7	20,4204	20,4292	0,043	20,4297	0,046	20,4297	0,046
8	23,5619	23,5756	0,058	23,5761	0,060	23,5761	0,060
9	26,7035	26,7234	0,074	26,7240	0,076	26,7240	0,077
10	29,8451	29,8728	0,093	29,8735	0,095	29,8735	0,095
11	32,9867	33,0241	0,113	33,0249	0,116	33,0248	0,116
12	36,1283	36,1775	0,136	36,1783	0,138	36,1783	0,138
13	39,2699	39,3330	0,161	39,3339	0,163	39,3339	0,163
14	42,4115	42,4910	0,187	42,4919	0,190	42,4919	0,190
15	45,5531	45,6516	0,216	45,6526	0,218	45,6526	0,218
16	48,6947	48,8150	0,247	48,8161	0,249	48,8161	0,249
17	51,8363	51,9815	0,280	51,9826	0,282	51,9826	0,282
18	54,9779	55,1511	0,315	55,1523	0,317	55,1523	0,317
19	58,1195	58,3242	0,352	58,3255	0,354	58,3255	0,354
20	61,2611	61,5008	0,391	61,5022	0,394	61,5022	0,394

Tabela 8.3 - Freqüências Naturais da Viga-Coluna

Nota-se que, embora maiores, os erros são muito pequenos, devidos inclusive ao maior número de equações a serem resolvidas. Os resultados para viga inclinada sem rotação e com grande momento de inércia são iguais, pois o efeito de aumentar as freqüências dos modos transversais para fora da faixa estudada permite a mesma precisão.

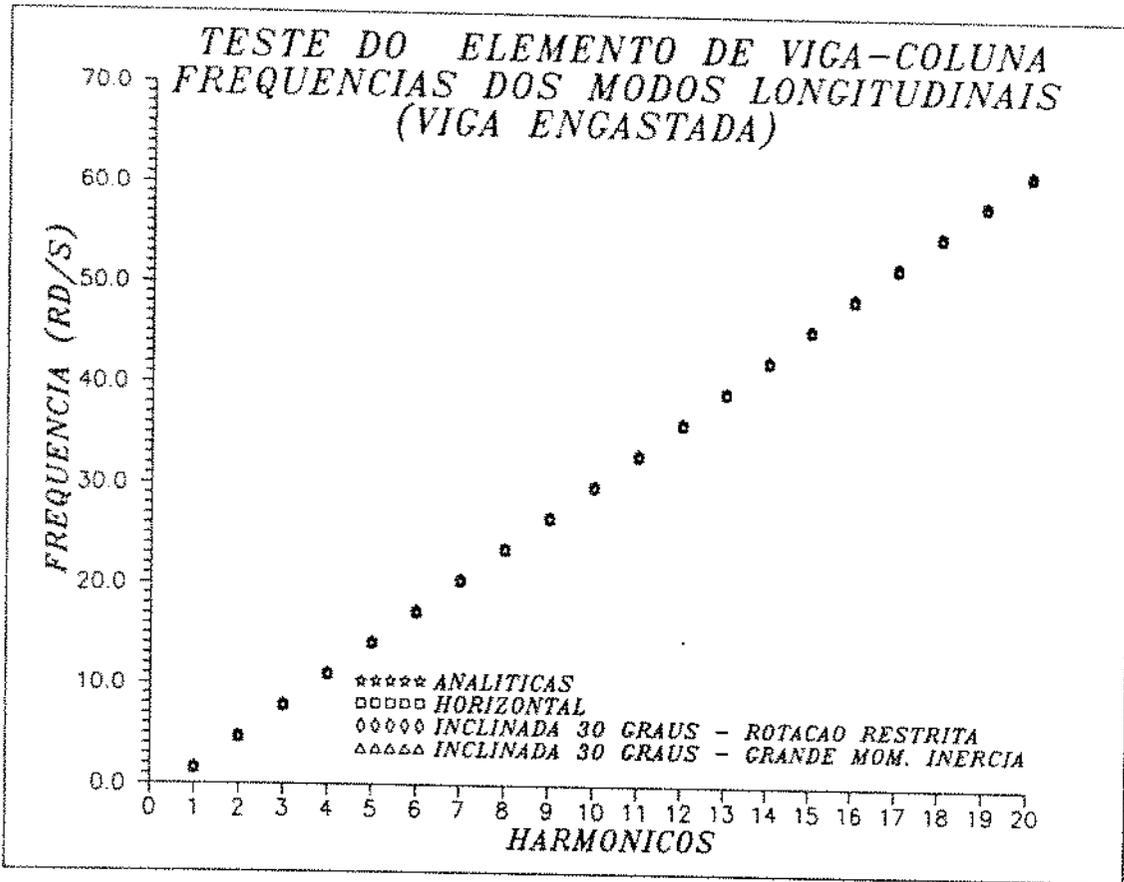


Figura 8.17 - Influência da Inclinação

8.9 - Teste 8: Viga Engastada com Pulso Harmônico

Considere-se a viga anterior com um pulso harmônico aplicado na sua extremidade (ref [21], página 138), expressado por :

$$F(t) = \begin{cases} A_0 \text{ sen}(\pi t/T) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (8.13)$$

onde T é o período da frequência fundamental da viga.

A força foi fornecida por pontos de carregamento e utilizou-se a análise numérica para obter-se a resposta dinâmica. O valor de Δt foi obtido segundo (8.7), o que requereu muitos pontos, sendo necessário aumentar a dimensão dos vetores dinâmicos para 240000 elementos.

A figura 8.18 ilustra a geometria.

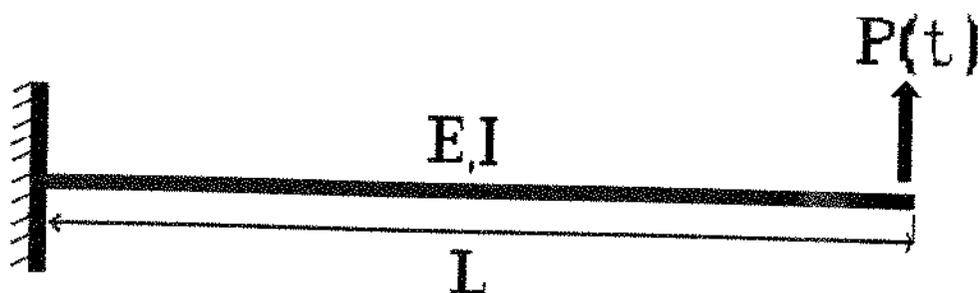


Figura 8.18 - Viga com Pulso Harmônico

A expressão analítica final é :

$$v(L,t) = \frac{A_0 L^3}{EI} \left[0.441 \operatorname{sen}(\pi t/T) - 0.216 \operatorname{cos}(2\pi t/T) \right] \quad (8.14)$$

para $0 \leq t \leq T$ e vibração livre depois.

A figura 8.19 apresenta as curvas analítica e calculada. Observa-se que há perfeita sobreposição, confirmando a eficiência do programa.

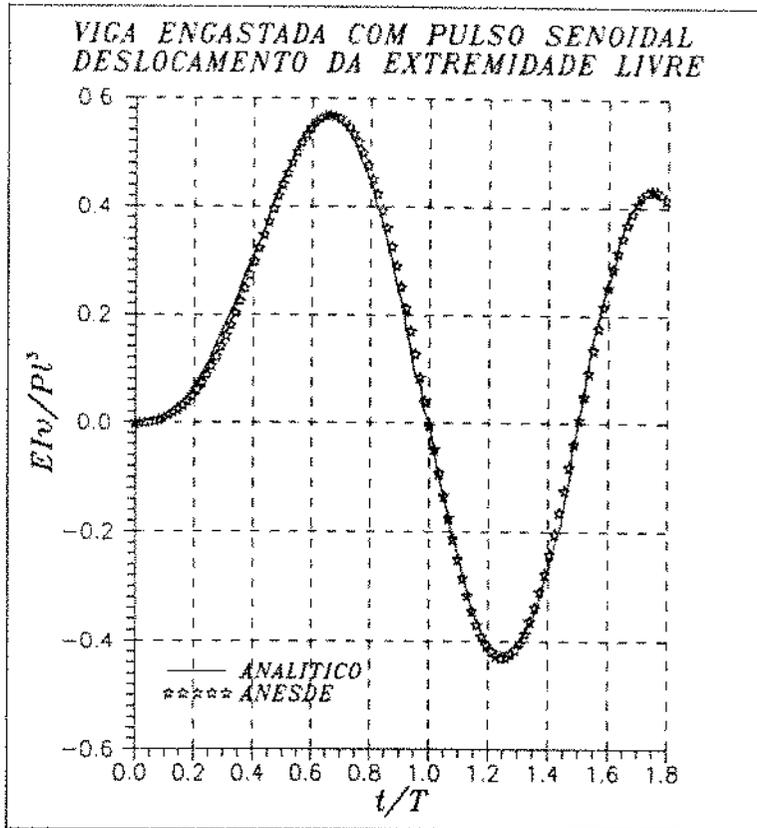


Figura 8.19 - Deslocamento ao Pulso Harmônico

8.10 - Teste 9: Frequências da Viga Biapoiada

A geometria é a mesma anterior, alterando-se as condições de contorno para : deslocamento horizontal e vertical restringidos em uma extremidade e, na outra, somente é contido o vertical. A figura 8.20 mostra o dito.



Figura 8.20 - Viga Biapoiada

Usou-se o elemento de viga-coluna, por ser mais versátil. Na definição dos nós restringiram-se os graus de liberdade axiais, para evitar o cálculo das freqüências dos modos longitudinais. A tabela 8.4 apresenta e compara os valores obtidos.

i	Analit. ω_i (rd/s)	80 Elementos		100 Elementos		200 Elementos	
		ω_i (rd/s)	Erro %	ω_i (rd/s)	Erro %	ω_i (rd/s)	Erro %
1	2,849	2,849	0,000	2,849	0,000	2,849	0,000
2	11,396	11,397	0,001	11,396	0,000	11,396	0,000
3	25,642	25,645	0,010	25,642	0,000	25,642	0,000
4	45,586	45,608	0,049	45,586	0,000	45,586	0,000
5	71,228	71,337	0,154	71,228	0,000	71,228	0,000
6	102,568	102,940	0,362	102,568	0,000	102,568	0,000
7	139,606	140,569	0,690	139,607	0,000	139,606	0,000
8	182,343	184,378	1,116	182,344	0,000	182,343	0,000
9	230,778	234,444	1,589	230,779	0,000	230,778	0,000
10	284,911	290,722	2,040	284,913	0,001	284,911	0,000
11	344,742	352,998	2,395	344,746	0,001	344,742	0,000
12	410,272	420,895	2,589	410,277	0,001	410,272	0,000
13	481,499	493,984	2,593	481,509	0,002	481,500	0,000
14	558,425	572,116	2,452	558,440	0,003	558,426	0,000
15	641,050	655,840	2,307	641,071	0,003	641,051	0,000
16	729,372	746,313	2,323	729,404	0,004	729,374	0,000

Tabela 8.4 - Freqüências Naturais da Viga Biapoiada

Novamente, os erros são muito pequenos, mesmo para 80 elementos. A figura 8.21 mostra o gráfico correspondente.

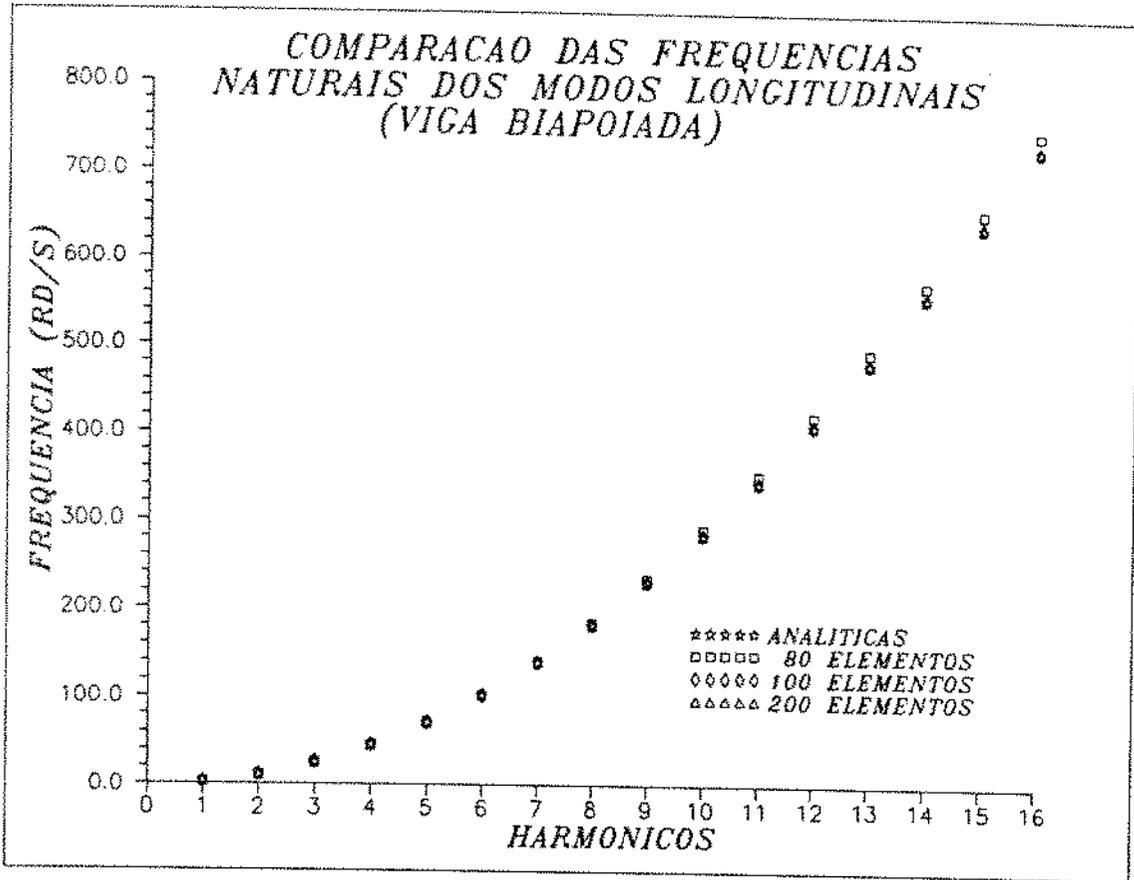


Figura 8.21 - Frequências Naturais da Viga Biapoiada

8.11 - Teste 10: Viga Engastada Apoiada em Mola

Este exemplo, retirado das referências [02] e [25], consiste de uma viga homogênea engastada em uma extremidade e apoiada em mola na outra. A figura 8.22 ilustra o descrito.

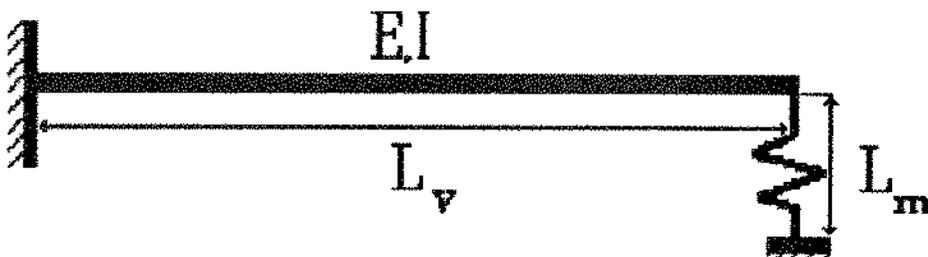


Figura 8.22 - Viga Engastada Apoiada em Mola

A mola é simulada por uma barra, onde o valor de $K_b = E_b A_b / L_b$ é igual ao valor da constante de mola desejado.

Os valores dos parâmetros são:

$L_v = 0,20 \text{ m}$ = comprimento da viga

$A = 0,0009 \text{ m}^2$ = área transversal da viga

$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ = módulo de Young da viga

$\rho_v = 7,743 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ = massa específica da viga

$I_v = 2,250 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ = momento de inércia da viga

$L_b = L_m = 0,3 \text{ m}$ = comprimento da mola

$E_b = E_v$ = módulo de Young da barra da mola

$A_b = 3.3746 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ = área transversal da barra da mola

A expressão das frequências naturais é :

$$\omega_n = \lambda_n^2 \left[\frac{E_v I_v}{\rho_v A_v} \right]^{1/2} \quad (8.15)$$

O parâmetro λ_n é obtido de :

$$\frac{E_v I_v (\lambda L_v)^3}{K_b L_v^3} [1 + \cos(\lambda L_v) \cdot \cosh(\lambda L_v)] + \quad (8.16)$$

$$[\sin(\lambda L_v) \cdot \cosh(\lambda L_v) - \cos(\lambda L_v) \cdot \sinh(\lambda L_v)] = 0$$

A tabela 8.5 mostra e compara os resultados obtidos e a figura 8.23 apresenta o gráfico correspondente.

i	Analit.	Horizon. com Barra(1)	Horizon. com Viga (2)	Horizon. com Viga (3)	Inclin. com Viga (2)	Inclin. com Viga (3)
1	389,06	388,89	388,89	388,89	388,89	388,90
2	928,48	927,15	927,31	927,32	927,21	927,55
3	2248,61	2246,45	2246,68	2246,69	2246,33	2246,86
4	4334,97	4334,78	4335,00	4335,01	4334,12	4334,13
5	7140,46	7153,50	7153,71	7153,72	7150,00	7143,72

- Obs.: (1) Barra de apoio modelada com elemento de barra
(2) Barra de apoio modelada com elemento de viga com geometria fornecida pela base e altura.
(3) Barra de apoio modelada com elemento de viga com geometria fornecida pela área e momento de inércia
(Valores das frequências em rd/s)

Tabela 8.5 - Frequências Naturais do Teste 10

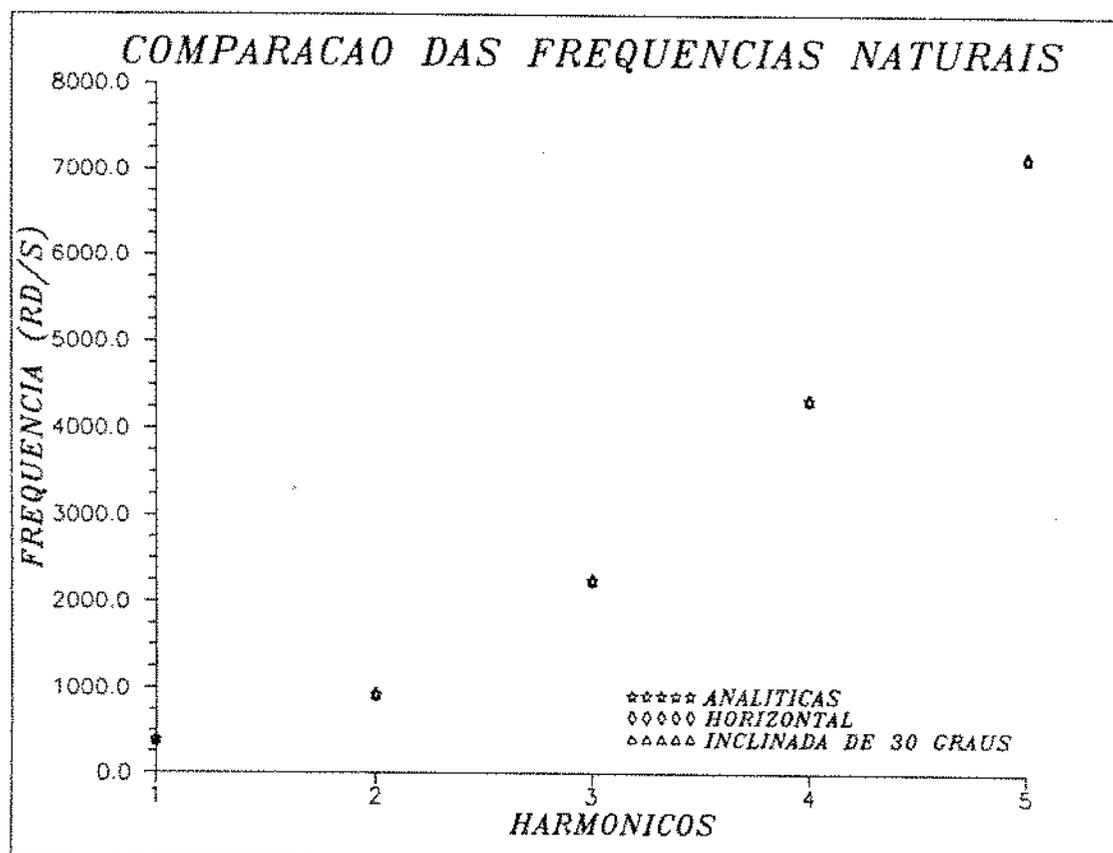


Figura 8.23 - Frequências Naturais do Teste 10

8.12 - Teste 11: Resposta em Freqüência

Este exemplo é baseado no item 2.6 da referência [04] e no item 5.4.8. Consiste na solução da equação :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = A_0 \text{ sen}(\omega_e t) \quad (8.17)$$

Definindo os parâmetros :

$$\begin{aligned} x_e &= \frac{A_0}{k} = \text{deflexão estática ,} \\ \xi &= \frac{c}{c_c} = \text{razão de amortecimento,} \\ \beta &= \frac{\omega_e}{\omega_1} = \text{razão de freqüência ,} \end{aligned} \quad (8.18)$$

chega-se às seguintes expressões :

$$\zeta = \frac{x}{x_e} = \frac{1}{[(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2]^{1/2}} \quad (8.19)$$

$$\text{tg}(\phi) = \frac{2 \xi \beta}{1 - \beta^2} \quad (8.20)$$

As figuras 8.24 e 8.25 mostram os gráficos analíticos para ζ e ϕ , para alguns valores de ξ . Os valores calculados pelo programa são comparados aos analíticos nas figuras 8.26 e 8.27.

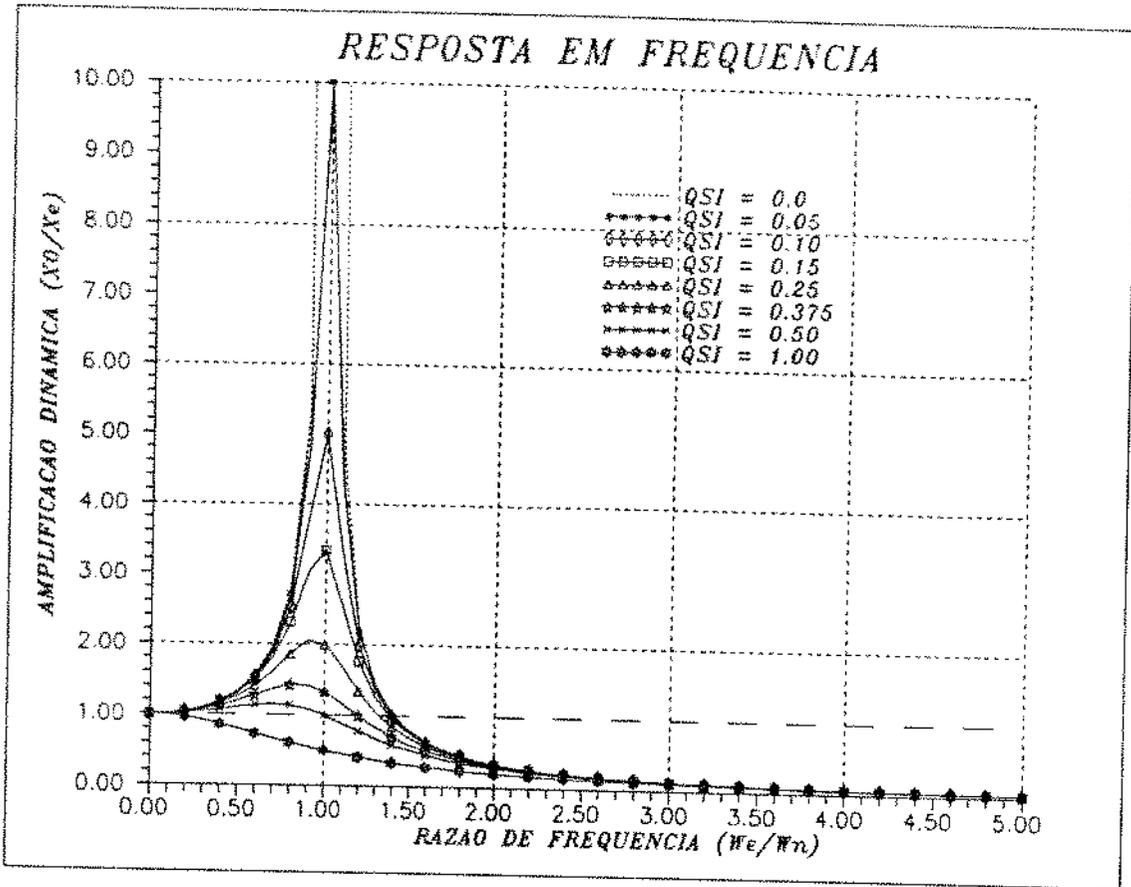


Figura 8.24 - Valores Analíticos de $\zeta \times \beta$

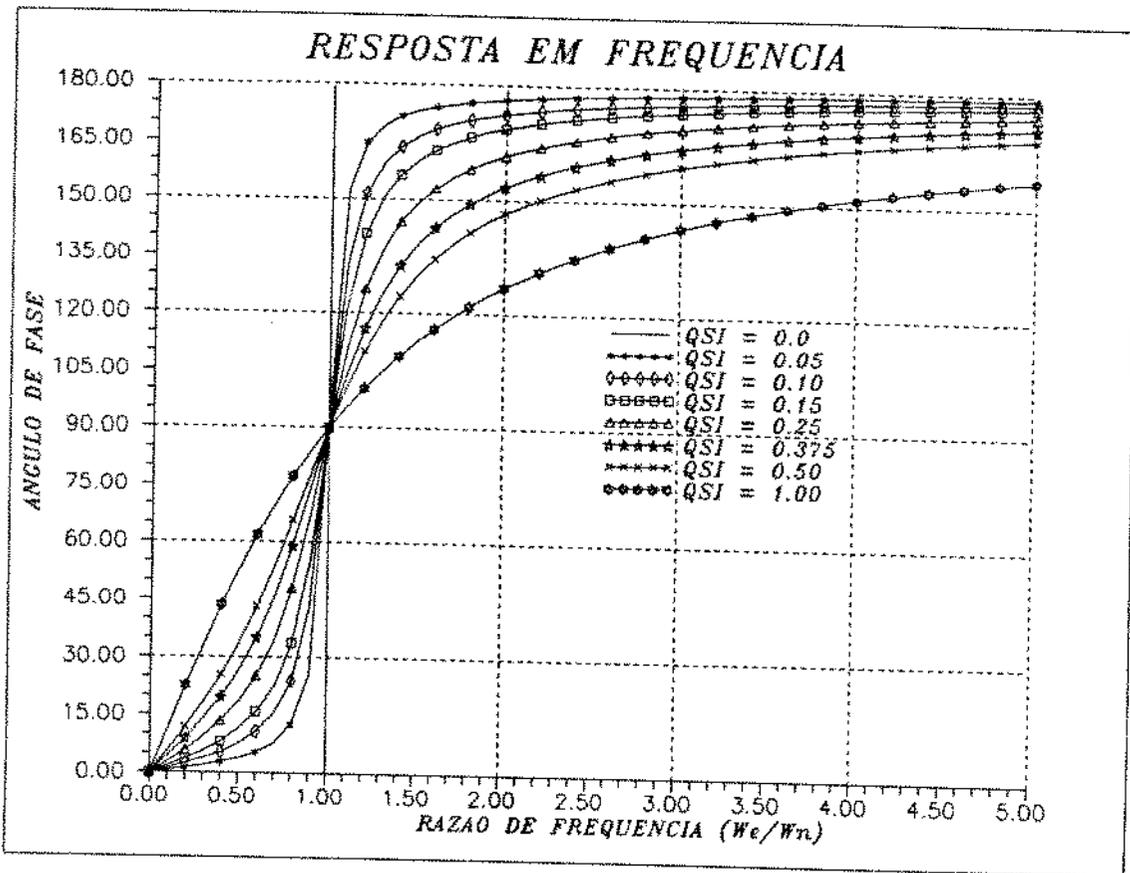


Figura 8.25 - Valores Analíticos de $\phi \times \beta$

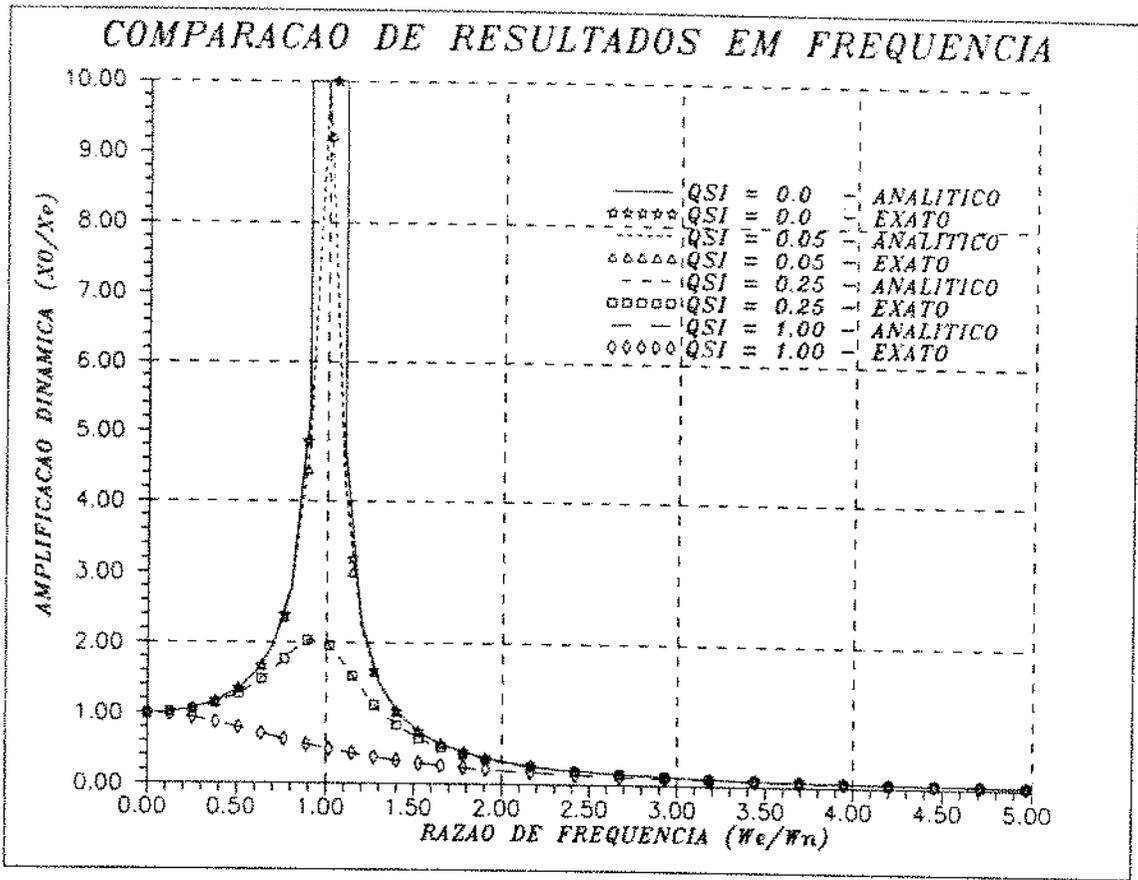


Figura 8.26 - Comparação dos Valores de $\zeta \times \beta$

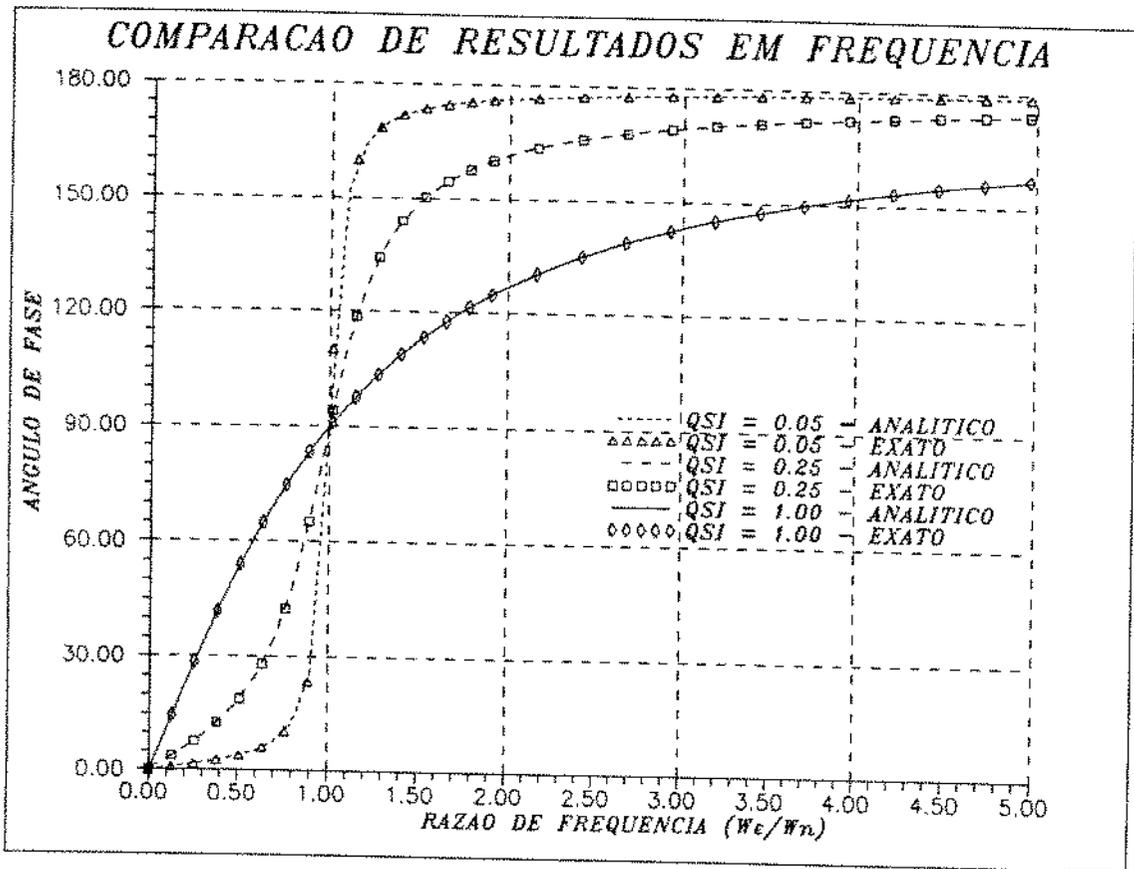


Figura 8.27 - Comparação dos Valores de $\phi \times \beta$

Observando-se as figuras 8.26 e 8.27, nota-se a perfeita sobreposição das curvas, atestando a precisão do cálculo.

Finalmente foi montado um gráfico mostrando a determinação das freqüências naturais dos modos longitudinais através da consideração de mais modos na simulação, ao invés de apenas um. Na figura 8.28 os picos indicam a ocorrência dos harmônicos, localizando as freqüências onde aparecem.

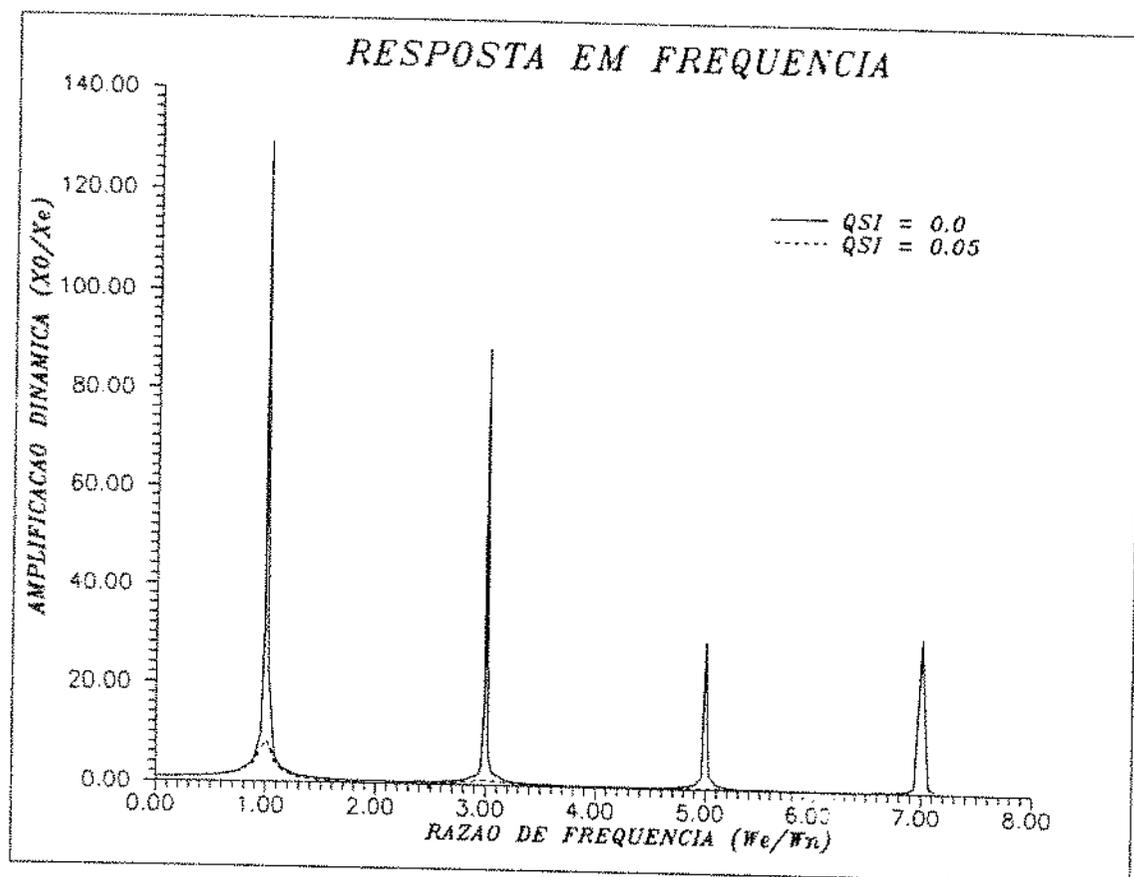


Figura 8.28 - Localização dos Harmônicos

8.13 - Teste 12: Aproximação da Resposta Não Linear

Este exemplo foi montado com base na referência [50], mas não foi possível conseguir os mesmos resultados devido à falta

de dados para tal. Nesta referência, algumas configurações de equipamentos de fundo (equipamentos da coluna de perfuração entre a broca e os tubos leves - "drill pipes") - BHA, são simulados com base em poços reais. É realizada uma análise estática não linear e a configuração estática final é a inicial para a análise dinâmica.

Primeiramente, foi simulado o exemplo de campo 1, discretizando a estrutura em treze grupos de elementos, cada um correspondente aos propostos pelo autor. A tabela 8.6 descreve os elementos utilizados e suas características. O arquivo de dados assim criado foi executado e montou-se a figura 8.29.

Elem.	Nome	Compr (pés)	Diâm. Interno (pols.)	Diâm. Externo (pols.)	Lâmina Diâm. Ext. (pols.)	Compr. Acumulado (pés)
1	Broca	1,0	12,25	-----	-----	1,0
2	Ferr.	40,8	7,75	2,81	-----	41,8
3	XO	0,7	8,00	2,81	-----	42,5
4	Shock	7,6	7,94	2,37	-----	50,1
5	XO	1,0	7,50	2,81	-----	51,1
6	Estab	4,0	7,00	2,37	12,125	55,1
7	XO	1,4	7,00	2,37	-----	56,5
8	Ferr.	29,3	7,00	1,92	-----	85,8
9	XO	1,5	7,12	2,81	-----	87,3
10	MWD	46,1	7,00	5,00	-----	133,3
11	PRS	2,7	7,00	3,25	-----	136,0
12	XO	1,4	7,50	2,81	-----	137,4
13	DC	353,1	5,87	2,81	-----	490,5

Tabela 8.6 - Coluna do Exemplo de Campo 1

Os nomes representam ferramentas típicas da perfuração, como o MWD, que permite a obtenção da inclinação do poço, do ângulo de azimute e de outras grandezas durante a perfuração. Os estabilizadores foram considerados como dois elementos, e o nó comum dos elementos foi restrito na direção transversal .

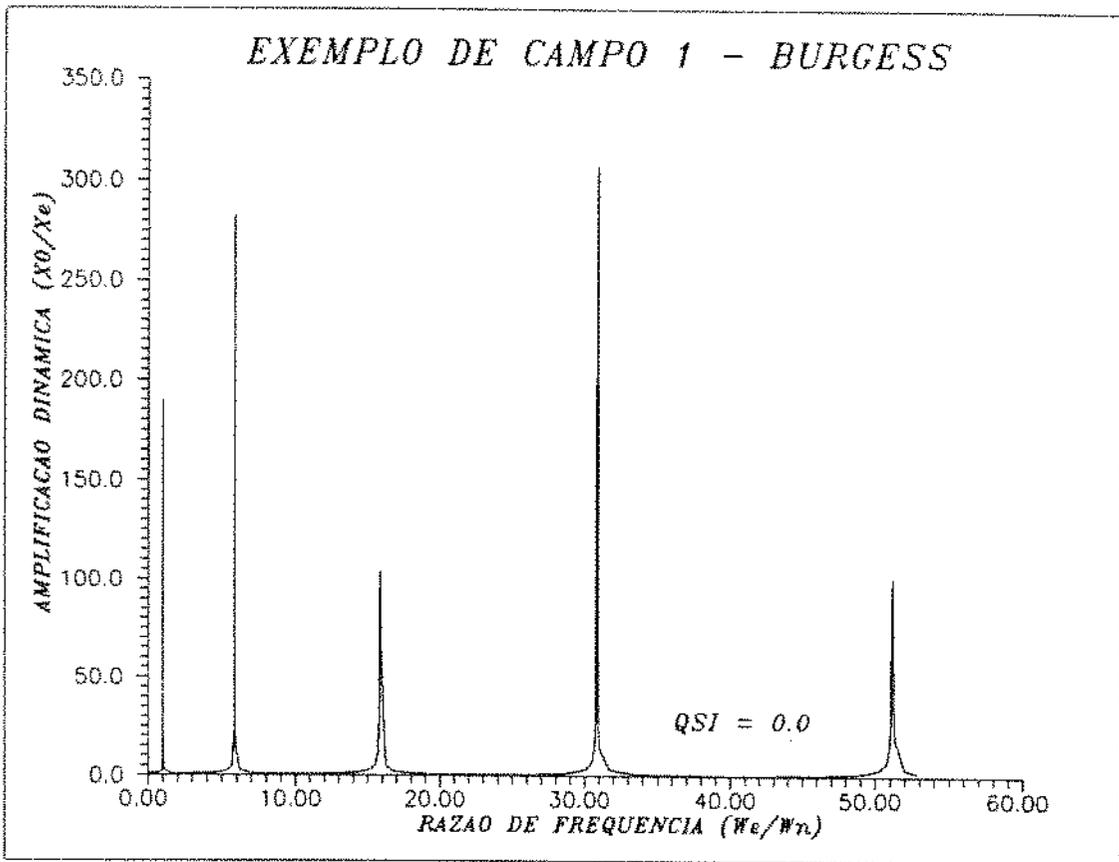


Figura 8.29 - Exemplo de Campo 1 - Burgess

A figura 8.29 pode ser refeita, alterando-se a abcissa para a rotação da coluna. Assim tem-se um gráfico onde podem ser obtidas as rotações que provocam a ressonância e que devem ser evitadas. A figura 8.30 ilustra o explicado.

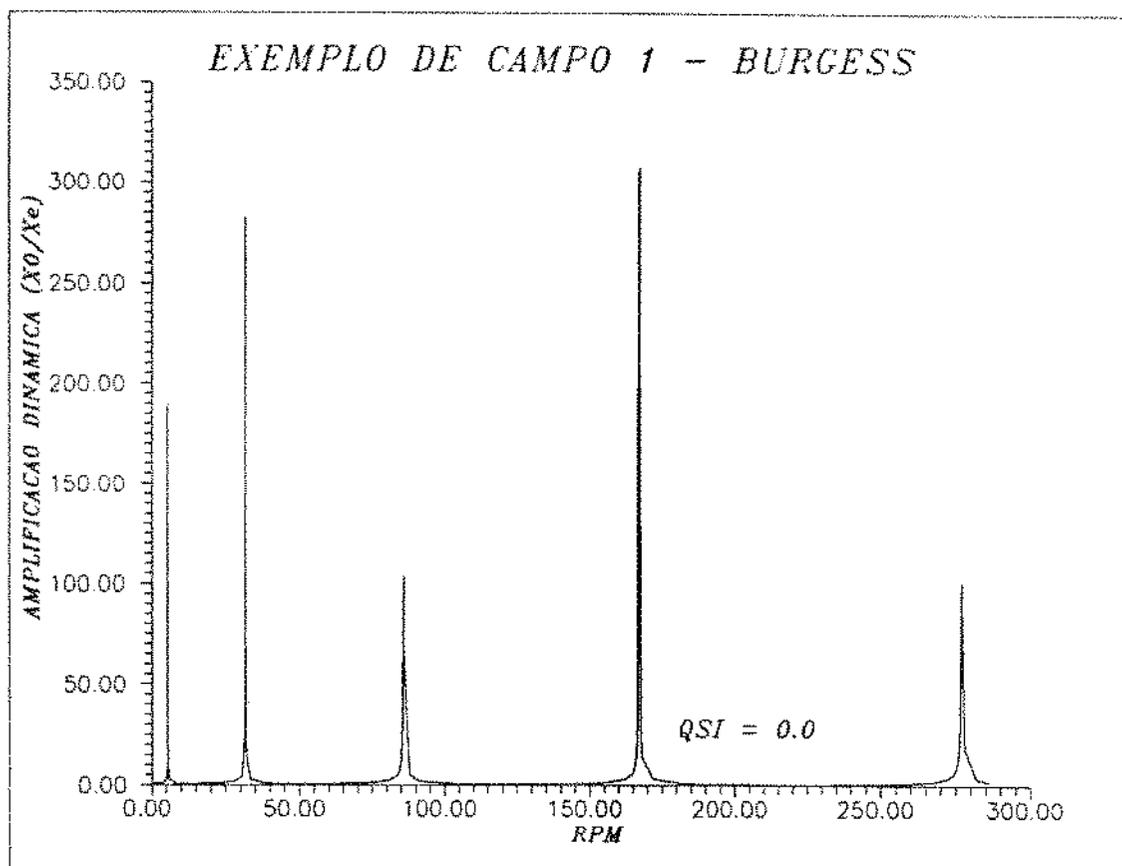


Figura 8.30 - Exemplo de Campo 1 - Burgess (Rotações)

Embora os valores das freqüências naturais não sejam próximos, o comportamento da curva é o mesmo obtido no artigo: a primeira freqüência muito baixa e as seguintes separando-se cada vez mais,

Em seguida, foi selecionado o exemplo de campo 3, por ter todos os grupos de elementos com iguais diâmetros internos e externos, o que facilita em muito sua simulação. A figura 8.31 mostra um esquema básico deste exemplo.

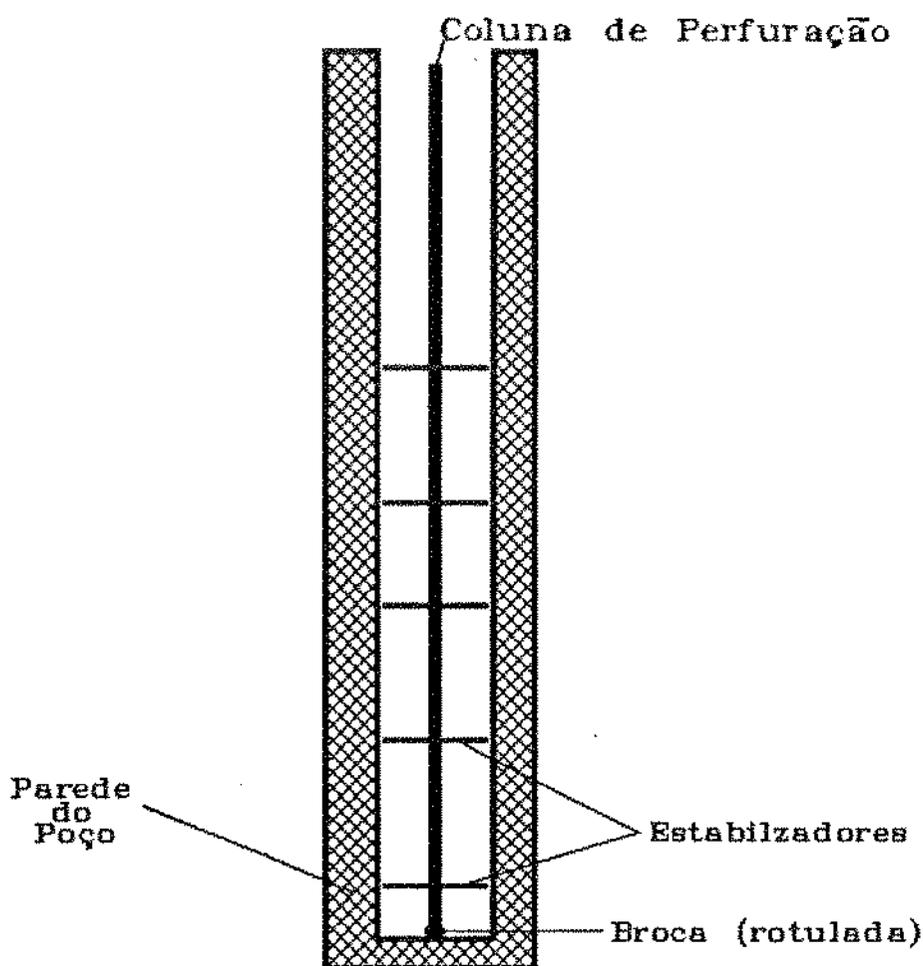


Figura 8.31 - Esquema Básico do Exemplo de Campo 3

Como feito no artigo, uma análise estática não linear foi realizada, com o elemento de viga-coluna do programa ANENLE^[39] (considerando o efeito da carga axial no deslocamento transversal). Na análise não linear, foram consideradas as restrições da parede do poço, através molas bilineares (com dois valores de rigidez, uma baixa até o nó encostar na parede e outra muito alta após isto). A matriz

final de rigidez foi gravada e usada como dado de entrada de uma análise dinâmica linear, pelo ANESDE, com a opção de leitura externa das matrizes.

Para a análise não linear, foi escolhido o caso em que a tração média é nula, ou seja, o módulo da força axial na extremidade inferior é igual ao da superior, mas os sinais são contrários. Com isso, aproxima-se da análise linear.

Na obtenção da solução linear aproximada, fez-se :

- i) Executou-se o ANENLE, para uma análise não linear e identificaram-se os pontos onde a coluna tocou o poço;
- ii) Montou-se um arquivo de dados para análise dinâmica linear, no qual os pontos citados no passo anterior tiveram seu movimento transversal restringido;
- iii) Executou-se este arquivo e compararam-se os dois resultados, criando-se o gráfico da figura 8.32, com os valores numéricos na tabela 8.7.

Percebe-se a ótima concordância dos resultados, atestando a possibilidade de simular outros casos com igual procedimento, desde que não se afaste demais da linearidade.

i	NÃO LINEAR		LINEAR	
	ω_i (rd/s)	RPM	ω_i (rd/s)	RPM
1	0,21531	2,05606	0,17570	1,67781
2	0,24183	2,30931	0,25623	2,44682
3	0,40336	3,85180	0,42426	4,05138
4	0,63702	6,08309	0,58813	5,61623
5	0,81210	7,75498	0,82632	7,89077
6	1,18659	11,33110	1,21696	11,62111
7	1,39248	13,29720	1,34573	12,85077
8	1,70822	16,31230	1,72395	16,46251
9	2,11589	20,20526	2,08183	19,88001
10	2,11920	20,23687	2,15662	20,59420
11	2,64159	25,22533	2,67133	25,50932
12	2,75045	26,26486	2,75045	26,26486
13	2,91153	27,80306	2,88167	27,51792
14	3,00283	28,67491	3,01181	28,76067
15	3,33152	31,81367	3,32250	31,72754
16	3,94867	37,70702	3,96131	37,82772
17	4,02890	38,47316	4,05426	38,71533
18	4,43035	42,30672	4,45578	42,54956
19	4,69691	44,85219	4,69159	44,80138
20	5,20038	49,65997	5,19144	49,57460

Tabela 8.7 - Freqüências Naturais do Teste 12

Na tabela 8.7 também são mostradas as rotações correspondentes aos harmônicos, servindo de orientação para as rotações a serem evitadas, no campo.

Finalizando este teste, observa-se que não foi possível aprofundar-se mais e validar outras grandezas, devido à falta de dados no artigo para tal.

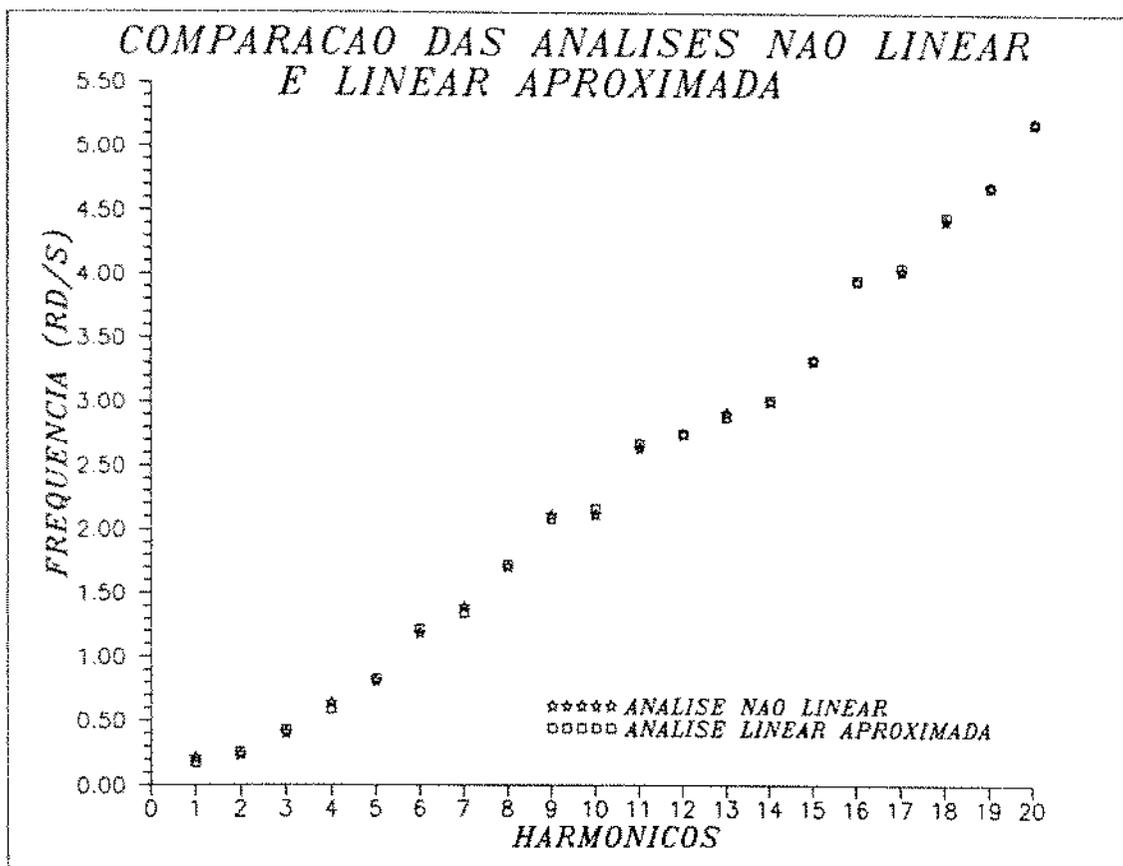


Figura 8.32 - Aproximação da Resposta Não Linear

8.14 - Comentários Finais

Foram apresentados alguns exemplos de aplicação do programa, utilizando quase todos os recursos atuais. Outros testes foram feitos, incluindo até a análise estática, não sendo mostrados por serem apenas etapas intermediárias ou para confirmar valores.

CAPÍTULO 9 - CONCLUSÕES / RECOMENDAÇÕES

Os resultados obtidos atestam a precisão e eficiência do método dos elementos finitos e da superposição modal para a obtenção da resposta dinâmica. Também o programa ANESDE mostrou-se suficiente, mesmo requerendo alguns ajustes e pequenas modificações.

Os casos de carregamento implementados abrangem grande parte da necessidade comum da engenharia, destacando-se a análise numérica pela sua versatilidade e precisão. Foram realizados testes mais do que suficientes para comprovar a eficiência do programa, abrangendo quase todos os recursos atuais.

A análise linear aproximada (item 8.12) demonstrou ser possível a aproximação linear, com resultados muito bons, do estudo da vibração de uma coluna de perfuração. Quanto à análise não linear, também é plenamente viável, bastando executar-se um programa estático não linear e usar suas matrizes.

A metodologia de análise, utilizando as rotinas implementadas, mostrou-se precisa e eficiente, podendo ser estendida para outros casos.

Assim pode-se dizer que a tese alcançou pleno êxito, cumprindo todos os objetivos propostos.

Como aperfeiçoamento do programa pode-se sugerir :

- i) Reorganização do vetor dinâmico inteiro, pouco preenchido durante a execução;
- ii) Formatação dos arquivos intermediários e daqueles usados na leitura externa, possibilitando o uso de arquivos criados em ambientes diferentes;
- iii) Implementação de rotinas para análise no domínio da frequência mais completas.

Para a continuação da tese, como pesquisa, sugere-se :

- i) Passagem dos elementos para o espaço tridimensional, permitindo o estudo mais realístico de estruturas em três dimensões;
- ii) Inclusão do efeito giroscópico da análise dinâmica, para o estudo de mancais e outros sistemas com altas rotações;
- iii) Implementação da análise dinâmica não linear, usando algum método já desenvolvido na literatura;
- iv) Criação de pré e pós-processadores, para tornar amigável a interação com o usuário e a análise dos resultados mais prática e fácil;
- v) Instalação de novos elementos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

São aqui citadas as referências bibliográficas utilizadas no trabalho de tese. Estão separadas por tópico principal pesquisado, podendo cobrir mais de um assunto. Os itens 1 à 8 apresentam os livros, notas de aula e artigos utilizados na confecção do trabalho, e o item 9 os artigos na área da engenharia de petróleo consultados.

1 - Estudo Básico das Vibrações e Exemplos

- [01] Meirovitch, L. - "*Elements of Vibration Analysis*". McGraw Hill International Editions - Mechanical Engineering Series, Segunda Edição (1986).
- [02] Meirovitch, L. - "*Analytical Methods in Vibrations*". Mcmillian Company (1967).
- [03] Meirovitch, L. - "*Computational Methods in Structural Dynamics*". Sijthoff & Noordhoff, Netherlands (1980).
- [04] Prodonoff, V. - "*Vibrações Mecânicas, Simulação e Análise*". Maity Comunicação e Editora Ltda. (1990).
- [05] Timoshenko, S.- "*Vibrations Problems in Engineering*". D. Van Nostrand Company (1955).

- [06] Steidel Jr, R. F. - "*An Introduction to Mechanical Vibrations*", Terceira Edição. John Wiley & Sons (1989).
- [07] Anderson, J. S. & Brates, M. - "*Solving Problems in Vibrations*". Longman Scientific & Technical (1987).
- [08] Bishop, R. E. D. & Johnson, D. C. - "*The Mechanics of Vibrations*". Cambridge University Press (1979).
- [09] Clough, R. W. & Penzien, J. - "*Dynamics of Structures*". Mc Graw-Hill International Editions Civil Engineering Series (1989)
- [10] Kološek, V. - "*Dynamics in Engineering Structures*". Holsted Press Inc. (1973).
- [11] Fonseca, A. - "*Vibrações*". Ed. Ao Livro Técnico S.A. (1964).
- [12] Almeida, M. T.-"*Vibrações Mecânicas para Engenheiros*" Ed. Edgar Blücher (1987).
- [13] Gouvêa, J. P.- "*Vibrações*". Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia.

- [14] Chen, Yu- "*Vibrations Theoretical Methods*". Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1966).
- [15] Ferreira, J. V.-"*Balaceamento de Rotores Flexíveis*". Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica Apresentada na UNICAMP/FEM/DMC (Agosto/1989).
- [16] Filho, F. V. & Claret, A. M. - "*Formulação Matricial da Análise Dinâmica de Sistemas de Um Grau de Liberdade no Domínio da Frequência*" Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Volume XII, N^o 1 (1990).
- [17] Rebello, M. L. CF(EN) - "*Introdução à Modelagem de Sistemas Dinâmicos*". Departamento de Sistemas - Escola Naval (1966).

2 - Resposta Dinâmica das Estruturas

- [18] Herrman, G. & Perrone, N, - "*Dynamic Response of Structures*". Pergamon Press (1972).
- [19] Craig Jr, R. R. - "*Structural Dynamics*". John Wiley & Sons (1981).
- [20] Donea, J. - "*Advanced Structural Dynamics*". Applied Science Publishers Ltd, Londres (1980).

[21] Warburton, G. B. - "*The Dynamical Behavior of Structures*". Pergamon International Library, segunda edição (1976).

3 - Teoria Básica da Análise Estrutural

[22] Przemieniecky, J. S. - "*Theory of Matrix Structural Analysis*". McGraw-Hill Inc (1968).

[23] Kamal, M. M. & Wolf, A. - "*Modern Automotive Structural Analysis*". Von Nostrand Reinhold Company (1982).

[24] Allen, D. H. & Haisler, W. E. - "*Introduction to Aerospace Structural Analysis*". John Wiley & Sons (1985).

[25] Tauchert, T. R. - "*Energy Principles in Structural Mechanics*". McGraw-Hill International Student Edition (1975).

[26] Shames, I. H. - "*Introdução à Mecânica dos Sólidos*". Prentice/Hall do Brasil (1983).

[27] Davies, G. A. O. - "*Virtual Work in Structural Dynamics*". John Wiley & Sons (1982).

4 - Formulários

[28] Young, W. C. - "*Roark's Formulas for Stress and Strain*", Sexta Edição. McGraw-Hill Book Company (1989).

[29] Blevins, R. D. - "*Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*". Robert E. Krieger Publishing Co., Inc (1984).

5 - Método dos Elementos Finitos

[30] Bathe, K. J. & Wilson, E. - "*Numerical Methods in Finite Elements Analysis*". Prentice Hall (1976).

[31] Bathe, K. J. - "*Finite Elements Procedures in Engineering Analysis*". Prentice Hall (1982).

[32] Hughes, T. - "*The Finite Element Method Linear and Dynamic Finite Element Analysis*". Prentice Hall (1987).

[33] Zienkiewicz, O. C. - "*The Finite Element Method in Engineering Science*". McGraw-Hill (1971).

[34] Gallaguer, R. H. - "*The Finite Element Method Fundamentals*". Prentice Hall, Inc (1975).

- [35] Prodonoff, V. & Plácido, J. C. R. & Pereira, M. J. -
"Programa ANESDE Análise Estática e Dinâmica de
Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos".
Editora do CENPES (1990).
- [36] Bathe, K. J. & Wilson, E. L. & Peterson, F. E. - "SAP
IV - A Structural Analysis Program for Static and
Dynamic Response of Linear Systems". Report no. EERC
73-11 de Junho/73 revisado Abril/74.
- [37] Almeida, J. F. G. - "Simulação de Deslocamento Misto em
Meio Poroso pelo Método dos Elementos Finitos".
Tese de Mestrado em Engenharia de Petróleo
Apresentada na UNICAMP/FEM/DEP (Novembro/1990).
- [38] Paixão, C. L. - "Análise Não Linear Geométrica de
Estruturas Reticuladas com Aplicação ao Lançamento de
Oleodutos Submarinos". Tese de mestrado em Engenharia
de Petróleo Apresentada na UNICAMP/FEM/DEP
(Novembro/1990).
- [39] Guz, J. L. - "Estudo da Coluna de Perfuração através da
Implementação do Elemento Finito de Viga-Coluna".
Tese de Mestrado em Engenharia de Petróleo na
UNICAMP/FEM/DEP (Dezembro/1990).

[40] Gouvêa, J. P. - "*Elementos Finitos I*". Notas de Aula do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Instituto Militar de Engenharia.

[41] Cordovil, A. G. D. P. & Carvalho, A. P. (Major) & Virhuez, G. A. S. (Capitão do Exército do Peru) & Talon, J. D. (CT FN) - "*Modelagem de Estruturas Monobloco*". Projeto Final Apresentado No Instituto Militar de Engenharia (1988).

6 - Suporte Matemático

[42] Spiegel, M. R. - "*Análise de Fourier*". McGraw-Hill (1974).

[43] Kreider, D. Ostberg, & D. Kuller & R. Perkins, F. - "*Introdução à Análise Linear*", Vol. 2. Ed. Ao Livro Técnico (1972).

[44] Hsu, H. P. - "*Análise de Fourier*". Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda (1973).

[45] Hildebrand, F. B. - "*Methods of Applied Mathematics*". Englewood Cliffs, Prentice Hall Inc, Segunda Edição (1965).

7 - Superposição Modal

- [46] Cordovil, A. G. D. P. - "Análise Modal". Trabalho Semestral da Disciplina IP 421, UNICAMP (1990).
- [47] Cordovil, A. G. D. P. - "Resposta Dinâmica em Freqüência". Projeto Semestral da Disciplina IP 421, UNICAMP (1990).
- [48] Xavier, L. S - "*Análise Dinâmica de Estruturas Via Superposição Modal*". Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica Apresentada no Instituto Militar de Engenharia (Agosto/1990).
- [49] Cardinali, R. & Nordmann & R. Sperber, A. - "Nonlinear Dynamic Models of Hydroelectric Machinery". IV DINAME - Simpósio de Dinâmica de Máquinas e Equipamentos, Pouso Alto (MG), ABCM (4 a 8 de Março /91).

8 - Análise Não Linear

- [50] Burgess, T. M. & McDaniel, G. L. & Das, P. K. - "Improving BHA Tool Reliability with Dristring Vibrations Models : Field Experience and Limitations". SPE/IADC 16109.

9 - Artigos na Engenharia de Petróleo

- [51] Apostal, M. C. & Haduch, G. A. & Williams, J. B. - "A Study to Determine the Effect of Damping on Finite-Element Based, Forced-Frequency-Response Models for Bottomhole Assembly Vibrations Analysis". SPE 20548.
- [52] Clayer, F. & Vandiver, J. K. & Lee, H. Y. - "The Effect of Surface and Downhole Boundary Conditions on the Vibration of the Drillstrings". SPE 20447.
- [53] Prodonoff, V. & Castilho, A. & Yazeji, C. M. - "Influência da Rotação e dos Mancais nas Frequências Naturais dos Rotores Flexíveis Multiestágios". Primeira MR-MAQ.
- [54] Prodonoff, V. & Zepka, S. - "Comportamento Dinâmico de Estruturas Estaiadas". Boletim Técnico PETROBRÁS, 25 (2):107-115, Abril/Junho 1982.
- [55] Clough, R. W. & Wilson, E. L. - "Dynamic Analysis of Large Structural Systems with Local Nonlinearities". Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 17/18 Pgs 107-129 (1979).

- [56] Azevedo, H. R. T. & Freire, D. G. & Rocha , R. O. & Costa Jr, L. R. C. & Medeiros, R. L. M. - "On the Dynamical Modelling of Rotating Machinery by the Finite Element Method and Its Applications to Hydroelectric Power Generators".
- [57] Zamudio, C. A. & Tlustý, J. L. & Dareing, D. W. - "Self Excited Vibrations in Drillstrings". SPE 16661.
- [58] Vandiver, J. K. & Nicholson, J. W. & Shyu, R. J. - "Case Studies of the Bending Vibration and Whirling Motion of Drill Collars". SPE/IADC 18652.
- [59] Cook, R. L. & Nicholson, J. W. & Sheppard, M. C. & Westlake, W. - "First Real Time Measurements of Downhole Vibrations, Forces, and Pressures Used to Monitor Directional Drilling Operations". SPE/IADC 18651.
- [60] Birades, M. & Gazanioni, D. - "ORPHEE 3D : Original Results on the Directional Behavior of BHA's with Bent Subs". SPE 19244
- [61] Allen, M. B. - "BHA Lateral Vibrations : Case Studies and Evaluation of important Parameters". SPE/IADC 16110.

- [62] Halsey, G. W. & Kyllingstad, A. & Aarrestad, T. V. & Lysns, D. - "Drillstring Torsional Vibrations : Comparision Between Theory and Experiment on a Full-Scale Research Drillstring Rig". SPE 15564.
- [63] Baird, J. A. & Caskey, B. C. & Tinianow, M. A. & Stone, C. M. - "GEODYN : A Geological Formation/ Drillstring Dynamics Computer Program". SPE 13023.
- [64] Dareing, D. W. & Huang, T. - "Natural Frequencies of Marine Drilling Risers". American Institute of Mining c1976 - 5620 P.
- [65] Aarrestad, T. V. & Kyllingstad, A. & Tonnensen, H. A. - "Drillstring Vibrations : Comparision Between Theory and Experiment on a Full-Scale Research Drillstring Rig". SPE/IADC 14760.
- [66] Dareing, D. W. - "Drill Collars Lenght is a Major Factor in Vibration Control". SPE 11228.
- [67] Aarrested, T. V. & Kyilingstad, A. - "An Experimental and Theoretical Study of Coupled Boundary Conditions for Vibrations in Drillstrings" . SPE 15563.

- [68] Kalsi, M. S. & Wang, J. K. & Chandra, V. - "Transient Dynamic Analysis of the Drillstring Under Jarring Operation Using Finite Element Method". SPE/IADC 13446.
- [69] Skeem, M. R. & Friedman, M. B. & Walker, B. H. - "Drillstring Dynamics During Jar Operation". SPE 7521.
- [70] Kwon, Y. W. & Klementich, E. F. & Ko, K. I. - "An Efficient and Accurate Model for the Structural Analysis of Threaded Tubular Connections". SPE 18057.
- [71] Chakrabarti, S. K. & Frampton, R. E. - "Review of Riser Analysis Techniques". Applied Ocean Research, Volume 4, No. 2 (1982).

APÊNDICE - INTEGRAL DE DUHAMEL

Neste apêndice é estudada e deduzida a integral de Duhamel, que expressa a resposta dinâmica de um sistema como a superposição da resposta a infinitos impulsos, que representam os pontos de carregamentos. Sua equação é :

$$x(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \text{sen} [\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (\text{A.1})$$

Pode ser deduzida heurísticamente (intuitivamente), a partir da figura A.1^[14].

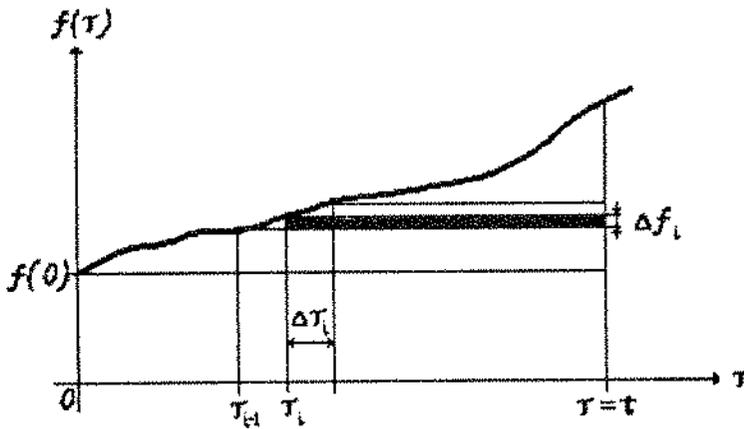


Figura A.1 - Gráfico de $f(\tau) \times \tau$

Nota-se que a resposta dinâmica pode ser aproximada por uma sucessão de retângulos de lados $\Delta f(\tau) = f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})$ e $t - \tau_i$, caracterizando um carregamento do tipo degrau^[02, 14].

Fisicamente, a resposta dinâmica em τ_i é a superposição da resposta à aplicação de $\Delta f(\tau)$ em $t = \tau_i$, ou seja :

$$x_i(t) = [f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})] w(t-\tau_i), \quad i = 1, \dots \quad (A.2)$$

onde $w(t-\tau_i)$ é a resposta ao degrau em $t - \tau_i$.

Para uma força inicial $f_0 = f(0)$:

$$x_0 = \text{resposta a } f_0 = f(0) \cdot w(t) \quad (A.3)$$

A resposta total fica :

$$x(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i = x_0 + \sum_{i=1}^{n-1} [f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})] w(t-\tau_i) \quad (A.4)$$

O somatório pode ser reescrito como :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})}{\Delta\tau_i} w(t-\tau_i) \Delta\tau_i \quad (A.5)$$

Quando $\Delta\tau_i \rightarrow 0$, (A.5) fica :

$$\int_0^t \dot{f}(\tau) w(t-\tau) d\tau \quad (A.6)$$

Substituindo (A.6) em (A.4) :

$$x(t) = f(0)w(t) + \int_0^t \dot{f}(\tau) w(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.7})$$

Outro modo de obter-se (A.7), mais detalhada, começa com a definição da convolução :

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = F(s) \cdot G(s) \quad (\text{A.8})$$

com $F(s)$ e $G(s)$ as transformadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente.

Prova-se que :

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \mathcal{L}[g * f] \quad (\text{A.9})$$

Sendo $w(t)$ a resposta ao degrau unitário, tem-se:

$$W(s) = \mathcal{L}[w(t)] = \frac{1}{s} = \frac{1}{s} H(s) \Rightarrow H(s) = s W(s) \quad (\text{A.10})$$

com : $H(s)$ = resposta ao impulso unitário no campo de Laplace

$W(s)$ = resposta ao degrau unitário em Laplace.

Derivando $w(t)$ em relação ao tempo (t) :

$$\mathcal{L}[\dot{w}(t)] = sW(s) - w(0) \Rightarrow H(s) = \mathcal{L}[\dot{w}(t)] + w(0) \quad (\text{A.11})$$

Assim :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [H(s)] = \dot{w}(t) + w(0) f(t) \quad (\text{A.12})$$

onde $h(t)$ é a resposta ao impulso unitário no tempo e $f(t)$ é o valor do carregamento no instante t .

Para sistemas inicialmente em repouso :

$$\begin{aligned} X(s) &= H(s) F(s) = s [(1/s) H(s) F(s)] = \\ &= s [W(s) F(s)] = s R(s) \Rightarrow \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\Rightarrow r(t) = \mathcal{L}^{-1} [R(s)] = \int_0^t w(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{L} [\dot{r}(t)] = s R(s) - \underbrace{r(0)}_0 = s R(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} [X(s)] = \dot{r}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t w(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (\text{A.15})$$

Agrupando termos em (A.13) :

$$X(s) = W(s) [s F(s)] \quad (\text{A.16})$$

Daí :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} [s F(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \{ [s F(s) - f(0)] + f(0) \} = \\ &= \mathcal{L}^{-1} [F'(s) + f(0)] = \dot{f}(t) + f(0)\delta(t) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac e $F'(s)$ é a derivada em relação a s .

Assim $x(t)$ fica :

$$\begin{aligned}x(t) &= \int_0^t w(t-\tau) [\dot{f}(\tau) + f(0)\delta(\tau)] d\tau \Rightarrow \\ \Rightarrow x(t) &= f(0)w(t) + \int_0^t \dot{f}(\tau) w(t-\tau) d\tau \quad (A.18)\end{aligned}$$

Percebe-se que (A.18) e (A.7) são iguais.

Reagrupando termos em (A.13) e após considerações análogas:

$$X(s) = F(s) [s W(s)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = w(0)f(t) + \int_0^t f(t-\tau) \dot{w}(\tau) d\tau \quad (A.19)$$

Usando (A.9) :

$$\int_0^t f(t-\tau) \dot{w}(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) \dot{w}(t-\tau) d\tau \quad (A.20)$$

Finalmente :

$$x(t) = w(0)f(t) + \int_0^t f(\tau) \dot{w}(t-\tau) d\tau \quad (A.21)$$

A equação (A.21) é usada para obter-se a equação A.1), básica nas formulações deste trabalho.

A expressão de $w(t)$ é obtida resolvendo-se a equação geral da dinâmica:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t) \quad (\text{A.22})$$

fazendo $f(t) = P_0 = \text{constante}$.

Na solução, usa-se :

$$x(t) = A \text{ sen}(\omega) + B \text{ cos}(\omega) \quad (\text{A.23})$$

e determina-se A e B.

Supondo-se $x(0) = 0$ ^[25], tem-se a outra condição de contorno :

$$\int \dot{f}(0) dt = m \dot{x}(0) \implies \dot{x}(0) = \frac{\int \dot{f}(0) dt}{m} \quad (\text{A.24})$$

Adaptando-se a equação (A.22) para o uso neste trabalho: $f(t) = f(t)/m$, $m = 1$, $c = 2\xi\omega_n$ e $k = \omega_n^2$, chegando à seguinte equação :

$$x(t) = \frac{P_0}{\omega_d \omega^2} \left[\omega_d - [\omega_d \cos(\omega_d t) + \xi \omega \text{ sen}(\omega_d t)] \right] e^{-\xi \omega_n t} \quad (\text{A.25})$$

Aplicando $t=0$ em (A.25) :

$$w(0) = x(0) = 0 \quad (\text{A.26})$$

Usando (A.26) em (A.21) :

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) \dot{w}(t-\tau) d\tau \quad (\text{A.27})$$

Derivando $w(t) \equiv x(t)$, tem-se :

$$x(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_0^t f(\tau) e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \text{sen} [\omega_d(t-\tau)] d\tau \quad (\text{A.28})$$

A expressão (A.28) é idêntica à (A.1), e semelhante à (5.28), bastando colocar os índices i , substituir $x(t)$ por $\eta_i(t)$ e $f(\tau)$ por $N_i(\tau)$.