

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Dissertação Apresentada à
Faculdade de Engenharia Mecânica
como Requisito Parcial para a Obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Petróleo

COMPORTAMENTO TRANSIENTE DE PRESSÃO
EM POÇOS HORIZONTAIS

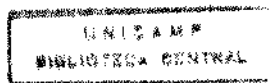
Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por Christiane de
Camargo e aprovada
pela comissão julgadora em 16 12 19 93

[Assinatura]
ORIENTADOR

Autora: Christiane de Camargo
Orientador: Dr. Osvair Vidal Trevisan ^{fb}

65193

Dezembro de 1993

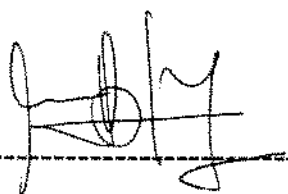


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

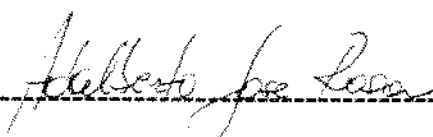
A dissertação "Comportamento Transiente de Pressão em Poços Horizontais" elaborada por Christiane de Camargo foi aceita pela Subcomissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 16 de dezembro de 1993.

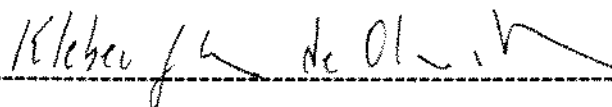
Banca Examinadora



Osvaldo Vidal Trevisan, Ph.D.



Adalberto José Rosa, Ph.D.



Kleber Galvão de Oliveira Pádua, Ph.D.

Ao Evandro

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Osvair Vidal Trevisan pela presteza e dedicação com que conduziu o presente trabalho.

À professora Maria Cristina Cunha pelo apoio e sugestões dadas durante o transcorrer desta dissertação.

Aos funcionários da RPSE/DIAREV, especialmente aos engenheiros José Adilson Tenório Gomes e Paulo Marcos Fernandes Vieira, pelas sugestões e pela presteza quando requisitados.

Ao meu pai cujo espírito despojado e científico tem me inspirado em todos os momentos da vida.

À minha mãe e irmãos pelo apoio e incentivo constantes.

Aos colegas e professores do mestrado em Engenharia de Petróleo da Unicamp pela amizade e companheirismo nestes dois anos de convivência.

À PETROBRÁS pela oportunidade e pelo suporte financeiro para a realização deste trabalho.

Resumo

A análise de testes de pressão em poços horizontais tem por objetivo determinar os parâmetros da formação e algumas características do poço horizontal, através da utilização de técnicas convencionais de interpretação de testes ou de técnicas mais sofisticadas que incluem a análise automatizada.

Neste trabalho será apresentado um modelo matemático para representar o comportamento transiente da pressão de um poço horizontal em um reservatório anisotrópico de espessura limitada. Este modelo considera a existência da perda de carga no interior do poço horizontal, em fluxo monofásico laminar ou turbulento.

Para determinação da solução semi-analítica, a equação da queda de pressão no poço é acoplada à equação de fluxo no reservatório, considerando a continuidade das pressões e das vazões na interface poço horizontal/reservatório.

Concluiu-se que, para a maioria das aplicações práticas, a pressão pode ser considerada constante ao longo do poço horizontal.

Os efeitos de estocagem e de película são incluídos no modelo aplicando-se o teorema da superposição na solução para a vazão total de produção constante.

É proposta uma modelagem para o dano de formação que considera a anisotropia da formação e o tempo de exposição desta aos fluidos de perfuração e de completação. Uma fórmula para o fator de película é obtida.

São apresentadas aproximações assintóticas da solução.

A análise automatizada de testes em poços horizontais é apresentada através da técnica de regressão não linear utilizando o método dos mínimos quadrados. Para viabilizar a aplicação desta técnica, em termos de tempo computacional, foi utilizado um modelo de fluxo uniforme equivalente.

As conclusões quanto à aplicação desta técnica são limitadas, dada a escassez de casos reais na literatura.

São incluídos exemplos de casos reais e de casos sintéticos.

Abstract

The objective of a horizontal well test analysis is to obtain some reservoir/well parameters by using conventional or automated techniques of analysis.

This work presents a mathematical model in order to represent the transient pressure behavior of a horizontal well in an anisotropic reservoir of finite thickness. The model considers the pressure drop due to the fluid flow inside the wellbore.

To obtain the semi-analytical solution, the wellbore and reservoir fluid flows are coupled considering continuity of pressures and rates at the sandface.

One of the conclusions is that the infinite-conductivity wellbore assumption can be used for most of the practical cases.

Using the solution for the constant terminal rate case, wellbore storage and skin effects are included in the model by applying the superposition theorem.

This study also suggests a model for the formation damage which includes the effects of reservoir anisotropy and the time of exposure to drilling and completion fluids. An analytical expression for the skin factor is presented.

Asymptotic expressions are given for early, intermediate and late time flow behaviors.

An automated well test analysis procedure using the least squares nonlinear regression technique is presented. The use of this technique is made possible by applying a model of uniform-flux condition on the inner boundary, adopted to minimize the computational effort.

The conclusions on the application of this technique are limited, due to the scarcity of papers with actual field data in the petroleum literature.

Various examples with synthetic and field data are included.

Conteúdo

1. INTRODUÇÃO	1
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	9
3.1. O Problema do Reservatório	9
3.1.1. Formulação Matemática	10
3.2. O Problema do Poço	14
3.2.1. Formulação Matemática	15
3.3. Acoplamento Entre as Soluções do Poço e do Reservatório.....	16
4. SOLUÇÃO NUMÉRICA	19
4.1. Discretização no Espaço	19
4.2. Discretização no Tempo.....	21
4.3. Solução do Sistema de Equações.....	22
4.3.1. Aproximação Para Tempos Curtos	23
4.3.2. Sistema Linear de Equações	26
4.3.3. Sistema não Linear de Equações.....	27
4.3.4. Solução Aproximada	30
5. EFEITOS DE ESTOCAGEM E DE PELÍCULA	31
5.1. Efeito de Película.....	31
5.2. Efeito de Estocagem.....	32
5.3. Modelagem do Dano de Formação	34
5.4. Aproximações Assintóticas	39
5.4.1. Solução para Tempos Curtos	39
5.4.2. Solução para Tempos Intermediários	41
5.4.3. Solução para Tempos Longos	43
6. DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS	47
6.1. Comportamento da Vazão ao Longo do Poço.....	47
6.2. Comparação entre Fluxo Laminar e Turbulento.....	50

6.3. Identificação dos Regimes de Fluxo	53
6.4. Solução com Estocagem e Fator de Película.....	54
6.5. Solução com o Fator de Película Variável com a Posição	57
6.6. Efeito da Variação do Comprimento Adimensional do Poço	60
7. ANÁLISE AUTOMATIZADA DE TESTES DE PRESSÃO	63
7.1. Modelo Matemático de Fluxo Uniforme.....	64
7.1.1. Validação do Modelo	65
7.1.2. Determinação do Ponto Equivalente	66
7.2. Regressão Não Linear Com Mínimos Quadrados	76
7.2.1. Análise Estatística da Regressão.....	79
7.3. Análise de Dados de Testes de Pressão	80
8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	93
NOMENCLATURA	95
REFERÊNCIAS.....	99
APÊNDICE A: Aproximação para a Discretização do Tempo	106
APÊNDICE B: Discretização no Tempo da Solução com Efeitos de Estocagem e de Película.	112
APÊNDICE C: Determinação do Fator de Película em Formações Anisotrópicas	114
APÊNDICE D: Algoritmo de Procura Linear	123

Lista de Figuras

3.1: Esquema do poço horizontal em um reservatório infinito.....	10
4.1: Esquema de discretização do poço horizontal	19
4.2: Matriz Jacobiana para fluxo turbulento no poço horizontal	29
5.1: Representação Esquemática do cone truncado elíptico danificado.....	37
6.1: Variação com o tempo do perfil de vazão versus distância - Caso 1.....	48
6.2: Variação com o tempo do perfil de vazão versus distância - Caso 2.....	49
6.3: Variação com o tempo do perfil de vazão versus distância - Caso 3.	49
6.4: Comparação da pressão adimensional em $x_D=0$ - Casos 1 a 3.....	51
6.5: Comparação da vazão estabilizada adimensional ao longo do poço horizontal - Casos 1 a 3	51
6.6: Comparação da pressão adimensional ao longo do poço horizontal para os dados dos Casos 1 a 3.....	52
6.7: Comparação do Número de Reynolds ao longo do poço horizontal para os dados dos Casos 1 a 3.....	52
6.8: Identificação dos regimes de fluxo que ocorrem durante o período de comportamento transiente da pressão.....	54
6.9: Comportamento da pressão adimensional com efeitos de película e de estocagem, em escala log-log.....	55
6.10: Comportamento da pressão adimensional com efeito de película, em escala semi-log.....	55
6.11: Comportamento da vazão estabilizada com efeito de película.....	56
6.12: Comportamento da pressão adimensional ao longo do poço horizontal com a inclusão do fator de película.....	56
6.13: Comportamento da pressão adimensional com efeitos de película constante e variável, em escala log-log.....	58
6.14: Comportamento da pressão adimensional com efeitos de película constante e variável, em escala semi-log.....	59

6.15: Comportamento da vazão estabilizada com efeitos de película constante e variável.....	59
6.16: Comportamento da pressão adimensional ao longo do poço horizontal com a inclusão dos efeitos de película constante e variável.	60
6.17: Comportamento da pressão adimensional com a variação do comprimento adimensional do poço.	61
6.18: Comportamento da vazão adimensional ao longo do poço horizontal com a variação do comprimento adimensional do poço.....	62
7.1: Comparação entre a solução para o modelo de fluxo uniforme deste trabalho e a solução de Daviau et alii.	66
7.2: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 1.....	70
7.3: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 1 A.	70
7.4: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 1E.	71
7.5: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 3.....	71
7.6: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 3A.	72
7.7: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 3E.	72
7.8: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 1.	73
7.9: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 1A.....	74
7.10: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 1E.....	74

7.11: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 3.	75
7.12: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 3A.....	75
7.13: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 3E.....	76
7.14: Regressão nos dados da pressão em conjunto com a derivada da pressão - caso 1	83
7.15: Regressão nos dados da pressão em conjunto com a derivada da pressão - caso 3.	83
7.16: Comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações - caso 1.	84
7.17: Comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações - caso 3.	84
7.18: Pressão e derivada utilizando os dados da referência 41 - caso 4.	88
7.19: Regressão nos dados da pressão -caso 4.	88
7.20: Regressão nos dados da pressão em conjunto com a derivada da pressão - caso 4.	89
7.21: Comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações - caso 4.	89
A.1: Comportamento da função de Green ao longo do tempo.	108
A.2: Comportamento da função de Green ao longo do tempo.	109
A.3: Comportamento das vazões adimensionais ao longo do tempo.....	109
A.4: Comportamento das derivadas da vazão adimensional em relação ao tempo. ...	110
A.5: Comparação entre as pressões adimensionais obtidas com as soluções exata e aproximada.	111
A.6: Comparação entre as vazões adimensionais obtidas com as soluções exata e aproximada.	111
C.1: Representação Esquemática das Isóbaras de Pressão.....	119

Lista de Tabelas

6.1: Características do poço e do reservatório padrões	47
6.2: Vazões de produção para os três casos de Análise	48
7.1: Dados de poço e de reservatório para a validação do modelo de fluxo uniforme.	65
7.2: Constantes adimensionais reservatório/poço horizontal - Casos 1 a 3E.	67
7.3: Pontos equivalentes adimensionais para tempos longos - Casos 1 a 3E.	68
7.4: Diferenças percentuais máximas entre as pressões calculadas considerando perda de carga no interior do poço e fluxo uniforme com ponto equivalente igual a 1.68.	68
7.5: Dados de poço e de reservatório para os casos 1 e 3.	81
7.6: Resultados da regressão não linear para os dados do caso 1.	81
7.7: Resultados da regressão não linear para os dados do caso 3.	82
7.8: Comparação entre várias estimativas iniciais para os dados dos casos 1 e 3.	82
7.9: Dados de poço e de reservatório para o caso 4.	85
7.10: Dados de pressão versus tempo para o caso 4.	86
7.11: Resultados da análise para os dados do caso 4.	86
7.12: Dados de pressão versus tempo para o caso 5.	90
7.13: Dados de poço e de reservatório para o caso 5.	91
7.14: Resultados da análise para os dados do caso 5.	91

1. INTRODUÇÃO

Como a maioria dos reservatórios de petróleo são produzidos economicamente com técnicas convencionais, os problemas encontrados para se perfurar poços horizontais e os custos adicionais inibiram, durante muito tempo, os investimentos no aperfeiçoamento das técnicas de perfuração e de completação destes poços. Este quadro vem se invertendo nesta década, com significativos avanços na tecnologia dirigida aos poços horizontais.

Os poços horizontais oferecem algumas vantagens em relação aos poços verticais. Dentre estas, pode-se destacar a sua maior produtividade, pois caracterizam-se por uma extensão maior em contato com a formação produtora, já que este contato não é limitado pela espessura da formação. Assim, o espaçamento entre poços pode ser maior, com a consequente redução do número de poços necessários para drenar um reservatório. Este aspecto abre boas perspectivas para o emprego deste tipo de poço em campos *offshore*.

Poços horizontais vêm sendo empregados com sucesso para resolver problemas de produção em uma grande variedade de tipos litológicos. São particularmente atrativos em reservatórios com coluna de óleo delgada, em reservatórios com risco de formação de cones de água e/ou gás, em alguns reservatórios naturalmente fraturados e em reservatórios com baixas permeabilidades.

Quanto aos reservatórios de petróleo atravessados por um poço horizontal, uma maneira prática e econômica de caracterizá-los é através de testes de pressão.

Os testes convencionais podem ser testes de fluxo, onde o poço é produzido à vazão constante e a pressão de fundo é medida, ou testes de estática, onde, após um período de produção à vazão constante, o poço é fechado e a pressão de fundo registrada.

A interpretação dos dados obtidos durante os períodos de fluxo ou estática permite, em alguns casos, identificar qualitativamente o tipo de reservatório e determinar quantitativamente os parâmetros característicos do reservatório.

Historicamente, o diagnóstico do modelo do reservatório era baseado somente no comportamento de pressões observado durante o teste. A introdução dos métodos das derivadas proporcionou um grande avanço na identificação dos regimes de fluxo (radial, linear, etc.) que podem ocorrer para cada tipo de reservatório, e melhorou significativamente o diagnóstico.

Com o aumento da complexidade dos modelos de reservatórios utilizados, surgiu a necessidade de utilizarem-se métodos mais sofisticados de interpretação de testes. Entre estes métodos, o mais frequentemente adotado é o da análise automatizada, que tem como objetivo obter os parâmetros da formação através da utilização de técnicas de regressão não linear aplicadas aos históricos de pressão de fundo obtidos durante o período do teste.

O assunto de interesse do presente trabalho se restringe à interpretação de testes em poços horizontais durante o período de comportamento transiente da pressão.

Existem na literatura considerações sobre dois modelos para se tratar um poço horizontal. No primeiro, denominado fluxo uniforme, considera-se que a vazão total de produção se distribui de maneira uniforme ao longo do comprimento do poço e, portanto, a distribuição de pressão não é uniforme. No segundo modelo, denominado de condutividade infinita, admite-se que a pressão seja constante ao longo do poço.

Neste trabalho será analisada a influência que a perda de carga, que ocorre com a existência de fluxo no interior do poço, pode ter no comportamento transiente das pressões e das vazões. A solução para o problema considerando esta condição de contorno no poço é precisa, mas requer um excessivo tempo computacional para a sua obtenção.

Na prática, para a utilização das técnicas de regressão não linear será utilizado um modelo de fluxo uniforme equivalente, que reproduz, com pequenos erros, a

mesma resposta de pressão que seria obtida com o modelo mais realista e tem a vantagem de exigir um esforço computacional bem menor.

A solução com a inclusão dos efeitos de estocagem e de película é obtida, em qualquer posição ao longo do poço horizontal, a partir da discretização da equação resultante da aplicação do princípio de Duhamel na solução básica, obtida considerando a vazão total de produção constante.

É proposta uma modelagem para o dano de formação que considera, dentre outros fatores, a anisotropia da formação e o seu tempo de exposição aos fluidos de perfuração.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A idéia da utilização de poços horizontais para a produção de petróleo não é recente. Em algumas publicações^{1,2} encontram-se referências de que até os anos 50 e 60 mais de uma centena de poços horizontais já haviam sido perfurados, principalmente na URSS, mas com resultados até então pouco satisfatórios em termos de produção de petróleo.

A crescente valorização do petróleo, a partir dos anos 70, exigiu que as companhias petrolíferas de todo o mundo investissem mais em pesquisas, visando a descoberta de novas reservas e a otimização da produção e recuperação final dos campos em produção. Como consequência, houve um grande avanço em diversas áreas, principalmente nas técnicas de perfuração, completação e perfilagem de poços direcionais, viabilizando técnica e economicamente a utilização de poços horizontais para a produção de petróleo. A partir de então, vários artigos começaram a ser publicados sobre a tecnologia de poços horizontais^{3,4}, enfocando principalmente aspectos da perfuração e da completação destes poços, bem como assuntos relacionados à engenharia de reservatórios, tais como:

- . escoamento permanente de fluidos através destes poços;
- . estimativa do aumento de produtividade de poços horizontais em relação aos verticais;
- . controle de cones de gás e de água com poços horizontais;
- . utilização de poços horizontais na recuperação suplementar de reservatórios de petróleo.

Entretanto, somente a partir de 1985 começaram a surgir na literatura os primeiros estudos sobre o comportamento transiente da pressão em poços horizontais, apesar deste conhecimento ser bastante importante no sentido de se desenvolverem métodos que possam caracterizar as formações produtoras a partir de resultados de testes de pressão.

A maioria das soluções já apresentadas para poços horizontais pode ser enquadrada em duas categorias. Na primeira, se considera que a vazão total de produção se distribui de maneira uniforme ao longo do comprimento do poço e, portanto, a distribuição de pressão não é uniforme. Na segunda categoria estão englobadas as soluções de condutividade infinita, cuja hipótese é a de que não existe resistência ao fluxo dentro do poço. Consequentemente, neste caso, ao invés da vazão, a pressão se distribui uniformemente ao longo do poço.

Na realidade, os modelos de fluxo uniforme e de condutividade infinita, hoje também utilizados para os poços horizontais, foram introduzidos por Gringarten *et alii*⁵ no estudo de fraturas verticais.

No caso dos poços horizontais, a condição de contorno de fluxo uniforme tem sido largamente utilizada, dada a maior facilidade de tratamento matemático deste caso. A solução da pressão para condutividade infinita normalmente é aproximada pela média da pressão obtida ao longo do comprimento do poço com fluxo uniforme ou, em uma analogia com fraturas verticais⁵, com a utilização do método do ponto equivalente. Este ponto corresponde à distância horizontal ao longo do poço em que as respostas de pressão são idênticas para as condições de contorno de fluxo uniforme e de condutividade infinita.

Os trabalhos mais significativos sobre o comportamento da pressão durante o período transiente em poços horizontais são considerados a seguir.

Clonts e Ramey⁶ apresentaram a solução analítica para o comportamento transiente da pressão em poços horizontais, com a condição de contorno de fluxo uniforme, em um reservatório infinito anisotrópico. Em analogia com a solução para fraturas verticais de condutividade infinita⁵, os autores avaliaram as pressões na distância adimensional de 0,732 (ponto equivalente), medida horizontalmente a partir do centro do poço.

Daviau *et alii*⁷ apresentaram a mesma solução de Clonts e Ramey⁶ para o reservatório infinito, com a inclusão dos efeitos de estocagem e de película.

Determinaram também as soluções analíticas para reservatórios limitados, com fronteiras impermeáveis ou com pressão constante. Os resultados foram apresentados na forma de curvas-tipo, mostrando que o efeito da estocagem pode dificultar a interpretação do teste de pressão em poços horizontais. Os autores procuraram avaliar a influência que parâmetros como o raio, comprimento e excentricidade vertical do poço horizontal podem ter na resposta de pressão. Utilizaram um ponto equivalente adimensional, medido a partir do centro do poço, de 0,7.

Goode e Thambynayagam⁸ apresentaram uma solução analítica para as respostas da pressão, durante o fluxo e o crescimento de pressão, de um poço horizontal em um reservatório semi-infinito anisotrópico. Esta solução foi desenvolvida paralelamente às soluções de Clonts e Ramey⁶ e de Daviau *et alii*⁷, e se diferencia destas pelo tratamento matemático diferente dado ao mesmo problema. Os autores consideraram a influência do efeito de película, mas não incluíram na solução os efeitos de estocagem. A aproximação para condutividade infinita é feita pela média das pressões obtidas ao longo do poço horizontal com a condição de contorno de fluxo uniforme. São fornecidas equações aproximadas, bem como os tempos para a ocorrência dos vários regimes de fluxo do período de comportamento transiente da pressão. Apresentaram ainda equações aproximadas para o cálculo do dano de formação devido à penetração parcial do poço.

Souza⁹ apresentou as soluções analíticas para os casos de poços horizontais não surgentes e com vazão constante na superfície, tanto para a condição de contorno de fluxo uniforme quanto para a de condutividade infinita. O autor preferiu não generalizar um ponto de equivalência único que se adequasse à maioria das situações práticas. Os efeitos de estocagem e de película foram incluídos nas soluções apresentadas.

Carvalho¹⁰ e Rosa e Carvalho¹¹ apresentaram um estudo sobre o valor do ponto equivalente para a aproximação da solução para o modelo de condutividade infinita a partir do resultado obtido com o modelo de fluxo uniforme. O ponto equivalente

adimensional determinado, válido para a maioria das aplicações práticas, foi de 0,68. Os autores incluíram ainda um estudo sobre a influência dos efeitos gravitacionais na solução obtida.

Kuchuck *et alii*¹² ampliaram os trabalhos anteriores para obter soluções analíticas para os poços horizontais com e sem os efeitos de capa de gás e de aquífero. Apresentaram as equações para a determinação dos parâmetros do reservatório a partir das características dos diversos regimes de fluxo, incluindo a solução para a resposta da pressão considerando medições simultâneas de vazões e de pressões de fundo. Desenvolveram expressões analíticas aproximadas para o cálculo do dano por penetração parcial. Os autores indicaram claramente a sua preferência para a aproximação da solução de condutividade infinita pela média da pressão obtida com fluxo uniforme.

Kuchuck *et alii*¹³ apresentaram uma metodologia para a interpretação de testes de pressão em poços horizontais com a análise de dados reais e sintéticos, tanto para fluxo quanto para crescimento de pressão. Os autores mostraram exemplos de testes com medição simultânea de vazão e de pressão de fundo. Utilizaram técnicas de regressão não linear, como auxílio para a interpretação dos dados dos testes de pressão.

Ozkan *et alii*¹⁴ partiram da solução analítica de Daviau *et alii*⁷ para reservatórios infinitos anisotrópicos e em adição apresentaram as curvas de derivada da pressão. Optaram, diferentemente de Daviau *et alii*⁷, por adotar o valor do ponto equivalente igual a 0,732. Os autores também procuraram mostrar a influência que parâmetros como o raio, comprimento e excentricidade vertical do poço horizontal podem ter na resposta de pressão. Desenvolveram expressões analíticas aproximadas para o cálculo do dano por penetração parcial.

Babu e Odeh^{15,16} apresentaram a solução para o comportamento transiente da pressão utilizando um reservatório fechado anisotrópico. Apresentaram equações aproximadas, bem como os tempos para ocorrência dos vários regimes de fluxo do período transiente, tanto para o fluxo quanto para o crescimento de pressão. Estas

equações aproximadas são idênticas, a menos dos pseudo-fatores de película, às obtidas por Goode e Thambynayagam⁸. No entanto, os tempos necessários para a ocorrência de cada um dos regimes de fluxo diferem bastante de autor para autor³.

Dikken¹⁷ apresentou um modelo para investigar a queda de pressão ao longo dos poços horizontais. A solução obtida não pode ser utilizada no período transiente, uma vez que na modelagem foi considerado fluxo permanente no reservatório e índice de produtividade constante por unidade de comprimento do poço.

Ozkan *et alii*¹⁸ apresentaram uma solução semi analítica para o período transiente, que inclui a queda de pressão no interior dos poços horizontais. Segundo os autores, a utilização das condições de contorno de fluxo uniforme ou de condutividade infinita leva a resultados errôneos, uma vez que, de acordo com suas conclusões, para a maioria dos casos práticos, a queda de pressão no poço é grande quando comparada à queda de pressão no reservatório.

3. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo será apresentada a formulação matemática utilizada para a obtenção da solução que reproduz o comportamento das pressões e das vazões ao longo de um poço horizontal, considerando a perda de carga que ocorre no seu interior.

Será considerado o caso em que o reservatório é infinito horizontalmente e limitado verticalmente por fronteiras impermeáveis.

Para determinar a solução do problema, as equações de fluxo do reservatório devem ser resolvidas simultaneamente com as equações de queda de pressão no poço.

Na formulação adotada, o reservatório e o poço, de condutividade finita, constituem dois meios distintos. No acoplamento das soluções destes dois meios, será considerada a continuidade das pressões e das vazões na interface do sistema reservatório-poço horizontal.

3.1. O Problema do Reservatório

Neste item será abordada a formulação matemática do problema do escoamento no reservatório, que contém um poço horizontal. O poço será considerado como uma linha fonte, sem dimensões nas direções y e z (Figura 3.1), posteriormente tratado como tendo dimensões finitas.

Para determinação da equação que descreve o fluxo no reservatório as seguintes premissas serão assumidas:

- o fluido tem compressibilidade pequena.
- a viscosidade do fluido independe da pressão.
- o escoamento de fluidos é isotérmico.
- o reservatório é homogêneo e anisotrópico, com permeabilidade horizontal k , e permeabilidade vertical k_z .

- os efeitos gravitacionais são desprezíveis.
- o reservatório tem uma espessura uniforme h , e porosidade constante e independente da pressão.
- o poço horizontal é considerado como uma linha fonte de comprimento L , e está localizado em alguma posição distante z_w da fronteira inferior do reservatório.
- as fronteiras inferior e superior, localizadas em $z=0$ e $z=h$ são impermeáveis.
- não existe qualquer influência de fronteiras laterais durante o período de interesse.
- o poço produz com vazão q_w constante na superfície.

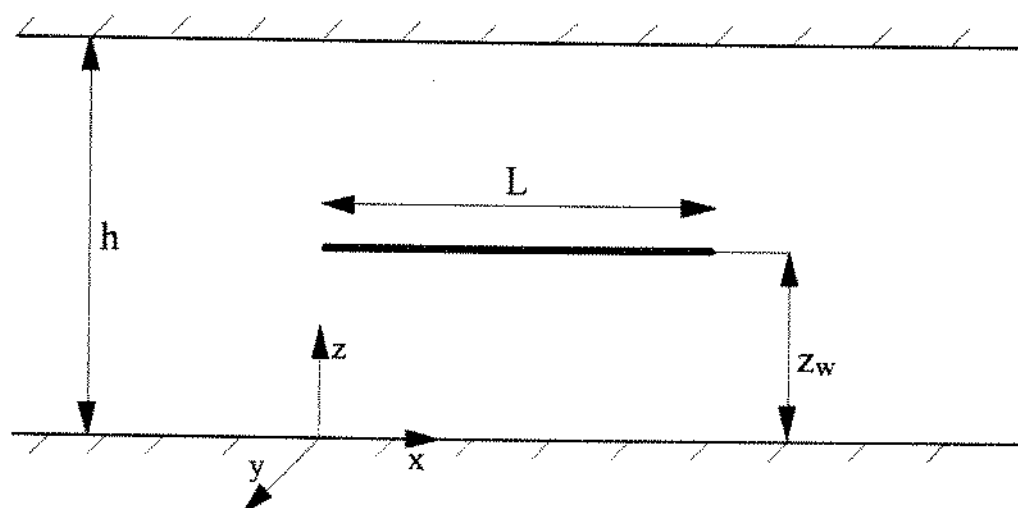


Figura 3.1: Esquema do poço horizontal em um reservatório infinito

3.1.1. Formulação Matemática

Considerando que os eixos principais do tensor permeabilidade são paralelos aos eixos x , y e z , a equação que governa o escoamento de fluidos no meio poroso, equação da difusão, derivada da equação da continuidade e da lei de Darcy é dada por⁶:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{K}}{\mu} \cdot \vec{\nabla} p \right) = \phi \mu c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.1)$$

Como o meio poroso considerado é horizontalmente isotrópico ($k_y = k_x = k$), a equação (3.1) pode ser reescrita como:

$$k \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \phi \mu c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.2)$$

A solução para a queda de pressão no reservatório será obtida aplicando-se o conceito da função de Green e o método dos produtos de Newman¹⁹. A função de Green para o nosso problema é dada pela intersecção de três funções básicas de Green, correspondentes a:

- um plano vertical infinito nas direções y-z, localizado em um reservatório infinito (G_1).
- um plano vertical infinito nas direções x-z, localizado em um reservatório infinito (G_2).
- um plano horizontal infinito nas direções x-y, localizado em um reservatório horizontal, com limites inferior e superior impermeáveis (G_3).

Este produto gera uma função de Green correspondente a uma fonte instantânea puntiforme em um reservatório horizontal limitado verticalmente. A integração desta fonte ao longo do poço produz a fonte instantânea desejada, ou seja, a linha fonte que representa o poço horizontal.

$$\Delta p(x, y, z, t) = \frac{1}{\phi C_t} \int_0^t \int_0^L q_h(x', t') G_1(x, x', t - t') G_2(y, y_w, t - t') G_3(z, z_w, t - t') dx' dt' \quad (3.3)$$

onde $q_h(x, t)$ é a vazão por unidade de comprimento do poço horizontal e as funções fonte instantâneas são definidas¹⁹ como:

$$G_1(x, x', t') = \frac{\exp\left(\frac{-(x-x')^2}{4\eta t'}\right)}{2\sqrt{\pi\eta t'}} \quad (3.4)$$

$$G_2(y, y_w, t') = \frac{\exp\left(\frac{-(y-y_w)^2}{4\eta t'}\right)}{2\sqrt{\pi\eta t'}} \quad (3.5)$$

$$G_3(z, z_w, t') = \frac{1}{h} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \eta_z t'}{h^2}\right) \cos\left(\frac{n \pi z}{h}\right) \cos\left(\frac{n \pi z_w}{h}\right) \right] \quad (3.6)$$

onde η e η_z são, respectivamente, as difusividades nas direções horizontal e vertical, definidas como:

$$\eta = \alpha_l \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (3.7)$$

$$\eta_z = \alpha_l \frac{k_z}{\phi \mu c_t} \quad (3.8)$$

onde $\alpha_l = 1$ no Sistema Internacional de Unidades e $2,637 \times 10^{-4}$ no Sistema de Unidades de Campo.

Substituindo as equações (3.4) a (3.6) na equação (3.3) obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta p(x, y, z, t) = & \frac{1}{\phi C_t} \int_0^t \int_0^L q_h(x', t') \frac{\exp\left(\frac{-(x-x')^2}{4\eta(t-t')}\right)}{2\sqrt{\pi\eta(t-t')}} dx' \frac{\exp\left(\frac{-(y-y_w)^2}{4\eta(t-t')}\right)}{2\sqrt{\pi\eta(t-t')}} \\ & \times \frac{1}{h} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(\frac{-n^2 \pi^2 \eta_z (t-t')}{h^2}\right) \cos\left(\frac{n \pi z}{h}\right) \cos\left(\frac{n \pi z_w}{h}\right) \right] dt' \end{aligned} \quad (3.9)$$

Com o objetivo de obter soluções gerais, independentes das características do sistema poço-reservatório, a equação (3.9) será adimensionalizada de acordo com as seguintes variáveis adimensionais para o reservatório:

$$p_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = \alpha_2 \frac{k h \Delta p(x, y, z, t)}{q_w \mu} \quad (3.10)$$

$$t_D = \frac{\eta t}{(L/2)^2} \quad (3.11)$$

$$x_D = \frac{x}{L/2} \quad (3.12)$$

$$y_D = \frac{y}{L/2} \quad (3.13)$$

$$z_D = \frac{z}{L/2} \sqrt{\frac{k}{k_z}} \quad (3.14)$$

$$z_{wD} = \frac{z_w}{L/2} \sqrt{\frac{k}{k_z}} \quad (3.15)$$

$$L_D = \frac{L}{2 h} \sqrt{\frac{k_z}{k}} \quad (3.16)$$

$$q_{hD} = \frac{q_h L}{q_w} \quad (3.17)$$

Na equação (3.10), $\alpha_2 = 2\pi$ no Sistema Internacional de Unidades e $1/141,2$ no Sistema de Unidades de Campo.

A equação (3.9) pode ser expressa em unidades adimensionais, para $y_w = 0$, como:

$$\begin{aligned}
p_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = & \frac{1}{4} \int_0^{t_D} \int_0^2 q_{hD}(x'_D, t'_D) \exp\left(\frac{-(x_D - x'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dx'_D \exp\left(\frac{-y_D^2}{4(t_D - t'_D)}\right) \\
& \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 L_D^2 (t_D - t'_D)) \cos(n \pi z_D L_D) \cos(n \pi z_{wD} L_D) \right] \frac{dt'_D}{(t_D - t'_D)}
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

3.2. O Problema do Poço

Neste item será abordada a formulação matemática para o fluxo de fluidos no interior do poço horizontal. Será adotada a metodologia seguida por Ozkan *et alii*¹⁸, considerando a perda de carga no interior do poço em fluxo laminar ou turbulento.

Para determinar a equação que descreve o fluxo no interior do poço as seguintes premissas serão assumidas:

- regime permanente para o fluxo monofásico isotérmico no interior do poço. Esta hipótese é semelhante à feita por Cinco *et alii*²⁰ para o fluxo incompressível de fluidos no interior de uma fratura de condutividade finita. Cinco *et alii* mostram que esta hipótese se torna válida após um período muito pequeno de tempo em que a expansão dos fluidos no interior do poço se torna desprezível.
- os gradientes de pressão ao longo da direção axial (x), são independentes da direção radial.
- o fluido entra no poço à vazão $q_h(x, t)$, por unidade de comprimento do poço, e é produzido a uma vazão constante, q_w , na extremidade do poço em $x = 0$.

3.2.1. Formulação Matemática

Sob as hipóteses acima, a vazão em um ponto x da seção horizontal do poço, q_{hc} , é igual à vazão acumulada neste ponto, e pode ser expressa como:

$$q_{hc}(x,t) = \int_x^L q_h(x',t) dx' \quad (3.19)$$

Especificamente em $x = 0^+$ (extremidade produtora do poço), $q_{hc}(0^+,t) = q_w$. Da equação (3.19), pode-se verificar que:

$$\frac{\partial q_{hc}(x,t)}{\partial x} = -q_h(x,t) \quad (3.20)$$

A equação da perda de carga em regime permanente para um fluxo monofásico e isotérmico no poço horizontal, pode ser escrita como:

$$\frac{\partial p_h(x,t)}{\partial x} = E f(x,t) q_{hc}^2(x,t) \quad (3.21)$$

onde f é o fator de fricção de Fanning e E é dado pela seguinte expressão:

$$E = \frac{\rho_f}{r_w A_w^2} \quad (3.22)$$

onde ρ_f é a densidade do fluido e r_w e A_w são, respectivamente, o raio e a área da seção transversal do poço horizontal.

Diferenciando a equação (3.21) em relação a x e utilizando a equação (3.20):

$$\frac{\partial^2 p_h(x,t)}{\partial x^2} = E \left(q_{hc}^2(x,t) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} - 2 f(x,t) q_{hc}(x,t) q_h(x,t) \right) \quad (3.23)$$

Integrando a equação (3.23) duas vezes em relação a x :

$$p_h(x,t) - p_{wf}(t) = E f_t q_w^2 x + \\ + E \int_0^x \int_0^{x'} \left(q_{hc}^2(x'',t) \frac{\partial f(x'',t)}{\partial x''} - 2 f(x'',t) q_{hc}(x'',t) q_h(x'',t) \right) dx'' dx' \quad (3.24)$$

Para dedução desta equação, a pressão $p_h(0^+,t)$ foi denominada $p_{wf}(t)$ e foi utilizada a condição de contorno em $x = 0^+$:

$$\left(\frac{\partial p_h(x,t)}{\partial x} \right)_{x=0^+} = E f_t q_w^2 \quad (3.25)$$

3.3. Acoplamento Entre as Soluções do Poço e do Reservatório

Para efetuar o acoplamento entre as soluções do poço e do reservatório será adotada a metodologia seguida por Ozkan *et alii*¹⁸.

A condição de continuidade de fluxo requer que a vazão $q_h(x,t)$ da equação (3.9), representativa do reservatório, seja igual à vazão $q_h(x,t)$ da equação (3.24) do poço horizontal. Da mesma maneira para que exista a continuidade das pressões em qualquer posição ao longo do poço horizontal, a pressão $p(x,y,z,t)$ da equação (3.9) deve ser igual à pressão $p_h(x,t)$ da equação (3.24). Logo, pode-se acoplar as equações (3.9) e (3.24) para obter a equação que representa o modelo reservatório/poço horizontal adotado:

$$p(x,y,z,t) - p_{wf}(t) = E f_t q_w^2 x + \\ + E \int_0^x \int_0^{x'} \left(q_{hc}^2(x'',t) \frac{\partial f(x'',t)}{\partial x''} - 2 f(x'',t) q_{hc}(x'',t) q_h(x'',t) \right) dx'' dx' \quad (3.26)$$

Para adimensionalização da equação acima, pode-se definir a condutividade adimensional do poço, C_{hD} , como:

$$C_{hD} = \alpha_3 \frac{r_w^2 A_w}{8 k h (L/2)} = \alpha_3 \frac{\pi r_w^3}{8 k h (L/2)} \quad (3.27)$$

onde, $\alpha_3 = 1$ no Sistema Internacional de Unidades e $9,413 \times 10^{13}$ no Sistema de Unidades de Campo.

O número de Reynolds, R_e , em qualquer posição x do poço horizontal, e o número de Reynolds, R_{et} , na extremidade produtora do poço são definidos como:

$$R_e(x, t) = \alpha_4 \frac{2 r_w \rho_f q_{hc}(x, t)}{\mu A_w} \quad (3.28)$$

$$R_{et} = \alpha_4 \frac{2 r_w \rho_f q_w}{\mu A_w} \quad (3.29)$$

onde, $\alpha_4 = 1$ no Sistema Internacional de Unidades e $9,686 \times 10^{-2}$ no Sistema de Unidades de Campo.

Utilizando as equações (3.27) a (3.29) e as equações (3.10) a (3.17) de adimensionalização das equações do reservatório, pode-se reescrever a equação (3.26) em unidades adimensionais:

$$p_{wD}(t_D) - p_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = \frac{R_{et} f_1 \pi}{16 C_{hD}} \times \left(2 x_D - \int_0^{x_D} \int_0^{x'_D} \frac{D(x''_D, t_D)}{R_{et} f_1} q_{hD}(x''_D, t_D) dx''_D dx'_D \right) \quad (3.30)$$

onde, $p_D(x_D, y_D, z_D, t_D)$ é fornecido pela equação (3.18) e o valor de D pode ser calculado como:

$$D(x_D, t_D) = R_e^2(x_D, t_D) \frac{\partial f(x_D, t_D)}{\partial R_e(x_D, t_D)} + 2 R_e(x_D, t_D) f(x_D, t_D) \quad (3.31)$$

Para o caso de fluxo laminar no interior do poço horizontal, considerado quando $R_{et} \leq 2300$, o valor do fator de fricção será igual a $16/R_e$ e o valor de D será sempre constante e igual a 16. Neste caso, pode-se reescrever a equação (3.30) como:

$$p_{wD}(t_D) - p_D(x_D, y_D, z_D, t_D) = \frac{\pi}{C_{hD}} \left(2 x_D - \int_0^{x_D} \int_0^{x'_D} q_{hD}(x''_D, t_D) dx''_D dx'_D \right) \quad (3.32)$$

Nas equações acima R_{et} e f_t são conhecidos, a partir do instante em que se adote uma correlação para determinação do fator de fricção. Os valores de R_e e de R_{et} podem ser relacionados a partir das equações (3.19), (3.28) e (3.29) pela seguinte expressão:

$$R_e(x_D, t_D) = \frac{R_{et}}{2} \int_{x_D}^2 q_{hD}(x'_D, t_D) dx'_D \quad (3.33)$$

4. SOLUÇÃO NUMÉRICA

A equação (3.30), representativa do modelo poço horizontal/reservatório infinito adotado neste trabalho, pode ser resolvida numericamente com a sua discretização no espaço e no tempo. Neste capítulo serão apresentadas as metodologias adotadas para efetuar estas discretizações e para a resolução dos sistemas de equações lineares (fluxo laminar) e não lineares (fluxo turbulento).

4.1. Discretização no Espaço

Para a discretização do poço horizontal pode-se dividi-lo em M segmentos. Como a maior variação de vazão ocorre nas extremidades do poço, será utilizada a mesma subrotina contida nos trabalhos de Rodriguez²¹ e de Ressurreição²², em que o poço é discretizado de maneira mais refinada nas duas extremidades, e mais grosseiramente no centro, conforme está ilustrado na Figura 4.1.

Foi considerada uma discretização simétrica em relação ao centro do poço, com uma relação entre o maior e o menor bloco de 13. Este valor foi o que melhor se adequou à utilização de um pequeno número de blocos -20-, sem que se obtivessem erros em relação a uma discretização mais refinada.

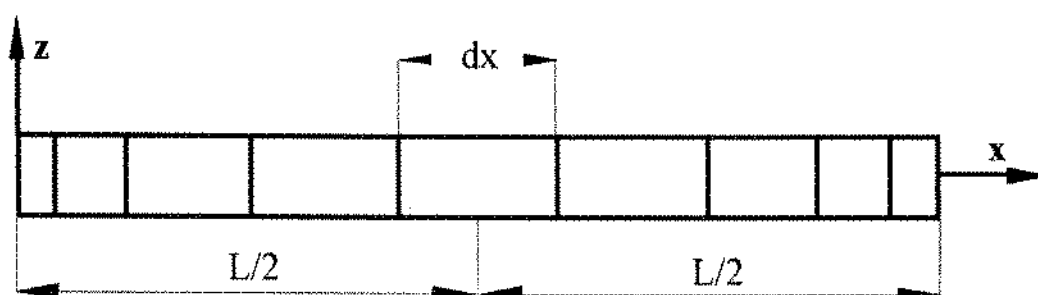


Figura 4.1: Esquema de discretização do poço horizontal

A integral dupla do lado direito da equação (3.30) pode ser resolvida numericamente, utilizando o método dos trapézios, obtendo-se:

$$\int_0^{x_{Dj}} \int_0^{x'_D} \frac{D(x''_D, t_D)}{R_{et} f_t} q_{hD}(x''_D, t_D) dx''_D dx'_D = \sum_{i=1}^j q_{hDi}(t_D) \frac{D_i(t_D)}{R_{et} f_t} dx_{Di} \sum_{l=1}^j dx_{Dl} \quad (4.1)$$

Nesta equação x_{Dj} está localizado no centro do jésimo segmento, enquanto D_i e q_{hDi} são avaliados no centro do iésimo segmento. Substituindo a equação (4.1) na equação (3.30), obtém-se:

$$p_{wD}(t_D) - p_D(x_{Dj}, y_D, z_D, t_D) = \frac{R_{et} f_t \pi}{8 C_{hD}} x_{Dj} + \frac{\pi}{16 C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDi}(t_D) D_i(t_D) dx_{Di} \sum_{l=1}^j dx_{Dl} \right) \quad (4.2)$$

O termo $p_D(x_{Dj}, y_D, z_D, t_D)$ dado pela equação (3.18), pode ser reescrito após a discretização do poço em M segmentos. A integral em x_D desta equação, após a discretização, se transforma em:

$$I = \int_0^2 q_{hD}(x'_D, t'_D) \exp\left(\frac{-(x_{Dj} - x'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dx'_D = \sum_{i=1}^M \int_{x_{Di}}^{x_{Di+1}} q_{hDi}(t'_D) \exp\left(\frac{-(x_{Dj} - x'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dx'_D \quad (4.3)$$

onde, x_{Di} e x_{Di+1} são as extremidades do iésimo segmento.

Efetuada a integral em x_D da equação (4.3):

$$I = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t'_D) \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x_{Dj} - x_{Di}}{2\sqrt{t_D - t'_D}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_{Dj} - x_{Di+1}}{2\sqrt{t_D - t'_D}}\right) \right\} \sqrt{\pi} \sqrt{t_D - t'_D} \quad (4.4)$$

Substituindo a equação (4.4) na equação original (3.18) obtém-se o valor de p_D :

$$p_D(x_{Dj}, y_D, z_D, t_D) = \int_0^{t_D} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t'_D) G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t_D - t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t_D - t'_D}} \quad (4.5)$$

onde a função G_i é dada por:

$$G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t_D - t'_D) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x_{Dj} - x_{Di}}{2 \sqrt{t_D - t'_D}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_{Dj} - x_{Di+1}}{2 \sqrt{t_D - t'_D}} \right) \right\} \exp \left(\frac{-y_D^2}{4(t_D - t'_D)} \right) \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 L_D^2 (t_D - t'_D)) \cos(n \pi z_D L_D) \cos(n \pi z_{wD} L_D) \right] \quad (4.6)$$

4.2. Discretização no Tempo

O objetivo deste trabalho é voltado à interpretação de testes, que exige investigar a solução para um período muito grande de tempo. Por esta razão o tempo será discretizado logaritmicamente com um número constante de intervalos em cada ciclo logarítmico. Foram utilizados 5 intervalos de tempo por ciclo logarítmico, obtendo-se resultados satisfatórios para a análise do comportamento da solução com o tempo.

A equação (4.5) pode ser discretizada no tempo como se segue:

$$p_D(x_{Dj}, y_D, z_D, t_{DN}) = \sum_{k=1}^N \int_{t_{Dk-1}}^{t_{Dk}} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t'_D) G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t_{DN} - t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t_{DN} - t'_D}} \quad (4.7)$$

Considerando q_{hDi} constante no intervalo de tempo (t_{Dk-1}, t_{Dk}) a equação (4.7) pode ser reescrita, após a separação do termo correspondente à $N_{ésima}$ vazão, como:

$$p_D(x_{Dj}, y_D, z_D, t_{DN}) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_{t_{DN-1}}^{t_{DN}} G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t_{DN} - t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t_{DN} - t'_D}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{Dk}) \int_{t_{Dk-1}}^{t_{Dk}} G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t_{DN} - t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t_{DN} - t'_D}} \quad (4.8)$$

Efetuada uma mudança de variável no tempo ($u = t_{DN} - t'_D$) na equação (4.8), obtém-se:

$$p_D(x_{Dj}, y_D, z_D, t_{DN}) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_0^{t_{DN} - t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{Dk}) \int_{t_{DN} - t_{Dk}}^{t_{DN} - t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} \quad (4.9)$$

Substituindo a equação (4.9) na equação (4.2), obtém-se a equação representativa do modelo reservatório/poço horizontal, discretizada no tempo e no espaço:

$$p_{wD}(t_{DN}) - \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_0^{t_{DN} - t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} +$$

$$- \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{Dk}) \int_{t_{DN} - t_{Dk}}^{t_{DN} - t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, y_D, z_D, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} = \frac{R_{et} f_t \pi}{8 C_{hD}} x_{Dj} +$$

$$- \frac{\pi}{16 C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDi}(t_{DN}) D_i(t_{DN}) dx_{Di} \sum_{l=i}^j dx_{Dl} \right) \quad (4.10)$$

onde a função G_i é dada pela equação (4.6) e D_i pela equação (3.31).

4.3. Solução do Sistema de Equações

A equação (4.10) deve ser escrita, em cada intervalo de tempo, para cada $x_D = x_{Dj}$ ($j=1, \dots, M$), obtendo-se M equações com $M+1$ incógnitas ($q_{hDi}(t_{DN})$, $i=1, \dots, M$ e $p_{wD}(t_{DN})$).

Como a soma das vazões que entram no poço é igual à vazão total produzida, estabelece-se a equação adicional para a resolução do sistema:

$$\sum_{i=1}^M q_{hi}(t_N) dx_i = q_w \quad (4.11)$$

ou, na sua forma adimensionalizada:

$$\sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) dx_{Di} = 2 \quad (4.12)$$

Como as vazões nos tempos $k=1, \dots, N-1$ são conhecidas, a solução do sistema composto pelas equações (4.10) e (4.12) requer somente a solução de uma matriz que representa a discretização no espaço, para cada incremento de tempo.

Se o fluxo for laminar, D_i é uma constante igual a 16, e pode-se resolver um sistema linear de equações em cada intervalo de tempo.

Para o caso de fluxo turbulento no interior do poço horizontal, a equação (4.10) não é linear porque D_i , dado pela equação (3.31), é uma função de R_e e portanto é uma função de q_{hDi} (veja equação (3.33)) em cada intervalo de tempo. Neste caso torna-se necessária a utilização de um método iterativo para a resolução do sistema não linear.

As integrais que aparecem na equação (4.10) serão avaliadas numericamente. Para isto é necessário o estabelecimento de formas aproximadas para tempos curtos, pois os integrandos não são definidos para $t_D=0$.

4.3.1. Aproximação Para Tempos Curtos

Para tempos curtos pode-se fazer a seguinte aproximação¹⁹:

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x_{Dj} - x_{Di}}{2\sqrt{t'_D}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_{Dj} - x_{Di+1}}{2\sqrt{t'_D}}\right) = \begin{cases} 2 & (\text{se } i = j) \\ 0 & (\text{se } i \neq j) \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $E_i(u)$ é a função integral exponencial do argumento u e r_D é definido como a distância radial adimensional medida a partir do eixo horizontal do poço:

$$r_D = \sqrt{(z_D - z_{wD})^2 + y_D^2} \quad (4.19)$$

Se o meio poroso for isotrópico, a equação (4.18) pode ser escrita como:

$$\Pi = \frac{h}{2L} E_i \left(\frac{r_D^2}{4t_{D1}} \right) \quad (4.20)$$

A equação (4.20) também é a solução da linha fonte para um poço vertical em um reservatório infinito isotrópico com espessura L (comprimento do poço horizontal).

Por analogia com a solução para o poço vertical, pode-se concluir que a resposta prevista pela equação (4.18), pode ser aproximada para um poço horizontal de raio finito quando^{14,19}:

$$t_{D1} \geq 25 \left[(z_D - z_{wD})^2 + y_D^2 \right] \quad (4.21)$$

Segundo Ozkhan *et alii*¹⁴, a limitação para o tempo adimensional dada pela equação (4.21) é satisfeita para a maioria das aplicações práticas. Os autores determinaram os valores da pressão adimensional pela equação (4.18) e verificaram que a mesma não varia mais do que 0.005 ao longo da circunferência do poço definida pela equação (4.19), inclusive para tempos longos. Ozkhan *et alii* consideraram o centro da circunferência localizado em $y_D = z_D - z_{wD} = 0$.

Este resultado sugere que se defina r_{wD} pela equação (4.19), e que a resposta de pressão seja calculada em $r_D = r_{wD}$. Pode-se considerar, como será feito no presente trabalho: $y_D = 0$ e $z_D = z_{wD} + r_{wD}$, ou qualquer outro par de pontos que satisfaça à equação (4.19).

O valor de r_{wD} , raio equivalente adimensional, considerando o efeito da anisotropia, é dado, conforme mostrado no Apêndice C, por:

$$r_{wD} = \frac{r_w}{2(L/2)} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k_z}} \right) \quad (4.22)$$

ou, por conveniência, pode-se trabalhar com o raio adimensional aqui denominado r_{wzD} ($r_{wzD} = r_{wD} \times L_D$), definido por:

$$r_{wzD} = \frac{r_w}{2h} \left(1 + \sqrt{\frac{k_z}{k}} \right) \quad (4.23)$$

Utilizando a definição de r_{wzD} a equação (4.18) transforma-se em:

$$H = \frac{1}{4L_D} E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4t_{D1}} \right) \quad (4.24)$$

Finalmente, pode-se introduzir a aproximação dada pela equação (4.24) na equação (4.10), o que resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} p_{wD}(t_{DN}) - \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \frac{1}{4L_D} E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4(t_{DN} - t_{DN-1})} \right) + \\ - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{Dk}) \frac{1}{4L_D} \left[E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4(t_{DN} - t_{Dk-1})} \right) - E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4(t_{DN} - t_{Dk})} \right) \right] = \\ = \frac{R_{et} f_t \pi}{8 C_{hD}} x_{Dj} - \frac{\pi}{16 C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDj}(t_{DN}) D_i(t_{DN}) dx_{Di} \sum_{l=1}^j dx_{Dl} \right) \quad (4.25) \end{aligned}$$

Devido à aproximação feita pela equação (4.13), os termos da expressão acima em que aparece a função integral exponencial serão nulos quando $i \neq j$.

4.3.2. Sistema Linear de Equações

No caso de fluxo laminar no interior do poço horizontal a equação (4.10) pode ser reescrita, utilizando a equação (3.32), como:

$$\begin{aligned}
p_{wD}(t_{DN}) - \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_0^{t_{DN}-t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} + \\
+ \frac{\pi}{C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDi}(t_{DN}) dx_{Di} \sum_{l=1}^j dx_{Dl} \right) = \\
= \frac{2\pi}{C_{hD}} x_{Dj} + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{Dk}) \int_{t_{DN}-t_{Dk}}^{t_{DN}-t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

onde a função G_i é dada por:

$$\begin{aligned}
G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x_{Dj} - x_{Di}}{2\sqrt{t'_D}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_{Dj} - x_{Di+1}}{2\sqrt{t'_D}} \right) \right\} \\
\times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 L_D^2 t'_D) \cos(n \pi (z_{wD} L_D + r_{wzD})) \cos(n \pi z_{wD} L_D) \right] \quad (4.27)
\end{aligned}$$

A resolução do sistema linear de equações, formado pela equação (4.26) escrita para os M blocos do poço e pela equação (4.12), fornece para cada incremento de tempo, os valores de q_{hDi} , $i=1, \dots, M$ e o valor de p_{wD} .

4.3.3. Sistema não Linear de Equações

Para o caso de fluxo turbulento no interior do poço horizontal (aqui considerado para $Re_t > 2300$), o método de Newton será utilizado para resolver o sistema não linear de equações, nas incógnitas q_{hDi} , $i=1, \dots, M$ e p_{wD} . Este sistema não linear é obtido, para cada intervalo de tempo, com a utilização em conjunto da equação (4.10), aplicada a todos os blocos que formam o poço, e da equação (4.12).

O esquema iterativo de Newton é gerado a partir da expansão das funções de resíduo das equações citadas acima em torno da iteração (v) , com a retenção dos termos de menor ordem.

As expressões para as funções resíduo, obtidas a partir das equações (4.10) e (4.12), são dadas por:

$$\begin{aligned}
 R_j = & p_{wD}(t_{DN}) - \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_0^{t_{DN}-t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} + \\
 & - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{Dk}) \int_{t_{DN}-t_{Dk}}^{t_{DN}-t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} - \frac{R_{ei} f_t \pi}{8 C_{hD}} x_{Dj} + \\
 & + \frac{\pi}{16 C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDi}(t_{DN}) D_i(t_{DN}) dx_{Di} \sum_{l=1}^j dx_{Dl} \right) \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

$$R = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) dx_{Di} - 2 \quad (4.29)$$

As expansões das funções resíduo dadas pelas equações (4.28) e (4.29) em torno da iteração (v), com a retenção dos termos de menor ordem, podem ser escritas, para cada tempo adimensional t_{DN} , como:

$$R_j^{v+1} = R_j^v + \frac{\partial R_j^v}{\partial p_{wD}} \delta p_{wD} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial R_j^v}{\partial q_{hDi}} \delta q_{hDi} = 0, \quad j = 1, \dots, M \quad (4.30)$$

$$R^{v+1} = R^v + \frac{\partial R^v}{\partial p_{wD}} \delta p_{wD} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial R^v}{\partial q_{hDi}} \delta q_{hDi} = 0 \quad (4.31)$$

onde,

- R_j representa o resíduo dado pela equação (4.28), para cada bloco j .
- R representa o resíduo dado pela equação (4.29).
- δp_{wD} e δq_{hDi} , $i=1, \dots, M$ formam o vetor das diferenças das soluções entre duas iterações sucessivas, dado por $\delta x = x^{v+1} - x^v$, x igual a p_{wD} ou q_{hDi} .

- $\partial R_j^v / \partial x$ e $\partial R^v / \partial x$ representam a matriz Jacobiana, J, que é formada pelas derivadas das funções resíduo em relação às variáveis primárias p_{wD} e q_{hDi} , $i=1,...,M$.

O sistema a ser resolvido pode ser escrito genericamente como:

$$J^v \vec{\delta X} = -\vec{R}^v \tag{4.32}$$

Na Figura 4.2 pode-se observar a representação esquemática da matriz Jacobiana, J.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\partial R_1}{\partial q_{hD1}} & \frac{\partial R_1}{\partial q_{hD2}} & \frac{\partial R_1}{\partial q_{hD3}} & \dots & \frac{\partial R_1}{\partial q_{hDM}} \\ 1 & \frac{\partial R_2}{\partial q_{hD1}} & \frac{\partial R_2}{\partial q_{hD2}} & \frac{\partial R_2}{\partial q_{hD3}} & \dots & \frac{\partial R_2}{\partial q_{hDM}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \frac{\partial R_M}{\partial q_{hD1}} & \frac{\partial R_M}{\partial q_{hD2}} & \frac{\partial R_M}{\partial q_{hD3}} & \dots & \frac{\partial R_M}{\partial q_{hDM}} \\ 0 & dx_{D1} & dx_{D2} & dx_{D3} & \dots & dx_{DM} \end{bmatrix}$$

Figura 4.2: Matriz Jacobiana para fluxo turbulento no poço horizontal

Para a determinação da matriz Jacobiana, é necessário derivar as equações (4.28) e (4.29) em relação às variáveis primárias. Para evitar a introdução de erros inerentes à utilização de derivadas numéricas, o valor de $(\partial D_1 / \partial q_{hDi})$ deve ser calculado analiticamente a partir da derivada da equação (3.31). Por esta razão, a correlação de Jain²³ foi escolhida para o cálculo do fator de fricção. Esta correlação fornece o valor do fator de fricção diretamente a partir de um dado número de Reynolds (equação (4.33)), com pequeno erro em relação às correlações tradicionalmente utilizadas, como a correlação de Colebrook e White²³.

$$4f = \left\{ 1.14 - 2 \log \left[\frac{\epsilon}{d} + 21.25 (R_e)^{-0.9} \right] \right\}^{-2} \quad (4.33)$$

onde, ϵ é a rugosidade e d o diâmetro do poço horizontal.

Outras correlações podem ser utilizadas no modelo, conquanto computem explicitamente a dependência com a vazão.

4.3.4. Solução Aproximada

A resolução dos sistemas de equações, mesmo para o caso de fluxo laminar, envolve um excessivo tempo computacional. Por este motivo, foi verificada a validade do procedimento de resolução sugerido por Souza⁹, e discutido no Apêndice A do presente trabalho. Souza admite que, para cada tempo adimensional, a vazão é uma função apenas da posição (x_D). Adotada esta aproximação a equação (4.10) transforma-se em:

$$\begin{aligned} p_{wD}(t_{DN}) - \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_0^{l_{DN}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} = \\ = \frac{R_{et} f_t \pi}{8 C_{hD}} x_{Dj} - \frac{\pi}{16 C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDi}(t_{DN}) D_i(t_{DN}) dx_{Di} \sum_{l=1}^j dx_{Dl} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Enquanto é válida a aproximação para tempos curtos da equação (4.25), os cálculos são rápidos. Assim, em termos práticos, a aproximação dada pela equação (4.34) foi utilizada para tempos maiores que o tempo considerado como limite para a validade da aproximação de tempo curto (equação (4.16)).

A utilização da equação (4.34) reduziu, na média, em cerca de dez vezes o tempo computacional necessário para a resolução dos sistemas dos casos estudados.

5. EFEITOS DE ESTOCAGEM E DE PELÍCULA

A solução do problema deste trabalho, com a inclusão dos efeitos de estocagem e de película, pode ser obtida a partir da solução básica para a vazão total de produção constante, para qualquer posição do poço horizontal.

Neste capítulo serão abordados: 1) a metodologia adotada para a inclusão dos efeitos de estocagem e de película, 2) a modelagem do dano de formação em poços horizontais e 3) as aproximações assintóticas obtidas para a solução deste trabalho.

5.1. Efeito de Película

Para o poço horizontal, a queda adicional de pressão devida ao efeito de película é dada por:

$$\Delta p_s(x,t) = \frac{q_h(x,t) \mu}{\alpha_2 \sqrt{k k_z}} S \quad (5.1)$$

onde, $\sqrt{k k_z}$ é a permeabilidade média e S é o fator de película.

A queda de pressão dada pela equação (5.1) é diretamente proporcional à vazão, que não é uniformemente distribuída quando é considerada a queda de pressão ao longo do poço horizontal.

Adimensionalizando a equação (5.1) de acordo com as variáveis adimensionais definidas no Capítulo 3 (equações (3.10) a (3.17)) obtém-se:

$$p_{Ds}(x_D, t_D) = \frac{q_{hD}(x_D, t_D)}{2 L_D} S \quad (5.2)$$

Os modelos de fluxo do poço e do reservatório podem agora ser acoplados, considerando que a queda de pressão no poço horizontal seja igual à queda de pressão no reservatório, somada à queda de pressão devida ao efeito de película.

A queda adimensional de pressão no reservatório, com a consideração do efeito de película, é obtida a partir da equação (5.2) e da equação (4.9) - já incorporados os valores de y_D e z_D definidos no item 4.3.1:

$$p_D(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, S, t_{DN}) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(S, t_{DN}) \int_0^{t_{DN} - t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(S, t_{Dk}) \int_{t_{DN} - t_{Dk}}^{t_{DN} - t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} + \frac{S}{2 L_D} q_{hDj}(S, t_{DN}) \quad (5.3)$$

onde a função G_i é dada pela equação (4.27).

Utilizando o valor de p_D da equação (5.3), a equação (4.10) modifica-se para:

$$p_{wD}(t_{DN}) - \sum_{i=1}^M q_{hDi}(S, t_{DN}) \int_0^{t_{DN} - t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} +$$

$$- \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(S, t_{Dk}) \int_{t_{DN} - t_{Dk}}^{t_{DN} - t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} - \frac{S}{2 L_D} q_{hDj}(S, t_{DN}) =$$

$$= \frac{R_{et} f_t \pi}{8 C_{hD}} x_{Dj} - \frac{\pi}{16 C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDi}(S, t_{DN}) D_i(t_{DN}) dx_{Di} \sum_{l=i}^j dx_{Dl} \right) \quad (5.4)$$

5.2. Efeito de Estocagem

Utilizando-se o princípio de Duhamel²⁴, a solução com efeitos de estocagem pode ser escrita, genericamente, como:

$$\Delta p_e(x, y, z, C, S, t) = - \int_0^t \frac{q_{res}(x, C, S, t')}{q_w} \frac{\partial \Delta p(x, y, z, S, t - t')}{\partial t'} dt' \quad (5.5)$$

onde,

- Δp_e : queda de pressão com efeitos de estocagem e de película

- q_{res} : vazão na face da formação com efeitos de película e de estocagem
- q_w : vazão medida na superfície, em condições de fundo (constante)
- Δp : queda de pressão com efeito de película

A razão q_{res}/q_w é obtida como uma função do coeficiente de estocagem, C , após um balanço de massa no poço, em que se considera a compressibilidade do fluido da coluna constante:

$$\frac{q_{res}(x, C, S, t')}{q_w} = \frac{q_h(x, S, t')}{q_w} L - \frac{C}{q_w} \frac{\partial \Delta p_e(x, y, z, C, S, t')}{\partial t'} \quad (5.6)$$

Adimensionalizando a equação (5.6):

$$\frac{q_{res}(x_D, C_D, S, t'_D)}{q_w} = q_{hD}(x_D, S, t'_D) - C_D \frac{\partial p_{eD}(x_D, y_D, z_D, C_D, S, t'_D)}{\partial t'_D} \quad (5.7)$$

onde,

$$C_D = \frac{C}{\alpha_s \phi h c_t (L/2)^2} \quad (5.8)$$

e $\alpha_s = 2\pi$ no Sistema Internacional de Unidades e 1,119 no Sistema de Unidades de Campo.

Em $x_D = 0$ a vazão total é constante e igual a q_w e a equação (5.7) transforma-se em:

$$\frac{q_{res}(x_D = 0, C_D, S, t'_D)}{q_w} = 1 - C_D \frac{\partial p_{eD}(x_D = 0, y_D, z_D, C_D, S, t'_D)}{\partial t'_D} \quad (5.9)$$

Para simplificar a notação será convencionado que:

- $p_{eD}(x_D, t_D) = p_{eD}(x_D, y_D, z_D, C, S, t_D)$
- $p_D(x_D, t_D) = p_D(x_D, y_D, z_D, S, t_D)$
- $p_{ewD}(t_D) = p_{eD}(x_D = 0, y_D, z_D, C, S, t_D)$
- $p_{wD}(t_D) = p_D(x_D = 0, y_D, z_D, S, t_D)$

Substituindo a equação (5.7) na equação (5.5), e adimensionalizando as demais variáveis, obtém-se:

$$p_{eD}(x_D, t_D) = - \int_0^{t_D} \left[q_{hD}(x_D, S, t'_D) - C_D \frac{\partial p_{eD}(x_D, t'_D)}{\partial t'_D} \right] \frac{\partial p_D(x_D, t_D - t'_D)}{\partial t'_D} dt'_D \quad (5.10)$$

Quando $x_D = 0$ obtém-se, com a utilização da equação (5.9):

$$p_{ewD}(t_D) = - \int_0^{t_D} \left[1 - C_D \frac{\partial p_{ewD}(t'_D)}{\partial t'_D} \right] \frac{\partial p_{wD}(t_D - t'_D)}{\partial t'_D} dt'_D \quad (5.11)$$

A equação (5.10), ou a equação (5.11), pode ser discretizada no tempo para a determinação da equação da pressão com efeito de estocagem. As deduções destas soluções encontram-se no Apêndice B.

5.3. Modelagem do Dano de Formação

A forma e a distribuição do dano de formação ao redor do poço horizontal irão refletir, dentre outros fatores, a anisotropia e o tempo de exposição da formação aos fluidos de perfuração.

Durante a perfuração, a penetração do filtrado de lama provavelmente gerará um cone truncado danificado, com a maior base próxima à seção vertical do poço. A base deste cone será radial, no caso de formações isotrópicas ($\sqrt{k/k_z} = 1$), e elíptica, no caso de formações anisotrópicas. Frick e Economides²⁵ mostraram com a utilização de um Simulador Numérico, a ocorrência deste cone de dano (com base elíptica), para um filtrado base água.

Assumindo uma extensão uniforme do dano de formação ao redor do poço, o fator de película definido por Hawkins²⁶ é dado por:

$$S = \left(\frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \left(\frac{r_s}{r_w} \right) \quad (5.12)$$

A queda de pressão devida ao dano de formação, calculada com a utilização deste fator de película, seria causada por uma região cilíndrica ao redor do poço, de raio r_s , e de permeabilidade alterada k_s . Para dedução da equação (5.12) foi admitido que, na zona danificada, o fluxo de fluidos se dá em regime permanente.

Uma observação cuidadosa da equação acima nos mostra que o fator de película é mais afetado pela permeabilidade da zona alterada do que pelo raio de invasão. Apesar desta constatação, o cálculo do fator de película para o nosso modelo será analisado a seguir.

Para inclusão do efeito da anisotropia no cálculo do fator de película, pode-se considerar o fluxo de fluidos no reservatório na direção y-z, que é o que ocorre efetivamente para tempos curtos. Considerando ainda os eixos do tensor permeabilidade paralelos aos eixos y e z, a equação diferencial que governa o fluxo de fluidos no meio poroso, em regime permanente, pode ser escrita como:

$$k \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (5.13)$$

Efetuada as seguintes transformações de variáveis:

$$y' = y \quad (5.14a)$$

$$z' = z \sqrt{\frac{k}{k_z}} \quad (5.14b)$$

a equação (5.13) transforma-se em:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z'^2} = 0 \quad (5.15)$$

e passa a descrever o fluxo de fluidos em uma formação isotrópica.

A equação (5.15) foi resolvida por Peaceman²⁷, com a seguinte condição de contorno:

$$p = p_{wf} \quad \text{em} \quad r = (y^2 + z^2)^{1/2} = r_w \quad (5.16)$$

ou, após as transformações dadas pelas equações (5.14a) e (5.14b):

$$p = p_{wf} \quad \text{em} \quad r_w^2 = y'^2 + \frac{k_z}{k} z'^2 \quad (5.17)$$

Como a condição de contorno dada pela equação (5.17) é especificada em uma elipse e não em um círculo, a solução da equação (5.15) no plano y' - z' não é radial mas, as curvas de isopressão são uma família de elipses concêntricas. Devido ao fato de estarmos trabalhando com uma mudança de coordenadas diferente da utilizada por Peaceman, a dedução detalhada da solução é mostrada no Apêndice C, e é dada por:

$$p = p_{wf} + \frac{q_w \mu}{\alpha_2 \sqrt{k k_z} L} \ln \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_w} \right) \quad (5.18)$$

onde $\bar{r}_w$ é o raio equivalente do poço:

$$\bar{r}_w = \frac{r_w}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k_z}} \right) \quad (5.19)$$

Para dedução desta equação, a elipse que representa a isobárica de pressão no poço no plano y' - z' é aproximada por um círculo. O erro introduzido por esta aproximação aumenta com o crescimento da anisotropia.

Na realidade, conforme mostrado no Apêndice C, no plano y' - z' a isobárica do poço é uma elipse e vai se aproximando de círculos à medida que a distância ao poço aumenta. Isto corresponderia, no plano y - z , a uma isobárica circular no poço (atendendo à condição de contorno) que vai se tornando elíptica com o aumento da distância ao poço.

O valor do fator de película para a formação anisotrópica será calculado através da seguinte expressão, deduzida no Apêndice C:

$$S = \left(\frac{\sqrt{k k_z}}{\left(\sqrt{k k_z} \right)_s} - 1 \right) \ln \left(\frac{a}{r_w} \right) \quad (5.20)$$

onde a é o valor do semi-eixo maior da elipse da zona danificada.

Para cálculo do fator de película a partir da equação (5.20) duas hipóteses vão ser assumidas:

1. o valor da anisotropia não varia com a invasão do filtrado, ou seja,

$$\frac{k}{k_z} = \left(\frac{k}{k_z} \right)_s \quad \text{ou,} \quad \frac{\sqrt{k k_z}}{\left(\sqrt{k k_z} \right)_s} = \frac{k}{k_s} \quad (5.21)$$

Utilizando esta hipótese, a equação (5.20) simplifica-se para:

$$S = \left(\frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \left(\frac{a}{r_w} \right) \quad (5.22)$$

2. os eixos da elipse danificada variam linearmente com a distância, conforme o esquema da Figura 5.1.

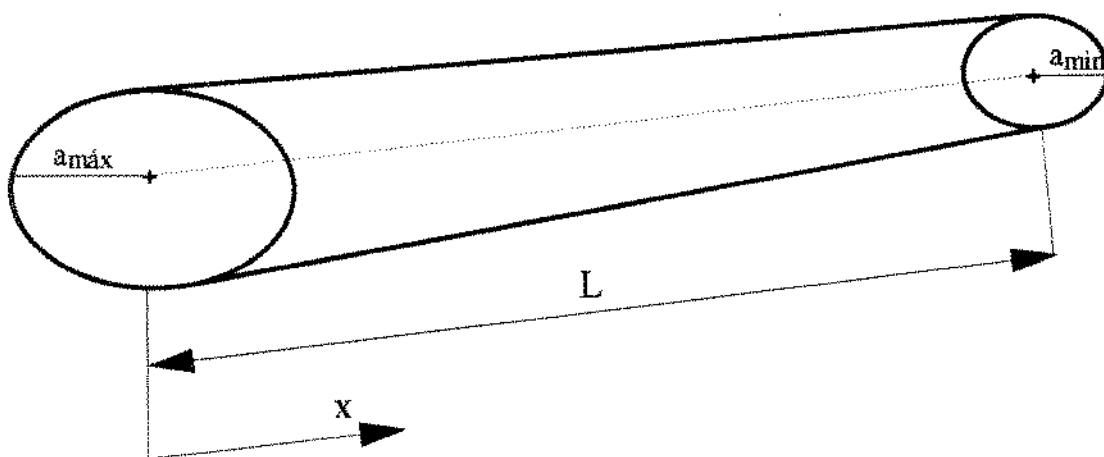


Figura 5.1: Representação Esquemática do cone truncado elíptico danificado.

Desconsiderando as mudanças no tipo de formação que possam ocorrer ao longo do poço, a hipótese 2 é bastante razoável. Todos os resultados de testes de filtração dinâmica em escala real analisados por Ferguson e Klotz³⁰ mostram que a perda de fluido atinge um equilíbrio após um tempo muito pequeno. Estes resultados foram obtidos com a utilização de vários tipos de fluidos de perfuração, taxas de circulação e diâmetros de poço.

A partir do volume de filtrado em uma determinada posição ao longo do poço, pode-se determinar o valor do semi-eixo maior da elipse, considerando que a relação entre os seus semi-eixos seja ditada pela raiz quadrada da anisotropia, como ocorre para o raio de drenagem.

Conhecendo os valores máximo ($x=0$) e mínimo ($x=L$) de perda de filtrado, pode-se determinar os valores dos semi-eixos maiores da elipse máxima ($a_{\text{máx}}$) e da elipse mínima ($a_{\text{mín}}$) do cone truncado elíptico representado na Figura 5.1. Conhecidos estes valores determina-se, com a utilização da hipótese 2, o valor do semi eixo maior da elipse (a) em qualquer posição (x) ao longo do poço:

$$a(x) = \frac{(a_{\text{mín}} - a_{\text{máx}})}{L} x + a_{\text{máx}} \quad (5.23)$$

O valor de a pode ser utilizado na equação (5.22) para cálculo do fator de película em qualquer posição ao longo do poço. Para a inclusão de um fator de película variável com a posição, a equação (5.4) é modificada para:

$$\begin{aligned} p_{wD}(t_{DN}) - \sum_{i=1}^M q_{hDi}(S_i, t_{DN}) \int_0^{t_{DN}-t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} + \\ - \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(S_i, t_{Dk}) \int_{t_{DN}-t_{Dk}}^{t_{DN}-t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} - \frac{S_j}{2L_D} q_{hDj}(S_j, t_{DN}) = \\ = \frac{R_{et} f_t \pi}{8 C_{hD}} x_{Dj} - \frac{\pi}{16 C_{hD}} \left(\sum_{i=1}^j q_{hDi}(S_i, t_{DN}) D_i(t_{DN}) dx_{Di} \sum_{l=1}^j dx_{Dl} \right) \quad (5.24) \end{aligned}$$

onde S_j é o valor do fator de película no centro do bloco j .

5.4. Aproximações Assintóticas

As aproximações assintóticas são de grande importância na análise de testes de pressão em poços de petróleo por permitirem, após uma análise dos padrões de fluxo registrados, a determinação de vários parâmetros do reservatório.

A seguir serão mostradas as aproximações assintóticas obtidas para tempos curtos, intermediários e longos.

5.4.1. Solução para Tempos Curtos

A pressão adimensional em qualquer posição do poço é dada pela equação (4.5):

$$p_D(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_D) = \int_0^{t_D} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t'_D) G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_D - t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t_D - t'_D}} \quad (4.5)$$

onde a função G_i é dada pela equação (4.27).

Na equação (4.5) os valores de q_{hDi} são obtidos com a solução do sistema formado pelas equações (4.10) e (4.12).

Admitindo que para cada t_D dado, q_{hDi} seja apenas uma função de x_D , e não de x_D e de $t_D - t'_D$ (veja item 4.3.4), a equação (4.5), após uma mudança de variáveis, pode ser escrita como:

$$p_D(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_D) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_D) \int_0^{t_D} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} \quad (5.25)$$

Conforme mostrado no Capítulo 4 (item 4.3.1), para tempos menores do que o tempo definido pela equação (4.16), e maiores do que o tempo dado pela equação (4.21), a integral no tempo da equação acima pode se aproximada como:

$$\int_0^{t_D} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} = \frac{1}{4L_D} E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4 t_D} \right) \quad (4.24)$$

onde r_{wzD} é dado pela equação (4.23).

Substituindo a equação (4.24) na equação (5.25), obtém-se:

$$p_D(r_{wzD}, t_D) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_D) \frac{1}{4 L_D} E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4 t_D} \right) \quad (5.26)$$

Como foi discutido por Gringarten *et alii*⁵, a distribuição de vazões para tempos curtos é uniforme. Este resultado foi obtido com o uso de Simulador Numérico para fraturas de condutividade infinita. Para o modelo adotado no presente trabalho, pode-se utilizar esta aproximação para a maioria das aplicações práticas, desde que a vazão de produção não seja muito grande (veja Capítulo 6).

Neste caso, considerando a vazão uniforme, a equação (5.26) transforma-se em:

$$p_D(r_{wzD}, t_D) = \frac{1}{4 L_D} E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4 t_D} \right) \quad (5.27)$$

Pode-se introduzir a seguinte aproximação com erro menor do que 1%²⁸:

$$E_i(u) = -\gamma - \ln(u) \quad \text{para } u < 0,0025 \quad (5.28)$$

onde γ é a constante de Euler ($\gamma \cong 0,5772$).

Com esta aproximação a equação (5.27) pode ser reescrita como:

$$p_D(r_{wzD}, t_D) = \frac{1}{4 L_D} \left[-\gamma - \ln \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4 t_D} \right) \right] \quad (5.29)$$

ou, no Sistema de Unidades de Campo:

$$p_i - p_{wf}(t) = \frac{162,6 q_w \mu}{\sqrt{k k_z} L} \left\{ \log \left(\frac{\sqrt{k k_z} t}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 3,223 - 2 \log \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt[4]{\frac{k}{k_z}} + \sqrt[4]{\frac{k_z}{k}} \right) \right] \right\} \quad (5.30)$$

Em alguns artigos^{8,15}, em que é feita esta mesma aproximação, o último termo da equação acima não aparece. Isto ocorreria, no nosso modelo, se ao invés de ter-se utilizado o raio efetivo segundo a equação (4.23), tivesse sido utilizado o raio efetivo de Prats para fraturas²⁹, definido por:

$$r_{wD} = \frac{r_w}{L/2} \sqrt[4]{\frac{k_z}{k}} \quad (5.31)$$

Com a utilização deste raio equivalente, o último termo da equação (5.30) desapareceria.

Incluindo o fator de película na equação (5.30), esta pode ser reescrita como:

$$p_i - p_{wf}(t) = \frac{162,6 q_w \mu}{\sqrt{k k_z} L} \left\{ \log \left(\frac{\sqrt{k k_z} t}{\phi \mu c_t r_w^2} \right) - 3,223 + 0,8686 S - 2 \log \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt[4]{\frac{k}{k_z}} + \sqrt[4]{\frac{k_z}{k}} \right) \right] \right\} \quad (5.32)$$

Neste regime de fluxo radial o poço horizontal comporta-se como um poço vertical completamente penetrante em uma formação de espessura L . Este regime termina quando o efeito do limite superior, ou inferior do reservatório é atingido. É de curta duração, a menos que a formação seja muito espessa, ou que a permeabilidade vertical seja muito menor do que a horizontal.

Desde que não haja influência da estocagem do poço e que o valor de L seja conhecido, a análise especializada dos dados de pressão deste período de fluxo fornece o valor da média geométrica das permeabilidades vertical e horizontal ($\sqrt{k k_z}$). Para o cálculo do fator de película, S , se o valor da anisotropia não for conhecido, o último termo da equação (5.32) pode ser desprezado, já que normalmente assume valores pequenos.

5.4.2. Solução para Tempos Intermediários

Após o regime de fluxo radial inicial, desenvolve-se um regime de fluxo linear no

reservatório. Este regime ocorrerá se o poço horizontal for suficientemente longo comparado à espessura do reservatório, ou seja, desenvolver-se-á quando a pressão atingir os limites verticais do reservatório.

O comportamento da pressão é similar ao de poços hidráulicamente fraturados durante os tempos curtos, ou seja, é proporcional à raiz quadrada do tempo.

Para determinar esta aproximação assintótica pode-se desprezar, na equação da função G_i (equação (4.27)), os termos dependentes de z , que serão determinantes apenas do pseudo fator de película na direção z .

Supondo que seja válida a aproximação para os termos dependentes de x da função G_i (equação (4.13)), a expressão para a pressão adimensional simplifica-se para:

$$p_D(t_D) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_D) \int_0^{t_D} 2 \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_D) \sqrt{\pi t_D} \quad (5.33)$$

Se, como no caso do regime de fluxo radial inicial, considerar-se a distribuição de vazões uniforme ao longo do poço horizontal, a equação (5.33) transforma-se em:

$$p_D(t_D) = \sqrt{\pi t_D} \quad (5.34)$$

A equação (5.34) pode ser escrita no Sistema de Unidades de Campo, incluindo o fator de película, S , e o pseudo fator de película, S_z , como:

$$p_i - p_{wf}(t) = \frac{8,128 q_w}{2 (L/2) h} \sqrt{\frac{\mu t}{k \phi c_t}} + \frac{141,2 q_w \mu}{k h} S_z + \frac{141,2 q_w \mu}{\sqrt{k k_z} L} S \quad (5.35)$$

O valor do pseudo fator de película obtido por Kuchuck *et alii*¹², cuja solução para a condição de contorno de condutividade infinita é obtida como a média das pressões para fluxo uniforme ao longo do poço, é dado por:

$$S_z \approx -\frac{1,1513}{L_D} \log[\pi 2 r_{wzD} \sin(\pi z_{wD} L_D)] \quad (5.36)$$

Este valor do pseudo fator de película vai se tornando desprezível com o aumento do comprimento adimensional do poço, L_D .

5.4.3. Solução para Tempos Longos

Segundo Gringarten *et alii*⁵, para o caso de fraturas verticais de condutividade infinita, foi observado que, para tempos longos, a distribuição de vazões ao longo da fratura se mantém constante. Esta conclusão foi obtida com a utilização de simulação numérica. Souza⁹ chegou analiticamente a esta mesma conclusão, para poços horizontais de condutividade infinita.

Utilizando este fato, a equação (3.18), com a incorporação da equação (4.3), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
 p_D(x_D, r_{wD}, z_{wD}, t_D) = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M q_{hDi} \int_{x_{Di}}^{x_{Di+1}} \left\{ \int_0^{t_D} \exp\left(\frac{-(x_D - x'_D)^2}{4 t'_D}\right) \frac{dt'_D}{t'_D} + \right. \\
 & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n \pi (z_{wD} L_D + r_{wD})] \cos(n \pi z_{wD} L_D) \\
 & \times \int_0^{t_D} \exp\left[\frac{-(x_D - x'_D)^2}{4 t'_D} - n^2 \pi^2 L_D^2 t'_D\right] \frac{dt'_D}{t'_D} \Bigg\} dx'_D
 \end{aligned} \quad (5.37)$$

Efetuando a seguinte mudança de variável:

$$u = \frac{(x_D - x'_D)^2}{4 t'_D} \quad (5.38)$$

a equação (5.37) transforma-se em:

$$\begin{aligned}
p_D(x_D, r_{wD}, z_{wD}, t_D) = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M q_{hDi} \int_{x_{Di}}^{x_{Di+1}} \left\{ E_i \left(\frac{(x_D - x'_D)^2}{4 t_D} \right) + \right. \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n \pi (z_{wD} L_D + r_{wD})] \cos(n \pi z_{wD} L_D) \\
& \times \int_{\frac{(x_D - x'_D)^2}{4 t_D}}^{\infty} \exp \left[-u - \frac{n^2 \pi^2 L_D^2 (x_D - x'_D)^2}{4 u} \right] \frac{du}{u} \Bigg\} dx'_D
\end{aligned} \quad (5.39)$$

Segundo Gringarten *et alii*⁵:

$$\int_0^{\infty} \exp \left(-\xi - \frac{z^2}{4\xi} \right) \frac{d\xi}{\xi} = 2 K_0(z) \quad (5.40)$$

Esta última aproximação em conjunto com a aproximação dada pela equação (5.28), permite que sejam feitas as seguintes simplificações na equação (5.39):

$$\int_{\frac{(x_D - x'_D)^2}{4 t_D}}^{\infty} \exp \left[-u - \frac{n^2 \pi^2 L_D^2 (x_D - x'_D)^2}{4 u} \right] \frac{du}{u} = 2 K_0[n \pi L_D (x_D - x'_D)] \quad (5.41)$$

$$E_i \left(\frac{(x_D - x'_D)^2}{4 t_D} \right) = -\gamma - \ln \left(\frac{(x_D - x'_D)^2}{4 t_D} \right) \quad (5.42)$$

Com as aproximações acima, a equação (5.39) simplifica-se para:

$$\begin{aligned}
p_D(x_D, z_{wD}, r_{wD}, t_D) = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M q_{hDi} \int_{x_{Di}}^{x_{Di+1}} \left\{ -\gamma - \ln \left(\frac{(x_D - x'_D)^2}{4 t_D} \right) + \right. \\
& + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n \pi (z_{wD} L_D + r_{wD})] \cos(n \pi z_{wD} L_D) 2 K_0[n \pi L_D (x_D - x'_D)] \Bigg\} dx'_D
\end{aligned} \quad (5.43)$$

Efetuada as integrais da equação (5.43) que contêm a função logarítmica e utilizando a equação (4.12), a aproximação de longo tempo pode ser escrita como:

$$p_D(x_D, r_{wD}, z_{wD}, t_D) = \frac{1}{2}(\ln t_D + 0,8091) + S_z \quad (5.44)$$

onde S_z é o pseudo fator de película devido à penetração parcial na direção z , dado por:

$$S_z = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^M q_{hDi} \left\{ 2(x_D - x_{Di+1}) \ln(x_D - x_{Di+1}) - 2(x_D - x_{Di}) \ln(x_D - x_{Di}) + \right. \\ \left. - 4(x_D - x_{Di+1}) + 4(x_D - x_{Di}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos[n \pi (z_{wD} L_D + r_{wD})] \cos(n \pi z_{wD} L_D) \right. \\ \left. \times \int_{x_{Di}}^{x_{Di+1}} [2 K_0[n \pi L_D (x_D - x'_D)]] dx'_D \right\} \quad (5.45)$$

A equação (5.44) pode ser escrita no Sistema de Unidades de Campo, já incluindo o fator de película como:

$$p_i - p_{wf}(t) = \frac{162,6 q_w \mu}{k h} \left\{ \log \left(\frac{k t}{\phi \mu c_t (L/2)^2} \right) - 3,223 \right\} + \frac{141,2 q_w \mu}{k h} S_z + \frac{141,2 q_w \mu}{\sqrt{k k_z} L} S \quad (5.46)$$

Portanto, para tempos longos, pode-se obter o valor da permeabilidade horizontal $-k-$, a partir de um gráfico de pressão versus logaritmo do tempo. Se o primeiro período de fluxo radial também puder ser analisado, obtém-se o valor da permeabilidade vertical $-k_z-$.

O problema que existe para interpretação deste regime radial de fluxo é o longo tempo para seu início.

Ozkhan *et alii*¹⁴ fizeram um estudo bastante detalhado deste tempo. Segundo os autores, para valores de comprimento adimensional do poço, L_D , maiores do que 0,25, valor válido para a maioria das aplicações práticas, o tempo adimensional para início deste regime seria fixo e igual à 4,13. Neste caso, apenas o comprimento do poço $-L-$ teria influência no valor do tempo inicial do regime.

O valor do pseudo fator de película, S_z , é fornecido por diversos autores^{12,14,15} mas, na maioria das vezes a condição de contorno utilizada para a sua obtenção é a de fluxo uniforme. Como Carvalho¹⁰ e Rosa e Carvalho¹¹ mostraram, o valor do pseudo fator de película ao longo do poço horizontal é diferente para as condições de contorno de fluxo uniforme e de condutividade infinita. De qualquer maneira, em qualquer expressão existente na literatura, o valor deste pseudo fator de película é sempre inversamente proporcional ao comprimento adimensional do poço, L_D , se tornando desprezível para grandes valores de L_D .

O valor do pseudo fator de película obtido por Kuchuck et alii¹² é dado por:

$$S_z \approx -\frac{1,1513}{L_D} \log[\pi 2 r_{wD} \sin(\pi z_{wD} L_D)] - \frac{0,5}{L_D^2} \left(\frac{1}{3} - z_{wD} L_D + z_{wD}^2 L_D^2 \right) \quad (5.47)$$

Para utilização desta expressão, o valor de -3,223 da equação (5.46) deve ser substituído pelo valor -2,5267.

6. DISCUSSÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Todas as análises e comparações feitas neste Capítulo serão baseadas em um poço horizontal e em um reservatório cujos dados, bem como os parâmetros adimensionais obtidos a partir destes dados, estão listados na Tabela 6.1.

Características	
Raio do poço, r_w - (pés)	0,20883
Densidade do óleo, API	29
Viscosidade do óleo, μ - (cp)	2
Comprimento do poço horizontal, L - (pés)	1640,5
Espessura porosa do reservatório, h - (pés)	65,62
Permeabilidade horizontal, k - (mD)	300
Anisotropia, k_z/k	1
Porosidade, ϕ - (%)	27
Compressibilidade total, c_t - (psi^{-1})	$1,1 \times 10^{-5}$
Posição vertical do poço, z_w/h	0,5
Rugosidade do poço horizontal, ϵ (pés)	0
Condutividade adimensional, C_{hD}	20848
Comprimento adimensional, L_D	12,5
Raio equivalente adimensional, r_{wzD}	$3,18 \times 10^{-3}$

Tabela 6.1: Características do poço e do reservatório padrões

6.1.Comportamento da Vazão ao Longo do Poço

O comportamento da vazão adimensional ao longo do poço horizontal será analisado para três valores de vazão, denominados de casos 1 a 3 (Tabela 6.2).

Caso	Vazão de produção (bbl/d)	R_{et}
1	283,7	2300
2	3369,0	27363
3	33690,0	273633

Tabela 6.2: Vazões de produção para os três casos de análise

A partir da observação do comportamento da vazão ao longo do poço horizontal, para os três casos de vazão de produção (Figuras 6.1 a 6.3), duas conclusões são importantes:

- para tempos curtos o perfil de vazão ao longo do poço é uniforme para pequenos valores de vazão de produção (Figura 6.1), tendendo a afastar-se deste padrão com o aumento da vazão de produção (Figuras 6.2 e 6.3).
- para longos tempos ($t_D > 1$) o perfil de vazão ao longo do poço se mantém inalterado para uma dada vazão de produção.

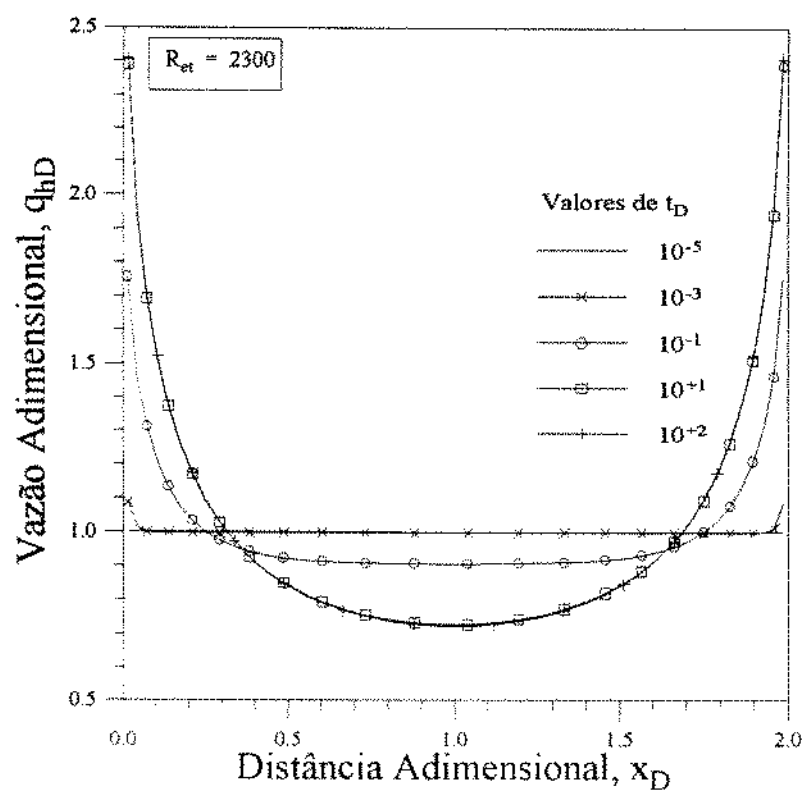


Figura 6.1: Variação com o tempo do perfil de vazão versus distância - Caso 1.

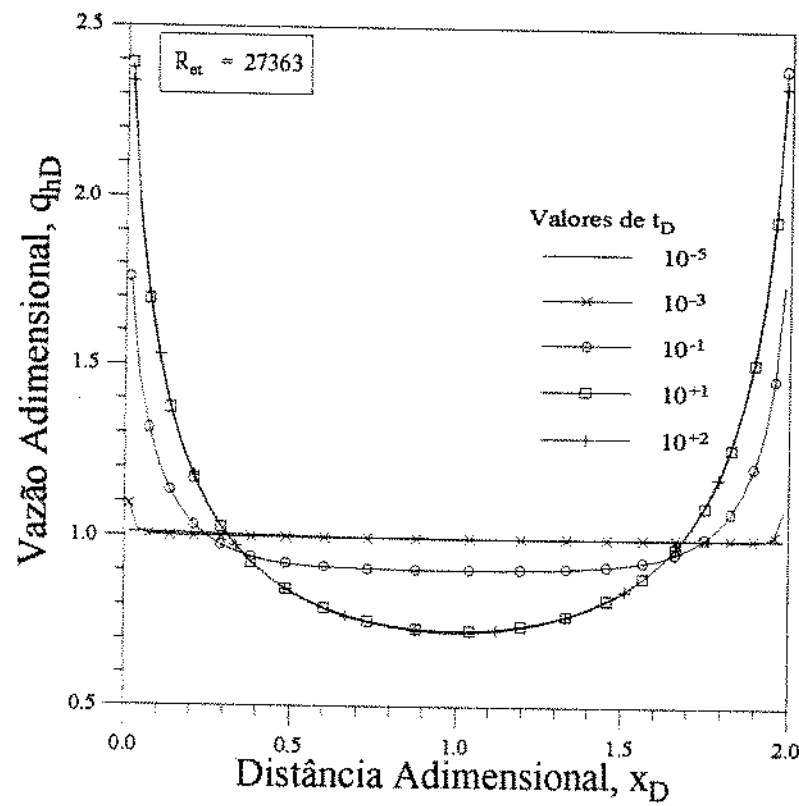


Figura 6.2: Variação com o tempo do perfil de vazão versus distância - Caso 2.

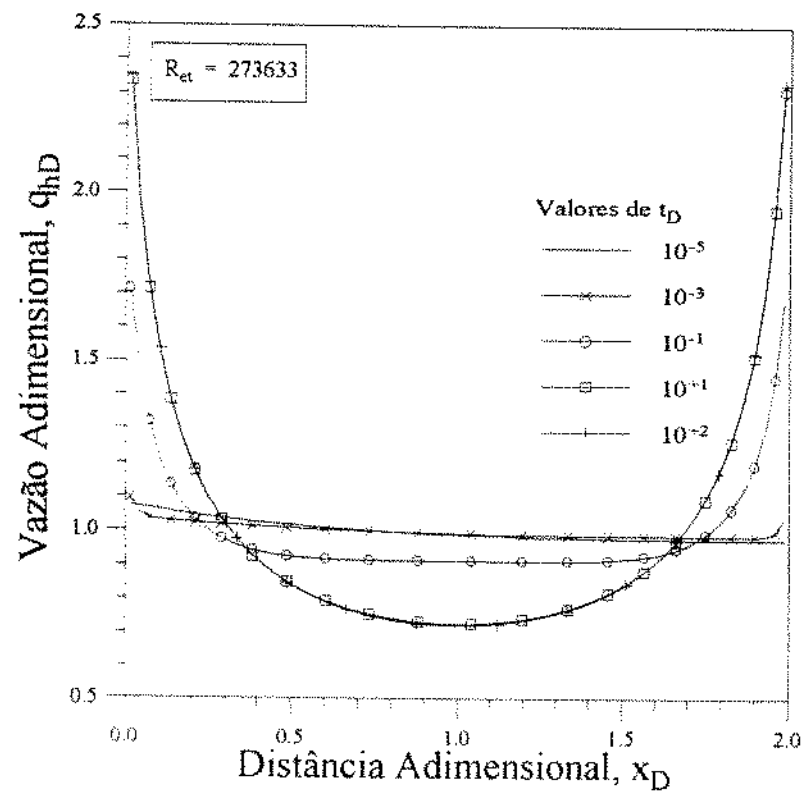


Figura 6.3: Variação com o tempo do perfil de vazão versus distância - Caso 3.

6.2. Comparação entre Fluxo Laminar e Turbulento

Para as vazões da Tabela 6.2 observa-se que:

- o perfil de pressão com o tempo em $x_D=0$ praticamente não muda com o aumento da vazão de produção (Figura 6.4). Um pequeno aumento, praticamente imperceptível, é observado para a vazão de 33690.0 bbl/d, que é um valor muito elevado de vazão para os dados do reservatório da Tabela 6.1.
- o perfil da vazão estabilizada ($t_D>1$) é o mesmo para os três casos analisados (Figura 6.5).
- para fluxo laminar ($Re_t \leq 2300$), a pressão ao longo do poço é constante (Figura 6.6). Com o aumento de Re_t (fluxo turbulento) começa a aparecer o efeito da queda de pressão ao longo do poço horizontal. Para os casos analisados, a máxima diferença de pressão adimensional entre as extremidades do poço horizontal observada é de cerca de 0,010 (veja Figura 6.6), que é um valor muito pequeno. A vazão teria que ter um valor muito grande, fora dos padrões normais, para que o efeito da queda de pressão ao longo do poço passasse a ser importante.
- o número de Reynolds varia ao longo do poço para grandes vazões de produção, podendo inclusive existir, nos maiores valores de x_D , mudança do regime de fluxo turbulento para o regime de fluxo laminar (Figura 6.7).

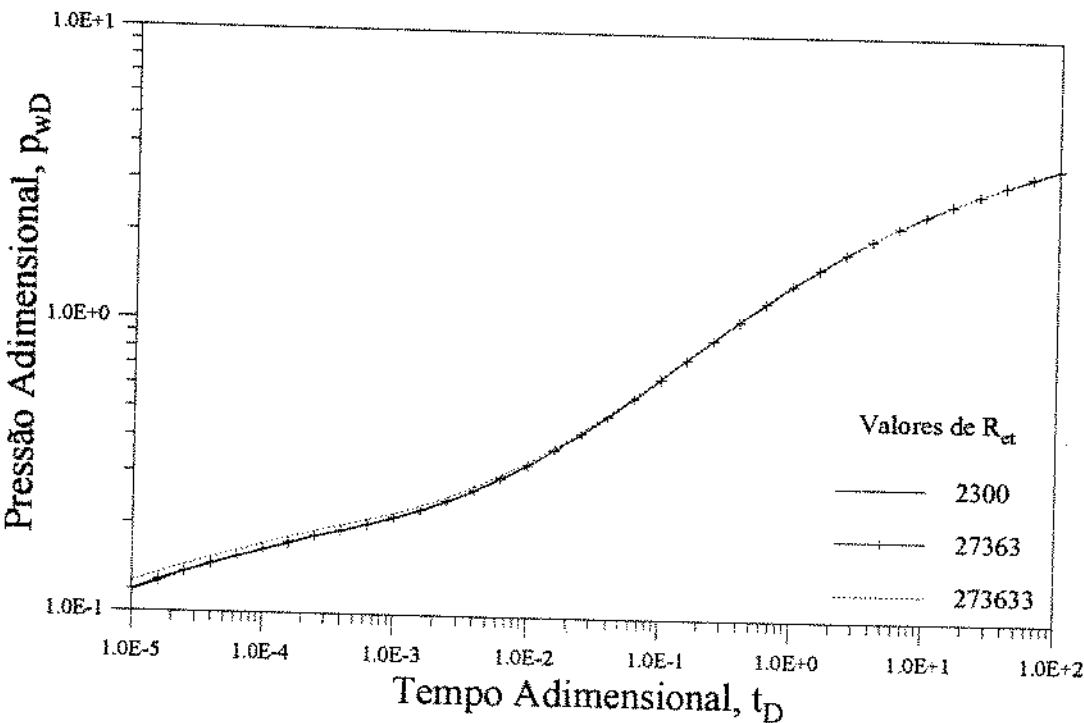


Figura 6.4: Comparação da pressão adimensional em $x_D=0$ - Casos 1 a 3.

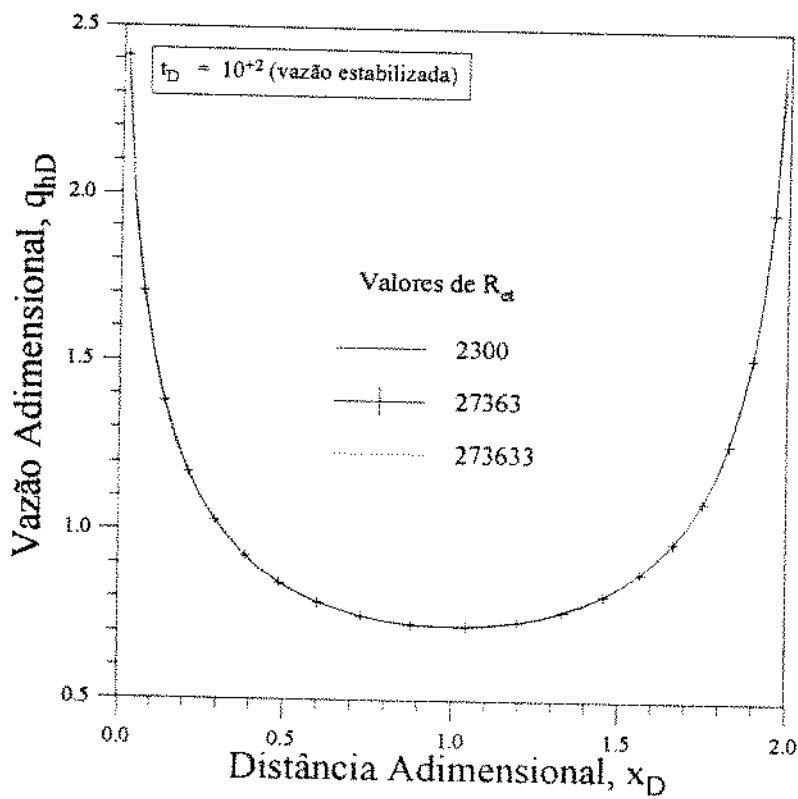


Figura 6.5: Comparação da vazão estabilizada adimensional ao longo do poço horizontal - Casos 1 a 3.

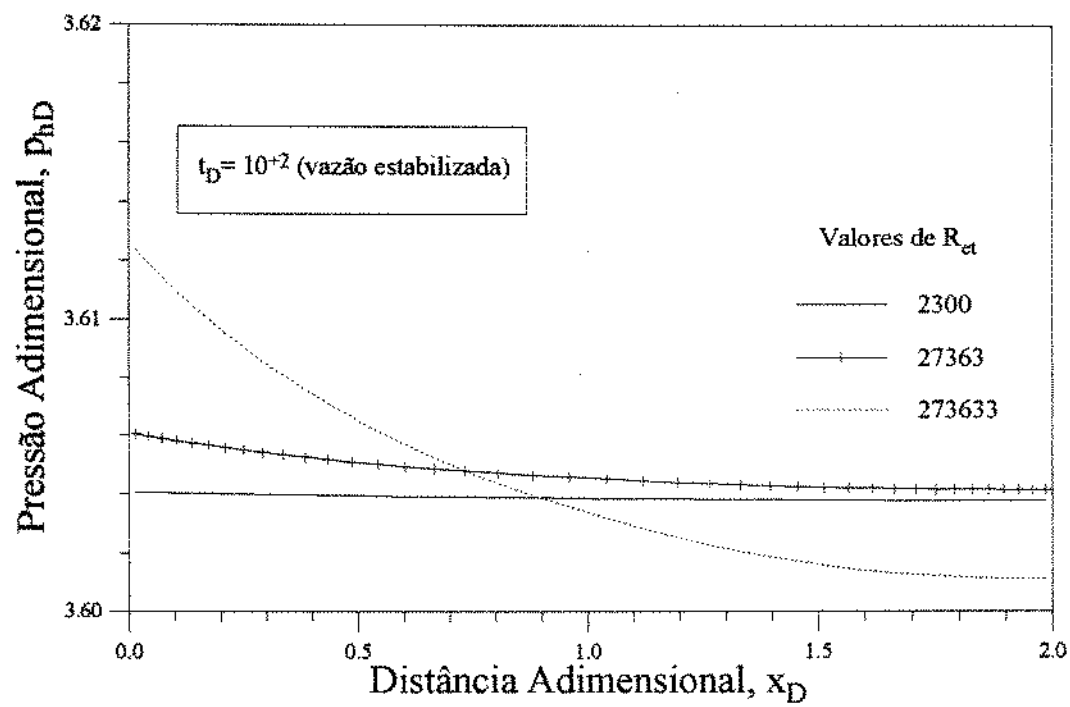


Figura 6.6: Comparação da pressão adimensional ao longo do poço horizontal para os dados dos Casos 1 a 3.

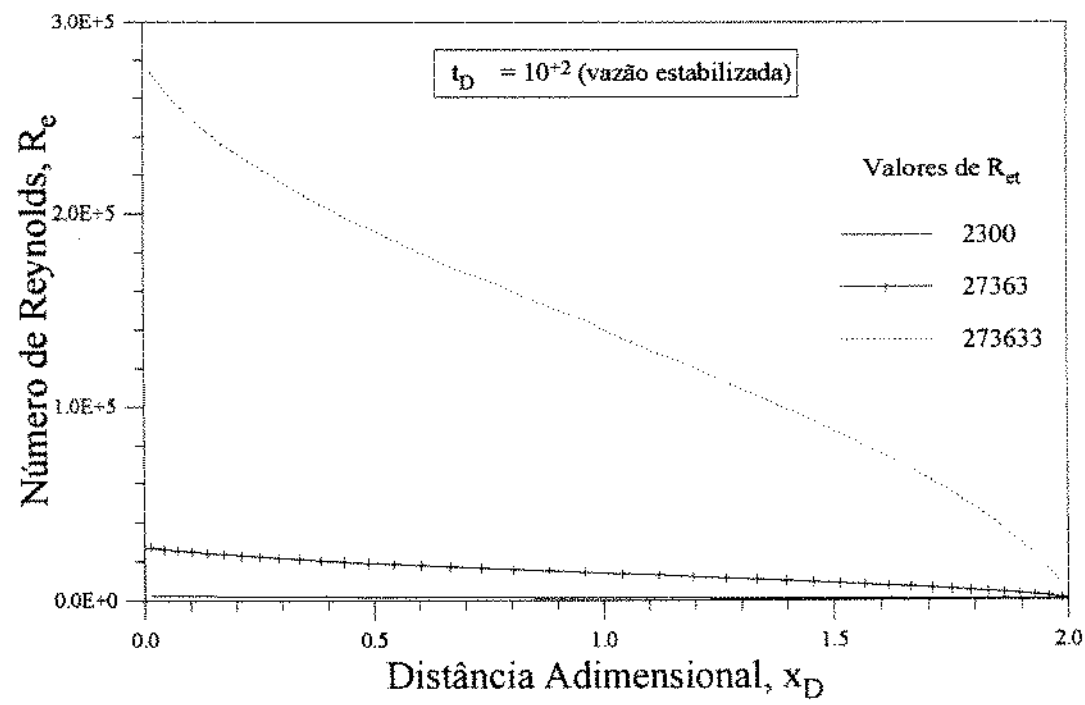


Figura 6.7: Comparação do Número de Reynolds ao longo do poço horizontal para os dados dos Casos 1 a 3.

6.3. Identificação dos Regimes de Fluxo

Como foi mostrado no item anterior, os comportamentos da vazão (Figura 6.5) e da pressão (Figura 6.4) são praticamente os mesmos para os três casos analisados. Em vista deste fato, as análises daqui para a frente serão apresentadas apenas para a menor vazão de produção adotada ($q_w = 283,7$ bbl/d).

Para obtenção das curvas de derivada da pressão em relação ao logaritmo do tempo foi utilizado o procedimento descrito na referência 31.

Na Figura 6.8 identificam-se claramente os regimes de fluxo, citados no Capítulo 5, e que ocorrem durante o período de comportamento transiente da pressão: radial inicial, linear e radial final.

O primeiro regime radial, identificado pelo primeiro patamar horizontal na curva de derivada da pressão ($t_D * dp_{wD}/dt_D$), termina, neste exemplo, para $t_D \cong 5 \times 10^{-4}$.

A seguir identifica-se o regime linear, caracterizado pela inclinação de 45° na curva de derivada da pressão, e que se encerra para $t_D \cong 1 \times 10^{-1}$.

O regime radial final está identificado pelo segundo patamar horizontal na curva de derivada da pressão. Pode-se notar a boa concordância entre o valor do tempo adimensional de início deste regime de fluxo e o valor sugerido por Ozkan *et alii*¹⁴: $t_D = 4,13$ (veja item 5.4.3).

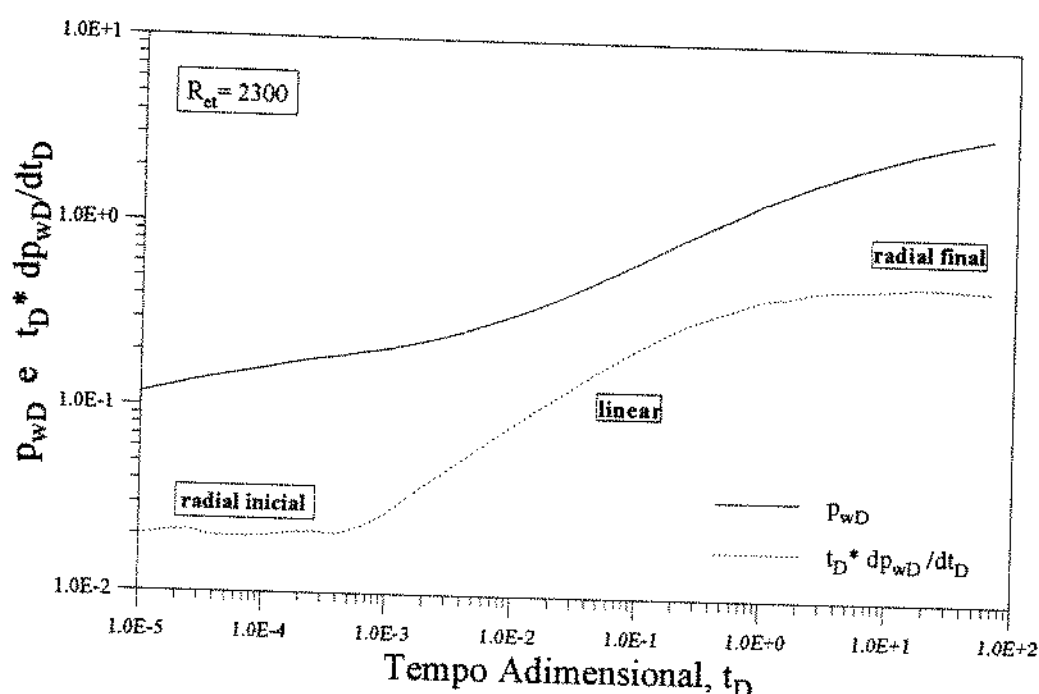


Figura 6.8: Identificação dos regimes de fluxo que ocorrem durante o período de comportamento transiente da pressão.

6.4. Solução com Estocagem e Fator de Película

Nas Figuras 6.9 a 6.12 são apresentados os resultados para as respostas de vazão e de pressão, com a inclusão do efeito de estocagem e do efeito de película com valor constante.

Como pode ser observado na Figura 6.9, o efeito de estocagem pode mascarar os períodos radial inicial e linear, inviabilizando a interpretação do teste de formação.

A inclusão do efeito de película tende a provocar uma translação na curva de pressão em $x_D=0$ (Figura 6.10) e tende a modificar o perfil da vazão estabilizada (Figura 6.11).

A pressão ao longo do comprimento do poço (Figura 6.12) continua se mantendo constante, como no caso da ausência do efeito de película (Figura 6.6).

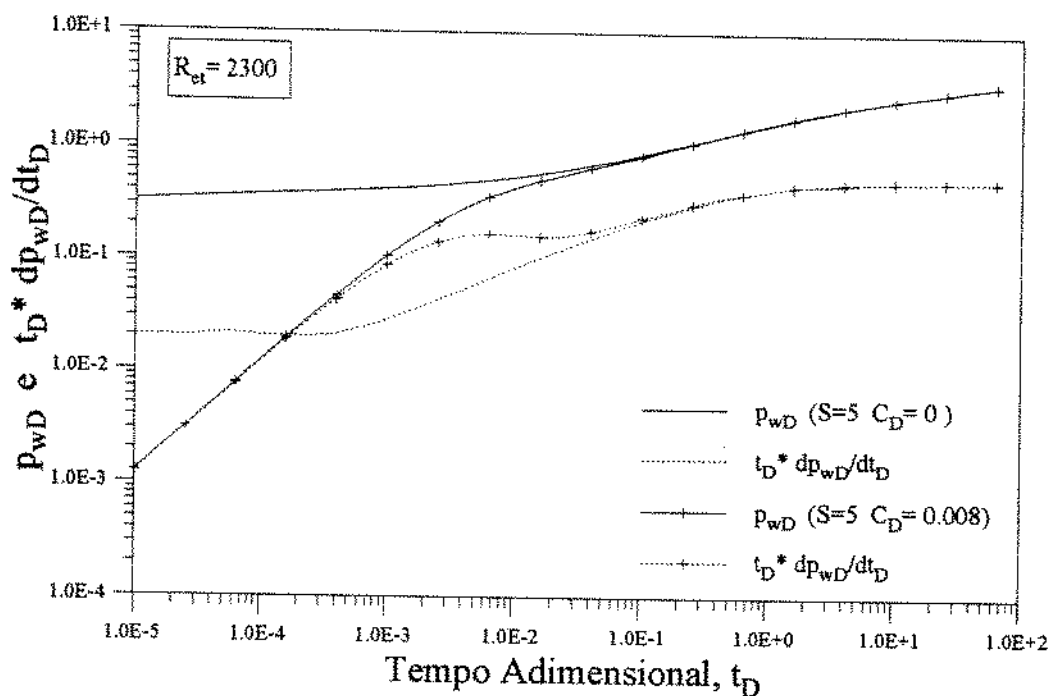


Figura 6.9: Comportamento da pressão adimensional com efeitos de película e de estocagem, em escala log-log.

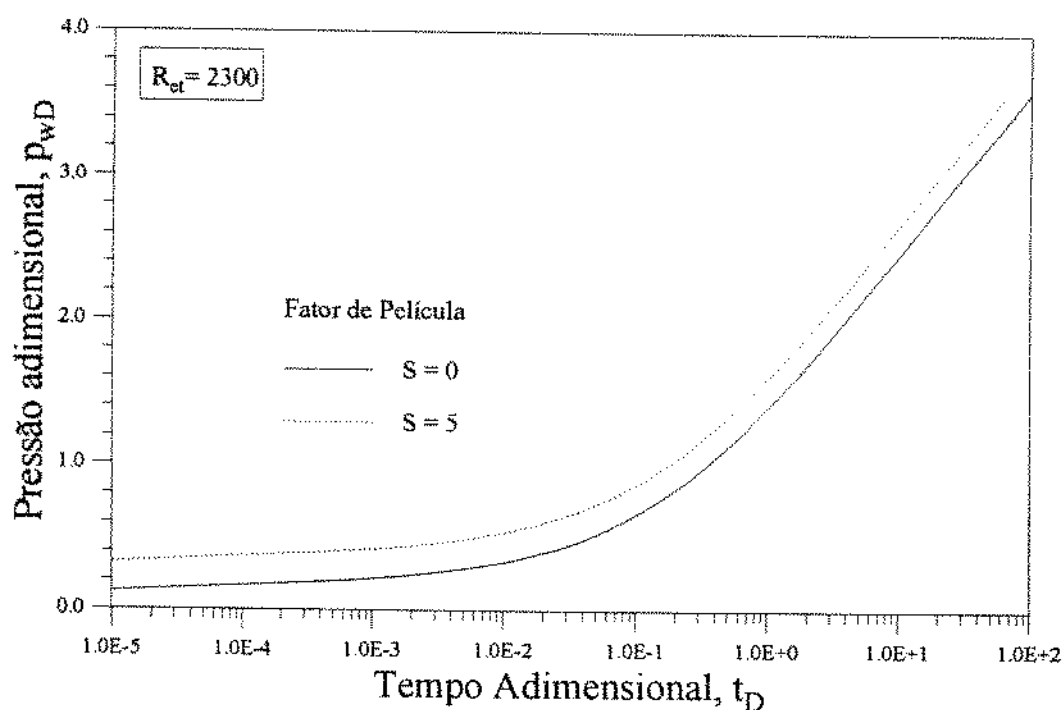


Figura 6.10: Comportamento da pressão adimensional com efeito de película, em escala semi-log.

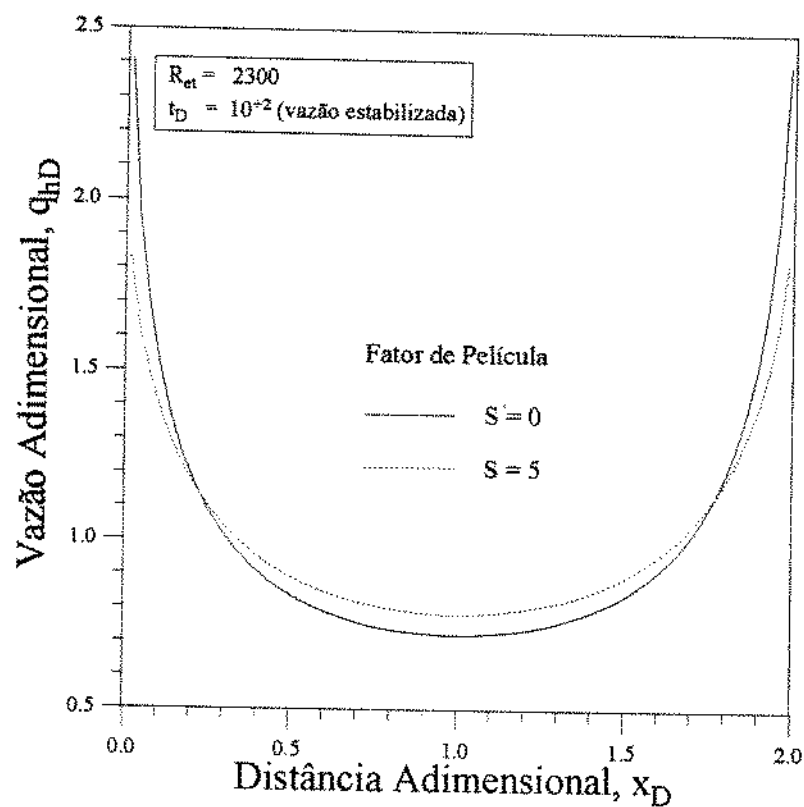


Figura 6.11: Comportamento da vazão estabilizada com efeito de película.

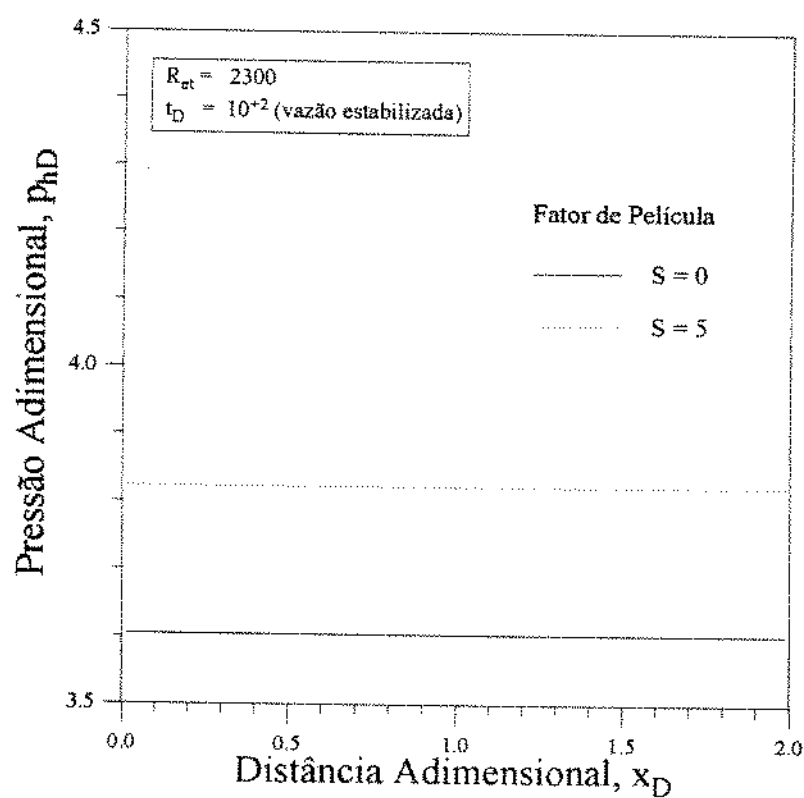


Figura 6.12: Comportamento da pressão adimensional ao longo do poço horizontal com a inclusão do fator de película.

6.5. Solução com o Fator de Película Variável com a Posição

Para ilustrar a influência que a utilização da modelagem do dano de formação variável ao longo do poço horizontal (item 5.3) pode ter no comportamento das pressões e vazões, foram adotados os dados de filtração dinâmica fornecidos por Ferguson e Klotz³⁰.

Foi utilizada a curva 53 da Figura 7 da citada referência, construída para um fluido de perfuração de emulsão invertida, cujo filtrado é água. Esta curva é resultado de ensaios de laboratório de filtração dinâmica em escala de campo e mostra que, após cerca de 10 horas o valor do volume de filtrado perdido com o tempo se estabiliza. Este fato, conforme já citado no Capítulo 5, reforça a consideração da variação linear dos eixos da elipse danificada com a distância, utilizada para a modelagem do dano de formação adotada neste trabalho.

A uma taxa de perfuração de 200 pés/d, o poço padrão (Tabela 6.1) seria perfurado em 4,1 dias. Durante este tempo total de perfuração haveria um fluxo de filtrado de 218,2 in³/in a 200°F, segundo a curva 53 da Figura 7 da referência 30.

Com este valor e considerando a relação entre os eixos da elipse dada pela raiz quadrada da anisotropia (equação C.35), o valor do semi-eixo maior da elipse seria de 1,52 pés, para uma anisotropia de 0,9. Este valor foi considerado como o semi-eixo da máxima elipse do cone truncado elíptico danificado ($a_{\text{máx}}$) em $x_D=0$.

Para calcular o semi-eixo da mínima elipse em $x_D=2$, assumiu-se que o tempo mínimo que a formação fica submetida ao fluido de perfuração é de 10 horas. Utilizando o mesmo procedimento descrito acima para a determinação de $a_{\text{máx}}$, obteve-se um valor de a_{min} igual a 0,68 pés. Com estes valores máximo e mínimo conhecidos, com a equação (5.23) calcula-se o valor de a em qualquer posição ao longo do poço horizontal.

A equação (5.22) fornece o valor do fator de película. Para este exemplo o valor máximo do fator de película calculado foi de 17,8 e o valor mínimo de 10,7. Estes

valores foram obtidos para uma relação entre as permeabilidades original e alterada, (k/k_s) , de 10.

Nas Figuras 6.13 a 6.16 estão apresentados os resultados obtidos. Para a resposta de pressão em $x_D=0$ (Figuras 6.13 e 6.14) o fator de película variável equivale a um fator de película único e constante.

Na Figura 6.16 pode-se observar que a pressão ao longo do poço horizontal se mantém constante como no caso do fator de película constante (Figura 6.12), onde ocorre variação é no perfil das vazões (Figura 6.15).

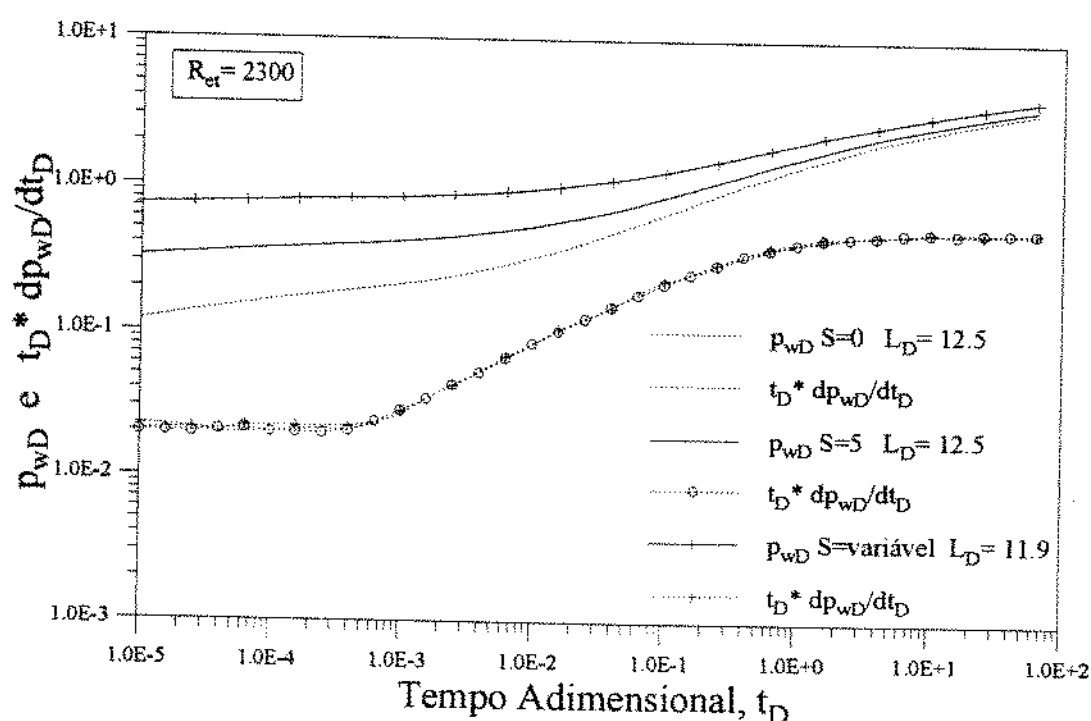


Figura 6.13: Comportamento da pressão adimensional com efeitos de película constante e variável, em escala log-log.

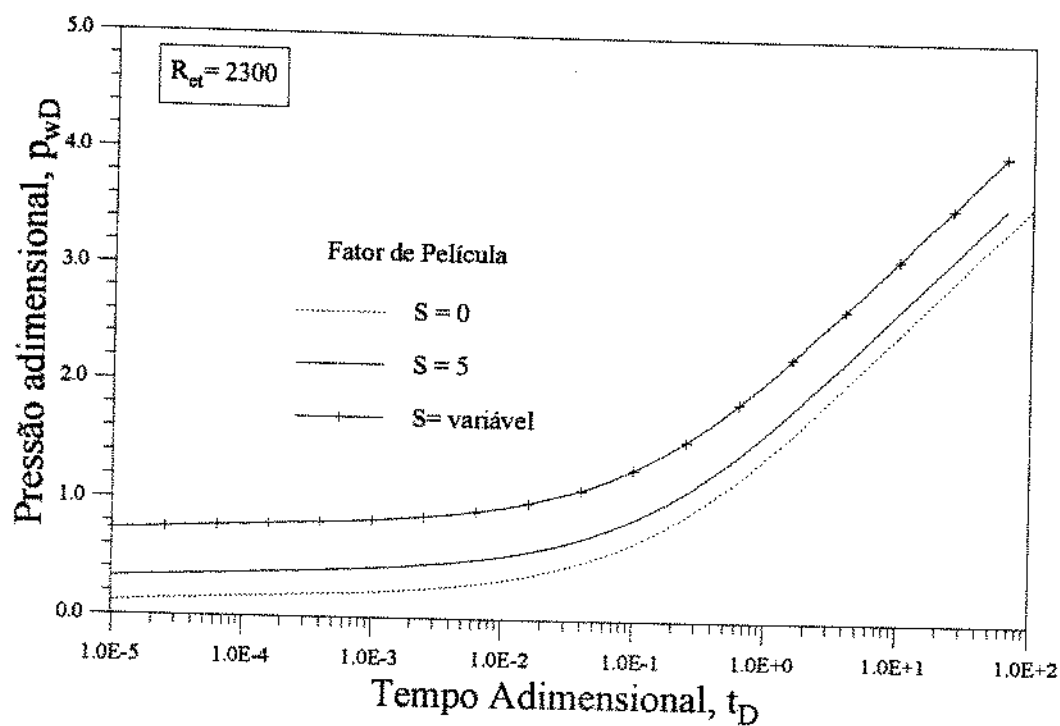


Figura 6.14: Comportamento da pressão adimensional com efeitos de película constante e variável, em escala semi-log.

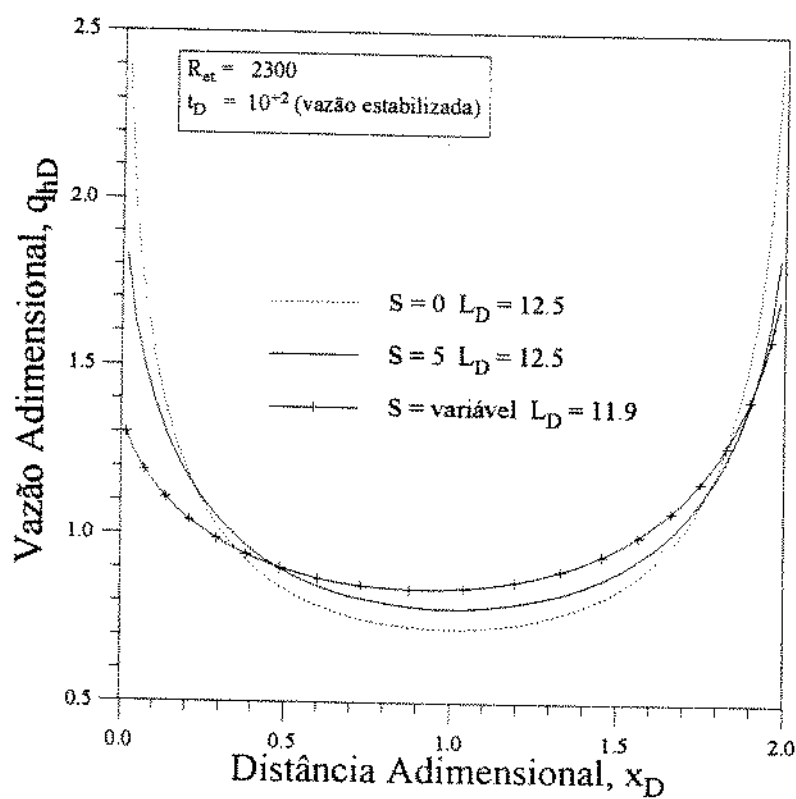


Figura 6.15: Comportamento da vazão estabilizada com efeitos de película constante e variável.

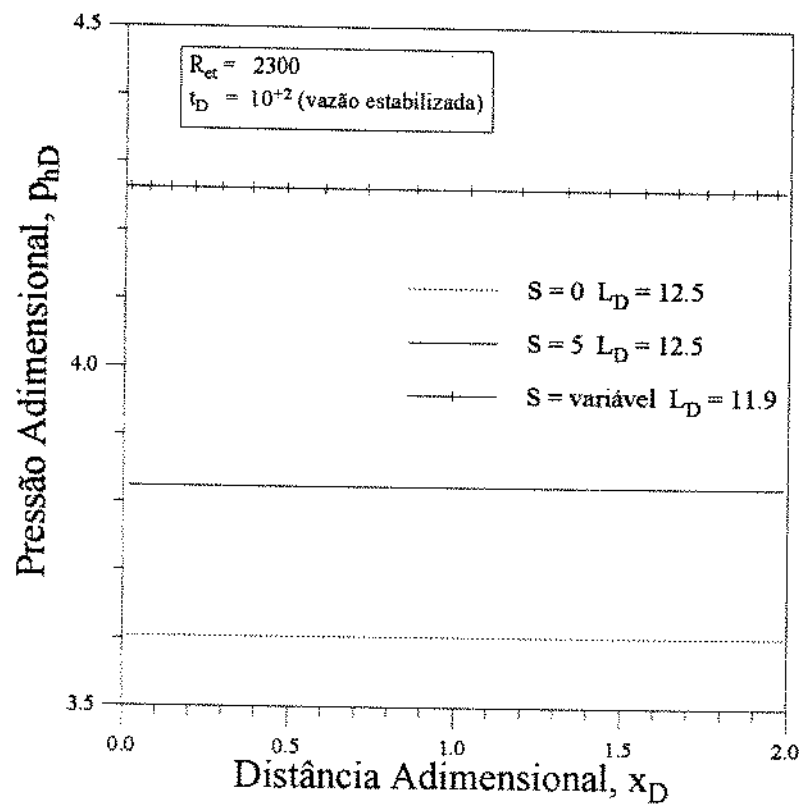


Figura 6.16: Comportamento da pressão adimensional ao longo do poço horizontal com a inclusão dos efeitos de película constante e variável.

6.6. Efeito da Variação do Comprimento Adimensional do Poço

A diminuição do comprimento adimensional do poço provoca um aumento nos valores da pressão adimensional (Figura 6.17). Além disso, como pode ser observado nas curvas de derivada da pressão, ocorre uma mudança de comportamento: a duração do regime linear tende a diminuir com a diminuição do comprimento adimensional do poço. Conforme comentado no Capítulo 5, o regime linear só se desenvolve totalmente quando o poço horizontal é suficientemente longo comparado à espessura do reservatório.

As vazões adimensionais ao longo do poço horizontal (Figura 6.18) tendem a ter um comportamento mais uniforme com a diminuição do comprimento adimensional do poço. O perfil de vazões praticamente não se altera para os maiores comprimentos adimensionais ($L_D > 12,5$).

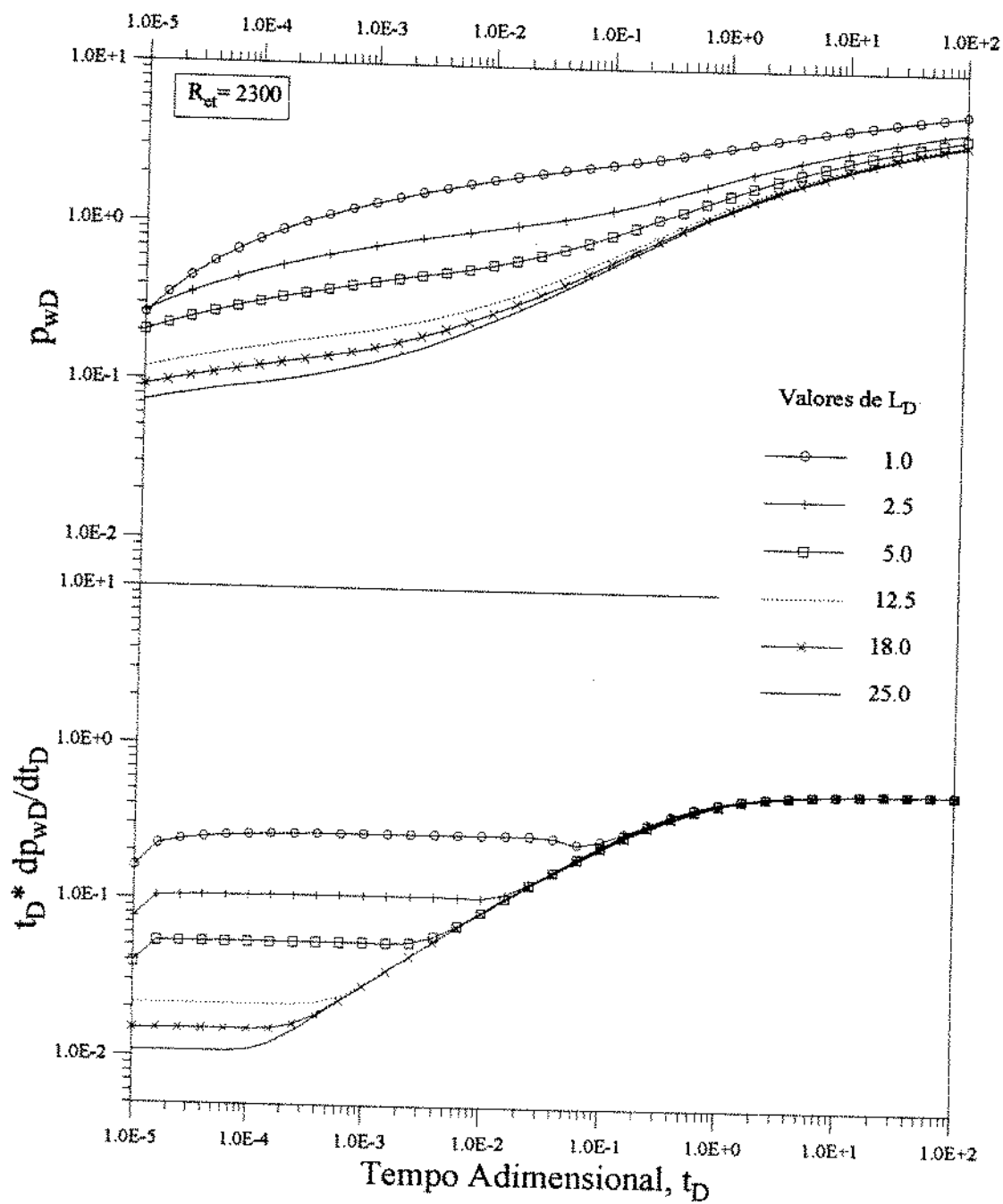


Figura 6.17: Comportamento da pressão adimensional com a variação do comprimento adimensional do poço.

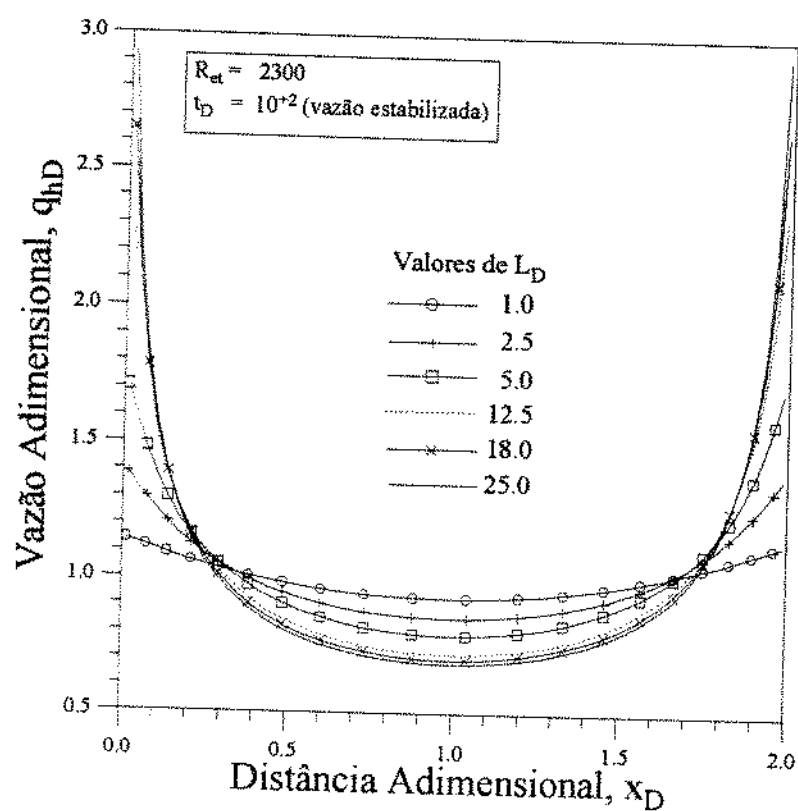


Figura 6.18: Comportamento da vazão adimensional ao longo do poço horizontal com a variação do comprimento adimensional do poço.

7. ANÁLISE AUTOMATIZADA DE TESTES DE PRESSÃO

Devido à complexidade das soluções dos modelos de reservatórios com poço horizontal, a análise dos testes de pressão realizados nestes casos não é uma tarefa simples. A grande quantidade de parâmetros poço/reservatório envolvidos dificulta a construção de curvas-tipo para serem utilizadas como nos procedimentos clássicos de interpretação.

A utilização de técnicas de regressão não linear, como ferramenta de interpretação automatizada de testes, proporciona um aumento na qualidade dos resultados finais. Além disso, estas técnicas permitem que seja feita uma análise estatística para verificação da qualidade dos parâmetros, calculando-se, por exemplo intervalos de confiança.

Para viabilizar a utilização destas técnicas é necessário que seja reduzido o tempo computacional dispendido na resolução do problema poço horizontal/reservatório. Para isto, a solução apresentada neste trabalho será comparada à solução obtida com a condição de contorno de fluxo uniforme, na tentativa de encontrar um ponto equivalente que produza a mesma resposta de pressão com a utilização de ambos os modelos.

A utilização dos vários métodos de regressão não linear constitui uma área de intensa pesquisa na engenharia de petróleo. O principal objetivo destes métodos é estimar os parâmetros do reservatório a partir de quaisquer que sejam as estimativas iniciais, dentro de seus respectivos domínios, de tal forma que o processo convirja para os valores corretos. Neste trabalho foi adotada a técnica dos mínimos quadrados, que segundo os trabalhos de Vieira³² e de Coelho³³, funciona satisfatoriamente e é de fácil aplicação.

Os parâmetros a serem obtidos com a aplicação desta técnica para poços horizontais são: a permeabilidade horizontal (k), o fator de película (S), o coeficiente de estocagem (C), a permeabilidade vertical (k_z) e o comprimento do poço (L). A

determinação do comprimento efetivo do poço, L , é incluída porque este valor pode diferir muito do comprimento real, devido à existência de heterogeneidades laterais.

Serão apresentados e analisados quatro casos de teste de pressão, dois simulados e dois reais.

7.1. Modelo Matemático de Fluxo Uniforme

Na condição de contorno de fluxo uniforme a vazão por unidade de comprimento do poço é constante. Neste caso a vazão adimensional q_{hD} (equação (3.17)) tem valor unitário. A queda de pressão no reservatório pode ser determinada a partir da equação (3.18):

$$p_D(x_D, z_{wD}, r_{wzD}, t_D) = \frac{1}{4} \int_0^{t_D} \int_0^2 \exp\left(\frac{-(x_D - x'_D)^2}{4(t_D - t'_D)}\right) dx'_D \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-n^2 \pi^2 L_D^2 (t_D - t'_D)] \cos[n \pi (z_{wD} L_D + r_{wzD})] \cos(n \pi z_{wD} L_D) \right] \frac{dt'_D}{(t_D - t'_D)} \quad (7.1)$$

Na equação acima já foram incorporados os valores de y_D e de z_D adotados para a determinação da pressão (veja item 4.3.1).

Efetuada a integral em x_D da equação (7.1) obtém-se, após uma mudança de variáveis em t_D :

$$p_D(x_D, z_{wD}, r_{wzD}, t_D) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_0^{t_D} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x_D}{2\sqrt{t'_D}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x_D - 2}{2\sqrt{t'_D}}\right) \right\} \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp[-n^2 \pi^2 L_D^2 t'_D] \cos[n \pi (z_{wD} L_D + r_{wzD})] \cos(n \pi z_{wD} L_D) \right] \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} \quad (7.2)$$

A aproximação para tempos curtos da equação (7.2) é obtida, seguindo o mesmo procedimento do item 5.4.1:

$$p_D(r_{wzD}, t_D) = \frac{1}{4 L_D} E_i \left(\frac{r_{wzD}^2}{L_D^2 4 t_D} \right) \tag{7.3}$$

A queda de pressão no reservatório para tempos curtos é a mesma para a condição de contorno de fluxo uniforme (equação (7.3)) e para a condição de contorno com perda de carga no interior do poço horizontal (equação (5.27)). A diferença entre as pressões ao longo do poço horizontal calculadas utilizando os dois modelos será função do valor da perda de carga no interior do poço (veja equação (4.25)).

7.1.1. Validação do Modelo

O modelo de fluxo uniforme pode ser comparado com a solução de Daviau et alii⁷. A Figura 7.1 mostra a comparação com uma solução de Daviau, utilizando os parâmetros poço/reservatório da Tabela 7.1.

Comprimento do poço horizontal, L - (pés)	1640
Raio do poço, r _w - (pés)	0,33
Espessura do reservatório, h - (pés)	328
Posição vertical do poço, z _w - (pés)	246
Fator de Película, S	0
Coefficiente de estocagem, C - (bbl/psi)	0
Anisotropia, k _z /k	1
Posição de registro da pressão, x _D	1,70

Tabela 7.1: Dados de poço e de reservatório para a validação do modelo de fluxo uniforme.

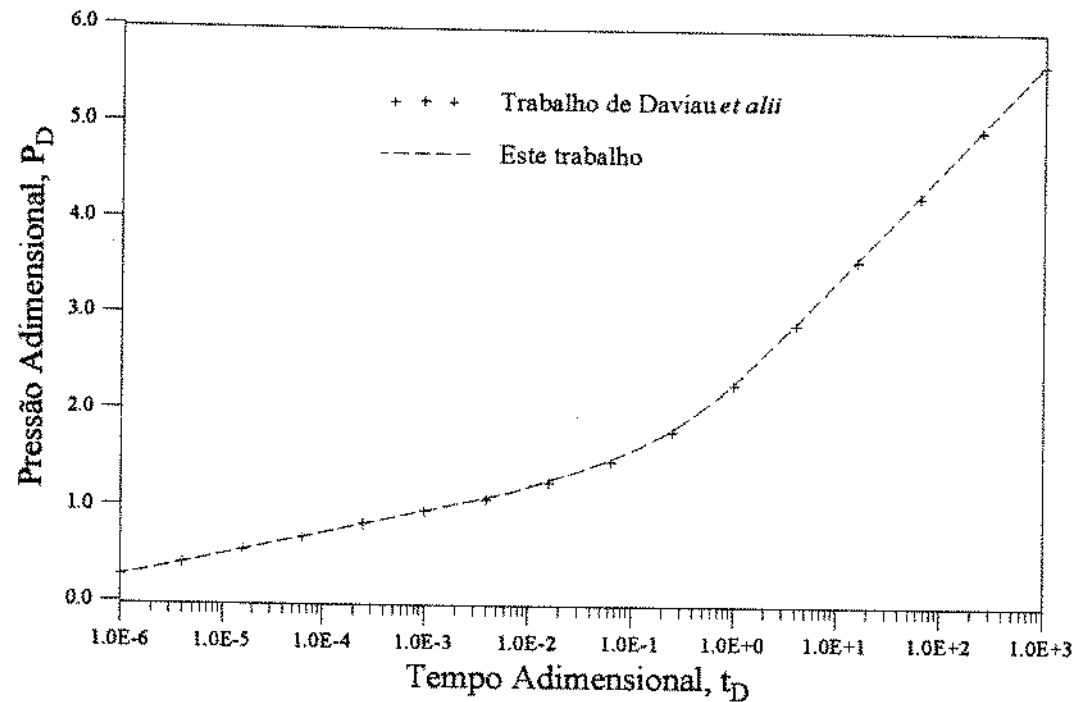


Figura 7.1: Comparação entre a solução para o modelo de fluxo uniforme deste trabalho e a solução de Daviau *et alii*.

7.1.2. Determinação do Ponto Equivalente

Conforme já citado anteriormente, devido à inconveniência prática de se adotar o modelo que considera a queda de pressão ao longo do poço horizontal para a análise automatizada de testes de pressão, o modelo de fluxo uniforme será utilizado. Para tanto, é necessário conhecer o ponto ao longo do poço horizontal em que as pressões dos dois modelos são iguais. Este procedimento pode ser adotado uma vez que, conforme mostrado no Capítulo 6, a pressão ao longo do poço pode ser considerada constante para a maioria dos casos reais.

O cálculo do ponto equivalente foi efetuado, para a condição de contorno de condutividade infinita, por Gringarten *et alii*⁵ para fraturas verticais, e por Carvalho¹⁰ e Rosa e Carvalho¹¹ para poços horizontais. Os valores determinados foram de 0,732 para fraturas e de 0,68 para poços horizontais, ambos os valores medidos horizontalmente a partir do centro do poço.

Os autores citados, a partir da observação de que as soluções dos dois modelos eram idênticas para tempos curtos, determinaram o ponto equivalente considerando as aproximações das soluções para tempos longos.

Para o estudo do presente trabalho foram considerados dezoito casos de reservatório/poço horizontal, sem estocagem e sem fator de película, cujos dados estão apresentados na Tabela 7.2.

Caso	Constantes Adimensionais				
	L_D	R_{ct}	C_{hD}	r_{wzD}	z_w/h
1	12,5	2300	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
1A	1,0	2300	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
1B	2,5	2300	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
1C	5,0	2300	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
1D	18,0	2300	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
1E	25,0	2300	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
2	12,5	27363	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
2A	1,0	27363	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
2B	2,5	27363	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
2C	5,0	27363	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
2D	18,0	27363	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
2E	25,0	27363	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
3	12,5	273633	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
3A	1,0	273633	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
3B	2,5	273633	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
3C	5,0	273633	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
3D	18,0	273633	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5
3E	25,0	273633	20848	$3,18 \times 10^{-3}$	0,5

Tabela 7.2: Constantes adimensionais reservatório/poço horizontal - Casos 1 a 3E.

Na Tabela 7.3 estão apresentados os valores dos pontos equivalentes (distância adimensional medida horizontalmente a partir da origem em $x_D=0$) obtidos para os tempos longos ($t_D>1,0$):

Ret	Valores de L_D					
	1,0	2,5	5,0	12,5	18,0	25,0
2300	1,59	1,64	1,66	1,69	1,70	1,71
27363	1,59	1,63	1,66	1,69	1,70	1,70
273633	1,58	1,63	1,65	1,68	1,69	1,70

Tabela 7.3: Pontos equivalentes adimensionais para tempos longos - Casos 1 a 3E.

Considerando os valores de L_D entre 5,0 e 25,0, o valor do ponto equivalente varia entre 1,65 e 1,71. Na Tabela 7.4 estão apresentadas as diferenças percentuais máximas entre as pressões calculadas considerando perda de carga no interior do poço e as pressões calculadas considerando fluxo uniforme com um valor de x_D igual a 1,68. Também são mostrados os tempos adimensionais em que esta máxima diferença ocorre.

Ret	Valores de L_D					
	1,0	2,5	5,0	12,5	18,0	25,0
2300	1,6 %	1,6 %	1,3 %	2,4 %	2,8 %	3,3 %
	(1,0)	(1,0)	(0,0251)	(0,0251)	(0,0251)	(0,0251)
27363	1,6 %	1,7 %	1,2 %	2,1 %	2,4 %	2,9 %
	(1,0)	(1,0)	(0,0251)	(0,0251)	(0,0251)	(0,0251)
273633	3,2 %	3,2 %	4,4 %	7,0 %	8,8 %	11,0 %
	(0,00001)	(0,00001)	(0,00001)	(0,00001)	(0,00001)	(0,00001)
(t _D)-tempo adimensional onde ocorre a máxima diferença entre as pressões,						

Tabela 7.4: Diferenças percentuais máximas entre as pressões calculadas considerando perda de carga no interior do poço e fluxo uniforme com ponto equivalente igual a 1,68.

As Figuras 7.2 a 7.7 mostram, para os valores de R_{et} de 2300 e de 273633 e de L_D de 12,5, 1,0 e 25,0, as curvas de pressão geradas com a condição de contorno de fluxo uniforme com ponto equivalente igual a 1,68 e com a condição de contorno que

inclui a perda de carga no poço (fluxo variável). As curvas para R_{et} igual a 27363 não estão apresentadas porque são quase idênticas às curvas para R_{et} igual a 2300.

Para os valores de R_{et} de 2300 e de 27363, para qualquer valor de L_D , as máximas diferenças entre as pressões calculadas com os dois modelos ocorrem nos tempos intermediários, ou seja, durante o regime de fluxo linear. Este fato pode ser bem observado na Tabela 7.4 e nos gráficos das Figuras 7.2 a 7.4.

Para o valor de R_{et} de 273633, conforme já mencionado anteriormente, as maiores diferenças entre as pressões dos dois modelos, para qualquer valor de L_D , ocorrem para tempos curtos (veja Tabela 7.4 e Figuras 7.5 a 7.7).

Como para tempos curtos as pressões são constantes e dependentes do modelo utilizado, e o valor de R_{et} de 273633 corresponderia a vazões atipicamente altas, pode-se considerar que a diferença entre a pressão calculada utilizando o modelo teórico deste trabalho, e a pressão calculada utilizando a condição de contorno de fluxo uniforme com um ponto equivalente de 1,68 é menor do que 3,3% (Tabela 7.4). Este valor de ponto equivalente pode ser utilizado para uma faixa de valores de L_D de 1,0 a 25.

Portanto, $x_D=1,68$ (ou $x_D=0,32$) é uma boa aproximação para o valor do ponto equivalente. Este valor é idêntico ao valor obtido por Carvalho¹⁰ e Rosa e Carvalho¹¹ para a condição de contorno de condutividade infinita.

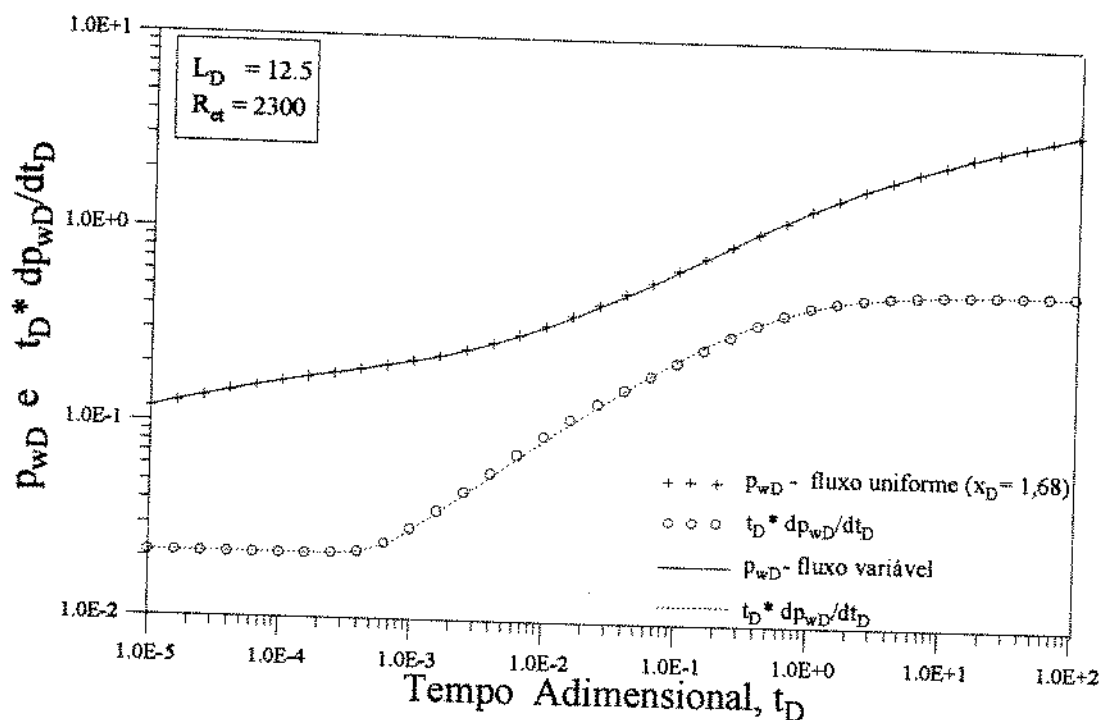


Figura 7.2: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 1.

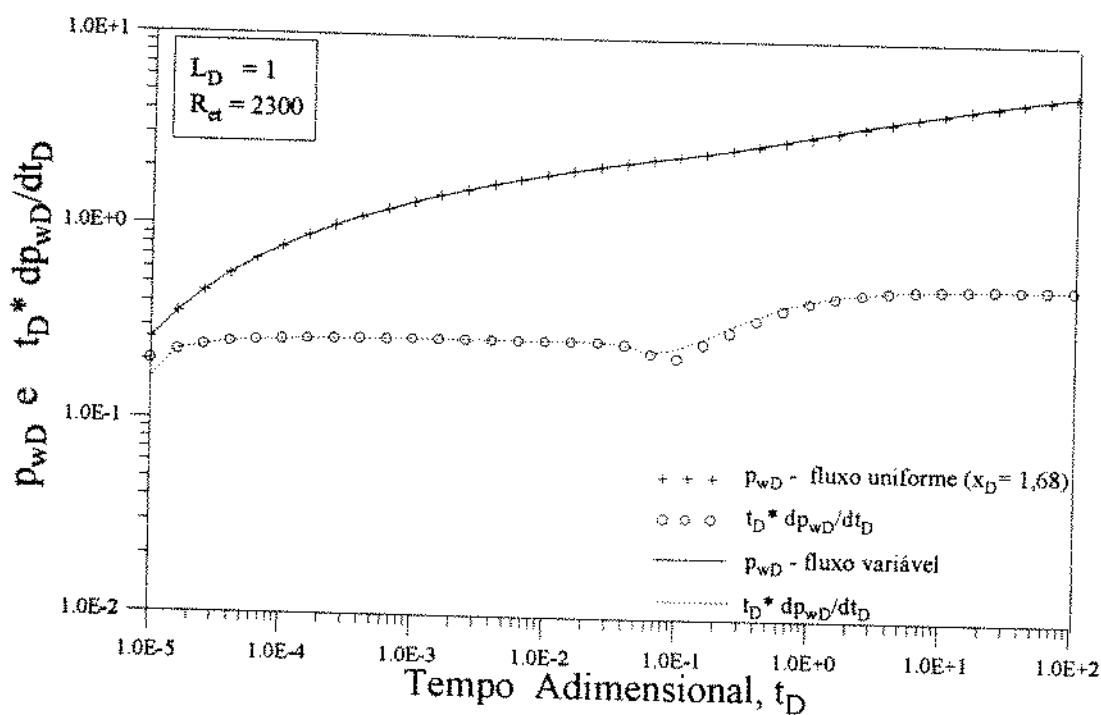


Figura 7.3: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 1A.

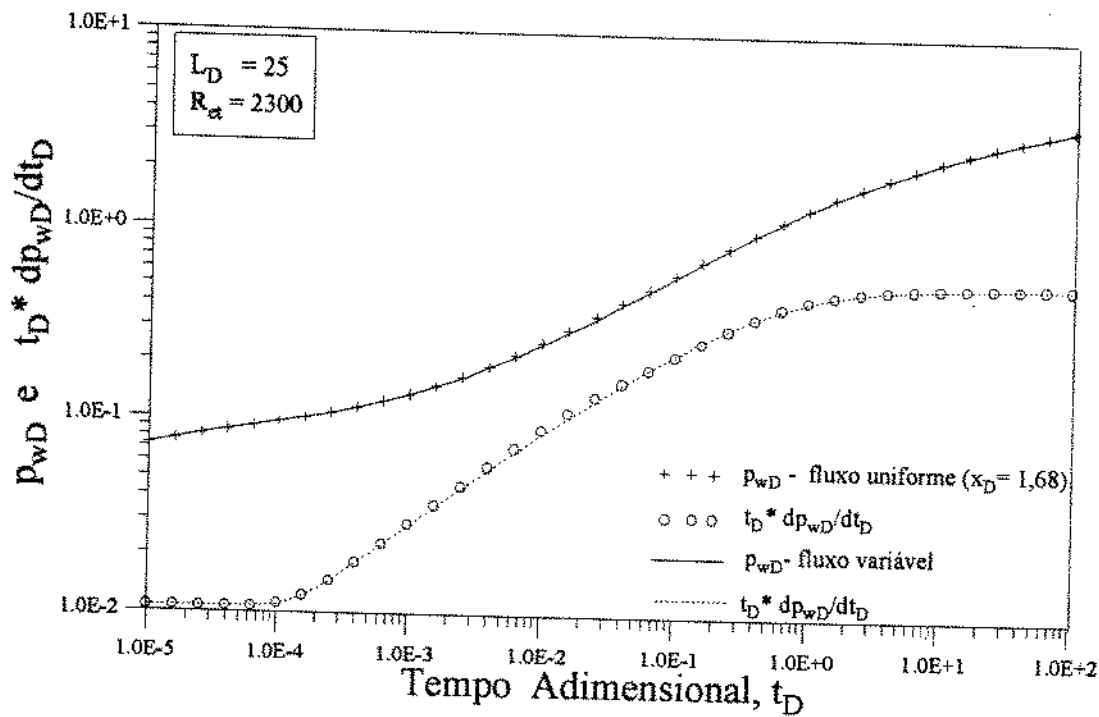


Figura 7.4: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 1E.

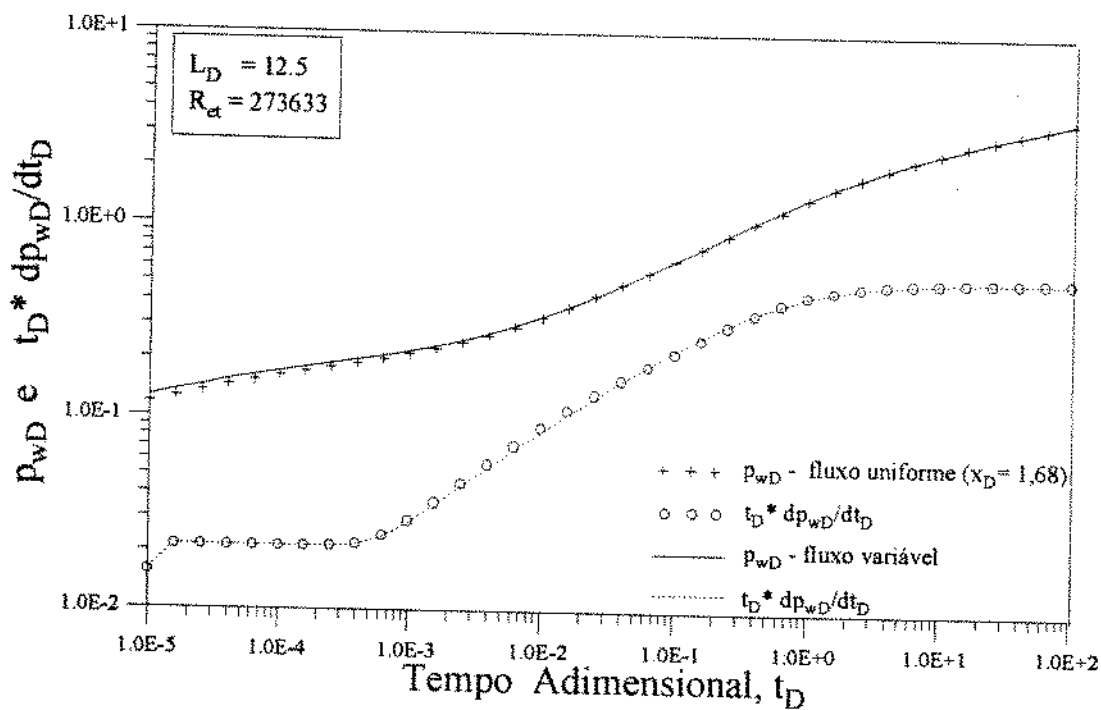


Figura 7.5: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 3.

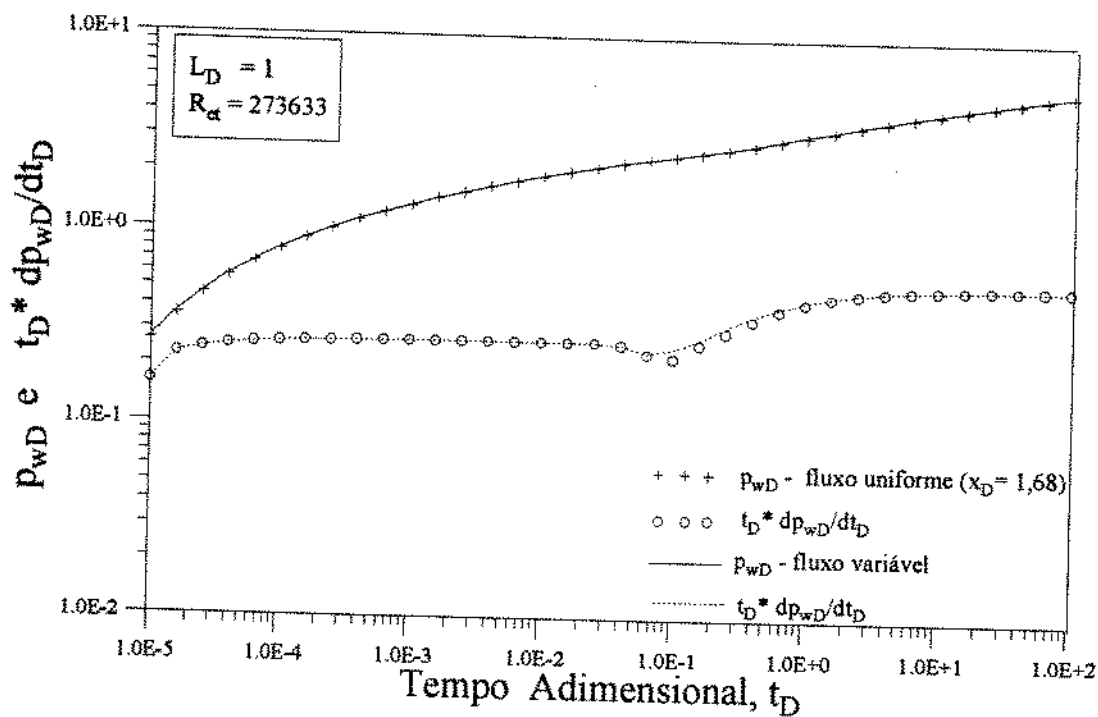


Figura 7.6: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 3A.

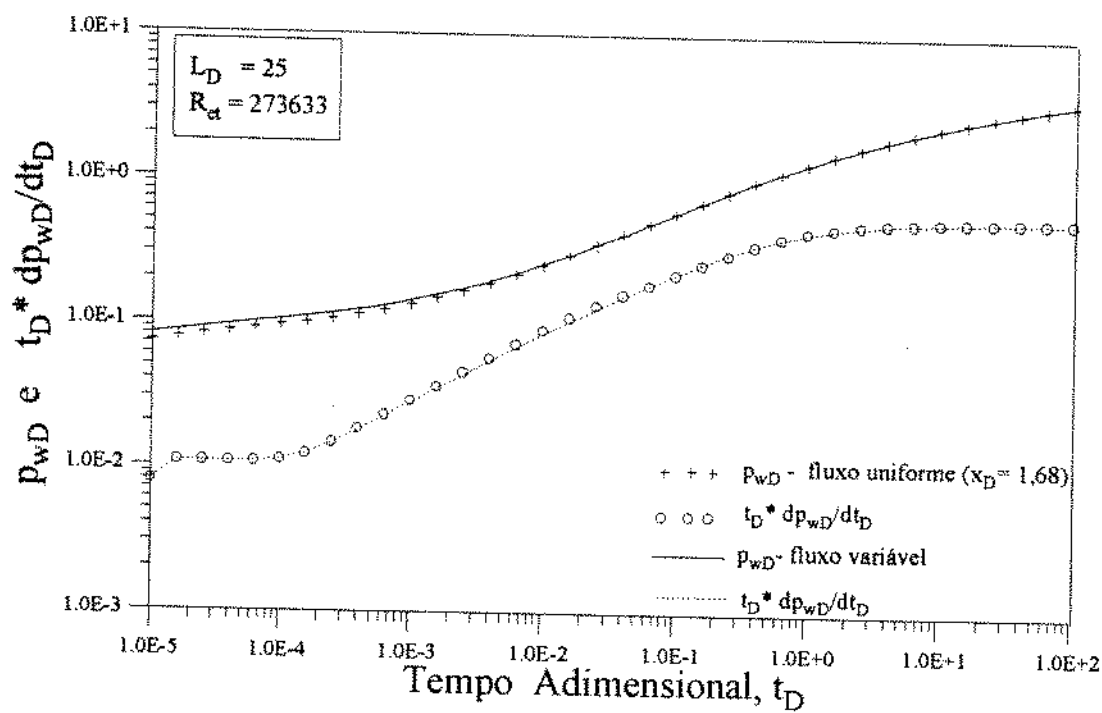


Figura 7.7: Comparação entre as pressões adimensionais com perda de carga no interior do poço (fluxo variável) e com fluxo uniforme para os dados do Caso 3E.

As Figuras 7.8 a 7.13 mostram, para os valores de R_{et} de 2300 e de 273633 e de L_D de 12,5, 1,0 e 25,0, as pressões adimensionais ao longo do poço horizontal para as condições de contorno de fluxo uniforme e considerando a queda de pressão ao longo do poço (fluxo variável). Nos gráficos destas Figuras foi traçada uma linha vertical em $x_D=1,68$ (e $x_D=0,32$) para visualização da diferença entre este valor e os pontos equivalentes reais para cada tempo adimensional.

Os valores das pressões adimensionais para os menores valores de L_D (Figuras 7.9 e 7.12) variam menos com a distância horizontal do que as pressões adimensionais para os maiores valores de L_D . Por esta razão, os erros reportados na Tabela 7.4 são pequenos para os valores de L_D pequenos (1,0 e 2,5), apesar de seus pontos equivalentes reais diferirem bastante do adotado (Tabela 7.3).

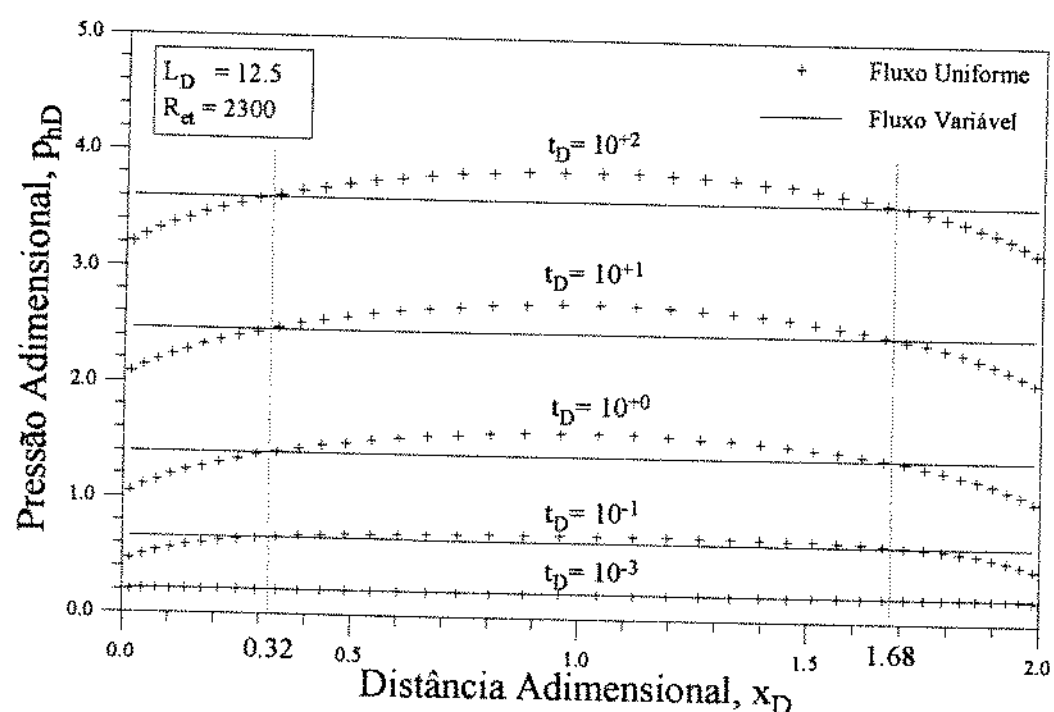


Figura 7.8: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 1.

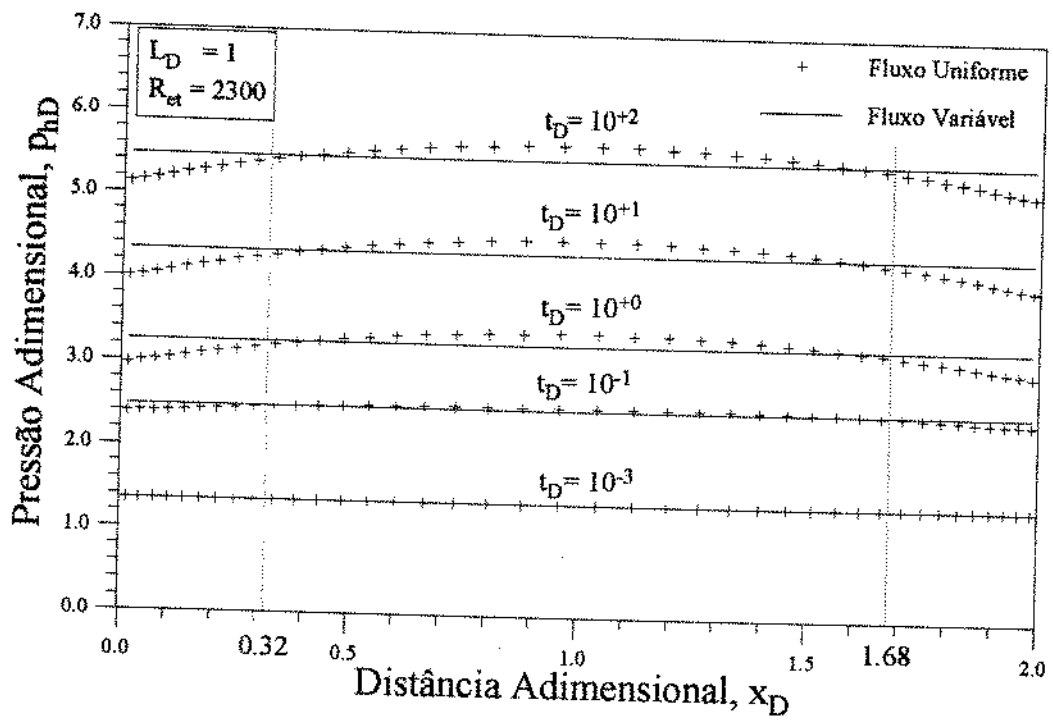


Figura 7.9: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 1A.

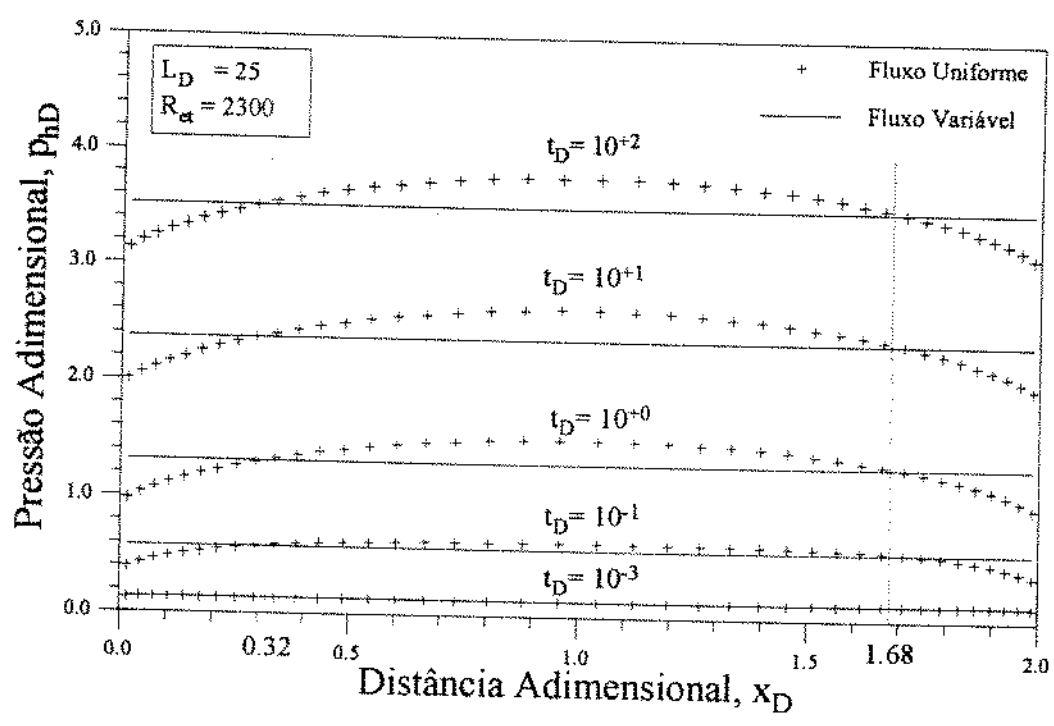


Figura 7.10: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 1E.

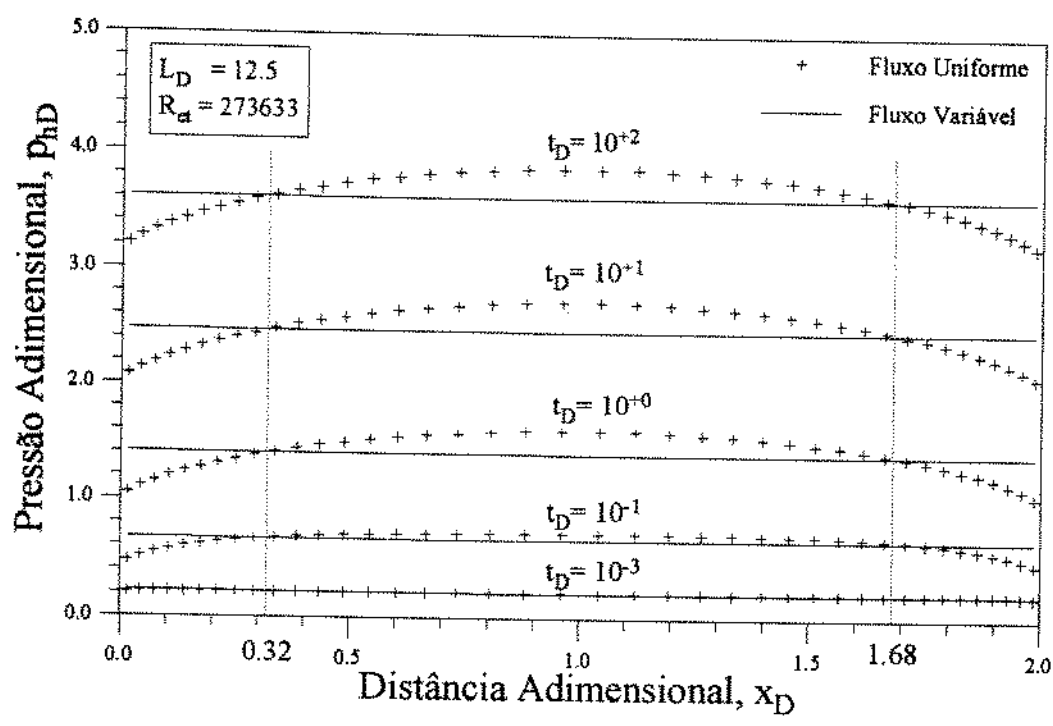


Figura 7.11: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 3.

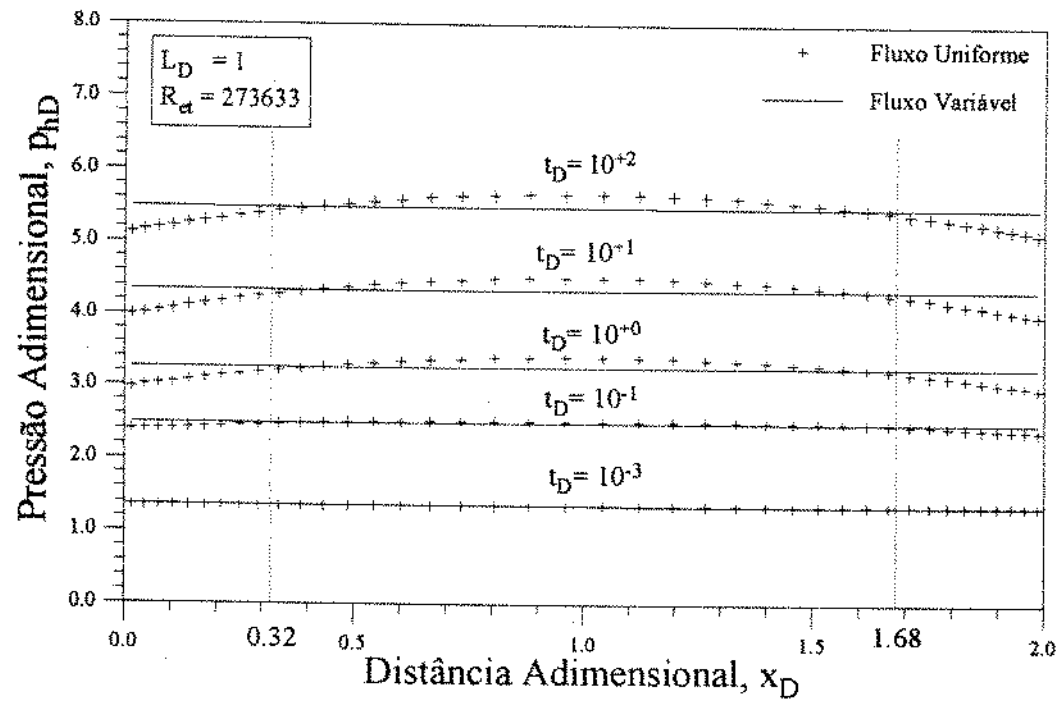


Figura 7.12: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 3A.

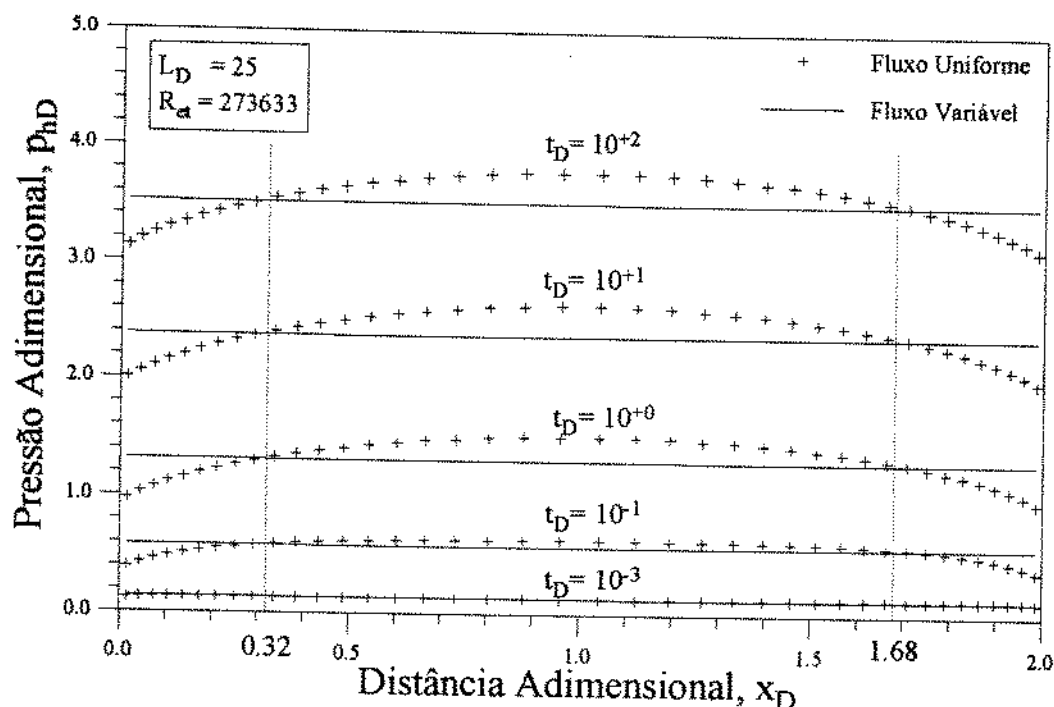


Figura 7.13: Comparação entre o ponto equivalente adotado e os pontos equivalentes reais para os dados do Caso 3E.

7.2. Regressão Não Linear Com Mínimos Quadrados

Os procedimentos de regressão não linear baseados na técnica dos mínimos quadrados^{32,33,34} têm por objetivo estimar um conjunto de parâmetros desconhecidos que minimize o somatório dos quadrados das diferenças entre os dados medidos e a resposta de um modelo matemático selecionado.

A função objetivo a ser minimizada no método dos mínimos quadrados é dada por:

$$E(\bar{\beta}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{pon}}} [g(t_i) - F(\bar{\beta}, t_i)]^2 \quad (7.4)$$

onde $\bar{\beta}$ é o vetor de parâmetros estimados, n_{pon} é o número de pontos do conjunto de dados fornecido, t (tempo) é a variável independente, F é a função que representa o modelo matemático e g é o valor de F medido.

Para a minimização da função objetivo, esta é expandida por uma série de Taylor em torno de um valor $E(\bar{\beta}_0)$, obtido a partir de um conjunto inicial de parâmetros, $\bar{\beta}_0$. No caso do método de Newton, a série de Taylor é truncada no termo quadrático, dando um caráter parabólico à função E^* , aproximação de E , o que, em princípio, garantiria um ponto de mínimo. A expansão da função objetivo é dada por:

$$E^*(\bar{\beta}) = E(\bar{\beta}_0) + \sum_{k=1}^{npar} (\beta_k - \beta_k^0) \left(\frac{\partial E}{\partial \beta_k} \right)_{\bar{\beta}_0} + \sum_{j=1}^{npar} \sum_{k=1}^{npar} (\beta_j - \beta_j^0)(\beta_k - \beta_k^0) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right)_{\bar{\beta}_0} \quad (7.5)$$

onde $npar$ é o número de parâmetros e $\bar{\beta}_0$ uma estimativa inicial para o vetor $\bar{\beta}$ a ser estimado.

Como se quer minimizar E^* , a expressão anterior é derivada em relação a $(\beta_j - \beta_j^0)$, que será denominado de $\delta\beta_j$:

$$\frac{\partial E^*}{\partial(\delta\beta_j)} = \left(\frac{\partial E}{\partial \beta_j} \right)_{\bar{\beta}_0} + \sum_{k=1}^{npar} (\delta\beta_k) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right)_{\bar{\beta}_0} ; j=1,2,...,npar \quad (7.6)$$

Para obter o mínimo da função E^* , então $\partial E^* / \partial(\delta\beta_j) = 0$. Logo:

$$\sum_{k=1}^{npar} (\delta\beta_k) \left(\frac{\partial^2 E}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right)_{\bar{\beta}_0} = - \left(\frac{\partial E}{\partial \beta_j} \right)_{\bar{\beta}_0} ; j=1,2,...,npar \quad (7.7)$$

Obtém-se um sistema de $npar$ equações com $npar$ incógnitas em $\delta\beta$, onde:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \beta_j} \right)_{\bar{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^{npon} [g(t_i) - F(\bar{\beta}_0, t_i)] \left(\frac{\partial F}{\partial \beta_j} \right)_{\bar{\beta}_0} \quad (7.8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 E}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right)_{\bar{\beta}_0} = -2 \sum_{i=1}^{npon} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial \beta_j} \frac{\partial F}{\partial \beta_k} + [g(t_i) - F(\bar{\beta}_0, t_i)] \frac{\partial^2 F}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right\}_{\bar{\beta}_0} \quad (7.9)$$

Pode-se então escrever a equação (7.7) como:

$$[H]_{\beta_0} (\delta \bar{\beta}) = -\bar{u} \quad (7.10)$$

onde H é conhecida como a matriz Hessiana e $\bar{u}$ é o vetor que contém os resíduos.

Uma vez resolvido o sistema acima e determinado o vetor $\delta \bar{\beta}$, os novos valores para os parâmetros são calculados como:

$$\beta_j^1 = \beta_j^0 + (\delta \beta_j); \quad j = 1, 2, \dots, n_{\text{par}} \quad (7.11)$$

A nova aproximação β_j^1 é a entrada para a próxima etapa do processo iterativo. Este procedimento é repetido até que a convergência seja alcançada dentro da tolerância considerada.

Para aumentar a velocidade de convergência ou até mesmo prevenir a divergência do processo, pode-se utilizar um algoritmo de busca linear, cujo objetivo é evitar que o método de regressão não linear caminhe por regiões onde os parâmetros não têm significado físico matemático ou, que os novos pontos determinados a cada iteração tenham resíduos maiores do que os dos pontos anteriores. Neste caso, a atualização dos parâmetros desconhecidos deve ser feita do seguinte modo:

$$\beta_j^1 = \beta_j^0 + \omega (\delta \beta_j); \quad j = 1, 2, \dots, n_{\text{par}} \quad (7.12)$$

onde ω é um fator de relaxação.

Um algoritmo simples de busca linear utilizado neste trabalho, o mesmo adotado por Namba e Horne³⁵ e por Rosa e Horne³⁶, é apresentado no Apêndice D.

Uma das dificuldades do método de Newton é que o valor para o qual a solução converge pode não ser um mínimo. Isto pode ocorrer se a superfície E tiver pontos de sela ou de máximo, o que, infelizmente, é muito comum nas aplicações em análise de testes. Para o valor final de E ser um mínimo, a matriz Hessiana deve ser positiva definida. Ela sempre é positiva definida nas vizinhanças de um mínimo, mas pode não ser em pontos distantes. O método de Newton sempre converge se a estimativa inicial estiver próxima do mínimo, mas normalmente diverge em caso contrário.

Gauss propôs uma modificação no método de Newton na qual desprezam-se os termos da matriz Hessiana representados pela segunda derivada, que geralmente são de difícil cálculo. Tal procedimento tem um preço em termos de robustez do método, tornando-o mais sensível às estimativas iniciais.

Levenberg³⁷ e Marquardt³⁸ propuseram uma alteração no método de Gauss-Newton. Para melhorar o condicionamento da matriz Hessiana, soma-se a ela uma matriz diagonal D, cujos elementos são iguais a uma constante positiva de valor λ . Após o cálculo da função objetivo na etapa $n+1$, se esta for menor que na etapa anterior modifica-se o valor da constante para $\lambda/10$, caso contrário para 10λ .

Neste trabalho será utilizado o método de Gauss-Newton modificado por Levenberg e Marquardt.

As derivadas da solução teórica utilizadas no cálculo da matriz Hessiana foram calculadas numericamente, utilizando-se um esquema de diferenças avançadas.

7.2.1. Análise Estatística da Regressão

Em uma regressão não linear é muito importante que se conheça a qualidade dos resultados obtidos. Além de fornecer os valores otimizados dos parâmetros é possível definir intervalos de confiança, na forma de limites superior e inferior, para cada um destes parâmetros. Estes intervalos são função da qualidade e da quantidade dos dados experimentais.

Dogru *et alii*³⁹ apresentaram um método aproximado para a determinação dos intervalos de confiança que, apesar de não ser um método rigoroso, é suficiente para a avaliação da qualidade dos ajustes.

Define-se o erro médio quadrático como:

$$EMQ = \frac{SQR}{n_{pon} - n_{par}} \quad (7.13)$$

onde SQR é a soma dos quadrados dos resíduos.

O intervalo de confiança para cada parâmetro pode ser calculado como:

$$\beta_j^* - \Delta\beta_j^* \leq \beta_j \leq \beta_j^* + \Delta\beta_j^* \quad (7.14)$$

onde β_j^* é o valor estimado para β_j na última iteração, e:

$$\Delta\beta_j^* = \sqrt{EMQ h_{jj}} t_{\gamma/2; n_{pon}-n_{par}} \quad (7.15)$$

onde h_{jj} é o elemento da diagonal da inversa da matriz Hessiana correspondente ao elemento β_j e $t_{\gamma/2; n_{pon}-n_{par}}$ é o valor da distribuição t de Student para um nível de significância γ e grau de liberdade $n_{pon}-n_{par}$. Um nível de significância γ implica em um intervalo de confiança de $100 (1-\gamma) \%$. Neste trabalho foi utilizado um nível de significância de 5%, o que significa que os parâmetros estimados têm 95% de probabilidade de estarem corretos dentro do intervalo calculado.

7.3. Análise de Dados de Testes de Pressão

Serão discutidos quatro casos (casos 1, 3, 4 e 5). Os casos 1 e 3, já utilizados anteriormente, são dados simulados a partir do modelo considerado neste trabalho. Os casos 4 e 5 são resultados de dados reais de testes de formação.

Nos casos onde o fator de película (S) apresenta-se negativo, foi utilizado o conceito de raio aparente de poço⁴⁰, definido por:

$$r_{wa} = r_w e^{-S} \quad (7.16)$$

Os dados do reservatório e do poço horizontal para os casos 1 e 3 estão apresentados nas Tabelas 6.1 e 6.2. As constantes adimensionais estão apresentadas na Tabela 7.2. O que diferencia os dois conjuntos de dados são as diferentes vazões totais de produção, ou em outras palavras, os diferentes números de Reynolds. O caso 1 apresenta fluxo laminar no interior do poço horizontal ($Re_t=2300$) e o caso 3 tem comportamento de fluxo turbulento ($Re_t=273633$).

Os dados de reservatório e do poço horizontal dos casos 1 e 3, utilizados para gerar as curvas simuladas de pressão versus tempo, e que serão ajustadas por regressão não linear estão apresentados na Tabela 7.5.

Permeabilidade horizontal, k - (mD)	300
Fator de Película, S	0
Coefficiente de estocagem, C - (bbl/psi)	0
Comprimento do poço horizontal, L - (pés)	1640,5
Permeabilidade vertical, k_z - (mD)	300

Tabela 7.5: Dados de poço e de reservatório para os casos 1 e 3.

A Tabela 7.6 mostra os resultados obtidos com a utilização do método dos mínimos quadrados aplicados aos dados de pressão e ao conjunto de dados de pressão em conjunto com a derivada da pressão em relação ao logaritmo do tempo, para o caso 1. A Tabela 7.7 apresenta os mesmos resultados para os dados do caso 3.

Tipo de Dados	k (mD)	S	C (bbl/psi)	L (pés)	k_z (mD)	Ite.
P	300,3 $\pm 0,17\%$	0,14 $\pm 77,88\%$	0,0001 $\pm 97,14\%$	1641,1 $\pm 0,40\%$	330,5 $\pm 5,96\%$	9
P+D	300,4 $\pm 0,13\%$	0,08 $\pm 81,30\%$	0,00004 $\pm 129,89\%$	1639,6 $\pm 0,32\%$	322,2 $\pm 3,83\%$	12
P - dados de pressão P+D - dados de pressão e da derivada				Estimativas iniciais: $k = 1000$ mD $k_z = 100$ mD $S = 3$ $C = 0,001$ bbl/psi $L = 500$ pés		

Tabela 7.6: Resultados da regressão não linear para os dados do caso 1.

Tipo de Dados	k (mD)	S	C (bbl/psi)	L (pés)	k _z (mD)	Ite.
P	300,3 ±0,17%	0,32 ±30,85%	0,00006 ±102,07%	1641,6 ±0,40%	325,6 ±5,29%	11
P+D	300,4 ±0,13%	0,27 ±21,96%	0,00002 ±133,01%	1640,0 ±0,32%	318,7 ±3,39%	18
P - dados de pressão P+D - dados de pressão e da derivada				Estimativas iniciais: k = 1000 mD k _z = 100 mD S = 3 C = 0,001 bbl/psi L = 500 pés		

Tabela 7.7: Resultados da regressão não linear para os dados do caso 3.

Os resultados das tabelas 7.6 e 7.7 são idênticos aos obtidos para um grande número de aproximações iniciais, sempre que ocorre a convergência. Conforme mostrado na Tabela 7.8, o que diferencia os resultados para estas diferentes aproximações iniciais é o número total de iterações para que ocorra a convergência para os valores finais.

Estimativas Iniciais					Número de Iterações e Tipo de Dados			
k (mD)	S	C (bbl/psi)	L (pés)	k _z (mD)	CASO1		CASO3	
					P	P+D	P	P+D
1000	0	0,001	1650	300	(1)	32	12	37
100	0	0,001	1650	300	(1)	12	(1)	12
300	3	0,001	1650	300	7	42	8	10
300	0	0,05	1650	300	9	45	8	9
300	0	0,001	3000	300	12	12	10	18
300	0	0,001	1650	1000	9	9	10	9
1000	7	0,05	5000	1000	12	13	14	13
100	3	0,001	3000	100	19	38	15	12
P - dados de pressão P+D - dados de pressão e da derivada (1) - não convergiu								

Tabela 7.8: Comparação entre várias estimativas iniciais para os dados dos casos 1 e 3.

Nos gráficos das Figuras 7.14 e 7.15 estão apresentados, para os casos 1 e 3, os dados simulados e as curvas de pressão e da derivada geradas pelos resultados das regressões. Pode-se notar, para ambos os casos, a concordância perfeita entre os dados reais e os determinados com a regressão não linear.

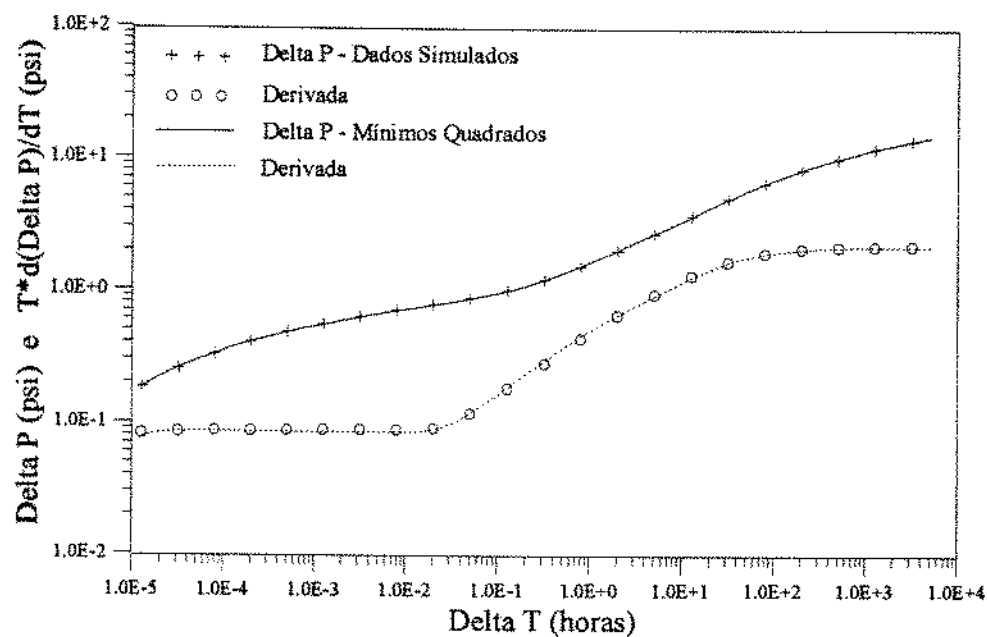


Figura 7.14: Regressão nos dados da pressão em conjunto com a derivada da pressão - caso 1.

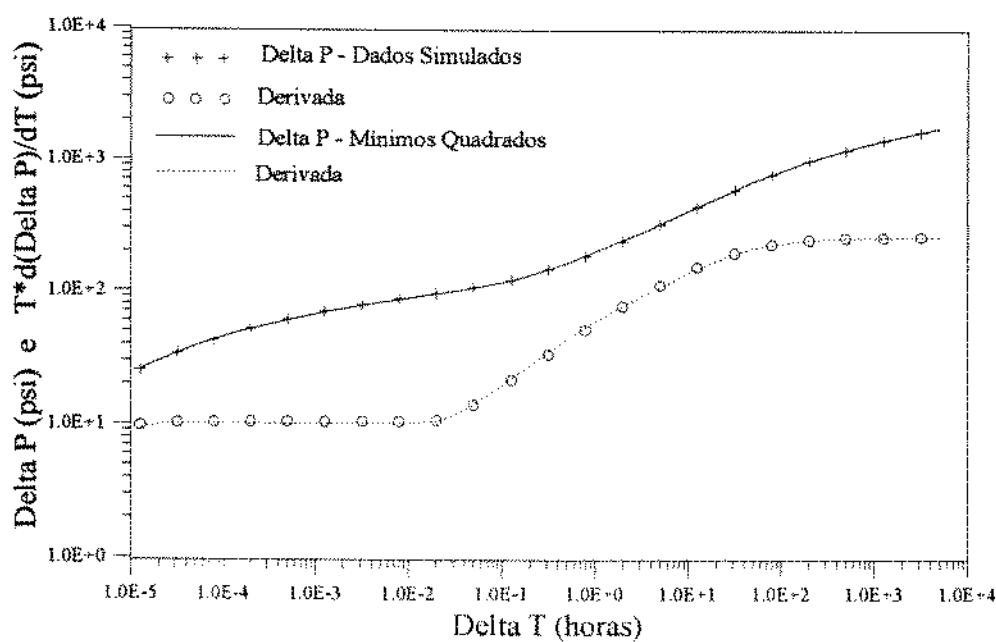


Figura 7.15: Regressão nos dados da pressão em conjunto com a derivada da pressão - caso 3.

Os gráficos das Figuras 7.16 e 7.17 mostram, para os casos 1 e 3, a evolução do comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações. Estes gráficos são para as aproximações iniciais das Tabelas 7.6 e 7.7 mas, curvas semelhantes são obtidas para qualquer aproximação inicial da Tabela 7.8.

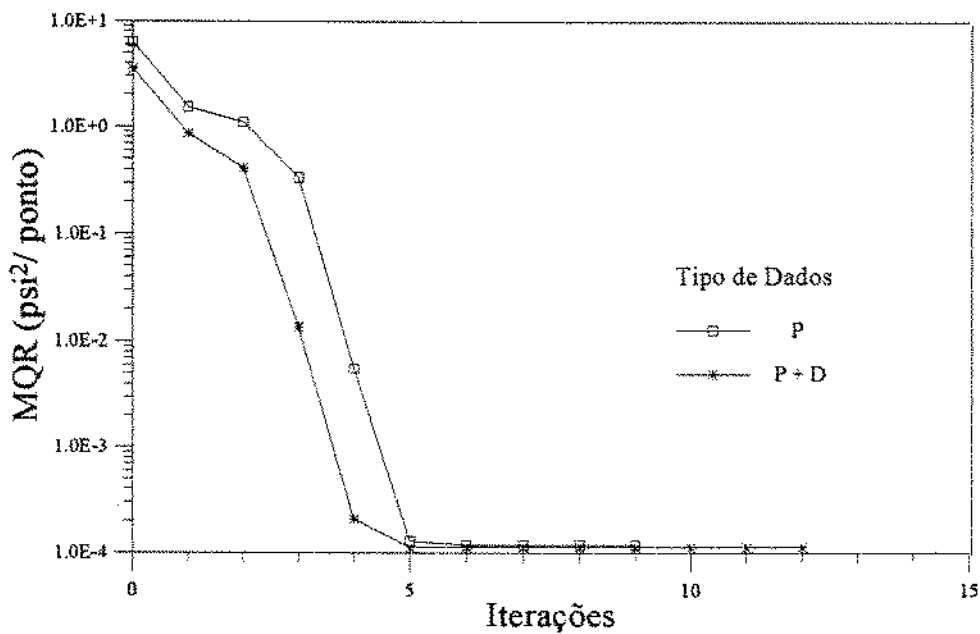


Figura 7.16: Comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações - caso 1.

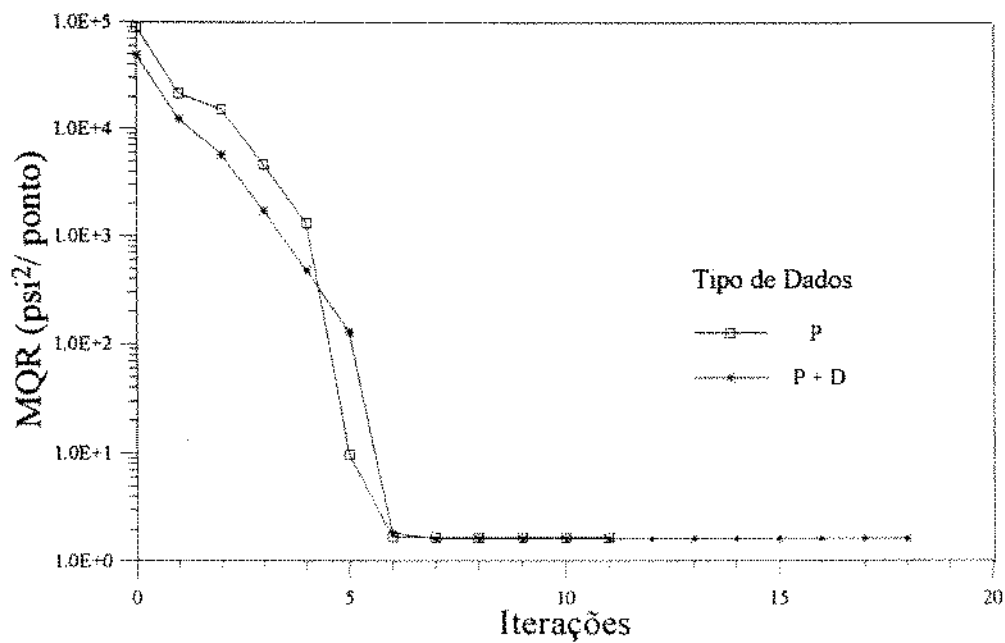


Figura 7.17: Comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações - caso 3.

Outro caso analisado, é um período de crescimento de pressão, após um período de fluxo curtíssimo, obtido da referência 41. Devido à escassez de dados de testes de pressão em poços horizontais na literatura, estes dados de teste serão utilizados neste trabalho, apesar dos inconvenientes que apresentam. Dentre estes inconvenientes pode-se citar o mais prejudicial: o tempo de fluxo não foi suficiente para eliminar os efeitos de estocagem antes do fechamento para a estática.

Por se tratar de um período de estática, foi utilizado o tempo equivalente de Agarwal⁴²:

$$t_{eq} = \frac{\Delta t * t_p}{\Delta t + t_p} \tag{7.17}$$

Os dados do reservatório e dos fluidos estão na Tabela 7.9 e os de pressão versus tempo na Tabela 7.10.

O valor do tempo de produção reportado na Tabela 7.9 foi obtido a partir do histórico de vazões obtido na referência 41, dividindo-se o volume total produzido pela última vazão de produção medida ($q_w=201$ bbl/d).

Porosidade, ϕ - (%)	18
Raio do poço, r_w - (pés)	0,27
Espessura do reservatório, h - (pés)	13,1
Posição vertical do poço, z_w - (pés)	4
Viscosidade do óleo, μ - (cp)	5,6
Compressibilidade total, c_t - (psi ⁻¹)	4,8x10 ⁻⁵
Tempo de produção, t_p - (horas)	1,1
Vazão de produção, q_w - (bbl/d)	201

Tabela 7.9: Dados de poço e de reservatório para o caso 4.

Tempo de Teste (horas)	Queda de Pressão (psi)	Tempo de Teste (horas)	Queda de Pressão (psi)	Tempo de Teste (horas)	Queda de Pressão (psi)
0,0017	11,49	0,0571	200,37	1,0818	588,21
0,0032	21,04	0,0355	145,50	1,2088	595,98
0,0047	29,55	0,0384	153,39	1,3562	603,07
0,0077	44,49	0,0471	176,37	1,5199	609,58
0,0091	51,46	0,0514	186,89	1,7039	615,76
0,0106	58,16	0,0571	200,37	1,9093	620,65
0,0121	64,48	0,1329	324,51	2,1410	625,57
0,0136	70,66	0,1467	340,21	2,4020	630,07
0,0180	87,94	0,1835	376,05	2,6933	634,01
0,0195	93,33	0,2051	393,66	3,0207	637,65
0,0210	98,57	0,2267	409,19	3,3885	640,86
0,0239	108,77	0,2536	426,10	3,7995	643,99
0,0297	127,88	0,2803	441,12	4,2483	646,98
0,0326	136,80	0,6194	540,85	4,7546	649,31
0,0355	145,50	0,6934	551,87	5,3224	651,72
0,0384	153,39	0,7711	561,55	5,9644	654,05
0,0471	176,37	0,8642	571,56		
0,0514	186,89	0,9660	580,36		

Tabela 7.10: Dados de pressão versus tempo para o caso 4.

Os resultados obtidos através da regressão não linear constam da Tabela 7.11. Esta Tabela inclui os resultados da análise feita por Donoso e Perez⁴¹.

Tipo de Dados	k (mD)	S	C (bbl/psi)	L (pés)	k _z (mD)	Ite.
P	3,35 ±566,4%	0,79 ±43,3%	0,00146 ±3,79%	458,3 ±160,4%	0,94 ±826,3%	17
P+D	3,16 ±645,7%	0,37 ±628,1%	0,00140 ±27,9%	219,4 ±311,4%	4,54 ±712,2%	20
(2)	3,5	0,5	0,0015	344,5	1,75	
P - dados de pressão P+D - dados de pressão e da derivada (2) Resultados da referência 41				Estimativas iniciais: k = 3,46 mD k _z = 1,70 mD S = 0,60 C = 0,0014 bbl/psi L = 342,0 pés		

Tabela 7.11: Resultados da análise para os dados do caso 4.

Um fato interessante que fica evidenciado na Tabela 7.11 é a grande correlação existente entre o comprimento do poço, L , e a permeabilidade vertical, k_z . São obtidos bons resultados tanto para $L=458,3$ pés e $k_z= 0,94$ mD , quanto para $L= 219,4$ pés e $k_z= 4,54$ mD.

As Figuras 7.18, 7.19 e 7.20 mostram os gráficos da pressão e da derivada da pressão, utilizando os dados obtidos neste trabalho e os dados reportados por Donoso e Perez⁴¹. Da comparação destas Figuras, observa-se que as curvas obtidas com a utilização da regressão não linear do presente trabalho (Figuras 7.19 e 7.20) ajustam-se melhor aos dados de teste do que as curvas obtidas com os parâmetros fornecidos na referência 41 (Figura 7.18). Donoso e Perez⁴¹ não aplicaram qualquer método de regressão não linear aos seus dados. Também não ficou clara qual foi a solução adotada pelos autores, já que não apresentaram qualquer formulação matemática.

O gráfico da Figura 7.21 mostra a evolução do comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações. Nota-se neste gráfico que o resíduo final para o ajuste com os dados da pressão em conjunto com a derivada é bem maior do que o resíduo final com o ajuste apenas nos dados de pressão. Este fato fica bem claro nas Figuras 7.19 e 7.20, em que se observa o melhor ajuste na curva da derivada da pressão com os dados obtidos com a regressão não linear apenas na pressão (Figura 7.19).

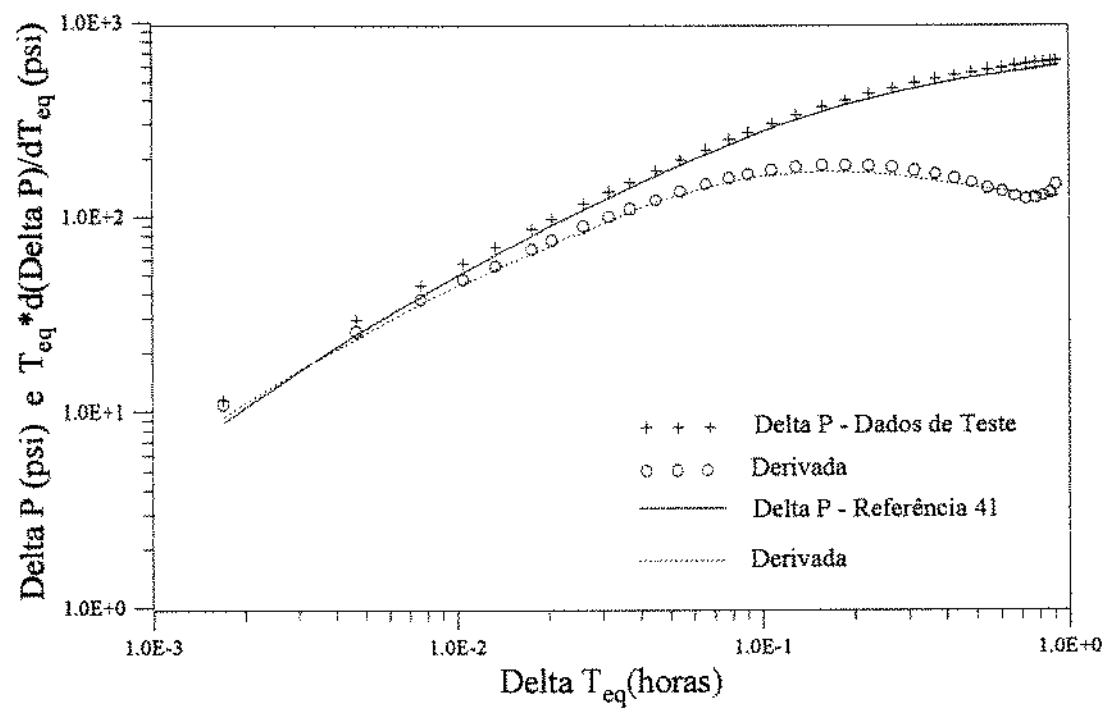


Figura 7.18: Pressão e derivada utilizando os dados da referência 41 - caso 4.

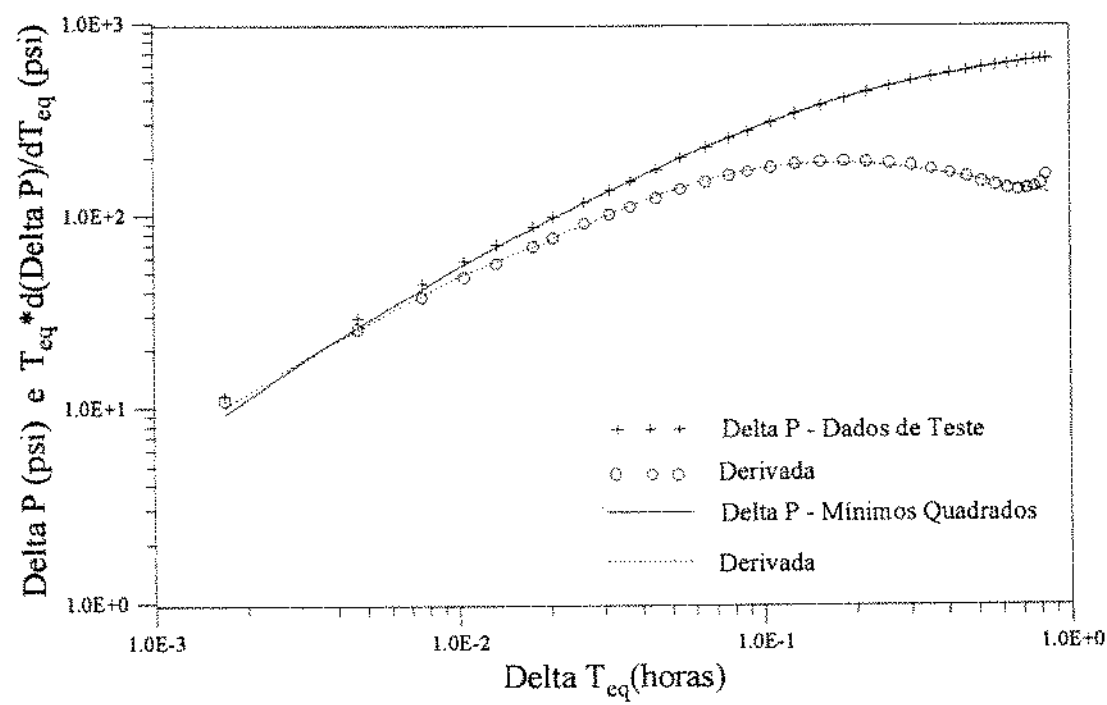


Figura 7.19: Regressão nos dados da pressão - caso 4.

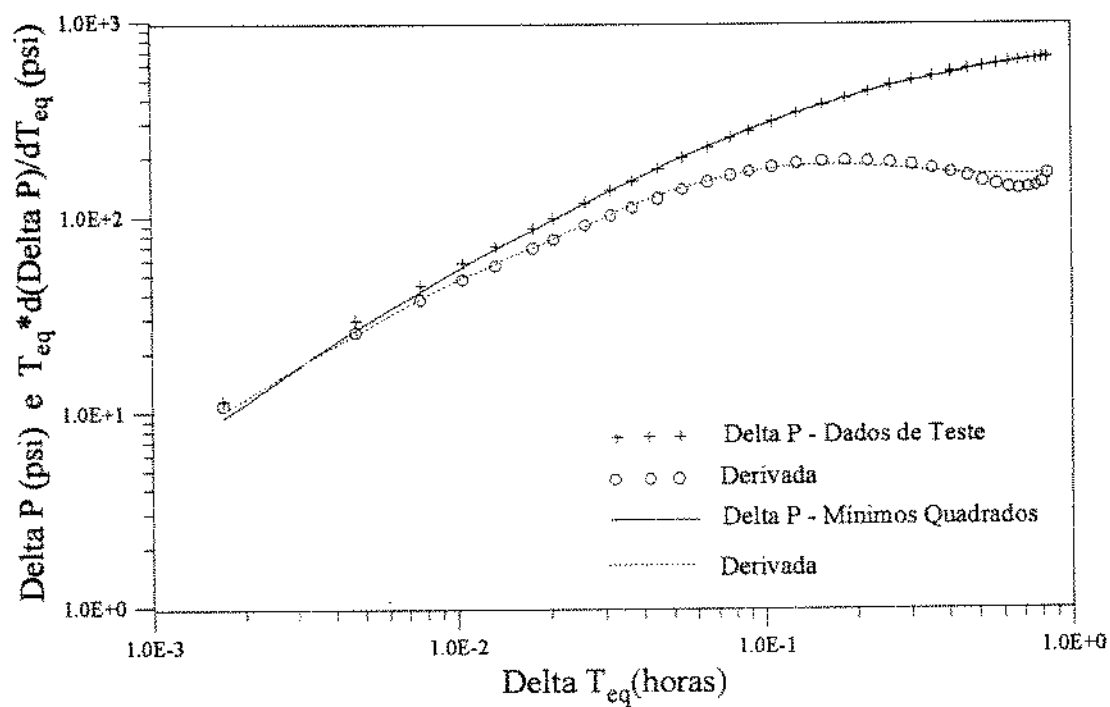


Figura 7.20: Regressão nos dados da pressão em conjunto com a derivada da pressão - caso 4.

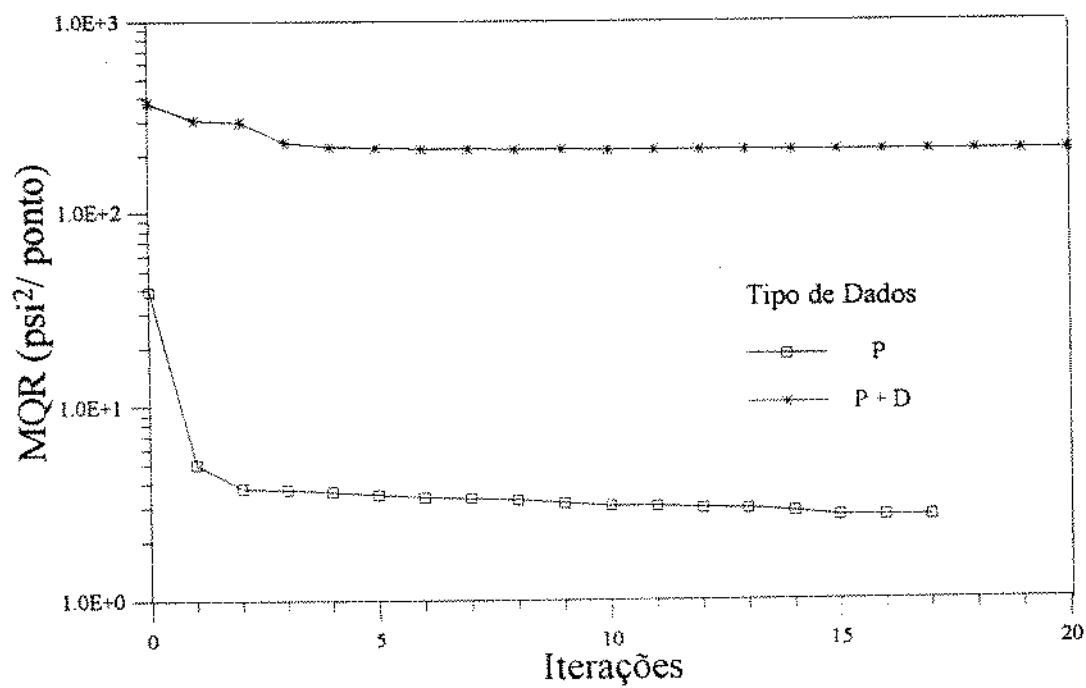


Figura 7.21: Comportamento da média dos resíduos ao quadrado ao longo das iterações - caso 4.

Outro caso analisado, denominado de caso 5, foi obtido de um teste em um poço na Bacia de Campos. Os dados de pressão versus tempo estão na Tabela 7.12 e os dados de fluido e de reservatório estão na Tabela 7.13.

Tempo de Teste (horas)	Queda de Pressão (psi)	Tempo de Teste (horas)	Queda de Pressão (psi)	Tempo de Teste (horas)	Queda de Pressão (psi)
0,0007	4,693	0,1879	57,733	6,6189	104,375
0,0018	14,931	0,1927	58,018	7,2856	105,797
0,0030	19,766	0,2022	58,586	7,6189	106,508
0,0041	23,179	0,2189	59,440	7,9522	107,219
0,0052	25,880	0,2356	60,293	8,6189	108,356
0,0063	28,013	0,2522	61,004	8,9522	108,925
0,0075	29,720	0,2856	62,426	9,2856	109,352
0,0086	31,142	0,3189	63,706	9,9522	110,347
0,0097	32,279	0,3522	64,701	10,2856	110,774
0,0108	33,417	0,3856	65,696	10,6189	111,343
0,0112	33,701	0,4552	67,403	10,9522	111,769
0,0119	34,270	0,5356	69,109	11,6189	112,480
0,0142	35,834	0,6189	70,531	11,9522	112,765
0,0175	37,683	0,7022	71,953	12,2856	113,191
0,0198	38,678	0,7856	73,233	12,6189	113,476
0,0243	40,385	0,8689	74,371	13,2856	114,044
0,0276	41,522	0,9522	75,650	13,6189	114,329
0,0324	42,802	1,2856	79,205	14,2856	114,898
0,0355	43,513	1,4522	80,912	14,9522	115,324
0,0411	44,509	1,6189	82,334	15,2856	115,609
0,0590	47,068	1,9522	85,178	16,2856	116,320
0,0724	48,490	2,2856	87,737	16,6189	116,462
0,0795	49,201	2,6189	90,013	16,9522	116,604
0,0892	50,054	2,9522	91,861	17,4522	116,888
0,1049	51,476	3,2856	93,710	17,5356	117,031
0,1154	52,330	3,9522	96,554	17,6856	117,031
0,1509	55,174	4,6189	98,829	17,7589	117,173
0,1576	55,742	4,9522	99,967	17,9806	117,173
0,1666	56,311	5,2856	100,962	18,0978	117,315
0,1722	56,738	5,9522	102,811		

Tabela 7.12: Dados de pressão versus tempo para o caso 5.

Porosidade, ϕ - (%)	23
Raio do poço, r_w - (pés)	0,35
Espessura do reservatório, h - (pés)	130
Comprimento do poço horizontal, L - (pés)	315
Posição vertical do poço, z_w - (pés)	65
Viscosidade do óleo, μ - (cp)	2,4
Compressibilidade total, c_t - (psi^{-1})	$1,3 \times 10^{-5}$
Tempo de produção, t_p - (horas)	46,7
Vazão de produção, q_w - (bbl/d)	1253

Tabela 7.13: Dados de poço e de reservatório para o caso 5.

Estes dados de teste apresentam alguns inconvenientes⁴³:

- Devido à particularidades da perfuração o reservatório produtor está em comunicação com outro reservatório de características diferentes e não bem determinadas.
- Ao final do poço horizontal existe uma falha com valores de rejeito e extensão lateral desconhecidos.

Estes fatos não foram considerados no modelo teórico e provavelmente devem afetar os dados obtidos no teste de pressão.

Novamente por se tratar de um período de estática foi utilizado o tempo equivalente de Agarwall (equação (7.17)), Os resultados obtidos através da regressão não linear constam da Tabela 7.14.

Tipo de Dados	k (mD)	S	C (bbl/psi)	L (pés)	k _z (mD)	Ite.
P	69,2 ±16,65%	-1,42 ±15,44%	0,00016 ±1173,0%	297,6 ±24,29%	72,3 ±25,24%	4*
P+D	63,3 ±5,62%	-1,37 ±10,44%	0,00168 ±103,52%	344,8 ±8,76%	57,6 ±18,70%	12
P - dados de pressão P+D - dados de pressão e da derivada * - falha no algoritmo de procura linear				Estimativas iniciais: k = 70 mD k _z = 60 mD S = -1,0 C = 0,0 bbl/psi L = 300 pés		

Tabela 7.14: Resultados da análise para os dados do caso 5.

A Figura 7.22 mostra, para o caso 5, o gráfico da pressão e da sua derivada obtidos através da regressão não linear nos dados de pressão em conjunto com a derivada da pressão em relação ao logaritmo do tempo.

Existe uma dificuldade muito grande em identificar os diversos regimes de fluxo a partir destes dados de teste. Alguns comentários sobre este assunto serão feitos a seguir.

O valor do comprimento adimensional para este poço, utilizando os dados da Tabelas 7.13 e 7.14, é da ordem de 1,0. Conforme mostrado no Capítulo 6, para valores de L_D muito pequenos o regime linear não se desenvolve totalmente. Realmente este regime de fluxo não está bem caracterizado no gráfico da Figura 7.22.

Considerando o tempo adimensional para o início do regime de fluxo radial final, definido no Capítulo 5, este regime estaria bem caracterizado a partir de um tempo equivalente de cerca de 50,0 horas, maior do que o tempo equivalente final obtido. De qualquer maneira existe a dúvida, se o patamar horizontal na curva de derivada da pressão, entre os tempos equivalentes de 2 e 8 horas, corresponderia ao regime radial final.

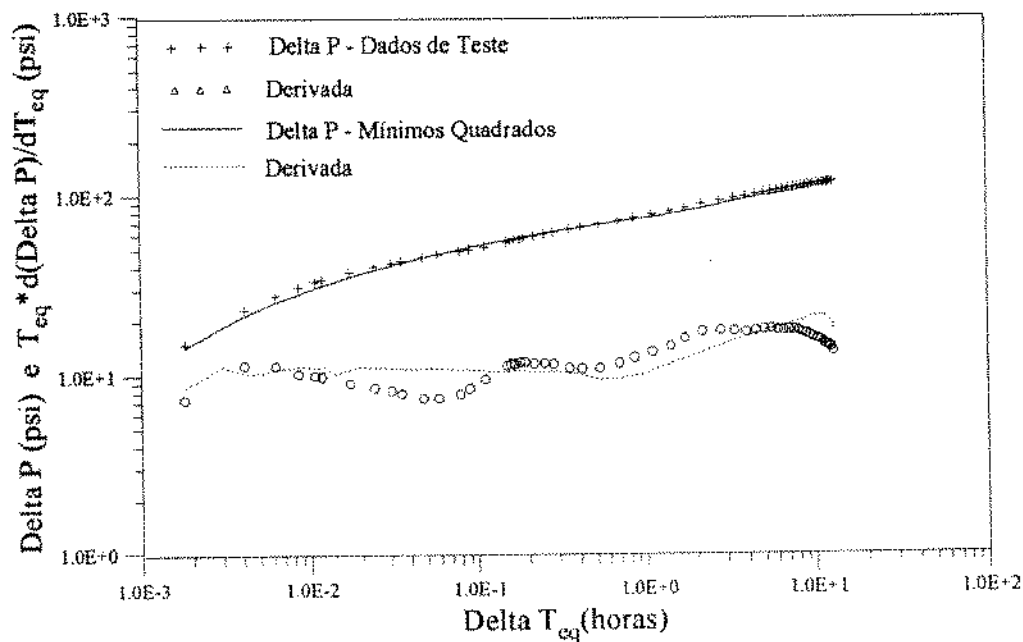


Figura 7.22: Regressão nos dados da pressão em conjunto com a derivada da pressão-caso 5.

8. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

1. A solução para o modelo de poço horizontal que inclui a queda de pressão ao longo do poço apresenta, para os casos analisados, as mesmas respostas de pressão e de vazão que a solução para o modelo de condutividade infinita.
2. Com a inclusão do dano de formação, que considera os efeitos da anisotropia da formação e do tempo de exposição da mesma aos fluidos de perfuração, a pressão também pode ser considerada constante ao longo do poço. Ocorrem variações no perfil de vazão, dependentes do valor do fator de película em cada posição do poço.
3. As respostas de pressão e de vazão de um poço horizontal são funções do seu comprimento adimensional. Para poços com pequenos comprimentos adimensionais o regime de fluxo linear tende a não ser bem definido, ocorre um aumento no valor da pressão adimensional e também uma distribuição mais uniforme das vazões, mesmo para tempos longos.
4. Uma boa aproximação para o ponto equivalente adimensional (distância horizontal a partir da origem, em que o modelo de fluxo uniforme e o modelo deste trabalho fornecem o mesmo valor de pressão) foi determinada como sendo de 1,68. Este valor pode ser considerado representativo para valores de comprimento adimensional do poço variando entre 1 e 25.
5. A utilização da técnica da regressão não linear produziu bons resultados quando aplicada aos casos analisados. A convergência para os valores ótimos dos parâmetros depende das aproximações iniciais adotadas para os mesmos. A

escassez de dados reais de teste de formação em poços horizontais dificulta uma melhor análise da potencialidade desta técnica.

6. A análise automatizada é dificultada pela grande quantidade de parâmetros reservatório/poço horizontal envolvidos.
7. Constata-se que existe uma dependência grande entre os valores obtidos para o comprimento do poço e a permeabilidade vertical do reservatório. Uma boa alternativa seria determinar, quando mecanicamente possível, o valor do comprimento efetivo do poço horizontal através de uma perfilagem de produção. Este procedimento eliminaria um dos parâmetros a serem obtidos na interpretação, melhorando os resultados obtidos para os outros parâmetros.
8. Sugere-se o prosseguimento do estudo da análise automatizada de testes em poços horizontais. Uma idéia é que seja feita uma regressão preliminar em partes específicas dos dados, onde um ou mais parâmetros têm pouca ou nenhuma influência. Este procedimento pode ser utilizado para determinar estimativas iniciais melhores para efetuar a regressão não linear no conjunto total de dados.

NOMENCLATURA

a	= semi-eixo maior da elipse da zona danificada, pés (m).
A	= área da seção transversal do poço horizontal, pés ² (m ²).
b	= foco das elipses concêntricas, pés (m).
c	= semi-eixo menor da elipse da zona danificada, pés (m).
c_t	= compressibilidade total, psi ⁻¹ (Pa ⁻¹).
C	= coeficiente de estocagem, bbl/psi (m ³ /Pa).
C_{hD}	= condutividade adimensional do poço horizontal.
d	= diâmetro do poço horizontal, pés (m).
E	= função objetivo, psi ² (Pa ²).
f	= fator de fricção de Fanning.
f_t	= fator de fricção de Fanning na extremidade produtora do poço horizontal.
F	= valor teórico da função analisada na regressão não linear.
g	= valor medido da função F .
G_1, G_2, G_3	= funções de Green associadas ao problema do reservatório infinito.
h	= espessura da formação, pés (m).
H	= matriz Hessiana.
k	= permeabilidade absoluta horizontal, mD (m ²).
k_z	= permeabilidade absoluta vertical, mD (m ²).
k_s	= permeabilidade absoluta da região danificada, mD (m ²).
K_0	= função de Bessel modificada de segunda espécie e de ordem zero.
$\vec{K}$	= tensor de permeabilidades.
L	= comprimento do poço horizontal, pés (m).
M	= número de blocos do poço horizontal discretizado.
MQR	= média dos quadrados dos resíduos, psi ² /ponto (Pa ² /ponto).
n_{par}	= número de parâmetros para a regressão não linear.
n_{pon}	= número de pontos para a regressão não linear.

N	= número de intervalos de tempos.
p	= pressão, psi (Pa).
p_h	= pressão no poço horizontal, psi (Pa).
Δp	= queda de pressão, psi (Pa).
q	= vazão medida na superfície em condições de fundo, bbl/d (m^3/s).
q_h	= vazão por unidade de comprimento do poço horizontal, bbl/d/pés ($m^3/s/m$).
q_{hc}	= vazão acumulada em um ponto do poço horizontal, bbl/d (m^3/s).
q_{res}	= vazão na face da formação com efeitos de estocagem e de película, bbl/d (m^3/s).
r	= distância radial, pés (m).
r_{wD}	= raio equivalente adimensional (equações 4.22 e 5.31), pés (m).
r_{wzD}	= raio equivalente adimensional (equação 4.23), pés (m).
$\bar{r}$	= raio equivalente, pés (m).
R	= função resíduo do método de Newton.
Re	= número de Reynolds ao longo do poço horizontal.
Re_t	= número de Reynolds na extremidade produtora do poço horizontal.
S	= fator de película.
S_e	= comprimento do arco elíptico no plano y-z, pés (m).
S_z	= pseudo fator de película.
t	= tempo, horas (s).
v_n	= velocidade normal à elipse no plano y-z, pés/s (m/s).
v_y	= velocidade na direção y, pés/s (m/s).
v_z	= velocidade na direção z, pés/s (m/s).
x, y, z	= distâncias no sistema de coordenadas cartesianas, pés (m).
x', y_w, z_w	= posição da fonte no sistema de coordenadas cartesianas, pés (m).
y', z'	= coordenadas transformadas nas direções y e z (equações 5.14a e 5.14b), pés (m).

Letras Gregas

α	= fatores de conversão de unidades.
$\bar{\beta}$	= vetor de parâmetros a serem determinados.
δ	= diferença entre os parâmetros das iterações n e $n+1$.
ϵ	= rugosidade do poço horizontal, pés (m).
ϕ	= porosidade, % (%).
γ	= constante de Euler ($\gamma = 0,5772$)
η	= constante de difusividade hidráulica horizontal, pés ² /hora (m ² /s).
η_z	= constante de difusividade hidráulica vertical, pés ² /hora (m ² /s).
μ	= viscosidade, cp (Pa.s)
ρ_f	= peso específico do fluido do reservatório, lbm/pés ³ (kg/m ³).
$\rho-\theta$	= sistema de coordenadas elípticas.
ω	= parâmetro de relaxação da regressão não linear.

Subscritos

a	= aparente.
D	= adimensional.
e	= inclui os efeitos de estocagem e de película.
eq	= equivalente.
f	= fluxo.
máx	= máximo.
min	= mínimo.
p	= produção.
s	= região danificada, inclui o efeito de película.
w	= poço.
z	= direção vertical.
0	= inicial.

Sobreescritos

' = variável de integração.

0 = inicial.

Transformações de Unidades

bbl/dia = 0,159 m³/dia.

psi = 6,895 * 10³ Pa.

pé = 0,3048 m.

mD = 0,987 * 10⁻¹⁵ m².

cp = 10⁻³ Pa.s.

bbl/psi = 2,306 * 10⁻⁵ m³/Pa.

pol = 0,0254 m.

lbm/pés³ = 16,02 kg/m³.

pés²/hora = 2,581 * 10⁻⁵ m²/s.

Funções Especiais

função erro: $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$

função integral exponencial: $E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$

REFERÊNCIAS

1. Reiss, L.H.: "Horizontal Wells Production After Five Years," paper SPE 14338, 60th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Las Vegas, September 22-25, 1985.
2. Gomes, J.A.T.: "Simulação Numérica de Poços Horizontais em Reservatórios com Fluxo Multifásico usando Refinamento Local," Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Engenharia de Petróleo, Campinas, São Paulo, Novembro, 1990.
3. Joshi, S.D.: "Horizontal Well Technology," Penwell Publishing Company, Tulsa, Oklahoma, 1991.
4. Norris, S.O., Soliman, M.Y. e Puthigal, S.K.: "Predicting Horizontal Well Performance: A Review of Current Technology," paper SPE 21793, California Regional Meeting, Long Beach, California, March 20-22, 1991.
5. Gringarten, A.C., Ramey, H.J.Jr. e Raghavan, R.: "Unsteady Steady Pressure Distributions Created by a Well With a Single Infinite Conductivity Vertical Frature," Soc. Pet. Eng. Journal (Aug. 1974) 347 -60; Trans., AIME, 257.
6. Clonts, M.D. e Ramey, H.J.Jr.: "Pressure Transient Analysis for Wells With Horizontal Drainholes," paper SPE 15116, California Regional Meeting, Oakland, California, April 2-4, 1986. Tese de Mestrado, Stanford University, June, 1985.

7. Daviau,F., Mouronval,G., Bourdarot,G. e Curutchet,P.: "Pressure Analysis for Horizontal Wells," SPE Formation Evaluation (Dec. 1988) 716-24; Trans., AIME, 285. Paper SPE 14251, 60th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Las Vegas, September 22-25, 1985.
8. Goode,P.A. e Thambynayagam,R.K.M.: "Pressure Drawdown and Buildup Analysis of Horizontal Wells in Anisotropic Media," SPE Formation Evaluation (Dec. 1987) 683-97; Trans., AIME, 283. Paper SPE 14250, 60th Annual Technical Conference and Exhibition of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Las Vegas, September 22-25, 1985.
9. Souza,R.F.: "Comportamento de Pressão em Poços Horizontais Não Surgentes," Tese de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Abril, 1987.
10. Carvalho, R.S.: "Comportamento de Pressão em Poços Horizontais," Tese de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Abril, 1988.
11. Rosa,A.J. e Carvalho, R.S.: "A Mathematical Model for Pressure Evaluation in an Infinite-Conductivity Horizontal Well," SPE Formation Evaluation (Dec. 1989) 559-66.
12. Kuckuk,F.J., Goode,P.A., Wilkinson,D.J. e Thambynayagam,R.K.M.: "Pressure Transient Behavior of Horizontal Wells With and Without Gas Cap or Aquifer," paper SPE 17413 presented at the California Regional Meeting, Long Beach, California, March 23-25, 1988.

13. Kuckuk,F.J., Goode,P.A., Brice,B.W., Sherrard,D.W. e Thambynayagam,R.K.M.: "Pressure Transient Analysis and Inflow Performance for Horizontal Wells," paper SPE 18300 presented at the 63th Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, Texas, October 2-5, 1988.
14. Ozkan,E., Raghavan,R. e Joshi,S.D.: "Horizontal Well Pressure Analisis," SPE Formation Evaluation (Dec. 1989) 567-575.
15. Babu,D.K. e Odeh,A.S.: "Transient Flow Behavior of Horizontal Wells: Pressure Drawdown and Buildup Analysis," SPE Formation Evaluation, (March 1990) 7-15.
16. Babu,D.K. e Odeh,A.S.: "Productivity of a Horizontal Well: Apendices A and B," paper SPE 18334 available from SPE Book Order Dept., Richardson, Texas.
17. Dikken, B.J.: "Pressure Drop in Horizontal Wells and Its Effect on Production Performance," J. Pet. Tech. (Nov. 1990) 1426-33.
18. Ozkan,E., Sarica,C., Hacıislamoglu,M. e Raghavan R.: "Effect of Conductivity on Horizontal Well Pressure Behavior," paper SPE 24683, 67th Annual Technical Conference and Exhibition of Society of Petroleum Engineers of AIME, Washington, D.C., October 4-7, 1992.
19. Gringarten, A.C. e Ramey, H.J.Jr.: "The Use of Source and Green's Functions in the Solution of Unsteady Flow Problems in Reservoirs," Soc. Pet. Eeng. Journal (Oct. 1973) 285-96; Trans., AIME, 254.

20. Cinco,L.H., Samaniego-V,F. e Dominguez,N.: "Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture," Soc. Pet. Eng. Journal (Aug. 1978) 253-264.

21. Rodríguez,F.: "Unsteady State Pressure Behavior of a Reservoir With a Well Intersected by a Partially-Penetrating Finite-Conductivity Vertical Fracture," Tese de PHD, Stanford University, October, 1982.

22. Ressurreição, C.E.M.S.: "Comportamento Transiente de Vazão e Análise de Declínio de Produção em Poços com Fratura Vertical Assimétrica de Condutividade Infinita," Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas- Departamento de Engenharia de Petróleo, Campinas, São Paulo, Novembro, 1990.

23. Brill,J.P. e Beggs,H.D.: "Two-Phase Flow in Pipes," February, 1984

24. Van Everdingen,A.F. e Hurst,W.: "The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems," Trans. (Dec. 1949) 305-24,AIME, **186**.

25. Frick,T.P. e Economides,M.J.: "Horizontal Well Damage Characterization and Removal," paper SPE 21795, Western Regional Meeting, Long Beach, California, March 20-22, 1991.

26. Hawkins,M.F.: "A Note on the Skin Effect," Trans. (1956) 356-57, AIME, **207**.

27. Peaceman,D.W.: "Interpretation of Well-Block Pressures in Numerical Reservoir Simulation With Nonsquare Grid Blocks and Anisotropic Permeability," Soc. Pet. Eng. Journal (June 1983) 531-543.

28. Abramowitz, M. e Stegun, I.A.: "Handbook of Mathematical Functions," 1046 p., New York, Dover, 1965.
29. Prats, M.: "Effect of Vertical Fractures on Reservoir Behavior-Incompressible Fluid Case," Soc. Pet. Eng. Journal (June 1961) 105-117.
30. Ferguson, C.K. e Klotz, J.A.: "Filtration from Mud During Drilling," Trans. (1954) 29-42, AIME, 201.
31. Bourdet, D., Ayoub, J.A. e Pirard, Y.M.: "Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation," SPE Formation Evaluation (June 1989) 293-302.
32. Vieira, P.M.F.: "Análise Automatizada de Testes de Pressão," Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Engenharia de Petróleo, Campinas, São Paulo, Dezembro, 1992.
33. Coelho, A.C.D.: "Análise de Testes em Reservatórios com Variação Vertical de Permeabilidade," Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Engenharia de Petróleo, Campinas, São Paulo, Novembro, 1991.
34. Vidal, J.O.: "Análise Automatizada de Testes de Pressão em Poços Não Surgentes," Tese de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas-Departamento de Engenharia de Petróleo, Campinas, São Paulo, Março, 1989.
35. Namba, T. e Horne, R.N.: "An Improved Regression Algorithm for Automated Well Test Analysis," paper SPE 18161, 63th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Houston, Texas, October 2-5, 1988.

36. Rosa,A.J. e Horne,R.N.: "Automated Well Test Analysis Using Robust (LAV) Nonlinear Parameter Estimation," paper SPE 22679, 66th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, Texas, October 6-9, 1991.
37. Levenberg,K.: "A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares," Quart. Appl. Math., 2(1944), pp. 164-168.
38. Marquardt,D.W.: "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters," J. Soc. Appl. Math., Vol. 11, n.2, June, 1963.
39. Dogru,A.N., Dixon,T.N. e Edgar,T.F.: "Confidence Limits on the Parameters and Predictions of Slightly Compressible, Single-Phase Reservoirs," Soc. Pet. Eng. Journal (February 1977) 42-56.
40. Brons,F e Miller,W.C.: "A Simple Method for Correcting Spot Pressure Readings," J. Pet. Tech. (Feb. 1961) 172-174; Trans., AIME, 222.
41. Donoso,J.M. e Perez,G.A.D.: "Application on Horizontal - Test Methods," paper SPE 21099, Latin American Petroleum Engineering Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Rio de Janeiro, Brazil, October 14-19, 1990.
42. Agarwall,R.G.: "A New Method to Account for Producing Time Effects when Drawdown Type Curves are used to Analyse Pressure Buildup and Other Test Data," paper SPE 9289, 55th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Dallas, Texas, September 21-24, 1980.

43. Almeida,S.R., Gonçalves,M.S. e Pires,A.P.: "Avaliação de um Poço Horizontal no Campo de Albacora," I Seminário de Reservatórios e Avaliação das Formações, São Mateus, Espírito Santo, Outubro, 1993.
44. Cinco,L.H. e Samaniego-V,F.: "Effect of Wellbore Storage and Damage on the Transient Pressure Behavior of Vertically Fractured Wells," paper SPE 6752, 52th Annual Technical Conference of the Society of Petroleum Engineers of AIME, Denver, Colorado, October 9-12, 1977.
45. Kuchuck,F.J.: "Generalized Transient Pressure Solutions with Wellbore Storage," paper SPE 15671 available from SPE Book Order Dept., Richardson, Texas.
46. Muskat,M.: "The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media," , International Human Resources Development Corporation, 1982.

APÊNDICE A: Aproximação para a Discretização do Tempo

A queda de pressão adimensional em um reservatório produzindo por um poço horizontal é dada pela equação (A.1):

$$p_D(x_{Dj}, z_{wD}, r_{wzD}, t_D) = \int_0^{t_D} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t'_D) G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_D - t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t_D - t'_D}} \quad (A.1)$$

onde, a função G_i é dada por:

$$G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_D - t'_D) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x_{Dj} - x_{Di}}{2 \sqrt{t_D - t'_D}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x_{Dj} - x_{Di+1}}{2 \sqrt{t_D - t'_D}} \right) \right\} \\ \times \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \pi^2 L_D^2 (t_D - t'_D)) \cos(n \pi (z_{wD} L_D + r_{wzD})) \cos(n \pi z_{wD} L_D) \right] \quad (A.2)$$

A equação (A.1) discretizada no tempo resulta na seguinte expressão:

$$p_D(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_{DN}) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_0^{t_{DN} - t_{DN-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} + \\ + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{Dk}) \int_{t_{DN} - t_{Dk}}^{t_{DN} - t_{Dk-1}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} \quad (A.3)$$

Para a dedução da equação (A.3) a vazão q_{hDi} foi assumida como sendo constante no intervalo de tempo $(t_{Dk-1} - t_{Dk}, k=1, N)$.

A solução do problema proposto neste trabalho, com a utilização da equação (A.3), é precisa, mas requer um excessivo tempo computacional.

Souza⁹ sugere que, para um determinado tempo adimensional, pode-se admitir que q_{hDi} seja uma função apenas de x_D . Utilizando este fato, a equação (A.1) poderia ser simplificada para:

$$p_D(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_{DN}) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{DN}) \int_0^{t_{DN}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} \quad (A.4)$$

O autor não explicou em maiores detalhes a obtenção desta aproximação. Por esta razão, a aproximação é discutida a seguir.

Utilizando o teorema do valor médio para integrais, a equação (A.1) pode ser aproximada por:

$$p_D(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t_{DN}) = \sum_{i=1}^M q_{hDi}(t_{D\alpha}) \int_0^{t_{DN}} G_i(x_{Dj}, r_{wzD}, z_{wD}, t'_D) \frac{dt'_D}{\sqrt{t'_D}} \quad (A.5)$$

com as seguintes premissas básicas:

- 1) $0 \leq t_{D\alpha} \leq t_{DN}$.
- 2) $G_i(t_D)/\sqrt{t_D}$ é sempre maior ou igual a zero ou, menor ou igual a zero, no intervalo $0-t_{DN}$.
- 3) $G_i(t_D)/\sqrt{t_D}$ e $q_{hDi}(t_D)$ são funções contínuas no intervalo $0-t_{DN}$.

Para a obtenção, a partir da equação (A.5), da simplificação da solução dada pela equação (A.4), é necessário que o valor de $q_{hDi}(t_{D\alpha})$ possa ser aproximado, em cada tempo adimensional, pelo valor de $q_{hDi}(t_{DN})$.

Expandindo a função $q_{hDi}(t_{D\alpha})$ em uma série de Taylor em torno do valor $q_{hDi}(t_{DN})$, truncada nos termos de primeira ordem, obtém-se:

$$q_{hDi}(t_{D\alpha}) = q_{hDi}(t_{DN}) + (t_{DN} - t_{D\alpha}) \left(\frac{dq_{hDi}(t_D)}{dt_D} \right)_{t_{DN}} \quad (A.6)$$

Para que $q_{hDi}(t_{D\alpha})$ seja igual a $q_{hDi}(t_{DN})$, em cada tempo t_{DN} , é necessário que o valor de $(t_{DN} - t_{D\alpha})$ ou que o valor de $(dq_{hDi}(t_D)/dt_D)_{t_{DN}}$ seja muito pequeno.

Os gráficos das Figuras A.1 a A.4 mostram a validade das premissas básicas (1 a 3), e da aproximação $q_{hDi}(t_{D\alpha})=q_{hDi}(t_{DN})$.

Estes gráficos foram traçados com a utilização dos seguintes parâmetros: $S = 0$; $L_D = 12,5$; $r_{wzD} = 3,18 \times 10^{-3}$; $z_w/h = 0,5$; $k_z/k = 1,0$ e $C_D = 0$.

A validação da solução aproximada obtida com estes parâmetros específicos, pode ser generalizada para a utilização de qualquer conjunto de parâmetros fisicamente aceitáveis. Conforme pode ser observado no Capítulo 6, a variação destes parâmetros não produz mudanças, em termos de comportamento das respostas de pressão e vazão adimensionais, que invalidem a utilização da solução aproximada.

Nos gráficos das Figuras A.1 e A.2 pode-se verificar a variação da função $G_i(t_D)/\sqrt{t_D}$ com o tempo adimensional. Esta função é sempre contínua e sempre maior ou igual a zero.

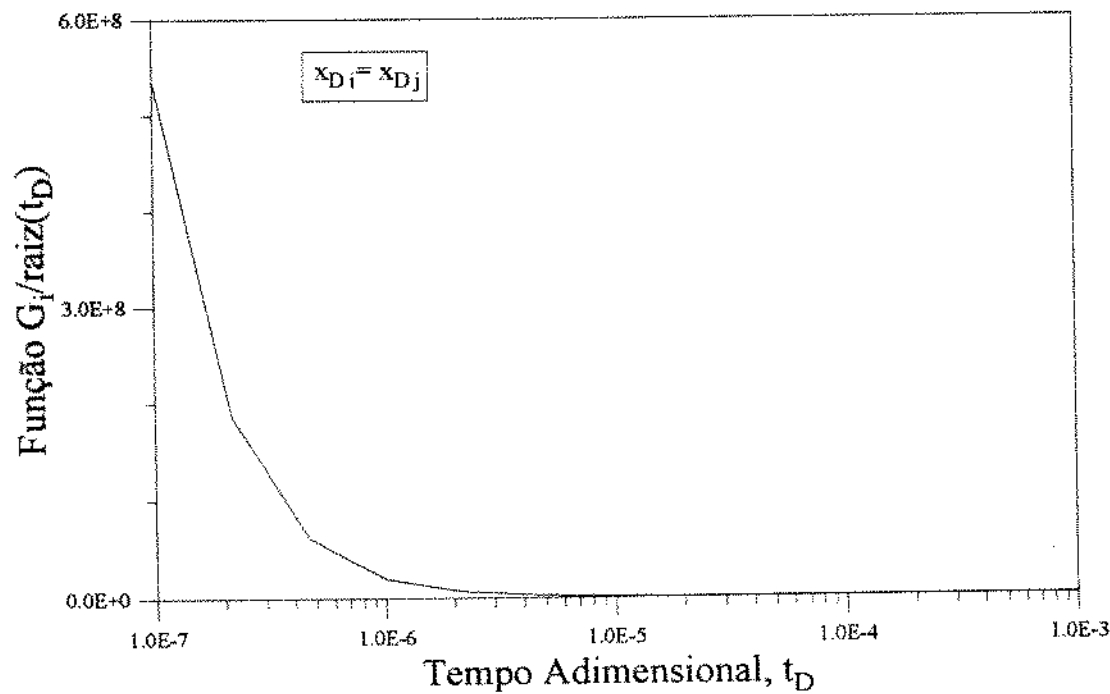


Figura A.1: Comportamento da função de Green ao longo do tempo.

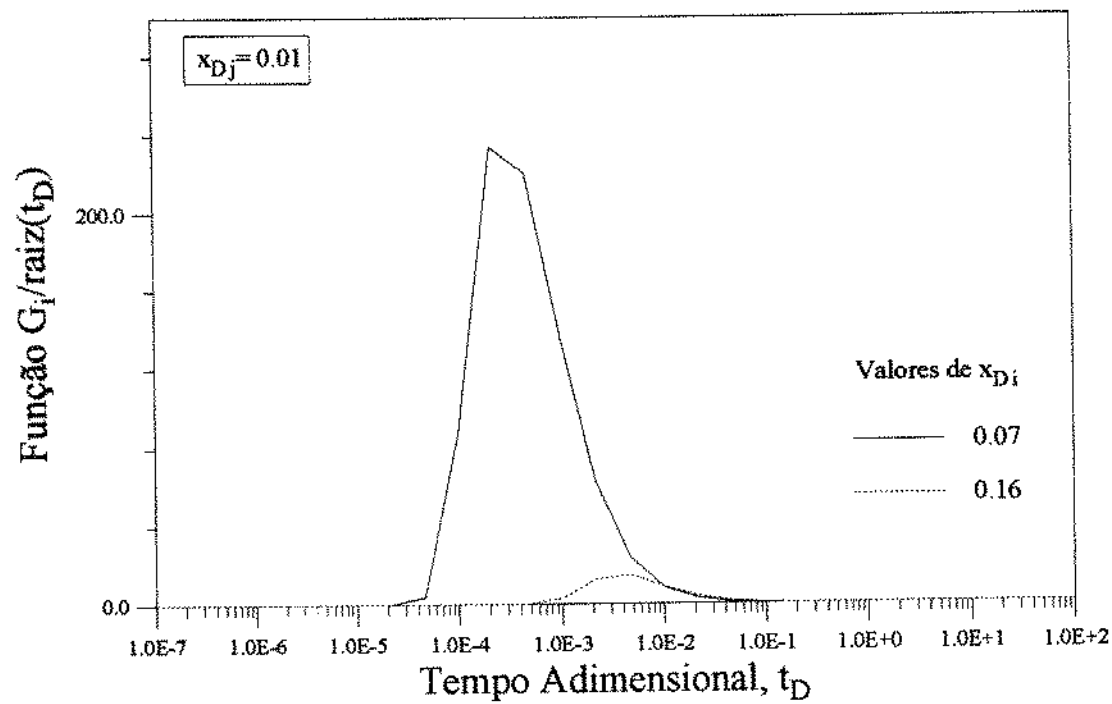


Figura A.2: Comportamento da função de Green ao longo do tempo.

A vazão adimensional é uma função contínua (Figura A.3).

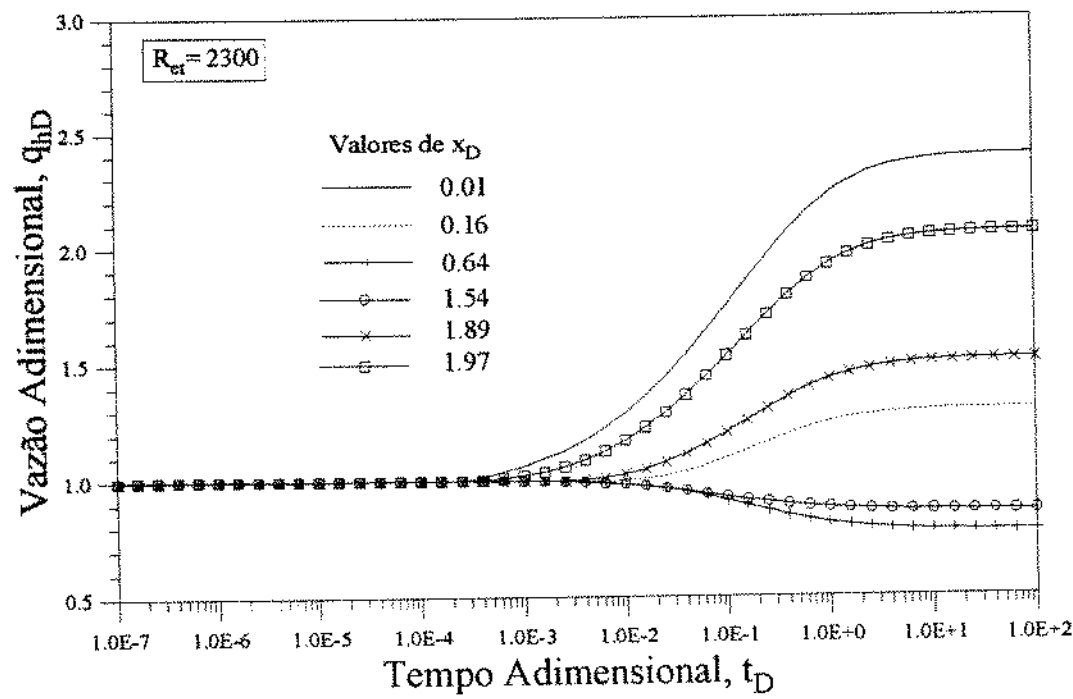


Figura A.3: Comportamento das vazões adimensionais ao longo do tempo.

A derivada da vazão adimensional em relação ao tempo adimensional (Figura A.4), apresenta valores elevados para valores de tempos adimensionais muito baixos. Para estes tempos, no entanto, pela própria ordem de grandeza dos tempos, o valor de $(t_{DN} - t_{D\alpha})$ é pequeno, e pode-se considerar que $q_{hDi}(t_{D\alpha}) = q_{hDi}(t_{DN})$ é uma boa aproximação. Durante os tempos adimensionais maiores, as derivadas das vazões adimensionais tendem a decrescer justificando a aproximação de $q_{hDi}(t_{D\alpha})$ por $q_{hDi}(t_{DN})$.

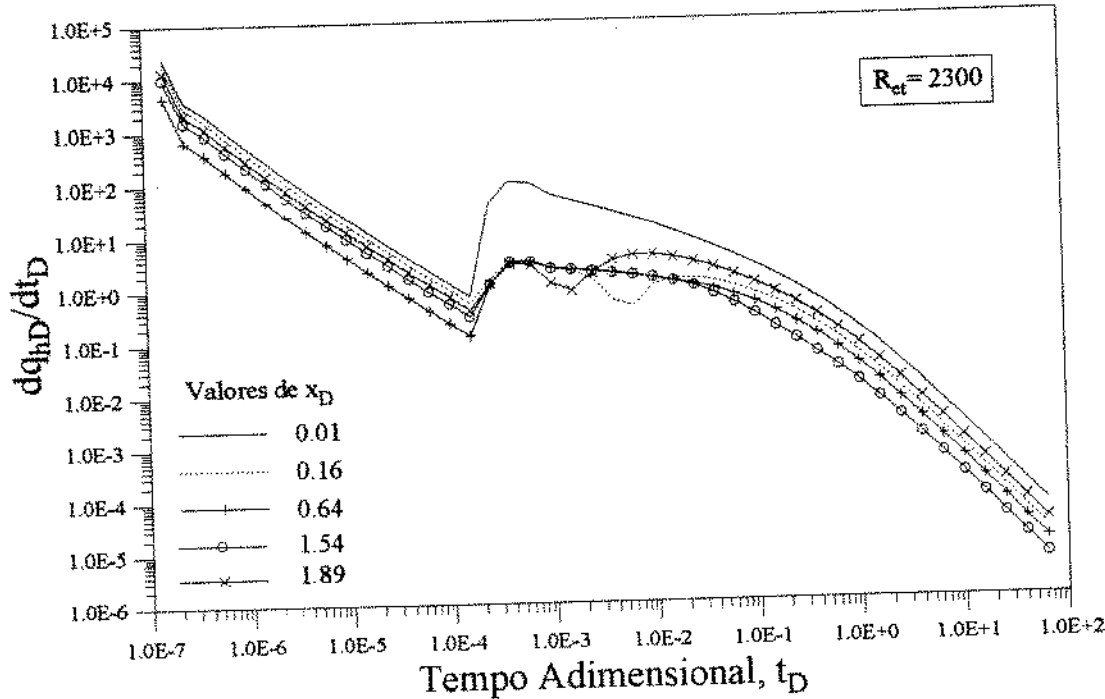


Figura A.4: Comportamento das derivadas da vazão adimensional em relação ao tempo.

Nas Figuras A.5 e A.6 podem ser observadas as respostas de pressão e vazão adimensional, considerando perda de carga no interior do poço horizontal, obtidas com a utilização da equação (A.3) -solução exata, e da equação (A.4) -solução aproximada. Observa-se que não existe diferença entre estas respostas.

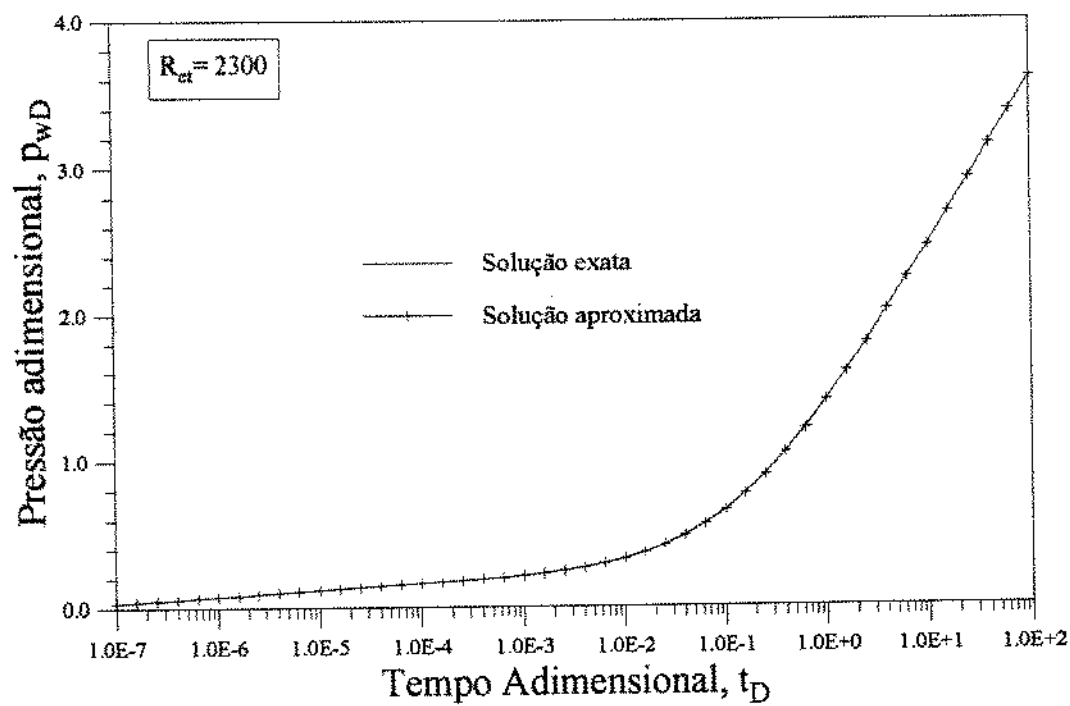


Figura A.5: Comparação entre as pressões adimensionais obtidas com as soluções exata e aproximada.

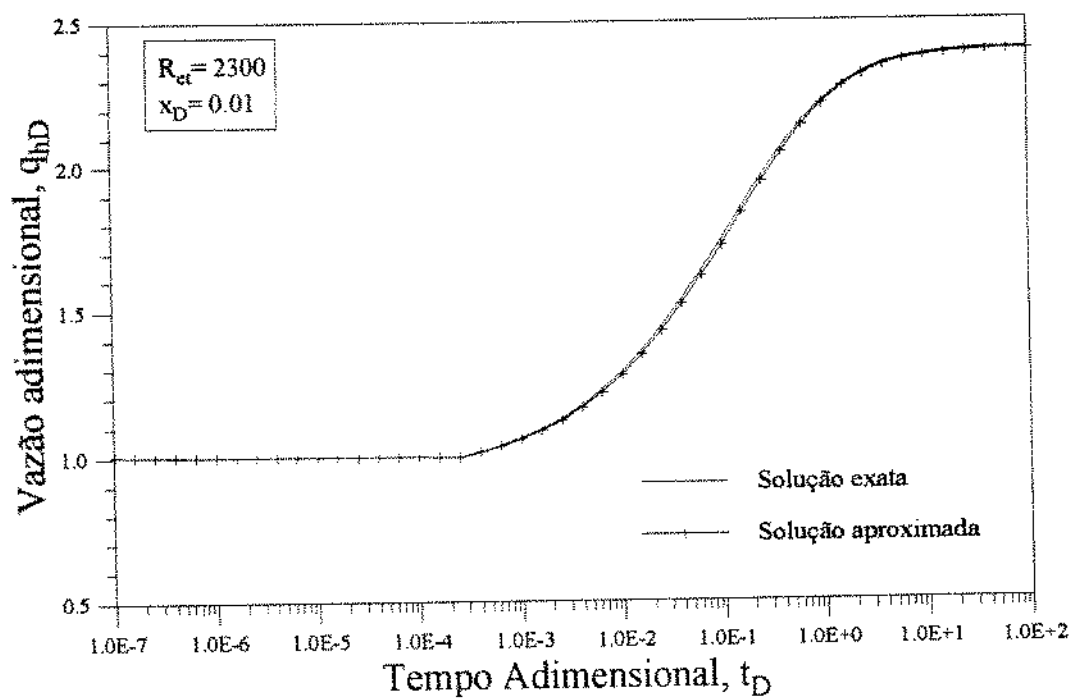


Figura A.6: Comparação entre as vazões adimensionais obtidas com as soluções exata e aproximada.

APÊNDICE B: Discretização no Tempo da Solução com Efeitos de Estocagem e de Película.

Seguindo o procedimento descrito por Cinco e Samaniego⁴⁴ e posteriormente por Kuchuk⁴⁵, a equação (B.1) será discretizada no tempo para obtenção da solução com efeitos de estocagem e de película.

$$p_{eD}(x_D, t_D) = - \int_0^{t_D} \left[q_{hD}(x_D, S, t'_D) - C_D \frac{\partial p_{eD}(x_D, t'_D)}{\partial t'_D} \right] \frac{\partial p_D(x_D, t_D - t'_D)}{\partial t'_D} dt'_D \quad (B.1)$$

onde,

- $p_{eD}(x_D, t_D) = p_{eD}(x_D, y_D, z_D, C, S, t_D)$
- $p_D(x_D, t_D) = p_D(x_D, y_D, z_D, S, t_D)$

Assumindo que $(\partial p_{eD} / \partial t_D)$ seja constante em cada intervalo de tempo (t_{Dk-1}, t_{Dk}) , a equação (B.1) pode ser reescrita como:

$$p_{eD}(x_D, t_{DN}) = - \int_0^{t_{DN}} \left[q_{hD}(x_D, S, t'_D) \frac{\partial p_D(x_D, t_{DN} - t'_D)}{\partial t'_D} \right] dt'_D + C_D \sum_{k=1}^N \frac{\partial p_{eD}(x_D, t_{Dk})}{\partial t_D} \int_{t_{Dk-1}}^{t_{Dk}} \frac{\partial p_D(x_D, t_{DN} - t'_D)}{\partial t'_D} dt'_D \quad (B.2)$$

Efetuando as integrais no tempo da equação acima, e considerando q_{hD} constante no intervalo de tempo (t_{Dk-1}, t_{Dk}) , a equação (B.2) transforma-se em:

$$p_{eD}(x_D, t_{DN}) = - \sum_{k=1}^N q_{hD}(x_D, S, t_{Dk}) [p_D(x_D, t_{DN} - t_{Dk}) - p_D(x_D, t_{DN} - t_{Dk-1})] + C_D \sum_{k=1}^N \left[\frac{p_{eD}(x_D, t_{Dk}) - p_{eD}(x_D, t_{Dk-1})}{t_{Dk} - t_{Dk-1}} \right] [p_D(x_D, t_{DN} - t_{Dk}) - p_D(x_D, t_{DN} - t_{Dk-1})] \quad (B.3)$$

Separando os termos de $k=N$ para explicitação de p_{eD} no tempo t_{DN} , e sabendo que $p_D(x_D, t_{DN} - t_{DN}) = p_D(x_D, 0) = 0$, uma vez que o reservatório inicialmente se encontra na pressão estática, a equação (B.3) transforma-se em:

$$p_{eD}(x_D, t_{DN}) = \left\{ p_D(x_D, t_{DN} - t_{DN-1}) \left[q_{hD}(x_D, S, t_{DN}) + C_D \frac{p_{eD}(x_D, t_{DN-1})}{t_{DN} - t_{DN-1}} \right] + \sum_{k=1}^{N-1} \left[C_D \frac{(p_{eD}(x_D, t_{Dk}) - p_{eD}(x_D, t_{Dk-1}))}{t_{Dk} - t_{Dk-1}} - q_{hD}(x_D, S, t_{DN}) \right] \right. \\ \left. \times [p_D(x_D, t_{DN} - t_{Dk}) - p_D(x_D, t_{DN} - t_{Dk-1})] \right\} \left[1 + C_D \frac{p_D(x_D, t_{DN} - t_{DN-1})}{t_{DN} - t_{DN-1}} \right]^{-1} \quad (B.4)$$

Da mesma maneira, a equação (B.5), para vazão constante em $x_D=0$ pode ser discretizada, obtendo-se o resultado da equação (B.6):

$$p_{ewD}(t_D) = - \int_0^{t_D} \left[1 - C_D \frac{\partial p_{ewD}(t'_D)}{\partial t'_D} \right] \frac{\partial p_{wD}(t_D - t'_D)}{\partial t'_D} dt'_D \quad (B.5)$$

onde,

- $p_{ewD}(t_D) = p_{eD}(x_D = 0, y_D, z_D, C, S, t_D)$
- $p_{wD}(t_D) = p_D(x_D = 0, y_D, z_D, S, t_D)$

$$p_{ewD}(t_{DN}) = \left\{ p_{wD}(t_{DN} - t_{DN-1}) \left[1 + C_D \frac{p_{ewD}(t_{DN-1})}{t_{DN} - t_{DN-1}} \right] + \sum_{k=1}^{N-1} \left[\frac{C_D (p_{ewD}(t_{Dk}) - p_{ewD}(t_{Dk-1}))}{t_{Dk} - t_{Dk-1}} - 1 \right] [p_{wD}(t_{DN} - t_{Dk}) - p_{wD}(t_{DN} - t_{Dk-1})] \right\} \\ \times \left[1 + \frac{C_D p_{wD}(t_{DN} - t_{DN-1})}{t_{DN} - t_{DN-1}} \right]^{-1} \quad (B.6)$$

APÊNDICE C: Determinação do Fator de Película em Formações Anisotrópicas.

Para determinação da solução da equação (C.1) com a condição de contorno dada pela equação (C.2), pode-se utilizar uma transformação conforme para um sistema de coordenadas elípticas ρ - θ , fazendo-se a mudança de variáveis⁴⁶ dada pelas equações (C.3a) e (C.3b):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x'^2} = 0 \quad (C.1)$$

$$p = p_{wf} \quad \text{em} \quad r_w^2 = y'^2 + \frac{k_z}{k} z'^2 \quad (C.2)$$

$$y' = b \sinh \rho \sin \theta \quad (C.3a)$$

$$z' = b \cosh \rho \cos \theta \quad (C.3b)$$

onde, b é uma constante a ser determinada.

Esta transformação define uma família de elipses concêntricas no plano y' - z' , sendo ρ o parâmetro que identifica uma elipse qualquer e ρ_w , em particular, identifica a elipse do poço. O parâmetro b define o foco destas elipses concêntricas.

Substituindo as equações (C.3a) e (C.3b) em:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (C.4)$$

obtem-se para a elipse do poço:

$$\frac{y'^2}{b^2 \sinh^2 \rho_w} + \frac{z'^2}{b^2 \cosh^2 \rho_w} = 1 \quad (C.5)$$

Comparando as equações (C.5) e (C.2) obtém-se que:

$$\tanh^2 \rho_w = \frac{k_z}{k} \quad (C.6)$$

$$b^2 = r_w^2 \left(\frac{k}{k_z} - 1 \right) \quad (C.7)$$

Nas equações acima considerou-se $k > k_z$.

Como a equação (C.3) é uma transformação conforme, a equação (C.1) não se modifica do plano $y'-z'$ para o plano $\rho-\theta$, e pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = 0 \quad (C.8)$$

com a seguinte condição de contorno:

$$p = p_{wf} \quad \text{em} \quad \rho = \rho_w \quad (C.9)$$

A solução da equação (C.8) independe de θ , e é dada por:

$$p = p_{wf} + C (\rho - \rho_w) \quad (C.10)$$

onde, C é a constante de integração a ser determinada a partir da vazão de produção.

A vazão de produção pode ser determinada pela integração da velocidade normal ao longo de uma isóbara elíptica, para a qual ρ é constante:

$$q_w = -\alpha_6 L \int_{\rho} v_n dS_e = -\alpha_6 L \int_0^{2\pi} v_n \left(\frac{\partial S_e}{\partial \theta} \right)_{\rho} d\theta \quad (C.11)$$

onde, α_6 é igual a 1 no Sistema Internacional de Unidades, v_n é a componente da velocidade normal à elipse no plano $y-z$, e S_e é o comprimento do arco elíptico também no plano $y-z$. Pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\left(\frac{\partial S_e}{\partial \theta}\right)_\rho = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)_\rho^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_\rho^2\right]^{1/2} \quad (C.12)$$

onde,

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)_\rho = \frac{dy}{dy'} \left(\frac{\partial y'}{\partial \theta}\right)_\rho = b \sinh \rho \cos \theta \quad (C.13a)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_\rho = \frac{dz}{dz'} \left(\frac{\partial z'}{\partial \theta}\right)_\rho = -\sqrt{\frac{k_z}{k}} b \cosh \rho \sin \theta \quad (C.13b)$$

Logo,

$$\left(\frac{\partial S_e}{\partial \theta}\right)_\rho = b \left(\sinh^2 \rho \cos^2 \theta + \frac{k_z}{k} \cosh^2 \rho \sin^2 \theta \right)^{1/2} \quad (C.14)$$

Para obter v_n , deve-se determinar v_y , v_z e β , o ângulo da linha normal à elipse, tal que:

$$\tan \beta = -\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_\rho = -\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)_\rho / \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_\rho \quad (C.15)$$

A substituição das equações (C.13a) e (C.13b) na equação acima fornece:

$$\tan \beta = \sqrt{\frac{k}{k_z}} \frac{\tanh \rho}{\tan \theta} \quad (C.16)$$

Utilizando a lei de Darcy:

$$-v_y = \alpha_7 \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z = \frac{k}{\mu} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)_z \right] \quad (C.17)$$

onde α_7 é igual a 1 no Sistema Internacional de Unidades.

Mas, segundo a equação (C.10), $(\partial p / \partial \theta)_\rho = 0$ e $(\partial p / \partial \rho)_\theta = C$.

Para obter $(\partial \rho / \partial y)_z$, pode-se combinar a equação (C.5), que é válida para todo ρ , com as equações:

$$y' = y \quad (C.18a)$$

$$z' = z \sqrt{\frac{k}{k_z}} \quad (C.18b)$$

obtendo-se:

$$\frac{y^2}{b^2 \sinh^2 \rho} + \frac{z^2 (k/k_z)}{b^2 \cosh^2 \rho} = 1 \quad (C.19)$$

Diferenciando esta equação em relação a y , para z constante, obtém-se:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_z = \frac{\sin \theta \cosh \rho}{b (\cosh^2 \rho - \cos^2 \theta)} \quad (C.20)$$

Substituindo este resultado na equação (C.17), sabendo que $(\partial p / \partial \rho)_\theta = C$, obtém-se:

$$v_y = -\alpha_7 \frac{k C}{\mu b} \left(\frac{\sin \theta \cosh \rho}{\cosh^2 \rho - \cos^2 \theta} \right) \quad (C.21)$$

Da mesma maneira, determina-se v_z , diferenciando a equação (C.19) em relação a z , para y constante obtendo-se:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_y = \sqrt{\frac{k}{k_z}} \frac{\cos \theta \sinh \rho}{b (\sinh^2 \rho + \sin^2 \theta)} \quad (C.22)$$

Substituindo este resultado na equação (C.17), escrita para v_z :

$$v_z = -\alpha_7 \frac{k_z C}{\mu b} \left(\frac{\sqrt{k/k_z} \cos \theta \sinh \rho}{\sinh^2 \rho + \sin^2 \theta} \right) \quad (C.23)$$

A componente normal da velocidade é dada por:

$$v_n = v_y \cos\beta + v_z \sin\beta \quad (\text{C.24})$$

Substituindo as equações (C.16), (C.21) e (C.23) na equação acima, obtém-se:

$$v_n = -\alpha_7 \frac{k\sqrt{k_z} C}{\mu b} \frac{1}{\left(k_z \sin^2 \theta \cosh^2 \rho + k \sinh^2 \rho \cos^2 \theta\right)^{1/2}} \quad (\text{C.25})$$

Multiplicando a equação (C.14) pela equação (C.25) resulta em:

$$v_n \left(\frac{\partial S_e}{\partial \theta} \right)_\rho = -\alpha_7 \frac{\sqrt{k k_z}}{\mu} C \quad (\text{C.26})$$

E a integração indicada pela equação (C.11) fornece:

$$q_w = \alpha_2 L \frac{\sqrt{k k_z}}{\mu} C \quad (\text{C.27})$$

onde α_2 é igual a 2π no Sistema Internacional de Unidades e $1/141,2$ no Sistema de Unidades de Campo.

A substituição da constante C da equação (C.27) na equação (C.10) fornece a solução para o problema:

$$p = p_{wf} + \frac{q_w \mu}{\alpha_2 L \sqrt{k k_z}} (\rho - \rho_w) \quad (\text{C.28})$$

Para cada isóbara os coeficientes de $\sin\theta$ e de $\cos\theta$ das equações (C.3a) e (C.3b) são, respectivamente, $b \sinh\rho$ e $b \cosh\rho$. Para grandes valores de ρ , $\sinh\rho$ e $\cosh\rho$ são quase os mesmos levando à conclusão de que as curvas de isopressão são essencialmente circulares no plano $y'-z'$, a partir de um certo valor de ρ :

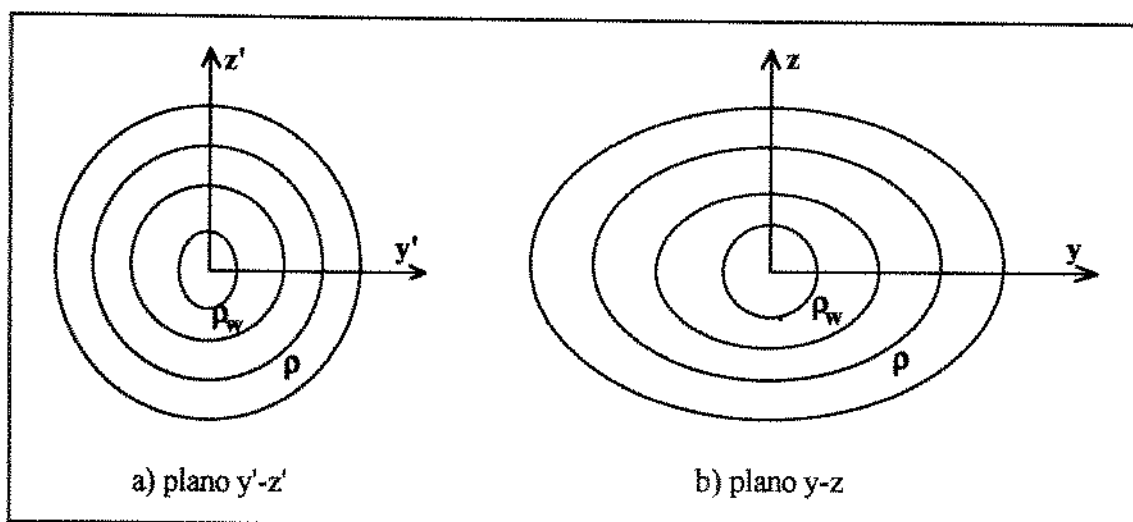


Figura C.1: Representação Esquemática das Isóbaras de Pressão.

Assumindo que a isóbara do poço no plano $y'-z'$ possa ser aproximada por um círculo e definindo o raio médio da curva isobárica como:

$$\bar{r} = \frac{(b \sinh \rho + b \cosh \rho)}{2} = \frac{b}{2} \exp(\rho) \quad \text{ou} \quad \rho = \ln \left(\frac{2\bar{r}}{b} \right) \quad (\text{C.29})$$

Substituindo a equação (C.29) na equação (C.28):

$$p = p_{wf} + \frac{q_w \mu}{\alpha_2 L \sqrt{k k_z}} \ln \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_w} \right) \quad (\text{C.30})$$

Na elipse do poço, substituindo os pares de valores $(y'=0, z'=r_w \sqrt{k/k_z})$ e $(y'=r_w, z'=0)$ na equação (C.5), obtém-se:

$$b \cosh \rho = \sqrt{\frac{k}{k_z}} r_w \quad \text{e} \quad b \sinh \rho = r_w \quad (\text{C.31})$$

Substituindo estes valores na equação (C.29) obtém-se o raio equivalente do poço:

$$\bar{r}_w = \frac{r_w}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k_z}} \right) \quad (\text{C.32})$$

Para determinação do fator de película, pode-se reescrever a equação (C.30) para o fluxo de fluidos na zona alterada como:

$$p_s = p_{wfs} + \frac{q_w \mu}{\alpha_2 L (\sqrt{k k_z})_s} \ln \left(\frac{\bar{r}_s}{\bar{r}_w} \right) \quad (C.33)$$

onde,

- p_s = pressão constante no círculo equivalente da zona alterada.
- $\bar{r}_s$ = raio equivalente da zona alterada.
- p_{wfs} = pressão no círculo equivalente do poço incluindo o fator de película.

Para determinação do raio equivalente da zona alterada adota-se o mesmo procedimento utilizado para a obtenção do raio equivalente do poço, chegando-se à seguinte expressão:

$$\bar{r}_s = \frac{r_s}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k_z}} \right) \quad (C.34)$$

Mas, a elipse da zona danificada no plano y-z, tem a relação entre os seus eixos ditada pela anisotropia. Obedecendo a mesma formulação utilizada para o raio de drenagem obtém-se:

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{k}{k_z}} \quad (C.35)$$

onde, a e c são, respectivamente, os semi-eixos maior e menor da elipse.

No plano y-z, as coordenadas da elipse da zona danificada podem ser obtidas aplicando as equações (C.18a) e (C.18b) ao raio da zona danificada, r_s :

$$y = r_s = a \quad (C.36a)$$

$$z = r_s \sqrt{\frac{k_z}{k}} = a \sqrt{\frac{k_z}{k}} \quad (C.36b)$$

E a equação (C.34) pode ser reescrita como:

$$\bar{r}_s = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k_z}} \right) \quad (C.37)$$

Considerando fluxo em regime permanente no reservatório, para $r > r_s$, pode-se utilizar a equação (C.30), obtendo-se:

$$p = p_s + \frac{q_w \mu}{\alpha_2 L \sqrt{k k_z}} \ln \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_s} \right) \quad (C.38)$$

Substituindo o valor de p_s dado pela equação (C.33) na equação (C.38):

$$p - p_{wfs} = \frac{q \mu}{\alpha_2 L \sqrt{k k_z}} \left[\ln \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_w} \right) - \ln \left(\frac{\bar{r}_s}{\bar{r}_w} \right) + \frac{\sqrt{k k_z}}{(\sqrt{k k_z})_s} \ln \left(\frac{\bar{r}_s}{\bar{r}_w} \right) \right] \quad (C.39)$$

Comparando as equações (C.30) e (C.39), e definindo:

$$p_{wf} = p_{wfs} + \Delta p_s \quad (C.40)$$

obtem-se:

$$\Delta p_s = \frac{q \mu}{\alpha_2 L \sqrt{k k_z}} \left[-\ln \left(\frac{\bar{r}_s}{\bar{r}_w} \right) + \frac{\sqrt{k k_z}}{(\sqrt{k k_z})_s} \ln \left(\frac{\bar{r}_s}{\bar{r}_w} \right) \right] \quad (C.41)$$

e como,

$$\Delta p_s = \frac{q \mu}{\alpha_2 L \sqrt{k k_z}} S \quad (C.42)$$

Comparando as equações (C.41) e (C.42), o fator de película, S , é dado por:

$$S = \left[\frac{\sqrt{k k_z}}{(\sqrt{k k_z})_s} - 1 \right] \ln \left(\frac{\bar{r}_s}{\bar{r}_w} \right) \quad (C.43)$$

Substituindo as equações (C.32) e (C.37), na equação (C.43), obtém-se o fator de película como função do semi-eixo maior da elipse da zona danificada:

$$S = \left[\frac{\sqrt{k k_z}}{(\sqrt{k k_z})_s} - 1 \right] \ln \left(\frac{a}{r_w} \right) \quad (C.44)$$

APÊNDICE D: Algoritmo de Procura Linear

O algoritmo de busca linear utilizado neste trabalho, o mesmo adotado por Namba e Horne³⁵ e por Rosa e Horne³⁶, pode ser escrito como:

(1) $m=0$.

(2) $\omega = 0,5^m$.

(3) $\beta_i^{n+1} = \beta_i^n + \omega * \delta \beta_i$ ($i = 1, npar$).

(4) Se $\beta_i^{n+1} > limite_i$, ($i=1, npar$) então

$m = m + 1$

Se $m > 10$ PARE

vá para (2)

Fim do Se

(5) Calcule $Resíduo^{n+1}$

(6) Se $Resíduo^{n+1} > Resíduo^n$

$m = m + 1$

Se $m > 10$ PARE

vá para (2)

Fim do Se