

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO E VERIFICAÇÃO
EXPERIMENTAL DE MODELOS PARA A SOLIDI
FICAÇÃO EM GEOMETRIA ESFÉRICA

Autor: LUIZ FERNANDO MILANEZ

Orientador: KAMAL ABDEL RADÍ ISMAIL

Trabalho apresentado à Comissão de
Pós-Graduação da Faculdade de Enge
nharia de Campinas como parte dos
requisitos para a obtenção do títu
lo de Doutor em Engenharia Mecâni
ca.

CAMPINAS - 1982

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. KAMAL ABDEL RADÍ ISMAIL pela orientação deste trabalho.

Aos Profs. REZENDE GOMES DOS SANTOS , AMAURI GARCIA e SILVIA AZUCENA NEBRA pelas discussões e contribuições.

À ESCOLA SENAI ROBERTO MANGE pela usinagem do modelo experimental proposto.

Aos Srs. LUIZ ZANAGA e ALMIRO FRANCO DA SILVEIRA JUNIOR pelos serviços de laboratório.

Ao Sr. WILTON FURQUIM pelos desenhos aqui apresentados.

À Sra. TAKA OTA PERRONI pelo serviço de datilografia.

DESENVOLVIMENTO TEÓRICO E VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE MODELOS PARA A SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIA ESFÉRICA

RESUMO

O objetivo deste trabalho é a análise teórica e experimental do processo de solidificação em geometria esférica, em termos da posição da interface no tempo, da velocidade de avanço da frente de fusão, do perfil de temperatura e da taxa de transferência de calor na superfície da esfera. Inicialmente foi feita uma revisão bibliográfica detalhada dos trabalhos existentes sobre solidificação em esferas. Este trabalho foi desenvolvido em duas etapas distintas: tratamento teórico e verificação experimental. Na parte teórica foi dedicada atenção especial ao método simplificado de London & Seban por fornecer uma solução fechada, e ao método numérico de Tao para geometrias circulares. Um método numérico que utiliza malhas móveis, originalmente desenvolvido por Murray & Landis para o plano, foi aplicado para a esfera. O método integral para a solução de problemas de mudança de fase foi analisado e aplicado à geometria esférica. A partir de uma solução exata para o processo de mudança de fase no plano foi considerado um fator de correção geométrico para a obtenção de uma solução aproximada bastante simples para a esfera. Na parte experimental, foi projetada e construída uma montagem para permitir a verificação experimental do processo de solidificação em esferas e a validade dos modelos teóricos desenvolvidos.

THEORETICAL INVESTIGATION AND EXPERIMENTAL VERIFICATION OF MODELS FOR THE FREEZING PROCESS IN SPHERICAL GEOMETRY

SUMMARY

The objective of the present study is to investigate theoretically and experimentally the solidification process in spherical geometry and its major parameters such as the instantaneous position of solid liquid interface, temperature profile and heat transfer rate. A detailed literature investigation on the matter was conducted. The study is divided into two main parts; theoretical and numerical investigation and experimental verification. In the theoretical part, London & Seban's simplified model and the numerical model due to Tao were analysed, numerical model due to Murray & Landis and the integral method were applied to spherical geometry, and finally a corrected method. These models were analysed and compared one to other. Experimental testing rig was designed, installed and instrumented. Extensive testing programme was done to verify the models, establish their validity and to obtain a good insight in the problem.

Í N D I C E

CAPÍTULO 1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO	1
1.2. RESUMO DOS PRINCIPAIS ESTUDOS EM GEOMETRIAS ESFÉRICAS	2
1.3. APLICAÇÕES.....	6
1.3.1. Difusão	6
1.3.2. Solidificação de Metais em Processos de Fundição	8
1.3.3. Armazenamento de Energia	9
1.3.4. Indústria do Vidro	10
1.3.5. Geofísica	11
1.3.6. Astrofísica	11
1.4. OBJETIVOS DESTES TRABALHOS	12

CAPÍTULO 2 - O MODELO SIMPLIFICADO

2.1. DESCRIÇÃO DO MODELO	16
2.2. CIRCUITO TÉRMICO DO SISTEMA	17
2.3. ANÁLISE DO PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO	18
2.4. COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR INFÍNITO	20
2.5. TAXAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	21
2.6. RESULTADOS E DISCUSSÕES	22

CAPÍTULO 3 - O MÉTODO NUMÉRICO

3.1. INTRODUÇÃO	34
3.2. O MÉTODO DAS MALHAS FIXAS	35
3.3. O MÉTODO DAS MALHAS MÓVEIS	38
3.4. RESULTADOS DO MODELO DE MALHAS MÓVEIS	45

CAPÍTULO 4 - O MÉTODO INTEGRAL

4.1. DESCRIÇÃO DO MÉTODO	79
4.2. O PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIA ESFÉRICA	81
4.3. O PERFIL DE TEMPERATURA PARA GEOMETRIA ES- FÉRICA	82
4.4. SOLUÇÃO SIMPLIFICADA	83
4.5. SOLUÇÃO INTEGRAL	84
4.6. RESULTADOS	91

CAPÍTULO 5 - O MÉTODO CORRIGIDO

5.1. INTRODUÇÃO	121
5.2. PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO PARA ANÁLISE CINÉ- TICA DE SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIA ESFÉRI- CA	122
5.3. RESULTADOS	127

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE EXPERIMENTAL

6.1. INTRODUÇÃO	149
6.2. EQUIPAMENTO	149

6.2.1. Forno de Resistência Elétrica	150
6.2.2. Molde	150
6.2.3. Sistema de Refrigeração	151
6.2.4. Dispositivo para Medida do Avanço da Frente de Solidificação	152
6.2.5. Sistema de Medida de Temperaturas .	152
6.2.6. Materiais Utilizados	152
6.3. PROCEDIMENTO	152
6.4. RESULTADOS	155
6.5. ANÁLISE DE ERROS	157
6.6. O EFEITO DA RADIAÇÃO	158

CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES

7.1. O MODELO SIMPLIFICADO	192
7.2. O MÉTODO NUMÉRICO	193
7.3. O MÉTODO INTEGRAL	193
7.4. O MÉTODO CORRIGIDO	194
7.5. ANÁLISE EXPERIMENTAL	195

APÊNDICE A.1 - PROGRAMA DE COMPUTADOR DO MÉTODO NUMÉRICO DE MALHAS MÓVEIS	196
--	-----

APÊNDICE A.2 - RESULTADOS OBTIDOS POR L.C. TAO	198
--	-----

APÊNDICE A.3 - SOLUÇÃO EXATA PARA O PLANO PELO SISTEMA VIR- TUAL	206
---	-----

SIMBOLOGIA UTILIZADA	211
----------------------------	-----

REFERÊNCIAS	213
-------------------	-----

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE O PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO

1.1. INTRODUÇÃO

Problemas de transferência de calor em regime transiente envolvendo fusão e solidificação são importantes em muitas aplicações na engenharia tais como na fabricação do gelo, congelamento de alimentos, solidificação de metais na fundição, armazenamento de energia na forma de calor latente, etc. A solução destes problemas é difícil porque a interface entre as fases líquida e sólida move-se à medida que o calor latente está sendo absorvido ou liberado. Na solidificação de substâncias puras, como a água, a solidificação ocorre numa temperatura definida, e as fases líquida e sólida são separadas por uma fronteira móvel identificada. Na solidificação de misturas, ligas e materiais impuros a solidificação pode ocorrer ao longo de uma faixa de temperatura e as fases líquida e sólida podem estar separadas por uma região móvel de duas fases.

As primeiras soluções analíticas foram obtidas por Lamé & Clapeyron [34] em 1831 e por Stefan [78] em 1891 para o problema da formação do gelo. Embora estes sejam os trabalhos mais antigos, a solução exata de um problema mais geral de mudança de fase foi discutida por Franz Neumann em suas aulas em 1860, porém suas anotações somente foram publicadas em 1912. Franz Neumann, ao que parece, foi o primeiro a mostrar que uma expressão envolvendo a função erro de Gauss era a solução da equação diferencial da condução de calor com solidificação numa geometria plana semi-infinita. Esta solução de Neumann relaciona a distribuição de temperatura e a espessura do gelo em função do tempo, quando a superfície de uma grande quantidade de água tem sua temperatura baixada para valores inferiores ao ponto de congelamento. Esta solução mostra que para um congelamento unidirecional, a espessura do gelo é proporcional à raiz quadrada do tempo. Usando esta relação juntamente com dados observados na formação do gelo, Neumann obteve um valor para a condutividade do gelo dentro de uma precisão de 10%.

A solução de Neumann foi desenvolvida de uma forma diferente por Lightfoot [41] que foi o primeiro a utilizar este estudo para a análise da solidificação de lingotes de aço. No modelo de Lightfoot, a frente de solidificação era considerada uma fonte móvel de calor e o molde era considerado como tendo as mesmas propriedades do aço solidificado. Schwarz [70] generalizou a forma da solução para levar em conta as diferenças de propriedades entre o metal e o molde. Esta solução considera o crescimento unidimensional da camada de metal sólido a partir de uma parede plana do molde em condições de região semi-infinita. Não são disponíveis soluções analíticas para a solidificação em moldes cilíndricos e esféricos.

1.2. RESUMO DOS PRINCIPAIS ESTUDOS EM GEOMETRIAS ESFÉRICAS

Um dos primeiros trabalhos para analisar o processo de solidificação em geometrias esféricas foi desenvolvido por London & Seban [42] em 1943. Este modelo é de certa forma muito simplificado pois considera desprezível o sub resfriamento da camada solidificada em relação ao calor latente de fusão. Em outras palavras, não leva em consideração a variação da energia interna da calota esférica solidificada à medida que a frente de solidificação vai se deslocando para o centro da esfera. Esta simplificação fornece bons resultados para números de Stefan relativamente baixos. O número de Stefan é uma relação entre o calor sensível e o calor latente do material. A simplificação proposta por London & Seban produz bons resultados para números de Stefan menores que a unidade, porque nestes casos, o calor sensível (energia interna) sendo menor que o calor latente de fusão reforça a hipótese simplificadora. Um caso típico onde esta simplificação se mostra adequada é no processo de fusão e formação do gelo. Em 1945, Seban & London [43] realizaram medidas experimentais em tomates (95% de água) considerados como esfera de 60mm de diâmetro e o tempo de solidificação medido através da inserção de termopares diferiu em 11% dos seus resultados teóricos.

Em 1948 Paschkis [57] desenvolveu um método analógico para o estudo da solidificação em esferas de aço. Num método analógico o sistema térmico é substituído por um circuito elétrico

análogo composto de resistores e capacitores, em regime transiente. Paschkis dividiu o sistema em várias partes iguais, cada uma representada por uma resistência elétrica e um capacitor. As resistências elétricas simulam a resistência térmica ao fluxo de calor e os capacitores simulam o efeito do calor específico. A precisão do método está diretamente ligada ao conhecimento preciso das propriedades térmicas dos meios envolvidos e da sua variação durante o processo. Paschkis concluiu que erros nos valores do calor específico e do calor latente influem sensivelmente nos resultados, ao passo que erros na condutividade térmica têm influência bem menor [56].

Em 1954, Kreith & Romie [33] apresentaram uma solução para a determinação da posição da interface sólido líquido e para a temperatura superficial em geometrias esféricas. O modelo desenvolvido admite por hipóteses que o material tem uma temperatura de fusão definida, que inicialmente toda a fase líquida está na temperatura de fusão e que todas as propriedades do material são uniformes e constantes. Além destas hipóteses, foi admitido que o gradiente de temperatura da fase solidificada na interface é constante, o que equivale a admitir que a velocidade da frente de fusão é constante. Estas hipóteses resultam numa equação cuja solução para a distribuição da temperatura é obtida por um método de aproximações sucessivas, onde a temperatura é expressa por meio de uma série. Entretanto os autores verificaram que não era possível um processo de solidificação com as hipóteses admitidas, ou seja, com a velocidade da frente de fusão mantida constante durante todo o processo. À medida que a interface vai se aproximando do centro da esfera no processo de solidificação, a temperatura superficial da esfera necessária para manter esta condição é maior que a temperatura de fusão do material.

Em 1958 Longwell [44] utilizou uma técnica gráfica para obter valores numéricos para problemas unidimensionais de solidificação, incluindo geometrias esféricas. Para fronteiras estacionárias as equações diferenciais para cada fase são facilmente resolvidas pelo método gráfico de Schmidt. Entretanto, para uma interface móvel é necessário considerar uma série de posições fixas da interface, expressando o balanço de energia nesta interface na forma de diferenças finitas. Este método considera o superaquecimento da fase líquida do material a ser solidifica-

do. Para o desenvolvimento do seu método, o autor considerou que a transferência de calor no sólido e no líquido se dá por condução apenas.

Em 1966 Langford [37] apresentou uma solução fechada para o processo de solidificação no interior de esferas. Neste trabalho foi considerado que a solidificação ocorre numa temperatura definida, que todo o líquido se encontra nesta temperatura de fusão e ainda que a velocidade da frente de fusão é mantida constante durante todo o processo. Num trabalho posterior [36] o mesmo Langford obteve outra solução fechada para o problema mas para uma condição de contorno diferente na interface. Neste caso foi considerada uma relação não linear entre as derivadas de ordem um e de ordem dois da posição da frente de fusão no tempo para geometrias esféricas.

Dos métodos numéricos desenvolvidos para a análise da solidificação em geometrias circulares, o mais conhecido é o de Tao [81] publicado em 1967. O método analisa o processo de solidificação em cilindros e esferas considerando um coeficiente de transferência de calor médio e constante entre a superfície externa do material que se solidifica e o fluido refrigerante. Tao empregando um sistema de malhas fixas, determinou a posição da interface sólido líquido em função do tempo e o perfil de temperatura no sólido no instante final da solidificação para casos genéricos, sem considerar algum caso específico aplicado.

Em 1968 Megerlin [45] obteve uma solução por meio de série para a equação da condução com mudança de fase para geometria esférica admitindo um perfil polinomial para a temperatura.

A técnica da colocação do sistema de coordenadas esféricas na forma de um sistema retangular pela utilização do produto raio-temperatura como variável foi utilizada em 1970 por Cho & Sunderland [9] para obter uma correção a ser aplicada à geometria plana a fim de produzir resultados aproveitáveis para a geometria esférica. Desta forma foi obtido um fator aproximado de correção para a geometria esférica que é bastante válido no início do processo de solidificação mas que se desvia à medida que a interface se aproxima do centro da esfera. A precisão do método é melhor para números de Stefan pequenos.

Em 1971 Shih & Chou propuseram um método iterativo de

aproximações sucessivas [76] para o estudo da solidificação em esferas. Os resultados, comparados com métodos numéricos, se mostraram satisfatórios exceto para valores de Stefan altos e Biot baixos. Uma aproximação até terceira ordem se mostrou suficiente. Os autores também observaram que nesta técnica de resolução, a transformação convencional do sistema de coordenadas esféricas na forma de um sistema retangular não produzia resultados convergentes.

Em 1973 Pedroso e Domoto [61] aplicaram a técnica da perturbação para o estudo da solidificação no interior de esferas. Foi considerada a situação onde a temperatura da superfície esférica era mantida constante e além disso, as propriedades do material já solidificado foram consideradas constantes. Foi aplicada uma transformação não linear na sequência das somas parciais na solução da perturbação para aumentar o campo de aplicação. Para a solidificação no interior de esferas a solução regular da perturbação diverge para posições da interface próximas do centro da esfera. Para solucionar este problema da divergência da solução nas posições próximas do centro, os autores apresentaram ainda em 1973 um outro trabalho onde a solução na forma de série foi modificada para garantir a convergência [60].

Um estudo analítico para a solidificação no interior de esferas e cilindros foi apresentado em 1974 por Riley, Smith e Poots [64]. Entre outras hipóteses, este tratamento considera propriedades térmicas constantes para o material e número de Stefan menor que a unidade. As soluções obtidas são na forma de séries sendo efetuada uma análise para acomodar a variação brusca que ocorre no perfil de temperatura um pouco antes da solidificação do centro da esfera. Embora a teoria seja de natureza estritamente assintótica, os resultados obtidos estão razoavelmente próximos das soluções numéricas para número de Stefan igual a 0,1.

Em 1977 Kern & Wells apresentaram um artigo [31] tratando da solidificação em geometrias cilíndricas e esféricas descrevendo um modelo físico que pode ser resolvido para coeficiente de transferência de calor finito ou infinito, sendo que este último equivale a uma temperatura de parede especificada. O modelo é baseado na hipótese de um perfil linear de temperatura na camada solidificada associado a um termo que corresponde à remoção da energia interna desta camada. Como resultado são obtidas expressões simplificadas para o tempo de solidificação em função da variável

espacial. Os resultados obtidos através desta técnica apresentam erros inferiores a 10% quando comparados com resultados numéricos. Este trabalho admite a possibilidade do líquido estar numa temperatura acima da temperatura de fusão (superaquecimento). Neste caso, o calor sensível do superaquecimento é adicionado ao calor latente do material sendo este valor corrigido do calor latente utilizado nas fórmulas propostas.

1.3. APLICAÇÕES

1.3.1. Difusão

A analogia entre os fenômenos da transferência de calor e da transferência de massa permite que os resultados desenvolvidos neste trabalho também sejam válidos para fenômenos de difusão [13].

Difusão é o fenômeno pelo qual a matéria é transportada de uma parte do sistema para outra, como resultado do movimento irregular das moléculas - não há direção preferencial deste movimento.

A teoria matemática da difusão em substâncias isotrópicas baseia-se na hipótese que a transferência de massa da substância em difusão, por unidade de área de uma seção, é proporcional ao gradiente de concentração medido normalmente à seção. Este fator de proporcionalidade é a difusividade de massa, também conhecida como coeficiente de difusão. Esta relação é conhecida como lei de Fick. Portanto na difusão, um gradiente de concentração provoca um fluxo de massa.

Na transferência de calor por condução, o fluxo de calor por unidade de área de uma seção é proporcional ao gradiente de temperatura medido normalmente à seção. Este fator de proporcionalidade é a condutividade térmica. Esta relação é conhecida como Lei de Fourier da condução. Portanto na transferência de calor por condução, um gradiente de temperatura provoca um fluxo de calor. A Lei de Fourier pode ainda ser colocada de outra forma. Dividindo-se a condutividade térmica pela densidade e pelo calor específico e multiplicando-se a temperatura por estas mesmas quantidades de modo a não se alterar a expressão, o fluxo de

calor fica sendo dado pelo produto da difusividade térmica pelo gradiente de concentração térmica. A concentração térmica é uma grandeza física definida como o produto da temperatura pela densidade pelo calor específico.

Portanto, um exame da Lei de Fick da difusão e da Lei de Fourier da condução, mostra que estas duas leis são análogas, dadas por expressões da forma

$$\text{fluxo} = (\text{difusividade}) \times (\text{gradiente de concentração})$$

Isto significa que na difusão, um fluxo de massa é dado pelo produto da difusividade de massa pelo gradiente de concentração de massa. Na condução de calor, um fluxo de calor é dado pelo produto da difusividade térmica pelo gradiente de concentração térmica. As duas difusividades, a de massa e a térmica, têm as mesmas dimensões.

Da mesma maneira, a equação geral da difusão é análoga à equação geral da condução. A equação geral da difusão diz que a variação da concentração de massa no tempo é igual ao produto da difusividade de massa pelo laplaciano da concentração de massa. Analogamente, a equação geral da condução diz que a variação da concentração térmica no tempo é igual ao produto da difusividade térmica pelo laplaciano da concentração térmica.

Problemas de difusão com fronteiras móveis:

Uma classe geral de problemas de difusão ocorre quando algumas moléculas ficam imobilizadas e não podem prosseguir no processo de difusão. Isto pode ocorrer devido a uma reação química quando as moléculas em difusão ou são precipitadas ou formam um novo composto químico imóvel. Também podem ocorrer tipos menos específicos de adsorção em posições localizadas. Estes processos de imobilização considerados são irreversíveis e tão rápidos comparados com a taxa de difusão, que podem ser considerados instantâneos. Somente um número limitado de moléculas pode ser imobilizado num determinado volume do meio. Exemplos desta situação são a difusão do oxigênio no músculo, onde o oxigênio se combina com o ácido láctico; a reação de íons Cu^+ com grupos CS_2 à medida que se difundem em xantato de celulose; e a difusão de

ções de periodato em fibras de celulose e a sua remoção pela combinação com grupos glucose da celulose. Uma característica essencial do problema idealizado da difusão acompanhada da imobilização instantânea e irreversível de um número limitado de moléculas em difusão é que existe uma fronteira definida movendo-se através do meio. Ela separa a região onde todas as posições estão ocupada. Na frente da fronteira móvel, a concentração das moléculas em difusão livre é zero e atrás dela, a imobilização é completa. Este problema matemático é o mesmo da transferência de calor num meio que sofre mudança de fase numa temperatura determinada num processo de absorção ou liberação de calor latente. A Figura 1.1 ilustra esta situação.

Características da difusão:

Enquanto que formalmente a matemática da transferência de calor e da difusão seja a mesma, duas propriedades importantes nos sistemas práticos tendem a ser diferentes para os dois fenômenos. Enquanto o coeficiente de transferência de calor (condutividade) pode variar com a temperatura, em geral o campo de variação é muito menor que o correspondente coeficiente de difusão que pode variar até 100 vezes ou mais numa experiência. O coeficiente de difusão frequentemente cresce linearmente ou exponencialmente com o aumento da concentração e desta forma é preferível uma solução numérica em vez da tentativa de uma solução analítica baseada na hipótese de coeficiente de difusão constante. A segunda diferença é que a reação de imobilização geralmente provoca uma variação de volume em um dos lados da fronteira móvel. Este fenômeno provoca um movimento relativo do meio muito mais significativo do que no fenômeno análogo de transferência de calor com mudança de fase.

1.3.2. Solidificação de Metais em Processos de Fundição

Os processos de fabricação de peças metálicas utilizando a solidificação são conhecidos e aplicados de forma empírica há milhares de anos. Como em geral acontece com processos muito antigos e tradicionais a fundição se desenvolveu tecnologicamente por tentativas não havendo a preocupação de uma análise científica do processo de solidificação. Entretanto, a intensificação de processos que envolvem a fusão e a solidificação na produção de peças desde as mais simples até aquelas que exigem alto grau de

precisão tornou necessário um estudo científico do fenômeno.

Praticamente todas as peças metálicas, com exceção daquelas obtidas pelo processo de sinterização, passam por um processo de fusão e solidificação em alguma etapa de sua fabricação. Isto pode ocorrer tanto diretamente, na fundição de peças utilizando moldes com o formato desejado, quanto indiretamente na obtenção de lingotes para posterior fabricação de peças através de algum processo de conformação (usinagem, forjamento, etc).

Em geral a velocidade de propagação da interface sólido-líquido durante a solidificação é controlada pela taxa de remoção de calor nesta interface. Em muitos casos de interesse prático a única maneira do calor ser removido é por condução através do metal já solidificado. Portanto a taxa de solidificação somente pode ser obtida pela análise das variações térmicas e das distribuições de temperatura no sólido. Estes efeitos entretanto devem ser compatíveis com a condução de calor no molde. O primeiro passo para a compreensão do fenômeno é isolar o metal do molde e considerar o fluxo de calor no metal separadamente usando a mais simples das condições de contorno: temperatura de superfície constante.

Se uma massa semi-infinita de metal líquido, inicialmente a uma temperatura uniforme pouco acima do ponto de fusão tem sua superfície repentinamente resfriada e mantida abaixo da temperatura de fusão vai ocorrer a solidificação de acordo com a relação parabólica desenvolvida por Neumann. Em qualquer geometria finita, o superaquecimento é dissipado logo no início do processo sendo que quase toda a solidificação ocorre com o líquido substancialmente na temperatura de fusão [5]. Portanto é analiticamente mais simples considerar o metal líquido inicialmente na sua temperatura de fusão, introduzindo depois uma correção para o superaquecimento de tal refinamento se fizer necessário. De qualquer maneira, o efeito do superaquecimento é em geral muito pequeno para metais pois calorificamente o superaquecimento é apenas uma pequena parte do calor a ser removido durante a solidificação.

1.3.3. Armazenamento de Energia

As aplicações de energia solar em grande escala, tanto para produção de potência quanto para processos industriais de-

pendem fundamentalmente de um sistema de armazenamento capaz de fornecer e absorver calor nas quantidades necessárias. Um sistema de armazenamento eficiente é uma peça vital de um equipamento de conservação de energia. Os problemas típicos envolvidos nos sistemas convencionais de armazenamento são a capacidade de armazenamento e a taxa de calor transferido pelo sistema. O problema da capacidade de armazenamento pode ser resolvido pela utilização de um material que muda de fase durante o processo, e o problema da taxa de calor transferido pode ser solucionado pelo emprego de um leito fixo ou até mesmo um leito fluidizado.

Baseados nestas observações, Milanez & Ismail [47] propuseram um armazenador de calor latente com fluidização. Neste sistema, um material que armazena energia na forma de calor latente está contido em pequenas cápsulas cilíndricas, ou preferivelmente esféricas, de alumínio fluidizadas num meio líquido. Este equipamento pode ser utilizado inicialmente como leito fixo, o que por si só já representa uma elevada taxa de transferência de calor em relação aos sistemas convencionais. Nos instantes em que houver necessidade de uma maior taxa de transferência de calor, a descarga do fluido pode ser aumentada até valores acima da velocidade mínima de fluidização quando então ocorre a fluidização e o coeficiente de transmissão de calor chega a ser de duas a quatro vezes maior que o coeficiente de transmissão de calor no leito fixo. A quantidade de calor transferida pode ser aumentada ainda mais através de agitações periódicas de todo o sistema [20]. Tal equipamento está mostrado na Figura 1.2.

1.3.4. Indústria do Vidro

Quando se consideram os problemas de fronteira móvel na indústria do vidro [22], e também em outras indústrias, deve-se determinar o que se deseja da análise. Uma solução exata de um problema bem definido raramente é a prioridade maior. Uma solução numérica parece ser preferível a um tratamento analítico aproximado.

O primeiro problema a ser considerado é a fusão da mistura, a base da fabricação do vidro. A mistura que é constituída de areia, cal, cinza e outros constituintes em menores proporções é aquecida juntamente com resíduos de vidro provenientes de perdas durante o processamento. A condutividade térmica da mistu

ra é baixa e desta forma o interior da mistura não é afetado antes que a superfície comece a se fundir, e a interface entre o vidro fundido e a mistura fria move-se através da mistura, caracterizando uma fronteira móvel. Todas as reações químicas ocorrem a uma temperatura bem definida (850°C) com uma taxa de transferência de calor conhecida. A mistura é aquecida principalmente por cima, e embora as principais reações ocorram por volta de 850°C a areia não se dissolve imediatamente no líquido resultante até que a mistura atinja 1450°C . Um aumento rápido na condutividade térmica com a temperatura, e a incerteza com relação aos valores reais da condutividade, são os únicos fatores que complicam a análise deste processo.

1.3.5. Geofísica

Problemas que envolvem fronteiras móveis com mudança de fase com transferência de calor e difusão ocorrem em quase todos os campos da geofísica [82]. O congelamento de corpos aquosos é um exemplo.

Fronteiras de mudança de fase são muito importantes na meteorologia. A fronteira inferior de uma nuvem representa um caso de convecção através de uma fronteira de fase.

Estudos mais complexos da física das nuvens necessitam de estimativas do transporte turbulento e são semi-quantitativos. A falta de compreensão dos processos de nucleação e formação de gotas dificulta uma análise quantitativa.

1.3.6. Astrofísica

Há cerca de 50 anos vem sendo estudado o interior das estrelas, e sua evolução com o tempo. Estes estudos explicam razoavelmente bem as poucas propriedades medidas diretamente na maioria das estrelas [16]. A compreensão de certos fenômenos só foi aprimorada de 20 anos para cá com o aparecimento de computadores mais eficientes. As equações supostas adequadas são poucas e simples, pelo menos se considerarmos uma simetria esférica (irrotacional, não magnética, isolada) para as estrelas.

1.4. OBJETIVOS DESTE TRABALHO

Na análise dos processos de fusão e solidificação as dificuldades são tanto maiores quanto mais complexa a geometria. Desta forma, a geometria plana tem sido a mais estudada, tanto analítica como experimentalmente, para a qual já foram obtidas algumas soluções exatas. Para geometrias cilíndricas e esféricas, as poucas soluções desenvolvidas são quase todas baseadas em aproximações matemáticas para a solução das equações diferenciais que descrevem o fenômeno ou numéricas.

Os objetivos do presente trabalho são:

- 1.4.1. Análise completa de um método simplificado que não considera a variação da energia interna da calota esférica já solidificada.
- 1.4.2. Desenvolvimento de um método numérico para a análise da cinética e das distribuições de temperatura no processo de solidificação em geometrias esféricas. Na ausência de um método exato para esta geometria, este método será adotado como referência para comparação com os demais métodos desenvolvidos neste trabalho.
- 1.4.3. Revisão biográfica e análise de um método integral aproximado para o estudo do fenômeno da solidificação. Aplicação deste método para geometrias esféricas.
- 1.4.4. Análise de um método exato já existente para geometrias planas. A partir deste estudo e juntamente com os resultados obtidos numericamente, obtenção de um fator de correção que aplicado aos parâmetros desenvolvidos para o plano, forneça resultados que sejam válidos para a esfera, dentro de uma faixa de precisão aceitável na engenharia.
- 1.4.5. Projeto e construção de um dispositivo para simular a solidificação radial utilizando um molde refrigerado a água e a ar com formato conveniente para simular a

geometria esférica e ao mesmo tempo permitir a medi-
da da cinética de solidificação e dos perfis de tempe-
ratura no material.

- 1.4.6. Determinação experimental da cinética e das distribui-
ções de temperatura durante o processo de solidifica-
ção para o chumbo e o estanho, solidificados em mol-
des esféricos refrigerados, para duas condições de
resfriamento: água e ar.
- 1.4.7. Comparação dos métodos desenvolvidos recomendando o
melhor método e o mais viável para cada aplicação.

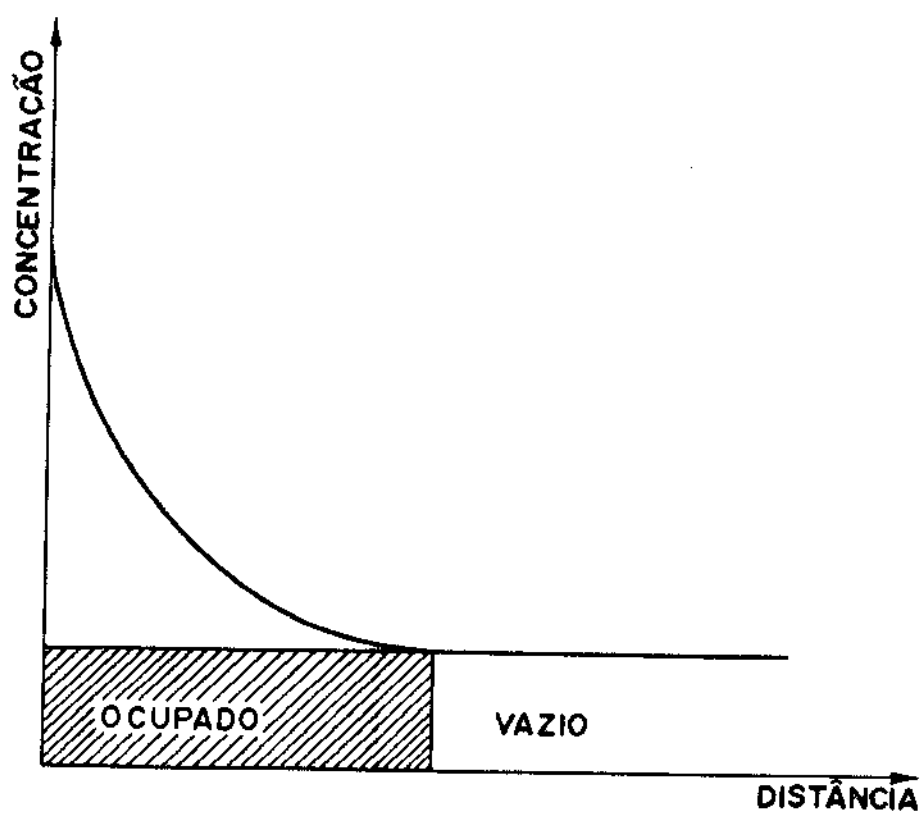


Fig. 1.1 Difusão de partículas que são aprisionadas em regiões imóveis.

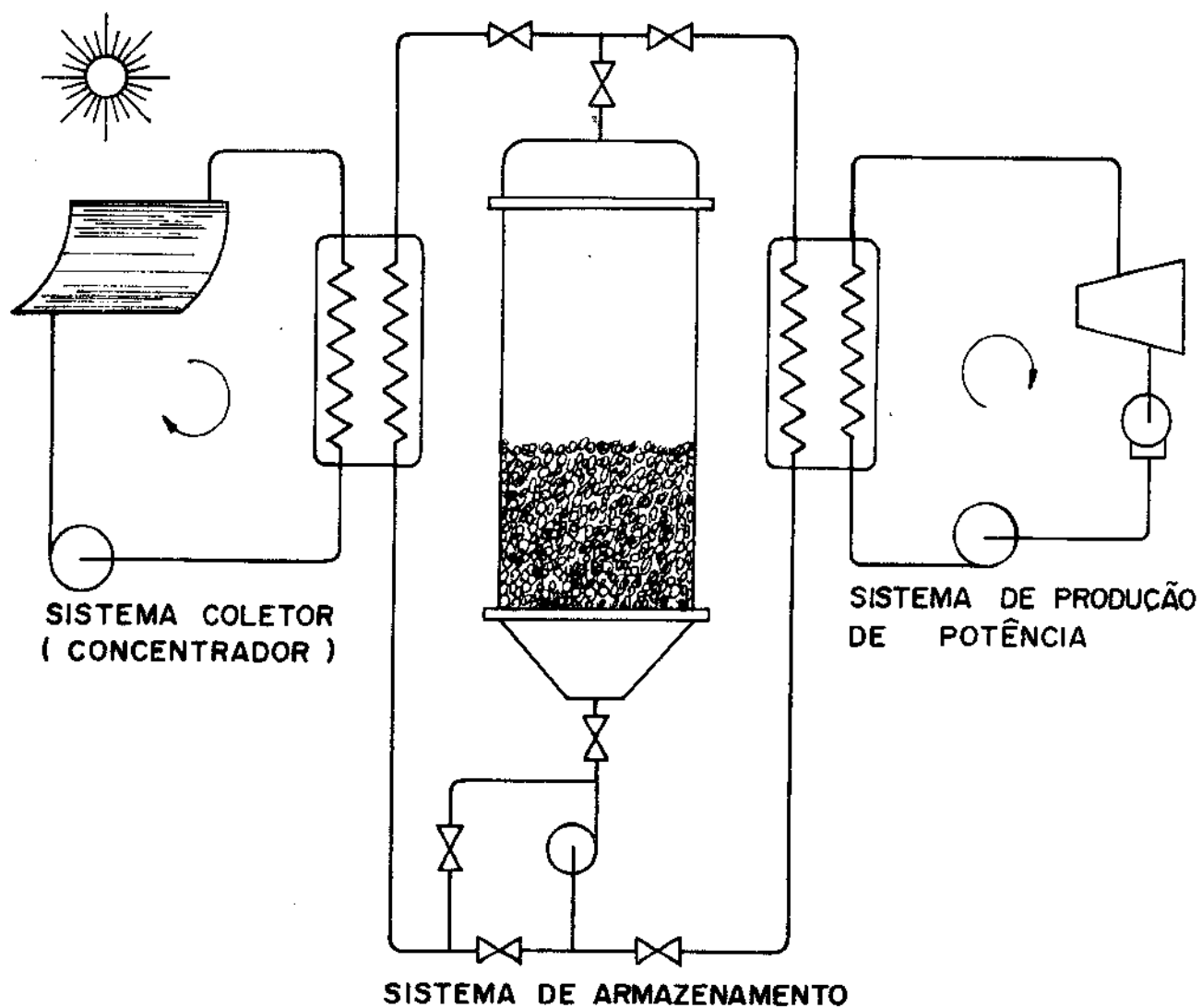


Fig. 1.2 Sistema de armazenamento para produção de potência a partir de energia solar.

CAPÍTULO 2

O MODELO SIMPLIFICADO

2.1. DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo simplificado a ser analisado neste capítulo para o processo de solidificação em geometrias esféricas foi idealizado por London & Seban [42].

Será analisado aqui o processo de solidificação com as equações valendo igualmente para o processo de fusão. O sistema a ser estudado está esquematizado na Figura 2.1.

Consideremos uma esfera de raio R inicialmente cheia de material líquido na temperatura de fusão T_f . A esfera é resfriada por um fluido à temperatura constante T_∞ . A transferência de calor entre a parede da esfera e o fluido é controlada pelo coeficiente de película h considerado constante. As propriedades térmicas do material como a densidade ρ calor específico c e a condutividade k são consideradas constantes durante todo o processo.

O calor é transferido da frente de fusão até o fluido de resfriamento, no processo de solidificação. Consideremos este fluxo de calor controlado por duas resistências térmicas: a resistência oferecida pela casca esférica solidificada e a resistência convectiva do lado externo da esfera. Se a resistência térmica oferecida pela parede da esfera (idealmente metálica) for significativa em relação à resistência convectiva, também deverá ser considerada na análise. Esta resistência pode ser incluída numa resistência externa global que seria a soma da resistência convectiva do fluido de resfriamento com a resistência térmica de condução da parede da esfera.

A hipótese simplificadora fundamental deste modelo é que o calor sensível devido ao sub resfriamento da parede solidificada é desprezível em relação ao calor latente de fusão L , ou seja,

$$\frac{c(T_f - T_\infty)}{L} \ll 1 \quad (2.1)$$

2.2. CIRCUITO TÉRMICO DO SISTEMA

A suposição de que o calor sensível do material solidificado é muito menor que o calor latente de fusão tem como implicação que a calota esférica solidificada transfere calor como se estivesse em equilíbrio. Desta forma, a resistência térmica de condução desta calota esférica pode ser escrita como

$$R_k = \frac{R - r_f}{4\pi k R r_f} \quad (2.2)$$

A resistência térmica de convecção no contorno externo da esfera pode ser expressa por

$$R_h = \frac{1}{4\pi R^2 h} \quad (2.3)$$

Assim, o fluxo de calor que está sendo removido do interior da esfera é dada por

$$Q_o = \frac{T_f - T_\infty}{R_k + R_h} \quad (2.4)$$

O circuito térmico equivalente deste modelo está representado na Figura 2.2. Neste circuito, a corrente térmica Q (fluxo de calor) necessária ao processo de solidificação passa através da resistência de condução da camada solidificada R_k que é variável de acordo com a espessura desta camada, e a seguir passa pela resistência de convecção R_h no contorno externo da esfera. Desta forma o calor é transferido desde o material líquido que por hipótese se encontra na temperatura de fusão T_f , até o ambiente envolvido por um fluido na temperatura T_∞ .

2.3. ANÁLISE DO PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO

O fluxo de calor necessário para solidificar um volume $4\pi r^2 dr$ num tempo dt é

$$Q_f = -4\pi \rho L r_f^2 \frac{dr_f}{dt} \quad (2.5)$$

Como neste modelo simplificado este fluxo de calor Q_f é igual ao fluxo de calor Q_0 que está sendo removido do interior da esfera, igualando os fluxos

$$-4\pi \rho L r_f^2 \frac{dr_f}{dt} = \frac{T_f - T_\infty}{\frac{R - r_f}{4\pi k R r_f} + \frac{1}{4\pi R^2 h}} \quad (2.6)$$

$$-\rho L r_f^2 \frac{dr_f}{dt} \left[\frac{R - r_f}{k R r_f} + \frac{1}{R^2 h} \right] = T_f - T_\infty \quad (2.7)$$

Integrando,

$$\frac{1}{6} - \frac{k}{3Rh} \left[\left(\frac{r_f}{R} \right)^3 - 1 \right] - \left(\frac{r_f}{R} \right)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{r_f}{R} \right) \right] = \frac{T_f - T_\infty}{\rho L R^2} kt \quad (2.8)$$

É conveniente que a solução obtida esteja na forma adimensional. Introduzindo as variáveis adimensionais

$$\begin{aligned} X &= 1 - \frac{r}{R} & \epsilon &= 1 - \frac{r_f}{R} \\ \tau &= \frac{at}{R^2} & \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty} \end{aligned} \quad (2.9)$$

O sistema descrito por estas novas variáveis está esquematizado na Figura 2.3.

Por conveniência, sejam os parâmetros

$$Ste = \frac{c(T_f - T_\infty)}{L} \quad \text{número de Stefan} \quad (2.10)$$

$$Bi = \frac{hR}{k} \quad \text{número de Biot} \quad (2.11)$$

Após estas definições, a equação (2.7) pode ser utilizada para fornecer a velocidade de avanço da frente de fusão na forma adimensional.

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{Ste \ Bi}{Bi \ \epsilon(1-\epsilon) + (1-\epsilon)^2} \quad (2.12)$$

A integral desta expressão fornece a relação entre a posição da frente de fusão e o tempo de solidificação.

$$\tau = \frac{1}{Ste} \left\{ \frac{1}{6} - \frac{(1-\epsilon)^3 - 1}{3 \ Bi} - (1-\epsilon)^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1-\epsilon}{3} \right] \right\} \quad (2.13)$$

Ou rearranjando,

$$\tau = \frac{1}{Ste} \left[\left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^3}{3} \right) + \frac{1}{Bi} \left(\epsilon - \epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3} \right) \right] \quad (2.14)$$

O tempo de solidificação completa pode ser obtido fazendo $\epsilon=1$, e assim

$$\tau = \frac{1}{Ste} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3 \ Bi} \right) \quad (2.15)$$

O perfil de temperatura pode ser obtido através da comparação do fluxo de calor retirado na frente de fusão com o fluxo de calor numa posição genérica da calota solidificada.

$$\frac{T_f - T_\infty}{\frac{R-r_f}{4\pi k Rr_f} + \frac{1}{4\pi R^2h}} = \frac{T - T_\infty}{\frac{R-r}{4\pi k Rr} + \frac{1}{4\pi R^2h}} \quad (2.16)$$

Simplificando, rearranjando e adimensionalizando

$$\theta = \frac{\frac{X}{1-X} + \frac{1}{Bi}}{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{1}{Bi}} \quad (2.17)$$

Está claro portanto que os números de Stefan e Biot vão determinar o comportamento do sistema. Isto porque o número de Stefan fornece um balanço das energias na forma sensível e latente que o sistema pode entregar e o número de Biot caracteriza a relação entre a resistência térmica interna e a superficial.

2.4. COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR INFINITO

Podemos agora considerar o caso particular onde o coeficiente de transferência de calor por convecção é muito grande, ou seja, um número de Biot tendendo ao infinito. Esta condição de contorno é equivalente a uma temperatura superficial constante no contorno da esfera. Com esta nova hipótese simplificadora, as expressões já desenvolvidas podem ser novamente escritas para $Bi \rightarrow \infty$ como:

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{Ste}{\epsilon(1-\epsilon)} \quad (2.18)$$

$$\tau = \frac{1}{Ste} \left[\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^3}{3} \right] \quad (2.19)$$

$$\theta = \left(\frac{X}{1-X} \right) \left(\frac{1-\epsilon}{\epsilon} \right) \quad (2.20)$$

2.5. TAXAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Para o estudo de armazenadores de energia que utilizam material que muda de fase durante o processo, o que interessa são as taxas de transferência de calor. As equações até aqui desenvolvidas não fornecem uma relação explícita do fluxo de calor em função do tempo, mas do fluxo de calor em função da variável espacial. Assim,

$$Q_o = \frac{T_f - T_\infty}{\frac{R-r_f}{4\pi k R r_f} + \frac{1}{4\pi R^2 h}} \quad (2.21)$$

Esta expressão pode ser adimensionalizada [30] definindo-se um fluxo de calor adimensional:

$$\psi_o = \frac{q_o}{k L/c R} \quad (2.22)$$

onde

$$q_o = \frac{Q_o}{4\pi R^2} \quad (2.23)$$

Desta forma,

$$\psi_o = \frac{Q_o}{4\pi R k L/c} \quad (2.24)$$

Introduzindo (2.21) em (2.24)

$$\psi_o = \frac{Ste}{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{1}{Bi}} \quad (2.25)$$

Considerando-se ainda que neste modelo

$$q_f r_f^2 = q_o R^2 \quad (2.26)$$

pode-se calcular o calor adimensional entregue na frente de fusão

$$\psi_f = \frac{1}{(1-\epsilon)^2} \frac{\frac{Ste}{\epsilon} + \frac{1}{1-\epsilon}}{\frac{Ste}{Bi} + \frac{1}{1-\epsilon}} = \frac{Ste Bi}{Bi (1-\epsilon) + (1-\epsilon)^2} \quad (2.27)$$

2.6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A hipótese simplificadora fundamental deste modelo é que o calor sensível devido ao sub resfriamento da parede solidificada é desprezível em relação ao calor latente de fusão. Portanto este método é adequado para materiais que apresentem números de Stefan pequenos, da ordem de 10^{-1} ou menores.

As expressões aqui desenvolvidas foram calculadas para um número de Stefan igual a 0,1 que é um valor significativo para que se estabeleça um parâmetro de comparação com resultados mais elaborados. Na ausência de um método exato para o estudo da solidificação em geometrias esféricas, o padrão para comparação será o resultado obtido através de um método numérico. Este método está desenvolvido no próximo capítulo mas os resultados para $Ste=0,1$ já são utilizados neste capítulo sendo representados nos gráficos pelas linhas cheias.

A Figura 2.4 representa a posição da frente de fusão no tempo para $Ste=0,1$ e para diversos valores do número de Biot, a saber 1, 2, 5, 10 e ∞ . Os resultados obtidos segundo o modelo simplificado estão representados pelas linhas tracejadas. Para o número de Stefan considerado, o tempo de solidificação calculado segundo o modelo simplificado apresenta boa concordância com os resultados numéricos. No início do processo de solidificação os resultados simplificado e numérico são praticamente coincidentes. À medida que a frente de solidificação se aproxima do centro da esfera, o tempo de solidificação de uma determinada espessura segun

do o modelo simplificado tende a ser menor que o tempo calculado segundo o método numérico. Isto é explicado pela hipótese do modelo simplificado que despreza o calor sensível devido ao sub resfriamento da parede solidificada, e portanto o tempo de solidificação será menor do que o calculado segundo o método numérico que inclui este calor. A diferença entre os tempos de solidificação aumenta à medida que a frente de solidificação se dirige para o centro da esfera porque no início do processo a espessura solidificada é pequena e o calor sensível devido ao sub resfriamento é também pequeno. À medida que a espessura solidificada aumenta, aumenta a influência do calor sensível.

As Figuras 2.5 e 2.6 mostram a velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste=0,1$ e para números de Biot iguais a 1,10 e ∞ . O ponto mínimo de velocidade da frente de fusão da solução simplificada pode ser calculada a partir da equação (2.12) com a condição

$$\frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{d\epsilon}{d\tau} \right) = 0 \quad (2.28)$$

o que resulta em

$$\epsilon = \frac{2 - Bi}{2 - 2Bi} \quad (2.29)$$

As linhas tracejadas representam os resultados simplificados e as linhas cheias os resultados numéricos. Novamente podemos perceber nestes gráficos o efeito da hipótese simplificadora deste modelo que despreza o calor sensível do material solidificado. Neste modelo simplificado, à medida que a frente de solidificação se aproxima do centro da esfera sua velocidade tende a ser um pouco maior do que a calculada através do método numérico, pois não levando em conta o sub resfriamento do material já solidificado, a quantidade de calor a ser removida da esfera é menor. À medida que aumenta a espessura solidificada, aumenta a influência do calor sensível.

A Figura 2.7 representa o fluxo de calor adimensional

ψ_0 na borda da esfera em função do tempo adimensional τ . O fluxo de calor calculado pelo modelo simplificado tende a ser menor que o resultado numérico pois não está incluído neste fluxo o calor sensível do material solidificado. As diferenças são acentuadas com o aumento da espessura solidificada, o que evidencia a influência do sub resfriamento.

Finalmente as Figuras 2.8 a 2.10 apresentam os perfis de temperatura na fase solidificada para número de Stefan igual a 0,1 e números de Biot iguais a 1,10 e ∞ . As pequenas diferenças existentes entre os perfis de temperatura simplificados e os perfis numéricos são devidos à hipótese do modelo simplificado que a calota esférica solidificada transfere calor como se estivesse em equilíbrio, ou seja, o perfil de temperatura para uma determinada espessura solidificada é igual a uma distribuição em regime permanente.

Pode-se notar então que para $Ste=0,1$ a concordância entre os resultados obtidos segundo o modelo simplificado e os resultados numéricos é boa. Esta concordância tende a aumentar para números de Stefan menores. Para valores do número de Stefan até a unidade, os resultados ainda apresentam uma aproximação razoável.

Como já foi mencionado anteriormente, não existe um método analítico exato para o processo de mudança de fase em geometrias esféricas. Entretanto, é necessário que seja adotado um método para servir de referência e padrão de comparação para os métodos simplificados e aproximados desenvolvidos para geometrias esféricas. O método simplificado de London & Seban revisado aqui neste capítulo teve de ser comparado com um método mais geral para ser avaliado. Este método deve ser o mais geral possível e o que mais se aproxime do comportamento real. Neste sentido, o método numérico é o que se enquadra nestas condições e por este motivo este método será considerado no próximo capítulo.

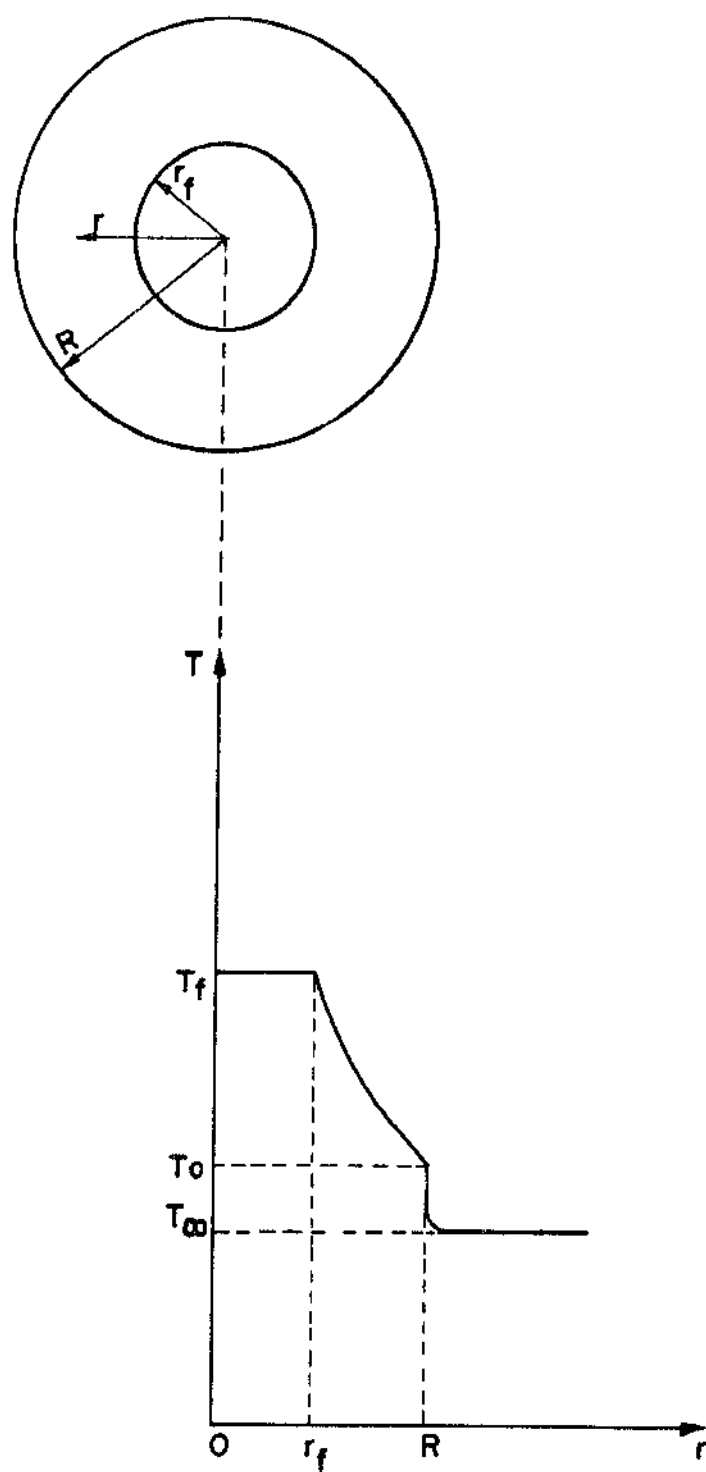


Fig. 2.1 Representação esquemática do modelo.

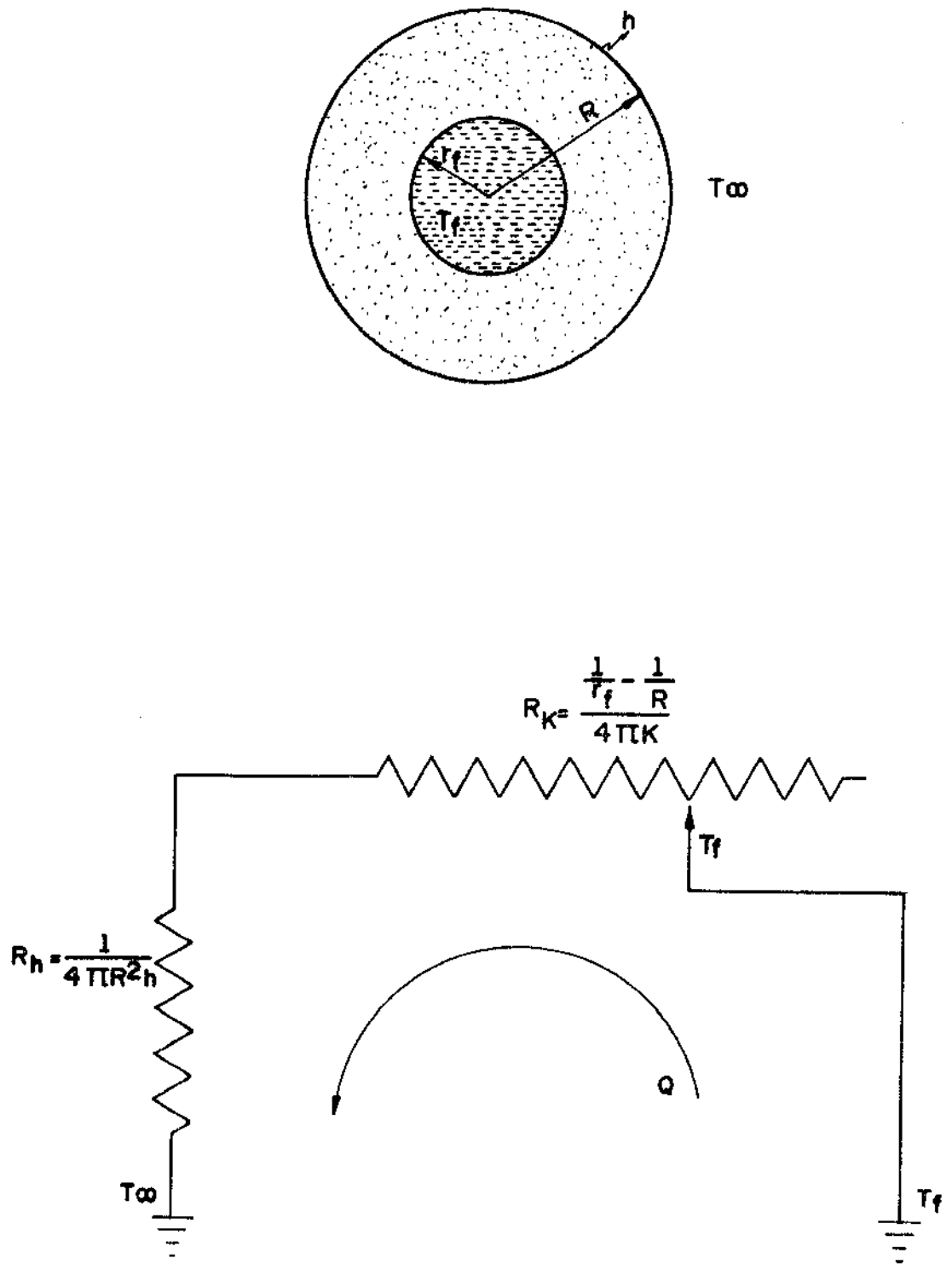


Fig. 2.2 Circuito térmico do sistema.

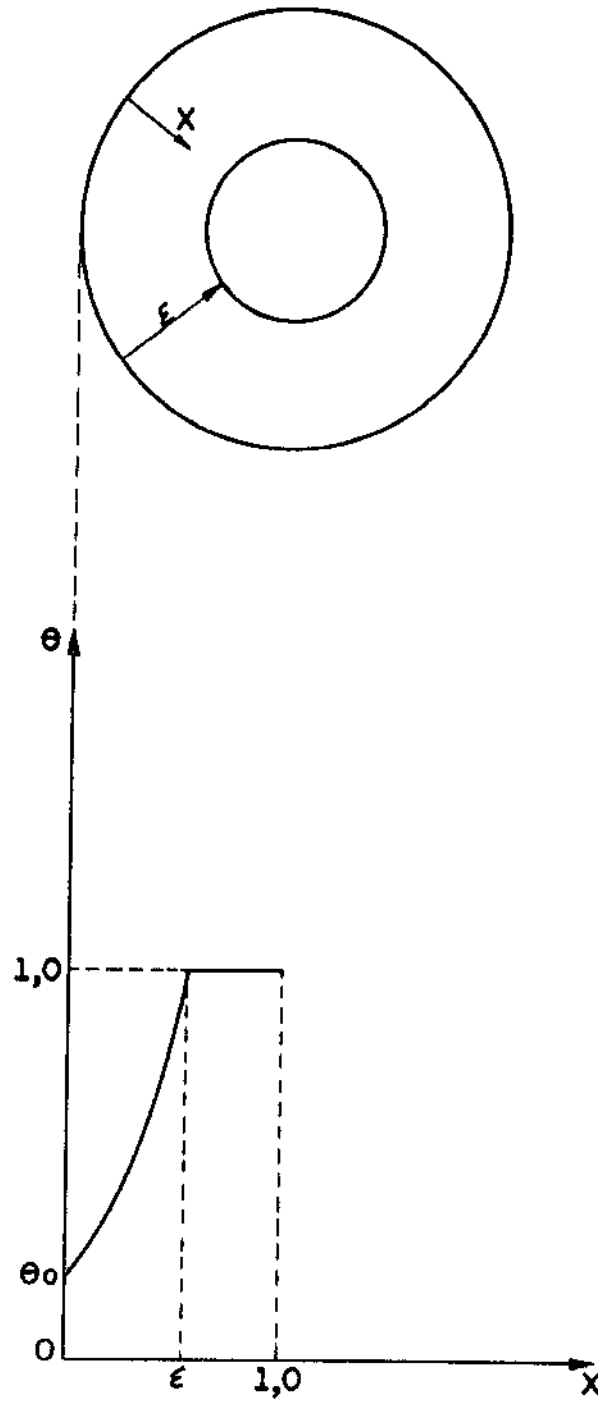


Fig. 2.3 Representação esquemática do modelo adimensionalizado.

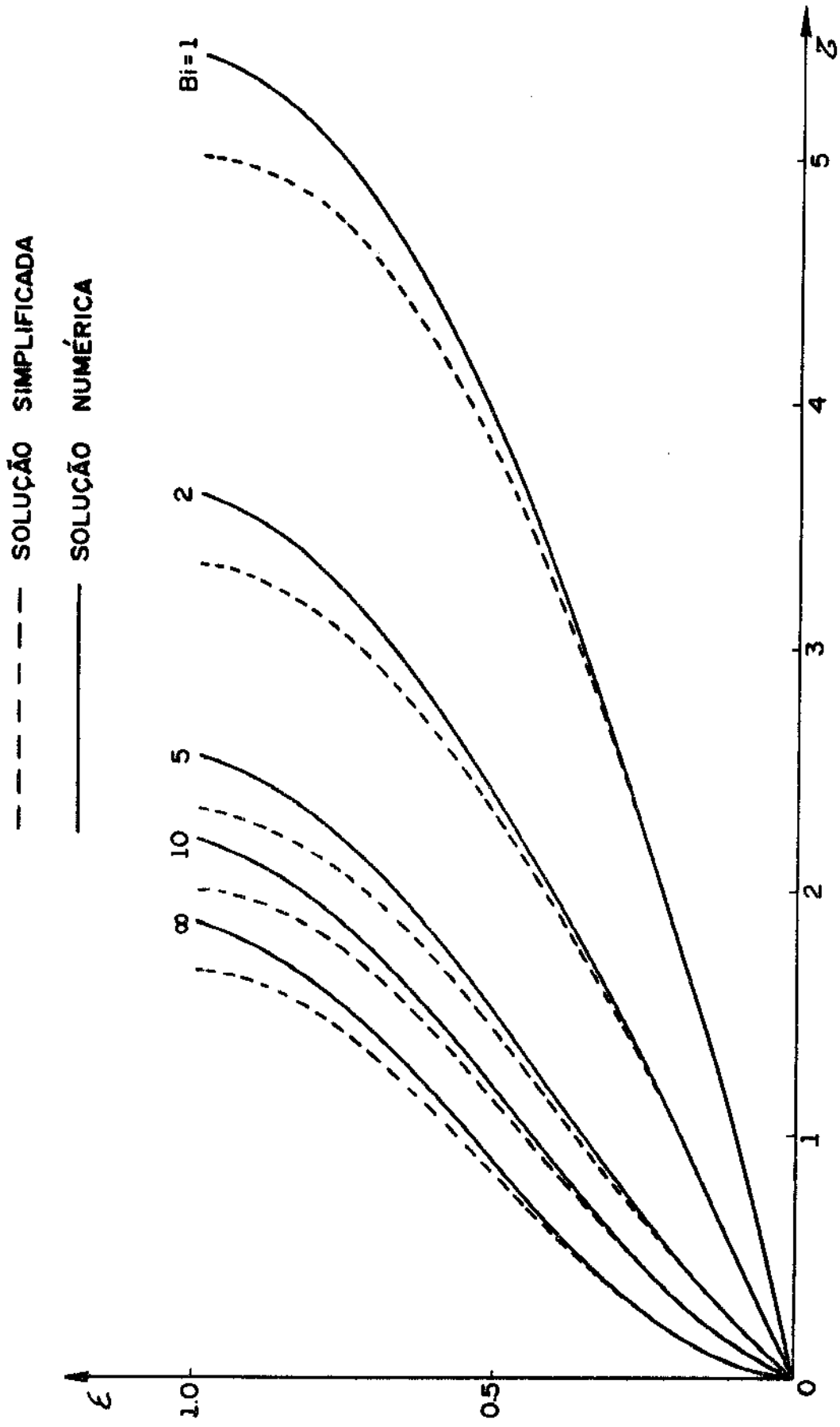


Fig. 2.4 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 0.1$

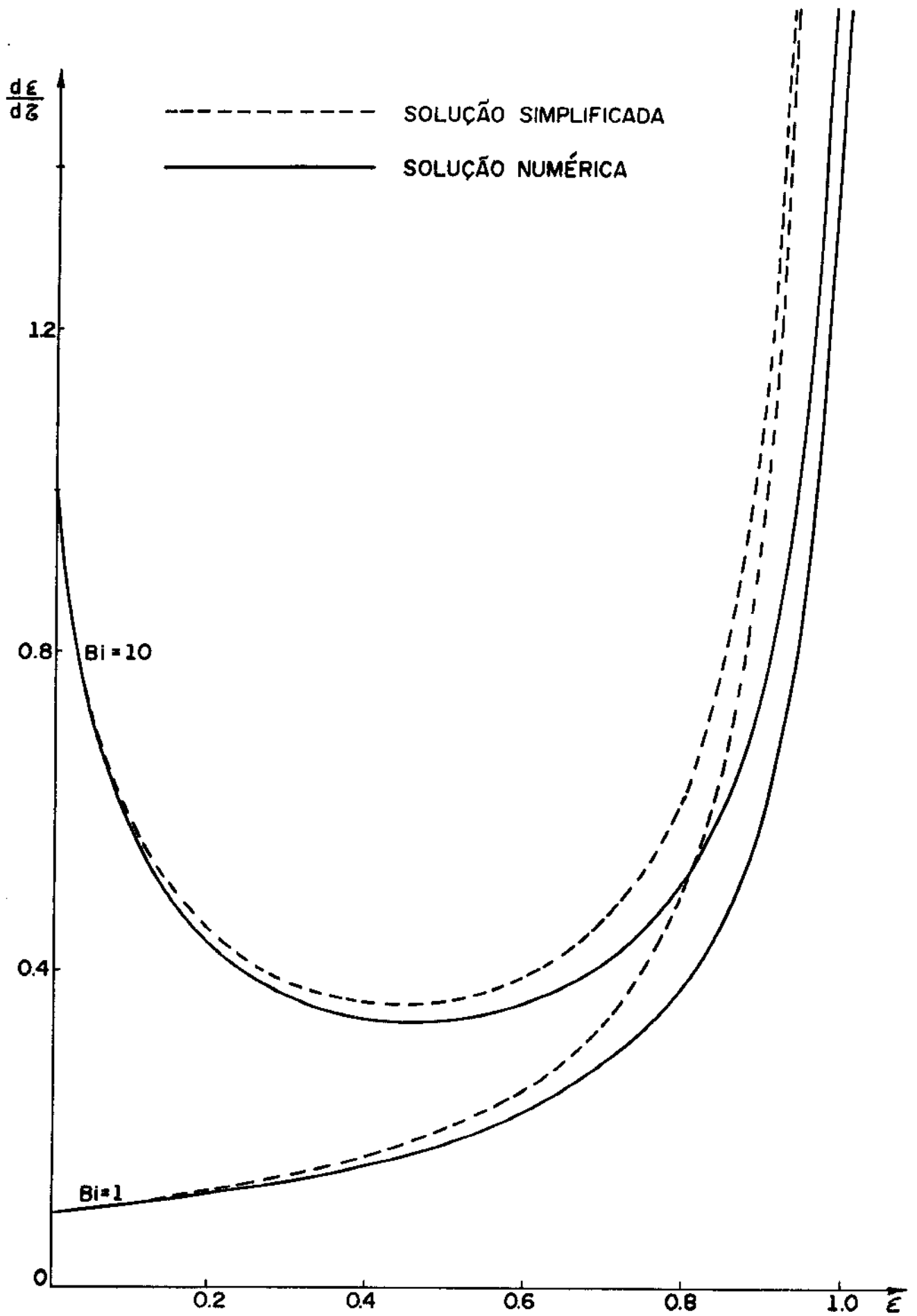


Fig. 2.5 Velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste = 0.1$

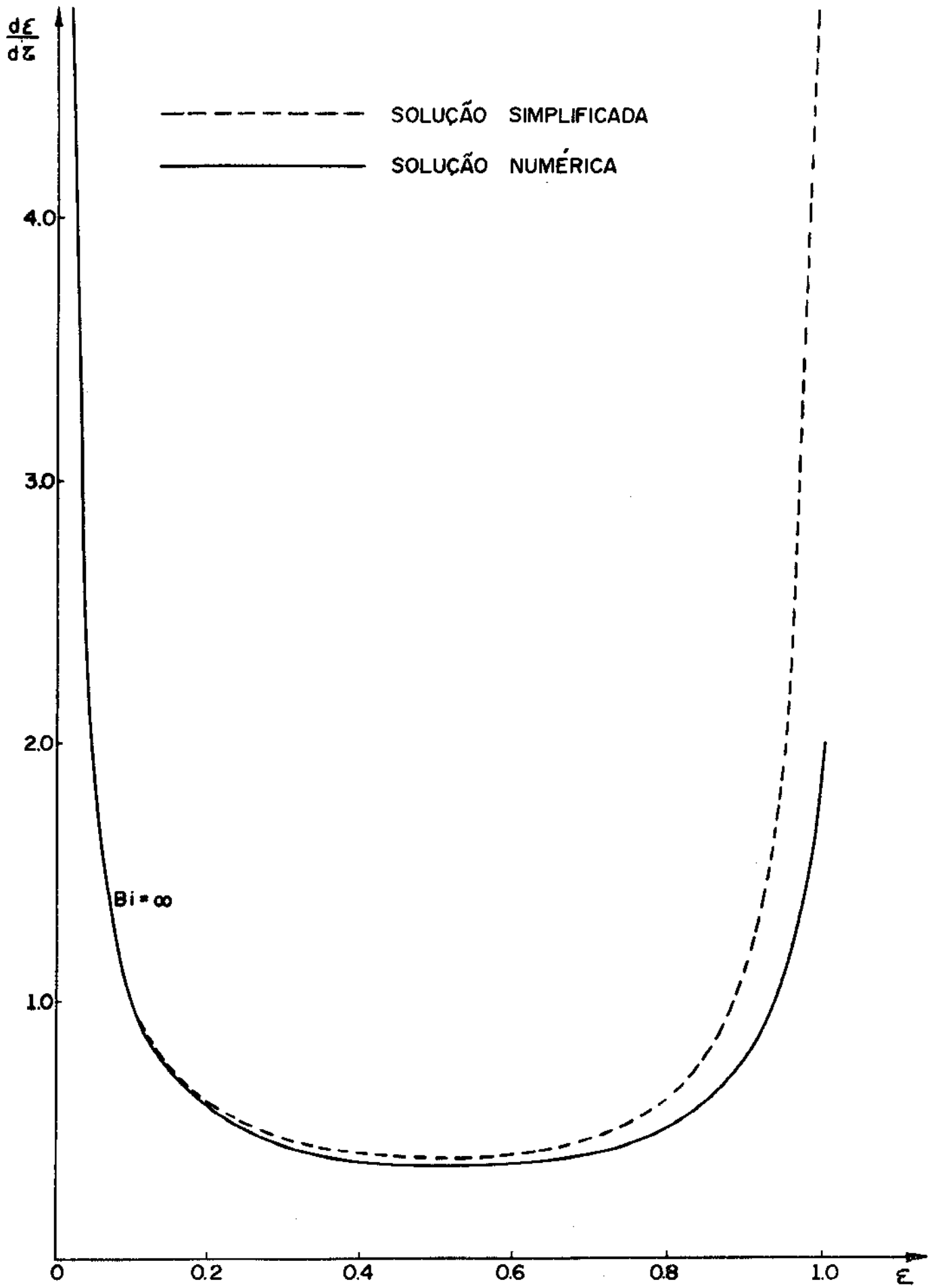


Fig. 2.6 Velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste = 0.1$

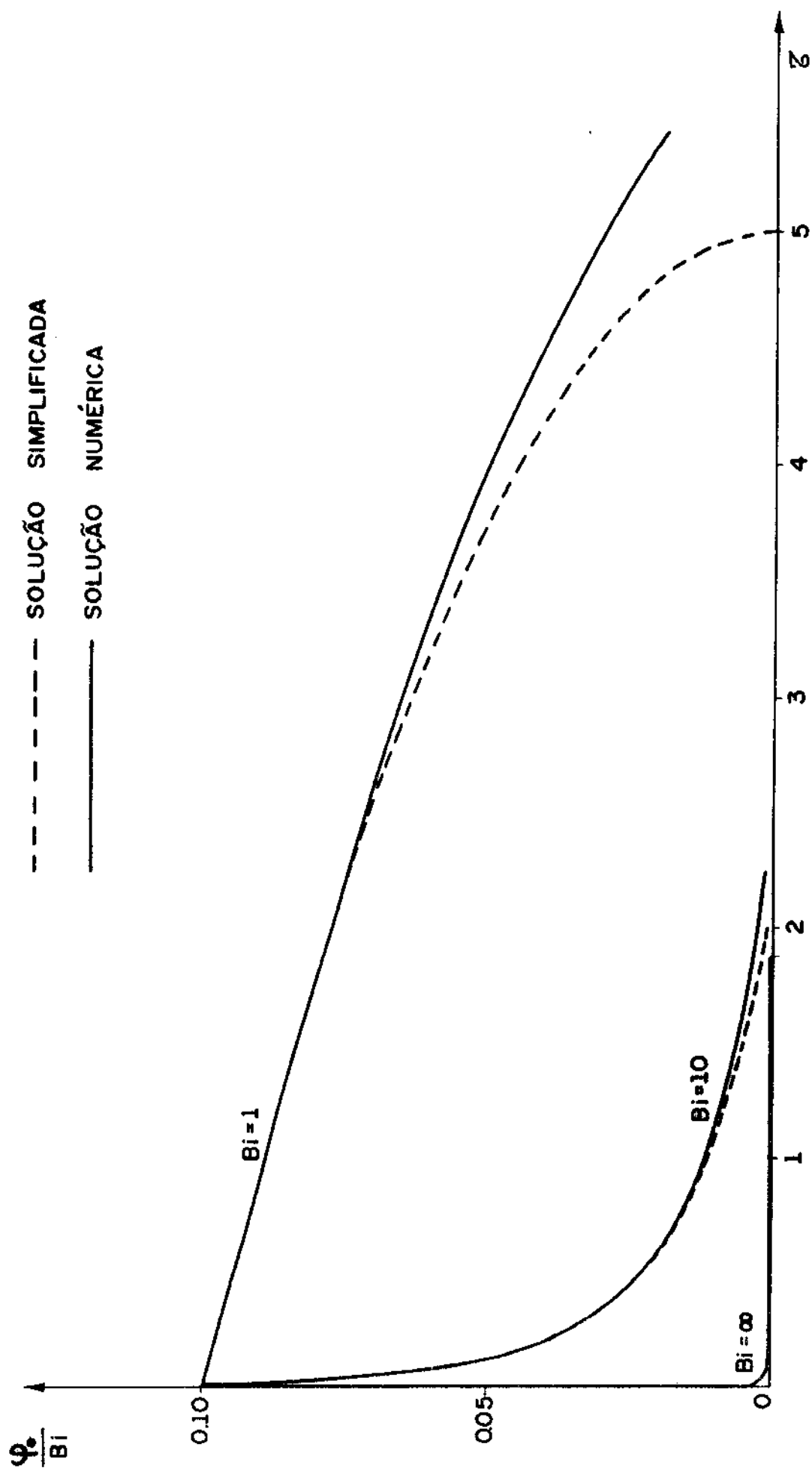


Fig. 2.7 Fluxo de calor adimensional ϕ_0 na borda da esfera em função do tempo adimensional τ para $Ste=0.1$

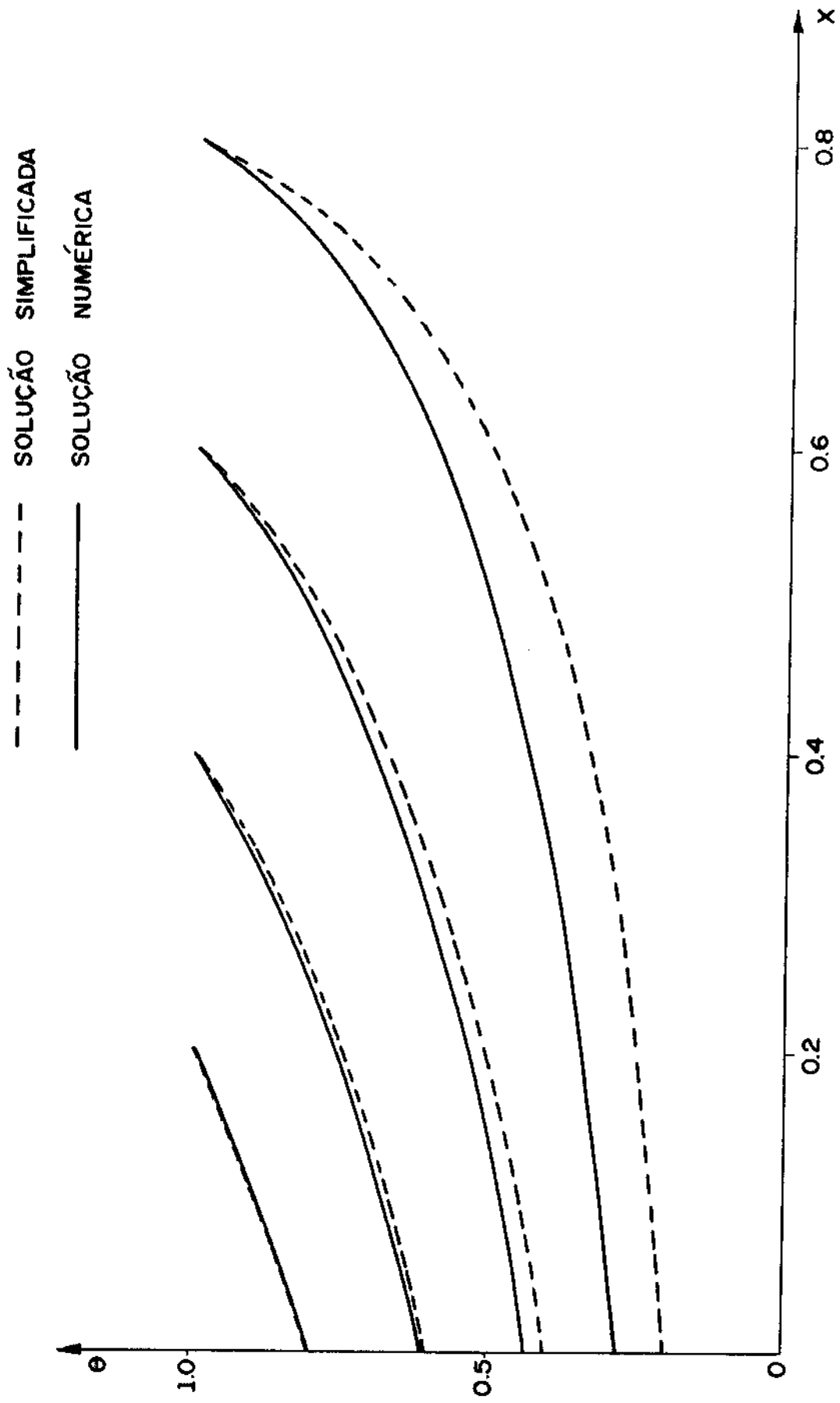


Fig. 2.8 Perfis de temperatura na fase solidificada $Ste=0.1$ $Bi=1$

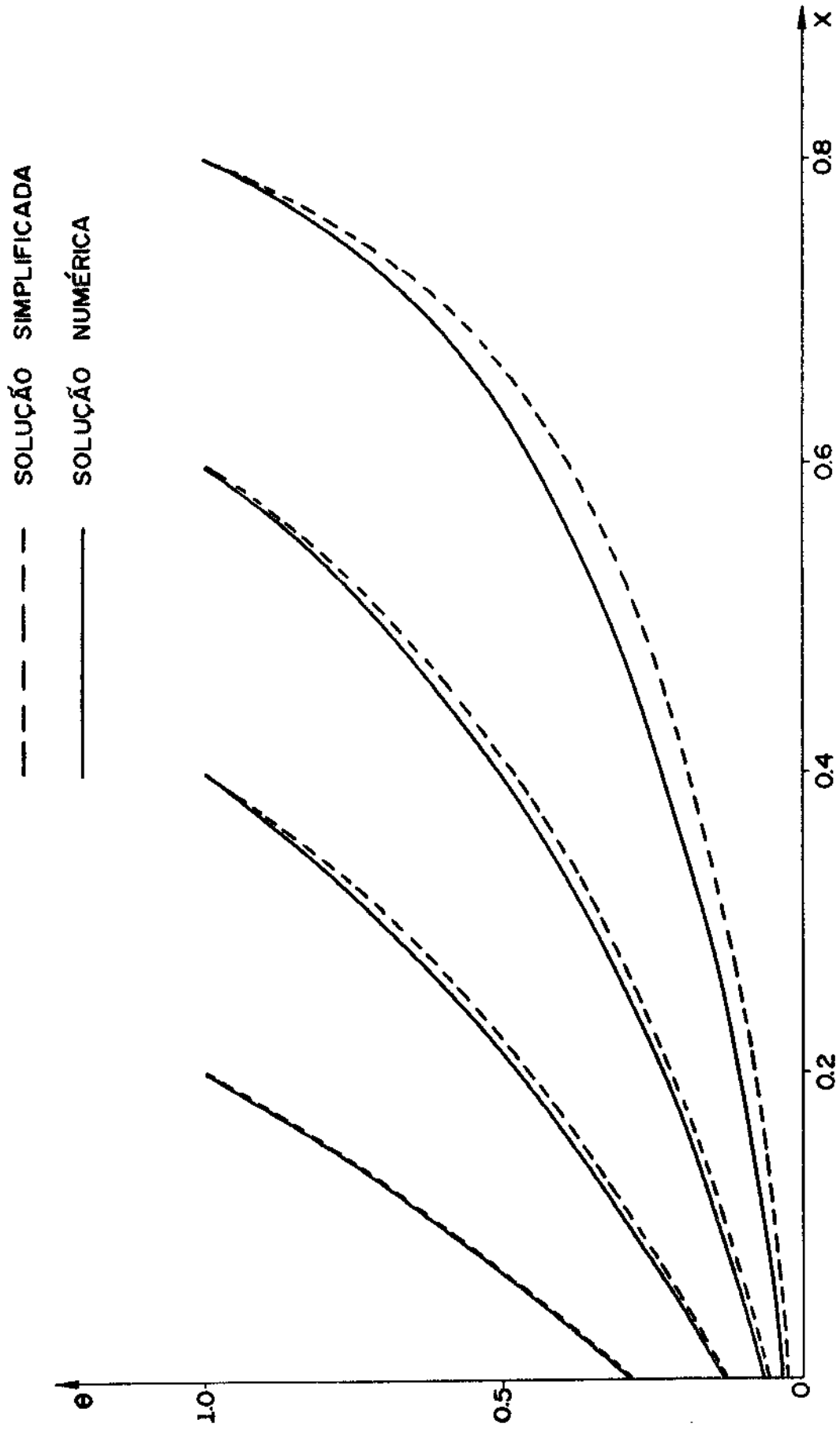


Fig. 2.9 Perfis de temperatura na fase solidificada $Ste = 0.1$ $Bi = 10$

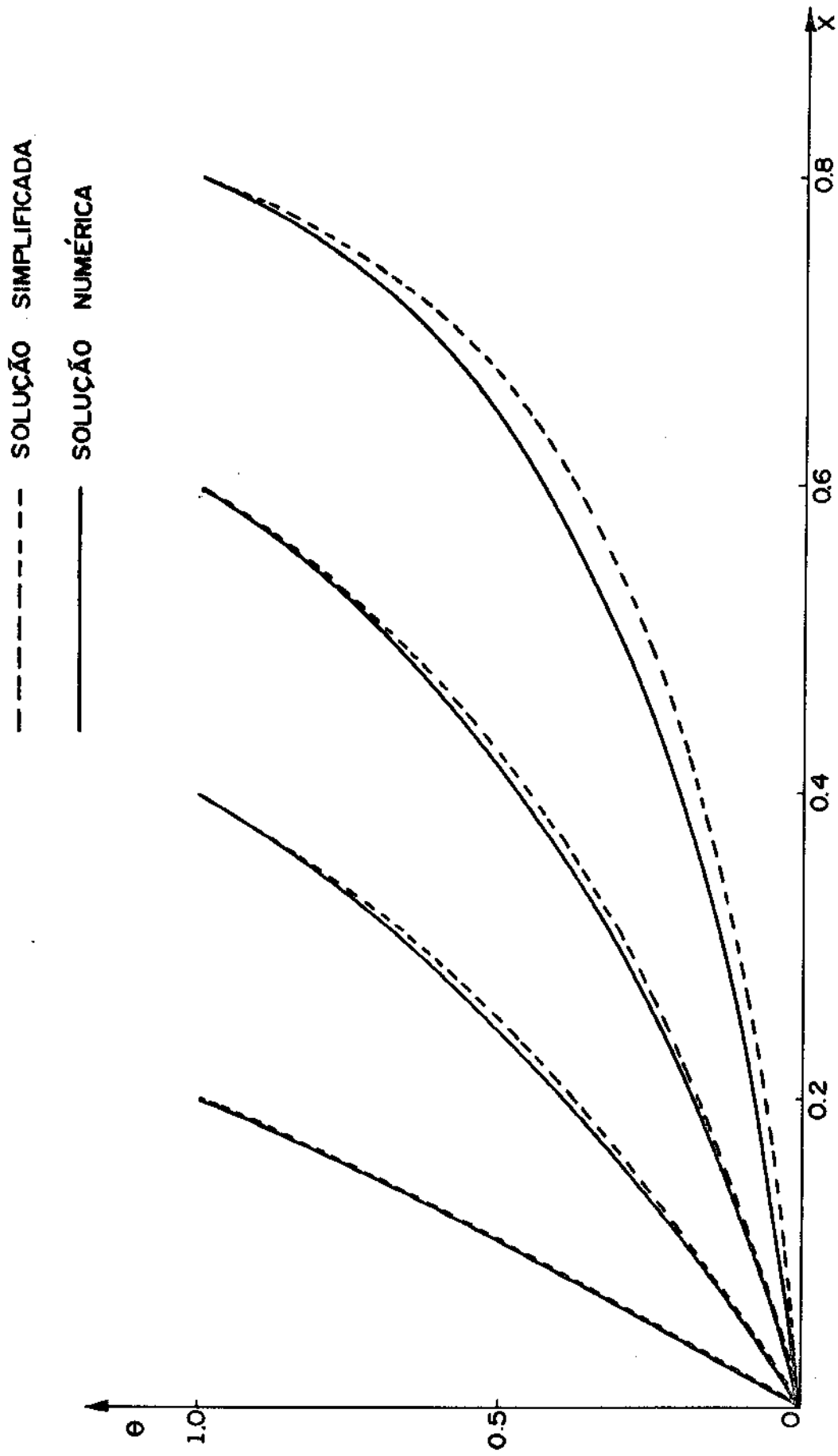


Fig. 2.10 Perfis de temperatura na fase solidificada $Ste = 0.1$ $Bi = \infty$

CAPÍTULO 3

O MÉTODO NUMÉRICO

3.1. INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos são extremamente úteis para a solução de problemas que envolvem não-linearidades, geometrias complexas, condições de contorno complicadas ou um sistema de equações diferenciais parciais acopladas. Uma técnica comum para a solução de equações diferenciais parciais é a técnica das diferenças finitas. A técnica das diferenças finitas para a solução de um conjunto de equações diferenciais consiste em converter diferenciais em diferenças, escolhendo uma relação adequada entre os incrementos do parâmetro independente para a conveniência da computação, e daí então efetuar um cálculo iterativo para a obtenção da solução.

Seja uma esfera de raio R inicialmente contendo material líquido na temperatura de fusão T_f resfriada externamente por um fluido numa temperatura constante T_∞ com coeficiente de película h . Será analisado o processo de solidificação com as equações valendo igualmente para o processo de fusão. O sistema a ser analisado é o mesmo esquematizado na Figura 2.1.

As equações que descrevem o problema são:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right] \quad r_f < r < R \quad (3.1)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k}{\rho L} \frac{\partial T}{\partial r} \quad r = r_f \quad (3.2)$$

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{h}{k} (T - T_\infty) \quad r = R \quad (3.3)$$

$$T = T_f \quad \begin{array}{l} \text{para } t=0 \text{ em } 0 \leq r \leq R \\ \text{para } t>0 \text{ em } 0 \leq r \leq r_f \end{array} \quad (3.4)$$

3.2. O MÉTODO DAS MALHAS FIXAS

A solução numérica pelo método das malhas fixas mais conhecida é a apresentada por Tao [81]. Para sua solução Tao considerou as variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{r}{R} & \xi &= \frac{r_f}{R} \\ \tau &= \frac{\alpha t}{R^2} & \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty} \end{aligned} \quad (3.5)$$

O sistema descrito por estas variáveis está apresentado na Figura 3.1.

Consideremos também os números de Biot e Stefan já definidos anteriormente.

Podemos agora reescrever as equações:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} + \frac{2}{Z} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \quad \xi < Z < 1 \quad (3.6)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = \text{Ste} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \quad Z = \xi \quad (3.7)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \text{Bi} \theta \quad Z = 1 \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \theta &= 1 & \text{para } \tau = 0 & \quad 0 \leq Z \leq 1 \\ & & \text{para } \tau > 0 & \quad 0 \leq Z \leq \xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

O modelo das malhas fixas de Tao está representado na Figura 3.2.

Seja para este modelo:

n = número de incrementos radiais

m = número de incrementos no tempo

Segundo a técnica das diferenças finitas, podemos escrever

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\theta_{n,m+1} - \theta_{n,m}}{\Delta \tau} \quad (3.10)$$

$$Z = \frac{(n+1) \Delta Z + (n-1) \Delta Z}{2} = n \Delta Z \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\theta_{n-1,m} - \theta_{n+1,m}}{2 \Delta Z} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \frac{\theta_{n-1,m} - 2\theta_{n,m} + \theta_{n+1,m}}{(\Delta Z)^2} \quad (3.13)$$

Substituindo estes valores na equação (3.6)

$$\frac{\theta_{n,m+1} - \theta_{n,m}}{\Delta \tau} = \frac{1}{(\Delta Z)^2} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \theta_{n-1,m} - 2\theta_{n,m} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta_{n+1,m} \right] \quad (3.14)$$

Empregando-se uma formulação modificada de Binder-Schmidt é possível determinar a condição de estabilidade [31]:

$$\frac{\Delta \tau}{(\Delta Z)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

A equação (3.16) pode então ser escrita como

$$\theta_{n,m+1} = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \theta_{n-1,m} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \theta_{n+1,m} \right] \quad (3.16)$$

Sendo M o número de incrementos $\Delta \tau$ necessários para que a frente de fusão se movimente uma distância ΔZ , a equação (3.7) pode ser colocada na forma

$$\frac{\Delta Z}{\Delta \tau} = Ste \frac{\sum_m^{m+M} (\theta_{n-1,m} - \theta_{n,m})}{\Delta Z} \quad (3.17)$$

Considerando-se a condição de estabilidade (3.15) a equação (3.17) se transforma em

$$\sum_m^{m+M} (\theta_{n-1,m} - \theta_{n,m}) = \frac{2}{Ste} \quad (3.18)$$

Temos também a condição de contorno (3.8)

$$-(\theta_{N,m} - \theta_{N-1,m}) = \theta_{N,m} \Delta Z Bi \quad (3.19)$$

ou reordenando

$$\theta_{N,m} = \frac{\theta_{N-1,m}}{1 + Bi \Delta Z} \quad (3.20)$$

onde

$$N = 1/\Delta Z \quad (3.21)$$

Para iniciar a computação, Tao utilizou a equação da solução exata para o caso plano semi-infinito. Com isto, calcula-se o tempo necessário para que a interface chegue ao ponto $1-\Delta Z$, e a temperatura $\theta_{N,0}$. Considerando $\theta_{N-2,0}=1$ e com o auxílio da equação (3.16) calcula-se $\theta_{N-1,1}$ para um incremento de tempo posterior. A equação (3.20) permite o cálculo de $\theta_{N,1}$. Esta iteração prossegue até que a condição da equação (3.18) seja satisfeita, quando é então obtido $M\Delta\tau$ que é o tempo necessário para que a interface se movimente desde $1-\Delta Z$ até $1-2\Delta Z$. Fazendo $\theta_{N-3,1}=1$ reinicia-se o ciclo iterando (3.16) e (3.17) até satisfazer (3.18) novamente. O processo é repetido até ξ atingir o centro da esfera, onde $\xi=0$. No caso do último incremento de tempo no ajuste iterati

vo para obter M ser fracionário, é considerado um ajuste proporcional dos últimos incrementos de temperatura.

Alguns dos resultados obtidos por Tao estão listados no Apêndice A.2 no final deste trabalho [80].

3.3. O MÉTODO DAS MALHAS MÓVEIS

O método das malhas fixas acima descrito apresenta o inconveniente do último incremento de tempo no ajuste iterativo ser fracionário para coincidir com o incremento espacial. Murray e Landis [50] propuseram um sistema de malhas móveis onde o primeiro ponto da malha está situado na superfície externa e o último ponto da malha está situado na própria frente de solidificação. À medida que a frente de solidificação vai se deslocando no tempo, a malha vai se distendendo ficando os pontos da malha cada vez mais distantes uma vez que o número de divisões é fixo e a espessura da camada solidificada vai aumentando.

O método das malhas móveis desenvolvido por Murray e Landis para a geometria plana foi desenvolvido por Nebra e Ismail [52] para a geometria cilíndrica. No presente trabalho este método será desenvolvido para geometria esférica [48].

As equações gerais que descrevem o problema são as equações (3.1) a (3.4) que já foram definidas no início deste capítulo. É conveniente que a solução obtida esteja na forma adimensional. Para tanto vamos utilizar as mesmas variáveis adimensionais definidas por (2.9) e os mesmos parâmetros (2.10) e (2.11). Este sistema adimensionalizado já foi representado na Figura 2.3.

Reescrevendo as equações incluindo as variáveis adimensionais:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{2}{X-1} \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \quad 0 < X < \epsilon \quad (3.22)$$

$$\text{Ste} \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{dX}{d\tau} \quad X = \epsilon \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = Bi \theta \quad X=0 \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \theta &= 1 && \text{para } \tau=0 \text{ em } 0 < X < 1 \\ &&& \text{para } \tau > 0 \text{ em } \epsilon < X < 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aqui cabe observar que se o calor sensível devido ao sub-resfriamento da parede solidificada da esfera for significativamente menor que o calor latente de fusão ($Ste \ll 1$), a equação (3.22) se transforma numa equação em regime permanente, que pode ser resolvida com o auxílio da condição de contorno (3.24) e com a condição (3.25). Assim, a solução encontrada para a temperatura é

$$\theta = 1 - \frac{1 - \frac{(1-\epsilon)}{(1-X)}}{1 + \left(\frac{1}{Bi} - 1\right)(1-\epsilon)} \quad (3.26)$$

Esta equação é a mesma equação (2.17). Substituindo este valor em (3.23) e utilizando a condição inicial $\epsilon=0$ para $\tau=0$ encontramos

$$\tau = \frac{1}{Ste} \left\{ \frac{1 - (1-\epsilon)^2}{2} - \left[1 - (1-\epsilon)^3 \right] \frac{Bi-1}{3 Bi} \right\} \quad (3.27)$$

que é a mesma equação (2.13) ou (2.14).

Retornando ao método numérico, o método a ser aqui desenvolvido baseia-se no método proposto por Murray & Landis para o caso plano, adaptado para a geometria esférica.

Seja também para este modelo:

n = número de incrementos radiais

m = número de incrementos no tempo

O modelo adotado é um sistema de malhas móveis onde o ponto $n=0$ está situado em $X=0$ e o ponto $n=N$ está em $X=\epsilon$, ou seja, na frente de fusão. À medida que a frente de fusão vai se deslocando no tempo, a malha vai se distendendo ficando os pontos cada vez mais distanciados entre si, já que N é fixo. Em resumo, a região sólida ($X<\epsilon$) é dividida em N intervalos igualmente espaçados de espessura ϵ/N . Ver Figura 3.3.

Este método concentra sua atenção na derivada substantiva da temperatura de cada ponto interno:

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_n = \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_n \frac{dX}{d\tau} + \left. \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right|_n \quad (3.28)$$

Um ponto qualquer da malha será dado por

$$X_n = \frac{n}{N} \epsilon \quad (3.29)$$

A diferencial desta expressão em relação ao tempo é

$$\frac{dX_n}{d\tau} = \frac{n}{N} \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (3.30)$$

Dividindo (3.30) por (3.29) encontramos uma expressão que relaciona a velocidade de deslocamento de cada ponto da malha com a velocidade de avanço da frente de fusão para um espaçamento uniforme no sólido:

$$\frac{dX_n/d\tau}{X_n} = \frac{d\epsilon/d\tau}{\epsilon} \quad (3.31)$$

Combinando a equação geral (3.22) com as equações (3.28) e (3.31) resulta

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_n = \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_n \frac{X}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{2}{X-1} \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_n + \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right|_n$$

que após um arranjo conveniente fica

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_n = \left[\frac{X}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\tau} - \frac{2}{1-X} \right] \left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_n + \left. \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right|_n \quad (3.32)$$

Introduzindo a equação (3.29) em (3.32) e aplicando a equação obtida a técnica das diferenças finitas:

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_n = \left[\frac{n}{N} \left(\frac{d\epsilon}{d\tau} \right) - \frac{2}{1 - n\epsilon/N} \right] \frac{N}{n} \frac{\partial \theta}{\partial \epsilon} + \left(\frac{N}{n} \right)^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial \epsilon^2}$$

Usando o conjunto de equações de (3.10) a (3.13) as diferenciais podem ser substituídas por diferenças. Além disso, lembrando que $\epsilon = X_N$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{n,m+1} - \theta_{n,m}}{\Delta\tau} = & \left[\frac{n}{N} \left(\frac{dX_N}{d\tau} \right)_m - \frac{2}{1 - (X_{N,m})n/N} \right] \cdot \left[\frac{\theta_{n+1,m} - \theta_{n-1,m}}{2(X_{N,m})/N} \right] + \\ & + \frac{\theta_{n+1,m} - 2\theta_{n,m} + \theta_{n-1,m}}{[X_{N,m}/N]^2} \end{aligned}$$

Portanto o valor explícito da temperatura é dado por

$$\begin{aligned} \theta_{n,m+1} = & \left\{ \frac{n}{2X_{N,m}} \left(\frac{dX_N}{d\tau} \right)_m + \left(\frac{N}{X_{N,m}} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{N/X_{N,m} - n} \right] \right\} \theta_{n+1,m} \Delta\tau + \\ & + \left\{ \left(\frac{N}{X_{N,m}} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{N/X_{N,m} - n} \right] - \frac{n}{2X_{N,m}} \left(\frac{dX_N}{d\tau} \right)_m \right\} \theta_{n-1,m} \Delta\tau + \\ & + \left[1 - 2 \left(\frac{N}{X_{N,m}} \right)^2 \Delta\tau \right] \theta_{n,m} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Colocando a equação (3.23) na forma de diferenças finitas, ficamos com

$$\left(\frac{dX_N}{d\tau} \right)_m = \text{Ste} \left[\frac{\theta_{N-2,m} - 4\theta_{N-1,m} + 3\theta_{N,m}}{2(X_{N,m})/N} \right] \quad (3.34)$$

A condição (3.25) é simplesmente

$$\theta_{N,m} = 1 \quad (3.35)$$

A posição da frente de fusão é determinada pela equação (3.34):

$$X_{N,m+1} = X_{N,m} + \text{Ste} \left[\frac{\theta_{N-2,m} - 4\theta_{N-1,m} + 3}{2X_{N,m}/N} \right] \Delta\tau \quad (3.36)$$

A equação (3.24) na forma de diferenças finitas pode ser dada por

$$\frac{-3\theta_{0,m} + 4\theta_{1,m} - \theta_{2,m}}{2X_{N,m}/N} = \text{Bi} \theta_{0,m}$$

e será utilizada para calcular $\theta_{0,m}$ na forma

$$\theta_{0,m} = \frac{4\theta_{1,m} - \theta_{2,m}}{2 \text{Bi}(X_{N,m})/N + 3} \quad (3.37)$$

A condição de estabilidade para estas equações é dada por

$$\frac{\Delta\tau N^2}{X_N^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.38)$$

Como neste método das malhas móveis o passo no espaço é variável, calcula-se um passo também variável no tempo para cada iteração, segundo a equação (3.38). Tomando-se a igualdade nesta equação e adotando-se este valor variável para $\Delta\tau$, a expressão (3.33) pode ser reduzida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \theta_{n,m+1} = & \left\{ \frac{n(X_{N,m})}{4N^2} \left(\frac{dX_N}{d\tau} \right)_m + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{N/(X_{N,m}) - n} \right] \right\} \theta_{n+1,m} + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{N/(X_{N,m}) - n} \right] - \frac{n(X_{N,m})}{4N^2} \left(\frac{dX_N}{d\tau} \right)_m \right\} \theta_{n-1,m} \quad (3.39) \end{aligned}$$

Ainda de acordo com o critério de estabilidade definido, a equação (3.36) fica:

$$X_{N,m+1} = X_{N,m} + \text{Ste} \left[\frac{\theta_{N-2,m} - 4\theta_{N-1,m} + 3}{4N/(X_{N,m})} \right] \quad (3.40)$$

O cômputo numérico parte de valores iniciais de $X_{N,0}$ e $\theta_{n,0}$ para $1 < n < N$. Pela forma das equações, este método não permite que o processo iterativo se inicie com o valor $X_{N,0}=0$. Assim sendo, o valor inicial adotado pode ser calculado através do modelo simplificado de London & Seban, desenvolvido no capítulo anterior. Este procedimento fornece uma boa aproximação para o início do processo iterativo [52].

Para calcular o perfil inicial da temperatura, adota-se segundo a hipótese inicial que todo líquido contido no interior da esfera se encontra na temperatura de fusão $\theta_{n,0}=1$ para $1 < n < N$ sendo $\theta_{0,0}$ calculado a partir da equação (3.37).

O próximo passo é o cálculo de $(dX_N/d\tau)_0$ através da equação (3.34). Com a igualdade da equação (3.38) calcula-se $\Delta\tau$. Calculado o valor de $\Delta\tau$, juntamente com $X_{N,0}$ e $(dX_N/d\tau)_0$ através da equação (3.39) calcula-se o novo perfil de temperatura e pela equação (3.40) fica determinada a nova posição da frente de fusão $X_{N,1}$ após um intervalo de tempo $\Delta\tau$. Esta sequência é repetida até que se obtenha o valor $X_N=1$.

A taxa de transferência de calor na superfície da esfera pode ser calculada através de

$$q_o = -k \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=R} = h(T_o - T_\infty) \quad (3.41)$$

Esta expressão pode ser adimensionalizada lembrando que o calor pode ser colocado na forma adimensional.

$$\varphi_o = \frac{q_o}{kL/cR} = \frac{Q_o}{4\pi R kL/c}$$

sendo $Q_o = 4\pi R^2 q_o$. Assim,

$$\varphi_o = Ste \frac{\partial \theta}{\partial X} = Ste.Bi.\theta \quad X = 0 \quad (3.42)$$

O fluxo de calor entregue ao sólido na frente de fusão é dada por

$$\varphi_f = Ste \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{dX}{d\tau} \quad X = \epsilon \quad (3.43)$$

Para a comparação com o método simplificado, é conveniente calcular a relação

$$\eta = \frac{\varphi_f}{\varphi_o} (1-\epsilon)^2 \quad (3.44)$$

pois no modelo simplificado, $\eta=1$ para qualquer posição da frente de solidificação.

3.4. RESULTADOS DO MODELO DE MALHAS MÓVEIS

Para os resultados apresentados neste trabalho foi utilizado um incremento $\Delta\epsilon=0,02$ no espaço. Portanto, para iniciar o processo de iteração, a solução simplificada de London & Seban foi empregada entre $\epsilon=0$ e $\epsilon=0,02$. Foram utilizadas malhas espaciais com 20 divisões, isto é, $N=20$. Este número de divisões é suficiente para a convergência da solução em termos de precisão, ou seja, a utilização de mais de 20 divisões não fornece um resultado mais refinado.

Foram obtidos resultados numéricos para alguns valores do número de Stefan ($Ste=0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0$) sendo que para cada número de Stefan correspondem diferentes valores do número de Biot ($Bi=1; 2; 5; 10; \infty$). O programa de computador em linguagem FORTRAN IV utilizado para a obtenção destes resultados está detalhado no Apêndice A.1.

A Tabela 3.1 fornece o número de iterações para a solução pelo método numérico segundo o modelo de malhas móveis, para $\Delta\epsilon=0,02$ e $N=20$. Segundo esta tabela pode-se observar que quanto menor o número de Biot e quanto menor o número de Stefan, maior o número de iterações e portanto maior o tempo de computação. Para se evitar um tempo de computação muito longo para números de Stefan e Biot pequenos, pode-se utilizar um número menor de divisões da malha.

As Figuras 3.4 a 3.8 são gráficos que mostram a posição da frente de fusão no tempo. Observar que os tempos de solidificação são maiores para números de Stefan e Biot pequenos. Um número de Stefan pequeno representa um calor latente grande em relação ao calor sensível. Um número de Biot pequeno representa uma resistência térmica grande na superfície da esfera; portanto, quanto menor o número de Biot, maior a resistência térmica superficial que resulta numa menor taxa de transferência de calor e num tempo maior de solidificação.

As figuras 3.9 a 3.13 são gráficos que representam a velocidade de avanço da frente de solidificação em função da posição. Para $\epsilon=0$, $d\epsilon/d\tau=Ste.Bi$. Novamente podemos observar a influência do número de Stefan e do número de Biot sobre as curvas da velocidade de avanço da interface. Pela análise dos gráficos é evi-

dente que as velocidades de avanço da interface são maiores para valores do número de Biot maiores, já que nestes casos as resistências térmicas superficiais ao fluxo de calor são menores.

As Figuras 3.14 a 3.23 mostram os perfis de temperatura para diferentes valores do número de Stefan e Biot. É interessante observar como estes números de Stefan e Biot influem de maneira decisiva sobre os perfis de temperatura. Quando o número de Biot é muito grande, a temperatura da superfície da esfera tende a ser igual à temperatura do fluido refrigerante.

As Figuras 3.24 a 3.36 mostram a relação entre os calores entregues na frente de fusão e na superfície da esfera em função da posição da frente de fusão. Para o modelo simplificado de London & Seban esta relação é sempre igual à unidade pois neste caso é desprezado o calor sensível do material já solidificado. Portanto é de se esperar que para números de Stefan menores que a unidade esta relação seja próxima da unidade para boa parte da esfera. Também é importante observar que esta relação embora seja fortemente dependente do número de Stefan não varia significativamente com o número de Biot. Isto porque este parâmetro é uma relação entre as taxas de transferência de calor: se o número de Biot for alto ou baixo vai facilitar ou dificultar os dois fluxos de calor ao mesmo tempo.

Finalmente as Figuras 3.27 a 3.31 mostram o fluxo de calor adimensional na superfície da esfera ($X=0$) em função do tempo adimensional. Este parâmetro, a taxa de calor liberado, é de muita importância no projeto de armazenadores de energia. Mais uma vez pode-se observar a influência do número de Biot. Quanto menor o número de Biot, maior a resistência térmica superficial e portanto maior será o tempo necessário para transferir a energia térmica contida no interior da esfera.

Como observação final podemos dizer que o método numérico, apesar de ser o que mais se aproxima do comportamento real do processo considerado, apresenta o inconveniente da necessidade da utilização de um computador. Para alguns valores do número de Stefan e do número de Biot, o tempo de computação pode ser muito grande. Portanto é desejável que se disponha de um método aproximado mais abrangente que o método simplificado de London & Seban e que não exija necessariamente o uso de um computador. Com este propósito, um método aproximado, o método integral, será desenvolvido no próximo capítulo.

	Ste=0,1	Ste=0,5	Ste=1,0	Ste=2,0	Ste=3,0
Bi = 1	363.726	74.833	38.588	20.346	14.199
Bi = 2	194.681	40.757	21.393	11.596	8.267
Bi = 5	93.016	20.081	10.856	6.140	4.511
Bi = 10	58.973	13.041	7.204	4.196	3.144
Bi = ∞	24.870	5.711	3.265	1.995	1.546

Tabela 3.1 - Número de iterações para a solução pelo método numérico das malhas móveis para 20 divisões no espaço com $\Delta\epsilon = 0,02$.

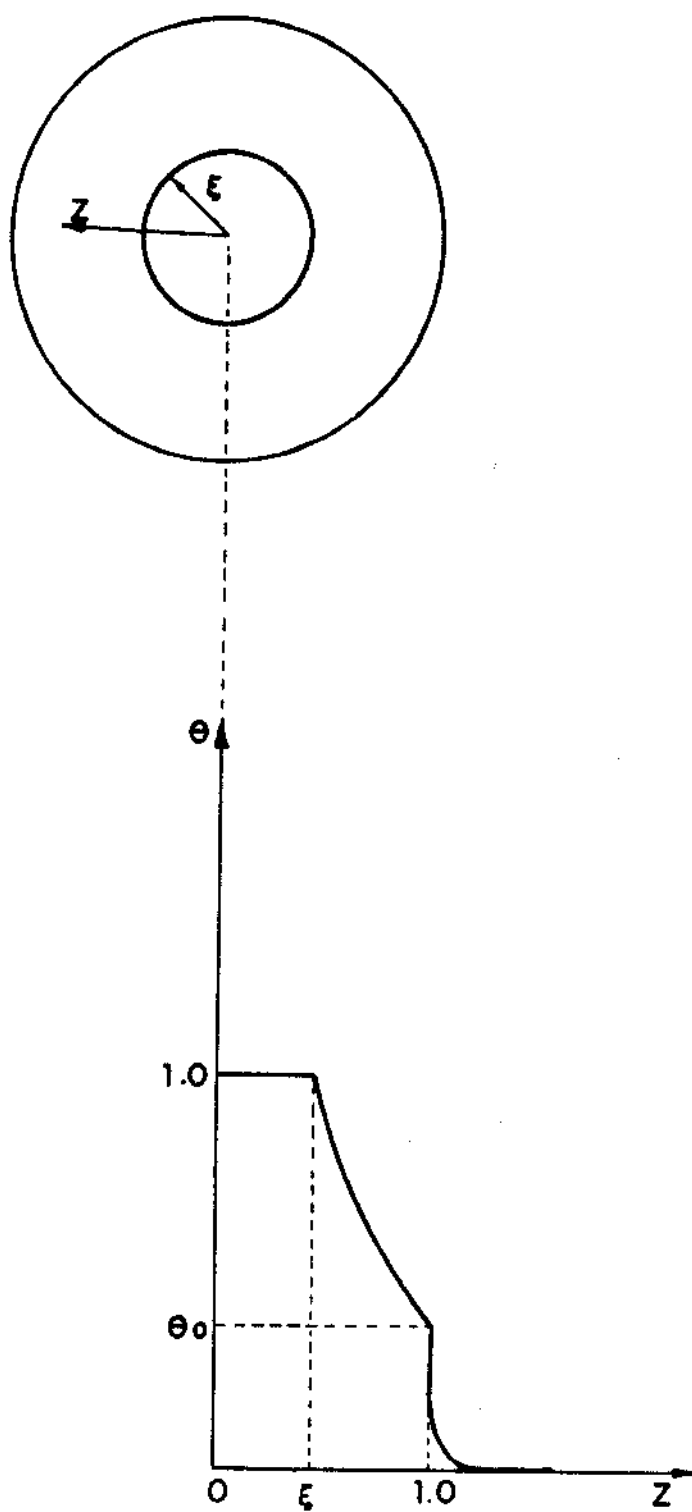


Fig. 3.1 Representação do modelo adimensional proposto por Tao

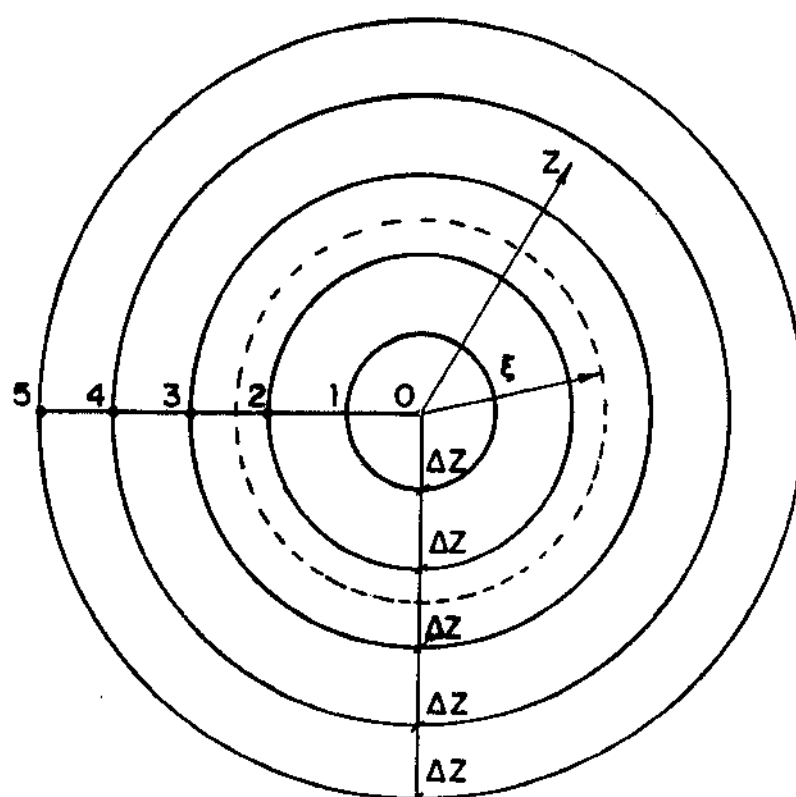
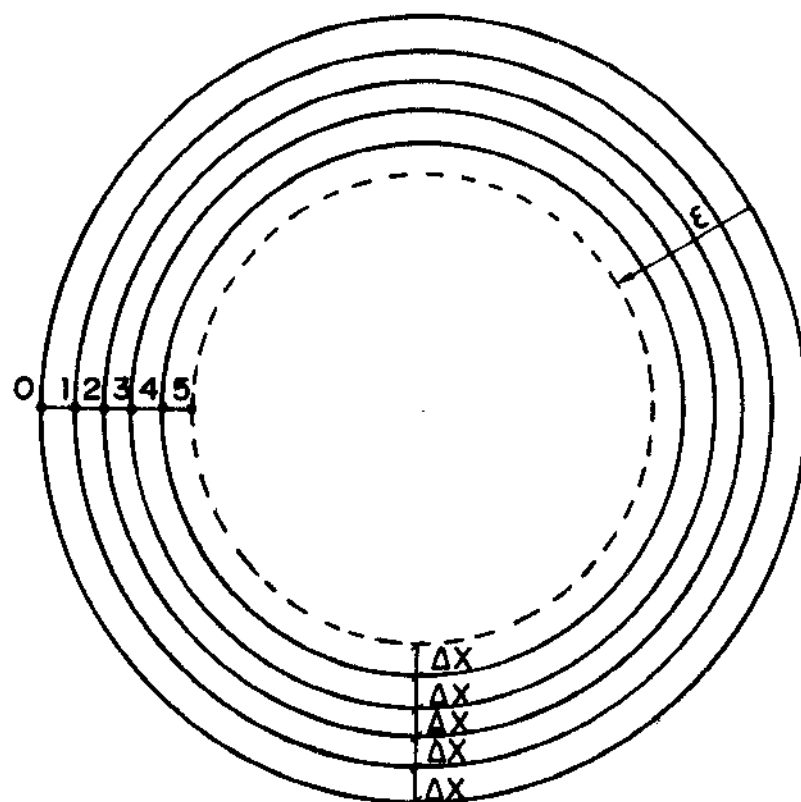
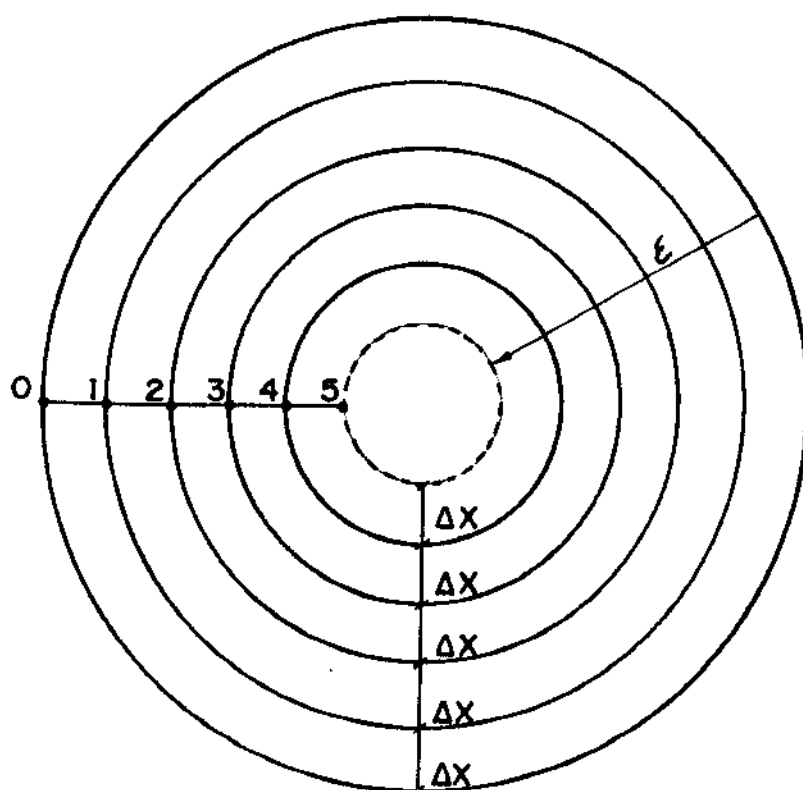


Fig. 3.2 O modelo das malhas fixas exemplificado para $N=5$



a) Situação no instante z_1



b) Situação no instante z_2

Fig. 3.3 O modelo das malhas móveis exemplificado para $N=5$

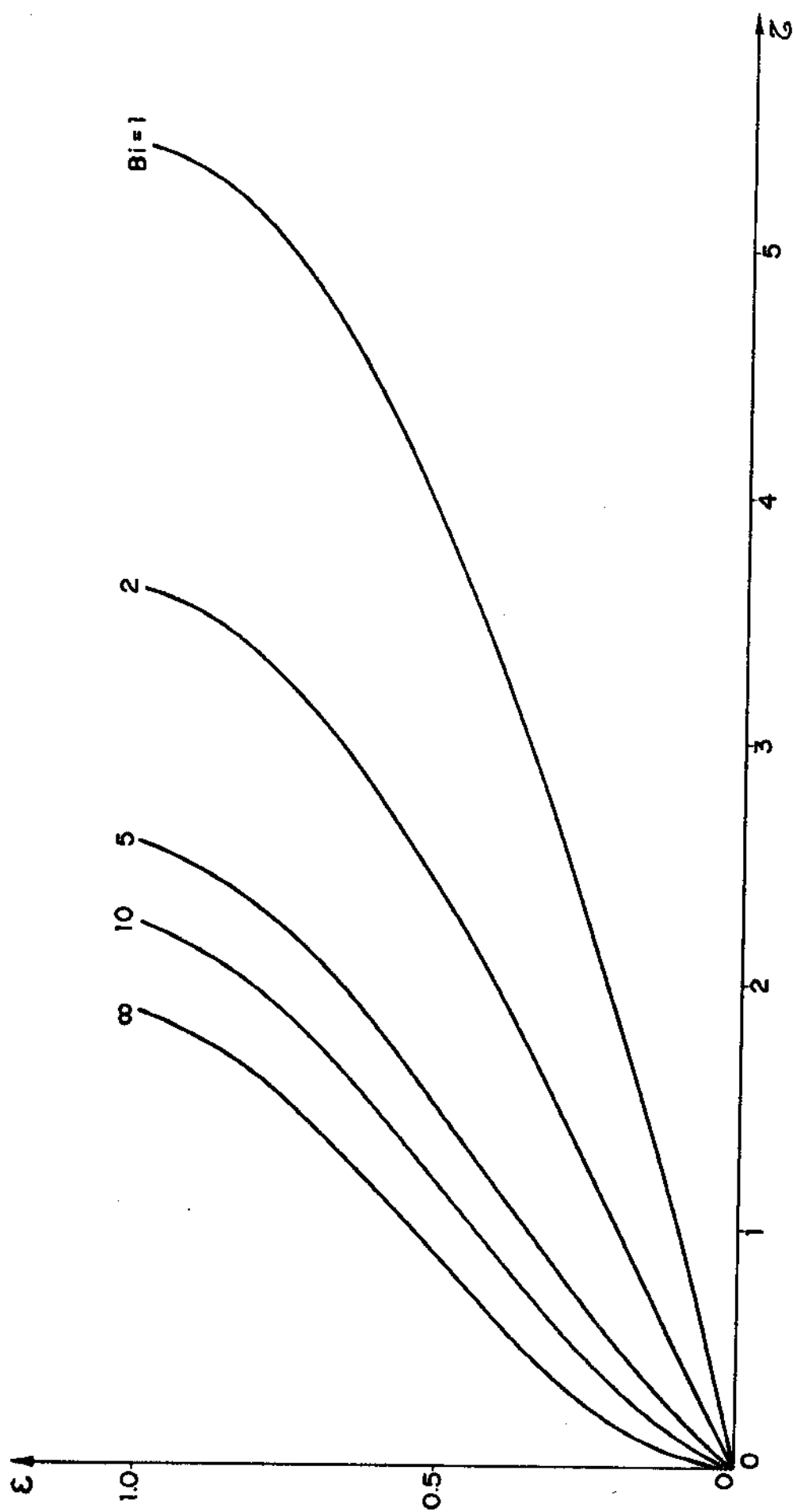


Fig. 3.4 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 0.1$

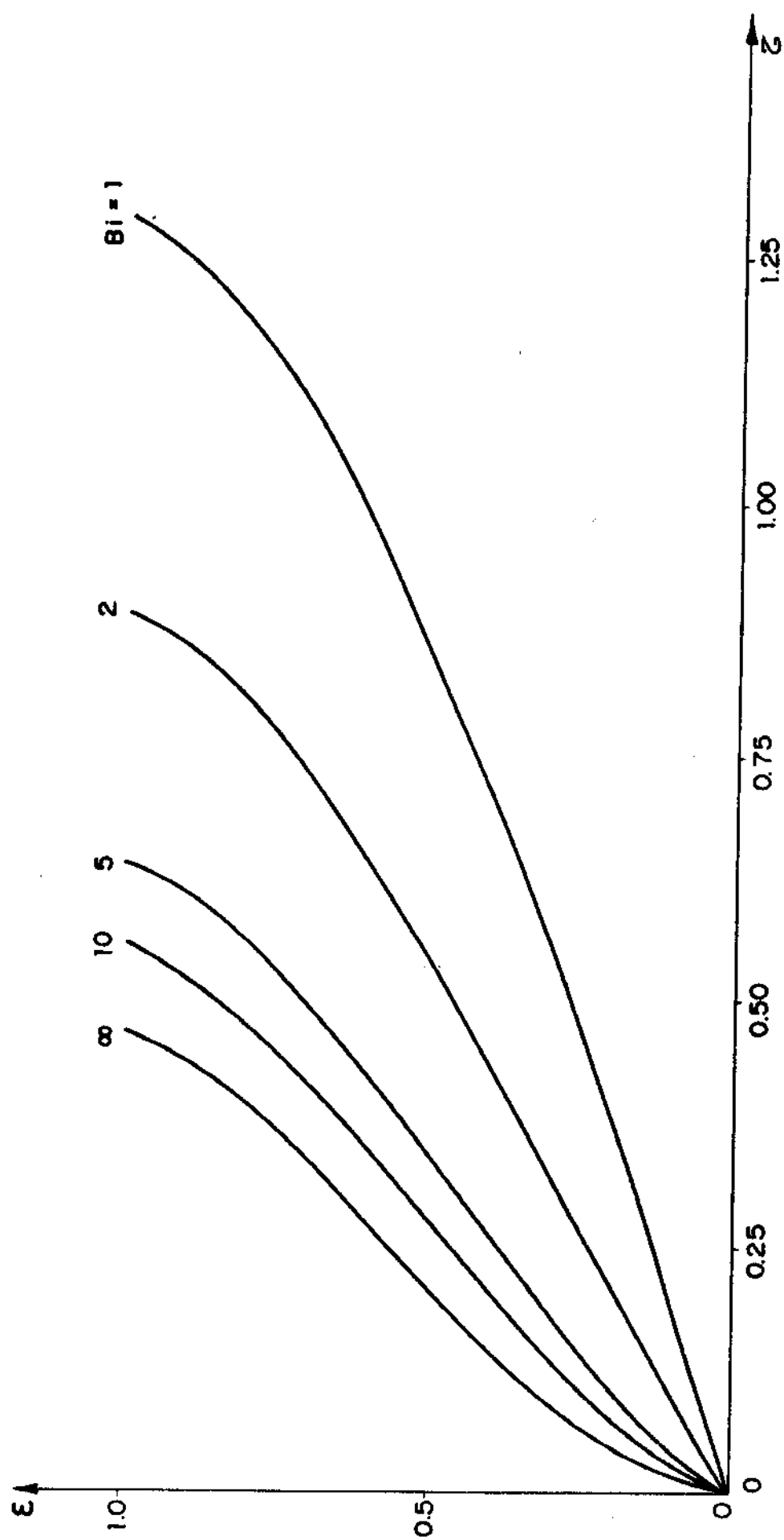


Fig. 3.5 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 0.5$

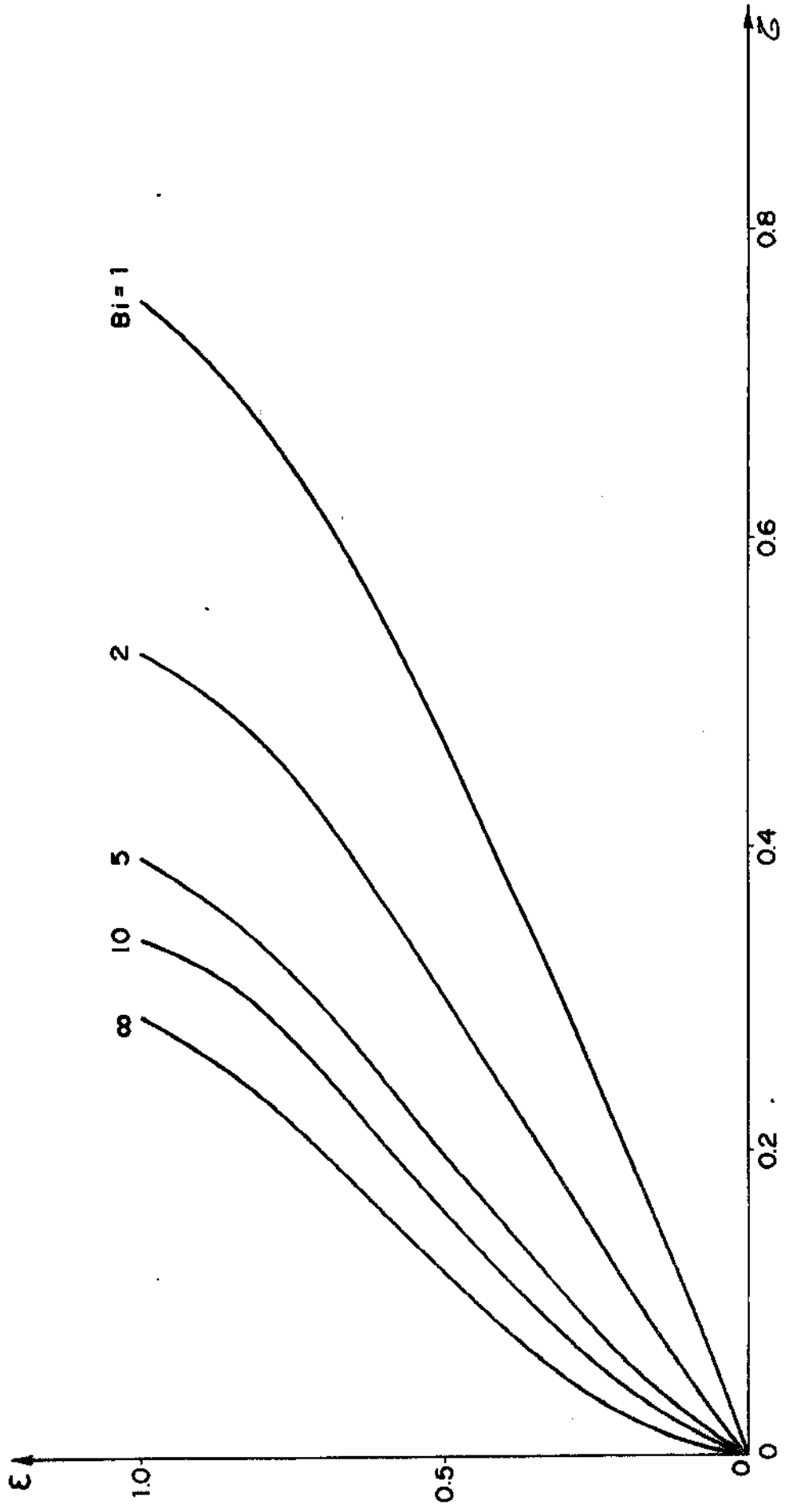


Fig. 3.6 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 1.0$

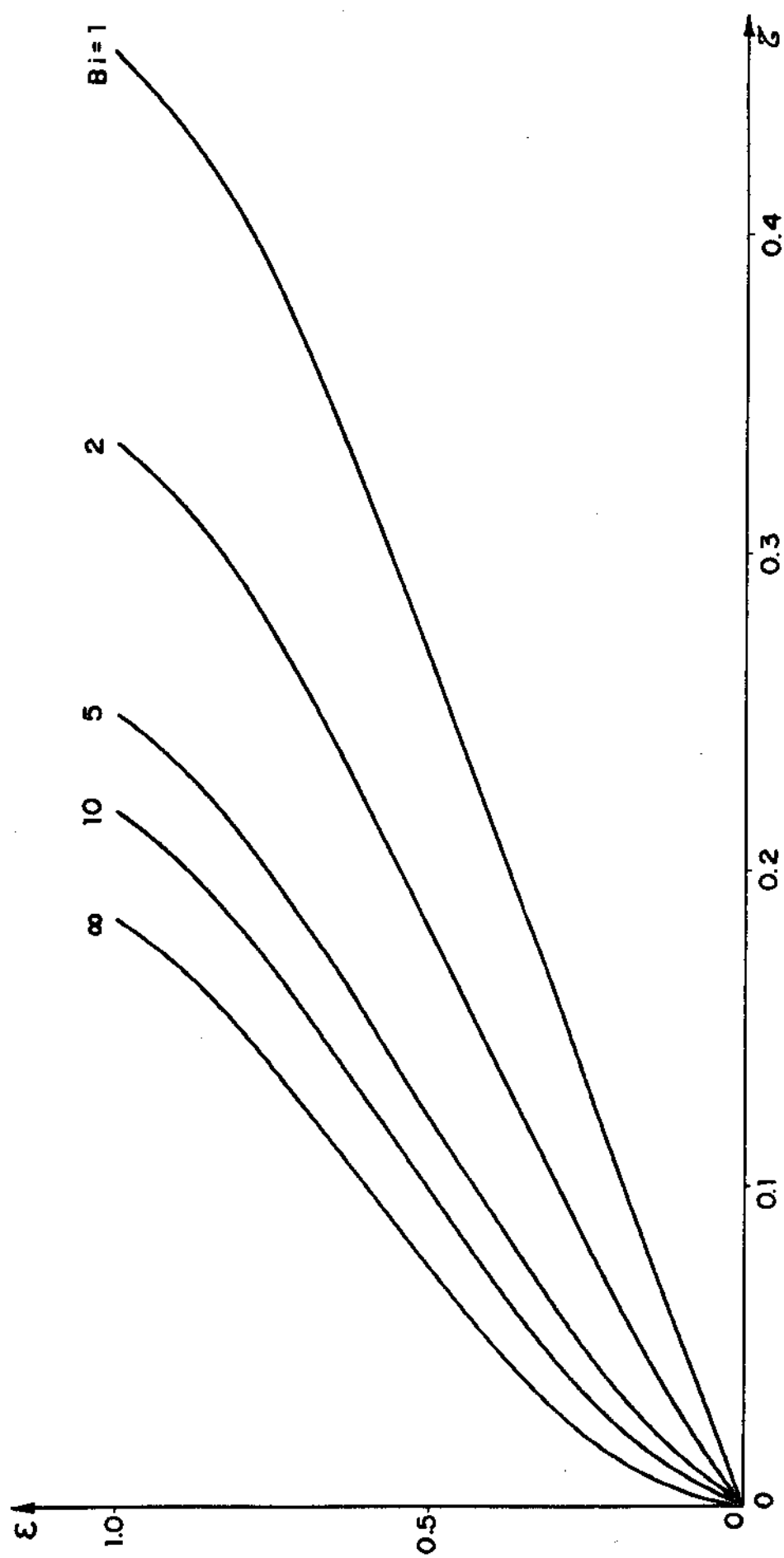


Fig. 3.7 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 2.0$

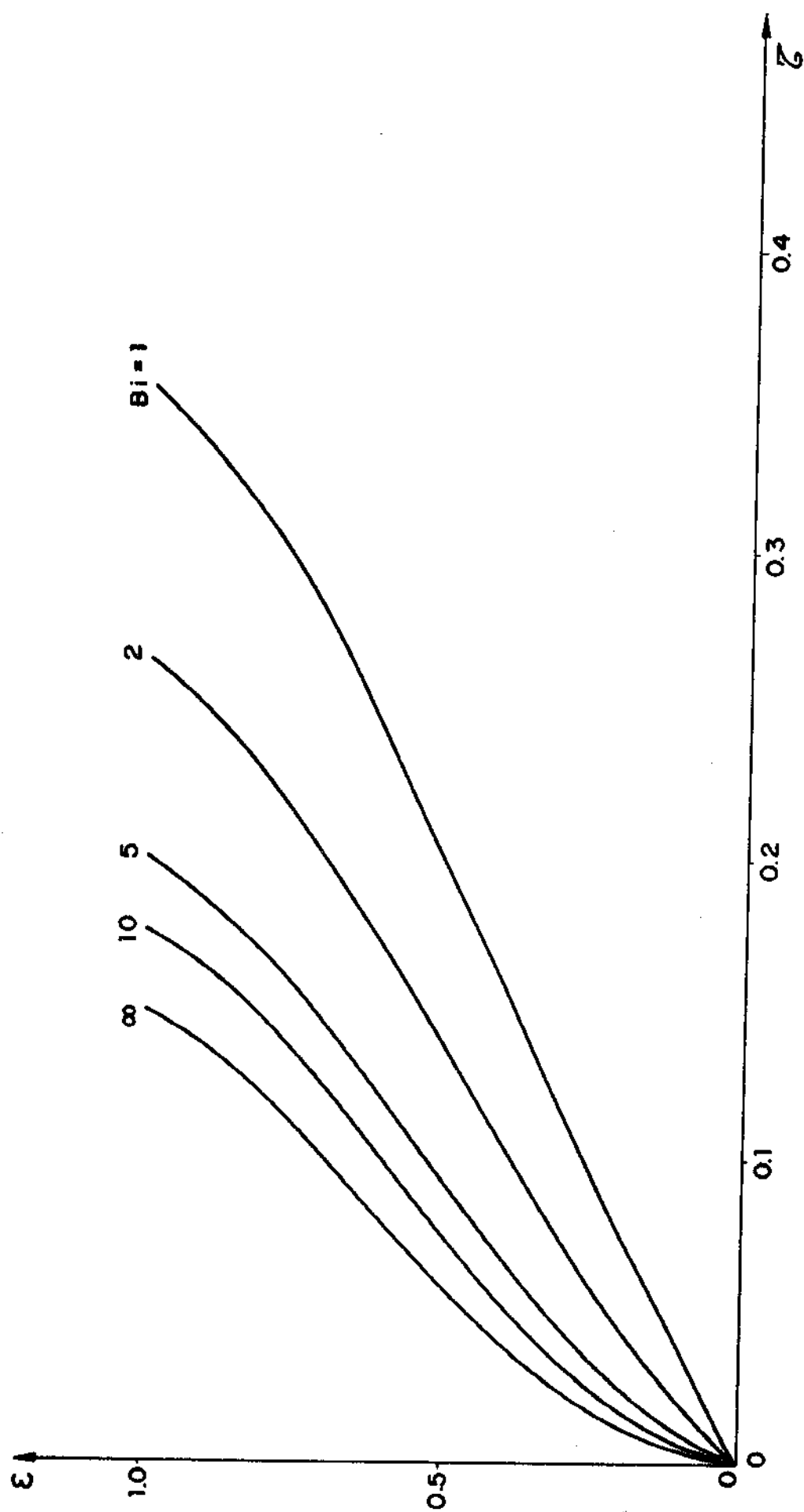


Fig. 3.8 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 3.0$

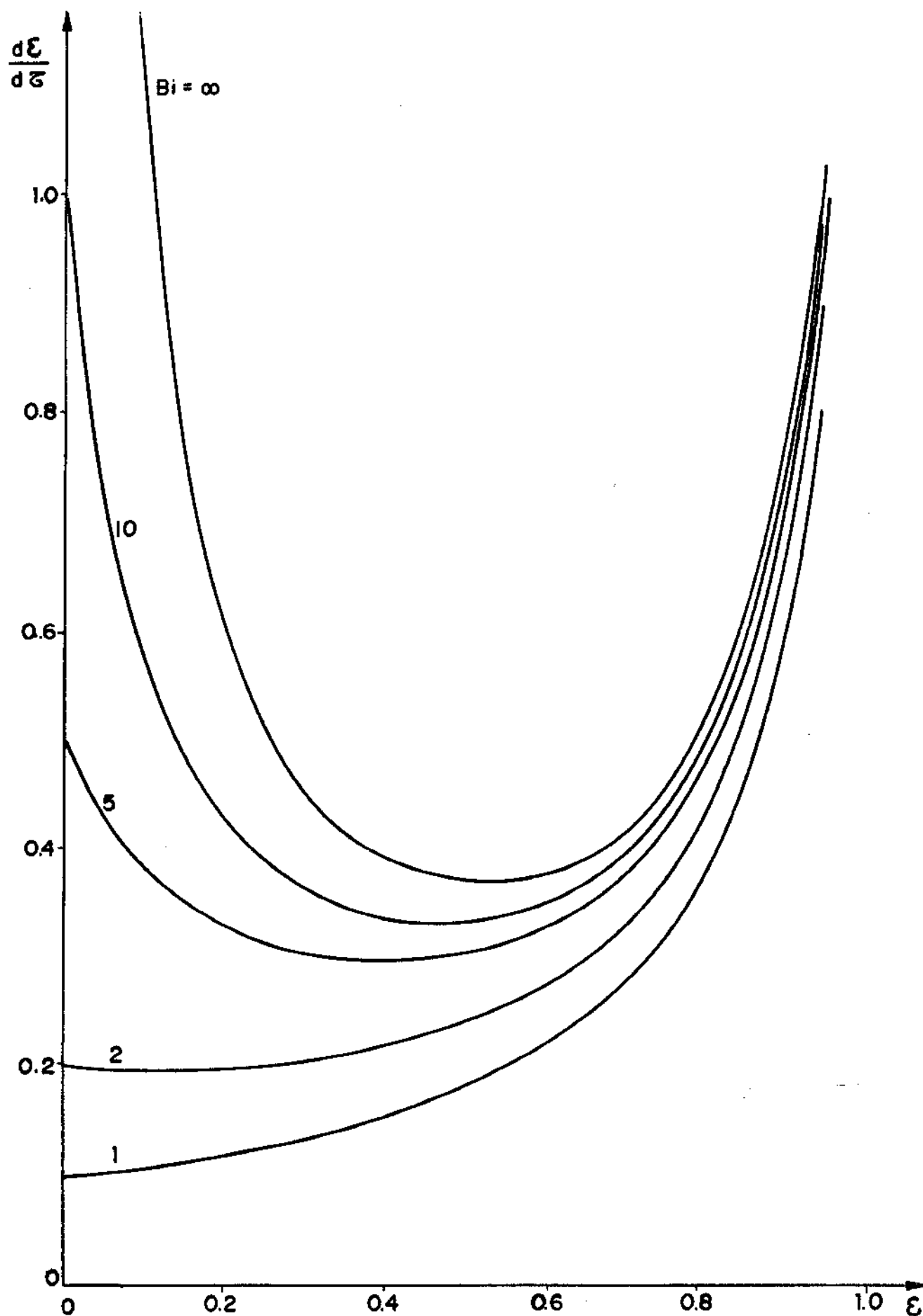


Fig. 3.9 Velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste = 0.1$

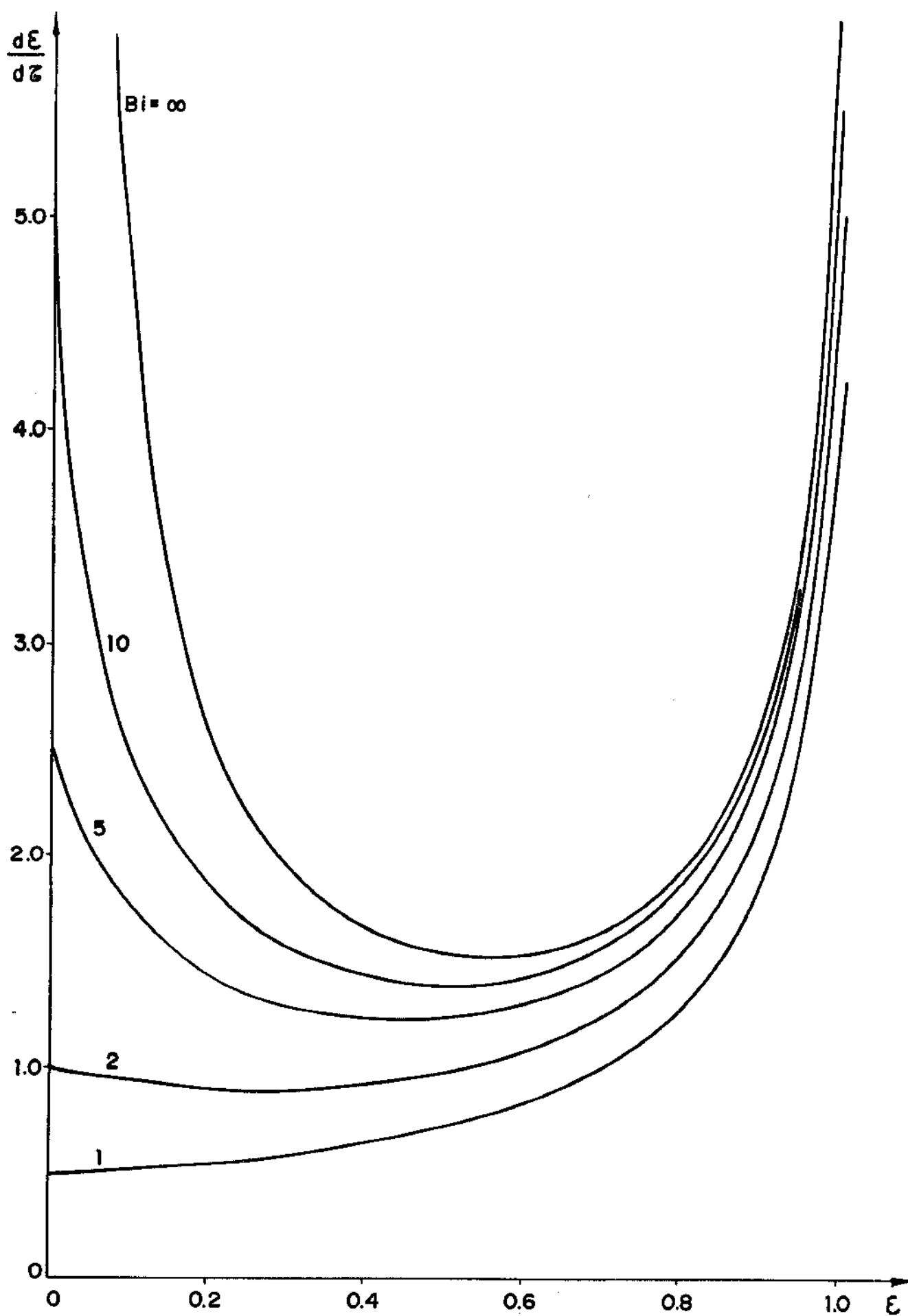


Fig. 3.10 Velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste = 0.5$

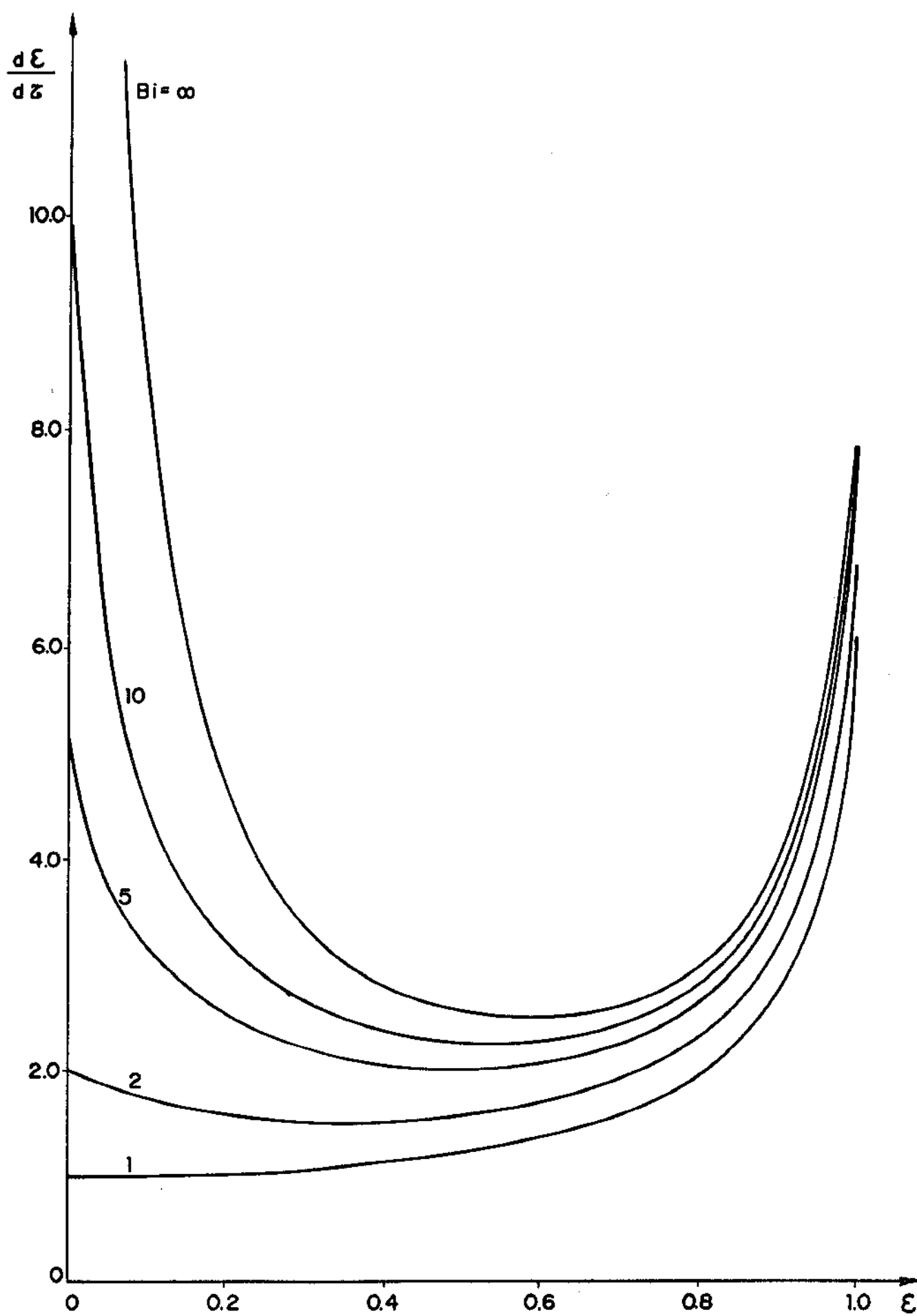


Fig. 3.11 Velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste = 1.0$

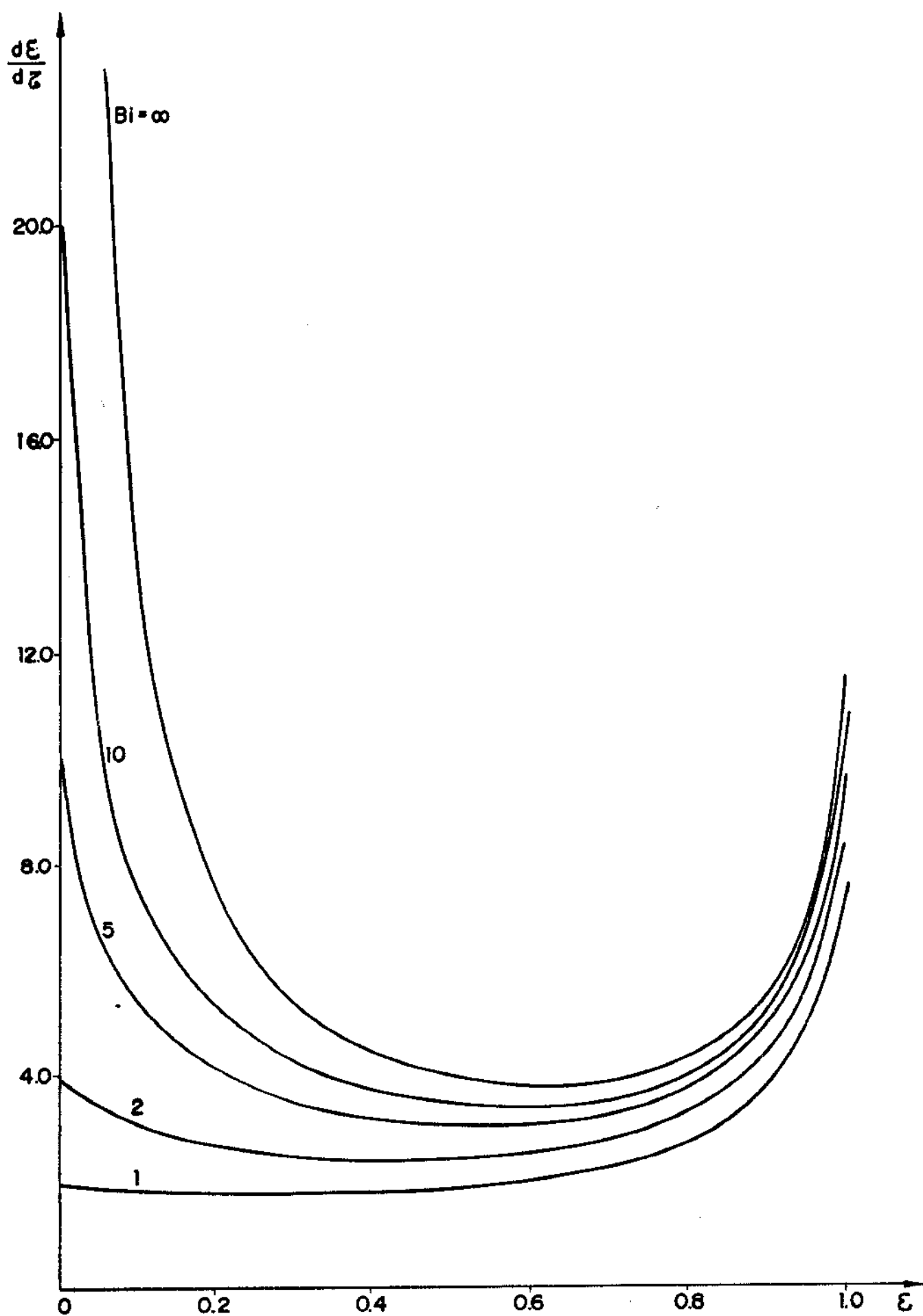


Fig. 3.12 Velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste = 2.0$

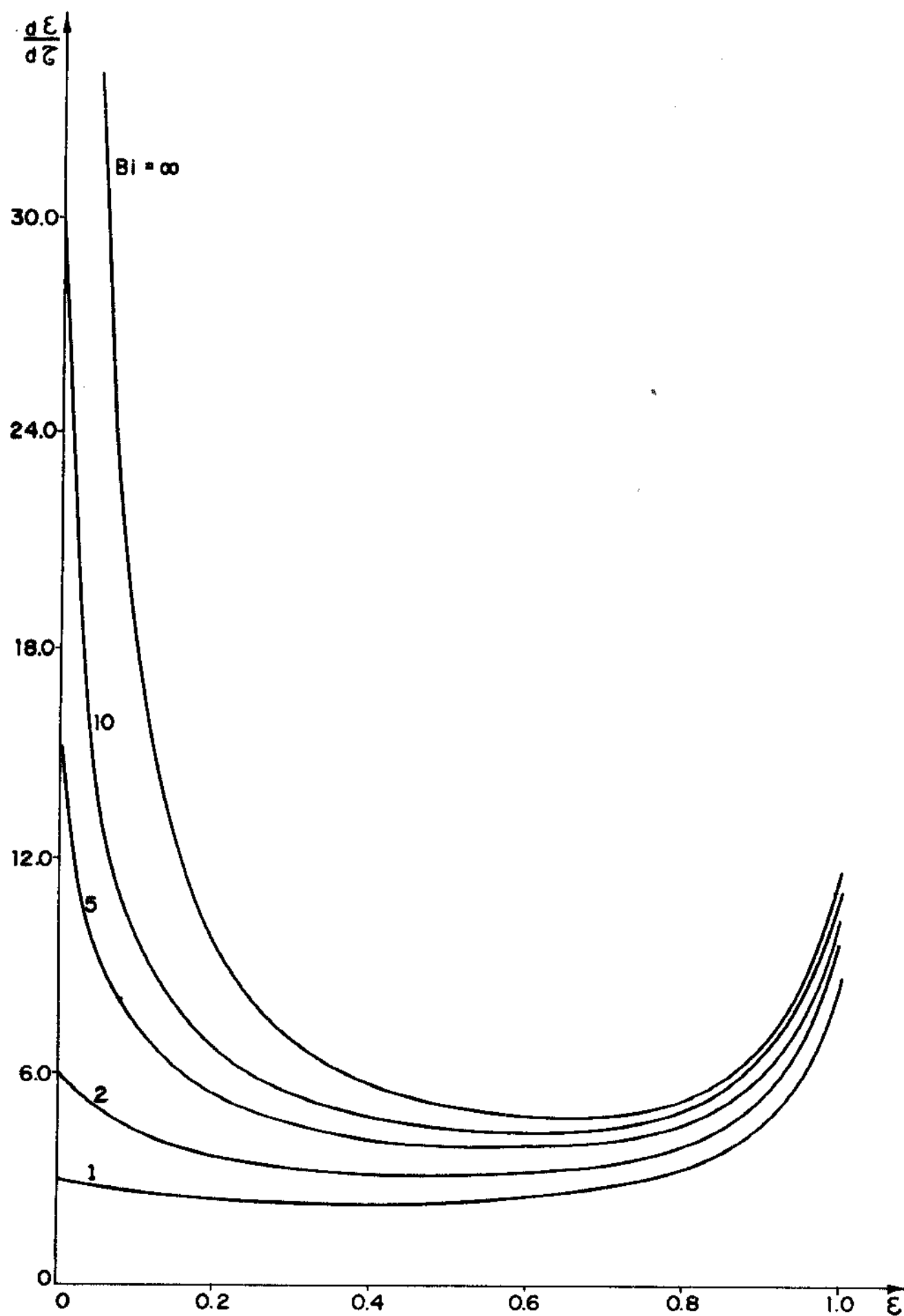


Fig. 3.13 Velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição para $Ste = 3.0$

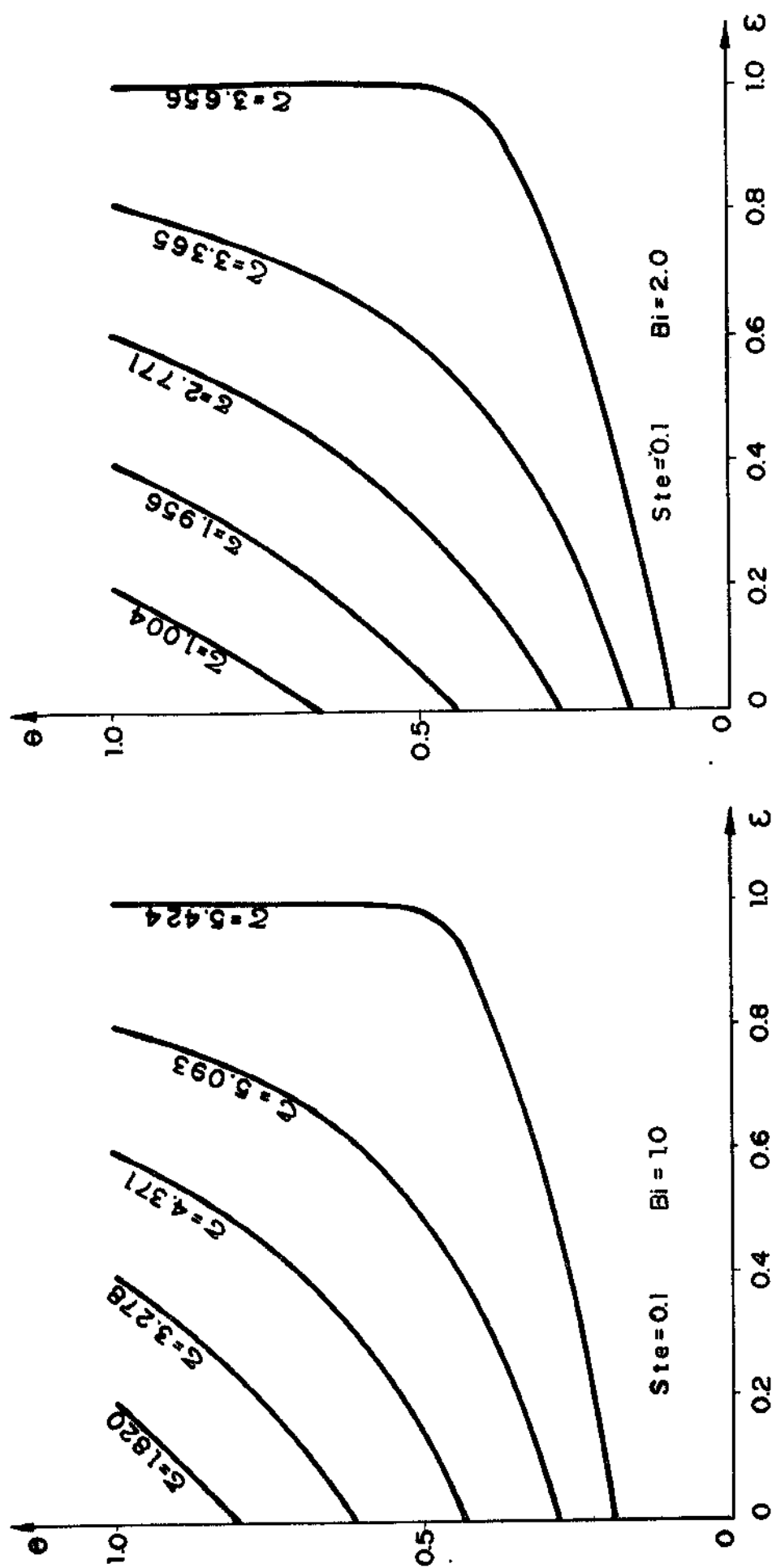


Fig. 3.14 Perfis de temperatura na fase sólida para diferentes posições da frente de fusão

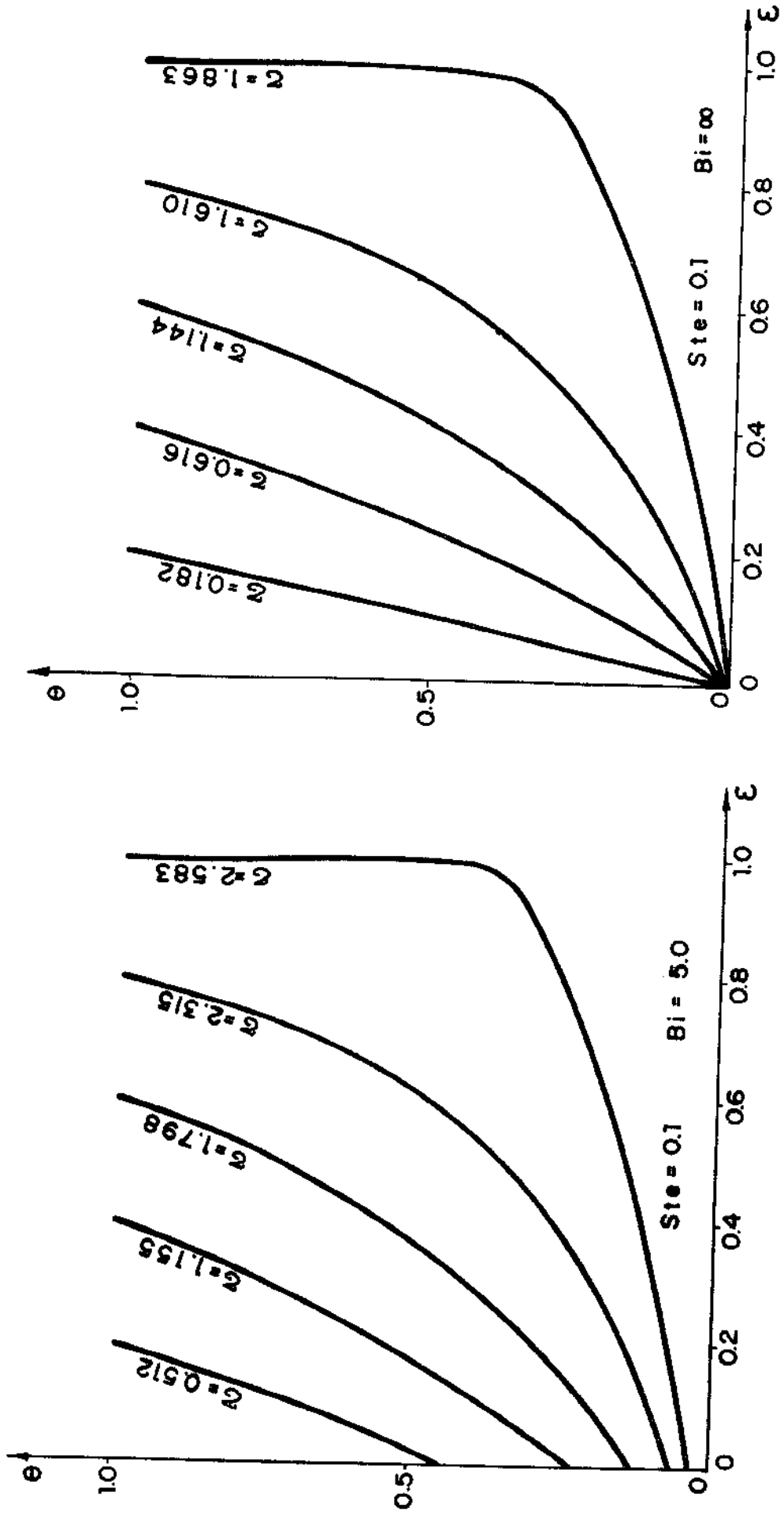


Fig. 3.15 Perfis de temperatura na fase sólida para diferentes posições da frente de fusão

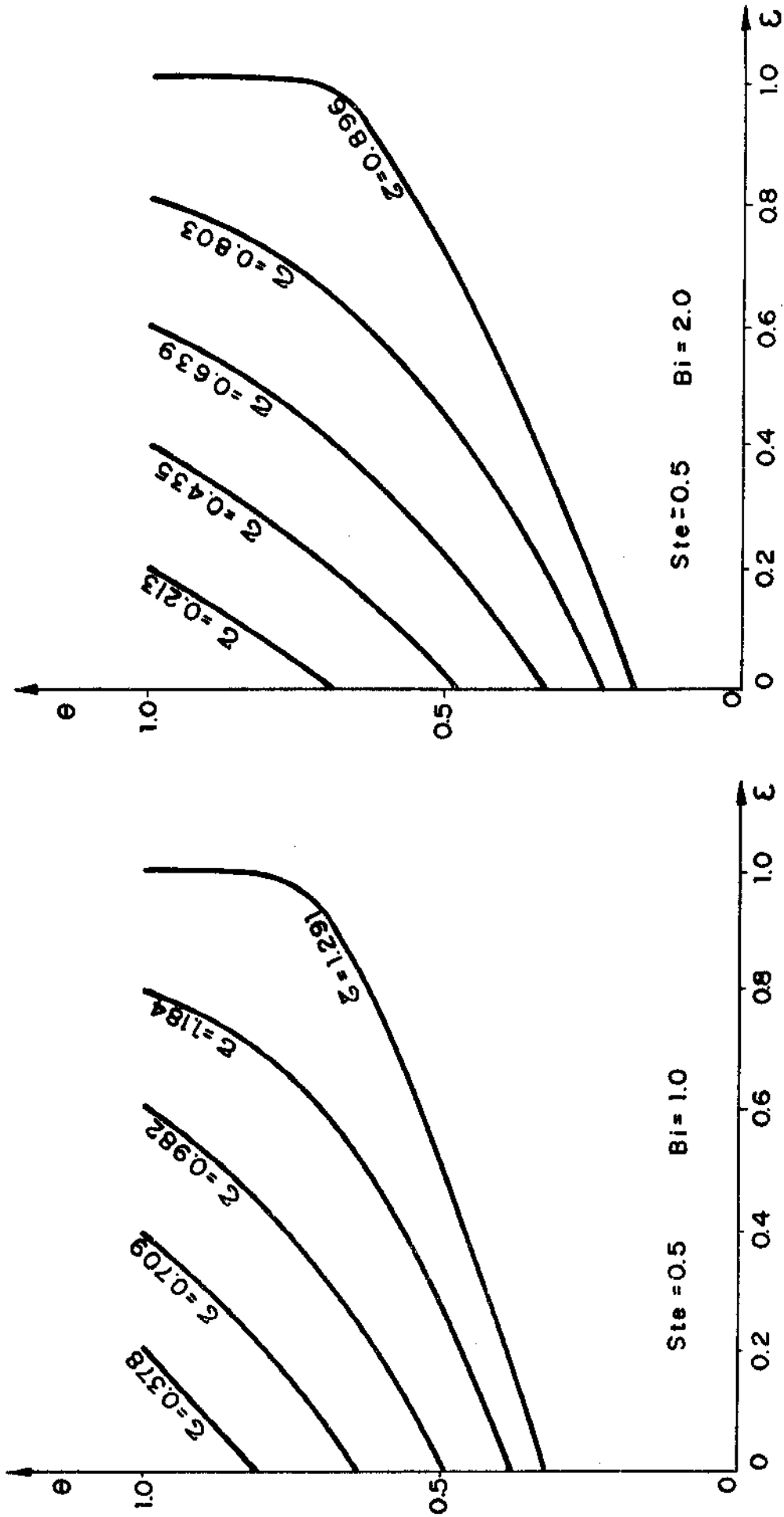


Fig. 3.16 Perfis de temperatura na fase s3lida para diferentes posic3es da frente de fus3o

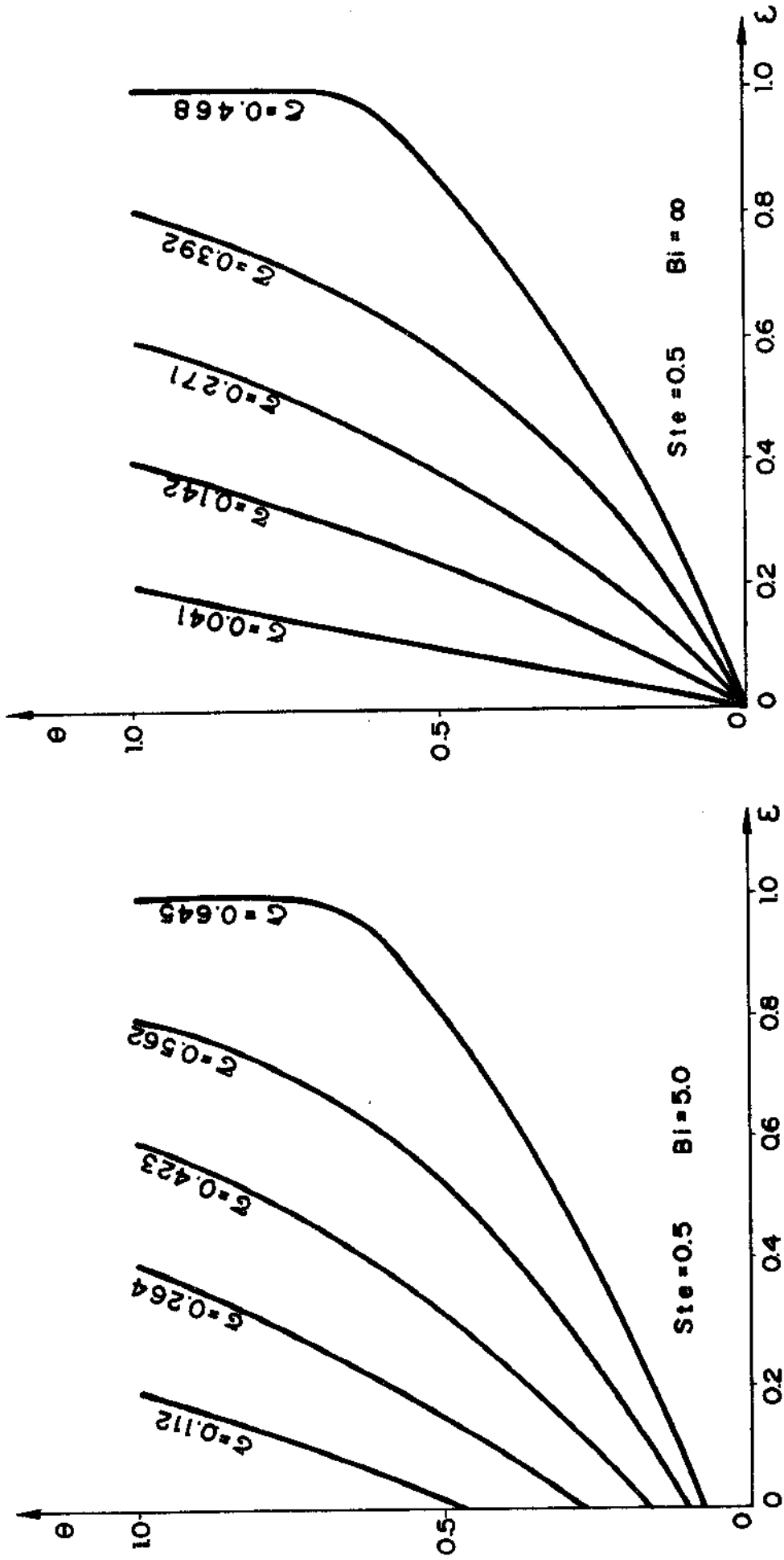


Fig. 3.17 Perfis de temperatura na fase sólida para diferentes posições de frente de fusão

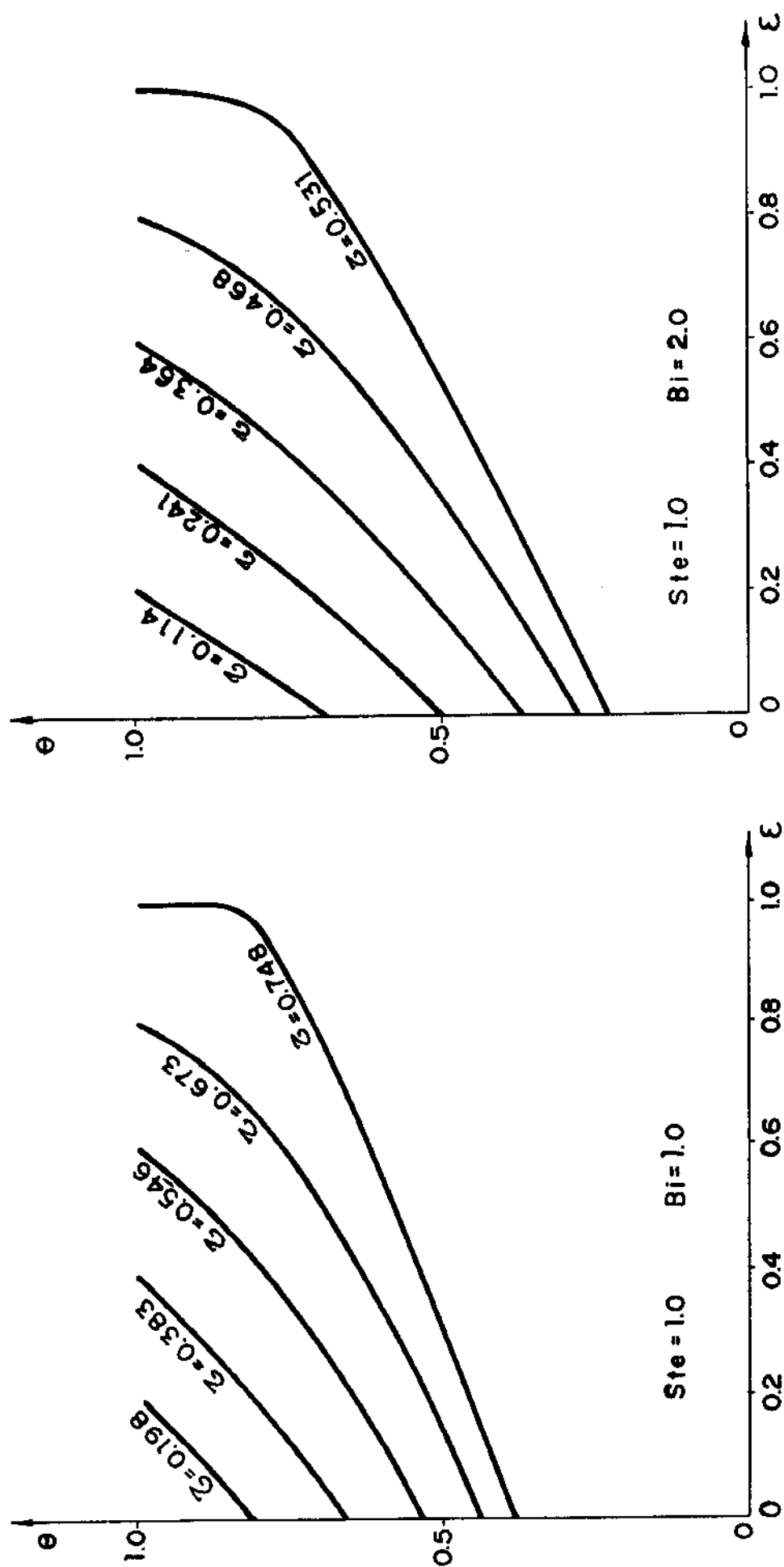


Fig. 3.18 Perfis de temperatura na fase sólido para diferentes posições da frente de fusão

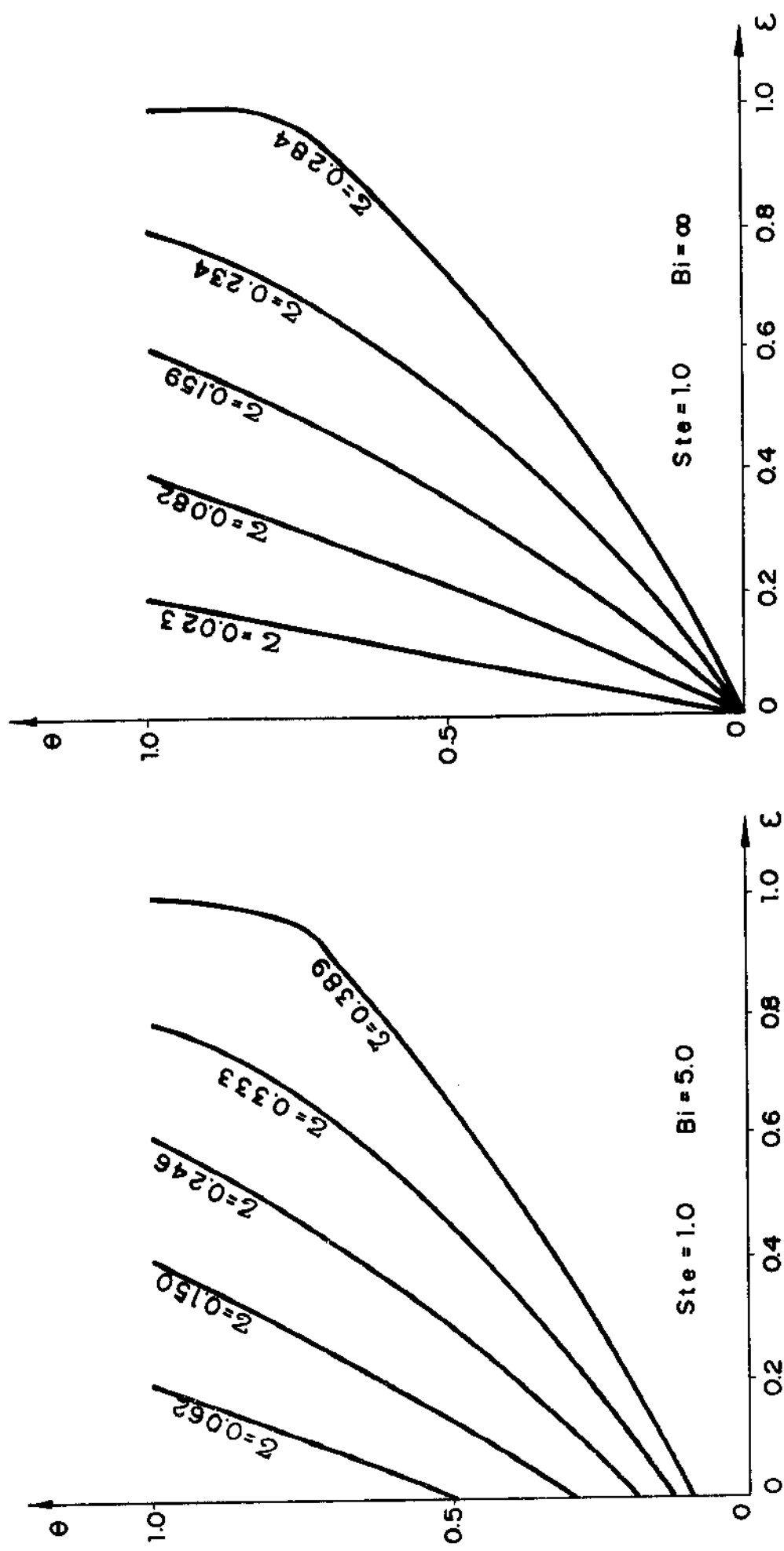


Fig. 3.19 Perfis de temperatura na fase s3lida para diferentes posic3es da frente de fus3o

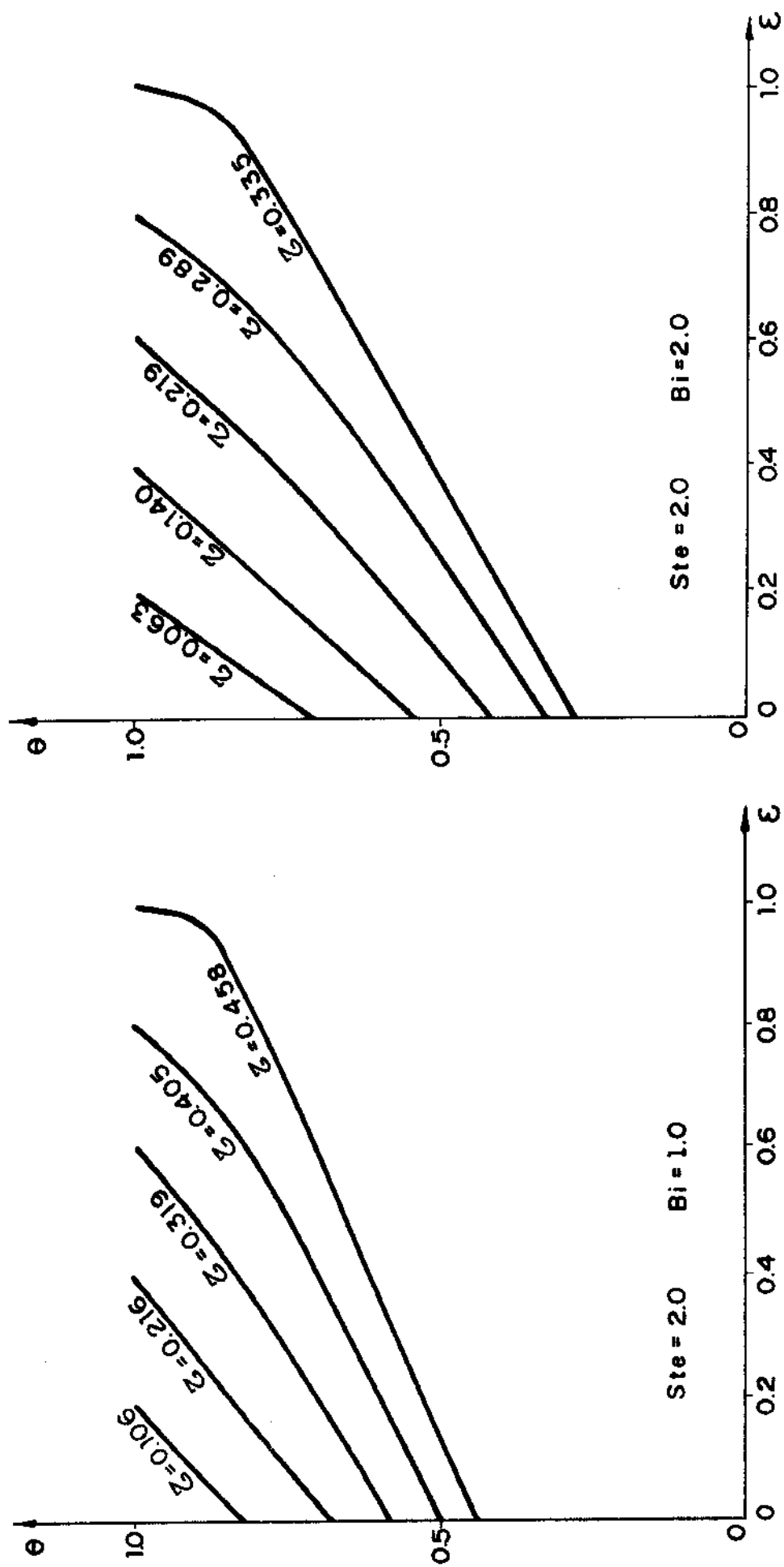


Fig. 3.20 Perfis de temperatura na fase s3lida para diferentes posic3es da frente de fus3o

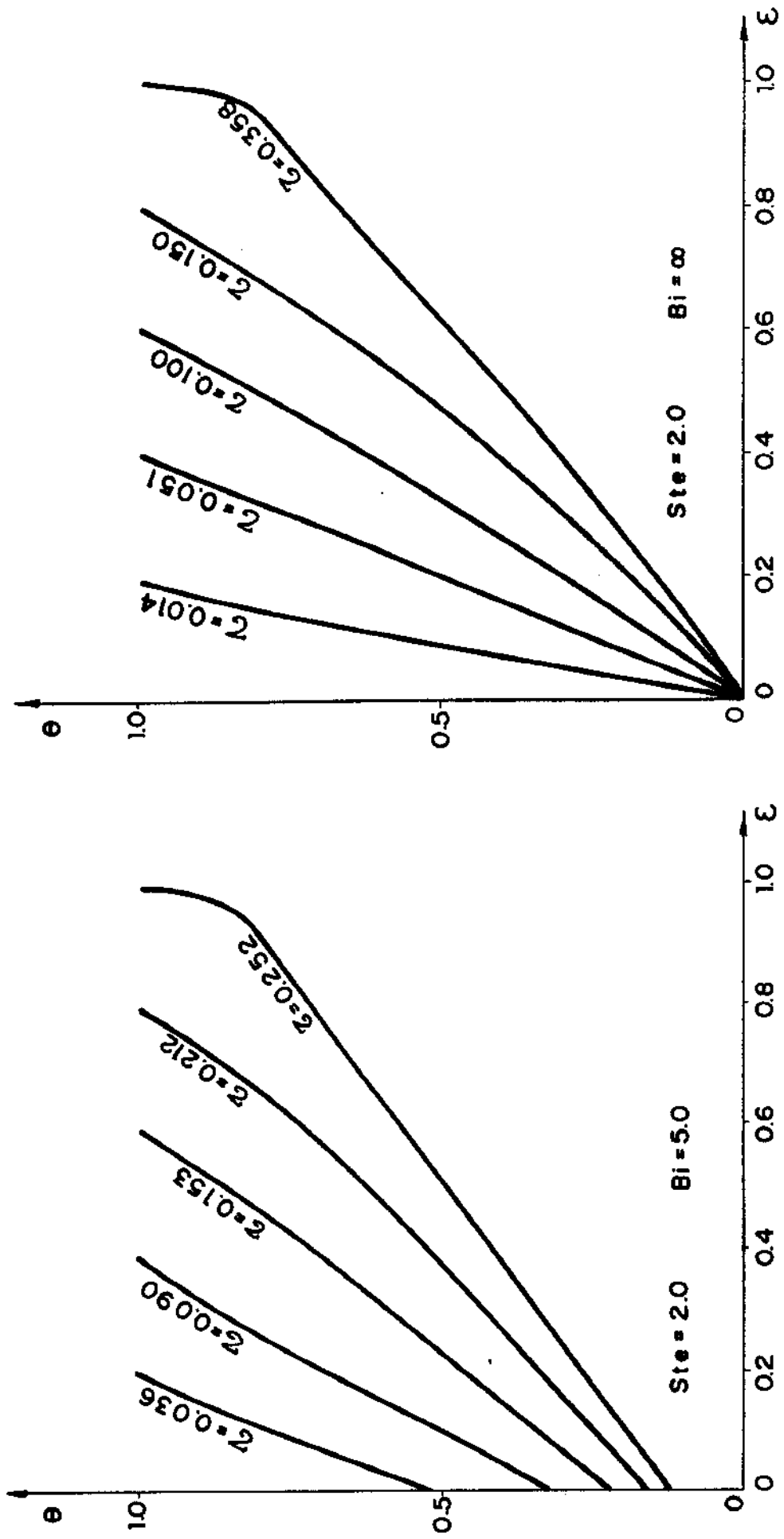


Fig. 3.21 Perfis de temperatura na fase s3lida para diferentes posic3es da frente de fus3o

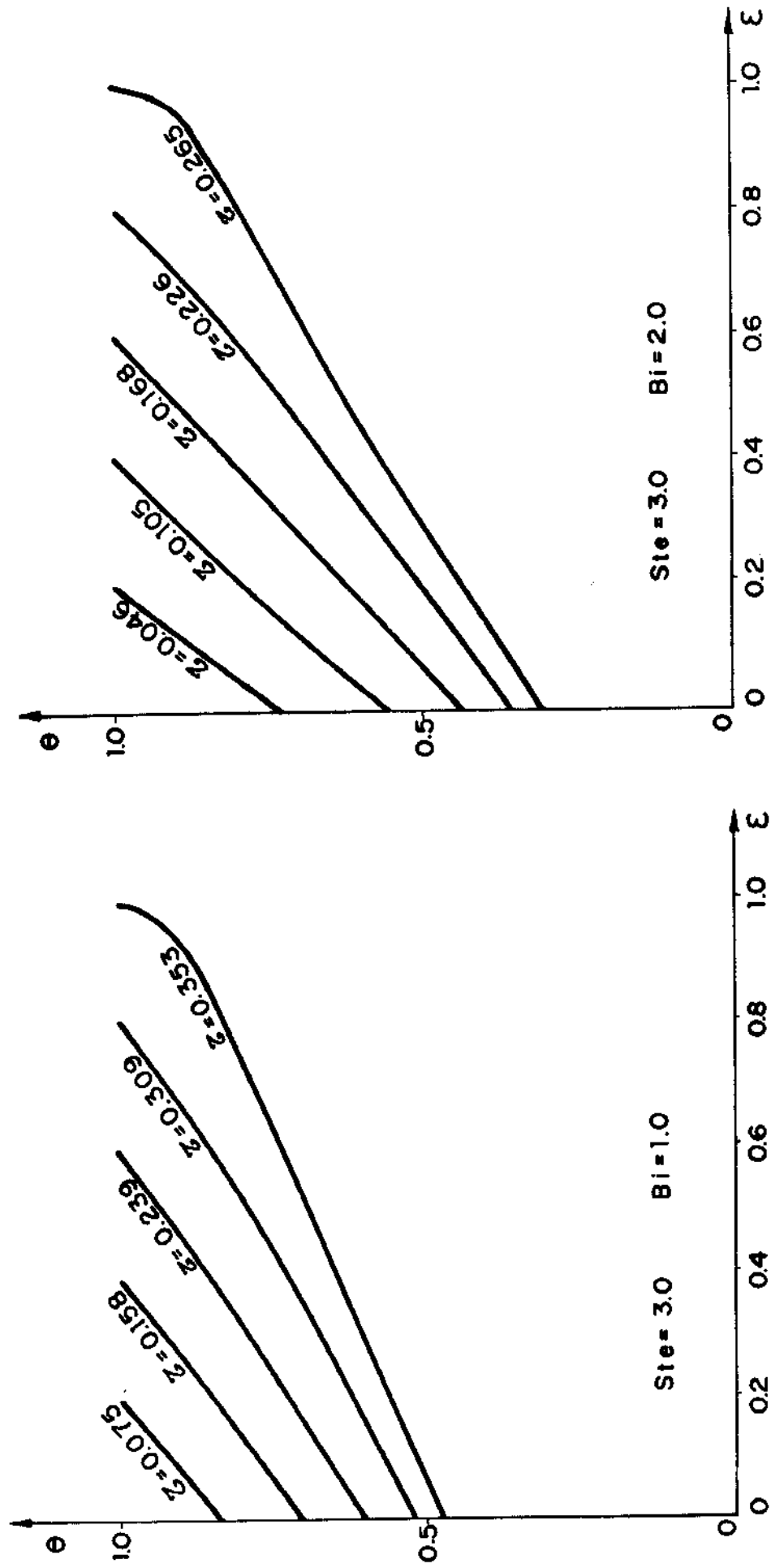


Fig. 3.22 Perfis de temperatura na fase sólida para diferentes posições na frente de fusão

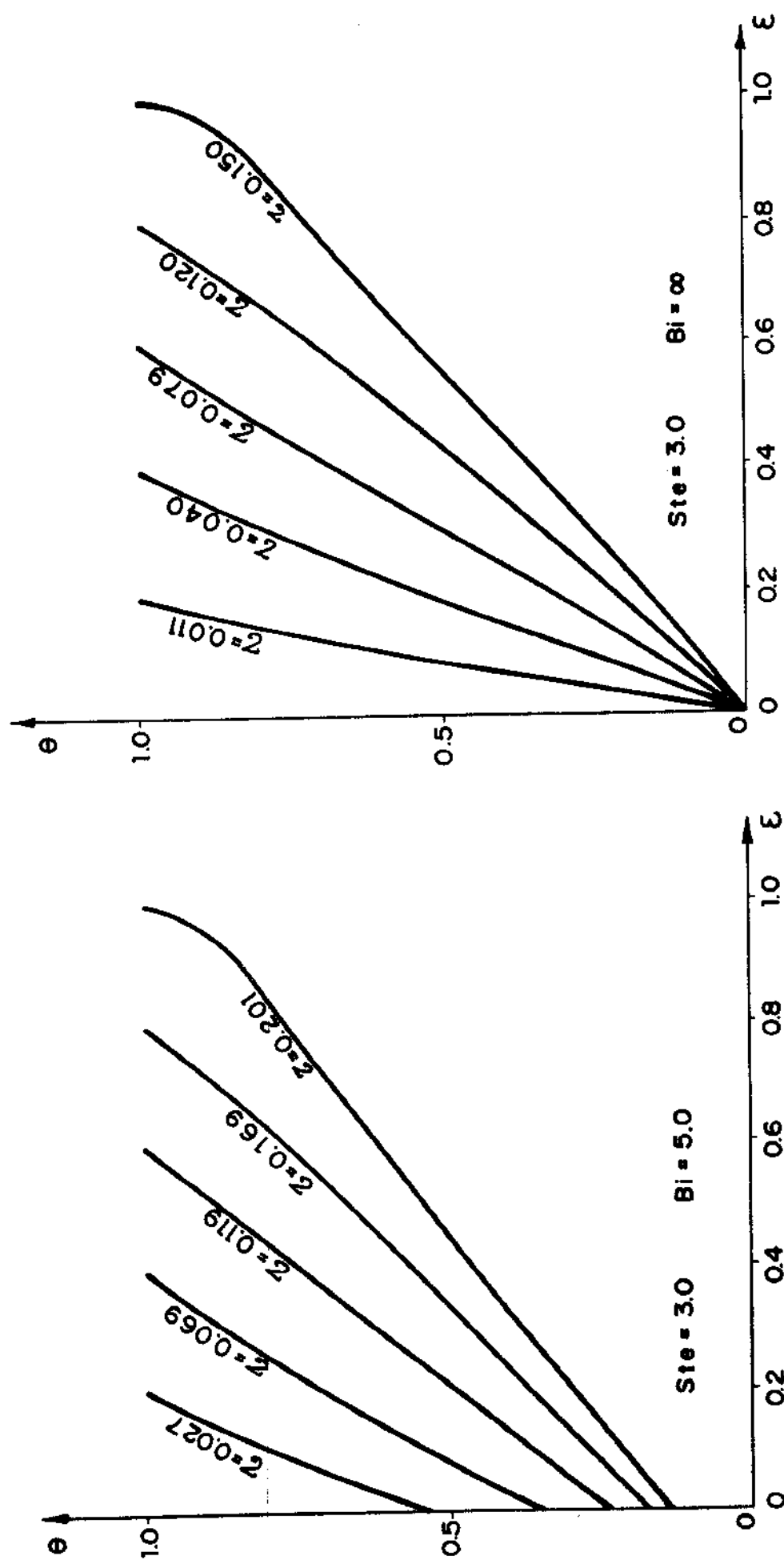


Fig. 3.23 Perfis de temperatura na fase sólida para diferentes posições da frente de fusão

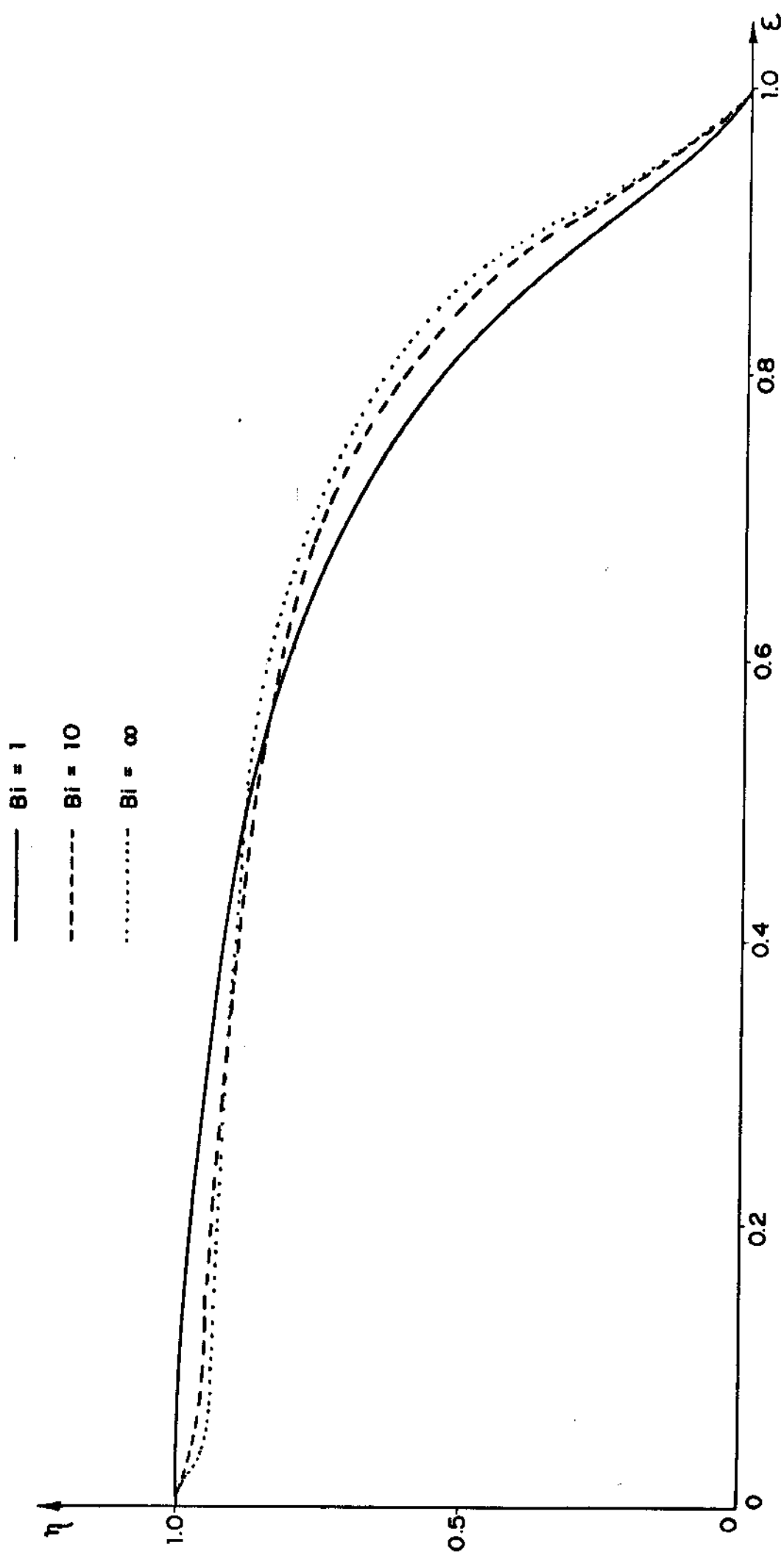


Fig. 3.24 Relação entre os calores entregues na frente de fusão e na borda da esfera em função da posição da frente de fusão para $Ste = 0.1$

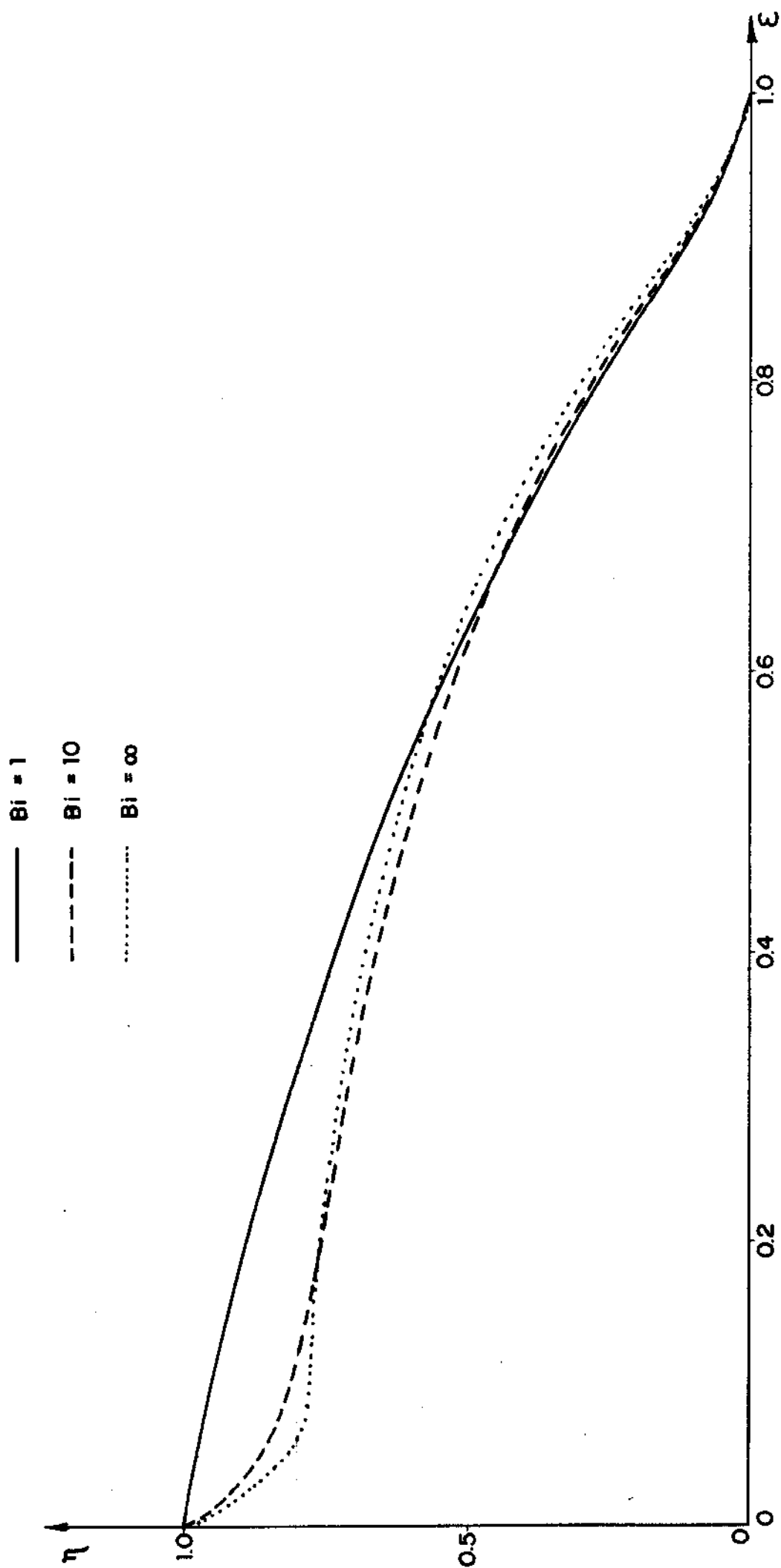


Fig. 3.25 Relação entre os calores entregues na frente de fusão e na borda da esfera em função da posição da frente de fusão para $Ste = 0.5$

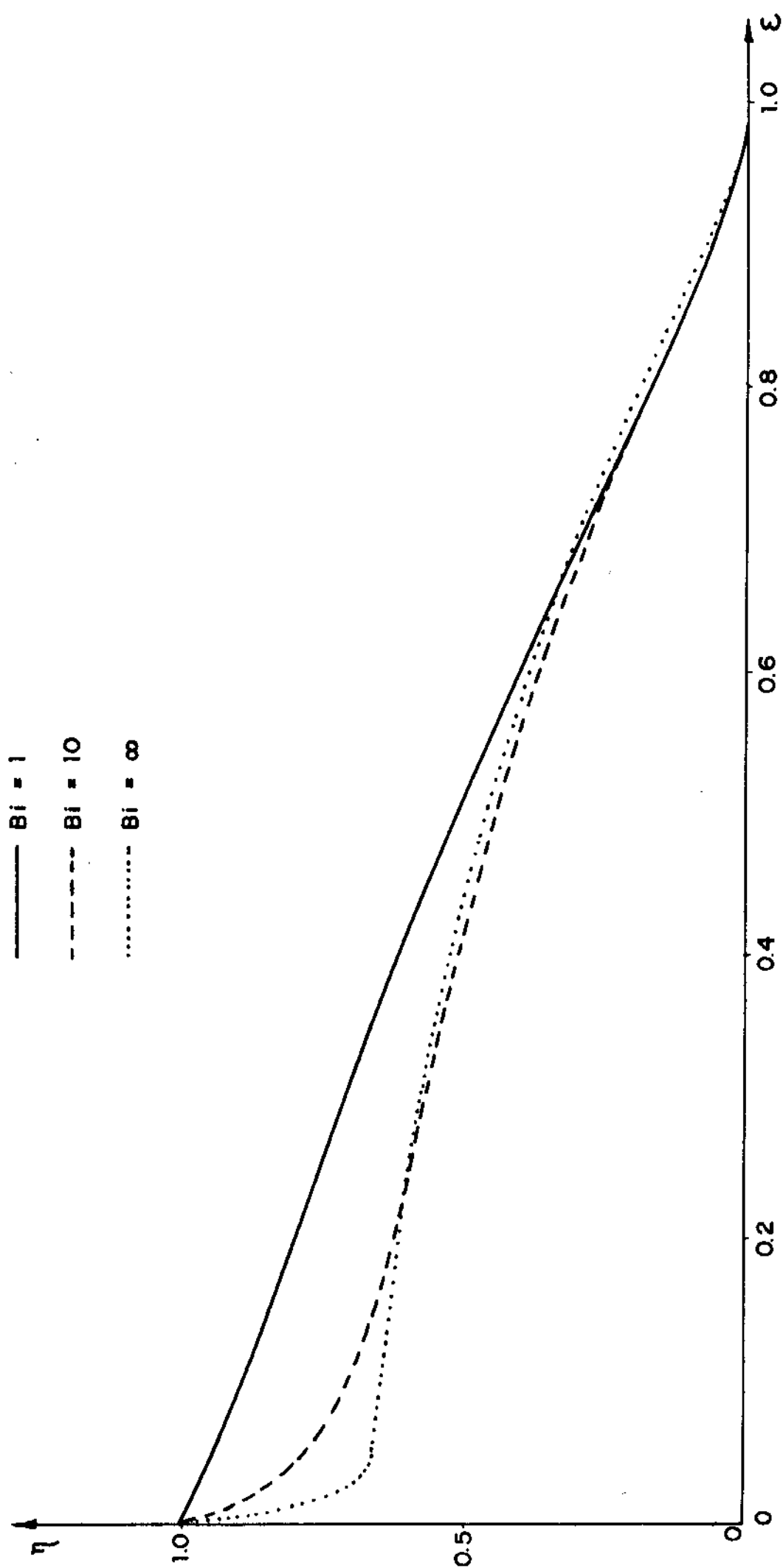


Fig. 3.26 Relação entre os calores entregues na frente de fusão e na borda da esfera em função da posição da frente de fusão para $Ste = 1.0$

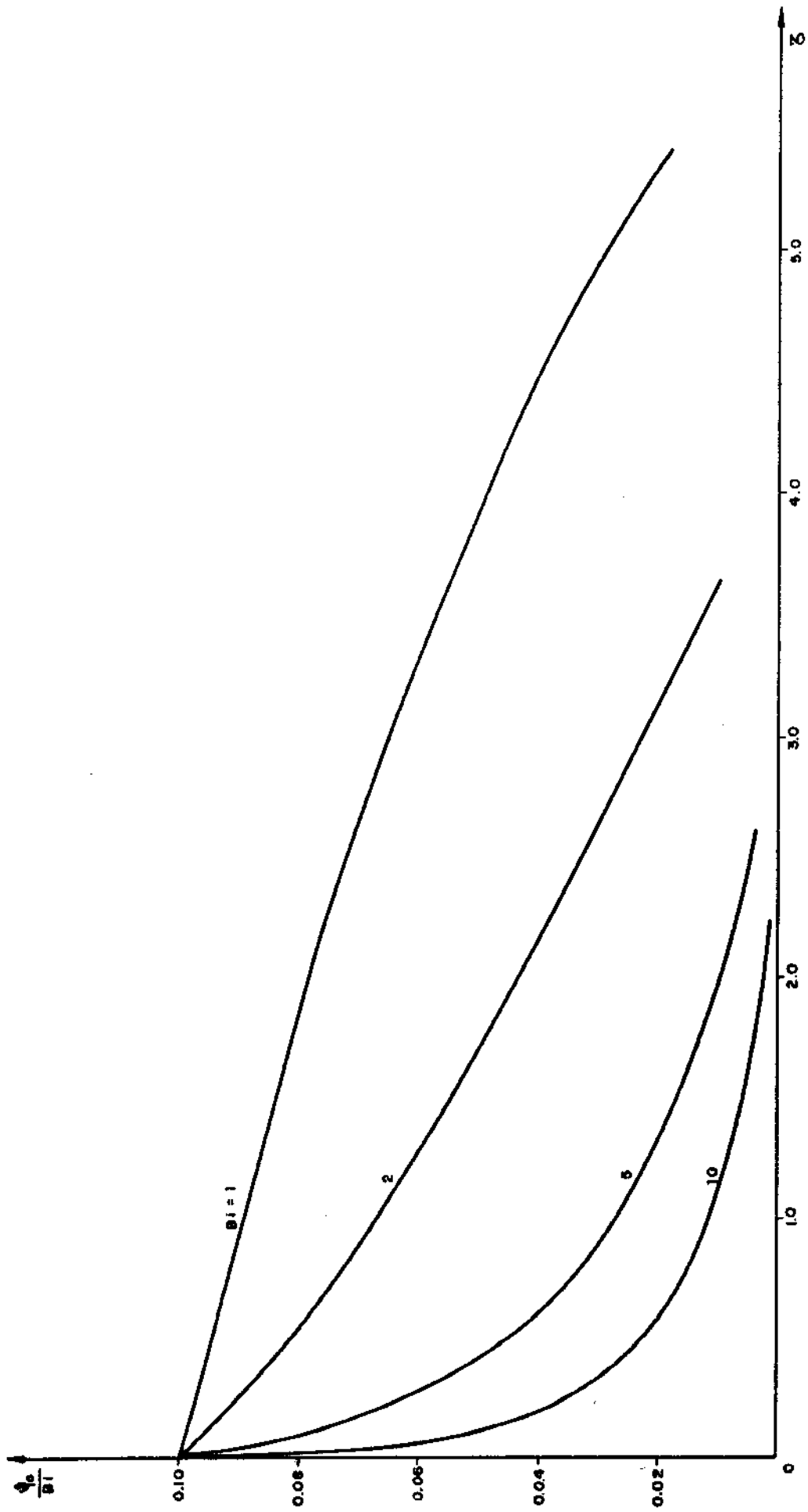


Fig. 3.27 Fluxo de calor na superfície da esfera para $Ste = 0.1$

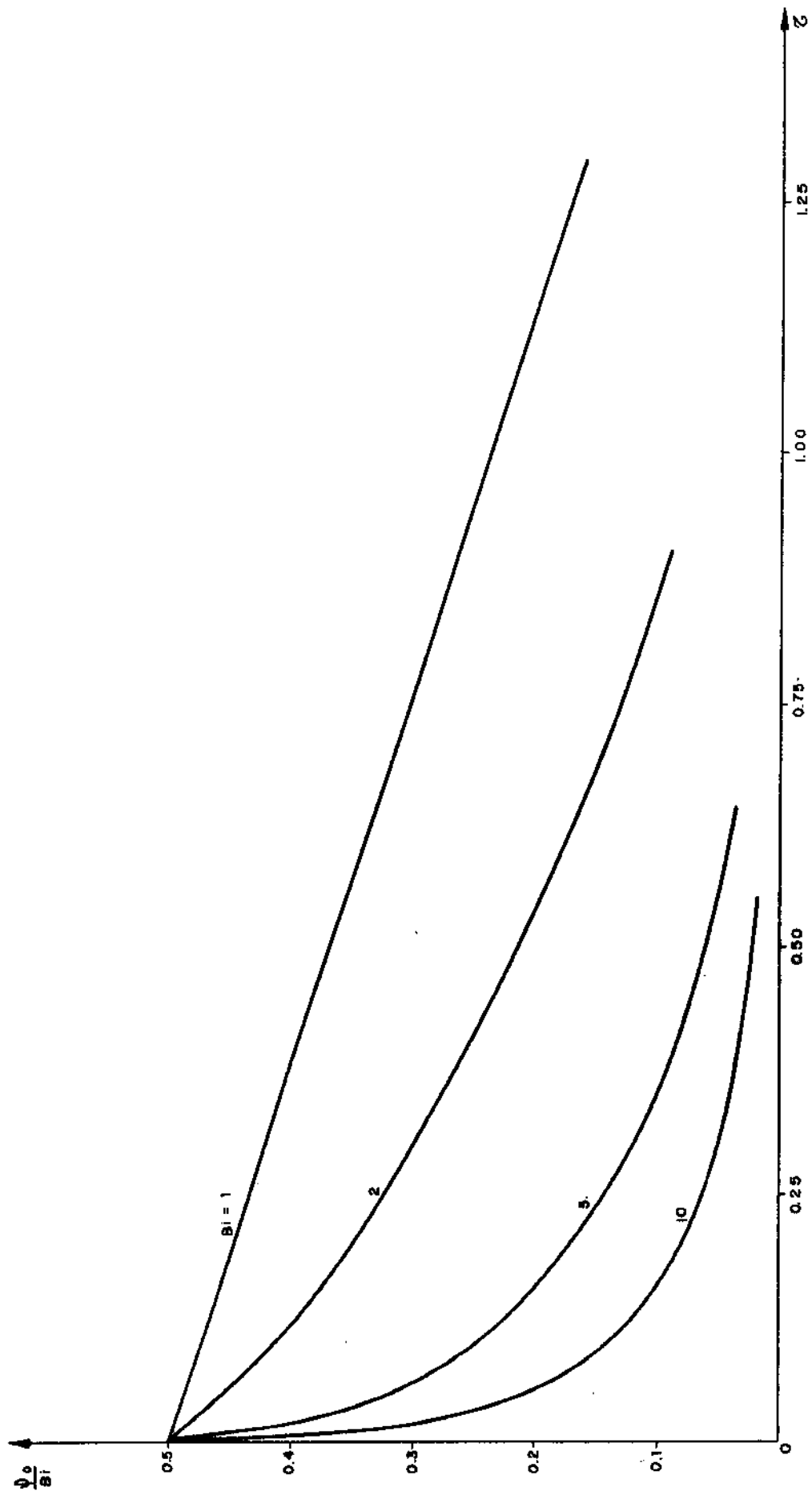


Fig. 3.28 Fluxo de calor na superfície da esfera para $Ste = 0.5$

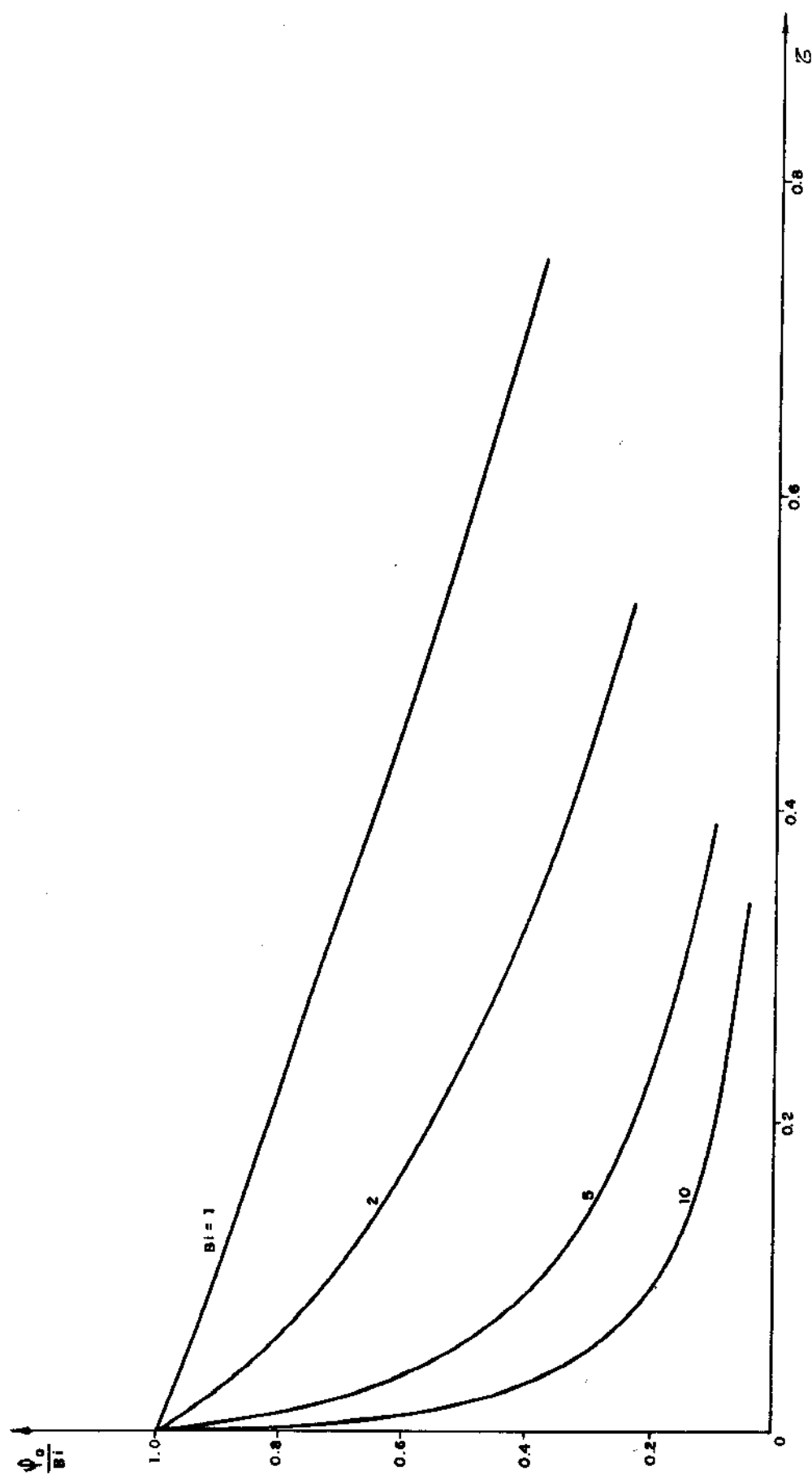


Fig. 3.29 Fluxo de calor na superfície da esfera para $Ste = 1.0$

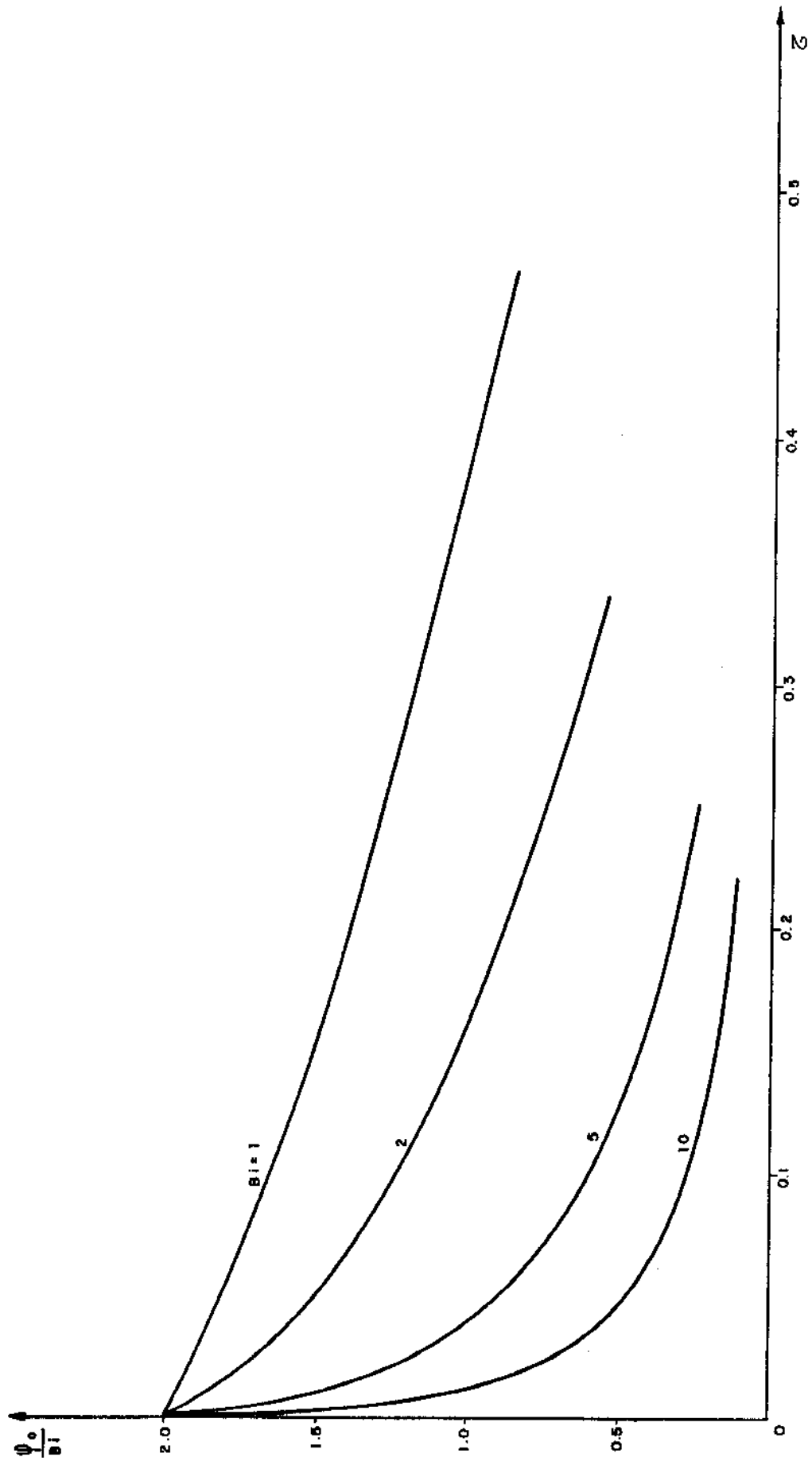


Fig. 3.30 Fluxo de calor na superfície da esfera para $Ste = 2.0$

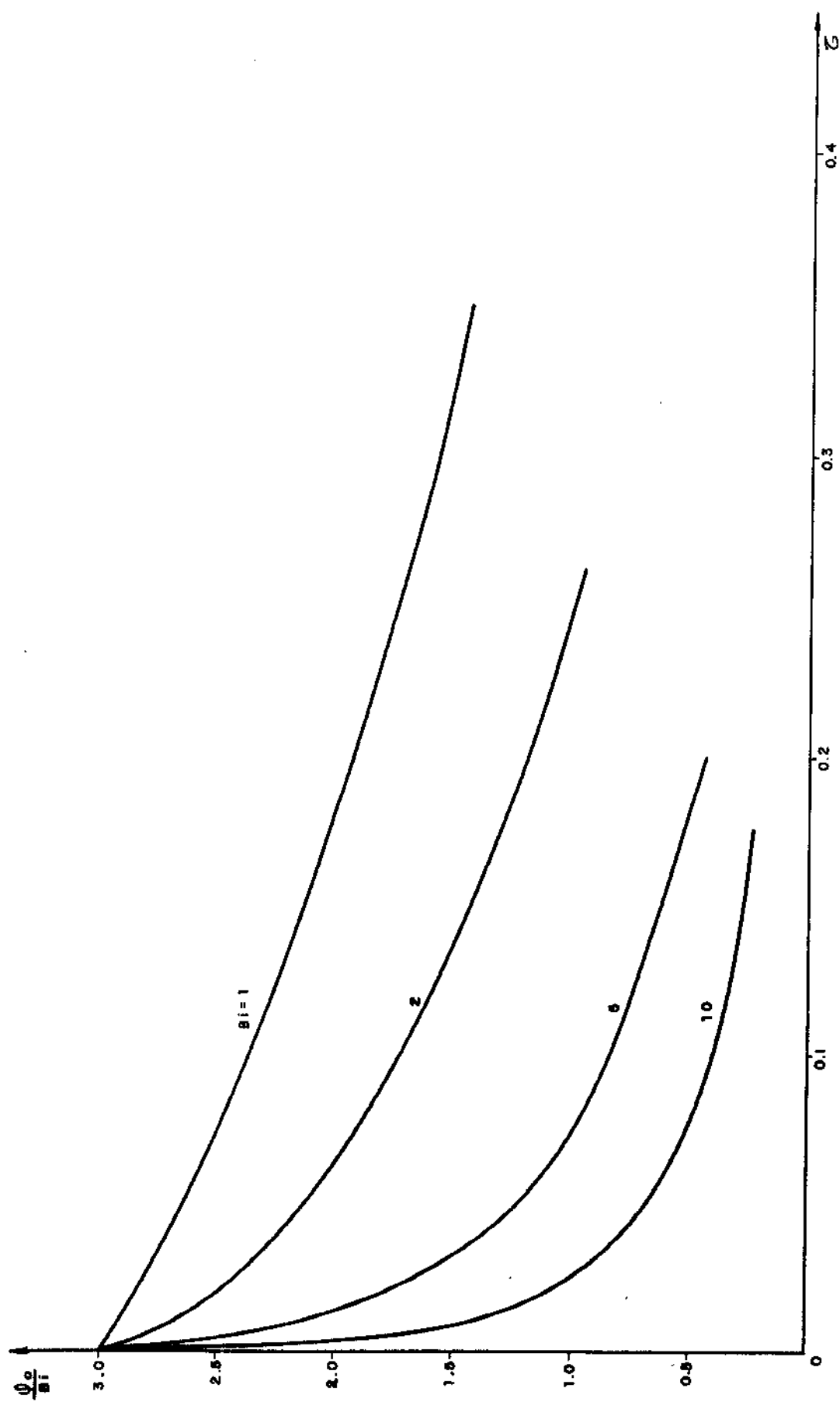


Fig.3.31 Fluxo de calor na superfície da esfera para $Ste = 3.0$

CAPÍTULO 4

O MÉTODO INTEGRAL

4.1. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

O método integral para a solução de equações diferenciais parciais foi utilizado inicialmente por von Kármán e Pohlhausen para a solução aproximada das equações da quantidade de movimento e da energia respectivamente [69]. Landahl empregou o método no campo da biofísica para resolver a equação da difusão para a análise do espalhamento de um concentrado [35]. Merk utilizou este método para um processo de fusão bidimensional em regime permanente [46] e Goodman [23] aplicou-o para a solução do problema da fusão unidimensional em regime transiente. Desde então este método vem sendo aplicado na solução de vários tipos de problemas de condução de calor unidimensional em regime transitório.

Quando a equação diferencial da condução de calor é resolvida por um método exato numa dada região submetida a condições de contorno e condição inicial especificadas, a solução resultante é satisfeita para todos os pontos da região considerada. Com o método integral a solução é satisfeita somente na média para a região analisada [54].

A sequência básica para a análise através do método integral do problema da condução unidimensional em regime transiente sem geração de calor está descrita abaixo.

1. A equação diferencial da condução de calor é integrada ao longo de uma distância fenomenológica $\delta(t)$, chamada de espessura térmica, a fim de remover da equação diferencial a derivada em relação ao espaço. A espessura térmica é definida como a distância além da qual não existe fluxo de calor. Desta forma a distribuição inicial de temperatura permanece a mesma a partir de $\delta(t)$. A equação resultante é chamada "equação integral da energia".

2. Um perfil adequado é escolhido para a distribuição

da temperatura ao longo da espessura térmica. Um perfil polinomial é em geral escolhido para este propósito e a experiência mostra que não há ganho significativo na precisão para polinômios de grau superior a 4. Os coeficientes do polinômio são determinados em função da espessura térmica $\delta(t)$ pela aplicação das condições de contorno reais.

3. Quando o perfil de temperatura assim obtido é introduzido na equação integral da energia e são executadas as operações indicadas, obtém-se uma equação diferencial ordinária para a espessura térmica $\delta(t)$ com o tempo como a variável independente. A solução desta equação diferencial sujeita a uma condição inicial apropriada fornece $\delta(t)$ em função do tempo. Neste caso, a condição inicial apropriada é $\delta(t)=0$ para $t=0$.

4. Uma vez conhecida $\delta(t)$, a distribuição de temperatura é obtida em função do tempo e da posição no meio.

O método integral na solução de problemas de mudança de fase admite por hipótese que o líquido tem uma temperatura de fusão definida. Pode-se admitir também por simplicidade, que todo o líquido se encontre inicialmente na temperatura de fusão e ainda que as propriedades termofísicas sejam uniformes e constantes, não variando com a temperatura. Estas hipóteses simplificadoras não são necessárias, não se constituindo portanto numa limitação ao emprego do método [84].

O perfil de temperatura adotado neste método deve ser escolhido com muito cuidado. Esta influência na escolha do perfil está demonstrada nos resultados apresentados por Langford [38] para o caso simples da geometria plana num meio semi-infinito. O resultado obtido de um perfil cúbico pode ser menos preciso que o resultado de um perfil quadrático. A aplicação de condições de contorno adicionais para a construção de aproximações de ordem superior pode inibir a precisão do método. Noble [53] sugere que a melhor maneira de melhorar sistematicamente a precisão do método integral é pela subdivisão espacial usando perfis quadráticos em cada sub-região, como num método de diferenças finitas. Bell [3] em lugar de subdividir a variável independente, o espaço, subdividiu a variável dependente, a temperatura. Volkov & Li-Orlov [83] propuseram um outro tipo de refinamento para o método integral. A técnica empregada baseia-se na integração dupla da equação da con

dução de calor em relação à variável espacial. Os autores empregam esta técnica para o aquecimento de uma placa com propriedades termofísicas variando com a temperatura. Em seu trabalho mais abrangente sobre o método integral, Goodman [27] devota todo um capítulo analisando as maneiras de se melhorar a precisão deste método.

4.2. O PROCESSO DE SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIA ESFÉRICA

O problema considerado é a solidificação de um líquido confinado numa esfera de raio R inicialmente na temperatura de fusão T_f . A esfera é resfriada por um fluido à temperatura constante T_∞ . A transferência de calor entre a parede da esfera e o fluido é controlada pelo coeficiente de película h considerado constante. O modelo assim descrito está mostrado na Figura 2.1.

A distribuição da temperatura na fase solidificada é dada por:

$$\alpha \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right] \right\} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

As condições de contorno são dadas pelas equações (3.2), (3.3) e (3.4).

Estas equações podem ser colocadas na forma adimensional recorrendo-se aos parâmetros (2.9), (2.10) e (2.11). Tal modelo encontra-se esquematizado na Figura 2.3.

As equações (4.1), (3.2), (3.3) e (3.4) ficam respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[(1-X)^2 \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] = (1-X)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad 0 < X < \epsilon \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{Ste} \frac{dX}{d\tau} \quad X = \epsilon \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = Bi \, \theta \quad X=0 \quad (4.4)$$

$$\theta = 1 \quad X=\epsilon \quad (4.5)$$

Inicialmente deve-se definir uma espessura térmica além da qual o gradiente de temperatura é considerado zero. Pode-se notar que a localização da interface sólido-líquido $X=\epsilon$ é idêntica à definição da espessura térmica, uma vez que o gradiente de temperatura é zero para $X>\epsilon$. Portanto a região $0<X<\epsilon$ é escolhida como a espessura térmica apropriada para este problema.

A equação integral para a fase solidificada, desde $X=0$ até $X=\epsilon$ é obtida da integração de (4.2).

$$\left[(1-X)^2 \frac{\partial \theta}{\partial X} \right]_0^\epsilon = \int_0^\epsilon (1-X)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dX \quad (4.6)$$

Aplicando-se a condição de contorno (4.3) resulta

$$\frac{(1-\epsilon)^2}{Ste} \frac{d\epsilon}{d\tau} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} = \int_0^\epsilon (1-X)^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} dX \quad (4.7)$$

Esta é a equação integral da transferência de calor com mudança de fase para geometria esférica.

4.3. O PERFIL DE TEMPERATURA PARA GEOMETRIA ESFÉRICA

Uma das primeiras tentativas de solução da equação (4.7) foi feita por Poots [62] seguindo a orientação de Goodman [23] que foi quem primeiro utilizou a técnica do método integral para a solução de problemas de mudança de fase em regime transiente. Poots considerou para esta equação um perfil linear de temperatura, e obteve resultados muito aquém dos resultados esperados. Isto é explicado pelo fato que o volume onde o calor se propaga não perma-

nece o mesmo para incrementos iguais do raio (como no caso do plano) e torna-se necessária uma modificação no perfil adotado.

Uma indicação da forma do perfil indicado pode ser determinada da equação da condução em coordenadas esféricas (4.1). Fazendo $u = T \cdot r$, a equação da condução em coordenadas esféricas fica na forma

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.8)$$

que é uma equação semelhante ao caso plano. Como o método integral é adequado para um perfil polinomial quando a equação é igual ao caso plano, a transformação

$$T = u \left(\frac{1}{r} \right) \quad (4.9)$$

onde u é um polinômio em r , torna-se evidente para o caso esférico.

4.4. SOLUÇÃO SIMPLIFICADA

Seja o perfil de temperatura dado pela expressão

$$\theta = \frac{1}{1 - X} [A + B (X - \epsilon)] \quad (4.10)$$

Aplicando as condições de contorno (4.4) e (4.5) pode-se calcular os coeficientes do polinômio acima:

$$A = 1 - \epsilon \quad (4.11)$$

$$B = \frac{(1 - \epsilon)(Bi - 1)}{1 - \epsilon + Bi \epsilon} \quad (4.12)$$

Portanto o perfil de temperatura é dado por

$$\theta = \frac{1-\epsilon}{1-X} \frac{BiX + 1 - X}{Bi\epsilon + 1 - \epsilon} = \frac{\frac{X}{1-X} + \frac{1}{Bi}}{\frac{\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{1}{Bi}} \quad (4.13)$$

Substituindo este valor na condição de contorno (4.3) resulta

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{Bi Ste}{(1-\epsilon)(Bi\epsilon + 1 - \epsilon)} \quad (4.14)$$

A integração de (4.14) permite o cálculo do tempo de solidificação

$$\tau = \frac{1}{Ste} \left[\frac{\epsilon^3}{3} \left(\frac{1}{Bi} - 1 \right) - \epsilon^2 \left(\frac{1}{Bi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\epsilon}{Bi} \right] \quad (4.15)$$

Estes valores são exatamente os mesmos encontrados por London & Seban [42].

4.5. SOLUÇÃO INTEGRAL

Seja o perfil de temperatura dado pela expressão

$$\theta = \frac{1}{1-X} \left[A + B(X-\epsilon) + C(X-\epsilon)^2 \right] \quad (4.16)$$

As equações a serem consideradas são as equações (4.2), (4.3), (4.4) e (4.5).

São necessárias três condições de contorno para a determinação dos três coeficientes. As equações (4.4) e (4.5) fornecem

duas condições. Porém a relação dada pela equação (4.3) não é adequada para esta finalidade, porque se utilizada, o perfil de temperatura resultante terá um termo com $d\epsilon/d\tau$. Quando este perfil é introduzido na equação integral da energia, resulta uma equação diferencial ordinária segunda ordem em vez de uma equação usual de primeira ordem. Para contornar este problema, uma alternativa é diferenciar (4.5):

$$d\theta = \left[\frac{\partial \theta}{\partial X} dX + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} d\tau \right]_{X=\epsilon} = 0 \quad (4.17)$$

que também pode ser colocada na forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0 \quad \text{para } X=\epsilon \quad (4.18)$$

O termo $d\epsilon/d\tau$ é eliminado entre (4.3) e (4.18) resultando

$$\frac{\partial \theta}{\partial X} = - \frac{1}{Ste} \frac{\partial \theta / \partial \tau}{\partial \theta / \partial X}$$

ou ainda

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 = - \frac{1}{Ste} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \quad \text{para } X=\epsilon \quad (4.19)$$

A aplicação da condição de contorno (4.5) na equação (4.16) do perfil de temperatura resulta

$$A = 1 - \epsilon \quad (4.20)$$

Eliminando $\partial \theta / \partial \tau$ entre (4.2) e (4.19) ficamos com

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)^2 + \frac{1}{Ste(1-X)^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[(1-X)^2 \frac{\partial \theta}{\partial X} \right] = 0 \quad X=\epsilon \quad (4.21)$$

Substituindo na equação (4.21) o valor do perfil de temperatura e da sua derivada,

$$\left(\frac{B+1}{1-\epsilon}\right)^2 + \frac{2C(1-\epsilon)}{Ste(1-\epsilon)^2} = 0$$

Multiplicando-se todos os membros por $(1-\epsilon)^2$

$$(B+1)^2 + \frac{2C(1-\epsilon)}{Ste} = 0 \quad \text{para } \epsilon \neq 1 \quad (4.22)$$

Da aplicação da condição de contorno (4.4) em (4.16) resulta

$$C = \frac{B[1+\epsilon(Bi-1)] - (1-\epsilon)(Bi-1)}{\epsilon^2(Bi-1) + 2\epsilon} \quad (4.23)$$

A substituição do valor de C dado por (4.23) em (4.22) resulta numa expressão do segundo grau para B:

$$B^2 + B \left[2 + \frac{2(1-\epsilon)}{Ste} \frac{\epsilon(Bi-1)+1}{\epsilon^2(Bi-1) + 2\epsilon} \right] + 1 - \frac{2(1-\epsilon)^2}{Ste} \frac{(Bi-1)}{\epsilon^2(Bi-1)+2\epsilon} = 0$$

Portanto,

$$B = - \left[1 + \frac{1-\epsilon}{Ste} \frac{\epsilon(Bi-1)+1}{\epsilon^2(Bi-1)+2\epsilon} \right] \pm \sqrt{\left[1 + \frac{1-\epsilon}{Ste} \frac{\epsilon(Bi-1)+1}{\epsilon^2(Bi-1)+2\epsilon} \right]^2 - \left[1 - \frac{2(1-\epsilon)^2}{Ste} \frac{Bi-1}{\epsilon^2(Bi-1)+2\epsilon} \right]}$$

A escolha do sinal positivo na expressão para B é justificada por

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{X=\epsilon} = \frac{B+1}{1-\epsilon} > 0 \quad (4.24)$$

Finalmente o valor de B é dado por

$$B = -1 + \left[\frac{1-\epsilon}{Ste} \frac{\epsilon(Bi-1)+1}{\epsilon^2(Bi-1)+2\epsilon} \right] \left\{ \sqrt{1 + \frac{2Ste \cdot Bi [\epsilon^2(Bi-1)+2\epsilon]}{(1-\epsilon) [\epsilon(Bi-1)+1]^2}} - 1 \right\} \quad (4.25)$$

A equação integral a ser considerada é a (4.7) onde o termo à direita do sinal da igualdade pode ser desenvolvido resultando

$$\frac{(1-\epsilon)^2}{Ste} \frac{d\epsilon}{d\tau} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} = \frac{d}{d\tau} \int_0^\epsilon (1-X)^2 \theta dX - (1-\epsilon)^2 \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (4.26)$$

Para facilitar o cálculo, cada termo será avaliado separadamente. Assim,

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} = Bi \left[\frac{2(1-\epsilon) - \epsilon B}{\epsilon(Bi-1)+2} \right] \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\epsilon (1-X)^2 \theta dX = \frac{1}{\epsilon(Bi-1)+2} & \left\{ (Bi-1) \left[\frac{2}{3} \epsilon^2 - \frac{13}{12} \epsilon^3 + \frac{5}{12} \epsilon^4 \right] + \right. \\ & \left. + (2\epsilon - 3\epsilon^2 + \epsilon^3) + B \left[\left(\frac{\epsilon^4}{12} - \frac{\epsilon^3}{6} \right) (Bi-1) + \left(\frac{\epsilon^3}{4} - \frac{2}{3} \epsilon^2 \right) \right] \right\} \quad (4.28) \end{aligned}$$

Para o desenvolvimento da expressão (4.28) que deve ser diferenciada em relação ao tempo adimensional, torna-se necessário conhecer o valor de

$$\frac{dB}{d\tau} = \frac{dB}{d\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad (4.29)$$

Diferenciando B da equação (4.25) em relação a ϵ encontramos

$$\begin{aligned} \frac{dB}{d\epsilon} = & \frac{Bi}{\sqrt{1 + \frac{2Ste Bi [\epsilon^2(Bi-1) + 2\epsilon]}{(1-\epsilon)[\epsilon(Bi-1) + 1]^2}}} \cdot \\ & \left\{ \frac{2}{[\epsilon^2(Bi-1) + 2\epsilon]} - \frac{2(Bi-1)}{[\epsilon(Bi-1) + 1]^2} + \frac{1}{(1-\epsilon)[\epsilon(Bi-1) + 1]} \right\} + \\ & - \frac{1}{Ste} \left\{ \sqrt{1 + \frac{2Ste Bi [\epsilon^2(Bi-1) + 2\epsilon]}{(1-\epsilon)[\epsilon(Bi-1) + 1]^2}} - 1 \right\} \cdot \\ & \left\{ \frac{(Bi-1)}{[\epsilon^2(Bi-1) + 2\epsilon]} + \frac{\epsilon^2(Bi-1) + 2}{[\epsilon^2(Bi-1) + 2\epsilon]^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Substituindo todos estes valores na equação integral da condução (4.26) resulta uma expressão para a velocidade de avanço da frente de fusão:

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{d\tau} = & - Bi \left[\frac{2(1-\epsilon) - \epsilon B}{\epsilon(Bi-1) + 2} \right] \cdot \left\{ \frac{-(1-\epsilon)^2}{Ste} + \frac{1}{[\epsilon(Bi-1) + 2]} \cdot \right. \\ & (Bi-1) \left[\frac{4\epsilon}{3} - \frac{13}{4}\epsilon^2 + \frac{5}{3}\epsilon^3 \right] + (2 - 6\epsilon + 3\epsilon^2) + \\ & + \left[\left(\frac{\epsilon^4}{12} - \frac{\epsilon^3}{6} \right) (Bi-1) + \left(\frac{\epsilon^3}{4} - \frac{2}{3}\epsilon^2 \right) \right] \frac{dB}{d\epsilon} + \\ & + B \left[\left(\frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^2}{2} \right) (Bi-1) + \left(\frac{2\epsilon^2}{4} - \frac{4\epsilon}{3} \right) \right] - \left\{ (Bi-1) \left(\frac{2\epsilon^2}{3} - \frac{13}{12}\epsilon^3 + \frac{5}{12}\epsilon^4 \right) + \right. \\ & + (2\epsilon - 3\epsilon^2 + \epsilon^3) + B \left[\left(\frac{\epsilon^4}{12} - \frac{\epsilon^3}{6} \right) (Bi-1) + \left(\frac{\epsilon^3}{4} - \frac{2}{3}\epsilon^2 \right) \right] \left. \right\} \cdot \\ & \left. \frac{(Bi-1)}{[\epsilon(Bi-1) + 2]^2} - (1-\epsilon)^2 \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

A relação entre o tempo de solidificação e a posição da frente de fusão pode ser estabelecida integrando-se a expressão (4.31). Esta integração pode ser efetuada pela técnica de Simpson:

$$\begin{aligned} \tau_{\epsilon+2\Delta\epsilon} - \tau_{\epsilon} &= \int_{\epsilon}^{\epsilon+2\Delta\epsilon} \left(\frac{d\tau}{d\epsilon} \right) d\epsilon = \\ &= \frac{\Delta\epsilon}{3} \left[\left(\frac{d\tau}{d\epsilon} \right)_{\epsilon} + 4 \left(\frac{d\tau}{d\epsilon} \right)_{\epsilon+\Delta\epsilon} + \left(\frac{d\tau}{d\epsilon} \right)_{\epsilon+2\Delta\epsilon} \right] \end{aligned} \quad (4.32)$$

O cálculo de $d\epsilon/d\tau$ para $\epsilon=0$ não pode ser obtido da expressão (4.31) pois existe ϵ no denominador de alguns termos desta expressão. Entretanto este valor pode ser obtido da combinação de (4.3), (4.4) e (4.5) para $\epsilon=0$ resultando em

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \text{Ste Bi} \quad \text{para } \epsilon=0 \quad (4.33)$$

A taxa de transferência de calor na superfície da esfera é, segundo a equação (3.42),

$$\varphi_0 = \text{Ste} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{X=0} = \text{Ste Bi } \theta \Big|_{X=0}$$

Substituindo nesta equação o valor da temperatura em $X=0$

$$\varphi_0 = \text{Ste Bi} (A - B\epsilon + C\epsilon^2) \quad (4.34)$$

A hipótese de temperatura constante na superfície da esfera é equivalente a considerar um coeficiente de transferência de calor muito grande, ou seja, um número de Biot tendendo a infinito ($\text{Bi} \rightarrow \infty$). É também equivalente a dizer que a temperatura superficial da esfera é T_{∞} , ou seja, a condição de contorno (4.6)

pode ser reescrita como

$$\theta = 0 \quad \text{para } X=0 \quad (4.35)$$

Para $Bi \rightarrow \infty$ os coeficientes da equação (4.16) ficam

$$A = 1-\epsilon \quad (4.36)$$

$$B = -1 + \frac{1-\epsilon}{Ste \epsilon} \left[\sqrt{\frac{2Ste}{1-\epsilon} + 1} - 1 \right] \quad (4.37)$$

$$C = \frac{B\epsilon - (1-\epsilon)}{\epsilon^2} \quad (4.38)$$

Com estes valores, a expressão para a velocidade de avanço da frente de fusão fica

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon}{d\tau} = & \left\{ -1 + \frac{1-\epsilon}{Ste \epsilon} \left[\sqrt{\frac{2Ste}{1-\epsilon} + 1} - 1 \right] - \frac{2(1-\epsilon)}{\epsilon} \right\} \cdot \\ & \left\{ \frac{\epsilon(\epsilon-2)}{12(1-\epsilon) \sqrt{\frac{2Ste}{1-\epsilon} + 1}} + \frac{1}{12Ste} \left[\sqrt{\frac{2Ste}{1-\epsilon} + 1} - 1 \right] (-2+6\epsilon-3\epsilon^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon}{6} - \frac{(1-\epsilon)^2}{Ste} - \frac{1}{3} \right\}^{-1} \quad (4.39) \end{aligned}$$

Duck & Riley [14] propuseram uma extensão do método integral desenvolvido inicialmente para geometrias esféricas para sua aplicação em elipsóides através de uma modificação no tempo adimensional.

4.6. RESULTADOS

As Figuras 4.1 a 4.10 são gráficos que representam os perfis de temperatura dados pela equação (4.16) com os coeficientes obtidos das equações (4.20), (4.23) e (4.25). Estão calculados os perfis de temperatura para os seguintes valores do número de Stefan: 0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0. Para cada número de Stefan estão mostradas as soluções para números de Biot iguais a 1, 2, 5 e ∞ . As soluções em todos os gráficos são para $\epsilon=0,2$; $\epsilon=0,4$; $\epsilon=0,6$ e $\epsilon=0,8$. Não estão computados os resultados para $\epsilon=1,0$ porque a equação (4.16) não pode ser utilizada para este valor. Até $\epsilon=0,9$ a equação (4.16) pode ser utilizada com segurança. As linhas tracejadas representam os resultados obtidos pelo método integral e as linhas cheias, os resultados numéricos.

As Figuras 4.11 a 4.20 são gráficos que representam a velocidade de avanço da frente de fusão dada pela equação (4.31). A velocidade de avanço está calculada para os seguintes valores do número de Stefan: 0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0. Para cada número de Stefan estão mostradas as soluções para números de Biot iguais a 1, 2, 5, 10 e ∞ . Pode-se observar que os resultados concordam muito bem desde $\epsilon=0$ até $\epsilon=0,8$. Esta é uma concordância bastante significativa pois quando $\epsilon=0,8$ o volume da esfera já solidificado é 99,2%, ou seja, resta apenas 0,8% do volume da esfera para ser solidificado. A Figura 4.28 mostra a percentagem do volume da esfera que resta para ser solidificado em função da posição da frente de fusão adimensional.

A integração da equação (4.31) fornece a posição da frente de fusão no tempo. As Figuras 4.21 a 4.25 mostram os resultados desta integração para os seguintes valores do número de Stefan: 0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0. Para cada valor do número de Stefan estão computadas soluções para números de Biot iguais a 1, 2, 5, 10 e ∞ . Novamente convém salientar que os resultados desde $\epsilon=0$ até $\epsilon=0,8$ são bastante concordantes e mais uma vez podemos recorrer à Figura 4.28 para assegurar que até este ponto 99,2% do volume da esfera já se encontra solidificado.

A taxa de transferência de calor na superfície da esfera calculada pelo método integral é dada pela equação (4.34). A Figura 4.26 mostra o fluxo de calor adimensional na borda da esfera em função da posição da interface sólido-líquido para valores

do número de Stefan 0,1 e 0,5. A Figura 4.27 mostra o mesmo para números de Stefan 1,0 e 2,0. Pode-se observar que a concordância é muito boa.

As expressões desenvolvidas pelo método integral para o estudo do processo de solidificação em esferas dispensam a utilização de computadores. A expressão do perfil de temperatura não é muito complexa e fornece resultados bastante precisos. Porém a expressão para a velocidade de avanço da frente de fusão, apesar de poder ser resolvida sem o auxílio de um computador, é muito extensa. Da mesma forma, a posição da frente de fusão no tempo pode ser determinada pela integração da expressão da velocidade de avanço dispensando a utilização do computador. Entretanto, devido à complexidade das equações nestes dois últimos casos mencionados, ou seja, para a determinação da velocidade de avanço da frente de fusão e para a determinação da posição desta frente no tempo, é desejável que se disponha de um método aproximado mais imediato, ainda que em prejuízo de alguma precisão. Por este motivo está proposto no próximo capítulo um fator de correção aplicado na solução exata de uma geometria plana semi-infinita a fim de que esta solução corrigida possa ser utilizada na geometria esférica.

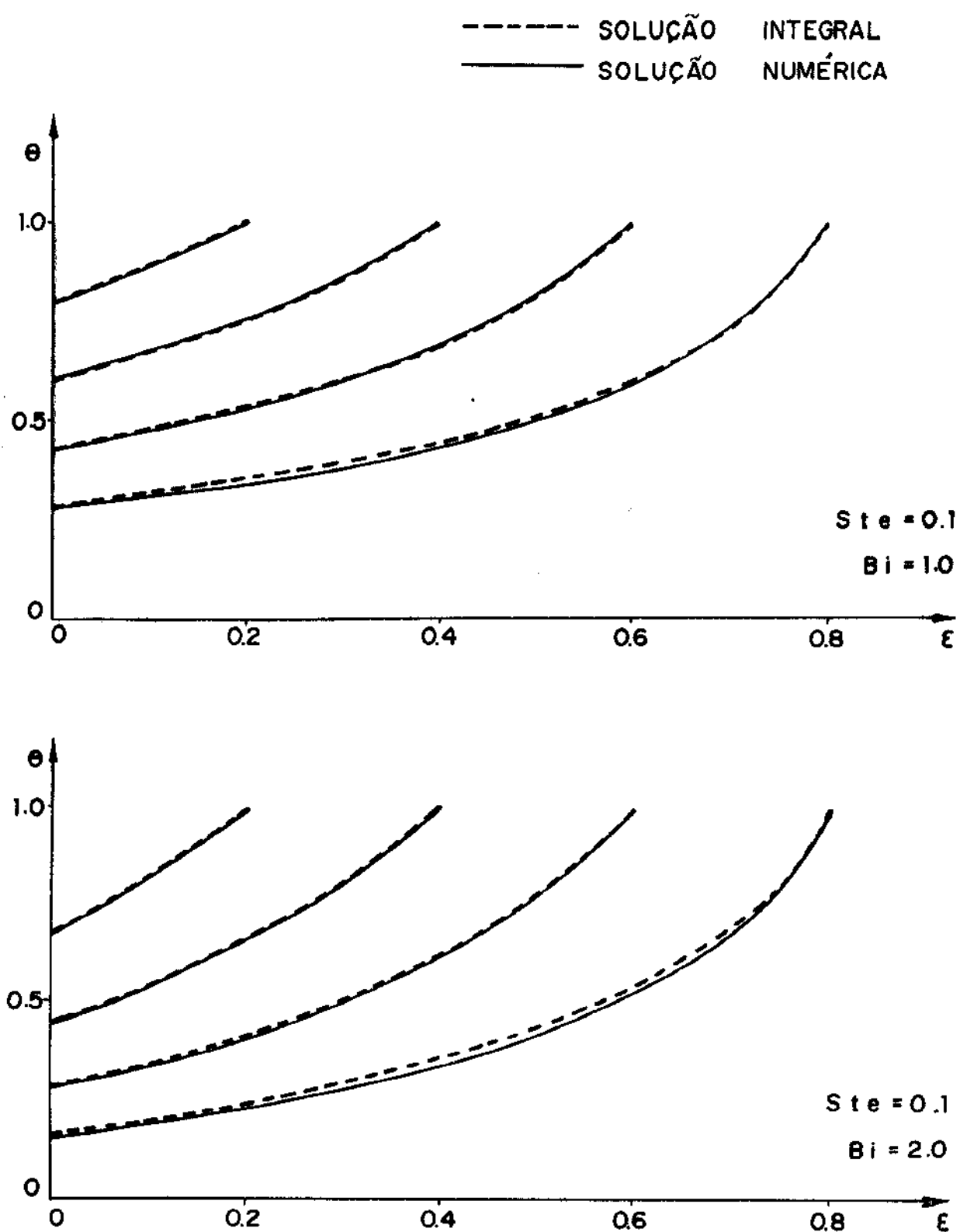


Fig. 4.1 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

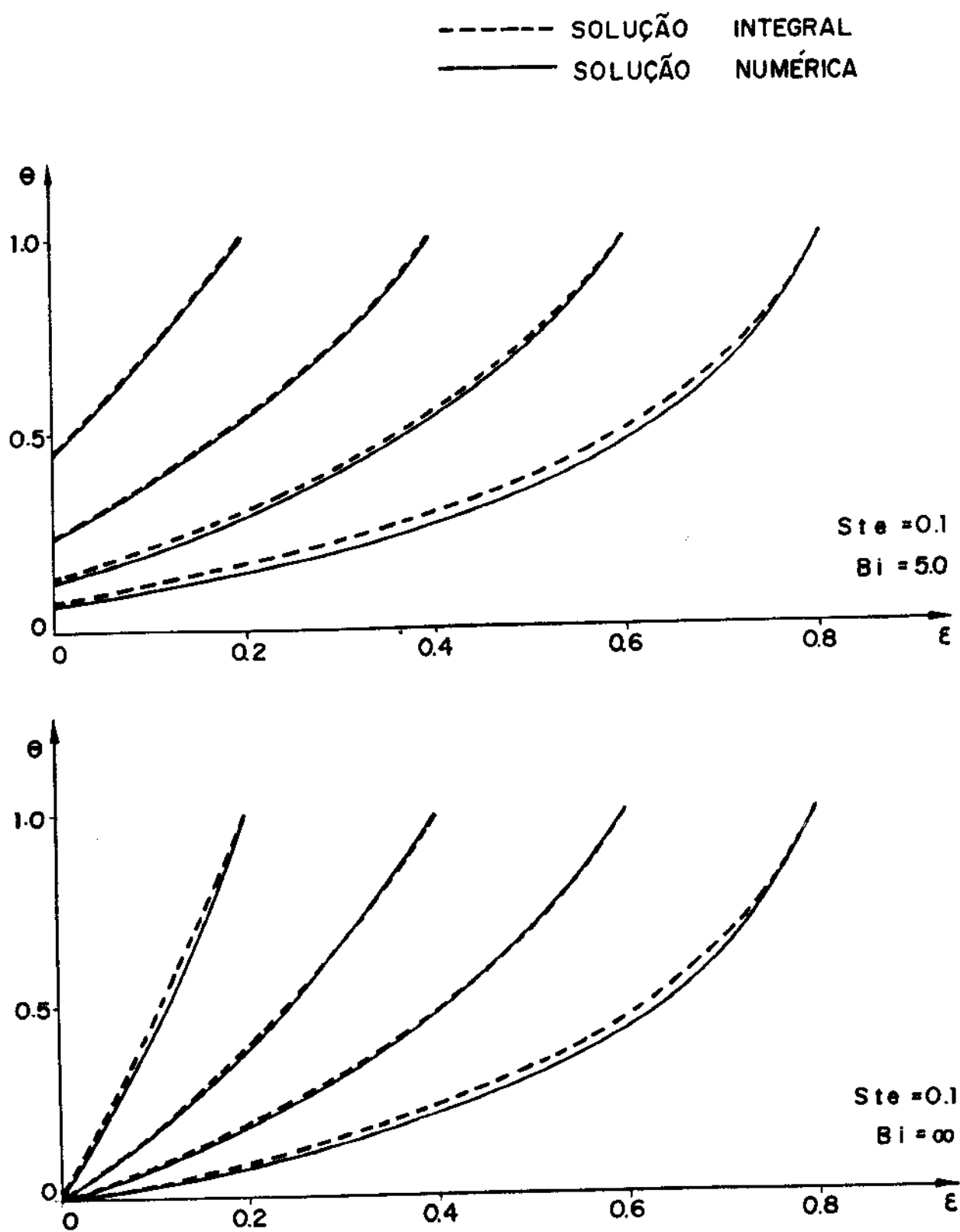


Fig. 4.2 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

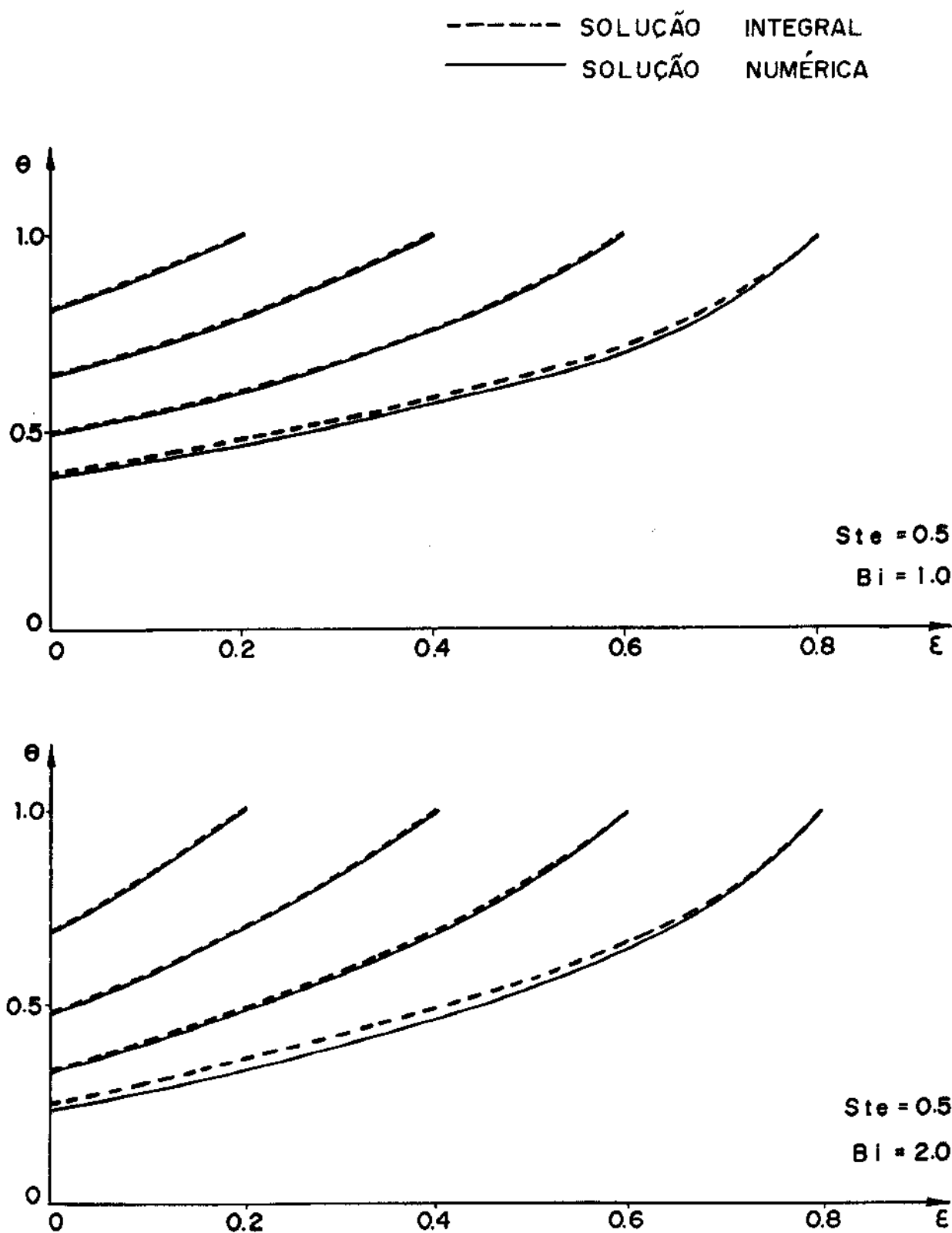


Fig. 4.3 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

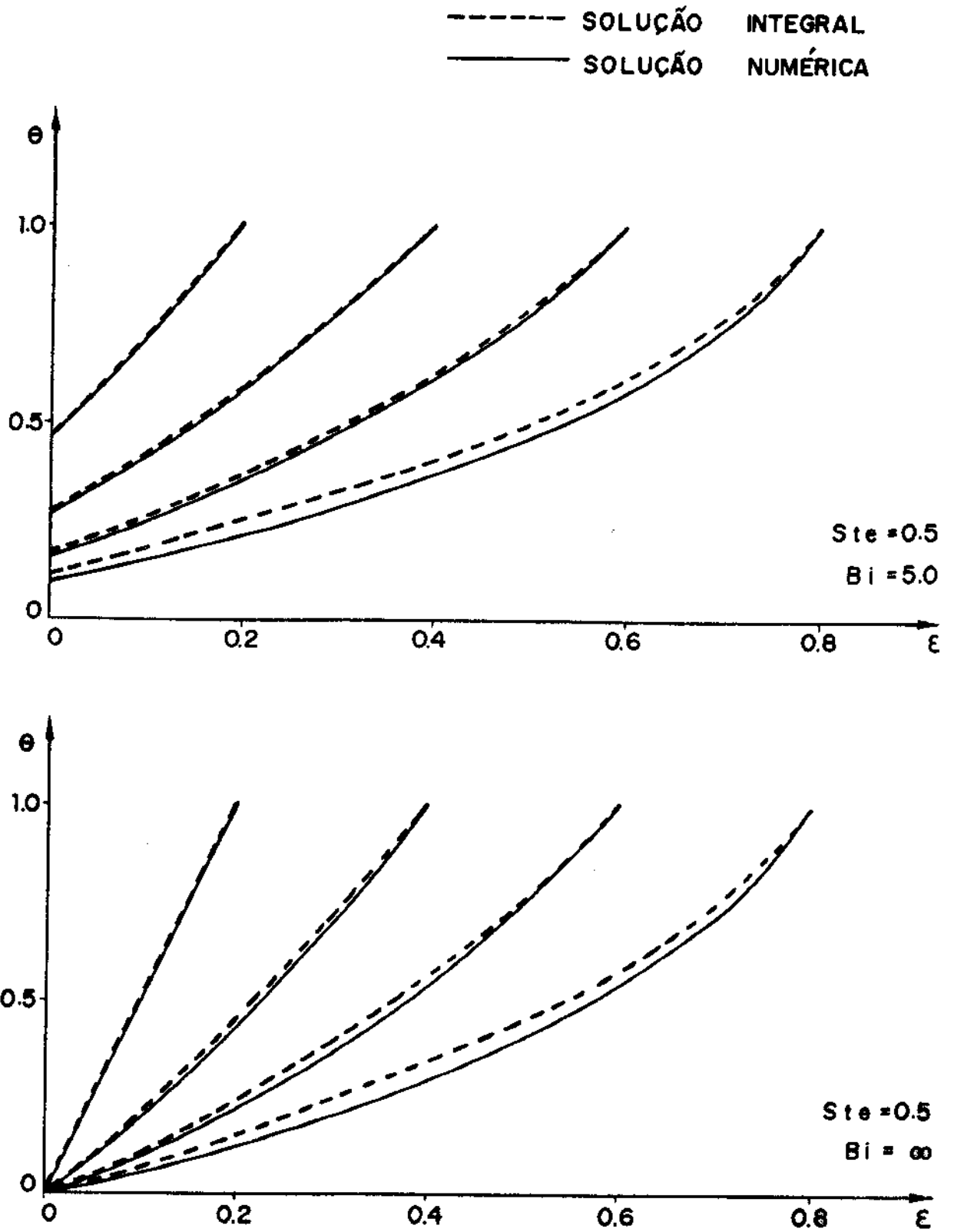


Fig. 4.4 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

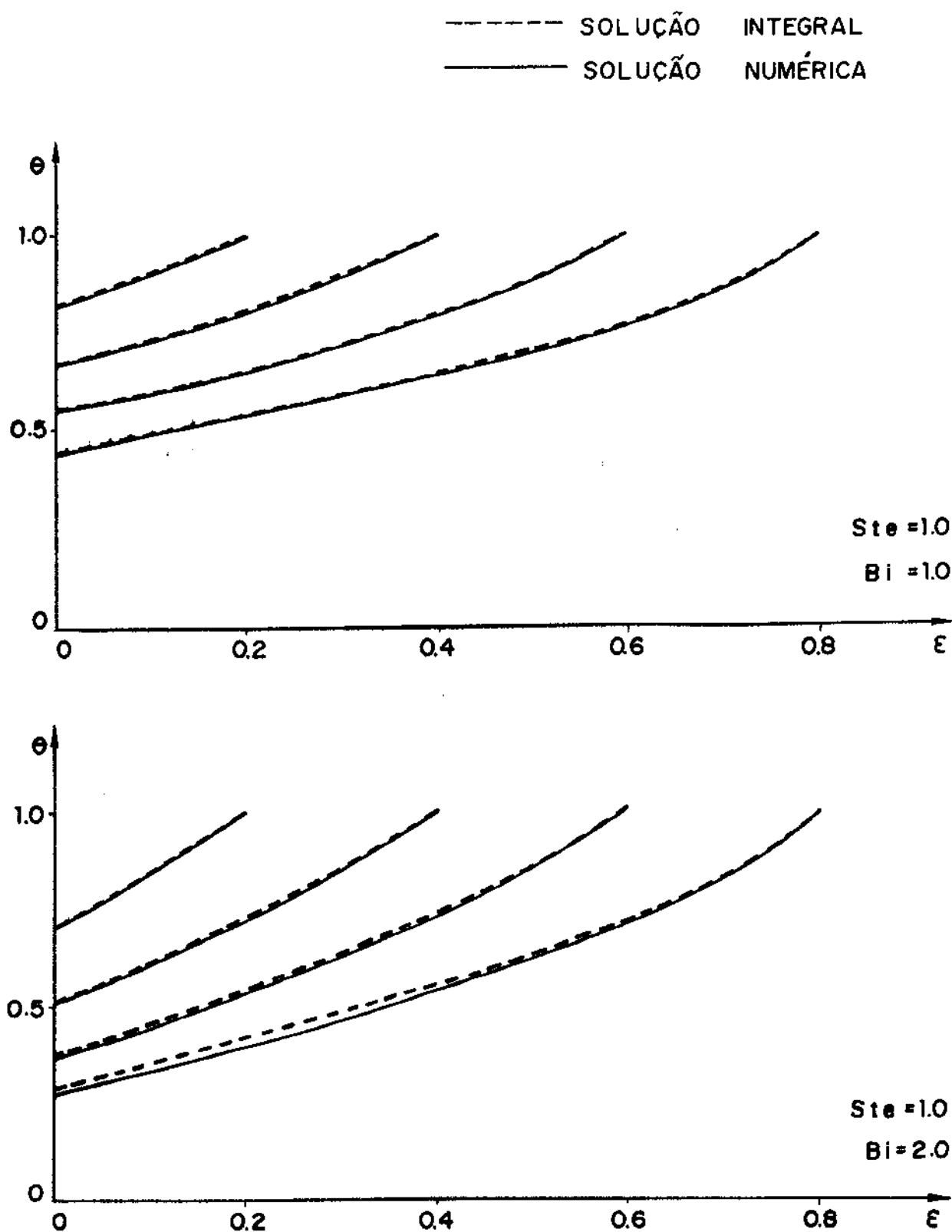


Fig. 4.5 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

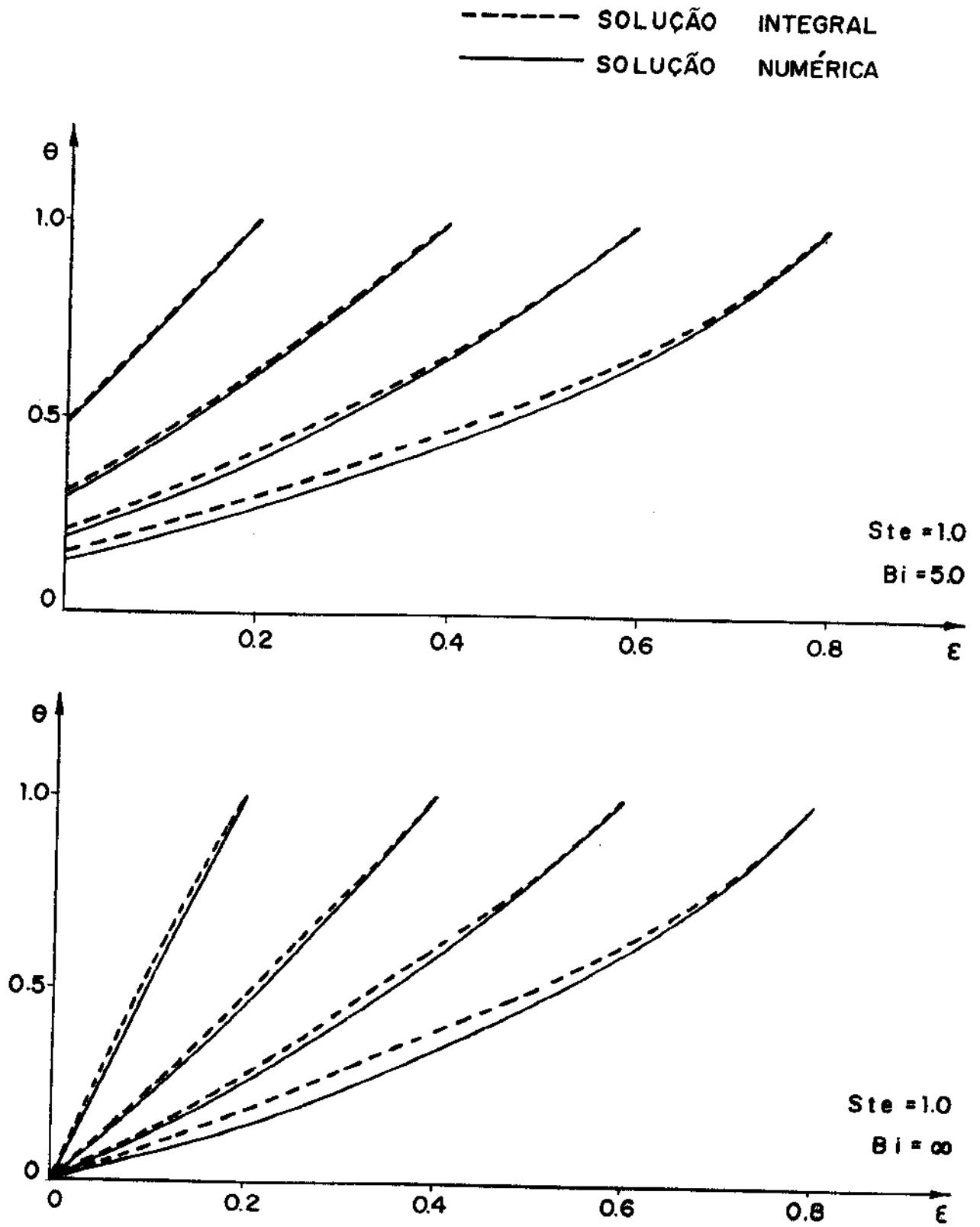


Fig. 4.6 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

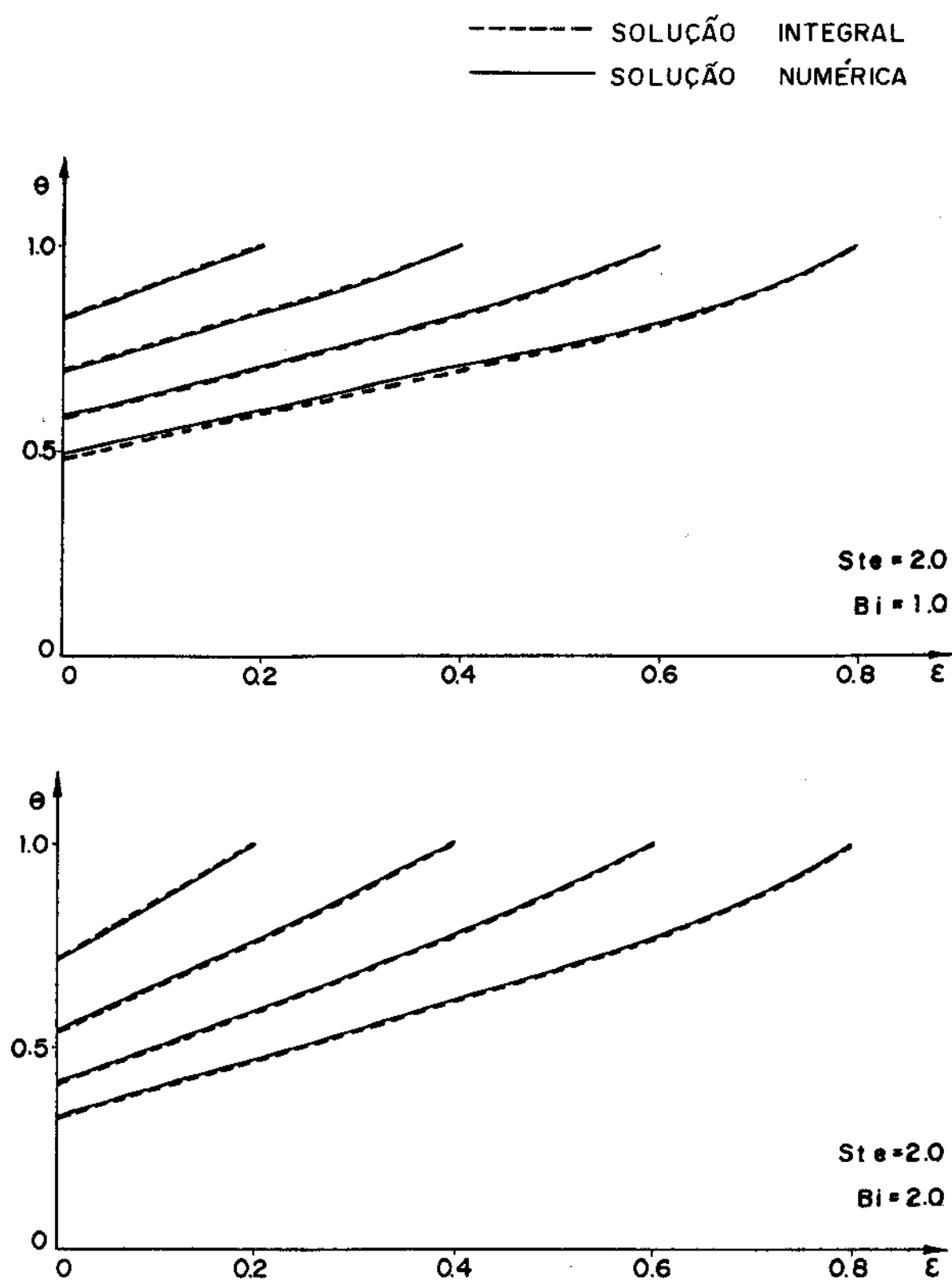


Fig. 4.7 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

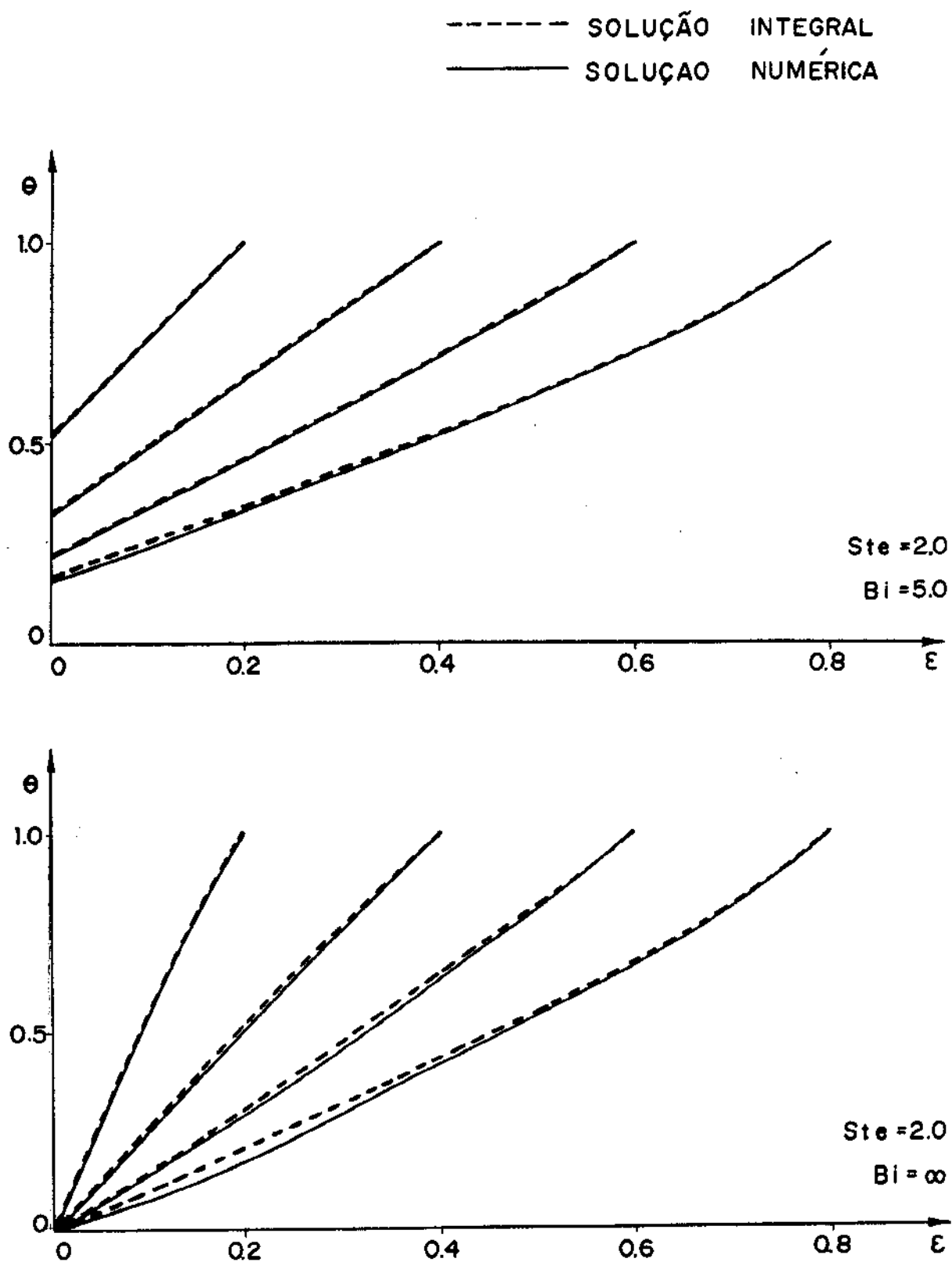


Fig. 4.8 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

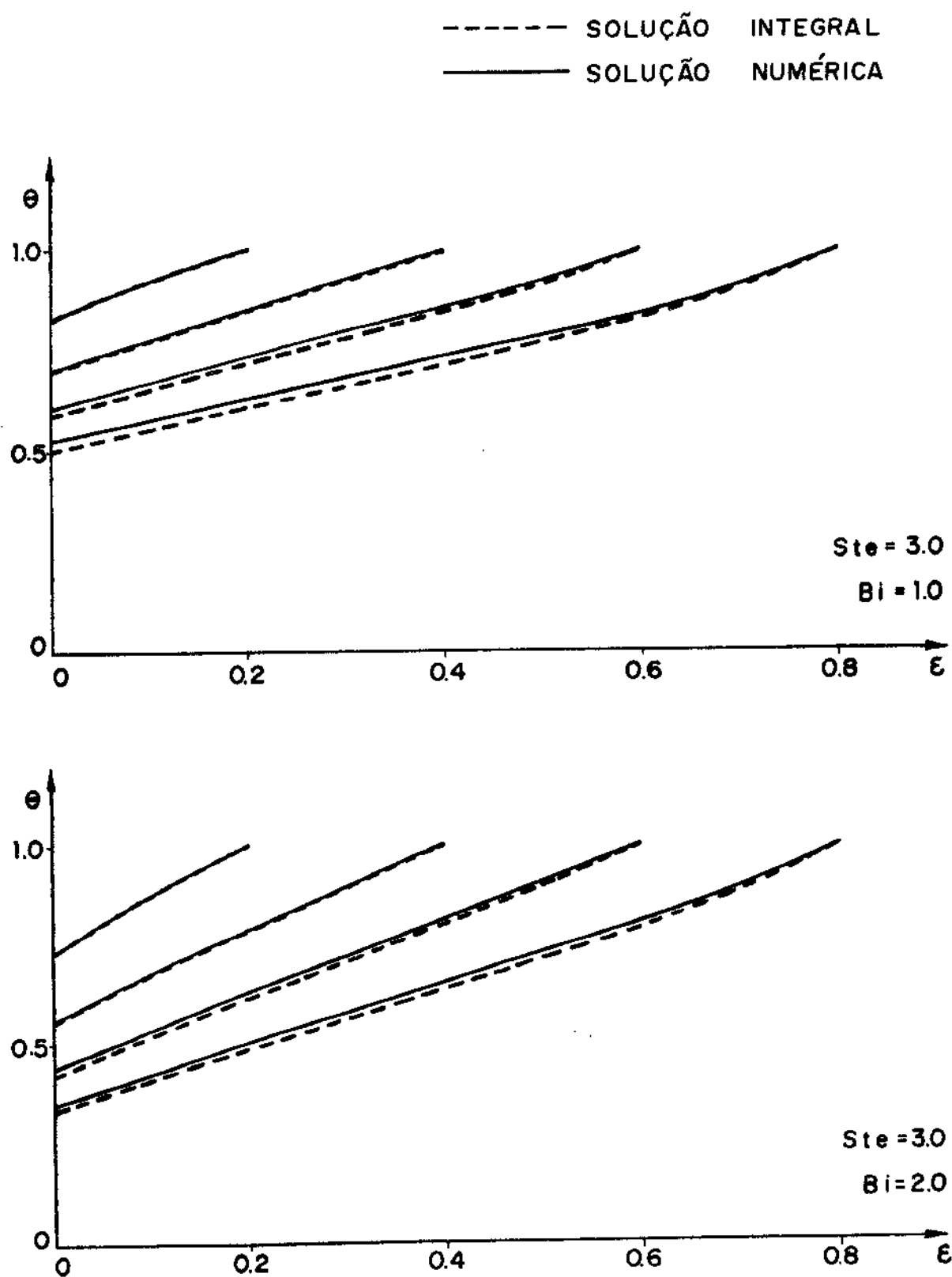


Fig. 4.9 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

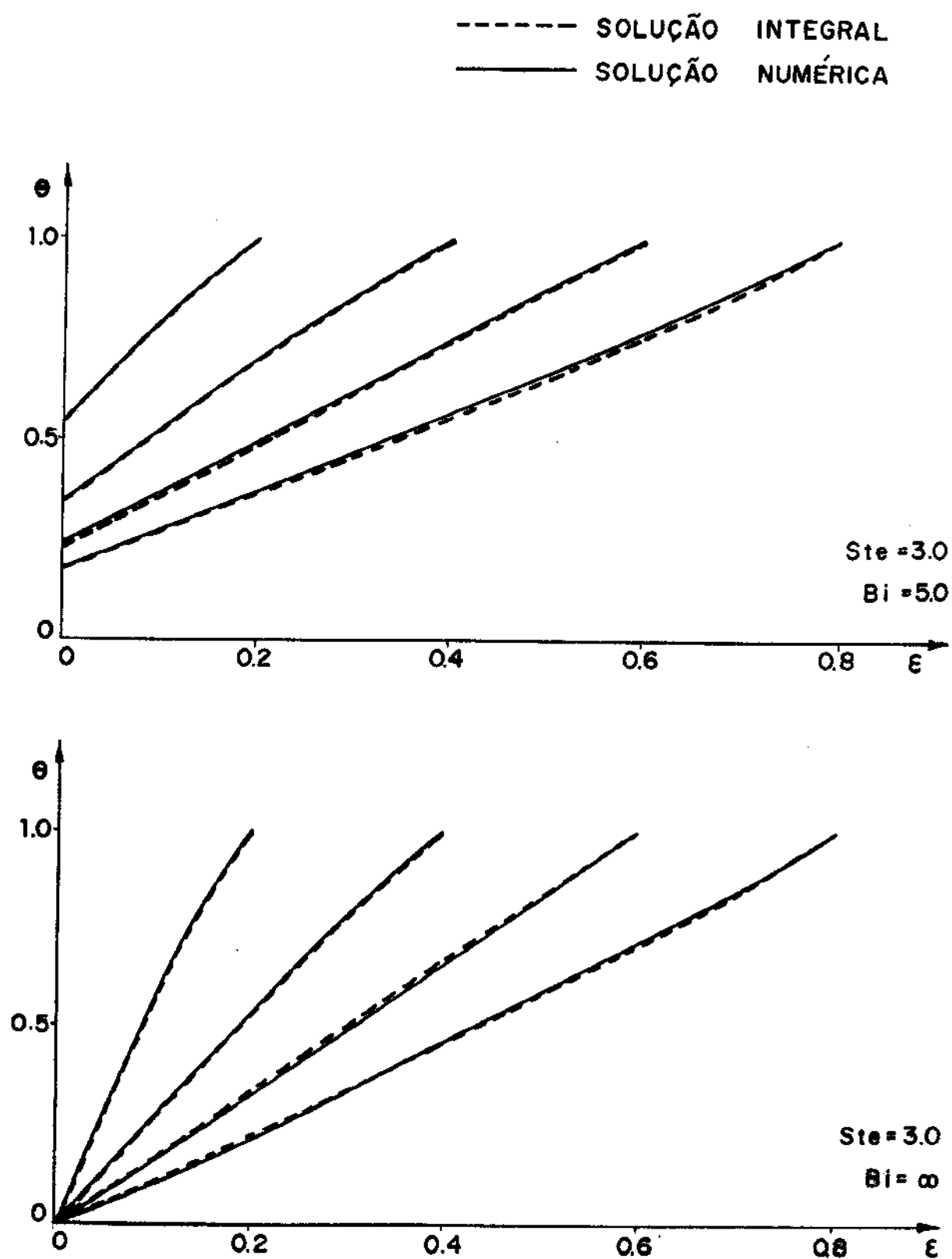


Fig. 4.10 Perfis de temperatura na fase solidificada para diferentes posições da frente de fusão

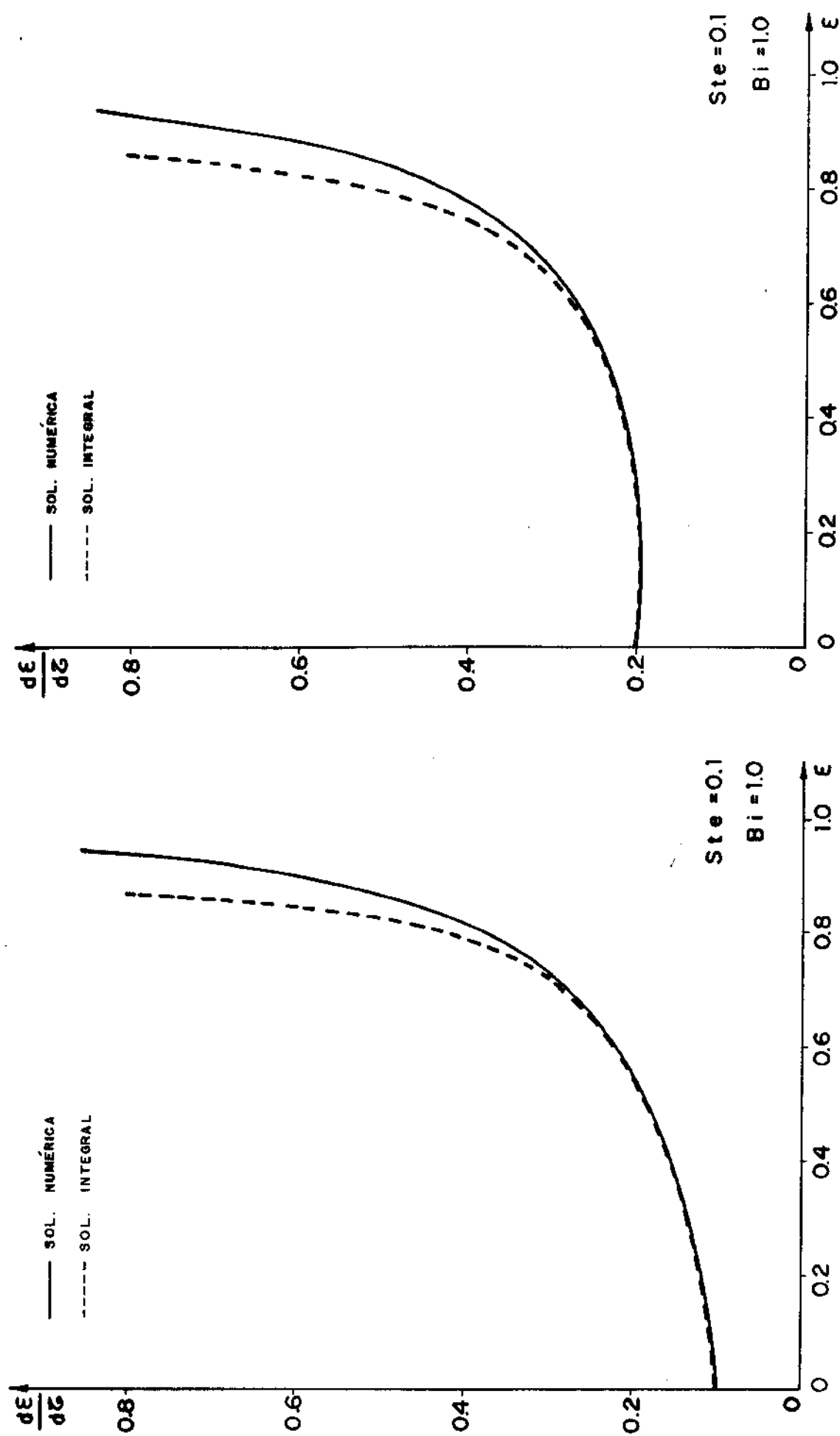


Fig. 4.11 Velocidade de avanço da frente de fusão

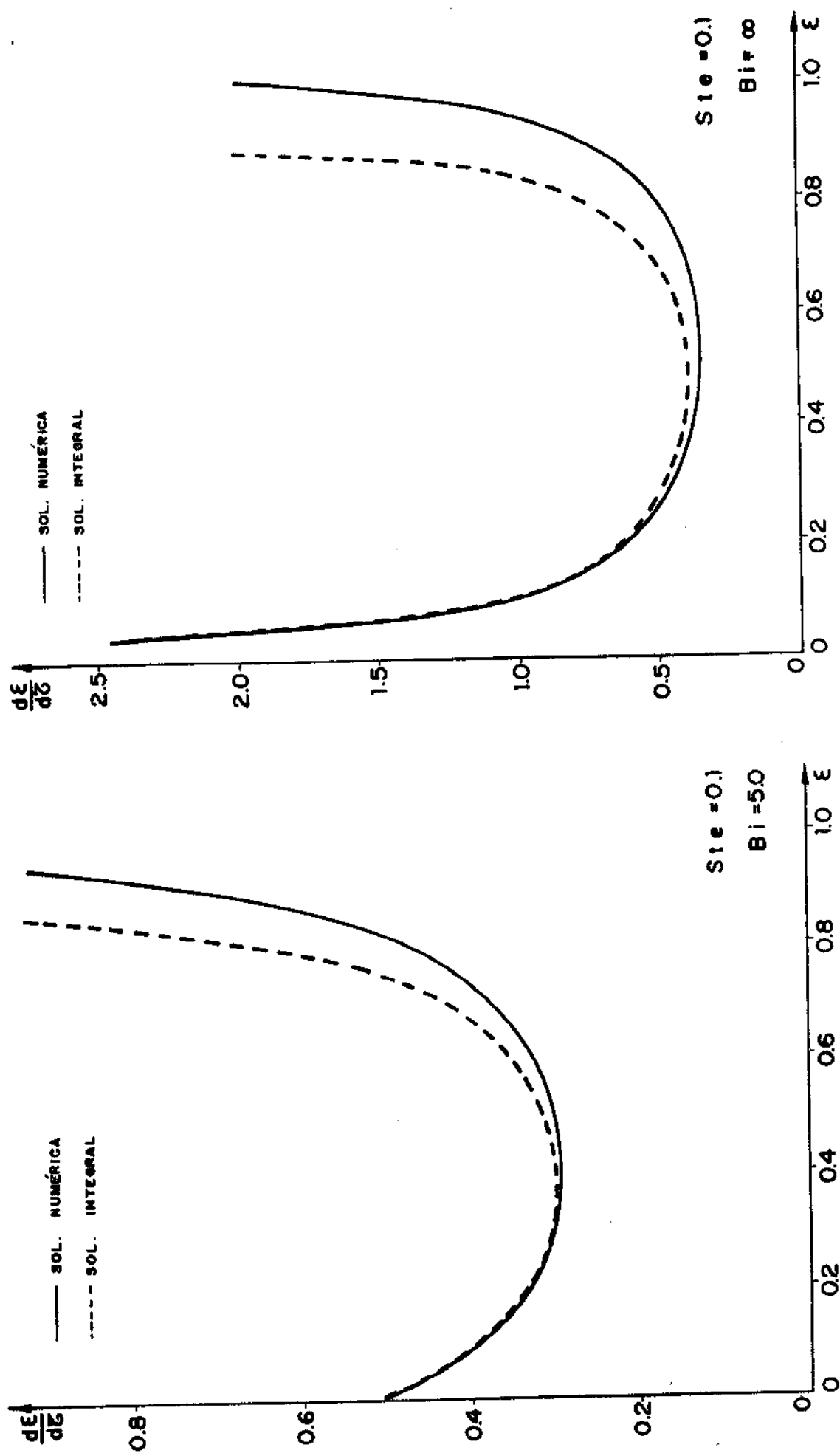


Fig. 4.12 Velocidade de avanço da frente de fusão

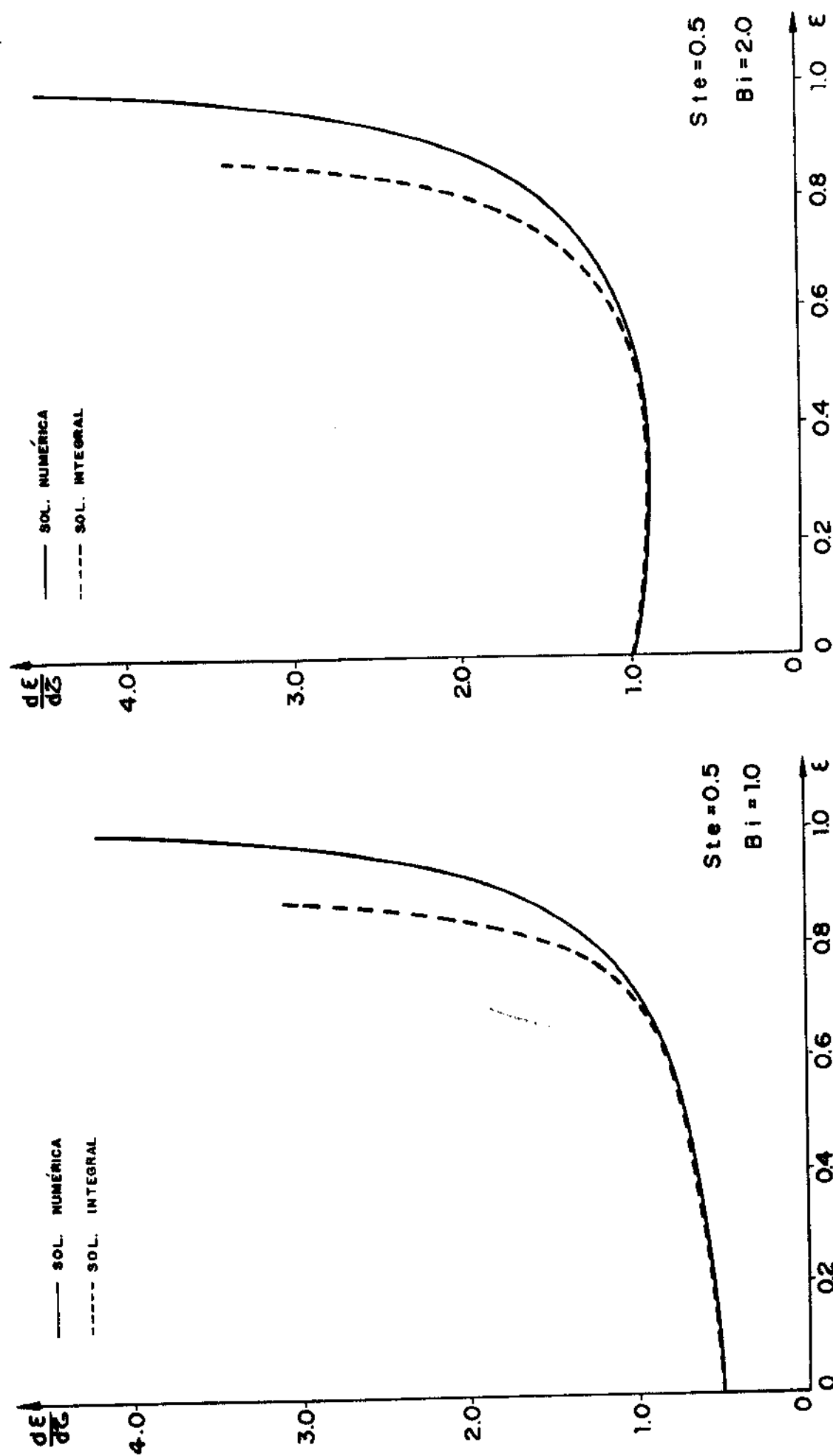


Fig. 4.13 Velocidade de avanço da frente de fusão

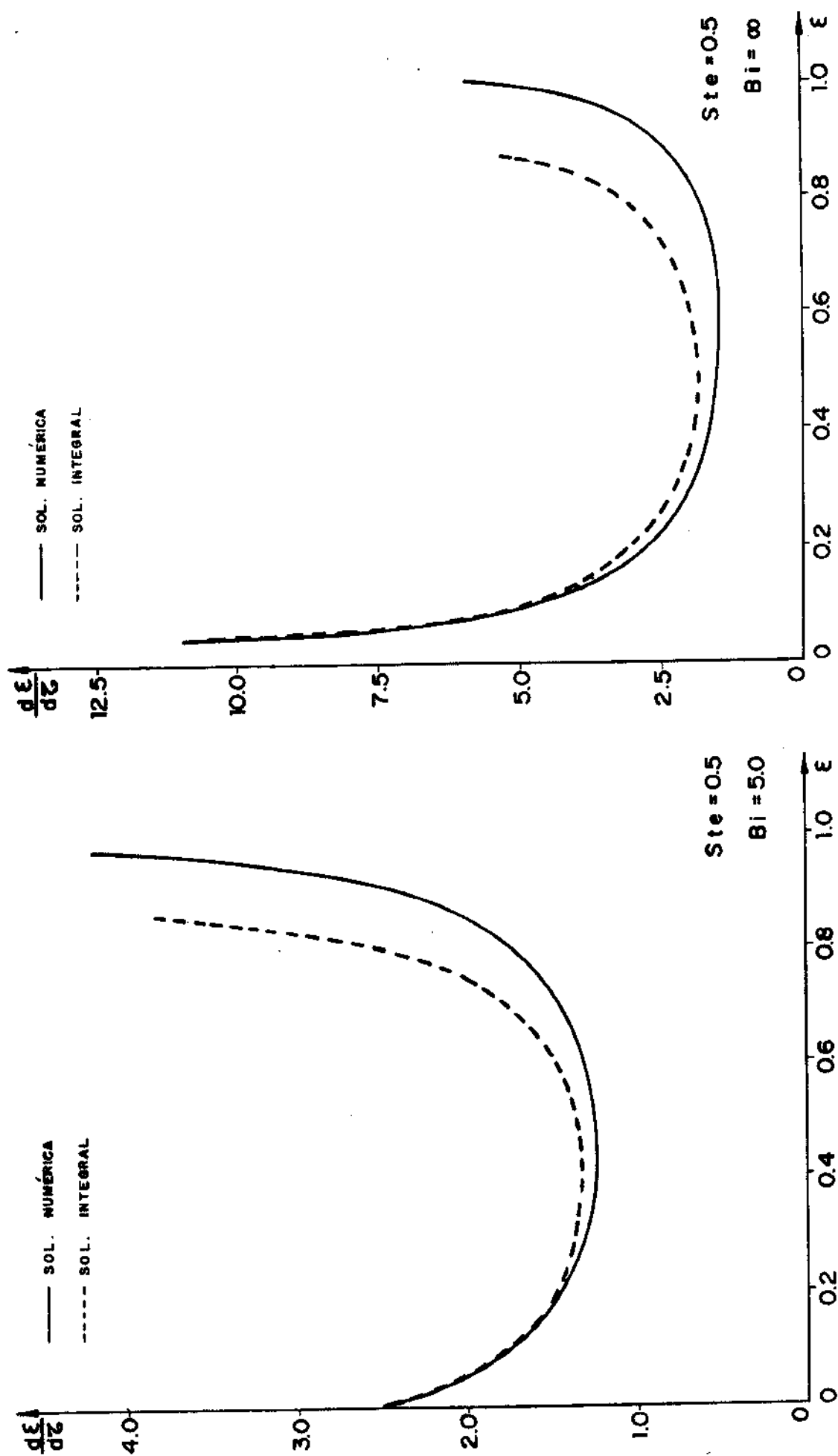


Fig. 4.14 Velocidade de avanço da frente de fusão

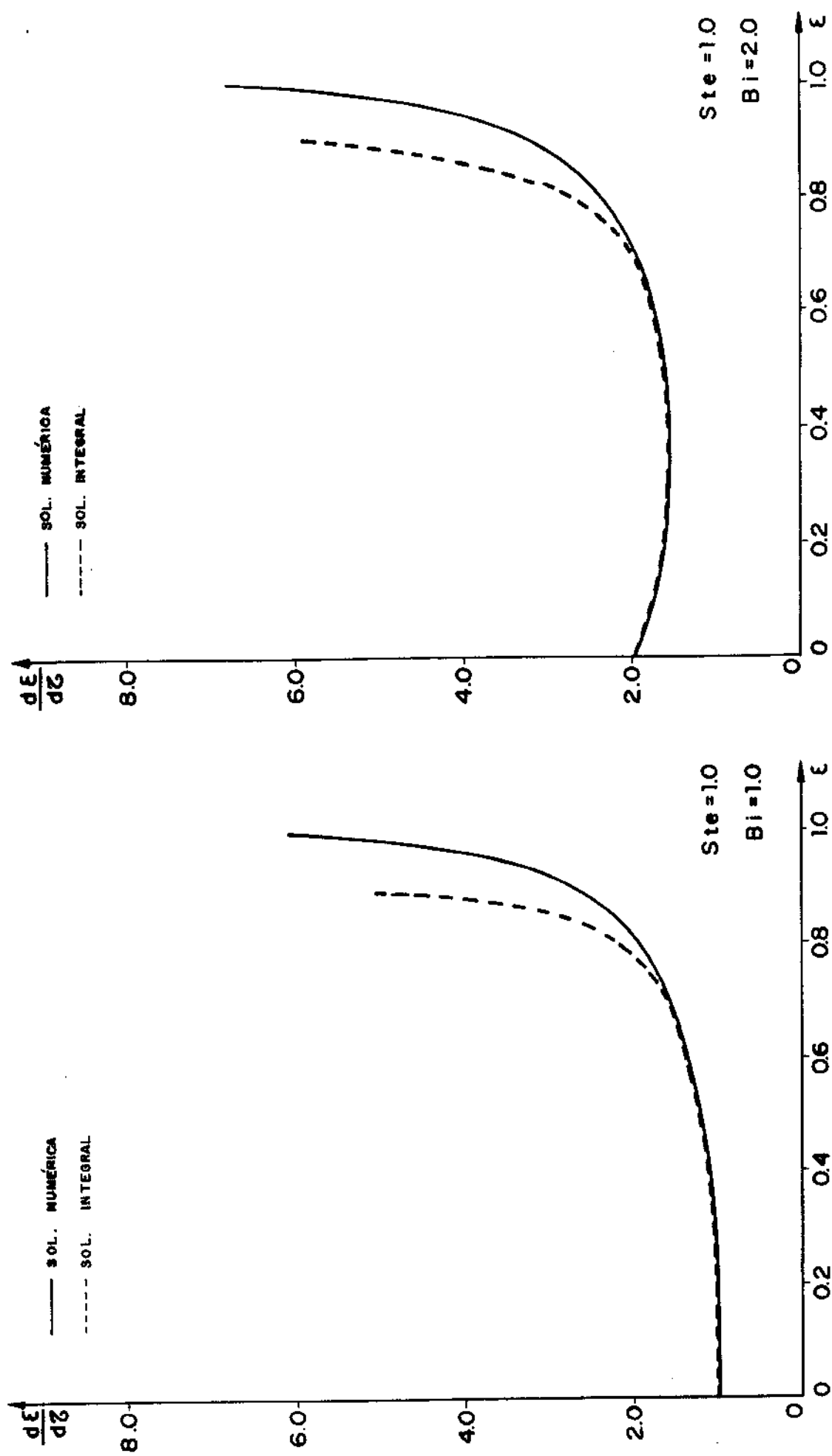


Fig. 4.15 Velocidade de avanço da frente de fusão

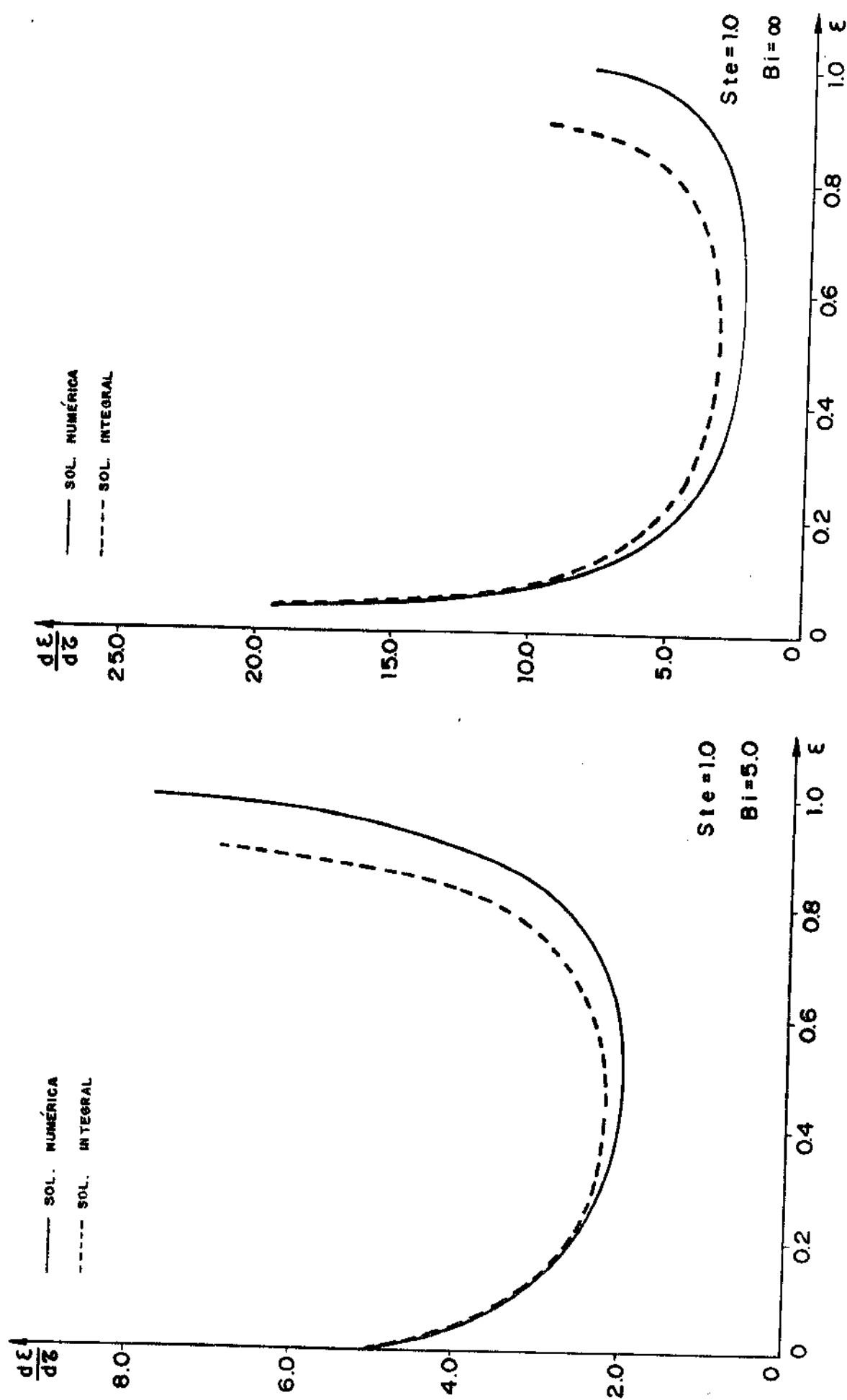


Fig. 4.16 Velocidade de avanço da frente de fusão

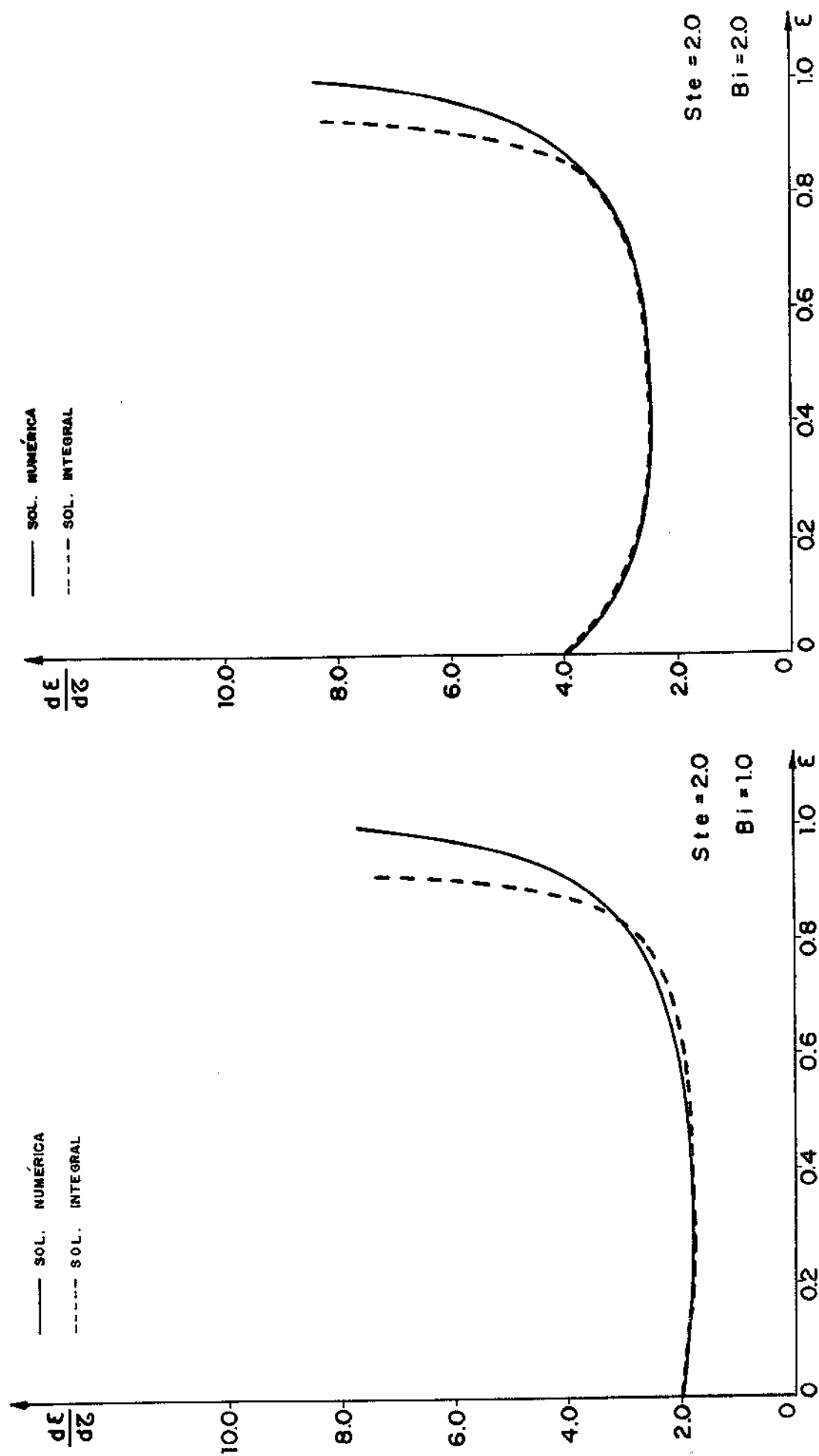


Fig. 4.17 Velocidade de avanço da frente de fusão

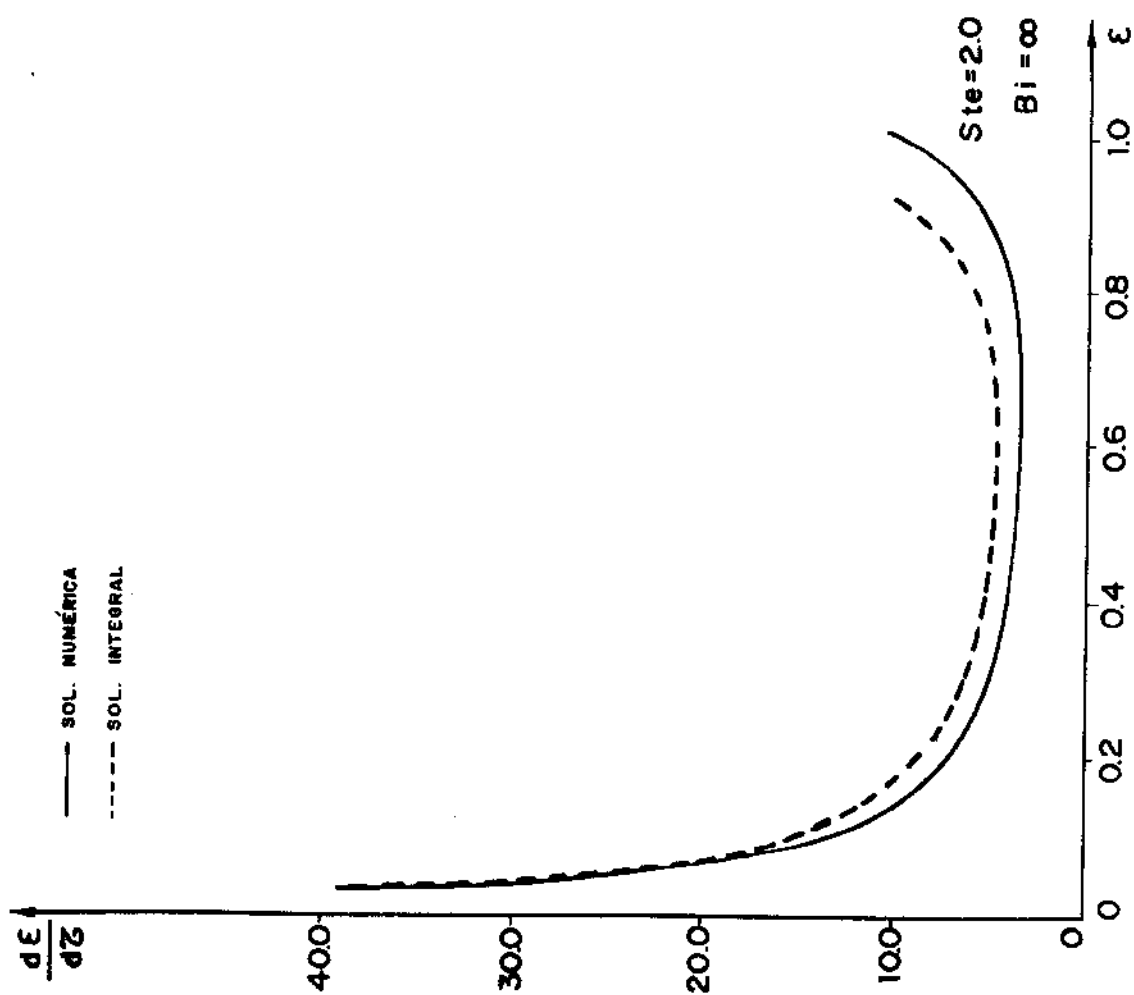
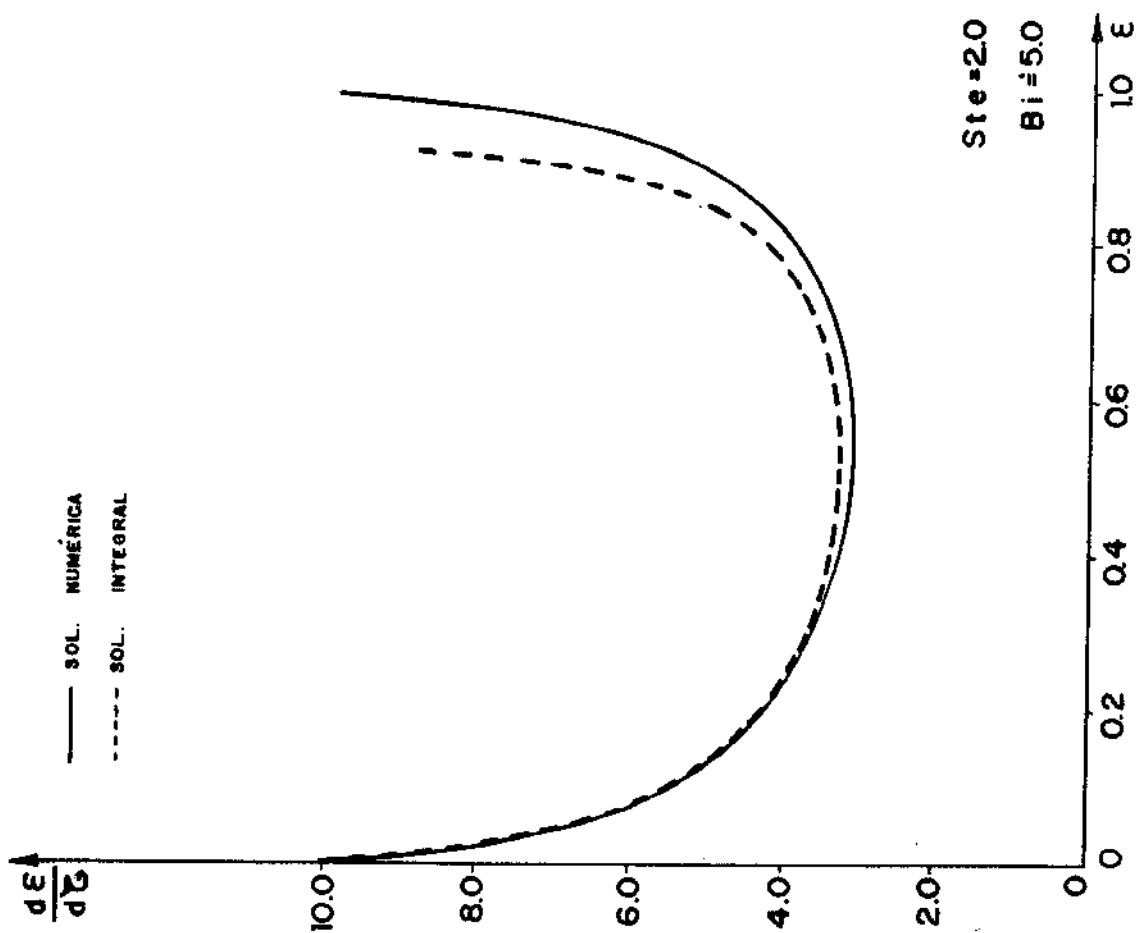


Fig. 4.18 Velocidade de avanço da frente de fusão

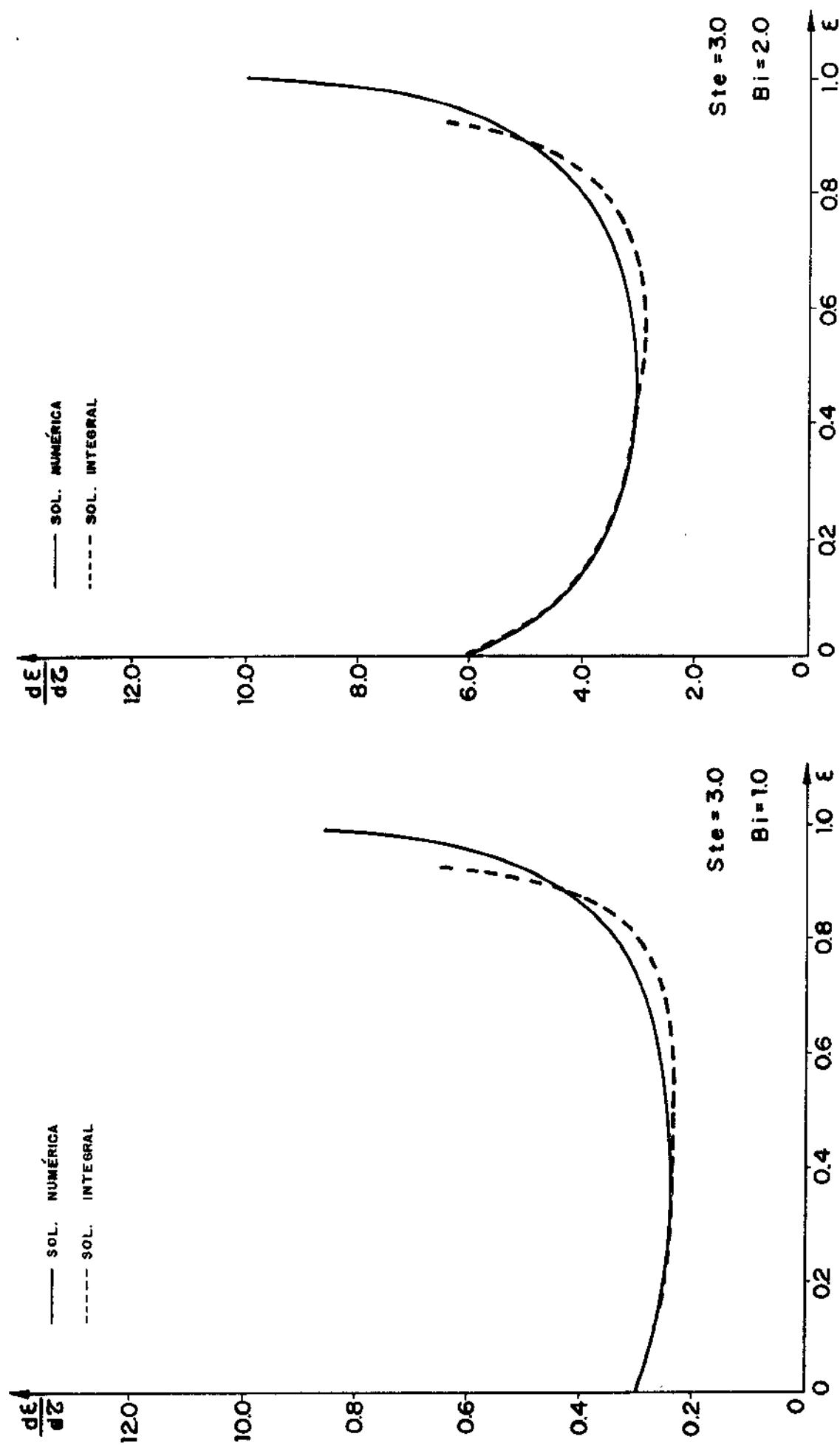


Fig. 4.19 Velocidade de avanço da frente de fusão

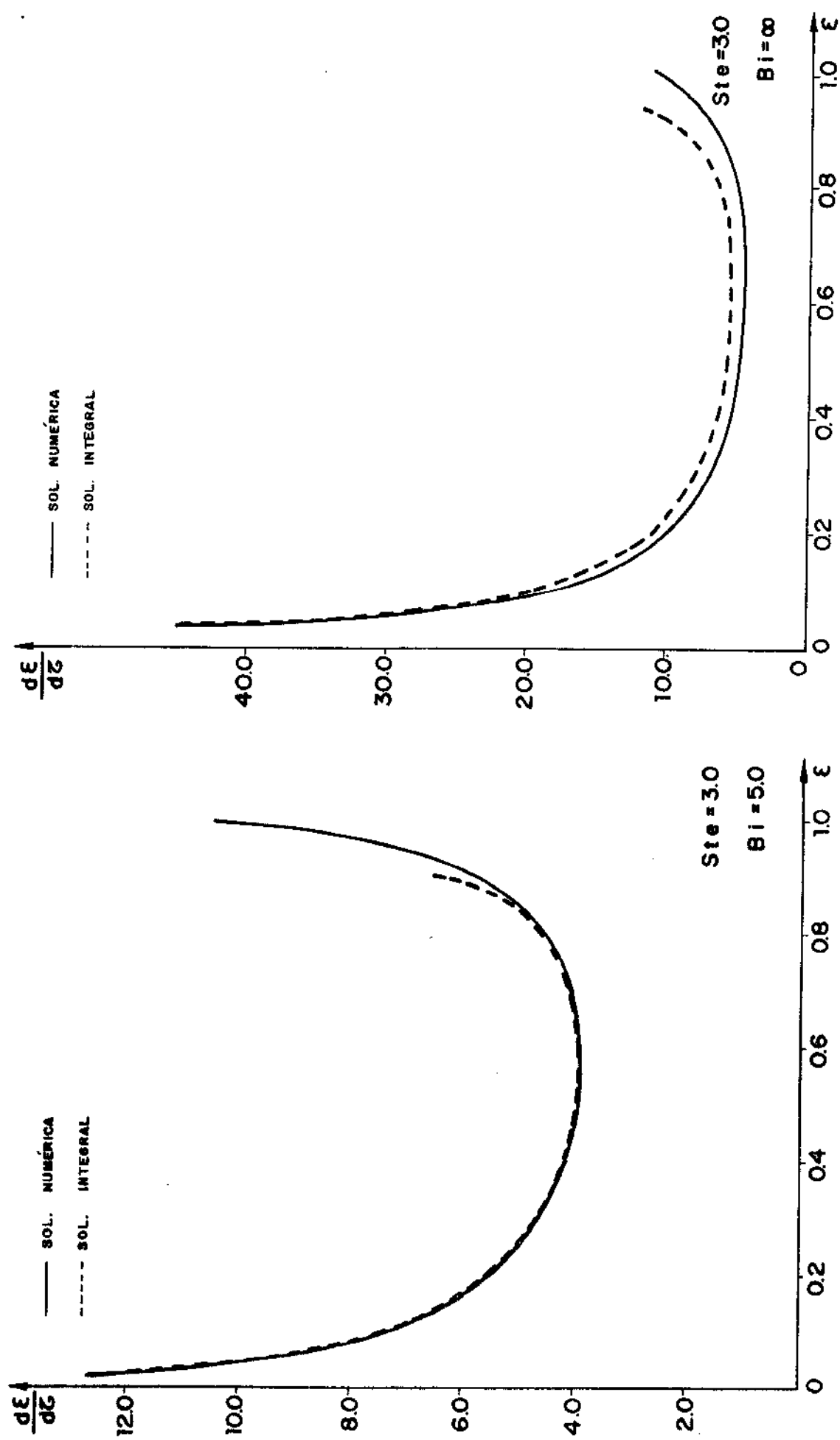


Fig. 4.20 Velocidade de avanço da frente de fusão

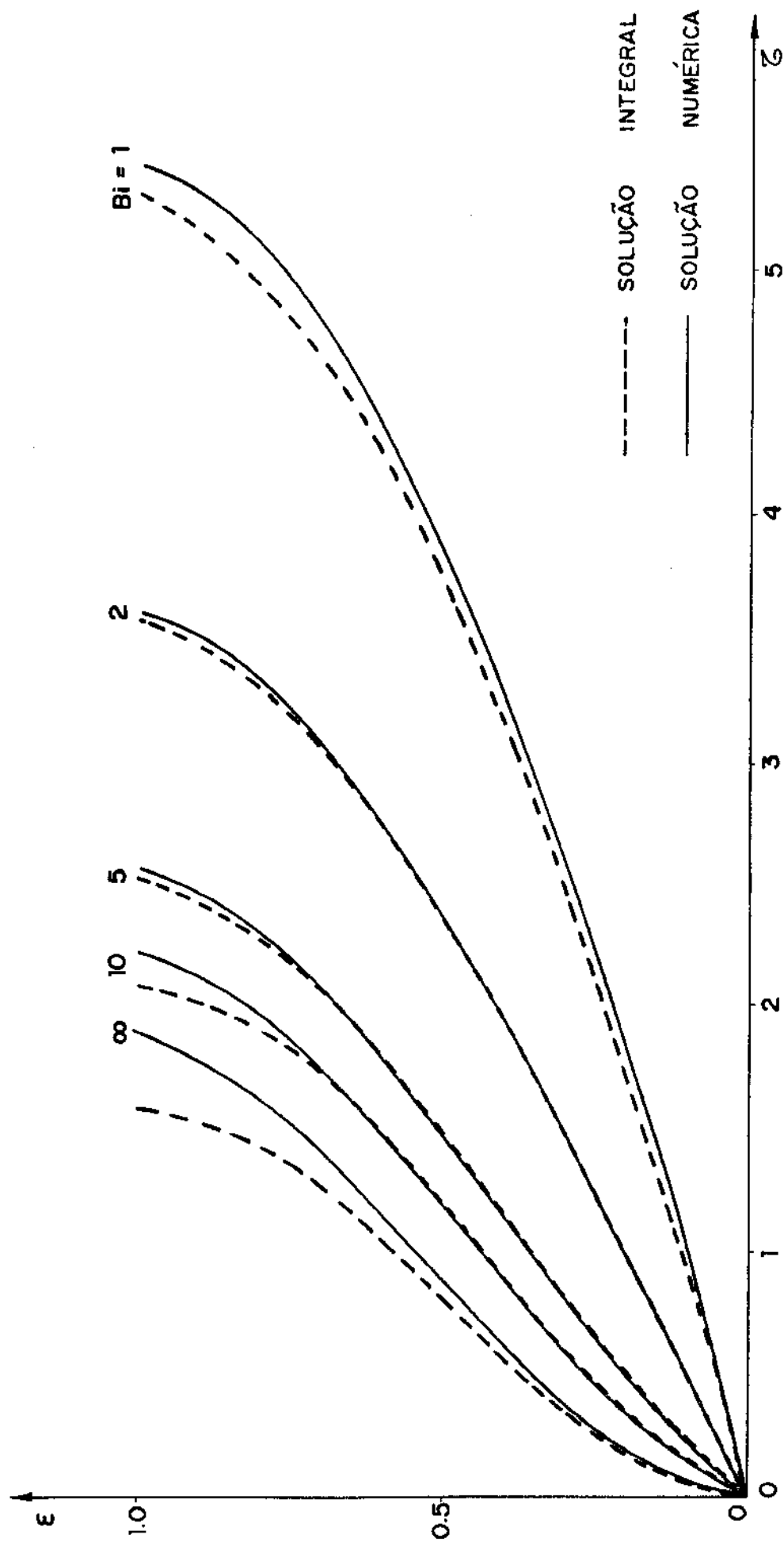


Fig. 4.21 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 0.1$

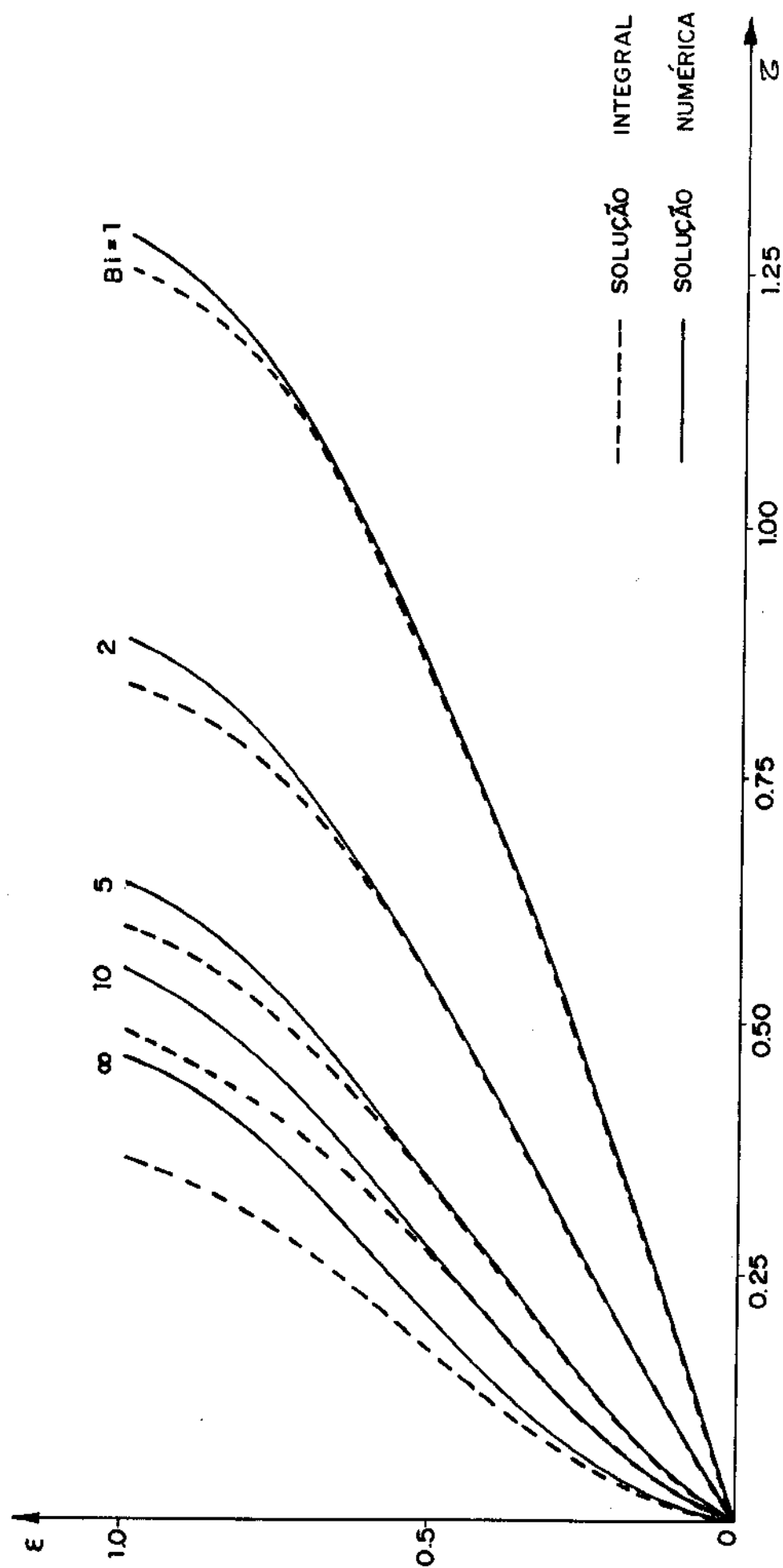


Fig. 4.22 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 0.5$

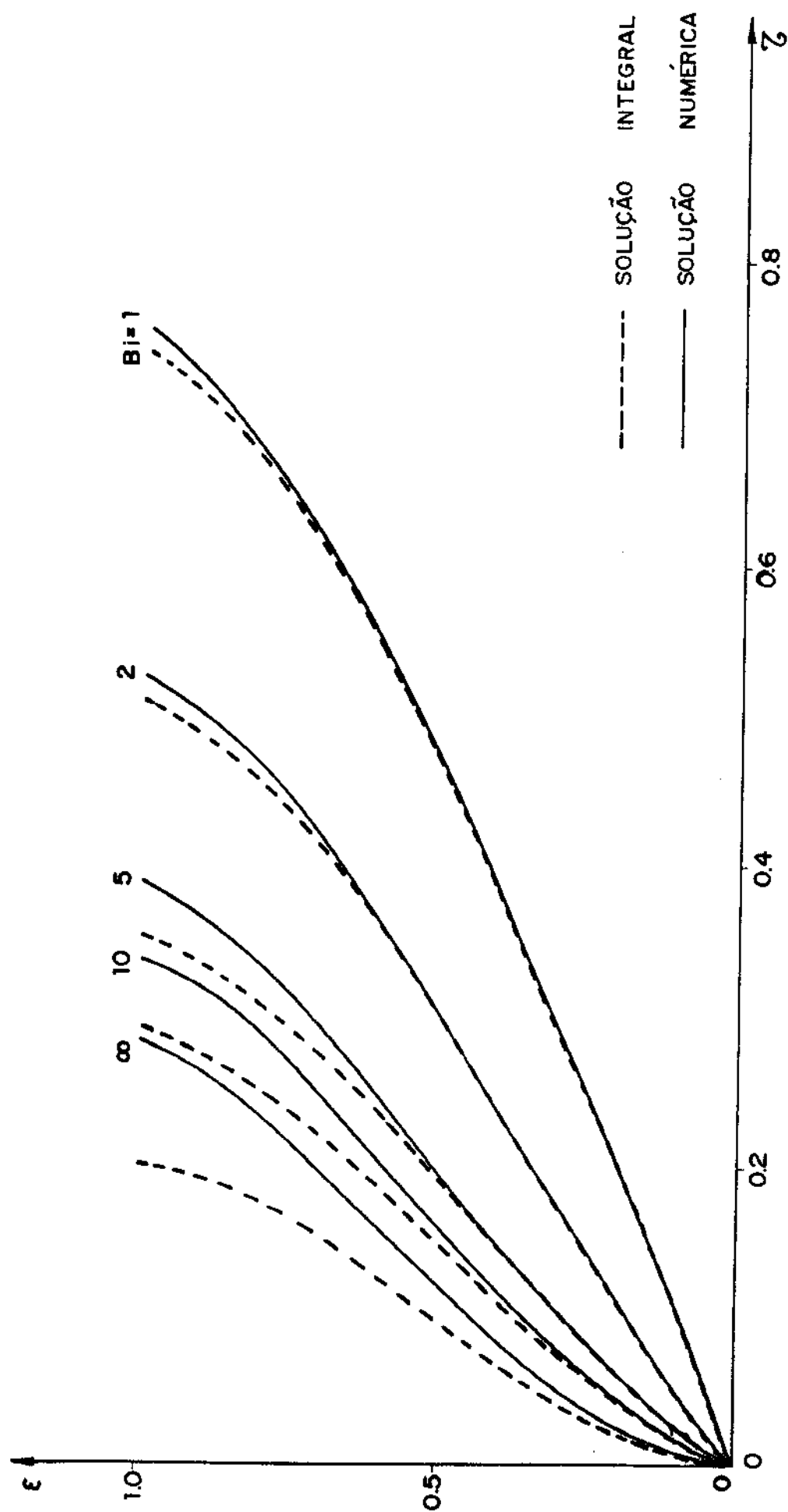
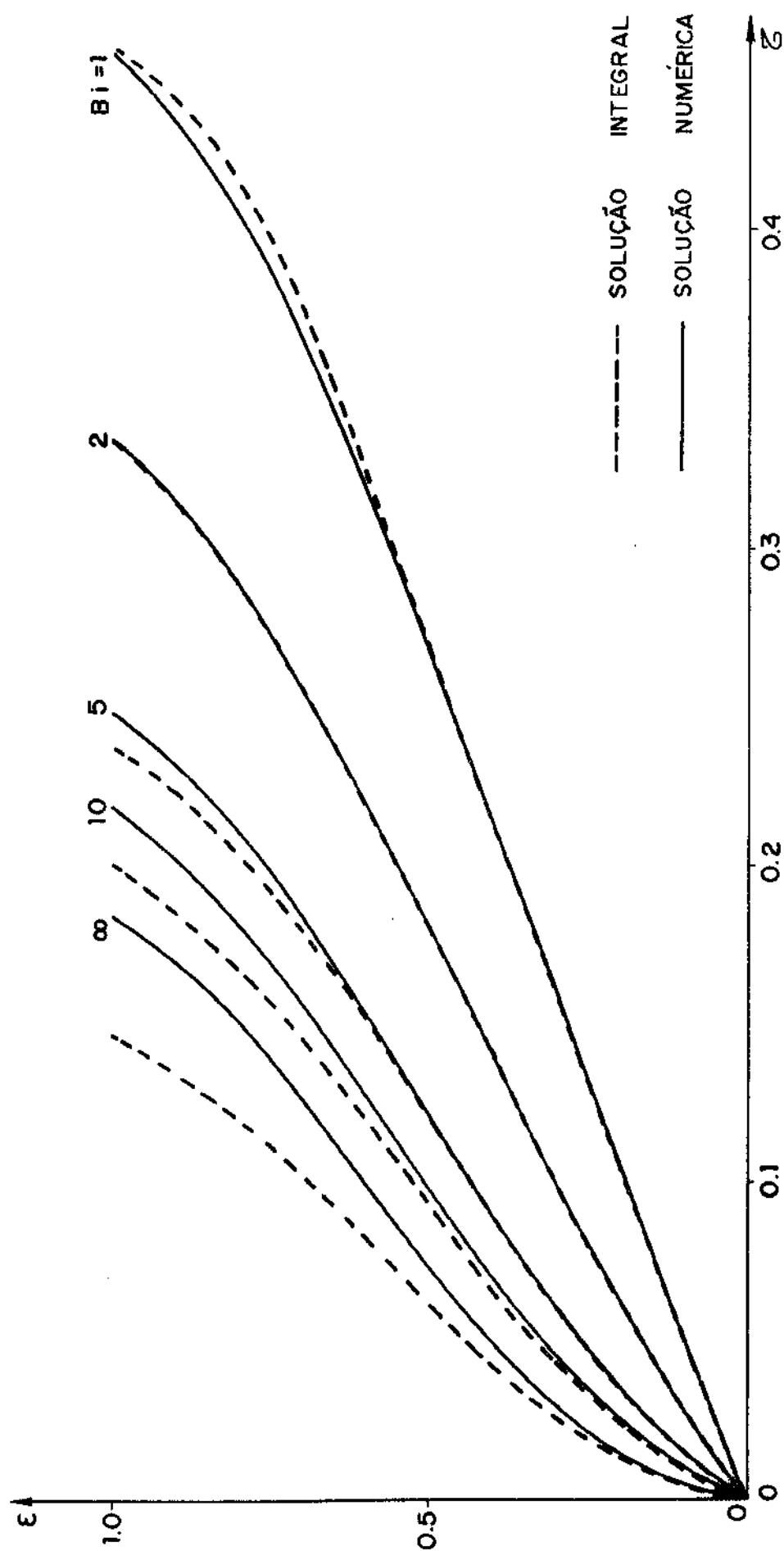


Fig. 4.23 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 1.0$

Fig. 4.24 Posição do frente de fusão no tempo para $Ste = 2.0$

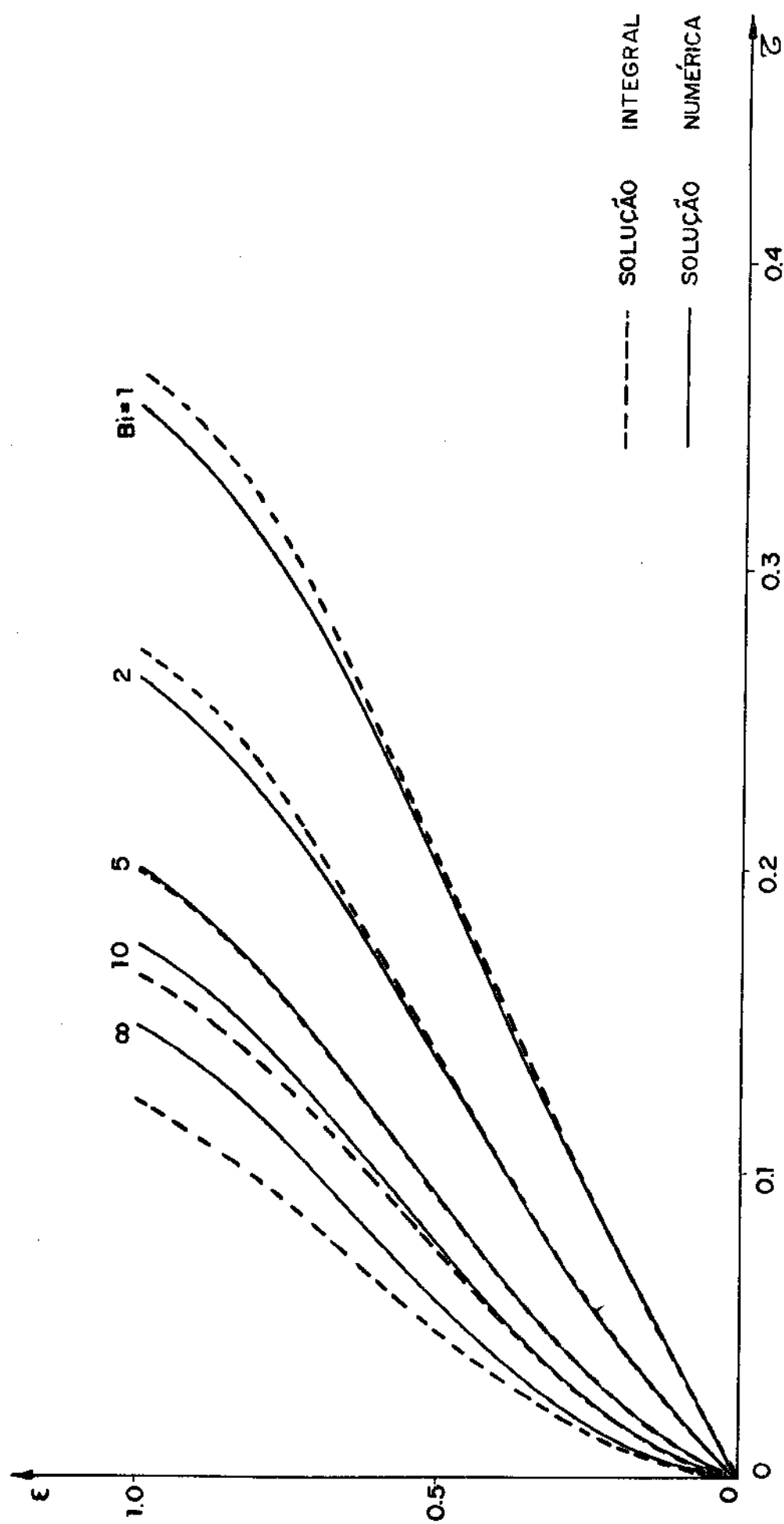


Fig. 4.25 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 3.0$

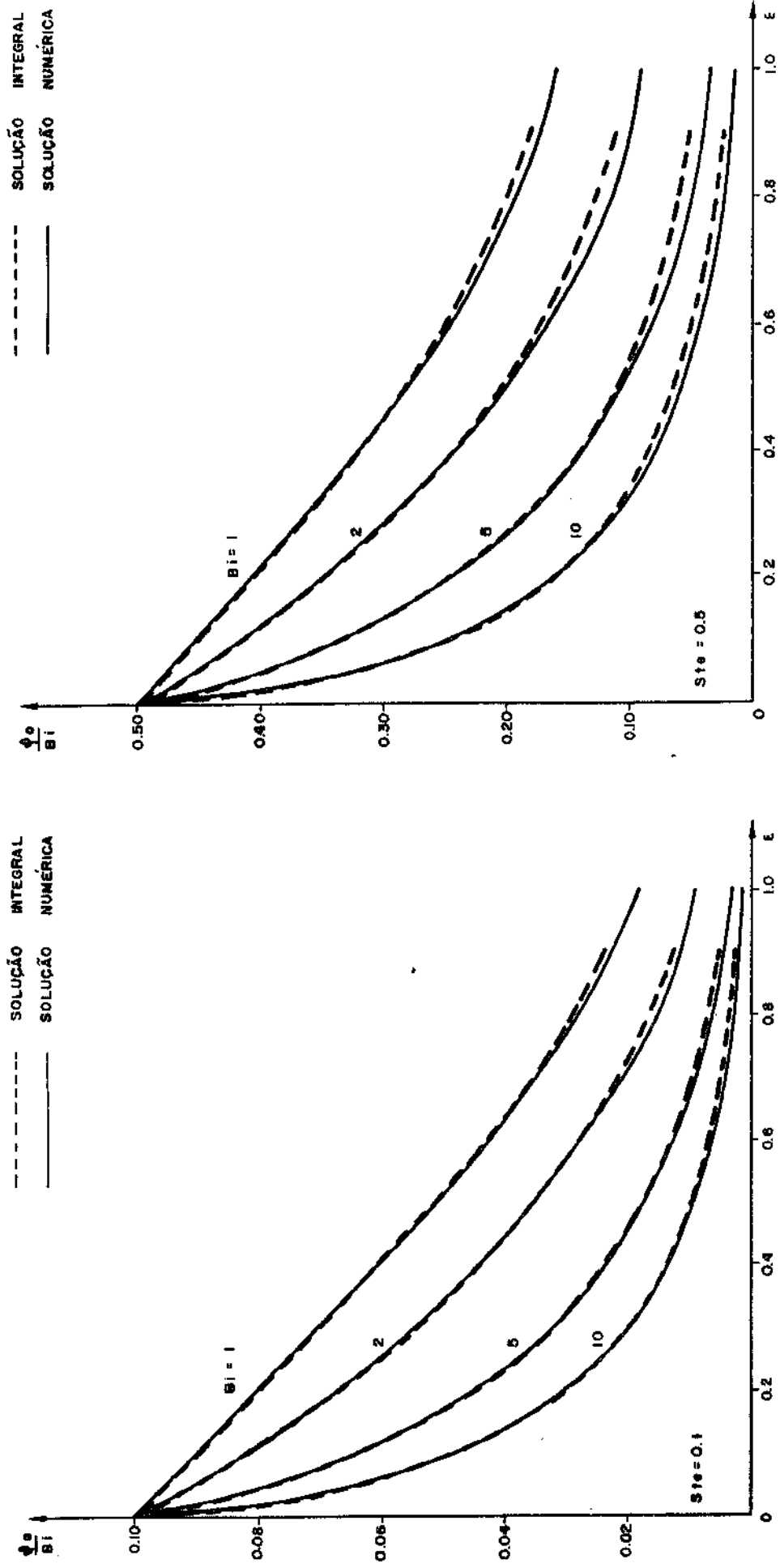


Fig. 4.26 Fluxo de calor adimensional ψ_0 na borda da esfera em função da posição da interface ϵ

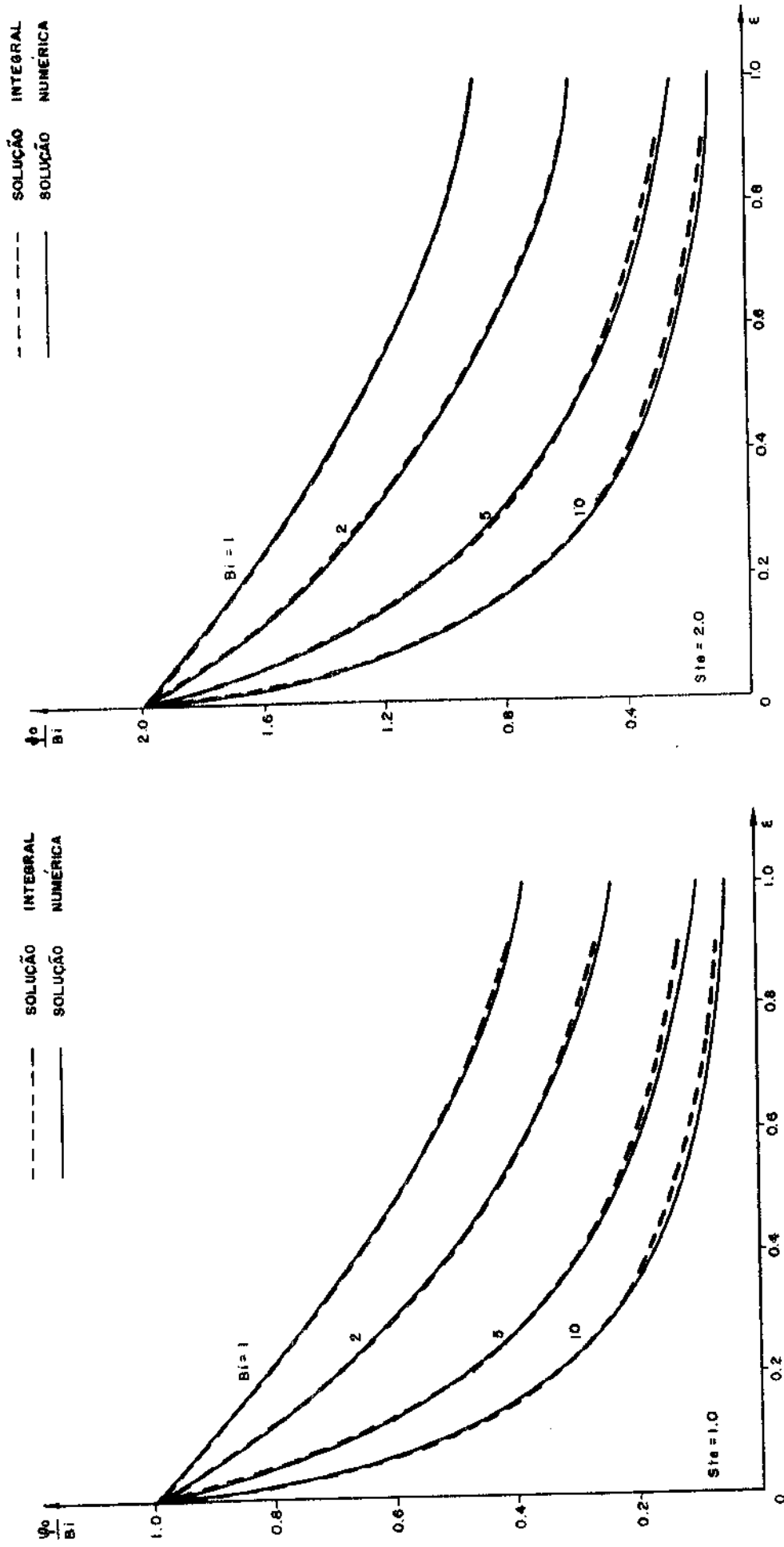


Fig. 4.27 Fluxo de calor adimensional $\dot{q}_0$ na borda da esfera em função da posição da interface ξ

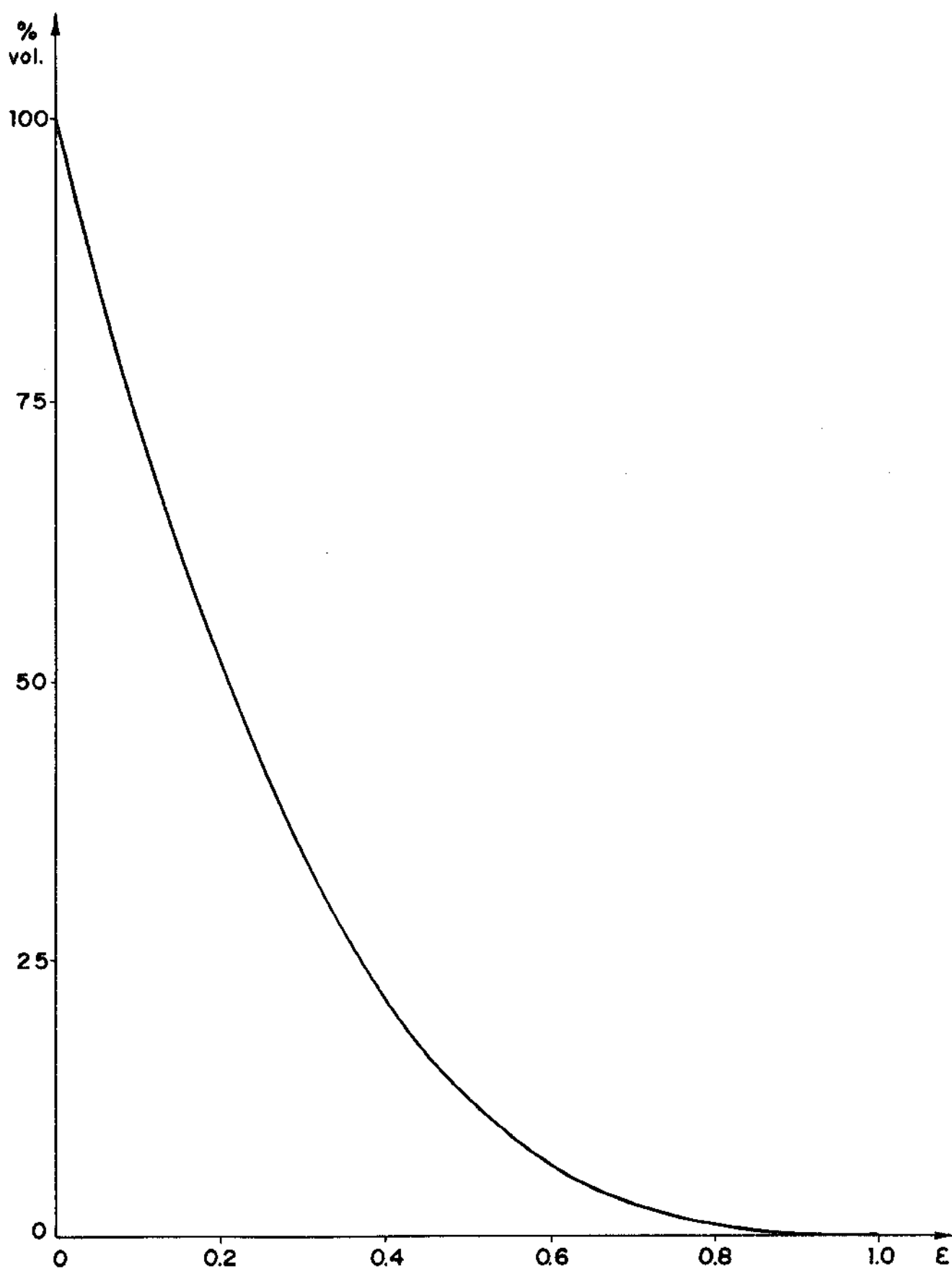


Fig. 4.28 Percentagem do volume da esfera que resta para ser solidificado

CAPÍTULO 5

O MÉTODO CORRIGIDO

5.1. INTRODUÇÃO

Para o fenômeno da transferência de calor com mudança de fase só são conhecidas soluções analíticas (exatas) para a geometria plana semi-infinita. Para as geometrias circulares (cilindros e esferas) não são conhecidas soluções exatas. Particularmente para a geometria esférica, até aqui foram estudados o método simplificado, o método numérico e o método integral. O método simplificado apresenta bons resultados somente quando o número de Stefan é menor que a unidade, o que é um fator limitante do método. O método numérico é o que apresenta melhores resultados e o que mais se aproxima da situação real, porém apresenta o inconveniente da necessidade da utilização de um computador. O método integral é um método aproximado bem mais generalizado que o método simplificado pois pode ser aplicado para qualquer número de Stefan, incluindo portanto os números de Stefan maiores que a unidade. Porém, as equações obtidas para o método integral são muito extensas, principalmente para a determinação da velocidade de avanço da frente de fusão e por consequência a posição da frente de fusão no tempo. O objetivo deste capítulo é o desenvolvimento de um método aproximado mais imediato, porém confiável, para a determinação da posição da frente de fusão no tempo e da velocidade de avanço da frente de fusão. Isto será obtido através do desenvolvimento de um fator de correção que aplicado à solução exata de uma geometria plana semi-infinita forneça uma solução que seja válida para a geometria esférica. Os resultados exatos obtidos para o plano são comparados com os resultados numéricos obtidos para a esfera nas mesmas condições, ou seja, mesmo valor do número de Stefan e mesmo valor do número de Biot. A partir destas comparações são determinados os fatores de correção.

5.2. PROPOSIÇÃO DE UMA SOLUÇÃO PARA A CINÉTICA DE SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIA ESFÉRICA

A solução exata para a geometria plana semi-infinita utilizada neste trabalho é a obtida segundo o modelo do sistema virtual. O método do sistema virtual [19] substitui a resistência térmica de convecção entre o material e o fluido de resfriamento por uma resistência térmica proporcionada por uma espessura de material solidificado. Desta forma fica definido um novo sistema térmico, denominado sistema virtual, submetido somente à transferência de calor por condução cuja solução exata já é bem conhecida [8]. Tal modelamento está esquematizado na Figura 5-1. O desenvolvimento analítico deste método está apresentado no Apêndice A.3.

De acordo com o modelo do sistema virtual para a geometria plana, o tempo de solidificação t em função da espessura solidificada S é dado por

$$t = \frac{S^2}{4\alpha\phi^2} + \frac{L\rho S}{h(T_f - T_\infty)} \quad (5.1)$$

onde ϕ é a constante de solidificação, definida por

$$\sqrt{\pi} \phi \operatorname{erf}(\phi) \exp(\phi^2) = \operatorname{Ste} \quad (5.2)$$

A constante de solidificação pode ser calculada através de métodos iterativos ou gráficos. A Figura 5-2 mostra a variação da constante de solidificação ϕ com o número de Stefan.

Inicialmente é conveniente reconsiderar os parâmetros adimensionais (2.9), (2.10), (2.11) e ainda

$$\epsilon = \frac{S}{R} = 1 - \frac{r_f}{R} \quad (5.3)$$

Substituindo estes valores em (5.1) e rearranjando,

$$\tau = \frac{\epsilon^2}{4\phi^2} + \frac{\epsilon}{\text{Ste Bi}} \quad (5.4)$$

Para a obtenção do fator de correção a ser aplicado a esta equação (5.4) para torná-la válida para a geometria esférica, inicialmente ela é resolvida para alguns números de Stefan (0,1; 0,5; 1,0; 2,0; 3,0) e alguns números de Biot (1, 2, 5, 10, ∞) para cada número de Stefan. A seguir são obtidos os resultados numéricos para os mesmos números de Stefan e Biot para a esfera. Na Tabela 5.1 estão os resultados da razão entre o tempo de solidificação total para a esfera obtido do método numérico das malhas móveis e o tempo de solidificação para $S=R$ obtido da solução exata do método do Sistema virtual.

Da Tabela 5.1 pode-se observar que a relação entre os tempos de solidificação aumenta com o aumento do número de Stefan. Entretanto, deve-se notar que esta relação varia muito pouco com o número de Biot. Isto fornece uma indicação que o fator de correção a ser desenvolvido pode ser função apenas do número de Stefan, independente do número de Biot. Pode-se obter então, de imediato, um fator de correção para o tempo total de solidificação ($\epsilon=1$) na forma

$$A = \frac{\tau_e}{\tau_p} = 0,35 + 0,12(\text{Ste}) - 0,02(\text{Ste})^2 \quad (5.5)$$

onde τ_e é o tempo de solidificação total para a esfera e τ_p é o tempo de solidificação no plano dado por (5.4) com $\epsilon=1$. Os resultados desta equação para os números de Stefan considerados neste trabalho estão incluídos na Tabela 5.1.

Foram tentadas algumas expressões para a obtenção de um fator de correção para a equação (5.4) do tipo

$$\tau = f \left(\frac{\epsilon^2}{4\phi^2} + \frac{\epsilon}{\text{Ste Bi}} \right) \quad (5.6)$$

A expressão para o fator de correção f que produziu melhores resultados foi a correção do tipo polinomial dada por

$$f = 1 + a\epsilon + b\epsilon^2 \quad (5.7)$$

onde a, b são os coeficientes do polinômio do segundo grau. Não há aumento significativo na precisão do método ao se considerar polinômios de ordem superior a dois, pois os coeficientes destes termos são próximos de zero. Desta forma, o tempo de solidificação para a geometria esférica pode ser dada por

$$\tau = (1 + a\epsilon + b\epsilon^2) \left(\frac{\epsilon^2}{4\phi^2} + \frac{\epsilon}{\text{Ste Bi}} \right) \quad (5.8)$$

Para a determinação dos coeficientes a, b foram considerados os tempos de solidificação para a esfera e o plano desde $\epsilon=0$ até $\epsilon=1$ em intervalos regulares de $\Delta\epsilon=0,05$. Os resultados nas duas geometrias para um determinado número de Stefan e todos os números de Biot considerados foram comparados e relacionados através do método dos mínimos quadrados. Desta forma, foram obtidos os valores de a, b :

$$a = -0,803 + 0,309(\text{Ste}) - 0,036(\text{Ste})^2 \quad (5.9)$$

$$b = 0,160 - 0,210(\text{Ste}) + 0,022(\text{Ste})^2 \quad (5.10)$$

Derivando a equação (5.8) resulta:

$$\frac{d\tau}{d\epsilon} = (1+a\epsilon+b\epsilon^2) \left(\frac{2\epsilon}{4\phi^2} + \frac{1}{\text{Ste Bi}} \right) + \left(\frac{\epsilon^2}{4\phi^2} + \frac{\epsilon}{\text{Ste Bi}} \right) (a+2b\epsilon) \quad (5.11)$$

Rearranjando, pode-se obter a velocidade de avanço da frente de fusão:

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \left[\frac{\epsilon}{4\phi^2} (2+2a\epsilon+4b\epsilon^2) + \frac{1}{Ste \ Bi} (1+2a\epsilon+3b\epsilon^2) \right]^{-1} \quad (5.12)$$

Desta forma, o método proposto baseia-se na correção do tempo de solidificação por meio de um fator de correção polinomial. Esta foi a melhor solução encontrada conciliando simplicidade e precisão. Em vez da correção da expressão do tempo de solidificação como um todo, pode-se também tentar uma solução que corrija a variável espacial, embora com uma precisão menor no resultado final [9]. Para esta solução, seja a equação da condução

$$\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad 0 < X < \epsilon \quad (5.13)$$

onde

$$u = \frac{r}{R} \frac{T - T_0}{T_f - T_0} \quad (5.14)$$

sendo T_0 a temperatura da superfície da esfera.

As condições de contorno são

$$u = 1 - \epsilon \quad \text{para} \quad X = \epsilon \quad (5.15)$$

$$u = 0 \quad \text{para} \quad X = 0 \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{1+p}{Ste} \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad \text{para} \quad X = \epsilon \quad (5.17)$$

onde

$$\begin{aligned} p &= -\epsilon \quad \text{para solidificação no interior de esferas} \\ p &= 0 \quad \text{para solidificação no plano} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Para a obtenção de uma solução aproximada, admite-se que a distribuição de temperatura $u(X, \tau)$ seja análoga ao caso plano, ou seja,

$$u(X, \tau) = \frac{\text{erf}[\phi X/\epsilon]}{\text{erf } \phi} \quad \begin{array}{l} \tau > 0 \\ 0 < X < \epsilon \end{array} \quad (5.19)$$

Substituindo-se (5.19) em (5.17) obtêm-se

$$\epsilon(1+p) \frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{2\phi \text{ Ste}}{\sqrt{\pi} \exp(\phi^2) \text{erf } \phi} \quad (5.20)$$

Para tempos pequenos, a esfera se comporta como no caso do plano e portanto a constante de solidificação ϕ da equação (5.20) pode ser considerada aproximadamente igual à do caso plano que é a solução de (5.2). Feita esta hipótese, a integração de (5.20) resulta em

$$\epsilon \sqrt{1 + \frac{2}{3} p} = 2\phi \sqrt{\tau} \quad (5.21)$$

Observar que a equação (5.21) é uma solução exata de (5.20) para uma placa plana onde $p=0$ e $\epsilon=2\phi\sqrt{\tau}$. Portanto, basta substituir o valor de ϵ na equação (5.4) por ϵ' , dado por

$$\epsilon' = \epsilon \sqrt{1 - \frac{2}{3} \epsilon} \quad (5.22)$$

onde $\sqrt{1-2\epsilon/e}$ pode ser considerado um "fator de correção aproximado" para a variável espacial da geometria esférica. Como este fator de correção espacial foi desenvolvido baseado na hipótese que a constante de solidificação da esfera é aproximadamente igual à do plano, o que é verdade apenas para tempos pequenos, esta correção é mais precisa para tempos pequenos.

5.3. RESULTADOS

Inicialmente foram calculados os fatores de correção para os números de Stefan considerados neste trabalho, segundo (5.7), (5.9) e (5.10):

Ste = 0,1	$f = 1 - 0,773\epsilon + 0,139\epsilon^2$
Ste = 0,5	$f = 1 - 0,658\epsilon + 0,061\epsilon^2$
Ste = 1,0	$f = 1 - 0,530\epsilon - 0,028\epsilon^2$
Ste = 2,0	$f = 1 - 0,329\epsilon - 0,173\epsilon^2$
Ste = 3,0	$f = 1 - 0,198\epsilon - 0,275\epsilon^2$

A equação (5.8) foi então resolvida para cada um dos números de Stefan mencionados, sendo que para cada número de Stefan foram considerados os seguintes números de Biot: 1, 2, 5, 10, ∞ . Estes resultados estão comparados com os resultados numéricos do sistema de malhas móveis nas Figuras 5,3 a 5.7. Pode-se observar que a concordância é muito boa. A Tabela 5.2 mostra o erro percentual médio para cada número de Biot e Stefan calculado segundo

$$\bar{\delta} = \frac{\sum_{i=1}^n |\delta_i|}{n} \quad (5.23)$$

para $n=20$, ou seja, desde $\epsilon=0$ até $\epsilon=1$ em intervalos $\Delta\epsilon=0,05$. Segundo esta tabela, os tempos de solidificação dados pela expressão corrigida proposta apresentam desvios não superiores a 5% quando comparados com os tempos de solidificação dado pelo resultado numérico.

As Figuras 5.8 a 5.17 representam os gráficos da velocidade de avanço da frente de fusão em função da posição espacial. A velocidade de avanço da frente de fusão é calculada segundo a equação (5.12). Pode-se notar que existe uma boa concordância entre o método corrigido proposto, representado pelas linhas tracejadas, e o método numérico, representado pelas linhas cheias. Os resultados concordam muito bem desde $\epsilon=0$ até aproximadamente $\epsilon=0,8$ quando resta apenas 0,8% do volume da esfera para ser solidificado.

Os resultados obtidos segundo a outra correção proposta, a equação (5.22) que corrige tão somente a variável espacial, são mais grosseiros. Para valores dos números de Stefan e Biot considerados neste trabalho, os desvios desta correção em relação ao método numérico ficam abaixo dos 30% considerando-se o intervalo de variação de ε desde 0 até 1. Considerando-se o intervalo somente entre 0 e 0,5 os desvios máximos já ficam abaixo dos 10%. A Figura 5.18 mostra a posição da frente de fusão no tempo para um número de Stefan igual à unidade e para números de Biot iguais a 1, 2, 5, 10 e ∞ , calculada segundo a correção proposta pela equação (5.22). Observar que realmente para tempos pequenos a concordância pode ser considerada boa.

STEFAN		0,1	0,5	1,0	2,0	3,0
BIOT	1,0	0,36	0,41	0,45	0,51	0,56
	2,0	0,36	0,41	0,46	0,52	0,56
	5,0	0,36	0,41	0,46	0,51	0,55
	10,0	0,36	0,40	0,45	0,50	0,53
	∞	0,36	0,41	0,45	0,51	0,53
EQ(5.5)		0,36	0,41	0,45	0,51	0,53

Tabela 5.1 - Relação entre o tempo de solidificação para a esfera e o tempo de solidificação para o plano, para $\epsilon=1$.

		STEFAN				
BIOT	1,0	0,1	0,5	1,0	2,0	3,0
	2,0	4,1	2,6	2,1	1,6	1,4
	5,0	2,4	1,2	1,7	2,5	4,9
	10,0	0,5	1,3	3,6	4,0	5,3
		1,0	1,5	3,3	2,7	3,4
	∞	2,7	0,9	0,4	4,0	5,7

Tabela 5.2 - Erro médio absoluto percentual dos resultados da equação (5.8) quando comparados com os resultados numéricos.

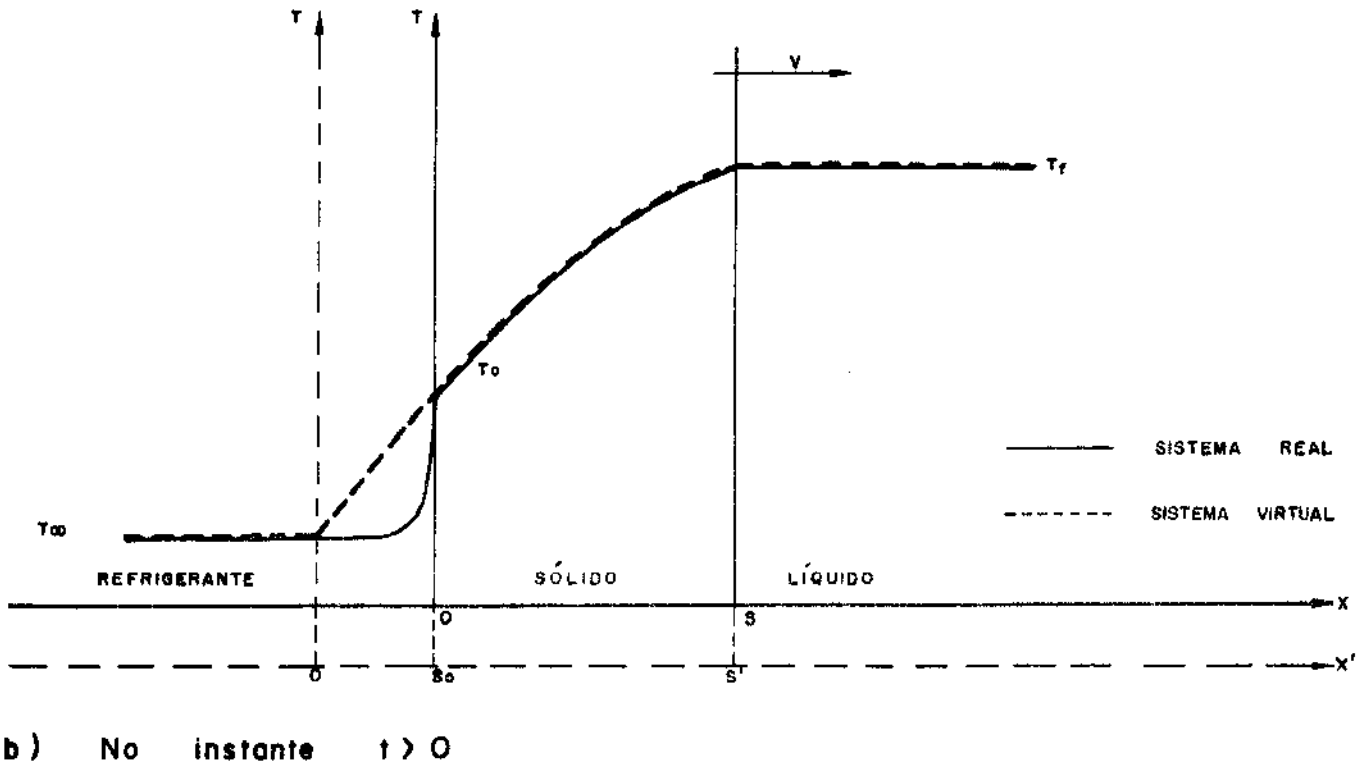
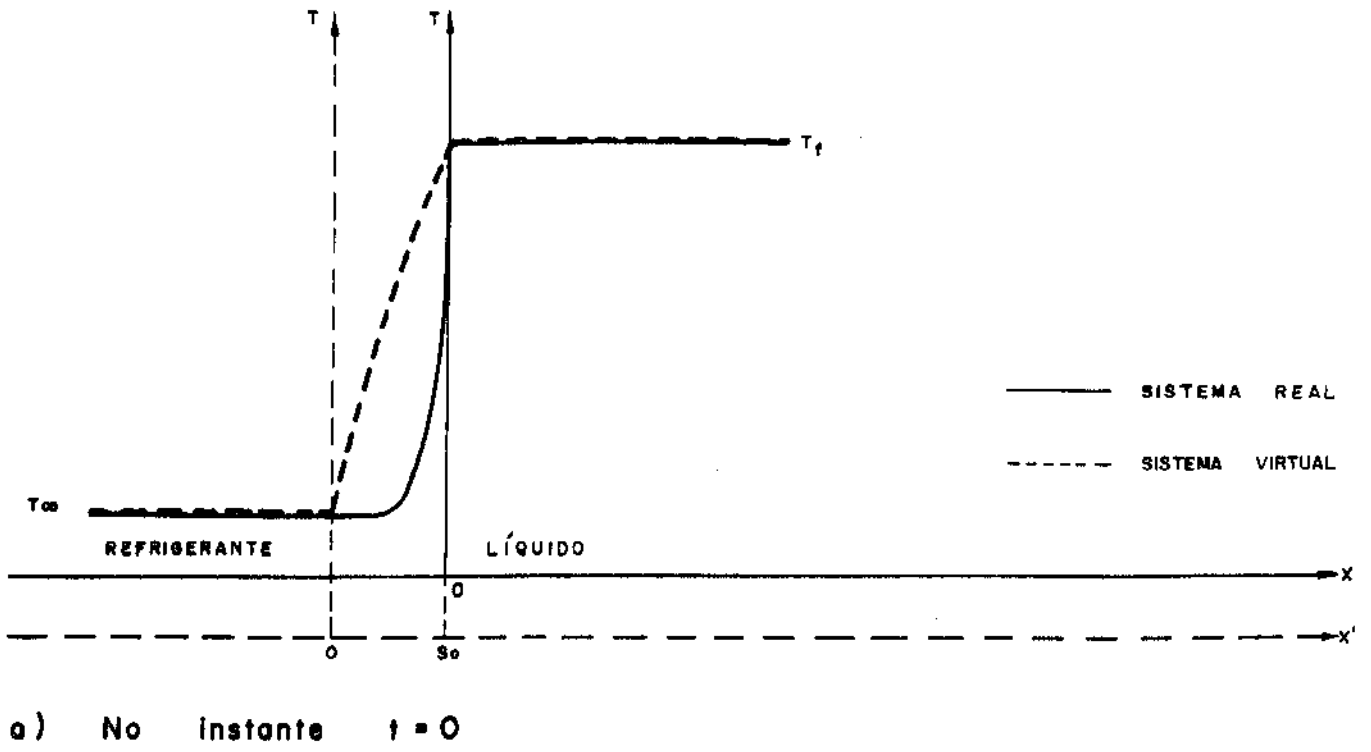


Fig. 5.1 Representação do sistema virtual

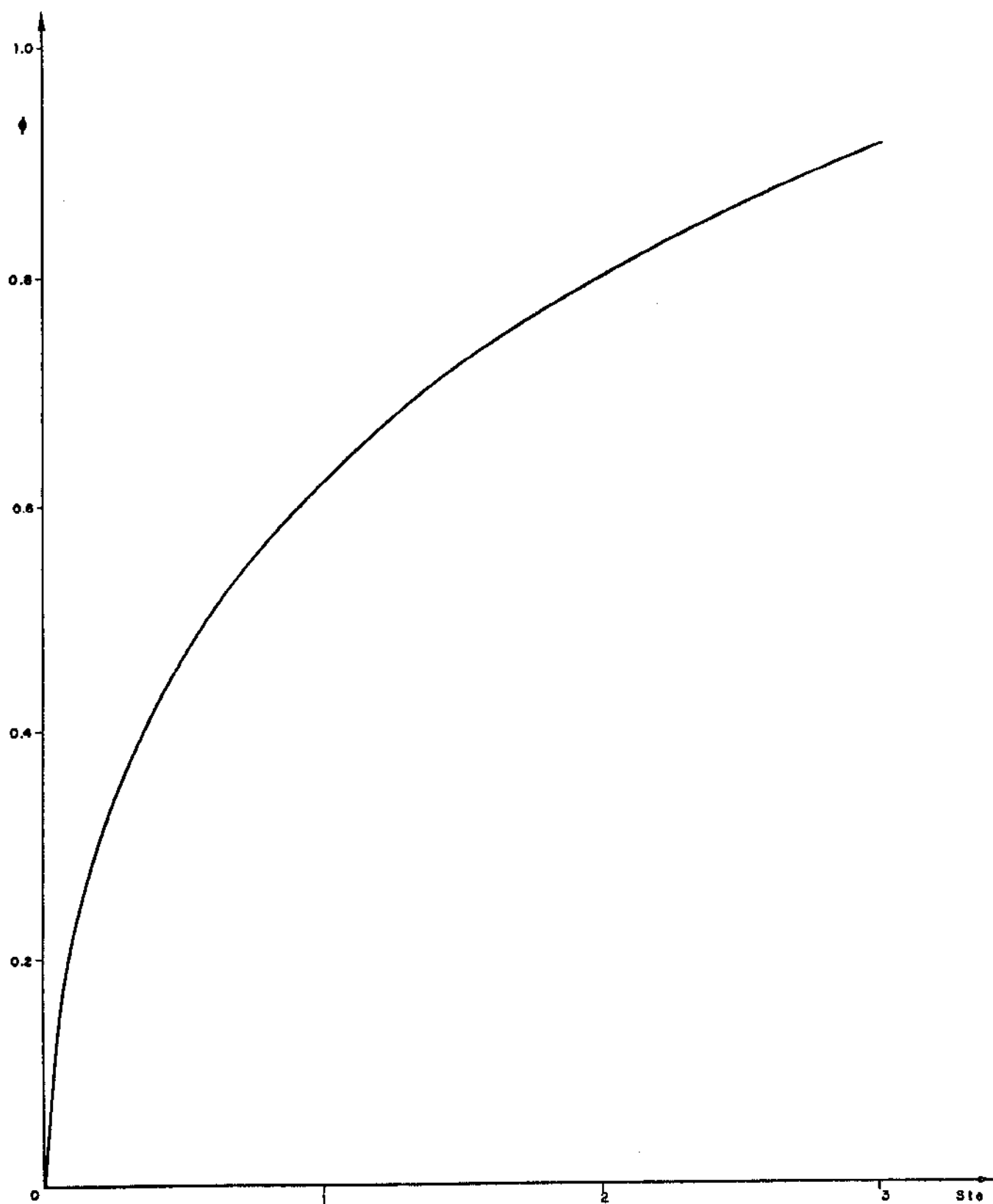


Fig. 5.2 Variação da constante de solidificação ϕ com o número de Stefan

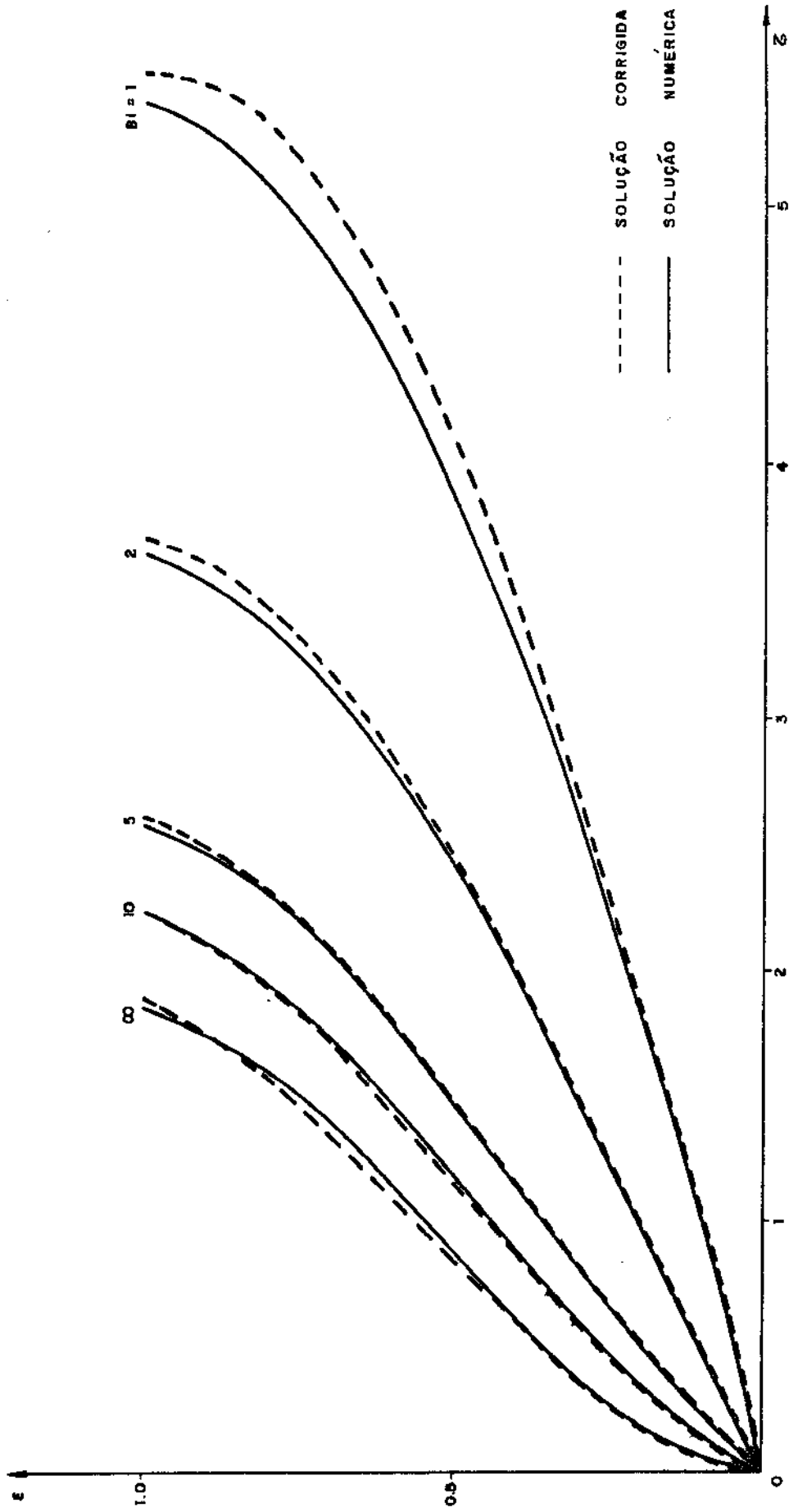


Fig. 5.3 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 0.1$

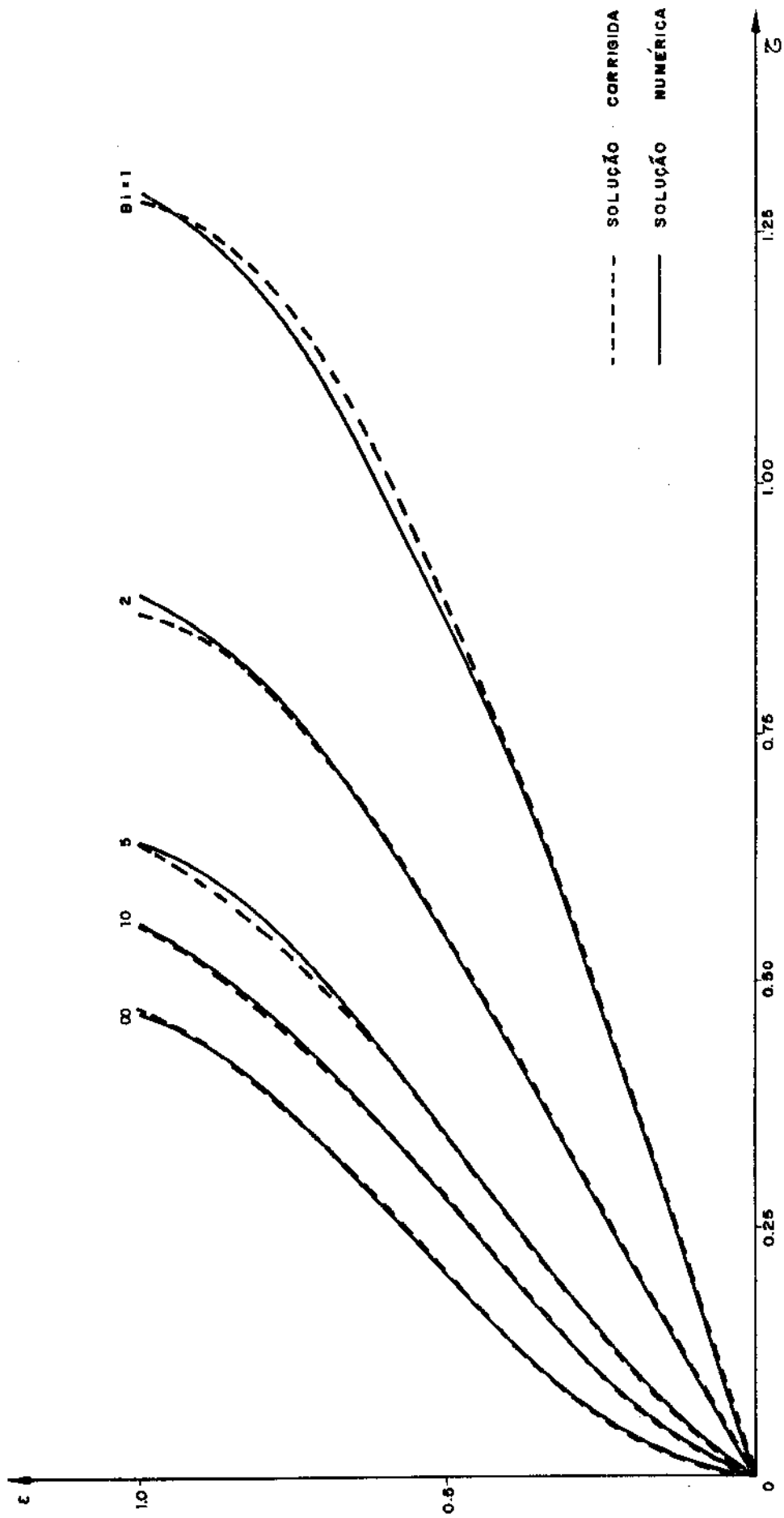


Fig. 5.4 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 0.5$

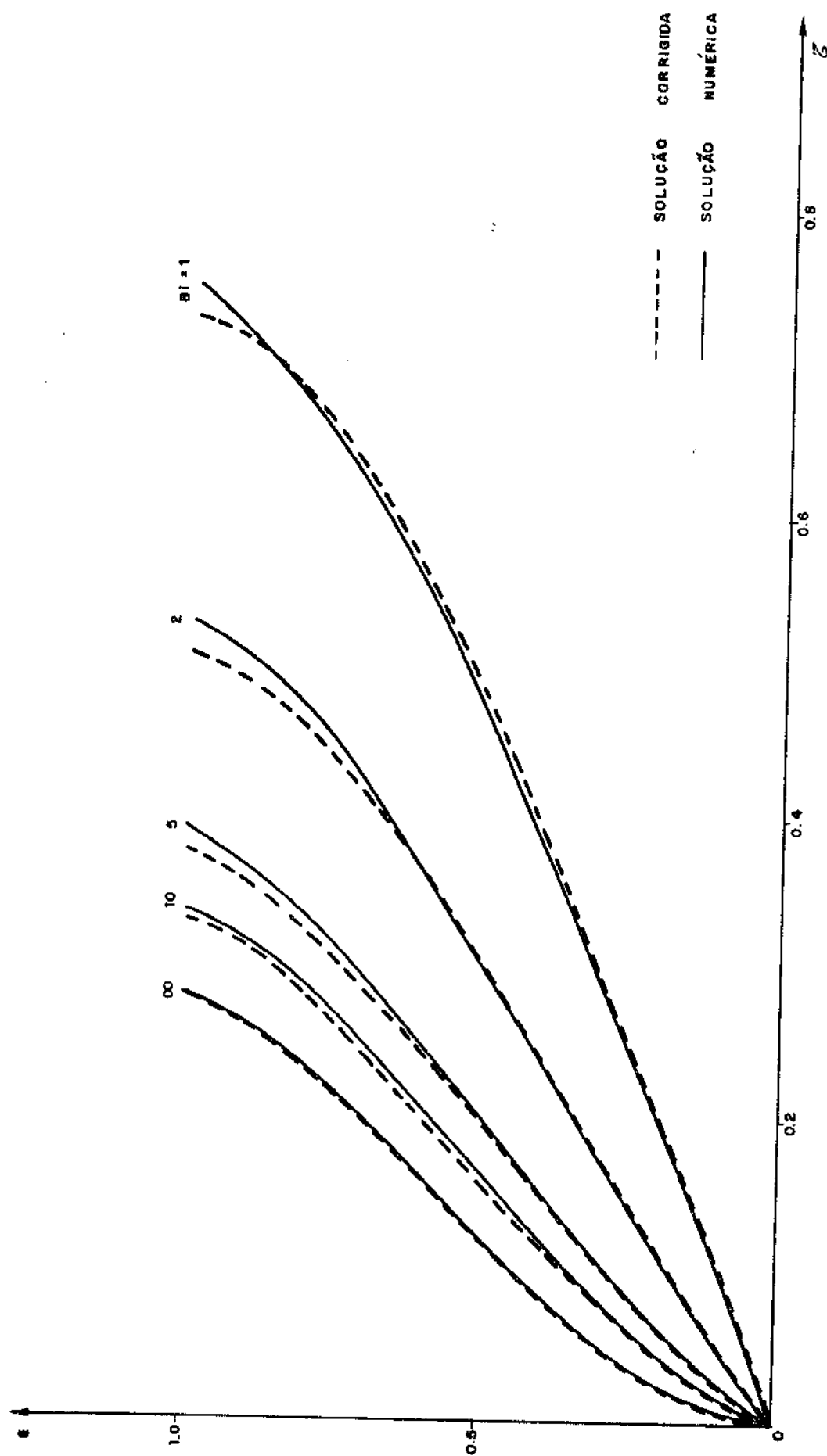


Fig. 5.5 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 1.0$



Fig. 5.6 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 2.0$

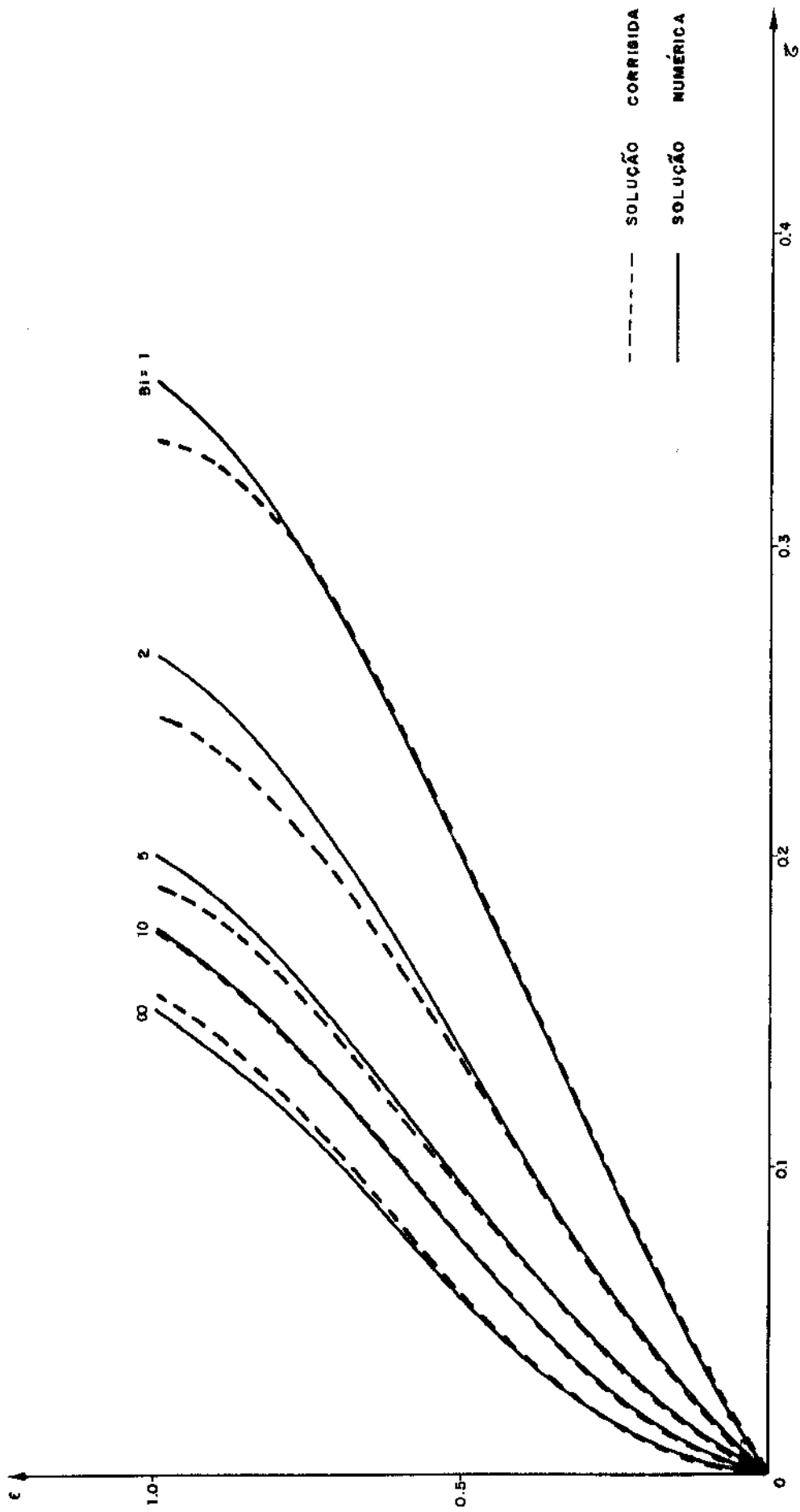


Fig. 5.7 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 3.0$

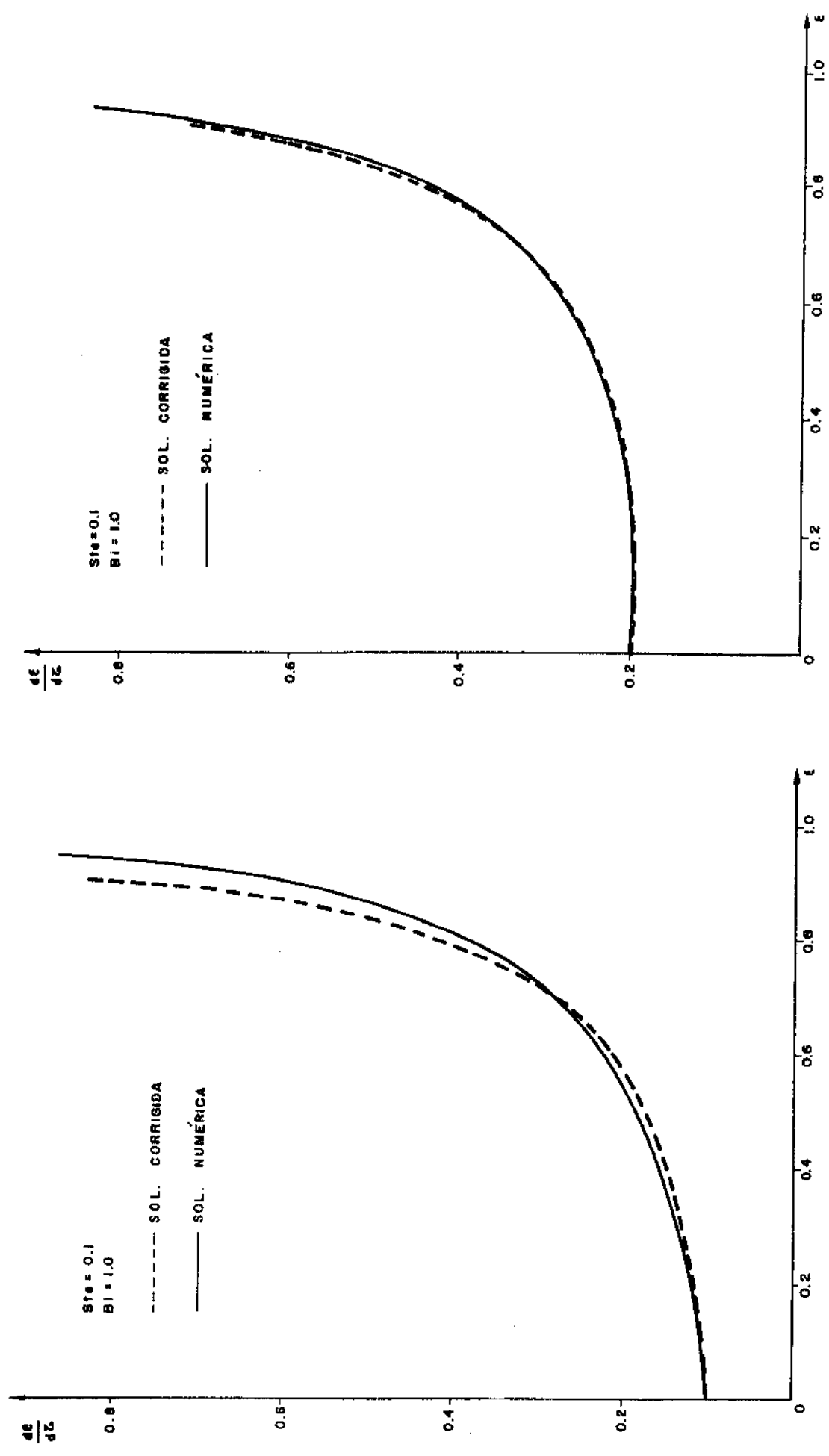


Fig. 5.8 Velocidade de avanço da frente de fusão

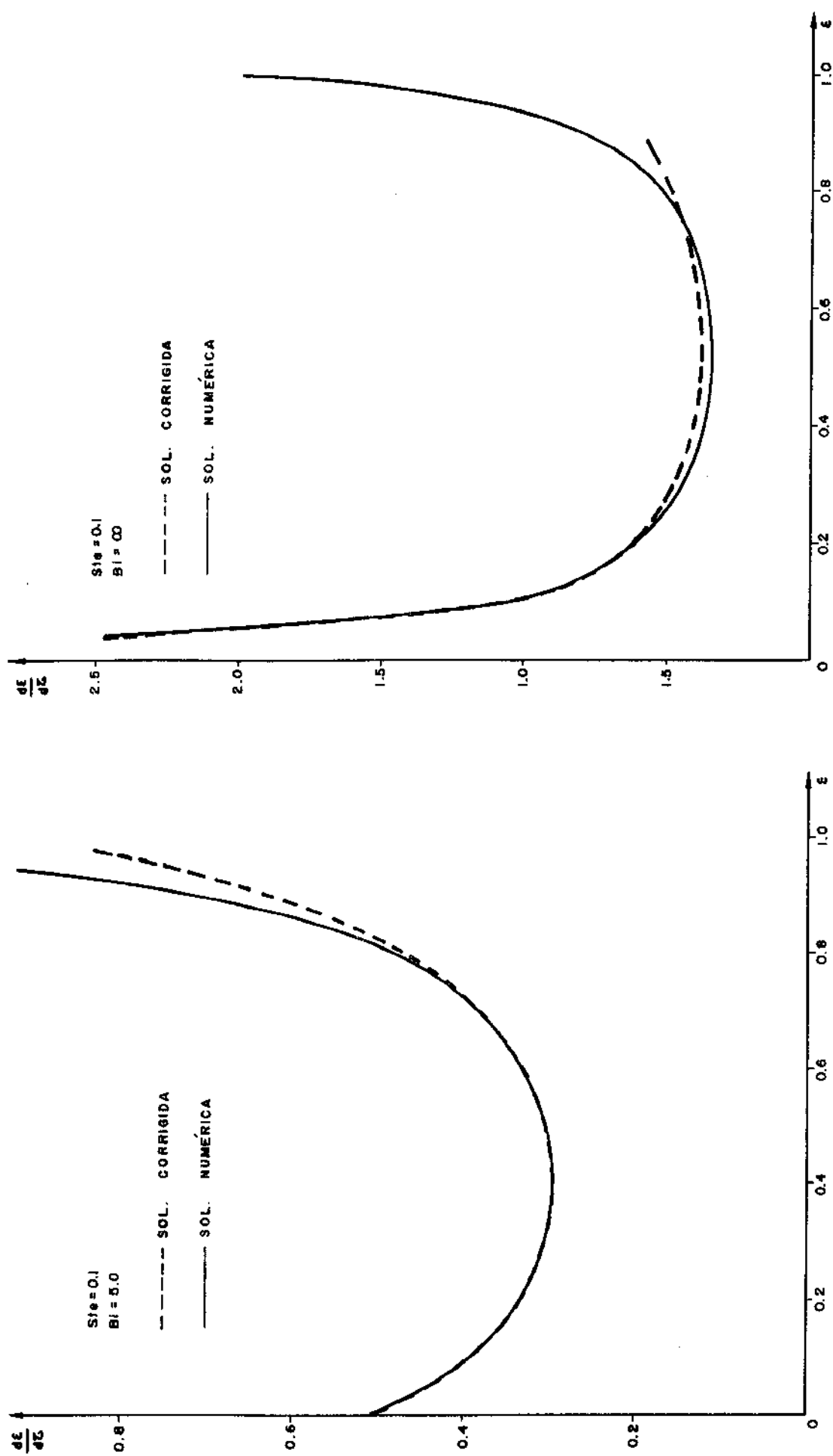


Fig. 5.9 Velocidade de avanço do frente de fusão

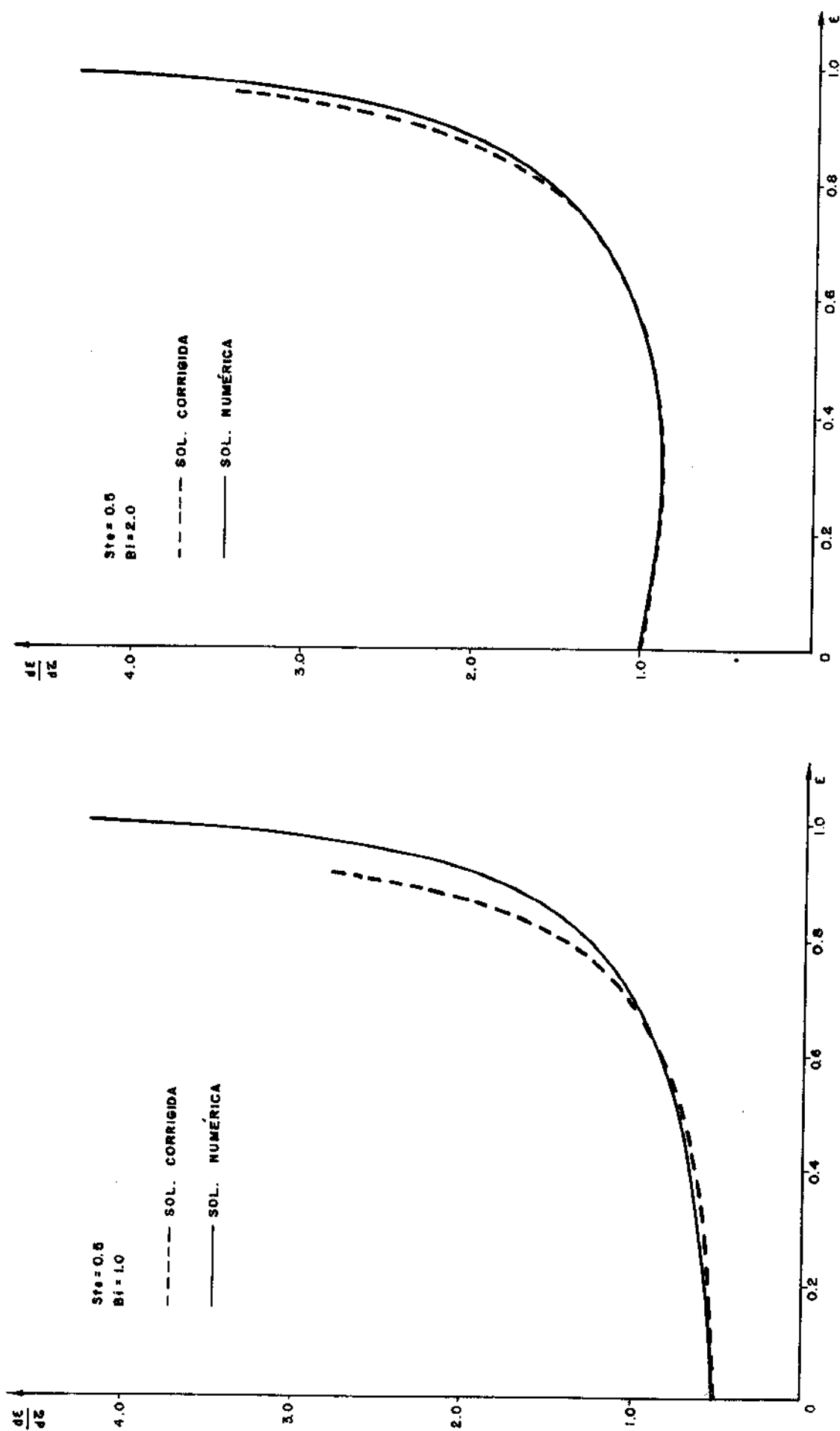


Fig. 5.10 Velocidade de avanço da frente de fusão

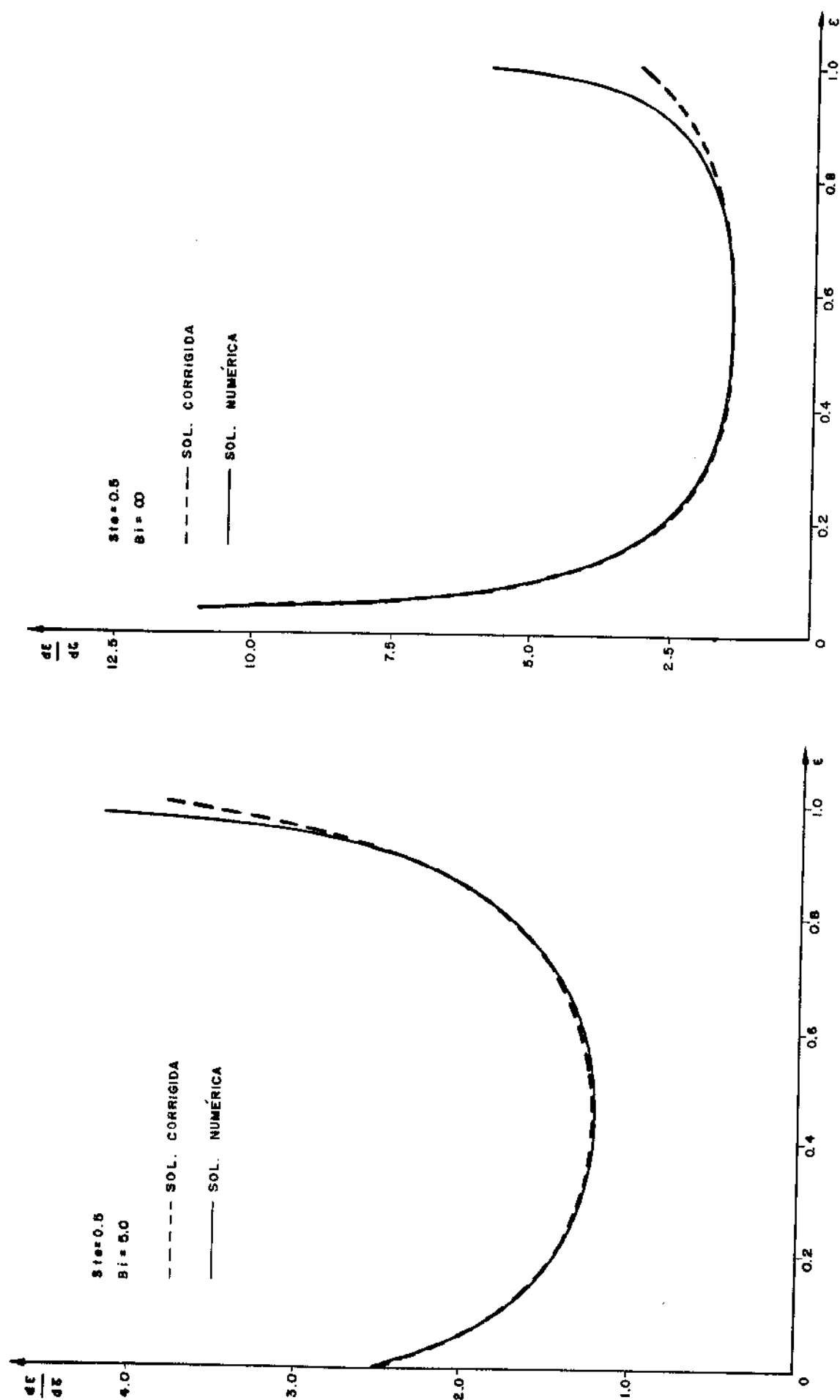


Fig. 5.11 Velocidade de avanço da frente de fusão

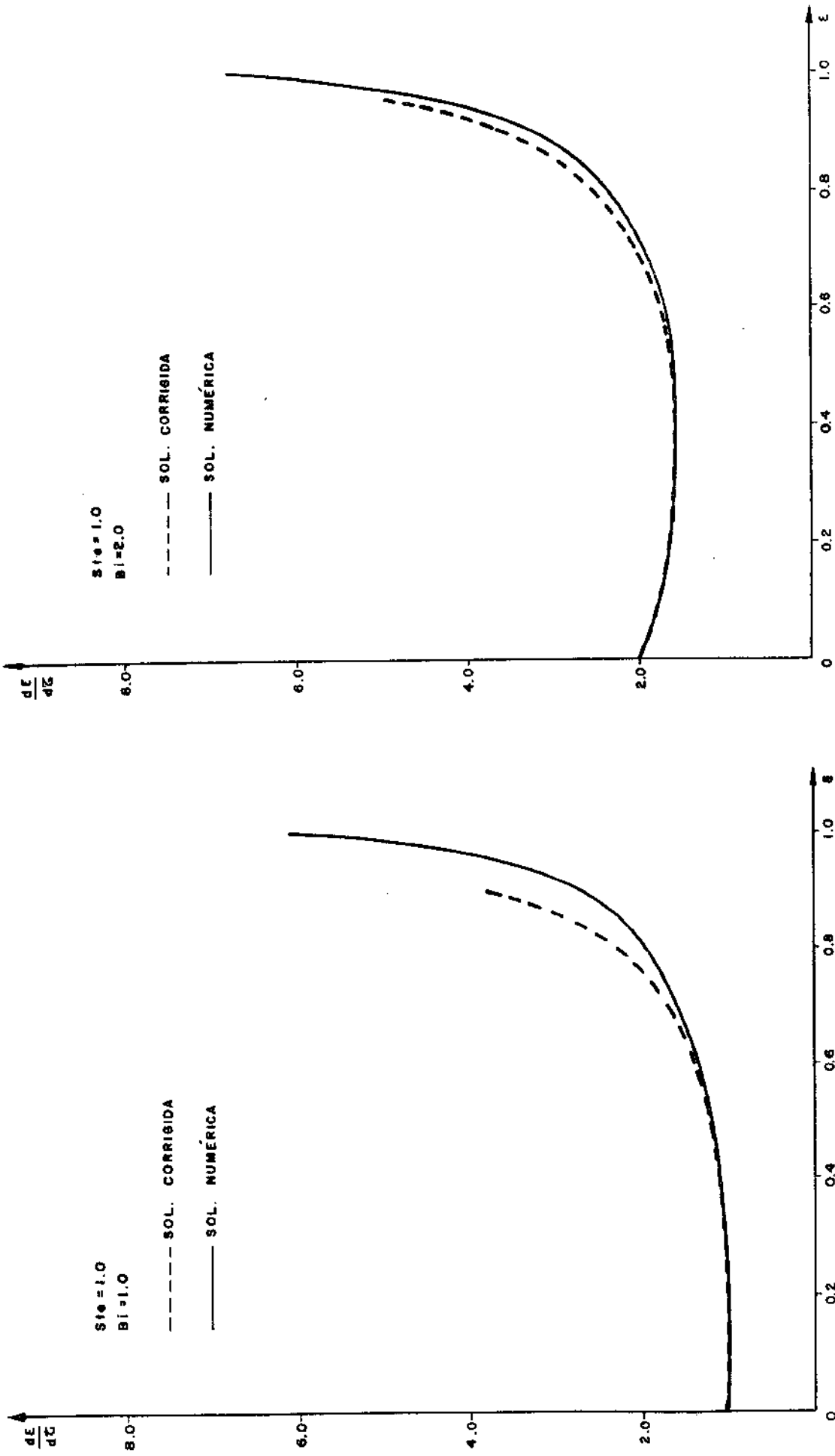


Fig. 5.12 Velocidade de avanço da frente de fusão

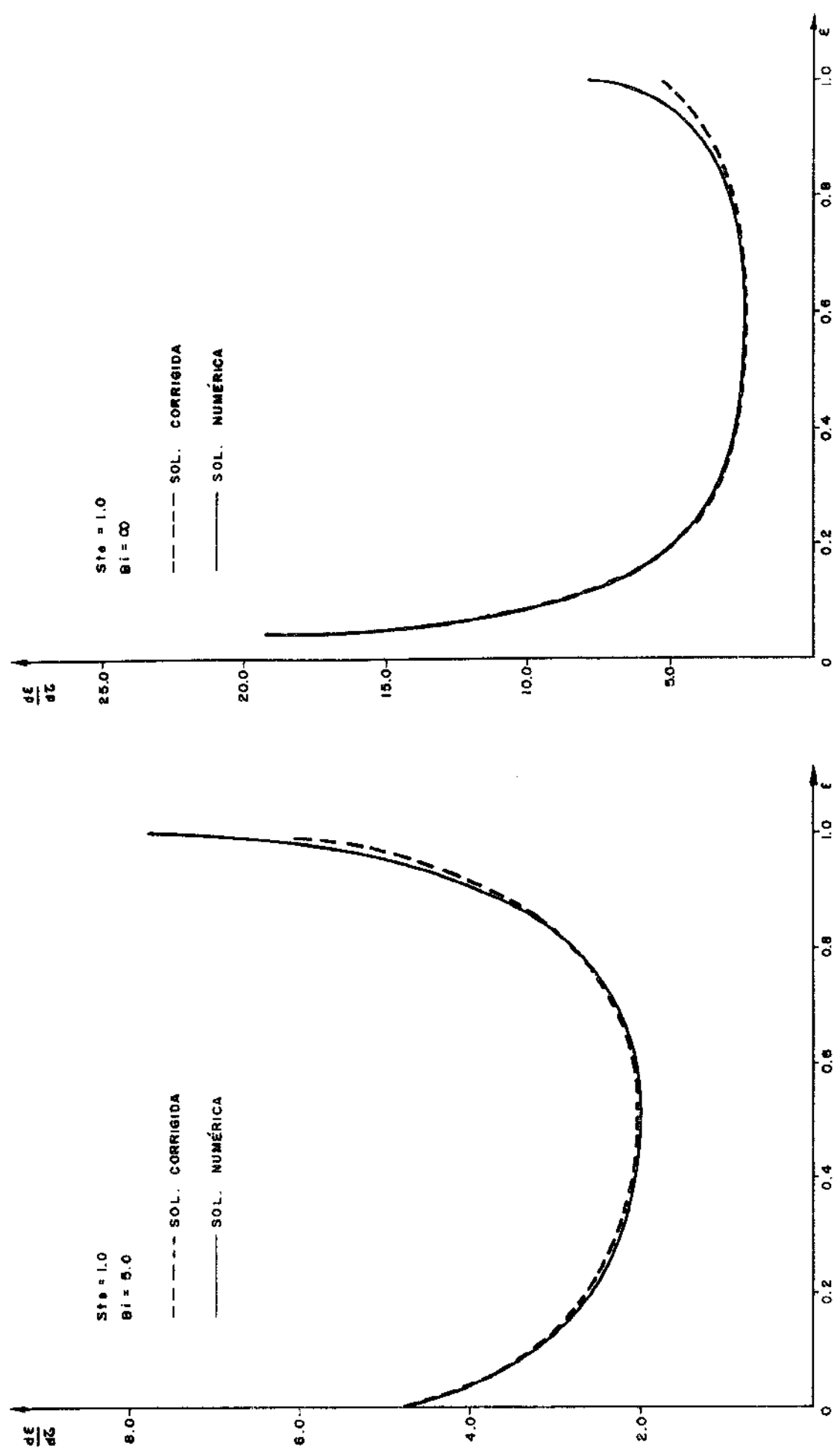


Fig. 5.13 Velocidade de avanço da frente de fusão

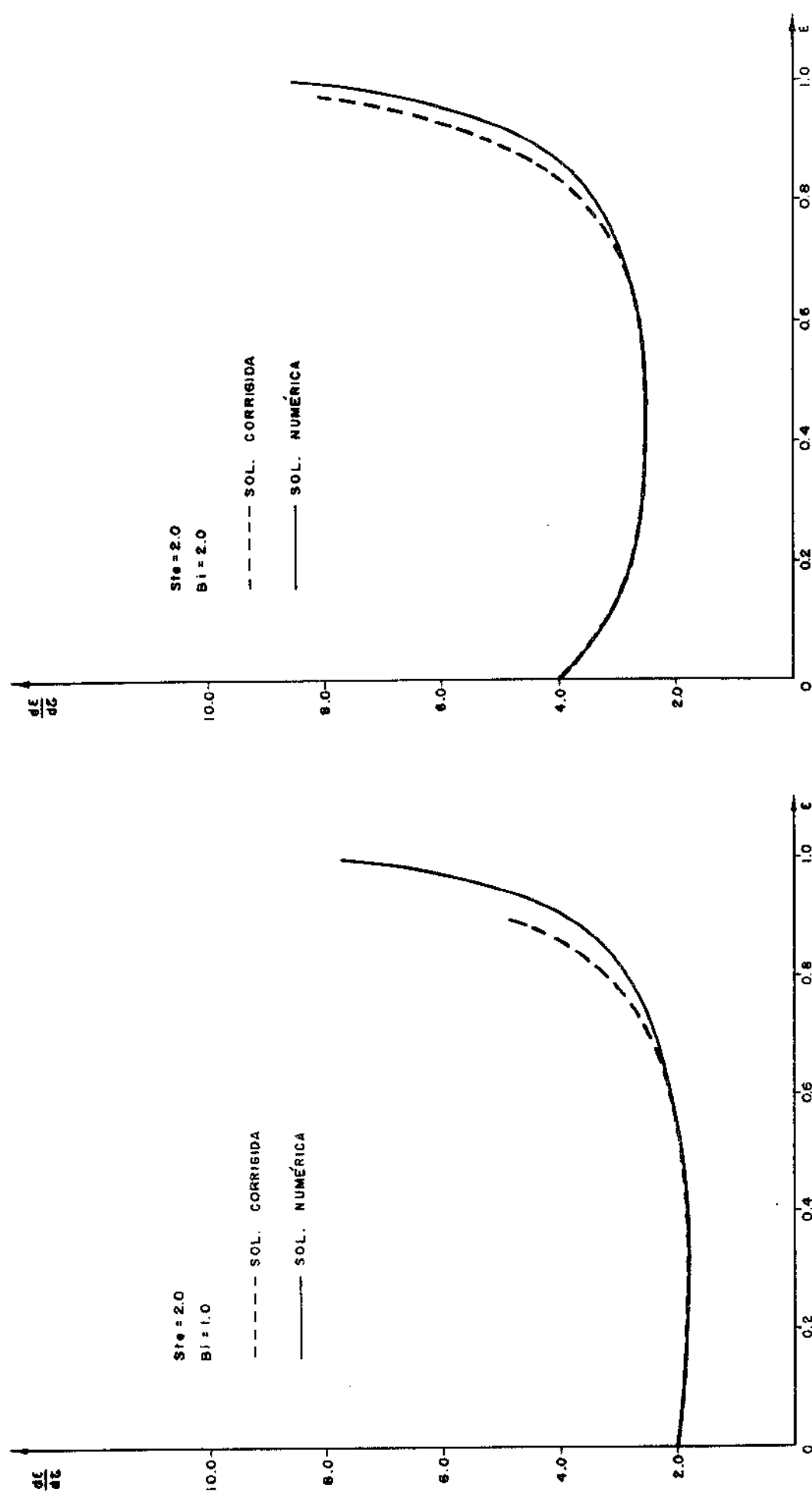


Fig. 5.14 Velocidade de avanço da frente de fusão

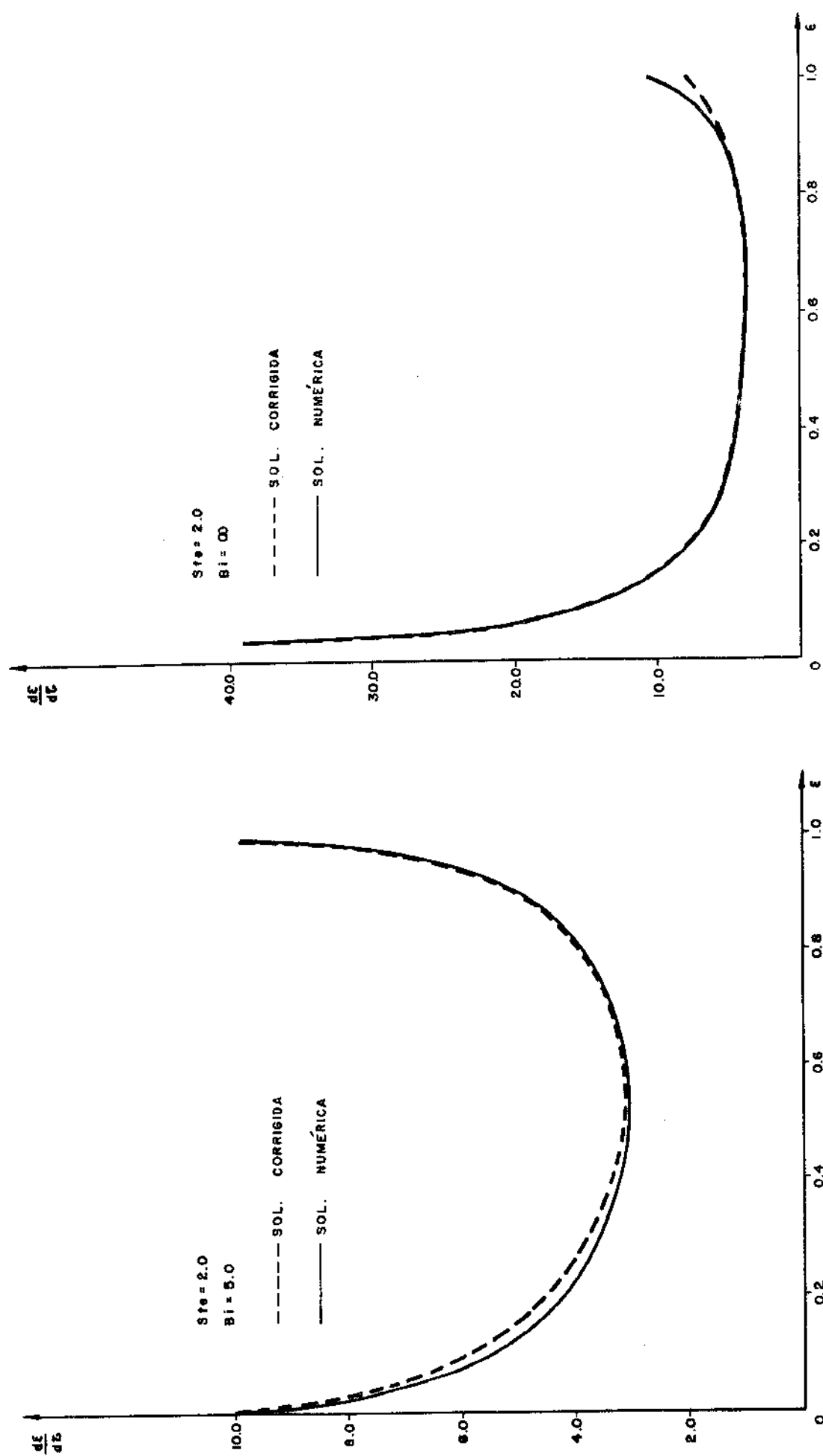


Fig. 5.15 Velocidade de avanço da frente de fusão

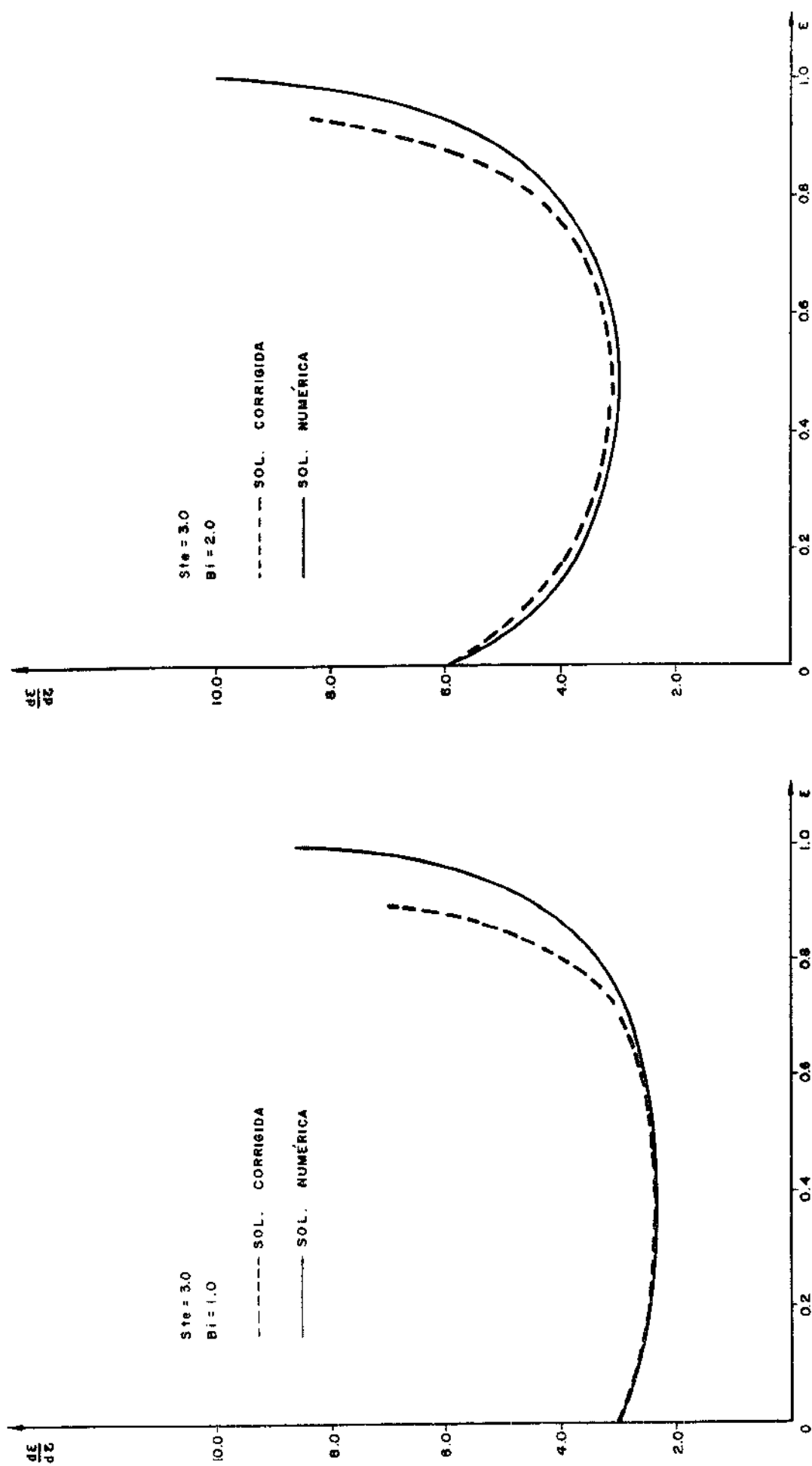


Fig. 5.16 Velocidade de avanço da frente de fusão

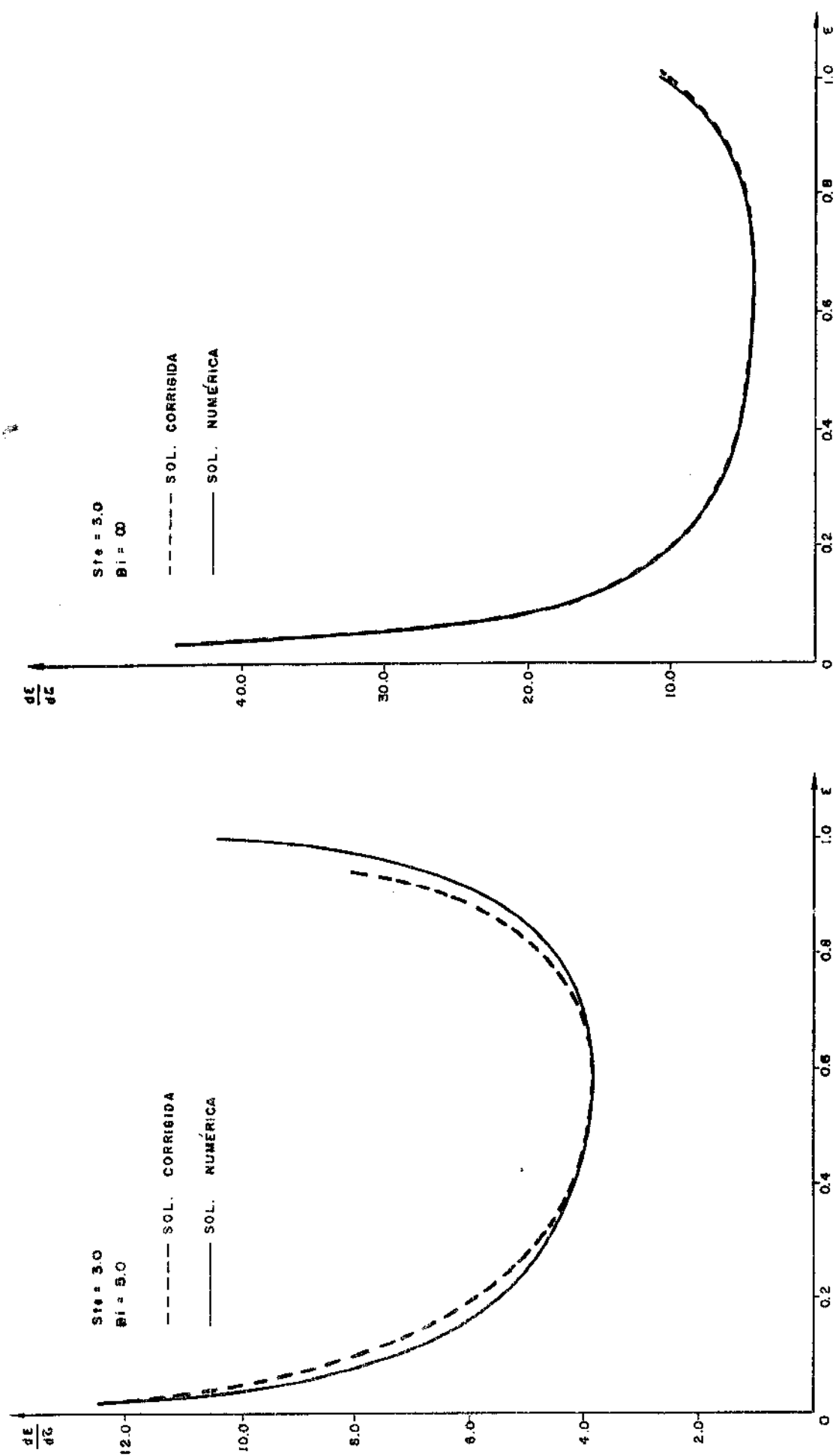


Fig. 5.17 Velocidade de avanço da frente de fusão

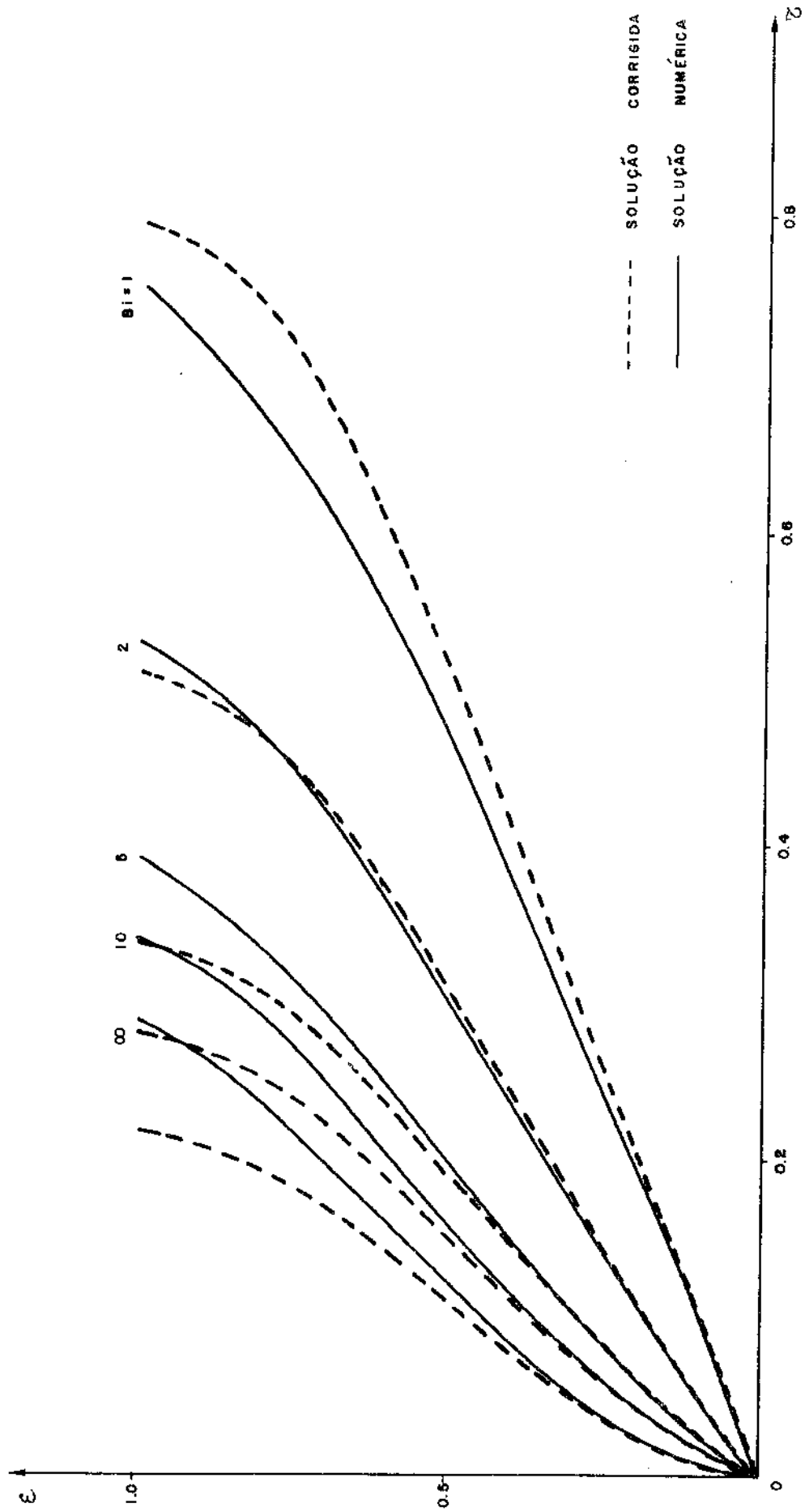


Fig. 5.18 Posição da frente de fusão no tempo para $Ste = 1.0$ segundo a equação (5.22)

CAPÍTULO 6

ANÁLISE EXPERIMENTAL

6.1. INTRODUÇÃO

O objetivo desta análise experimental é o projeto e a construção de um dispositivo para simular o processo de solidificação radial, utilizando um molde refrigerado a água e a ar com formato conveniente para representar a geometria esférica e permitir a medida do avanço da interface sólido-líquido em função do tempo bem como os perfis de temperatura na fase solidificada.

A primeira, e aparentemente única tentativa de uma análise experimental do processo de solidificação em esferas foi feita em 1945 por London & Seban [43]. O objetivo destes autores foi a determinação do tempo de solidificação total para cilindros e esferas. Para representar a esfera foi considerado um tomate, cujo teor de água é cerca de 95%, de diâmetro aproximadamente 60mm. Um termopar do tipo ferro-constantan foi inserido numa posição tão próxima quanto possível do centro do tomate. O conjunto foi colocado num sistema de refrigeração e a temperatura do centro do tomate registrada. Quando a frente de solidificação atingia o centro do tomate, a curva registrada da temperatura sofria uma descontinuidade devido à mudança de fase e desta forma podia ser determinado o tempo de solidificação total. O tempo total de solidificação obtido nesta experiência foi cerca de 11% maior que o resultado teórico aproximado desenvolvido pelos mesmos autores [42]. Esta discrepância foi debitada ao fato da geometria do tomate não ser exatamente esférica e também ao fato do resultado teórico ter sido calculado com base nas propriedades da água pura.

6.2. EQUIPAMENTO

Para a tomada de medidas experimentais foi projetado e construído um dispositivo simulador do processo de solidificação em geometrias esféricas. Os componentes de tal dispositivo estão

descritos abaixo.

6.2.1. Forno de Resistência Elétrica

O forno de resistência elétrica é composto de dois tubos concêntricos de amianto como mostrado na Figura 6.1. Na parede convexa do tubo interno foi usinado um sulco em forma de rosca espiral onde foi enrolada uma resistência elétrica. O controle da potência dissipada por esta resistência é feito por meio de um variador de voltagem 0-110V que permite dissipar uma potência máxima de 1200W, suficiente para fundir os materiais escolhidos.

O espaço anular entre os dois cilindros foi preenchido com um material isolante (vermiculita) de condutividade térmica muito baixa. Além disso, para reforçar o isolamento, as paredes laterais do forno foram recobertas por uma camada de manta de lã de vidro com espessura de uma polegada. Este último detalhe foi omitido nos desenhos para maior clareza dos mesmos.

O conjunto dos dois tubos concêntricos de amianto, resistência elétrica e isolante, é assentado numa chapa de aço 1020 de 5mm de espessura onde 4 posicionadores alinham o conjunto com o sistema de refrigeração. Uma outra chapa, de mesmas dimensões laterais da chapa que é utilizada como base, é colocada na outra extremidade dos tubos de amianto. Um anel de latão parafusado sobre uma abertura circular no centro da chapa superior ao mesmo tempo alinha o molde no interior do forno e pressiona-o sobre o canal de refrigeração mantendo-o fixo nesta posição. Quatro pinos são responsáveis pela fixação de todo o conjunto. Estes pinos são soldados na chapa inferior, um em cada canto. A outra extremidade dos pinos é rosqueada permitindo a fixação na chapa superior através de um sistema de porca e borboleta.

6.2.2. Molde

Foi projetado e construído um molde com formato conveniente para simular a solidificação numa geometria esférica que permitisse a tomada de medidas do avanço da frente de solidificação e as medidas dos perfis de temperatura.

O molde proposto, de formato cônico, representa um ângu

lo sólido de uma esfera de 0,1m de raio como mostrado na Figura 6.2. O molde é composto de duas partes independentes que se encaixam perfeitamente: as paredes laterais de formato cônico e a calota esférica que serve de base. Estas duas partes são encaixadas sob uma leve pressão e a fixação é assegurada por meio de quatro parafusos, como pode ser visto nas Figuras 6.3 e 6.4.

O formato cônico das paredes laterais é interrompido próximo do vértice do cone para permitir que uma abertura torne possível a introdução dos dispositivos de medida.

O material utilizado na fabricação do molde foi o aço inoxidável para evitar a oxidação já que este molde deve suportar temperaturas relativamente altas estando também sujeito à ação dos fluidos refrigerantes, no caso a água e o ar.

6.2.3. Sistema de Refrigeração

O sistema de refrigeração, mostrado na Figura 6.5, permite uma refrigeração uniforme e radial na parte inferior do molde.

Na chapa inferior, que serve de base para todo o sistema, existe uma abertura onde é encaixado um tubo, também de aço inoxidável, que serve de assento para o molde que fica no interior do forno elétrico. Este tubo é também o canal de escoamento do fluido de resfriamento. O molde é ajustado neste tubo sob pressão para evitar vazamento do fluido refrigerante no interior do forno. A tubulação do fluido de resfriamento é centralizada no interior deste canal por meio de um anel posicionador.

Foram utilizados dois fluidos refrigerantes neste trabalho: a água e o ar. O sistema de água era constituído de uma caixa de 500 litros cujo nível era mantido constante através de uma linha de alimentação contínua e de um ladrão. Havia um desnível entre o sistema a ser resfriado e o nível da água da caixa de 2 metros, desta forma sendo garantida no sistema de resfriamento uma vazão constante. A água, antes de penetrar no canal de resfriamento devia passar por duas válvulas: inicialmente por uma válvula de controle de fluxo e logo a seguir por uma válvula de esfera.

O sistema de resfriamento a ar era garantido por um conjunto de dois compressores juntamente com um tanque armazenador

ajustado para descarregar o ar numa pressão constante de 800 kN/m^2 durante todo o processo de resfriamento. O ar também devia passar inicialmente por uma válvula de controle de fluxo seguida de uma válvula de esfera.

O conjunto completo do equipamento juntamente com os dois sistemas de resfriamento está mostrado na Figura 6.6.

6.2.4. Dispositivo para Medida do Avanço da Frente de Solidificação

Sobre a chapa superior do conjunto do forno elétrico é mostrado um conjunto para a medida do avanço da frente de solidificação. Faz parte deste conjunto uma vareta de metal que é o elemento de acompanhamento de avanço da interface sólido-líquido. Um ponteiro preso à esta vareta por meio de um parafuso de fixação, desliza sobre uma escala graduada em milímetros. O fato deste ponteiro poder ser deslocado ao longo da vareta por meio do parafuso de fixação, permite que o zero da escala graduada seja ajustado na posição em que a extremidade da vareta toca a calota do molde. A Figura 6.7 ilustra este dispositivo. A Figura 6.8 indica as posições no molde onde foram tomadas as medidas.

6.2.5. Sistema de Medida de Temperaturas

Para a determinação experimental da posição da frente de fusão no tempo pela técnica da termometria e também para a determinação dos perfis de temperatura, foi utilizado um registrador ECB RB-103 de 3 canais.

As tomadas de temperatura foram efetuadas através de três termopares tipo k (cromel-Alumel).

6.2.6. Materiais Utilizados

Os materiais utilizados nas medidas experimentais foram o chumbo e o estanho, que são metais não ferrosos bastante empregados na prática. Estes materiais têm suas propriedades físicas bem conhecidas e possuem pontos de fusão relativamente baixos,

facilitando a experimentação. As composições químicas do chumbo e do estanho estão mostradas na Tabela 6.1 e foram fornecidas pela METAL LEVE e pela CESBRA respectivamente. As propriedades físicas estão mostradas na Tabela 6.2 e foram obtidas de "Propriedades e Usos de Metais Não Ferrosos" 1 ed. SP, Ed. ABM (1976) p. 104 e p. 210, de autoria de BRESCIANI FILHO, E. & GOMES, M.R.

6.3. PROCEDIMENTO

Inicialmente o material era fundido e vazado no molde. Para facilitar o processo de desmoldagem e também para dificultar as trocas laterais de calor indesejáveis, as paredes cônicas do molde foram revestidas interna e externamente com uma pintura isolante à base de alumina. Somente a base do molde ficava livre desta pintura isolante.

Depois de resfriado, o molde era assentado sobre o canal de refrigeração no interior do forno elétrico e fixado nesta posição por meio do anel posicionador da chapa superior do forno.

O forno elétrico do dispositivo era ligado e mantido algum tempo com potência elevada para permitir a fusão do material. Quando todo o material já se encontrava no estado líquido, a potência era reduzida gradativamente enquanto o material era agitado manualmente para que se obtivesse uma temperatura uniforme. A agitação era feita por meio de um termopar ao tipo k (Cromel-Alumel) com o formato de uma vareta acoplado a um termômetro digital de modo a se ter o conhecimento da temperatura do material no interior do molde. Quando a temperatura do material fundido atingia uma temperatura próxima da temperatura de fusão (cerca de 3 a 4°C de superaquecimento) o forno era desligado e aberta a válvula de esfera da linha do fluido de resfriamento para que fosse iniciado o processo de solidificação.

O fato do molde estar em equilíbrio térmico com o forno no início do processo de solidificação evita trocas laterais de calor permitindo que a extração do calor seja feita apenas pela parte inferior do molde que entra em contato com o fluido de resfriamento. Desta forma o fluxo de calor se dá apenas na direção radial.

A medida do avanço da interface sólido-líquido foi feita através de duas técnicas distintas: dipstick e termometria. A técnica do dipstick consiste em mergulhar uma vareta no metal líquido e acompanhar o avanço da interface através de leves toques com a ponta da vareta. A medida da espessura solidificada é efetuada por um ponteiro solidário com a vareta, que desliza sobre uma escala graduada em milímetros. Neste caso, a medida do avanço da interface foi feita cronometrando-se o tempo de solidificação a cada 5mm de espessura solidificada. A técnica da termometria consiste em se colocar termopares ao longo da espessura a ser solidificada no molde e registrar o sinal. Nesta montagem os termopares foram posicionados em intervalos de 10mm.

Apesar do molde simular uma esfera de 100mm de raio foi necessário manter uma região não efetiva de aproximadamente um terço do raio para permitir a inserção do dipstick e dos termopares. Assim, as medidas foram tomadas até a espessura solidificada de 60mm quando o molde deixa de representar a geometria esférica.

Sendo a precisão da técnica do dipstick dependente da habilidade do operador, as medidas foram tomadas cinco vezes nas mesmas condições, adotando-se os valores médios.

Com relação à termometria, foram registradas medidas em sete posições com espaçamento de 10mm a partir da superfície da base do molde. Como o registrador utilizado dispunha somente de 3 canais, a tomada de medidas para uma experiência compreendia a execução do procedimento por três vezes. Na primeira vez eram registrados os perfis de temperatura em três posições distintas (0mm, 30mm, 60mm). Na segunda vez, o termopar da posição 0mm era mantido e os outros dois termopares posicionados em 20mm e 50mm. Na terceira vez, ainda com o termopar da posição 0mm mantido em sua posição original, os outros dois termopares eram deslocados para 10mm e 40mm. Assim os três conjuntos de curvas eram superpostos e a repetibilidade do teste verificada pela coincidência das três curvas referentes à posição 0mm. Caso a coincidência não se verificasse, indicando que as três tomadas de medidas não foram efetuadas exatamente nas mesmas condições, a experiência era repetida até que fosse verificada esta concordância.

6.4. RESULTADOS

Inicialmente foi feita a determinação experimental do avanço da interface sólido-líquido em função do tempo por meio da técnica do dipstick. Foram tomadas medidas desde 0 até 60mm em intervalos de 5mm. Estes pontos de medida estão mostrados na Figura 6.8. A partir destes pontos pode-se traçar a curva experimental.

O número de Biot pode ser obtido da expressão

$$Bi = \frac{l}{Ste} \frac{d\epsilon}{d\tau} \quad \text{para } \epsilon=0 \quad (6.1)$$

O número de Biot é dado por hR/k e caracteriza uma relação entre a resistência térmica interna (de condução) e a resistência térmica superficial (de convecção). Na expressão do número de Biot, R é o raio externo da esfera, k é a condutividade térmica do material solidificado e h é o coeficiente de transferência de calor. Nesta análise experimental o coeficiente de transferência de calor h incorpora todas as resistências térmicas desde a superfície externa da esfera ($X=0$) até o fluido de resfriamento. Portanto o coeficiente h engloba a resistência térmica de convecção entre o fluido de resfriamento e a parede externa da calota esférica, a resistência térmica de condução da espessura da calota esférica do molde e a resistência térmica de contato entre o material solidificado e a parede interna da calota esférica do molde.

As Figuras 6.10, 6.11, 6.12 e 6.13 representam as medidas tomadas para o chumbo, resfriado a água e a ar, e para o estanho, resfriado a água e a ar. Estas curvas experimentais foram obtidas da técnica do dipstick e representam a média de cinco medidas, efetuadas nas mesmas condições. O desvio padrão observado nestas cinco medidas ficou sempre inferior a 5%. Traçando-se a tangente a estas curvas em $\epsilon=0$, obtém-se o valor de $d\epsilon/d\tau$ para $\epsilon=0$. Este resultado substituído na equação (6.1) permite calcular o número de Biot. Os cálculos dos números de Biot estão indicados nas próprias figuras.

As Figuras 6.14, 6.15, 6.16 e 6.17 comparam estes resultados experimentais (pontos) com os resultados numéricos (linhas

cheias) calculados segundo os números de Biot obtidos experimentalmente. Pode-se observar que a concordância é boa, o que evidencia a validade do molde proposto para simular o processo de solidificação em geometrias esféricas.

Os gráficos das Figuras 6.18, 6.19, 6.20 e 6.21 são os perfis de temperatura no interior do molde obtidos através de um registrador de temperaturas. Foram registradas temperaturas desde 0 até 60mm em intervalos de 10mm.

A partir destes gráficos pode-se determinar novamente o avanço da interface sólido-líquido em função do tempo. Inicialmente todo o material fundido se encontra no estado líquido numa temperatura ligeiramente superior à temperatura de fusão. Assim, o termopar acusa uma temperatura aproximadamente constante até ser alcançado pela frente de solidificação, quando a temperatura registrada sofre uma queda repentina. Desta forma pode-se relacionar a posição da frente de fusão com o tempo. Estes resultados estão mostrados nas Figuras 6.22, 6.23, 6.24 e 6.25 para o chumbo e o estanho, resfriado a água e a ar. Estes resultados não dependem da habilidade do operador como os resultados obtidos através da técnica do dipstick, porém apresentam uma certa incerteza quanto à posição exata da junta quente do termopar. Nestas figuras os pontos representam os resultados obtidos pela técnica termométrica e as linhas cheias representam os resultados numéricos.

As Figuras 6.26, 6.27, 6.28 e 6.29 são curvas que representam a variação da temperatura na superfície externa da esfera ($X=0$). A curva experimental registrada através do termopar está representada pela linha tracejada e a curva obtida numericamente está traçada em linha cheia.

Desta análise pode-se constatar a boa concordância que existe entre os resultados obtidos pelo método numérico e os resultados obtidos experimentalmente através do molde proposto para simular a geometria esférica. Em alguns casos nota-se uma tendência dos tempos de solidificação experimentais serem ligeiramente superiores aos resultados numéricos, para posições mais distantes da superfície da esfera. Isto pode ser explicado pelo ligeiro superaquecimento presente na fase líquida, que tende a aumentar os tempos de solidificação. Além disso, essas medidas mais afastadas já são efetuadas nas proximidades do gargalo do molde e alguma interferência da variação da geometria pode estar presente. Convém

ressaltar também que existe uma diferença entre a densidade do material líquido e a densidade do material sólido. A densidade do chumbo líquido é 5,5% menor que a do sólido e a densidade do estanho líquido é 2,8% menor que a do sólido.

6.5. ANÁLISE DE ERROS

Como a técnica do acompanhamento do avanço da frente de solidificação através de uma vareta onde se encontra preso um ponteiro que desliza sobre uma escala graduada depende, como já foi observado, da habilidade do operador, as experiências realizadas foram repetidas cinco vezes nas mesmas condições. A Tabela 6.3 ilustra a forma em que os resultados foram considerados. Esta tabela apresenta, como exemplo, os resultados do tempo de solidificação em função da espessura solidificada obtidos para o chumbo resfriado a água. Esta tabela também apresenta a média aritmética ($\bar{t}$) e o desvio padrão (σ) dos resultados obtidos, através das equações

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^5 t_i}{5} \quad (6.2)$$

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^5 (t_i - \bar{t})^2}{5} \quad (6.2)$$

As medidas do tempo foram obtidas através de um cronômetro ILONA de 30 segundos por volta do ponteiro, com precisão de $\pm 0,05s$.

Um termopar do tipo K (Cromel-Alumel) com o formato de uma vareta acoplado a um termômetro digital FLUKE 2100A com precisão de $\pm 0,4^{\circ}C$ para termopares de cromel-alumel era responsável ao mesmo tempo pela agitação do material e pela determinação da temperatura do líquido no interior do molde.

A temperatura do fluido refrigerante foi obtida através de um termômetro de mercúrio SLEBERT & KÜHN KAUFUNGEN-KASSEL

com escala de 0 a 100°C com precisão de $\pm 0,05^\circ\text{C}$.

Os erros porventura introduzidos na leitura das temperaturas do material solidificado no interior do molde e do fluido refrigerante não exercem muita influência sobre os resultados obtidos. Isto porque o parâmetro que interessa é o número de Stefan que é função da diferença de temperatura entre o material solidificando e o fluido refrigerante. Um erro de 1°C nesta diferença de temperatura causa um erro de 0,30% no número de Stefan para o chumbo e um erro de 0,43% no número de Stefan para o estanho.

Nas temperaturas registradas através de um registrador ECB RB-103 a precisão foi de $\pm 1^\circ\text{C}$ para as experiências realizadas com o estanho e de $\pm 2^\circ\text{C}$ para as realizadas com o chumbo. Como todos os resultados são colocados na forma adimensional $\theta = (T - T_\infty) / (T_f - T_\infty)$ um erro de $\pm 1^\circ\text{C}$ nas medidas para o estanho representam um erro de 0,47% na temperatura adimensional e um erro de $\pm 2^\circ\text{C}$ nas medidas para o chumbo representam um erro de 0,65% na temperatura adimensional.

6.6. O EFEITO DA RADIAÇÃO

Quando ocorre solidificação em temperaturas elevadas, convecção e radiação são modos de transferência de calor igualmente significativos. Goodling & Khader [28] determinaram em quais condições a radiação pode ser desprezada para o processo de solidificação. Isto foi feito comparando-se o tempo total de solidificação para o caso de convecção e radiação, com o tempo total de solidificação para o caso de convecção somente. De uma maneira geral, se

$$\frac{\sigma \epsilon T_f^3 R}{k} < \frac{1}{3} \text{Bi}^2 \quad (6.4)$$

o tempo total de solidificação levando-se em consideração a radiação está dentro de 10% dos valores obtidos desprezando-se a radiação. Para números de Biot grandes, que correspondem a coeficientes de transferência de calor por convecção grandes, a contribui

ção da radiação é muito pequena na redução do tempo de solidificação. Já para $Bi < 1$ o mecanismo de transferência de calor por radiação pode ser significativo.

Para as medidas experimentais tomadas com o chumbo e o estanho, foi sempre satisfeita a condição da equação (6.4). Desta forma, a comparação destes resultados com os resultados teóricos obtidos da técnica numérica das diferenças finitas onde não foi considerada a perda de calor por radiação, praticamente não incorre em erro significativo.

TABELA 6.1

Composição química: percentagem em peso

	CHUMBO	ESTANHO
Pb	99,741	0,028
Fe	0,002	0,003
Ni	0,003	0,001
Sn	0,250	99,925
Zn	0,004	-
As	-	0,006
Bi	-	0,003
Cu	-	0,013
Sb	-	0,021

TABELA 6.2

Propriedades físicas do sólido na temperatura de fusão

	CHUMBO	ESTANHO
C_p (J/kg.K)	138	260
ρ (kg/m ³)	$11,3 \times 10^3$	$7,2 \times 10^3$
L (j/kg)	24×10^3	60×10^3
k (W/m.K)	29,7	46,0
T_f (K)	600	505
α (m ² /s)	$1,905 \times 10^{-5}$	$2,457 \times 10^{-5}$

TABELA 6.3

Resultados de cinco experiências realizadas nas mesmas condições, do tempo de solidificação em molde esférico para o chumbo resfriado a água.

POSIÇÃO	TEMPO DE SOLIDIFICAÇÃO EM SEGUNDOS					MÉDIA	DESVIO
	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\bar{t}$	σ
0,05	4,3	4,1	4,5	4,5	4,4	4,4	0,2
0,10	8,3	8,2	8,3	8,1	8,0	8,2	0,1
0,15	12,1	12,5	13,0	12,0	13,1	12,5	0,5
0,20	18,0	18,5	19,5	17,6	19,6	18,6	0,9
0,25	25,4	26,0	27,3	24,8	27,0	26,1	1,1
0,30	33,4	34,9	36,0	32,9	36,8	34,8	1,7
0,35	42,3	45,1	46,2	41,8	46,5	44,4	2,2
0,40	51,6	55,2	55,3	51,8	57,9	54,4	2,7
0,45	62,0	65,2	66,9	62,0	69,3	65,1	3,2
0,50	73,1	77,2	78,0	71,8	80,1	76,0	3,5
0,55	84,4	88,1	89,8	81,8	92,8	87,4	4,4
0,60	95,4	99,9	101,5	92,0	104,8	98,7	5,1

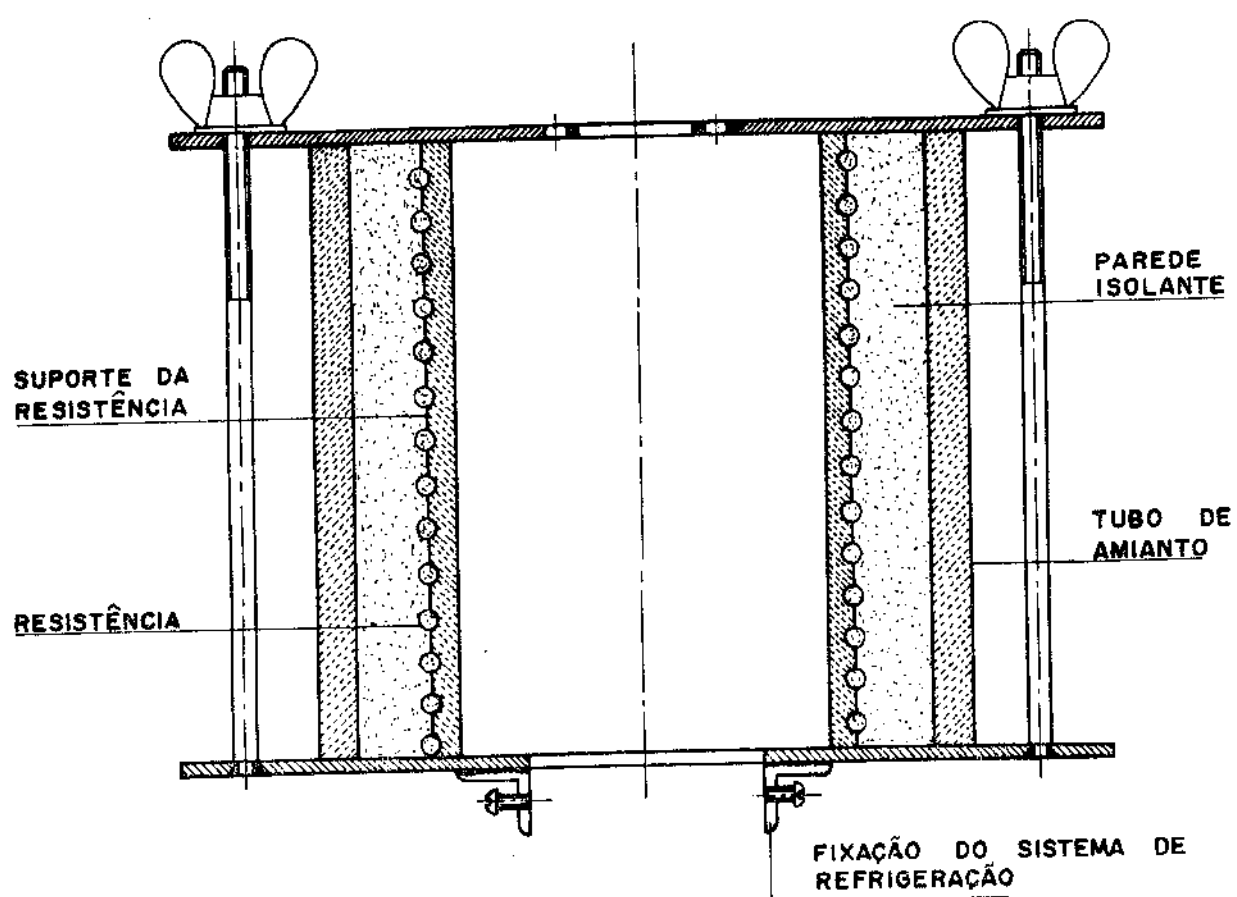


Fig. 6.1 Forno de resistência elétrica

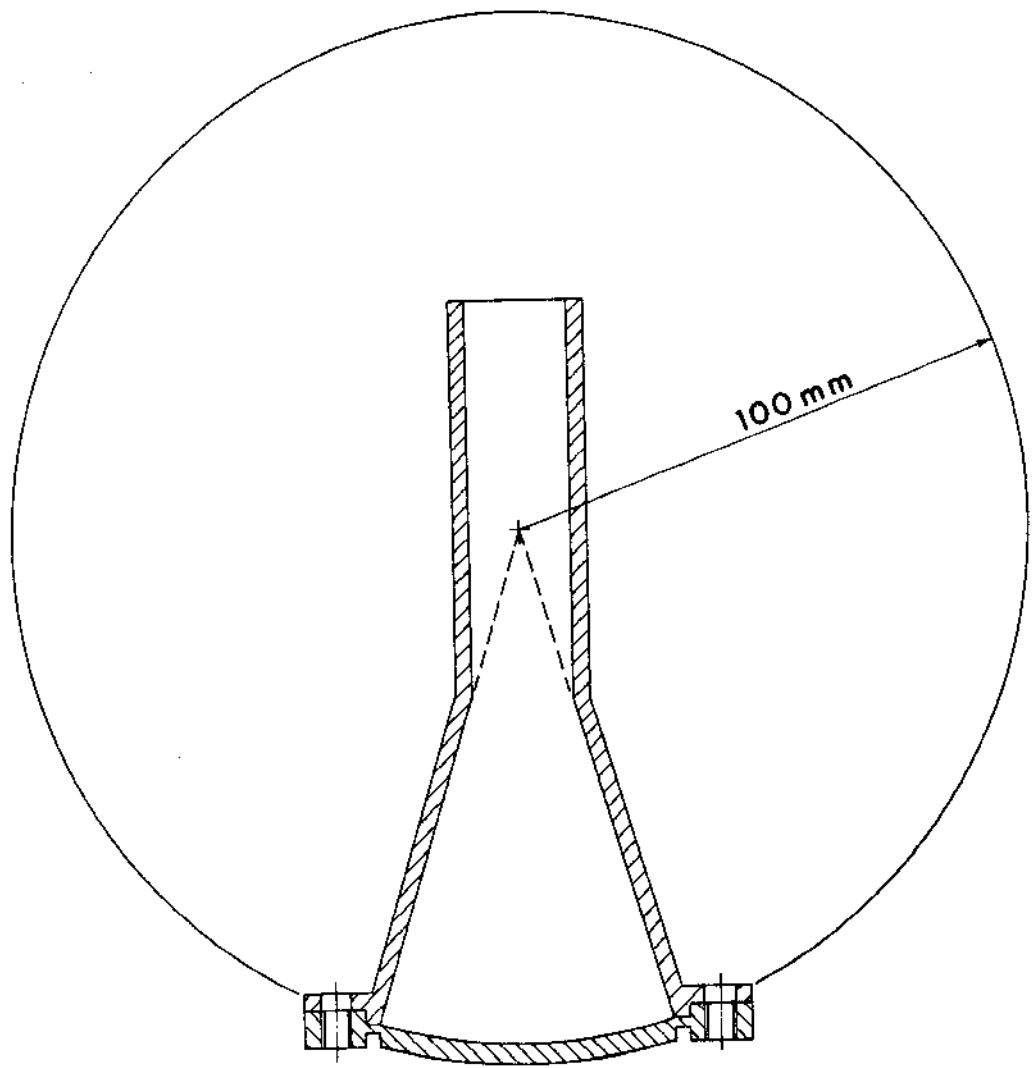


Fig. 6.2 Molde proposto: ângulo sólido de uma esfera

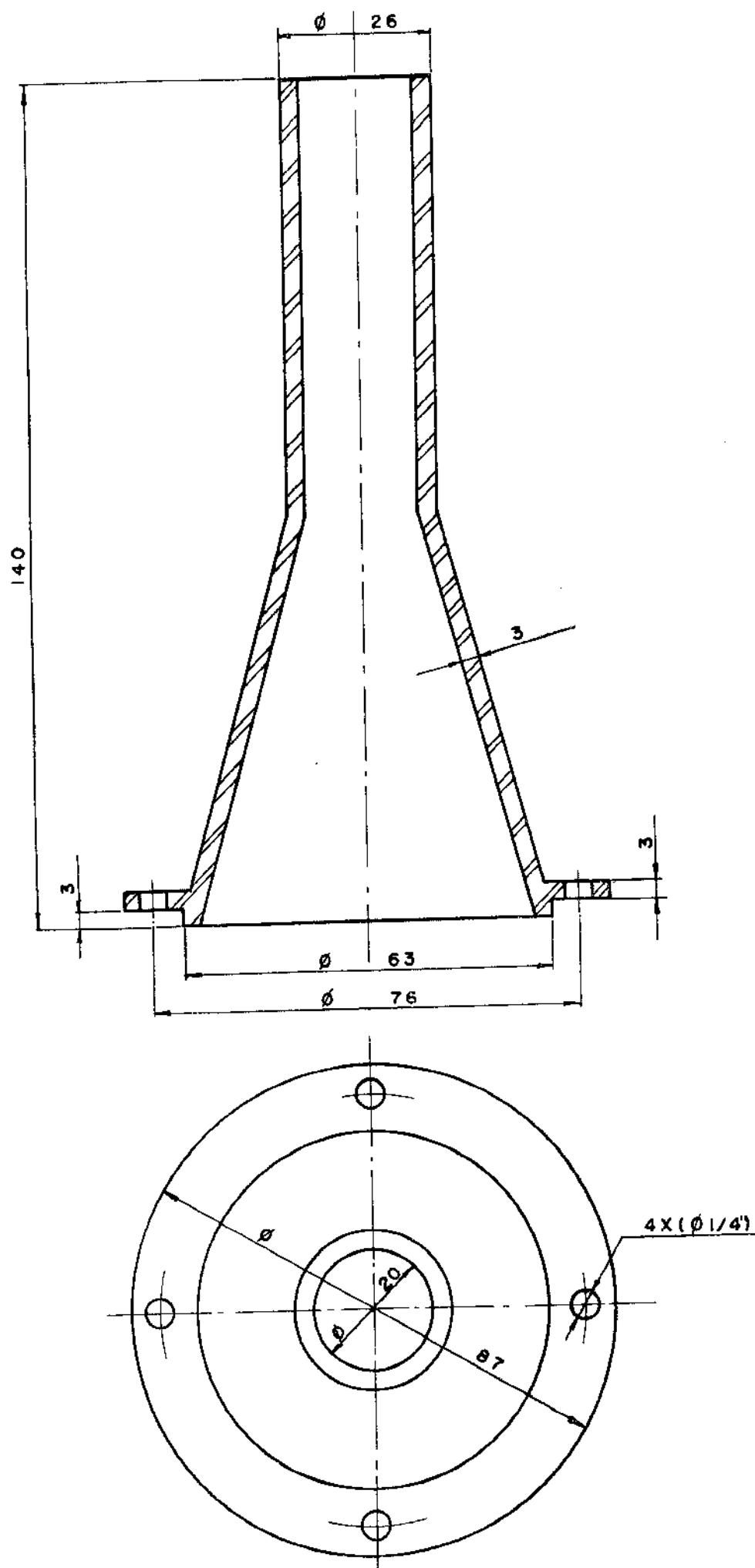


Fig. 6.3 Parede lateral do molde proposto

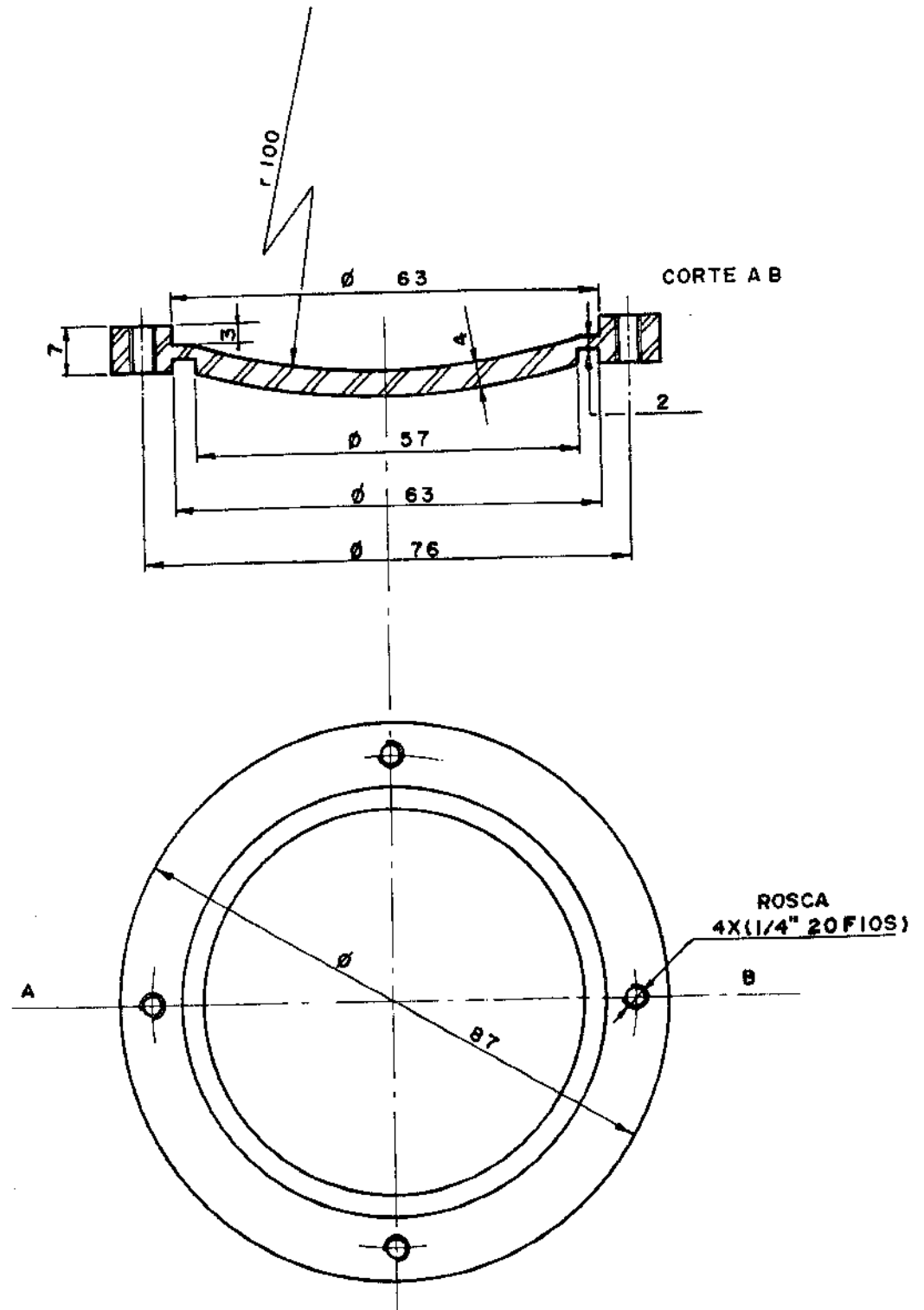


Fig. 6.4 Base do molde proposto

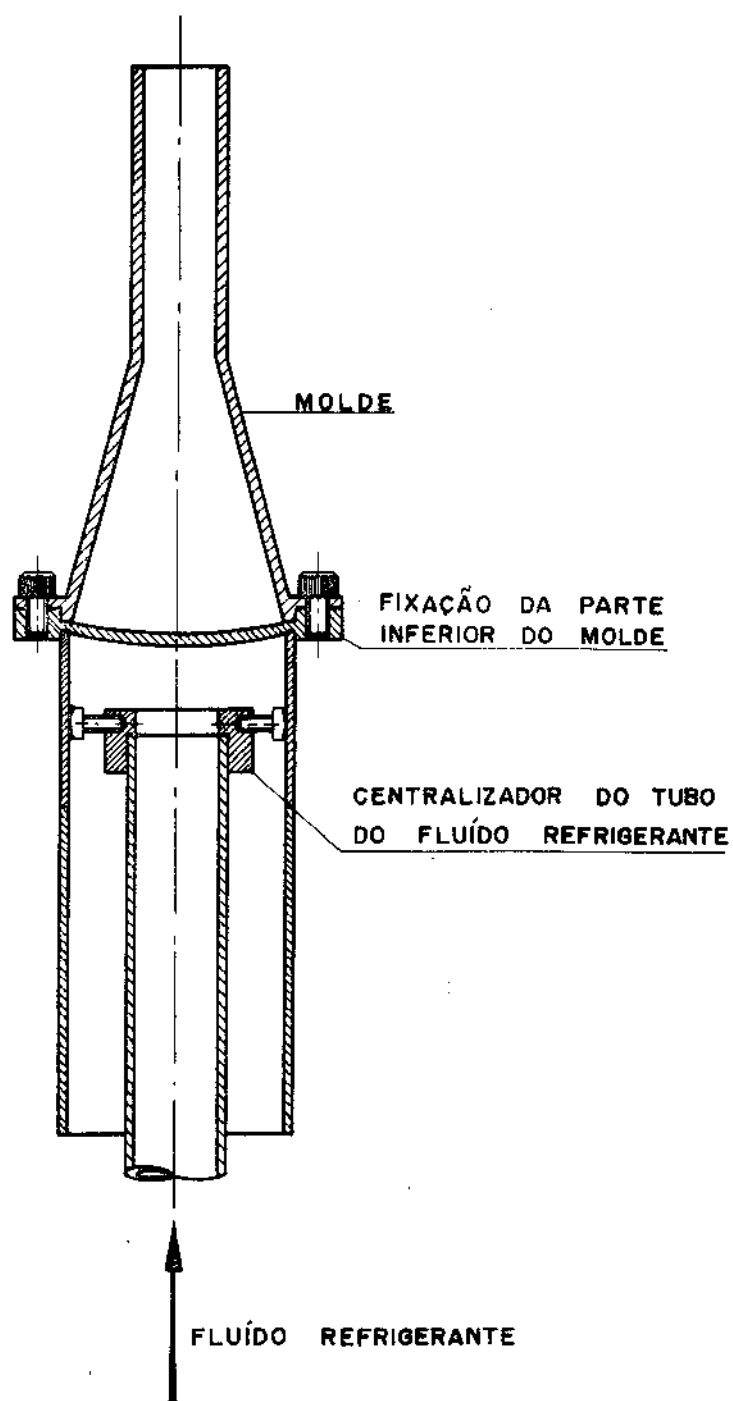


Fig. 6.5 Sistema de resfriamento

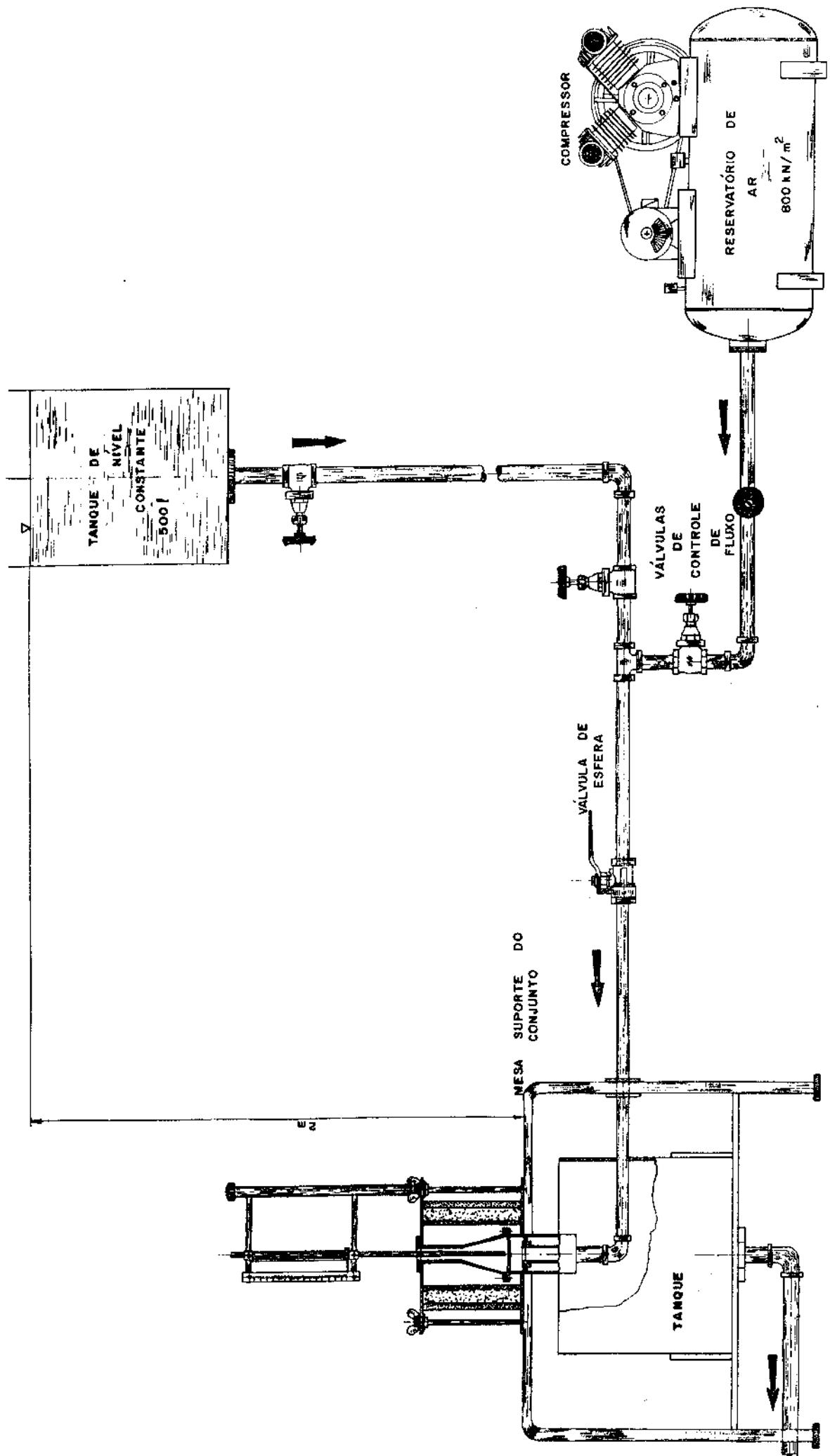


Fig. 6.6 Sistema de resfriamento

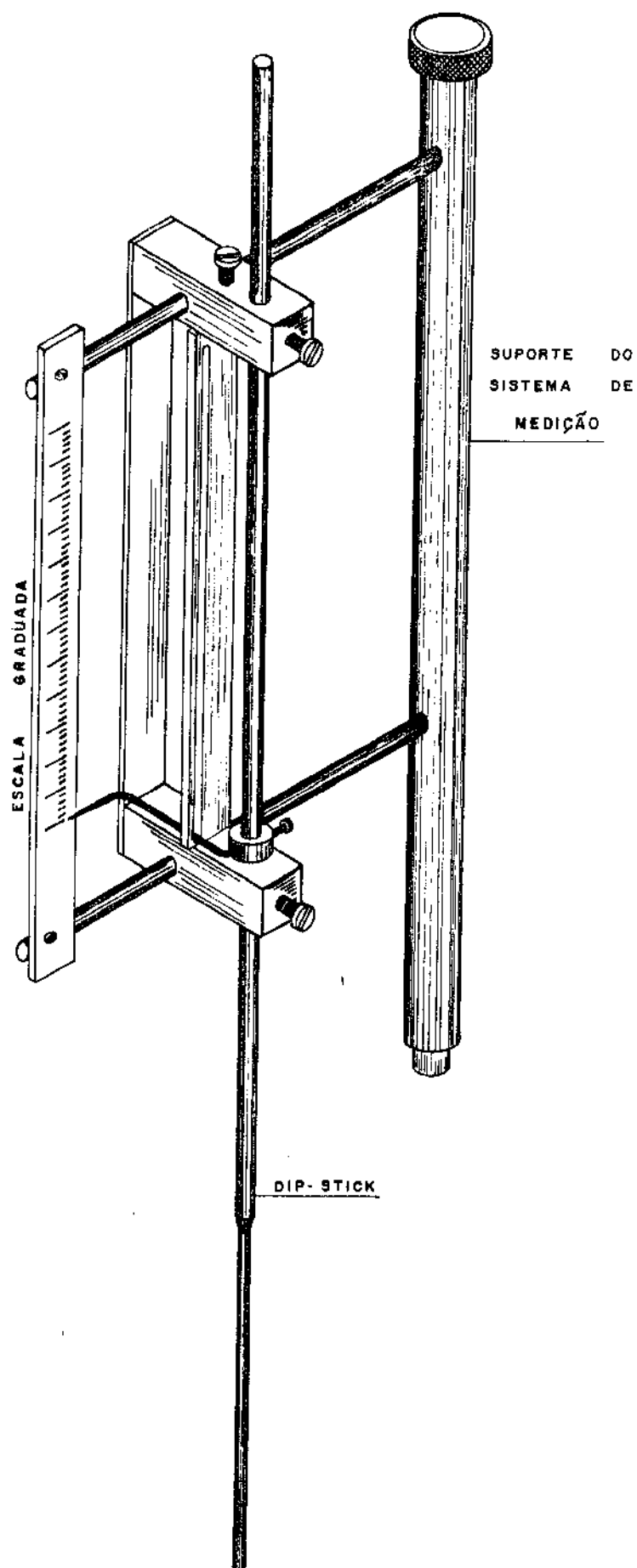


Fig. 6.7 Dispositivo para medida do avanço da frente de solidificação

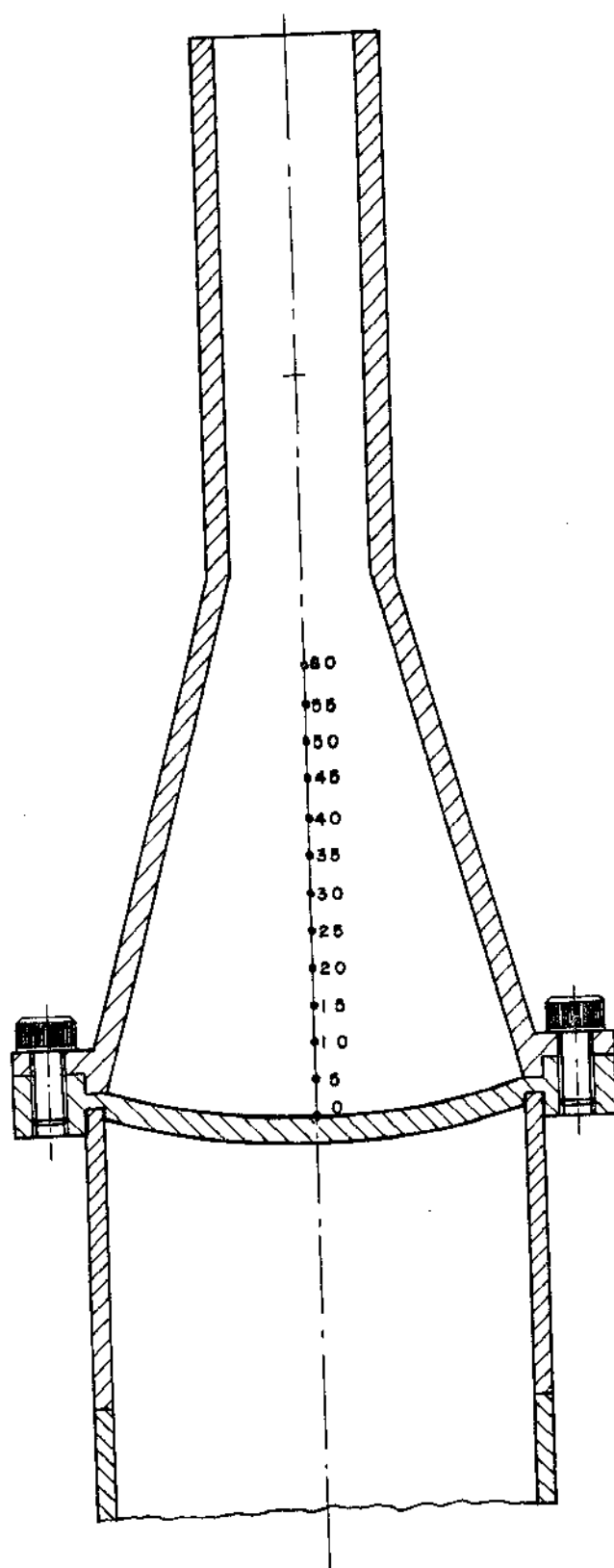


Fig. 6.8 Posições no molde em milímetros para a tomada de medidas

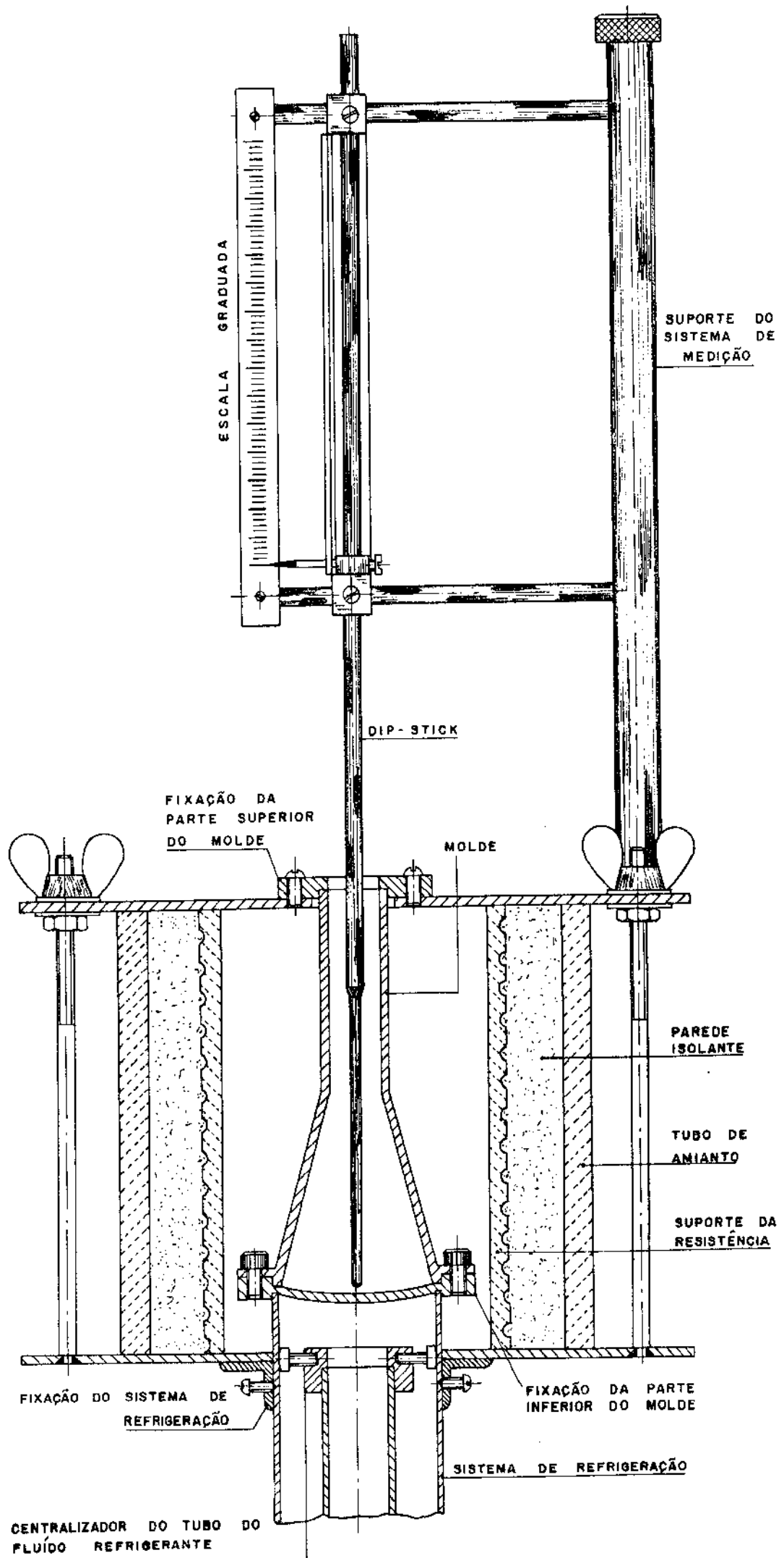


Fig. 6.9 Equipamento proposto para a análise experimental da

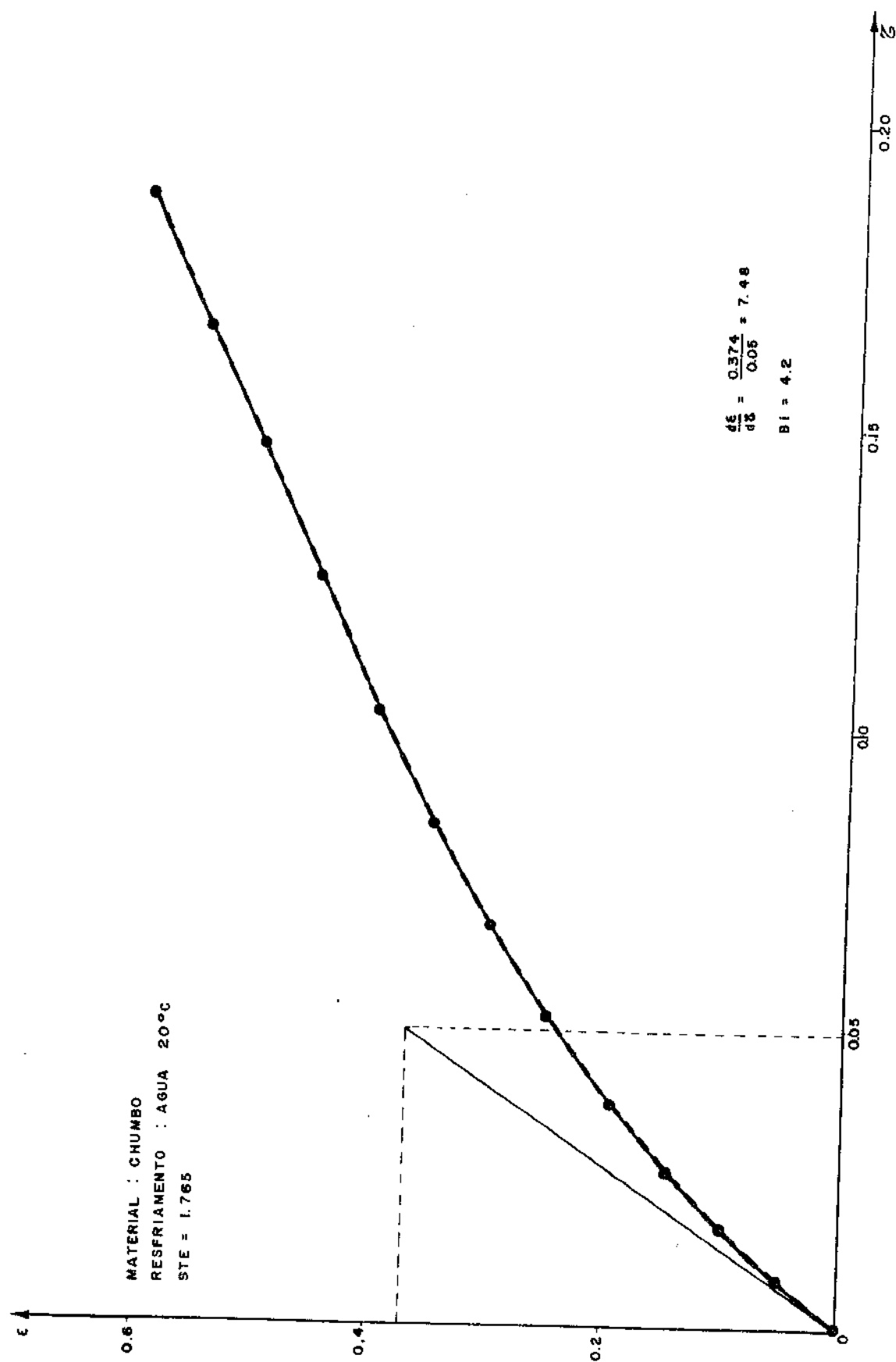
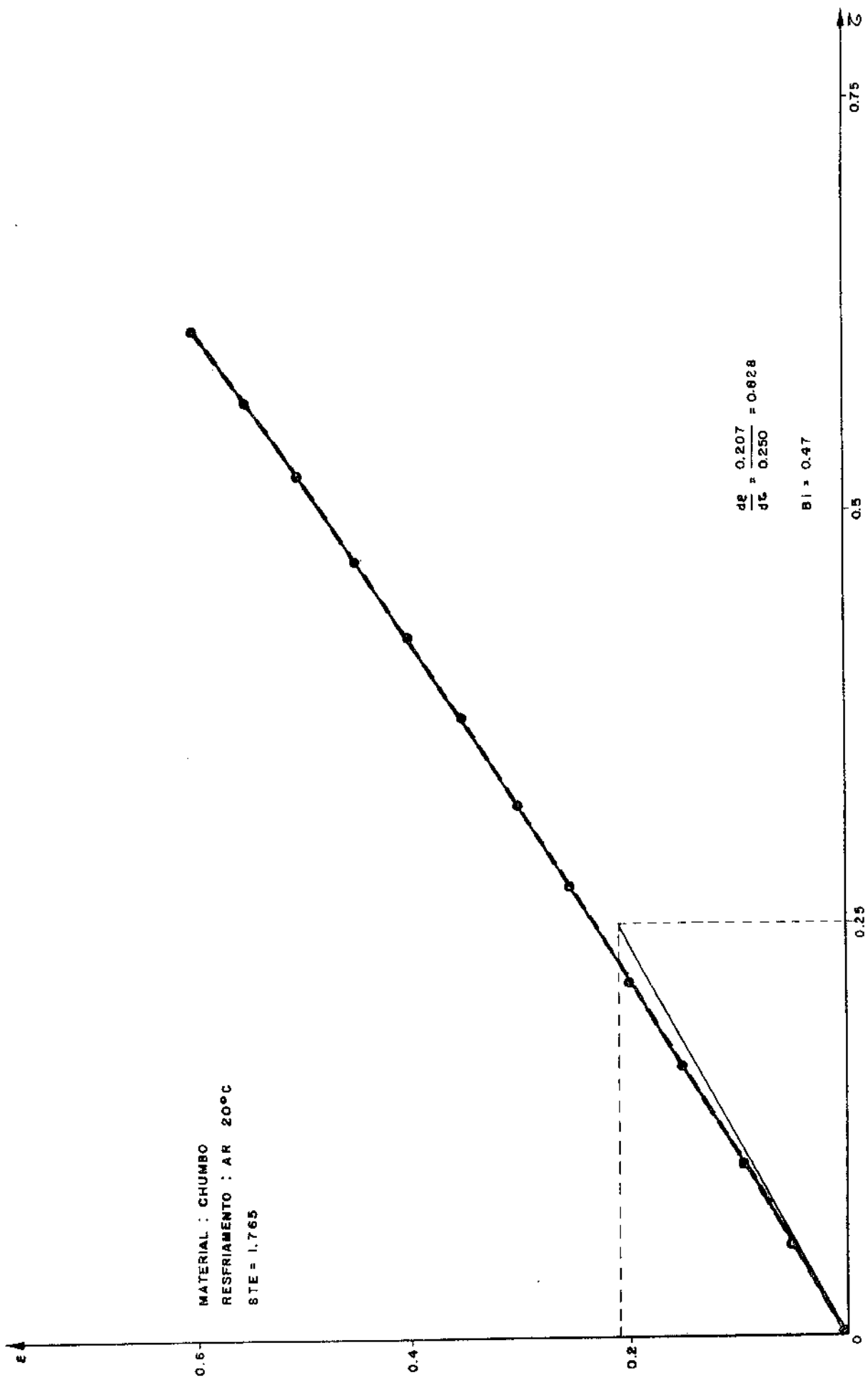


Fig. 6.10 Determinação experimental da posição da interface no tempo

Fig. 6.11 Determinação experimental da posição da interface no tempo



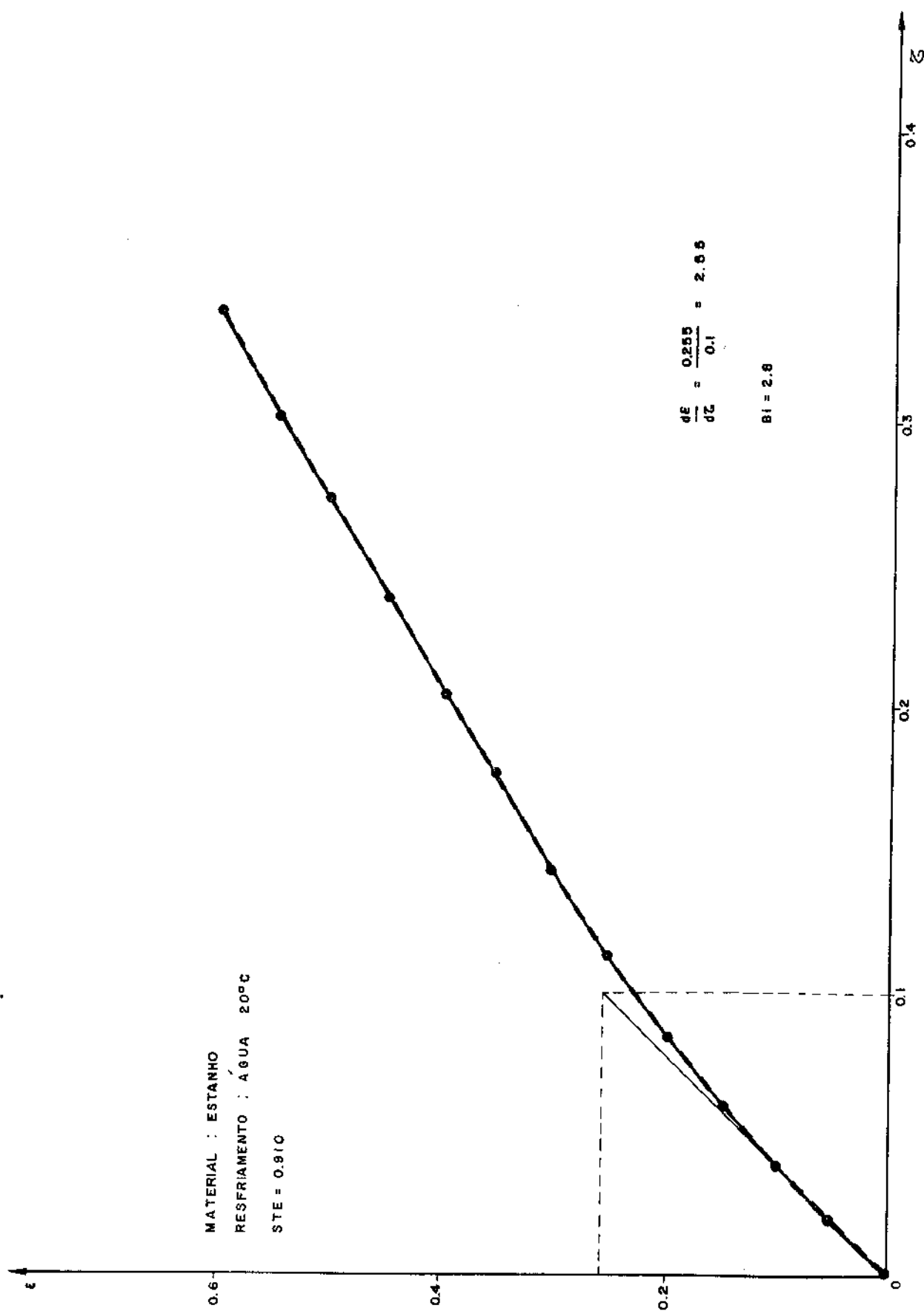


Fig. 6.12 Determinação experimental da posição da interface no tempo

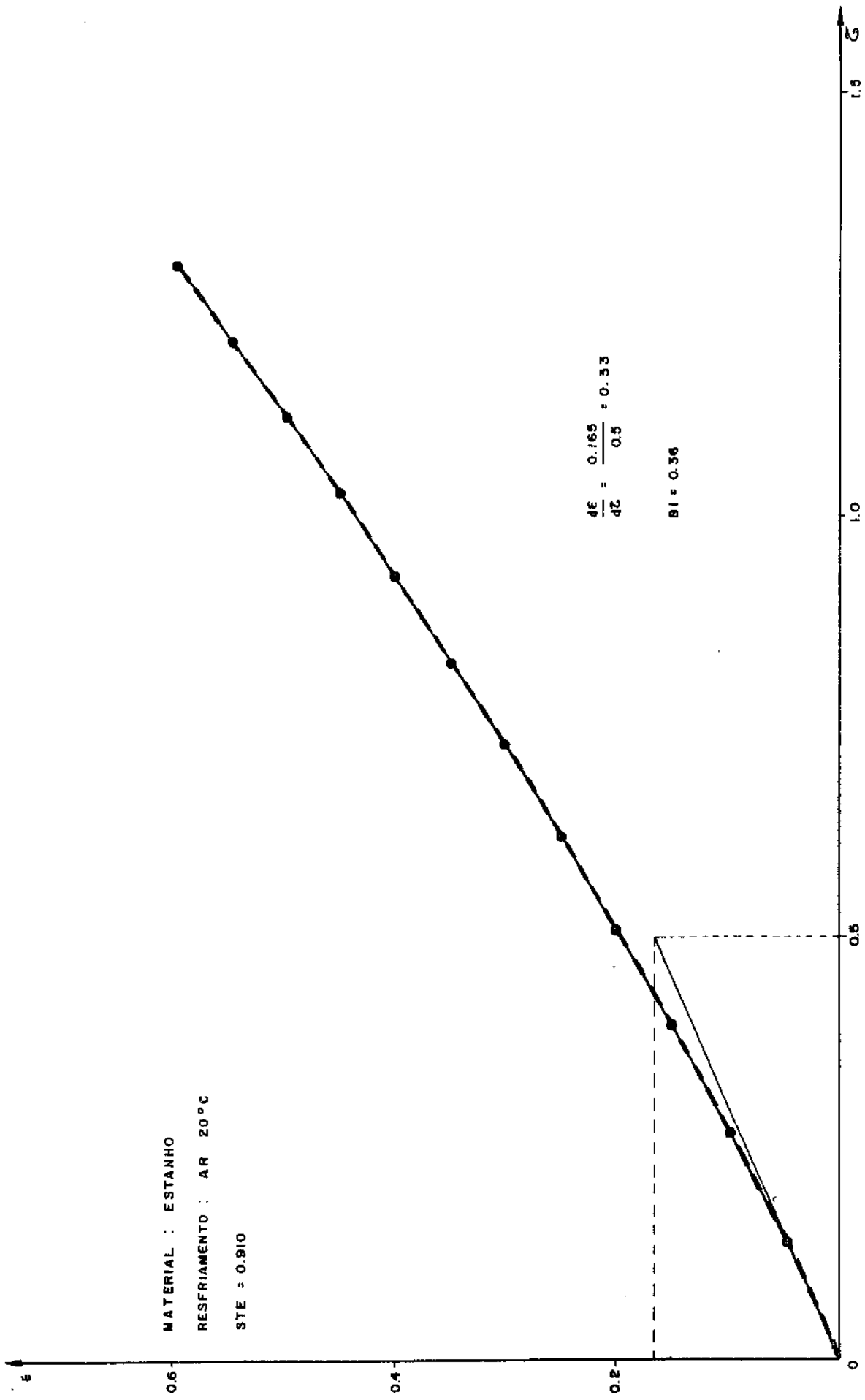


Fig. 6.13 Determinação experimental da posição da interface no tempo

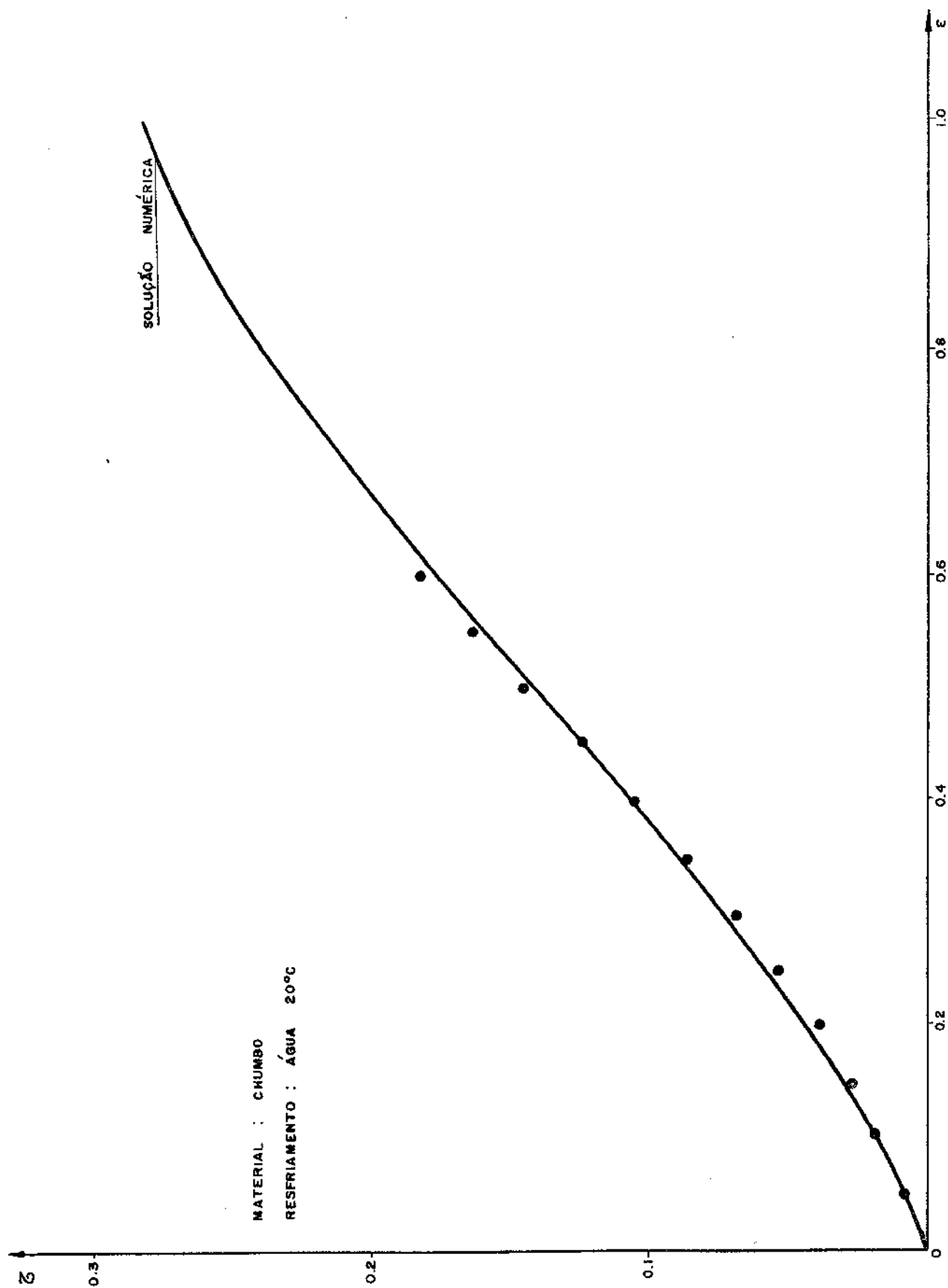


Fig. 6.14 Comparação dos pontos experimentais com a curva numérica

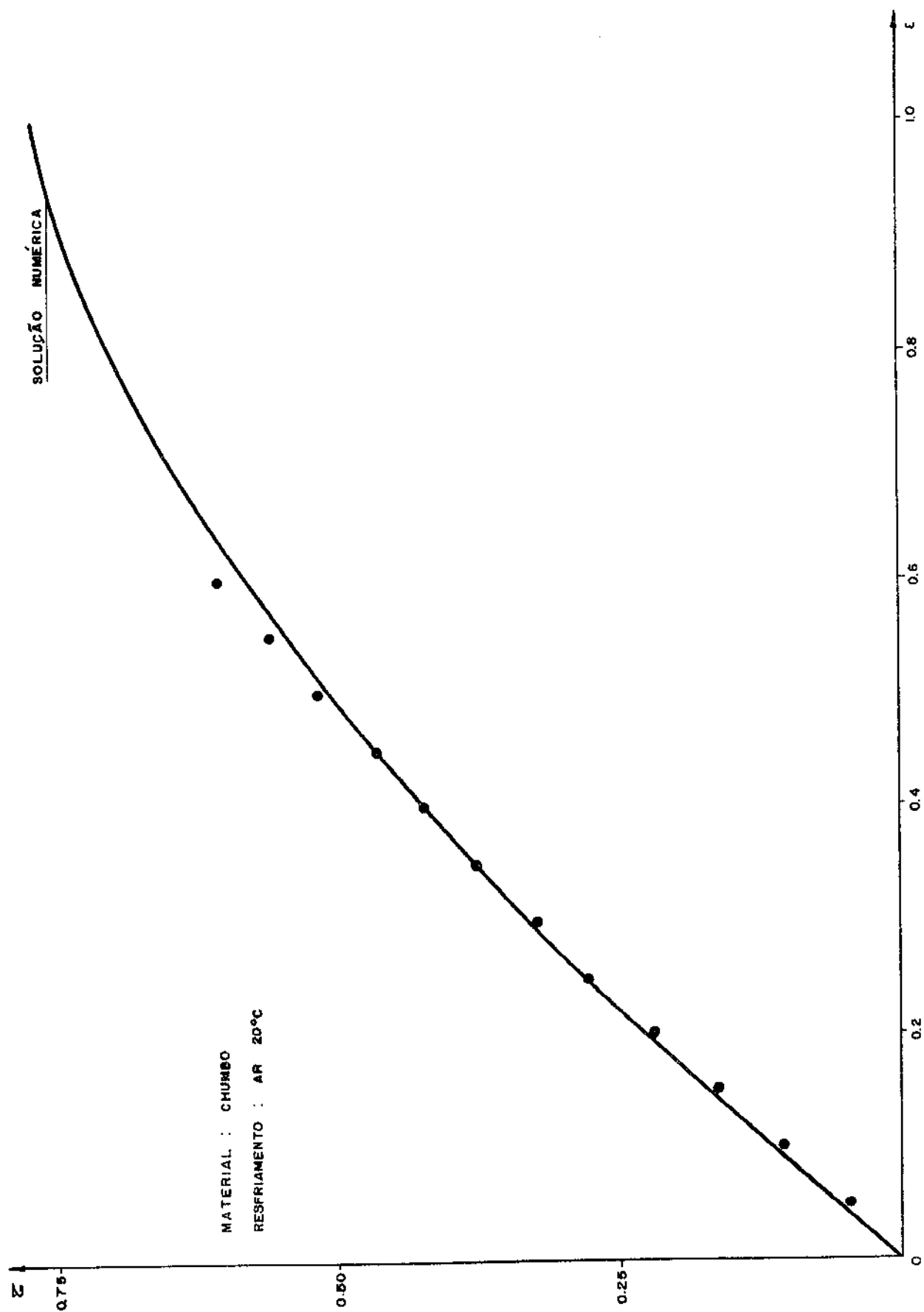


Fig. 6.15 Comparação dos pontos experimentais com o curva numérica

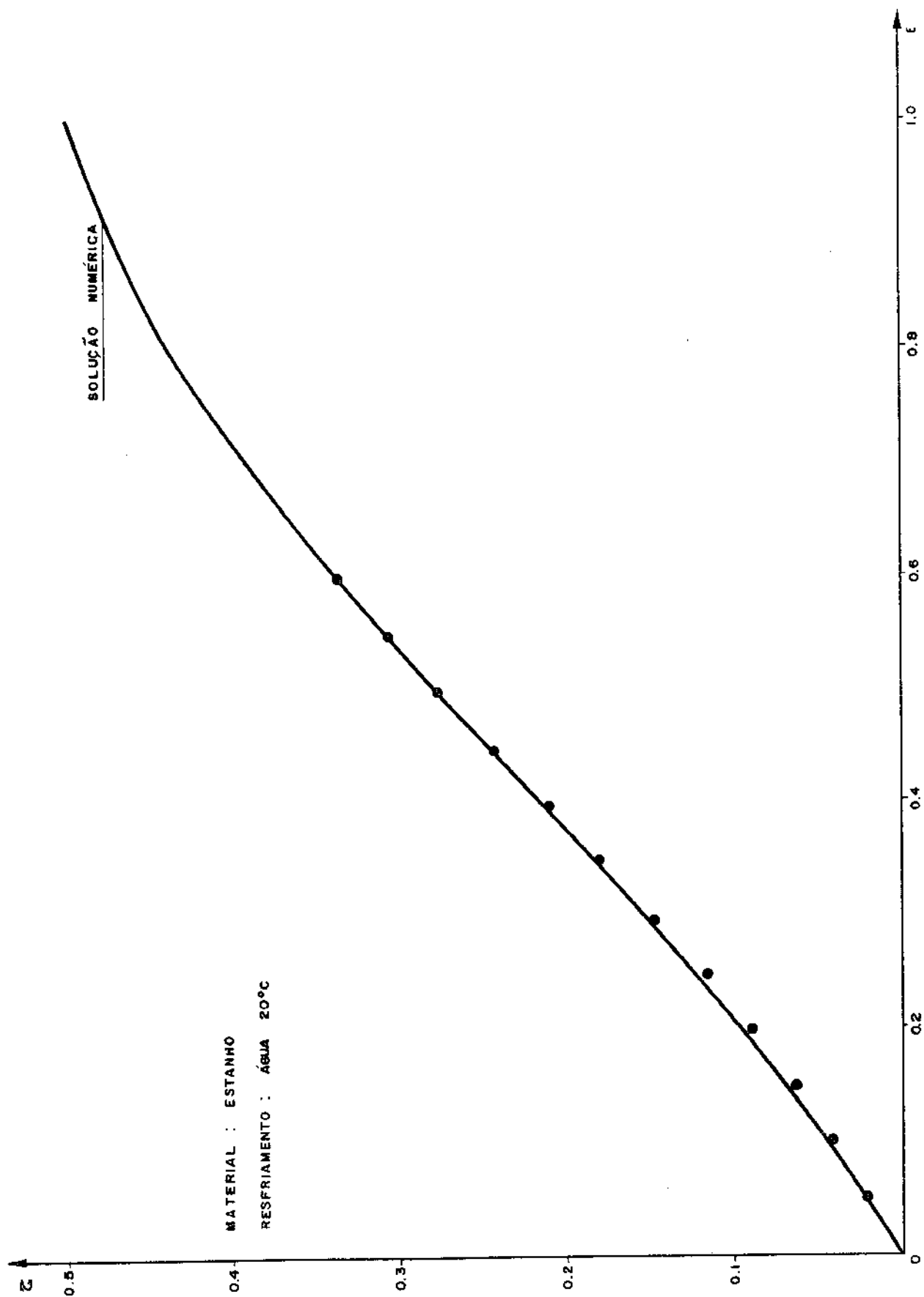


Fig. 6.16 Comparação dos pontos experimentais com a curva numérica

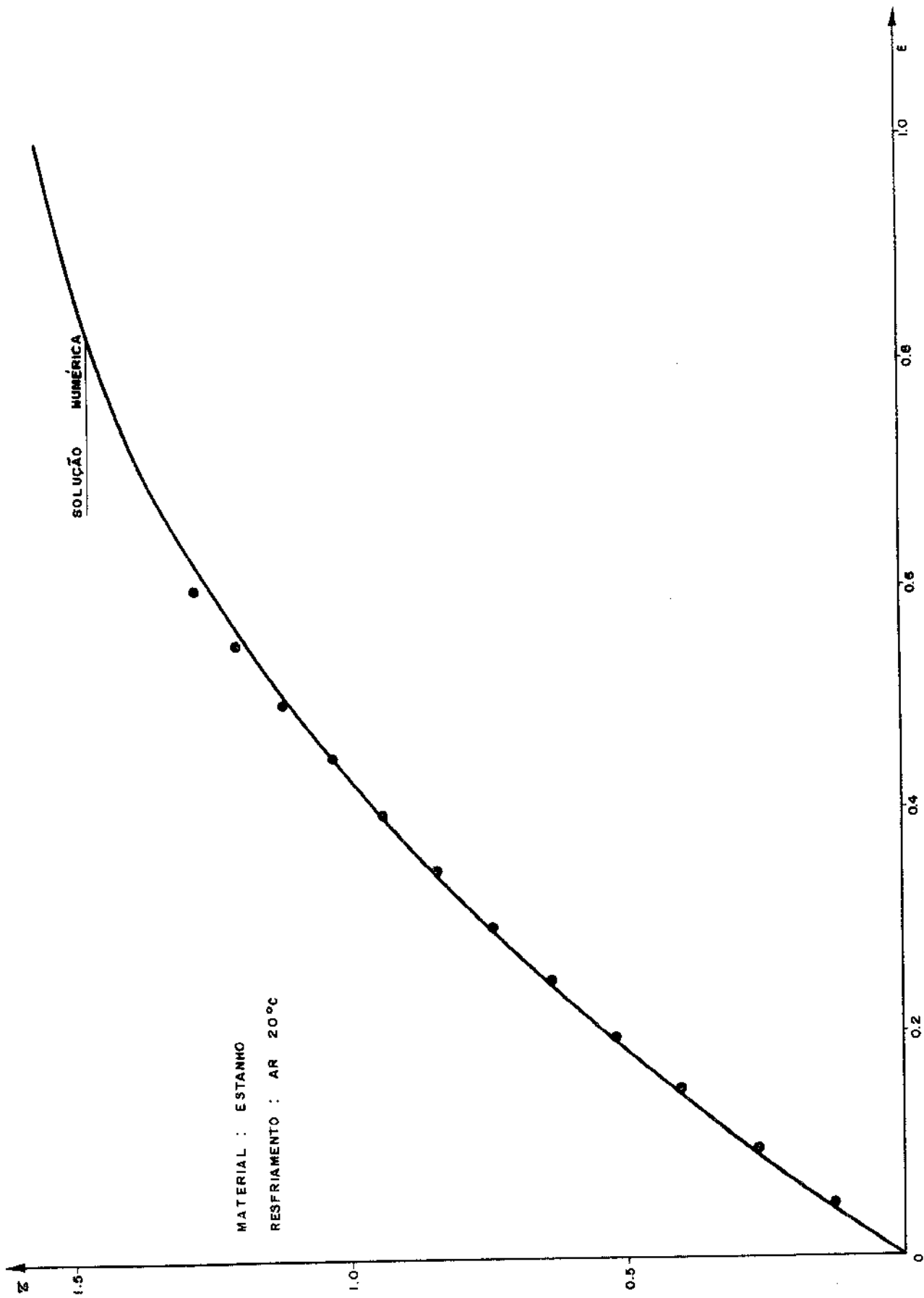


Fig. 6.17 Comparação dos pontos experimentais com a curva numérica

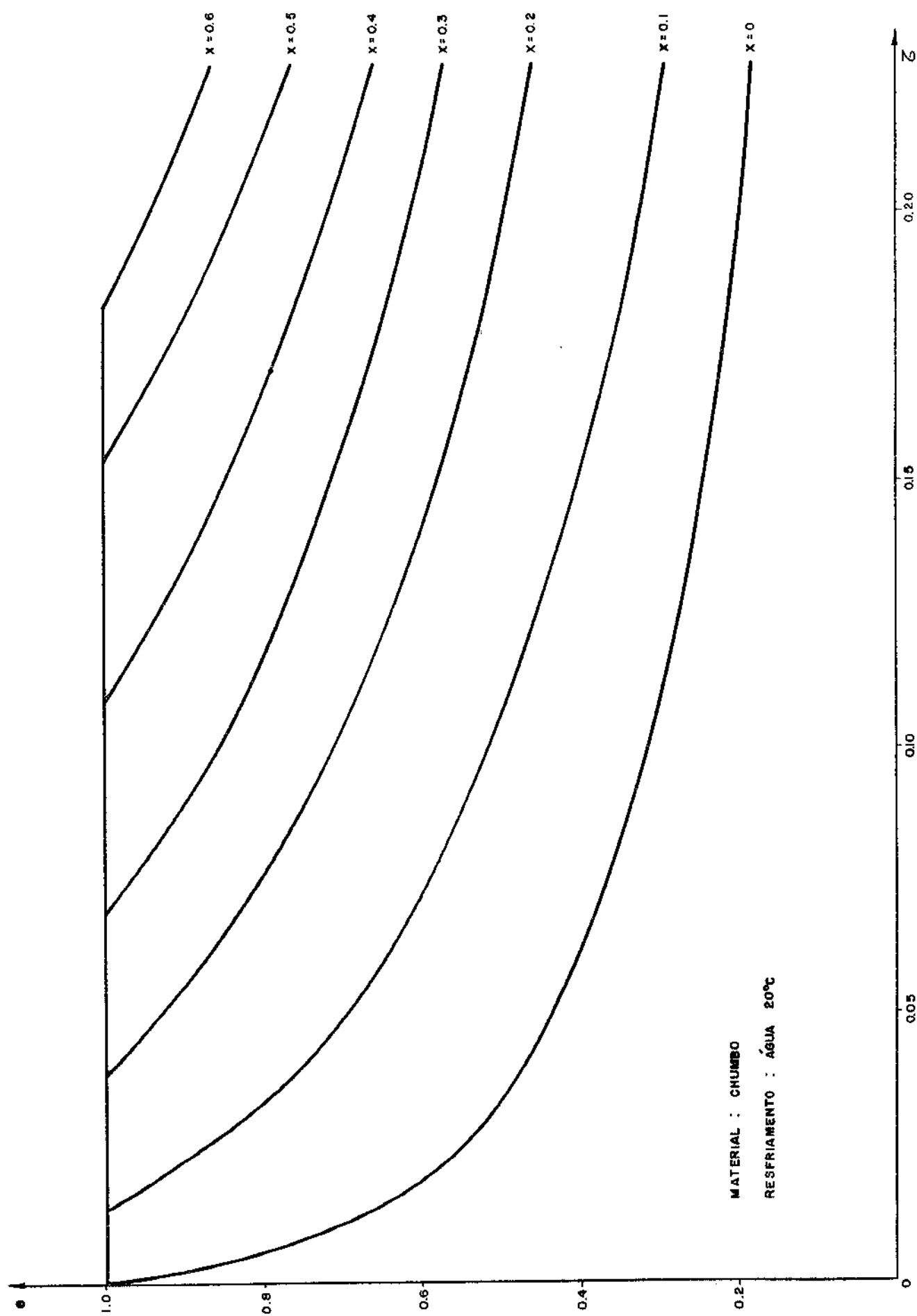


Fig. 6.18 Perfis de temperatura no interior do molde

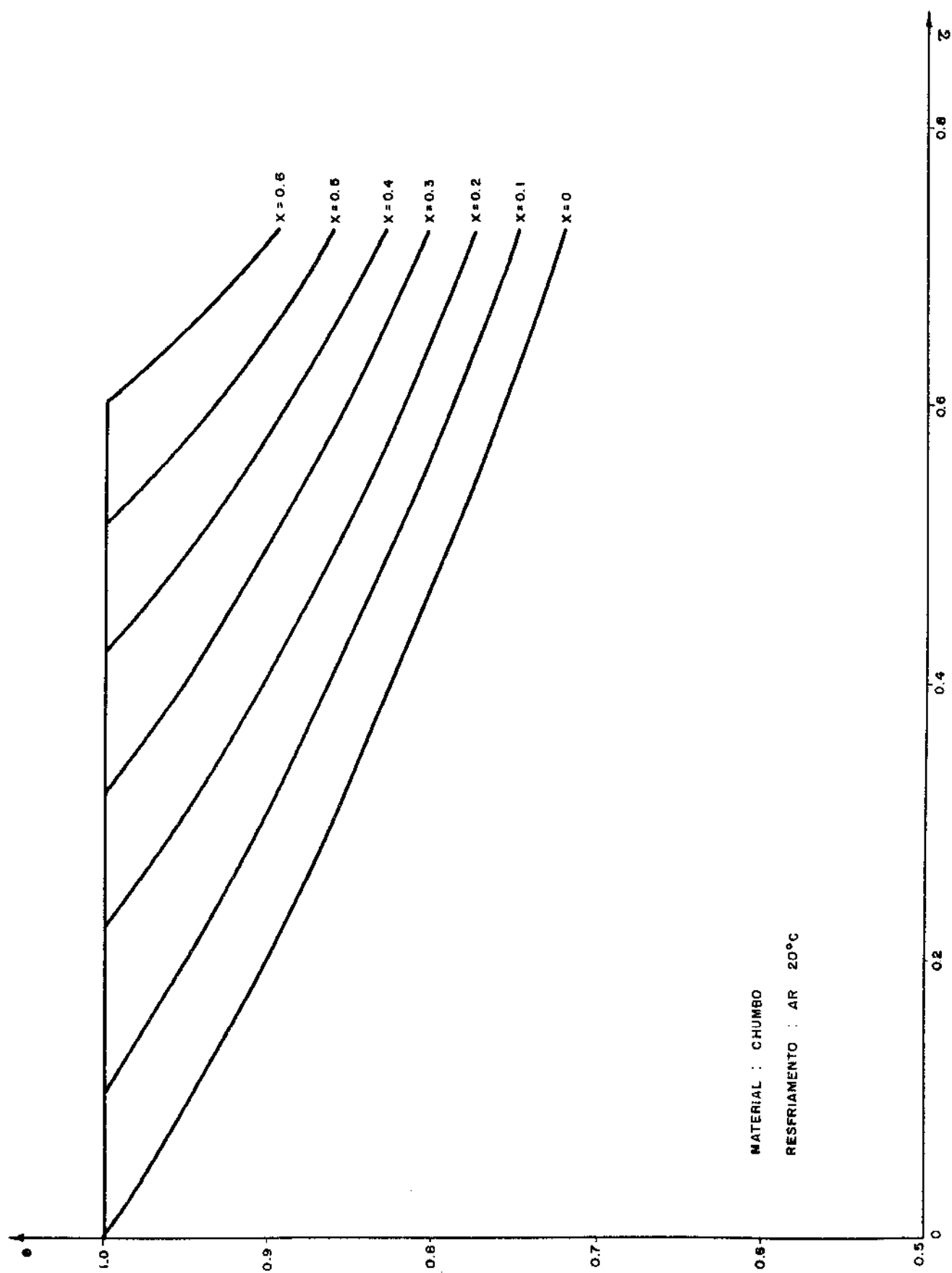


Fig. 6.19 Perfis de temperatura no interior do molde

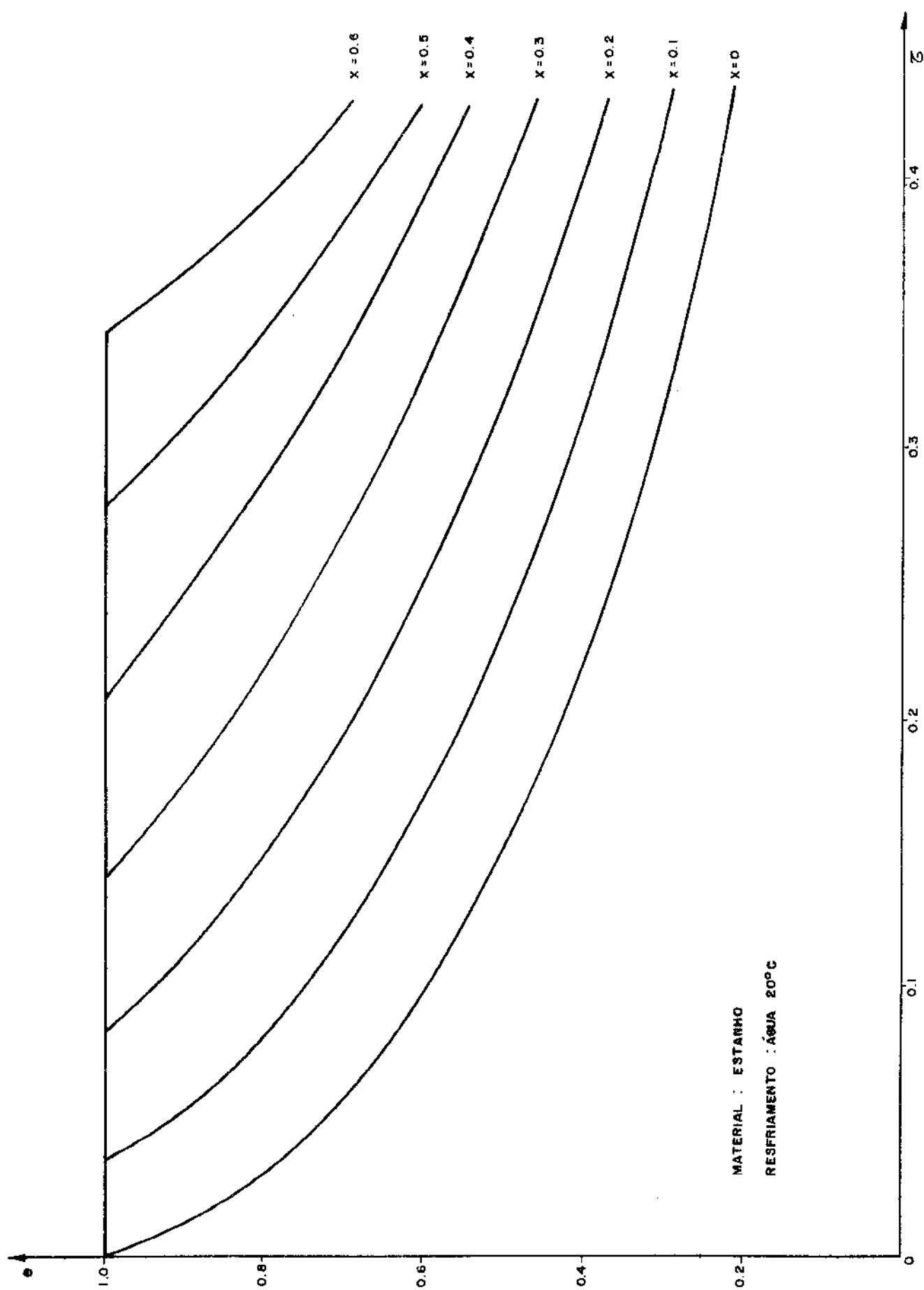


Fig. 6.20 Perfis de temperatura no interior do molde

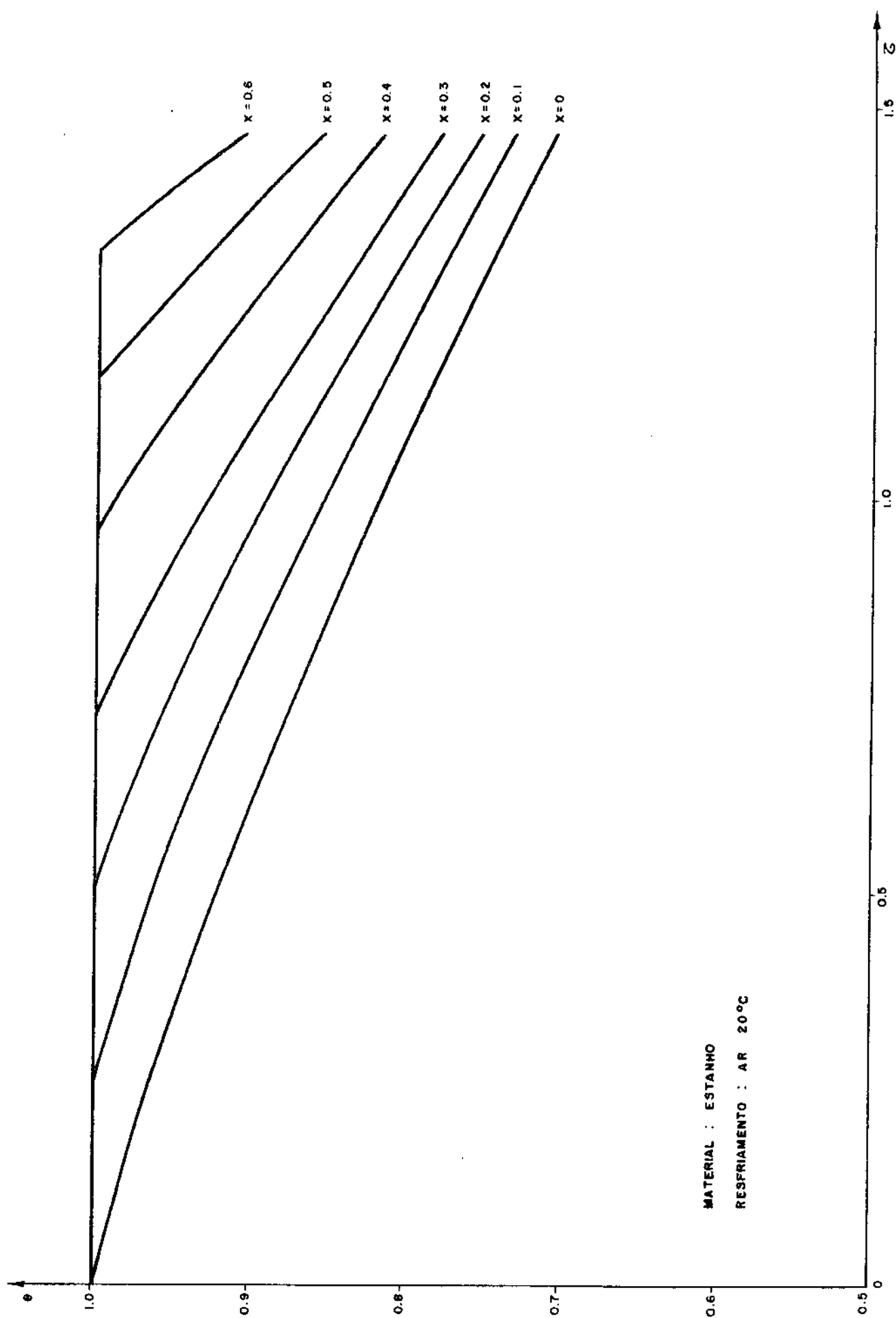


Fig. 6.21 Perfis de temperatura no interior do molde

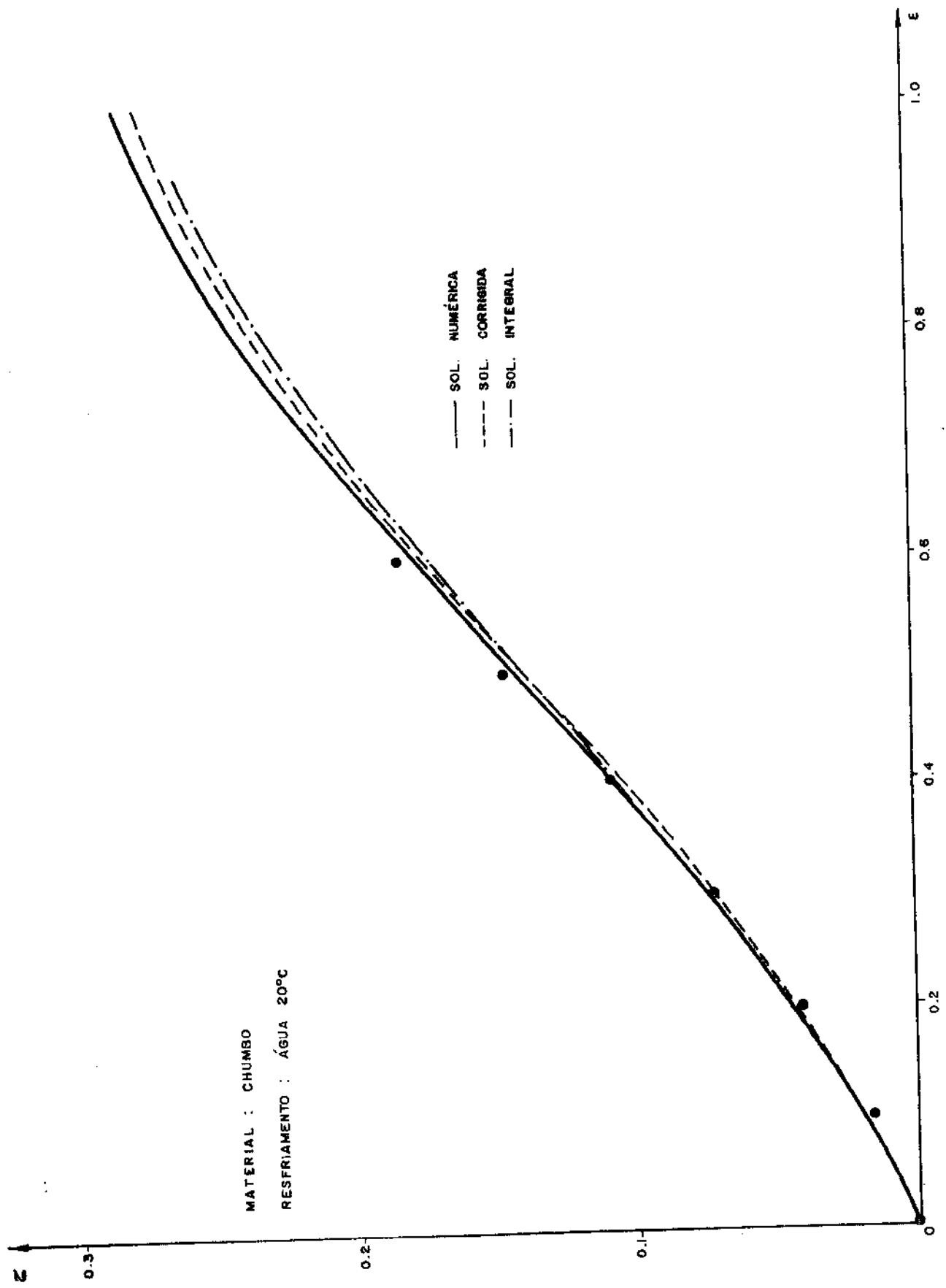


Fig. 6.22 Comparação dos pontos experimentais da posição da interface no tempo obtidos dos perfis de temperatura com as curvas numérica, corrigida e integral

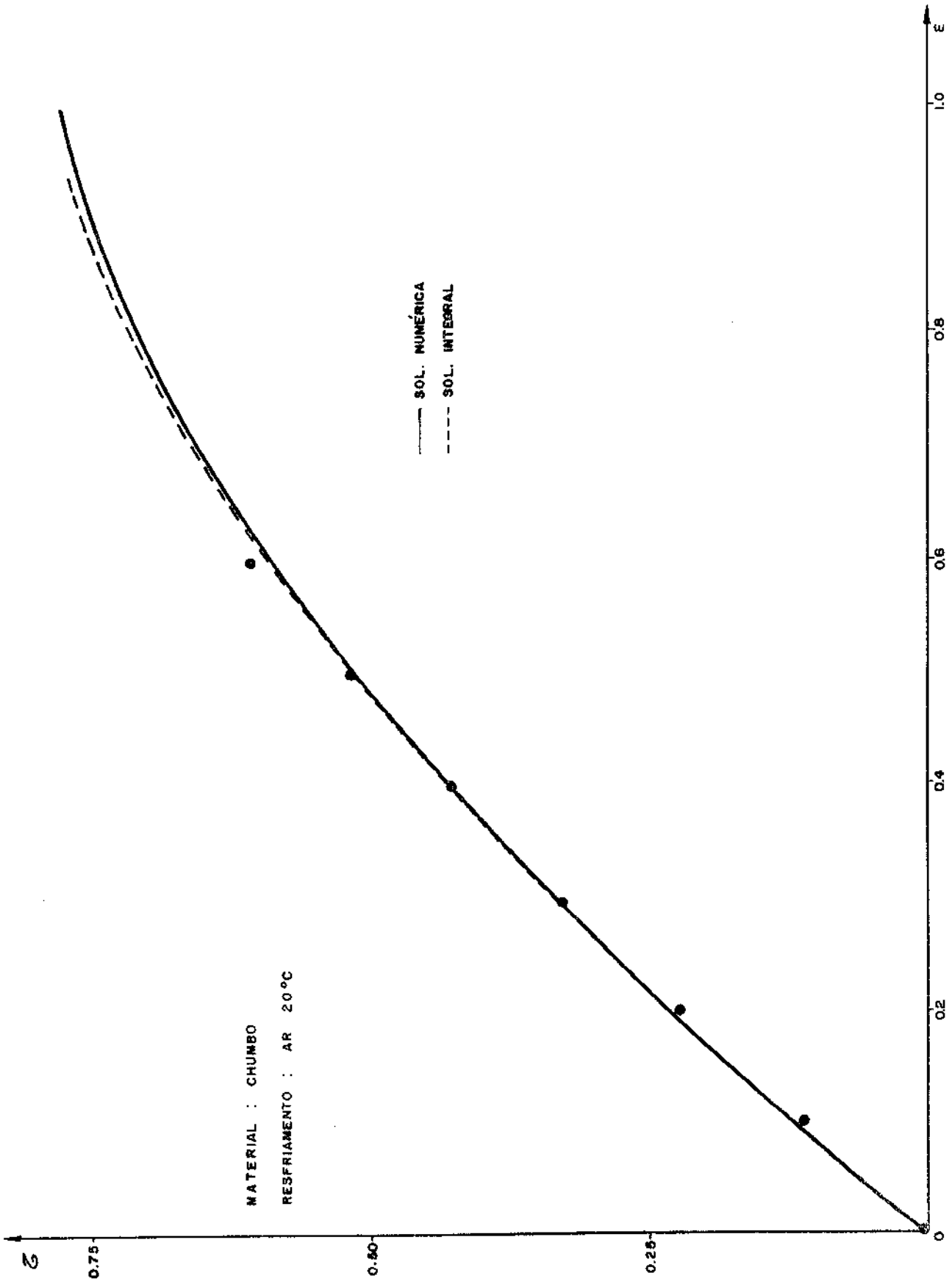


Fig. 6.23 Comparação dos pontos experimentais da posição da interface no tempo obtidos dos perfis de temperatura com as curvas numérica e integral

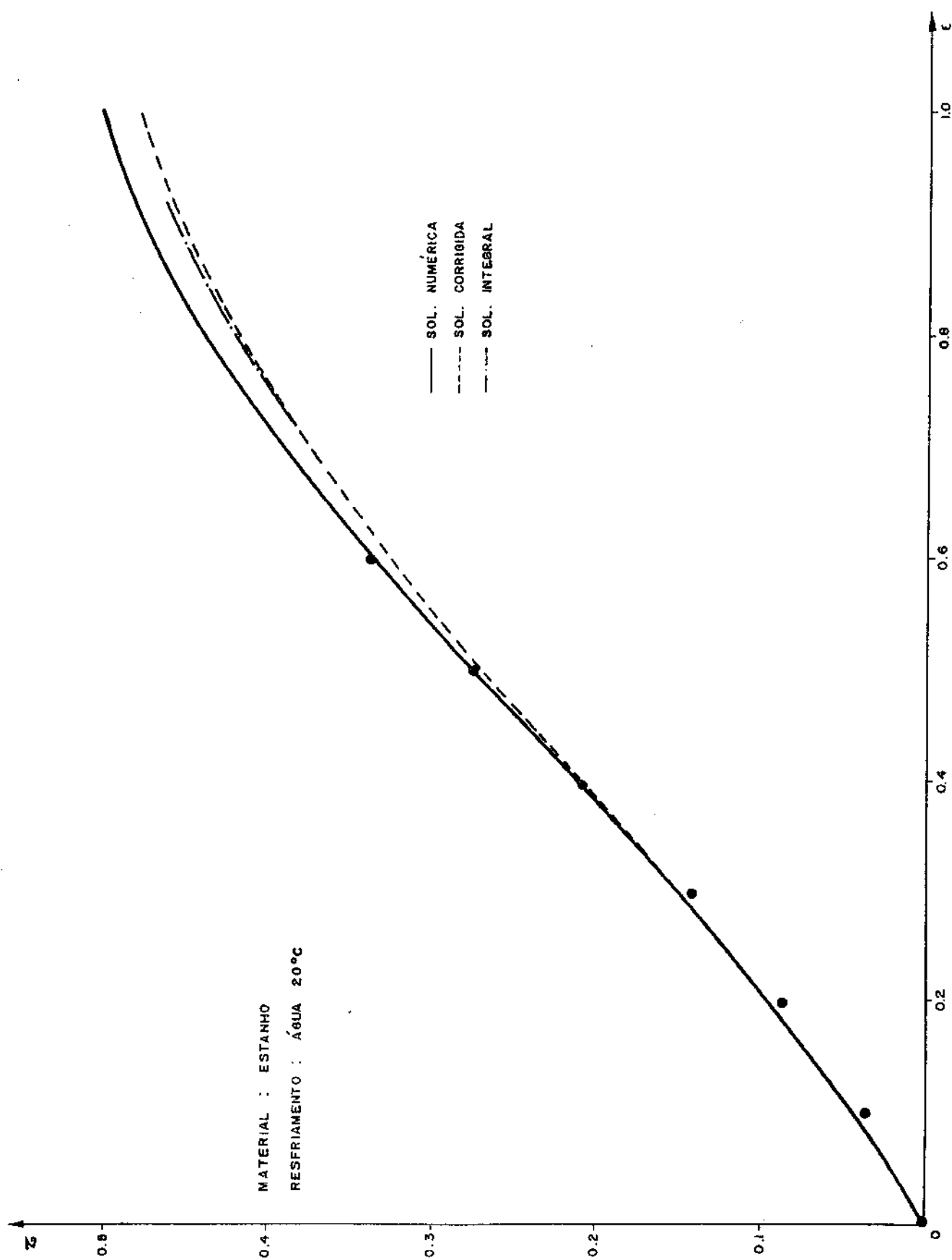


Fig. 6.24 Comparação dos pontos experimentais da posição da interface no tempo obtidos dos perfis de temperatura com as curvas numérica, corrigida e integral

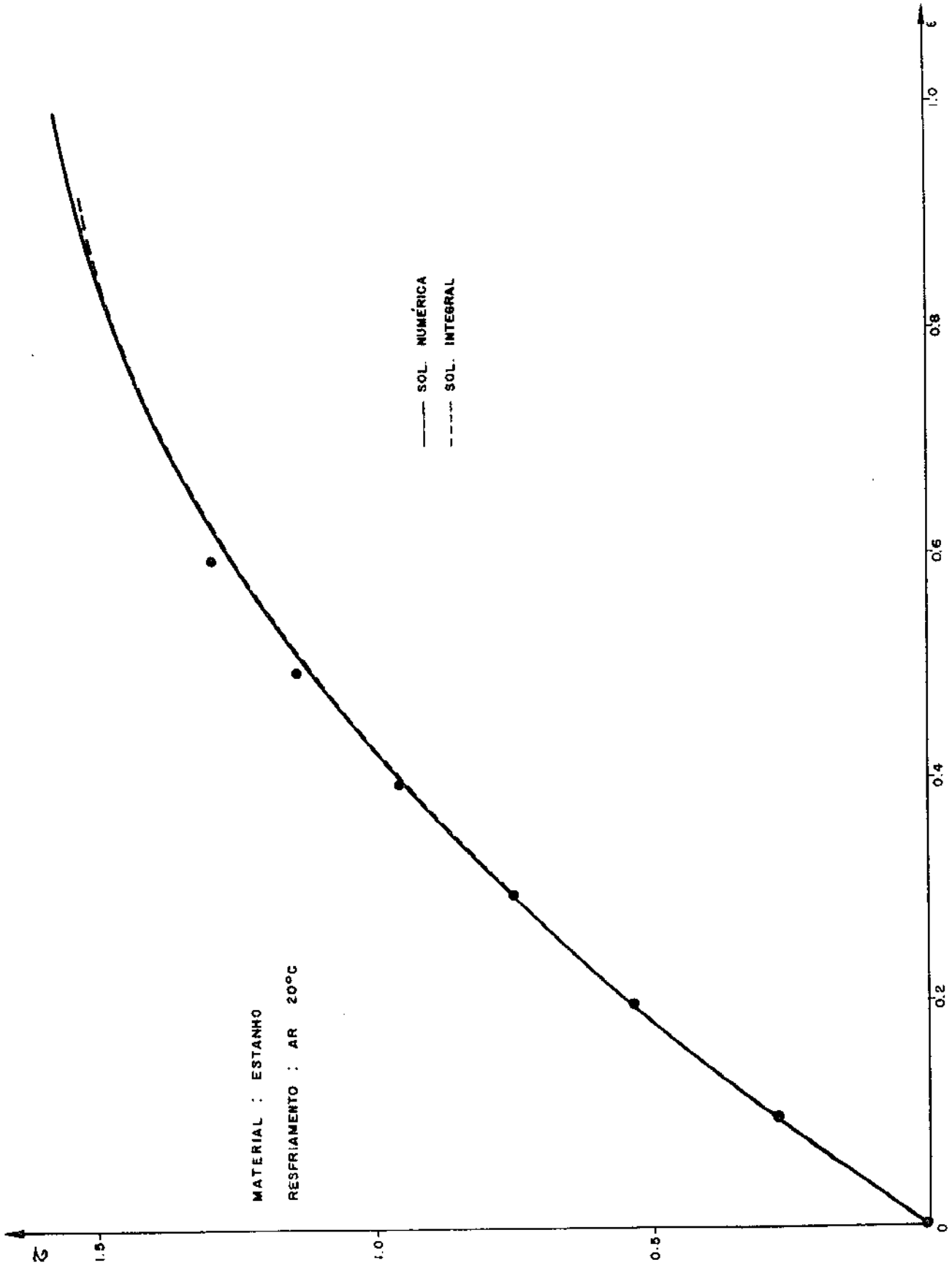


Fig. 6.25 Comparação dos pontos experimentais da posição da interface no tempo obtidos dos perfis de temperatura com as curvas numérica e integral

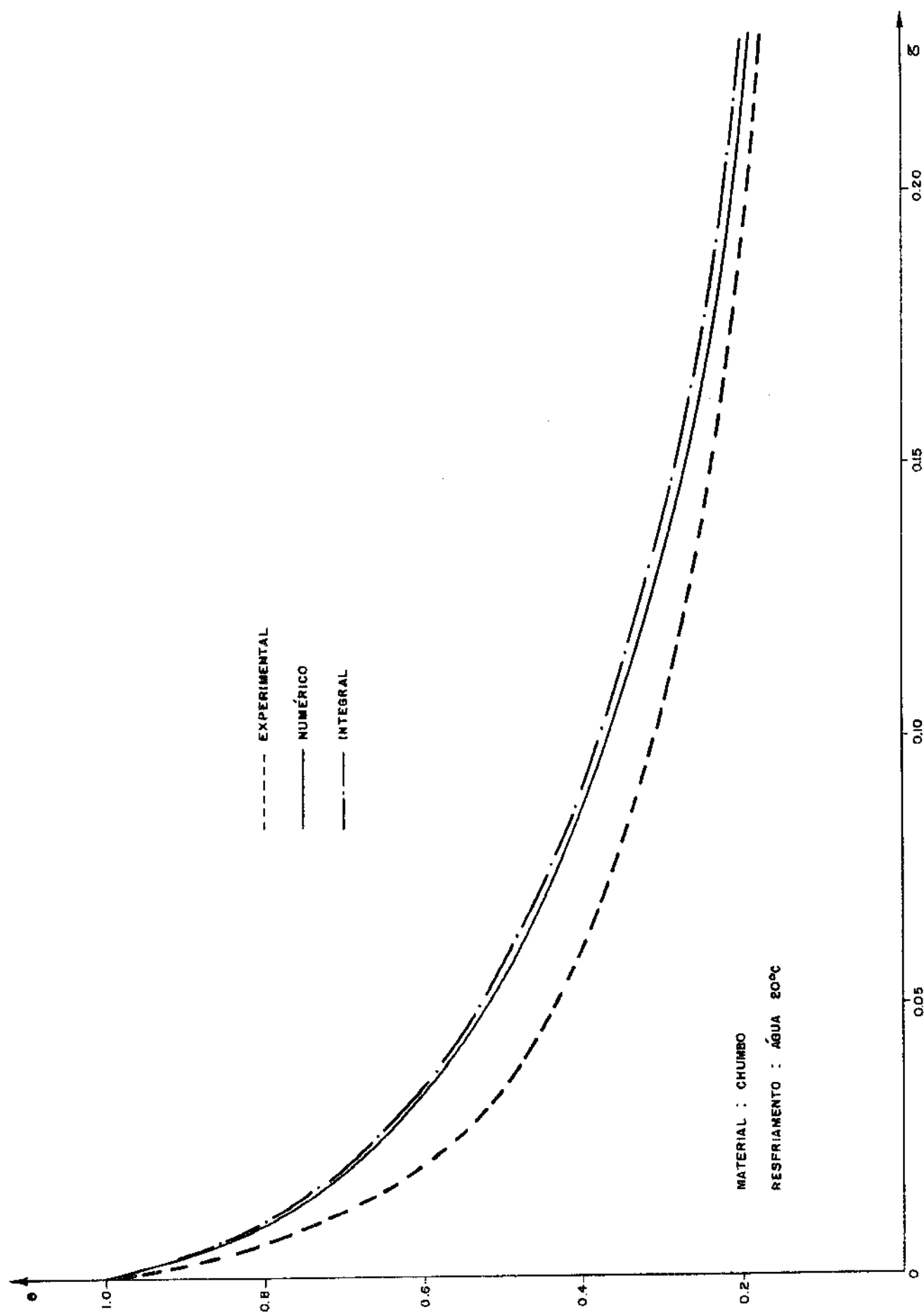


Fig. 6.26 Variação da temperatura na superfície da esfera ($X=0$) durante a solidificação

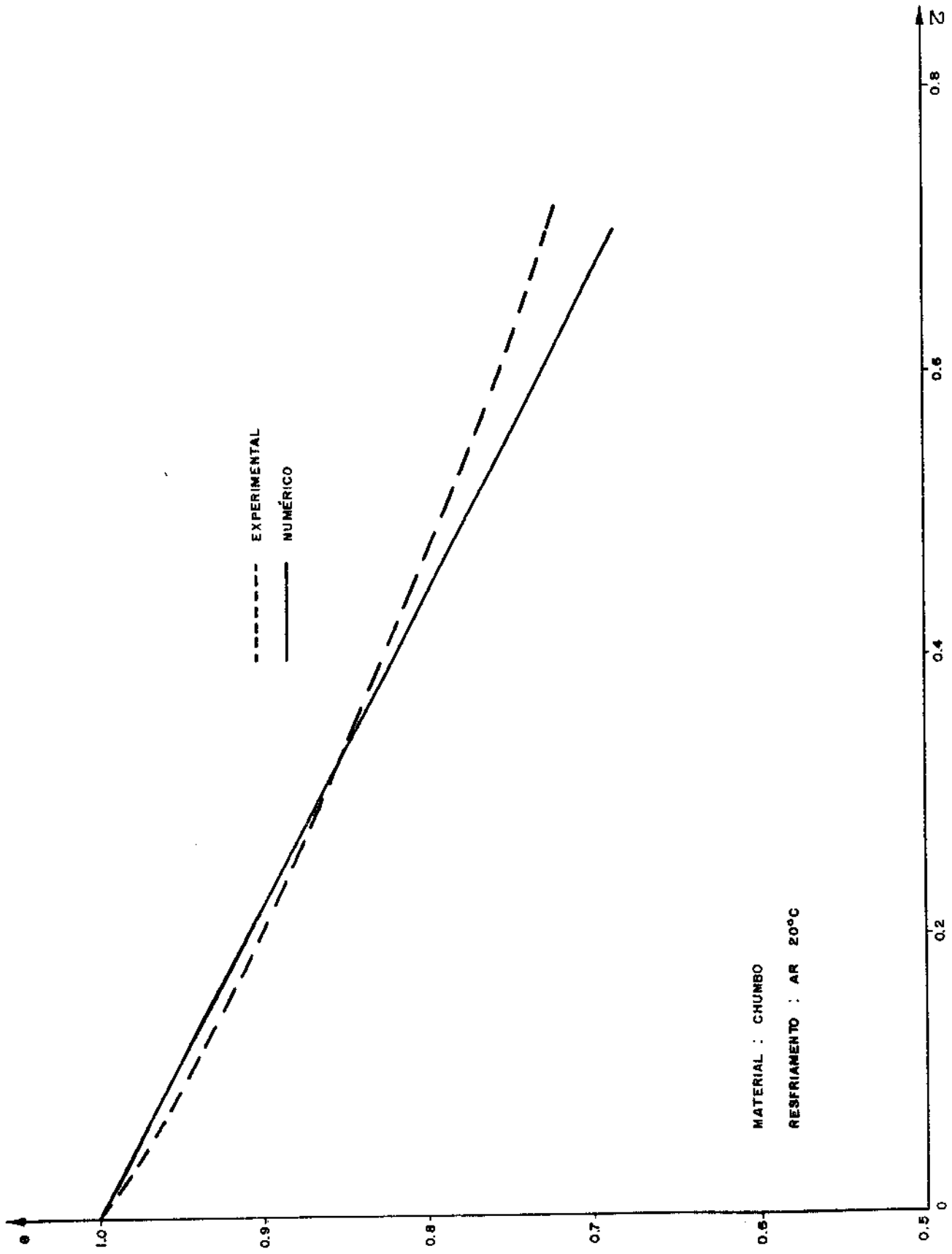
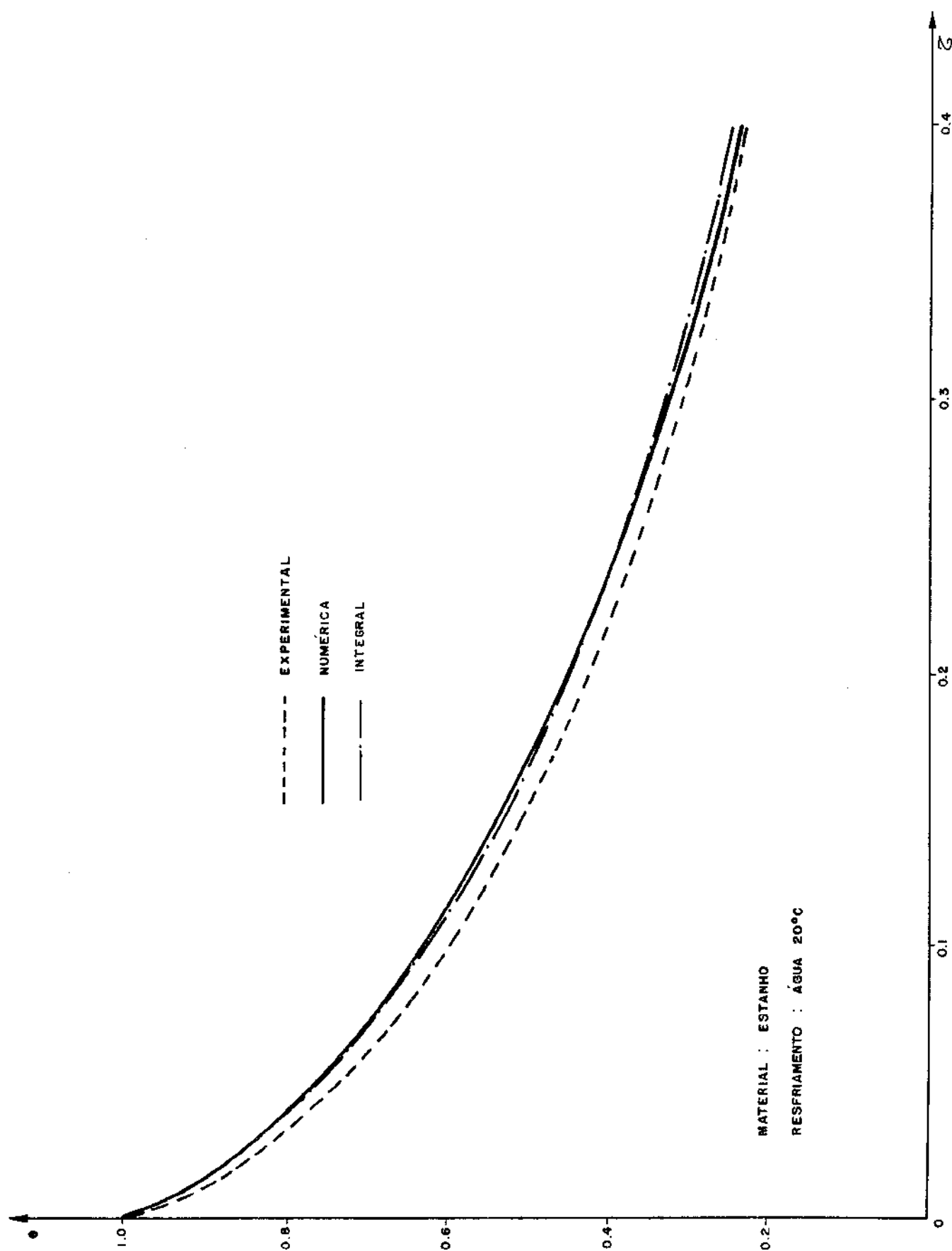


Fig. 6.27 Variação da temperatura na superfície da esfera ($X=0$) durante a solidificação

Fig. 6.28 Variação da temperatura na superfície da esfera ($X=0$) durante a solidificação

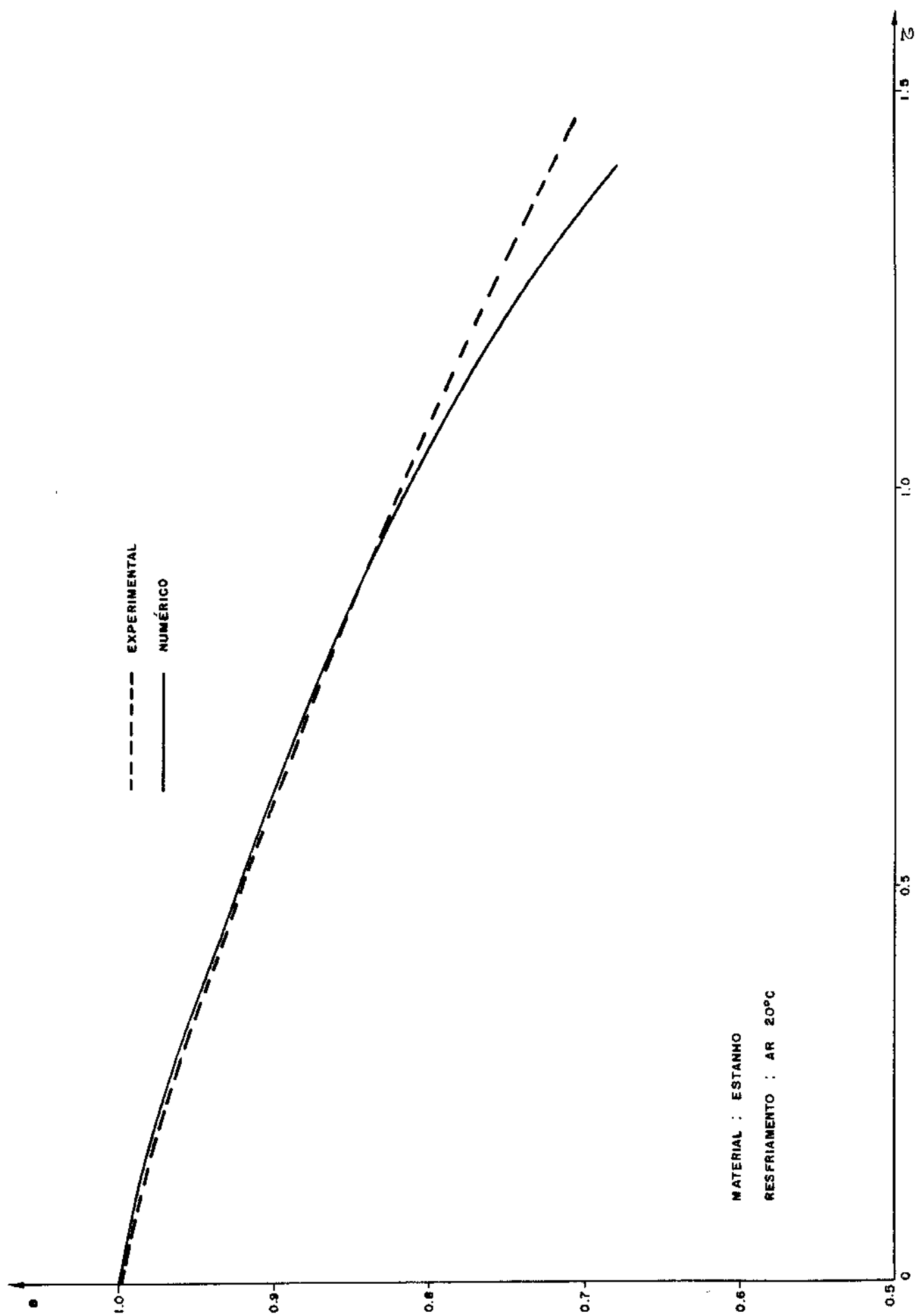


Fig. 6.29 Variação da temperatura na superfície da esfera ($X=0$) durante a solidificação

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

7.1. O MODELO SIMPLIFICADO

O método simplificado proposto por London & Seban [42] foi revisado neste trabalho pela sua importância histórica. A hipótese simplificadora fundamental deste modelo é que o calor sensível devido ao sub-resfriamento da parede solidificada é desprezível em relação ao calor latente de fusão. Portanto este método é adequado para materiais que apresentem números de Stefan pequenos, da ordem de 10^{-1} ou menores. Um caso típico de utilização do método simplificado é para a formação do gelo. O número de Stefan para a formação do gelo é $6,1 \times 10^{-3} (-T_{\infty})$ onde T_{∞} é a temperatura do meio refrigerante em graus centígrados, o que garante uma boa aproximação do método simplificado para este caso. Este método não é adequado para metais, pois nesses casos os números de Stefan são maiores. Os resultados deste modelo simplificado para esferas já são bem conhecidos e serão mencionados aqui para completar o quadro desta análise.

A velocidade de avanço da frente de fusão é dada pela equação (2.7):

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} = \frac{Ste \ Bi}{Bi \ \epsilon \ (1-\epsilon) + (1-\epsilon)^2}$$

A relação entre a posição da interface e o tempo de solidificação é dada pela equação (2.14):

$$\tau = \frac{1}{Ste} \left[\left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon^3}{3} \right) + \frac{1}{Bi} \left(\epsilon - \epsilon^2 + \frac{\epsilon^3}{3} \right) \right]$$

O perfil de temperatura é dado pela equação (2.17)

$$\theta = \frac{\frac{1}{1 - X} + \frac{1}{Bi}}{\frac{\epsilon}{1 - \epsilon} + \frac{1}{Bi}}$$

A taxa de transferência de calor na superfície da esfera é dada pela equação (2.25):

$$\psi_0 = \frac{Ste}{\frac{\epsilon}{1 - \epsilon} + \frac{1}{Bi}}$$

7.2. O MÉTODO NUMÉRICO

Um método numérico que utiliza malhas móveis originalmente desenvolvido por Murray & Landis [50] para o plano, foi aplicado para a esfera. Este método numérico proposto de malhas móveis apresentou boa concordância com os resultados experimentais. O método numérico proposto pode ser aplicado para qualquer valor do número de Stefan e qualquer valor do número de Biot, porém para valores pequenos dos números de Stefan e Biot, o tempo de computação pode ser muito grande. Foram utilizadas malhas espaciais com 20 divisões. Este número de divisões é suficiente para a convergência da solução em termos de precisão, ou seja, a utilização de mais de 20 divisões não fornece um resultado mais refinado. Para números de Stefan e Biot muito pequenos, pode-se utilizar um número menor de divisões para evitar um tempo de computação muito longo, em prejuízo de alguma precisão.

7.3. O MÉTODO INTEGRAL

O método integral de Goodman foi aplicado à geometria esférica, apesar de alguns autores [62, 65] terem manifestado seu

ceticismo quanto à aplicação deste modelo para o problema da solidificação em geometrias esféricas mesmo para a condição unidimensional.

O método integral pode ser aplicado para qualquer valor do número de Stefan e qualquer valor do número de Biot. Este método apresenta boa correlação com o método numérico até as proximidades do centro da esfera ($\epsilon=0,8$) quando praticamente todo o volume do material já se encontra solidificado (99,2%).

Segundo o método integral, o perfil de temperatura no material solidificado no interior de uma esfera é dado pela equação (4.16):

$$\theta = \frac{1}{1-X} \left[A + B(X-\epsilon) + C(X-\epsilon)^2 \right]$$

onde A, B e C são dados pelas equações (4.20), (4.25) e (4.23). A velocidade de avanço da frente de solidificação é dada pela equação (4.31). A integração desta equação fornece a relação entre o tempo de solidificação e a posição da frente de solidificação.

A taxa de transferência de calor na superfície da esfera é dada pela equação (4.34):

$$\varphi_0 = \text{Ste Bi} (A - B\epsilon + C\epsilon^2)$$

7.4. O MÉTODO CORRIGIDO

O método corrigido é um método aproximado de utilização mais imediata para a determinação da posição da frente de solidificação e da sua velocidade. Este método consta de um fator de correção que aplicado à solução exata de uma geometria plana semi-infinita forneça uma solução que seja válida para a geometria esférica. Segundo este método, o tempo de solidificação é dado pela equação (5.6).

$$\tau = (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2) \left(\frac{\varepsilon^2}{4\phi^2} + \frac{\varepsilon}{Ste Bi} \right)$$

onde os coeficientes a e b são dados pelas equações (5.9) e (5.10). A velocidade de avanço da interface é dada pela equação (5.22):

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \left[\frac{\varepsilon}{4\phi^2} (2 + 2a\varepsilon + 4b\varepsilon^2) + \frac{1}{Ste Bi} (1 + 2a\varepsilon + 3b\varepsilon^2) \right]^{-1}$$

Este método foi desenvolvido entre os intervalos $Bi \geq 1$ e $0,1 \leq Ste \leq 3,0$. O erro médio absoluto percentual dos tempos de solidificação calculados segundo este método quando comparados com os resultados numéricos é inferior a 5%.

7.5. ANÁLISE EXPERIMENTAL

Aparentemente, a única medida experimental em esferas conhecidas é a de London e Seban [43] que em 1945 determinaram tão somente o tempo de solidificação total, utilizando um tomate para simular uma esfera.

Para esta análise experimental, foi projetado e construído um dispositivo simulador do processo de solidificação em esferas. Este dispositivo permitiu a determinação experimental do avanço da interface sólido-líquido no tempo e do perfil de temperatura na fase solidificada. As medidas foram tomadas desde a superfície externa da esfera até uma posição igual a 60% do raio em direção ao centro da esfera. Os resultados experimentais obtidos apresentaram boa concordância com os resultados desenvolvidos neste trabalho (numérico, integral e corrigido).

APÊNDICE A.1

```

C      ESTUDO NUMÉRICO DA SOLIDIFICAÇÃO EM GEOMETRIAS ESFÉRICAS
C      MÉTODO DAS MALHAS MOVEIS
C
C      TODAS AS VARIÁVEIS ESTÃO ADIMENSIONALIZADAS
C      N=NUMERO DE DIVISÕES DA MALHA
C      STE=NUMERO DE STEFAN
C      BIOT=NUMERO DE BIOT
C      M=NUMERO DE ITERAÇÕES
C      TETA=TEMPERATURA
C      XIS=POSICÃO DA FRENTE DE FUSÃO
C      VELF=VELOCIDADE DA FRENTE DE FUSÃO
C      TAU=INTERVALO DE TEMPO
C      TEMPO=TEMPO TOTAL
C      CALOR=FLUXO DE CALOR NA SUPERFÍCIE DA ESFERA
C      RELCA=RAZÃO ENTRE O CALOR NA FRENTE DE FUSÃO E NA SUPERFÍCIE
C
C      DIMENSION TETA(50,4)
C      N=20
C      STE=1.
C      BIOT=1.
C      XIS=.02
C      Z=1.-XIS
C      K=1
C      M=1
C      NI=N-1
C      NN=N+1
C      ENE=N
C      DO 10 I=1, NN
C      AI=I-1
C      X=1.-AI*XIS/ENE
C      TETA(I,K)=(1./BIOT+1./X-1.)/(1./BIOT+1./Z-1.)
10      VELF=1./(Z*Z)*STE/(1./BIOT+1./Z-1.)
C      CALOR=STE*BIOT*TETA(1,K)
C      RELCA=VELF*Z/CALOR
C      TAU=(1./6.-(Z*Z*Z-1.)/(3.*BIOT)-Z*Z*(.5-1./3.*Z))/STE
C      TEMPO=TAU
C      WRITE(5,11)STE,BIOT,N
11      FORMAT(///,1X,' STEFAN=',F5.3,9X,' BIOT=',F8.3,9X,' DIVISÕES='
1          ,I2)
C      WRITE(5,12)
12      FORMAT(///,3X,' ITERAÇÕES',11X,' XIS',2X,' VELOC. FRENTE')
C      WRITE(5,13)
13      FORMAT(1X,' INTER. TEMPO',3X,' TEMPO TOTAL',9X,' CALOR',
2          ,5X,' REL. CALOR')
C      WRITE(5,14)
14      FORMAT(6X,' TETA N',6X,' TETA N+1',6X,' TETA N+2',
3          ,6X,' TETA N+3',6X,' TETA N+4')
C      R=0.
20      IF(XIS-R)240,30,30
30      WRITE(5,31)M,XIS,VELF

```

```

31      FORMAT(//, I12, 2(2X, E12, 6))
      WRITE(5, 32) TAU, TEMPO, CALOR, RELOA
32      FORMAT(4(E12, 6, 2X))
      WRITE(5, 33) (TETAC(I, K), I=1, N)
33      FORMAT(5(E12, 6, 2X))
      R=R+.02
40      IF(K-1) GO, 50, 60
50      K=2
      L=1
      GO TO 70
60      K=1
      L=2
70      TAU=XIS*XIS/(2. *ENE*ENE)
      TEMPO=TEMPO+TAU
      DO 80 I=1, NI
      I1=I+1
      I2=I+2
      XI=I
      A=XI*XIS*VELF/(4. *ENE*ENE)
      B=1. /(ENE/XIS-XI)
80      TETAC(I1, K)=(A+. 5*(1. -B))*TETAC(I2, L)+(1. 5*(1. +B)-A)*TETAC(I, L)
      TETAC(NI, K)=1.
      XIS=XIS+VELF*TAU
      VELF=STE*(TETAC(NI, K)-4. *TETAC(N, K)+3. )/(2. *XIS/ENE)
      TETAC(1, K)=(4. *TETAC(2, K)-TETAC(3, K))/(2. *BIOT*XIS/ENE+3. )
      CALOR=STE*BIOT*TETAC(1, K)
      RELOA=VELF*(1. -XIS)*(1. -XIS)/CALOR
      N=N+1
      IF(XIS-1. ) GO, 20, 20, 90
90      WRITE(6, 31) N, XIS, VELF
      WRITE(5, 32) TAU, TEMPO, CALOR, RELOA
      WRITE(5, 33) (TETAC(I, K), I=1, N)
      CALL EXIT
      END

```

APÊNDICE A.2

Resultados obtidos por L.C. Tao para o processo de sol
dificação em geometria esférica utilizando uma solução numérica.

A solução está desenvolvida em:

TAO, L.C. - "Generalized Numerical Solutions of Freezing
a Saturated Liquid in Cylinders and Spheres"
AIChE Journal, vol. 13(1) p. 165-169 (1967).

Os resultados obtidos através da solução numérica prop
ta estão apresentados em:

TAO, L.C. - "Tabulation of Numerical Solutions of
Freezing a Saturated Liquid in a Cylinder or
a Sphere", Dept. Chem. Eng. University of
Nebraska (1966). Document 9159, American
Documentation Institute, Library of Congress
Washington 25 DC.

A.2.1 - Tempo adimensional τ em função da posição adimensional ϵ
para $Ste = 0,1$

ϵ	$Bi = 1$	$Bi = 2$	$Bi = 10$	$Bi = \infty$
0,025	0,2535	0,1286	0,0299	0,0032
0,050	0,5035	0,2598	0,0659	0,0154
0,075	0,7479	0,3914	0,1070	0,0334
0,100	0,9863	0,5230	0,1525	0,0570
0,125	1,2189	0,6543	0,2022	0,0857
0,150	1,4455	0,7853	0,2557	0,1194
0,175	1,6663	0,9156	0,3127	0,1576
0,200	1,8812	1,0451	0,3729	0,2001
0,225	2,0902	1,1738	0,4361	0,2466
0,250	2,2933	1,3013	0,5020	0,2967
0,275	2,4906	1,4276	0,5702	0,3501
0,300	2,6820	1,5525	0,6406	0,4066
0,325	2,8675	1,6757	0,7127	0,4657
0,350	3,0472	1,7971	0,7864	0,5273
0,375	3,2209	1,9166	0,8613	0,5909
0,400	3,3888	2,0340	0,9372	0,6563
0,425	3,5507	2,1491	1,0138	0,7232
0,450	3,7067	2,2618	1,0908	0,7912
0,475	3,8568	2,3718	1,1679	0,8600
0,500	4,0009	2,4791	1,2448	0,9293
0,525	4,1390	2,5834	1,3213	0,9988
0,550	4,2712	2,6846	1,3970	1,0682
0,575	4,3974	2,7826	1,4717	1,1372
0,600	4,5176	2,8771	1,5452	1,2054
0,625	4,6318	2,9679	1,6170	1,2725
0,650	4,7399	3,0550	1,6869	1,3383
0,675	4,8419	3,1382	1,7547	1,4023
0,700	4,9337	3,2172	1,8201	1,4644
0,725	5,0275	3,2919	1,8827	1,5240
0,750	5,1109	3,3620	1,9422	1,5810
0,775	5,1880	3,4275	1,9984	1,6350
0,800	5,2587	3,4881	2,0510	1,6857
0,825	5,3229	3,5436	2,0995	1,7327
0,850	5,3804	3,5938	2,1439	1,7756
0,875	5,4311	3,6383	2,1836	1,8142
0,900	5,4748	3,6769	2,2183	1,8481
0,925	5,5113	3,7093	2,2476	1,8767
0,950	5,5401	3,7351	2,2711	1,8997
0,975	5,5607	3,7538	2,2882	1,9164
1,000	5,5724	3,7644	2,2979	1,9259

A.2.2 - Tempo adimensional τ em função da posição adimensional ε
para $Ste = 0,50$

ε	$Bi=1$	$Bi=2$	$Bi=10$	$Bi=\infty$
0,025	0,05096	0,02600	0,00666	0,00072
0,050	0,10120	0,05246	0,01386	0,00316
0,075	0,15108	0,07972	0,02270	0,00692
0,100	0,20028	0,10740	0,03266	0,01196
0,125	0,24880	0,13546	0,04362	0,01820
0,150	0,29662	0,16378	0,05554	0,02558
0,175	0,34372	0,19228	0,06830	0,03404
0,200	0,39006	0,22092	0,08188	0,04350
0,225	0,43560	0,24966	0,09622	0,05390
0,250	0,48032	0,27842	0,11126	0,06518
0,275	0,52422	0,30714	0,12690	0,07724
0,300	0,56722	0,33582	0,14312	0,09006
0,325	0,60940	0,36440	0,15986	0,10360
0,350	0,65068	0,39284	0,17704	0,11776
0,375	0,69102	0,42106	0,19462	0,13246
0,400	0,73046	0,44902	0,21246	0,14766
0,425	0,76894	0,47670	0,23060	0,16326
0,450	0,80648	0,50404	0,24890	0,17926
0,475	0,84302	0,53102	0,26734	0,19554
0,500	0,87854	0,55754	0,28590	0,21198
0,525	0,91308	0,58360	0,30450	0,22860
0,550	0,94654	0,60918	0,32306	0,24532
0,575	0,97894	0,63420	0,34152	0,26210
0,600	1,01022	0,65854	0,35980	0,27882
0,625	1,04032	0,68226	0,37782	0,29544
0,650	1,06923	0,70528	0,39556	0,31186
0,675	1,09690	0,72754	0,41290	0,32798
0,700	1,12330	0,74896	0,42982	0,34378
0,725	1,14842	0,76946	0,44618	0,35914
0,750	1,17214	0,78904	0,46192	0,37400
0,775	1,19452	0,80756	0,47698	0,38832
0,800	1,21544	0,82502	0,49126	0,40198
0,825	1,23482	0,84130	0,50476	0,41486
0,850	1,25258	0,85626	0,51732	0,42690
0,875	1,26860	0,86990	0,52878	0,43790
0,900	1,28270	0,88204	0,53904	0,44782
0,925	1,29494	0,89252	0,54802	0,45648
0,950	1,30490	0,90116	0,55544	0,46372
0,975	1,31238	0,90772	0,56114	0,46924
1,000	1,31688	0,91166	0,56456	0,47266

A.2.3 - Tempo adimensional τ em função da posição adimensional ϵ
para $Ste = 1,0$

ϵ	$Bi=1$	$Bi=2$	$Bi=10$	$Bi=\infty$
0,025	0,02565	0,01319	0,00302	0,00040
0,050	0,05092	0,02655	0,00691	0,00162
0,075	0,07648	0,04076	0,01175	0,00361
0,100	0,10202	0,05543	0,01720	0,00631
0,125	0,12750	0,07046	0,02326	0,00970
0,150	0,15285	0,08576	0,02989	0,01376
0,175	0,17803	0,10132	0,03705	0,01844
0,200	0,20299	0,11710	0,04470	0,02371
0,225	0,22775	0,13302	0,05278	0,02954
0,250	0,25227	0,14910	0,06133	0,03587
0,275	0,27650	0,16531	0,07029	0,04265
0,300	0,30048	0,18162	0,07957	0,04994
0,325	0,32415	0,19791	0,08921	0,05767
0,350	0,34753	0,21418	0,09913	0,06575
0,375	0,37056	0,23041	0,10934	0,07422
0,400	0,39326	0,24668	0,11974	0,08301
0,425	0,41556	0,26283	0,13036	0,09200
0,450	0,43748	0,27894	0,14117	0,10125
0,475	0,45892	0,29494	0,15207	0,11075
0,500	0,47993	0,31080	0,16306	0,12038
0,525	0,50051	0,32645	0,17413	0,13016
0,550	0,52063	0,34182	0,18524	0,14007
0,575	0,54020	0,35699	0,19635	0,15006
0,600	0,55923	0,37185	0,20743	0,16010
0,625	0,57770	0,38644	0,21841	0,17002
0,650	0,59560	0,40065	0,22927	0,17995
0,675	0,61290	0,41451	0,23993	0,18979
0,700	0,62954	0,42789	0,25032	0,19949
0,725	0,64549	0,44082	0,26050	0,20899
0,750	0,66071	0,45327	0,27035	0,21819
0,775	0,67513	0,46519	0,27990	0,22714
0,800	0,68865	0,47642	0,28900	0,23571
0,825	0,70133	0,48704	0,29766	0,24390
0,850	0,71302	0,49695	0,30583	0,25154
0,875	0,72372	0,50606	0,31331	0,25861
0,900	0,73322	0,51426	0,32015	0,26505
0,925	0,74147	0,52136	0,32623	0,27075
0,950	0,74829	0,52730	0,33137	0,27552
0,975	0,75354	0,53189	0,33530	0,27928
1,000	0,75675	0,53472	0,33775	0,28158

A.2.4 - Tempo adimensional τ em função da posição adimensional ϵ
para $Ste = 2,0$

ϵ	$Bi=1$	$Bi=2$	$Bi=10$	$Bi=\infty$
0,025	0,01301	0,00681	0,00160	0,00024
0,050	0,02578	0,01361	0,00380	0,00085
0,075	0,03919	0,02127	0,00659	0,00193
0,100	0,05284	0,02931	0,00972	0,00346
0,125	0,06665	0,03769	0,01328	0,00541
0,150	0,08053	0,04632	0,01721	0,00769
0,175	0,09447	0,05524	0,02142	0,01044
0,200	0,10847	0,06432	0,02601	0,01354
0,225	0,12251	0,07364	0,03087	0,01706
0,250	0,13658	0,08317	0,03606	0,02090
0,275	0,15065	0,09278	0,04148	0,02496
0,300	0,16476	0,10253	0,04717	0,02936
0,325	0,17873	0,11241	0,05302	0,03395
0,350	0,19267	0,12241	0,05908	0,03883
0,375	0,20651	0,13250	0,06540	0,04402
0,400	0,22020	0,14255	0,07180	0,04939
0,425	0,23384	0,15258	0,07835	0,05499
0,450	0,24738	0,16257	0,08509	0,06082
0,475	0,26076	0,17264	0,09198	0,06676
0,500	0,27397	0,18261	0,09887	0,07285
0,525	0,28692	0,19259	0,10578	0,07909
0,550	0,29971	0,20254	0,11273	0,08545
0,575	0,31226	0,21242	0,11969	0,09179
0,600	0,32450	0,22219	0,12666	0,09813
0,625	0,33651	0,23181	0,13362	0,10446
0,650	0,34818	0,24123	0,14052	0,11076
0,675	0,35957	0,25038	0,14733	0,11701
0,700	0,37057	0,25936	0,15416	0,12331
0,725	0,38123	0,26807	0,16093	0,12945
0,750	0,39140	0,27654	0,16757	0,13556
0,775	0,40112	0,28471	0,17404	0,14155
0,800	0,41040	0,29242	0,18024	0,14737
0,825	0,41919	0,29974	0,18623	0,15292
0,850	0,42730	0,30666	0,19190	0,15824
0,875	0,43484	0,31299	0,19711	0,16323
0,900	0,44158	0,31872	0,20190	0,16787
0,925	0,44756	0,32376	0,20622	0,17200
0,950	0,45261	0,32800	0,20996	0,17556
0,975	0,45645	0,33138	0,21295	0,17941
1,000	0,45883	0,33352	0,21489	0,18025

A.2.5 - Tempo adimensional τ em função da posição adimensional ϵ
para $Ste = 3,0$

ϵ	$Bi=1$	$Bi=2$	$Bi=10$	$Bi=\infty$
0,025	0,00880	0,00469	0,00113	0,00019
0,050	0,01741	0,00930	0,00274	0,00059
0,075	0,02675	0,01473	0,00481	0,00135
0,100	0,03637	0,02051	0,00709	0,00237
0,125	0,04618	0,02654	0,00974	0,00382
0,150	0,05618	0,03288	0,01262	0,00554
0,175	0,06634	0,03940	0,01585	0,00764
0,200	0,07656	0,04616	0,01925	0,00999
0,225	0,08688	0,05316	0,02296	0,01267
0,250	0,09731	0,06028	0,02696	0,01554
0,275	0,10782	0,06757	0,03116	0,01872
0,300	0,11841	0,07502	0,03561	0,02203
0,325	0,12904	0,08264	0,04013	0,02556
0,350	0,13957	0,09028	0,04481	0,02938
0,375	0,15015	0,09798	0,04972	0,03331
0,400	0,16075	0,10575	0,05482	0,03743
0,425	0,17133	0,11359	0,05998	0,04178
0,450	0,18187	0,12149	0,06523	0,04635
0,475	0,19235	0,12944	0,07062	0,05100
0,500	0,20274	0,13707	0,07614	0,05578
0,525	0,21302	0,14538	0,08178	0,06070
0,550	0,22316	0,15334	0,08735	0,06575
0,575	0,23310	0,16125	0,09305	0,07075
0,600	0,24292	0,16910	0,09869	0,07589
0,625	0,25258	0,17686	0,10427	0,08099
0,650	0,26203	0,18448	0,10995	0,08606
0,675	0,27118	0,19191	0,11550	0,09108
0,700	0,28012	0,19924	0,12109	0,09603
0,725	0,28877	0,20642	0,12666	0,10105
0,750	0,29716	0,21339	0,13214	0,10590
0,775	0,30520	0,22005	0,13751	0,11075
0,800	0,31292	0,22648	0,14270	0,11550
0,825	0,32019	0,23258	0,14764	0,12011
0,850	0,32704	0,23837	0,15240	0,12448
0,875	0,33341	0,24373	0,15687	0,12867
0,900	0,33725	0,24865	0,16091	0,13255
0,925	0,34414	0,25309	0,16456	0,13598
0,950	0,34833	0,25678	0,16777	0,13897
0,975	0,35167	0,25975	0,17023	0,14141
1,000	0,35376	0,26169	0,17190	0,14303

A.2.6 - Perfil de temperatura adimensional θ em função da distância adimensional X para solidificação completa da esfera ($\epsilon=1$).

Ste = 0,1

X	Bi=1	Bi=2	Bi=10	Bi= ∞
0,0	0,1888	0,0943	0,01158	0,0000
0,1	0,2075	0,1133	0,0325	0,0154
0,2	0,2269	0,1337	0,0516	0,0338
0,3	0,2471	0,1558	0,0734	0,0552
0,4	0,2683	0,1797	0,0981	0,0799
0,5	0,2909	0,2058	0,1259	0,1083
0,6	0,3150	0,2343	0,1571	0,1406
0,7	0,3406	0,2654	0,1916	0,1772
0,8	0,3658	0,2972	0,2272	0,2161
0,9	0,3856	0,3231	0,2564	0,2492
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Ste = 0,5

X	Bi=1	Bi=2	Bi=10	Bi= ∞
0,0	0,3252	0,1864	0,0354	0,0000
0,1	0,3572	0,2237	0,0724	0,0354
0,2	0,3898	0,2629	0,1143	0,0771
0,3	0,4233	0,3042	0,1611	0,1249
0,4	0,4579	0,3476	0,2125	0,1787
0,5	0,4939	0,3935	0,2687	0,2383
0,6	0,5317	0,4421	0,3296	0,3037
0,7	0,5720	0,4940	0,3955	0,3751
0,8	0,6150	0,5498	0,4670	0,4529
0,9	0,6561	0,6045	0,5399	0,5316
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Ste = 1,0

X	Bi=1	Bi=2	Bi=10	Bi= ∞
0,0	0,3862	0,2345	0,0483	0,0000
0,1	0,4240	0,2810	0,0985	0,0469
0,2	0,4619	0,3292	0,1546	0,1016
0,3	0,5003	0,3788	0,2160	0,1634
0,4	0,5391	0,4298	0,2819	0,2312
0,5	0,5787	0,4820	0,3516	0,3042
0,6	0,6192	0,5355	0,4245	0,3812
0,7	0,6613	0,5903	0,4999	0,4613
0,8	0,7053	0,6461	0,5773	0,5433
0,9	0,7485	0,6964	0,6526	0,6204
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

A.2.7 - Perfil de temperatura adimensional θ em função da distância adimensional X para solidificação completa da esfera ($\epsilon=1$).

Ste=2,0

X	Bi=1	Bi=2	Bi=10	Bi= ∞
0,0	0,4458	0,2858	0,0637	0,0000
0,1	0,4891	0,3421	0,1296	0,0636
0,2	0,5320	0,3993	0,2021	0,1371
0,3	0,5745	0,4569	0,2797	0,2186
0,4	0,6165	0,5146	0,3607	0,3058
0,5	0,6581	0,5720	0,4435	0,3964
0,6	0,6993	0,6290	0,5267	0,4881
0,7	0,7401	0,6857	0,6093	0,5791
0,8	0,7807	0,7426	0,6903	0,6675
0,9	0,8188	0,7990	0,7666	0,7493
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Ste=3,0

X	Bi=1	Bi=2	Bi=10	Bi= ∞
0,0	0,4815	0,3188	0,0733	0,0000
0,1	0,5281	0,3813	0,1488	0,0730
0,2	0,5737	0,4440	0,2310	0,1569
0,3	0,6183	0,5063	0,3174	0,2488
0,4	0,6618	0,5675	0,4056	0,3453
0,5	0,7040	0,6271	0,4933	0,4432
0,6	0,7450	0,6847	0,5785	0,5394
0,7	0,7851	0,7402	0,6595	0,6315
0,8	0,8245	0,7938	0,7351	0,7173
0,9	0,8631	0,8442	0,8009	0,7901
1,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

APÊNDICE A.3

SOLUÇÃO EXATA PARA O PLANO PELO SISTEMA VIRTUAL

O modelo a ser desenvolvido admite por hipóteses que:

- a) O fluxo térmico é unidirecional durante o processo de solidificação;
- b) O material tem uma temperatura definida de fusão;
- c) Todo o material líquido se encontra na temperatura de fusão, sem superaquecimento;
- d) A transferência de calor entre o material e o fluido de resfriamento é controlada por um coeficiente de transmissão de calor por convecção que permanece constante durante a solidificação.

O sistema virtual substitui a resistência térmica de convecção entre o material e o fluido de resfriamento por uma resistência térmica proporcionada por uma espessura de material solidificado. Tal modelamento está esquematizado na Figura 5.1.

As relações entre as dimensões nos dois sistemas são:

$$x' = S_0 + x \quad (\text{A.3.1})$$

$$S' = S_0 + S \quad (\text{A.3.2})$$

$$t' = t_0 + t \quad (\text{A.3.3})$$

onde t_0 é o tempo necessário para que a espessura S_0 seja formada no sistema virtual.

No sistema virtual a condução de calor na espessura solidificada é representada pela equação

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} \quad 0 \leq x' \leq S' \quad (\text{A.3.4})$$

As condições de contorno no sistema virtual são

$$T = T_f \quad \text{para} \quad x' = S' \quad (\text{A.3.5})$$

$$T = T_\infty \quad \text{para} \quad x' = 0 \quad (\text{A.3.6})$$

A solução da equação (A.3.4) é

$$T = a + b \operatorname{erf} \left(\frac{x'}{2\sqrt{\alpha t'}} \right) \quad (\text{A.3.7})$$

onde a , b são constantes. Das equações (A.3.5) e (A.3.7)

$$\frac{S'}{2\sqrt{\alpha t'}} = \text{constante} = \phi \quad (\text{A.3.8})$$

onde ϕ é definida como a constante de solidificação.

A equação (A.3.8) pode ser colocada na forma

$$t' = \frac{S'^2}{4\alpha \phi^2} \quad (\text{A.3.9})$$

e em particular para $x' = S_0$ e $t' = t_0$,

$$t_0 = \frac{S_0^2}{4\alpha \phi^2} \quad (\text{A.3.10})$$

Das equações (A.3.1), (A.3.2), (A.3.3) e (A.3.9):

$$t + t_0 = \frac{(S + S_0)^2}{4\alpha \phi^2} = \frac{S^2}{4\alpha \phi^2} + \frac{S_0 S}{2\alpha \phi^2} + \frac{S_0^2}{4\alpha \phi^2} \quad (\text{A.3.11})$$

que juntamente com (A.3.10) fica

$$t = \frac{S^2}{4\alpha \phi^2} + \frac{S_o S}{2\alpha \phi^2} \quad (\text{A.3.12})$$

As condições de contorno (A.3.5) e (A.3.6) permitem calcular as constantes a, b:

$$a = T_\infty \quad (\text{A.3.13})$$

$$b = \frac{T_f - T_\infty}{\text{erf } \phi} \quad (\text{A.3.14})$$

A equação (A.3.8) pode ser escrita como

$$\frac{x'}{2\sqrt{\alpha t'}} = \phi \frac{x'}{S'} = \phi \frac{S_o + x}{S_o + S} \quad (\text{A.3.15})$$

O perfil de temperatura dado pela equação (A.3.7) pode ser escrito na forma

$$T = T_\infty + \frac{T_f - T_\infty}{\text{erf } \phi} \text{erf} \left(\phi \frac{S_o + x}{S_o + S} \right) \quad (\text{A.3.16})$$

A temperatura T_o é dada por

$$T_o = T_\infty + \frac{T_f - T_\infty}{\text{erf } \phi} \text{erf} \left(\frac{\phi S_o}{S_o + S} \right) \quad (\text{A.3.17})$$

Torna-se necessário o conhecimento do valor de ϕ e S_o . Um balanço térmico na interface sólido líquido da Figura 5.1.b fornece

$$L\rho \frac{dS'}{dt'} - k \frac{\partial T}{\partial x'} = 0 \quad (\text{A.3.18})$$

As derivadas de (A.3.9) e (A.3.16) são respectivamente

$$\frac{dS'}{dt'} = \phi \sqrt{\frac{\alpha}{t'}} = \frac{2\alpha \phi^2}{S'} \quad (\text{A.3.19})$$

$$\frac{\partial T}{\partial x'} = \frac{2\phi(T_f - T_\infty)}{\sqrt{\pi} s' \operatorname{erf}\phi \exp(\phi^2)} \quad (\text{A.3.20})$$

Combinando (A.3.19) e (A.3.20) com (A.3.18) resulta

$$\sqrt{\pi} \phi \operatorname{erf}\phi \exp(\phi^2) = \frac{c(T_f - T_\infty)}{L} = \text{Ste} \quad (\text{A.3.21})$$

de onde a constante de solidificação ϕ pode ser calculada através de métodos iterativos ou gráficos. A Figura 5.2 mostra a variação da constante de solidificação ϕ com o número de Stefan.

Para a determinação de S_0 deve-se considerar o balanço do fluxo de calor no instante inicial no sistema real ($t=0$, $S=0$). Isto equivale a considerar o fluxo de calor na interface sólido líquido no sistema virtual quando $t'=t_0$ e $S'=S_0$ (Figura 5.1.a).

O balanço do fluxo de calor nesta posição vale

$$h(T_f - T_\infty) = k \left(\frac{\partial T}{\partial x'} \right)_{S_0} \quad x' = S_0 \quad (\text{A.3.22})$$

onde pelas hipóteses feitas inicialmente, h é admitido constante durante o processo de solidificação.

A equação (A.3.20) pode ser escrita agora para $x'=S_0$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x'} \right)_{S_0} = \frac{2\phi(T_f - T_\infty)}{\sqrt{\pi} S_0 \operatorname{erf}\phi \exp(\phi^2)} \quad x' = S_0 \quad (\text{A.3.23})$$

Combinando (A.3.22) e (A.3.23),

$$\frac{2 k \phi^2}{h s_0} = \sqrt{\pi} \phi \operatorname{erf} \phi \exp(\phi^2) \quad (\text{A.3.24})$$

que juntamente com (A.3.21) resulta

$$S_0 = \frac{2\alpha \phi^2 L\rho}{h(T_f - T_\infty)} = \frac{2k\phi^2}{h \operatorname{Ste}} \quad (\text{A.3.25})$$

Considerando a equação (A.3.12) o tempo de solidificação é dado por

$$t = \frac{S^2}{4\alpha \phi^2} + \frac{L\rho}{h(T_f - T_\infty)} S \quad (\text{A.3.26})$$

SIMBOLOGIA UTILIZADA

1. Parâmetros dimensionais

A	coeficiente do polinômio do perfil de temperatura
B	coeficiente do polinômio do perfil de temperatura
C	coeficiente do polinômio do perfil de temperatura
c	calor específico
c_m	calor específico do material líquido superaquecido
h	coeficiente de transmissão de calor por convecção
k	condutividade térmica
L	calor latente de fusão
L'	calor latente de fusão corrigido para considerar o efeito do superaquecimento
m	número de incrementos no tempo
n	número de incrementos radiais
N	número de divisões da malha
Q	fluxo de calor
Q_0	fluxo de calor na borda da esfera
Q_f	fluxo de calor na frente de fusão
q	fluxo de calor por unidade de área
R	raio da esfera
R_h	resistência térmica de convecção
R_k	resistência térmica de condução
r	distância radial a partir do centro da esfera
r_f	raio da interface sólido-líquido
S	espessura solidificada no plano
S'	espessura solidificada no sistema virtual
t	tempo
t'	tempo no sistema virtual
T	temperatura
T_0	temperatura da superfície da esfera
T_f	temperatura de fusão do material
T_∞	temperatura do meio
x	distância no plano
x'	distância no plano no sistema virtual
α	difusividade térmica
ρ	densidade

$\delta(t)$	distância fenomenológica no método integral
Δ	incremento
ϕ	constante de solidificação
σ	constante de Stefan-Boltzmann ($5,6697 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$)
ϵ	emissividade

2. Parâmetros adimensionais

$$\text{Bi} = \frac{hR}{k} \quad \text{número de Biot}$$

$$\text{Ste} = \frac{c(T_f - T_\infty)}{L} \quad \text{número de Stefan}$$

$$Z = r/R$$

$$\xi = r_f/R$$

$$X = 1 - r/R$$

$$\epsilon = 1 - r_f/R$$

$$\tau = \frac{\alpha t}{R^2}$$

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_f - T_\infty}$$

$$\psi = \frac{q}{kL/cR} = \frac{Q}{4\pi RkL/c}$$

REFERENCIAS

- [1] ADAMS Jr, C.M. - "Thermal Considerations in Freezing", Liquid Metals and Solidification, 1st ed. Cleveland, Ed. American Society for Metals, p. 187-217 (1958).
- [2] BANKOFF, S.G. - "Heat Conduction or Diffusion With Change of Phase", Advances in Chemical Engineering, vol. 5, p. 75-150, Academic Press, NY (1964).
- [3] BELL, G.E. - "A Refinement of the Heat Balance Integral Method Applied to a Melting Problem", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 21, p. 1357-1362 (1978).
- [4] BELL, G.E. - "Solidification of a Liquid About a Cylindrical Pipe", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 22, p. 1681-1686 (1979).
- [5] BISHOP, H.F. & PELLINI, W.S. - "Solidification of Metals", The Foundry, vol. 80, p. 86 (1952).
- [6] BOLEY, B.A. - "On the Use of Superposition in the Approximate Solution of Heat Conduction Problems", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 16, p. 2035-2041 (1973).
- [7] BONACINA, C. & COMINI, G. & FASANO, A. & PRIMICERIO, M. - "Numerical Solution of Phase Change Problems", Int J. Heat Mass Transfer, vol. 76, p. 1825-1832 (1973).
- [8] CARSLAW, H.S. & JAEGER, J.C. - "Change of State", Conduction of Heat in Solids, ch. 11, p. 282-296, Oxford Univ. Press, Oxford (1959).
- [9] CHO, S.H. & SUNDERLAND, J.E. - "Phase Change of Spherical Bodies", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 13, p. 1231-1233 (1970).
- [10] CHUANG, Y.R. & EHRICH, O. - "On the Integral Technique for Spherical Growth Problems", Int. J. Heat Mass Transfer, p. 945-953 (1974).

- [11] CHURCHILL, S.W. & EVANS, L.B. - "Coefficients for Calculation of Freezing in a Semi Infinite Region", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, p. 234-236 (1971).
- [12] CLYNE, T.W. & GARCIA, A. - "Assessment of a New Model for Heat Flow During Unidirectional Solidification of Metals", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 23, p. 773-782 (1980).
- [13] CRANK, J. - "The Mathematical of Diffusion", 2nd ed., Clarendon Press, Oxford (1975).
- [14] DUCK, P.W. & RILEY, D.S. - "An Extension of Existing Solidification Results Obtained From the Heat Balance Integral Method", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 20, p. 297 (1977).
- [15] ECKERT, E.R.G. & DRAKE Jr, R.M. - "Heat Conduction With Moving Boundaries", Analysis of Heat and Mass Transfer, p. 222-242, McGraw-Hill, NY (1972)
- [16] EGGLETON, P.P. - "Astrophysical Problems: A Moving Boundary Problem in the Study of Stellar Interiors", Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, Clarendon Press, p. 103-111 (1975).
- [17] EL-GENK, M. & CRONENBERG, A.W. - "Some Improvements to the Solution of the Stefan-Like Problems", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 22, p. 165-170 (1979).
- [18] ELMAS, M. - "On the Solidification of a Warm Liquid Flowing Over a Cold Wall", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 13, p. 1060-1062 (1970).
- [19] GARCIA, A. & PRATES, M. - "Mathematical Model for the Unidirectional Solidification of Metals - 1. Cooled Moulds", Metallurgical Transactions, 9B p. 449 (1978).
- [20] GARNER, F.H. & BOTTERILL, J.S. M. & ROSS, D.K. - Chem. Age India, 12, p. 399 (1961).

- [21] GELGER, G.H. & POIRIER, D.R. - "Solidification Heat Transfer", Transport Phenomena in Metallurgy, Ch. 10, 1st ed. Massachussets, Ed. Addison Wesley (1973).
- [22] GELDER, D. & GUY, A.G. - "Corrent Problems in the Glass Industry", Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, Clarendon Press, p. 71-90 (1975).
- [23] GOODMAN, T.R. - "The Heat Balance Integral and Its Application to Problems Involving a Change of Phase", Transactions ASME, p. 335-342 (1958).
- [24] GOODMAN, T.R. - "The Heating of Slabs With Arbitrary Heat Inputs", Journal of Aero. Sci., p. 187-188 (1959).
- [25] GOODMAN, R.R. & SHEA, J.J. - "The Melting of Finite Slabs", J. Appl. Mech., vol. 32, p. 16-24 (1960).
- [26] GOODMAN, T.R. - "The Heat Balance Integral - Further Considerations and Refinements", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, p. 83-86 (1961).
- [27] GOODMAN, T.R. - "Application of Integral Methods to Transient Non-Linear Heat Transfer", Advances in Heat Transfer, vol. 1, p. 51-122, Academic Press, NY (1964).
- [28] GOODLING, J.S. & KHADER, M.S. - "Inward Solidification With Radiation - Convection Boundary Condition", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, p. 114-115 (1974).
- [29] HABIB, I.S. - "Solidification of a Semitransparent Cylindrical Medium by Conduction and Radiation", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, p. 37-41 (1973).
- [30] HILLS, A.W.D. - "A Generalized Integral Profile Method for the Analysis of Unidirectional Heat Flow During Solidification", Trans. Metallurgical Society AIME, vol. 245, p. 1471-1479 (1969).

- [31] KERN, J. & WELLS, G.L. - "Simple Analysis and Working Equations for the Solidification of Cylinders and Spheres", Metallurgical Transactions, vol. 8B, p. 99 (1977).
- [32] KERN, J. - "A Simple and Apparently Safe Solution to the Generalized Stefan Problem", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 20, p. 467-474 (1977).
- [33] KREITH, F. & ROMIE, F.E. - "A Study of the Thermal Diffusion Equation With Boundary Conditions Corresponding to Solidification or Melting of Materials Initially at the Fusion Temperature", Proc. of the Physical Society, vol. 68B (1955).
- [34] LAMÉ, G. & CLAPEYRON, B.P. - Ann. Chem. Phys. vol. 47, p. 250-256 (1931).
- [35] LANDAHL, H.D. - Bull. Math. Biophys. 15 p. 49-61 (1953).
- [36] LANGFORD, D. - "A Closed Form Solution for the Constant Velocity Solidification of Spheres Initially at the Fusion Temperature", Brit. J. Appl. Phys., vol. 17 (1966)
- [37] LANGFORD, D. - "The Freezing of Spheres", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 9, p. 827-828 (1966).
- [38] LANGFORD, D. - "The Heat Balance Integral Method", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 16, p. 2324-2328 (1973).
- [39] LAPIDUS, L. - "Digital Computation for Chemical Engineers", p. 67-147, McGraw-Hill, NY (1962).
- [40] LARDNER, T.J. & POHLE, F.V. - "Application of the Heat Balance Integral to Problems of Cylindrical Geometry", Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, p. 310-312 (1961).
- [41] LIGHTFOOT, N.M.H. - "The Solidification of Molten Steel", Proceedings, London Mathematical Society, vol. 31, p. 97 (1930).

- [42] LONDON, A.L. & SEBAN, R.A. - "Rate of Ice Formation", Transactions of the ASME, vol. 65, p. 771-778 (1943).
- [43] LONDON, A.L. & SEBAN, R.A. - "Experimental Confirmation of Predicted Water Freezing Rates", Transactions of the ASME, vol. 67 p. 39-44 (1945).
- [44] LONGWELL, P.A. - "Graphical Method for Solution of Freezing Problems", AIChE Journal, vol. 4 (1), p. 53-57 (1958).
- [45] MEGERLIN, F. - "Geometrisch Eindimensionale Wärmeleitung Beim Schmelzen und Erstarren", Forsch. Ing. Wes., 34, p. 40 (1968).
- [46] MERK, H.J. - Appl. Sci. Res., vol. 4, Section A, p. 435-452 (1954).
- [47] MILANEZ, L.F. & ISMAIL, K.A.R. - "Armazenador de Calor Latente com Fluidização", Anais do V Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, p. 236-243 (1979).
- [48] MILANEZ, L.F. & ISMAIL, K.A.R. & NEBRA, S.A. - "Analytical and Numerical Study of a Latent Heat Storage System", Anais do II CBE, Rio de Janeiro, p. 999-1010 (1981).
- [49] MORI, A. & ARAKI, K. - "Methods of Analysis of the Moving Boundary Surface Problem", Int. Chem. Eng., vol. 16, p. 734-744 (1976).
- [50] MURRAY, W.D. & LANDIS, F. - "Numerical and Machine Solutions of Transient Heat Conduction Problems Involving Melting or Freezing. Part I - Method of Analysis and Sample Solutions", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, p. 106-112 (1959).
- [51] NEBRA, S.A. - "Armazenador de Calor Latente", Tese de Mestrado, Departamento de Engenharia Mecânica da UNICAMP (1980).
- [52] NEBRA, S.A. & ISMAIL, K.A.R. - "Analytical and Numerical Study of a Latent Heat Storage System", Lat. Am. J. Heat Mass Transfer, p. 133-142 (1980).

- [53] NOBLE, B. - "Heat Balance Methods in Melting Problems", Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, Clarendon Press, p. 208-209 (1975).
- [54] ÖZISIK, M.N. - "Approximate Analytic Methods", Heat Conduction, ch. 9, John Wiley & Sons (1980).
- [55] ÖZISIK, M.N. - "Phase Change Problems", Heat Conduction, Ch. 10, John Wiley & Sons (1980).
- [56] PASCHKIS, V. - "Influence of Properties on Solidification of Metals", Transactions of American Foundrymen's Society, vol. 52, p. 54 (1947).
- [57] PASCHKIS, V. - "Study on Solidification of Steel Spheres", Transactions of American Foundrymen's Society, vol. 53, p. 373 (1948).
- [58] PATERSON, S. - "Propagation of a Boundary of Fusion", Proceedings of the Glasgow Mathematical Association, vol. 1, p. 42-47 (1952).
- [59] PATERSON, S. - "On Certain Types of Solution of the Equation of Heat Conduction", Proceedings of the Glasgow Mathematical Association, vol. 1, p. 48-52 (1952).
- [60] PEDROSO, R.I. & DOMOTO, G.A. - "Inward Spherical Solidification Solution by the Method of Strained Coordinates", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 16, p. 1037-1043 (1973).
- [61] PEDROSO, R.I. & DOMOTO, G.A. - "Perturbation Solutions for Spherical Solidification of Saturated Liquids", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, p. 42 (1973).
- [62] POOTS, G. - "On the Application of Integral Methods to the Solution of Problems Involving the Solidification of Liquids Initially at Fusion Temperature", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 5, p. 525-531 (1962).

- [63] POOTS, G. - "An Approximate Treatment of a Heat Conduction Problem Involving a Two-Dimensional Solidification Front", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 5, p. 339-348 (1962).
- [64] RILEY, D.S. & SMITH, F.T. & POOTS, G. - "The Inward Solidification of Spheres and Circular Cylinders", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 17, p. 1507-1516 (1974).
- [65] RILEY, D.S. & DUCK, P.W. - "Application of the Heat Balance Integral Method to the Freezing of a Cuboid", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 20, p. 294-296 (1977).
- [66] RUBINSKY, B. & SHITZER, A. - "Analytic Solutions to the Heat Equation Involving a Moving Boundary With Applications to the Change of Phase Problem (The Inverse Stefan Problem)", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, vol. 100, p. 300-304 (1978).
- [67] SANTOS, R.G. - "Desenvolvimento de um Método para Análise da Solidificação de Metais em Geometrias Cilíndricas", Tese de Doutorado, Departamento de Engenharia Mecânica da UNICAMP (1980).
- [68] SAVINO, J.M. & SIEGEL, R. - "An Analytical Solution for Solidification of a Moving Warm Liquid Onto an Isothermal Cold Wall", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 12, p. 803-809 (1969).
- [69] SCHLICHTING, H. - "Boundary Layer Theory", ch. 13, 6th Ed. McGraw-Hill, NY (1968).
- [70] SCHWARZ, C. - "Mathematics of Solidification Processes in the Casting of Metals", Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, vol. 13 p. 202 (1933).
- [71] SELIM, M.S. & SEAGRAVE, R.C. - "Solution of Moving Boundary Transport Problems in Finite Media by Integral Transforms - I. Problems With a Plane Moving Boundary", Ind. Eng. Chem. Fundam., vol. 12, n° 1, p. 1-8 (1973).

- [72] SELIM, M.S. & SEAGRAVE, R.C. - Solution of Moving Boundary Transport Problems in Finite Media by Integral Transforms - II. Problems With Cylindrical or Spherical Moving Boundary". Ind. Eng. Chem. Fundam., vol. 12, N° 1, p. 9-13 (1973).
- [73] SHAMSUNDAR, N. & SPARROW, E.M. - "Storage of Thermal Energy by Solid-Liquid Phase Change - Temperature Drop and Heat Flux", Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, p. 541-543 (1974).
- [74] SHAW, R.P. - "An Integral Equation Approach to Diffusion", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 17, p. 693-699 (1974).
- [75] SHIH, Y.P. & TSAY, S.Y. - "Analytical Solution for Freezing a Saturated Liquid Inside or Outside Cylinders", Chemical Engineering Science, vol. 26, p. 809-816 (1971).
- [76] SHIH, Y.P. & CHOU, T.C. - "Analytical Solutions for Freezing a Saturated Liquid Inside or Outside Spheres", Chem. Eng. Sci., vol. 26, p. 1787-1793 (1971).
- [77] SPARROW, E.M. & RAMADHYANI, S. & PATANKAR, S.V. - "Effect of Subcooling on Cylindrical Melting", Journal of Heat Transfer, vol. 100 p. 395 (1978).
- [78] STEFAN, J. - "On the Theory of Ice Formation, Especially on Ice Formation in Polar Seas", Ann. Phys. Chem., vol. 42, p. 269-286 (1891).
- [79] TANI, I. - "On the Approximate Solution of the Laminar Boundary-Layer Equation", Journal of the Aeronautical Sciences, p. 487-495 (1954)
- [80] TAO, L.C. - "Tabulation of Numerical Solutions of Freezing a Saturated Liquid in a Cylinder or a Sphere", Dept. Chem. Eng. University of Nebraska (1966). Document 9159, American Documentation Institute, Library of Congress, Washington 25 DC.

- [81] TAO, L.C. - "Generalized Numerical Solutions of Freezing a Saturated Liquid in Cylinders and Spheres", AICHE Journal vol. 13(1), p. 165-169 (1967).
- [82] TURCOTTS, D.L. - "Geophysical Problems With Moving Phase Change Boundaries and Heat Flow", Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion, Clarendon Press, p. 91-102 (1975).
- [83] VOLKOV, V.N. & LI-ORLOV, V.K. - "A Refinement of the Integral Method in Solving the Heat Conduction Equation", Heat Transfer Soviet Research, vol. 2, N° 2, p. 41-47 (1970).
- [84] YUEN, W.W. - "Application of the Heat Balance Integral to Melting Problems With Initial Subcooling", J. Heat Mass Transfer, vol. 23, p. 1157-1160 (1980).