

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ÉDER LIMA DE
ALBUQUERQUE E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 21/08/97.

ORIENTADOR

Prof. Paulo Sollero
Matr. 05514-0
FEM UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Determinação dos Fatores Dinâmicos de Intensidade de Tensão usando o Método dos Elementos de Contorno

*por Éder Lima de Albuquerque
orientador Prof. Dr. Paulo Sollero*

08/97

AL15d

32444/BC

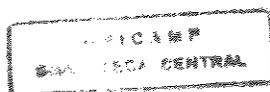
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Determinação dos Fatores Dinâmicos de Intensidade de Tensão usando o Método dos Elementos de Contorno

*por Éder Lima de Albuquerque
orientador Prof. Dr. Paulo Sollero†*

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para preenchimento dos pré-requisitos parciais para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica.

08/97



UNIDADE	BC		
N.º CHAMADA:	11/Unicamp		
AL15d			
V.	Ex		
T.º BRAS BC/	32444		
PROG.	284197		
C	<input type="checkbox"/>	D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00		
DATA	13/12/97		
N.º CPD			

CM-00104048-9

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

AL15d Albuquerque, Éder Lima de
Determinação dos fatores dinâmicos de intensidade de
tensão usando o método dos elementos de contorno /
Éder Lima de Albuquerque .--Campinas, SP: [s.n.], 1997.

Orientador: Paulo Sollero
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Mecânica da fratura. 2. Métodos de elemento de
contorno. I. Sollero, Paulo. II. Universidade Estadual de
Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Dissertação de Mestrado

**Determinação dos Fatores Dinâmicos de
Intensidade de Tensão usando o Método
dos Elementos de Contorno**

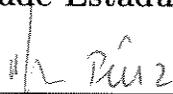
Autor: Éder Lima de Albuquerque
Orientador: Prof. Dr. Paulo Sollero



Prof. Dr. Paulo Sollero, Presidente
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto
Universidade Estadual de Campinas



Prof. Dr. Mário Mourelle Perez
Universidade Federal de Uberlândia

Campinas, 21 de Agosto de 1997.

"E ao final de nossa jornada, retornaremos ao ponto de partida sem reconhecermos a trilha já percorrida."

(Thomas S. Eliot)

Dedico este trabalho ao meu pai.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

Ao CNPq, pelo apoio financeiro para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao professor Paulo Sollero pela proposta do tema e acompanhamento do trabalho e também pela amizade nestes dois anos de convivência.

Aos demais professores do Departamento de Mecânica Computacional e em especial aos professores Euclides e Renato que também contribuíram com este trabalho.

Ao professor Mario Perez (UFU), pela contribuição na redação final.

Aos colegas de república pela amizade e apoio durante este período de convivência. Em especial ao Allan pela ajuda durante as mais diversas etapas de realização deste trabalho.

Aos colegas de departamento, e em especial aos colegas Furlani e Weichen pelas horas de discussão tanto no período de disciplinas quanto na elaboração deste trabalho.

A Sarah, pela amizade e também pela frase de epígrafe.

A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho e que aqui não foram citados.

Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
Resumo	xi
Abstract	xii
1 Introdução	1
2 Fratura Dinâmica	6
2.1 Introdução	6
2.2 Fratura em engenharia	7
2.3 Modos de fratura	8
2.4 Fratura linear elástica	9
2.5 Formulação para fratura linear elástica	10
2.6 Formulação alternativa para tratamento de fratura dinâmica: Trinca se propagando com velocidade constante	17
3 Formulação Integral para Elastodinâmica	22
3.1 Introdução	22
3.2 Equações básicas da elastodinâmica	23
3.3 Teorema recíproco e formulação integral para elastodinâmica	25
3.4 Obtenção da solução fundamental para elastodinâmica - Problema de Stokes	26
3.5 Formulação de elementos de contorno discretizada	37
3.6 Integração no tempo	40
3.7 Integração no espaço	42

4	Método dos Elementos de Contorno aplicado ao Cálculo dos Fatores Dinâmicos de Intensidade de Tensão	48
4.1	Introdução	48
4.2	Elemento de ponto a um quarto	49
4.3	Fatores dinâmicos de intensidade de tensão	51
4.4	Método das subregiões	54
4.5	Métodos alternativos para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão	57
4.5.1	Elemento de ponto a um quarto com singularidade de tração	57
4.5.2	Integral \hat{J} independente do percurso	59
5	Resultados Numéricos	62
5.1	Introdução	62
5.2	Validação do método das subregiões	63
5.3	Problemas simétricos	66
5.4	Problemas não simétricos	71
5.4.1	Placa com trinca inclinada na borda	71
5.4.2	Placa com trinca central inclinada	76
6	Conclusões	80
6.1	Conclusões finais	80
6.2	Trabalhos futuros	81

Lista de Figuras

2.1	Modos de fratura: (a) Modo <i>I</i> , (b) Modo <i>II</i> e (c) Modo <i>III</i> (não considerado neste trabalho).	8
2.2	Ramificação e velocidade de propagação da trinca submetida a esforços dinâmicos.	10
2.3	Deslocamentos e tensões próximo a ponta da trinca.	14
2.4	Zona plástica próximo à ponta da trinca (Broek, 1986).	17
3.1	Obtenção da solução fundamental para problemas bi-dimensionais. . .	33
3.2	Tratamento dos cantos.	35
3.3	Função de interpolação das trações.	41
3.4	Transformação de coordenadas $x_1 - x_2$ para ξ	44
4.1	(a) Elemento quadrático padrão e (b) elemento de ponto a um quarto. .	50
4.2	Sistemas de coordenadas	52
4.3	Divisão de um domínio em duas subregiões	55
4.4	Percurso de integração da integral \hat{J}	60
5.1	Placa sem fratura.	63
5.2	Carregamento degrau aplicado em $t = t_0$	64
5.3	Malha para a placa sem fratura: (a) sem subregião, (b) com subregiões. .	64
5.4	Placa com fratura central (dimensões em mm).	67
5.5	Número de elementos: (a) 13, (b) 19 e (c) 29 elementos de contorno. .	68
5.6	Fator dinâmico de intensidade de tensão usando diferentes malhas. . .	69
5.7	Fator dinâmico de intensidade de tensão durante vários ciclos.	69
5.8	Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos.	70
5.9	Placa com trinca inclinada na borda sob carregamento tipo degrau (dimensões em milímetros).	71
5.10	Malha de elementos de contorno para a placa com trinca inclinada na borda.	72
5.11	Fatores dinâmicos de intensidade de tensão (modos <i>I</i> e <i>II</i>).	73

5.12	Fatores dinâmicos de intensidade de tensão para diferentes passos de tempo (modo <i>I</i>).	74
5.13	Fatores dinâmicos de intensidade de tensão para diferentes passos de tempo (modo <i>II</i>).	74
5.14	Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modo <i>I</i>).	75
5.15	Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modo <i>II</i>).	76
5.16	Placa com trinca inclinada central sob carregamento tipo degrau (dimensões em milímetros).	77
5.17	Malha de elementos de contorno para a placa com trinca inclinada na borda.	78
5.18	Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modos <i>I</i>).	79
5.19	Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modo <i>II</i>).	79

Lista de Tabelas

5.1	Deslocamentos do nó 12 (em milímetros)	65
5.2	Deslocamentos dos nós (em milímetros) para o tempo $t = 1 \mu s$	66

Resumo

Albuquerque, Éder Lima de. *Determinação dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão usando o método dos elementos de contorno*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997, 100 p. Dissertação (mestrado).

Esta dissertação apresenta um procedimento para determinação dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão usando elementos de contorno para problemas bidimensionais isotrópicos carregados em modo I ou em modo misto.

O método das subregiões é empregado para evitar que se tenha um sistema singular de equações para problemas sem simetria. O domínio é dividido em duas subregiões e na interface são impostas condições de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de trações. O sistema de equações para o domínio completo é escrito adicionando-se o sistema de equações de cada subregião.

É usada uma formulação direta de elementos de contorno juntamente com elementos de ponto a um quarto para melhor interpolar os deslocamentos na ponta da trinca. Os fatores dinâmicos de intensidade de tensão são calculados através de equações simples em função dos deslocamentos próximos à ponta da trinca.

Um sistema de coordenadas fixo na ponta da trinca é introduzido para facilitar o cálculo dos deslocamentos próximos à ponta da trinca. O ângulo entre a bissetriz do ângulo formado pelas arestas da trinca reta e o sistema original de coordenadas é calculado para cada passo de tempo com o intuito de se determinar precisamente a abertura da trinca.

São analisados exemplos numéricos de placas carregadas puramente em modo I ou em modo misto. A dependência quanto à malha e ao passo do tempo é estudada. O intervalo é estendido para mais de um ciclo para verificar a natureza oscilatória do sistema. Os resultados são estáveis, mostrando-se pouco dependentes da malha e do passo do tempo, e concordam com os resultados de outros autores que usaram procedimentos de maior complexidade.

Palavras chaves:

Fratura mecânica, Método dos elementos de contorno.

Abstract

Albuquerque, Éder Lima de. *Dynamic stress intensity factors evaluation using the boundary element method*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1997, 100 p. Dissertação (mestrado).

This thesis presents a procedure for computation of dynamic stress intensity factors, using the boundary element method for bidimensional isotropic problems loaded either in mode I or in mixed mode.

The subregion method is used to avoid singular equation systems in case of non-symmetric problems. The domain is divided in two subregions and the interface is imposed the continuity of displacements and equilibrium of tractions. The system of equations for the complete domain is written adding the system of equation for each subregion.

A direct boundary element formulation is used together with quarter point elements to give a better approximation of displacements near the crack tip. The dynamic stress intensity factors are computed using simple equations in function of the displacements near the crack tip.

A coordinate system fixed at the crack tip is introduced to easy the computation of the displacement near the crack tip. The angle between the crack edge bisector and the original coordinate system is computed for each time step to accurately determine the crack opening displacement.

The numerical examples analysed are crack plates loaded in mode I or in mixed mode. The dependence of element length and time step is studied. The interval of time is extended for more than one cycle to check the oscillation behaviour of the time system. The results obtained are stable, showing a small dependence either mesh or time step. The agreement with the results obtained by other authors, who used more complex procedures is satisfactory.

Key words:

Fracture mechanics, Boundary element method

Capítulo 1

Introdução

Problemas de fratura estão sempre presentes em engenharia e, em muitos casos, a propagação de trincas é a principal causa de grandes desastres. Desta forma torna-se importante conhecer todas as implicações que uma trinca acarreta em uma estrutura. Criou-se assim uma área de pesquisa chamada mecânica da fratura que tem como principal objetivo estudar a influência das trincas nos campos de tensões e deformações e na resistência das estruturas ao carregamento.

Foram desenvolvidos diversos procedimentos para se calcular os fatores de intensidade de tensão, que são índices que medem a severidade da trinca na estrutura. Métodos analíticos foram bastante utilizados porém são limitados a domínios simples, submetido a esforços na maioria das vezes estáticos, desprezando os efeitos de inércia. Para domínios mais complexos, pode-se utilizar métodos experimentais, tais como verniz frágil ou fotoelasticidade, porém estes vem sendo cada vez menos utilizados devido ao tempo necessário para se obter resultados e a dificuldade para se aplicar a diferentes formas, em contraste com a crescente facilidade de utilização de métodos computacionais.

Com a evolução dos computadores os métodos numéricos ganharam bastante popularidade e são hoje os mais indicados quando se tem domínios complexos. Em se tratando de peças com trinca sob carregamento estático, praticamente não se tem mais limitações quanto ao domínio, podendo este ser bi ou tridimensional, nem quanto ao material, podendo ser linear elástico, viscoelástico, plástico, anisotrópico, etc.

Muitos também são os métodos numéricos para se tratar problemas de fratura com carregamento estático. Entre os mais confiáveis e utilizados estão o método dos elementos finitos e o método dos elementos de contorno. O método dos elementos de contorno possui duas características bastante desejáveis em problemas de fratura: (1) consegue modelar bem problemas de grandes gradientes e (2) somente o contorno é discretizado. Uma ampla revisão dos trabalhos em que o método dos elementos de contorno é aplicado à mecânica da fratura é apresentado por Aliabadi (1997).

Um dos primeiros trabalhos a apresentar a análise de problemas de fratura usando elementos de contorno foi publicado por Cruse e Buren (1971) que exploraram a possibilidade de modelar a fratura como se fosse um entalhe com uma forma elíptica. Porém este método requer um alto refinamento da malha na ponta da trinca e os fatores de intensidade de tensão são obtidos com erros elevados. O primeiro trabalho no qual conseguiu-se determinar os fatores de intensidade de tensão de uma maneira bastante precisa para domínios finitos e não simétricos foi publicado por Blandford *et al.* (1981) que utilizou o método das subregiões e diferentes tipos de elementos de ponto a um quarto. O método das subregiões divide o domínio em partes para evitar que dois nós da fratura que possuem as mesmas coordenadas sejam integrados no mesmo percurso, pois isso iria fornecer um sistema de equações singular. Na interface são impostas condições de continuidade de deslocamentos e equilíbrio de trações. A divisão do domínio é feita de forma que cada face da fratura fique pertencendo a diferentes subregiões. Uma alternativa para se evitar a obtenção de sistemas de equações singulares é utilizar o método duplo de elementos de contorno, desenvolvido por Portela *et al.* (1992) para problemas bidimensionais e por Mi e Aliabadi (1992) para problemas tridimensionais. Ao invés de utilizarem diferentes percurso de integração, o método duplo dos elementos de contorno utiliza diferentes equações integrais para cada face da fratura.

Para se calcular os fatores de intensidade de tensão foram desenvolvidos diferentes procedimentos, que podem ser utilizados tanto com elementos finitos quanto com elementos de contorno. Dentre estes procedimentos destacam-se os seguintes: (1) procedimentos onde os fatores de intensidade de tensão são calculados diretamente dos deslocamentos ou trações nodais (por exemplo, elemento de ponto a um quarto

e elemento de ponto a um quarto com singularidade de tração); (2) procedimentos baseados em métodos de energia (um dos mais importantes é a integral \hat{J} independente do caminho). O elemento de ponto a um quarto é um elemento onde o nó central de um elemento quadrático padrão é deslocado para um quarto de distância do comprimento do elemento da ponta da trinca. Isto dá uma boa aproximação dos deslocamentos na vizinhança da ponta da trinca e permite o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão até com malhas pouco refinadas.

O elemento de ponto a um quarto tem sido usado em conjunto tanto em elementos finitos (Murti e Valliappan, 1985) como em elementos de contorno (Blandford *et al.*, 1981). Blandford *et al.* (1981) usaram elementos de ponto a um quarto e elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração para o cálculo do fator de intensidade de tensão para problemas com carregamento estático. Martinez e Dominguez (1984) estudaram a dependência da malha para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão através do uso de elementos de ponto a um quarto e elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração.

Martinez e Dominguez (1984) propuseram elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração como alternativa para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão. Uma comparação entre os diferentes tipos de elementos de ponto a um quarto é apresentada por Smith (1988).

A integral \hat{J} independente do caminho foi desenvolvida por Kishimoto e Sakata (1980) e foi aplicada primeiramente junto com elementos finitos por Kishimoto *et al.* (1980). Man *et al.* (1995) utilizaram a integral \hat{J} para estudar o efeito de forças de contato no comportamento da fratura. Sollero e Aliabadi (1994) apresentaram um método para desacoplar a integral J baseado na razão de abertura e cisalhamento na ponta da trinca para problemas anisotrópicos.

Todos os trabalhos apresentados até agora tratam apenas de problemas com carregamento estático ou problemas onde os efeitos de inércia podem ser desprezados. Porém, ocorrem muitos casos de fratura mecânica onde tais efeitos não podem ser desconsiderados. Isto acontece ou porque a fratura é excitada por uma carga dependente do tempo, ou porque o carregamento se dá de forma tão rápida que os efeitos de inércia passam a ser importantes.

Soluções analíticas para os problemas de fratura dinâmica são limitadas a um pequeno número de casos para domínios infinitos. Assim sendo, métodos numéricos são uma alternativa bastante indicada para a análise de domínios finitos.

A formulação de elementos de contorno para elastodinâmica pode ser obtida no domínio do tempo ou no domínio da frequência, usando transformadas de Fourier ou transformada de Laplace. Um dos primeiros trabalhos no qual se calculou os fatores de intensidade de tensão para problemas dinâmico foi o de Chirino e Dominguez (1989) que usaram elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração para domínios simétricos e domínios infinitos sob excitação harmônica. Dominguez e Gallego (1992) usaram elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração para domínios finitos. Os fatores dinâmicos de intensidade de tensão foram determinados através da abertura da trinca. Problemas de modo misto foram analisados usando o método das subregiões.

O uso do método duplo dos elementos de contorno foi estendido para formulação de elementos de contorno de dupla reciprocidade por Fedelinski *et al.* (1993), que calcularam os fatores dinâmicos de intensidade de tensão através dos deslocamentos nodais dos elementos de ponto a um quarto descontínuos. Fedelinski *et al.* (1994) estenderam o uso da integral \hat{J} independente do percurso para formulação de elementos de contorno no domínio do tempo juntamente com uma formulação de elementos de contorno de dupla reciprocidade. A integral \hat{J} já tinha sido utilizada anteriormente para problemas de fratura dinâmica, porém juntamente com o método dos elementos finitos, por Kishimoto *et al.* (1980). Fedelinski *et al.* (1995) usaram o método duplo dos elementos de contorno com uma formulação direta no domínio do tempo juntamente com a integral \hat{J} .

Fedelinski *et al.* (1996 b) usaram transformada de Laplace e o método duplo dos elementos de contorno para problemas bidimensionais carregados em modo *I* e em modo misto. O método dos elementos de contorno de dupla reciprocidade foi comparado quanto a precisão dos resultados com formulação no domínio do tempo e formulação no domínio da frequência. Uma comparação entre a formulação por transformada de Laplace e elementos de contorno de dupla reciprocidade foi realizada por Fedelinski *et al.* (1996).

Poucos são os trabalhos que tratam de propagação de trincas em domínios submetidos a carregamentos dinâmicos. Gallego e Dominguez (1992) calcularam os fatores dinâmicos de intensidade de tensão para trincas se propagando a velocidade constante. Foram utilizados elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração e método das subregiões.

A principal desvantagem de se utilizar subregiões em propagação é que a introdução de contornos artificiais não é única, o que dificulta a programação de rotinas computacionais. A cada incremento de fratura estes contornos artificiais têm de ser refeitos. Portela *et al.* (1993) e Mi e Aliabadi (1996) apresentaram uma aplicação do método duplo dos elementos de contorno para analisar a propagação de fratura em problemas bi e tridimensionais em modo misto. Foram usados os critérios da máxima tensão principal para problemas bidimensionais e da mínima densidade de energia de deformação para os casos tridimensionais. Porém, os efeitos de inércia não foram considerados. Fedelinski e Aliabadi (1997) estenderam o uso do método duplo dos elementos de contorno no domínio do tempo para problemas de propagação dinâmica de trincas.

Embora os elementos de ponto a um quarto contínuos tenham sido bastante utilizados para problemas de fratura estática, não se encontrou na bibliografia consultada sua aplicação em problemas de dinâmica. Neste trabalho o uso de elementos de ponto a um quarto contínuos será estendido para problemas de fratura dinâmica no domínio do tempo. É proposto um procedimento alternativo para cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão, que apesar de ser uma metodologia bastante simples, tem boa concordância com os demais métodos, conforme será demonstrado nos resultados. Resultados para problemas simétricos foram apresentados por Albuquerque e Sollero (1997 a) e por Albuquerque e Sollero (1997 b). Para problemas não simétricos foi utilizado o método das subregiões para evitar problemas de sistema de equações singular. Os resultados para problemas não simétricos serão apresentados por Albuquerque e Sollero (1997 c).

Capítulo 2

Fratura Dinâmica

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo apresentar conceitos básicos e nomenclatura aplicados à mecânica da fratura e os fenômenos envolvidos em fratura dinâmica. A importância de se estudar fratura em engenharia é descrita, juntamente com os termos e fenômenos envolvidos na fratura dos materiais. Será mostrada uma formulação para fratura linear elástica estacionária (determinação dos fatores de intensidade de tensão em modos I e II).

Embora possam ser encontradas algumas formulações analíticas para problemas de fratura dinâmica em domínio infinito, como por exemplo aquela proposta por Kanninen e Popelar (1995), estas não têm sido utilizadas em métodos numéricos para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão. Normalmente estas soluções partem de hipóteses simplificadoras devido às dificuldades no tratamento matemático para se obter resultados analíticos.

Neste trabalho, na formulação de elementos de contorno para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão, será assumido que a forma com que os deslocamentos se distribuem próximo à ponta da trinca nos casos dinâmicos e estáticos são iguais, variando apenas a intensidade, devido à dependência dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão em relação ao tempo.

2.2 Fratura em engenharia

A existência de trincas em estruturas não pode ser evitada. Elas aparecem na fabricação ou durante a vida útil das estruturas. O uso de fatores de segurança é uma primeira tentativa de se amenizar os problemas causados pelas trincas. Porém, ao mesmo tempo, exigem-se dos projetos que os custos sejam os menores possíveis. Esta redução nos custos implica que os projetistas trabalhem com fatores de segurança pequenos. Devido a esta exigência, torna-se importante a utilização de técnicas apuradas para determinar a tolerância das estruturas às trincas.

Com o aperfeiçoamento dos procedimentos de ensaios não destrutivos, tais como ultrassom, líquidos penetrantes, etc., consegue-se uma boa análise quantitativa e qualitativa das trincas estruturais. Tem-se então a necessidade de se saber qual o tamanho da trinca admissível na estrutura analisada, quando os reparos terão de ser feitos e quando acabará a vida útil da estrutura. Reparos e trocas implicam em custos elevados, sendo que o prolongamento do tempo entre reparos e trocas implica em estruturas mais baratas mas, nem por isso, menos seguras. A necessidade de manutenção juntamente com o estudo da possibilidade de falha geraram um novo conceito de engenharia chamado tolerância ao dano (Kaninnen e Popelar, 1985).

A prevenção de falhas torna-se ainda mais importante quando vidas humanas estão envolvidas. Estruturas como pontes, aviões, vasos de pressão, e caldeiras oferecem grandes riscos a vida humana em caso de falha. Porém, ao mesmo tempo, o custo de reparos e trocas destes tipos de equipamentos são altíssimos, pois além dos custos diretos implicam na parada de processos. Daí a importância de saber o quanto uma trinca pode ameaçar ou não uma estrutura.

A existência de trincas não significa que a vida útil da estrutura acabou ou está terminando. Porém, com o passar do tempo, devido às cargas aplicadas ou à ação do ambiente, as trincas tendem a crescer em número e tamanho. Quanto maior for a trinca, maior será a tensão induzida por ela, e maior será sua taxa de crescimento. Desta forma, quando a trinca atingir determinado tamanho (tamanho crítico), a estrutura necessitará de reparos ou até mesmo de ser trocada. Cabe ao analista determinar de maneira precisa este tamanho crítico.

2.3 Modos de fratura

Considere um corpo com uma trinca plana e um sistema de coordenadas fixo à ponta da fratura, de modo que as faces da trinca estejam no plano $x_1 - x_3$ paralelas ao eixo x_1 e ortogonais ao eixo x_3 (Figura 2.1).

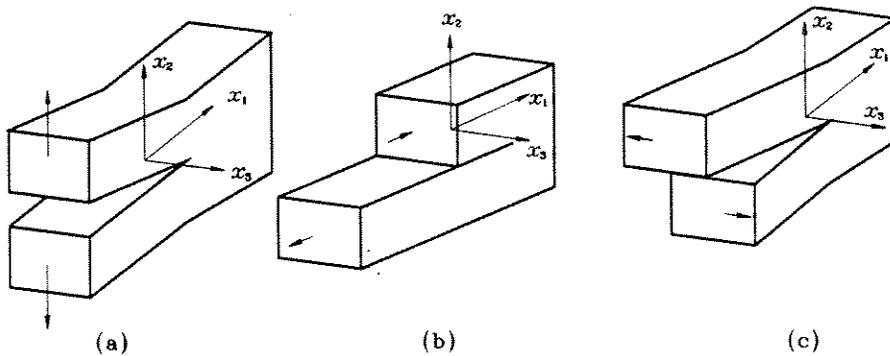


Figura 2.1: Modos de fratura: (a) Modo *I*, (b) Modo *II* e (c) Modo *III* (não considerado neste trabalho).

Diz-se que o corpo é carregado em modo *I* (modo de tração) se uma carga for aplicada paralelamente ao eixo x_2 . O carregamento é em modo *II* (modo de cisalhamento) se a carga for aplicada paralelamente ao eixo x_1 . O carregamento é em modo *III* (modo de torção) se a carga for aplicada paralelamente ao eixo x_3 .

Em modo *I*, as faces da trinca são separadas simetricamente em relação aos planos $x_1 - x_2$ e $x_1 - x_3$. No modo *II* há um deslizamento simétrico em relação ao plano $x_1 - x_2$ e antisimétrico em relação ao plano $x_1 - x_3$. Em modo *III* os deslocamentos são antisimétricos em relação aos planos $x_1 - x_2$ e $x_1 - x_3$.

Diz-se que um problema de fratura é plano se os deslocamentos e trações forem funções de apenas x_1 e x_2 . É dito em modo misto quando estão presentes mais de um modo de carregamento. Neste trabalho serão tratados apenas problemas planos e, quando for dito em modo misto, significa que o carregamento possui modos *I* e *II*. O modo *III* (modo de torção) não será considerado neste trabalho.

2.4 Fratura linear elástica

A fratura linear elástica pode ser dividida em dois grupos dependendo da velocidade de carregamento: fratura estática, na qual o carregamento se dá de forma lenta de modo que os efeitos de inércia podem ser desprezados; fratura dinâmica na qual o carregamento se dá de forma rápida ou então o carregamento é dependente do tempo. Neste último grupo os efeitos de inércia têm de ser levados em consideração na obtenção da formulação.

Devido à inclusão dos termos de inércia na formulação, a solução analítica para problemas de fratura dinâmica torna-se bem mais difícil, limitando-se a alguns poucos casos de domínio infinito. Desta forma, os métodos numéricos têm-se mostrado uma ferramenta bastante indicada para problemas de fratura dinâmica com geometrias complexas. Os métodos numéricos mais utilizados para o tratamento de problemas de fratura dinâmica são o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos.

Os materiais sofrem falhas mais rapidamente a medida que aumenta a velocidade com que o carregamento é aplicado. Isto se deve ao fato de que os fatores dinâmicos de intensidade de tensão atingem valores mais altos que os fatores estáticos e também porque a tenacidade à fratura dos materiais decresce com o crescimento da taxa de carregamento (Kanninen e Popelar, 1985). Devido à energia cinética presente em fratura dinâmica, um efeito bastante comum e que pode indicar se a fratura se deu de forma dinâmica é o aparecimento de ramificações na fratura (Figura 2.2). As ramificações ocorrem porque, devido à existência de energia cinética, a energia contida na peça aumenta e torna-se suficiente para que duas trincas se propagem. Conforme mostra a Figura 2.2 o surgimento desta nova trinca, formando duas novas superfícies, consome parte da energia cinética disponível, fazendo que, no momento da formação do novo ramo da trinca, haja uma queda brusca na velocidade de propagação (Broek, 1986).



Figura 2.2: Ramificação e velocidade de propagação da trinca submetida a esforços dinâmicos.

2.5 Formulação para fratura linear elástica

Baseado em Kaninnen e Popelar (1985), apresenta-se uma formulação para fratura linear elástica obtida através das equações da elasticidade.

A equação de equilíbrio, desprezando-se os efeitos dinâmicos e considerando as forças de corpo iguais a zero, é escrita como.

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} representa o tensor tensão e a vírgula se representa derivação ($a_{i,j}$ = derivada da componente i do vetor a em relação a direção j).

A equação de compatibilidade é escrita como:

$$\varepsilon_{ij,ij} - \varepsilon_{ii,jj} = 0 \quad (2.2)$$

onde ε_{ij} representa o tensor deformação.

Considerando o estado plano de deformação tem-se que:

$$u_3 = 0 \quad (2.3)$$

$$\sigma_{33} = \nu \sigma_{ii} \quad (2.4)$$

sendo u_i o vetor deslocamento e ν o coeficiente de Poisson.

A relação constitutiva tensão-deformação (Lei de Hooke generalizada) pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{kk}] \quad (2.5)$$

onde E é o modulo de elasticidade e δ_{ij} o delta de Kronecker.

Escrevendo -se o tensor tensão em termos das funções de Airy $\phi = \psi(x_1, x_2)$ (Kaninnen e Popelar, 1985) tem-se:

$$\sigma_{ij} = -\psi_{,ij} + \psi_{,kk} \delta_{ij} \quad (2.6)$$

Introduzindo a equação (2.6) na equação (2.4), a equação de compatibilidade requer que as funções de Airy satisfaçam a equação bi-harmônica

$$\psi_{,iijj} = \nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0 \quad (2.7)$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.8)$$

é o operador de Laplace.

Escrevendo o laplaciano da função de Airy como uma soma de funções de variáveis complexas, tem-se:

$$\nabla^2 \psi = 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \bar{z}} = f(z) + \bar{f}(\bar{z}). \quad (2.9)$$

onde z é uma variável complexa definida por:

$$z = x_1 + ix_2 \quad (2.10)$$

Integrando-se (2.9) tem-se a função real

$$\psi = \frac{1}{2} [\bar{z}\Omega(z) + z\bar{\Omega}(\bar{z})\omega(z) + \bar{\omega}(\bar{z})] \quad (2.11)$$

onde $\Omega(z)$ e $\omega(z)$ são funções holomorfas.

Substituindo a equação (2.11) na equação (2.6) tem-se:

$$4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \bar{z}} = \sigma_{11} + \sigma_{22} = 2 [\Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z})], \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \bar{z}^2} &= \sigma_{22} - \sigma_{11} - i\sigma_{12} \\ &= 2 [z\bar{\Omega}''(\bar{z}) + \bar{\omega}(\bar{z})] \end{aligned} \quad (2.13)$$

e

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = \Omega'(z) + \bar{\Omega}'(\bar{z}) + z\bar{\Omega}''(\bar{z}) + \omega''(\bar{z}) \quad (2.14)$$

Fazendo-se então

$$D = u_1 + iu_2 \quad (2.15)$$

tem-se:

$$2 \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22} + 2i\varepsilon_{12} \quad (2.16)$$

e

$$\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.4) nas equações (2.16) e (2.17) e usando as equações (2.12), (2.13) e (2.14) tem-se:

$$2\mu \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} = - [z\bar{\Omega}''(\bar{z}) + \bar{\omega}''(\bar{z})] \quad (2.18)$$

e

$$\frac{2\mu}{1-2\mu} \left(\frac{\partial D}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right) = 2 [\Omega(z) + \bar{\Omega}(\bar{z})] \quad (2.19)$$

Integrando-se as equações (2.18) e (2.19) tem-se:

$$2\mu D = \kappa \Omega(z) - z\bar{\Omega}'(\bar{z}) - \bar{\omega}'(\bar{z}) \quad (2.20)$$

onde

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (2.21)$$

Esta formulação é válida também para estado plano de tensão se tivermos (Green e Zerna, 1968):

$$\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad (2.22)$$

Para analisar os deslocamentos e tensão em modo I , será fixada a origem do sistema de coordenadas na ponta da trinca (Figura 2.3). Devido à simetria do problema pode-se escolher uma solução da forma:

$$\Omega = Az^{\lambda+1}, \quad \omega' = Bz^{\lambda+1} \quad (2.23)$$

onde A , B e λ são constantes reais. Para que não se tenha singularidade nos deslocamentos, tem-se que $\lambda > -1$.

Substituindo (2.23) em (2.14) tem-se:

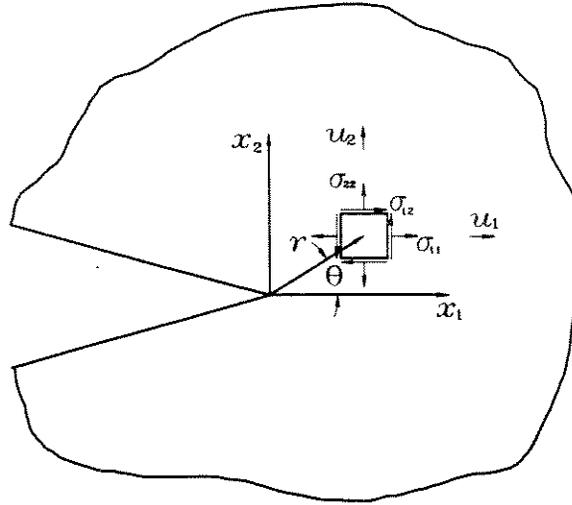


Figura 2.3: Deslocamentos e tensões próximo a ponta da trinca.

$$\begin{aligned} \sigma_{22} - i\sigma_{12} = (\lambda + 1)r^\lambda \{ & A [2 \cos \lambda\theta + \lambda \cos(\lambda - 2)\theta] + B \cos \lambda\theta \\ & - i [A\lambda \sin(\lambda - 2)\theta + B \sin \lambda\theta] \} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como as tensões $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ quando $\theta = \pm\pi$ (superfícies descarregadas), tem-se:

$$\begin{aligned} A(2 + \lambda) \cos \lambda\pi + B \cos \lambda\pi &= 0 \\ A\lambda \sin \lambda\pi + B \sin \lambda\pi &= 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

A solução diferente da trivial existe para:

$$\text{sen}2\lambda\pi = 0 \quad (2.26)$$

Para que a equação (2.26) seja satisfeita, tem-se:

$$\lambda = -\frac{1}{2}, \frac{n}{2}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2.27)$$

Fazendo $\lambda = -1/2$, tem-se que $A = 2B$. Substituindo estes valores nas equações (2.12), (2.20) e (2.24), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \text{sen}(\theta/2) \text{sen}(3\theta/2) \\ \text{sen}(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \text{sen}(\theta/2) \sin(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

e

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \begin{Bmatrix} \cos(\theta/2) [\kappa - 1 + \text{sen}^2(\theta/2)] \\ \text{sen}(\theta/2) [\kappa + 1 - 2 \cos^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Desta forma, tem-se o fator de intensidade de tensão K_I definido por:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{1/2} \sigma_{22} \Big|_{\theta=0} \right] \quad (2.30)$$

Quando este procedimento é repetido com A e B sendo puramente imaginário, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{(2\pi r)^{1/2}} \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2) [1 - \text{sen}(\theta/2) \text{sen}(3\theta/2)] \\ \text{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

e

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2} \begin{Bmatrix} \text{sen}(\theta/2) [\kappa + 1 + 2 \cos^2(\theta/2)] \\ -\cos(\theta/2) [\kappa - 1 - 2 \text{sen}^2(\theta/2)] \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

onde K_{II} é definido como:

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{1/2} \sigma_{12} |_{\theta=0} \right] \quad (2.33)$$

O deslocamento na ponta da trinca em modo misto (modo I + modo II) é dado pela soma de (2.29) e (2.32).

Neste trabalho será assumido que a forma do campo de deslocamentos nas proximidades da ponta da trinca são iguais para os casos dinâmicos e estáticos, porém os fatores dinâmicos de intensidade de tensão são dependentes do tempo ($K_I(t)$ e $K_{II}(t)$).

Somando as equações (2.29) e (2.32), aplicando identidades trigonométricas e considerando os fatores dinâmicos de intensidade de tensão como dependentes do tempo, tem-se que:

$$u_1 = \frac{K_I(t)}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}(t)}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.34)$$

$$u_2 = \frac{K_I(t)}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 1) \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} - \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}(t)}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (2.35)$$

Observando as equações (2.28) e (2.31) nota-se que existe uma singularidade de tensão na ponta da trinca. Na verdade, porém o material escoar e surge uma área na ponta da trinca deformada plasticamente (Figura 2.4) que causa um alívio de tensões. Esta área é chamada zona plástica (Broek, 1986). Entretanto, na maioria dos trabalhos numéricos o material é considerado totalmente elástico. Esta consideração é tão mais próxima dos casos práticos quanto menor for a zona plástica, ou seja, quanto mais frágil for o material.

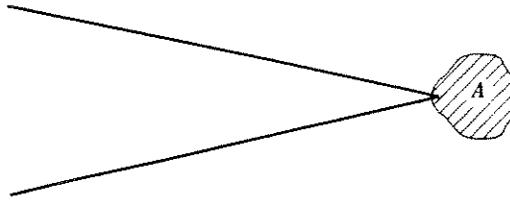


Figura 2.4: Zona plástica próximo à ponta da trinca (Broek, 1986).

2.6 Formulação alternativa para tratamento de fratura dinâmica: Trinca se propagando com velocidade constante

Será apresentada aqui uma formulação matemática para trinca em placas infinitas se propagando com velocidade constante. Detalhes desta formulação podem ser encontrado em Kaninnen e Popelar (1985).

Considere uma placa infinita fraturada no plano $x_1 - x_2$. O eixo x_2 é normal ao plano da fratura e a extensão da fratura é na direção do plano x_1 .

Da teoria da elasticidade tem-se que a equação de Navier é:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.36)$$

Para estado plano de deformação ($u_3 = 0$) é conveniente expressar as componentes de deformação em termos de duas funções potenciais ϕ e ψ :

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad (2.37)$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (2.38)$$

Substituindo-se as equações (2.37) e (2.38) na equação (2.36) tem-se:

$$C_1^2 \nabla^2 \phi = \ddot{\phi} \quad (2.39)$$

$$C_2^2 \nabla^2 \psi = \ddot{\psi} \quad (2.40)$$

onde:

$$C_1 = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \frac{\mu}{\rho}} \quad (2.41)$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.42)$$

sendo:

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (2.43)$$

C_1 e C_2 representam as velocidades de propagação de onda longitudinal e cisalhante, respectivamente.

Introduzindo-se um sistema de coordenadas $x - y$ fixo à ponta da trinca de forma que $x = x_1 - a(t)$ e $y = x_2$ onde $2a$ é o comprimento da fratura, pode-se escrever:

$$\ddot{\phi} = V^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \dot{V} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.44)$$

onde a velocidade instantânea da ponta da trinca é dada por $V = \dot{a}$. Da mesma

forma:

$$\ddot{\psi} = V^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - 2V \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \dot{V} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.45)$$

Substituindo as equações (2.44) e (2.45) em (2.41) e (2.42) e eliminando os termos que possuem derivadas temporais (trinca se propagando com velocidade constante, regime estacionário), tem-se:

$$\beta_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.46)$$

$$\beta_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.47)$$

onde

$$\beta_1^2 = 1 - \frac{V}{C_1^2} \quad (2.48)$$

$$\beta_2^2 = 1 - \frac{V}{C_2^2} \quad (2.49)$$

Fazendo

$$y_1 = \beta_1 y \quad (2.50)$$

$$y_2 = \beta_2 y \quad (2.51)$$

as equações (2.46) e (2.47) tornam-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_1^2} = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_2^2} = 0 \quad (2.53)$$

ϕ pode ser expresso como a parte real ou imaginária de uma função analítica de variáveis complexas:

$$z_1 = x + iy_1 = x + i\beta_1 y = r_1 e^{i\theta_1} \quad (2.54)$$

Similarmente, ψ pode ser escrito em termos de:

$$z_2 = x + iy_2 = x + i\beta_2 y = r_2 e^{i\theta_2} \quad (2.55)$$

Daí

$$\phi = A_1 \operatorname{Re}[z_1^s], \quad (2.56)$$

$$\psi = A_2 \operatorname{Im}[z_2^s] \quad (2.57)$$

onde A_1 , A_2 e s são constantes reais.

Como condições de contorno tem-se $\sigma_{22} = \sigma_{21} = 0$ em $\theta_1 = \theta_2 = \pi$. Uma solução singular para tensões é obtida para $s = 3/2$ e $A_2 = -2A_1\beta_2/(1 - \beta_1^2)$. O fator dinâmico de intensidade de tensão para o modo I é definido como:

$$K(t) = \lim_{r \rightarrow 0} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0, t)] \quad (2.58)$$

O campo de tensão na ponta da trinca pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \frac{K(t)B}{(2\pi r)^{1/2}} \left[(1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) \left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \cos(\theta_1/2) \right. \\ & \left. - \frac{4\beta_1\beta_2}{1 + \beta_2^2} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \cos(\theta_2/2) \right] \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\sigma_{12} = \frac{2K(t)B\beta_1}{(2\pi r)^{1/2}} \left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \text{sen}(\theta_1/2) - \left(\frac{r}{r_2}\right)^{1/2} \text{sen}(\theta_2/2) \right] \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} = \frac{2K(t)B}{(2\pi r)^{1/2}} & \left[-(1 + \beta_2^2) \left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \cos(\theta_2/2) \right. \\ & \left. + \frac{4\beta_1\beta_2}{1 + \beta_2^2} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \cos(\theta_2/2) \right] \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde

$$B = \frac{(1 + \beta_2^2)}{D(V)} \quad (2.62)$$

e

$$D(V) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2)^2 \quad (2.63)$$

O campo de velocidades perto da ponta da trinca é dado por:

$$\dot{u}_1 = -\frac{K(t)BV}{(2\pi r)^2\mu} \left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \cos(\theta_1/2) - \frac{2\beta_1\beta_2}{1 + \beta_2^2} \left(\frac{r}{r_2}\right)^{1/2} \cos(\theta_2/2) \right] \quad (2.64)$$

$$\dot{u}_2 = -\frac{K(t)BV}{(2\pi r)^2\mu} \left[\left(\frac{r}{r_1}\right)^{1/2} \text{sen}(\theta_1/2) - \frac{2}{1 + \beta_2^2} \left(\frac{r}{r_2}\right)^{1/2} \text{sen}(\theta_2/2) \right] \quad (2.65)$$

Capítulo 3

Formulação Integral para Elastodinâmica

3.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado primeiramente um resumo das equações básicas da elastodinâmica. Grande parte das equações serão citadas, fazendo-se apenas comentários de como foram obtidas. Um tratamento mais detalhado das equações da elastodinâmica pode ser encontrados em livros que tratam de dinâmica de meios contínuos como por exemplo Achenbach (1973), Erigen e Suhubi (1975 a) ou Graff (1975).

Em seguida será apresentada a obtenção de uma solução fundamental para elastodinâmica. A solução fundamental é uma solução singular dependente do tempo devido a uma carga concentrada em ponto de um domínio infinito. No caso da elastodinâmica, a solução para este problema foi encontrada por Stokes em 1849. Serão omitidas aqui algumas passagens na obtenção da solução fundamental. O desenvolvimento desta solução pode ser encontrado em Dominguez (1993) ou Erigen e Suhubi (1975 a).

Uma vez descrita a solução fundamental para elastodinâmica, será então apresentada uma formulação de elementos de contorno para problemas no domínio do tempo, enfatizando-se os métodos de integração no tempo e no espaço.

3.2 Equações básicas da elastodinâmica

O tensor deformação ε_{ij} num ponto \mathbf{x} de um domínio Ω num instante t é definido como (Erigen e Suhubi, 1975 b ou Dominguez, 1993):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{u} representa o vetor deslocamento do ponto \mathbf{x} num instante t .

A equação de equilíbrio, obtida a partir da conservação da quantidade de movimento linear é dada por:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.2)$$

onde $\sigma(\mathbf{x}, t)$ é o tensor tensão, $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ representa as forças de corpo por unidade de massa, $\rho(\mathbf{x})$ é a densidade de massa e $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ a aceleração, ou seja, a segunda derivada do vetor \mathbf{u} em relação ao tempo.

A relação constitutiva entre as componentes do tensor tensão e as componentes do tensor deformação para um corpo elástico, conhecida como lei de Hooke, pode ser expressa para material isotrópico como

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.3)$$

onde λ e μ são duas constantes elásticas do material conhecidas como constantes de Lamé e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

As constantes de Lamé, escritas em termos do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν , são dadas por:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.4)$$

$$\lambda = \nu \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.5)$$

As equações de equilíbrio (3.2), relações cinemáticas (3.1), e a lei de Hooke (3.3) formam um completo sistema de equações diferenciais lineares que modelam matematicamente o movimento de um corpo elástico, linear, isotrópico e homogêneo. Pela substituição de (3.1) em (3.3) e esta em (3.2) obtém-se a equação de Navier dada por:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \mathbf{u} - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.6)$$

ou

$$\rho c_1^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \rho c_2^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (3.7)$$

onde c_1 e c_2 são

$$c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (3.8)$$

$$c_2^2 = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.9)$$

e representam as velocidades de propagação de onda longitudinal e cisalhante, respectivamente.

O processo de integração da equação de Navier pode ser simplificado se for feita uma decomposição dos vetores em termos de funções potenciais.

Considere um vetor \mathbf{v} . A decomposição de \mathbf{v} em potenciais de Lamé (Erigen e Suhubi, 1975a) é dada por:

$$\mathbf{v} = \nabla A + \nabla \times \mathbf{B} \quad (3.10)$$

sendo que A e \mathbf{B} são dados para o caso tridimensional por:

$$A(\mathbf{d}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{d}, t) d\Omega(\mathbf{d}) \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{d}, t) d\Omega(\mathbf{d}) \quad (3.12)$$

e para problemas bidimensionais por:

$$A(\mathbf{d}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{d}, t) d\Omega(\mathbf{d}) \quad (3.13)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{d}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \ln \frac{1}{r} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{d}, t) d\Omega(\mathbf{d}) \quad (3.14)$$

onde a função \mathbf{B} satisfaz $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ e $r = |\mathbf{x} - \mathbf{d}|$. Detalhes sobre esta decomposição podem ser encontrados em Achenbach (1973).

3.3 Teorema recíproco e formulação integral para elastodinâmica

A convolução de Riemann entre duas funções escalares $g(\mathbf{x}, t)$ e $h(\mathbf{x}, t)$ é definida como (Graff, 1975):

$$g * t = \int_0^t g(\mathbf{x}, t - \tau) h(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (3.15)$$

O teorema recíproco entre dois estados elastodinâmicos é dado por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (p_k * u_k^{\circ}) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_k * u_k^{\circ} + u_{ok} \dot{u}_k^{\circ} + v_{ok} u_k^{\circ}) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (p_k^{\circ} * u_k) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (b_k^{\circ} * u_k + u_{ok}^{\circ} + \dot{u}_k + v_{ok}^{\circ} u_k) d\Omega \end{aligned} \quad (3.16)$$

Se considerarmos o estado elastodinâmico \bullet como sendo devido a um impulso unitário da forma

$$\rho b_k^{\circ} = \delta(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d}) \delta_{ki} \quad (3.17)$$

aplicado em um ponto \mathbf{d} na direção do eixo x_i de um domínio infinito e considerando condições iniciais nulas, o teorema recíproco é escrito como:

$$c_{ik}(\mathbf{d}) u_k(\mathbf{d}, t) = \int_{\Gamma} (u^{\circ} * p_k - p_{ik}^{\circ} * u_k) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (u_{ik} + b_k) d\Omega + \int_{\Omega} \rho (v_{ok} u_{ik}^{\circ} + u_{ok} \dot{u}_{ik}^{\circ}) d\Omega \quad (3.18)$$

onde c_{ik} é uma constante que depende da posição do ponto fonte (se no domínio, no contorno, ou externo ao domínio).

3.4 Obtenção da solução fundamental para elastodinâmica - Problema de Stokes

Primeiramente tratar-se-á o problema tridimensional num espaço infinito para, em seguida, obter o solução fundamental bidimensional.

Considere uma função impulso escrita da forma da equação (3.17) como:

$$\mathbf{f} = f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d}) \mathbf{e} \quad (3.19)$$

onde $\delta(x)$ é uma distribuição delta de Dirac tridimensional e \mathbf{e} é um vetor constante unitário.

A equação a ser resolvida é do tipo:

$$c^2 \nabla^2 u_i - (\partial^2 u_i / \partial t^2) = -f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d}) e_i \quad (3.20)$$

A solução procurada é da forma:

$$u_i = u_{ij} e_j \quad (3.21)$$

que corresponde à componente i no ponto \mathbf{x} do campo vetorial \mathbf{u} devido a uma carga

concentrada num ponto \mathbf{d} na direção j .

O tensor u_{ij} deve satisfazer:

$$c^2 \nabla^2 u_{ij} - (\partial^2 u_{ij} / \partial t^2) = -f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d}) \delta_{ij} \quad (3.22)$$

Pode-se provar que u_{ij} que satisfaz a equação (3.22) pode ser dada por (Erigen e Suhubi, 1975 a):

$$u_{ij}[\mathbf{x}, t; \mathbf{d}|f(t)] = (1/4\pi c^2 r) f[t - (r/c)] \delta_{ij} \quad (3.23)$$

onde

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{d}| \quad (3.24)$$

A equação (3.23) corresponde a divergência de ondas de uma fonte no ponto $\mathbf{x} = \mathbf{d}$.

A carga concentrada aplicada no domínio pode ser escrita como:

$$\rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = f(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{d}) \mathbf{e} \quad (3.25)$$

onde $f(t)$ é duas vezes diferenciável em relação a t .

Sendo \mathbf{f} uma fonte, tem-se que:

$$\rho \mathbf{f} = -\frac{f(t)}{4\pi} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) \mathbf{e} = f(t) \left(\nabla \times \nabla \times \frac{\mathbf{e}}{4\pi r} - \nabla \nabla \cdot \frac{\mathbf{e}}{4\pi r} \right) \quad (3.26)$$

Decompondo $\rho \mathbf{f}$ em uma parte equivolumial e uma irrotacional, tem-se:

$$\rho \mathbf{f} = \nabla F + \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.27)$$

Igualando-se (3.27) e (3.26), tem-se que:

$$F = -f(t) \nabla \cdot (\mathbf{e}/4\pi r), \quad \mathbf{F} = f(t) \nabla \times (\mathbf{e}/4\pi r) \quad (3.28)$$

Decompondo-se o vetor deslocamento na forma

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} \quad (3.29)$$

onde

$$\mathbf{u}^{(1)} = \nabla \phi \quad \mathbf{u}^{(2)} = \nabla \times \Psi \quad (3.30)$$

Desta forma a equação (3.22) pode ser escrita como:

$$c_1^2 \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} - (\partial^2 \mathbf{u}^{(1)} / \partial t^2) = f(t) \nabla \nabla \cdot (\mathbf{e}/4\pi r) \quad (3.31)$$

$$c_2^2 \nabla^2 \mathbf{u}^{(2)} - (\partial^2 \mathbf{u}^{(2)} / \partial t^2) = f(t) \nabla \times \nabla \times (\mathbf{e}/4\pi r) \quad (3.32)$$

Introduzindo-se dois vetores $\mathbf{A}^{(1)}$ e $\mathbf{A}^{(2)}$ tais que:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{A}^{(1)}, \quad \mathbf{u}^{(2)} = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}^{(2)} \quad (3.33)$$

Sendo $\mathbf{A}^{(a)} = A^{(a)} \mathbf{e}$ e conclui-se que:

$$c_a^2 \nabla^2 A^{(a)} - (\partial^2 A^{(a)} / \partial t^2) = f(t) / 4\pi \rho r \quad (a = 1, 2) \quad (3.34)$$

Resolvendo-se a equação diferencial (3.34), tem-se:

$$A^{(a)}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{16\pi^2 \rho c_a^2} \int_{E_3} \frac{f[t - (|\mathbf{y} - \mathbf{x}|/c_a)]}{|\mathbf{y} - \mathbf{d}| |\mathbf{x} - \mathbf{x}|} dv(\mathbf{y}) \quad (3.35)$$

A integral (3.35) pode ser calculada mais facilmente se for feita uma mudança para coordenadas esféricas com origem no ponto \mathbf{d} e eixo polar no sentido $\mathbf{x} - \mathbf{d}$.

Detalhes desta transformação e da integração podem ser encontrados em Erigen e Suhubi (1975 a).

Após esta integração ter sido realizada, tem-se que o deslocamento u pode ser dado por:

$$u_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{d}|f) = \frac{1}{4\pi\rho} \left[- \left(\frac{3r_i r_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r} \right) \int_0^{c_1^{-1}} \lambda f(t - \lambda r) d\lambda + \frac{r_i r_j}{r^3 c_1^2} f\left(t - \frac{r}{c_1}\right) \right] \quad (3.36)$$

$$u_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t; \mathbf{d}|f) = \frac{1}{4\pi\rho} \left[\left(\frac{3r_i r_j}{r^3} - \frac{\delta_{ij}}{r} \right) \int_0^{c_2^{-1}} \lambda f(t - \lambda r) d\lambda - \frac{r_i r_j}{r^3 c_2^2} f\left(t - \frac{r}{c_2}\right) + \frac{\delta_{ij}}{r c_2^2} f\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] \quad (3.37)$$

onde λ é uma variável genérica definida por:

$$u = r\lambda \quad (3.38)$$

Sabendo-se que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)} \quad (3.39)$$

e que:

$$u_i = u_{ij} e_j \quad (3.40)$$

tem-se que o tensor de segunda ordem u_{ij} é definido por:

$$u_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{d}|f) = u_{ij}^{(1)} + u_{ij}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \left(\frac{3r_i r_j}{r^3} \right) \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \lambda f(t - \lambda r) d\lambda + \frac{r_i r_j}{r^3} \left[\frac{1}{c_1^2} f\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} f\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] + \frac{\delta_{ij}}{r c_2^2} f\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right\} \quad (3.41)$$

ou

$$u_{ij}(\mathbf{x}, t; \mathbf{d}|f) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ r^2 \frac{1}{r_{,ij}} \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \lambda f(t - \lambda r) d\lambda + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} r_{,i} r_{,j} \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{c_1^2} f\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} f\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] + \frac{\delta_{ij}}{rc_2^2} f\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right\} \quad (3.42)$$

Sabendo-se que:

$$\int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \lambda \delta(t - \lambda r) d\lambda = \frac{1}{r} \int_{c_1^{-1}}^{c_2^{-1}} \lambda \delta\left(\lambda - \frac{1}{r}\right) d\lambda \\ = \frac{1}{r^2} \left[H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] \quad (3.43)$$

onde H é a função degrau de Heaviside definida por:

$$H(x) = 1 \quad \text{se } x > 0 \\ H(x) = 0 \quad \text{se } x < 0 \quad (3.44)$$

Daí tem-se que a equação (3.42) torna-se:

$$u_{ik}^o(\mathbf{x}, t, x^i) = \frac{1}{4\pi\rho} \left\{ \frac{t}{r^2} \left(\frac{3r_{,i} r_{,k}}{r} - \frac{\delta_{ik}}{r} \right) \left[H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{r_{,k} r_{,i}}{r} \left[\frac{1}{c_1^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - \frac{1}{c_2^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right] + \frac{\delta_{ik}}{rc_2^2} \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) \right\} \quad (3.45)$$

A lei constitutiva pode ser escrita como:

$$\sigma_{km} = \rho \left(c_1^2 - 2c_2^2 \right) u_{j,j} \delta_{km} + \rho c_2^2 (u_{k,m} + u_{m,k}) \quad (3.46)$$

Chamando

$$\sigma_{km} = \sigma_{ikm} e_i \quad (3.47)$$

onde σ_{lkm} corresponde a componente km do tensor tensão quando um ponto fonte é aplicado na direção l . Daí pode-se obter:

$$\begin{aligned}
\sigma_{lkm} = & \frac{1}{4\pi} \left\{ -6c_2^2 \left[5 \frac{r_{,l}r_{,k}r_{,m}}{r^2} - \frac{\delta_{km}r_{,l} + \delta_{kl}r_{,m} + \delta_{km}r_{,k}}{r^2} \right] \right. \\
& \frac{1}{r^2} \left[H \left(t - \frac{r}{c_1} \right) - H \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right] \\
& + 2 \left[\frac{6}{r^2} r_{,l}r_{,k}r_{,m} - \frac{\delta_{km}r_{,l} + \delta_{kl}r_{,m} + \delta_{km}r_{,k}}{r^2} \right] \\
& \cdot \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) \right] \\
& + \frac{2}{rc_2} r_{,l}r_{,k}r_{,m} \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^3 \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) \right] \\
& - \frac{r_{,l}\delta_{km}}{r^2} \left(1 - 2 \frac{c_2^2}{c_1^2} \right) \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) + \frac{r}{c_1} \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) \right] \\
& \left. - \frac{\delta_{lk}r_{,m} + \delta_{ml}r_{,k}}{r^2} \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right] \right\} \quad (3.48)
\end{aligned}$$

As trações em um ponto da superfície com normal n é dada por:

$$p_{lk} = \sigma_{lkm}n_m \quad (3.49)$$

Substituindo a equação (3.48) na equação (3.49), tem-se a solução fundamental de tração dada por:

$$p_{lk}^* = \frac{1}{4\pi} \left\{ A \left(\frac{\partial r}{\partial n} \delta_{lk} + r_{,l}n_{,k} \right) + r_{,l}r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} B + r_{,k}n_{,l} D \right\} \quad (3.50)$$

onde

$$\begin{aligned}
A = & \frac{6c_2^2}{r^4} t \left[H \left(t - \frac{r}{c_1} \right) - H \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right. \\
& \left. - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) - \frac{1}{r^2} \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right] + \frac{r}{c_2} \delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right] \quad (3.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & \frac{-30c_2^2}{r^4} t \left[H \left(t - \frac{r}{c_1} \right) - H \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right] + \frac{12}{r^2} \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) \right] \\
& + \frac{2}{rc_2} \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) \right] \quad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = & \frac{6c_2^2}{r^4} t \left[H \left(t - \frac{r}{c_1} \right) - H \left(t - \frac{r}{c_2} \right) \right] - \frac{2}{r^2} \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_2} \right) - \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) \right] \\
& - \frac{1}{r^2} \left[1 - 2 \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] \left[\delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) + \frac{r}{c_1} \delta \left(t - \frac{r}{c_1} \right) \right] \quad (3.53)
\end{aligned}$$

A solução fundamental de deslocamentos para o caso caso bidimensional é obtida pela integração ao longo do eixo x_3 perpendicular ao plano $x_1 - x_2$ da equação (3.45) (Figura 3.1):

$$u_{2D}^* = \int_{-\infty}^{\infty} u_{3D}^* dx_3 \quad (3.54)$$

Após esta integração (Dominguez, 1993), obtém-se:

$$\begin{aligned}
u_{ik}^* = & \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{c_1} \frac{H(c_1 t - r)}{r^2} \left[\left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) r_{,i} r_{,k} - R_1 \delta_{ik} \right] \right. \\
& \left. - \frac{1}{c_2} \frac{H(c_2 t - r)}{r^2} \left[\left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) r_{,i} r_{,k} - \left(R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \delta_{ik} \right] \right\} \quad (3.55)
\end{aligned}$$

onde $R_\alpha = (c_\alpha^2 t^2 - r^2)^{1/2}$

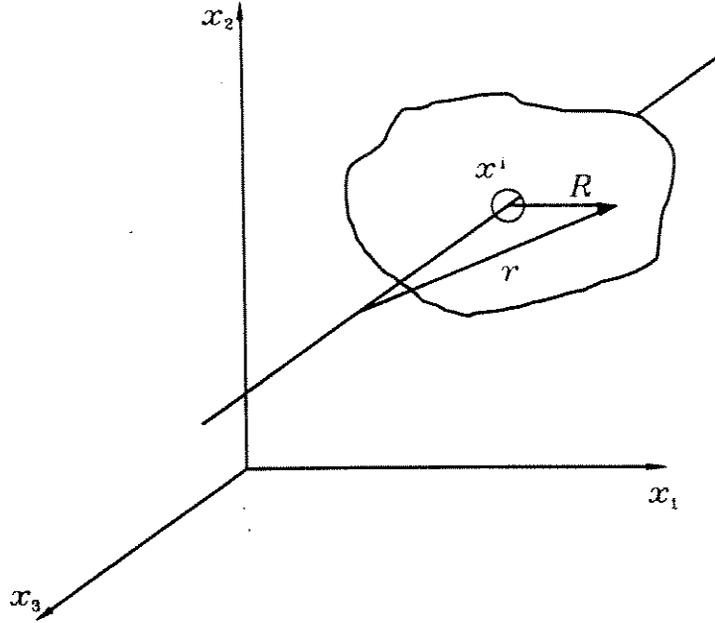


Figura 3.1: Obtenção da solução fundamental para problemas bi-dimensionais.

A solução fundamental de trações, obtida da mesma forma que a de deslocamentos, é dada por (Dominguez, 1993):

$$\begin{aligned}
 p_{lk}^* = & \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{1}{c_1} \frac{H(c_1 t - r)}{c_1} \left[-B_{lk} \left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) - D_{lk} \frac{r^3}{R_1^3} \right] \right. \\
 & + \frac{\delta(c_1 t - r)}{c_1} D_{lk} \left(2R_1 + \frac{r^2}{R_1} \right) + \frac{H(c_2 t - r)}{c_2} \left[A_{lk} \frac{r}{R_2^3} + B_{lk} \left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \right. \\
 & \left. \left. + D_{lk} \frac{r^3}{R_2^3} \right] - \frac{\delta(c_2 t - r)}{c_2} \left[A_{lk} \frac{1}{R_2} + D_{lk} \left(2R_2 + \frac{r^2}{R_2} \right) \right] \right\} \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

onde

$$A_{lk} = \mu \left(2\beta n_k r_{,i} + \delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial n} + n_l r_{,k} \right) \quad (3.57)$$

$$B_{lk} = \frac{-2\mu}{r^3} \left(\delta_{lk} \frac{\partial r}{\partial n} - 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} r_{,k} + n_k r_{,i} + n_l r_{,k} \right) \quad (3.58)$$

$$D_{lk} = \frac{-2\mu}{r^2} \left(\beta n_k r_{,l} + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,l} r_{,k} \right) \quad (3.59)$$

e $\beta = \lambda/2\mu = 1/(1 - 2\nu)$.

O teorema da recíproco entre dois estados elastodinâmicos, dado pela equação (3.16), pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (u_k * p_k^{\bullet}) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (u_k * b_k^{\bullet} + u_k v_{ok}^{\bullet} + \dot{u}_k u_{ok}^{\bullet}) d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (u_k^{\bullet} * p_k) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho (u_k^{\bullet} * b_k + u_k^{\bullet} v_{ok} + \dot{u}_k^{\bullet} u_{ok}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.60)$$

Fazendo o estado \bullet como sendo a solução fundamental devido a uma carga pontual aplicada em x^i na direção l em um tempo t .

$$\rho b_k^{\bullet} = \delta(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^i) \delta_{lk} \quad (3.61)$$

Sendo $u_o^{\bullet} = v_o^{\bullet} = 0$ e explicitando-se a convolução, obtém-se a seguinte equação para um ponto i que pode pertencer ao domínio Ω , ao contorno Γ ou ser externo ao corpo, dada por:

$$\begin{aligned} c_{ik}^i u_i^i(x^i, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{ik}^{\bullet}(x, t - \tau; x^i) p_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\ &\quad - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{ik}^{\bullet}(x, t - \tau; x^i) u_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\ &\quad + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \rho u_{ik}^{\bullet}(x, t - \tau; x^i) b_k(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \\ &\quad + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} \rho [u_{ik}^{\bullet}(x, t - \tau; x^i) v_{ok}(x) \\ &\quad + u_{ik}^{\bullet}(x, t - \tau; x^i) u_{ok}(x)] d\Omega(x) d\tau \end{aligned} \quad (3.62)$$

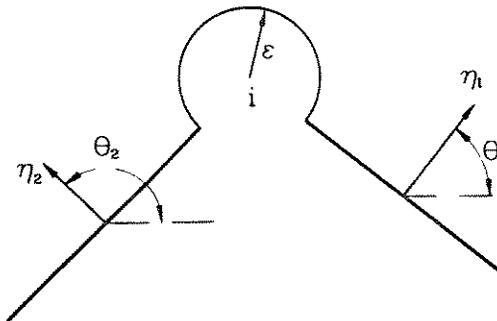


Figura 3.2: Tratamento dos cantos.

onde $c_{ik} = 1/2\delta_{ik}$ quando o ponto i está numa região suave do contorno, $c_{ik} = \delta_{ik}$ quando o ponto i pertence ao domínio e $c_{ik} = 0$ se o ponto i é externo ao domínio.

No caso do nó encontrar-se numa quina, devido ao fato das singularidades existentes nas soluções fundamentais para o caso bidimensional serem as mesmas tanto para a dinâmica quanto para a estática, c_{ik} 's assumem os mesmos valores, sendo dado por:

$$c_{ik} = \delta_{ik} + I_{ik} \quad (3.63)$$

sendo

$$I_{ik} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^* d\Gamma \quad (3.64)$$

A matriz I é obtida fazendo-se a integração de (3.64) e, segundo Brebbia e Dominguez (1989), é dada por (Figura 3.2).

$$I = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)(\pi + \theta_2 - \theta_1) & \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 \\ +\text{sen}2\theta_1 - \text{sen}2\theta_2 & \\ \cos 2\theta_2 - \cos 2\theta_1 & 4(1-\nu)(\pi + \theta_2 - \theta_1) \\ +\text{sen}\theta_2 - \text{sen}2\theta_1 & \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Assumindo as condições iniciais e forças de corpo nulas, tem-se:

$$\begin{aligned} c_{ik}^i u_i^i(x^i, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{ik}^{\bullet}(x, t - \tau; x^i) p_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \\ &\quad - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{ik}^{\bullet}(x, t - \tau; x^i) u_k(x, \tau) d\Gamma(x) d\tau \end{aligned} \quad (3.66)$$

Segundo Mansur (1983) e Antes (1985), para facilitar a integração no tempo, é conveniente escrever a equação (3.66) na forma

$$\begin{aligned} c_{ik}^i u_i^i(x^i, t) &= \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{ik}^{\bullet}(\mathbf{x}, t - \tau; x^i) p_k(\mathbf{x}, \tau) d\Gamma(\mathbf{x}) d\tau \\ &\quad - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} \left[z_{ik}^{\bullet}(\mathbf{x}, t - \tau; x^i) u_k(\mathbf{x}, \tau) \right. \\ &\quad \left. - w_{ik}^{\bullet}(\mathbf{x}, t - \tau; x^i) \dot{u}_k(\mathbf{x}, \tau) \right] d\Gamma(x) d\tau \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde

$$\begin{aligned} w_{ik}^{\bullet} &= w_{ik}^{\bullet(1)} + w_{ik}^{\bullet(2)} = \frac{c_2^2}{2\pi c_1^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} 2r_{,i r, k} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,i n_k} \right] \frac{1}{R_1} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ik} - 2r_{,i r, k}) + r_{,k n_i} \right] \frac{1}{R_2} \end{aligned} \quad (3.68)$$

e

$$\begin{aligned}
z_{ik}^{\bullet} &= z_{ik}^{\bullet(1)} + z_{ik}^{\bullet(2)} = \frac{c_2^2}{2\pi c_1} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[\delta_{ik} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) - 2r_{,j\tau,k} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\frac{c_1(t-\tau) - r}{R_1^3} + \frac{4}{rR_1} + \frac{8R_1}{r^3} \right) \right] + n_l r_{lk} \left(\frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) \right. \\
&\quad \left. + n_k r_{,l} \left(-\frac{\lambda c_1(t-\tau) - r}{\mu R_1^3} + \frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{c_2}{2\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[-\delta_{ik} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{c_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2r_{,l\tau,k} \left(\frac{c_2(t-\tau) - r}{R_2^3} + \frac{4}{rR_2} + \frac{8R_2}{r^3} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - n_l + r_{,k} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{c_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - n_k r_{,l} \left(\frac{2}{rR_2} + \frac{R_2}{r^3} \right) \right\} \tag{3.69}
\end{aligned}$$

3.5 Formulação de elementos de contorno discretizada

A solução numérica da equação (3.67) é determinada discretizando-se o tempo em intervalos Δt e o contorno em elementos de contorno. Os deslocamentos e as trações são aproximadas usando-se funções de interpolação

$$\begin{aligned}
u_k &= \sum_q \sum_m \phi^j(r) \eta^m(\tau) u_k^{mj} \\
p_k &= \sum_q \sum_m \phi^j(r) \mu^m(\tau) p_k^{mj} \tag{3.70}
\end{aligned}$$

onde u_k^{mj} e p_k^{mj} representam os deslocamentos e trações, respectivamente, na direção

k , do nó j num tempo $t_m \leq m\delta t$; $\phi(j)$ é a função de interpolação no espaço, $\eta^m(\tau)$ e $\mu^m(\tau)$ são as funções de interpolação no tempo.

Neste trabalho a função de interpolação no espaço é quadrática, e as funções de interpolação no tempo para os deslocamentos e trações são constante por partes e linear por partes, respectivamente.

As velocidades são interpoladas por:

$$\dot{u} = \sum_q \sum_m \phi^j(r) \dot{\eta}^m(\tau) u_k^{mj} \quad (3.71)$$

A equação (3.67) pode ser escrita para um nó p do domínio num passo de tempo n da forma:

$$\begin{aligned} c_{ij}^p u_j^{np} = & \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^Q \left\{ \left[\int_{\Gamma_q} \left(\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m^+} u_{ij}^* \mu^m d\tau \right) \phi^q d\Gamma \right] p_j^{mq} \right. \\ & \left. - \left[\int_{\Gamma_q} \left(\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m^+} z_{ij}^* \eta^m - w_{ij}^* \dot{\eta}^m d\tau \right) \phi^q d\Gamma \right] u_j^{mq} \right\} \quad (3.72) \end{aligned}$$

onde Q é o dobro do número de nós e n é o número de passos de tempo até o instante considerado.

A primeira e a segunda integral no tempo da equação (3.72) podem ser escritas da forma:

$$\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m^+} u_{ij}^* \mu^m d\tau = \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m^+} (u_{ij}^{*(1)} + u_{ij}^{*(2)}) \mu^m d\tau = U_{ij}^{mn(1)} + U_{ij}^{mn(2)} = U_{ij}^{mn} \quad (3.73)$$

e

$$\int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m^+} (z_{ij}^* \eta^m - w_{ij}^* \dot{\eta}^m) d\tau = P_{ij}^{mn(1)} + P_{ij}^{mn(2)} = P_{ij}^{mn} \quad (3.74)$$

A equação (3.72) pode agora ser escrita como:

$$c_{ij}^p u_j^{np} + \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^Q \hat{H}_{ij}^{nmpq} u_j^{mq} = \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^Q G_{ij}^{nmpq} p_j^{mq} \quad (3.75)$$

onde

$$G_{ij}^{nmpq} = \int_{\Gamma_q} U_{ij}^{nm}(\mathbf{x}, (n-m)\Delta t; \mathbf{x}^p) \phi^q(r) d\Gamma \quad (3.76)$$

e

$$\hat{H}_{ij}^{nmpq} = \int_{\Gamma_q} P_{ij}^{nm}(\mathbf{x}, (n-m)\Delta t; \mathbf{x}^p) \phi^q(r) d\Gamma \quad (3.77)$$

Chamando

$$H_{lk}^{nmij} = \begin{cases} \hat{H}^{nmij} & \text{quando } i \neq j \text{ ou } n \neq m \\ \hat{H}^{nmij} + c_{lk}^i & \text{quando } i = j \text{ e } n = m \end{cases} \quad (3.78)$$

a equação (3.75) torna-se:

$$\sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^Q H_{ij}^{nmpq} u_j^{mq} = \sum_{m=1}^n \sum_{q=1}^Q G_{ij}^{nmpq} p_j^{mq} \quad (3.79)$$

O sistema de equações para todos os nós do contorno com duas direções por nó pode ser escrito na forma matricial como:

$$\sum_{m=1}^n \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m = \sum_{m=1}^n \mathbf{G}^{nm} \mathbf{p}^m \quad (3.80)$$

onde \mathbf{u}^m e \mathbf{p}^m são vetores contendo duas componentes de deslocamento e tração, respectivamente, de todos os nós num passo de tempo m ; \mathbf{H}^{nm} e \mathbf{G}^{nm} , matrizes cujos elementos H_{lk}^{nmij} e G_{lk}^{nmij} são obtidos por integração sobre o elemento. Os índices representam: j o ponto campo (nó analisado), m os passos anteriores, k a direção em que é aplicada a solução fundamental, i o ponto fonte (ponto onde é aplicada a solução fundamental), l a direção que é analisada a resposta no ponto campo e n o instante analisado. Sendo \mathbf{u}^m e \mathbf{p}^m conhecidos dos passos anteriores a n , a solução do sistema para o passo n é dada por:

$$\mathbf{H}^{nn} \mathbf{u}^n = \mathbf{G}^{nn} \mathbf{p}^n + \sum_{m=1}^{n-1} [\mathbf{G}^{nm} \mathbf{p}^m - \mathbf{H}^{nm} \mathbf{u}^m] \quad (3.81)$$

As colunas de \mathbf{H}^{nn} e \mathbf{G}^{nn} são reordenadas de acordo com as condições de contorno. Passando todas as variáveis desconhecidas para o lado esquerdo o sistema (3.81) pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}^n \mathbf{X}^n = \mathbf{F}^n \quad (3.82)$$

sendo \mathbf{X}^n o vetor que contém as variáveis desconhecidas no passo n e \mathbf{F}^n é o produto das matrizes de termos conhecidos pelos vetores termos conhecidos dos vetores de deslocamento e tração.

3.6 Integração no tempo

As funções que interpolam o tempo μ e η são assumidas como constante por partes e linear por partes, respectivamente. Esta escolha mostrou-se mais eficiente quando comparadas com outras possibilidades como constante-constante ou linear-linear (Mansur, 1983).

A função μ é dada por:

$$\mu^m = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau_{m-1} < \tau < \tau_m \\ 0 & \text{para outros casos} \end{cases} \quad (3.83)$$

e $\eta^m(\tau)$ é dado por (Figura 3.3):

$$\eta^m = \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (\tau - \tau_{m-1}) & \text{se } \tau_{m-1} < \tau < \tau_m \\ \frac{1}{\Delta t} (\tau_{m-1} - \tau) & \text{se } \tau_m < \tau < \tau_{m+1} \\ 0 & \text{para outros casos} \end{cases} \quad (3.84)$$

Inserindo (3.83) e (3.55) em (3.73) e integrando-se analiticamente no tempo tem-se (Dominguez, 1993):

$$U_{ik}^{nm} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi\rho c_\alpha^2} [\delta_{ik} u_\alpha + (-1)^\alpha (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) \gamma_\alpha] \quad (3.85)$$

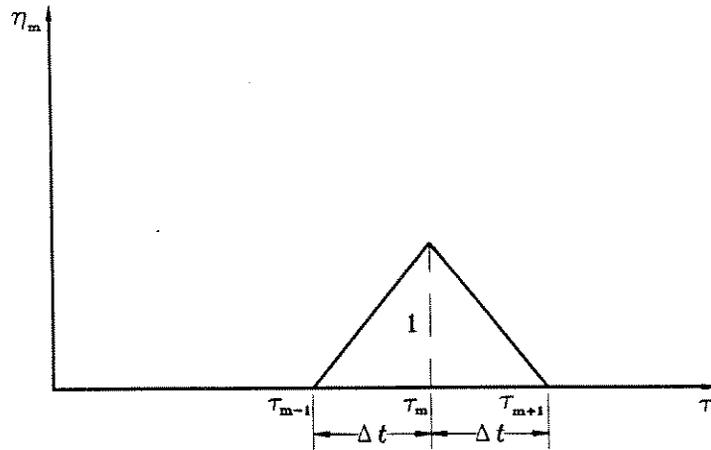


Figura 3.3: Função de interpolação das trações.

onde

$$u_\alpha = \ln \frac{[E_\alpha + (E_\alpha^2 - 1)^{1/2}]}{[M_\alpha + (M_\alpha^2 - 1)^{1/2}]}, \quad (3.86)$$

$$\gamma_\alpha = E_\alpha (E_\alpha^2 - 1)^{-1/2} - M_\alpha (M_\alpha^2 - 1)^{-1/2}, \quad (3.87)$$

$$E_\alpha = \begin{cases} c_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) / r & \text{para } r < c_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) \\ 1 & \text{para outros casos} \end{cases} \quad (3.88)$$

e

$$M_\alpha = \begin{cases} c_\alpha (t_n - \tau_m) / r & \text{para } r < c_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) \\ 1 & \text{para outros casos} \end{cases}. \quad (3.89)$$

Inserindo (3.84) e (3.56) em (3.74) e integrando-se analiticamente no tempo, tem-se:

$$P_{ik}^{nm} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi\rho c_\alpha^2} \frac{1}{r} [A_{ik}^{(\alpha)} p_\alpha - B_{ik}^{(\alpha)} q_\alpha] \quad (3.90)$$

onde

$$p_\alpha = \frac{t - \tau_{m-1}}{3\Delta t} \frac{(E_\alpha^2 - 1)^{3/2}}{E_\alpha} - 2 \frac{t - \tau_m}{3\Delta t} \frac{(M_\alpha^2 - 1)^{3/2}}{M_\alpha} + \frac{t - \tau_{m+1}}{3\Delta t} \frac{(\beta_\alpha^2 - 1)^{3/2}}{\beta_\alpha} \quad (3.91)$$

$$q_\alpha = \frac{t - \tau_{m-1}}{\Delta t} \frac{(E_\alpha^2 - 1)^{1/2}}{E_\alpha} - 2 \frac{t - \tau_m}{\Delta t} \frac{(M_\alpha^2 - 1)^{1/2}}{M_\alpha} + \frac{t - \tau_{m+1}}{\Delta t} \frac{(\beta_\alpha^2 - 1)^{3/2}}{\beta_\alpha} \quad (3.92)$$

$$\beta_\alpha = \begin{cases} c_\alpha (t - \tau_{m+1}) & \text{se } r < c_\alpha (t_n - \tau_{m+1}) \\ 1 & \text{para outros casos} \end{cases} \quad (3.93)$$

$$A_{ik}^{(\alpha)} = 4(-1)^\alpha \left[\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ik} - 4r_{,i}r_{,k}) + r_{,i}n_k + r_{,k}n_i \right] \quad (3.94)$$

$$B^{(1)} = 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i}r_{,k} + 2 \frac{\lambda}{\mu} r_{,i}n_k \quad (3.95)$$

$$B_{ik}^{(2)} = 2 \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) + r_{,k}n_i \quad (3.96)$$

Observe que as singularidades que aparecem em U_{ik}^{mn} e P_{ik}^{nm} quando r tende a zero são da mesma ordem das que aparecem na formulação da elastoestática (Brebbia e Dominguez, 1989 ou Kane, 1993).

3.7 Integração no espaço

As funções de interpolação no espaço (funções de forma) utilizadas neste trabalho são as funções de forma quadráticas (três nós por elemento). Funções de forma quadráticas permitem o modelamento de elementos curvos e são especialmente indicados para problemas onde se tem altos gradientes, que é o caso de problemas de fratura. Além disso, conforme será mostrado no Capítulo 4, pode-se calcular

os fatores dinâmicos de intensidade de tensão através de uma relação com os deslocamentos se o nó central de um elemento quadrático padrão for deslocado para a distância de um quarto do comprimento do elemento da ponta da trinca.

Deslocamentos e trações são representados em um elemento quadrático padrão como:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{u}\phi \quad (3.97)$$

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \\ p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \\ p_1^{(3)} \\ p_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{p}\phi \quad (3.98)$$

onde ϕ_i são as funções de forma quadráticas definidas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (3.99)$$

$$\phi_2 = 1 - \xi^2 \quad (3.100)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (3.101)$$

onde ξ representa uma coordenada adimensional ao longo do elemento (Figura 3.4).

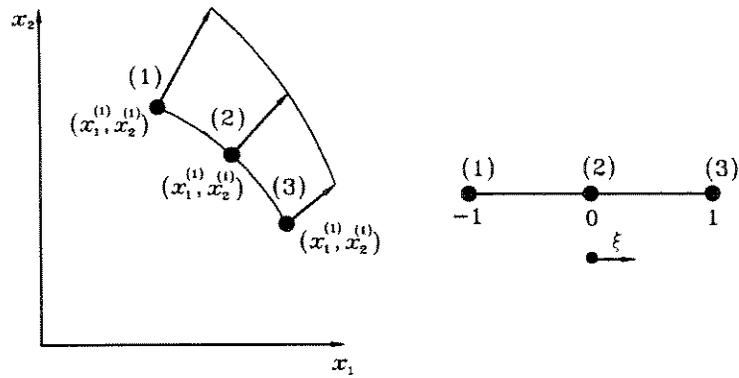


Figura 3.4: Transformação de coordenadas $x_1 - x_2$ para ξ .

A geometria do elemento pode também ser considerada quadrática (elementos isoparamétricos) e, neste caso, ser representada pelas coordenadas nodais e as funções de forma ϕ_i , ou seja (Figura 3.4):

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{Bmatrix} = \mathbf{x}\phi \quad (3.102)$$

Desta forma, as integrais de contorno podem ser escritas como:

$$H^{nmij} = \int_{\Gamma_j} P_{lk}^{nm} \phi^j d\Gamma = \int_{-1}^1 P_{lk}^{nm} \phi^j |J| d\xi \quad (3.103)$$

$$G^{nmij} = \int_{\Gamma_j} U_{lk}^{nm} \phi^j d\Gamma = \int_{-1}^1 U_{lk}^{nm} \phi^j |J| d\xi \quad (3.104)$$

onde $|J|$ representa o módulo do Jacobiano da transformação $X - Y \rightarrow \xi$, e é dado por (Brebbia e Dominguez, 1989 ou Kane, 1993):

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \left\{ \left(\frac{dx_1}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (3.105)$$

onde $dx_1/d\xi$ e $dx_2/d\xi$ são obtidos derivando-se as equações (3.102) em relação a ξ .

Os termos não singulares das matrizes \mathbf{H}^{nm} e \mathbf{G}^{nm} são integrados utilizando-se quadratura de Gauss padrão com 10 pontos de integração. Os termos singulares de \mathbf{G}^{nm} são do tipo $\ln(1/r)$ sendo integrados usando quadratura especial de Gauss (Gauss logarítmico com 10 pontos de integração). Já os termos singulares de \mathbf{H}^{nm} são do tipo $1/r$. O tratamento deste tipo de singularidade é feito analiticamente conforme apresentado por Dominguez (1993). Será mostrado um exemplo para um termo particular, sendo que os demais termos são obtidos da mesma maneira.

Sendo HT uma matriz de um elemento quadrático de dimensões 2×6 (3 nós e 2 graus de liberdade por nó), considere o caso em que o ponto de colocação é o primeiro nó do elemento.

Desta forma, o elemento $HT(1, 2)$ é dado por:

$$HT(1, 2) = \int_{\Gamma} \phi_1 P_{12}^{11} d\Gamma \quad (3.106)$$

onde

$$P_{12}^{11} = \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,1} r_{,2} Z_2 + n_1 r_{,2} Z_1 + n_2 r_{,1} Z_3 \right) \quad (3.107)$$

Desde que Z_2 é de ordem $O(1)$ e $\partial r/\partial n$ é de ordem $O(r)$, o primeiro termo da equação (3.107) tem sua singularidade removida. Sendo o ponto de colocação o primeiro nó, $\phi_1 P_{12}^{11}$ será singular em $\xi = -1$. Considerando que $\bar{Z}_1 = Z_1 + ctt \rightarrow 0$ e $\bar{Z}_3 = Z_3 - ctt \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 0$, onde ctt é a constante de material $(1 - 2\nu)/[4\pi(1 - \nu)]$, pode-se escrever

$$HT(1, 2) = HT_{\text{não singular}} + HT_{\text{singular}} \quad (3.108)$$

onde

$$\begin{aligned}
 HT_{\text{não singular}} &= \int_{\Gamma} \phi_1 \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,1} r_{,2} Z_2 + n_{1r,2} \bar{Z}_1 + n_{2r,1} + \bar{Z}_3 \right) d\Gamma \\
 &\quad + \int_{\Gamma} (1 - \phi) \frac{1}{r} ctt (n_{1r,2} - n_{2r,1}) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.109}$$

e

$$HT_{\text{singular}} = \int_{\Gamma} -\frac{1}{r} ctt (n_{1r,2} - n_{2r,1}) dS \tag{3.110}$$

As integrais em $HT_{\text{não singular}}$ são integradas por quadratura de Gauss enquanto que HT_{singular} é calculada analiticamente da forma:

$$\begin{aligned}
 HT_{\text{singular}} &= \int_0^S \frac{ctt}{r} (n_{2r,1} - n_{1r,2}) dS \\
 &= \int_0^S \frac{ctt}{r} \left(-\frac{dx}{dS} \frac{x}{r} - \frac{dy}{dS} \frac{y}{r} \right) dS \\
 &= \int_0^S -\frac{ctt}{r^2} \left(x \frac{dx}{dS} + y \frac{dy}{dS} \right) dS
 \end{aligned} \tag{3.111}$$

onde S é um comprimento infinitesimal ao longo do contorno e as identidades $n_1 = dy/dS$, $n_2 = -dx/dS$ foram usadas.

Desde que

$$\left(x \frac{dx}{dS} + y \frac{dy}{dS} \right) dS = \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2)}{dS} dS = \frac{1}{2} d(r^2) = r dr \tag{3.112}$$

então

$$HT_{\text{singular}} = \int_0^{R_3} -\frac{ctt}{r} dr = -ctt [\ln r]_0^{R_3} \tag{3.113}$$

onde R_3 é a distância entre os nós 1 e 3. Pode-se notar que a integral (3.113) não é regular. Até mesmo o valor de Cauchy diverge, pois está se considerando apenas um

lado do domínio de integração. O valor desta integral é dado no sentido do valor da parte finita de Hadamard, porque a singularidade cancelará com a correspondente do outro lado do ponto de colocação.

Daí

$$HT_{\text{singular}} = -ctt \ln R_3 \quad (3.114)$$

Os outros termos singulares da matriz H^{nm} são obtidos de maneira similar.

Capítulo 4

Método dos Elementos de Contorno aplicado ao Cálculo dos Fatores Dinâmicos de Intensidade de Tensão

4.1 Introdução

Neste capítulo será apresentado um procedimento para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão baseado no uso de elemento de ponto a um quarto e no método das subregiões. Tal procedimento foi usado por Blandford *et al.* (1981) no cálculo do fator de intensidade de tensão para problemas carregados estaticamente. Será assumido, conforme apresentado no Capítulo 2, que a distribuição dos deslocamentos para os casos dinâmicos e estáticos se dá da mesma forma. Esta hipótese já foi assumida anteriormente por Fedelinski *et al.* (1993) que trabalharam com elementos de ponto a um quarto descontínuos e método duplo de elementos de contorno. Para evitar que se tenha sistemas de equações lineares singulares em problemas sem simetria, o domínio será dividido em subregiões, método conhecido como das subregiões.

No final do capítulo serão apresentados dois procedimentos alternativos para

o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão utilizados por outros autores e com os quais os resultados deste trabalho serão comparados.

4.2 Elemento de ponto a um quarto

As equações (2.34) e (2.35) mostram que o campo de deslocamento perto da ponta da trinca tem o comportamento proporcional a \sqrt{r} . Deste modo, se este comportamento já estiver incluído na função de forma que interpola os deslocamentos, pode-se ter uma boa aproximação para o campo sem a necessidade de um grande refinamento da malha (que seria necessário caso os elementos da ponta da trinca fossem elementos quadráticos padrão).

A inclusão de funções de forma que possuem o comportamento \sqrt{r} pode ser feita de forma simples, bastando mudar o nó central do elemento quadrático para a distância de um quarto do comprimento do elemento para perto da ponta da trinca. Deve porém ser lembrado que isto só é possível se o elemento da ponta da trinca não for um elemento curvo.

Se forem usados elementos de contorno quadráticos, a interpolação dos deslocamentos em um elemento com extremidades em $[-1, 1]$ é dada por:

$$y^{(i)} = \phi_n(\xi)y_n^{(i)} \quad (4.1)$$

onde: $y^{(i)}$ representa deslocamento, tração ou posição ao longo do elemento, i é a direção, n é o número do nó do elemento e ϕ_n são as funções de forma quadráticas dadas por (3.99), (3.100) e (3.101).

A Figura 4.1 mostra um elemento quadrático padrão e um elemento de ponto a um quarto. Conforme a equação (4.1), a posição r no elemento de ponto a um quarto correspondente à posição ξ do elemento quadrático é dada por:

$$r = \phi_1 r^{(A)} + \phi_2 r^{(B)} + \phi_3 r^{(C)} \quad (4.2)$$

porém:

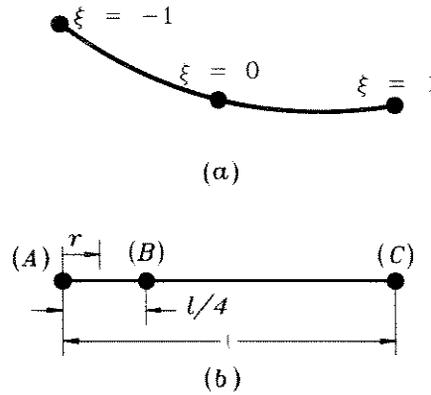


Figura 4.1: (a) Elemento quadrático padrão e (b) elemento de ponto a um quarto.

$$r^{(A)} = 0 \quad (4.3)$$

$$r^{(B)} = l/4 \quad (4.4)$$

$$r^{(C)} = l \quad (4.5)$$

Substituindo as equações (4.3), (4.4), (4.5), e as funções de forma (3.99), (3.100) e (3.101), em (4.2), tem-se:

$$r = \frac{-\xi}{2}(1 - \xi)0 + (1 + \xi)(1 - \xi)l/4 + \frac{\xi}{2}(1 + \xi)l \quad (4.6)$$

Desta forma, tem-se:

$$\frac{r}{l} = \frac{(1 + \xi)^2}{4} \quad (4.7)$$

Escrevendo ξ como função de r/l , tem-se:

$$\xi = \pm 2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1 \quad (4.8)$$

sendo que a transformação $\xi[-1, 1] \rightarrow r[0, l]$ é satisfeita somente se:

$$\xi = 2\sqrt{\frac{r}{l}} - 1 \quad (4.9)$$

Substituindo (4.9) nas funções de forma ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , tem-se:

$$\phi_1 = 2\frac{r}{l} - 3\sqrt{\frac{r}{l}} + 1. \quad (4.10)$$

$$\phi_2 = -4\frac{r}{l} + 4\sqrt{\frac{r}{l}}. \quad (4.11)$$

$$\phi_3 = -\sqrt{\frac{r}{l}} + 2\frac{r}{l}. \quad (4.12)$$

Substituindo as funções de forma (4.10), (4.11) e (4.12) na equação (4.1) escrita para o deslocamento, pode-se obter:

$$u_i = a_i^1 + a_i^2\sqrt{\frac{r}{l}} + a_i^3\frac{r}{l}. \quad (4.13)$$

onde

$$a_i^1 = u_i^{(A)} \quad (4.14)$$

$$a_i^2 = -u_i^{(C)} + 4u_i^{(B)} - 3u_i^{(A)} \quad (4.15)$$

$$a_i^3 = 2u_i^{(C)} - 4u_i^{(B)} + 2u_i^{(A)} \quad (4.16)$$

Como foi mostrado, consegue-se uma interpolação para os deslocamentos com comportamento proporcional a \sqrt{r} com a simples mudança de posição do nó central do elemento quadrático da ponta da fratura.

4.3 Fatores dinâmicos de intensidade de tensão

Conforme já mencionado, o cálculo do fator dinâmico de intensidade de tensão pode ser feito com base em princípios de energia (Integral \hat{J}), ou com base na abertura da fratura (elemento de ponto a um quarto). A abertura da trinca é sempre calculada através do deslocamento normal a sua face. Para isto, é necessário que se

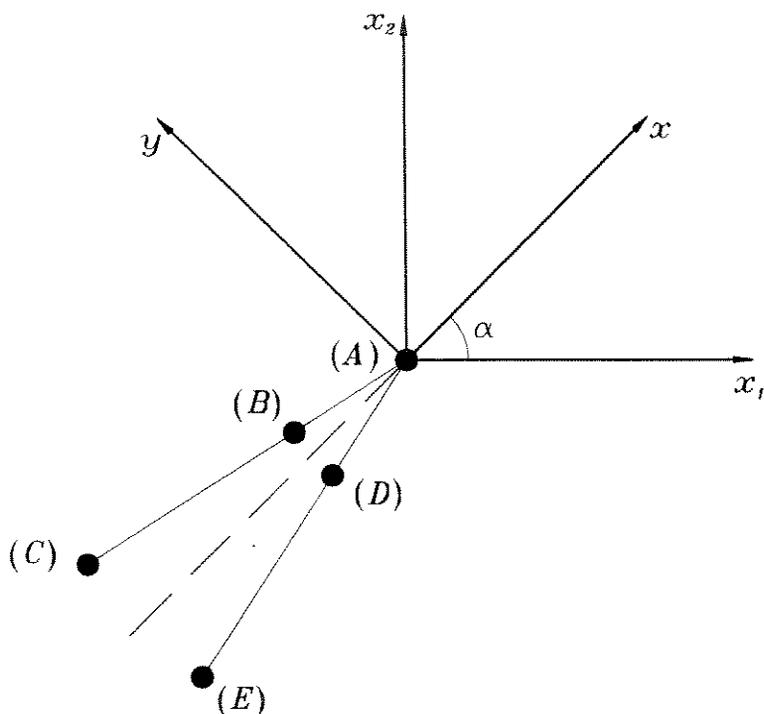


Figura 4.2: Sistemas de coordenadas

faça uma transformação de coordenadas original do sistema $x_1 - x_2$ para um novo sistema $x - y$ normal as faces da trinca conforme mostra a Figura 4.2.

Sendo u e v os deslocamentos medidos em relação ao sistema fixo à ponta da trinca (Figura 4.2) nas direções x e y , respectivamente, a transformação de coordenadas é dada por:

$$u = u_1 \cos(\alpha) + u_2 \sin(\alpha) \quad (4.17)$$

$$v = -u_1 \sin(\alpha) + u_2 \cos(\alpha) \quad (4.18)$$

onde α é o ângulo entre a bissetriz do ângulo formado pelas arestas da trinca e o eixo x_1 .

Como em fratura dinâmica o ângulo entre a ponta da trinca e o eixo x_1 é dependente do tempo, é conveniente que se calcule este ângulo a cada passo de tempo.

Isto pode ser feito calculando-se o ângulo entre a bissetriz do ângulo BAD e o eixo x_1 a cada passo de tempo. De acordo com a Figura 4.2 este ângulo é dado por:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_{x_2}}{l_{x_1}}\right) \quad (4.19)$$

$$l_{x_1} = (x_1^{(A)} + u_1^{(A)}) - (x_1^{(B)} + u_1^{(B)} + x_1^{(D)} + u_1^{(D)})/2 \quad (4.20)$$

$$l_{x_2} = (x_2^{(A)} + u_2^{(A)}) - (x_2^{(B)} + u_2^{(B)} + x_2^{(D)} + u_2^{(D)})/2 \quad (4.21)$$

sendo $x_1^{(i)}$ e $x_2^{(i)}$ as coordenadas dos nós i , antes do corpo fraturado ser carregado, correspondente ao sistema $x_1 - x_2$.

A abertura da trinca pode ser escrita através das equações (2.34) e (2.35), fazendo-se $\theta = \pi$ e $\theta = -\pi$. Desta forma, tem-se:

$$u(\theta = \pi) - u(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{\mu} K_{II}(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (4.22)$$

$$v(\theta = \pi) - v(\theta = -\pi) = \frac{\kappa + 1}{\mu} K_I(t) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \quad (4.23)$$

Escrevendo a equação (4.13) para u e v , fazendo $u^{(A)} = v^{(A)} = 0$ e igualando-se os coeficientes que multiplicam \sqrt{r} , com os coeficientes que multiplicam \sqrt{r} das equações (4.22) e (4.23), tem-se:

$$K_I(t) = \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} [4(v^{(B)} - v^{(D)}) + v^{(E)} - v^{(C)}] \quad (4.24)$$

$$K_{II}(t) = \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} [4(u^{(B)} - u^{(D)}) + u^{(E)} - u^{(C)}] \quad (4.25)$$

Para problemas simétricos tem-se $v^{(B)} = -v^{(D)}$, $v^{(C)} = -v^{(E)}$ e $u^{(B)} = u^{(D)}$ e $u^{(C)} = u^{(E)}$. Daí tem-se que os fatores dinâmicos de intensidade de tensão são dados por:

$$K_I(t) = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (4v^{(B)} - v^{(C)}) \quad (4.26)$$

$$K_{II}(t) = 0 \quad (4.27)$$

Desta forma pode-se calcular os fatores dinâmicos de intensidade de tensão através de equações simples, dependentes apenas dos deslocamentos nodais da ponta da trinca .

4.4 Método das subregiões

Em problemas de elementos de contorno aplicado à mecânica da fratura tem-se o inconveniente de dois pontos pertencentes a faces opostas da trinca possuírem as mesmas coordenadas. Se nenhum cuidado for tomado, o sistema de equações torna-se singular. Para solucionar este problema, em geral, tem-se utilizado dois procedimentos: ou se divide o domínio em duas subregiões, fazendo com que as faces da trinca pertençam a subregiões distintas (método das subregiões) ou se utilizam equações integrais diferentes para pontos que possuem as mesmas coordenadas (método duplo dos elementos de contorno).

No método das subregiões, os pontos pertencentes a faces opostas da trinca são integradas em percursos diferentes. Isto evita erros numéricos que aconteceriam caso os pontos de mesmas coordenadas fossem integrados no mesmo caminho.

Além de problemas aplicados à mecânica da fratura, o método das subregiões é também utilizado em problemas nos quais o domínio é composto de mais de um tipo de material e com propriedades diferentes. Neste caso, cada subregião engloba a parte de um mesmo material. Como para os problemas tratados neste trabalho não são necessárias mais que duas subregiões, o método será mostrado para domínios bi-partidos. Entretanto, nada impede que se tenha um número maior de subregiões.

Considere um corpo dividido em dois domínios Ω_1 e Ω_2 cujos contornos na interface sejam Γ_1^I e Γ_2^I , respectivamente, conforme mostrado na Figura 4.3.

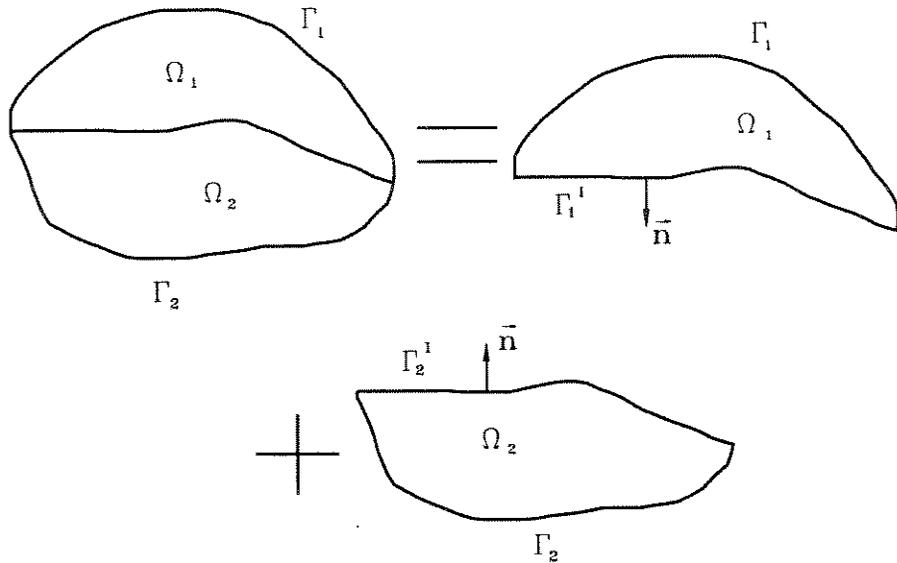


Figura 4.3: Divisão de um domínio em duas subregiões

Se u_i^I e t_i^I são os deslocamentos e trações, respectivamente, na interface Γ_i^I , para $i = 1, 2$, então, para satisfazer a continuidade de deslocamento e o equilíbrio de trações, tem-se:

$$u_1^I = u_2^I \quad (4.28)$$

$$t_1^I = -t_2^I \quad (4.29)$$

sendo u_i^I e t_i^I ambos desconhecidos na interface I . A representação matricial da região 1 fica:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_1^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_1^I \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

e da a região 2:

$$\begin{bmatrix} H_2^I & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2^I & G_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_2^I \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

As equações (4.30) e (4.31) podem ser escritas num só sistema como:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2^I & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1^I \\ u_2^I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_1^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_2^I & G_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_1^I \\ p_2^I \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

Inserindo a continuidade de deslocamentos (4.28) e o equilíbrio de trações (4.29) no sistema (4.32), tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_1^I & 0 \\ 0 & H_2^I & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1^I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_1^I & 0 \\ 0 & -G_2^I & G_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_1^I \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Como os deslocamentos e trações na interface são desconhecidos, o sistema é frequentemente escrito como:

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_1^I & -G_1^I & 0 \\ 0 & H_2^I & G_2^I & H_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_1^I \\ u_2^I \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

Obtido o sistema (4.34), aplica-se então as condições de contorno e resolve-se o sistema encontrando-se os valores desconhecidos nos nós do contorno e da interface. A matriz do lado esquerdo do sistema (4.34) é uma matriz quadrática de dimensões $2N \times 2N$, sendo N o número de nós do contorno do domínio e da interface de ambas as subregiões. A matriz do lado direito é retangular, sendo que seu número de linhas é $2N$ e seu número de colunas depende do número de nós da interface. Como pode ser notado, uma característica do sistema a ser resolvido é que este possui sub-matrizes nulas.

Para casos de tempo pequeno (que é o caso dos problemas tratados aqui) a esparsidade (número de zeros) da matriz aumenta ainda mais, podendo algumas

vezes ter-se uma matriz mal condicionada, ou seja, a razão entre seus maior e menor autovalores é muito grande. Para sistemas mal condicionados exigem-se rotinas para resolução de sistemas lineares bem elaboradas para que não aconteça os chamados *fill ins* (Press *et al.*, 1992), ou seja, termos da matriz que são zero, passam a ter valor não nulo, ocasionando erros numéricos. Neste trabalho optou-se por usar decomposição LU com pivotamento. Detalhes sobre esta formulação podem ser encontrados em Press *et al.* (1992).

4.5 Métodos alternativos para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão

Serão apresentados nesta seção duas metodologias alternativas para cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão utilizadas por outros autores que trabalharam com problemas de fratura dinâmica: (1) o elemento de ponto a um quarto com singularidade de tração, proposto por Martinez e Dominguez (1984) e (2) a integral \hat{J} independente do percurso, proposto por Kishimoto e Sakata (1980). Como poderá ser notado, a implementação destes procedimentos é bem mais complexa que a implementação dos elementos de ponto a um quarto.

4.5.1 Elemento de ponto a um quarto com singularidade de tração

Embora a equação (4.13) aproxime bem o campo de deslocamentos, ela não faz o mesmo para o campo de trações pois não inclui a singularidade do tipo $\sqrt{1/r}$. Porém, como em elementos de contorno trações e deslocamentos podem ser escritos de forma independente, a singularidade pode ser incluída na representação das trações usando funções de forma modificadas da forma:

$$p_i = \phi_1 \bar{p}_i^{(A)} \sqrt{\frac{l}{r}} + \phi_2 \bar{p}_i^{(B)} \sqrt{\frac{l}{r}} + \phi_3 \bar{p}_i^{(C)} \sqrt{\frac{l}{r}} \quad (4.35)$$

ou

$$p_i = \bar{\phi}_1 \bar{p}_i^{(A)} + \bar{\phi}_2 \bar{p}_i^{(B)} + \bar{\phi}_3 \bar{p}_i^{(C)} \quad (4.36)$$

onde $\bar{\phi}_1$, $\bar{\phi}_2$ e $\bar{\phi}_3$ são as funções de forma modificadas que incluem a singularidade $\sqrt{1/r}$. $\bar{p}_i^{(j)}$ representa o valor de $p_i^{(j)}$ dividido pelo valor nodal de $\bar{\phi}_i$ no nó, ou seja:

$$\bar{p}_i^{(C)} = p_i^{(C)} \quad (4.37)$$

$$\bar{p}_i^{(B)} = \frac{p_i^{(B)}}{2} \quad (4.38)$$

$$\bar{p}_i^{(A)} = \lim_{r \rightarrow 0} p_i^{(A)} \sqrt{\frac{l}{r}} \quad (4.39)$$

A equação (4.35) pode ser escrita como:

$$p_i = \bar{a}_i^1 \sqrt{\frac{l}{r}} + \bar{a}_i^2 + \bar{a}_i^3 \sqrt{\frac{r}{l}} \quad (4.40)$$

onde

$$\bar{a}_i^1 = \bar{p}_i^{(A)} \quad (4.41)$$

$$\bar{a}_i^2 = -\bar{p}_i^{(C)} + 4\bar{p}_i^{(B)} - 3\bar{p}_i^{(A)} \quad (4.42)$$

$$\bar{a}_i^3 = 2\bar{p}_i^{(C)} - 4\bar{p}_i^{(B)} + 2\bar{p}_i^{(A)} \quad (4.43)$$

Usando elementos de ponto a um quarto com singularidade de trações, deslocamentos e trações serão corretamente representados. O elemento incluindo este tipo de representação é o chamado elemento de ponto a um quarto com singularidade de tração.

Os fatores dinâmicos de intensidade de tensão são definidos pelos seguintes limites (Capítulo 2).

$$K_I(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22} \quad (4.44)$$

$$K_{II}(t) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12} \quad (4.45)$$

Se a discretização é feita de modo que o elemento da ponta da trinca é um elemento de ponto a um quarto com singularidade de tração e que $\theta = 0$, então $p_1 = \sigma_{12}$ e $p_2 = \sigma_{22}$ e os valores nodais para tração na ponta da trinca é dado por:

$$\bar{p}_1 = \lim_{r \rightarrow 0} p_1 \sqrt{\frac{r}{l}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{12} \sqrt{\frac{r}{l}} \quad (4.46)$$

$$\bar{p}_2 = \lim_{r \rightarrow 0} p_2 \sqrt{\frac{r}{l}} = \lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{22} \sqrt{\frac{r}{l}} \quad (4.47)$$

Deste modo, os fatores dinâmicos de intensidade de tensão coincidem com as trações nodais a menos de uma constante e podem ser calculados como:

$$K_I(t) = \bar{p}_2 \sqrt{2\pi l} \quad (4.48)$$

$$K_{II}(t) = \bar{p}_1 \sqrt{2\pi l} \quad (4.49)$$

4.5.2 Integral \hat{J} independente do percurso

A integral \hat{J} obtida a partir do balanço de energia é definida por Kishimoto *et al.* (1980) como:

$$\hat{J}_k = \int_{\Gamma+\Gamma_s} (W n_k - t_i u_{i,k}) dS + \int_A \rho \ddot{u}_i u_{i,k} dA, \quad k = 1, 2 \quad (4.50)$$

onde Γ é uma curva arbitrária ao redor da ponta da trinca e Γ_s são as arestas da fratura, A é a área fechada por Γ e Γ_s , W é a densidade de energia e n_k a componente do vetor unitário externo normal a A (Figura 4.4). Para se obter os fatores dinâmicos de intensidade de tensão, a integral \hat{J} pode ser decomposta como:

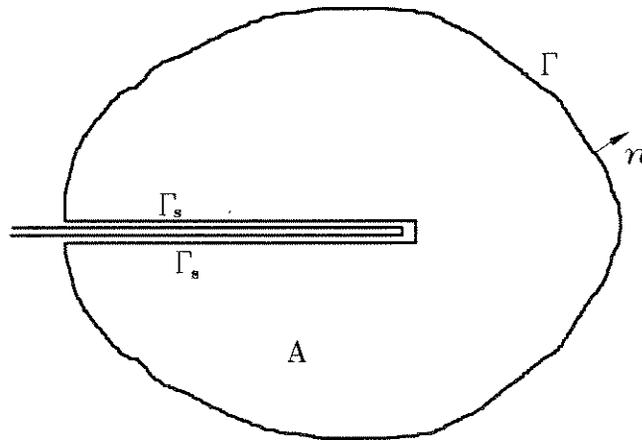


Figura 4.4: Percurso de integração da integral \hat{J}

$$\hat{J}_1 = \hat{J}_1^I + \hat{J}_1^{II} \quad (4.51)$$

onde

$$\hat{J}_1^N = \int_{S+S_c} (W^N n_1 - t_i u_{i,1}^N) dS + \int_A \rho \ddot{u}_i^N u_{i,1}^N dA, \quad N = I, II \quad (4.52)$$

e N indica o modo de carregamento. A convenção de soma da notação indicial não é empregada aqui.

A relação entre os fatores dinâmicos de intensidade de tensão e a integral \hat{J} é então dada por:

$$K_I(t) = \sqrt{\frac{8\mu}{\kappa+1} \hat{J}_1^I} \quad (4.53)$$

$$K_{II}(t) = \sqrt{\frac{8\mu}{\kappa+1} \hat{j}_I^{II}} \quad (4.54)$$

onde $\kappa = 3 - 4\nu$ para estado plano de deformação e $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ para estado plano de tensão, ν é a razão de Poisson e μ o módulo de elasticidade transversal.

Capítulo 5

Resultados Numéricos

5.1 Introdução

Neste capítulo a metodologia para cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão será aplicada a problemas de domínios finitos submetidos a cargas dependentes do tempo.

Primeiramente será tratado um problema simples, constituindo-se de uma placa engastada, sem fratura, sob um carregamento degrau aplicado no instante $t = 0$. Pretende-se, com este problema, validar o método das subregiões.

Em seguida serão tratados problemas de placa com fraturas, nos quais serão utilizados problemas simétricos (que não necessitam de utilizar o método das sub-regiões) e não simétricos.

Os problemas aqui tratados já foram estudados anteriormente por outros autores utilizando-se outras metodologias. Os resultados serão comparados com os resultados destes autores. Para se verificar o comportamento do sistema, o tempo será estendido para um intervalo superior a um ciclo. Será também estudada a dependência dos resultados quanto ao tamanho dos elementos e do passo de tempo, obtendo-se os fatores dinâmicos de intensidade de tensão com diferentes malhas e diferentes passos de tempo.

5.2 Validação do método das subregiões

Neste ítem, serão calculados os deslocamentos no contorno de uma placa sem fratura engastada em uma extremidade e carregada por um carregamento degrau na outra extremidade como mostra a Figura 5.1.

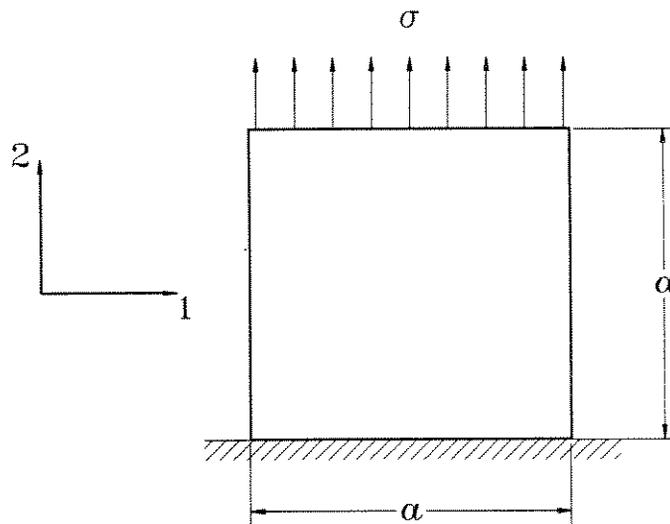


Figura 5.1: Placa sem fratura.

Os dados do problema são: dimensão $a = 20$ mm, carga $\sigma = 0.4$ GPa, módulo de elasticidade transversal $\mu = 100 \cdot 10^9$ GPa, razão de Poisson $\nu = 0.3$ e densidade $\rho = 5000$ Kg/m³. O passo de tempo usado foi $\Delta t = 0.2$ μ s.

A Figura 5.2 mostra o carregamento tipo degrau, aplicado num instante $t = t_0$.

Serão utilizadas duas malhas diferentes, uma sem e outra com subregiões conforme mostrado na Figura 5.3. Ambas possuem 6 elementos (12 nós) no contorno externo.

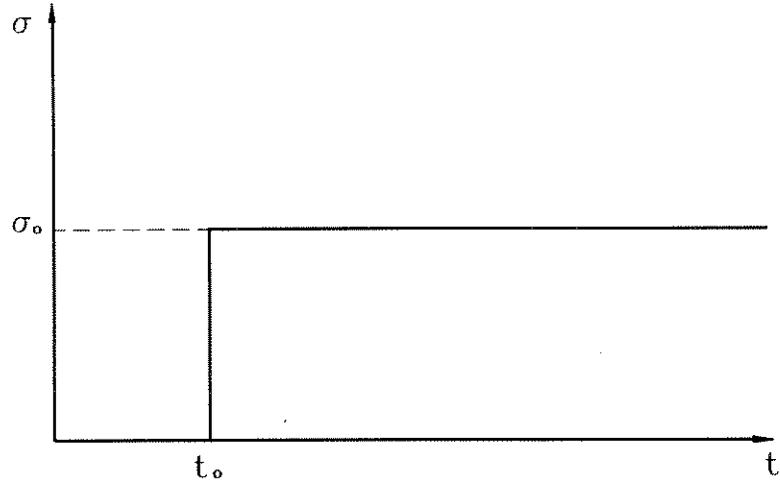


Figura 5.2: Carregamento degrau aplicado em $t = t_0$.

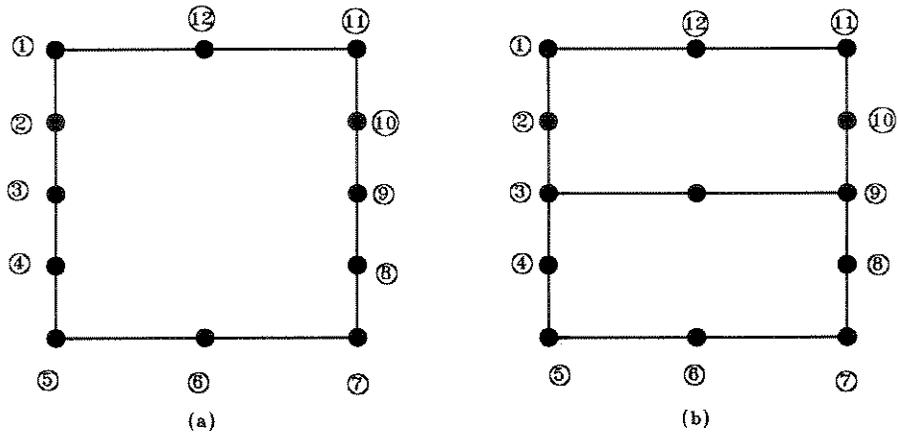


Figura 5.3: Malha para a placa sem fratura: (a) sem subregião, (b) com subregiões.

Como os resultados estão muito próximos, ao invés de se usar gráficos, uma melhor comparação dos resultados pode ser feita através de tabelas. A Tabela 5.1 mostra os resultados para deslocamentos do nó 12 para vários passos de tempo. Convém lembrar que, devido a simetria do problema, o deslocamento u_1 do nó 12 na direção 1 é exatamente zero. Com isso, pode-se dizer que os resultados para o problema com subregiões (malha b) são melhores, visto que os deslocamentos u_1 são menores que para o problema sem subregião.

Tabela 5.1: Deslocamentos do nó 12 (em milímetros)

tempo (μs)	Sem subregião		Com subregiões	
	u_1	u_2	u_1	u_2
0.2	$0.1475038 \cdot 10^{-18}$	$0.1700603 \cdot 10^{-1}$	$0.1475038 \cdot 10^{-18}$	$0.1700603 \cdot 10^{-1}$
0.4	$0.1475038 \cdot 10^{-18}$	$0.1700603 \cdot 10^{-1}$	$0.1475038 \cdot 10^{-18}$	$0.1700603 \cdot 10^{-1}$
0.6	$-0.1643674 \cdot 10^{-10}$	$0.1666619 \cdot 10^{-1}$	$-0.1201416 \cdot 10^{-18}$	$0.1666619 \cdot 10^{-1}$
0.8	$0.1673557 \cdot 10^{-9}$	$0.1132692 \cdot 10^{-1}$	$0.3252711 \cdot 10^{-18}$	$0.1132692 \cdot 10^{-1}$
1.	$-0.9925965 \cdot 10^{-11}$	$0.2492194 \cdot 10^{-2}$	$0.3392537 \cdot 10^{-18}$	$0.2492194 \cdot 10^{-2}$
1.2	$-0.5755155 \cdot 10^{-9}$	$0.3258869 \cdot 10^{-1}$	$0.1050285 \cdot 10^{-17}$	$0.3258869 \cdot 10^{-1}$
1.4	$0.2583591 \cdot 10^{-9}$	$0.4559551 \cdot 10^{-1}$	$0.8851689 \cdot 10^{-18}$	$0.4559551 \cdot 10^{-1}$
1.6	$0.9279222 \cdot 10^{-9}$	$0.5619825 \cdot 10^{-1}$	$0.1814240 \cdot 10^{-17}$	$0.5619825 \cdot 10^{-1}$
1.8	$-0.1079600 \cdot 10^{-8}$	$0.6110973 \cdot 10^{-1}$	$0.1271196 \cdot 10^{-18}$	$0.6110973 \cdot 10^{-1}$
2.0	$0.5167377 \cdot 10^{-8}$	$0.6469797 \cdot 10^{-1}$	$-0.2244631 \cdot 10^{-17}$	$0.6469796 \cdot 10^{-1}$
2.2	$0.9496217 \cdot 10^{-9}$	$0.7978769 \cdot 10^{-1}$	$0.5677326 \cdot 10^{-19}$	$0.7978770 \cdot 10^{-1}$
2.4	$-0.4742142 \cdot 10^{-8}$	$0.7828150 \cdot 10^{-1}$	$0.5496484 \cdot 10^{-18}$	$0.7828150 \cdot 10^{-1}$
2.6	$0.2839258 \cdot 10^{-11}$	$0.5610614 \cdot 10^{-1}$	$0.2484152 \cdot 10^{-18}$	$0.5610614 \cdot 10^{-1}$
2.8	$0.9541513 \cdot 10^{-8}$	$0.7552676 \cdot 10^{-1}$	$-0.6723361 \cdot 10^{-17}$	$0.7552676 \cdot 10^{-1}$
3.	$-0.6258541 \cdot 10^{-8}$	0.1021819	$0.8933100 \cdot 10^{-17}$	0.1021819
3.2	$-0.8428345 \cdot 10^{-8}$	$0.7861094 \cdot 10^{-1}$	$0.5472871 \cdot 10^{-17}$	$0.7861090 \cdot 10^{-1}$
3.4	$0.1577501 \cdot 10^{-7}$	$0.9090333 \cdot 10^{-1}$	$-0.2356374 \cdot 10^{-16}$	$0.9090329 \cdot 10^{-1}$
3.6	$-0.4938176 \cdot 10^{-8}$	0.1778314	$0.2705931 \cdot 10^{-16}$	0.1778315
3.8	$-0.2765878 \cdot 10^{-8}$	$0.7705428 \cdot 10^{-1}$	$0.6283262 \cdot 10^{-16}$	$0.7705474 \cdot 10^{-1}$
4.	$0.4693565 \cdot 10^{-7}$	$0.1054876 \cdot 10^{-1}$	$-0.9760850 \cdot 10^{-16}$	$0.1054449 \cdot 10^{-1}$

A Tabela 5.2 mostra o deslocamento de todos os nós do contorno externo para o passo de $1 \mu s$. Pode-se observar, para ambos os casos, a perfeita coerência entre os resultados e a simetria do problema, ou seja, $u_1^{(1)} = -u_1^{(11)}$, $u_1^{(2)} = -u_1^{(10)}$, $u_1^{(3)} = -u_1^{(9)}$, $u_1^{(4)} = -u_1^{(8)}$, $u_1^{(5)} = -u_1^{(7)}$ e na direção 2, $u_2^{(1)} = u_2^{(11)}$, $u_2^{(2)} = u_2^{(10)}$, $u_2^{(3)} = u_2^{(9)}$, $u_2^{(4)} = u_2^{(8)}$, $u_2^{(5)} = u_2^{(7)}$.

Tabela 5.2: Deslocamentos dos nós (em milímetros) para o tempo $t = 1 \mu s$.

nó	Sem subregião		Com subregiões	
	u_1	u_2	u_1	u_2
1	$0.1680649 \cdot 10^{-1}$	$0.3385259 \cdot 10^{-1}$	$0.1680649 \cdot 10^{-1}$	$0.3385260 \cdot 10^{-1}$
2	$-0.1163675 \cdot 10^{-2}$	$0.9703064 \cdot 10^{-4}$	$-0.1163675 \cdot 10^{-2}$	$0.9703047 \cdot 10^{-4}$
3	$0.1993090 \cdot 10^{-3}$	$-0.3009745 \cdot 10^{-4}$	$0.1993090 \cdot 10^{-3}$	$-0.3009733 \cdot 10^{-4}$
4	$0.6820421 \cdot 10^{-6}$	$-0.7319513 \cdot 10^{-5}$	$-0.6820425 \cdot 10^{-6}$	$-0.7319513 \cdot 10^{-5}$
5	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000	0.0000000	0.0000000
8	$0.6820421 \cdot 10^{-6}$	$-0.7319513 \cdot 10^{-5}$	$0.6820425 \cdot 10^{-6}$	$-0.7319513 \cdot 10^{-5}$
9	$-0.1993090 \cdot 10^{-3}$	$-0.3009734 \cdot 10^{-4}$	$-0.1993090 \cdot 10^{-3}$	$-0.3009733 \cdot 10^{-4}$
10	$0.1163676 \cdot 10^{-2}$	$0.9703047 \cdot 10^{-4}$	$0.1163675 \cdot 10^{-2}$	$0.9703047 \cdot 10^{-4}$
11	$-0.1680650 \cdot 10^{-1}$	$0.3385260 \cdot 10^{-1}$	$-0.1680649 \cdot 10^{-1}$	$0.3385260 \cdot 10^{-1}$
12	$-0.9925965 \cdot 10^{-11}$	$0.2492194 \cdot 10^{-2}$	$0.3392537 \cdot 10^{-18}$	$0.2492194 \cdot 10^{-2}$

Pode-se notar que a concordância dos resultados mesmo para a malha utilizada, que é muito pouco refinada, é excelente, o que torna o método uma alternativa bastante viável para problemas de fratura com domínios não simétrico, conforme será mostrado nos problemas a seguir.

5.3 Problemas simétricos

Quando se trabalha com problemas simétricos, é possível criar-se um problema equivalente ao original de forma que não seja necessária a divisão do domínio em subregiões. Isto deve-se ao fato de que os pontos de mesmas coordenadas pertencentes a faces diferentes da fratura possuem deslocamentos simétricos, ou seja, iguais em módulo porém com sinais opostos. Neste caso está presente apenas o modo I , sendo que o fator dinâmico de intensidade de tensão é calculado pela equação (4.26).

O primeiro exemplo numérico estudado foi uma placa retangular com uma trinca central sob tensão uniforme aplicada como uma função degrau no instante $t = 0$ (Figura 5.4). Este problema já foi estudado por outros autores usando diferentes procedimentos. Murti e Valliappan (1995) usaram o método de elementos finitos juntamente com elementos de ponto a um quarto. Dominguez e Gallego (1992)

usaram elementos de contorno e elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração. Chirino *et al.* (1994) fizeram uma comparação entre três formulações diferentes: formulação no domínio do tempo, formulação no domínio da frequência e formulação de elementos de contorno de dupla reciprocidade, sendo que os fatores dinâmicos de intensidade de tensão foram calculados através do uso de elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração. Fedelinski *et al.* (1993) usaram elementos de ponto a um quarto descontínuos e o método duplo dos elementos de contorno. Há uma boa concordância entre praticamente todos os resultados dos autores aqui citados que trabalharam com este problema.

Por causa da simetria do problema, apenas um quarto da placa será discretizada. As condições de contorno são representadas na Figura 5.4.

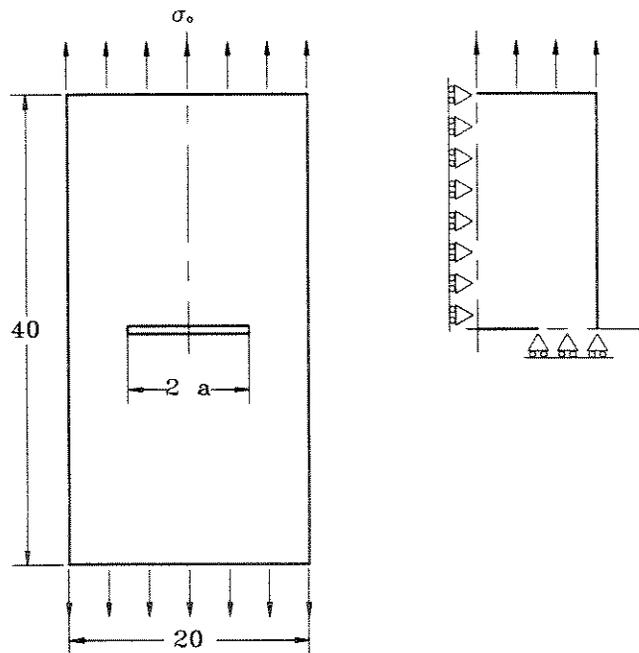


Figura 5.4: Placa com fratura central (dimensões em mm).

O material é linear elástico com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade transversal $\mu = 76.923$ GPa, razão de Poisson $\nu = 0.3$ e densidade $\rho = 5000$ Kg/m³. O passo do tempo usado foi $0.3 \mu\text{s}$. O comprimento da trinca é $2a = 4.8$ mm. A tensão utilizada foi $\sigma_0 = 0.4$ GPa.

Para analisar a dependência dos resultados quanto ao tamanho do elemento,

foram usadas três diferentes malhas (Figura 5.5) com número de elementos variando de 13 a 28 elementos. A redistribuição dos elementos se deu ao longo do contorno inteiro, e não apenas nas proximidades da fratura.

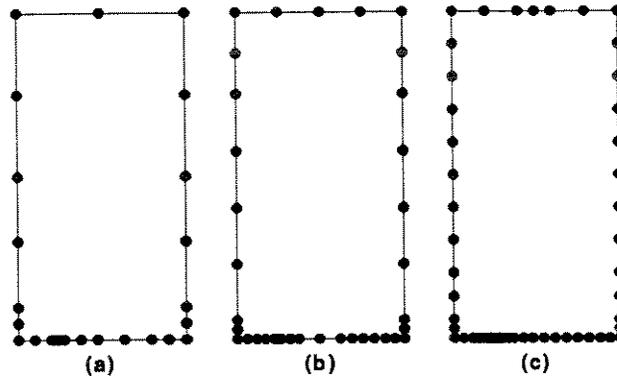


Figura 5.5: Número de elementos: (a) 13, (b) 19 e (c) 29 elementos de contorno.

Os resultados para o fator dinâmico de intensidade de tensão (modo I) são mostrados na Figura 5.6 para as três malhas estudadas. Pode ser observado que os resultados obtidos estão muito próximos, mostrando que um refinamento extra não é necessário. Note que os resultados são apresentados na forma normalizada, ou seja, $K_I/(\sigma_0\sqrt{\pi a})$.

A Figura 5.7 mostra os resultados para um intervalo de tempo estendido. Estes resultados mostram estabilidade mesmo para um tempo maior que muitos ciclos. Também pode ser notada uma tendência oscilatória do fator dinâmico de intensidade de tensão. Esta tendência já era esperada pois, sendo um material elástico carregado instantaneamente por uma carregamento tipo degrau, é natural que seu comportamento lembre um sistema massa mola.

A Figura 5.8 mostra uma comparação entre os resultados obtidos usando o elemento de ponto a um quarto com procedimentos diferentes usado por outros autores. Também é mostrado o valor do fator estático de intensidade de tensão para este problema.

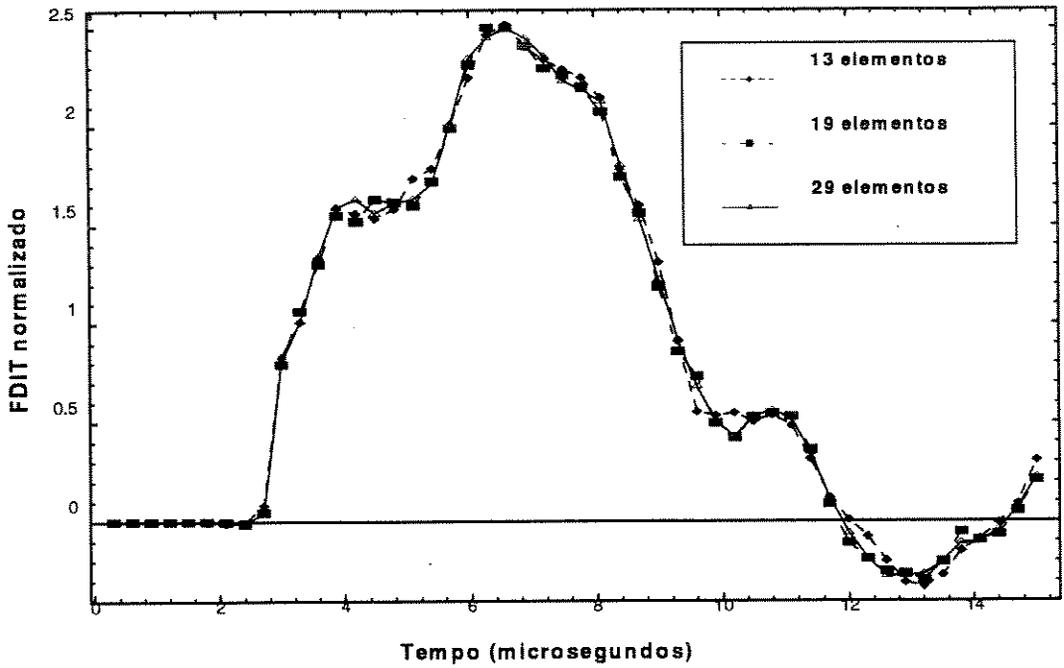


Figura 5.6: Fator dinâmico de intensidade de tensão usando diferentes malhas.

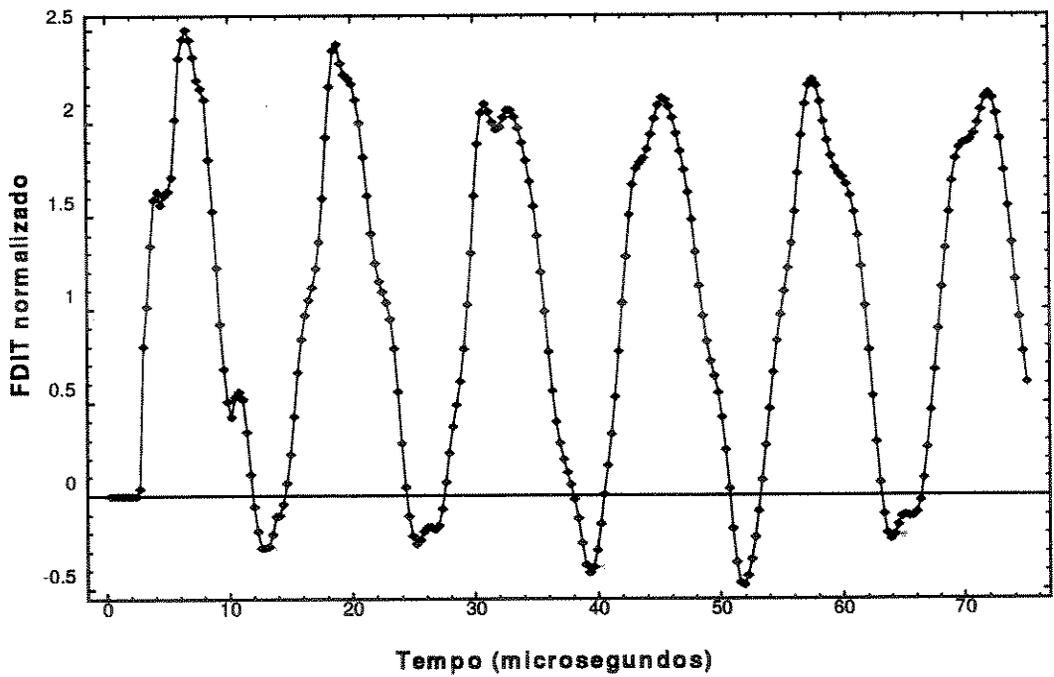


Figura 5.7: Fator dinâmico de intensidade de tensão durante vários ciclos.

Note que o fator dinâmico de intensidade de tensão atinge valores maiores que o dobro do fator estático.

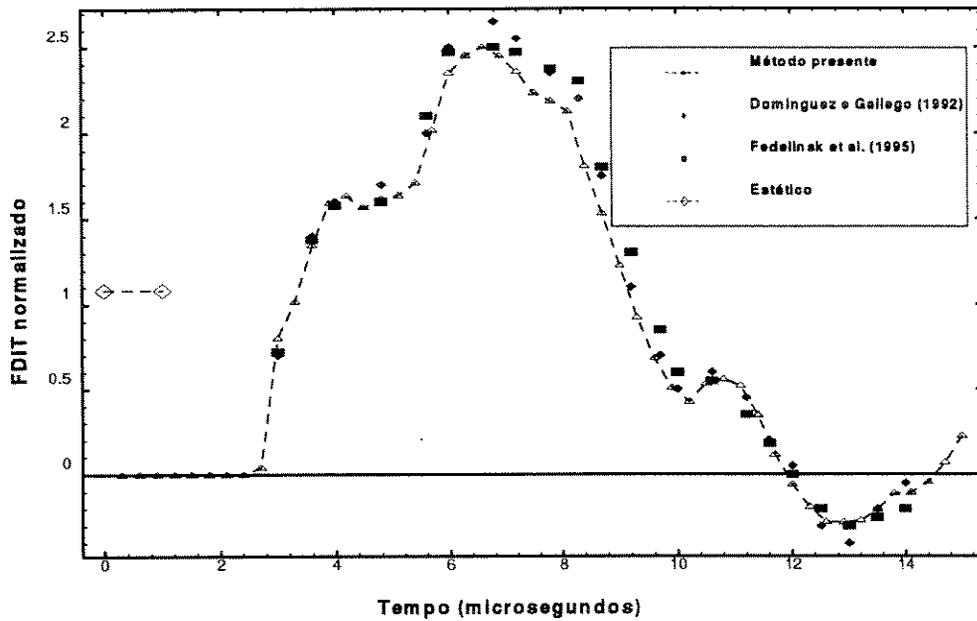


Figura 5.8: Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos.

Dominguez e Gallego (1992) usaram elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração e Fedelinski *et al.* (1995) usaram método duplo de elementos de contorno e integral \hat{J} independente do percurso.

Estes resultados mostram boa concordância entre os obtidos com elementos de ponto a um quarto e os obtidos usando-se outros procedimentos. Entretanto, o elemento de ponto a um quarto é um procedimento mais simples que os demais. Devido a esta concordância conclui-se que a hipótese adotada no Capítulo 2 de que a distribuição de tensões para os casos dinâmicos e estáticos tem a mesma forma na vizinhança da ponta da trinca parece ser válida, visto que tanto na integral \hat{J} quanto nos elementos de ponto a um quarto com singularidade de tração esta hipótese não foi assumida.

5.4 Problemas não simétricos

Em problemas não simétricos torna-se necessária a divisão do domínio em duas subregiões. Devido a não simetria estão presentes para estes tipos de problemas os dois modos de fratura (modos *I* e *II*). Serão mostrados, a seguir, dois problemas de placa com fratura não simétrica, sendo que os resultados serão comparados com outros autores que também trabalharam com estes procedimentos.

5.4.1 Placa com trinca inclinada na borda

O primeiro problema sem simetria analisado será de uma placa com trinca inclinada na borda. As condições de contorno e as dimensões da placa são mostradas na figura 5.9. As constantes do material e o carregamento são os mesmos do problema anterior. A inclinação da fratura é $\alpha = 45^\circ$.

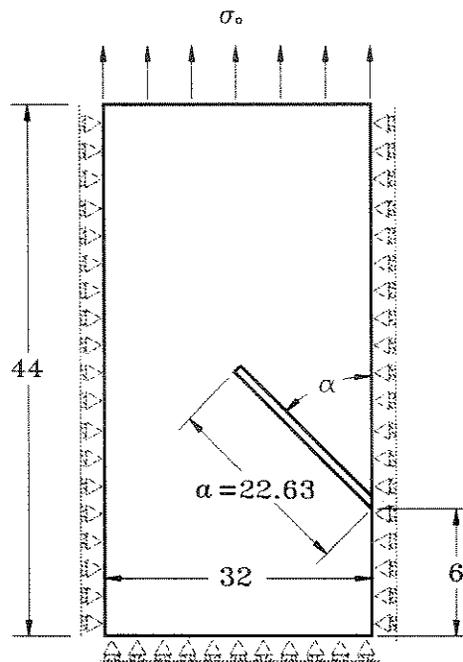


Figura 5.9: Placa com trinca inclinada na borda sob carregamento tipo degrau (dimensões em milímetros).

Outros trabalhos analisaram este problema usando diferentes procedimen-

tos. Kishimoto *et al.* (1980) usaram métodos dos elementos finitos e a integral \hat{J} desenvolvido por Kishimoto e Sakata (1980). Dominguez e Gallego (1992), Fedelinski *et al.* (1993) e Chirino *et al.* (1994) também trabalharam com este problema, usando os mesmos procedimentos do problema anterior. Os trabalhos de Fedelinski *et al.* (1993), Chirino *et al.* (1994) e Dominguez e Gallego (1992) apresentam boa concordância quanto aos resultados. Já os resultados de Kishimoto *et al.* (1980), os primeiros a trabalharem com este problema, apresentam uma boa concordância apenas nos passos iniciais.

Na discretização do contorno utilizou-se uma malha de 40 elementos, sendo 20 para cada subregião. A malha utilizada para o cálculo é mostrada na Figura 5.10.

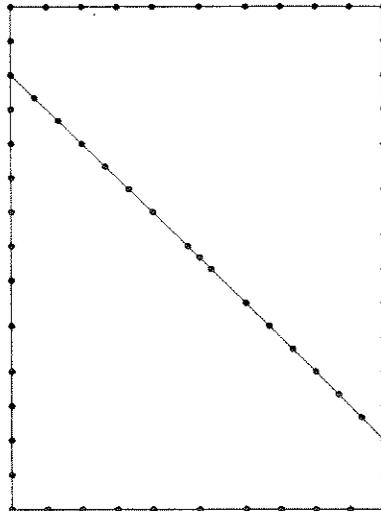


Figura 5.10: Malha de elementos de contorno para a placa com trinca inclinada na borda.

A Figura 5.11 mostra os fatores dinâmicos de intensidade de tensão normalizados para um intervalo de tempo maior que um ciclo.

Aqui também pode-se notar a tendência oscilatória dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão, porém com período maior que do problema anterior. É importante lembrar que neste trabalho não se levou em consideração a tenacidade a fratura nem a perda de elasticidade do material. O material foi considerado como tendo comportamento elástico para qualquer tensão a que ele fosse submetido. Em

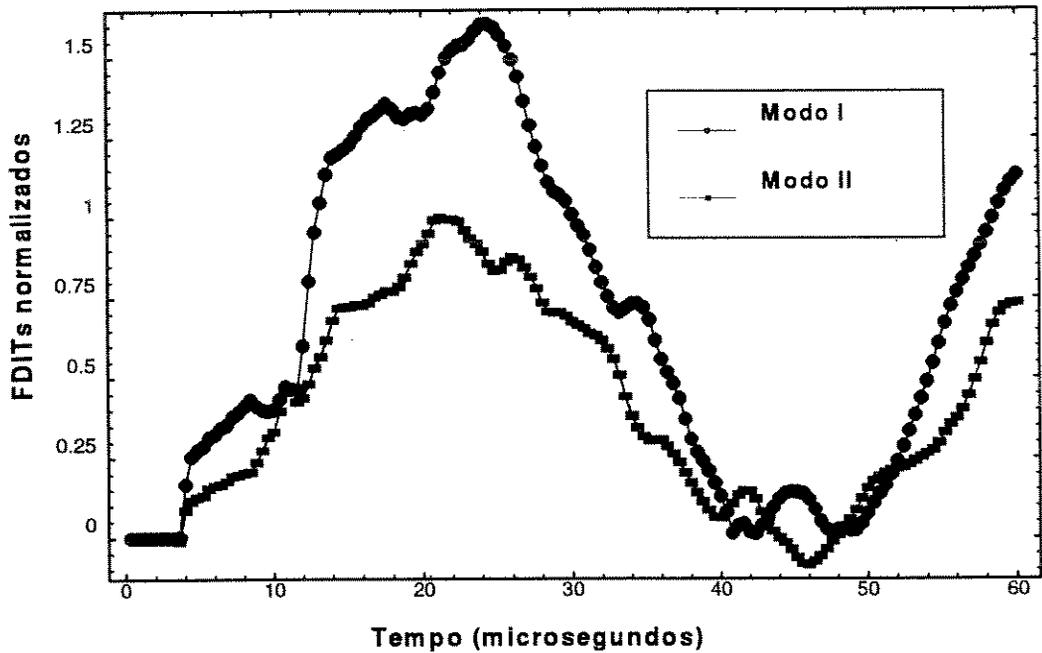


Figura 5.11: Fatores dinâmicos de intensidade de tensão (modos *I* e *II*).

casos práticos pode acontecer que a tensão a que este material foi submetido ultrapasse seu limite de escoamento e deforme plasticamente, ou até mesmo que a fratura se propague.

Para se estudar a variação dos resultados com o passo de tempo, utilizou-se três passos diferentes para o problema. A velocidade de propagação de onda longitudinal no material, calculada usando as equações (3.8), (3.4) e (3.5) é igual a $c_1 = 7337.99$ m/s. O comprimento do menor elemento da malha utilizada é de 5.66 mm. Desta forma, o tempo que uma onda longitudinal leva para percorrer uma distância equivalente ao comprimento do menor elemento é igual a $\Delta t_0 = 0.77 \mu\text{s}$. Os três passos de tempo utilizados foram $\Delta t_1 = 0.2 \mu\text{s}$, $\Delta t_2 = 0.4 \mu\text{s}$ e $\Delta t_3 = 0.8 \mu\text{s}$, sendo que $\Delta t_1/\Delta t_0 = 0.26$, $\Delta t_2/\Delta t_0 = 0.52$ e $\Delta t_3/\Delta t_0 = 1.08$. Os resultados para o modo *I* são mostrados na Figura 5.12 e para modo *II* na Figura 5.13.

Como pode-se notar pelas Figuras 5.12 e 5.13 os resultados para os três passos utilizados estão bastante próximos, mostrando pouca dependência para esta faixa de passos de tempo.

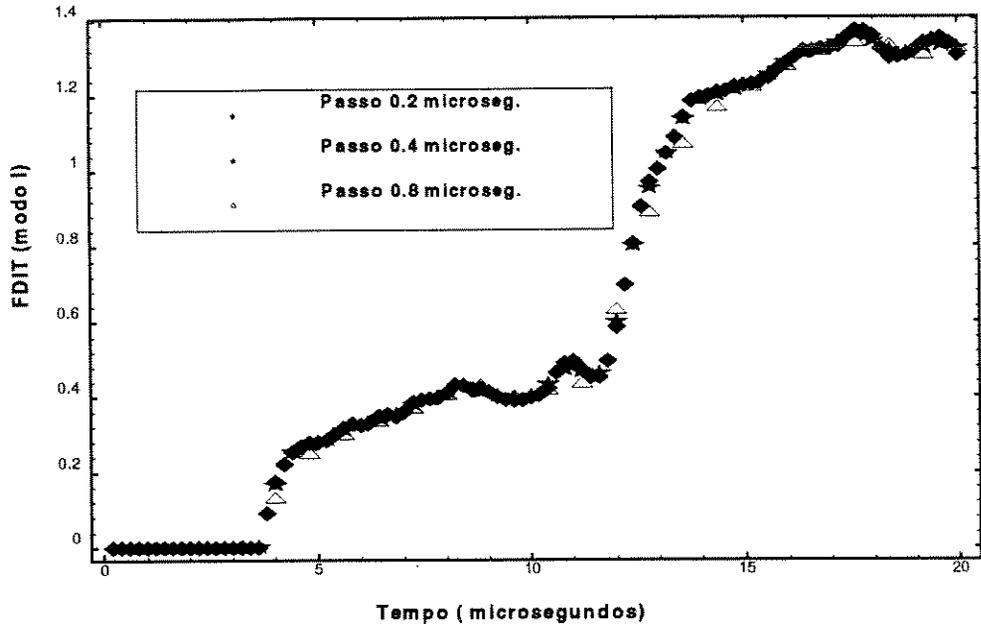


Figura 5.12: Fatores dinâmicos de intensidade de tensão para diferentes passos de tempo (modo I).

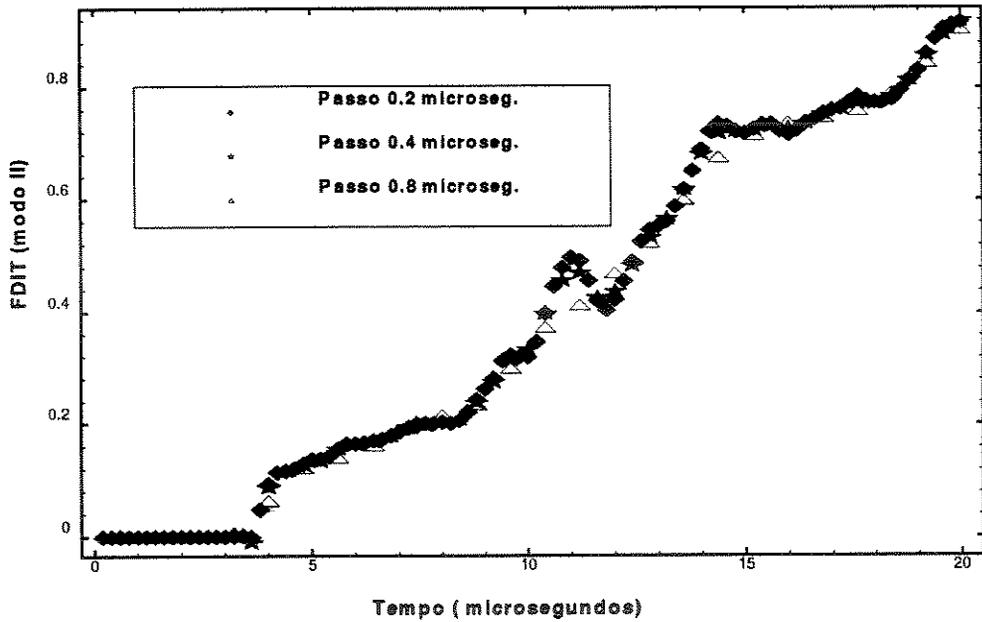


Figura 5.13: Fatores dinâmicos de intensidade de tensão para diferentes passos de tempo (modo II).

Os resultados para o cálculo de K_I e K_{II} utilizando elementos de ponto a um quarto são mostrados nas Figuras 5.14 e 5.15, respectivamente, juntamente com o fator estático de intensidade de tensão e os resultados obtidos por Dominguez e Gallego (1993) e Kishimoto *et al.* (1980).

Aqui também os fatores dinâmicos de intensidade de tensão, tanto para modo I quanto para modo II , atingem valores maiores que o dobro dos valores dos fatores estáticos.

Dominguez e Gallego (1993) usaram o método dos elementos de contorno juntamente com elementos de ponto a um quarto com singularidade de trações e Kishimoto e Sakata (1980) utilizaram o método dos elementos finitos juntamente com integral \hat{J} independente do percurso. Pode-se notar uma melhor concordância entre o presente método e o utilizado por Dominguez e Gallego (1993). Convém lembrar que Kishimoto *et al.* (1980) foram os primeiros a trabalhar com este problema, e que os resultados de outros autores como Fedelinski *et al.* (1993) e Chirino *et al.* (1994) tendem a concordar mais com os resultados obtidos por Dominguez e Gallego (1992).

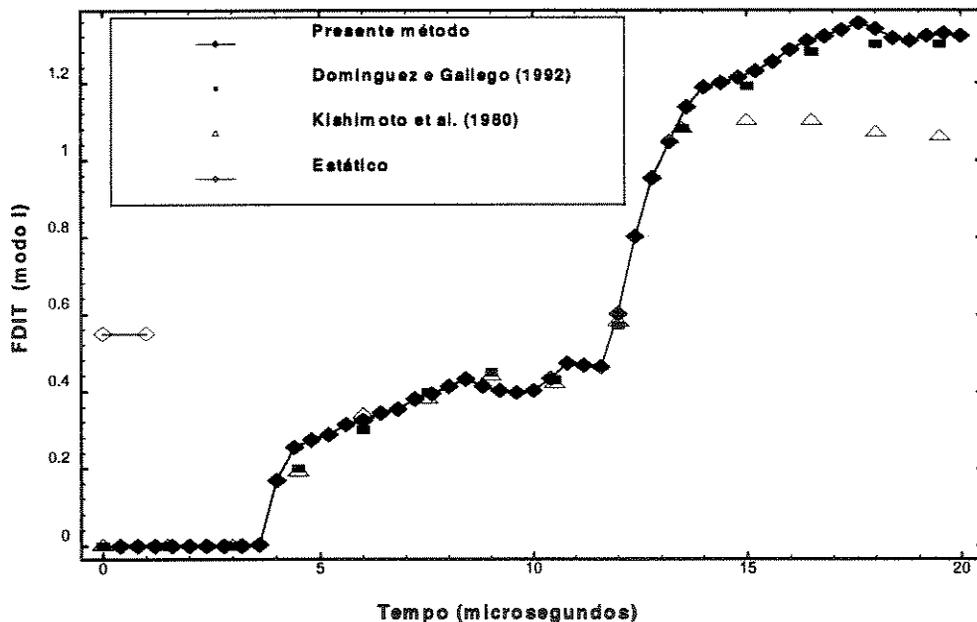


Figura 5.14: Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modo I).

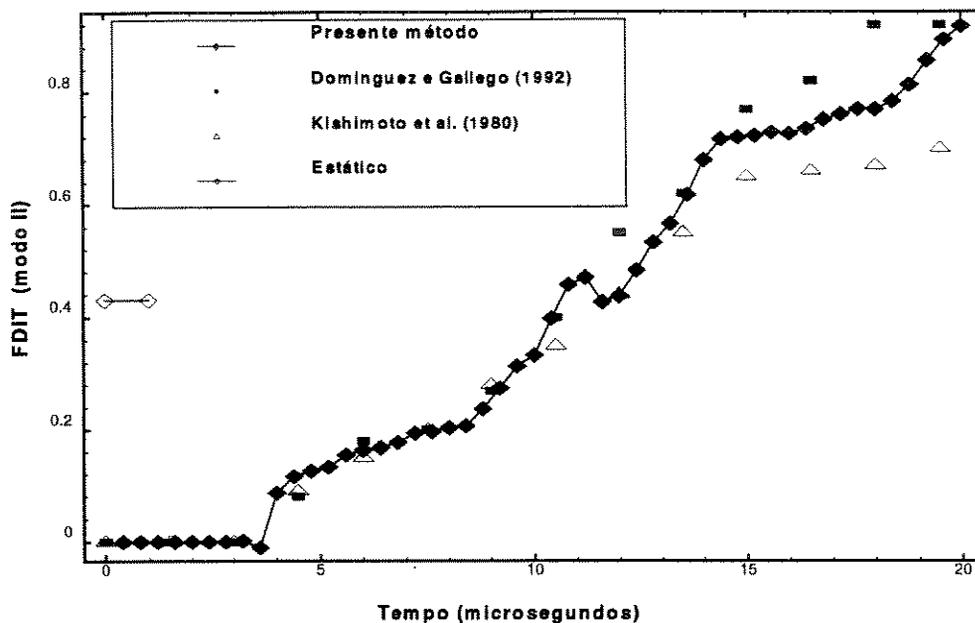


Figura 5.15: Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modo *II*).

5.4.2 Placa com trinca central inclinada

Uma placa com trinca central inclinada sob carregamento tipo degrau será aqui analisada (Figura 5.16). Este problema já foi anteriormente estudado por Fedelinski *et al.* (1994), que trabalharam com método duplo dos elementos de contorno e integral \hat{J} independente do percurso; Aoki *et al.* (1980) que utilizaram elementos finitos singulares; Fedelinski *et al.* (1996 b) que fizeram uma comparação entre três metodologias: Laplace, método duplo dos elementos de contorno e elementos de contorno de dupla reciprocidade; Murti e Valliappan (1985), Fedelinski *et al.* (1995) e Chirino *et al.* (1994) que adotaram os mesmos procedimentos utilizados na análise do primeiro problema (placa com trinca central).

Os resultados obtidos por Murti e Valliappan (1985), Fedelinski *et al.* (1993), Fedelinski *et al.* (1995), Fedelinski *et al.* (1996 b) e Chirino *et al.* (1994) são bastante próximos. Já os resultados obtidos por Chen (1975) divergem consideravelmente.

A geometria e as condições de contorno do problema são apresentados na Figura 5.16. Os demais dados são os seguintes: ângulo $\alpha = 45^\circ$, módulo de elasticidade transversal $\mu = 29.4$ GPa, razão de Poisson $\nu = 0.286$, densidade $\rho = 2450$ Kg/m³. O passo do tempo utilizado foi $\Delta t = 0.3$ μ s, a carga $\sigma_0 = 0.4$ GN e o comprimento da fratura $2a = 14.4$ mm.

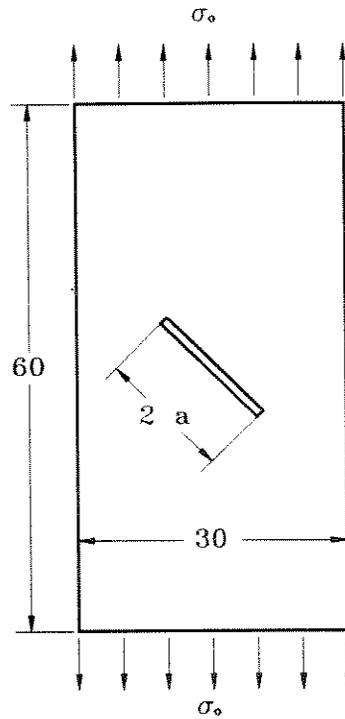


Figura 5.16: Placa com trinca inclinada central sob carregamento tipo degrau (dimensões em milímetros).

Foi utilizada uma malha de 40 elementos de contorno para analisar o problema conforme mostrado na Figura 5.17.

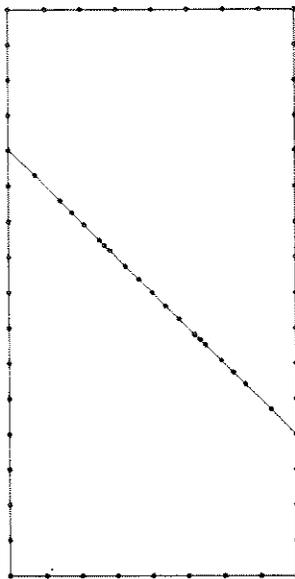


Figura 5.17: Malha de elementos de contorno para a placa com trinca inclinada na borda.

Os resultados obtidos para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão para os modos I e II são apresentados nas Figuras 5.18 e 5.19, respectivamente. Os resultados são comparados com aqueles obtidos por Fedelinski *et al.* (1996 b) que trabalhou com este problema usando método duplo dos elementos de contorno juntamente com integral \hat{J} independente do percurso. A concordância entre os resultados para ambos os modos é boa.

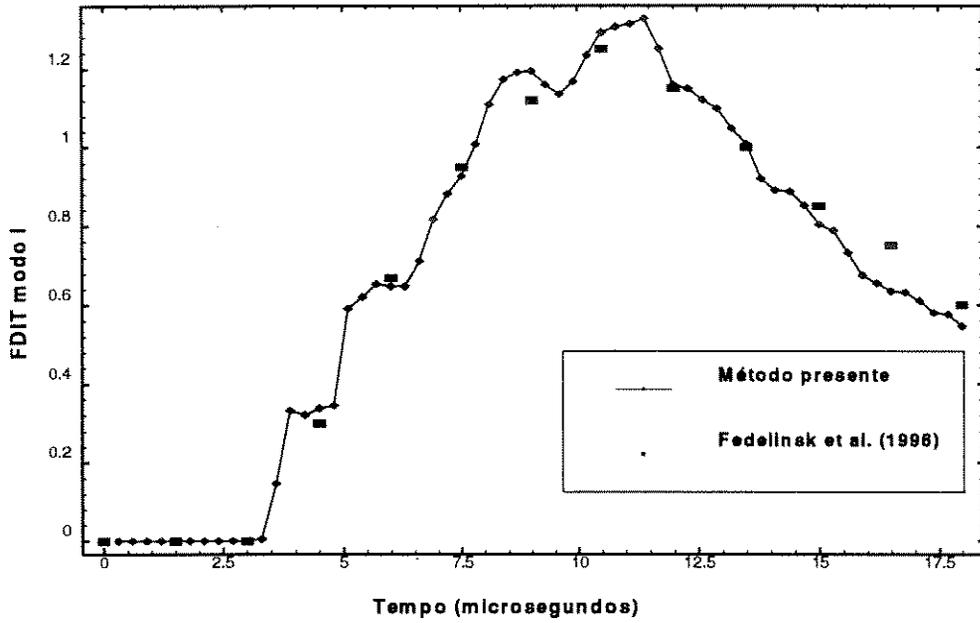


Figura 5.18: Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modos I).

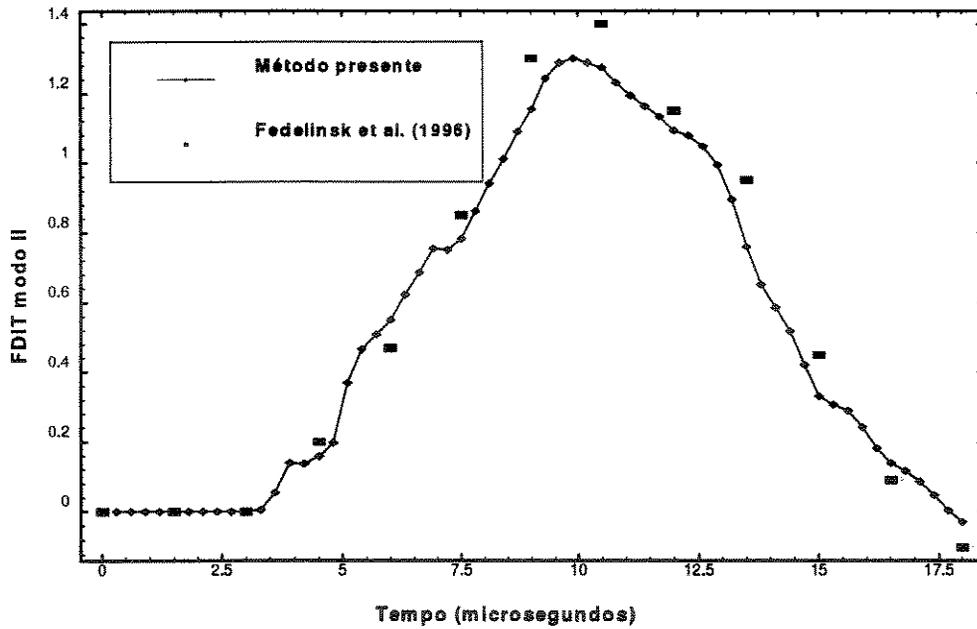


Figura 5.19: Fator dinâmico de intensidade de tensão obtido por diferentes procedimentos (modo II).

Capítulo 6

Conclusões

6.1 Conclusões finais

Neste trabalho foi proposto um procedimento para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão. O uso de elementos de ponto a um quarto, que possivelmente não havia ainda sido estudado para casos dinâmicos, conforme verificou-se na revisão bibliográfica, foi estendido para análise dinâmica.

Os fatores dinâmicos de intensidade de tensão foram calculados diretamente dos valores dos deslocamentos nodais usando-se equações simples, mas que permitiram obter resultados satisfatórios. O cálculo da abertura da trinca foi facilitado devido a introdução de um sistema de coordenadas fixo na ponta da trinca, sendo que o ângulo entre a bissetriz da trinca e o sistema de coordenadas original foi calculado para cada passo de tempo.

A hipótese adotada inicialmente na formulação de elemento de ponto a um quarto de que a distribuição dos deslocamentos nas proximidades da trinca se dá da mesma forma tanto para o caso de excitação dinâmica, quanto estática, pareceu ser válida para todos os casos estudados, visto que os resultados obtidos pela metodologia proposta e por outras metodologias nas quais esta hipótese não foi adotada (integral \hat{J} independente do percurso e elementos de ponto a um quarto com singularidades de tração) estão bastante próximos.

Os fatores dinâmicos de intensidade de tensão atingiram valores maiores que

o dobro dos valores dos fatores estáticos.

O uso de diferentes malhas mostrou que os resultados pouco dependem da discretização. Quando o tempo foi estendido, a solução mostrou-se estável mesmo para intervalos de tempo maiores que muitos ciclos. Os resultados, quando comparados com outros autores, os quais usaram procedimentos mais elaborados, mostraram boa concordância.

Quando aplicado em um problema simétrico, o método das subregiões mostrou coerência com a simetria do problema, sendo que os resultados obtidos foram ainda melhores que quando não se utilizou subregiões e se manteve o mesmo número de nós no contorno externo.

Em problemas de placas com fratura sem simetria, o uso de subregiões apresentou-se como uma boa alternativa para evitar que se tenha um sistema singular. O cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão para modo misto mostrou boa concordância com outros procedimentos. Quando o tempo foi estendido, o comportamento do sistema foi, conforme esperado, cíclico.

Também foi verificado que os resultados são pouco sensíveis aos passos de tempo utilizados neste trabalho que variaram entre 26 % e 104 % do tempo gasto para uma onda longitudinal percorrer uma distância no material equivalente ao comprimento do menor elemento da malha.

A principal vantagem dos procedimentos utilizados neste trabalho é a simplicidade na programação. Não foi necessária a implementação de funções de forma singulares (como no método de elementos de contorno com singularidade de tração) nem o uso de técnicas especiais para integração de soluções fundamentais com singularidade forte (integral no sentido de Hadamard) que é necessário no método duplo dos elementos de contorno. Apesar da simplicidade de programação este procedimento forneceu resultados bastante próximos de outros procedimentos mais sofisticados.

6.2 Trabalhos futuros

Como sugestões para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa sugere-se:

- Utilizar uma rotina de resolução de sistemas de equações lineares que aproveite as características da matriz (esparsa e não simétrica) de forma a tornar o programa mais eficiente quanto ao tempo de computação.
- Implementação de outros procedimentos para o cálculo dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão, tais como a integral \hat{J} .
- Implementação do método duplo dos elementos de contorno para elastodinâmica.
- Estudar a propagação de fratura sob excitação dinâmica baseado em critérios de falha para materiais isotrópicos.
- Estender a formulação para materiais anisotrópicos sob carregamento dinâmico e estudar o comportamento dos fatores dinâmicos de intensidade de tensão e a propagação da trinca.

Referências Bibliográficas

- Achenbach, J. D. *Wave propagation in elastic solids*. Amsterdam, North-Holland, 1973.
- Albuquerque, E. L. e Sollero, P. Boundary element analysis applied to dynamic crack problems. In *Proc. XVII Int. Conf. Dynamic Problems in Mechanics*, 277–279, Angra dos Reis. ABCM, 1997a.
- Albuquerque, E. L. e Sollero, P. Dynamic stress intensity factor computation using the boundary element method. *Revista Bras. de Ciên. Mecânicas*, 1997b. A ser publicado.
- Albuquerque, E. L. e Sollero, P. Quarter point boundary element applied to dynamic stress intensity factor evaluation. In *Proc. XVIII Cong. Íbero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, Brasília, 1997c. A ser publicado.
- Aliabadi, M. H. Boundary element formulation in fracture mechanics. *Appl. Mech. Review*, 50(2):203–210, 1997.
- Antes, H. A boundary element procedure for transient wave propagations in two dimensional elastic media. *Finite Elem. Anal. Des.*, 1:313–322, 1985.
- Aoki, S.; Kishimoto, K.; Izumihara, Y., e Sakata, M. Dynamic analysis of cracked linear viscoelastic solids by finite element method using singular element. *Int. J. Fract.*, 16:97–109, 1980.

- Blandford, G. E.; Ingraffea, A. R., e Liggett, J. A. Two dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. *Int. J. of Numerical Methods*, 17:387–404, 1981.
- Brebbia, C. e Dominguez, J. *Boundary Element an Introductory Course*. Southampton, Computation Mechanics Publications, second edition, 1989.
- Broek, D. Elementary engineering fracture mechanics. Dordrecht, Kluwer academic publishers, fourth edition, 1986.
- Chen, Y. M. Numerical computation of dynamic stress intensity factor by lagrangian finite difference method. *Eng. Fract. Mech.*, 15:653–660, 1975.
- Chirino, F. e Dominguez, J. Dynamic analysis of crack using boundary element method. *Eng. Fract. Mech.*, 34:1051–1061, 1989.
- Chirino, F.; Gallego, R.; Sáes, A., e Dominguez, J. A comparative study of three boundary element approaches to transient dynamic crack problems. *Eng. Analy. with Bound. Elements*, 13:11–19, 1994.
- Cruse, T. A. e Buren, W. V. Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *Int. J. of Fracture Mech.*, 7:1–15, 1971.
- Dominguez, J. *Boundary elements in dynamics*. Southampton, Computational Mechanics Publication, 1993.
- Dominguez, J. e Gallego, R. Time domain boundary element method for dynamic stress intensity factor computation. *Int. J. of Numerical Methods*, 33:635–647, 1992.
- Erigen, A. C. e Suhubi, E. S. *Elastodynamics*, volume 2. New York, Academic Press, 1975a.
- Erigen, A. C. e Suhubi, E. S. *Elastodynamics*, volume 1. New York, Academic Press, 1975b.

- Fedelinski, P. e Aliabadi, M. H. Time domain dual boundary element method for rapidly growing cracks. *Int. J. of Numerical Methods Eng.*, 40, 1997.
- Fedelinski, P.; Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. The dual boundary element method in dynamic fracture mechanic. *Int. J. of Solids Structure*, 32:203–210, 1993.
- Fedelinski, P.; Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. The dual boundary element method: J-integral for dynamic stress intensity factors. *Int. J. of Solids Structure*, 65:369–381, 1994.
- Fedelinski, P.; Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. A single region time domain bem for dynamic crack problems. *Int. J. of Solids Structure*, 32:3555–3571, 1995.
- Fedelinski, P.; Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures. *Engr. Anal. with Bound. Elem.*, 17:45–56, 1996a.
- Fedelinski, P.; Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. Laplace transform dual boundary element method for mixed mode dynamic crack analysis. *Int. J. of Computers Struct.*, 59:1021–1031, 1996b.
- Gallego, R. e Dominguez, J. Dynamic crack propagation analysis by moving singular boundary elements. *J. of Applied Mech.*, 59:158–162, 1992.
- Graff, K. F. *Wave motion in elastic solids*. New York, Dover, 1975.
- Green, A. E. e Zerna, W. *Theoretical elasticity*. New York, Oxford University Press, 1968.
- Kane, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. New Jersey, Prentice Hall, 1993.
- Kaninnen, M. F. e Popelar, C. H. *Advanced fracture mechanics*. New York, Oxford University Press, 1985.
- Kishimoto, K.; Aoki, S., e Sakata, M. Dynamic stress intensity factors using \hat{J} and finite element method. *Engr. Fract. Mechanics*, 13:387–394, 1980.

- Kishimoto, K. e Sakata, M. On the path independent integral \hat{J} . *Engn. Fract. Mechanics*, 13:841–850, 1980.
- Man, K.; H., A. M., e Rooke, D. P. Stress intensity factor in presence of contact stress. *Eng. Fract. Mechanics*, 51:591–601, 1995.
- Mansur, W. J. *A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method*. Tese de Doutorado, University of Southampton, U. K., 1983.
- Martinez, J. e Dominguez, J. On the use of quarter point elements for stress intensity factor computation. *Int. J. of Numerical Methods*, 20:1941–1950, 1984.
- Mi, Y. e Aliabadi, M. H. Dual boundary element method for three dimensional fracture mechanics. *Eng. Anal. with boundary elements*, 10:161–171, 1992.
- Mi, Y. e Aliabadi, M. H. Three dimensional crack growth simulation using boundary element method. *Int. J. of Computers Struct.*, 59:1021–1031, 1996.
- Murti, V. e Valliappan, S. The use of quarter point element in dynamic crack analysis. *Engn. Fract. Mech.*, 23(3):585–614, 1995.
- Portela, A.; Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. Dual boundary element method: Efficient implementation for crack problems. *Int. J. of Numerical Methods*, 33:1269–1287, 1992.
- Portela, A.; Aliabadi, M. H., e Rooke, D. P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Int. J. of Comput. Struct.*, 46:237–247, 1993.
- Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T., e Flannery, B. P. *Numerical recipes in fortran- The art of scientific computing*. Cambridge, Cambridge University Press, second edition, 1992.
- Smith, R. N. L. Solution of mixed-mode fracture problems using the boundary element method. *Eng. Anal. with Boundary Element*, 5:75–80, 1988.

Sollero, P. e Aliabadi, M. H. Fracture mechanic analysis of anisotropic composites laminates by the boundary element method. *Int. J. of Fracture*, 64:269–284, 1994.