

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Denise Alves Ramalho  
PELA COMISSÃO JULGADORA EM ...16/12/2010

Katia Duchesi Corralco  
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

Denise Alves Ramalho

## **Estudo da Influência dos Perfis de Solo em Sistemas Rotor-Mancais-Fundação**

Campinas, 2010

11/2011

Denise Alves Ramalho

# **Estudo da Influência dos Perfis de Solo em Sistemas Rotor-Mancais-Fundação**

Tese apresentada ao Curso de Doutorado da  
Faculdade de Engenharia Mecânica da  
Universidade Estadual de Campinas, como  
requisito para a obtenção do título de Doutor  
em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico  
Orientador: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca dedini  
Co-Orientador: Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto

Campinas  
2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

R141e Ramalho, Denise Alves  
Estudo da influência dos perfis de solo em sistemas rotor-mancais-fundação / Denise Alves Ramalho. -- Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientadores: Katia Lucchesi Cavalca Dedini,  
Euclides de Mesquita Neto.  
Tese de Doutorado - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Dinâmica. 2. Rotores. 3. Mancais. 4. Interação solo-estrutura. I. Dedini, Katia Lucchesi Cavalca. II. Mesquita Neto, Euclides. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Study of the influence of soil profiles on rotor-bearings-  
foundation systems

Palavras-chave em Inglês: Dynamic, Rotors, Bearings, Soil-structure interaction

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Robson Pederiva, Pablo Siqueira Meirelles, Domingos  
Alves Rade, Edson Antônio Capello Sousa

Data da defesa: 16/12/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

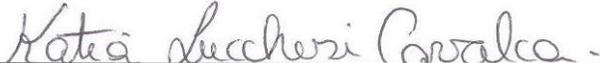
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

TESE DE DOUTORADO

**Estudo da Influência dos Perfis de Solo em  
Sistemas Rotor-Mancais-Fundação**

Autora: Denise Alves Ramalho  
Orientadora: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini  
Co- Orientador: Euclides de Mesquita Neto

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou a tese:

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente  
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Robson Pederiva  
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles  
UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Domingos Alves Rade  
Universidade Federal de Uberlândia

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Edson Antônio Capello Sousa  
Universidade Estadual Paulista

Campinas, 16 de dezembro de 2010

## **Agradecimentos**

À minha família, por ter me incentivado;

À minha orientadora, Professora Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, que me mostrou os caminhos a serem seguidos;

Ao meu co-orientador, professor Dr Euclides de Mesquita Neto, pela ajuda no desenvolvimento do trabalho;

Aos amigos, colegas e funcionários, que me ajudaram direta ou indiretamente na conclusão deste trabalho;

À CAPES e ao CNPq, pelo suporte financeiro.

## Resumo

Nas últimas três décadas houve um desenvolvimento notável em métodos e tópicos de pesquisa a respeito da análise da dinâmica de máquinas rotativas. Um dos tópicos que têm atraído a atenção de pesquisadores é a interação de máquinas rotativas com suas estruturas de suporte. Sabe-se que a dinâmica da estrutura pode exercer um importante papel na resposta do rotor. Mas há um tópico que ainda não recebeu a atenção que deveria. As estruturas de suporte do rotor estão colocadas sobre uma fundação e esta fundação interage com suas vizinhanças e com o solo. A questão da influência da fundação e do solo na resposta do rotor ainda não foi completamente estudada. Tentativas anteriores de descrever o comportamento do sistema rotor-fundação-solo são limitadas a modelos muito simples de solo. O objetivo deste trabalho é estudar a influência do solo no comportamento de máquinas rotativas. Isto foi feito através de um modelo rotor-mancais-fundação-solo. Obtém-se a resposta desbalanceada de um rotor Laval bidimensional, desprezando-se o efeito giroscópico. Variou-se o tipo de solo, considerando um semi-espaço e um solo do tipo camada sobre base rígida, sendo este último um solo com um aumento repentino de rigidez a uma determinada profundidade. Em cada um destes solos, houve uma variação do amortecimento interno. Além disso, para o solo do tipo camada sobre base rígida, houve uma variação da espessura dessa camada. Estes solos são caracterizados pela densidade, coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento, e são considerados viscoelásticos. Os modelos destes solos, utilizados neste trabalho, são modelos numéricos e foram obtidos utilizando o método dos elementos de contorno.

Palavras-chave:

Dinâmica, rotor-fundação-solo, resposta ao desbalanceamento, solo estratificado, modelo de solo visco-elástico, mancais hidrodinâmicos.

## Abstract

In the last three decades there has been a notable development of methods and research topics regarding the analysis of the dynamics of rotating machines. One topic that has attracted researcher's attention is the interaction of rotor – foundation interaction. It is well known that the dynamics of the structure play an important role in the rotor response. However, one topic has still not received the attention it should have. The rotor support structure was placed on a foundation, and the foundation interacted with its neighbourhood and with the soil. The issue of the influence of both the foundation and the soil on the rotor response has not yet been completely studied. Previous attempts to describe the behaviour of the system rotor-foundation-soil were limited to very simple models of the soil. The objective of this work is to study the influence of the soil on the behaviour of rotating machines. This study was carried out by using a rotor-bearing-foundation-soil model. An unbalanced response of a bidimensional Laval rotor is obtained. The gyroscopic effect was neglected. The type of soil was varied, considering a half-space and a stratified soil. The last soil had a sudden increase in the stiffness at a certain depth. In each one of these soils there has been a variation in the internal damping. Moreover, the thickness of the stratified soil has varied. These soils are characterized by the density, Poisson's coefficient and shear modulus, and they are considered visco-elastic. In this work, the soil models are numerical and they were obtained by using the boundary element method.

### Key-words:

Dynamic, rotor-foundation systems, unbalanced response, stratified soil, visco-elastic soil model, hydrodynamic bearings.

## Lista de figuras

3.1 Modelo Mola-Amortecedor para o Filme Fluido(Machado 2009).	24
3.2. Coeficiente direto de rigidez do mancal na direção horizontal.	26
3.3. Coeficiente direto de rigidez do mancal na direção vertical.	26
3.4. Coeficiente cruzado de rigidez do mancal $K_{yz}$ .	26
3.5. Coeficiente cruzado de rigidez do mancal $K_{zy}$ .	27
3.6. Coeficiente direto de amortecimento do mancal na direção horizontal.	27
3.7. Coeficiente direto de amortecimento do mancal na direção vertical.	27
3.8. Coeficiente cruzado de amortecimento do mancal $C_{yz}$ .	28
3.9. Coeficiente cruzado de amortecimento do mancal $C_{zy}$ .	28
4.1. Fundação de superfície sobre semi-espaço.	30
4.2. Fundação de superfície em camada sobre base rígida.	31
4.3 Coeficientes do solo na direção vertical: (a) $d/a=2$ ; (b) $d/a=6$ ; (c) $d/a=10$ .	34
4.4 Coeficientes do solo na direção horizontal: (a) $d/a=2$ ; (b) $d/a=6$ ; (c) $d/a=10$ .	35
4.5 Coeficientes do solo na rotação: (a) $d/a=2$ ; (b) $d/a=6$ ; (c) $d/a=10$ .	36
5.1. Modelo mecânico.	38
5.2. Rotor do tipo Jeffcott.	39
5.3. Forças que atuam no disco.	39
5.4. Modelo da fundação do tipo bloco rígido.	40
5.5. Movimento da fundação.	41
5.6. Graus de liberdade da fundação.	41
5.7. Sistema rotor-mancais.	47
5.8. Representação vetorial do sistema.	47
5.9. Sistema rotor-mancais-fundação-solo.	56
5.10. Origens dos sistemas de coordenadas.	56
5.11. Representação vetorial do sistema.	57

6.1. Amplitude de deslocamento do rotor em função da frequência de excitação (Ramalho (2006)).	74
6.2. Comportamento do rotor (a) e do mancal (b) nas direções: vertical (1) e horizontal (2).	75
6.3. Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) nas direções vertical (1), horizontal (2) e a rotação da fundação (3).	76
6.4. Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) nas direções: vertical (1), horizontal (2) e a rotação da fundação (3).	77
6.5.a Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção vertical para $d/a=2$ .	79
6.5.b Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção horizontal para $d/a=2$ .	80
6.5.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para $d/a=2$ .	81
6.6.a Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção vertical para $d/a=6$ .	82
6.6.b Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção horizontal para $d/a=6$ .	83
6.6.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para $d/a=6$ .	84
6.7.a Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção vertical para $d/a=10$ .	86
6.7.b Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção horizontal para $d/a=10$ .	87
6.7.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para $d/a=10$ .	88
6.8.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção vertical para $d/a=2$ .	89
6.8.b Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção horizontal para $d/a=2$ .	90

6.8.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para $d/a=2$ .	91
6.9.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção vertical para $d/a=6$ .	94
6.9.b Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção horizontal para $d/a=6$ .	95
6.9.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para $d/a=6$ .	96
6.10.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção vertical para $d/a=10$ .	98
6.10.b Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção horizontal para $d/a=10$ .	99
6.10.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para $d/a=10$ .	100
6.11.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção vertical, e amortecimento do solo de $\eta = 0,005$ variando-se $M_{FR}$ .	102
6.11.b Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção horizontal, e amortecimento do solo de $\eta = 0,005$ variando-se $M_{FR}$ .	103
6.11.c Comportamento da fundação (rotação) e amortecimento do solo de $\eta = 0,005$ variando-se $M_{FR}$ .	104
6.12.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção vertical, e amortecimento do solo de $\eta = 0,050$ variando-se $M_{FR}$ .	106
6.12.b Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção horizontal, e amortecimento do solo de $\eta = 0,050$ variando-se $M_{FR}$ .	107
6.12.c Comportamento da fundação (rotação) e amortecimento do solo de $\eta = 0,050$ variando-se $M_{FR}$ .	108
6.13.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção vertical, e amortecimento do solo de $\eta = 0,200$ variando-se $M_{FR}$ .	110
6.13.b Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção horizontal, e amortecimento do solo de $\eta = 0,200$ variando-se $M_{FR}$ .	111

6.13.c Comportamento da fundação (rotação) e amortecimento do solo de  $\eta = 0,200$  variando-se  $M_{FR}$ . 112

## **Lista de tabelas**

3.1. Parâmetros utilizados para cálculo dos coeficientes dos mancais.	25
6.1. Parâmetros utilizados nas simulações.	73
6.2. Parâmetros utilizados para cálculo dos coeficientes dos mancais.	74

## Lista de abreviaturas e siglas

### *Letras latinas*

$a$ – meia largura da fundação	[m]
$\mathbf{a}^R$ – aceleração do disco	[m/s <sup>2</sup> ]
$\mathbf{a}^F$ – aceleração da fundação	[m/s <sup>2</sup> ]
$b$ – metade do comprimento da fundação	[m]
$c_e$ – coeficiente de amortecimento externo do eixo	[Ns/m]
$c_i$ – coeficiente de amortecimento interno do eixo	[Ns/m]
$c_{myy}$ – coeficiente de amortecimento do mancal direto na direção horizontal	[Ns/m]
$c_{myz}$ – coeficiente de amortecimento do mancal cruzado da horizontal na vertical	[Ns/m]
$c_{mzy}$ – coeficiente de amortecimento do mancal cruzado da vertical na horizontal	[Ns/m]
$c_{mzz}$ – coeficiente de amortecimento do mancal direto na vertical	[Ns/m]
$\frac{d}{dt}$ - derivada no tempo, no referencial inercial	[-]
$\frac{{}^R d}{dt}$ - derivada no tempo, no referencial do rotor	[-]
$e$ – distância entre o centro de massa e o centro geométrico do disco	[m]
$\mathbf{F}_a$ - forças de amortecimento do eixo	[N]
$\mathbf{F}_{ae}$ – força de amortecimento externo do eixo	[N]
$\mathbf{F}_{ai}$ – força de amortecimento interno do eixo	[N]
$\mathbf{F}_d$ - força de desbalanceamento do rotor	[N]
$\mathbf{F}_e$ - força elástica do eixo	[N]
$\mathbf{F}_{eixo}$ - forças que agem no eixo	[N]
$\mathbf{F}_F$ – forças que agem na fundação	[N]
$\mathbf{F}_M$ – forças que agem nos mancais	[N]
$\mathbf{F}_S$ – forças do solo	[N]
$f_y^S$ - módulo da força do solo na direção horizontal	[N]
$f_z^S$ - módulo da força do solo na direção vertical	[N]
$\mathbf{I}_f$ – Momento de inércia da fundação	[kgm <sup>2</sup> ]
$h_b$ – altura dos mancais em relação ao centro de gravidade da fundação	[m]

$h_f$ – altura da fundação	[m]
$h_g$ – altura do centro de gravidade da fundação em relação à superfície do solo	[m]
$\dot{\mathbf{H}}^{C/O''}$ - derivada da quantidade de movimento da fundação	[Nm]
$k_e$ – rigidez do eixo	[N/m]
$k_{myy}$ – coeficiente de rigidez do mancal direto na direção horizontal	[N/m]
$k_{myz}$ – coeficiente de rigidez do mancal cruzado da horizontal na vertical	[N/m]
$k_{mzy}$ – coeficiente de rigidez do mancal cruzado da vertical na horizontal	[N/m]
$k_{mzz}$ – coeficiente de rigidez do mancal direto na vertical	[N/m]
$m_f$ – massa da fundação	[kg]
$m_R$ – massa do disco	[kg]
$\mathbf{M}_S$ – momento do solo	[Nm]
$M_x^S$ - módulo do momento do solo na direção x	[Nm]
$\mathbf{M}^{O''}$ - momentos do sistema que agem na fundação	[Nm]
O – ponto de origem do sistema de coordenadas no centro geométrico do rotor	[-]
$O_I$ – ponto de origem do sistema de coordenadas fixo, localizado na intersecção da reta que passa pelos dois mancais com o plano de rotação do disco	[-]
$O'$ - posição do eixo no mancal no referencial não inercial	[-]
$O'_I$ - posição do centro do mancal no referencial inercial	[-]
$O''$ – ponto localizado no centro geométrico da fundação	[-]
$O''_I$ - ponto localizado no centro geométrico da fundação quando o sistema está em repouso	[-]
$O'''$ - ponto de intersecção entre o solo e a fundação, localizado no centro da superfície inferior da fundação	[-]
$O'''_I$ - ponto de intersecção entre o solo e a fundação, localizado no centro da superfície inferior da fundação quando o sistema está em repouso	[-]
$\mathbf{p}^{F_M/O''}$ - vetor posição das forças dos mancais em relação à fundação	[N]
$\mathbf{p}^{O/O'}$ - vetor posição do centro do rotor em relação ao centro do mancal no referencial não inercial	[m]
$p^{O/O_I}$ - vetor posição do ponto O em relação ao ponto $O_I$	[m]

$\mathbf{p}^{O/O_1}$	- vetor posição do ponto O em relação ao ponto $O_1'$	[m]
$\mathbf{p}^{O/O_1''}$	- vetor posição do centro do rotor no referencial não inercial em relação à base do mancal no referencial inercial	[m]
$p_Y^{O/O_1}$	- componente horizontal do vetor posição do ponto O em relação à $O_1$	[m]
$p_Z^{O/O_1}$	- componente vertical do vetor posição do ponto O em relação à $O_1$	[m]
$\mathbf{p}^{O''/O''}$	- vetor posição do centro do mancal em relação à base do mancal no referencial não inercial	[m]
$\mathbf{p}^{O_i/O_i''}$	- vetor posição do centro do mancal em relação à base do mancal, no referencial inercial	[m]
$\mathbf{p}^{O''/O_i''}$	- vetor posição da base do mancal, no referencial não inercial, em relação à base do mancal, no referencial inercial	[m]
$\mathbf{p}^{O_1/O_i}$	- vetor posição do centro do mancal em relação ao centro do rotor, no referencial inercial	[m]
$\mathbf{p}^{O_i/O_i''}$	- vetor posição do centro do mancal em relação à base do mancal, no referencial inercial	[m]
$p^{R/O}$	- vetor posição do centro de massa do rotor em relação ao ponto O, no referencial não inercial	[m]
$\mathbf{p}^{R/O'}$	- vetor posição do ponto R em relação ao ponto $O_1$	[m]
$\mathbf{p}^{R/O_1'}$	- vetor posição do ponto R em relação ao ponto $O_1'$	[m]
R	- ponto onde está localizado o centro de massa do disco	[-]
$u_Y^F$	- módulo do deslocamento da fundação na direção horizontal	[m]
$\dot{u}_Y^F$	- módulo da velocidade da fundação na direção horizontal	[m/s]
$\ddot{u}_Y^F$	- módulo da aceleração da fundação na direção horizontal	[m/s <sup>2</sup> ]
$u_Z^F$	- módulo do deslocamento da fundação na direção vertical	[m]
$\dot{u}_Z^F$	- módulo da velocidade da fundação na direção vertical	[m]
$\ddot{u}_Z^F$	- módulo da aceleração da fundação na direção vertical	[m]
$u_Y^M$	- módulo do deslocamento do eixo no mancal na direção horizontal	[m]

$\dot{u}_y^M$	- módulo da velocidade do eixo no mancal na direção horizontal	[m/s]
$u_z^M$	- módulo do deslocamento do eixo no mancal na direção vertical	[m]
$\dot{u}_z^M$	- módulo da velocidade do eixo no mancal na direção vertical	[m/s]
$u_{0z}^M$	- altura do mancal em relação à base do mesmo	[m]
$u_x^R$	- deslocamento do rotor na direção horizontal, paralelo ao eixo	[m]
$u_y^R$	- deslocamento do rotor na direção horizontal	[m]
$\dot{u}_y^R$	- velocidade do rotor na direção horizontal	[m/s]
$\ddot{u}_y^R$	- aceleração do rotor na direção horizontal	[m/s <sup>2</sup> ]
$u_z^R$	- deslocamento do rotor na direção vertical	[m]
$\dot{u}_z^R$	- velocidade do rotor na direção vertical	[m/s]
$\ddot{u}_z^R$	- aceleração do rotor na direção vertical	[m/s <sup>2</sup> ]
$\mathbf{v}^R$	- velocidade do disco	[m/s]
$\mathbf{v}^F$	- velocidade da fundação	[m/s]
$\mathbf{X}$	- direção horizontal dos sistemas de coordenadas no plano perpendicular ao plano do disco	[-]
$\mathbf{Y}$	- direção horizontal dos sistemas de coordenadas no plano paralelo ao plano do disco	[-]
$\hat{\mathbf{y}}$	- versor na direção horizontal de deslocamento dos componentes do sistema	[-]
$\mathbf{Z}$	- direção vertical dos sistemas de coordenadas no plano paralelo ao plano do disco	[-]
$\hat{\mathbf{z}}$	- versor na direção vertical de deslocamento dos componentes do sistema	[-]

***Letras gregas***

$\alpha^C$	- aceleração angular da fundação	[rad/s <sup>2</sup> ]
$\phi_x^F$	- ângulo do centro de massa da fundação em relação ao eixo vertical no referencial inercial	[rad]
$\phi$	- posição angular da fundação	[rad]
$\dot{\phi}$	- velocidade angular da fundação	[rad/s]
$\rho_f$	- densidade da fundação	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\theta$	- ângulo da posição do centro de massa do disco em relação ao eixo vertical	[rad]

$\dot{\theta}$ - velocidade angular do disco	[rad/s]
$\ddot{\theta}$ - aceleração angular do disco	[rad/s <sup>2</sup> ]
$\omega$ - velocidade de rotação do eixo	[rad/s]
$\omega^C$ - velocidade angular da fundação	[rad/s]
${}^I\omega^R$ - velocidade angular do referencial do rotor no referencial inercial	[rad/s]
${}^R\omega^I$ - velocidade angular do referencial inercial no referencial do rotor	[rad/s]
$\Omega$ - frequência de rotação do eixo	[rad/s]
$\ddot{\mathbb{I}}^{C/O''}$ - tensor de inércia da fundação	[-]

# SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
2 REVISÃO DA LITERATURA	3
3 MODELO DOS MANCAIS	24
4 MODELOS DE SOLO	29
5 MODELOS MATEMÁTICOS	38
6 RESULTADOS	73
7 CONCLUSÕES	114
BIBLIOGRAFIA	116
APÊNDICE A	124
APÊNDICE B	134

# 1. INTRODUÇÃO

Máquinas rotativas são amplamente utilizadas para os mais variados fins e conhecer o comportamento dessas máquinas é muito importante, embora a análise desse comportamento seja bastante complexa. Para se estudar o comportamento dinâmico desses sistemas é necessário determinar a interação de todos os componentes da máquina.

Nas últimas três décadas houve um desenvolvimento notável em métodos e tópicos de pesquisa a respeito da análise da dinâmica de máquinas rotativas. Um dos tópicos que têm atraído a atenção de pesquisadores é a interação de máquinas rotativas com suas estruturas de suporte. Sabe-se que a dinâmica da estrutura pode exercer um importante papel na resposta do rotor. Mas há um tópico que ainda não recebeu a atenção que deveria. As estruturas de suporte do rotor estão colocadas sobre uma fundação e esta fundação interage com suas vizinhanças e com o solo. A questão da influência da fundação e do solo na resposta do rotor ainda não foi completamente estudada. Tentativas anteriores de descrever o comportamento do sistema rotor-fundação-solo são limitadas a modelos muito simples de solo.

O objetivo deste trabalho é estudar a influência do solo no comportamento de máquinas rotativas. Isto foi feito através de um modelo rotor-mancais-fundação-solo. Variou-se o tipo de solo, considerando um semi-espaço e um solo do tipo camada sobre base rígida, sendo este último um solo com um aumento repentino de rigidez a uma determinada profundidade. Em cada um destes solos, houve uma variação do amortecimento interno. Além disso, para o solo do tipo camada sobre base rígida, houve uma variação da espessura dessa camada. Estes solos são caracterizados pela densidade, coeficiente de Poisson e módulo de cisalhamento, e são considerados viscoelásticos. Os modelos destes solos, utilizados neste trabalho, são modelos numéricos e foram obtidos utilizando o método dos elementos de contorno.

Também foram utilizados dois tipos de mancais: rígidos ou hidrodinâmicos, tendo sido feita uma análise do comportamento do sistema com cada um deles e, assim, verificando a influência destes no sistema.

O modelo de rotor utilizado foi o tipo Jeffcott (Laval), sendo um disco rígido em um eixo flexível. O disco está no centro do eixo e, por isso, o efeito giroscópico foi desprezado neste trabalho.

A fundação utilizada é do tipo bloco rígido e está apoiada sobre o solo. Neste caso, não foram estudados os efeitos de engastamento da mesma, assim como os efeitos dela inclinada no solo.

O sistema todo foi desenvolvido vetorialmente, tendo sete graus de liberdade: dois para o rotor, dois para os mancais e três para a fundação. Os graus de liberdade do solo foram eliminados através da inclusão das forças deste na fundação. O sistema foi linearizado, eliminando-se os termos de segunda ordem e os termos acoplados. Os resultados foram obtidos no domínio da frequência, e alguns parâmetros foram adimensionalizados.

No desenvolvimento da dissertação de mestrado de Ramalho (2006), foi analisada a interação rotor-fundação-solo priorizando efeitos de natureza geométrica, como altura dos pedestais dos mancais, bem como a relação de massa entre o rotor e a fundação, entre a fundação e solo, e também a frequência natural do rotor com a velocidade de propagação de onda no solo. Foi selecionado um exemplo cujos efeitos do solo eram expressivos para a análise desenvolvida no presente trabalho, agregando a flexibilidade dos mancais hidrodinâmicos no sistema.

Para a apresentação deste trabalho, foi feita primeiramente uma revisão da literatura (capítulo 2), então foram apresentados os modelos de mancais hidrodinâmicos (capítulo 3) e em seguida, de solo (capítulo 4). Então foi desenvolvido o modelo matemático do sistema (capítulo 5), sendo primeiramente apresentado um modelo somente com o rotor, depois um modelo do rotor com os mancais, rotor com mancais e fundação e, neste último, foram incluídos os efeitos do solo. Em seguida, são mostrados os resultados obtidos destes sistemas, e por último, as conclusões. São apresentados também dois apêndices, onde é mostrado um efeito do solo no sistema observado nos resultados (apêndice A) e o equacionamento dos mancais (apêndice B).

## 2. REVISÃO DA LITERATURA

Segundo Nelson (2003), o estudo da dinâmica de rotores começou quando W. J. M. Rankine fez uma análise de um eixo girando, em 1869, mas esse eixo não era adequado e Rankine previu que não seria possível atingir velocidades supercríticas. Mais tarde Dunkerley publicou um trabalho experimental descrevendo velocidades supercríticas, em 1895. Em 1889, Carl Gustaf De Laval fez uma turbina funcionar em velocidade supercrítica e em 1916, Kerr apresentou uma evidência experimental de uma segunda velocidade crítica.

Desde então, máquinas rotativas têm sido amplamente utilizadas para os mais variados fins, e saber como estas máquinas se comportam tornou-se fundamental. As máquinas rotativas são geralmente compostas por eixos, mancais, fundação e outros equipamentos, e por isso, a análise dessas máquinas é bastante complexa. Para se estudar o comportamento dinâmico desses sistemas, é necessário determinar a interação entre todos os componentes. O comportamento dessas máquinas é significativamente influenciado pelo comportamento da fundação. As primeiras pesquisas para estudar tais sistemas foram baseadas em modelos simples, que variavam entre um, dois ou três sistemas de massas, onde não era considerada a rigidez flexional da fundação(CAVALCA, 2001).

Segundo Krämer (1993), o Rotor Jeffcott foi introduzido em 1895 por Föppl, e foi chamado posteriormente de Jeffcott, quando este explicou a ciência da dinâmica de rotores em 1919, de uma forma descritiva e clara, utilizada até hoje. Desenvolvimentos desde os primórdios podem ser resumidos como segue:

- 1869. Rankine observou a existência de velocidades críticas(KRÄMER,1993).
- 1883. Laval construiu o rotor, que depois levou o seu nome, e resolveu o problema de operação silenciosa – em uma faixa de operação superior a 40.000 rpm – utilizando um eixo extremamente flexível. Concentrou os esforços na autocentralização do eixo em velocidades superiores à velocidade crítica, um fenômeno que ele intuitivamente identificou (KRÄMER,1993).

- 1895. As investigações fundamentais de Dunkerley e Föppl surgiram. Assim, percebeu-se que um eixo tem algumas velocidades críticas e que, sob certas circunstâncias, estas eram as mesmas frequências naturais de um eixo em repouso. Com o objetivo de calcular as velocidades críticas de eixos cilíndricos com alguns discos e mancais, a teoria de Reynolds foi aplicada. O efeito giroscópico foi também considerado, levando-se em consideração sua dependência com a velocidade. A solução no domínio da frequência só era possível, naquela época, para modelos simples (KRÄMER, 1993).

- 1910. Stodola apresentou um procedimento descritivo para calcular velocidades críticas, que foi amplamente utilizado até o advento de computadores digitais, sendo então substituído pelo método da matriz de transferência de Myklestad e Prohl (KRÄMER, 1993).

Em 1976, Gasch analisou, utilizando elementos finitos, um turbo-rotor, onde considerou os amortecimentos externo e interno, forças do filme de óleo e forças giroscópicas. Porém, teve que introduzir algumas centenas de graus de liberdade. Na seqüência, a dinâmica da fundação foi introduzida nas equações do rotor através da formulação da receptância. As matrizes de receptância poderiam ser obtidas tanto a partir de testes com shakers como da análise dos modos da fundação sem o eixo.

Em 1984, Gasch, Maurer. e Sarfeld desenvolveram as equações de um rotor simples (Jeffcott ou Laval) para uma fundação rígida sobre um meio elástico (solo), calcularam a resposta ao desbalanceamento e o limite de estabilidade do sistema, e mostraram sob quais circunstâncias uma melhoria do comportamento dinâmico poderia ser obtida pela influência do solo e da fundação. As equações do movimento foram desenvolvidas e resolvidas com o objetivo de encontrar a resposta ao desbalanceamento da fundação e do rotor. E verificou-se que o solo, sendo um meio elástico, poderia ter uma influência positiva no funcionamento suave dos rotores. Assim, através da radiação de energia no solo, a resposta ao desbalanceamento e a estabilidade poderiam ser melhoradas.

Um método de elementos finitos para a análise de uma fundação considerada como uma viga elástica contínua foi desenvolvida por Mourelatos e Parsons (1987). Este método utilizou um modelo tridimensional de fundação e levou em conta os modelos de Filonenko-Borodich e Pasternak de forma consistente e completa. Mostrou-se, através de exemplos numéricos, a

precisão do método e a importância dos esforços axiais e de cisalhamento e a interação entre estes esforços associados a uma fundação contínua e elástica. O método foi aplicado a um rotor suportado por dois mancais hidrodinâmicos.

Posteriormente, Mesquita (1990) apresenta um método para descrever o comportamento dinâmico de rotores interagindo através do solo, verificando a resposta ao desbalanceamento do rotor. Observou-se que os mecanismos de acoplamento do solo não são significantes o suficiente para provocar alterações nas frequências naturais dos sistemas. Por outro lado, o meio pode induzir frequências de ressonância em faixas de baixa frequência.

Em 1993, Choy, Padovan e Qian tinham como objetivo melhorar, em equipamentos rotativos, a capacidade de controlar uma variedade de acontecimentos associados a projeto, induzidos por excitações sísmicas do piso ou da base, mudanças de folgas ou desalinhamentos termicamente induzidos, atrito intermitente ou contínuo entre palhetas-carcaça, disco-carcaça ou eixo-carcaça. Para isso, averiguaram qualitativamente as características de resposta devidas ao atrito múltiplo das variações paramétricas na geometria do sistema, propriedades dos materiais, e fontes existentes. Tal informação é necessária para os projetistas que tentam minimizar os riscos potenciais de eventos catastróficos (perda de palhetas, movimento sísmico ou movimento excessivo da base), etc.

A inclusão dos efeitos da fundação em vibrações de máquinas rotativas exige o conhecimento dos parâmetros desta, que devem ser obtidos experimentalmente. Feng e Hahn (1995) desenvolveram uma técnica para identificar tais parâmetros. Mostrou-se experimentalmente que a precisão dos resultados depende da precisão das medidas e do número de medidas. Por outro lado, verificou-se que a precisão dos resultados não exige um modelo muito preciso do rotor ou da distribuição real do desbalanceamento.

Na mesma época, Liu e Novak (1995) desenvolveram um método híbrido para estabelecer um modelo matemático do sistema turbina-gerador-fundação, incluindo todos os componentes principais e auxiliares. Neste método, a análise foi feita no domínio da frequência. A resposta no domínio do tempo foi obtida pela transformada inversa de Fourier. A excitação sísmica foi representada como um movimento controlado da superfície do solo. Este método foi utilizado para analisar a maioria das interações solo-estrutura. Um sistema turbina-gerador-fundação de

300MW foi analisado sob excitações de desbalanceamento do rotor e de terremotos. A influência da carcaça e da anisotropia do solo na resposta do sistema foi explorada e verificou-se que estas influenciaram fortemente os deslocamentos e as forças internas do sistema sob a excitação do rotor desbalanceado. Sob excitações sísmicas, entretanto, apesar da presença da carcaça e do solo anisotrópico afetarem os deslocamentos do sistema, o efeito destes nas forças internas do sistema foi mínimo.

Em 1996, Redmond apresentou um procedimento prático para extrair parâmetros dinâmicos da estrutura de suporte para uso em modelagem de sistemas rotordinâmicos. Para tanto, utilizou dados obtidos a partir de um teste de impacto em campo. A influência do rotor, que normalmente é estabelecida nos testes de campo, foi considerada para permitir uma estimativa precisa das características de suporte. A base teórica para a aproximação foi demonstrada brevemente, e dados experimentais foram apresentados, confirmando a validade da técnica. O procedimento apresentado conduziu à identificação dos coeficientes dinâmicos (diretos e cruzados) do suporte. Um exemplo prático foi analisado em detalhes e mostrou que a exclusão ou a inclusão imprecisa dos termos cruzados leva a erros significativos.

Smart et al. (1996) desenvolveram um método para identificar os parâmetros da fundação através de dados da desaceleração do rotor, assumindo modelos precisos do rotor, algum conhecimento dos mancais, um bom conhecimento do desbalanceamento e medidas das vibrações dos suportes. Investigaram-se os efeitos dos erros na estimativa de parâmetros. Uma relação geral de entrada e saída foi criada. A sensibilidade entre erros nos modelos de mancais, na resposta medida e no desbalanceamento, foi mostrada.

Em 1997, Lees e Friswell apresentaram um método para determinar o desbalanceamento de uma máquina rotativa utilizando a medida da vibração do suporte (pedestal). As únicas exigências do procedimento consistiam num bom modelo numérico para o rotor e num modelo aproximado para o comportamento dos mancais. Nenhuma suposição foi feita a respeito do modo operacional da placa do rotor e a influência da estrutura de suporte foi incluída de maneira consistente. Foram apresentados exemplos de sistemas com dois mancais.

Em 1998, Prells et al. desenvolveram um trabalho com o objetivo de minimizar o efeito da incerteza do modelo do filme de óleo de um mancal hidrodinâmico na estimativa do modelo da

fundação a partir de medidas da desaceleração de um turbo-gerador. Para isso, um método foi apresentado para identificar a matriz de transferência dinâmica, relacionando o vetor resposta da fundação nos mancais a uma força estimada que é insensível ao modelo do filme de óleo. Analiticamente, essa matriz de transferência foi relacionada àquela da fundação simplesmente pela multiplicação da matriz de transformação, que só depende do modelo do rotor e do filme de óleo, e que naturalmente mantém a sensibilidade do problema original com respeito ao modelo do filme de óleo. Desde que a avaliação do erro da matriz de transferência robusta estimada fosse mínimo, o erro retido seria devido principalmente a um modelo errôneo do filme de óleo, utilizado na matriz de transformação. O uso de uma estimativa robusta para calcular a contribuição do suporte na dinâmica da máquina, montada para variações do modelo do filme de óleo, aumentou a confiança nas previsões.

Irretier (1999) apresentou modelos matemáticos de fundações para análise modal experimental de estruturas rotativas. Estes foram caracterizados por matrizes não-simétricas e variantes no tempo. As equações do movimento foram resolvidas pela transformação modal para deduzir as funções resposta ao impulso e em frequência, que formaram a base dos algoritmos de identificação modal no domínio do tempo e da frequência, respectivamente. As suposições clássicas na análise modal experimental são linearidade, invariância no tempo e reciprocidade da estrutura considerada. Enquanto que, para pequenos deslocamentos, a linearidade é uma aproximação suficientemente precisa, na dinâmica de rotores as suposições da invariância no tempo e da reciprocidade são violadas em diversas aplicações devido a várias razões, como anisotropias da distribuição de massa dos discos ou da rigidez do eixo e mancais ou dos efeitos giroscópicos. Conseqüentemente, algoritmos de identificação modal devem ser baseados na expansão modal das equações relacionadas ao movimento de sistemas invariantes no tempo com matrizes não simétricas. Nas considerações de Irretier, sistemas rotativos foram classificados pelas propriedades das suas equações de movimento. A dedução das funções resposta ao impulso e frequência foi discutida, pois constituem a base de várias técnicas amplamente utilizadas de separação de fase de algoritmos de extração modal.

Em 2000, Kang et al. fizeram um estudo dos efeitos da fundação em sistemas rotor-mancal. A modelagem e a análise dos sistemas rotor-mancal-fundação baseadas no método dos elementos finitos foram discutidas. Um procedimento de sub-estruturas que inclui os efeitos da fundação

nas equações do movimento foi discutido. Os critérios de projeto da fundação para máquinas rotativas, evitando ressonância e omitindo a reação, também foi enfatizado através de exemplos numéricos. Foram estudados três tipos de fundação: um bloco, uma viga e uma fundação tipo placa.

Edwards, Lees, e Friswell, (2000) desenvolveram um método para identificar os parâmetros de excitação e flexibilidade do suporte de sistemas rotor-mancal-fundação, verificando este método experimentalmente. Além do desbalanceamento da massa, a excitação devido à curvatura do rotor foi incluída no método, que tem um grande potencial na prática, desde que se possa desenvolver o balanceamento utilizando dados obtidos de uma única aceleração ou desaceleração do rotor. Utilizando esta técnica de balanceamento em uma única tentativa, níveis de vibração de um rotor experimental foram reduzidos com sucesso a menos de um décimo dos níveis originais. A geometria da curvatura de um rotor também foi precisamente identificada e mostrou-se que, incluindo-se a curvatura do rotor nos casos onde somente o desbalanceamento forçado estava presente, não ocorreu diminuição da precisão do desbalanceamento estimado ou dos parâmetros de fundação. A identificação dos parâmetros da fundação flexível foi bem sucedida, com medidas e estimativas muito próximas na maioria dos casos. O método de identificação foi testado para uma ampla faixa de condições, e mostrou ser adequadamente robusto para mudanças na configuração do sistema, considerando dados com ruído de medição e erros de modelagem.

Estimar um modelo da fundação de grandes máquinas é vital para tarefas como diagnóstico de falhas e balanceamento modal. Infelizmente, raramente é possível desenvolver um teste modal nas fundações sem a presença do rotor. Smarty, Friswell, e Lees (2000) consideraram um método para estimar um modelo da fundação, utilizando dados da desaceleração do rotor, onde o desbalanceamento inerente do rotor excita a fundação. O método requer um modelo preciso do rotor e um modelo aproximado dos mancais. A qualidade do modelo apresentou importância crítica, o que pode ser definido como a capacidade do modelo predizer a resposta das excitações de desbalanceamento. Mostrou-se que a seleção correta do modelo e a regularização são vitais para produzir o modelo da fundação que encontra esse critério de previsibilidade. O método foi validado utilizando dados simulados e também dados experimentais de equipamentos de teste.

Efeitos dinâmicos da estrutura de suporte são importantes na análise de vibrações de um rotor. Isto pode ser proveitoso em máquinas reais tais como bombas centrífugas ou turbinas

operando em estruturas flexíveis. Choi e Park (2001) sugeriram uma melhoria no modelo do rotor pela inclusão dos efeitos atuantes no sistema rotor-mancal. As FRFs da estrutura foram utilizadas para extrair os modelos massa-mola que têm as mesmas características dinâmicas da estrutura de suporte. Esses modelos reproduzidos foram diretamente inseridos no rotor. Por outro lado, o método da impedância acoplada, freqüentemente utilizado em problemas de vibrações estruturais, foi apresentado para verificar a técnica de modelagem sugerida. Esta técnica é baseada nas FRFs de cada sub-estrutura e condições de restrição de coordenadas de interface. Para demonstrar a aplicabilidade e validade do método dos procedimentos analíticos, estes foram aplicados no rotor de uma bomba centrífuga de dupla sucção. Como resultado, os métodos mostraram uma grande concordância entre si.

Um modelo de impedância mecânica de um sistema acoplado rotor-mancal-fundação foi desenvolvido por Bonello e Brennan (2001). Esta modelagem aproximada tem a vantagem de poder adaptar uma combinação de modelos teóricos e experimentais na descrição do sistema acoplado. Duas versões do modelo foram ilustradas, uma inteiramente teórica onde a fundação foi modelada como uma viga, e um modelo híbrido que incluiu algumas medidas da dinâmica da fundação. Há um erro na previsão do modelo teórico, porque o movimento torsional da fundação foi negligenciado, este erro foi superado no modelo híbrido. Efeitos giroscópicos foram negligenciados no equipamento de teste utilizado, e para este estudo, um teste estacionário, utilizando um martelo de impacto, verificou todos os aspectos do modelo desenvolvido, exceto pela suposição de comportamento linear dos mancais de esferas sob condições de rotação. A forma das órbitas medidas mostrou que em baixas velocidades não-linearidades eram evidentes nos equipamentos de testes. Entretanto, estas não-linearidades desapareciam em altas velocidades e órbitas circulares, como as previstas pelo modelo, foram observadas. As principais vantagens do método foram um reduzido número de graus de liberdade e a facilidade de incluir no modelo medidas da dinâmica da fundação, onde isto é possível, ou um modelo analítico da fundação. O método análogo da rigidez dinâmica mostrou-se capaz de determinar as frequências naturais e instabilidades nas velocidades iniciais de modelos de rotor-mancal com modelos linearizados de mancais hidrodinâmicos. Além disso, apesar da impedância mecânica e da rigidez dinâmica análoga serem ostensivamente aplicadas a sistemas lineares, estas podiam ser aplicadas a problemas onde elementos lineares são acoplados a elementos não-lineares, por exemplo, um rotor sustentado por mancais de escorregamento. As funções resposta em frequência, facilmente e

diretamente calculadas com tais métodos para sub-sistemas lineares, podiam ser incluídas nos cálculos de balanceamento harmônico para sistemas não lineares combinados.

Segundo Sinha, Friswell e Lees (2002), estudos de estimativas de modelos de fundação flexível e do estado de desbalanceamento de um turbo gerador, a partir de dados de vibração medidos na desaceleração da máquina, utilizavam toda a faixa de frequência de desaceleração como sendo uma única faixa. Entretanto, essa identificação poderia ser imprecisa para grandes fundações flexíveis que têm muitos modos na faixa de frequência em desaceleração. Para uma identificação confiável, toda a faixa de frequência deveria ser dividida em um número de sub-faixas de frequência e os modelos da fundação dependentes da frequência teriam que ser estimados junto ao desbalanceamento. Sinha, Friswell, e Lees, combinaram a estimativa do desbalanceamento com a faixa de frequência segmentada para o modelo da fundação e destacaram as limitações observadas durante a estimativa do modelo da fundação e o estado de desbalanceamento. Tendo estabelecido o método na simulação, dados experimentais de um equipamento de teste foram utilizados para verificar o método. A aproximação obteve estimativas confiáveis do desbalanceamento da máquina, mesmo na presença de erros de modelagem e ruídos nas medições.

Posteriormente, Sinha, Lees, e Friswell, (2004) combinaram a estimativa do desbalanceamento com a faixa de frequências segmentada para o modelo da fundação e as limitações observadas durante a estimativa dos modelos da fundação e o estado de desbalanceamento. Mostra-se que a precisão do método pode ser melhorada por uma escolha criteriosa da função do carregamento. Tendo estabelecido o método na simulação, dados experimentais de um equipamento de teste de mancais foram utilizados para testar o método. Este método combinado pareceu ser o mais confiável para a estimativa dos modelos da fundação dependentes da frequência e o estado de desbalanceamento. Este método é igualmente robusto para dados com ruído de medição e erros de modelagem.

Araújo et al. (2004) apresentaram um procedimento para calcular a resposta dinâmica de fundações tridimensionais, rígidas ou flexíveis, com qualquer forma geométrica e sob um arranjo espacial acoplado com o solo. Novos desenvolvimentos que dizem respeito ao uso de elementos de contorno / algoritmos acoplado elementos de contorno para resolver problemas

tridimensionais harmônicos no tempo foram descritos. Os algoritmos são solucionados através da consideração de diferentes métodos de cálculos iterativos. A idéia principal foi trabalhar com a matriz de espaçamento global do sistema acoplado, entretanto excluindo os muitos blocos de zeros associados aos nós não acoplados de diferentes sub-regiões. O uso de métodos de cálculos iterativos torna possível acumular e manipular somente as matrizes com coeficientes não nulos. Métodos de cálculos iterativos baseados em Lanczos, gradiente bi-conjugado e métodos generalizados de resíduos mínimos foram utilizados para desenvolver os algoritmos acoplados de elementos de contorno. Uma descrição da formulação desses métodos de cálculos, que são completamente gerais e podem ser aplicados em qualquer sistema não singular e não isolado, foi fornecida. O desempenho dos algoritmos foi verificado através da solução de alguns problemas de interação fundação-solo.

Hirdaris e Lees (2005) propuseram uma aproximação para modelar o comportamento dinâmico de vigas e armações adequadamente. Ainda que as auto-frequências de sistemas contínuos constituídos por vigas esbeltas possam ser identificados, na maioria dos casos de interesse prático, através da teoria de vigas de Euler e Timoshenko, para estruturas compostas por vigas espessas este modelo não é necessariamente válido, pois tais idealizações restringem as seções transversais que permanecem planas. Hirdaris e Lees sugeriram uma abordagem alternativa por meio de um plano de tensões retangular completamente unificado de acordo com os elementos finitos, que deve permitir uma representação mais real dos efeitos do cisalhamento e, então, do campo de tensões ao redor das junções de tal estrutura. A utilidade e funcionalidade dessa aproximação numérica melhorada foram exploradas através de comparações contrapondo uma chapa bidimensional, não correspondente com as formulações por elementos finitos de Euler-Bernouli e Timoshenko, com uma unidimensional correspondendo a estas formulações, equivalente a uma variedade de aspectos da viga em relação à representação das estruturas de um rotor e de uma armação. A idealização mostrou-se particularmente vantajosa para simulação de efeitos de distorção de cisalhamento, onde junções de vigas se unem em ângulos retos e as forças transversais em um membro interagem com as forças de dilatação da estrutura de junção.

Visualizar a complexa e não intuitiva fenomenologia associada com dinâmica de rotores tem sido um problema desde que Rankine primeiramente fez um estudo científico nos idos 1900. Para tratar disso, um modelo simples capaz de permitir a visualização de parâmetros e aspectos

problemáticos associados com um rotor desbalanceado (rotor Jeffcott) foi proposto utilizando diagramas vinculados, que fornecem um método estruturado e unificado para modelar um grande grupo de sistemas não lineares, multi-energéticos. A proposta de Campos, Crawford e Longoria (2005) foi fornecer um modelo de diagramas vinculados do rotor Jeffcott de alta fidelidade, provado experimentalmente, para auxiliar no projeto e análise de máquinas rotativas de alta velocidade frequentemente associadas a sistemas de energia vibratórios. O foco do modelo foi a capacidade de uso como uma parte modular e fundamental em sistemas rotordinâmicos mais complexos.

Cavalca, et al. (2005) apresentou uma metodologia para analisar a influência da estrutura de suporte ou da fundação no sistema rotor-mancal. O procedimento matemático aplicou uma aproximação modal utilizando parâmetros modais de massa generalizada, razão de amortecimento e frequências naturais. O método dos elementos finitos foi utilizado para modelar o rotor. O modelo linear da fundação foi obtido por aproximação modal para reduzir o número de graus de liberdade do modelo da fundação. Os parâmetros modais da fundação foram estimados utilizando as FRFs obtidas experimentalmente e suas respectivas Transformadas de Fourier. Uma análise da resposta em frequência do sistema completo foi feita considerando coordenadas físicas para o sistema rotor mancais e coordenadas principais para a fundação. A convergência da metodologia apresentada foi verificada e o efeito da fundação flexível na resposta do sistema completo foi analisado.

Atualmente, instalações de turbogeradores são sistemas rotor-mancal-fundação estaticamente indeterminados utilizando mancais hidrodinâmicos não lineares. Para um balanceamento ideal e objetivando diagnósticos, é importante poder prever corretamente o comportamento das vibrações do sistema na faixa de operação de velocidades. Aspectos essenciais do problema envolvem a identificação do estado de desbalanceamento, identificação adequada dos parâmetros dinâmicos da fundação, e identificação da condição de configuração do sistema (localização relativa dos suportes dos mancais). Chen et al. (2005) mostraram que, se a resposta do sistema é periódica em algumas velocidades na faixa de operação e medidas apropriadas do rotor e dos suportes dos mancais são feitas, é possível, a princípio, concluir satisfatoriamente as identificações acima sem utilizar a equação de Reynolds para calcular as

forças dos mancais. Resultados preliminares indicaram que as identificações feitas podem ser superiores às aquelas aproximadas que utilizaram a equação de Reynolds.

A identificação de falhas através de técnicas baseadas em modelos, tanto no domínio do tempo como da frequência, têm sido freqüentemente empregadas no diagnóstico de máquinas rotativas, quando a principal tarefa é localizar e calcular a severidade do mal funcionamento. O modelo completo da máquina foi composto de sub-modelos do rotor, dos mancais e da fundação, enquanto o efeito das falhas foi modelado através de sistemas de forças equivalentes. Algumas técnicas de identificação, como a dos mínimos quadrados no domínio da frequência, utilizada por Pennacchi et al. (2005) mostraram-se robustas, ainda que os sub-modelos não fossem tão refinados. De qualquer forma, o uso de um modelo confiável pode aumentar a precisão da identificação.

Normalmente, a estrutura de suporte é representada por uma fundação rígida ou por pedestais, i.e. sistemas massa-mola-amortecedor com 2 g.d.l., mas freqüentemente esse tipo de modelo não reproduz corretamente a influência do comportamento dinâmico da estrutura de suporte do eixo, principalmente em grandes máquinas, onde modos acoplados estão presentes. Pennacchi et al. (2005) utilizaram um modelo modal da fundação para a estrutura de suporte da máquina. O método foi discutido em detalhes. A representação modal da fundação foi introduzida pela técnica dos mínimos quadrados no domínio da frequência. O método discutido foi validado utilizando dados experimentais de um turbo-gerador a vapor de 320MW. Este foi o primeiro caso de identificação de falhas com dados reais de uma grande máquina, onde a estrutura de suporte foi levada em consideração, através de um modelo modal.

Neste estágio do conhecimento, o estudo do comportamento dinâmico do solo é essencial para verificar sua influência no comportamento de máquinas rotativas. Em 1978, Sterphenson mediu os módulos de cisalhamento  $G$  e de elasticidade  $E$  de um solo de lodo arenoso através de medidas diretas da velocidade ultra-sônica longitudinal e da velocidade de cisalhamento transmitidas através do material. O equipamento desenvolvido permitiu fazer testes dinâmicos não destrutivos dos materiais do solo, conduzidos rápida e facilmente.

Em 1984, Zaman et al. desenvolveram um elemento de camada fina simples e utilizaram-no em um procedimento de elementos finitos para a simulação de vários modos de deformação na interação solo-estrutura. O comportamento da interface foi definido pela decomposição nos componentes normais e de cisalhamento. O solo foi modelado como um material elasto-plástico. Um procedimento numérico foi utilizado para prever o comportamento de um modelo de estrutura testado em campo, e a influência do comportamento na interface dos deslocamentos, velocidades e acelerações foi esboçado.

Segundo Wong (1984), incertezas na interação dinâmica solo-estrutura foram divididas em dois grupos: incertezas do modelo e incertezas dos parâmetros. As incertezas de modelagem foram associadas com as diferenças entre o fenômeno real e o modelo, as incertezas de parâmetros foram aquelas nos parâmetros que participaram na definição do modelo. O autor descreveu um método para calcular o efeito das incertezas de parâmetros na resposta dinâmica de um sistema solo-estrutura. O método consistiu no desenvolvimento de uma função que gradualmente se aproxima da resposta real, baseado em um número limitado de cálculos. O método agregou a análise de sensibilidade tradicional e pode ser considerado como uma extensão do método da derivada parcial ou de primeira ordem.

Em 1992, Nogami et al. apresentaram um modelo de interação dinâmica solo-estrutura. Neste modelo, os autores adotaram a hipótese de Winkler com atenção às condições nas quais grandes não-linearidades são induzidas nas adjacências da estrutura sob carregamento dinâmico. O modelo foi formulado num sistema simples de massa, rigidez e amortecimento independentes da frequência. Assim, o modelo permitiu conduzir análises não lineares de maneira relativamente simples. Como o modelo reproduziu os efeitos dinâmicos sozinho, seus parâmetros foram definidos do comportamento estático do sistema solo-estrutura.

Em 1994, Velestos e Younan fizeram uma avaliação crítica da pressão dinâmica e das forças associadas induzidas pelo movimento do solo numa parede vertical fina e rígida, com uma camada viscoelástica uniforme semi-infinita de espessura constante. Os efeitos das excitações harmônicas e induzidas por movimentos do solo foram examinados. Equações simples, aproximadas para as respostas do sistema, foram desenvolvidas, e dados numéricos foram

apresentados para mostrar os efeitos e a importância dos vários parâmetros envolvidos. As soluções foram comparadas com aquelas obtidas previamente através de um modelo simples proposto por Scott, e a precisão deste modelo foi avaliada. Finalmente, duas versões de um modelo alternativo foram propostas com uma melhor aproximação do sistema real. Na primeira versão, as propriedades do modelo foram definidas por parâmetros dependentes da frequência, e na segunda, esses parâmetros foram constantes e, portanto, independentes da frequência.

Em 1995, Wu simulou o solo de uma estrutura como sendo um meio poroso de duas fases saturadas. As equações dinâmicas do meio poroso e as formulações por elementos finitos, baseadas nos princípios variacionais, foram obtidas. Para a análise estrutural, a técnica de subestruturas de vários níveis foi utilizada, e a análise do solo saturado foi feita no nível mais alto do modelo da subestrutura. Para o tratamento da reflexão de ondas nas fronteiras artificiais dos elementos finitos na fundação semi-infinita, o método de Smith generalizado de não reflexão de contorno foi desenvolvido. Baseado nessas teorias, um programa de análise dinâmica por elementos finitos para a análise da interação entre as fases saturadas do solo e da estrutura foi desenvolvido. Verificou-se que o coeficiente de impermeabilidade do solo saturado influenciou na força entre estruturas. Com o aumento do módulo de elasticidade do solo, os valores do momento fletor da seção transversal do elemento da estrutura foram reduzidos, porém as forças axiais aumentaram. Com o aumento do tamanho do módulo dos poros de água, os valores das forças entre estruturas foram reduzidos, exceto pela seção transversal média do momento fletor da base da estrutura tipo placa no vão médio.

Em 1995, Gajo fez uma análise detalhada nos efeitos do acoplamento viscoso nos mecanismos de propagação de ondas transientes, em um meio poroso saturado, apresentando uma fase sólida e outra fluída. O autor considerou a propagação de ondas em pulsos de formas simples (degrau, seno, triangular), para um acoplamento viscoso constante e um dependente da frequência. O autor deu atenção à interpretação das medidas do teste dinâmico do solo. Os resultados mostraram que é possível identificar dois tipos extremos de comportamento transiente: no primeiro, o meio poroso comportava-se como um meio bifásico, no qual a velocidade de propagação correspondia a um acoplamento viscoso nulo; no segundo, o comportamento correspondia a um meio monofásico, com velocidade de propagação correspondente a um

acoplamento viscoso infinito. Existe uma transição gradual entre esses dois comportamentos extremos, mas isto só é válido para condições específicas.

Em 1996, Gajo reviu várias estimativas teóricas e experimentais de modelos de acoplamentos dinâmicos de meios porosos saturados. Essas aproximações resultaram em valores de acoplamentos dinâmicos não muito diferentes uns dos outros, e mostraram que a faixa de valores deste tipo de acoplamento era estreita. Os efeitos deste acoplamento na velocidade de propagação e na amplitude de ondas longitudinais e rotativas foram examinados para uma grande faixa de valores de rigidez de estruturas. O principal efeito do acoplamento dinâmico num meio poroso permeável foi uma diminuição na velocidade de todos os tipos de ondas. Além disso, pequenas variações na rigidez do meio poroso costumavam ser estimadas a partir de medidas acústicas. Deu-se, então, atenção especial à análise dos efeitos produzidos por um valor aproximado do acoplamento dinâmico na precisão de parâmetros elásticos, derivados de testes dinâmicos.

Em 1998, Abouseeda e Dakoulas apresentaram uma formulação acoplando o método dos elementos de contorno e do método dos elementos finitos para uma interação sísmica solo-estrutura não-linear em duas dimensões. O método foi aplicado em barragens de regiões com excitação sísmica. O corpo da barragem, consistindo de materiais heterogêneos, foi modelado como histerético não-linear, sendo discretizado por elementos finitos. O meio elástico foi discretizado por elementos de contorno. O estudo focalizou os efeitos combinados da não linearidade do material e da flexibilidade da fundação. Os resultados mostraram um efeito significativo da flexibilidade da fundação na redução da resposta através da radiação de energia. Para excitações do solo com acelerações de pico de 0,2 a 06g, o pico das faixas de amplificação da aceleração de 2.5 a 1.4 foram comparáveis com o campo de observações e resultados de outros estudos. O método mostrou-se computacionalmente eficaz e pode ser utilizado para análise não-linear eficiente de sistemas complexos solo-estrutura.

Em 1998, Tham, Qian e Cheung apresentaram um estudo da resposta dinâmica de um número finito de fundações flexíveis com um número finito de superfícies submetidas à incidência de ondas harmônicas de Rayleigh ou SH. Assumiu-se que as fundações estavam

apoiadas sobre um meio elástico. Os resultados mostraram que a rigidez da fundação teve um efeito marcante sobre a resposta vertical, enquanto influenciou muito pouco os deslocamentos horizontais. Em geral, a resposta dinâmica diminuiu com o aumento da rigidez da fundação. Nos casos de incidência de ondas Rayleigh, a existência de uma fundação adjacente gerava uma certa resposta horizontal na direção perpendicular da onda incidente e, subseqüentemente, causava ao sistema um movimento torsional, enquanto que, nos casos de incidência de ondas SH horizontais, uma resposta vertical foi observada e sua magnitude foi comparável à resposta na direção da onda incidente.

Em 1998, Jingbo et al. apresentaram um método direto por elementos finitos para analisar a interação dinâmica solo-estrutura baseado num software de análise de grandes estruturas. O método simulava não só a absorção da onda dispersa no solo infinito, mas também o restabelecimento da elasticidade do meio na fronteira. Um novo método de entrada de dados do movimento de onda, tratando da interação dinâmica solo-estrutura, que pode ser utilizado para simulações exatas de ondas sísmicas com qualquer ângulo de entrada, foi proposto pelos autores.

Konagai e Nogami (1998) trataram da interação de um meio (solo) e de uma estrutura embutida como camadas horizontais mutuamente desacopladas e de espessura unitária. Assumiu-se que num plano de tensões, em cada camada individual, as respostas médias não variavam com a espessura. Segundo os autores, a rigidez em toda a camada da estrutura era obtida por modelos mecânicos simples e independentes da frequência, para todos os modos das respostas da fundação. Os autores apresentaram também modelos similares independentes da frequência para a rigidez na base da fundação. Esses modelos foram feitos de dois elementos básicos diferentes e massas interconectadas em série. O sistema indicou que circuitos elétricos poderiam gerar sinais correspondentes às respostas transientes da interação solo estrutura. Eles permitiram também simular a resposta da interação solo estrutura em uma bancada de testes, comumente conduzidas a frequências de excitação relativamente altas para simulação de terremotos.

Em 1999, Vrettos fez um estudo da resposta vertical e vibratória de uma fundação rígida retangular apoiada sobre um modelo de solo elástico linear, não homogêneo e compressível. A não homogeneidade foi descrita por um aumento contínuo, porém limitado pela profundidade, do

módulo da tensão de cisalhamento. O problema do valor de contorno misto foi resolvido através de um método semi-analítico pela divisão da superfície de contato solo-fundação, pelo qual as funções de influência das sub-regiões são determinadas, pela integração superfície a superfície, correspondente das funções de Green, para um modelo específico do solo. As funções de impedância foram obtidas por valores representativos dos parâmetros de não homogeneidade, da razão de Poisson e da geometria da fundação sobre toda a faixa de frequências.

Em 1999, Yazdchi et al. fizeram um estudo da resposta transiente de uma estrutura elástica engastada em um semiplano homogêneo, isotrópico e linearmente elástico. Forças transientes dinâmicas e sísmicas foram consideradas na análise. O método numérico empregado foi uma junção do método por elementos finitos com o método por elementos de contorno. O método por elementos finitos foi utilizado para a discretização da região próxima da estrutura e o método dos elementos de contorno foi empregado no modelo do semi-espaço infinito afastado da estrutura. Esses métodos foram acoplados pelas condições de equilíbrio e compatibilidade na interface solo-estrutura. Efeitos das condições iniciais diferentes de zero, devido ao pré-carregamento e ao peso da própria estrutura, foram incluídos na formulação dos elementos de contorno do transiente. Foi possível analisar casos práticos, envolvendo condições iniciais devido a pré-carregamentos, tais como pressão da água ou o peso próprio de uma barragem. Os autores mostraram uma aplicação da formulação proposta, em que analisaram o peso próprio de uma barragem e apresentaram os resultados para valores diferentes de rigidez da fundação. Esses resultados indicaram a importância da interação solo-estrutura.

Xiong Zhang et al. (1999) propuseram um procedimento numérico para a análise da interação dinâmica solo-estrutura tridimensional no domínio do tempo. O solo foi modelado como um sólido elástico linear embora o método permita uma adaptação para incluir os efeitos de não-linearidades e amortecimento histerético. Os autores utilizaram um método de subestruturas. Aproximações no tempo e no espaço, que conduziram a esquemas eficientes para o cálculo da matriz de aceleração da resposta ao impulso unitário, foram processadas para o método, resultando numa significativa redução no tempo de processamento computacional com uma pequena perda de precisão. As aproximações também levaram a um método muito eficiente para o cálculo de integrais de convolução no cálculo de forças na interação solo-estrutura. Os autores

também desenvolveram um programa computacional de análise de interação dinâmica solo-estrutura, em que excitações sísmicas e carregamentos transientes aplicados externamente foram considerados na análise.

Em 2000, Neto e Barros apresentaram um método de interpolação de variáveis de contorno que utiliza funções de ajuste de curvas (splines) associadas a elementos singulares. Este método foi utilizado na análise do método de elementos de contorno de problemas bidimensionais que têm pontos onde as variáveis de contorno apresentaram singularidades. As potencialidades da metodologia foram demonstradas analisando-se a resposta dinâmica de uma sapata rígida bidimensional interagindo com o meio. Mostrou-se que para um dado número de elementos na interface solo-fundação, a interpolação da curva (spline) com extremidades características, aumentava consideravelmente a taxa de convergência do deslocamento e fornecia distribuições de tensões mais regulares.

Em 2001, Neto e Barros apresentaram uma implementação direta de um método de elementos de contorno no domínio da frequência para estruturas rígidas bidimensionais em um meio elástico ortotrópico. A implementação do método dos elementos de contorno foi baseada nas funções de influência não singulares no espaço. A resposta da estrutura rígida foi obtida pela aplicação das condições de equilíbrio e de compatibilidade cinemática. O método foi aplicado para analisar a resposta dinâmica de um túnel rígido em um meio com várias inclinações dos eixos principais de elasticidade e para analisar duas galerias retangulares em um meio com várias distâncias entre elas. Este método mostrou-se muito flexível e em geral, suficiente para trabalhar com um grande número de problemas bidimensionais diferentes da interação dinâmica solo-estrutura.

Amplitudes de ondas sísmicas aumentam significativamente quando estas passam através de camadas próximas da superfície de solos flexíveis. Este fenômeno é o principal fator de danos estruturais. É essencial que esta amplificação de ondas seja considerada no projeto de estruturas sobre solos flexíveis. As características de amplificação podem ser estimadas através de modelos analíticos ou de testes de campo. Modelos analíticos requerem, como entradas, a geometria de todas as camadas do solo desde a superfície até o ponto mais baixo, suas propriedades dinâmicas

e os movimentos que ocorrem na base sob a camada de solo. Testes de campo envolvem o registro e a análise da resposta dinâmica de excitações artificiais, forças locais e abalos sísmicos reais. Segundo Safak (2001), as estimativas mais confiáveis de amplificação de ondas sísmicas foram obtidas dos locais, durante grandes terremotos. Safak apresentou uma revisão dos tipos e mecanismos de geração de ondas amplificadas, e modelos e métodos utilizados para caracterizá-las a partir de registros de terremotos.

Em 2002, Wolf e Song trataram de características relevantes da interação dinâmica entre solo e estrutura. Os autores formularam um critério para a presença de amortecimento por radiação em campo. A condição de radiação no infinito ou de propagação de energia externamente ao sistema pode, em certos locais, corresponder às ondas que entram no sistema. Os autores discutiram as conseqüências do comportamento dinâmico do solo infinito dependente da frequência adimensional, que é proporcional ao produto da frequência e da coordenada radial. A parte da energia radiada das ondas superficiais e das ondas de corpo para o aumento da frequência foi discutida. Além disso, procedimentos para analisar a interação dinâmica solo-estrutura foram esboçados, variando desde modelos físicos simples até o solo para o método de extração do amortecimento e um rigoroso método de cálculo, e o método por elementos finitos e de contorno em escala. Integrais de convolução foram evitadas pela construção de um sistema dinâmico com um número finito de graus de liberdade do solo. Extensões para movimentos de carregamentos concentrados e aumento na eficiência, utilizando um reduzido conjunto de funções básicas, foram mostrados. A razão de amortecimento de um sistema equivalente de um grau de liberdade representando a interação da estrutura com o solo para um terremoto refletia o efeito da frequência de corte para uma camada de solo. O mesmo modelo simples foi estendido para considerar a interação solo estrutura não-linear. Os autores examinaram um modelo de uma fundação bidimensional e compararam com uma tridimensional.

Liingaard (2006) em sua tese de doutorado, calculou a interação dinâmica solo-estrutura de fundações para turbinas eólicas em mar aberto, para incluir apropriadamente as propriedades dinâmicas da fundação num sistema fundação-solo.

Kuemmlee et al. (2008) estudaram o comportamento de máquinas rotativas, que foram originalmente projetadas para operar em fundações rígidas de concreto, operando em fundações flexíveis. Foi mostrado que, apesar da necessidade de mudanças físicas, a planta pode funcionar com segurança. Foram mostrados exemplos práticos com as principais diferenças entre fundações rígidas e flexíveis. A interação do sistema completo detalhado foi mostrada e comparada com normas.

Tissiginos et al. (2008) desenvolveram um método analítico para estudar a resposta de uma ponte apoiada sobre uma fundação rígida do tipo caisson engastada em uma camada de solo sobre um semi-espaço. O método reproduziu as respostas cinemática e inercial, utilizando molas e amortecedores para simular a interação solo-fundação. Foram dadas soluções no domínio da frequência para uma excitação harmônica vertical. Comparações com resultados obtidos por elementos finitos e outros métodos foram feitas, para demonstrar a confiabilidade do método. Resultados de estudos paramétricos foram feitos para respostas cinemáticas e inerciais. A mudança da frequência natural e do amortecimento da ponte por causa da interação solo-estrutura foram mostradas graficamente.

Duchemin et al. (2006) investigaram teórica e experimentalmente o comportamento dinâmico de um rotor flexível submetido a uma excitação de base. O foco do estudo foi o comportamento do rotor próximo das velocidades críticas. Um modelo matemático foi feito para calcular a energia cinética e de torção. As equações de movimento foram obtidas por Lagrange e o método de Rayleigh-Ritz foi usado para estudar os fenômenos básicos de sistemas simples. O método de múltipla escala foi utilizado para estudar a estabilidade quando o sistema foi submetido a uma excitação senoidal. Uma montagem experimental foi utilizada para validar os resultados.

Zembaty et al. (2006) fizeram um experimento, onde uma estrutura de concreto armado foi colocada sobre uma mesa vibratória e submetida a excitações sísmicas com aumentos de intensidade. O objetivo desse experimento foi estudar mudanças na dinâmica e nos parâmetros modais devido ao aparecimento de trincas no concreto. A identificação dinâmica dessas estruturas foi considerada através de testes de diagnóstico intercalados com excitações danosas. O

artigo apresentou resultados em vários estados de dano, utilizando métodos não destrutivos de estimativa dos danos. Uma diminuição característica das frequências naturais e um aumento do amortecimento estrutural foram observados. Notou-se uma queda mais acentuada da frequência natural no primeiro modo e menos acentuada nos modos seguintes. Notou-se uma queda de cerca de 10% da frequência natural e uma diminuição de rigidez de 15% antes que as primeiras trincas fossem visíveis.

Todorovska e Rjoub (2006) apresentaram um modelo simples para uma interação solo-estrutura em um solo poroelástico saturado de água, desenvolvido para verificar se a frequência do sistema edifício-fundação-solo muda com a saturação do solo. O modelo consistiu de uma parede apoiada sobre uma fundação rígida circular, engastada em um solo do tipo semi-espaço homogêneo e isotrópico, saturado por um fluido compressível e não viscoso, excitado por uma onda no plano. As condições de contorno na superfície de contato entre o solo e a fundação foram perfeitamente ligadas (soldadas). Foram apresentados resultados numéricos e comparações com medidas em escala real.

Senjuntichai et al. (2006) consideraram a vibração vertical harmônica no tempo em uma fundação rígida axi-simétrica. O solo foi representado por um semi-espaço poroelástico homogêneo, governado pela teoria de Biot de poroelastodinâmica. A fundação foi submetida a um carregamento vertical harmônico no tempo e perfeitamente colada a um semi-espaço. A superfície de contato pode ser totalmente permeável ou impermeável. O problema da interação dinâmica foi resolvido pelo método da integração de superfície indireta. Alguns resultados numéricos para impedância vertical em fundações rígidas foram apresentados para demonstrar a influência do efeito poroelástico, geometria da fundação, condições de contorno hidráulicas na superfície de contato e frequência de excitação.

François et al. (2007) estudaram a resposta dinâmica de edifícios submetidos a campos de ondas de fluxo induzido. Os resultados de três casos (fundação do tipo bloco rígido, caixa e baldrame) foram calculados e foi feita uma análise da resposta dinâmica da estrutura. Foi apresentada uma metodologia para se calcular a resposta estrutural desconsiderando os efeitos da interação dinâmica solo-estrutura. Uma comparação com os resultados de cálculos, onde a

interação solo-estrutura é considerada, foi feita para mostrar que obteve-se uma boa aproximação quando uma estrutura rígida foi colocada sobre um solo flexível.

Kluyskens et al. (2007) desenvolveram um modelo mecânico para explicar o papel das perdas, quando associadas a partes rotativas. O modelo foi então adaptado para rotores submetidos a forças eletromagnéticas, como mancais magnéticos, assumindo que eles têm um comportamento global resistivo e indutivo. O modelo apresentava a vantagem de ser baseado em uma aproximação macroscópica, e o conhecimento preciso das correntes e da distribuição de campos. O modelo foi validado através de um software de elementos finitos e as forças previstas pelos dois modelos foram comparadas.

Nas últimas décadas, o monitoramento das condições de vibração tem sido amplamente utilizado para identificação de falhas em máquinas rotativas. Entretanto, a quantificação de falhas pode requerer um grande número de testes que consomem tempo e têm um custo alto. A identificação baseada no modelo tem tido um importante papel na quantificação e resolução rápida de falhas. Lees et al. (2009) apresentaram uma visão geral dos desenvolvimentos de importância prática mais recentes neste campo.

### 3. MODELO DOS MANCAIS

Os mancais hidrodinâmicos são modelados através de seu filme de óleo, considerando o carregamento devido ao peso do rotor e as características geométricas do mancal, que definem a expressão para a espessura do filme de lubrificante responsável, por sua vez, pelo campo de pressões e forças hidrodinâmicas de sustentação geradas.

O lubrificante é discretizado num modelo mola-amortecedor (Figura 3.1) e caracterizado por coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento (Machado 2009).

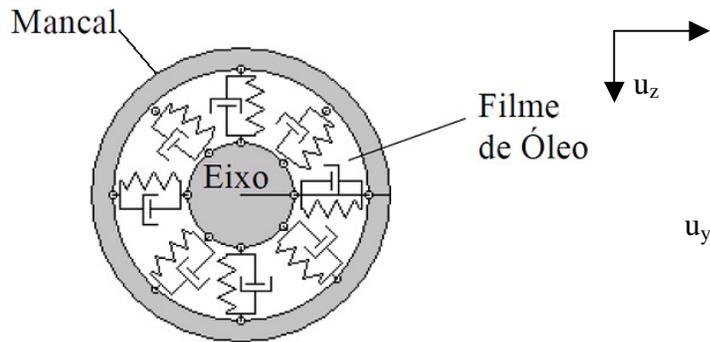


Figura 3.1: Modelo Mola-Amortecedor para o Filme Fluido(Machado 2009)

De acordo com Machado (2009), a caracterização dos mancais hidrodinâmicos e do seu filme de óleo tem por objetivo fornecer suporte numérico para a quantificação das forças transmitidas por estes componentes, forças estas causadas pelo próprio peso do rotor ou por um desbalanceamento deste, ou até por excitação externa, por exemplo. Isto é feito para que se conheça o comportamento do sistema estudado, neste caso, um rotor suportado por mancais hidrodinâmicos, caracterizando os modos de vibrar deste sistema (suas frequências naturais), para prevenir quebras na máquina ou acidentes mais graves, causados pelo excesso de vibrações ocorrentes, a uma dada velocidade de rotação do rotor.

A equivalência entre o filme de óleo e os conjuntos de molas e amortecedores equivalentes faz uso de equações linearizadas simples, cujas respostas obtidas coincidem, em um número expressivo de casos, com sistemas reais estudados.

Para o cálculo efetivo dos coeficientes, temos que as forças de reação são funções das coordenadas  $y$  e  $z$  (horizontal e vertical, respectivamente), e da velocidade instantânea do

centro do eixo,  $\dot{y}$  e  $\dot{z}$ . Uma vez que, para pequenas amplitudes de deslocamentos,  $\Delta y$  e  $\Delta z$ , medidos a partir da posição de equilíbrio estático ( $y_0$  e  $z_0$ ), a expansão em série de Taylor até primeira ordem origina:

$$F_y = F_{y0} + K_{yy}\Delta y + K_{yz}\Delta z + B_{yy}\Delta\dot{y} + B_{yz}\Delta\dot{z}$$

$$F_z = F_{z0} + K_{zy}\Delta y + K_{zz}\Delta z + B_{zy}\Delta\dot{y} + B_{zz}\Delta\dot{z}$$

Nas qual os coeficientes são as derivadas parciais avaliadas na posição de equilíbrio:

$$K_{yz} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)_0 \quad B_{yz} = \left( \frac{\partial F_y}{\partial \dot{z}} \right)_0$$

Os demais coeficientes são avaliados de forma análoga.

Para o cálculo desses coeficientes, as equações diferenciais, oriundas da expansão na série de Taylor, também são aproximadas por diferenças finitas.

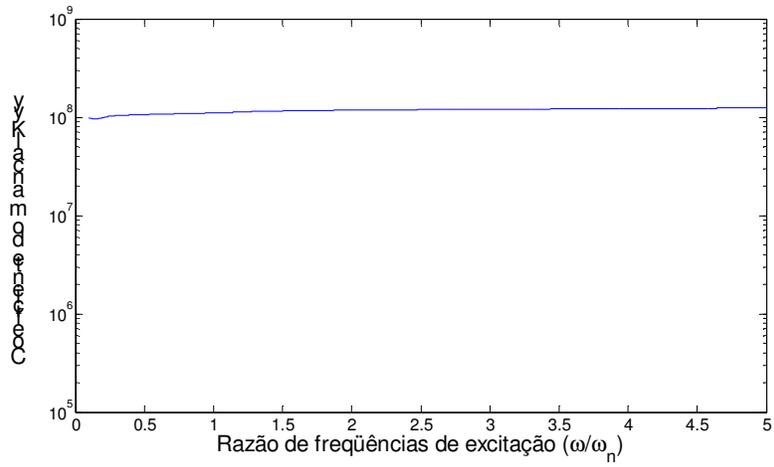
Os valores dos coeficientes dos mancais dependem da frequência do rotor (verificar apêndice B), por isso foram calculados com base nos valores utilizados neste trabalho. Os dados utilizados para calcular os coeficientes dos mancais são:

**Tabela 3.1. Parâmetros utilizados para cálculo dos coeficientes dos mancais.**

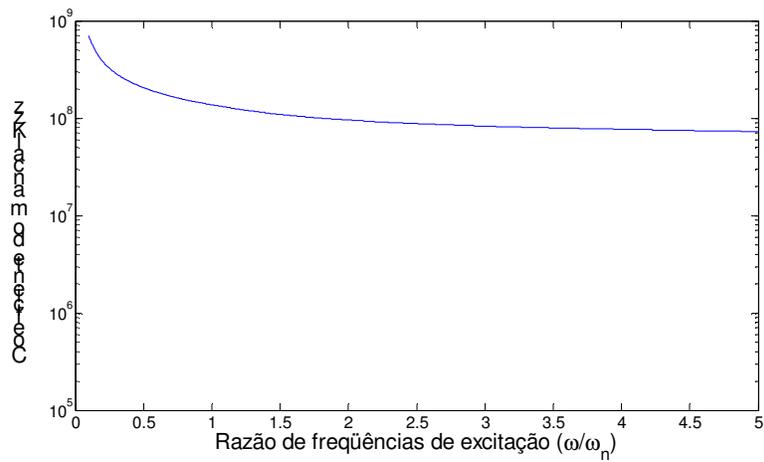
PARÂMETROS	VALORES
Carregamento do mancal	750 kg
$D_e$ – Diâmetro externo do eixo	18,0 cm
L - Largura axial do mancal	9,9cm
$C_d$ – Folga diametral do mancal	135 $\mu$ m
$\mu$ - Viscosidade do óleo	14,32 Pa.s

Esses valores foram assumidos com base nos valores de mancais reais montados em máquinas rotativas de porte semelhante ao do rotor abordado neste trabalho.

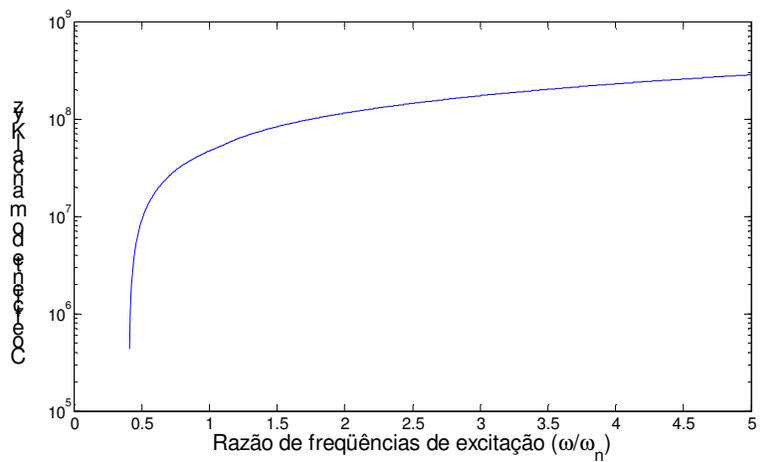
**A seguir são mostrados os coeficientes de rigidez e amortecimento, diretos e cruzados, do modelo dos mancais utilizados neste trabalho:**



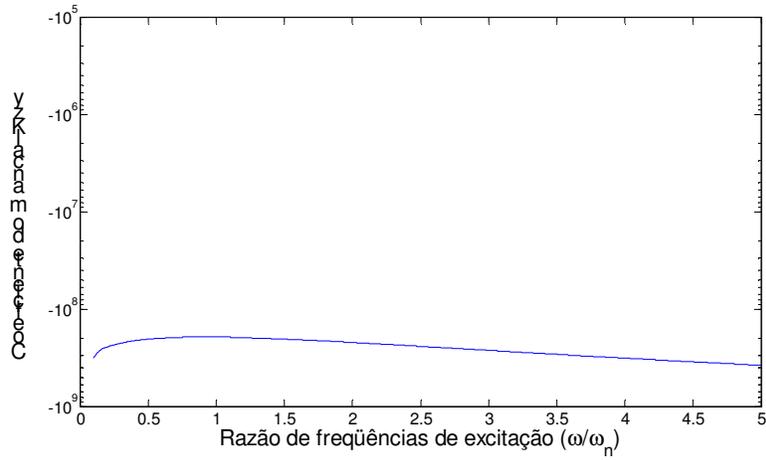
**Figura 3.2. Coeficiente direto de rigidez do mancal na direção horizontal.**



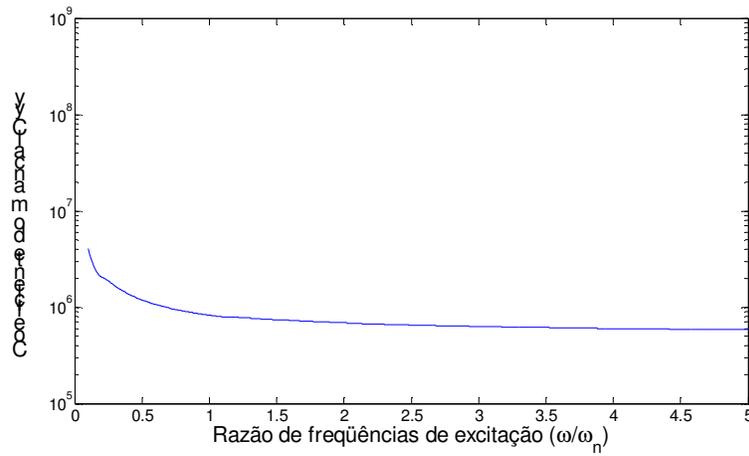
**Figura 3.3. Coeficiente direto de rigidez do mancal na direção vertical.**



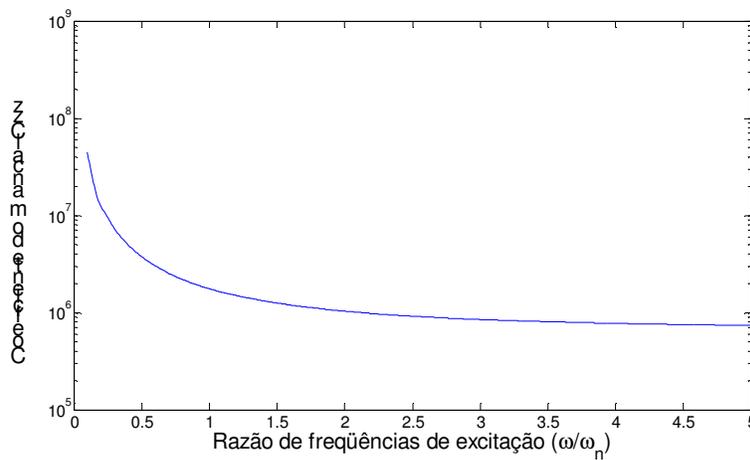
**Figura 3.4. Coeficiente cruzado de rigidez do mancal  $K_{yz}$ .**



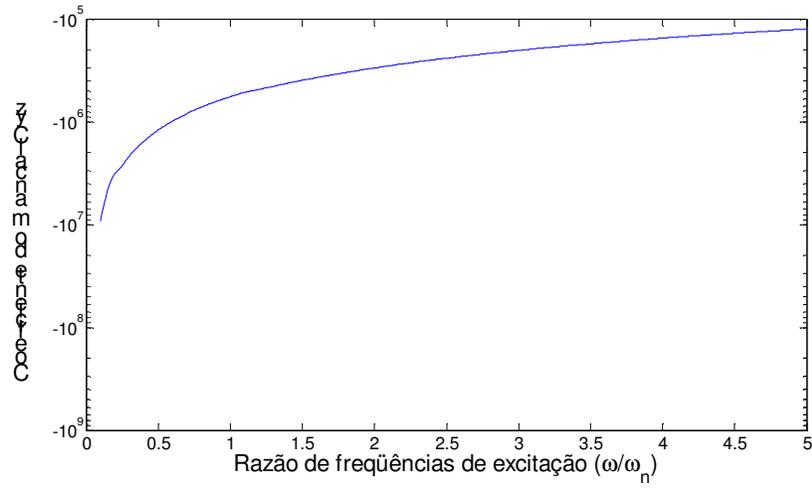
**Figura 3.5. Coeficiente cruzado de rigidez do mancal Kzy.**



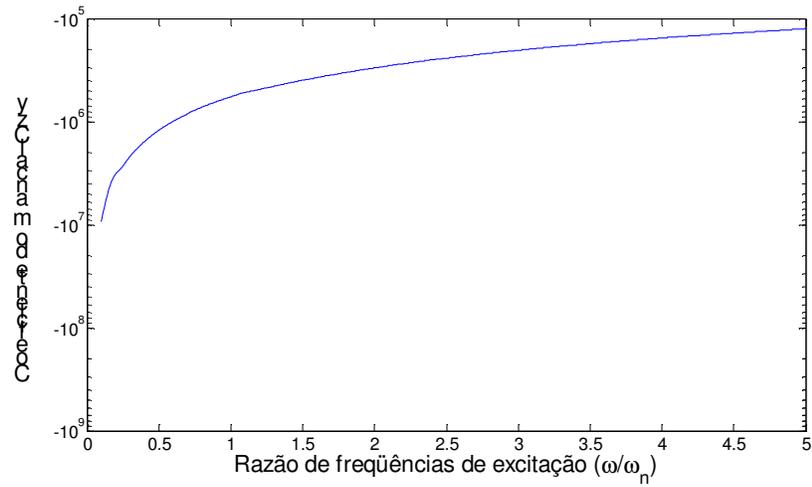
**Figura 3.6. Coeficiente direto de amortecimento do mancal na direção horizontal.**



**Figura 3.7. Coeficiente direto de amortecimento do mancal na direção vertical.**



**Figura 3.8. Coeficiente cruzado de amortecimento do mancal Cyz.**



**Figura 3.9. Coeficiente cruzado de amortecimento do mancal Czy.**

#### 4. MODELOS DE SOLO

Grande parte das simulações de sistemas rotor-mancais-fundação ou não considera o solo que sustenta a fundação, ou incorpora o solo através de modelos bastante simplificados. Desta forma, o estudo de sistemas reais sofre uma certa inconsistência em sua modelagem. De um lado, rotores, eixos, mancais e estruturas são modelados com precisão e detalhamento, mas o solo é incorporado de forma superficial e simplificada, tornando inconsistente a totalidade do modelo. Note-se que em modelos de laboratório é possível eliminar a interação dinâmica solo-estrutura, através de bancadas apropriadas, capazes de filtrar a influência dinâmica do solo-suporte. Por outro lado, em sistemas reais, entretanto, não é possível ignorar a influência da resposta dinâmica do solo.

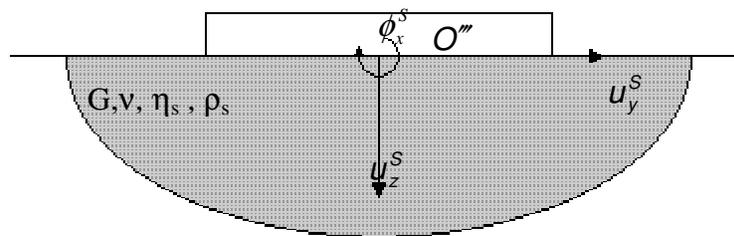
Dentro deste contexto, o sistema mecânico apresentado neste trabalho foi dividido em quatro partes: o rotor Laval, os mancais hidrodinâmicos, uma fundação do tipo bloco rígido e o solo. Os modelos de solo utilizados foram o modelo clássico de semi-espaço e o modelo de camada sobre base rígida.

A interação dinâmica da fundação com o solo, modelada em domínio não limitado, requer uma metodologia em que seja possível representar a condição de radiação de Sommerfeld. (Mesquita e Pavanello, 2005) Esta diz que as fontes devem ser somente fontes, e não absorvedores de energia. Energia radiada das fontes deve se dissipar no infinito; a energia não deve ir do meio (infinito) para o campo de singularidades (sistema). Desta forma, ondas não refletidas são dissipadas no meio infinito. Neste caso, o amortecimento é por radiação ou ainda, do tipo geométrico. Além do amortecimento geométrico, o solo apresenta o amortecimento interno inerente à dissipação por atrito entre as partículas do solo. O método dos elementos de contorno tem sido utilizado com sucesso para resolver problemas dinâmicos em espaços não limitados (Carrion, 2002). A formulação pelo método dos elementos de contorno requer um estado elastodinâmico auxiliar. Esse método utiliza as funções de Green de espaço completo, ou soluções fundamentais. Essas funções são resultado de uma carga concentrada aplicada no espaço completo e apresentam singularidades que devem ser consideradas na formulação dos elementos de contorno. (Mesquita, Romanini e Barros, 2000, Carrion, 2002).

É também possível formular o método dos elementos de contorno utilizando as funções de influência como estados elastodinâmicos auxiliares. Tais funções de influência são resultado de carregamentos distribuídos atuando em domínios não limitados (Barros, 1997).

As equações de Navier, para o movimento de um semi-espço viscoelástico com um comportamento harmônico no tempo, expressas em termos de deslocamento, dependem das constantes de Lamé, que são complexas e contêm as propriedades dissipativas do meio, a densidade e a frequência circular. São utilizadas também condições de contorno aplicadas na interface solo-fundação.

A solução do problema é baseada na Transformada de Fourier, relacionando variáveis espaciais com números de onda. As funções de influência de deslocamento são integrais impróprias, que podem ser calculadas numericamente (Barros, 1997).



**Figura 4.1. Fundação de superfície sobre semi-espço.**

#### 4.1. Modelo clássico de semi-espço

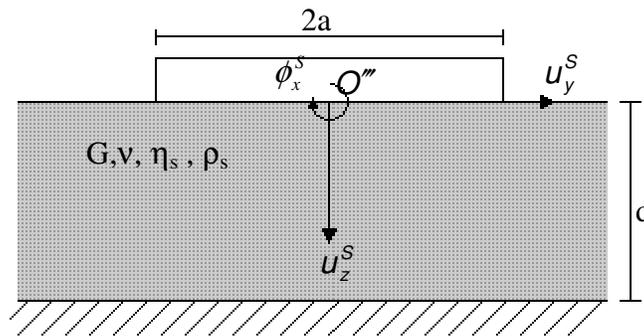
O modelo clássico de semi-espço considera uma fundação bidimensional do tipo placa fixada a um semi-espço viscoelástico. Este modelo é apropriado para analisar o comportamento dinâmico de máquinas sobre um solo homogêneo de grande profundidade (figura 4.1). O solo é caracterizado por sua densidade  $\rho_s$ , seu módulo de cisalhamento  $G$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$ . Neste modelo, a resposta do solo é dada no domínio da frequência, através de uma matriz de flexibilidade para uma fundação do tipo placa sem massa (Carrion, 2002, Barros, 1997). As equações para incluir a inércia da fundação são somadas às matrizes de flexibilidade. Isto permite que a massa da fundação seja modificada, sem alterar a matriz de flexibilidade do solo. O solo é assumido viscoelástico. Os efeitos viscoelásticos (amortecimento interno do solo) são incorporados através de um princípio de correspondência elástico-viscoelástico (Christensen, 2010). Matematicamente, isto significa que os parâmetros elásticos do solo são substituídos por

quantidades complexas contendo o coeficiente de amortecimento. Então o módulo de cisalhamento do solo  $G$  é substituído por  $G^* = G(1 + i\eta_s)$ . Nesta expressão  $\eta_s$  é o coeficiente de amortecimento. Neste caso, apenas a constante histerética viscoelástica é considerada.

A síntese das matrizes de flexibilidade dinâmica do solo no domínio da frequência é obtida através do método de elementos de contorno (Domingues, 1993, Carrion, 2002).

#### 4.2. O modelo de camada sobre base rígida

Este modelo de solo consiste numa camada viscoelástica de profundidade  $d$ . A parte inferior da camada está apoiada sobre uma base rígida. A base rígida não se desloca em relação à camada. Uma fundação do tipo placa com largura  $2a$  está apoiada na parte superior da camada (Fig. 4.2).



**Figura 4.2. Fundação de superfície em camada sobre base rígida.**

Este modelo de solo pode ser utilizado quando há um aumento repentino na rigidez do solo a uma determinada profundidade  $d$ . Uma característica deste modelo é que a camada apresenta frequências naturais associados às dimensões limitadas na direção vertical ( $z$ ).

Neste caso, as ondas que se propagam pelo solo podem ser refletidas de volta ao sistema após colidirem contra a base rígida a uma certa profundidade do solo.

#### 4.3. Funções de flexibilidade do solo

A interação dinâmica de uma fundação rígida sem massa vinculada ao solo normalmente é descrita por uma matriz de impedância mecânica dependente da frequência  $[K_s]$ , que relaciona o vetor de forças externas aplicadas à fundação  $\mathbf{F}_s = \{F_z \ F_y \ M_x/a\}^T$  e o vetor dos graus de

liberdade da fundação rígida e sem massa  $\mathbf{u}_s = \{u_z^S \ u_y^S \ \phi_x^S a\}^T$  (Barros e Mesquita, 1999, Carrion, 2002).

$$[\mathbf{K}_s(A_0)]\mathbf{u}_s = \mathbf{F}_s \quad (4.1)$$

Na equação (4.1), o parâmetro clássico de frequência circular  $\omega$  é substituído pelo parâmetro de frequência adimensional:

$$A_0 = \omega a / c_s \quad (4.2)$$

onde  $c_s$  é a velocidade de cisalhamento do meio contínuo elástico (solo) dado por:

$$c_s = \sqrt{G/\rho_s} \quad (4.3)$$

As matrizes de impedância mecânica para fundações rígidas sem massa podem ser calculadas para perfis de solo distintos. Estes perfis de solo podem incluir o semi-espço homogêneo, camadas horizontais múltiplas, assim como solos isotrópicos e anisotrópicos. A matriz de impedância mecânica resultante apresenta a seguinte estrutura:

$$\begin{bmatrix} K_{wz} & K_{wy} & K_{wx} \\ K_{uz} & K_{uy} & K_{ux} \\ K_{\phi z} & K_{\phi y} & K_{\phi x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^S \\ u_y^S \\ \phi_x^S a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z \\ F_y \\ M_x/a \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Quando o solo e a fundação rígida e sem massa são vinculados e apresentam simetria em relação ao eixo  $z$ , a estrutura da matriz de impedância mecânica dada na equação (4.4) é simplificada (Barros, 1997; Carrion, 2002):

$$\begin{bmatrix} K_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & K_{uy} & K_{ux} \\ 0 & K_{\phi y} & K_{\phi x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^S \\ u_y^S \\ \phi_x^S a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_z \\ F_y \\ M_x/a \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

A equação (4.5) mostra que, para sistemas simétricos em relação ao eixo  $z$ , uma excitação vertical somente induzirá um deslocamento vertical  $u_z^S$ . Por outro lado, os graus de liberdade horizontal  $u_y^S$  e de rotação  $\phi_x^S$  são acoplados através da resposta do solo.

É uma prática comum apresentar a matriz de flexibilidade bidimensional em uma forma normalizada:

$$[\mathbf{N}(A_0)]\mathbf{F}_{\text{ex}} = \frac{1}{G} [\bar{\mathbf{N}}(A_0)]\mathbf{F}_{\text{ex}} = \mathbf{U}_f \quad (4.6)$$

onde  $[N(A_0)]$  é a matriz de flexibilidade normalizada dependente da frequência,  $\mathbf{U}_f$  é o vetor de deslocamentos da fundação e  $\mathbf{F}_{ex}$  é o vetor de forças da fundação.

A seguir são apresentados os coeficientes da matriz de flexibilidade da fundação obtidos a partir do trabalho de Carrion (2002). São apresentados os coeficientes para as profundidades  $d/a=2$ ;  $d/a=6$  e  $d/a=10$ . Em cada figura são apresentados os amortecimentos  $\eta=0,005$ ;  $\eta=0,050$  e  $\eta=0,200$ . Embora o presente trabalho se limite a analisar a resposta dinâmica do sistema no plano y-z, os coeficientes da matriz de flexibilidade do solo correspondem ao caso de um solo 3D (Carrion, 2002).

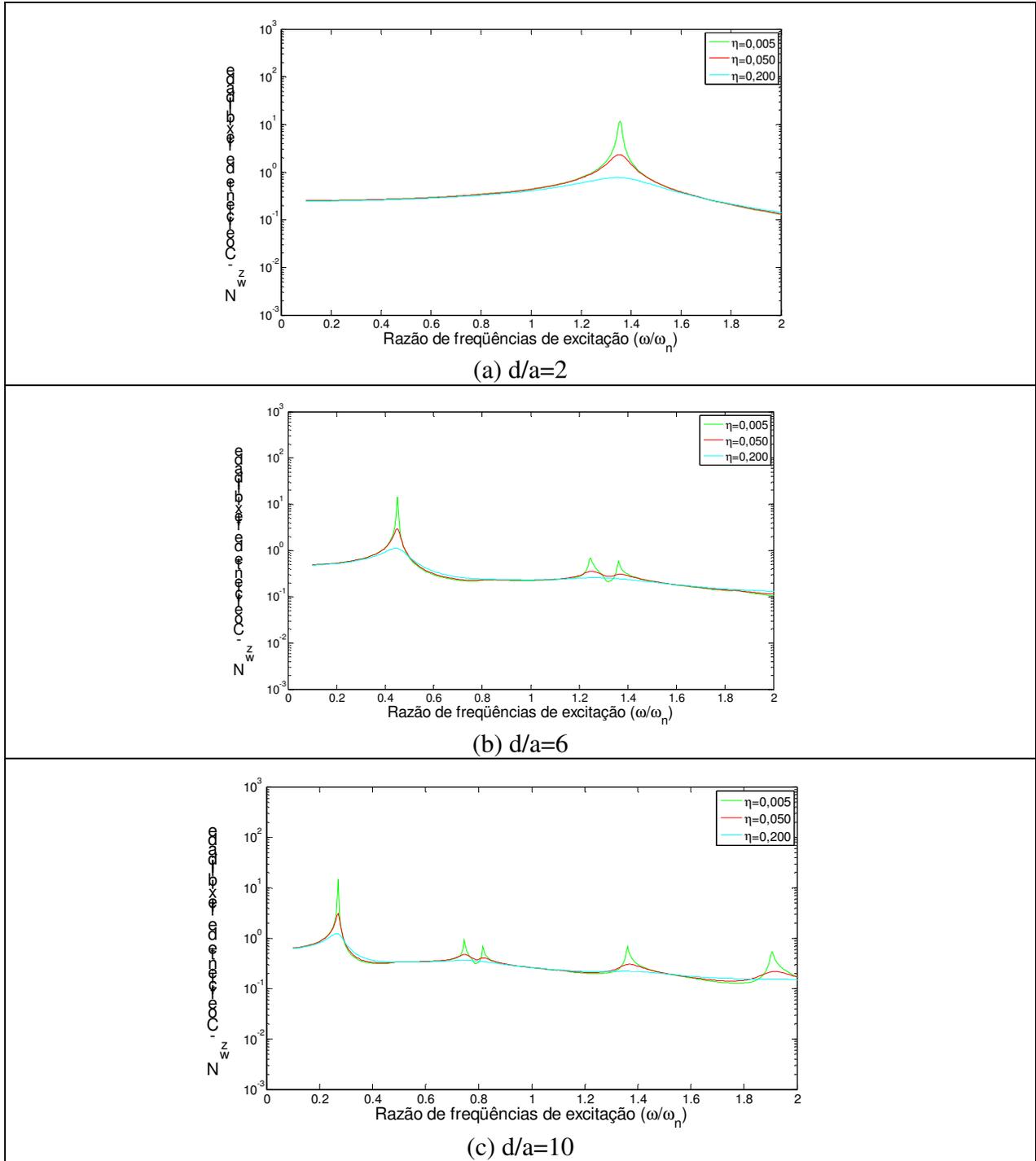
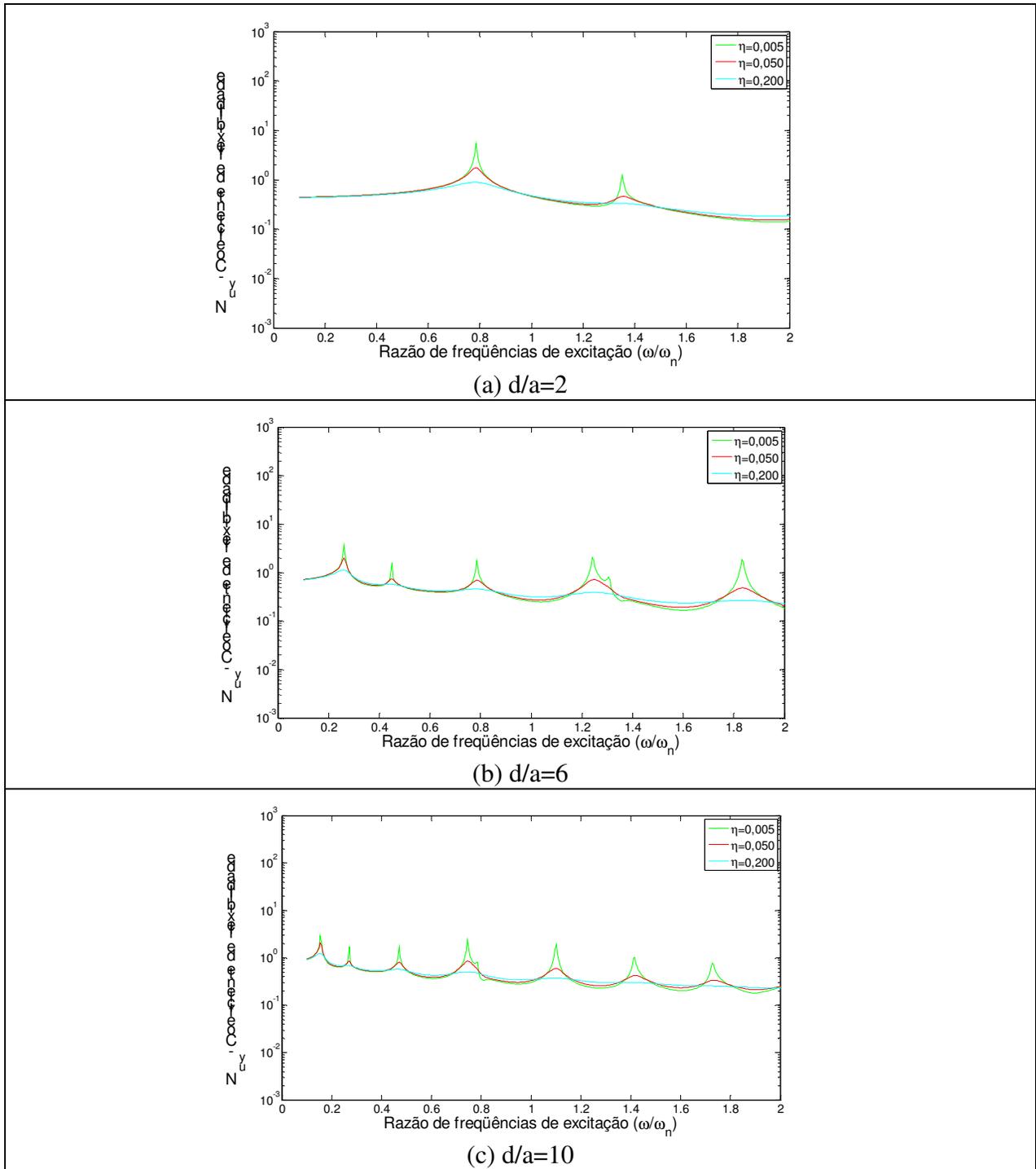
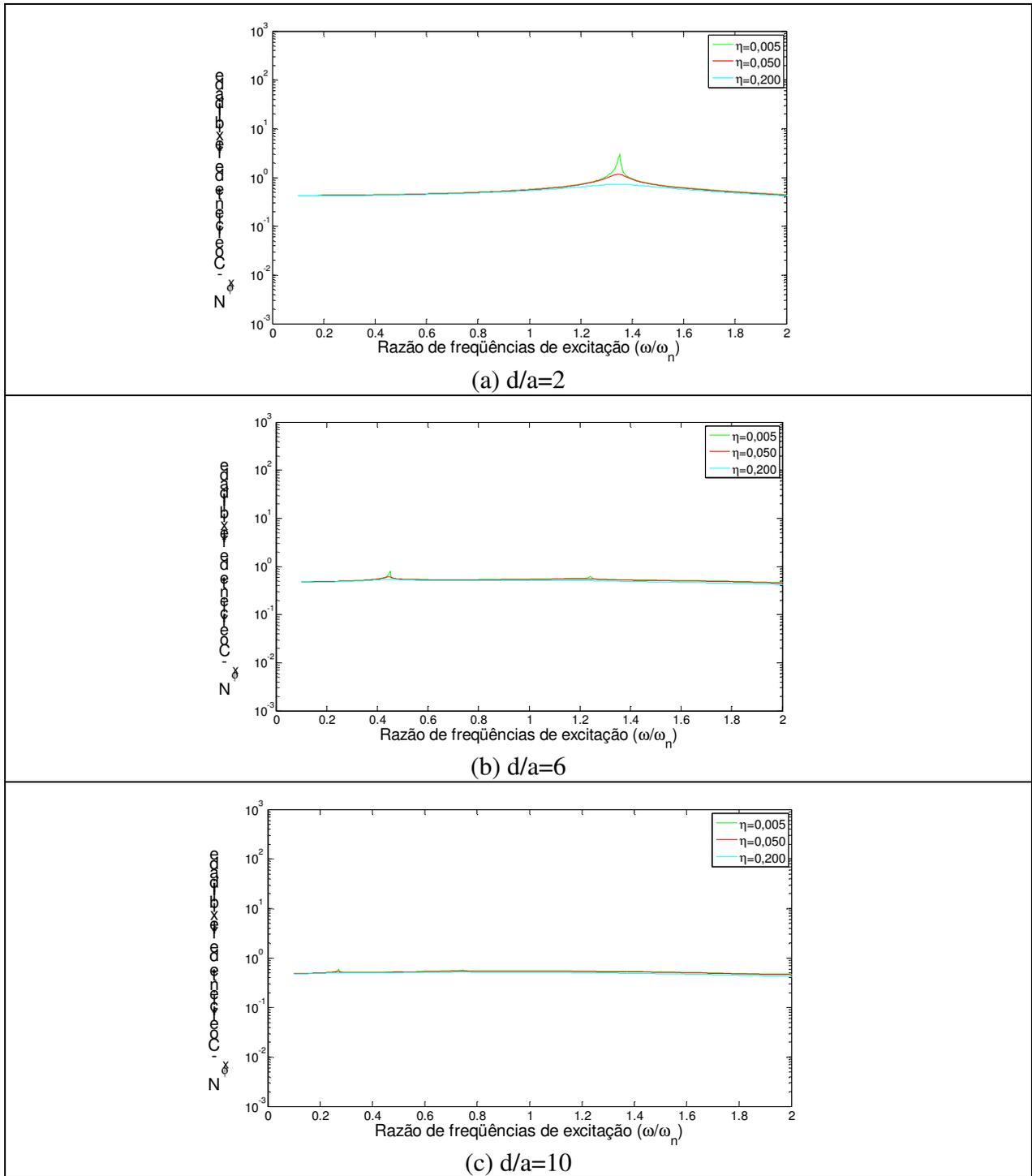


Figura 4.3 Coeficientes do solo na direção vertical: (a)  $d/a=2$ ; (b)  $d/a=6$ ; (c)  $d/a=10$ .



**Figura 4.4** Coeficientes do solo na direção horizontal: (a)  $d/a=2$ ; (b)  $d/a=6$ ; (c)  $d/a=10$ .



**Figura 4.5** Coeficientes do solo na rotação: (a)  $d/a=2$ ; (b)  $d/a=6$ ; (c)  $d/a=10$ .

As figuras representando os coeficientes de flexibilidade acima mostram a influência tanto do amortecimento interno do solo quanto da profundidade da camada. Em particular pode-se notar que à medida que a camada do solo se torna mais profunda, toda a ressonâncias tem suas

frequências reduzidas. Pode-se mostrar que à medida que a profundidade da camada aumenta, a resposta deste perfil de solo tende àquela do semi-espaço.

Estes coeficientes mostrados nas figuras 4.3 a 4.5 serão utilizados na análise do sistema global rotor-mancal-fundação-solo.

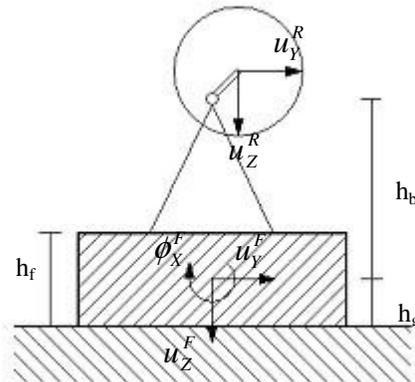
## 5. MODELOS MATEMÁTICOS

### 5.1 Modelo mecânico

O sistema mecânico completo é composto por um rotor do tipo Jeffcott, os mancais, uma fundação do tipo bloco rígido e o solo (Figura 5.1). O rotor é sustentado por mancais rígidos ou flexíveis. Os mancais flexíveis são do tipo hidrodinâmico, e possuem valores de rigidez e amortecimento que variam com a frequência, e foram obtidos numericamente (Machado, 2009).

A fundação consiste de um bloco rígido com momento de inércia  $I_f = \rho_f abh_f(4a^2 + h_f^2)/12$  em relação ao seu centro de gravidade, sendo  $\rho_f$  a densidade da fundação,  $a$  a meia largura,  $b$  a metade do comprimento e  $h_f$  a altura da fundação. A altura dos mancais em relação ao centro de gravidade da fundação é  $h_b$ , a altura do centro de gravidade da fundação em relação à superfície do solo é  $h_g$ .

Os modelos de solo são o semi-espaço e o tipo camada sobre base rígida.



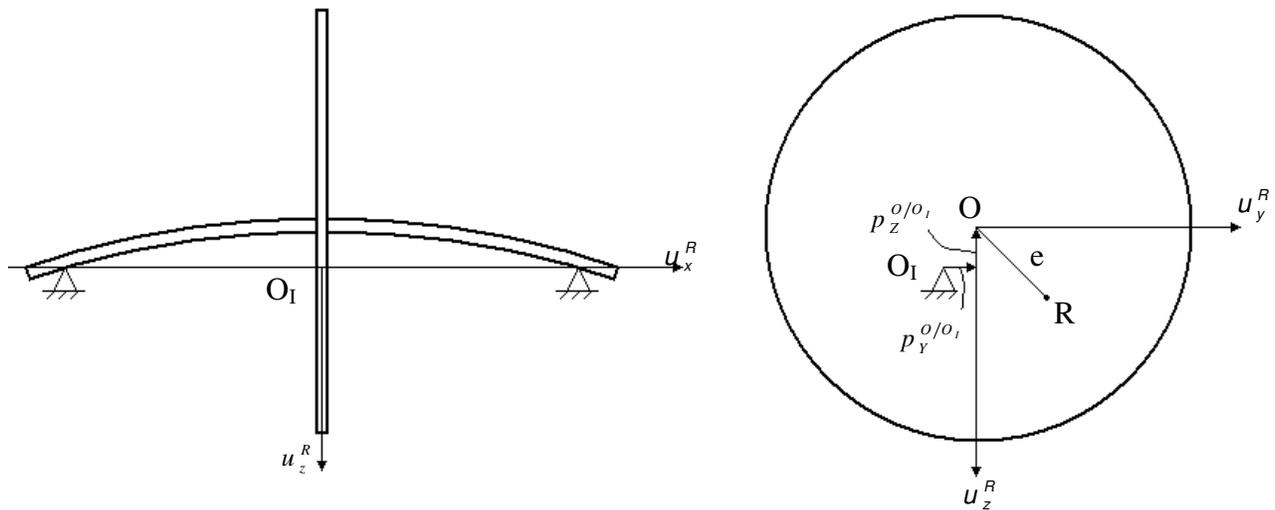
**Figura 5.1. Modelo mecânico.**

#### 5.1.1. Rotor

O modelo de rotor deste trabalho será o Jeffcott. Este modelo consiste de um eixo sem massa, sustentado por mancais. O eixo tem uma seção circular com diâmetro constante em todo seu comprimento, sendo considerado isotrópico e flexível, com rigidez  $k_e$ . Um disco circular com massa  $m_R$  é fixado na posição central do eixo, entre os mancais.

O disco é montado perpendicularmente ao eixo e o centro de massa do disco não é coincidente com o centro geométrico, estando deslocado de uma excentricidade  $e$ , assim o sistema é auto excitado pela força de desbalanceamento do disco. Nesta análise, assume-se que o

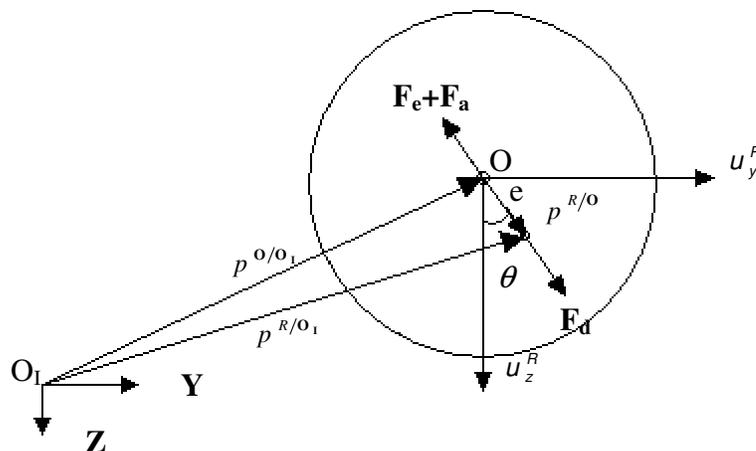
disco se mova em seu próprio plano, sendo desprezado o efeito giroscópico nestas condições (Figura 5.2), uma vez que o movimento da fundação também ocorre no plano  $yz$ .



**Figura 5.2. Rotor do tipo Jeffcott.**

O ponto  $O$  do sistema de coordenadas está localizado no centro geométrico do rotor e tem movimento de translação em relação ao sistema de coordenadas com origem em  $O_I$ . O ponto  $O_I$  localiza-se na intersecção da reta que passa pelos dois mancais com o plano de rotação do disco. O sistema de coordenadas com origem em  $O_I$  é fixo. O movimento do centro geométrico do rotor é dado pelas coordenadas em  $y$  e  $z$ , tendo, portanto, dois graus de liberdade. As equações do movimento podem ser obtidas a partir do princípio de d'Alembert.

As forças que atuam no sistema são: força de desbalanceamento ( $F_d$ ), força elástica ( $F_e$ ) e as forças de amortecimento ( $F_a$ ) interno e externo (Figura 5.3). A força peso não é considerada por causar somente um deslocamento estático, não interferindo na dinâmica do sistema.



**Figura 5.3. Forças que atuam no disco.**

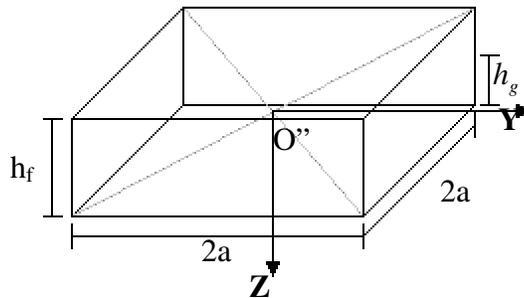
### 5.1.2. Mancais

Neste trabalho, os mancais podem ser rígidos ou flexíveis. No caso dos mancais flexíveis, foram utilizados modelos de mancais hidrodinâmicos radiais. Esses mancais são compostos por um alojamento com superfície cilíndrica e um eixo em seu interior, ambos separados por um fluido lubrificante.

Os coeficientes desses mancais são obtidos por métodos numéricos, já que não foi possível até então obter uma solução analítica da equação de Reynolds que estivesse de acordo com o que se observa experimentalmente. Esses mancais possuem coeficientes de rigidez e amortecimento diretos e cruzados (Machado, 2009).

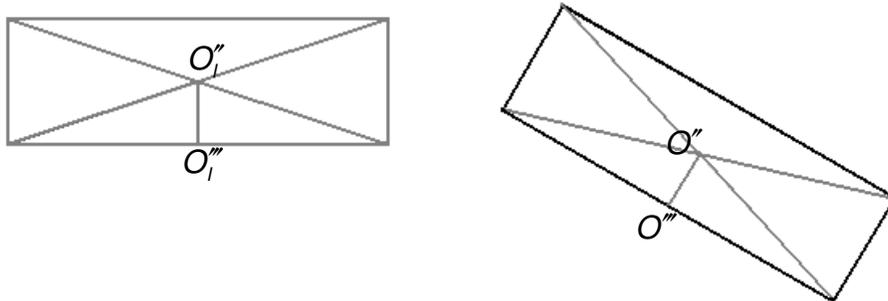
### 5.1.3. Fundação

O modelo da fundação consiste de um bloco rígido de base quadrada ( $a=b$ ), de massa  $m_f$ , densidade  $\rho_f$ , altura  $h_f$  e largura  $2a$ . O ponto  $O''$  coincide com o centro de gravidade da fundação e está a meia altura da fundação,  $h_g=h_f/2$  (Figura 5.4). Assume-se que a fundação também se move no plano  $yz$ .



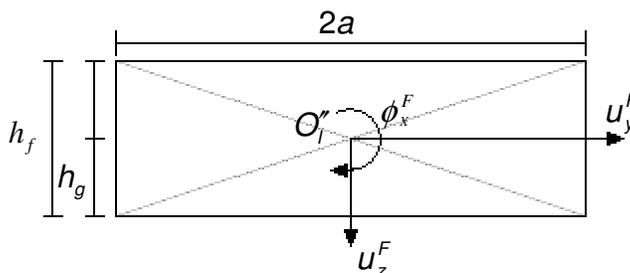
**Figura 5.4. Modelo da fundação do tipo bloco rígido.**

O ponto  $O''$  do sistema de coordenadas está localizado no centro geométrico da fundação e tem movimento em relação ao ponto  $O'_i$ . O ponto  $O'_i$  coincide com o ponto  $O''$  quando o sistema está estacionário, mas está no referencial inercial e, portanto, não se move com a fundação (Figura 5.5).



**Figura 5.5. Movimento da fundação.**

O movimento da fundação apresenta translação em  $y$  e  $z$  e rotação em  $x$ , tendo, então, três graus de liberdade (Figura 5.6).



**Figura 5.6. Graus de liberdade da fundação.**

Para melhor entendimento dos efeitos de cada componente do sistema, é apresentado o equacionamento do sistema completo e de partes do mesmo, comparando-se os resultados.

## 5.2 Modelo matemático

Primeiramente é mostrado o equacionamento somente do rotor, e em seguida, do rotor com os mancais, e do rotor com a fundação e o solo. Finalmente, é mostrado o equacionamento do sistema com o rotor, os mancais, a fundação e o solo.

### 5.2.1 Rotor

Considerando somente o rotor, conforme as figuras 5.2 e 5.3, tem-se um sistema com apenas dois graus de liberdade. O estudo do rotor foi feito para comparar seu comportamento isolado com o dos sistemas cujos efeitos de outros componentes são considerados, e assim verificar a influência destes no sistema completo. Os graus de liberdade do rotor são:  $u_z^R$  e  $u_y^R$ , e

representam o movimento do centro geométrico do rotor nas direções vertical e horizontal, respectivamente.

As forças que atuam no rotor são devidas à massa desbalanceada, à rigidez e ao amortecimento do eixo. A força de desbalanceamento é:

$$\mathbf{F}_d = m\mathbf{a}^R \quad (5.1)$$

A força de rigidez do eixo é:

$$\mathbf{F}_e = k_e \mathbf{p}^{O/O_1} \quad (5.2)$$

As forças de amortecimento do eixo são o amortecimento interno e externo:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_{ai} + \mathbf{F}_{ae} = c_i \left( \frac{{}^R d}{dt} (\mathbf{p}^{O/O_1}) \right) + c_e \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{O/O_1}) \right) \quad (5.3)$$

Onde  $\frac{{}^R d}{dt}$  representa a derivada no referencial móvel (do rotor).

Para calcular estas forças, é necessário conhecer os vetores que representam a posição do centro geométrico do rotor em relação ao mancal, ou a deformação do eixo.

Sabe-se, pela figura 5.3, que:

$$\mathbf{p}^{O/O_1} = u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{p}^{R/O} = e \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + e \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{p}^{R/O_1} = e \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + e \cos \theta \hat{\mathbf{z}} + u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}} \quad (5.6)$$

Para calcular a força da massa desbalanceada, é necessário conhecer a aceleração desta massa, conforme equação 5.1.

Derivando  $\mathbf{p}^{R/O_1}$ , chega-se à velocidade do centro de massa do rotor:

$$\mathbf{v}^R = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}^{R/O_1}) = (e\dot{\theta}\cos\theta + \dot{u}_y^R)\hat{\mathbf{y}} + (-e\dot{\theta}\sin\theta + \dot{u}_z^R)\hat{\mathbf{z}} \quad (5.7)$$

Derivando mais uma vez, encontra-se a aceleração do centro de massa do rotor:

$$\mathbf{a}^R = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}^R) = (e\ddot{\theta}\cos\theta - e\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{u}_y^R)\hat{\mathbf{y}} + (-e\ddot{\theta}\sin\theta - e\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{u}_z^R)\hat{\mathbf{z}} \quad (5.8)$$

Assim, obtém-se a força de inércia:

$$\mathbf{F}_d = m((e\ddot{\theta}\cos\theta - e\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{u}_y^R)\hat{\mathbf{y}} + (-e\ddot{\theta}\sin\theta - e\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{u}_z^R)\hat{\mathbf{z}}) \quad (5.9)$$

Considerando  $\ddot{\theta} = 0$ , tem-se  $\dot{\theta} = \omega$  e  $\theta = \omega t$ :

$$\mathbf{F}_d = m_R \mathbf{a}^R = m_R((-e\omega^2\sin\omega t + \ddot{u}_y^R)\hat{\mathbf{y}} + (-e\omega^2\cos\omega t + \ddot{u}_z^R)\hat{\mathbf{z}}) \quad (5.10)$$

sendo  $\omega$  a velocidade de rotação do eixo

Calculando a força elástica do eixo, tem-se:

$$\mathbf{F}_e = k_e \mathbf{p}^{O/O_1} = k_e(u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.11)$$

Para calcular a força de amortecimento interno, a partir da equação 5.3:

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O_1}) \right) \quad (5.12)$$

Define-se como amortecimento externo todo fator de dissipação de energia devida à ação de componentes externos ao sistema, por exemplo, atrito com o ar, fluido de trabalho, etc. Desta forma o amortecimento externo depende da posição e da velocidade do rotor em relação ao referencial inercial. Por outro lado, entende-se como amortecimento interno aquele devido à fricção das fibras estruturais do rotor quando este se deforma alternadamente, ou seja, este efeito

pode ser descrito apenas no referencial do rotor, uma vez que independe da sua posição no referencial inercial.

O amortecimento interno deve ser representado no referencial do rotor e, é necessário calcular a derivada dos versores no referencial do rotor, o qual gira com a frequência  $\Omega$ , para se obter a força de amortecimento interno do eixo. Assim:

$$\frac{{}^R d}{dt}(\hat{\mathbf{y}}) = {}^R \boldsymbol{\omega}^I \times \hat{\mathbf{y}} = -{}^I \boldsymbol{\omega}^R \times \hat{\mathbf{y}} = -\Omega \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{y}} = -\Omega \hat{\mathbf{z}} \quad (5.13)$$

$$\frac{{}^R d}{dt}(\hat{\mathbf{z}}) = {}^R \boldsymbol{\omega}^I \times \hat{\mathbf{z}} = -{}^I \boldsymbol{\omega}^R \times \hat{\mathbf{z}} = -\Omega \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} = \Omega \hat{\mathbf{y}} \quad (5.14)$$

Dessa forma, calculando-se a derivada do vetor  $\mathbf{p}^{O/O_1}$  no referencial do rotor, chega-se a:

$$\frac{{}^R d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O_1}) = \frac{{}^R d}{dt}(u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.15)$$

Assim:

$$\frac{{}^R d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O_1}) = \dot{u}_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_y^R \frac{{}^R d}{dt}(\hat{\mathbf{y}}) + \dot{u}_z^R \hat{\mathbf{z}} + u_z^R \frac{{}^R d}{dt}(\hat{\mathbf{z}}) \quad (5.16)$$

Então:

$$\frac{{}^R d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O_1}) = \dot{u}_y^R \hat{\mathbf{y}} - \Omega u_y^R \hat{\mathbf{z}} + \dot{u}_z^R \hat{\mathbf{z}} + \Omega u_z^R \hat{\mathbf{y}} \quad (5.17)$$

Reorganizando:

$$\frac{{}^R d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O_1}) = (\dot{u}_y^R + \Omega u_z^R) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R - \Omega u_y^R) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.18)$$

Chega-se à força:

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( (\dot{u}_y^R + \Omega u_z^R) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R - \Omega u_y^R) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.19)$$

ou:

$$\mathbf{F}_{ai} = (c_i \dot{u}_y^R + \Omega c_i u_z^R) \hat{\mathbf{y}} + (c_i \dot{u}_z^R - \Omega c_i u_y^R) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.20)$$

Calculando a força de amortecimento externo:

$$\mathbf{F}_{ae} = c_e \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{O/O_1}) \right) \quad (5.21)$$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{O/O_1}) = \frac{d}{dt} (u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}}) = \dot{u}_y^R \hat{\mathbf{y}} + \dot{u}_z^R \hat{\mathbf{z}} \quad (5.22)$$

Então:

$$\mathbf{F}_{ae} = c_e \dot{u}_y^R \hat{\mathbf{y}} + c_e \dot{u}_z^R \hat{\mathbf{z}} \quad (5.23)$$

Fazendo o equilíbrio das forças que agem no rotor, tem-se:

$$\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{eixo} = 0 \quad (5.24)$$

Onde:

$$\mathbf{F}_{eixo} = \mathbf{F}_{ai} + \mathbf{F}_{ae} + \mathbf{F}_e \quad (5.25)$$

Assim:

$$\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_{ai} + \mathbf{F}_{ae} + \mathbf{F}_e = 0 \quad (5.26)$$

Substituindo as equações (5.9), (5.11), (5.20) e (5.23) em (5.26), tem-se:

$$\begin{aligned}
& m_R \left( (-e\omega^2 \text{sen } \omega t + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e\omega^2 \text{cos } \omega t + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \right) + \\
& (c_i \dot{u}_y^R + \Omega c_i u_z^R) \hat{\mathbf{y}} + (c_i \dot{u}_z^R - \Omega c_i u_y^R) \hat{\mathbf{z}} + c_e \dot{u}_y^R \hat{\mathbf{y}} + c_e \dot{u}_z^R \hat{\mathbf{z}} + k_e (u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}}) = 0
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Reorganizando os termos, chega-se a:

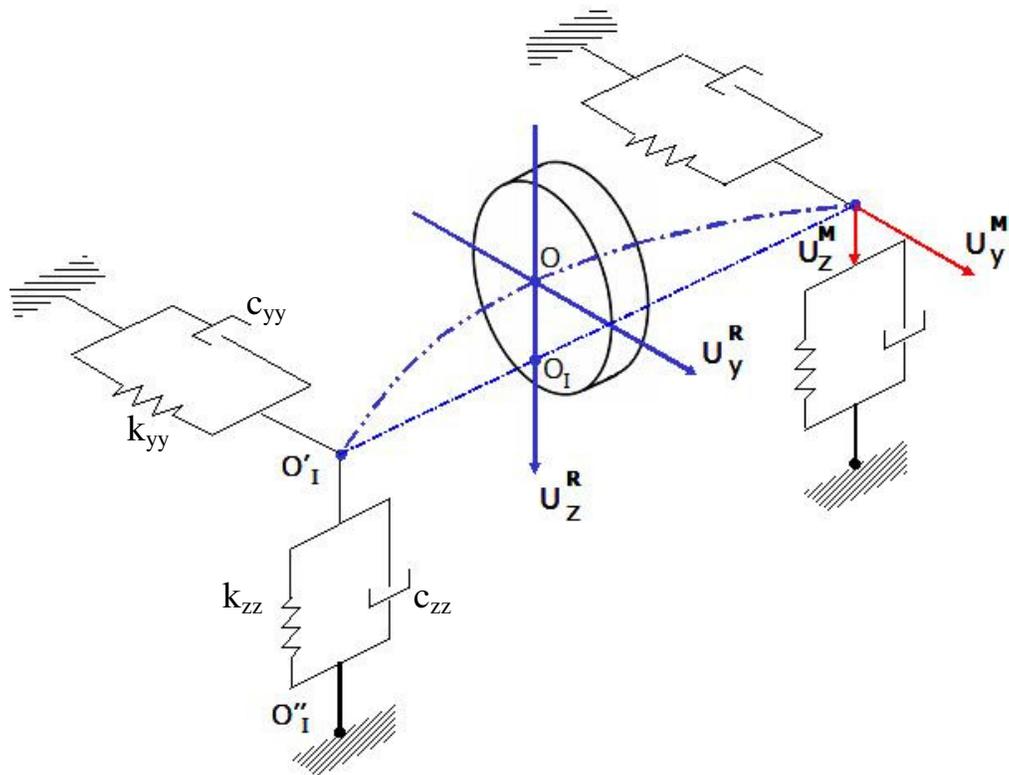
$$\begin{aligned}
& (-m_R e \omega^2 \text{sen } \omega t + m_R \ddot{u}_y^R + c_i \dot{u}_y^R + \Omega c_i u_z^R + c_e \dot{u}_y^R + k_e u_y^R) \hat{\mathbf{y}} + \\
& (-m_R e \omega^2 \text{cos } \omega t + m_R \ddot{u}_z^R + c_i \dot{u}_z^R - \Omega c_i u_y^R + c_e \dot{u}_z^R + k_e u_z^R) \hat{\mathbf{z}} = 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Na forma matricial, fica:

$$\begin{bmatrix} m_R & 0 \\ 0 & m_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_z^R \\ \ddot{u}_y^R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_i + c_e) & 0 \\ 0 & (c_i + c_e) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_z^R \\ \dot{u}_y^R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e & -\Omega c_i \\ \Omega c_i & k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^R \\ u_y^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R e \omega^2 \text{cos } \omega t \\ m_R e \omega^2 \text{sen } \omega t \end{Bmatrix} \tag{5.29}$$

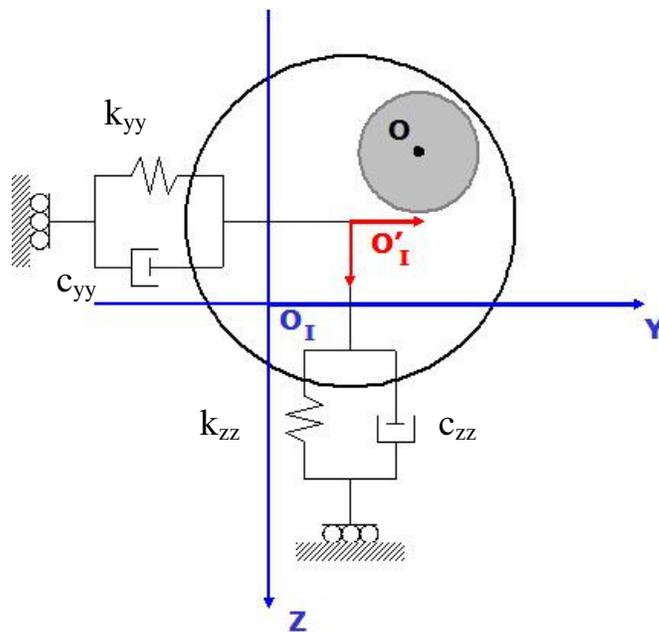
### 5.2.2 Rotor com mancais

Foi feito um estudo somente do rotor com os mancais, sem incluir a fundação ou o solo. O sistema rotor-mancais possui quatro graus de liberdade: dois para o rotor e dois para os mancais.  $u_z^R$  e  $u_y^R$  representam o movimento do centro geométrico do rotor nas direções vertical e horizontal, respectivamente, como mostrado anteriormente e  $u_z^M$  e  $u_y^M$  representam o movimento dos mancais nas direções vertical e horizontal, respectivamente, conforme se vê na figura 5.7.



**Figura 5.7. Sistema rotor-mancais.**

A modelagem do sistema é feita de forma vetorial. Os vetores utilizados para fazer o equacionamento do sistema são mostrados na figura 5.8.



**Figura 5.8. Representação vetorial do sistema.**

Neste caso,  $O_I$ ,  $O_I'$  e  $O_I''$  são o centro do referencial sobre a linha de centro que une os mancais ( $O_I$ ), o centro do mancal ( $O_I'$ ) e a base do mancal ( $O_I''$ ), todos num sistema de coordenadas inercial. Os pontos  $O$  e  $O'$  são o centro geométrico do rotor e o centro do mancal, no referencial móvel, sendo o centro  $O'$  coincidente com o  $O_I'$  na figura 5.7.

### 5.2.2.1 Forças no rotor

As forças que atuam no rotor são a da massa desbalanceada, a de rigidez e as de amortecimento do eixo, conforme as equações (5.1), (5.2) e (5.3).

Para calcular essas forças, é necessário conhecer o vetor  $\mathbf{p}^{O/O'}$ , que representa a posição do centro geométrico do rotor em relação ao mancal, ou a deformação do eixo.

Sabe-se que, para o sistema rotor com mancais, pelas figuras 5.2 e 5.3 e 5.8:

$$\mathbf{p}^{O/O_I''} = \mathbf{p}^{O/O'} + \mathbf{p}^{O'/O''} + \mathbf{p}^{O''/O_I''} = \mathbf{p}^{O/O_I} + \mathbf{p}^{O_I/O_I'} + \mathbf{p}^{O_I'/O_I''} \quad (5.30)$$

$$\text{onde: } \mathbf{p}^{O''/O_I''} = 0 \text{ e } \mathbf{p}^{O_I/O_I'} = 0 \quad (5.31)$$

Então, das equações 5.30 e 5.31:

$$\mathbf{p}^{O/O_I''} = \mathbf{p}^{O/O_I} + \mathbf{p}^{O_I'/O_I''} \text{ ou } \mathbf{p}^{O/O_I''} = \mathbf{p}^{O/O'} + \mathbf{p}^{O'/O''} \quad (5.32)$$

$$\text{Assim: } \mathbf{p}^{O/O'} = \mathbf{p}^{O/O_I''} - \mathbf{p}^{O'/O''} \quad (5.33)$$

$$\text{sendo } \mathbf{p}^{O'/O''} = u_y^M \hat{\mathbf{y}} + u_z^M \hat{\mathbf{z}} \quad (5.34)$$

$$\mathbf{p}^{O/O_I} = u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}} \quad (5.35)$$

$$\mathbf{p}^{O_I'/O_I''} = -u_{0z}^M \hat{\mathbf{z}} \quad (5.36)$$

sendo  $u_{0z}^M$  a altura do mancal em relação à referência da fundação ( $O_I''$ )

Das equações acima, chega-se a:

$$\mathbf{p}^{O/O'} = u_y^R \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R - u_{0z}^M) \hat{\mathbf{z}} - (u_y^M \hat{\mathbf{y}} + u_z^M \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.37)$$

Da figura 5.3, sabe-se que:

$$\mathbf{p}^{R/O} = e \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + e \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (5.38)$$

$$\mathbf{p}^{R/O'} = e \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + e \cos \theta \hat{\mathbf{z}} + u_y^R \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R - u_{0z}^M) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.39)$$

Derivando, chega-se à velocidade do centro de massa do rotor:

$$\mathbf{v}^R = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}^{R/O'}) = (e \dot{\theta} \cos \theta + \dot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.40)$$

Derivando mais uma vez, encontra-se a aceleração do centro de massa do rotor:

$$\mathbf{a}^R = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}^R) = (e \ddot{\theta} \cos \theta - e \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e \ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.41)$$

Assim, é possível calcular a força causada pela força de inércia:

$$\mathbf{F}_d = m_R \mathbf{a}^R = m_R ((e \ddot{\theta} \cos \theta - e \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e \ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.42)$$

Considerando  $\ddot{\theta} = 0$ , tem-se  $\dot{\theta} = \omega$  e  $\theta = \omega t$ :

$$\mathbf{F}_d = m_R \mathbf{a}^R = m_R ((-e \omega^2 \operatorname{sen} \omega t + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e \omega^2 \cos \omega t + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.43)$$

Calculando a força elástica do eixo, tem-se:

$$\mathbf{F}_e = k_e \mathbf{p}^{O/O'} = k_e (u_y^R \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R - u_{0z}^M) \hat{\mathbf{z}} - (u_y^M \hat{\mathbf{y}} + u_z^M \hat{\mathbf{z}})) \quad (5.44)$$

Reorganizando:

$$\mathbf{F}_e = k_e \left( (u_y^R - u_y^M) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.45)$$

$$\text{ou } \mathbf{F}_e = k_e (u_y^R - u_y^M) \hat{\mathbf{y}} + k_e (u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.46)$$

Para calcular a força de amortecimento interno, faz-se:

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( \frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) \right) \quad (5.47)$$

Considerando as equações 5.13, 5.14 calcula-se a derivada do vetor  $\mathbf{p}^{O/O'}$  no referencial do rotor:

$$\frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) = \frac{{}^R d}{{}^R dt} \left( (u_y^R - u_y^M) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.48)$$

Assim:

$$\frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) = (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{y}} + (u_y^R - u_y^M) \frac{{}^R d}{{}^R dt} (\hat{\mathbf{y}}) + (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{z}} + (u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M) \hat{\mathbf{z}} \frac{{}^R d}{{}^R dt} (\hat{\mathbf{z}}) \quad (5.49)$$

Então:

$$\frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) = (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{y}} - \Omega (u_y^R - u_y^M) \hat{\mathbf{z}} + (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{z}} + \Omega (u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M) \hat{\mathbf{y}} \quad (5.50)$$

Reorganizando:

$$\frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) = (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^M + \Omega (u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M)) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \Omega (u_y^R - u_y^M)) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.51)$$

Chega-se à força:

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^M + \Omega(u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M)) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \Omega(u_y^R - u_y^M)) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.52)$$

ou:

$$\mathbf{F}_{ai} = (c_i \dot{u}_y^R - c_i \dot{u}_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_{0z}^M - \Omega c_i u_z^M) \hat{\mathbf{y}} + (c_i \dot{u}_z^R - c_i \dot{u}_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.53)$$

Calculando a força de amortecimento externo:

$$\mathbf{F}_{ae} = c_e \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{o/o'}) \right) \quad (5.54)$$

Para calcular a força de amortecimento externo do eixo, deve-se derivar o vetor  $\mathbf{p}^{o/o'}$  no referencial inercial:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{o/o'}) = \frac{d}{dt} \left( (u_y^R - u_y^M) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.55)$$

Assim:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{o/o'}) = (\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.56)$$

Calculando-se a força de amortecimento externo:

$$\mathbf{F}_{ae} = (c_e \dot{u}_y^R - c_e \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{y}} + (c_e \dot{u}_z^R - c_e \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.57)$$

### 5.2.2.2. Forças no mancal

A força dos mancais depende dos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento do filme lubrificante:

$$\mathbf{F}_M = 2 \left( (k_{myy} + k_{mzy}) u_y^M + (c_{myy} + c_{mzy}) \dot{u}_y^M \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( (k_{mzz} + k_{mzy}) u_z^M + (c_{mzz} + c_{mzy}) \dot{u}_z^M \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.58)$$

### 5.2.2.3 Equilíbrio de forças

Conhecendo as forças que atuam no sistema, pode-se equacionar cada componente do mesmo, através do equilíbrio de forças:

#### 5.2.2.3.a Rotor

As forças atuantes no rotor são a força de desbalanceamento e as forças de rigidez e amortecimento do eixo. Fazendo-se o equilíbrio de forças e substituindo os termos em 5.26, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & m_R \left( (-e\omega^2 \sin \omega t + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e\omega^2 \cos \omega t + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \right) + \\
 & \left( c_i \dot{u}_y^R - c_i \dot{u}_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_{0z}^M - \Omega c_i u_z^M \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( c_i \dot{u}_z^R - c_i \dot{u}_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M \right) \hat{\mathbf{z}} + \\
 & \left( c_e \dot{u}_y^R - c_e \dot{u}_y^M \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( c_e \dot{u}_z^R - c_e \dot{u}_z^M \right) \hat{\mathbf{z}} + \\
 & k_e \left( u_y^R - u_y^M \right) \hat{\mathbf{y}} + k_e \left( u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M \right) \hat{\mathbf{z}} = 0
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

Separando-se as forças na direção vertical e horizontal, obtém-se:

#### 5.2.2.3.a.1. Forças na direção z (vertical):

$$\begin{aligned}
 & m_R \left( -e\omega^2 \cos \omega t + \ddot{u}_z^R \right) + \left( c_i \dot{u}_z^R - c_i \dot{u}_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M \right) + \left( c_e \dot{u}_z^R - c_e \dot{u}_z^M \right) \\
 & + k_e \left( u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M \right) = 0
 \end{aligned} \tag{5.60}$$

Reorganizando:

$$\begin{aligned}
 & m_R \ddot{u}_z^R + (c_i + c_e) \dot{u}_z^R - (c_i + c_e) \dot{u}_z^M + k_e u_z^R - k_e u_z^M - k_e u_{0z}^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M \\
 & = m_R e \omega^2 \cos \omega t
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

Como não será feito um estudo da variação da altura do mancal em relação à fundação, a altura do mancal em relação ao solo será considerada zero,  $u_{0z}^M = 0$  (coincide com o centro geométrico da fundação).

$$m_R \ddot{u}_z^R + (c_i + c_e) \dot{u}_z^R - (c_i + c_e) \dot{u}_z^M + k_e u_z^R - k_e u_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M = m_R e \omega^2 \cos \omega t \quad (5.62)$$

### 5.2.2.3.a.2. Forças na direção y (horizontal):

$$m_R \left( -e \omega^2 \sin \omega t + \ddot{u}_y^R \right) + \left( c_i \dot{u}_y^R - c_i \dot{u}_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_{0z}^M - \Omega c_i u_z^M \right) + \left( c_e \dot{u}_y^R - c_e \dot{u}_y^M \right) + k_e \left( u_y^R - u_y^M \right) = 0 \quad (5.63)$$

Reorganizando:

$$m_R \ddot{u}_y^R + (c_i + c_e) \dot{u}_y^R - (c_i + c_e) \dot{u}_y^M + k_e u_y^R - k_e u_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_{0z}^M - \Omega c_i u_z^M = m_R e \omega^2 \sin \omega t \quad (5.64)$$

Considerando  $u_{0z}^M = 0$ ,

$$m_R \ddot{u}_y^R + (c_i + c_e) \dot{u}_y^R - (c_i + c_e) \dot{u}_y^M + k_e u_y^R - k_e u_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_z^M = m_R e \omega^2 \sin \omega t \quad (5.65)$$

### 5.2.2.3.b Mancais

As forças que agem no mancal são as forças de rigidez e amortecimento do mancal e as forças do eixo:

$$\mathbf{F}_M + \mathbf{F}_{ai} + \mathbf{F}_{ae} + \mathbf{F}_e = \mathbf{0} \quad (5.66)$$

Substituindo os termos nas equações acima, tem-se:

$$2 \left( (k_{myy} + k_{mzy}) u_y^M + (c_{myy} + c_{mzy}) \dot{u}_y^M \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( (k_{mzz} + k_{mzy}) u_z^M + (c_{mzz} + c_{mzy}) \dot{u}_z^M \right) \hat{\mathbf{z}} + \left( c_i \dot{u}_y^R - c_i \dot{u}_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_{0z}^M - \Omega c_i u_z^M \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( c_i \dot{u}_z^R - c_i \dot{u}_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M \right) \hat{\mathbf{z}} + \left( c_e \dot{u}_y^R - c_e \dot{u}_y^M \right) \hat{\mathbf{y}} + \left( c_e \dot{u}_z^R - c_e \dot{u}_z^M \right) \hat{\mathbf{z}} + k_e \left( u_y^R - u_y^M \right) \hat{\mathbf{y}} + k_e \left( u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M \right) \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (5.67)$$

Separando os termos nas direções vertical e horizontal, obtém-se:

### 5.2.2.3.b.1. Forças na direção z (vertical):

$$2((k_{mzz} + k_{myz})\dot{u}_z^M + (c_{mzz} + c_{myz})\dot{u}_z^M) + (c_i\dot{u}_z^R - c_i\dot{u}_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M) + (c_e\dot{u}_z^R - c_e\dot{u}_z^M) + k_e(u_z^R - u_{0z}^M - u_z^M) = 0 \quad (5.68)$$

Reorganizando:

$$(c_i + c_e)\dot{u}_z^R - (c_i + c_e - 2(c_{mzz} + c_{myz}))\dot{u}_z^M + k_e u_z^R + (2(k_{mzz} + k_{myz}) - k_e)u_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M - k_e u_{0z}^M = 0 \quad (5.69)$$

Considerando  $u_{0z}^M = 0$ , chega-se a:

$$(c_i + c_e)\dot{u}_z^R - (c_i + c_e - 2(c_{mzz} + c_{myz}))\dot{u}_z^M + k_e u_z^R + (2(k_{mzz} + k_{myz}) - k_e)u_z^M - \Omega c_i u_y^R + \Omega c_i u_y^M = 0 \quad (5.70)$$

### 5.2.2.3.b.2. Forças na direção y (horizontal):

$$2((k_{myy} + k_{mzy})\dot{u}_y^M + (c_{myy} + c_{mzy})\dot{u}_y^M) + (c_i\dot{u}_y^R - c_i\dot{u}_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_{0z}^M - \Omega c_i u_z^M) + (c_e\dot{u}_y^R - c_e\dot{u}_y^M) + k_e(u_y^R - u_y^M) = 0 \quad (5.71)$$

Reorganizando:

$$(c_i + c_e)\dot{u}_y^R - (c_i + c_e - 2(c_{myy} + c_{mzy}))\dot{u}_y^M + k_e u_y^R + (2(k_{myy} + k_{mzy}) - k_e)u_y^M + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_{0z}^M - \Omega c_i u_z^M = 0 \quad (5.72)$$

Considerando  $u_{0z}^M = 0$ , chega-se a:

$$\begin{aligned}
& (c_i + c_e)\dot{u}_y^R - (c_i + c_e - 2(c_{myy} + c_{mzy}))\dot{u}_y^M + k_e u_y^R + (2(k_{myy} + k_{mzy}) - k_e)u_y^M \\
& + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_z^M = 0
\end{aligned} \tag{5.73}$$

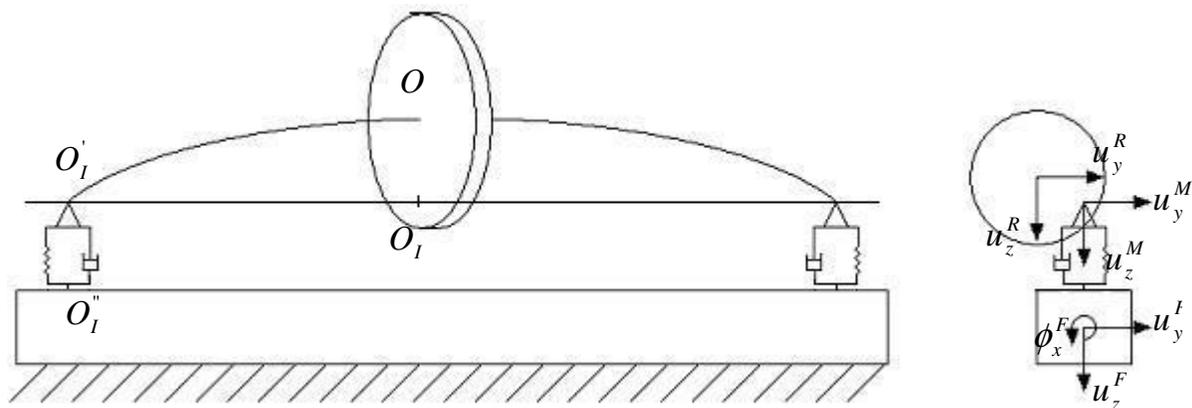
Na forma matricial, o equacionamento do sistema completo fica:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_z^R \\ \ddot{u}_y^R \\ \ddot{u}_z^M \\ \ddot{u}_y^M \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 \\ 0 & (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) \\ (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e - 2c_{mzz}) & -2c_{mzy} \\ 0 & (c_i + c_e) & -2c_{mzy} & -(c_i + c_e - 2c_{myy}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_z^R \\ \dot{u}_y^R \\ \dot{u}_z^M \\ \dot{u}_y^M \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} k_e & -\Omega c_i & -k_e & \Omega c_i \\ \Omega c_i & k_e & -\Omega c_i & -k_e \\ k_e & -\Omega c_i & -(k_e - 2k_{mzz}) & \Omega c_i + 2k_{mzy} \\ \Omega c_i & k_e & -\Omega c_i + 2k_{mzy} & -k_e + 2k_{myy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_z^R \\ u_y^R \\ u_z^M \\ u_y^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R e \omega^2 \cos \omega t \\ m_R e \omega^2 \sin \omega t \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.74}$$

### 5.2.3 Rotor-mancais-fundação

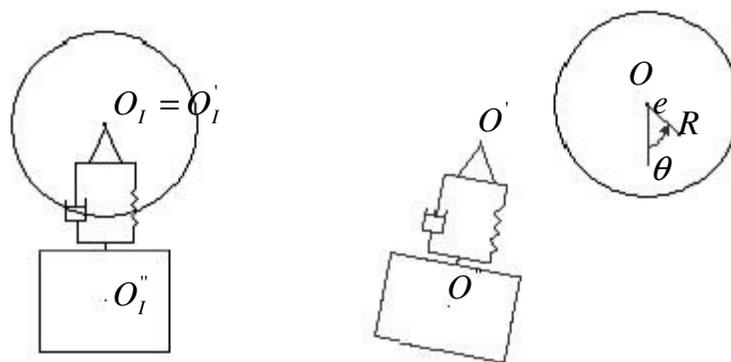
O sistema completo é composto por um rotor do tipo Jeffcott, mancais flexíveis, uma fundação do tipo bloco e o solo (figura 5.9). Para o equacionamento do sistema completo, as equações são obtidas no referencial inercial. Esse sistema possui sete graus de liberdade: dois para o rotor, dois para os mancais e três para a fundação. O solo é introduzido no sistema através de sua matriz de impedância mecânica, dependente da frequência.

As frequências relevantes do sistema são a frequência de rotação do rotor e a frequência de excitação. Como a excitação do rotor é causada pela sua própria massa desbalanceada, essas duas frequências são iguais.



**Figura 5.9. Sistema rotor-mancais-fundação-solo.**

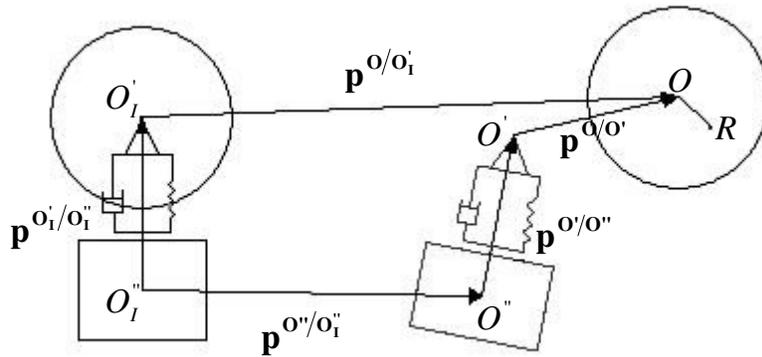
O equacionamento do sistema é obtido na forma vetorial. O sistema é mostrado na figura 5.9, assim como seus graus de liberdade. As origens dos sistemas de coordenadas no referencial inercial e não-inercial são mostradas na figura 5.10, onde o ponto  $O_I$  representa o centro geométrico do disco no referencial inercial, o ponto  $O_I'$  é o centro do mancais e o ponto  $O_I''$  é o centro geométrico da fundação quando o sistema está em repouso. Os pontos  $O$ ,  $O'$  e  $O''$  representam o rotor, o eixo no mancais e a fundação, respectivamente, quando o sistema está em movimento.  $e$  é a excentricidade do rotor e  $R$  é o centro de massa do rotor.



**Figura 5.10. Origens dos sistemas de coordenadas.**

Para fazer o equacionamento do sistema, alguns vetores foram definidos e estão mostrados na figura 5.11. O vetor  $\mathbf{p}^{O/O_I'}$  representa o deslocamento do rotor e o vetor  $\mathbf{p}^{O''/O_I''}$  representa o

deslocamento da fundação. O vetor  $\mathbf{p}^{o/o'}$  representa o deslocamento do rotor em relação ao mancal, ou a deformação do eixo.



**Figura 5.11. Representação vetorial do sistema.**

Para o cálculo das forças dos elementos do sistema, é necessário conhecer os deslocamentos dos componentes, suas velocidades e acelerações. Para isso, foi feito o seguinte equacionamento:

$$\mathbf{p}^{o/o''} = \mathbf{p}^{o/o'} + \mathbf{p}^{o'/o''} + \mathbf{p}^{o''/o''} \quad (5.75)$$

onde  $\mathbf{p}^{o/o''}$  é a posição do centro geométrico do rotor em movimento em relação à posição do centro geométrico da fundação no sistema inercial.

$\mathbf{p}^{o/o'}$  é a posição do centro geométrico do rotor em relação ao mancal e será utilizado para calcular a força dos mancais,  $\mathbf{p}^{o'/o''}$  é a posição do mancal em relação à fundação.

Assim:

$$\mathbf{p}^{o/o'} = \mathbf{p}^{o/o''} - \mathbf{p}^{o'/o''} - \mathbf{p}^{o''/o''} \quad (5.76)$$

onde:

$$\mathbf{p}^{o/o''} = \mathbf{p}^{o/o'} + \mathbf{p}^{o'/o''} \quad (5.77)$$

Assim:

$$\mathbf{p}^{O/O'} = (\mathbf{p}^{O/O_i} + \mathbf{p}^{O_i/O_i''}) - \mathbf{p}^{O'/O''} - \mathbf{p}^{O''/O_i''} \quad (5.78)$$

Sendo:

$$\mathbf{p}^{O''/O_i''} = u_y^F \hat{\mathbf{y}} + u_z^F \hat{\mathbf{z}} \quad (5.79)$$

$$\mathbf{p}^{O/O_i} = u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}} \quad (5.80)$$

$$\mathbf{p}^{O_i/O_i''} = u_{0z}^M \hat{\mathbf{z}} \quad (5.81)$$

$$\mathbf{p}^{O'/O''} = u_{0z}^M (\sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \phi \hat{\mathbf{z}}) + u_y^M \hat{\mathbf{y}} + u_z^M \hat{\mathbf{z}} \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^{O/O'} &= (u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}} + u_{0z}^M \hat{\mathbf{z}}) - u_{0z}^M (\sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \phi \hat{\mathbf{z}}) \\ &- (u_y^M \hat{\mathbf{y}} + u_z^M \hat{\mathbf{z}}) - (u_y^F \hat{\mathbf{y}} + u_z^F \hat{\mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (5.83)$$

Reorganizando a equação (5.83):

$$\mathbf{p}^{O/O'} = (u_y^R - u_{0z}^M \sin \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.84)$$

Com os vetores definidos, é possível calcular as forças de cada componente do sistema:

### 5.2.3.1 Forças no rotor

As forças que atuam no rotor são a força devida ao desbalanceamento e as forças de rigidez e amortecimento do eixo.

#### 5.2.3.1.a Força de desbalanceamento:

$$\mathbf{F}_d = m_R \mathbf{a}^R \quad (5.85)$$

onde:

$$\mathbf{a}^R = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{p}^{R/O_i}) \quad (5.86)$$

Sabendo-se que:

$$\mathbf{p}^{R/O'} = \mathbf{p}^{R/O} + \mathbf{p}^{O/O_i} \quad (5.87)$$

Onde:

$$\mathbf{p}^{R/O} = e \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + e \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (5.88)$$

e:

$$\mathbf{p}^{R/O_i} = e \operatorname{sen} \theta \hat{\mathbf{y}} + e \cos \theta \hat{\mathbf{z}} + u_y^R \hat{\mathbf{y}} + u_z^R \hat{\mathbf{z}} \quad (5.89)$$

Reorganizando a equação (5.89), tem-se:

$$\mathbf{p}^{R/O_i} = (e \operatorname{sen} \theta + u_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (e \cos \theta + u_z^R) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.90)$$

Assim:

$$\mathbf{v}^R = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{R/O_i}) \quad (5.91)$$

$$\mathbf{v}^R = (e \dot{\theta} \cos \theta + \dot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta + \dot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.92)$$

Derivando  $\mathbf{v}^R$ , chega-se a:

$$\mathbf{a}^R = (e \ddot{\theta} \cos \theta - e \dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e \ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.93)$$

Assim:

$$\mathbf{F}_d = m_R \left( (e\ddot{\theta} \cos \theta - e\dot{\theta}^2 \operatorname{sen} \theta + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e\ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta - e\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.94)$$

### 5.2.3.1.b Força elástica do eixo

$$\mathbf{F}_e = k_e \mathbf{p}^{O/O'} \quad (5.95)$$

De (5.84):

$$\mathbf{F}_e = k_e \left( (u_y^R - u_{0z}^M \operatorname{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.96)$$

### 5.2.3.1.c Força de amortecimento interno do eixo

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( \frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) \right) \quad (5.97)$$

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( \frac{{}^R d}{{}^R dt} \left( (u_y^R - u_{0z}^M \operatorname{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) \right) \quad (5.98)$$

Para calcular o amortecimento interno do eixo, consideram-se as equações 5.13 e 5.14.

Então, derivando  $\mathbf{p}^{O/O'}$  no referencial móvel, chega-se a:

$$\frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) = \frac{{}^R d}{{}^R dt} \left( (u_y^R - u_{0z}^M \operatorname{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.99)$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^R d}{{}^R dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) &= (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_y^R - u_{0z}^M \operatorname{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \frac{{}^R d}{{}^R dt} \hat{\mathbf{y}} + \\ &+ (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \operatorname{sen} \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) \hat{\mathbf{z}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \frac{{}^R d}{{}^R dt} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{{}^R d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O'}) &= (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) \hat{\mathbf{y}} - (u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \Omega \hat{\mathbf{z}} + \\ &+ (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \text{sen} \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) \hat{\mathbf{z}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \Omega \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned} \frac{{}^R d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O'}) &= (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \Omega) \hat{\mathbf{y}} \\ &+ (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \text{sen} \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \Omega) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (5.102)$$

Assim:

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( \begin{aligned} &(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \Omega) \hat{\mathbf{y}} \\ &+ (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \text{sen} \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \Omega) \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \right) \quad (5.103)$$

#### 5.2.3.1.d. Força de amortecimento externo

$$\mathbf{F}_{ae} = c_e \left( \frac{d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O'}) \right) \quad (5.104)$$

$$\mathbf{F}_{ae} = c_e \left( \frac{d}{dt} \left( (u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) \right) \quad (5.105)$$

Derivando  $\mathbf{p}^{O/O'}$  no referencial inercial, chega-se a:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O'}) = \frac{d}{dt} \left( (u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.106)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}^{O/O'}) = (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \text{sen} \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.107)$$

Assim:

$$\mathbf{F}_{ae} = c_e \left( (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \sin \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.108)$$

### 5.2.3.1.e. Equilíbrio de forças no rotor:

Considerando as equações:

$$\mathbf{F}_d + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{ai} + \mathbf{F}_{ae} = 0 \quad (5.109)$$

Sendo:

$$\mathbf{F}_d = m_R \mathbf{a}^R;$$

$$\mathbf{F}_e = k_e \mathbf{p}^{O/O'};$$

$$\mathbf{F}_{ai} = c_i \left( \frac{{}^R d}{dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) \right);$$

$$\mathbf{F}_{ae} = c_e \left( \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{O/O'}) \right).$$

Então:

$$\begin{aligned} & m_R \left( (e \ddot{\theta} \cos \theta - e \dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{u}_y^R) \hat{\mathbf{y}} + (-e \ddot{\theta} \sin \theta - e \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{u}_z^R) \hat{\mathbf{z}} \right) + \\ & k_e \left( (u_y^R - u_{0z}^M \sin \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) + \\ & c_i \left( \left( \dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R + u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \Omega \right) \hat{\mathbf{y}} \right. \\ & \left. + \left( \dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \sin \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_{0z}^M \sin \phi - u_y^M - u_y^F) \Omega \right) \hat{\mathbf{z}} \right) + \\ & c_e \left( (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \sin \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) \hat{\mathbf{z}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.110)$$

#### 5.2.3.1.e.1 Forças na horizontal:

$$\begin{aligned}
& m_R(e\ddot{\theta}\cos\theta - e\dot{\theta}^2\sin\theta + \ddot{u}_y^R) + k_e(u_y^R - u_{0z}^M\sin\phi - u_y^M - u_y^F) + \\
& c_i(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M\dot{\phi}\cos\phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M\cos\phi - u_z^M - u_z^F)\Omega) + \\
& c_e(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M\dot{\phi}\cos\phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) = 0
\end{aligned} \tag{5.111}$$

Considerando  $\ddot{\theta} = 0$  então:  $\dot{\theta} = \omega$ ,  $\theta = \omega t$  e, sendo  $\phi$  um ângulo muito pequeno,  $\sin\phi \cong 0$ ,  $\cos\phi \cong 1$ :

$$\begin{aligned}
& m_R(-e\omega^2\sin\omega t + \ddot{u}_y^R) + k_e(u_y^R - u_y^M - u_y^F) + \\
& c_i(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M\dot{\phi} - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R - u_z^M - u_z^F)\Omega) + c_e(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M\dot{\phi} - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) = 0
\end{aligned} \tag{5.112}$$

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned}
& m_R\ddot{u}_y^R + k_e u_y^R - k_e u_y^M - k_e u_y^F + c_i \dot{u}_y^R - c_i u_{0z}^M \dot{\phi} - c_i \dot{u}_y^M - c_i \dot{u}_y^F \\
& + \Omega c_i u_z^R - \Omega c_i u_z^M - \Omega c_i u_z^F + c_e \dot{u}_y^R - c_e u_{0z}^M \dot{\phi} - c_e \dot{u}_y^M - c_e \dot{u}_y^F = m_R e \omega^2 \sin\omega t
\end{aligned} \tag{5.113}$$

Ou:

$$\begin{aligned}
& m_R \ddot{u}_y^R + (c_i + c_e)(\dot{u}_y^R - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F - u_{0z}^M \dot{\phi}) + \Omega c_i (u_z^R - u_z^M - u_z^F) + k_e (u_y^R - u_y^M - u_y^F) = \\
& m_R e \omega^2 \sin\omega t
\end{aligned} \tag{5.114}$$

### 5.2.3.1.e.2. Forças na vertical :

$$\begin{aligned}
& m_R(-e\ddot{\theta}\sin\theta - e\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{u}_z^R) + k_e(u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M\cos\phi - u_z^M - u_z^F) + \\
& c_i(\dot{u}_z^R + u_{0z}^M\dot{\phi}\sin\phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_{0z}^M\sin\phi - u_y^M - u_y^F)\Omega) + \\
& c_e(\dot{u}_z^R + u_{0z}^M\dot{\phi}\sin\phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) = 0
\end{aligned} \tag{5.115}$$

Considerando  $\ddot{\theta} = 0$ ,  $\dot{\theta} = \omega$ ,  $\theta = \omega t$  e, sendo  $\phi$  um ângulo muito pequeno,  $\sin\phi \cong 0$  e  $\cos\phi \cong 1$ . Assim:

$$m_R(-e\omega^2 \cos \omega t + \ddot{u}_z^R) + k_e(u_z^R - u_z^M - u_z^F) + c_i(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_y^M - u_y^F)\Omega) + c_e(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) = 0 \quad (5.116)$$

Reorganizando os termos:

$$m_R \ddot{u}_z^R + (c_i + c_e)(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) - \Omega c_i(u_y^R - u_y^M - u_y^F) + k_e(u_z^R - u_z^M - u_z^F) = m_R e \omega^2 \cos \omega t \quad (5.117)$$

### 5.2.3.2 Forças e momentos na fundação

As forças e momentos que atuam na fundação são provenientes da própria fundação, dos mancais e do solo:

#### 5.2.3.2.a. Força do mancal:

$$\mathbf{F}_M = 2 \left( (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{y}} + (k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (5.118)$$

#### 5.2.3.2.b. Força da fundação:

$$\mathbf{F}_F = m_F \mathbf{a}^F \quad (5.119)$$

$$\mathbf{a}^F = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{p}^{o^F/o_i}) = \frac{d^2}{dt^2} (u_y^F \hat{\mathbf{y}} + u_z^F \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.120)$$

$$\mathbf{v}^F = \frac{d}{dt} (\mathbf{p}^{o^F/o_i}) = \frac{d}{dt} (u_y^F \hat{\mathbf{y}} + u_z^F \hat{\mathbf{z}}) = \dot{u}_y^F \hat{\mathbf{y}} + \dot{u}_z^F \hat{\mathbf{z}} \quad (5.121)$$

$$\mathbf{a}^F = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^F) = \ddot{u}_y^F \hat{\mathbf{y}} + \ddot{u}_z^F \hat{\mathbf{z}} \quad (5.122)$$

$$\mathbf{F}_F = m_F (\ddot{u}_y^F \hat{\mathbf{y}} + \ddot{u}_z^F \hat{\mathbf{z}}) \quad (5.123)$$

#### 5.2.3.2.c. Força do solo:

$$\mathbf{F}_S = f_y^S \hat{\mathbf{y}} + f_z^S \hat{\mathbf{z}} \quad (5.124)$$

#### 5.2.3.2.d. Momento do solo

$$\mathbf{M}_S = M_x^S \hat{\mathbf{x}} \quad (5.125)$$

### 5.2.3.2.e. Equilíbrio de forças na fundação:

$$\mathbf{F}_M + \mathbf{F}_F + \mathbf{F}_S = 0 \quad (5.126)$$

$$2 \left( \begin{array}{l} (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{y}} + \\ (k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{z}} \end{array} \right) + m_F (\ddot{u}_y^F \hat{\mathbf{y}} + \ddot{u}_z^F \hat{\mathbf{z}}) + f_y^S \hat{\mathbf{y}} + f_z^S \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (5.127)$$

#### 5.2.3.2.e.1. Forças na horizontal:

$$2(k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) + m_F \ddot{u}_y^F + f_y^S = 0 \quad (5.128)$$

Reorganizando:

$$m_F \ddot{u}_y^F + 2(k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) = -f_y^S \quad (5.129)$$

#### 5.2.3.2.e.2. forças na vertical:

$$2(k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) + m_F \ddot{u}_z^F + f_z^S = 0 \quad (5.130)$$

Reorganizando:

$$m_F \ddot{u}_z^F + 2(k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) = -f_z^S \quad (5.131)$$

#### 5.2.3.2.e.3. Momentos na fundação:

$$\mathbf{M}^{O''} = \mathbf{p}^{F_M/O''} \times \mathbf{F}_M + \mathbf{M}_S \quad (5.132)$$

$$\mathbf{F}_M = 2 \left( \begin{array}{l} (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{y}} + \\ (k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{z}} \end{array} \right) \quad (5.133)$$

$$\mathbf{p}^{F_M/O''} = \mathbf{p}^{O'/O''} = u_{0z}^M (\text{sen } \phi \hat{\mathbf{y}} + \text{cos } \phi \hat{\mathbf{z}}) + u_y^M \hat{\mathbf{y}} + u_z^M \hat{\mathbf{z}} \quad (5.134)$$

$$\mathbf{M}_s = M_x^S \hat{\mathbf{x}} \quad (5.135)$$

$$\mathbf{M}^{O''} = \left( u_{0z}^M (\text{sen } \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \phi \hat{\mathbf{z}}) + u_y^M \hat{\mathbf{y}} + u_z^M \hat{\mathbf{z}} \right) \times \left( 2 \left( \begin{array}{l} (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{y}} + \\ (k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{z}} \end{array} \right) \right) + M_x^S \hat{\mathbf{x}} \quad (5.136)$$

$$\mathbf{M}^{O''} = \left( \begin{array}{l} 2(u_{0z}^M \text{sen } \phi + u_y^M) (k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) \\ -2(u_{0z}^M \cos \phi + u_z^M) (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) + M_x^S \end{array} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (5.137)$$

$$\mathbf{M}^{O''} = \left( \begin{array}{l} 2u_{0z}^M \text{sen } \phi (k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) + 2(k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzz} \dot{u}_z^M + c_{mzy} \dot{u}_y^M) u_y^M \\ -2u_{0z}^M \cos \phi (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) - 2(k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) u_z^M \\ + M_x^S \end{array} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (5.138)$$

Eliminando os termos de segunda ordem, considerando  $\text{sen } \phi \cong 0$  e  $\cos \phi \cong 1$ , e desprezando os termos acoplados no modelo linear, chega-se ao seguinte resultado:

$$\mathbf{M}^{O''} = \left( -2u_{0z}^M (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) + M_x^S \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (5.139)$$

Mas

$$\mathbf{M}^{O''} = \dot{\mathbf{H}}^{C/O''} \quad (5.140)$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{C/O''} = \ddot{\mathbf{I}}^{C/O''} \cdot \boldsymbol{\alpha}^C + \boldsymbol{\omega}^C \times \ddot{\mathbf{I}}^{C/O''} \cdot \boldsymbol{\omega}^C \quad (5.141)$$

onde:

$\dot{\mathbf{H}}^{C/O''}$  é a derivada da quantidade de movimento da fundação

$\ddot{\mathbf{I}}^{C/O''}$  é o tensor de inércia da fundação

$\boldsymbol{\omega}^C$  é a velocidade angular da fundação

$\boldsymbol{\alpha}^C$  é a aceleração angular da fundação

Então:

$$\ddot{\mathbf{I}}^{C/O''} = \frac{m_F}{12} \begin{bmatrix} (h_F^2 + 4a^2) & 0 & 0 \\ 0 & (h_F^2 + 4a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{bmatrix} \quad (5.142)$$

$$\boldsymbol{\omega}^C = \boldsymbol{\omega}^F = \dot{\phi} \hat{\mathbf{x}} \quad (5.143)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^C = \boldsymbol{\alpha}^F = \ddot{\phi} \hat{\mathbf{x}} \quad (5.144)$$

Assim:

$$\dot{\mathbf{H}}^{C/O''} = \frac{m_F}{12} \begin{bmatrix} (h_F^2 + 4a^2) & 0 & 0 \\ 0 & (h_F^2 + 4a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{bmatrix} \cdot \ddot{\phi} \hat{\mathbf{x}} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{x}} \times \frac{m_F}{12} \begin{bmatrix} (h_F^2 + 4a^2) & 0 & 0 \\ 0 & (h_F^2 + 4a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 8a^2 \end{bmatrix} \cdot \dot{\phi} \hat{\mathbf{x}} \quad (5.145)$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{C/O''} = \frac{m_F}{12} (h_F^2 + 4a^2) \ddot{\phi} \hat{\mathbf{x}} + \dot{\phi} \hat{\mathbf{x}} \times \frac{m_F}{12} (h_F^2 + 4a^2) \dot{\phi} \hat{\mathbf{x}} = \frac{m_F}{12} (h_F^2 + 4a^2) \ddot{\phi} \hat{\mathbf{x}} + 0 \quad (5.146)$$

$$\dot{\mathbf{H}}^{C/O''} = \frac{m_F}{12} (h_F^2 + 4a^2) \ddot{\phi} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{I}_F \ddot{\phi} \hat{\mathbf{x}} \quad (5.147)$$

Então:

$$\mathbf{M}^{O''} = (-2u_{0z}^M (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) + M_x^S) \hat{\mathbf{x}} \quad (5.148)$$

$$\mathbf{I}_F \ddot{\phi} \hat{\mathbf{x}} = (-2u_{0z}^M (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) + M_x^S) \hat{\mathbf{x}} \quad (5.149)$$

$$\mathbf{I}_F \ddot{\phi} = -2u_{0z}^M (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) + M_x^S \quad (5.150)$$

Reorganizando:

$$\mathbf{I}_F \ddot{\phi} + 2u_{0z}^M (k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) = M_x^S \quad (5.151)$$

### 5.2.3.3 Forças no mancal

As forças que atuam no mancal são as forças do filme de óleo e do rotor:

$$\mathbf{F}_M + \mathbf{F}_{\text{eixo}} = 0 \quad (5.152)$$

$$\mathbf{F}_{\text{eixo}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{\text{ae}} + \mathbf{F}_{\text{ai}} \quad (5.153)$$

$$\mathbf{F}_M + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{\text{ae}} + \mathbf{F}_{\text{ai}} = 0 \quad (5.154)$$

Substituindo as forças na equação 3.154, tem-se:

$$\begin{aligned} & 2((k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) \hat{\mathbf{y}} + (k_{mzz} u_z^M + k_{mzy} u_y^M + c_{mzy} \dot{u}_z^M + c_{mzz} \dot{u}_y^M) \hat{\mathbf{z}}) \\ & + k_e ((u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \hat{\mathbf{z}}) \\ & + c_e ((\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) \hat{\mathbf{y}} + (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \text{sen} \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) \hat{\mathbf{z}}) + \\ & c_i \left( (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \Omega) \hat{\mathbf{y}} \right. \\ & \left. + (\dot{u}_z^R + u_{0z}^M \dot{\phi} \text{sen} \phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) \Omega) \hat{\mathbf{z}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.155)$$

Equilíbrio de forças nos mancais:

#### 5.2.3.3.a. Forças na horizontal:

$$\begin{aligned} & 2(k_{myy} u_y^M + k_{myz} u_z^M + c_{myy} \dot{u}_y^M + c_{myz} \dot{u}_z^M) + k_e (u_y^R - u_{0z}^M \text{sen} \phi - u_y^M - u_y^F) + c_e (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) + \\ & c_i (\dot{u}_y^R - u_{0z}^M \dot{\phi} \cos \phi - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos \phi - u_z^M - u_z^F) \Omega) = 0 \end{aligned} \quad (5.156)$$

Considerando  $\phi$  um ângulo muito pequeno, então:  $\text{sen} \phi \cong 0$  e  $\cos \phi \cong 1$ . Assim:

$$2(k_{myy}u_y^M + k_{myz}u_z^M + c_{myy}\dot{u}_y^M + c_{myz}\dot{u}_z^M) + k_e(u_y^R - u_y^M - u_y^F) + c_e(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M\dot{\phi} - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) + c_i(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M\dot{\phi} - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F + (u_z^R - u_z^M - u_z^F)\Omega) = 0 \quad (5.157)$$

Reorganizando:

$$(c_i + c_e)(\dot{u}_y^R - u_{0z}^M\dot{\phi} - \dot{u}_y^M - \dot{u}_y^F) + 2c_{myy}\dot{u}_y^M + 2c_{myz}\dot{u}_z^M + 2k_{myy}u_y^M + 2k_{myz}u_z^M + k_e(u_y^R - u_y^M - u_y^F) + \Omega c_i(u_z^R - u_z^M - u_z^F) = 0 \quad (5.158)$$

### 5.2.3.3.b. Forças na vertical:

$$2(k_{mzz}u_z^M + k_{mzy}u_y^M + c_{mzz}\dot{u}_z^M + c_{mzy}\dot{u}_y^M) + k_e(u_z^R + u_{0z}^M - u_{0z}^M \cos\phi - u_z^M - u_z^F) + c_e(\dot{u}_z^R + u_{0z}^M\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) + c_i(\dot{u}_z^R + u_{0z}^M\dot{\phi} \operatorname{sen}\phi - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_{0z}^M \operatorname{sen}\phi - u_y^M - u_y^F)\Omega) = 0 \quad (5.159)$$

Considerando  $\phi$  muito pequeno, então  $\operatorname{sen}\phi \cong 0$  e  $\cos\phi \cong 1$ . Assim, chega-se a:

$$2(k_{mzz}u_z^M + k_{mzy}u_y^M + c_{mzz}\dot{u}_z^M + c_{mzy}\dot{u}_y^M) + k_e(u_z^R - u_z^M - u_z^F) + c_e(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) + c_i(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F - (u_y^R - u_y^M - u_y^F)\Omega) = 0 \quad (5.160)$$

Reorganizando:

$$(c_i + c_e)(\dot{u}_z^R - \dot{u}_z^M - \dot{u}_z^F) + 2c_{mzy}\dot{u}_z^M + 2c_{mzy}\dot{u}_y^M + 2k_{mzz}u_z^M + 2k_{mzy}u_y^M + k_e(u_z^R - u_z^M - u_z^F) - \Omega c_i(u_y^R - u_y^M - u_y^F) = 0 \quad (5.161)$$

Na forma matricial:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_Z^R \\ \ddot{u}_Y^R \\ \ddot{u}_Z^M \\ \ddot{u}_Y^M \\ \ddot{u}_Z^F \\ \ddot{u}_Y^F \\ \ddot{\phi}_X^F \end{Bmatrix} + \\
 & \begin{bmatrix} (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & 0 \\ 0 & (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & -(c_i + c_e)u_{0z}^M \\ (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) + 2c_{mzz} & 2c_{mzy} & -(c_i + c_e) & 0 & 0 \\ 0 & (c_i + c_e) & 2c_{myz} & 2c_{myy} - (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & -(c_i + c_e)u_{0z}^M \\ 0 & 0 & 2c_{mzz} & 2c_{mzy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{myz} & 2c_{myy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_{0z}^M c_{myz} & 2u_{0z}^M c_{myy} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_Z^R \\ \dot{u}_Y^R \\ \dot{u}_Z^M \\ \dot{u}_Y^M \\ \dot{u}_Z^F \\ \dot{u}_Y^F \\ \dot{\phi}_X^F \end{Bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} k_e & -\Omega c_i & -k_e & \Omega c_i & -k_e & \Omega c_i & 0 \\ \Omega c_i & k_e & -\Omega c_i & -k_e & -\Omega c_i & k_e & 0 \\ k_e & -\Omega c_i & 2k_{mzz} - k_e & 2k_{mzy} + \Omega c_i & -k_e & \Omega c_i & 0 \\ \Omega c_i & k_e & 2k_{myz} - \Omega c_i & 2k_{myy} - k_e & \Omega c_i & -k_e & 0 \\ 0 & 0 & 2k_{mzz} & 2k_{mzy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_{myz} & 2k_{myy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_{0z}^M k_{myz} & 2u_{0z}^M k_{myy} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_Z^R \\ u_Y^R \\ u_Z^M \\ u_Y^M \\ u_Z^F \\ u_Y^F \\ \phi_X^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R e \omega^2 \cos \omega t \\ m_R e \omega^2 \sin \omega t \\ 0 \\ 0 \\ -f_z^S \\ -f_y^S \\ M_x^S \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

(5.162)

No domínio da frequência, as matrizes apresentam a seguinte forma:

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} m_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_F & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_F \end{bmatrix} + \right. \\
\left. i\omega \begin{bmatrix} (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & 0 \\ 0 & (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & -(c_i + c_e)u_{0z}^M \\ (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) + 2c_{mzz} & 2c_{mzy} & -(c_i + c_e) & 0 & 0 \\ 0 & (c_i + c_e) & 2c_{myz} & 2c_{myy} - (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & -(c_i + c_e)u_{0z}^M \\ 0 & 0 & 2c_{mzz} & 2c_{mzy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2c_{myz} & 2c_{myy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_{0z}^M c_{myz} & 2u_{0z}^M c_{myy} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\
+ \begin{bmatrix} k_e & -\Omega c_i & -k_e & \Omega c_i & -k_e & \Omega c_i & 0 \\ \Omega c_i & k_e & -\Omega c_i & -k_e & -\Omega c_i & k_e & 0 \\ k_e & -\Omega c_i & 2k_{mzz} - k_e & 2k_{mzy} + \Omega c_i & -k_e & \Omega c_i & 0 \\ \Omega c_i & k_e & 2k_{myz} - \Omega c_i & 2k_{myy} - k_e & \Omega c_i & -k_e & 0 \\ 0 & 0 & 2k_{mzz} & 2k_{mzy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2k_{myz} & 2k_{myy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_{0z}^M k_{myz} & 2u_{0z}^M k_{myy} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \right) \begin{Bmatrix} u_Z^R \\ u_Y^R \\ u_Z^M \\ u_Y^M \\ u_Z^F \\ u_Y^F \\ \phi_X^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_R e \omega^2 \\ m_R e \omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ -f_z^S \\ -f_y^S \\ M_x^S \end{Bmatrix} \quad (5.163)$$

Conforme visto no capítulo 4, equação (4.5), a matriz de flexibilidade do solo, que relaciona o vetor das forças externas aplicadas na fundação, apresenta a seguinte relação, para o caso da fundação simétrica:

$$\begin{bmatrix} N_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & N_{uy} & N_{wx} \\ 0 & N_{\phi y} & N_{\phi x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_z^S \\ f_y^S \\ M_x^S / a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_Z^F \\ u_Y^F \\ \phi_X^F \end{Bmatrix}$$

E a matriz inversa da matriz de flexibilidade fica:

$$\begin{bmatrix} k_{wz} & 0 & 0 \\ 0 & k_{uy} & k_{wx} \\ 0 & k_{\phi y} & k_{\phi x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_Z^F \\ u_Y^F \\ \phi_X^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_z^S \\ f_y^S \\ M_x^S / a \end{Bmatrix} \quad (5.164)$$

Incluindo esses coeficientes do solo nas equações que representam o sistema completo, chega-se à seguinte matriz:

$$\left[ \begin{array}{c}
 -\omega^2 \left[ \begin{array}{cccccc}
 m_R & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & m_R & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & m_F & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_F \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_F
 \end{array} \right] + \\
 i\omega \left[ \begin{array}{cccccc}
 (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 \\
 0 & (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) \\
 (c_i + c_e) & 0 & -(c_i + c_e) + 2c_{mzz} & 2c_{mzy} & -(c_i + c_e) & 0 \\
 0 & (c_i + c_e) & 2c_{myz} & 2c_{myy} & -(c_i + c_e) & 0 \\
 0 & 0 & 2c_{mzz} & 2c_{mzy} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2c_{myz} & 2c_{myy} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2u_{0z}^M c_{myz} & 2u_{0z}^M c_{myy} & 0 & 0
 \end{array} \right] \\
 + \left[ \begin{array}{cccccc}
 k_e & -\Omega c_i & -k_e & \Omega c_i & -k_e & \Omega c_i \\
 \Omega c_i & k_e & -\Omega c_i & -k_e & -\Omega c_i & k_e \\
 k_e & -\Omega c_i & 2k_{mzz} - k_e & 2k_{mzy} + \Omega c_i & -k_e & \Omega c_i \\
 \Omega c_i & k_e & 2k_{myz} - \Omega c_i & 2k_{myy} - k_e & \Omega c_i & -k_e \\
 0 & 0 & 2k_{mzz} & 2k_{mzy} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2k_{myz} & 2k_{myy} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 2u_{0z}^M k_{myz} & 2u_{0z}^M k_{myy} & 0 & 0
 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccccc}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{wz} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{uy} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{ux} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\phi_y} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\phi_x}
 \end{array} \right]
 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c}
 u_Z^R \\
 u_Y^R \\
 u_Z^M \\
 u_Y^M \\
 u_Z^F \\
 u_Y^F \\
 \phi_Y^F
 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c}
 m_R e \omega^2 \\
 m_R e \omega^2 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array} \right\} \quad (5.165)$$

Quando a excitação ocorre somente por desbalanceamento residual, a frequência de precessão  $\Omega$  é igual à frequência de excitação  $\omega$ .

## 6. RESULTADOS

Os resultados apresentados a seguir foram obtidos a partir de simulações numéricas, utilizando a linguagem Fortran, e dos sistemas de equações deduzidos anteriormente. Inicialmente, o comportamento de um rotor rígido é mostrado, e posteriormente são incluídos os efeitos dos mancais e do solo. Para isso, são apresentados modelos com mancais rígidos, que são comparados aos modelos com mancais flexíveis. São apresentados também dois tipos de solo: um é o modelo do semi-espaço e o outro é o modelo de camada sobre base rígida. É feito um estudo do comportamento do sistema quando a relação de massas entre o rotor e a fundação muda.

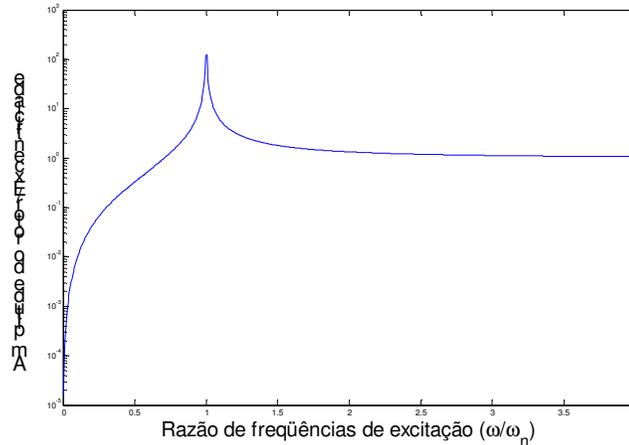
Os parâmetros utilizados nas simulações são apresentados na tabela a seguir:

**Tabela 6.1. Parâmetros utilizados nas simulações.**

PARÂMETROS	VALORES
$h_B/a$ - distância do cento do mancal ao centro de massa da fundação	0,0
$M_{FR} = m_F/m_R$ - relação de massas entre rotor e fundação	2
$B_f = m_F/\rho_s a^2$ - relação de massas entre fundação e solo	1
$d/a$ - profundidade da camada do solo	2,0; 6,0; 10,0

Os resultados a seguir são apresentados em gráficos que mostram a amplitude de deslocamento de cada componente do sistema variando com a frequência de rotação do rotor.

O rotor com eixo flexível, sem influência de mancais, fundação e solo, apresenta um pico de amplitude de deslocamento quando a sua frequência de rotação coincide com a sua frequência natural (fig. 6.1).



**Figura 6.1. Amplitude de deslocamento do rotor em função da frequência de excitação (Ramalho (2006)).**

Para o estudo do sistema com mancais flexíveis, foram considerados coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais que, neste caso, são hidrodinâmicos, conforme descrito no capítulo 3. A fundação considerada nesta análise é do tipo bloco, sendo considerada como corpo rígido.

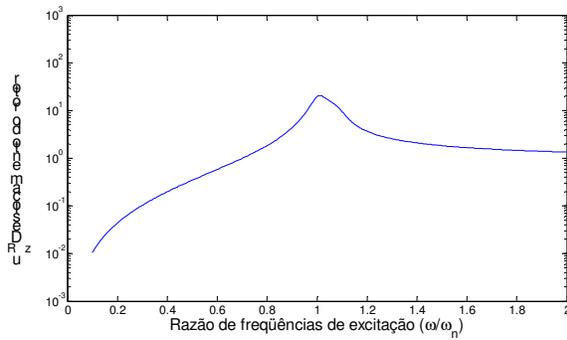
Os dados utilizados para calcular os coeficientes dos mancais, dependentes da frequência, conforme mostrado no capítulo 3, são:

**Tabela 6.2. Parâmetros utilizados para cálculo dos coeficientes dos mancais.**

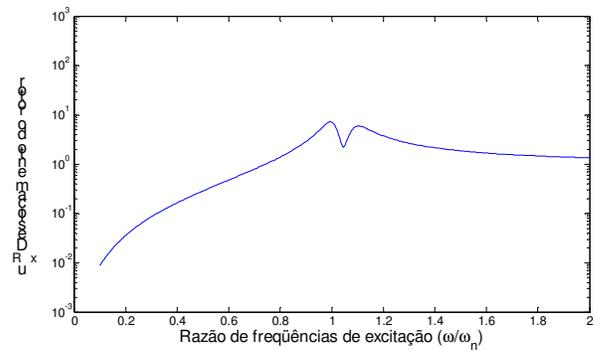
PARÂMETROS	VALORES
Carregamento do mancal	750 Kg
$D_e$ – Diâmetro externo do eixo	18.0 cm
L - Largura axial do mancal	9.9cm
$C_d$ – Folga diametral do mancal	135 $\mu$ m
$\mu$ - Viscosidade do óleo	14.32 Pa.s

Na seqüência, será mostrado o estudo da influência do solo no rotor, considerando a rigidez e o amortecimento dos mancais.

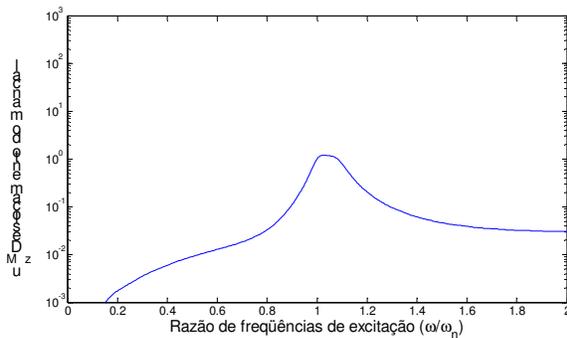
O comportamento do rotor com os mancais, não considerando a influência do solo, apresenta a seguinte resposta (figura 6.2):



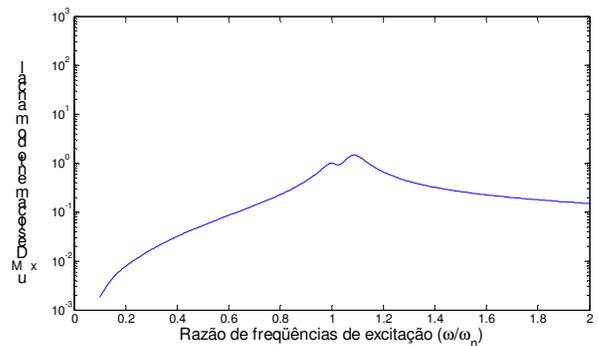
(a.1) Rotor-direção vertical



(a.2) Rotor-direção horizontal



(b.1) Mancal-direção vertical



(b.2) Mancal-direção horizontal

**Figura 6.2. Comportamento do rotor(a) e do mancal(b) nas direções: vertical(1) e horizontal(2), sem influência do solo.**

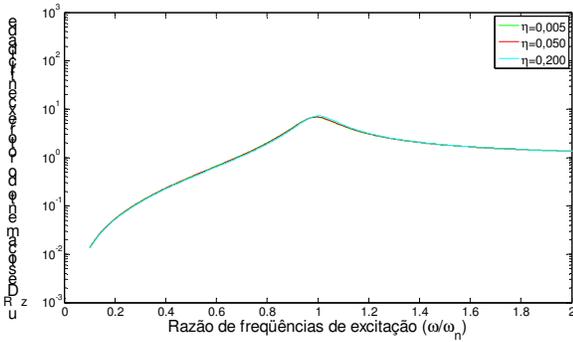
Observa-se que existe uma bifurcação, na figura que mostra a amplitude de deslocamento do rotor, somente na direção horizontal, como esperado e descrito na literatura (Kramer, 1993). O mancal também apresenta essa bifurcação, porém de maneira menos acentuada., devido à anisotropia dos mancais hidrodinâmicos.

Considerando o modelo que inclui o rotor, a fundação e o solo, o comportamento do sistema apresenta as seguintes características:

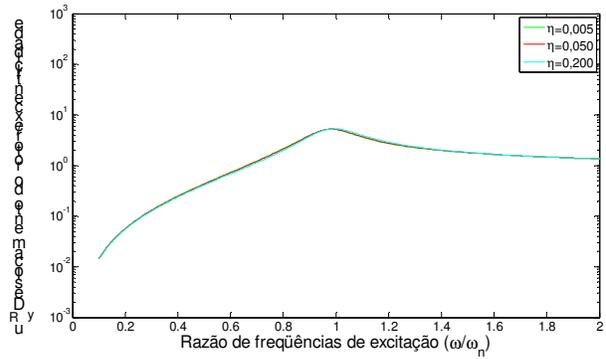
#### **A) Solo do tipo semi-espaço:**

Nesse caso, variou-se o coeficiente de amortecimento interno do solo. Os valores utilizados foram  $\eta=0,005$ ;  $0,050$  e  $0,200$ . Conforme se observa nas figuras a seguir, a variação do coeficiente de amortecimento interno do solo semi-espaço praticamente não exerce influência no comportamento da máquina rotativa. Tanto o rotor quanto a fundação não apresentaram mudanças significativas no seu comportamento em qualquer direção.

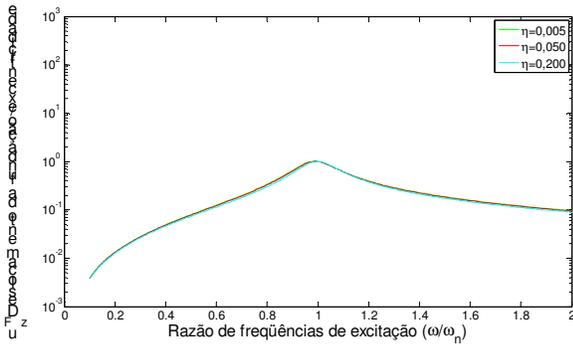
**A.1) Rotor fundação solo (mancais rígidos):**



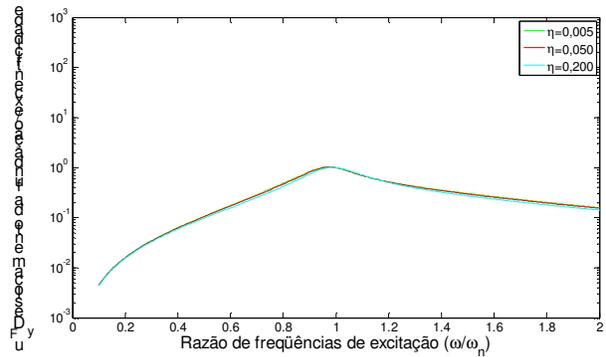
(a.1) Rotor - direção vertical



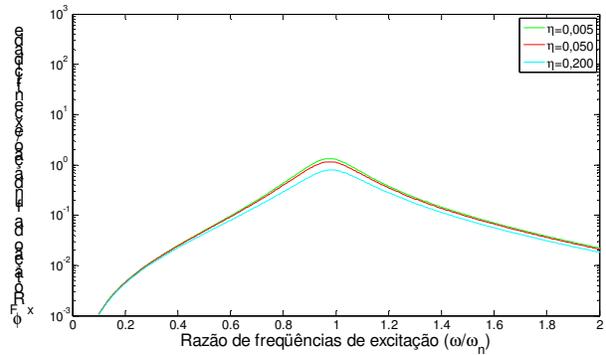
(a.2) Rotor - direção horizontal



(b.1) Fundação - direção vertical



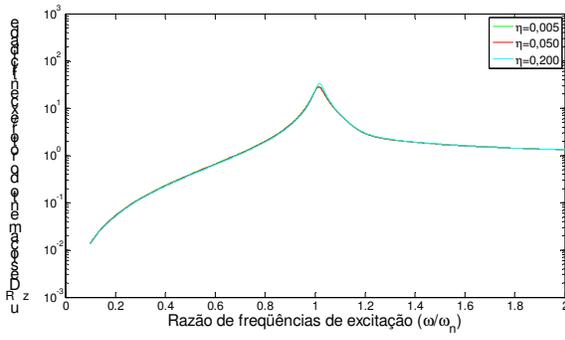
(b.2) Fundação - direção horizontal



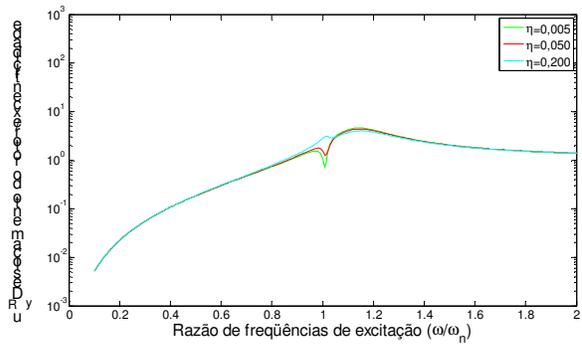
(b.3) Fundação - rotação

**Figura 6.3. Comportamento do rotor(a) e da fundação(b) nas direções vertical(1), horizontal(2) e a rotação da fundação(3).**

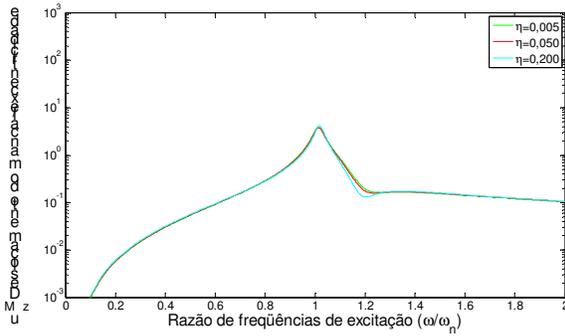
## A.2) Rotor mancal fundação solo:



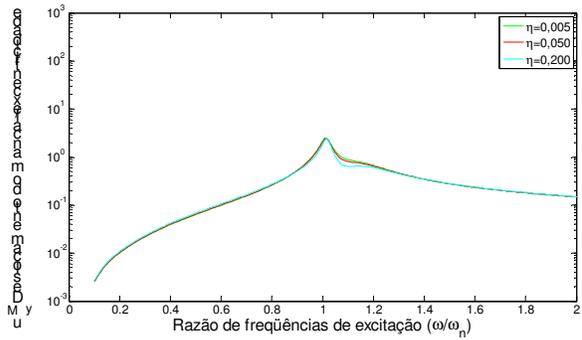
(a.1) Rotor - direção vertical



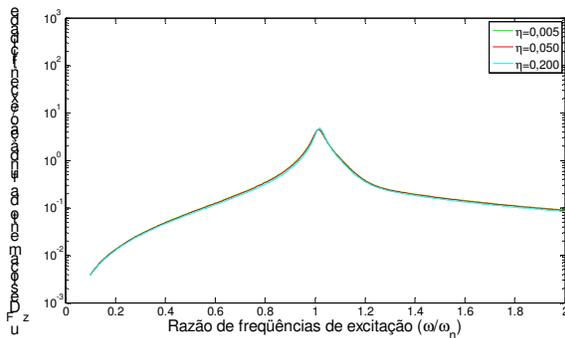
(a.2) Rotor - direção horizontal



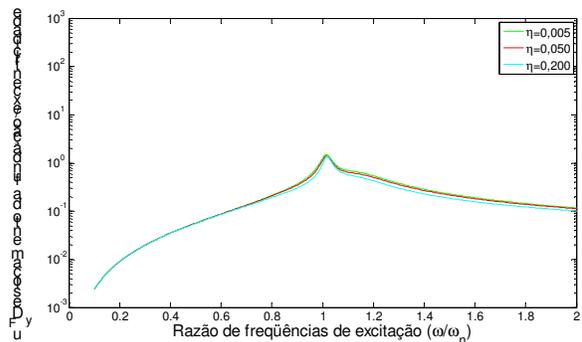
(b.1) Mancal – direção vertical



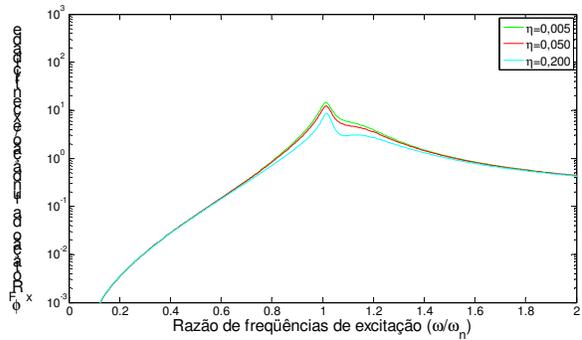
(b.2) Mancal – direção horizontal



(c.1) Fundação - direção vertical



(c.2) Fundação - direção horizontal



(c.3) Fundação – rotação

**Figura 6.4. Comportamento do rotor(a), do mancal(b) e da fundação(c) nas direções: vertical(1), horizontal(2) e a rotação da fundação(3).**

Quando os mancais hidrodinâmicos são incluídos (figuras 6.4), ocorre uma mudança no comportamento do rotor em relação ao sistema com mancal rígido (figuras 6.3), aumentando os valores do deslocamento do rotor e da fundação nas frequências próximas à frequência natural do rotor.

Os gráficos dos deslocamentos do rotor na direção horizontal, quando os mancais são flexíveis (figuras 6.4.b), mostram uma pequena bifurcação, assim como no modelo de rotor com mancais em que o solo é rígido.

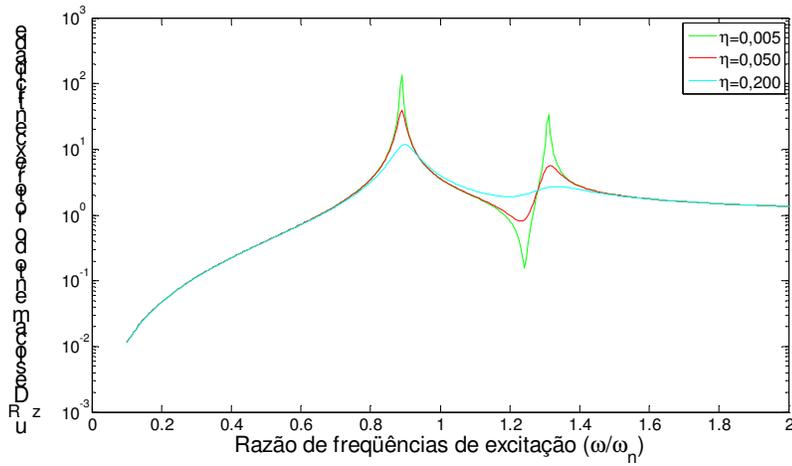
### **B) Solo do tipo camada sobre base rígida:**

Para o solo do tipo camada sobre base rígida, os parâmetros utilizados foram os mesmos parâmetros de amortecimento interno do solo do tipo semi-espaço, e os valores de profundidade da camada foram:  $d/a=2$ ; 6 e 10. Para este tipo de solo, são observados novos picos de deslocamento tanto no rotor como na fundação, conforme os gráficos a seguir.

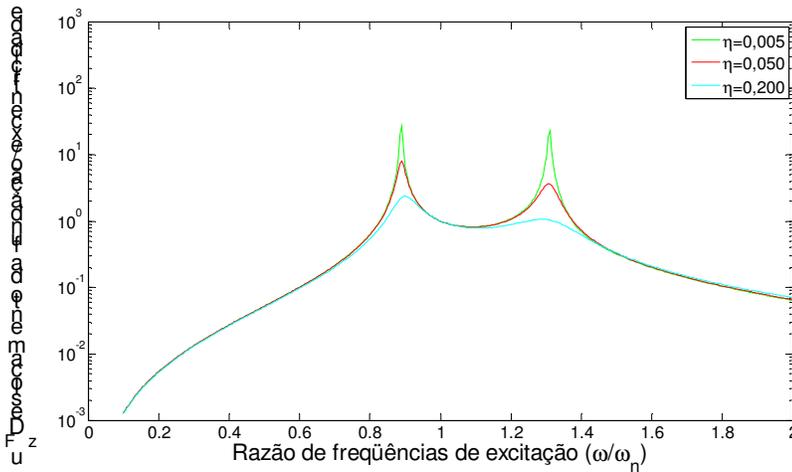
#### **B.1) Sistema Rotor Fundação Solo**

Nesse caso, os mancais são considerados rígidos. São apresentados os resultados obtidos para a direção vertical, depois para a direção horizontal de todos os componentes do sistema. Depois são mostrados os resultados da rotação da fundação. São apresentados também os coeficientes diretos do solo.

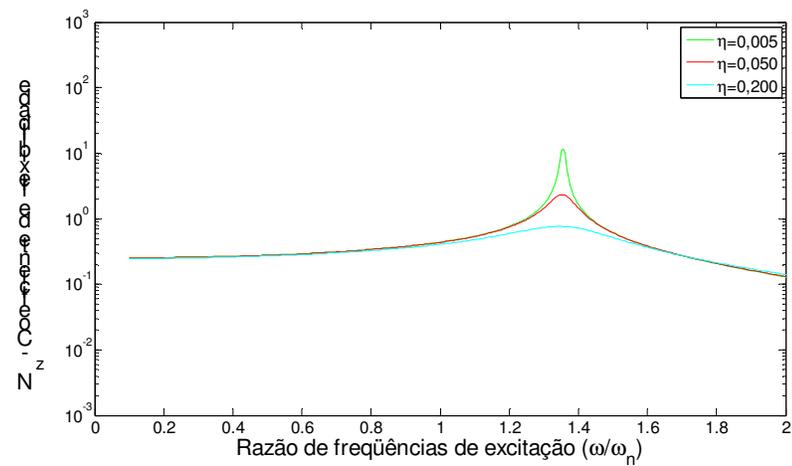
**B.1.a)  $d/a=2$**



(a) Rotor - direção vertical

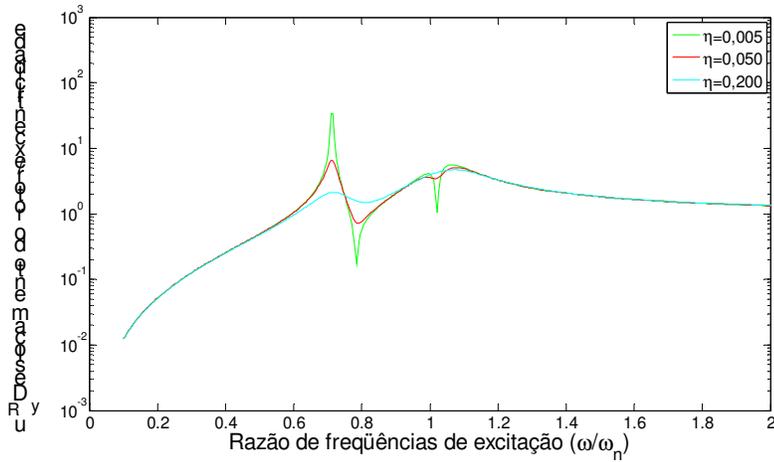


(b) Fundação - direção vertical

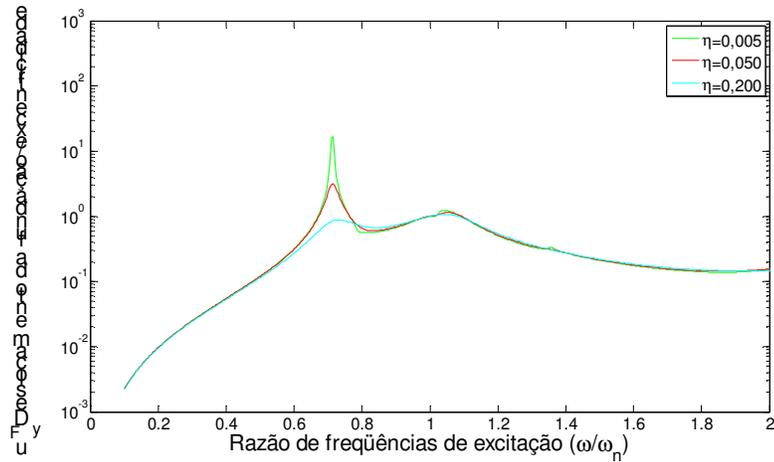


(c) Coeficientes do solo na vertical

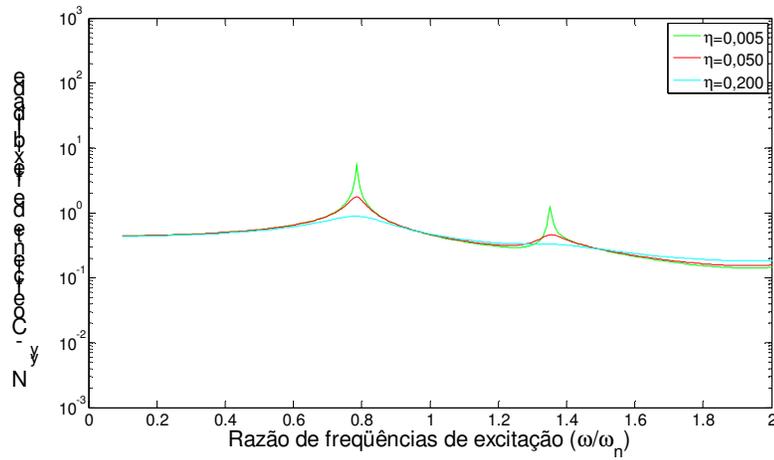
**Figura 6.5.a Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção vertical para  $d/a=2$ .**



(a) Rotor - direção horizontal

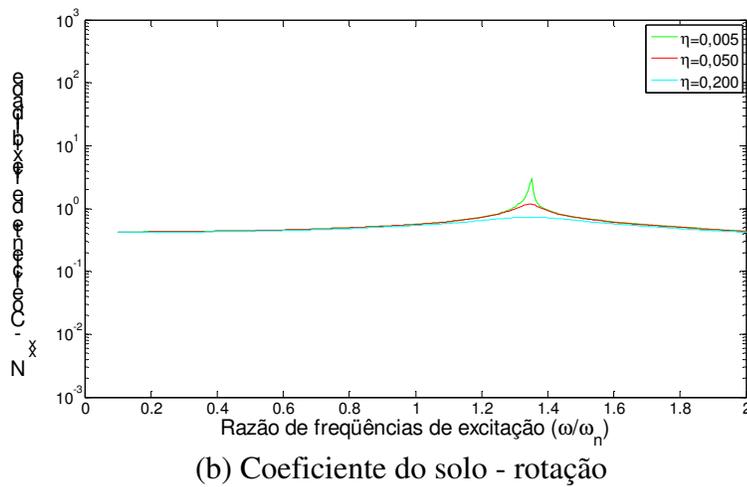
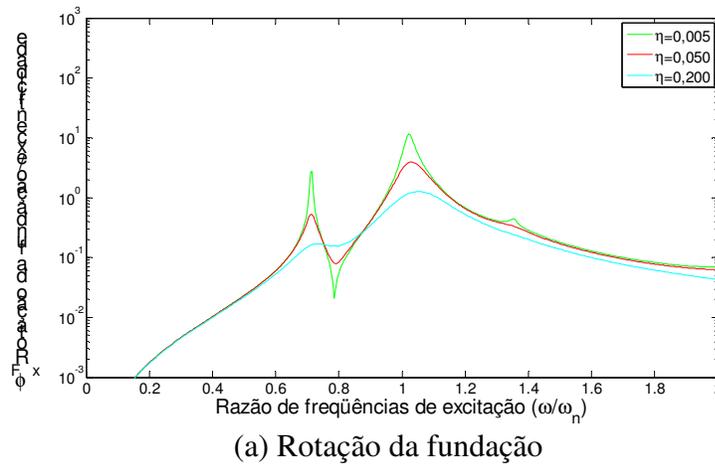


(b) Fundação - direção horizontal



(c) Coeficientes do solo na horizontal

**Figura 6.5.b** Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção horizontal para  $d/a=2$ .



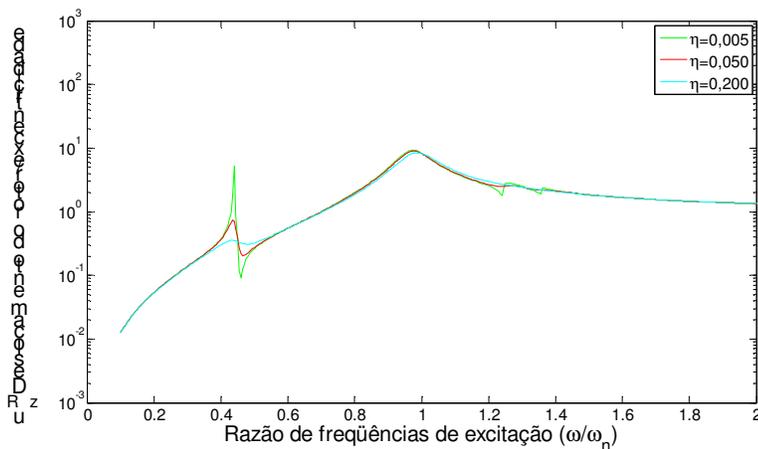
**Figura 6.5.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para  $d/a=2$ .**

Para o caso da profundidade  $d/a=2$ , observam-se dois picos, tanto no rotor quanto na fundação, na direção vertical. O segundo pico aparece numa freqüência próxima à freqüência do pico do solo e o primeiro um pouco abaixo da freqüência natural do rotor.

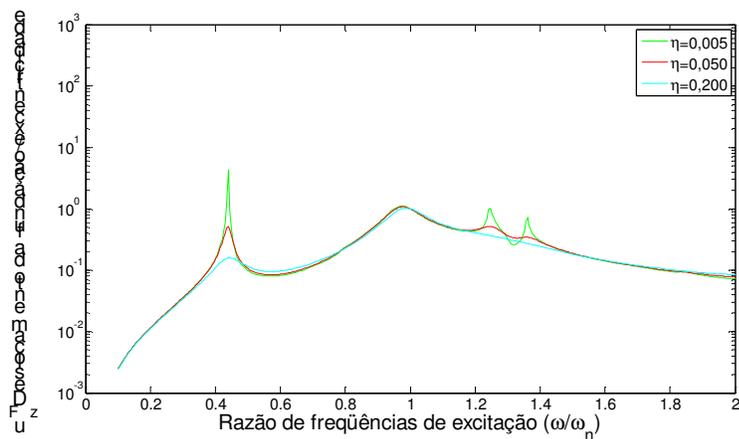
Na direção horizontal também aparecem dois picos, porém o segundo pico do rotor é um pouco menos acentuado que o primeiro.

O amortecimento do solo, nesse caso, exerce grande influência no comportamento do rotor e da fundação, causando uma redução na amplitude de deslocamento de todos os componentes do sistema.

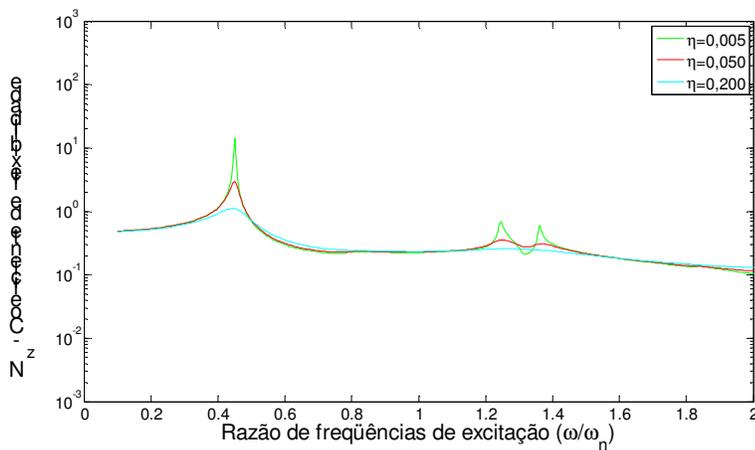
**B.1.b)  $d/a=6$**



(a) Rotor - direção vertical

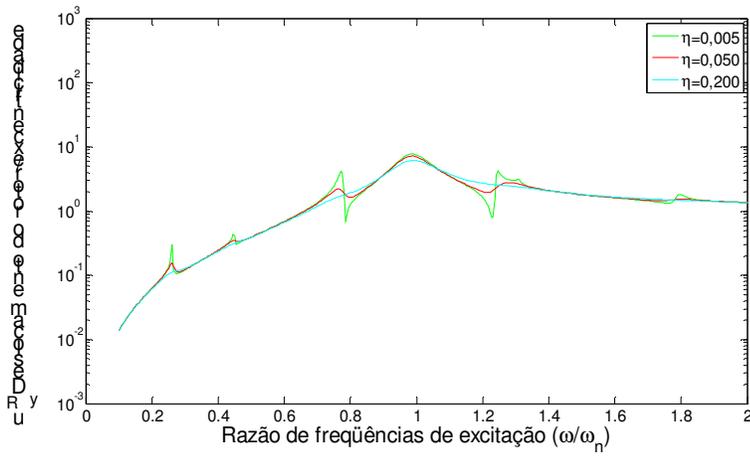


(b) Fundação - direção vertical

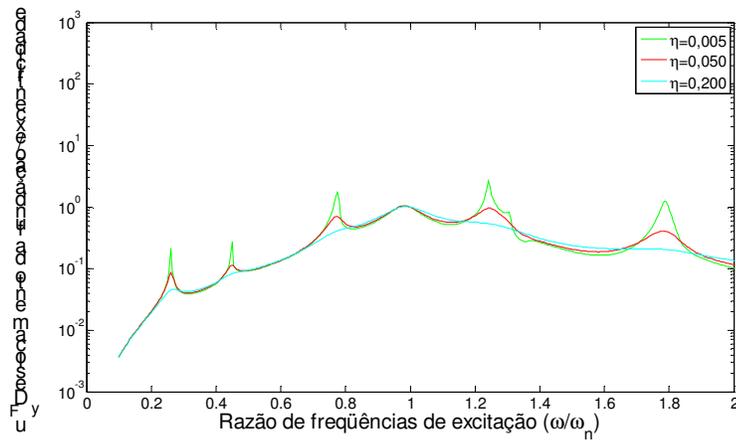


(c) Coeficientes do solo na vertical

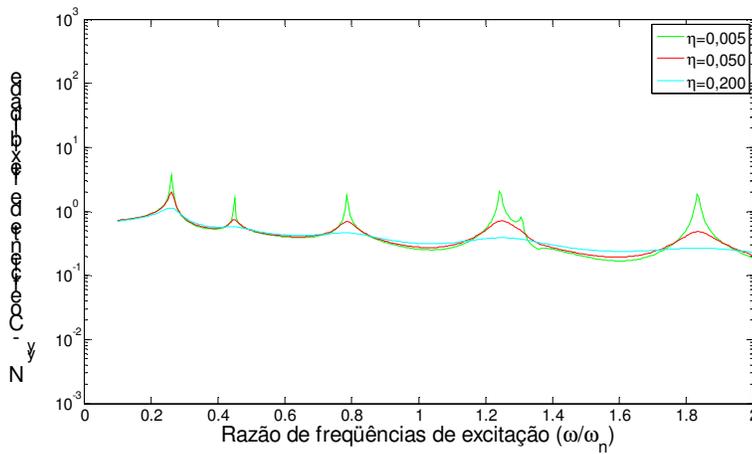
**Figura 6.6.a Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção vertical para  $d/a=6$ .**



(a) Rotor - direção horizontal

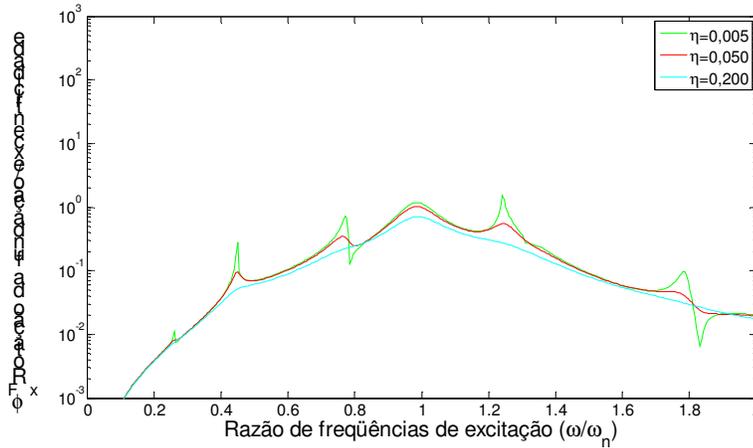


(b) Fundação - direção horizontal

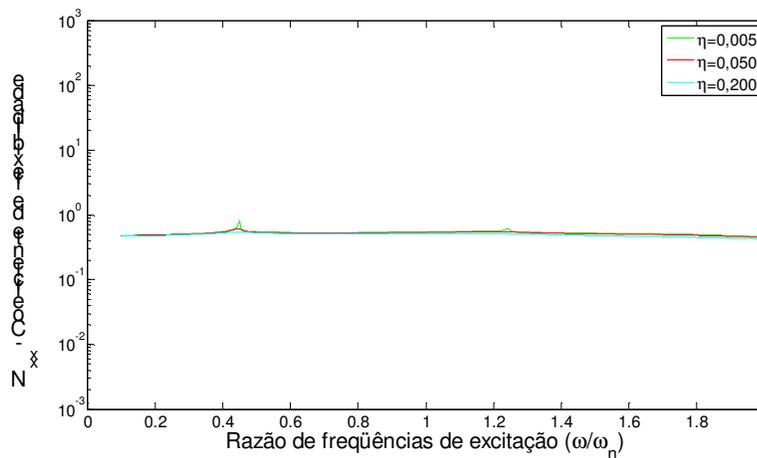


(c) Coeficientes do solo na horizontal

**Figura 6.6.b** Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo (c) na direção horizontal para  $d/a=6$ .



(a) Rotação da fundação



(b) Coeficiente do solo - rotação

**Figura 6.6.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para  $d/a=6$ .**

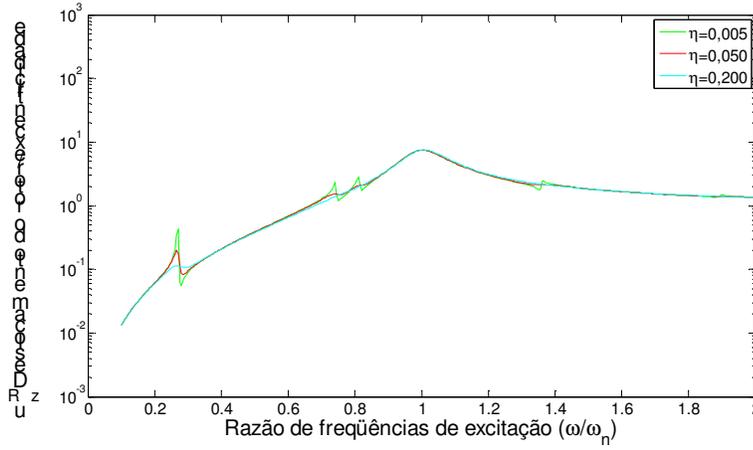
Com o aumento da espessura da camada do solo ( $d/a=6$ ), verifica-se um aumento no número de picos para todos os componentes do sistema (Figuras 6.6). Porém, esses picos têm amplitude menor do que aqueles do sistema com a profundidade da camada  $d/a=2$  (Figuras 6.5). Tal fato deve-se ao solo ser considerado com volume de massa proporcional à profundidade e à área da fundação do tipo bloco. Desta forma, quanto mais espessa a camada de solo, maior a massa correspondente e, portanto, mais baixas serão suas frequências naturais, dentro da faixa de frequências analisadas. O amortecimento é maior devido à maior radiação associada à maior profundidade do solo que, para profundidades muito grandes, aproxima-se do modelo semi-

espaço. No caso da rotação da fundação, os picos do solo são muito pequenos nesta profundidade de camada de solo.

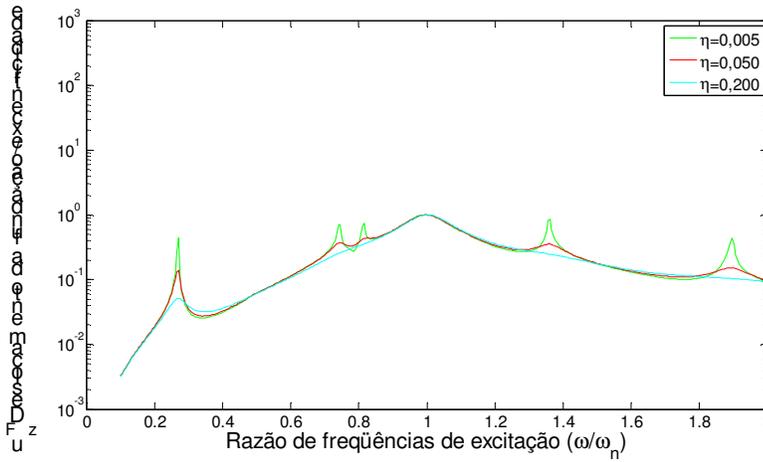
Observa-se portanto que, na direção vertical, para  $d/a=6$ , o primeiro pico de amplitude de deslocamento de cada componente do sistema aparece numa frequência de rotação muito inferior àquela para o caso do solo com profundidade menor, mas que, assim como no caso anterior, coincide com os picos do solo. A diferença é que os picos do solo, para a profundidade de camada  $d/a=2$ , ocorrem em frequências mais elevadas, pois a massa de solo proporcional à sua espessura é menor. Desta forma, os picos para  $d/a=2$  aparecem depois da frequência natural do rotor e para o caso  $d/a=6$ , aparecem também numa frequência inferior à frequência natural do rotor.

Pode-se notar também uma pequena redução na frequência do pico de amplitude referente à frequência natural do rotor quando a profundidade da camada do solo é maior.

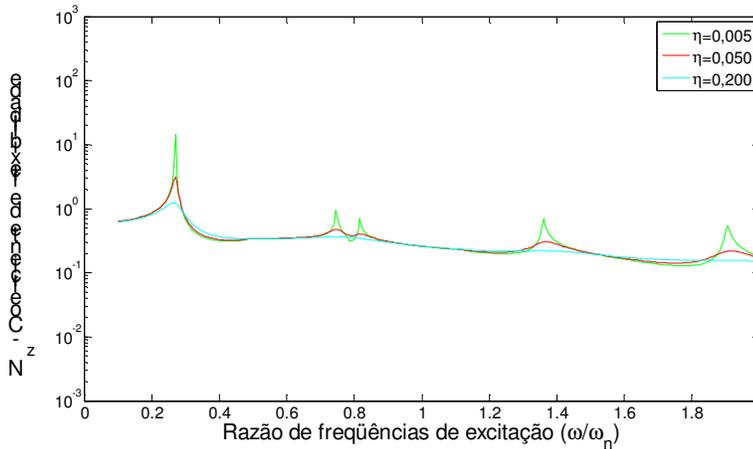
**B.1.c)  $d/a=10$**



(a) Rotor - direção vertical

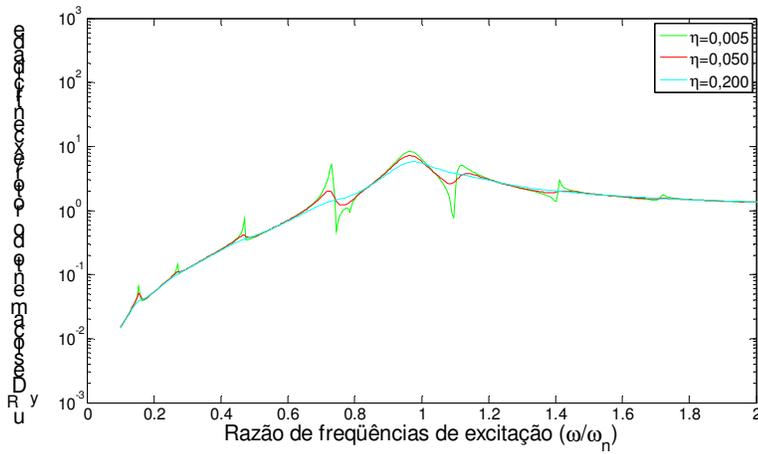


(b) Fundação - direção vertical

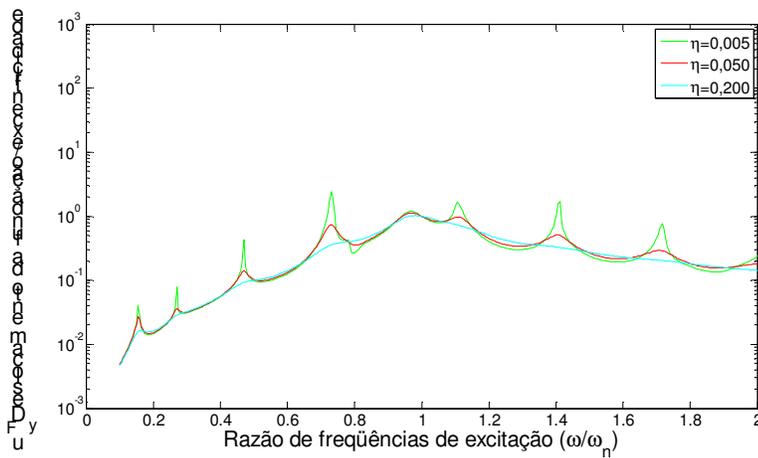


(c) Coeficientes do solo na vertical

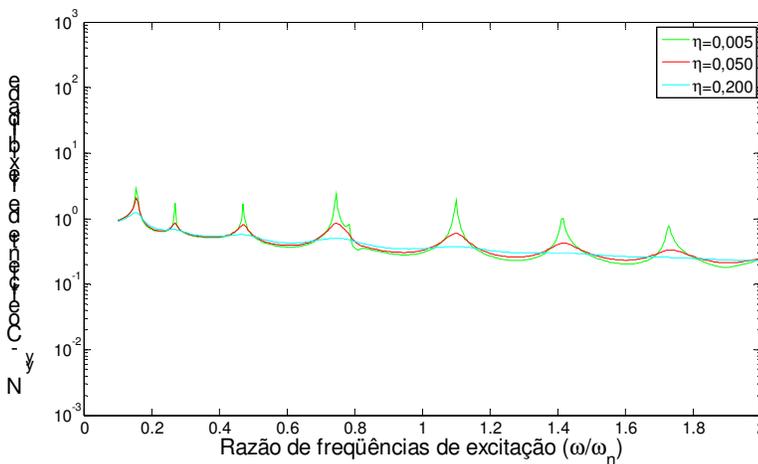
**Figura 6.7.a Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo(c) na direção vertical para  $d/a=10$ .**



(a) Rotor - direção horizontal

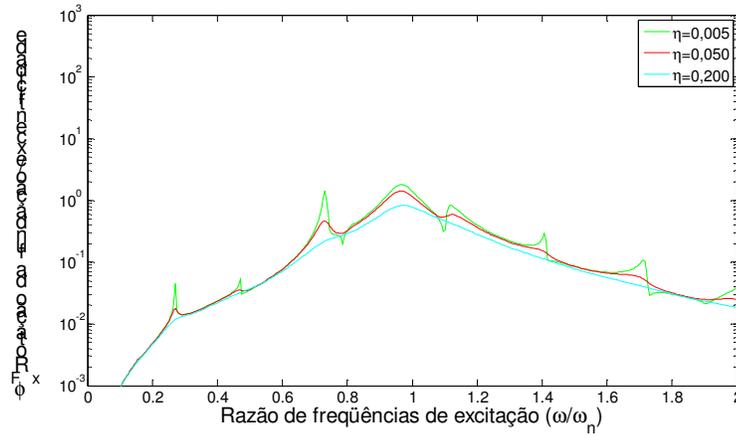


(b) Fundação - direção horizontal

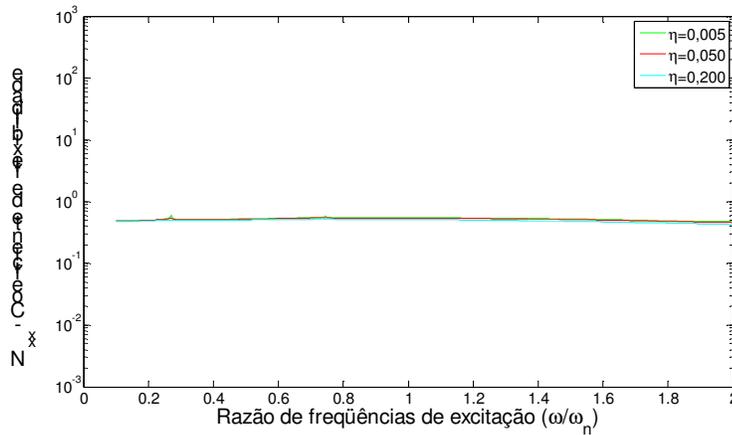


(c) Coeficientes do solo na horizontal

**Figura 6.7.b** Comportamento do rotor (a) e da fundação (b) e coeficientes do solo(c) na direção horizontal para  $d/a=10$ .



(a) Rotação da fundação



(b) Coeficiente do solo - rotação

**Figura 6.7.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para  $d/a=10$ .**

Para o solo com profundidade de camada  $d/a=10$ , os picos de deslocamento são ainda menores do que os anteriores. O aumento do amortecimento do solo mais uma vez exerce grande influência no comportamento do rotor e da fundação, causando uma diminuição na amplitude dos picos.

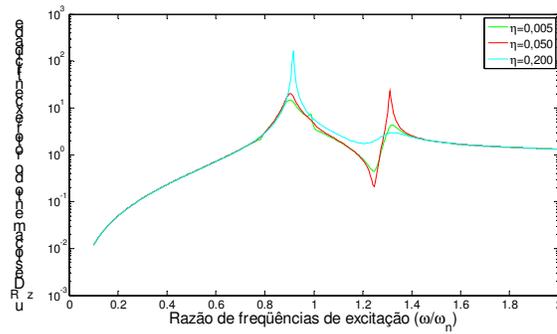
Aparecem mais picos e em frequências menores do que nos casos onde a profundidade da camada é menor.

Nas direções vertical e horizontal, os picos do solo aparecem tanto no rotor quanto na fundação e são bem evidentes, mas na rotação da fundação, são muito pequenos e quase não exercem influência sobre ela.

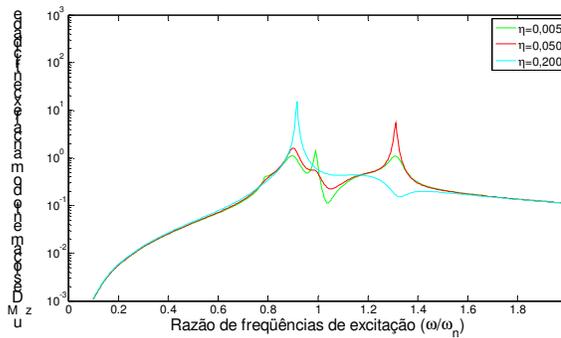
Na próxima sessão, serão incorporados os mancais hidrodinâmicos ao sistema rotor-fundação-solo.

### B.3) Sistema Rotor Mancal Fundação Solo

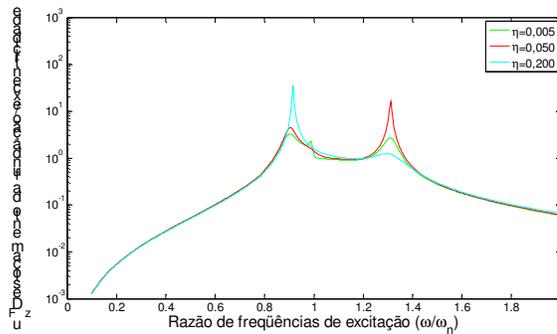
#### B.3.a) $d/a=2$



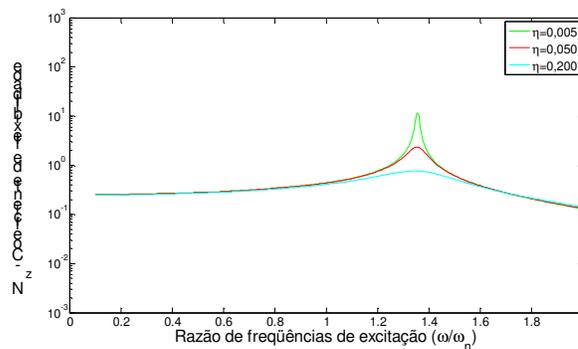
(a) Rotor - direção vertical



(b) Mancal - direção vertical

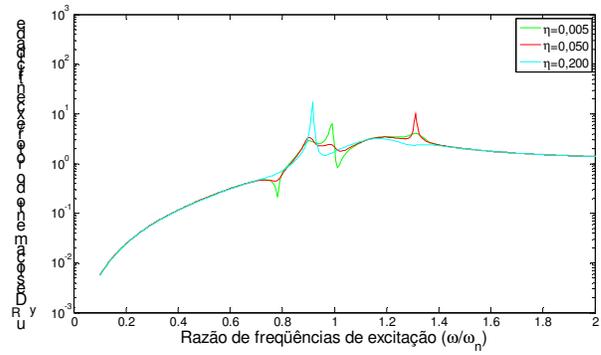


(c) Fundação - direção vertical

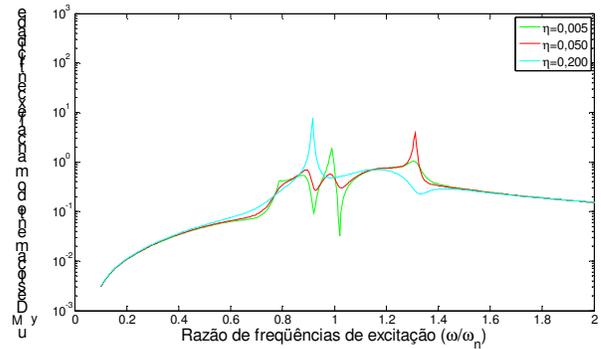


(d) Coeficientes do solo na vertical

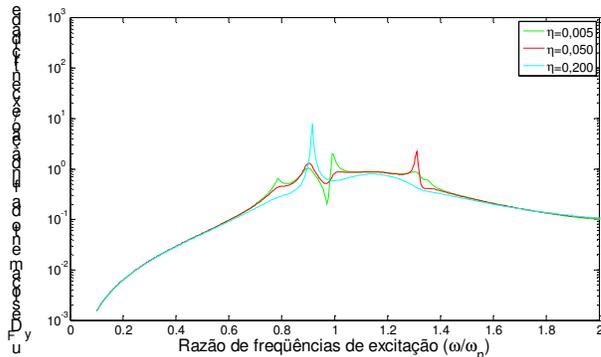
**Figura 6.8.a** Comportamento do rotor (a), do mancal(b), da fundação (c) e coeficientes do solo(d) na direção vertical para  $d/a=2$ .



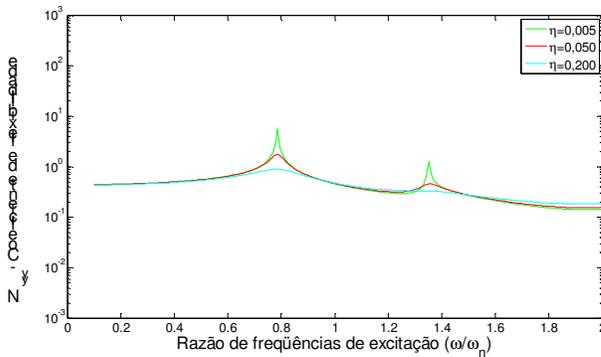
(a) Rotor - direção horizontal



(b) Mancal - direção horizontal

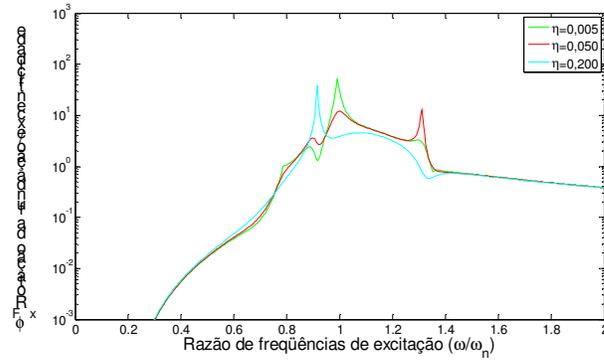


(c) Fundação - direção horizontal

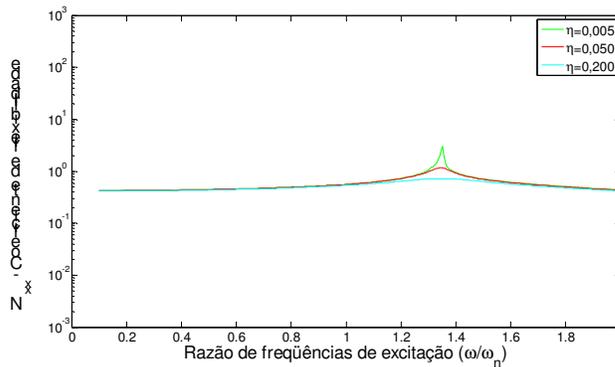


(d) Coeficientes do solo na horizontal

**Figura 6.8.b** Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção horizontal para  $d/a=2$ .



(a) Rotação da fundação



(b) Coeficiente do solo - rotação

**Figura 6.8.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para  $d/a=2$ .**

Incluindo os mancais flexíveis no sistema com solo sobre camada de profundidade  $d/a=2$  (figuras 6.8), observa-se uma redução da amplitude dos picos de deslocamento no rotor na direção vertical (figura 6.8.a(a)), para um solo com amortecimento  $\eta=0,005$ . Para  $\eta=0,200$ , ocorre um aumento nessa amplitude. Com um amortecimento  $\eta=0,050$ , ocorre um aumento do primeiro pico e uma redução do segundo, quando se compara com o amortecimento  $\eta = 0,005$ .

O mancal flexível apresenta dois picos de deslocamento na direção vertical (figura 6.8.a(b)), sendo que para os amortecimentos  $\eta=0,005$  e  $\eta=0,050$ , o primeiro pico é menor que o segundo. Para o amortecimento de  $\eta=0,200$ , ocorre o inverso. Observa-se também que o primeiro pico aumenta de amplitude com o aumento do amortecimento do solo.

Comparando o comportamento da fundação na direção vertical (figura 6.8.a(c)), para os casos com mancal rígido e flexível (figuras 6.5a e 6.8a), observa-se uma diminuição das amplitudes de deslocamento para o caso do solo menos amortecido ( $\eta=0,005$ ) com mancal flexível. Para um amortecimento de  $\eta=0,050$ , ocorre uma redução no primeiro pico e um

aumento no segundo e para um amortecimento do solo de  $\eta=0,200$ , o primeiro pico aumenta e o segundo praticamente não se altera.

Observa-se para esses casos que a frequência do segundo pico é próxima da frequência do pico do solo, que apresenta uma redução de amplitude com o aumento do amortecimento.

Na direção horizontal (figuras 6.8.b), quando se consideram mancais flexíveis, também há uma mudança de comportamento no rotor (figura 6.8.b(a)), sendo a redução de amplitude do primeiro pico de deslocamento para o solo com amortecimento de  $\eta=0,005$  e  $\eta=0,050$  e um aumento desse pico para o amortecimento de  $\eta=0,200$ . O segundo pico aumenta de amplitude para os amortecimentos  $\eta=0,005$  e  $\eta=0,050$  e não aparece para  $\eta=0,200$ .

Na direção horizontal, o mancal flexível (figura 6.8.b(b)) tem um aumento da amplitude de deslocamento do primeiro pico com o aumento do amortecimento do solo. Aparecem também bifurcações para os casos de amortecimentos  $\eta=0,005$  e  $\eta=0,050$ . Já o segundo pico é maior para o amortecimento  $\eta=0,050$ , reduz para o amortecimento de  $\eta=0,005$  e não aparece para  $\eta=0,200$ .

O comportamento da fundação também muda quando são incluídos mancais flexíveis (figura 6.8.b(c)). O primeiro pico também se bifurca para os amortecimentos  $\eta=0,005$  e  $\eta=0,050$ , ocorrendo uma redução na amplitude. Para  $\eta=0,200$ , a amplitude de deslocamento aumenta sem apresentar essa bifurcação.

Na fundação, para o sistema com mancais flexíveis, também aparece um segundo pico, que é mais evidente para o amortecimento de  $\eta=0,050$ . Esse segundo pico aparece numa frequência um pouco menor do que a frequência do segundo pico do solo (figura 6.8.b(d)).

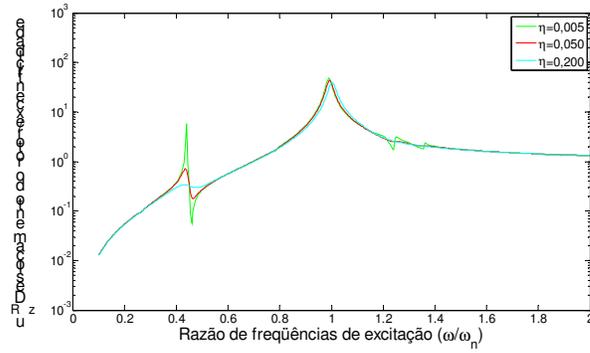
O comportamento da fundação na direção da rotação (figura 6.8.c(a)), também é bastante modificado com a inclusão de mancais flexíveis no sistema. Aparece uma bifurcação no primeiro pico para os amortecimentos  $\eta=0,005$  e  $\eta=0,050$  e um aumento da amplitude para todos os picos, sendo esse aumento mais evidente para  $\eta=0,200$ . O segundo pico diminui, se comparado ao sistema com mancais rígidos, e aparece numa frequência de rotação maior. A amplitude desse pico também é maior para o caso de amortecimento  $\eta=0,200$ .

Observa-se também que o segundo pico de todas as figuras 6.8 aparece numa frequência próxima àquela em que aparece o pico do coeficiente de flexibilidade do solo.

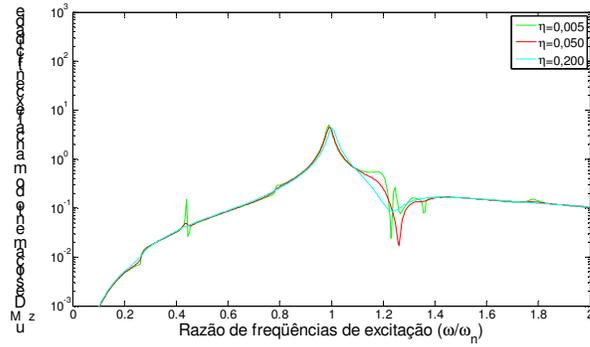
Além disso, nota-se que o amortecimento do solo  $\eta=0,050$  é o mais crítico para este caso, aparecendo em todos os componentes do sistema e em todas as direções com a maior amplitude nos picos que apresentam frequências próximas às frequências do solo.

O efeito para o amortecimento  $\eta=0,200$  em relação à inversão de amplitudes entre o primeiro e o segundo picos (figura 6.8a) é discutido no apêndice A, e exemplificado num sistema simples do tipo massa-mola-amortecedor.

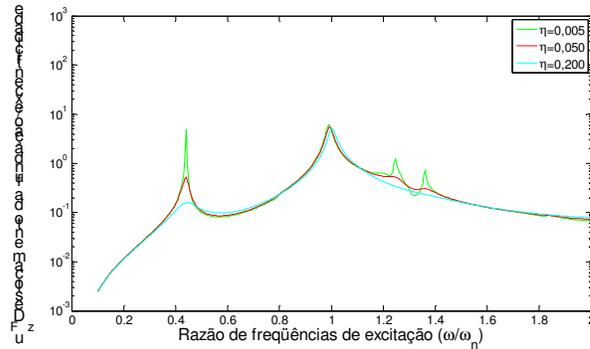
B.3.b)  $d/a=6$



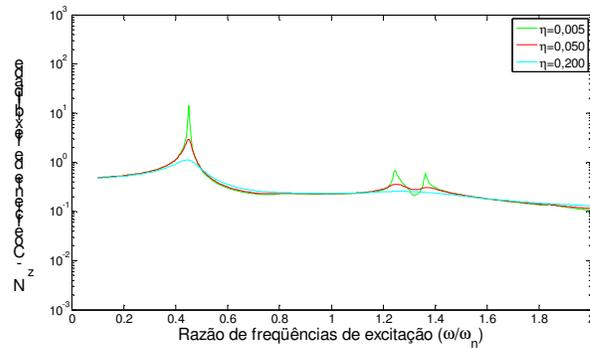
(a) Rotor - direção vertical



(b) Mancal - direção vertical

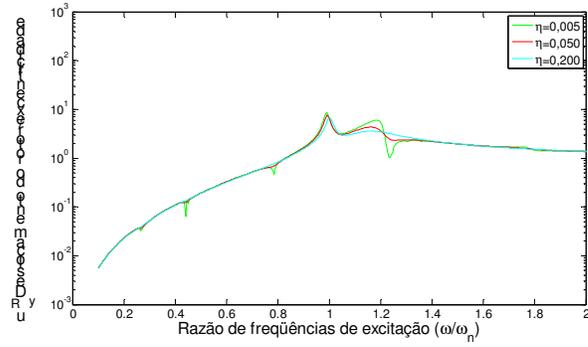


(c) Fundação - direção vertical

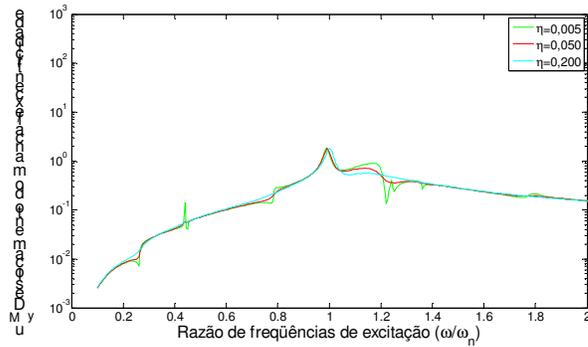


(d) Coeficientes do solo na vertical

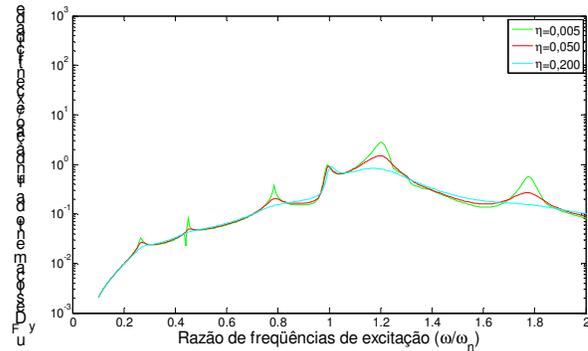
Figura 6.9.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção vertical para  $d/a=6$ .



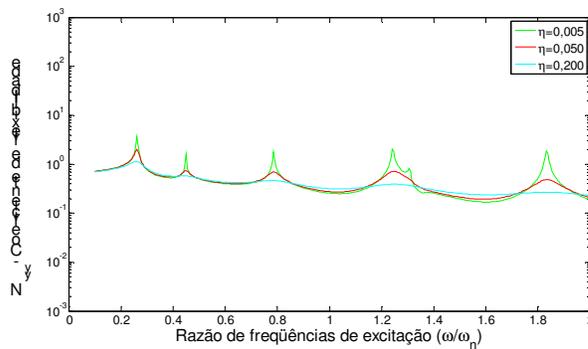
(a) Rotor - direção horizontal



(b) Mancal - direção horizontal

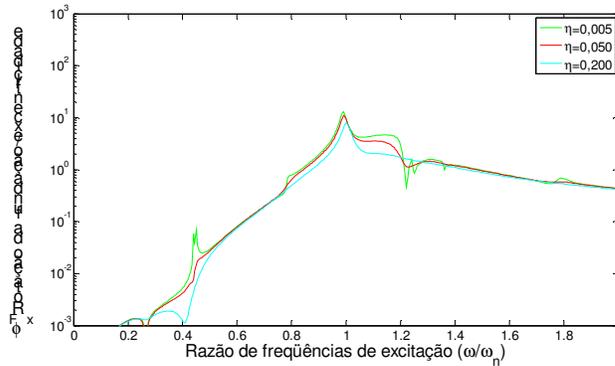


(c) Fundação - direção horizontal

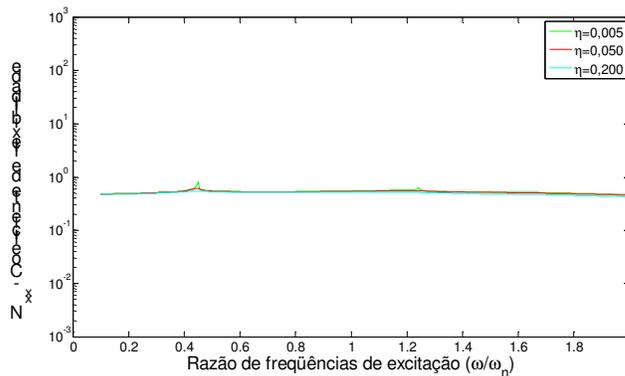


(d) Coeficientes do solo na horizontal

**Figura 6.9.b** Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção horizontal para  $d/a=6$ .



(a) Rotação da fundação



(b) Coeficiente do solo - rotação

**Figura 6.9.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para  $d/a=6$ .**

Com o aumento da profundidade da camada do solo para  $d/a=6$ , aparece um pico de deslocamento do rotor na direção vertical (figura 6.9.a(a)), em uma frequência de rotação menor do que aqueles que aparecem para a camada  $d/a=2$  (figura 6.8.a(a)). A amplitude desse pico é reduzida com o aumento do amortecimento do solo. Aparece também um pico de amplitude de deslocamento próximo à frequência natural do rotor. Esse pico não varia de amplitude quando se altera o amortecimento do solo, diferentemente do solo com camada  $d/a=2$ . A frequência do primeiro pico do rotor na vertical para a profundidade da camada  $d/a=6$  coincide com a frequência do primeiro pico do solo (figura 6.9.a(d)).

Os mancais (figura 6.9.a (b)) apresentam um pico de amplitude em uma frequência próxima à frequência natural do rotor. O amortecimento do solo, nesse caso, interfere pouco no comportamento dos mancais, e os picos do solo só aparecem para baixo amortecimento do solo, quando  $\eta = 0,005$ .

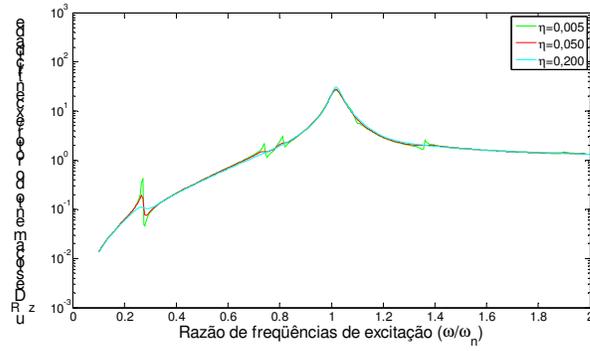
A fundação (figura 6.9.a (c)), sobre um solo de camada com profundidade  $d/a = 6$  tem grande influência do solo no seu comportamento. Aparecem picos no deslocamento da fundação em frequências muito próximas daquelas dos picos do solo. Há uma redução na amplitude dos picos com o aumento do amortecimento do solo.

Na direção horizontal (figuras 6.9.b), quando a profundidade da camada aumenta para  $d/a = 6$ , o amortecimento do solo não tem tanta influência como no caso do sistema com camada menos profunda. Tanto o rotor como os mancais apresentam um número de picos maior, porém esses picos têm amplitudes menores. Observa-se também que o comportamento do rotor e dos mancais praticamente não se altera quando se varia o amortecimento do solo.

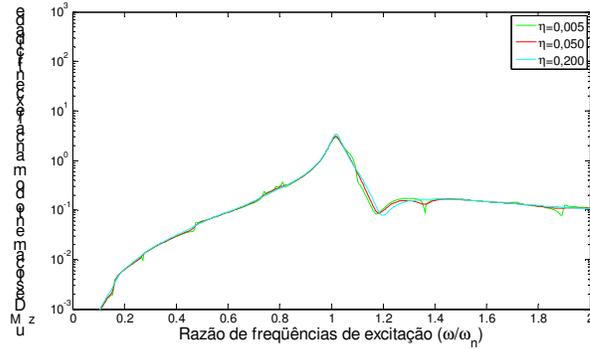
Assim como o rotor e os mancais, a fundação, na direção horizontal sobre um solo de camada  $d/a = 6$  (figura 6.9.b (c)), apresenta um número maior de picos, mas de amplitude menor do que os anteriores (fundação sobre solo com camada  $d/a = 2$ ). A influência do amortecimento do solo também diminui nesse caso.

A rotação da fundação (figura 6.9.c (a)) também apresenta uma redução na amplitude de movimento quando comparada com aquela sobre o solo de camada mais estreita. Há também uma redução da influência do amortecimento do solo no seu comportamento.

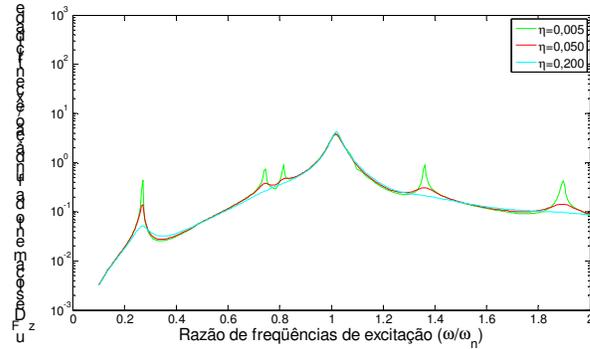
B.3.c)  $d/a=10$



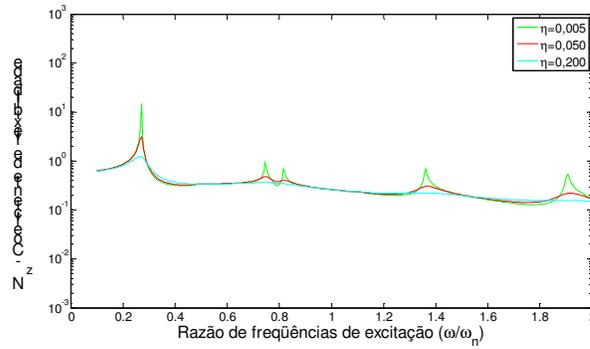
(a) Rotor - direção vertical



(b) Mancal - direção vertical

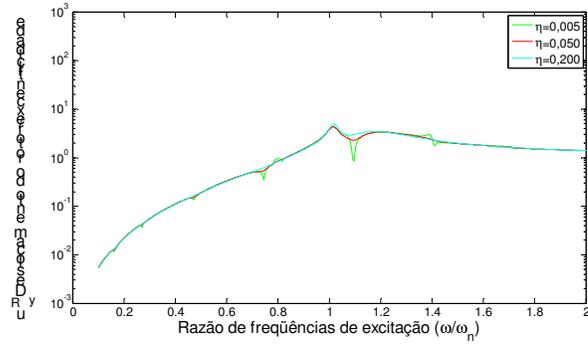


(c) Fundação - direção vertical

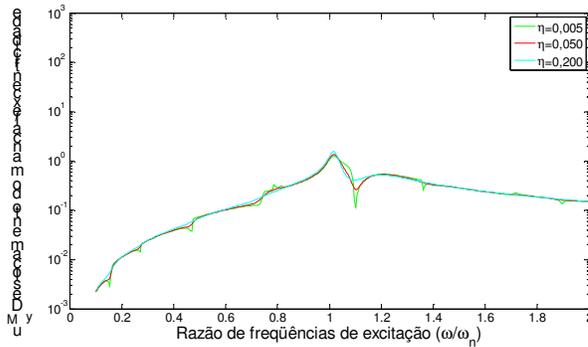


(d) Coeficientes do solo na vertical

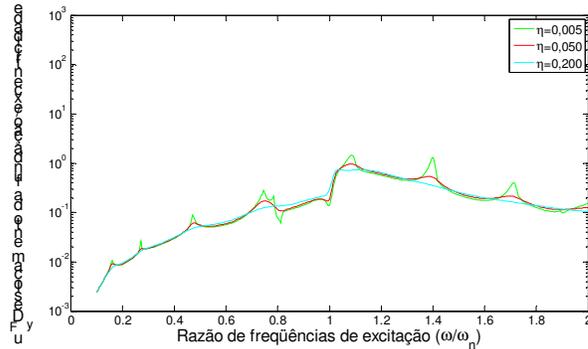
Figura 6.10.a Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção vertical para  $d/a=10$ .



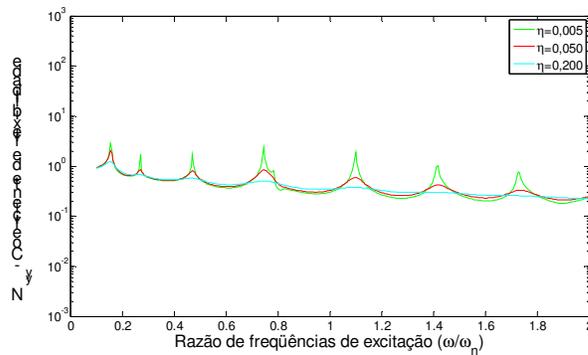
(a) Rotor - direção horizontal



(b) Mancal - direção horizontal

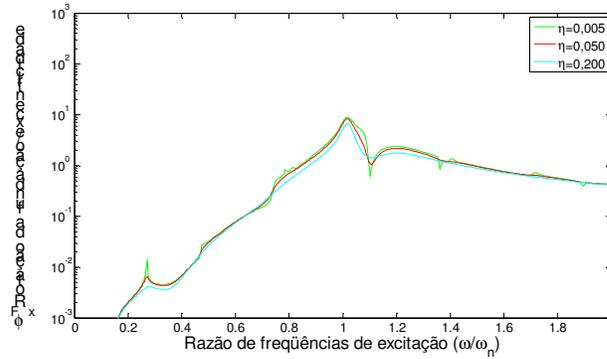


(c) Fundação - direção horizontal

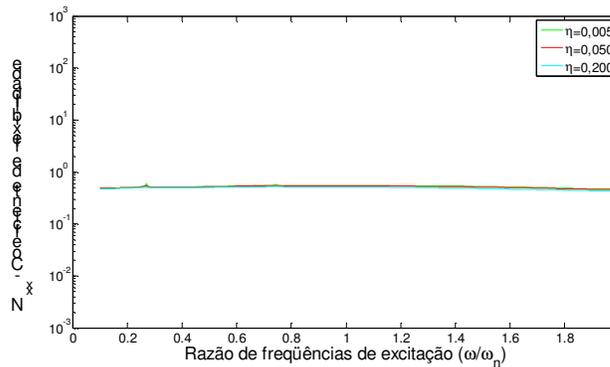


(d) Coeficientes do solo na horizontal

**Figura 6.10.b** Comportamento do rotor (a), do mancal (b), da fundação (c) e coeficientes do solo (d) na direção horizontal para  $d/a=10$ .



(a) Rotação da fundação



(b) Coeficiente do solo - rotação

**Figura 6.10.c Comportamento da fundação (a) e coeficientes do solo (b) na rotação da fundação para  $d/a=10$ .**

Para o caso do solo com camada de profundidade  $d/a=10$ , o rotor, na direção vertical (figura 6.10.a(a)), apresenta uma redução na amplitude dos picos quando se compara com aquele no sistema com solo de profundidade  $d/a=6$ . O primeiro pico que aparece no rotor tem uma frequência menor para o caso do sistema com solo de profundidade  $d/a=6$ . Observa-se também que o amortecimento do solo tem pouca influência no comportamento do rotor.

Os mancais, na direção vertical (figura 6.10.a(b)), para a maior profundidade de camada, têm uma redução na amplitude de deslocamento em relação aos sistemas com a camada do solo menos espessa. Como no caso anterior, a variação do amortecimento do solo também tem pouca influência no comportamento dos mancais. Os picos do solo, nesta direção, praticamente não aparecem.

A fundação, na direção vertical, tem o deslocamento menor, quando comparada ao caso anterior. Mas apresenta os picos do solo muito claramente, como no sistema com  $d/a=6$ . O amortecimento do solo também não apresenta muita influência no comportamento da fundação neste caso.

Na direção horizontal, o aumento da profundidade da camada do solo não causa uma grande alteração no comportamento do rotor. O pico de amplitude do rotor quase não aparece neste caso. A variação do valor do amortecimento do solo também influencia pouco o comportamento do rotor.

Os mancais, na direção horizontal, praticamente não alteram seu comportamento quando há um aumento da profundidade da camada do solo. O amortecimento do solo também não exerce muita influência sobre o comportamento deles.

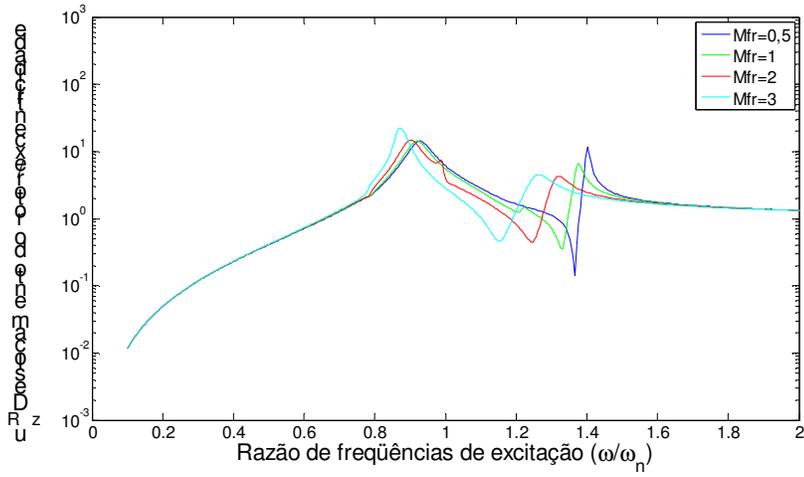
Para um solo de camada de espessura  $d/a=10$ , a fundação tem sua amplitude de movimento reduzida, se comparada com os casos anteriores. Neste caso, quando o amortecimento do solo aumenta, os picos de deslocamento da fundação reduzem de amplitude.

Na rotação da fundação, o aumento da camada do solo não causa uma grande mudança de comportamento, exceto pelo primeiro pico, que aparece numa frequência menor. O aumento do amortecimento do solo não causa uma grande variação no comportamento da fundação nessa direção.

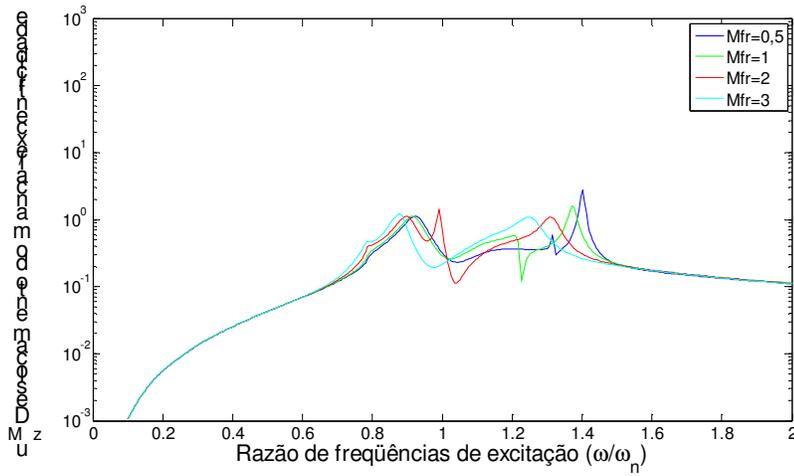
#### **B.4) Solo do tipo camada sobre base rígida – Variando $M_{FR}$**

Uma vez que camadas menos espessas exercem maior influência no sistema rotor-mancais (Ramalho, 2006), mais simulações foram realizadas para  $d/a=2$ . Assim, considerando o solo do tipo camada sobre base rígida com uma profundidade da camada de  $d/a=2$ , com valores de amortecimento do solo adimensionais de  $\eta=0,005$ ;  $0,050$  e  $0,200$ , e variando-se a relação de massa entre a fundação e o rotor -  $M_{FR}=m_F/m_R = 0,5$ ;  $1$ ;  $2$ ;  $3$ , tem-se os seguintes resultados:

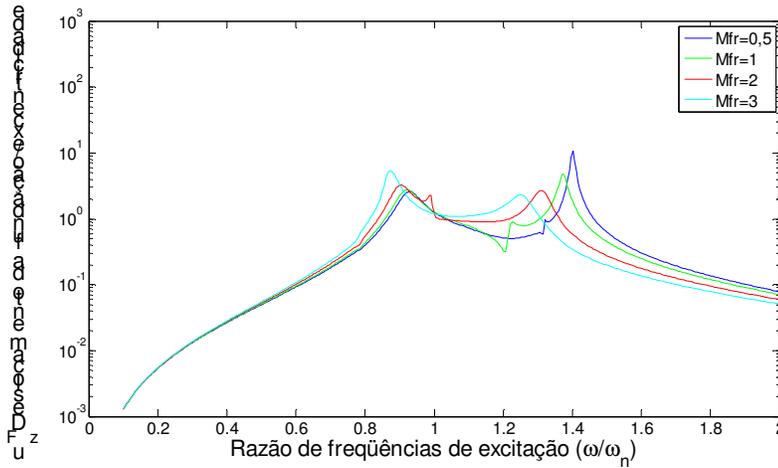
**B.4.a) Amortecimento do solo  $\eta = 0,005$**



(a) Rotor – direção vertical

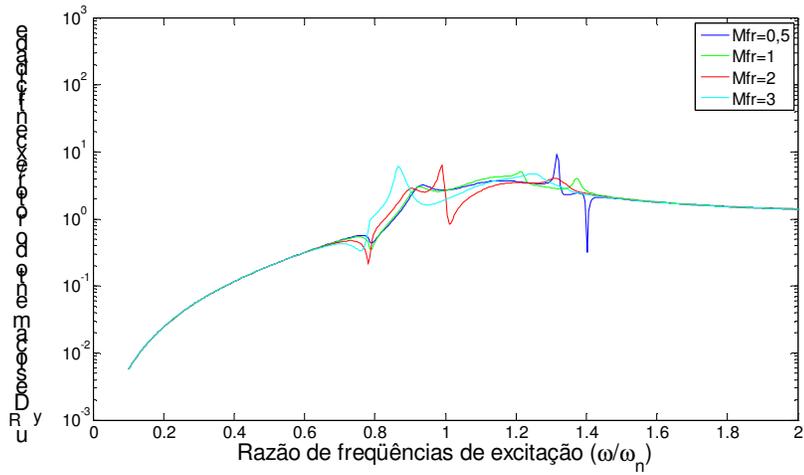


(b) Mancal - direção vertical

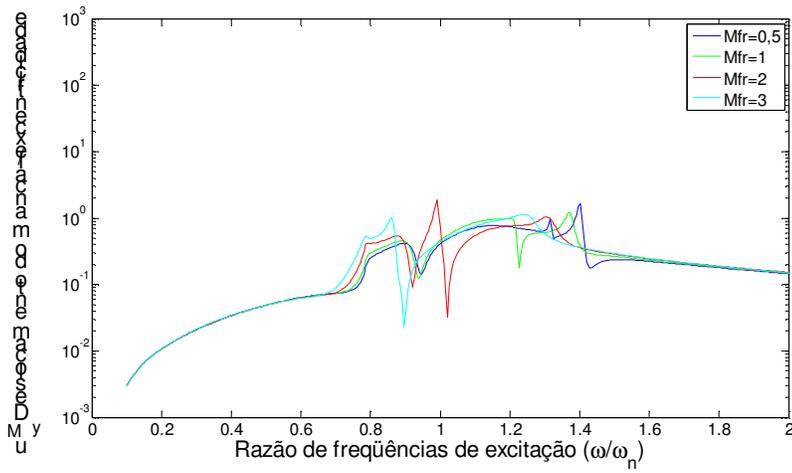


(c) Fundação - direção vertical

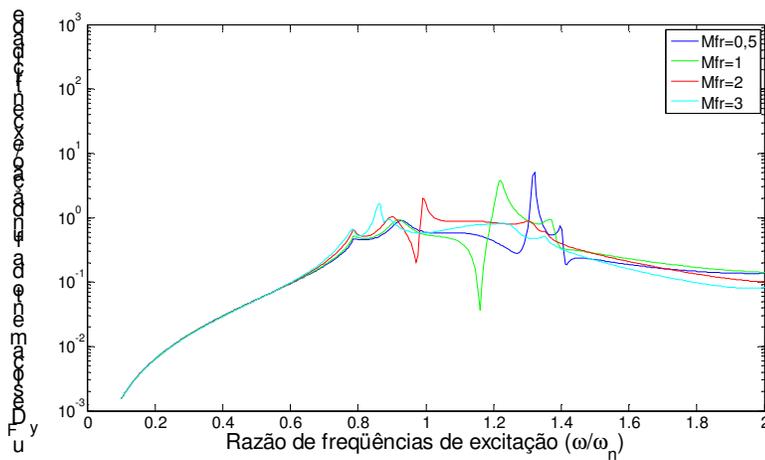
**Figura 6.11.a** Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção vertical, e amortecimento do solo de  $\eta = 0,005$  variando-se  $M_{FR}$ .



(a) Rotor – direção horizontal

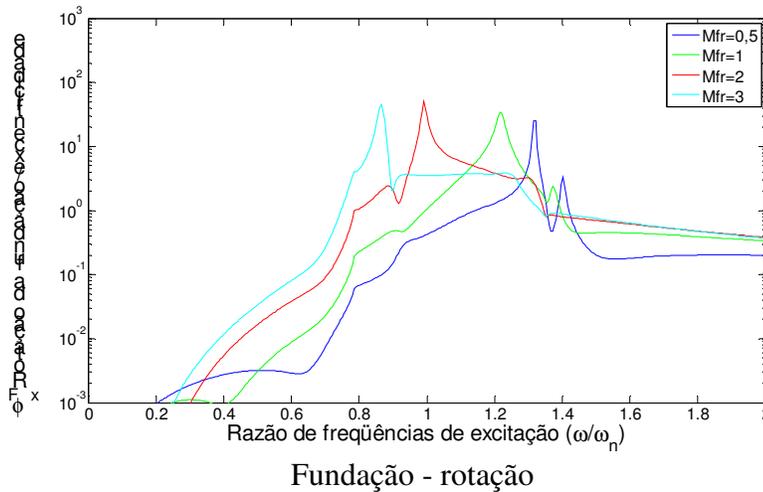


(b) Mancal - direção horizontal



(c) Fundação - direção horizontal

**Figura 6.11.b** Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção horizontal, e amortecimento do solo de  $\eta = 0,005$  variando-se  $M_{FR}$ .



**Figura 6.11.c Comportamento da fundação (rotação) e amortecimento do solo de  $\eta = 0,005$  variando-se  $M_{FR}$ .**

Para o caso do solo com amortecimento  $\eta = 0,005$  e camada de profundidade  $d/a=2$ , observam-se dois picos de deslocamento no rotor na direção vertical. Variando-se a relação de massas entre fundação e rotor, o primeiro pico aparece em uma frequência menor quando se aumenta a relação de massas  $M_{FR}$ . A amplitude desse primeiro pico aumenta com o aumento de  $M_{FR}$ . O segundo pico também aparece em uma frequência menor quando a relação de massas aumenta, porém sua amplitude é reduzida.

Para os mancais, na direção vertical, com o aumento de  $M_{FR}$ , há uma redução no valor da frequência em que os picos de deslocamento aparecem. A amplitude do primeiro pico, neste caso, não varia muito. No segundo pico há uma redução na amplitude com o aumento de  $M_{FR}$ .

A fundação, na direção vertical, também tem uma redução nos valores das frequências do primeiro pico quando a relação de massas aumenta. O primeiro pico aumenta levemente de amplitude com o aumento de  $M_{FR}$  e no segundo pico essa amplitude diminui.

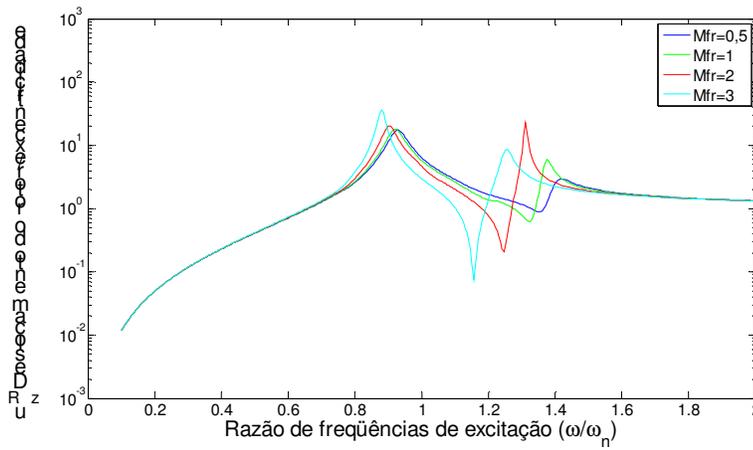
Na horizontal, para o amortecimento  $\eta = 0,005$ , com o aumento da relação de massas  $M_{FR}$ , ocorre uma redução no valor das frequências dos picos de deslocamento do rotor, sendo que para as relações  $M_{FR}=2$  e  $M_{FR}=3$ , há um aumento de amplitude no primeiro pico. Nesse caso, somente para  $M_{FR}=0,5$  aparece um segundo pico pois, sendo a massa da fundação menor que a do rotor, sua frequência está inserida na faixa de operação do mesmo.

O mancal também tem uma redução nos valores das frequências dos picos e um aumento da amplitude para os casos  $M_{FR}=2$  e  $M_{FR}=3$ , quando se considera o primeiro pico. No segundo, o aumento na relação das massas provoca uma redução na amplitude dos picos.

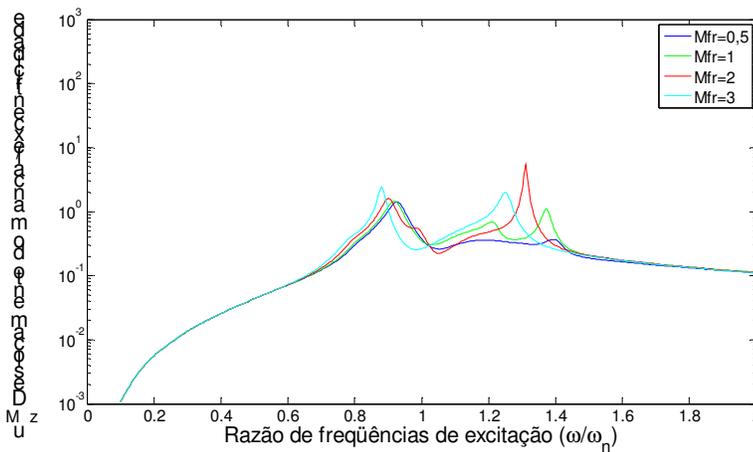
A fundação, para o amortecimento do solo  $\eta = 0,005$ , na direção horizontal, apresenta uma redução maior no valor das frequências dos picos quando há um aumento na relação de massas  $M_{FR}$ , além de ocorrer uma redução na amplitude desses picos.

Na rotação da fundação, para  $\eta = 0,005$ , as amplitudes dos picos de deslocamento são maiores do que nas outras direções. As amplitudes desses picos não variam muito com a mudança da relação de massas  $M_{FR}$ , porém ocorre uma grande redução na frequência em que esses picos aparecem com o aumento de  $M_{FR}$ .

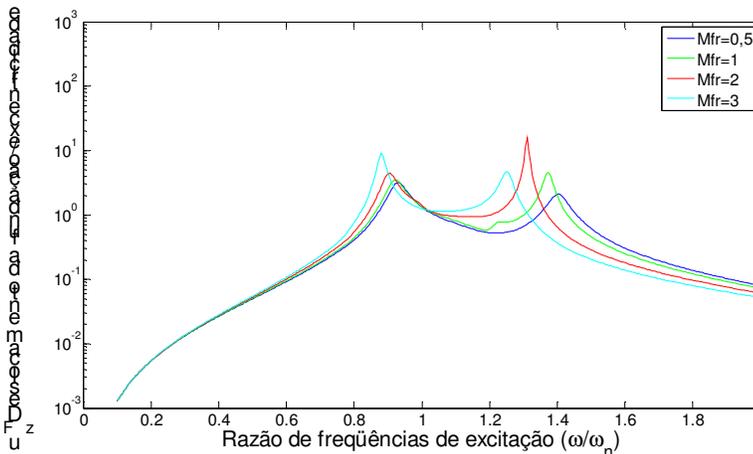
**B.4.b) Amortecimento do solo  $\eta = 0,050$**



(a) Rotor – direção vertical

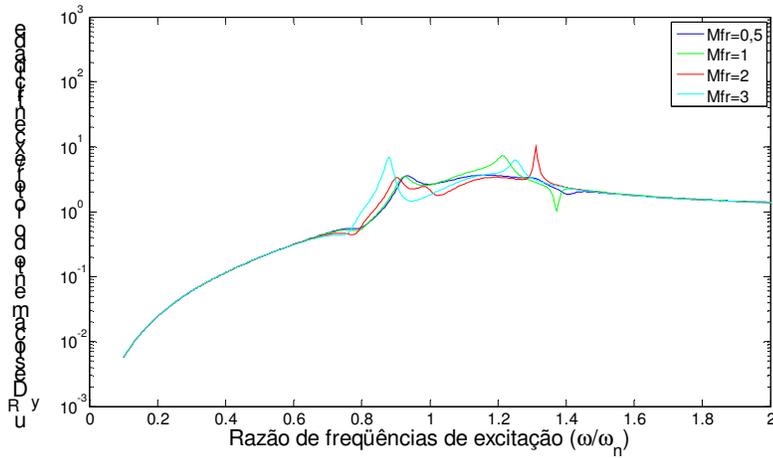


(b) Mancal - direção vertical

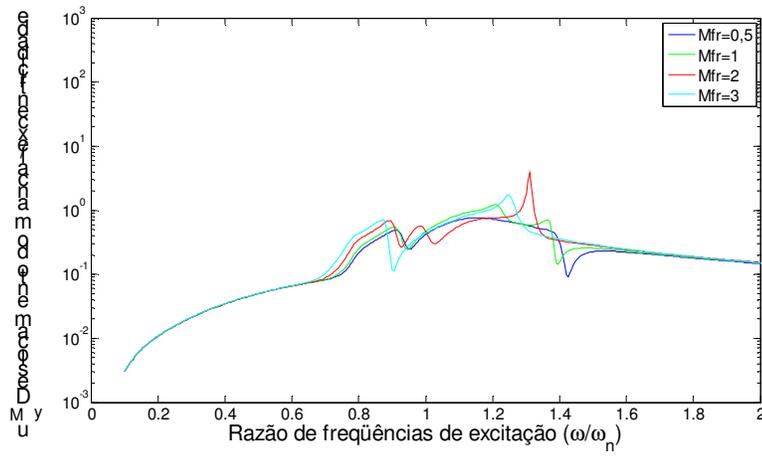


(c) Fundação - direção vertical

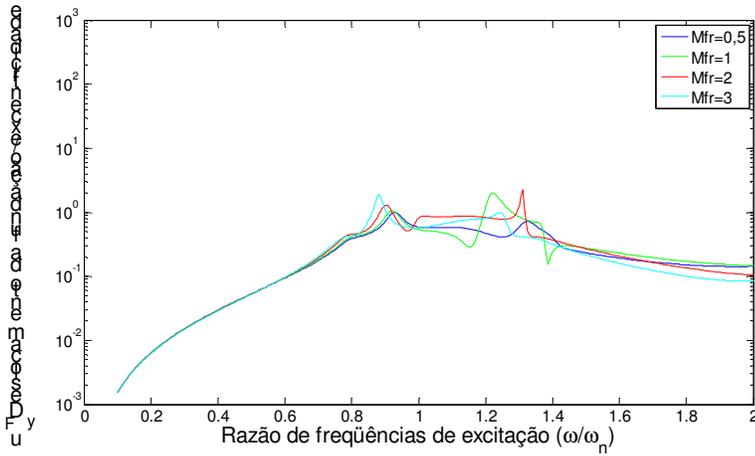
**Figura 6.12.a** Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção vertical, e amortecimento do solo de  $\eta = 0,050$  variando-se  $M_{FR}$ .



(a) Rotor – direção horizontal

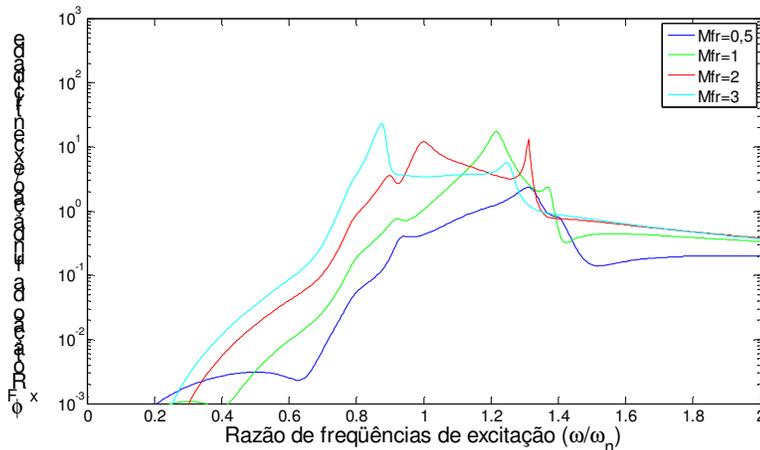


(b) Mancal - direção horizontal



(c) Fundação - direção horizontal

**Figura 6.12.b** Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção horizontal, e amortecimento do solo de  $\eta = 0,050$  variando-se  $M_{FR}$ .



Fundação - rotação

**Figura 6.12.c Comportamento da fundação (rotação) e amortecimento do solo de  $\eta = 0,050$  variando-se  $M_{FR}$ .**

Para o amortecimento  $\eta = 0,050$ , não há uma grande mudança no comportamento do rotor na direção vertical, se comparado ao caso anterior. O primeiro pico tem um aumento de amplitude e uma diminuição do valor da frequência quando se aumenta a relação  $M_{FR}$ . O segundo pico aparece em uma frequência menor do que o primeiro, como no caso em que o amortecimento do solo é menor. Porém, há um aumento de amplitude com o aumento da relação de massas entre fundação e rotor até o valor de  $M_{FR}=2$ . O pico para  $M_{FR}=3$  diminui de amplitude.

O comportamento do mancal na direção vertical também apresenta dois picos de deslocamento, sendo que ocorre um aumento da amplitude e uma redução no valor da frequência do primeiro pico, como acontece no rotor, quando a relação  $M_{FR}$  é aumentada. O segundo pico também aparece numa frequência menor com o aumento da relação de massas. Novamente, a maior amplitude ocorre com  $M_{FR}=2$ .

A fundação, na direção vertical, para  $\eta = 0,050$  também tem dois picos de deslocamento, sendo que o primeiro tem um aumento de amplitude e uma redução da frequência com o aumento de  $M_{FR}$ . O segundo pico também tem uma redução na frequência com o aumento da relação de massas, mas a variação da amplitude é pequena, exceto para  $M_{FR}=2$ , em que ocorre um aumento desse valor.

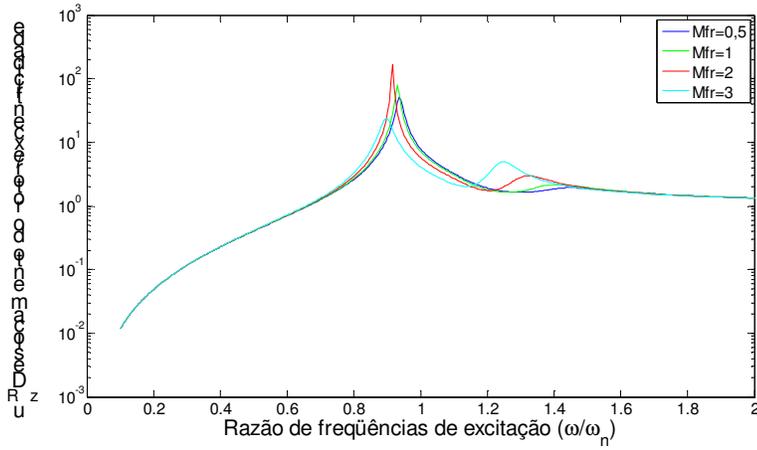
Na direção horizontal, o rotor apresenta dois picos de deslocamento, mas estes não são muito grandes. Como nos casos anteriores, os picos aparecem em frequências menores com o aumento de  $M_{FR}$ . O primeiro pico tem amplitude maior para  $M_{FR}=3$  e o segundo para  $M_{FR}=2$ .

Os mancais, na direção horizontal com amortecimento  $\eta = 0,050$  , têm o primeiro pico menor do que para o caso anterior, com  $\eta = 0,005$ . O segundo pico também tem a maior amplitude para  $M_{FR}=2$ .

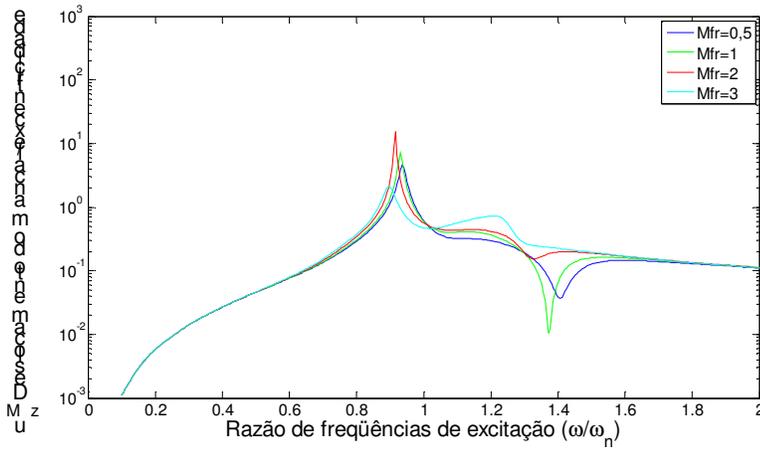
Com o aumento do amortecimento do solo, a amplitude do movimento da fundação na direção horizontal também é reduzida. O primeiro pico tem um pequeno aumento na amplitude do deslocamento e uma redução no valor das frequências com o aumento de  $M_{FR}$ .

A rotação da fundação apresenta uma redução nas amplitudes dos picos de deslocamento quando o amortecimento do solo aumenta. Como no caso anterior, também há uma redução da frequência dos picos quando  $M_{FR}$  aumenta.

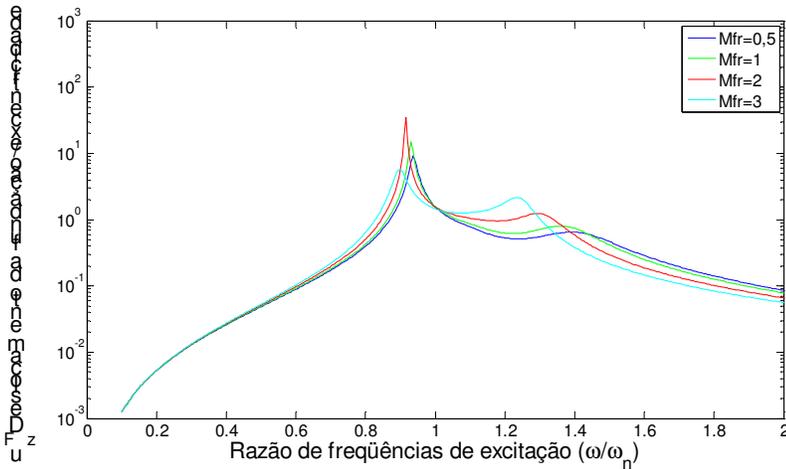
**B.4.c) Amortecimento do solo  $\eta = 0,200$**



(a) Rotor – direção vertical

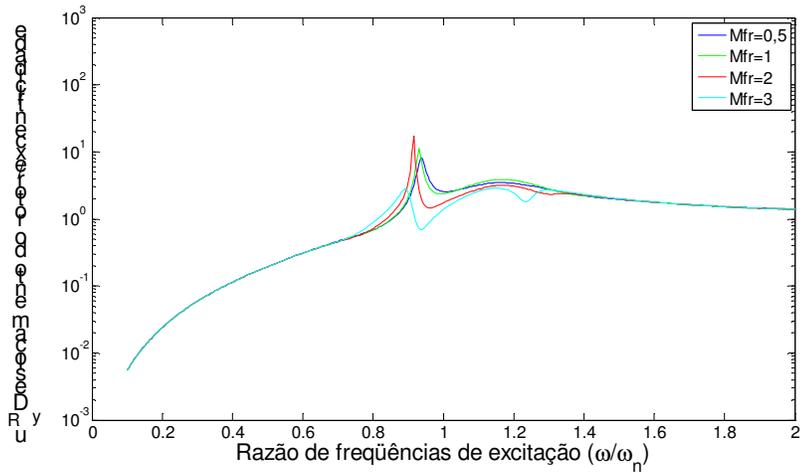


(b) Mancal - direção vertical

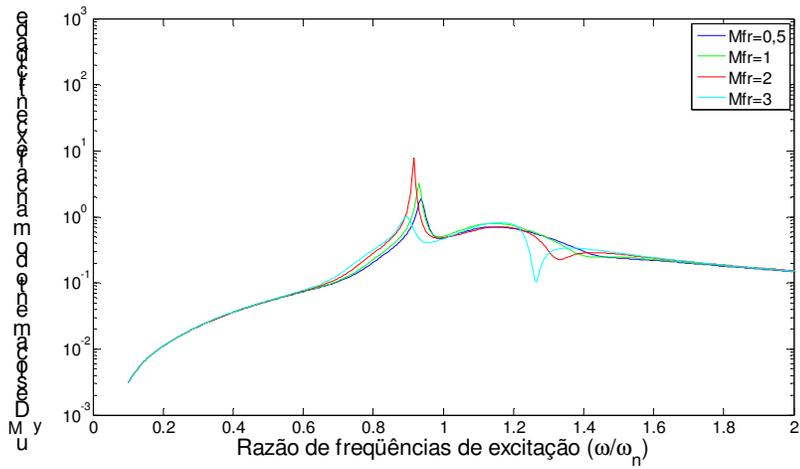


(c) Fundação - direção vertical

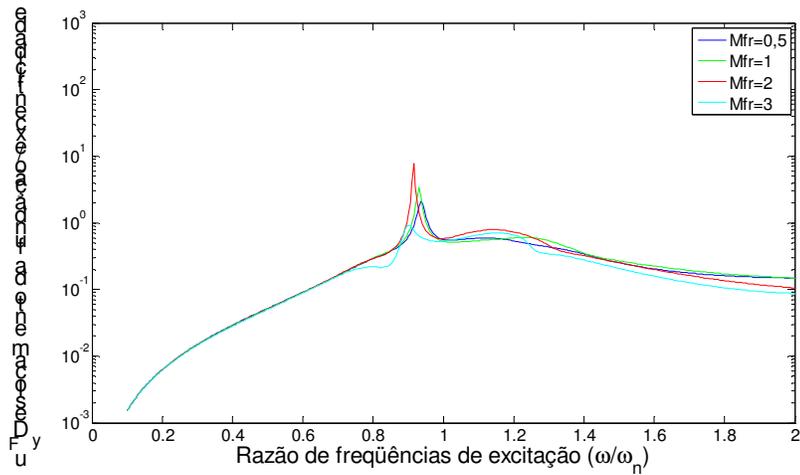
**Figura 6.13.a** Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção vertical, e amortecimento do solo de  $\eta = 0,200$  variando-se  $M_{FR}$ .



(a) Rotor – direção horizontal

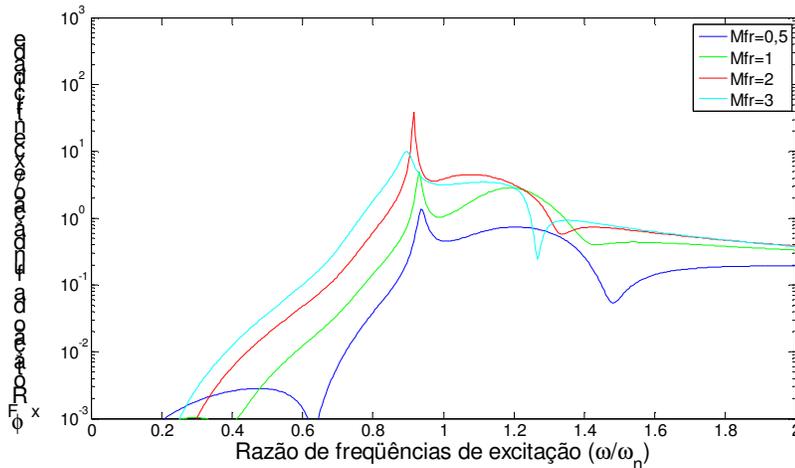


(b) Mancal - direção horizontal



(c) Fundação - direção horizontal

**Figura 6.13.b** Comportamento do rotor (a), do mancal (b) e da fundação (c) na direção horizontal, e amortecimento do solo de  $\eta = 0,200$  variando-se  $M_{FR}$ .



Fundação - rotação

**Figura 6.13.c Comportamento da fundação (rotação) e amortecimento do solo de  $\eta = 0,200$  variando-se  $M_{FR}$ .**

Para o amortecimento do solo  $\eta = 0,200$ , o rotor na direção vertical tem dois picos, sendo o primeiro bem maior que o segundo. A amplitude do primeiro pico, neste caso, é bem maior se comparado ao caso anterior (figura 6.12.a). Também há uma redução na frequência do pico com o aumento da relação de massas, mas essa redução é menor se comparada ao caso do solo menos amortecido. O segundo pico é menor para o solo mais amortecido. Há um pequeno aumento da amplitude e uma redução da frequência quando a relação de massas aumenta.

Os mancais apresentam um pico com amplitude maior do que nos casos anteriores, mas não apresentam o segundo pico. Esse pico tem uma redução da frequência com o aumento da relação de massas. A amplitude deste pico é crescente até  $M_{FR}=2$ , e diminui para  $M_{FR}=3$ .

O comportamento da fundação na direção vertical muda para o amortecimento  $\eta=0,200$ . Neste caso aparecem dois picos, sendo que o primeiro é bem maior que o segundo. Há uma redução da frequência do primeiro pico com o aumento da relação de massas e a sua amplitude é maior para  $M_{FR}=2$ . O segundo pico tem uma redução no valor da frequência com o aumento de  $M_{FR}$ .

Na horizontal, o rotor apresenta um pico cuja frequência diminui com o aumento da relação de massas. Neste caso, a maior amplitude também é para  $M_{FR}=2$ .

O mancal tem somente um pico onde há uma redução da frequência com o aumento da relação de massas. A amplitude é maior para  $M_{FR}=2$ .

O mesmo ocorre com a fundação na direção horizontal. Para o solo mais amortecido há um pico de deslocamento cuja frequência é reduzida com o aumento da relação de massas. A amplitude para  $M_{FR}=2$  é a maior.

No caso da rotação da fundação, para o solo mais amortecido, existe um pico de deslocamento, sendo que a frequência onde ocorre esse pico não varia muito com a variação de relação de massas. A amplitude é maior quando a relação de massas  $M_{FR}=2$ .

## 7. CONCLUSÕES

Neste trabalho foi feito um estudo da influência de perfis de solo em sistemas rotor fundação. O sistema é composto de um rotor do tipo Jeffcott e uma fundação do tipo bloco rígido. Foram incluídos também mancais hidrodinâmicos. Os modelos de solo utilizados foram o modelo clássico semi-espaço e o modelo de camada sobre base rígida. Neste último modelo, variaram-se a profundidade da camada e o amortecimento interno do solo.

Observou-se a mudança de comportamento do sistema com a variação dos parâmetros do solo e com a inclusão de mancais flexíveis. Foi feita também uma análise variando-se a relação de massas entre rotor e fundação.

Conforme se observou no capítulo 6, quando se utiliza um semi-espaço, o amortecimento interno do solo praticamente não exerce influência no comportamento do rotor ou da fundação. Quando os mancais hidrodinâmicos são incluídos no modelo com solo do tipo semi-espaço, ocorre uma mudança no comportamento do rotor em relação ao sistema com mancal rígido, aumentando os valores do deslocamento do rotor e da fundação nas frequências próximas à frequência natural do rotor.

Para o caso do solo camada sobre base rígida, são introduzidos picos adicionais de ressonância tanto no rotor quanto na fundação. Quando ocorre um aumento na profundidade da camada, o número de picos aumenta dentro da mesma faixa de frequência, pois ocorre uma diminuição das frequências naturais. Porém, há uma diminuição da amplitude destes picos que, para uma maior profundidade, são mais amortecidos. Também se observa uma pequena redução nas frequências naturais do sistema com o aumento da profundidade da camada. Neste caso, o aumento do amortecimento interno do solo exerce grande influência, causando uma redução nas amplitudes de deslocamento dos componentes do sistema.

Quando os mancais flexíveis são incluídos no sistema com solo do tipo camada sobre base rígida, o comportamento do rotor é significativamente modificado, podendo haver um aumento ou redução de amplitudes nos picos de deslocamento, e também mudanças na posição de algumas frequências associadas aos picos de amplitudes do sistema. Também pode ocorrer uma inversão de amplitude, verificada no apêndice A, devido à influência da impedância mecânica do solo.

A fundação, no sistema com mancais flexíveis, apresenta uma redução nas amplitudes de deslocamento, se comparada ao caso do sistema com mancais rígidos. Observou-se também uma redução nos valores das frequências naturais quando o amortecimento do solo aumenta.

Com o aumento da profundidade da camada do solo, para o caso com mancais flexíveis, observou-se, tanto no rotor quanto na fundação, o aparecimento de picos de deslocamento em frequências menores, porém a amplitude dos picos, neste caso, é menor do que no caso com mancais rígidos. Em alguns casos, o aumento do amortecimento do solo também pode causar uma redução na frequência em que os picos aparecem. Tal fato deve-se ao solo ser considerado com volume de massa proporcional à profundidade e à área da fundação do tipo bloco. Desta forma, quanto mais espessa a camada de solo, maior a massa correspondente e, portanto, mais baixas serão suas frequências naturais, dentro da faixa de frequências analisadas. O amortecimento é maior devido à maior radiação associada à maior profundidade do solo que, para profundidades muito grandes, aproxima-se do modelo semi-espaço.

Quando há variação da relação de massas entre rotor e fundação, ocorre uma alteração do comportamento dos componentes do sistema.

Com o aumento da massa da fundação em relação à do rotor, observa-se uma redução da frequência dos picos de deslocamento, podendo haver um aumento da amplitude dos picos nas frequências mais baixas nos componentes do sistema.

Resumindo, o presente trabalho permite concluir que os efeitos do solo podem influenciar de forma expressiva o comportamento do rotor, principalmente nos pontos de conexão com a fundação, ou seja, nos mancais. Fatores determinantes, neste caso, são o tipo de solo, a representação do amortecimento interno, e o tipo de mancais presentes no sistema. O modelo aqui investigado apresenta-se consistente para a representação do solo no modelo completo rotor-suportes-estrutura.

Futuramente, a pesquisa pode estender esta análise para simulações no domínio do tempo, permitindo uma análise da estabilidade do sistema frente ao amortecimento interno do solo. Além disso, pode-se estabelecer critérios de projeto em função da otimização dos elementos mancais, fundação e solo (amortecimento interno), aplicados a máquinas rotativas. A teoria pode ser desenvolvida para fundações tipo mesa, caracterizadas pelo vínculo com o solo através de pilares, sejam estas rígidas ou flexíveis em relação ao rotor e aos mancais.

## BIBLIOGRAFIA

ABOUSEEDA, H. DAKOULAS, P., Non-Linear Dynamic Earth Dam–Foundation Interaction Using a Be–Fe Method. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1998, vol 27, p.917–936.

ARAÚJO, F. C.; MANSUR, W. J.; DORS, C. e MARTINS, C. J. New Developments on Be/Be Multi–Zone Algorithms Based on Krylov Solvers – Applications to 3D Frequency–Dependent Problems. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences & Engineering**, April–June 2004, Vol. XXVI, No. 2, p. 231-248.

BARROS, P. L. A., **Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise da Interação Solo-Estrutura**, 1997, Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BARROS, P. L. A. ; MESQUITA, E.; A non-Singular Version Of The Indirect Boundary Element Method Applied To The Stationary Response Of Elastic Domains. **Proceedings 13<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference**, Baltimore, Ma, USA, ASCE, 1999, v.1, p. 1-6.

BONELLO, P. e BRENNAN, M. J. Modelling the Dynamic Behaviour of a Supercritical Rotor on a Flexible Foundation Using the Mechanical Impedance Technique. **Journal of Sound and Vibration**, 2001, vol. 2399 (3), p. 445-466.

CAMPOS, J.; CRAWFORD, M.; e LONGORIA, R. Rotordynamic Modeling Using Bond Graphs: Modeling the Jeffcott Rotor. **IEEE Transactions on Magnetics**, Vol. 41, No. 1, January 2005, p. 274-280.

CARRION, R., **Uma Implementação do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Estacionários Tridimensionais em Domínios Abertos e Fechados**, 2002, Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CAVALCA K.L., **Apostila do curso Modelagem e Análise de Máquinas Rotativas e Estrutura de Suporte**, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, 2001.

CAVALCA, K.L.; CAVALCANTE, P.F. E OKABE, E.P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. **Mechanical Systems and Signal Processing**, vol. 19, 2005, p.157-174.

CHEN, P. Y. P.; FENG, N.; HAHN, E. J. e HU, W. Turbomachinery Modeling for Improved Balancing and Vibration Response Analysis. **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power** – July 2005, vol. 127, issue 3, p. 646-653.

CHILDS, D., **Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling, and Analysis**, Wiley-Interscience, 1993, 476 p.

CHOI, B. L. e PARK, J. M. An Improved Rotor Model With Equivalent Dynamic Effects Of The Support Structure. **Journal of Sound and Vibration**, 2001, vol. 244 (4), p. 569-581.

CHOY, F. K.; PADOVAN, J. E QIAN, W.; Effectes of Foudation Excitation on Multiple Rub Interactions in Turbomachinery. **Journal of Sound and Vibration**, 1993 vol.164 (2), p.349-363.

CHRISTENSEN, R. M., **Theory of Viscoelasticity**, Dover Publications; 2 edition, 2010.

CHRISTOS VRETTOS, Vertical and Rocking Impedances for Rigid Rectangular Foundations on Soils with Bounded Non-Homogeneity. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1999, vol28, p.1525-1540.

DOMINGUEZ, J., **Boundary Elements in Dynamics**, Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1993.

DUCHEMIN, M.; BERLIOZ, A.; FERRARIS, G.; Dynamic Behavior and Stability of a Rotor Under Base Excitation, **Journal of Vibration and Acoustics**, Outubro de 2006, vol. 128, pp. 576-585.

EDWARDS, S.; LEES, A. W. E FRISWELL, M. I. Experimental Identification of Excitation and Support Parameters of a Flexible Rotor-Bearings-Foundation System from a Single Run-Down. **Journal of Sound and Vibration**, 2000, vol. 232(5), p. 963-992.

FENG, N.S. e HAHN, E.J.; Including Foundation Effects on the vibration Behaviour of rotating machinery. **Mechanical Systems and Signal Processing** 1995, p. 243-256.

FRANÇOIS, S.; PYL, L.; MASOUMI, H. R., DEGRANDE, G.; The Influence of Dynamic Soil-Structure Interaction on Traffic Induced Vibrations in Buildings; **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2007, vol 27, pp. 655-674.

GAJO, A., Influence of Viscous Coupling in Propagation of Elastic Waves in Saturated Soil **J. Geotech. Engrg.**, September 1995, Volume 121, Issue 9, pp. 636-644.

GAJO, A. The effects of inertial coupling in the interpretation of dynamic soil tests, **Geotechnique**, 1996, vol. 46, n<sup>o</sup>2, pp. 245-257

GASCH, R.; Vibration of Large Turbo-Rotors in Fluid Film Bearings on an Elastic Foundation. **Journal of Sound and Vibration**, 1976 vol.47(1), p. 53-73

GASCH, R. ; MAURER, J. ; SARFELD, W. Soil Influence on Unbalance Response and Stability of a Simple Rotor-Foundation System. **Journal of Sound and Vibration**, 1984 vol.93(4), p. 549-566.

GASCH, R.; NORDMANN, R.; PFUTZNER, H., **Rotordynamik**, Berlin, Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 2002, 705 p.

HIRDARIS, S.E. E LEES, A.W. A Conforming Unified Finite Element Formulation for the Vibration of Thick Beams and Frames. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2005, vol. 62, p. 579-599.

IRRETIER, H.;Mathematical Foundations of Experimental Modal Analysis in Rotor Dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 1999, vol.13(2), p. 183-191.

JINGBO LIU; LU YANDONG; CHUHAN ZHANG ; WOLF JOHN P. A direct method for analysis of dynamic soil-structure interaction based on interface idea, **Developments in geotechnical engineering**, 1998, vol. 83 , pp. 261-276.

KANG, Y. ; CHANG, Y.-P.; TSAI, J.-W.; MU, L.-H.; e CHANG, Y.-F. An Investigation In Stiffness Effects On Dynamics Of Rotor-Bearing-Foundation Systems. **Journal of Sound and Vibration**, 2000, vol.231(2), p. 343-374.

KLUYSKENS, V.; DEHEZ, B.; AHMED, B. A.; Dynamical Eletromechanical Model for Magnetic Bearings; **IEEE Transactions on Magnetics**; vol. 43, n°7, julho de 2007, pp. 3287-3292.

KONAGAI K.; NOGAMI T.; Analog circuit to simulate dynamic soil-structure interaction in shake table test, **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, Volume 17, Number 5, July 1998, pp. 279-287(9).

KRÄMER, E.; **Dynamics of Rotors and Foundations**; Springer Verlag, 1993.

KUEMMLEE, H., SIEGL, G., WOYWODE, P., Influence of Elastic Foundation Structures on the Rotor Dynamics of Drive Trains, **Petroleum and Chemical Industry Conference Europe-Eletrical and Instrumentation Applications**, 2008, PCIC Europe 2008, 5<sup>th</sup>.

LEES, A. W. e FRISWELL, M. I.; The Evaluation of Rotor Imbalance in Flexibly Mounted Machines. **Journal of Sound and Vibration**, 1997, vol.208 (5), p.671-683.

LEES, A. W.; SINHA, J. K.; FRISWELL, M.I.; Model-Based Identification of Rotating Machines; **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2009, vol 29, pp. 1884-1893.

LIINGAARD, M., **Dynamic Behaviour of Suction Caissons**, tese de doutorado, Aalborg university, outubro de 2006.

LIU, W. e NOVAK, M.; Dynamic Behaviour of Turbine-Generator-Foundation Systems. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, 1995, vol 24, p. 339-360.

LUND, J. W., **Evaluation of Stiffness and Damping Coefficients for Fluid Bearings**, Shock and Vibration Digest, vol. 11, No. 1, pp. 5-10.

MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L.; Evaluation of dynamic coefficients for fluid journal bearings with different geometries; **Proceedings of the 20<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering – COBEM 2009**, 2009, Gramado – RS, v. 1. pp. 1 – 11.

MESQUITA, E.; Dynamic Response of a Rotor-Foundation System Considering the Effects of an Active or Passive Environment. **Proceedings of 3rd International Conference on Rotordynamics**, 1990, p.213-218;

MESQUITA, E.; PAVANELLO, R.; Numerical methods for the Dynamics of Unbounded Domains, **Computational and Applied Mathematics**, Petrópolis, 2005, v. 24, n.1, p. 1-26

MESQUITA, E.; ROMANINI, E.; BARROS, R. M.; On Two Strategies to Synthesize Influence Functions for Three-Dimensional Half-Space Problems; **Proceedings 14<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conference**. Austin, TX, USA; 2000, v.1 p. 1-5

MOURELATOS, Z.P. E PARSONS, M.G.; A Finite Element Analysis of Beams on Elastic Foundation Including Shear and Axial Effects, **Computers & Structures**, 1987 vol.27 (3), p.323-331.

NELSON, FREDERICK C., A brief history of early rotor dynamics, **Sound and Vibration**, Junho de 2003.

NETO, E. M E BARROS, P. L. A., On the Dynamic Interaction and Cross-Interaction of 2D Rigid Structures with Orthotropic Elastic Media Possessing General Principal Axes Orientation. **Kluwer Academic Publishers, Meccanica**, 2001, vol.36, p367–378. Printed in the Netherlands.

NETO, E. M E BARROS, P. L. A., Singular-ended spline interpolation for two-dimensional boundary element analysis. **International Journal For Numerical Methods In Engineering**, 2000, vol.47, p. 951- 967.

NOGAMI, T.; OTANI, J.; KONAGAI, K.; CHEN, H. Nonlinear Soil-Pile Interaction Model for Dynamic Lateral Motion, **Journal of Geotechnical Engineering**. Jan. 1992, Vol. 118, no. 1, pp. 89-106.

PENNACCHI, P.; BACHSCHMID, N.; VANIA, A.; ZANETTA, G. A. e GREGORI, L. Use of modal representation for the supporting structure in model-based fault identification of large rotating machine-1: theoretical remarks. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2005.

PENNACCHI, P.; BACHSCHMID, N.; VANIA, A.; ZANETTA, G. A. E GREGORI, L. Use of modal representation for the supporting structure in model-based fault identification of large rotating machine-2: application to a real machine. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2005.

PRELLS, U., LEES, A. W., FRISWELL, M. I. E SMART, M. G.; Minimisation of the Effect of Uncertainty on Model Estimation. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 1998, vol.12 (2), p. 333-355.

RAMALHO, D. A., **Estudo da Influência dos Perfis de Solo na Resposta Dinâmica de Sistemas Rotor-Fundação**, 2006, Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

REDMOND, I.; Rotordynamic Modelling Utilizing Dynamic Support Data Obtained From Field Impact Tests. **Proceedings of sixty international conference of Vibrations and rotating Machinery**, Sept., Oxford 1996, c500/055/96.

SAFAK E.; Local site effects and dynamic soil behavior, Soil Dynamics and Earthquake Engineering **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, Volume 21, Number 5, July 2001, pp. 453-458(6)

SENJUNTICHAJ, T.; MANI, S.; RAJAPAKSE, R.K.N.D.; Vertical Vibration of an Embedded Rigid Foundation in a Poroelastic Soil; **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, 2006, vol 26, pp. 626-636.

SINHA, J.K., FRISWELL, M.I. e LEES, A.W. The Identification of the Unbalance and the Foundation Model of a Flexible Rotating Machine from a Single Run-Down. **Mechanical Systems and Signal Processing**, 2002, vol. 16 (2-3), p. 255-271.

SINHA, J.K.; LEES, A.W. e FRISWELL, M.I. The Identification of the Unbalance of a Flexible Rotating Machine From a Single Rundown **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power** – April 2004, vol. 126 issue 2, p. 416-421.

SMART, M. G.; FRISWELL, M. I. e LEES, A. W. Estimating turbogenerator foundation parameters: model selection and regularization. **Proceedings of the Royal Society of London Series A – Mathematical Physical and Engineering Sciences** 456 (1999) : 1563-1607 Jul 8 2000.

SMART, M.; FRISWELL, M. I.; LEES, A. W. e PRELLS, U.; Errors in estimating turbo-generator foundation parameters. **21st Int. Seminar on Modal Analysis**, 1996, Leuven, Belgium.

STERPHENSON, R. W. Ultrasonic testing for determining dynamic soil moduli. **ASTM Special Technical Publication (ASTM spec. tech. publ.) ISSN 0066-0558**, 1978, n°654, pp. 179-195

TENENBAUM, R. A., **Dinâmica**, Rio de Janeiro, Editora UFRJ, 1997, 756 p.

THAM, L. G., QIAN, J. e CHEUNG, Y. K., Dynamic Response of a Group of Flexible Foundations to Incident Seismic Waves **Soil Dynamics and Earthquake Engineering** 1998, vol17, p.127-137.

TODOROVSKA, M.; RJOUB, Y. A.; Plain Strain Soil-Structure Interaction Model For a Building Supported by a Circular Foundation Embedded in a Poroelastic Half-Space; **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**; 2006, vol 26, pp 697-707.

TSIGGINOS, C.; GEROLYMOS, N.; ASSIMAKI, D.; GAZETAS, G.; Seismic Response of Bridge Pier on Rigid Caisson Foundation in Soil Stratum; **Earthquake engineering and engineering vibration** , março de 2008, vol 7, n°1, pp 33-44.

VELESTOS, A. S.; YOUNAN, A.H. Dynamic soil pressures on rigid vertical walls, **Earthquake engineering & structural dynamics (Earthquake eng. struct. dyn.)**, 1994, vol. 23, n°3, pp. 275-301.

WOLF J.P.; SONG C.; Some cornerstones of dynamic soil-structure interaction, **Engineering Structures**, Volume 24, Number 1, January 2002, pp. 13-28(16).

WONG, F. S., Uncertainties in Dynamic Soil-Structure Interaction, **Journal of Engineering Mechanics**, Feb. 1984, vol. 110, No. 2, pp 308-324.

XIONG ZHANG, J. L. WEGNER, J. B. HADDOW; Three-dimensional dynamic soil-structure interaction analysis in the time domain, 1999, **Earthquake Engineering And Structural Dynamics** 28, 1501- 1524.

YAZDCHI M.; KHALILI N.; VALLIAPPAN S.; Dynamic soil-structure interaction analysis via coupled finite-element-boundary-element method, **Soil Dynamics ad Earthquake Engineering**, Volume 18, Number 7, October 1999, pp. 499-517(19).

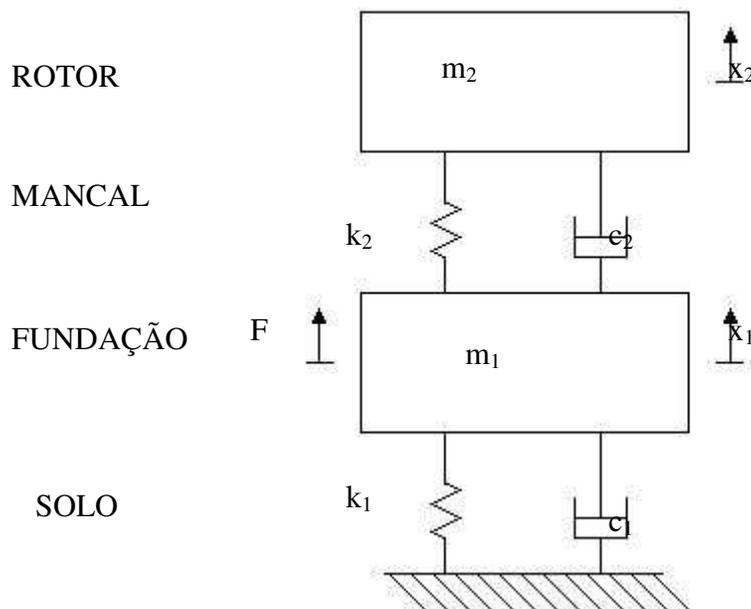
ZAMAN, M.M.; DESAI, C.S.; DRUMM E.C., Interface Model for Dynamic Soil-Structure Interaction **Journal of Geotechnical Engineering**. Sept. 1984, Vol. 110, no. 9, pp. 1257-1273.

ZEMBATY, Z.; KOWALSKI, M.; POSPISIL, S.; Dynamic Identification of a Reinforced Concrete Frame in Progressive states of Damage; **Engineering Structures**, 2006, vol 28, pp 668-681.

ZHANG HONG-WU Dynamic Finite Element Analysis for Interaction between a Structure and Two-Phase Saturated Soil Foundation. **Computers & Structures** 1995, vol. 56, No. I, p. 49-58.

## APÊNDICE A – EFEITO DA IMPEDÂNCIA NO SISTEMA

Para melhor entendimento do efeito do amortecimento citado no capítulo 6, foi feito um sistema massa-mola-amortecedor simples e conhecido (figura a.1), para uma representação simplificada do rotor e da fundação numa das direções do sistema de referência. Posteriormente, foi incluída uma matriz complexa para simular a impedância mecânica, e assim verificar se o efeito mostrado no resultado da figura 6.8. é de fato decorrente da influência da impedância mecânica do solo.



**Figura a.1 Sistema massa-mola-amortecedor.**

A partir do sistema mostrado na figura acima, obtém-se o seguinte equacionamento:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

De maneira simplificada:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F \quad (\text{A.2})$$

No domínio da frequência:

$$\left[-\omega^2 M + i\omega C + K\right]x = F \quad (\text{A.3})$$

Assim:

$$x = \left[-\omega^2 M + i\omega C + K\right]^{-1} F \quad (\text{A.4})$$

Para o estudo do efeito observado no capítulo 6, será inserida uma matriz complexa ( $K_{imp}$ ) na equação A.4, para simular o efeito de uma impedância do solo. Assim:

$$x = \left[-\omega^2 M + i\omega C + K + K_{imp}\right]^{-1} F \quad (\text{A.5})$$

onde  $K_{imp}$  é a matriz complexa que representa a impedância do solo.

Para obter os resultados apresentados a seguir, foram utilizados os seguintes valores:

$$m_1 = m_2 = 1\text{Kg}$$

$$k_1 = k_2 = 100\text{ N/m}$$

$$c_1 = c_2 = 0,01\text{ Ns/m}$$

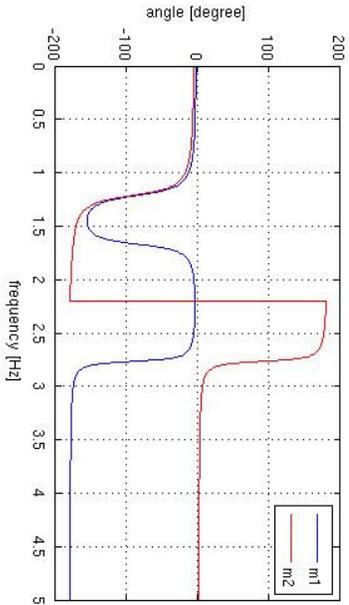
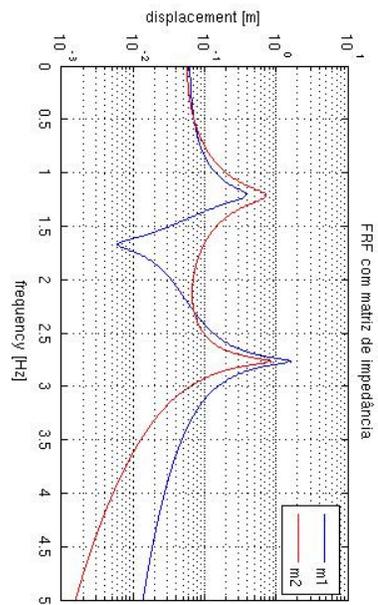
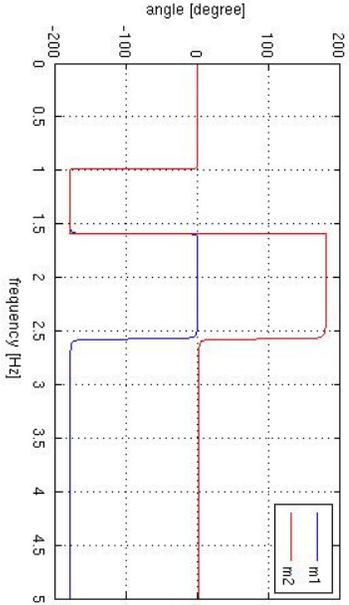
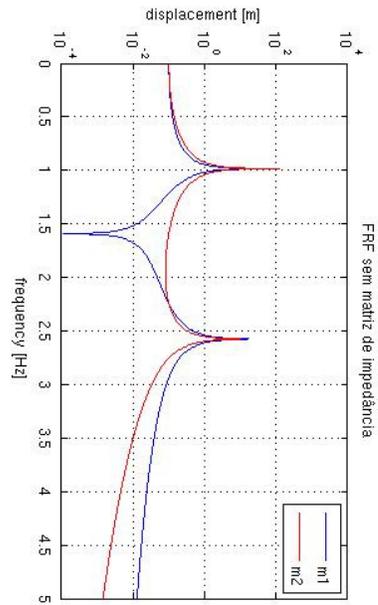
Nestas condições, o sistema da figura A.1 apresenta dois modos próprios de vibrar.

A matriz de impedância, cujos valores reais estão associados ao amortecimento, enquanto que os valores imaginários, associados às frequências (que, numa analogia, estariam associados às frequências do solo)

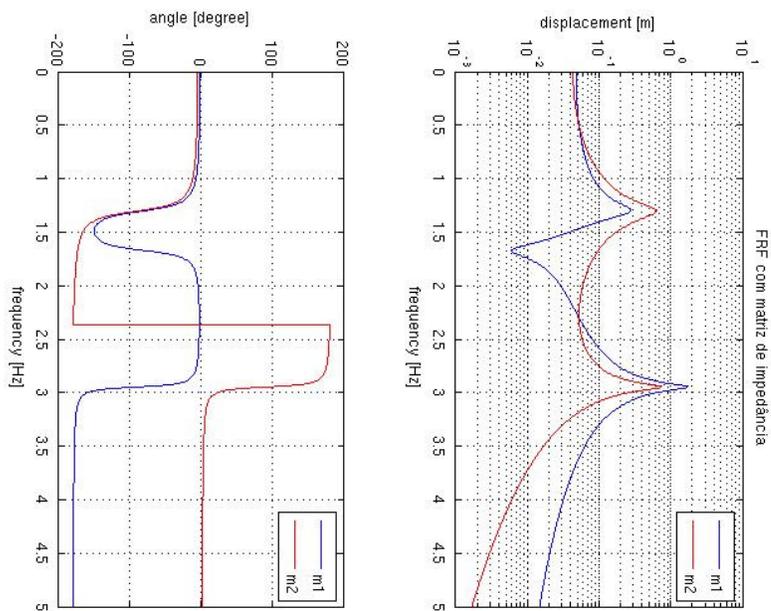
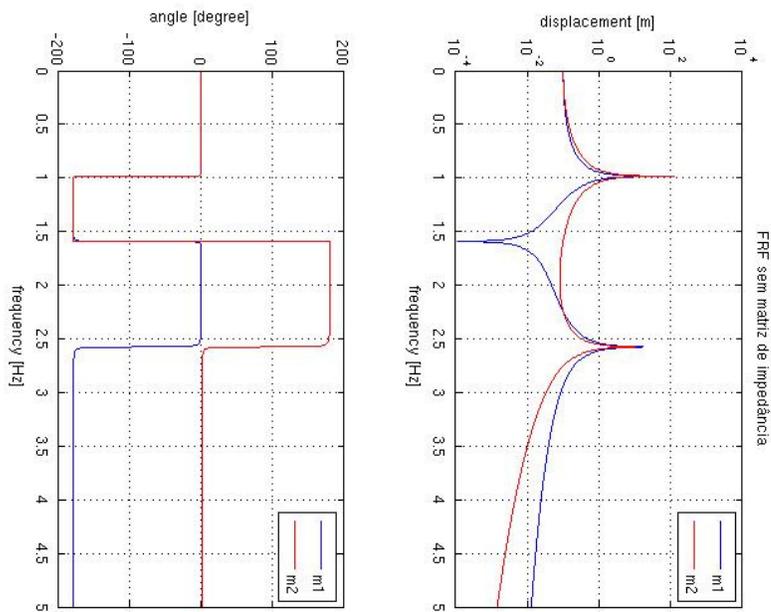
Variando-se os valores da parte real de  $K_{imp}$ , obtêm-se os seguintes resultados:

a) Para o primeiro modo:

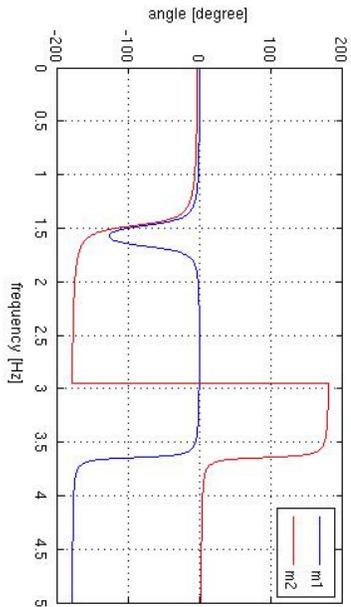
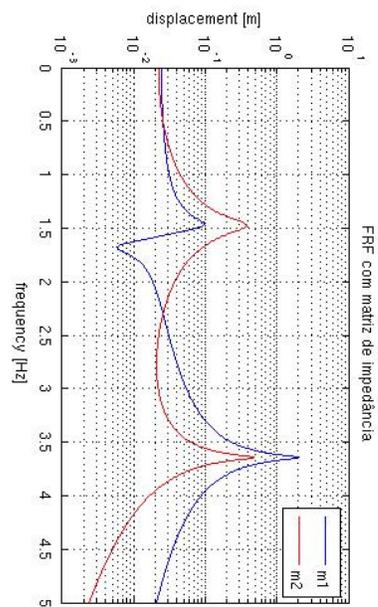
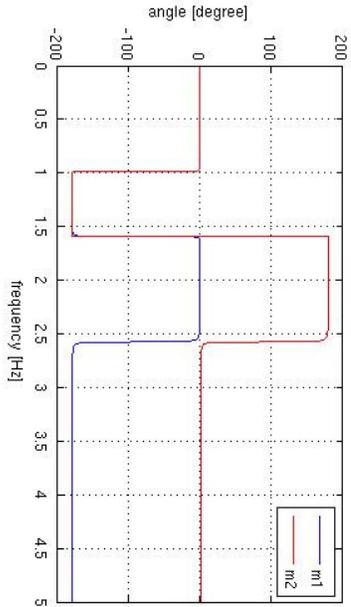
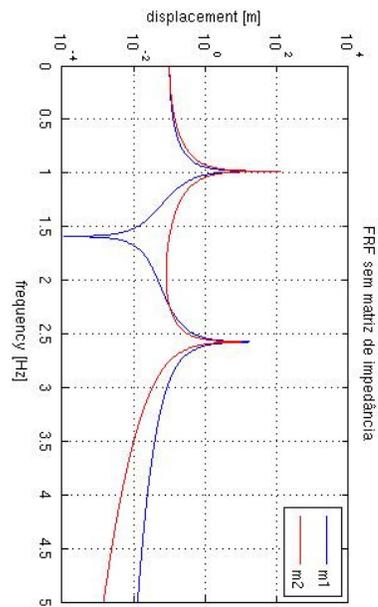
a.1)  $K_{imp} = \begin{bmatrix} 50+4i & 0 \\ 0 & 10+6i \end{bmatrix}$



$$a.2) K_{imp} = \begin{bmatrix} 100 + 4i & 0 \\ 0 & 10 + 6i \end{bmatrix}$$



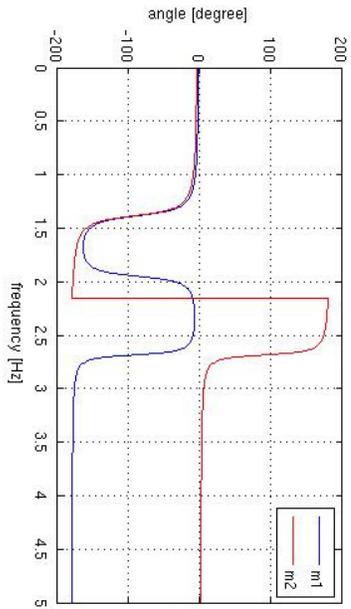
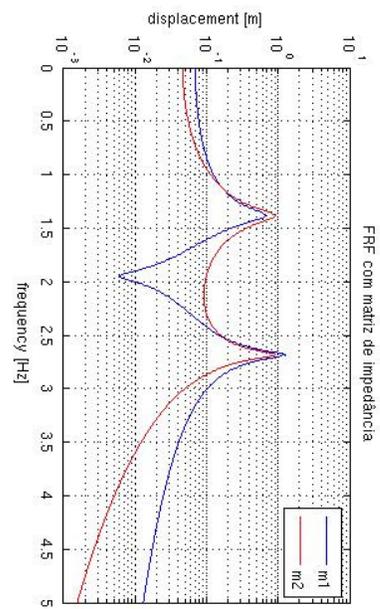
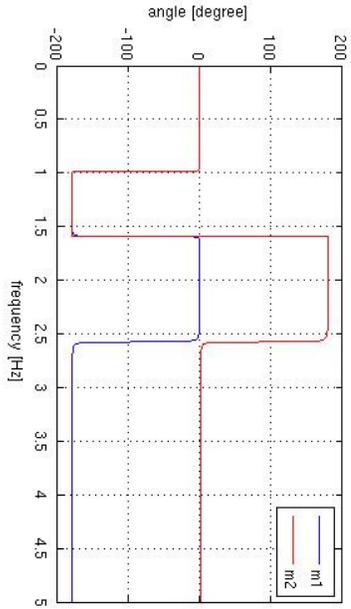
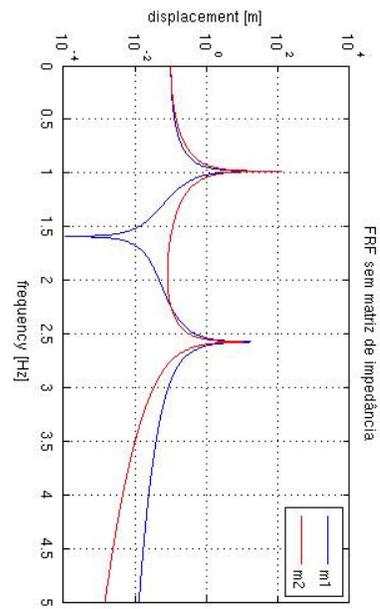
a.3)  $K_{imp} = \begin{bmatrix} 300+4i & 0 \\ 0 & 10+6i \end{bmatrix}$



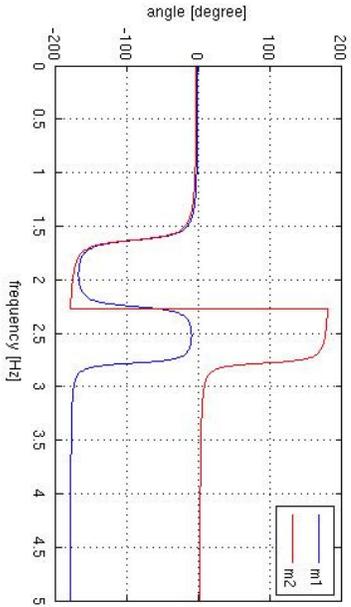
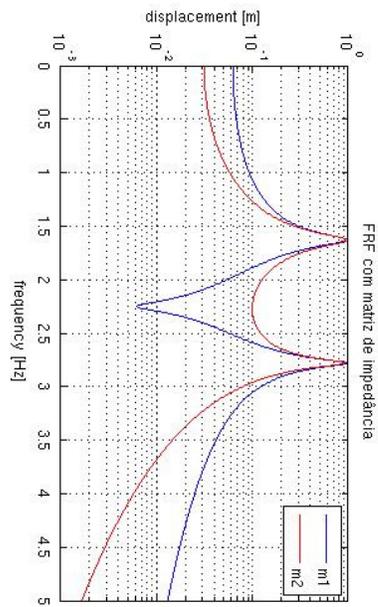
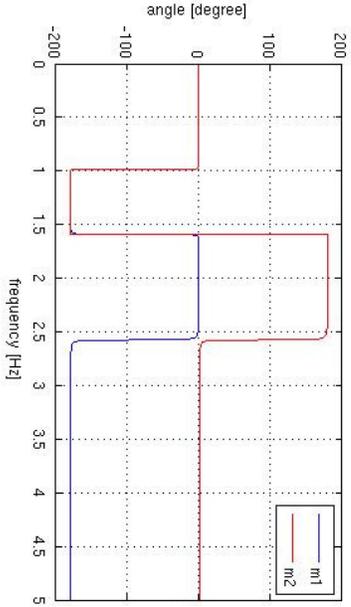
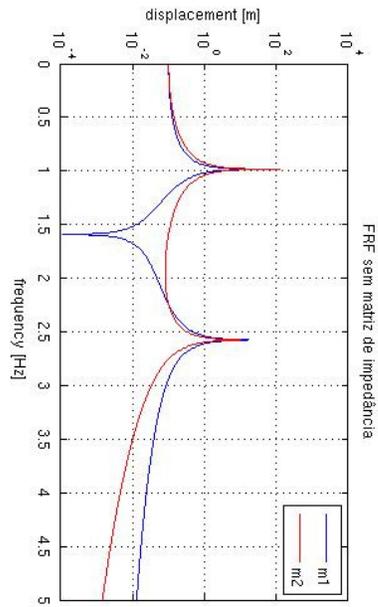
Conforme se observa nos resultados mostrados acima, quando há uma variação dos valores associados ao primeiro modo na matriz de impedância, não se observa qualquer inversão nas amplitudes dos picos.

b) Para o segundo modo:

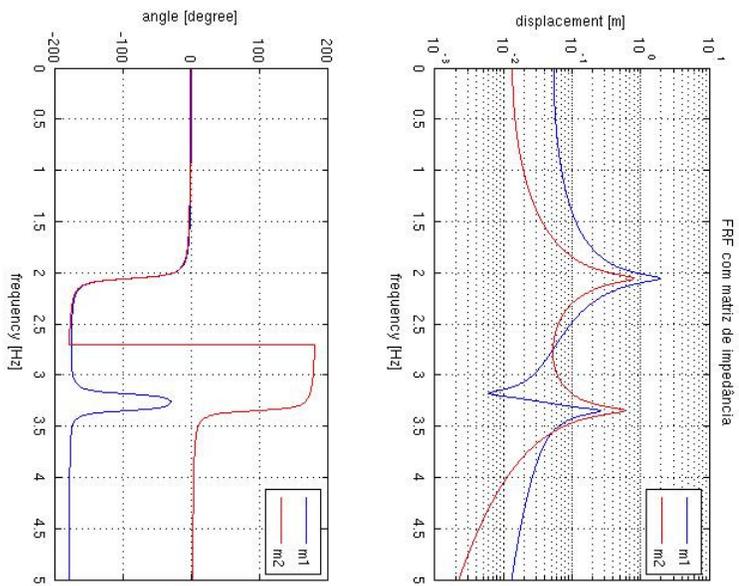
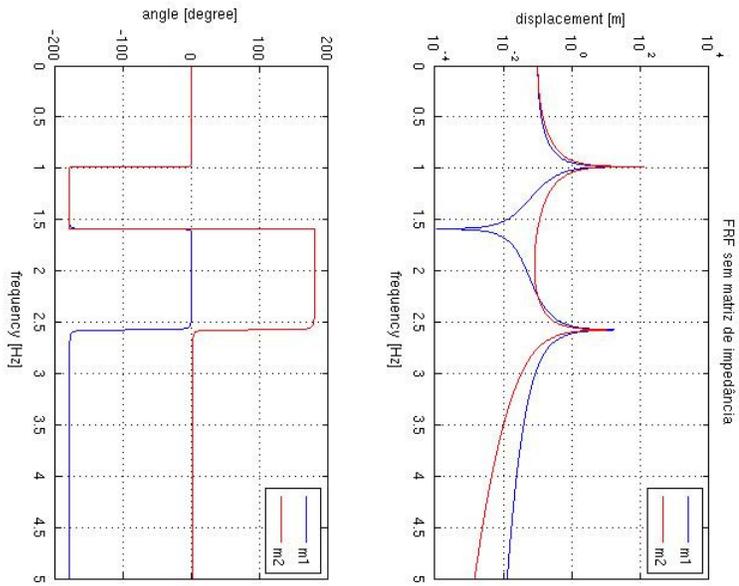
$$b.1) K_{imp} = \begin{bmatrix} 10+4i & 0 \\ 0 & 50+6i \end{bmatrix}$$



b.2)  $K_{imp} = \begin{bmatrix} 10+4i & 0 \\ 0 & 100+6i \end{bmatrix}$



$$b.3) K_{imp} = \begin{bmatrix} 10+4i & 0 \\ 0 & 300+6i \end{bmatrix}$$



Neste caso, variou-se o amortecimento associado ao segundo modo, e foi observada uma inversão de amplitude dos picos, com a variação da impedância do solo, conforme o efeito observado no capítulo 6.

Desta forma, valida-se o efeito do solo no sistema rotor - mancais como possível fonte de excitação e influência na resposta dinâmica do sistema rotativo.

## APÊNDICE B – CÁLCULO DOS COEFICIENTES DOS MANCAIS

De acordo com Machado (2009), o equacionamento necessário para a análise da distribuição de pressão em um mancal sujeito a condição de lubrificação hidrodinâmica é baseado essencialmente na Equação de Reynolds. Com algumas considerações, tais como viscosidade e densidade do fluido lubrificante constantes, além de condições isotérmicas, a Equação de Reynolds pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu U \frac{\partial h}{\partial x} + \underbrace{12\mu \frac{\partial h}{\partial t}}$$

**Termo dinâmico relacionado ao esmagamento do filme**

onde  $t$  é o tempo,  $x$  e  $z$  são as coordenadas cartesianas ( $x$  é a direção vertical e  $z$  é a direção axial),  $\mu$  é a viscosidade absoluta do lubrificante,  $U$  é a velocidade circunferencial do rotor e  $h$  é a espessura do filme de óleo, de acordo com a geometria do mancal.

No caso deste trabalho, a equação foi resolvida através do Método de Diferenças Finitas, calculando-se iterativamente a pressão para todos os pontos da malha. Várias malhas foram testadas, e uma malha com 6400 pontos (80 pontos em cada direção), foi a malha com a melhor relação entre precisão e custo computacional. Assim, uma malha com 6400 pontos foi escolhida e a pressão adimensional em cada ponto da malha é dada por:

$$p_N = \frac{6\pi \frac{h_L - h_R}{\Delta x} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_T^3}{\Delta z^2} p_T + \frac{h_R^3}{\Delta x^2} p_R + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_B^3}{\Delta z^2} p_B + \frac{h_L^3}{\Delta x^2} p_L + 12(\Delta S \dot{x} \cos \theta + \Delta S \dot{y} \sin \theta)}{\left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_T^3}{\Delta z^2} + \frac{h_R^3}{\Delta x^2} + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{h_B^3}{\Delta z^2} + \frac{h_L^3}{\Delta x^2}}$$

onde  $\Delta S \dot{x}$  e  $\Delta S \dot{y}$  são pequenas perturbações dadas na velocidade do centro do eixo em torno da posição de equilíbrio.

Com relação às forças hidrodinâmicas, os valores encontrados de pressão são integrados numericamente a fim de obter as forças resultantes vertical e horizontal.

$$F_v = \sum_{n=1}^n p_N \cos \theta_N (\Delta x)(\Delta z)$$

$$F_H = \sum_{n=1}^n p_N \sin \theta_N (\Delta x)(\Delta z)$$

Para a geometria do mancal utilizado, velocidade de rotação e carregamento, uma posição de equilíbrio é encontrada fazendo com que a força resultante na direção horizontal (projeções de  $F_H$  e  $F_V$  na direção horizontal) seja nula, o que pode ser obtido assumindo um valor correto de excentricidade e ângulo de atitude.

Com relação às características dinâmicas do mancal, procura-se basicamente modelar os mancais hidrodinâmicos, através de seu filme de óleo, considerando o carregamento devido ao peso do rotor e as características geométricas do mancal, que definem a expressão para a espessura do filme de lubrificante responsável, por sua vez, pelo campo de pressões e forças hidrodinâmicas de sustentação geradas.

O lubrificante é então discretizado num modelo mola-amortecedor e caracterizado por coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento  $K$  e  $B$  respectivamente, conforme mostrado no capítulo 3.