

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Tese de Doutorado

Desenvolvimento de Ferramentas de Identificação  
Paramétrica de Sistemas Mecânicos  
no Domínio do Tempo

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR FERMIN SINFORIANO  
VILCOHE BAZÁN E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 22, 11, 1993

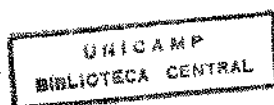
  
ORIENTADOR

Autor: Fermin S. V. Bazán

Orientador: Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka *21/10/93*

*CM000 450 662*

Trabalho apresentado à Comissão de Pós-Graduação  
da Faculdade de Engenharia Mecânica como parte  
dos requisitos para a obtenção do título de Doutor  
em Engenharia Mecânica



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Tese de Doutorado

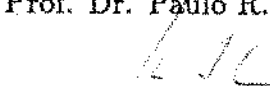
Desenvolvimento de Ferramentas de Identificação  
Paramétrica de Sistemas Mecânicos  
no Domínio do Tempo


Autor: Fermín S. V. Bazán

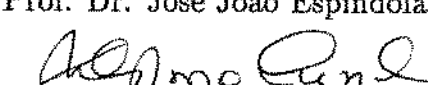
Orientador: Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka


Aprovado por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Paulo R. G. Kurka - Presidente

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Hans Ingo Weber

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. José João Espíndola

  
\_\_\_\_\_  
Prof<sup>ª</sup> Dr<sup>ª</sup> Cristina Cunha

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Francisco Paulo Lépore Neto

Campinas-SP, 19 de Novembro de 1993

## AGRADECIMENTOS

- Ao Prof Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka, pela orientação e atendimento cordial prestados neste trabalho.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo FAPESP, pelo suporte financeiro através do projeto 91/011-6.
- Ao Colega Márcio C. Mattos, pela valiosa ajuda na composição desta tese, e pelas inúmeras trocas de idéias durante o meu curso de Doutorado na Faculdade de Engenharia Mecânica.
- Aos Professores da Faculdade de Engenharia Mecânica, que de uma ou outra maneira contribuíram no enriquecimento de conhecimentos da minha qualificação profissional.
- Ao Colega Tadeu Pissinatti Sant'Anna, pelo acesso ao acervo da sua biblioteca particular.
- À Professora Dra. Cristina Cunha e ao Professor Dr. João Azevedo da Costa Meyer, do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC, pelo estímulo ao longo da minha pós-graduação.

Aos meus pais *José e Ofelia*,  
a minha esposa *Consuelo* e  
aos meus filhos *Renzo e Stefanny*

Every restriction corresponds to a law of nature,  
a regularization of the universe.

Carl Sagan.

## RESUMO

Este trabalho apresenta um conjunto de técnicas de identificação paramétrica e não paramétrica no domínio do tempo, aplicáveis para a análise modal de sistemas mecânicos. No estudo adota-se um modelo linear de parâmetros discretos para descrever o comportamento dinâmico dos sistemas em análise. A característica deste trabalho é a utilização de técnicas de álgebra linear computacional e de certas teorias e técnicas usuais da área de problemas inversos no desenvolvimento dos métodos propostos. Destaca neste ponto uma exaustiva utilização do teorema SVD nas aplicações teóricas e práticas das técnicas apresentadas. A metodologia utilizada, começa com a apresentação de técnicas SISO, continuando de maneira natural com a extensão das mesmas para sistemas MIMO. Os pontos abordados de maior importância se centralizam em: a) O problema de estimar a matriz de resposta ao impulso unitário sem utilizar o domínio da frequência (Deconvolução MIMO), e b) a determinação da ordem do sistemas em análise e o cálculo de estimativas de parâmetros modais através de técnicas do tipo predição linear na direção inversa (SBM, ERABACK e PSINBACK). Apresentam-se simulações numéricas com sistemas sintéticos altamente contaminados por ruído.

## ABSTRACT

The work presents a collection of parametric and non parametric time domain identification techniques, employed in the modal analysis of a mechanical system. The dynamical behaviour of the system is studied from a linear model of the same, built from discrete parameters. The main characteristic of the work is the employment of computational techniques of linear algebra as well as certain theoretical results and procedures from the mathematical field of inverse problems. The SVD theorem is, in this aspect, extensively used to explain much of the theory and practice of the techniques developed. The methodology followed starts with the presentation of SISO techniques which are naturally extended at a second stage to MIMO procedures. The most important problems assessed by the work are that of a) determining estimates of impulse response functions without recurring to the frequency domain (use of MIMO deconvolution), and b) the determination of the systems order and modal parameters through the use of linear prediction techniques in the inverse direction (SBM, ERABACK and PSINBACK). Numerical simulations are presented with the use of typically high level of noise present in the dynamical signals to be analysed.

# Símbolos

$M, C, K:$	Matrizes simétricas $n \times n$ , de massa, amortecimento e rigidez
$u, \hat{f}:$	Funções vetoriais $n \times 1$ de excitação e resposta
$\mathcal{L}:$	Operador transformada de Laplace
$\mathcal{F}:$	Operador transformada de Fourier
$H(s):$	Matriz função de transferência
$H_{ij}(s):$	Elemento genérico da matriz função de transferência
$H_{ij}(z):$	Função de transferência pontual no plano $z$
$h(t):$	Matriz resposta ao impulso unitário
$h_{ij}(t):$	Elemento genérico da matriz resposta ao impulso
$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}:$	Matrizes das equações de estado no caso contínuo
$\lambda_r, \phi_r:$	Autovalores e autovetores do sistema mecânico
$\omega_r:$	Frequências naturais
$\xi_r:$	Fatores de amortecimento modal
$\Lambda:$	Matriz diagonal de autovalores
$\psi_r:$	Autovetor da matriz de estado
$\Phi:$	Matriz de autovalores $\lambda_r$
$\Psi_r:$	Matriz de autovetores da matriz de estado
$A, B:$	Matrizes das equações de estado no caso discreto
$I:$	Matriz identidade
$\Delta t:$	Taxa de amostragem
$z_r:$	Polos do sistema no plano $z$
$Q_f:$	Matriz do modelo ARMA Progressivo
$\Theta_f:$	Vetor de parâmetros ARMA
$R:$	Matriz de autocorrelações
$Q_b:$	Matriz do modelo ARMA na direção inversa
$\Theta_b:$	Vetor de parâmetros ARMA na direção inversa
$T:$	Matriz Toeplitz do modelo AR progressivo
$a:$	Vetor de parâmetros AR progressivo
$V:$	Matriz de Vandermonde
$r:$	Vetor de resíduos
$H:$	Matriz Hankel do modelo AR na direção inversa
$c:$	Vetor de parâmetros AR na direção inversa
$U, D, V:$	Matrizes da decomposição SVD de $H$



$k(H)$ :	Número de condição da matriz $H$
$\hat{H}$ :	Matriz Hankel de informações no caso de dados com ruído
$\mathcal{E}$ :	Matriz Hankel de perturbações
$\ \cdot\ $ :	Norma-2 ou norma espectral
$\ \cdot\ _F$ :	Norma Frobenius
$\sigma_r$ :	Valores singulares da matriz Hankel
$\hat{H}$ :	Matriz construída via truncamento da SVD de $\hat{H}$
$m_k$ :	Momentos normalizados da função resposta ao impulso
$T_{11}, T_{21}$ :	Matrizes Toeplitz do método dos momentos
$L_2[0, T]$ :	Espaço de sinais quadrado integráveis
$\{U_k(t), V_k(t), \sigma_k^a\}_{k=1}^\infty$ :	Família Singular do operador integral
$F$ :	Matriz Toeplitz triangular inferior do problema de deconvolução
$h$ :	Vetor de amostras da função resposta ao impulso no problema de deconvolução
$u$ :	Vetor de amostras da resposta do sistema no problema de deconvolução
$\mathcal{H}^{q \times m}$ :	Subespaço das matrizes Hankel $q \times m$
$\mathcal{R}^{q \times m}$ :	Conjunto das matrizes cujo rank é $\leq 2n$
$\mathcal{C}^{q \times m}$ :	Conjunto das matrizes reais $q \times m$
$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ :	Operadores projeção
$H(0), H(1)$ :	Matrizes Hankel-bloco usadas nos modelos MIMO
$S$ :	Matriz dos modelos MIMO Progressivos
$S_b$ :	Matriz dos modelos MIMO na direção inversa
$F_j$ :	Matriz triangular inferior Toeplitz correspondente à entrada $j$
$\mathcal{M}_k$ :	Matriz correspondente ao momento $k$
$Nord$ :	Ordem do modelo matemático nas simulações numéricas
$Nt$ :	Inteiro positivo para indicar ordem de truncamento
$Tol$ :	Tolerância teórica para detecção de rank.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Fundamentos de Análise Modal e Descrição do Problema</b>	<b>7</b>
2.1	Introdução . . . . .	7
2.2	Relações Básicas de Análise Modal . . . . .	7
2.2.1	A Função de Transferência e sua Relação com os Parâmetros Modais	10
2.3	A Função de Transferência através da Transformada Z . . . . .	12
2.4	Sobre o Problema de Identificação . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Predição Linear e Técnicas de Identificação Modal SISO</b>	<b>16</b>
3.1	Introdução . . . . .	16
3.2	Identificação Modal através do Modelo ARMA . . . . .	17
3.2.1	O Cálculo dos Parâmetros ARMA e o Problema da Determinação da Ordem . . . . .	19
3.2.2	Identificação Modal e o Modelo ARMA na direção Regressiva . . . . .	22
3.3	Identificação Modal através de Modelos AR . . . . .	23
3.3.1	Análise da Sensibilidade dos Parâmetros AR . . . . .	27
3.3.2	A Identificação da Ordem e os Efeitos da Sobredeterminação . . . . .	29
3.4	Uma Técnica de Identificação usando o Método de Prony e os Momentos da Função Resposta ao Impulso Unitário . . . . .	34
3.5	O Problema de Deconvolução . . . . .	37
3.5.1	Introdução . . . . .	37

3.5.2	Deconvolução Discreta e Regularização via SVD Truncada . . . . .	39
3.6	Um Método Iterativo para Reduzir perturbações e Realçar Estimativas dos Parâmetros . . . . .	45
3.7	Uma Proposta de Técnica de Identificação Modal: O Modelo Regressivo Simétrico (Symmetric Backward Model) . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Identificação de Parâmetros Modais via Metodologia MIMO</b>	<b>53</b>
4.1	Introdução . . . . .	53
4.2	Identificação de Parâmetros Modais usando Modelos MIMO Regressivos . . .	54
4.2.1	Introdução . . . . .	54
4.2.2	Identificação Modal usando Modelos MIMO na Direção Progressiva .	55
4.2.3	Identificação Modal usando Modelos MIMO na Direção Regressiva . .	59
4.3	O Problema de Deconvolução MIMO . . . . .	61
4.4	O Problema de Estimar as Matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez . .	67
4.4.1	Introdução . . . . .	67
4.4.2	Um Método de Identificação das Matrizes M, C, e K . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Simulações Numéricas</b>	<b>71</b>
5.1	Introdução . . . . .	71
5.2	Experiências Numéricas . . . . .	72
<b>6</b>	<b>Conclusões e Sugestões</b>	<b>81</b>
6.1	Conclusões Gerais . . . . .	81
6.2	Sugestões para Futuros Desenvolvimentos . . . . .	82

# Lista de Figuras

1.1	<i>Caracterização de alguns Problemas em Análise de Estruturas</i>	2
3.1	<i>Pólos do Modelo AR: (a) Forward (b) Backward</i>	26
3.2	<i>Número de Condição da Matriz de Hankel como função de sua dimensão</i>	32
3.3	<i>Número de condição da Matriz Hankel como função de sua Dimensão</i>	33
3.4	<i>Primeiras onze amostras de uma Deconvolução Instável</i>	43
3.5	<i>Escolhendo o Parâmetro de Regularização</i>	44
3.6	<i>Escolhendo o Parâmetro de Regularização</i>	44
3.7	<i>Deconvolução Estável</i>	45
3.8	<i>O Comportamento do Processo Iterativo</i>	49
3.9	<i>Trinta primeiros Valores Singulares da Matriz Hankel</i>	49
3.10	<i>Espectro do Sinal: (a) Com ruído (b) Após reconstrução</i>	50
3.11	<i>A performance do Processo Iterativo</i>	51
4.1	<i>Reta de soluções para Deconvolução MIMO</i>	63
4.2	<i>Deconvolução MIMO: Dados Exatos</i>	66
4.3	<i>Deconvolução MIMO: Dados Exatos</i>	66
4.4	<i>Escolhendo o Parâmetro de Regularização</i>	67
4.5	<i>Deconvolução MIMO: Dados Perturbados</i>	68
5.1	<i>Vinte primeiros Valores Singulares da Matriz Hankel</i>	73

# Lista de Tabelas

3.1	<i>A influência da Taxa de Amostragem . . . . .</i>	33
5.1	<i>Pólos de um Sistema de Três Graus de Liberdade . . . . .</i>	72
5.2	<i>Pólos Estimados Exemplo No 1 Nord = 10 . . . . .</i>	73
5.3	<i>Pólos estimados Exemplo No 1, Nord = 10 . . . . .</i>	74
5.4	<i>Pólos Estimados Exemplo No 1, Nord = 20 . . . . .</i>	74
5.5	<i>Pólos Estimados Exemplo No 1, Nord = 20 . . . . .</i>	75
5.6	<i>Pólos estimados Exemplo No 1, Nord = 20 . . . . .</i>	76
5.7	<i>Pólos estimados usando o sinal obtido após aplicação do Processo Iterativo .</i>	77
5.8	<i>Pólos e Resíduos de um Sistema de Dois Graus de Liberdades . . . . .</i>	77
5.9	<i>Tolerância como função da Ordem . . . . .</i>	78
5.10	<i>Pólos estimados Exemplo No 3 , Nord = 15 . . . . .</i>	78
5.11	<i>Pólos estimados Exemplo No 3 , Nord = 20 . . . . .</i>	79
5.12	<i>Pólos estimados Exemplo No 4 , Nord = 4 . . . . .</i>	79
5.13	<i>Seis primeiros valores singulares e Pólos de um sistema de dois graus de liberdade</i>	80

# Capítulo 1

## Introdução

A identificação de parâmetros está ligada à teoria de Identificação de Sistemas. Esta pode ser vista como uma das fases de atividade de um longo e integrado esforço dentro da análise de sistemas dinâmicos. A análise de sistemas começa com a modelagem. A modelagem em si é um processo baseado em leis e princípios mecânicos e no conhecimento prévio do sistema a ser analisado. O primeiro passo deste processo consiste em definir um modelo idealizado ou analítico (frame model) Craig [16], Natke [63], onde são consideradas as restrições do sistema, o número de variáveis, o nível de detalhamento do modelo, etc. No segundo passo, o modelo analítico é expresso em linguagem matemática, geralmente através de um conjunto de equações diferenciais chamadas de Modelo Matemático. O modelo serve para descrever o comportamento dinâmico do sistema e caracterizar a sua resposta a entradas conhecidas.

O problema de calcular a resposta de um sistema, dado o modelo e o registro no tempo de um sinal de entrada, é simples de ser resolvido e é conhecido como *Problema Direto*. A determinação de um modelo matemático, que descreva as propriedades do sistema a partir de informação de entrada e saída, entretanto, é em geral um problema difícil de ser resolvido e pertence à classe dos chamados *Problemas Inversos*. Uma caracterização do problema direto e alguns problemas inversos na análise de sistemas relacionados com estruturas dinâmicas pode ser vista no diagrama de blocos da figura 1.1. Problemas inversos aparecem em diversos campos das ciências aplicadas e sua resolução exige o emprego de sofisticadas teorias, como a de *Regularização*, e de modernas técnicas numéricas como as de *Algebra Linear Computacional*, entre outras. Informação tutorial relacionada com estes problemas pode ser vista em Baumeister [5], Engl [17] e Groetsch [27]. A teoria da Identificação de Sistemas, corresponde à sub-classe de problemas inversos que trata da determinação de modelos matemáticos com características previamente estabelecidas. Em análise de sistemas a

identificação e a modelagem caminham juntas, o modelo é a base para a identificação e a identificação pode ser vista como a validação do modelo ou como parte dele mesmo. Uma interessante apresentação das diferentes fases envolvidas na análise de sistemas, pode ser vista em Natke [63].

Em diversas situações, o problema de identificação pode ser simplificado quando se dispõe ou se assume certo conhecimento prévio do sistema. Assim sendo, o sistema pode ser descrito por um modelo onde a informação prévia é concentrada num conjunto de parâmetros e o problema de identificação é reduzido ao de estimação desses parâmetros. A estimação de parâmetros pode ser definida como a determinação experimental dos valores dos parâmetros que governam o comportamento dinâmico do sistema. Em sistemas mecânicos, é usual assumir que os sistemas em análise são descritos adequadamente por modelos matemáticos lineares invariantes no tempo com parâmetros discretos.

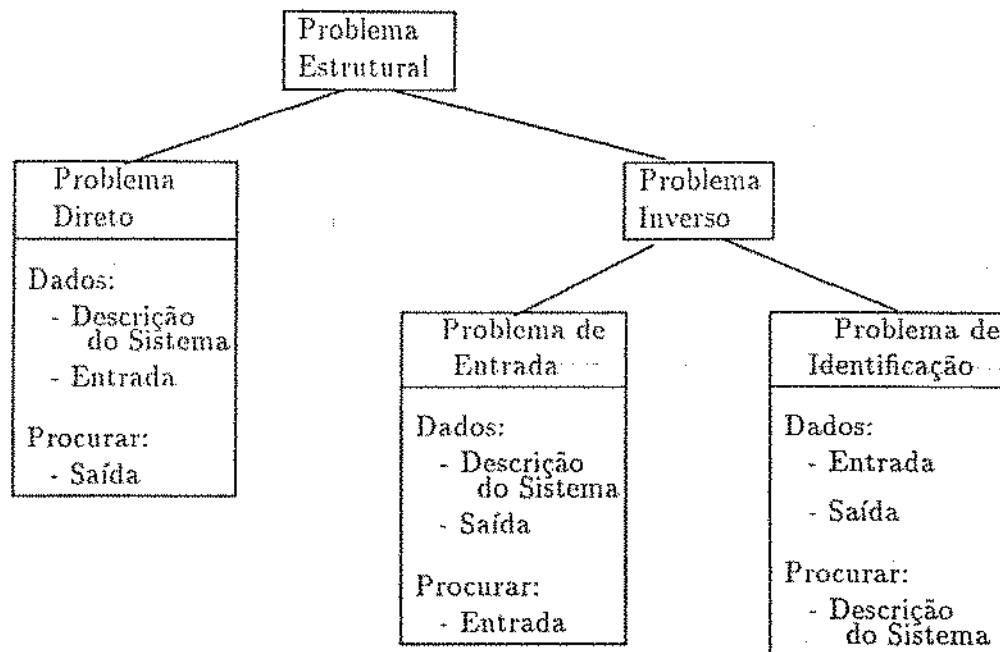


Figura 1.1: Caracterização de alguns Problemas em Análise de Estruturas

No problema de identificação em sistemas mecânicos, o interesse primário é estimar propriedades dinâmicas descritas por um conjunto de parâmetros que caracterizam amortecimentos, frequências naturais e modos naturais de vibração do sistema em análise. Os parâmetros citados são chamados *Parâmetros Modais*, e o problema de obtenção dos mesmos a partir dos dados de entrada e saída do sistema é conhecido como *Problema da Análise Modal Experimental*, Inman [38]. Os métodos utilizados neste contexto em geral não resolvem dire-

tamente o problema de identificação dos parâmetros presentes nas equações espaço-temporais que descrevem o movimento do sistema. A informação contida nos parâmetros modais pode ser aproveitada num estágio posterior para a determinação dos coeficientes de tais equações de movimento.

As técnicas empregadas na determinação dos parâmetros modais, correspondem ao campo da Análise Modal Experimental de estruturas. As aplicações desta nova disciplina são cada vez mais surpreendentes, sobretudo quando a correção ou validação de modelos dinâmicos é necessária, Natke [63]. A comprecensão e o trabalho em Análise Modal experimental exige a integração com outras áreas tais como otimização, métodos numéricos, processamento de sinais, análise de vibrações, controle, etc. Sem esta integração o trabalho na análise modal experimental seria estéril. Contudo, as importantes técnicas empregadas na solução de problemas inversos apenas começam a ser transferidas para a área da análise modal. Entre os poucos autores que focalizam o problema de estimação de parâmetros no contexto de problemas inversos destacam-se Inman [38] e Natke [64]. Descrever o estado atual da arte da análise modal experimental não é tarefa fácil. Isto se deve ao aparecimento na última década de um conjunto amplo e variado de técnicas de identificação, trazendo como consequência controvérsias acerca da melhor técnica a ser utilizada. Sob este aspecto, corretos são os comentários de J. J. Juang [44]: *" como resultado do rápido desenvolvimento do assunto, o campo mais parece uma mala de artificios (bag of tricks) do que uma área unificada"*. Em verdade, a grande maioria desses métodos (diferentes em aparência) são matematicamente equivalentes, porém apresentados de diferentes maneiras. Contudo há uma exata separação no que se refere ao domínio nos quais eles são realizados (do tempo ou da frequência).

Os métodos da análise modal experimental no domínio do tempo são objetos de recentes estudos no campo das vibrações mecânicas. Estes métodos caracterizam-se pelo cálculo direto dos parâmetros modais do sistema a partir dos registros no tempo da sua excitação e resposta. Os métodos da análise modal experimental no domínio da frequência, além de amplamente assimilados na engenharia, fornecem como resultados intermediários informações qualitativas importantes do comportamento dinâmico do sistema em estudo. A performance e limitações destes métodos são bem conhecidas (ver por exemplo Gontier [25] e Lee [54]), sobretudo quando se trata de sistemas que apresentam características especiais, como por exemplo, modos acoplados com frequências muito próximas.

A estimação experimental dos parâmetros modais do sistema pode ser realizada diretamente a partir dos sinais medidos ou após processamento dos mesmos. No segundo caso, trabalha-se usualmente com sinais processados na forma de funções de resposta em frequência FRFs, ou de suas funções de resposta ao impulso FRIs equivalentes, estimadas tipicamente pela transformada inversa de Fourier. As técnicas utilizadas na estimação de



parâmetros sem levar em consideração a forma dos dados (processados ou não), são divididas em duas categorias: técnicas do tipo entrada única e resposta única SISO (Single Input, Single Output), e técnicas do tipo entrada múltipla e resposta múltipla MIMO (Multi Input, Multi Output). A tendência atual em análise modal experimental é a utilização das técnicas MIMO.

A história da análise modal experimental remonta ao início do século, porém, documentação relevante é considerada a partir de 1947 com o trabalho de Kennedy e Panku [46], conhecido como o método do ajuste do círculo modal. Daquela época em diante, muito se tem produzido, especialmente a partir da década de 70 graças ao vertiginoso desenvolvimento dos avanços na eletrônica. Entre muitos, pode-se citar num primeiro grupo (em ambos os domínios), os trabalhos no domínio do tempo, de Ibrahim e outros [39] [40] [41] de 1973 em diante, o trabalho de D. L. Brown em 1979 [11], também no domínio do tempo, que documentou o método de quadrados mínimos para exponenciais complexas (Least Squares Complex Exponential Method LSCE), os métodos de Referências Múltiplas (Polyreference) em ambos os domínios, desenvolvido primeiramente por Vold [78] em 1982, e continuado por L. Zhang, e H. Kanda [83] no período 1982-1988, os trabalhos de D. L. Brown [10] em 1982 e Ewins [19] [20], que apresentam uma visão dos testes modais tanto no domínio do tempo como da frequência, o algoritmo ERA (Eigensystem Realization Algorithm) no domínio do tempo, desenvolvido por Juang e Pappa em 1984 e posteriormente ampliado para o domínio da frequência [43] [44], etc. Num segundo grupo e especificamente no domínio do tempo, pode-se citar os algoritmos do tipo predição linear da família ARMA (Autoregressive and Moving Average), usualmente explorados na área da engenharia elétrica e automação, e atualmente transferidos com sucesso à análise de vibrações. Destacam-se na metodologia SISO no período de 1973-1993, os trabalhos de: Evans [18], Makhoul [59], Tufts e Kumaresan [74], Kumaresan [47], B. Rao [68], J. Hollkamp e S. M. Batill [33], P. R. G. Kurka [48] [49] [50] [51] [52], Cooper [15], Gontier e outros [25]. Já na metodologia MIMO no período 1987-1992, podem-se citar os trabalhos de D. W. Cho e outros [14], Mickleborough e Y. L. Pi [62], Chan Guen Lee [53], N. Zhang e S. Hayama [84], e B. L. Piombo e outros [66].

Embora as estruturas reais possuam infinitas frequências e infinitos modos de vibrar, na prática unicamente um número finito dos modos podem ser usados para descrever o comportamento dinâmico do sistema, restringindo-se a análise a uma frequência máxima dada pelas limitações impostas nos equipamentos de amostragem dos sinais dinâmicos. Assim sendo, a principal dificuldade na análise modal experimental no domínio do tempo é a determinação correta do número de modos de vibrar contido nos sinais medidos (chamado de ordem do sistema). Como a ordem é desconhecida, a maioria das técnicas de estimação de parâmetros modais são aplicadas assumindo uma ordem geralmente maior do que a ver-

dadeira, introduzindo assim modos computacionais, sem significado físico, e que devem ser separados num estágio posterior da identificação.

O presente trabalho tem por objetivo a realização de um estudo e propostas de novas técnicas de identificação paramétrica no domínio do tempo aplicadas à análise modal de estruturas mecânicas, visando a formulação de soluções para:

- O problema da identificação da ordem dos sistemas em análise.
- O problema da identificação correta e separação de parâmetros verdadeiros e computacionais, introduzidos pela sobredeterminação da ordem na aplicação das técnicas de identificação.

Para que esses objetivos sejam alcançados serão usados:

- Conceitos e técnicas de álgebra linear computacional, como o teorema de decomposição de matrizes em valores singulares SVD, e
- Algumas técnicas usuais da área de problemas inversos relacionadas com deconvolução, reconstrução, e solução de problemas de quadrados mínimos lineares com matrizes " *rank deficientes* " via aproximação de pseudo-inversas.

Procurou-se, de forma conveniente em cada capítulo, onde novos conceitos são introduzidos, a apresentação de exemplos numéricos pertinentes. Sendo assim, os exemplos numéricos globais de aplicação e comparação dos métodos propostos são apresentados em um capítulo separadamente. Em forma resumida, nos próximos capítulos apresenta-se o seguinte conteúdo:

O capítulo 2 descreve o modelo matemático usado para representar os sistemas em estudo, estabelecendo-se as relações básicas de análise modal, frequentemente utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo 3 é abordado o problema da identificação na metodologia SISO, usando técnicas de tipo predição linear no contexto de modelos AR como casos particulares do modelo ARMA. Nesta parte destaca-se a análise feita através da SVD, dos efeitos do condicionamento e sobredeterminação de certas matrizes de Hankel, na identificação da ordem do sistema. Nesta parte do trabalho propõe-se:

- O uso de deconvolução discreta para se estimar a função resposta ao impulso unitário a partir de informação de entrada e saída do sistema. Apresenta-se uma abordagem via regularização através da SVD.

- Um algoritmo iterativo para reconstruir a função resposta ao impulso unitário a partir de amostras altamente contaminadas por ruído.
- As técnicas Prony-Moments e a do Modelo Regressivo Simétrico, para serem usadas na identificação de parâmetros modais.

O capítulo 4 aborda o problema de identificação de sistemas a partir dos registros no tempo de vários sinais simultâneos de excitação e resposta (técnica MIMO). Desenvolve-se então as seguintes propostas:

- Identificação através de Modelos Regressivos MIMO.
- Deconvolução MIMO para estimar a matriz função resposta ao impulso unitário.
- Um Método de Identificação das matrizes de massa rigidez e amortecimento.

O capítulo 5 apresenta uma série de simulações numéricas que ilustram o comportamento das técnicas estudadas e propostas.

O capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho, bem como algumas sugestões para possíveis aperfeiçoamentos das técnicas propostas e futuros desenvolvimentos.

## Capítulo 2

# Fundamentos de Análise Modal e Descrição do Problema

### 2.1 Introdução

Neste capítulo é introduzido um conjunto de relações básicas de análise modal que constituirão o suporte para o desenvolvimento deste trabalho. Começa-se colocando o modelo matemático adotado para descrever o comportamento dinâmico dos sistemas em estudo, introduzindo-se em seguida a noção de função de transferência, que estabelece a relação entrada-saída do sistema. Serão assumidos sinais de excitação e resposta do tipo determinístico e que admitem transformada de Laplace para o caso contínuo, ou transformada  $Z$  para o caso discreto. Descrevem-se aqui as diversas relações entre os parâmetros modais do sistema e os parâmetros usados nas equações dinâmicas do movimento. O problema de identificação de parâmetros em sistemas mecânicos é também descrito de maneira formal.

### 2.2 Relações Básicas de Análise Modal

Daqui em diante assume-se que os sistemas em estudo são discretizados espacialmente e descritos pelo seguinte modelo paramétrico linear invariante no tempo:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = f \quad (2.1)$$

onde  $M$ ,  $C$  e  $K$  são matrizes simétricas  $n \times n$ , de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente, e  $u$  e  $f$  são funções vetoriais  $n \times 1$  que dependem do tempo e correspondem

a deslocamentos e forças associadas a cada uma das coordenadas físicas introduzidas na discretização do sistema. Diz-se então que o sistema é discretizado em  $n$  graus de liberdade, sendo  $n$  a ordem do sistema. A análise desenvolvida corresponderá a sistemas com amortecimento viscoso não proporcional considerando-se sinais de excitação e resposta do tipo causal. A adoção do modelo de amortecimento viscoso não proporcional, segue exclusivamente o critério de manutenção do significado físico das grandezas dinâmicas medidas experimentalmente (deslocamentos e forças como grandezas reais). Tal modelo presta-se de maneira adequada sobretudo à descrição analítica dos movimentos livre e de resposta ao impulso unitário de um sistema dinâmico. A descrição analítica dos sinais dinâmicos de resposta livre ou impulso unitário de um sistema em vibração constitui a base dos algoritmos de identificação de parâmetros no domínio do tempo.

Assumindo condições iniciais nulas e tomando a transformada de Laplace em (2.1) tem-se:

$$[Ms^2 + Cs + Ku] U(s) = F(s) \quad (2.2)$$

onde  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$ ,  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  com  $\mathcal{L}[\cdot]$  denotando o operador transformada de Laplace, sendo  $s$  o parâmetro complexo que indica a região de convergência do operador. Usando (2.2), pode-se expressar o vetor transformada do deslocamento como função do vetor transformada da força:

$$U(s) = (Ms^2 + Cs + Ku)^{-1} F(s) \quad (2.3)$$

A matriz função de transferência do sistema,  $H(s)$   $n \times n$ , é definida como

$$H(s) = (Ms^2 + Cs + Ku)^{-1} \quad (2.4)$$

O papel de  $H(s)$  na análise do sistema descrito por (2.1) é fundamental, já que, além de conter a informação dinâmica do sistema, ela governa a relação entrada-saída do mesmo, a saber:

$$U(s) = H(s)F(s). \quad (2.5)$$

A matriz função de resposta em frequência MFRRF corresponde ao caso particular de  $H(s)$  com  $s$  variando ao longo do eixo imaginário do plano complexo (ver Ewins [19]). A contraparte no domínio do tempo para  $H(s)$  é a matriz resposta ao impulso unitário  $h(t)$  MRIU, definida como

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}. \quad (2.6)$$

A matriz MRIU é útil no estabelecimento da relação entrada-saída do sistema no domínio do tempo. Esta relação é descrita por

$$u(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (2.7)$$

A equação integral acima foi obtida a partir de (2.5), onde foi usada a propriedade de  $\mathcal{L}^{-1}$  com o produto de convolução (ver Kailath [45]).

Outra maneira de definir a matriz função de transferência é através da formulação das equações de estado para o sistema (2.1). Para isto, introduzindo as notações:

$$B_0 = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} u \\ \dot{u} \end{bmatrix} \quad e \quad g = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

pode-se escrever a equação (2.1) como :

$$B_0 \dot{x} - Q_0 x = g \quad (2.8)$$

Da última relação, assumindo a existência de  $M^{-1}$ , pode-se expressar as equações de estado para o sistema dinâmico por (Inman [38]):

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}g \\ u = \tilde{C}x \end{cases} \quad (2.9)$$

$$(2.10)$$

onde

$$\tilde{A} = \tilde{B}Q_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = B_0^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.11)$$

com  $0$  e  $I$  representando as matrizes nulas e identidade respectivamente ambas  $n \times n$ . A matriz de observação  $\tilde{C}$  é definida por  $\tilde{C} = [I \ 0]$ ,  $\tilde{A}$  e  $x$  são a matriz e o vetor de estado respectivamente. As equações (2.9) e (2.10) descrevem equivalentemente o sistema (2.1), porém a última representação é mais simples de ser analisada, já que se trata de um sistema de equações lineares de primeira ordem, cuja solução pode ser expressa por:

$$x(t) = e^{\tilde{A}t}x_0 + \int_0^t e^{\tilde{A}(t-\tau)}\tilde{B}g(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

Assumindo condições iniciais nulas e tomando a transformada de Laplace em (2.9) e (2.10), pode-se ver após comparação com (2.5) que:

$$H(s) = \tilde{C} (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B}D, \quad (2.13)$$

onde  $D = [I \ 0]^T$  com  $T$  denotando a operação de transposição. Aplicando transformada inversa de Laplace na relação anterior encontra-se que a matriz resposta ao impulso é descrita por (ver Inman [38], Juang [44] e Kailath [45]):

$$h(t) = \tilde{C} e^{\tilde{A}t} \tilde{B}D. \quad (2.14)$$

### 2.2.1 A Função de Transferência e sua Relação com os Parâmetros Modais

Para se extrair as características modais do sistema descrito por (2.1) deve-se inicialmente resolver o autoproblema associado com a equação (2.8):

$$\lambda B_0 \psi - Q_0 \psi = 0. \quad (2.15)$$

Quando as matrizes  $B_0$  e  $Q_0$  são reais e simétricas, este autoproblema admite  $2n$  autovalores e autovetores que se apresentam em pares complexos conjugados. Se  $\lambda_r$  é autovalor de (2.15) e  $\psi_r$  o correspondente autovetor, pode-se provar que estes e os seus complexos conjugados satisfazem:

$$\psi_r = \begin{bmatrix} \phi_r \\ \lambda_r \phi_r \end{bmatrix}_{2n \times 1}, \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad (2.16)$$

onde  $\lambda_r$  e  $\phi_r$  são soluções do autoproblema associado a (2.1):

$$(M\lambda_r^2 + C\lambda_r + K) \phi_r = 0 \quad (2.17)$$

Os modos de vibrar do sistema são descritos pelos autovetores  $\phi_r$  enquanto que as frequências naturais  $\omega_r$  e os fatores de amortecimento  $\xi_r$  são determinados a partir dos autovalores  $\lambda_r$ , a saber: se  $\lambda_r = -\sigma_r + j\omega_{rd}$  com  $\sigma_r > 0$ , então :

$$\omega_r = \sqrt{[Re(\lambda_r)]^2 + [Im(\lambda_r)]^2}, \quad \xi_r = \frac{Re(-\lambda_r)}{\omega_r} \quad (2.18)$$

Da equação (2.16) pode-se expressar a matriz de autovetores  $\Psi$  da seguinte maneira:

$$\Psi = [\psi_1 \psi_2 \dots \psi_n \psi_1^* \psi_2^* \dots \psi_n^*] = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Phi\Lambda & \Phi^*\Lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

onde \* denota conjugação complexa,  $\Phi = [\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n]$  e  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  denota a matriz diagonal de autovalores. A matriz  $\Psi$  diagonaliza as matrizes  $B_0$  e  $Q_0$ . Logo, Pode-se escolher a normalização dos autovetores de maneira que:

$$\Psi^T Q_0 \Psi = \tilde{\Lambda} \quad \text{e} \quad \Psi^T B_0 \Psi = I \quad (2.20)$$

onde a matriz  $\tilde{\Lambda}$  é definida por:

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda^* \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Usando a transformação  $x(t) = \Psi\eta(t)$ , aplicando-se a transformada de Laplace em ambos os membros de (2.8) e usando (2.10), pode-se ver que:

$$u(s) = \tilde{C}\Psi [sI - \tilde{\Lambda}]^{-1} \Psi^T D F(s), \quad (2.22)$$

ou seja, a matriz função de transferência é dada por:

$$H(s) = \tilde{C}\Psi [sI - \tilde{\Lambda}]^{-1} \Psi^T D. \quad (2.23)$$

Da última equação segue imediatamente que

$$H(s) = \sum_{r=1}^n \left( \frac{\phi_r \phi_r^T}{s - \lambda_r} + \frac{\phi_r^* \phi_r^{*T}}{s - \lambda_r^*} \right). \quad (2.24)$$

Assumindo a força aplicada somente no ponto  $j$ , ou seja,  $f_k = 0 \forall k \neq j$ , e a resposta medida no ponto  $i$ , obtém-se de (2.5):

$$u_i(s) = H_{ij}(s) f_j(s) \quad (2.25)$$

onde  $H_{ij}(s)$  é um elemento genérico da matriz função de transferência que relaciona a resposta do sistema no ponto  $i$  a uma excitação aplicada no ponto  $j$ . Este elemento pode ser visto como uma função de transferência pontual e pode ser escrita como:



$$H_{ij}(s) = \sum_{r=1}^n \left( \frac{r_{rij}}{s - \lambda_r} + \frac{r_{rij}^*}{s - \lambda_r^*} \right), \quad (2.26)$$

com  $r_{rij} = \phi_{ri}\phi_{rj}$ , sendo  $\phi_{ri}$  o  $i$ -ésimo elemento de  $\phi_r$ . Os números  $r_{rij}$  são chamados de resíduos e os autovalores são também conhecidos como pólos do sistema.

Relações no domínio do tempo análogas àquelas descritas em (2.24) e (2.26) podem ser encontradas usando a transformada inversa de Laplace, a saber:

$$h(t) = \sum_{r=1}^n \left( \phi_r \phi_r^T e^{\lambda_r t} + \phi_r^* \phi_r^{*T} e^{\lambda_r^* t} \right) \quad (2.27)$$

para a matriz de resposta ao impulso e

$$h_{ij}(t) = \sum_{r=1}^n \left( r_{rij} e^{\lambda_r t} + r_{rij}^* e^{\lambda_r^* t} \right) \quad (2.28)$$

para um elemento genérico de  $h(t)$ .

## 2.3 A Função de Transferência através da Transformada Z

Na abordagem teórica da análise de sistemas através de modelos contínuos no tempo a transformada de Laplace cumpre um papel fundamental. Porém, quando se trabalha experimentalmente com as informações de excitação e resposta do sistema colhidas e armazenadas em forma digital, é conveniente proceder a análise através de algum modelo discreto no tempo (a partir daqui o termo discreto será utilizado no sentido de sinais discretizados no tempo). Nestes casos a transformada Z tem papel análogo ao da transformada de Laplace, Mc Guillen [57]. Assim sendo, é conveniente introduzir um modelo discreto que sirva para estudar o sistema dinâmico de interesse. Para se obter um modelo discreto que descreva as características do sistema mecânico em estudo, usam-se as versões discretas das equações (2.9) e (2.10):

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}g(k) & (2.29) \\ \mathbf{u}(k) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(k) & (2.30) \end{cases}$$

onde  $A = e^{\tilde{A}\Delta t}$ ,  $B = \int_0^{\Delta t} e^{\tilde{A}\tau} d\tau \tilde{B}$ ,  $\tilde{B}$  e  $\tilde{C}$  são como em (2.10). Os índices  $k$  são usados para indicar valores das funções em intervalos de tempo igualmente espaçados, ou seja  $x(k) = x(k\Delta t)$ ,  $g(k) = g(k\Delta t)$ , etc: com  $\Delta t$  sendo a taxa de amostragem.

Para definir a função de transferência do modelo discreto procede-se como para o caso contínuo, isto é: assume-se condições iniciais nulas, toma-se a transformada  $Z$  em (2.29) e (2.30), e estabelece-se a relação entrada-saída do sistema no domínio transformado. Feito isto tem-se que:

$$\hat{u}(z) = \tilde{C}(zI - A)^{-1} \Gamma \tilde{B} D \hat{f}(z), \quad (2.31)$$

onde  $\hat{u}(z)$  e  $\hat{f}(z)$  são as transformadas das sequências  $\{u(k)\}$  e  $\{f(k)\}$  respectivamente,  $D$  é definida como em (2.13) e  $\Gamma$  é a integral usada na definição da matriz  $B$ . Denotando a transformada  $Z$  da matriz função de transferência com  $H(z)$ , tem-se:

$$\hat{u}(z) = H(z) \hat{f}(z). \quad (2.32)$$

Comparando as duas últimas relações observa-se que:

$$H(z) = \tilde{C}(zI - A)^{-1} \Gamma \tilde{B} D. \quad (2.33)$$

A matriz  $H(z)$  também pode ser expressa em termos dos parâmetros modais. Para isto, pode-se provar que (ver Mickleborough [62]):

$$\Gamma = \int_0^{\Delta t} e^{\tilde{A}\tau} d\tau = \tilde{A}^{-1} (e^{\tilde{A}\Delta t} - I) = \Psi \tilde{\Lambda}^{-1} (e^{\tilde{\Lambda}\Delta t} - I) \Psi^{-1} \quad (2.34)$$

uma vez que a matriz  $\Psi$  diagonaliza a matriz de estado. Pode-se provar também que (ver Mickleborough):

$$(zI - A)^{-1} = \Psi [I - z^{-1} e^{\tilde{\Lambda}\Delta t}]^{-1} \Psi^{-1}. \quad (2.35)$$

Usando (2.34) e (2.35) em (2.33) tem-se

$$H(z) = \tilde{C} \Psi [I - z^{-1} e^{\tilde{\Lambda}\Delta t}]^{-1} [\tilde{\Lambda}^{-1} (e^{\tilde{\Lambda}\Delta t} - I)] \Psi^{-1} \tilde{B} D. \quad (2.36)$$

Sendo a normalização dos autovetores arbitrária pode-se simplificar a relação (2.36), assumindo-se que:

$$\Psi^T B_0 \Psi = \tilde{\Lambda}^{-1}, \text{ e } \Psi^T Q_0 \Psi = I. \quad (2.37)$$

Com esta normalização a relação (2.36) torna-se simplesmente:

$$\mathbf{H}(z) = \tilde{\mathbf{C}}\Psi \left[ \mathbf{I} - z^{-1}e^{\lambda\Delta t} \right]^{-1} \left( e^{\lambda\Delta t} - \mathbf{I} \right) \Psi^T \mathbf{D}, \quad (2.38)$$

de onde pode-se ver que:

$$\mathbf{H}(z) = \sum_{r=1}^n \left[ \frac{\nu_r \Phi_r \Phi_r^T}{1 - z^{-1}e^{\lambda_r \Delta t}} + \frac{\nu_r^* \Phi_r^* \Phi_r^{*T}}{1 - z^{-1}e^{\lambda_r^* \Delta t}} \right], \quad (2.39)$$

com  $\nu_r = (e^{\lambda_r \Delta t} - 1)$ . Ainda mais, o elemento genérico desta matriz função de transferência que relaciona a resposta discreta no ponto  $i$  para uma excitação no ponto  $j$  é:

$$H_{ij}(z) = \sum_{r=1}^n \left[ \frac{\rho_{rij}}{1 - z^{-1}e^{\lambda_r \Delta t}} + \frac{\rho_{rij}^*}{1 - z^{-1}e^{\lambda_r^* \Delta t}} \right], \quad (2.40)$$

onde  $\rho_{rij}$  são os resíduos desta função de transferência no plano  $Z$ . Tais resíduos relacionam-se com os elementos dos autovetores normalizados  $\phi_r$  através da seguinte relação:  $\rho_{rij} = \nu_r \phi_{ri} \phi_{rj}$

## 2.4 Sobre o Problema de Identificação

No capítulo introdutório mencionou-se que o problema de identificação corresponde a uma sub-classe de problemas inversos. Entretanto, estritamente falando, ainda não foi descrito em forma precisa o problema de identificação. Se as estruturas em análise forem modeladas pelo sistema de equações diferenciais lineares de segunda ordem descritas em (2.1), o *Problema Inverso de Identificação* consiste em determinar as matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  a partir dos sinais de excitação e resposta do sistema, enquanto que, o *Problema da Análise Modal* procura estimar frequências naturais, fatores de amortecimento modal e modos de vibrar a partir da mesma informação. O problema de calcular as matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  a partir de dados experimentais é difícil de ser resolvido e conduz a infinitas soluções. Este fato se deve principalmente a que na prática trabalha-se com dados truncados em termos de conteúdo de frequência e um limitado número de graus de liberdade. Na verdade, as matrizes que são estimadas, produzem simplesmente os mesmos parâmetros modais e relações de entrada e saída válidas. Isto é consequência de que existem infinitos conjuntos de matrizes de massa, amortecimento e rigidez que produzem os mesmos parâmetros modais numa determinada faixa de frequência Allemang [3], Inman [38]. Entretanto, a solução do segundo problema sempre fornece informação única com relação aos parâmetros modais.

As técnicas empregadas na análise modal experimental procuram estimar os parâmetros modais e em geral não resolvem totalmente o problema de identificação, isto é, em geral as matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$  não são estimadas neste estágio. Neste trabalho, se estudam e propõem técnicas que permitam principalmente, determinar estimativas dos parâmetros modais das estruturas em análise. O problema de identificação das matrizes de massa rigidez e amortecimento é abordado somente de maneira periférica no capítulo 5.

# Capítulo 3

## Predição Linear e Técnicas de Identificação Modal SISO

### 3.1 Introdução

O estudo e a aplicação de técnicas de identificação paramétrica no domínio do tempo em estruturas mecânicas data de aproximadamente duas décadas atrás. Porém, outras áreas de conhecimento já possuíam familiaridade com estas técnicas desde muito antes, por exemplo na década de 30, os economistas Walker [79], Yule [82] já as utilizavam em previsões econômicas através da análise de séries discretas no tempo. O desenvolvimento destas técnicas, especialmente na análise SISO, foi impulsionado a partir dos anos 60 com os avanços na análise de sistemas dinâmicos, na teoria de controle, em projetos de filtros digitais, e em processamento e análise de sinais, (ver [4], [18] e [56]). Os últimos anos tem caracterizado grandes esforços em pesquisa de maneira a poder estender os resultados da metodologia SISO para sistemas MIMO.

No que se refere a utilização das técnicas SISO na análise modal experimental de estruturas mecânicas, sabe-se que esta é uma metodologia limitada, Allemang [2], seja pelas variâncias no tempo na realização dos ensaios, ou pelas variações de carregamento de massa nas estruturas em análise devido a movimentação dos transdutores. Entretanto, acredita-se que, o desenvolvimento de procedimentos que otimizam a tarefa de identificação modal para os métodos do tipo SISO, devido a sua simplicidade e comparativamente baixa demanda de esforço computacional, aplicam-se de maneira adequada à determinação de informações qualitativas que se referem aos parâmetros modais. O aspecto mais importante desta análise é que os resultados obtidos servem como indicativo de procedimentos análogos a serem adotados e validados nos métodos de análise modal experimental do tipo MIMO.

A natureza do trabalho na análise modal experimental exige certos aspectos práticos que devem ser observados de maneira a permitir o desenvolvimento satisfatório da tarefa de identificação. Em particular, a escolha do sinal de entrada, o tempo de medição e o tamanho do intervalo de amostragem  $\Delta t$  são fundamentais. Assim por exemplo, o sinal de entrada deve possuir a característica de excitar a estrutura ao longo da faixa de frequência de interesse e  $\Delta t$  deve ser tão pequeno de maneira que os modos mais rápidos possam ser processados. Dentre os sinais mais populares que possuem a característica requerida encontram-se frequentemente os sinais aleatórios. Maiores detalhes relacionados com as considerações acima podem ser vistos em Allemang [1] e Unbehauen [76].

Neste capítulo apresentam-se técnicas de identificação modal para sistemas de entrada e saída única, que se baseiam no modelo ARMA. Estuda-se, em particular, modelos AR que utilizam a função resposta ao impulso e resposta livre do sistema. Nestas técnicas as propriedades dinâmicas são descritas parametricamente por meio de uma equação linear a diferenças cujos coeficientes governam a relação entrada-saída do sistema. A principal característica destes modelos é que a saída do sistema, pode ser calculada como combinação linear da entrada atual, das saídas, e das entradas anteriores do mesmo, daí o termo Predição Linear, Makhoul [59]. As três últimas seções refletem o esforço da transferência de algumas técnicas usuais na solução de problemas inversos à área de estimação de parâmetros modais. Mais precisamente, apresentam-se técnicas não paramétricas no domínio do tempo de estimação e reconstrução da função resposta ao impulso, finalizando-se com uma técnica proposta para identificação de parâmetros modais.

### 3.2 Identificação Modal através do Modelo ARMA

Para se obter a formulação do modelo ARMA para sistemas mecânicos SISO utiliza-se a função de transferência discreta (2.40). Para este fim, expressando  $H_{ij}(z)$  como função racional, tem-se que:

$$H_{ij}(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad (3.1)$$

onde  $q = p - 1$ ,  $p = 2n$ , com  $n$  indicando o número de modos do sistema. Agora, usando a relação entrada-saída no plano complexo  $z$ :  $\hat{u}_i(z) = H_{ij}(z)\hat{f}_j(z)$ , e as propriedades de linearidade e retardo da transformada  $\mathbf{Z}$  [57], tem-se que:

$$u_i(k) + a_1 u_i(k-1) + \dots + a_p u_i(k-p) = b_0 f_j(k) + b_1 f_j(k-1) + \dots + b_q f_j(k-q). \quad (3.2)$$

Onde  $u_i(k) = u_i(k\Delta t)$ , e analogamente para  $f_j(k)$ . Esta é uma equação a diferenças que relaciona os sinais discretizados no domínio do tempo e descreve a saída do sistema no instante  $k$  como função linear da entrada e saída em instantes anteriores. Isto é, a saída do sistema pode ser predita facilmente usando-se unicamente uma sequência de adições e multiplicações. Este comportamento justifica o termo chamado de Predição Linear. Os coeficientes  $a$ 's e  $b$ 's que governam a relação de linearidade são chamados respectivamente de Parâmetros Autor-regressivos AR e de Médias Móveis MA, enquanto que o modelo paramétrico (3.2) é chamado de Modelo ARMA.

As constantes modais do sistema são extraídas dos parâmetros ARMA, a saber; as frequências naturais e os fatores de amortecimento modal são extraídos dos polos de  $H_{ij}(z)$  (os zeros de  $(P(z))$ , pois estes são da forma (ver (2.40) e (3.1)):

$$z_r = e^{\lambda_r \Delta t}, \quad r = 1, 2, \dots, n; \quad (3.3)$$

enquanto os resíduos  $\rho_{rij}$  no plano  $z$  são obtidos da relação:

$$\rho_{rij} = \lim_{z \rightarrow z_r} (z - z_r) \frac{Q(z)}{P(z)}. \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4) observa-se que os autovalores  $\lambda_r$  são constantes globais que não dependem das localizações  $i$  e  $j$ , o que não acontece com os fatores de participação modal (os resíduos). Isto implica que para a realização de testes modais SISO, as medições dos sinais de excitação e resposta devem ser colhidas sistematicamente mudando a localização da excitação quantas vezes seja necessário a fim de poder completar a informação modal requerida. O fato de mudar as localizações da excitação e de colher os sinais dinâmicos em tempos diferentes pode acarretar em variâncias das características dinâmicas do sistema se o sistema tiver mudado as condições de operação, isto contradiz a hipótese de se trabalhar com modelos invariantes no tempo, o que é uma desvantagem da metodologia SISO.

A utilização do modelo ARMA como ferramenta de estimação de parâmetros é familiar às áreas de processamento e projeto de filtros digitais, análise espectral de processos estocásticos através de séries temporais, e análise e controle de sistemas dinâmicos. Algumas referências podem ser encontradas em [4], [12], [54] e [60]. Entretanto, a aplicação do modelo à análise modal de estruturas tem sido limitada existindo algumas típicas referências bibliográficas a respeito (ver [25], [48], [33], [54] e [62]).

### 3.2.1 O Cálculo dos Parâmetros ARMA e o Problema da Determinação da Ordem

Para entradas arbitrárias, os parâmetros ARMA podem ser determinados através da solução de um sistema de equações lineares, a saber: assumindo a disponibilidade de  $N$  amostras dos sinais discretizados, com  $N \geq 6n$ , variando adequadamente os índices  $k$  em (3.2), pode-se escrever o seguinte sistema de equações:

$$Q_f \Theta_f = \bar{u}_f, \quad (3.5)$$

onde  $\bar{u}_f$  e  $\Theta_f$  são vetores  $(N-2n) \times 1$  e  $4n \times 1$  respectivamente, definidos por:  $\bar{u}_f = [u(p), u(p+1), \dots, u(N-p)]^T$ ; e  $\Theta_f = [-a_1, -a_2, \dots, -a_p, b_0, b_1, \dots, b_q]^T$ ; e  $Q_f$  sendo a matriz  $(N-2n) \times 4n$ :

$$Q_f = \begin{bmatrix} u(p-1) & u(p-2) & \dots & u(0) & f(p) & f(p-1) & \dots & f(1) \\ u(p) & u(p-1) & \dots & u(1) & f(p+1) & f(p) & \dots & f(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-3) & u(N-4) & \dots & u(N-p-2) & f(N-2) & f(N-3) & \dots & f(N-p-1) \\ u(N-2) & u(N-3) & \dots & u(N-p-1) & f(N-1) & f(N-2) & \dots & f(N-p) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

onde por questões de simplicidade de notação os índices  $i$  e  $j$  que indicam as localizações de excitação e resposta do sistema foram omitidos, (isto será mantido daqui em diante). Logo, se  $N = 6n$  a matriz  $Q_f$  é inversível e o vetor de parâmetros  $\Theta_f$  pode ser encontrado resolvendo o sistema de equações (3.5) utilizando algum método numérico, caso contrário, o vetor de parâmetros é calculado no sentido de quadrados mínimos usualmente através da solução das equações normais :

$$Q_f^T Q_f \Theta_f = Q_f^T \bar{u}_f, \quad (3.7)$$

de onde

$$\Theta_f = (Q_f^T Q_f)^{-1} Q_f^T \bar{u}_f. \quad (3.8)$$

A expressão acima é correta quando  $\text{rank}(Q_f) = 4n$ , que é verdadeiro quando se analisa um sistema de  $n$  modos. Quando  $Q_f$  é sobredeterminada, ou seja quando é assumida uma ordem  $n' > n$ , a matriz  $Q_f$  é *rank deficiente* e  $(Q_f^T Q_f)^{-1}$  não existe, logo o sistema de equações (3.7) admite infinitas soluções, Hollkamp [33]. Nesta situação deve-se procurar uma solução que seja o mais geral possível no sentido de que ela se restrinja à solução usual de (3.5), no caso de ser  $Q_f$  inversível. A solução procurada é portanto a solução de norma mínima



denotada por  $\Theta_f^\dagger$  que pode ser encontrada via pseudo-inversão, (ver Bjork [8] e Golub [24] por exemplo) :

$$\Theta_f^\dagger = Q_f^\dagger \bar{u}_f, \quad (3.9)$$

onde  $Q_f^\dagger$  é a pseudo-inversa da matriz  $Q_f$ . Um fato importante que se deve destacar é que o rank da matriz sobredeterminada  $Q_f$  não serve como indicativo da ordem do sistema já que geralmente  $\text{rank}(Q_f) \neq 4n$ . A sobredeterminação da matriz  $Q_f$  pode ser interpretada como o resultado de se trabalhar com um modelo ARMA que provêm da função  $H_{ij}(z)$  correspondente a um sistema de  $n$  modos, onde porém,  $Q(z)$  e  $P(z)$  foram multiplicados por um mesmo polinômio  $G(z) = 1 + g_1 z^{-1} + \dots + g_s z^{-s}$ , com  $s = (2n' - 2n)$ . As infinitas soluções de (3.7) são resultado das infinitas possíveis escolhas dos coeficientes do polinômio  $G(z)$ .

Em se tratando de dados com ruído, a equação do modelo ARMA deve ser satisfeita a menos de um termo residual  $e(k)$ , isto é:

$$u'(k) + a_1 u'(k-1) + \dots + a_p u'(k-p) = b_0 f'(k) + b_1 f'(k-1) + \dots + b_q f'(k-q) + e(k), \quad (3.10)$$

onde  $u'(k)$  e  $f'(k)$  representam os sinais medidos. Nestes casos o vetor de parâmetros deve ser estimado no sentido dos quadrados mínimos do sistema de equações análogo ao descrito em (3.5):

$$Q'_f \Theta_f = \bar{u}'_f + e_f, \quad (3.11)$$

pela minimização da norma do vetor residual  $e_f$ . A solução deste problema conduz a estimar  $\Theta_f$  através de (3.8) já que em geral a matriz  $Q'_f$  é rank completo, mesmo com sobredeterminação. Entretanto, os parâmetros  $\Theta_f$  assim estimados podem diferir consideravelmente dos parâmetros exatos obtidos através de (3.9), porque dentre outras razões,  $\text{rank}(Q_f) \neq \text{rank}(Q'_f)$ . Este é um fato bem documentado na área de matemática aplicada relacionado com a solução de problemas de quadrados mínimos lineares perturbados com matriz do sistema rank deficiente, ver Bjork [8] e Golub [24] por exemplo. Este fato ainda não foi observado na área da análise modal. Maiores explicações serão apresentadas mais adiante.

As principais limitações associadas com o uso do modelo ARMA são as estimativas pobres dos parâmetros modais quando se trabalha com sinais contaminados por ruído e a determinação da ordem do sistema [25], [33]. Na prática tem-se observado que as estimativas dos parâmetros modais podem ser melhoradas sobredeterminando a ordem do modelo. Surge

porém a inconveniência de que são introduzidos  $(2n' - 2n)$  parâmetros computacionais, sem significado físico e difíceis de separar. O problema da determinação da ordem do sistema através do modelo ARMA é crítico, sendo o único resultado teórico válido que se tem, aquele relacionado com o tratamento estocástico do modelo, onde é considerado como entrada do sistema um sinal aleatório estacionário. Para uma breve descrição do assunto, assumamos o conhecimento exato da função de autocorrelação do sinal de saída:  $r_u(\tau) = E\{u(\tau+k)u(k)\}$ , onde  $E$  denota a operação de calcular o valor esperado. Pode-se provar que (ver Cadzow [12]):

$$\sum_{l=0}^p a_l r_u(k-l) = 0, \quad k \geq p+1, \quad a_0 = 1. \quad (3.12)$$

Logo os coeficientes AR são encontrados pelo método dos quadrados mínimos do seguinte sistema de equações lineares:

$$Ra = \rho \quad (3.13)$$

onde  $a$  e  $\rho$  são vetores  $2n \times 1$  e  $t \times 1$ , com  $t \geq 2n$ , e  $R$  a matriz Toeplitz de autocorrelações  $t \times 2n$ , definidos por:  $a = [-a_1, -a_2, \dots, -a_{2n}]^T$ ,  $\rho = [r_u(p), r_u(p+1), \dots, r_u(p+t-1)]^T$ , e

$$R = \begin{bmatrix} r_u(p-1) & r_u(p-2) & \dots & r_u(0) \\ r_u(p) & r_u(p-1) & \dots & r_u(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_u(p+t-3) & r_u(p+t-4) & \dots & r_u(t-2) \\ r_u(p+t-2) & r_u(p+t-3) & \dots & r_u(t-1) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

onde as autocorrelações foram avaliadas para  $k = p, p+1, \dots, p+t-1$ . Os parâmetros MA são determinados num estágio posterior usando os  $a$ 's já estimados [12]. O aspecto mais importante desta abordagem é que se  $R$  é  $t \times p'$ , com  $t \geq p' \geq p = 2n$ , sempre se tem  $\text{rank}(R) = 2n$  (ver Cadzow [12] teorema 2.1), ou seja a ordem do sistema é identificada pelo rank da matriz de autocorrelação. Observe-se porém que este resultado é válido no caso das autocorrelações serem exatas. Em casos práticos a correta identificação da ordem do sistema depende de quão boas sejam as estimativas da função de autocorrelação. Dentre diversas maneiras, esta função pode ser estimada por:

$$\hat{r}_u(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{l=1}^{N-k} u(k+l)u(l), \quad 0 \leq k \leq N-1. \quad (3.15)$$

A qualidade das estimativas de  $r_n(k)$  por  $\hat{r}_n(k)$  dependem de  $N$  ser grande e também do nível de ruído presente nos dados. Para níveis de ruído baixos e  $N$  suficientemente grande as estimativas são boas e a ordem do sistema pode ser detectada pela análise do rank da matriz  $R$  sobredeterminada, Cadzow [12]. Alguns autores sugerem determinar a ordem do sistema analisando o rank da matriz  $D_f^T D_f$ , onde  $D_f$  é a submatriz de  $Q_f$  que contém as medições do deslocamento do sistema. Esta sugestão se baseia no fato de que  $D_f^T D_f$  aproxima assintoticamente a matriz de autocorrelações  $R$ , ver Mickleborough [62] e Unbehauen [75]. Esta proposta porém funciona unicamente para  $N$  muito grande.

### 3.2.2 Identificação Modal e o Modelo ARMA na direção Regressiva

A abordagem do modelo ARMA apresentada na seção anterior reflete a propriedade preditora de estimar a resposta do sistema progressivamente com a evolução do tempo, por esta razão o modelo é conhecido como *Modelo ARMA Progressivo* (Forward ARMA Model), Hollkamp [33]. Este modelo tem a propriedade de que, se o vetor de parâmetros for estimado pela solução de norma mínima (3.9), tanto os pólos do sistema quanto os computacionais se localizam no interior do círculo unitário do plano complexo  $z$ , para o caso de se trabalhar com dados livres de ruído, ver Hollkamp [33]. Esta propriedade se conserva ainda no caso de dados perturbados desde que o nível de ruído seja baixo. O modelo *ARMA Regressivo* (Backward ARMA Model) é obtido reescrevendo a equação a diferenças (3.2) na direção contrária. Para isto, é suficiente fazer  $k \leftarrow (k - p)$ , e dividir em ambos os membros de (3.2) pelo coeficiente  $a_p$ . Feito isto obtém-se:

$$u(k) + c_1 u(k+1) + \dots + c_p u(k+p) = d_0 f(k) + d_1 f(k+1) + \dots + d_q f(k+q). \quad (3.16)$$

Os parâmetros AR e MA são obtidos em analogia com a seção anterior, a partir do seguinte sistema de equações lineares:

$$Q_b \Theta_b = \bar{u}_b, \quad (3.17)$$

onde  $\Theta_b$  e  $\bar{u}_b$  são vetores  $4n \times 1$  e  $(N-2n) \times 1$  definidos por:  $\bar{u}_b = [u(0), u(1), \dots, u(N-p-1)]^T$ ,  $\Theta_b = [-c_1, -c_2, \dots, -c_p, d_0, d_1, \dots, d_q]^T$ ; e  $Q_b$  sendo a matriz  $(N-2n) \times 4n$ :

$$Q_b = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \dots & u(p) & f(0) & f(1) & \dots & f(p-1) \\ u(2) & u(3) & \dots & u(p+1) & f(1) & f(2) & \dots & f(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(N-p-1) & u(N-p-2) & \dots & u(N-2) & f(N-p-2) & f(N-p-1) & \dots & f(N-3) \\ u(N-p-2) & u(N-p-3) & \dots & u(N-1) & f(N-p-1) & f(N-p) & \dots & f(N-2) \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Aqui novamente, se a matriz  $Q_b$  é sobredeterminada, ela é rank deficiente, e o vetor de parâmetros deve ser estimado pela solução de norma mínima do sistema de equações (3.17):

$$\Theta_b^+ = Q_b^+ \bar{u}_b. \quad (3.19)$$

Os parâmetros autorregressivos são os coeficientes do polinômio  $P_b(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_p z^p$ , cujas raízes  $w_r$  satisfazem a relação  $w_r = z_r^{-1}$ . A diferença do modelo regressivo com relação ao progressivo está em que se o vetor de parâmetros for calculado segundo (3.19), então os pólos correspondentes ao sistema (os  $w_r$ ) se localizam no exterior do círculo unitário do plano complexo  $z$ , enquanto que os computacionais ficam dentro, ver Holkamp [33]. Isto é verdade no caso dos dados serem exatos. No caso de dados perturbados a propriedade da localização dos pólos tende a se conservar desde que o vetor de parâmetros estimado aproxime adequadamente  $\Theta_b^+$ . A última consideração exige da análise das propriedades de aproximação de pseudo-inversas, ver Bjork [8] e Wedin [80]. Maiores detalhes serão apresentados na próxima seção.

### 3.3 Identificação Modal através de Modelos AR

A utilização de modelos AR na tarefa de identificação modal SISO se fundamenta no fato de que a resposta ao impulso e a resposta livre de um sistema de  $n$  graus de liberdade pode ser modelada pela parte homogênea da equação a diferenças (3.2) [15], [33]. Logo, assumindo a disponibilidade do registro no tempo de amostras de função resposta ao impulso que relaciona a  $j$ -ésima entrada com a  $i$ -ésima resposta do sistema  $h_{ij}(t)$ , então deve-se ter:

$$h_{ij}(k) + a_1 h_{ij}(k-1) + \dots + a_p h_{ij}(k-p) = 0, \quad \forall k \geq p; \quad (3.20)$$

onde  $p = 2n$  e  $h_{ij}(k)$  são amostras igualmente espaçadas de  $\Delta t$  segundos. Este modelo é conhecido como *Modelo Preditor Progressivo* (Forward Model): dadas  $N$  amostras de  $h_{ij}(t)$

e os coeficientes autorregressivos, pode-se prever exatamente sucessivas amostras  $h_{ij}(k)$ , para  $k \geq p$ . Para se calcular os parâmetros do modelo, procede-se como no caso ARMA, isto é, assumindo-se  $N$  amostras, com  $N \geq 4n$ , variando os índices em  $k$  em (3.20) obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$Ta = -\bar{h}_f, \quad (3.21)$$

onde  $\bar{h}_f$  é o vetor  $(N-p) \times 1$  definido por  $\bar{h}_f = [h(p), h(p+1), \dots, h(N-1)]^T$ ,  $a$  é o vetor de parâmetros autorregressivos, e  $T$  é a matriz Toeplitz  $(N-p) \times p$  cujas entradas são:

$$T = \begin{bmatrix} h(p-1) & h(p-2) & \dots & h(1) & h(0) \\ h(p) & h(p-1) & \dots & h(2) & h(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(N-3) & h(N-4) & \dots & h(N-p-1) & h(N-p) \\ h(N-2) & h(N-3) & \dots & h(N-p) & h(N-p-1) \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

onde os subíndices  $i$  e  $j$  foram omitidos por simplicidade de notação, observe-se que esta matriz corresponde exatamente à aquela usada no método de Prony. A grande vantagem de se usar modelos AR é que teoricamente a ordem do sistema em análise pode ser identificada através do rank da matriz  $T$  uma vez que  $\text{rank}(T) = 2n$ , mesmo com sobredeterminação. Uma prova deste resultado pode ser vista em Kumaresan [47]. O vetor de parâmetros deve ser calculado no sentido dos quadrados mínimos pelas equações normais associadas com (3.21) ou através de pseudo-inversão no caso de ser  $T$  sobredeterminada. Conseqüentemente em termos gerais, o vetor de parâmetros autorregressivos deve ser calculado por:

$$a^+ = T^+(-\bar{h}_f). \quad (3.23)$$

As frequências naturais e os fatores de amortecimento modal são calculados como no caso ARMA através das raízes  $z_r = e^{\lambda_r \Delta t}$  do polinômio  $P(z)$ :  $P(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}$ . Os resíduos  $r_{rij}$  são calculados pelo método dos quadrados mínimos através do sistema linear de equações:

$$Vr = \bar{h}, \quad (3.24)$$

com  $r$  sendo o vetor de resíduos:  $r = [r_1, r_1^*, r_2, r_2^*, \dots, r_p, r_p^*]^T$  (onde foram omitidos os índices  $i$  e  $j$ ),  $\bar{h} = [h(0), h(1), \dots, h(M)]^T$ , com  $p \leq M \leq N$ , e  $V$  sendo a matriz de Vandermonde  $M \times p$ :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_1 & z_1^* & z_2 & z_2^* & \dots & z_p & z_p^* \\ z_1^2 & z_1^{*2} & z_2^2 & z_2^{*2} & \dots & z_p^2 & z_p^{*2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^M & z_1^{*M} & z_2^M & z_2^{*M} & \dots & z_p^M & z_p^{*M} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

No caso do sistema sobredeterminado a  $p'$  graus de liberdade devem-se obter  $(p' - p)$  resíduos nulos correspondentes aos pólos computacionais.

Usando os dados em direção contrária ao modelo progressivo, pode-se escrever o *Modelo Regressivo* ou de *Direção Inversa* (Backward Model), ver Cooper [15] e Kumaresan [47]:

$$h_{ij}(k) + c_1 h_{ij}(k+1) + \dots + c_p h_{ij}(k+p) = 0, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.26)$$

Na mesma analogia do caso anterior, os coeficientes autorregressivos podem ser determinados a partir do seguinte sistema de equações lineares:

$$Hc = -\bar{h}_b, \quad (3.27)$$

onde  $\bar{h}_b$  é o vetor  $(N-p) \times 1$ , definido por  $\bar{h}_b = [h(0), h(1), \dots, h(N-p-1)]^T$ ,  $c$  é o vetor de parâmetros autorregressivos, e  $H$  é a matriz Hankel  $(N-p) \times p$  definida por:

$$H = \begin{bmatrix} h(1) & h(2) & \dots & h(p-1) & h(p) \\ h(2) & h(3) & \dots & h(p) & h(p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(N-p-1) & h(N-p) & \dots & h(N-3) & h(N-2) \\ h(N-p) & h(N-p+1) & \dots & h(N-2) & h(N-1) \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Prova-se também que se  $H$  é  $r \times s$ , com  $r \geq s \geq 2n$ , então  $\text{rank}(H) = 2n$  (ver Kumaresan [47]), ou seja a ordem do sistema também é identificada pelo rank da matriz  $H$ . Os parâmetros AR são calculados via pseudo-inversão:

$$c^+ = H^+(-\bar{h}_b), \quad (3.29)$$

e são os coeficientes do polinômio  $P_b(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_p z^p$ , cujas raízes  $w_r$  satisfazem a relação  $w_r = z_r^{-1}$ . Os parâmetros modais são obtidos usando os  $w_r$  e os resíduos

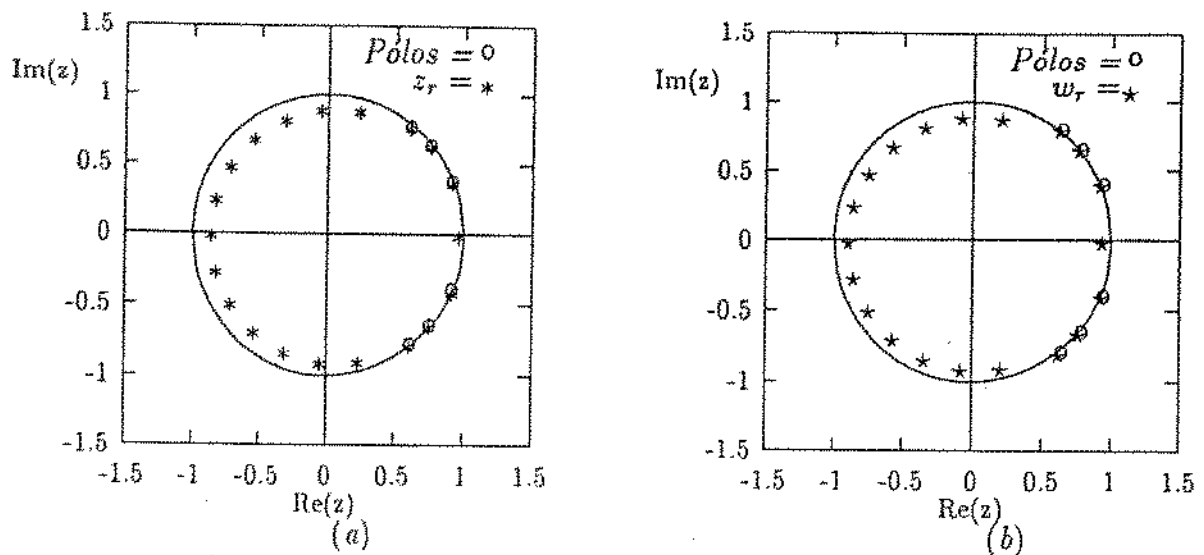


Figura 3.1: Pólos do Modelo AR: (a) Forward (b) Backward

são calculados como no modelo progressivo. O aspecto mais importante de se trabalhar com modelos AR na direção inversa é que se o vetor de parâmetros for calculado segundo (3.29), e se  $H$  for  $(N - p') \times p'$ , com  $p' \geq p$ , os  $p$  pólos correspondentes ao sistema (no plano  $z$ ) se localizam no exterior do círculo unitário, enquanto que os  $(2p' - 2p)$  estranhos, se distribuem de maneira aproximadamente uniforme em torno e no interior do círculo. Isto sugere que o cálculo dos resíduos do sistema seja realizado somente depois da correta identificação de seus pólos. Isto é verdade no caso de se trabalhar com dados livres de ruído (ver proposições 3 e 4, em Kumaresan [47]). Experiências numéricas mostraram que este fato tende a ser verdadeiro ainda para dados com níveis de ruído baixos (ver Kumaresan [47] e Tufts e Kumaresan [74]). No caso de se trabalhar com o modelo AR na direção progressiva, os pólos do modelo (do sistema e computacionais) situam-se dentro do círculo unitário [47]. Na figura 3.1 se apresenta o comportamento dos pólos de ambos os modelos para um sistema de três graus de liberdade que foi trabalhado assumindo-se a presença de dez modos. Nesta figura pode-se apreciar claramente a separação dos pólos correspondentes ao sistema dos computacionais introduzidos pela sobredeterminação.

Conseqüentemente, há vantagem do modelo regressivo em relação ao progressivo, no sentido de que o primeiro fornece um critério geométrico que permite separar os pólos do sistema dos computacionais introduzidos por sobredeterminação. Isto contudo, depende da maneira como sejam estimados os parâmetros AR e do nível de ruído nos dados. Estes fatos são importantes e merecem a análise a seguir, onde serão considerados unicamente modelos AR na direção inversa.

### 3.3.1 Análise da Sensibilidade dos Parâmetros AR

Em primeiro lugar é indispensável caracterizar bem o tipo de problema em análise. Na prática, como se usam modelos sobredeterminados, a solução do problema para o caso ideal de se trabalhar com dados livres de ruído é dada por  $c^+ = H^+(-\bar{h}_b)$ . Aqui a pseudo-inversa  $H^+$  é calculada usando-se o teorema de decomposição em valores singulares SVD da matriz  $H$ , isto é, fazendo-se:

$$H = UDV^T = [U_1 \ U_2] \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Na equação 3.30  $U_1$  e  $V_1$  são submatrizes formadas pelas  $2n$  primeiras colunas de  $U$  e  $V$  respectivamente,  $D_1$  a matriz diagonal  $D_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ , com  $\sigma_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, 2n$ , sendo os valores singulares não nulos de  $H$  e  $D_2$  a matriz nula  $(p' - p) \times (p - p')$ . Daí decorre que  $H^+ = V_1 D_1^{-1} U_1^T$ , de onde:

$$c^+ = H^+(-\bar{h}_b) = V_1 D_1^{-1} U_1^T(-\bar{h}_b). \quad (3.31)$$

É importante destacar que esta é a solução de um *Problema de Quadrados Mínimos lineares com matriz H Rank Deficiente* (pois  $\text{rank}(H) = 2n$ ), que não pode ser resolvido pelo método usual das equações normais. Com esta caracterização em mente, pode-se analisar melhor o problema para o caso de dados contaminados por ruído. Para se fazer esta análise, considerando-se perturbações deve-se ter:  $\hat{h}(k) = h(k) + \varepsilon(k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . O vetor de parâmetros AR deve ser estimado do seguinte sistema de equações lineares:

$$\hat{H}\hat{c} = -\gamma, \quad (3.32)$$

onde  $\hat{H} = H + \mathcal{E}$ , com  $\mathcal{E}$  representando a matriz Hankel de perturbações e  $\gamma = \bar{h}_b + \varepsilon$ . O vetor de perturbações do termo independente em (3.27) é aqui representado por  $\varepsilon$ . Ou seja o vetor de parâmetros deve ser estimado de um *Problema de Quadrados Mínimos Lineares Rank deficiente Perturbado*. Esta caracterização do problema ainda não foi, segundo conhecimento do autor, percebida na área da análise modal. Na prática o vetor de parâmetros é estimado através da solução das equações normais associadas com (3.32):  $\hat{H}^T \hat{H} \hat{c} = -\hat{H}^T \gamma$ , uma vez que a matriz  $\hat{H}$  é rank completo. A questão imediata que surge é: será que a solução correta do problema:  $c^+ = -H^+ \bar{h}_b$ , é aproximada adequadamente pela solução obtida através das equações normais  $\hat{c}^+ = -\hat{H}^+ \gamma = -(\hat{H}^T \hat{H})^{-1} \hat{H}^T \gamma$ , de maneira que  $\|c^+ - \hat{c}^+\|$  seja minimizado? Intuitivamente, espera-se que isto seja verdade desde que  $\hat{H}^+$  aproxime  $H^+$  no sentido que  $\|\hat{H}^+ - H^+\|$  seja pequeno. Isto pode ser confirmado observando-se que:



$$c^+ - \tilde{c}^+ = (H^+ - \hat{H}^+)(-\bar{h}_b) + \hat{H}^+ \varepsilon, \quad (3.33)$$

de onde segue que  $\|c^+ - \tilde{c}^+\|$  será pequeno desde que  $\|\hat{H}^+ - H^+\|$  o seja e desde que se possa controlar o termo  $\|\hat{H}^+\|$  de maneira a garantir sua limitação. Entretanto sabe-se da teoria de perturbação de pseudo-inversas (ver Bjork [8], Hansen [28], Stewart [71] e Wedin [80], por exemplo) que a pseudo-inversa de uma matriz não depende continuamente dos dados, isto é, pequenas variações dos seus elementos pode originar grandes perturbações da pseudo-inversa estimada (ver o exemplo da página 12 de Bjork [8]). Conseqüentemente, se não forem consideradas estas apreciações, existe o risco de  $\tilde{c}^+$  não aproximar adequadamente  $c^+$ . Demonstra-se que as exigências acima requeridas serão satisfeitas (ver Bjork [8]) se:

$$\text{rank}(H) = \text{rank}(\hat{H}), \text{ e} \quad (3.34)$$

$$\|\mathcal{E}\| < \sigma_{2n}. \quad (3.35)$$

Com estas condições pode-se demonstrar que a solução para o problema de quadrados mínimos lineares perturbado  $\tilde{c}^+$  satisfaz as seguintes estimativas (ver Bjork):

$$\frac{\|\tilde{c}^+ - c^+\|}{\|c^+\|} \leq \frac{k(H)}{1 - \|\mathcal{E}\|\|H^+\|} \left[ \frac{\|\mathcal{E}\|}{\|H\|} + \frac{\|\varepsilon\|}{\|\bar{h}_f\|} \right] + \|\mathcal{E}\|\|H^+\|, \quad (3.36)$$

onde  $k(H)$  denota o *Número de Condição* da matriz  $H$  ( $k(H) = \sigma_1/\sigma_{2n}$ ); e  $\|\cdot\|$  é a norma espectral ou norma 2. Das estimativas (3.36) segue que o erro relativo dos parâmetros AR estimados depende tanto do número de condição da matriz  $H$  quanto do nível de ruído nos dados. Na prática o tamanho de  $k(H)$  é determinante, se  $k(H)$  é grande o problema é mal condicionado e as estimativas acima podem ser dramáticas (um problema é bem condicionado quando  $k(H) \approx 1$ ).

Da análise realizada se depreende que para se obter estimativas significativas dos parâmetros AR deve-se:

a) Ter  $k(H)$  pequeno, e

b) Construir a partir da matriz de informação  $\hat{H}$  (lembrar que  $\hat{H}$  é rank completo), uma matriz  $\hat{H}$ , próxima de  $H$ , no sentido que  $\text{rank}(\hat{H}) = \text{rank}(H)$  satisfazendo-se (3.35).

A primeira consideração depende do sistema. Existem sistemas cujas matrizes de Hankel são mal condicionadas (ver Inman [38] por exemplo). A segunda consideração depende de se conhecer previamente a ordem do sistema. Assumindo-se esta hipótese, uma matriz que satisfaz  $\text{rank}(\hat{H}) = \text{rank}(H)$  pode ser construída facilmente usando-se a SVD da matriz  $\hat{H}$ . A decomposição em valores singulares de  $\hat{H}$ , pode ser expressa por:

$$\hat{H} = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{u}_1 \tilde{v}_1 + \tilde{\sigma}_2 \tilde{u}_2 \tilde{v}_2 + \cdots + \tilde{\sigma}_p \tilde{u}_p \tilde{v}_p) + (\tilde{\sigma}_{p+1} \tilde{u}_{p+1} \tilde{v}_{p+1} + \cdots + \tilde{\sigma}_{p'} \tilde{u}_{p'} \tilde{v}_{p'}), \quad (3.37)$$

onde  $\tilde{u}_r$  e  $\tilde{v}_r$  são os vetores coluna perturbados das matrizes  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  respectivamente, e  $\tilde{\sigma}_r$  são os correspondentes valores singulares perturbados. Denotando a primeira parcela em (3.37) por  $\hat{H}$ , é possível demonstrar que esta matriz é de rank  $2n$ , e ainda mais, que ela resolve o problema:

$$\text{Min}\{\|\hat{H} - Q\|\}, \quad \forall Q \in \mathcal{R}_{2n}, \quad (3.38)$$

com  $\mathcal{R}_{2n}$  sendo o conjunto de matrizes de rank  $2n$  (ver Golub), ou seja a matriz  $\hat{H}$  é a matriz de  $\mathcal{R}_{2n}$  mais próxima de  $\tilde{H}$ . Na prática, a condição (3.35) é satisfeita para  $\hat{H}$  se assim o for para  $\tilde{H}$ , o que geralmente se cumpre para dados com níveis de ruído baixos, (ver Hansen [28] e Stewart [71] por exemplo).

### 3.3.2 A Identificação da Ordem e os Efeitos da Sobredeterminação

A determinação da ordem do sistema na análise modal experimental é um problema tão importante quanto difícil de ser resolvido. Para tratar o problema através da análise dos modelos AR, deve-se lembrar que a ordem é identificada pelo rank das matrizes Toeplitz ou Hankel descritas anteriormente. Em se tratando da detecção do rank de uma matriz, é bom alertar que esta não é tarefa simples, sobretudo quando se trata com matrizes mal condicionadas perturbadas (Hansen [29]). A maneira mais eficaz de se tratar este problema é através do teorema SVD, onde o indicador teórico de rank é o número de valores singulares não nulos da matriz em análise. Aqui se fala de indicador teórico uma vez que na prática é impossível de se obter valores singulares exatamente nulos, passando-se a considerar como nulos aqueles valores singulares menores que um valor prefixado, diga-se  $\epsilon$ ; e o que se estaria avaliando seria em todo caso o *rank numérico com tolerância  $\epsilon$* . Em se tratando da identificação da ordem através da matriz de Hankel perturbada  $\tilde{H}$ , sabe-se que os seus valores singulares  $\tilde{\sigma}_r$  satisfazem a seguinte relação (ver Bjork):

$$|\tilde{\sigma}_r - \sigma_r| \leq \|\mathcal{E}\|, \quad r = 1, 2, \dots, p'. \quad (3.39)$$

De onde se tem que:

$$\begin{cases} 0 < \tilde{\sigma}_r \leq \sigma_r + \|\mathcal{E}\|, & r = 1, 2, \dots, 2n, \\ 0 < \tilde{\sigma}_r \leq \|\mathcal{E}\|, & r = 2n + 1, 2n + 2, \dots, p'. \end{cases} \quad (3.40)$$

pois os valores singulares exatos  $\sigma_r$  são nulos para  $r \geq 2n + 1$ . A consequência imediata de (3.40) é que, se for assumido o cumprimento da condição (3.35) e se  $\|\mathcal{E}\|$  não for suficientemente próxima de  $\sigma_{2n}$ , então deve existir uma clara separação entre os valores singulares perturbados que correspondem ao sistema e os que correspondem ao ruído (os últimos serão pequenos com relação aos primeiros). Esta característica do comportamento dos valores singulares perturbados será o indicador para detectar a ordem do sistema. Observe-se porém que isto depende do tamanho de  $\sigma_{2n}$ , se a matriz Hankel com informação correta  $H$  for bem condicionada o  $\sigma_{2n}$  é destacado e a condição (3.35) é factível de ser satisfeita, para matrizes mal condicionadas isto é mais difícil de se satisfazer. Consequentemente faz-se indispensável analisar o condicionamento das matrizes Hankel. Para se fazer isto, considere-se dois modelos sobredeterminados com matrizes Hankel  $H_1$   $m_1 \times p_1$  e  $H_2$   $m_2 \times p_2$  respectivamente, com  $m_2 \geq p_2$ ,  $m_1 \geq p_1$ , e  $p_2 \geq p_1 \geq p$ , cujos valores singulares são denotados por  $\sigma_r$  e  $\bar{\sigma}_r$ ,  $r = 1, 2, \dots, 2n$ . Então pelo teorema de separação dos valores singulares (ver Bjork), tem-se que:

$$\bar{\sigma}_1 \geq \sigma_1 \geq \bar{\sigma}_2 \geq \sigma_2 \cdots \bar{\sigma}_{2n} \geq \sigma_{2n}. \quad (3.41)$$

O condicionamento das matrizes Hankel pode ser analisado a partir da relação anterior. Denotando com  $\sigma_{max}$  o maior valor singular de uma matriz Hankel sobredeterminada a  $p'$  graus de liberdade, pode-se obter a seguinte estimativa:

$$\sigma_{max}(H) \leq M \sum_{r=1}^n \left[ \frac{1 - |e^{\lambda_r \Delta t}|^{p'+1}}{1 - |e^{\lambda_r \Delta t}|} \right], \quad (3.42)$$

com  $M$  sendo alguma constante positiva. A última relação diz que o maior valor singular das matrizes Hankel sobredeterminadas é limitado. Ainda mais, tem-se que  $|e^{\lambda_r \Delta t}|^{p'+1} \approx 0$  para  $p'$  suficientemente grande, toda vez que  $|e^{\lambda_r \Delta t}| < 1$ . Consequentemente para  $p_2$  e  $p_1$  suficientemente grandes deve-se ter  $\sigma_1(H_2) \approx \sigma_1(H_1)$ , ou seja  $\sigma_{max}$  cresce pouco a medida que a sobredeterminação aumenta. Embora não se tenha uma estimativa para  $\sigma_{min}$  (com  $\sigma_{min}$  se está denotando o menor valor singular da matriz Hankel), observa-se porém na cadeia de desigualdades (3.41) que ele tem maior liberdade para crescer do que  $\sigma_{max}$ . Assim sendo, deve-se ter que  $k(H_2) \leq k(H_1)$ , isto é, o número de condição da matriz Hankel deve melhorar. Isto é muito importante, pois para o caso de se trabalhar com dados perturbados por ruído, sendo que o nível de ruído é fixo para o conjunto de amostras disponíveis, a norma  $\|\mathcal{E}\|$  em geral não cresce na mesma taxa do que  $\sigma_{min}$ , possibilitando-se uma separação dos valores singulares correspondentes ao sistema daqueles correspondentes ao ruído. O resultado desta análise pode ser apresentado na forma da seguinte proposição:

### Proposição

Com as notações acima, se  $(\bar{\sigma}_1 - \sigma_1) \leq (\bar{\sigma}_{2n} - \sigma_{2n})$ , então

$$k(H_2) \leq k(H_1).$$

### Prova

$$\begin{aligned} & (\bar{\sigma}_1 - \sigma_1) = \epsilon \leq (\bar{\sigma}_{2n} - \sigma_{2n}), \\ \Rightarrow & \bar{\sigma}_1 = \sigma_1 + \epsilon, \quad e \quad \sigma_{2n} + \epsilon \leq \bar{\sigma}_{2n}, \\ \Rightarrow & \frac{\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_{2n}} = \frac{\sigma_1 + \epsilon}{\bar{\sigma}_{2n}} \leq \frac{\sigma_1 + \epsilon}{\sigma_{2n} + \epsilon} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_{2n}} \\ \Rightarrow & k(H_2) \leq k(H_1). \end{aligned}$$

Observe-se que a hipótese da proposição exige de unicamente condições suficientes, o que não significa que o resultado não possa ser válido em outras condições. Contudo, o aspecto mais importante desta proposição está no fato de que ela explica que a sobre-determinação do modelo melhora o condicionamento das matrizes Hankel, o que deve refletir em melhoramento das estimativas (3.36) dos parâmetros AR. Existem numerosos trabalhos que exploram as vantagens da sobre-determinação (ver por exemplo Braun [9], Cooper [15], Ibrahim [41], Kumaresan [47], Kurka [48], [49], [50], Mc Donough [56] e Yang [81], entre outros), porém em nenhum deles se faz uma análise deste tipo, ao parecer a vantagem do uso da sobre-determinação teria aparecido como resultado de meras experiências numéricas. Os efeitos da sobre-determinação podem ser melhor entendidos, observando os seguintes comentários:

### Comentários:

c1. O efeito positivo da sobre-determinação se reflete em que o menor valor singular da matriz Hankel é destacado em tamanho. Isto possibilita o cumprimento da exigência imposta na relação (3.35) permitindo-se assim a detecção da ordem do sistema em análise.

c2. O resultado da proposição independe da taxa de amostragem  $\Delta t$ . Porém certo cuidado é necessário na sua escolha pois  $\Delta t$  muito pequeno ou muito grande (respeitando o teorema de amostragem) pode conduzir a matrizes Hankel mal condicionadas, ver Majda [58]. O primeiro caso pode facilmente ser observado na relação (3.42), onde claramente, se  $\Delta t$  é muito pequeno, os termos do denominador são quase nulos, possibilitando o crescimento de  $\sigma_{max}$  o que pode produzir mal condicionamento. Nestas condições se necessitaria de um nível de sobre-determinação muito grande para a proposição ser útil.

c3. A importância da proposição é teórica no sentido de que ela explica a razão do por-que sistemas sobre-determinados melhoram as estimativas dos parâmetros calculados. Este

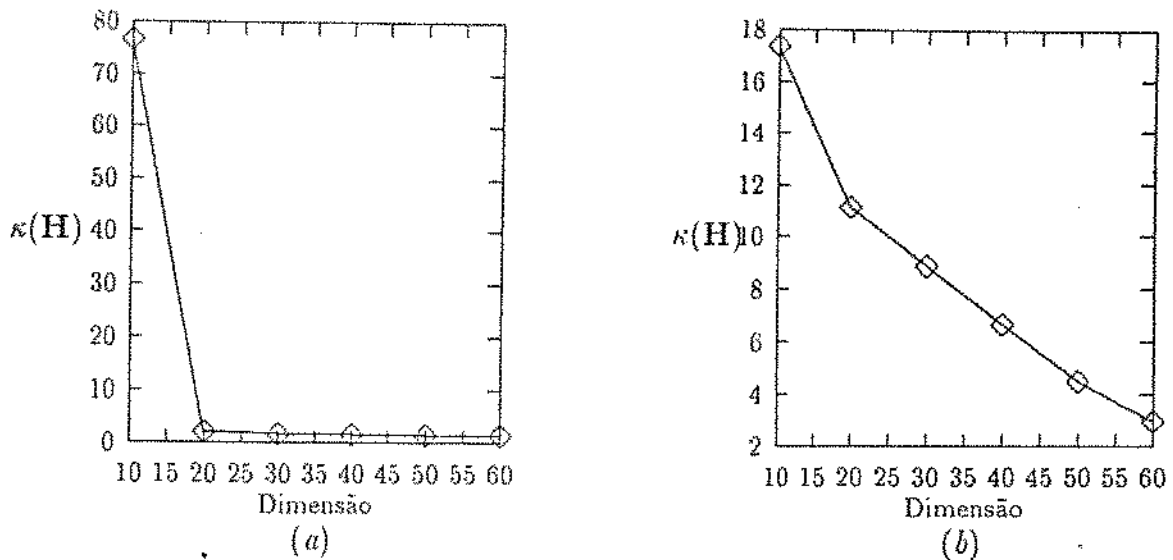


Figura 3.2: Número de Condição da Matriz de Hankel como função de sua dimensão

efeito pode ser administrado positivamente usando modelos de maior sobre-determinação possível, assim sendo, para o caso de  $N$  amostras disponíveis da função resposta ao impulso unitário, a proposição sugere usar uma matriz Hankel com dimensão  $N/2 \times N/2$ . Entretanto é bom observar que devem-se evitar amostras a partir do instante em que o nível de ruído começa a ser dominante.

Para se verificar os resultados da proposição foram analisados o condicionamento das matrizes Hankel como função da ordem do modelo (da dimensão de  $H$ ) para sistemas mecânicos de 3 e 2 graus de liberdade, cujas funções resposta ao impulso unitário são definidas por:

$$h(t) = e^{-0.06t} \text{sen}(4t) + 0.8e^{-0.056t} \text{sen}(7t) + 1.2e^{-0.09t} \text{sen}(9t),$$

no primeiro caso, e  $h(t) = \sum_{r=1}^2 (r_r e^{\lambda_r t} + r_r^* e^{\lambda_r^* t})$  no segundo, com resíduos  $r_1 = r_2 = j$ , com  $j$  sendo a unidade complexa imaginária, frequências naturais  $f_1 = 50\text{Hz}$ ,  $f_2 = 1\text{Hz}$ ; e fatores de amortecimento modal  $\xi_1 = 0.006$ , e  $\xi_2 = 0.0053$ . Este exemplo foi construído segundo indicado por Liang e Inman [55].

Os resultados da análise são apresentados na figura 3.2 (a) para o sistema de três graus de liberdade onde foi escolhido  $\Delta t = 0.1\text{s}$ , e na figura 3.2 (b) para o outro sistema, com  $\Delta t = 0.005\text{s}$ . As matrizes Hankel analisadas foram quadradas. O comportamento do número de condição  $k(H)$  é eloquente, como previsto na proposição. Para se confirmar o comentado em c2, a figura 3.3 apresenta o comportamento do número de condição da matriz

Hankel para o sistema de dois graus de liberdade, com a escolha  $\Delta t = 0.01s$ . Observe-se que esta taxa de amostragem está no limite de permissão do teorema de Shannon [76], ou seja  $\Delta t$  é grande. Observe-se também que embora  $k(H)$  tenda a decrescer, a matriz  $H$  reflete alto grau de mal condicionamento. Os valores assumidos por  $k(H)$  para diversas dimensões de  $H$  podem ser vistos na terceira coluna da tabela 3.1. A segunda e quarta coluna da mesma correspondem ao comportamento de  $k(H)$  descrito nas figuras 3.2 – (a) e 3.2 – (b). O mal condicionamento do sistema de dois graus de liberdade foi atribuído por Inman [38] ao fato das frequências naturais serem afastadas. Este exemplo foi incluído com a finalidade de se destacar a escolha certa da taxa de amostragem  $\Delta t$ . Para um caso prático sugere-se amostrar os sinais dinâmicos tão rápido como os equipamentos o permitam. A taxa de amostragem ótima deve ser aquela que minimiza  $k(H)$ , isto é, aquela que melhor destaca  $\sigma_{\min}$ , possibilitando assim a identificação da ordem do sistema.

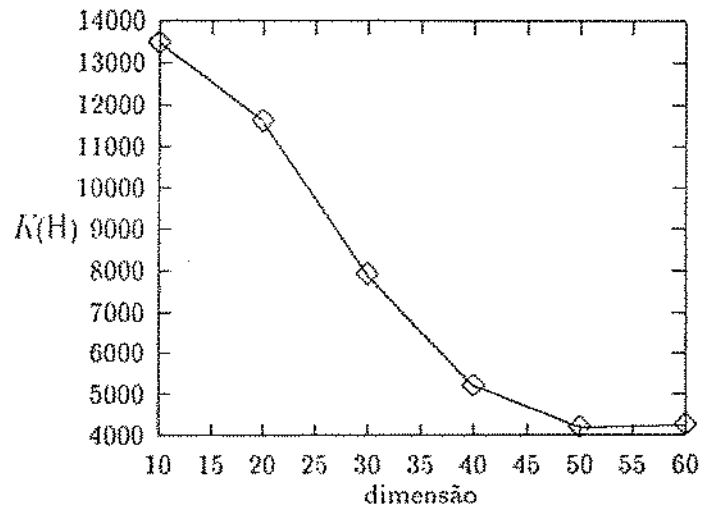


Figura 3.3: Número de condição da Matriz Hankel como função de sua Dimensão

p	$\Delta t = 0.1$	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$
10	76.56	13475.48	17.36
20	2.06	11615.53	11.12
30	1.63	7919.76	8.86
40	1.55	5206.05	6.66
50	1.40	4192.23	4.50
60	1.34	4258.62	2.97

Tabela 3.1: A influência da Taxa de Amostragem

### 3.4 Uma Técnica de Identificação usando o Método de Prony e os Momentos da Função Resposta ao Impulso Unitário

O método de Prony é amplamente conhecido pela sua utilidade em diversas áreas para modelar sinais transientes como soma finita de exponenciais complexas, algumas aplicações podem ser vistas em [30], [58] e [77]. Na área da análise modal podem-se citar os trabalhos de Allemang [3], Braun [9], Kurka [48], [49], [50] e Yang [81]. Em casos práticos a principal dificuldade associada com o método de Prony é o reconhecimento dos parâmetros do sistema daqueles introduzidos pela sobredeterminação da ordem do modelo. Dentre algumas sugestões para se fazer este reconhecimento citam-se (ver [9], [34], [49], [50]) : i) O uso do teorema SVD para analisar o condicionamento da matriz Toeplitz  $T$ , ii) A repetição dos testes para verificar a consistência dos parâmetros identificados, iii) A observação do valor numérico de certos parâmetros quando a ordem do sistema é incrementada sucessivamente, e iv) A extração das raízes de uma sequência de polinômios. O método aqui apresentado foi introduzido por Kurka e Bazán [51] e usa os parâmetros encontrados pela aplicação do método de Prony para ajustar um conjunto de amostras da função resposta ao impulso unitário. Os momentos dessa função (definidos posteriormente), são utilizados para reconhecer os parâmetros do sistema através do método dos momentos de Gibiláro e Less [23]. Informação detalhada pode ser vista em Kurka e Bazán [51]. Para uma melhor apreciação do método serão descritos os métodos de Prony e dos momentos separadamente.

#### O Método de Prony

Este método serve para ajustar um conjunto de amostras da função resposta ao impulso  $h(t)$  do sistema (ou da resposta livre) como soma finita de exponenciais complexas:

$$h(k) = \sum_{r=1}^n \left( r_r e^{\lambda_r k \Delta t} + r_r^* e^{\lambda_r^* k \Delta t} \right), k = 0, 1, \dots, N. \quad (3.43)$$

Dadas as estimativas de  $N$  amostras  $\hat{h}(k)$ , o método pode ser resumido em três passos:

a) Determinação dos pólos do modelo  $z_r = e^{\lambda_r \Delta t}$  (do sistema e computacionais), através das raízes do polinômio usado no modelo AR progressivo sobredeterminado. Feito isto, estimam-se em seguida os autovalores  $\lambda_r$  do modelo.

b) Determinação dos resíduos usando o sistema de equações lineares com matriz Van Der Monde descrito em (3.24).

b):  
c) Construção do ajuste para  $h(t)$  usando os pólos e resíduos estimados em a) e

$$\tilde{h}(t) = \sum_{r=1}^{n'} (r_r e^{\lambda_r t} + r_r^* e^{\lambda_r^* t}). \quad (3.44)$$

### O Método dos Momentos

O método data aproximadamente da década de 60 e foi usado principalmente para reduzir a ordem de modelos lineares em sistemas dinâmicos nas áreas de bioquímica e controle, ver [23] e [36]. Alguns trabalhos onde o método é usado como ferramenta de identificação paramétrica podem ser vistos em Einsenfeld [37], Jamshidi [42] e Unbehauen [75]. Na formulação do método se utiliza a relação que existe entre a função de transferência do sistema  $H(s)$  no domínio de Laplace, e a sua contraparte no domínio do tempo a função resposta ao impulso unitário  $h(t)$ . Para se fazer isto, seja  $H(s)$  a função de transferência de um sistema estável:

$$H(s) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_q s^q}{\beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_m s^m}, \quad q < m. \quad (3.45)$$

Os momentos da função  $h(t)$  são definidos por:

$$M_k = \int_0^{\infty} t^k h(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.46)$$

e concentram as propriedades dinâmicas do sistema. Usando a relação  $H(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} h(t) dt$ , após expansão em série do termo exponencial em torno da origem, tem-se que:

$$H(s) = M_0 - M_1 s + \frac{M_2}{2!} s^2 + \dots + (-1)^r \frac{M_r}{r!} s^r + \dots \quad (3.47)$$

Introduzindo os momentos normalizados  $m_k = (-1)^k \frac{M_k}{k!}$ , de (3.45) e (3.47) obtem-se:

$$(m_0 + m_1 s + m_2 s^2 + \dots)(\beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_m s^m) = (\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_q s^q). \quad (3.48)$$

Comparando os coeficientes das mesmas potências na relação anterior se pode montar um sistema de  $m + q + 2$  equações lineares envolvendo o mesmo número de momentos, de onde se pode encontrar os coeficientes  $\alpha_r$  e  $\beta_r$ . Em se tratando de um sistema mecânico de  $n$  graus de liberdade, sua função de transferência  $H(s)$  é definida por (3.45) com  $m = p = 2n$ ,



e  $q = 2n - 1$ . Da relação (3.48) deduz-se que os coeficientes  $\alpha_r$  e  $\beta_r$  satisfazem o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & -I_{2n} \\ T_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

onde  $\alpha = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n-1}]^T$ ,  $\beta = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2n}]^T$ , com  $I_{2n}$  a matriz identidade  $2n \times 2n$  e  $T_{11}$ ,  $T_{21}$  sendo matrizes Toeplitz  $2n \times (2n + 1)$  e  $(2n + 1) \times (2n + 1)$  respectivamente, definidas por:

$$T_{11} = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_1 & m_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{2n-1} & m_{2n-2} & \dots & m_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_{21} = \begin{bmatrix} m_{2n} & m_{2n-1} & \dots & m_1 & m_0 \\ m_{2n+1} & m_{2n} & \dots & m_2 & m_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ m_{4n} & m_{4n-1} & \dots & m_{2n+1} & m_{2n} \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Do sistema por blocos (3.49) obtém-se que:

$$T_{21}\beta = 0 \quad \wedge \quad \alpha = T_{11}\beta, \quad (3.51)$$

o que indica que primeiro devem-se calcular os coeficientes  $\beta_r$  (com  $\beta_0 = 1$ ) para em seguida calcular os coeficientes  $\alpha_r$ . Em se tratando de identificação de parâmetros modais, dados  $4n + 1$  momentos, uma vez estimados os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , os autovalores  $\lambda_r$  são as raízes do polinômio característico  $P(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_n s^{2n}$ . Os resíduos são encontrados da relação:

$$r_r = \lim_{s \rightarrow \lambda_r} H(s). \quad (3.52)$$

A dificuldade deste método é que os momentos  $M_k$  não podem ser avaliados segundo (3.46), uma vez que unicamente se dispõe de um conjunto reduzido de amostras  $\tilde{h}(k)$ . Assim sendo, os  $M_k$  calculados devem conduzir a estimativas muito pobres dos parâmetros procurados. Para reduzir a ordem de um modelo de  $n$  graus de liberdade para outro de ordem  $m$  com  $m < n$  usando o método dos momentos, usam-se os  $4m + 1$  primeiros momentos e encontram-se os coeficientes do novo modelo usando-se as relações (3.51). Esta abordagem garante que o modelo original e novo modelo concordem nos  $4m + 1$  primeiros momentos, isto é, garante-se que:

$$\int_0^{\infty} t^k |h(t) - h_r(t)| dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 4m + 1, \quad (3.53)$$

onde  $h_r(t)$  é a função resposta ao impulso do modelo reduzido. A desvantagem do método é que o sistema de ordem menor pode ser instável, Jamshidi [42].

### A Técnica Prony-Momentos

O algoritmo proposto visa a separação correta dos parâmetros do sistema daquelas computacionais introduzidos pelo modelo AR progressivo sobredeterminado. Dadas as estimativas de um conjunto de amostras da função resposta ao impulso unitário  $\tilde{h}(k)$ , o algoritmo considera os seguintes passos:

1. Construção do ajuste  $\tilde{h}(t)$  para função resposta ao impulso pelo método de Prony.
2. Aproximar os momentos  $M_k$  por  $\tilde{M}_k = \int_0^\infty t^k \tilde{h}(t) dt$ . Isto permite utilizar a relação:

$$\frac{\tilde{M}_k}{k!} = \sum_{r=1}^{n'} \frac{r_r}{(-\lambda_r)^{k+1}} + \frac{r_r^*}{(-\lambda_r^*)^{k+1}}. \quad (3.54)$$

3. Usar os momentos normalizados  $\tilde{m}_r = \frac{\tilde{M}_k}{k!}$  para determinar os coeficientes da função de transferência de um modelo reduzido através do método dos momentos.

A separação dos pólos verdadeiros aparecem como resultado de uma comparação dos pólos e zeros do modelo reduzido, resultados numéricos podem ser vistos em Kurka e Bazán [51]. Comparativamente falando, esta técnica é mais dispendiosa do ponto de vista computacional do que a do modelo AR regressivo, contudo, aqui é apresentada com a finalidade de utilizar as idéias básicas do método para uma posterior extensão para técnicas de identificação MIMO.

## 3.5 O Problema de Deconvolução

### 3.5.1 Introdução

Nas seções anteriores foram vistas técnicas de identificação modal que usam amostras da função resposta ao impulso unitário, porém, nada foi dito com relação a maneira de como obtê-las. A maneira usual de se estimar esta função no ambiente da engenharia é através da transformada inversa de Fourier da função resposta em frequência do sistema. Nesta técnica a relação básica utilizada é:

$$H_{ij}(f) = \frac{U_i(f)}{F_j(f)}. \quad (3.55)$$

$H_{ij}(f)$  denota a função resposta em frequência que relaciona a  $j$ -ésima entrada com a  $i$ -ésima saída, e  $F_j(f)$ ,  $U_i(f)$  são as transformadas de Fourier dos sinais correspondentes. A função resposta ao impulso unitário é relacionada com a função resposta em frequência análogamente como no domínio de Laplace, isto é:

$$H_{ij}(f) = \mathcal{F}[h_{ij}(t)], \quad (3.56)$$

onde  $\mathcal{F}$  denota o operador transformada de Fourier:  $\mathcal{F}[\cdot] = \int_0^{\infty} e^{-j2\pi ft}[\cdot]dt$ . Logo tem-se que:

$$h_{ij}(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_{ij}(f)] = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{U_i(f)}{F_j(f)}\right]. \quad (3.57)$$

As relações anteriores são de interesse teórico, uma vez que na prática unicamente se dispõe de um número reduzido de amostras dos sinais dinâmicos tendo-se que trabalhar com aproximações das correspondentes transformadas de Fourier. Estas aproximações produzem erros de truncamento que comprometem os resultados das estimativas da função procurada, Allemang [3], Herlufsen [31]. Contudo esta maneira de se estimar a função resposta ao impulso continua sendo usada popularmente devido a sua simplicidade e principalmente ao desenvolvimento da Transformada Discreta de Fourier na sua versão rápida FFT.

Nesta seção se apresenta a proposta de estimar a função resposta ao impulso no domínio do tempo com a finalidade de evitar os erros de truncamento já assinalados. A análise parte da relação equivalente a (3.55) no domínio do tempo:

$$u_i(t) = \int_0^t f_j(t - \tau)h_{ij}(\tau)d\tau. \quad (3.58)$$

Logo, dados os sinais de entrada e saída do sistema, o problema de estimar a função resposta ao impulso no domínio do tempo se reduz ao de resolver a equação integral acima. Este problema é conhecido como o *Problema de Deconvolução*.

A resolução da equação integral (3.58) não é tarefa simples, ela é abordada em poucas áreas de pesquisa, ver por exemplo Roth [70] onde se trata com problemas de Radar, e Baumeister [5] para outras aplicações. Na área da análise modal continua-se usando a técnica da FFT e pouca atenção tem-se dado ao problema salvo contadas exceções, assim, Kurka [50] propôs a solução discreta para o problema, não apresentando contudo uma análise das

verdadeiras dificuldades que aparecem no seu tratamento. Estas dificuldades são destacadas posteriormente por L. Piombo [65], e Kurka e Bazán [51]. Uma versão mais recente da análise do problema pode ser vista em Bazán e Kurka [6]. Nesta proposta apresenta-se uma análise teórica do modelo que explica as razões das dificuldades encontradas na sua resolução. Apresenta-se também uma técnica de solução através de regularização usando SVD.

### 3.5.2 Deconvolução Discreta e Regularização via SVD Truncada

A solução do problema deve ser abordada no contexto de equações a operador do tipo:

$$Ax = y, \quad (3.59)$$

onde  $A$  é um operador linear definido entre espaços de funções de entrada e saída respectivamente. No caso em estudo,  $A$  é o operador integral de convolução induzido pelo sinal de força do sistema, definido no espaço  $L_2[0, T]$  formado pelas funções quadrado integráveis no intervalo  $[0, T]$ , com  $T$  sendo o tempo total de medição (os sinais usados na prática pertencem a este espaço, ver Unbehauen [75]). Da teoria deste tipo de equações, sabe-se que o problema de resolver a equação integral de convolução (3.58) é um *Problema Mal Posto* Baumeister [5], no sentido de que ele é muito sensível a pequenas perturbações nos dados. Pequenas perturbações nos dados podem produzir grandes variações na solução do problema. Esta característica faz com que tentativas de resolução do problema por métodos usuais de discretização conduzam a sistemas severamente mal condicionados que precisam de um tratamento especial para sua resolução. Supõe-se que esta pode ser a razão pela qual o problema não foi abordado na área da análise modal. A maneira mais eficaz de se tratar com problemas mal postos é através da moderna *Teoria de Regularização*. Esta teoria é relativamente recente e é usual na área de Problemas Inversos, ver Baumeister [5], Bazán [7] e Groetsch [27].

O instrumento mais importante para se fazer uma análise da solução do problema e da propriedade de mal posicionamento (ill-posedness) é conhecido como o *Critério de Picard*, Baumeister [5], Hansen [28]. Para ver isto, denotando o produto interno no espaço  $L_2[0, T]$  com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , a solução da equação integral (3.58) pode ser expressa usando-se a *Família Singular*  $\{U_k(t), V_k(t), \sigma_k^2\}_{k=1}^{\infty}$  associada ao operador integral :

$$h_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle U_k(t), u_i(t) \rangle}{\sigma_k^2} V_k(t), \quad (3.60)$$

onde  $\{V_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\{U_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$  formam bases ortonormais nos espaços de entrada e saída respec-

tivamente, com  $\{\sigma_k^a\}_{k=1}^{\infty}$  sendo a sequência de valores singulares do operador. A propriedade de mal posicionamento do problema implica que  $\{\sigma_k^a\} \rightarrow 0$  para  $k$  suficientemente grande. Quanto maior o grau de mal condicionamento do problema, maior será a velocidade de convergência desta sequência. O critério de Picard estabelece que uma *Condição Necessária* para  $h_{ij}(t)$  ser solução do problema é :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle \mathcal{U}_k(t), u_i(t) \rangle|^2}{(\sigma_k^a)^2} < +\infty. \quad (3.61)$$

Esta condição estabelece que, se  $h_{ij}(t)$  é solução do problema, então a partir de um certo  $k$  os coeficientes  $|\langle \mathcal{U}_k(t), u_i(t) \rangle|$  devem decrescer necessariamente mais rápido do que os valores singulares  $\sigma_k^a$ , a fim de que se possa garantir a convergência da série (3.60). A propriedade de mal posicionamento do problema pode ser melhor compreendida analisando o comportamento dos coeficientes dos termos desta série. Se o lado direito da equação (3.58) for contaminado por ruído  $r(t)$ , isto é:  $\tilde{u}(t) = u_i(t) + r(t)$ , os coeficientes da série serão distorcidos por um erro  $\frac{|\langle \mathcal{U}_k(t), r(t) \rangle|}{\sigma_k^a}$  na direção de  $\mathcal{V}_k$ . Consequentemente a condição necessária não será satisfeita e os erros serão magnificados, produzindo instabilidades a medida que  $k$  aumenta, pois  $\sigma_k^a$  é pequeno. Nestas condições, pode ser construída uma solução aproximada estável para o problema, truncando a série (3.60) para um número finito de termos, evitando na medida do possível as contribuições dos termos que produzem amplificação do ruído  $r(t)$ . Estes termos correspondem àqueles cujos  $\sigma_k^a$  são pequenos. Quanto maior o nível de ruído menor será o número de termos utilizados. Esta técnica de construção de soluções estáveis é conhecida como *Técnica de Regularização da SVD Truncada* TSVD, e o indicador do número de termos usados na construção da solução aproximada é conhecido como *Parâmetro de Regularização*. Naturalmente, a análise apresentada é de natureza teórica, uma vez que a família singular do operador é geralmente não calculável, servindo contudo para entender a magnitude do problema. A análise fornece um mecanismo que pode ser usado na versão discreta do problema, para contornar as dificuldades que provêm do mal posicionamento.

Discretizando a equação integral pela regra do retângulo, o problema pode ser resolvido através do seguinte sistema de equações lineares:

$$Fh = \frac{1}{\Delta t}u, \quad (3.62)$$

onde  $h = [h_1, h_2, \dots, h_N]^T$  é o vetor de amostras da função resposta ao impulso,  $u = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$  o vetor de amostras do deslocamento e  $F$  é a matriz Toeplitz triangular inferior

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 \\ f_2 & f_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ f_N & f_{N-1} & \dots & f_1 \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

cujos elementos são amostras da força de entrada, e  $\Delta t$  é a taxa de amostragem dos sinais medidos.

Analogamente ao caso do problema na sua formulação original, existe uma família singular associada a (3.62):  $\{\bar{u}_k, \bar{v}_k, \sigma_k\}_{k=1}^N$ , com a diferença de que esta é facilmente calculável pelo teorema da SVD da matriz  $F$ . Neste caso a solução do sistema de equações lineares é expressa por:

$$h = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k} (\bar{u}_k^T u) \bar{v}_k. \quad (3.64)$$

A condição necessária (3.61) se traduz agora no *Critério Discreto de Picard*. Este critério exige que os coeficientes  $|\bar{u}_k^T u|$  *decreçam em média* mais depressa do que os valores singulares  $\sigma_k$ , Hansen [28], isto é, estes coeficientes devem localizar-se em média baixo da curva dos valores singulares como função do índice  $k$ . O mal posicionamento do problema se reflete agora no fato de que a matriz  $F$  é severamente mal condicionada, ou seja,  $k(F)$  é muito grande, já que  $\sigma_N$  geralmente é muito pequeno. A consequência deste fato é que pequenas perturbações  $\delta u$  podem produzir grandes variações  $\delta h$  do vetor solução. Isto pode ser apreciado na seguinte relação (ver Golub [24]):

$$\frac{\|\delta h\|}{\|h\|} \leq k(F) \frac{\|\delta u\|}{\|u\|}. \quad (3.65)$$

O problema de mal condicionamento pode ser contornado usando-se a técnica de regularização TSVD truncando a série finita (3.64) para  $M$  termos. O truncamento deve obedecer ao critério geométrico baseado na observação do valor de  $k$  a partir do qual  $|\bar{u}_k^T u|$  começa a crescer consistentemente em comparação com o  $\sigma_k$  correspondente. Aqui  $\bar{u}$  denota o vetor deslocamento contaminado pelo ruído  $\delta u$ . Denotando com  $h^k$  a solução aproximada construída com  $k$  termos da série (3.64), pode-se mostrar que  $\|h^k\|$  é uma função crescente de  $k$ , enquanto que o resíduo  $\|r^k\| = \|u - Fh^k\|$  é decrescente, Hansen [28]. Isto indica que, para um valor grande de  $k$  o resíduo  $r^k$  é pequeno porém a solução  $h^k$  é instável, enquanto que, para  $k$  pequeno  $h^k$  é estável ainda que  $r^k$  seja grande. Logo, o parâmetro de regularização  $M$ , deve ser escolhido de maneira que se possa estabelecer um adequado balanço entre  $\|h^k\|$  e  $\|r^k\|$ ,

que permita evitar instabilidades fornecendo uma solução aproximada para  $h$  suficientemente precisa.

Da análise acima se depreende que o passo crucial na aplicação da técnica TSVD é a escolha do parâmetro de regularização, sobretudo quando o nível de ruído presente nos dados é desconhecido (que é o caso de interesse). O método mais eficaz para se estimar este parâmetro é conhecido como o *Método de Cross-Validation* de Golub e Wabba (ver Baumeister [5]), onde a estimativa de  $M$  é encontrada resolvendo adicionalmente um problema de otimização. Isto faz com que o método seja dispendioso do ponto de vista computacional. Outra maneira de se estimar o parâmetro de regularização é através do *Crítério da Curva  $L$*  (L-Curve Criterion) introduzido por Hansen [28]. Aqui é sugerido graficar o  $\|h^k\|$  versus  $\|r^k\|$  como funções do parâmetro  $k$ . Este gráfico deve ter o aspecto de uma curva  $L$ . O parâmetro de regularização corresponde ao valor de  $k$  do ponto mais próximo ao vértice da curva  $L$ , ver Hansen [28], [29]. Esta técnica se mostra eficaz para uma série de problemas, no caso em estudo o aspecto da curva não permitiu uma escolha acertada do parâmetro procurado.

Neste trabalho apresenta-se a proposta de resolver o problema de deconvolução discreta através da TSVD, onde se sugere uma escolha do parâmetro de regularização, baseado no critério discreto de Picard e num argumento geométrico. Resumindo, a proposta considera os seguintes passos:

1. Fatorização SVD da matriz  $F$ , calculando-se separadamente os coeficientes  $|\bar{u}_k^T \bar{u}|$  da deconvolução discreta (3.64)
2. Determinação da curva de regressão linear  $\mathcal{L}$  para os coeficientes  $|\bar{u}_k^T \bar{u}|$  para  $k = 1, 2, \dots, N$ . Feito isto, construir um gráfico contendo a curva  $\mathcal{L}$  e a curva  $\mathcal{S}$  dos valores singulares  $\sigma_k$  como funções de  $k$ .
3. Escolha do parâmetro de regularização entre os valores de  $k$  a partir do ponto de intersecção das curvas  $\mathcal{L}$  e  $\mathcal{S}$  até o primeiro ponto onde o valor  $|\bar{u}_k^T \bar{u}|$  ultrapassa a curva  $\mathcal{S}$ . O termo da série correspondente a este último coeficiente deve ser incluído somente no caso  $\|h^k\| \approx \|h^{k-1}\|$ .

Para ilustrar a performance da técnica proposta, realiza-se o processo de deconvolução discreta para um sistema de três graus de liberdade cuja função resposta ao impulso é definida por:

$$h(t) = \epsilon^{-0.06t} \text{sen}(4t) + 0.8e^{-0.056t} \text{sen}(7t) + 1.2e^{-0.09t} \text{sen}(9t).$$

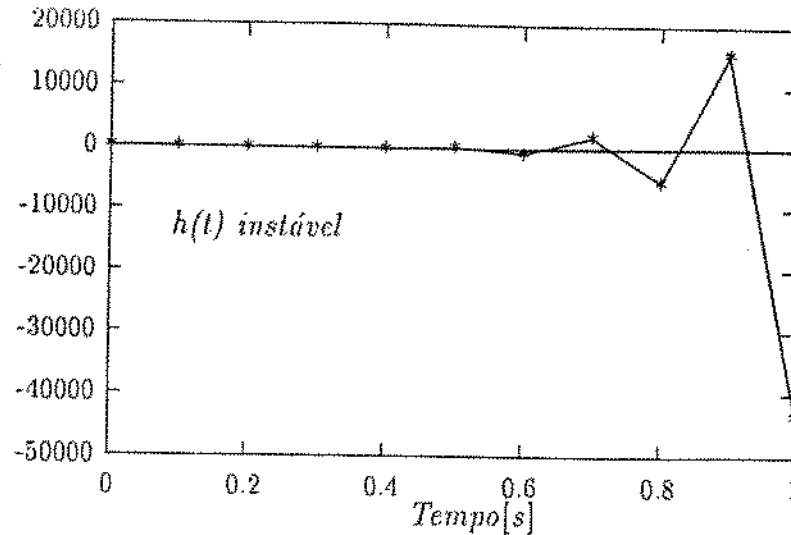


Figura 3.4: Primeiras onze amostras de uma Deconvolução Instável.

Nesta experiência utiliza-se um sinal de entrada do tipo aleatório gerado no MATLAB. A resposta do sistema é calculada diretamente através de convolução discreta. A taxa de amostragem escolhida foi  $\Delta t = 0.1$  s. e o número de amostras  $N = 128$ . A matriz Toeplitz  $F$  é severamente mal condicionada com  $k(F)$  da ordem  $10^{17}$ , este fato impossibilita a deconvolução discreta por técnicas usuais para resolver o sistema de equações lineares (3.62) ainda no caso de se trabalhar com dados livres de ruído. Para simular um caso real acrescentou-se ruído ao sinal de saída de maneira que a razão ruído sinal  $NSR$  (Noise to Signal Ratio) definida por  $NSR = \|\delta u\|/\|u\|$  foi aproximadamente 20%. O resultado de uma deconvolução instável é apreciado na figura 3.4, onde pode-se observar a grande distorção das estimativas da função recuperada. Aqui foi usada a técnica de substituição direta (Forward Substitution) devido ao fato da matriz  $F$  ser triangular inferior.

O comportamento das curvas  $\mathcal{L}$ ,  $S$  e dos coeficientes  $|\bar{u}_k^T \bar{u}|$  pode ser visto nas figuras 3.5 e 3.6. Segundo o critério estabelecido para a escolha do nível de truncamento da série (3.64), o parâmetro de regularização pode ser escolhido entre  $k = 90$  e  $k = 105$ . Na figura 3.7 se aprecia a solução regularizada construída com 105 termos ( $M = 105$ ) para o caso de dados com ruído. As soluções construídas para os outros valores de  $k$  entre 90 e 105 são parecidas. Nessa figura se apresenta também a solução correspondente ao caso de dados livres de ruído construída com 127 termos.

Da análise teórica e a experiência numérica realizada, conclui-se que o assunto é delicado, o sucesso ou fracasso na aplicação da técnica TSVD depende de uma escolha adequada do parâmetro de regularização. Frente a esta dificuldade um balanço deve ser feito sobre a conveniência de se optar pelo cálculo de estimativas da função resposta ao



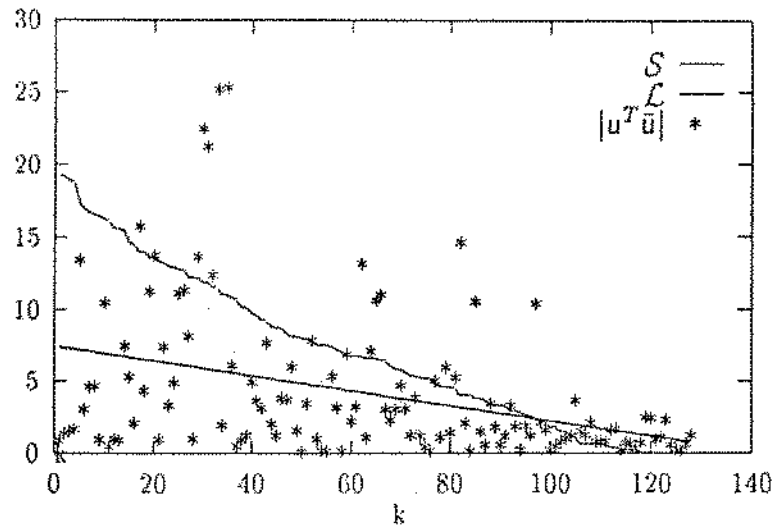


Figura 3.5: Escolhendo o Parâmetro de Regularização

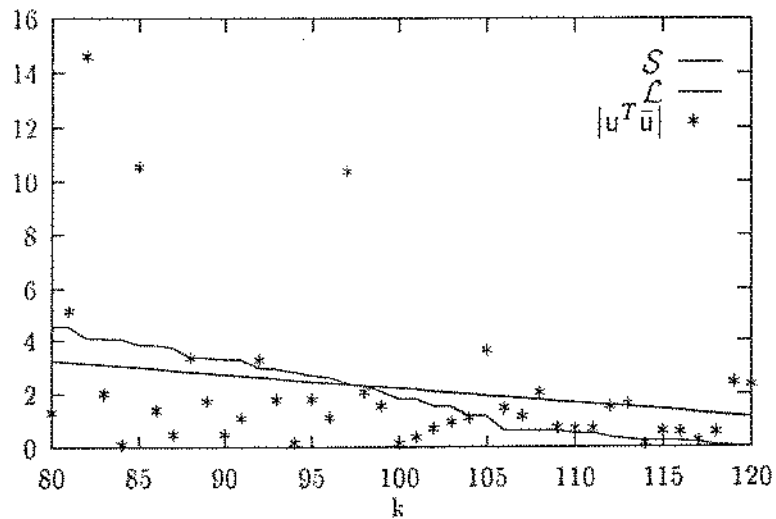


Figura 3.6: Escolhendo o Parâmetro de Regularização

impulso unitário através de deconvolução ou através de inversão pela FFT. Pelo espírito deste trabalho defende-se a proposta da deconvolução por duas razões:

- O tratamento dos sinais diretamente no domínio do tempo evita a introdução do erro de truncamento introduzido pela aproximação das transformadas de Fourier dos sinais de entrada e saída.
- O uso da relação :

$$h_{ij}(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_{ij}(f)] = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{U_i(f)}{F_j(f)} \right]$$

para calcular estimativas de  $h_{ij}(t)$  para frequências onde  $|F_j(f)| \approx 0$  acarreta problemas de instabilidade numérica difíceis de se contornar.

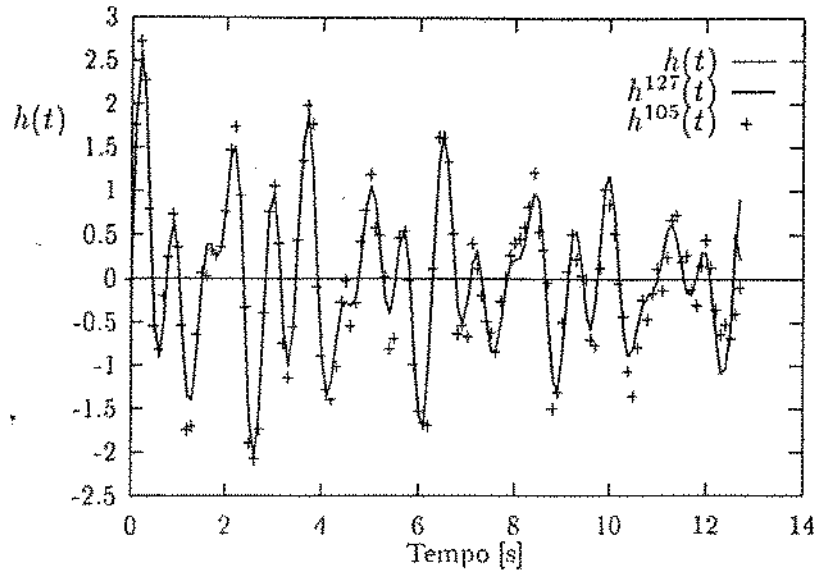


Figura 3.7: *Deconvolução Estável*

Para reforçar ainda mais a defesa da proposta do uso da deconvolução, deve-se comentar que foram realizados inúmeros testes com outros sistemas e com níveis de ruído acima de 50%. Os resultados sempre foram encorajadores.

### 3.6 Um Método Iterativo para Reduzir perturbações e Realçar Estimativas dos Parâmetros

A motivação desta seção resulta da análise das exigências impostas nas relações (3.34) e (3.35) que se referem às estimativas dos parâmetros autorregressivos dos modelos de identificação SISO das seções anteriores. Lembrando que nesses modelos, dado um conjunto de amostras da função resposta ao impulso unitário  $\bar{h}(k) = h(k) + \varepsilon(k)$ , trabalha-se com uma matriz Hankel (ou Toeplitz)  $\hat{H}$  sobredeterminada construída com essas amostras. A partir desta matriz, uma vez detectada a ordem do sistema, deve-se construir outra matriz  $\hat{H}$  respeitando as condições acima. Comentou-se também que esta matriz  $\hat{H}$  deve ser construída usando a SVD truncada da matriz  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} = (\tilde{\sigma}_1 \tilde{u}_1 \tilde{v}_1 + \tilde{\sigma}_2 \tilde{u}_2 \tilde{v}_2 + \dots + \tilde{\sigma}_p \tilde{u}_p \tilde{v}_p) + (\tilde{\sigma}_{p+1} \tilde{u}_{p+1} \tilde{v}_{p+1} + \dots + \tilde{\sigma}_{p'} \tilde{u}_{p'} \tilde{v}_{p'}),$$

para um número de termos igual a duas vezes a ordem estimada, ou seja,

$$\hat{H} = (\hat{\sigma}_1 \hat{u}_1 \hat{v}_1 + \hat{\sigma}_2 \hat{u}_2 \hat{v}_2 + \cdots + \hat{\sigma}_p \hat{u}_p \hat{v}_p), \quad p = 2n. \quad (3.66)$$

O resultado desta construção se reflete em que, se  $\hat{H}$  satisfizer (3.37) então  $\hat{H}$  cumpre as exigências (3.34) e (3.35), isto é  $\text{rank}(\hat{H}) = \text{rank}(H)$  e  $\|\hat{H} - H\| < \sigma_{2n}$ , onde  $H$  é a matriz Hankel ideal do sistema (com dados sem ruído). A consequência disto é que em geral as estimativas dos parâmetros AR serão aceitáveis, dependendo em última instância do grau de condicionamento da matriz  $H$  (ver (3.36)). A utilização da matriz  $\hat{H}$  tem rendido frutos positivos na tarefa de identificação de parâmetros em diversas áreas, ver por exemplo Kumaresan [47], Porat [67] e Rao [68]. Entretanto, é importante analisar o problema em estudo mais detidamente. Observe-se que a matriz  $H$  com informação ideal tem duas características:

- $H$  é Hankel, e
- $\text{rank}(H) = 2n$ .

Isto não acontece com a matriz  $\hat{H}$ , pois, mesmo possuindo o mesmo rank de  $H$ , ela perde a estrutura Hankel. Este fato motiva a pensar num processo iterativo que leva à construção de uma matriz Hankel com as mesmas características da matriz ideal  $H$ , e sobretudo, próxima dela num certo sentido. Na verdade, se trata de um processo iterativo usual na área de problemas inversos relacionado com reconstrução de imagens usando projeções (ver Cadzow [13], e Hurt [35]). Aqui se apresenta uma versão adaptada, para ser utilizada na área da análise modal.

O processo de construção do algoritmo começa com as seguintes definições: Seja  $\mathcal{H}^{q \times m}$  o subespaço de matrizes Hankel  $q \times m$ , com  $q \geq m$ , munido da norma Frobenius. A norma Frobenius de uma matriz é definida por

$$\|H\|_F = \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_m^2 \right]^{1/2}. \quad (3.67)$$

Onde os  $\sigma_k$  são os valores singulares não nulos da matriz  $H$ . Seja também  $\mathcal{R}^{q \times m}$  o conjunto de matrizes  $q \times m$  cujo rank é menor ou igual a  $2n$ , com  $2n \leq m$ . Definam-se logo dois operadores:

$\mathcal{P}_1: \mathcal{C}^{q \times m} \rightarrow \mathcal{H}^{q \times m}$ , a *Projeção Ortogonal* de  $\mathcal{C}^{q \times m}$  sobre  $\mathcal{H}^{q \times m}$ , onde  $\mathcal{C}^{q \times m}$  denota o conjunto das matrizes reais  $q \times m$ , e

$\mathcal{P}_2: \mathcal{H}^{q \times m} \rightarrow \mathcal{R}^{q \times m}$ , tal que  $\mathcal{P}_2(G) = \bar{G}$ , com  $\bar{G}$  denotando a matriz de rank  $2n$  mais próxima de  $G$ .

Como  $\mathcal{H}^{q \times m}$  é um subespaço fechado,  $\mathcal{P}_1(C)$  existe de maneira única  $\forall C$  em  $\mathcal{C}^{q \times m}$ , toda vez que a projeção é um operador linear Groetsch [26]. Demonstra-se que o espaço  $\mathcal{H}^{q \times m}$  tem dimensão  $m + q - 1$ , e que uma *Base* para este espaço é formado pelas matrizes Hankel  $\mathcal{H}_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, m + q - 1$ , definidas de maneira que os seus elementos são zeros exceto na  $l$ -ésima diagonal cruzada começando na posição  $(1, 1)$  com valores unitários, os seja:

$$\mathcal{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{q \times m}, \quad \mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{q \times m}, \quad \dots, etc. \quad (3.68)$$

Introduzindo o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$  no espaço  $\mathcal{C}^{q \times m}$ :  $\langle A, B \rangle_F = \text{Tra}[AB^T]$ , onde  $\text{Tra}[A]$  denota o traço da matriz  $A$ , pode-se demonstrar que a base acima é ortogonal com este produto interno, e que portanto,  $\mathcal{P}_1(C)$  com  $C$  em  $\mathcal{C}^{q \times m}$ , pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos básicos:

$$\mathcal{P}_1(C) = \alpha_1 \mathcal{H}_1 + \alpha_2 \mathcal{H}_2 + \dots + \alpha_{m+q-1} \mathcal{H}_{m+q-1}. \quad (3.69)$$

Aproveitando a ortogonalidade dos elementos básicos, os coeficientes  $\alpha_l$  são facilmente calculados. Isto leva a que,  $\mathcal{P}_1(C)$  tem diagonais cruzadas que são o resultado do cálculo da média das correspondentes diagonais cruzadas da matriz  $C$ .

A situação para o operador  $\mathcal{P}_2$  é diferente, uma vez que ele é um operador projeção não linear, pela maneira como foi definido e pela geometria estranha do conjunto  $\mathcal{R}^{q \times m}$  ( $\mathcal{R}^{q \times m}$  é um conjunto fechado não convexo). Contudo demonstra-se que esta projeção pode ser calculada pela SVD de igual maneira como em (3.66). A projeção  $\mathcal{P}_2(G)$  será única somente no caso  $\sigma_{2n}(G) \neq \sigma_{2n+1}(G)$ , Cadzow [13]. Na prática, a matriz Hankel  $\tilde{H}$  é rank completo e sempre possui valores singulares diferentes.

Para se estabelecer o algoritmo das projeções deve-se observar que:

- $\mathcal{P}_1(H) = H$ , pois  $H \in \mathcal{H}^{q \times m}$ ;
- $\mathcal{P}_2(H) = H$ , já que  $\text{rank}(H) = 2n$ .

Ou seja a matriz  $H$  é um elemento do conjunto  $\mathcal{H}^{q \times m} \cap \mathcal{R}^{q \times m}$ . Os itens acima assinalados garantem que a matriz  $H$  é um *ponto fixo* de ambos os operadores, ainda mais, garantem que

$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2(H) = H$ , ou seja,  $H$  também é *ponto fixo* do produto (a composição). Defina-se logo o operador  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 : \mathcal{H}^{q \times m} \rightarrow \mathcal{H}^{q \times m}$ , e defina-se a sequência:

$$H_{k+1} = \mathcal{P}(H_k) = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2(H_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

A sequência assim definida converge para uma matriz Hankel  $\bar{H}$  que é ponto fixo do operador  $\mathcal{P}$ . A prova disto se baseia no comportamento do funcional  $\mathcal{J}$  definido por:

$$\mathcal{J}(G) = \|G - \mathcal{P}(G)\|_F^2. \quad (3.71)$$

Neste funcional observa-se que o seu mínimo é atingido quando  $G \in \mathcal{H}^{q \times m} \cap \mathcal{R}^{q \times m}$  e que este valor mínimo é zero. Agora, pode-se provar que os valores do funcional ao longo da sequência (3.70), formam uma sequência monotona decrescente. Isto é:  $\mathcal{J}(H_{k+1}) \leq \mathcal{J}(H_k)$ , para ver isto,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(H_{k+1}) &= \|H_{k+1} - \mathcal{P}(H_{k+1})\|_F^2 \\ &\leq \|H_{k+1} - \mathcal{P}_2(H_{k+1})\|_F^2 \\ &\leq \|H_{k+1} - \mathcal{P}_2(H_k)\|_F^2 \\ &= \|(H_{k+1} - H_k) + (H_k - \mathcal{P}_2(H_k))\|_F^2 \\ &= \|(H_{k+1} - H_k)\|^2 + 2 \langle H_{k+1} - H_k, H_k - \mathcal{P}_2(H_k) \rangle + \|H_k - \mathcal{P}_2(H_k)\|^2. \end{aligned}$$

Da última desigualdade segue que

$$\|H_{k+1} - \mathcal{P}_2(H_{k+1})\|_F^2 \leq -\|H_{k+1} - H_k\|_F^2 + \|H_k - \mathcal{P}_2(H_k)\|_F^2.$$

Ou seja:

$$\mathcal{J}(H_{k+1}) \leq \mathcal{J}(H_k),$$

como se queria provar.

O comportamento do funcional é suficiente para garantir que a sequência 3.70 converge para um ponto de mínimo do funcional que é um ponto fixo do operador  $\mathcal{P}$ . Uma prova rigorosa e completa, exige certos conceitos que fogem do escopo desta apresentação (outras informações podem ser vistas em Hurt [35]). Contudo, este comportamento garante a redução da distância de  $H_0$  para  $\bar{H}$  de iteração em iteração. Geometricamente a sequência das iterações (3.70) começa em  $H_0$  e caminha em zig-zag nos conjuntos  $\mathcal{H}^{q \times m}$  e  $\mathcal{R}^{q \times m}$  até convergir ao ponto  $\bar{H}$ , ver Fig. 3.8.

A utilidade do processo iterativo que se acaba de descrever pode ser resumido nos seguintes itens

- Se o processo iterativo for aplicado para uma matriz Hankel  $\bar{H}$  construída com amostras contaminadas por ruído, ou seja se for escolhido como aproximação  $H_0 = \bar{H} = H + \mathcal{E}$ ,

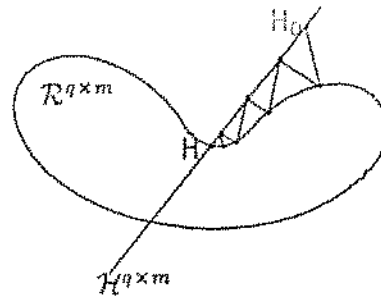


Figura 3.8: O Comportamento do Processo Iterativo

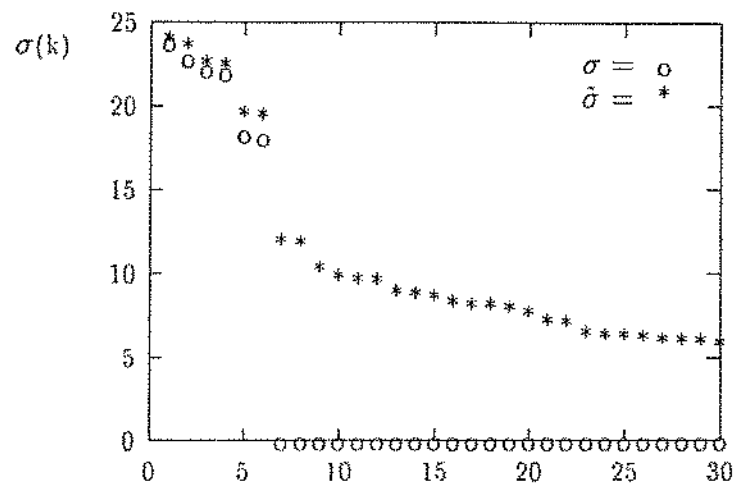


Figura 3.9: Trinta primeiros Valores<sup>k</sup>Singulares da Matriz Hankel

satisfazendo-se  $\|\mathcal{E}\| < \sigma_{2n}$ , então o processo iterativo converge para a matriz Hankel  $\tilde{H}$  mais próxima de  $H$  no sentido da norma Frobenius, cujo rank é  $2n$

- O processo iterativo pode ser utilizado para reduzir perturbações nos dados de uma matriz Hankel, como passo prévio ao emprego de técnicas de identificação através de modelos AR para sistemas em geral, e em particular para sistemas mecânicos.

O método iterativo aqui proposto, foi testado com o mesmo sistema de três graus de liberdade da seção anterior, usando 256 amostras de sua função resposta ao impulso contaminadas com um ruído gaussiano com média zero, e com uma variância de maneira que a razão ruído sinal NSR (definida como na seção anterior) foi de aproximadamente 120%. Ainda para este nível de ruído foi possível distinguir a ordem correta do sistema pelo critério de separação dos valores singulares perturbados da matriz Hankel  $\tilde{H}$ , segundo a análise da seção 1.4, ver fig 3.9. A performance do processo iterativo é geralmente melhor nas primeiras iterações, onde são reduzidas a maior parte das perturbações do sinal, após

estes primeiros passos a redução é menor. Contudo, a convergência das iterações sempre atingiram as tolerâncias exigidas geralmente após 12 ou 15 iterações. A tolerância em menção foi definida usando um valor do funcional  $\mathcal{J}$  suficientemente pequeno. Os resultados desta experiência são apresentados na Fig. 3.11, onde  $\hat{h}(t)$  representa o sinal reconstruído e  $\tilde{h}(t)$  o sinal contaminado pelo ruído. A Fig. 3.9 ilustra o comportamento dos trinta primeiros valores singulares da matriz Hankel (exatos e perturbados) usados na detecção da ordem do sistema. A matriz Hankel usada para esta identificação foi  $64 \times 64$ . Apresentam-se também nas figuras 3.10-(a) 3.10-(b) os espectros de Fourier dos sinais antes e após a reconstrução.

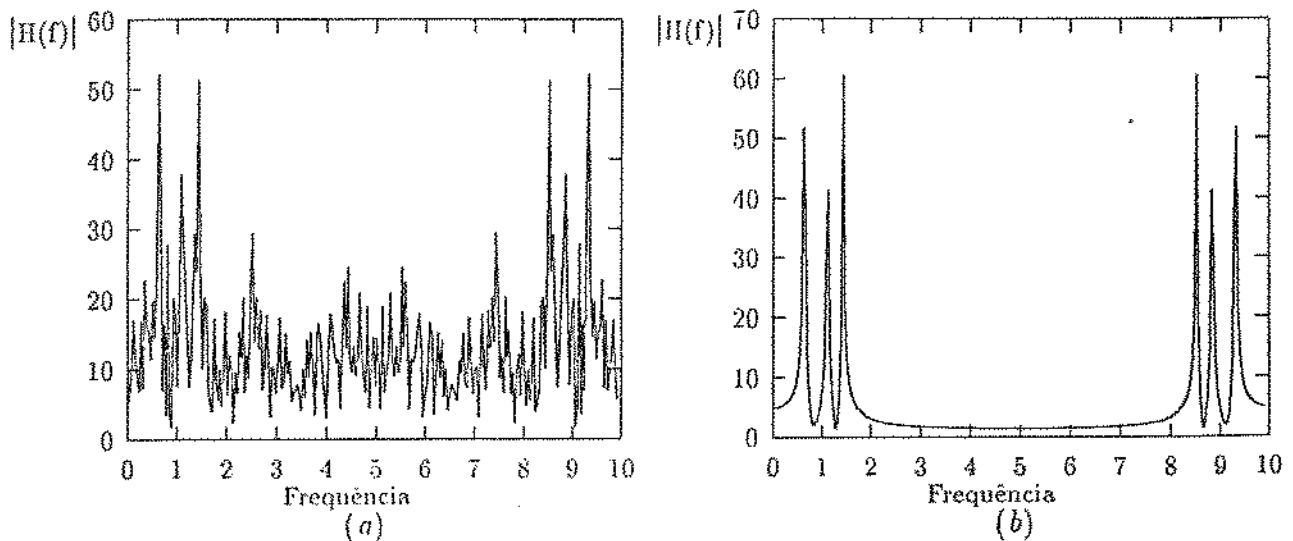


Figura 3.10: Espectro do Sinal: (a) Com ruído (b) Após reconstrução

### 3.7 Uma Proposta de Técnica de Identificação Modal: O Modelo Regressivo Simétrico (Symmetric Backward Model)

Nesta seção apresenta-se uma proposta de técnica de identificação modal que resulta da análise realizada ao longo da seção 3.3, das experiências com o problema de deconvolução discreta e o processo iterativo das seções recentes. A técnica proposta corresponde a uma versão do modelo AR regressivo, onde se tem optado pelo uso de matrizes Hankel simétricas para tirar vantagem dos efeitos da sobredeterminação sobre o condicionamento das matrizes do modelo.

Dado um conjunto de amostras dos sinais de excitação e resposta do sistema  $f(k)$

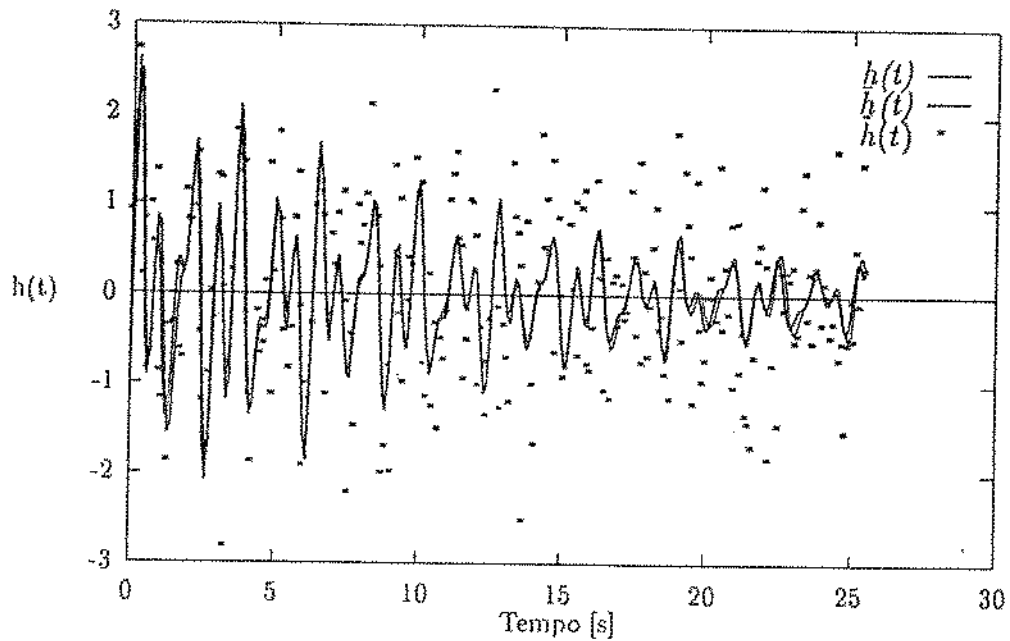


Figura 3.11: A performance do Processo Iterativo

e  $u(k)$ ,  $1, 2, \dots, N$  respectivamente, a técnica proposta considera:

1. Aplicação da técnica TSVD para estimar amostras da função resposta ao impulso unitário através de deconvolução discreta.
2. Utilização do processo iterativo para reduzir ruído do sinal estimado no passo anterior (opcional)
3. Utilização do modelo regressivo com matriz Hankel simétrica suficientemente sobre-determinada para estimar os parâmetros AR através do seguintes passos:

- Montagem do sistema de equações lineares (2.30):

$$\tilde{H}\tilde{c} = -\tilde{\gamma},$$

- Cálculo das estimativas dos parâmetros AR através de:

$$\tilde{c} = \tilde{H}^+(-\tilde{\gamma}),$$

onde  $\tilde{H}^+$  é uma aproximação da pseudo-inversa da matriz Hankel ideal  $H$ .

Para se calcular  $\tilde{H}^+$  usa-se a decomposição autovalor-autovetor:

$$\tilde{H} = \lambda_1^d \tilde{u}_1 \tilde{u}_1^T + \lambda_2^d \tilde{u}_2 \tilde{u}_2^T + \dots + \lambda_p^d \tilde{u}_p \tilde{u}_p^T + \lambda_{p+1}^d \tilde{u}_{p+1} \tilde{u}_{p+1}^T + \dots + \lambda_p^d \tilde{u}_p \tilde{u}_p^T, \quad (3.72)$$



de maneira que os autovalores  $\lambda_k^d$  da matriz  $\tilde{H}$  sejam arranjados decrescentemente em valor absoluto

$$|\lambda_1^d| > |\lambda_2^d| > \dots > |\lambda_p^d| > \dots > |\lambda_p^d|. \quad (3.73)$$

O número  $p$  corresponde a ordem estimada do sistema e é determinado segundo o tamanho relativo dos autovalores  $|\lambda_k^d|$ . Com a ordem estimada construir:

$$\hat{H}^+ = \frac{1}{\lambda_1^d} \hat{u}_1 \hat{u}_1^T + \frac{1}{\lambda_2^d} \hat{u}_2 \hat{u}_2^T + \dots + \frac{1}{\lambda_p^d} \hat{u}_p \hat{u}_p^T. \quad (3.74)$$

4. Os parâmetros modais são estimados após a determinação das  $p$  raízes  $z_r$  do polinômio característico :

$$P_b = 1 + \tilde{c}z + \tilde{c}z^2 + \dots + \tilde{c}z^p.$$

Os parâmetros correspondentes ao sistema (no plano  $z$ ) devem-se localizar no exterior do círculo unitário do plano complexo enquanto que os computacionais devem ficar dentro.

A principal característica desta técnica é que ela possibilita a detecção da ordem do sistema segundo o comentado na sub-seção 3.32, uma vez que o menor valor singular da matriz Hankel é destacado. Por outro lado, o custo computacional da SVD é reduzido significativamente, necessitando-se unicamente uma decomposição autovalor-autovetor. A desvantagem do método é que existe a possibilidade de que alguns pólos do sistema possam-se localizar dentro do círculo unitário, ou de que pólos computacionais fiquem fora. Na prática tem-se constatado que isto acontece somente quando o nível de ruído presente nos dados é muito alto, ou quando o sistema em análise é severamente mal condicionado dificultando a identificação da ordem.

## Capítulo 4

# Identificação de Parâmetros Modais via Metodologia MIMO

### 4.1 Introdução

O principal objetivo deste capítulo é explorar as idéias desenvolvidas na análise dos modelos para identificação modal SISO, aproveitando-as na formulação de técnicas MIMO. As técnicas MIMO devem ser entendidas como aquelas que usam a informação de entradas e saídas múltiplas de maneira simultânea no processo de estimação dos parâmetros modais. A crescente popularidade da utilização de técnicas MIMO na análise modal experimental, entre outras, deve-se às seguintes razões (ver Allemang [3]):

- A aplicação de força de excitação múltipla permite a distribuição da energia de excitação ao longo do sistema de maneira mais uniforme, trazendo como consequência um nível de resposta também mais uniforme. Isto garante uma melhor qualidade dos dados adquiridos.
- A aquisição simultânea de dados para entradas e saídas múltiplas, minimiza as dificuldades que aparecem como consequência da restrição da invariância no tempo do modelo matemático (equação (2.1) ), quando a estimação de parâmetros é realizada na metodologia SISO.
- A redundância das informações que resulta da aquisição múltipla dos sinais dinâmicos de resposta, se reflete benéficamente na estimação de parâmetros modais para sistemas com modos acoplados e frequências naturais muito próximas.

- A evolução dos equipamentos de aquisição de sinais permite reduzir significativamente o tempo de medição.

Pelas razões assinaladas deve-se esperar naturalmente, uma melhor robustez dos parâmetros estimados por metodologias MIMO antes do que por aquelas do tipo SISO. Contudo, embora os últimos anos reflitam uma vasta produção de técnicas MIMO, os problemas da detecção da ordem dos sistemas em análise e da separação dos pólos verdadeiros dos computacionais, ainda representam sérias dificuldades na análise modal experimental. Nos últimos tempos destaca-se o trabalho desenvolvido por grupos de pesquisa das universidades de Cincinnati (USA) e Católica de Leuven (Belgica). Numerosas referências podem ser encontradas em Allemang [3]. Outros trabalhos também de importância são os de Pappa [44], Inman [38], Roemer [69], e Zhang [81].

Neste capítulo se propõem algumas técnicas de identificação MIMO no domínio do tempo, visando contornar as dificuldades assinaladas. Na primeira seção se estudam técnicas de estimação de parâmetros modais, que de alguma maneira correspondem às generalizações das técnicas dos modelos AR já estudadas no capítulo anterior. Em seguida, é abordado o problema de deconvolução para o caso de entradas e respostas múltiplas, finalizando-se com uma nova técnica de identificação das matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez. O processo de identificação das matrizes de massa, amortecimento e rigidez, decorre da disponibilidade de um grande número de informações das medidas dinâmicas necessárias à análise do tipo MIMO. Não se pretende no entanto, aprofundar-se em tais técnicas uma vez que a ênfase do presente trabalho diz respeito a identificação de parâmetros pertencentes ao modelo modal.

## 4.2 Identificação de Parâmetros Modais usando Modelos MIMO Regressivos

### 4.2.1 Introdução

As técnicas introduzidas nesta seção se baseiam na descrição das equações de estado para o sistema mecânico em estudo. Mais precisamente, antes do que usar o conjunto de equações diferenciais (2.9), a descrição do sistema através do modelo discreto (2.29), (2.30), será muito mais conveniente. Reproduzido as equações do modelo discreto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}g(k) \\ \mathbf{u}(k) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(k), \end{aligned}$$

pode-se observar que o comportamento do sistema pode ser predito com a evolução no tempo, desde que sejam conhecidas as matrizes  $A$  e  $B$ . Por esta razão, o modelo pode ser caracterizado como *Modelo Preditor MIMO na Direção Progressiva*. As técnicas propostas nesta seção, se caracterizam por "predizer" o comportamento do sistema na direção contrária ao Modelo Progressivo, isto é; conhecido o estado do sistema no instante  $k$ , o modelo deve permitir estimar o estado anterior.

Nesta apresentação, analisam-se em primeiro lugar algumas técnicas de identificação baseadas no Modelo Progressivo, caracterizando inclusive a técnica ERA como parte das mesmas. As técnicas na direção regressiva são introduzidas depois de maneira natural.

#### 4.2.2 Identificação Modal usando Modelos MIMO na Direção Progressiva

Antes de começar com a descrição dos métodos propostos, deve-se lembrar que a informação dinâmica do sistema vêm concentrada no auto-sistema da matriz  $A$ , isto é; os modos de vibrar são descritos pelos autovetores de  $A$  enquanto que, os autovalores são obtidos dos correspondentes de  $A$ . Lembre-se que estes são da forma  $z_r = e^{\lambda_r \Delta t}$  (ver Cap. 2, Seção 2.3). Outro assunto também de importância, é que a resposta livre do sistema bem como qualquer coluna da matriz resposta ao impulso  $h(t)$ , é da forma:

$$u(t) = \sum_{r=1}^n (c_r \phi_r e^{\lambda_r t} + c_r^* \phi_r^* e^{\lambda_r^* t}) \quad (4.1)$$

onde a única diferença destas funções está nas constantes  $c_r$ , proporcionais a condições iniciais. Claramente,  $\lambda_r$  e  $\phi_r$  são os autovalores e autovetores do sistema. As técnicas propostas usarão amostras de funções deste tipo.

Assumindo-se o conhecimento da resposta livre do sistema e as correspondentes velocidades em cada um dos  $n$  graus de liberdade, para  $N+1$  amostras disponíveis ( $N \geq 2n$ ), as equações do modelo progressivo sugerem a montagem da seguinte equação matricial:

$$SH(0) = H(1), \quad (4.2)$$

onde  $H(k)$ ,  $k = 0, 1$ ; são matrizes  $2n \times N$ , construídas usando amostras  $x(k)$ , através do seguinte arranjo:

$$H(k) = [x(k) \ x(k+1) \ \dots \ x(k+N-1)], \quad k = 0, 1; \quad (4.3)$$

com  $S$  sendo uma matriz  $2n \times 2n$  que deve conter a informação dinâmica do sistema. Isto será visto mais adiante. A natureza do vetor  $x$  (lembrar que  $x(k) = [u(k) \ \dot{y}(k)]^T$ ), permite escrever:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n & \phi_1^* & \phi_2^* & \dots & \phi_n^* \\ \lambda_1 \phi_1 & \lambda_2 \phi_2 & \dots & \lambda_n \phi_n & \lambda_1^* \phi_1^* & \lambda_2^* \phi_2^* & \dots & \lambda_n^* \phi_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \\ e^{\lambda_1^* t} \\ e^{\lambda_2^* t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n^* t} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde as constantes  $c_r$  foram embutidas nos autovetores para efeitos de simplificação. Desta representação, com  $z_r = e^{\lambda_r \Delta t}$ , em (4.3) segue que:

$$H(0) = \Psi E, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^{N-2} & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \dots & z_2^{N-2} & z_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \dots & z_n^{N-2} & z_n^{N-1} \\ 1 & z_1^* & z_1^{*2} & \dots & z_1^{*N-2} & z_1^{*N-1} \\ 1 & z_2^* & z_2^{*2} & \dots & z_2^{*N-2} & z_2^{*N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n^* & z_n^{*2} & \dots & z_n^{*N-2} & z_n^{*N-1} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

com  $\Psi$  sendo a matriz de autovetores não normalizados. Da última equação pode-se ver imediatamente que:

$$\begin{cases} H(0) = \Psi E \\ H(1) = \Psi \Lambda_d E \end{cases} \quad (4.6)$$

onde  $\Lambda_d = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_n, z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*)$  é a matriz diagonal de autovalores da matriz  $A$ . Usando estas relações tem-se

$$S \Psi E = \Psi \Lambda_d E, \quad (4.7)$$

de onde deduz-se que

$$S \psi_r = e^{\lambda_r \Delta t} \psi_r, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

Confirmando-se que a matriz  $S$  contém a informação dinâmica do sistema. Para determinar esta matriz a partir das amostras  $x(k)$ , observa-se que o fato de ser  $\text{rank}(H(0)) = 2n$ , implica que  $H(0)H(0)^T$  é inversível. Nestas condições de (4.2) tem-se

$$S = H(1)H(0)^T(H(0)H(0)^T)^{-1}. \quad (4.9)$$

Desta equação resulta evidente que, se  $N = 2n$ , então  $S = A$ . Observe-se também que, o fato de ser  $\text{rank}(H(0)) = 2n$  garante que a pseudo-inversa  $H(0)^+$  pode ser calculada por  $H(0)^+ = H(0)^T(H(0)H(0)^T)^{-1}$ . Consequentemente, em termos gerais, a última equação pode ser expressa por

$$S = H(1)H(0)^+. \quad (4.10)$$

Logo, o problema de estimação dos parâmetros modais ficaria resolvido encontrando-se o auto-sistema da matriz  $S$ . Dai, os modos de vibrar do sistema, corresponderão às primeiras  $n$  componentes dos autovetores de  $S$ , e os pólos  $\lambda_r$  serão encontrados dos autovalores  $z_r$ . Esta maneira de se estimar os parâmetros modais será chamada de *Técnica de Identificação da Pseudo-Inversa*.

Na prática porém é difícil contar com amostras dos deslocamentos e velocidades, conseqüentemente, a técnica da pseudo-inversa não é aplicável imediatamente. Para contornar esta dificuldade, a falta de derivadas pode ser suprida substituindo-se as amostras  $\dot{u}(k)$  por amostras deslocadas  $u(k + \Delta t)$  (ver Ibrahim [39], [40] [41]), e o procedimento é como antes. A diferença é que agora, os autovetores são da forma  $\psi_r = [\phi_r \quad z_r \phi_r]^T$ . Apresenta-se porém uma outra dificuldade: a ordem do sistema raramente é conhecida a priori. Nestes casos, o desconhecimento da ordem obriga a trabalhar com a equação matricial (4.2), onde as matrizes  $H(k)$ ,  $k = 0, 1$  são construídas simulando-se novos graus de liberdade em idêntica maneira como a descrita para suprir a falta de derivadas linhas acima (ver Inman [38]). Assim sendo, tem-se:

$$H(k) = \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \dots & u(k+s-1) \\ u(k+1) & u(k+2) & \dots & u(k+s) \\ u(k+2) & u(k+3) & \dots & u(k+s+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u(k+q-1) & u(k+q) & \dots & u(k+q+s-1) & u(k+q+s) \end{bmatrix}_{q \times s}, \quad (4.11)$$

com  $q$  e  $s$  de maneira a se ajustar ao número de graus de liberdade desejados e ao número de amostras. Um fato importante que deve ser destacado é que, no caso ideal de se trabalhar com dados sem ruído, a ordem do sistema corresponde ao rank da matriz  $H(k)$  (ver Inman

[38], Juang [44], Liang [55]). O procedimento de identificação é desenvolvido como antes, com as devidas interpretações para as matrizes  $\Psi$ ,  $E$  e  $\Lambda_d$ . Assim por exemplo, a dimensão da matriz  $S$  será  $qn \times qn$ , com autovetores  $\psi_r = [\phi_r^T \ z_r \phi_r^T \ z_r^2 \phi_r^T \ \dots \ z_r^{q \times n} \phi_r^T]^T$ .

A técnica de identificação pela pseudo-inversão pode ser resumida nos seguintes passos:

1. Montagem das matrizes Hankel-Bloco  $\tilde{H}(k)$ ,  $k = 0, 1$ ; onde o símbolo  $\tilde{\phantom{x}}$  é usado para denotar estimativas das matrizes  $H(k)$ ,
2. Detecção da ordem do sistema através da SVD da matriz Hankel-Bloco pelo critério do tamanho relativo dos valores singulares. Para isto fazer:

$$\tilde{H}(0) = \tilde{U} \tilde{D} \tilde{V}^T = [\tilde{U}_1 \ \tilde{U}_2] \begin{bmatrix} \tilde{D}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_1^T \\ \tilde{V}_2^T \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

onde  $\tilde{U}_1$  e  $\tilde{V}_1$  são submatrizes formadas pelas  $\tilde{n}$  primeiras colunas de  $\tilde{U}$  e  $\tilde{V}$  respectivamente, com  $\tilde{D}_1$  correspondendo à submatriz diagonal  $\tilde{n} \times \tilde{n}$  dos  $\tilde{n}$  maiores valores singulares da matriz Hankel; com  $\tilde{n}$  sendo a ordem estimada.

3. Usando a informação do passo 2 construir:

$$\tilde{H}(0)^+ = \tilde{V}_1 \tilde{D}_1^{-1} \tilde{U}_1^T \quad (4.13)$$

4. Determinação da matriz  $S$  segundo (4.10), calculando-se o seu auto-sistema. Depois disto conclui-se que:
  - Os modos de vibrar do sistema correspondem às primeiras  $\tilde{n}$  componentes dos autovetores de  $S$ .
  - Os pólos do sistema são encontrados a partir dos  $z_r$  correspondentes.

## Observações

- No caso ideal de se trabalhar com dados sem ruído, a matriz  $S$  admite exatamente  $2n$  autovalores diferentes de zero, localizados dentro do círculo unitário no plano complexo, e a identificação é precisa. Caso contrário, as estimativas dos parâmetros calculados dependem de uma correta identificação da ordem e de quão boa seja a aproximação de  $H(0)^+$  por  $\tilde{H}(0)^+$ , (lembrar as condições expressas em (3.34) e (3.35) para garantir uma boa aproximação de pseudo-inversas)

- Se a ordem for sobreestimada, isto é; se  $\tilde{n} > n$ , são introduzidos  $\tilde{n} - n$  modos computacionais, acarretando dificuldades na determinação dos parâmetros verdadeiros do sistema. Esta situação é típica na aplicação do método ITD (Ibrahim Time Domain), uma vez que neste caso, a matriz  $S$  é determinada segundo (4.9), o que não garante as exigências (3.34) e (3.35), trazendo como consequência, geralmente estimativas pobres dos parâmetros procurados. Ainda mais, a técnica ITD funciona unicamente porque a matriz  $\tilde{H}(0)$  sobredeterminada é de rank completo, caso contrário a inversão da matriz  $\tilde{H}(0)\tilde{H}(0)^T$  em (4.9) não seria possível.

Um fato que deve-se destacar é que a importante técnica de identificação ERA (Eigensystem Realization Algorithm), pode ser enquadrada no contexto dos métodos progressivos. Para ver isto, sabe-se que nesta técnica, a matriz  $S$  é determinada usando a seguinte relação (ver Inman [38] e Juang [43], [44]) :

$$S = D_1^{-\frac{1}{2}} U_1^T H(1) V_1 D_1^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, definindo-se:

$$\begin{cases} \bar{S} = D_1^{-\frac{1}{2}} S D_1^{-\frac{1}{2}} \\ \bar{H}(0) = U_1^T H(0) V_1 \\ \bar{H}(1) = U_1^T H(1) V_1. \end{cases} \quad (4.15)$$

demonstra-se que

$$\bar{S}\bar{H}(0) = \bar{H}(1), \quad (4.16)$$

verificando-se a afirmação acima.

Na atualidade, a técnica ERA é uma das mais cotadas ferramentas de identificação modal. Contudo, a sua performance depende do nível de ruído nos dados e de uma correta identificação da ordem do sistema. Este é um fato bem documentado, ver por exemplo Roemer [69]. Se a ordem for sobrestimada, a técnica ERA introduz também um determinado número de modos computacionais.

### 4.2.3 Identificação Modal usando Modelos MIMO na Direção Regressiva

Da apresentação das técnicas MIMO na direção progressiva, depreende-se que persiste o problema da separação dos modos verdadeiros daqueles computacionais introduzidos



por sobre-determinação. Visando contornar esta dificuldade, análogamente como no caso das técnicas SISO, é possível formular métodos MIMO na direção contrária aos do tipo progressivo. Para ver isto, assumamos novamente que a ordem é conhecida. Com este fato, considerando as matrizes Hankel como em (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned} H(0) &= \Psi E \\ &= \Psi \Lambda_d^{-1} \Lambda_d E \\ &= \Psi \Lambda_d^{-1} \Psi + \Psi \Lambda_d E \\ &= \Psi \Lambda_d^{-1} \Psi + H(1), \end{aligned}$$

toda vez que  $\Psi + \Psi = I$ . Analisando a última relação deduz-se que existe uma matriz  $S_b$ , com definição óbvia tais que:

$$S_b H(1) = H(0). \quad (4.17)$$

Deduz-se também que  $S_b$  satisfaz o auto-problema análogo com aquele expresso em (4.8):

$$S_b = e^{-\lambda_r \Delta t} \psi_r, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (4.18)$$

A diferença está em que os autovalores deste modelo  $w_r = e^{-\lambda_r \Delta t}$ , se localizam no exterior do círculo unitário do plano  $z$ , contrário aos de  $S$  que ficam dentro.

Finalizando, a proposta de usar técnicas MIMO regressivas, resume-se ao cálculo dos parâmetros modais através da matriz  $S_b$  da equação (4.17), seguindo-se o mesmo procedimento utilizado nas técnicas progressivas. A grande vantagem de usar esta proposta, é que ainda com uma ordem sobrestimada, a propriedade de localização dos pólos verdadeiros, facilita a separação dos modos computacionais. Isto devido à tendência destes últimos de localizar-se dentro do círculo unitário. Lembrando que os pólos computacionais correspondem a perturbações dos autovalores nulos introduzidos pela sobre-determinação.

### Observação Final

- Com as devidas interpretações, as técnicas introduzidas, podem ser estendidas para o caso de entradas múltiplas, usando-se os mesmos procedimentos já desenvolvidos. Nesta situação, as matrizes Hankel-Bloco são construídas com colunas da matriz resposta ao impulso  $h(t)$  (ver Allemang [3]).

### 4.3 O Problema de Deconvolução MIMO

A utilização de técnicas de identificação MIMO no domínio do tempo que usam sinais processados na forma de funções de resposta ao impulso unitário, exige em primeiro lugar o cálculo de estimativas dessas funções. Pelo acompanhamento dos resultados de pesquisas em revistas e periódicos especializados na área de análise modal, parece que unicamente se conta com a técnica proposta por Allemang [1]. Nesta técnica as FRIs são estimadas pela transformada inversa de Fourier IFFT, depois de haver-se obtido as estimativas das correspondentes funções de resposta em frequência FRFs. As últimas são determinadas através de técnicas de pseudo inversão usando a relação entrada-saída no domínio da frequência. Dentre várias técnicas de identificação MIMO que tem usado com sucesso estas estimativas destacam ERA [43] [44], Polyreference, [78], e ITD para entradas e respostas múltiplas [3]. Contudo, esta técnica de se estimar as FRIs sofre do erro de truncamento conhecido como *Time Domain Leakage* Allemang [3], devido a se trabalhar com um número limitado de amostras dos sinais dinâmicos do sistema, a partir dos quais se calculam as FRFs. Consequentemente, visando contornar este tipo de erro, seria conveniente calcular estimativas das FRIs sem a utilização do domínio da frequência.

Para abordar o problema de estimar as FRIs no domínio do tempo, assumindo o sistema em repouso, observe-se em primeiro lugar a relação entrada-saída no domínio de Laplace  $U(s) = H(s)F(s)$  (ver (2.5)):

$$\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \dots & H_{1n}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \dots & H_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{n1}(s) & H_{n2}(s) & \dots & H_{nn}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \\ \vdots \\ f_n(s) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Logo, para  $n_0$  entradas e  $n_1$  saídas, cada resposta do sistema devido às  $n_0$  forças de entrada será governada por:

$$u_i(s) = H_{i1}(s)f_1(s) + H_{i2}(s)f_2(s) + \dots + H_{in_0}(s)f_{n_0}(s) \quad (4.20)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_1, \quad j = 1, 2, \dots, n_0.$$

Esta mesma equação pode ser expressa no domínio do tempo por

$$u_i(t) = \int_0^t h_{i1}(\tau)f_1(t-\tau)d\tau + \int_0^t h_{i2}(\tau)f_2(t-\tau)d\tau + \dots + \int_0^t h_{in_0}(\tau)f_{n_0}(t-\tau)d\tau, \quad (4.21)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_1, \quad j = 1, 2, \dots, n_0.$$

O problema de estimar as funções  $h_{ij}(t)$   $i = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_0$ ; no domínio do tempo, a partir das equações (4.21) será chamado de *Problema de Deconvolução MIMO*. Para tratar este problema, observe-se que as equações (4.21) são desacopladas com relação as incógnitas  $h_{ij}(t)$ , portanto deve-se esperar que a deconvolução possa ser realizada linha por linha para estas incógnitas.

Sem perda de generalidade o problema será abordado considerando-se duas forças de entrada ou seja  $n_0 = 2$ , e  $n_1$  respostas. Com esta simplificação, a equação (4.21) torna-se

$$u_i(t) = \int_0^t h_{i1}(\tau) f_1(t - \tau) d\tau + \int_0^t h_{i2}(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \dots, n_1. \quad (4.22)$$

Agora, se forem assumidas  $N$  amostras de cada um dos sinais de entrada  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , discretizando as integrais na mesma filosofia do problema da deconvolução SISO do capítulo 3, tem-se que:

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta t} [F_1 \bar{h}_{i1} + F_2 \bar{h}_{i2}], \quad i = 1, 2, \dots, n_1. \quad (4.23)$$

onde  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{h}_{i1}$ , e  $\bar{h}_{i2}$  são vetores  $N \times 1$  contendo  $N$  amostras do sinais de resposta  $u_i(t)$  e das correspondentes funções  $h_{i1}(t)$ ,  $h_{i2}(t)$ , com  $\Delta t$  sendo a taxa de amostragem. As matrizes  $F_1$  e  $F_2$  são triangulares inferiores Toeplitz, construídas com amostras das forças de entrada  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , de maneira idêntica como em (3.63). A última equação pode ser reescrita como:

$$[F_1 \ F_2]_{N \times 2N} \begin{bmatrix} \bar{h}_{i1} \\ \bar{h}_{i2} \end{bmatrix}_{2N \times 1} = \bar{u}_i, \quad (4.24)$$

que é um sistema de equações lineares  $N \times 2N$ , de onde devem-se calcular as estimativas das FRIs procuradas. Para efeitos de simplicidade assumem-se as incógnitas  $\bar{h}_{i1}$  e  $\bar{h}_{i2}$  normalizadas pela taxa de amostragem  $\Delta t$ . Observe-se porém que este não é um sistema de equações lineares comum uma vez que o número de equações é menor do que o número de incógnitas. Conseqüentemente as estimativas do vetor de incógnitas deve ser determinado no sentido dos quadrados mínimos. As equações normais para este sistema são:

$$\begin{bmatrix} F_1^T F_1 & F_1^T F_2 \\ F_2^T F_1 & F_2^T F_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h}_{i1} \\ \bar{h}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^T \bar{u}_i \\ F_2^T \bar{u}_i \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Neste novo sistema, a matriz blocos é rank deficiente e igual a  $N$  uma vez que a correspondente de (4.24) assim o é. Nestas condições o problema possui infinitas soluções. Sendo necessário um critério de escolha, opta-se pela solução de norma mínima, que deve ser encontrada através da pseudo-inversa da matriz bloco em (4.25) bem como da matriz em (4.24).

Entretanto, pela característica de mal posicionamento do problema original a matriz do sistema deve ser mal condicionada, requerendo-se de um método estável de solução, tais como os da TSVD ou da decomposição QR (ver Bjork [8]). O uso de outras técnicas para resolver o problema pode levar a soluções imprecisas devido aos inevitáveis erros na resposta  $u_i$ . Ainda mais, existe a desvantagem de dobrar a dimensão original do problema (triplicar para o caso de três entradas, e assim em diante).

Para se contornar as dificuldades acima mencionadas, defina-se um funcional não negativo  $J : R^N \times R^N \rightarrow R$ , como sendo:

$$J(\bar{h}_{i1}, \bar{h}_{i2}) = \|\bar{h}_{i1}\|^2 + \|\bar{h}_{i2}\|^2. \quad (4.26)$$

Desta definição segue imediatamente que o problema de encontrar a solução de norma mínima para (4.24) (ou equivalentemente para (4.25)) é equivalente a resolver o seguinte problema de minimização com restrições:

$$\begin{cases} \text{Min} \{ J(\bar{h}_{i1}, \bar{h}_{i2}) \} \\ \text{Restrito a : } \bar{u}_i = F_1 \bar{h}_{i1} + F_2 \bar{h}_{i2} \end{cases} \quad (4.27)$$

A solução para este novo problema pode ser melhor interpretada colocando as dimensões para o caso escalar. Observe-se na fig 4.1 que a solução do problema variacional corresponde ao ponto da reta  $L : f_1 h_1 + f_2 h_2 = u_1$ , mais próximo da origem de coordenadas, enquanto que as infinitas soluções correspondem a todos os pontos sobre a reta.

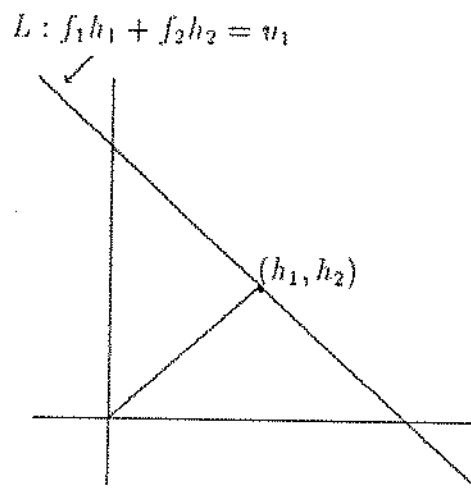


Figura 4.1: Reta de soluções para Deconvolução MIMO

Evidentemente, neste caso a solução do problema é determinada procurando-se o ponto crítico do funcional pelas regras usuais do cálculo diferencial. As mesmas idéias servem para a minimização de  $J$  no caso geral.

As características de inversibilidade das matrizes  $F_1$  e  $F_2$  permite ainda uma nova reformulação do problema. Para isto, de (4.23) tem-se que  $\bar{h}_{i2} = F_2^{-1}\bar{u}_i - F_2^{-1}F_1\bar{h}_{i1}$ , conseqüentemente, o problema (4.27) é equivalente com o seguinte problema de minimização sem restrições:

$$\text{Min}\{J(\bar{h}_{i1})\} = \text{Min}\left\{\|\bar{h}_{i1}\|^2 + \|F_2^{-1}\bar{u}_i - F_2^{-1}F_1\bar{h}_{i1}\|^2\right\}. \quad (4.28)$$

A condição de existência de extremo para  $J$ , exige que (ver Bazán [7], pag. 40):

$$\frac{d}{d\mu}J(\bar{h}_{i1} + \mu v)\Big|_{\mu=0} = 0, \quad \forall v \in R^{2N} \times R^{2N}. \quad (4.29)$$

Isto implica que:

$$\left[F_1F_1^T + F_2F_2^T\right]F_1^{-T}\bar{h}_{i1} = \bar{u}_i. \quad (4.30)$$

Pela simetria do funcional  $J$ , a minimização com relação a  $\bar{h}_{i2}$  leva a:

$$\left[F_1F_1^T + F_2F_2^T\right]F_2^{-T}\bar{h}_{i2} = \bar{u}_i. \quad (4.31)$$

Para se determinar  $\bar{h}_{i1}$  deve-se proceder da seguinte maneira:

1. Fazer  $g = F_1^{-T}\bar{h}_{i1}$  em (4.30) e resolver o sistema de equações para esta nova incógnita.
2. Fazer  $\bar{h}_{i1} = F_1^T g$ .

O vetor  $\bar{h}_{i2}$  é determinado analogamente. Observe-se que para se resolver o problema, necessita-se inverter a matriz  $\left[F_1F_1^T + F_2F_2^T\right]$   $N \times N$  apenas uma vez.

Seguindo o mesmo procedimento, para o caso de se considerar  $n_0$  forças de entrada para o sistema, pode-se demonstrar que:

$$\bar{h}_{ij} = F_j^T \left[F_1F_1^T + F_2F_2^T + \dots + F_{n_0}F_{n_0}^T\right]^{-1}\bar{u}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_1; \quad j = 1, 2, \dots, n_0 \quad (4.32)$$

### Observações

- A relação (4.32) não deve ser usada como fórmula fechada para se estimar as FRIs, uma vez que a inversão numérica pode comprometer seriamente os resultados das

estimativas. O processo correto é seguir os passos 1 e 2 indicados nas linhas acima, resolvendo o sistema de equações estavelmente para  $\bar{h}_{ij}$ , evitando a propagação de erros introduzidos por ruído nas resposta  $\bar{u}_i$ . Recomenda-se a técnica da TSVD

- A abordagem que se acaba de apresentar reduz-se à resolução do sistema de equações associado a (4.32) cuja matriz é  $N \times N$  em comparação com aquela das equações normais (4.23). Observe-se que, para o caso de se considerar unicamente uma força de entrada ( $n_0 = 1$ ), a solução expressa em (4.32) torna-se simplesmente a correspondente para o caso da deconvolução SISO.

A técnica de deconvolução MIMO foi testada com um sistema de dois graus de liberdade cujas equações dinâmicas são descritas por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Assumindo-se o sistema em repouso, a resposta foi calculada diretamente através de convolução discreta (ver (4.23)), submetendo o sistema a uma excitação aleatória com distribuição normal, média zero e variância unitária, em ambos os graus de liberdade. O processo de deconvolução foi desenvolvido para os elementos da primeira linha da matriz resposta ao impulso  $h_{11}(t)$  e  $h_{12}(t)$ , usando-se (4.30) e (4.31). Dois casos são analisados: o primeiro com amostras livres de ruído, e o segundo ajustando as respostas para um nível de ruído de 5%, isto é, o sinal de resposta usado foi  $u_1(t) + r(t)$  com  $\|r(t)\| \approx 0.05\|u_1(t)\|$ . O tipo de ruído utilizado foi gaussiano com média zero. As estimativas das funções procuradas foram realizadas usando-se 64, 128, e 256 amostras das funções de excitação e resposta igualmente espaçadas a  $\Delta t = 0.05s$ . A solução do sistema  $[F_1 F_1^T + F_2 F_2^T]g = \bar{u}_1$  foi realizada pela técnica usual da SVD da matriz do sistema (sem truncamento) devido ao fato de que o condicionamento desta matriz permitiu o trabalho numérico em precisão dupla (ou seja o número de condição foi de uma ordem inferior a  $10^{16}$ ). Os resultados são apresentados na figuras 4.2, e 4.3, onde unicamente são utilizadas 100 amostras das funções recuperadas (exceto para o caso  $N = 64$ ).

Os resultados da experiência com amostras perturbadas, são apresentados na figura 4.5 unicamente para a função  $h_{11}(t)$ , onde foi usado  $N = 128$ . Neste caso, a técnica TSVD é fundamental. O parâmetro de regularização foi escolhido segundo o critério desenvolvido na análise da deconvolução SISO. A figura 4.4 indica claramente que o nível de truncamento

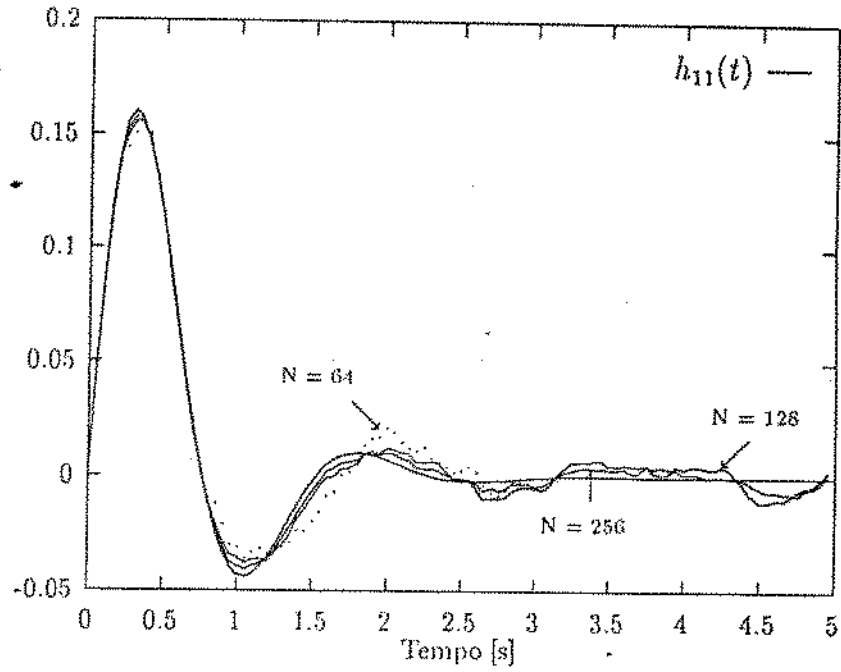


Figura 4.2: Deconvolução MIMO: Dados Exatos

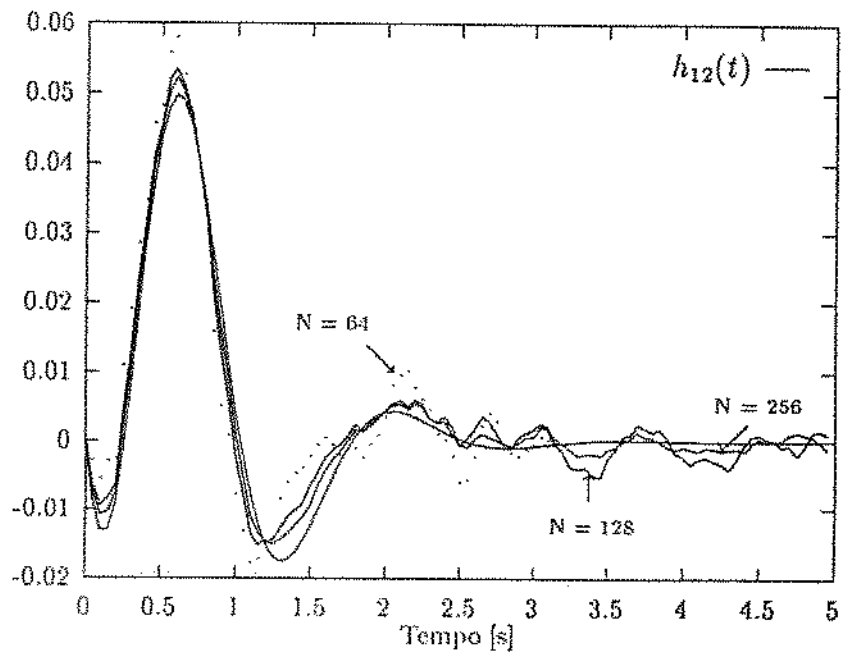


Figura 4.3: Deconvolução MIMO: Dados Exatos

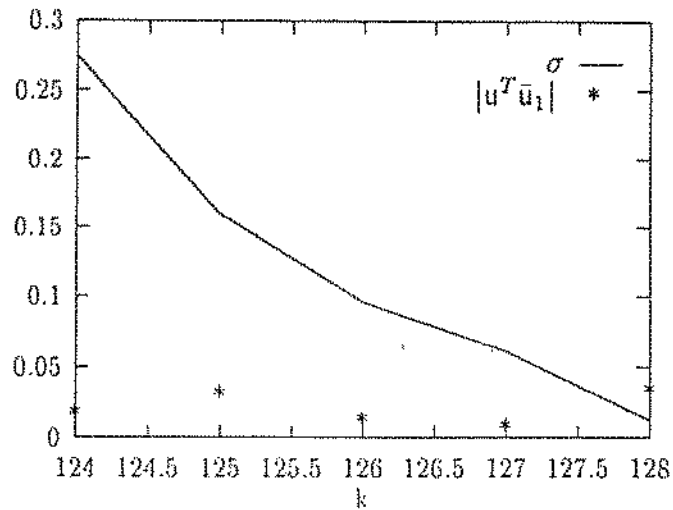


Figura 4.4: Escolhendo o Parâmetro de Regularização

deve ser  $M = 127$ . A solução obtida com  $M = 128$  reflete claramente os efeitos negativos do mal condicionamento do problema.

## 4.4 O Problema de Estimar as Matrizes de Massa, Amortecimento e Rigidez

### 4.4.1 Introdução

Havia-se comentado no capítulo 2 que o problema de identificação das matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$ , a partir de informação de entrada e saída do sistema, não possui solução única (ver Allemang [3] pag. 3 e Inman [38] pag. 205). Esta característica faz com que o problema seja difícil de se resolver. Comentou-se também, que as técnicas empregadas na análise modal experimental, em geral não resolvem totalmente do problema de identificação, centralizando-se na procura de estimativas dos parâmetros modais. Ou seja, estas técnicas são direcionadas mais à construção do *Modelo Modal* (frequências, amortecimentos e modos de vibrar) para a estrutura em teste, antes do que do *Modelo Físico* (Modelo Matemático). Isto é devido ao fato de que na prática, o modelo modal da estrutura, pode ser usado para realizar uma comparação direta com os parâmetros modais preditos por algum modelo analítico, para efeitos de modificações ou refinamentos do último. Dentre os poucos trabalhos publicados sobre o assunto destacam Fritzen [22], Roemer [69] e Zhang [84]. Nesta seção, se propõe uma técnica de resolução do problema muito mais simples do que as citadas anteriormente,



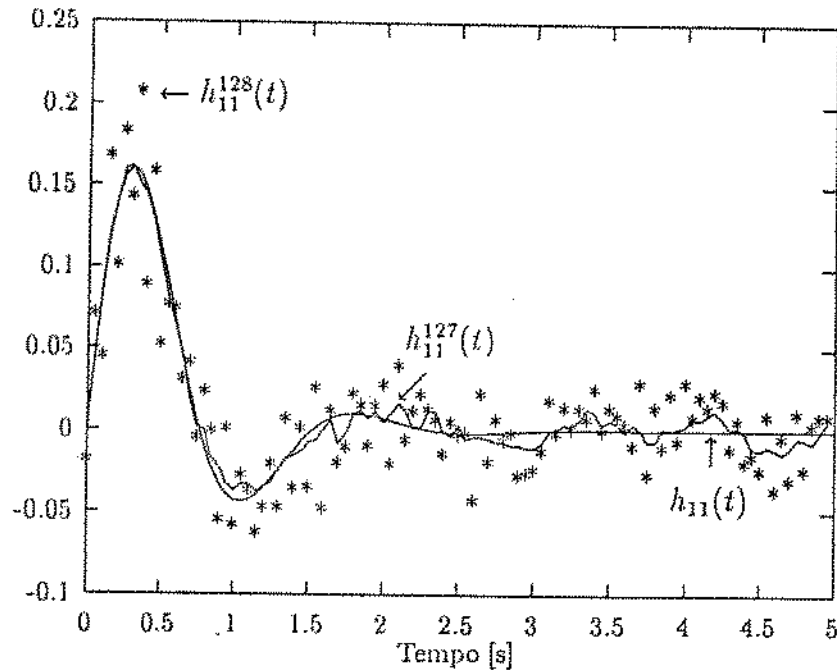


Figura 4.5: Deconvolução MIMO: Dados Perturbados

onde a questão de unicidade da solução do problema é resguardada exigindo-se o cumprimento das propriedades de normalização da matriz de autovetores do sistema. O método de identificação aqui proposto, se baseia no método dos momentos introduzido no capítulo 3 seção 3.4 e nos parâmetros modais do sistema previamente estimados.

#### 4.4.2 Um Método de Identificação das Matrizes M, C, e K

Para introduzir o método de identificação, assumamos que o auto-sistema  $\{\lambda_r, \phi_r\}$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$  da equação (2.1) é conhecido. Agora, se  $\mathbf{H}(s)$  e  $\mathbf{h}(t)$  representam as matrizes de transferência e de resposta ao impulso respectivamente, sabe-se que (ver (2.6)):

$$\mathbf{H}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \mathbf{h}(t) dt. \quad (4.34)$$

Sabe-se também, que esta matriz é definida por  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}$  (ver (2.4)). Isto permite escrever:

$$\mathbf{H}(s)(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}) = \mathbf{I}. \quad (4.35)$$

Substituindo em (4.34), a expressão da matriz resposta ao impulso como função dos parâmetros

modais  $h(t) = \sum_{r=1}^n \phi_r \phi_r^T e^{\lambda_r t} + \phi_r^* \phi_r^{*T}$  (ver (2.7)), após expansão do termo exponencial em série em torno  $s = 0$ , obtém-se :

$$H(s) = M_0 + M_1 s + M_2 s^2 + \dots + \dots, \quad (4.36)$$

onde os  $M_k$  são as matrizes *Momentos Normalizados* da matriz resposta ao impulso  $h(t)$  (ver o método dos momentos da seção 1.4, do capítulo 3):

$$M_k = \int_0^{\infty} \frac{t^k}{k!} h(t) dt = 2Rc \left( \sum_{r=1}^n \frac{1}{(-\lambda_r)^{k+1}} \phi_r \phi_r^T \right). \quad (4.37)$$

Substituindo (4.36) em (4.35), depois de se realizar a multiplicação termo termo e igualar coeficientes das mesmas potências tem-se que

$$M_0 K + (M_1 K + M_0 C)s + (M_2 K + M_1 C + M_0 M)s^2 + \dots + \dots = I. \quad (4.38)$$

Da última relação pode-se montar o seguinte sistema linear de equações com matriz por blocos:

$$\begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ M_1 & M_0 & 0 \\ M_2 & M_1 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ C \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Os parâmetros físicos devem ser determinados resolvendo-se este último sistema. Agora, pelas características deste sistema, pode-se ver imediatamente que:

$$\begin{cases} K = M_0^{-1} \\ C = -M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} \\ M = -M_0^{-1} M_2 M_0^{-1} + M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} \end{cases} \quad (4.40)$$

Evidentemente esta maneira de calcular as matrizes  $M$ ,  $C$ , e  $K$ , dependem da qualidade das estimativas do primeiro momento  $M_0$  e do grau de condicionamento para possibilitar uma inversão estável. Se esta matriz for estimada pobremente, assim o será a de  $K$ , piorando talvez para  $C$  e  $M$ . A outra alternativa é resolver estávelmente o sistema (4.39), determinando-se a solução do problema por colunas.

Como pode-se ver, a técnica proposta se caracteriza pela sua simplicidade para calcular as estimativas dos parâmetros físicos do sistema, entretanto, algumas observações

são necessárias. A primeira é que está-se partindo da hipótese de contar com os autovetores normalizados segundo (2.20), isto é, a matriz de autovetores:

$$\Psi = [\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_n \ \psi_1^* \ \psi_2^* \ \dots \ \psi_n^*] = \begin{bmatrix} \Phi & \Phi^* \\ \Phi\Lambda & \Phi^*\Lambda^* \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

deve satisfazer a seguinte relação de normalização:

$$\Psi^T Q_0 \Psi = \tilde{\Lambda} \quad e \quad \Psi^T B_0 \Psi = I, \quad (4.42)$$

onde  $\tilde{\Lambda}$  é a matriz de autovalores (ver (2.20)), e

$$B_0 = \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M. \end{bmatrix}$$

Se as matrizes estimadas não satisfizerem (4.41), o processo deve ser repetido, ajustando os autovetores com um fator de normalização adequadamente escolhido. A segunda observação é no sentido de que em certos casos informação adicional pode ser considerada, introduzindo-se restrições sobre as matrizes procuradas (por exemplo pode-se requerer matrizes de massa diagonal). Neste caso, a solução do sistema de equações (4.39), deve estar sujeito a essas restrições, podendo-se abordar o problema através do método dos quadrados mínimos. Uma abordagem interessante neste último contexto (sem usar os momentos), pode ser vista em [61].

# Capítulo 5

## Simulações Numéricas

### 5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentadas um conjunto de experiências numéricas, que correspondem ao processo de aplicação das técnicas de identificação, propostas neste trabalho. Para este fim são construídos sistemas mecânicos sintéticos, com funções de resposta ao impulso conhecidas. Nas experiências, realiza-se testes com as técnicas propostas primeiro para o caso de identificação SISO, usando o Modelo Regressivo Simétrico *SBM* (Symmetric Backward Model), proposta no capítulo 3, seguido das técnicas MIMO *ITD*, *ERA* e da Pseudo-Inversa *PSIN* (particularizadas para o caso SISO) em ambas as direções. As técnicas regressivas serão aqui denotadas como *ERABACK* e *PSINBACK*. Neste primeiro grupo de experiências, padroniza-se o processo de aplicação dos algoritmos através do uso de matrizes Hankel simétricas, para tirar vantagem dos efeitos da sobredeterminação sobre o condicionamento das mesmas, segundo os resultados da análise do capítulo 3. Na última parte deste capítulo, apresenta-se um teste dos algoritmos MIMO, para um sistema de dois graus de liberdade. Todas as experiências numéricas foram desenvolvidas no ambiente do PC MATLAB. Em todos os testes apresentam-se unicamente os polos exatos do sistema e os estimados pelos algoritmos propostos uma vez que estes são os que representam maior dificuldade no processo de estimação de parâmetros, por figurarem nos modelos de maneira não linear.

Nas experiências serão usadas as seguintes notações:

- *Nord*: Ordem do modelo matemático usado para identificação
- *Nt*: Inteiro positivo que indica o número de valores singulares diferentes de zero das matrizes  $\hat{H}(k)$ ,  $k = 0, 1$ ; escolhido como estimador da ordem do sistema

- $Tol$ : Constante positiva que mede a tolerância permitida para detectar o  $rank(H(k))$ , definida pelo inverso do número de condição da matriz  $H(k)$ :

$$Tol = \frac{1}{k(H(0))} = \frac{\sigma_{2n}}{\sigma_1}. \quad (5.1)$$

- $\mathcal{E}$ : Constante positiva que mede a norma do erro da matriz Hankel usada; isto é:  $\mathcal{E} = \|H(0) - \hat{H}(0)\|$

Observe-se que o cumprimento da condição (3.35) para detecção de  $rank(H(0))$  exige que:

$$\frac{\mathcal{E}}{\|H(0)\|} \ll Tol. \quad (5.2)$$

Consequentemente, como  $0 < Tol \leq 1$ ; a constante  $Tol$  mede em percentagem, a tolerância teórica máxima para detecção de rank. Na prática, a detecção de  $rank(H(0))$  será possível, desde que  $\mathcal{E} \ll \sigma_{2n}$ . Experiências numéricas mostraram que esta condição geralmente é atingida com sobredeterminação alta ou quando o nível de ruído nos dados é baixo, entretanto, para sistemas mal condicionados, isto é mais difícil de se satisfazer, uma vez que a tolerância  $Tol$  é pequena.

## 5.2 Experiências Numéricas

### Exemplo No 1

Neste caso é analisado um sistema de três graus de liberdade cuja função resposta ao impulso é definida por:

$$h(t) = e^{-0.06t} \text{sen}(4t) + 0.8e^{-0.056t} \text{sen}(7t) + 1.2e^{-0.09t} \text{sen}(9t),$$

com pólos no plano  $s$  mostrados na tabela (5.1):

$s_1$	$-0.060 - 4.00i$
$s_2$	$-0.090 - 9.00i$
$s_3$	$-0.056 - 7.00i$

Tabela 5.1: Pólos de um Sistema de Três Graus de Liberdade

Para efeitos de simulação de dados reais, perturba-se o sinal com um ruído aditivo ajustado de maneira que a razão ruído sinal  $NSR$  é de aproximadamente 30%. A taxa de amostragem escolhida é  $\Delta t = 0.1$ . A experiência é desenvolvida para sobredeterminação de 10 e 20 graus de liberdade, assumindo-se em ambos os casos a presença de 5 modos ( $Nt = 10$ ). Os resultados dos testes são apresentados nas tabelas 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5. Nestas tabelas inclui-se também os valores do menor valor singular das matrizes Hankel ideais (sem ruído) bem como os valores das normas do erro introduzidos em tais matrizes pelo efeito do ruído simulado. Observe-se na figura 5.2 que para o caso  $Nord = 10$ , embora  $\mathcal{E} < \sigma_6$ , o nível de sobredeterminação do modelo não permite identificar corretamente a ordem do sistema, uma vez que não é possível distinguir uma clara separação entre os valores singulares correspondentes ao sistema daqueles introduzidos pela presença do ruído. Isto não acontece quando  $Nord = 20$ .

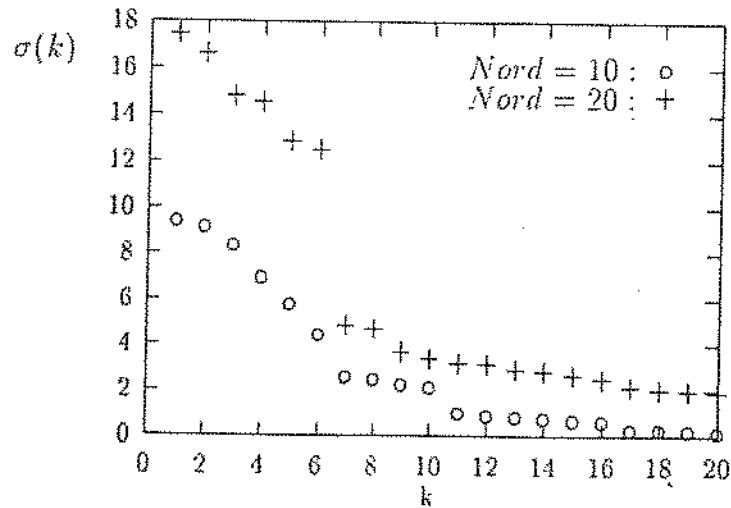


Figura 5.1: Vinte primeiros Valores Singulares da Matriz Hankel

Métodos Testados		
<i>SBM</i>	<i>ERA</i>	<i>ERABACK</i>
--	-0.4694 +27.7258i	-0.2072 -27.7686i
-0.2140 + 4.0356i	0.2042 +16.1065i	0.3911 -16.1116i
-0.0967 + 7.2417i	-0.2955 + 4.2082i	-0.2175 - 4.1644i
-0.1975 + 8.6632i	0.2004 + 8.4297i	0.1785 - 8.4303i
--	-0.9207 - 7.5022i	-0.6573 + 7.5425i
$Nt = 10$	$\sigma_6 = 4.8017$	$\mathcal{E} = 2.7360$

Tabela 5.2: Pólos Estimados Exemplo No 1  $Nord = 10$

<i>Métodos Testados</i>		
<i>ITD</i>	<i>PSINBACK</i>	<i>PSIN</i>
0.78 + 27.83i	-0.21 - 27.77i	-0.47 + 27.73i
-0.82 + 26.30i	0.39 - 16.11i	0.20 + 16.11i
0.11 + 22.57i	-0.22 - 4.16i	-0.30 + 4.21i
-0.45 + 18.84i	-0.66 - 7.54i	0.20 + 8.43i
0.50 + 16.19i	0.18 - 8.43i	-0.92 + 7.50i
0.51 + 8.47i	367.95	-372.34 + 21.05i
-0.174 + 10.77i	367.89 + 20.39i	-375.04 + 31.42i
72.	368.07 - 31.42i	-373.82 - 14.59i
-0.33 - 4.20i	375.18 + 8.04i	-370.83 + 0.07.21i
-1.33 - 6.79i	378.55 + 18.88i	-376.65
$Nt = 10$	$\sigma_6 = 4.8017$	$\mathcal{E} = 2.7360$

Tabela 5.3: Pólos estimados Exemplo No 1, Nord = 10

<i>Métodos Testados</i>		
<i>SBM</i>	<i>ERA</i>	<i>ERABACK</i>
-0.0887 - 3.9903i	-6.7826 + 28.3132i	1.1112 - 31.4159i
-0.0451 - 7.0039i	-0.0934 - 3.9928i	0.0098 - 15.9265i
-0.0915 - 8.8996i	-0.1094 + 15.8559i	-0.0762 - 3.9764i
-	-0.1047 + 8.9207i	-0.0963 + 8.9183i
-	-0.0728 + 7.0115i	-0.0513 + 7.0030i
$Nt = 10$	$\sigma_6 = 11.7920$	$\mathcal{E} = 4.8985$

Tabela 5.4: Pólos Estimados Exemplo No 1, Nord = 20

<i>Métodos Testados</i>		
<i>ITD</i>	<i>PSINBACK</i>	<i>PSIN</i>
7.29 + 31.42i	1.11 -31.42i	-0.11 + 15.86i
4.41 - 5.96i	0.01 + 15.93i	-0.10 + 8.92i
0.73 - 24.01i	-0.10 + 8.92i	-0.07 + 7.01i
-0.07 - 30.62i	-0.05 + 7.00i	-0.09 + 3.99i
0.02 - 28.20i	-0.08 + 3.98i	-6.78 + 28.31i
-0.27 - 27.28i	368.84 - 22.37i	-359.65
-0.31 - 26.05i	369.32 - 16.84i	-369.69 + 14.21i
-0.13 - 22.32i	369.49 - 0.96i	-371.78 + 8.45i
0.20 - 20.61i	372.42 - 39.2i	-371.62 + 31.42i
0.08 - 19.54i	373.36 - 11.40i	-371.83 - 28.27i
0.25 - 18.06i	372.39 - 29.45i	-373.05 - 23.45i
-0.04 - 15.97i	374.68 - 21.67i	-374.38 + 12.67i
0.17 - 14.52i	375.53	-377.90 + 2.23i
0.12 - 11.55i	377.86 + 15.70i	-3782.3
-0.02 - 8.91i	378.97 - 7.50i	-378.47 - 19.81i
0.10 - 7.20i	375.71 - 25.15i	-379.75 - 14.38i
-0.15 - 6.43i	383.19 - 11.11i	-381.21 - 12.08i
-0.25 + 1.92i	375.57 - 30.53i	-378.45 + 29.67i
-0.05 + 4.01i	382.93 - 31.42i	-389.44 + 8.78i
-7.04 + 7.28i	384.37	-383.84 + 31.42i
$Nt = 10$	$\sigma_6 = 11.7920$	$\mathcal{E} = 4.8985$

Tabela 5.5: *Pólos Estimados Exemplo No 1, Nord = 20*

O resultado destes testes mostra claramente a pobre performance do método *ITD*, seja pela qualidade das estimativas dos parâmetros ou pelo número alto de modos computacionais introduzidos, dificultando o processo de identificação. Os testes realizados mostram também uma superioridade nítida das técnicas de identificação regressivas, destacando a do modelo simétrico regressivo, que identificou o número correto de modos em todos os casos. As técnicas *PSINBACK* e *ERABACK* falharam igualmente no cálculo correto dos pólos no caso  $Nord = 10$ , devido ao nível de ruído ser alto em comparação com o nível de sobre-determinação. Outro fato que deve ser destacado é que as técnicas de identificação regressivas possuem a tendência de separar corretamente os polos verdadeiros dos computacionais, ainda que a ordem seja levemente sobreestimada (nos testes os melhores resultados



foram obtidos quando  $Nt = 10$ , ou seja quando se assumiu a presença de 5 modos). Na tabela 5.6, apresentam-se os resultados da identificação, usando-se os mesmos dados, porém com a escolha da ordem correta, isto é, com  $Nt = 6$ . Consideram-se unicamente as técnicas regressivas, incluindo *ERA*.

<i>Métodos Testados</i>			
<i>SBM</i>	<i>ERA</i>	<i>ERABACK</i>	<i>PSINBACK</i>
-0.0863 - 3.9882i	-0.1010 + 8.9198i	-0.0875 - 8.9226i	-0.0875 - 8.9226i
-0.0421 - 7.0028i	-0.0956 + 3.9891i	-0.0724 - 3.9880i	-0.0724 - 3.9880i
-0.0887 - 8.9027i	-0.0785 + 7.0068i	-0.0550 - 7.0069i	-0.0724 - 3.9880i
$Nt = 6$			

Tabela 5.6: Pólos estimados Exemplo No 1,  $Nord = 20$

## Exemplo No 2: O Potencial do Processo Iterativo

Aqui, é discutido o resultado da aplicação do método iterativo das projeções (ver equação 3.70) proposto na seção 3.6 do terceiro capítulo deste trabalho. Nesta experiência, usa-se o sistema de três graus de liberdade do exemplo anterior, submetendo para identificação o mesmo sinal usado na experiência do processo iterativo; isto é, trabalha-se com um sinal altamente perturbado, uma vez que a razão ruído sinal para este caso é  $NSR \approx 120\%$ . Embora a ordem seja detectada corretamente pelo tamanho relativo dos valores singulares da matriz Hankel (ver figura 3.9), devido ao altíssimo nível de ruído nos dados (ver figura 3.11), todos os métodos de identificação testados produziram resultados desalentadores. Assim, para  $Nord = 32$  e  $Nt = 10$  os métodos regressivos (*SBM*, *PSINBACK* e *ERABACK*) só identificaram um pólo, com o agravante da estimativa ser muito pobre. Os resultados de *ERA* não variaram muito em comparação com aqueles das técnicas regressivas. Com este panorama, o sinal perturbado foi submetido a cinco iterações do processo iterativo, e o sinal resultante (o sinal "limpo") foi usado no processo de identificação. Os resultados são apresentados na tabela 5.7, onde a coluna "OUTROS", contém as estimativas obtidas pelos métodos *ERA*, *ERABACK* e *PSINBACK*.

Métodos Testados	
SBM	OUTROS
-0.0669 + 4.0366i	- 0.0668 + 4.0369i
-0.0913 + 7.0298i	- 0.0912 + 7.0298i
-0.0823 + 9.0552i	- 0.0823 + 9.0552

Tabela 5.7: Pólos estimados usando o sinal obtido após aplicação do Processo Iterativo

### Exemplo No 3: Sistema de Dois Graus de Liberdade que conduz a Mal Condicionamento da Matriz Hankel

Neste caso, foi usado um sistema de dois graus de liberdade, com frequências afastadas. Este exemplo foi construído segundo a sugestão de Z. Liang e D. J. Inman [55], para a obtenção de uma matriz Hankel mal condicionada. A função resposta ao impulso do sistema é definida com pólos e resíduos iguais aos descritos na tabela 5.8.

$s_1$	-0.0376 + 6.2830i	$r_1$	$i$
$s_2$	-1.8849 + 314.1536i	$r_2$	$i$

Tabela 5.8: Pólos e Resíduos de um Sistema de Dois Graus de Liberdades

O condicionamento da matriz Hankel pode ser apreciado na tabela 5.9, onde a segunda e terceira coluna apresentam o número de condição da matriz Hankel simétrica com informação ideal (dados sem ruído, com taxas de amostragem diferentes, enquanto que nas colunas quatro e cinco se apresentam as respectivas tolerâncias para detecção de rank. Observe-se que a escolha de  $\delta t$  é fundamental, assim, para  $\delta t_1$ , não existe nenhuma chance de detecção de rank, ainda com sobre-determinação. Já para o caso de  $\delta t_2$ , a situação é bem diferente, observe-se que para  $Nord = 20$ , a tolerância é de aproximadamente 15%.

Os resultados do processo de identificação são apresentados nas tabelas 5.10 e 5.11 para valores diferentes de  $Nord$  e  $Nt$ . O nível de ruído nos dados para este caso foi  $NSR \approx 15\%$ . Para  $Nord = 15$ , colocou-se  $Nt = 10$ , uma vez que não foi possível distinguir uma clara separação dos quatro primeiros valores singulares com relação aos outros. Na primeira das tabelas pode-se observar que *ERA* introduz três polos computacionais, enquanto que os outros métodos só identificaram um polo. Neste ponto vale a pena comentar que estes resultados pobres são devidos a que com  $Nord = 15$ , a tolerância teórica máxima

<i>Nord</i>	$\delta t_1 = 0.01$	$\delta t_1 = 0.005$	$Tol_1$	$Tol_2$
10	11615.5391	11.1290	0.008	8.985
15	7919.7606	8.8669	0.012	11.277
20	5206.0520	6.6622	0.019	15.009
25	4192.2399	4.5030	0.023	22.207
30	4258.6258	2.9714	0.023	33.653
35	4604.2280	2.2679	0.021	44.092

Tabela 5.9: Tolerância como função da Ordem

para detecção de rank, segundo a tabela 5.9 é de 11%, enquanto que o nível de ruído nos dados é de 15%. Uma consequência disto é que a aproximação da pseudo-inversa requerida na aplicação dos métodos é pobre, o que justifica os resultados ruins. A performance fraca dos métodos é contornada quando os métodos são aplicados com nível de sobre-determinação  $Nord = 20$ . Neste caso, a separação dos valores singulares é nítida.

<i>Métodos Testados</i>			
<i>SBM</i>	<i>PSINBACK</i>	<i>ERABACK</i>	<i>ERA</i>
-2.0092 - 313.9753i	-1.9141 - 314.0695i	-1.9141 - 314.0695i	-1.3677 + 5.6627i
--	--	--	-6.6283 + 245.6214i
--	--	--	-2.1147 + 314.0343i
--	--	--	1.3587 + 570.4938i
--	--	--	-22.2448 + 424.9199i
$Nt = 10$			

Tabela 5.10: Pólos estimados Exemplo No 3,  $Nord = 15$

#### Exemplo No 4: Um Caso de Identificação no contexto SIMO (Single Input - Multiple Output)

Neste exemplo usa-se o sistema de dois graus de liberdade do problema de deconvolução MIMO, cujas equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1(t) \\ \ddot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & -10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

<i>Métodos Testados</i>			
<i>SBM</i>	<i>PSINBACK</i>	<i>ERABACK</i>	<i>ERA</i>
-0.0440 - 6.4024i	-0.0343 - 6.6137i	-0.0343 - 6.6137i	-0.0750 + 6.4106i
-1.9299 - 313.8851i	-1.8741 - 314.0024i	-1.8741 - 314.0024i	-1.9406 + 314.0103i
$Nt = 4$			

Tabela 5.11: Pólos estimados Exemplo No 3 , Nord = 20

Aqui foram assumidas uma entrada e quatro saídas e o trabalho de identificação foi realizado usando a primeira coluna da matriz resposta ao impulso unitário  $h(t)$ . Para efeito de simulação das saídas adicionais, foram tomadas combinações lineares arbitrárias das linhas de  $h(t)$ . Este sistema conduz, como no exemplo anterior, a matrizes Hankel severamente mal condicionadas. A Dimensão das matrizes Hankel-Bloco usadas foi de  $8 \times 98$ , construídas com 100 amostras das funções simuladas e com taxa de amostragem  $\Delta t = 0.05$ , no mesmo esquema apresentado na equação 4.11. Sendo que, para este caso, a tolerância teórica máxima é  $Tol \approx 1.12\%$ , pouco se deve esperar com relação a precisão dos parâmetros estimados. Para realizar a experiência foi colocado  $NSR \approx 1\%$ , perturbando-se os sinais originais com ruídos aleatórios do tipo Gaussiano com média zero. Os resultados do processo de identificação são apresentados na tabela 5.12. Na tabela 5.13 apresentam-se os seis primeiros valores singulares da matriz Hankel Bloco (exatos e perturbados) e os pólos exatos do sistema. Comprova-se uma vez mais a superioridade dos métodos na direção inversa e o problema da separação dos pólos dos sistema dos computacionais para o caso das técnicas na direção progressiva *ITD* e *ERA*.

<i>Métodos Testados</i>			
<i>ITD</i>	<i>ERA</i>	<i>ERABACK</i>	<i>PSINBACK</i>
-1.8199 + 4.6434i	-1.8199 + 4.6434i	-2.4257 + 5.9082i	-2.4257 + 5.9082i
-4.3395 + 3.8411i	-4.3395 + 3.8411i	-1.1452 - 3.3473i	-1.1452 - 3.3473i
-18.0772 - 31.3275i	-18.0772 - 31.3275i	--	--
-31.7886 + 62.8319i	-27.7265	--	--
$Nt = 4$			

Tabela 5.12: Pólos estimados Exemplo No 4 , Nord = 4

$\sigma_k$	0.6943	0.2331	0.0484	0.0078	0.0000	0.0000
$\bar{\sigma}_k$	0.6955	0.2333	0.0483	0.0080	0.0024	0.0024
$s_1$	-3.00 + 5.00i	-.-	-.-	-.-	-.-	-.-
$s_2$	- 2.00 + 4.00i	-.-	-.-	-.-	-.-	-.-

**Tabela 5.13:** Seis primeiros valores singulares e Pólos de um sistema de dois graus de liberdade

# Capítulo 6

## Conclusões e Sugestões

### 6.1 Conclusões Gerais

Neste trabalho procurou-se principalmente, a realização de um estudo e propostas de novas técnicas de identificação paramétrica no domínio do tempo aplicadas à análise modal experimental de estruturas mecânicas, visando solucionar o problema da identificação da ordem e da correta separação dos parâmetros pertencentes ao sistema. Os problemas citados foram analisados rigorosamente, explorando as propriedades matemáticas intrínsecas dos modelos utilizados nos métodos de identificação existentes, aproveitando-as na formulação das seguintes novas técnicas de identificação no domínio do tempo:

- A técnica Prony-Momentos e a de um do Modelo Simétrico regressivo (SBM),
- As técnicas de identificação paramétrica MIMO na direção inversa (ERABACK e PSINBACK),
- As técnicas de identificação não paramétrica de deconvolução SISO e MIMO, e um processo iterativo das projeções,
- A técnica de identificação das matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$ ;

verificando a utilidade das mesmas através de simulações numéricas.

O fato das técnicas de identificação propostas neste trabalho não haverem sido aplicadas a estruturas reais, não invalida o potencial das mesmas. Pelo contrário, acredita-se que a aplicação destas técnicas com dados experimentais, deve render frutos positivos na tarefa de identificação, uma vez que nos exemplos apresentados, tentou-se simular casos reais,

trabalhando-se com sinais contendo altos níveis de ruído. Neste ponto, destaca-se a excelente performance do processo iterativo das projeções do capítulo 3. Acredita-se também ter dado passos significativos no que se refere ao trabalho com sinais exclusivamente no domínio do tempo, com a introdução das técnicas de deconvolução para calcular estimativas das funções de resposta ao impulso unitário pertinentes (SISO e MIMO), que servem em última instância como base para um grande número de técnicas de identificação.

Um fato importante que se deve destacar é que, sem a utilização das teorias e técnicas da álgebra linear computacional e da área de problemas inversos, os resultados deste trabalho não teriam sido possíveis. A análise da influência dos efeitos da sobre-determinação no condicionamento das matrizes Hankel para determinação da ordem dos sistemas em análise, não teria rendido os frutos apresentados sem o estudo das importantes propriedades teóricas do teorema SVD. Isto concorda largamente com as afirmações apresentadas no capítulo introdutório, referentes a necessidade da integração dos pesquisadores da área da análise modal, com outras áreas do conhecimento. Acredita-se, por meio deste trabalho, haver-se contribuído para possibilitar a transferência de algumas técnicas da área de problemas inversos para a análise modal experimental.

## 6.2 Sugestões para Futuros Desenvolvimentos

As características dos conceitos e métodos novos introduzidos no decorrer deste trabalho, tem permitido a observação de certos pontos que o autor se permite colocar a guisa de destaque e/ou sugestão para futuros desenvolvimentos.

- Os resultados numéricos apresentados, ilustram a importância de se calcular boas aproximações para a pseudo-inversa das matrizes Hankel. No decorrer do trabalho, estas aproximações foram calculadas exclusivamente através do teorema SVD. Neste ponto, sugere-se calcular tais aproximações através da utilização das conhecidas técnicas de fatorização de matrizes LU e QR ( ver Bjork [8] e Golub [24] ).
- Devido aos excelentes resultados do processo iterativo das projeções para sistemas SISO, sugere-se o estudo de sua adaptação para o caso de matrizes Hankel Bloco (ver Fang [21]), de maneira a aplicar os resultados na utilização de técnicas de identificação MIMO.
- Desenvolvimento de uma rotina computacional para calcular a SVD de matrizes Toeplitz triangulares inferiores, visando aproveitar a estrutura especial da matriz, otimi-

zando o tempo de execução para sua utilização na solução do problema de deconvolução SISO.

- Aperfeiçoar os resultados da técnica de deconvolução MIMO, exigindo mais regularidade da matriz resposta ao impulso unitário  $h(t)$ . Informação mais detalhada sobre este tipo de requerimento pode ser vista Baumeister [5] e Bazán [7].
- Desenvolver uma rotina computacional para implementar o método de identificação das matrizes  $M$ ,  $C$  e  $K$ , proposto no capítulo 4.
- Desenvolver uma análise do comportamento dos autovalores perturbados (do sistema e computacionais), para o caso da aplicação das técnicas MIMO na direção inversa sobre-determinadas, lembrando os resultados para dos autovalores perturbados das técnicas SISO.



# Bibliografia

- [1] R. J. Allemang, R. W. Rost, D. L. Brown, *Multiple input estimation of Frequency response Function*, ASME Paper No. 83-DET, 1983.
- [2] R. J. Allemang, D. L. Brown, R. W. Rost, *Dual Input Estimation of Frequency Response Functions for experimental Modal Analysis of Automotive Estruturas*, SAE Paper No. 820193.
- [3] R. J. Allemang, D. L. Brown, *Experimental Analysis and Dynamic Component Synthesis. Vol III-Modal Parameter Estimation*. Final report Nov. - Jan. 1987. Dep. of Mechanical and Industrial Engineering University of Cincinnati.
- [4] B. Astrom, P. Eykhof, *Sistem Identification - A Survey*, Automatica, vol. 7, pp. 123-162 1971.
- [5] J. Baumeister, *Stable solution of Inverse Problems*, Edited by Ger Fischer, Branschweig, 1989.
- [6] F. S. V. Bazán, P. R. G. Kurka, *TSVD and the Inverse Problem of Parameters Identification in Mechanical Structures in the Time Domain*, DINAME 93, Santo Amaro da Imperatriz Santa Catarina Brazil.
- [7] F. S. V. Bazán, *Análise Espectral do Método de Regularização de Tikhonov para resolver Equações Integrais de Fredholm de Primeira Espécie. Uma Aproximação por Elementos Finitos*, Tese de mestrado IMECC - UNICAMP. Campinas SP Brazil, Março de 1991.
- [8] A. Bjork, *Least Squares problems. Por aparecer em Handbook of Numerycal Analysis, Vol. 1: Solution of Equations in  $R^n$* , Edited by P. G. Ciarlet and J. L. Lions Elsevier/North Holland, 1987.
- [9] S. Braun Y. Ram, *Time and frequency identification methods in over-determined systems*. Mechanical Systems and Signal processing, 1(3), 245-247, 1987.

- [10] D. L. Brown, *Modal Analysis - Past, Present and Future*, Proceedings of IMAC - I, 1982.
- [11] Brown et al , *Parameter Estimation Techniques for Modal Analysis*, SAE Paper No. 700221, 1979.
- [12] J. A. Cadzow, *Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Approach*, Special Issue of the IEEE Proceedings on Spectral Estimation, Vol. 9, pp. 907-939 sept., 1982.
- [13] J. A. Cadzow, *Signal enhancement - a composite property mapping algorithm*, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP 36, No 1 49-62, 1988.
- [14] D. W. Cho, K. F. Eman, S. M. Wu, *A New Time Domain Multi Input Modal Analysis Method*, Journal of Engineering for Industry, Vol. 109 pp. 377-384. November 1987.
- [15] J. E. Cooper, *The use of backward models for structural parameter identification*, Mechanical Systems and Signal Processing 6(3) 217-228, 1992.
- [16] R.R. Jr. Craig, *Structural Dynamics. An Introduction to Computer methods*, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1985.
- [17] H. W. Engl, C. W. Groetsch, *Inverse and Ill-Posed Problems*, Academic Press, New York 1987.
- [18] A. G. Evans, R. Fischel, *Optimal least squares time-domain synthesis of recursive digital filters*, IEEE Trans Audio Electroacoustic, vol AU - 21, pp. 61-65, feb. 1973.
- [19] D. J. Ewins, *Modal Testing and Practice* , John Wiley & Sons Inc, New York.
- [20] D. J. Ewins, *Use and Abuses of Modal Testing*, Proceedings of IMAC II, 1985.
- [21] W. H. Fang, A. E. Yagle, *Two Methods for Toeplitz-plus-Hankel Approximation to a Data Covariance Matrix*, IEEE Trans. On Signal Processing, Vol. 40. 6, June 1992.
- [22] C. P. Fritzen, *Identification of Mass, Damping, and Stiffness Matrices of Mechanical Systems*, ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 108/9, Jan. 1986.
- [23] L. G. Gibilaro, F. P. Lees, *The reduction of complex transfer function models using the method of moments*, Chemical Eng. Sci. 24, 85-93, 1964.
- [24] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix Computations*, John Hopkins Press, 1989.

- [25] C. Gontier et al, *A time Domain Methods for the Identification Of Dynamic Parameters of structures*, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 7 No. 1, Jan. 1993
- [26] C. W. Groetsh, *Applicable Funtional Analysis*. Edited by Marcel Dekker New york, 1984.
- [27] C. W. Groetsh, *The Theory of Tikhonov Regularization for The Fredholm equations of the First kind*, Pitman Publishing, Boston 1984.
- [28] P. C. Hansen, *The Truncated SVD Method as a Regularization*, BIT (27) 534-535, 1987.
- [29] P. C. Hansen, *Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equationns of the first kind*, Inverse Problems 8 (1992) 849-872, Printed in the UK.
- [30] T. L. Henderson, *Geometric methods for determining system poles from transient response*, IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing ASSP-27, 982-988, 1981.
- [31] H. Herlufsen, S. Gade, *Errors involced computing impulse response functions via frequency response functions*, Mechanical Systems and Signal Processing (1992) 6(3), 193-206.
- [32] F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, Mc Graw Hill Book Company 1956.
- [33] J. J. Hollkamp and S. M. Batill, *Automated parameter identification and order reduction for discrete time series*, AIAA Journal 29, 96-103, 1991.
- [34] J. N. Holt, R. J. Antill, *Determining the number of therms in a Prony algorithm exponential fit*, Math Biosc. 36, 319-322, 1977.
- [35] N. E. Hurt, *Phase Retrieval and zero crossing, Mathematics Methods in Image reconstruction. Mathematics and Aplications*, Netherlands, 1989.
- [36] I. Isenberg, R. D. Dyson, *The Analysis of Fluorescente Decay by Method of Moments*, Biophysical Journal Volume 9 1337-1350, 1969.
- [37] J. Einsenfeld, S. R. Bernfeld, S. W. Chen, *System Identification Problems and the Method of Moments*, Math. Biosc. 36, 199-211, 1977.
- [38] D. J. Inman, *Vibration with control Measurements and Stability*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs NJ 1989.

- [39] S. R. Ibrahim, E. C. Mikulcic, *The Experimental Determination of Vibration Parameters from Time Responses*, The Shock and vibration Bulletin, 46, 187-195, 1976.
- [40] S. R. Ibrahim, E. C. Mikulcic, *A method for the Direct Identification of Vibration Parameters from the Free response*, The Shock and Vibration Bulletin, 47, part 4, pp. 183-198, 1977.
- [41] S. R. Ibrahim, *Double Least Squares Approach for use in Structural model identification*, AIAA Journal 24, 499-503, 1986.
- [42] L. Jamshidi, *Large-Scale Systems Modeling and Control*, North Holland Series in Science and Engineering. Albuquerque, New Mexico, 1982.
- [43] J. J. Juang, R. Pappa, *An Eigensystem Realization Algorithm for Modal parameter identification and model reduction*, Journal Of Guidance Control and Dynamics, Vol 8, No. 5, pp. 620-627, 1985.
- [44] J. J. Juang, *Mathematical Correlation of Modal Parameter Identification methods Via System Realization Theory* Journal Of Analysis Modal, January 1987, pp. 1-18.
- [45] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Inc. Englewoods, Cliffs NJ. (1980).
- [46] C. C. Kennedy, C. D. Pancu, *Use of vectors in vibrations measurement and analysis*, Journal of Aeronautical Sciences, Vol. 14 Number 11, 1947, pp. 603-625.
- [47] R. Kumaresan, *On the zeros of the linear prediction error filter for deterministic signals*, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP 31, 217-220, 1984.
- [48] P. R. G. Kurka, *Investigation of dynamic identification techniques and their applications*, Phd Thesis, University of Manchester Institute of Science and technology. Investigation of dynamic identification techniques and their applications, England 1989.
- [49] P. R. G. Kurka, *An Algorithm for model order determination in Mechanical Systems*, Proceedings of the IX International Modal Analysis Conference 1991.
- [50] P. R. G. Kurka, *Modal Parameter Identification in the Time Domain From a Random Force*, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 4 No. 5, 1990, pp. 393-404.
- [51] P. R. G. Kurka, F. S. V. Bazán, *Regularization Techniques in the time Domain Modal Parameter Identification*, 17h International Seminar on Modal Analysis Catholic University of Leuven, Belgiun, sep. 1992, pp. 221-225.

- [52] P. R. G. Kurka, F. S. V. Bazán, *A Prony-Moments for identification in overdetermined Systems*, to appear in *Mechanical Systems and Signal Processing*.
- [53] Chan-Guen Lee, Ch. B. Yun, *Parameter Identification of Linear Structural Dynamics Systems*, *Computers & Structures*, Vol. 40, No.6 pp. 1475-1487, 1991.
- [54] G. M. Lee, M. W. Trethewey, *Application of the Least Squares Time Domain Algorithm for Efficient Modal Parameter Estimation*, *Mechanical Systems and Signal Processing* (1988) 2(1), 21-38.
- [55] Z. Liang, D. J. Inman, *A tutorial on matrix inversion in Time Domain Modal Analysis*, *Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference*, 1989.
- [56] Mc Donough, W. H. Huggins, *Best least squares representation of signals for exponentials*, *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. AC-13, pp. 408-412, august 1968.
- [57] C. D. Mc Guillem, G. R. Cooper, *Continuous and Discrete Signal and System Analysis*, Saunders College Publishing, a division of Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1991.
- [58] G. Majda W. A. Strauss and M. Wei, *Computation of exponentials in transient data*, *IEEE Trans. On Antennas and Propagation* Vol. 37 NO 10, 1989.
- [59] J. Makhoul, *Linear Prediction - a Tutorial Review*, *Proceedings of the IEEE* 63,(4), 1975.
- [60] S. L. Marple Jr. , *Digital Spectral Analysis with applications*. Englewoods Cliffs, New Jersey: Prentice Hall Inc, 1987.
- [61] M. C. Mattos, *Sistemas Amortecidos com Atrito Seco*, Tese de Mestrado, UNICAMP, Julho/1993.
- [62] N. C. Mickleborough, Y. L. Pi, *Modal Parameter Identification using Z-Transforms*, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, 2307-2321 (1989).
- [63] H. G. Natke, *The future of Structural System Analysis*, *Proceedings of the 17th International seminar On Modal Analysis Conference Part I*. Sept 1992. Katholieke Universiteit Leuven, Belgium.
- [64] H. G. Natke, *On Regularization Methods within System Identification* IUTAM Sispodium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, Tokio, 1992.

- [65] B. Piombo, E. Giorcelli, L. Garibaldi, A. Fassana, *Is the deconvolution technique effective to identify the impulse response function?*, 17th International Seminar on Modal Analysis Catholic University of Leuven, Belgium, sep. 1992, pp. 733-743.
- [66] B. Piombo, E. Giorcelli, L. Garibaldi, A. Fassana, *New Approach For Large Structures Identification*, 17th International Seminar on Modal Analysis Catholic University of Leuven, Belgium, sep. 1992, pp. 721-732.
- [67] B. Porat and B. Friendlander, *On the accuracy of the Kumaresan-Tufts Method for estimating complex damped exponentials*, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP 35 NO 2., 1987
- [68] B. D. Rao, *Perturbation Analysis of an SVD-Based Linear Prediction method for estimating the frequencies of multiple sinusoids*, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP Vol. 36 NO. 7, 1026-1035, 1988.
- [69] M. J. Roemer, D. J. Mook, *Mass, Stiffness, and Damping Matrix Identification: An Integrated Approach*, Transactions of the ASME, Journal of Vibrations of Acoustics Vol. 114, July, 1992.
- [70] E. J. Rothwell, W. Sun, *Time Domain Deconvolution of Transient Radar Data*, IEEE Trans. Antennas and Prop. Vol. 38, No. 4, April 1990.
- [71] G. W. Stewart, *The perturbation of pseudo-inverses, projections and linear squares problems*, SIAM Rev. Vol. 19, 634-662, 1978.
- [72] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharsky, *Ill-Posed Problems in the Natural Sciences*. Advances in Sciences and technology in the USSR, MIR Publishers, Moscow, 1987.
- [73] V. T. Tom, *Convergence of iterative non expansive signal reconstruction algorithms*, IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP 29, 5 1052-1058, 1981.
- [74] D. W. Tufts and R. Kumaresan, *Estimating the parameters of exponentially damped sinusoids*, 1981 IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Processing ASSP 30, 833-840, 1981.
- [75] H. Unbehauen, G. P. Rao, *Identification of Continuous Systems*, North Holland Systems and Control Series, Elsevier Publishers 10, 1987.
- [76] H. Unbehauen, *Introduction to system identification using parameter estimation methods*, in CISM courses and lectures No. 272, International Centre for Mechanics Sciences. Identification of Vibrating Structures. Edited by H. G. Natke, Springer Verlag, New York 1982.

- [77] M. L. Van Blaricum, R. Mitra. *Problems and solutions associated with prony methods for processing transient data*, IEEE Trans. in Antenna Prop. AP-26 No.1, 174-181, 1978.
- [78] Vold, H., Kundrat, J., Rocklin, T., Russell, R., *A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for mini computers*, SAE Paper No. 820194, 1982, 10 pp.
- [79] G. Walker, *On periodicity in series of related terms*, Proc. Royal Soc. London, series A, vol. 131. 1931 pp. 518-532.
- [80] P. A. Wedin, *Perturbation theory for pseudo-inverses*. BIT (13) 217-232, 1973.
- [81] Y. Yang, *A time domain identification technique: the oversized eigenmatrix (OEM) method*, Journal of Vibrations, Accoustics, Stress and reliability in Design, vol 107/53, 1985
- [82] G.U. Yule, *On the method of investigating priodicities in disturbed series, with special reference to Wolfers's sunspot numbers*, Phil. Trans. Roy. Soc. vol. 226-A, pp. 267-298.
- [83] L. Zhang, H. Kanda, *The algorithm and application of a new multi-input-multi-output modal parameter identification method*. Shock and Vibration Bulletin, pp. 11-18. 1988.
- [84] N. Zhang, s. Hayama, *Identification of Structural System Parameters From Time Domain Data*, JSME International, Series III, vol. 34, No. 1. 1991.