

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

OBSERVAÇÃO DE CAOS NAS MEDIÇÕES DO
MOVIMENTO DE UM ROTOR SUJEITO A "RUBBING"

Autor: Humberto Camargo Piccoli ^{nº/582/94}
Orientador: Hans Ingo Weber †

*Trabalho apresentado à comissão de
Pós-graduação da Faculdade de Engen-
haria Mecânica, como parte dos requi-
sitos para obtenção do título de Doutor
em Engenharia Mecânica*

Campinas, junho de 1994.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL
DA TESE DEFENDIDA POR Humberto Camargo Piccoli
116030 E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 21/07/94.

H. Ingo Weber
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

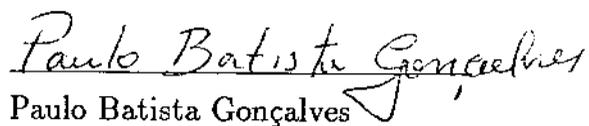
Autor: Humberto Camargo Piccoli



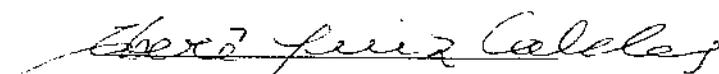
Orientador: Hans Ingo Weber



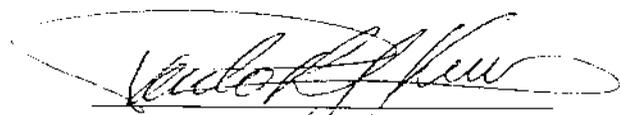
Mário Francisco Mucheroni



Paulo Batista Gonçalves



Iberê Luiz Caldas



Paulo Roberto Gardel Kurka

A Graça, Carolina e Humberto pelo apoio, amor e renúncia em todos estes anos de convivência. À memória de meus pais por sempre acreditarem na educação como o melhor legado deixado aos filhos.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Ing. Hans Ingo Weber por ter proporcionado a realização deste trabalho e, fundamentalmente, por ter sido, além de orientador, um amigo.

Aos colegas Waldemar Scudeler Jr., Marco Lúcio Bittencourt, Mauro Jorge Atalla, Luis Eduardo Cordeiro, Vicente Lopes Júnior, Marcelo Pierossi e Milton Dias Jr. pelo auxílio inestimável no desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Janito Vaqueiro Ferreira pelo decisivo apoio na realização dos ensaios experimentais.

Aos funcionários Rosângelo Ferreira, Luis Morelli e Tiago Berton pela ajuda nos ensaios experimentais.

Aos professores Dr. Loir Afonso Moreira, Dr. Robson Pederiva e Luis Roberto Xavier Ribeiro pela acolhida no Departamento de Projeto Mecânico além do constante incentivo.

Aos professores Dr. Franco Dedini, Dra. Kátia Lucchesi Cavalca e Dr. Ilmar Santos pelo incentivo, principalmente na fase final do trabalho.

Ao funcionário Armando Arruda pela disponibilidade e ajuda na elaboração do texto.

Aos funcionários da oficina e secretaria do Departamento de Projeto Mecânico pelo atendimento sempre solícito em todos os momentos.

Aos colegas do Departamento de Materiais e Construção da Universidade do Rio Grande, especialmente Dr. Volnei Anderson, Paulo Roberto Teixeira e Carlos Ademir Lima, que me substituíram no período de realização deste trabalho.

Ao Centro de Processamento de Dados da Universidade do Rio Grande, pelo auxílio na execução de alguns programas.

RESUMO

Identificar comportamentos com características caóticas em sistemas mecânicos é um desafio recente da engenharia. Este trabalho apresenta a análise de sinais medidos em um rotor vertical no qual o problema de *rubbing* está presente. A partir da observação de algumas medições suspeitou-se da ocorrência de comportamento caótico. A investigação, na tentativa de avaliar esta possibilidade, começa com a observação de transformadas de Fourier, e evolui para a utilização da técnica de reconstrução do espaço estado através do método de Takens, para possibilitar uma análise não linear. São analisados retratos de fase e diagramas de Poincaré dos diversos sinais medidos. Dimensões de capacidade, correlação e informação, e expoentes e dimensões de Lyapunov são calculados diretamente a partir das medições experimentais. São discutidos vários aspectos envolvidos na utilização dos métodos empregados. É também apresentada uma tentativa de encontrar um modelo matemático que represente o fenômeno e que mantenha as mesmas características não lineares encontradas nos sinais medidos.

ABSTRACT

A new challenge in engineering is to identify chaotic behavior in mechanical systems. This work presents an analysis of measured signals of a vertical rotor with rubbing. The occurrence of chaotic behavior came from some measurements observed in the beginning of the work. The investigation of these measured signals begins with the observation of Fourier transforms and, for a nonlinear analysis, the reconstruction of state space with Taken's method is used. Phase portraits and Poincaré diagrams are constructed and analysed. Capacity, correlation and information dimensions and Lyapunov exponents and dimensions are computed directly from the measured signals. Some questions arising when using these methods are discussed in the work. It is also presented a first approach to find a mathematical model for the phenomenon preserving the nonlinear characteristics found in the measured signals.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
1 Introdução	1
1.1 Apresentação Geral - Motivação	1
1.2 Metodologia	2
1.3 Revisão Bibliográfica	3
1.4 Descrição	6
2 Rubbing e Rotor Vertical - Modelos Matemáticos	8
2.1 O Fenômeno do <i>Rubbing</i>	8
2.1.1 Aspectos Associados ao <i>Rubbing</i>	9
2.2 Modelos Matemáticos	10
2.2.1 Rotor Vertical	11
2.2.2 Modelo do Rotor	18
2.2.3 Modelo Matemático do <i>Rubbing</i>	18
2.3 Simulação	24
3 Métodos de Análise Não-Linear	31
3.1 Sistema dinâmico diferenciável	31
3.1.1 Atratores e bacias de atração	32
3.1.2 Atratores Caóticos	34
3.2 Reconstrução da Dinâmica a partir de um Sinal Experimental	35
3.2.1 Escolha dos Parâmetros de Mergulho	37
3.3 Retratos de Fase e Diagramas de Poincaré	43
3.4 Medidas Invariantes	44
3.5 Dimensões de Atratores	45
3.6 Expoentes de Lyapunov	49
3.6.1 Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec	49
3.6.2 Dimensão de Lyapunov	50
3.6.3 Espectro de Lyapunov	50

3.6.4	Movimentos Constantes, Periódicos e Quasi-Periódicos	51
3.6.5	Cálculo dos Expoentes de Lyapunov	51
3.7	Entropia	53
3.8	Caos e Ruído	54
4	Cálculo de dimensões e expoentes de Lyapunov	56
4.1	Introdução	56
4.2	Determinação dos Parâmetros de Mergulho	56
4.2.1	Informação Mútua Média	56
4.3	Determinação de Dimensões	59
4.3.1	Algoritmo de Grassberger e Procaccia	59
4.3.2	Algoritmo de Liebovitch e Toth	61
4.4	Expoentes de Lyapunov	63
4.4.1	Determinação do Espectro de Lyapunov	63
5	Ensaio Experimental	71
5.1	Introdução	71
5.2	Bancada de Ensaio	71
5.3	Primeira Etapa	71
5.4	Segunda Etapa	76
6	Análise dos Sinais Experimentais	78
6.1	Introdução	78
6.2	Análise das Transformadas de Fourier	79
6.3	Parâmetros de Mergulho	92
6.3.1	Determinação do <i>time delay</i>	94
6.3.2	Determinação da dimensão de mergulho	94
6.4	Retratos de Fase	105
6.5	Diagramas de Poincaré	105
6.6	Determinação das dimensões fractais	116
6.7	Expoentes de Lyapunov	116
6.7.1	Expoentes de Lyapunov - Ajuste polinomial	122
6.7.2	Expoentes de Lyapunov - Modelo de redes neurais	132
6.8	Conclusão	132
7	Conclusões	136

Lista de Figuras

2.1	Modelo por elementos finitos do rotor.	12
2.2	Modelo do elemento do tipo disco.	13
2.3	Modelo do elemento do tipo eixo (viga de Timoshenko).	14
2.4	Modelo do elemento do tipo mancal.	17
2.5	Esquema do modelo por elementos finitos do rotor com os mancais.	19
2.6	Trajectoria de referência e trajetória perturbada atingindo um obstáculo.	22
2.7	(a) Órbita do disco inferior do rotor medida experimentalmente (rotação de 11,4 Hz e folga de 0,574 mm); (b) e (c) transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y	25
2.8	(a) Órbita do nó 3 do modelo por elementos finitos do rotor, obtida por simulação do movimento com variação de rigidez do nó 4; (b) e (c) transformadas de Fourier do movimento simulado nas direções x e y	26
2.9	(a) Órbita do nó 3 do modelo por elementos finitos do rotor, obtida por simulação do movimento com impacto representado por coeficiente de restituição $c_r > 0,295$; (b) e (c) transformadas de Fourier do movimento simulado nas direções x e y	27
2.10	(a) Órbita do nó 3 do modelo por elementos finitos do rotor, obtida por simulação do movimento com impacto representado por coeficiente de restituição $c_r \leq 0,295$; (b) e (c) transformadas de Fourier do movimento simulado nas direções x e y	29
3.1	Atrator e sua bacia de atração obtidos de um sinal experimental.	32
3.2	Atrator de Hénon.	34
3.3	Informação Mútua Média com mínimo local bem determinado.	39
3.4	Informação Mútua Média com mínimo local mal determinado.	40
3.5	Atrator observado em espaço com $d < d_M$	41
3.6	Retrato de fase - com $s(n)$ representado no eixo horizontal e $s(n + \tau)$ representado no eixo vertical.	44
3.7	Diagrama de Poincaré - com $s(n)$ representado no eixo horizontal e $s(n+2\tau)$ representado no eixo vertical.	45
3.8	Curva do logaritmo da função de correlação <i>versus</i> logaritmo de ϵ cuja inclinação é a dimensão de correlação.	48
4.1	Efeito do tamanho da série no cálculo de $I(\tau)$	58

4.2	Curva de $N(\epsilon)$ versus ϵ de cuja inclinação é medida a dimensão de capacidade.	63
4.3	Esquema de uma rede neural com N unidades de entrada, uma camada escondida com N_n unidades (neurônios) e uma unidade de saída.	69
5.1	Bancada de ensaios - esquema geral com a bancada de rotação e sua estrutura.	72
5.2	Dimensões do rotor, mancal de guia e sistema de acionamento.	73
5.3	Esquema da montagem experimental utilizada na primeira etapa de medições.	75
5.4	Esquema da montagem experimental utilizada na segunda etapa de medições.	76
5.5	Esquema do mancal inferior destacando um corte da guia interna cônica e suas dimensões.	77
6.1	(a) Órbita medida no disco inferior quando o contato ocorre uma vez a cada duas voltas, com rotação; (b) forças medidas no mancal inferior quando foi medida a órbita.	80
6.2	Espectros dos sinais medidos nas direções x e y : (a) sem <i>rubbing</i> ; (b) com <i>rubbing</i>	81
6.3	Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 5,6 Hz, para folgas (12 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 0,277 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y	82
6.4	Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 5,6 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor em contato permanente com o mancal; (b) com a extremidade inferior do rotor livre.	84
6.5	Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação igual a 5,6 Hz - (a) com folga de 0,184 mm; (b) com folga de 0,230 mm; (c) com folga de 0,277 mm.	85
6.6	Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação igual a 5,6 Hz - (a) com folga de 0,368 mm; (b) com folga de 0,414 mm; (c) com folga de 0,459 mm.	86
6.7	Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 7,4 Hz, para folgas (51 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 1,149 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y	87
6.8	Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 7,4 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor livre; (b) com folga de 0,712 mm.	88
6.9	Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 7,4 Hz - (a) com folga de 0,367 mm; (b) com folga de 1,057 mm.	89
6.10	Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 11,4 Hz, para folgas (51 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 0,850 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y	90
6.11	Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 11,4 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor livre; (b) com folga de 0,574 mm; (c) com folga de 0,368 mm.	91

6.12	Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 16,5 Hz, para folgas (35 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 0,781 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y	92
6.13	Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 16,5 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor livre; (b) com folga de 0,346 mm; (c) com folga de 0,643 mm.	93
6.14	Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz com folgas entre 0,621 mm e 0,758 mm. . .	95
6.15	Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz com folgas entre 1,034 mm e 1,149 mm (sem contato).	96
6.16	Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 11,4 Hz com folgas entre 0,414 mm e 0,597 mm. .	97
6.17	Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz com folgas entre 0,230 mm e 0,368 mm. .	98
6.18	Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz com folgas entre 0,620 mm e 0,781 mm. .	99
6.19	Dimensões de mergulho calculadas com o critério da saturação do expoente de Lyapunov dominante para os sinais medidos na direção x com as seguintes velocidades de rotação e folgas: sinal 1 - $\Omega = 7,4$ Hz e $c = 0,689$ mm; sinal 2 - $\Omega = 7,4$ Hz e $c = 1,034$ mm; sinal 3 - $\Omega = 11,4$ Hz e $c = 0,574$ mm; sinal 4 - $\Omega = 16,5$ Hz e $c = 0,345$ mm; sinal 5 - $\Omega = 16,5$ Hz e extremidade inferior do rotor livre.	102
6.20	Curva de percentual de falsos vizinhos <i>versus</i> dimensão de mergulho para sinais medidos na na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz: (a) com folga de 0,253; (b) com folga de 0,735 mm.	104
6.21	Retratos de fase obtidos por projeções bi-dimensionais (eixo horizontal - $s(n)$, eixo vertical - $s(n+\tau)$) do espaço de estado reconstruído de sinais medidos com velocidade de rotação de 11,4 Hz, folgas variando entre 0,414 mm e 0,597 mm e $\tau = 10$	106
6.22	Retratos de fase obtidos por projeções bi-dimensionais (eixo horizontal - $s(n)$, eixo vertical - $s(n+\tau)$) do espaço de estado reconstruído de sinais medidos com velocidade de rotação de 11,4 Hz, folga de 0,505 mm e τ variando entre 2 e 18.	107
6.23	Retrato de fase mostrando a projeção bi-dimensional (eixo horizontal - $s(n)$, eixo vertical - $s(n+\tau)$) de um atrator periódico com dimensão superior a 2 e $\tau = 7$	108
6.24	Transformada de Fourier do sinal do qual foi obtido o atrator mostrado na figura anterior. A velocidade de rotação é 5,9 Hz.	109
6.25	Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e com folgas entre 0,620 mm e 0,758 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.111	

6.26	Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e com folgas entre 1,034 mm e 1,149 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.	112
6.27	Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 11,4 Hz e com folgas entre 0,414 mm e 0,597 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.	113
6.28	Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e com folgas entre 0,230 mm e 0,368 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.	114
6.29	Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e com folgas entre 0,620 mm e 0,781 mm (sem contato). No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.	115
6.30	Diagramas de Poincaré - 16,5 Hz	115
6.31	Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e folgas variando entre 0,620 mm e 0,758 mm.	117
6.32	Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e folgas variando entre 1,034 mm e 1,149 mm (sem contato).	118
6.33	Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 11,4 Hz e folgas variando entre 0,414 mm e 0,597 mm.	119
6.34	Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e folgas variando entre 0,230 mm e 0,368 mm.	120
6.35	Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e folgas variando entre 0,620 mm e 0,781 mm.	121
6.36	Influência do número de termos da série de Taylor no cálculo do expoente de Lyapunov dominante com ajuste local.	123
6.37	Influência da duração do sinal no cálculo do expoente de Lyapunov dominante com ajuste local.	124
6.38	Influência do número de vizinhos no cálculo do expoente de Lyapunov dominante com ajuste local.	125
6.39	Influência do uso de filtros no cálculo da Informação Mútua Média. Sinais filtrados em 150 Hz.	127
6.40	Expoente de Lyapunov dominante <i>versus</i> dimensão de mergulho calculados para sinais sem filtragem e com utilização de filtros passa-baixas de 50 Hz e 150 Hz.	128
6.41	Dimensões de Lyapunov.	129
6.42	Expoentes de Lyapunov dominantes calculados com ajuste local.	131
6.43	Expoentes de Lyapunov dominantes calculados com modelo de redes neurais.	133

6.44	Influência do número de pontos no cálculo do expoente de Lyapunov dominante utilizando modelo de redes neurais.	134
------	---	-----

Lista de Tabelas

4.1	Número mínimo de pontos necessários para uma boa reconstrução, em função da dimensão do atrator.	61
5.1	Dados estruturais do rotor, mancal de guia e sistema de acionamento. . . .	74
6.1	Time delays calculados pelo método da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x	100
6.2	Time delays calculados pelo método da validação cruzada para sinais medidos na direção x	101
6.3	Dimensões de mergulho calculadas para sinais medidos na direção x pelo método dos falsos vizinhos.	103

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação Geral - Motivação

Este trabalho originou-se de uma tentativa de explicar o fenômeno do *rubbing*¹ entre um rotor vertical e um mancal situado em sua extremidade inferior. O estudo deste problema é sugerido na tese de doutorado de Dana [25], que realizou uma análise dinâmica da bancada de rotação à qual pertence o rotor presentemente estudado. As observações experimentais iniciais do movimento do rotor tocando o mancal mostraram que algo de diferente, não explicado pela teoria dos sistemas dinâmicos lineares, estava acontecendo. Isto, de uma certa forma, surpreendeu, uma vez que o comportamento esperado era o de um sistema com característica bi-linear cujo movimento divide-se em duas etapas, uma com contato e outra sem contato, ambas lineares, com comportamento global não-linear. A partir das observações iniciais de alguns espectros obtidos do sinal medido e, reportando alguns autores que, estudando fenômenos de mesma natureza, sugeriam a possibilidade de comportamento de natureza caótica, resolveu-se investigar esta possibilidade como tema central do trabalho. É importante salientar que esta investigação concentrou-se na busca por evidências caóticas nos sinais experimentais medidos, representativos do comportamento dinâmico deste sistema, procurando-se abordar o problema de uma forma objetiva a fim de encontrar aplicações efetivas na engenharia mecânica. Esta investigação é, portanto, uma tentativa de encontrar uma linha de procedimento claro a ser percorrida quando se pretenda procurar por características caóticas em um evento físico real, trazendo à luz vantagens e desvantagens, aplicabilidade e eventuais dificuldades na aplicação dos métodos atualmente disponíveis para se realizar este tipo de trabalho. Os métodos que permitem a determinação de características caóticas a partir da medição de sinais experimentais não puderam se desenvolver até meados da década de 80 uma vez que a quantidade de cálculos a serem efetuados é muito elevada. Somente a possibilidade do uso de computadores de alta velocidade viabilizou o desenvolvimento destes métodos e a evolução das máquinas de computação, bem como dos processos de cálculo, permite vislumbrar em um futuro próximo, a utilização dos mesmos com tempos

¹ *Rubbing, delay coordinates, time delay e box counting* são termos que serão mantidos em inglês por não se conhecer uma tradução técnica corrente uniforme.

de processamento razoáveis para aplicações na engenharia. Acredita-se que a aplicação destes métodos se constitua procedimento auxiliar às técnicas atuais de processamento de sinais para aplicação em sistemas não-lineares. Aplicações nos campos da identificação e diagnose em sistemas mecânicos já podem ser vislumbradas com realismo e, já existem trabalhos na literatura que utilizam os expoentes de Lyapunov, por exemplo, para identificar fraturas em materiais [56]. O campo, entretanto, que se apresenta com maiores horizontes é o da indentificação de parâmetros em sistemas não-lineares. O problema da reconstrução das equações que governam o comportamento dinâmico dos sistemas não-lineares a partir de observações de variáveis representativas deste comportamento tem sido objeto de alguns estudos [62, 32, 1, 13, 2, 38, 24, 43] e, em muitos casos o uso da técnica da reconstrução do espaço de estado com o uso das *delay coordinates*¹ tem representado um avanço importante, principalmente quando se dispõe de poucas informações a respeito do sistema dinâmico a ser estudado (a possibilidade de medição de uma única variável, por exemplo). A principal dificuldade do estudo dos sistemas mecânicos por meio destes métodos está em não se dispor mais das equações diferenciais ordinárias para descrever o comportamento do sistema mas sim de mapas que são equações por diferenças e que relacionam o estado atual do sistema com seus estados passados. O domínio mudou. As técnicas de análise modal, tão úteis para a análise de sistemas lineares, não mais podem ser utilizadas integralmente. Por outro lado estão em pleno desenvolvimento investigações que procuram substitutos para os modos naturais lineares na teoria não linear [65, 5]. A utilização destes novos métodos só se justifica, pelo seu alto custo computacional, no estudo de sistemas altamente não lineares, quando apresentam comportamento tal que, sob determinadas combinações de parâmetros, seja impossível de ser compreendido com as ferramentas de análise linear disponíveis.

O objetivo principal deste trabalho é, portanto, mostrar como podem ser aplicados os métodos de análise não linear que buscam investigar características caóticas em sistemas dinâmicos a partir de observações experimentais e que benefícios os mesmos podem trazer na análise de sinais de origem mecânica, bem como identificar deficiências ou dificuldades que deverão ser objeto de pesquisa posterior para a sua possível superação. O problema do *rubbing*, embora já bastante estudado na literatura ainda pode apresentar peculiaridades que permitem a sua utilização como um bom tipo de problema para se estudar o caos em sistemas mecânicos. Deve-se acrescentar a isto o fato de que um sistema mecânico como um rotor vertical, apresenta, por si só, a possibilidade de uma combinação de efeitos que podem contribuir para a natureza crítica do fenômeno caótico. As conclusões apresentadas com base nesta análise não têm a pretensão de serem definitivas para o fenômeno do *rubbing*, mas sim de servirem como elementos de contribuição na formação de um conhecimento básico para a compreensão completa do fenômeno no futuro.

1.2 Metodologia

No presente trabalho são empregadas duas metodologias distintas. A primeira é a metodologia de análise de um sinal com suspeita de comportamento caótico e a segunda

é a metodologia de desenvolvimento do próprio trabalho. A primeira será descrita no capítulo 3, enquanto a segunda é apresentada a seguir.

Antes de se focar aquele que acabou sendo o tema central do trabalho, a metodologia planejada foi a da observação experimental de um fenômeno físico e sua posterior análise. A partir da observação de características não perfeitamente compreendidas nos sinais medidos foi necessário um completo procedimento alternativo de análise que, em si mesmo, requer uma metodologia própria. Para atender ao objetivo principal do trabalho foi necessário conhecer os métodos de análise de comportamentos caóticos e selecionar aqueles que permitiam sua identificação a partir de sinais experimentais. Uma vez selecionados, estudados e conhecidos estes métodos a etapa seguinte é a da implementação computacional dos algoritmos que permitem os cálculos dos parâmetros utilizados na análise. A seguir deve ser efetuada a validação destes algoritmos com dados cujos parâmetros são conhecidos na literatura. A decisão por uma análise não linear tornou os sinais medidos inicialmente insuficientes e até mesmo inadequados para a nova análise, o que exigiu uma nova sessão de aquisição de sinais experimentais, adequados às exigências dos novos métodos. O próximo passo é, então o cálculo dos parâmetros escolhidos para avaliar os sinais medidos e a sua subsequente análise. O cálculo dos parâmetros exige a definição de algumas variáveis que devem ser testadas para verificação de sua influência nos resultados. A parte final do trabalho compreende a análise dos resultados e sua comparação com sinais obtidos de simulação para a devida comprovação da validade ou não da aplicação dos métodos para o tipo de problema em estudo.

1.3 Revisão Bibliográfica

O mecanismo do *rubbing* já foi descrito por Den Hartog na década de 30 (ver Ehrich [29]). A procura por um modelo matemático que descreva o fenômeno, entretanto, só despertou interesse concreto na década de 60 quando Johnson em 1962, (citado por Black [9]) analisou a interação entre um rotor e um estator, considerado rígido e sem considerar o atrito, utilizando receptâncias polares. Em 1965, Black (citado por Black [9]), apresentou uma investigação analítica e experimental da interação de um rotor com um estator suportado por uma simples mola, considerando os efeitos do atrito seco. A introdução do amortecimento no estator, em um modelo simples que também incluía inércia e rigidez, deve-se a Ehrich em 1966 (citado por Black [9]). A redução da primeira velocidade crítica como efeito da folga entre rotor e mancal é observada analiticamente por Ehrich e O'Connor [28] em 1967 em trabalho onde é feita uma pequena análise de estabilidade do movimento. Em 1968, Black [9] investiga o surgimento de precessão retrógrada excitada pelo atrito em um modelo que também incluía amortecimento, utilizando funções de receptância mecânica. Um modelo experimental simples é usado por Ehrich em 1969 [29] para analisar estabilidade do movimento. Em 1974, Bently [8] mostra resultados experimentais onde são observadas frequências harmônicas e sub-harmônicas, apresentando um modelo não-linear com base na equação de Mathieu para explicar o fenômeno associado à variação de rigidez do sistema. Childs, em 1982 [17], estuda os efeitos de folgas entre rotor

e mancal, separando o fenômeno em duas fases com comportamentos caracteristicamente distintos. As frequências sub-harmônicas são explicadas pela excitação paramétrica. A análise, com comprovação experimental de um rotor tocando um obstáculo uma vez por volta, feita por Muszynska [57] comprova o surgimento de frequências sub-harmônicas através de um modelo com excitação paramétrica e periódica. Szczygielski e Schweitzer [68, 67] analisando um giro-pêndulo batendo em uma parede rígida apresenta uma descrição das formas de movimento possíveis e acena com a possibilidade de comportamento com características caóticas em tal tipo de problema. Beatty [6] observa o caso de *rubbing* em uma turbo-bomba apresentando uma proposta de critérios de identificação do fenômeno para diagnóstico. Choi e Noah [18, 19] propõem um método numérico usando transformada discreta de Fourier e transformada inversa discreta de Fourier para calcular a resposta não-linear de regime do sistema rotor-suportes com folga e *rubbing*. Choy e Padovan [20] [21] usando simulação com modelo do rotor de Jeffcott separam o movimento em duas fases lineares, com e sem contato, onde os movimentos de rotor e estator estão relacionados pelas forças atuantes no contato. Em 1989, Muszynska [58] apresenta uma revisão bibliográfica das investigações realizadas dos fenômenos físicos relacionados ao fenômeno do *rubbing*. Lingener [53] (experimental) e Crandall [23] (modelo teórico) investigaram conjuntamente a possibilidade de excitar precessão retrógrada no contato rotor-estator. Em 1991, um trabalho de Kim e Noah [46], apresenta um algoritmo utilizando o método do balanço harmônico com redução do número de graus de liberdade na posição da folga com auxílio de um método de impedância, analisando estabilidade do movimento de uma turbo-bomba. O método é estendido posteriormente para rotores com vários discos. No mesmo período, alguns trabalhos são apresentados [42, 64] tratando do comportamento dinâmico de mancais magnéticos aterrissando nos mancais de emergência.

Em 1990 começam a surgir trabalhos investigando possibilidade de caos em problemas de contato rotor-estator. Choy, Padovan e Yu [22] mostram possibilidade de órbitas quase-caóticas em um modelo do rotor de Jeffcott com seu eixo tocando um estator. Kim e Noah [46] com seu método baseado no balanço harmônico, apresentam uma análise de estabilidade e bifurcação no rotor de Jeffcott. Ehrich [30] também observou comportamento caótico em rotores.

Em todos os casos apresentados no parágrafo anterior, o caos é investigado a partir de modelos teóricos sem medição experimental direta de características caóticas mesmo nos modelos experimentais simples estudados. A medição direta de características que permitem a análise de comportamento caótico, como dimensões fractais e expoentes de Lyapunov, tornou-se possível a partir dos trabalhos de Takens [69] e Packard *et al.* [61] que permitem a reconstrução de um espaço de estado com equivalência topológica ao espaço de estado real do sistema dinâmico estudado.

Os expoentes de Lyapunov, por sua vez foram definidos originalmente por Oseledec [60] em seu famoso Teorema Ergódico Multiplicativo. Os trabalhos simultâneos de Shimada e Nagashima [66] e Benettin *et al.* [7] tornaram possível o conhecimento do espectro completo dos expoentes de Lyapunov a partir das equações diferenciais que governam o comportamento do sistema dinâmico. Em 1985 Wolf *et al.* [70] apresentam pela primeira vez um algoritmo que permite calcular o maior expoente de Lyapunov de uma série tem-

poral, desde que positivo, através da observação da separação de trajetórias vizinhas no espaço tangente ao espaço de estado reconstruído pelo método de Takens. No mesmo ano, Sano e Sawada [63] apresentam a possibilidade de obtenção do espectro completo a partir da mesma reconstrução do espaço de estado, construindo a matriz de Oseledec a partir de reconstruções locais da dinâmica por meio de ajustes lineares locais. Eckmann e Ruelle [27] em artigo de revisão da Teoria Ergódica do Caos desenvolvem um algoritmo, apresentado com mais detalhes em Eckmann *et al.* [26], que calcula o espectro completo de Lyapunov com base também no cálculo dos autovalores da matriz de Oseledec construída por meio de ajustes locais lineares no espaço de estado reconstruído. Este trabalho apresenta uma adaptação do método QR em virtude do mal condicionamento da matriz de Oseledec. A partir destes trabalhos foram feitas várias tentativas de obtenção dos expoentes de Lyapunov diretamente de sinais temporais com base no cálculo dos autovalores da matriz de Oseledec. Especial atenção merecem os trabalhos desenvolvidos pelo grupo do INLS da Universidade da Califórnia em San Diego [12, 11] no sentido de calcular o espectro de Lyapunov com ajustes locais polinomiais. Em trabalho recente, Nychka *et al.* [59] apresentam um algoritmo que usa um modelo regressivo de redes neurais para construir o mapa que governa a evolução dinâmica no espaço de estado reconstruído. A matriz de Oseledec é obtida a partir das matrizes jacobianas deste mapa.

Para a reconstrução do espaço de estado é necessária a obtenção dos chamados *parâmetros de mergulho*, particularmente o *time delay*¹ e a dimensão de mergulho. O cálculo do *time delay* tem sido realizado na ampla maioria dos casos pelo método desenvolvido por Fraser [35, 34, 33] que estabelece que o melhor *time delay* é o menor valor para o qual a Informação Mútua Média apresenta um mínimo local. Quanto à dimensão de mergulho, por sua vez, existe um número grande de trabalhos para a sua prévia determinação. A primeira aproximação da dimensão é dada pela própria condição de Takens para o mergulho em que a dimensão de mergulho deve ser superior ao dobro da dimensão do atrator para que se obtenha uma boa reconstrução (Mañé [54]). Para isto, entretanto, é necessário conhecer a dimensão do atrator. Buscando uma determinação direta da dimensão de mergulho Froehling *et al.* [37] e mais tarde, Broomhead e King [10] apresentam métodos que procuram a dimensão para a qual o atrator reconstruído pode ser aproximado localmente pelo seu espaço tangente. Eckmann e Ruelle [27] sugerem a seleção da dimensão para a qual se consegue um bom ajuste linear na divergência de órbitas próximas. Aleksic [4] advoga a menor dimensão para a qual a dinâmica reconstruída pode ser descrita como um mapa contínuo. O método da saturação de invariantes [3] calcula algum invariante do sistema (expoente de Lyapunov, por exemplo) para dimensões crescentes e define a dimensão de mergulho como a menor dimensão para a qual não ocorre mais nenhuma mudança na medida invariante. O método dos falsos vizinhos, apresentado por Kennel *et al.* [45] procura a menor dimensão para a qual a trajetória no espaço de estado não apresenta falsos dobramentos. Cheng e Tong [16] também apresentam um método que estima a dimensão usando o método de validação cruzada com uma auto-regressão não-linear.

A dimensão do atrator pode por si só ser um instrumento importante para a investigação do caos. A primeira definição de uma dimensão fractal data de 1919 e se deve a

Hausdorff, citado por Farmer *et al.* [31], quando o próprio termo fractal ainda não tinha sido introduzido, o que foi feito muito posteriormente por Mandelbrot (também citado por Farmer *et al.* [31]). O trabalho de Farmer *et al.* [31] é uma excelente revisão de dimensões de atratores. A dimensão de capacidade foi definida por Kolmogorov [31], em 1958, como uma versão simplificada da dimensão de informação, introduzida por Balatoni e Renyi [31] em 1956, e de correlação, apresentada por Grassberger e Procaccia em 1983 [39, 40]. Medem também a intensidade da ocupação das diversas regiões do espaço de estado pelo atrator, usando informações estatísticas para serem definidas. O cálculo de dimensões diretamente de uma série temporal tem como ponto de referência o trabalho de Grassberger e Procaccia [40] que apresentaram um algoritmo para o cálculo da dimensão de correlação. O cálculo da dimensão de capacidade é direto a partir de um algoritmo de *box counting*¹. A dimensão de informação também pode ser calculada com o mesmo procedimento. A dimensão de Lyapunov foi definida por Frederickson *et al.* [36] sendo calculada a partir do espectro de Lyapunov através da conjectura de Kaplan e Yorke [44].

1.4 Descrição

O trabalho se divide em sete capítulos cuja apresentação é feita a seguir.

O capítulo 1 é introdutório apresentando os objetivos do trabalho, a metodologia adotada e uma descrição resumida dos capítulos deste trabalho.

O capítulo 2 apresenta a descrição do fenômeno do *rubbing* seguida do modelo matemático do rotor vertical com a apresentação das matrizes básicas que formarão seu modelo estrutural quando da simulação. A seguir é feita a apresentação de um modelo matemático do fenômeno do *rubbing* para se associar ao modelo matemático do rotor para a simulação. São apresentados também alguns resultados de simulações computacionais realizadas com os modelos construídos.

O capítulo 3 apresenta uma revisão de conceitos básicos da teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares com ênfase em comportamento caótico. Neste capítulo são também apresentados os instrumentos utilizados na análise dos sinais experimentais partindo da reconstrução do espaço de estado por meio das *delay coordinates* que permitiu a construção de retratos de fase, diagramas de Poincaré e o cálculo de dimensões fractais e expoentes de Lyapunov. São também apresentados critérios para seleção e métodos de determinação dos parâmetros de mergulho, *time delay* e dimensão de mergulho, previamente necessários para a reconstrução do espaço de estado.

O capítulo 4 contém os algoritmos utilizados nos cálculos de parâmetros de mergulho, dimensões fractais e expoentes de Lyapunov.

O capítulo 5 se constitui em uma descrição da aquisição dos sinais experimentais incluindo uma descrição dos equipamentos utilizados e as diferentes etapas de aquisição.

O capítulo 6 contém a análise dos sinais obtidos experimentalmente partindo de uma análise das transformadas de Fourier dos mesmos, seguindo com a observação de retratos de fase e diagramas de Poincaré e concluindo com a análise dos resultados da aplicação dos algoritmos descritos no capítulo 4.

O capítulo 7 apresenta considerações conclusivas globais do desenvolvimento do trabalho, uma avaliação da aplicação dos métodos descritos no capítulo 3 do ponto de vista de engenharia e apresenta pontos que devem ser melhor investigados para a viabilização de aplicação dos mesmos métodos.

Capítulo 2

Rubbing e Rotor Vertical - Modelos Matemáticos

2.1 O Fenômeno do *Rubbing*

Como já foi explicado no capítulo 1, *rubbing* é o fenômeno que ocorre quando um elemento rotativo entra em contato eventual com uma parte estacionária do sistema (a guia interna de um mancal de rolamento, por exemplo). Como contato eventual se deseja caracterizar que no funcionamento normal do sistema não se prevê este contato. Ele tanto pode ser intermitente (o sistema entra em contato e em seguida o mesmo contato se desfaz) como permanente (o contato permanece depois de estabelecido).

O *rubbing* pode ter várias causas: desbalanceamento, desalinhamento de origem térmica ou por defeito de montagem, movimento relativo entre rotor e estator, forças fluido-dinâmicas produzindo instabilidade e vibrações auto-excitadas.

O *rubbing* pode ocorrer em uma série de casos quando as folgas são, por exigência de projeto, pequenas como é o caso dos selos, originado por um mal funcionamento ou também em situações mais extremas, sempre que as vibrações do rotor forem tais que partes do mesmo atinjam o estator, como é o caso, por exemplo de uma pá de um ventilador tocando a carcaça. Especialmente em mancais magnéticos a ocorrência do *rubbing* pode ser originada por uma falha no sistema magnético de suspensão do rotor e este vem a tocar os mancais de emergência (isto é particularmente conhecido como *aterrisagem*). Outra possibilidade é quando amortecedores por atrito ou limitadores de amplitude são colocados para limitar o crescimento de amplitudes de vibração (passagem por velocidades críticas ou ressonâncias).

A análise do *rubbing* envolve diversos aspectos:

- o problema da entrada em contato, se com impacto ou não;
- as questões envolvidas com a elasticidade da situação de contato;
- a influência do atrito;

- os efeitos de natureza térmica originados pelo *rubbing*;
- a dinâmica do contato.

Algumas considerações sobre cada um destes aspectos serão traçadas na seção seguinte, porém neste trabalho se pretende realizar uma análise sob o enfoque da dinâmica do contato, buscando informações que possam ser úteis para que este tipo de problema possa ser diagnosticado em máquinas rotativas. Sob este ângulo o *rubbing* é interpretado como um problema não-linear cujas características devem estar presentes em sinais medidos no rotor.

2.1.1 Aspectos Associados ao *Rubbing*

Impacto

O impacto ocorre quando a força normal de contato entre rotor e estator atua repentinamente com alta velocidade relativa entre as partes. O grande problema do impacto é que ele gera forças excitadoras com um largo espectro de frequência. Impactos periódicos repetitivos podem resultar em uma excitação periódica de espectro definido resultando em respostas periódicas do sistema. O impacto também cria uma resposta transiente instantânea onde frequentemente ocorre a repentina separação entre rotor e estator (repique). A direção do movimento resultante depende da direção inicial do movimento relativo, das condições de impacto (coeficiente de restituição) e das velocidades tangenciais relativas no momento do impacto.

Em rotores de alta velocidade sob determinadas condições de elasticidade e atrito alto nas superfícies de contato pode ser gerada uma adesão superficial criando condições para o surgimento de um efeito "*super ball*" [58]. Durante o impacto a velocidade de precessão do eixo é menos importante do que a velocidade de rotação. Em um pequeno tempo de contato por adesão (sem movimento relativo), a energia rotativa se transfere para a energia vibratória do movimento de repique (movimento de precessão). A direção e a velocidade do movimento de repique depende da quantidade de momento tangencial gerada pela rotação do eixo.

Atrito

Durante o contato ocorre naturalmente atrito entre rotor/estator. São então produzidos os efeitos normalmente produzidos pelo atrito: desgaste das superfícies e geração de calor. Os efeitos do aquecimento local serão discutidos a seguir, nesta seção. Frequentemente, a velocidade tangencial relativa quando ocorre o contato é alta e as forças normais são significativas. Os efeitos destrutivos do atrito podem, portanto ser graves, mesmo que em um curto espaço de tempo. Devido ao desgaste, as condições de *rubbing* das superfícies mudam muito rapidamente. Isto pode levar tanto ao aumento das folgas e conseqüente eliminação do contato rotor/estator quanto ao alargamento da área da superfície de contato. Portanto, em um tempo limitado ou o *rubbing* para (causando

condições transientes de pequena duração para o sistema), ou o *rubbing* continua com novas modificações acontecendo nas condições do movimento e na resposta dinâmica.

Efeitos Térmicos

As primeiras publicações sobre o fenômeno do *rubbing* se referem a um efeito térmico do *rubbing* em turbomáquinas. O fenômeno é frequentemente chamado de *efeito Newkirk*. Newkirk (citado por Muszynska [58]) mostrou que quando um rotor com *rubbing* está girando abaixo de sua primeira velocidade crítica, as vibrações induzidas pelo *rubbing* tendem a aumentar com o tempo. Mais tarde este efeito foi estudado por vários autores que confirmaram que as vibrações podem crescer em amplitude e fase, resultando em *vibrações espirais* (ver Muszynska [58]). Quando um rotor desbalanceado gira em uma velocidade levemente menor que sua primeira velocidade crítica, o *rubbing* normalmente acontece no selo com menor folga e localizado mais próximo da posição antinodal do eixo. O *rubbing* ocorre na posição radial do eixo com a maior tensão de tração. Para uma velocidade de rotação contínua, em um modo de vibração predominantemente síncrono com uma órbita circular ou levemente elíptica, o *rubbing* no ponto de tensão máxima pode ocorrer sempre na mesma posição do rotor. O *rubbing* causa então aquecimento por causa do atrito e expansão térmica. Devido à presença normal ou acidental de fluidos nas folgas entre rotor e estator, o calor gerado pelo *rubbing* pode ser transferido pelo fluxo de fluido, de forma que o aquecimento do eixo e a expansão térmica podem ser relativamente lentos. Em virtude da expansão local o eixo se curva, causando desbalanceamento adicional ao sistema. Em uma velocidade de rotação menor que a primeira velocidade crítica, o ângulo de fase entre a posição de tensão máxima e a direção do desbalanceamento é menor que 90°. O desbalanceamento relacionado com a curvatura adicional se soma portanto ao desbalanceamento já existente. O resultado é um aumento nas vibrações síncronas do rotor aumentando o *rubbing* e gerando mais calor. O sistema entra em um ciclo que termina quando o limite elástico das tensões é atingido e a curvatura do eixo se torna permanente devido às deformações plásticas. Neste estágio o rotor está irremediavelmente danificado e deve ser substituído.

Os efeitos térmicos do *rubbing* são particularmente importantes para maquinaria pesada com alta inércia térmica. Alguns trabalhos foram apresentados mostrando experiência de campo com observação de efeitos vibratórios induzidos por efeitos térmicos relacionados ao *rubbing* [58]. Outros propuseram modelos para relacionar as vibrações às causas de origem térmica [58]. O assunto é, entretanto, extremamente amplo e se estender mais fugiria ao caráter deste trabalho que é o de observar características dinâmicas do *rubbing*.

2.2 Modelos Matemáticos

Para a obtenção de um modelo matemático que fosse capaz de reproduzir os fenômenos que acontecem no rotor quando atuando sob a ação do contato intermitente no mancal

inferior é necessário primeiro obter um modelo estrutural do rotor e então construir um modelo matemático para o problema do contato.

2.2.1 Rotor Vertical

O movimento lateral do rotor pode ser tratado linearmente e é regido pela equação diferencial [50]

$$\mathbf{M}\ddot{\eta}(t) + (\Omega\mathbf{GIR} + \mathbf{C})\dot{\eta}(t) + \mathbf{K}\eta(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{GIR} é a matriz giroscópica, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, $\eta(t)$ é o vetor de deslocamentos do rotor, dependente do tempo t e $\mathbf{F}(t)$ é o vetor em que são introduzidas as forças externas atuantes que podem ser ou não dependentes do tempo, e Ω é a velocidade de rotação do rotor. Os pontos colocados em cima das variáveis representam as suas derivadas em relação ao tempo t .

As matrizes \mathbf{M} , \mathbf{GIR} , \mathbf{C} e \mathbf{K} são obtidas por meio da construção de um modelo com o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), que tem se mostrado eficiente nas diversas utilizações realizadas. Os vetores η são constituídos pelos deslocamentos dos nós. A seguir será apresentado o desenvolvimento clássico da construção de um modelo por elementos finitos.

Para a construção do modelo serão utilizados elementos dos tipos disco, eixo e mancais. Cada nó possui quatro graus de liberdade, dois deslocamentos e duas rotações, conforme ilustra a figura 2.1.

Elemento disco

As matrizes constitutivas do elemento disco são obtidas por meio da aplicação das equações de Lagrange [50].

A energia cinética E_C de um elemento do tipo disco situado em um nó genérico como ilustra a figura 2.2 é igual a

$$E_C = \frac{1}{2}M_D\dot{u}^2 + \frac{1}{2}M_D\dot{v}^2 + \frac{1}{2}I_{D_x}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{D_y}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}I_{D_z}(\Omega^2 + 2\Omega\dot{\xi}\theta) \quad (2.2)$$

onde M_D é a massa do disco, I_{D_x} , I_{D_y} e I_{D_z} são os momentos de inércia em relação aos eixos x , y e z respectivamente.

Os termos da Equação de Lagrange que envolvem a energia cinética são utilizados para a determinação da matriz de massa do elemento. Em forma matricial estes termos podem ser escritos como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{M}_{\text{disco}}\ddot{\mathbf{w}} + \Omega\mathbf{GIR}_{\text{disco}}\dot{\mathbf{w}} \quad (2.3)$$

onde

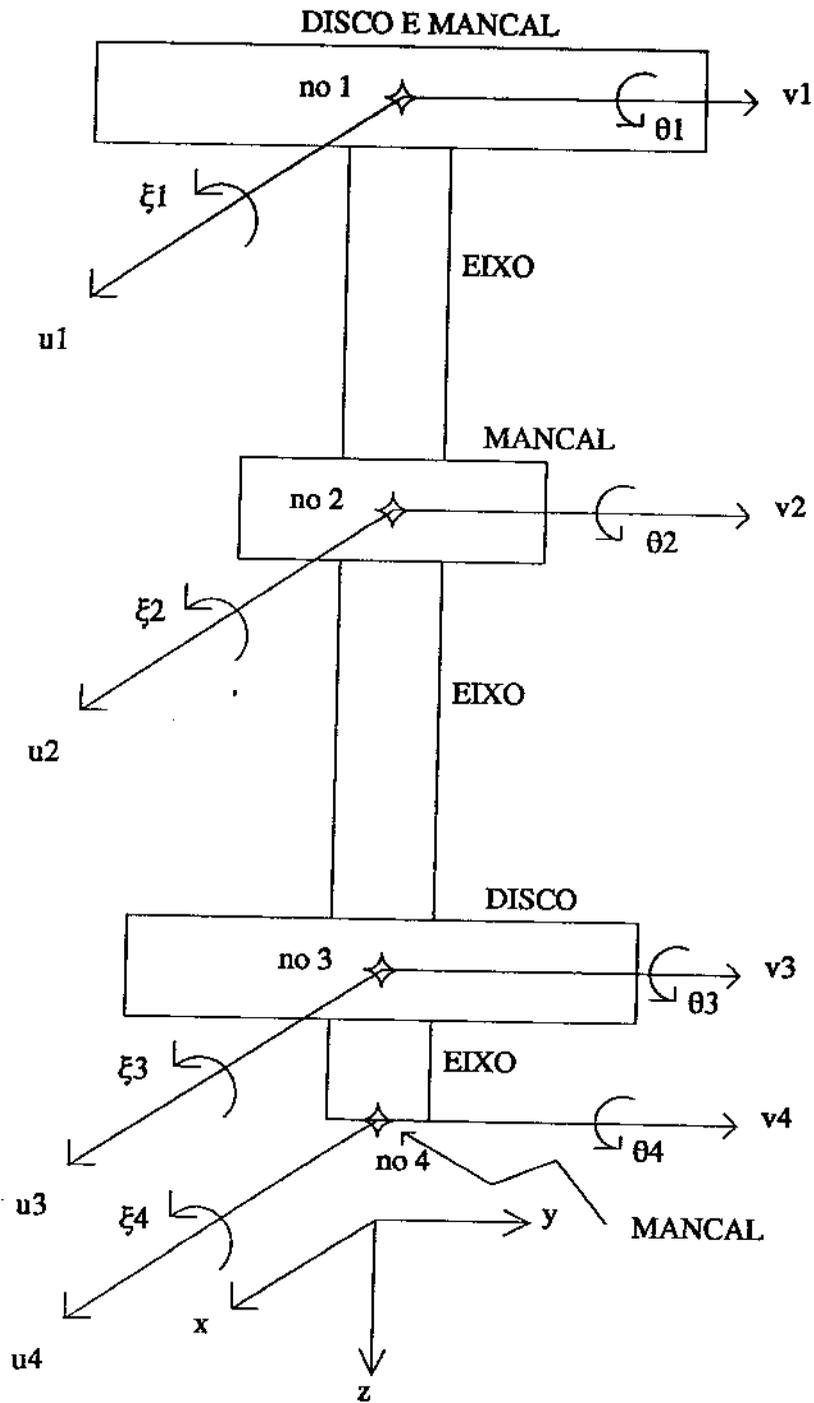


Figura 2.1: Modelo por elementos finitos do rotor.

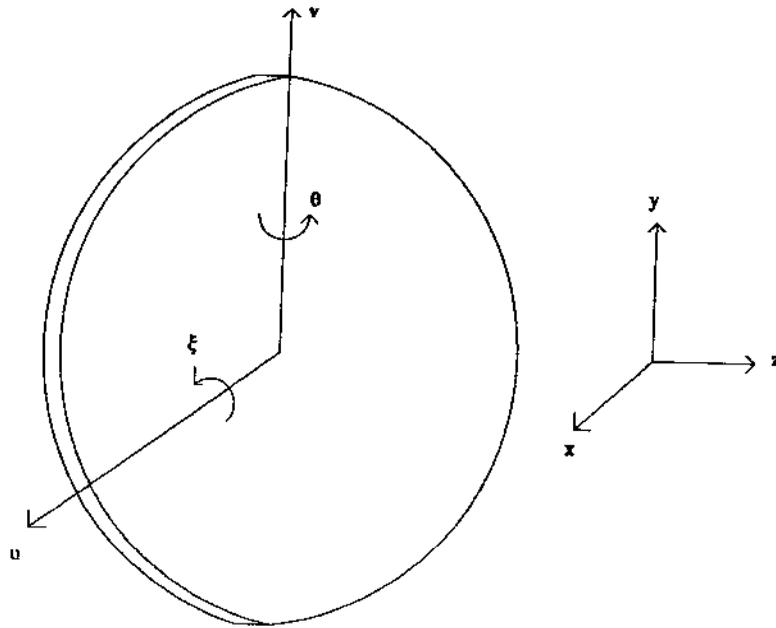


Figura 2.2: Modelo do elemento do tipo disco.

$$M_{\text{disco}} = \begin{bmatrix} M_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dy} \end{bmatrix}$$

é a matriz de massa do elemento,

$$GIR_{\text{disco}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dz} \\ 0 & 0 & I_{Dz} & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz giroscópica do elemento, e

$$w = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \\ \xi \end{Bmatrix}$$

é o vetor das variáveis que descrevem o movimento do nó.

Elemento eixo

O elemento eixo é modelado como uma viga de Timoshenko com a inclusão do efeito giroscópico a partir do modelo mostrado na figura 2.3.

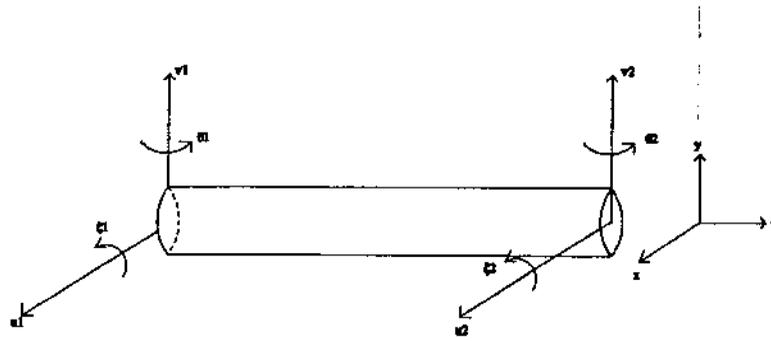


Figura 2.3: Modelo do elemento do tipo eixo (viga de Timoshenko).

Da teoria da elasticidade obtém-se a relação entre os deslocamentos e as rotações na forma

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.4)$$

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2.5)$$

O vetor de deslocamentos nodais inclui os deslocamentos e rotações dos nós que compõem o elemento na forma

$$\mathbf{w} = [u_i, v_i, \theta_i, \xi_i, u_j, v_j, \theta_j, \xi_j]^T. \quad (2.6)$$

Os vetores de deslocamentos nodais nos planos x-z e y-z são, respectivamente

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= [u_i, \xi_i, u_j, \xi_j]^T \\ \delta \mathbf{v} &= [v_i, \theta_i, v_j, \theta_j]^T. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Os deslocamentos no interior do elemento estão relacionados com os deslocamentos nodais através das funções de forma $N_1(z)$ e $N_2(z)$ de forma que

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{N}_1(z) \delta \mathbf{u} \\ v &= \mathbf{N}_2(z) \delta \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Estas funções são polinômios obtidos de forma a respeitar as condições de contorno nos nós do elemento. Para o elemento do tipo viga de Timoshenko estas funções são

$$\mathbf{N}_1(z) = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3} \\ -z + \frac{2z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \\ \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} \\ \frac{z^2}{l} - \frac{z^3}{l^2} \end{Bmatrix}^T, \quad \mathbf{N}_2(z) = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3} \\ z - \frac{2z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \\ \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3} \\ -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \end{Bmatrix}^T, \quad (2.8)$$

onde l é o comprimento do elemento e T representa a transposta da matriz.

Se o elemento possui distribuição uniforme de massa com ρ sendo a massa por unidade de comprimento e S a área da seção transversal, constante ao longo de seu comprimento, a energia cinética do elemento pode ser calculada por meio de

$$E_C = \frac{\rho S}{2} \int_0^l [\delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 \delta \dot{\mathbf{u}} + \delta \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 \delta \dot{\mathbf{v}}] dz + \frac{\rho I}{2} \int_0^l [\delta \dot{\mathbf{u}}^T \frac{d\mathbf{N}_1^T}{dz} \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \delta \dot{\mathbf{u}} + \delta \dot{\mathbf{v}}^T \frac{d\mathbf{N}_2^T}{dz} \frac{d\mathbf{N}_2}{dz} \delta \dot{\mathbf{v}}] dz - 2\rho I \Omega \int_0^l \delta \dot{\mathbf{u}}^T \frac{d\mathbf{N}_1^T}{dz} \frac{d\mathbf{N}_1}{dz} \delta \mathbf{v} dz + \rho I I \Omega^2, \quad (2.9)$$

onde I é o momento de inércia da seção transversal do elemento.

Aplicando as funções de forma 2.8 e efetuando as integrais chega-se á seguinte expressão para a energia cinética

$$E_C = \frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_1 \delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M}_2 \delta \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_3 \delta \dot{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} \delta \dot{\mathbf{v}}^T \mathbf{M}_4 \delta \dot{\mathbf{v}} + \Omega \delta \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M}_5 \delta \mathbf{v} + \rho I I \Omega^2, \quad (2.10)$$

onde as matrizes \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 são matrizes de massa generalizadas, \mathbf{M}_3 e \mathbf{M}_4 são matrizes que incluem o efeito da inércia rotativa e \mathbf{M}_5 é uma matriz que introduz o efeito giroscópico. O termo $\rho I I \Omega^2$ desaparecerá quando se efetuarem as derivadas da equação de Lagrange uma vez que não depende dos deslocamentos, podendo ser desconsiderado.

Calculando novamente os termos da equação de Lagrange que envolvem a energia cinética e aglutinando os deslocamentos no vetor definido em 2.6 chega-se a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \delta} = \mathbf{M}_{\text{eixo}} \ddot{\delta} + \Omega \mathbf{GIR}_{\text{eixo}} \dot{\delta}, \quad (2.11)$$

em que $\mathbf{M}_{\text{eixo}} = \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_S$. A matriz \mathbf{M}_P é obtida de \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 , enquanto que \mathbf{M}_S resulta de \mathbf{M}_3 e \mathbf{M}_4 . A matriz $\mathbf{GIR}_{\text{eixo}}$ vem diretamente de \mathbf{M}_5 . Estas matrizes elementares estão detalhadas a seguir.

$$\mathbf{M}_P = \frac{\rho S l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22l & 54 & 0 & 0 & 13l \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 0 & 54 & -13l & 0 \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 0 & 13l & -3l^2 & 0 \\ -22l & 0 & 0 & 4l^2 & -13l & 0 & 0 & -3l^2 \\ 54 & 0 & 0 & -13l & 156 & 0 & 0 & 22l \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 0 & 156 & -22l & 0 \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & 0 & -22l & 4l^2 & 0 \\ 13l & 0 & 0 & -3l^2 & 22l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{M}_S = \frac{\rho l}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & +3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{GIR}_{\text{eixo}} = \frac{\rho l \Omega}{15l} \begin{bmatrix} 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 3l & 0 & 0 & -4l^2 & -3l & 0 & 0 & l^2 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 3l & 0 & 0 & l^2 & -3l & 0 & 0 & -4l^2 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

A matriz de rigidez é determinada a partir da energia de deformação do elemento, dada por

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[\delta \mathbf{u}^T \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dz^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_1}{dz^2} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{v}^T \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dz^2} \frac{d^2 \mathbf{N}_2}{dz^2} \delta \mathbf{v} \right] dz + \frac{E_0}{2} \int_0^l \left[\delta \mathbf{u}^T \frac{d \mathbf{N}_1}{dz} \frac{d \mathbf{N}_1}{dz} \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{v}^T \frac{d \mathbf{N}_2}{dz} \frac{d \mathbf{N}_2}{dz} \delta \mathbf{v} \right] dz, \quad (2.15)$$

que, após a aplicação das funções de forma 2.8 resulta em

$$U = \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_1 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K}_2 \delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_3 \delta \mathbf{u} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{v}^T \mathbf{K}_4 \delta \mathbf{v}, \quad (2.16)$$

onde as matrizes \mathbf{K}_1 e \mathbf{K}_2 são matrizes de rigidez generalizadas e \mathbf{K}_3 e \mathbf{K}_4 são matrizes que incluem o efeito das forças axiais.

Se for considerado o efeito do cisalhamento inclui-se o fator

$$a = \frac{12EI}{GS_r l^2},$$

com $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ em que ν é o coeficiente de Poisson e $S_r \approx S$ é a área reduzida da seção transversal.

O termo da equação de Lagrange que inclui a energia de deformação é

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = \mathbf{K} \delta, \quad (2.17)$$

com $\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + \mathbf{K}_F$ em que a matriz \mathbf{K}_C é obtida de \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_S , enquanto que \mathbf{K}_F é a matriz de rigidez relacionada com a direção axial. Estas matrizes estão mostradas em detalhe para um elemento, a seguir

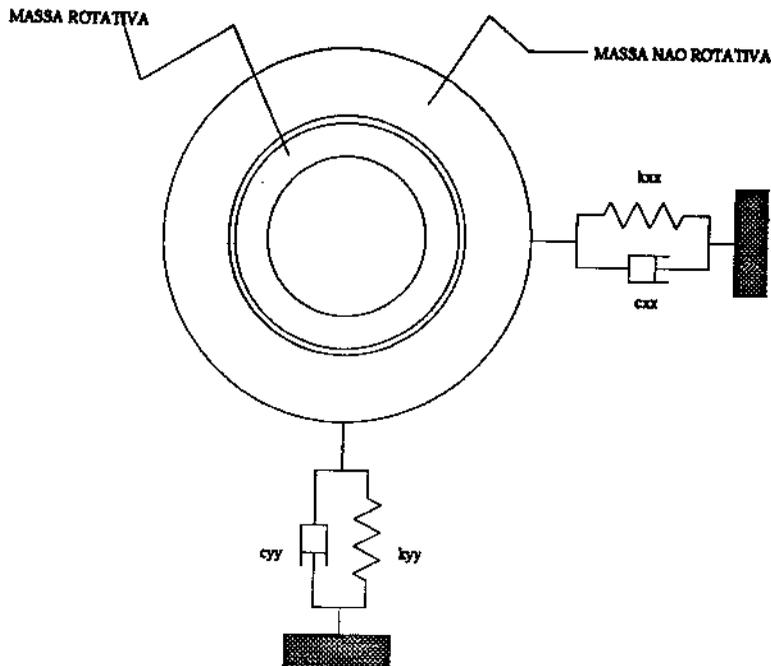


Figura 2.4: Modelo do elemento do tipo mancal.

$$\mathbf{K}_C = \frac{EI}{(1+a)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6l & -12 & 0 & 0 & -6l \\ 0 & 12 & 6l & 0 & 0 & -12 & 6l & 0 \\ 0 & 6l & (4+a)l^2 & 0 & 0 & -6l & (2-a)l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & (4+a)l^2 & 6l & 0 & 0 & (2-a)l^2 \\ -12 & 0 & 0 & 6l & 12 & 0 & 0 & 6l \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 0 & 12 & -6l & 0 \\ 0 & 6l & (2-a)l^2 & 0 & 0 & -6l & (4+a)l^2 & 0 \\ -6l & 0 & 0 & (2-a)l^2 & 6l & 0 & 0 & (4+a)l^2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

O efeito do cisalhamento não é considerado fazendo $a = 0$.

$$\mathbf{K}_F = \frac{F}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3l & -36 & 0 & 0 & -3l \\ 0 & 36 & 3l & 0 & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & 4l^2 & 0 & 0 & -3l & -l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & 4l^2 & 3l & 0 & 0 & -l^2 \\ -36 & 0 & 0 & 3l & 36 & 0 & 0 & 3l \\ 0 & -36 & -3l & 0 & 0 & 36 & -3l & 0 \\ 0 & 3l & -l^2 & 0 & 0 & -3l & 4l^2 & 0 \\ -3l & 0 & 0 & -l^2 & 3l & 0 & 0 & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Elemento mancal

Para um mancal modelado na forma ilustrada na figura 2.4, as forças atuantes nos mancais podem ser escritas como

$$\begin{aligned} F_u &= -k_{xx}u - k_{xy}v - c_{xx}\dot{u} - c_{xy}\dot{v} \\ F_v &= -k_{yx}u - k_{yy}v - c_{yx}\dot{u} - c_{yy}\dot{v} \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que k_{xx} , k_{yy} , k_{xy} e k_{yx} são constantes de rigidez e c_{xx} , c_{yy} , c_{xy} e c_{yx} são constantes de amortecimento e de onde podem ser extraídas as matrizes de rigidez e amortecimento elementares

$$\mathbf{K}_{mancal} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

e

$$\mathbf{C}_{mancal} = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

de forma que o vetor de forças atuantes no mancal é dado por

$$\mathbf{F}_{mancal} = -\mathbf{K}_{mancal}\mathbf{w} - \mathbf{C}_{mancal}\dot{\mathbf{w}}. \quad (2.23)$$

2.2.2 Modelo do Rotor

Para o presente estudo um modelo por elementos finitos do rotor com os mancais, com 4 nós, está esquematizado na figura 2.5. No nó 1 estão concentradas as propriedades do disco superior, motor e molas que o ligam à estrutura. No nó 2 foram incluídas as propriedades do mancal intermediário e das molas que o ligam à estrutura. O nó 3 está localizado na posição do disco inferior. O nó 4 está posicionado onde ocorre contato entre rotor e mancal, de forma que, quando ocorre contato as propriedades do mancal inferior atuam neste nó.

2.2.3 Modelo Matemático do *Rubbing*

O modelo do *rubbing* para a determinação de características caóticas requer uma boa determinação das diversas influências presentes. Uma perfeita descrição das condições de impacto, do atrito e efeitos térmicos, principalmente, assim como uma correta descrição do tipo de movimento que se desenvolve após o contato (se impacto, trepidação, deslizamento ou rolamento) são fundamentais para que as características não lineares sejam corretamente estabelecidas. Previamente, entretanto, para o cálculo dos expoentes de Lyapunov é necessário que o movimento aconteça com descrição por variáveis cujas derivadas sejam contínuas. Para isto decidiu-se utilizar o processo desenvolvido por Müller [55] que cria

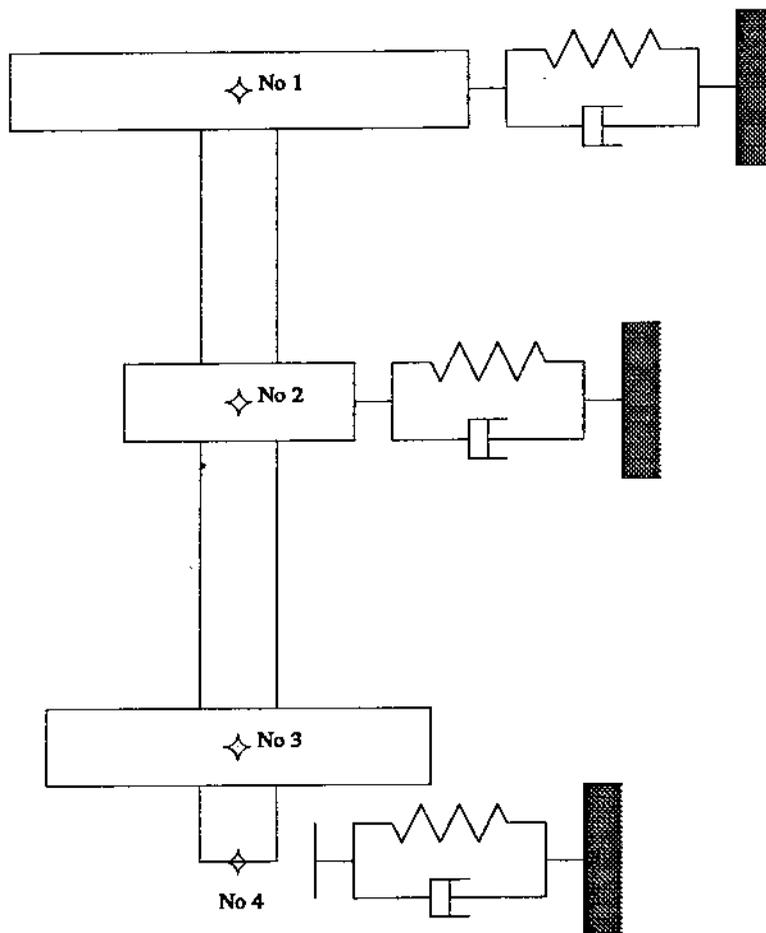


Figura 2.5: Esquema do modelo por elementos finitos do rotor com os mancais.

funções de transição para a entrada e saída do contato. Inicialmente é necessário escrever as equações do movimento 2.1 na forma de estado

$$\dot{\vartheta} = \mathbf{D}_s \vartheta + \mathbf{F}_s, \quad (2.24)$$

onde

$$\vartheta = \begin{Bmatrix} \dot{\eta} \\ \eta \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C} + \mathbf{GIR}) & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{F}_s = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix},$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade, $\mathbf{0}$ uma matriz com todos os seus elementos nulos.

Para construir um modelo que permita o cálculo dos expoentes de Lyapunov deve ser garantida a suavidade da dinâmica, ou seja a continuidade das derivadas. A transição, portanto, entre os dois tipos de comportamento existentes, com e sem contato, deve ser suavizada. Assumindo que o movimento esteja sendo desenvolvido no espaço de estado de acordo com a equação 2.24 e que inicialmente o rotor está em movimento sem contato e, a partir de um tempo t_1 entra em contato com o mancal, o movimento pode ser dividido três etapas: pré-contato, transição e pós-contato.

Antes do contato o sistema tem um comportamento definido pela equação 2.24 com as matrizes constitutivas sendo construídas sem a inclusão das propriedades (inércia, amortecimento e rigidez) do mancal. Durante a entrada em contato ocorre uma situação de transição e depois do contato o sistema volta a ser regido pela mesma equação 2.24 com as matrizes incluindo as propriedades do mancal. Por simplicidade, a equação 2.24, antes do contato pode ser escrita na forma

$$\dot{\vartheta}(t) = \mathbf{f}_1(\vartheta(t)), \quad (2.25)$$

válida para $t_0 \leq t \leq t_1$, com condição inicial $\vartheta(t_0) = \vartheta_0$ e a função matricial $\mathbf{f}_1(\vartheta) = \mathbf{D}_s \vartheta + \mathbf{F}_s$ sendo obtida para o rotor sem o mancal inferior.

Em $t = t_1$, chamada transição, o rotor entra em contato. Define-se, então uma função indicadora $\mathbf{h}(\vartheta)$ que identificará o contato, escrevendo-se a seguinte equação

$$\mathbf{h}(\vartheta(t_1)) = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Uma transição suave exige que uma função com derivada contínua relacione os vetores ϑ antes e depois do contato:

$$\vartheta(t_{1+}) = \mathbf{g}(\vartheta(t_{1-})). \quad (2.27)$$

Após entrar em contato o sistema volta a ser regido pela equação 2.24 escrita agora na forma

$$\dot{\vartheta}(t) = \mathbf{f}_2(\vartheta(t)), \quad (2.28)$$

válida para $t > t_1$, com condição inicial $\vartheta(t_1) = \vartheta(t_{1+})$ e a função matricial $\mathbf{f}_2(\vartheta) = \mathbf{D}_s\vartheta + \mathbf{F}_s$ sendo obtida para o rotor com o mancal inferior.

Admita-se agora que o movimento seja inicialmente perturbado de forma que $\bar{\vartheta}(t_0) = \vartheta_0 + \delta\vartheta_0$. Este sinal perturbado encontrará a condição de descontinuidade não mais no tempo t_1 e sim no tempo $\bar{t}_1 = t_1 + \delta t$. A figura 2.6 ilustra os dois movimentos. Para a trajetória perturbada, as equações do movimento serão:

$$\dot{\bar{\vartheta}}(t) = \mathbf{f}_1(\bar{\vartheta}(t)), \quad (2.29)$$

válida para $t_0 \leq t \leq \bar{t}_1$, com condição inicial $\bar{\vartheta}(t_0) = \vartheta_0 + \delta\vartheta_0$. A função indicadora é dada por

$$\mathbf{h}(\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t)) = \mathbf{0}; \quad (2.30)$$

a função de transição é

$$\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_+) = \mathbf{g}(\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_-)) \quad (2.31)$$

e, após o contato

$$\dot{\bar{\vartheta}}(t) = \mathbf{f}_2(\bar{\vartheta}(t)), \quad (2.32)$$

válida para $t > \bar{t}_1$, com condição inicial $\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t) = \bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_+)$.

Para a suavização, o interesse se volta para a análise do comportamento de pequenas perturbações com o tempo

$$\delta\vartheta(t) = \bar{\vartheta}(t) - \vartheta(t), \quad (2.33)$$

com $\delta\vartheta_0 \rightarrow 0$ no intervalo crítico dado pela figura 2.6.

Em primeiro lugar, assume-se que $\delta t < 0$. Antes da descontinuidade as equações linearizadas do movimento originam-se de 2.25 formando

$$\delta\dot{\vartheta}(t) = \mathbf{F}_1(t)\delta\vartheta(t), \quad (2.34)$$

com condição inicial $\delta\vartheta(t_0) = \delta\vartheta_0$ e

$$\mathbf{F}_1(t) = \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \vartheta(t)^T} |_{\vartheta(t)}$$

Como $\delta t < 0$ a trajetória perturbada alcança primeiro o ponto de descontinuidade e satisfaz a equação 2.26. De acordo com a figura 2.6

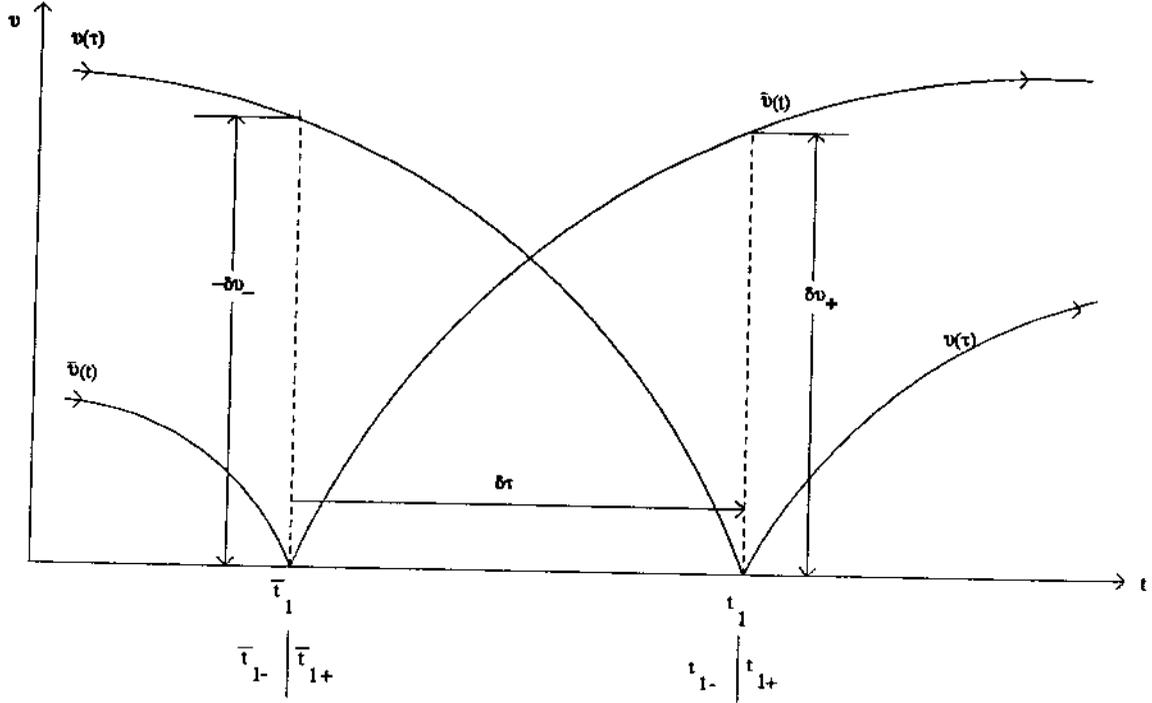


Figura 2.6: Trajetória de referência e trajetória perturbada atingindo um obstáculo.

$$\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_-) = \vartheta(t_1 + \delta t_-) + \delta\vartheta(t_{1-}), \quad (2.35)$$

que pode se aproximada para

$$\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_-) \approx \vartheta(t_{1-}) + \mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-}). \quad (2.36)$$

A função indicadora, dada por 2.26 se torna

$$\mathbf{h}(\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_-)) = \mathbf{h}(\bar{\vartheta}(t_1) + \mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})) = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Utilizando o desenvolvimento em série de Taylor com os termos de ordem superior desprezados e considerando que $\mathbf{h}(\bar{\vartheta}(t_1)) = \mathbf{0}$ devido a 2.26 chega-se a

$$\mathbf{H}(\vartheta(t_{1-})) \cdot [\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})] = \mathbf{0}, \quad (2.38)$$

com $\mathbf{H}(\vartheta(t_{1-})) = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \vartheta(t)} \Big|_{\vartheta(t)}$.

A partir desta expressão se pode obter o valor de δt .

Na transição $t = t_1$ tem-se

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_+) &= \mathbf{g}(\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_-)) \\ &= \mathbf{g}(\vartheta(t_{1-}) + \mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})) \\ &\approx \mathbf{g}(\vartheta(t_{1-})) + \mathbf{G}(\vartheta(t_{1-})) \cdot [\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})], \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $\mathbf{G}(\vartheta(t_{1-})) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \vartheta^T(t)}|_{\vartheta(t_{1-})}$.

A perturbação em $t_1 + \delta t_+$ é

$$\begin{aligned} \delta\vartheta(t_1 + \delta t_+) &= \bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_+) - \vartheta(t_1 + \delta t_+) \\ &= \mathbf{g}(\vartheta(t_{1-})) + \mathbf{G}(\vartheta(t_{1-})) \cdot [\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})] - (\vartheta(t_{1-}) + \mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t) \\ &= \vartheta(t_{1+}) - \vartheta(t_{1-}) + \mathbf{G}(\vartheta(t_{1-}))\delta\vartheta(t_{1-}) + [\mathbf{G}(\vartheta(t_{1-})) + \mathbf{I}]\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Para $t = t_{1-}$

$$\begin{aligned} \delta\vartheta(t_{1-}) &= \bar{\vartheta}(t_{1-}) - \vartheta(t_{1-}) \\ &= \vartheta(t_1 + \delta t_+) - \mathbf{f}_2(\bar{\vartheta}(t_1 + \delta t_+))\delta t - \vartheta(t_{1-}) \\ &\approx \mathbf{G}(\vartheta(t_{1-})) \cdot [\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})] \\ &\quad - \mathbf{f}_2(\mathbf{g}(\vartheta(t_{1-})) + \mathbf{F}_2(\vartheta(t_{1+}))\mathbf{G}(\vartheta(t_{1+})) \cdot [\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})] - \vartheta(t_{1-})) \\ &= \vartheta(t_{1+}) - \vartheta(t_{1-}) + \mathbf{G}(\vartheta(t_{1-}))[\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-}))\delta t + \delta\vartheta(t_{1-})] - \mathbf{f}_2(\vartheta(t_{1+})) + o^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

com $\mathbf{F}_2(\vartheta(t_{1-})) = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \vartheta^T(t)}|_{\vartheta(t_{1+})}$.

Finalmente, considerando-se o tempo $t = t_{1+}$, tem-se

$$\delta\vartheta(t_{1+}) = \bar{\vartheta}(t_{1+}) - \vartheta(t_{1+}). \quad (2.42)$$

Sendo $\bar{\vartheta}(t_{1+}) = \vartheta(t_{1-}) + \delta\vartheta(t_{1-})$ e usando 2.41 chega-se a

$$\delta\vartheta(t_{1+}) = \mathbf{G}(\vartheta(t_{1-}))\delta\vartheta(t_{1-}) + [\mathbf{G}(\vartheta(t_{1-}))\mathbf{f}_1(\vartheta(t_{1-})) - \mathbf{f}_2(\vartheta(t_{1+}))]\delta t. \quad (2.43)$$

Para $t > t_1$ o comportamento será então regido por

$$\delta\dot{\vartheta}(t) = \mathbf{F}_2(t)\delta\vartheta(t), \quad (2.44)$$

com $\mathbf{F}_2 = \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \vartheta^T(t)}|_{\vartheta(t)}$ e condições iniciais $\delta\vartheta(t_1) = \delta\vartheta(t_{1+})$.

As equações 2.34, 2.43 e 2.44 descrevem uma linearização generalizada no caso de sistemas com descontinuidades. A utilização destas equações suaviza o sistema dinâmico o que permite o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Nas equações 2.34, 2.43 e 2.44 a grande dificuldade fica exatamente em obter uma função de transição \mathbf{g} que descreva com precisão o fenômeno do *rubbing*. Em um exercício preliminar tentou-se utilizar a teoria do impacto com a utilização de um coeficiente de restituição. Ou seja, o sistema antes e depois da descontinuidade tinha o mesmo comportamento descrito pela mesma equação. Durante a descontinuidade era utilizado o coeficiente de restituição atuando nas coordenadas do nó correspondente à posição do impacto. Mesmo variando o coeficiente de restituição entre 0 e 1 não foi possível encontrar um modelo de impacto que representasse de forma adequada o fenômeno medido tanto no que se refere ao cálculo dos expoentes de Lyapunov quanto em uma análise linear com

o auxílio das transformadas de Fourier. Entende-se que é necessário construir um modelo de comportamento mais real considerando-se a transição entre o sistema sem contato e o sistema com contato levando-se em conta também o atrito e a influência da variação da rigidez na configuração do sistema.

2.3 Simulação

Neste apêndice são apresentados alguns resultados da simulação do problema do *rubbing* no modelo do rotor, construído com o método dos elementos finitos.

Na figura 2.7 (a), é mostrada a órbita (x versus y) medida para a velocidade de rotação de 11,4 Hz com folga de 0,574 mm. A órbita é representativa de um movimento bastante irregular e corresponde a um sinal com expoente de Lyapunov positivo. As transformadas de Fourier dos deslocamentos nas direções x e y estão mostrados nas figuras 2.7 (b) e (c), respectivamente.

A figura 2.8 (a) por sua vez, mostra a órbita obtida por simulação do movimento considerando-se, exclusivamente, a variação da rigidez do nó 4. Neste caso o *rubbing* é simulado separando-se o movimento em duas fases: sem contato e com contato. O movimento na primeira fase é o do rotor girando com a sua extremidade inferior livre e a precessão é provocada por desbalanceamento. Na segunda fase, o rotor gira com sua extremidade inferior em contato com o mancal, simulado por um acréscimo de rigidez e amortecimento no nó 4. Este movimento é obtido do deslocamento do nó 3 que é o nó que contém o disco, do qual foram medidos os deslocamentos nos ensaios experimentais. As transformadas de Fourier dos deslocamentos nas direções x e y estão mostradas nas figuras 2.8 (b) e (c).

Na figura 2.9 (a) é mostrada a órbita com o *rubbing* simulado através do modelo matemático da seção 2.2.3. As figuras 2.9 (b) e (c) mostram as transformadas de Fourier dos deslocamentos nas direções x e y . As equações 2.34, 2.43 e 2.44 devem ser aplicadas ao problema do *rubbing*. A forma mais simples de representar matematicamente o fenômeno é considerá-lo como um impacto na direção radial, descrito por um coeficiente de restituição c_r . Assim, o movimento é separado em três fases. Na primeira fase o comportamento é descrito pela equação 2.34, onde as matrizes D_s e F_s são escritas para o rotor em movimento com a extremidade inferior livre. Na segunda fase ocorre o contato e a suavização da descontinuidade é obtida com a utilização da equação 2.43. Na terceira fase o movimento volta a ser descrito por 2.34 com o rotor novamente solto.

A aplicação da equação 2.34 se resume em um processo de integração. Esta integração foi realizada através de um algoritmo da família de Newmark para sistemas lineares.

A solução da equação 2.43, entretanto, requer que os seus termos sejam adequadamente escritos para o problema ao qual a mesma está sendo aplicada. Em primeiro lugar é necessário definir a função indicadora $h(\vartheta(t))$ que cumpre o papel de identificar o contato. No caso presente o contato ocorre quando a amplitude do movimento na extremidade do eixo atinge o valor da folga. Chamando, simplificada, $\vartheta_- = \vartheta(t_{1-})$ tem-se

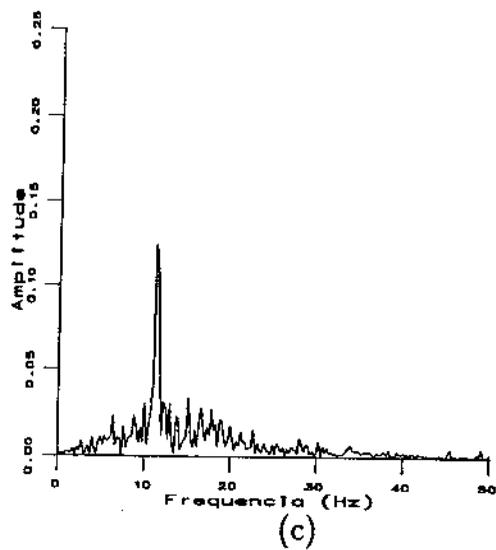
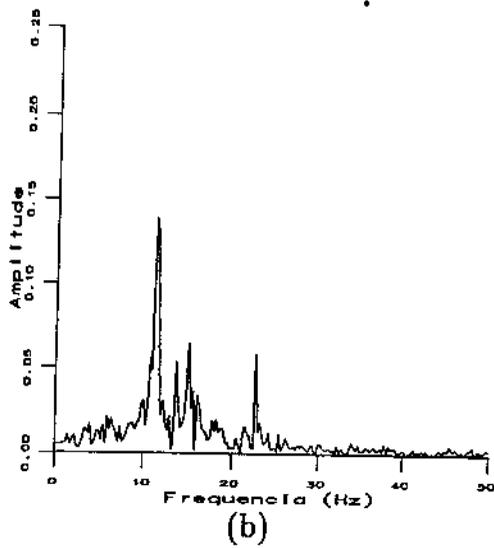
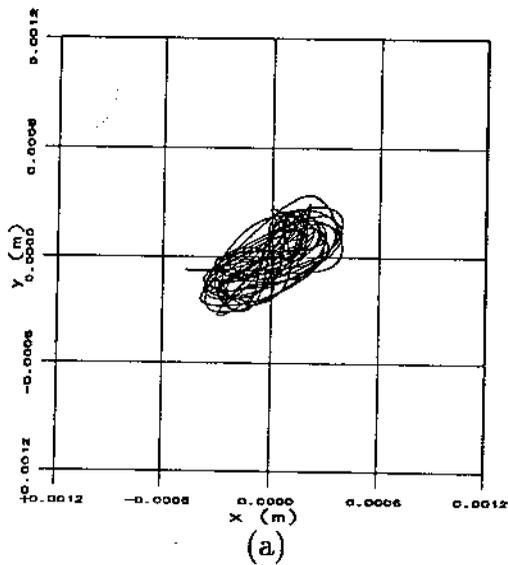
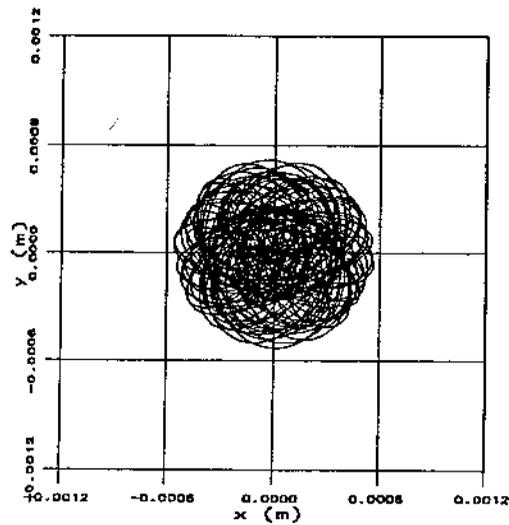
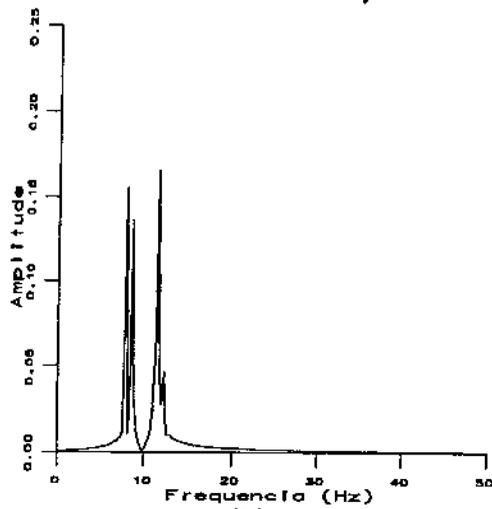


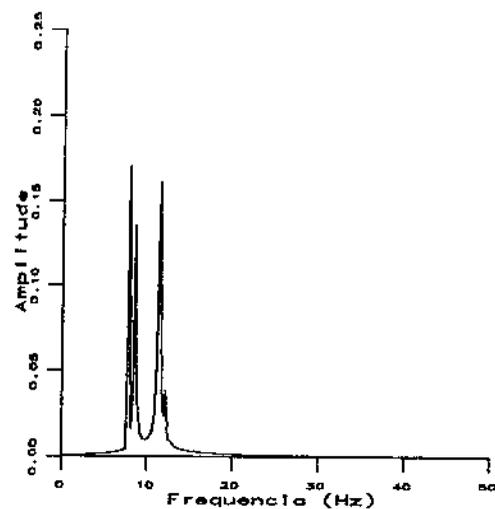
Figura 2.7: (a) Órbita do disco inferior do rotor medida experimentalmente (rotação de 11,4 Hz e folga de 0,574 mm); (b) e (c) transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y .



(a)



(b)



(c)

Figura 2.8: (a) Órbita do nó 3 do modelo por elementos finitos do rotor, obtida por simulação do movimento com variação de rigidez do nó 4; (b) e (c) transformadas de Fourier do movimento simulado nas direções x e y .

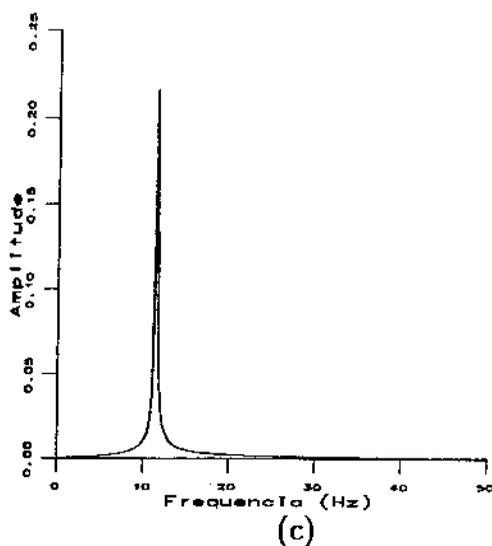
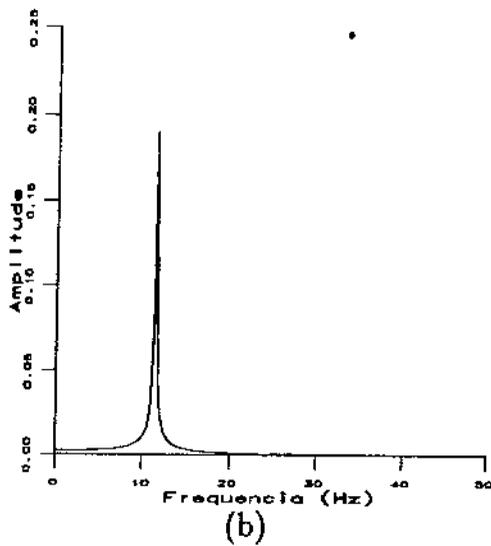
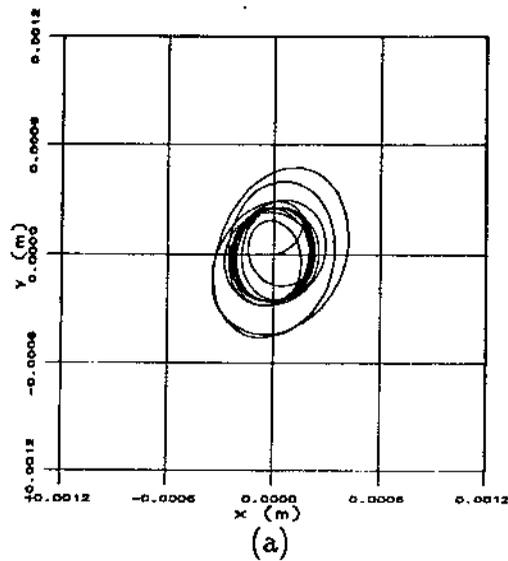


Figura 2.9: (a) Órbita do nó 3 do modelo por elementos finitos do rotor, obtida por simulação do movimento com impacto representado por coeficiente de restituição $e_T > 0,295$; (b) e (c) transformadas de Fourier do movimento simulado nas direções x e y .

$$\vartheta_-^T \mathbf{C}_c \vartheta_- - c_0 = 0$$

em que c_0 é o valor da folga e \mathbf{C}_c é uma matriz com zeros em todos os elementos exceto naqueles da diagonal principal com índices correspondentes aos deslocamentos do nó correspondente ao ponto de contato (no caso, nó 4).

A função $\mathbf{H}(\vartheta_-) = \frac{\partial h}{\partial \vartheta(t)^T} |_{\vartheta_-}$ é

$$\mathbf{H}(\vartheta_-) = 2\mathbf{C}_c \vartheta_-$$

Combinando 2.24 e 2.25, tem-se

$$\mathbf{f}_1(\vartheta_-) = \mathbf{D}_s \vartheta_- + \mathbf{F}_s$$

Pode-se, então, calcular δt através de 2.38, resultando

$$\delta t = \frac{(\mathbf{C}_c \vartheta_-)^T \delta \vartheta_-}{(\mathbf{C}_c \vartheta_-)^T (\mathbf{D}_s \vartheta_- + \mathbf{F}_s)}$$

com $\delta \vartheta_- = \delta \vartheta(t_{1-})$.

Em seguida obtém-se a função de transição $\mathbf{g}(\vartheta_-)$. Com o impacto representado pelo coeficiente de restituição c_r representa-se

$$\mathbf{g}(\vartheta_-) = \mathbf{U}_t \vartheta_-$$

onde \mathbf{U}_t é uma matriz da forma

$$\mathbf{U}_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -c_r \cos^2 \omega t + \text{sen}^2 \omega t & -(1 + c_r) \text{sen} \omega t \cos \omega t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -(1 + c_r) \text{sen} \omega t \cos \omega t & -c_r \text{sen}^2 \omega t + \cos^2 \omega t & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como a matriz $\mathbf{G}(\vartheta_-) = \mathbf{U}_t$, a equação 2.43 pode ser escrita como

$$\delta \vartheta_+ = \mathbf{U}_t \delta \vartheta_- + [\mathbf{U}_t (\mathbf{D}_s \vartheta_- + \mathbf{F}_s) - (\mathbf{D}_s \vartheta_- + \mathbf{F}_s)] \delta t$$

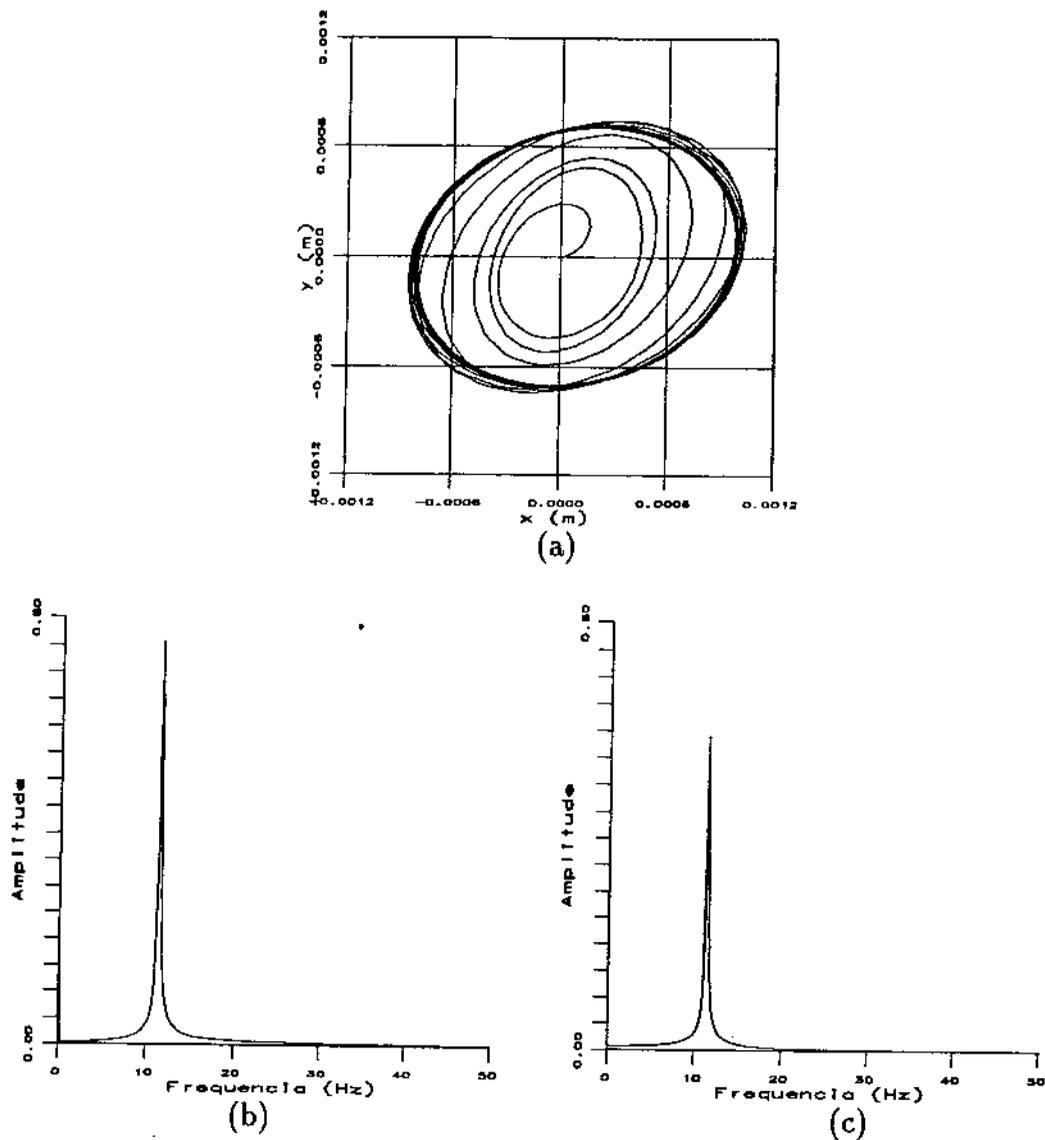


Figura 2.10: (a) Órbita do nó 3 do modelo por elementos finitos do rotor, obtida por simulação do movimento com impacto representado por coeficiente de restituição $c_r \leq 0,295$; (b) e (c) transformadas de Fourier do movimento simulado nas direções x e y .

Os resultados apresentados na figura 2.9 são obtidos com coeficientes de restituição maiores do que 0,295. Para valores iguais ou menores que 0,295 o sistema mostrou um comportamento diferente, mostrado na figura 2.10. Para coeficientes menores que o valor limite o movimento sempre converge para órbita próxima à mostrada na figura 2.10 (a). Se o coeficiente de restituição for aumentado, quando ultrapassa 0,295 a órbita subitamente converge para a mostrada na figura 2.9 (a). Há portanto, uma dependência da solução no valor do coeficiente de restituição. Para uma completa avaliação da dependência entre a solução e os parâmetros será necessário uma completa avaliação de influência dos diversos parâmetros envolvidos na equação, principalmente coeficiente de restituição, amortecimento e magnitude da força de desbalanceamento que poderão influenciar na estabilidade da solução.

Como os resultados apresentados não são satisfatórios decidiu-se não realizar a comparação dos expoentes de Lyapunov calculados para cada um dos casos com os calculados para o sinal obtidos experimentalmente. O objetivo de se utilizar uma função de suavização da descontinuidade representada pela entrada em contato é poder calcular o expoente de Lyapunov a partir das equações que descrevem o movimento e permitir uma comparação com o obtido das medições. Para que isto seja válido é necessária uma boa representação do movimento com as equações suavizadas o que não foi conseguido. Em se tratando de um problema não linear o modelo matemático deve ser extremamente preciso e incluir efeitos aqui não considerados como, por exemplo, o atrito. A existência de forças excitadoras não consideradas como forças de natureza eletro-magnética introduzidas pelo motor e forças originadas por possíveis folgas existentes nos mancais do motor e no mancal intermediário também é um fator de introdução de imperfeições no modelo. A obtenção de um modelo matemático que represente o *rubbing* preservando os expoentes de Lyapunov é uma proposta de continuação deste trabalho.

Capítulo 3

Métodos de Análise Não-Linear

3.1 Sistema dinâmico diferenciável

Um sistema dinâmico diferenciável é qualquer evolução no tempo definida por

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v(t)), \quad (3.1)$$

quando o tempo for contínuo, ou por um mapa

$$s(n+1) = \mathcal{F}(s(n)), \quad (3.2)$$

sendo n inteiro, quando o tempo for discreto, onde f e \mathcal{F} são funções diferenciáveis. Em outras palavras, f ou \mathcal{F} têm derivadas contínuas. A diferenciabilidade é também conhecida como *suavidade* e a classe de suavidade define até que ordem a função é diferenciável. Como o objetivo do trabalho é o tratamento de sinais experimentais será dado um enfoque maior aos sistemas discretos pois esta é a forma como se encontram operacionalmente estes sinais depois de medidos e convertidos em séries numéricas.

A continuada aplicação do mapa \mathcal{F} permite que se remonte ao estado inicial através de

$$s(n) = \mathcal{F}^n(s(0)), \quad (3.3)$$

onde as funções \mathcal{F} atuam como operadores não-lineares de evolução no tempo, com as propriedades $\mathcal{F}^0 = \text{identidade}$, $\mathcal{F}^i \mathcal{F}^j = \mathcal{F}^{i+j}$.

A variável s evolui em uma variedade \mathcal{M} , que está definida em um espaço R^d . Se \mathcal{M} é um espaço linear, define-se o operador linear $D\mathcal{F}^n$ que representa as derivadas parciais de \mathcal{F} em relação a s . Escrevendo $\mathcal{F}^1 = \mathcal{F}$, tem-se

$$D\mathcal{F}^n(s(0)) = D\mathcal{F}^{n-1}(D\mathcal{F}^{n-2}(\dots D\mathcal{F}(s(0))\dots)) \quad (3.4)$$

pela regra da derivação em cadeia.

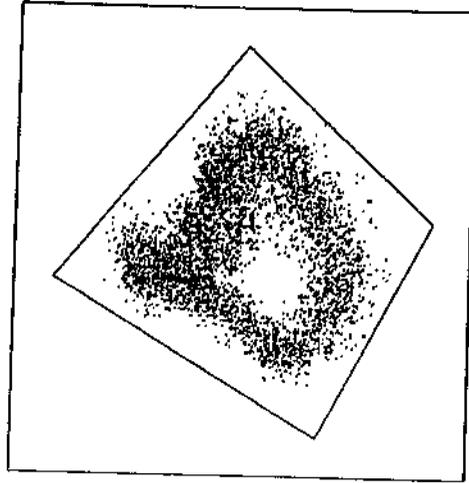


Figura 3.1: Atrator e sua bacia de atração obtidos de um sinal experimental.

3.1.1 Atratores e bacias de atração

Para um sistema conservativo (evolução Hamiltoniana), o teorema de Liouville [27] diz que o volume na variedade \mathcal{M} se conserva com a evolução no tempo. Os sistemas físicos reais, em sua maioria, são sistemas dissipativos, para os quais o volume está normalmente se contraindo. Assume-se que existe um conjunto aberto¹ \mathcal{U} em \mathcal{M} que se contrai assintoticamente para um conjunto compacto¹ \mathcal{C} com a evolução do tempo. Diz-se que \mathcal{C} é uma *bacia de atração* com vizinhança fundamental \mathcal{U} se

1. para qualquer conjunto aberto $\mathcal{V} \supset \mathcal{C}$ tem-se $\mathcal{F}^n \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ quando n é suficientemente grande, ou seja, a aplicação continuada da função \mathcal{F} em qualquer ponto pertencente ao conjunto aberto \mathcal{U} o levará ao conjunto compacto \mathcal{C} depois de um número suficientemente grande de iterações, e
2. $\mathcal{F}^n \mathcal{C} = \mathcal{C}$ para qualquer valor de n , significando que depois de levado ao conjunto \mathcal{C} o ponto permanece ali (figura 3.1).

O conjunto aberto $\cup (\mathcal{F}^n)^{-1} \mathcal{U}$ é a *base de atração* de \mathcal{C} . Se a base de atração de \mathcal{C} é todo o conjunto \mathcal{M} , \mathcal{C} é chamado de *atrator universal*.

¹Se para qualquer ponto pertencente a um conjunto pode ser definida uma vizinhança este conjunto é chamado *aberto* e um conjunto é chamado *compacto* se de qualquer seqüência de elementos pertencentes ao conjunto se pode escolher uma sub-sequência convergente no mesmo conjunto com os elementos limites das sub-sequências também pertencentes ao conjunto.

Experiências físicas e simulações computacionais com sistemas dinâmicos normalmente exibem comportamento transiente seguido por um regime assintótico. Portanto o ponto $\mathcal{F}^n s(0)$ que representa o sistema deveria eventualmente cair em uma bacia de atração. Entretanto, na realidade o sistema evoluiu para conjuntos menores, chamados *atratores*.

Ao invés de tentar dar uma definição matemática precisa de um atrator, talvez seja mais claro resumir dizendo que um atrator é um conjunto no qual pontos $\mathcal{F}^n s(0)$ se acumulam para n muito grande.

A seguir são apresentados alguns atratores característicos de sistemas dinâmicos:

- **Atrator de ponto fixo.** Um ponto fixo P para o sistema dinâmico é definido por $\mathcal{F}^n P = P$ para qualquer n . A derivada $D\mathcal{F}^1 P$ no ponto fixo é uma matriz $d \times d$, sendo d a dimensão do espaço M , se o seu espectro está em um disco $\{\zeta : |\zeta| < \alpha\}$ com $\alpha < 1$, então P é um atrator de ponto fixo. O atrator de ponto fixo é um conjunto atrator e um atrator. Quando a evolução no tempo é definida pela equação 3.2 em R^d , a condição de atração é que todos os autovalores de $D\mathcal{F}^1 P$ tenham parte real negativa.
- **Atrator periódico.** Para um sistema dinâmico discreto no tempo, supõe-se que existe um ponto A e um $N > 0$ tal que $\mathcal{F}^N A = A$ mas $\mathcal{F}^n A \neq A$ quando $0 < n < N$. Então A é um ponto periódico de período N , e $\Gamma = \{\mathcal{F}^n A : 0 \leq n < N\}$ é a órbita periódica correspondente (ou órbita fechada). A derivada $D\mathcal{F}^N A$ tem um autovalor 1 correspondente à direção tangente a Γ em A . Se o resto do espectro está em $\{\zeta : |\zeta| < \alpha\}$ com $\alpha < 1$, então Γ é um atrator de órbita periódica. É também um conjunto atrator e um atrator. O caráter atrator de uma órbita periódica pode também ser estudado com a ajuda de uma seção de Poincaré (ver seção 3.3).
- **Atrator quasi-periódico.** Uma órbita periódica para um sistema contínuo é realmente um círculo, e o movimento nele (por escolha adequada da coordenada φ) pode ser escrito como

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t, \quad (3.5)$$

com $\varphi(t)$ limitado em 2π onde $\omega = 2\pi/T$. Isto pode ser pensado como a evolução no tempo de um simples oscilador. Considere-se agora k osciladores com frequências $\omega_1, \dots, \omega_k$ (sem relações racionais entre os ω_i). O movimento dos osciladores é descrito por

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(0) + \omega_i t, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.6)$$

com $\varphi_i(t)$ limitado em 2π . Este movimento tem lugar no produto de k círculos, ($k > 1$), formando um toro \mathcal{Q}^k de dimensão k . O toro \mathcal{Q}^k é um atrator quasi-periódico se estiver mergulhado em R^d , $d \geq k$ e for um conjunto atrator. O sistema dinâmico em tempo contínuo é então descrito por

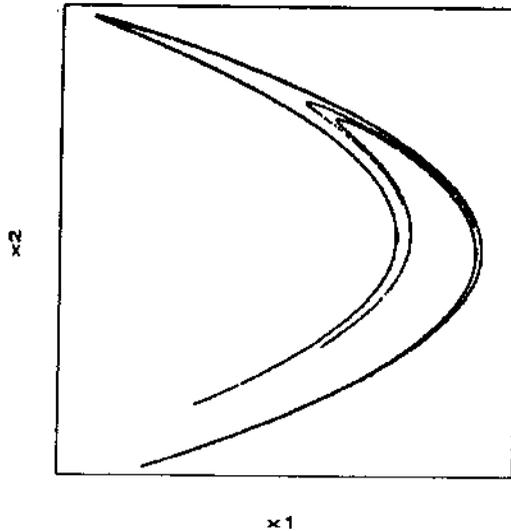


Figura 3.2: Atrator de Hénon.

$$\varphi(t) = f^t \varphi = \Phi[\phi_1(t), \dots, \phi_k(t)] = \Psi(\omega_1 t, \dots, \omega_k t), \quad (3.7)$$

onde Ψ é periódico, de período 2π , em cada argumento. Uma função da forma $t \rightarrow \Psi(\omega_1 t, \dots, \omega_k t)$ é conhecida como uma função quasiperiódica (com k diferentes períodos). Atratores quasiperiódicos são uma generalização natural de órbitas periódicas, e eles ocorrem muito frequentemente na descrição de sistemas físicos moderadamente excitados.

3.1.2 Atratores Caóticos

Os atratores discutidos na seção 3.1.1 são variedades bem definidas (ponto, círculo, toro). Nestes atratores, se uma pequena variação é feita nas condições iniciais, ela permanece pequena quando ocorre a evolução no tempo. Existem, entretanto, outros tipos de atratores que apresentam um comportamento mais complexo. Nestes atratores, chamados *atratores caóticos* uma pequena variação feita nas condições iniciais não permanece pequena com o decorrer do tempo.

Para melhor ilustrar um atrator caótico pode-se utilizar o conhecido Atrator de Hénon [70]. Considere-se o sistema dinâmico discreto no tempo, definido por

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x_2(n) - ax_1^2(n) \\ bx_1(n) \end{bmatrix}$$

e o correspondente atrator, para $a = 1,4$, $b = 0,3$ (ver figura 3.2). Neste atrator se forem tomados dois pontos iniciais muito próximos a diferença entre estes dois pontos

crescerá indefinidamente na razão $e^{\lambda t}$ com $\lambda = 0,42$. Este é o fenômeno da *sensibilidade às condições iniciais*. Uma das definições mais aceitas de caos baseia-se justamente nesta sensibilidade às condições iniciais, isto é, diz-se que o sistema é caótico quando a natureza do seu comportamento dinâmico tem forte sensibilidade às condições iniciais.

3.2 Reconstrução da Dinâmica a partir de um Sinal Experimental

Quando se simula numericamente um sistema dinâmico se conhece perfeitamente todas as d dimensões que o constituem e as variáveis associadas aos comportamentos em cada uma destas dimensões podem ser facilmente monitoradas. Quando se trata de um resultado experimental, entretanto, freqüentemente não se conhece perfeitamente a dimensão do sistema (que, sendo sistemas reais, podem se desenvolver em um espaço de dimensão infinita) sendo possível a medição de apenas algumas variáveis ou, em casos mais extremos, somente uma variável escalar. Compreender o sistema de dimensão infinita a partir da análise de um único sinal escalar pode parecer uma tarefa impossível. Se, entretanto, a atenção se concentrar em estudar a dinâmica de um atrator de dimensão finita esta tarefa pode se tornar viável. Isto é conseguido por meio da reconstrução do espaço de estado.

A reconstrução do espaço de estado foi introduzida na teoria dos sistemas dinâmicos por Packard et al.[61], Ruelle (citado por Casdagli et al.[14]) e Takens [69] a partir de uma idéia já difundida em análise de séries temporais, apresentado por Yule [citado por Casdagli et al.[14]]. Uma contribuição importante à teoria dos sistemas dinâmicos foi a demonstração de que é possível preservar invariantes geométricos do atrator como, por exemplo, a dimensão fractal ou os expoentes de Lyapunov, por Packard *et al.* [61] e por Takens [69]. Packard *et al.* implementaram o método em uma tentativa de reconstruir as derivadas temporais do sinal. A idéia central é que não se necessita das derivadas para formar um sistema coordenado no qual se pode capturar a estrutura das órbitas no espaço de estado mas se pode usar diretamente a variável medida.

Atualmente a reconstrução do espaço de estado pode ser realizada por meio de *delay coordinates*, coordenadas derivadas e decomposição em valor principal, que, algumas vezes podem ser realizadas junto com filtragem. A experiência diz que o método de reconstrução pode representar uma grande influência na qualidade das coordenadas resultantes, mas não há clareza sobre qual dos métodos é o melhor.

As *delay coordinates* são atualmente as mais usadas. Elas têm a agradável propriedade de que a relação sinal-ruído de cada componente é a mesma. Por outro lado, elas têm a desagradável propriedade de que para usá-las é necessário escolher o parâmetro τ , chamado *time delay*. Se τ for muito pequeno cada coordenada é quase a mesma e as trajetórias do espaço reconstruído se aglutinam ao longo de uma linha de inclinação unitária. Se τ for muito grande, na presença de caos e ruído, a dinâmica em um determinado instante de tempo se torna desconectada da dinâmica em um tempo posterior, de forma que, mesmo trajetórias com formas geométricas simples parecem extremamente complicadas. O principal problema, na reconstrução do espaço de estado com as *delay coordinates* é

a escolha adequada de τ e d . Na seção 3.2.1, são apresentados alguns métodos para a determinação destes parâmetros.

A idéia básica por trás da reconstrução do espaço de estado é que o passado e o futuro de uma série temporal contém informação sobre variáveis de estado não observadas que podem ser usadas para previsão de um estado atual. As informações sobre passado e futuro presentes em uma série temporal podem ser armazenadas em um vetor, onde, por conveniência, se assume que o tempo de amostragem é uniforme. Este vetor, de dimensão d que é a dimensão do atrator no espaço de estado reconstruído, é constituído por valores retirados exclusivamente da série observada em intervalos de tempo defasados por τ . A evolução deste vetor formará a trajetória no espaço de estado reconstruído com equivalência topológica ao espaço de estado do sistema real. Desta forma, em um determinado instante de tempo correspondente à n -ésima iteração do mapa 3.3 um ponto na trajetória reconstruída é dado por

$$\mathbf{y}(n) = \{s(n), s(n + \tau), \dots, s(n + (d - 1)\tau)\}^T, \quad (3.8)$$

onde o expoente T representa a transposta da matriz, e τ , por simplicidade, é um múltiplo do tempo de amostragem. A série temporal $s(n)$ possui um total de N pontos amostrados.

Takens mostrou que esta reconstrução é um *difeomorfismo* (transformação de coordenadas diferenciável, um para um, com inversa diferenciável) se $d > 2d_A + 1$, onde d_A é a dimensão do atrator.

Outro método em uso é a *decomposição em valor principal*, também chamada de *decomposição de Karhunen-Loeve*. Ele foi originalmente proposto por Broomhead and King [10]. Este procedimento pode ser implementado através do cálculo da matriz de covariância COV , $d \times d$, cujos elementos são obtidos de médias $\text{cov}_{ij} = \langle s(n)s(n + (i - j)\tau) \rangle$, realizadas ao longo de toda a amostra para $n = 1, \dots, N$. A seguir são calculados os autovalores de COV . Os autovetores de COV definem um novo sistema de coordenadas, que é uma rotação do sistema coordenado original. Os autovalores são a projeção da média RMS da série temporal em *delay coordinates* d -dimensionais sobre os autovetores. Ordenando-os de acordo com seu tamanho, o primeiro autovetor tem a maior projeção, o segundo tem a maior projeção entre os vetores ortogonais ao primeiro, etc. A dimensão pode ser reduzida utilizando somente os autovetores correspondentes a autovalores grandes.

Outro método de reconstrução do espaço de estado é o *método das derivadas*, numericamente investigado por Packard et al.[61]. Neste método as coordenadas são derivadas de ordens sucessivamente maiores

$$\mathbf{y}(n) = \{(s(n), s^{(1)}(n), \dots, s^{(d-1)}(n))\}^T, \quad (3.9)$$

onde $s^{(j)}(n)$ é uma aproximação numérica da j -ésima derivada de $s(n)$. Takens [69] também provou que desde que d seja suficientemente grande, as derivadas definem um difeomorfismo.

Até agora não existem claras evidências sobre a superioridade de um método sobre os demais. A literatura apresenta casos onde um ou outro método se comporta melhor

porém não estão claras as causas destas superioridades.

Com a reconstrução do espaço de estado o mapa 3.2 é estendido para os vetores $\mathbf{y}(n)$ na forma

$$\mathbf{y}(n + 1) = \mathcal{F}(\mathbf{y}(n)), \quad (3.10)$$

onde $\mathcal{F} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é uma função vetorial diferenciável.

3.2.1 Escolha dos Parâmetros de Mergulho

As principais dificuldades de aplicar o método das *delay coordinates* recaí na necessidade de escolher os parâmetros de mergulho τ e d , chamados *time delay* e *dimensão de mergulho*. Mañé [54] e Takens [69] sugeriram originalmente que o valor de τ não influencia na qualidade da reconstrução e que uma condição suficiente para a escolha de d depende da dimensão do atrator d_A , afirmando que se d , for maior que $2d_A$, então o atrator reconstruído está suavemente relacionado (é um difeomorfismo) ao atrator quando observado nas coordenadas físicas originais (que não são conhecidas). Na prática, o que foi afirmado é que se d for escolhido suficientemente grande, as propriedades físicas do atrator que se deseja extrair das medições serão as mesmas quando calculadas tanto nas coordenadas físicas originais quanto nas coordenadas reconstruídas. O processo de escolher d suficientemente grande é formalmente conhecido como *mergulho* e qualquer dimensão que atenda a condição é chamada de *dimensão de mergulho* d_M . Quando se atingiu uma dimensão suficientemente grande $d = d_M$, qualquer $d \geq d_M$ produzirá um bom mergulho. O mergulho através do *time delay* é, talvez, o único método sistemático de ir diretamente de dados escalares para espaço de estado multi-dimensional, e tem sido o mais explorado na literatura.

Time Delay

Ao contrário do afirmado originalmente por Takens, a escolha do *time delay* é decisiva para uma boa reconstrução do espaço de estado. Se τ for escolhido muito pequeno, as coordenadas $s(i + j\tau)$ e $s(i + (j + 1)\tau)$ estarão numericamente tão próximas uma da outra, provavelmente em uma ordem de grandeza menor que o nível de ruído presente normalmente em sinais obtidos experimentalmente, não sendo, certamente, duas coordenadas independentes. Se τ for muito grande $s(i + j\tau)$ e $s(i + (j + 1)\tau)$ serão completamente independentes entre si em sentido estatístico e as projeções de uma órbita do atrator nas duas direções não estarão relacionadas entre si. A origem desta independência estatística é a instabilidade que sempre existe nos sistemas caóticos e que resulta de uma amplificação exponencial no tempo de pequenos erros numéricos ou de medida. É então necessário escolher um valor intermediário, que não pode resultar do teorema do mergulho, já que o mesmo vale para qualquer valor de τ

A primeira estimativa do *time delay* pode vir da *função de autocorrelação*

$$C_L(\tau) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [s(n+\tau) - \bar{s}][s(n) - \bar{s}]}{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [s(n) - \bar{s}]^2}, \quad (3.11)$$

onde $\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n)$. O procedimento consistiria em procurar o valor de τ para o qual $C_L(\tau)$ passa por zero pela primeira vez. O problema é que este procedimento dá uma informação acerca da dependência *linear* entre as coordenadas.

Como se está procurando uma nova condição, além do teorema do mergulho, para a escolha do *time delay*, a dependência linear entre as coordenadas pode servir como uma primeira estimativa. Uma noção de uma dependência não linear, entretanto, seria mais efetiva, uma vez que se está tratando com comportamentos de natureza caótica. Isto se consegue através de conceitos da *teoria da informação*.

A idéia central é a de tentar identificar o quanto de informação se pode ter de uma medida realizada em um determinado tempo t quando se observa uma medida em um tempo t_1 . Parte-se de dois sistemas S_A e S_B , e s_{A_i} e s_{B_j} são medidas de uma variável de cada um destes sistemas. Considera-se que existe uma distribuição probabilística que governa as possibilidades de medições em cada sistema. A quantidade de informação (em bits) que se *aprende* acerca de uma medição s_{A_i} através de uma medição s_{B_j} é dada por [35]

$$I_{AB}(s_{A_i}, s_{B_j}) = \log_2 \left[\frac{P_{AB}(s_{A_i}, s_{B_j})}{P_A(s_{A_i})P_B(s_{B_j})} \right], \quad (3.12)$$

onde a probabilidade de medir s_A no conjunto S_A é $P_A(s_A)$, e analogamente, a probabilidade de medir s_B no conjunto S_B é $P_B(s_B)$, e a probabilidade de medir s_A e s_B é $P_{AB}(s_A, s_B)$. I_{AB} , dado na expressão 3.12 é chamada de *informação mútua* das medições s_{A_i} e s_{B_j} ; e é simétrica ($I_{AB} = I_{BA}$). A *informação mútua média* é a média sobre todas as possíveis medições de $I_{AB}(s_{A_i}, s_{B_j})$, dada por

$$I_{AB} = \sum_{s_{A_i}, s_{B_j}} P_{AB}(s_{A_i}, s_{B_j}) I_{AB}(s_{A_i}, s_{B_j}). \quad (3.13)$$

No caso presente o interesse é, partindo da medição física $s(n)$, encontrar a informação mútua média entre esta medição em uma outra medição $s(n+\tau)$ efetuada um tempo τ mais tarde. Aplicando 3.13

$$I(\tau) = \sum_{n=1}^N P(s(n), s(n+\tau)) \log_2 \left[\frac{P(s(n), s(n+\tau))}{P(s(n))P(s(n+\tau))} \right]. \quad (3.14)$$

A informação mútua média representa, para os fenômenos não lineares, o mesmo que a função de correlação representa para os fenômenos lineares. Quando as medições são completamente independentes, a informação mútua é nula e infinita quando uma medição se correlaciona consigo mesmo (sistema periódico, por exemplo).

A questão agora é como calcular $I(\tau)$ de um sinal no tempo. $P(s(n))$ e $P(s(n+\tau))$ são obtidos através de um histograma construído projetando-se o sinal ($s(n)$ e $s(n+\tau)$) no eixo s representando o número de vezes com que cada valor de s aparece. Se o sinal

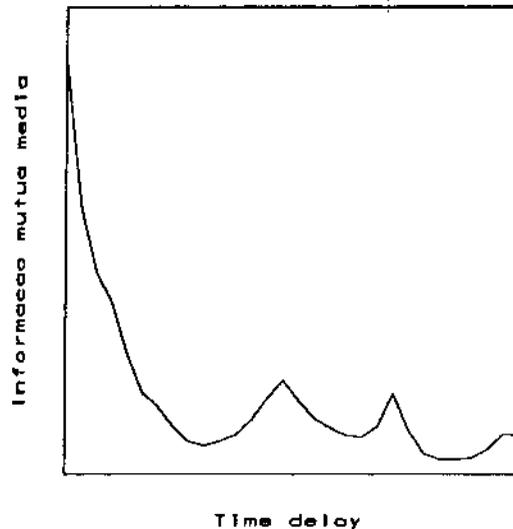


Figura 3.3: Informação Mútua Média com mínimo local bem determinado.

for longo e estacionário, $P(s(n))$ e $P(s(n + \tau))$ são iguais. $P(s(n), s(n + \tau))$ é calculado contando-se o número de vezes que uma área no plano $s(n)$ versus $s(n + \tau)$ é ocupada. Esta distribuição é depois normalizada. No capítulo 4 é apresentado um algoritmo recursivo desenvolvido por Fraser [34] para o cálculo da informação mútua.

Obtida a informação mútua média, pode-se voltar para o problema central que é a escolha de τ . Fraser e Swinney [35] sugerem que o τ escolhido é aquele correspondente ao primeiro mínimo local de $I(\tau)$. A figura 3.3 mostra uma curva típica de $I(\tau)$ versus τ , construída a partir de dados experimentais onde o primeiro mínimo é evidente. Em alguns casos, como o ilustrado na figura 3.4, obtida também de medições experimentais, não existe claramente um primeiro mínimo local. Isto não significa que a $I(\tau)$ perde o seu valor como instrumento de seleção de τ mas apenas que o critério do primeiro mínimo local deve ser substituído por um outro. Uma curva $I(\tau)$ versus τ sem mínimo local é característica de *mapas* em sistemas dinâmicos não lineares. Abarbanel, *et al* [3] sugerem que nestes casos se escolha $\tau = 1$ ou 2 se os dados vêm de um mapa ou τ deve ser escolhido de forma que $\frac{I(\tau)}{I(0)} \approx \frac{1}{5}$. Os autores não apresentam uma sustentação para esta sugestão, apenas intuição.

Uma questão final é com relação à escolha do primeiro mínimo local e não de um outro qualquer (segundo, terceiro, ...). A única alusão a isto vem de Liebert e Schuster, citados por Abarbanel *et al.* [3], que examinaram o critério do primeiro mínimo adicionando outro critério, chamado da integral de correlação, e concluíram que o *time delay* correspondente ao primeiro mínimo da informação mútua média é o mesmo que corresponde a uma integral de correlação bem estabelecida numericamente.

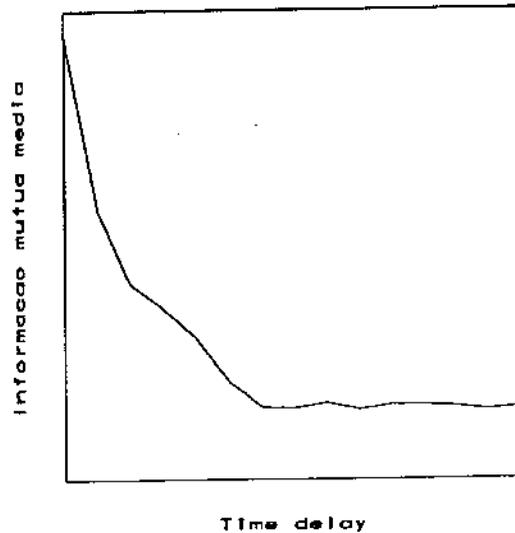


Figura 3.4: Informação Mútua Média com mínimo local mal determinado.

Dimensão de Mergulho

O objetivo do teorema do mergulho é produzir um espaço euclidiano R^d suficientemente grande de forma que um conjunto de pontos na dimensão d_A (dimensão do atrator) possa se desenvolver sem ambiguidades (a inibição de uma dimensão pode fazer com que um determinado ponto possa ser interpretado como localizado em uma determinada posição que na realidade é apenas uma projeção de sua posição real).

Um caminho equivalente de olhar para o teorema do mergulho é pensar no atrator constituído de órbitas de um sistema de dimensão muito alta. O atrator, que tem dimensão finita d_A , se desenvolve em uma pequena parte do espaço de estado completo e se pode pretender obter uma projeção do espaço de estado completo na qual o atrator possa ser capturado com toda a segurança. Se esta projeção é um espaço demasiadamente pequeno a evolução do atrator apresentará pontos com vizinhanças incorretas, a aparência da órbita parecerá complicada (com cruzamentos, alongamentos e dobras acentuados), e muitas vezes se pode interpretar como comportamento caótico um sistema observado no espaço de estado errado. Um bom exemplo disto é mostrado na figura 3.5 que mostra uma órbita de um sistema d -dimensional observada em um espaço de dimensão 2.

A aparência do atrator quando completamente desdobrado em um espaço suficientemente grande é mais regular que quando projetado em um espaço de dimensão insuficiente. O teorema do mergulho estabelece como condição suficiente para a escolha da dimensão de mergulho d_M , a partir de considerações geométricas, que não ocorram cruzamentos de órbitas de dimensão um, dois, ... , $d_M - 1$. A condição suficiente muitas vezes não é necessária. Muitas vezes são conseguidas boas reconstruções em uma dimensão menor. Deve-se também tomar cuidado para não analisar o atrator em uma



Figura 3.5: Atrator observado em espaço com $d < d_M$.

dimensão muito superior à necessária. Isto, embora absolutamente correto do ponto de vista matemático apresenta algumas inconveniências físicas:

- muitos dos cálculos realizados para extrair propriedades dos dados requerem procuras e outras operações em R^d cujo custo computacional cresce exponencialmente com d ; e
- na presença de ruído as dimensões adicionais não estão ocupadas pela dinâmica e sim pela contaminação do sinal, influenciando diretamente os cálculos realizados.

Assim foi necessária a procura por ferramentas de análise que identificassem uma dimensão de mergulho *necessária* para cada conjunto de dados. Existem alguns métodos que realizam esta tarefa, como o da decomposição em valor singular (SVD) da matriz de covariância da amostra, saturação com a dimensão de algum invariante do sistema, o método dos campos vetoriais verdadeiros, o método dos falsos vizinhos, o método da validação cruzada. Serão apresentados a seguir o método da saturação, o método dos falsos vizinhos e o método da validação cruzada que serão empregados na análise dos resultados experimentais realizada no capítulo 6, para os outros métodos remete-se o leitor à referência [3] que apresenta uma descrição dos mesmos.

Método da Saturação de Invariantes

Se a dimensão de mergulho escolhida for suficientemente grande, qualquer invariante associado ao atrator que dependa das distâncias entre pontos no espaço de estado deve se tornar independente da dimensão de mergulho. Um aumento subsequente de d_M

não deverá afetar estes invariantes. Pode-se então encontrar a dimensão de mergulho apropriada calculando um destes invariantes (expoentes de Lyapunov, por exemplo) para valores crescentes da dimensão e observar para que valor esta propriedade deixa de variar.

Outra propriedade que é comumente utilizada para determinar a dimensão é a integral de correlação que está associada à dimensão de correlação que será apresentada na seção 3.5.

Método dos Falsos Vizinhos

Este método se baseia na busca de uma dimensão em que não ocorram cruzamentos da órbita consigo mesma em virtude de ter havido uma projeção do atrator em um espaço de dimensão muito baixa. Em outras palavras o método procura determinar quando pontos em uma dimensão d são vizinhos apenas em virtude da projeção em uma dimensão demasiado baixa. Examinando esta questão na dimensão um, dimensão dois, etc. até que não existam vizinhos falsos ou incorretos remanescentes, se deveria ser capaz de estabelecer, apenas por considerações geométricas, um valor para a dimensão de mergulho necessária. Aqui será mostrada a implementação de Kennel, *et al* [45].

Na dimensão d cada vetor $\mathbf{y}(n)$ obtido pela expressão 3.8 tem um vizinho mais próximo $\mathbf{y}_{viz}(n)$. A vizinhança aqui é definida em termos euclidianos. A distância euclidiana entre $\mathbf{y}(n)$ e $\mathbf{y}_{viz}(n)$ é

$$r_d(n)^2 = (s(n) - s_{viz}(n))^2 + (s(n + \tau) - s_{viz}(n + \tau))^2 + \dots + (s(n + \tau(d - 1)) - s_{viz}(n + \tau(d - 1)))^2. \quad (3.15)$$

Para um conjunto com N pontos, a distância $r_d(n)$ é da ordem de $\frac{1}{N^{1/d}}$. Na dimensão $d + 1$ esta distância ao vizinho mais próximo é alterada devido às novas coordenadas $s(n + \tau d)$ e $s_{viz}(n + \tau d)$ para

$$r_{d+1}^2(n) = r_d^2(n) + (s(n + \tau d) - s_{viz}(n + \tau d))^2. \quad (3.16)$$

Se a proximidade dos pontos que estão sendo comparados for devida à projeção de um atrator de uma dimensão maior então $r_{d+1}(n)$ será grande. Aumentando progressivamente a dimensão, estes pontos irão inevitavelmente se separar. Quando não houverem mais vizinhos falsos o atrator encontrou a sua dimensão necessária.

A condição para decidir se os vizinhos são falsos é dada por

$$\frac{|s(n + \tau d) - s_{viz}(n + \tau d)|}{r_d(n)} > R_{viz}(\tau). \quad (3.17)$$

Abarbanel *et al* [3] afirmam que na faixa $10 \leq R_{viz}(\tau) \leq 50$ o número de vizinhos falsos identificados por este critério é constante o que o torna um bom critério. O critério entretanto pode apresentar um defeito não desejado. Se ele for aplicado a dados provenientes de um gerador de números aleatórios de alta dimensão, ele indica que estes dados podem ser mergulhados em uma dimensão pequena. Aumentando o número de

pontos dos dados esta dimensão de mergulho cresce. O problema é que quando se tenta preencher uniformemente (ruído) um objeto em d dimensões com um número finito de pontos, os pontos se afastam quando d aumenta pois a maior parte do volume do objeto está nas dimensões maiores. Quando pontos são os vizinhos mais próximos não significa que eles estão próximos em uma escala de distância estabelecida pelo tamanho aproximado do atrator r_A (média das distâncias entre os pontos e o ponto médio do atrator). Se o vizinho mais próximo de $\mathbf{y}(n)$ não está próximo, então $r_d(n)$ é da mesma ordem de r_A , e a distância entre eles na dimensão $d + 1$ será cerca de $r_{d+1}(n)$. Nestas condições os vizinhos mais próximos, se forem falsos, serão afastados para as extremidades do atrator. Um segundo critério, para quando $\frac{r_{d+1}(n)}{r_A} \geq 2$ é usar o valor RMS das medições $r_A^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (s(n) - \bar{s})^2$, $\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N s(n)$.

Método da Validação Cruzada

Um outro critério para a escolha dos parâmetros de mergulho é maximizar a precisão da capacidade de predição do modelo. Um método utilizado a partir deste critério é o da *validação cruzada* que consiste em retirar um ponto da série, ajustar o modelo ao conjunto de dados reduzido e usar o modelo ajustado para prever o ponto retirado.

A validação cruzada é um método padrão para seleção de parâmetros em regressão não-paramétrica, tendo sido originalmente sugerido para calcular a dimensão de mergulho. Uma completa descrição pode ser encontrada em Cheng e Tong, 1992 [16].

O método da validação cruzada apresenta frequentemente muita influência de ruído provocando uma subestimação dos parâmetros com bastante frequência. Nychka *et al.* [59] propõem uma técnica que atenua esta dificuldade do método. Com um modelo ajustado para N pontos, sendo p o número de parâmetros, e RMS o erro de predição médio quadrático, a função generalizada de validação cruzada modificada é dada por

$$V_c = \left(\frac{RMS}{1 - \frac{p}{N}} \right)^2. \quad (3.18)$$

No método original da validação cruzada tem-se $c = 1$. O método modificado sugere que o uso de $c = 2$ é mais adequado a dados não-lineares.

3.3 Retratos de Fase e Diagramas de Poincaré

O processo de reconstrução descrito na seção 3.2 produz uma trajetória no espaço fase como a mostrada na figura 3.6. Estas trajetórias podem, em alguns casos se tornam de tal forma entremeadas que se torna impossível realizar qualquer análise utilizando-as. É frequentemente possível e útil fazer um corte transversal (como o mostrado na figura 3.6), de forma que ao invés de uma curva longa em d dimensões tem-se agora um conjunto de pontos em $d - 1$ dimensões (seção de Poincaré. A figura 3.7 dá um exemplo correspondente a uma trajetória medida no processo experimental deste trabalho. O diagrama da figura 3.7 é obtido pelas intersecções da trajetória mostrada na figura 3.6

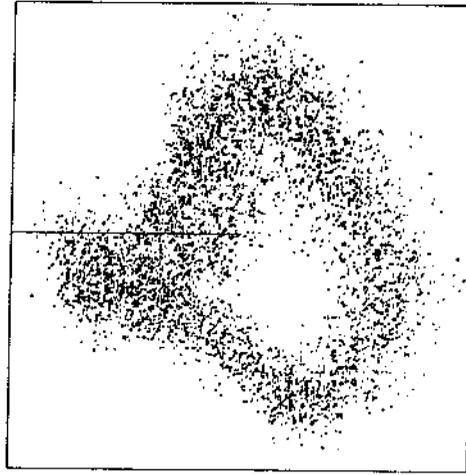


Figura 3.6: Retrato de fase - com $s(n)$ representado no eixo horizontal e $s(n + \tau)$ representado no eixo vertical.

com a seção de Poincaré. A seção de Poincaré está em um plano formado por $s(n)$ e $s(n + 2\tau)$ e o diagrama é construído para $s(n) < 0$. Dado um ponto da seção de Poincaré, a primeira aplicação de retorno o trará de volta à mesma posição ocupada anteriormente, que está novamente na seção de Poincaré. Quando um bom modelo de diagrama pode ser extraído do experimento, entendeu-se essencialmente o sistema dinâmico. Isto é, entretanto, possível somente para atratores de baixa dimensão.

Deve-se observar que o tempo do retorno para a seção de Poincaré é variável (e tem que ser determinado numericamente por interpolação). Algumas vezes, quando existem movimentos quasiperiódicos, existe uma frequência natural (ou várias) que estabilizarão a imagem, mas geralmente este não é o caso.

3.4 Medidas Invariantes

Por causa da sensibilidade a pequenas variações nas condições iniciais, não é apropriado comparar diretamente duas órbitas de um sistema não-linear já que elas não estarão relacionadas entre si. Um atrator possuirá entretanto algumas medidas que não são sensíveis às variações nas condições iniciais. Para definir estes chamados *invariantes* são necessárias algumas noções da *medida invariante* do atrator. Esta medida, assim como o próprio atrator, caracterizam o comportamento dinâmico do sistema. Uma destas medidas descreve, por exemplo, a frequência com que as diversas partes do atrator são visitadas pela órbita.

A medida é invariante sob o sistema dinâmico, isto é, invariante sob a evolução no

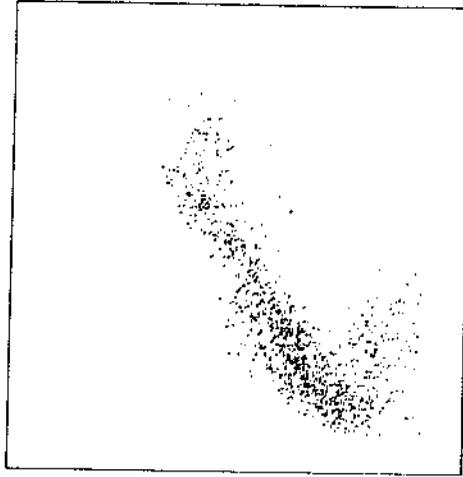


Figura 3.7: Diagrama de Poincaré - com $s(n)$ representado no eixo horizontal e $s(n + 2\tau)$ representado no eixo vertical.

tempo mas assume valores diferentes para diferentes regiões do atrator.

Ergodicidade. Se o sistema dinâmico possui uma medida invariante ρ que não pode ser escrita como a soma de outras medidas invariantes, na forma $\frac{1}{2}\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2$, onde ρ_1, ρ_2 são novamente medidas invariantes e $\rho_1 \neq \rho_2$, então a medida invariante ρ é chamada indecomponível ou *ergódica*. O sistema dinâmico que possui uma medida invariante ergódica é chamado de *sistema ergódico*.

O teorema ergódico estabelece que se o sistema é ergódico a média ρ será independente das condições iniciais. Um resultado do teorema do ponto fixo de Markov-Kakutani [27] diz que se um conjunto compacto (atrator) é invariante sob o sistema dinâmico \mathcal{F}^n , então existe uma medida invariante ρ em \mathcal{F}^n e com suporte contido no atrator. Existem, então, medidas invariantes (ergódicas) definidas por médias no tempo. Em um atrator estranho pode-se encontrar muitas medidas ergódicas distintas. Nas seções 3.5 e 3.6 são apresentadas algumas destas medidas para permitir que se escolha uma (ou mais de uma) para caracterizar o atrator.

3.5 Dimensões de Atratores

A dimensão de um atrator pode ser considerada como a quantidade de informação necessária para especificar a posição de um ponto no atrator dentro de uma determinada precisão. A dimensão é também um limite inferior para o número de variáveis necessárias para descrever a sua dinâmica.

Atratores que possuem uma estrutura regular normalmente possuem dimensões

inteiras. Desta forma um atrator de ponto fixo (equilíbrio estacionário) possui dimensão zero, um atrator de ciclo limite (oscilação periódica) possui dimensão um, um atrator toroidal (bi-periódico) possui dimensão 2. Atratores estranhos por sua vez, não possuem uma estrutura simples tendo, frequentemente, uma estrutura fractal. Estes atratores, tipicamente, possuem dimensões não inteiras.

Para um completo entendimento das propriedades de um atrator caótico deve-se levar em conta a distribuição dos pontos no atrator, o que pode ser investigado através da *medida natural* associada ao atrator. A medida natural dá uma noção da frequência relativa com que uma órbita visita diferentes regiões do atrator. Como atratores caóticos podem ter propriedades muito complicadas, as medidas naturais associadas aos mesmos também podem ter propriedades complicadas o que faz com que a determinação da dimensão não seja um problema trivial.

Embora existam várias definições diferentes de dimensão, as definições relevantes são de dois tipos: aquelas que dependem somente das propriedades métricas e aquelas que dependem das propriedades métricas e probabilísticas (envolvem a medida natural). Na literatura [31] há evidências que as dimensões métricas assumem o mesmo valor e as dimensões dependentes da frequência assumem outro valor comum, normalmente menor. A dimensão da medida natural pode ser obtida a partir do conhecimento de propriedades de estabilidade de trajetórias no atrator (a partir do conhecimento dos expoentes de Lyapunov). As dimensões métricas, são também conhecidas como dimensões fractais.

Neste trabalho serão apresentadas duas dimensões métricas, dimensão de Hausdorff e dimensão de capacidade, e três dimensões naturais, dimensão de informação, dimensão de correlação e dimensão de Lyapunov, que serão calculadas a partir de dados obtidos experimentalmente.

A seguir são apresentadas algumas definições das dimensões citadas acima.

Dimensão de Hausdorff. Originalmente apresentada por Hausdorff em 1919 (ver Farmer *et al.* [31]) a dimensão de Hausdorff de um conjunto pertencente a um espaço Euclidiano d -dimensional é definida considerando-se uma cobertura do espaço por elementos d -dimensionais com aresta de comprimento variável ϵ_i . Define-se a quantidade $l_d(\epsilon)$ por

$$l_d(\epsilon) = \inf \sum_i^d \epsilon_i, \quad (3.19)$$

onde o *infimum* se estende sobre todas as coberturas possíveis sujeito à restrição de que $\epsilon_i \leq \epsilon$. Se

$$l_d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} l_d(\epsilon), \quad (3.20)$$

Hausdorff mostrou que existe um valor crítico de d abaixo do qual $l_d = 0$ e acima do qual $l_d = \infty$. Este valor crítico, $d = d_H$ é a dimensão de Hausdorff. (Precisamente, em $d = d_H$, l_d pode ser tanto 0, ∞ , ou qualquer número positivo finito.

Dimensão de capacidade. A dimensão de capacidade de um conjunto, que pode ser

vista como uma versão simplificada da dimensão de Hausdorff, foi definida por Kolmogorov (ver Farmer *et al.* [31]) em 1958, como

$$d_C = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log(\frac{1}{\epsilon})}, \quad (3.21)$$

onde \log , quando não acompanhado de índice, representa logaritmo na base decimal. Se o conjunto em questão é um subconjunto limitado de um espaço Euclidiano d -dimensional R^d , então $N(\epsilon)$ é o mínimo número de elementos d -dimensionais de lado ϵ necessários para cobrir o conjunto. Para um ponto tem-se $N(\epsilon) = 1$ e $d_C = 0$, para uma linha $N(\epsilon) = \epsilon^{-1}$ e $d_C = 1$, e para uma área $N(\epsilon) = \epsilon^{-2}$ e $d_C = 2$. Para conjuntos mais gerais d_C pode ser fracionário. Também podem ser construídos conjuntos para os quais o limite da eq. 3.21 não exista: para estes conjuntos a dimensão de capacidade não é definida.

Pode-se mostrar que a dimensão de capacidade e a dimensão de Hausdorff são geralmente iguais mas rigorosamente $d_C \geq d_H$.

Dimensão de informação. A dimensão de informação é uma generalização da dimensão de capacidade que leva em conta a probabilidade relativa dos elementos usados para cobrir o conjunto. Foi introduzida por Balatoni e Renyi em 1956 (ver Abarbanel *et al.* [3]) como

$$d_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{I}(\epsilon)}{\log(\frac{1}{\epsilon})}, \quad (3.22)$$

onde

$$\mathcal{I}(\epsilon) = \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i \log \frac{1}{P_i} \quad (3.23)$$

e P_i é a probabilidade associada ao i -ésimo elemento. Chamando o i -ésimo elemento de lado ϵ de c_i , $P_i = \mu(c_i)$. Observe-se que se todos os elementos têm igual probabilidade então $\mathcal{I}(\epsilon) = \log N(\epsilon)$, e portando $d_I = d_C$. Entretanto, para probabilidades desiguais $\mathcal{I}(\epsilon) < \log N(\epsilon)$. Então, em geral, $d_I \geq d_C$.

Em teoria da informação a quantidade $\mathcal{I}(\epsilon)$ definida na eq. 3.23 tem um significado específico: é a quantidade de informação necessária para especificar um estado do sistema dentro de uma precisão ϵ . Como para ϵ pequeno, $\mathcal{I}(\epsilon) \approx d_I \log(\frac{1}{\epsilon})$, o conhecimento de d_I permite que, indiretamente, se possa saber o quão rapidamente cresce a informação necessária para especificar um ponto dentro do atrator quando ϵ decresce.

Dimensão de Correlação. A dimensão de correlação foi apresentada por Grassberger e Procaccia [39, 40] em 1983 e é definida como

$$d_{cor} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon}, \quad (3.24)$$

onde

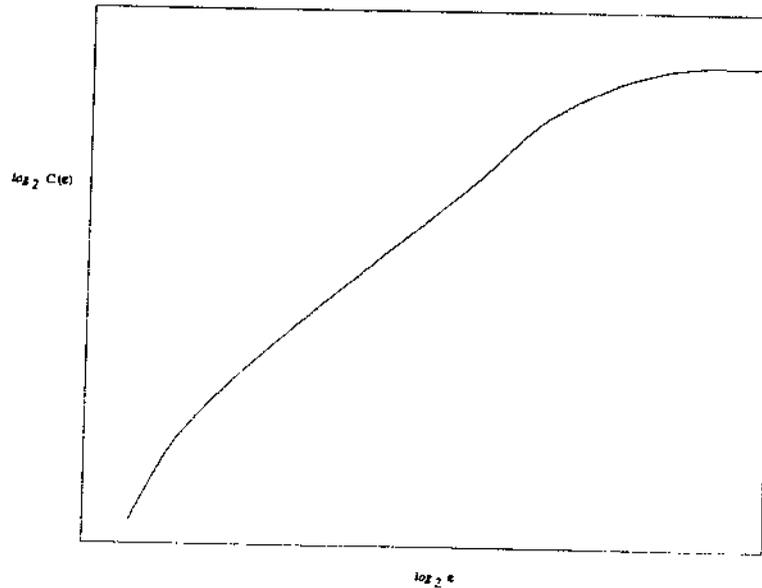


Figura 3.8: Curva do logaritmo da função de correlação *versus* logaritmo de ϵ cuja inclinação é a dimensão de correlação.

$$C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_P}{N^2}, \quad (3.25)$$

em que N é o número de pontos da série temporal s_1, s_2, \dots, s_N e N_P é o número de pares (s_i, s_j) com $|s_i - s_j| < \epsilon$

O procedimento usual para estimar a dimensão de correlação é traçar a curva da função de correlação $C(\epsilon)$ *versus* ϵ em um gráfico log-log. No limite, a inclinação desta curva é uma estimativa da dimensão de correlação. O gráfico obtido tem a forma da curva mostrada na figura 3.8. Este gráfico típico apresenta uma tendência a $C(\epsilon)$ constante para grandes valores de ϵ , em virtude do tamanho finito da amostra, enquanto tem uma forma irregular para valores pequenos de ϵ devido à pequena quantidade de dados (vizinhos) que está sendo processada que corrompe o comportamento estatístico. Somente para valores médios de ϵ o gráfico apresenta um comportamento linear formando a região útil para a determinação de correlação. O método de Grassberger e Procaccia consiste em ajustar uma reta a esta região e determinar a dimensão pela inclinação desta reta.

Dimensão de Lyapunov. Como a dimensão de Lyapunov está diretamente ligada aos expoentes de Lyapunov (na realidade é definida em função deles) será definida na seção 3.6, após a apresentação dos expoentes.

3.6 Expoentes de Lyapunov

A presente seção é dedicada aos expoentes característicos associados a uma medida invariante, também chamados *expoentes de Lyapunov*. Eles são bastante utilizados como quantificadores de caos, uma vez que qualquer sistema que possua um expoente de Lyapunov positivo tem comportamento caótico. Eles também tem a vantagem de estar associados diretamente ao mapa 3.2 sendo úteis para predição.

3.6.1 Teorema Ergódico Multiplicativo de Oseledec

Assume-se que o espaço de estado pode ser decomposto em cada ponto em sub-espacos locais estáveis e instáveis, com uma base que contém as direções que se expandem e as que se contraem. Os expoentes de Lyapunov são as taxas com que estas expansões (expoentes positivos) ou contrações (expoentes negativos) ocorrem.

Os expoentes de Lyapunov também são fisicamente definidos como a taxa exponencial com que uma determinada perturbação no estado inicial de um sistema dinâmico aumenta ou diminui com o tempo.

A origem dos expoentes de Lyapunov está no *teorema ergódico multiplicativo de Oseledec*. Oseledec provou matematicamente que, conhecida uma evolução no espaço de estado dada pelo mapa 3.10, os expoentes de Lyapunov são os logaritmos dos autovalores da matriz

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{DF}^n(\mathbf{y}(0)) \mathbf{DF}^n(\mathbf{y}(0))^T)^{1/2n} \quad (3.26)$$

conhecida como *matriz de Oseledec*. Na expressão 3.26 \mathbf{D} é um operador diferencial de forma que $\mathbf{DF}(\mathbf{y}(0))$ é a matriz jacobiana calculada em n , e $\mathbf{DF}^n(\mathbf{y}(0)) = \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n)) \cdot \mathbf{DF}(\mathbf{y}(n-1)) \cdots \mathbf{DF}(\mathbf{y}(0))$.

Os logaritmos dos autovalores de Λ são chamados *expoentes característicos* ou *expoentes de Lyapunov*. Como os maiores expoentes são, normalmente os mais importantes pelo fato da caoticidade do movimento estar associada ao seu sinal, os expoentes de Lyapunov são costumeiramente representados em ordem decrescente: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$. Eles são invariantes sempre que a ergodicidade for mantida.

Se $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ são os autovalores da matriz Λ , em ordem decrescente de valores absolutos, e repetidos de acordo com a multiplicidade, então, os expoentes de Lyapunov são

$$\lambda_i = \log |\alpha_i|, \lambda_2 = \log |\alpha_2|, \cdots \quad (3.27)$$

O teorema de Oseledec é importante porque torna operacional o cálculo dos expoentes de Lyapunov a partir do conhecimento do comportamento dinâmico do sistema. Como será visto no seguimento desta seção a maioria dos métodos que calculam os expoentes de Lyapunov se concentram na determinação da matriz jacobiana e, a partir dela os expoentes são calculados.

Este marcante teorema é recente, data de 1968, quando a prova de uma versão um pouco diferente foi publicada por Oseledec (1968) [60].

3.6.2 Dimensão de Lyapunov

A conjectura de Kaplan e Yorke [44] apresenta uma conexão entre as dimensões fractais e as propriedades de estabilidade da dinâmica do sistema.

Considere-se um fracionamento do espaço de estado com elementos d -dimensionais com lados de comprimento ϵ (o número de elementos necessários para cobrir um elemento unitário de dimensão d é ϵ^d). N_ϵ será o número de elementos necessários para cobrir completamente o atrator. Um destes elementos considerado como um volume de referência evolui de acordo com a dinâmica do sistema. Nesta evolução, cada eixo do volume de referência será ponderado por um fator proporcional ao chamado *número de Lyapunov* L_i da direção correspondente. As direções com um número de Lyapunov menor que 1 irão se contrair e as com um número de Lyapunov maior que 1 irão se expandir.

Considerando que os expoentes de Lyapunov são os logaritmos dos números de Lyapunov, Kaplan e Yorke [44] demonstram que a *dimensão de Lyapunov* está relacionada aos expoentes de Lyapunov por meio de

$$D_L = K_L + \frac{\sum_{i=1}^{K_L} \lambda_i}{\|\lambda_{K_L+1}\|}, \quad (3.28)$$

onde K_L é tal que $\sum_{i=1}^{K_L} \lambda_i > 0$, e $\sum_{i=1}^{K_L+1} \lambda_i < 0$.

3.6.3 Espectro de Lyapunov

Observando-se a evolução de uma hiper-esfera de confiança na dinâmica do sistema, quando ocorre comportamento caótico esta hiper-esfera evolui para formas bastante complexas com alongamentos em algumas direções e contrações em outras. Nas direções em que ocorrem alongamentos, é evidente a existência de instabilidade enquanto que o comportamento é estável nas direções em que o eixo diminui seu comprimento. Os expoentes de Lyapunov medirão a razão com que estas direções se contraem ou se expandem. O maior expoente corresponderá à direção em que ocorre a maior instabilidade. Tomando-se um volume inicial com raio infinitesimal $l(0)$ e chamando $l_i(t)$ o comprimento do eixo principal correspondente à direção i , o expoente de Lyapunov correspondente pode ser definido por [27]

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \frac{l_i(t)}{l(0)}. \quad (3.29)$$

Por convenção os expoentes são ordenados de forma decrescente $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \dots$.

Os expoentes de Lyapunov também podem ser interpretados como a razão de crescimento (ou diminuição) de sub-espacos no espaço de estado. λ_1 mede o quão rapidamente distâncias lineares crescem: a distância entre dois pontos inicialmente separados por uma distância infinitesimal ϵ , crescerá em média $\epsilon e^{\lambda_1 t}$. A soma $\lambda_1 + \lambda_2$ é a razão de crescimento de uma área definida pelos maiores eixos principais. Generalizando, $\sum_{j=1}^d \lambda_j$, descreve o comportamento de sub-espacos d -dimensionais evoluindo no tempo.

Sistemas Dinâmicos Discretos no Tempo em \mathbb{R}^d

Sendo a evolução no tempo dada pelo mapa 3.10, chama-se de $\mathbf{DF}(\mathbf{y})$ a matriz $\partial \mathcal{F}_i / \partial \mathbf{y}_j$ das derivadas parciais das matrizes componentes \mathcal{F}_i em \mathbf{y} . Para a n -ésima iteração \mathcal{F}^n de \mathcal{F} , a matriz das derivadas parciais correspondente é dada pela regra da cadeia:

$$\partial \mathcal{F}_i^n / \partial \mathbf{y}_j = \mathbf{DF}^{n-1} \dots \mathbf{DF}(\mathbf{y}(0)). \quad (3.30)$$

Se existe uma medida ergódica para \mathcal{F} , as condições do teorema ergódico multiplicativo são todas satisfeitas e os expoentes de Lyapunov são então definidos.

Em particular, se $\Delta \mathbf{y}(0)$ é uma variação infinitesimalmente pequena nas condições iniciais, a variação no tempo n é dada por

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y}(n) &= \mathbf{DF}^n \Delta \mathbf{y}(0) \\ &= \mathbf{DF}^{n-1} \dots \mathbf{DF} \Delta \mathbf{y}(0). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Para a maioria de $\Delta \mathbf{y}(0)$ tem-se $\Delta \mathbf{y}(n) \approx \Delta \mathbf{y}(0) e^{n\lambda_1}$, e a sensibilidade a pequenas variações nas condições iniciais corresponde a $\lambda_1 > 0$. Notar que se $\Delta \mathbf{y}(0)$ é finito, o crescimento de $\Delta \mathbf{y}(n)$ pode não prosseguir indefinidamente: se $\mathbf{y}(0)$ está em um atrator limitado, $\Delta \mathbf{y}(n)$ não pode ser maior que o diâmetro do atrator.

3.6.4 Movimentos Constantes, Periódicos e Quasi-Periódicos

Um *estado constante* de uma evolução física no tempo está associado com um atrator de ponto fixo do sistema dinâmico correspondente. Um estado constante estável associado a um atrator de ponto fixo tem expoentes de Lyapunov negativos.

Um *estado periódico* de uma evolução física no tempo está associado com um atrator de órbita periódica, ou *ciclo limite* do sistema dinâmico correspondente tendo um expoente de Lyapunov igual a zero e os outros negativos.

Um *estado quasi-periódico* com k frequências, estável para simplificar a análise é, representado por um atrator quasi-periódico, isto é, um atrator do tipo toro invariante. Aqui, k expoentes de Lyapunov são iguais a zero, e os outros são negativos.

3.6.5 Cálculo dos Expoentes de Lyapunov

A maneira de determinar o espectro dos expoentes de Lyapunov passa por uma observação da evolução de pequenas perturbações em uma órbita. Ocorre, então uma linearização local da dinâmica do sistema como a que foi efetuada na seção 3.6.3.

Pelo teorema de Oseledec (seção 3.6.1) sabe-se que os expoentes de Lyapunov são os logaritmos dos auto-valores da matriz obtida pela expressão 3.26 onde as matrizes jacobianas podem ser obtidas por meio das linearizações locais. Desta maneira os expoentes podem ser calculados a partir das aproximações locais.

O cálculo dos expoentes de Lyapunov é direto se as equações que governam a dinâmica são conhecidas. Os únicos problemas que podem surgir são de caráter numérico,

relacionados ao cálculo dos autovalores da matriz 3.26 que, normalmente, é mal condicionado fazendo com que o método **QR** não funcione muito bem. Eckmann et al. [26] propuseram uma variação da decomposição **QR** que mostrou-se eficiente.

O problema, entretanto, centraliza-se na obtenção dos expoentes de Lyapunov a partir de um conjunto de dados escalares obtidos seja por simulação computacional, seja por medição de alguma variável representativa de algum fenômeno físico. A dificuldade aqui está em estimar numericamente as matrizes jacobianas $DF^n(\mathbf{y})$. Todos os métodos conhecidos atualmente partem da reconstrução do espaço de estado, descrita na seção 3.2. O passo seguinte é obter as matrizes jacobianas do mapa $\mathcal{F}^n(\mathbf{y})$ o que pode ser feito de diferentes formas. A seguir são apresentados os fundamentos dos principais métodos conhecidos para obter os expoentes de Lyapunov diretamente de uma série de valores escalares. O primeiro método, apresentado originalmente por Wolf *et al.* [70] estima o expoente dominante por meio da observação da evolução de trajetórias (ou áreas, para obter os dois maiores expoentes) no espaço tangente, calculando-o como a razão de afastamento ou aproximação de trajetórias vizinhas, sem a necessária construção das matrizes jacobianas. O segundo método obtém as matrizes jacobianas através de estimativa numérica na vizinhança de cada ponto da órbita reconstruída no espaço de estado. O terceiro método obtém o mapa $\mathcal{F}^n(\mathbf{y})$ através de um modelo recursivo de redes neurais.

Método das Trajetórias

O método fundamenta-se na observação de divergência ou convergência de trajetórias (áreas, volumes, etc) evoluindo no espaço tangente. O método é, entretanto confiável apenas para o cálculo do expoente dominante, uma vez que os erros numéricos crescem bastante quando se tenta calcular os outros expoentes.

Depois de reconstruído o espaço de estado por meio do método descrito na seção 3.2 escolhe-se dois pontos inicialmente muito próximos $\mathbf{y}_1(0)$ e $\mathbf{y}_2(0)$ e se observa a sua evolução por um determinado tempo (pode ser um intervalo fixo ou não, ou então monitorar a distância entre os pontos e ver quando ela atinge um valor limite). Calcula-se então

$$\frac{1}{n} \frac{\|\mathbf{y}_2(n) - \mathbf{y}_1(n)\|}{\|\mathbf{y}_2(0) - \mathbf{y}_1(0)\|} \quad (3.32)$$

e observa-se um novo par de pontos vizinhos. Repetindo o procedimento um número muito grande de vezes (idealmente $n \rightarrow \infty$), o expoente de Lyapunov dominante é calculado por

$$\lambda_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \log \frac{\|\mathbf{y}_2(n) - \mathbf{y}_1(n)\|}{\|\mathbf{y}_2(0) - \mathbf{y}_1(0)\|} \quad (3.33)$$

Convém deixar claro que \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 são redefinidos a cada passo.

Métodos de Determinação do Jacobiano

O método estima a matriz de Oseledec 3.26 por meio de determinação das matrizes jacobianas $DF^n(\mathbf{y})$. O método centraliza-se na obtenção das derivadas no espaço de

estado estimadas numericamente na vizinhança de cada ponto da órbita. A idéia, originalmente apresentada por Eckmann *et al* [27] é construir mapas locais de todos os pontos da vizinhança de $\mathbf{y}(n)$ com imagem na vizinhança de $\mathbf{y}(n + 1)$. Este mapa foi originalmente proposto como localmente linear mas posteriormente Brown *et al* [11] mostraram que resultados mais precisos embora com maior custo computacional são conseguidos com ajuste polinomial.

Na vizinhança do ponto $\mathbf{y}(n)$ a dinâmica do sistema é aproximada localmente pelo mapa

$$\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^K C_{nk} \phi_k(\mathbf{z}), \quad (3.34)$$

onde \mathbf{z} são os vetores que definem as posições dos vizinhos em relação ao ponto de referência, $\phi_k(\mathbf{z})$ é um conjunto de funções de base, C_{nk} são coeficientes determinados por ajuste local tomando a vizinhança de $\mathbf{y}(n)$ e mapeando para $\mathbf{y}(n + 1)$, usando algum processo de minimização como, por exemplo, mínimos quadrados ou SVD. Na realidade, os métodos jacobianos se fundamentam na obtenção de \mathcal{F} , expressão 3.34, diferenciando-se pela escolha das funções de base usadas. Funções lineares foram originalmente propostas por Eckmann *et al* [27], enquanto que Brown *et al* [11] propõem funções polinomiais. Várias outras funções de base tem sido propostas na literatura, entre elas as funções sigmoide utilizadas em modelos de redes neurais. No capítulo 4 serão apresentados estes métodos em detalhe juntamente com os algoritmos utilizados para a sua implementação computacional.

3.7 Entropia

A *entropia de Kolmogorov-Sinai* é mais uma quantidade invariante que é introduzida. O objetivo é de apenas apresentá-la e relacioná-la com os expoentes de Lyapunov.

A entropia de Kolmogorov-Sinai é definida como a taxa média de criação de informação de um sistema cuja dinâmica é sensível a variações nas condições iniciais (uma das definições de sistema caótico).

O relacionamento da entropia h com os expoentes de Lyapunov λ é apresentada por Ruelle (citado por Eckmann e Ruelle [27]) como uma desigualdade

$$h \leq \sum \lambda_i \text{ positivos.} \quad (3.35)$$

É de interesse considerável que a *igualdade* parece valer frequentemente [27] para as medidas invariantes físicas. Esta igualdade é chamada de *identidade de Pesin*:

$$h = \sum \lambda_i \text{ positivos.} \quad (3.36)$$

3.8 Caos e Ruído

O principal problema encontrado quando se pretende realizar uma análise não linear baseando-se na reconstrução do espaço de estado apresentada na seção 3.2 é que o sinal experimental sempre está contaminado com uma determinada parcela de ruído, seja ele originado por outras fontes que não estão relacionadas com o comportamento que se deseja observar, ou resultado do processo de medição. Também quando o sinal é resultado de simulação experimental existem erros de arredondamento que cumprem um papel semelhante ao ruído presente nos sistemas físicos.

Na análise linear o ruído é separado do sinal por meio de filtros que operam utilizando a transformada de Fourier para separar as regiões de frequência de interesse. Já na análise não linear isto não é imediatamente possível primeiro porque a própria utilização da transformada de Fourier exige que o sinal tenha características lineares e acima de tudo porque os comportamentos caóticos apresentam um espectro semelhante ao apresentado pelo ruído sendo, em muitos casos, necessário separá-los. O sinal terá então que ser *limpo* diretamente no domínio do tempo.

Suponha-se que o sinal medido $s(n)$ é composto do sinal real $s_l(n)$ (limpo) e de uma parcela de ruído $s_r(n)$

$$s(n) = s_l(n) + s_r(n) \quad (3.37)$$

e que o problema é identificar características de (expoentes de Lyapunov, dimensões) de $s_l(n)$, conhecido $s(n)$ e com $s_r(n)$ desconhecido. Não sendo conhecida a dinâmica do sistema no espaço de estado e sem se ter um sinal limpo de referência, existem alguns métodos que cumprem com algum sucesso a tarefa de separar sinal caótico de ruído. Estes métodos se dividem em dois grupos:

(1) Landa e Rosenblum [51], Cawley e Hsu [15], Sauer (ver Casdagli *et al.* [14]) e Pikovski (ver Casdagli *et al.* [14]) usam filtros lineares MA (*Moving Average*) ou FIR (*Finite Impulse Response*) diretamente e consideram que os dados assim filtrados representam uma órbita mais limpa. Filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) não devem ser usados pois alteram a estrutura do espaço de estado. Estes métodos não se ocupam diretamente com a dinâmica mas usam a intuição de que o sinal está associado aos maiores valores singulares da matriz de covariância da amostragem enquanto que o ruído está associado aos menores. O valor singular mede a quantidade de dados que está associada à direção correspondente a ele. Desta forma é de se esperar que o ruído contribua uniformemente com todos os valores singulares enquanto que a dinâmica do sistema está associada a direções definidas. Forma-se a matriz de covariância da amostragem em uma dimensão $d > d_M$ e projeta-se os dados nos primeiros d_S valores singulares. Os dados são então tomados como novos dados e um novo mergulho, com novo *time delay* é feito e o processo repetido até que se atinja um conjunto de dados suficientemente limpo.

A projeção em valores singulares é, na realidade um filtro linear. O fato de o sinal passar por vários filtros diferentes é que torna o processo globalmente não linear.

(2) Kostelich e Yorke [48, 49] e Farmer e Sidorowich [32] apresentaram originalmente a idéia de usar mapas locais usando informação de vizinhanças. Os pontos são

ajustados ao mapa determinado por uma vizinhança. Os pontos são então realinhados para que o mapa tenha um comportamento mais determinístico. Abarbanel *et al* [1] estendeu a idéia original usando mapas polinomiais. A estrutura do método (2) baseia-se na determinação de uma vizinhança ao redor de cada ponto $\mathbf{y}(n)$, constituída de N_{viz} pontos $\mathbf{y}_i(n)$, com $i = 1, 2, \dots, N_{viz}$. Com a evolução constrói-se um mapa local polinomial de $\mathbf{y}_i(n)$ para $\mathbf{y}_i(n+1)$, na forma

$$\mathbf{y}_i(n+1) = g(\mathbf{y}) = C_0 + C_1 \cdot \mathbf{y}_i(n) + C_2 \cdot \mathbf{y}_i(n)\mathbf{y}_i(n) + \dots \quad (3.38)$$

Os coeficientes C_0, C_1, C_2, \dots são determinados por uma minimização dos resíduos do mapa local utilizando mínimos quadrados. A seguir observa-se os pontos de referência $\mathbf{y}(n)$ e $\mathbf{y}(n+1)$ e calcula-se pequenos ajustes $\Delta\mathbf{y}(n)$ e $\Delta\mathbf{y}(n+1)$ que minimizam

$$\|\mathbf{y}(n+1) + \Delta\mathbf{y}(n+1) - g(\mathbf{y}(n) + \Delta\mathbf{y}(n))\|, \quad (3.39)$$

em cada ponto da órbita. A órbita limpa será construída com os pontos assim ajustados.

O uso de mapas polinomiais é uma generalização que apresenta alguns aspectos de vantagem sobre o ajuste linear pois capturam mais eficazmente a dinâmica local.

Capítulo 4

Cálculo de dimensões e expoentes de Lyapunov

4.1 Introdução

Depois de feita uma revisão dos conceitos e definições que introduzem a teoria dos sistemas dinâmicos não-lineares com comportamento caótico e algumas medidas que permitem a sua caracterização diretamente a partir de sinais obtidos experimentalmente a questão se concentra na determinação destas medidas, a saber, dimensões e expoentes de Lyapunov. Neste capítulo serão descritos métodos que permitem esta determinação. Serão discutidos, também, aspectos ligados à sua implementação computacional e aspectos que surgem ao se ultrapassar o limiar que existe entre a aplicação da teoria matemática a problemas ideais e a problemas reais, como, por exemplo, questões como a precisão numérica dos cálculos e a eficiência computacional.

4.2 Determinação dos Parâmetros de Mergulho

4.2.1 Informação Mútua Média

O algoritmo que é descrito a seguir foi desenvolvido por Fraser [34] e calcula a informação mútua média, baseada na equação 3.14, para a escolha do *time delay*. Quando se pretende calcular a informação mútua a partir de uma série temporal deve-se calcular a densidade de probabilidade $P(s(n), s(n + \tau))$ a partir de histogramas. Desta forma a dificuldade está no grande custo computacional de percorrer o espaço de estado em elementos pequenos e obtendo o número de pontos que ocupam cada elemento. Para ilustrar, considere-se o plano (x, y) onde se passa a dinâmica do sistema em questão, sendo seu estado representado por N pontos neste plano. Um elemento de área $\Delta x \Delta y$ é ocupado por N_{xy} pontos. Estima-se $P(x, y)$ como sendo igual a $\frac{N_{xy}}{N \Delta x \Delta y}$, uniforme no interior do elemento. O tamanho do elemento pode ser fator importante para uma boa estimativa da densidade de probabilidade. Elementos maiores recebem um número maior de pontos o que faz com que o cálculo da densidade de probabilidade média seja mais preciso

mas, por outro lado, como tomam médias em regiões mais amplas, possíveis flutuações da densidade de probabilidade não são observadas o que irá subestimar a informação mútua média. Já elementos muito pequenos permitem erros devidos a flutuações da densidade de probabilidade que são interpretados como estruturas de escala pequena (ruído, por exemplo) o que irá superestimar a informação mútua média.

O algoritmo de Fraser tem a grande virtude de superar estas dificuldades construindo partições do espaço de estado cujo tamanho se adapta às condições locais. Ele não usa os elementos demasiadamente pequenos, tais que os resultados sejam influenciados por flutuações estatísticas. Isto, entretanto, também significa que se o tamanho da amostragem for suficiente para se produzir uma boa média a estimativa da informação mútua média será boa, mas se o tamanho da amostra for insuficiente certamente alguns aspectos não estarão presentes o que subestimar a mesma informação mútua média. Por isto convém salientar que o método obtém uma aproximação da informação mútua média que sempre será menor que o real (valor que somente seria atingido se a série fosse infinita).

Para que o algoritmo seja entendido com mais clareza se manterá aqui o exemplo do plano (x, y) e se indicará as modificações a serem efetuadas quando a dimensão do espaço de estado for maior. O primeiro passo é efetuar uma transformação das coordenadas (x, y) em coordenadas (x_p, y_p) de igual probabilidade, definidas por

$$\begin{aligned} x_p &= \int_{-\infty}^x P(x) dx \\ y_p &= \int_{-\infty}^y P(y) dy. \end{aligned} \tag{4.1}$$

A seguir, divide-se o plano em quartos e conta-se o número de pontos que ocupam cada quarto. Se a distribuição das observações não é uniforme, com um nível de variação inferior a 20 por cento, os quartos são novamente divididos em quartos e o procedimento se repete até se encontrar uma distribuição uniforme. O tamanho da partição que se chegou quando se encontrou uma distribuição uniforme é o tamanho da partição que será utilizado para a determinação da densidade de probabilidade.

Para o caso geral de d variáveis escalares (resultantes, por exemplo, da reconstrução do espaço de estado descrita na seção 3.2 o processo consiste em dividir uma região em 2^d sub-regiões. Quando $d > 3$ convém tomar muito cuidado com os resultados obtidos, uma vez que pode ser necessária uma série muito grande de pontos (da ordem de milhões) para que ocorra convergência até se encontrar um elemento com distribuição uniforme. A partir das densidades de probabilidade calculadas pelo procedimento relatado acima, I_{xy} pode ser calculado pela equação 3.14 para o valor de τ com que foi reconstruído o espaço de estado para a determinação das densidades de probabilidade. Portanto o algoritmo se resume em calcular as densidades de probabilidade $P(s(n), s(n+\tau))$, $P(s(n))$ e $P(s(n+\tau))$ com o processo descrito acima e depois calculando $I(\tau)$ com a equação 3.14. A figura 4.1 mostra a informação mútua média calculada para diferentes tamanhos de amostragem para um sinal medido experimentalmente. Pode-se observar que ocorre uma estabilização do valor para tamanhos de amostras grandes.

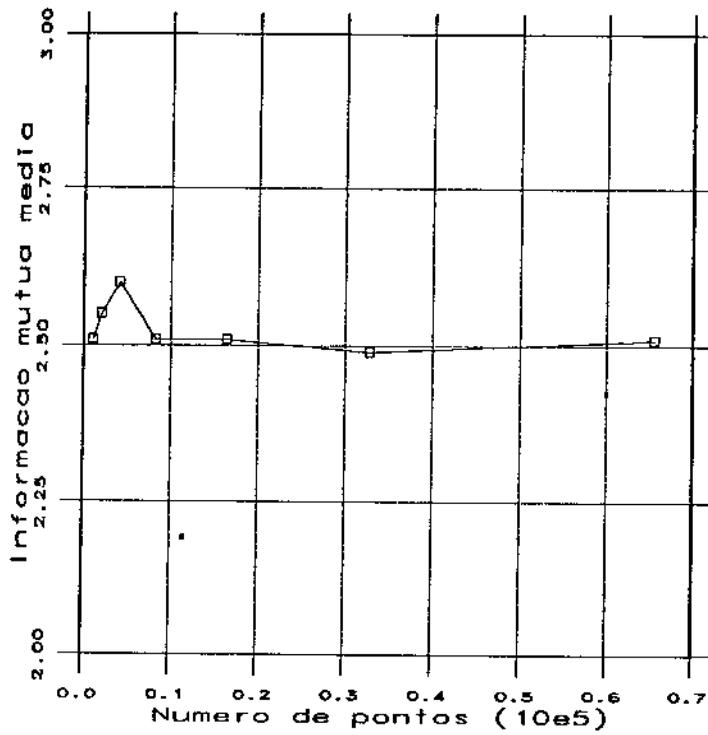


Figura 4.1: Efeito do tamanho da série no cálculo de $I(\tau)$.

4.3 Determinação de Dimensões

4.3.1 Algoritmo de Grassberger e Procaccia

A função de correlação de N_y vetores $\mathbf{y}(n), n = 1, \dots, N_y$ é definida pela expressão 3.25 e a dimensão de correlação é dada pela expressão 3.24. Para a determinação da dimensão de correlação, entretanto o procedimento adotado por Grassberger e Procaccia [39] se baseia na determinação da inclinação da curva $\log C(\epsilon)$ versus $\log \epsilon$ diretamente dos vetores obtidos pela reconstrução do espaço de estado descrita na seção 3.2. Basicamente a técnica se constitui em construir os vetores $\mathbf{y}(n)$ por meio da reconstrução do espaço de estado e a seguir calcular a dimensão de correlação para vários valores da dimensão de mergulho. A dimensão de correlação d_{cor} deverá tender para um valor constante com o aumento da dimensão de mergulho d_M . Isto, na verdade, pode ser utilizado como um método para obter a dimensão de mergulho uma vez que pode ser considerada como o mínimo valor para o qual a dimensão de correlação satura. A presença de ruído, bastante comum em dados de origem experimental aumenta a dimensão em que ocorre a saturação. Na presença do ruído os gráficos são divididos em duas regiões correspondentes a diferentes escalas. A região correspondente aos menores valores de ϵ é interpretada como dominada pelo ruído o que faz com que a dimensão calculada com base nos seus valores seja relacionada ao ruído. A região correspondente aos maiores valores de ϵ é apropriada para calcular a dimensionalidade do atrator. Um ruído excessivo pode impossibilitar o cálculo da dimensão de correlação ou da dimensão de informação.

Assim sendo o cálculo da dimensão de correlação se resume em determinar a função de correlação, o que, entretanto, nem sempre é uma tarefa das mais simples pois exige que o atrator seja completamente percorrido para a procura da vizinhança do ponto de referência. Como o ponto de referência também é variado percorrendo todo o atrator, isto implica em um processo extremamente longo. Por esta razão, um procedimento decisivo está na contagem dos vizinhos. O método comumente utilizado é o do *box counting* (contagem de elementos). Grassberger e Procaccia propuseram um método alternativo que consiste em uma *sphere counting* (contagem de esferas). Os tamanhos das esferas utilizadas dependem do tamanho do atrator. O tamanho da maior esfera é da ordem do tamanho do atrator, ou seja o seu expoente binário é determinado por

$$m = \text{int}(\log_2(D_A)) + 1, \quad (4.2)$$

onde D_A é o diâmetro do atrator. O número de esferas é calculado por

$$N_{esferas} = 20 \times 2^{r_{esf}-1}. \quad (4.3)$$

Para $r_{esf} = 1$ (raio da esfera), 20 esferas cobrem o atrator e os seus raios são reduzidos pelo fator 2. Então o menor tamanho de esfera é $20^{20} \approx 10^6$ vezes menor que o tamanho do atrator. Isto é normalmente suficiente para abranger a menor estrutura presente no atrator, que é obtido de uma série temporal de tamanho finito.

Cada ponto do atrator é tomado como um ponto de referência para o qual são calculadas as distâncias a todos os outros pontos no atrator exceto para aqueles pontos que

estão correlacionados com ele, ou seja, aqueles pontos que estão em trajetórias vizinhas. Esta exceção procura evitar os efeitos da autocorrelação que pode alterar sensivelmente os resultados da integral de correlação, especialmente para maiores dimensões de mergulho. O que acontece é que quando ocorrem mergulhos de altas dimensões os vizinhos são em maioria aqueles pontos que estão correlacionados no tempo: seus componentes representam pontos próximos na série temporal. Nesta escala a estrutura não mais mantém as características originais e os cálculos de dimensões se tornam extremamente imprecisos. A solução para isto é não considerar os pontos cujas componentes estão dentro de um limite temporal que os torna correlacionados. O número de pontos rejeitados N_{rej} deve corresponder a pelo menos 3 a 5 órbitas em torno da órbita de referência. O número de pontos, N_{ref} para o cálculo da função de correlação deve ser então reduzido para $N_{ref} = N_y - 2N_r - 1$.

O ponto chave no cálculo da função de correlação $C(\epsilon)$ está no cálculo das distâncias entre pontos vizinhos. O que ocorre é que o número de operações requeridas para calcular as distâncias entre os pontos é da ordem de N^2 o que aumenta consideravelmente o tempo computacional. Para superar esta dificuldade o primeiro passo consiste em utilizar uma norma adequada na escolha dos vizinhos. O presente algoritmo utiliza a norma

$$\|y(j) - y(n)\| = \max_{1 \leq i \leq d_M} |y_i(j) - y_i(n)|. \quad (4.4)$$

O uso desta norma em detrimento da tradicional norma euclidiana traz uma evidente economia de operações, como elevações ao quadrado e extrações de raízes, que consomem uma considerável parcela do tempo de computação.

O ponto é então escolhido dentro de uma esfera genérica de índice i_e dado por

$$i_e = 2^{ref-1} \log_2 d + N_{esferas} - 2^{ref-1} m. \quad (4.5)$$

A função de correlação é obtida pela soma em todas as esferas

$$C_n(\epsilon) = \sum_{i_e} N_{ref}(i_e), \quad (4.6)$$

que é a função de correlação individual para o ponto de referência $y(n)$. A integral de correlação é calculada, então, por

$$C(\epsilon) = \frac{1}{N_{ref}} \sum_{i=1}^{N_{ref}} C_i(\epsilon) \quad (4.7)$$

e a dimensão de correlação é calculada pela expressão 3.24.

O cálculo da dimensão de informação também é obtido através da média

$$\langle \log_2 C_i(\epsilon) \rangle = \frac{1}{N_{ref}} \sum_{i=1}^{N_{ref}} \log_2 C_i(\epsilon) \quad (4.8)$$

por

Dimensão	Número mínimo de pontos
1	200
2	256
3	4096
4	65536
5	1048576

Tabela 4.1: Número mínimo de pontos necessários para uma boa reconstrução, em função da dimensão do atrator.

$$d_I = \lim_{N_{ref} \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\log_2 C_i(\epsilon))}{\log_2 \epsilon}. \quad (4.9)$$

Uma precisa determinação das dimensões de correlação e informação depende da natureza do atrator. Um fator que influencia decisivamente é o tamanho da amostra no tempo. Enquanto que para atratores caóticos obtidos de mapas iterativos (mapa de Hénon, por exemplo) 100 pontos podem ser suficientes, para fluxos (sistemas de equações diferenciais) são requeridos 200 períodos orbitais médios, cada um deles com pelo menos 50 pontos. Outros atratores mais complicados requerem normalmente um número ainda maior de pontos, chegando a valores extremamente elevados para atratores caóticos. A tabela 4.1 apresenta o número mínimo de pontos sugeridos para uma boa reconstrução, em função da dimensão do atrator.

O número de pontos de referência escolhidos aleatoriamente (em relação aos quais as integrais de correlação são calculadas) devem ser limitados para diminuir o tempo computacional.

4.3.2 Algoritmo de Liebovitch e Toth

O cálculo da dimensão de capacidade, descrita na seção 3.5, pela expressão 3.21 apresenta alguns inconvenientes sérios que fazem com que a mesma não seja calculada por este caminho. Estes inconvenientes são diretamente ligados à necessidade de um número muito grande de pontos para se conseguir resultados confiáveis. O cálculo sendo feito por um algoritmo de *box counting*, tem um custo computacional muito alto por requerer uma memória elevada e usar muito tempo de computação. Liebovitch e Toth [52], entretanto, propõem um método que contorna estas limitações além de não requerer decisões sobre ajustes de curvas que dependem de detalhes de cada conjunto de dados, o que é necessário quando da aplicação do método de Grassberger e Procaccia para o cálculo da dimensão de correlação.

Como uma estrutura fractal se repete indefinidamente qualquer que seja a escala em que seja observada, o limite da expressão 3.21, que exige um número extremamente elevado de pontos segundo Greenside *et al* [41], não precisa ser necessariamente atingido

para que se obtenha uma boa estimativa da dimensão de capacidade. Isto pode ser conseguido pela comparação de propriedades em duas escalas diferentes. A dimensão de capacidade pode ser obtida por

$$d_C = \frac{d(\log N(\epsilon))}{d(\log(\frac{1}{\epsilon}))}. \quad (4.10)$$

Fundamentados na expressão 4.10 Liebovitch e Toth [52] apresentam um algoritmo que requer apenas Nd_M posições de memória (d_M é a dimensão de mergulho) e tem tempo de execução proporcional a $N \log N$. O método requer também um número de pontos não inferior a 10^{d_M} o que o torna um método que pode ser aplicado com facilidade a sistemas de baixa dimensão, mas para altas dimensões o tamanho da série pode ser excessivamente grande. Esta é entretanto uma limitação que acompanha a maioria dos métodos que determinam invariantes diretamente de séries temporais.

O cálculo de d_C se realiza contando o número de células em uma cobertura mínima que contenha pelo menos um elemento do conjunto. Este processo se repete para tamanhos decrescentes de células. Isto pode ser feito codificando todos os pontos que estão dentro de uma célula com um mesmo número e depois contando o número de índices diferentes existentes na cobertura.

A série temporal é inicialmente mergulhada em um espaço d_M -dimensional através da reconstrução do espaço de estado (seção 3.2). Os vetores $\mathbf{y}(n)$ assim reconstruídos são normalizados para ficarem na faixa $(0, 2^k - 1)$. O conjunto é dividido em elementos de dimensão d_M e lado 2^m , $0 \leq m \leq k$, chamados células. Para cada coordenada forma-se $Z_n = (y_n \text{ AND } N_B)$ em que AND é uma operação de conjunção binária entre os bits que compõem y_n e N_B e N_B é um número binário constituído por 1 nas primeiras $k - m$ posições e 0 nas restantes. Todos os pontos que estão dentro da mesma célula de tamanho 2^m terão coordenadas com os mesmos dígitos binários nas primeiras $k - m$ posições o que faz com que todos os pontos que estão dentro de uma mesma célula tenham o mesmo Z_n . A seguir é realizada a contagem de Z_n 's diferentes ordenando-os usando *quicksort* [47] e percorre-se toda a lista formada contando-se o número de vezes que trocam de valor. Repete-se o procedimento para diferentes tamanhos de células 2^m , $m = k, k - 1, \dots, 0$. A dimensão de capacidade é determinada conforme expressão 4.10 pela inclinação da curva formada por $N(\epsilon)$ versus $\frac{1}{\epsilon}$ como a mostrada na figura 4.2.

A memória requerida pelo algoritmo acima descrito é determinada pelo número de pontos, N , e não pelo número de células. Sendo os dados inteiros de 2 bytes, a memória total requerida é aproximadamente $2Nd_M$ bytes. O tempo computacional depende muito pouco da dimensão de mergulho mas esta última dependência está muito ligada ao hardware utilizado.

A resolução limitada devida ao número finito de pontos é alcançada quando ϵ é suficientemente pequeno de forma que todos os pontos ocupam células distintas, ou seja $N(\epsilon) = N$. Para este valor de ϵ a função satura o que faz com que se descarte valores de $N(\epsilon)$ próximos da saturação. Como um critério que pretende garantir a integridade dos resultados estabelece-se um limite para $N(\epsilon) \leq \frac{N}{5}$.

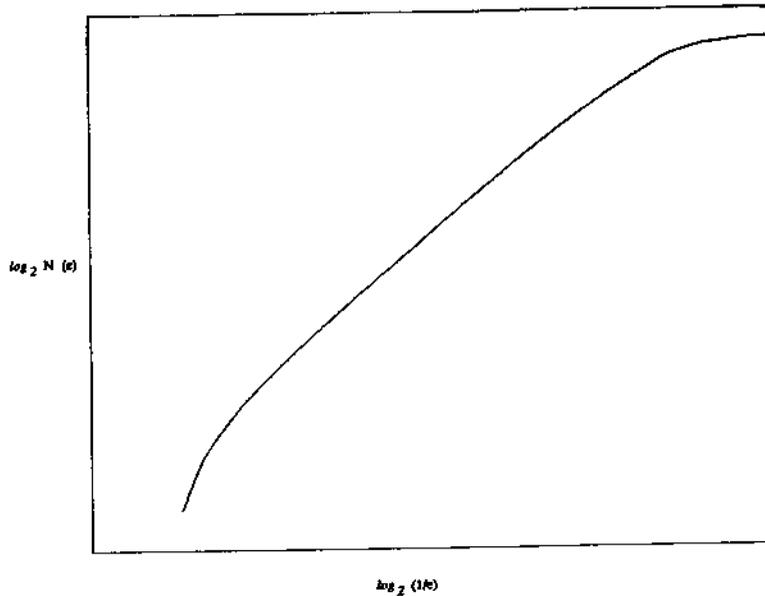


Figura 4.2: Curva de $N(\epsilon)$ versus ϵ de cuja inclinação é medida a dimensão de capacidade.

4.4 Expoentes de Lyapunov

4.4.1 Determinação do Espectro de Lyapunov

Os métodos de determinação do espectro de Lyapunov (por espectro se entende o conjunto de todos os expoentes associados ao sistema dinâmico estudado) se fundamentam na determinação dos autovalores da matriz de Oseledec (equação 3.26). Para isto todos eles iniciam pela reconstrução do espaço de estado utilizando a expressão 3.8. Assume-se que a evolução do vetor reconstruído \mathbf{y} no espaço de estado também reconstruído é regida pelo mapa 3.10. O passo da iteração pode ser escolhido independentemente do *time delay* τ e isto pode ter uma considerável influência na precisão dos resultados.

Aproximação local

A seguir será apresentado o método proposto inicialmente por Eckmann *et al* [27] e posteriormente modificado por Brown *et al* [11] de determinação dos expoentes de Lyapunov através da estimativa das matrizes jacobianas que formam o mapa \mathcal{F} , por meio de aproximações locais. Inicialmente, é sugerida a transformação da série temporal $s(n), n = 1, \dots, N$ em uma sequência de inteiros para melhorar a eficiência computacional. Δt o intervalo de tempo entre medições é fixo sendo o tempo total de duração da série igual a $N\Delta t$. Após a transformação em inteiros é reconstruída a dinâmica no espaço de estado por meio de 3.8. Serão definidos, então $N - d_M + 1$ vetores no espaço de estado reconstruído. É conveniente lembrar novamente que o processo de reconstrução implica na escolha dos parâmetros de mergulho que podem ser obtidos dos métodos descritos na

seção 4.2.

Após a reconstrução da dinâmica o restante do procedimento se relaciona com a obtenção de mapas tangentes à dinâmica reconstruída através de um ajuste por mínimos quadrados. Isto começa com a escolha de um ponto na trajetória no espaço de estado, $\mathbf{y}(n)$, e a determinação de uma vizinhança deste ponto. A vizinhança é constituída de outros pontos $\mathbf{y}(j)$, (j é o índice do vizinho correspondente) da trajetória que estão contidos em uma bola de raio ϵ com centro em $\mathbf{y}(n)$, de forma que

$$\|\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n)\| \leq \epsilon. \quad (4.11)$$

O presente algoritmo utilizou como norma a máxima distância entre as coordenadas dos pontos $\mathbf{y}(j)$ e $\mathbf{y}(n)$ obtida pela expressão 4.4 mas qualquer outra norma poderia ser utilizada sem qualquer prejuízo sensível para o método. Esta norma, entretanto permite uma escolha mais rápida dos vizinhos, tarefa que é, talvez, a principal responsável pelo custo computacional desta implementação. A escolha dos vizinhos é feita usando o algoritmo de *quicksort* [47] em que procura pelos vizinhos de $\mathbf{y}(n)$ é feita inicialmente na primeira dimensão, com o seguinte procedimento: toma-se a componente da primeira dimensão, $y_1(n)$, e procura-se pelos vetores cujas componentes nesta direção estejam dentro da vizinhança. Com isto seleciona-se aqueles vetores nos quais será realizada a procura na segunda dimensão e assim sucessivamente até que sejam encontrados todos os vetores que estão dentro da vizinhança escolhida.

O passo seguinte é determinar a matriz jacobiana \mathbf{DF} que descreve como a dinâmica relaciona, no espaço tangente, pequenos vetores que estão na vizinhança de $\mathbf{y}(n)$ com pequenos vetores que estão na vizinhança de $\mathbf{y}(n+1)$. A matriz \mathbf{DF} é construída através da evolução da distância entre o ponto $\mathbf{y}(n)$ e seus vizinhos $\mathbf{y}(j)$. Brown *et al* [11] propoem que a matriz \mathbf{DF}_n seja relacionada com as evoluções das distâncias entre pontos vizinhos por meio do seguinte desenvolvimento em série de Taylor

$$\mathbf{y}(j+1) - \mathbf{y}(n+1) = \mathbf{DF}(\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n)) + \mathbf{D}^2\mathbf{F}(\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n))^T(\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n)) + \dots \quad (4.12)$$

onde j é o índice correspondente ao ponto vizinho, e

$$\mathbf{DF}\mathbf{y} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}$$

é a matriz jacobiana e

$$\mathbf{D}^2\mathbf{F}\mathbf{y} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}^2}.$$

- *Aproximações Lineares*

O método de Eckmann *et al* [27] usa apenas o primeiro termo da série, reduzindo a aproximação local ao seu termo linear. A matriz \mathbf{DF} pode não ser completamente determinada uma vez que o atrator pode não ocupar algumas dimensões do espaço

de estado reconstruído, o que acontece quando o atrator foi mergulhado em um espaço de dimensão d_M superior à necessária. Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov isto implica na presença de expoentes que só têm significado numérico sendo tratados na literatura como *parasitas* ou *espúrios*. Uma maneira de superar isto é construir uma matriz \mathbf{DF} , $d_Q \times d_Q$ em que $d_Q \leq d_M$ é a dimensão em que ocorre evolução entre os pontos de ordem n e $n + q$ (Ou seja, a evolução entre dois pontos vizinhos não ocorre necessariamente na dimensão completa do espaço de estado e sim em uma dimensão reduzida).

Assume-se que existe um inteiro $q \geq 1$ tal que

$$d_M = (d_Q - 1)q + 1 \quad (4.13)$$

e associa-se a $\mathbf{y}(n)$ um vetor de dimensão d_Q na forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(n) &= \{s(n), s(n+q), \dots, s(n+(d_Q-1)q)\}^T \\ &= \{s(n), s(n+q), \dots, s(n+d_M-1)\}^T. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Este passo, na realidade corresponde a tomar um *time delay* adequado. Se o *time delay* foi escolhido por meio de algum processo descrito na seção 3.2.1 e é diferente de 1, então a equação 4.14 pode ser desconsiderada.

Sendo, então $q > 1$ a expressão 4.12 é substituída por

$$\mathbf{DF}(\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n)) \approx \mathbf{y}(j+q) - \mathbf{y}(n+q), \quad (4.15)$$

que é obtida por aproximação utilizando mínimos quadrados.

A minimização por mínimos quadrados é a parte mais demorada do algoritmo e depende diretamente do número de vizinhos utilizados. Por outro lado, com um número de vizinhos insuficiente ($V_n(\epsilon) < d_Q$) o algoritmo pode falhar por razões numéricas. Concluindo ϵ deve ser escolhido de forma que o número de vizinhos seja suficientemente grande para não ocorrerem problemas numéricos e, não tão grande que torne o custo computacional excessivo. Um procedimento de escolha do número de vizinhos pode ser o seguinte: conta-se o número de vizinhos de $\mathbf{y}(n)$ correspondentes a valores crescentes de ϵ previamente selecionados e para-se quando o número de vizinhos chega ao menor valor entre $2d_Q$ e $d_Q + 4$. Calcula-se então a matriz \mathbf{DF}_n e verifica-se se a mesma é singular ou se tem um rank mínimo previamente definido. Em caso negativo aumenta-se novamente ϵ até se encontrar uma matriz que passe pelos critérios de escolha. Eckmann *et al* [26] afirmam que se a matriz for singular ainda assim poderá ser utilizada para o cálculo dos expoentes de Lyapunov desde que possua um rank mínimo igual ao número de expoentes de interesse uma vez que estes não são afetados pela singularidade da matriz.

O procedimento subsequente é uma adaptação do método QR, proposta por Eckmann *et al.* Obtida uma sequência de matrizes $DF_n, DF_{n+q}, DF_{n+2q}, \dots$ obtém-se matrizes ortogonais Q_j e matrizes triangulares superiores R_j com elementos diagonais positivos, sendo Q_0 a matriz unitária e

$$\begin{aligned} DF_1 Q_0 &= Q_1 R_1, \\ DF_{1+q} Q_1 &= Q_2 R_2, \\ &\dots, \\ DF_{1+jq} Q_j &= Q_{j+1} R_{j+1}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{4.16}$$

A partir de sua definição na seção 3.6 como os autovalores da matriz de Oseledec, descrita na expressão 3.26 os expoentes de Lyapunov são então calculados por

$$\lambda_k = \frac{1}{K \Delta t} \sum_{j=0}^{K-1} \ln R_j^{kk}, \tag{4.17}$$

onde $K \leq \frac{(N-d_{Qq}-1)}{q}$ é o número disponível de matrizes, R_j^{kk} é o elemento diagonal de ordem k da matriz R_j . Enquanto um pequeno número de matrizes encurta o custo computacional, um número grande melhora a qualidade estatística dos resultados, portanto, também aqui há um compromisso entre qualidade e tempo de computação.

- *Aproximação polinomial*

O método da aproximação local polinomial tem a mesma estrutura do método da aproximação linear. Como a aproximação local resulta no desenvolvimento em série de Taylor apresentado na expressão 4.12, dois novos problemas surgem no desenvolvimento do método. O primeiro se refere à escolha do número de termos da série a serem utilizados (decisão sobre o truncamento da série) e o segundo relaciona-se com a expressão 4.12 pois a matriz jacobiana não está explicitada neste caso.

Antes de se discutir a solução dos problemas anteriormente apresentados convém abordar a questão: Porque aproximações polinomiais e não aproximações lineares? A construção da matriz de Oseledec 3.26 requer que o procedimento de aproximação local seja repetido inúmeras vezes ao longo do desenvolvimento da trajetória no espaço de estado para que se obtenha uma matriz que é resultado do produto de várias matrizes jacobianas obtidas em cada iteração. Esta matriz, que irá compor a matriz de Oseledec é frequentemente mal condicionada. Em uma matriz mal condicionada, pequenas diferenças em seus termos produzem grandes diferenças nos autovalores. O truncamento da série de Taylor em seu primeiro termo pode fazer com que as matrizes jacobianas sejam construídas com um erro maior que quando se utiliza um número maior de termos. Isto, entretanto, não é uma afirmação

definitiva pois, o importante é que a dinâmica local seja reproduzida o mais fielmente possível. Em outras palavras, muitas vezes utilizar um número grande de termos do desenvolvimento em série não produz melhorias sensíveis no resultado ou até mesmo podem introduzir erros quando a dinâmica local for mais simples do que se espera.

O exposto acima reforça a necessidade de se ter um critério para escolher o termo de truncamento da série. O número de parâmetros, N_P , a serem determinados no processo de minimização por mínimos quadrados está relacionado ao número de termos da série de Taylor utilizados, N_T pela expressão

$$N_P = \left[\prod_{k=1}^{N_T} \frac{d+k}{k} - 1 \right]. \quad (4.18)$$

Para que a minimização por mínimos quadrados seja determinada é necessário que se tenha um número de vizinhos igual ao número de parâmetros a serem determinados, ou seja N_P .

A obtenção da matriz jacobiana DF quando se usa aproximação polinomial é realizada de forma semelhante à anterior. Para ilustrar o procedimento tome-se como exemplo um truncamento no segundo termo da série de Taylor da expressão 4.12 que se torna

$$\mathbf{y}(j+1) - \mathbf{y}(n+1) = \mathbf{DF}(\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n)) + \mathbf{D}^2\mathbf{F}(\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n))^T(\mathbf{y}(j) - \mathbf{y}(n)). \quad (4.19)$$

Chama-se $\Delta\mathbf{y}$ o vetor diferença

$$\Delta\mathbf{y} = \mathbf{y}(j+1) - \mathbf{y}(n+1) \quad (4.20)$$

Define-se o vetor \mathbf{a}_α e a matriz \mathbf{B} onde \mathbf{a}_α é constituído das α -ésimas coordenadas de $\Delta\mathbf{y}(n+1)$ para cada um dos N_V vizinhos, na forma

$$\mathbf{a}_\alpha = \begin{bmatrix} \Delta y_\alpha^1(n+1) \\ \Delta y_\alpha^2(n+1) \\ \vdots \\ \Delta y_\alpha^{N_V}(n+1) \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

e \mathbf{B} é construída a partir das matrizes \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 na forma

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2] \quad (4.22)$$

onde

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \Delta y_1^1(n), \Delta y_2^1(n), \dots, \Delta y_d^1(n) \\ \Delta y_1^2(n), \Delta y_2^2(n), \dots, \Delta y_d^2(n) \\ \vdots \\ \Delta y_1^{N_V}(n), \Delta y_2^{N_V}(n), \dots, \Delta y_d^{N_V}(n) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \Delta y_1^1(n)\Delta y_1^1(n), \Delta y_1^1(n)\Delta y_2^1(n), \dots, \Delta y_1^1(n)\Delta y_d^1(n) \\ \Delta y_1^2(n)\Delta y_1^2(n), \Delta y_1^2(n)\Delta y_2^2(n), \dots, \Delta y_1^2(n)\Delta y_d^2(n) \\ \vdots \\ \Delta y_1^{N_V}(n)\Delta y_1^{N_V}(n), \Delta y_1^{N_V}(n)\Delta y_2^{N_V}(n), \dots, \Delta y_1^{N_V}(n)\Delta y_d^{N_V}(n) \end{bmatrix},$$

O vetor \mathbf{a}_α e a matriz \mathbf{B} são conhecidos. Definindo-se o vetor \mathbf{c} como

$$\mathbf{c}_\alpha = \begin{bmatrix} DF_{\alpha 1} \\ DF_{\alpha 2} \\ \vdots \\ DF_{\alpha d} \\ D^2 F_{\alpha 1} \\ D^2 F_{\alpha 2} \\ \vdots \\ D^2 F_{\alpha d} \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

resolve-se o problema de minimização por mínimos quadrados da equação $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{B}\mathbf{c}_\alpha$.

Repetindo o processo para as d dimensões obtém-se as matrizes jacobianas e suas derivadas sendo possível o cálculo dos expoentes de Lyapunov pelo método QR modificado já descrito nesta mesma seção.

Aproximação por Redes Neurais

Para séries temporais de duração finita e sistemas com ruído, um dos métodos que vem apresentando melhores resultados no cálculo dos expoentes de Lyapunov é o que estima o mapa \mathcal{F} através de uma regressão não linear global usando redes neurais. Redes neurais são uma classe de modelos não lineares inspirados na arquitetura cerebral. As redes neurais foram primeiramente utilizadas por McCulloch e Pitt em 1943 (citados por

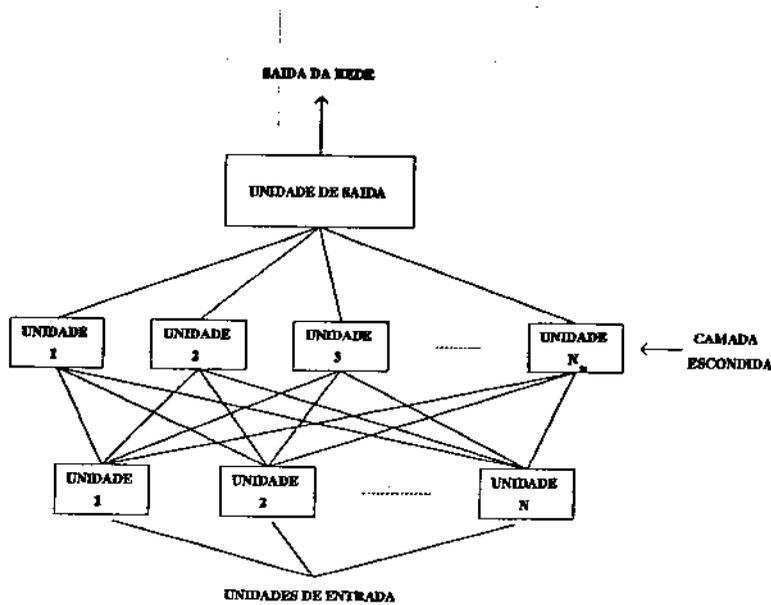


Figura 4.3: Esquema de uma rede neural com N unidades de entrada, uma camada escondida com N_n unidades (neurônios) e uma unidade de saída.

Nychka *et al* [59]) na análise de cálculos lógicos que deveriam ser efetuados por redes adequadamente configuradas de mecanismos entrada-saída ao modelar neurônios individuais. Recentemente, o interesse pelas redes neurais cresceu bastante pela sua comprovada habilidade de simular computacionalmente sistemas de difícil modelagem ou sistemas que operam com dados imperfeitos. A capacidade das redes neurais de aproximar mapas contínuos arbitrários em espaços de dimensão finita permitindo o uso de regressão não linear é o que as tornam indicadas para calcular os expoentes de Lyapunov de séries temporais.

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov são usadas redes não recursivas, de uma única camada escondida e com uma única saída, que são os modelos predominantemente utilizados em aplicações estatísticas.

Neste modelo, cujo esquema está mostrado na figura 4.3 o mapa \mathcal{F} é estimado por

$$\mathcal{F}(\mathbf{y}(n)) = \beta_0 + \sum_{j=1}^{N_n} \beta_j \psi(\mathbf{y}(n-1)\gamma_j + \gamma_{j0}), \quad (4.24)$$

onde β_0 e $\beta_j, j = 1, \dots, N_n$ são coeficientes escalares, $\gamma_j = (\gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \dots, \gamma_{jd})^T$ é um vetor de coeficientes, ψ é chamada de *função de ativação* e as chamadas *unidades de entrada* são constituídas pelas componentes do vetor $\mathbf{y}(n-1)$ obtido pela reconstrução no espaço de estado. Os chamados *parâmetros da rede* β_0, β_j e γ_j são estimados através de um processo de minimização da função objetivo. Esta não é uma tarefa fácil pois, devido ao paralelismo da rede a função objetivo passa por diversos mínimos locais. Nychka, *et al* [59] mostraram que os resultados mais eficientes e confiáveis foram conseguidos com o método de gradiente BFGS.

A função de ativação utilizada aqui foi

$$\psi(z) = \frac{x(1 + |\frac{x}{2}|)}{2 + |x| + \frac{x^2}{2}}. \quad (4.25)$$

Após a determinação do mapa \mathcal{F} a determinação dos expoentes de Lyapunov se dá através do cálculo dos autovalores da matriz de Oseledec (equações 3.26 e 3.27) sendo uma média ao longo de toda a duração da série temporal. A determinação das matrizes jacobianas é feita por derivação numérica e exige apenas que o mapa \mathcal{F} seja suave.

O ajuste de um modelo de redes neurais envolve a escolha de vários parâmetros que controlam a complexidade do mesmo. Os principais, uma vez que se parte de uma rede com uma única camada escondida, são o número de unidades escondidas (neurônios) e os parâmetros de mergulho: *time delay* e dimensão de mergulho. A discussão sobre os parâmetros de mergulho tem as mesmas nuances já apresentadas na seção 4.2. Para a escolha do número de unidades escondidas, é utilizado o método da validação cruzada, descrito na seção 3.2.1.

Capítulo 5

Ensaio Experimentais

5.1 Introdução

Os ensaios experimentais foram realizados com objetivos distintos em duas etapas: na primeira foram medidos o deslocamento do disco inferior e a força atuante no mancal para a verificação preliminar do *rubbing*; na segunda foi medido apenas o deslocamento do disco inferior para adquirir dados para a análise não-linear.

5.2 Bancada de Ensaio

Os dados experimentais obtidos para a análise do fenômeno do *rubbing* foram obtidos de uma bancada de rotação existente no Departamento de Projeto Mecânico. A bancada foi construída com o objetivo de simular o comportamento dinâmico de uma turbina hidráulica. A bancada foi objeto de uma análise dinâmica, realizada por Dana [25], de onde foram retirados os dados fundamentais para a realização do presente trabalho.

A bancada é constituída de uma estrutura que suporta um rotor vertical. A figura 5.1 apresenta uma vista geral da mesma. A estrutura está rigidamente fixada a uma base inercial de grande massa. O rotor está ligado à estrutura por meio de lâminas que atuam como molas, permitindo o ajuste de sua rigidez. O sistema rotor-mancais-motor é constituído de um eixo, dois discos (superior e inferior), um mancal de guia e um motor de acionamento. As dimensões do sistema rotor-motor estão mostradas na figura 5.2.

A tabela 5.1 apresenta as características e dimensões dos diversos elementos componentes do sistema em estudo, necessários à construção do seu modelo dinâmico.

5.3 Primeira Etapa

Na primeira etapa, realizada para análise preliminar do problema do *rubbing*, a tentativa foi de observar as órbitas do rotor quando em contato com o mancal. Para tanto foram medidos os deslocamentos do disco inferior em duas direções transversais ortogonais x e y . Também foram medidas as forças no mancal inferior nas mesmas direções para

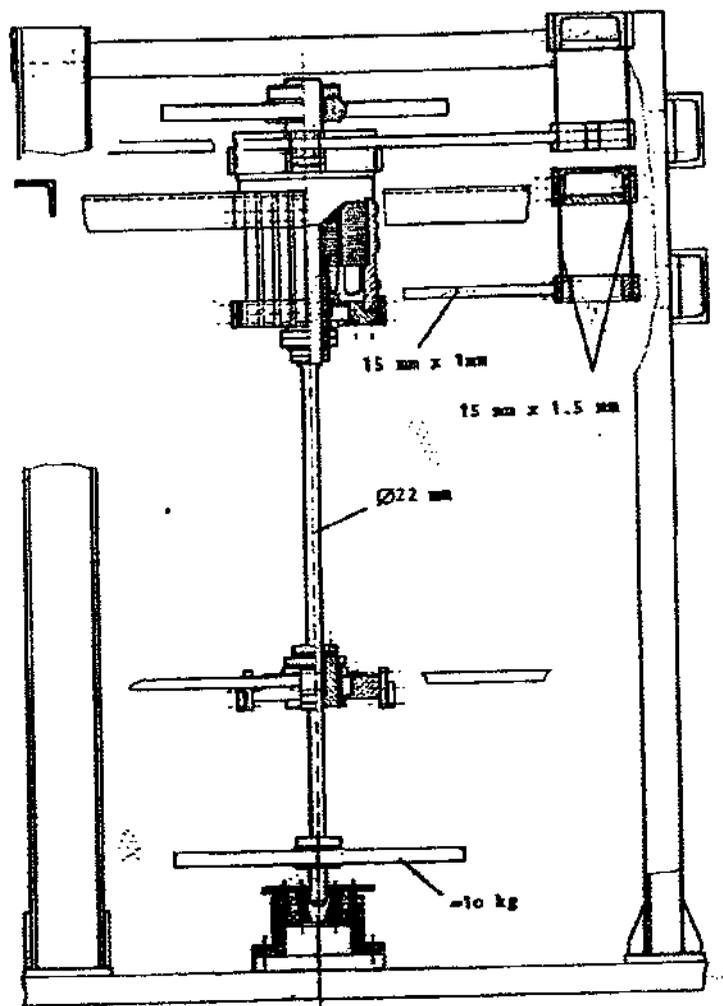


Figura 5.1: Bancada de ensaios - esquema geral com a bancada de rotação e sua estrutura.

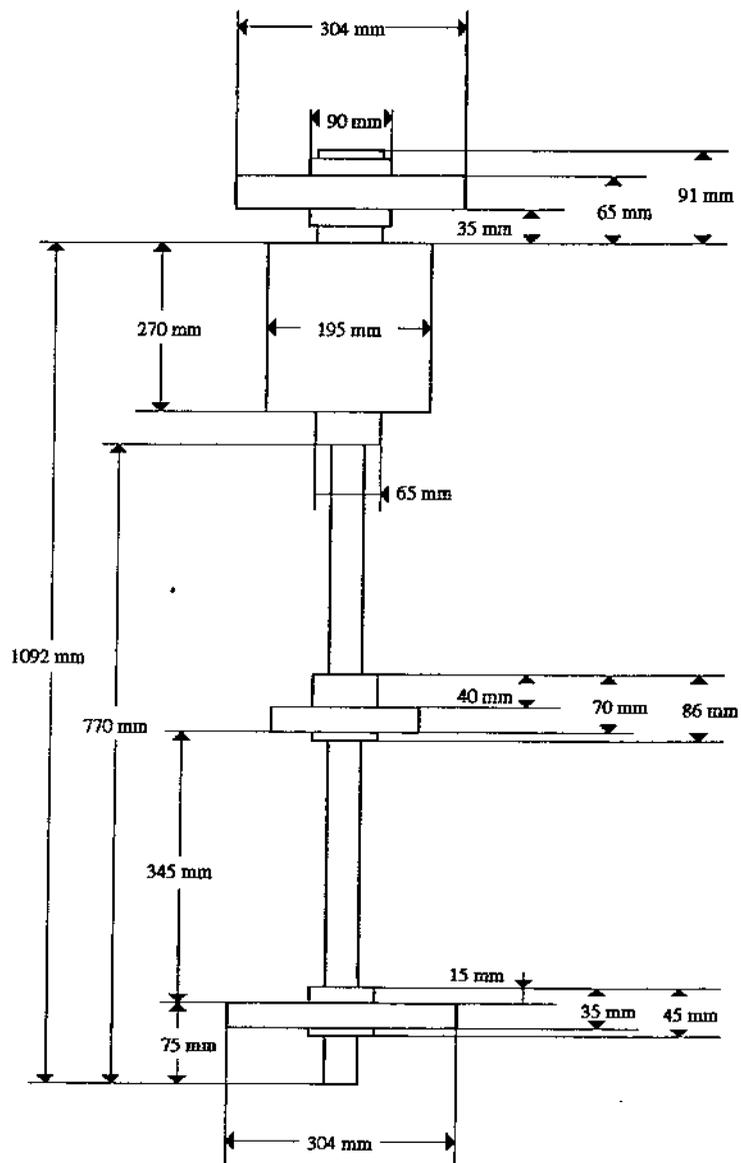


Figura 5.2: Dimensões do rotor, mancal de guia e sistema de acionamento.

Grupo	Elemento	Valor
Motor	Massa do estator	38,8 Kg
	Massa do rotor	10,2 Kg
	Momento de inércia do estator	$29,3 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
	Momento de inércia do rotor	$10,5 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
	Momento de inércia polar do rotor	$70,6 \times 10^{-4} \text{ Kg.m}^2$
Eixo	Massa específica	7800 Kg/m^3
	Módulo de Young	$2,067 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
	Diâmetro	20,0 mm
Disco superior	Massa	17,0 Kg
	Momento de inércia	$9,68 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
	momento de inércia polar	$19,1 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
Disco inferior	Massa	11,3 Kg
	Momento de inércia	$6,22 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
	momento de inércia polar	$12,3 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
Mancal Intermediário	Massa do suporte	4,99 Kg
	Massa rotativa	2,94 Kg
	Momento de inércia do suporte	$2,34 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
	Momento de inércia da parte rotativa	$2,51 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
	Momento de inércia polar	$9,81 \times 10^{-2} \text{ Kg.m}^2$
Mola 1 Superior	Massa das plataformas superiores	7,8 Kg
	Rigidez - direção x	$2,47 \times 10^5 \text{ N/m}$
	Rigidez - direção y	$3,16 \times 10^5 \text{ N/m}$
Mola 2 Superior	Rigidez - direção x	$2,94 \times 10^5 \text{ N/m}$
	Rigidez - direção y	$2,86 \times 10^5 \text{ N/m}$
Mola Mancal	Rigidez - direção x	$2,84 \times 10^5 \text{ N/m}$
	Rigidez - direção y	$2,91 \times 10^5 \text{ N/m}$

Tabela 5.1: Dados estruturais do rotor, mancal de guia e sistema de acionamento.

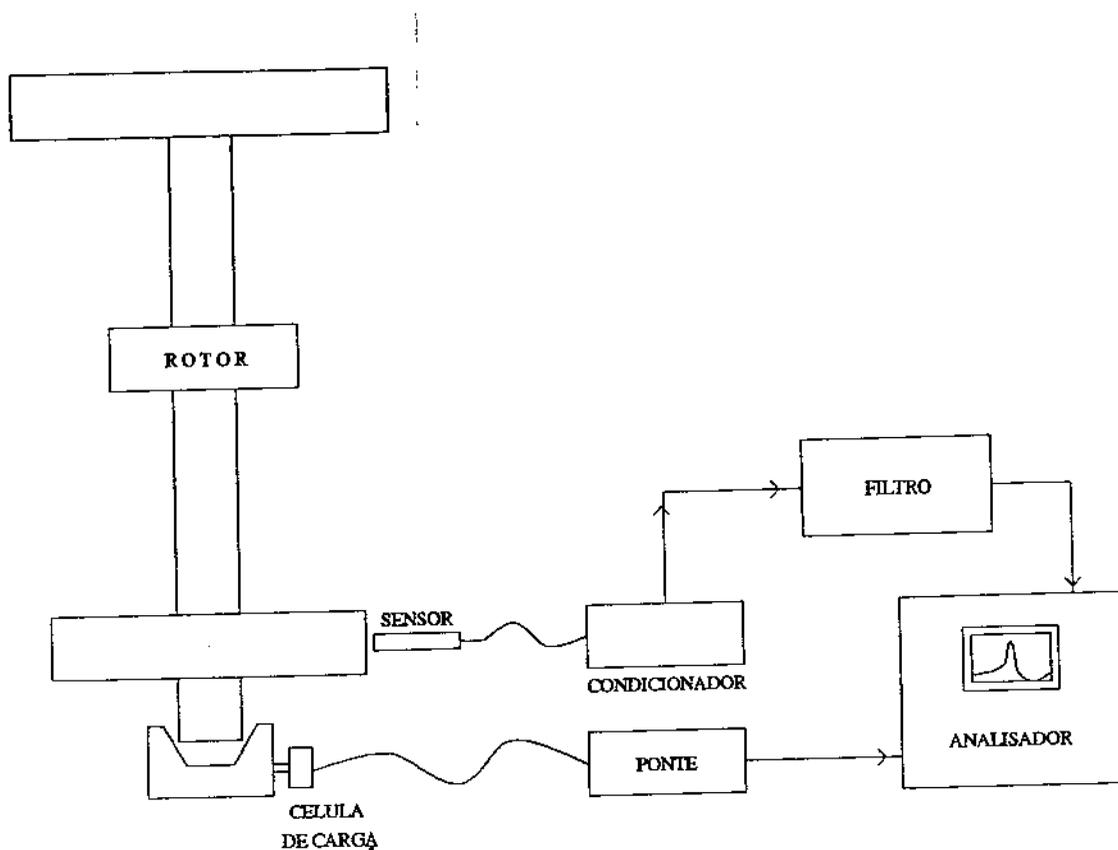


Figura 5.3: Esquema da montagem experimental utilizada na primeira etapa de medições.

verificação das condições de contato. Um esquema da montagem experimental utilizada nesta etapa está mostrada na figura 5.3.

Nesta montagem o deslocamento do disco foi medido por dois sensores de proximidade *eddy current* IWA/A 11 da *DORNIER* com faixa de medição linear de 0 a 5 mm e sensibilidade de 2V/mm. Os sinais provenientes do sensor são levados a um condicionador que realiza a sua amplificação para serem levados ao filtro.

A ponte amplificadora utilizada foi o modelo PR9330 da *PHILIPS* de quatro canais.

Os sinais provenientes das células de carga e dos condicionadores dos sensores de proximidades são levados a um filtro passa-baixas para que o mecanismo do contato pudesse ser observado sem a presença de frequências altas que implicam em órbitas difíceis de serem interpretadas. Para a filtragem foi utilizado um filtro variável de dois canais *KEMO - VBF/8* com modos de operação passa-altas, passa-baixas, passa-banda e rejeita-banda, frequência de corte de 0,01 Hz a 100 kHz.

Após filtragem os sinais são enviados a um analisador para observação dos mesmos, de seus espectros e das órbitas do disco inferior. O analisador de sinais utilizado foi o modelo SD380Z da *Scientific Atlanta* com quatro canais e saídas para vídeo, ploter e unidade de disco.

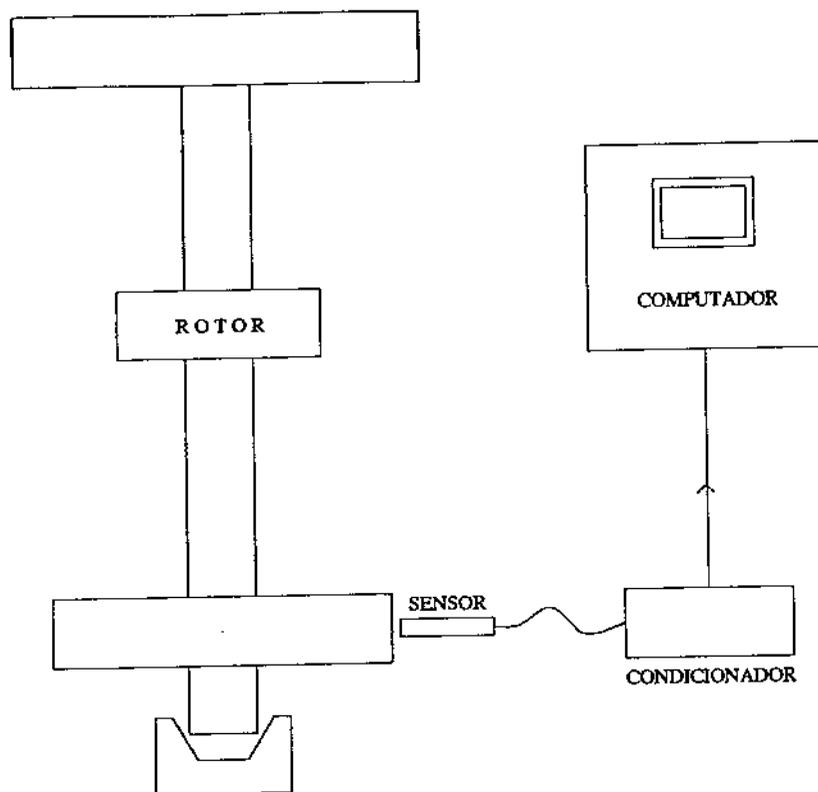


Figura 5.4: Esquema da montagem experimental utilizada na segunda etapa de medições.

5.4 Segunda Etapa

A segunda etapa experimental foi orientada para a obtenção de sinais que fossem úteis para a verificação da possibilidade de comportamento caótico no sistema. Desta maneira os sinais obtidos deveriam ser de longa duração e os mesmos deveriam ser adquiridos e convertidos para dados digitais a fim de serem utilizados como arquivos de dados para os programas de cálculo das características não-lineares dos mesmos. Para isto foi feita a aquisição direta somente do deslocamento medido do disco inferior. A figura 5.4 mostra um esquema da montagem experimental utilizada nesta etapa.

O sinal foi medido da mesma maneira que na primeira etapa, por meio dos mesmos dois sensores de proximidade. Após passar pelo condicionador, o sinal não foi filtrado indo diretamente para a placa do computador onde foi convertido de analógico para digital e gravado em disco. O controle da folga foi feito por meio de um sistema de elevação do mancal constituído de um sistema coroa-corrente-pinhão. Uma manivela manual acoplada ao pinhão permitia que o mesmo fosse girado com o conseqüente giro do mancal com uma relação de transmissão de 5:2. O mancal, com a sua parte externa rosqueada gira dentro de uma armação fixa, com rosca interna.

Como a guia interna do mancal é cônica, como mostra o esquema da figura 5.5, a cada volta da manivela, efetuada manualmente, o mancal se move verticalmente alterando

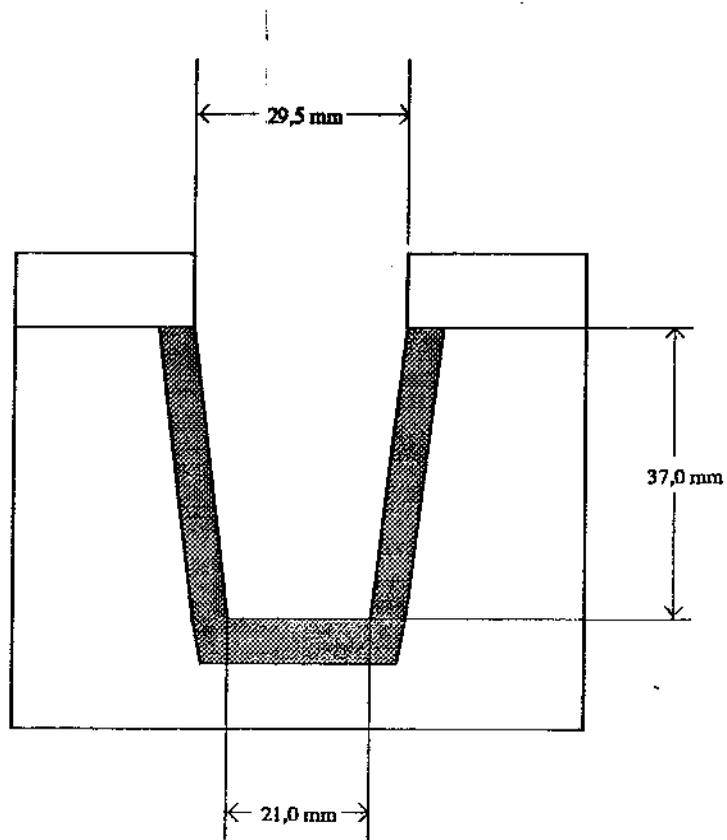


Figura 5.5: Esquema do mancal inferior destacando um corte da guia interna cônica e suas dimensões.

a distância entre sua guia interna e a extremidade do eixo.

Capítulo 6

Análise dos Sinais Experimentais

6.1 Introdução

A análise dos sinais experimentais começa com uma verificação dos conteúdos de frequência dos mesmos. Esta parte tem como finalidade a observação de características que possam ser relacionadas diretamente com as não linearidades introduzidas no sistema comparadas com o comportamento normal. Com o surgimento de fenômenos não explicados pela teoria linear foi necessária uma análise mais cuidadosa dos sinais com o auxílio de ferramentas utilizadas na análise não linear tais como a análise dos retratos de fase e os diagramas de Poincaré. As análises dos retratos de fase e diagramas de Poincaré apresentam limitações sérias que podem conduzir a conclusões equivocadas quando não aplicados adequadamente. Por este motivo é importante a utilização de outras ferramentas para proporcionar uma análise mais completa. Para isto são calculados os expoentes de Lyapunov para aqueles sinais que, a partir da análise das transformadas de Fourier e dos diagramas de Poincaré, existe suspeita de comportamento com características caóticas. Além dos expoentes de Lyapunov foram também calculadas dimensões fractais dos sinais experimentais. Para o cálculo dos expoentes e das dimensões fractais é necessário previamente a reconstrução do espaço de estado por meio do método das *delay coordinates*. Isto, por sua vez, requer o cálculo das chamadas variáveis de mergulho, a saber, dimensão de mergulho e *time delay*. Então, este capítulo apresenta a análise dos resultados de todos estes cálculos permitindo a análise global não linear dos sinais experimentais. Mais uma vez os sinais são obtidos de medições do deslocamento do disco inferior do rotor vertical descrito no capítulo 5 para diferentes posições do mancal inferior o que equivale a variar a folga nesta posição. Os sinais foram obtidos em quatro velocidades de rotação diferentes do rotor: 5,6 Hz, 7,4 Hz, 11,4 Hz e 16,5 Hz. Estas velocidades foram escolhidas por representarem o comportamento do rotor abaixo de 20 Hz região em que se concentram seis frequências naturais do conjunto (três em cada direção do movimento lateral). Desta maneira 5,6 Hz está bem abaixo das duas primeiras frequências naturais do rotor e do conjunto (são frequências naturais do disco inferior) e mostra um sinal com comportamento completamente linear, 7,4 Hz está abaixo da primeira frequência natural mas muito próxima dela, 11,4 Hz está acima da primeira e abaixo da segunda (que é uma frequência

natural associada ao movimento do motor colocado na extremidade superior do rotor), e 16,5 Hz está acima desta segunda e abaixo da terceira do conjunto (segunda do rotor). Os sinais provenientes destas medições serão então analisados a seguir.

6.2 Análise das Transformadas de Fourier

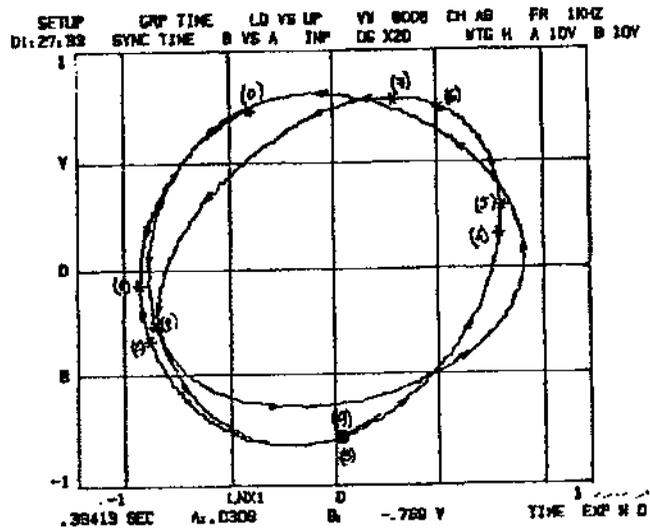
A análise das transformadas de Fourier dos sinais foram as primeiras realizadas e a partir delas foram feitas outras análises para buscar explicações sobre pontos obscuros que se apresentavam quando da tentativa de explicar o fenômeno.

Inicialmente, foram feitas algumas observações experimentais com o único objetivo de tomar um contato inicial com o fenômeno do *rubbing*, objeto inicial do estudo.

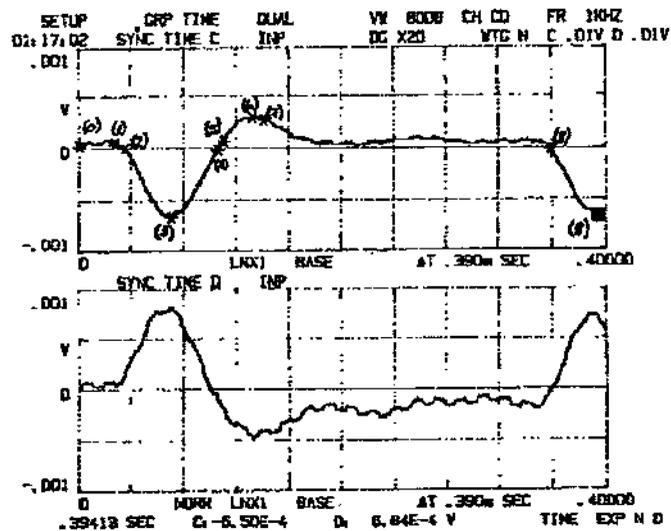
Um exemplo de uma órbita do disco inferior medida e da força atuante no mancal quando ocorre contato uma vez a cada duas voltas do rotor é mostrado na figura 6.1 para efeito ilustrativo.

Dentre os sinais observados alguns apresentaram um comportamento particularmente inesperado para o tipo de problema que estava sendo analisado. Este comportamento consistia em um crescimento de uma larga faixa de frequências quando o rotor passava a entrar em contato com o mancal. A figura 6.2 ilustra isto com bastante clareza. Nas figuras 6.2(a) são mostrados os espectros (nas direções x e y) do sinal do rotor girando com velocidade de rotação de 15,874 Hz com a sua extremidade inferior completamente livre. Já na figura 6.2(b) são apresentados os espectros do movimento do rotor com contato na extremidade inferior. Observando-se os dois espectros pode-se notar que ocorre um crescimento das amplitudes em uma larga faixa de frequência sem uma considerável modificação dos picos existentes. Estes espectros proporcionaram a primeira suspeita de comportamento caótico.

Como esta foi apenas uma observação esporádica decidiu-se, então, obter as transformadas de Fourier para uma variedade de sinais obtidos em velocidades de rotação diferentes e em condições diferentes de aproximação entre a extremidade do eixo e mancal inferior (folga). As velocidades de rotação escolhidas foram as enumeradas na introdução deste capítulo: 5,6 Hz, 7,4 Hz, 11,4 Hz e 16,5 Hz. Para estas velocidades foram feitas medições do deslocamento transversal do disco inferior para diferentes folgas partindo de uma posição de contato pleno entre rotor e mancal (folga nula) até a completa liberação da extremidade do rotor. Para cada velocidade de rotação e cada valor da folga foi medido o deslocamento do disco inferior em duas direções ortogonais. Girando a 5,6 Hz o comportamento apresentado foi exatamente linear com as transformadas de Fourier, correspondentes a duas direções ortogonais, chamadas x e y, apresentadas em cascata na figura 6.3. A cascata é formada pela justaposição dos diversos espectros obtidos com variação da folga. O primeiro espectro da sequência é obtido do sinal medido com folga nula (contato completo) e o último é obtido do sinal medido com a extremidade completamente livre, sem nenhum contato com o mancal inferior. Nesta figura pode-se ver que para a maior parte dos valores da folga a frequência predominante é a da rotação o que evidencia uma pequena influência da folga comparativamente à excitação síncrona,

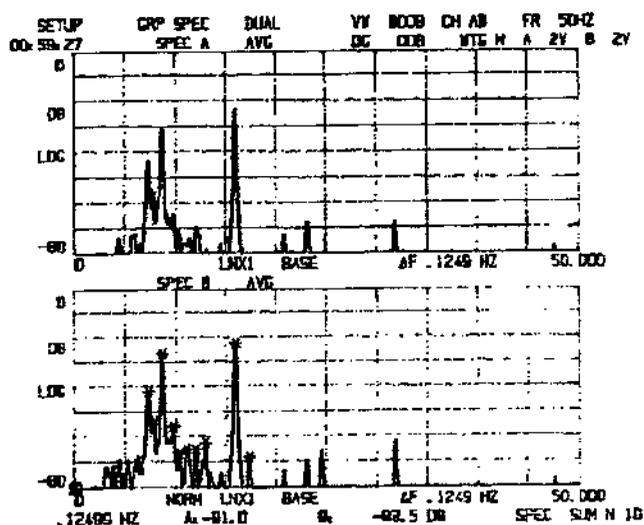


(a)

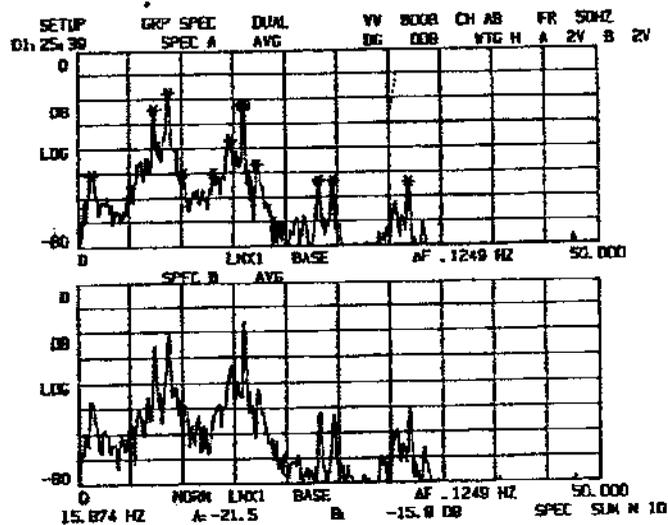


(b)

Figura 6.1: (a) Órbita medida no disco inferior quando o contato ocorre uma vez a cada duas voltas, com rotação; (b) forças medidas no mancal inferior quando foi medida a órbita.



(a)



(b)

Figura 6.2: Espectros dos sinais medidos nas direções x e y : (a) sem *rubbing*, (b) com *rubbing*.

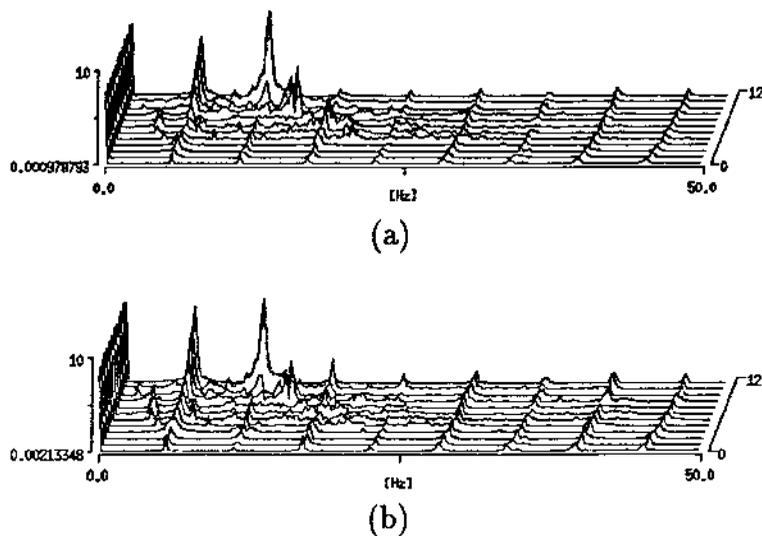


Figura 6.3: Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 5,6 Hz, para folgas (12 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 0,277 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y .

constituída de desbalanceamentos e desalinhamentos do rotor.

Nesta velocidade o comportamento dinâmico do rotor não apresentou instabilidades fortes. As transformadas de Fourier não apresentam evidências de caos mas, por outro lado, existem características que podem ser analisadas pela observação destas mesmas transformadas. Na figura 6.4 são mostrados algumas transformadas individuais que permitem visualizar com maior clareza as características do fenômeno no domínio da frequência. A figura 6.4 (a) mostra as transformadas nas direções x e y do sinal obtido com o rotor com a extremidade inferior completamente presa enquanto que a figura 6.4 (b) apresenta as transformadas do sinal obtido com o rotor solto. Ao se fazer crescer a folga, inicialmente não acontecem mudanças expressivas nas transformadas pois a extremidade do rotor permanece em contato com a guia interna do mancal durante todo o movimento. Quando a folga atinge o valor de 0,184 mm começam a surgir frequências não diretamente relacionadas com a frequência excitadora. Isto está associado ao começo da migração da primeira frequência natural do rotor que, quando o mesmo está em contato com o mancal é de 8,375 Hz na direção x e 8,625 Hz na direção y e, quando o mesmo está solto é de 21,25 Hz na direção x e 21,50 Hz na direção y . Esta migração traz consigo algumas frequências sub-harmônicas que são excitadas pela frequência síncrona com a rotação. As figuras 6.5 (a), (b), e (c) (folgas 0,184 mm, 0,230 mm e 0,277 mm) mostram a passagem desta frequência migrante pela segunda harmônica da frequência de rotação. Na figura 6.6 (a), (b) e (c) (folgas 0,368 mm, 0,414 mm e 0,459 mm) esta frequência migrante está passando por uma região onde além da proximidade da primeira harmônica da frequência de rotação existe a frequência natural do conjunto formado pelo motor de acionamento e

as molas que o ligam à estrutura.

A seguir são analisados os sinais obtidos com uma velocidade de rotação de 7,4 Hz. Na figura 6.7 são vistas as transformadas de Fourier destes sinais reunidas em cascata. Nesta figura também se pode observar a migração da primeira frequência natural. Este fenômeno, verificado também nas outras velocidades de rotação, consiste na evolução da primeira frequência natural do rotor (não está incluída a frequência natural do motor) quando cresce a folga na extremidade inferior. Quando o rotor está com a extremidade presa, só sendo permitida a sua rotação, a primeira frequência natural está em 21,25 Hz (x)/ 21,50 Hz (y). Quando o rotor é progressivamente solto a frequência natural vai evoluindo para a primeira frequência natural do rotor com a extremidade inferior solta.

Na figura 6.7 pode-se observar que uma instabilidade maior começa a surgir quando a frequência migrante se aproxima da frequência de rotação. Isto acontece com c entre 0,620 mm e 0,781 mm. Esta instabilidade também aparece na primeira harmônica da rotação que cresce no mesmo intervalo o que faz crescer a suspeita de que um mecanismo não linear seja o responsável por este efeito. A transformadas de Fourier (x e y) de um dos sinais pertencentes a este grupo é mostrada na figura 6.8(b) com um leve, quase imperceptível quando observado graficamente, crescimento das amplitudes correspondentes às frequência próximas à frequência síncrona quando se compara com as transformadas dos sinais (x e y) obtido com o rotor girando com a extremidade inferior livre, mostrado na figura 6.8(a).

Nas figuras 6.8 e 6.9 também é possível a observação de frequências inferiores à frequência síncrona, evidenciadas com maior clareza na figura 6.9(a), que apresentam uma evolução semelhante à da frequência natural migrante. Nesta figura também é possível observar um crescimento das amplitudes em frequências próximas à primeira harmônica.

A figura 6.9(b) mostra uma transformada correspondente a um sinal medido com folga muito grande em que é possível observar um leve crescimento das amplitudes de frequências próximas à frequência síncrona. Este também é um sinal que deve ser investigado com maior rigor.

Girando com uma velocidade de rotação de 11,4 Hz o rotor apresentou as situações mais críticas uma vez que a frequência migrante cruza com a frequência de rotação e, além disso, a frequência de rotação já está próxima de uma frequência natural do motor. Esta *dupla ressonância* criou a situação mais formidável das que foram encontradas em todos os sinais medidos. A figura 6.10 mostra uma região (com c entre 0,414 mm e 0,597 mm) com o crescimento de amplitudes em uma larga faixa de frequências que se estende além da primeira harmônica. Este grupo de sinais apresenta uma forte evidência de comportamento não linear que deverá ser investigado mais adiante.

A figura 6.11(a) mostra a transformada de Fourier do sinal medido com a extremidade inferior livre com o rotor girando com 11,4 Hz. Na figura 6.11(b) é mostrada a transformada do sinal que apresenta amplitudes elevadas em uma larga faixa de frequências, correspondente a $c = 0,574$ mm. Na figura 6.11(c) estão mais claras as frequências excitadas abaixo da frequência de rotação que se comportam com a mesma evolução da frequência natural migrante.

O rotor girando com velocidade de rotação de 16,5 Hz mostrou a mesma migração

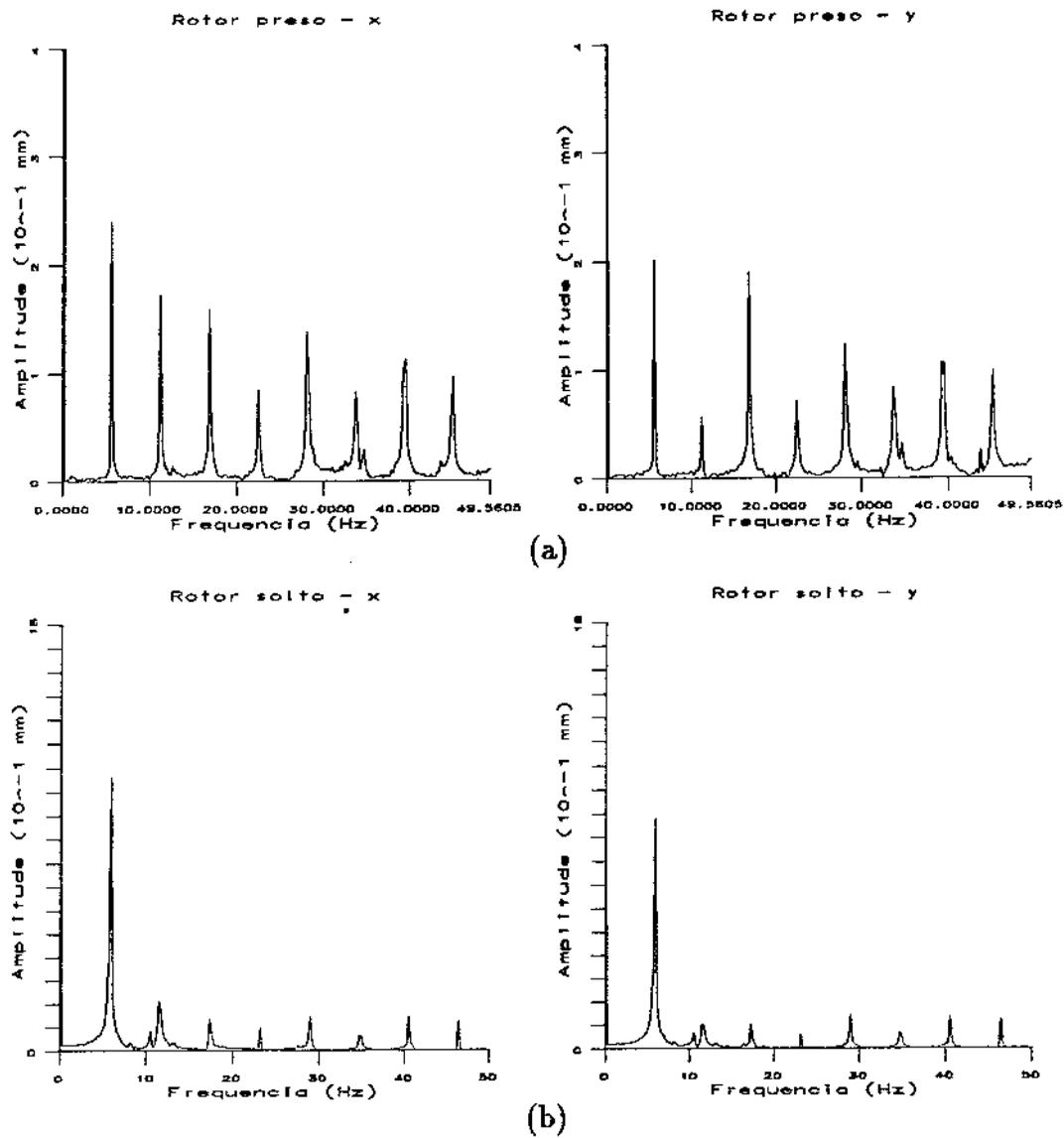


Figura 6.4: Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 5,6 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor em contato permanente com o mancal; (b) com a extremidade inferior do rotor livre.

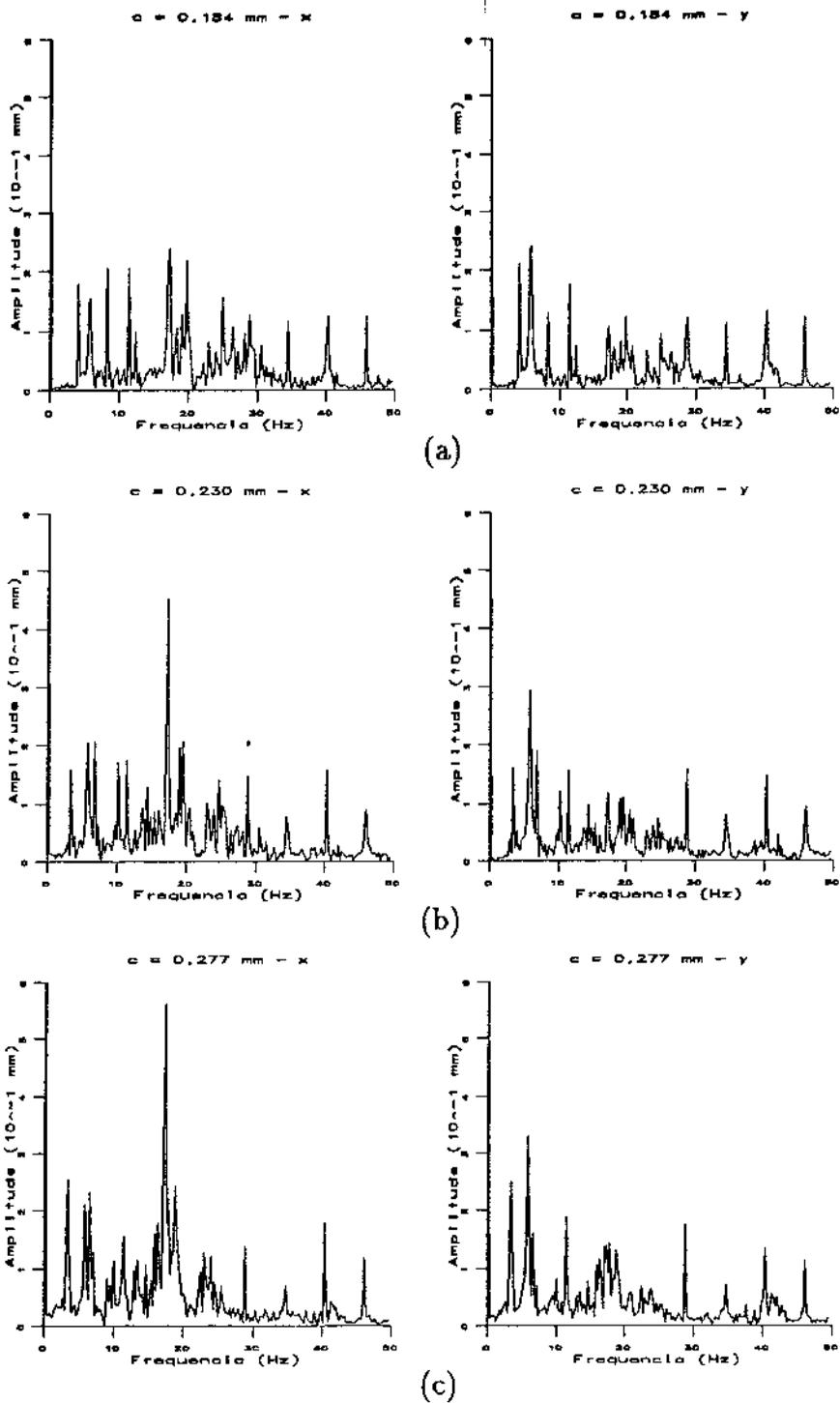


Figura 6.5: Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação igual a 5,6 Hz - (a) com folga de 0,184 mm; (b) com folga de 0,230 mm; (c) com folga de 0,277 mm.

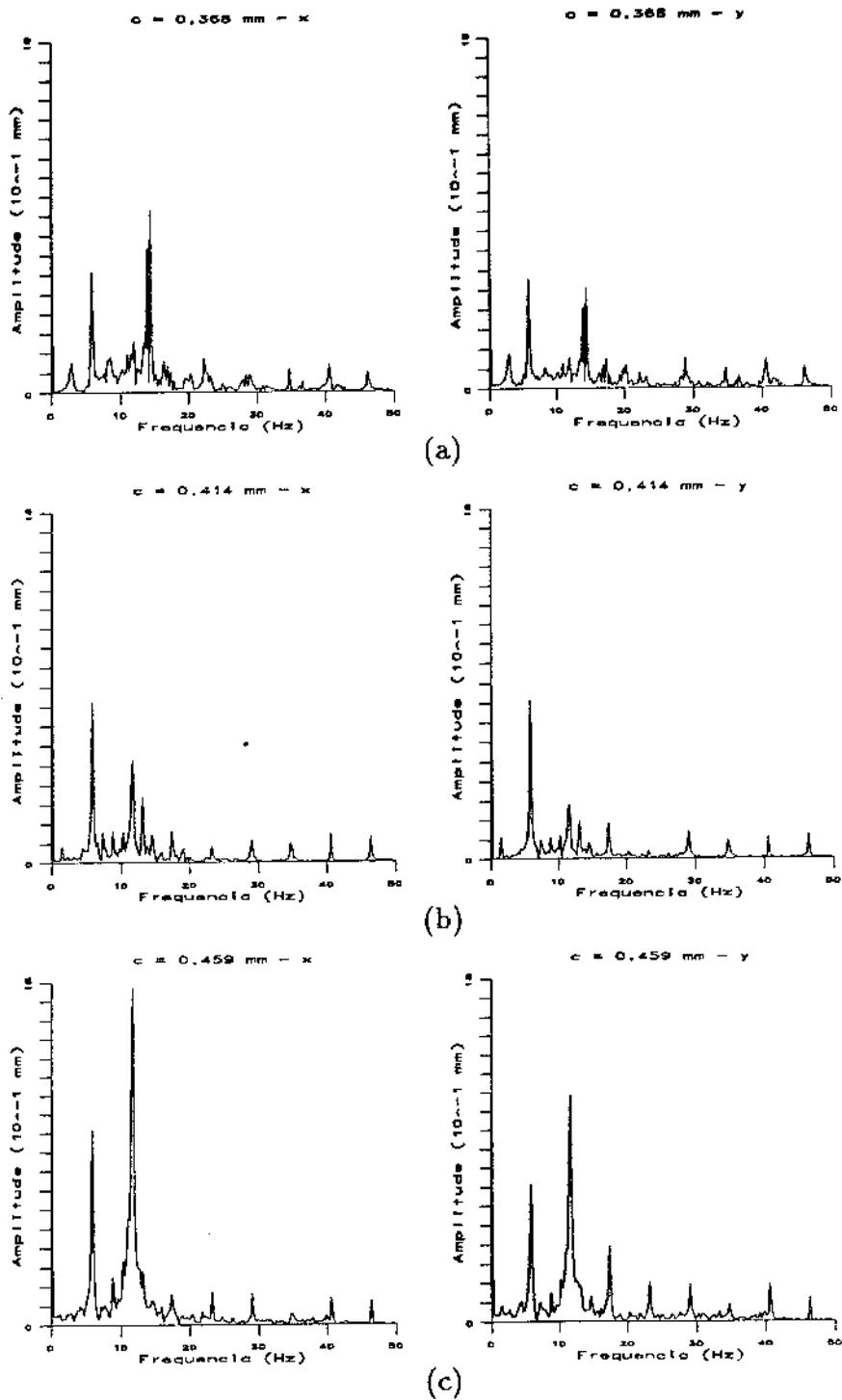


Figura 6.6: Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação igual a 5,6 Hz - (a) com folga de 0,368 mm; (b) com folga de 0,414 mm; (c) com folga de 0,459 mm.

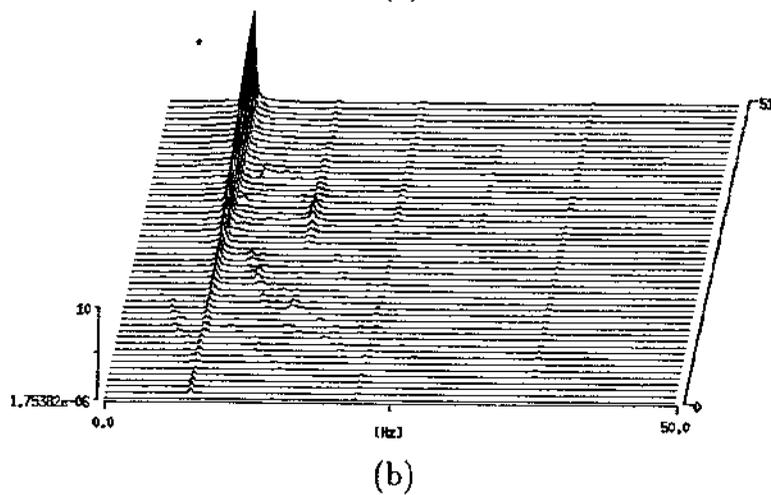
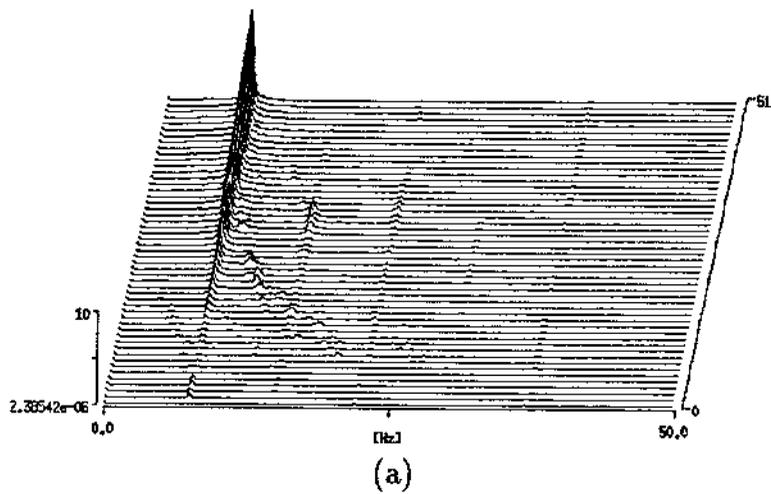


Figura 6.7: Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 7,4 Hz, para folgas (51 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 1,149 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y .

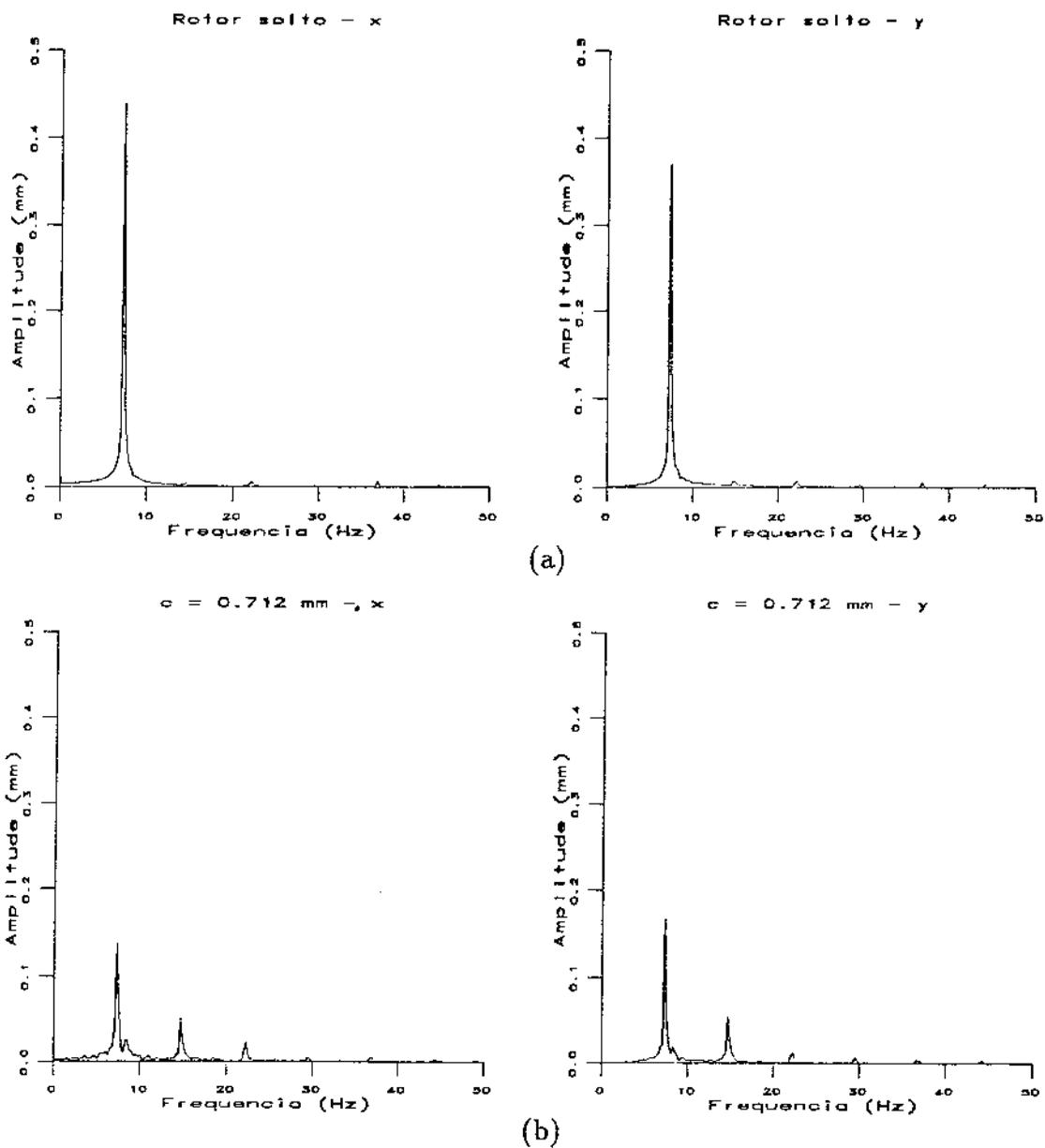
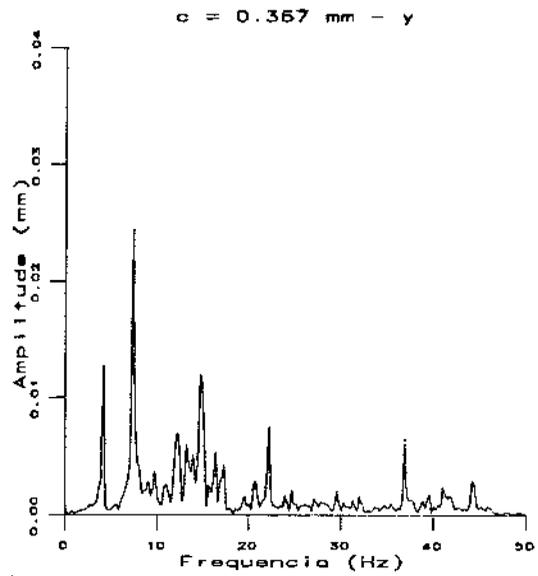
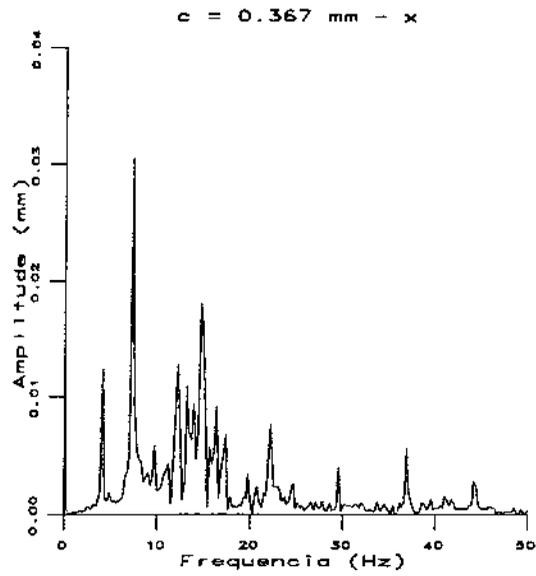
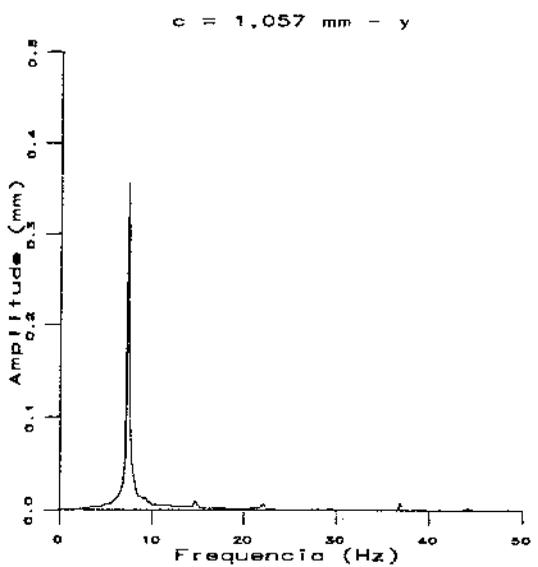
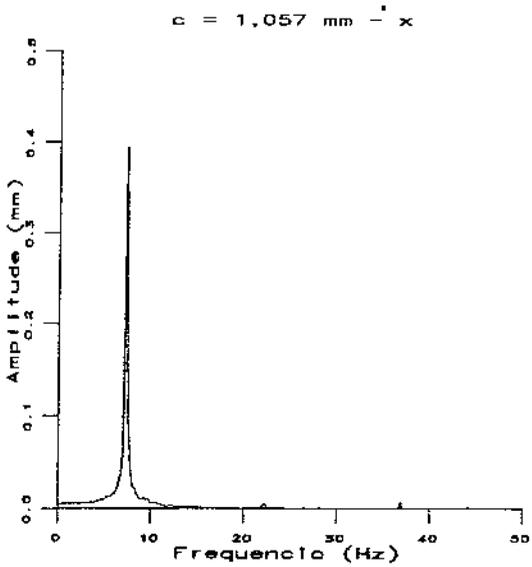


Figura 6.8: Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 7,4 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor livre; (b) com folga de 0,712 mm.

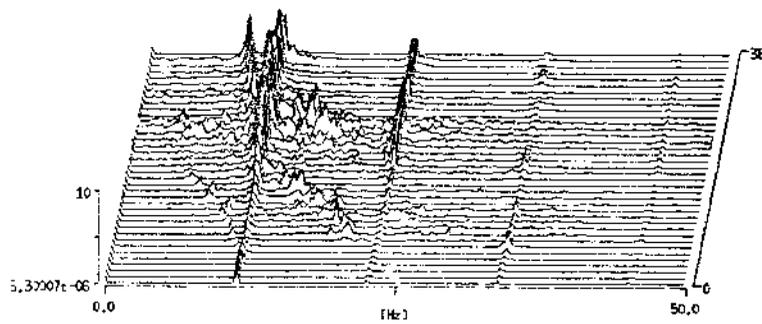


(a)

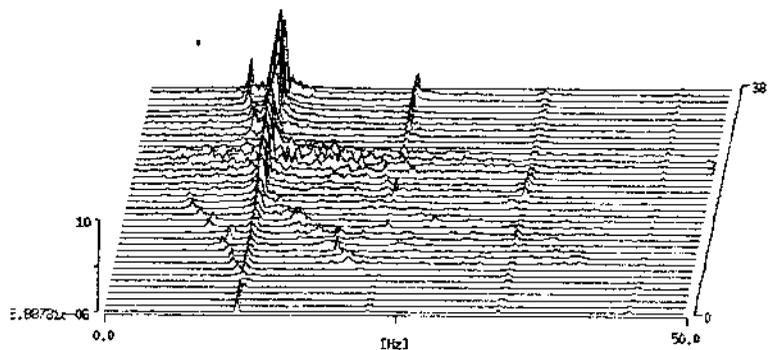


(b)

Figura 6.9: Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 7,4 Hz - (a) com folga de 0,367 mm; (b) com folga de 1,057 mm.



(a)



(b)

Figura 6.10: Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 11,4 Hz, para folgas (51 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 0,850 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y .

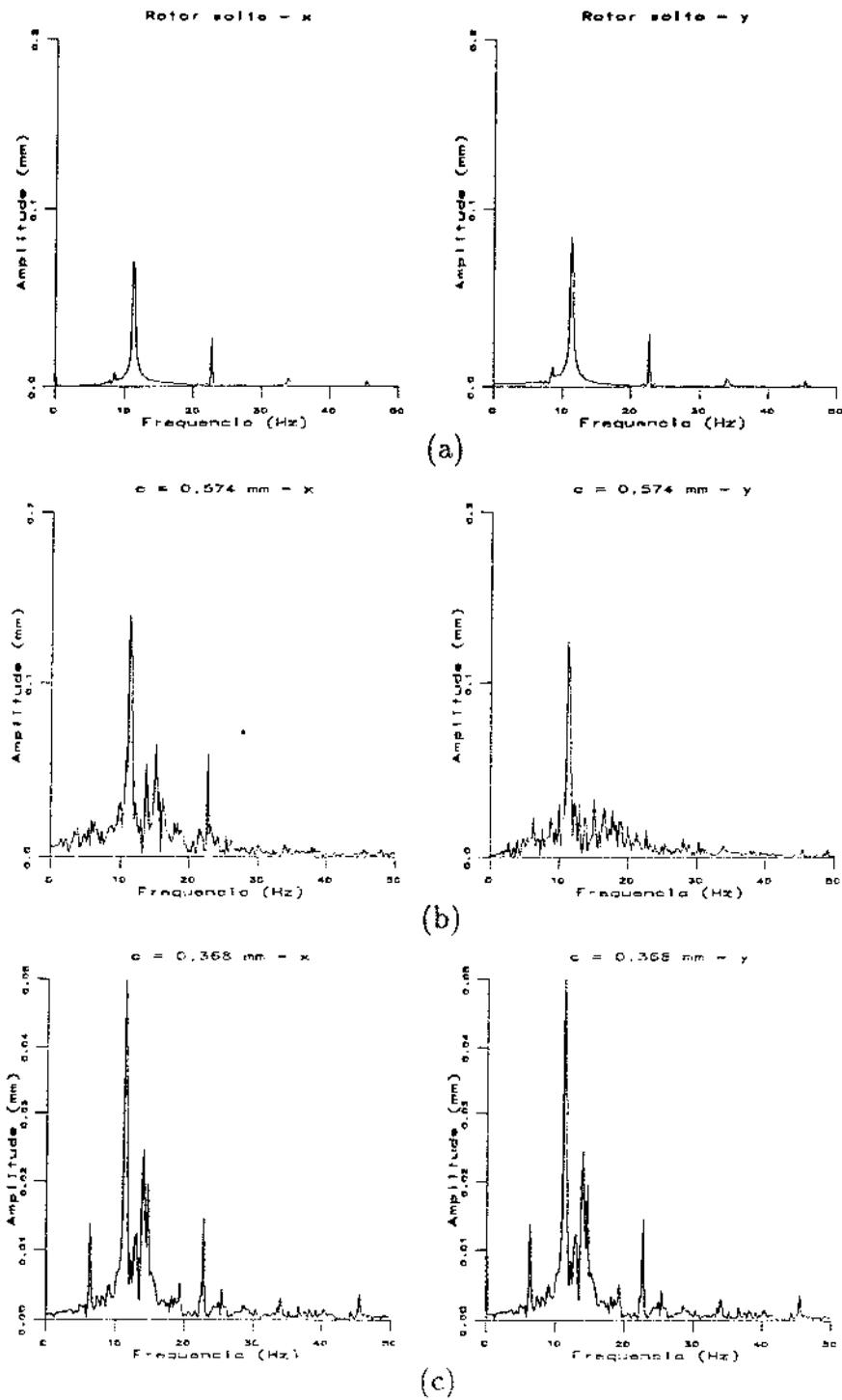


Figura 6.11: Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 11,4 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor livre; (b) com folga de 0,574 mm; (c) com folga de 0,368 mm.

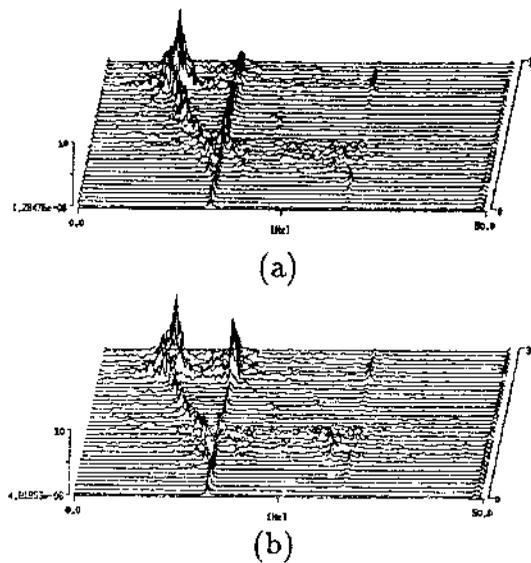


Figura 6.12: Transformadas de Fourier dos sinais medidos com velocidade de rotação 16,5 Hz, para folgas (35 valores) variando entre 0 (contato pleno) e 0,781 mm (sem contato); (a) direção x ; (b) direção y .

da frequência natural. As situações mais críticas, como mostra a figura 6.12, ocorrem no cruzamento da frequência natural com a frequência de rotação e quando a frequência natural migrante atinge a metade da frequência de rotação. Neste último caso ocorre um típico exemplo de excitação sub-harmônica, típica deste tipo de problema [58].

A figura 6.13(a) apresenta a transformada de Fourier do sinal obtido com a extremidade inferior do rotor livre enquanto as figuras 6.13(b) e 6.13(c) contém as transformadas dos sinais correspondentes a $c = 0,345$ mm e $c = 0,643$ mm.

As transformadas de Fourier são instrumentos de extrema utilidade em identificar características lineares dos sinais obtidos experimentalmente. Elas, entretanto, algumas vezes não apresentam uma resposta definitiva quando o sinal tem características fortemente não lineares. O crescimento das amplitudes em uma larga faixa de frequências tem estado associado a uma série de causas, dentre elas a possibilidade de existência de comportamento caótico. Este tipo de comportamento é que vai ser investigado a seguir para os sinais cujas transformadas apresentarem alguma evidência.

6.3 Parâmetros de Mergulho

Antes de se calcular analisar as características não lineares dos sinais medidos é necessário garantir uma boa reconstrução do espaço de estado o que se consegue com uma boa escolha dos parâmetros de mergulho. Nesta seção serão apresentados os resultados dos cálculos do *time delay* e da dimensão de mergulho através dos métodos descritos na seção 4.2

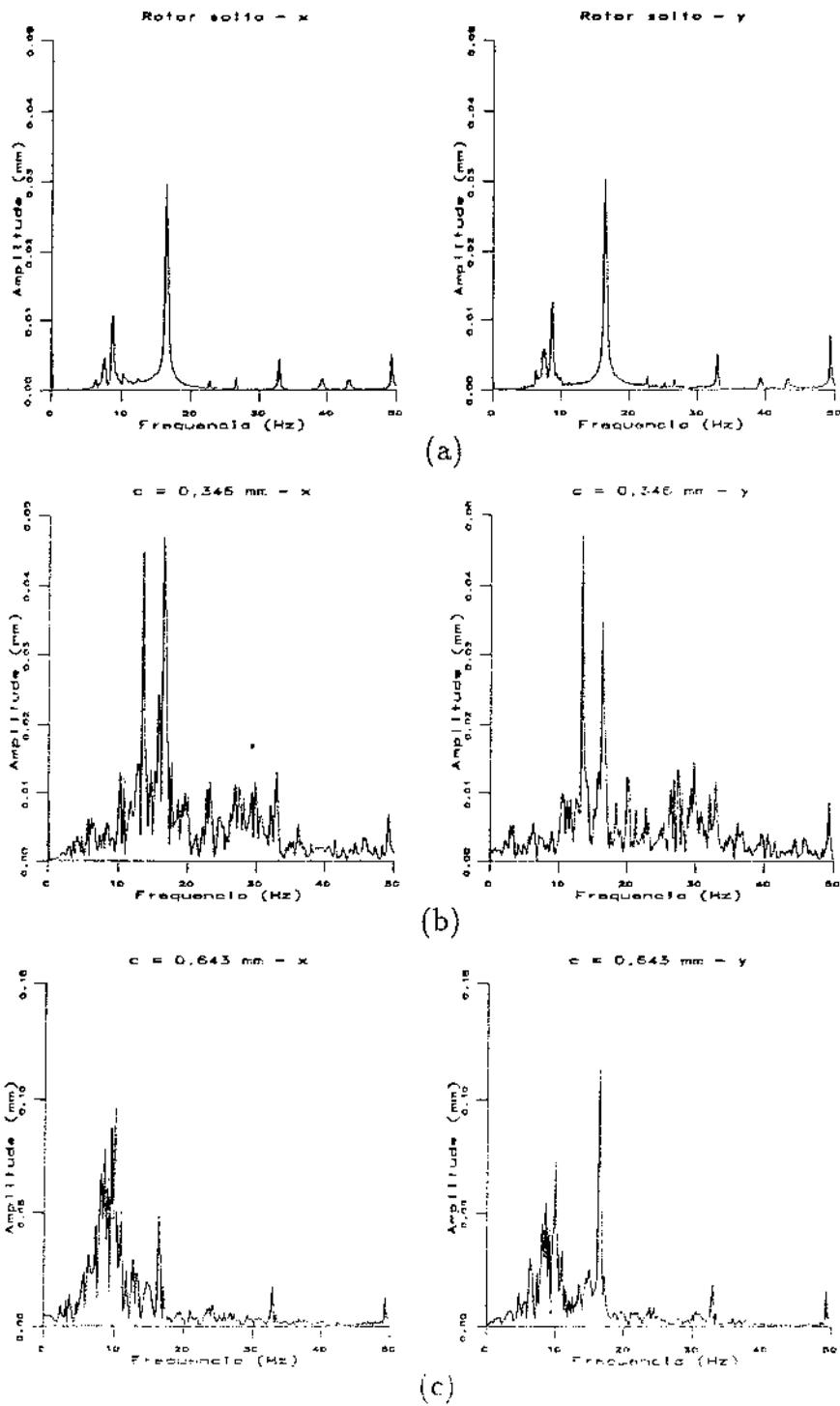


Figura 6.13: Transformadas de Fourier dos sinais medidos nas direções x e y com velocidade de rotação 16,5 Hz - (a) com a extremidade inferior do rotor livre; (b) com folga de 0,346 mm; (c) com folga de 0,643 mm.

6.3.1 Determinação do *time delay*

Para calcular o *time delay* o método amplamente utilizado na literatura e também utilizado aqui é o da Informação Mútua Média (também chamada de *redundância*) que foi apresentado na seção 4.2.1. O problema a ser resolvido aqui é obter o primeiro mínimo da curva da informação mútua média em função do *time delay* para cada sinal medido. Na maioria dos casos a identificação é fácil permitindo uma precisa determinação do *time delay*. Entretanto, para sinais cuja magnitude é pequena em relação ao seu nível de ruído as curvas se deterioram não apresentando um primeiro mínimo claro. Por outro lado também existe uma relação entre o tamanho da série e a dimensão de mergulho. Para os sinais medidos (90000 pontos) observou-se que um bom cálculo da informação mútua média não deve ser efetuado para dimensões superiores a 3. Em tal caso a curva apresenta uma região plana de mínimo onde é também difícil identificar um mínimo bem determinado.

Os *time delays* para os cálculos dos expoentes de Lyapunov estão apresentados nas figuras 6.14, 6.14, 6.16, 6.17 e 6.18 para aqueles grupos de sinais com possibilidade de caos com velocidades de rotação iguais a 7,4 Hz, 11,4 Hz e 16,5 Hz. Nestas figuras podem ser identificadas as dificuldades relacionadas acima.

Os *time delays* utilizados para as reconstruções realizadas estão mostrados na tabela 6.1.

Uma outra maneira de determinar o *time delay* é através do método da validação cruzada apresentado na seção 3.2.1. Os *time delay* obtidos por este método apresentaram-se caracteristicamente muito pequenos. A Tabela 6.2 mostra os *time delays* calculados para os mesmos sinais selecionados para serem investigados. Deve-se ressaltar que o método da validação cruzada não foi apresentado com o objetivo de determinar o *time delay* e sim a dimensão de mergulho. O que foi feito aqui foi utilizar o mesmo critério de seleção utilizado para a escolha da dimensão de mergulho (validação cruzada) para escolher o *time delay*.

Os valores apresentados na tabela 6.2 mostram que em alguns sinais a tendência é do método estimar um valor muito baixo para o *time delay*. Outra observação é que ocorre em alguns casos uma variação muito grande do *time delay estimado* para atratores com comportamento muito semelhante quando observadas as suas transformadas de Fourier e seus diagramas de Poincaré (caso, por exemplo, do sinal obtido com rotação 7,4 Hz e folga 0,666 mm, para o qual o *time delay estimado* é 2, e o sinal obtido com a mesma rotação mas com folga 0,689 mm, com *time delay estimado* em 15). Lembrando sempre que o método foi originalmente apresentado para estimar a dimensão de mergulho, esta tentativa de utilizá-lo para determinar o *time delay* não apresentou resultados conclusivos. A decisão com relação à escolha do *time delay* ficará exclusivamente por conta do método da Informação Mútua Média.

6.3.2 Determinação da dimensão de mergulho

Uma boa estimativa da dimensão de mergulho é também decisiva na qualidade dos resultados quando se calculam os expoentes de Lyapunov. Uma primeira forma de estimar a

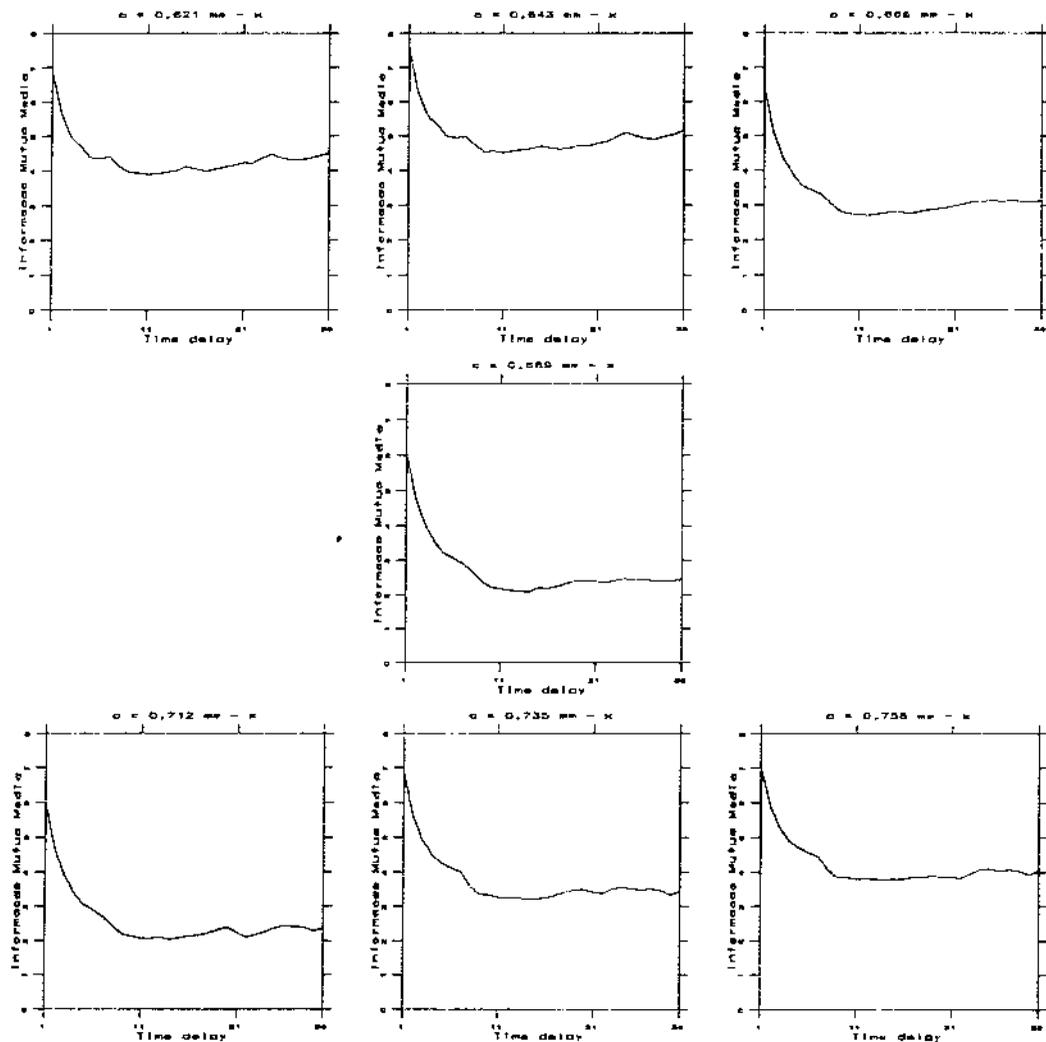


Figura 6.14: Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz com folgas entre 0,621 mm e 0,758 mm.

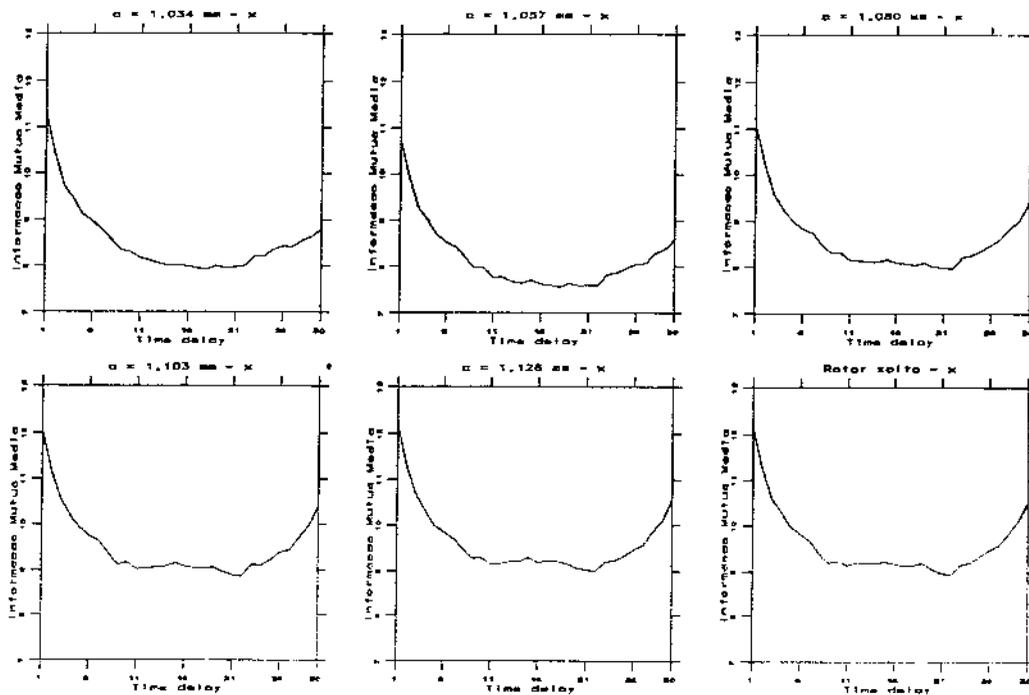


Figura 6.15: Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz com folgas entre 1,034 mm e 1,149 mm (sem contato).

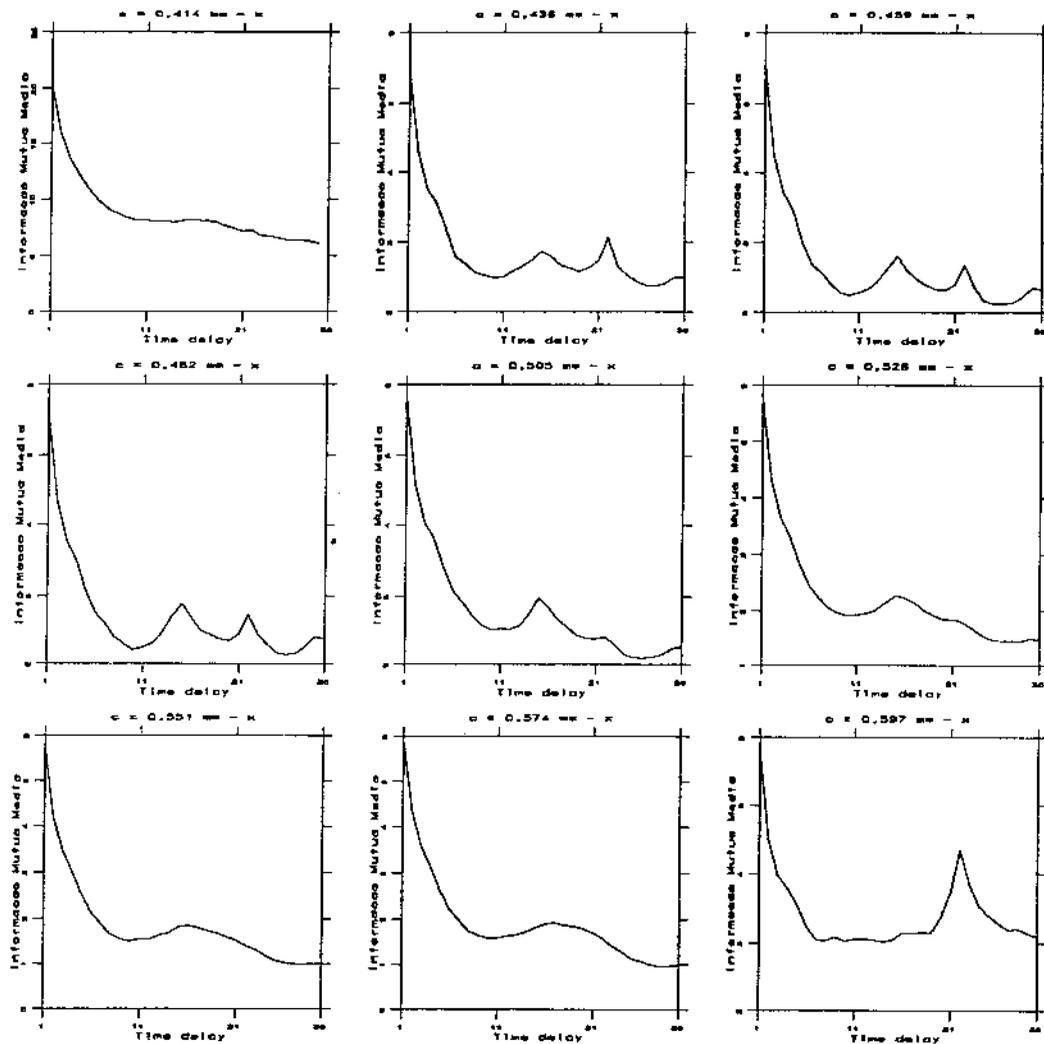


Figura 6.16: Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 11,4 Hz com folgas entre 0,414 mm e 0,597 mm.

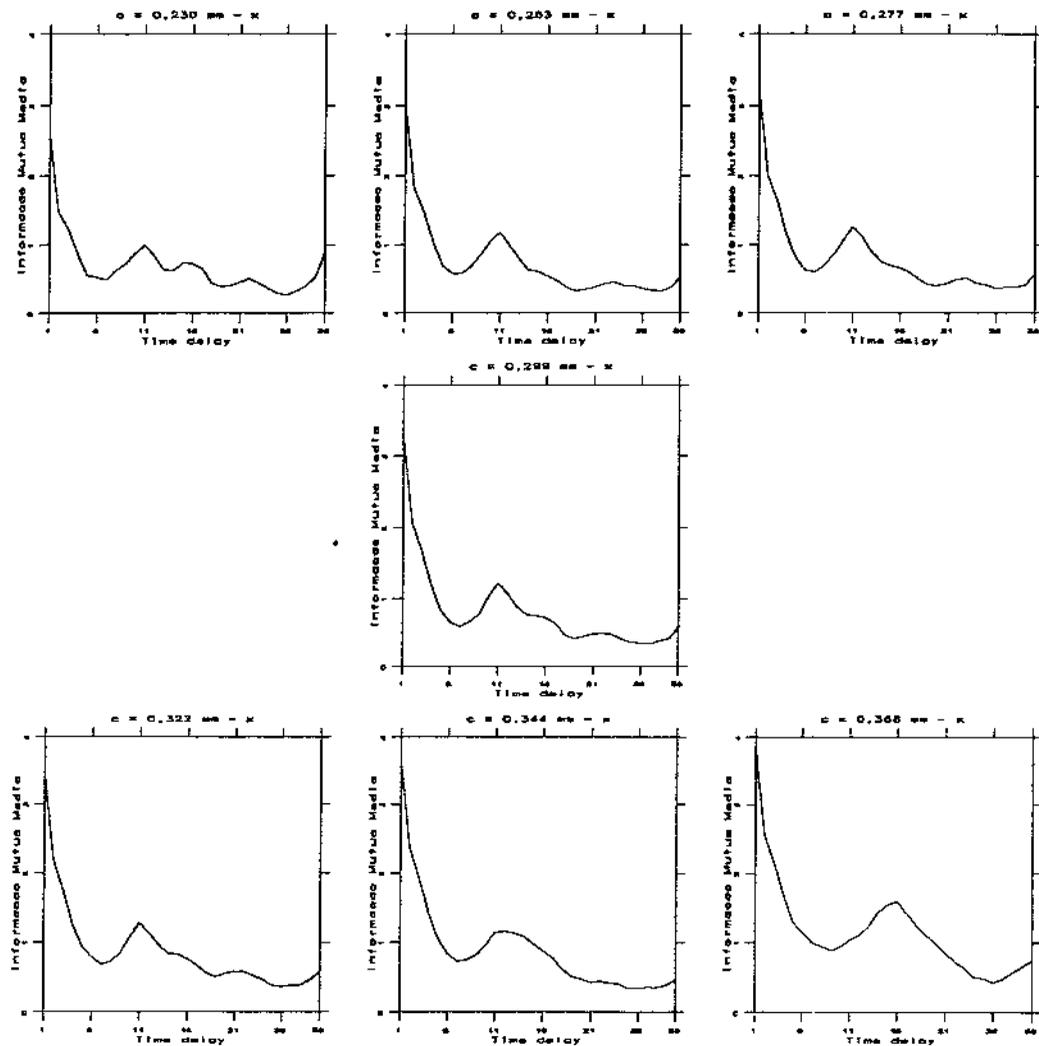


Figura 6.17: Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz com folgas entre 0,230 mm e 0,368 mm.

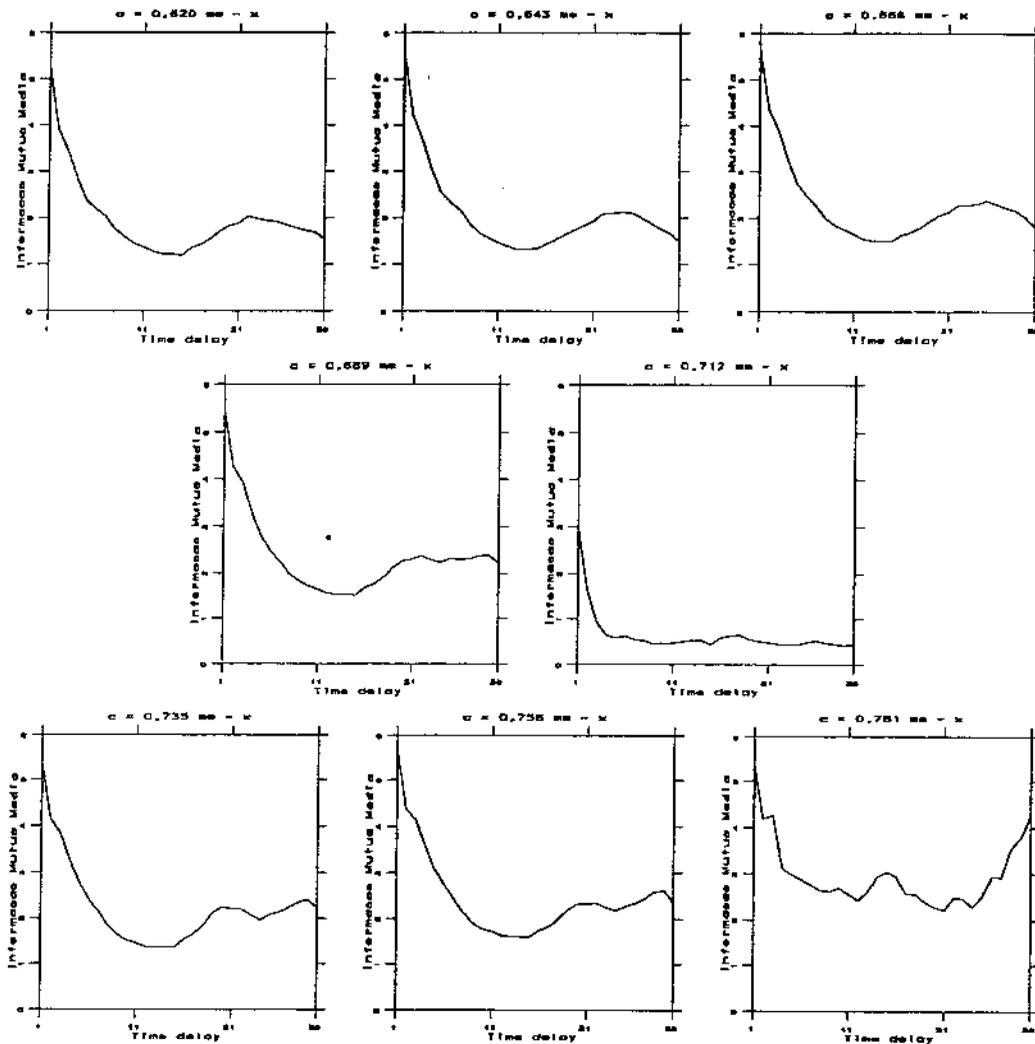


Figura 6.18: Curvas da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz com folgas entre 0,620 mm e 0,781 mm.

folga(mm)	<i>Time delay</i>		
	7,4 Hz	11,4 Hz	16,5 Hz
0,230	-	-	7
0,253	-	-	7
0,277	-	-	7
0,299	-	-	7
0,322	-	-	7
0,345	-	-	7
0,368	-	-	7
0,414	-	14	-
0,463	-	10	-
0,459	-	10	-
0,482	-	10	-
0,505	-	10	-
0,528	-	10	-
0,551	-	10	-
0,574	-	10	-
0,597	-	8	-
0,620	11	-	15
0,643	11	-	15
0,666	11	-	15
0,689	13	-	15
0,712	14	-	15
0,735	14	-	15
0,758	11	-	15
0,781	-	-	12
1,034	18	-	-
1,057	18	-	-
1,080	18	-	-
1,103	16	-	-
1,126	16	-	-
1,149	17	-	-

Tabela 6.1: Time delays calculados pelo método da Informação Mútua Média para sinais medidos na direção x .

folga(mm)	<i>Time delay</i>		
	7,4 Hz	11,4 Hz	16,5 Hz
0,230	-	-	2
0,253	-	-	2
0,277	-	-	2
0,299	-	-	2
0,322	-	-	3
0,345	-	-	3
0,368	-	-	5
0,414	-	17	-
0,463	-	2	-
0,459	-	2	-
0,482	-	2	-
0,505	-	1	-
0,528	-	2	-
0,551	-	2	-
0,574	-	2	-
0,597	-	2	-
0,620	2	-	2
0,643	11	-	2
0,666	2	-	2
0,689	15	-	2
0,712	15	-	2
0,735	22	-	2
0,758	4	-	2
0,781	-	-	2
1,034	2	-	-
1,057	2	-	-
1,080	2	-	-
1,103	16	-	-
1,126	2	-	-
1,149	16	-	-

Tabela 6.2: Time delays calculados pelo método da validação cruzada para sinais medidos na direção x .

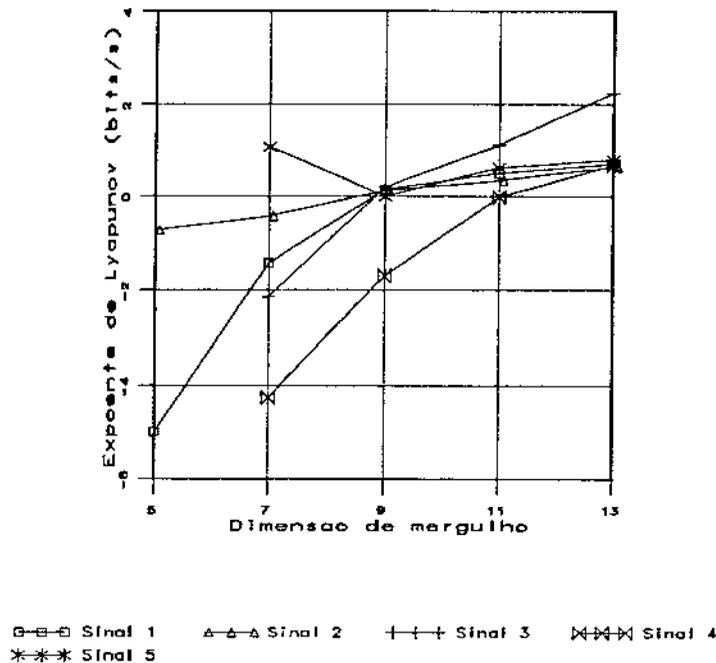


Figura 6.19: Dimensões de mergulho calculadas com o critério da saturação do expoente de Lyapunov dominante para os sinais medidos na direção x com as seguintes velocidades de rotação e folgas: sinal 1 - $\Omega = 7,4$ Hz e $c = 0,689$ mm; sinal 2 - $\Omega = 7,4$ Hz e $c = 1,034$ mm; sinal 3 - $\Omega = 11,4$ Hz e $c = 0,574$ mm; sinal 4 - $\Omega = 16,5$ Hz e $c = 0,345$ mm; sinal 5 - $\Omega = 16,5$ Hz e extremidade inferior do rotor livre.

dimensão de mergulho é calcular o maior expoente de Lyapunov para diversas dimensões e verificar quando o mesmo atinge uma estacionaridade. Este critério, apesar de eficiente, pode representar um alto custo computacional uma vez que o número de expoentes calculado é maior do que o necessário. Por outro lado existe também a possibilidade que a convergência ocorra em dimensões muito altas, principalmente para sinais com nível de ruído alto.

A figura 6.19 mostra os expoentes de Lyapunov dominantes calculados para os cinco sinais selecionados onde se pode ver que a convergência ocorre para altas dimensões pois o ruído presente predomina nas altas dimensões.

Um outro critério para a escolha da dimensão de mergulho é o dos falsos vizinhos, apresentado na seção 3.2.1. As dimensões de mergulho calculadas por este critério estão mostradas na tabela 6.3 para os mesmos sinais escolhidos anteriormente.

Em alguns casos, não diretamente associados a um nível excessivo de ruído ou a um sinal de duração muito curta o critério pode falhar. O critério de escolha da dimensão de mergulho é o da escolha da dimensão para a qual o número de falsos vizinhos cai a

folga(mm)	<i>Dimensão de mergulho</i>		
	7,4 Hz	11,4 Hz	16,5 Hz
0,230	-	-	7
0,253	-	-	8
0,277	-	-	7
0,299	-	-	8
0,322	-	-	10
0,345	-	-	10
0,368	-	-	10
0,414	-	5	-
0,463	-	5	-
0,459	-	5	-
0,482	-	5	-
0,505	-	5	-
0,528	-	6	-
0,551	-	7	-
0,574	-	7	-
0,597	-	5	-
0,620	5	-	9
0,643	5	-	7
0,666	5	-	6
0,689	5	-	6
0,712	5	-	5
0,735	5	-	5
0,758	5	-	5
0,781	-	-	7
1,034	5	-	-
1,057	5	-	-
1,080	5	-	-
1,103	6	-	-
1,126	6	-	-
1,149	6	-	-

Tabela 6.3: Dimensões de mergulho calculadas para sinais medidos na direção x pelo método dos falsos vizinhos.

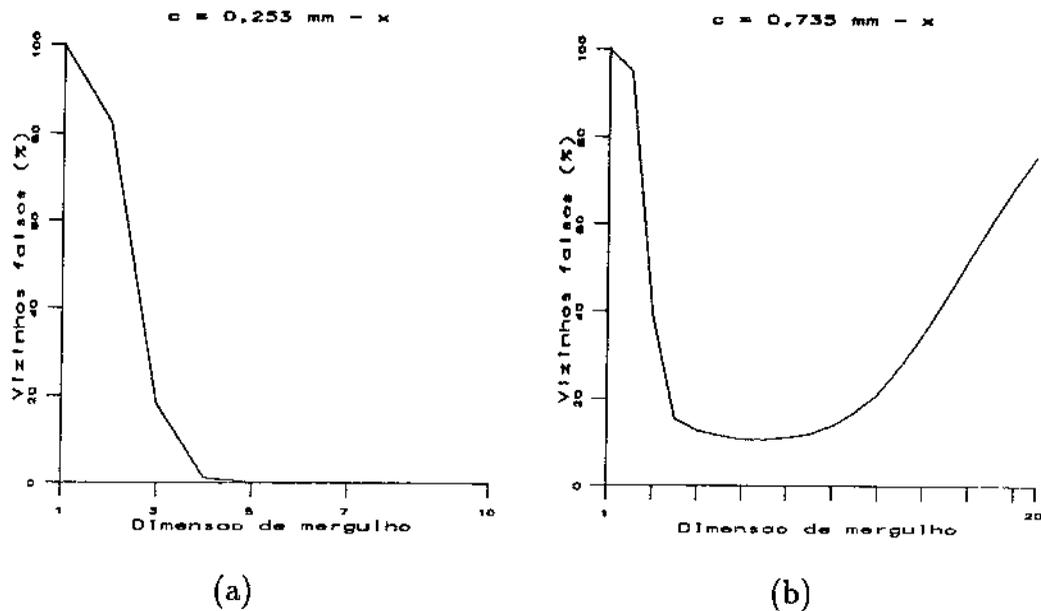


Figura 6.20: Curva de percentual de falsos vizinhos *versus* dimensão de mergulho para sinais medidos na na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz: (a) com folga de 0,253; (b) com folga de 0,735 mm.

zero. A figura 6.20(a) mostra uma curva em que isto acontece sem problemas o que se verificou na grande maioria dos sinais analisados. Já a figura 6.20(b) mostra uma curva em que o número de falsos não cai a zero passando entretanto por um mínimo. Isto se deve à presença do ruído que influencia bastante neste sinal fazendo que a dinâmica seja de alta dimensão. O mínimo por que passa a curva está relacionado com a dimensão real do atrator.

Finalmente a dimensão de mergulho pode ser obtida a partir da dimensão do atrator. A dimensão de mergulho deve ser maior que o dobro da dimensão do atrator (ver seção 3.2). Na seção 6.6, são apresentados os resultados das dimensões fractais que são uma aproximação da dimensão do atrator. A dimensão do atrator é o menor inteiro maior que a dimensão fractal.

Para a escolha da dimensão de mergulho estabeleceu-se o seguinte critério: a dimensão foi determinada inicialmente pelo método dos falsos vizinhos. A dimensão local foi determinada a partir da dimensão do atrator obtida das dimensões fractais, sendo o menor inteiro superior à maior dimensão fractal. A seguir foi garantida a regra de Takens e Mañé que exige que a dimensão de mergulho seja maior que o dobro da dimensão do atrator. Esta exigência pareceu necessária, embora alguns autores afirmem que ela é apenas suficiente [11, 27], pois em vários testes onde não foi respeitada os resultados foram desastrosos. O método da saturação apresentou caracteristicamente uma tendência à convergência do invariante em altas dimensões o que aumenta a influência do ruído nos resultados, não sendo utilizado.

6.4 Retratos de Fase

A investigação de características caóticas nos sinais experimentais começa pela construção de vetores no espaço de estado reconstruído utilizando o método das *delay coordinates* descrito na seção 3.2. Um primeiro passo na análise de sistemas não lineares pode ser dado através da visualização direta da trajetória no espaço de estado reconstruído.

A figura 6.21 mostra alguns exemplos de retratos de fase bi-dimensionais retirados dos sinais medidos com velocidade de rotação de 11,4 Hz com folga entre 0,414 mm e 0,597 mm. Estes sinais correspondem aos deslocamentos na direção x e são aqueles com maior evidência de comportamento caótico dentre aqueles cujas transformadas de Fourier foram apresentadas na seção 6.2. Pode-se ver que características de atratores estranhos como dobramentos (*foldings*) estão presentes em alguns sinais ($c = 0,459$ mm a 0,505 mm), mas estas características podem estar associadas a uma má observação do atrator (dimensão de mergulho demasiadamente pequena).

As geometrias destas trajetórias podem trazer informações importantes na análise mas também podem levar a enganos quando esta mesma trajetória não é observada adequadamente (particularmente quando o *time delay* e a dimensão de mergulho não são adequados). Na figura 6.22 são mostrados retratos de fase correspondentes a um mesmo sinal mas obtidos com diferentes *time delays*. Pode-se ver que o efeito de variar o *time delay* é o de observar projeções diferentes do mesmo atrator. Pode-se intuir com isto que as consequências de uma má escolha do *time delay* podem ser drásticas se o atrator for observado em um espaço de dimensão insuficiente para representar a dinâmica presente.

Um dos exemplos em que o atrator é observado através de uma janela de dimensão insuficiente é o mostrado pelo retrato de fase da figura 6.23. Este retrato de fase foi obtido de um sinal adquirido em uma sessão de ensaios anterior à dos demais sinais analisados neste capítulo. A peculiaridade do sinal, entretanto, fez com que o mesmo fosse utilizado para mostrar a influência da dimensão na observação geométrica do atrator. O sinal foi medido com o rotor girando com velocidade de 5,9 Hz e a folga existente era de 0,184 mm. Neste retrato de fase o atrator tem uma dimensão maior do que a observada e embora tenha uma aparência complexa se trata de um atrator periódico com várias harmônicas e sub-harmônicas influenciando significativamente no movimento.

O atrator mostrado na figura 6.23 poderia, à primeira vista, ser interpretado como um atrator caótico devido aos alongamentos e dobramentos aparentes na trajetória. A figura 6.24, entretanto, mostra a transformada de Fourier deste sinal com comportamento absolutamente periódico com frequências harmônicas e subharmônicas muito bem definidas.

6.5 Diagramas de Poincaré

Os retratos de fase, pelas suas limitações intrínsecas, podem esconder algumas características importantes do atrator observado. Pode-se, entretanto, a partir deles, construir os diagramas de Poincaré que, por sua vez podem trazer informações preciosas sobre a natureza do atrator como já foi visto em 3.3. A seguir serão apresentados os diagramas

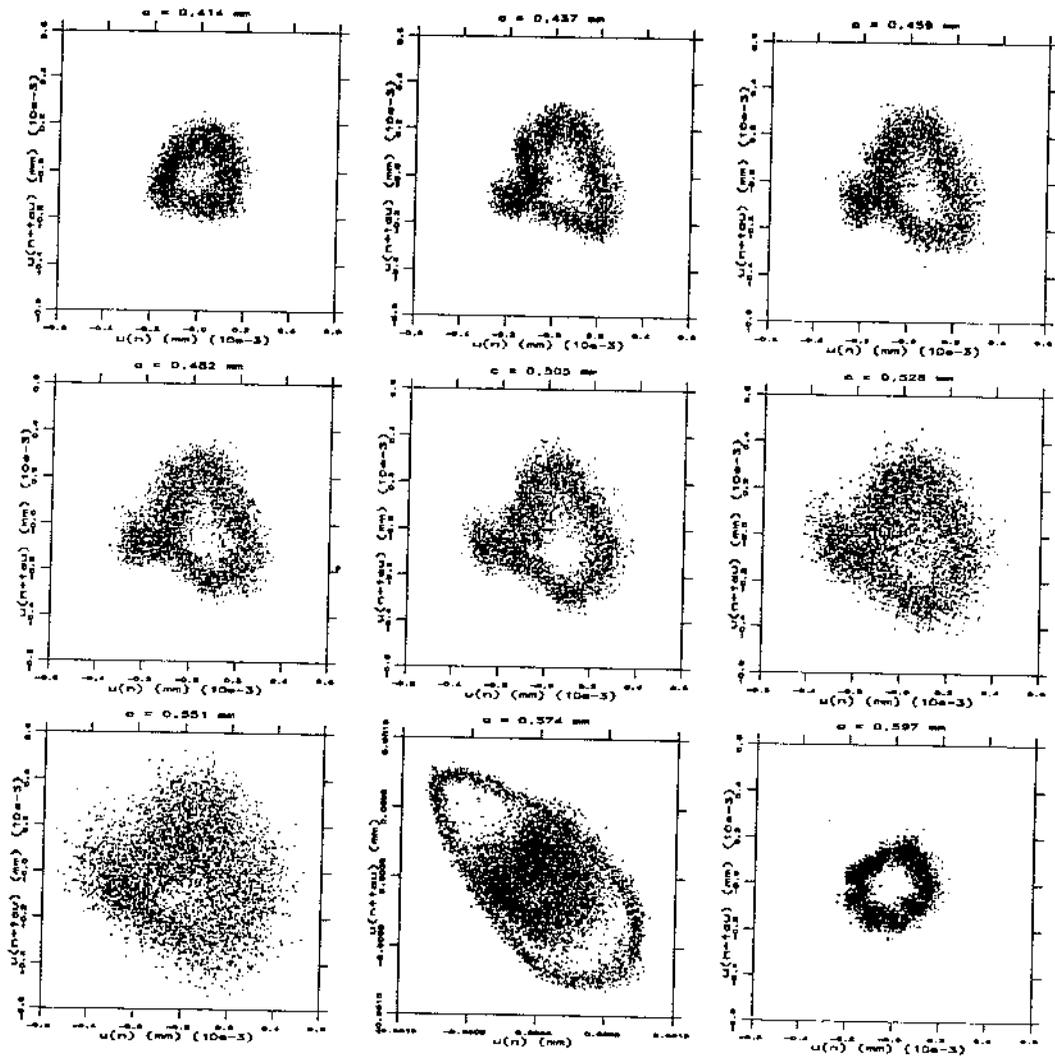


Figura 6.21: Retratos de fase obtidos por projeções bi-dimensionais (eixo horizontal - $s(n)$, eixo vertical - $s(n+\tau)$) do espaço de estado reconstruído de sinais medidos com velocidade de rotação de 11,4 Hz, folgas variando entre 0,414 mm e 0,597 mm e $\tau = 10$.

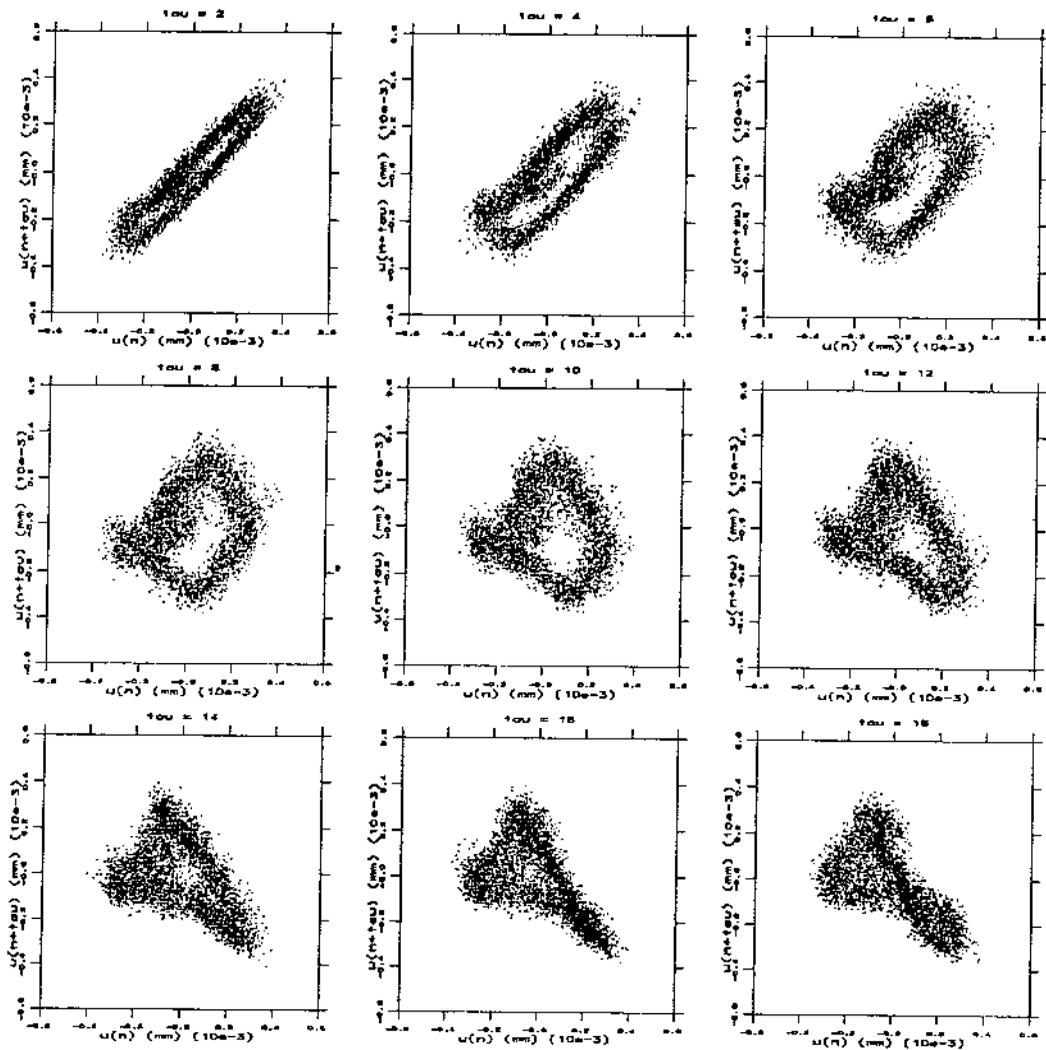


Figura 6.22: Retratos de fase obtidos por projeções bi-dimensionais (eixo horizontal - $s(n)$, eixo vertical - $s(n+\tau)$) do espaço de estado reconstruído de sinais medidos com velocidade de rotação de 11,4 Hz, folga de 0,505 mm e τ variando entre 2 e 18.

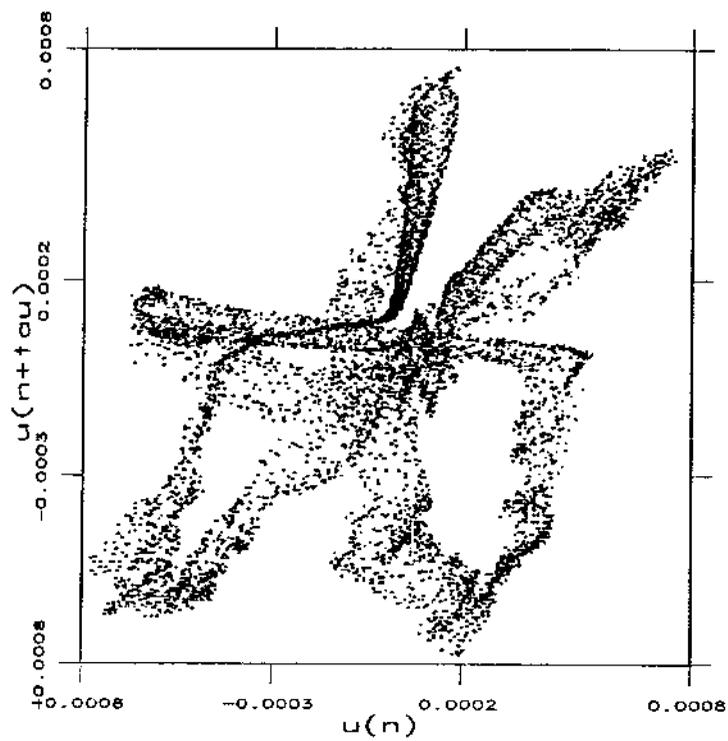


Figura 6.23: Retrato de fase mostrando a projeção bi-dimensional (eixo horizontal - $s(n)$, eixo vertical - $s(n+\tau)$) de um atrator periódico com dimensão superior a 2 e $\tau = 7$.

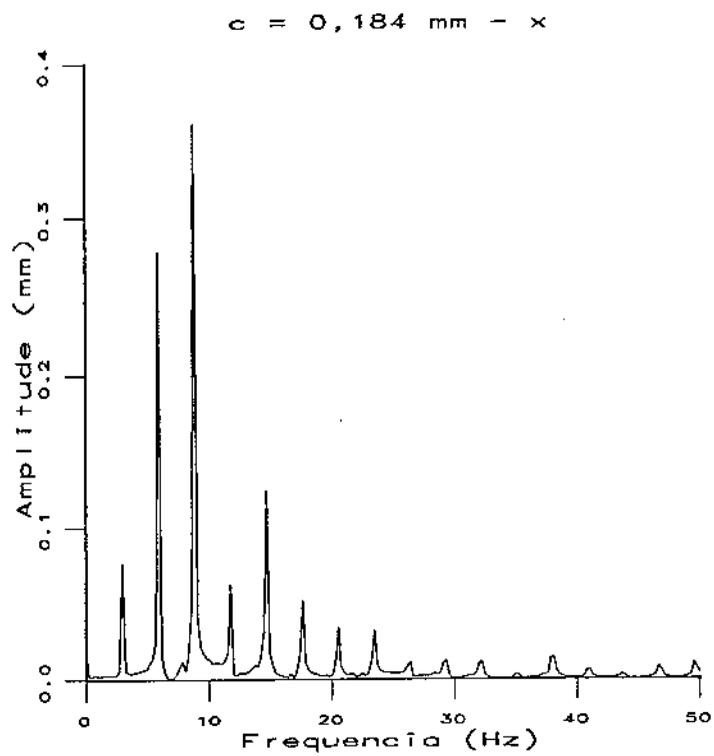


Figura 6.24: Transformada de Fourier do sinal do qual foi obtido o atrator mostrado na figura anterior. A velocidade de rotação é 5,9 Hz.

de Poincaré dos grupos de sinais com suspeita de comportamento caótico identificado na seção 6.2. Para a obtenção dos diagramas foram feitas reconstruções tridimensionais do espaço de estado com *time delay* escolhido aquele que proporcione uma melhor visualização do atrator no retrato de fase. A reconstrução tridimensional foi escolhida pois o número de pontos disponíveis, apesar de elevado (90000 em cada amostra), era pequeno para se obter curvas da informação mútua com mínimo local bem identificável.

Inicialmente a figura 6.25 mostra os diagramas de Poincaré dos sinais gerados com velocidade de rotação de 7,4 Hz e com folgas entre 0,620 mm e 0,758 mm, enquanto a figura 6.26 mostra os diagramas dos sinais com a mesma velocidade de rotação e com folgas entre 1,033 mm e 1,149 mm.

Os diagramas de Poincaré mostrados na figura 6.25 apresentam um comportamento que evolui de um movimento periódico para bi-periódico e o retorno para o movimento periódico o que se caracteriza em uma bifurcação. Neste conjunto de diagramas não existe uma evidência clara de comportamento caótico.

A figura 6.27 mostra uma sequência de diagramas de Poincaré correspondentes aos sinais gerados com velocidade de rotação de 11,4 Hz e folgas entre 0,414 mm e 0,597 mm. Pode-se observar com clareza a formação de um atrator com características não periódicas. O primeiro diagrama mostra os pontos aglutinados ao redor de uma posição, sendo o seu espalhamento gerado pelo ruído presente no sinal. Este diagrama tem uma característica fortemente periódica. A partir do segundo diagrama começa a ser percebida a formação de um atrator que se alonga, quebrando a periodicidade. Esta evolução chega ao seu máximo quando $c = 0,574$ mm onde, associada a esta forma alongada, existe uma aglutinação periódica. Para uma folga um pouco maior ($c = 0,597$ mm) o atrator torna-se novamente periódico.

A figura 6.28 mostra os diagramas de Poincaré do grupo de sinais gerados com velocidade de rotação de 16,5 Hz e folgas entre 0,230 mm e 0,368 mm. Estes diagramas mostram um alongamento do atrator, que embora suave é bem definido e pode significar ou um comportamento multi-periódico aproximando-se de um movimento caótico ou, simplesmente, que o atrator foi reconstruído com um *time delay* associado ao período fundamental do atrator, o que não é o caso já que o *time delay* usado para estas reconstruções foi 7 (calculado pela informação mútua média) o que equivale a 0,231 vezes o período fundamental, não sendo, portanto nenhuma relação inteira.

O conjunto de diagramas de Poincaré mostrado na figura 6.30 evidencia a formação de um atrator com forma estranha. Particularmente o diagrama correspondente ao rotor solto apresenta uma forma que faria suspeitar de que existe algum comportamento diferente do comportamento harmônico esperado.

A análise dos diagramas de Poincaré é útil na investigação de características caóticas mas deixa algumas conclusões ao sabor da subjetividade. O que se precisa para identificar os atratores estranhos é uma resposta afirmativa o que deve ser conseguido com os cálculos de invariantes.

A análise dos diagramas de Poincaré, embora torne um pouco mais claras as informações contidas no retrato de fase ainda depende muito dos parâmetros de mergulho utilizados e se limita a atratores de dimensão muito baixa. Por outro lado a análise é

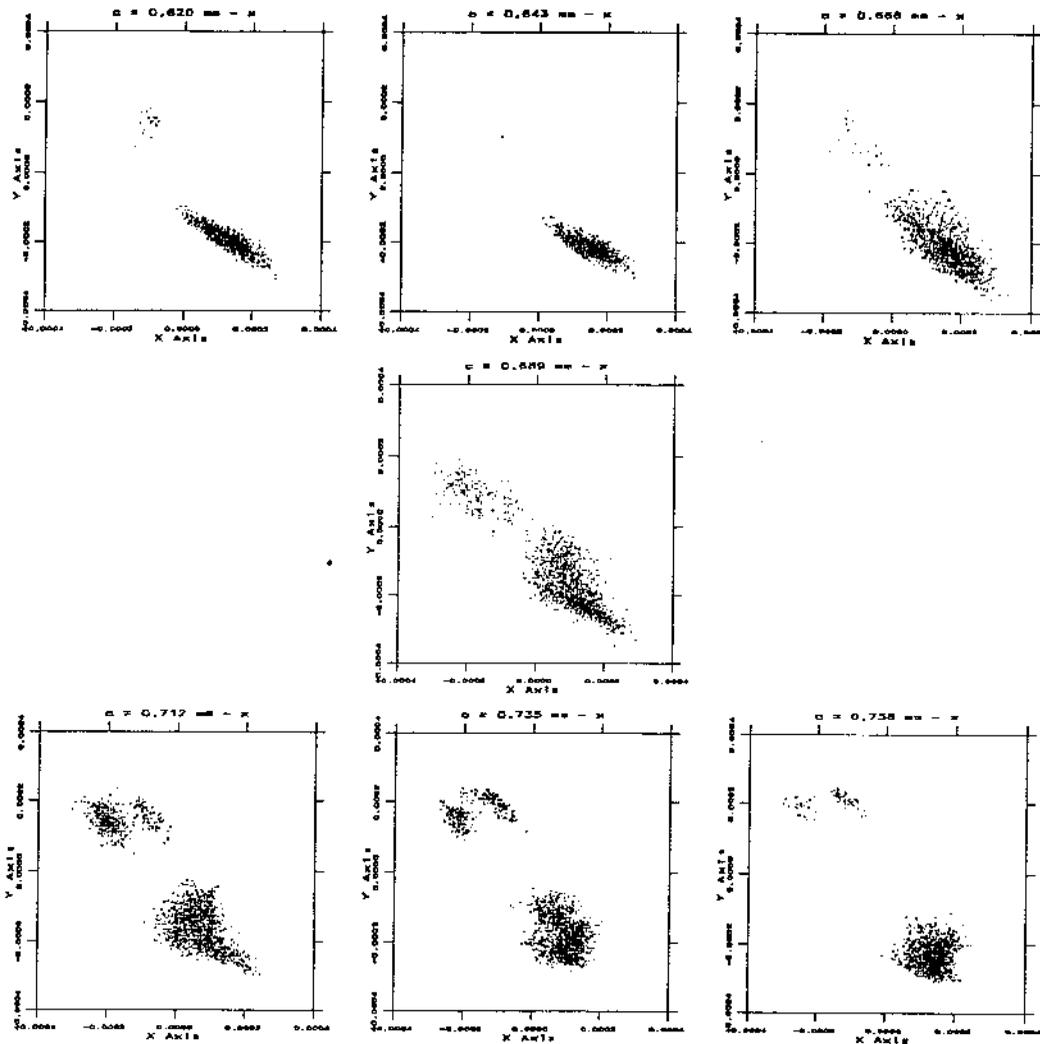


Figura 6.25: Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e com folgas entre 0,620 mm e 0,758 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.

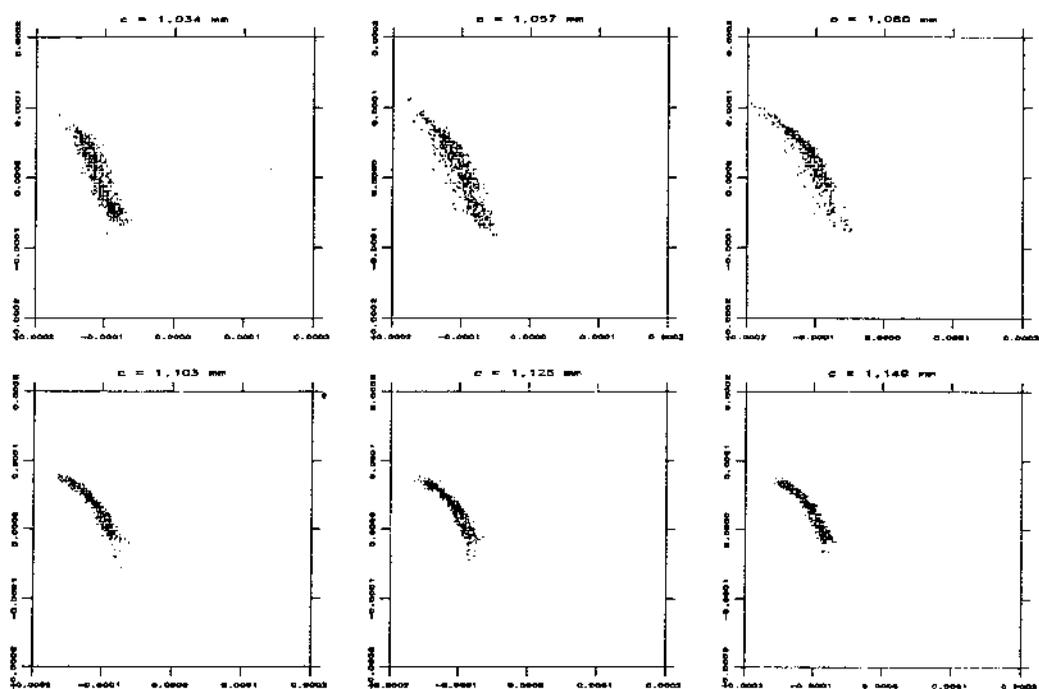


Figura 6.26: Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e com folgas entre 1,034 mm e 1,149 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.

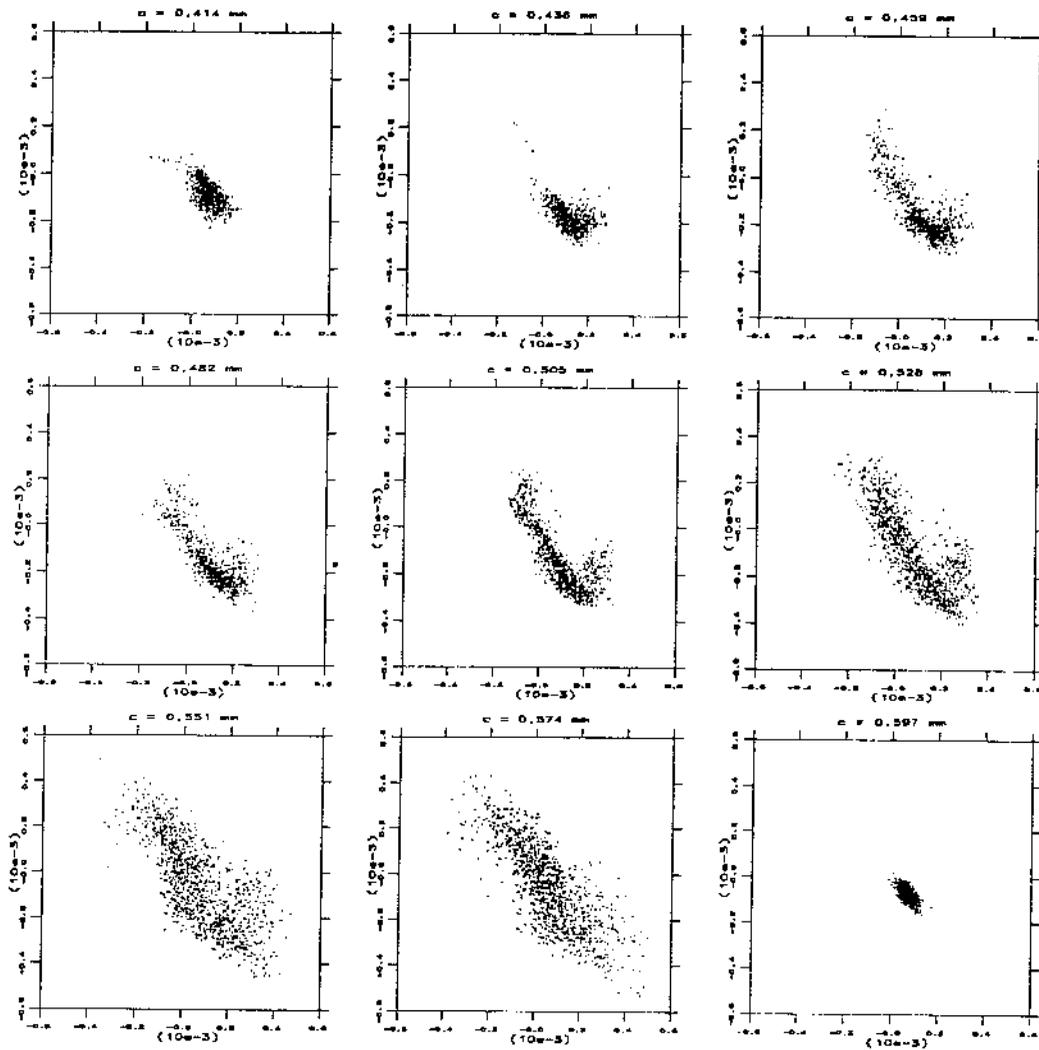


Figura 6.27: Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 11,4 Hz e com folgas entre 0,414 mm e 0,597 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.

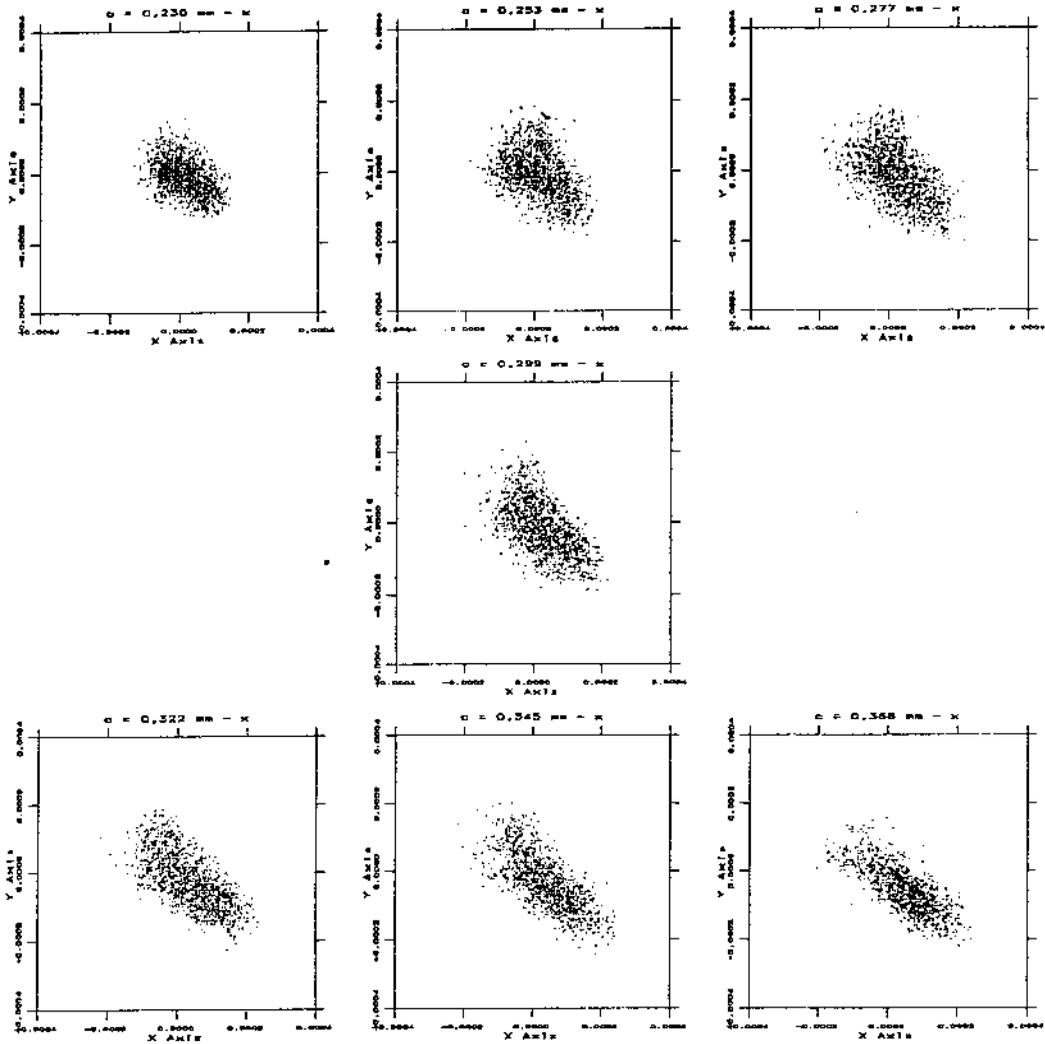


Figura 6.28: Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e com folgas entre 0,230 mm e 0,368 mm. No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.

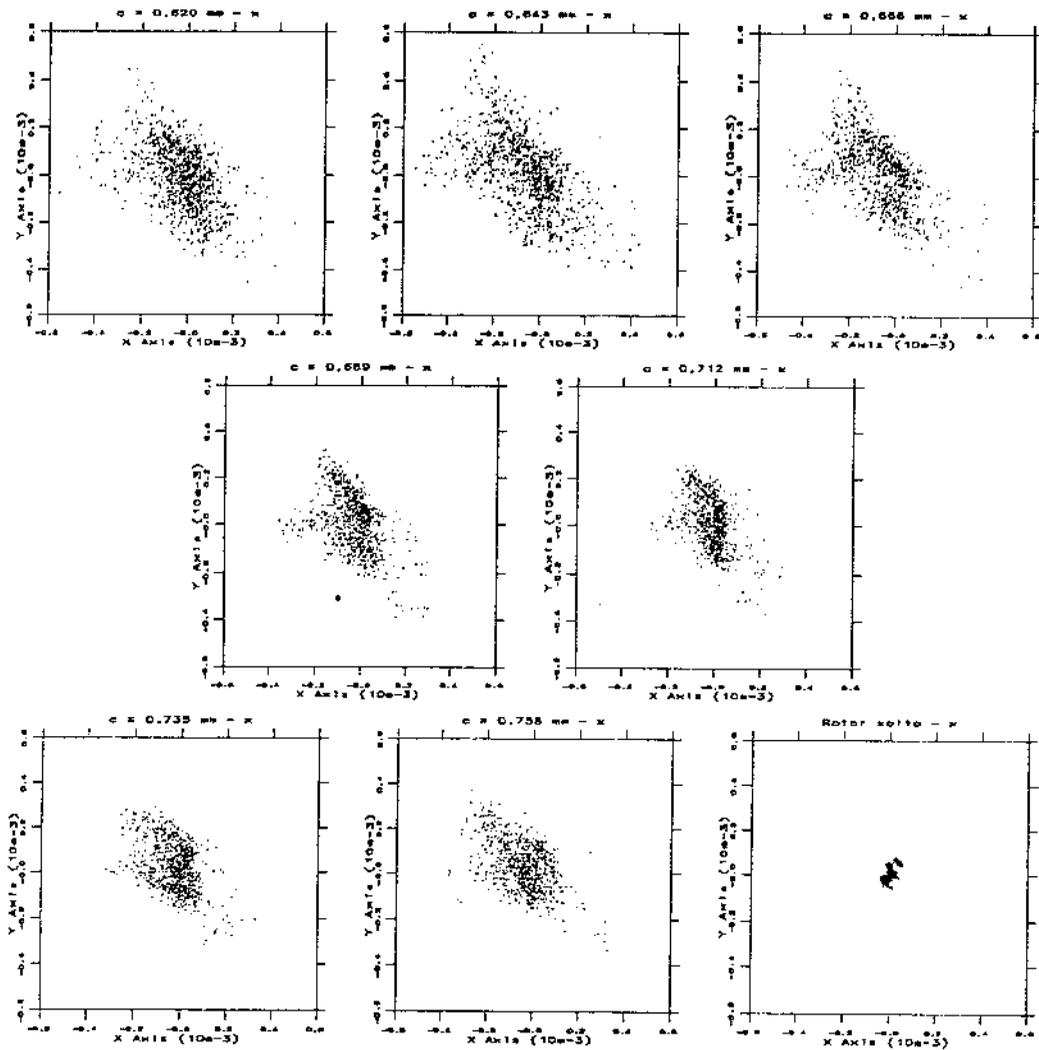


Figura 6.29: Diagramas de Poincaré dos sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e com folgas entre 0,620 mm e 0,781 mm (sem contato) . No eixo horizontal está representado $s(n)$ e no eixo vertical $s(n+2\tau)$, para $s(n+\tau)=0$.

Figura 6.30: Diagramas de Poincaré - 16,5 Hz

apenas qualitativa uma vez que, em situações limites não é possível afirmar se um determinado sinal tem ou não comportamento caótico. Para superar estas dificuldades é necessário *quantificar* o caos, ou seja, saber *o quanto* um sinal apresenta comportamento caótico ou se o mesmo tem apenas um atrator com aparência geométrica complicada em virtude de uma má reconstrução. É então, necessário calcular invariantes como os expoentes de Lyapunov ou dimensões fractais que, por si só, caracterizam o comportamento apresentado.

6.6 Determinação das dimensões fractais

Após a escolha dos parâmetros de mergulho podem ser determinadas as dimensões de capacidade, correlação e informação descritas na seção 3.5. Estes resultados, mostrados a seguir, podem ser utilizados para a caracterização do atrator ou como estimativa para a dimensão do atrator.

Os resultados dos cálculos das dimensões de capacidade, correlação e informação estão apresentados nas figuras 6.31 a 6.35 para os sinais previamente selecionados. Estas dimensões mantêm-se sempre dentro de limites próximos mostrando que os atratores presentes possuem dimensões muito próximas. Há também uma proximidade razoável entre as três dimensões calculadas.

A principal dificuldade encontrada no cálculo da dimensão foi o número insuficiente de pontos adquiridos. Como utilizou-se o método da saturação para se determinar a dimensão de mergulho, em alguns casos a convergência não havia sido atingida para uma dimensão de mergulho igual a 7. Nestes casos foi escolhido o valor mais alto verificando-se sempre se havia tendência à convergência, o que aconteceu em todos os casos cujos resultados foram apresentados. Verificou-se também que o compromisso entre o número de pontos adquiridos e a dimensão de mergulho não é constante para todos os atratores: o número total de pontos utilizado foi sempre o mesmo (90000) e em algumas vezes o programa falhava ao calcular a dimensão fractal com dimensão de mergulho igual a 7 e outras vezes igual a 8. Não foi possível observar nenhuma tendência que possibilitasse uma explicação para isto. Os gráficos mostrados nas figuras 6.31 a 6.35 evidenciam também a dificuldade em utilizar o cálculo da dimensão para tentar identificar comportamento com característica de sinais experimentais. Não parece evidente um critério que possa ser utilizado para classificar sinais em caóticos ou não a partir do cálculo das dimensões fractais. Elas serviram, entretanto, para estabelecer um limite inferior na dimensão dos atratores analisados.

6.7 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov foram calculados de duas formas diferentes: utilizando o ajuste polinomial local, e com utilização de modelos de redes neurais, descritos na seção 4.4.1.

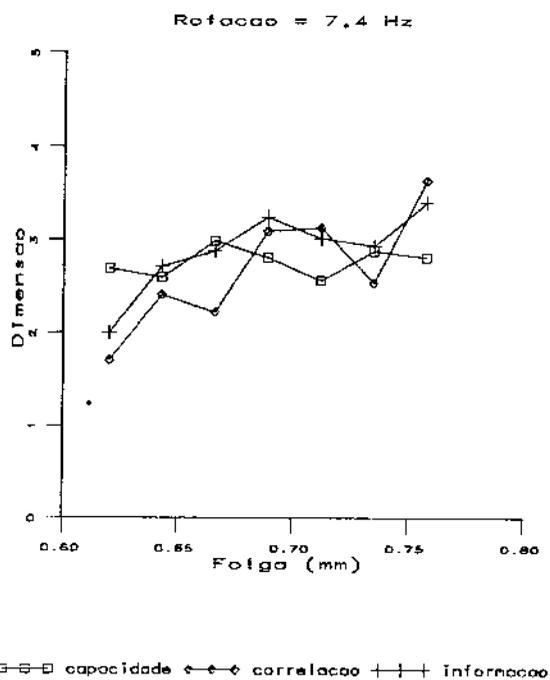


Figura 6.31: Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e folgas variando entre 0,620 mm e 0,758 mm.

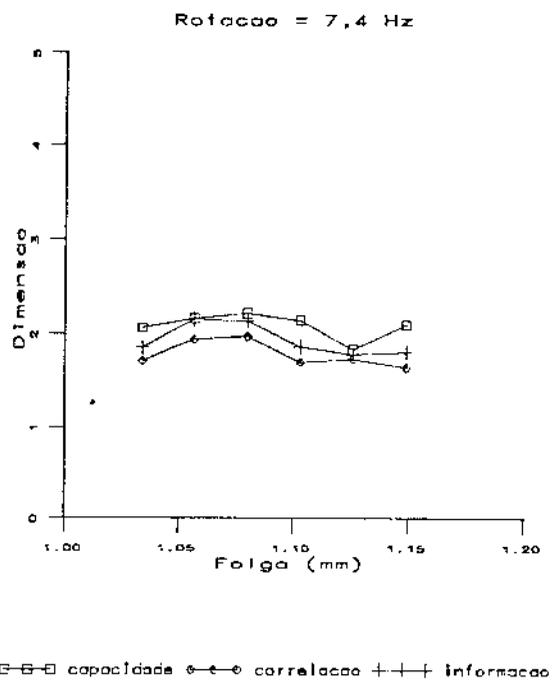


Figura 6.32: Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 7,4 Hz e folgas variando entre 1,034 mm e 1,149 mm (sem contato).

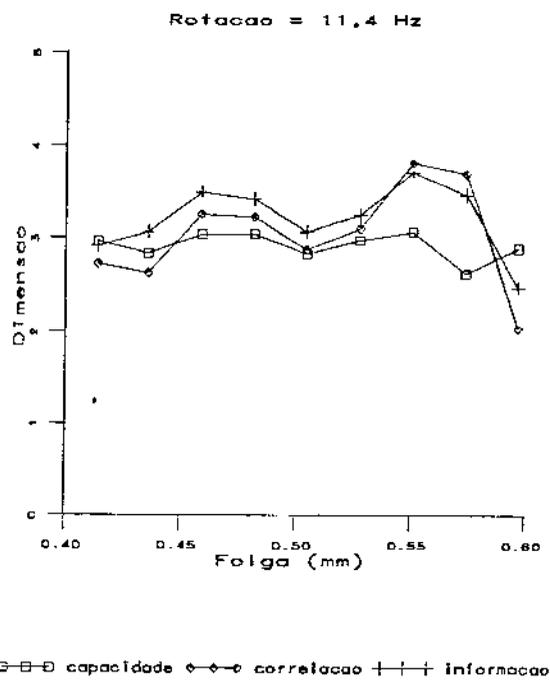


Figura 6.33: Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 11,4 Hz e folgas variando entre 0,414 mm e 0,597 mm.

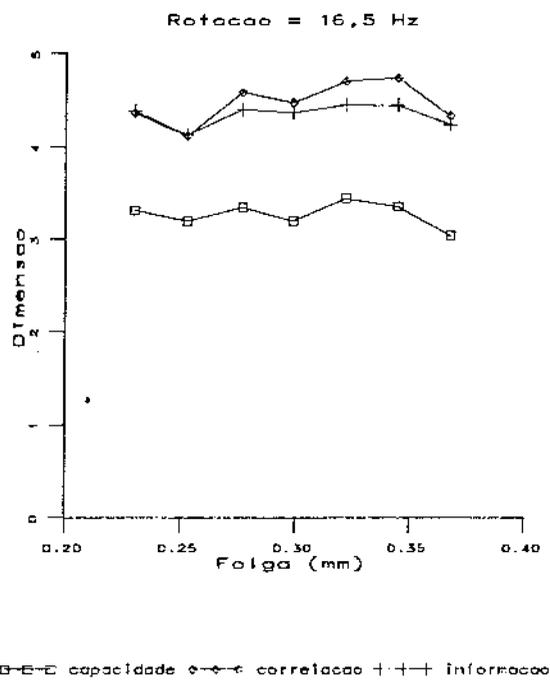


Figura 6.34: Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e folgas variando entre 0,230 mm e 0,368 mm.

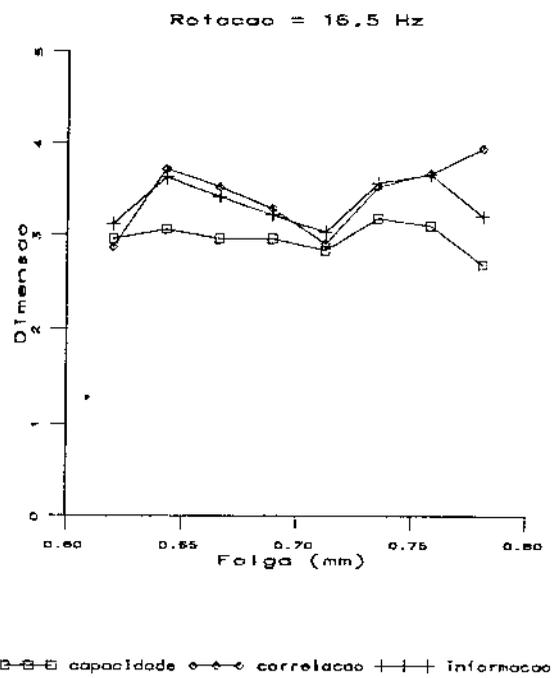


Figura 6.35: Dimensões de capacidade, correlação e informação calculadas para os sinais medidos na direção x com velocidade de rotação de 16,5 Hz e folgas variando entre 0,620 mm e 0,781 mm.

6.7.1 Expoentes de Lyapunov - Ajuste polinomial

O método de cálculo dos expoentes de Lyapunov com ajuste polinomial local permite o cálculo do espectro completo dos expoentes. Entretanto o cálculo exige a escolha de alguns outros parâmetros, inerentes exclusivamente ao método, que influenciam no resultado. O procedimento, então para estes cálculos foi determinar os parâmetros de mergulho previamente e depois tentar descobrir a influência da variação de alguns destes parâmetros. Para estes testes foram escolhidos 5 sinais diferentes com comportamentos também diferentes de forma que pudessem se constituir em uma amostra abrangente. Os sinais selecionados foram os seguintes:

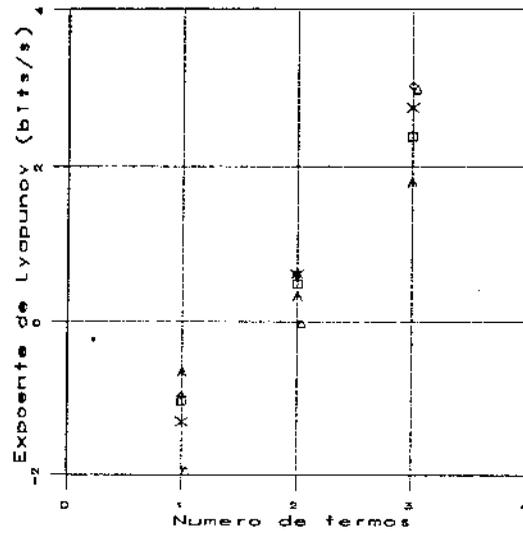
- Sinal 1 - Deslocamento x medido com velocidade de rotação de 7,4 Hz e folga de 0,689 mm.
- Sinal 2 - Deslocamento x medido com velocidade de rotação de 7,4 Hz e folga de 1,034 mm.
- Sinal 3 - Deslocamento x medido com velocidade de rotação de 11,4 Hz e folga de 0,574 mm.
- Sinal 4 - Deslocamento x medido com velocidade de rotação de 16,5 Hz e folga de 0,345 mm.
- Sinal 5 - Deslocamento x medido com velocidade de rotação de 16,5 Hz e rotor solto.

Número de termos da série de Taylor

Em todos os sinais testados a utilização ou não do primeiro termo (constante) da série de Taylor não representou qualquer influência nos resultados. Entretanto, o número de termos utilizados mostrou-se decisivo na obtenção de uma estimativa válida. Nos sinais analisados ficou evidente que a aproximação local linear subestima o expoente de Lyapunov dominante enquanto que uma aproximação polinomial de terceiro grau o superestima por ajustar o ruído ao mapa. Uma estimativa razoável só é obtida com aproximação quadrática. A figura 6.36 mostra curvas do maior expoente de Lyapunov em função do número de termos da série de Taylor utilizados para os cinco sinais previamente selecionados. Em todos os casos pode-se ver claramente que o expoente apresenta sempre um valor negativo excessivamente alto para série de Taylor com um único termo e, normalmente um expoente positivo também alto para séries com três termos. Os únicos valores que se apresentam dentro de valores razoáveis são quando se utiliza dois termos na série. Alguns testes foram realizados com quatro termos e também foram obtidos expoentes altos.

Duração do sinal experimental

O maior expoente de Lyapunov tende a estacionar para um número elevado de pontos observados. Resultados absolutamente precisos só seriam obtidos com sinais de duração infinita. A utilização de sinais de curta duração normalmente implica em uma imprecisão



□ □ □ Sinal 1 △ △ △ Sinal 2 ◇ ◇ ◇ Sinal 3 ▲ ▲ ▲ Sinal 4
 * * * Sinal 5

Figura 6.36: Influência do número de termos da série de Taylor no cálculo do expoente de Lyapunov dominante com ajuste local.

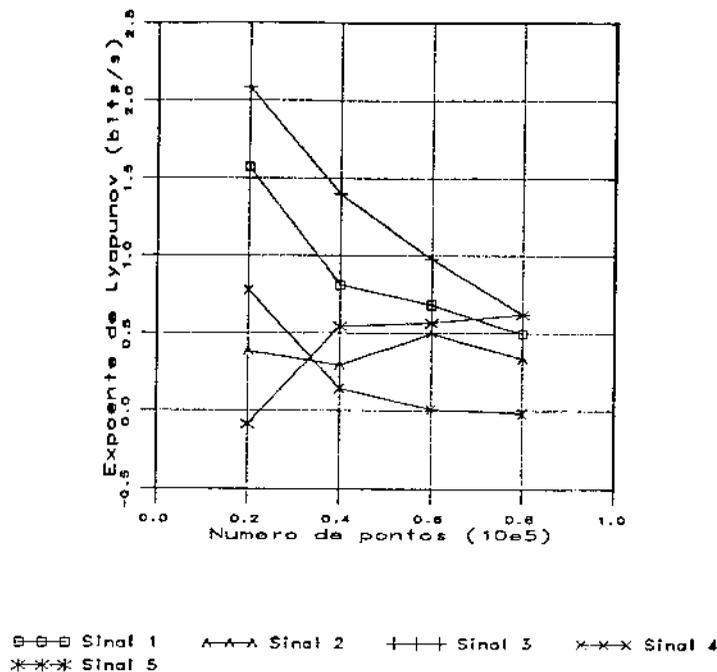
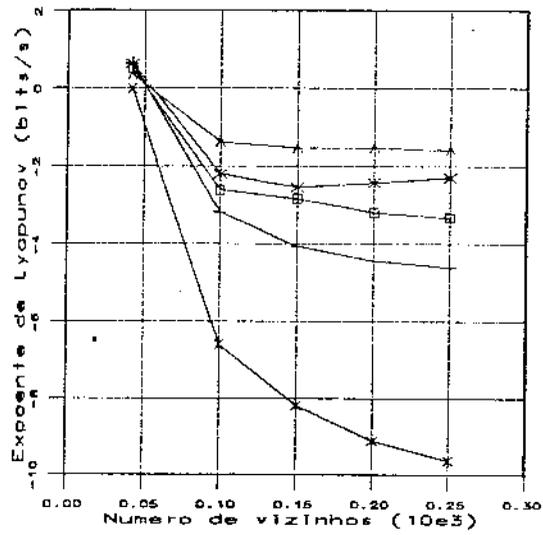


Figura 6.37: Influência da duração do sinal no cálculo do expoente de Lyapunov dominante com ajuste local.

nos resultados. Na figura 6.37 estão apresentadas curvas do maior expoente de Lyapunov em função do número de pontos da amostra empregada. Pode-se observar que não há nenhuma tendência razoável da qual se possa inferir qualquer conclusão para um pequeno número de pontos. Pode-se ver que para os sinais 1, 3 e 4 os expoentes são muito elevados para um pequeno número de pontos, entretanto, para o sinal 5 acontece o contrário, o expoente para 20000 pontos é muito pequeno e para o sinal 2 o expoente se mantém dentro de uma faixa próxima da região estacionária mesmo com um número pequeno de pontos. Para um número de pontos alto o expoente, para todos os sinais, tende à estacionaridade.

Número de vizinhos

O uso de um número elevado de vizinhos tende a subestimar drasticamente o valor do maior expoente de Lyapunov. As curvas da figura 6.38 mostram a tendência sistemática do maior expoente para um valor negativo elevado. Isto se deve ao uso de um número elevado de vizinhos que faz com que a vizinhança se estenda a regiões demasiadamente extensas do atrator, o que faz com que o número de termos da série de Taylor não seja mais suficiente. Isto reforça a conclusão de que um número pequeno de termos na série de Taylor subestima o maior expoente.



□-□-□ Plot 1 ▲-▲-▲ Plot 2 +--+ Plot 3 ×-×-× Plot 4
 *** Plot 5

Figura 6.38: Influência do número de vizinhos no cálculo do expoente de Lyapunov dominante com ajuste local.

Uso de filtros

Para analisar os efeitos de filtros lineares foram calculados os expoentes de Lyapunov dos cinco sinais selecionados utilizando-se um filtro digital linear IIR, passa-baixas. A primeira dificuldade em analisar os sinais filtrados foi encontrada quando da tentativa de determinar o *time delay* pelo método da informação mútua média. A figura 6.39 mostra as curvas obtidas para os cinco sinais com o sinal filtrado em 150 Hz. As oscilações nas curvas impedem decisivamente a determinação do *time delay* por este método.

Apesar desta dificuldade foi, mesmo assim, determinado o expoente de Lyapunov com o *time delay* e a dimensão de mergulho determinados com o sinal sem filtragem o que, a rigor, não está correto pois o processo de filtragem pode ter retirado do sinal alguma dimensão associada ao comportamento caótico. A figura 6.40 mostra uma comparação entre os expoentes dominantes calculados para os sinais selecionados sem filtragem e filtrados com filtros passa-baixas com frequências de corte de 50 Hz e 150 Hz. Os expoentes de Lyapunov estão apresentados em função da dimensão de mergulho para que se possa ter uma idéia clara da influência dos filtros.

A figura 6.40 mostra que a utilização do filtro de 150 Hz influi pouco no expoente dominante calculado pelo método dos ajustes polinomiais locais e esta influência é irregular, ou seja, dependendo da dimensão de mergulho utilizada o mesmo pode reduzir ou aumentar o expoente dominante. Como se espera que o filtro reduza o expoente dominante por retirar a influência de uma ampla faixa de frequências presentes no sinal e, com isto, reduzir o ruído presente, estes resultados não permitem conclusões concretas quanto à utilidade ou não do referido filtro. Quanto ao filtro de 50 Hz, o mesmo aumentou o expoente dominante em quatro dos sinais medidos (sinais 1, 2, 3 e 4). Apenas o sinal 5 é que apresentou uma redução nos expoentes dominantes calculados com filtragem.

Uma outra observação que deve ser feita a partir dos resultados apresentados na figura 6.40 é que há uma tendência dos sinais de dimensão de mergulho mais alta em apresentarem expoentes de Lyapunov mais altos nos sinais filtrados, quando comparados com os sinais sem filtragem. Isto é indicativo de uma ineficiência deste tipo de filtro em separar o ruído do sinal pois o ruído se aloja, normalmente nas dimensões mais altas. Se esperaria uma forte redução do expoente dominante nestas dimensões mais altas.

Os expoentes de Lyapunov dos sinais filtrados foram calculados pelo método do ajuste polinomial local

Dimensão de Lyapunov

Como este método permite o cálculo do espectro de Lyapunov é possível determinar a dimensão de Lyapunov a partir dos expoentes calculados pela equação 3.28. Os resultados estão apresentados na figura 6.41

A dimensão de Lyapunov acrescenta a informação sobre o número de expoentes de Lyapunov positivos. A figura 6.41 mostra que os sinais analisados apresentam no máximo um expoente positivo.

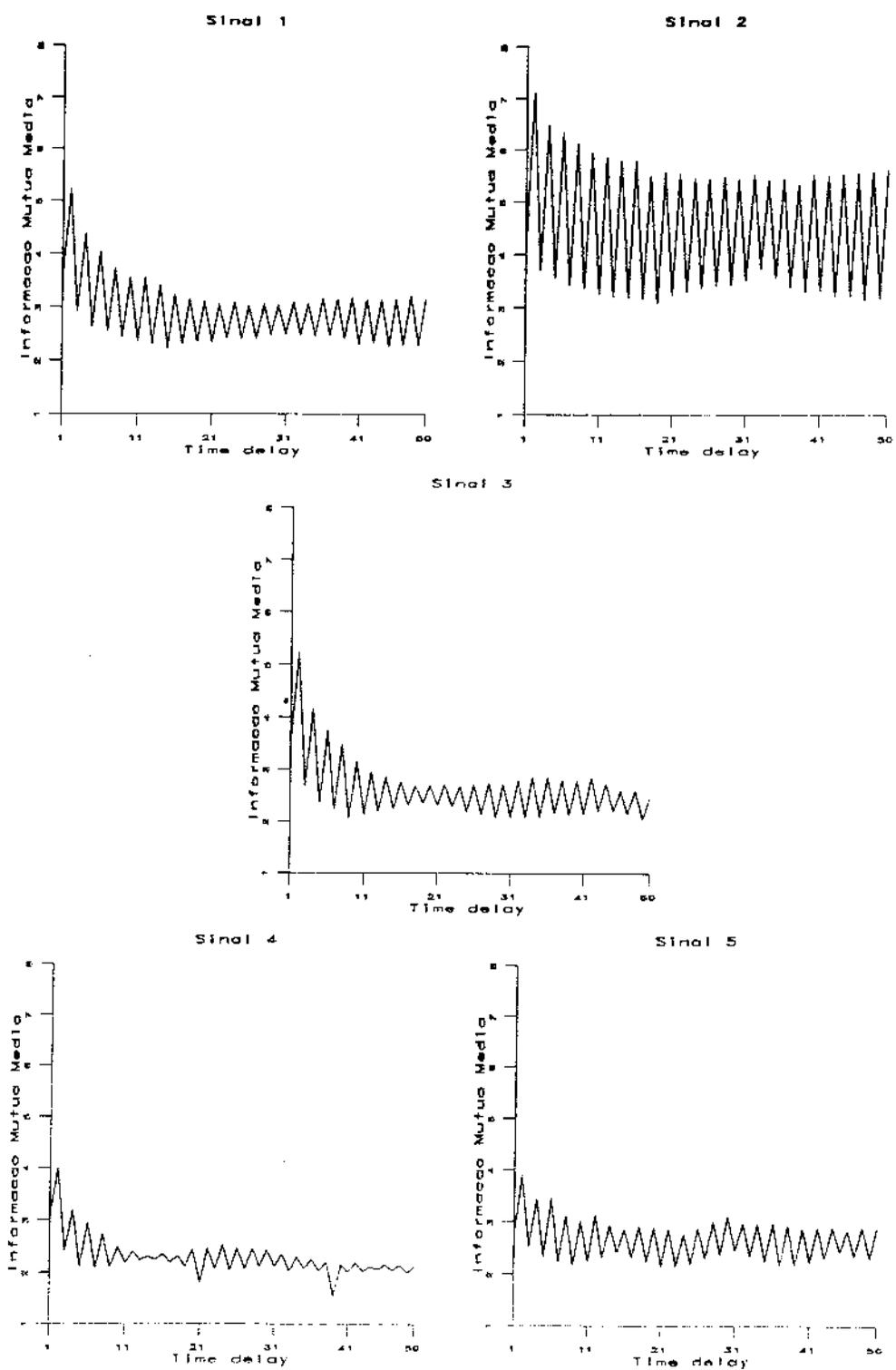


Figura 6.39: Influência do uso de filtros no cálculo da Informação Mútua Média. Sinais filtrados em 150 Hz.

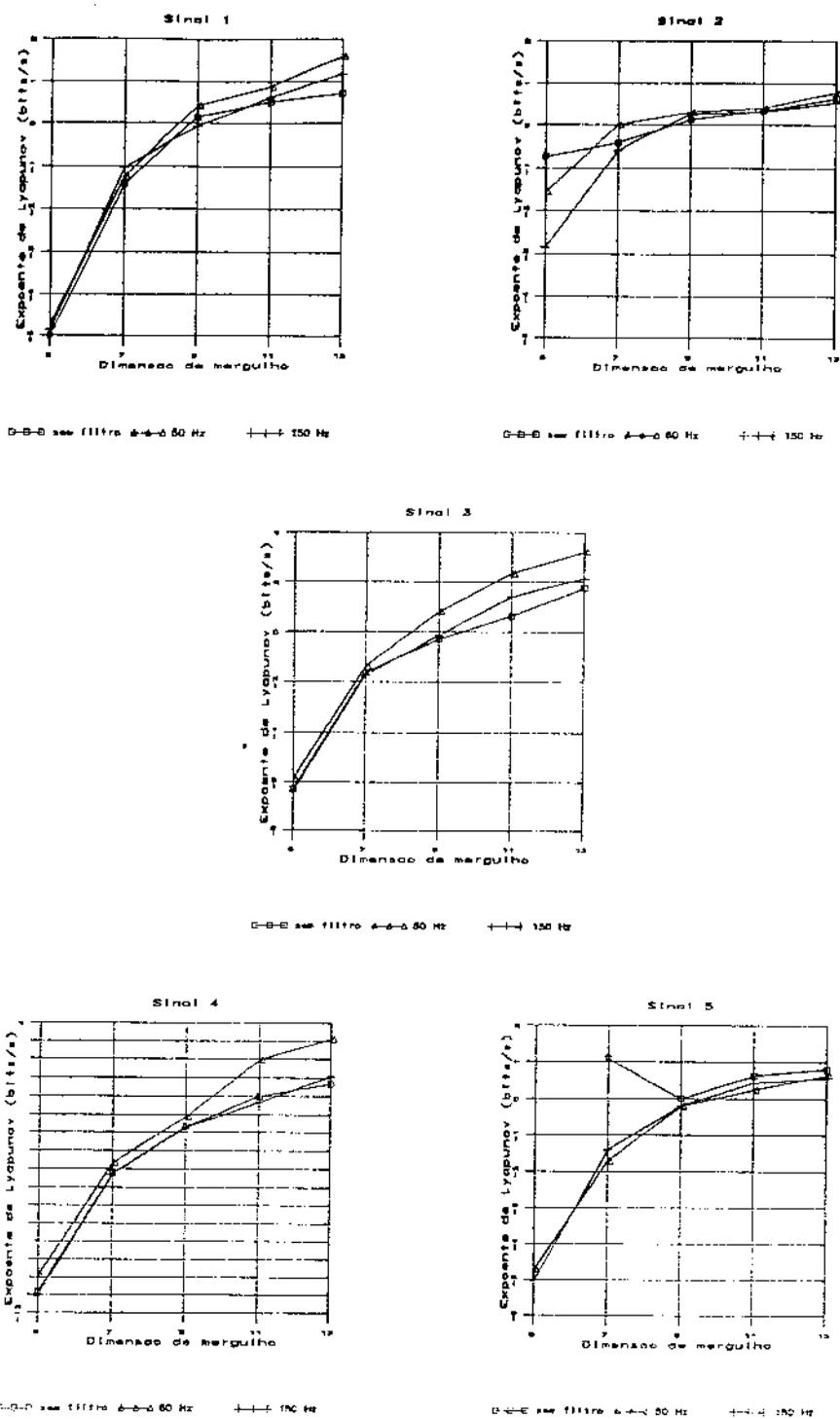
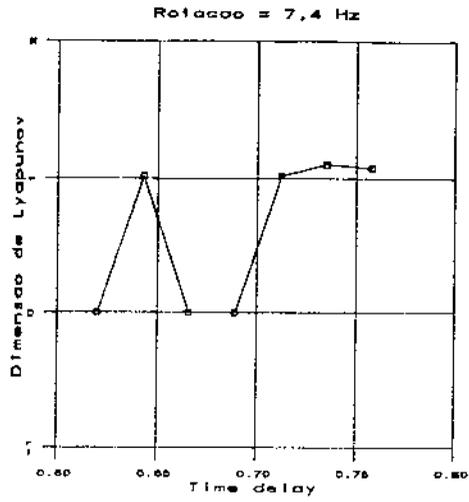
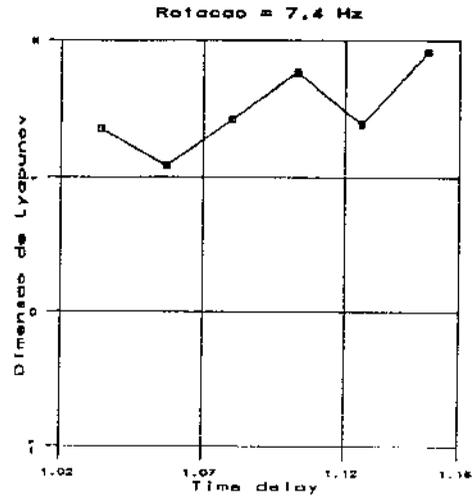


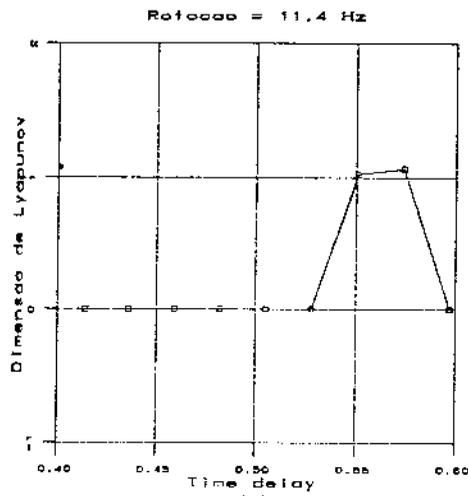
Figura 6.40: Expoente de Lyapunov dominante *versus* dimensão de mergulho calculados para sinais sem filtragem e com utilização de filtros passa-baixas de 50 Hz e 150 Hz.



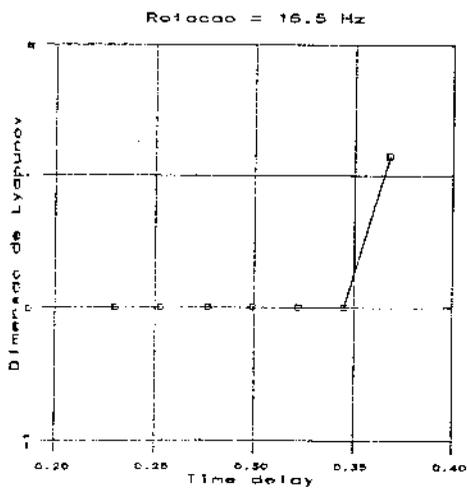
(a)



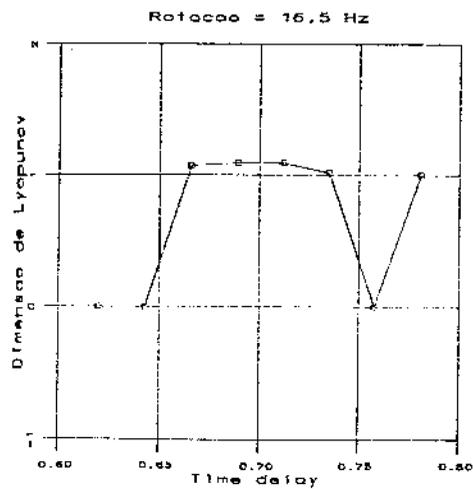
(b)



(c)



(d)



(e)

Conclusão

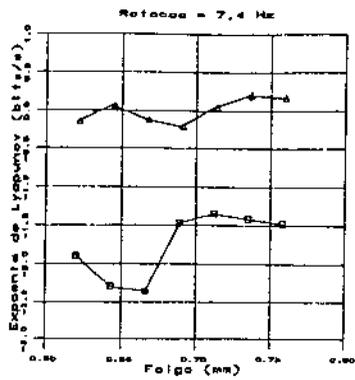
Finalmente são apresentados na figura 6.39 os expoentes calculados para todos os conjuntos de sinais selecionados.

Uma análise do cálculo dos expoentes de Lyapunov a partir de um sinal de características inicialmente desconhecidas deve se utilizar de outros instrumentos que permitam uma comparação, até que se tenha segurança para apresentar afirmações conclusivas. Por isto esta análise deve utilizar as transformadas de Fourier e os diagramas de Poincaré dos mesmos sinais.

A análise do primeiro sinal, cujos expoentes estão mostrados na figura 6.42 (a), permite que se observe que o caos (expoente maior que zero) pode ser evidenciado em folgas entre 0,712 mm e 0,758 mm. Os valores obtidos utilizando ajuste polinomial com séries de Taylor truncadas a partir do terceiro termo (incluídos até o termo quadrático) foram pequenos (menores que 0,25 bits/s) o que, se comparado com os diagramas de Poincaré destes sinais, mostrados na figura 6.25, faz sentido, pois os atratores mais parecem atratores multiperiódicos com uma tênue expectativa de caos no núcleo principal do atrator. O único ponto divergente, que requer uma maior investigação, diz respeito aos sinais obtidos com folgas de 0,643 mm e 0,689 mm. quanto ao primeiro esperava-se um expoente menor do que o calculado enquanto que para o segundo era esperado um expoente maior. É interessante notar que, para uma análise comparativa entre os sinais em concordância com os diagramas de Poincaré os expoentes de Lyapunov calculados com ajuste local linear parecem ser mais eficientes. Eles entretanto apresentam expoentes extremamente baixos o que contradiz uma condição básica da análise que é a de que um atrator periódico tem pelo menos um expoente de Lyapunov igual a zero. As transformadas de Fourier de todos os sinais analisados confirmam que sempre existe uma periodicidade presente nestes sinais, associada ou não a comportamentos mais complexos.

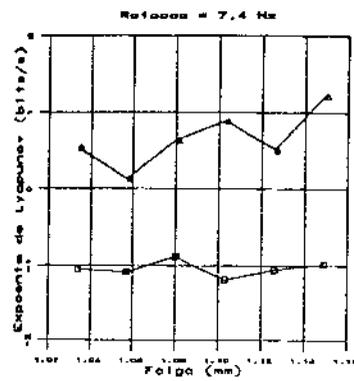
A figura 6.42 (b) mostra os maiores expoentes calculados em todos os sinais analisados. A comparação com os diagramas de Poincaré mostrados na figura 6.26 é plenamente concordante. A formação do atrator é evidente nestes sinais. O valor do expoente ainda permanece pequeno (menor que 1) com exceção para o sinal obtido com rotor solto. Aqui, o desacordo acontece com a transformada de Fourier mostrada na figura 6.8 (a) que apresenta uma frequência dominante mostrando um sinal quase harmônico de amplitude alta. Uma possível causa disso é que a não linearidade deste sinal não é causada por um mecanismo que a transformada de Fourier seja incapaz de captar. Este é também um caso que deve ser mais investigado.

A figura 6.42 (c) apresenta os expoentes de Lyapunov do conjunto com maior concordância entre as transformadas de Fourier, diagramas de Poincaré e expoentes de Lyapunov calculados. As transformadas de Fourier (figura 6.10 mostram uma forte evidência de caos se analisadas isoladamente. A figura 6.27 mostra uma sequência de diagramas de Poincaré que deixa clara a formação do atrator (entre folgas de 0,414 mm a 0,574 mm). Para o sinal obtido com folga de 0,597 mm ocorre um repentino retorno à periodicidade. Os expoentes de Lyapunov calculados estão concordando com estas observações. Eles se mantêm abaixo de zero entre 0,414 mm e 0,505 mm: se aproximam de zero em 0,528 mm,



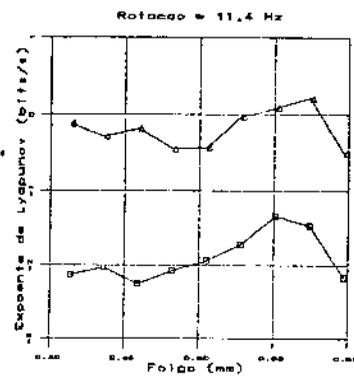
n=1 n=2

(a)



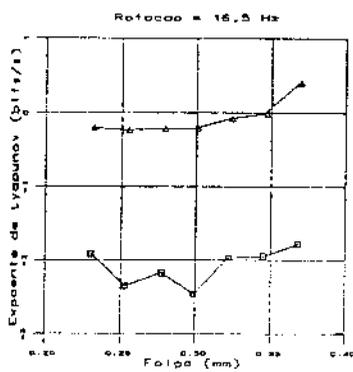
n=1 n=2

(b)



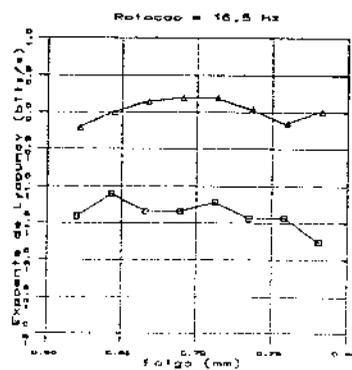
n=1 n=2

(c)



n=1 n=2

(d)



n=1 n=2

(e)

são maiores que zero em 0,551 mm e 0,574 mm, retornando a valores negativos em 0,597 mm.

A figura 6.42 (d) mostra a formação de um atrator com fracas características caóticas. Os diagramas de Poincaré da figura 6.28 confirmam esta conclusão.

A figura 6.42 (e) apresenta um *passoio* dos expoentes de Lyapunov pelo domínio positivo. A observação das transformadas de Fourier mostradas na figura 6.12 mostra um comportamento com características caóticas. A formação do atrator também pode ser vista, embora não com muita clareza, nos diagramas de Poincaré da figura 6.30. O diagrama do sinal medido com o rotor solto é bastante interessante permitindo uma suspeita de comportamento caótico. O expoente calculado para este sinal não é conclusivo sugerindo uma maior investigação, também deste sinal.

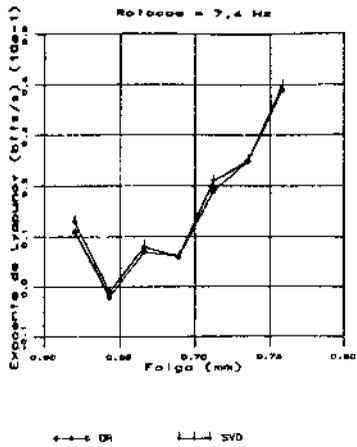
6.7.2 Expoentes de Lyapunov - Modelo de redes neurais

Os expoentes calculados por este método foram sistematicamente menores que os calculados com ajuste polinomial local. Em primeiro lugar, isto pode estar relacionado com a construção do modelo do mapa de evolução no espaço de estado dado pela equação 4.24 que estima o ruído como ruído branco, o que resulta em que o modelo atenua o comportamento caótico. Um outro problema diz respeito à construção do modelo de redes neurais que envolve um alto custo em tempo computacional. O alto custo computacional exigiu que se limitasse em oito o número de unidades da camada escondida da rede (neurônios). Este número muitas vezes foi suficiente com o modelo sendo ajustado com boa precisão (critério da validação cruzada) para poucas unidades. Entretanto, em muitos casos pode-se perceber que melhores resultados seriam conseguidos com um número maior de unidades. Verificou-se, também uma tendência ao crescimento do expoente com o número de unidades. O tempo computacional também cresce com o número de pontos utilizados no sinal e como a precisão decresce há uma necessidade imperiosa em se verificar a influência do número de pontos utilizados nos resultados. Esta influência está expressa na figura 6.44 para os mesmos cinco sinais definidos na seção 6.7.1.

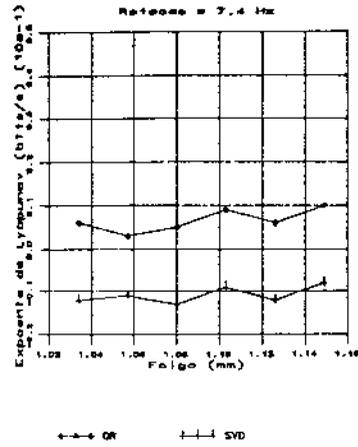
Os gráficos da figura 6.44 mostram que os expoentes calculados sofrem uma pequena influência do número de pontos utilizados quando o número de pontos utilizados é superior a 2000. Decidiu-se, então usar amostras de 2500 pontos para calcular o expoente de Lyapunov dominante pelo método que utiliza o modelo de redes neurais. Convém salientar que o número de pontos escolhidos já foi extremamente alto do ponto de vista do custo computacional.

6.8 Conclusão

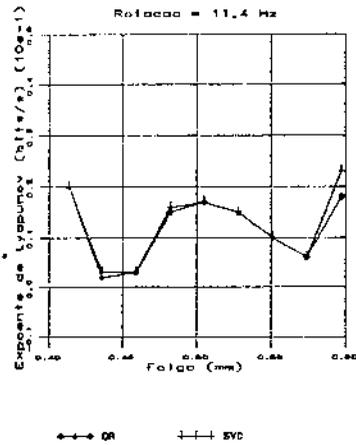
Os resultados apresentados neste capítulo mostram as potencialidades e limitações do cálculo de invariantes como dimensões fractais e expoentes de Lyapunov bem como as dificuldades encontradas no cálculo destes invariantes. A potencialidade dos expoentes de Lyapunov em identificar comportamentos caóticos a partir de um sinal experimen-



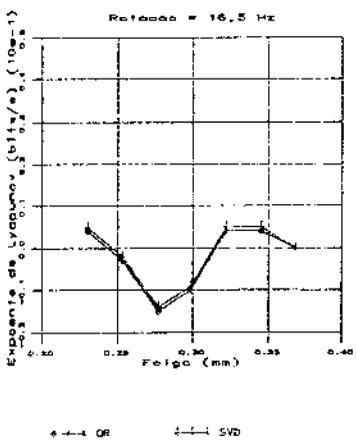
(a)



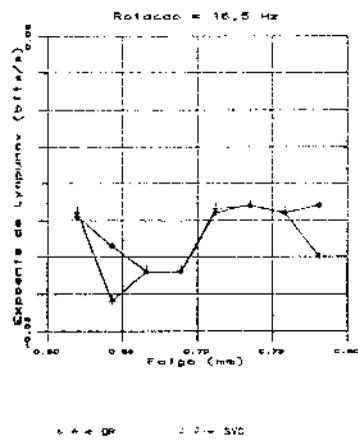
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 6.43: Expoentes de Lyapunov dominantes calculados com modelo de redes neurais.

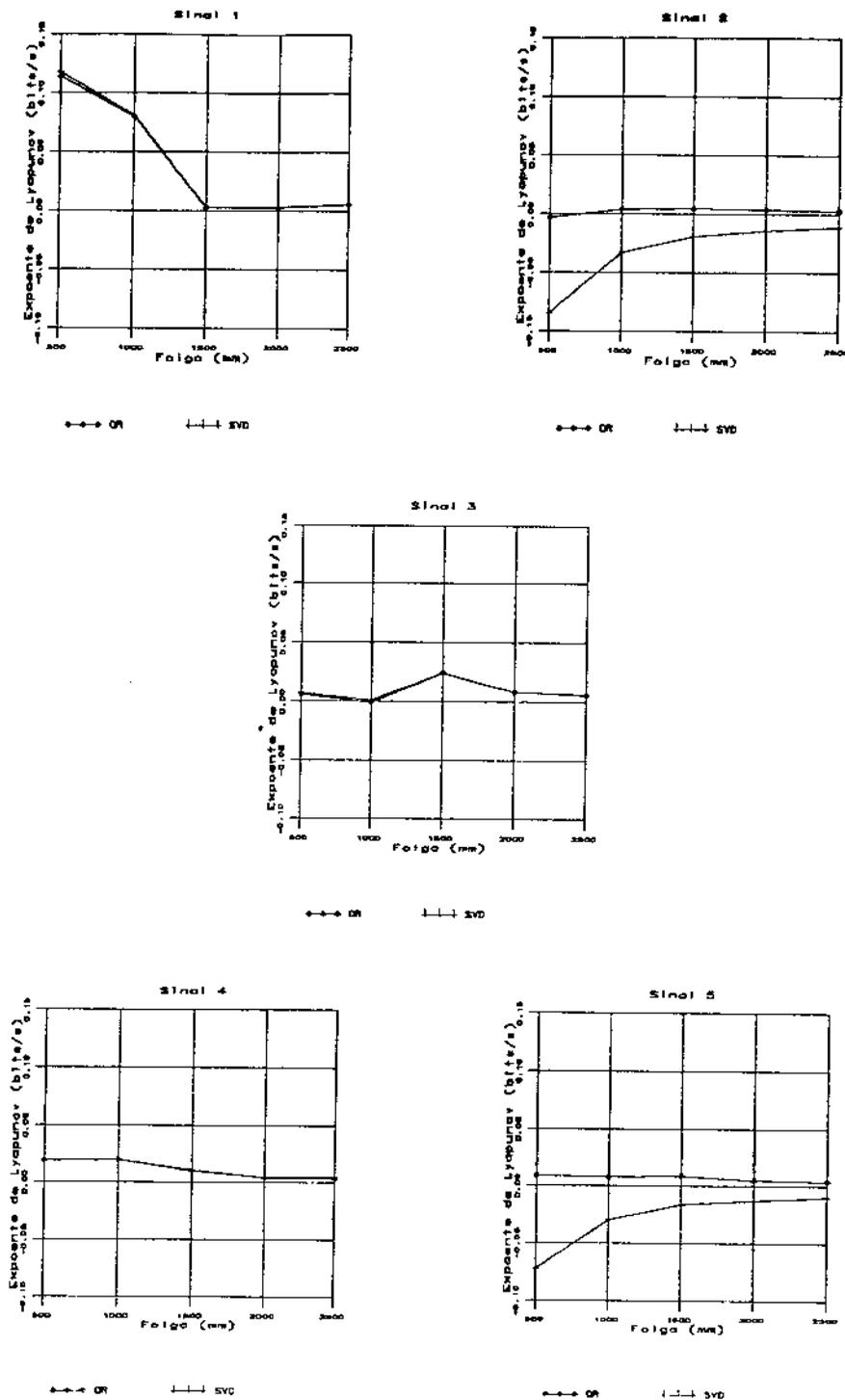


Figura 6.44: Influência do número de pontos no cálculo do expoente de Lyapunov dominante utilizando modelo de redes neurais.

tal obtido diretamente de um sistema mecânico, sem nenhum tratamento prévio, está evidenciada.

Capítulo 7

Conclusões

O presente trabalho apresentou uma análise do comportamento dinâmico não linear de um rotor vertical utilizando métodos de análise que permitem a reconstrução da dinâmica a partir da observação de uma única variável representativa deste sistema. O principal enfoque se concentrou na busca por características de natureza caótica a partir de medições experimentais. Esta busca se justifica por ser a natureza caótica do comportamento dinâmico uma característica que poderá permitir a identificação de problemas não lineares do tipo do *rubbing* no funcionamento de rotores e também para auxiliar a construção de modelos matemáticos adequados para simular o comportamento dinâmico do sistema.

O trabalho iniciou com a observação experimental do fenômeno do *rubbing* e a tentativa de encontrar características deste tipo de fenômeno. A observação de algumas transformadas de Fourier de alguns sinais medidos originou a suspeita de que algum comportamento de natureza caótica poderia estar presente. Como o sistema estudado era um sistema real apresentaram-se dois caminhos distintos que poderiam ser seguidos, a saber: a construção de um modelo matemático do problema do *rubbing* atuando no rotor existente ou, a tentativa de observação das características caóticas a partir de sinais extraídos diretamente da bancada. Optou-se por seguir o segundo caminho pois havia a perspectiva de se conhecer novas técnicas que poderiam ser importadas para utilização em diagnóstico de problemas em máquinas. O primeiro caminho, no qual foram dados alguns passos iniciais, deve ser percorrido com maior profundidade em trabalhos futuros. O modelo matemático do *rubbing* tem sido investigado por alguns autores relacionados no capítulo 1 e algumas propostas foram mostradas no capítulo 2. A possibilidade de comportamento caótico traz ao pesquisador que tenta construir o modelo um novo elemento que pode, inclusive, mudar completamente a sua linha de trabalho. Alguns sistemas podem ter um comportamento tão complicado que a construção de equações diferenciais ordinárias se torna impraticável. Se, apesar disso, se pretender construir um modelo com base nas equações diferenciais ordinárias (como, por exemplo, o modelo com base em elementos finitos clássico apresentado no capítulo 2), é necessário tomar um cuidado especial em modelar todas as possíveis influências. Algumas destas influências, que em um sistema com comportamento linear ou fracamente não-linear poderiam ser desprezíveis, nesta aplicação podem se tornar extremamente importantes quando a natureza caótica está presente. Um

exemplo disso é apresentado a seguir. O mancal inferior do rotor vertical tem uma guia interna que está colocada dentro de um rolamento. Pode-se, a princípio, pensar que a influência da força de atrito é pequena pois a atuação de uma força tangencial recebe uma reação pequena pois o movimento está praticamente liberado nesta direção. Em se tratando de um sistema com comportamento linear a introdução desta hipótese poderia ser válida. Em um sistema com comportamento altamente não linear, como é o caso dos sistemas com comportamento caótico, uma pequena força de atrito pode fazer com que o comportamento dinâmico entre em uma região de forte instabilidade quando analisado no espaço dos parâmetros. O mesmo acontece com os outros efeitos associados ao *rubbing* descritos no capítulo 2.

Uma das grandes dificuldades em encontrar um modelo adequado para o *rubbing* está em construir um bom modelo matemático para o impacto. Modelos simples, com a utilização de coeficiente de restituição por exemplo, podem não traduzir completamente o modelo físico para a linguagem matemática. Ou seja, a descrição do impacto no tempo, certamente não pode ser vista como de duração instantânea, quando se observa o fenômeno na realidade. Isto, inclusive, requer um trabalho experimental particular para que seja encontrada uma boa descrição matemática da dinâmica do impacto. Para o rotor estudado, particularmente, o fato da guia interna do mancal ter sido construída com um material altamente deformável aumenta a importância desta descrição. Mais uma vez, o comportamento altamente não linear faz crescer ainda mais a importância deste aspecto. Efeitos térmicos também devem ser considerados com extremo cuidado pelos mesmos motivos já enunciados (ver seção 2.1.1).

A construção de um modelo matemático adequado permitiria uma investigação do caos mais completa com construção de diagramas de bifurcação e observação de comportamentos estáveis e instáveis no espaço dos parâmetros com definição das rotas para o caos. O cálculo de invariantes também seria mais facilitado pois haveria um conhecimento completo do espaço em que se desenvolve a dinâmica do sistema.

Por outro lado, percorrer o caminho da determinação de características caóticas diretamente da observação experimental do sistema apresenta algumas vantagens mas também várias dificuldades. Todo o procedimento fundamenta-se na reconstrução do espaço de estado apresentado na seção 3.2. A reconstrução em si é um processo de extrema simplicidade mas depende de parâmetros que devem ser escolhidos previamente que são decisivos para que o espaço de estado tenha equivalência topológica com o original do sistema. Estes parâmetros se tornam decisivos por se tratar de um sinal obtido de um sistema real com as limitações naturais deste tipo de sinal. Destas limitações as mais importantes são a presença do ruído e impossibilidade de se medir um sinal com duração infinita. Ou seja, o tempo de duração da aquisição deve ser o maior possível. Não foi possível sistematizar um procedimento que estabelecesse um critério de escolha do tamanho adequado da série medida mas foram mostrados efeitos de tamanho da série influenciando decisivamente os expoentes de Lyapunov calculados. Quanto ao ruído foi apenas testado o uso de um filtro linear passa-baixo que mostrou-se ineficiente em separar o ruído do sinal, o que já era esperado. A razão da ineficiência dos filtros lineares em separar o ruído do sinal com caos é que os mesmos interferem na fase do sinal modifi-

cando assim uma característica sem que se saiba qual influência que isto pode resultar no comportamento não linear. A utilização de filtros de Wiener podem trazer benefícios em virtude dos mesmos não interferirem na fase. São também apresentadas algumas propostas de filtragem do sinal no espaço de estado reconstruído, relacionadas na seção 3.8 que devem ser investigadas para aplicação em problemas de origem mecânica como o apresentado neste trabalho.

A análise de características geométricas dos atratores a partir da reconstrução do espaço de estado mostrou-se insuficiente para uma completa identificação de comportamento caótico. Os retratos de fase são o que se chamaria de uma *caricatura* do atrator pois são uma visualização de um equivalente topológico do mesmo. Eles mostram a trajetória percorrida no espaço de estado reconstruído mas podem facilmente permitir interpretações equivocadas a um observador menos acostumado. A reconstrução requer, para a sua equivalência topológica, que a dimensão de mergulho seja superior à dimensão do atrator, é frequente a construção do retrato de fase em uma dimensão menor do que a real o que, na realidade, não permite a visualização do atrator e sim de uma projeção do mesmo. O mesmo se aplica aos diagramas de Poincaré. Isto reforçou a decisão de utilizar o cálculo de invariantes como elemento de investigação do caos no sistema estudado.

Dentre os invariantes, os escolhidos foram aqueles para os quais existiam algoritmos disponíveis para a sua determinação a partir da reconstrução do espaço de estado. Foram então calculadas as dimensões de capacidade, correlação e informação, os expoentes de Lyapunov e as dimensões de Lyapunov.

Os resultados obtidos com os cálculos das dimensões de capacidade, correlação e informação, não mostraram muita eficiência em identificar o caos. É difícil acreditar que seja possível obter dimensões inteiras a partir de sinais experimentais. Imprecisões na medição, presença de ruído e o fato de sempre se ter uma série de duração finita produzirão dimensões fracionárias que não estarão necessariamente associadas a um atrator caótico. A utilidade do cálculo dessas dimensões foi a de colocar um limite inferior na dimensão do atrator (e, por conseguinte, na dimensão de mergulho). O cálculo destas dimensões foi duramente influenciado pela limitação do comprimento dos sinais no tempo. Em muitos casos não foi conseguida uma convergência definitiva dos valores calculados em virtude do número de pontos adquiridos ter sido insuficiente.

O cálculo dos expoentes de Lyapunov, apesar de influenciado pela presença de ruído no sinal mostrou-se uma importante ferramenta para tentar identificar características caóticas nos sinais experimentais. Os resultados obtidos com o método dos ajustes polinomiais locais mostraram que um esforço maior pode ser concentrado na sua utilização como elemento de análise no diagnóstico de problemas de natureza caótica em sistemas mecânicos. O método que utiliza um modelo de redes neurais para estimar o mapa que descreve o comportamento do sistema no espaço de estado também parece que deve ser melhor investigado a despeito do seu alto custo computacional. A sua habilidade de calcular expoentes de Lyapunov em sinais de curta duração fazem com que o método mereça uma maior atenção. É possível que este método seja bastante útil na construção de modelos quando a rede não precisa ser reconstruída inúmeras vezes como é o caso da presente utilização. A utilização de computadores de alta velocidade (os cálculos foram realizados

predominantemente em estações SUN-SPARC 2 e IBM-RISC 6000) pode permitir o uso de redes com um número maior de unidades e até mesmo de camadas que possam permitir um melhor ajuste do mapa no espaço de estado.

Com base na análise realizada no capítulo 6 conclui-se que a identificação do caos em sinais experimentais de natureza similar aos sinais analisados neste trabalho é bem determinada pela presença de expoentes de Lyapunov positivos, calculados pelo método do ajuste local. O método que utiliza o modelo de redes neurais precisa de muito trabalho ainda para que possa ser eficiente operacionalmente. A investigação do caos em sinais experimentais através do cálculo de dimensões fractais, como já foi considerado anteriormente, não apresenta bons resultados pois é praticamente impossível obter dimensões inteiras a partir de dados experimentais.

Finalmente algumas palavras sobre a tentativa de construção de um modelo matemático para descrever o comportamento dinâmico do sistema. Alguns métodos são apresentados na literatura baseados na construção de mapas locais de evolução no espaço de estado. Entende-se que estes métodos devem ser melhor investigados pois o potencial é grande para auxiliar a análise de tendência de comportamento de sistemas mecânicos. Em virtude da complexidade do fenômeno e da dificuldade em construir um modelo completo envolvendo todas as possíveis causas existentes, capaz de reproduzir o comportamento dinâmico altamente não linear, a criação de modelos que não requerem uma completa descrição física dos elementos estruturais, pode ser de grande utilidade. Nesta classe estão os métodos citados que constroem mapas de evolução do espaço de estado reconstruído e também podem ser objeto de futuras investigações o uso de métodos baseados em modelos de redes neurais.

Bibliografia

- [1] H.D.I. Abarbanel, R. Brown, and J.B. Kadtko. Prediction and system identification in chaotic nonlinear systems: time series with broadband spectra. *Physics Letters A*, 138(8):401–408, jul. 1989.
- [2] H.D.I. Abarbanel, R. Brown, and J.B. Kadtko. Prediction in chaotic nonlinear systems: Methods for time series with broadband fourier spectra. *Physical Review A*, 41(4):1782–1807, fev. 1990.
- [3] H.D.I. Abarbanel, R. Brown, J.J. Sidorowich, and L.S. Tsimring. The analysis of observed chaotic data in physical systems. Pré-impressão, dez. 1992.
- [4] Z. Aleksic. Estimating the embedding dimension. *Physica D*, 52(2&3):362–368, set. 1991.
- [5] J.M. Balthazar. *Sobre a teoria de vibrações mecânicas não lineares: aspectos geométricos de movimentos regulares e irregulares*. PhD thesis, Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 1993.
- [6] R.F. Beatty. Differentiating rotor response due to radial rubbing. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 107(2):151–160, abr. 1985.
- [7] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory. *Meccanica*, 15:9–20, mar. 1980.
- [8] D.E. Bently. Forced subrotative speed dynamic action of rotating machinery. In *ASME Publication, 74-Pet-16*, 1974.
- [9] H.F. Black. Interaction of a whirling rotor with a vibrating stator across a clearance annulus. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 10(1):1–12, 1968.
- [10] D.S. Broomhead and G.P. King. Extracting qualitative dynamics from experimental data. *Physica D*, 20(2&3):217–236, jun./jul. 1986.
- [11] R. Brown, P. Bryant, and H.D.I. Abarbanel. Computing the lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series. *Physical Review A*, 43(6):2787–2806, mar. 1991.

- [12] P. Bryant, R. Brown, and H.D.I. Abarbanel. Lyapunov exponents from observed series. *Physical Review Letters*, 65(13):1523–1526, set. 1990.
- [13] M. Casdagli. Nonlinear prediction of chaotic time series. *Physica D*, 35(3):335–356, mai. 1989.
- [14] M. Casdagli, S. Eubank, J.D. Farmer, and J. Gibson. State space reconstruction in the presence of noise. *Physica D*, 51(1–3):52–98, ago. 1991.
- [15] R. Cawley and G.-H. Hsu. Local-geometric-projection method for noise reduction in chaotic maps and flows. *Physical Review A*, 46(6):3057–3082, set. 1992.
- [16] B. Cheng and H. Tong. On consistent non-parametric order determination and chaos. *Journal of the Royal Statistical Society*, 54(2):427–450, 1992.
- [17] D.W. Childs. Fractional-frequency rotor motion due to nonsymmetric clearance effects. *Journal of Engineering for Power*, 104(3):533–541, jul. 1982.
- [18] Y.-S. Choi and S.T. Noah. Nonlinear steady-state response of a rotor-support system. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 109(3):255–261, jul. 1987.
- [19] Y.-S. Choi and S.T. Noah. Forced periodic vibration of unsymmetric piecewise-linear systems. *Journal of Sound and Vibration*, 121(1):117–126, fev. 1988.
- [20] F.K. Choy and J. Padovan. Non-linear transient analysis of rotor-casing rub events. *Journal of Sound and Vibration*, 113(3):529–545, mar. 1987.
- [21] F.K. Choy, J. Padovan, and C. Batur. Rub interactions of flexible casing rotor systems. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 111(4):652–658, out. 1989.
- [22] F.K. Choy, J. Padovan, and J.C. Yu. Full rubs, bouncing and quasi chaotic orbits in rotating equipment. *Journal of The Franklin Institute*, 327(1):25–47, 1990.
- [23] A. Crandall. From whirl to whip in rotordynamics. In *Proceedings of 3rd International Conference on Rotordynamics*, set. 1990.
- [24] A. Crisanti, M.H. Jensen, A. Vulpiani, and G. Paladin. Strongly intermittent chaos and scaling in an earthquake model. *Physical Review A*, 46(12):R7363–R7366, dez. 1992.
- [25] S.S. Dana. *Análise dinâmica de rotores com eixo vertical*. PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, jul. 1987.
- [26] J.-P. Eckmann, S.O. Kamphorst, D. Ruelle, and S. Ciliberto. Liapunov exponents from time series. *Physical Review A*, 34(6):4971–4979, dez. 1986.

- [27] J.-P. Eckmann and David Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics - Part I*, 57(3):617–656, jul. 1985.
- [28] E.F. Ehrich and J.J. O'Connor. Stator whirl with rotors in bearing clearances. *Journal of Engineering for Industry*, 89(3):381–390, ago. 1967.
- [29] F.F. Ehrich. The dynamic stability of rotor/stator radial rubs in rotating machinery. *Journal of Engineering for Industry*, 91(4):1025–1028, nov. 1969.
- [30] F.F. Ehrich. Observations of subcritical superharmonic and chaotic response in rotordynamics. *Journal of Vibrations and Acoustics*, 114(1):93–100, jan. 1992.
- [31] J.D. Farmer, E. Ott, and J.A. Yorke. The dimension of chaotic attractors. *Physica D*, 7(1–3):153–180, mai. 1983.
- [32] J.D. Farmer and J.J. Sidorowich. Predicting chaotic time series. *Physical Review Letters*, 59(8):845–848, ago. 1987.
- [33] A.M. Fraser. Information and entropy in strange attractors. *IEEE Transactions on Information Theory*, 35(2):245–262, mar. 1989.
- [34] A.M. Fraser. Reconstructing attractors from scalar time series: a comparison of singular system and redundancy criteria. *Physica D*, 34(3):391–404, mar. 1989.
- [35] A.M. Fraser and H.L. Swinney. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. *Physical Review A*, 33(2):1134–1140, fev. 1986.
- [36] P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke, and J.A. Yorke. The liapunov dimension of strange attractors. *Journal of Differential Equations*, 49:185–207, 1983.
- [37] H. Froehling, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, N.H. Packard, and R. Shaw. On determining the dimension of chaotic flows. *Physica D*, 3(3):605–617, ago. 1981.
- [38] M. Giona, F. Lentini, and V. Cimagalli. Functional reconstruction and local prediction of chaotic time series. *Physical Review A*, 44(6):3496–3502, set. 1991.
- [39] P. Grassberger and I. Procaccia. Characterization of strange attractor. *Physical Review Letters*, 50(5):346–349, jan. 1983.
- [40] P. Grassberger and I. Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D*, 9(1&2):189–208, out. 1983.
- [41] H.S. Greenside, A. Wolf, J. Swift, and T. Pignataro. Impracticality of a box-counting algorithm for calculating the dimensionality of strange attractors. *Physical Review A*, 25(6):3453–3456, jun. 1982.
- [42] T. Ishii and R.G. Kirk. Transient response technique applied to active magnetic bearing machinery during rotor drop. In *Rotating Machinery and Vehicle Dynamics*, 1991.

- [43] J. Jiménez, J.A. Moreno, and G.J. Ruggeri. Forecasting on chaotic time series: a local optimal linear- reconstruction method. *Physical Review A*, 45(6):3553–3558, mar. 1992.
- [44] J.L. Kaplan and J.A. Yorke. Chaotic behavior in multidimensional difference equations. *Lecture Notes in Mathematics*, 730:204–227, 1979.
- [45] M.B. Kennel, R. Brown, and H.D.I. Abarbanel. Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction. *Physical Review A*, 45(6):3403–3411, mar. 1992.
- [46] Y.B. Kim and S.T. Noah. Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise-linear characteristics: a general approach. *Journal of Applied Mechanics*, 58(2):545–553, jun. 1991.
- [47] D.E. Knuth. *The art of computer programming, Vol. 3. Sorting and searching*. Addison-Wesley, 1973.
- [48] E.J. Kostelich and J.A. Yorke. Noise reduction in dynamical systems. *Physical Review A*, 38(3):1649–1652, ago. 1988.
- [49] E.J. Kostelich and J.A. Yorke. Noise reduction finding the simplest dynamical system consistent with data. *Physica D*, 41(2):183–196, mar. 1990.
- [50] Michel Lalanne and Guy Ferraris. *Rotordynamics Prediction in Engineering*. John Wiley and Sons, 1990.
- [51] P.S. Landa and M.G. Rosenblum. Time series for system identification and diagnostics. *Physica D*, 48(1):232–254, fev. 1991.
- [52] L.S. Liebovitch and T. Toth. A fast algorithm to determine fractal dimensions by box counting. *Physics Letters A*, 141(8&9):386–390, nov. 1989.
- [53] A. Lingener. Experimental investigation of reverse whirl of a flexible rotor. In *Proceedings of 3rd International Conference on Rotordynamics*, set. 1990.
- [54] R. Mañé. On the dimension of the compact invariant sets of certain non- linear maps. *Lecture Notes in Mathematics*, 898:230–242, 1981.
- [55] P.C. Muller and J. Bajkowski. Signal analysis in multibody systems. Pré-impressão, mar. 1993.
- [56] P.C Muller, J. Bajkowski, and D. Soffker. Chaotic motions and fault detection in a cracekd rotor. Pré-impressão, mar. 1992.
- [57] A. Muszynska. Partial rotor to stator rubs. In *Third International Conference on Vibrations in Rotating Machinery*, University of York, Heslington, Yorkshire, set. 1984. Institution of Mechanical Engineers.

- [58] A. Muszynska. Rotor-to-stationary element rub-related vibration phenomenon in rotating machinery - literature survey. *Shock and Vibration Digest*, 21(3):3–11, mar. 1989.
- [59] D. Nychka, S. Ellner, A.R. Gallant, and D. McCafrey. Finding chaos in noisy systems. *Journal of the Royal Statistical Society*, 54(2):399–426, 1992.
- [60] V.I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.
- [61] N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, and R.S. Shaw. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45(9):712–716, set. 1980.
- [62] B. Pompe, J. Kruscha, and R.W. Leven. State predictability, information flow in simple chaotic systems. *Zeitschrift fur Naturforschung, Teil A*, 41(6):801–818, jun. 1986.
- [63] M. Sano and Y. Sawada. Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Physical Review Letters*, 55(10):1082–1085, set. 1985.
- [64] J. Schmied and J.C. Pradetto. Experience with magnetic bearings supporting a 6mw pipeline compressor. In *ROMAG*, 1991.
- [65] S.W. Shaw and C. Pierre. Non linear modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1):170–173, 1991.
- [66] I. Shimada and T. Nagashima. A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems. *Progress of Theoretical Physics*, 61(6):1605–1616, jun. 1979.
- [67] W.M. Szczygielski. *Dynamisches Verhalten eines schnell drehenden Rotors bei Anstreifvorgängen*. PhD thesis, Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zurich, Suisse, jul. 1986.
- [68] W.M. Szczygielski and G. Schweitzer. Dynamics of a high-speed rotor touching a boundary. In *IUTAM/IFTOMM Symposium*, set. 1985.
- [69] Floris Takens. Detecting strange attractors in turbulence. *Lecture Notes in Mathematics*, 898:366–381, 1981.
- [70] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and J.A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16(3):285–317, jul. 1985.