

Francisco 
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

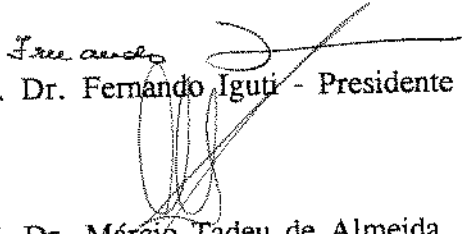
TESE DE: DOUTORADO

Título da Tese: Um Elemento Finito Hierárquico para Análise
Dinâmica p-Adaptativa de Placas Espessas.

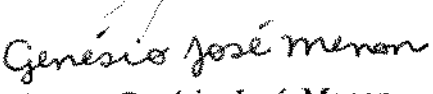
Autor: Wlamir Carlos de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Fernando Iguti

Aprovado por:


Prof. Dr. Fernando Iguti - Presidente


Prof. Dr. Márcio Tadeu de Almeida


Prof. Dr. Genésio José Menon


Prof. Dr. Renato Pavanello


Prof.ª Dra. Maria Cristina de Castro Cunha

Campinas, 16 de dezembro de 1993

AGRADECIMENTOS

Ao orientador, Prof. Dr. Fernando Iguti, pelas diretrizes seguras, dedicação e paciência.

Aos colegas da Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Paulo Shigueme Ide e José Juliano de Lima Júnior pelo permanente incentivo e à Matilde B. Pereira pela digitação do trabalho.

Ao PICD, através da EFEI, pelo apoio financeiro.

Ao Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, pela oportunidade que me concedeu em concluir este trabalho e aos amigos deste Departamento, pelo convívio profissional e momentos de lazer.

Aos meus pais, Afonso e Aparecida.

À minha esposa Magda e aos meus filhos
Rafael e Laís, prometendo repor algumas
das várias horas de lazer dos fins de
semana, que foram dedicadas também à
conclusão deste trabalho.

UM ELEMENTO FINITO HIERÁRQUICO PARA ANÁLISE DINÂMICA

P-ADAPTATIVA DE PLACAS ESPESSAS

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar um processo adaptativo de refinamento hierárquico, baseado na formulação paramétrica, versão p, do Método dos Elementos Finitos. O processo é aplicado na resolução do problema dinâmico de autovalor generalizado de placas espessas na elasticidade linear.

O primeiro nível de aproximação da solução é obtido através do elemento isoparamétrico 3D de dezesseis nós, proposto neste trabalho, utilizando-se funções de interpolação do tipo standard da família Serendipity. Para outros níveis de aproximação, são realizados sucessivos refinamentos hierárquicos, conforme as informações adquiridas na análise de erros a-posteriori. A distribuição seletiva de novos graus de liberdade, nos elementos mais carentes de refinamento, se processa em função da utilização de um indicador de erro. Para avaliar o erro global de uma solução, considera-se um estimador de erro, o qual serve também como critério principal de parada do processo de refinamento hierárquico. É mostrado que a implementação do elemento 3D no processo p-adaptativo adotado produz soluções com altas taxas de convergência.

Os resultados numéricos obtidos nos exemplos de aplicação são comparados com soluções analíticas e por outras técnicas numéricas.

A HIERARCHICAL FINITE ELEMENT FOR P-ADAPTIVE

DYNAMIC ANALYSIS OF THICK PLATES

ABSTRACT

The purpose of this research is to present an adaptive process of hierarchical refinement, based on the p-version parametric formulation from the Finite Element Method. The process is applied on the resolution of generalized dynamic eigenvalue problem of thick plates in the linear elasticity mode.

The first level of approximation of the solution is obtained through the isoparametric 3D element of sixteen nodes, proposed in this work, using functions of interpolation from the standard type derived from the Serendipity family. For other approximation levels, successive hierarchical refinements are used, according to the information acquired from the *a-posteriori* error analysis. The selective distribution of new degrees of freedom in the elements in need of refinement is processed according to the utilization of an error indicator. To evaluate the global error of a solution, an error estimator is considered and it also works as a main criterion for the stopping of the process of hierarchical refinement. It is showed that the implementation of the 3D element in the adopted p-adaptive process produces solutions with high rate of convergence.

The numerical results obtained in the application examples are compared with analytical solutions and other numerical techniques.

CONTEÚDO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Considerações Gerais	1
1.2. O Elemento 3D proposto	2
1.3. Processos de refinamento h e p	4
1.4. Processos de refinamento hierárquico versão p	5
2. FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	7
2.1. Introdução	7
2.2. Elementos iso, super e subparamétricos	8
2.3. Elementos isoparamétricos 2D	10
2.4. Matriz de rigidez do elemento	18
2.5. Matriz de massa do elemento	25
2.6. Elemento isoparamétrico 3D de dezesseis nós	25
2.7. Integração numérica	30
3. FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA HIERÁRQUICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	31
3.1. Introdução	31
3.2. Formulação paramétrica hierárquica	32
3.3. Funções de interpolação hierárquicas para elementos 1D	33
3.4. Funções de interpolação hierárquicas para elementos 2D	41
3.5. Funções de interpolação hierárquicas para elementos 3D	58
4. ESTIMADORES DE ERRO	64
4.1. Introdução	64
4.2. Estimadores de erro	65
4.3. Estimadores de erro a-posteriori	66
5. PROCESSO P-ADAPTATIVO HIERÁRQUICO	74
5.1. Introdução	74
5.2. Processos adaptativos	76
5.3. Um programa adaptativo versão p do MEF	80
5.3.1. Entrada de dados	80

5.3.2. Geração da malha de elementos finitos	85
5.3.3. Armazenamento "skyline" das matrizes	85
5.3.4. Matriz de rigidez dos elementos	87
5.3.5. Matriz de massa dos elementos	88
5.3.6. Matrizes globais do sistema	88
5.3.7. O problema de autovalor generalizado	88
5.3.8. Resolução do sistema de equações	89
5.3.9. Análise hierárquica	90
5.4. Outras considerações	98
5.4.1. Elementos vizinhos	98
5.4.2. Integração numérica	99
5.5. Resolução do sistema de equações ampliado	100
6. APLICAÇÕES	105
6.1. Introdução	105
6.2. Exemplo de problema usando elementos 2D	105
Exemplo 1	105
6.3. Exemplos de problemas usando elementos 3D	113
Exemplo 2	113
Exemplo 3	118
Exemplo 4	119
Exemplo 5	123
Exemplo 6	127
Exemplo 7	129
7. COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES	130
7.1. Introdução	130
7.2. Sobre o elemento proposto	130
7.3. Sobre as funções de interpolação hierárquicas	130
7.4. Sobre a discretização da malha	131
7.5. Sobre os estimadores de erro	132
7.6. Sobre o processo p-adaptativo	133
7.7. Sobre os resultados das aplicações	134
7.8. Outras conclusões	134
7.9. Sugestões para futuras pesquisas	135
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	136
A. DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ $[K]$ EM $[L][D][L]^T$	142
B. LISTAGEM DO PROGRAMA COMPUTACIONAL	147

LISTA DE SÍMBOLOS

CAPÍTULO 1

r, s, t	coordenadas locais
x, y, z	coordenadas cartesianas
u, v, w	deslocamentos lineares

CAPÍTULO 2

ϕ	função física
$\hat{\phi}$	função física aproximada
N_i	funções de interpolação
a_i	variáveis físicas
n	número de pontos nodais do elemento
x, y, z	coordenadas globais
x_i, y_i, z_i	coordenadas globais dos nós do elemento
$[K]^e$	matriz de rigidez do elemento
$[B]$	matriz de transformação deformações-deslocamentos
$[D]$	matriz de elasticidade do material
$\{\epsilon\}$	vetor de deformações específicas
$\{U\}$	vetor de deslocamentos
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	deformações específicas
u_i, v_i, w_i	deslocamentos lineares nodais
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$	tensões no elemento
E	módulo de elasticidade de Young
ν	coeficiente de Poisson
$[J]$	matriz jacobiana de transformações
$[M]^e$	matriz de massa do elemento
ρ	densidade de massa
$[H]$	matriz das funções de interpolação

CAPÍTULO 3

N_i ($i > n$)	funções de interpolação hierárquicas
a_i ($i > n$)	parâmetros hierárquicos
p	grau da função de interpolação hierárquica
n ..	número de graus de liberdade na formulação isoparamétrica
m	número de graus de liberdade hierárquicos
$P_j(x)$	polinômios de Legendre

CAPÍTULO 4

λ_i		autovalores
k_i		coeficiente de rigidez modal
m_i		coeficiente de massa modal
ω_i		frequência angular
$[K]$		matriz de rigidez global
$[M]$		matriz de massa global
$\{\phi_i\}, \{\psi_j\}$		modos próprios de vibração
η_i		indicador local de erro
ε		estimador global de erro

CAPÍTULO 6

f_i		frequências naturais
N		número de graus de liberdade
T		tempo de C.P.U.
ε_{tol}		tolerância do erro pré-especificada
γ		fração do máximo indicador de erro
ε		diferença percentual das frequências
$\bar{\omega}$		parâmetro da frequência fundamental

LISTA DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

- 1.1. Elementos 3D isoparamétricos (a) na forma original e
(b) na forma final proposta, com 16 nós. 3

CAPÍTULO 2

- 2.1. Domínio discretizado em elementos finitos. 7
- 2.2. Elementos (a) Iso, (b) Super e (c) Subparamétrico. . 10
- 2.3. Elemento 2D isoparamétrico de Taig. 11
- 2.4. Elemento plano quadrilateral quadrático. 12
- 2.5. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 1 (N_1) e (b) para o nó 2 (N_2). 14
- 2.6. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 3 (N_3) e (b) para o nó 4 (N_4). 15
- 2.7. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 5 (N_5) e (b) para o nó 6 (N_6). 16
- 2.8. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 7 (N_7) e (b) para o nó 8 (N_8). 17
- 2.9. Elemento 3D de dezesseis nós. 25

CAPÍTULO 3

- 3.1. Elementos unidimensionais e funções de interpolação
do tipo standard na forma (a) linear, (b) quadrá-
tica e (c) cúbica. 34
- 3.2. Funções de interpolação e variáveis para aproximação
(a) linear, (b) hierárquica quadrática e (c) hierár-
quica cúbica. 39
- 3.3. Funções de interpolação hierárquicas do terceiro
grau (a) associada ao lado 1-2 (N_9) e
(b) associada ao lado 2-3 (N_{10}). 43
- 3.4. Funções de interpolação hierárquicas do terceiro
grau (a) associada ao lado 3-4 (N_{11}) e
(b) associada ao lado 1-4 (N_{12}). 44

3.5.	Triângulo de Pascal e termos para polinômios completos até quinto grau.	45
3.6.	Funções de interpolação hierárquicas do quarto grau (a) associada ao lado 1-2 (N_{13}) e (b) associada ao lado 2-3 (N_{14}).	48
3.7.	Funções de interpolação hierárquicas do quarto grau (a) associada ao lado 3-4 (N_{15}) e (b) associada ao lado 1-4 (N_{16}).	49
3.8.	Função de interpolação hierárquica quadrática tipo bolha (N_{17}).	50
3.9.	Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 1-2 (N_{18}) e (b) associada ao lado 2-3 (N_{19}).	53
3.10.	Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 3-4 (N_{20}) e (b) associada ao lado 1-4 (N_{21}).	54
3.11.	Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 1-2 (N'_{18}) e (b) associada ao lado 2-3 (N'_{19}).	55
3.12.	Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 3-4 (N'_{20}) e (b) associada ao lado 1-4 (N'_{21}).	56
3.13.	Funções de interpolação hierárquicas do tipo bolha (a) N_{22} e (b) N_{23}	57

CAPÍTULO 4

4.1.	Variação do indicador de erro.	73
------	-------------------------------------	----

CAPÍTULO 5

5.1.	Fluxograma de um programa para processos adaptativos de refinamento seletivo.	78
5.2.	Convenção para a enumeração dos lados do elemento...	82
5.3.	Esquema de armazenamento de uma matriz em forma de skyline.	86

5.4.	Elemento com funções (a) de ordem quadrática isoparamétrica e (b) de ordem variável após a primeira reanálise.	97
5.5.	Identificação dos lados dos elementos vizinhos.	98

CAPÍTULO 6

6.1.	Viga 2D em balanço do exemplo 1.	106
6.2.	Discretização da viga do exemplo 1 em cinco elementos isoparamétricos de oito nós.	107
6.3.	Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a primeira frequência da viga do exemplo 1. ...	109
6.4.	Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a décima quinta frequência da viga do exemplo 1..	111
6.5.	Representação dos graus de liberdade hierárquicos para as frequências 1-15 da viga do exemplo 1.	112
6.6.	Viga 3D em balanço do exemplo 2.	114
6.7.	Discretização da viga do exemplo 2 em cinco elementos isoparamétricos de dezesseis nós.	114
6.8.	Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a viga do exemplo 2.	117
6.9.	Modos de vibração da placa do exemplo 4 dividida em dois elementos 3D de dezesseis nós.	121
6.10.	Representação dos graus de liberdade hierárquicos para as quatro reanálises da placa do exemplo 4. ...	122
6.11.	Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a placa totalmente engastada com $h = 0,20$ [m] do exemplo 5.	125
6.12.	Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a placa com um lado livre e $h = 0,20$ [m] do exemplo 5.	126
6.13.	Gráfico $\bar{\omega} \times h/a$ para a placa quadrada simplesmente apoiada do exemplo 6.	128

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 6

6.1. Frequências naturais f_1 [Hz] da viga do exemplo 1. ...	108
6.2. Frequências naturais f_1 [Hz] da viga do exemplo 2. ...	115
6.3. Frequências naturais f_1 [Hz] da viga do exemplo 3. ...	119
6.4. Frequências naturais f_1 [Hz] da placa do exemplo 4 ...	120
6.5. Frequências naturais f_1 [Hz] para as placas do exemplo 5.	124
6.6. Valores do parâmetro $\bar{\omega}$ da frequência fundamental da placa do exemplo 6.	127
6.7. Valores do parâmetro adimensional de frequência para a placa do exemplo 7.	129

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O método dos Elementos Finitos (MEF) tem demonstrado ser uma das técnicas numéricas mais utilizadas para a solução de problemas de engenharia. No entanto, um modelo impróprio de elementos finitos pode produzir erros significantes na solução. Nos últimos anos, muitas pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de se desenvolver novos elementos que se adaptem melhor na solução de tais problemas, como, por exemplo, no campo de engenharia estrutural. Além do mais, é necessário muita experiência e conhecimento para avaliar a eficiência da solução obtida. Nesse sentido, um grande esforço tem sido dedicado no desenvolvimento de novos elementos que possam ser utilizados, por exemplo, na análise dinâmica de placas espessas. Um estudo deste tipo de problema é reconhecido, atualmente, como uma importante área de pesquisa.

Elementos de placas considerados no MEF, geralmente, são corpos tridimensionais caracterizados pelo fato de uma das dimensões ser relativamente menor do que as outras duas.

O tratamento convencional para elementos de placas é baseado nas hipóteses de Kirchhoff [51] que, em uma delas, linhas retas originalmente normais a superfície média do elemento, permanecem retas e normais a esta superfície, durante o processo de deformação. Neste caso, a formulação torna-se simplificada, mas, normalmente, são introduzidos erros na solução, desde que não são consideradas as deformações devido ao cisalhamento transversal.

MINDLIN [52] apresentou, posteriormente, uma teoria para placas espessas, que considera os efeitos do cisalhamento transversal e também a inércia de rotação. Nessa teoria, as

linhas retas normais à superfície média da placa permanecem retas durante a deformação e são seguidas de rotações em relação ao plano médio. A formulação dessa teoria no MEF considera os nós situados na superfície média do elemento que têm seus graus de liberdade como sendo as rotações relativas e os deslocamentos verticais. No entanto, uma grande dificuldade encontrada nesta formulação, está em se obter funções de interpolação para as variáveis físicas do elemento de placa, que satisfaçam a necessária continuidade da derivada primeira dos deslocamentos nas interfaces do elemento. Por outro lado, a solução exata das equações, considerando a teoria de Mindlin, para o problema de vibrações livres com geometria retangular, é conhecida apenas para os casos onde dois lados opostos da placa são simplesmente apoiados (DAWE and ROUFAEIL [50]). Para outros casos, tem-se utilizado o método de energia de Rayleigh-Ritz (DAWE and ROUFAEIL [50]).

Neste trabalho, propõe-se um elemento tridimensional com um procedimento de refinamento que pode ser utilizado, de maneira efetiva, na solução do problema de autovalor generalizado, especialmente, na computação das frequências naturais de estruturas de placas espessas.

1.2. O ELEMENTO 3D PROPOSTO

O incentivo substancial em propor um novo elemento, está na contribuição em melhorar a eficiência do método dos elementos finitos na análise de vibrações livres de placas espessas.

O elemento proposto é derivado do elemento sólido tridimensional isoparamétrico (figura 1.1), por razões que serão mencionadas a seguir.

Para se obter o elemento proposto, foram excluídos todos os nós do meio, na direção da espessura do elemento 3D isoparamétrico original, mostrado na figura 1.1a. Esta omissão se faz necessária, devido o fato que, para placas espessas, as

linhas retas normais à superfície média devem permanecer praticamente retas durante a deformação. O elemento 3D resultante é mostrado na figura 1.1b, com um total de dezesseis nós.

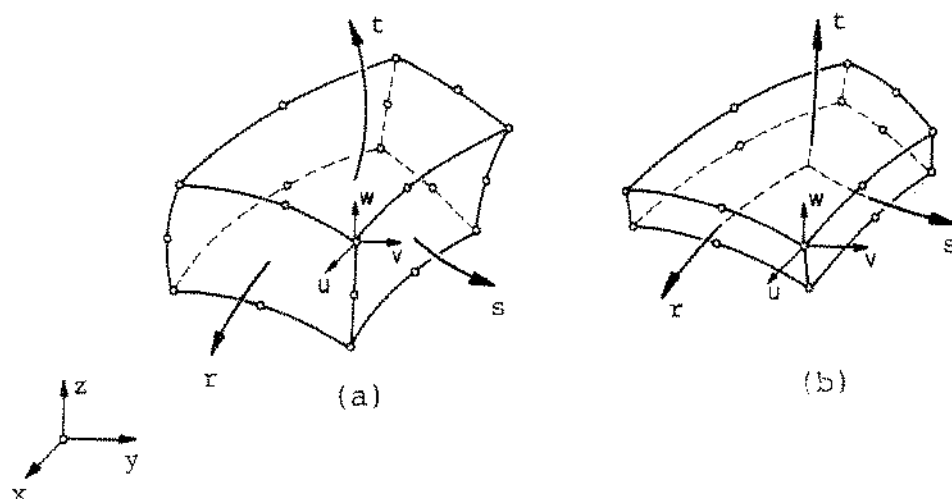


Figura 1.1. Elementos 3D isoparamétricos (a) na forma original e (b) na forma final proposta, com 16 nós.

O campo de deslocamentos do elemento é constituído por deslocamentos lineares u , v e w de cada nó, totalizando 48 graus de liberdade. O campo, assim especificado, torna a formulação independente de distorções (embora venham a ocorrer) e de deslocamentos dos pontos da superfície média do elemento. Nesse sentido, o elemento proposto mostra-se atrativo devido a sua simplicidade, e também, pelo fato de poder reproduzir deformações de cisalhamento, que são importantes no caso de placas espessas.

A matriz de rigidez do elemento é obtida usando a quadratura de Gauss, na forma consistente, utilizando 2 pontos de integração na direção t da espessura e 3 pontos de integração em cada uma das direções r e s do elemento (figura 1.1.b).

1.3. PROCESSOS DE REFINAMENTO h e p

Processos de refinamento na análise por elementos finitos têm sido utilizados, atualmente, para estudar a convergência da solução de muitos problemas de engenharia. O desenvolvimento destes processos consiste, basicamente, em elaborar rotinas computacionais para refinamentos, de preferência, automáticos no MEF. Em geral, tais processos, quando aplicados numa formulação, produzem soluções com aproximação melhorada.

No processo de refinamento convencional do MEF, o qual é chamado de refinamento h , a malha de elementos é refinada através da diminuição sucessiva do tamanho h dos elementos. Neste processo, o número e o tipo de funções de interpolação sobre cada elemento mantêm-se fixos. Esta é a prática comum na análise por elementos finitos, que consiste em resolver um problema várias vezes. Normalmente, a utilização deste tipo de refinamento tende a aumentar o custo da análise, bem como produzir erros devido a arredondamentos, associados às subdivisões demasiadamente refinadas dos elementos da malha.

No segundo processo de refinamento, conhecido como refinamento p , o número e a distribuição de elementos sobre a malha discretizada permanecem fixos. No entanto, o número e o grau das funções de interpolação, as quais devem ser polinômios completos de ordem p , são aumentados progressivamente.

O refinamento do tipo h tem sido extensivamente examinado na literatura matemática e utilizado, por muitos anos, nas aplicações de engenharia. Recentemente, muitas pesquisas têm sido realizadas para o desenvolvimento de processos de refinamento p . Tem-se observado que a qualidade de aproximação da solução e o custo computacional são vantagens que a versão p de refinamento oferece em relação à versão h .

O processo convencional de refinamento tipo p do MEF se baseia na discretização do sistema em elementos, cuja ordem é dependente das funções de interpolação. Neste caso, se novas variáveis físicas devem ser introduzidas nos elementos, novas

funções de interpolação devem ser obtidas no lugar das anteriores. Desta forma, embora o número de elementos da discretização original permaneça fixo, o número total de nós deve ser aumentado progressivamente. Geralmente, esta técnica produz dificuldades devido a necessidade da geração de novas malhas de elementos.

1.4. PROCESSOS DE REFINAMENTO HIERÁRQUICO VERSÃO p

Para superar as dificuldades mencionadas anteriormente, nos últimos anos, têm-se estudado alguns procedimentos adaptativos de refinamento p , baseados na formulação paramétrica hierárquica do MEF, proposta por ZIENKIEWICZ et al. [53] e examinada por PEANO [13]. Nesses procedimentos, a introdução nos elementos, de novas funções de interpolação de grau variável, se faz conservando inalteradas as funções de interpolação anteriores. Esta é a característica de importância fundamental notada em processos de refinamento hierárquico, versão p , do MEF. Funções de interpolação que apresentam esta característica são chamadas de funções de interpolação hierárquicas e os elementos cujas variáveis físicas são interpoladas por estas funções, de elementos hierárquicos.

Nos processos de refinamento hierárquico, as matrizes do elemento são expandidas quando novas funções de interpolação, de grau superior às anteriores, são inseridas. Portanto, durante o procedimento, a matriz do elemento correspondente a uma aproximação polinomial de ordem p torna-se uma submatriz da matriz correspondente à aproximação polinomial de ordem $p+1$ do elemento. Neste caso, o esforço numérico consumido na triangularização da matriz de rigidez do sistema referente a uma solução, pode ser inteiramente economizado em soluções subsequentes.

Elementos finitos hierárquicos têm sido considerados ferramentas indispensáveis para se estudar a convergência de uma solução com respeito ao aumento da ordem polinomial das

funções de interpolação. As condições de continuidade entre elementos vizinhos são satisfeitas, embora a ordem do polinômio das funções de interpolação possa variar de elemento para elemento (SZABO et al. [24]).

Processos adaptativos de refinamento hierárquico, versão p , são caracterizados, também, pelo fato de se poder estimar e controlar os erros provenientes da discretização da malha. O procedimento proposto neste trabalho é implementado no MEF, tem a capacidade de fazer uma estimativa de erro a-posteriori, com base em informações obtidas em soluções anteriores. Além do mais, com a utilização de elementos hierárquicos, é possível definir estimadores de erro a-posteriori. Estes estimadores consistem de um estimador de erro global, que serve para avaliar a precisão global da solução e de um indicador de erro que tem a finalidade de indicar as regiões da malha para as quais é necessário fazer refinamentos. O procedimento proposto é automático em todos os seus detalhes, resultando dessa forma, em uma análise bastante eficiente.

Neste trabalho, a convergência da solução do problema dinâmico de autovalor generalizado de placas espessas é examinada numericamente, com a utilização de elementos hierárquicos. A solução básica do problema é obtida considerando-se funções de interpolação da família Serendipity. Para soluções posteriores, refinadas hierarquicamente, são utilizadas funções de interpolação de grau p , variável entre 3 e 5.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1. INTRODUÇÃO

O método dos elementos finitos consiste basicamente em aproximar numericamente uma função ϕ , em uma determinada equação diferencial, aplicável em um domínio Ω e que atenda a certas condições no contorno T do domínio (ZIENKIEWICZ [1]).

Inicialmente, deseja-se obter uma solução aproximada $\hat{\phi}$ para o domínio discretizado (figura 2.1), na seguinte forma (ZIENKIEWICZ e MORGAN [2]),

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (2.1)$$

onde a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são as incógnitas do problema e N_i são as funções de interpolação para n pontos nodais do elemento.

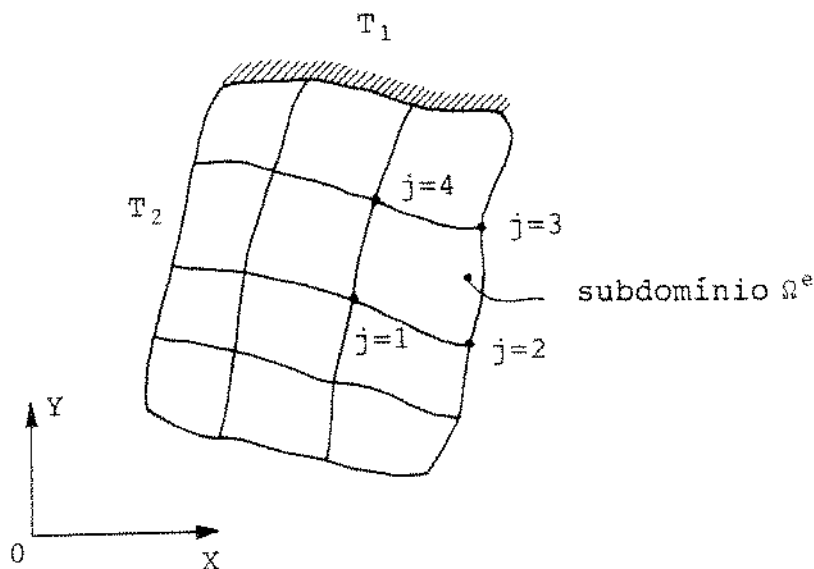


Figura 2.1. Domínio discretizado em elementos finitos.

As funções de interpolação N_i são aplicadas em cada subdomínio (elementos finitos) e devem satisfazer as seguintes condições:

$$N_i = 1; \quad \text{quando o nó } i = j \quad (2.2a)$$

e

$$N_i = 0; \quad \text{quando o nó } i \neq j \quad (2.2b)$$

isto é, as funções de interpolação N_i devem ser numericamente iguais a 1 no nó i e zero para os demais nós.

Levando as propriedades das equações (2.2) na equação (2.1), pode-se concluir que $\hat{\phi}_i = a_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Fisicamente, isto significa que os valores da função aproximada $\hat{\phi}$ nos nós i representam exatamente os valores numéricos das incógnitas físicas a_i .

Para definir a geometria do elemento, também se usam funções de interpolação que, neste caso, elas são chamadas de funções de forma do elemento.

Um dos objetivos deste capítulo é apresentar algumas funções de interpolação N_i , que serão utilizadas no presente trabalho para estudar uma classe de problemas regidos por equações diferenciais lineares como, por exemplo, no caso de problemas de elasticidade linear.

2.2. ELEMENTOS ISO, SUPER E SUBPARAMÉTRICOS

A formulação do método dos elementos finitos para um dado problema (elasticidade linear, transferência de calor, etc) pode ser elaborada, admitindo-se conhecidas as funções de interpolação dos elementos a serem utilizados na aplicação do método a um estudo específico.

As funções de interpolação podem ser estudadas independentemente do problema que está sendo formulado. Através dessas funções pode-se determinar a variação de uma grandeza física ϕ no interior de um elemento. Essa grandeza ϕ pode ser deslocamento, temperatura, etc. Neste trabalho, será atribuído à grandeza ϕ o significado físico de deslocamentos.

Os pontos nodais servem para definir a forma geométrica do elemento e também para definir os pontos onde a variável física deverá ser calculada. Uma importante característica da formulação paramétrica do MEF é que não há necessidade de se usar os mesmos pontos nodais de um elemento para atender a estas duas finalidades. Alguns nós do elemento podem ser usados para definir a sua geometria e outros nós para definir a variação da incógnita física ϕ (figura 2.2).

Um elemento é chamado ISOPARAMÉTRICO, quando as funções de forma usadas para definir a geometria são as mesmas para definir a variação da função física. Neste caso, os mesmos nós do elemento são usados para satisfazer estas duas finalidades (figura 2.2a).

Se usar um número maior de nós para definir a geometria do que para a variável física, o elemento é chamado de SUPERPARAMÉTRICO (figura 2.2b).

Similarmente se, para definir a geometria, introduzir menos nós que os empregados para a variável física, o elemento resultante é chamado de SUBPARAMÉTRICO. (figura 2.2c).

Algumas considerações teóricas sobre elementos paramétricos distorcidos podem ser encontradas no trabalho de MOREIRA [54].

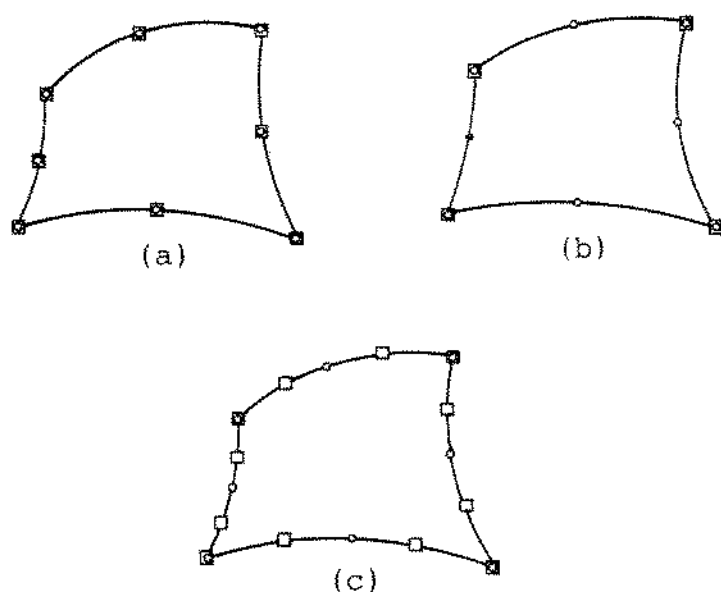


Figura 2.2. Elementos (a) Iso, (b) Super e (c) Subparamétrico.

◦ Pontos para definição das coordenadas

◻ Pontos para definição dos parâmetros da função ϕ

A formulação isoparamétrica do MEF será vista no próximo item, a qual servirá de base para a implementação do elemento subparamétrico, fundamento da formulação hierárquica do MEF.

2.3. ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS 2D

Os elementos isoparamétricos foram estudados primeiramente por TAIG [3], que propôs a definição de um sistema local de coordenadas (r, s) para um elemento quadrilateral genérico (figura 2.3). Mais tarde IRONS [4] generalizou essa idéia para outros elementos.

As coordenadas globais do elemento podem ser expressas pelas seguintes funções de transformação:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i x_i \quad (2.3)$$

e

$$y = \sum_{i=1}^n N_i y_i \quad (2.4)$$

onde x e y são as coordenadas globais de um ponto qualquer do elemento e x_i e y_i as coordenadas globais do i -ésimo nó do elemento.

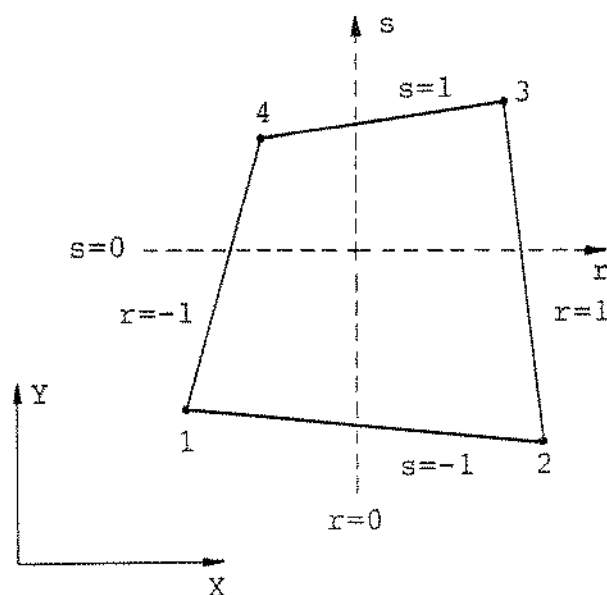


Figura 2.3. Elemento 2D isoparamétrico de Taig.

As funções de forma N_i são definidas num sistema de coordenadas naturais do elemento cujas variáveis r e s do sistema local variam de -1 a 1.

Para um elemento de quatro nós do tipo mostrado na figura 2.3, as funções de forma (ZIENKIEWICZ [1], BATHE e WILSON [5]) são dadas por

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - r)(1 - s) \quad (2.5)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + r)(1 - s) \quad (2.6)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + r)(1 + s) \quad (2.7)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - r)(1 + s) \quad (2.8)$$

Os deslocamentos globais dos pontos do elemento podem ser definidos da mesma maneira como para as coordenadas globais, ou seja,

$$u = \sum_{i=1}^n N'_i u_i \quad (2.9)$$

e

$$v = \sum_{i=1}^n N'_i v_i \quad (2.10)$$

Como a base da formulação isoparamétrica do método dos elementos finitos consiste em usar as funções de interpolação N'_i das variáveis físicas as mesmas funções de forma N_i das coordenadas nodais do elemento, tem-se que

$$N'_i = N_i \quad (2.11)$$

Um elemento, geralmente utilizado na solução de problemas de elasticidade plana, é mostrado na figura 2.4.

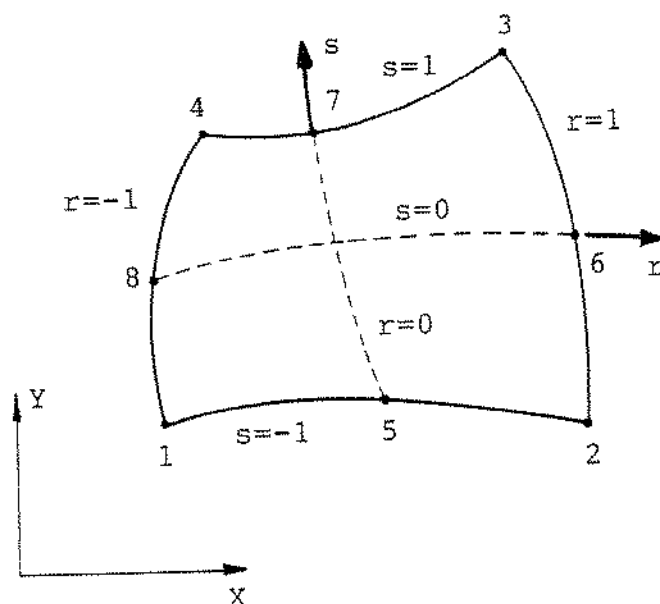


Figura 2.4. Elemento plano quadrilateral quadrático

As funções de interpolação standard da família Serendipity para o elemento quadrático de oito nós (ZIENKIEWICZ [1]), são dadas por

Nó 1:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s) (-r - s - 1) \quad (2.12)$$

Nó 2:

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s) (r - s - 1) \quad (2.13)$$

Nó 3:

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s) (r + s - 1) \quad (2.14)$$

Nó 4:

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s) (-r + s - 1) \quad (2.15)$$

Nó 5:

$$N_5 = \frac{1}{2} (1 - r^2) (1 - s) \quad (2.16)$$

Nó 6:

$$N_6 = \frac{1}{2} (1 - s^2) (1 + r) \quad (2.17)$$

Nó 7:

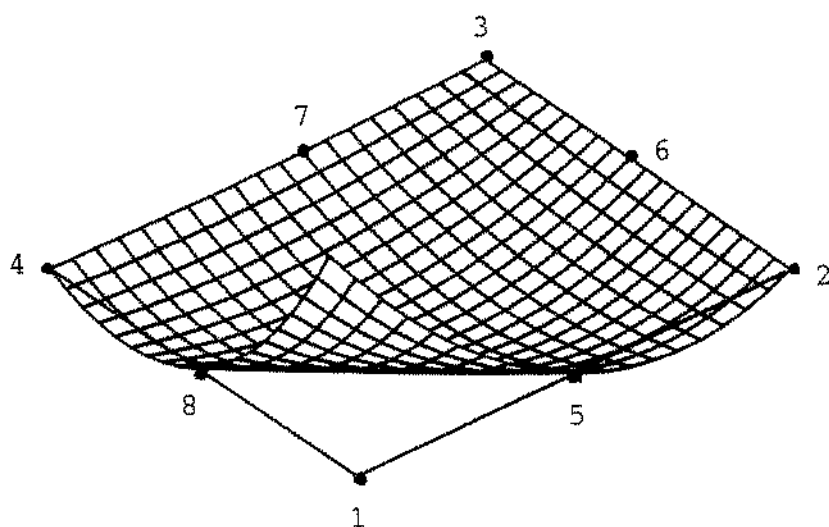
$$N_7 = \frac{1}{2} (1 - r^2) (1 + s) \quad (2.18)$$

Nó 8:

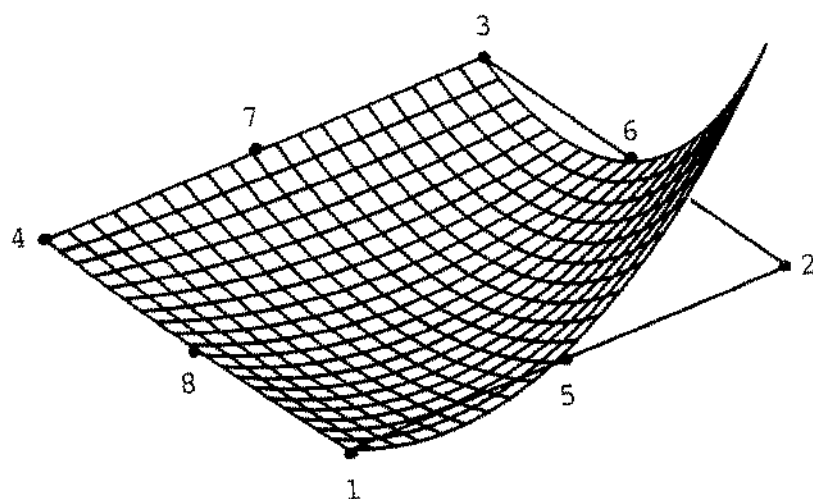
$$N_8 = \frac{1}{2} (1 - s^2) (1 - r) \quad (2.19)$$

Analizando as equações (2.16) a (2.19), observa-se que as funções de interpolação N_i ($i = 5, 6, 7, 8$) para o nó do meio dos lados são obtidas diretamente pelo produto de uma função de segunda ordem, em uma direção, por uma função linear na outra. Para os nós do canto ($i = 1, 2, 3, 4$), o produto de três funções lineares apropriadas resulta na função quadrática desejada. A condição que a função de interpolação associada a um nó particular, deve tomar o valor da unidade neste nó e zero em todos os outros nós é automaticamente satisfeita.

As figuras 2.5 a 2.8 ilustram as funções de interpolação quadráticas, associadas aos nós do elemento plano quadrilateral.



(a)



(b)

Figura 2.5. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 1 (N_1) e (b) para o nó 2 (N_2).

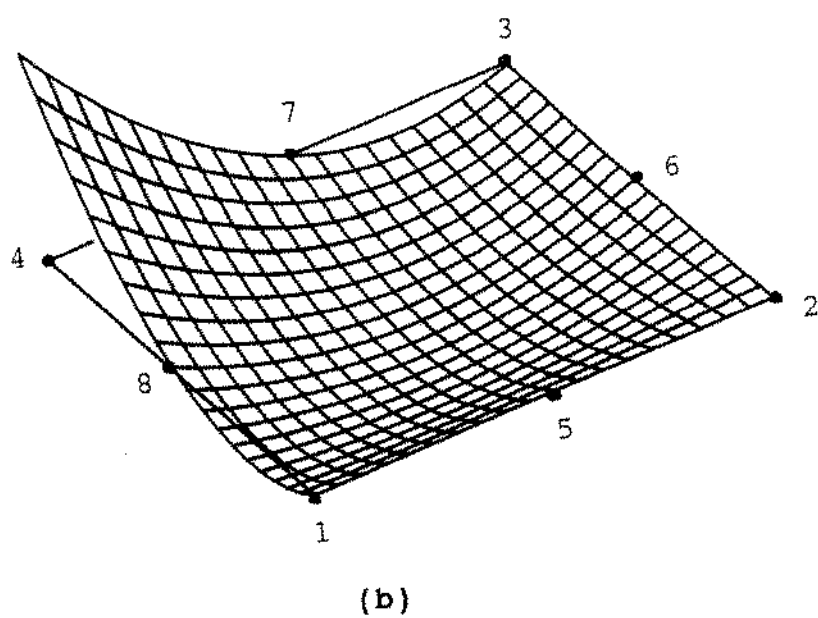
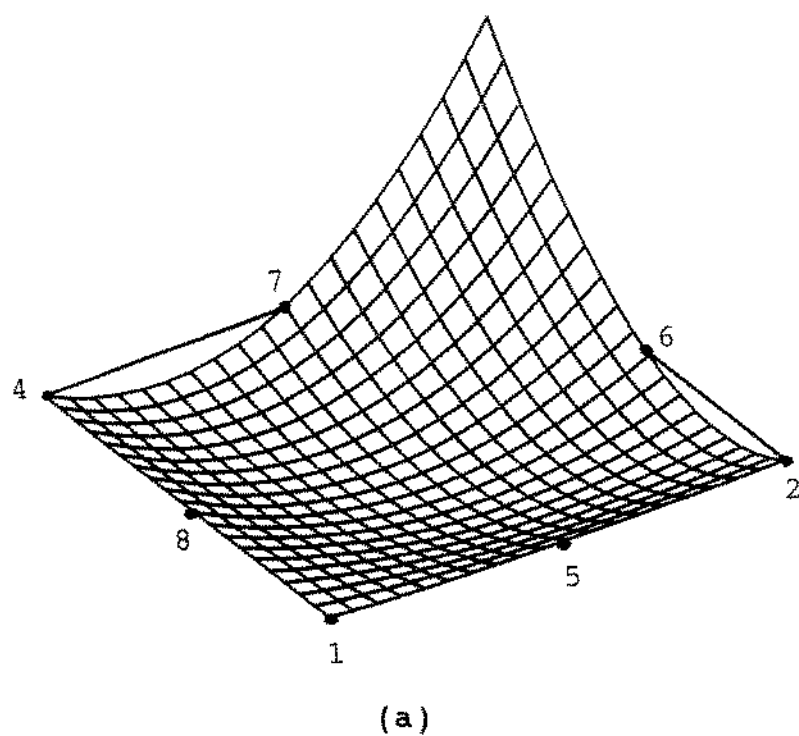
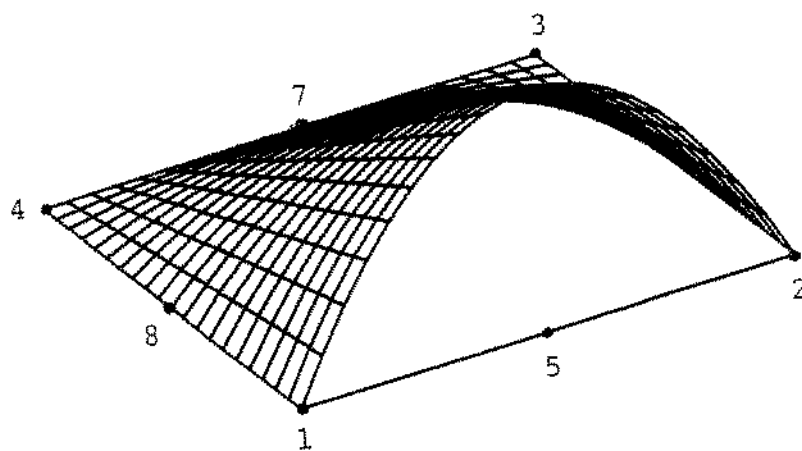
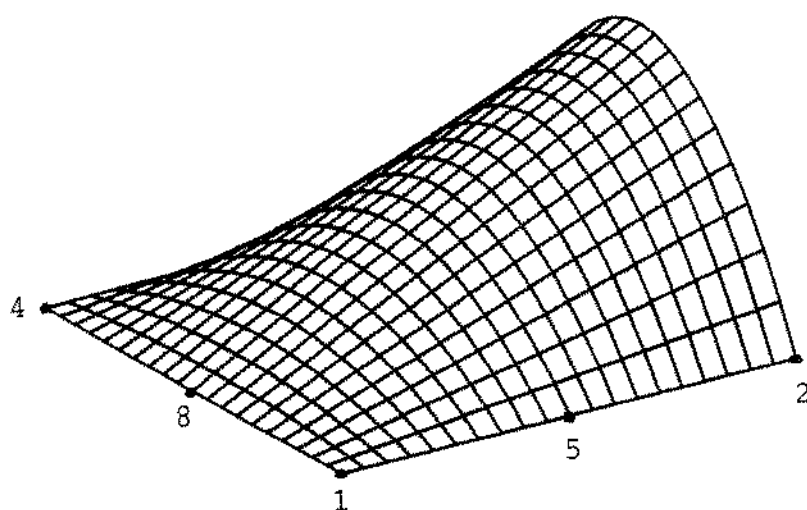


Figura 2.6. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 3 (N_3) e (b) para o nó 4 (N_4).

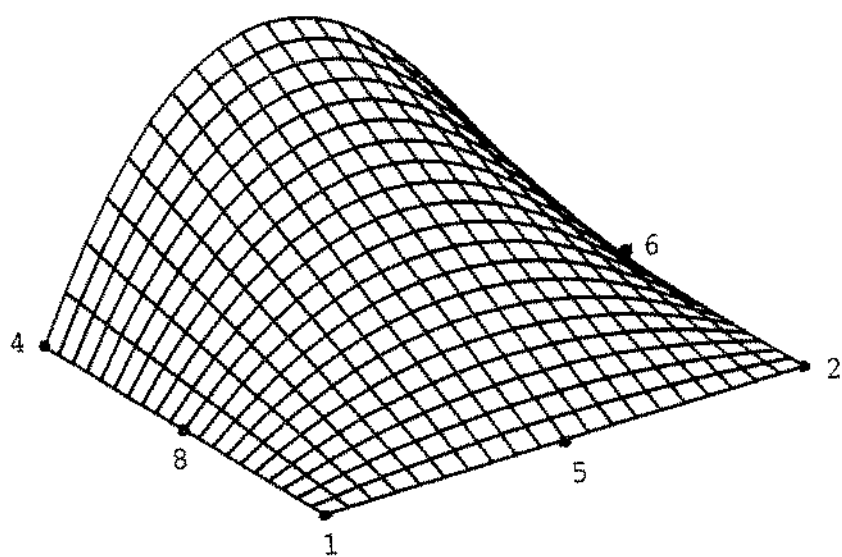


(a)

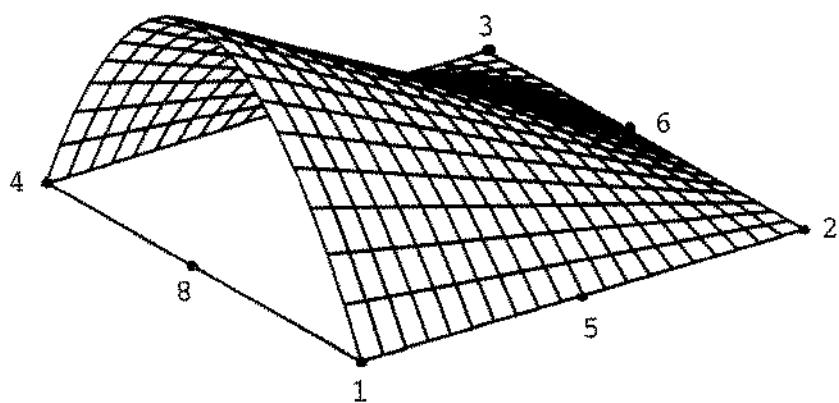


(b)

Figura 2.7. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 5 (N_5) e (b) para o nó 6 (N_6).



(a)



(b)

Figura 2.8. Funções de interpolação quadráticas standard
(a) para o nó 7 (N_7) e (b) para o nó 8 (N_8).

2.4. MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

A matriz de rigidez do elemento correspondente aos graus de liberdade globais (ZIENKIEWICZ [1]) é dada por

$$[K]^e = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (2.20)$$

O cálculo da matriz de rigidez envolve inicialmente a determinação da matriz $[B]$ que, por sua vez, necessita dos valores da derivada das funções de interpolação relativa ao sistema global (x, y) . $[D]$ é a matriz de elasticidade do material.

A matriz $[B]$ é a matriz de transformação deformações-deslocamentos do elemento. Chamando de $\{\epsilon\}$ o vetor de deformações e de $\{U\}$ o vetor de deslocamentos nodais do elemento, a transformação é feita pela seguinte relação,

$$\{\epsilon\} = [B] \{U\} \quad (2.21)$$

Considerando uma análise no estado plano de tensões e deformações, tem-se que

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

e, usando as equações (2.9) e (2.10) na formulação isoparamétrica, tem-se que

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^n N_i u_i \\ \sum_{i=1}^n N_i v_i \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

onde n é o número de pontos nodais do elemento.

As deformações do elemento, dadas pela equação (2.22), podem ser reescritas como

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.24)$$

Inserindo a equação (2.23) na equação (2.24), tem-se que,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n N_i u_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n N_i v_i \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{i=1}^n N_i u_i \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^n N_i v_i \right) \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

ou

$$\{\varepsilon\} = \sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \right) \quad (2.26)$$

logo, comparando a equação (2.26) com a equação (2.21), a matriz $[B]$ terá a forma,

$$[B] = \begin{bmatrix} [B_1] & [B_2] & \dots & [B_n] \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

onde

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

Por outro lado, as tensões no elemento são dadas por

$$\{\sigma\} = \left\{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \tau_{xy} \right\}^T \quad (2.29)$$

Considerando um material elástico linear e isotrópico, tem-se que

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (2.30)$$

e ainda, no caso da distribuição plana de tensões (TIMOSHENKO e GOODIER [6]), as deformações do elemento são dadas por

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} \right) \quad (2.31)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} \left(\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} \right) \quad (2.32)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{E} \left(1 + \nu \right) \tau_{xy} \quad (2.33)$$

onde E é o módulo de elasticidade de Young e ν é o coeficiente de Poisson.

Usando agora a equação (2.22), as equações (2.31) a (2.33) podem ser colocadas na forma,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \{\sigma\} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

Comparando a equação (2.34) com a equação (2.30), a matriz de propriedades elásticas $[D]$, pode ser escrita como

$$[D] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Para avaliar a matriz de rigidez de um elemento, é preciso determinar a matriz $[B]$ de transformação deformações-deslocamentos da equação (2.27). Usando a equação (2.28), a matriz $[B]$ terá a forma,

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Em alguns problemas de elasticidade, como no caso considerado, a matriz $[B]$ é, por conseguinte, função das derivadas primeiras de N_i em relação às coordenadas globais. Como as funções de interpolação N_i , são em função das coordenadas naturais (r, s) do elemento, é necessário, portanto, expressar as derivadas globais das funções de interpolação em função de suas derivadas locais.

Mediante a utilização dos conceitos de derivação parcial, tem-se que, para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial s} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (2.38)$$

Na forma matricial, as equações (2.37) e (2.38) se tornam

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Os termos $\partial N_i / \partial r$ e $\partial N_i / \partial s$ do lado esquerdo da expressão anterior podem ser facilmente calculados, já que as funções N_i são definidas em coordenadas naturais (r, s) , bem como os elementos da matriz que relaciona as derivadas das coordenadas no sistema global com o local através das equações (2.3) e (2.4). Portanto, as incógnitas, que são os valores de $\partial N_i / \partial x$ e $\partial N_i / \partial y$, são obtidas pela solução do sistema de equações dado pela equação (2.39).

A equação (2.39) pode ser reescrita como,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

onde $[J]$ é a matriz jacobiana de transformação, formada pelas derivadas das coordenadas globais em relação às coordenadas naturais, ou seja

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Para encontrar as derivadas globais, basta inverter a matriz $[J]$. Desta forma, a equação (2.40) torna-se

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s} \end{Bmatrix} \quad (2.42)$$

A matriz jacobiana $[J]$ deve ser determinada através da derivada das equações (2.3) e (2.4) em relação às coordenadas naturais r e s , ou seja

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \quad (2.44)$$

e

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \quad (2.46)$$

Desta forma, a matriz [J] se torna,

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial r} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial s} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial s} y_i \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Este tipo de transformação é válido independentemente do número de nós utilizado. Para um elemento com n nós, a expressão (2.47) pode ser reescrita como

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Como os elementos da matriz [B] estão em função das coordenadas naturais r e s, o elemento de volume dv_{vol} da equação (2.20) deve ser também colocado em função dessas coordenadas (ZIENKIEWICZ [1]). Logo,

$$dv_{vol} = t \, dx \, dy = \det.[J] \, t \, dr \, ds \quad (2.49)$$

onde t é a espessura do elemento.

Para problemas de elasticidade no plano, quando se toma as funções de interpolação no sistema local de coordenadas (r, s), a matriz de rigidez, conforme a equação (2.20), se torna

$$[K]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(r, s)]^T [D] [B(r, s)] \det.[J] \, t \, dr \, ds \quad (2.50)$$

2.5. MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO

A matriz de massa do elemento (ZIENKIEWICZ [1] , BATHE e WILSON [5]), é dada por,

$$[M]^e = \int_v \rho [H]^T [H] dv \quad (2.51)$$

onde ρ é a densidade de massa do elemento e $[H]$ é a matriz formada pelas funções de interpolação e tem a forma,

$$[H] = [N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \dots N_n \quad 0] \quad (2.52)$$

Assim, a matriz de massa do elemento quando se considera as funções de interpolação no sistema de coordenadas locais será,

$$[M]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [H(r, s)]^T [H(r, s)] \det.[J] t dr ds \quad (2.53)$$

2.6. ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO 3D DE DEZESSEIS NÓS

Neste trabalho será usado o elemento básico tridimensional de dezesseis nós (figura 2.9) que, para o qual, serão considerados três deslocamentos lineares, u , v , w por nó.

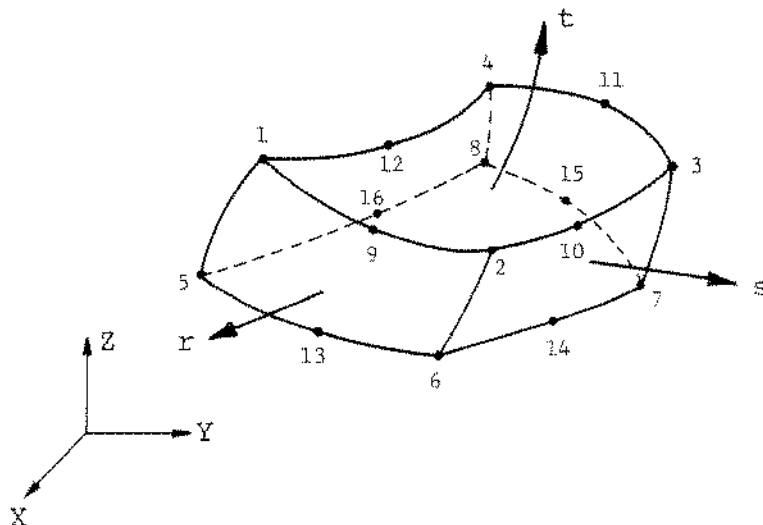


Figura 2.9. Elemento 3D de dezesseis nós.

As funções de interpolação utilizadas são da família Serendipity (ZIENKIEWICZ [1]). Estas funções são obtidas através da correção das funções dos nós dos cantos do elemento linear de quatro nós e das funções dos nós do meio dos lados do elemento quadrático.

Para simplificar as expressões das funções de interpolação, pode-se definir as seguintes variáveis:

$$r' = rr_1 \quad s' = ss_1 \quad e \quad t' = tt_1 \quad (2.54)$$

onde r_1 , s_1 e t_1 são as coordenadas locais do nó i .

As funções de interpolação N_i'' ($i = 1, 2, \dots, 8$) do elemento linear são dadas por,

$$N_i'' = \frac{1}{8} (1 + r')(1 + s')(1 + t') \quad (2.55)$$

Para os nós do meio de cada lado, tem-se que

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - s^2)(1 + r')(1 + t'); \quad i = 9, 11, 13, 15 \quad (2.56)$$

e

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - r^2)(1 + s')(1 + t'); \quad i = 10, 12, 14, 16 \quad (2.57)$$

A correção das funções deve ser feita simplesmente por uma combinação apropriada das funções dos nós adjacentes, ou seja

$$N_1 = N_1'' - \frac{1}{2} (N_9 + N_{12}) \quad (2.58)$$

$$N_2 = N_2'' - \frac{1}{2} (N_9 + N_{10}) \quad (2.59)$$

$$N_3 = N_3'' - \frac{1}{2} (N_{10} + N_{11}) \quad (2.60)$$

$$N_4 = N_4'' - \frac{1}{2} (N_{11} + N_{12}) \quad (2.61)$$

$$N_5 = N_5'' - \frac{1}{2} (N_{13} + N_{16}) \quad (2.62)$$

$$N_6 = N_6'' - \frac{1}{2} (N_{13} + N_{14}) \quad (2.63)$$

$$N_7 = N_7'' - \frac{1}{2} (N_{14} + N_{15}) \quad (2.64)$$

$$N_8 = N_8'' - \frac{1}{2} (N_{15} + N_{16}) \quad (2.65)$$

Como o elemento de dezesseis nós é tridimensional, a matriz de elasticidade do material [D] a ser utilizada na expressão da matriz de rigidez do elemento (ZIENKIEWICZ [1]) é, agora, dada por

$$[D] = C \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$$

(2.66)

onde,

$$C = \frac{E(1 - \nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.67)$$

O vetor de deformações do elemento, neste caso, é dado por,

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

onde, agora, $n = 16$ e

$$w = \sum_{i=1}^n N_i w_i \quad (2.69)$$

Inserindo as equações (2.9), (2.10) e (2.69) na equação (2.68) tem-se, para a formulação isoparamétrica ($N_i = N'_i$), que

$$\{\epsilon\} = \sum_{i=1}^n \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \right) \quad (2.70)$$

A matriz $[B_i]$, no caso, é dada por

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} ; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.71)$$

O jacobiano da transformação é, agora, dado por,

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & \frac{\partial N_2}{\partial r} & \frac{\partial N_3}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & \frac{\partial N_2}{\partial s} & \frac{\partial N_3}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \frac{\partial N_2}{\partial t} & \frac{\partial N_3}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

A matriz $[H]$ das funções de interpolação se torna,

$$[H] = [N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad N_n \quad 0 \quad 0] \quad (2.73)$$

Como a análise é tridimensional, a matriz de rigidez do elemento, neste caso, é dada por

$$[K]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(r,s,t)]^T [D] B(r,s,t) \det.[J] dr ds dt \quad (2.74)$$

e a matriz de massa do elemento, por

$$[M]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho [H(r,s,t)]^T [H(r,s,t)] \det.[J] dr ds dt \quad (2.75)$$

Como o campo de deslocamentos do elemento considerado é dado por três deslocamentos lineares (u, v e w) por nó, ou seja, três graus de liberdade por nó, as matrizes de rigidez e de massa do elemento serão da ordem de 48×48 .

Por ser muito trabalhoso, o cálculo analítico das integrais dessas matrizes não é conveniente, devendo-se, portanto, recorrer a processos de integração numérica.

2.7. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Encontram-se na literatura (ZIENKIEWICZ [1], BATHE e WILSON [5]) várias técnicas de integração numérica para cálculo de matrizes do tipo dado pelas equações (2.74) e (2.75). Neste trabalho será aplicado o método da quadratura de Gauss por ser o de maior receptividade no campo da análise por elementos finitos.

O elemento mostrado na figura 2.9 é quadrático nas direções r e s e linear em t. Para esse tipo de elemento, optou-se em usar (PAWSEY e CLOUGH [7], IRONS [8], HELLEN [9]) $3 \times 3 \times 2 = 18$ pontos de integração, distribuídos da seguinte forma: três pontos de integração na direção da variável local r, por três pontos na direção de s e por dois pontos na direção t da espessura do elemento. Vale salientar que estes pontos de integração correspondem aos nós gaussianos clássicos.

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA HIERÁRQUICA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1. INTRODUÇÃO

Como visto no capítulo 2, o procedimento normal do MEF está em definir as funções de interpolação N_i para a aproximação de $\hat{\phi}$, de maneira que as incógnitas a_i representem os valores nodais da variável física. Este tipo de procedimento traz desvantagens quando se deseja aumentar a ordem da aproximação do elemento pois, neste caso, as funções de interpolação deveriam ser modificadas completamente. Para evitar este tipo de problema é possível definir funções de interpolação de ordem variável que, quando introduzidas na aproximação $\hat{\phi}$ da equação (2.1), não alterem as funções N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) anteriormente definidas, da formulação convencional. Por adquirir esta importante característica, essas funções de interpolação N_i ($i > n$) de ordem variável, que são introduzidas na aproximação de $\hat{\phi}$, são chamadas de funções de interpolação hierárquicas. Desta forma, para $i > n$, as incógnitas a_i deixarão de ter o significado de variável física nodal da função aproximada, como serão mostradas posteriormente.

A formulação paramétrica hierárquica do método dos elementos finitos difere, portanto, da formulação convencional, devido ao emprego de funções de interpolação hierárquicas de grau variável (PEANO et al. [10], ZIENKIEWICZ [11]). Essas funções são introduzidas nos elementos, principalmente, com o objetivo de se fazer refinamentos na solução obtida pelo método convencional dos elementos finitos. Na literatura (BABUSKA e RHEINBOLDT [12], PEANO [13], BABUSKA et al. [14]) esse procedimento é denominado de versão p do método dos elementos finitos. Em problemas de elasticidade, a formulação

hierárquica consiste na introdução de novos modos de deformação, através do aumento do número de parâmetros hierárquicos usados na interpolação da variável física (ZIENKIEWICZ et al [11], DORR [15]).

Este capítulo consiste em apresentar as funções de interpolação hierárquicas, que serão utilizadas neste trabalho e, de um modo geral, como elas serão implementadas no método dos elementos finitos.

3.2. FORMULAÇÃO PARAMÉTRICA HIERÁRQUICA

Na formulação paramétrica hierárquica do MEF, uma solução com n graus de liberdade é refinada hierarquicamente através da introdução de novas variáveis a_i ($n < i \leq n + m$) no elemento, onde m é o número de parâmetros hierárquicos inseridos.

No contexto dos métodos numéricos, a versão p -adaptativa do MEF tem-se mostrado bastante eficiente (GUPTA [16], BABUSKA e MILLER [17,18,19], WIBERG e MÖLLER [20]). Uma das grandes vantagens do refinamento hierárquico está no fato de que o esforço computacional torna-se menor na obtenção de novas soluções (ROSSOW e KATZ [21]). Isto faz sentido, pois as funções de interpolação utilizadas em um nível de aproximação de ordem p permanecem inalteradas, quando tenta-se obter uma aproximação de ordem mais alta, com a introdução de novas funções de ordem $p + k$, ou seja

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{n'+m'} N_i a_i \quad (3.1)$$

através das quais, por exemplo, em problemas de vibrações livres se obtém o seguinte sistema de equações,

$$\left([K]_{n+m, n+m} - \lambda [M]_{n+m, n+m} \right) \{X\}_{n+m} = \{0\} \quad (3.2)$$

ou seja,

$$\left(\begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,m} \\ [K]_{m,n} & [K]_{m,m} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} [M]_{n,n} & [M]_{n,m} \\ [M]_{m,n} & [M]_{m,m} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{X\}_n \\ \{X\}_m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (3.3)$$

onde, as matrizes $[K]_{n,n}$ e $[M]_{n,n}$ e o vetor $\{X\}_n$ correspondem à solução em um nível de aproximação anterior, não precisando, portanto, serem recalculados.

A estrutura hierárquica desta equação é evidente, podendo-se identificar submatrizes associadas às soluções correspondentes a graus de liberdade em aproximações de ordem inferior.

A formulação paramétrica hierárquica do MEF permite grande flexibilidade no posicionamento dos novos graus de liberdade (SZABO [22]). Isto será visto no capítulo 4, quando será estudado um indicador de erro.

3.3. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS PARA ELEMENTOS 1D

A seguir, serão apresentadas algumas funções de interpolação hierárquicas e também serão mostradas que realmente elas, como muitas outras, serão bastante eficazes à implementação na formulação p-adaptativa no MEF. As funções de interpolação hierárquicas utilizadas neste trabalho, para a solução de problemas de elasticidade linear, são de continuidade C^0 entre elementos (TAYLOR [23], SZABO et al [24]).

Algumas funções de interpolação hierárquicas serão apresentadas, primeiramente para um elemento unidimensional e extendidas posteriormente para um elemento plano quadrilateral e para o elemento tridimensional proposto.

A figura 3.1 mostra um conjunto de elementos unidimensionais e a forma das funções de interpolação para aproximação linear (figura 3.1a), quadrática (figura 3.1b) e cúbica (figura 3.1c)

Funções deste tipo são conhecidas como funções standard pelo fato de dependerem do número de nós utilizados em um certo nível de aproximação (ZIENKIEWICZ [1]), ou seja, elas tomam formas totalmente diferentes quando se deseja passar de um grau para outro subsequente.

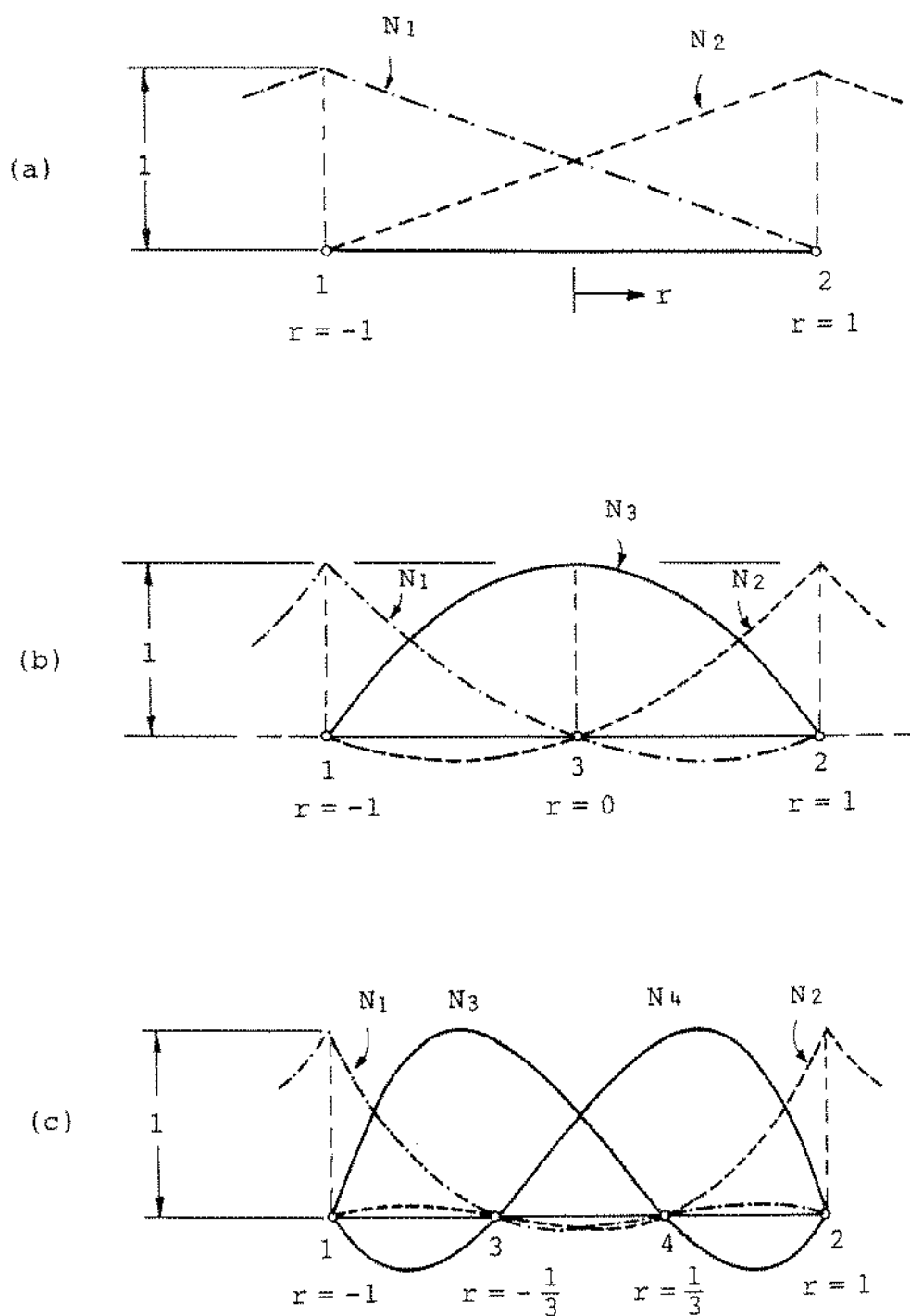


Figura 3.1. Elementos unidimensionais e funções de interpolação do tipo standard na forma (a) linear, (b) quadrática e (c) cúbica.

Funções do tipo standard para elementos unidimensionais, em função da coordenada natural r , podem ser dadas por,

a) aproximação linear (figura 3.1a):

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i = N_1 a_1 + N_2 a_2 \quad (3.4)$$

onde,

$$N_1 = \frac{1 - r}{2} \quad (3.5)$$

e

$$N_2 = \frac{1 + r}{2} \quad (3.6)$$

b) aproximação quadrática (figura 3.1b):

$$\hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 \quad (3.7)$$

onde,

$$N_1 = \frac{r^2 - r}{2} \quad (3.8)$$

$$N_2 = \frac{r + r^2}{2} \quad (3.9)$$

$$N_3 = 1 - r^2 \quad (3.10)$$

c) aproximação cúbica (figura 3.1c)

$$\hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 + N_4 a_4 \quad (3.11)$$

onde,

$$N_1 = \frac{9}{16} \left(r^2 - \frac{1}{9} \right) \left(1 - r \right) \quad (3.12)$$

$$N_2 = \frac{9}{16} \left(r^2 - \frac{1}{9} \right) \left(1 + r \right) \quad (3.13)$$

$$N_3 = \frac{27}{16} \left(r^2 - 1 \right) \left(r - \frac{1}{3} \right) \quad (3.14)$$

$$N_4 = \frac{27}{16} \left(1 - r^2 \right) \left(r + \frac{1}{3} \right) \quad (3.15)$$

Nota-se, portanto, que a dificuldade é evidente quando se deseja construir funções de interpolação do tipo standard de alta ordem. Para evitar este tipo de problema, pode-se usar funções de interpolação hierárquicas N_i ($i > n$) que, de certa forma, são independentes do número de nós usados na definição da geometria do elemento (MEIROVITCH e BARUH [25]), pois $N_i = 0$, na posição dos n pontos nodais.

Na formulação paramétrica hierárquica do MEF, funções de interpolação do tipo standard são utilizadas apenas em um primeiro nível de aproximação da solução. Para outros níveis de aproximação, as demais funções do tipo standard podem ser substituídas por funções de interpolação hierárquicas.

Para o caso considerado de elemento unidimensional, uma aproximação quadrática hierárquica do elemento será dada por,

$$\hat{\phi} = N_1 a_1 + N_2 a_2 + N_3 a_3 \quad (3.16)$$

onde N_1 e N_2 são as funções de interpolação lineares dadas pelas equações (3.5) e (3.6) e N_3 é uma função de interpolação

hierárquica do segundo grau que satisfaça a condição $N_3 = 0$ em $r = \pm 1$. Desta forma é mantida a continuidade C^0 entre elementos. Assim, uma função de interpolação hierárquica quadrática, como mostrado na figura 3.2b, pode ser escrita como,

$$N_3 = (1 - r^2) \quad (3.17)$$

Esta função quando inserida na equação (3.16), não modifica o nível de aproximação do elemento, no caso de se utilizar as funções standard dadas pelas equações (3.8) a (3.10). Mas, no entanto, a incógnita a_3 deixa de ter o significado físico de variável nodal. Na realidade ela é um parâmetro dependente das incógnitas nodais a_1 e a_2 .

Por exemplo, para relacionar a incógnita hierárquica a_3 em função de a_1 e a_2 , leva-se as equações (3.5), (3.6) e (3.17) em (3.16), para obter

$$\hat{\phi} = \left(\frac{1-r}{2} \right) a_1 + \left(\frac{1+r}{2} \right) a_2 + (1-r^2) a_3 \quad (3.18)$$

Como $N_3 \neq 0$ para $r = 0$, então de (3.18)

$$\hat{\phi}_{r=0} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + a_3 \quad (3.19)$$

logo, a incógnita hierárquica a_3 será,

$$a_3 = \hat{\phi}_{r=0} - \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \quad (3.20)$$

De maneira similar, para se obter uma aproximação hierárquica cúbica, deve-se usar a equação (3.18) acrescida do termo $N_4 a_4$, ou seja

$$\hat{\phi} = \left(\frac{1-r}{2} \right) a_1 + \left(\frac{1+r}{2} \right) a_2 + \left(1-r^2 \right) a_3 + N_4 a_4 \quad (3.21)$$

onde N_4 deve ser uma função de interpolação hierárquica cúbica que satisfaça a condição $N_4 = 0$ em $r = \pm 1$. Como existe uma infinidade dessas funções, pode-se selecionar uma função cúbica da forma mostrada na figura 3.2c, a qual se anula no centro do elemento e para a qual $dN_4/dr = 1$ no mesmo ponto.

Logo, pode-se ter

$$N_4 = r - r^3 \quad (3.22)$$

a função cúbica com as propriedades desejadas.

Derivando a equação (3.21) e considerando a equação (3.22), tem-se que, no ponto $r = 0$,

$$\left. \frac{d\hat{\phi}}{dr} \right|_{r=0} = \frac{a_2 - a_1}{2} + a_4 \quad (3.23)$$

O parâmetro hierárquico a_4 será, agora, dado por

$$a_4 = \left. \frac{d\hat{\phi}}{dr} \right|_{r=0} - \frac{1}{2} (a_2 - a_1) \quad (3.24)$$

A figura 3.2 mostra as funções de interpolação hierárquicas para elementos unidimensionais e a interpretação geométrica das incógnitas hierárquicas a_i ($i = 3, 4$), associadas a essas funções.

Observa-se, através das figuras 3.2b e 3.2c, que não é necessário associar nós às funções hierárquicas.

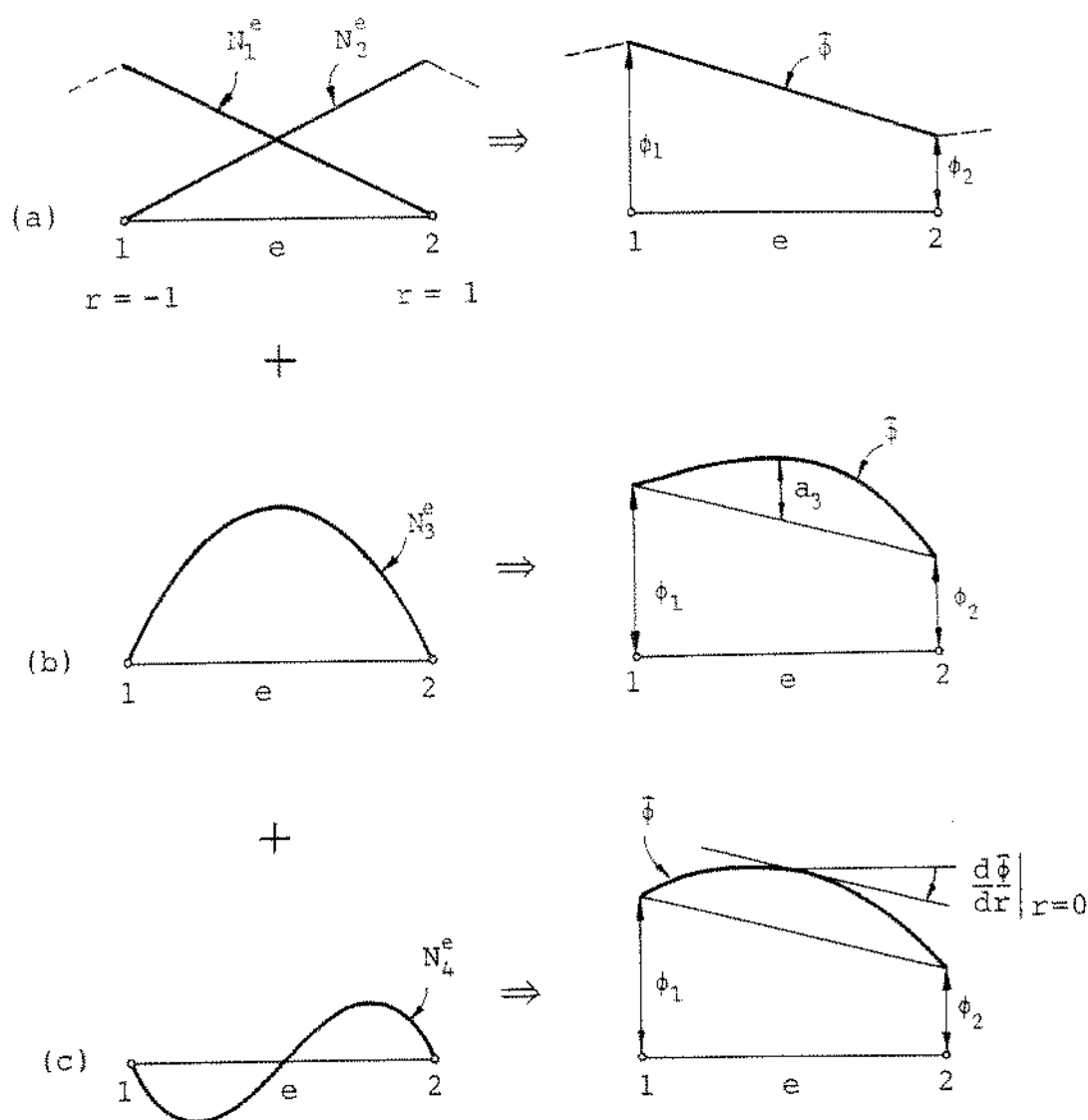


Figura 3.2. Funções de interpolação e variáveis para aproximação (a) linear, (b) hierárquica quadrática e (c) hierárquica cúbica.

Intuitivamente, deve-se proceder de maneira similar para definir funções de interpolação hierárquicas de ordem mais elevada. Por exemplo, uma função de quarta ordem pode ser escrita como

$$N_5 = r^2 - r^4 \quad (3.25)$$

que satisfaça as condições $N_5 = 0$ para $r = \pm 1$, $dN_5/dr = 0$ para $r = 0$ e $d^2N_5/dr^2 = 2$ para $r = 0$. A identificação física

do parâmetro a_4 associado a esta função hierárquica torna-se agora difícil, mas no entanto, esta identificação não é necessária.

Uma forma alternativa para definir funções de interpolação hierárquicas é usar os polinômios de Legendre $P_j(r)$ (ZIENKIEWICZ e MORGAN [2]). As funções de interpolação hierárquicas podem ser encontradas em termos das integrais desses polinômios. Os polinômios de Legendre de grau j são, aqui, definidos por

$$P_j(r) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{1}{2^{j-1}} \frac{d^j}{dr^j} \left[(r^2 - 1)^j \right] \quad (3.26)$$

e as funções de interpolação hierárquicas N_{j+2} , de ordem p ($p = j + 1$), definidas por

$$N_{j+2} = \int_{-1}^r P_j(r) dr ; \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Logo, integrando os polinômios, por exemplo, para $j = 1, 2, 3, 4$, têm-se

$$N_3 = r^2 - 1 \quad (3.28)$$

$$N_4 = 2(r^3 - r) \quad (3.29)$$

$$N_5 = \frac{1}{4} (15r^4 - 18r^2 + 3) \quad (3.30)$$

$$N_6 = 7r^5 - 10r^3 + 3r \quad (3.31)$$

Partindo-se de uma aproximação linear, as funções de interpolação hierárquicas dadas pelas equações (3.28) a (3.31), provenientes da integração dos polinômios de Legendre, apresentam a importante propriedade de ortogonalidade que, geralmente, conduz a sistemas de equações melhor condicionados, sendo muito útil em termos de computação.

3.4. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS PARA ELEMENTOS 2D

De maneira similar ao caso de elemento unidimensional, podem-se definir funções de interpolação hierárquicas para o elemento plano quadrilateral de oito nós (figura 2.4) de coordenadas naturais r e s , do capítulo 2. No entanto, considerou-se para este elemento as funções de interpolação quadráticas standard da família Serendipity, para definir o primeiro nível de aproximação da solução. A partir deste nível, portanto, são geradas as funções de interpolação hierárquicas de grau p ($3 \leq p \leq 5$).

Usando, portanto, as funções de interpolação standard N_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), dadas pelas equações (2.12) a (2.19), a aproximação básica será quadrática, sendo dada por,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^8 N_i a_i \quad (3.32)$$

A partir da aproximação quadrática, equação (3.32), pretende-se agora, definir funções de interpolação hierárquicas de grau p ($3 \leq p \leq 5$) para o elemento considerado.

Uma vez estabelecidas as funções de interpolação hierárquicas para o elemento unidimensional, a geração de funções de interpolação hierárquicas para elementos planos quadrilaterais torna-se mais simples.

Uma aproximação cúbica para $\hat{\phi}$ é obtida através da introdução de funções de interpolação hierárquicas N_i ($i = 9, 10, 11, 12$), associadas aos lados do elemento, na aproximação

quadrática anterior, dada pela equação (3.32). Assim

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^8 N_i a_i + \sum_{i=9}^{12} N_i a_i \quad (3.33)$$

sendo N_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) as funções de interpolação quadráticas standard da família Serendipity, dadas pelas equações (2.12) a (2.19). As funções de interpolação hierárquicas cúbicas N_i ($i = 9, 10, 11, 12$), usadas neste trabalho, são definidas por,

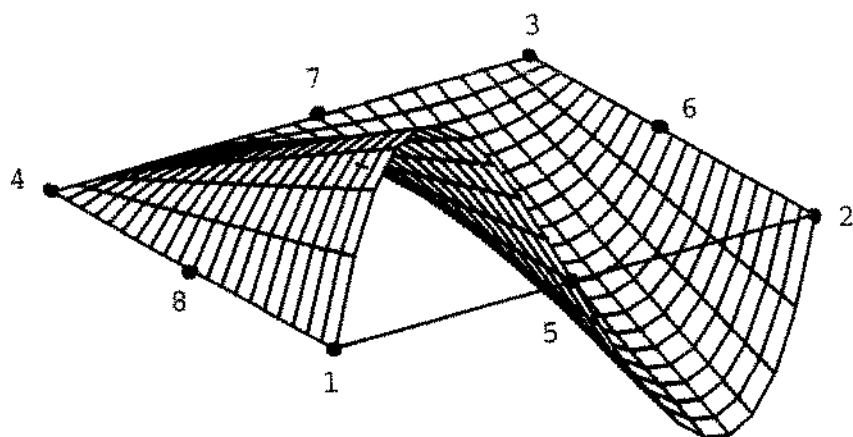
$$\text{lado 1-2,} \quad N_9 = 2(r^3 - r)(1 - s) \quad (3.34)$$

$$\text{lado 2-3,} \quad N_{10} = 2(s^3 - s)(1 + r) \quad (3.35)$$

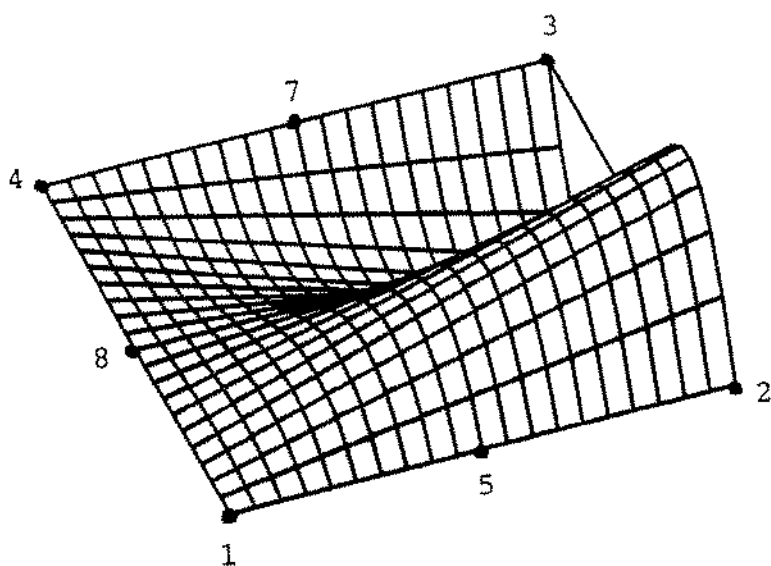
$$\text{lado 3-4,} \quad N_{11} = 2(r^3 - r)(1 + s) \quad (3.36)$$

$$\text{lado 1-4} \quad N_{12} = 2(s^3 - s)(1 - r) \quad (3.37)$$

As figuras 3.3 e 3.4 mostram as funções de interpolação hierárquicas do terceiro grau, associadas aos lados do elemento plano quadrilateral.

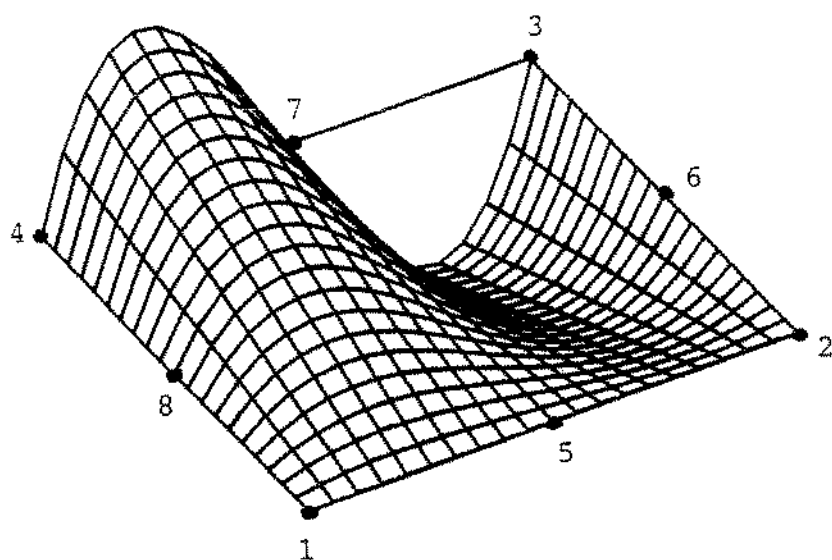


(a)

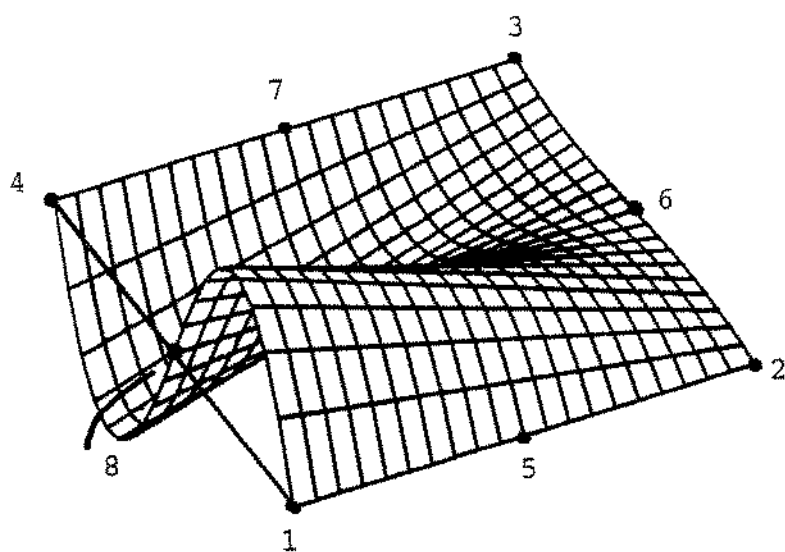


(b)

Figura 3.3. Funções de interpolação hierárquicas do terceiro grau (a) associada ao lado 1-2 (N_9) e (b) associada ao lado 2-3 (N_{10}).



(a)



(b)

Figura 3.4. Funções de interpolação hierárquicas do terceiro grau (a) associada ao lado 3-4 (N_{11}) e (b) associada ao lado 1-4 (N_{12}).

Convém ressaltar que pela expansão cúbica, dadas pelas equações (3.34) a (3.37), adicionadas à aproximação quadrática anterior se obtém um polinômio completo do terceiro grau. Isto pode ser comprovado através do triângulo de Pascal (ZIENKIEWICZ [1] e TAYLOR [23]) que é mostrado na figura 3.5, o qual é construído de forma a mostrar quais termos de uma expansão, são necessários para se obter um polinômio completo.

1					
	r	s		1º grau	
	r ²	rs	s ²		2º grau
	r ³	r ² s	rs ²	s ³	 3º grau
	r ⁴	r ³ s	r ² s ²	rs ³	s ⁴ 4º grau
	r ⁵	r ⁴ s	r ³ s ²	r ² s ³	rs ⁴ s ⁵ ... 5º grau

Figura 3.5. Triângulo de Pascal e termos para polinômios completos até quinto grau.

Para a aproximação cúbica adotada, verifica-se a presença de dois termos parasíticos: r^3s e rs^3 .

Os parâmetros hierárquicos a_i ($i = 9, 10, 11, 12$) podem ser definidos em função das variáveis físicas de maneira similar ao caso de elemento unidimensional. Por exemplo, para o lado 1-2 do elemento, tem-se

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^8 N_i a_i + N_9 a_9 \quad (3.38)$$

ou,

$$\hat{\phi} = \frac{1}{4} (1 - r) (1 - s) (-r - s - 1) a_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} (1 + r) (1 - s) (r - s - 1) a_2 + \\
& + \frac{1}{4} (1 + r) (1 + s) (r + s - 1) a_3 + \\
& + \frac{1}{4} (1 - r) (1 + s) (-r + s - 1) a_4 + \\
& + \frac{1}{4} (1 - r^2) (1 - s) a_5 + \frac{1}{4} (1 - s^2) (1 + r) a_6 + \\
& + \frac{1}{4} (1 - r^2) (1 + s) a_7 + \frac{1}{4} (1 - s^2) (1 - r) a_8 + \\
& + 2(r^3 - r) (1 - s) a_9
\end{aligned} \tag{3.39}$$

cuja derivada em relação à variável local r é dada por,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} &= \frac{1}{4} (1 - s) (2r + s) a_1 + \frac{1}{4} (1 - s) (2r - s) a_2 + \\
& + \frac{1}{4} (1 + s) (2r + s) a_3 + \frac{1}{4} (1 + s) (2r - s) a_4 + \\
& + \frac{1}{4} (-2r) (1 - s) a_5 + \frac{1}{4} (1 - s^2) a_6 + \\
& + \frac{1}{4} (-2r) (1 + s) a_7 - \frac{1}{4} (1 - s^2) a_8 + 2(1 - s) (3r^2 - 1) a_9
\end{aligned} \tag{3.40}$$

No ponto $r = 0$ do lado 1-2 do elemento ($s = -1$), tem-se

$$\left. \frac{d\hat{\phi}}{dr} \right|_{\substack{r=0 \\ s=-1}} = -\frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} a_2 - 4 a_9 \tag{3.41}$$

Portanto, o parâmetro hierárquico a_9 será

$$a_9 = -\frac{1}{4} \left[\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right|_{r=0, s=-1} + \frac{1}{2} (a_1 - a_2) \right] \quad (3.42)$$

Para se obter uma aproximação de quarta ordem deve-se incluir funções de interpolação hierárquicas do quarto grau, associadas a cada um dos lados do elemento e uma função tipo bolha, à aproximação cúbica dada pela equação (3.33), ou seja

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^8 N_i a_i + \sum_{i=9}^{12} N_i a_i + \sum_{i=13}^{16} N_i a_i + N_{17} a_{17} \quad (3.43)$$

sendo N_i ($i = 13, 14, 15, 16$) funções de interpolação hierárquicas do quarto grau que devem ser associadas aos lados do elemento. Neste trabalho, foram utilizadas as seguintes funções:

lado 1-2:

$$N_{13} = r^2(1 - r^2)(1 - s) \quad (3.44)$$

lado 2-3:

$$N_{14} = s^2(1 - s^2)(1 + r) \quad (3.45)$$

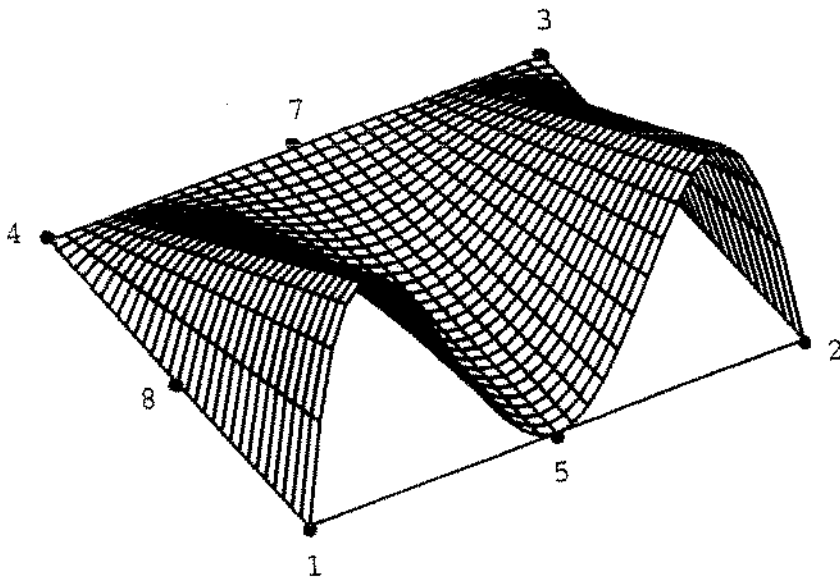
lado 3-4:

$$N_{15} = r^2(1 - r^2)(1 + s) \quad (3.46)$$

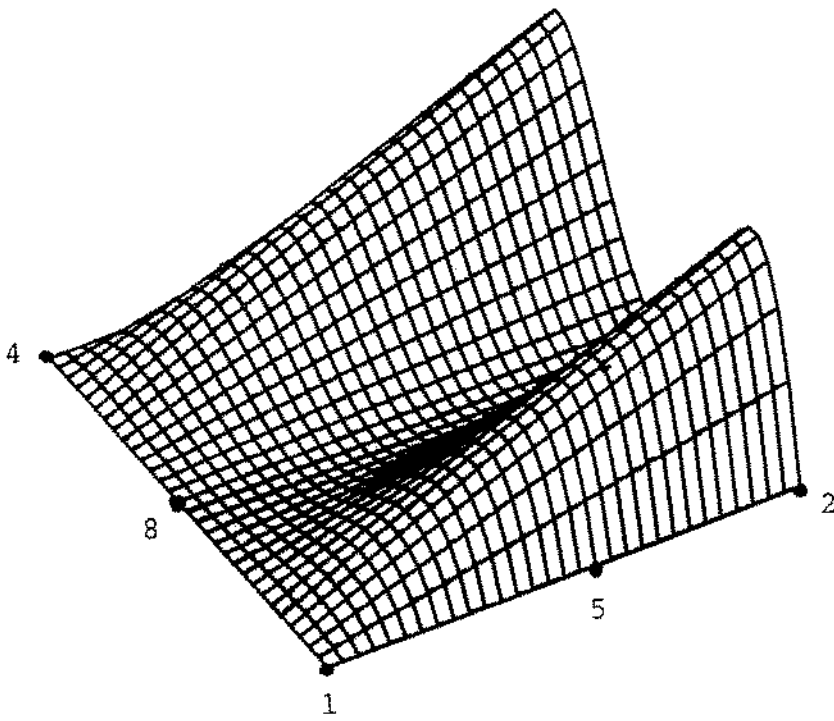
lado 1-4:

$$N_{16} = s^2(1 - s^2)(1 - r) \quad (3.47)$$

As figuras 3.6 e 3.7 ilustram as funções de interpolação hierárquicas do quarto grau associadas aos lados do elemento.



(a)



(b)

Figura 3.6. Funções de interpolação hierárquicas do quarto grau (a) associada ao lado 1-2 (N_{13}) e (b) associada ao lado 2-3 (N_{14}).

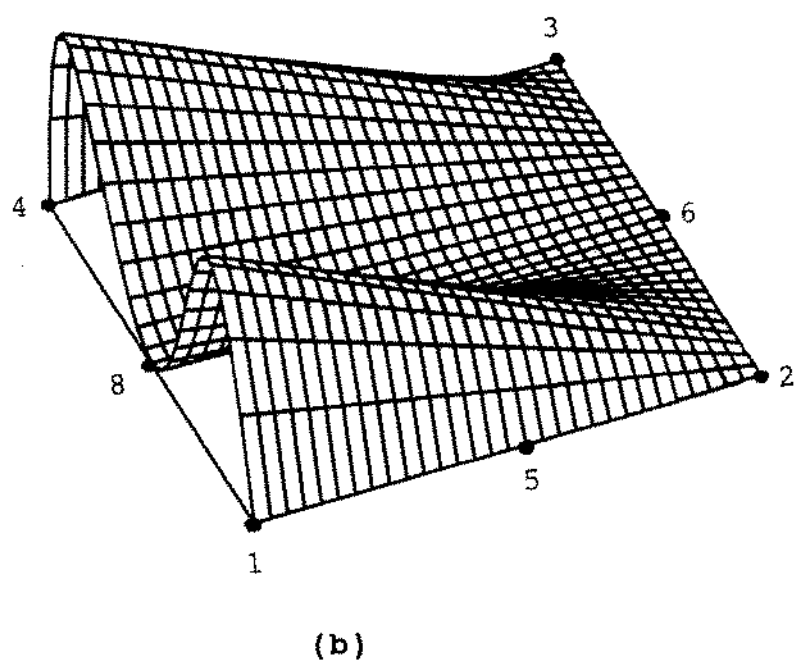
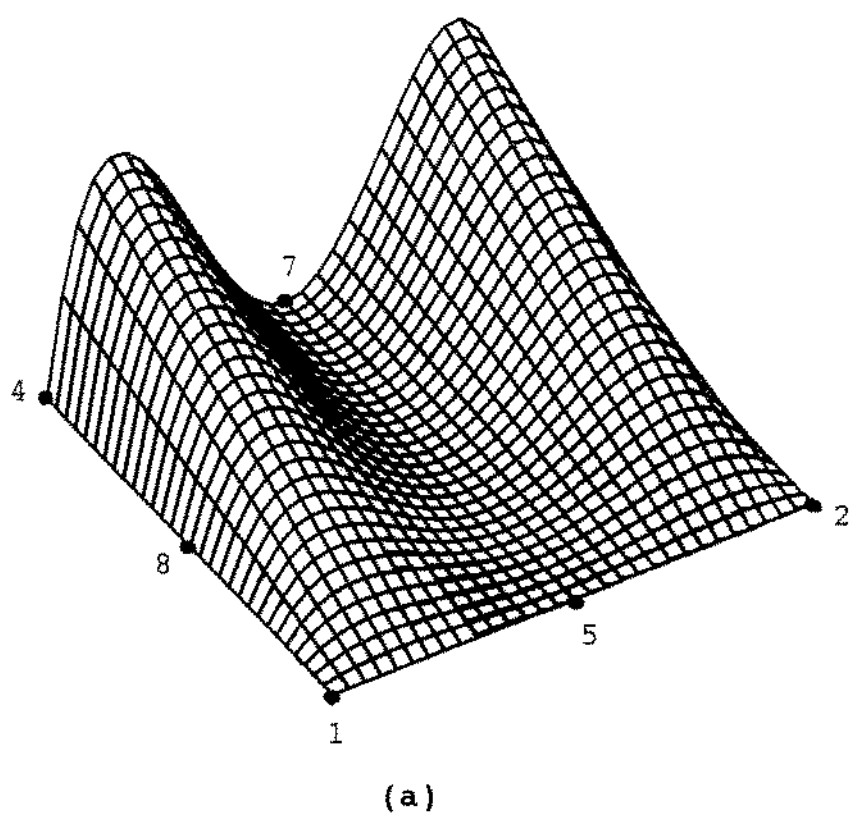


Figura 3.7. Funções de interpolação hierárquicas do quarto grau (a) associada ao lado 3-4 (N_{15}) e (b) associada ao lado 1-4 (N_{16}).

A função tipo bolha, N_{17} , será uma função de interpolação hierárquica que contenha o termo quadrático r^2s^2 , para que a expansão de quarta ordem se transforme em um polinômio completo do quarto grau (veja figura 3.5). A função de interpolação hierárquica do tipo bolha deve-se anular nos nós do elemento. Assim, por exemplo

$$N_{17} = (1 - r^2)(1 - s^2) \quad (3.48)$$

A figura 3.8 ilustra a função de interpolação hierárquica quadrática do tipo bolha, associada ao centro do elemento.

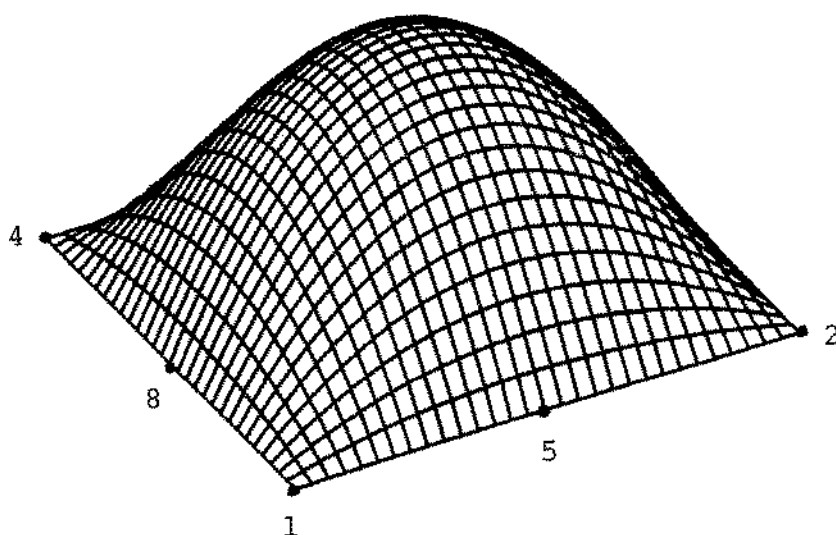


Figura 3.8. Função de interpolação hierárquica quadrática tipo bolha (N_{17}).

A introdução das funções de interpolação hierárquicas, dadas pelas equações (3.44) a (3.48) na aproximação cúbica anterior, (equação (3.33)) produz uma aproximação (equação (3.43)) cujo polinômio será do quarto grau completo, com excesso de dois termos parásitos: r^4s e rs^4 .

De maneira semelhante, uma aproximação de quinta ordem se obtém acrescentando à aproximação de quarta ordem (equação 3.43) funções de interpolação hierárquicas do quinto

grau, associadas aos lados do elemento e duas funções de interpolação hierárquicas do tipo bolha mista. Logo, tem-se

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^8 N_i a_i + \sum_{i=9}^{12} N_i a_i + \sum_{i=13}^{16} N_i a_i + N_{17} a_{17} + \\ + \sum_{i=18}^{21} N_i a_i + \sum_{i=22}^{23} N_i a_i \quad (3.49)$$

sendo N_i ($i = 18, 19, 20, 21$) funções de interpolação do quinto grau, associadas aos lados do elemento, definidas por

lado 1-2:

$$N_{18} = (7r^5 - 10r^3 + 3r)(1 - s) \quad (3.50a)$$

ou

$$N'_{18} = (2r^5 - r^3 - r)(1 - s) \quad (3.50b)$$

lado 2-3:

$$N_{19} = (7s^5 - 10s^3 + 3s)(1 + r) \quad (3.51a)$$

ou

$$N'_{19} = (2s^5 - s^3 - s)(1 + r) \quad (3.51b)$$

lado 3-4:

$$N_{20} = (7r^5 - 10r^3 + 3r)(1 + s) \quad (3.52a)$$

ou

$$N'_{20} = (2r^5 - r^3 - r)(1 + s) \quad (3.52b)$$

lado 1-4:

$$N_{21} = (7s^5 - 10s^3 + 3s)(1 - r) \quad (3.53a)$$

ou

$$N'_{21} = (2s^5 - s^3 - s)(1 - r) \quad (3.53b)$$

As figuras 3.9 e 3.10 mostram as funções de interpolação hierárquicas do quinto grau dadas pelas equações (3.50a) a (3.53a), associadas aos lados do elemento.

As figuras 3.11 e 3.12 mostram as funções de interpolação hierárquicas, também do quinto grau, dadas pelas equações (3.50b) a (3.53b).

Analisando novamente o triângulo de Pascal (figura 3.5) nota-se que para se ter uma aproximação completa de quinta ordem, é necessário ainda, incluir duas funções de interpolação hierárquicas N_i ($i = 22, 23$) do tipo bolha mista: uma função N_{22} , contendo o termo r^3s^2 e outra contendo o termo r^2s^3 . Tais funções são definidas por,

$$N_{22} = (r - r^3)(1 - s^2) \quad (3.54)$$

e

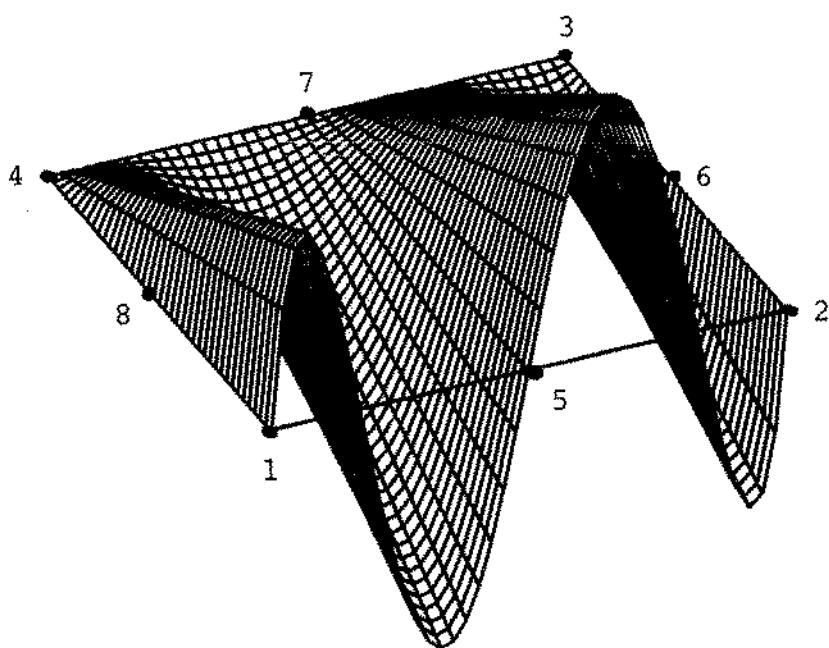
$$N_{23} = (s - s^3)(1 - r^2) \quad (3.55)$$

O elemento quadrilateral C^0 tem, para $p \geq 4$, $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ modos internos. A forma geral para a p -ésima ordem do modo interno (KARDESTUNCER [26]) é dada por

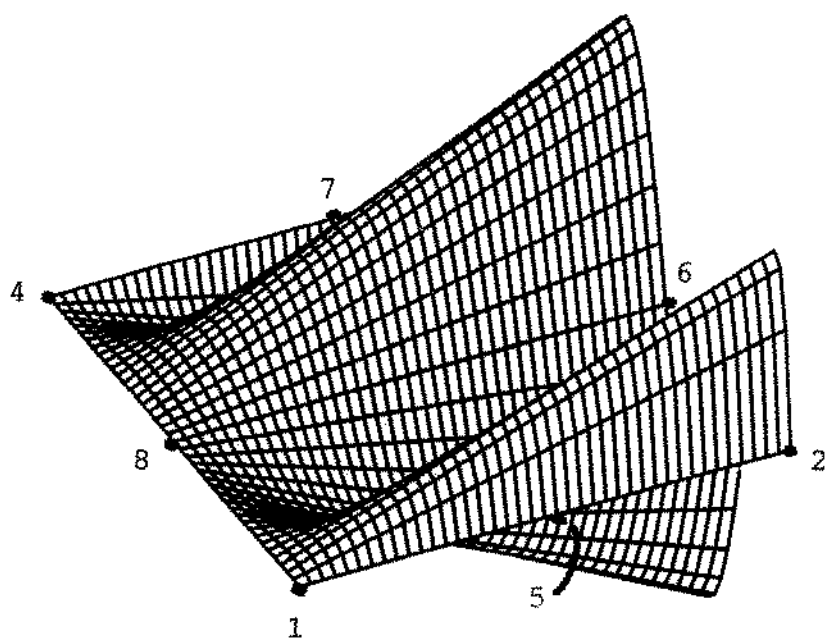
$$N(r,s) = (1 - r^2)(1 - s^2) P_{p-1-3}(r) P_{1-1}(s) \quad (3.56)$$

para $i = 1, 2, \dots, p-3$. $P_j(x)$ é o polinômio de Legendre de grau j , agora, definido por

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j ; \quad j = 0, 1, 2, \dots, p-4 \quad (3.57)$$

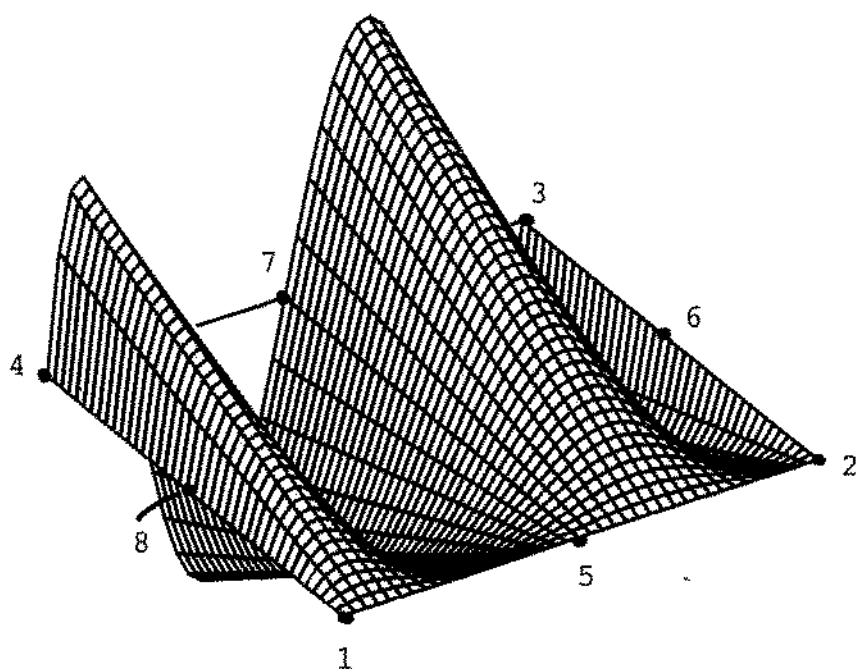


(a)

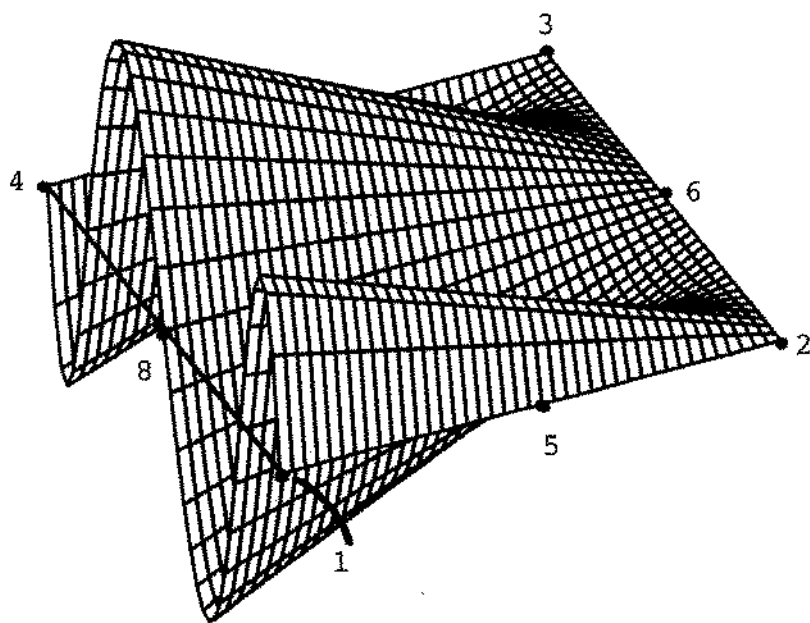


(b)

Figura 3.9. Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 1-2 (N_{18}) e (b) associada ao lado 2-3 (N_{19}).



(a)



(b)

Figura 3.10. Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 3-4 (N_{20}) e (b) associada ao lado 1-4 (N_{21}).

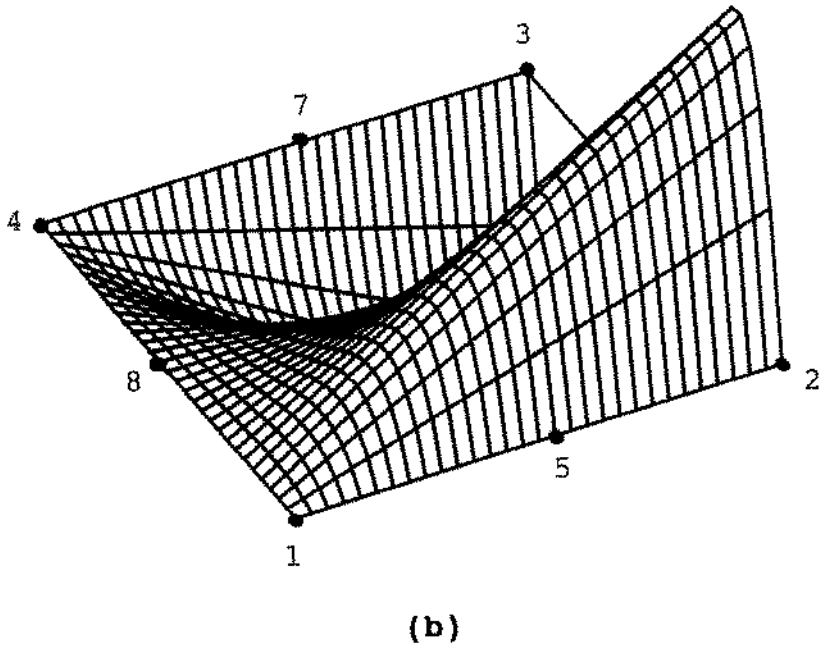
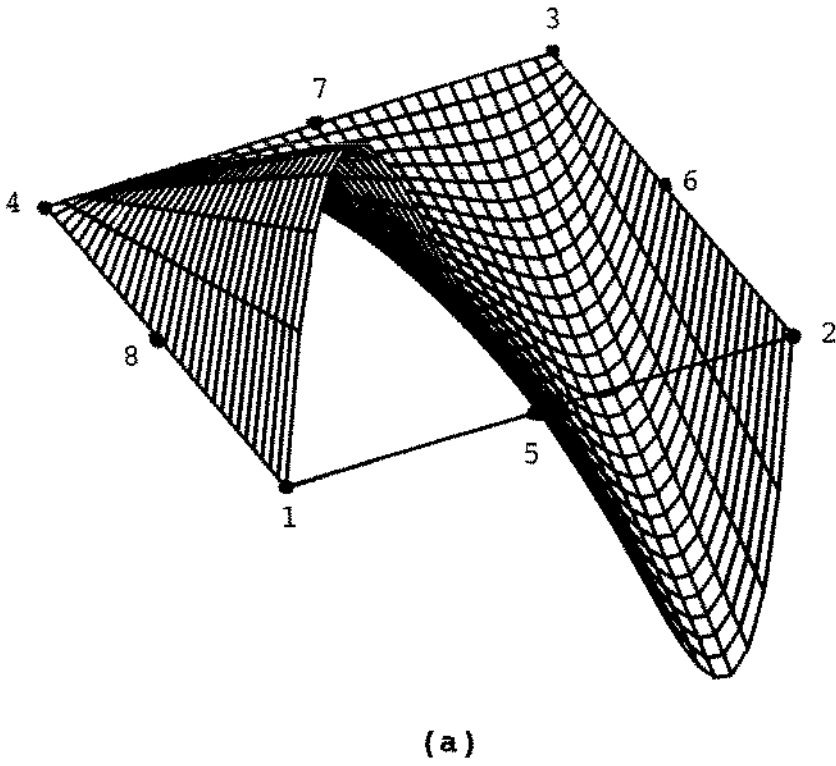
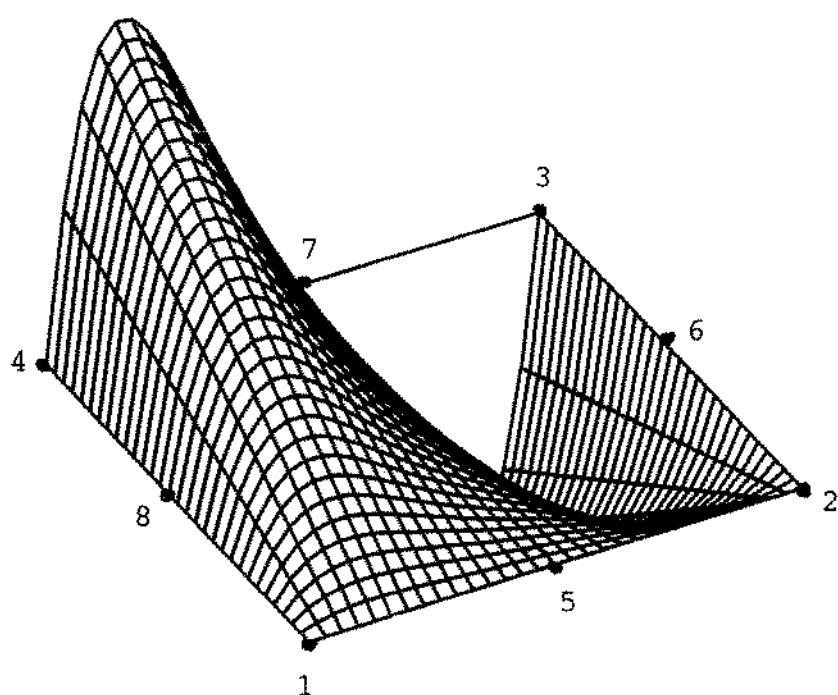
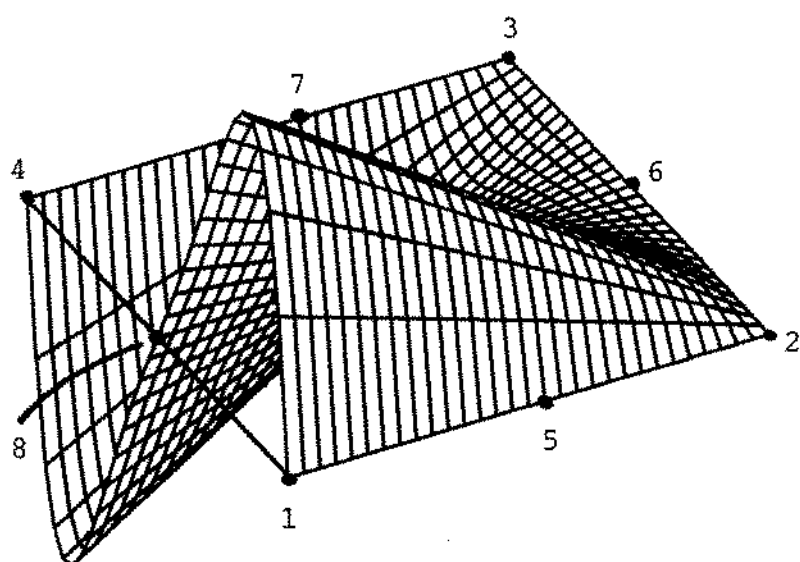


Figura 3.11. Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 1-2 (N'_{18}) e (b) associada ao lado 2-3 (N'_{19}).



(a)



(b)

Figura 3.12. Funções de interpolação hierárquicas do quinto grau (a) associada ao lado 3-4 (N'_{20}) e (b) associada ao lado 1-4 (N'_{21}).

A figura 3.13 mostra as funções de interpolação hierárquicas do tipo bolha, N_{22} e N_{23} , dadas pelas equações (3.54) e (3.55), incluídas na aproximação de quinta ordem do elemento.

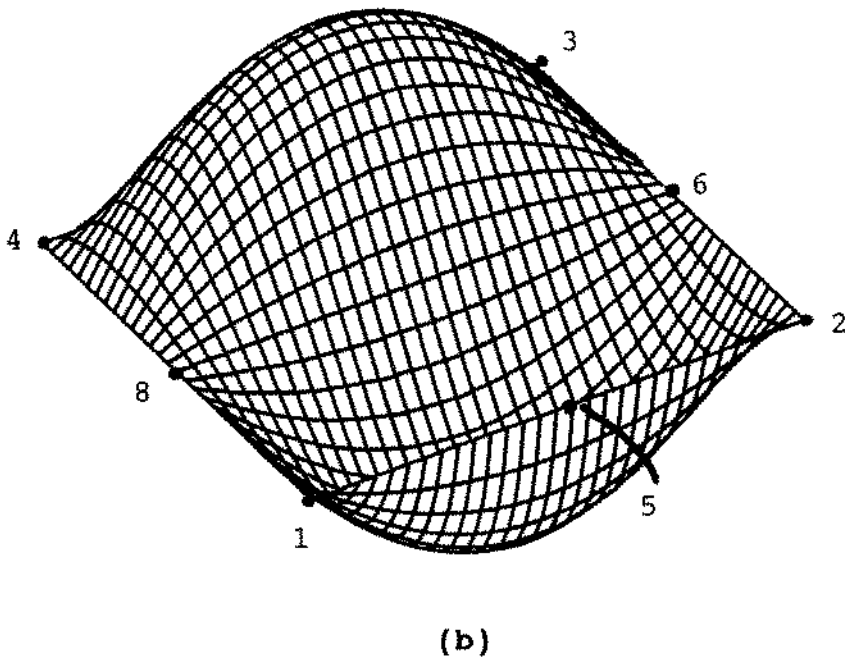
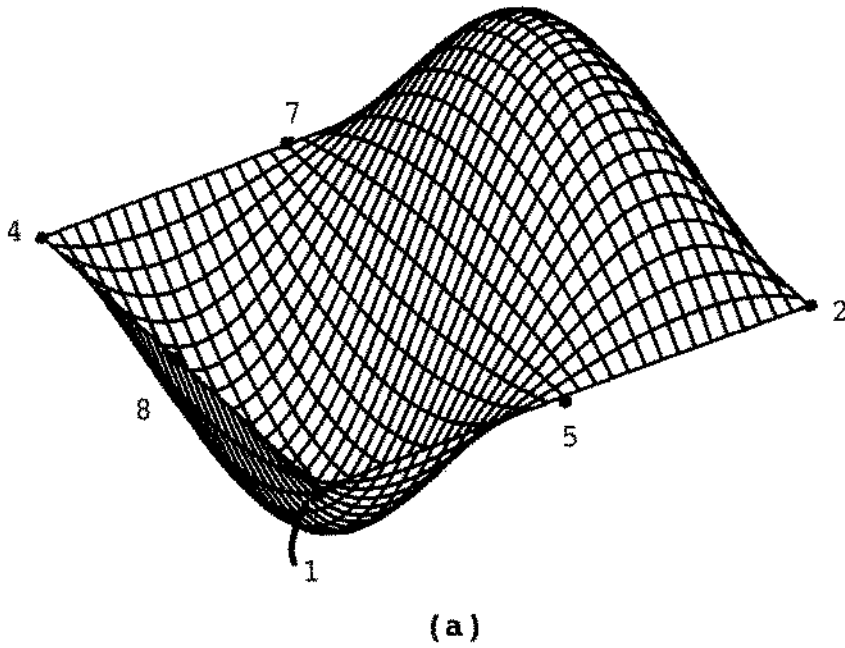


Figura 3.13. Funções de interpolação hierárquicas do tipo bolha (a) N_{22} e (b) N_{23} .

As funções de interpolação hierárquicas N_i ($i = 18, 19, 20, 21$) do quinto grau e as funções tipo bolha N_i ($i = 22, 23$) completam o polinômio da aproximação de quinta ordem. Observa-se, mais uma vez, a presença de dois termos parasíticos: r^5 e sr^5 .

Convém relembrar que, segundo os critérios de convergência (ZIENKIEWICZ [1]), toda função de interpolação tem que ser tal, que os deslocamentos nodais devam ser compatíveis com um estado de deformação constante (1º e 2º critérios: condição de derivada primeira constante) e que as deformações que se produzem nos limites de separação entre elementos sejam finitas (3º critério: condição de continuidade C^0). As funções de interpolação hierárquicas do terceiro grau, dadas pelas equações (3.34) a (3.37), as do quarto grau, mencionadas nas equações (3.44) a (3.48) e as do quinto grau, definidas nas equações (3.50) a (3.55) são apenas adicionadas à aproximação básica do segundo grau, não modificando, portanto, as funções de interpolação quadráticas standard. Como essas funções quadráticas são da família Serendipity e satisfazem os critérios de convergência, então todas as funções de interpolação hierárquicas apresentadas anteriormente, que podem produzir aproximações seja da terceira, quarta ou quinta ordem, satisfazem também os critérios de convergência (SZABO et al. [24]).

3.5. FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO HIERÁRQUICAS PARA ELEMENTOS 3D

Neste trabalho foram testadas algumas funções de interpolação hierárquicas implementadas no método dos elementos finitos para a solução de problemas de vibrações livres de placas espessas. O elemento utilizado é tridimensional degenerado de dezesseis nós, ou seja, quadrático nas direções r e s e linear em t (veja figura 2.9).

As funções de interpolação quadráticas standard utilizadas para se obter a primeira aproximação da solução, foram apresentadas no capítulo 2 pelas equações (2.56) a (2.65).

Com os resultados da aproximação quadrática, pretende-se agora, obter soluções para o problema tridimensional, considerando aproximações da terceira, quarta e quinta ordem, utilizando funções de interpolação hierárquicas correspondentes à ordem do nível de aproximação desejada.

Uma aproximação de terceira ordem é obtida por,

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{16} N_i a_i + \sum_{i=17}^{24} N_i a_i \quad (3.58)$$

sendo N_i ($i = 1, 2, \dots, 16$) as funções de interpolação quadráticas standard dadas pelas equações (2.56) a (2.65), usadas para a solução do primeiro nível de aproximação e N_i ($i = 17, 18, \dots, 24$) funções de interpolação hierárquicas do terceiro grau definidas, agora, por

aresta 1-2:

$$N_{17} = 2(s^3 - s)(1 + r)(1 + t) \quad (3.59)$$

aresta 2-3:

$$N_{18} = 2(r^3 - r)(1 + s)(1 + t) \quad (3.60)$$

aresta 3-4:

$$N_{19} = 2(s^3 - s)(1 - r)(1 + t) \quad (3.61)$$

aresta 1-4:

$$N_{20} = 2(r^3 - r)(1 - s)(1 + t) \quad (3.62)$$

aresta 5-6:

$$N_{21} = 2(s^3 - s)(1 + r)(1 - t) \quad (3.63)$$

aresta 6-7:

$$N_{22} = 2(r^3 - r)(1 + s)(1 - t) \quad (3.64)$$

aresta 7-8:

$$N_{23} = 2(s^3 - s)(1 - r)(1 - t) \quad (3.65)$$

aresta 5-8:

$$N_{24} = 2(r^3 - r)(1 - s)(1 - t) \quad (3.66)$$

As incógnitas hierárquicas a_i ($i = 17, 18, \dots, 24$) da aproximação cúbica, podem ser determinadas de maneira similar ao caso de expansão cúbica usada em elementos planos quadrilaterais. Por exemplo, para a aresta 2-3 do elemento 3D, mostrado na figura 2.9, tem-se

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{16} N_i a_i + N_{18} a_{18} \quad (3.67)$$

Inserindo as equações (2.54) a (2.65) do capítulo 2 e a equação (3.60) com $s_i = +1$ e $t_i = +1$ (coordenadas locais da aresta 2-3 do elemento) na equação (3.67) e derivando $\hat{\phi}$ com relação à variável local r , tem-se no ponto $r = 0$,

$$\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ s=1 \\ t=1}} = \frac{1}{2} a_2 - \frac{1}{2} a_3 - 8 a_{18} \quad (3.68)$$

portanto, a incógnita hierárquica a_{18} será

$$a_{18} = -\frac{1}{8} \left[\left. \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ s=1 \\ t=1}} + \frac{1}{2} (a_3 - a_2) \right] \quad (3.69)$$

Para se obter uma aproximação hierárquica de quarta ordem para o elemento, deve-se adicionar funções de interpolação hierárquicas do quarto grau, associadas a cada uma das arestas do elemento e duas funções tipo bolha à aproximação cúbica anterior, dada pela equação (3.58), que resulta em

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{16} N_i a_i + \sum_{i=17}^{24} N_i a_i + \sum_{i=25}^{32} N_i a_i + \sum_{i=33}^{34} N_i a_i \quad (3.70)$$

sendo N_i ($i = 25, 26, \dots, 32$) funções de interpolação

hierárquicas do quarto grau associadas às arestas do elemento, que aqui, são definidas por:

aresta 1-2:

$$N_{25} = s^2(1 - s^2)(1 + r)(1 + t) \quad (3.71)$$

aresta 2-3:

$$N_{26} = r^2(1 - r^2)(1 + s)(1 + t) \quad (3.72)$$

aresta 3-4:

$$N_{27} = s^2(1 - s^2)(1 - r)(1 + t) \quad (3.73)$$

aresta 1-4:

$$N_{28} = r^2(1 - r^2)(1 - s)(1 + t) \quad (3.74)$$

aresta 5-6:

$$N_{29} = s^2(1 - s^2)(1 + r)(1 - t) \quad (3.75)$$

aresta 6-7:

$$N_{30} = r^2(1 - r^2)(1 + s)(1 - t) \quad (3.76)$$

aresta 7-8:

$$N_{31} = s^2(1 - s^2)(1 - r)(1 - t) \quad (3.77)$$

aresta 5-8:

$$N_{32} = r^2(1 - r^2)(1 - s)(1 - t) \quad (3.78)$$

No entanto, para que a aproximação desejada seja representada por um polinômio completo do quarto grau, duas funções hierárquicas do tipo bolha devem ser ainda consideradas: uma função N_{33} que será associada à face 1-2-3-4 do elemento e outra N_{34} à face 5-6-7-8 do elemento. As funções de interpolação hierárquicas do tipo bolha são definidas por,

$$N_{33} = (1 - r^2)(1 - s^2)(1 + t) \quad (3.79)$$

$$N_{34} = (1 - r^2)(1 - s^2)(1 - t) \quad (3.80)$$

Finalmente, para se obter uma aproximação de quinta ordem, funções de interpolação hierárquicas do quinto grau e funções hierárquicas do tipo bolha devem ser introduzidas à aproximação de ordem imediatamente inferior dada pela equação (3.70), ou seja

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{34} N_i a_i + \sum_{i=35}^{42} N_i a_i + \sum_{i=43}^{46} N_i a_i \quad (3.81)$$

sendo N_i ($i = 35, 36, \dots, 42$) funções de interpolação hierárquicas do quinto grau, associadas às arestas do elemento e dadas por:

aresta 1-2:

$$N_{35} = (7s^5 - 10s^3 + 3s)(1+r)(1+t) \quad (3.82a)$$

ou

$$N'_{35} = (2s^5 - s^3 - s)(1+r)(1+t) \quad (3.82b)$$

aresta 2-3:

$$N_{36} = (7r^5 - 10r^3 + 3r)(1+s)(1+t) \quad (3.83a)$$

ou

$$N'_{36} = (2r^5 - r^3 - r)(1+s)(1+t) \quad (3.83b)$$

aresta 3-4:

$$N_{37} = (7s^5 - 10s^3 + 3s)(1-r)(1+t) \quad (3.84a)$$

ou

$$N'_{37} = (2s^5 - s^3 - s)(1-r)(1+t) \quad (3.84b)$$

aresta 1-4:

$$N_{38} = (7r^5 - 10r^3 + 3r)(1-s)(1+t) \quad (3.85a)$$

ou

$$N'_{38} = (2r^5 - r^3 - r)(1-s)(1+t) \quad (3.85b)$$

aresta 5-6:

$$N_{39} = (7s^5 - 10s^3 + 3s)(1+r)(1-t) \quad (3.86a)$$

ou

$$N'_{39} = (2s^5 - s^3 - s)(1+r)(1-t) \quad (3.86b)$$

aresta 6-7:

$$N_{40} = (7r^5 - 10r^3 + 3r)(1 + s)(1 - t) \quad (3.87a)$$

ou

$$N'_{40} = (2r^5 - r^3 - r)(1 + s)(1 - t) \quad (3.87b)$$

aresta 7-8:

$$N_{41} = (7s^5 - 10s^3 + 3s)(1 - r)(1 - t) \quad (3.88a)$$

ou

$$N'_{41} = (2s^5 - s^3 - s)(1 - r)(1 - t) \quad (3.88b)$$

aresta 5-8:

$$N_{42} = (7r^5 - 10r^3 + 3r)(1 - s)(1 - t) \quad (3.89a)$$

ou

$$N'_{42} = (2r^5 - r^3 - r)(1 - s)(1 - t) \quad (3.89b)$$

Então, para que a aproximação desejada represente uma expansão polinomial completa de quinta ordem, deve-se considerar, além das funções anteriores, mais quatro funções de interpolação hierárquicas do tipo bolha: duas funções N_{43} e N_{45} associadas à face 1-2-3-4 do elemento e outras duas, N_{44} e N_{46} à face 5-6-7-8 do elemento. Estas funções podem ser dadas por

$$N_{43} = (r - r^3)(1 - s^2)(1 + t) \quad (3.90)$$

$$N_{44} = (r - r^3)(1 - s^2)(1 - t) \quad (3.91)$$

$$N_{45} = (s - s^3)(1 - r^2)(1 + t) \quad (3.92)$$

$$N_{46} = (s - s^3)(1 - r^2)(1 - t) \quad (3.93)$$

No próximo capítulo será visto que, realmente, funções de interpolação hierárquicas podem ser utilizadas no desenvolvimento de estimadores de erro de uma solução em relação a um certo nível de aproximação. As informações sobre o erro de uma solução serão úteis na implementação das funções de interpolação hierárquicas no processo de refinamento p-adaptativo.

CAPÍTULO 4

ESTIMADORES DE ERRO

4.1. INTRODUÇÃO

Um assunto de grande interesse encontrado na solução de problemas por métodos numéricos, que geralmente causa discussões, está na avaliação dos resultados.

Nos trabalhos de BABUSKA e RHEINBOLDT [27,28,29] encontram-se sugestões para medidas e estimativas de erro a-posteriori para elementos bilineares, as quais têm sido consideradas suficientemente capazes para indicar com certa segurança os resultados de uma solução. Com base neste trabalho, outros estimadores de erro, usados em esquemas adaptativos, têm sido testados em malhas de elementos finitos para gerar resultados mais confiáveis (KELLY et al. [30], GAGO et al. [31], ERIKSSON [32], ZIENKIEWICZ e ZHU [33]).

O objetivo deste capítulo é apresentar um indicador local e um estimador global como estimadores de erro a-posteriori. Estes estimadores foram implementados em um programa computacional e testados neste trabalho em várias aplicações numéricas.

Ao empregar um método numérico tal como o método dos elementos finitos (MEF) na resolução de um problema físico, três tipos de erros podem ocorrer (RIBEIRO [34]). O primeiro e o mais importante é o erro devido à discretização, que se traduz no não cumprimento das equações diferenciais que regem o problema. O segundo corresponde aos erros de truncamento, ocorridos durante o cálculo computacional, os quais podem ser minimizados, utilizando-se computadores de alta precisão. O terceiro tipo de erro é causado pelas simplificações envolvidas na construção do modelo matemático representativo do problema. Trata-se, neste capítulo, do primeiro tipo de erro, ou seja, do erro proveniente da discretização do modelo

matemático. Este é o erro que tenta-se minimizar através de refinamentos adaptativos. Para um estudo mais detalhado da questão, recomenda-se a leitura dos trabalhos de ZIENKIEWICZ et al. [11], BABUSKA et al. [14], KELLY [35], SZABO e SAHRMANN [36].

4.2. ESTIMADORES DE ERRO

Como mencionado no capítulo 2, o método dos elementos finitos consiste em determinar uma solução aproximada na forma

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (4.1)$$

O erro associado a uma aproximação deste tipo é uma função e definida como sendo a diferença entre a solução exata e a solução aproximada,

$$e = \phi - \hat{\phi} \quad (4.2)$$

Geralmente, procuram-se determinar limites superiores das estimativas de erro. Isto significa que, dado o domínio discretizado por uma malha de elementos finitos de tamanhos iguais a h , estabelece-se uma inequação, válida para valores pequenos de h (BECKER et al. [37]), do tipo

$$|| e || \leq C h^k \quad (4.3)$$

onde C é uma constante dependente dos dados do problema, e k é um inteiro que depende da função de interpolação utilizada. O expoente k é chamado de taxa de convergência com relação à norma empregada. Na literatura são encontradas várias estimativas utilizando-se diferentes normas.

Estimadores de erro de características apresentadas pela equação (4.3) são chamados de estimadores de erro a-priori, uma vez que podem ser determinados antes de se obter a solução do problema. Por outro lado, quando os

estimadores de erro são calculados a partir de informações fornecidas por uma solução aproximada, denominam-se estimadores de erro a-posteriori.

A obtenção de estimativas de erro a-posteriori tem-se mostrado um importante tópico na análise por elementos finitos e recentemente, muitas pesquisas têm sido voltadas para esta área.

BABUSKA e RHEINBOLDT [12,28] avaliaram o erro utilizando resíduos da equação de equilíbrio e também a descontinuidade na derivada normal ao longo do contorno dos elementos. Eles concluíram que os resíduos são fatores dominantes para a estimativa de erro em problemas unidimensionais, enquanto a descontinuidade é mais importante em problemas bidimensionais. KELLY et al. [30] usaram um conjunto incompleto de funções de alta ordem, isto é, funções de interpolação hierárquicas, examinadas por ZIENKIEWICZ et al. [11], para expressar a distribuição de erros em uma solução (OHTSUBO e KITAMURA [38]).

Neste capítulo é deduzido um indicador de erro como sendo um estimador de erro local a-posteriori na análise de vibrações livres, que pode ser usado em elementos de forma arbitrária e aplicado a qualquer espécie de problema linear (FRIBERG [39]).

4.3. ESTIMADORES DE ERRO A-POSTERIORI

Como definido na seção 4.2, estimadores de erro a-posteriori são aqueles obtidos com base em informações da própria solução cujo erro deseja-se estimar.

Utilizando a formulação paramétrica hierárquica do método dos elementos finitos é possível obter estimadores de erro a-posteriori (FRIBERG et al. [40]), os quais podem ser aplicados em processos de refinamento na solução de problemas de autovalor generalizado.

A solução de problemas de autovalor generalizado que aparece,

por exemplo, em vibrações livres e transferência de calor, torna-se muitas vezes um procedimento que consome grande esforço computacional. Em tais problemas, geralmente, deseja-se estimar um número de autovalores relevantes em um intervalo de frequência de interesse. Normalmente os autovalores são obtidos em uma única solução para uma dada discretização (BATHE e WILSON [5]).

Além do mais, desde que os menores autovalores exigem um menor grau de discretização, pode ser desejável usar refinamentos adaptativos na solução, quando altas frequências são investigadas. Para tais refinamentos, é necessário que se disponha de estimadores de erro a serem aplicados nos resultados da solução, obtendo-se, conseqüentemente, uma possível melhora nos autovalores calculados.

Conhecendo-se duas soluções sucessivas, com n e $n + m$ graus de liberdade, o erro associado pode ser estimado como sendo a diferença entre estas duas aproximações,

$$e = \hat{\phi}_{n+m} - \hat{\phi}_n \quad (4.4a)$$

onde

$$\hat{\phi}_n = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (4.4b)$$

e

$$\hat{\phi}_{n+m} = \sum_{i=1}^n N_i a_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} N_i a_i \quad (4.4c)$$

No entanto, uma aproximação do erro pode ser determinada sem o recurso de se obter a segunda solução.

A seguir, será deduzida uma expressão para um indicador de erro, o qual poderá ser usado como um estimador de erro a-posteriori, dentro do conceito hierárquico do método dos elementos finitos.

Um indicador de erro, sugerido por FRIBERG [39], é derivado a partir das propriedades do coeficiente de Rayleigh,

$$\lambda_i = \frac{k_i}{m_i} \quad (4.5a)$$

onde λ_i é o i -ésimo autovalor (igual ao quadrado da frequência angular ω_i), k_i é o coeficiente de rigidez modal e m_i é o coeficiente de massa modal.

Os coeficientes de rigidez modal e de massa modal são definidos, respectivamente, por

$$k_i = \{\phi_i\}^T [K] \{\phi_i\} \quad (4.5b)$$

$$m_i = \{\phi_i\}^T [M] \{\phi_i\} \quad (4.5c)$$

onde $[K]$ e $[M]$ são as matrizes de rigidez e de massa globais, respectivamente. O vetor coluna $\{\phi_i\}$ é o i -ésimo modo próprio de vibração do sistema a ser refinado. Nesse ponto, portanto, é assumido que os autopares, isto é, os autovalores e os correspondentes autovetores ($\lambda_{i(n)}$, $\{\phi_i\}_n$) do intervalo de frequência de interesse, já tenham sido encontrados em uma primeira solução para uma certa discretização. A notação (n) indica o número de graus de liberdade para esta primeira aproximação. Assim,

$$\lambda_{i(n)} = \frac{k_{i(n)}}{m_{i(n)}} = \frac{\{\phi_i\}_n^T [K]_{n,n} \{\phi_i\}_n}{\{\phi_i\}_n^T [M]_{n,n} \{\phi_i\}_n} \quad (4.6a)$$

onde i pode assumir um dos números 1, 2, ..., n .

Procedendo-se um refinamento hierárquico com a introdução de m graus de liberdade, tem-se, analogamente,

$$\lambda_{j(n+m)} = \frac{k_{j(n+m)}}{m_{j(n+m)}} = \frac{\{\psi_j\}_{n+m}^T [K]_{n+m,n+m} \{\psi_j\}_{n+m}}{\{\psi_j\}_{n+m}^T [M]_{n+m,n+m} \{\psi_j\}_{n+m}} \quad (4.6b)$$

onde $\lambda_{j(n+m)}$ corresponde ao j -ésimo autovalor, com modo próprio $\{\psi_j\}_{n+m}$, obtidos com o refinamento hierárquico e j podendo assumir um dos valores $1, 2, \dots, (n+m)$. As matrizes globais correspondentes apresentam as seguintes formas,

$$[K]_{n+m, n+m} = \begin{bmatrix} [K]_{n, n} & [K]_{n, m} \\ [K]_{m, n} & [K]_{m, m} \end{bmatrix} \quad (4.7a)$$

$$[M]_{n+m, n+m} = \begin{bmatrix} [M]_{n, n} & [M]_{n, m} \\ [M]_{m, n} & [M]_{m, m} \end{bmatrix} \quad (4.7b)$$

O vetor $\{\psi_j\}_{n+m}$ pode ser separado da mesma forma em,

$$\{\psi_j\}_{n+m} = \begin{bmatrix} \{\psi_j\}_n \\ \{\psi_j\}_m \end{bmatrix} \quad (4.7c)$$

A estimativa do erro relativo e_i para o i -ésimo autovalor para um possível refinamento é dada por,

$$e_i = \frac{\lambda_{i(n)} - \lambda_{i(n+m)}}{\lambda_{i(n)}} ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

Interpretando um autovalor λ_i como sendo uma função de duas variáveis independentes k_i e m_i , a expansão da série de Taylor da equação (4.5a) é dada por

$$\begin{aligned} \lambda_i(k_i + \Delta k_i, m_i + \Delta m_i) = & \lambda_i(k_i, m_i) + \Delta k_i \frac{\partial}{\partial k_i} \lambda_i(k_i, m_i) + \\ & \Delta m_i \frac{\partial}{\partial m_i} \lambda_i(k_i, m_i) + \dots \end{aligned} \quad (4.9a)$$

Fazendo

$$\Delta\lambda_i = \lambda_i(k_i + \Delta k_i, m_i + \Delta m_i) - \lambda_i(k_i, m_i) \quad (4.9b)$$

e tendo-se que

$$\lambda_i(k_i, m_i) = \frac{k_i}{m_i} \quad (4.9c)$$

a equação (4.9a) torna-se

$$\Delta\lambda_i \cong \frac{\Delta k_i}{m_i} - \frac{k_i \Delta m_i}{m_i^2} \quad (4.9d)$$

Pelo uso da equação (4.5a), uma aproximação para a relativa troca de um autovalor pode ser escrita como,

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \cong \frac{\Delta k_i - \lambda_i \Delta m_i}{k_i} \quad (4.10)$$

Usando as equações (4.8) e (4.10), uma aproximação para o erro relativo a um autovalor em um refinamento hierárquico é

$$e_i \cong \frac{\Delta k_i - \lambda_{i(n)} \Delta m_i}{k_{i(n)}} \quad (4.11)$$

Fazendo

$$\Delta k_i = k_{i(n)} - k_{i(n+m)} \quad (4.12a)$$

e

$$\Delta m_i = m_{i(n)} - m_{i(n+m)} \quad (4.12b)$$

e assumindo-se que as matrizes $[K]_{n+m, n+m}$ e $[M]_{n+m, n+m}$ são simétricas, vem que, usando as equações (4.6a, b) e (4.7a, b, c),

$$\begin{aligned}
\Delta k_1 &= \left\{ \phi_1 \right\}_n^T [K]_{n,n} \left\{ \phi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_{n+m}^T [K]_{n+m,n+m} \left\{ \psi_1 \right\}_{n+m} \\
&= \left\{ \phi_1 \right\}_n^T [K]_{n,n} \left\{ \phi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [K]_{n,n} \left\{ \psi_1 \right\}_n \\
&\quad - 2 \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [K]_{m,n} \left\{ \psi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [K]_{m,m} \left\{ \psi_1 \right\}_m
\end{aligned} \tag{4.13a}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned}
\Delta m_1 &= \left\{ \phi_1 \right\}_n^T [M]_{n,n} \left\{ \phi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_{n+m}^T [M]_{n+m,n+m} \left\{ \psi_1 \right\}_{n+m} \\
&= \left\{ \phi_1 \right\}_n^T [M]_{n,n} \left\{ \phi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_n^T [M]_{n,n} \left\{ \psi_1 \right\}_n \\
&\quad - 2 \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [M]_{m,n} \left\{ \psi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [M]_{m,m} \left\{ \psi_1 \right\}_m
\end{aligned} \tag{4.13b}$$

Para encontrar um indicador de erro que possa ser usado como estimador de erro a-posteriori, algumas hipóteses devem ser consideradas. Por exemplo, assume-se que

$$\left\{ \psi_1 \right\}_n \cong \left\{ \phi_1 \right\}_n \tag{4.14}$$

Com esta aproximação, os dois primeiros termos do lado direito de ambas as equações (4.13a) e (4.13b) se cancelam. Daí

$$\Delta k_1 \cong - 2 \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [K]_{m,n} \left\{ \phi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [K]_{m,m} \left\{ \psi_1 \right\}_m \tag{4.15a}$$

e

$$\Delta m_1 \cong -2 \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [M]_{m,n} \left\{ \phi_1 \right\}_n - \left\{ \psi_1 \right\}_m^T [M]_{m,m} \left\{ \psi_1 \right\}_m \quad (4.15b)$$

Além disso, é preciso fazer uma estimativa do vetor $\{\psi_1\}_m$.

Em um refinamento hierárquico, o problema de autovalor generalizado torna-se

$$\left(\begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,m} \\ [K]_{m,n} & [K]_{m,m} \end{bmatrix} - \lambda_{1(n+m)} \begin{bmatrix} [M]_{n,n} & [M]_{n,m} \\ [M]_{m,n} & [M]_{m,m} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \left\{ \psi_1 \right\}_n \\ \left\{ \psi_1 \right\}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Usando a aproximação da equação (4.14) e considerando-se a hipótese que

$$\lambda_{1(n+m)} \cong \lambda_{1(n)} \quad (4.17)$$

a segunda das equações em (4.16) resulta na seguinte aproximação de $\{\psi_1\}_{1(m)}$,

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_1 \right\}_m &\cong - \left[[K]_{m,m} - \lambda_{1(n)} [M]_{m,m} \right]^{-1} \times \\ &\quad \left(- \left[[K]_{m,n} - \lambda_{1(n)} [M]_{m,n} \right] \left\{ \phi_1 \right\}_n \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

desde que $[K]_{m,m} - \lambda_{1(n)} [M]_{m,m}$ não resulte em uma matriz singular.

Um indicador de erros que fornece uma estimativa de uma possível variação em um autovalor pode, agora, ser obtido usando as equações (4.11), (4.15a, b) e (4.18), pela introdução de um simples grau de liberdade hierárquico ($m = 1$). Após simplificações, tem-se

$$\eta_i^{(n+1)} = \frac{1}{k_{i(n)}} \frac{\left(\left[[K]_{n+1,n} - \lambda_{i(n)} [M]_{n+1,n} \right] \left\{ \phi_i \right\}_n \right)^2}{K_{n+1,n+1} - \lambda_{i(n)} M_{n+1,n+1}} \quad (4.19)$$

Estimadores como este são chamados de indicadores de erro e podem ser avaliados para cada possível novo grau de liberdade hierárquico introduzido. Em processos de refinamentos adaptativos, os indicadores de erro localizam os pontos da malha onde as correções são mais desejáveis.

Na expressão do indicador de erro, equação (4.19), tem-se que $[K]_{n+1,n}$ e $[M]_{n+1,n}$ devem conter os n primeiros elementos da linha $(n + 1)$ das matrizes de rigidez e de massa, respectivamente, linhas estas formadas pela introdução de um novo grau de liberdade hierárquico e $K_{n+1,n+1}$ e $M_{n+1,n+1}$ devem ser os correspondentes elementos da diagonal dessas matrizes.

Vale salientar que o coeficiente de rigidez modal $k_{i(n)}$ na equação (4.19), que foi definido pela equação (4.5b), pode resultar no valor de $\lambda_{i(n)}$ se o autovetor $\{\phi_i\}_n$ for normalizado de maneira que $\{\phi_i\}_n^T [M]_{n,n} \{\phi_i\}_n = 1$.

A figura 4.1 mostra a principal variação do indicador de erro com respeito ao autovalor $\lambda_{i(n)}$.

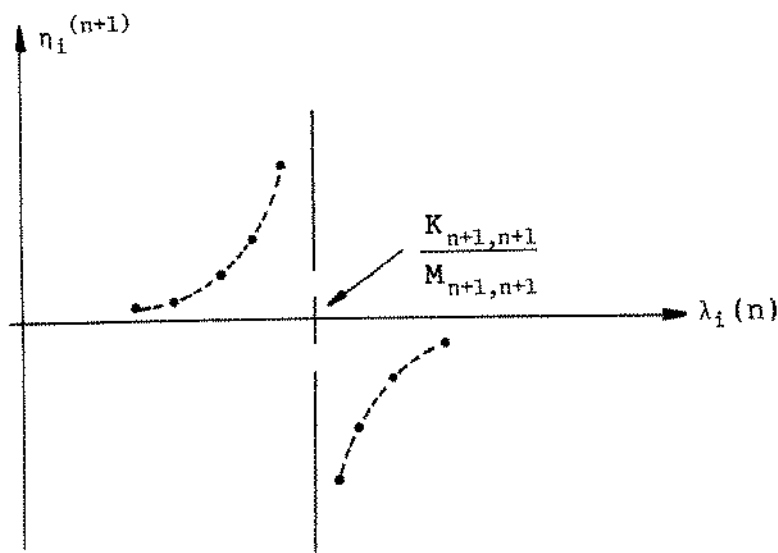


Figura 4.1. Variação do indicador de erro

Nota-se que as duas curvas tracejadas, traçadas entre pontos discretos, não são necessariamente monotônicas. Uma razão para isto está no fato de que diferentes autovetores estão envolvidos na equação (4.19).

Pode ser observado que para valores de $\lambda_{i(n)}$ próximos do valor $K_{n+1,n+1}/M_{n+1,n+1}$, o indicador de erro torna-se infinito. Para $\lambda_{i(n)}$ maior que $K_{n+1,n+1}/M_{n+1,n+1}$ o indicador é negativo e, em princípio, diminui em módulo com o aumento do valor de $\lambda_{i(n)}$. O valor negativo do indicador de erro é de menor interesse. FRIGERG [39] recomenda que não há necessidade de se fazer um refinamento hierárquico quando o indicador de erro torna-se negativo. Neste caso, pelo menos uma vantagem computacional é observada, no sentido que os n primeiros elementos de linha $(n + 1)$ das matrizes $[K]_{n+1,n}$ e $[M]_{n+1,n}$ na equação (4.19) não precisam ser armazenados.

Como critério de parada do processo de refinamento hierárquico, é também interessante estimar a precisão global dos autovalores para uma certa solução. Essa estimativa global é definida por um estimador de erros, o qual é computado durante o cálculo dos indicadores de erro. Geralmente, essa estimativa é obtida em função dos valores positivos desses indicadores. FRIBERG et al [40] propõem um estimador de erro o qual é econômico computacionalmente e fácil de ser implementado em um programa adaptativo, dado por

$$\varepsilon = \sum \left(\eta_i^{(n+1)} \text{ positivos} \right) \quad (4.20)$$

Um dos objetivos deste trabalho é analisar o comportamento do indicador e do estimador de erros dados pelas equações (4.19) e (4.20) respectivamente, em várias aplicações numéricas.

No capítulo seguinte será visto como o indicador e o estimador de erros, adotados neste trabalho, poderão ser utilizados em processos adaptativos usando refinamentos hierárquicos, bem como suas implementações computacionais.

CAPÍTULO 5

PROCESSO P-ADAPTATIVO HIERÁRQUICO

5.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo trata de um problema muito importante na engenharia, que é o de se obter uma solução, para uma dada precisão, com um mínimo de custo operacional.

Com a utilização frequente do método dos elementos finitos, muito esforço tem sido dedicado no sentido de se obter malhas ótimas e minimizar o erro de uma solução para um dado número de graus de liberdade. Sendo geralmente alto o custo computacional da otimização, muitas vezes são estabelecidas algumas regras gerais usadas na prática, para obter assim malhas mais eficientes. De qualquer maneira, o problema básico de se obter uma específica precisão tem conduzido a várias pesquisas na área. O objetivo deste capítulo é apresentar um processo de refinamento cuja técnica utilizada fornecerá malhas bastante eficientes.

Sendo disponível alguma experiência anterior na solução de alguns problemas similares, uma malha deve ser definida, e então, estima-se o erro na solução. Se este erro estimado excede a sua tolerância, um refinamento se processará de acordo com os erros estimados. Dependendo da malha escolhida, algumas questões podem surgir imediatamente. Se por um lado, através de experiências anteriores, a malha original é bem escolhida, a tolerância do erro pode ser satisfeita imediatamente e conseqüentemente não serão necessários novos refinamentos. Por outro lado, um grande número de iterações será necessário para satisfazer a tolerância do erro pré-especificado. Geralmente, um fator importante para ajudar a evitar situações indesejáveis é usar as experiências de estudos anteriores. A tendência no futuro é surgir processos completamente automáticos, e desta forma, os problemas poderão ser resolvidos com maior simplicidade.

5.2. PROCESSOS ADAPTATIVOS

Pelo fato da apresentação anterior ser completamente geral, não foi especificado o tipo de refinamento que possa ser utilizado. No entanto há, basicamente, dois tipos de refinamentos: a versão h e a versão p do método dos elementos finitos. A versão h do método dos elementos finitos é definida como um refinamento feito por subdivisão dos elementos já existentes em elementos do mesmo tipo, e a versão p como o refinamento que se obtém através da introdução nos elementos de sucessivos aumentos na ordem dos polinômios de interpolação das variáveis físicas. As taxas de convergência para as versões tipo h e p em termos do número de graus de liberdade têm sido identificadas e quantificadas por BABUSKA e SZABO [41].

Obviamente, ao refinar uma malha de elementos finitos pelas versões h ou p, outras possibilidades de refinamentos podem surgir. Por exemplo, pode-se afirmar, intuitivamente, que uma combinação simultânea dos dois tipos h e p de refinamentos proporcionará uma melhor convergência do que no caso de um simples refinamento na versão h ou na versão p, como definido antes. A análise de erros a-priori feita por BABUSKA e DORR [42] comprova, de fato, que esta combinação proporciona melhores taxas de convergência.

Segundo GAGO et al. [31], estes processos de refinamento são chamados de processos adaptativos, por apresentarem algoritmos que são capazes de minimizar os erros associados a uma solução. Eles diferem das técnicas usuais do MEF por possuírem rotinas que fazem estimativas de erros, normalmente estimativas de erros a-posteriori, e rotinas de refinamento seletivo, baseadas na distribuição de erros.

Os programas que utilizam estes processos são chamados de programas adaptativos. Eles possuem a importante característica de se poder empregar estimadores de erro locais e globais. Os estimadores de erro locais são os indicadores de erro, que servem para apontar as regiões na

malha de elementos finitos mais carentes de refinamento; já os estimadores de erro globais são os estimadores de erro que podem fornecer informações a respeito da necessidade ou não de se fazer um refinamento na solução.

Vale salientar que estes dois estimadores são independentes um do outro. Isto significa que pode-se ter um programa adaptativo sem qualquer estimativa de erro e vice-versa. No entanto, geralmente, a combinação de ambas as técnicas torna a análise mais eficiente.

O fluxograma de um programa adaptativo pelo MEF é mostrado na figura 5.1.

Como mencionado anteriormente, foi adotado neste trabalho o processo de refinamento adaptativo segundo a versão p do MEF. Esta versão consiste, basicamente, na introdução de novos graus de liberdade através da utilização de funções de interpolação hierárquicas. Este processo também é conhecido como processo de refinamento p-adaptativo hierárquico, e seu procedimento, conforme foi utilizado neste trabalho, é descrito a seguir.

Uma vez obtida a primeira solução para o problema analisado, são introduzidos, nos elementos, novos graus de liberdade hierárquicos, através do aumento do número e consequentemente do grau das funções de interpolação hierárquicas das variáveis físicas. A partir daí, faz-se uma estimativa de erros através do cálculo dos indicadores η_i^{n+1} do erro para cada grau de liberdade hierárquico possível de introdução. Determina-se então o estimador ϵ do erro como uma estimativa global de erro para os m novos graus de liberdade hierárquicos. Se esta estimativa de erro se encontrar fora da tolerância ϵ_{tol} fornecida como dado de entrada, processa-se então o refinamento seletivo hierárquico da solução. Se o erro total estimado for menor ou igual à tolerância pré-especificada, a solução é considerada satisfatória e consequentemente não se realiza novo refinamento.

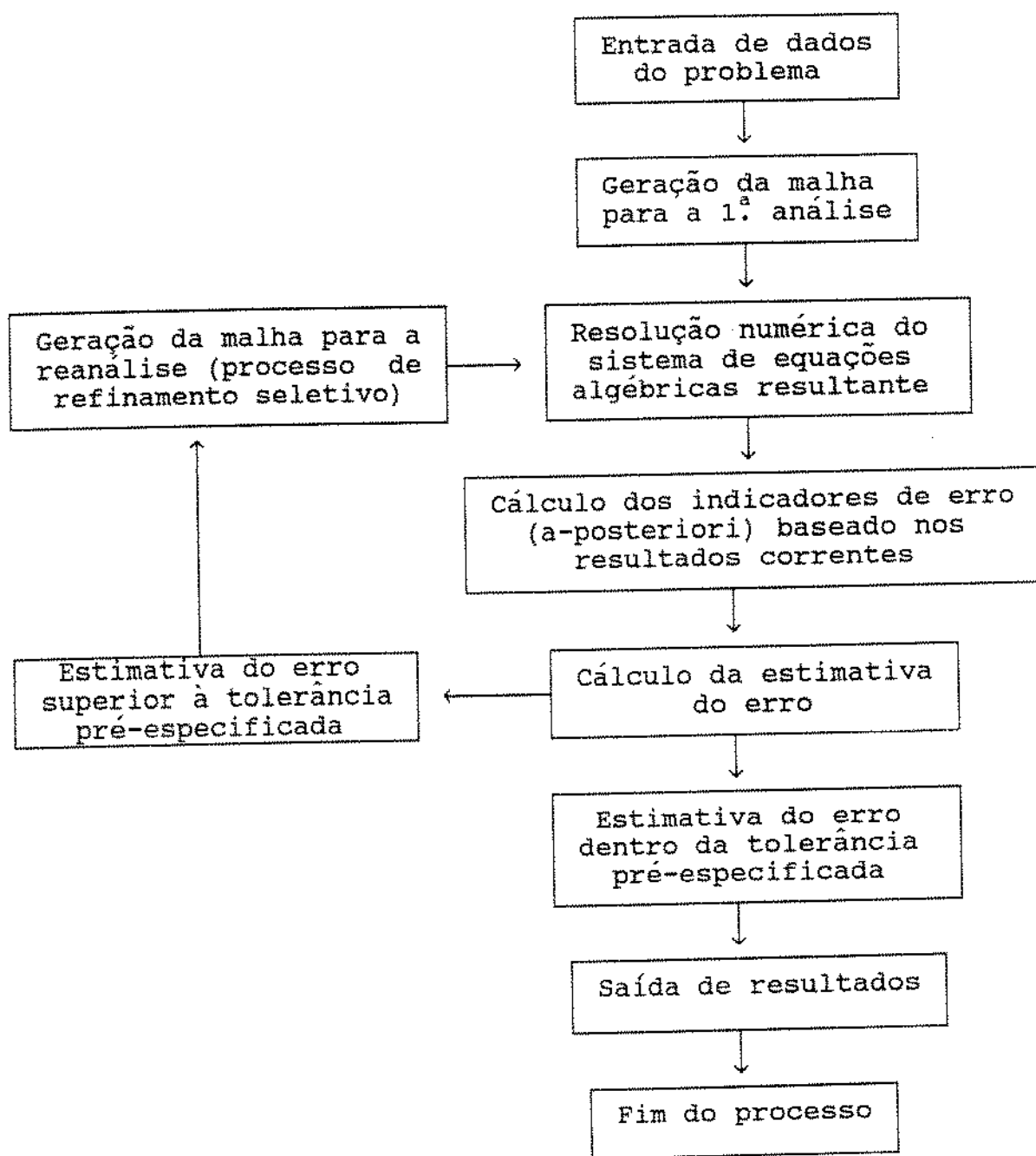


Figura 5.1. Fluxograma de um programa para processos adaptativos de refinamento seletivo.

Decidido a processar um refinamento hierárquico, deve-se, neste caso, comparar todos os valores de η_i^{n+1} calculados anteriormente com o máximo valor positivo de η_i^{n+1} dos indicadores. Considerou-se, como no trabalho de FRIBERG et al. [40], que os valores dos indicadores η_i^{n+1} devem ser comparados com uma fração γ , também pré-especificada, do máximo valor dos indicadores, e são refinados todos os pontos da malha, isto é,

são considerados todos os m possíveis graus de liberdade hierárquicos para os quais $\eta_i^{n+1} \geq \gamma \eta_{i_{\max}}^{n+1}$.

A constante γ controla, desta forma, o número de graus de liberdade hierárquicos introduzidos a cada solução. Para $\gamma = 0$ ocorre refinamento completo, isto é, considera-se todos os graus de liberdade hierárquicos dos elementos para a malha completa. Com isto, consequentemente, o procedimento perderá a característica auto-adaptativa da solução. A taxa de convergência para este caso é ótima, porém o esforço computacional para a solução usando um grande número de graus de liberdade pode tornar-se excessivo. Para $\gamma = 1$ é refinado apenas o elemento que possuir o maior indicador de erro.

O valor ideal para γ é dependente do problema estudado (WILLMERSDORF [43]). No entanto, seu valor não é crítico no sentido de que poderia influenciar sensivelmente na precisão da solução do problema. Atualmente, mesmo adotando o valor de γ situado dentro de uma larga faixa, tem-se obtido boas taxas de convergência (FRIBERG et al. [40]).

Uma vez escolhidos e introduzidos os novos graus de liberdade hierárquicos, novas equações são montadas. As equações correspondentes à solução do nível de aproximação anterior permanecem inalteradas. Assim, as matrizes referentes ao nível de aproximação anterior tornar-se-ão sempre sub-matrizes das matrizes relativas à nova solução. A razão disto está no fato de que os novos graus de liberdade hierárquicos, introduzidos pelas funções de interpolação hierárquicas, não modificam os valores dos coeficientes das variáveis que foram determinados anteriormente. Para a solução do novo sistema de equações, a triangularização da sub-matriz de rigidez é reaproveitada totalmente. Isto traz uma grande economia em termos de custo computacional.

Este procedimento é repetido várias vezes, até que se obtenha uma estimativa global do erro ϵ menor ou igual à tolerância ϵ_{tol} fornecida ao programa. Neste estágio os resultados são considerados satisfatórios.

As principais características do programa p-adaptativo utilizado neste trabalho é descrito a seguir.

5.3. UM PROGRAMA ADAPTATIVO VERSÃO P DO MEF

Com os conceitos apresentados anteriormente, desenvolveu-se neste trabalho, em linguagem FORTRAN, um programa adaptativo versão p do MEF para análise de problemas de vibrações livres de chapas e placas espessas, considerando as hipóteses da elasticidade linear.

Para a estimativa do erro, o programa utiliza o indicador e estimador de erros apresentados no capítulo 4 (equações 4.19 e 4.20, respectivamente) e segue exatamente o fluxograma da figura 5.1.

A seguir, serão apresentados alguns detalhes da estrutura do programa adaptativo implementado, considerando a versão p do MEF. Uma listagem do programa completo é mostrada no apêndice B.

5.3.1. ENTRADA DE DADOS

Dependendo da programação, a introdução de dados em um programa de elementos finitos pode trazer grandes dificuldades ao usuário. Procurou-se elaborar, na implementação computacional, uma maneira bastante simples para a entrada de dados.

Para a execução do programa, cria-se um arquivo com os seguintes dados:

```
ISOH, IPRIF
NX, NY, NTIP, NREAN
LCON(I), I = 1, 4
IERRO, TOLEST
NRMIN, NROOT, GAMA, IDD
```

DATA (1, J), J = 1, 3

DATA (2, J), J = 1, 3

.

DATA(NTIP, J), j = 1, 3

MAEL(I), I = 1, NX * NY se NTIP > 1

IXY

CX, CY, CZ se IXY = 0

XYZ(1, 1), XYZ (1, 2), XYZ (1, 3)

.

XYZ(NNOS, 1), XYZ(NNOS, 2), XYZ(NNOS, 3)

se IXY ≠ 0 onde
NNOS é o número
total de nós.

Os dados acima mencionados são interpretados por:

ISOH escolhe o tipo de análise, isto é, para ISOH = 0, o programa não executa o refinamento hierárquico. Neste caso, calculam-se os autovalores apenas para a discretização original, ou seja, considerando apenas a formulação isoparamétrica do MEF. Para ISOH ≠ 0, o programa calcula os autovalores para a formulação isoparamétrica, e em seguida, processa-se o refinamento hierárquico p-adaptativo do MEF baseado na estimativa de erros.

IPRIF serve para imprimir (≠ 0) ou não imprimir (= 0) as posições na malha dos graus de liberdade hierárquicos.

NX e NY são os números de elementos para a discretização da malha nas direções dos eixos dos x e y, respectivamente.

NTIP é o número de tipos diferentes de materiais. Para NTIP = 1, tem-se uma malha homogênea.

NREAN é o número de reanálises. É o critério secundário de parada do processo de refinamento. Ele pode ser útil, quando for escolhido um valor muito pequeno para a tolerância ϵ_{tol} do erro.

$LCON(I)$, $I = 1, 4$: são as condições de contorno do problema, sendo I o índice do lado. A figura 5.2 mostra a convenção adotada para a enumeração dos lados com diferentes tipos de condições de contorno e também serve de exemplo para uma viga engastada-apoiada.

Para $LCON(I) = 0$, o contorno é engastado;

Para $LCON(I) = 1$, o contorno é simplesmente apoiado;

Para $LCON(I) = 2$, o contorno é livre.

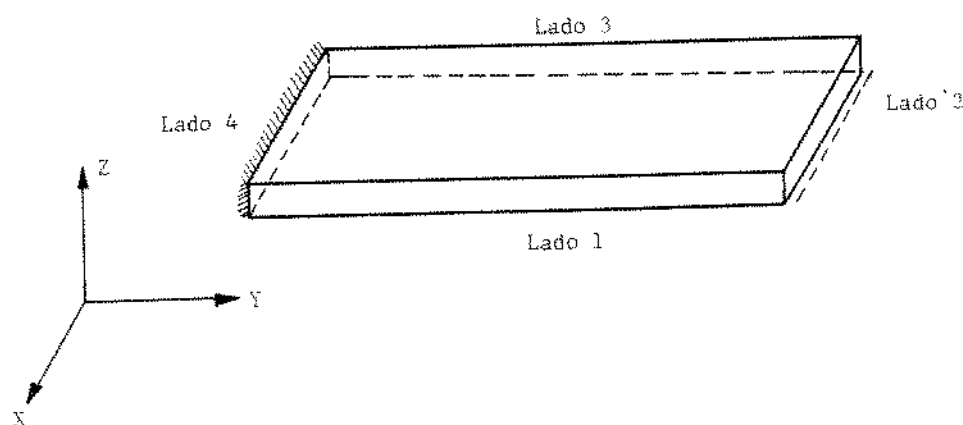


Figura 5.2. Convenção para a enumeração dos lados do elemento.

Para o exemplo da figura 5.2, as condições de contorno para a viga engastada-apoiada são identificadas através dos seguintes dados:

$$LCON(1) = 2$$

$$LCON(2) = 1$$

$$LCON(3) = 2$$

$$LCON(4) = 0$$

Estes valores são importantes para se determinar a incidência das variáveis nulas do problema.

IERRO é o tipo de indicador de erro a ser utilizado no processo de refinamento hierárquico. Para $IERRO = 1$, o indicador de erro a ser usado pelo programa é aquele dado pela equação (4.19). Para $IERRO = 2$, o indicador será do tipo dado

pela equação (4.8), ou mais precisamente por

$$\eta_i^{n+m+1} = \frac{\lambda_i^{n+m} - \lambda_i^{n+m+1}}{\lambda_i^{n+m}} \quad (5.1)$$

sendo n o número de graus de liberdade na análise isoparamétrica da malha original e m o número total de graus de liberdade hierárquicos introduzidos na malha até o refinamento seletivo da última reanálise.

A estimativa de erro obtida pela equação (5.1) será definida como ERRO CALCULADO e aquela obtida pela equação (4.19) como ERRO ESTIMADO. Para qualquer caso, a estimativa de erro é determinada em função da nova equação que se obtém pela introdução de apenas um grau de liberdade hierárquico. No entanto, na determinação da estimativa do erro nota-se, considerando um caso e outro, uma grande diferença em termos de esforço computacional. A explicação disto está no fato que para obter o ERRO CALCULADO é necessário resolver inteiramente o novo sistema de equações de ordem $n+m+1$. Por outro lado, isto não ocorre quando se determina o ERRO ESTIMADO, pois neste caso, as operações são realizadas em função apenas dos coeficientes das variáveis da nova equação. Em decorrência desta vantagem, adotou-se neste trabalho o emprego do ERRO ESTIMADO como indicador de erro no processo de refinamento p-adaptativo hierárquico.

TOLEST é a tolerância $\varepsilon_{t=1}$ do erro global. É o principal parâmetro comparativo da estimativa global do erro para o critério de parada no processo de refinamento seletivo. O valor a ser usado para a tolerância depende do problema estudado e da experiência do usuário.

NRMIN é o índice do menor autovalor da faixa de autovalores de interesse.

NROOT é o índice do maior autovalor de interesse.

GAMA é o parâmetro que define o campo de graus de liberdade hierárquicos a ser refinado. Varia de 0 a 1. Indica um valor

percentual do máximo indicador de erro e depende também do problema estudado. Neste trabalho adotou-se $GAMA = 0,20$. Para este valor, isto significa que serão considerados no refinamento todos os graus de liberdade hierárquicos cujos indicadores de erro são maiores ou iguais a $0,20 \eta_{i(max)}^{n+m+1}$.

IDD representa o tipo de análise hierárquica. Para IDD igual a 1 faz-se a análise considerando um autovalor de cada vez. Para IDD igual a 2, processa-se o refinamento hierárquico levando-se em consideração todos os autovalores simultaneamente.

DATA (I, J), J = 1, 3: são as características físicas do problema estudado, sendo que para

J = 1 ... módulo de elasticidade

J = 2 ... coeficiente de Poisson

J = 3 ... densidade de massa

Estes dados são fornecidos para cada valor de I, separadamente, que varia de 1 a NTIP.

MAEL(I) = 1, NE: corresponde ao tipo de material de cada elemento. Recebe o valor que varia de 1 a NTIP para NE elementos.

IXY indica a forma da geometria da malha de elementos finitos. Usa-se IXY igual a zero para malha simétrica. Caso contrário, adota-se um valor diferente de zero.

CX, CY e CZ são as dimensões da malha nas direções dos eixos dos x, y e z respectivamente. Entram-se com estes valores apenas quando IXY for igual a zero.

XYZ (I, 1), XYZ (I, 2) e XYZ (I, 3) são as coordenadas x, y e z dos nós, respectivamente, que só devem ser fornecidas ao arquivo de dados, no caso de IXY ser diferente de zero. A variável I assume o valor 1 a NNOS (número total de nós).

5.3.2. GERAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

Faz parte do programa desenvolvido neste trabalho, uma rotina computacional - MALHA.FOR - que gera automaticamente a malha de elementos finitos. Uma vez fornecidos ao programa as dimensões, o número de elementos em cada direção e as condições de contorno para o caso de malha simétrica, esta sub-rotina determina:

- o número total de nós;
- as coordenadas X, Y e Z dos nós dos elementos;
- as incidências nodais dos elementos;
- as posições das variáveis nulas;
- o número total de graus de liberdade e
- as incidências das variáveis dos elementos.

5.3.3. ARMAZENAMENTO "SKYLINE" DAS MATRIZES

Definida a malha de elementos finitos, é possível determinar o perfil das matrizes do sistema. Isto é obtido através da sub-rotina SKY.FOR. Ela calcula a altura das colunas das matrizes através da conectividade dos nós dos elementos e do acoplamento dos graus de liberdade do sistema (AKIN [44]).

Devido à presença de vários zeros nas matrizes, elas tomam uma forma conhecida por "skyline" (THOMPSON e SHIMAZAKI [45]) e podem ser armazenadas de maneira compacta. É conveniente armazenar a parte superior - ou inferior - das matrizes a partir dos elementos da diagonal, já que as matrizes são simétricas.

A figura 5.3 mostra uma matriz simétrica com o respectivo armazenamento em forma de skyline.

Para localizar o último elemento de cada coluna, determina-se um conjunto MAXA, o qual armazena os endereços dos elementos da diagonal de [K] em [A]. Portanto, define-se um vetor MAXA(I) que assume o endereço do i-ésimo elemento K_{11} da diagonal da matriz [K].

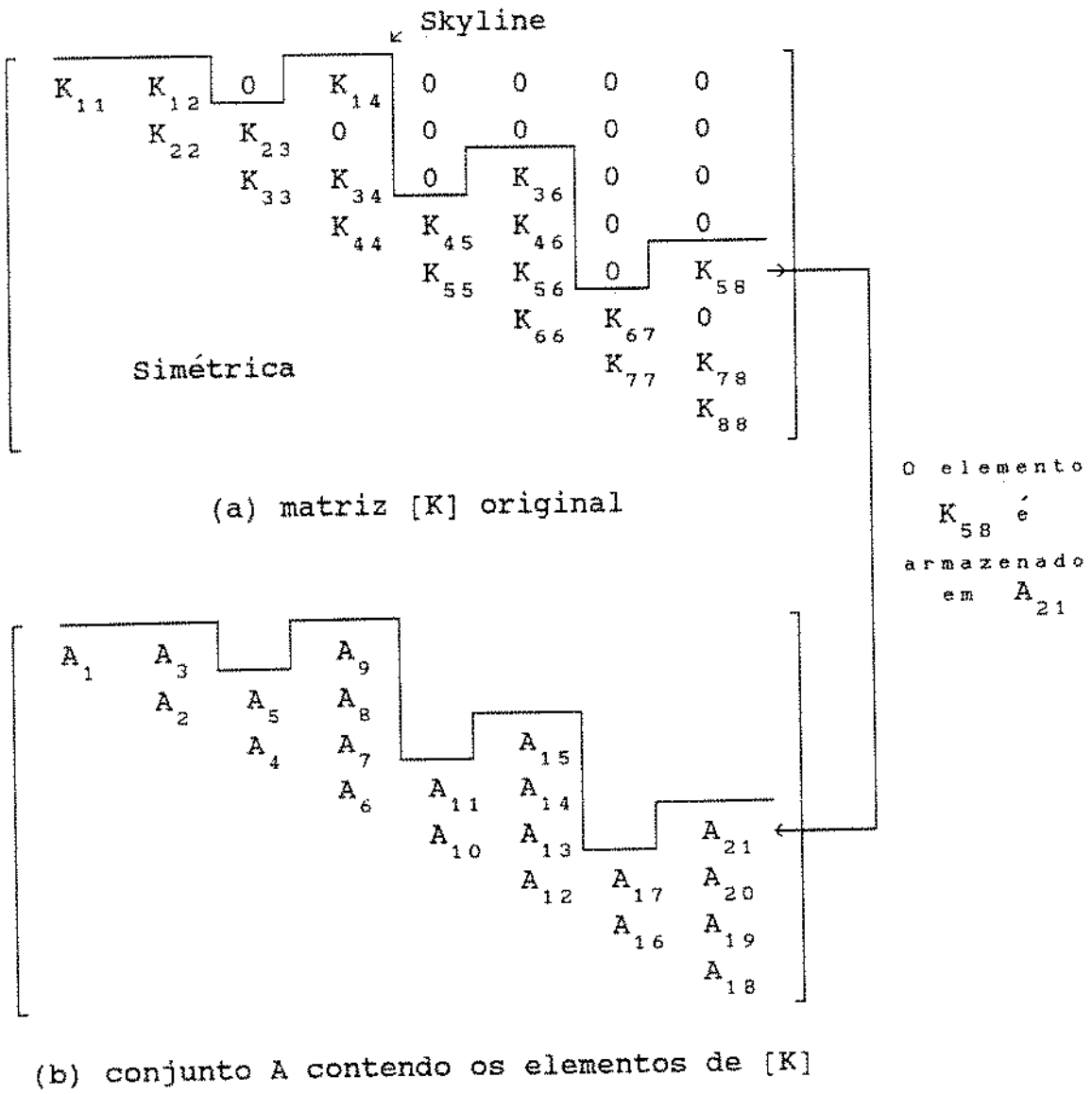


Figura 5.3. Esquema de armazenamento de uma matriz em forma de skyline.

Para o exemplo considerado na figura 5.3, o vetor MAXA é

$$\text{MAXA}(I) = \{1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 10 \ 12 \ 16 \ 18 \ 22\}^T \quad (5.2)$$

onde I varia de 1 a $n + 1$, sendo n a ordem da matriz original.

Definida a altura das colunas da matriz, os elementos abaixo do skyline de [K] podem, agora, ser armazenados em um conjunto unidimensional em {A}, ou seja,

$$A(J) = \{ A(1) \ A(2) \ A(3) \ \dots \ A(N) \}^T \quad (5.3)$$

onde $N = \text{MAXA}(n+1) - 1$ é a dimensão do conjunto $\{A\}$.

O esquema descrito acima é usado neste trabalho para armazenar as matrizes de rigidez e de massa globais. Usando este tipo de armazenamento, ganha-se rapidez no processamento e economia de memória computacional.

5.3.4. MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS

O procedimento geral para calcular a matriz de rigidez dos elementos foi apresentado no capítulo 2. O elemento 3D, com dezesseis nós, utilizado na análise isoparamétrica de placas espessas, é aquele mostrado na figura 2.9. A matriz de rigidez do elemento é determinada pela sub-rotina KEL.FOR, através da equação (2.74), considerando as funções de interpolação dadas pelas equações (2.56) a (2.65).

O valor das funções de interpolação lineares nos cantos do elemento é calculado pela sub-rotina SHAPE.FOR, corrigido por SHAPE2.FOR. Para os nós do meio do elemento, o valor das funções de interpolação quadráticas também é calculado pela sub-rotina SHAPE2.FOR.

Em SHAPE.FOR determinam-se também a matriz jacobiana da transformação $[J]$, dada pela equação (2.72), a sua inversa e as derivadas globais das funções de interpolação. Essas derivadas servirão para calcular, juntamente com a equação (2.71), a matriz $[B]$ de transformação deformações-deslocamentos, dada pela equação (2.27).

Para avaliar numericamente a matriz de rigidez dos elementos, adotou-se o esquema de integração numérica conhecido na literatura por quadratura de Gauss (ZIENKIEWICZ [1], BATHE e WILSON [5]).

A sub-rotina PGAUSS.FOR se encarrega de determinar as

coordenadas dos pontos de integração e suas ponderações correspondentes. Após sucessivos testes, concluiu-se que o menor número de pontos de integração a ser utilizado na análise isoparamétrica, para o elemento 3D de dezesseis nós, foi de $3 \times 3 \times 2$ pontos, distribuídos na forma de três pontos de integração nas direções r e s e dois pontos na direção da espessura do elemento totalizando, portanto, dezoito pontos de integração.

5.3.5. MATRIZ DE MASSA DOS ELEMENTOS

No capítulo 2, apresentou-se também o procedimento geral para calcular a matriz de massa dos elementos. Esta matriz é determinada no programa pela sub-rotina MASS.FOR, usando a equação (2.75). Na determinação da matriz $[H]$ dada pela equação (2.73) utilizam-se as mesmas funções de interpolação polinomiais citadas anteriormente. As sub-rotinas SHAPE.FOR, SHAPE2.FOR e PGAUSS.FOR também são utilizadas para calcular o valor das funções de interpolação nos pontos de integração dos elementos, tomando-se os mesmos dezoito pontos de integração como na matriz de rigidez.

5.3.6. MATRIZES GLOBAIS DO SISTEMA

As matrizes globais são determinadas pela sub-rotina KGLOB.FOR. As matrizes são montadas por partes, considerando-se em cada passo o cálculo das matrizes do elemento. Assim, as matrizes de rigidez e de massa globais só se completam após o cálculo das matrizes de rigidez e de massa do último elemento. Desta forma, o armazenamento das matrizes de cada elemento é temporário economizando-se, conseqüentemente, espaço de memória computacional.

5.3.7. O PROBLEMA DE AUTOVALOR GENERALIZADO

Uma vez determinadas as matrizes globais do sistema, estuda-se

em seguida, a solução do problema dinâmico de autovalor generalizado (ZIENKIEWICZ [1], BATHE e WILSON [5], FRIBERG [39]) que tem a forma

$$([K] - \lambda[M]) \{\phi\} = \{0\} \quad (5.4)$$

onde $[K]$ e $[M]$ são as matrizes de rigidez e de massa do sistema, $\{\phi\}$ é o vetor de deslocamentos nodais e λ é o quadrado da frequência angular. A solução da equação (5.4) fornece, portanto, os autovalores e seus correspondentes modos próprios de vibração do sistema.

5.3.8. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

O método utilizado neste trabalho para a resolução do sistema de equações do tipo dado pela equação (5.4) é o da iteração no subespaço por ser considerado um dos mais eficientes na análise por elementos finitos. O método tem sido usado extensivamente em vários programas de elementos finitos para cálculo de autovalores e autovetores (BATHE e WILSON [5]). Enquanto muitos métodos determinam todos os autovalores e autovetores simultaneamente - o que torna-se excessivo o custo computacional - o método de iteração no subespaço determina apenas os autovalores e os correspondentes autovetores no intervalo de frequência de interesse. Este método mostra-se bastante eficiente mesmo em situações em que se tenha grandes sistemas, isto é, em sistemas cuja ordem das matrizes é muito alta.

Para a solução da equação (5.4), o método da iteração no subespaço utiliza um processo derivado do método da eliminação de Gauss para fazer a fatorização da matriz de rigidez $[K]$ em $[L] [D] [L]^T$, sendo $[L]$ uma matriz triangular superior ou inferior e $[D]$ uma matriz diagonal. Este procedimento é também conhecido por triangularização da matriz $[K]$ (Apêndice A).

A resolução do sistema de equações do problema de autovalor generalizado é obtida através da sub-rotina SPACE.FOR.

Esta sub-rotina, publicada em BATHE e WILSON [5], foi implementada no programa deste trabalho com algumas importantes modificações. Elas foram necessárias com o objetivo de se alcançar um bom nível de otimização do programa computacional implementado. Isto justifica o fato de se conseguir, por exemplo, o total reaproveitamento da triangularização da matriz de rigidez em soluções subsequentes.

Detalhes sobre a triangularização de matrizes serão apresentados na próxima seção deste capítulo, e também no apêndice A.

Neste momento, têm-se calculados os menores autovalores e seus correspondentes autovetores para a análise isoparamétrica representando, portanto, a primeira solução do problema estudado. Outras soluções podem ser possíveis, quando se adota um processo de refinamento do tipo hierárquico. A seguir, será apresentada a análise hierárquica a ser utilizada no processo de refinamento adotado neste trabalho, para a solução de alguns problemas de autovalor generalizado.

5.3.9. ANÁLISE HIERÁRQUICA

A partir desse estágio inicia-se o processo de refinamento adaptativo hierárquico versão p do MEF. A análise hierárquica pode ser feita considerando autovalores isoladamente ou todos os autovalores simultaneamente.

Para determinar a posição dos possíveis novos graus de liberdade hierárquicos, a análise de erros deve ser feita pela introdução, em cada elemento, das funções de interpolação hierárquicas, definidas no capítulo 3.

Para identificar os elementos da malha que necessitam de refinamentos, é necessário considerar cada elemento separadamente. Pela introdução das funções de interpolação polinomiais hierárquicas em cada lado do elemento obtém-se uma

aproximação $\hat{\phi}$ das variáveis físicas do elemento, na seguinte forma

$$\hat{\phi} = \sum_{i=1}^{q+1} N_i a_i \quad (5.5a)$$

onde N_i ($i = 1, 2, \dots, q$) são as funções de interpolação para os q nós do elemento na formulação isoparamétrica e N_{q+1} a função de interpolação hierárquica para o lado considerado. Por exemplo, se $\hat{\phi}$ representar a variável física como sendo o deslocamento u em uma dada direção, a aproximação para esta variável em um ponto qualquer do elemento, será dada por

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_q & N_{q+1} \end{bmatrix}_{1, q+1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_q \\ u_{q+1} \end{Bmatrix} \quad (5.5b)$$

Nota-se, através da equação (5.5b), que devido a presença de uma função de interpolação hierárquica na aproximação da variável física u , introduziu-se no elemento mais um grau de liberdade. Graus de liberdade como este são chamados de graus de liberdade hierárquicos e as correspondentes variáveis (no exemplo, u_{q+1}), como variáveis hierárquicas ou parâmetros hierárquicos que, no entanto, não apresentam nenhuma interpretação física. Outros detalhes sobre os graus de liberdade e parâmetros hierárquicos podem ser encontrados nos trabalhos de PEANO et al [10] e ZIENKIEWICZ et al [11].

A equação (5.5b) pode ser reescrita como,

$$u(r, s, t) = \left[[N_i(r, s, t)]_q^{ISO} \quad N_{q+1}(r, s, t)_{HIER} \right] \begin{Bmatrix} \{u_i\}_q \\ u_{q+1} \end{Bmatrix} \quad (5.5c)$$

onde $N_{q+1}(r, s, t)_{HIER}$ será a função de interpolação hierárquica para o lado considerado; $\{u_i\}_q$ ($i = 1, 2, \dots, q$) representarão os deslocamentos dos q nós do elemento naquela

dada direção e u_{q+1} o correspondente parâmetro hierárquico, mas com nenhum significado físico.

Neste trabalho, o campo de deformações para o elemento 3D considerado (veja capítulo 2) é dado em função dos deslocamentos nodais lineares u , v e w . Portanto, serão acrescentados, no elemento, três graus de liberdade hierárquicos para cada função de interpolação hierárquica introduzida. Neste caso, ao introduzir uma função de interpolação hierárquica em algum lado do elemento, a equação da aproximação $\hat{\phi}$ das variáveis físicas u , v e w passará a ter a seguinte forma,

$$\{\hat{\phi}\} = \begin{Bmatrix} u(r,s,t) \\ v(r,s,t) \\ w(r,s,t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N_i(r,s,t)]_{3,3q}^{ISO} & [N_{q+1}(r,s,t)]_{3,3}^{HIER} \end{bmatrix} \{U\} \quad (5.6a)$$

onde

$$[N_i(r,s,t)]_{3,3q}^{ISO} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_q & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_q & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_q \end{bmatrix} \quad (5.6b)$$

com N_i ($i = 1, 2, \dots, q$) representando as funções de interpolação para os q nós do elemento na formulação isoparamétrica e,

$$[N_{q+1}(r,s,t)]_{3,3}^{HIER} = \begin{bmatrix} N_{q+1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{q+1} & 0 \\ 0 & 0 & N_{q+1} \end{bmatrix} \quad (5.6c)$$

onde N_{q+1} será a função de interpolação hierárquica introduzida no lado considerado. O vetor $\{U\}$ da equação (5.6a) será dado por

$$\{U\} = \left[u_1 \ v_1 \ w_1 \ \dots \ u_q \ v_q \ w_q \quad u_{q+1} \ v_{q+1} \ w_{q+1} \right]^T \quad (5.6d)$$

com u_{q+1}, v_{q+1} e w_{q+1} representando os três parâmetros hierárquicos correspondentes aos três graus de liberdade hierárquicos, introduzidos nas direções r, s e t do elemento, respectivamente.

Considerando uma aproximação do tipo dado pela equação (5.6a), ou seja, introduzindo apenas uma função de interpolação hierárquica no elemento, as matrizes de rigidez e de massa do elemento passarão a ter ordem igual a $3(q+1)$ (para cada nó, têm-se três graus de liberdade) e terão o seguinte aspecto,

$$\left[\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} \end{array} \right] & K_{1,n+1} & K_{1,n+2} & K_{1,n+3} \\ & K_{2,n+1} & K_{2,n+2} & K_{2,n+3} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & K_{n,n+1} & K_{n,n+2} & K_{n,n+3} \\ K_{n+1,1} & K_{n+1,2} & \dots & K_{n+1,n} & K_{n+1,n+1} & K_{n+1,n+2} & K_{n+1,n+3} \\ K_{n+2,1} & K_{n+2,2} & \dots & K_{n+2,n} & K_{n+2,n+1} & K_{n+2,n+2} & K_{n+2,n+3} \\ K_{n+3,1} & K_{n+3,2} & \dots & K_{n+3,n} & K_{n+3,n+1} & K_{n+3,n+2} & K_{n+3,n+3} \end{array} \right] \quad (5.7)$$

A submatriz de ordem $n = 3q$, indicada entre colchetes, é a matriz do elemento correspondente à análise isoparamétrica. Seus elementos não são alterados com a introdução da nova função de interpolação hierárquica. Nota-se que a ordem da matriz foi aumentada de n para $n + 3$, devido à presença dos três graus de liberdade hierárquicos introduzidos no elemento.

Na análise de erros, o indicador de erro a-posteriori é determinado em função da introdução de apenas um simples grau de liberdade hierárquico (ver equação 4.19). Neste caso, as linhas acrescentadas às submatrizes devem ser utilizadas

separadamente, ou seja, consideram-se apenas os elementos da linha das matrizes ampliadas, correspondentes a cada grau de liberdade hierárquico introduzido. Portanto, para cada nova função de interpolação hierárquica inserida na aproximação das variáveis físicas do elemento, pode-se determinar três indicadores de erro, cada um correspondente ao grau de liberdade hierárquico introduzido nas direções r , s e t do elemento no sistema local de coordenadas, respectivamente.

Na análise de erros, calcula-se o indicador de erro devido à introdução do primeiro grau de liberdade hierárquico, em um lado do elemento, na direção da coordenada local r . Para o caso considerado, o indicador é calculado em função dos n primeiros elementos da linha $n + 1$ das matrizes de rigidez e de massa globais e em função do elemento da diagonal de índice $(n + 1, n + 1)$ dessas matrizes. Em seguida, determina-se o indicador de erro, quando é introduzido um grau de liberdade hierárquico na direção s , de acordo com o sistema local de coordenadas. Para isso, tomam-se os n primeiros elementos da linha $(n + 2)$ das matrizes globais e o elemento $(n + 2, n + 2)$ da diagonal dessas matrizes. Analogamente, o outro indicador de erro, correspondente à introdução de um grau de liberdade hierárquico na direção t do elemento, é calculado em termos dos n primeiros elementos da linha $(n + 3)$ das matrizes de rigidez e de massa globais e do elemento de endereço $(n + 3, n + 3)$ dessas matrizes.

Vale lembrar que estes três indicadores de erro são calculados devido à introdução de apenas uma função de interpolação hierárquica em um lado do elemento e seus valores dependem do grau p do polinômio dessa função.

Para dar continuidade à análise hierárquica, considera-se, dessa vez, uma função de interpolação hierárquica cujo polinômio é ainda de grau p mas, agora, introduzida em um outro lado do elemento. Conforme explicação anterior, mais três indicadores de erro são determinados em função dos três novos graus de liberdade hierárquicos.

Este procedimento continua para outros lados do elemento, até atingir o último lado do último elemento da malha original discretizada.

Uma vez calculados todos os indicadores de erro em função da introdução dos novos possíveis graus de liberdade hierárquicos, para uma dada função de interpolação hierárquica de grau p , um erro global da solução atual deve, neste momento, ser estimado.

No processo de refinamento adaptativo há a necessidade de se definir uma estimativa de erro global ε , que deverá ser usado como critério principal de parada. Neste trabalho, utilizou-se o somatório dos indicadores positivos de erro, calculados para todos os elementos como sendo a estimativa de erro global, isto é,

$$\varepsilon = \sum \left(\eta_i^{n+1} \text{ positivos} \right) \quad (5.8)$$

Como já mencionado na seção 5.2, se esta estimativa for menor ou igual à tolerância ε_{tol} pré-estipulada pelo usuário, a solução atual é considerada satisfatória, caso contrário, realiza-se o refinamento seletivo hierárquico. Neste caso, para determinar quais elementos são carentes de refinamento, é necessário comparar todos os indicadores η_i^{n+1} com uma fração γ do máximo valor positivo dos indicadores de erro. Portanto, serão considerados, no processo de refinamento, todos os graus de liberdade hierárquicos para os quais

$$\eta_i^{n+1} \geq \gamma \eta_{i \max}^{n+1} \quad 0 \leq \gamma \leq 1 \quad (5.9)$$

onde

η_i^{n+1} é o indicador de erro associado a um grau de liberdade hierárquico.

$\eta_{i \max}^{n+1}$ é o maior indicador positivo de erro relacionado à solução atual.

γ é uma constante fornecida pelo usuário.

Portanto, com este procedimento adotado, podem-se identificar os elementos, os lados e o correspondente grau p do polinômio das funções de interpolação hierárquicas que devam ser considerados no processo de refinamento hierárquico.

O programa desenvolvido neste trabalho também gera automaticamente a nova malha de elementos finitos contendo os novos graus de liberdade hierárquicos.

A geração desta malha segue as seguintes etapas:

- introdução, nos lados dos elementos, das novas funções de interpolação hierárquicas de grau p ;
- colocação, nas faces dos elementos, da função de interpolação hierárquica quadrática tipo bolha quando $p=4$;
- colocação nas faces dos elementos, da função de interpolação hierárquica quadrática tipo bolha mista quando $p=5$;
- cálculo das incidências "nodais" hierárquicas;
- cálculo das incidências das variáveis hierárquicas.

Para completar o processo adaptativo hierárquico, fazem-se:

- o cálculo do "skyline" das matrizes globais ampliadas hierarquicamente;
- o cálculo dos novos elementos das matrizes de rigidez e de massa dos elementos carentes de refinamento;
- a montagem da parte hierárquica das matrizes globais;
- a determinação dos novos autovalores e os correspondentes autovetores da malha refinada hierarquicamente.

Vale salientar que, neste ponto, termina a primeira reanálise do processo de refinamento hierárquico.

Outras reanálises hierárquicas podem ser possíveis, quando se adota este tipo de refinamento. Neste caso, para cada nova reanálise repete-se o processo da análise de erros descrito anteriormente. Para isto determinam-se os novos indicadores de erro em função da introdução de outras funções de interpolação hierárquicas nos elementos da malha considerada. No entanto, o grau do polinômio destas funções deve ser aumentado agora, em alguns elementos, de p para $p + 1$.

Ao final de cada reanálise, deve-se armazenar o grau da função de interpolação hierárquica que realmente foi introduzida em cada lado dos elementos da malha original. Como exemplo, a figura 5.4 mostra um elemento com o grau das funções de interpolação hierárquicas introduzidas em cada lado após a primeira reanálise.

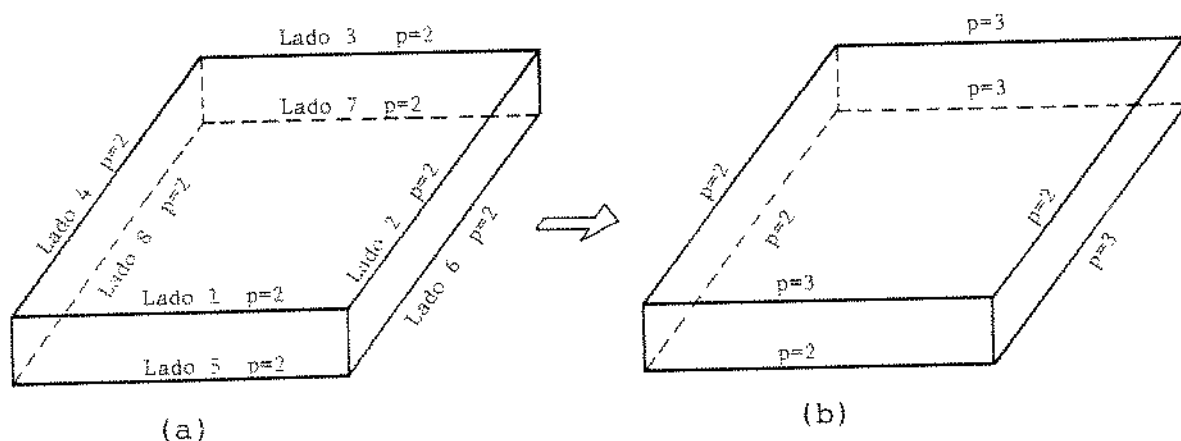


Figura 5.4. Elemento com funções (a) de ordem quadrática isoparamétrica e (b) de ordem variável após a primeira reanálise.

Para o exemplo acima, a análise de erros identificou, na primeira reanálise, os lados do elemento mais carentes de refinamento como sendo os lados de números 1, 3, 6 e 7, para os quais foram introduzidas funções de interpolação hierárquicas de grau $p = 3$. Para o cálculo dos indicadores de erro na segunda reanálise, deve-se aumentar a ordem do polinômio das funções hierárquicas de p para $p + 1$. Para o exemplo acima, de acordo com a figura (5.4b), o grau das

funções de interpolação hierárquicas deve ser agora, aumentado para 4, 3, 4, 3, 3, 4, 4, 3 a serem inseridas nos lados enumerados de 1 a 8, respectivamente.

Logo, o processo de refinamento hierárquico só se completa, para uma dada precisão global, quando for obedecido o critério principal de parada adotado, a menos que o grau das funções de interpolação hierárquicas, introduzidas nos elementos, tenha atingido o limite máximo estipulado. Como mencionado no capítulo 3, são consideradas, neste trabalho, funções de interpolação hierárquicas cujo grau dos polinômios pode variar de $p = 3$ a $p = 5$.

5.4. OUTRAS CONSIDERAÇÕES

Serão apresentados nesta seção alguns detalhes relevantes ao processo de refinamento hierárquico.

5.4.1. ELEMENTOS VIZINHOS

Na análise de erros, é necessário identificar a posição do elemento vizinho ao lado do elemento considerado, para o qual está sendo determinado o indicador de erro. A figura 5.5 mostra, como exemplo, uma malha com quatro elementos planos.

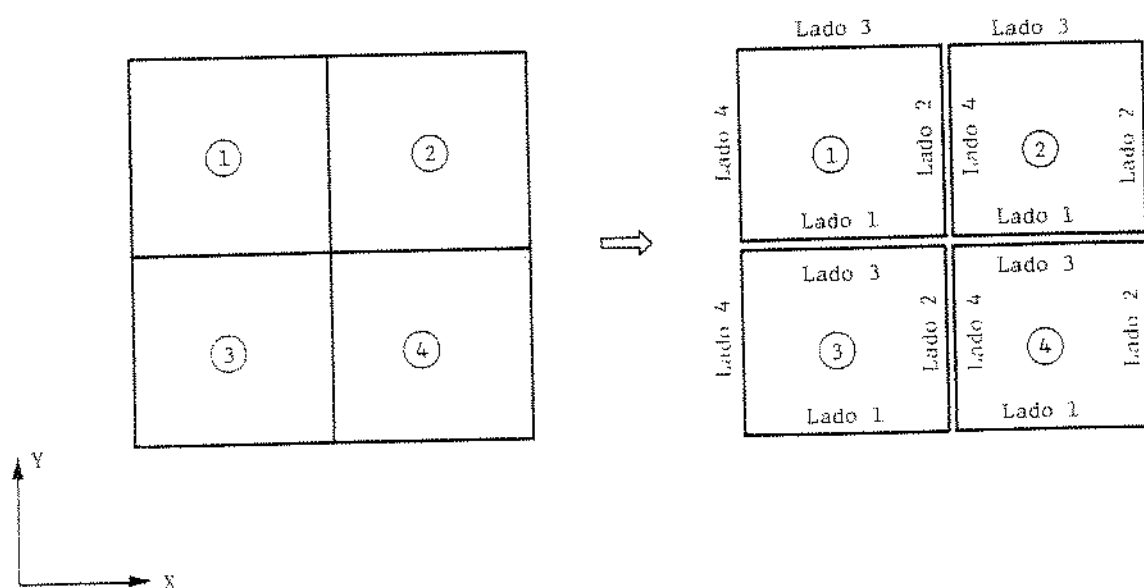


Figura 5.5. Identificação dos lados dos elementos vizinhos.

Neste caso, ao se introduzir, para cálculo do indicador de erro, uma função de interpolação hierárquica de grau p , por exemplo, no lado 2 do elemento 1, deve-se também considerar uma função de interpolação hierárquica de mesmo grau no lado 4 do elemento 2, e assim sucessivamente.

Desta forma, os elementos tornam-se compatíveis completando, portanto, a parte hierárquica das matrizes globais.

5.4.2. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Como já mencionado anteriormente, as matrizes dos elementos são integradas usando a técnica da quadratura de Gauss. Vários testes foram feitos no sentido de se obter o menor número de pontos de integração necessário para o cálculo das matrizes dos elementos. Concluiu-se que são necessários $(p_r + 1)(p_s + 1)(p_t + 1)$ pontos de integração, onde cada um dos valores p_r , p_s e p_t são números correspondentes ao grau mais elevado do polinômio das funções de interpolação hierárquicas, que foram introduzidas nas direções r , s e t do elemento, respectivamente.

Assim, para o cálculo das matrizes do elemento de placa espessa na formulação isoparamétrica, foram utilizados $3 \times 3 \times 2$ pontos de integração, pois as funções de interpolação usadas são do tipo serendipity, quadráticas nas direções r e s e linear em t .

As funções de interpolação hierárquicas utilizadas neste trabalho são polinômios até quinta ordem, no máximo. Portanto, quando for necessário introduzir, nas direções r e s de algum elemento, funções de interpolação hierárquicas do quinto grau, deve-se utilizar, neste caso, $6 \times 6 \times 2$ pontos de integração nesse elemento.

A sub-rotina PGAUSS.FOR, implementada no programa, foi elaborada, portanto, para determinar também as coordenadas e suas correspondentes ponderações no sistema local, para até $6 \times 6 \times 2 = 72$ pontos de integração.

5.5. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES AMPLIADO

Decidido a fazer um refinamento incluindo m graus de liberdade hierárquicos, a nova malha de elementos finitos é, portanto, gerada. Assim obtém-se um novo sistema de equações para o problema de autovalor generalizado. Neste caso, por exemplo, a matriz de rigidez global apresentará a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} & K_{1,n+1} & K_{1,n+2} & \dots & K_{1,n+m} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} & K_{2,n+1} & K_{2,n+2} & \dots & K_{2,n+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} & K_{n,n+1} & K_{n,n+2} & \dots & K_{n,n+m} \\ \hline K_{n+1,1} & K_{n+1,2} & \dots & K_{n+1,n} & K_{n+1,n+1} & K_{n+1,n+2} & \dots & K_{n+1,n+m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n+m,1} & K_{n+m,2} & \dots & K_{n+m,n} & K_{n+m,n+1} & K_{n+m,n+2} & \dots & K_{n+m,n+m} \end{bmatrix} \quad (5.10a)$$

onde n é o número de graus de liberdade correspondente à configuração inicial da malha.

A matriz ampliada dada pela equação (5.10a) pode ser reescrita como

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,m} \\ [K]_{m,n} & [K]_{m,m} \end{bmatrix} \quad (5.10b)$$

Uma solução refinada do problema de autovalor generalizado é representada pela resolução do seguinte sistema de equações ampliado,

$$\left(\begin{bmatrix} [K]_{n,n} & [K]_{n,m} \\ [K]_{m,n} & [K]_{m,m} \end{bmatrix} - \lambda_{n,m} \begin{bmatrix} [M]_{n,n} & [M]_{n,m} \\ [M]_{m,n} & [M]_{m,m} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \{\phi\}_n \\ \{\phi\}_m \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5.11)$$

Para a resolução do sistema de equações ampliado hierarquicamente, é novamente utilizado o método de iteração no subespaço.

Para economizar esforços computacionais, pode-se reaproveitar integralmente a triangularização da submatriz de rigidez $[K]_{n,n}$, que foi computada na solução anterior do problema, ao se considerar n graus de liberdade.

É apresentado no apêndice A o método da eliminação gaussiana, para a triangularização da matriz de rigidez e como pode ser reaproveitada, inteiramente, na solução de sistemas de equações ampliados por processos de refinamento hierárquico.

Além da triangularização das matrizes, outros resultados podem ser reaproveitados em soluções posteriores. É importante, à medida do possível, reduzir o número de iterações em métodos iterativos a fim de se obter uma convergência mais rápida da solução. A técnica utilizada no programa deste trabalho consiste em usar os próprios autovetores que foram obtidos na solução anterior como sendo subvetores dos vetores de partida para as iterações da nova solução. Por exemplo, para um dado autovalor que foi determinado através da solução de um sistema com n graus de liberdade, o correspondente autovetor $\{\phi\}_n$ pode ser representado por,

$$\{\phi\}_n = \left\{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n \right\}^T \quad (5.12)$$

O vetor inicial de partida para as iterações na solução de um sistema ampliado com $n + m$ graus de liberdade pode ser dado por,

$$\left\{ \phi' \right\}_{n+m} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \phi' \right\}_n \\ \left\{ \phi' \right\}_m \end{array} \right\} \quad (5.13a)$$

Portanto, o reaproveitamento de cálculos prévios de autovetores para se obter uma convergência mais rápida, consiste em se fazer

$$\left\{ \phi' \right\}_n = \left\{ \phi \right\}_n \quad (5.13b)$$

e, por exemplo,

$$\left\{ \phi' \right\}_m = \left\{ 1 \right\}_m \quad (5.13c)$$

Logo, levando os vetores dados pelas equações (5.13b e 5.13c) na equação (5.13a), chega-se ao seguinte vetor de partida para as iterações da nova solução,

$$\left\{ \phi' \right\}_{n+m} = \left\{ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \right\}^T \quad (5.14)$$

Com esta técnica implementada constatou-se, após vários testes, uma sensível redução no número de iterações e, conseqüentemente, maior velocidade na convergência da solução.

Este procedimento deve ser repetido para todos os outros autovalores quando determinados isoladamente ou em conjuntos deles, quando calculados simultaneamente.

Vale salientar que a resolução do sistema de equações dado pela equação (5.11) pode, ainda, não representar a solução final refinada do problema estudado. Dependendo da estimativa global do erro, outras reanálises podem ser necessárias para se obter uma solução com resultados finais satisfatórios. Neste caso, a análise de erros indicará, novamente, os novos graus de liberdade hierárquicos a serem introduzidos nos elementos da malha que foi usada na solução da aproximação anterior. Assim, novas equações serão obtidas e, portanto, o novo sistema de equações deverá ser resolvido. Por exemplo, se para esta nova reanálise for necessário introduzir mais ℓ graus de liberdade hierárquicos na malha anterior, as matrizes de rigidez e de massa globais terão, agora, a seguinte forma,

$$\begin{bmatrix}
 K_{1,1} & \dots & K_{1,n} & K_{1,n+1} & \dots & K_{1,n+m} & K_{1,n+m+1} & \dots & K_{1,n+m+l} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 K_{n,1} & \dots & K_{n,n} & K_{n,n+1} & \dots & K_{n,n+m} & K_{n,n+m+1} & \dots & K_{n,n+m+l} \\
 \hline
 K_{n+1,1} & \dots & K_{n+1,n} & K_{n+1,n+1} & \dots & K_{n+1,n+m} & K_{n+1,n+m+1} & \dots & K_{n+1,n+m+l} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 K_{n+m,1} & \dots & K_{n+m,n} & K_{n+m,n+1} & \dots & K_{n+m,n+m} & K_{n+m,n+m+1} & \dots & K_{n+m,n+m+l} \\
 \hline
 K_{n+m+1,1} & \dots & K_{n+m+1,n} & K_{n+m+1,n+1} & \dots & K_{n+m+1,n+m} & K_{n+m+1,n+m+1} & \dots & K_{n+m+1,n+m+l} \\
 \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 K_{n+m+l,1} & \dots & K_{n+m+l,n} & K_{n+m+l,n+1} & \dots & K_{n+m+l,n+m} & K_{n+m+l,n+m+1} & \dots & K_{n+m+l,n+m+l}
 \end{bmatrix}$$

(5.15a)

onde m e ℓ são os números de graus de liberdade hierárquicos introduzidos no sistema para a primeira e segunda reanálises, respectivamente.

As matrizes ampliadas de ordem total $n + m + \ell$ podem ser reescritas, por exemplo, como

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{n+m, n+m} & [K]_{n+m, \ell} \\ [K]_{\ell, n+m} & [K]_{\ell, \ell} \end{bmatrix} \quad (5.15b)$$

Agora, o sistema de equações ampliado terá ordem $n+m+\ell$ e o problema de autovalor generalizado passa a ser

$$\left(\begin{bmatrix} [K]_{n+m, n+m} & [K]_{n+m, \ell} \\ [K]_{\ell, n+m} & [K]_{\ell, \ell} \end{bmatrix} - \lambda_{n+m, \ell} \begin{bmatrix} [M]_{n+m, n+m} & [M]_{n+m, \ell} \\ [M]_{\ell, n+m} & [M]_{\ell, \ell} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} (\phi)_{n+m} \\ (\phi)_{\ell} \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (5.16)$$

Nota-se através das equações (5.10a) e (5.15a) que a estrutura hierárquica das matrizes é evidente.

O procedimento descrito anteriormente deve-se repetir até que a estimativa de erro global estiver dentro da tolerância pré-especificada pelo usuário e neste caso, a resolução do sistema de equações ampliado referente à última reanálise representará, portanto, a solução final refinada do problema de autovalor generalizado.

CAPÍTULO 6

APLICAÇÕES

6.1. INTRODUÇÃO

As formulações paramétricas convencional e hierárquica do método dos elementos finitos, estudadas nos capítulos 2 e 3 respectivamente, juntamente com o elemento 3D proposto, são aqui empregados para determinar as frequências naturais de vibração de placas espessas, considerando as hipóteses da elasticidade linear.

O programa computacional apresentado no apêndice B foi desenvolvido tomando-se, como base, a formulação paramétrica hierárquica, versão p, do MEF. O processo adaptativo implementado no programa, como descrito no capítulo 5, é utilizado para estudar a convergência da solução em vários exemplos do problema dinâmico de autovalor generalizado. O refinamento p da malha para cada reanálise é processado com base nos estimadores de erro, como apresentados no capítulo 4, e segue exatamente o procedimento descrito no capítulo 5.

Os resultados dos exemplos apresentados são comparados com soluções obtidas através de outros métodos numéricos e quando possível, também comparados com as respectivas soluções analíticas.

6.2. EXEMPLO DE PROBLEMA USANDO ELEMENTOS 2D

Exemplo 1

Foi escolhido um exemplo clássico, na elasticidade plana, para estudar o problema dinâmico de autovalor generalizado, que consiste em uma viga em balanço, como mostra a figura 6.1.

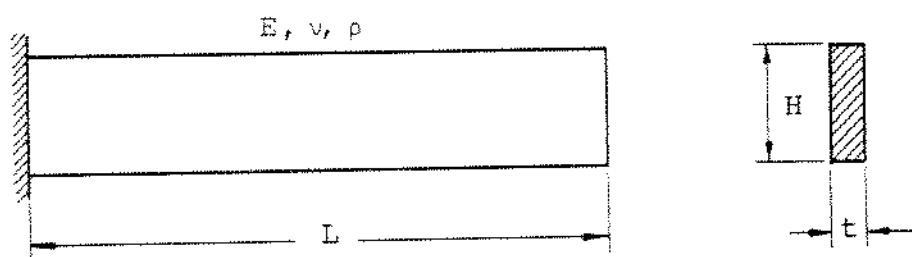


Figura 6.1. Viga 2D em balanço do exemplo 1.

O problema examinado tem por finalidade determinar as quinze menores frequências naturais da viga em balanço. Para isso, é utilizada a formulação paramétrica hierárquica do MEF, considerando-se como base o elemento plano quadrilateral isoparamétrico de oito nós, que foi mostrado na figura 2.4. Este problema também será analisado no exemplo 2, utilizando elementos 3D de dezesseis nós. Os resultados das respectivas soluções poderão, conseqüentemente, ser comparados.

A discretização básica para a primeira solução consiste, portanto, de elementos cujas funções de interpolação são quadráticas do tipo serendipity dadas pelas equações (2.12) a (2.19) e, para soluções subsequentes, as funções hierárquicas de ordem crescente definidas pelas equações (3.34) a (3.37), (3.44) a (3.48) e (3.50) a (3.55).

As matrizes dos elementos foram integradas usando a técnica da quadratura não reduzida de Gauss. A matriz de massa é consistente.

São assumidas as condições do estado plano de tensões. Dados: $L = 20$ [m]; $H = 4$ [m]; $t = 0,1$ [m]; $E = 10^6$ [N/m²]; $\nu = 0,3$ e $\rho = 1$ [kg/m³].

A viga foi modelada em cinco maneiras diferentes:

- (a) uma malha uniforme com 5×1 elementos 2D isoparamétricos de oito nós (3×3 pontos de integração);
- (b) uma malha uniforme com 5×1 elementos 2D hierárquicos;
- (c) uma malha uniforme com 40×8 elementos 2D isoparamétricos;
- (d) pela teoria de viga de Euler-Bernoulli e

(e) pela teoria de viga de Rayleigh-Timoshenko (incluídos os efeitos da inércia de rotação e da deformação devido ao cisalhamento) usando $k = 5/6$ o coeficiente de cisalhamento (TIMOSHENKO et al [46]).

A figura 6.2 mostra a discretização básica da viga com 5 x 1 elementos isoparamétricos de oito nós.

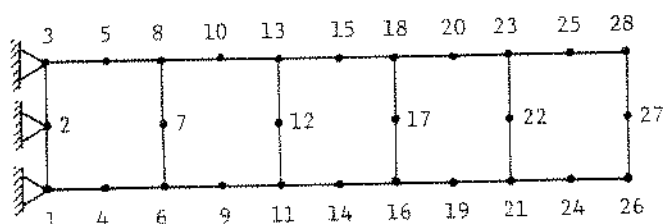


Figura 6.2. Discretização da viga do exemplo 1 em cinco elementos isoparamétricos de oito nós.

A tabela 6.1 apresenta as quinze menores frequências naturais da viga considerada no exemplo 1.

Os resultados apresentados para a modelagem tipo (a) foram obtidos usando a discretização dada pela figura 6.2 com cinco elementos planos quadrilaterais "standard" da família serendipity.

Para a modelagem tipo (b), as frequências apresentadas foram obtidas utilizando o processo de refinamento hierárquico considerando, como primeira solução, os resultados da modelagem do tipo (a). A análise de erros foi processada utilizando o indicador de erros dado pela equação (4.19). No processo de refinamento hierárquico considerou-se cada autovalor separadamente. O número que aparece entre parênteses na tabela 6.1 corresponde ao número de reanálises para cada autovalor, tal que a solução da última reanálise satisfizesse o critério de parada do processo de refinamento do autovalor em questão.

A figura 6.3 mostra, para cada reanálise, a representação dos graus de liberdade hierárquicos introduzidos nos elementos e os correspondentes graus dos polinômios das funções de

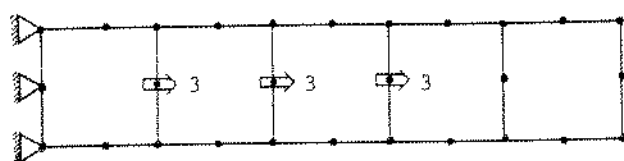
interpolação hierárquicas considerando-se apenas a primeira frequência. Para esta frequência, o critério de parada foi satisfeito após seis reanálises hierárquicas. O valor da frequência convergiu para 1,5728 [Hz].

	T	N	i = 1	i = 2	i = 3
(a) malha 5x1 elem. 2D isop. de 8 nós	0,2'	50	1,590	8,707	12,54
(b) malha 5x1 elementos 2D hierárquicos	39,3'	70 a 172	1,573 (6)	8,501 (7)	12,53 (3)
(c) malha 40x8 elem. 2D isop. de 8 nós	13,5'	2080	1,571	8,486	12,53
(d) teoria de viga Euler-Bernoulli	-	-	1,615	10,12	12,50
(e) teoria de viga Rayleigh-Timoshenko	-	-	1,567	8,437	12,50

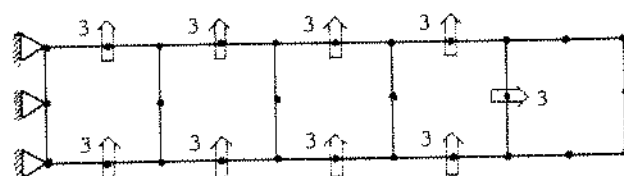
	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8	i = 9
(a)	21,11	35,93	37,55	53,05	62,40	69,50
(b)	20,31 (8)	33,84 (9)	37,48 (5)	48,27 (10)	61,99 (4)	63,01 (7)
(c)	20,27	33,76	37,47	48,12	61,97	62,54
(d)	28,35	37,50	55,55	62,50	87,50	91,82
(e)	20,08	33,34	37,50	47,41	61,53	62,50

	i = 10	i = 11	i = 12	i = 13	i = 14	i = 15
(a)	87,16	89,11	92,18	104,2	111,8	112,8
(b)	76,77 (8)	81,82 (7)	85,18 (8)	90,57 (8)	95,49 (8)	104,2 (8)
(c)	76,19	81,64	85,14	89,82	94,73	104,1
(d)	112,5	137,2	137,5	162,5	187,5	191,6
(e)	75,07	81,88	87,50	89,43	94,45	104,8

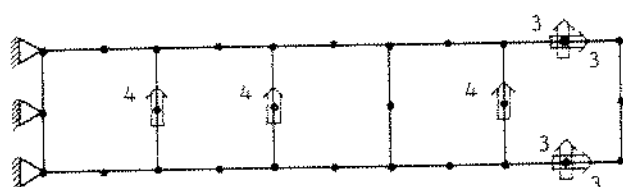
Tabela 6.1. Frequências naturais f_i [Hz] da viga do exemplo 1
 N = número de graus de liberdade; T = tempo de
 C.P.U.; $\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$; $\gamma = 0,20$



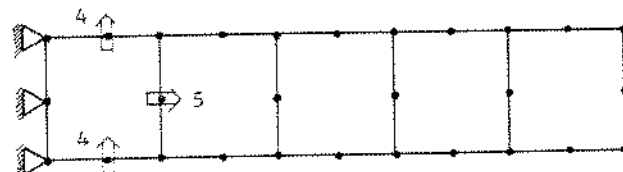
1ª Reanálise
 $f_1 = 1,5848 \text{ Hz}$



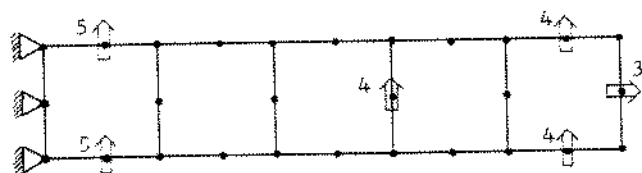
2ª Reanálise
 $f_1 = 1,5838 \text{ Hz}$



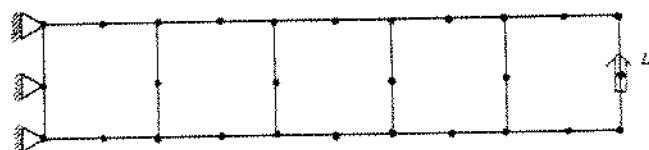
3ª Reanálise
 $f_1 = 1,5756 \text{ Hz}$



4ª Reanálise
 $f_1 = 1,5731 \text{ Hz}$



5ª Reanálise
 $f_1 = 1,5728 \text{ Hz}$



6ª Reanálise
 $f_1 = 1,5728 \text{ Hz}$

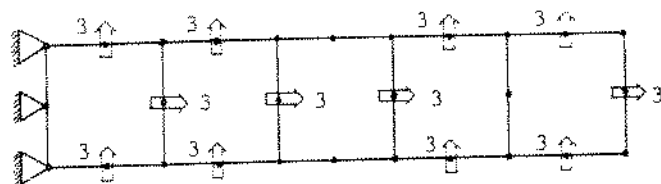
Figura 6.3. Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a primeira frequência da viga do exemplo 1.

A figura 6.4. ilustra os novos graus de liberdade hierárquicos para as sete primeiras reanálises da décima quinta frequência natural da viga do problema estudado. Nota-se, portanto, que diferentes frequências exigem diferentes refinamentos.

Observa-se, ainda, através da figura 6.4 que o valor da décima quinta frequência convergiu para 104,19 [Hz], na sétima reanálise, embora o critério de parada só tenha sido satisfeito na oitava reanálise.

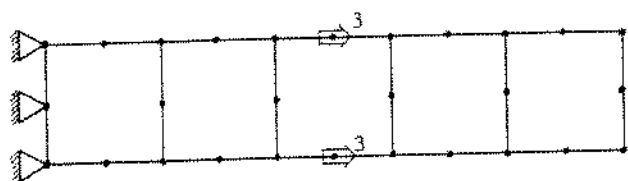
A modelagem do tipo (b) do problema estudado serviu também para testar o indicador de erros no processo de refinamento hierárquico adaptativo no caso de se considerar, na análise de erros, todos os autovalores simultaneamente. Observou-se que, para este caso, foram necessárias somente quatro reanálises para que a solução satisfizesse o critério de parada. Os valores obtidos para as frequências naturais usando esse tipo de análise foram exatamente iguais aos apresentados na tabela 6.1 da modelagem (b). Verificou-se, também, que o esforço computacional passou a ser em torno de onze vezes menor do que no caso anterior. A vantagem de economia computacional justifica a utilização desse tipo de análise. A figura 6.5 mostra a posição, nos elementos, dos novos graus de liberdade hierárquicos para cada reanálise, no caso de se considerar, na análise de erros, todos os autovalores da faixa de frequência de interesse.

Para verificar os resultados obtidos para a modelagem tipo (b) do problema estudado considerou-se, desta vez, um outro indicador de erros no processo de refinamento, como aquele definido pela equação (4.8) do capítulo 4. Os valores das frequências naturais, usando esse tipo de indicador de erros, foram computados como sendo, mais uma vez, exatamente iguais aos mostrados na tabela 6.1. No entanto, como era de se esperar, o tempo de processamento aumentou sensivelmente, em torno de treze vezes ao usar na análise de erros, cada autovalor, isoladamente, e em torno de dez vezes, no caso de se considerar todos os autovalores simultaneamente.



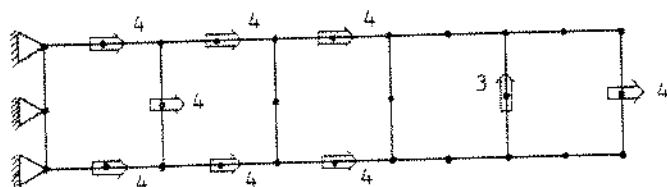
1ª Reanálise

$$f_{15} = 107,65 \text{ Hz}$$



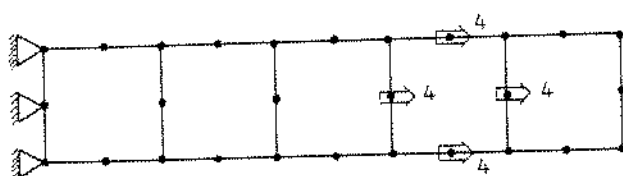
2ª Reanálise

$$f_{15} = 106,91 \text{ Hz}$$



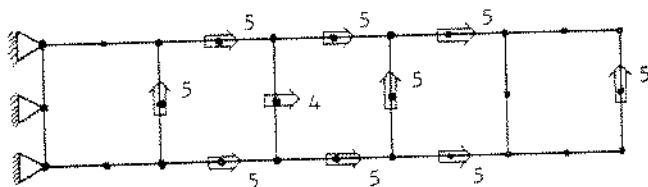
3ª Reanálise

$$f_{15} = 105,45 \text{ Hz}$$



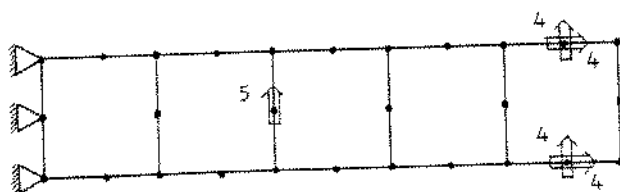
4ª Reanálise

$$f_{15} = 105,35 \text{ Hz}$$



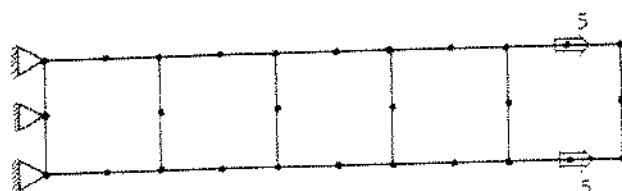
5ª Reanálise

$$f_{15} = 104,20 \text{ Hz}$$



6ª Reanálise

$$f_{15} = 104,19 \text{ Hz}$$

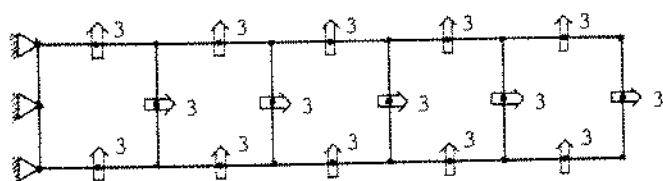


7ª Reanálise

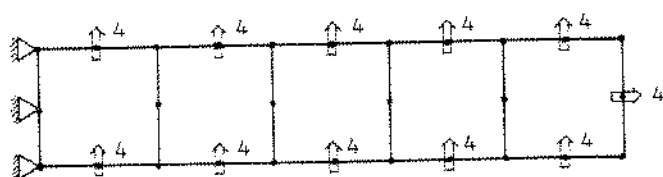
$$f_{15} = 104,19 \text{ Hz}$$

Figura 6.4. Representação dos graus de liberdade hierárq. para a décima quinta frequência da viga do exemplo 1.

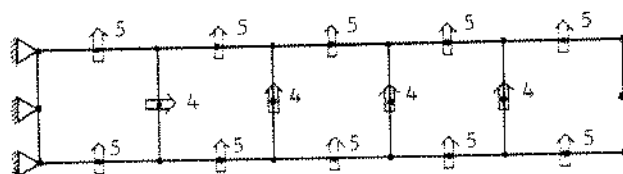
1ª Reanálise para f_1 a f_{15}



2ª Reanálise para f_1 a f_{15}



3ª Reanálise para f_1 a f_{15}



4ª Reanálise para f_1 a f_{15}

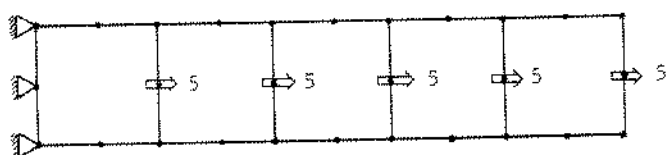


Figura 6.5. Representação dos graus de liberdade hierárquicos para as frequências 1-15 da viga do exemplo 1.

6.3. EXEMPLOS DE PROBLEMAS USANDO ELEMENTOS 3D

As funções de interpolação hierárquicas e o elemento 3D, propostos neste trabalho, foram testados no estudo do problema dinâmico de autovalor generalizado de vigas, nos exemplos 2 e 3 e de placas espessas, nos exemplos 4, 5, 6 e 7.

O elemento 3D básico é aquele apresentado no capítulo 2 pela figura 2.9. A discretização básica para a primeira solução consiste desses elementos cujas funções de interpolação são do tipo standard da família serendipity, quadráticas-linear dadas pelas equações (2.56) a (2.65). Para as soluções subsequentes são utilizadas as funções de interpolação hierárquicas de ordem crescente, apresentadas no capítulo 3. As funções de interpolação hierárquicas do terceiro grau foram definidas pelas equações (3.59) a (3.66), as do quarto grau pelas equações (3.71) a (3.78), para as quais se devem também considerar as funções hierárquicas do tipo bolha, associadas às faces do elemento, dadas pelas equações (3.79) e (3.80) e as funções hierárquicas do quinto grau, pelas equações (3.82) a (3.89), com as funções do tipo bolha, definidas pelas equações (3.90) a (3.93).

Em todas aplicações numéricas foram consideradas as condições da elasticidade linear tridimensional. As matrizes dos elementos foram integradas usando também a técnica da quadratura não reduzida de Gauss. As soluções subsequentes no processo de refinamento hierárquico foram obtidas conforme os procedimentos apresentados nos capítulos 3, 4 e 5 deste trabalho.

Exemplo 2

Neste exemplo, foi utilizada a mesma viga em balanço do exemplo 1. O problema examinado teve por finalidade determinar as quinze menores frequências naturais da viga em balanço, que é mostrada na figura 6.6, utilizando agora, elementos 3D hierárquicos para placa espessa.

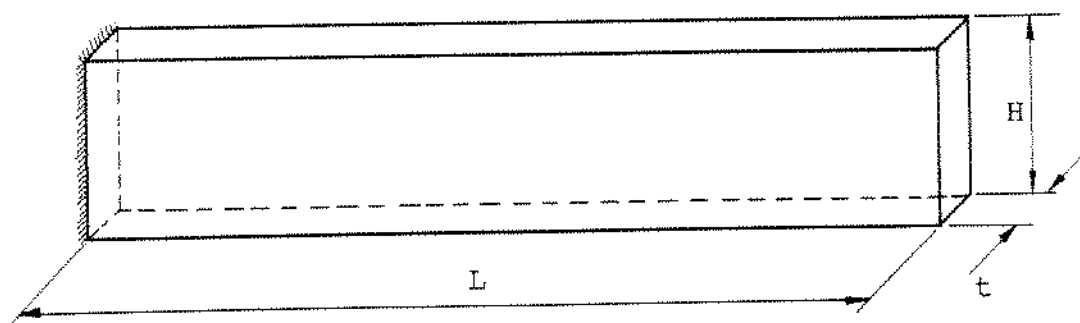


Figura 6.6. Viga 3D em balanço do exemplo 2.

A discretização básica para a primeira solução consistiu de elementos 3D isoparamétricos de dezesseis nós.

Dados: $L = 20$ [m]; $H = 4$ [m]; $t = 0,1$ [m]; $E = 10^6$ [N/m²];
 $\nu = 0,3$ e $\rho = 1$ [kg/m³]

A viga em balanço foi modelada em cinco maneiras diferentes:

- (a) uma malha uniforme com 5×1 elementos 3D isoparamétricos de dezesseis nós ($3 \times 3 \times 2$ pontos de integração);
- (b) uma malha uniforme com 5×1 elementos 3D hierárquicos;
- (c) uma malha uniforme com 20×4 elementos 3D isoparamétricos;
- (d) pela teoria de viga de Euler-Bernoulli e
- (e) pela teoria de viga de Rayleigh-Timoshenko ($K = 5/6$).

A figura 6.7 mostra a discretização básica da viga com 5×1 elementos 3D isoparamétricos de dezesseis nós.

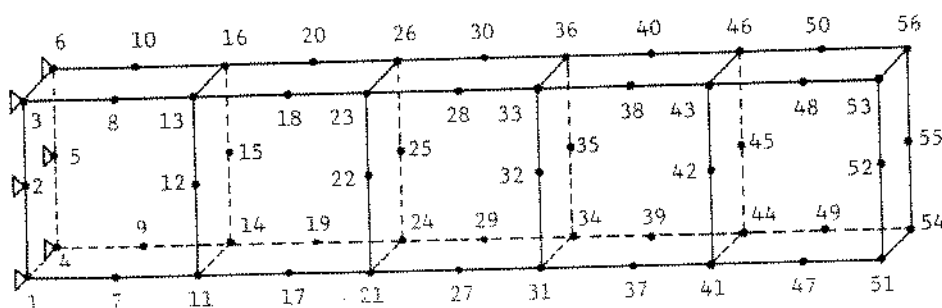


Figura 6.7. Discretização da viga do exemplo 2 em cinco elementos isoparamétricos de dezesseis nós.

A tabela 6.2 apresenta as quinze menores frequências naturais para a viga em balanço, em função do tipo de modelagem usado.

	T	N	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
(a) malha 5x1 elem. 3D isop. de 16 nós	0,5'	128	1,590	8,707	12,54
(b) malha 5x1 elementos 3D hierárquicos	17'	429	1,573	8,501	12,53
(c) malha 20x4 elementos 3D isoparamétricos de 16 nós	11'	1409	1,571	8,493	12,53
(d) teoria de viga Euler-Bernoulli	-	-	1,615	10,12	12,50
(e) teoria de viga Rayleigh-Timoshenko	-	-	1,567	8,437	12,50

	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
(a)	21,11	35,95	37,55	53,11	62,41	69,84
(b)	20,31	33,84	37,48	48,27	61,99	63,03
(c)	20,29	33,79	37,48	48,18	61,98	62,64
(d)	28,35	37,50	55,55	62,50	87,50	91,82
(e)	20,08	33,34	37,50	47,41	61,53	62,50

	$i = 10$	$i = 11$	$i = 12$	$i = 13$	$i = 14$	$i = 15$
(a)	87,30	89,19	92,31	104,36	112,31	112,97
(b)	76,80	81,83	85,18	90,61	95,53	104,2
(c)	76,33	81,70	85,16	89,98	94,89	104,1
(d)	112,5	137,2	137,5	162,5	187,5	191,6
(e)	75,07	81,88	87,50	89,43	94,45	104,8

Tabela 6.2. Frequências naturais f_i [Hz] da viga do exemplo 2.
 N = número de graus de liberdade; T = tempo de C.P.U.; $\epsilon_{tol} = 10^{-4}$; $\gamma = 0,20$

Os resultados apresentados para a modelagem tipo (a) foram obtidos usando a discretização dada pela figura 6.7 com 5 elementos tridimensionais de dezesseis nós, com funções de interpolação "standard" da família serendipity.

Para a modelagem tipo (b), as frequências apresentadas foram obtidas utilizando cinco elementos 3D no processo de refinamento hierárquico, considerando na primeira solução, os resultados referentes à modelagem do tipo (a). A análise de erros foi processada utilizando o indicador de erros dado pela equação (4.19). No processo de refinamento hierárquico foram considerados todos os quinze autovalores simultaneamente. O critério de parada do processo foi satisfeito após quatro reanálises.

A figura 6.8 mostra a representação dos graus de liberdade hierárquicos introduzidos nos elementos para cada reanálise.

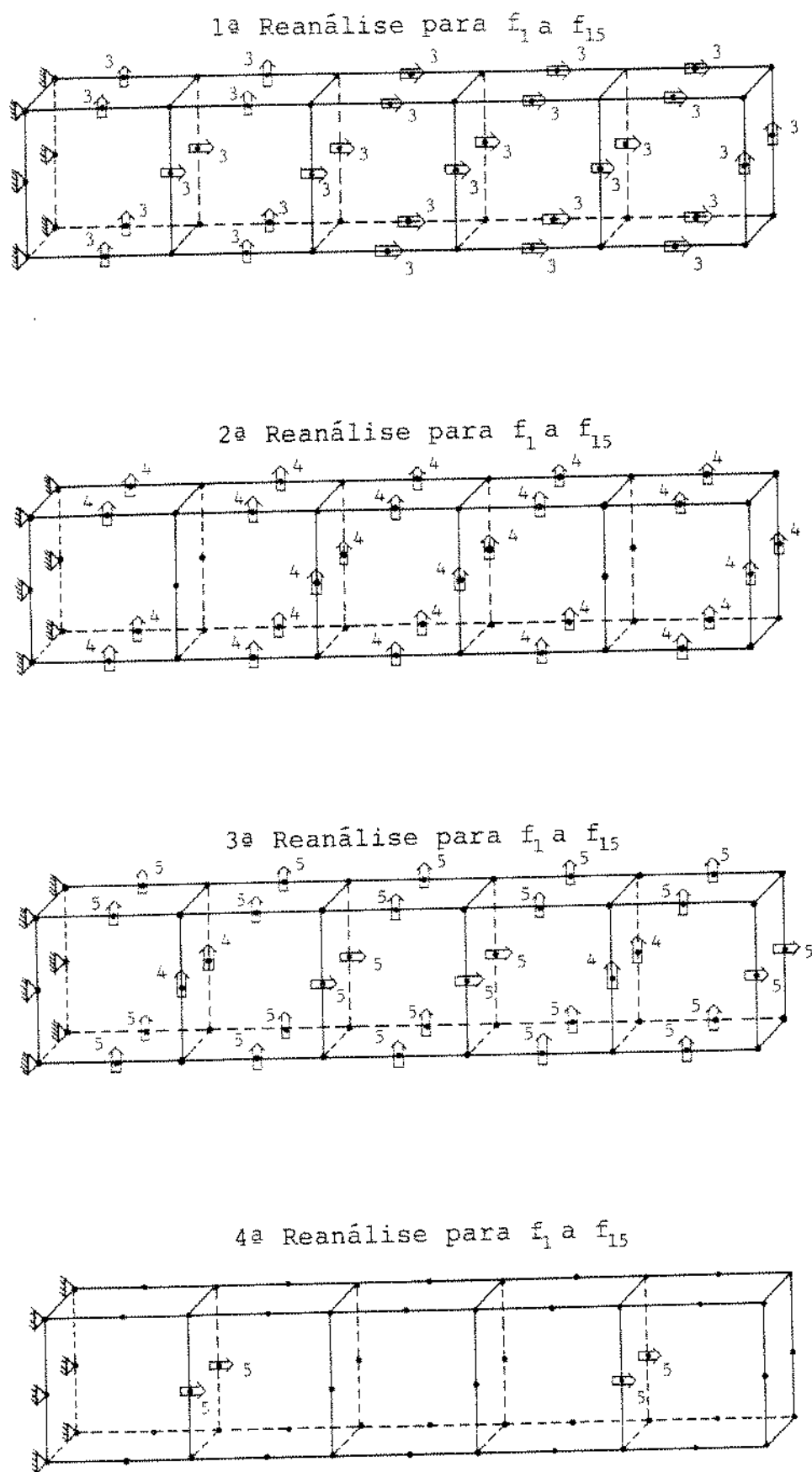


Figura 6.8. Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a viga do exemplo 2.

Exemplo 3

Uma viga biapoiada foi utilizada neste exemplo para estudar o problema de autovalor generalizado. Foram determinadas as seis primeiras frequências naturais da viga para cinco tipos diferentes de modelagem:

- (a) uma malha uniforme com 4×1 elementos 3D isoparamétricos;
- (b) uma malha uniforme com 4×1 elementos 3D hierárquicos;
- (c) uma malha uniforme com 16×4 elementos 3D isoparamétricos;
- (d) pela teoria de viga de Euler-Bernoulli e
- (e) pela teoria de viga de Rayleigh-Timoshenko ($K = 5/6$).

Dados: $L = 8$ [m]; $H = 2$ [m]; $t = 0,2$ [m]; $E = 10^{10}$ [N/m²];
 $\nu = 0,3$ e $\rho = 5000$ [kg/m³].

A tabela 6.3 apresenta as frequências naturais da viga bi-apoiada em função do tipo de modelagem.

Na modelagem tipo (b) foram utilizados todos os autovalores de interesse na análise de erros do processo de refinamento hierárquico. As frequências convergiram para os valores apresentados na quarta reanálise, embora o critério de parada tenha sido satisfeito apenas na sexta reanálise.

Para verificar os resultados da modelagem (b) foi utilizado também, na análise de erros, cada autovalor separadamente. As frequências assim obtidas foram exatamente iguais às frequências determinadas no caso anterior. No entanto, o esforço computacional foi em torno de quatro vezes maior.

A tabela 6.3 também mostra a diferença percentual ϵ das frequências em relação às obtidas pela teoria de viga de Rayleigh-Timoshenko.

	(a)		(b)		(c)		(d)		(e)
i	N=109	ϵ	N=342	ϵ	N=1159	ϵ	-	ϵ	-
1	18,5	1,65	18,3	0,55	18,0	-1,10	20,0	9,89	18,2
2	41,8	-	33,2	-	32,9	-	44,2	-	-
3	62,7	6,81	59,2	0,85	57,6	-1,87	80,2	36,63	58,7
4	120,5	-	101,3	-	102,5	-	132,6	-	-
5	125,2	19,12	106,5	1,33	105,8	0,67	180,4	71,65	105,1
6	184,9	21,97	155,0	2,24	144,5	-4,68	320,6	111,48	151,6

Tabela 6.3. Frequências naturais f_i [Hz] da viga do exemplo 3. $\epsilon_{tol} = 10^{-6}$; $\gamma = 0,20$
 N = número de graus de liberdade

Exemplo 4.

A figura 6.9 mostra os quatro primeiros modos próprios de vibração de uma placa retangular grossa em balanço, representada por dois elementos 3D de dezesseis nós.

Dados: $E = 30 \times 10^6$ [N/m²]; $t = 0,1$ [m]; $L = 2$ [m]; $b = 1$ [m]
 $\nu = 0,3$; $\rho = 733 \times 10^{-6}$ [kg/m³].

A tabela 6.4 mostra os valores das quatro primeiras frequências naturais da placa em balanço para:

- uma malha com 2×1 elementos 3D isoparamétricos de dezesseis nós;
- uma malha com 2×1 elementos 3D hierárquicos;
- uma malha com 10×5 elementos 3D isoparamétricos de dezesseis nós;
- solução exata dada por BARTON [47] e
- uma malha de dezesseis elementos triangulares de ZIENKIEWICZ [1].

	N	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4
(a) malha 2x1 elementos 3D isop. de 16 nós	60	958	3889	7383	16175
(b) malha 2x1 elementos 3D hierárquicos	204	904	3544	5525	11587
(c) malha 10x5 elem. 3D isop. de 16 nós	1020	897	3538	5513	11537
(d) solução exata de Barton	-	846	3638	5266	11870
(e) malha 16 elementos triangulares	36	825	3537	5185	11734

Tabela 6.4. Frequências naturais f_1 [Hz] da placa do exemplo 4
 N = número de graus de liberdade;

$$\varepsilon_{tol} = 10^{-5}; \quad \gamma = 0.20$$

Observa-se que com apenas dois elementos hierárquicos, as frequências obtidas tendem para os valores das frequências determinadas através de outras técnicas.

A figura 6.10 mostra os graus de liberdade hierárquicos introduzidos nos elementos para as quatro reanálises no processo de refinamento hierárquico da placa em balanço.

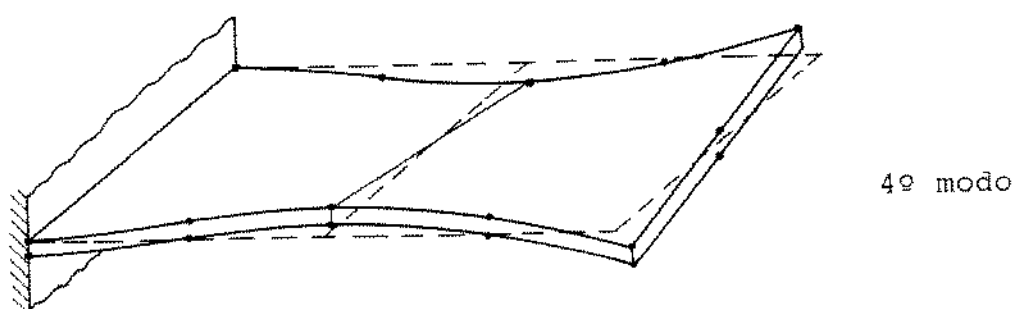
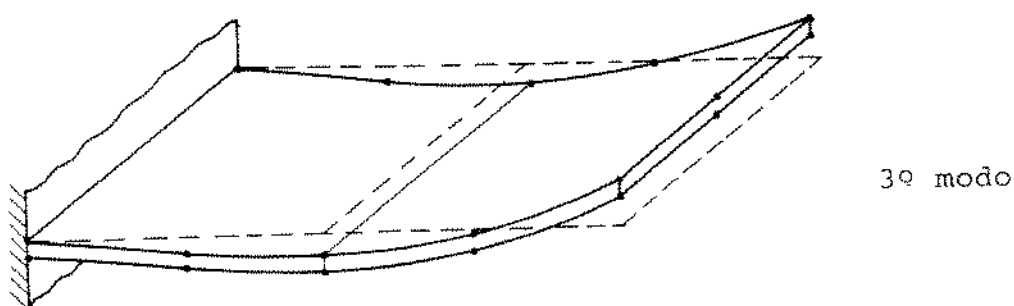
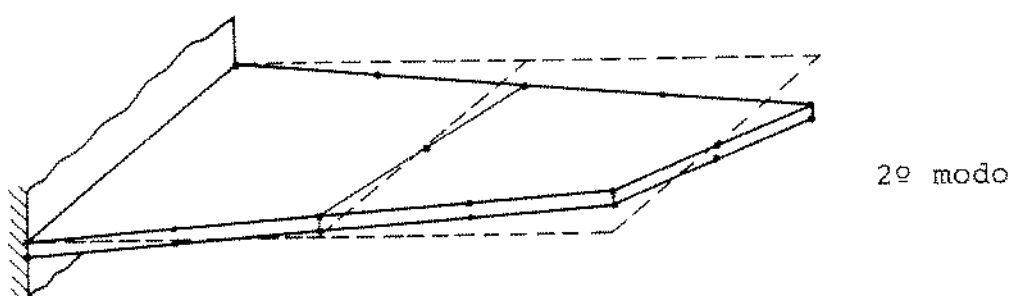
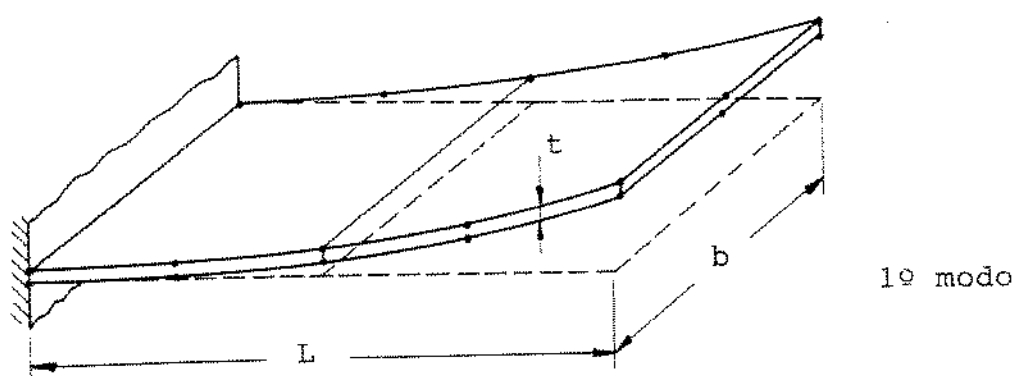


Figura 6.9. Modos de vibração da placa do exemplo 4, dividida em dois elementos 3D de dezesseis nós.

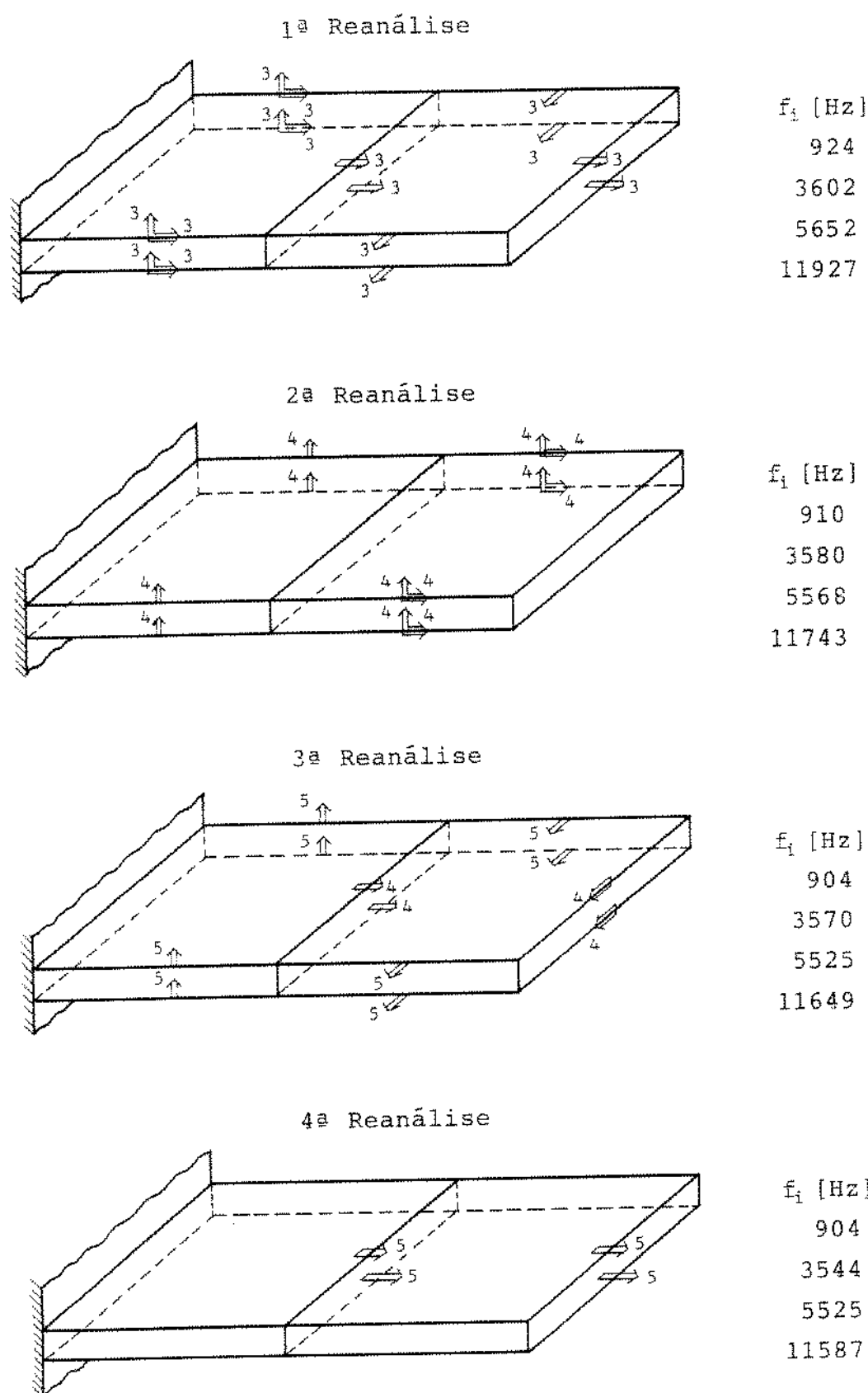


Figura 6.10. Representação dos graus de liberdade hierárquicos para as quatro reanálises da placa do exemplo 4.

Exemplo 5.

A tabela 6.5 mostra as frequências naturais de placas grossas, com dois tipos diferentes de condições de contorno, para duas diferentes espessuras. Foram considerados os seguintes casos:

- (a) malha com 2×2 elementos 3D isoparamétricos de 16 nós;
- (b) malha com 2×2 elementos 3D hierárquicos;
- (c) malha com 7×7 elementos 3D isoparamétricos de 16 nós;
- (d) malha com cinco camadas pelo método das faixas finitas (CHEUNG [48]) e em
- (e) aplicou-se a teoria de placa fina (CHEUNG [48]).

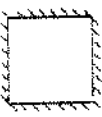
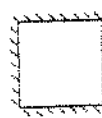
Na modelagem tipo (b) os resultados foram obtidos após três reanálises hierárquicas considerando, na análise de erros, todos os autovalores simultaneamente com $\varepsilon_{tol} = 10^{-4}$ e $\gamma = 0,20$.

Dados: $a = b = 1$ [m]; $E = 10^3$ [N/m²]; $\nu = 0,3$; $\rho = 1$ [kg/m³].

Observa-se, através da tabela 6.5, que para $h = 0,10$ [m] ou $h = 0,20$ [m], as frequências obtidas no caso de se usar apenas quatro elementos 3D hierárquicos, aproximam-se dos valores das frequências quando se usam 7×7 elementos 3D isoparamétricos ou quando se aplica o método das faixas finitas. No entanto, para $h = 0,20$ [m], a aproximação das frequências é relativamente maior do que para $h = 0,10$ [m]. Notam-se também que as frequências para $h = 0,10$ [m] tendem para aquelas dadas pela teoria de placa fina, enquanto as frequências para $h = 0,20$ [m] tendem a ser de valores menores.

A figura 6.11 ilustra os graus de liberdade hierárquicos introduzidos nos elementos da placa totalmente engastada, para cada uma das três reanálises hierárquicas; já a figura 6.12 mostra os graus de liberdade hierárquicos para a placa com um lado livre também para cada uma das três reanálises hierárquicas.

$$f_i \text{ [Hz]} \quad h = 0,10 \text{ [m]}$$

	i	(a) malha 2x2 elem. 3D isop. de 16 nós	(b) malha 2x2 elem. 3D hierárqui- cos	(c) malha 7x7 elem. 3D isop. de 16 nós	(d) método das faixas finitas	(e) teoria de placa fina
	1	245,7	173,4	173,4	166,2	174,0
	2	546,8	331,6	332,4	322,0	355,2
	3	546,8	331,6	332,4	322,0	355,2
	4	745,2	555,5	558,1	454,7	524,0
	5	1021,0	597,4	597,2	516,6	638,1
	1	171,7	115,8	115,8	113,4	116,7
	2	246,8	188,0	187,8	181,9	195,3
	3	395,5	285,8	287,1	283,4	308,1
	4	431,8	348,4	347,9	333,4	372,5
	5	514,3	355,7	355,1	349,1	395,5

$$f_i \text{ [Hz]} \quad h = 0,20 \text{ [m]}$$

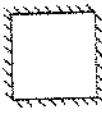
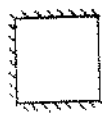
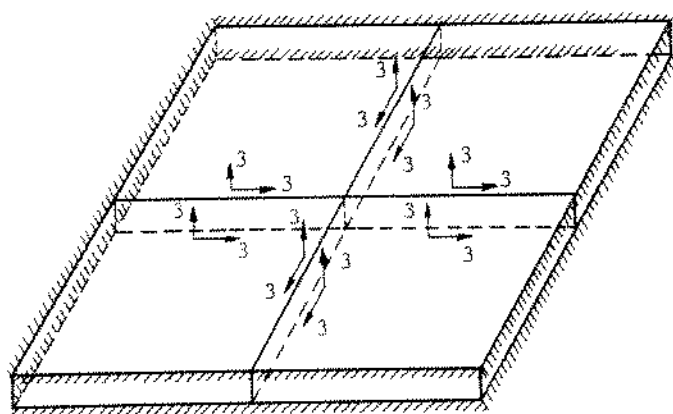
	i	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
	1	316,2	281,5	281,6	274,4	348,0
	2	602,1	490,9	490,8	498,1	710,4
	3	602,1	490,9	490,8	498,1	710,4
	4	745,2	672,8	658,1	674,1	1048,0
	5	1021,0	708,0	707,3	724,5	1276,3
	1	221,4	194,8	194,5	193,0	233,4
	2	331,7	302,8	302,4	298,1	390,5
	3	502,3	429,7	429,8	445,1	616,2
	4	553,3	523,1	522,2	520,7	744,9
	5	623,5	533,6	533,5	534,6	791,0

Tabela 6.5. Frequências naturais f_i [Hz] para as placas do exemplo 5.

////// engastado; _____ livre.

1ª Reanálise

 f_1 [Hz]

284,8

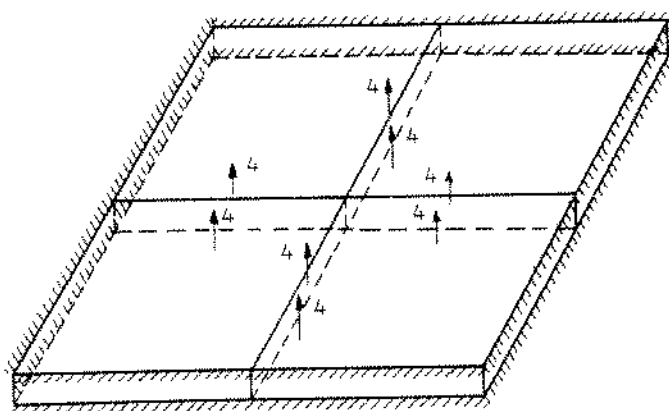
556,7

556,7

745,2

848,9

2ª Reanálise

 f_1 [Hz]

282,0

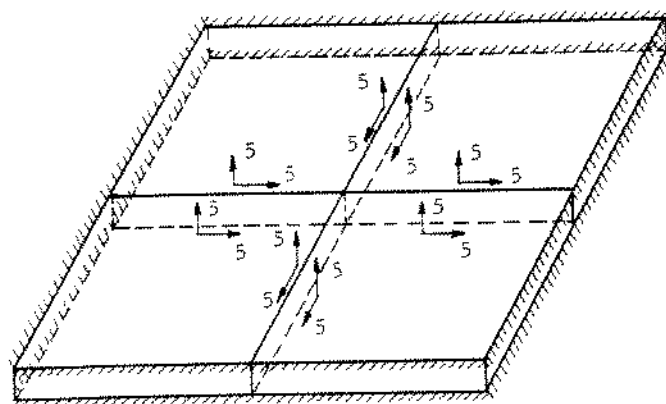
498,7

498,7

735,7

764,8

3ª Reanálise

 f_1 [Hz]

281,5

490,9

490,9

672,8

708,0

Figura 6.11. Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a placa totalmente engastada com $h=0,20$ [m] do exemplo 5.

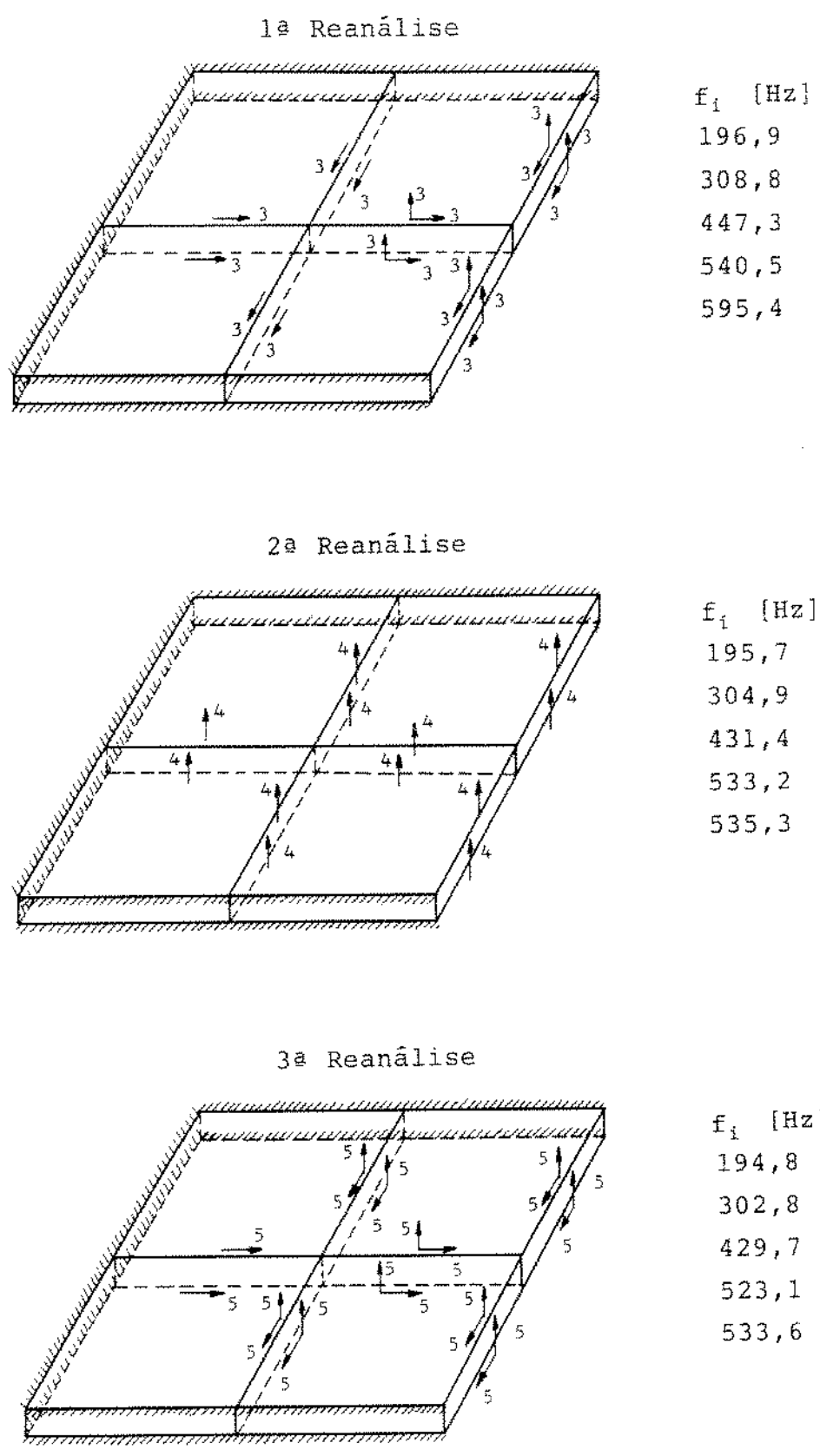


Figura 6.12. Representação dos graus de liberdade hierárquicos para a placa com um lado livre e $h = 0,20$ [m] do exemplo 5.

Exemplo 6.

Através da tabela 6.6 podem-se comparar os resultados obtidos para o parâmetro $\bar{\omega}$ da frequência fundamental, sendo $\bar{\omega} = \omega \{E/[12(1 - \nu^2)\rho]\}^{-1/2}$, de uma placa quadrada, simplesmente apoiada, utilizando elementos 3D hierárquicos, com os resultados exatos obtidos por LEVINSON [49], usando a teoria da elasticidade tridimensional. Como mostrado na tabela, a relação da espessura da placa h/a varia de $h/a = 0,05$ (placa fina) a $h/a = 0,4$ (placa espessa). Os resultados exatos da teoria clássica de placa fina (TIMOSHENKO et al [46]) e da teoria de placa de Mindlin, obtidos por LEVINSON [49] são também mostrados na tabela, assim como a diferença percentual ϵ dos valores do parâmetro da frequência fundamental em relação aos obtidos pelo método da elasticidade.

Dados: $a = b = 2$; $\nu = 0,3$.

$\frac{h}{a}$	malha 2x2 elem. 3D hierárq.		método da elast. 3D	teoria de placa de Mindlin [49]		teoria de placa fina	
	$\bar{\omega}$	ϵ		$\bar{\omega}$	ϵ	$\bar{\omega}$	ϵ
0,05	0,534	9,87%	0,486	0,491	1,03%	0,493	1,44%
0,10	1,018	7,05%	0,951	0,953	0,21%	0,987	3,79%
0,20	1,756	0,23%	1,752	1,742	-0,57%	1,974	12,67%
0,30	2,213	-	-	-	-	2,961	-
0,40	2,426	-12,98%	2,788	2,749	-1,40%	3,948	41,61%

Tabela 6.6. Valores do parâmetro $\bar{\omega}$ da frequência fundamental da placa do exemplo 6. $\epsilon_{tol} = 10^{-5}$; $\gamma = 0,20$

Nota-se, através da tabela 6.6, que para $h/a = 0,05$ (placa fina) e para $0,05 < h/a < 0,10$ (placa moderadamente grossa), os valores do parâmetro da frequência fundamental obtidos pela versão p do MEF são maiores do que aqueles encontrados pelo método da elasticidade tridimensional. Para $h/a = 0,20$ (placa

grossa), se obtém a menor diferença percentual entre os valores do parâmetro da frequência. Para $h/a > 0,20$ (placa muito grossa), os valores do parâmetro determinados pela formulação hierárquica diminuem sensivelmente com relação àqueles calculados pelo método da elasticidade.

Através da figura 6.13, podem-se comparar graficamente os valores do parâmetro $\bar{\omega}$ da frequência fundamental da placa em função da relação da espessura h/a .

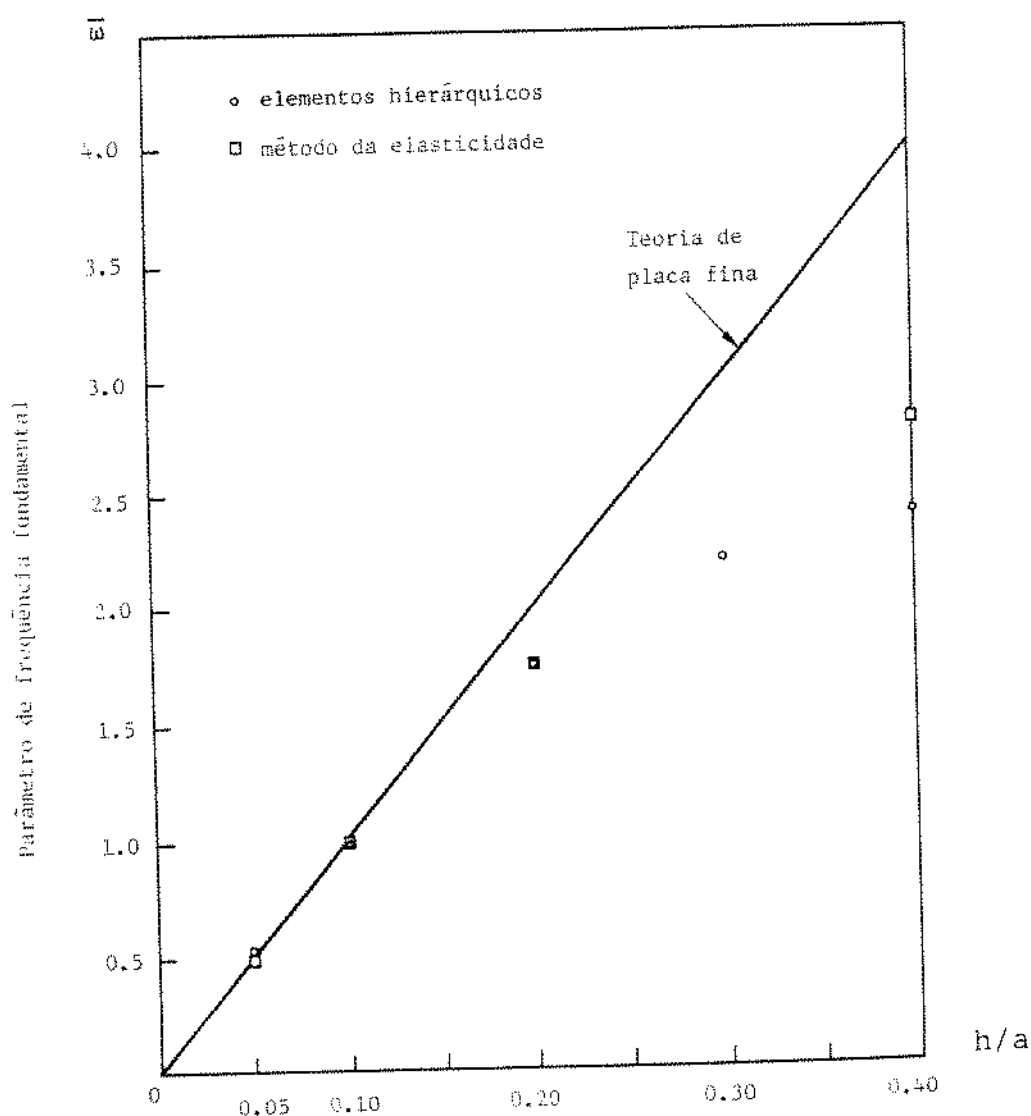


Figura 6.13. Gráfico $\bar{\omega} \times h/a$ para a placa quadrada simplesmente apoiada do exemplo 6.

Exemplo 7.

Os resultados da vibração livre de uma placa quadrada com três lados apoiados e um engastado são mostrados na tabela 6.7. Duas relações de espessura, $h/a = 0,01$ (placa fina) e $h/a = 0,1$ (placa grossa) são consideradas. Os cinco primeiros parâmetros adimensionais de frequência $\omega a^2/4 (\rho h/D)^{1/2}$ sendo, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, obtidos pelas formulações isoparamétricas e hierárquicas do MEF são comparados com os valores obtidos por DAWE e ROUFAEIL [50].

Os valores do parâmetro de frequência, encontrados pela formulação hierárquica, podem ser considerados de boa aproximação quando a placa se torna espessa.

Dados: $a = b = 2$; $\nu = 0,3$; $h = 0,02$ e $0,2$.

h/a	Método	N	i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
0,01	(a) malha 2x2 elem. 3D isoparamet. de 16 nós	80	34,4	56,1	98,3	132,6	144,5
	(b) malha 2x2 elementos 3D hierárquicos	122	6,6	14,7	16,8	26,2	30,8
	(c) teoria de Rayleigh-Ritz [50]	-	5,9	12,9	14,6	21,5	25,1
0,1	(a) Malha 2x2 elem. 3D isoparamet. de 16 nós	80	5,6	13,3	15,0	24,0	26,3
	(b) malha 2x2 elementos 3D hierárquicos	112	5,5	12,8	13,1	20,4	23,1
	(c) teoria de Rayleigh-Ritz [50]	-	5,6	11,8	13,0	18,5	21,5

Tabela 6.7. Valores do parâmetro adimensional de frequência para a placa do exemplo 7.

N = número de graus de liberdade;

$\varepsilon_{tol} = 10^{-6}$; $\gamma = 0,20$.

CAPÍTULO 7

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

7.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo trata de alguns comentários sobre o elemento 3D proposto e, de modo geral, do processo de refinamento hierárquico que foi implementado no MEF e também das conclusões a respeito dos resultados numéricos obtidos neste trabalho. Na última seção, são sugeridos alguns temas para futuras pesquisas.

7.2. SOBRE O ELEMENTO PROPOSTO

Foi escolhido o elemento 3D de dezesseis nós pela sua simplicidade e por se tratar de um elemento que ainda não havia sido testado na versão p do MEF para a análise de vibrações livres de placas espessas. Foram utilizadas para este elemento, a fim de se obter o primeiro nível de aproximação da solução, as conhecidas funções de interpolação standard quadráticas-linear da família Serendipity. Nos exemplos de aplicação considerados, o elemento se mostrou eficiente.

7.3. SOBRE AS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

A classe de elementos da família Serendipity produz polinômios incompletos quando o grau das funções de interpolação ultrapassa três. Mostrou-se, neste trabalho, que esse problema pode ser evitado no caso de se incluir funções de interpolação hierárquicas na aproximação das funções Serendipity, resultando em aproximações polinomiais completas de p-ésima ordem, sem a necessidade de se acrescentar nós no elemento. A introdução dessas funções torna os elementos da família Serendipity muito mais eficientes, computacionalmente, do que elementos da família Lagrangeana ou elementos triangulares.

A propriedade de ortogonalidade que, geralmente, produz sistemas de equações melhor condicionados, não é observada entre as funções de interpolação hierárquicas de grau $p \geq 3$, utilizadas neste trabalho e implementadas na formulação hierárquica do MEF. No entanto, as correspondentes funções de interpolação quadráticas da família Serendipity utilizadas na formulação isoparamétrica apresentam, pelo menos, duas vantagens. A primeira está relacionada com a possibilidade de se definir melhor a geometria dos elementos em malhas cujo contorno é mais complexo. A segunda vantagem é notada quanto ao número necessário de reanálises no processo de refinamento hierárquico, para que os resultados finais da solução possam atingir uma dada precisão. Verificou-se, entre os exemplos numéricos apresentados e os não incluídos neste trabalho, que esse número se reduz sensivelmente quando se usam funções de interpolação hierárquicas de grau $p \geq 3$. A explicação disto está no fato que a diferença entre os resultados obtidos pela solução básica do problema e aqueles obtidos através da última reanálise do processo de refinamento hierárquico torna-se menor quando $p \geq 3$. Assim, conseqüentemente, a taxa de convergência da solução torna-se maior.

7.4. SOBRE A DISCRETIZAÇÃO DA MALHA

Um incentivo substancial para o desenvolvimento de programas computacionais em processos p -adaptativos está na possibilidade de se usar malhas com pequeno número de elementos. O uso de poucos elementos na discretização da malha original, como considerado nos exemplos numéricos deste trabalho, simplifica, consideravelmente, a entrada de dados e a interpretação dos resultados. Neste caso, a redução do esforço na preparação de dados conduz, conseqüentemente, à considerável economia de tempo.

Outra vantagem do processo p -adaptativo adotado é que a discretização da malha permanece fixa até a solução final do problema analisado.

7.5. SOBRE OS ESTIMADORES DE ERRO

O processo adaptativo de elementos hierárquicos proposto neste trabalho é combinado com um conjunto de dois estimadores de erro a-posteriori. Esses estimadores consistem de um indicador e de um estimador global de erros. Eles proporcionam informações sobre onde se deve refinar uma dada malha e quando se deve parar o processo de refinamento hierárquico, respectivamente.

A análise de erros a-posteriori tem como objetivo indicar quais graus de liberdade podem ser introduzidos nos elementos, a fim de diminuir o erro de discretização da malha e, também, estimar o erro global dos resultados em cada reanálise da solução. Se o erro de discretização relativo a um nível de aproximação, para um modelo de elementos finitos, for inaceitável, a precisão global da solução pode ser melhorada através de outras reanálises. Isto se consegue pela introdução em todos os elementos ou apenas naqueles mais carentes de refinamento, de funções de interpolação hierárquicas de grau mais elevado. Dessa forma, o grau dessas funções pode variar uniformemente ou seletivamente sobre os elementos da malha.

Com base nas informações obtidas pelos indicador local e estimador global de erros, a malha de elementos em cada reanálise é, portanto, regenerada. Assim a aproximação do erro global pode ser controlada eficientemente. A solução final é obtida até que uma estimativa global pré-especificada seja encontrada. Os resultados dos exemplos numéricos apresentados neste trabalho mostram a eficiência da análise hierárquica baseada nesses estimadores de erro a-posteriori.

Vale salientar que o tempo de processamento se reduz, sensivelmente, no caso de se utilizar, na análise hierárquica, todos os autovalores simultaneamente da faixa de frequência de interesse do que autovalores isoladamente e com a grande vantagem de se obter, praticamente, os mesmos resultados numéricos.

7.6. SOBRE O PROCESSO P-ADAPTATIVO PROPOSTO

Pode ser verificado como, por exemplo, nos trabalhos de BABUSKA e RHEINBOLDT [12], DORR [15], GAGO et al. [31], FRIBERG et al. [40] e neste trabalho, que as vantagens em se empregar processos p-adaptativos no MEF são evidentes.

Verificou-se que a versão p-adaptativa do MEF facilita a introdução de funções de interpolação hierárquicas de diferentes graus ao longo dos lados de cada elemento da malha. Com isso, novos modos de deformação dos elementos podem ser definidos.

É também mostrado nos exemplos numéricos deste trabalho que o processo adaptativo proposto, usando a versão p do MEF, conduz a reanálises bastante eficientes. Isso é possível devido ao processo facilitar o cálculo de estimativas de erro a-posteriori. Com a utilização de um indicador de erros, observou-se que os graus de liberdade hierárquicos podem ser distribuídos nos elementos, com eficiência e sem muito esforço computacional. Essa distribuição faz com que um número reduzido de graus de liberdade hierárquicos seja suficiente para que os resultados da solução final satisfaçam o nível de precisão desejado. A obtenção de soluções com estimativas de erros dentro de tolerâncias pré-especificadas tem sido considerada um dos maiores atrativos dos processos adaptativos.

Outra vantagem em utilizar processos p-adaptativos é observada na execução dos programas computacionais. No processo de refinamento p-adaptativo nota-se, também, que a cada nova reanálise, um conjunto de funções de interpolação hierárquicas associado a um elemento torna-se um sub-conjunto do conjunto de funções de interpolação hierárquicas associado ao elemento de ordem mais alta. Assim, conseqüentemente, as matrizes do elemento tornam-se submatrizes das matrizes do elemento nas reanálises posteriores. Isso conduz a sistemas bastante eficientes devido a cada matriz ampliada conter a matriz correspondente ao nível de aproximação anterior. Com isso, o esforço numérico consumido na triangularização da matriz de rigidez, correspondente a um nível de aproximação da solução, pode ser sempre economizado em soluções subseqüentes.

7.7. SOBRE OS RESULTADOS DAS APLICAÇÕES

Os três primeiros exemplos apresentados neste trabalho se referem ao problema de vibrações livres de vigas. Nota-se através dos resultados desses exemplos, que os valores das frequências naturais obtidos pelo processo hierárquico do MEF, usando elementos 3D, podem ser considerados de ótima aproximação, se comparados com os valores encontrados pela teoria de viga de Rayleigh-Timoshenko.

Nos quatro últimos exemplos (exemplos 4, 5, 6 e 7) é considerado o problema dinâmico de autovalor generalizado de placas com diversas condições de contorno e relações de espessura.

No exemplo 4, os valores obtidos para as frequências naturais, usando o elemento 3D proposto na versão p do MEF, são comparados com os resultados encontrados pela solução exata de BARTON [47] e por elementos triangulares de ZIENKIEWICZ [1]; no exemplo 5, por faixas finitas (CHEUNG [48]); no exemplo 6, pela teoria da elasticidade tridimensional (LEVINSON [49] e no exemplo 7, pela teoria de Rayleigh-Ritz (DAWE e ROUFAEIL [50]). Através dessas comparações, conclui-se que os valores das frequências podem ser considerados de boa aproximação quando a placa é grossa ou moderadamente grossa ($0,05 < t/a \leq 0,10$). Os resultados dos exemplos 5 e 6 mostram, também, que para $t/a = 0,20$ (placas grossas) a aproximação das frequências torna-se ainda maior. No exemplo 6, para $t/a > 0,20$ (placa muito grossa), os resultados não são confiáveis.

7.8. OUTRAS CONCLUSÕES

Face ao tempo de processamento e ao nível de precisão dos resultados numéricos obtidos neste trabalho, o critério de refinamento proposto pode ser considerado econômico e eficiente do ponto de vista adaptativo.

A experiência numérica adquirida estimula o desenvolvimento de outros elementos que poderiam ser utilizados no MEF através de processos adaptativos de refinamento hierárquico.

Pesquisas voltadas para o desenvolvimento de novas técnicas adaptativas, objetivando o controle do erro de discretização, poderiam ser consideradas de alta prioridade. O processo proposto neste trabalho não exigiu qualquer comportamento característico dos problemas analisados, sendo possível, portanto, estender sua aplicação na solução de outros tipos de problemas. Todas estas vantagens despertam grande interesse no sentido de se utilizar com mais frequência a formulação paramétrica hierárquica do MEF.

Conclui-se, através da análise dos resultados obtidos neste trabalho, que é realmente viável o desenvolvimento de novos elementos e de processos adaptativos, a serem implementados na versão p do MEF.

7.9. SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

O desenvolvimento de novos elementos em procedimentos adaptativos, como o apresentado neste trabalho, pode ser reconhecido como uma importante área de pesquisa. Nesse sentido, são sugeridos alguns temas para futuras pesquisas, utilizando a formulação paramétrica hierárquica do MEF: pesquisas sobre elementos distorcidos para a solução do problema de autovalor generalizado de placas e cascas espessas e, também, de placas finas; desenvolvimento e análise do comportamento de indicadores e estimadores de erros em processos adaptativos hierárquicos; utilização de funções de interpolação hierárquicas trigonométricas no MEF e comparação dos resultados da solução do problema de autovalor generalizado, através da implementação das versões h e p do MEF.

- [10] PEANO, A.; PASINI, A.; RICCIONI, R. and SARDELLA, L.
Adaptive Approximations in Finite Element Structural Analysis, *Computers & Structures*, 10: 333-342, 1979.
- [11] ZIENKIEWICZ, O.C.; GAGO, J.P. de S.R. and KELLY, D.W.
The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis, *Computers & Structures*, 16: N° 1-4, 53-65, 1983.
- [12] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. Adaptive Approaches and Reliability Estimations in Finite Element Analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 17/18: 519-540, 1979.
- [13] PEANO, A. Hierarchies of Conforming Finite Elements for Plane Elasticity and Plate Bending, *Comp. & Maths with Appls.*, 2: 211-224, 1976.
- [14] BABUSKA, I.; SZABO, B.A. and KATZ, I.N. The p-Version of the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18: N° 3, 515-545, 1981.
- [15] DORR, M.R. The Approximation Theory for the p-Version of the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 21: N° 6, 1180-1207, 1984.
- [16] GUPTA, K.K. Numerical Formulation for a Higher Order Plane Finite Dynamic Element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20: 1407-1414, 1984.
- [17] BABUSKA, I. and MILLER, A. The Post-Processing Approach in the Finite Element Method - Part 1: Calculation of Displacements, Stresses and other Higher Derivatives of the Displacements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20: 1085-1109, 1984.
- [18] BABUSKA, I. and MILLER, A. The Post-Processing Approach in the Finite Element Method - Part 2: The Calculation of Stress Intensity Factors, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20: 1111-1129, 1984.

- [19] BABUSKA, I. and MILLER, A. The Post-Processing Approach in the Finite Element Method - Part 3: A posteriori Error Estimates and Adaptive Mesh Selection, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20: 2311-2324, 1984.
- [20] WIBERG, N.E. and MÖLLER, P. Formulation and Solution of Hierarchical Finite Element Equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26: 1213-1233, 1988.
- [21] ROSSOW, M.P. and KATZ, I.N. Hierarchal Finite Elements and Precomputed Arrays, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12: 977-999, 1978.
- [22] SZABO, B.A. Mesh Design for the p-Version of the Finite Element Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 55: 181-197, 1986.
- [23] TAYLOR, R.L. On Completeness of Shape Functions for Finite Element Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4: 17-22, 1972.
- [24] SZABO, B.A.; CHEN, K.C. and TSAI, C. Conforming Finite Elements based on Complete Polynomials, *Computers & Structures*, 4: 521-530, 1974.
- [25] MEIROVITCH, L. and BARUH, H. On the Inclusion Principle for the Hierarchical Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19: 281-291, 1983.
- [26] KARDESTUNCER, H. *Finite Element Handbook*, McGraw-Hill International Editions, New York, 1988.
- [27] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15: N° 4, 1978.

- [28] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12: 1597-1615, 1978.
- [29] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. A-Posteriori Error Analysis of Finite Element Solutions for One-Dimensional Problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 18: N° 3, 565-589, 1981.
- [30] KELLY, D.W.; GAGO, J.P. de S.R.; ZIENKIEWICZ, O.C. and BABUSKA, I. A-Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19: 1593-1619, 1983.
- [31] GAGO, J.P. de S.R.; KELLY, D.W.; ZIENKIEWICZ, O.C. and BABUSKA, I. A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Parte II - Adaptive Mesh Refinement, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19: 1621-1656, 1983.
- [32] ERIKSSON, K. Some Error Estimates for the P-Version of the Finite Element Method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23: N° 2, 403-411, 1986.
- [33] ZIENKIEWICZ, O.C. and ZHU, J.Z. A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24: 337-357, 1987.
- [34] RIBEIRO, F.L.B. *Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos: Refinamento auto-adaptativo versão p aplicado a problemas de elasticidade*, Tese de Mestrado - COPPE/UFRJ, 1986.
- [35] KELLY, D.W. The Self-Equilibration of Residuals and Complementary a Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20: 1491-1506, 1984.

- [36] SZABO, B.A. and SAHRMANN, G.J. Hierarchic Plate and Shell Models based on p-Extension, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26: 1855-1881, 1988.
- [37] BECKER, E.B.; CAREY, G.F. and ODEN, J.T. *Finite Elements: An Introduction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [38] OHTSUBO, H. and KITAMURA, M. Element by Element A Posteriori Error Estimation and Improvement of Stress Solutions for Two-Dimensional Elastic Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29: 223-244, 1990.
- [39] FRIBERG, P.O. An Error Indicator for the Generalized Eigenvalue Problem using the Hierarchical Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23: 91-98, 1986.
- [40] FRIBERG, P.O.; MÖLLER, P.; MAKOVICKA, D. and WIBERG, N.E. An Adaptive Procedure for Eigenvalue Problems using the Hierarchical Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24: 319-335, 1987.
- [41] BABUSKA, I. and SZABO, B. On the Rates of Convergence of the Finite Element Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18: 323-341, 1982.
- [42] BABUSKA, I. and DORR, M.R. Error Estimates for the Combined h and p Versions of the Finite Element Method, *Technical Note BN-95*, Institute for Physical Science and Technology, Maryland University, 1980.
- [43] WILLMERSDORF, R.B. *Formulação p-Adaptativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas de Potencial*, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1988.
- [44] AKIN, J.E. *Application and Implementation of Finite Element Methods*, Academic Press, Inc., London, 1982.

- [45] THOMPSON, E. and SHIMAZAKI, Y. A Frontal Procedure Using Skyline Storage, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15: 889-910, 1980.
- [46] TIMOSHENKO, S.; YOUNG, D.H. and WEAVER, W. Jr. *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 4rd ed., 1974.
- [47] BARTON, M.V. Vibration of Rectangular an Skew Cantilever Plates, *Journal of Applied Mechanics*, 18: 129-134, 1951.
- [48] CHEUNG, Y.K. *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press, Inc., New York, 1976.
- [49] LEVINSON, M. Free Vibrations of a Simply Supported Rectangular Plate: an Exact Elasticity Solution, *Journal of Sound and Vibration*, 98: N° 2, 289-298, 1985.
- [50] DAWE, D.J. and ROUFAEIL, O.L. Rayleigh-Ritz Vibration Analysis of Mindlin Plates, *Journal of Sound and Vibration*, 69: N° 3, 345-359, 1980.
- [51] TIMOSHENKO, S.P. and WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Kogakusha LTD., Tokyo, 2rd ed., 1959.
- [52] MINDLIN, L.D. Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plate, *Journal of Applied Mechanics*, 18: 31-38, 1951.
- [53] ZIENKIEWICZ, O.C., IRONS, B.M., SCOTT, T.C. and CAMPBELL, J.S. Three Dimensional Stress Analysis, *Proc. IUTAM Symp. on High Speed Computing of Elastic Structures*, Liege, Belgium, I: 413-432, 1971.
- [54] MOREIRA, L.A. *Um Elemento Finito Paramétrico Hierárquico para Análise de Placas*, Tese de Doutorado. UNICAMP/FEM/DMC, 1992.

APÊNDICE A

DECOMPOSIÇÃO DA MATRIZ $[K]$ EM $[L][D][L]^T$

O método da iteração no subespaço, aplicado na resolução de sistemas de equações para cálculo de autovalores e autovetores, utiliza a decomposição da matriz de rigidez $[K]$ em $[L][D][L]^T$, sendo $[L]$ uma matriz triangular inferior e $[D]$ uma matriz diagonal. Esta decomposição, derivada do método da eliminação gaussiana, é conhecida por triangularização da matriz de rigidez e torna o método mais efetivo computacionalmente.

Com o desenvolvimento de processos adaptativos de refinamento hierárquico, em análise por elementos finitos, o reaproveitamento da triangularização da matriz de rigidez em soluções subsequentes, torna-se um procedimento muito importante no sentido de se economizar esforços computacionais.

Este apêndice tem como objetivo apresentar o procedimento da decomposição da matriz de rigidez em $[L][D][L]^T$ e mostrar que o processo da triangularização pode, realmente, ser reaproveitado na resolução de sistemas de equações ampliados hierarquicamente.

A decomposição da matriz de rigidez consiste em se fazer

$$[K] = [L][D][L]^T \quad (A.1)$$

A matriz triangular inferior $[L]$ tem a forma,

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Elementos da 1.^a coluna:

$$K_{11} = d_1$$

$$K_{21} = \ell_{21} d_1$$

$$K_{31} = \ell_{31} d_1$$

$$\vdots$$

$$K_{n1} = \ell_{n1} d_1$$

Elementos da 2.^a coluna:

$$K_{22} = \ell_{21}^2 d_1 + d_2$$

$$K_{32} = \ell_{21} \ell_{31} d_1 + \ell_{32} d_2$$

$$\vdots$$

$$K_{n2} = \ell_{21} \ell_{n1} d_1 + \ell_{n2} d_2$$

Elementos da 3.^a coluna:

$$K_{33} = \ell_{31}^2 d_1 + \ell_{32}^2 d_2 + d_3$$

$$\vdots$$

$$K_{n3} = \ell_{31} \ell_{n1} d_1 + \ell_{32} \ell_{n2} d_2 + \ell_{n3} d_3$$

Elementos da n-ésima coluna:

$$K_{nn} = \ell_{n1}^2 d_1 + \ell_{n2}^2 d_2 + \ell_{n3}^2 d_3 + \dots + d_n$$

Logo, para determinar os elementos de cada coluna da matriz triangular inferior [L] e os elementos da matriz diagonal [D] calculam-se

$$d_1 = K_{11}$$

$$\ell_{21} = K_{21}/d_1$$

$$\ell_{31} = K_{31}/d_1$$

$$\vdots$$

$$\ell_{n1} = K_{n1}/d_1$$

$$d_2 = K_{22} - \ell_{21}^2 d_1$$

$$\ell_{32} = (K_{32} - \ell_{21} \ell_{31} d_1)/d_2$$

$$\vdots$$

$$\ell_{n2} = (K_{n2} - \ell_{21} \ell_{n1} d_1)/d_2$$

$$d_3 = K_{33} - (\ell_{31}^2 d_1 + \ell_{32}^2 d_2)$$

$$\vdots$$

$$\ell_{n3} = [K_{n3} - (\ell_{31} \ell_{n1} d_1 + \ell_{32} \ell_{n2} d_2)]/d_3$$

e

$$d_n = K_{nn} - (\ell_{n1}^2 d_1 + \ell_{n2}^2 d_2 + \ell_{n3}^2 d_3 + \dots + \ell_{n,n-1}^2 d_{n-1})$$

Notam-se que os elementos finais das matrizes $[D]$ e $[L]$ são calculados por colunas. O algoritmo para o cálculo dos elementos ℓ_{ij} e d_j na j -ésima coluna é dado por:

para $j = 1$,

$$d_j = K_{j,j} \tag{A.6}$$

$$\ell_{i,j} = K_{i,j}/d_j; \quad \text{para } i = 2, \dots, n \tag{A.7}$$

e, para $j = 2, \dots, n$,

$$d_j = K_{j,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k}^2 d_k; \quad \text{e} \tag{A.8}$$

se $j + 1 \leq n$, calcula-se também

$$\ell_{i,j} = (K_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{j,k} \ell_{i,k} d_k)/d_j; \quad \text{para } i = j + 1, \dots, n. \tag{A.9}$$

Desta forma, a decomposição em $[L][D][L]^T$ da matriz $[K]$ pode ser obtida efetivamente considerando cada coluna por vez, ou seja, os elementos finais da coluna j das matrizes $[D]$ e $[L]$ podem ser determinados independentemente dos valores dos elementos da coluna $j + k$ da matriz $[K]$, ($k = j + 1, \dots, n$).

Usualmente, os elementos d_i ($i = 1, \dots, n$) da matriz $[D]$ são armazenados nas posições ℓ_{ii} da diagonal da matriz $[L]$. Assim, uma matriz $[K']$ substituirá a matriz $[K]$ original na seguinte forma triangularizada,

$$[K'] = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & d_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & d_n \end{bmatrix} \quad (A.10)$$

Em processos de refinamento hierárquico, matrizes referentes a um certo nível de aproximação tornam-se submatrizes de matrizes correspondentes ao nível de aproximação subsequente. Como a decomposição de matrizes em $[L][D][L]^T$ é feita por coluna, ficam evidentes, portanto, a possibilidade e a importância do reaproveitamento da triangularização da matriz de rigidez na forma dada por (A.10) na resolução de sistemas de equações ampliados hierarquicamente.

APÊNDICE B

LISTAGEM DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

Neste apêndice, é apresentada a listagem completa do programa computacional que foi utilizado, neste trabalho, para estudar a convergência da solução do problema dinâmico de autovalor generalizado. O elemento 3D proposto para placas espessas foi implementado em um processo de refinamento hierárquico, versão p, do MEF.

O programa, escrito em linguagem FORTRAN, foi executado no computador de marca CYBER, modelo 930/31 de 3 MIPS, da Escola Federal de Engenharia de Itajubá.

O programa principal HSDIN.FOR é constituído pelas seguintes subrotinas:

MALHA.FOR ... gera a malha de elementos finitos
SKY.FOR ... determina o skyline das matrizes
KEL.FOR ... calcula a matriz de rigidez do elemento
MASS.FOR ... calcula a matriz de massa do elemento
KGLOB.FOR ... monta as matrizes globais do sistema
SPACE.FOR ... determina os menores autovalores de interesse
SQ.FOR ... reorganiza os pontos de integração
ETA.FOR ... calcula os indicadores de erro.

CAPÍTULO 8

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C. *The Finite Element Method*, 3rd. ed., McGraw-Hill, New York, 1977.
- [2] ZIENKIEWICZ, O.C. and MORGAN, K. *Finite Elements and Approximation*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [3] TAIG, I.C. *Structural Analysis by the Matrix Displacement Method*, Engl. Electric Aviation Report N° S017, 1961.
- [4] IRONS, B.M. *Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method*, J.A.I.A.A., 14: 2035-2037, 1966.
- [5] BATHE, K.J. and WILSON, E. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [6] TIMOSHENKO, S. and GOODIER, J.N. *Theory of Elasticity*, 2rd, ed., McGraw-Hill, 1951.
- [7] PAWSEY, S.F. and CLOUGH, R.W. *Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3: 575-586, 1971.
- [8] IRONS, B.M. *Quadrature Rules for Brick based Finite Elements*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3: 293-294, 1971.
- [9] HELLEN, T.K. *Effective Quadrature Rules for Quadratic Solid Isoparametric Finite Elements*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4: 597-600, 1972.

```

1      PROGRAM HSDIN(INPUT,OUTPUT)
2 C . . . . .
3 C .
4 C      P R O G R A M A      P R I N C I P A L
5 C      *****
6 C .
7 C      OBJETIVO: CALCULAR OS MENORES AUTOVALO-
8 C      RES E OS CORRESPONDENTES AUTOVETORES DE
9 C      PLACAS      ESPESAS CONSIDERANDO AS
10 C      HIPOTHESES DA ELASTICIDADE LINEAR.
11 C .
12 C      METODO UTILIZADO: VERSAO p HIERARQUICA
13 C      DO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS
14 C .
15 C      TIPO DE ELEMENTO: ELEMENTO 3D DEGENERADO
16 C      COM 16 NOS
17 C .
18 C      ***** DADOS DE ENTRADA *****
19 C      TIT = NOME DO ARQUIVO DE DADOS
20 C      ISOH EQ.0 CALCULA OS AUTOVALORES SOMENTE
21 C      PARA ANALISE ISOPARAMETRICA
22 C      NE.0 CALCULA OS AUTOVALORES PARA
23 C      ANALISE ISOPARAMETRICA E PARA
24 C      ANALISE HIERARQUICA
25 C      IPRIF EQ.0 NAO IMPRIME AS POSICOES DOS
26 C      G.D.L. HIERARQUICOS
27 C      NE.0 IMPRIME AS POSICOES DOS
28 C      G.D.L. HIERARQUICOS
29 C      NX = NUMERO DE ELEMENTOS NA DIRECAO X
30 C      NY = NUMERO DE ELEMENTOS NA DIRECAO Y
31 C      NE = NUMERO DE ELEMENTOS
32 C      NTIP = NUMERO DE TIPOS DIFERENTES DE MA-
33 C      TERIAIS
34 C      NNOS = NUMERO DE NOS DO SISTEMA
35 C      LCON(I),I=1,4 --> CONDICAOES DE CONTO:
36 C      EQ.0 CONTO ENASTADO
37 C      EQ.1 " SIMPLEMENTE APOIADO.
38 C      EQ.2 " LIVRE
39 C      IERRO = TIPO DO ERRO
40 C      EQ.1 --> ERRO ESTIMADO
41 C      EQ.2 --> ERRO CALCULADO
42 C      TOLEST= TOLERANCIA NO ESTIMADOR DE ERROS
43 C      NRMIN = LIMITE INFERIOR DOS AUTOVALORES
44 C      NROOT = LIMITE SUPERIOR DOS AUTOVALORES
45 C      IDD.EQ.1 --> ANALISE CONSIDERANDO
46 C      UM AUTO-VALOR POR VEZ
47 C      IDD.EQ.2 --> ANALISE CONSIDERANDO
48 C      TODOS OS AUTO-VALORES
49 C      GAMA = VALOR PERCENTUAL DO ERRO MAXIMO
50 C      ( 0. .LT. GAMA .LE. 1. )
51 C      IXY = GEOMETRIA DA MALHA DE EL. FINITOS.
52 C      EQ.0 --> MALHA SIMETRICA
53 C      NE.0 --> MALHA NAO SIMETRICA
54 C      CX = COMPRIMENTO DA MALHA NA DIRECAO X
55 C      CY = " " " " Y
56 C      CZ = ESPESSURA DA MALHA
57 C      NREAN = NUMERO MAXIMO DE REANALISES
58 C      XYZ(NNOS,NDM) = COORDENADAS DOS NOS
59 C      DATA(NTIP,3) -->PROPRIEDADES DO ELEMENTO
60 C      DATA(NTIP,1) --> MODULO DE ELASTICIDADE.
61 C      DATA(NTIP,2) --> MODULO DE POISSON
62 C      DATA(NTIP,3) --> DENSIDADE DE MASSA
63 C      IVANO(NNOR,NDM) = TIPO COND. DE CONTO
64 C      EQ.0 --> COM RESTRICAO
65 C      EQ.1 --> SEM RESTRICAO
66 C      MAEL(I) = TIPO DO MATERIAL DO ELEMENTO
67 C .
68 C .
69 C      ***** SAIDA DE RESULTADOS *****
70 C      RES+TIT = ARQUIVO DA POSICAO, NA MALHA,
71 C .
72 C      DOS GRAUS DE LIB. HIERARQ.
73 C      EIGV(NE) = AUTOVALORES NAS REANALISES
74 C      FI(NVLT,NC) = AUTOVETORES NAS REANALISES
75 C      ***** CONSTANTES INTEIRAS *****
76 C      NOLO=16, NDM=3, LI=8, LVI=4, NDF=3,
77 C      NLADMAX=8, NOELT=46, NVELT=138, LI=2,
78 C      IGHMAX=5
79 C      AS CONSTANTES NWK,NWM e NC DEFINIDAS NA
80 C      SUBROTINA SPACE.FOR DEPENDEM DO PROBLEMA
81 C      ESTUDADO.
82 C .
83 C      ***** DIMENSAO DAS VARIAVEIS *****
84 C      * VARIAVEIS na declaracao DIMENSION:
85 C      DATA(NTIP,NDAD),XLIE(NOLO,NDM),
86 C      XLVI(NOLO,NDM),IELADO(NE,LI),NEVI(NE),
87 C      INCVI(NE,LVI),NGH(NE,NLADMAX),
88 C      IELANG(NE,NLADMAX+6,NDF),NHXY(NE,LI),
89 C      NHA(NE,NLADMAX+6),NVEL(NE),MAEL(NE),
90 C      EIGVANT(NROOT),ETAEC(NROOT,IGHMAX,NDF),
91 C      NHIE(NE,2)
92 C .
93 C      * VARIAVEIS nas declaracoes COMMON:
94 C      XYZ(NNOS,NDM),NOEL(NE),NOELH(NE),
95 C      NH(NE,NLADMAX+6,NREAN),RKG(NWK),RMG(NWM),
96 C      RK(NWK),RKS(NWK),FI(NVLT,NC),EIGV(NE),
97 C      INC(NE,NOELT),IVNO(NE,NVELT),
98 C      IVANO(NNOS,NDF),DAT(NE,NDAD),LL(NDM),
99 C      MAXA(NVLT+1),LCON(LVI)
100 C .
101 C
102      REAL TI,TF,SECOND
103      DIMENSION MAEL(108),XLIE(16,3),MAEL(108)
104      1,IELADO(108,8),NEVI(108),INCVI(108,4)
105      1,NGH(108,8),IELANG(108,14,3),NHXY(108,2)
106      1,NHA(108,14),XLVI(16,3),DATA(108,3)
107      1,EIGVANT(15),ETAEC(15,5,3),NHIE(108,2)
108      COMMON /BXYZ/ XYZ(750,3)
109      COMMON /BNOEL/ NOEL(108)
110      COMMON /BNOELH/ NOELH(108)
111      COMMON /BNH/ NH(108,14,20)
112      COMMON /BKMG/ RKG(340000),RMG(340000)
113      COMMON /BRK/ RK(340000),RKS(340000)
114      COMMON /BFI/ FI(2810,23)
115      COMMON /BEIGV/ EIGV(23)
116      COMMON /BINC/ INC(108,46)
117      COMMON /BIVNO/ IVNO(108,138)
118      COMMON /BIVANO/ IVANO(750,3)
119      COMMON /BDAT/ DAT(108,3)
120      COMMON /BLL/ LL(3)
121      COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
122      COMMON /BLCON/ LCON(4)
123      CHARACTER*12 TIT
124      CHARACTER*10 DIA,DATE
125      CHARACTER*8 HORA,TIME
126 C
127      WRITE(*,3000)
128      READ(*,3010) TIT
129 C
130      INICIO DA CONTAGEM DO TEMPO DE C.P.U.
131 C
132      T1=SECOND()
133      DIA=DATE()
134      HORA=TIME()
135 C
136      OPEN(5,FILE=TIT,STATUS='OLD')
137      OPEN(6,FILE='$LOCAL.MA1'//TIT,STATUS=
138      'UNKNOWN')
139      OPEN(7,FILE='$LOCAL.MA2'//TIT,STATUS=
140      'UNKNOWN')

```

```

141 OPEN(8,FILE='$LOCAL.MA3'//TIT,STATUS=
142 1'UNKNOWN')
143 OPEN(9,FILE='RES'//TIT,STATUS=
144 1'UNKNOWN')
145 C
146 REWIND 5
147 REWIND 9
148 C
149 C GRAVACAO DA DATA E HORA DO INICIO DA
150 C EXECUCAO
151 C
152 WRITE(9,3020) DIA,HORA
153 C
154 WRITE(9,3030) TIT
155 C
156 C ENTRADA DE DADOS
157 C
158 READ(5,*) ISOH,IPRIF
159 READ(5,*) NX,NY,NTIP,NREAN
160 NE=NX*NY
161 NDF=3
162 NDAD=3
163 NDM=3
164 WRITE(9,3040) NX,NY,NTIP,NREAN
165 READ(5,*) (LCON(I),I=1,4)
166 WRITE(9,3050) (LCON(I),I=1,4)
167 READ(5,*) IERRO,TOLEST
168 WRITE(9,3060) IERRO,TOLEST
169 IF((IERRO.EQ.1).OR.(IERRO.EQ.2)) GO TO 10
170 WRITE(9,3070) IERRO
171 STOP
172 10 READ(5,*) NRMIN,NROOT,GAMA,IDD
173 WRITE(9,3080) NRMIN,NROOT,GAMA,IDD
174 C
175 DO 70 I=1,NTIP
176 READ(5,*) (DATA(I,J),J=1,NDAD)
177 70 WRITE(9,3090) (DATA(I,J),J=1,NDAD)
178 C
179 IF(NTIP.GT.1) GO TO 71
180 DO 72 IE=1,NE
181 72 MAEL(IE)=1
182 71 IF(NTIP.GT.1) READ(5,*) (MAEL(IE),IE=1,NE)
183 C
184 C IDENTIFICACAO DO TIPO DE MALHA
185 C
186 READ(5,*) IXY
187 IF(IXY.EQ.0) READ(5,*) CX,CY,CZ
188 IF(IXY.EQ.0) WRITE(9,3100) CX,CY,CZ
189 C
190 IF(IERRO.EQ.1) WRITE(9,3110)
191 IF(IERRO.EQ.2) WRITE(9,3120)
192 NVLO=0
193 C
194 WRITE(9,3130)
195 REWIND 6
196 DO 50 IE=1,NE
197 NOEL(IE)=16
198 NVEL(IE)=NDF*NOEL(IE)
199 50 NOELH(IE)=0
200 C
201 C GERACAO AUTOMATICA DA MALHA DE ELEMENTOS
202 C FINITOS
203 C
204 CALL MALHA(NDF,NX,NY,CX,CY,CZ,NE,NNOS
205 1,NVLO,IXY)
206
207 C
208 WRITE(*,3140) NE
209 WRITE(9,3140) NE
210 WRITE(*,3150) NTIP
211 WRITE(*,3160) NNOS
212 WRITE(9,3160) NNOS
213 C
214 IF(IXY.EQ.0) GO TO 55
215 DO 56 I=1,NNOS
216 56 READ(5,*) XYZ(I,1),XYZ(I,2),XYZ(I,3)
217 55 DO 60 I=1,NNOS
218 WRITE(*,3170) I,XYZ(I,1),I,XYZ(I,2),
219 I,XYZ(I,3)
220 60 CONTINUE
221 C
222 DO 130 IE=1,NE
223 WRITE(*,3180) IE
224 WRITE(*,3190) (INC(IE,J),J=1,NOEL(IE))
225 WRITE(*,3200) (IVNO(IE,J),J=1,NVEL(IE))
226 130 CONTINUE
227 C
228 NVLA=0
229 C
230 C CALCULO DO SKYLINE DAS MATRIZES GLOBAIS:
231 C MAXA(NWKO)
232 C
233 CALL SKY(NDF,NVLA,NVLO,NWKO,NE)
234 C
235 C NUMERO DE PONTOS DE INTEGRACAO/DIRECAO NA
236 C ANALISE ISOPARAMETRICA : LL(NDM)
237 C
238 LL(1)=3
239 LL(2)=3
240 LL(3)=2
241 C
242 DO 160 I=1,NWKO
243 RKG(I)=0.0
244 160 RMG(I)=0.0
245 C
246 NOELI=1
247 NVELI=1
248 IGH=0
249 LADO=0
250 IL=123
251 MAE=0
252 MAH=0
253 C
254 C CALCULO DAS MATRIZES NA ANALISE
255 C ISOPARAMETRICA: RKG(NWKO) e RMG(NWKO)
256 C
257 DO 170 IE=1,NE
258 NOELT=NOEL(IE)
259 NVELT=NVEL(IE)
260 DO 180 J=1,16
261 NN=INC(IE,J)
262 XLIE(J,1)=XYZ(NN,1)
263 XLIE(J,2)=XYZ(NN,2)
264 180 XLIE(J,3)=XYZ(NN,3)
265 DO 190 J=1,NDAD
266 DAT(IE,J)=DATA(MAEL(IE),J)
267 190 CONTINUE
268 WRITE(*,3210) IE, (DAT(IE,I),I=1,3),
269 1(LL(I),I=1,3)
270 C
271 C CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO
272 C
273 CALL KEL(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI,NVELT
274 1,IGH,LADO,XLIE,IL,IE,MAE,MAH)
275 MK=1
276 CALL KGLOB(MK,NVELI,NVELT,IE)
277 C
278 C CALCULO DA MATRIZ DE MASSA DO ELEMENTO
279 C
280 CALL MASS(NDF,NOM,NOELI,NOELT,NVELI

```

```

281      1,NVELT,IGH,LADO,XLIE,IL,IE,MAE,MAH)
282      MK=0
283      CALL KGLOB(MK,NVELI,NVELT,IE)
284      170 CONTINUE
285 C
286      DO 280 I=1,NWKO
287      280 RK(I)=RKG(I)
288 C
289      NITEM=16
290      IFSS=1
291      IFPR=0
292      RTOL=1.E-10
293 C
294      NC=MIN0(MIN0(2*NROOT,8+NROOT),NVLO)
295      NNC=NC*(NC+1)/2
296      NVLA=NVLO
297      NWMO=NWKO
298      NNM=NVLO+1
299      WRITE(*,3220)
300 C
301 C      CALCULO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES
302 C      NA ANALISE ISOPARAMETRICA :
303 C      EIGV(NROOT) e FI(NVLO,NROOT)
304 C
305      CALL SPACE(NVLA,NVLO,NNM,NWKO,NWMO
306      1,NROOT,RTOL,NC,NNC,NITEM,IFSS,IFPR,MAH)
307 C
308      WRITE(9,3230) NROOT
309 C
310      DO 320 NR=NRMIN,NROOT
311      320 WRITE(9,3240) NR,EIGV(NR)
312      WRITE(9,3250) NVLO,NWKO
313 C
314 C      CALCULO DO TEMPO DE C.P.U. PARA
315 C      ANALISE ISOPARAMETRICA
316 C
317      TF=SECOND()
318      TF=TF-TI
319      WRITE(9,3260) TF
320      WRITE(9,3270)
321      IF(ISOH.GT.0) GO TO 311
322      DIA=DATE()
323      HORA=TIME()
324      WRITE(9,3280) DIA,HORA
325      STOP
326 C
327 C      GRAVACAO DOS AUTOVALORES E AUTOVETORES
328 C      DA ANALISE ISOPARAMETRICA
329 C
330      311 DO 310 NR=NRMIN,NROOT
331      WRITE(6,3290) NR
332      WRITE(6,3300) EIGV(NR)
333      DO 310 J=1,NVLO
334      310 WRITE(6,3300) FI(J,NR)
335 C
336      DO 230 IE=1,NE
337      DO 230 LADO=1,8
338      230 IELADO(IE,LADO)=0
339 C
340 C      IDENTIFICACAO DOS ELEMENTOS VIZINHOS
341 C
342      DO 240 IE=1,NE-1
343      NEVI(IE)=0
344      DO 250 I=IE+1,NE
345      DO 260 JIE=9,12
346      DO 270 J=9,12
347      IF(INC(IE,JIE).NE.INC(I,J)) GO TO 270
348      NEVI(IE)=NEVI(IE)+1
349      INCVI(IE,NEVI(IE))=I
350      IELADO(I,J-8)=IE
351      IELADO(I,J-4)=IE
352      GO TO 250
353      270 CONTINUE
354      260 CONTINUE
355      250 CONTINUE
356      240 CONTINUE
357 C
358      NOMAX=46
359      NLADMAX=8
360      IGHMAX=5
361      NVARMAX=NOMAX*NDF
362 C
363 C      ANALISE HIERARQUICA CONSIDERANDO :
364 C      a) IDRT.EQ.1 --> UM AUTO-VALOR POR VEZ
365 C      b) IDRT.EQ.2 --> TODOS AUTO-VALORES
366 C
367      DO 325 IDRT=1,ID0
368      TI=SECOND()
369      IF(IDRT.EQ.1) IDROOT=1
370      IF(IDRT.EQ.2) IDROOT=NROOT
371      NPA=(NROOT-NRMIN+1)/IDROOT
372 C
373      REWIND 6
374 C
375      DO 330 INPA=1,NPA
376      NRMA=INPA*IDROOT
377      NRMI=NRMA-IDROOT+1
378      WRITE(*,3310) NRMI,NRMA
379      DO 350 NR=NRMI,NRMA
380 C
381      READ(6,3290) NRL
382      IF(NR.NE.NRL) STOP
383      READ(6,3300) EIGV(NR)
384      DO 350 J=1,NVLO
385      350 READ(6,3300) FI(J,NR)
386 C
387      NOELI=17
388      NVELI=NDF*NOELI-2
389      DO 360 IE=1,NE
390      DO 370 J=NOELI,NOMAX
391      370 INC(IE,J)=0
392      DO 380 J=NVELI,NVARMAX
393      380 IVNO(IE,J)=0
394 C
395      NOEL(IE)=16
396      NVEL(IE)=NDF*NOEL(IE)
397      NOELH(IE)=0
398      NHIE(IE,1)=0
399      NHIE(IE,2)=0
400      NHXY(IE,1)=2
401      NHXY(IE,2)=2
402      DO 365 LADO=9,14
403      365 NHA(IE,LADO)=1
404      DO 360 LADO=1,8
405      360 NHA(IE,LADO)=2
406 C
407      MAH=0
408      NVLT=NVLO
409      NWKT=NWKO
410      INCH=NNOS
411 C
412 C      * REANALISES *
413 C      * HIERARQUICAS *
414 C      * * * * *
415      390 MAH=MAH+1
416      IF(MAH.EQ.1) WRITE(9,3310) NRMI,NRMA
417      IF(MAH.EQ.NREAN+1) WRITE(9,3320)
418      IF(MAH.EQ.NREAN+1) GO TO 330
419      DO 400 IE=1,NE
420      DO 405 LADO=9,14

```

```

421 405 NH(IE,LADO,MAH)=1
422 DO 400 LADO=1,8
423 400 NH(IE,LADO,MAH)=2
424 C
425 REWIND 7
426 NVLA=NVLT
427 NWKA=NWKT
428 WRITE(*,3330) MAH
429 MAE=1
430 DO 401 NR=NRM1,NRMA
431 401 EIGVANT(NR)=EIGV(NR)
432 ETAMAX=0.0
433 EST=0.0
434 NETANEG=0
435 C
436 DO 410 IE=1,NE
437 NOELH(IE)=0
438 DO 420 I=1,NDF
439 420 IVNO(IE,NVEL(IE)+1)=NVLA+I
440 DO 410 LADO=1,NLADMAX
441 410 NGH(IE,LADO)=0
442 C
443 NVLT=NVLA+NDF
444 NETA=0
445 C
446 C LOOP SOBRE OS ELEMENTOS DA MALHA
447 C
448 DO 430 IE=1,NE
449 NOELH(IE)=1
450 WRITE(*,3340) IE
451 DO 440 NO=1,16
452 I=INC(IE,NO)
453 XLIE(NO,1)=XYZ(I,1)
454 XLIE(NO,2)=XYZ(I,2)
455 XLIE(NO,3)=XYZ(I,3)
456 440 CONTINUE
457 C
458 C LOOP SOBRE OS LADOS DE CADA ELEMENTO
459 C
460 DO 450 LADO=1,NLADMAX
461 IF(NHA(IE,LADO).EQ.IGHMAX) GO TO 450
462 ETAM=0.0
463 NET=0
464 I=1
465 J=(LADO+B)*NDF
466 470 IF(IVNO(IE,J).NE.0) GO TO 480
467 IF(1.EQ.NDF) GO TO 450
468 I=I+1
469 J=J-1
470 GO TO 470
471 480 IF(IE.EQ.1) GO TO 460
472 IF(1ELADO(IE,LADO).NE.0) GO TO 450
473 460 IEF=0
474 WRITE(*,3350) LADO
475 NO=LADO+8
476 C
477 C VERIFICACAO SE HA' ELEMENTO VIZINHO
478 C
479 DO 500 IEVI=1,NEVI(IE)
480 DO 500 NOVI=9,16
481 IF(INC(IE,NO).NE.INC(INCVI(IE,IEVI),NOVI))
482 1GO TO 500
483 IEF=1
484 NOELH(INCVI(IE,IEVI))=1
485 LD1=NHXY(INCVI(IE,IEVI),1)+1
486 LD2=NHXY(INCVI(IE,IEVI),2)+1
487 GO TO 490
488 500 CONTINUE
489 C
490 C CALCULO DO SKYLINE INCLUINDO O
491 C LADO CONSIDERADO
492 C
493 490 CALL SKY(NDF,NVLA,NVLT,NWKT,NE)
494 IF(IEF.NE.0) NOELH(INCVI(IE,IEVI))=0
495 L1=NHXY(IE,1)+1
496 L2=NHXY(IE,2)+1
497 IGHMIN=NHA(IE,LADO)+1
498 C
499 C TESTE NO GRAU DAS FUNCOES DE
500 C INTERPOLACAO HIERARQUICAS
501 C
502 DO 510 IGH=IGHMIN,IGHMAX
503 IF((IGH-NHA(IE,LADO)).GE.2) GO TO 515
504 WRITE(*,3360) IGH
505 WRITE(*,3370) NRM1,NRMA,MAH,IE,LADO
506 IF((LADO.EQ.1).OR.(LADO.EQ.3).OR.(LADO.
507 1EQ.5).OR.(LADO.EQ.7)) GO TO 520
508 IF(IGH.GT.NHXY(IE,1)) L1=L1+1
509 GO TO 530
510 520 IF(IGH.GT.NHXY(IE,2)) L2=L2+1
511 530 LL(1)=L1
512 LL(2)=L2
513 DO 540 I=NWKA+1,NWKT
514 RKG(I)=0.0
515 540 RMG(I)=0.0
516 C
517 C VERIFICACAO DA SEQUENCIA DOS PONTOS
518 C DE INTEGRACAO
519 C
520 CALL SQ(IL)
521 NOELI=NOEL(IE)+1
522 NOELT=NOELI
523 NVELI=NVEL(IE)+1
524 NVELT=NOELT*NDF
525 C
526 C CALCULO DOS NOVOS ELEMENTOS DAS MATRIZES
527 C
528 WRITE(*,3380) L1,L2,LL(3),LL(1),LL(2)
529 1,LL(3)
530 CALL KEL(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI
531 1,NVELT,IGH,LADO,XLIE,IL,IE,MAE,MAH)
532 MK=1
533 CALL KGLOB(MK,NVELI,NVELT,IE)
534 WRITE(*,3390) L1,L2,LL(3),LL(1),LL(2)
535 1,LL(3)
536 CALL MASS(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI
537 1,NVELT,IGH,LADO,XLIE,IL,IE,MAE,MAH)
538 MK=0
539 CALL KGLOB(MK,NVELI,NVELT,IE)
540 C
541 IF(IEF.EQ.0) GO TO 550
542 C
543 C CONTRIBUICAO NAS MATRIZES PELO
544 C ELEMENTO VIZINHO
545 C
546 WRITE(*,3400) INCVI(IE,IEVI)
547 NOELI=NOEL(INCVI(IE,IEVI))+1
548 NOELT=NOELI
549 NVELI=NVEL(INCVI(IE,IEVI))+1
550 NVELT=NOELT*NDF
551 DO 560 J=1,16
552 I=INC(INCVI(IE,IEVI),J)
553 XLVI(J,1)=XYZ(I,1)
554 XLVI(J,2)=XYZ(I,2)
555 560 XLVI(J,3)=XYZ(I,3)
556 LD=NOVI-8
557 IF((LD.EQ.1).OR.(LD.EQ.3).OR.(LD.EQ.5)
558 1.OR.(LD.EQ.7)) GO TO 570
559 IF(IGH.GT.NHXY(INCVI(IE,IEVI),1))
560 1 LD1=LD1+1

```

```

561 GO TO 580
562 570 IF(IGH.GT.NHXY(INCVI(IE,IEVI),2))
563 1 LD2=LD2+1
564 580 LL(1)=LD1
565 LL(2)=LD2
566 CALL SQ(IL)
567 WRITE(*,3410) LD
568 WRITE(*,3380) LD1,LD2,LL(3),LL(1),LL(2)
569 1,LL(3)
570 CALL KEL(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI,NVELT
571 1,IGH,LD,XLVI,IL,INCVI(IE,IEVI),MAE,MAH)
572 MK=1
573 CALL KGLOBAL(MK,NVELI,NVELT,INCVI(IE,IEVI))
574 WRITE(*,3390) LD1,LD2,LL(3),LL(1),LL(2)
575 1,LL(3)
576 CALL MASS(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI,NVELT
577 1,IGH,LD,XLVI,IL,INCVI(IE,IEVI),MAE,MAH)
578 MK=0
579 CALL KGLOBAL(MK,NVELI,NVELT,INCVI(IE,IEVI))
580 C
581 C CALCULO DO ERRO EM CADA DIRECAO DO GRAU
582 C DE LIBERDADE DA FUNCAO HIERARQUICA
583 C
584 550 DO 590 NR=NRMI,NRMA
585 DO 600 NG=1,NDF
586 ETAEC(NR,IGH,NG)=1.0
587 J=(LADO+8)*NDF+NG-NDF
588 IF(IVNO(IE,J).EQ.0) GO TO 600
589 IF(ERRO.EQ.2) GO TO 620
590 C
591 C VERIFICACAO DO SINAL DO ERRO
592 C (ESTIMADO OU CALCULADO)
593 C
594 IF(EIGV(NR).GT.(RKG(MAXA(NVLA+NG))
595 1/RMG(MAXA(NVLA+NG)))) WRITE(9,3420)
596 GO TO 630
597 620 IF(EIGV(NR).GT.(RKG(MAXA(NVLA+NG))
598 1/RMG(MAXA(NVLA+NG)))) WRITE(9,3430)
599 C
600 C ANALISE PARA ERRO CALCULADO
601 C
602 J=MAXA(NVLA+1)
603 IF(NG.EQ.1) GO TO 640
604 RKG(J)=RKG(MAXA(NVLA+NG))
605 RMG(J)=RMG(MAXA(NVLA+NG))
606 DO 650 I=MAXA(NVLA+NG)+NG,MAXA(NVLA+NG+1)-1
607 J=J+1
608 RKG(J)=RKG(I)
609 RMG(J)=RMG(I)
610 650 CONTINUE
611 MAXA(NVLA+2)=J+1
612 640 IF(NG.EQ.1) J=MAXA(NVLA+2)-1
613 NN=NVLA+1
614 NNM=NN+1
615 JKT=J
616 JMT=JKT
617 DO 660 I=NWKA+1,JKT
618 660 RK(I)=RKG(I)
619 NC=MINO(MINO(2*NR,8+NR),NN)
620 NNC=NC*(NC+1)/2
621 IFSS=0
622 DO 670 J=1,NC
623 DO 670 I=NVLA+1,NVLT
624 670 FI(I,J)=1.
625 WRITE(*,3440) NG
626 C
627 C CALCULO DOS NOVOS AUTOVALORES CONSIDERANDO
628 C APENAS UM GRAU DE LIBERDADE HIERARQUICO
629 C
630 CALL SPACE(NVLA,NN,NNM,JKT,JMT,NR,
631 1RTOL,NC,NNC,NITEM,IFSS,IFPR,MAH)
632 CALL SKY(NDF,NVLA,NVLT,NWKT,NE)
633 C
634 C DETERMINACAO DO ERRO CALCULADO : ETACAL
635 C
636 ETACAL=(EIGVANT(NR)-EIGV(NR))/EIGVANT(NR)
637 ETAEC(NR,IGH,NG)=ETACAL
638 IF(ETACAL.GE.0.0) GO TO 584
639 WRITE(*,3430)
640 NETANEG=NETANEG+1
641 GO TO 600
642 584 EST=EST+ETACAL
643 IF(ETACAL.LE.ETAM) GO TO 600
644 NRM=NR
645 ETAM=ETACAL
646 IGHM=IGH
647 NET=1
648 GO TO 600
649 C
650 C DETERMINACAO DO ERRO ESTIMADO CONSIDERANDO
651 C APENAS UM GRAU DE LIBERDADE HIERARQUICO
652 C
653 630 CALL ETA(NVLA,NR,NG,ETAEST)
654 ETAEC(NR,IGH,NG)=ETAEST
655 IF(ETAEST.GE.0.0) GO TO 585
656 WRITE(*,3420)
657 NETANEG=NETANEG+1
658 GO TO 600
659 585 EST=EST+ETAEST
660 IF(ETAEST.LE.ETAM) GO TO 600
661 NRM=NR
662 ETAM=ETAEST
663 IGHM=IGH
664 NET=1
665 C
666 600 CONTINUE
667 590 CONTINUE
668 510 CONTINUE
669 C
670 515 IF(NET.EQ.0) GO TO 450
671 C
672 C CALCULO DO ERRO MAXIMO OBTIDO NA MALHA
673 C
674 IF(ETAM.GT.ETAMAX) ETAMAX=ETAM
675 DO 511 NG=1,NDF
676 IF(ETAEC(NRM,IGHM,NG).LE.0.0) GO TO 511
677 NETA=NETA+1
678 WRITE(7,3450) IE,LADO,IGHM,NG
679 1,ETAEC(NRM,IGHM,NG)
680 511 CONTINUE
681 450 CONTINUE
682 NOELH(IE)=0
683 430 CONTINUE
684 C
685 IF(NETA.EQ.0) GO TO 330
686 WRITE(9,3460) MAH,NRMI,NRMA
687 ETAMAX=GAMA*ETAMAX
688 C
689 REWIND 7
690 REWIND 8
691 NETAP=0
692 C
693 C GRAVACAO DA POSICAO, GRAU, DIRECAO E
694 C VALOR DO ERRO PARA CADA GRAU DE
695 C LIBERDADE HIERARQUICO
696 C
697 DO 700 IETA=1,NETA
698 READ(7,3470) IE,LADO,IGH,NG,ERRO
699 IF(ERRO.LT.ETAMAX) GO TO 700
700 NGH(IE,LADO)=NGH(IE,LADO)+1

```

```

701      WRITE(8,3480) IE,LADO,IGH,NG,ERRO
702      IF(IPRIF.NE.0) WRITE(9,3480) IE,LADO
703      1,IGH,NG,ERRO
704      NETAP=NETAP+1
705      700 CONTINUE
706 C
707      IF(NETAP.EQ.0) GO TO 330
708      REWIND 8
709      NNOSH=0
710      DO 720 IE=1,NE
711      DO 720 LADO=1,NLADMAX+6
712      DO 720 NG=1,NDF
713      720 IELANG(IE,LADO,NG)=0
714      NGHN=0
715 C
716 C      GERACAO DA MALHA HIERARQUICA
717 C
718      DO 730 IETA=1,NETAP
719      READ(8,3470) IE,LADO,IGH,NG,ERRO
720      DO 736 NG=1,NDF
721      736 IELANG(IE,LADO,NG)=NG
722      NGHN=NGHN+1
723      IF(NGHN.LT.NGH(IE,LADO)) GO TO 730
724      NGHN=0
725      NNOSH=NNOSH+1
726      NOELH(IE)=NOELH(IE)+1
727      NH(IE,LADO,MAH)=IGH
728      IF(IELADO(IE,LADO).NE.0) GO TO 730
729      NO=LADO+8
730      DO 750 IEVI=1,NEVI(IE)
731      DO 760 NOVI=9,16
732      IF(INC(IE,NO).NE.INC(INCVI(IE,IEVI),NOVI))
733      1GO TO 760
734      LD=NOVI-8
735      NOELH(INCVI(IE,IEVI))=
736      1NOELH(INCVI(IE,IEVI))+1
737      NH(INCVI(IE,IEVI),LD,MAH)=IGH
738      GO TO 730
739      760 CONTINUE
740      750 CONTINUE
741      730 CONTINUE
742 C
743 C      COLOCACAO DA BOLHA QUADRATICA HIERARQUICA
744 C
745      DO 731 IE=1,NE
746      DO 732 LADO=1,NLADMAX
747      IF(NH(IE,LADO,MAH).LE.3) GO TO 732
748      IF(LADO.GE.5) GO TO 733
749      IF(NHIE(IE,1).GE.2) GO TO 732
750      LAD=9
751      NHIE(IE,1)=2
752      GO TO 734
753      733 IF(NHIE(IE,2).GE.2) GO TO 732
754      LAD=10
755      NHIE(IE,2)=2
756      734 NOELH(IE)=NOELH(IE)+1
757      NH(IE,LAD,MAH)=2
758      DO 737 NG=1,NDF
759      737 IELANG(IE,LAD,NG)=NG
760      732 CONTINUE
761      731 CONTINUE
762 C
763 C      COLOCACAO DA BOLHA
764 C      QUADRATICA HIERARQUICA MISTA
765 C
766      DO 831 IE=1,NE
767      DO 832 LADO=1,NLADMAX
768      IF(NH(IE,LADO,MAH).LE.4) GO TO 832
769      IF(LADO.GE.5) GO TO 833
770      IF(NHIE(IE,1).EQ.3) GO TO 832
771      LAD=11
772      NHIE(IE,1)=3
773      GO TO 834
774      833 IF(NHIE(IE,2).EQ.3) GO TO 832
775      LAD=12
776      NHIE(IE,2)=3
777      834 NOELH(IE)=NOELH(IE)+2
778      NH(IE,LAD,MAH)=2
779      NH(IE,LAD+2,MAH)=2
780      DO 837 NG=1,NDF
781      IELANG(IE,LAD,NG)=NG
782      837 IELANG(IE,LAD+2,NG)=NG
783      832 CONTINUE
784      831 CONTINUE
785 C
786      DO 770 IE=1,NE
787      DO 770 LADO=1,NLADMAX
788      IF((LADO.EQ.1).OR.(LADO.EQ.3).OR.
789      1(LADO.EQ.5).OR.(LADO.EQ.7)) GO TO 780
790      IF(NH(IE,LADO,MAH).GT.NHXY(IE,1))
791      1 NHXY(IE,1)=NH(IE,LADO,MAH)
792      GO TO 770
793      780 IF(NH(IE,LADO,MAH).GT.NHXY(IE,2))
794      1 NHXY(IE,2)=NH(IE,LADO,MAH)
795      770 CONTINUE
796 C
797 C      CALCULO DAS INCIDENCIAS
798 C      NODAIS HIERARQUICAS
799 C
800      DO 790 IE=1,NE
801      NOH=NOEL(IE)
802      DO 800 LADO=1,NLADMAX+6
803      IF(NH(IE,LADO,MAH).LE.NHA(IE,LADO))
804      1 GO TO 800
805      NOH=NOH+1
806      IF(LADO.GT.8) GO TO 810
807      IF(IELADO(IE,LADO).NE.0) GO TO 800
808      810 INCH=INCH+1
809      INC(IE,NOH)=INCH
810      IF(LADO.GT.8) GO TO 800
811      NO=LADO+8
812      DO 820 IEVI=1,NEVI(IE)
813      DO 830 NOVI=9,16
814      IF(INC(IE,NO).NE.INC(INCVI(IE,IEVI),NOVI))
815      1 GO TO 830
816      LD=NOVI-8
817      J=0
818      DO 840 I=1,LD
819      IF(NH(INCVI(IE,IEVI),I,MAH).LE.
820      1 NHA(INCVI(IE,IEVI),I)) GO TO 840
821      J=J+1
822      840 CONTINUE
823      INC(INCVI(IE,IEVI),NOEL(INCVI(IE,IEVI))
824      1+J)=INCH
825      GO TO 800
826      830 CONTINUE
827      820 CONTINUE
828      800 CONTINUE
829      790 CONTINUE
830 C
831      NVLT=NVLA
832 C
833 C      CALCULO DAS INCIDENCIAS DAS
834 C      VARIAVEIS HIERARQUICAS
835 C
836      DO 850 IE=1,NE
837      NOH=NOEL(IE)
838      DO 860 LADO=1,NLADMAX+6
839      IF(NH(IE,LADO,MAH).LE.NHA(IE,LADO))
840      1 GO TO 860

```

```

841      NOH=NOH+1
842      IF(LADO.GT.8) GO TO 870
843      IF(IELADO(IE,LADO).NE.0) GO TO 860
844 870 KH=NOH*NDF-NDF
845      K=(LADO+8)*NDF
846      NG=0
847      DO 880 I=K-NDF+1,K
848      NG=NG+1
849      KH=KH+1
850      IF(LADO-8) 920,920,930
851 920 IF((IVNO(IE,I).NE.0).AND.
852 1(IELANG(IE,LADO,NG).NE.0)) GO TO 900
853      IVNO(IE,KH)=0
854      GO TO 880
855 930 IF(IELANG(IE,LADO,NG).NE.0) GO TO 900
856      IVNO(IE,KH)=0
857      GO TO 880
858 900 NVLT=NVLT+1
859      IVNO(IE,KH)=NVLT
860 880 CONTINUE
861      IF(LADO.GT.8) GO TO 860
862      NO=LADO+8
863      DO 940 IEVI=1,NEVI(IE)
864      DO 950 NOVI=9,16
865      IF(INC(IE,NO).NE.INC(INCVI(IE,IEVI),NOVI))
866 1 GO TO 950
867      LD=NOVI-8
868      J=0
869      DO 960 I=1,LD
870      IF(NH(INCVI(IE,IEVI),I,MAH).LE.
871 1 NHA(INCVI(IE,IEVI),I)) GO TO 960
872      J=J+1
873 960 CONTINUE
874      KHVI=(NOEL(INCVI(IE,IEVI))+J)*NDF
875      KH=KH-NDF
876      DO 970 I=KHVI-NDF+1,KHVI
877      KH=KH+1
878      IVNO(INCVI(IE,IEVI),I)=IVNO(IE,KH)
879 970 CONTINUE
880      GO TO 860
881 950 CONTINUE
882 940 CONTINUE
883 860 CONTINUE
884 850 CONTINUE
885 C
886 C      CALCULO DO SKYLINE DAS
887 C      MATRIZES HIERARQUICAS
888 C
889 C      CALL SKY(NDF,NVLA,NVLT,NWKT,NE)
890 C
891      DO 980 I=NWKA+1,NWKT
892      RKG(I)=0.0
893 980 RMG(I)=0.0
894 C
895      MAE=0
896 C
897 C      LOOP SOBRE OS ELEMENTOS QUE POSSUEM
898 C      GRAUS DE LIBERDADE HIERARQUICOS
899 C
900      DO 1000 IE=1,NE
901      IF(NOELH(IE).EQ.0) GO TO 1000
902      NOELI=NOEL(IE)+1
903      NOELT=NOEL(IE)+NOELH(IE)
904      NVELI=NVEL(IE)+1
905      NVELT=NOELT*NDF
906      DO 1010 NO=1,16
907      I=INC(IE,NO)
908      XLIE(NO,1)=XYZ(I,1)
909      XLIE(NO,2)=XYZ(I,2)
910 1010 XLIE(NO,3)=XYZ(I,3)
911 C
912      L1=NHXY(IE,1)+1
913      L2=NHXY(IE,2)+1
914      LL(1)=L1
915      LL(2)=L2
916 C
917      WRITE(*,3490) MAH,IE,NRMI,NRMA
918      CALL SQ(IL)
919 C
920 C      CALCULO DOS NOVOS ELEMENTOS DAS
921 C      MATRIZES GLOBAIS
922 C
923      WRITE(*,3500) L1,L2,LL(3),LL(1),LL(2)
924      1,LL(3)
925      CALL KEL(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI,NVELT
926      1,IGH,LADO,XLIE,IL,IE,MAE,MAH)
927      MK=1
928      CALL KGLOB(MK,NVELI,NVELT,IE)
929      MK=0
930      WRITE(*,3510) L1,L2,LL(3),LL(1),LL(2)
931      1,LL(3)
932      CALL MASS(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI,NVELT
933      1,IGH,LADO,XLIE,IL,IE,MAE,MAH)
934      CALL KGLOB(MK,NVELI,NVELT,IE)
935 1000 CONTINUE
936 C
937      WRITE(*,3520) MAH,NRMI,NRMA
938 C
939      NC=MINO(MINO(2*NRMA,8+NRMA),NVLT)
940      NNC=NC*(NC+1)/2
941      IFSS=1
942      NWMT=NWKT
943      NNM=NVLT+1
944      DO 1020 I=NWKA+1,NWKT
945 1020 RK(I)=RKG(I)
946      DO 1030 J=1,NC
947      DO 1030 I=NVLA+1,NVLT
948 1030 FI(I,J)=1.
949 C
950 C      CALCULO DOS NOVOS AUTOVALORES E AUTOVE-
951 C      TORES DA MALHA REFINADA HIERARQUICAMENTE
952 C
953      CALL SPACE(NVLA,NVLT,NNM,NWKT,NWMT,NRMA,
954      1RTOL,NC,NNC,NITEM,IFSS,IFPR,MAH)
955 C
956      DO 1040 IE=1,NE
957      NOEL(IE)=NOEL(IE)+NOELH(IE)
958      NVEL(IE)=NOEL(IE)*NDF
959      DO 1040 LADO=1,NLADMAX+6
960      IF(NHA(IE,LADO).LT.NH(IE,LADO,MAH))
961      1 NHA(IE,LADO)=NH(IE,LADO,MAH)
962 1040 CONTINUE
963 C
964 C      SAIDA DOS RESULTADOS
965 C
966      ETAMAX=ETAMAX/GAMA
967      WRITE(9,3530)
968      WRITE(9,3540) MAH,NVLT,NWKT,ETAMAX
969      1,NETANEG,EST,NRMI,NRMA
970      DO 1042 NR=NRMI,NRMA
971 1042 WRITE(9,3550) NR,EIGV(NR)
972      IF(EST.GT.TOLEST) GO TO 390
973      WRITE(9,3560)
974 C
975 330 CONTINUE
976 C
977      TF=SECOND()
978      TF=TF-TI
979      WRITE(9,3570) IDROOT,TF
980

```



```

981 325 CONTINUE
982 C
983 C GRAVACAO DA DATA E HORA DO TERMINO
984 C DA EXECUCAO
985 C
986 DIA=DATE()
987 HORA=TIME()
988 WRITE(9,3280) DIA,HORA
989 C
990 CLOSE(5)
991 CLOSE(6)
992 CLOSE(7)
993 CLOSE(8)
994 CLOSE(9)
995 C
996 3000 FORMAT(/5X,'ARQUIVO DE DADOS: ')
997 3010 FORMAT(A12)
998 3020 FORMAT(5X,'INICIO DA EXECUCAO :
999 1 DATA =',A10,' HORA =',A8)
1000 3030 FORMAT(/5X,'< ARQUIVO DE DADOS :
1001 1 ',A12,' >')
1002 3040 FORMAT(/1X,'NX = ',I3,' NY = ',I3,
1003 1 ' NTIP = ',I2,' NREAN = ',I2)
1004 3050 FORMAT(1X,'COND. de CONTO RNO = ',4I3)
1005 3060 FORMAT(/1X,'IERRO = ',I1,' TOLEST =
1006 1 ',E10.4)
1007 3070 FORMAT(/1X,'**** ERRO, IERRO =',I2)
1008 3080 FORMAT(1X,'NRMIN = ',I2,' NROOT =
1009 1 ',I2,' GAMA = ',G7.2,
1010 1 ' IDO = ',I2)
1011 3090 FORMAT(1X,'E, XNU e RO = ',3(2X,E10.4))
1012 3100 FORMAT(1X,'CX, CY, CZ = ',3(2X,E10.4))
1013 3110 FORMAT(/1X,'*** PARA CADA GRAU DE
1014 1 LIBERDADE ---> ERRO ESTIMADO')
1015 3120 FORMAT(/1X,'*** PARA CADA GRAU DE
1016 1 LIBERDADE ---> ERRO CALCULADO')
1017 3130 FORMAT(/1X,70(' '),/1X,70(' '))
1018 3140 FORMAT(/1X,'NUMERO DE ELEMENTOS =
1019 1 ',I3)
1020 3150 FORMAT(1X,'No. DE TIPOS DE MATERIAIS =
1021 1 ',I3)
1022 3160 FORMAT(1X,'NUMERO TOTAL DE NOS =
1023 1 ',I4)
1024 3170 FORMAT(/1X,'X(',I3,') = ',F10.4,' Y(
1025 1 ,I3,') = ',F10.4,' Z(',I3,') = ',F10.4)
1026 3180 FORMAT(/15X,'**ELEMENTO No. =',I3,'**')
1027 3190 FORMAT(/1X,'INCIDENCIA NODAL =',18I4)
1028 3200 FORMAT(1X,'INC. DAS VAR. =',54I5)
1029 3210 FORMAT(/
1030 1 10X,'ELEMENTO LINEAR DE CASCA : No.
1031 1 ',I3//
1032 1 10X,'MODULO DE ELASTICIDADE .... =
1033 1 ',E10.5/
1034 1 10X,'COEF. DE POISSON ..... =
1035 1 ',E10.5/
1036 1 10X,'MASSA ESPECIFICA ..... =
1037 1 ',E10.5/
1038 1 10X,'PONTOS DE GAUSS/DIRECAO ... =
1039 1 ',3(2X,I2))
1040 3220 FORMAT(/1X,'CALCULANDO AUTOVALORES
1041 1 PARA ANALISE ISOPARAMETRICA')
1042 3230 FORMAT(/1X,70(' '),/1X,70(' '),//
1043 112X,'MALHA COM ELEMENTOS QUADRATICOS
1044 1 ISOPARAMETRICOS',/12X,' NUMERO DE
1045 1 AUTOVALORES CONSIDERADOS = ',I2)
1046 3240 FORMAT(13X,'AUTOVALOR (' ,I2,') =
1047 1 ',G22.16)
1048 3250 FORMAT(1X,'** NVLO = ',I4,' NWKO = ',I8)
1049 3260 FORMAT(/5X,'>> TEMPO DE C.P.U. p/ ANALISE
1050 1 ISOPARAMETRICA',/8X,' CPU = ',F10.2)
1051 3270 FORMAT(/1X,70(' '),/1X,70(' '))
1052 3280 FORMAT(/5X,'TERMINO DA EXECUCAO : DATA =
1053 1 ',A10,' HORA =',A8)
1054 3290 FORMAT(14)
1055 3300 FORMAT(1X,G22.16)
1056 3310 FORMAT(/2X,25(' <>')/
1057 12X,' REANALISES PARA O AUTOVALOR No. =
1058 1 ',I2,' ao ',I2 /2X,25(' <>'))
1059 3320 FORMAT(1X,'***** MAH = NREAN *****')
1060 3330 FORMAT(/10X,'*****')
1061 1****',/10X,' MALHA C/ ELEM. HIERARQUICOS
1062 1No.=',I2,/10X,'*****')
1063 1**',//)
1064 3340 FORMAT(/1X,75(' '),/31X,'ELEMENTO No.
1065 1 ',I3,/,1X,75(' '))
1066 3350 FORMAT(/1X,6(' '),1 LADO No. ',I2)
1067 3360 FORMAT(/8X,5(' '),1 GRAU HIERARQUICO '
1068 1,I2)
1069 3370 FORMAT(8X,'NR=',I2,' ao ',I2,' Reanalise
1070 1 :',I2,' Elemento :',I3,' Lado :',I2)
1071 3380 FORMAT(/
1072 1 14X,4(' '),1 na [K] do elem.
1073 1 com Ptos GAUSS/DIR. = ',3I3,
1074 1 /39X,'Ptos arrumados = ',3I3)
1075 3390 FORMAT(/
1076 1 14X,4(' '),1 na [M] do elem.
1077 1 com Ptos GAUSS/DIR. = ',3I3,
1078 1 /39X,'Ptos arrumados = ',3I3)
1079 3400 FORMAT(/19X,'*** ELEMENTO VIZINHO No.
1080 1 ',I3)
1081 3410 FORMAT(/23X,'** LADO ADJACENTE No. ',I2)
1082 3420 FORMAT(1X,'***** ERRO, >>>> ETAEST <
1083 1 0.0 *****')
1084 3430 FORMAT(1X,'***** ERRO, >>>> ETACAL <
1085 1 0.0 *****')
1086 3440 FORMAT(/3X,'Calculando novo auto-valor
1087 1 p/ NG =',I2)
1088 3450 FORMAT(1X,'IE=',I3,' LADO=',I2,' GRAU=
1089 1 ',I2,' NG=',I2,' ETA=',G22.16)
1090 3460 FORMAT(/12X,'REANALISE No.=',I2,' p/ NR=
1091 1 ',I2,' ao ',I2)
1092 3470 FORMAT(4X,I3,7X,I2,7X,I2,5X,I2,6X,G22.16)
1093 3480 FORMAT(1X,'IE=',I3,' LADO=',I2,' GRAU=
1094 1 ',I2,' NG=',I2,' ERRO=',G22.16)
1095 3490 FORMAT(/2X,'*** REANALISE No. =',I2,'
1096 1 ELEMENTO No. =',I3,'***')
1097 1 /2X,' *** P/ o auto-valor No. =',I2
1098 1,' ao ',I2,' ***')
1099 3500 FORMAT(/26X,'* NA [K] global
1100 1com Ptos GAUSS/DIR. = ',3I3,
1101 1 /46X,'Ptos arrumados = ',3I3)
1102 3510 FORMAT(/26X,'* NA [M] global
1103 1com Ptos GAUSS/DIR. = ',3I3,
1104 1 /46X,'Ptos arrumados = ',3I3)
1105 3520 FORMAT(/2X,'CALCULANDO NOVOS AUTOVALORES
1106 1(Reanalise :',I2,')',
1107 1 /2X,' P/ o auto-valor No. ',I2,' ao ',I2)
1108 3530 FORMAT(1X,'MAH',3X,'NVLT',6X,'NWKT',3X,
1109 1'ETAMAX',2X,'No.NEG',3X,'ESTIMA',7X,'NRMI
1110 1',3X,'NRMA')
1111 3540 FORMAT(1X,I3,2X,I5,2X,I8,2X,G7.2,2X,I3,2X,
1112 1G14.8,3X,I2,5X,I2)
1113 3550 FORMAT(5X,'AUTO-VALOR(' ,I2,') = ',G22.16)
1114 3560 FORMAT(1X,'>>> (ESTIMADOR .LE. TOLEST) <<<')
1115 3570 FORMAT(/5X,'= TEMPO DE C.P.U. (DELTA ROOT
1116 1=' ,I2,')',/8X,' CPU = ',F10.2)
1117 C
1118 END

```

```

1      SUBROUTINE DECOMP(NVLA,NVLT,ISH,MAH)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C .   P R O G R A M
5 C .   TO CALCULATE (L)*(D)*(L)(T) FACTORI-
6 C .   ZATION OF STIFFNESS MATRIX
7 C .
8 C .   DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
9 C .   RK(NWK),RKS(NWK),MAXA(NVLT+1)
10 C . . . . .
11      COMMON /BRK/  RK(340000),RKS(340000)
12      COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
13 C
14      IF(NVLT.EQ.1) RETURN
15      JJ=1
16      IF(MAH.NE.0) JJ=NVLA+1
17      DO 200 N=JJ,NVLT
18      KN=MAXA(N)
19      KL=KN+1
20      KU=MAXA(N+1)-1
21      KH=KU-KL
22      IF (KH) 304,240,210
23 210 K=N-KH
24      IC=0
25      KLT=KU
26      DO 260 J=1,KH
27      IC=IC+1
28      KLT=KLT-1
29      KI=MAXA(K)
30      ND=MAXA(K+1)-KI-1
31      IF (ND) 260,260,270
32 270 KK=MIN0(IC,ND)
33      C=0.
34      DO 280 L=1,KK
35 280 C=C+RK(KI+L)*RK(KLT+L)
36      RK(KLT)=RK(KLT)-C
37 260 K=K+1
38 240 K=N
39      B=0.
40      DO 300 KK=KL,KU
41      K=K-1
42      KI=MAXA(K)
43      C=RK(KK)/RK(KI)
44      IF(ABS(C).LT.1.D+07) GO TO 290
45      WRITE(9,410) N,C
46      STOP
47 290 B=B+C*RK(KK)
48 300 RK(KK)=C
49      RK(KN)=RK(KN)-B
50 304 IF (RK(KN)) 310,310,200
51 310 IF (ISH.EQ.0) GO TO 320
52      IF (RK(KN).EQ.0.) RK(KN)=-1.D-16
53      GO TO 200
54 320 WRITE(9,400) N,RK(KN)
55      STOP
56 200 CONTINUE
57 C
58 400 FORMAT(//1X,'STOP - STIFFNESS MATRIX NOT
59      1 POSITIVE DEFINITE'//
60      1 1X,'NONPOSITIVE PIVOT FOR EQUATION',
61      114,//
62      2      1X,'PIVOT =',E20.12)
63 410 FORMAT(//1X,'STOP - STURM SEQUENCE CHECK
64      1 FAILED BECAUSE OF'//
65      1      1X,'MULTIPLIER GROWTH FOR COLUMN
66      1 NUMBER',I4,//
67      1      1X,'MULTIPLIER=',E20.8)
68 C
69      RETURN
70      END

```

```

1      SUBROUTINE DECS(NVLT,ISH)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C .   P R O G R A M
5 C .   TO CALCULATE (L)*(D)*(L)(T) FACTORI-
6 C .   ZATION OF STIFFNESS MATRIX
7 C .
8 C .   DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
9 C .   RK(NWK),RKS(NWK),MAXA(NVLT+1)
10 C . . . . .
11      COMMON /BRK/  RK(340000),RKS(340000)
12      COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
13 C
14      IF(NVLT.EQ.1) RETURN
15      DO 200 N=1,NVLT
16      KN=MAXA(N)
17      KL=KN+1
18      KU=MAXA(N+1)-1
19      KH=KU-KL
20      IF (KH) 304,240,210
21 210 K=N-KH
22      IC=0
23      KLT=KU
24      DO 260 J=1,KH
25      IC=IC+1
26      KLT=KLT-1
27      KI=MAXA(K)
28      ND=MAXA(K+1)-KI-1
29      IF (ND) 260,260,270
30 270 KK=MIN0(IC,ND)
31      C=0.
32      DO 280 L=1,KK
33 280 C=C+RKS(KI+L)*RKS(KLT+L)
34      RKS(KLT)=RKS(KLT)-C
35 260 K=K+1
36 240 K=N
37      B=0.
38      DO 300 KK=KL,KU
39      K=K-1
40      KI=MAXA(K)
41      C=RKS(KK)/RKS(KI)
42      IF(ABS(C).LT.1.D+07) GO TO 290
43      WRITE(9,410) N,C
44      STOP
45 290 B=B+C*RKS(KK)
46 300 RKS(KK)=C
47      RKS(KN)=RKS(KN)-B
48 304 IF (RKS(KN)) 310,310,200
49 310 IF (ISH.EQ.0) GO TO 320
50      IF (RKS(KN).EQ.0.) RKS(KN)=-1.D-16
51      GO TO 200
52 320 WRITE(9,400) N,RKS(KN)
53      STOP
54 200 CONTINUE
55 C
56 400 FORMAT(//1X,'STOP - STIFFNESS MATRIX NOT
57      1 POSITIVE DEFINITE'//
58      11X,'NONPOSITIVE PIVOT FOR EQUATION'
59      1,I4,//1X,'PIVOT =',E20.12)
60 410 FORMAT(//1X,'STOP - STURM SEQUENCE CHECK
61      1 FAILED BECAUSE OF'//
62      1      1X,'MULTIPLIER GROWTH FOR COLUMN
63      1 NUMBER',I4,//
64      1      1X,'MULTIPLIER=',E20.8)
65 C
66      RETURN
67      END

```

```

1      SUBROUTINE ETA(NVL,NR,NG,ETAEST)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C .   P R O G R A M A
5 C .   PARA CALCULAR O INDICADOR DE ERROS PARA
6 C .   UM GRAU DE LIBERDADE HIERARQUICO
7 C .
8 C .   DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
9 C .   RKG(NWK),RMG(NWM),EIGV(NC),FI(NVLT,NC),
10 C .   MAXA(NVLT+1)
11 C . . . . .
12      COMMON /BKM/   RKG(340000),RMG(340000)
13      COMMON /BEIGV/ EIGV(23)
14      COMMON /BFI/   FI(2810,23)
15      COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
16 C
17      ETANU=0.0
18      J=NVL+1
19 C
20 C   CALCULO DO NUMERADOR DA EQUACAO DO
21 C   INDICADOR DE ERROS
22 C
23      DO 10 I=MAXA(NVL+NG)+NG,MAXA(NVL+NG+1)-1
24      J=J-1
25      ETANU=ETANU+(RKG(I)-EIGV(NR)*RMG(I))*
26      1FI(J,NR)
27 10 CONTINUE
28 C
29      ETANU=ETANU*ETANU
30      I=MAXA(NVL+NG)
31 C
32 C   CALCULO DO DENOMINADOR DA EQUACAO DO
33 C   INDICADOR DE ERROS
34 C
35      ETADE=EIGV(NR)*(RKG(I)-EIGV(NR)*RMG(I))
36 C
37 C   CALCULO DO INDICADOR DE ERROS
38 C
39      ETAEST=ETANU/ETADE
40 C
41      RETURN
42      END

1      FUNCTION ITRAD(IP,IQ)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C .   P R O G R A M A
5 C .   PARA CALCULAR A POSICAO DOS ELEMENTOS
6 C .   DAS MATRIZES [K]elem. E [M]elem.
7 C .
8 C . . . . .
9      IF(IQ-IP) 1,1,2
10     1 ITRAD=IP*(IP-1)/2+IQ
11     RETURN
12 C
13     2 ITRAD=IQ*(IQ-1)/2+IP
14 C
15     RETURN
16     END

1      SUBROUTINE JACOBI(N,RTOL,NSMAX,IFPR)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C .   P R O G R A M
5 C .   TO SOLVE THE GENERALIZED EIGENPROBLEM
6 C .   USING THE GENERALIZED JACOBI ITERATION
7 C .
8 C .   DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
9 C .   AR(NNC),BR(NNC),VEC(NC,NC),EIGV(NC),
10 C .   W(NVLT)
11 C . . . . .
12      COMMON /BAR/   AR(276)
13      COMMON /BBR/   BR(276)
14      COMMON /BVEC/   VEC(23,23)
15      COMMON /BEIGV/ EIGV(23)
16      COMMON /BW/     W(2810)
17 C
18 C   INITIALIZE EIGENVALUE AND EIGENVECTOR
19 C   MATRICES
20 C
21      N1=N+1
22      II=1
23      DO 10 I=1,N
24      IF(AR(II).GT.0. .AND. BR(II).GT.0.)
25      1 GO TO 4
26      WRITE(9,520) II,AR(II),BR(II)
27      STOP
28      4 W(I)=AR(II)/BR(II)
29      EIGV(I)=W(I)
30 10 II=II+N1-I
31      DO 30 I=1,N
32      DO 20 J=1,N
33      20 VEC(I,J)=0.0
34      30 VEC(I,I)=1.0
35      IF(N.EQ.1) RETURN
36 C
37 C   INITIALIZE SWEEP COUNTER AND
38 C   BEGIN ITERATION
39 C
40      NSWEEP=0
41      NR=N-1
42 40 NSWEEP=NSWEEP+1
43      IF(IFPR.EQ.1) WRITE(*,500) NSWEEP
44 C
45 C   CHECK IF PRESENT OFF-DIAGONAL ELEMENT
46 C   IS LARGE ENOUGH TO REQUIRE ZEROING
47 C
48      EPS=(0.01**NSWEEP)**2
49      DO 210 J=1,NR
50      JP1=J+1
51      JM1=J-1
52      LJK=JM1*N-JM1*J/2
53      JJ=LJK+J
54      DO 210 K=JP1,N
55      KP1=K+1
56      KM1=K-1
57      JK=LJK+K
58      KK=KM1*N-KM1*K/2+K
59      EPTOLA=(AR(JK)*AR(JK))/(AR(JJ)*AR(KK))
60      EPTOLB=(BR(JK)*BR(JK))/(BR(JJ)*BR(KK))
61      IF((EPTOLA.LT.EPS).AND.(EPTOLB.LT.EPS))
62      1 GO TO 210
63 C
64 C   IF ZEROING IS REQUIRED, CALCULATE THE
65 C   ROTATION MATRIX ELEMENTS CA AND CG
66 C
67      AKK=AR(KK)*BR(JK)-BR(KK)*AR(JK)
68      AJJ=AR(JJ)*BR(JK)-BR(JJ)*AR(JK)
69      AB=AR(JJ)*BR(KK)-AR(KK)*BR(JJ)
70      CHECK=(AB*AB+4.*AKK*AJJ)/4.
71      IF(CHECK) 50,60,60
72 50 WRITE(9,520)
73      STOP
74 60 SQCH=SQRT(CHECK)
75      D1=AB/2.+SQCH
76      D2=AB/2.-SQCH
77      DEN=D1
78      IF(ABS(D2).GT.ABS(D1)) DEN=D2

```

```

79      IF(DEN) 80,70,80
80      70 CA=0.
81      CG=-AR(JK)/AR(KK)
82      GO TO 90
83      80 CA=AKK/DEN
84      CG=-AJJ/DEN
85 C
86 C      PERFORM THE GENERALIZED ROTATION TO
87 C      ZERO THE PRESENT OFF-DIAGONAL ELEMENT
88 C
89      90 IF(N-2) 100,190,100
90      100 IF(JM1-1) 130,110,110
91      110 DO 120 I=1,JM1
92      IM1=I-1
93      IJ=IM1*N-IM1*I/2+J
94      IK=IM1*N-IM1*I/2+K
95      AJ=AR(IJ)
96      BJ=BR(IJ)
97      AK=AR(IK)
98      BK=BR(IK)
99      AR(IJ)=AJ+CG*AK
100     BR(IJ)=BJ+CG*BK
101     AR(IK)=AK+CA*AJ
102     120 BR(IK)=BK+CA*BJ
103     130 IF(KP1-N) 140,140,160
104     140 LJI=JM1*N-JM1*J/2
105     LKI=KM1*N-KM1*K/2
106     DO 150 I=KP1,N
107     JI=LJI+I
108     KI=LKI+I
109     AJ=AR(JI)
110     BJ=BR(JI)
111     AK=AR(KI)
112     BK=BR(KI)
113     AR(JI)=AJ+CG*AK
114     BR(JI)=BJ+CG*BK
115     AR(KI)=AK+CA*AJ
116     150 BR(KI)=BK+CA*BJ
117     160 IF(JP1-KM1) 170,170,190
118     170 LJI=JM1*N-JM1*J/2
119     DO 180 I=JP1,KM1
120     JI=LJI+I
121     IM1=I-1
122     IK=IM1*N-IM1*I/2+K
123     AJ=AR(JI)
124     BJ=BR(JI)
125     AK=AR(IK)
126     BK=BR(IK)
127     AR(JI)=AJ+CG*AK
128     BR(JI)=BJ+CG*BK
129     AR(IK)=AK+CA*AJ
130     180 BR(IK)=BK+CA*BJ
131     190 AK=AR(KK)
132     BK=BR(KK)
133     AR(KK)=AK+2.*CA*AR(JK)+CA*CA*AR(JJ)
134     BR(KK)=BK+2.*CA*BR(JK)+CA*CA*BR(JJ)
135     AR(JJ)=AR(JJ)+2.*CG*AR(JK)+CG*CG*AK
136     BR(JJ)=BR(JJ)+2.*CG*BR(JK)+CG*CG*BK
137     AR(JK)=0.0
138     BR(JK)=0.0
139 C
140 C      UPDATE THE EIGENVECTOR MATRIX AFTER
141 C      EACH ROTATION
142 C
143     DO 200 I=1,N
144     XJ=VEC(I,J)
145     XK=VEC(I,K)
146     VEC(I,J)=XJ+CG*XK
147     200 VEC(I,K)=XK+CA*XJ
148     210 CONTINUE

149 C
150 C      UPDATE THE EIGENVALUES AFTER EACH SWEEP
151 C
152     II=1
153     DO 220 I=1,N
154     IF(AR(II).GT.0. .AND. BR(II).GT.0.)
155     1 GO TO 215
156     WRITE(9,520) II,AR(II),BR(II)
157     STOP
158     215 EIGV(I)=AR(II)/BR(II)
159     220 II=II+N1-1
160     IF(IFPR.EQ.0) GO TO 230
161     WRITE(*,530)
162     WRITE(*,510) (EIGV(I),I=1,N)
163 C
164 C      CHECK FOR CONVERGENCE
165 C
166     230 DO 240 I=1,N
167     TOL=RTOL*W(I)
168     DIF=EIGV(I)-W(I)
169     DIF=ABS(DIF)
170     IF(DIF.GT.TOL) GO TO 280
171     240 CONTINUE
172 C
173 C      CHECK ALL OFF-DIAGONAL ELEMENTS TO SEE
174 C      IF ANOTHER SWEEP IS REQUIRED
175 C
176     EPS=RTOL**2
177     DO 250 J=1,NR
178     JM1=J-1
179     JP1=J+1
180     LJK=JM1*N-JM1*J/2
181     JJ=LJK+J
182     DO 250 K=JP1,N
183     KM1=K-1
184     JK=LJK+K
185     KK=KM1*N-KM1*K/2+K
186     EPSA=(AR(JK)*AR(JK))/(AR(JJ)*AR(KK))
187     EPSB=(BR(JK)*BR(JK))/(BR(JJ)*BR(KK))
188     IF((EPSA.LT.EPS).AND.(EPSB.LT.EPS))
189     1 GO TO 250
190     GO TO 280
191     250 CONTINUE
192 C
193 C      FILL OUT BOTTOM TRIANGLE OF RESULTANT
194 C      MATRICES AND SCALE EIGENVECTORS
195 C
196     255 II=1
197     DO 275 I=1,N
198     BB=SQRT(BR(II))
199     DO 270 K=1,N
200     270 VEC(K,I)=VEC(K,I)/BB
201     275 II=II+N1-1
202 C
203     RETURN
204 C
205 C      UPDATE D MATRIX AND START NEW SWEEP
206 C
207     280 DO 290 I=1,N
208     290 W(I)=EIGV(I)
209     IF(NSWEEP.LT.NSMAX) GO TO 40
210     GO TO 255
211 C
212     500 FORMAT(1X,'SWEEP NUMBER IN *JACOBI* =
213     1',I4)
214     510 FORMAT(1X,30G22.16)
215     520 FORMAT(1X,'*** ERROR SOLUTION STOP!/'
216     11X,'MATRICES NOT POSITIVE DEFINITE!/'
217     21X,'II=',I4,'RKG(II)=' ,G22.16,'RMG(II)='
218     3,G22.16)

```

```

219 530 FORMAT(1X,'CURRENT EIGENVALUES IN
220 1 *JACOBI* ARE, '/')
221 C
222 END

1 SUBROUTINE KEL(NDF,NDM,NOELI,NOELT,NVELI
2 1,NVELT,IGH,LADO,XL,IL,IE,MAE,MAH)
3 C . . . . .
4 C .
5 C . P R O G R A M A
6 C . PARA CALCULAR A MATRIZ DE RIGIDEZ DO
7 C . ELEMENTO
8 C .
9 C . DIMENSÃO DAS VARIÁVEIS:
10 C . D(3),XL(NOELO,NDM),S(NW),RG(216),
11 C . SG(216),TG(216),WG(216),SHP(4,NOELT),
12 C . DAT(NE,NDAD),LL(NDM),
13 C . NH(NE,NLADMAX,NREAN),NOEL(NE)
14 C . . . . .
15 DIMENSION D(3),XL(16,3)
16 COMMON /BS/ S(9591)
17 COMMON /BRSTW/ RG(216),SG(216),TG(216)
18 1,WG(216)
19 COMMON /BSHP/ SHP(4,46)
20 COMMON /BDAT/ DAT(108,3)
21 COMMON /BLL/ LL(3)
22 COMMON /BNH/ NH(108,14,20)
23 COMMON /BNOEL/ NOEL(108)
24 C
25 E=DAT(IE,1)
26 XNU=DAT(IE,2)
27 RO=DAT(IE,3)
28 C
29 C CALCULO DA MATRIZ DE PROPRIEDADES
30 C
31 D(1)=E*((1.-XNU)/((1.+XNU)*(1.-2.*XNU)))
32 D(2)=E*XNU/((1.+XNU)*(1.-2.*XNU))
33 D(3)=E/(2.*(1.+XNU))
34 C
35 DO 10 I=1,3
36 10 LL(I)=MINO(6,MAXO(1,LL(I)))
37 C
38 DO 20 I=NVELI,NVELT
39 DO 20 J=1,I
40 IJ=ITRAD(1,J)
41 20 S(IJ)=0.0
42 C
43 C CALCULO DOS PONTOS DE INTEGRAÇÃO DE GAUSS
44 C
45 CALL PGAUSS(LINT)
46 C
47 DO 30 L=1,LINT
48 C
49 C AVALIAÇÃO DA SEQUÊNCIA DOS PONTOS DE GAUSS
50 C
51 IF(IL.EQ.123) GO TO 223
52 IF(IL.EQ.132) GO TO 232
53 IF(IL.EQ.213) GO TO 313
54 IF(IL.EQ.231) GO TO 331
55 IF(IL.EQ.312) GO TO 412
56 IF(IL.EQ.321) GO TO 421
57 C
58 C CALCULO DOS VALORES DAS FUNÇÕES DE INTER-
59 C POLAÇÃO NOS PONTOS RG(L),SG(L),TG(L)
60 C
61 223 CALL SHAPE(RG(L),SG(L),TG(L),XSJ,NDM
62 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
63 GO TO 40
64 C
65 232 CALL SHAPE(RG(L),TG(L),SG(L),XSJ,NDM
66 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
67 GO TO 40
68 C
69 313 CALL SHAPE(SG(L),RG(L),TG(L),XSJ,NDM
70 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
71 GO TO 40
72 C
73 331 CALL SHAPE(SG(L),TG(L),RG(L),XSJ,NDM
74 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
75 GO TO 40
76 C
77 412 CALL SHAPE(TG(L),RG(L),SG(L),XSJ,NDM
78 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
79 GO TO 40
80 C
81 421 CALL SHAPE(TG(L),SG(L),RG(L),XSJ,NDM
82 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
83 C
84 40 DV=XSJ*WG(L)
85 D1=D(1)*DV
86 D2=D(2)*DV
87 D3=D(3)*DV
88 C
89 C CALCULO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
90 C
91 DO 30 J=NOELI,NOELT
92 Q11=D1*SHP(1,J)
93 Q12=D2*SHP(2,J)
94 Q13=D2*SHP(3,J)
95 Q21=D2*SHP(1,J)
96 Q22=D1*SHP(2,J)
97 Q23=D2*SHP(3,J)
98 Q31=D2*SHP(1,J)
99 Q32=D2*SHP(2,J)
100 Q33=D1*SHP(3,J)
101 Q41=D3*SHP(2,J)
102 Q42=D3*SHP(1,J)
103 Q52=D3*SHP(3,J)
104 Q53=D3*SHP(2,J)
105 Q61=D3*SHP(3,J)
106 Q63=D3*SHP(1,J)
107 I1=NDF*J-(NDF-1)
108 I2=I1+1
109 I3=I2+1
110 C
111 DO 30 I=1,J
112 J1=NDF*I-(NDF-1)
113 J2=J1+1
114 J3=J2+1
115 I1J1=ITRAD(I1,J1)
116 I2J1=ITRAD(I2,J1)
117 I3J1=ITRAD(I3,J1)
118 S(I1J1)=S(I1J1)+SHP(1,I)*Q11+SHP(2,I)
119 1*Q41+SHP(3,I)*Q61
120 S(I2J1)=S(I2J1)+SHP(1,I)*Q12+SHP(2,I)
121 1*Q42
122 S(I3J1)=S(I3J1)+SHP(1,I)*Q13+SHP(3,I)
123 1*Q63
124 I1J2=ITRAD(I1,J2)
125 I2J2=ITRAD(I2,J2)
126 I3J2=ITRAD(I3,J2)
127 IF(I.NE.J) S(I1J2)=S(I1J2)+SHP(2,I)*Q21
128 1+SHP(1,I)*Q41
129 S(I2J2)=S(I2J2)+SHP(2,I)*Q22+SHP(1,I)
130 1*Q42+SHP(3,I)*Q52
131 S(I3J2)=S(I3J2)+SHP(2,I)*Q23+SHP(3,I)
132 1*Q53
133 I1J3=ITRAD(I1,J3)
134 I2J3=ITRAD(I2,J3)

```

```

135      13J3=ITRAD(13,J3)
136      IF(1.NE.J) S(11J3)=S(11J3)+SHP(3,1)*Q31
137      1+SHP(1,1)*Q61
138      IF(1.NE.J) S(12J3)=S(12J3)+SHP(3,1)*Q32
139      1+SHP(2,1)*Q52
140      30 S(13J3)=S(13J3)+SHP(3,1)*Q33+SHP(2,1)
141      1*Q53+SHP(1,1)*Q63
142 C
143      RETURN
144      END

1      SUBROUTINE KGLOBAL(MK,NVELI,NVELT,IE)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C . P R O G R A M A
5 C .     PARA CALCULAR AS MATRIZES GLOBAIS:
6 C .     [RKG] E [RMG]
7 C .
8 C . DIMENSÃO DAS VARIÁVEIS:
9 C .     NW=NVEL*(NVEL+1)/2
10 C .     S(NW),IVNO(NE,NVEL),RKG(NWK),RMG(NWM),
11 C .     MAXA(NVLT+1)
12 C . . . . .
13      COMMON /BS/      S(9591)
14      COMMON /BIVNO/   IVNO(108,138)
15      COMMON /BKM/     RKG(340000),RMG(340000)
16      COMMON /BMAXA/   MAXA(2811)
17 C
18      DO 10 I=NVELI,NVELT
19      ILIN=IVNO(IE,I)
20      IF(ILIN.LE.0) GO TO 10
21      DO 20 J=1,I
22      JCOL=IVNO(IE,J)
23      IF(JCOL.LE.0) GO TO 20
24      IF(JCOL-ILIN) 30,30,40
25      30 ILINJCOL=MAXA(ILIN)+ILIN-JCOL
26      GO TO 50
27      40 ILINJCOL=MAXA(JCOL)+JCOL-ILIN
28      50 IJ=ITRAD(I,J)
29 C
30 C      MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
31 C
32      IF(MK.NE.0) RKG(ILINJCOL)=RKG(ILINJCOL)+
33      1S(IJ)
34 C
35 C      MONTAGEM DA MATRIZ DE MASSA GLOBAL
36 C
37      IF(MK.EQ.0) RMG(ILINJCOL)=RMG(ILINJCOL)+
38      1S(IJ)
39 C
40      20 CONTINUE
41      10 CONTINUE
42 C
43      RETURN
44      END

1      SUBROUTINE MALHA(NDF,NX,NY,CX,CY,CZ
2      1,NE,NNOS,NVLO,IXY)
3 C . . . . .
4 C . . . . .
5 C . P R O G R A M A
6 C .     PARA GERAR A MALHA DE ELEMENTOS FINITOS
7 C .
8 C .     NX = NUMERO DE ELEMENTOS NA DIREÇÃO X
9 C .     NY = NUMERO DE ELEMENTOS NA DIREÇÃO Y
10 C .     CX = COMPRIMENTO DA MALHA NA DIREÇÃO X
11 C .     CY = COMPRIMENTO DA MALHA NA DIREÇÃO Y
12 C .     CZ = COMPRIMENTO DA MALHA NA DIREÇÃO Z
13 C
14 C      DIMENSÃO DAS VARIÁVEIS:
15 C .     XYZ(NNOS,NDM),INC(NE,46),IVNO(NE,138),
16 C .     NOEL(NE),IVANO(NNOS,NDM),LCON(4)
17 C
18 C . . . . .
19      COMMON /BXYZ/   XYZ(750,3)
20      COMMON /BINC/   INC(108,46)
21      COMMON /BIVNO/   IVNO(108,138)
22      COMMON /BNOEL/   NOEL(108)
23      COMMON /BIVANO/   IVANO(750,3)
24      COMMON /BLCON/   LCON(4)
25 C
26      NNOSI=1
27      IF(IXY.NE.0) GO TO 10
28      DLX=CX/(2*NX)
29      DLY=CY/(2*NY)
30      DLYY=-DLY
31      K=1
32 C
33 C      CÁLCULO DAS COORDENADAS DOS NOS
34 C      PARA MALHA REGULAR
35 C
36      DO 30 L=1,NY
37      DLYY=DLYY+DLY
38      XYZ(K,2)=DLYY
39      XYZ(2*NX+K+1,2)=DLYY
40      XYZ(K,1)=0.0
41      XYZ(2*NX+K+1,1)=0.0
42      DO 40 I=K+1,2*NX+K
43      XYZ(I,2)=DLYY
44      XYZ(I,1)=XYZ(I-1,1)+DLX
45      J=1+2*NX+1
46      XYZ(J,2)=DLYY
47      40 XYZ(J,1)=XYZ(J-1,1)+DLX
48      DLYY=DLYY+DLY
49      XYZ(4*NX+K+2,2)=DLYY
50      XYZ(5*NX+K+3,2)=DLYY
51      XYZ(4*NX+K+2,1)=0.0
52      XYZ(5*NX+K+3,1)=0.0
53      DO 50 I=4*NX+K+3,5*NX+K+2
54      XYZ(I,2)=DLYY
55      XYZ(I,1)=XYZ(I-1,1)+2*DLX
56      J=1+NX+1
57      XYZ(J,2)=DLYY
58      50 XYZ(J,1)=XYZ(J-1,1)+2*DLX
59      K=K+6*NX+4
60      30 CONTINUE
61      DLYY=DLYY+DLY
62      XYZ(K,2)=DLYY
63      XYZ(2*NX+K+1,2)=DLYY
64      XYZ(K,1)=0.0
65      XYZ(2*NX+K+1,1)=0.0
66      DO 60 I=K+1,2*NX+K
67      XYZ(I,2)=DLYY
68      XYZ(I,1)=XYZ(I-1,1)+DLX
69      J=1+2*NX+1
70      XYZ(J,2)=DLYY
71      60 XYZ(J,1)=XYZ(J-1,1)+DLX
72      K=1
73      DO 70 L=1,NY
74      DO 80 I=K,2*NX+K
75      J=1+2*NX+1
76      XYZ(J,3)=0.0
77      80 XYZ(I,3)=CZ
78      DO 90 I=4*NX+K+2,5*NX+K+2
79      J=1+NX+1
80      XYZ(J,3)=0.0
81      90 XYZ(I,3)=CZ
82      K=K+6*NX+4

```

```

83 70 CONTINUE
84 DO 100 I=K,K+2*NX
85 J=1+2*NX+1
86 XYZ(J,3)=0.0
87 100 XYZ(I,3)=CZ
88 C
89 C CALCULO DAS INCIDENCIAS
90 C NODAIS DOS ELEMENTOS
91 C
92 10 INC(1,1)=3
93 INC(1,2)=6*NX+7
94 INC(1,3)=INC(1,2)-2
95 INC(1,4)=1
96 INC(1,5)=2*NX+4
97 INC(1,6)=8*NX+8
98 INC(1,7)=INC(1,6)-2
99 INC(1,8)=2*NX+2
100 INC(1,9)=4*NX+4
101 INC(1,10)=INC(1,2)-1
102 INC(1,11)=INC(1,9)-1
103 INC(1,12)=INC(1,1)-1
104 INC(1,13)=INC(1,9)+NX+1
105 INC(1,14)=INC(1,6)-1
106 INC(1,15)=INC(1,13)-1
107 INC(1,16)=INC(1,8)+1
108 C
109 ND=INC(1,3)-1
110 DO 180 IE=NX+1,NE-NX+1,NX
111 I=IE-NX
112 DO 180 J=1,16
113 180 INC(IE,J)=INC(I,J)+ND
114 C
115 DO 190 IEX=2,NE,NX
116 NIEX=IEX+NX-2
117 DO 190 IE=IEX,NIEX
118 I=IE-1
119 DO 200 J=1,8
120 200 INC(IE,J)=INC(I,J)+2
121 DO 210 J=9,15,2
122 210 INC(IE,J)=INC(I,J)+1
123 DO 220 J=10,16,2
124 220 INC(IE,J)=INC(I,J)+2
125 190 CONTINUE
126 C
127 NNOS=INC(NE,6)
128 DO 230 I=NNOS1,NNOS
129 DO 230 J=1,NDF
130 230 IVANO(I,J)=1
131 C
132 C CALCULO DAS POSICOES DAS
133 C VARIAVEIS NULAS (CONDICOES DE
134 C CONTORNO DO PROBLEMA)
135 C
136 DO 250 LADO=1,4
137 IF(LADO.EQ.1) GO TO 260
138 IF(LADO.EQ.2) GO TO 270
139 IF(LADO.EQ.3) GO TO 280
140 C
141 C CONTORNO = 4
142 C
143 IF(LCON(4).EQ.2) GO TO 250
144 IF(LCON(4).EQ.0) GO TO 290
145 IVANO(INC(1,8),3)=0
146 DO 300 IE=1,NX
147 DO 300 I=5,16,11
148 300 IVANO(INC(IE,1),3)=0
149 GO TO 250
150 290 DO 310 I=1,NDF
151 IVANO(INC(1,4),I)=0
152 310 IVANO(INC(1,8),I)=0
153 DO 320 IE=1,NX
154 DO 320 I=1,NDF
155 IVANO(INC(IE,1),I)=0
156 IVANO(INC(IE,5),I)=0
157 IVANO(INC(IE,12),I)=0
158 320 IVANO(INC(IE,16),I)=0
159 GO TO 330
160 C
161 C CONTORNO = 1
162 C
163 260 IF(LCON(1).EQ.2) GO TO 250
164 IF(LCON(1).EQ.0) GO TO 340
165 IVANO(INC(NX,5),3)=0
166 DO 350 IE=NX,NE,NX
167 DO 350 I=6,13,7
168 350 IVANO(INC(IE,1),3)=0
169 GO TO 250
170 340 DO 360 I=1,NDF
171 IVANO(INC(NX,1),I)=0
172 360 IVANO(INC(NX,5),I)=0
173 DO 370 IE=NX,NE,NX
174 DO 370 I=1,NDF
175 IVANO(INC(IE,2),I)=0
176 IVANO(INC(IE,6),I)=0
177 IVANO(INC(IE,9),I)=0
178 370 IVANO(INC(IE,13),I)=0
179 GO TO 250
180 C
181 C CONTORNO = 2
182 C
183 270 IF(LCON(2).EQ.2) GO TO 250
184 J=NE-NX+1
185 IF(LCON(2).EQ.0) GO TO 380
186 IVANO(INC(J,7),3)=0
187 DO 390 IE=J,NE
188 DO 390 I=6,14,8
189 390 IVANO(INC(IE,1),3)=0
190 GO TO 250
191 380 DO 400 I=1,NDF
192 IVANO(INC(J,3),I)=0
193 400 IVANO(INC(J,7),I)=0
194 DO 410 IE=J,NE
195 DO 410 I=1,NDF
196 IVANO(INC(IE,2),I)=0
197 IVANO(INC(IE,6),I)=0
198 IVANO(INC(IE,10),I)=0
199 410 IVANO(INC(IE,14),I)=0
200 GO TO 250
201 C
202 C CONTORNO = 3
203 C
204 280 IF(LCON(3).EQ.2) GO TO 250
205 J=NE-NX+1
206 IF(LCON(3).EQ.0) GO TO 420
207 IVANO(INC(1,8),3)=0
208 DO 430 IE=1,J,NX
209 DO 430 I=7,15,8
210 430 IVANO(INC(IE,1),3)=0
211 GO TO 250
212 420 DO 440 I=1,NDF
213 IVANO(INC(1,4),I)=0
214 440 IVANO(INC(1,8),I)=0
215 DO 450 IE=1,J,NX
216 DO 450 I=1,NDF
217 IVANO(INC(IE,3),I)=0
218 IVANO(INC(IE,7),I)=0
219 IVANO(INC(IE,11),I)=0
220 450 IVANO(INC(IE,15),I)=0
221 250 CONTINUE
222 C

```

```

223 C    CALCULO DO NUMERO TOTAL DE
224 C    GRAUS DE LIBERDADE
225 C
226 330 K=NVLO+1
227 DO 460 I=NNOSI,NNOS
228 DO 470 J=1,NDF
229 IF(IVANO(I,J).EQ.0) GO TO 470
230 IVANO(I,J)=K
231 K=K+1
232 470 CONTINUE
233 460 CONTINUE
234 NVLO=K-1
235 C
236 C    CALCULO DAS INCIDENCIAS DAS
237 C    VARIAVEIS DOS ELEMENTOS
238 C
239 DO 480 IE=1,NE
240 L=1
241 DO 480 J=1,NOEL(IE)
242 I=INC(IE,J)
243 DO 480 K=1,NDF
244 IVNO(IE,L)=IVANO(I,K)
245 480 L=L+1
246 C
247 RETURN
248 END

1 SUBROUTINE MASS(NDF,NDM,NOELI,NOELT
2 1,NVELI,NVELT,IGH,LADO,XL,IL,IE,MAE,MAH)
3 C . . . . .
4 C .
5 C . P R O G R A M A
6 C . PARA CALCULAR A MATRIZ DE MASSA DO
7 C . ELEMENTO
8 C .
9 C . DIMENSAO DAS VARIAVEIS
10 C . XL(NOELI,NDM),S(NW),RG(216),SG(216),
11 C . TG(216),WG(216),SHP(4,NOELT),
12 C . DAT(NE,NDAD),LL(NDM),
13 C . NH(NE,NLADMAX,NREAN),NOEL(NE)
14 C . . . . .
15 DIMENSION XL(16,3)
16 COMMON /BS/ S(9591)
17 COMMON /BRSTW/ RG(216),SG(216),TG(216)
18 1,WG(216)
19 COMMON /BSHP/ SHP(4,46)
20 COMMON /BDAT/ DAT(108,3)
21 COMMON /BLL/ LL(3)
22 COMMON /BNH/ NH(108,14,20)
23 COMMON /BNOEL/ NOEL(108)
24 C
25 DO 10 I=1,3
26 10 LL(I)=MINO(6,MAXO(1,LL(I)))
27 C
28 DO 20 I=NVELI,NVELT
29 DO 20 J=1,I
30 IJ=ITRAD(I,J)
31 20 S(IJ)=0.0
32 C
33 C    CALCULO DOS PONTOS DE INTEGRACAO DE GAUSS
34 C
35 CALL PGAUSS(LINT)
36 C
37 DO 30 L=1,LINT
38 C
39 C    AVALIACAO DA SEQUENCIA DOS PONTOS DE GAUSS
40 C
41 IF(IL.EQ.123) GO TO 223
42 IF(IL.EQ.132) GO TO 232
43 IF(IL.EQ.213) GO TO 313
44 IF(IL.EQ.231) GO TO 331
45 IF(IL.EQ.312) GO TO 412
46 IF(IL.EQ.321) GO TO 421
47 C
48 C    CALCULO DOS VALORES DAS FUNCOES DE INTER-
49 C    POLACAO NOS PONTOS RG(L),SG(L),TG(L)
50 C
51 223 CALL SHAPE(RG(L),SG(L),TG(L),XSJ,NDM
52 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
53 GO TO 40
54 C
55 232 CALL SHAPE(RG(L),TG(L),SG(L),XSJ,NDM
56 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
57 GO TO 40
58 C
59 313 CALL SHAPE(SG(L),RG(L),TG(L),XSJ,NDM
60 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
61 GO TO 40
62 C
63 331 CALL SHAPE(SG(L),TG(L),RG(L),XSJ,NDM
64 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
65 GO TO 40
66 C
67 412 CALL SHAPE(TG(L),RG(L),SG(L),XSJ,NDM
68 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
69 GO TO 40
70 C
71 421 CALL SHAPE(TG(L),SG(L),RG(L),XSJ,NDM
72 1,NOELI,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
73 C
74 40 DV=WG(L)*XSJ*D(IE,3)
75 C
76 C    CALCULO DA MATRIZ DE MASSA
77 C
78 DO 30 J=NOELI,NOELT
79 W11=SHP(4,J)*DV
80 I1=NDF*(J-1)
81 C
82 DO 30 I=1,J
83 J1=NDF*(I-1)
84 I1J1=ITRAD(I1,J1)
85 30 S(I1J1)=S(I1J1)+SHP(4,I)*W11
86 C
87 DO 50 I=NVELI,NVELT,NDF
88 I1=I+1
89 I2=I+2
90 C
91 DO 50 J=1,I,NDF
92 J1=J+1
93 J2=J+2
94 I1J1=ITRAD(I1,J1)
95 I2J2=ITRAD(I2,J2)
96 IJ=ITRAD(I,J)
97 S(I1J1)=S(IJ)
98 50 S(I2J2)=S(IJ)
99 C
100 RETURN
101 END

1 SUBROUTINE MULTK(J,NVLT)
2 C . . . . .
3 C .
4 C . P R O G R A M A
5 C . TO EVALUATE PRODUCT OF RKG TIMES FI
6 C . AND STORE RESULT IN IT
7 C .
8 C . DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
9 C . RKG(NWK),RMG(NWM),MAXA(NVLT+1),

```



```

10 C . TT(NVLT),FI(NVLT,NC)
11 C .
12 COMMON /BKM/ RKG(340000),RMG(340000)
13 COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
14 COMMON /BTT/ TT(2810)
15 COMMON /BFI/ FI(2810,23)
16 C
17 DO 40 I=1,NVLT
18 40 TT(I)=0.
19 DO 100 I=1,NVLT
20 KL=MAXA(I)
21 KU=MAXA(I+1)-1
22 II=I+1
23 CC=FI(I,J)
24 DO 100 KK=KL,KU
25 II=II-1
26 100 TT(II)=TT(II)+RKG(KK)*CC
27 IF(NVLT.EQ.1) RETURN
28 DO 200 I=2,NVLT
29 KL=MAXA(I)+1
30 KU=MAXA(I+1)-1
31 IF (KU-KL) 200,210,210
32 210 II=I
33 AA=0.
34 DO 220 KK=KL,KU
35 II=II-1
36 220 AA=AA+RKG(KK)*FI(II,J)
37 TT(I)=TT(I)+AA
38 200 CONTINUE
39 C
40 RETURN
41 END

```

```

1 SUBROUTINE MULTM(J,NVLT)
2 C .
3 C .
4 C . P R O G R A M
5 C . TO EVALUATE PRODUCT OF RMG TIMES FI AND
6 C . STORE RESULT IN TT
7 C .
8 C . DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
9 C . RKG(NWK),RMG(NWM),MAXA(NVLT+1),
10 C . TT(NVLT),FI(NVLT,NC)
11 C .
12 COMMON /BKM/ RKG(340000),RMG(340000)
13 COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
14 COMMON /BTT/ TT(2810)
15 COMMON /BFI/ FI(2810,23)
16 C
17 DO 40 I=1,NVLT
18 40 TT(I)=0.
19 DO 100 I=1,NVLT
20 KL=MAXA(I)
21 KU=MAXA(I+1)-1
22 II=I+1
23 CC=FI(I,J)
24 DO 100 KK=KL,KU
25 II=II-1
26 100 TT(II)=TT(II)+RMG(KK)*CC
27 IF(NVLT.EQ.1) RETURN
28 DO 200 I=2,NVLT
29 KL=MAXA(I)+1
30 KU=MAXA(I+1)-1
31 IF (KU-KL) 200,210,210
32 210 II=I
33 AA=0.
34 DO 220 KK=KL,KU
35 II=II-1
36 220 AA=AA+RMG(KK)*FI(II,J)

```

```

37 TT(I)=TT(I)+AA
38 200 CONTINUE
39 C
40 RETURN
41 END

1 SUBROUTINE PGAUSS(LINT)
2 C .
3 C .
4 C . P R O G R A M
5 C . PARA CALCULAR AS POSICOES E OS PESOS DOS.
6 C . PONTOS DE GAUSS PARA TRES DIMENSOES,
7 C . USANDO ATE 6x6x6 PONTOS DE INTEGRACAO
8 C .
9 C . DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
10 C . WJ(216),WB(216),RG(216),SG(216),TG(216),
11 C . WG(216),LL(3)
12 C .
13 DIMENSION WJ(216),WB(216)
14 COMMON /BRSTW/ RG(216),SG(216),TG(216)
15 1,WG(216)
16 COMMON /BLL/ LL(3)
17 C
18 LINT=LL(1)*LL(2)*LL(3)
19 C
20 C11=0.0
21 C21=5773502.69189626D-07
22 C31=7745966.69241483D-07
23 C32=0.0
24 C41=8611363.11594053D-07
25 C42=3399810.43584856D-07
26 C51=9061798.45938664D-07
27 C52=5384693.10105683D-07
28 C53=0.0
29 C61=9324695.14203152D-07
30 C62=6612093.86466265D-07
31 C63=2386191.86083197D-07
32 A11=2.0
33 A21=1.0
34 A31=5555555.55555555D-07
35 A32=8888888.88888889D-07
36 A41=3478548.45137454D-07
37 A42=6521451.54862546D-07
38 A51=2369268.85056189D-07
39 A52=4786286.70499366D-07
40 A53=5688888.88888889D-07
41 A61=1713244.92379170D-07
42 A62=3607615.73048139D-07
43 A63=4679139.34572691D-07
44 IF(LL(1).GT.1) GO TO 2
45 C=====
46 C===== 1x1x1 =====
47 C=====
48 RG(1)=C11
49 SG(1)=C11
50 TG(1)=C11
51 WG(1)=A11*A11*A11
52 RETURN
53 2 IF(LL(1).GT.2) GO TO 3
54 C=====
55 C===== 2x?x? =====
56 C=====
57 RG(1)=-C21
58 RG(2)=C21
59 DO 10 I=1,2
60 10 WJ(I)=A21
61 IF(LL(2).GT.1) GO TO 22
62 C----- 2x1x? -----
63 C-----

```

```

64      DO 20 I=1,2
65      SG(I)=C11
66      20 WB(I)=WU(I)*A11
67 C----- 2x1x1 -----
68      DO 30 I=1,2
69      TG(I)=C11
70      30 WG(I)=WB(I)*A11
71      RETURN
72 C----- 2x2x? -----
73 C-----
74      22 DO 40 I=1,2
75      SG(I)=-C21
76      40 WB(I)=WU(I)*A21
77      DO 50 I=3,4
78      SG(I)=C21
79      J=I-2
80      RG(I)=RG(J)
81      50 WB(I)=WB(J)
82      IF(LL(3).GT.1) GO TO 222
83 C----- 2x2x1 -----
84      DO 60 I=1,4
85      TG(I)=C11
86      60 WG(I)=WB(I)*A11
87      RETURN
88 C----- 2x2x2 -----
89      222 DO 70 I=1,4
90      TG(I)=C21
91      70 WG(I)=WB(I)*A21
92      DO 80 I=5,8
93      TG(I)=-C21
94      J=I-4
95      RG(I)=RG(J)
96      SG(I)=SG(J)
97      80 WG(I)=WG(J)
98      RETURN
99      3 IF(LL(1).GT.3) GO TO 4
100 C=====
101 C===== 3x?x? =====
102 C=====
103      RG(1)=-C31
104      RG(2)=C31
105      RG(3)=C32
106      DO 90 I=1,2
107      90 WU(I)=A31
108      WU(3)=A32
109      IF(LL(2).GT.1) GO TO 32
110 C----- 3x1x? -----
111 C-----
112      DO 100 I=1,3
113      SG(I)=C11
114      100 WB(I)=WU(I)*A11
115 C----- 3x1x1 -----
116      DO 110 I=1,3
117      TG(I)=C11
118      110 WG(I)=WB(I)*A11
119      RETURN
120      32 IF(LL(2).GT.2) GO TO 33
121 C----- 3x2x? -----
122 C-----
123      DO 120 I=1,3
124      SG(I)=-C21
125      120 WB(I)=WU(I)*A21
126      DO 130 I=4,6
127      SG(I)=C21
128      J=I-3
129      RG(I)=RG(J)
130      130 WB(I)=WB(J)
131      IF(LL(3).GT.1) GO TO 322
132 C----- 3x2x1 -----
133      DO 140 I=1,6
134      TG(I)=C11
135      140 WG(I)=WB(I)*A11
136      RETURN
137 C----- 3x2x2 -----
138      322 DO 150 I=1,6
139      TG(I)=C21
140      150 WG(I)=WB(I)*A21
141      DO 160 I=7,12
142      TG(I)=-C21
143      J=I-6
144      RG(I)=RG(J)
145      SG(I)=SG(J)
146      160 WG(I)=WG(J)
147      RETURN
148 C----- 3x3x? -----
149 C-----
150      33 DO 170 I=1,3
151      SG(I)=-C31
152      170 WB(I)=WU(I)*A31
153      DO 180 I=4,6
154      SG(I)=C32
155      J=I-3
156      RG(I)=RG(J)
157      180 WB(I)=WU(J)*A32
158      DO 190 I=7,9
159      SG(I)=C31
160      J=I-6
161      RG(I)=RG(J)
162      190 WB(I)=WB(J)
163      IF(LL(3).GT.1) GO TO 332
164 C----- 3x3x1 -----
165      DO 200 I=1,9
166      TG(I)=C11
167      200 WG(I)=WB(I)*A11
168      RETURN
169      332 IF(LL(3).GT.2) GO TO 333
170 C----- 3x3x2 -----
171      DO 210 I=1,9
172      TG(I)=C21
173      210 WG(I)=WB(I)*A21
174      DO 220 I=10,18
175      TG(I)=-C21
176      J=I-9
177      RG(I)=RG(J)
178      SG(I)=SG(J)
179      220 WG(I)=WG(J)
180      RETURN
181 C----- 3x3x3 -----
182      333 DO 230 I=1,9
183      TG(I)=C31
184      230 WG(I)=WB(I)*A31
185      DO 240 I=10,18
186      TG(I)=C32
187      J=I-9
188      RG(I)=RG(J)
189      SG(I)=SG(J)
190      240 WG(I)=WB(J)*A32
191      DO 250 I=19,27
192      TG(I)=-C31
193      J=I-18
194      RG(I)=RG(J)
195      SG(I)=SG(J)
196      250 WG(I)=WG(J)
197      RETURN
198      4 IF(LL(1).GT.4) GO TO 5
199 C=====
200 C===== 4x?x? =====
201 C=====
202      RG(1)=-C41
203      RG(2)=C41

```

```

204      RG(3)=-C42
205      RG(4)=C42
206      DO 260 I=1,2
207 260   WU(1)=A41
208      DO 270 I=3,4
209 270   WU(1)=A42
210      IF(LL(2).GT.1) GO TO 42
211 C----- 4x1x? -----
212 C-----
213      DO 280 I=1,4
214      SG(I)=C11
215 280   WB(I)=WU(I)*A11
216 C----- 4x1x1 -----
217      DO 290 I=1,4
218      TG(I)=C11
219 290   WG(I)=WB(I)*A11
220      RETURN
221 42 IF(LL(2).GT.2) GO TO 43
222 C----- 4x2x? -----
223 C-----
224      DO 300 I=1,4
225      SG(I)=-C21
226 300   WB(I)=WU(I)*A21
227      DO 310 I=5,8
228      SG(I)=C21
229      J=I-4
230      RG(I)=RG(J)
231 310   WB(I)=WB(J)
232      IF(LL(3).GT.1) GO TO 422
233 C----- 4x2x1 -----
234      DO 320 I=1,8
235      TG(I)=C11
236 320   WG(I)=WB(I)*A11
237      RETURN
238 C----- 4x2x2 -----
239 422 DO 330 I=1,8
240      TG(I)=C21
241 330   WG(I)=WB(I)*A21
242      DO 340 I=9,16
243      TG(I)=-C21
244      J=I-8
245      RG(I)=RG(J)
246      SG(I)=SG(J)
247 340   WG(I)=WG(J)
248      RETURN
249 43 IF(LL(2).GT.3) GO TO 44
250 C----- 4x3x? -----
251 C-----
252      DO 350 I=1,4
253      SG(I)=-C31
254 350   WB(I)=WU(I)*A31
255      DO 360 I=5,8
256      SG(I)=C32
257      J=I-4
258      RG(I)=RG(J)
259 360   WB(I)=WU(J)*A32
260      DO 370 I=9,12
261      SG(I)=C31
262      J=I-8
263      RG(I)=RG(J)
264 370   WB(I)=WB(J)
265      IF(LL(3).GT.1) GO TO 432
266 C----- 4x3x1 -----
267      DO 380 I=1,12
268      TG(I)=C11
269 380   WG(I)=WB(I)*A11
270      RETURN
271 432 IF(LL(3).GT.2) GO TO 433
272 C----- 4x3x2 -----
273      DO 390 I=1,12

```

```

274      TG(I)=C21
275 390   WG(I)=WB(I)*A21
276      DO 400 I=13,24
277      TG(I)=-C21
278      J=I-12
279      RG(I)=RG(J)
280      SG(I)=SG(J)
281 400   WG(I)=WG(J)
282      RETURN
283 C----- 4x3x3 -----
284 433 DO 410 I=1,12
285      TG(I)=C31
286 410   WG(I)=WB(I)*A31
287      DO 420 I=13,24
288      TG(I)=C32
289      J=I-12
290      RG(I)=RG(J)
291      SG(I)=SG(J)
292 420   WG(I)=WB(J)*A32
293      DO 430 I=25,36
294      TG(I)=-C31
295      J=I-24
296      RG(I)=RG(J)
297      SG(I)=SG(J)
298 430   WG(I)=WG(J)
299      RETURN
300 C----- 4x4x? -----
301 C-----
302 44 DO 440 I=1,4
303      SG(I)=-C41
304 440   WB(I)=WU(I)*A41
305      DO 450 I=5,8
306      SG(I)=C41
307      J=I-4
308      RG(I)=RG(J)
309 450   WB(I)=WB(J)
310      DO 460 I=9,12
311      SG(I)=-C42
312      J=I-8
313      RG(I)=RG(J)
314 460   WB(I)=WU(J)*A42
315      DO 470 I=13,16
316      SG(I)=C42
317      J=I-4
318      RG(I)=RG(J)
319 470   WB(I)=WB(J)
320      IF(LL(3).GT.1) GO TO 442
321 C----- 4x4x1 -----
322      DO 480 I=1,16
323      TG(I)=C11
324 480   WG(I)=WB(I)*A11
325      RETURN
326 442 IF(LL(3).GT.2) GO TO 443
327 C----- 4x4x2 -----
328      DO 490 I=1,16
329      TG(I)=C21
330 490   WG(I)=WB(I)*A21
331      DO 500 I=17,32
332      TG(I)=-C21
333      J=I-16
334      RG(I)=RG(J)
335      SG(I)=SG(J)
336 500   WG(I)=WG(J)
337      RETURN
338 443 IF(LL(3).GT.3) GO TO 444
339 C----- 4x4x3 -----
340      DO 510 I=1,16
341      TG(I)=C31
342 510   WG(I)=WB(I)*A31
343      DO 520 I=17,32

```

```

344      TG(I)=C32
345      J=I-16
346      RG(I)=RG(J)
347      SG(I)=SG(J)
348 520  WG(I)=WB(J)*A32
349      DO 530 I=33,48
350      TG(I)=-C31
351      J=I-32
352      RG(I)=RG(J)
353      SG(I)=SG(J)
354 530  WG(I)=WG(J)
355      RETURN
356 C----- 4x4x4 -----
357 444  DO 540 I=1,16
358      TG(I)=C41
359 540  WG(I)=WB(I)*A41
360      DO 550 I=17,32
361      TG(I)=C42
362      J=I-16
363      RG(I)=RG(J)
364      SG(I)=SG(J)
365 550  WG(I)=WB(J)*A42
366      DO 560 I=33,48
367      TG(I)=-C42
368      J=I-16
369      RG(I)=RG(J)
370      SG(I)=SG(J)
371 560  WG(I)=WG(J)
372      DO 570 I=49,64
373      TG(I)=-C41
374      J=I-48
375      RG(I)=RG(J)
376      SG(I)=SG(J)
377 570  WG(I)=WG(J)
378      RETURN
379      5 IF(LL(1).GT.5) GO TO 6
380 C=====
381 C===== 5x?x? =====
382 C=====
383      RG(1)=-C51
384      RG(2)=C51
385      RG(3)=-C52
386      RG(4)=C52
387      RG(5)=C53
388      DO 580 I=1,2
389 580  WU(I)=A51
390      DO 590 I=3,4
391 590  WU(I)=A52
392      WU(5)=A53
393      IF(LL(2).GT.1) GO TO 52
394 C----- 5x1x? -----
395 C-----
396      DO 600 I=1,5
397      SG(I)=C11
398 600  WB(I)=WU(I)*A11
399 C----- 5x1x1 -----
400      DO 610 I=1,5
401      TG(I)=C11
402 610  WG(I)=WB(I)*A11
403      RETURN
404      52 IF(LL(2).GT.2) GO TO 53
405 C----- 5x2x? -----
406 C-----
407      DO 620 I=1,5
408      SG(I)=-C21
409 620  WB(I)=WU(I)
410      DO 630 I=6,10
411      SG(I)=C21
412      J=I-5
413      RG(I)=RG(J)
414 630  WB(I)=WB(J)
415      IF(LL(3).GT.1) GO TO 522
416 C----- 5x2x1 -----
417      DO 640 I=1,10
418      TG(I)=C11
419 640  WG(I)=WB(I)*A11
420      RETURN
421 C----- 5x2x2 -----
422 522  DO 650 I=1,10
423      TG(I)=C21
424 650  WG(I)=WB(I)*A21
425      DO 660 I=11,20
426      TG(I)=-C21
427      J=I-10
428      RG(I)=RG(J)
429      SG(I)=SG(J)
430 660  WG(I)=WG(J)
431      RETURN
432      53 IF(LL(2).GT.3) GO TO 54
433 C----- 5x3x? -----
434 C-----
435      DO 670 I=1,5
436      SG(I)=-C31
437 670  WB(I)=WU(I)*A31
438      DO 680 I=6,10
439      SG(I)=C31
440      J=I-5
441      RG(I)=RG(J)
442 680  WB(I)=WB(J)
443      DO 690 I=11,15
444      SG(I)=C32
445      J=I-10
446      RG(I)=RG(J)
447 690  WB(I)=WU(J)*A32
448      IF(LL(3).GT.1) GO TO 532
449 C----- 5x3x1 -----
450      DO 700 I=1,15
451      TG(I)=C11
452 700  WG(I)=WB(I)*A11
453      RETURN
454 532  IF(LL(3).GT.2) GO TO 533
455 C----- 5x3x2 -----
456      DO 710 I=1,15
457      TG(I)=C21
458 710  WG(I)=WB(I)*A21
459      DO 720 I=16,30
460      TG(I)=-C21
461      J=I-15
462      RG(I)=RG(J)
463      SG(I)=SG(J)
464 720  WG(I)=WG(J)
465      RETURN
466 C----- 5x3x3 -----
467 533  DO 730 I=1,15
468      TG(I)=C31
469 730  WG(I)=WB(I)*A31
470      DO 740 I=16,30
471      TG(I)=C32
472      J=I-15
473      RG(I)=RG(J)
474      SG(I)=SG(J)
475 740  WG(I)=WB(J)*A32
476      DO 750 I=31,45
477      TG(I)=-C31
478      J=I-30
479      RG(I)=RG(J)
480      SG(I)=SG(J)
481 750  WG(I)=WG(J)
482      RETURN
483      54 IF(LL(2).GT.4) GO TO 55

```

```

484 C----- 5x4x? -----
485 C-----
486     DO 760 I=1,5
487     SG(I)=-C41
488     760 WB(I)=WU(I)*A41
489     DO 770 I=6,10
490     SG(I)=C41
491     J=I-5
492     RG(I)=RG(J)
493     770 WB(I)=WB(J)
494     DO 780 I=11,15
495     SG(I)=-C42
496     J=I-10
497     RG(I)=RG(J)
498     780 WB(I)=WU(J)*A42
499     DO 790 I=16,20
500     SG(I)=C42
501     J=I-5
502     RG(I)=RG(J)
503     790 WB(I)=WB(J)
504     IF(LL(3).GT.1) GO TO 542
505 C----- 5x4x1 -----
506     DO 800 I=1,20
507     TG(I)=C11
508     800 WG(I)=WB(I)*A11
509     RETURN
510     542 IF(LL(3).GT.2) GO TO 543
511 C----- 5x4x2 -----
512     DO 810 I=1,20
513     TG(I)=C21
514     810 WG(I)=WB(I)*A21
515     DO 820 I=21,40
516     TG(I)=-C21
517     J=I-20
518     RG(I)=RG(J)
519     SG(I)=SG(J)
520     820 WG(I)=WG(J)
521     RETURN
522     543 IF(LL(3).GT.3) GO TO 544
523 C----- 5x4x3 -----
524     DO 830 I=1,20
525     TG(I)=C31
526     830 WG(I)=WB(I)*A31
527     DO 840 I=21,40
528     TG(I)=C32
529     J=I-20
530     RG(I)=RG(J)
531     SG(I)=SG(J)
532     840 WG(I)=WB(J)*A32
533     DO 850 I=41,60
534     TG(I)=-C31
535     J=I-40
536     RG(I)=RG(J)
537     SG(I)=SG(J)
538     850 WG(I)=WG(J)
539     RETURN
540 C----- 5x4x4 -----
541     544 DO 860 I=1,20
542     TG(I)=C41
543     860 WG(I)=WB(I)*A41
544     DO 870 I=21,40
545     TG(I)=C42
546     J=I-20
547     RG(I)=RG(J)
548     SG(I)=SG(J)
549     870 WG(I)=WB(J)*A42
550     DO 880 I=41,60
551     TG(I)=-C42
552     J=I-20
553     RG(I)=RG(J)

```

```

554     SG(I)=SG(J)
555     880 WG(I)=WG(J)
556     DO 890 I=61,80
557     TG(I)=-C41
558     J=I-60
559     RG(I)=RG(J)
560     SG(I)=SG(J)
561     890 WG(I)=WG(J)
562     RETURN
563 C----- 5x5x? -----
564 C-----
565     55 DO 900 I=1,5
566     SG(I)=-C51
567     900 WB(I)=WU(I)*A51
568     DO 910 I=6,10
569     SG(I)=C51
570     J=I-5
571     RG(I)=RG(J)
572     910 WB(I)=WB(J)
573     DO 920 I=11,15
574     SG(I)=-C52
575     J=I-10
576     RG(I)=RG(J)
577     920 WB(I)=WU(J)*A52
578     DO 930 I=16,20
579     SG(I)=C52
580     J=I-5
581     RG(I)=RG(J)
582     930 WB(I)=WB(J)
583     DO 940 I=21,25
584     SG(I)=C53
585     J=I-20
586     RG(I)=RG(J)
587     940 WB(I)=WU(J)*A53
588     IF(LL(3).GT.1) GO TO 552
589 C----- 5x5x1 -----
590     DO 950 I=1,25
591     TG(I)=C11
592     950 WG(I)=WB(I)*A11
593     RETURN
594     552 IF(LL(3).GT.2) GO TO 553
595 C----- 5x5x2 -----
596     DO 960 I=1,25
597     TG(I)=C21
598     960 WG(I)=WB(I)*A21
599     DO 970 I=26,50
600     TG(I)=-C21
601     J=I-25
602     RG(I)=RG(J)
603     SG(I)=SG(J)
604     970 WG(I)=WG(J)
605     RETURN
606     553 IF(LL(3).GT.3) GO TO 554
607 C----- 5x5x3 -----
608     DO 980 I=1,25
609     TG(I)=C31
610     980 WG(I)=WB(I)*A31
611     DO 990 I=26,50
612     TG(I)=C32
613     J=I-25
614     RG(I)=RG(J)
615     SG(I)=SG(J)
616     990 WG(I)=WB(J)*A32
617     DO 1000 I=51,75
618     TG(I)=-C31
619     J=I-50
620     RG(I)=RG(J)
621     SG(I)=SG(J)
622     1000 WG(I)=WG(J)
623     RETURN

```

```

624 554 IF(LL(3).GT.4) GO TO 555
625 C----- 5x5x4 -----
626 DO 1010 I=1,25
627 TG(I)=C41
628 1010 WG(I)=WB(I)*A41
629 DO 1020 I=26,50
630 TG(I)=C42
631 J=I-25
632 RG(I)=RG(J)
633 SG(I)=SG(J)
634 1020 WG(I)=WB(J)*A42
635 DO 1030 I=51,75
636 TG(I)=C42
637 J=I-25
638 RG(I)=RG(J)
639 SG(I)=SG(J)
640 1030 WG(I)=WG(J)
641 DO 1040 I=76,100
642 TG(I)=C41
643 J=I-75
644 RG(I)=RG(J)
645 SG(I)=SG(J)
646 1040 WG(I)=WG(J)
647 RETURN
648 C----- 5x5x5 -----
649 555 DO 1050 I=1,25
650 TG(I)=C51
651 1050 WG(I)=WB(I)*A51
652 DO 1060 I=26,50
653 TG(I)=C52
654 J=I-25
655 RG(I)=RG(J)
656 SG(I)=SG(J)
657 1060 WG(I)=WB(J)*A52
658 DO 1070 I=51,75
659 TG(I)=C53
660 J=I-50
661 RG(I)=RG(J)
662 SG(I)=SG(J)
663 1070 WG(I)=WB(J)*A53
664 DO 1080 I=76,100
665 TG(I)=C52
666 J=I-50
667 RG(I)=RG(J)
668 SG(I)=SG(J)
669 1080 WG(I)=WG(J)
670 DO 1090 I=101,125
671 TG(I)=C51
672 J=I-100
673 RG(I)=RG(J)
674 SG(I)=SG(J)
675 1090 WG(I)=WG(J)
676 RETURN
677 C=====
678 C===== 6x?x? =====
679 C=====
680 6 RG(1)=-C61
681 RG(2)=C61
682 RG(3)=-C62
683 RG(4)=C62
684 RG(5)=-C63
685 RG(6)=C63
686 DO 1100 I=1,2
687 1100 WU(I)=A61
688 DO 1110 I=3,4
689 1110 WU(I)=A62
690 DO 1120 I=5,6
691 1120 WU(I)=A63
692 IF(LL(2).GT.1) GO TO 62
693 C----- 6x1x? -----

```

```

694 C-----
695 DO 1130 I=1,6
696 SG(I)=C11
697 1130 WB(I)=WU(I)*A11
698 C----- 6x1x1 -----
699 DO 1140 I=1,6
700 TG(I)=C11
701 1140 WG(I)=WB(I)*A11
702 RETURN
703 62 IF(LL(2).GT.2) GO TO 63
704 C----- 6x2x? -----
705 C-----
706 DO 1150 I=1,6
707 SG(I)=-C21
708 1150 WB(I)=WU(I)
709 DO 1160 I=7,12
710 SG(I)=C21
711 J=I-6
712 RG(I)=RG(J)
713 1160 WB(I)=WB(J)
714 IF(LL(3).GT.1) GO TO 622
715 C----- 6x2x1 -----
716 DO 1170 I=1,12
717 TG(I)=C11
718 1170 WG(I)=WB(I)*A11
719 RETURN
720 C----- 6x2x2 -----
721 622 DO 1180 I=1,12
722 TG(I)=C21
723 1180 WG(I)=WB(I)*A21
724 DO 1190 I=13,24
725 TG(I)=-C21
726 J=I-12
727 RG(I)=RG(J)
728 SG(I)=SG(J)
729 1190 WG(I)=WG(J)
730 RETURN
731 63 IF(LL(2).GT.3) GO TO 64
732 C----- 6x3x? -----
733 C-----
734 DO 1200 I=1,6
735 SG(I)=-C31
736 1200 WB(I)=WU(I)*A31
737 DO 1210 I=7,12
738 SG(I)=C31
739 J=I-6
740 RG(I)=RG(J)
741 1210 WB(I)=WB(J)
742 DO 1220 I=13,18
743 SG(I)=C32
744 J=I-12
745 RG(I)=RG(J)
746 1220 WB(I)=WU(J)*A32
747 IF(LL(3).GT.1) GO TO 632
748 C----- 6x3x1 -----
749 DO 1230 I=1,18
750 TG(I)=C11
751 1230 WG(I)=WB(I)*A11
752 RETURN
753 632 IF(LL(3).GT.2) GO TO 633
754 C----- 6x3x2 -----
755 DO 1240 I=1,18
756 TG(I)=C21
757 1240 WG(I)=WB(I)*A21
758 DO 1250 I=19,36
759 TG(I)=-C21
760 J=I-18
761 RG(I)=RG(J)
762 SG(I)=SG(J)
763 1250 WG(I)=WG(J)

```

```

764      RETURN
765 C----- 6x3x3 -----
766      633 DO 1260 I=1,18
767          TG(I)=C31
768      1260 WG(I)=WB(I)*A31
769          DO 1270 I=19,36
770          TG(I)=C32
771          J=I-18
772          RG(I)=RG(J)
773          SG(I)=SG(J)
774      1270 WG(I)=WB(J)*A32
775          DO 1280 I=37,54
776          TG(I)=C31
777          J=I-36
778          RG(I)=RG(J)
779          SG(I)=SG(J)
780      1280 WG(I)=WB(J)
781      RETURN
782      64 IF(LL(2).GT.4) GO TO 65
783 C----- 6x4x? -----
784 C-----
785          DO 1290 I=1,6
786          SG(I)=C41
787      1290 WB(I)=WU(I)*A41
788          DO 1300 I=7,12
789          SG(I)=C41
790          J=I-6
791          RG(I)=RG(J)
792      1300 WB(I)=WB(J)
793          DO 1310 I=13,18
794          SG(I)=C42
795          J=I-12
796          RG(I)=RG(J)
797      1310 WB(I)=WU(J)*A42
798          DO 1320 I=19,24
799          SG(I)=C42
800          J=I-6
801          RG(I)=RG(J)
802      1320 WB(I)=WB(J)
803          IF(LL(3).GT.1) GO TO 642
804 C----- 6x4x1 -----
805          DO 1330 I=1,24
806          TG(I)=C11
807      1330 WG(I)=WB(I)*A11
808      RETURN
809      642 IF(LL(3).GT.2) GO TO 643
810 C----- 6x4x2 -----
811          DO 1340 I=1,24
812          TG(I)=C21
813      1340 WG(I)=WB(I)*A21
814          DO 1350 I=25,48
815          TG(I)=C21
816          J=I-24
817          RG(I)=RG(J)
818          SG(I)=SG(J)
819      1350 WG(I)=WB(J)
820      RETURN
821      643 IF(LL(3).GT.3) GO TO 644
822 C----- 6x4x3 -----
823          DO 1360 I=1,24
824          TG(I)=C31
825      1360 WG(I)=WB(I)*A31
826          DO 1370 I=25,48
827          TG(I)=C32
828          J=I-24
829          RG(I)=RG(J)
830          SG(I)=SG(J)
831      1370 WG(I)=WB(J)*A32
832          DO 1380 I=49,72
833          TG(I)=C31

```

```

834          J=I-48
835          RG(I)=RG(J)
836          SG(I)=SG(J)
837      1380 WG(I)=WB(J)
838      RETURN
839 C----- 6x4x4 -----
840      644 DO 1390 I=1,24
841          TG(I)=C41
842      1390 WG(I)=WB(I)*A41
843          DO 1400 I=25,48
844          TG(I)=C42
845          J=I-24
846          RG(I)=RG(J)
847          SG(I)=SG(J)
848      1400 WG(I)=WB(J)*A42
849          DO 1410 I=49,72
850          TG(I)=C42
851          J=I-24
852          RG(I)=RG(J)
853          SG(I)=SG(J)
854      1410 WG(I)=WB(J)
855          DO 1420 I=73,96
856          TG(I)=C41
857          J=I-72
858          RG(I)=RG(J)
859          SG(I)=SG(J)
860      1420 WG(I)=WB(J)
861      RETURN
862      65 IF(LL(2).GT.5) GO TO 66
863 C----- 6x5x? -----
864 C-----
865          DO 1430 I=1,6
866          SG(I)=C51
867      1430 WB(I)=WU(I)*A51
868          DO 1440 I=7,12
869          SG(I)=C51
870          J=I-6
871          RG(I)=RG(J)
872      1440 WB(I)=WB(J)
873          DO 1450 I=13,18
874          SG(I)=C52
875          J=I-12
876          RG(I)=RG(J)
877      1450 WB(I)=WU(J)*A52
878          DO 1460 I=19,24
879          SG(I)=C52
880          J=I-6
881          RG(I)=RG(J)
882      1460 WB(I)=WB(J)
883          DO 1470 I=25,30
884          SG(I)=C53
885          J=I-24
886          RG(I)=RG(J)
887      1470 WB(I)=WU(J)*A53
888          IF(LL(3).GT.1) GO TO 652
889 C----- 6x5x1 -----
890          DO 1480 I=1,30
891          TG(I)=C11
892      1480 WG(I)=WB(I)*A11
893      RETURN
894      652 IF(LL(3).GT.2) GO TO 653
895 C----- 6x5x2 -----
896          DO 1490 I=1,30
897          TG(I)=C21
898      1490 WG(I)=WB(I)*A21
899          DO 1500 I=31,60
900          TG(I)=C21
901          J=I-30
902          RG(I)=RG(J)
903          SG(I)=SG(J)

```

```

904 1500 WG(I)=WG(J)
905 RETURN
906 653 IF(LL(3).GT.3) GO TO 654
907 C----- 6x5x3 -----
908 DO 1510 I=1,30
909 TG(I)=C31
910 1510 WG(I)=WB(I)*A31
911 DO 1520 I=31,60
912 TG(I)=C32
913 J=I-30
914 RG(I)=RG(J)
915 SG(I)=SG(J)
916 1520 WG(I)=WB(J)*A32
917 DO 1530 I=61,90
918 TG(I)=-C31
919 J=I-60
920 RG(I)=RG(J)
921 SG(I)=SG(J)
922 1530 WG(I)=WG(J)
923 RETURN
924 654 IF(LL(3).GT.4) GO TO 655
925 C----- 6x5x4 -----
926 DO 1540 I=1,30
927 TG(I)=C41
928 1540 WG(I)=WB(I)*A41
929 DO 1550 I=31,60
930 TG(I)=C42
931 J=I-30
932 RG(I)=RG(J)
933 SG(I)=SG(J)
934 1550 WG(I)=WB(J)*A42
935 DO 1560 I=61,90
936 TG(I)=-C42
937 J=I-30
938 RG(I)=RG(J)
939 SG(I)=SG(J)
940 1560 WG(I)=WG(J)
941 DO 1570 I=91,120
942 TG(I)=-C41
943 J=I-90
944 RG(I)=RG(J)
945 SG(I)=SG(J)
946 1570 WG(I)=WG(J)
947 RETURN
948 C----- 6x5x5 -----
949 655 DO 1580 I=1,30
950 TG(I)=C51
951 1580 WG(I)=WB(I)*A51
952 DO 1590 I=31,60
953 TG(I)=C52
954 J=I-30
955 RG(I)=RG(J)
956 SG(I)=SG(J)
957 1590 WG(I)=WB(J)*A52
958 DO 1600 I=61,90
959 TG(I)=C53
960 J=I-60
961 RG(I)=RG(J)
962 SG(I)=SG(J)
963 1600 WG(I)=WB(J)*A53
964 DO 1610 I=91,120
965 TG(I)=-C52
966 J=I-60
967 RG(I)=RG(J)
968 SG(I)=SG(J)
969 1610 WG(I)=WG(J)
970 DO 1620 I=121,150
971 TG(I)=-C51
972 J=I-120
973 RG(I)=RG(J)

```

```

974 SG(I)=SG(J)
975 1620 WG(I)=WG(J)
976 RETURN
977 C----- 6x6x? -----
978 C-----
979 66 DO 1630 I=1,6
980 SG(I)=-C61
981 1630 WB(I)=WU(I)*A61
982 DO 1640 I=7,12
983 SG(I)=C61
984 J=I-6
985 RG(I)=RG(J)
986 1640 WB(I)=WB(J)
987 DO 1650 I=13,18
988 SG(I)=-C62
989 J=I-12
990 RG(I)=RG(J)
991 1650 WB(I)=WU(J)*A62
992 DO 1660 I=19,24
993 SG(I)=C62
994 J=I-6
995 RG(I)=RG(J)
996 1660 WB(I)=WB(J)
997 DO 1670 I=25,30
998 SG(I)=-C63
999 J=I-24
1000 RG(I)=RG(J)
1001 1670 WB(I)=WU(J)*A63
1002 DO 1680 I=31,36
1003 SG(I)=C63
1004 J=I-6
1005 RG(I)=RG(J)
1006 1680 WB(I)=WB(J)
1007 IF(LL(3).GT.1) GO TO 662
1008 C----- 6x6x1 -----
1009 DO 1690 I=1,36
1010 TG(I)=C11
1011 1690 WG(I)=WB(I)*A11
1012 RETURN
1013 662 IF(LL(3).GT.2) GO TO 663
1014 C----- 6x6x2 -----
1015 DO 1700 I=1,36
1016 TG(I)=C21
1017 1700 WG(I)=WB(I)*A21
1018 DO 1710 I=37,72
1019 TG(I)=-C21
1020 J=I-36
1021 RG(I)=RG(J)
1022 SG(I)=SG(J)
1023 1710 WG(I)=WG(J)
1024 RETURN
1025 663 IF(LL(3).GT.3) GO TO 664
1026 C----- 6x6x3 -----
1027 DO 1720 I=1,36
1028 TG(I)=C31
1029 1720 WG(I)=WB(I)*A31
1030 DO 1730 I=37,72
1031 TG(I)=C32
1032 J=I-36
1033 RG(I)=RG(J)
1034 SG(I)=SG(J)
1035 1730 WG(I)=WB(J)*A32
1036 DO 1740 I=73,108
1037 TG(I)=-C31
1038 J=I-72
1039 RG(I)=RG(J)
1040 SG(I)=SG(J)
1041 1740 WG(I)=WG(J)
1042 RETURN
1043 664 IF(LL(3).GT.4) GO TO 665

```



```

1044 C----- 6x6x4 -----
1045     DO 1750 I=1,36
1046     TG(I)=C41
1047 1750 WG(I)=WB(I)*A41
1048     DO 1760 I=37,72
1049     TG(I)=C42
1050     J=I-36
1051     RG(I)=RG(J)
1052     SG(I)=SG(J)
1053 1760 WG(I)=WB(J)*A42
1054     DO 1770 I=73,108
1055     TG(I)=C42
1056     J=I-36
1057     RG(I)=RG(J)
1058     SG(I)=SG(J)
1059 1770 WG(I)=WG(J)
1060     DO 1780 I=109,144
1061     TG(I)=C41
1062     J=I-108
1063     RG(I)=RG(J)
1064     SG(I)=SG(J)
1065 1780 WG(I)=WG(J)
1066     RETURN
1067 665 IF(LL(3).GT.5) GO TO 666
1068 C----- 6x6x5 -----
1069     DO 1790 I=1,36
1070     TG(I)=C51
1071 1790 WG(I)=WB(I)*A51
1072     DO 1800 I=37,72
1073     TG(I)=C52
1074     J=I-36
1075     RG(I)=RG(J)
1076     SG(I)=SG(J)
1077 1800 WG(I)=WB(J)*A52
1078     DO 1810 I=73,108
1079     TG(I)=C53
1080     J=I-72
1081     RG(I)=RG(J)
1082     SG(I)=SG(J)
1083 1810 WG(I)=WB(J)*A53
1084     DO 1820 I=109,144
1085     TG(I)=C52
1086     J=I-72
1087     RG(I)=RG(J)
1088     SG(I)=SG(J)
1089 1820 WG(I)=WG(J)
1090     DO 1830 I=145,180
1091     TG(I)=C51
1092     J=I-144
1093     RG(I)=RG(J)
1094     SG(I)=SG(J)
1095 1830 WG(I)=WG(J)
1096     RETURN
1097 C----- 6x6x6 -----
1098 666 DO 1840 I=1,36
1099     TG(I)=C61
1100 1840 WG(I)=WB(I)*A61
1101     DO 1850 I=37,72
1102     TG(I)=C62
1103     J=I-36
1104     RG(I)=RG(J)
1105     SG(I)=SG(J)
1106 1850 WG(I)=WB(J)*A62
1107     DO 1860 I=73,108
1108     TG(I)=C63
1109     J=I-72
1110     RG(I)=RG(J)
1111     SG(I)=SG(J)
1112 1860 WG(I)=WB(J)*A63
1113     DO 1870 I=109,144

```

```

1114     TG(I)=C63
1115     J=I-36
1116     RG(I)=RG(J)
1117     SG(I)=SG(J)
1118 1870 WG(I)=WG(J)
1119     DO 1880 I=145,180
1120     TG(I)=C62
1121     J=I-108
1122     RG(I)=RG(J)
1123     SG(I)=SG(J)
1124 1880 WG(I)=WG(J)
1125     DO 1890 I=181,216
1126     TG(I)=C61
1127     J=I-180
1128     RG(I)=RG(J)
1129     SG(I)=SG(J)
1130 1890 WG(I)=WG(J)
1131 C
1132     RETURN
1133     END

```

```

1     SUBROUTINE REDBAK(NVLT)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C .   P R O G R A M
5 C .   TO REDUCE AND BACK-SUBSTITUTE ITERATION
6 C .   VECTORS
7 C .
8 C .   DIMENSÃO DAS VARIÁVEIS:
9 C .   RK(NWK),RKS(NWK),MAXA(NVLT+1),TT(NVLT)
10 C . . . . .
11     COMMON /BRK/  RK(340000),RKS(340000)
12     COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
13     COMMON /BIT/   TT(2810)
14 C
15     DO 10 N=1,NVLT
16     KL=MAXA(N)+1
17     KU=MAXA(N+1)-1
18     IF (KU-KL) 10,20,20
19 20 K=N
20     C=0.
21     DO 30 KK=KL,KU
22     K=K-1
23 30 C=C+RK(KK)*TT(K)
24     TT(N)=TT(N)-C
25 10 CONTINUE
26 C
27     DO 40 N=1,NVLT
28     K=MAXA(N)
29 40 TT(N)=TT(N)/RK(K)
30     IF(NVLT.EQ.1) RETURN
31     N=NVLT
32     DO 50 L=2,NVLT
33     KL=MAXA(N)+1
34     KU=MAXA(N+1)-1
35     IF (KU-KL) 50,60,60
36 60 K=N
37     DO 70 KK=KL,KU
38     K=K-1
39 70 TT(K)=TT(K)-RK(KK)*TT(N)
40 50 N=N-1
41 C
42     RETURN
43     END

```

```

1     SUBROUTINE SCHECK(NC,NEI,RTOL,SHIFT)
2 C . . . . .
3 C .

```

```

4 C . P R O G R A M .
5 C . TO EVALUATE SHIFT FOR .
6 C . STURM SEQUENCE CHECK .
7 C .
8 C . DIMENSAO DAS VARIAVEIS: .
9 C . D(NC),RTOLV(NC),BUP(NC),BLO(NC), .
10 C . BUPC(NC),NEIV(NC),EIGV(NC) .
11 C . . . . .
12 COMMON /BSCH/ D(23),RTOLV(23),BUP(23),
13 1BLO(23),BUPC(23),NEIV(23)
14 COMMON /BEIGV/ EIGV(23)
15 C
16 FTOL=0.01
17 C
18 DO 10 I=1,NC
19 BUP(I)=EIGV(I)*(1.+FTOL)
20 10 BLO(I)=EIGV(I)*(1.-FTOL)
21 NROOT=0
22 DO 20 I=1,NC
23 20 IF(RTOLV(I).LT.RTOL) NROOT=NROOT+1
24 IF (NROOT.GE.1) GO TO 30
25 WRITE(9,200)
26 STOP
27 C
28 C FIND UPPER BOUNDS ON EIGENVALUE CLUSTERS
29 C
30 DO 40 I=1,NROOT
31 40 NEIV(I)=1
32 IF (NROOT.NE.1) GO TO 50
33 BUPC(1)=BUP(1)
34 LM=1
35 L=1
36 I=2
37 GO TO 60
38 50 L=1
39 I=2
40 70 IF(BUP(I-1).LE.BLO(I)) GO TO 80
41 NEIV(L)=NEIV(L)+1
42 I=I+1
43 IF(I.LE.NROOT) GO TO 70
44 80 BUPC(L)=BUP(I-1)
45 IF(I.GT.NROOT) GO TO 90
46 L=L+1
47 I=I+1
48 IF(I.LE.NROOT) GO TO 70
49 BUPC(L)=BUP(I-1)
50 90 LM=L
51 IF(NROOT.EQ.NC) GO TO 100
52 60 IF(BUP(I-1).LE.BLO(I)) GO TO 100
53 IF(RTOLV(I).GT.RTOL) GO TO 100
54 BUPC(L)=BUP(I)
55 NEIV(L)=NEIV(L)+1
56 NROOT=NROOT+1
57 IF(NROOT.EQ.NC) GO TO 100
58 I=I+1
59 GO TO 60
60 C
61 C FIND SHIFT
62 C
63 100 CONTINUE
64 WRITE(*,210)
65 WRITE(*,220) (BUPC(I),I=1,LM)
66 WRITE(*,230)
67 WRITE(*,240) (NEIV(I),I=1,LM)
68 LL=LM-1
69 IF(LL.EQ.1) GO TO 110
70 120 DO 130 I=1,LL
71 130 NEIV(L)=NEIV(L)+NEIV(I)
72 L=L-1
73 LL=LL-1
74 IF(L.NE.1) GO TO 120
75 110 CONTINUE
76 WRITE(*,250)
77 WRITE(*,240) (NEIV(I),I=1,LM)
78 L=0
79 DO 140 I=1,LM
80 L=L+1
81 IF(NEIV(I).GE.NROOT) GO TO 150
82 140 CONTINUE
83 150 SHIFT=BUPC(L)
84 NEI=NEIV(L)
85 C
86 200 FORMAT(1X,'***ERROR SOLUTION STOP IN
87 1 *SCHECK*,',1X,'NO EIGENVALUES FOUND.,')
88 210 FORMAT(///1X,'UPPER BOUNDS ON
89 1 EIGENVALUE CLUSTERS')
90 220 FORMAT(1X,30G22.16)
91 230 FORMAT(1X,'No. OF EIGENVALUES IN
92 1 EACH CLUSTER')
93 240 FORMAT(1X,30I22)
94 250 FORMAT(1X,'No. OF EIGENVALUES LESS THAN
95 1 UPPER BOUNDS')
96 C
97 RETURN
98 END
1 SUBROUTINE SHAPE(RR,SS,TT,XSJ,NDM,NOELI
2 1,NOELT,IGH,LADO,XL,IE,MAE,MAH)
3 C . . . . .
4 C .
5 C . P R O G R A M A
6 C . PARA CALCULAR AS FUNCOES DE INTERPOLACAO.
7 C . E SUAS DERIVADAS GLOBAIS
8 C .
9 C . DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
10 C . R(8),S(8),T(8),XS(NDM,NDM),SX(NDM,NDM),
11 C . XL(NOEL,NDM),SHP(4,NOELT),
12 C . NH(NE,NLADMAX,NREAN),NOEL(NE)
13 C . . . . .
14 DIMENSION R(8),S(8),T(8),XS(3,3),SX(3,3)
15 1,XL(16,3)
16 COMMON /BSHP/ SHP(4,46)
17 COMMON /BNH/ NH(108,14,20)
18 COMMON /BNOEL/ NOEL(108)
19 DATA R/1.,1.,-1.,-1.,1.,1.,-1.,-1./
20 DATA S/-1.,1.,1.,-1.,-1.,1.,1.,-1./
21 DATA T/1.,1.,1.,1.,-1.,-1.,-1.,-1./
22 C
23 C CALCULO DAS FUNCOES LINEARES
24 C
25 DO 10 I=1,8
26 SHP(4,I)=(1.+R(I)*RR)*(1.+S(I)*SS)*(1.+
27 1T(I)*TT)/8.
28 SHP(1,I)=R(I)*(1.+S(I)*SS)*(1.+T(I)*TT)/8.
29 SHP(2,I)=(1.+R(I)*RR)*S(I)*(1.+T(I)*TT)/8.
30 10 SHP(3,I)=(1.+R(I)*RR)*(1.+S(I)*SS)*T(I)/8.
31 C
32 C CALCULO DAS FUNCOES QUADRATICAS
33 C
34 CALL SHAPE2(RR,SS,TT,NOELI,NOELT,IGH,LADO
35 1,IE,MAE,MAH)
36 C
37 C CALCULO DO JACOBIANO E SUA INVERSA
38 C
39 DO 20 I=1,NDM
40 DO 20 J=1,NDM
41 20 XS(I,J)=0.0
42 C
43 DO 30 I=1,NDM

```

```

44      DO 30 J=1,NDM
45      DO 30 K=1,16
46      30 XS(I,J)=XS(I,J)+XL(K,1)*SHP(J,K)
47 C
48      XSJ=XS(1,1)*XS(2,2)*XS(3,3)+XS(1,2)*
49      1XS(2,3)*XS(3,1)+XS(1,3)*XS(2,1)*XS(3,2)
50      1-XS(3,1)*XS(2,2)*XS(1,3)-XS(3,2)*
51      1XS(2,3)*XS(1,1)-XS(3,3)*XS(2,1)*XS(1,2)
52 C
53      SX(1,1)=(XS(2,2)*XS(3,3)-XS(3,2)*
54      1XS(2,3))/XSJ
55      SX(1,2)=-(XS(1,2)*XS(3,3)-XS(3,2)*
56      1XS(1,3))/XSJ
57      SX(1,3)=(XS(1,2)*XS(2,3)-XS(2,2)*
58      1XS(1,3))/XSJ
59      SX(2,1)=-(XS(2,1)*XS(3,3)-XS(3,1)*
60      1XS(2,3))/XSJ
61      SX(2,2)=(XS(1,1)*XS(3,3)-XS(3,1)*
62      1XS(1,3))/XSJ
63      SX(2,3)=-(XS(1,1)*XS(2,3)-XS(2,1)*
64      1XS(1,3))/XSJ
65      SX(3,1)=(XS(2,1)*XS(3,2)-XS(3,1)*
66      1XS(2,2))/XSJ
67      SX(3,2)=-(XS(1,1)*XS(3,2)-XS(3,1)*
68      1XS(1,2))/XSJ
69      SX(3,3)=(XS(1,1)*XS(2,2)-XS(2,1)*
70      1XS(1,2))/XSJ
71 C
72 C      CALCULO DAS DERIVADAS GLOBAIS
73 C
74      DO 40 I=1,NOELT
75      TEMP1=SHP(1,I)*SX(1,1)+SHP(2,I)*SX(2,1)
76      1+SHP(3,I)*SX(3,1)
77      TEMP2=SHP(1,I)*SX(1,2)+SHP(2,I)*SX(2,2)
78      1+SHP(3,I)*SX(3,2)
79      SHP(3,I)=SHP(1,I)*SX(1,3)+SHP(2,I)*
80      1SX(2,3)+SHP(3,I)*SX(3,3)
81      SHP(1,I)=TEMP1
82      SHP(2,I)=TEMP2
83      40 CONTINUE
84 C
85      RETURN
86      END

1      SUBROUTINE SHAPEH(RR,SS,TT,IGH,LADO,J)
2 C . . . . .
3 C . . . . .
4 C . . . . .
5 C      PARA CALCULAR AS FUNCOES DE INTERPOLACAO.
6 C      HIERARQUICAS (DO 2o. AO 5o. GRAU)
7 C . . . . .
8 C      DIMENSAO DA VARIABEL:
9 C      SHP(4,NOELT)
10 C . . . . .
11      DIMENSION R(8),S(8),T(10)
12      COMMON /BSHP/ SHP(4,46)
13      DATA R/1.,0.,-1.,0.,1.,0.,-1.,0./
14      DATA S/0.,1.,0.,-1.,0.,1.,0.,-1./
15      DATA T/1.,1.,1.,1.,-1.,-1.,-1.,-1.,-1.,-1./
16 C
17      IF(IGH.GT.2) GO TO 300
18 C
19 C      FUNCAO HIERARQUICA DO 2o. GRAU
20 C
21      IF(LADO.GT.10) GO TO 310
22      FR=1.-RR*RR
23      DFR=-2.*RR
24      FS=1.-SS*SS
25      DFS=-2.*SS

26      GO TO 60
27 C
28      310 IF(LADO.GT.12) GO TO 315
29      FR=RR-RR*RR*RR
30      DFR=1.-3.*RR*RR
31      FS=1.-SS*SS
32      DFS=-2.*SS
33      GO TO 60
34 C
35      315 FR=1.-RR*RR
36      DFR=-2.*RR
37      FS=SS-SS*SS*SS
38      DFS=1.-3.*SS*SS
39      GO TO 60
40 C
41 C      FUNCAO HIERARQUICA DO 3o. GRAU
42 C
43      300 IF(IGH.GT.3) GO TO 10
44      FR=2.*(RR*RR*RR-RR)
45      DFR=2.*(3.*RR*RR-1.)
46      FS=2.*(SS*SS*SS-SS)
47      DFS=2.*(3.*SS*SS-1.)
48      GO TO 30
49 C
50 C      FUNCAO HIERARQUICA DO 4o. GRAU
51 C
52      10 IF(IGH.GT.4) GO TO 20
53      FR=RR*RR*(1.-RR)*(1.+RR)
54      DFR=2.*RR-4.*RR*RR*RR
55      FS=SS*SS*(1.-SS)*(1.+SS)
56      DFS=2.*SS-4.*SS*SS*SS
57      GO TO 30
58 C
59 C      FUNCAO HIERARQUICA DO 5o. GRAU
60 C
61      20 FR=2.*RR*RR*RR*RR*RR-RR*RR*RR-RR
62      DFR=10.*RR*RR*RR*RR-3.*RR*RR-1.
63      FS=2.*SS*SS*SS*SS-SS*SS*SS-SS
64      DFS=10.*SS*SS*SS*SS-3.*SS*SS-1.
65 C
66      30 DO 40 I=1,7,2
67      IF(LADO.NE.1) GO TO 40
68      SHP(4,J)=FS*(1.+R(I)*RR)*(1.+T(I)*TT)
69      SHP(1,J)=DFS*(1.+T(I)*TT)
70      SHP(2,J)=DFS*(1.+R(I)*RR)*(1.+T(I)*TT)
71      SHP(3,J)=FS*(1.+R(I)*RR)*T(I)
72      RETURN
73      40 CONTINUE
74 C
75      DO 50 I=2,8,2
76      IF(LADO.NE.1) GO TO 50
77      SHP(4,J)=FR*(1.+S(I)*SS)*(1.+T(I)*TT)
78      SHP(1,J)=DFR*(1.+S(I)*SS)*(1.+T(I)*TT)
79      SHP(2,J)=FR*S(I)*(1.+T(I)*TT)
80      SHP(3,J)=FR*(1.+S(I)*SS)*T(I)
81      RETURN
82      50 CONTINUE
83 C
84 C      FUNCAO HIERARQUICA DO TIPO BOLHA
85 C
86      60 I=10
87      IF(LADO.LE.10) I=LADO
88      IF((LADO.EQ.11).OR.(LADO.EQ.13)) I=9
89      SHP(4,J)=FR*FS*(1.+T(I)*TT)
90      SHP(1,J)=DFR*FS*(1.+T(I)*TT)
91      SHP(2,J)=DFS*FR*(1.+T(I)*TT)
92      SHP(3,J)=FR*FS*T(I)
93 C
94      RETURN
95      END

```

```

1      SUBROUTINE SHAPE2(RR,SS,TT,NOELI,NOELT
2      1,IGH,LADO,IE,MAE,MAH)
3 C . . . . .
4 C .
5 C .   P R O G R A M A
6 C .   PARA CALCULAR AS FUNCOES QUADRATICAS DE
7 C .   INTERPOLACAO
8 C .
9 C .   DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
10 C .   SHP(4,NOELT),NH(NE,NLADMAX,NREAN),
11 C .   NOEL(NE)
12 C . . . . .
13      DIMENSION R(8),S(8),T(8)
14      COMMON /BSHP/ SHP(4,46)
15      COMMON /BNH/ NH(108,14,20)
16      COMMON /BNOEL/ NOEL(108)
17      DATA R/1.,0.,-1.,0.,1.,0.,-1.,0./
18      DATA S/0.,1.,0.,-1.,0.,1.,0.,-1./
19      DATA T/1.,1.,1.,1.,-1.,-1.,-1.,-1./
20 C
21      FR=(1.-RR*RR)/4.
22      DFR=-RR/2.
23      FS=(1.-SS*SS)/4.
24      DFS=-SS/2.
25 C
26 C   NOS DO MEIO DO LADO (SERENDIPITY)
27 C
28      DO 10 J=9,15,2
29      I=J-8
30      SHP(4,J)=FS*(1.+R(I)*RR)*(1.+T(I)*TT)
31      SHP(1,J)=FS*R(I)*(1.+T(I)*TT)
32      SHP(2,J)=DFS*(1.+R(I)*RR)*(1.+T(I)*TT)
33      10 SHP(3,J)=FS*(1.+R(I)*RR)*T(I)
34 C
35      DO 20 J=10,16,2
36      I=J-8
37      SHP(4,J)=FR*(1.+S(I)*SS)*(1.+T(I)*TT)
38      SHP(1,J)=DFR*(1.+S(I)*SS)*(1.+T(I)*TT)
39      SHP(2,J)=FR*S(I)*(1.+T(I)*TT)
40      20 SHP(3,J)=FR*(1.+S(I)*SS)*T(I)
41 C
42 C   CORRECAO DAS FUNCOES LINEARES
43 C
44      K=12
45      DO 40 I=1,4
46      L=I+8
47      DO 50 J=1,4
48      50 SHP(J,I)=SHP(J,I)-0.5*(SHP(J,K)+SHP(J,L))
49      40 K=L
50      K=16
51      DO 60 I=5,8
52      L=I+8
53      DO 70 J=1,4
54      70 SHP(J,I)=SHP(J,I)-0.5*(SHP(J,K)+SHP(J,L))
55      60 K=L
56 C
57      IF(NOELT.EQ.16) RETURN
58      IF((MAH.EQ.1).AND.(MAE.NE.0)) GO TO 80
59 C
60      J=16
61      MAHT=MAH
62      IF((MAH.GT.1).AND.(MAE.NE.0)) MAHT=MAH-1
63      NLADMAX=14
64 C
65      DO 100 IMAH=1,MAHT
66      DO 100 LAD=1,NLADMAX
67      I=2
68      IF(LAD.GT.8) I=1
69      IF(NH(IE,LAD,IMAH).LE.I) GO TO 100
70      IG=NH(IE,LAD,IMAH)

```

```

71      J=J+1
72      CALL SHAPEH(RR,SS,TT,IGH,LAD,J)
73      100 CONTINUE
74 C
75      IF(MAE.NE.0) GO TO 110
76 C
77      IF(J-NOELT) 120,130,120
78      120 WRITE(9,200) IE,MAH,J,NOELT
79      STOP
80 C
81      110 IF(J-(NOELT-1)) 140,80,140
82      140 WRITE(9,210) IE,MAH,J,NOELT-1
83      STOP
84 C
85      130 RETURN
86 C
87      80 J=NOELI
88      IF(J-(NOEL(IE)+1)) 150,160,150
89      150 WRITE(9,220) IE,MAH,NOELI,NOEL(IE)
90      STOP
91 C
92      160 CALL SHAPEH(RR,SS,TT,IGH,LADO,J)
93 C
94      200 FORMAT(1X,'*** ERRO IE=',I3,' MAH=',I3,
95      1' J=',I3,' NOELT=',I3)
96      210 FORMAT(1X,'*** ERRO IE=',I3,' MAH=',I3,
97      1' J=',I3,' NOELT-1=',I3)
98      220 FORMAT(1X,'*** ERRO IE=',I3,' MAH=',I3,
99      1' NOELI=',I3,' NOEL(IE)=',I3)
100 C
101      RETURN
102      END

```

```

1      SUBROUTINE SKY(NDF,NVLA,NVLT,NWKT,NE)
2 C . . . . .
3 C .
4 C .   P R O G R A M A
5 C .   PARA CALCULAR A POSICAO DOS ELEMENTOS
6 C .   DA DIAGONAL DA MATRIZ DE RIGIDEZ
7 C .
8 C .   DIMENSAO DAS VARIAVEIS:
9 C .   LSIS(NVLT),LEL(NOELT),MAXA(NVLT+1),
10 C .   IVNO(NE,NOELT) NOEL(NE),NOELH(NE)
11 C . . . . .
12      DIMENSION LSIS(2810),LEL(138)
13      COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
14      COMMON /BIVNO/ IVNO(108,138)
15      COMMON /BNOEL/ NOEL(108)
16      COMMON /BNOELH/ NOELH(108)
17 C
18      DO 10 I=NVLA+1,NVLT
19      10 LSIS(I)=0
20 C
21      DO 20 IE=1,NE
22      IF(NVLA.EQ.0) GO TO 30
23      IF(NOELH(IE).LT.1) GO TO 20
24      30 NVEL=(NOEL(IE)+NOELH(IE))*NDF
25 C
26      DO 40 I=1,NVEL
27      IF(IVNO(IE,I).NE.0) GO TO 50
28      40 CONTINUE
29 C
30      50 MIN=IVNO(IE,I)
31 C
32      DO 60 I=1,NVEL
33      LEL(I)=0
34      NDX=IVNO(IE,I)
35      IF(NDX.LT.1) GO TO 60
36      IF(NDX.LT.MIN) MIN=NDX

```

```

37 60 CONTINUE
38 C
39 MIN=MIN-1
40 C
41 DO 70 I=1,NVEL
42 NDX=IVNO(IE,I)
43 IF(NDX.LT.1) GO TO 70
44 LEL(I)=NDX-MIN
45 70 CONTINUE
46 C
47 DO 80 I=1,NVEL
48 NDX=IVNO(IE,I)
49 IF(NDX.LT.1) GO TO 80
50 IF(LSIS(NDX).LT.LEL(I)) LSIS(NDX)=LEL(I)
51 80 CONTINUE
52 C
53 20 CONTINUE
54 C
55 MAXA(1)=1
56 C
57 DO 90 I=NVLA+2,NVLT+1
58 J=I-1
59 90 MAXA(I)=MAXA(J)+LSIS(J)
60 C
61 NWKT=MAXA(NVLT+1)-1
62 C
63 RETURN
64 END

```

```

1 SUBROUTINE SPACE(NVLA,NVLT,NNM,NWK,NWM
2 1,NROOT,RTOL,NC,NNC,NITEM,IFSS,IFPR,MAH)
3 C . . . . .
4 C .
5 C . P R O G R A M
6 C . TO SOLVE FOR THE SMALLEST EIGENVALUES
7 C . AND CORRESPONDING EIGENVECTORS IN THE
8 C . GENERALIZED EIGENPROBLEM USING THE
9 C . SUBSPACE ITERATION METHOD
10 C .
11 C . ***** INPUT VARIABLES *****
12 C . RKG(NWK) = STIFFNESS MATRIX IN COMPACTED
13 C . FORM ASSUMED POSITIVE DEFINITE.
14 C . RK(NWK) = WORKING VECTOR
15 C . RMG(NWM) = MASS MATRIX IN COMPACTED FORM
16 C . MAXA(NNM) = VECTOR CONTAINING ADDRESSES
17 C . OF DIAGONAL ELEMENTS OF
18 C . STIFFNESS MATRIX RKG
19 C . FI(NVLT,NC) = EIGENVECTORS ON EXIT
20 C . EIGV(NC) = EIGENVALUES ON EXIT
21 C . TT(NVLT) = WORKING VECTOR
22 C . W(NVLT) = WORKING VECTOR
23 C . AR(NNC) = WORKING MATRIX STORING
24 C . PROJECTION OF RKG
25 C . BR(NNC) = WORKING MATRIX STORING
26 C . PROJECTION OF RMG
27 C . VEC(NC,NC) = WORKING MATRIX
28 C . D(NC) = WORKING VECTOR
29 C . RTOLV(NC) = WORKING VECTOR
30 C . BUP(NC) = WORKING VECTOR
31 C . BLO(NC) = WORKING VECTOR
32 C . BUPC(NC) = WORKING VECTOR
33 C . NVLT = ORDER OF [K] AND [M]
34 C . NNM = NVLT + 1
35 C . NWK = NUMBER OF ELEMENTS BELOW
36 C . SKYLINE OF STIFFNESS MATRIX.
37 C . NWM = NUMBER OF ELEMENTS BELOW
38 C . SKYLINE OF MASS MATRIX:
39 C . NWM=NWK FOR CONSISTENT MASS MATRIX
40 C . NWM=NN FOR LUMPED MASS MATRIX

```

```

41 C . NROOT = NUMBER OF REQUIRED EIGENVALUES
42 C . AND EIGENVECTORS
43 C . RTOL = CONVERGENCE TOLERANCE ON
44 C . EIGENVALUES ( 1.E-06 OR SMALLER)
45 C . NC = NUMBER OF ITERATION VECTORS USED
46 C . (USUALLY = MIN(2*NROOT,NROOT+8),
47 C . BUT NC CANNOT BE LARGER THAN THE
48 C . NUMBER OF MASS DEGREES OF FREEDOM
49 C . NNC = NC*(NC+1)/2 DIMENSION OF
50 C . STORAGE VECTORS AR,BR
51 C . NITEM = MAXIMUM NUMBER OF SUBSPACE
52 C . ITERATIONS PERMITTED
53 C . (USUALLY = 16) THE PARAMETERS NC
54 C . AND/OR NITEM MUST BE INCREASED
55 C . IF A SOLUTION HAS NOT CONVERGED
56 C . IFSS = FLAG FOR STURM SEQUENCE CHECK
57 C . EQ.0 NO CHECK
58 C . EQ.1 CHECK
59 C . IFPR=FLAG FOR PRINTING DURING ITERATION
60 C . EQ.0 NO PRINTING
61 C . EQ.1 PRINT
62 C .
63 C .
64 C . ***** OUTPUT *****
65 C . EIGV(NROOT) = EIGENVALUES
66 C . FI(NVLT,NROOT) = EIGENVECTORS
67 C .
68 C . . . . .
69 COMMON /BSCH/ D(23),RTOLV(23),BUP(23)
70 1,BLO(23),BUPC(23),NEIV(23)
71 COMMON /BAR/ AR(276)
72 COMMON /BBR/ BR(276)
73 COMMON /BEIGV/ EIGV(23)
74 COMMON /BFI/ FI(2810,23)
75 COMMON /BKM/ RKG(340000),RMG(340000)
76 COMMON /BRK/ RK(340000),RKS(340000)
77 COMMON /BVEC/ VEC(23,23)
78 COMMON /BMAXA/ MAXA(2811)
79 COMMON /BTT/ TT(2810)
80 COMMON /BW/ W(2810)
81 C
82 C SET TOLERANCE FOR JACOBI ITERATION
83 TOLJ=1.D-12
84 C
85 C INITIALIZATION
86 C
87 ICONV=0
88 NSCH=0
89 NSMAX=12
90 N1=NC+1
91 NC1=NC-1
92 DO 60 I=1,NC
93 60 D(I)=0.
94 C
95 C ESTABLISH STARTING ITERATION VECTORS
96 C
97 IF(NVLA.NE.NVLT) GO TO 3
98 ND=NVLT/NC
99 DO 10 I=1,NVLT
100 II=MAXA(I)
101 FI(I,1)=RMG(II)
102 10 W(I)=RMG(II)/RKG(II)
103 DO 20 J=2,NC
104 DO 20 I=1,NVLT
105 20 FI(I,J)=0.
106 C
107 L=NVLT-ND
108 DO 30 J=2,NC
109 RT=0.
110 DO 40 I=1,L

```

```

111     IF(W(I).LT.RT) GO TO 40
112     RT=W(I)
113     IJ=I
114 40 CONTINUE
115     DO 50 I=L,NVLT
116     IF(W(I).LE.RT) GO TO 50
117     RT=W(I)
118     IJ=I
119 50 CONTINUE
120     TT(J)=FLOAT(IJ)
121     W(IJ)=0.
122     L=L-ND
123 30 FI(IJ,J)=1.
124 C
125 C     FACTORIZE MATRIX [K] INTO [L]*[D]*[L(T)]
126 C
127 3 ISH=0
128     CALL DECOMP(NVLA,NVLT,ISH,MAH)
129 C
130 C     S T A R T   O F   I T E R A T I O N   L O O P
131 C
132     NITE=0
133 100 NITE=NITE+1
134     IF(IFPR.EQ.0) GO TO 90
135     WRITE(*,1000) NITE
136 C
137 C     CALCULATE THE PROJECTIONS OF [K] e [M]
138 C
139 90 IJ=0
140     DO 110 J=1,NC
141     DO 120 K=1,NVLT
142 120 TT(K)=FI(K,J)
143     CALL REDBAK(NVLT)
144     DO 130 I=J,NC
145     ART=0.
146     DO 140 K=1,NVLT
147 140 ART=ART+FI(K,I)*TT(K)
148     IJ=IJ+1
149 130 AR(IJ)=ART
150     DO 150 K=1,NVLT
151 150 FI(K,J)=TT(K)
152 110 CONTINUE
153     IJ=0
154     DO 160 J=1,NC
155     CALL MULTM(J,NVLT)
156     DO 180 I=J,NC
157     BRT=0.
158     DO 190 K=1,NVLT
159 190 BRT=BRT+FI(K,I)*TT(K)
160     IJ=IJ+1
161 180 BR(IJ)=BRT
162     IF(ICONV.GT.0) GO TO 160
163     DO 200 K=1,NVLT
164 200 FI(K,J)=TT(K)
165 160 CONTINUE
166 C
167 C     SOLVE FOR EIGENSYSTEM OF
168 C     SUBSPACE OPERATORS
169 C
170     CALL JACOBI(NC,TOLJ,NSMAX,IFPR)
171 C
172 C     ARRANGE EIGENVALUES IN ASCENDING ORDER
173 C
174 350 IS=0
175     II=1
176     DO 360 I=1,NC1
177     ITEMP=II+N1-I
178     IF(EIGV(I+1).GE.EIGV(I)) GO TO 360
179     IS=IS+1
180     EIGV(I)=EIGV(I+1)
181     EIGV(I+1)=EIGV(I)
182     EIGV(I)=EIGVT
183     BT=BR(ITEMP)
184     BR(ITEMP)=BR(II)
185     BR(II)=BT
186     DO 370 K=1,NC
187     RT=VEC(K,I+1)
188     VEC(K,I+1)=VEC(K,I)
189 370 VEC(K,I)=RT
190 360 II=ITEMP
191     IF(IS.GT.0) GO TO 350
192 C
193 C     CALCULATE [RMG] TIMES APPROXIMATE
194 C     EIGENVECTORS (ICONV.EQ.0) OR FINAL
195 C     EIGENVECTOR APPROXIMATIONS
196 C     (ICONV.GT.0)
197 C
198     DO 420 I=1,NVLT
199     DO 422 J=1,NC
200 422 TT(J)=FI(I,J)
201     DO 424 K=1,NC
202     RT=0.
203     DO 430 L=1,NC
204 430 RT=RT+TT(L)*VEC(L,K)
205 424 FI(I,K)=RT
206 420 CONTINUE
207     IF(ICONV.GT.0) GO TO 500
208 C
209 C     CHECK FOR CONVERGENCE OF EIGENVALUES
210 C
211     DO 380 I=1,NC
212     DIF=EIGV(I)-D(I)
213     DIF=ABS(DIF)
214 380 RTOLV(I)=DIF/EIGV(I)
215 C
216     DO 390 I=1,NROOT
217     IF(RTOLV(I).GT.RTOL) GO TO 400
218 390 CONTINUE
219     ICONV=1
220     GO TO 100
221 400 IF(NITE.LT.NITEM) GO TO 410
222     WRITE(*,1010)
223     ICONV=2
224     IFSS=0
225     GO TO 100
226 C
227 410 DO 440 I=1,NC
228 440 D(I)=EIGV(I)
229     GO TO 100
230 C
231 C - - - E N D   O F   I T E R A T I O N   L O O P
232 C
233 500 DO 580 L=1,NROOT
234     RT=EIGV(L)
235     CALL MULTK(L,NVLT)
236     VNORM=0.
237     DO 590 I=1,NVLT
238 590 VNORM=VNORM+TT(I)*TT(I)
239     CALL MULTM(L,NVLT)
240     WNORM=0.
241     DO 600 I=1,NVLT
242     TT(I)=TT(I)-RT*W(I)
243 600 WNORM=WNORM+TT(I)*TT(I)
244     VNORM=SQRT(VNORM)
245     WNORM=SQRT(WNORM)
246     D(L)=WNORM/VNORM
247 580 CONTINUE
248 C
249 C     APPLY STURM SEQUENCE CHECK
250 C

```

```

251      IF(IFSS.EQ.0) GO TO 700
252      CALL SCHECK(NC,NEI,RTOL,SHIFT)
253 C
254      WRITE(*,1020) SHIFT
255 C
256 C      SHIFT MATRIX RKG
257 C
258      DO 650 I=1,NWK
259 650      RKS(I)=RKG(I)-RMG(I)*SHIFT
260 C
261 C      FACTORIZE SHIFT MATRIX
262 C
263      ISH=1
264      CALL DECS(NVLT,ISH)
265 C
266 C      COUNT NUMBER OF NEGATIVE
267 C      DIAGONAL ELEMENTS
268 C
269      NSCH=0
270      DO 664 I=1,NVLT
271      II=MAXA(I)
272      IF(RKS(II).LT.0.) NSCH=NSCH+1
273 664      CONTINUE
274      IF(NSCH.EQ.NEI) GO TO 670
275      NMIS=NSCH-NEI
276      WRITE(*,1030) NMIS
277      GO TO 700
278 670      CONTINUE
279      WRITE(*,1040) NSCH
280 C
281      700 RETURN
282 C
283      1000 FORMAT(1X,'ITERATION NUMBER',14)
284      1010 FORMAT(1X,'** NO CONVERGENCE IN MAXIMUM
285      1 NUMBER OF ITERATIONS PERMITTED'//
286      11X,'WE ACCEPT CURRENT ITERATION VALUES'//
287      21X,'THE STURM SEQUENCE CHECK IS
288      1 NOT PERFORMED')
289      1020 FORMAT(///1X,'CHECK APPLIED AT SHIFT'
290      1,G22.16)
291      1030 FORMAT(//1X,'THERE ARE',14,
292      1'EIGENVALUES MISSING')
293      1040 FORMAT(//1X,'WE FOUND THE LOWEST',14,
294      1'EIGENVALUES')
295 C
296      END

1      SUBROUTINE SQ(IL)
2 C . . . . .
3 C .
4 C . P R O G R A M A
5 C . PARA SEQUENCIAR OS PONTOS DE GAUSS
6 C .
7 C . DIMENSAO DA VARIÁVEL:
8 C . LL(NDM)
9 C . . . . .
10     COMMON /BLL/ LL(3)
11 C
12     DO 10 I=1,3
13 10 LL(I)=MINO(6,MAXO(1,LL(I)))
14 C
15     IL=123
16     IF((LL(1).GE.LL(2)).AND.(LL(2).GE.LL(3)))
17 1 RETURN
18     IL=132
19     IF((LL(1).GE.LL(3)).AND.(LL(3).GE.LL(2)))
20 1 GO TO 132
21     IL=213
22     IF((LL(2).GE.LL(1)).AND.(LL(1).GE.LL(3)))
23 1 GO TO 213
24     IL=231
25     IF((LL(2).GE.LL(3)).AND.(LL(3).GE.LL(1)))
26 1 GO TO 231
27     IL=312
28     IF((LL(3).GE.LL(1)).AND.(LL(1).GE.LL(2)))
29 1 GO TO 312
30     IL=321
31     IF((LL(3).GE.LL(2)).AND.(LL(2).GE.LL(1)))
32 1 GO TO 321
33 C
34 132 L=LL(2)
35     LL(2)=LL(3)
36     LL(3)=L
37     RETURN
38 C
39 213 L=LL(1)
40     LL(1)=LL(2)
41     LL(2)=L
42     RETURN
43 C
44 231 L=LL(1)
45     LL(1)=LL(2)
46     LL(2)=LL(3)
47     LL(3)=L
48     RETURN
49 C
50 312 L=LL(3)
51     LL(3)=LL(2)
52     LL(2)=LL(1)
53     LL(1)=L
54     RETURN
55 C
56 321 L=LL(3)
57     LL(3)=LL(1)
58     LL(1)=L
59 C
60     RETURN
61     END

```