

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR JULIO A. BELTRAMI DA
SILVA E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 20 / 07 / 2001

R Pavanelli
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Investigação de um Método Evolucionário de Otimização Estrutural

Autor: Julio Antonio Beltrami da Silva
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello
Co-Orientador: Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira

48/01

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Investigação de um Método Evolucionário de Otimização Estrutural

Autor: Julio Antonio Beltrami da Silva
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello
Co-Orientador: Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira

Curso: Engenharia Mecânica
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2001
S.P. - Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

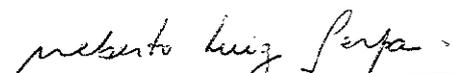
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Investigação de um Método Evolucionário de Otimização Estrutural

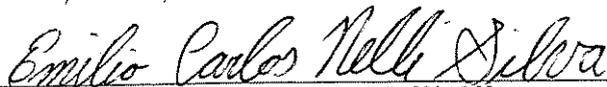
Autor: Julio Antonio Beltrami da Silva
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello
Co-Orientador: Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira



Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa
DMC/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Emilio Carlos Nelli Silva
USP/ESC/POLI

Campinas. 20 de Julho de 2001.

0665 7800

Dedicatória

Dedico este trabalho, aos meus pais, Maria Aparecida Beltrami da Silva e Walter Pinto da Silva, à minha irmã Juliana Beltrami da Silva, e ao meu tio Carlos Beltrami (Carlito).

Agradecimentos

Agradeço ao **Prof. Dr. Renato Pavanello** pela sua imensa contribuição para minha formação profissional e acadêmica, que além de orientador, o **Prof. Pavanello** também é um amigo desde os primeiros tempos de graduação passando por co-orientador não oficial de iniciação científica, orientador de trabalho de graduação, com quem me orgulho muito de ter sido orientado. Seu conhecimento, simplicidade e dedicação ao trabalho científico e de engenharia são exemplos para mim.

Agradeço também muito ao **Prof. Dr. Janito** pela grande dedicação em me introduzir ao mundo da programação computacional e pela amizade e companheirismo ao longo deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Maria Aparecida e Walter pelo eterno e amplo apoio.

Agradeço aos meus amigos de infância e amigos de graduação pela motivação, aos colegas do Departamento de Mecânica Computacional pelas discussões e contribuições que fizeram meu trabalho cada vez mais aprimorado.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Mecânica Computacional pela minha formação no período de graduação e mestrado.

À **CAPES**, pelo apoio financeiro ao trabalho.

*... Para ser feliz é olhar as coisas como elas são
sem permitir da gente uma falsa conclusão e
seguir somente a voz do seu coração ...*

Raul Seixas

Resumo

Silva, Julio Antonio Beltrami da, *Investigação de um Método Evolucionário de Otimização Estrutural*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 121 pp. Dissertação (Mestrado)

Este trabalho apresenta uma investigação sobre um método de otimização topológica aplicado à síntese estrutural. O método estudado é fundamentado em uma seqüência evolucionária, sendo denominado "Método de Otimização Estrutural Evolucionário". Concentra-se em três critérios de projeto: critério em tensão local, critério da rigidez estrutural e vários critérios baseados nas freqüências naturais. Inicialmente faz-se uma revisão da literatura sobre os métodos de otimização estrutural procurando familiarizar-se com o tema e suas diversas abordagens. O método estudado baseia-se em análises estruturais por elementos finitos. Assim, uma modelagem clássica em elementos finitos para análises lineares estática e dinâmica de meios contínuos é realizada, conjuntamente com a formulação para o elemento quadrilateral bi-dimensional. O método evolucionário de otimização estrutural é apresentado junto com a formulação para os três critérios de projeto avaliados. Na seqüência, apresenta-se uma introdução à Programação Orientada a Objetos, que foi utilizada na implementação da otimização estrutural tendo como linguagem o C++. Para a investigação do método foram escolhidos: exemplos de otimização comuns na literatura no sentido de comprovação do método, exemplos analisados pelos autores do método para a validação da implementação computacional, bem como análises específicas deste trabalho. Ao final, são apresentadas as principais conclusões além de sugestões para trabalhos futuros dentro desta área de pesquisa.

Palavras Chave:

- Otimização Estrutural, Método Evolucionário, Método dos Elementos Finitos.

Abstract

Silva, Julio Antonio Beltrami da, *An investigation about a Structural Optimization Method*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 121 p. Dissertação (Mestrado)

This work presents an investigation about a structural topologic optimization. The method studied is based on an evolutionary sequence and it is called "Evolutionary Structural Optimization Method". The three design criteria investigated are: stress local level, stiffness or displacement constraints, and natural frequency. The studies start with a research about the optimization methods in order to familiarize with the theme and its approaches. Because the method is based in a structural finite element analysis, it is shown a classic two-dimensional model of finite element in static and dynamic analysis. Then, the Evolutionary Structural Optimization Method and the design criteria are presented. Next, an introduction to Object Oriented Programming is presented because the optimization method was implemented in the language C++. Many examples are presented to validate the evolutionary method, such as classic optimization problems, the method's author examples and some specific analyses. Finally, the main conclusions about this work are presented and some suggestions about future investigations are proposed.

Key Words:

- Structural Optimization, Evolutionary Method, Finite Element Method.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Posicionamento e Motivação do Trabalho	1
1.2	Objetivos	3
1.3	Descrição do Trabalho	3
2	Revisão de Literatura	5
2.1	Introdução	5
2.2	Análise Estrutural e Método dos Elementos Finitos	5
2.3	Otimização Estrutural Evolucionária	6
3	Modelo Mecânico e Leis Constitutivas	12
3.1	Introdução	12
3.2	Definição de Deformação	12
3.3	Tensão	15
3.4	Relações Constitutivas para o Estado Plano de Tensão	17
3.5	Equações de Equilíbrio em Termos de Tensão	18
3.6	Condições de Contorno	20
3.7	Resumo das Equações de Equilíbrio	21
3.8	Método dos Resíduos Ponderados aplicado em Elasticidade Bidimensional	22
4	Aproximação por Elementos Finitos	27
4.1	Introdução	27
4.2	Aproximação Nodal	27
4.3	Elemento Isoparamétrico	29
4.4	Transformação de Operadores Diferenciais	30
4.5	Aproximação por Elementos Finitos no MRP em Elasticidade Bidimensional	31
4.6	Integração Numérica de Gauss	35
5	Otimização Estrutural Evolucionária	38
5.1	Introdução	38

5.2	Otimização Estrutural Evolucionária - OEE	38
5.3	A OEE em Tensão	39
5.4	A OEE em Rigidez	40
5.5	A OEE em Frequência	45
6	Linguagem Orientada a Objetos - MEFLABC++	49
6.1	Introdução	49
6.2	Programação Orientada a Objetos - POO	49
6.3	Obtendo um Modelo de Objeto	50
6.3.1	Análise Orientada a Objetos	51
6.3.2	Projeto Orientado a Objetos	52
7	Resultados e Discussões	58
7.1	Introdução	58
7.2	Otimização em Tensão Máxima - ANSYS	58
7.2.1	Estrutura de Michell	59
7.2.2	Exemplo biela	62
7.3	Exemplos para a Otimização em Tensão Máxima - MEFLABC++	69
7.3.1	Estrutura de Duas Barras	69
7.3.2	Estrutura de Duas Barras - Influência do domínio inicial	73
7.3.3	Estrutura de Michell	75
7.4	Exemplos para a Otimização em Rigidez - MEFLABC++	78
7.4.1	Estrutura de Duas Barras	78
7.4.2	Estrutura de Michell	80
7.4.3	Estrutura sujeita a Múltiplos Limites de Deslocamentos	81
7.4.4	Viga MBB	83
7.5	Exemplos para a Otimização em Frequência - MEFLABC++	88
7.5.1	Estrutura em Viga	88
7.5.2	Estrutura Retangular	95
7.5.3	O número de sensibilidade α	98
8	Conclusões e Sugestões de Continuidade	101
8.1	Conclusões Específicas	101
8.2	Conclusões Gerais e Sugestões de Continuidade	103

Lista de Figuras

2.1	Etapas para a formulação e resolução pelo MEF de um problema físico	7
3.1	Etapas do procedimento de modelagem	13
3.2	Elementos Infinitesimais na posição inicial e final, (a) deformação longitudinal, (b) deformação angular	14
3.3	Corpo em corte com forças internas atuantes	16
3.4	(a) Estado de tensão geral sobre um elemento (b) Elemento de um corpo em cisalhamento puro	16
3.5	(a) Estado Plano de Tensão, (b) Estado Plano de Deformação	18
3.6	Elemento Infinitesimal sob ação de Tensões e Forças de Campo	19
3.7	Forças de Superfície ϕ_x e ϕ_y atuantes em uma parte arbitrária do corpo . . .	20
3.8	Decomposição do Contorno nas direções x e y	24
4.1	Domínio discretizado por Elementos Finitos e detalhe de um elemento com os deslocamentos nodais	28
4.2	Elemento de Referência Isoparamétrico e Elemento Real	30
4.3	Quadratura de Gauss para o cálculo da Área sob a curva $\phi(\xi) = \phi_1$ usando (a) um, (b) dois e (c) três pontos de Gauss	36
5.1	Escala para o número de sensibilidade α_n^e	47
6.1	A classe <i>Task</i> e as classes derivadas	54
6.2	A classe <i>EvolutionaryMethod</i> e as classes derivadas	55
6.3	A classe <i>RejectionCriterion</i> e as classes derivadas	56
6.4	A estrutura de classe do POO da OEE	57
7.1	A estrutura de Michell	59
7.2	Domínio inicial para a Estrutura de Michell	60
7.3	Domínio inicial para a Estrutura de Michell - discretização	60
7.4	Etapas da OEE para a Estrutura de Michell - Ansys	61
7.5	Variação do Tempo de Resolução em função de RR	63
7.6	Domínio Inicial Bidimensional da biela	64

7.7	Domínio Inicial Bidimensional da Biela discretizado	64
7.8	Etapas da OEE para a Biela bidimensional	64
7.9	Etapas da OEE para a Biela - caso bidimensional	66
7.10	Etapas da OEE para a Biela - caso tridimensional	67
7.11	Etapas da OEE para a Biela tridimensional	68
7.12	A Estrutura de Duas Barras otimizada	69
7.13	Domínio inicial de projeto	70
7.14	Etapas da OEE para a Estrutura de Duas Barras	71
7.15	Variação das Tensões σ_{EQV} em função de RR - Estrutura de Duas Barras	72
7.16	Variação de parâmetros do modelo - Estrutura de Duas Barras	72
7.17	Modificações no domínio inicial para a Estrutura de Duas Barras	73
7.18	Etapas da OEE para a primeira modificação	74
7.19	Etapas da OEE para a segunda modificação	74
7.20	Etapas do Processo Evolucionário - Estrutura de Michell	75
7.21	Variação das Tensões σ_{EQV} em função de RR - Estrutura de Michell	76
7.22	Variação de parâmetros do modelo - Estrutura de Michell	77
7.23	Domínio Inicial modificado para a Estrutura de Michell	77
7.24	Etapas do Processo Evolucionário para a Estrutura de Michell modificada	78
7.25	Domínio inicial de trabalho para a Estrutura de duas Barras	79
7.26	Etapas da OEE para a Estrutura de Duas Barras	80
7.27	Variação do Coeficiente de Performance em função do número de iterações - Estrutura de Duas Barras	81
7.28	Domínio inicial para a Estrutura de Michell	82
7.29	Variação do Coeficiente de Performance em função do número de iterações - Estrutura de Michell	82
7.30	Estrutura Otimizada para a Estrutura de Michell	83
7.31	Domínio inicial para a Estrutura de Múltiplos Deslocamentos Restritos	84
7.32	Variação do Coeficiente de Performance em função do número de iterações - Estrutura de Múltiplos Deslocamentos Restritos	84
7.33	Estruturas otimizadas para o caso de Múltiplos Deslocamentos Restritos	85
7.34	Variação dos Deslocamentos em função do número de iterações - caso 1	86
7.35	Variação dos Deslocamentos em função do número de iterações - caso 2	86
7.36	Domínio inicial para a Viga MBB	87
7.37	Estrutura otimizada para Viga de Suporte - MBB	87
7.38	Estrutura otimizada para a para a Viga de Suporte - MBB modificada	87
7.39	Domínio Inicial para a OEE em frequência	88
7.40	Estrutura de Viga 10%, de material removido e ω_1 11,7% maior	89
7.41	Evolução das quatro primeiras frequências para o caso de aumentar ω_1	89
7.42	Estrutura de Viga 10%, de material removido e ω_2 9,5% maior	90
7.43	Evolução das quatro primeiras frequências para o caso de aumentar ω_2	90

7.44	Estrutura de Viga 10%, de material removido e ω_4 8,9% maior	91
7.45	Evolução das quatro primeiras freqüências para o caso de aumentar ω_4	91
7.46	Estrutura de Viga 10%, de material removido e $(\omega_2 - \omega_1)$ 29,8% maior	92
7.47	Evolução das quatro primeiras freqüências para o caso de aumentar $(\omega_2 - \omega_1)$	92
7.48	Estrutura de Viga, 10% de material removido e $(\omega_4 - \omega_2)$ 46,0% maior	93
7.49	Evolução das oito primeiras freqüências para o caso de aumentar $(\omega_4 - \omega_2)$	93
7.50	Modos de Vibração iniciais e finais para $(\omega_4 - \omega_2)$ - Estrutura de Viga	94
7.51	Domínio inicial para a Estrutura Retangular	95
7.52	Estrutura Retangular 50% de material removido e ω_1 38,2% maior	96
7.53	Evolução das quatro primeiras freqüências para o caso de aumentar ω_1 - Estrutura Retangular	96
7.54	Evolução das quatro primeiras freqüências para o caso de aumentar ω_1 , ω_2 e ω_3 - Estrutura Retangular	97
7.55	Estrutura Retangular 50% de material removido e ω_1 35,1% maior, ω_2 21,3% maior e ω_3 27,5% maior	98
7.56	Mapa de α para os casos de aumentar o valor de ω_1 , ω_2 e ω_4	99
7.57	Distribuição de α (a), Energia de Deformação (b), Energia Cinética(c)	100

Nomenclatura

Letras latinas

A, B, C, D, E	pontos de referência antes da deformação
A', B'	pontos de referência após a deformação
u, v, w	deslocamentos nas direções x, y e z
P	força interna no corpo
A	área infinitesimal
Mz	momento na direção z
E	módulo de elasticidade
dx, dy e dz	lados infinitesimais nas direções x, y e z
F_x, F_y	forças inerciais ou de campo nas direções x e y
\ddot{u}_x, \ddot{u}_y	aceleração nas direções x e y
ds	região infinitesimal do contorno do corpo
\vec{N}	linha normal ao corpo
n_x, n_y	cossenos diretores entre as direções x e y e a direção Normal
u_i, v_i	deslocamentos do nó i nas direções x e y
$u(x, y), v(x, y)$	deslocamentos nas direções x e y de pontos no domínio do elemento
$N_i(x, y)$	funções de interpolação no plano xy
V^r	elemento real
V^e	elemento de referência
$N_i(\xi, \eta)$	funções de interpolação no plano $\xi\eta$

Letras gregas

ε	deformação longitudinal ou axial
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	deformações longitudinais nas direções x , y e z
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$	deformações angulares nos planos
ρ	densidade do corpo
ν	coeficiente de Poisson
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	tensões normais nas direções x , y e z
σ_{xy}	tensão de cisalhamento no plano xy
ϕ_x, ϕ_y	forças de superfície nas direções x e y
Γ_1, Γ_2	contornos infinitesimais do corpo
\hat{u}, \hat{v}	deslocamentos impostos nas direções x e y
Ω	domínio
\mathfrak{R}^2	plano dos números reais
$\psi(x, y)$	função de ponderação no plano xy
α	número de sensibilidade

Vetores e matrizes

$[\varepsilon]$	tensor de deformações
$[\sigma]$	tensor de tensões
$\{Op(u)\}$	vetor de operador diferencial de deslocamentos
$\{Op(\psi)\}$	vetor de operador diferencial de funções de ponderação
$[D]$	matriz de propriedades do material
$\{\psi\}$	vetor de funções de ponderação
$\{\ddot{u}\}$	vetor de acelerações
$\{F\}$	vetor de forças de volume
$\{\phi\}$	vetor de forças de superfície

Capítulo 1

Introdução

O presente trabalho aborda os aspectos teóricos e práticos de um método evolucionário de otimização estrutural aplicado ao problema de síntese topológica. O método de otimização topológica é implementado usando-se um modelo estrutural aproximado pelo método dos elementos finitos (MEF), e uma técnica evolucionária para a otimização.

Neste capítulo faz-se um posicionamento do trabalho na área de mecânica computacional, no que se refere ao uso do Método dos Elementos Finitos (MEF) no cálculo estrutural, e a importância da otimização estrutural. Em seguida mostra-se a motivação para a realização desta pesquisa. A próxima etapa é a descrição dos objetivos a serem alcançados com a realização do trabalho. E finalmente, é feita a descrição de cada capítulo destacando as características principais para alcançar os objetivos propostos.

1.1 Posicionamento e Motivação do Trabalho

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica computacional utilizada na modelagem de estruturas ou de meios contínuos através da montagem de pequenos subdomínios. Os subdomínios são denominados elementos, e o conjunto de todos os elementos formam a discretização do domínio completo (Cook et al., 1989).

Cada elemento apresenta geometria simples e de fácil análise, o que permite que um problema que antes não tinha ou apresentava solução analítica muito difícil, seja resolvido através da superposição de vários problemas simples.

A implementação do MEF é viável usando-se computação intensiva, e os resultados encontrados são uma aproximação ou uma simulação numérica da solução.

A engenharia de simulação computacional é realidade desde a década de 60, sendo que em 1965, Zienkiewicz e Cheung estenderam o método dos elementos finitos aos problemas que poderiam ser expressos com formulação variacional. A partir de 1970, os sistemas de simulação passaram a ser vendidos comercialmente.

Como benefícios introduzidos pela simulação computacional nos processos de projeto de sistemas mecânicos tem-se: refinamento de componentes, descoberta e previsão de falhas antes da construção do sistema, otimização do desempenho e performance.

Em resumo, como já disse Bruce Irons, um dos pioneiros no MEF, "Se houver a oportunidade de se melhorar um projeto, então, em algum lugar alguém estará tentando fazê-lo com o MEF" (Xie and Steven, 1997).

Após larga utilização do MEF como poderosa ferramenta na análise de tensões e em outras áreas, fez-se a sua utilização na otimização de sistemas mecânicos, ou mais precisamente na otimização estrutural.

Otimização Estrutural consiste em se estabelecer uma metodologia para o projeto de estruturas mecânicas, que tenham como objetivo resistir aos carregamentos da forma mais eficiente possível, ou seja, buscar a melhor performance para uma dada estrutura. Este processo envolve a fusão de várias áreas como: Engenharia, Matemática e Computação.

A maioria dos métodos de otimização tratam o problema de uma forma matemática onde procura-se maximizar ou minimizar uma característica do sistema, satisfazendo ao mesmo tempo certas restrições.

Em contrapartida ao rigor matemático, existem métodos de otimização estrutural, onde o processo de otimização é feito de uma forma intuitiva e heurística (Xie and Steven, 1997). Um exemplo destes métodos chamado Otimização Estrutural Evolucionária (OEE) vem sendo utilizado desde 1992.

O método evolucionário é baseado no simples conceito de remoção gradual de material ineficiente da estrutura, sendo que a configuração resultante tende a comportar-se como uma estrutura melhor adaptada às suas funções.

Vários problemas foram solucionados via OEE como por exemplo: minimizar o peso de estruturas tornando-as mais eficientes e com uma melhor distribuição de tensões (Xie and Steven, 1997) ou mantendo-se limites de rigidez e deslocamentos pré-estabelecidos (Chu et al., 1996); maximizar ou minimizar uma frequência natural escolhida (Zhao et al., 1997b) bem como controlar o intervalo entre duas frequências naturais de vibração de uma estrutura (Xie and Steven, 1997). O método evolucionário de otimização estrutural também foi aplicado para otimizar peso variando-se parâmetros dimensionais (Xie and Steven, 1993) e otimizar forma com vistas a reduzir concentração de tensão (Xie and Steven, 1997).

Como características importantes deste método está a fácil implementação (Xie and Steven, 1993) e base teórica simples, a possibilidade de otimização de forma, topologia e dimensional simultâneas, o fato de que várias opções e possibilidades do método ainda não foram exploradas.

E de uma maneira geral, observa-se que nos últimos anos os métodos de otimização topológica ganharam um grande espaço na engenharia.

Tais características motivam a investigação do método de otimização estrutural evolucionária, pois estruturas mais leves e eficientes são cada vez mais o objetivo de pesquisas nas áreas aeronáutica e automobilística, entre outras.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo investigar e implementar um método de otimização estrutural evolucionário com vistas a disponibilizar uma ferramenta de otimização topológica.

A investigação compreende principalmente exemplos bidimensionais para três critérios de projeto que são: critério em tensão local, critério em rigidez e o critério em vibração. Para cada um dos critérios, vários algoritmos são propostos.

A implementação é feita com Linguagem Orientada a Objetos e em ambiente C++, com o objetivo de se criar um módulo de otimização estrutural evolucionária em um ambiente de trabalho que já possui algumas ferramentas do método de elementos finitos implementadas. Alguns testes preliminares foram realizados em programa comercial mostrando a potencialidade do método.

1.3 Descrição do Trabalho

Este trabalho está dividido em oito capítulos. Neste primeiro capítulo tem-se um posicionamento do tema abordado na área de mecânica computacional, mais a descrição dos objetivos e a organização do texto apresentado.

No segundo capítulo, tem-se uma revisão da literatura referente aos conceitos usados nas etapas de formulação do problema a ser resolvido bem como a apresentação dos trabalhos pesquisados correspondentes à otimização estrutural e ao método de otimização investigado neste trabalho.

Os capítulos 3 e 4 apresentam a modelagem clássica por elementos finitos para os problemas de análise estrutural dinâmica e estática. A formulação inicia-se com as definições de deformação e tensão, passando ao modelo constitutivo. Em seguida tem-se as equações de equilíbrio em termos de tensão, que resultam nas equações diferenciais parciais. Finalmente, aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados do tipo Galerkin, chega-se à forma matricial do Método dos Elementos Finitos considerando-se o elemento usado no trabalho.

No capítulo 5, apresenta-se o método de otimização estrutural investigado neste trabalho. Tem-se a teoria referente a cada critério de projeto estudado, bem como a descrição das etapas realizadas nos respectivos procedimentos de otimização estrutural.

O capítulo 6 apresenta uma introdução à Linguagem Orientada a Objetos mostrando os principais conceitos, além das fases que envolvem o desenvolvimento de uma programa feito com este tipo de estruturação. Estas descrições são exemplificadas com o próprio programa desenvolvido neste trabalho que compõe um módulo de otimização estrutural evolucionária dentro de um programa de elementos finitos já existente.

No capítulo 7 tem-se a investigação do Método de Otimização Evolucionária iniciando com os primeiros testes realizados no software ANSYS, e em seguida apresentando e discutindo os resultados encontrados com o módulo de otimização para os três critérios de projeto

investigados.

Finalmente, apresenta-se no capítulo 8 as principais conclusões do trabalho em relação ao método de otimização estrutural evolucionária, bem como a colocação das sugestões para os trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão de Literatura

2.1 Introdução

Este capítulo resume o estudo bibliográfico realizado sobre os assuntos presentes neste trabalho que são: mecânica dos sólidos, análise estrutural por elementos finitos, otimização estrutural e otimização estrutural evolucionária.

As referências são colocadas de acordo com as etapas realizadas na formulação de um problema físico de análise estrutural estática e dinâmica pelo método dos elementos finitos. Em seguida são apresentadas algumas referências relativas aos trabalhos publicados que tratam de otimização estrutural e particularmente discute-se as principais contribuições sobre o método de otimização estrutural evolucionária.

2.2 Análise Estrutural e Método dos Elementos Finitos

A investigação sobre a modelagem de meios sólidos, iniciou-se com Galileu na primeira metade do século XVII, que investigou o comportamento de alguns membros submetidos a carregamentos de tração e compressão. Em seguida destacaram-se os pesquisadores franceses como Coulomb, Poisson, Navier, St. Venan e Cauchy, que trabalhando no final do século XIX deixaram um grande conhecimento na área de mecânica dos sólidos (Popov, 1992).

A mecânica dos sólidos tem o objetivo de modelar fisicamente o comportamento dos corpos sujeitos a esforços, através da atribuição de grandezas físicas como tensões e deformações, que caracterizam este comportamento. Tais grandezas apresentam as informações suficientes para o correto dimensionamento de componentes.

Em (Popov, 1992), tem-se as definições básicas para a determinação do modelo constitutivo que irá definir o comportamento do material quando sujeito a esforços mecânicos. Define-se as deformações lineares e angulares por meio de suas componentes, que são equacionadas com base no campo de deslocamentos nas três direções do espaço, sendo em seguida

organizadas num tensor. As tensões são definidas como forças internas atuantes em áreas infinitesimais que entram em equilíbrio com as forças externas, podendo ser normais ou de cisalhamento, e são também representadas por um tensor de tensões.

Com as tensões e deformações devidamente definidas, a próxima etapa é a determinação do modelo constitutivo do material, que fará o relacionamento entre o estado de tensão e o estado de deformação, juntamente com as características do material como o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

Partindo das hipóteses a respeito do material como: comportamento elástico, homogeneidade e isotropia, (Timoshenko and Goodier, 1970), define-se o estado plano de deformação e o estado plano de tensão, que é uma das hipóteses deste trabalho, estabelecendo-se assim, o modelo constitutivo.

Em seguida, aplicam-se as condições de equilíbrio entre as forças atuantes e as deformações causadas ao corpo resultando nas equações de equilíbrio. Em (Cook et al., 1989) tem-se a dedução das equações diferenciais de equilíbrio em termos de tensão para as direções x e y . Este sistema de equações diferenciais parciais mais as condições de contorno representam o modelo matemático do problema físico de análise estrutural.

Uma vez que muitos problemas práticos de análise estrutural possuem resolução analítica impossível ou no mínimo, muito difícil, pode-se lançar mão de métodos que discretizando o meio contínuo, possibilitam a solução de uma forma numérica aproximada, como é o caso do método dos elementos finitos (MEF)(Dhatt et al., 1985).

O Método dos Elementos Finitos é um método baseado na discretização do domínio e do contorno do problema. A sua formulação pode ser feita usando-se os Métodos Residuais, sendo que neste trabalho, é usado o Método de Galerkin (Dhatt et al., 1985).

Em resumo, pode-se esquematizar as etapas para a formulação de um problema físico de análise estrutural pelo método dos elementos finitos conforme a figura 2.1:

2.3 Otimização Estrutural Evolucionária

O projeto estrutural consiste na determinação de estruturas que atendam à especificações pré-estabelecidas. A engenharia está sempre empenhada em buscar as melhores soluções de concepção, o que geralmente resulta na proposição de várias opções estruturais.

Em (Arora, 1989) e (Herskovits, 1995), tem-se uma explanação a respeito dos processos de projeto de estruturas, que sempre foram baseados em tentativas e erros, onde a experiência e habilidade dos projetistas eram determinantes na procura da melhor solução.

Entretanto, com a forte competição tecnológica que exige redução de tempos de desenvolvimento e custos, e ao mesmo tempo atendendo a requisitos de qualidade e funcionalidade, se faz necessário a utilização de métodos de otimização estrutural.

Otimização Estrutural é uma metodologia de projeto com o objetivo de se determinar estruturas com máxima performance, que na maioria das vezes significam estruturas de mínimo

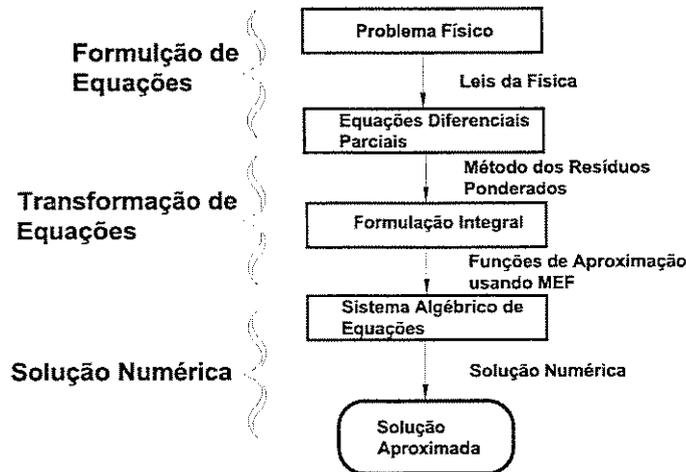


Figura 2.1: Etapas para a formulação e resolução pelo MEF de um problema físico

peso e com máxima resistência mecânica ou rigidez.

Em (Sienz and Hinton, 1997) e (Herskovits, 1995) tem-se a definição dos tipos de otimização estrutural como segue:

- Otimização de Topologia ou Layout: é a redistribuição de material na estrutura tornando-a mais adequada aos requisitos de carregamento;
- Otimização de Forma: é a determinação do contorno que compreenderá o componente em questão, ou seja, a obtenção de variáveis relacionadas à geometria do mesmo conforme os critérios de projeto.
- Otimização de Parâmetros ou Dimensional: é o cálculo das dimensões de componentes como área da seção transversal dos elementos de uma treliça, ou espessuras de chapas em flambagem objetivando um dimensionamento ótimo.

Os princípios básicos da teoria de otimização de layout foram desenvolvidos há quase cem anos atrás por um australiano chamado Michell (Herskovits, 1995), que aplicou critérios de otimização para uma rede de membros estruturais totalmente conectados entre si, e que mais tarde foi usado por pesquisadores como: Cox (1958), Dorn (1964), Prager (1974) e Rosvany(1981). Um importante aspecto deste método é que a variação da seção transversal dos membros estruturais satisfaz critérios de otimização baseados em valores de deformação.

Existem vários métodos de otimização estrutural e extensas pesquisas têm sido feitas no sentido de integrar a otimização topológica e de forma como em (Sienz and Hinton, 1997). Já em (Riche and Cailletaud, 1998) tem-se a união de métodos heurísticos e evolucionários

de otimização. Sienz and Hinton (1997), Riche and Cailletaud (1998), Herskovits (1995), Olhoff et al. (1991), Zhou and Rosvany (1991) e Min et al. (2000), destacam alguns métodos de otimização de topologia e forma.

Entre os métodos de otimização de topologia tem-se:

- Método de Bolha: cuja idéia básica é o posicionamento iterativo de novos vazios ou bolhas na estrutura em posições ótimas, resultando numa estrutura com distribuição de material cuja aparência é contínua mas apresentando furos (Sienz and Hinton, 1997);

- Método de Matar Forte/Fraco: é uma técnica que procura uma estrutura, por exemplo, uniformemente tensionada, para isso divide-se a mesma em uma malha fina de elementos finitos, e faz-se uma análise estrutural caracterizando cada elemento com alguma medida, por exemplo energia de deformação ou tensão principal. Conforme esta medida, varia-se o módulo de elasticidade do elemento. No caso da opção matar fraco tem-se uma variação de forma suave, isto é, varia-se o módulo de elasticidade do elemento em passos pequenos. Na opção matar forte, cada elemento é simplesmente eliminado do modelo anulando-se o seu módulo de elasticidade. O procedimento de alterar o módulo de elasticidade é repetido iterativamente até que uma solução ótima seja encontrada (Sienz and Hinton, 1997).

- Método de Homogeneização: foi primeiramente utilizado em otimização de topologia e forma por Bendsøe e Kikuchi, e consiste na definição de um material com infinitos micro vazios e na variação desta porosidade segundo um critério de otimização. A otimização promove o controle das dimensões dos vazios e de suas orientações, o que determina uma nova distribuição de material proporcionando a obtenção de estruturas mais rígidas, com nova topologia e menos material (Guedes, 1990).

- Método para estruturas reticuladas é normalmente usado para estruturas treliçadas partindo-se de um conjunto de pontos de união, onde todos os pontos são unidos entre si por membros estruturais. Em seguida, conforme o critério de otimização, os membros redundantes são eliminados e os que permanecem são redimensionados resultando numa estrutura com dimensões e topologia otimizada (Herskovits, 1995) .

- Método da Densidade: é um método de otimização topológica onde a redistribuição de material é feita em função de sua densidade nos elementos. Ao contrário do método de homogeneização que reavalia as propriedades nas células do domínio, este enfoque assume uma relação entre a densidade e a propriedade nestas células sem considerar sua microestrutura. Assim sendo, tem-se uma função empírica, chamada de função de densidade, que determina valores para o módulo de elasticidade dos elementos proporcionais à densidade do material nos mesmos (Gea, 1996).

Entre os métodos de otimização de forma tem-se:

- Método da Variação do Contorno: é um método convencional em que o contorno da estrutura é representado por curvas específicas, que geralmente são paramétricas do tipo splines, e os pontos que definem estas curvas são as variáveis de projeto. Após uma análise estrutural pelo MEF, avalia-se o efeito de pequenas mudanças nas variáveis de projeto objetivando quantificar a influência destas mudanças no peso da estrutura, distribuição de tensões

ou deslocamentos. Estas sensibilidades das características estruturais em relação às variações dos pontos do contorno são, então, usadas em técnicas iterativas de programação matemática para a procura de uma melhor forma (Sienz and Hinton, 1997).

- Método do Crescimento Adaptativo: tem o objetivo de copiar o crescimento que ocorre na natureza, principalmente em árvores, pela geração de um estado de tensão homogêneo na estrutura com respeito aos carregamentos impostos. Qualquer local com estado de tensão alterado, como por exemplo concentração de tensão, modifica o processo de crescimento. Para isso, analisa-se a estrutura de forma convencional, e nos locais de tensão alterada, define-se uma fina camada de material com cargas térmicas proporcionais às tensões efetivas. Em seguida, baseado no efeito de expansão térmica desta camada, promove-se nestes locais mudanças na forma da estrutura, o que reduz a concentração de tensão. Este processo é repetido de forma iterativa determinando-se assim uma forma ótima em relação ao estado de tensão homogêneo (Sienz and Hinton, 1997).

- Método do Crescimento Biológico Generalizado: pode ser caracterizado como um procedimento heurístico para a otimização de forma de componentes mecânicos derivado do método do crescimento biológico. O método consiste em se acrescentar material onde os níveis de tensão estão superiores a um limite estabelecido, bem como promover a retirada de material de locais com baixos níveis de tensão. Este processo é feito de forma iterativa até a obtenção de uma estrutura homogênea em termos de tensão (Sienz and Hinton, 1997).

Em adição aos métodos apresentados, Xie and Steven (1997) propuseram o método de otimização estrutural evolucionário (OEE).

Este é baseado no simples conceito de remoção lenta de material subutilizado, resultando numa forma e topologia estrutural melhor adaptada à suas funções. Em (Xie and Steven, 1997) tem-se as várias aplicações da OEE incluindo problemas estáticos, dinâmicos, de flambagem, concentração de tensão, que podem ser encontrados nos trabalhos citados a seguir.

O artigo de Xie and Steven (1993) foi o primeiro encontrado sobre o método de otimização estrutural evolucionária, onde se apresenta o método e destaca-se a possibilidade de otimização de forma e topologia simultâneas. Mostra-se a origem do método, o algoritmo de otimização para o critério em tensão local, e as possibilidades de como retirar os elementos da estrutura.

Em 1996 os autores Xie and Steven (1996) aplicam o método evolucionário de otimização para o critério de projeto baseado nas frequências naturais de vibração da estrutura. O material é retirado da estrutura após o cálculo de um número de sensibilidade α , proporcionando as seguintes possibilidades de ajuste para as frequências naturais: aumentar ou diminuir o valor de uma ou mais frequências, manter valor de uma frequência o menos alterado possível, e aumentar a diferença entre o valor de duas frequências.

Chu et al. (1996) propõe a otimização estrutural evolucionária com o objetivo de minimizar o peso satisfazendo-se condições pré-estabelecidas de rigidez. A otimização é de forma e topologia com imposição de limites de rigidez ou de deslocamento em um ou mais locais da estrutura, ou ainda, limitar a diferença de deslocamento entre dois pontos da estrutura. Um número de sensibilidade é calculado baseado na energia de deformação de cada elemento,

e baseado neste parâmetro, um número de elementos é eliminado da estrutura de forma iterativa.

Zhao et al. (1997a) avaliam o efeito de se restringir certas regiões do domínio durante a otimização estrutural evolucionária em frequência. O modelo, por ter massas concentradas, determina a necessidade de se acrescentar novos critérios ao parâmetro α como: o critério de eficiência que indica o fator de contribuição do elemento para aumentar o valor de uma determinada frequência; o critério de integridade estrutural entre os locais de massa concentrada e os locais de vínculos; o critério de variação suave que avalia intensidade na variação da frequência em questão para um dado número de elementos retirados; o critério do valor médio, que previne o cruzamento de modos de vibração ao longo do processo evolucionário; e o critério do número mínimo de elementos removidos, que garante a simetria da estrutura ao longo do processo de evolução.

Zhao et al. (1997b) fazem a otimização estrutural evolucionária maximizando a diferença entre duas frequências naturais de uma estrutura. A hipótese considerada no modelo é o estado plano de tensão. O número de sensibilidade neste caso, envolve o parâmetro α e mais o critério da estrutura positiva definida, critério de variação suave e o critério do mínimo número de elementos removidos.

Zhao et al. (1998b) fazem a otimização estrutural evolucionária com critério de projeto em vibração. A hipótese é o estado plano de tensão, e o processo de otimização é aplicado em uma membrana com a análise focada nas duas primeiras frequências naturais. A dedução do número de sensibilidade α , que avalia a contribuição individual dos elementos no comportamento da estrutura em função do critério de otimização é diferente da apresentada em 1996, mas a equação resultante é a mesma. Destaca-se ainda o cálculo do número de elementos a ser retirado em cada iteração a fim de manter a simetria da estrutura resultante.

Zhao et al. (1998a) fazem uma análise e a generalização do método de otimização evolucionário para condição de carregamento estático. Eles destacam as deficiências da otimização estrutural evolucionária apresentada em (Xie and Steven, 1993) que são: razão de rejeição e a razão de evolução baseado nos níveis de tensão locais, e a falta de um critério de avaliação da estrutura encontrada. Um critério de rejeição de elementos baseado na energia de deformação é deduzido, e um novo método de avaliar a eficiência do material na estrutura é apresentado. Esta versão do método foi implementada neste trabalho.

Manickarajah et al. (1998) introduzem um método de otimização evolucionário para maximizar a resistência de placas à flambagem. A otimização inicia-se em uma placa com espessura uniforme determinando uma redistribuição da espessura em toda a placa através de uma variação positiva ou negativa da espessura dos elementos, mas mantendo o volume total constante. Para isso, dois números de sensibilidade α_+ e α_- são calculados para cada elemento. O α_+ avalia aqueles elementos que com um incremento de espessura exercem uma maior influência em aumentar a carga crítica de flambagem. O α_- avalia aqueles elementos que com um decremento de espessura exercem uma menor influência em diminuir a carga crítica de flambagem. Assim sendo, o processo evolucionário determina um aumento

de espessura dos elementos com os maiores α_+ , e diminui a espessura dos elementos com os maiores α_- . Este artigo também mostra uma equação para o cálculo dos parâmetros α para evitar o cruzamento dos modos de flambagem. E finalmente, é feita uma comparação entre os resultados obtidos através da otimização evolucionária, e aqueles encontrados por outros autores a respeito do mesmo problema de otimização.

Liang et al. (2000) propõem neste trabalho uma maneira de monitorar a eficiência estrutural das configurações encontradas ao longo do processo evolucionário de otimização estrutural, que tem como critério de projeto a rigidez, e com isso determinar o momento de encerrar o processo evolucionário. Um índice de performance estrutural é introduzido para a avaliação da eficiência estrutural da nova topologia encontrada a cada iteração. Quando este parâmetro atinge o valor máximo tem-se o término do processo evolucionário.

Manickarajah et al. (2000) fazem, de certa forma, a integração da otimização estrutural evolucionária já testada em outros trabalhos como Manickarajah et al. (1998), criando um método multiobjetivo para o caso de treliças. Os critérios de projeto considerados são rigidez, a tensão e a estabilidade à flambagem, de modo que a área da seção transversal dos componentes é redimensionada para atender a todos os critérios citados. Assim sendo, calcula-se números de sensibilidade dos elementos com relação a cada critério de projeto e através um valor médio entre eles, é calculado um novo número de sensibilidade que irá orientar o aumento ou a redução da seção transversal dos elementos.

Capítulo 3

Modelo Mecânico e Leis Constitutivas

3.1 Introdução

Neste capítulo é apresentado o modelo mecânico com as equações e leis constitutivas que regem a teoria da elasticidade. Restringe-se ao caso bidimensional de estado plano de tensão, e as equações resultantes são transformadas usando-se o Método dos Resíduos Ponderados.

Na construção do modelo mecânico são necessárias três etapas básicas: o Modelo Cinemático, as Relações Constitutivas e as Equações de Equilíbrio.

Estas etapas podem ser estabelecidas a partir de observações experimentais dos fenômenos físicos da natureza. A figura 3.1 mostra um ciclo, que em geral é percorrido para a criação do modelo mecânico.

A partir das observações da natureza, hipóteses dentro de certos limites de validade a respeito do comportamento dos corpos são estabelecidas, podendo ser traduzidas por expressões matemáticas que farão a composição do modelo mecânico.

A modelagem é baseada nas hipóteses de material linear, elástico, homogêneo e isotrópico. As deformações são consideradas pequenas, as forças de inércia são significativas e não há perdas.

3.2 Definição de Deformação

A análise de deformações de um corpo sólido se faz fundamental para modelagem mecânica de sistemas. Estas, por sua vez, são definidas em modelos infinitesimais através de deslocamentos e constituem o modelo cinemático do problema.

Um corpo sólido se deforma quando sujeito a mudanças de temperatura ou a cargas externas. Tem-se dois tipos de deformação: a deformação longitudinal e a deformação de cisalhamento, que serão descritas matematicamente com o auxílio de um sistema de coordenadas cartesianas e um elemento infinitesimal, pois as deformações variam de ponto para

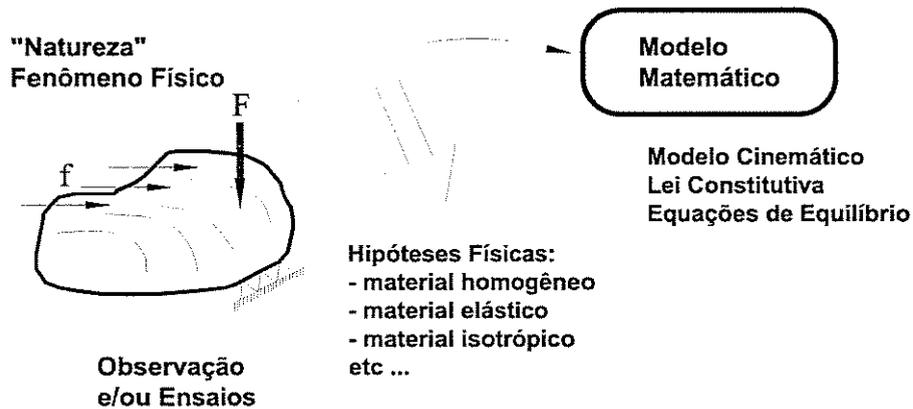


Figura 3.1: Etapas do procedimento de modelagem

ponto, (Popov, 1992) .

A deformação linear, longitudinal ou alongamento ocorre em uma só direção como mostra a figura 3.2-a. Os pontos A e B movem-se para as posições A' e B' , sendo que o ponto A sofre um deslocamento u . O deslocamento do ponto B é $u + \Delta u$ porque, além de u , comum a todo elemento Δx , ocorre uma distensão Δu no elemento. Assim sendo, a definição de deformação linear é:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad (3.1)$$

Generalizando para todas as direções e considerando que em um ponto do corpo, u , v e w são as três componentes de deslocamentos correspondentes às direções x , y e z respectivamente, pode-se expressar as definições básicas de deformação longitudinal como sendo:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.2)$$

O segundo tipo de deformação é a de cisalhamento, ou deformação angular (transversal), que ocorre através da inclinação dos lados do elemento deformado em relação aos eixos x e y , como mostrado na figura 3.2-b. Observa-se que v é o deslocamento na direção y , e $\frac{\partial v}{\partial x}$ é a inclinação do lado CD do elemento infinitesimal que estava inicialmente horizontal.

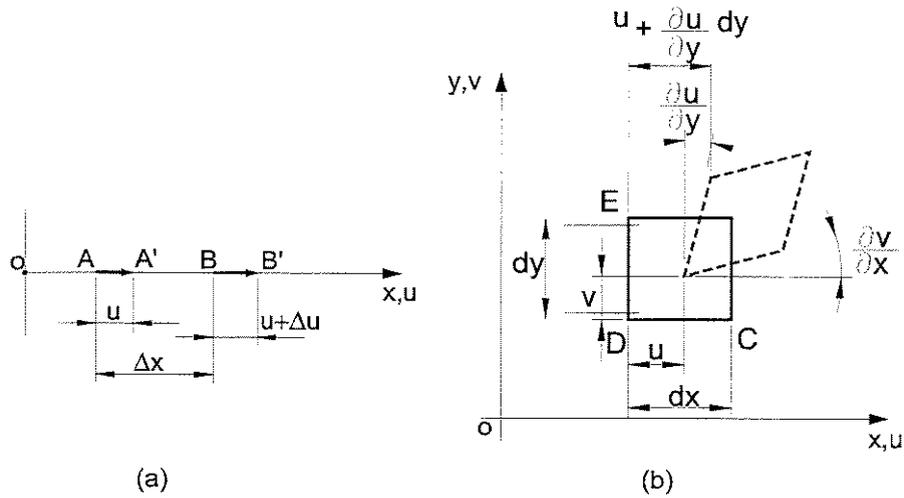


Figura 3.2: Elementos Infinitesimais na posição inicial e final, (a) deformação longitudinal, (b) deformação angular

Analogamente, o lado vertical \overline{DE} gira de um ângulo $\frac{\partial u}{\partial y}$. Como consequência, o ângulo \widehat{CDE} inicialmente reto, reduz-se de $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$. Assim, para pequenas mudanças de ângulo, a definição de deformação angular no plano xy é:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.3)$$

As definições de deformações angulares para os planos xz e yz são:

$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.4)$$

Uma vez definidas as deformações longitudinais e angulares que ocorrem nas três direções x , y e z , tem-se que as componentes de deformações podem ser organizadas em forma uma matriz, como mostrado na equação (3.5), que representa um tensor de segunda ordem.

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Para o caso bidimensional, as deformações podem ser agrupadas em um vetor mostrado na equação (3.6).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

A relação entre deformação e deslocamento caracteriza o modelo cinemático do problema, sendo que neste caso foram usados apenas os termos de primeira ordem, ou lineares, para a definição das deformações.

3.3 Tensão

Considerando um corpo ou uma pequena parte de um corpo sujeita a ação de forças externas, e imaginando este corpo seccionado em duas partes, tem-se que as forças internas, que atuam no plano de corte se equilibram com as forças externas (Popov, 1992).

As forças internas que atuam em áreas infinitesimais do plano de corte são de natureza vetorial. Em geral, estas forças variam de ponto para ponto e são inclinadas em relação ao plano de corte, sendo comum a decomposição destas forças em componentes paralelas e perpendiculares à seção investigada. A figura 3.3 mostra, por exemplo, as componentes de uma força interna ΔP paralelas ΔP_t e perpendiculares ΔP_n à seção investigada, e que agem na área infinitesimal ΔA .

Se além do plano de corte indicado no corpo da figura 3.3, fosse feito um outro corte paralelo ao primeiro formar-se-ia uma fatia. E continuando, se dois outros pares de planos fossem passados normalmente ao primeiro par, seria isolado do corpo um cubo de dimensões infinitesimais.

A figura 3.4 mostra o cubo infinitesimal onde são indicadas as componentes das tensões internas atuantes em cada face do mesmo.

Fazendo-se um corte arbitrário e aplicando as leis de equilíbrio, pode-se determinar uma relação entre as forças de superfície e as tensões.

E novamente, pode-se ordenar estas tensões como mostrado na equação (3.7), tendo-se assim uma matriz que representa o tensor de tensões, apresentando-se como um tensor simétrico em decorrência do equilíbrio de momentos presente no elemento infinitesimal.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Tal característica pode ser comprovada observando-se a figura 3.4 b e fazendo uma somatória de momento em relação ao eixo z . Assim:

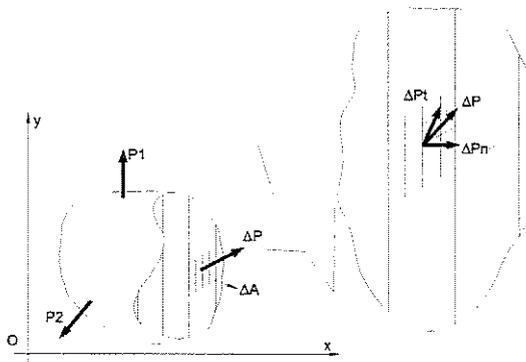


Figura 3.3: Corpo em corte com forças internas atuantes

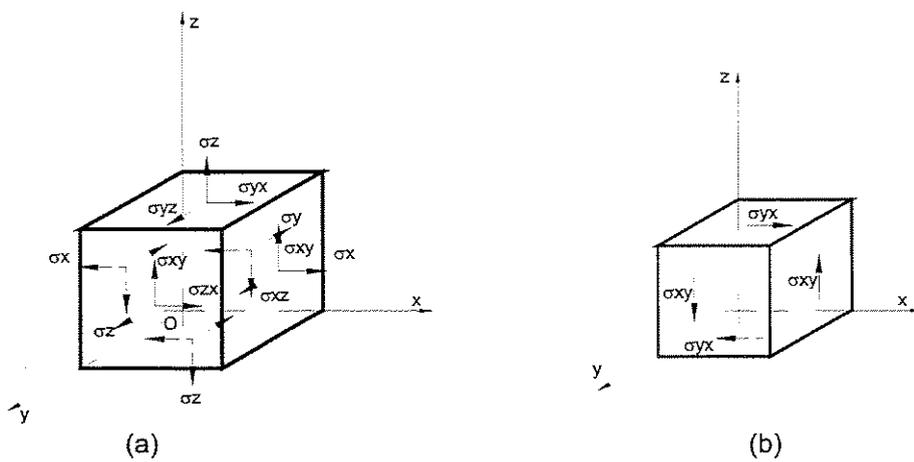


Figura 3.4: (a) Estado de tensão geral sobre um elemento (b) Elemento de um corpo em cisalhamento puro

$$\begin{aligned} \sum Mz &= 0 \\ +\sigma_{yx}(dxdz)(dy) - \sigma_{xy}(dydz)(dx) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Uma vez que no cubo infinitesimal $dx = dy = dz$ tem-se para a equação (3.8) $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$, o que corresponde a uma das condições de simetria.

3.4 Relações Constitutivas para o Estado Plano de Tensão

Antes de definir o modelo constitutivo, é importante estabelecer algumas considerações a respeito do comportamento do material através das seguintes hipóteses:

1. Comportamento Elástico: existe uma relação linear entre a tensão e a deformação.
2. Meio Homogêneo: estrutura e composição química do material mantém-se igual em todas as regiões do corpo.
3. Material Isotrópico: possui as mesmas propriedades mecânicas em qualquer direção.

Quando forças externas são aplicadas de forma uniforme ao longo da espessura de uma chapa e paralelas ao seu plano tem-se o Estado Plano de Tensão, como mostra a figura 3.5-a (Timoshenko and Goodier, 1970) . Neste caso, as componentes de tensão σ_{zz} , σ_{yz} e σ_{zx} são nulas em ambas as faces da peça, de modo que o estado de tensão é representado somente por σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xy} .

A relação entre o estado de tensão e o estado de deformações de um corpo, quando está sujeito a carregamentos externos, é denominada lei ou relação constitutiva, e é determinada de forma empírica em ensaios mecânicos. Para os materiais reais, à certa distância da origem, os valores experimentais que relacionam tensão e deformação estão sobre uma linha reta, sendo que esta idealização e generalização formam a base da Lei de Hooke, valendo apenas até o limite de proporcionalidade do material (Popov, 1992) .

Considerando a definição matemática das deformações na equação (3.5), tem-se a seguinte lei constitutiva para o caso de Estado Plano de Tensão:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

onde E é o módulo de Young e ν é o coeficiente de Poisson.

Uma vez que $\varepsilon_{zz} = \frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})$, tem-se que a deformação ε_{zz} é linearmente dependente das deformações ε_{xx} e ε_{yy} . Assim sendo, conclui-se que o estado Plano de Tensão não implica em um Estado Plano de Deformação, que é descrito a seguir.

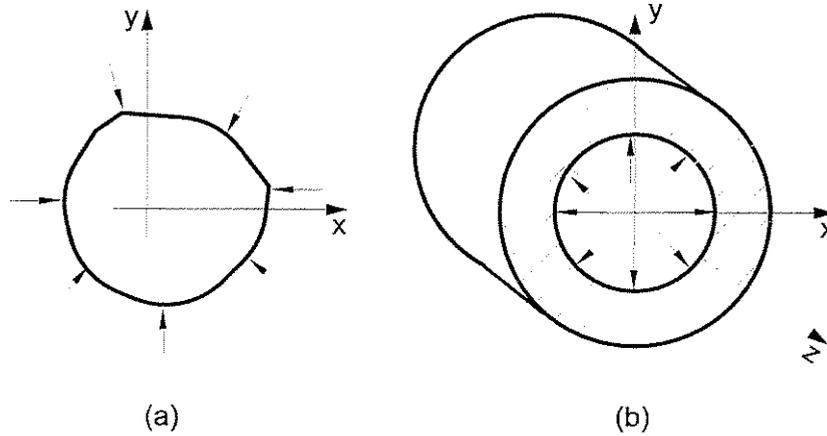


Figura 3.5: (a) Estado Plano de Tensão, (b) Estado Plano de Deformação

Quando o estado de deformação de um corpo é tal que não há deslocamentos na direção z , fora do plano xy , ele é chamado de Estado Plano de Deformação, sendo típico em corpos que possuem a dimensão z muito grande. Tal fato implica em $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, e pode ser exemplificado pela seção transversal de um tubo com pressão interna uniforme, como mostra a figura 3.5-b.

As tensões no plano xy para o Estado Plano de Deformação são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Eventualmente σ_{zz} não é nulo e pode ser definida da relação $\varepsilon_{zz} = 0 = \frac{(\sigma_{zz} - \nu\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx})}{E}$, uma vez conhecido o valor de σ_{xx} e σ_{yy} .

3.5 Equações de Equilíbrio em Termos de Tensão

Para um corpo sob a ação de forças externas pode-se escrever as equações de equilíbrio de forças em termos de tensões, que no caso bidimensional, são definidas como força por unidade de comprimento.

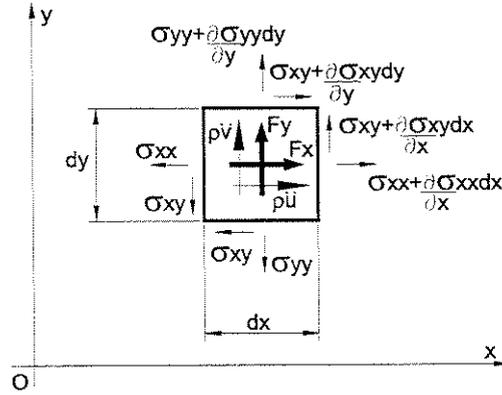


Figura 3.6: Elemento Infinitesimal sob ação de Tensões e Forças de Campo

Observando a figura 3.6, tem-se a representação de um elemento bidimensional ($dx dy$) infinitesimal com todas as tensões no plano e suas variações ao longo do elemento, ou seja, existe a possibilidade de um incremento de tensões de uma face para a outra do elemento (Cook et al., 1989).

As forças inerciais ou de campo, como por exemplo o peso, são designadas por F_x e F_y . Aplicando a segunda lei de Newton, tem-se que a resultante das forças nas direções x e y se iguala ao produto da aceleração nas mesmas direções, \ddot{u}_x e \ddot{u}_y respectivamente, pela massa infinitesimal do elemento.

Desta forma, para o equilíbrio de forças na direção x , $\sum F_x = 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx} dx dz}{\partial x} \right) (dy dz) - \sigma_{xx} (dy dz) + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy} dy}{\partial y} \right) (dx dz) + \\ & + \sigma_{xy} (dx dz) + F_x (dx dy dz) = \rho \cdot \ddot{u}_x dx dy dz \end{aligned} \quad (3.11)$$

Simplificando e aplicando a propriedade de simetria do tensor de tensões, $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, obtém-se a equação básica de equilíbrio na direção x .

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = \rho \cdot \ddot{u}_x \quad (3.12)$$

E de forma análoga, obtém-se a mesma equação na direção y para um domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = \rho \cdot \ddot{u}_y \quad (3.13)$$

3.6 Condições de Contorno

Para o problema de equilíbrio, mostrado na figura 3.7, destacam-se as condições de contorno ϕ_x e ϕ_y que são forças de superfície. Estas forças estão aplicadas no contorno (ao contrário das forças de corpo que agem através do volume) e são chamadas de Condições de Contorno Naturais (Chen and Saleeb, 1982).

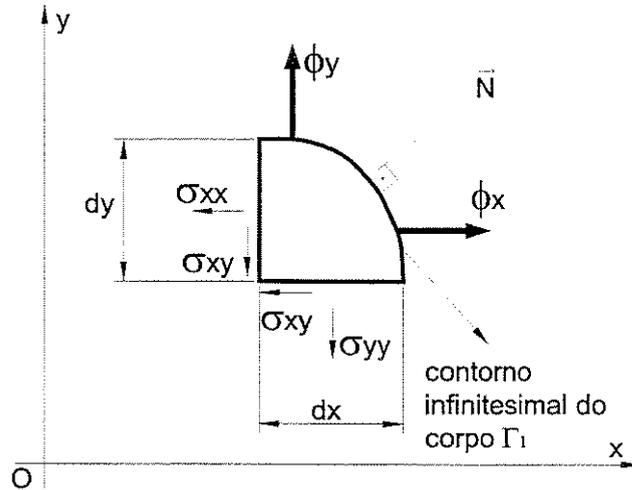


Figura 3.7: Forças de Superfície ϕ_x e ϕ_y atuantes em uma parte arbitrária do corpo

O equilíbrio entre as forças (externas) é dado igualando-se as forças resultantes nas direções x e y , como na equação (3.14). Nesta equação, ds representa a região infinitesimal onde as forças de superfície atuam.

$$\begin{cases} \phi_x ds = \sigma_{xx} dy + \sigma_{xy} dx \\ \phi_y ds = \sigma_{xy} dy + \sigma_{yy} dx \end{cases} \quad (3.14)$$

E dividindo as duas equações por ds tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= \sigma_{xx} \frac{dy}{ds} + \sigma_{xy} \frac{dx}{ds} \\ \phi_y &= \sigma_{xy} \frac{dy}{ds} + \sigma_{yy} \frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_1 \quad (3.15)$$

ou ainda:

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y \\ \phi_y &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_1 \quad (3.16)$$

As grandezas $n_x = \frac{dy}{ds}$ e $n_y = \frac{dx}{ds}$ representam os cossenos diretores entre as direções x e y e a *Normal* \vec{N} em relação à superfície em que atuam as forças ϕ_x e ϕ_y (Cook et al., 1989) .

Existem também as Condições de Contorno Essenciais que podem ser representadas por deslocamentos impostos no contorno, como na equação (3.17), onde \hat{u} e \hat{v} são os deslocamentos nas direções x e y respectivamente (Chen and Saleeb, 1982). Nas seções seguintes, estes dois tipos de condição de contorno serão melhor definidas.

$$\left. \begin{aligned} u &= \hat{u} \\ v &= \hat{v} \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_2 \quad (3.17)$$

3.7 Resumo das Equações de Equilíbrio

Pode-se representar as equações (3.12), (3.13) e (3.14) em termos de deslocamentos u e v substituindo-se (3.6) na equação (3.9) e os resultados em (3.12), (3.13) e (3.14). Assim sendo, determina-se um sistema de equações diferenciais parciais que caracteriza um problema de

valor de contorno como mostrado na equação (3.18):

$$MM = \left\{ \begin{array}{l} \text{Achar } u \text{ e } v, \text{ tal que:} \\ \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \\ -F_x = \rho \ddot{u}_x \\ \\ \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \\ -F_y = \rho \ddot{u}_y \end{array} \right\} \text{ em } \Omega \in \mathbb{R}^2 \\ \\ \left. \begin{array}{l} \text{Sujeito a:} \\ \\ \left(\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y = \phi_x \\ \\ \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} n_y = \phi_y \end{array} \right\} \text{ em } \Gamma_1 \\ \\ u = \hat{u} \text{ e } v = \hat{v} \text{ em } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

O sistema descrito pela equação (3.18) representa o modelo matemático MM do problema de elasticidade bidimensional e será resolvido usando-se o Método dos Resíduos Ponderados.

3.8 Método dos Resíduos Ponderados aplicado em Elasticidade Bidimensional

Nesta seção tem-se a aplicação do Método dos Resíduos Ponderados (MRP) para o problema de valor de contorno em Elasticidade Bidimensional. O MRP transforma problemas com formulação diferencial em sistemas de equações algébricas após a discretização do contínuo (Dhatt et al., 1985).

Assim sendo, considerando a primeira equação no domínio na direção x que já foi mostrada na equação (3.18), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - F_x = \rho \ddot{u}_x \quad (3.19)$$

Aplicando o MRP para o problema de valor de contorno em termos de deslocamentos tem-se:

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}\psi(x,y)dxdy + \int_{\Omega} F_x \psi(x,y)dxdy = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_x \psi(x,y)dxdy \quad (3.20)$$

onde Ω representa o domínio, e $\psi(x,y)$ representa as funções de ponderação.

Reescrevendo a equação (3.20) com seu lado esquerdo separado em 4 termos tem-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E}{1-\nu^2}\right) \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \psi(x,y)dxdy}_I + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2}\right) \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \psi(x,y)dxdy}_{II} + \\ & + \left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right) \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \psi(x,y)dxdy}_{III} + \left(\frac{E}{2(1+\nu)}\right) \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \psi(x,y)dxdy}_{IV} + \\ & + \int_{\Omega} F_x \psi(x,y)dxdy = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_x \psi(x,y)dxdy \end{aligned} \quad (3.21)$$

A próxima etapa é o relaxamento da Formulação chegando-se à Forma Fraca do MRP, que tem como consequência a introdução das condições de contorno naturais na formulação (Dhatt et al., 1985).

A Forma Fraca é determinada usando-se o teorema da divergência, que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = \oint_{\Gamma} u \vec{\nabla} v \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v d\Omega \quad (3.22)$$

onde Γ representa a região do contorno.

$$\begin{cases} nx = \vec{n} \cdot \vec{i} = \cos \alpha \\ ny = \vec{n} \cdot \vec{j} = \sin \alpha \end{cases} \quad (3.23)$$

Conforme a figura 3.8, pode-se usar as componentes vetor normal \vec{N} , que estão definidas na equação (3.23), para se determinar a projeção do contorno Γ nas direções x e y .

Assim, aplicando-se o teorema da divergência mostrado na equação (3.22) nos termos I , II , III e IV da equação (3.21), e agrupando os resultados originários destes quatro termos, obtém-se para a direção x a seguinte expressão:

$$- \int_{\Omega} \left[\left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi(x,y)}{\partial y} \right] dxdy +$$

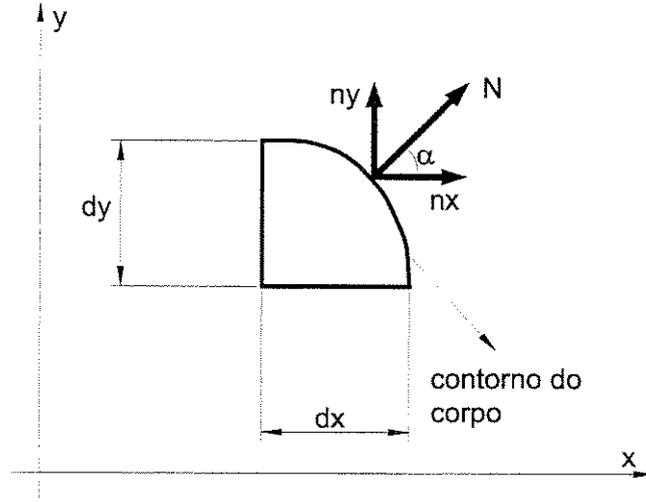


Figura 3.8: Decomposição do Contorno nas direções x e y

$$\underbrace{\oint_{\Gamma} \psi(x, y) \left[\left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y \right] d\Gamma}_{II} + \int_{\Omega} F_x \psi(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_x \psi(x, y) dx dy \quad (3.24)$$

Analogamente para a expressão em F_y da equação (3.18), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
 & \left. + \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + F_y = \rho \ddot{u}_y \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

E após aplicar o MRP:

$$\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \psi(x, y) dx dy + \left(\frac{E}{2(1+\nu)} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \psi(x, y) dx dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \psi(x, y) dx dy + \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \psi(x, y) dx dy + \\
& + \int_{\Omega} F_y \psi(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_y \psi(x, y) dx dy
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Usando novamente a formula da divergência, (3.22), obtém-se a Forma Fraca do MRP na direção y , como se segue:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} \right] dx dy + \\
& + \underbrace{\oint_{\Gamma} \psi(x, y) \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y \right] d\Gamma}_{II} + \\
& + \int_{\Omega} F_y \psi(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_y \psi(x, y) dx dy
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Uma vez que na Forma Fraca do MRP as condições de contorno naturais estão explícitas, substitui-se, respectivamente, ϕ_x e ϕ_y da equação (3.16) nos segundos termos (II) do lado esquerdo das equações (3.24) e (3.27). Assim sendo, após o reagrupamento dos termos tem-se:

$$\left\{ \begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dx dy + \\
& \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \phi_x d\Gamma + \int_{\Omega} F_x \psi(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_x \psi(x, y) dx dy \\
& - \int_{\Omega} \left[\frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} dx dy + \\
& + \oint_{\Gamma} \psi(x, y) \phi_y d\Gamma + \int_{\Omega} F_y \psi(x, y) dx dy = \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_y \psi(x, y) dx dy
\end{aligned} \right. \tag{3.28}$$

Para a futura implementação computacional, serão introduzido operadores em forma matricial para os deslocamentos e funções de ponderação.

Logo,

$$\{Op(u)\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \tag{3.29}$$

$$\{Op(\psi)\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Agrupando os termos referentes a lei constitutiva em uma matriz têm-se:

$$D = \left[\begin{array}{ccc} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \text{simétrico} & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{array} \right] \quad (3.31)$$

Assim, a Forma Fraca do MRP para elasticidade Bidimensional na forma matricial é dada por,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Achar } u \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \{Op(\psi)\}^T [D] \{Op(u)\} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \{\psi\}^T \{F\} d\Omega + \int_{\Gamma} \{\psi\}^T \{\phi\} d\Gamma_1 - \rho \int_{\Omega} \{\psi\}^T \{\ddot{u}\} d\Omega \\ \text{Sujeito a } u = \hat{u} \text{ e } v = \hat{v}, \text{ e } \psi(x, y) = 0 \text{ em } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.32)$$

onde,

$$\{\ddot{u}\} = \left\{ \begin{array}{c} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

$$\{F\} = \left\{ \begin{array}{c} F_x \\ F_y \end{array} \right\} \quad (3.34)$$

$$\{\phi\} = \left\{ \begin{array}{c} \phi_x \\ \phi_y \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

$$\{u\} = \left\{ \begin{array}{c} u_x \\ u_y \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

As equações (3.32) representam a Forma Fraca do modelo mecânico do problema de elasticidade bidimensional, que será resolvido pelo Método dos Elementos Finitos no próximo capítulo.

Capítulo 4

Aproximação por Elementos Finitos

4.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) pode ser descrito como uma metodologia básica para a construção do modelo numérico, que irá simular o comportamento mecânico do meio contínuo. O MEF é baseado na discretização do domínio por um número finito de elementos.

Os elementos são ligados entre si através de nós que formam o domínio em estudo. Estes nós contêm quantidades desconhecidas que, para o caso da Elasticidade, são os deslocamentos. É escolhido um conjunto de funções para definir especificamente o campo de deslocamentos no domínio de cada elemento em termos dos deslocamentos nodais, e aplica-se esta aproximação nas equações da Elasticidade definidas anteriormente.

Os elementos são mapeados e têm seus deslocamentos nodais calculados em relação a um único elemento de referência denominado elemento isoparamétrico.

4.2 Aproximação Nodal

A aproximação pelo Método dos Elementos Finitos determina que o contínuo ou domínio de estudo seja representado por um número finito de elementos, como mostrado na figura 4.1. Em seguida, calculam-se as quantidades localizadas nos nós, e uma vez que eles fazem a conexão entre elementos adjacentes, tem-se a distribuição destas quantidades em todo o domínio.

As quantidades ou variáveis nodais representam quantidades físicas tais como: temperaturas, velocidades, deslocamentos etc. Sendo que estas quantidades físicas são definidas conforme o fenômeno físico a ser modelado.

A partir dos valores das variáveis nodais pode-se determinar o valor das variáveis físicas em qualquer ponto do domínio usando-se para isto, as funções de interpolação (Dhatt et al., 1985) .

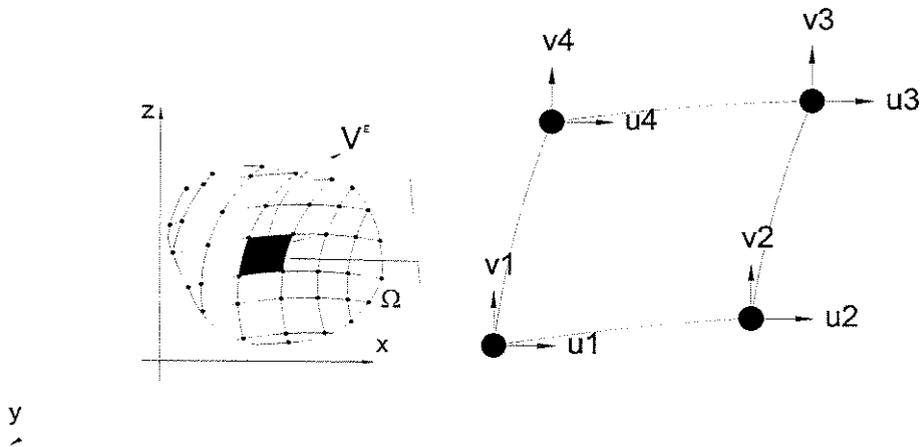


Figura 4.1: Domínio discretizado por Elementos Finitos e detalhe de um elemento com os deslocamentos nodais

Assim sendo, se u_i e v_i são os deslocamentos do nó i genérico de um elemento que forma o domínio, conforme a figura 4.1, os pontos do interior deste elemento podem ser interpolados como se segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \langle N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad \dots \quad N_n(x, y) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{Bmatrix} \\ v(x, y) = \langle N_1(x, y) \quad N_2(x, y) \quad \dots \quad N_n(x, y) \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{Bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde:

$u(x, y)$ e $v(x, y)$: são os deslocamentos de pontos no domínio do elemento,

u_i e v_i : são os deslocamentos nodais do nó i ,

$N_i(x, y)$: são as funções de interpolação,

Na forma clássica de interpolação polinomial nodal, as funções de interpolação $N_i(x, y)$ são aplicadas em cada elemento ou subdomínio e satisfazem a condição de ter valor unitário

no nó(i) e se anula nos demais nós do elemento. Assim:

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases} \quad (4.2)$$

Isto significa que os valores dos deslocamentos u e v nos nós(i) representam exatamente os valores numéricos dos deslocamentos u_i e v_i , o que caracteriza a aproximação do tipo nodal.

4.3 Elemento Isoparamétrico

Como apresentado até agora, é possível o cálculo de grandezas físicas nos nós dos elementos, e a partir destas determina-se seus valores no interior de cada elemento. Com o resultado de todos os subdomínios ou elementos tem-se de uma forma aproximada o comportamento do domínio como um todo.

Uma vez que, freqüentemente, se faz necessário o cálculo de derivadas, integrais, e funções de interpolação, será introduzido um elemento de referência V^r para a simplificação destas operações (Dhatt et al., 1985).

Este elemento permite que, baseado em coordenadas locais, sejam calculadas as grandezas de cada elemento real usando apenas um único conjunto de funções de interpolação (Dhatt et al., 1985).

Tal elemento é chamado de Elemento de Referência Isoparamétrico V^r , e é definido num espaço dimensional abstrato, conforme mostrado na figura 4.2. Neste trabalho o elemento utilizado é o elemento bilinear quadrilateral de quatro nós.

A geometria do elemento de referência V^r é então mapeada na geometria do elemento real V^e usando expressões de transformação geométrica τ^e . No caso do elemento Isoparamétrico, as funções de transformação geométrica \bar{N}_i são as mesmas que as funções de aproximação N_i . Desta forma:

- para a transformação geométrica:

$$\{x_i(\xi, \eta) \ y_i(\xi, \eta)\} = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) \ \bar{N}_2(\xi, \eta) \ \bar{N}_3(\xi, \eta) \ \bar{N}_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

- para as funções de aproximação:

$$\{u_i(\xi, \eta) \ v_i(\xi, \eta)\} = \langle N_1(\xi, \eta) \ N_2(\xi, \eta) \ N_3(\xi, \eta) \ N_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

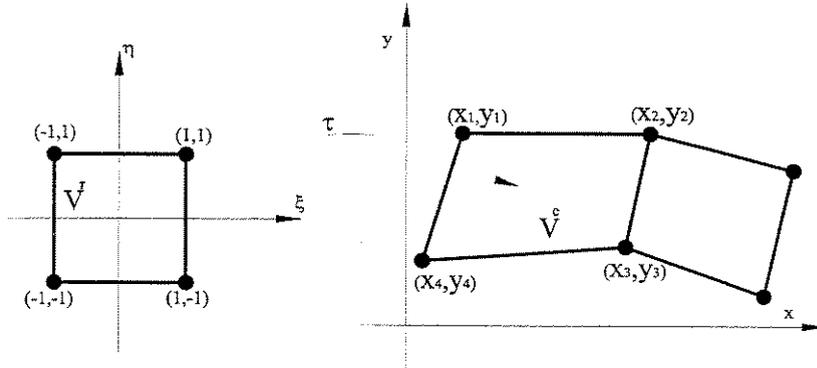


Figura 4.2: Elemento de Referência Isoparamétrico e Elemento Real

Assim sendo, têm-se as seguintes funções de forma:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \\ \bar{N}_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 1 - \xi - \eta + \xi\eta \\ 1 + \xi - \eta - \xi\eta \\ 1 + \xi + \eta + \xi\eta \\ 1 - \xi + \eta - \xi\eta \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

4.4 Transformação de Operadores Diferenciais

As equações que governam o modelo matemático que representa o problema físico são escritas no domínio, e geralmente envolvem funções conhecidas e suas derivadas. Como a aproximação no espaço de referência é mais simples, faz-se necessário o mapeamento do espaço real para o espaço de referência também em termos de derivadas (Dhatt et al., 1985)

Uma maneira de se determinar as derivadas das funções de forma no elemento de referência V^r com relação ao elemento real V^e é a aplicação da regra da cadeia como segue:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (4.6)$$

Aplicando a mesma regra em relação à variável η e colocando em forma matricial, tem-se para as variáveis ξ e η :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

de onde tem-se a definição da Matriz Jacobiana dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Para o elemento bilinear quadrilateral de quatro nós determina-se a sua Matriz Jacobiana substituindo-se a equação (4.3) na equação (4.8), e assim:

$$[J] = \begin{bmatrix} -1(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -1(1+\eta) \\ -1(1-\xi) & (1-\xi) & (1+\xi) & -1(1+\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

A matriz $[J]$ é portanto responsável em transformar as derivadas do espaço de referência para o espaço real, e a inversa desta matriz faz a mesma transformação do espaço real para o espaço de referência.

Pode-se mostrar também que uma integração genérica de uma função no espaço real quando integrada no espaço de referência é transformada da seguinte forma:

$$\int_{V^e} f(x) dx dy = \int_{V^e} f(x(\xi, \eta)) \det[J] d\xi d\eta \quad (4.10)$$

4.5 Aproximação por Elementos Finitos no MRP em Elasticidade Bidimensional

Após a apresentação do tipo de elemento finito a ser utilizado neste trabalho, a próxima etapa é a utilização deste elemento e suas funções de interpolação para se determinar a matriz de rigidez, a matriz de massa e o vetor de força nodal equivalente.

A equação considerada na implementação do elemento quadrilateral bilinear de quatro nós foi deduzida no capítulo 1 para o MRP do tipo Galerkin em Elasticidade 2D, que é novamente mostrada na equação (4.11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Achar } u \text{ tal que:} \\ \int_{\Omega} \underbrace{\{\text{Op}(\psi)\}^T [D] \{\text{Op}(u)\}}_I d\Omega = \\ = \underbrace{\int_{\Omega} \{\psi\}^T \{F\}}_{II} d\Omega + \underbrace{\oint_{\Gamma} \{\psi\}^T \{\phi\}}_{III} d\Gamma - \rho \underbrace{\int_{\Omega} \{\psi\}^T \{\ddot{u}\}}_{IV} d\Omega \end{array} \right. \text{em } \Gamma_1 \quad (4.11)$$

Sujeito a $u = \hat{u}$ e $v = \hat{v}$, e $\psi(x, y) = 0$ em Γ_2

sendo que cada termo da equação (4.11) significa respectivamente:

I : matriz de rigidez que multiplica os deslocamentos nodais,

II: vetor de forças de volume,

III: vetor de força nodal equivalente aplicada no contorno,

IV: matriz de massa que multiplica a aceleração resultante,

Para MRP do tipo Galerkin escolheu-se as funções de ponderação $\psi(x, y)$ iguais as funções de interpolação N_i , isto é, as funções de ponderação são idênticas às funções de aproximação, o que permite avaliar a equação (3.29) como se segue (Dhatt et al., 1985):

$$\{\text{Op}(\Psi(x, y))\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccccc} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\} \quad (4.12)$$

Substituindo-se a aproximação dos deslocamentos no elemento de referência da equação (4.4) na equação do operador das deformações representado na equação (3.29) tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \right\} \quad (4.13)$$

A equação (4.13) também pode ser representada de uma forma simplificada como segue:

$$\{E\} = [B]\{u\} \quad (4.14)$$

onde:

$\{E\}$: é o vetor que contém os termos de deformações,

$[B]$: é a matriz de derivadas parciais das funções de interpolação,

$\{u\}$: é o vetor de deslocamentos nodais,

A matriz $[B]$, no caso do elemento isoparamétrico, também representa a equação (4.12). Desta forma, tem-se que o termo (I) da equação (4.11) pode ser escrito para o elemento quadrilateral de referência como segue:

$$\int_{\Omega} \{Op(\psi)\}^T [D] \{Op(u)\} d\Omega = \int_{\Omega} [B(x, y)]^T [D] [B(x, y)] dx dy \{u\} \quad (4.15)$$

E substituindo cada termo de $B(x, y)$ pelo seu termo corresponde em função de (ξ, η) conforme a inversa da transformação mostrada na equação (4.7), determina-se o seguinte termo:

$$[K]\{u\} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [D] [B(\xi, \eta)] det(J) d\xi d\eta \{u\} \quad (4.16)$$

Fazendo a mesma análise para o termo (II) das forças de volume tem-se:

$$\int_{\Omega} \{\psi\}^T \{F\} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \{F\} \det(J) d\xi d\eta \quad (4.17)$$

onde:

$$\{\psi\}^T = [N]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Fazendo a mesma análise para o termo (III) das forças de superfície, que neste caso são modeladas como forças atuando no contorno, ou melhor, sobre o lado do elemento, têm-se:

$$\oint_{\Gamma} \{\psi\}^T \{\phi\} d\Gamma_1 = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \end{Bmatrix} \det(J)^{(1D)} d\eta \quad (4.20)$$

Uma vez que a equação (4.20) apresenta um integração unidimensional sobre o lado do elemento, se faz pertinente a determinação do cálculo da Matriz Jacobiana, que apresenta dimensões 1 x 1.

A Matriz Jacobiana unidimensional definida num sistema de coordenadas cartesiano pode ser expressa por:

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial x(\xi)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\xi)}{\partial \xi}\right)^2} \quad (4.21)$$

Antes de calcular a matriz de massa do elemento isoparamétrico, é importante colocar que as mesmas funções de forma que calculam os deslocamentos nodais, determinam o valor aproximado das acelerações nodais, como segue:

$$u = [N]\{u_i\} \longmapsto \frac{\partial u}{\partial t} = \{\dot{u}_i\} \longmapsto \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} = [N]\{\ddot{u}_i\} \quad (4.22)$$

E substituindo os resultados da equação (4.22) no termo (IV) da equação (4.11) para a determinação da expressão para o cálculo da matriz de massa, tem-se:

$$\int_{\Omega} \{\psi\}^T \{\ddot{u}\} d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] \det[J] d\xi d\eta \left\{ \begin{array}{c} \ddot{u}_1 \\ \ddot{v}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{v}_3 \\ \ddot{u}_4 \\ \ddot{v}_4 \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

Na prática, o cálculo para se determinar as matrizes de massa e vetores de carga do sistema é realizado utilizando-se de técnicas de integração numérica que serão mostradas no próximo ítem.

4.6 Integração Numérica de Gauss

O cálculo numérico do valor de uma integral, como a representada pela equação (4.21), chama-se quadratura. Existem muitas regras de quadratura, como por exemplo: a de Newton-Cotes, a de Simpson e a de Gauss, sendo que a última foi utilizada neste trabalho.

Um simples procedimento para aproximar uma função $\phi(\xi)$ sobre um elemento, por exemplo isoparamétrico unidimensional conforme figura 4.3-a, seria multiplicar o valor de $\phi(\xi) = \phi_1$ no meio do elemento, ou seja num ponto de amostragem $\xi = 0$, pelo comprimento total do elemento $[(\xi = 1) - (\xi = -1)]$, o que resulta em $2\phi_1$. Este resultado seria exato se $\phi = \phi(\xi)$ fosse constante e de valor ϕ_1 .

Uma forma de buscar mais precisão seria a escolha de mais pontos de amostragem e com melhor localização, de modo que uma generalização do procedimento acima, seria uma fórmula de quadratura como a equação (4.24) :

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots + w_n f(\xi_n) \quad (4.24)$$

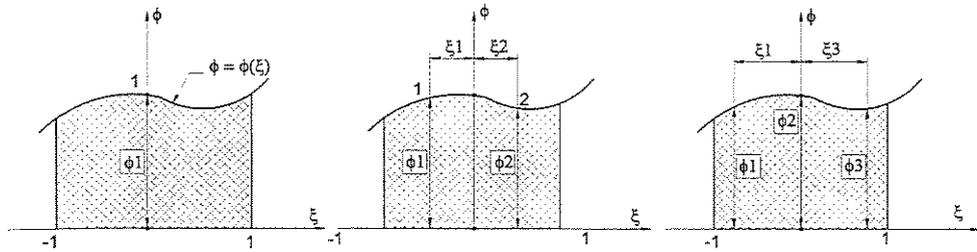


Figura 4.3: Quadratura de Gauss para o cálculo da Área sob a curva $\phi(\xi) = \phi_1$ usando (a) um, (b) dois e (c) três pontos de Gauss

Assim sendo, conforme a equação (4.24), o valor aproximado de I é encontrado fazendo-se uma somatória de cada produto da função ϕ nos pontos ξ_i , do qual se obtém $\phi_i = \phi(\xi_i)$, por uma constante W_i chamado de peso.

O procedimento descrito acima para o caso de um ponto, onde $I \cong 2\phi$ resulta em $n = 1$ e $W_i = 2$. Os pontos ξ_i são simétricos em relação ao centro do intervalo de integração, e cada par de pontos simétricos tem o mesmo peso W_i . As figuras 4.3 b e 4.3 c ilustram o cálculo da quadratura para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.

A tabela abaixo apresenta dados, chamados de coeficientes de Gauss-Legendre, e a ordem n é obtida igualando a expressão $(2n - 1)$ ao grau do polinômio ϕ a ser integrado numericamente.

<i>Número de pontos, n</i>	<i>Localção, ξ_i</i>	<i>Pesos, w_i</i>
1	0.0	2.0
2	± 0.5773502692	1.0
3	± 0.7745966692	0.5555555556
	0.0	0.8888888889
4	± 0.8611363116	0.3478548451
	± 0.3399810436	0.6521451549
5	± 0.9061798456	0.2369268851
	± 0.5384693101	0.4786286705

Quando o polinômio a ser integrado numericamente está em função de duas ou três dimensões, usa-se as regras de Gauss multidimensionais, também chamadas de regra do produto gaussiana. Para o caso de duas dimensões onde a função $\phi = \phi(\xi, \eta)$, faz-se primeiramente a integração com respeito a ξ para em seguida integrar com respeito a η conforme a equação (4.25).

$$\begin{aligned}
I &\approx \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta) d\eta d\xi \approx \int_{-1}^1 [\sum_i W_i \phi(\xi_i, \eta)] d\eta \approx \\
&\approx \sum_j W_j [\sum_i W_i \phi(\xi_i, \eta_j)] = \sum_i \sum_j W_i W_j \phi(\xi_i, \eta_j)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

E para o caso de três dimensões tem-se:

$$I \approx \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi, \eta, \zeta) d\eta d\xi d\zeta \approx \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k \phi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \tag{4.26}$$

Capítulo 5

Otimização Estrutural Evolucionária

5.1 Introdução

O projeto de sistemas em engenharia, mais precisamente de estruturas, envolve a criação de várias propostas de concepção que cumprem o mesmo propósito. Desta forma, é de grande importância a escolha precisa da melhor estrutura, ou seja, aquela que apresente a melhor performance. Neste contexto, a busca da estrutura mais eficiente possível chama-se Otimização Estrutural.

Devido à complexidade matemática, a Otimização Estrutural permaneceu, durante os últimos vinte anos, mais restrita a meios acadêmicos.

Com a disponibilidade de computadores mais capazes e de menor custo, o uso do método dos elementos finitos tornou-se viável e amplamente utilizado também em pesquisas na área de otimização, o que viabilizou diversas aplicações dos Métodos de Otimização Estrutural.

Neste capítulo será apresentado o método de Otimização Estrutural Evolucionária tendo como critérios de otimização: a máxima tensão da estrutura, a rigidez e as frequências naturais.

5.2 Otimização Estrutural Evolucionária - OEE

A OEE é um método de otimização de forma e topologia baseado no simples conceito de remoção gradativa de material ineficiente da estrutura, sendo que o material não removido tende a comportar-se como uma estrutura melhor adaptada à suas funções (Xie and Steven, 1997) .

Este método foi desenvolvido a partir da observação das estruturas da natureza como ossos, galhos de árvores e conchas, numa tentativa de se analisar como estas estruturas adquiriram suas formas ao longo do processo de evolução natural (Xie and Steven, 1993) .

Para que o material seja removido da estrutura de forma gradual e iterativa, deve-se determinar um critério de rejeição.

O critério de rejeição é uma maneira de avaliar a contribuição individual de cada elemento no comportamento geral da estrutura. Assim sendo, a partir deste parâmetro tem-se as condições de se escolher quais elementos serão removidos e quais permanecerão a cada iteração.

Muitos critérios de projeto podem ser considerados na otimização tais como: rigidez, tensão, frequência, etc. Conforme o critério de projeto, um diferente critério de rejeição é calculado para cada elemento.

A OEE proporciona um processo de otimização estrutural, onde a forma e a topologia são determinadas simultaneamente (Xie and Steven, 1997). A otimização de forma pode ser entendida como a determinação do melhor formato de um componente para uma determinada tarefa. A otimização de topologia pode ser exemplificada através da escolha da melhor localização das partes ou a redistribuição do material da estrutura.

5.3 A OEE em Tensão

Um problema freqüente em otimização estrutural é a determinação de estruturas que resistam a carregamentos específicos, e ao mesmo tempo sejam suficientemente leves apresentando uma distribuição de tensão mais uniforme.

Assim sendo, o critério escolhido para a primeira OEE é a diminuição da massa baseada em um critério de tensão máxima local.

Considerando que apenas algumas partes da estrutura estão sujeitas à tensões elevadas, tem-se a idéia de retirada das regiões que estão sendo pouco utilizadas, ou seja, aquelas em que os níveis de tensão estão bem baixos, usando-se para isso algum critério de rejeição (Xie and Steven, 1993).

O processo de otimização inicia-se a partir de um domínio de trabalho suficiente para cobrir a área final da peça. Em seguida divide-se este domínio com uma malha fina de elementos finitos, aplica-se as condições de contorno nos devidos locais e determina-se a distribuição de tensão ao longo da estrutura.

O critério de rejeição RC é usado para selecionar os elementos com os mais baixos valores de tensão em toda a estrutura. Para o caso de estado plano de tensão, bidimensional e material isotrópico, a tensão utilizada é a equivalente de von Misses, calculada no centróide do elemento, que é definida como:

$$\sigma_{EQV} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (5.1)$$

onde σ_{xx} e σ_{yy} são as componentes normais do tensor de tensões nas direções x e y , e σ_{xy} é a componente de cisalhamento.

Inicialmente, elementos com valor σ_{EQV} menor que o produto do RC pela σ_{EQV} máxima encontrada ao longo da estrutura são eliminados, sendo que RC também é chamada de razão de rejeição inicial ou RR_0 , no caso da primeira iteração.

O ciclo de eliminação de elementos é repetido até que não existam mais elementos a serem retirados para este valor de RR_0 .

A estrutura ótima não é determinada em apenas uma etapa. O processo evolucionário é definido adicionando-se à RR_0 uma razão de evolução RE e um novo ciclo de eliminação inicia-se até que não exista mais elementos a serem eliminados para esta nova razão de rejeição ($RR = RR_0 + RE$). A razão de rejeição vai sendo atualizada, conforme a equação (5.2) , até a obtenção de uma configuração otimizada.

$$RR_{i+1} = RR_i + RE \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.2)$$

Os valores escolhidos para as constantes RR e RE devem ser pequenos, aproximadamente 1%, para que se tenha uma melhor convergência e não seja retirado muito material, à semelhança do que ocorre nos processos evolutivos da natureza. A cada etapa de RR é possível observar a nova forma e topologia determinada.

O processo evolucionário em tensão pode ser resumido como se segue:

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos,
- 2) determinar a distribuição de tensões para as restrições e carregamentos,
- 3) remover os elemento com $\sigma_{EQV} < \sigma_{EQV}^{máxima} \times RR$,
- 4) repetir passos 2 e 3 até não haver elementos selecionados,
- 5) atualizar RR conforme a equação (5.2) e iniciar nova retirada de elementos repetindo-se os passos 2, 3 e 4,

Este método foi implementado e os resultados obtidos serão mostrados no capítulo 7.

5.4 A OEE em Rigidez

Alguns projetos estruturais como de pontes ou de estruturas metálicas em construção civil, além de resistirem a carregamentos específicos, devem proporcionar rigidez suficiente para que a deflexão máxima em alguns locais da estrutura não ultrapasse limites pré-estabelecidos.

Baseado neste requisito estrutural, o segundo método de otimização estudado tem o objetivo de diminuir a massa estrutural garantindo limites de rigidez e deslocamentos.

Na análise estrutural estática, o comportamento do sistema é representado pela seguinte equação de equilíbrio:

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad (5.3)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global, $\{u\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e $\{P\}$ é o vetor de carga nodal.

Tem-se que energia de deformação C pode ser definida pela equação (5.4), e pode ser usada como uma medida inversa da rigidez total da estrutura (Xie and Steven, 1997).

$$C = \frac{1}{2}\{P\}^T\{u\} \quad (5.4)$$

Considerando a remoção do i^{esimo} elemento de uma estrutura composta por n elementos finitos e assumindo que esta remoção não modifica o vetor de carga $\{P\}$, tem-se que a variação na matriz de rigidez será:

$$[\Delta K] = [K^*] - [K] = -[Ke] \quad (5.5)$$

onde $[K^*]$ é a matriz de rigidez resultante após a retirada do elemento, $[Ke]$ e $[\Delta K]$ são matrizes de rigidez onde apenas os termos referentes ao i^{esimo} elemento são diferente de 0.

Fazendo-se a primeira variação da equação (5.3), obtém-se a variação do vetor de deslocamentos nodais $\{\Delta u\}$ como:

$$\{\Delta u\} = -[K]^{-1}[\Delta K]\{u\} \quad (5.6)$$

A variação do vetor de deslocamentos nodais $\{\Delta u\}$ vai determinar uma variação na energia de deformação dada por:

$$\Delta C = \frac{1}{2}\{P\}^T\{\Delta u\} = -\frac{1}{2}\{P\}^T[K]^{-1}[\Delta K]\{u\} = \frac{1}{2}\{u^e\}^T[K^e]\{u^e\} \quad (5.7)$$

uma vez que a matriz $[\Delta K]$ possui apenas os termos referentes ao i^{esimo} elemento diferentes de 0, define-se o número de sensibilidade α^e da OEE para o critério de projeto em rigidez como sendo:

$$\alpha^e = \frac{1}{2}\{u^e\}^T[K^e]\{u^e\} \quad (5.8)$$

onde $[K^e]$ e $\{u^e\}$ são a matriz de rigidez e o vetor de deslocamentos do elemento.

Este parâmetro indica a variação na energia de deformação com a retirada de um elemento, definindo também a energia de deformação deste elemento.

Como o objetivo da OEE neste caso é encontrar estruturas mais leves sem comprometimento da rigidez, os elementos com menor energia de deformação devem ser retirados, pois são os que promovem o menor aumento na energia de deformação total, determinando por consequência a menor perda de rigidez da estrutura.

O processo evolucionário com critério de projeto em rigidez pode ser assim resumido:

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos,
- 2) resolver um problema de análise estrutural estática,
- 3) calcular o número de sensibilidade α_n^e usando a equação (5.8) para cada elemento,
- 4) remover um número fixo de elementos que apresentem os menores valores de α_n^e ,
- 5) repetir os passos 2) a 4) até a alcançar um valor limite de rigidez,

Para o caso em que a restrição em rigidez está baseada num limite de deslocamento em alguma localização específica da estrutura, deve-se calcular um novo parâmetro de sensibilidade α^e .

Considerando que existe um limite para o componente u_j do vetor de deslocamentos, ou seja, $|u_j| < u_j^*$, onde u_j^* é o valor limite, deve-se então determinar a influência da remoção de um elemento no valor deste deslocamento. Para isso, um novo vetor de forças $\{F^j\}$, o qual apenas a $j^{\text{ésimo}}$ componente é igual a unidade e todas as outras são iguais a 0, é introduzido.

Resolvendo o sistema $[K]\{u_j\} = \{F^j\}$ pode-se avaliar a influência da força unitária F^j no deslocamento u_j especificado.

Neste caso, onde apenas um grau de liberdade é utilizado, tem-se que a variação do deslocamento no ponto j é obtida multiplicando-se a força unitária pela expressão geral de $\{\Delta u\}$, isto é:

$$\Delta u_j = \{F^j\}^T \{\Delta u\} = \{F^j\}^T [K]^{-1} [Ke] \cdot \{u\} \quad (5.9)$$

Considerando o sistema excitado exclusivamente pela força unitária, tem-se:

$$\{u_j\}^T = \{F^j\}^T [K]^{-1} \quad (5.10)$$

Substituindo a equação (5.10) na equação (5.9), tem-se:

$$\Delta u_j = \{u_j\}^T [Ke] \{u\} = \{u_j^e\}^T [K^e] \{u^e\} \quad (5.11)$$

onde $\{u^e\}$ e $\{u_j^e\}$ são vetores formados pelas componentes do vetores $\{u\}$ e $\{u_j\}$ correspondentes ao elemento.

Com isso, o número de sensibilidade α^e para o critério em deslocamento é:

$$\alpha_j^e = \{u_j^e\}^T [K^e] \{u^e\} \quad (5.12)$$

E o algoritmo é dado por:

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos,
- 2) resolver um problema de análise estrutural estática para dois casos de carregamento $\{F^j\}$ e $\{P\}$,

- 3) calcular o número de sensibilidade α_n^e usando a equação (5.12) para cada elemento,
- 4) remover um número fixo de elementos que apresentem os menores valores de α_n^e ,
- 5) repetir os passos 2) a 4) até a alcançar um valor limite de rigidez,

O critério de projeto em rigidez pode também ser utilizado impondo-se um limite para um deslocamento relativo entre dois pontos adjacentes de uma estrutura, conforme a equação (5.13).

$$|u_j - u_k| < \delta_{jk}^* \quad (5.13)$$

onde δ_{jk}^* é o limite determinado para diferença entre as duas componentes de deslocamento u_j e u_k .

Para se avaliar o efeito da retirada do i^{esimo} elemento na diferença entre as componentes de deslocamento, calcula-se o vetor $\{u_j^e\}$ e o vetor $\{u_k^e\}$ e subtrai-se um pelo outro, uma vez que:

$$\Delta |u_j - u_k| = |\{u_j^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{u^e\} - \{u_k^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{u^e\}| = \{\delta_{jk}^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{u^e\} \quad (5.14)$$

onde: $\{u_j^e\}$ e $\{u_k^e\}$ são os vetores de deslocamento do i^{esimo} elemento para os casos de carga unitária aplicada na posição e direção dos deslocamentos u_j e u_k respectivamente. Assim sendo:

$$\{\delta_{jk}^e\} = \{u_j^e\} - \{u_k^e\} \quad (5.15)$$

de onde se define o novo parâmetro α para este caso como:

$$\alpha^e = |\{\delta_{jk}^e\}^T \cdot [K^e] \cdot \{u^e\}| \quad (5.16)$$

O processo evolucionário com critério limite de deslocamento num local específico da estrutura é o mesmo apresentado, a menos da troca dos itens 2) e 3) para:

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos,
- 2) resolver um problema de análise estrutural estática para três casos de carregamento $\{F^j\}$, $\{F^k\}$ e $\{P\}$,
- 3) calcular o número de sensibilidade α_n^e usando a equação (5.16) para cada elemento,
- 4) remover um número fixo de elementos que apresentem os menores valores de α_n^e ,
- 5) repetir os passos 2) a 4) até a alcançar um valor limite de rigidez,

O último caso estudado com limite em deslocamento refere-se a problemas onde vários pontos da estrutura devem estar dentro de uma faixa de deslocamento permitido, isto é :

$$|u_j| \leq |u_j^*| \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (5.17)$$

onde m é o número de pontos cujos deslocamento estão limitados.

O cálculo do número de sensibilidade que determina a influência de cada elemento em todos os deslocamentos considerados na otimização se dá através da seguinte média ponderada:

$$\alpha_e = \sum_{j=1}^m \gamma_j |\alpha_j^e| \quad (5.18)$$

onde α_j^e é calculado pela equação (5.12) e o parâmetro de ponderação γ_j é dado por:

$$\gamma_j = \frac{|u_j|}{u_j^*} \quad (5.19)$$

Quando um deslocamento está distante do valor limite, o parâmetro de ponderação é pequeno. Em contrapartida, se o mesmo estiver próximo do limite prescrito, o parâmetro de ponderação irá intensificar ainda mais o efeito daqueles elementos que exercem mais influência neste deslocamento resultando em elevados valores de α_e .

O processo evolucionário com critério sobre deslocamentos em vários pontos é o mesmo apresentado anteriormente alterando-se apenas os itens 2) 3) como segue:

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos,
- 2) resolver um problema de análise estrutural estática para os casos de carregamento $\{F^j\}$ a $\{F^m\}$, sendo $(j = 1, 2, \dots, m)$ e $\{P\}$,
- 3) calcular o número de sensibilidade α_n^e usando a equação (5.18) para cada elemento,
- 4) remover um número fixo de elementos que apresentem os menores valores de α_n^e ,
- 5) repetir os passos 2) a 4) até a alcançar um valor limite de rigidez,

Na prática, ao longo do processo evolucionário, pode-se encontrar diversas soluções factíveis. Uma possibilidade para o monitoramento da qualidade de cada solução é a determinação de um índice de performance estrutural.

Assim sendo, pode-se definir o índice de performance estrutural IP da seguinte forma:

$$IP = \frac{\{u_{0j}\}V_0}{\{u_j^e\}V_j} \quad (5.20)$$

onde: $\{u_j^e\}$ e V_0 são o deslocamento limitado e o volume total de material da estrutura para o domínio de trabalho inicial, e $\{u_j^e\}$ e V_j são o deslocamento limitado e o volume total de material da estrutura na iteração corrente.

5.5 A OEE em Frequência

A análise dinâmica de estruturas é de fundamental importância quando se tem a presença de excitações dinâmicas, pois quando as frequências de excitação estão muito próximas às frequências naturais da estrutura, pode ocorrer excessiva vibração comprometendo o funcionamento e até mesmo a integridade da estrutura.

O projeto ótimo de estruturas, cuja variável de projeto é a frequência, tem como objetivo evitar vibrações excessivas, e para isso deve-se garantir que as primeiras frequências se localizem o mais distante possível das frequências de excitação.

Assim como nos casos anteriores, a OEE disponibiliza um critério para a retirada gradual de material objetivando a otimização em frequência.

A fim de se identificar a melhor localização para a remoção de elementos, se faz necessário a definição de um número de sensibilidade.

A análise pelo método dos elementos finitos das vibrações livres não amortecidas de uma estrutura pode ser representada pelo seguinte problema de autovalor:

$$([K] - \omega_n^2[M])\{u_n\} = 0 \quad (5.21)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez global, $[M]$ é a matriz de massa global, ω_n é a $n^{ésima}$ frequência natural e $\{u_n\}$ é o autovetor correspondente ao autovalor ω_n^2 .

Considerando que o sistema é conservativo, o quociente de Rayleigh é dado por:

$$\omega_n^2 = \frac{\{u_n\}^T[K]\{u_n\}}{\{u_n\}^T[M]\{u_n\}} = \frac{k_n}{m_n} \quad (5.22)$$

onde k_n e m_n são chamados de rigidez modal e massa modal.

Levando em conta a remoção do $i^{ésimo}$ elemento da estrutura em questão, determinar-se a variação da frequência da estrutura em relação a retirada deste elemento, caracterizando-se assim um parâmetro de sensibilidade.

Fazendo-se a primeira variação do quociente de Rayleigh, tem-se (Xie and Steven, 1997) :

$$\Delta(\omega_n^2) = \frac{m_n \Delta k_n - k_n \Delta m_n}{m_n^2} = \frac{\Delta k_n}{m_n} - \frac{k_n \Delta m_n}{m_n^2} = \frac{1}{m_n} (\Delta k_n - \omega_n^2 \Delta m_n) \quad (5.23)$$

Para se obter o valor de $\Delta(\omega_n^2)$, é assumido que o autovetor $\{u_n\}$ é aproximadamente o mesmo antes e depois da remoção do $i^{ésimo}$ elemento da estrutura. Assim sendo, tem-se que:

$$\begin{aligned} \Delta k_n &= \{\Delta u_n\}^T [K] \{u_n\} + \{u_n\}^T [\Delta K] \{u_n\} + \{u_n\}^T [K] \{\Delta u_n\} \approx \\ &\approx \{u_n\}^T [\Delta K] \{u_n\} = \{u_n^e\}^T [K^e] \{u_n^e\} \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned}\Delta m_n &= \{\Delta u_n\}^T [M] \{u_n\} + \{u_n\}^T [\Delta M] \{u_n\} + \{u_n\}^T [M] \{\Delta u_n\} \approx \\ &\approx \{u_n\}^T [\Delta M] \{u_n\} = \{u_n^e\}^T [M^e] \{u_n^e\}\end{aligned}\quad (5.25)$$

onde: K^e , M^e são as matrizes de massa e rigidez respectivamente do i^{esimo} elemento, e $\{u_n^e\}$ é o autovetor do i^{esimo} elemento.

Substituindo as aproximações mostradas nas equações (5.24) e (5.25) na equação (5.23), obtém-se de forma aproximada o efeito da retirada do i^{esimo} elemento na variação da frequência como segue:

$$\Delta(\omega_n^2) \approx \frac{1}{m_n} \{u_n^e\}^T (\omega_n^2 [M^e] - [K^e]) \{u_n^e\} \quad (5.26)$$

A decisão de qual elemento retirar da estrutura objetivando a modificação de uma dada frequência ω_n , é baseada no valor do número de sensibilidade de cada elemento, que é dado por:

$$\alpha_n^e = \frac{1}{m_n} \{u_n^e\}^T (\omega_n^2 [M^e] - [K^e]) \{u_n^e\} \quad (5.27)$$

É importante comentar que em análise modal é muito comum o cálculo do autovetor $\{u_n^e\}$ normalizado pela matriz de massa $[M]$, o que determina um valor unitário para a massa modal m_n , simplificando as expressões.

Uma vez calculados os α_n^e para todos os elementos, e considerando que eles se encontram numa faixa de valor $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$, conforme mostrado na figura 5.1, observa-se três regiões distintas identificadas pelas letras A , B e C , que são muito importantes para a OEE em frequência.

Para aumentar uma frequência ω_n deve-se retirar os elementos que possuem valores de α na região C , pois causarão uma variação positiva na frequência. No caso contrário de se diminuir ω_n , a região de retirada é a região A , ao passo que para se promover uma redução do peso estrutural mantendo as frequências inalteradas, retira-se aqueles elementos com valores próximo de 0, ou seja, na região B .

O processo evolucionário de otimização estrutural em frequência inicia-se com a gradual remoção dos elementos, de forma que a cada iteração, um problema de autovalor é resolvido, e um número de elementos é retirado.

Por exemplo, retira-se 10 elementos ou uma porcentagem do número total de elementos da estrutura. E o processo evolui até que se encontre um ótimo, que pode ser uma variação desejada na frequência natural, ou uma quantidade máxima de material retirado.

Assim sendo, o processo evolucionário com critério de projeto que objetiva aumentar o valor de uma frequência pode ser assim resumido:



Figura 5.1: Escala para o número de sensibilidade α_n^e

- 1) discretizar o domínio de análise com uma malha fina de elementos finitos.
- 2) resolver um problema de autovalor,
- 3) calcular o número de sensibilidade α_n^e usando a equação (5.27) para cada elemento,
- 4) remover um número fixo de elementos que apresentem os maiores valores de α_n^e ,
- 5) repetir os passos 2) a 4) até a configuração ótima desejada,

Como o resumo acima é usado para aumentar o valor de uma frequência desejada, a seguir será mostrado algumas opções de se variar frequências como:

I) Reduzir uma frequência escolhida - neste caso, basta a troca do item 4) por: *remover um número de elementos que apresentem os menores valores de α_n^e* .

II) Remover material com mínima variação possível nas frequências - neste caso, basta a troca do item 4) por: *remover um número de elementos que apresentem os menores valores do $|\alpha_n^e|$* .

III) Aumentar o intervalo entre duas frequências conhecidas ω_p e ω_q - neste caso é necessário o cálculo de um novo número de sensibilidade para $(\omega_p^2 - \omega_q^2)$ como segue:

$$\alpha_{pq}^e = \Delta(\omega_p^2 - \omega_q^2) \approx \alpha_p^e - \alpha_q^e \quad \text{onde} \quad p > q \quad (5.28)$$

onde α_{pq}^e representa o efeito da retirada do i^{esimo} elemento na variação da distância entre ω_p^2 e ω_q^2 . Neste caso, faz-se a troca do item 4) por: *remover um número de elementos que apresentem os maiores valores do α_{pq}^e* , pois estes causarão uma maior variação de $\omega_p^2 - \omega_q^2$.

IV) Para o caso de se aumentar, por exemplo, as três primeiras frequências, calcula-se os números de sensibilidade α_1^e , α_2^e e α_3^e para cada elemento, e seleciona-se apenas os elementos que apresentem estes valores maiores que 0 e entre os elementos selecionados faz-se a troca do item 4) por: *remover um número de elementos que apresentem os maiores valores α_1^e* , por exemplo, se no caso a frequência ω_1 for a mais crítica.

O solver utilizado para a cálculo das frequências naturais é baseado no método de Iteração no Subespaço, o qual utiliza o algoritmo QR para a solução do problema de autovalores.

Capítulo 6

Linguagem Orientada a Objetos - MEFLABC++

6.1 Introdução

A implementação computacional da OEE foi feita em Linguagem Orientada a Objetos em ambiente C++, tendo como objetivo o desenvolvimento de um módulo de otimização estrutural evolucionária no programa de elementos finitos chamado MEFLABC++.

Este capítulo fará uma introdução à Linguagem Orientada a Objetos através da descrição das fases do processo de desenvolvimento do Modelo de Objetos para a resolução de um problema qualquer. Em seguida tem-se a aplicação do procedimento descrito no desenvolvimento do módulo de OEE.

6.2 Programação Orientada a Objetos - POO

A Programação Orientada a Objetos (POO) é baseada na idéia de se criar uma implementação computacional que melhor adapte o computador à resolução de um problema. Este conceito se opõe ao utilizado em programações estruturadas convencionais, que modelam o problema em algo mais apropriado à máquina (Ferreira, 1998) .

A estratégia de implementação da POO consiste em identificar os aspectos do seu problema relacionados a componentes físicos e conceituais, ou etapas a serem realizadas, que permitam a resolução do problema. Estes aspectos são organizados em pequenas partes, que podem vir a existir computacionalmente como entidades. Estas entidades são então representadas de forma única por objetos dentro do programa.

Todo o conhecimento de cada um dos objetos é armazenado em uma classe, que é definida por um conjunto de variáveis de tipos diferentes combinadas com um conjunto de funções relacionadas às variáveis. As classes também podem ser composta por outros tipos de objetos.

Estas classes podem estar relacionadas com outras classes através da utilização de heranças. Este relacionamento é caracterizado pela identificação de similaridades e diferenças entre objetos.

Assim sendo, tem-se que as semelhanças entre objetos são agrupadas em classes de base ou principais, ao passo que as diferenças são definidas em classes derivadas. Estas classes derivadas podem ser descritas como classes especializadas que herdam da classe de base todas as especificações, como métodos e variáveis, e ainda podem apresentar características próprias.

Uma vez definidas as classes, a POO compõe o problema em um conjunto de objetos, que cooperam entre si. Este relacionamento entre os objetos se dá através dos métodos da classe da qual eles foram instanciados. Assim sendo, os objetos são criados e mandam mensagens uns para outros, recebendo e distribuindo tarefas, e após cada um cumprir o seu propósito, o problema estará resolvido.

Em resumo, pode-se destacar três características principais da programação orientada a objetos que são:

- ter nos objetos, e não nos algoritmos, a base da criação de programas;
- cada objeto é a instância de uma classe, com a sua própria identidade, que serve para diferenciá-lo de outros objetos que possuam os mesmos conjuntos de operações;
- o relacionamento entre os objetos se dá através dos métodos das classes das quais eles foram instanciados;

6.3 Obtendo um Modelo de Objeto

Um bom modelo de objeto é conseguido através de um processo de desenvolvimento que possui as três etapas como segue (Ferreira, 1998):

1. Análise Orientada a Objetos: é a fase onde um especialista descreve o problema em termos das necessidades e tarefas a serem resolvidas pelo programador.
2. Projeto Orientado a Objetos: é a fase de definição das classes e de suas variáveis e funções que irão fazer a vinculação e a comunicação entre os objetos.
3. Programação Orientada a Objetos: é a fase de implementação, onde se tem a codificação dos métodos e funções, os testes e a integração do programa como um todo.

Em seguida tem-se a aplicação das duas primeiras etapas descritas acima no desenvolvimento do modelo de objeto para a Otimização Estrutural Evolucionária.

6.3.1 Análise Orientada a Objetos

A Análise Orientada a Objetos do módulo da OEE tem como objetivo especificar o problema a ser resolvido, posicioná-lo em relação ao programa MEFLABC++ já implementado, e identificar as etapas a serem realizadas.

A Otimização Estrutural Evolucionária consiste em se obter uma nova forma e topologia removendo-se de forma gradativa os elementos correspondentes ao material ineficiente da estrutura. Estes elementos são escolhidos conforme um critério de rejeição, que depende do critério de projeto considerado.

Considerou-se três critérios de projeto que são: a tensão local, a rigidez e as frequências naturais da estrutura. Assim sendo, pode-se descrever uma análise orientada a objeto de forma distinta para cada critério.

O critério de projeto em tensão local determina estruturas mais leves e com melhor distribuição de tensão a partir de uma estrutura inicial. Para se obter uma estrutura com tais características deve-se, inicialmente, fazer uma análise estática, que resolve um sistema $[K]\{u\} = \{F\}$. Com o sistema linear resolvido, calculam-se as tensões em todos os elementos da estrutura. Em seguida, inicia-se o processo evolucionário de otimização retirando-se aqueles elementos cujos valores de σ_{EQV} estejam abaixo de uma fração do máximo valor encontrado na estrutura.

Como a fração que determina a tensão de corte dos elementos possui valor inicial pequeno, tendo seu valor incrementado a medida que os elementos são retirados da estrutura, tem-se a retirada de elementos de forma iterativa. Assim, o processo continua até que uma estrutura ótima seja encontrada.

Todos os dados referentes à otimização como: Razão de Rejeição Inicial RR_0 , Razão de Evolução RE e Razão de Rejeição Máxima, serão lidos de um arquivo em formato específico. Este arquivo será escrito por uma macro do software ANSYS (ans, 1994).

O pré-processamento também será feito no software ANSYS, que corresponde à determinação do modelo de elementos finitos com as respectivas condições de contorno sob o domínio inicial.

A cada iteração deverão ser criados dois arquivos para a análise e visualização dos resultados. Em um arquivo tem-se informações referentes à distribuição de tensões e à nova topologia da estrutura, que serão visualizadas no software ANSYS. O segundo arquivo permitirá a análise dos dados evolucionários como: tensão σ_{EQV} máxima e número de elementos da estrutura para cada iteração a ser visualizada no software MATLAB.

No caso da rigidez como critério de projeto, a otimização tem o objetivo de determinar estruturas mais leves e que atendam a limites em rigidez total da estrutura ou a limites de deslocamentos.

Assim sendo, deve-se fazer uma análise estrutural estática baseada num sistema do tipo $[K]\{u\} = \{F\}$ onde serão determinados os deslocamentos nodais. Em seguida calcula-se um parâmetro característico dos elementos, chamado número de sensibilidade α , e baseado

neste valor, elimina-se um número de elementos da estrutura. Este processo será repetido iterativamente até que limites em rigidez ou deslocamento sejam alcançados.

O mesmo tipo de arquivo com dados evolucionários como: limite de rigidez ou os locais que terão seus deslocamentos controlados, o número de iterações e o número de elementos retirados por iteração, deverá ser fornecido.

Após o término de cada iteração da OEE em rigidez, deve-se gerar os arquivos para a análise dos resultados, sendo que um arquivo deve possibilitar a visualização da topologia da estrutura, e da distribuição dos valores de α na estrutura através do software ANSYS. E outro arquivo que proporcionará a análise dos dados evolucionários, como o valor dos deslocamentos dos locais sob controle, a ser realizada no software MATLAB.

O critério de projeto em frequência tem o objetivo de alterar o conjunto de frequências naturais da estrutura através da exclusão de elementos. Assim sendo, resolve-se inicialmente um sistema do tipo $([K] - \omega_n^2[M])\{u\} = \{0\}$, que resulta nos autovalores e autovetores da estrutura. Estes dados serão usados no cálculo de um parâmetro característico dos elementos, chamado número de sensibilidade α , e conforme o valor de α , elimina-se um número de elementos da estrutura a cada iteração.

O processo será repetido de forma iterativa até que um valor específico para frequência seja alcançado, ou uma quantidade determinada de material seja retirada.

Todos os dados referentes ao critério de projeto, que neste caso são: as frequências a serem alteradas, o número de elementos retirados a cada iteração e o número de iterações, estarão num arquivo em formato específico a ser fornecido.

Tem-se a visualização e análise dos resultados através de dois arquivos que serão gerados a cada iteração. O primeiro permitirá a visualização no software ANSYS da topologia da estrutura e da distribuição dos valores de α . Outro arquivo será lido no software MATLAB e permitirá o acompanhamento das frequências em estudo ao longo do processo evolucionário.

Uma vez terminada a Análise Orientada a Objetos, a próxima etapa é o Projeto Orientado a Objetos.

6.3.2 Projeto Orientado a Objetos

O Projeto Orientado a Objetos tem o objetivo de identificar prováveis objetos e especificar as classes das quais serão instanciados estes objetos, sendo que, o exercício de caracterização de objetos é feito através da abstração das classes.

A abstração pode ser resumida como o ato de separar mentalmente um ou mais elementos de uma totalidade complexa, como por exemplo um problema de otimização evolucionária a ser desenvolvido, de modo a concentrar-se na generalização de seu comportamento ignorando seus detalhes.

Portanto, a função da abstração é reconhecer cada um dos objetos e seus métodos através da definição de conceitos e características essenciais, que irão diferenciá-los dos demais. Desta

forma, a abstração permite visualizar de forma global a interface do objeto, separando o seu comportamento da sua implementação.

A interface do objeto pode ser definida como a sua forma de interação com os outros objetos do projeto, sendo esta, feita através dos métodos, que têm a função de definir como o objeto vai agir e reagir.

Cabe salientar que a implementação do módulo de otimização estrutural evolucionária será feita no programa de elementos finitos MEFLABC++ que também foi programado orientado a objetos. Com isso tem-se a necessidade da visualização das abstrações já existentes a fim de se observar como será a interface deste módulo de otimização com o resto do programa.

O modelo de objeto do MEFLABC++ está definido basicamente como um problema a ser resolvido, que é composto de um domínio e uma tarefa a ser cumprida.

O domínio, neste caso, caracteriza-se por uma equação diferencial válida em uma certa região geométrica e sujeita a condições de contorno. Já a tarefa é algo a ser realizado com respeito ao domínio, como por exemplo uma análise estrutural dinâmica ou estática.

O programa MEFLAC++ foi idealizado como constituído basicamente de um objeto representando o problema a ser resolvido. Este objeto possui mais dois objetos, o objeto instanciado da classe *Domain* referindo-se ao domínio do problema e o objeto instanciado da classe *Task* que representa a tarefa a ser realizada sobre o domínio.

Desta forma, considerou-se a otimização estrutural evolucionária como uma tarefa do problema, resultando na abstração de um objeto chamado *theEvolutionaryOptimization*.

Observa-se da análise a existência de três critérios de projeto para a otimização, que se diferenciam quanto ao tipo de análise estrutural e à forma de se retirar os elementos da estrutura. Quanto ao tipo de análise estrutural, os critérios em tensão local e rigidez executam uma análise estrutural estática, enquanto que o critério em frequência executa uma análise dinâmica. Quanto à forma de se retirar elementos, o primeiro critério de projeto não limita o número de elementos selecionados por iteração, enquanto que os dois últimos critérios retiram um número fixo.

Estas diferenças apresentadas pelos critérios de projeto, por influírem diretamente nas etapas do processo evolucionário, determinaram a necessidade de objetos que caracterizem cada critério a ser considerado, determinando-se assim, três tipos diferentes de objetos. Com isso tem-se: o objeto *theLocalLevel* representando o critério de projeto em tensão local, o objeto *theStiffnessByNumber* representando o critério de projeto em rigidez, e o objeto *theSelectedNumber* representando o critério de projeto em frequências naturais.

Considerando ainda a análise anterior, observa-se que os critérios de projeto possuem formas diferentes de se retirar elementos da estrutura, ou seja, diferentes critérios de rejeição. Com isso, a análise determinou a necessidade de se abstrair três objetos independentes que são: *thevonMissesStress*, *theStiffness* e *theFrequency*, sendo cada objeto referente ao respectivo critério de rejeição.

As classes principais foram abstraídas a fim de agruparem características semelhantes entre os objetos. Já as classes derivadas possibilitam a particularização das diferenças iden-

tificadas na análise, que determinaram a necessidade da criação de objetos.

Assim sendo, considerou-se o objeto *theEvolutionaryOptimization* como uma instância da classe derivada da classe *Task*, que recebeu o nome de *EvolutionaryOptimization*. Esta classe apresenta as informações necessárias para a realização de uma tarefa de otimização estrutural.

A seguir apresenta-se a estrutura de classes do projeto orientado a objeto que representa o módulo de OEE do MEFLABC++.

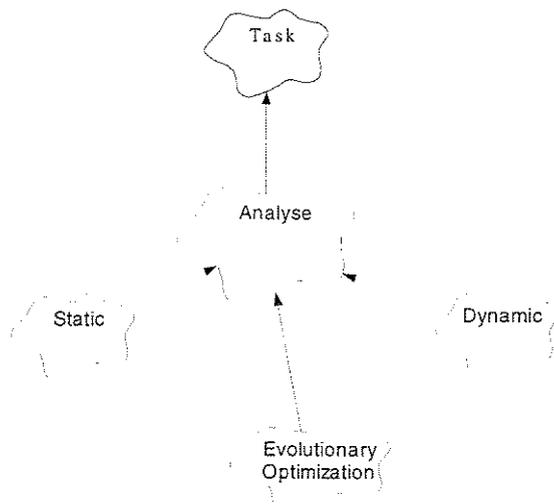


Figura 6.1: A classe *Task* e as classes derivadas

Na figura 6.1 tem-se a hierarquia da classe *Task* que possui a classe derivada *Analise*, que se deriva em: *Static*, *Dynamic* e *EvolutionaryOptimization*.

As características semelhantes entre os critérios de projeto foram colocadas na classe principal denominada *EvolutionaryMethod*. Esta, por sua vez, apresenta três classes derivadas que são *LocalLevel*, *StiffnessByNumber* e *SelectedNumber*.

Estas classes agrupam as características diferentes relativas a cada critério de projeto, sendo, desta forma, identificados três métodos evolucionários distintos.

O diagrama de classes da figura 6.2 mostra a hierarquia da classe *EvolutionaryMethod* com as classes derivadas *LocalLevel*, *StiffnessByNumber* e *SelectedNumber*, das quais foram instanciados os objetos *theLocalLevel*, *theStiffnessByNumber* e *theSelectedNumber* respectivamente.

A classe derivada *LocalLevel* representa o critério de projeto em tensão local, cujas variáveis que relacionadas aos dados evolucionários são:

- Razão de Rejeição Inicial RR_0 : é o valor inicial da fração, também chamada de Razão de Rejeição, que multiplicada pela tensão σ_{EQV} máxima, calcula a tensão de corte, ou seja,

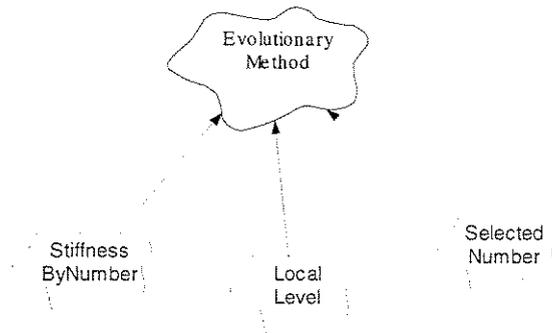


Figura 6.2: A classe *EvolutionaryMethod* e as classes derivadas

elementos com tensão σ_{EQV} menor que este valor são eliminados;

- Razão de Evolução *ER* é o incremento que se dá a cada iteração na Razão de Rejeição;
- Razão de Rejeição Máxima é a maior valor da Razão de Rejeição, ou seja, quando esta fração que é incrementada a cada iteração, atinge o valor da Razão de Rejeição Máxima, o processo evolucionário está terminado.

A classe derivada *StiffnessByNumber* representa o critério de projeto em rigidez com as seguintes variáveis:

- número dos nós com os deslocamentos controlados ou o valor limite de rigidez;
- *NES* é o número de elementos retiradas por iteração;
- *NIT* é o número de iterações;

A classe *SelectedNumber* representa o critério de projeto em frequência natural tendo como variáveis:

- as frequências a serem alteradas;
- *NES* é o número de elementos retiradas por iteração;
- *NIT* é o número de iterações;

E finalmente, as características semelhantes entre os critérios de rejeição foram agrupadas na classe principal denominada *RejectionCriterion*, ao passo que as diferenças encontradas entre os critérios de rejeição foram colocadas em três classes derivadas que são *vonMissesStress*, *Stiffness* e *Frequency*. Destas classes foram instanciados os objetos *thevonMissesStress*, *theStiffness* e *theFrequency* respectivamente.

Na figura 6.3 é apresentada a hierarquia de classes relativas ao critério de rejeição.

A classe derivada *vonMissesStress*, tem a função de encontrar o máximo valor de tensão σ_{EQV} na estrutura, e eliminar aqueles elementos cujo valor de σ_{EQV} esteja abaixo de uma fração do valor máximo encontrado. Enquanto que as classes derivadas *Stiffness* e *Frequency* calculam o número de sensibilidade α para cada elemento, e retiram um número de elementos conforme os valores de α .

Terminada a apresentação das classes abstraídas do módulo de OEE do MEFLABC++,

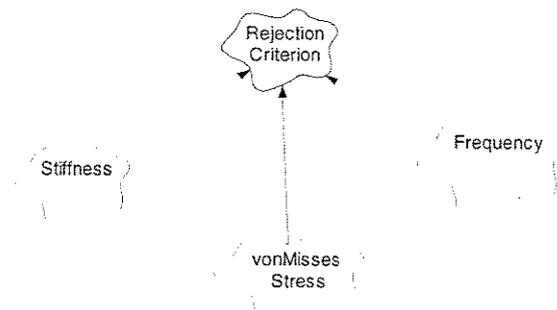


Figura 6.3: A classe *RejectionCriterion* e as classes derivadas

observa-se na figura 6.4 a estrutura de classes resultante.

Classe Principal

Classe Derivada

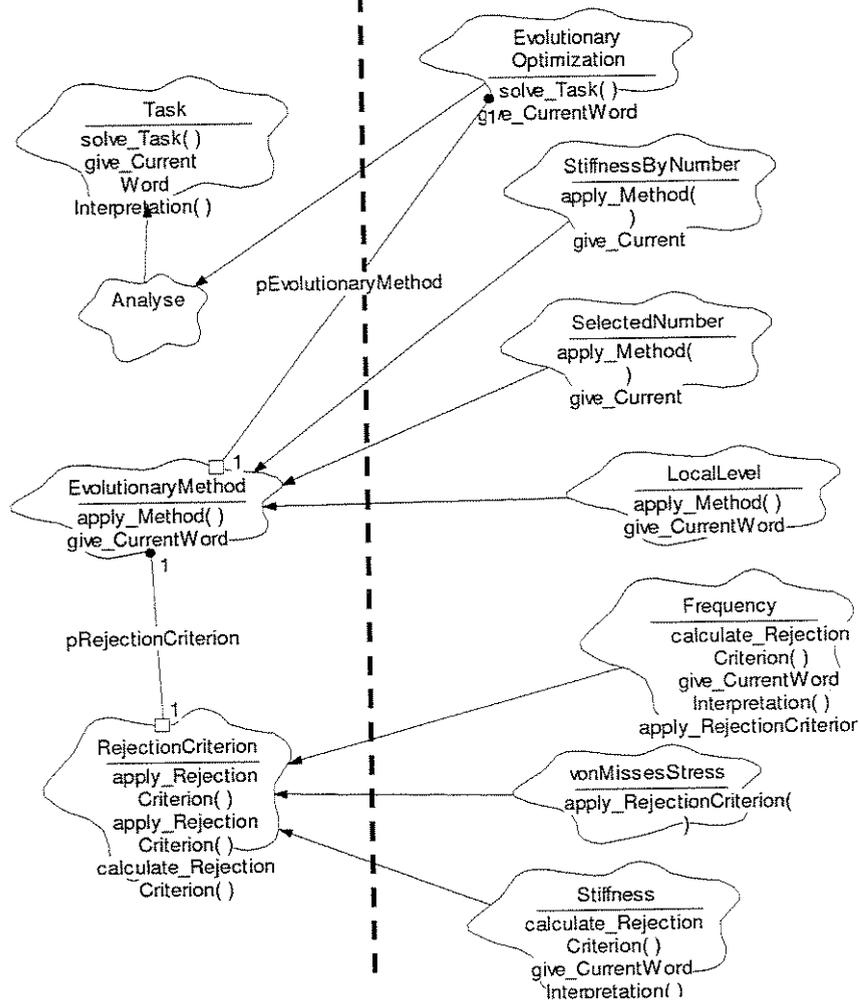


Figura 6.4: A estrutura de classe do POO da OEE

Capítulo 7

Resultados e Discussões

7.1 Introdução

Neste capítulo são mostradas as investigações feitas a respeito da Otimização Estrutural Evolucionária (OEE).

Inicialmente são apresentados os resultados obtidos com a utilização do software ANSYS (ans, 1994) através da implementação de uma rotina evolucionária com critério de projeto a partir dos valores de tensão máxima. Esta primeira implementação teve o objetivo de validar a pesquisa e verificar a viabilidade do método.

Os resultados encontrados usando-se macros no programa ANSYS foram validados a partir de resultados da literatura. Com a experiência adquirida, partiu-se para a implementação computacional da OEE em linguagem C++ orientada a objetos, usando-se as ferramentas do programa MEFLABC++.

Os critérios de Otimização foram a tensão máxima na estrutura, a rigidez e as frequências naturais.

É importante ressaltar que a visualização dos resultados e a geração da malhas de elementos finitos para todos os exemplos apresentados foram feitas no software ANSYS. O desenvolvimento de um sistema de pré e pós processamento ainda não foi abordado pelo grupo de trabalho.

Para todos os exemplos, as hipóteses assumidas são: material linear, isotrópico e homogêneo. É considerado o problema de estado plano de tensões com pequenos deslocamentos.

7.2 Otimização em Tensão Máxima - ANSYS

A implementação inicial feita no ANSYS teve os seguintes objetivos: verificar de forma imediata o desempenho do método com respeito ao tempo de processamento e requisitos de memória, observar a existência de problemas numéricos de mal condicionamento das matrizes

devido a retirada de elementos, e criar exemplos para validação da implementação futura.

Para cada exemplo tem-se a especificação da malha de elementos finitos através da qual se inicia a OEE. Em seguida serão mostrados os resultados para algumas etapas do processo evolucionário, a análise destes resultados, além de uma discussão de como eliminar elementos da estrutura com o objetivo de se avaliar seu efeito sobre a performance do método.

Será mostrada também uma aplicação da OEE para um exemplo real de uma biela para os casos bidimensional e tridimensional. Esta aplicação permitirá avaliar as potencialidades do método em casos reais de engenharia.

7.2.1 Estrutura de Michell

O primeiro exemplo é o mesmo resolvido em (Xie and Steven, 1993) e apresenta solução analítica, o que é adequado para a validação do procedimento evolucionário implementado.

O objetivo é encontrar topologias ótimas de estruturas com mínimo peso próprio conforme as condições de contorno especificadas. A estrutura considerada neste caso, foi estudada em 1904 por um australiano chamado A. G. M. Michell. A figura 7.1 mostra a Estrutura de Michell, cuja solução analítica é detalhada em (Hemp, 1973).

Este exemplo teve dois objetivos principais: validar o método de otimização evolucionária através da comparação entre os resultados encontrados e os resultados analíticos, e analisar a maneira de promover a retirada dos elementos da estrutura.

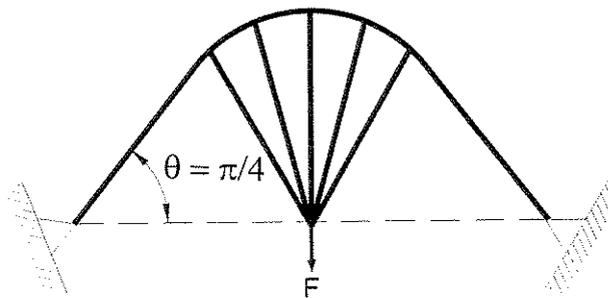


Figura 7.1: A estrutura de Michell

Como especificado anteriormente, o método evolucionário parte de um domínio inicial de trabalho, e através do algoritmo evolucionário de otimização estrutural mostrado no capítulo 6, determina-se a estrutura otimizada.

As dimensões do domínio inicial, como mostrado na figura 7.2, são $2L \times L$ com $L = 5m$, e $0.1m$ de espessura. Tal domínio foi discretizado em 50×25 elementos quadrilaterais de quatro nós.

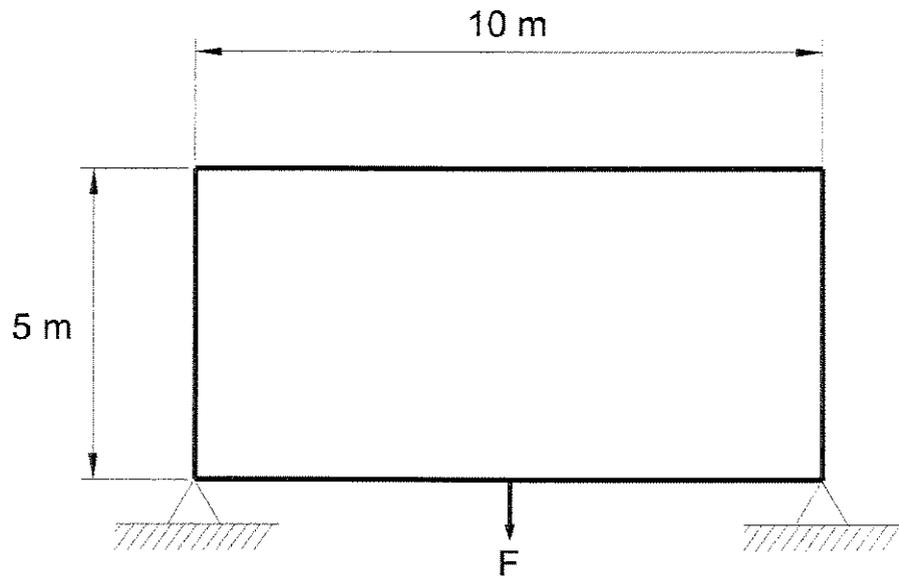


Figura 7.2: Domínio inicial para a Estrutura de Michell

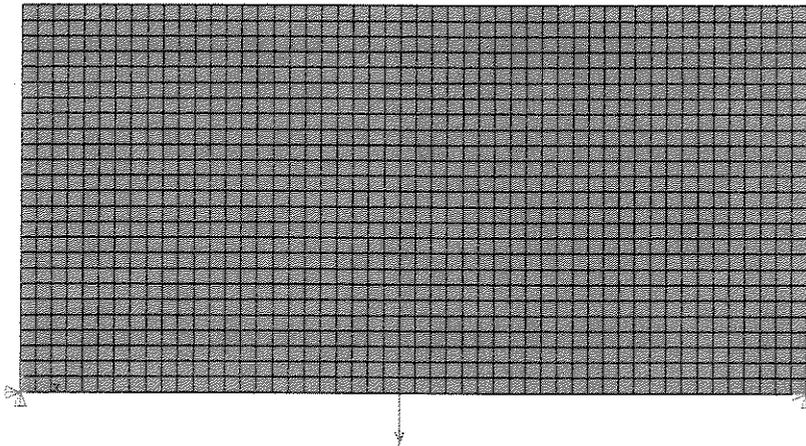


Figura 7.3: Domínio inicial para a Estrutura de Michell - discretização

As condições de contorno são: restrição dos deslocamentos nas direções x e y , localizadas nos nós das extremidades do lado inferior da estrutura, e uma força vertical para baixo de $1000N$ aplicada no nó localizado no ponto médio do mesmo lado, como mostrado na figura 7.3. As características do material são coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 100GPa$. O processo evolucionário foi iniciado com razão de rejeição inicial $RR_0 = 0,01$ ou 1% e razão de evolução $RE = 0,5\%$.

Aplicando o algoritmo da seção 5.3, obteve-se a evolução da estrutura para a forma otimizada.

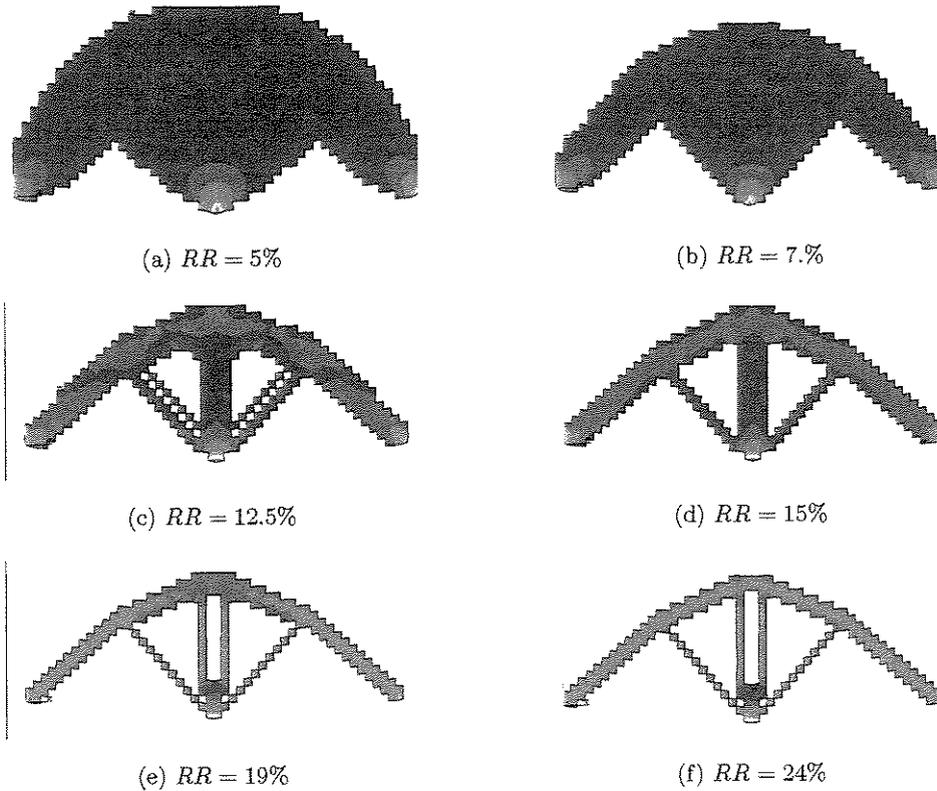


Figura 7.4: Etapas da OEE para a Estrutura de Michell - Ansys

A figura 7.4 mostra algumas etapas do processo evolucionário, onde se observa o mapa de cores proporcional aos níveis de tensão equivalente de von Mises, sendo que os tons mais claros correspondem às tensões mais elevadas.

Na mesma figura, observa-se que a configuração mais próxima da solução analítica ótima para este exemplo, foi encontrada para uma razão de rejeição $RE = 24\%$, ou seja, o elemento

cujo valor de tensão no centróide é mais baixo, apresenta um valor de 0,24 vezes a máxima tensão ao longo da estrutura. Tem-se desta forma, uma estrutura com tensões mais uniformes (Silva J. A. B., 1999) .

A seguir, apresenta-se a avaliação da forma de retirada dos elementos ao longo do processo evolucionário.

Duas maneiras foram testadas: retirando os elementos do modelo, ou inutilizando-os através da alteração de suas propriedades estruturais. Neste último caso, é imposto módulo de elasticidade E de valor próximo de zero, de tal forma que a contribuição destes elementos na rigidez do sistema passa a ser desprezível, ou seja, os elementos são considerados "mortos" estruturalmente.

Com os resultados obtidos, observa-se que as duas formas são idênticas no que diz respeito ao número de elementos retirados, tensão máxima, tensão mínima e configurações geradas para cada valor de RR .

A diferença se deu na RR de colapso da estrutura e no tempo total de resolução. Entende-se aqui por colapso, o fato da estrutura perder sua integridade, ou seja, devido à retirada excessiva de elementos ela se separa em partes ou perde a rigidez total. Tal fato conduz a singularidades na matriz de rigidez do problema, e o algoritmo é interrompido (Silva J. A. B., 2000).

Quando os elementos foram simplesmente retirados da estrutura, o colapso se deu em $RR = 19\%$, e quando foram mortos, o colapso se deu em $RR = 24\%$.

No primeiro caso, embora a retirada de elementos tenha sido idêntica ao segundo, depois de $RR = 19\%$ surgem instabilidades numéricas que causam o colapso, pois elementos ficam ligados entre si por um nó apenas, como num tabuleiro de xadrez.

Em contrapartida, o tempo total de resolução é constante no modelo de elementos "mortos", pois os elementos se tornam pouco rígidos, mas não são retirados da estrutura, conservando-se o número total de graus de liberdade, bem como a ordem do sistema linear a ser resolvido.

A figura 7.5 mostra a evolução dos tempos de resolução em função da razão de rejeição para as duas formas de se eliminar elementos.

O problema envolvendo instabilidades numéricas não foi aprofundado neste trabalho, e deverá ser alvo de pesquisas futuras.

Observa-se na figura 7.4, que as topologias para $RR = 19\%$ e $RR = 24\%$ não são significativamente diferentes, e o ganho computacional evidenciado na figura 7.5 é significativo.

Estes resultados permitem afirmar que o ganho computacional com a retirada de elementos é significativo, sem alteração determinante na forma final encontrada.

7.2.2 Exemplo biela

O exemplo da biela busca avaliar a viabilidade da utilização da OEE com critério de projeto em tensão máxima em casos reais, além da observação da retirada de elementos para

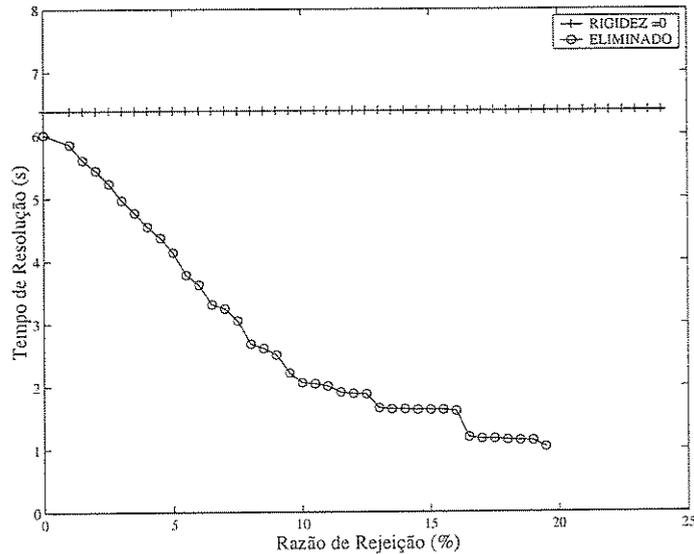


Figura 7.5: Variação do Tempo de Resolução em função de RR

exemplos tridimensionais. Os resultados apresentados são preliminares e apenas indicam tendências de forma e de topologia do modelo.

Analisou-se um exemplo semelhante a uma biela de Volkswagen sedan (Fusca) ano 1972. O problema foi abordado em duas etapas. Primeiro fez-se uma análise bidimensional e posteriormente uma análise tridimensional. Adotou-se um domínio inicial com simetria longitudinal e dimensões próximas à da peça real.

O domínio inicial bidimensional, que está mostrado na figura 7.6, tem como principais dimensões as seguintes: furo maior $\varnothing D = 48mm$, furo menor $\varnothing d = 24mm$, e a distância entre os centros dos furos $Dd = 126mm$. As dimensões externas são $258mm \times 66mm$ e 5508 elementos formam o domínio discretizado. As características do material são: coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 100GPa$.

As condições de contorno são de restrição radial dos deslocamentos nos nós da metade esquerda do semicírculo que representa o furo menor, e as forças foram aplicadas radialmente com uma variação constante na metade direita do semicírculo que representa o furo maior. Esta configuração buscou representar uma condição de compressão como mostrado na figura 7.6, sendo que a figura 7.7 mostra o domínio inicial de trabalho discretizado.

Na figura 7.8 tem-se algumas etapas do processo evolucionário, sendo que a porção escura de cada figura representa o material da estrutura que não foi retirado.

É possível observar que a forma otimizada do exemplo da biela necessitou de material entre os furos, uma vez que foi simulado um caso de compressão.

Tem-se ainda que o perfil resultante apresentou-se similar a uma biela real, onde se tem

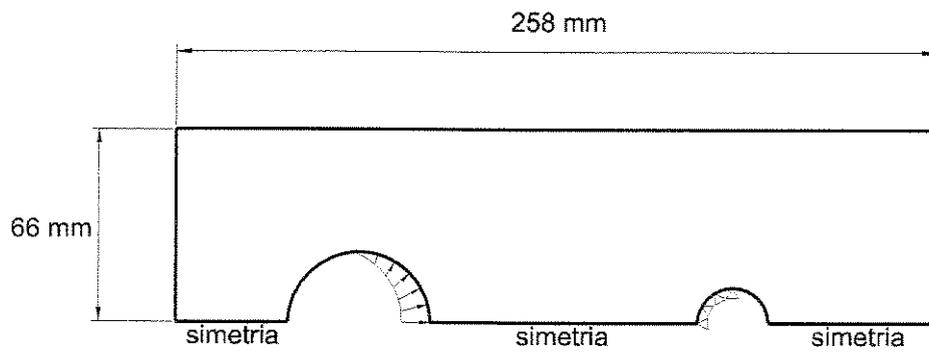


Figura 7.6: Domínio Inicial Bidimensional da biela

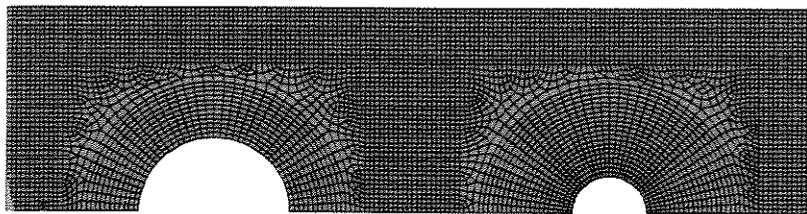


Figura 7.7: Domínio Inicial Bidimensional da Biela discretizado

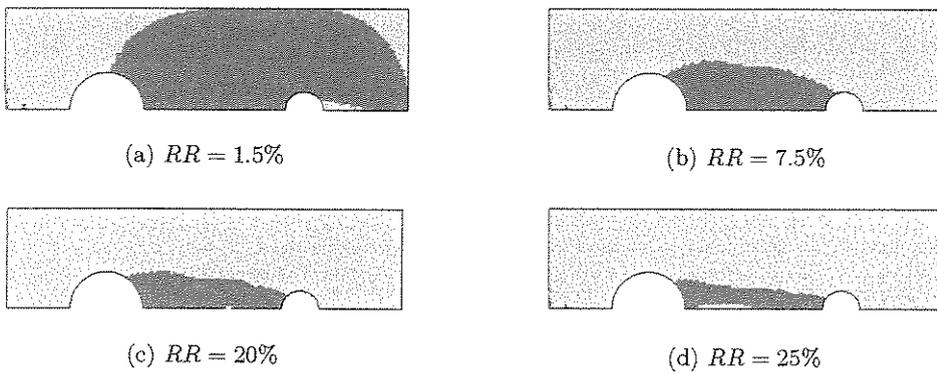


Figura 7.8: Etapas da OEE para a Biela bidimensional

material apenas abaixo da linha tangente que une os furos, com tendência à retirada total de material na região central próxima ao furo maior, como é observado na figura 7.8 referente ao caso de $RR = 25\%$.

Observa-se que na biela real existe um alívio de massa na região que une os dois furos, caracterizada por uma seção em forma de I (Silva J. A. B., 1999).

Comparando-se o valor da tensão σ_{EQV} máxima encontrada para a estrutura inicial e o valor encontrado para a estrutura referente ao caso de $RR = 25\%$ da figura 7.8-c, o aumento foi de 40%.

A próxima investigação consiste da OEE tridimensional para a mesma biela, com o objetivo de se verificar a retirada de elementos na direção z .

O modelo tridimensional da biela foi feito utilizando-se elementos hexaédricos de 8 nós, e foram usadas cinco camadas de 2,5mm de espessura cada uma com a mesma discretização do caso bidimensional, para a formação do volume final. Os dados de otimização evolucionária em frequência são $RR_0 = 0,5\%$ e $RE = 0,5\%$.

Nas figuras 7.9 e 7.10 apresenta-se uma comparação em termos de distribuição de tensão para os modelos bi e tridimensional de biela. Neste caso, os mapas de cores indicam tensões de von Mises mais elevadas nas regiões com tons vermelhos, estando as tensões mais baixas nas regiões azuis. Observa-se que os níveis de tensão não foram comparados, permanecendo esta análise ao nível qualitativo.

Até a $RR = 20\%$ os dois exemplos tiveram seus elementos retirados de maneira semelhante, ou seja, não houveram elementos retirados na direção z . Entretanto, a partir de $RR = 20\%$, o modelo da biela tridimensional apresentou mudanças de forma na direção z , com alívio de massa interna e permanência de elementos próximo aos furos, como mostra a figura 7.11.

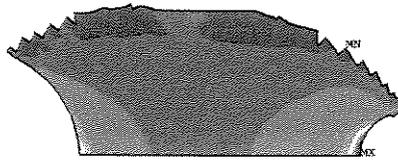
A tendência tardia na retirada de elementos na direção z do modelo tridimensional, se deve ao fato de as condições de contorno promoverem uma situação de compressão, o que resulta em uma tensão basicamente uniforme ao longo da seção do corpo.

Entretanto, após uma grande quantidade de material retirado, a influência de tensões elevadas próximas das condições de contorno determinou a maior necessidade de material nestes locais.

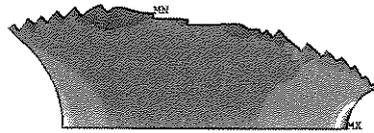
Comparando-se o valor da tensão σ_{EQV} máxima encontrada para a estrutura inicial tridimensional e o valor encontrado para a estrutura com $RR = 25\%$ mostrada na figura 7.11-c, o aumento foi de 36,3%.

É válido ressaltar que após esta etapa inicial de otimização, pode-se utilizar técnicas de ajustes de superfície, que definem formas com contornos mais suaves para a peça a ser construída (Sienz and Hinton, 1997).

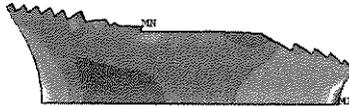
A partir dos resultados mostrados, conclui-se que a OEE é viável para problemas tridimensionais, entretanto, pode se ter um custo computacional elevado. No presente exemplo, o tempo total é da ordem de 10 horas de processamento em uma estação de trabalho Sun ULTRA 1.



(a) $RR = 10\%$

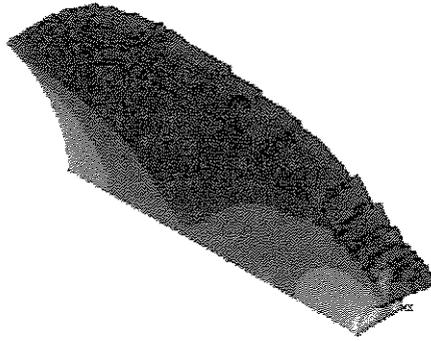


(b) $RR = 15\%$

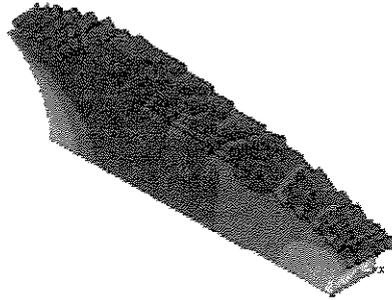


(c) $RR = 20\%$

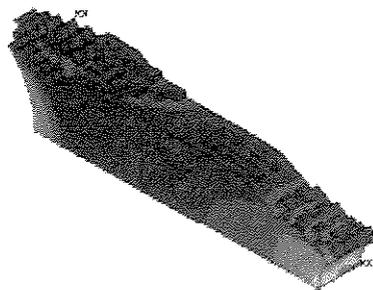
Figura 7.9: Etapas da OEE para a Biela - caso bidimensional



(a) $RR = 10\%$

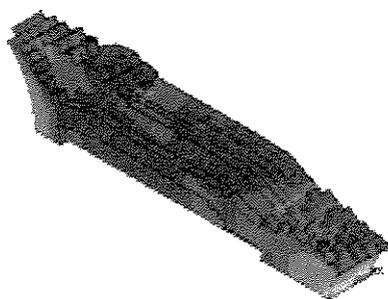


(b) $RR = 15\%$

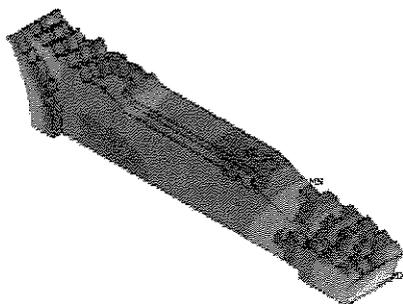


(c) $RR = 20\%$

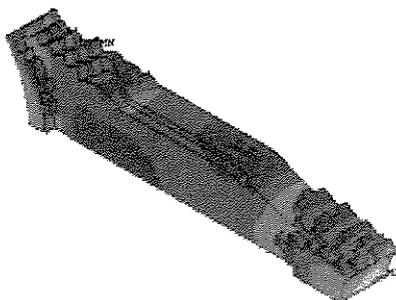
Figura 7.10: Etapas da OEE para a Biela - caso tridimensional



(a) $RR = 22\%$



(b) $RR = 24\%$



(c) $RR = 25\%$

Figura 7.11: Etapas da OEE para a Biela tridimensional

7.3 Exemplos para a Otimização em Tensão Máxima - MEFLABC++

Nesta seção são apresentados os resultados encontrados com MEFLABC++ para a OEE em tensão máxima. O objetivo é determinar estruturas mais leves com distribuição de tensão mais uniforme. Os exemplos estudados são frequentemente apresentados na literatura e foram a base para a validação da implementação realizada.

Cabe salientar, que boa parte do módulo de elementos finitos do programa MEFLABC++ também foi implementado pelo autor.

7.3.1 Estrutura de Duas Barras

O exemplo seguinte procurou a determinação de uma estrutura com tensões mais uniformes para a estrutura de Duas Barras, trata-se de um problema clássico de otimização estrutural onde duas barras são engastadas em uma de suas extremidades, e ligadas por um ponto comum na outra extremidade, onde é aplicado o carregamento.

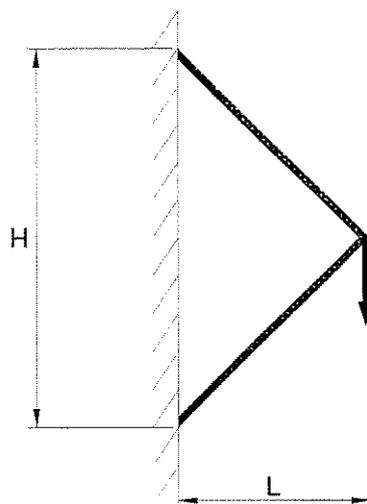


Figura 7.12: A Estrutura de Duas Barras otimizada

Com forças constantes aplicadas na união entre as duas barras e considerando este ponto pivotado, a solução analítica ótima mostrada na figura 7.12 apresenta a relação $H = 2L$.

O domínio inicial de trabalho é caracterizado por um retângulo de lados $L \times 2,4L$ com $L = 10m$ e espessura de $1mm$, como mostra a figura 7.13. As características do material

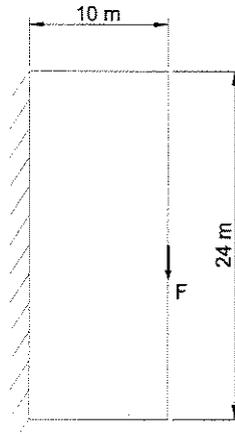


Figura 7.13: Domínio inicial de projeto

são: coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 100GPa$, e o modelo foi discretizado em 25×60 elementos quadrilaterais.

As condições de contorno são de restrição dos deslocamentos nas direções x e y dos nós do lado vertical esquerdo da estrutura. Uma tensão tangencial de $1MPa$ é aplicada nos lados externos dos dois elementos intermediários do lado vertical direito da estrutura.

O processo evolucionário foi iniciado com uma razão de rejeição inicial $RR_0 = 1\%$ e razão de evolução $ER = 1\%$.

A figura 7.14 mostra algumas etapas do processo evolucionário cujo mapa de cores tem nos tons avermelhados as tensões mais elevadas. Observa-se a forma otimizada correspondente à $RR = 0,3$ ou 30%.

Na figura 7.15 tem-se o comportamento das tensões σ_{EQV} máxima, média e mínima, onde é possível observar a significativa redução da diferença entre as tensões máxima e mínima, resultando em uma estrutura com distribuição de tensão mais uniforme, onde os elementos tornam-se mais efetivos estruturalmente. Após $RR = 30\%$ observa-se o colapso da estrutura, que neste caso foi considerado como critério de parada do processo evolucionário.

Na figura 7.16 tem-se a variação do número de elementos e do número de iterações para cada razão de rejeição, respectivamente. O total de iterações foi de 275, e a tensão σ_{EQV} máxima encontrada para a forma otimizada foi 36% superior em relação ao mesmo valor encontrado para a estrutural inicial mostrada na figura 7.13.

Observa-se uma grande variação na massa total da estrutura para um relativo aumento no valor da tensão máxima, bem como valores mais uniformes de tensão. Os resultados

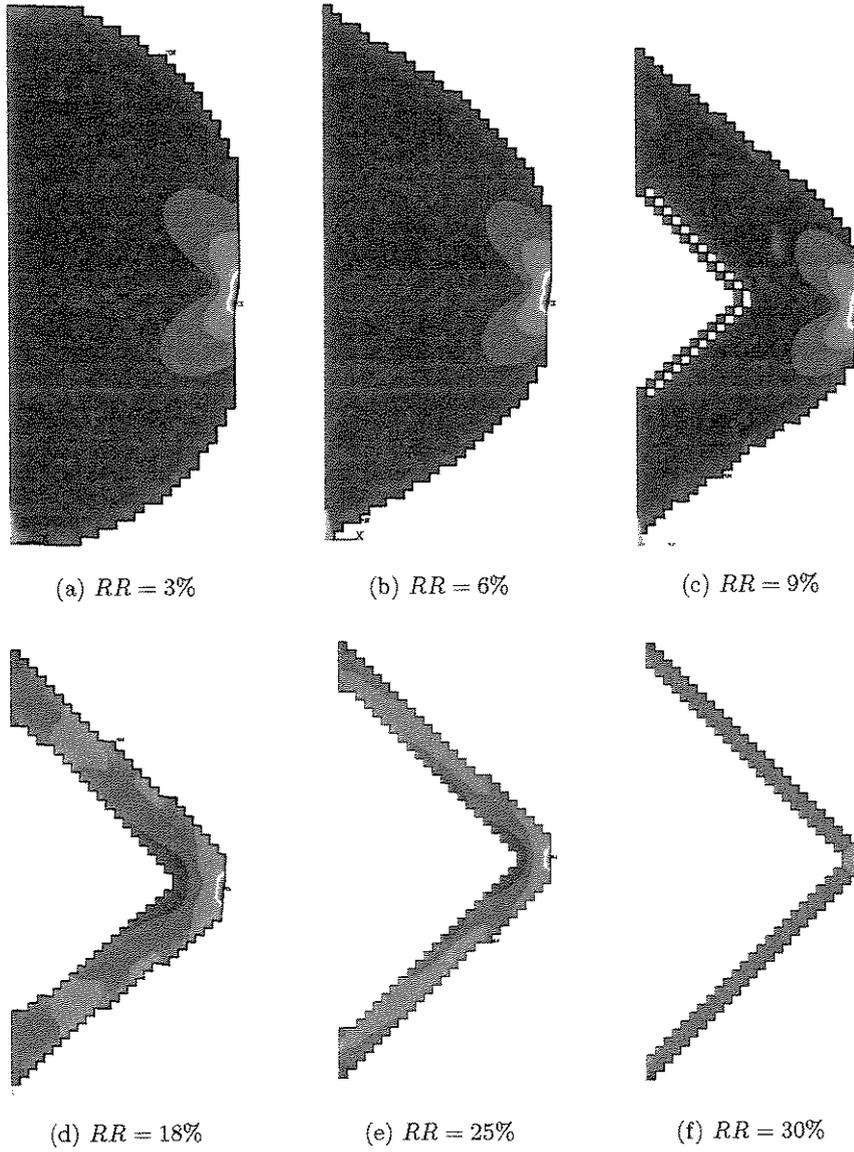


Figura 7.14: Etapas da OEE para a Estrutura de Duas Barras

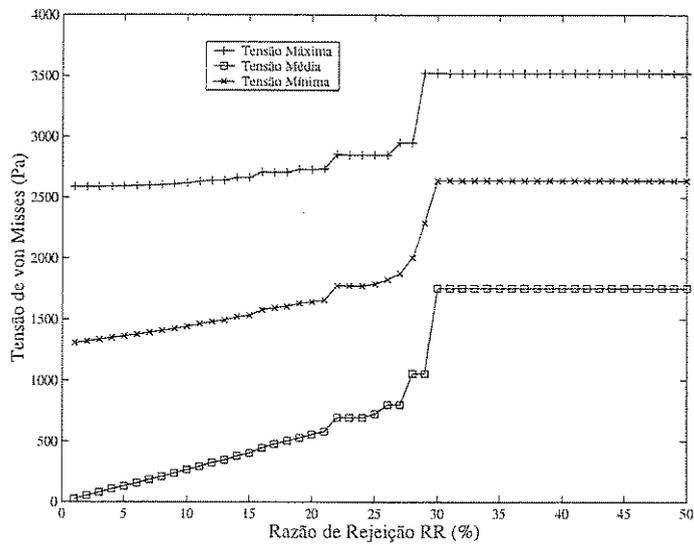
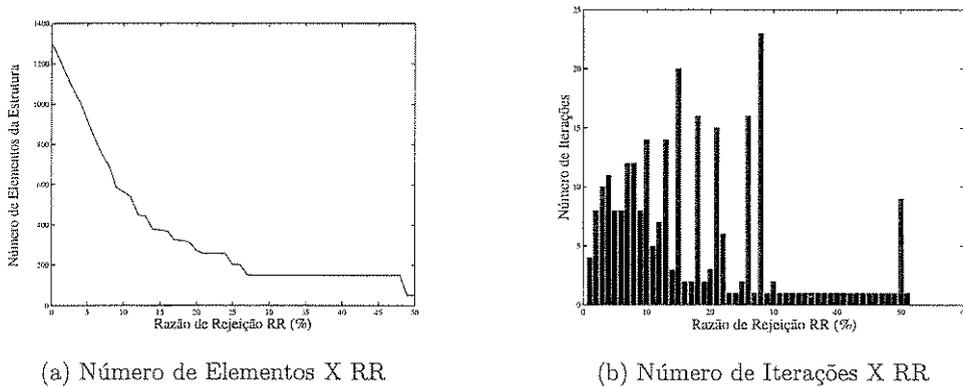


Figura 7.15: Variação das Tensões σ_{EQV} em função de RR - Estrutura de Duas Barras



(a) Número de Elementos X RR

(b) Número de Iterações X RR

Figura 7.16: Variação de parâmetros do modelo - Estrutura de Duas Barras

mostrados concordam com os obtidos em (Xie and Steven, 1993) validando a implementação realizada.

7.3.2 Estrutura de Duas Barras - Influência do domínio inicial

Ainda em relação ao exemplo da Estrutura de Duas Barras, foi feita uma avaliação da influência do domínio inicial na resposta otimizada.

Para isso, a malha do domínio inicial sofreu duas modificações, que consistiu na retirada de uma área quadrada de 10×10 elementos posicionada de duas maneiras, conforme esquematizado na figura 7.17.

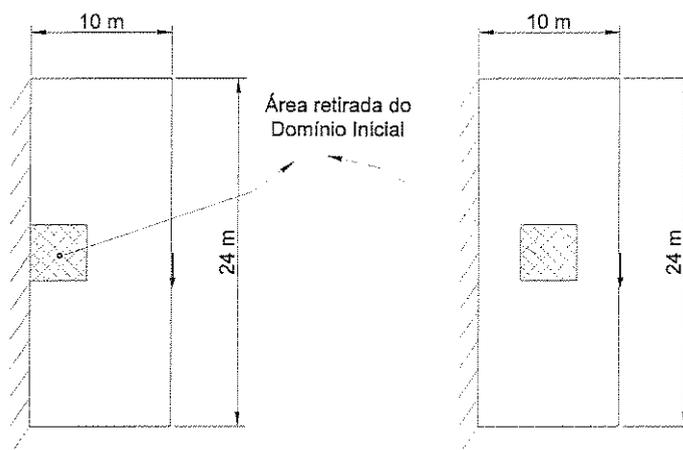


Figura 7.17: Modificações no domínio inicial para a Estrutura de Duas Barras

As figuras 7.18 e 7.19, mostram três etapas do processo evolucionário obtido para cada uma das modificações sofridas pelo domínio inicial. Comparando estes resultados com aqueles já mostrados na figura 7.12, tem-se que a topologia da estrutura ao longo do processo evolucionário foi diferente até a $RR = 9\%$ para a primeira modificação, já a segunda causou alterações no processo evolucionário até a $RR = 10\%$.

Após estes valores de RR , o processo evolucionário não se alterou mais em relação ao caso original, tendo todos alcançado a mesma topologia para $RR = 30\%$. A explicação para tal fato, é que após as etapas $RR = 9\%$, primeira modificação e $RR = 10\%$, segunda modificação, todos os elementos do contorno da região modificada já tinham sido retirados, fazendo com que os dois processos evolutivos se tornassem iguais ao caso original.

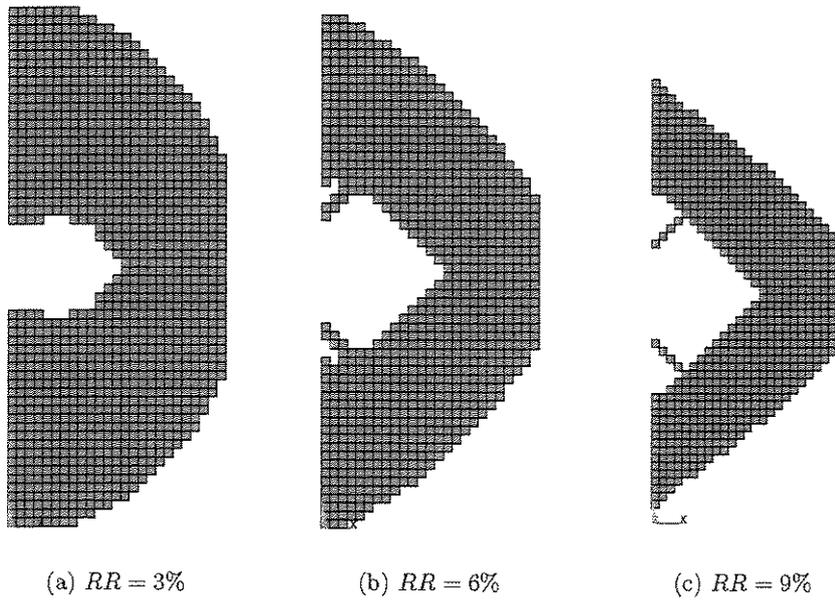


Figura 7.18: Etapas da OEE para a primeira modificação

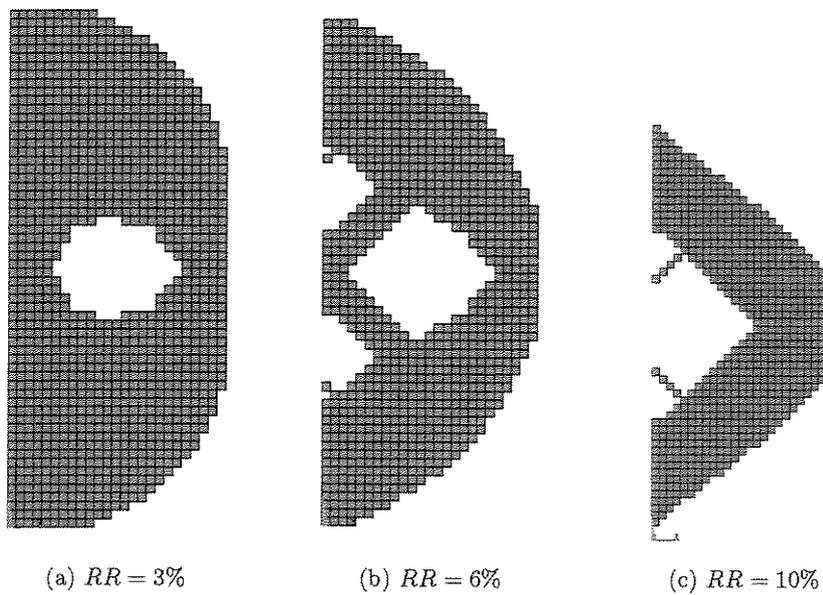


Figura 7.19: Etapas da OEE para a segunda modificação

Conclui-se que para este exemplo, variações no domínio inicial não alteram a resposta otimizada. Caso o domínio retirado ocupasse o espaço da solução ótima, este resultado seria bastante modificado.

7.3.3 Estrutura de Michell

Uma vez que o exemplo da Estrutura de Michell já foi detalhado no item 7.2.1, a seguir será mostrado os resultados encontrados com o programa MEFLABC++.

Neste exemplo tem-se o objetivo de comparar e analisar os resultados encontrados fazendo uso de diferentes programas ANSYS/MEFLABC++, bem como avaliar a influência das condições de contorno nestes resultados.

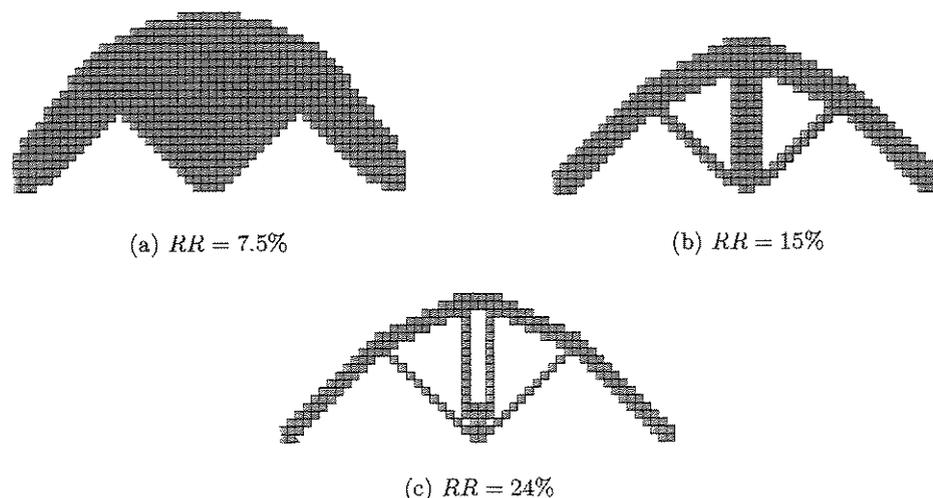


Figura 7.20: Etapas do Processo Evolucionário - Estrutura de Michell

A figura 7.20 mostra três etapas do processo evolucionário, sendo que a solução final é bastante similar a encontrada em (Xie and Steven, 1993) e constitui uma aproximação da solução analítica da figura 7.1.

As diferenças observadas entre a solução encontrada com a OEE e a estrutura ótima de Michell podem ser explicadas pelo fato da solução de Michell ser baseada em uma treliça onde os elementos são barras pivotadas entre si, ao passo que o modelo utilizado na OEE era contínuo. Um outro motivo seria que os membros da estrutura de Michell apresentam seção constante, o que não pode ser garantido na solução evolucionária.

A figura 7.21 mostra o comportamento das tensões σ_{EQV} máxima, média e mínima para a Estrutura de Michell. Observa-se que para o domínio inicial especificado anteriormente, a tensão σ_{EQV} máxima encontrada na análise da estrutura otimizada foi superior em 21%

em relação àquela calculada na primeira iteração, entretanto, a redução de massa total da estrutura foi de 84% na massa da estrutura, e um total de 111 iterações foram necessárias, conforme registrado na figura 7.22-b.

Os resultados encontrados no software MEFLABC++ foram idênticos aos obtidos no ANSYS o que pode ser comprovado pelas figuras 7.20 e 7.4, o que novamente valida a implementação realizada.

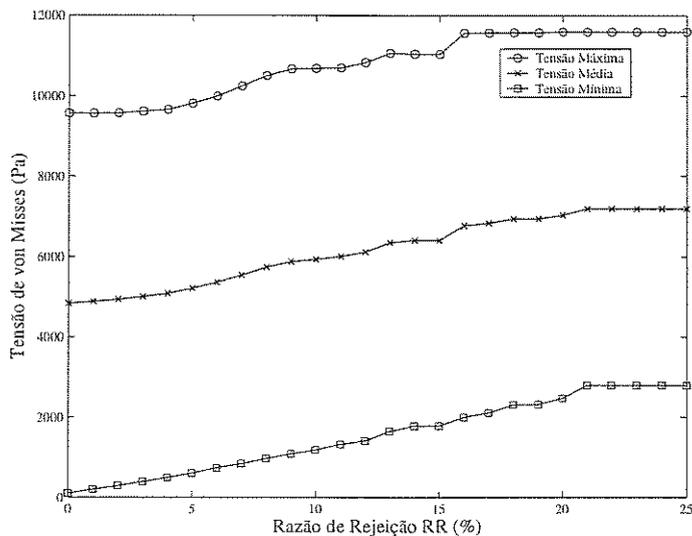
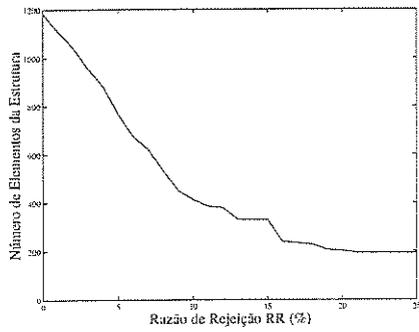


Figura 7.21: Variação das Tensões σ_{EQV} em função de RR - Estrutura de Michell

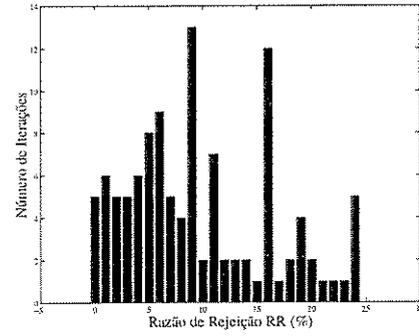
A avaliação da influência das condições de contorno no exemplo da Estrutura de Michell consistiu em liberar o deslocamento na direção x de um do nós restritos no exemplo anterior, como mostra a figura 7.23.

Neste caso, como pode ser observado nas etapas evolucionárias da figura 7.24, os elementos que fazem a ligação entre os nós restritos e o local de aplicação da força permaneceram na estrutura, pois estes elementos têm a função de evitar que o apoio com restrição apenas na direção y mova-se para a direita devido ao esforço aplicado.

Assim sendo, observa-se a grande dependência da resposta otimizada em relação à correta escolha das condições de contorno.



(a) Número de Elementos X RR



(b) Número de Iterações X RR

Figura 7.22: Variação de parâmetros do modelo - Estrutura de Michell

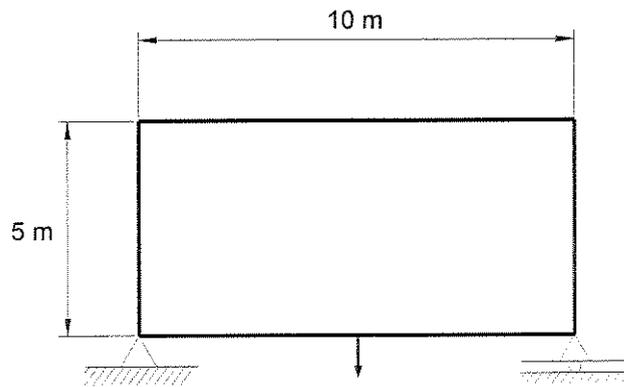


Figura 7.23: Domínio Inicial modificado para a Estrutura de Michell

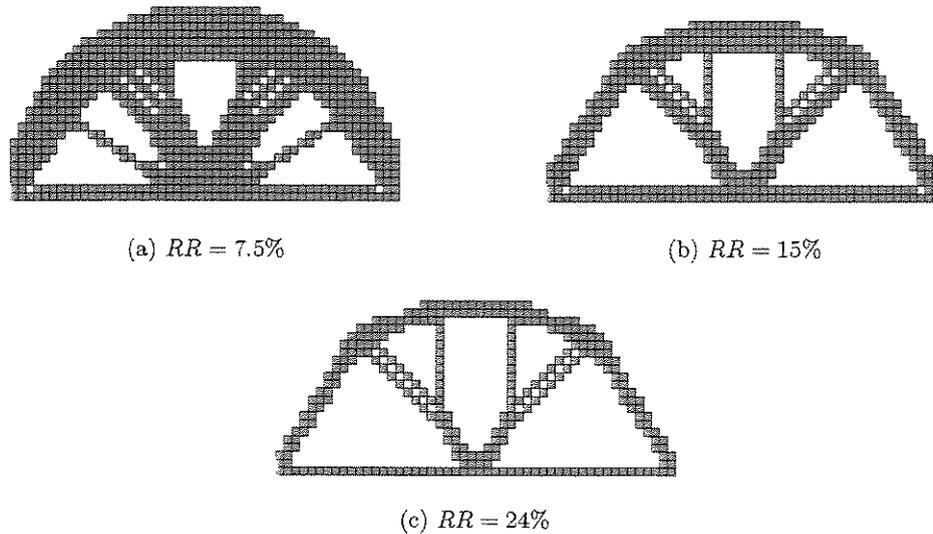


Figura 7.24: Etapas do Processo Evolucionário para a Estrutura de Michell modificada

7.4 Exemplos para a Otimização em Rigidez - MEFLABC++

Nesta seção serão apresentados os resultados encontrados com o MEFLABC++ para a OEE com critério de projeto em rigidez. O objetivo é determinar estruturas mais leves satisfazendo limites de rigidez ou energia de deformação pré-estabelecidos. Os exemplos foram escolhidos a fim de validar a implementação através da comparação com os resultados encontrados pelos autores do método de otimização estrutural evolucionário.

7.4.1 Estrutura de Duas Barras

O primeiro exemplo em rigidez trata-se da já detalhada Estrutura de Duas Barras, entretanto caracterizada por um domínio inicial mais refinado e com outras dimensões. O objetivo é observar o comportamento evolucionário em um exemplo já estudado, mas com outro critério de projeto, bem como avaliar o índice de performance estrutural apresentado na seção 5.4 .

A figura 7.25 mostra o domínio inicial de trabalho com dimensões $200mm \times 450mm$ e espessura de $1mm$. A malha sobre o domínio possui 32×72 elementos quadrilaterais de quatro nós. As características do material são coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 200GPa$. Uma força de $200N$ está aplicada na direção y para baixo.

Deseja-se minimizar a massa sujeito a restrição de deslocamento mínimo na direção y no

ponto de aplicação da força F . O número de elementos retirados a cada iteração corresponde a 1% do número de elementos presentes no domínio inicial.

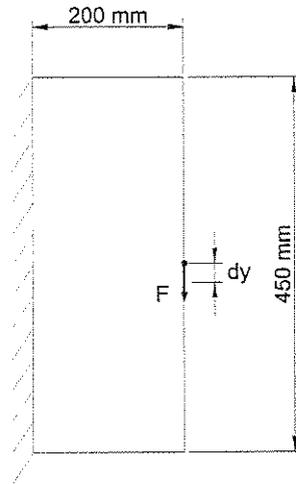


Figura 7.25: Domínio inicial de trabalho para a Estrutura de duas Barras

A figura 7.26 mostra três etapas do processo evolucionário para a Estrutura de Duas Barras.

A determinação da estrutura ótima foi feita com base no índice de performance estrutural, cuja variação ao longo do processo evolucionário está na figura 7.27, sendo que o valor máximo deste parâmetro foi considerado como critério de parada do processo evolucionário resultando na estrutura da figura 7.26-c.

Os resultados encontrados são bastante semelhantes aos apresentados em (Liang et al., 2000) tanto em termos da topologia otimizada quanto ao número de iterações necessárias para a determinação da mesma.

Estes resultados foram praticamente iguais aos determinados para a mesma estrutura tendo como critério de projeto a tensão local.

Uma primeira explicação se deve ao fato de em ambos os exemplos as condições de contorno são as mesmas.

Outro motivo seria que para o critério de projeto em rigidez, optou-se em limitar o deslocamento no mesmo local e direção de aplicação do carregamento tornando os dois exemplos também semelhantes quanto ao critério de rejeição. Pois no primeiro caso, eliminou-se elementos menos tensionados, característica esta proporcional ao estado de deformação dos mesmos, ao passo que no segundo, os elementos com as menores energias de deformação foram

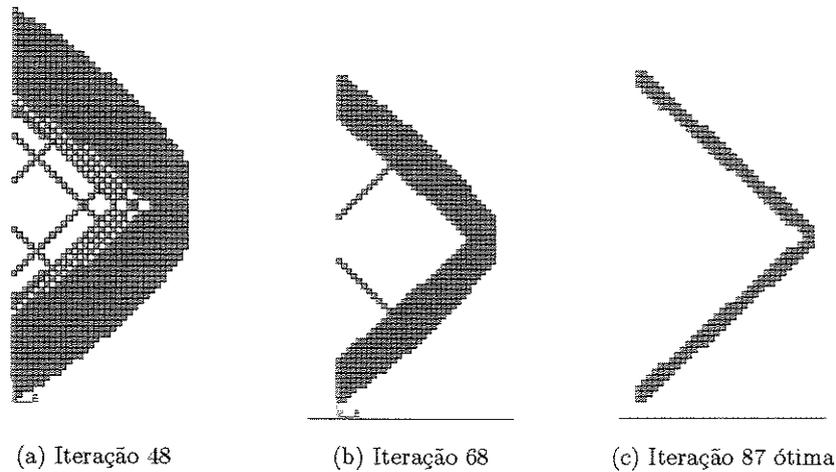


Figura 7.26: Etapas da OEE para a Estrutura de Duas Barras

retirados.

7.4.2 Estrutura de Michell

Este exemplo volta à Estrutura de Michell já mostrada, entretanto, o objetivo é observar o comportamento desta estrutura com respeito a um outro critério de projeto. Avalia-se também a influência do número de elementos retirados a cada iteração na topologia obtido, e no índice de performance estrutural.

O domínio inicial tem como dimensões $400mm \times 200mm$ e uma espessura de $2mm$, e foi discretizado em 100×50 elementos quadrilaterais de quatro nós. O material considerado apresenta coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 200GPa$. As condições de contorno são iguais ao modelo já apresentado, mas a força vertical é de $400N$.

É feita uma restrição ao deslocamento na direção y no ponto de ação da força F e dois casos foram estudados. No primeiro caso foram retirados 40 elementos por iteração ou 0,8% do número inicial de elementos no domínio, e no segundo caso, 0,4% ou 20 elementos.

Através da variação do índice de performance estrutural da figura 7.29, determinou-se a topologia otimizada para os dois casos respectivamente. A primeira configuração mostrada na figura 7.30-a possui 981 elementos apresentando um deslocamento de $2,90 \cdot 10^{-5}m$ no local de aplicação da força e um coeficiente de performance de 1,96. A segunda configuração mostrada na figura 7.30-b, possui 1248 elementos, com um deslocamento de $2,07 \cdot 10^{-5}m$ no local de aplicação da força e um coeficiente de performance de 1,96.

Os dados apresentados acima demonstram que, neste caso, a retirada de um número

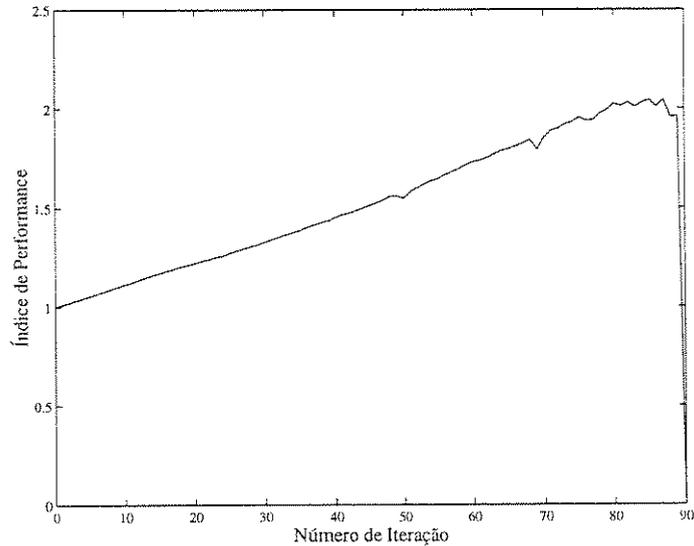


Figura 7.27: Variação do Coeficiente de Performance em função do número de iterações - Estrutura de Duas Barras

menor de elementos a cada iteração leva a estruturas com menor deslocamento para o mesmo coeficiente de desempenho. Outro fator neste sentido é que a estrutura otimizada encontrada é muito semelhante aos resultados apresentados em (Liang et al., 2000). Vale observar que a escolha de uma ou outra estrutura deve ser baseada na restrição mais relevante, ou seja, o deslocamento ou o peso total.

7.4.3 Estrutura sujeita a Múltiplos Limites de Deslocamentos

Este exemplo objetiva avaliar o algoritmo de OEE com critério de projeto que limita múltiplos deslocamentos. Analisa-se a influência do número de elementos retirados a cada etapa sobre o processo evolucionário.

O domínio inicial apresenta-se como uma viga bi-apoiada sujeita a três forças na direção y de valor $10kN$ cada uma, localizadas simetricamente, como mostrado na figura 7.31. As dimensões são $300mm \times 100mm$ e $5mm$ de espessura, estando o domínio inicial discretizado em 32×96 elementos. As características do material são coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 200GPa$.

O objetivo é minimizar o volume mantendo-se os deslocamentos na direção y limitados nos pontos de ação das três forças F , sendo que são analisados dois casos. No primeiro caso tem-se a retirada de 30 elementos ou 1% do número de elementos do domínio inicial a cada iteração. No segundo caso, são retirados 16 elementos ou 0,5% do número de elementos do

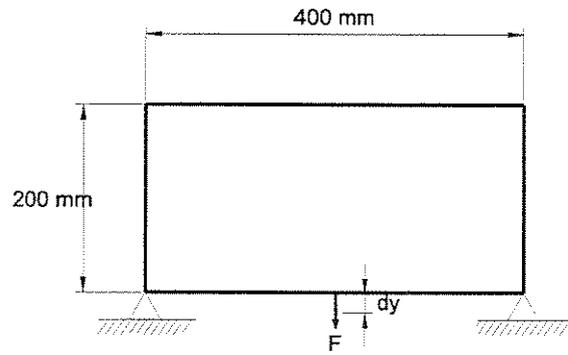


Figura 7.28: Domínio inicial para a Estrutura de Michell

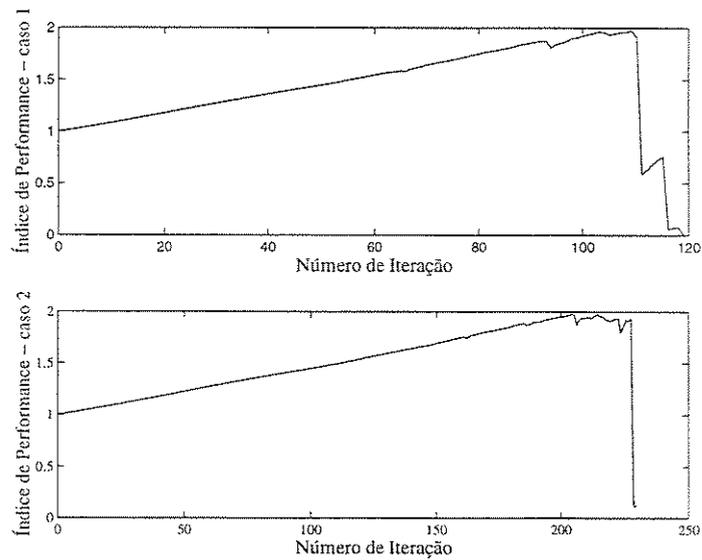


Figura 7.29: Variação do Coeficiente de Performance em função do número de iterações - Estrutura de Michell

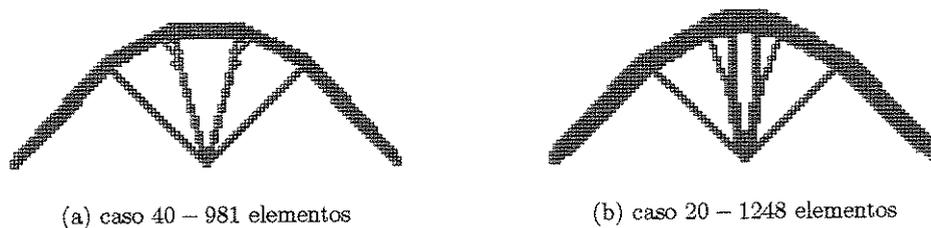


Figura 7.30: Estrutura Otimizada para a Estrutura de Michell

domínio inicial.

Conforme o índice de performance estrutural mostrado na figura 7.32, determinou-se a estrutura otimizada para os dois casos.

No *caso30*, a estrutura com maior índice de performance estrutural apresentou máximo deslocamento de $6,20 \cdot 10^{-4}m$, e coeficiente de performance de 1,37 para um total 1152 elementos na estrutura, como mostra a figura 7.33-a.

Quando se retirou 16 elementos por iteração, observou-se três configurações com alto índice de performance. A primeira, mostrada na figura 7.33-b, possui um deslocamento máximo de $4,28 \cdot 10^{-4}m$ no local intermediário de aplicação da força, um coeficiente de performance de 1,28 com 1824 elementos. A segunda configuração, mostrada na figura 7.33-c, possui um deslocamento máximo de $5,62 \cdot 10^{-4}m$ no local intermediário de aplicação da força, um coeficiente de performance de 1,28 com 1392 elementos remanecentes. E finalmente a terceira, mostrada na figura 7.33 - d, possui um deslocamento máximo de $7,83 \cdot 10^{-4}m$, um coeficiente de performance de 1,30 para 976 elementos.

As figuras 7.34 e 7.35 mostram a evolução dos deslocamentos de dois nós para os casos estudados. Foram escolhidos um nó central e outro lateral, uma vez que a estrutura é simétrica.

Novamente, a escolha da estrutura mais adequada, deve ser baseada na restrição mais relevante, ou seja, o deslocamento ou o peso total.

Observa-se que ajustando a figura 7.33-c através da retirada das duas linhas inclinadas com menos elementos, tem-se um resultado muito próximo ao da figura 7.33-a que é praticamente o mesmo encontrado em (Liang et al., 2000). Este resultado permite dizer que neste caso, o número de elementos retirados a cada iteração não influenciou significativamente na resposta otimizada.

7.4.4 Viga MBB

O último exemplo com critério de projeto em rigidez, tem o objetivo de comparar os resultado encontrados via módulo de OEE do MEFLABC++ e aqueles encontrados por outros métodos para um mesmo problema de otimização.

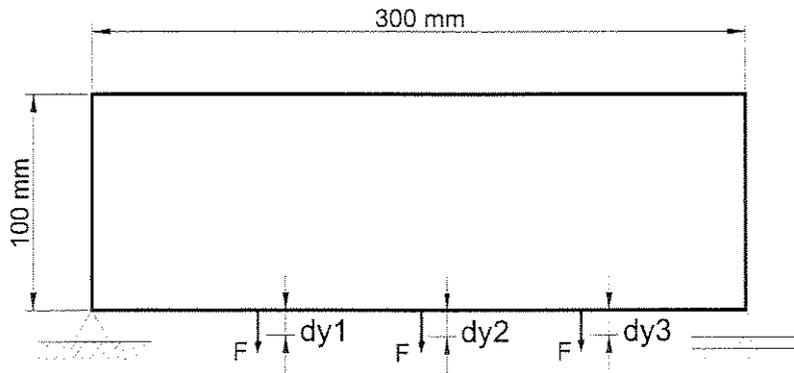


Figura 7.31: Domínio inicial para a Estrutura de Múltiplos Deslocamentos Restritos

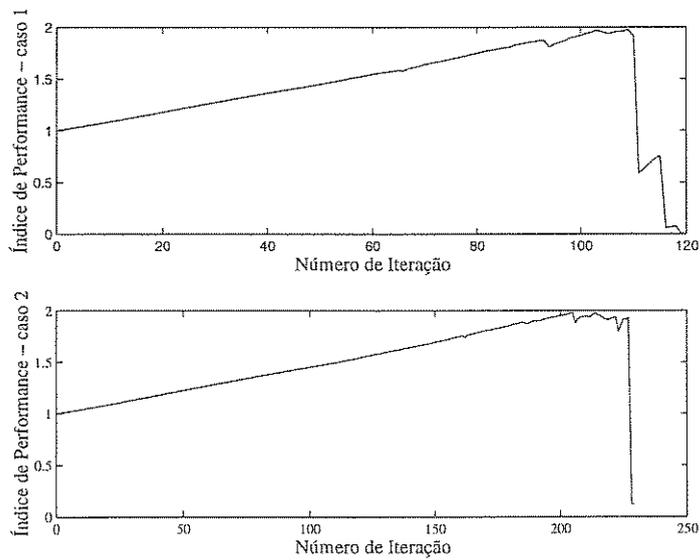


Figura 7.32: Variação do Coeficiente de Performance em função do número de iterações - Estrutura de Múltiplos Deslocamentos Restritos

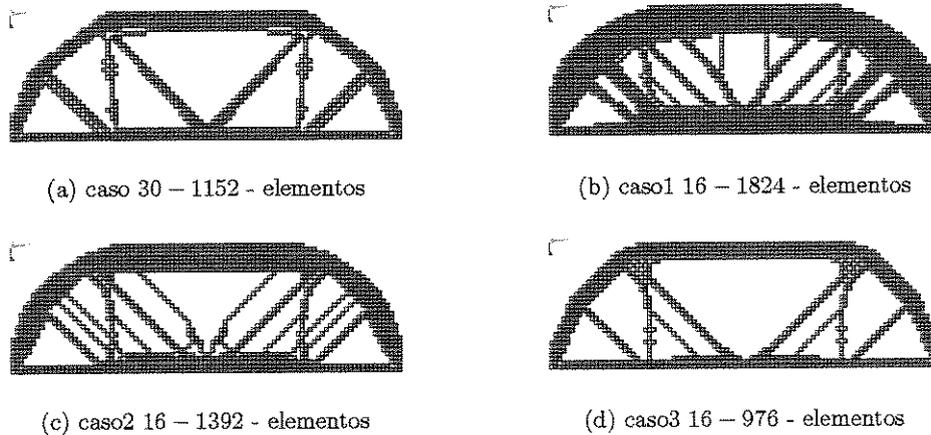


Figura 7.33: Estruturas otimizadas para o caso de Múltiplos Deslocamentos Restritos

A estrutura a ser otimizada é uma viga de um avião civil construído pela Messerschmitt-Bolkow-Blohm (Olhoff et al., 1991), que se tornou um problema clássico de otimização estrutural de topologia (Xie and Steven, 1997).

As dimensões do domínio inicial são $2400mm \times 400mm$ e $1mm$ de espessura, as características do material são coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e módulo de elasticidade $E = 200GPa$.

A viga apresenta-se bi-apoiada com uma força vertical para baixo de $10kN$ aplicada no nó localizado no ponto médio do lado horizontal superior, como mostrado na figura 7.36.

A deflexão máxima não deve exceder $9,4mm$, sendo que o valor de deflexão obtido na análise do domínio inicial é de $6,3mm$. O resultado encontrado pode ser observado na figura 7.37, correspondendo a uma topologia muito semelhante às encontradas por Xie and Steven (1997) e Olhoff et al. (1991).

Continuando a comparação dos resultados, tem-se que para o mesmo exemplo, mas considerando ambos os deslocamentos restritos nos nós das extremidades do lado inferior da estrutura, a solução otimizada mostrada na figura 7.38 apresenta-se também bastante semelhante aos resultados encontrados em (Gea, 1996).

Com os resultados apresentados para este exemplo tem-se a validação do método evolucionário de otimização estrutural, pois os resultados muito se assemelham àqueles encontrados por outros métodos de otimização para o mesmo problema.

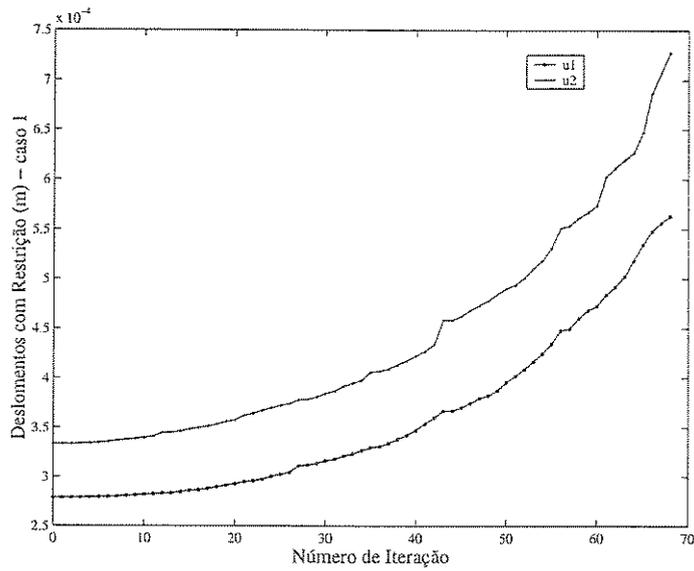


Figura 7.34: Variação dos Deslocamentos em função do número de iterações - caso 1

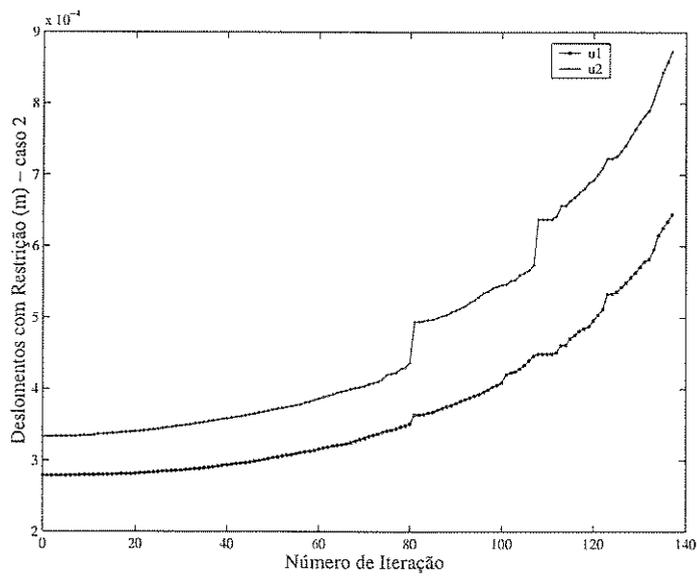


Figura 7.35: Variação dos Deslocamentos em função do número de iterações - caso 2

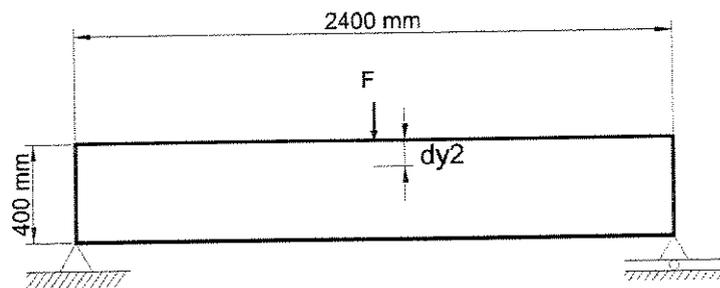


Figura 7.36: Domínio inicial para a Viga MBB

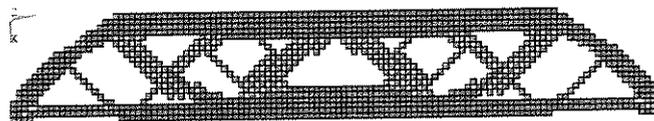


Figura 7.37: Estrutura otimizada para Viga de Suporte - MBB

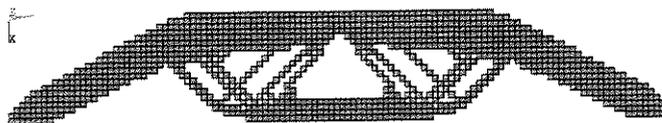


Figura 7.38: Estrutura otimizada para a para a Viga de Suporte - MBB modificada

7.5 Exemplos para a Otimização em Frequência - MEFLABC++

Nesta seção são apresentados os resultados encontrados com MEFLABC++ para a OEE em frequência. O objetivo é determinar estruturas mais leves sujeitas a restrições sobre as frequências naturais da estrutura. Serão discutidos casos que promovem variações de uma ou mais frequências específicas, e ampliam ou reduzem o espaçamento entre as frequências.

7.5.1 Estrutura em Viga

O primeiro exemplo de otimização em frequência será aplicado a uma estrutura do tipo viga modelada por elementos quadrilaterais de quatro nós.

O domínio inicial possui dimensões de $5m \times 1m$ e espessura $0,1m$, e apresenta-se discretizado em 100×20 elementos. As características do material são: coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, módulo de elasticidade $E = 200GPa$, e a densidade $\rho = 7800 kg/mm^3$.

Na figura 7.39 tem-se o domínio inicial de trabalho, do qual a estrutura será sintetizada conforme o critério em frequência escolhido. O problema de otimização consiste em encontrar uma nova topologia que maximize uma determinada frequência natural.

Os modos de vibração de interesse são os relacionados ao comportamento de viga da estrutura e os exemplos apresentados farão a aplicação dos algoritmos apresentados na seção 5.5.

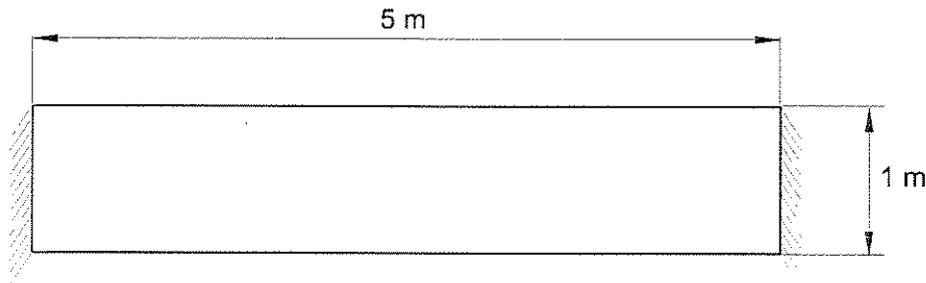


Figura 7.39: Domínio Inicial para a OEE em frequência

O primeiro caso teve o objetivo de aumentar a primeira frequência ω_1 através da retirada de quatro elementos por iteração até um total de 10% de material retirado.

A estrutura encontrada e a variação das quatro primeiras frequências ao longo do processo evolucionário estão nas figuras 7.40 e 7.41 respectivamente. O resultado encontrado é idêntico

ao apresentado em (Xie and Steven, 1996) onde se tem um aumento de 11,7% na primeira frequência natural. Tem-se ainda que retirando mais material da estrutura, o furo ao centro da estrutura tende a aumentar até o colapso com a separação da estrutura em duas partes.

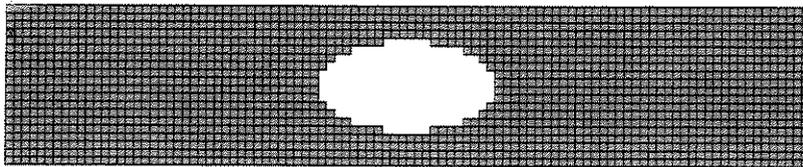


Figura 7.40: Estrutura de Viga 10%, de material removido e ω_1 11,7% maior

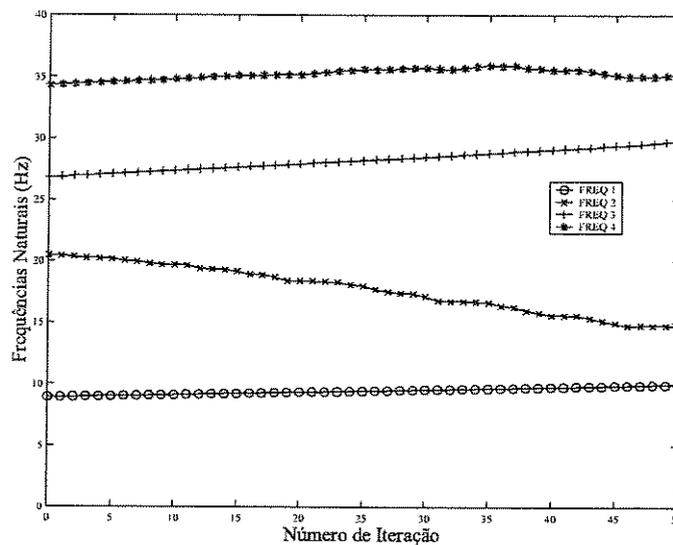


Figura 7.41: Evolução das quatro primeiras frequências para o caso de aumentar ω_1

O próximo caso teve a segunda frequência de vibração como objeto de estudo retirando-se da estrutura 10% de material. A estrutura encontrada e a variação das quatro primeiras frequências ao longo do processo evolucionário estão nas figuras 7.42 e 7.43 respectivamente. Observa-se que a frequência ω_2 variou em 9,5%, resultado este, também idêntico ao encontrado em (Xie and Steven, 1996). A continuidade do processo evolucionário neste caso manteve a mesma topologia, apenas tornando os dois furos maiores.

Os dois estudos apresentados anteriormente validam a implementação do módulo de OEE com critério de projeto em frequência, pois confirmaram os resultados encontrados em (Xie and Steven, 1996).

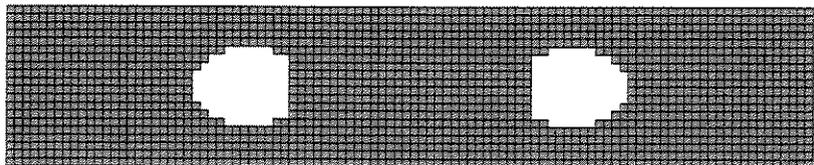


Figura 7.42: Estrutura de Viga 10%, de material removido e ω_2 9,5% maior

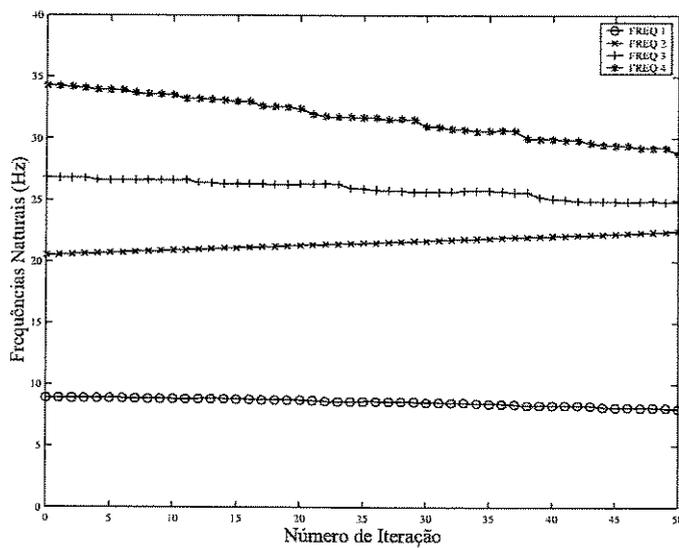


Figura 7.43: Evolução das quatro primeiras frequências para o caso de aumentar ω_2

O terceiro caso aplica a análise para a frequência natural ω_4 associada ao próximo modo de vibração em flexão da estrutura.

As figuras 7.44 e 7.45 mostram, respectivamente, a estrutura após a eliminação de 10% de material e variação das quatro primeiras frequências ao longo do processo evolucionário, que proporcionou um aumento de 8,9% na quarta frequência natural.

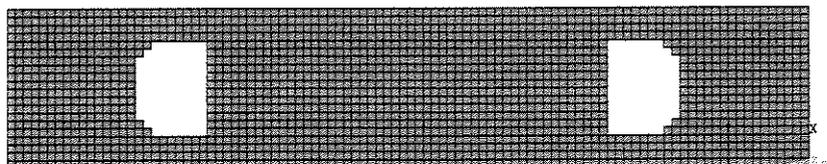


Figura 7.44: Estrutura de Viga 10%, de material removido e ω_4 8,9% maior

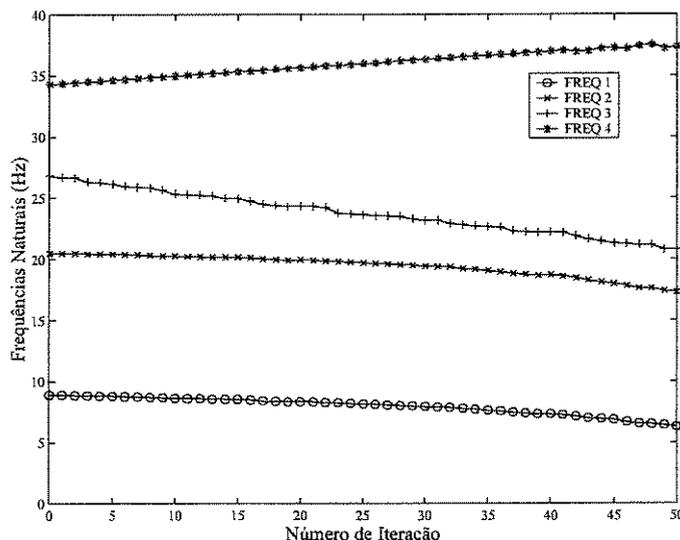


Figura 7.45: Evolução das quatro primeiras frequências para o caso de aumentar ω_4

O próximo problema de otimização consiste em distanciar os valores de duas frequências naturais escolhidas. Os pares de frequências analisados são $\omega_2 - \omega_1$ e $\omega_4 - \omega_2$.

As figuras 7.46 e 7.47 mostram, respectivamente, a estrutura final e variação das quatro primeiras frequências ao longo do processo evolucionário para o caso de ampliar a diferença $\omega_2 - \omega_1$.

Observa-se que as frequências ω_3 e ω_4 reduzem de valor. O aumento na diferença entre as frequências naturais ω_2 e ω_1 foi de 29,8% com a remoção de 10% de material. Para esta

quantidade de material retirado, os resultados foram idênticos aos encontrados em (Xie and Steven, 1996), e retirando-se mais elementos da estrutura tem-se a presença de furos maiores, bem como a diminuição da largura da estrutura na região central do modelo.

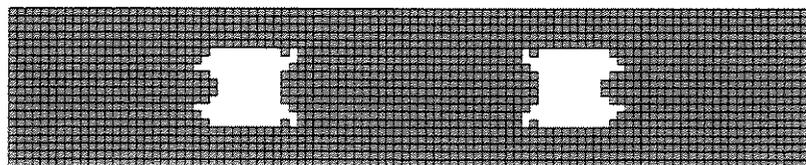


Figura 7.46: Estrutura de Viga 10%, de material removido e $(\omega_2 - \omega_1)$ 29,8% maior

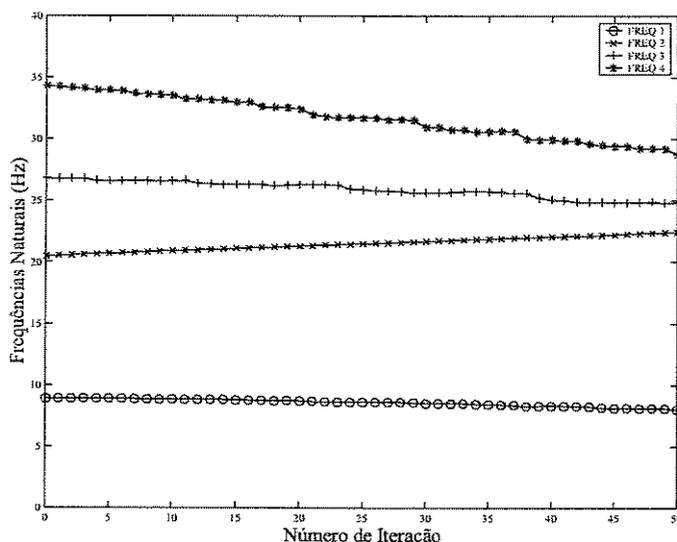


Figura 7.47: Evolução das quatro primeiras freqüências para o caso de aumentar $(\omega_2 - \omega_1)$

Na análise da diferença entre ω_4 e ω_2 a separação de seus valores foi de 46% com a remoção de 10% dos elementos, ficando a estrutura como mostra a figura 7.48.

Neste caso, observou-se o cruzamento dos modos de vibração, ou seja, a ordem das freqüências naturais mudou em relação à estrutura original.

Observando a figura 7.49, que mostra a evolução das oito primeiras freqüências ao longo da OEE, tem-se o cruzamento de modos na iterações 38 e 48. No caso da iteração iteração 48, ou para 9,8% de material removido, houve o cruzamento entre as freqüências ω_4 , ω_5 e ω_6 .

A figura 7.50 mostra os modos de vibração da Estrutura de Viga antes e após a aplicação da OEE. Observa-se que duas formas modais correspondentes mudaram sua posição

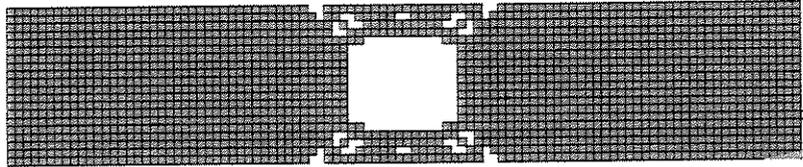


Figura 7.48: Estrutura de Viga, 10% de material removido e $(\omega_4 - \omega_2)$ 46,0% maior

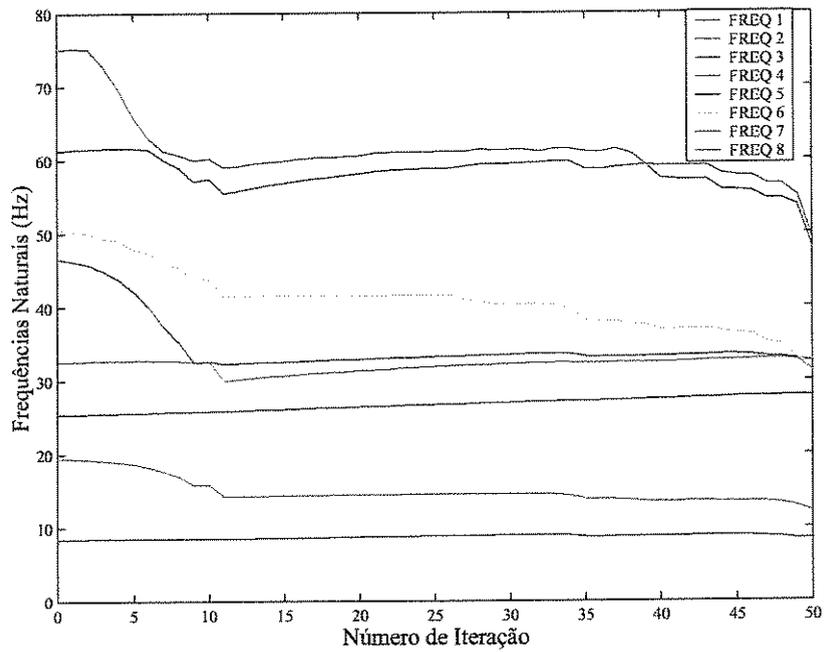


Figura 7.49: Evolução das oito primeiras frequências para o caso de aumentar $(\omega_4 - \omega_2)$

na seqüência dos modos. A forma modal relativa ao quarto modo passou a caracterizar o sexto modo, o mesmo acontecendo com a forma modal relativa ao sexto modo que passou a caracterizar o quarto modo.

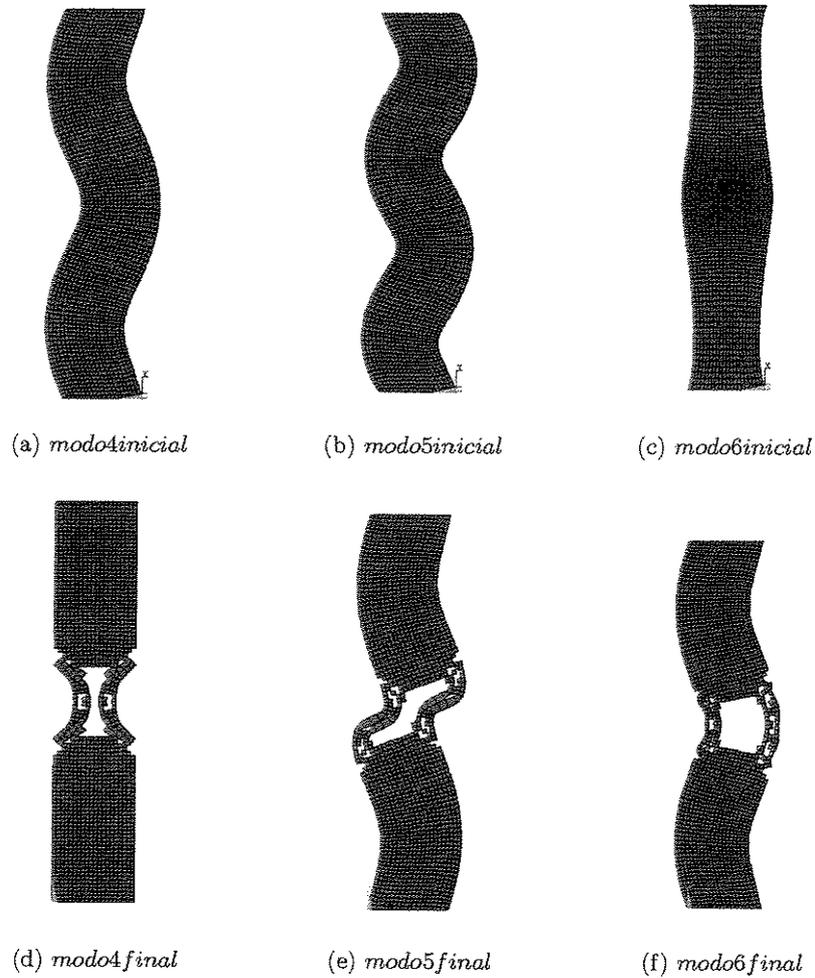


Figura 7.50: Modos de Vibração iniciais e finais para $(\omega_4 - \omega_2)$ - Estrutura de Viga

O cruzamento de modos pode ocorrer sempre que a topologia da estrutura modificar-se a ponto de a mesma perder a semelhança com a estrutura original, o que representa uma limitação do método e ao mesmo tempo determina que mais estudos sejam realizados no sentido de superar tal deficiência. O problema de cruzamento dos modos aparece na maioria

dos métodos de otimização topológica, e várias soluções foram propostas, como por exemplo em (Kikuchi et al., 1995).

7.5.2 Estrutura Retangular

O próximo exemplo de otimização em frequência tem o objetivo de avaliar a possibilidade de se encontrar uma nova topologia restringindo-se a variação de duas ou mais frequências naturais da estrutura simultaneamente.

O teste é efetuado sobre estrutura mostrada na figura 7.51, onde o domínio inicial é caracterizado por um retângulo de lados $0,15m \times 0,1m$ e espessura de $10mm$, que foi discretizado em 45×30 elementos quadrilaterais de quatro nós. As características do material são: coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, módulo de elasticidade $E = 70GPa$ e a densidade $\rho = 2700 kg/mm^3$.

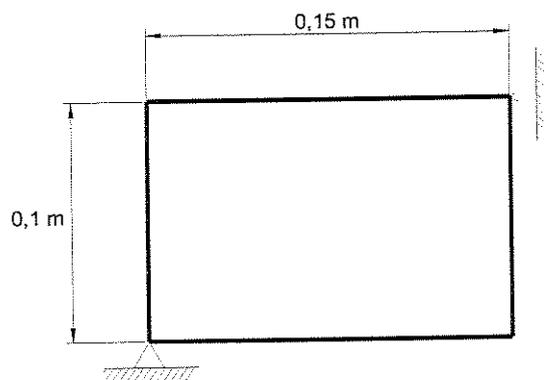


Figura 7.51: Domínio inicial para a Estrutura Retangular

As condições de contorno são restrições de deslocamentos mostradas na figura 7.51. No algoritmo evolucionário adotou-se que 8 elementos são retirados por iteração até que 50% do material da estrutura seja retirado.

Inicialmente, fez-se uma OEE com o objetivo de se aumentar a primeira frequência. A figura 7.52 mostra a estrutura final, que teve um aumento para a primeira frequência de 38,2%, validando mais uma vez a implementação, uma vez que o resultado foi idêntico ao encontrado em (Xie and Steven, 1997).

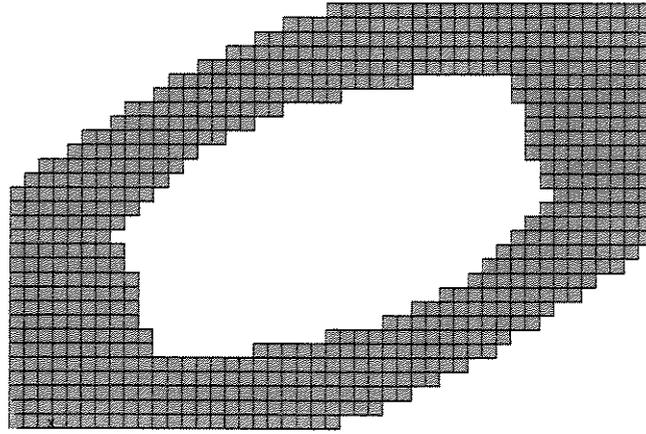


Figura 7.52: Estrutura Retangular 50% de material removido e ω_1 38,2% maior

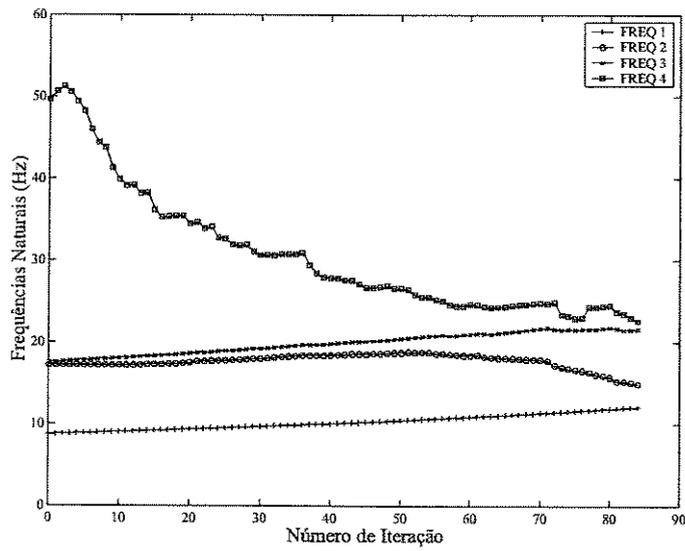


Figura 7.53: Evolução das quatro primeiras frequências para o caso de aumentar ω_1 - Estrutura Retangular

A figura 7.53 mostra a evolução das quatro primeiras frequências naturais. Observando-se que o valor da segunda frequência aproximou-se do valor da primeira, ocorrendo o mesmo para a quarta e terceira frequências naturais. Tal fato é explicado pela falta de controle sobre o que está acontecendo com as outras frequências naturais da estrutura que não estão incluídas no critério.

No sentido de superar o problema verificado anteriormente, tem-se no caso seguinte, a utilização do algoritmo da OEE que atua sobre mais de uma frequência ao mesmo tempo. Assim sendo, o objetivo é a determinação de uma topologia que proporcione o aumento das três primeiras frequências naturais.

Os resultados a seguir alcançam tal objetivo, pois conforme a figura 7.54, que mostra a evolução das quatro primeiras frequências, tem-se que o aumento das três primeiras frequências naturais foi de 35,1%, 21,3% e 27,5% respectivamente.

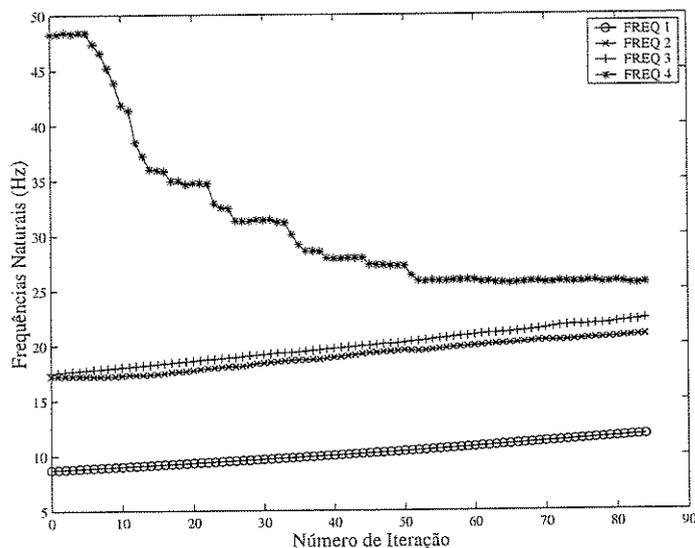


Figura 7.54: Evolução das quatro primeiras frequências para o caso de aumentar ω_1 , ω_2 e ω_3 - Estrutura Retangular

Estes resultados correspondem a 50% de material retirado e a nova topologia pode ser observada na figura 7.55, caracterizando-se a adição de uma barra ao centro do furo. O resultado é muito similar ao encontrado em (Xie and Steven, 1997).

Os resultados encontrados até aqui para todos os exemplos, validam a implementação realizada da OEE com critério de projeto em frequência. É importante destacar que o comportamento das frequências naturais da estrutura que não são objeto da otimização não pode ser previsto, e que futuros estudos deverão ser realizados para um controle mais amplo no espectro de frequência das estruturas.

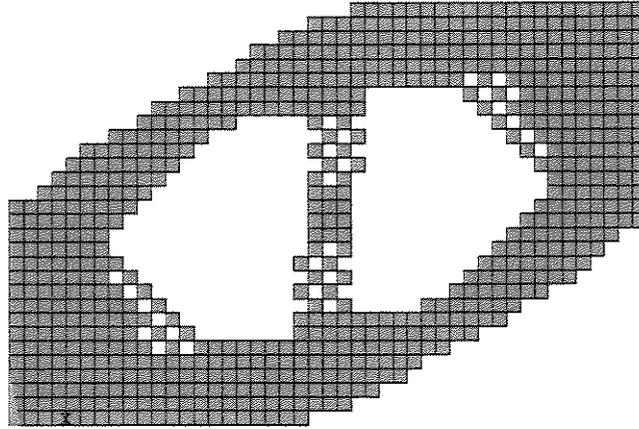


Figura 7.55: Estrutura Retangular 50% de material removido e ω_1 35,1% maior, ω_2 21,3% maior e ω_3 27,5% maior

7.5.3 O número de sensibilidade α

O parâmetro de sensibilidade α definido na (5.27) foi usado nos exemplos anteriores como critério de rejeição. A retirada dos elementos é baseada neste parâmetro.

A figura 7.56 mostra o mapa de α 's mais as topologias encontradas nos casos dos critérios de aumentar separadamente as três primeiras freqüências naturais. Observa-se que os elementos retirados da estrutura, ou seja, aqueles com os maiores valores de α para a respectiva freqüência natural, se encontraram nos locais de maiores deslocamentos para cada modo, uma vez que os tons avermelhados no mapa de cores da figura 7.56 representam os maiores valores de α . Tal fato será explicado a seguir.

Imaginando um eixo transversal na estrutura passando pelas regiões com maiores valores de α , tem-se ao longo deste eixo uma variação de α , onde é possível observar que os menores valores ocorrem próximo às bordas da viga, pois no mapa de cores os tons em direção ao vermelho correspondem aos maiores valores, ao passo que os tons em direção ao azul correspondem aos menores.

A variação do parâmetro α nesta região, para cada modo de vibração, ocorre devido ao fato de os elementos mais distantes da linha neutra, apresentarem as maiores deformações, pois a parcela negativa da equação (5.27) relacionada à energia de deformação, torna-se mais significativa. Nestes mesmos locais, a parcela positiva da equação (5.27), que se relaciona à energia cinética, não varia significativamente entre os elementos. O que determina valores menores de α .

Levando-se em consideração a convenção anterior para o mapa de cores, pode-se com-

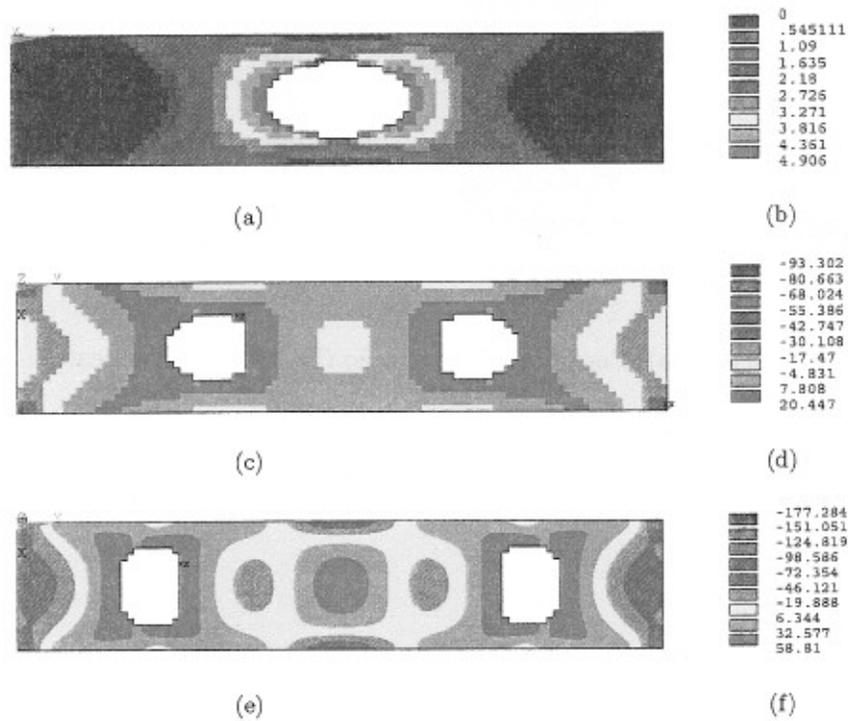


Figura 7.56: Mapa de α para os casos de aumentar o valor de ω_1 , ω_2 e ω_4

provar a afirmação anterior através da figura 7.57, que faz um paralelo entre as energias de deformação e cinética, e o valor de α para o primeiro modo. Os resultados foram obtidos no software ANSYS 5.6, sendo que as energias de deformação e cinética de cada elemento foram calculadas por $E s_n^e = \frac{1}{2} \{u_n^e\}^T [K^e] \{u_n^e\}$ e $E k_n^e = \frac{1}{2} \{\dot{u}_n^e\}^T \omega [M^e] \{\dot{u}_n^e\}$ respectivamente.

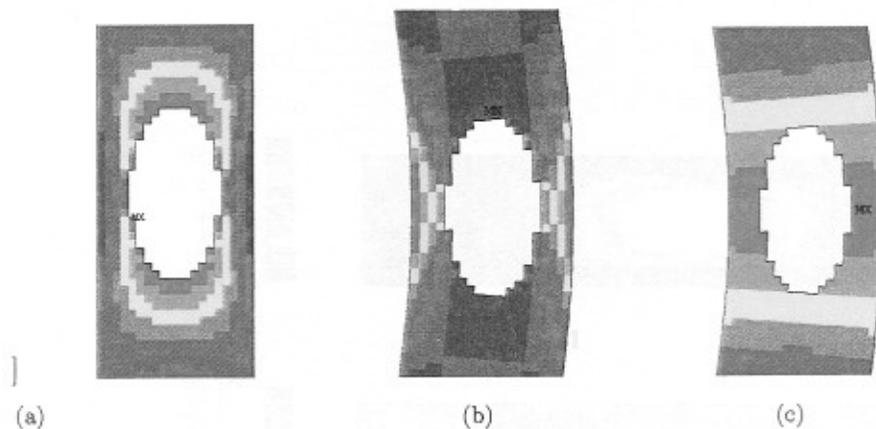


Figura 7.57: Distribuição de α (a), Energia de Deformação (b), Energia Cinética(c)

A análise feita permite dentro de certos limites de complexidade avaliar e acompanhar as etapas do processo evolucionário para uma problema de OEE com critério de projeto em frequência.

Capítulo 8

Conclusões e Sugestões de Continuidade

Neste capítulo são apresentadas as principais conclusões a respeito do trabalho desenvolvido, bem como as sugestões para a utilização da OEE em trabalhos futuros.

Os critérios de projeto são considerados na ordem em que foram apresentados no texto, seguindo-se as conclusões gerais, e finalmente apresentam-se algumas sugestões de continuidade.

8.1 Conclusões Específicas

OEE em Tensão Máxima

Conclui-se que o critério de projeto em Tensão Máxima permite a determinação de estruturas com distribuição de tensão mais homogênea e com redução de material utilizado. Este processo deve causar um leve aumento na magnitude das tensões sendo necessária interromper o processo evolucionário se eventualmente os limites de tensão forem ultrapassados.

A OEE em Tensão Máxima mostrou-se capaz de ser aplicada a problemas de otimização topológica reais. Entretanto deve-se atentar ao mapeamento da malha de elementos finitos objetivando a presença de elementos com tamanho e forma o mais uniforme possível, pois assim se obtém uma maior suavidade na forma e topologia encontradas.

A partir de exemplos estudados e considerando que a aplicação do método evolucionário de otimização resolve-se um sistema linear e faz-se o cálculo de tensão dos elementos a cada iteração. Mostrou-se que a opção pela eliminação dos elementos do modelo em lugar de corrigir o respectivo módulo de elasticidade dos mesmos, conduz a tempos de resolução sensivelmente menores. Esta opção torna a utilização da OEE mais viável do ponto de vista do custo computacional.

Para a melhor escolha dos parâmetros evolucionários, principalmente a Razão de Evolução RE , deve-se realizar testes numéricos preliminares, pois elevados valores de RE tornam a estrutura singular.

Como era esperado, conclui-se ainda que a escolha das condições de contorno da estrutura inicial influi fortemente nas configurações otimizadas encontradas.

OEE em Rigidez

Com base nos testes efetuados, mostrou-se que a OEE em Rigidez possibilita a obtenção de estruturas com forma e topologia otimizada considerando-se restrições sobre os deslocamentos e sobre a rigidez do sistema. Na prática, este é um dos mais importantes aspectos a serem considerados no projeto estrutural.

Destacam-se as opções de otimização implementadas referentes ao controle de múltiplos deslocamentos ou da diferença entre deslocamentos adjacentes.

Observa-se a importância do número de elementos removidos a cada iteração, além do nível de discretização do domínio inicial. Estes parâmetros são determinantes no processo evolucionário e no cálculo do índice de performance estrutural, que por sua vez, terão influência direta na estrutura otimizada a ser encontrada. Tem-se ainda que a simetria da estrutura encontrada nas etapas do processo evolucionário, depende do número de elementos retirados por iteração.

Evidenciou-se que índice de performance estrutural IP é uma importante ferramenta no monitoramento do processo evolucionário funcionando como um critério de parada do procedimento. Para o caso da determinação de estruturas com mesmo IP deve-se adicionar um novo critério de decisão referente à quantidade de material na estrutura, ou ao valor de rigidez ou ainda sobre o valor dos deslocamentos.

OEE em Frequência

O uso da técnica sujeita a critérios baseados na alocação de frequências naturais possibilitou a obtenção de estruturas com forma e topologia otimizadas.

Destacam-se as opções do método de otimização baseado no aumento de uma ou mais frequências ou a ampliação do espaçamento entre frequências adjacentes.

Conclui-se que, para cada modo de vibração analisado, os elementos que apresentam a maior diferença entre a energia cinética e a energia de deformação devem ser os retirados, pois causaram a maior variação positiva para uma dada frequência.

Destaca-se preliminarmente a importância do número de elementos a serem retirados por iteração, que deve representar uma pequena porcentagem do número total de elementos da estrutura. Outra característica importante deste parâmetro está relacionada com a simetria das estruturas e de suas malhas. Para o caso de um eixo de simetria deve-se adotar valores

pares para o número de elementos a serem retirados por iteração, ao passo que para o caso de dois eixos de simetria, retira-se da estrutura um número de elementos múltiplo de quatro.

Outro aspecto importante a ser observado na otimização com critério em frequência, é o cruzamento de modos, que pode sinalizar mudanças nas características estruturais da nova topologia. Algumas técnicas foram testadas para se evitar o fenômeno do cruzamento dos modos, todavia os resultados obtidos não foram discutidos neste trabalho.

8.2 Conclusões Gerais e Sugestões de Continuidade

A primeira implementação realizada no software ANSYS permite concluir que, para os três critérios de projeto avaliados, a OEE pode ser implementada em qualquer programa comercial de elementos finitos desde que o mesmo forneça as informações do modelo numérico necessárias aos algoritmos evolucionários dos critérios de projeto.

Este fato permite afirmar que a simplicidade do método é grande, o que deve facilitar a sua difusão e uso em aplicações práticas de engenharia.

O método evolucionário de otimização estrutural mostrou-se capaz de promover otimização estrutural simultânea de forma e topologia. É importante ressaltar que a topologia e o formato definitivos devem ser obtidos com outros métodos que venham a proporcionar um ajuste para o caso de aplicação em geometria final.

Uma hipótese para a suavização das formas encontradas seria o refinamento da malha de elementos finitos no contorno da estrutura, sendo este procedimento realizado em intervalos ou a cada etapa do processo evolucionário. Este procedimento envolve o uso de malhas não conformes, e deverá ser tratado em trabalhos futuros.

Em alguns casos, observa-se que a medida que os elementos são retirados, podem surgir pontos singulares.

Como sugestão para se evitar este problema com critérios de projeto baseados no nível de tensão máxima, deve-se alterar o algoritmo para que diminua a RE na presença de singularidades. Uma outra alternativa seria o cálculo da tensão de corte dos elementos baseado na média entre as tensões calculadas, pois assim, diminui-se a grande influência de pontos de concentração de tensão como por exemplo os locais de fixação.

Para o caso da aplicação do critério de projeto em rigidez em problemas reais, onde a uniformidade de forma e tamanho dos elementos não seja garantida, deve-se calcular um parâmetro de sensibilidade específico, como por exemplo dividir o valor de sensibilidade pelo volume do elemento, a fim de se ter uma medida relativa para o número de sensibilidade uma vez que os elementos não são idênticos.

A utilização da OEE multiobjetiva pode ser sugerida, onde a retirada de elementos satisfaça a mais de um critério de projeto simultaneamente. Nesta linha, pensa-se também na possibilidade na aplicação da OEE para mais de um caso de carregamento, sendo que os elementos a serem retirados devem satisfazer todos os casos em questão.

Deve-se também investir em algoritmos eficientes que possibilitem a otimização na resolução de sistemas lineares e de problemas de autovalor e autovetor, pois traria mais viabilidade na utilização da OEE em problemas com muitos graus de liberdade, uma vez que estas análises estruturais são realizadas uma ou mais vezes por iteração. Este aspecto numérico não foi aprofundado neste primeiro trabalho.

Tem-se na Programação Orientada a objetos um importante recurso de programação computacional, uma vez que permite o desenvolvimento de programas que possam estar em constante atualização, pois o acréscimo de novas rotinas e módulos computacionais se dá de maneira fácil e prática.

Conclui-se que a parte mais importante e complexa da programação orientada a objetos é a abstração dos objetos e classes que irão compor o projeto do programa, pois é nesta hora, que se tem a definição e a identificação das etapas, dos componentes e dos métodos necessários para a resolução do problema.

Uma vez com o projeto do programa bem estruturado, o seu contínuo desenvolvimento e atualização se tornam bastante fácil.

Esta característica é que permitiu a introdução do módulo de OEE como uma nova tarefa atribuída ao MEFLABC++, e no caso da OEE, observa-se a praticidade em se acrescentar mais critérios de projeto para o método evolucionário de otimização que serão objeto de desenvolvimentos futuros. Em contrapartida, observou-se que quando o programa não estava bem estruturado, havia a dificuldade em acrescentar um novo critério de projeto acarretando inicialmente numa reavaliação da abstração para posterior implementação de novos critérios.

Finalmente, como pôde ser observado, conclui-se que o Método de Otimização Estrutural Evolucionária apresenta-se no início de sua avaliação no caso deste trabalho, permitindo e motivando que muitas investigações ainda devam ser realizadas. A implementação atual mostrou as potencialidades do Método, abrindo diversos pontos para pesquisas futuras.

Referências Bibliográficas

- 1994, *Command User's Manual*. Swanson Analisis Systems.
- Arora, J. S.: 1989, *Introduction to Optimum Design*. Mc Graw-Hill, first edition.
- Chen, W. F. and A. F. Saleeb: 1982, *Constitutive Equation for Engineering Materials - Elasticity and Modeling - vol. 1*. JOHN WILEY & SONS.
- Chu, D. N., Y. M. Xie, and G. P. Steven: 1996, Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints. *Finite Elements in Analysis and Design*, **51**, 239 – 251.
- Cook, R. D., D. S. Malkus, and M. E. Plesha: 1989, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. JOHN WILEY & SONS, third edition.
- Dhatt, G., G. Touzot, and G. Cantin: 1985, *The Finite Element Method Displayed*. JOHN WILEY & SONS, first edition.
- Ferreira, J. V.: 1998, *Dynamic reponse analysis of structures with nonlinear components*. Ph.D. thesis, Imperial College of Science, Technology and Medicine, University of London, Dept. Mec. Eng.
- Gea, H. C.: 1996, Topology optimization: A new method microstructure-based design domain method. *Computers & Structures*, **61**, 78 – 788.
- Guedes, N., Kikuchi: 1990, Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143 – 198.
- Hemp, W. S.: 1973, *Optimum Structures*. Claredon Press.
- Herskovits, J.: 1995, *Advances in Structural Optimization*. KLUWER ACADEMIC, first edition.
- Kikuchi, N., H.-C. Cheng, and Z.-D. Ma: 1995, Optimal shape and topology design of vibration structures. *Advances in Structural Optimization*, 189 – 222.

- Liang, Q. Q., Y. M. Xie, and G. P. Steven: 2000, Optimal topology selection of continuum structures with displacement constraints. *Computers & Structures*, **77**, 635 – 644.
- Manickarajah, D., Y. M. Xie, and G. P. Steven: 1998, An evolutionary method for optimization of plate buckling resistance. *Finite Elements in Analysis and Design*, **29**, 205 – 230.
- 2000, Optimum design of frames with multiple constraints using an evolutionary method. *Computers & Structures*, **74**, 731 – 741.
- Min, S., S. Nishiwaki, and N. Kikuchi: 2000, Unified topology design of static and vibrating structures using multiobjective optimization. *Computers & Structures*, **75**, 93 – 116.
- Olhoff, N., M. Bendsoe, and J. Rasmussen: 1991, On cad-integrated structural topology and design optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **89**, 259 – 279.
- Popov, E. P.: 1992, *Introdução À Mecânica Dos Sólidos*. EDGARD BLUCHER, second edition.
- Riche, R. L. and G. Cailletaud: 1998, A mixed evolutionary/heuristic approach to shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 1463 – 1485.
- Sienz, J. and E. Hinton: 1997, Reliable structural optimization with error estimation, adaptivity and robust sensitivity analysis. *Computers & Structures*, **64**, 31 – 63.
- Silva J. A. B., P. R.: 1999, Evolutionary structural optimization using finite element method. *IX Seminário de Elementos Finitos - ANSYS*.
- Silva J. A. B., P. R., Ferreira J. V.: 2000, Estudo da utilização de elementos finitos hierárquicos em otimização estrutural evolucionária. *Anais do CONEM 2000 - Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Natal RN*, 8 pp. (CD ROM).
- Timoshenko, S. and J. N. Goodier: 1970, *Teoria Da Elasticidade*. Guanabara Dois.
- Xie, Y. M. and G. P. Steven: 1993, A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, **49**, 885 – 896.
- 1996, Evolutionary structural optimization for dynamic problems. *Computers & Structures*, **58**, 1067 – 1073.
- 1997, *Evolutionary Structural Optimization*. Springer, first edition.

- Zhao, C., G. P. Steven, and Y. M. Xie: 1997a, Effect of initial nondesign domain on optimal topologies of structures during natural frequency optimization. *Computers & Structures*, **62**, 119 – 131.
- Zhao, C. B., P. Hornby, G. P. Steven, and Y. M. Xie: 1998a, A generalized evolutionary method for numerical topology optimization of structures under static loading condition. *Structural Optimization*, **15**, 251 – 260.
- Zhao, C. B., G. P. Steven, and Y. M. Xie: 1997b, Evolutionary optimization of maximizing the difference between two natural frequencies of a vibrating structure. *Structural Optimization*, **13**, 148 – 154.
- 1998b, A generalized evolutionary method for natural frequency optimization of membrane vibration problems in finite element analysis. *Computers & Structures*, **66**, 353 – 364.
- Zhou, M. and G. I. N. Rosvany: 1991, The coc algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **89**, 309 – 336.