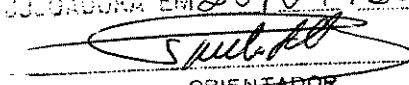


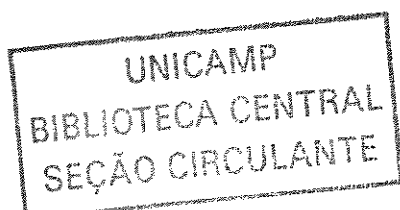
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR AFONSO SANTOS VERGES
E APROVADA PEL
COMISSÃO JULGADORA EM 28/09/2021

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

**Correção da dispersão em sinais do teste dinâmico de materiais, com elevadas
taxas de deformação**

Autor: Afonso Santos Verges

Orientador: Paulo R. G. Kurka



UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS

**Correção da dispersão em sinais do teste dinâmico de materiais, com elevadas
taxas de deformação**

Autor: Afonso Santos Verges

Orientador: Paulo R. G. Kurka

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2001
S. P. - Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

V586c Verges, Afonso Santos
Correção da dispersão em sinais do teste dinâmico de materiais, com elevadas taxas de deformação / Afonso Santos Verges. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Paulo R. G. Kurka.
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Dispersão. 2. Ondas - Tensão. 3. Ondas de choque.
4. Deformações e tensões. 5. Processamento de sinais.
6. Dinâmica estrutural. 7. Análise modal. I. Kurka,
Paulo R. G. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

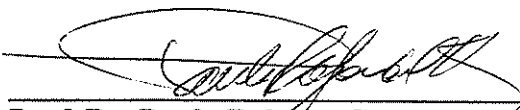
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS

TESE DE DOUTORADO

**Correção da dispersão em sinais do teste dinâmico de materiais, com
elevadas taxas de deformação**

Autor: Afonso Santos Verges

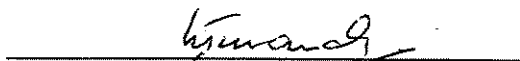
Orientador: Paulo Roberto Gardel Kurka



Prof. Dr. Paulo Roberto Gardel Kurka



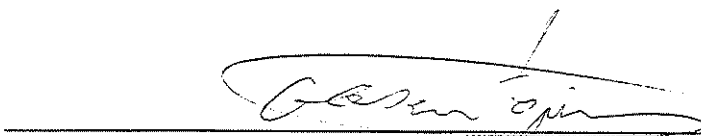
Prof. Dr. José João de Espíndola



Prof. Dr. Maher Nasr Bismarck Nasr



Prof. Dr. Itamar Ferreira



Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Júnior

866770002

Campinas, 28 de setembro de 2001

*A minha esposa Mariana
e minhas filhas
Rita Karina e Iris Angela*

Meus mais sinceros agradecimentos aos companheiros de trabalho da Inspeção de Equipamentos da Refinaria Henrique Lages pelo incentivo e ao professor Kurka pelo apoio e tão dedicado trabalho de orientação.

Verges, Afonso Santos. Correção da dispersão em sinais do teste dinâmico de materiais com elevadas taxas de deformação. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 141 p. Tese (Doutorado)

Resumo:

Esta é uma contribuição ao problema de correção da dispersão que ocorre na região de deformação plástica da curva de tensão-deformação obtida no teste com a barra de pressão Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB) ou, teste de compressão com altas taxas de deformação.

Utilizam-se funções harmônicas para solução da barra livre axissimétrica e, neste caso, a barra livre é considerada como uma região limitada da barra infinita percorrida por pulsos de compressão e tração deslocando-se em sentidos opostos. A ocorrência destes pulsos no tempo é tal que as tensões normais e deslocamentos radiais são nulos nas extremidades da barra. Desta forma, o trabalho das tensões cisalhantes nestas seções é nulo, permitindo satisfazer todas as condições de contorno da barra livre. O emprego desta solução permite a identificação dos pulsos de deformação nas interfaces entre o corpo de prova e as barras do SHPB. A solução analítica da barra livre, através de funções harmônicas, é confirmada pela solução numérica utilizando o método de elementos finitos. O procedimento de obtenção da curva de tensão-deformação envolve duas etapas. Na primeira etapa, para obter o deslocamento devido ao pulso refletido, utiliza-se o vetor dos tempos defasado de uma constante. Esta constante é ajustada por tentativa, sendo considerada adequada quando o deslocamento inicial devido ao pulso refletido é nulo. Isto equivale ao instante em que o pulso incidente atinge a interface entre o corpo de prova e a primeira barra. Na segunda etapa, que consiste na obtenção da tensão no corpo de prova, o vetor dos tempos também é ajustado por tentativa. O ajuste é considerado adequado quando ocorre a convergência entre as regiões elásticas da curva de tensão-deformação deste teste e a curva de tensão-deformação do teste quase estático. Com este procedimento, é obtida uma curva de tensão-deformação sem oscilações para um corpo de prova de cobre.

Palavras chave: Teste Split Hopkinson, correção de dispersão, modelo analítico de propagação de pulsos, identificação de sinal.

Verges, Afonso Santos. Correction of the dispersion in signs of the dynamic test of materials, with high strain rates. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001. 141 p. Tese (Doutorado)

Abstract:

This is a contribution to the problem of correction of dispersion that occurs in the stress-strain curve obtained in tests with the Split Hopkinson Pressure Bar (SHPB), or high strain rate compression test. Harmonic functions are used as solutions of the free bar. In this case, the free bar is considered as a limited section of the infinite bar, carrying compression and tensile pulses moving in the opposite directions. The occurrence of these pulses is such that the tensile stress and radial displacements are null in the extremities of the bar. This way, the work done by shear stresses in these sections is null, satisfying all the free bar boundary conditions. With this solution it is possible to identify the strain pulses at bars-specimen interfaces in the SHPB test. This analytical solution is confirmed by the finite element method.

The procedure to obtain the stress-strain curve involves two stages. In the first stage, the displacement due to the reflected pulse is obtained. The time is shifted by a constant. This constant is adjusted, to the appropriate condition that the initial displacement corresponds to a null displacement. This condition represents the instant that the incident pulse reaches the bar-specimen interface. In the second stage, the specimen stress is obtained. The time is also shifted by a constant. The appropriate condition is reached when the elastic area of the stress-strain curve converges to the stress-strain curve of the quasi-static test. With the free bar solution and the procedure to obtain the stress-strain-curve described above, the stress-strain curve of a copper specimen is obtained. The stress-strain curve presents a plastic area virtually free of dispersion.

Key words: Split Hopkinson pressure bar test, dispersion correction, analytical model of traveling pulses, signal identification.

Sumário:

1	Introdução	
1.1	Motivação para o trabalho	1
1.2	A correção da dispersão	2
1.3	Organização do texto	4
2	Teste de materiais com taxa de deformação elevada	
2.1	Introdução	5
2.2	O sistema de barras de impacto de Hopkinson (SHPB)	10
2.3	Dispersão do pulso de tensão	11
2.4	Procedimento para correção da dispersão	16
2.5	Procedimento para obter a tensão e deformação	17
2.6	A curva de tensões em função das deformações	18
2.7	Conclusões e comentários	21
3	Modelos para análise dos sinais em uma barra circular axissimétrica submetida a um pulso de tensão longitudinal	
3.1	Introdução	23
3.2	Equação de equilíbrio ou equação diferencial da barra axissimétrica	23
3.2.1	-Separando as variáveis	25
3.2.2	-Deslocamentos	27
3.2.3	-Componentes das tensões	28
3.2.4	Condições de contorno	29
3.2.5	Deslocamentos em função do tempo	32
3.2.6	Ajuste do sinal	36
3.2.7	A integração do sinal de entrada	38
3.2.8	Ajuste pelo Método dos Mínimos Quadrados	40
3.3	Solução da barra pelo Método de Elementos Finitos	41
3.3.1	Função de forma e os modos de deslocamento	43
3.3.2	Matrizes de massa e rigidez e o vetor das ações nodais	46
3.3.3	Determinação dos auto-valores e auto-vetores	52
3.3.4	Ajuste do sinal pelo Método dos Mínimos Quadrados	54

3.4 Comentários	55
4 Ajuste dos sinais para uma barra livre	
4.1 Introdução	57
4.2 Resultados do modelo de mecânica do contínuo	58
4.3 Resposta do modelo de elementos finitos	63
4.3.1- Modos de deslocamento e comprimento de onda	63
4.3.2-Frequência e velocidade de fase	65
4.3.3-Outros modos de deslocamento	67
4.3.4- Ajuste dos pulsos da barra livre através de elementos finitos	68
4.4- Frequência e comprimento de onda dos componentes do pulso	69
4.5 Comentários	70
5 Curva de tensão em função da deformação obtida no teste com as barras de Hopkinson	
5.1 Introdução	72
5.2 Ajuste do pulso incidente	75
5.3 Ajuste do pulso refletido	77
5.4 Ajuste do pulso transmitido	79
5.5 A tensão no corpo de prova	81
5.6 A deformação no corpo de prova	83
5.7 Curva de tensão em função da deformação	85
5.7.1 Ajuste adequado dos sinais	85
5.7.2 O instante de início do pulso	87
5.7.3 Curvas de tensão com componentes de frequências mais altas	89
5.8 Comentários	90
6 Conclusões, comentários e sugestões	92
Referência	96
Anexo I-Programa para determinação da curva de tensão em função da deformação	
Aplicação do modelo de mecânica do contínuo	101
Anexo II-Programa de elementos finitos para ajuste dos sinais da barra livre	111

Lista de Figuras:

Figura-2.1: Representação esquemática da barra de pressão de Hopkinson	6
Figura-2.2: Representação esquemática da barra de pressão de Hopkinson	11
Figura-2.3: Dispersão de um pulso propagando numa barra livre	13
Figura-2.4: Velocidade de fase de ondas longitudinais numa barra	15
Figura-2.5: Deformações nas interfaces do corpo de prova	17
Figura-2.6: Tensão obtida do pulso transmitido sem correção da dispersão	19
Figura-2.7: Deformação sem correção da dispersão do pulso refletido	19
Figura-2.8: Curva de tensão considerando o ponto de início onde o deslocamento e a tensão são iguais a zero	20
Figura-2.9: Deslocando-se o ponto de início do pulso de tensão a região inicial da curva tende para a curva do ensaio convencional	21
Figura-3.1: Barra axissimétrica – coordenadas cilíndricas	25
Figura-3.2: Pulsos de tensão propagando numa barra infinita	31
Figura-3.3: Pulso genérico subdividido em partes lineares	39
Figura 3.4: Elemento triangular toroidal, para problemas axissimétricos	43
Figura 3.5: Deslocamentos axissimétricos e simétricos a um plano	45
Figura-3.6: Não há deslocamento perpendicular aos planos rz	45
Figura-3.7: seções dos elementos triangulares superior e inferior	48
Figura-3.8: Carga aplicada no elemento	51
Figura-3.9: Valor relativo dos coeficientes em relação ao comprimento de onda	56
Figura-4.1: Detalhes da barra livre	57
Figura-4.2: Sinal registrado no extensômetro para a barra livre	58
Figura-4.3: Deslocamento obtido da integração direta da deformação	59
Figura-4.4: Detalhe do deslocamento produzido pelo pulso incidente	60
Figura-4.5: Ajuste do sinal com o pulso incidente	60
Figura-4.6: Obtenção do pulso refletido	61
Figura-4.7: Pulso de excitação e a deformação na barra em $z = 0$	61
Figura-4.8: Tensão na barra axissimétrica e barra uniaxial	62
Figura-4.9: Tensão normal e de cisalhamento médias na seção da barra	62
Figura-4.10: Discretização da barra. 724 elementos	63
Figura-4.11: Seis primeiros modos de deslocamento radial	64
Figura-4.12: Seis primeiros modos de deslocamento axial	64
Figura-4.13: Modos de deslocamentos obtidos pela combinação linear de	

funções harmônicas	65
Figura-4.14: Freqüências obtidas pelo modelo de elementos finitos	66
Figura-4.15: Velocidade de propagação em função do comprimento de onda	66
Figura-4.16: Velocidade de propagação em função do modo de deslocamento	67
Figura-4.17: Pulso gerado pelo modelo de elementos finitos	68
Figura-4.18: sinais obtidos com auto-vetores de elementos finitos e freqüências da equação de Pochhammer-Chree	69
Figura-5.1(a): Detalhes do dispositivo de teste	72
Figura-5.1(b): Fotografia do dispositivo de teste	72
Figura-5.2: Sinal registrado em $z = 630$ mm na barra de incidência	73
Figura-5.3: Sinal registrado em $z = 325$ mm na barra de transmissão	74
Figura-5.4: Estimativa para a duração do pulso incidente	74
Figura-5.5: Ajuste da expressão (5.1) pelo sinal incidente	75
Figura-5.6: Pulso de deformação incidente na interface com o corpo de prova	76
Figura-5.7: Deslocamento incidente na interface com o corpo de prova	76
Figura-5.8: Ajuste de (5.1) pelo pulso refletido	77
Figura-5.9: Deformação refletida na interface com o corpo de prova	78
Figura-5.10: Deslocamento do pulso refletido na interface com o corpo de prova	78
Figura-5.11: Ajuste da expressão (5.1) pelo sinal transmitido	79
Figura-5.12: deformação transmitida na interface do corpo de prova	80
Figura-5.13: deslocamento na interface do corpo de prova	80
Figura-5.14: Tensões nas faces do corpo de prova	82
Figura-5.15: Valor médio das tensões nas faces do corpo de prova	82
Figura-5.16: Deformação do corpo de prova	84
Figura-5.17: Ajustes do sinal refletido	85
Figura-5.18: Deslocamentos obtidos pela integração dos pulsos refletidos	86
Figura-5.19: Pulso transmitido variando o número de componentes de excitação	86
Figura-5.20: Curva de tensão variando o número de componentes da excitação	87
Figura-5.21: Desvios das curvas para instante de início do pulso incorreto	88
Figura-5.22: Convergência da curva de tensão e o instante de início do pulso	89
Figura-5.23: A inclusão de componentes de freqüência mais elevada	90

Lista de Tabelas

Tabela-I aço AISI Grau 18 Ni (300) aço Maraging	11
Tabela-II: frequência e comprimento de onda dos componentes do pulso	70

Nomenclatura

Letras Latinas

α - auto valor

A_i - constante de integração

C_0 - velocidade de propagação de uma onda num meio elástico unidimensional

C_1 - velocidade de propagação de uma onda de dilatação num meio tridimensional infinito

C_2 - velocidade de propagação de uma onda de distorção ou cisalhamento num meio tridimensional infinito

C_s - velocidade de propagação de ondas de superfície de Rayleigh

C_α - velocidade de propagação de uma onda de frequência α

d_j - coeficientes do somatório que determina a integral do sinal de excitação

E - módulo de elasticidade do material

$f(t)$ - função harmônica do tempo

$F(z)$ - função harmônica de z

F_m - coeficientes do somatório que determina a deformação

g_i - função que define deslocamentos e deformações

h - argumento da função de Bessel, expresso como função da frequência e comprimento da onda

J_0, J_1 - funções de Bessel

k - argumento da função de Bessel, expresso como função da frequência e comprimento da onda

$P(t)$ - força em função do tempo

R - raio da barra

T - tempo de duração do pulso de deformação ou energia cinética

u - deslocamento radial de um ponto da barra

v - deslocamento axial de um ponto da barra

(r, z, θ) - coordenadas cilíndricas

$Z(z, t)$ - carregamento função do tempo aplicado na coordenada z

Letras Gregas

α, Ω - frequência

ρ - massa específica

ν - razão de Poisson

ε - deformação

σ - tensão normal

τ - tensão de cisalhante

Λ - comprimento de uma onda

δ - ângulo de fase ou símbolo de variação

Δ - dilatação no plano r, z

ω - rotação no plano r, z em torno do eixo θ

λ, μ - constante de Lamè

$\eta(t)$ - função harmônica do tempo

Capítulo 1

Introdução

1.1- Motivação do trabalho

O conhecimento do comportamento dos materiais sob a ação de cargas dinâmicas com elevadas taxas de deformação, como no caso da aplicação de cargas de impacto, é fundamental para o desenvolvimento do projeto de estruturas.

Um dispositivo largamente utilizado para teste, onde um corpo de prova é colocado entre duas barras sujeitas à ação de um pulso de tensão, foi introduzido por Kolsky em 1949.

Este teste é também conhecido como “Split Hopkinson Pressure Bar “ (SHPB) porque foi Hopkinson (1914) o primeiro a utilizar uma barra delgada para obter o pulso induzido por uma carga de impacto. Este método foi também estudado por Davies (1948) que introduziu a correção da velocidade de fase de cada componente utilizando a equação de frequência de Pochhammer (1876) – Chree (1889).

O teste permite obter a curva de tensão em função da deformação com cargas que induzem taxas elevadas de deformação. A qualidade dos dados obtidos depende dos seguintes fatores:

- a) Escolha adequada das dimensões do corpo de prova para que sua inércia possa ser desprezada.
- b) Lubrificação das superfícies de contato entre as barras e o corpo de prova de forma que o atrito possa ser desprezado.
- c) Correção da dispersão para obter os sinais nas interfaces entre as barras e o corpo de prova.

As dimensões do corpo de prova foram estabelecidas no estudo elaborado por Davies e Hunter (1963) e os efeitos do atrito foram avaliados por Bertholf e Karnes (1975). O detalhamento de tais estudos encontra-se no capítulo 2.

A medição de um pulso de tensão incidente na interface de uma barra sólida é um fenômeno capaz de ser registrado apenas de forma indireta. Isso se deve ao fato de que qualquer instrumento de medida de tensão colocado na interface da barra registrará, não apenas o sinal incidente, mas

sofrerá também uma imediata interferência do sinal de tensão que se reflete com a mudança do meio de propagação do pulso. Assim, no teste SHPB, o sensor de medição do pulso incidente é posicionado no meio da barra, possibilitando o registro independente dos sinais incidente e refletido do pulso de tensão. A medida dos pulsos incidente e refletido no meio da barra, entretanto, não representa os sinais que efetivamente incidiram e refletiram na interface do sólido. Um pulso de tensão propagando-se através de uma barra sofre o fenômeno da dispersão, devido ao fato da velocidade de fase de seus componentes harmônicos ser uma função da frequência, como revelou os estudos de Pochhammer-Chree. Componentes de frequências mais elevadas propagam com velocidades de fase menor, resultando na dispersão do sinal entre dois pontos da barra.

No teste de impacto com as barras de Hopkinson, verifica-se, portanto, que a questão principal é a dispersão que um pulso de tensão está sujeito ao se propagar ao longo da barra. O tratamento mais comumente utilizado para a correção de tal dispersão consiste no ajuste de fases dos componentes de frequência do sinal medido [Lifshitz (1993), Zhao e Gary (1995-1997), Safford (1992)]. Esta técnica envolve a realização de transformadas de Fourier discretas das amostras dos sinais de teste, o que nem sempre fornecem os melhores resultados numéricos na correção da dispersão.

O estudo da correção de dispersão, bem como sua aplicação na determinação das propriedades de materiais é fruto de um trabalho de cooperação entre o Grupo de Processamento de Sinais e Análise de Sistemas Dinâmicos (GPSASD) da FEM-UNICAMP e o grupo de “ Fractal Mechanics” do Technion Israel Institute of Technology. Os dados dos testes utilizados neste trabalho foram fornecidos pelo Professor Daniel Rittel, do Technion Israel Institute of Technology.

1.2- A correção da dispersão

A técnica de correção da dispersão de um sinal através do ajuste de fases de seus componentes, conforme o trabalho de Lifshitz mencionado, apresenta dificuldades na construção das curvas de propriedades do material. A curva tensão deformação construída a partir dos sinais corrigidos por tal técnica apresenta oscilações, fruto de interferências numéricas do processamento do sinal, que não correspondem ao comportamento físico esperado. Tais interferências provêm das aproximações numéricas inerentes ao uso da Transformada Discreta de Fourier nas amostras discretas de sinais dinâmicos [Newland (1968), Bendat (1980), Doyle (1989)].

Uma outra ferramenta de correção da dispersão do pulso de teste compressivo consiste na construção de um modelo de elementos finitos da barra e a solução numérica do problema dinâmico [Weaver (1984), Bismarck (1993)].

Tal modelo, conforme indicado na seção 4.3, é adequado para a obtenção dos auto-vetores, entretanto, apresenta frequências elevadas para as ondas longas. Neste caso, o mesmo, não reproduz com precisão o pulso num outro ponto da barra. Para a utilização deste modelo, recomenda-se a utilização dos auto-vetores em conjunto com as frequências obtidas pela solução da equação de Pochhammer-Chree.

Uma terceira técnica de correção da dispersão dos pulsos incidente e refletido do teste SHPB consiste na construção de um modelo analítico da barra, utilizando-se as relações matemáticas da descrição do comportamento de sólidos em mecânica do contínuo. Tal abordagem, descrita na seção 3.1, utiliza uma solução da equação diferencial da barra axissimétrica através do método de superposição modal e tem como referência a solução desenvolvida por Pochhammer e Chree, conforme descrita por Kolsky (1963). Esta abordagem consiste na principal contribuição desta tese.

O modelo é inicialmente ajustado para um conjunto de sinais obtidos para uma barra livre. Ajustando a partir do primeiro pulso, denominado pulso incidente, se obtém o primeiro pulso refletido.

Este procedimento depende do conhecimento do sinal de entrada, ou seja, do impacto aplicado na barra. A identificação deste sinal é feita obtendo pelo método dos mínimos quadrados um conjunto de amplitudes de um pulso genérico.

Para gerar os sinais da barra livre é utilizada uma barra em aço maraging, com 1200mm de comprimento e 12,7mm de diâmetro. O instante de tempo em que ocorre o início do registro do pulso de deformação deve ser obtido com boa precisão e o procedimento de análise dos sinais aqui utilizado permite ajustar este instante pelo processo de aproximação iterativa, sendo este procedimento outra contribuição desta tese.

O passo seguinte é o ajuste dos sinais obtidos no ensaio de compressão, de um corpo de prova de cobre, com as barras de Hopkinson e a obtenção da curva tensão deformação.

Os resultados práticos decorrentes do uso da presente técnica, conforme mostrado na seção 5, representam as melhores correções para o fenômeno da dispersão dentre aquelas disponíveis na literatura corrente.

1.3- Organização do texto

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 é apresentado um resumo da literatura sobre o ensaio de compressão com as barras de Hopkinson. Neste caso são feitos comentários sobre as principais verificações dos diversos autores, destacando entre elas:

- a) A geometria adequada do corpo de prova para que seja possível desprezar a inércia do mesmo.
- b) A necessidade de lubrificação das interfaces entre o corpo de prova e a barra para reduzir o atrito.
- c) O tempo mínimo de duração do pulso de forma que seja sustentada a hipótese de tensão uniforme no corpo de prova.
- d) O procedimento de correção da dispersão dos sinais.
- e) O procedimento para determinação das tensões, deformações e taxa de deformação no corpo de prova para a obtenção da curva de tensão em função da deformação.

No capítulo 3 é apresentado em detalhes o desenvolvimento dos métodos utilizados para correção da dispersão. É apresentado o modelo proposto através da descrição da barra em mecânica do contínuo, bem como um modelo discreto de elementos finitos.

No capítulo 4 se apresentam os resultados do ajuste dos sinais para uma barra livre através dos modelos de elementos finitos e da mecânica do contínuo.

No capítulo 5 é efetuado o ajuste dos sinais para se obter a curva de tensão em função da deformação, para um corpo de prova de cobre, utilizando o modelo de mecânica do contínuo.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões deste trabalho, bem como sugestões para seu futuro desenvolvimento.

Anexos ao texto encontram-se os códigos na linguagem de interpretação do Software Mat-Lab, utilizados nos procedimentos de ajuste do sinal e construção do modelo de elementos finitos.

Capítulo 2

Teste de materiais com taxa de deformação elevada

2.1-Introdução

As curvas de tensão em função da deformação para os metais dependem geralmente da taxa de deformação. Com o aumento da taxa de deformação há um aumento no limite de escoamento e no limite de resistência.

Nos procedimentos convencionais [Meyers (1982)] dos ensaios de tração e compressão as taxas de deformação, da ordem de $10^{-5} s^{-1}$ e $10^{-1} s^{-1}$, são praticamente constantes durante o ensaio. Neste caso quase estático, as forças de inércia são desprezíveis e a tensão é a mesma ao longo do corpo de prova. Os ensaios de fluência e relaxação de tensões possuem as mesmas características, porém as taxas de deformação são ainda menores, da ordem de $10^{-7} s^{-1}$ e $10^{-5} s^{-1}$.

Nos ensaios de impacto, utilizando as barras de Hopkinson, as forças de inércia são importantes, e neste caso as taxas de deformação são maiores, entre $10 s^{-1}$ e $10^4 s^{-1}$. Neste teste, as ondas ou pulsos de deformação provocam deformações elásticas nas barras e deformações plásticas no corpo de prova. Para impacto com alta velocidade ou súbita transferência de energia que resultem em taxas de deformação superiores a $10^5 s^{-1}$ ocorre a propagação de ondas de choque no corpo de prova.

Neste trabalho trataremos dos ensaios de impacto utilizando o dispositivo criado por Kolsky (1949, 1962) denominado “Split Hopkinson Pressure Bar” ou simplesmente SHPB, estando portanto as taxas de deformação entre $10 s^{-1}$ e $10^4 s^{-1}$. Uma representação esquemática deste dispositivo é mostrada na figura 2.1.

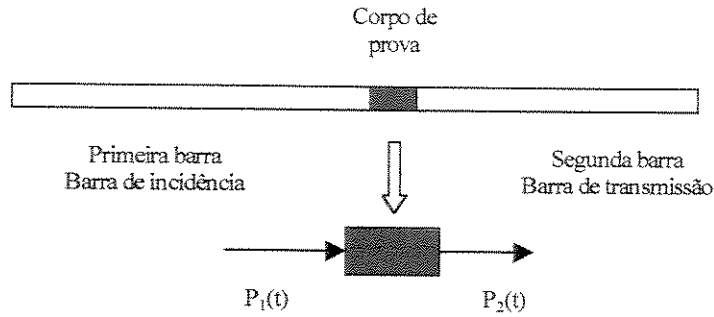


Figura – 2.1: Representação esquemática do dispositivo de teste e as forças aplicadas nas extremidades do corpo de prova

O procedimento de obtenção da tensão e deformação no corpo de prova a partir das deformações medidas nas barras considera que a deformação é constante em toda a extensão do corpo, sendo esta apenas uma função do tempo. Davies e Hunter (1963) verificaram que, nestas condições, considerando o corpo de prova axissimétrico, a tensão apresenta um termo adicional que depende da geometria e material do corpo de prova e é proporcional a variação de segunda ordem da deformação em relação ao tempo. A tensão no corpo de prova dada por:

$$\sigma(t) = \sigma_{média}(t) + \rho \left(\frac{h^2}{6} - \frac{\nu^2 R^2}{2} \right) \frac{d^2 \varepsilon(t)}{dt^2} \quad (2.1)$$

$$e \quad \sigma_{média}(t) = \frac{P_1(t) + P_2(t)}{2A_{CP}}, \quad (2.1-a)$$

onde A_{CP} é a área da seção, ρ é a massa específica, ν a razão de Poisson, h o comprimento, R o raio do corpo de prova e $\varepsilon(t)$ a deformação do corpo de prova.

Para eliminar o efeito deste termo (que está relacionado com a inércia do corpo de prova) de forma que a tensão no corpo de prova possa ser obtida diretamente das tensões medidas nas barras, Davies e Hunter (1963) propõem a utilização de corpos de prova com a seguinte relação entre comprimento e raio:

$$h = \nu R \sqrt{3}, \quad (2.2)$$

onde ν é a razão de Poisson do material, obtida normalmente na literatura.

Para que permaneça válida a hipótese de deformação uniforme ao longo do corpo de prova, Davies e Hunter concluem que a inclinação da curva tensão-deformação deve satisfazer a desigualdade,

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} > \frac{\pi^2 \rho h^2}{T^2}, \quad (2.3)$$

onde T é a duração do pulso de carga aplicada no corpo de prova. Esta desigualdade permite verificar a validade da hipótese de uniformidade da deformação ao longo do corpo de prova somente após a realização do teste.

Bertholf e Kames (1975) fazem uma análise numérica do SHPB através de diferenças finitas. Reconstituem a curva tensão – deformação admitida para o corpo de prova a partir dos sinais obtidos nas barras, considerando que a deformação é uniforme ao longo do corpo de prova, e comparam com as tensões obtidas pelo modelo numérico. As suas conclusões são as seguintes:

- a) Mantida a relação geométrica recomendada por Davies o sinal transmitido obtido na segunda barra é o que permite reconstituir a curva tensão – deformação com maior precisão. Os sinais incidente e refletido da primeira barra apresentam muita distorção.
- b) É fundamental uma boa lubrificação das interfaces entre as barras e o corpo de prova para atender à hipótese de tensão uniforme ao longo do corpo de prova. Com o atrito as tensões calculadas são maiores para uma mesma deformação. Entretanto, o método de cálculo das tensões utilizando os sinais da segunda barra permanece válido, representando muito bem a tensão média no corpo de prova. Desta forma para que se possa concluir que as diferenças entre as curvas de tensão – deformação obtidas no ensaio quase estático e no ensaio de impacto com as barras de Hopkinson são devidas às diferentes taxas de deformação, as condições de atrito entre as extremidades do corpo de prova e os cabeçotes na máquina de teste de compressão convencional devem idênticas às condições de atrito entre o corpo de prova e as barras no teste de compressão de Hopkinson.

Um pulso de tensão ou deformação propagando-se nas barras apresenta dispersão, uma vez que a velocidade de fase de cada componente do pulso depende de sua frequência ou comprimento de onda. Quanto maior a frequência, ou menor o comprimento de onda, menor a velocidade de fase.

Um pulso pode ser representado por seus componentes obtidos através de transformada ou série de Fourier. Para cada frequência é possível obter a velocidade de fase correspondente através da equação de frequência de Pochhammer e Chree. Os procedimentos de correção dos sinais têm

seguido esta linha, ou seja: identificar os componentes de Fourier do sinal, determinar a velocidade de propagação de cada componente e finalmente recompor o sinal em qualquer ponto da barra considerando a propagação de cada componente com a sua velocidade de fase característica.

Considerando o sinal com um pulso único a correção da dispersão é feita através da transformação do domínio do tempo para o domínio da frequência por intermédio da transformada discreta de Fourier. A variação da velocidade de fase para cada comprimento de onda é então introduzida e finalmente é efetuada uma transformada inversa para o domínio do tempo.

Davies (1948, 1950) foi o primeiro a utilizar o procedimento de correção da dispersão através de série de Fourier para um sinal numa barra excitada por um pulso trapezoidal.

Follansbee e Frantz (1983) utilizam o mesmo procedimento para obter os sinais nas interfaces do corpo de prova com as barras no ensaio de Hopkinson. Mostram que a correção da dispersão dos sinais reduz a dispersão da curva de tensão em função da deformação. Verificam ainda que a hipótese de tensão uniforme no corpo resulta em:

- a) A tensão no corpo de prova está diretamente relacionada com o sinal transmitido, obtido na segunda barra.
- b) A deformação no corpo de prova está relacionada diretamente com a integral no tempo do sinal refletido, obtido na primeira barra.

Observam que as relações acima são válidas para pulsos obtidos na interface com o corpo de prova, sendo necessário corrigir a dispersão dos sinais obtidos nas barras em pontos distantes das interfaces com o corpo de prova.

Gong, Malvern e Jenkins (1990) obtêm excelente resultado utilizando a transformada rápida de Fourier (FFT) para o tratamento da dispersão dos sinais e seguindo os procedimentos citados anteriormente.

Avaliando um pulso de deformação propagando ida e volta numa barra livre, verificam que a dispersão produz oscilações significativas no sinal, entretanto, a amplitude e largura características do sinal não são afetadas de forma significativa.

Observam através de dados experimentais que as tensões nas interfaces do corpo de prova, após a correção da dispersão dos sinais, são praticamente iguais sendo adequada a hipótese de tensão ou deformação uniformes ao longo do corpo de prova.

Quanto à variação das tensões ao longo da seção da barra, Davies (1948, 1950), a partir da análise da equação de Pochhammer – Chree, observa que para a relação $R/\Lambda_n < 0,10$ (onde R é o

raio da barra e Λ_n o comprimento de onda de um componente do pulso) a diferença entre o deslocamento longitudinal na superfície e no centro da barra pode chegar a 5%. E quando a relação R/Λ_n cresce, para determinados componentes do pulso, o deslocamentos na superfície e no centro da barra podem apresentar sinais contrários. Entretanto, Follansbee e Frantz (1983), Gong, Malvern e Jenkins (1990) consideram que a não uniformidade das tensões e deslocamentos, ao longo da seção da barra, depende do efeito combinado do deslocamento de cada componente. Entretanto, a contribuição de cada componente para o deslocamento total depende da magnitude de seu coeficiente de Fourier. Analisando a magnitude dos coeficientes dos componentes dos sinais gerados no ensaio com as barras de Hopkinson, verificam que os coeficientes dos componentes de alta frequência são bem menores que os coeficientes dos componentes de baixa frequência (inferior a 2% do maior coeficiente). Desta forma o perfil do deslocamento do pulso não é afetado de forma significativa pela soma dos deslocamentos dos componentes de alta frequência.

Assim como Yew e Chen (1978) , Gong, Malvern e Jenkins (1990) consideram que a correção da dispersão baseada na equação de frequência para uma barra infinita pode ser aplicada para correção de um pulso propagando entre dois pontos de uma barra finita, uma vez que a reflexão na extremidade da barra não interfere com o mesmo.

Yokoyama e Kishida (1986) consideram que a confiabilidade da curva tensão-deformação obtida no ensaio com alta taxa de deformação depende mais da precisão dos sinais registrados do que da correção da dispersão. Assim, montaram um dispositivo de barras de Hopkinson acoplado a um sistema de aquisição com micro computador e um programa para tratamento dos sinais. Neste estudo não foi efetuada a correção da dispersão dos sinais. Os sinais obtidos no centro das barras são considerados como sendo os sinais nas interfaces com o corpo de prova. A calibração do dispositivo de ensaio e do sistema de tratamento dos dados é feita utilizando os dados de um ensaio de compressão convencional e de um ensaio com taxa de deformação elevada para um material considerado não sensível à taxa de deformação. Para calibração foram utilizadas as ligas de alumínio 6061-T6 e 7075-T6, consideradas insensíveis a taxas de deformação até 910 s^{-1} e 560 s^{-1} respectivamente. Desta forma conseguem uma sensível redução na dispersão da curva tensão-deformação. Entretanto, não é possível concluir que não há necessidade de correção da dispersão dos sinais. O sucesso deste procedimento se deve à precisão com que foi estabelecida uma origem comum para os tempos, tanto para as deformações medidas na primeira barra quanto para as

deformações medidas na segunda barra. O efeito produzido por um erro na origem dos sinais no tempo será evidenciado no final deste capítulo.

Gorham e Wu (1983-1997), sugerem um procedimento empírico de correção da dispersão dos sinais nas barras de Hopkinson, efetuando a correção dos ângulos de fase de sinais gerados pelo impacto de pequenas esferas na extremidade da barra.

Ramesh e Narasimhan (1996) utilizam raio laser para medição direta, sem contato, da deformação radial do corpo de prova. Efetuam teste de compressão de materiais porosos associando a técnica de medida da deformação radial do corpo de prova com a medida da deformação axial obtida por extensômetros colados nas barras.

2-2-O sistema de barras de impacto de Hopkinson (SHPB)

Para avaliar o comportamento dos materiais sob a ação de taxas de deformação elevadas o teste de tração convencional é inadequado. É impossível obter uma condição de carga uniforme com um extensômetro colocado no meio de um corpo de prova padrão por causa da superposição das ondas de tensão refletidas pelas extremidades de tal corpo. A geometria complexa da estrutura formada pelo corpo de prova e garras de fixação, torna impossível a análise de propagação das ondas de tensão .

Para avaliar o desempenho dos materiais sob a ação de impacto, com variação da taxa de deformação, o dispositivo mais adequado é a barra de pressão de Hopkinson (split Hopkinson pressure bar ou abreviando, SHPB), mostrado na figura-2.2. O corpo de prova é colocado entre duas barras cilíndricas longas e é aplicado um impacto na extremidade de uma das barras. A onda de tensão que irá atingir o corpo de prova e as que serão refletida e transmitida pelo mesmo são medidas por extensômetros colocados nas barras, num ponto suficientemente afastado da interface para evitar sobreposição dos sinais.

A barra de impacto, normalmente construída em aço ferramenta (similar ao AISI W1), tem a velocidade controlada pela pressão do ar do canhão utilizado para o seu lançamento.

As barras de incidência e transmissão são construídas em aço liga com alto teor de carbono e cromo (similar ao AISI 52100), ou aço baixo carbono com teores elevados de níquel, cobalto e molibdênio [AISI Grau 18 Ni (300) aço maraging]. Estes materiais, com tensão de escoamento da

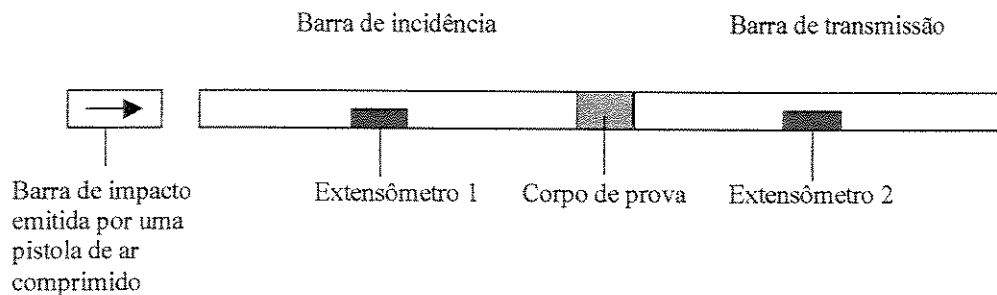


Figura – 2.2: Representação esquemática da barra de pressão de Hopkinson

ordem de 2000 MPa garantem comportamento elástico durante os testes. As propriedades mecânicas do aço maraging são mostradas na tabela-I.

As interfaces entre o corpo de prova e as barras são lubrificadas com bi-sulfeto de molibdênio (MoS_2) para minimizar a restrição radial causada pelo atrito.

Tabela-I aço AISI Grau 18 Ni (300) aço Maraging

Limite de resistência	2027 MPa
Limite de escoamento	2000 MPa
Módulo de Elasticidade	190 GPa
Razão de Poisson	0,3

2.3-Dispersão do pulso de tensão

Normalmente é utilizada a equação de propagação de onda numa barra unidimensional para o cálculo das tensões e deformações no corpo de prova, a partir dos sinais medidos nas barras, ou seja:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

onde z é a coordenada ao longo do eixo da barra, $v(z,t)$ o deslocamento na direção z , t o tempo, $C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ a velocidade de propagação, E o módulo de elasticidade e ρ a massa específica.

Nesta teoria simplificada é assumido que a onda originada pelo impacto propaga-se pela barra sem qualquer mudança de fase ou distorção. Desta forma o pulso incidente na interface da barra com o corpo de prova é considerado como sendo aquele registrado pelo extensômetro. O mesmo ocorre com os pulsos refletido e transmitido pelo corpo de prova. Esta teoria é uma boa aproximação quando a força produzida pelo pulso é aplicada de forma relativamente lenta e uniforme e a barra possuir um comprimento bem maior que o raio. Isto significa que o tratamento dos sinais, neste caso, será adequado se o pulso de excitação apresentar um tempo de subida suficientemente longo de forma a minimizar as componentes de alta frequência.

Quando a velocidade de aplicação da carga e a intensidade da força aumentam, ou seja, quando o pulso apresenta um conteúdo elevado de altas frequências, ocorre dispersão significativa do pulso durante a propagação pela barra, sendo necessária a utilização de uma teoria mais geral de propagação de ondas elásticas para corrigir a dispersão dos sinais medidos nos extensômetros. Como observado por Gong, Malvern e Jenkins (1990), a correção da dispersão é especialmente importante quando os pulsos incidente e refletido são da mesma ordem de grandeza, ou seja, quando é grande a diferença de impedância específica entre as barras e o corpo de prova. Nesta situação o efeito de dispersão é significativo quando os dois sinais são somados algebricamente para obter a tensão na interface entre a barra de incidência e o corpo de prova. A dispersão do sinal se propagando numa barra livre é mostrada na figura 2.3. O primeiro pulso corresponde ao pulso de compressão gerado pelo impacto do projétil na primeira extremidade da barra e que, após um intervalo de tempo, é registrado pelo extensômetro colocado no meio desta barra. Ao atingir a extremidade oposta, o pulso de compressão reflete como um pulso de tração e é novamente registrado quando passa pelo extensômetro. O pulso seguinte corresponde à reflexão do pulso de tração na primeira extremidade da barra, neste caso o pulso é refletido como pulso de compressão. O processo continua até a dissipação total do pulso ao longo do tempo. Pode-se observar a alteração no perfil do pulso, causada pela dispersão que ocorre durante a propagação pela barra.

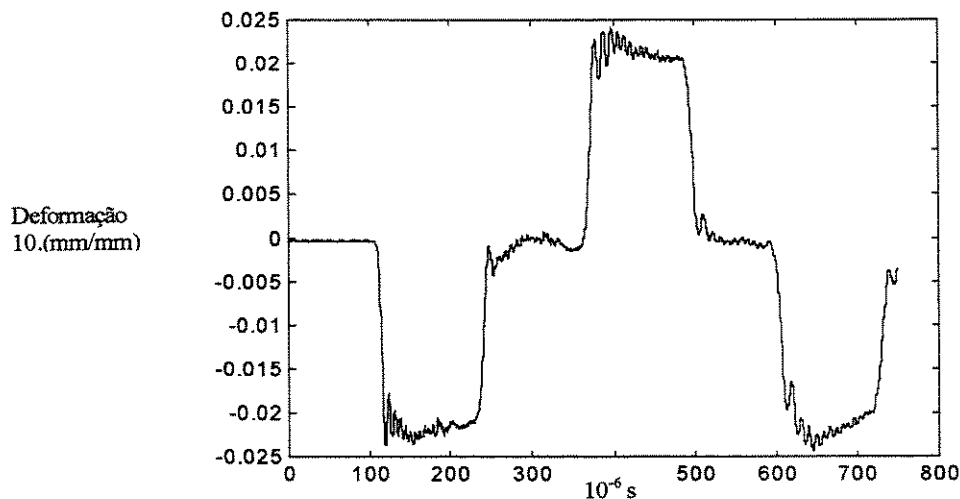


Figura-2.3: Dispersão de um pulso propagando numa barra livre. Um pulso de compressão reflete na extremidade da barra como pulso de tração e vice-versa. O processo continua até a dissipação do pulso com o tempo. A alteração no perfil do pulso é devida ao fenômeno de dispersão durante a propagação pela barra.

Bertholf e Karnes (1975), estudam a barra axissimétrica, através de um modelo numérico de diferenças finitas. Ao considerar o comportamento elastoplástico, observam que as oscilações dos sinais são causadas por ondas radiais resultantes quando a onda de compressão inicial tem um tempo curto de subida. Observam também que uma excitação em rampa reduz as oscilações sem redução significativa do valor médio da taxa de deformação.

Na prática para obter um sinal em rampa e atenuar os efeitos de dispersão, utiliza-se barra de impacto com a extremidade arredondada ou é instalado um disco de material de menor resistência mecânica na extremidade de impacto da barra de incidência. Parry, Walker e Dixon (1995), utilizam uma barra de pré-carga com limite de escoamento menor que da barra de incidência e obtêm um pulso virtualmente sem oscilação na barra de incidência. A barra de pré-carga recebe o impacto e o transmite para a barra de incidência.

Para inserir o fenômeno de dispersão num pulso descrito pela teoria simplificada, ou seja, barra unidimensional, utiliza-se a equação de frequência obtida por Pochhammer e Chree no estudo de propagação de ondas longitudinais senoidais em uma barra cilíndrica axissimétrica infinita. Este

estudo pode ser encontrado nos livros de Love (1927) e Kolsky (1963) e é apresentado em detalhes no capítulo 3 deste trabalho.

Impondo a condição de tensões nulas na superfície lateral da barra, Pochhammer e Chree obtêm uma equação que relaciona a frequência e o comprimento da onda. A equação de Pochhammer-Chree ou equação de frequência, registrada por Follansbee e Frantz (1983), é representada pela equação:

$$\left\{ B_1 J_1(hr) \left[2\mu \frac{\partial^2 J_0(hr)}{\partial^2 r} - B_2 J_0(hr) \right] + B_3 \frac{\partial J_0(hr)}{\partial r} \frac{\partial J_1(kr)}{\partial r} \right\}_{r=R} = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{onde : } B_1 = \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} \left(\rho \frac{C_\alpha^2}{\mu} - 2 \right), \quad B_2 = \frac{4\pi^2 \lambda \rho C_\alpha^2}{\Lambda^2 (\lambda + 2\mu)}$$

$$h = \frac{\Lambda}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{\rho C_\alpha^2}{\lambda + 2\mu}} - 1 \right), \quad k = \frac{\Lambda}{2\pi} \left(\sqrt{\frac{\rho C_\alpha^2}{\mu}} - 1 \right)$$

J_0, J_1 são funções de Bessel de primeira classe de ordem zero e um respectivamente.

C_α é a velocidade de propagação de uma onda harmônica de frequência α e comprimento de onda Λ .

Sendo $C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ e $C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$ respectivamente as velocidades de ondas de dilatação e distorção em um meio infinito, onde λ e μ são as constantes de Lamè do material, a razão entre estas velocidades e a velocidade da onda na barra unidimensional é função apenas da razão de Poisson, ou seja:

$$\frac{C_1^2}{C_0^2} = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ e } \frac{C_2^2}{C_0^2} = \frac{1}{2(1+\nu)}.$$

Utilizando estas relações a equação (2.5) será uma função de três variáveis adimensionais:

a) A razão entre a velocidade de propagação da onda na barra e a velocidade da onda na barra unidimensional, $\left(\frac{C_\alpha}{C_0} \right)$.

b) A razão entre o raio da barra e o comprimento da onda, $\left(\frac{R}{\Lambda} \right)$.

c) A razão de Poisson, ν .

Para um dado valor de ν pode-se obter a relação entre $\left(\frac{C_\alpha}{C_0}\right)$ e $\left(\frac{R}{\Lambda}\right)$. Esta equação tem múltiplas raízes, ou seja, um dado valor de Λ corresponde mais de um valor de C_α , cada um destes correspondendo a um modo diferente de vibração da barra. Davies(1948), analisa os resultados obtidos nos teste com a barra de pressão de Hopkinson, excitada por impacto de projéteis, e só encontra evidências de vibrações do modo 1 ou modo fundamental. Conclui que, nas condições de impacto da barra de Hopkinson, as ondas pertencem ao primeiro modo de vibração.

A variação da velocidade de fase, em função do comprimento de onda, para o primeiro modo de vibração é apresentada na figura 2.4.

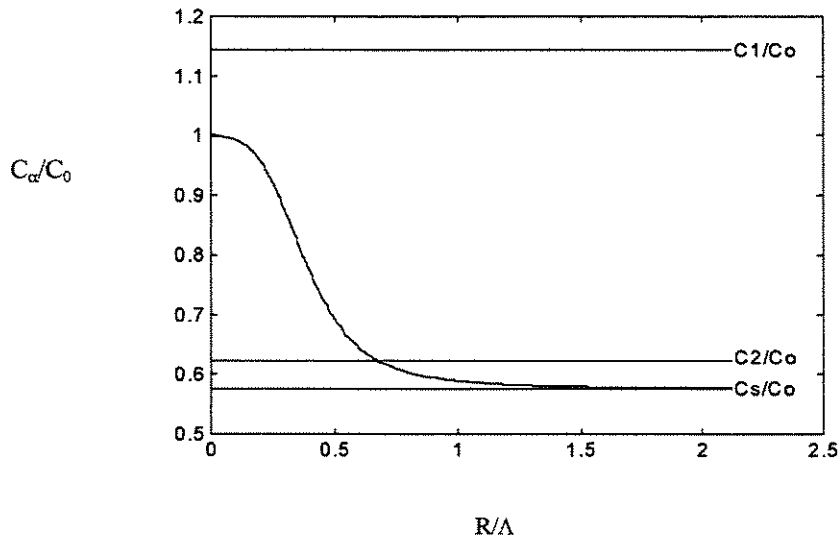


Figura -2.4: Velocidade de fase de ondas longitudinais numa barra cilíndrica (modo fundamental) para razão de Poisson $\nu=0,29$

Na figura-2.4 são colocadas também as relações $\frac{C_1}{C_0}$, $\frac{C_2}{C_0}$ e $\frac{C_s}{C_0}$, sendo C_s a velocidade de ondas de superfície de Rayleigh num meio semi-infinito.

Para ondas longas $\left(\frac{R}{\Lambda}\right) < 0,1$ a velocidade de fase da onda longitudinal difere muito pouco da velocidade C_0 . Para ondas curtas a velocidade tende assintoticamente para a velocidade de ondas de superfície de Rayleigh.

2.4-Procedimento para correção da dispersão

Para correção da dispersão dos sinais medidos nos extensômetros, de forma a reconstituir os sinais nas interfaces do corpo de prova, o procedimento de uso mais comum, utilizado por Follansbee e Frantz (1983), consiste em representar o sinal por uma série de Fourier da seguinte maneira:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t - \delta) \quad (2.6)$$

Considerando t' o intervalo de tempo medido a partir do instante no qual todas as componentes de frequência estão em fase e sendo $n\omega_0 \frac{z}{C_n}$ o ângulo de fase de cada componente após percorrer uma distância z , tem-se :

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos \left[n\omega_0 \left(t' - \frac{z}{C_n} \right) \right] \quad (2.7)$$

fazendo $t' = t + \frac{z}{C_0}$, o ângulo de fase será : $\delta_n = \frac{n\omega_0 \Delta z}{C_0} \left(\frac{C_0}{C_n} - 1 \right)$

A dispersão de qualquer componente pode ser determinada levando-se em conta a correção do ângulo de fase : $\delta = \delta_0 + \delta_n = \delta_0 + \frac{n\omega_0 \Delta z}{C_0} \left(\frac{C_0}{C_n} - 1 \right)$, onde δ_0 é o ângulo de fase em z_0 e δ o ângulo de fase em $z = z_0 + \Delta z$

Bancroft (1941), obteve as soluções numéricas da equação de frequência para vários valores da razão de Poisson. Para determinar as velocidades são normalmente utilizados polinômios obtidos por interpolação desses resultados. A interpolação apresentada a seguir foi utilizada por Felice (1986) para $\nu = 0,29$.

$$\frac{C_n}{C_0} = 0,5764 + \frac{0,4236}{\left[A_1 \left(\frac{R}{\Lambda_n} \right)^4 + A_2 \left(\frac{R}{\Lambda_n} \right)^3 + A_3 \left(\frac{R}{\Lambda_n} \right)^2 + A_4 \left(\frac{R}{\Lambda_n} \right)^{1,5} + 1 \right]} \quad (2.8)$$

com : $A_1 = 22,0$, $A_2 = 12,8$, $A_3 = -2,77$ e $A_4 = 0,92$

Após a correção da dispersão de cada sinal individualmente, são obtidos os sinais nas interfaces das barras com o corpo de prova.

2.5-Procedimento para obter a tensão e a deformação

Com as deformações incidente $\varepsilon_I(t)$, refletida $\varepsilon_R(t)$ e transmitida $\varepsilon_T(t)$ nas interfaces (figura 2.5) das barras com o corpo de prova, considerando que pelo corpo de prova passa uma onda longitudinal plana (neste caso podemos considerar deformação constante ao longo do diâmetro do corpo de prova) e levando-se em conta que a tensão é proporcional à velocidade da partícula ($\sigma_z = \rho \cdot C_0 \frac{\partial v}{\partial t}$), pode-se determinar as seguintes grandezas:

- Deslocamentos nas interfaces:

$$v_1 = C_0 \int_0^t [\varepsilon_I(\tau) - \varepsilon_R(\tau)] d\tau \quad (2.9)$$

$$v_2 = C_0 \int_0^t \varepsilon_T(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

- Deformação média ao longo do corpo de prova.

$$\varepsilon_{\varphi}(t) = \frac{v_1(t) - v_2(t)}{L} = C_0 \int_0^t \frac{[\varepsilon_I(\tau) - \varepsilon_R(\tau) - \varepsilon_T(\tau)]}{L} d\tau \quad (2.11)$$

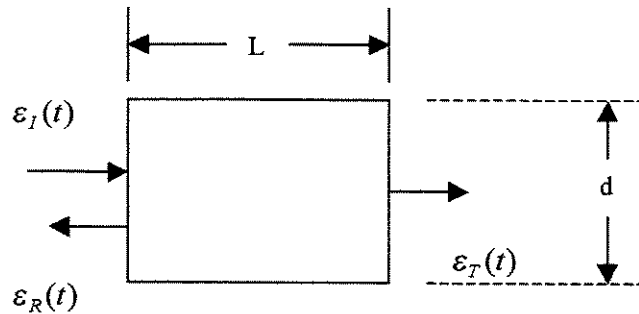


Figura-2.5: Deformações nas interfaces do corpo de prova

- Taxa de deformação

$$\dot{\varepsilon}_{cp}(t) = C_0 \frac{[\varepsilon_I(t) - \varepsilon_R(t) - \varepsilon_T(t)]}{L} \quad (2.12)$$

- Força nas extremidades do corpo de prova

$$P_1(t) = EA[\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t)] \quad (2.13)$$

$$P_2(t) = EA\varepsilon_T(t) \quad (2.14)$$

- Tensão média no corpo de prova

$$\sigma_{cp}(t) = \frac{EA[\varepsilon_I(t) + \varepsilon_R(t) + \varepsilon_T(t)]}{2A_{cp}} \quad (2.15)$$

onde A_{cp} é a área da seção reta do corpo de prova.

De acordo com as análises de Davies e Hunter (1963) e confirmadas pelos estudos numéricos de Bertholf e Karnes (1975), as hipóteses acima serão adequadas desde que haja uma boa lubrificação das interfaces entre barras e corpo de prova para minimizar o atrito e as dimensões do corpo de prova atendam a relação $h = vR\sqrt{3}$, para não ser necessário a correção de um valor de “sobre-tensão” devida à inércia.

2.6- A curva de tensões em função das deformações

Se a tensão pode ser uniforme ao longo do comprimento do corpo de prova, como observado por Follansbee e Frantz (1983), as forças nas extremidades deste são iguais. Então, da igualdade das expressões (2.13) e (2.14) tem-se uma relação entre as deformações. Substituindo esta relação nas equações (2.11) e (2.15), verifica-se que a tensão é proporcional ao pulso de deformação transmitido para a segunda barra, enquanto a deformação é proporcional ao pulso refletido na primeira barra, ou seja:

$$\sigma_{cp}(t) = \frac{EA\varepsilon_T(t)}{A_{cp}} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{cp}(t) = -2C_0 \int_0^t \frac{\varepsilon_r(\tau)}{L} d\tau \quad (2.17)$$

Na figura 2.6 é mostrada a tensão e na figura 2.7 a deformação no corpo de prova em função do tempo, obtidas a partir dos pulsos do teste realizado pelo Professor Rittel. Neste caso consideram-se os pulsos registrados nos extensômetros sem nenhuma correção da dispersão.

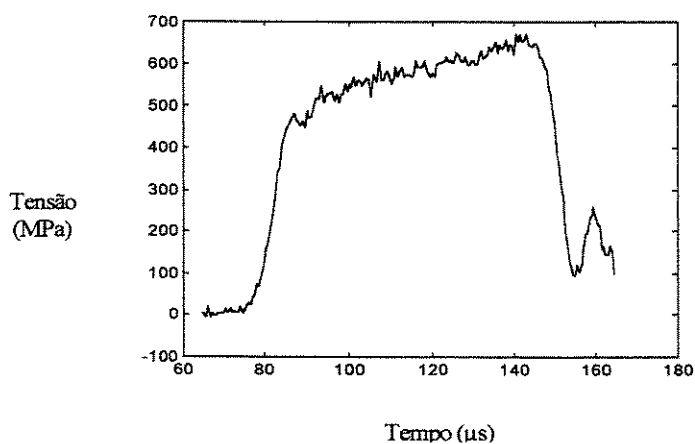


Figura-2.6: Tensão obtida do pulso transmitido sem correção da dispersão
Dados do teste realizado pelo Professor Rittel.

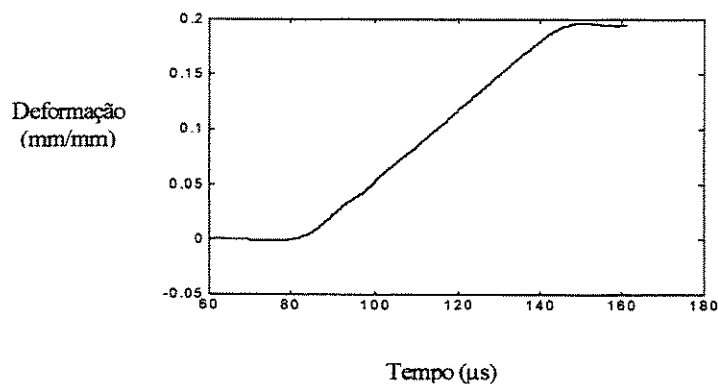


Figura-2.7: Deformação no corpo de prova obtida do pulso refletido
sem correção da dispersão. Dados do teste realizado
pelo Professor Rittel.

Para se obter a curva de tensão, elimina-se o vetor dos tempos nos gráficos obtidos, e então, determina-se um gráfico com a tensão mostrada na figura 2.6 e a deformação da figura 2.7. A tensão é relacionada com a deformação verdadeira de acordo com a relação a seguir:

$$\varepsilon_v = \log(\varepsilon + 1) \quad (2.18)$$

Aqui então surge o primeiro problema que é obter o ponto de início para as tensões e deformações. O ponto ou instante de tempo de início da deformação é relativamente mais fácil de ser identificado, entretanto, pela acentuada irregularidade do pulso de tensão, é bem difícil identificar o ponto de início do mesmo.

Na figura 2.8 é mostrada a curva obtida considerando como início o ponto onde o deslocamento e a tensão são iguais a zero. Estes pontos foram determinados apenas pela inspeção visual dos pulsos. Para comparação é colocada (em vermelho) também a curva de compressão do ensaio quase estático ou convencional. Neste caso, a região linear elástica é muito diferente, apresentando um módulo de elasticidade bem inferior ao observado no ensaio convencional.

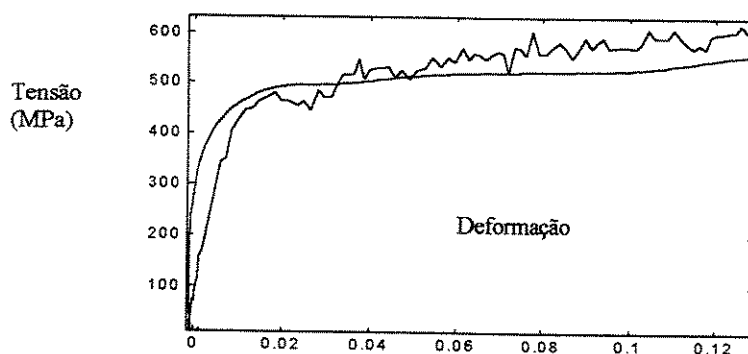


Figura-2.8: Curva de tensão considerando o ponto de início onde o deslocamento e a tensão são iguais a zero, determinado pela inspeção visual dos pulsos.

Na figura 2.9 verifica-se que, escolhendo um outro ponto de início do pulso de tensão, a curva de tensão-deformação sofre uma variação significativa. Para o novo ponto escolhido, a região inicial da curva tende para a curva do ensaio convencional.

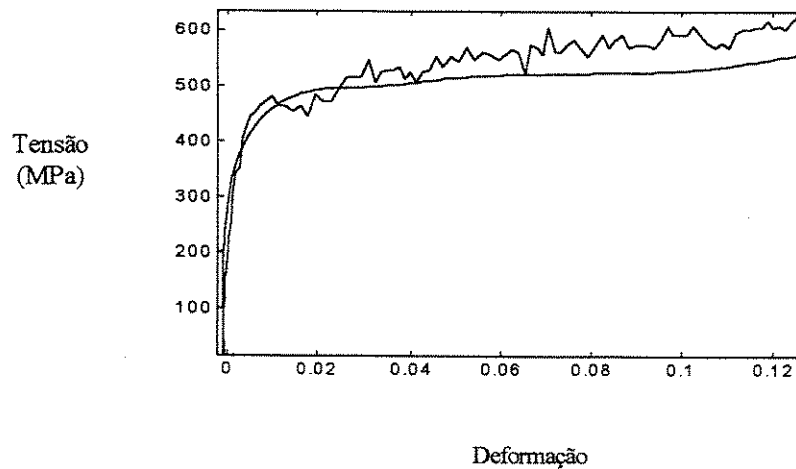


Figura-2.9: Deslocando-se o ponto de início do pulso de tensão a região inicial da curva tende para a curva do ensaio convencional

2.7-Conclusão e comentário

Pelo que foi verificado, da comparação entre a curva de tensão sem a correção da dispersão e a curva do ensaio convencional, conclui-se que:

- a) Para obtenção da curva de tensão-deformação é muito importante obter com precisão o instante de início dos pulsos de tensão e de deslocamento.
- b) As irregularidades, observadas na região plástica da curva de tensão, são decorrentes do perfil do pulso de tensão mostrado na figura 2.6. A irregularidade deste sinal pode ser atribuída aos componentes de alta frequência ou mesmo ruído. Entretanto, com base na literatura, estes não apresentam contribuição significativa para as tensões e deslocamentos.

c) Será utilizada a solução da equação diferencial da barra axissimétrica, cujo desenvolvimento é apresentado no capítulo 3, para correção da dispersão do pulso e redução das irregularidades da curva de tensão-deformação.

d) Será estabelecido um procedimento de determinação do ponto de início da tensão e deformação de forma que haja coincidência entre as regiões elásticas das curvas do teste quase estático e do teste de com taxa de deformação elevada, pois, a região elástica não é sensível à taxa de deformação. Este procedimento é detalhado no capítulo 5.

Capítulo 3

Modelos para análise dos sinais em uma barra circular axissimétrica submetida a um pulso de tensão longitudinal

3.1- Introdução

Neste capítulo apresenta-se de forma detalhada o Modelo de Mecânica do Contínuo que consiste na solução analítica da equação diferencial para uma barra axissimétrica livre. Apresenta-se também o desenvolvimento do Modelo de Elementos Finitos que consiste na solução numérica da equação da barra obtida a partir da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais. Encerrando o capítulo, desenvolve-se o procedimento para ajuste dos modelos através do método dos Mínimos Quadrados.

3.2-Equação de equilíbrio ou equação diferencial da barra axissimétrica

Este problema foi estudado por Pochhammer (1876) e, independentemente, por Chree (1889) para uma barra infinita. Segundo Love (1927), estas soluções, expressas por funções harmônicas, não atendem as condições de contorno de uma barra finita livre. Aqui será apresentado o desenvolvimento da solução em detalhes e será discutida a sua utilização em uma barra finita submetida a um pulso longitudinal de tensões.

Considerando as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) com os deslocamentos correspondentes (u, w, v) e movimento simétrico em relação ao eixo z da barra, os deslocamentos radial e axial (u, v) serão independentes de θ e w será nulo.

Pela segunda lei de Newton, desprezando as forças de volume (peso próprio) as equações de movimento num ponto qualquer da barra assumem a forma:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r}, \quad (3.2)$$

onde ρ é a massa específica.

Se os deslocamentos são suficientemente pequenos, as componentes da deformação podem ser escritas na forma:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (3.3)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (3.6)$$

Para um meio linear elástico isotrópico as componentes de tensão são dadas por:

$$\sigma_r = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (3.7)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \Delta + 2\mu \frac{u}{r}, \quad (3.8)$$

$$\sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (3.9)$$

$$\tau_{rz} = 2\mu \left(\omega + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (3.10)$$

Sendo:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.11)$$

a dilatação no plano rz ,

$$2\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \quad (3.12)$$

a rotação em torno do eixo θ .

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{constantes de Lamè}$$

E – módulo de Young e ν – razão de Poisson.

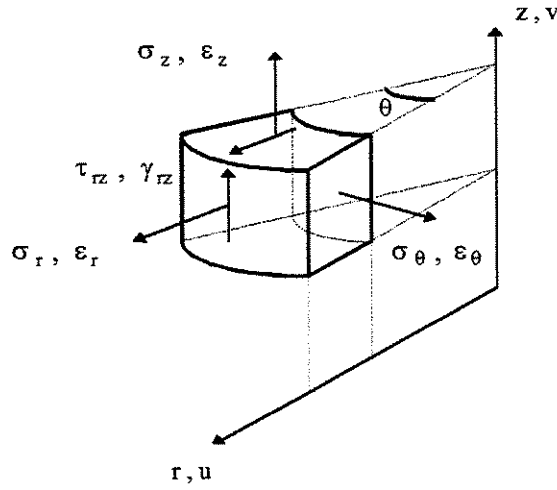


Figura –3.1: Barra axissimétrica – coordenadas cilíndricas

Portanto, para pequenos deslocamentos e material linear isotrópico as equações de movimento (3.1) e (3.2) assumem a forma:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2\mu \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (3.13)$$

$$e \quad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - 2 \frac{\mu}{r} \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} \quad (3.14)$$

Podemos eliminar ω ou Δ obtendo duas equações independentes:

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} \quad (3.15)$$

$$e \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\omega}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \quad (3.16)$$

3.2.1 -Separando as variáveis

Considerando a seguinte separação de variáveis:

$$\begin{Bmatrix} u(r,z,t) \\ v(r,z,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(r,z) \\ v(r,z) \end{Bmatrix} \eta(t) \quad (3.17)$$

então

$$\begin{Bmatrix} \Delta(r,z,t) \\ \omega(r,z,t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta(r,z) \\ \omega(r,z) \end{Bmatrix} \eta(t) \quad (3.18)$$

onde $\eta(t)$ é uma função harmônica de t , de forma que :

$$\frac{d^2 \eta(t)}{dt^2} = -\alpha^2 \eta(t) \quad (3.19)$$

ω e Δ são funções de (r,z) satisfazendo as seguintes equações :

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial r} + \left(\frac{\alpha}{C_1} \right)^2 \Delta + \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = 0 \quad (3.20)$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \left[\left(\frac{\alpha}{C_2} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \right] \omega + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0 \quad (3.21)$$

onde

$C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ é a velocidade de uma onda de dilatação e $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ é a velocidade de uma

onda de distorção ou cisalhamento, em um meio infinito.

Considera-se a seguinte separação de variáveis para as coordenadas r e z :

$$\Delta = P(r)F(z) \quad (3.22)$$

$$\text{e} \quad \omega = Q(r) \frac{dF(z)}{dz} \quad (3.23)$$

assumindo $F(z)$ como função harmônica de z , de forma que :

$$\frac{d^2 F(z)}{dz^2} = -a^2 F(z)$$

Levando P , Q e F nas equações (3.20) e (3.21) tem-se :

$$\frac{d^2 P}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP}{dr} + h^2 P = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2 Q}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dQ}{dr} + \left[k^2 - \frac{1}{r^2} \right] Q = 0 \quad (3.25)$$

$$e \quad \frac{d^2 F}{dz^2} + a^2 F = 0 \quad (3.26)$$

$$\text{onde} \quad h^2 = \left(\frac{\alpha}{C_1} \right)^2 - a^2 \quad e \quad k^2 = \left(\frac{\alpha}{C_2} \right)^2 - a^2.$$

P e Q são funções de Bessel de primeira classe de ordem zero e um respectivamente : $P = J_0(hr)$ e $Q = J_1(kr)$.

Então,

$$\Delta = A_1 J_0(hr) F(z), \quad (3.27)$$

$$e \quad \omega = A_2 J_1(kr) \frac{dF(z)}{dz} \quad (3.28)$$

A_1, A_2 são constantes arbitrárias e

$$J_0(hr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (hr)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \quad J_1(kr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kr)^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!}.$$

3.2.2 – Deslocamentos

Eliminando u ou v nas equações (3.11) e (3.12) obtém-se as seguintes equações:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2}{r} \frac{\partial(r\omega)}{\partial r} \quad (3.29)$$

$$e \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial r} + 2 \frac{\partial \omega}{\partial z} \quad (3.30)$$

onde v e u podem assumir a forma :

$$v = [A_1 P_1(r) - 2A_2 k P_2(r)] \frac{dF(z)}{dz}, \quad (3.31)$$

$$u = -[A_1 h Q_1(r) + 2a^2 A_2 Q_2(r)] F(z). \quad (3.32)$$

Substituindo as expressões (3.31) e (3.32) nas equações (3.29) e (3.30), respectivamente. E substituindo na equação resultante Δ e ω pelas expressões (3.27) e (3.38) e, ainda, adotando a

notação $\nabla_1 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - a^2$ e $\nabla_2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - a^2$ obtém-se as seguintes equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \nabla_1 P_1(r) &= J_0(hr) & , & & \nabla_1 P_2(r) &= J_0(kr) \\ \nabla_2 Q_1(r) &= J_1(hr) & , & & \nabla_2 Q_2(r) &= J_1(kr) \end{aligned}$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned} P_1(r) &= -\frac{J_0(hr)}{h^2 + a^2} & , & & P_2(r) &= -\frac{J_0(kr)}{k^2 + a^2} \\ Q_1(r) &= -\frac{J_1(hr)}{h^2 + a^2} & , & & Q_2(r) &= -\frac{J_1(kr)}{k^2 + a^2} \end{aligned}$$

resultando então nas seguintes expressões para v e u :

$$v(r, z) = \left[-A_1 \frac{J_0(hr)}{h^2 + a^2} + 2A_2 k \frac{J_0(kr)}{k^2 + a^2} \right] \frac{dF(z)}{dz} \quad (3.33)$$

$$u(r, z) = \left[A_1 h \frac{J_1(hr)}{h^2 + a^2} + 2a^2 A_2 \frac{J_1(kr)}{k^2 + a^2} \right] F(z) \quad (3.34)$$

3.2.3-Componentes das tensões

Substituindo Δ , ω , u e v nas expressões de σ_r , σ_z and τ_{rz} dadas por (3.7), (3.8) e (3.9) tem-se:

$$\sigma_r = \left\{ A_1 \left[\lambda J_0(hr) - 2\mu h \frac{dQ_1(r)}{dr} \right] - A_2 4a^2 \mu \frac{dQ_2(r)}{dr} \right\} F(z) \quad (3.35)$$

$$\tau_{rz} = \left\{ A_1 2\mu \frac{dP_1(r)}{dr} + A_2 2\mu \left[J_1(kr) - 2k \frac{dP_2(r)}{dr} \right] \right\} \frac{dF(z)}{dz} \quad (3.36)$$

$$\sigma_z = \left\{ A_1 \left[\lambda J_0(hr) - 2\mu a^2 P_1(r) \right] + A_2 4\mu a^2 k P_2(r) \right\} F(z) \quad (3.37)$$

sendo $\frac{dJ_0(hr)}{dr} = -hJ_1(hr)$ e $\frac{dJ_1(hr)}{dr} = hJ_0(hr) - \frac{J_1(hr)}{r}$ tem-se:

$$\begin{aligned}\frac{dP_1(r)}{dr} &= -\frac{hJ_1(hr)}{h^2 + a^2} \quad , \quad \frac{dP_2(r)}{dr} = \frac{kJ_1(kr)}{k^2 + a^2} \quad , \\ \frac{dQ_1(r)}{dr} &= \frac{J_1(hr)}{(h^2 + a^2)r} - \frac{hJ_0(hr)}{h^2 + a^2} \quad , \quad \frac{dQ_2(r)}{dr} = \frac{J_1(kr)}{(k^2 + a^2)r} - \frac{kJ_0(kr)}{k^2 + a^2}\end{aligned}$$

3.2.4-Condições de contorno

Para a barra livre têm-se as seguintes condições de contorno:

$$\sigma_r \Big|_{r=R} = 0 \quad , \quad \tau_{rz} \Big|_{r=R} = 0 \quad , \quad \tau_{rz} \Big|_{z=0}^{z=l} = 0 \quad , \quad \sigma_z \Big|_{z=0}^{z=l} = 0$$

Atendendo as duas primeiras condições em $r = R$, as tensões σ_r e τ_{rz} devem ser nulas na superfície lateral da barra, neste caso, tem-se a relação entre a frequência $\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)$ e o comprimento da onda $\left(\frac{2\pi}{a}\right)$:

$$\frac{h}{h^2 + a^2} J_1(hR) + C \frac{(a^2 - k^2)}{k^2 + a^2} J_1(kR) = 0 \quad (3.38)$$

que é denominada de equação de frequência ou equação de Pochhammer-Chree, onde:

$$C = \frac{(k^2 + a^2) \{ (k^2 - a^2) R J_0(hR) - 2h J_1(hR) \}}{4(h^2 + a^2) a^2 [J_1(kR) - kR J_0(kR)]} \quad , \quad (3.39)$$

$$\text{e} \quad A_2 = C A_1$$

As outras condições de contorno para a barra livre são $\tau_{rz} \Big|_{z=0}^{z=l} = 0$ e $\sigma_z \Big|_{z=0}^{z=l} = 0$. Para atender-las, a função

$$F(z) = A_3 \cos(az) + A_4 \sin(az) \quad (3.40)$$

admite somente a solução trivial, ou seja,

$$A_3 = A_4 = 0 \text{ ou } F(z) \equiv 0. \quad (3.41)$$

Como observado por Love, funções harmônicas não podem ser solução para uma barra finita livre.

Considerando apenas as seguintes condições de contorno:

$$\sigma_z \Big|_{z=0}^{z=l} = 0 \quad (3.42)$$

então,

$$F(z) = A_4 \sin(a_n z) \quad (3.43)$$

sendo

$$a_n = \frac{n\pi}{l} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.44)$$

Um pulso de tensão propagando-se através da barra, ao atingir uma de suas extremidades deverá produzir um pulso com o mesmo perfil e sinal contrário. Desta forma a tensão nesta seção da barra será nula, atendendo a condição de contorno, e qualquer deslocamento radial gerado pelo pulso incidente será anulado pelo deslocamento produzido pelo pulso refletido, ou seja:

$$u \Big|_0^l = 0 \quad (3.45)$$

O deslocamento axial da extremidade da barra será representado pela soma dos deslocamentos produzidos pelos pulsos, incidente e refletido. Um extensômetro colocado no centro da barra registrará pulsos de sinais contrários a cada intervalo de tempo $\Delta t = \frac{l}{C_0}$, sendo C_0 a velocidade de propagação da frente do pulso e l o comprimento da barra.

Considere-se agora uma barra infinita, conduzindo pulsos iguais de sinais contrários propagando em sentidos opostos, como mostrado na figura 3.2.

No instante $t = 0$, no ponto $z = 0$, tem-se o início dos pulsos. Nesta seção da barra, em que ocorre a superposição dos pulsos, as tensões são nulas. Numa outra seção a uma distância $z = l$ observam-se as mesmas condições, no instante $t = \frac{l}{C_0}$. No ponto médio tem-se a ocorrência de pulsos positivo e

negativos, alternadamente, propagando-se em sentidos contrários, a cada intervalo de tempo

$$\Delta t = \frac{l}{C_0}.$$

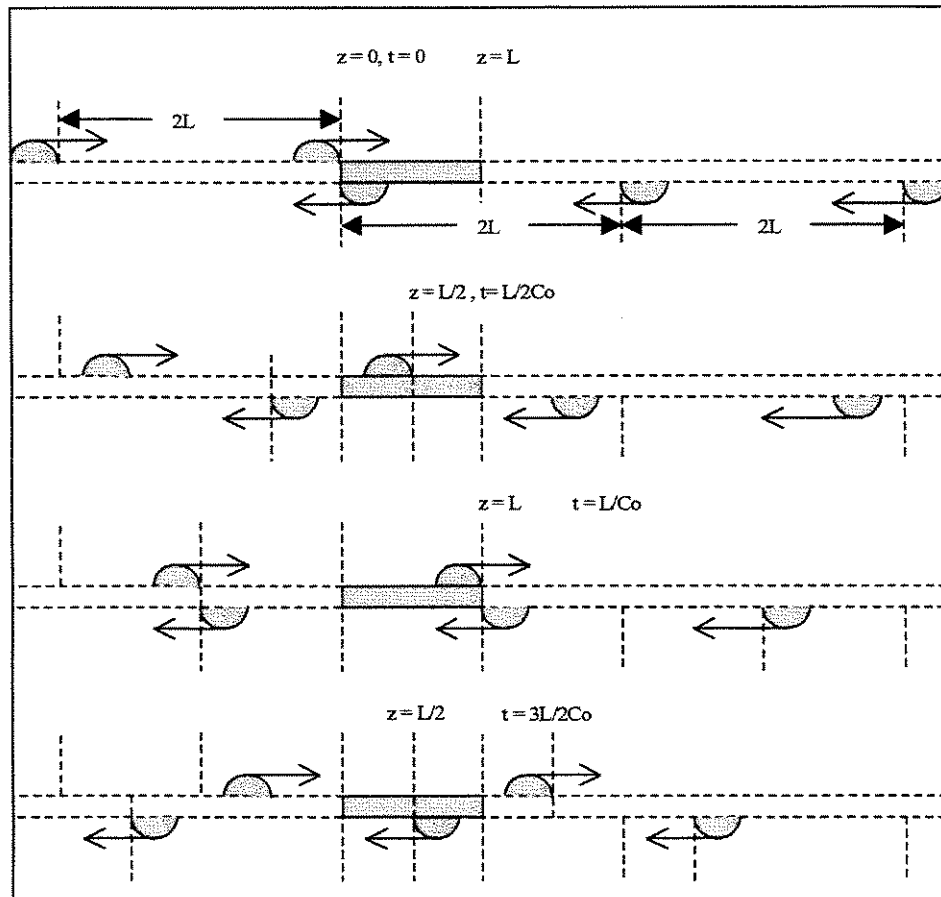


Figura-3.2: Pulsos com mesmo perfil e sinais opostos, propagando em sentido contrário numa barra infinita.

A solução obtida para a barra livre, considerando funções harmônicas que satisfazem apenas as condições de contorno (3.42) é o mesmo que considerar a barra infinita sujeita a ondas de sinais opostos propagando em sentidos contrários.

A solução das equações utilizando a superposição modal é dada em termos de ondas estacionárias, e consiste na superposição de ondas propagando em sentidos opostos, resultando em tensões (ou deformações) normais nulas nas extremidades da barra. Para obter o pulso de tensão (ou

deformação) que incidente (ou é refletido) nas extremidades da barra, deve-se decompor as funções e considerar o pulso propagando apenas num único sentido.

De acordo com a solução de Pochhammer-Chree, uma onda propagando-se numa barra infinita pode ser representada por funções harmônicas. Pelo que foi verificado, considerando a barra livre finita como uma região de comprimento l da barra infinita conduzindo pulsos que se propagam em sentidos opostos, pode-se utilizar a superposição destas funções como solução para a barra livre.

Como não foi necessário estabelecer relação entre o raio e o comprimento da barra: a solução utilizando funções harmônicas independe desta relação.

A tensão cisalhante na extremidade da barra não é nula, entretanto, como não há deslocamento radial o trabalho desta tensão é nulo. Neste caso pode-se considerar satisfeitas todas as condições de contorno.

Então, pode-se escrever as auto-funções:

$$u_n = A \left[\frac{hJ_1(hr)}{h^2 + a^2} + \frac{2a^2 CJ_1(kr)}{k^2 + a^2} \right]_{a=a_n}^{a=\alpha_n} \text{sen}(a_n z), \quad (3.46)$$

$$v_n = A a \left[\frac{2kCJ_0(kr)}{k^2 + a^2} - \frac{J_0(hr)}{h^2 + a^2} \right]_{a=a_n}^{a=\alpha_n} \cos(a_n z). \quad (3.47)$$

Para simplificar adota-se a notação:

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} g_1(r, a_n, \alpha_n) \text{sen}(a_n z) \\ g_2(r, a_n, \alpha_n) \cos(a_n z) \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

3.2.5- Deslocamentos em função do tempo

Substituindo as relações (3.11) e (3.12) nas equações (3.13) e (3.14) e considerando um carregamento distribuído Z aplicado na direção axial, a equação de movimento assume a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} - \rho \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

onde ∂_{ij} representam operadores diferenciais dados por:

$$\begin{aligned} \partial_{11} &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} - \frac{1}{r^2} \right) + \mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \partial_{12} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \\ \partial_{21} &= (\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{r \partial z} \right) & \partial_{22} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} \right) \end{aligned}$$

Considerando o deslocamento como um somatório das auto-funções:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \eta_n(t). \quad (3.50)$$

Levando na equação (3.49), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \eta_n(t) - \rho \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} \ddot{\eta}_n(t) + \begin{Bmatrix} 0 \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.51)$$

Multiplicando pela transposta de uma auto-função qualquer e integrando no volume:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \int_V \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \partial_{11} & \partial_{12} \\ \partial_{21} & \partial_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} dV - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \int_V \rho \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \end{Bmatrix} dV + \int_V \begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ Z \end{Bmatrix} dV = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.52-a)$$

Para simplificar a notação tem-se:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t) \bar{K}_{nm} - \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\eta}_n(t) \bar{M}_{nm} + \bar{Z}_m = 0 \quad (3.52-b)$$

onde;

$$\bar{K}_{nm} = A^2 \int_V \{ g_{1m} f_m [\partial_{11}(g_{1n} f_n) + \partial_{12}(g_{2n} f'_n)] + g_{2m} f'_m [\partial_{21}(g_{1n} f_n) + \partial_{22}(g_{2n} f'_n)] \} dV \quad (3.53)$$

$$\bar{M}_{nm} = \rho A^2 \int_V [g_{1m} f_m g_{1n} f_n + g_{2m} f'_m g_{2n} f'_n] dV \quad (3.54)$$

$$\bar{Z}_m = A \int_V (g_{2n} f'_m Z) dV \quad (3.55)$$

$$f_n = \sin\left(\frac{n\pi}{l} z\right), f'_n = \cos\left(\frac{n\pi}{l} z\right) \quad (3.56)$$

Comparando as expressões (3.46), (3.47) e (3.48), verifica-se que:

$$g_{1n} = \left[\frac{hJ_1(hr)}{h^2 + a^2} + \frac{2a^2 C J_1(kr)}{k^2 + a^2} \right]_{a=a_n}^{\alpha=\alpha_n} \text{ e } g_{2n} = a \left[\frac{2kC J_0(kr)}{k^2 + a^2} - \frac{J_0(hr)}{h^2 + a^2} \right]_{a=a_n}^{\alpha=\alpha_n}.$$

Substituindo as funções de Bessel pelas expressões:

$$J_0(hr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (hr)^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}, \quad J_1(kr) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kr)^{2n+1}}{2^{2n+1} n! (n+1)!}.$$

As funções g_{1n} e g_{2n} assumem a seguintes formas:

$$g_{1n} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n r^{2n+1} \quad (3.57)$$

$$\bar{C}_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \left[\frac{h^{2n+2}}{h^2 + a^2} + \frac{2a^2 C k^{2n+1}}{k^2 + a^2} \right]_{a=a_n}^{\alpha=\alpha_n} \quad (3.58)$$

$$g_{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} C'_n r^{2n} \quad (3.59)$$

$$C'_n = \frac{(-1)^n a}{2^{2n} n! n!} \left[\frac{2C k^{2n+1}}{k^2 + a^2} - \frac{h^{2n}}{h^2 + a^2} \right]_{a=a_n}^{\alpha=\alpha_n} \quad (3.60)$$

onde C é dado pela fórmula (3.39).

Efetuada a integração das expressões (3.53), (3.54) e (3.55) e considerando a ortogonalidade das auto-funções em relação a massa e rigidez, pois:

$$\int_0^l f_m f_n dz = \int_0^l f'_m f'_n dz = 0 \Rightarrow m \neq n \text{ e } \int_0^l f_m f_n dz = \int_0^l f'_m f'_n dz = \frac{l}{2} \Rightarrow m = n$$

A expressão (3.52-b) assume a forma:

$$\eta_m(t) \bar{K}_{mm} - \ddot{\eta}_m(t) \bar{M}_{mm} + \bar{Z}_m(t) = 0 \quad (3.61)$$

ou

$$\ddot{\eta}_m(t) + \Omega_m^2 \eta_m(t) = \Phi_m(t) \quad (3.62)$$

onde

$$\Phi_m(t) = \frac{\bar{Z}_m}{\bar{M}_{mm}} \quad , \quad \Omega_m^2 = -\frac{\bar{K}_{mm}}{\bar{M}_{mm}}$$

$$\bar{M}_{mm} = \rho \frac{A^2 l}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right] \Bigg|_{a=a_m}^{\alpha=\alpha_m}$$

Fazendo a normalização pela massa : $\bar{M}_{mm} = 1$ então

$$A_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho J \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]}} \Bigg|_{a=a_m}^{\alpha=\alpha_m} \quad (3.63)$$

$$\Omega_m^2 = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \bar{C}_n \left(\frac{B_{1i} R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} + \frac{B_{2i} R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} \right) + C'_n \left(\frac{B'_{1i} R^{2(n+i)}}{2(n+i)} + \frac{B'_{2i} R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right\}}{\rho \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \Bigg|_{a=a_m}^{\alpha=\alpha_m} \quad (3.64)$$

Sendo:

$$B_{1i} = 2i[2(i+1)(\lambda + 2\mu)\bar{C}_i - (\lambda + \mu)\alpha C'_i]$$

$$B_{2i} = -\mu \alpha^2 \bar{C}_i$$

$$B'_{1i} = 4\mu i^2 C'_i$$

$$B'_{2i} = 2(i+1)(\lambda + \mu)\alpha \bar{C}_i - (\lambda + 2\mu)\alpha^2 C'_i$$

$$\text{Para } n=i=0 \text{ o termo } \frac{B'_{1i} R^{2(n+i)}}{2(n+i)} = 0$$

Para $n \geq 3$ e $i \geq 3$, verifica-se que $\Omega_m = \alpha_m$, não sendo necessário obter Ω_m através da fórmula (3.64), pois pode-se obter α_m pela equação de frequência (3.38).

Para $n \geq 4$ e $i \geq 4$, a solução da equação de frequência, ou a curva de frequência em função do comprimento de onda, mostrado na figura 2.3, não se altera. Portanto, basta fazer o somatório das fórmulas para n e i variando de 0 a 4 e considerar a seguinte equação :

$$\ddot{\eta}_m(t) + \alpha_m^2 \eta_m(t) = \Phi_m(t) \quad (3.65)$$

Considerando na equação (3.55) a carga constante, ou uniforme, na direção radial e aplicada na extremidade $z = 0$ da barra obtém-se;

$$\Phi_m(t) = \frac{\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C'_n R^{2n+2}}{2n+2}}{\sqrt{\rho I \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]}} Z(0,t) \quad (3.66)$$

ou, fazendo:

$$\Phi'_m = \frac{\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C'_n R^{2n+2}}{2n+2}}{\sqrt{\rho I \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]}} \Bigg|_{a=a_m}^{\alpha=\alpha_m}$$

$$\Phi_m(t) = \Phi'_m Z(0,t) \quad (3.67)$$

Para a condição inicial de repouso, utilizando a integral de convolução ou integral de Duhamel [Bismarck (1993), p. 276], tem-se:

$$\eta_m(t) = \frac{\Phi'_m}{\alpha_m} \int_0^t Z(0,\tau) \text{sen}[\alpha_m(t-\tau)] d\tau \quad (3.68)$$

Os deslocamentos são dados por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \begin{Bmatrix} g_{1m} f_m \\ g_{2m} f'_m \end{Bmatrix} \eta_m(t) \quad (3.69)$$

3.2.6 - Ajuste do sinal

O sinal medido na barra é a deformação na direção longitudinal (z)

$$\varepsilon_z = \frac{\partial v}{\partial z} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m g_{2m} \frac{df'_m}{dz} \eta_m(t)$$

ou,

$$\varepsilon_z(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ F_m \text{sen}(a_m z) \int_0^t Z(0,\tau) \text{sen}[\alpha_m(t-\tau)] d\tau \right\} \quad (3.70.a)$$

com

$$F_m = \frac{-a_m \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C'_n C'_i R^{2n+2} r^{2i}}{n+1} \right]}{\rho \alpha_m l \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \quad (3.70.b)$$

Na superfície da barra $r = R$

$$F_m = \frac{-a_m \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{n+1} \right]}{\rho \alpha_m l \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \quad (3.70.c)$$

Para obter o valor médio da deformação na seção da barra deve-se considerar o valor médio

do coeficiente $\bar{F}_m = \frac{2}{R^2} \int_0^R F_m r dr :$

$$\bar{F}_m = \frac{-a_m \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{(n+1)(i+1)} \right]}{\rho \alpha_m l \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \quad (3.70.d)$$

Para obter as tensões deve-se considerar as outras deformações:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_\theta(r, z, t) \\ \varepsilon_r(r, z, t) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{Bmatrix} F_{1m} \\ F_{2m} \end{Bmatrix} \text{sen}(a_m z) \int_0^t Z(0, \tau) \text{sen}[\alpha_m(t-\tau)] d\tau \right\} \quad (3.71.a)$$

$$F_{1m} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C'_n \bar{C}_i R^{2n+2} r^{2i}}{n+1} \right]}{\rho \alpha_m l \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \quad (3.71.b)$$

$$F_{2m} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1) C'_n \bar{C}_i R^{2n+2} r^{2i}}{n+1} \right]}{\rho \alpha_m l \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \quad (3.71.c)$$

$$\sigma_z(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ F_{3m} \text{sen}(a_m z) \int_0^t Z(0, \tau) \text{sen}[\alpha_m(t-\tau)] d\tau \right\} \quad (3.71.d)$$

$$F_{3m} = (\lambda + 2G) F_m + \lambda (F_{1m} + F_{2m}) \quad (3.71.e)$$

$$\tau_{rz}(r, z, t) = G \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (F_{4m} + F_{5m}) \cos(a_m z) \int_0^t Z(0, \tau) \sin[\alpha_m(t - \tau)] d\tau \right\} \quad (3.71.f)$$

$$F_{4m} = \frac{a_m \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{C'_n \bar{C}_i R^{2n+2} r^{2i+1}}{n+1} \right]}{\rho \alpha_m l \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \quad (3.71.g)$$

$$F_{5m} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i) C'_n C'_i R^{2n+2} r^{2i-1}}{n+1} \right]}{\rho \alpha_m l \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{C}_n \bar{C}_i R^{2(n+i)+4}}{2(n+i)+4} + \frac{C'_n C'_i R^{2(n+i)+2}}{2(n+i)+2} \right) \right]} \quad (3.71.h)$$

$$\sigma_r(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ F_{6m} \sin(a_m z) \int_0^t Z(0, \tau) \sin[\alpha_m(t - \tau)] d\tau \right\} \quad (3.71.i)$$

$$F_{6m} = (\lambda + 2G) F_{2m} + \lambda (F_{1m} + F_m) \quad (3.71.j)$$

$$\sigma_{\theta}(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ F_{7m} \sin(a_m z) \int_0^t Z(0, \tau) \sin[\alpha_m(t - \tau)] d\tau \right\} \quad (3.71.k)$$

$$F_{7m} = (\lambda + 2G) F_{1m} + \lambda (F_{2m} + F_m) \quad (3.71.l)$$

O procedimento de ajuste consiste na identificação do sinal de entrada, que é tratado com mais detalhes no item seguinte.

3.2.7 - A integração do sinal de entrada

Para determinar os deslocamentos, tensões e deformações é necessário efetuar a seguinte

integral:
$$\int_0^t Z(0, \tau) \sin[\alpha_m(t - \tau)] d\tau .$$

Como nos testes com as barras de Hopkinson, a carga aplicada na extremidade da barra $Z(0, t)$ é desconhecida, considera-se então um pulso genérico composto por um conjunto de pulsos lineares como mostra a figura 3.3.

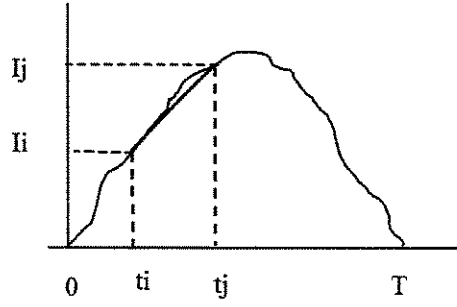


Figura-3.3: Pulso genérico subdividido em partes lineares

Considera-se um pulso de duração T , subdividido em N pulsos de duração:

$$\Delta t = \frac{T}{N} \text{ ou } \Delta t = t_{j+1} - t_j = cte.$$

Considerando a diferença entre as amplitudes inicial e final de cada pulso linear como: $d_j = I_{j+1} - I_j$.

Obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_0^T Z(0, \tau) \sin[\alpha_m(t - \tau)] d\tau &= \frac{N}{T \alpha_m^2} \sum_{j=1}^N d_j \{ \sin[\alpha_m(t - j \Delta t)] - \sin[\alpha_m(t - (j-1) \Delta t)] \} + \\ &\quad + \frac{I_N}{\alpha_m} \cos[\alpha_m(t - T)] - \frac{I_0}{\alpha_m} \cos[\alpha_m t] \end{aligned}$$

Assumindo, a primeira e a última amplitude nulas, tem-se:

$$\int_0^T Z(0, \tau) \sin[\alpha_m(t - \tau)] d\tau = \frac{N}{T \alpha_m^2} \sum_{j=1}^N d_j \{ \sin[\alpha_m(t - j \Delta t)] - \sin[\alpha_m(t - (j-1) \Delta t)] \} \quad (3.72)$$

Para uma carga aplicada num ponto $z = \bar{z}$ a partir de um instante $t = \bar{t}$ e com duração T tem-se a seguinte expressão para o pulso:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T} \cos\left(\frac{m\pi \bar{z}}{l}\right) Z(\bar{z}, \tau) \sin[\alpha_m(t - \tau)] d\tau &= \\ &= \cos\left(\frac{m\pi \bar{z}}{l}\right) \frac{N}{T \alpha_m^2} \sum_{j=1}^N d_j \{ \sin[\alpha_m(t - j \Delta t - \bar{t})] - \sin[\alpha_m(t - (j-1) \Delta t - \bar{t})] \} \end{aligned}$$

3.2.8- Ajuste pelo Método dos Mínimos Quadrados

Utilizando uma representação vetorial tem-se:

$$\varepsilon_z(R, z, t) = \{F_m\}^T [S_{mj}(t)] \{d_j\} \quad , \quad (3.73)$$

onde
$$S_{mj} = \frac{\sin(a_m z)}{\alpha_m^2 \Delta t} \{ \sin[\alpha_m(t - j \Delta t)] - \sin[\alpha_m(t - (j-1)\Delta t)] \}. \quad (3.74)$$

Que pode ser representada pela soma de uma onda propagando na direção de z crescente (Sc_{mj}) e uma onda na direção de z decrescente (Sd_{mj}):

$$Sc_{mj} = \frac{1}{2\alpha_m^2 \Delta t} \{ \cos[\alpha_m(t - j \Delta t) - a_m z] - \cos[\alpha_m(t - (j-1)\Delta t) - a_m z] \} \quad (3.75.a)$$

$$Sd_{mj} = \frac{1}{2\alpha_m^2 \Delta t} \{ -\cos[\alpha_m(t - j \Delta t) + a_m z] + \cos[\alpha_m(t - (j-1)\Delta t) + a_m z] \} \quad (3.75.b)$$

A identificação do sinal consiste em obter o vetor $\{d_j\}$ pelo método dos mínimos quadrados, detalhado a seguir:

Definido o ponto de medição do sinal na superfície da barra $z = \bar{z}$

$\varepsilon_z(R, \bar{z}, t_i) = \varepsilon_i$ onde ε_i é o sinal medido e $\varepsilon_z(R, \bar{z}, t_i)$ o modelo a ser ajustado

$$\{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)] \{d_j\} = \{\varepsilon_i\} \quad (3.76)$$

Multiplicando os dois membros pela transposta de $\{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)]$

$$\{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)]^T \{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)] \{d_j\} = \{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)]^T \{\varepsilon_i\} \quad (3.77)$$

Obtém-se:

$$\{d_j\} = \left[\{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)]^T \{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)] \right]^{-1} \{F_m\}^T [S_{mj}(t_i)]^T \{\varepsilon_i\} \quad (3.78)$$

Após o ajuste do sinal, deve-se determinar as deformações e deslocamentos nas interfaces das barras com o corpo de prova. O deslocamento é obtido pela integral de cada componente da deformação em relação ao tempo multiplicado pela velocidade de fase desta componente. Neste caso, deve-se substituir as funções co-seno por seno nas expressões (3.75.a) e (3.75.b). Os coeficientes da expressão (3.70.b) deverão ser divididos por $-a_m$, no caso da onda propagando na direção de z crescente e por a_m , no caso de propagação no sentido contrário.

3.3- Solução da barra pelo Método de Elementos Finitos

Para o estudo da barra livre utilizando os programas de elementos finitos disponíveis no mercado é necessário conhecer a carga aplicada na barra. Como foi mostrado no item anterior, o ajuste dos sinais consiste na identificação da carga aplicada. Então, para solução do problema inverso, ou seja, determinar a carga aplicada a partir da deformação medida num ponto da barra, é necessário o desenvolvimento de um programa específico.

O programa detalhado a seguir utiliza o método de superposição modal e apresenta as mesmas etapas da solução analítica desenvolvida nos itens anteriores:

Pelo princípio do trabalho virtual [Weaver (1984)], tem-se:

$$\int_V \delta \{\epsilon^e\}^T \{\sigma^e\} dV = \int_V \delta \begin{Bmatrix} v^e \\ u^e \end{Bmatrix}^T \{f(t)\} dV - \int_V \delta \begin{Bmatrix} v^e \\ u^e \end{Bmatrix}^T \rho \begin{Bmatrix} \ddot{v}^e \\ \ddot{u}^e \end{Bmatrix} dV \quad (3.79)$$

Os deslocamentos de um ponto genérico do elemento podem ser representado por:

$$\begin{Bmatrix} v^e \\ u^e \end{Bmatrix} = [N] \{q^e\} \quad (3.80-a)$$

onde $\{q^e\}$ são deslocamentos nodais e $[N]$ função de forma a ser definida.

As deformações são obtidas através da diferenciação dos deslocamentos. Isto pode ser representado por um operador diferencial aplicado sobre os deslocamentos, ou seja:

$$\{\epsilon^e\} = [d] \begin{Bmatrix} v^e \\ u^e \end{Bmatrix} = [d][N] \{q^e\} \quad (3.80-b)$$

$$\text{ou,} \quad \{\epsilon^e\} = [B] \{q^e\} \quad (3.80-c)$$

$$\text{onde} \quad [B] = [d][N] \quad (3.80-d)$$

As tensões estão relacionadas com as deformações através da matriz de elasticidade, como segue:

$$\{\sigma^e\} = [E] \{\epsilon^e\} \quad (3.80-e)$$

$$\text{ou} \quad \{\sigma^e\} = [E][B] \{q^e\} \quad (3.80-f)$$

Levando estas expressões na equação (3.79) tem-se:

$$\delta \{q^e\}^T \left[\int_V [B]^T [E] [B] dV \right] \{q^e\} + \left[\int_V \rho [N]^T [N] dV \right] \{\ddot{q}^e\} = \delta \{q^e\}^T \int_V [N]^T \{f(t)\} dV \quad (3.81)$$

Adotando a notação:

$$[M^e] = \int_V \rho [N]^T [N] dV \quad \text{Matriz de massa do elemento}$$

$$[K^e] = \int_V [B]^T [E] [B] dV \quad \text{Matriz de rigidez do elemento}$$

$$\{A^e\} = \int_V [N]^T \{f(t)\} dV = Z^e(t) \int_V [N]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dV \quad \text{onde } Z^e(t) \text{ é o carregamento externo atuando sobre o elemento na direção } z.$$

A equação (3.81) assume a forma:

$$\delta \{q^e\}^T \left([M^e] \{\ddot{q}^e\} + [K^e] \{q^e\} - \{A^e\} Z^e(t) \right) = 0. \quad (3.82-a)$$

$\delta \{q^e\} \neq \{0\}$, pois é um vetor de deslocamentos virtuais imposto sobre o elemento, então:

$$[M^e] \{\ddot{q}^e\} + [K^e] \{q^e\} = \{A^e\} Z^e(t) \quad (3.82-b)$$

A equação (3.82-b) representa a equação de movimento para um elemento genérico. A equação global de movimento da estrutura é obtida pela simples adição da contribuição de cada elemento para o deslocamento nodal correspondente.

As matrizes de massa e rigidez e os vetores de ações nodais de cada elemento são transferidos, respectivamente, para as matrizes globais de massa e rigidez e vetor das ações nodais que representam a barra, através das relações entre os índices dos deslocamentos do elemento.

Neste trabalho, utiliza-se o elemento triangular toroidal [Bismarck (1993)], mostrado na figura-3.4.

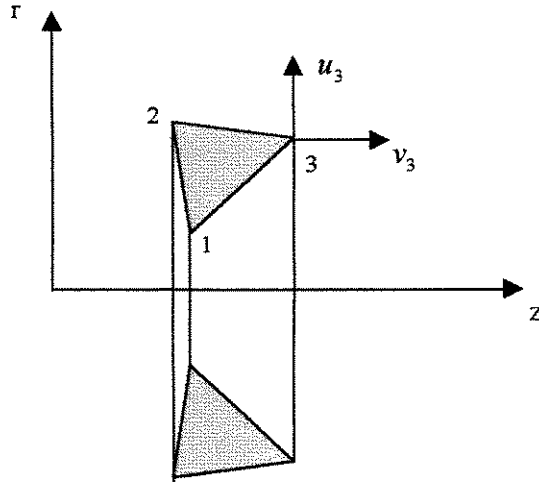


Figura-3.4: Elemento triangular toroidal, para problemas axissimétricos.
Deslocamentos apenas nas direções r e z

$\{q^e\} = (v_1 \ v_2 \ v_3 \ u_1 \ u_2 \ u_3)^T$, onde v_i, u_i são deslocamentos dos círculos nodais $i = 1, 2, 3$.

3.3.1- Função de forma e os modos de deslocamento

A função de forma $[N]$ é determinada pelas coordenadas naturais (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , onde,

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \quad (3.83-a)$$

$$r = \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \xi_3 r_3, \quad (3.83-b)$$

$$z = \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3. \quad (3.83-c)$$

Destas relações tem-se:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} \quad (3.83-d)$$

Invertendo, tem-se (ξ_1, ξ_2, ξ_3) em função das coordenadas genéricas (r, z) e das coordenadas dos círculos nodais (r_i, z_i) :

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.83-e)$$

Onde,

$$D = r_1(z_2 - z_3) + r_2(z_3 - z_1) + r_3(z_1 - z_2),$$

$$b_{i1} = r_{i+1}z_{i+2} - r_{i+2}z_{i+1},$$

$$b_{i2} = z_{i+1} - z_{i+2}$$

$$\text{e} \quad b_{i3} = r_{i+2} - r_{i+1}.$$

Estes índices são determinados de forma cíclica, para $i = 1, 2, 3$.

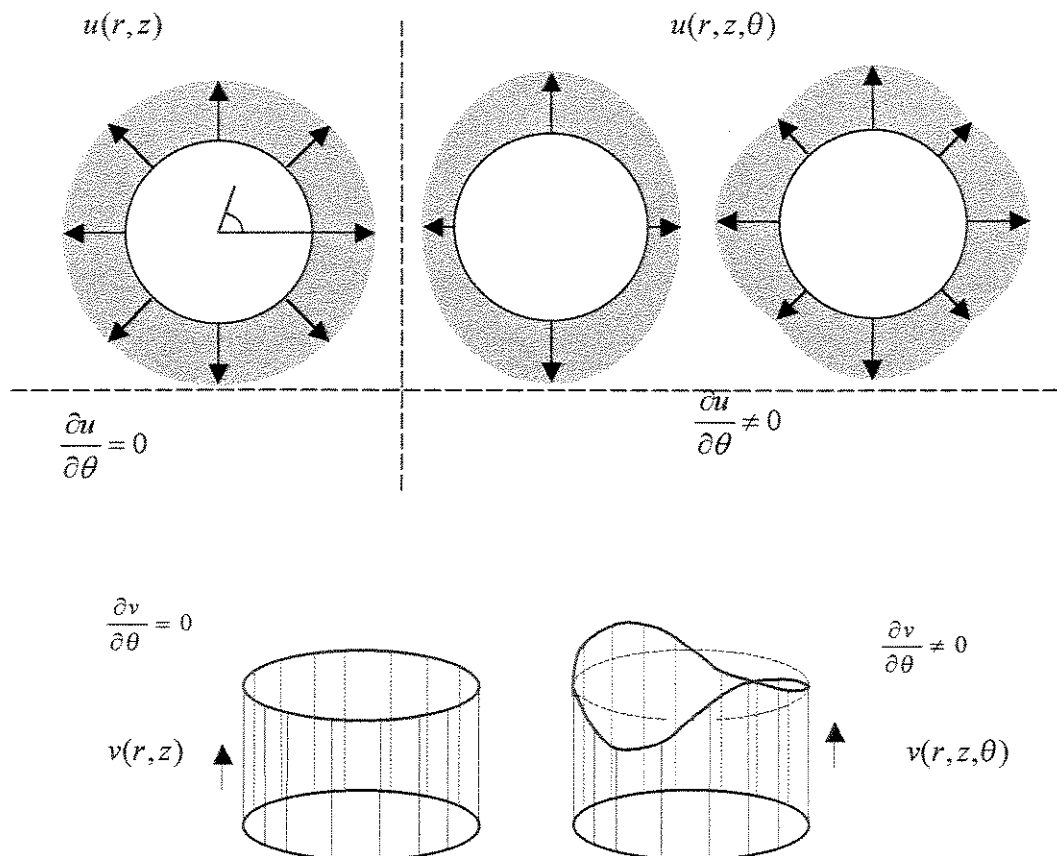
Define-se então:

$$[N(r, z)] = \begin{bmatrix} \xi_1(r, z) & \xi_2(r, z) & \xi_3(r, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1(r, z) & \xi_2(r, z) & \xi_3(r, z) \end{bmatrix} \quad (3.83-f)$$

Considerando os deslocamentos função de r e z obtém-se apenas o modo de deslocamento axissimétrico dos círculos nodais, mostrado na figura-3.5. Nesta mesma figura, existem outros modos de deslocamentos, simétricos a um conjunto de planos que contém o eixo da barra. Entretanto, estes modos resultam na variação dos deslocamentos em relação à coordenada θ .

Para inclusão dos outros modos de deslocamento do círculo nodal, deve-se definir os deslocamentos u e v como função de r , z e θ . Adota-se a definição utilizada por Grafton e Strome (1963), e citada por Bismarck (1993).

$$\begin{Bmatrix} v(r, z, \theta) \\ u(r, z, \theta) \end{Bmatrix} = \cos n\theta [N(r, z)] \{q^e\} \quad (3.84)$$



O movimento de um ponto genérico da barra, ocorre somente nos planos (r, z) , não havendo deslocamento tangencial. Figura-3.5: Deslocamentos radiais e axiais axissimétricos e simétricos a um plano que contém o eixo da barra

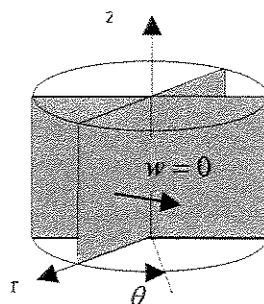


Figura-3.6: Não há deslocamento perpendicular aos planos rz . O movimento ocorre somente nestes planos

3.3.2- Matrizes de massa e rigidez e o vetor das ações nodais

Sendo, $u(r, z, \theta)$, $v(r, z, \theta)$ e $w = 0$ as deformações são definidas por:

$$\{\varepsilon\} = [d] \begin{Bmatrix} v \\ u \end{Bmatrix}, \quad (3.85-a)$$

onde,
$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_z \ \varepsilon_r \ \varepsilon_\theta \ \gamma_{rz} \ \gamma_{z\theta} \ \gamma_{r\theta})^T \quad (3.85-b)$$

e
$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{r\partial\theta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{r\partial\theta} \end{bmatrix}^T. \quad (3.85-c)$$

A relação entre tensões e deformações, é estabelecida pela lei de Hooke:

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\}, \quad (3.86-a)$$

sendo,
$$\{\sigma\} = (\sigma_z \ \sigma_r \ \sigma_\theta \ \tau_{rz} \ \tau_{z\theta} \ \tau_{r\theta})^T \quad (3.86-b)$$

e
$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (3.86-c)$$

Substituindo a expressão (3.84) em (3.85-a) e (3.86-a), respectivamente, obtém-se as deformações e tensões em função dos deslocamentos nodais, com segue:

$$\{\varepsilon^e\} = [B] \{q^e\} \quad (3.87-a)$$

e
$$\{\sigma^e\} = [E][B] \{q^e\}, \quad (3.87-b)$$

onde,
$$[B] = [d] (\cos n\theta \cdot [N(r, z)]) \quad (3.87-c)$$

Aplicando o operador diferencial, indicado em (3.84), sobre as funções de forma (3.83-f), obtém-se:

$$[\{B_1\}_i \{B_2\}_j] = \left[\dots \left\{ \begin{array}{c} \xi_{i,z} \cos n\theta \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{i,r} \cos n\theta \\ -n(\xi_i/r) \sin n\theta \\ 0 \end{array} \right\} \dots \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \xi_{i,r} \cos n\theta \\ \xi_i/r \cos n\theta \\ \xi_{i,z} \cos n\theta \\ 0 \\ -n(\xi_i/r) \sin n\theta \end{array} \right\} \dots \right] \quad (3.87-d)$$

Para $i = 1, 2, 3, \dots$, sendo $\xi_{i,r} = \frac{\partial \xi_i}{\partial r}$ e $\xi_{i,z} = \frac{\partial \xi_i}{\partial z}$

A matriz de rigidez é obtida efetuando a operação abaixo:

$$[K^e] = \int_0^{2\pi} \int_A [B]^T [E] [B] r dA d\theta = \int_0^{2\pi} \int_A \left[\begin{array}{c} \{B_1\}_i^T \\ \{B_2\}_j^T \end{array} \right]^T [E] \left[\begin{array}{c} \{B_1\}_i \\ \{B_2\}_j \end{array} \right] r dA d\theta, \text{ ou seja,}$$

$$\left[\begin{array}{cc} [K_{ij}^e]_{11} & [K_{ij}^e]_{12} \\ [K_{ij}^e]_{21} & [K_{ij}^e]_{22} \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} \int_A \left[\begin{array}{cc} \{B_1\}_i^T [E] \{B_1\}_j & \{B_1\}_i^T [E] \{B_2\}_j \\ \{B_2\}_j^T [E] \{B_1\}_i & \{B_2\}_j^T [E] \{B_2\}_j \end{array} \right] r dA d\theta.$$

Utilizando-se a matriz indicada em (3.87-d), obtém-se:

$$[K_{ij}^e]_{11} = \int_0^{2\pi} \int_A \left\{ \cos^2(n\theta) \left[(\lambda + 2\mu) \xi_{i,z} \xi_{j,z} + \mu \xi_{i,r} \xi_{j,r} \right] + \sin^2(n\theta) n^2 \mu \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} \right\} r dA d\theta$$

$$[K_{ij}^e]_{12} = \int_0^{2\pi} \int_A \left\{ \cos^2(n\theta) \left[\lambda \xi_{i,z} \xi_{j,r} + \mu \xi_{i,r} \xi_{j,z} + \lambda \xi_{i,z} \frac{\xi_j}{r} \right] \right\} r dA d\theta$$

$$[K_{ij}^e]_{22} = [K_{ij}^e]_{11} + [K_{ij}^e]_{22}^p$$

$$[K_{ij}^e]_{22}^p = \int_0^{2\pi} \int_A \left\{ \cos^2(n\theta) \left[(\lambda + 2\mu) \xi_{i,r} \xi_{j,r} + \mu \xi_{i,z} \xi_{j,z} + \lambda \left(\frac{\xi_i}{r} \xi_{j,r} + \xi_{i,r} \frac{\xi_j}{r} \right) \right] \right\} r dA d\theta$$

$$[K_{ij}^e]_{22}^p = \int_0^{2\pi} \int_A \left\{ \left[\cos^2(n\theta) (\lambda + 2\mu) + n^2 \sin^2(n\theta) \mu \right] \frac{\xi_i \xi_j}{r^2} \right\} r dA d\theta$$

Considerando a definição da integral abaixo:

$$\int_A \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} D$$

onde $D = 2A$, sendo A a área da seção reta do elemento toroidal triangular, tem-se:

$$\int_A \xi_i dA = \frac{D}{6}.$$

$$\int_A \xi_{i,r} \xi_{j,z} r dA = \xi_{i,r} \xi_{j,z} \int_A r dA = \xi_{i,r} \xi_{j,z} \int_A (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) dA = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \frac{D}{2}, \text{ ou seja,}$$

$$\int_A \xi_{i,r} \xi_{j,z} r dA = \xi_{i,r} \xi_{j,z} r_m \frac{D}{2}, \text{ onde } r_m \text{ é o raio médio.}$$

O mesmo ocorre para qual quer outra combinação de derivadas das funções ξ_i .

Sendo, $\xi_i \xi_j = c_1 + c_2 r + c_3 z + c_4 r^2 + c_5 r z + c_6 z^2$, onde:

$$c_1 = b_{i1} b_{j1}, \quad c_2 = b_{i1} b_{j2} + b_{i2} b_{j1}, \quad c_3 = b_{i1} b_{j3} + b_{i3} b_{j1},$$

$$c_4 = b_{i2} b_{j2}, \quad c_5 = b_{i2} b_{j3} + b_{i3} b_{j2}, \quad c_6 = b_{i3} b_{j3}.$$

A integral de $\int_A \frac{\xi_i \xi_j}{r} dA$ é obtida como segue:

$$\int_A \frac{\xi_i \xi_j}{r} dA = c_1 \int_A \frac{dA}{r} + c_2 \frac{D}{2} + c_3 \int_A \frac{z dA}{r} + c_4 r_m \frac{D}{2} + c_5 \int_A z dA + c_6 \int_A \frac{z^2 dA}{r} \quad (3.88)$$

Para integração desta expressão consideram-se os triângulos da figura-3.7 abaixo.

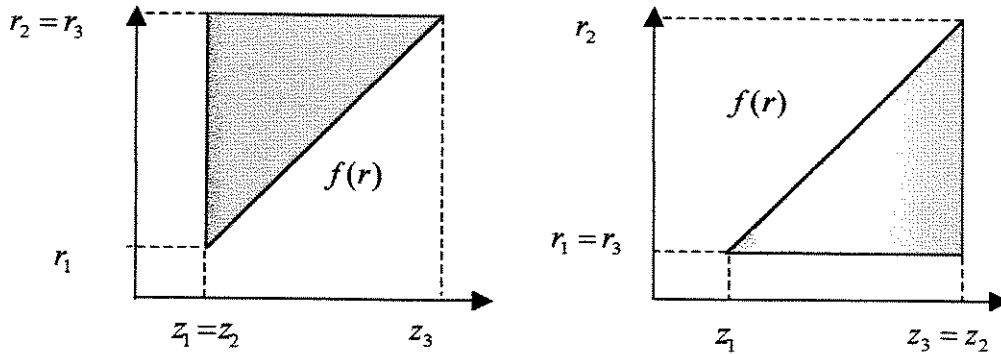


Figura-3.7: seções dos elementos triangulares superior e inferior

Neste caso, $f(r) = ar + d$, sendo $a = \frac{z_3 - z_1}{r_2 - r_1}$ e $d = z_1 - ar_1$.

Para o triângulo superior $r_2 = r_3$ e

$$\int_A G_1(r)G_2(z)dA = \int_{r_1}^{r_2} G_1(r) \left(\int_{z_1}^{f(r)} G_2(z)dz \right) dr, \text{ então,}$$

$$\int_A \frac{dA}{r} = a(r_2 - r_1) + (d - z_1) \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.88-a)$$

$$\int_A \frac{z dA}{r} = \frac{a^2(r_2^2 - r_1^2)}{4} + ad(r_2 - r_1) + \frac{(d^2 - z_1^2)}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.88-b)$$

$$\int_A z dA = \frac{a^2(r_2^3 - r_1^3)}{6} + \frac{ad(r_2^2 - r_1^2)}{2} + \frac{(d^2 - z_1^2)(r_2 - r_1)}{2} \quad (3.88-c)$$

$$\int_A \frac{z^2 dA}{r} = \frac{a^3(r_2^3 - r_1^3)}{9} + \frac{a^2 d(r_2^2 - r_1^2)}{2} + ad^2(r_2 - r_1) + \frac{(d^3 - z_1^3)}{3} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.88-d)$$

Para o triângulo inferior $r_1 = r_3$ e

$$\int_A G_1(r)G_2(z)dA = \int_{r_1}^{r_2} G_1(r) \left(\int_{f(r)}^{z_3} G_2(z)dz \right) dr.$$

Neste caso as integrais são obtidas substituindo z_1 por z_3 e multiplicando por (-1) as expressões anteriores.

Quanto a integração em θ , tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = 2\pi, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(n\theta) d\theta = \pi, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Utilizando os resultados acima, resulta:

$$[K_{ij}^e]_{11} = \beta \left\{ \left[(\lambda + 2\mu) \xi_{i,z} \xi_{j,z} + \mu \xi_{i,r} \xi_{j,r} \right] r_m \frac{D}{2} + n^2 \mu \int_A \frac{\xi_i \xi_j}{r} dA \right\}$$

$$[K_{ij}^e]_{12} = \beta \left\{ \left[(\lambda \xi_{i,z} \xi_{j,r} + \mu \xi_{i,r} \xi_{j,z}) r_m \frac{D}{2} + \lambda \xi_{i,z} \frac{D}{6} \right] \right\}$$

$$[K_{ij}^e]_{22} = \beta \left\{ \left[(\lambda + 2\mu) \xi_{i,r} \xi_{j,r} + \mu \xi_{i,z} \xi_{j,z} \right] r_m \frac{D}{2} + \lambda (\xi_{j,r} + \xi_{i,r}) \frac{D}{6} + [(\lambda + (2 + n^2)\mu)] \int_A \frac{\xi_i \xi_j}{r} dA \right\}$$

onde $\beta = 2\pi$ para $n=0$, $\beta = \pi$ para $n=1,2,3,\dots$, e a integral $\int_A \frac{\xi_i \xi_j}{r} dA$ é obtida substituindo as expressões (3.88-a-d) na expressão (3.88).

A matriz de massa é dada por:

$$[M] = \rho \int_0^{2\pi} \int_A \cos^2 n\theta [N]^T [N] r d\theta dA,$$

ou seja,

$$[M] = \rho \int_0^{2\pi} \int_A \cos^2(n\theta) \begin{bmatrix} \xi_i \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_j \\ 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_j \end{bmatrix} r dA d\theta \text{ para } i, j = 1, 2, 3 \dots$$

O termo geral da matriz assume a forma:

$$[M] = \beta \rho \begin{bmatrix} \int_A \xi_i \xi_j r dA \end{bmatrix}$$

Neste caso, tem-se: $\int_A \xi_i \xi_j (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) dA$

O primeiro elemento da matriz é dado por:

$$\int_A \xi_1 \xi_1 (r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2 + r_3 \xi_3) dA = \int_A (r_1 \xi_1^3 + r_2 \xi_1^2 \xi_2 + r_3 \xi_1^2 \xi_3) dA = \left(\frac{r_1}{20} + \frac{r_2}{60} + \frac{r_3}{60} \right) D$$

Os demais elementos são obtidos da mesma maneira, resultando em:

$$[M] = \beta \frac{\rho D}{120} \begin{bmatrix} [m] & [0] \\ [0] & [m] \end{bmatrix}$$

$$m_{11} = 6r_1 + 2r_2 + 2r_3, \quad m_{12} = 2r_1 + 2r_2 + r_3, \quad m_{13} = 2r_1 + r_2 + 2r_3$$

$$m_{22} = 2r_1 + 6r_2 + 2r_3, \quad m_{23} = r_1 + 2r_2 + 2r_3, \quad m_{33} = 2r_1 + 2r_2 + 6r_3$$

Assumindo um carregamento uniforme na direção axial e função de θ , como mostra a figura-3.8, o vetor das ações nodais é dado por:

$$\{A^e\}Z^e(t), \text{ sendo } \{A^e\} = \int_V \cos^2(n\theta) [N]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} dV$$

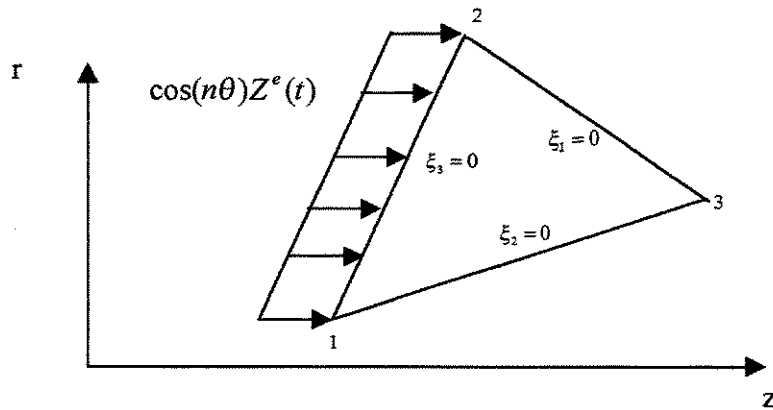


Figura-3.8: Carga aplicada no elemento

Como a carga é aplicada apenas na superfície em que $\xi_3 = 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$, então:

$$\{A^e\} = \int_0^L \int_0^{2\pi} \cos^2(n\theta) [N]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} r dL d\theta,$$

ou,

$$\{A^e\} = \beta \int_L \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_2 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} r dL.$$

Sendo, $\int_L \xi_1^a \xi_2^b dL = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} L$ e $r = r_1 \xi_1 + r_2 \xi_2$, obtém-se a seguinte expressão para o vetor

de carregamento:

$$\{A^e\} = \frac{\beta L}{6} (a_1 \quad a_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$$

$$L = \sqrt{(r_2 - r_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad a_1 = 2r_1 + r_2 \quad \text{e} \quad a_2 = r_1 + 2r_2$$

3.3.3 – Determinação dos auto-valores e auto-vetores

Obtida a equação de movimento global:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{A\}Z(t). \quad (3.89-a)$$

obtém-se os auto – vetores $[V]$ da equação

$$\{-\omega^2[M] + [K]\}\{q\} = \{0\} \quad (3.89-b)$$

Tendo em vista a ortogonalidade dos auto-vetores, obtém-se a matriz de massa diagonal

$$[V]^T [M] [V] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.89-c)$$

Faz-se a ortonormalização dos auto – vetores pela matriz de massa, de sorte que,

$$[\Phi] = [V] \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_i^{-1/2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.89-d)$$

Desta forma a matriz de massa é a matriz identidade e a matriz de rigidez é uma matriz diagonal formada pelos auto-valores elevado ao quadrado.

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad [\Phi]^T [K] [\Phi] = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_i^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}, \quad [\Phi]^T \{A\} = \{Q\}$$

Os deslocamentos nodais são representados pela superposição modal da seguinte forma:

$$\{q(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \quad (3.89-e)$$

Substituindo na equação (3.89-a) e pré multiplicando pelos auto – vetores ortonormalizados tem-se:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] \{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T [K] [\Phi] \{\eta\} = [\Phi]^T \{A\} Z(t) \quad (3.89-f)$$

Isto resulta em um conjunto de equações independentes (desacopladas),

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \{\ddot{\eta}\} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_i^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \{\eta\} = \{Q\} Z(t) \quad (3.89-g)$$

ou

$$\ddot{\eta}_i + \omega_i^2 \eta_i = Q_i Z(t) \quad (3.89-h)$$

Para a condição inicial de repouso, utilizando a integral de convolução ou integral de Duhamel, [Bismarck (1993)], tem-se:

$$\eta_i(t) = \frac{Q_i}{\omega_i} \int_0^t Z(\tau) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau \quad (3.90)$$

Para um pulso $Z(t)$ genérico, procedendo como item 3.2.7, tem-se:

$$\int_0^T Z(\tau) \sin[\omega_i(t-\tau)] d\tau = \frac{N}{T \omega_i^2} \sum_{j=1}^N d_j \{ \sin[\omega_i(t-j\Delta t)] - \sin[\omega_i(t-(j-1)\Delta t)] \} \quad (3.91)$$

A duração do sinal é obtida do sinal medido em laboratório e os coeficientes são ajustados pelo método dos mínimos quadrados.

Substituindo (3.91) em (3.90), tem-se:

$$\eta_i(t) = \frac{Q_i N}{T \omega_i^3} \sum_{j=1}^N d_j \{ \sin[\omega_i(t-j\Delta t)] - \sin[\omega_i(t-(j-1)\Delta t)] \} \quad (3.92)$$

Colocando na forma vetorial:

$$[S(t)] = [s_y(t)] = \left[\frac{Q_i N}{T \cdot \omega_i^3} \{ \sin[\omega_i(t - j \cdot \Delta t)] - \sin[\omega_i(t - (j-1) \Delta t)] \} \right] \quad (3.93)$$

$$\{d\} = \{d_j\} \quad (3.94)$$

$$\{\eta(t)\} = [S(t)]\{d\}. \quad (3.95)$$

Substituindo (3.95) em (3.89-e), obtém-se a expressão para os deslocamentos nodais:

$$\{q(t)\} = [\Phi][S(t)]\{d\} \quad (3.96)$$

A deformação na direção longitudinal para um dado elemento é dada por:

$$\varepsilon_z^e(t) = \cos(n\theta) \begin{bmatrix} \xi_{1,z} & \xi_{2,z} & \xi_{3,z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^e(t) \\ q_2^e(t) \\ q_3^e(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.97)$$

$$\varepsilon_z^e(t) = \cos(n\theta) \begin{bmatrix} \xi_{1,z} & \xi_{2,z} & \xi_{3,z} \end{bmatrix} \phi_{3m}^e [S_{mj}(t)]\{d_j\} \quad (3.97-a)$$

$[\phi_{3m}^e]$ contém as linhas de $[\Phi]$ que correspondem aos deslocamentos longitudinais do elemento

3.3.4- Ajuste do sinal pelo Método dos Mínimos Quadrados

Sendo ε_n o valor medido no instante t_n , o ajuste do vetor $\{d_j\}$ pelo método dos mínimos quadrados no intervalo de tempo de registro do sinal é dado por :

$$\{d_j\} = \left\{ \varepsilon_z^e(t_n) \right\}^T \left[\varepsilon_z^e(t_n) \right]^{-1} \left[\varepsilon_z^e(t_n) \right]^T \{\varepsilon_n\} \quad (3.98)$$

$\{d_j\}$ é o vetor dos cujos componentes identificam o carregamento aplicado na barra.

3.4- Comentários

a) No item 3.2.4 verifica-se que é possível utilizar funções harmônicas para obter a solução da equação diferencial da barra livre, impondo apenas a condição de tensões normais nulas nas extremidades. Isto implica em deslocamento radial nulo nestas seções da barra. O modelo resultante se comporta como uma região limitada de uma barra infinita percorrida por pulsos de tração e compressão propagando em sentidos contrários. O resultado é independente da relação entre o raio e comprimento da barra.

b) No item 3.2.5 considera-se um carregamento uniforme na direção radial, aplicado na seção inicial da barra. Utiliza-se esta hipótese para facilitar a integração da expressão (3.55) e obter a expressão (3.66). Desta forma, o carregamento, ou pulso de excitação da barra, obtido a partir dos sinais medidos será uniforme na direção radial. Esta característica esta presente em qualquer pulso obtido com este carregamento. As componentes de alta frequência, com comprimento de onda da mesma ordem de grandeza do raio da barra, ou menor, podem provocar variação do sinal na direção radial. Então, para o tratamento de sinais compostos apenas por frequências elevadas, ou com uma contribuição pouco significativa de componentes de baixa frequência, deve-se reconsiderar a hipótese adotada para a integração da expressão (3.55), levando em consideração a variação na direção radial. Entretanto, os sinais gerados nos ensaios com as barras de Hopkinson têm uma banda de frequência que inicia em frequências baixas. Para deformações e deslocamentos estas são muito mais significativas que as frequências elevadas. Isto pode ser verificado na figura 3.6 que mostra o valor relativo dos coeficientes F_m em função da razão entre comprimento de onda e o raio da barra $\frac{2\pi}{\alpha_m R}$, sendo então razoável admitir que as tensões são uniformes na direção radial.

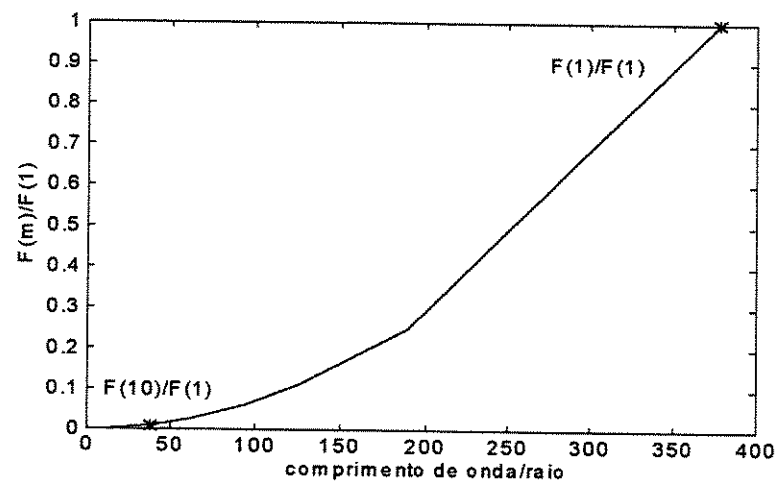


Figura-3.9: Valor relativo dos coeficientes em relação ao comprimento de onda

Capítulo 4

Ajuste dos sinais para uma barra livre

4.1-Introdução

Apresentam-se, a seguir, os resultados obtidos na identificação dos sinais utilizando os modelos descritos no capítulo anterior.

Os sinais medidos no meio da barra livre consistem no registro do pulso aplicado na extremidade, modificado pela dispersão, e de suas reflexões. O primeiro pulso, decorre da carga de compressão aplicada numa extremidade da barra. O segundo pulso, corresponde à reflexão do primeiro pulso na extremidade oposta da barra. Como a extremidade é livre o pulso de compressão é refletido como um pulso de tração. O terceiro pulso, corresponde a reflexão do segundo pulso na outra extremidade livre.

As dimensões da barra e o ponto de registro do sinal são mostrados na figura 4.1.

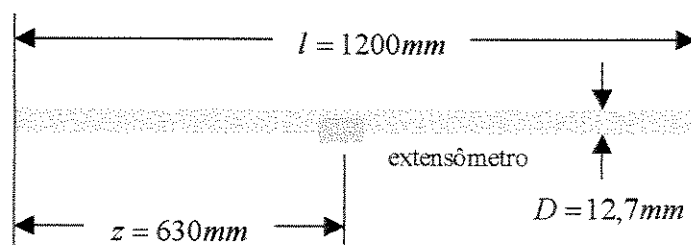


Figura-4.1: Detalhes da barra livre

Para registro do pulso de deformação utiliza-se um extensômetro com comprimento de 5 mm e resistência elétrica de 1 Kohm.

O sinal, digitalizado, é registrado a cada 0,5 microsegundo.

O sinal medido na barra é mostrado na figura 4.2.

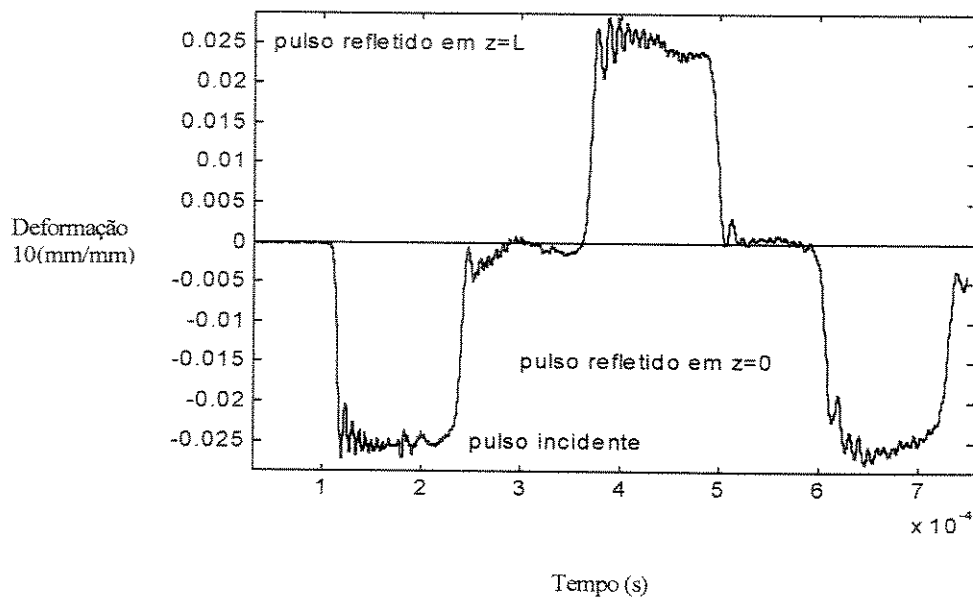


Figura-4.2: Sinal registrado no extensômetro para a barra livre

Para avaliar os resultados, tanto do modelo analítico quanto do modelo de elementos finitos, ajusta-se o sinal utilizando o primeiro pulso. Em seguida, comparam-se as respostas dos modelos com a primeira reflexão do pulso.

4.2- Resultados do modelo de mecânica do contínuo

Para o ajuste do sinal obtido na barra livre, com o modelo de mecânica do contínuo, utiliza-se a expressão em que o sinal é representado por um somatório de ondas estacionárias, considerando o pulso de carga aplicada na extremidade $z = 0$, a partir do instante $t = 0$ e com duração T .

$$\varepsilon(R, z, t) = \sum_{m=1}^M \left[F_m \sum_{j=1}^N S_{mj} d_j \right], \quad (4.1)$$

sendo F_m e S_{mj} dados pelas expressões (3.70.c) e (3.74) respectivamente.

Com a expressão (4.1), por representar uma superposição de ondas propagando-se em direções opostas, o perfil do pulso de carga aplicada nas extremidades da barra é obtido colocando em um gráfico as componentes d_j em função do tempo. Também, pode-se obter o pulso de deformação em qualquer ponto suficientemente afastado das extremidades.

Para obter a deformação nas extremidades deve-se utilizar a expressão que considera ondas propagando-se apenas numa direção. Neste caso utiliza-se a expressão:

$$\varepsilon(R, z, t) = d_0 + \sum_{m=1}^M \left[F_m \sum_{j=1}^N Sc_{mj} d_j \right], \quad (4.2)$$

onde Sc_{mj} é dado pela expressão (3.75.a)

A expressão (4.2) representa um pulso propagando na direção de z crescente. Para um pulso propagando no sentido contrário pode-se utilizar a mesma expressão, introduzindo as seguintes mudanças de variáveis:

$$z' = z - l \quad \text{e} \quad t' = t - \frac{l}{C_0}, \quad (4.3)$$

sendo C_0 a velocidade de propagação de uma onda num meio unidimensional.

Uma estimativa para duração do pulso (T) é obtida a partir dos deslocamentos, por integração do sinal no tempo. O sinal integrado e os pontos de início e fim do pulso é mostrado na figura 4.3 e na figura 4.4 tem-se uma ampliação do deslocamento produzido pelo pulso incidente.

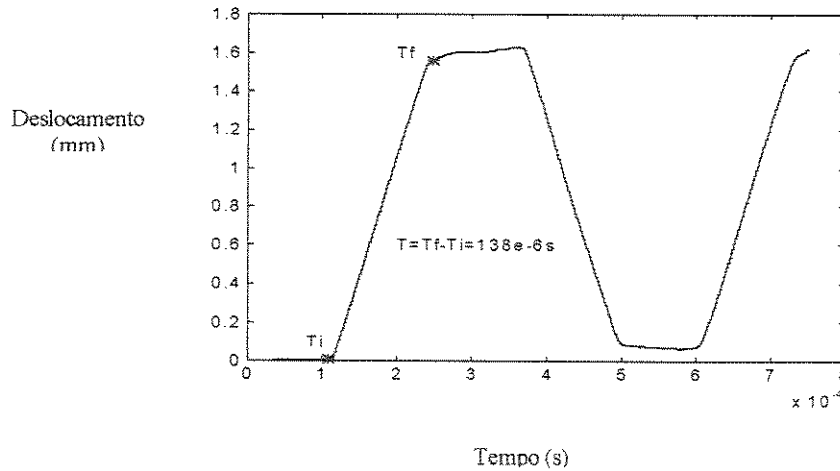


Figura-4.3: Deslocamento obtido da integração direta da deformação

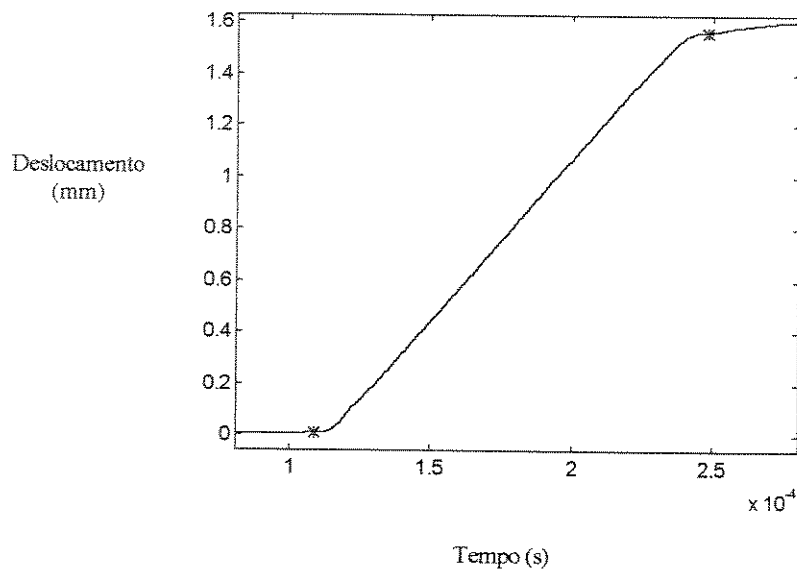


Figura-4.4: Detalhe do deslocamento produzido pelo pulso incidente

O ajuste da expressão (4.1) utilizando o pulso incidente é mostrado na figura 4.5. Neste ajuste utiliza-se $M = 200$ e $N = 40$.

Neste procedimento de ajuste dos sinais é importante promover a ajustagem do tempo, de forma que o mesmo seja referente ao instante inicial em que a carga é aplicada na barra. Neste caso, o vetor dos tempos é defasado de uma constante, $\{t_i + k\}$, que é ajustada por tentativa.

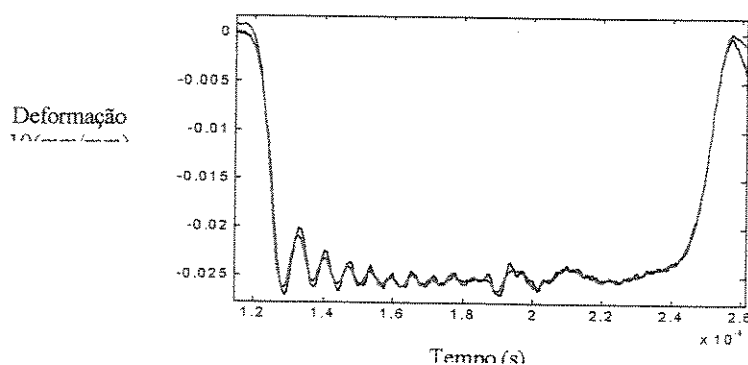


Figura-4.5: Ajuste do sinal com o pulso incidente
 Preto = sinal medido pelo extensômetro
 Vermelho = sinal ajustado

Após o ajuste, utilizando apenas pulso incidente, obtém-se o pulso incidente e sua primeira reflexão. O resultado, apresentado na figura 4.6, é superposto ao sinal medido.

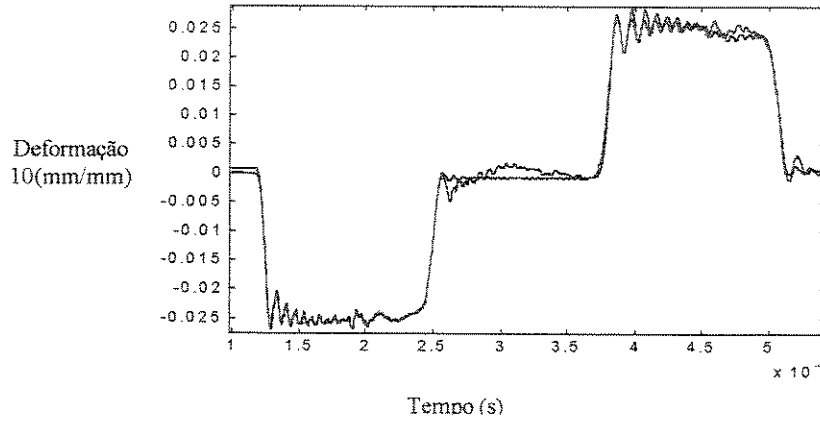


Figura-4.6: Obtenção do pulso refletido utilizando a expressão (4.1)
Preto = sinal medido, Vermelho = sinal calculado

Na figura 4.7 tem-se o sinal de excitação da barra $Z(0,t)$ obtido pela expressão (4.1) e a tensão na extremidade da barra obtida pela expressão (4.2). Neste caso a deformação é multiplicada pelo módulo de elasticidade $\sigma_z(R,0,t) = E.\varepsilon_z(R,0,t)$.

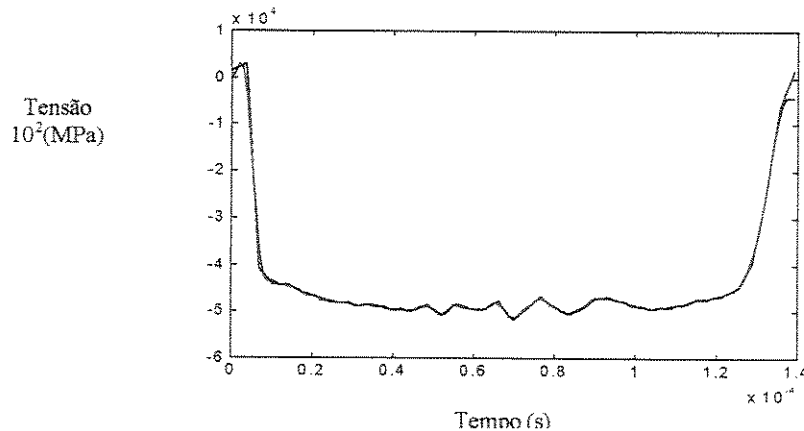


Figura-4.7: Pulso de excitação e a deformação na barra em $z = 0$
Preto = pulso aplicado, Vermelho = Tensão resultante

Compara-se a tensão obtida no ponto de medição dos sinais utilizando a expressão (3.71.d), considerando a barra axissimétrica $\sigma_z = (\lambda + 2G)\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)$ e a tensão para a barra

unidimensional $\sigma_z = E \varepsilon_z$. A superposição destas tensões é mostrada na figura 4.8.

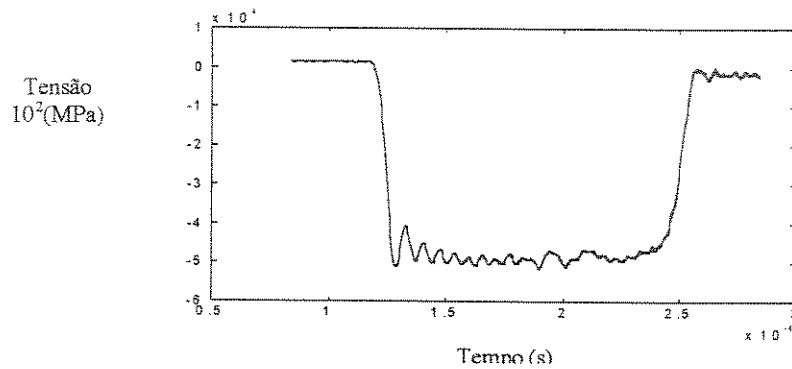


Figura-4.8: Tensão na barra axissimétrica e barra uniaxial

Preto = Tensão na barra unidimensional

Para a barra com a relação $l/d \cong 100$, não há diferença significativa entre as tensões normais, considerando a barra unidimensional e axissimétrica.

A tensão normal média e a tensão de cisalhamento média na seção onde foi registrado o pulso são mostradas na figura 4.9. Verifica-se que a tensão de cisalhamento é muito pequena quando comparada com a tensão normal.

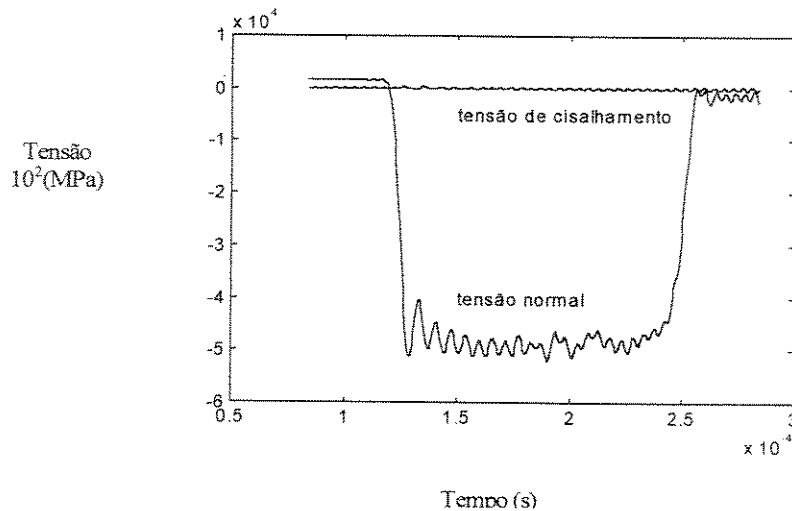


Figura-4.9: Tensão normal e de cisalhamento médias na seção da barra

4.3- Resposta do modelo de elementos finitos

Para determinar as deformações, com modelo de elementos finitos, utiliza-se a expressão:

$$\varepsilon_z^e(t) = \cos(n\theta) \begin{bmatrix} \xi_{1,z} & \xi_{2,z} & \xi_{3,z} \end{bmatrix} \phi_{3m}^e \begin{bmatrix} S_{mj}(t) \end{bmatrix} \{d_j\} \quad (4.4)$$

ϕ_{3m}^e contém as linhas da matriz de auto-vetores $[\Phi]$, que correspondem aos deslocamentos longitudinais do elemento, referente ao ponto de registro do pulso na barra.

A barra é discretizada com 4 elementos na direção radial e 181 elementos na direção longitudinal, como mostra a figura-4.10.

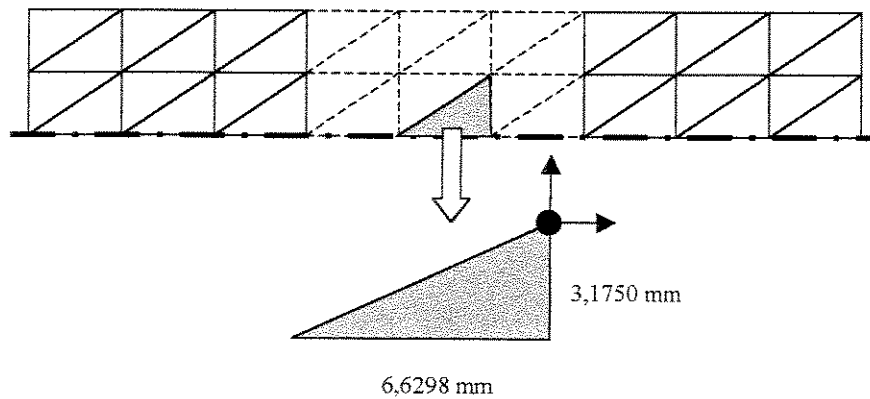


Figura-4.10: Discretização da barra. 724 elementos, 546 círculos nodais e 1092 graus de liberdade

4.3.1- Modos de deslocamento e comprimento de onda

Na primeira avaliação da resposta do modelo de elementos finitos, considera-se o modelo axissimétrico, neste caso, os deslocamentos são definidos pela expressão abaixo,

$$\begin{Bmatrix} v(r, z, \theta) \\ u(r, z, \theta) \end{Bmatrix} = \cos n\theta [N(r, z)] \{q^e\}, \text{ para } n=0, \text{ ou seja:}$$

$$\begin{Bmatrix} v(r, z) \\ u(r, z) \end{Bmatrix} = [N(r, z)] \{q^e\} \quad (4.5)$$

Os deslocamentos radial e axial dos círculos nodais, em função da coordenada z , são mostrados nas figuras 4.11 e 4.12 respectivamente.

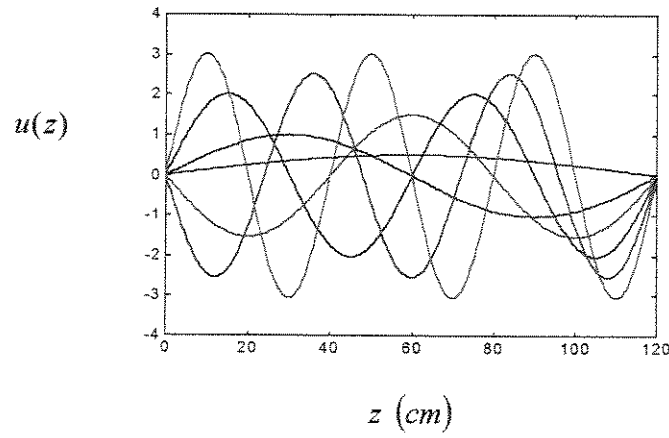


Figura-4.11: Seis primeiros modos de deslocamento radial dos círculos nodais em função da coordenada z

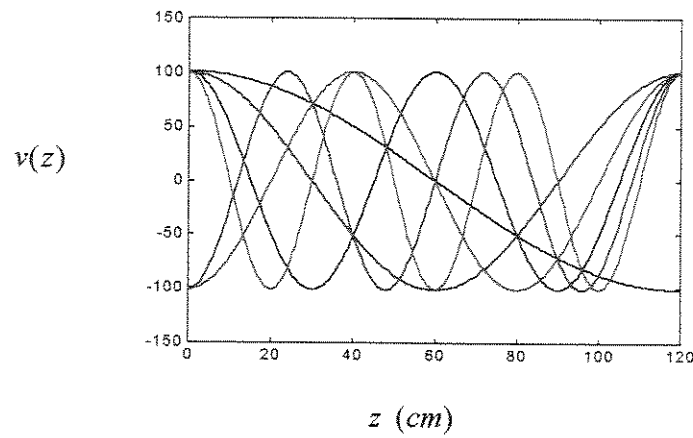


Figura-4.12: Seis primeiros modos de deslocamento axial dos círculos nodais em função da coordenada z

Verifica-se que os deslocamentos, nas direções radial e axial, são caracterizados por funções harmônicas de comprimento de onda $\Lambda_n = \frac{2l}{n}$ onde l é o comprimento da barra. Confirma-se, portanto, o resultado obtido na solução analítica, onde as auto-funções são representadas por $\sin(a_n z)$ e $\cos(a_n z)$, onde, $a_n = \frac{2\pi}{\Lambda_n} = n \frac{\pi}{l}$.

A solução numérica apresenta outros modos de deslocamento mostrados nas figuras 4.13, que correspondem a combinações lineares de funções harmônicas. Estes modos são obtidos quando o sistema apresenta auto-valores repetidos [Thomson(1973)].

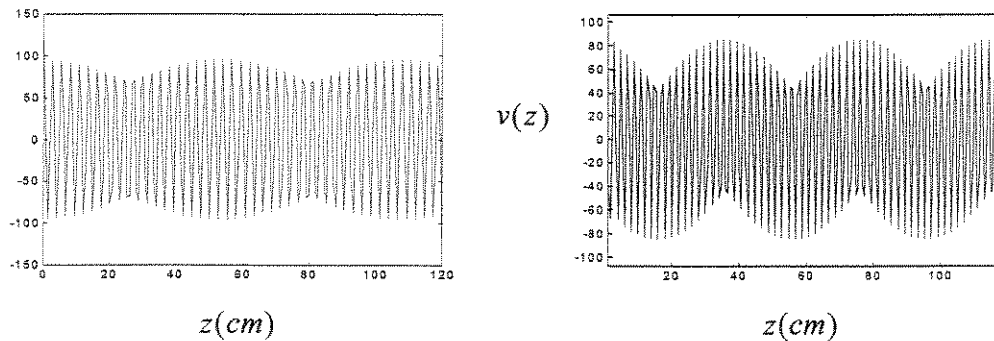


Figura-4.13: Modos de deslocamentos obtidos pela combinação linear de funções harmônicas

4.3.2-Freqüência e velocidade de fase

Como no item anterior, considera-se apenas o comportamento axissimétrico da barra, ou seja, deslocamentos função apenas de r e z . Na figura-4.14 são mostradas a curva de freqüência obtida com modelo de elementos finitos e a curva decorrente da solução da equação de freqüência (ou equação de Pochhammer-Chree). São mostradas as primeiras 400 freqüências em ordem crescente.

Para freqüências entre 2 KHz e 60 KHz os valores obtidos por elementos finitos são idênticos aos valores da equação de freqüência. Entre 60 KHz e 300 KHz as freqüências do modelo

de elementos finitos são maiores, e a partir 300 KHz, se tornam menores. Este comportamento da curva de frequência resulta, em ondas longas com velocidade de propagação acima das velocidades previstas pela equação de frequência, enquanto que, ondas curtas apresentam velocidades de propagação menores, como mostra a figura-4.15.

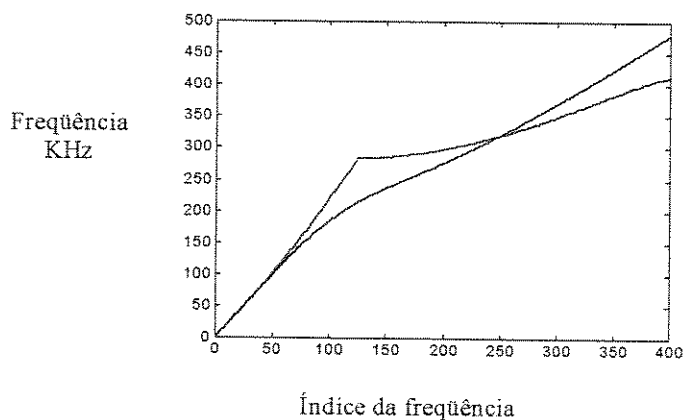


Figura-4.14: Frequências em ordem crescente
Vermelho = elementos finitos
Preto = equação de Pochhammer-Chree

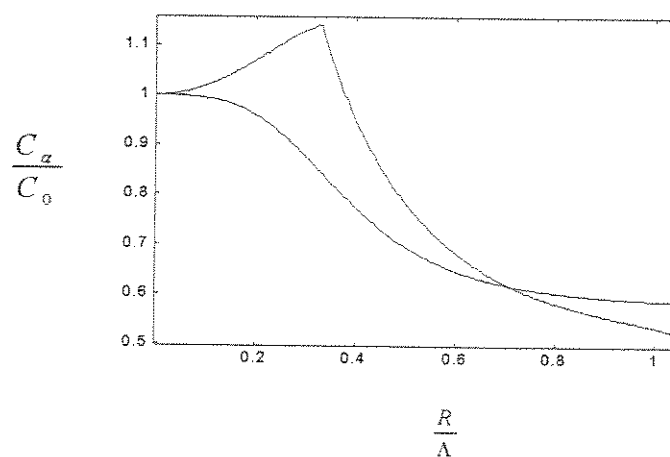


Figura-4.15: Razão de velocidade de propagação da onda em função da razão entre o raio da barra e comprimento da onda
Vermelho = elementos finitos, preto = equação de frequência

4.3.3-Outros modos de deslocamento

Para avaliar os modos de deslocamentos dos círculos nodais, simétricos em relação aos planos que contêm o eixo da barra, deve-se considerar os deslocamentos como função de r , z e θ , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} v(r, z, \theta) \\ u(r, z, \theta) \end{Bmatrix} = \cos n\theta [N(r, z)] \{q^e\}, \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

A razão de velocidade de fase, em função da razão entre o raio da barra e comprimento de onda, é mostrada na figura – 4.16, para $n = 0, 1, 2$.

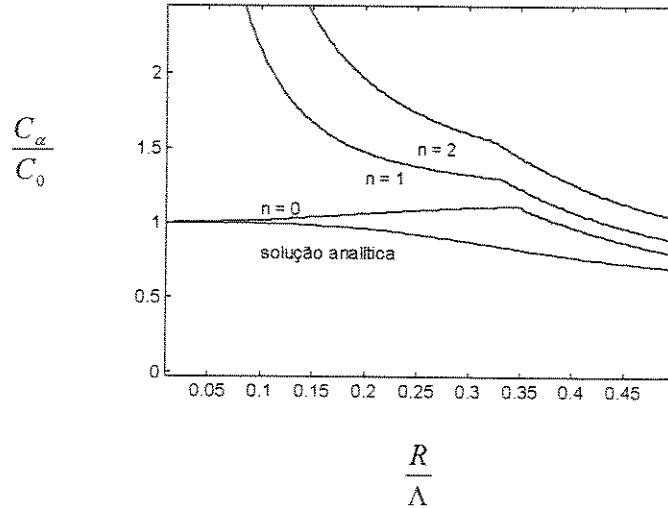


Figura-4.16: Velocidade de fase em função do modo de deslocamento do círculo nodal.
 $n = 0$ deslocamento axissimétrico
 $n = 1, 2$ deslocamento simétrico em relação aos planos que contêm o eixo da barra

Através da solução da equação de Pochhammer-Chree, para um dado comprimento de onda Λ_n , pode-se obter vários valores de frequência α_{ni} , $i = 1, 2, 3, \dots$. Considerando α_{ni} em ordem crescente, o primeiro valor, α_{n1} , corresponde ao modo 1 (ou modo fundamental) de propagação das ondas. O segundo valor, α_{n2} , corresponde ao modo 2, que apresenta uma velocidade de fase maior

que a velocidade do modo 1, e assim por diante. As soluções para $n = 1, 2$ correspondem aos modos 2 e 3 de propagação de uma onda na barra.

Analisando os pulsos incidente e refletido, registrado no teste com a barra livre, não encontramos velocidade de propagação maior que C_0 , significando que, o pulso produz apenas deslocamentos compatíveis com o modo 1 de propagação. Então, para o ajuste destes sinais, é suficiente considerar $n = 0$. Neste caso, os deslocamentos são axissimétricos, função apenas de r e z .

4.3.4- Ajuste dos pulsos da barra livre através de elementos finitos

Após identificar o pulso de excitação da barra, utilizando apenas o pulso incidente, geram-se os pulsos incidente e refletido. O resultado é mostrado na figura-4.17, onde são colocados os pulsos gerados pelo modelo de elementos finitos e os pulsos medidos em laboratório.

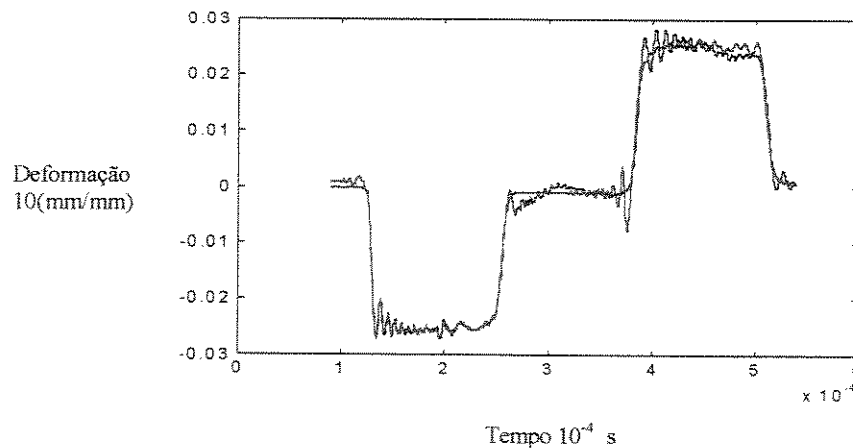


Figura-4.17: Pulsos gerados pelo modelo de elementos finitos

O modelo de elementos finitos não reproduz, de forma satisfatória, o pulso refletido. Este modelo fornece auto-vetores com boa precisão, entretanto, os auto-valores (ou frequências) não tem a precisão desejada.

A pouca precisão, na geração do pulso refletido, é devida a ao fato do modelo produzir ondas curtas com frequências maiores que aquelas previstas pela equação de frequência (ou equação de Pochhammer-Chree). Isto é evidenciado na figura-4.18, onde o pulso refletido é gerado utilizando os auto-vetores do modelo de elementos finitos e as frequências obtidas da equação de Pochhammer-

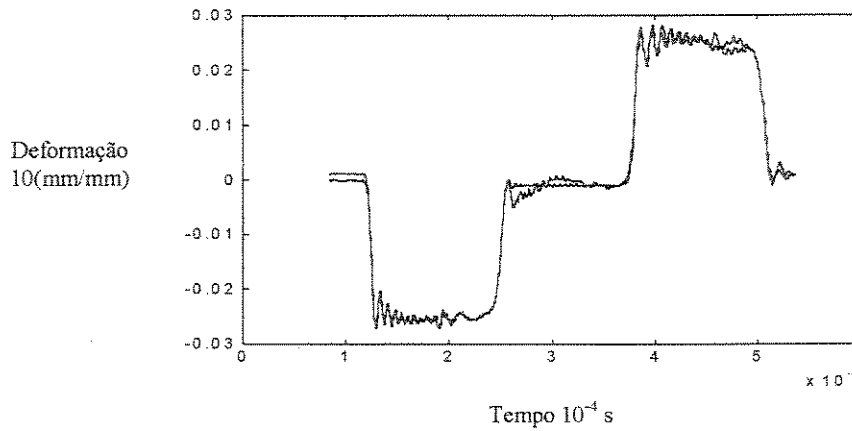


Figura-4.18: Sinais gerados utilizando auto-vetores do modelo de elementos finitos e frequências da equação de Pochhammer-Chree

Chree.

4.4- Frequência e comprimento de onda dos componentes do pulso

A expressão para cálculo da deformação, colocada a seguir, envolve dois somatórios.

$$\varepsilon(R, z, t) = \sum_{m=1}^M \left[F_m \sum_{j=1}^N S_{mj} d_j \right]$$

No primeiro somatório, M representa o número máximo de componentes de frequência utilizados. Na tabela-II, é mostrada a ordem de grandeza das frequências $\left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)$ e dos

comprimentos de ondas correspondentes $\left(\frac{2\pi}{a}\right)$. Acrescenta-se a razão entre a velocidade de fase de cada componente de frequência e a velocidade de fase para a barra unidimensional $\left(\frac{C_\alpha}{C_0}\right) = \left(\frac{\alpha}{a.C_0}\right)$ e a razão entre o raio da barra e o comprimento de onda $\left(\frac{R.a}{2\pi}\right)$, correspondente a cada valor de M .

Tabela-II: frequência e comprimento de onda dos componentes do pulso

M	$\frac{\alpha}{2\pi}$ (KHz)	$\frac{2\pi}{a}$ (cm)	$\frac{R.a}{2\pi}$	$\frac{C_\alpha}{C_0}$
1	2,0	240,0	0,00265	1,0000
10	20,4	24,0	0,02645	0,9990
100	185,6	2,4	0,26458	0,9083
200	276,8	1,2	0,52916	0,6773
400	479,8	0,6	1,05833	0,5866
800	944,2	0,3	2,11667	0,5772

4.5- Comentários

a) O modelo de elementos finitos produz auto-vetores com excelente precisão. Entretanto, as frequências não apresentam a precisão necessária. Este modelo produz ondas longas com frequências maiores que aquelas previstas pela equação de Pochhammer-Chree.

b) Pode-se obter ajuste adequado dos sinais, utilizando os auto-vetores produzidos pelo modelo de elementos finitos e as frequências obtidas da equação de Pochhammer-Chree.

c) O modelo da mecânica do contínuo é adequado para o ajuste do sinal. Efetua-se o ajuste utilizando apenas o pulso incidente, isto resulta numa pequena diferença no pulso refletido, mostrado na figura 4.6. Adota-se este procedimento justamente para avaliar a capacidade do modelo na reprodução do pulso refletido. Entretanto, pode-se obter uma boa representação da barra livre utilizando o pulso incidente e um ou mais pulsos refletidos para

o ajuste do modelo. Desta forma, pode-se incorporar ao modelo da barra livre a condição real de reflexão do pulso nas extremidades livres da barra.

c) Como pode ser observado na figura 4.8, para uma barra delgada como a utilizada neste teste, as tensões obtidas para a barra axissimétrica são idênticas às tensões calculadas considerando a barra uniaxial. Neste caso, as tensões podem ser obtidas pela simples multiplicação das deformações pelo módulo de elasticidade da barra.

d) Na figura 4.9, verifica-se que as tensões de cisalhamento não são significativas quando comparadas com as tensões normais.

e) Para o ajuste dos sinais é importante determinar com precisão o instante de início do pulso. Isto é feito, introduzindo uma constante no vetor dos tempos. Esta constante é ajustada por tentativa até obter-se um ajuste adequado dos sinais. Este procedimento será desenvolvido com mais detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 5

Curva de tensão em função da deformação obtida no teste com as barras de Hopkinson

5.1 Introdução

Neste capítulo efetua-se a correção da dispersão dos sinais obtidos no ensaio de um corpo de prova de cobre utilizando o modelo de mecânica do contínuo para barra livre. O dispositivo para o ensaio de compressão é mostrado na figura 5.1.

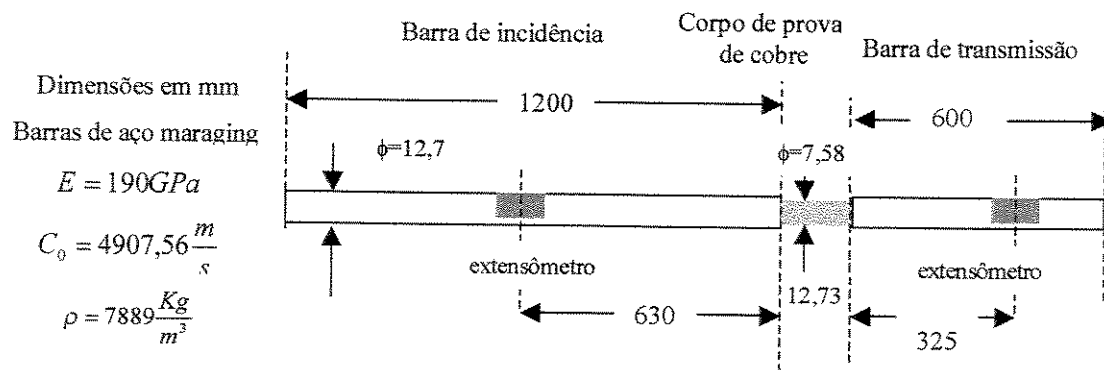


Figura-5.1(a): Detalhes do dispositivo de teste

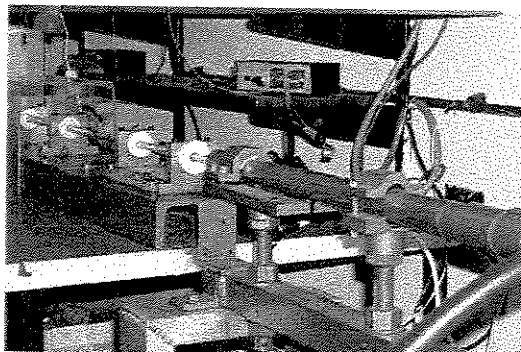


Figura-5.1(b): Fotografia do aparato de testes

Para ajuste das deformações utiliza-se a expressão que representa uma onda propagando-se na direção de z crescente:

$$\varepsilon_z = d_0 + \sum_{m=1}^M \left[F_m \sum_{j=1}^N S c_{mj} d_j \right], \quad (5.1)$$

sendo F_m e $S c_{mj}$ dados pelas expressões (3.70.c) e (3.75.a) respectivamente.

Os deslocamentos são obtidos pela integração da deformação em relação ao tempo e cada componente é multiplicada pela velocidade de fase correspondente, ou seja:

$$v = -C_0 d_0 (t_f - t_i) - \sum_{m=1}^M \left[\frac{\alpha_m}{a_m} F_m \sum_{j=1}^N C c_{mj} \Big|_{t_i}^{t_f} d_j \right], \quad (5.2)$$

onde, $C c_{mj}$ é obtido da expressão (3.75.a) substituindo-se $\sin[\alpha_m t - a_m z]$ por $\frac{\cos[\alpha_m t - a_m z]}{\alpha_m}$. Para o

ajuste dos sinais é utilizado $15 \leq N \leq 30$ e $100 \leq M \leq 800$.

O sinal registrado no extensômetro da barra de incidência é mostrado na figura 5.2 e na figura 5.3 tem-se o sinal registrado na barra de transmissão.

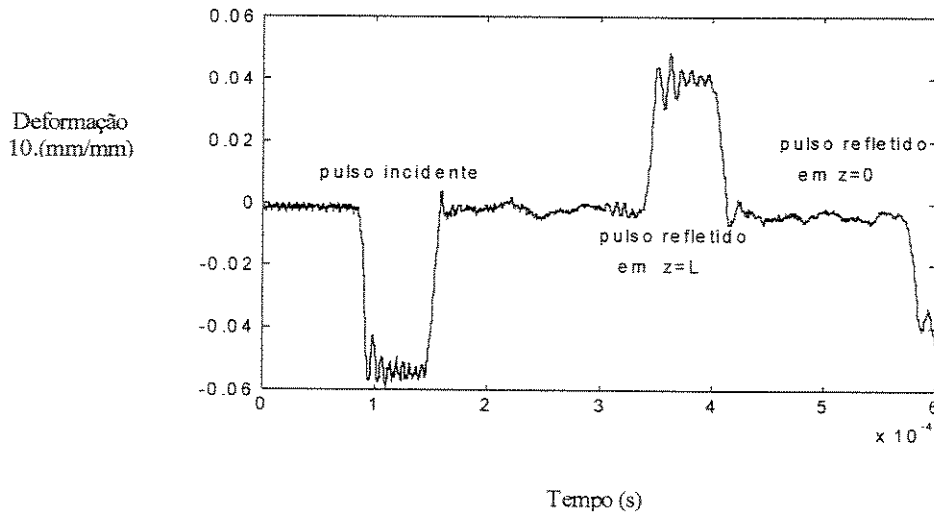


Figura-5.2: Sinal registrado em $z = 630$ mm na barra de incidência

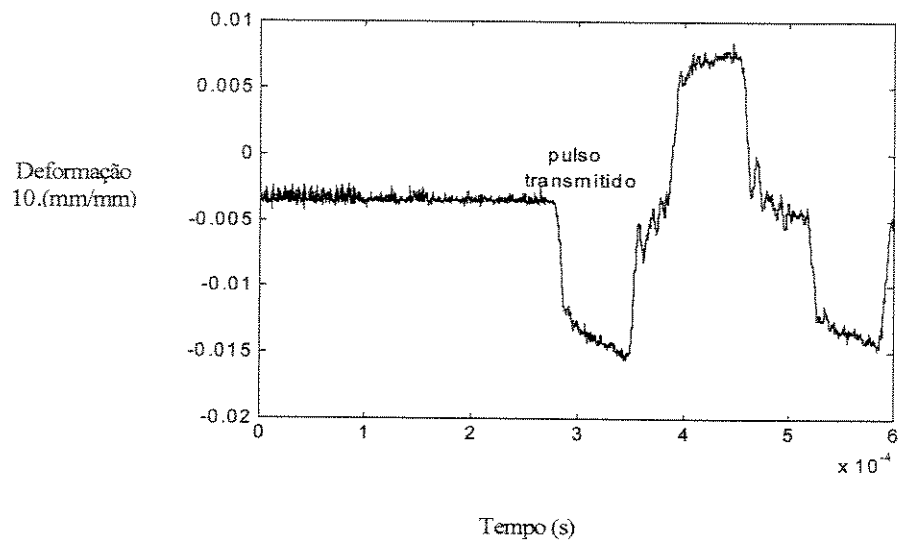


Figura-5.3: Sinal registrado em $z = 325$ mm na barra de transmissão

O tempo de duração do pulso é estimado à partir do deslocamento do pulso incidente, obtido por integração no tempo. O sinal com o ponto de início e fim do pulso é mostrado na figura 5.4.

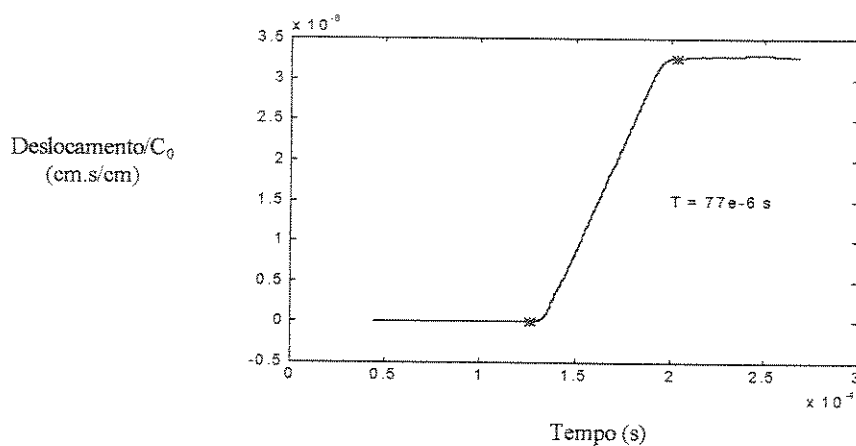


Figura-5.4: Estimativa para a duração do pulso incidente

5.2 Ajuste do pulso incidente

A expressão (5.1) é ajustada com o pulso incidente considerando uma carga aplicada em $z = 0$, a partir do instante $t = 0$, e vários valores de N e M . Um dos ajustes efetuados é mostrado na figura 5.5

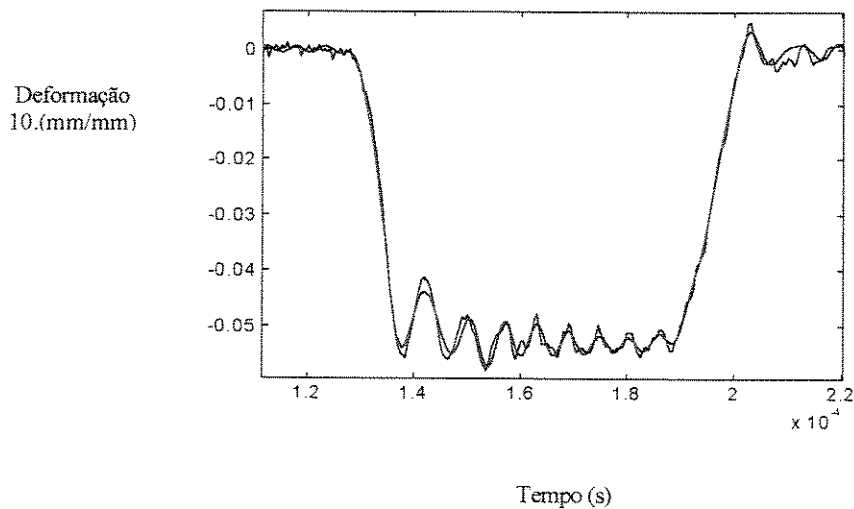


Figura-5.5: Ajuste da expressão (5.1) pelo sinal incidente

A seguir é obtido o pulso de deformação e o deslocamento na interface com o corpo de prova, ou seja, para $z = l$ no intervalo de tempo $T_0 \leq t \leq T_0 + T$ onde:

l é o comprimento da barra de incidência,

$T_0 = \frac{l}{C_0}$ é o tempo para a frente do pulso percorrer a barra;

T é o tempo de duração do pulso

Na figura 5.6 tem-se o pulso de deformação na interface do corpo de prova com a barra de incidência, e na figura 5.7 o deslocamento correspondente.

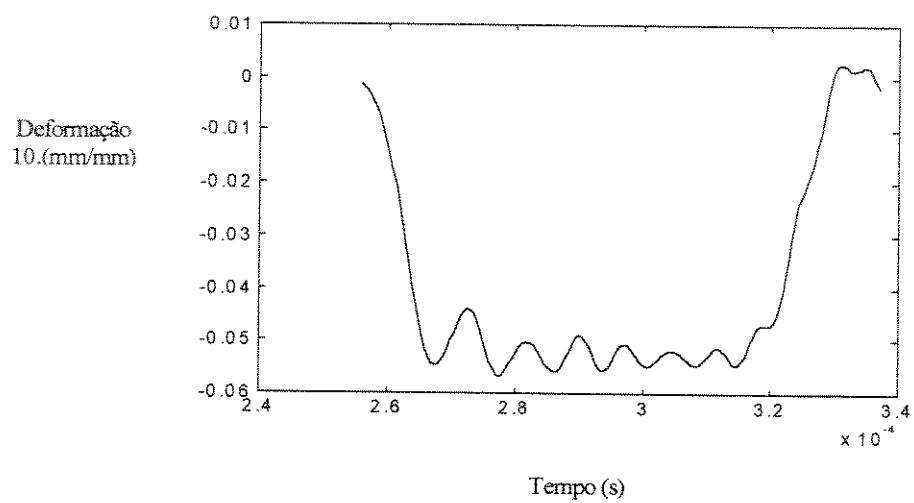


Figura-5.6: Pulso de deformação incidente na interface com o corpo de prova

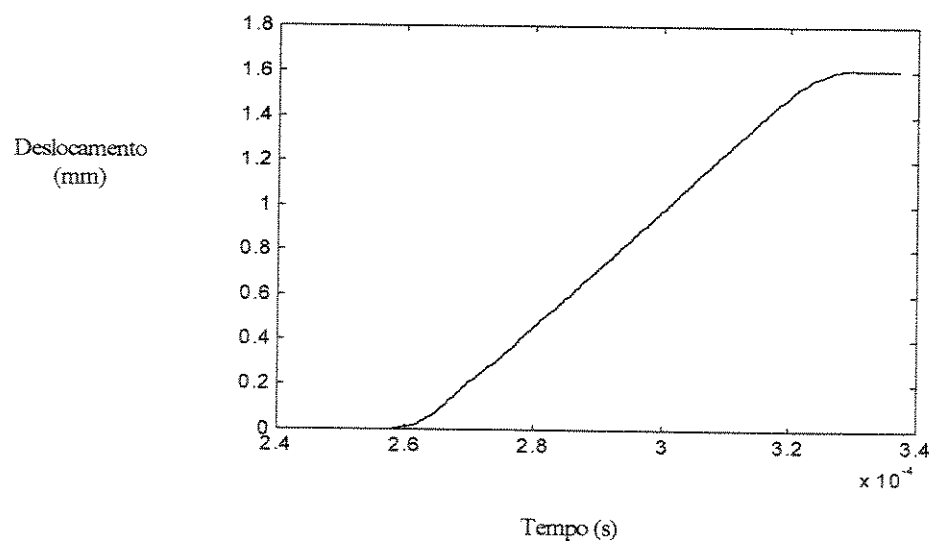


Figura-5.7: Deslocamento incidente na interface com o corpo de prova

5.3 Ajuste do pulso refletido

Neste caso, a expressão (5.1) é ajustada com o pulso refletido com a seguinte mudança de variáveis:

$$z' = l - z \quad \text{e} \quad t' = t - \frac{l}{C_0} \quad (5.3)$$

Considera-se a carga aplicada em $z' = 0$ a partir do instante $t' = 0$ e vários valores de N e M . Um dos ajustes efetuados é mostrado na figura 5.8.

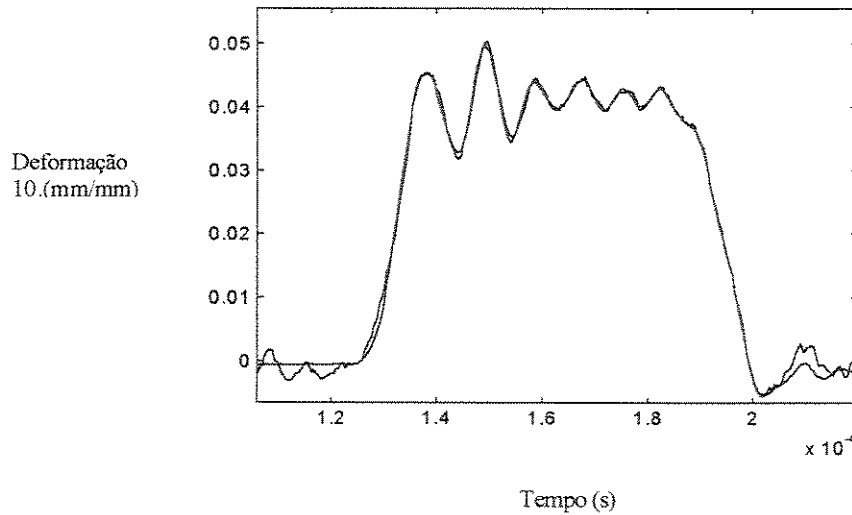


Figura-5.8: Ajuste de (5.1) pelo pulso refletido

Com as expressões (5.1) e (5.2) ajustadas, obtém-se o pulso de deformação e o deslocamento na interface com o corpo de prova, ou seja, para $z' = 0$ no intervalo de tempo $0 \leq t' \leq T$. Os sinais obtidos são mostrados nas figuras 5.9 e 5.10.

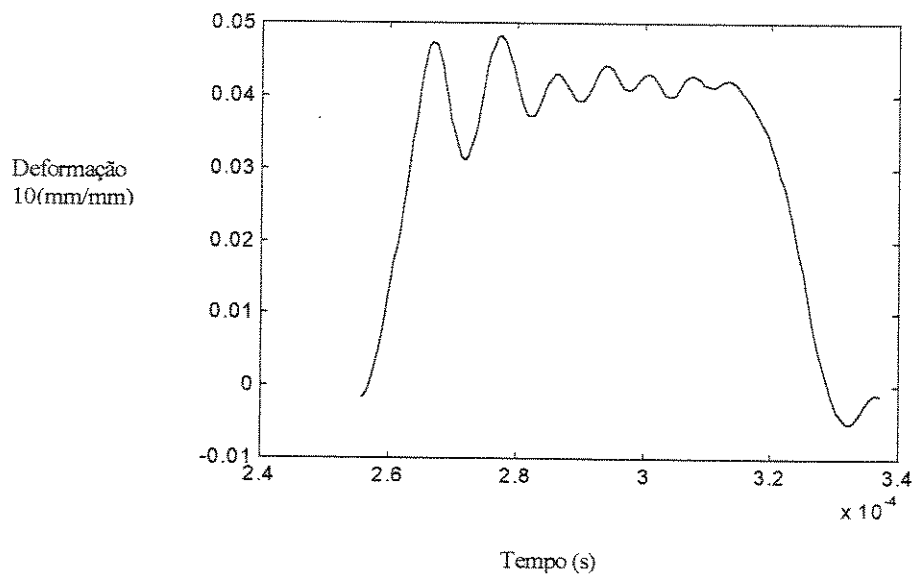


Figura-5.9: Deformação refletida na interface com o corpo de prova

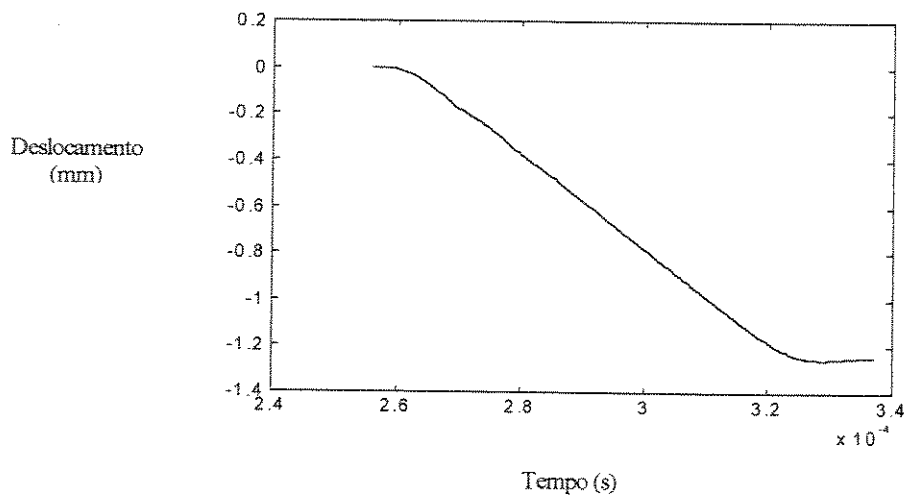


Figura-5.10: Deslocamento do pulso refletido na interface com o corpo de prova

5.4 Ajuste do pulso transmitido

Neste caso, a expressão (5.1) é ajustada com o pulso transmitido, sem mudança de variáveis.

Considera-se a uma carga aplicada em $z = 0$ a partir do instante $t = 0$ e vários valores de N e M . Um dos ajustes efetuados é mostrado na figura 5.11.

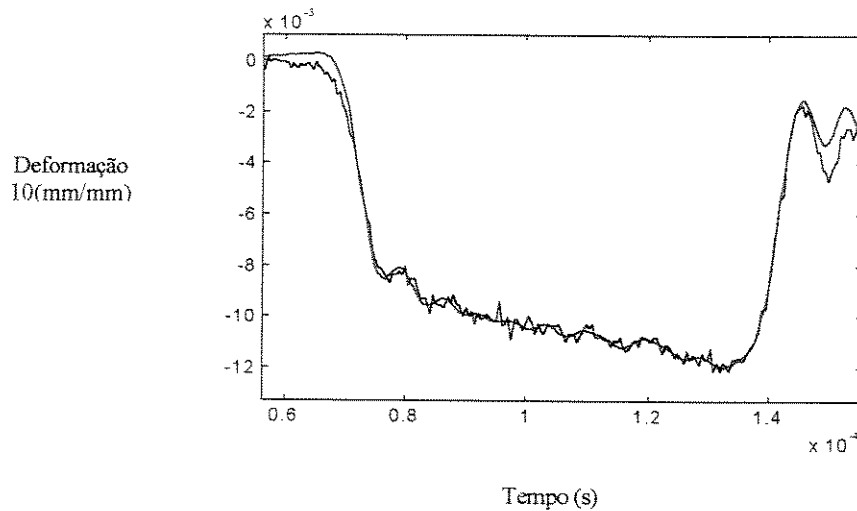


Figura-5.11: Ajuste da expressão (5.1) pelo sinal transmitido

Com as expressões (5.1) e (5.2) ajustadas, obtém-se o pulso de deformação e o deslocamento na interface do corpo de prova com a barra de transmissão, ou seja, para $z = 0$ no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$. Os sinais obtidos são mostrados nas figuras 5.12 e 5.13.

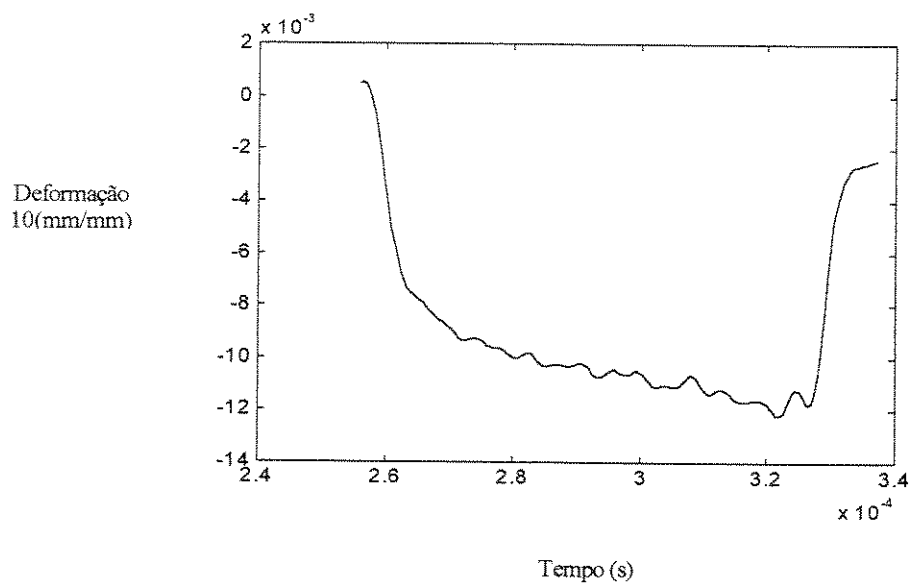


Figura-5.12: Deformação transmitida na interface do corpo de prova

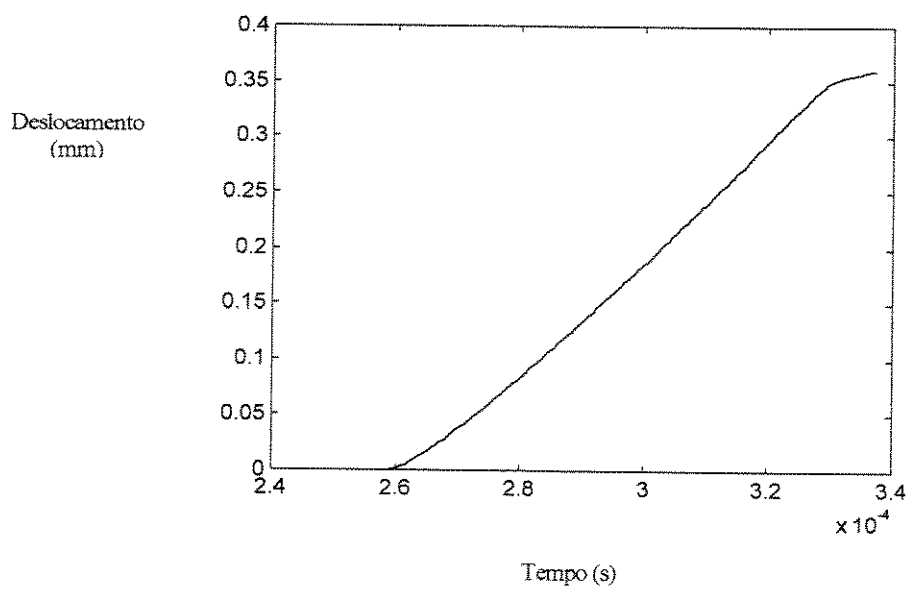


Figura-5.13: deslocamento na interface do corpo de prova provocado pela deformação transmitida

5.5 A tensão no corpo de prova

A tensão média no corpo de prova é dada por:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad (5.4)$$

onde σ_1 e σ_2 são as tensões nas faces 1 e 2

Estas tensões são obtidas considerando as forças exercidas pelas barras e divididas pela área do corpo de prova:

$$P_1 = E_b A_b (\varepsilon_i + \varepsilon_r), \quad (5.5)$$

então,
$$\sigma_1 = \frac{E_b A_b}{A_{cp}} (\varepsilon_i + \varepsilon_r). \quad (5.6)$$

$$P_2 = E_b A_b \varepsilon_t \quad (5.7)$$

e
$$\sigma_2 = \frac{E_b A_b}{A_{cp}} \varepsilon_t. \quad (5.8)$$

Tem-se, portanto:

$$\sigma = \frac{E_b}{2} \frac{A_b}{A_{cp}} (\varepsilon_i + \varepsilon_r + \varepsilon_t) \quad (5.9)$$

Se as tensões forem uniformes ao longo do corpo de prova deve-se ter:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \text{ e portanto de (5.6) e (5.8) } \varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t. \quad (5.10)$$

Neste caso tem-se:

$$\sigma = E_b \frac{A_b}{A_{cp}} (\varepsilon_t). \quad (5.11)$$

Na figura 5.14 tem-se as tensões nas faces 1 e 2 do corpo de prova.

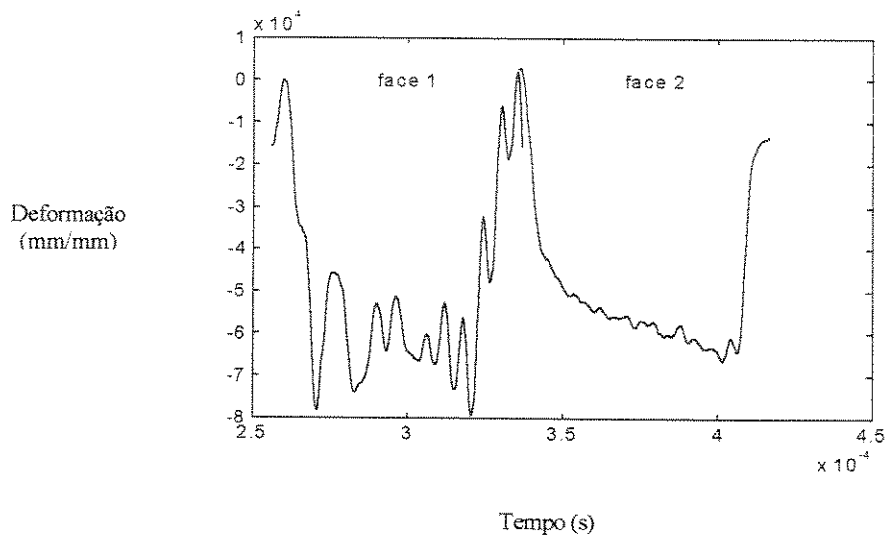


Figura-5.14: Deformações nas faces do corpo de prova

A tensão na face 1, resultante da soma das tensões incidente e refletida, é extremamente irregular. Entretanto, seu valor médio é idêntico ao valor médio da deformação na face 2 como mostrado na figura 5.15 a seguir:

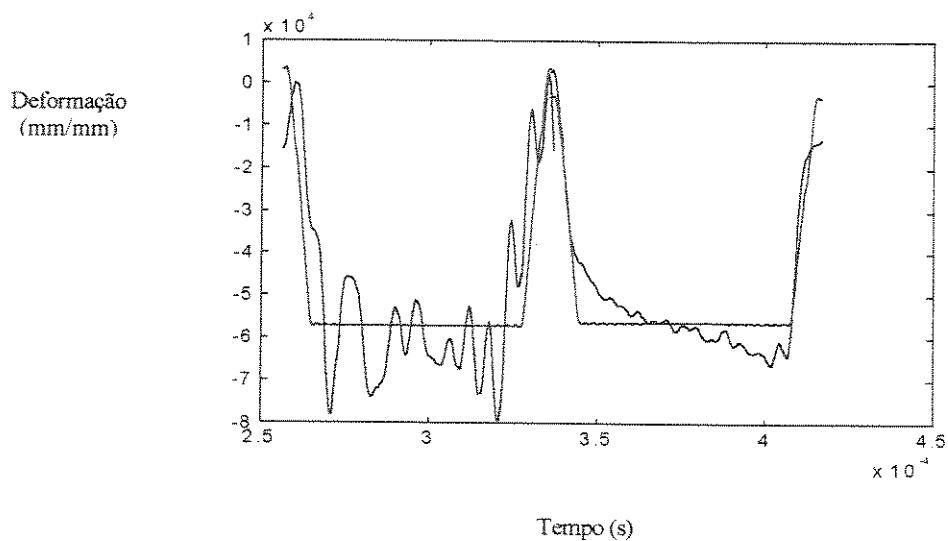


Figura-5.15: Valor médio das deformações nas faces do corpo de prova

5.6 A deformação no corpo de prova

A deformação média ao longo do corpo de prova é dada por:

$$\varepsilon = \frac{v_1 - v_2}{l_{cp}} \quad (5.12)$$

onde v_1 e v_2 são os deslocamentos das interfaces e l_{cp} o comprimento inicial do corpo de prova.

O deslocamento na interface entre o corpo de prova e a barra de incidência (face 1), v_1 , é obtido pela diferença entre o deslocamento incidente v_i e o deslocamento refletido v_r :

$$v_1 = v_i - v_r. \quad (5.13)$$

O deslocamento na interface entre o corpo de prova e a barra de transmissão (face 2), v_2 , é igual ao deslocamento transmitido v_t :

$$v_2 = v_t. \quad (5.14)$$

A deformação média do corpo de prova é então expressa como:

$$\varepsilon = \frac{v_i - v_r - v_t}{l_{cp}} \quad (5.15)$$

O deslocamento é obtido pela integração da deformação em relação ao tempo multiplicado pela velocidade de fase, conforme expressão abaixo:

$$v = - \sum_{m=1}^M \left[C_m \int_0^t \varepsilon_m dt \right]. \quad (5.16)$$

Integrando a relação (5.10) tem-se:

$$v_i + v_r = v_t. \quad (5.17)$$

Neste caso, a deformação é expressa por:

$$\varepsilon = \frac{-2v_r}{l_{cp}} \quad (5.18)$$

Na figura 5.16, têm-se as deformações no corpo de prova considerando as expressões (5.15) e (5.18). As deformações são defasadas no tempo para facilidade de visualização.

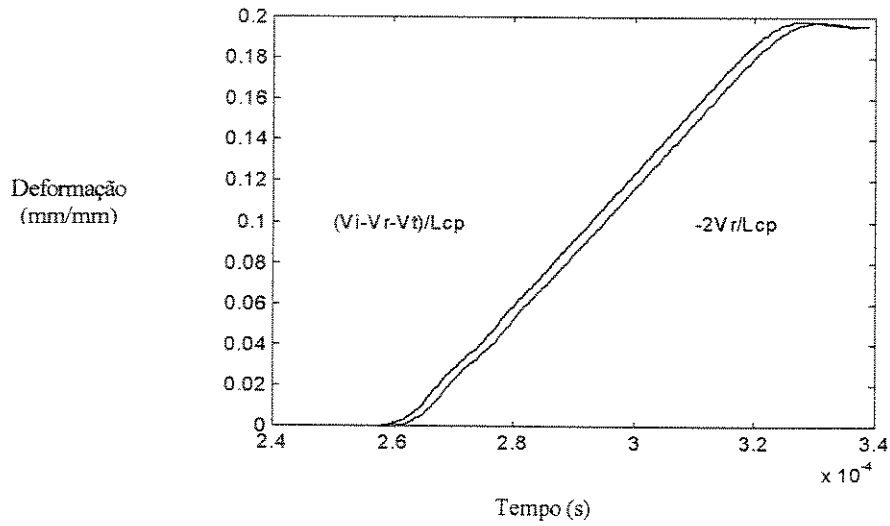


Figura-5.16: Deformação do corpo de prova

Considerando que os deslocamentos obtidos pelas relações (5.15) e (5.18) e a tensão média nas faces 1 e 2 do corpo de prova são iguais, admite-se, em conformidade com o adotado por Follansbee e Frantz (1983), a deformação como função do deslocamento do pulso refletido e a tensão como função do pulso transmitido, obtidos pelas relações (5.18) e (5.11) respectivamente. A taxa de deformação é dada por:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{l_{cp}} \sum_{m=1}^M [C_m \varepsilon_{rm}]. \quad (5.19)$$

5.7 Curva de tensão em função da deformação

5.7.1 –Ajuste adequado dos sinais

Para avaliar o valor adequado de componentes d_j com $1 \leq j \leq N$ e para ajuste dos sinais e seus efeitos sobre a curva de tensões em função das deformações, considera-se inicialmente os sinais ajustados para as cem primeiras componentes de frequência, ou seja, utiliza-se o somatório de F_m para $1 \leq m \leq 100$. Correspondendo a seguinte faixa de frequências $2KHz \leq f \leq 186KHz$, razão entre raio e comprimento de onda $\frac{1}{400} \leq \frac{R}{\Lambda} \leq \frac{1}{4}$ e razão de velocidade de fase $1 \leq \frac{C_\alpha}{C_0} \leq 0,908$. Com $M = 100$, obtém-se os pulsos e a curva de tensão para $N = 15$ e $N = 30$.

O ajuste do pulso refletido na barra de incidência é mostrado na figura 5.17:

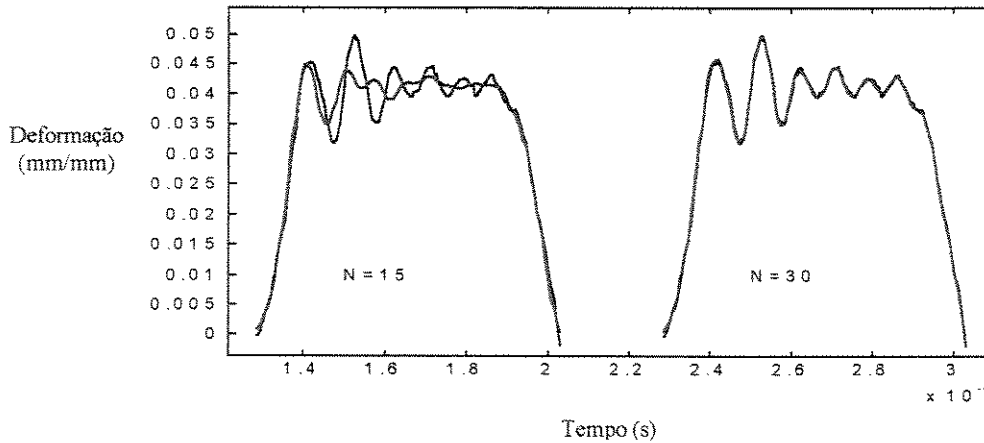


Figura-5.17: Ajuste do sinal refletido para números diferentes de componentes no sinal de excitação.

Os deslocamentos na interface com o corpo de prova, obtidos pela integração dos sinais refletidos são mostrados na figura 5.18, defasados no tempo para facilitar a visualização.

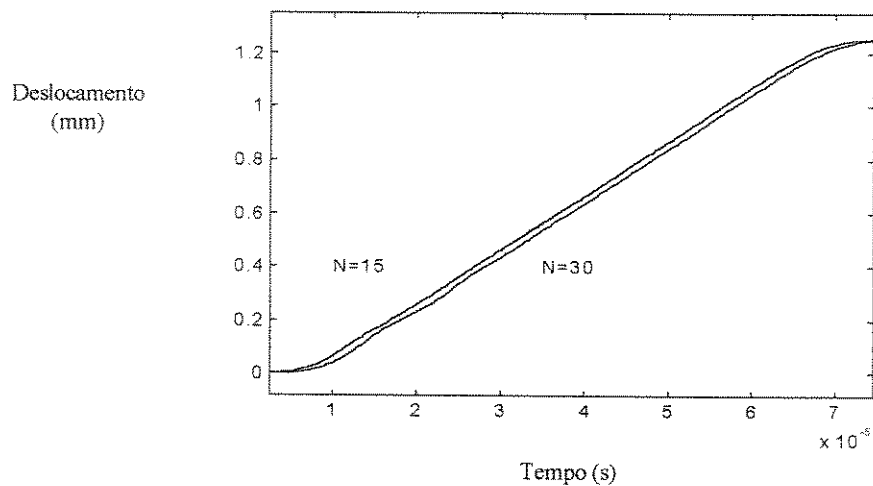


Figura-5.18: Deslocamentos na extremidade da barra obtidos pela integração dos pulsos refletidos

Embora o ajuste do pulso refletido para $N=15$ não seja tão bom quanto para $N=30$, os deslocamentos resultantes na extremidade da barra são virtualmente iguais.

Na figura 5.19 tem-se o ajuste do pulso de deformação transmitido, obtido para os dois níveis de discretização do sinal de excitação.

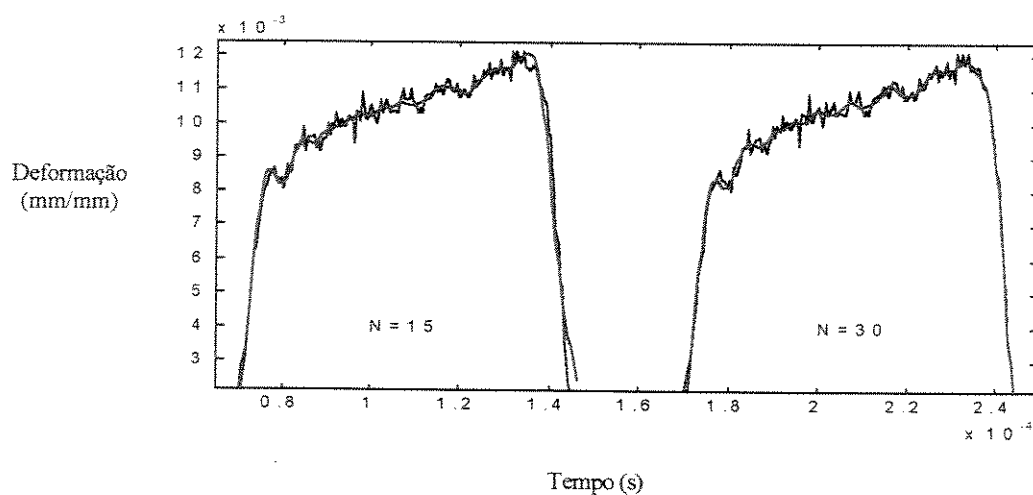


Figura-5.19: Ajuste do pulso transmitido para números diferentes de componentes do sinal de excitação

Neste caso, tanto para $N=15$ quanto para $N=30$ tem-se um bom ajuste do sinal refletido. O efeito de ajustes na curva de tensão pode ser verificado na figura 5.20 a seguir:

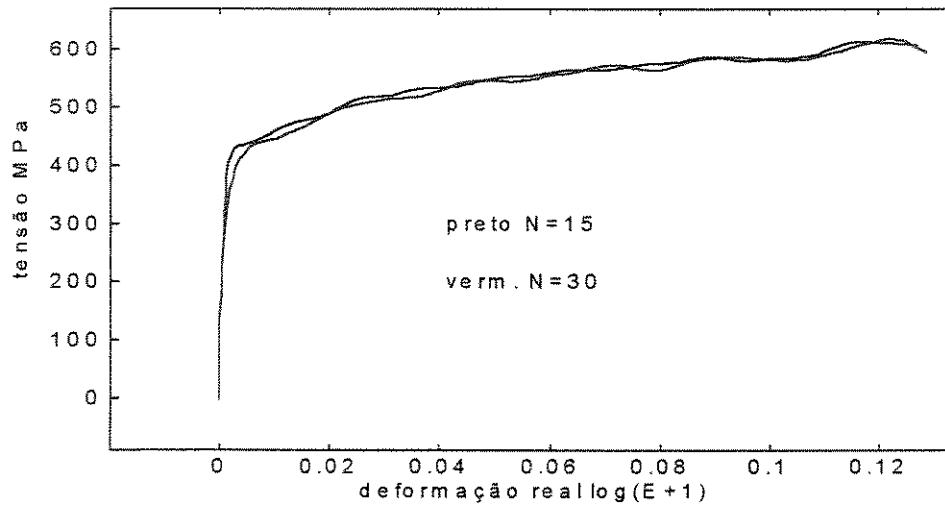


Figura-5.20: Curva de tensão em função da deformação para números diferentes de componentes do pulso de excitação

Na região de deformações elásticas as curvas são idênticas e na região de grandes deformações plásticas a curva para $N=30$ apresenta uma ondulação maior que a curva para $N=15$. Entretanto o valor médio é igual para as duas curvas, na região de deformações plásticas.

5.7.2- O instante de início do pulso

Neste procedimento é necessário conhecer com precisão o instante $t_0=0$ em que o carregamento é aplicado na barra, ou seja, a origem do tempo. Sendo l_1 o ponto onde o extensômetro está fixado na barra e t_1 o instante de tempo em que ocorre o início do pulso registrado pelo extensômetro tem-se:

$$t_0 = t_1 - \frac{l_1}{C_0} = 0 \quad (5.20)$$

Torna-se então necessário conhecer com precisão o instante de início do pulso.

A determinação incorreta do início do pulso interfere na determinação da curva de tensão. Se é considerado um ponto $\bar{t}_1 < t_1$ a região elástica apresenta uma inclinação menor em relação ao eixo das deformações, ou seja, o módulo de elasticidade é menor que o módulo verdadeiro. Por outro lado, para $\bar{t}_1 > t_1$ a curva apresenta uma dispersão maior na região de pequenas deformações plásticas. Na figura 5.21 têm-se duas curvas com determinação incorreta do instante de início do pulso e a curva obtida no ensaio quase estático ou ensaio convencional de compressão.

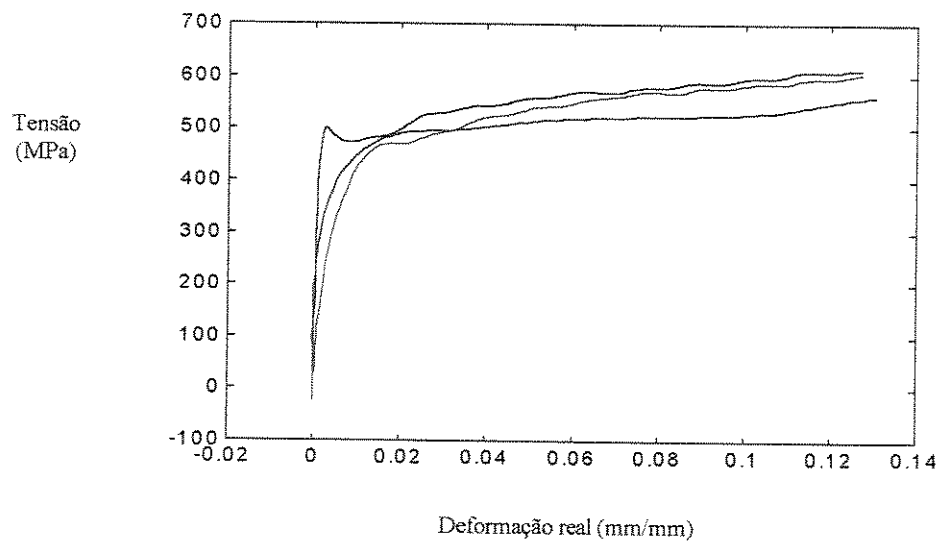


Figura-5.21: Desvios das curvas devido à utilização do instante de início do pulso incorreto
vermelho = ensaio quase estático

Para obter com precisão o instante inicial do pulso adota-se o seguinte procedimento:

- a) Determina-se o instante de início do pulso $\bar{t}_1$ pela inspeção visual dos sinais obtidos para as barras de incidência e transmissão e a partir da relação (5.20) obtém-se a origem dos tempos $\bar{t}_0$. Altera-se o vetor dos tempos da seguinte forma: $\{\bar{t}_i\} = \{t_i - \bar{t}_0\}$

b) Considerando o vetor dos tempos defasado de uma constante, ou seja, $\{t_i\} = \{\bar{t}_i - k\}$, por tentativa obtém-se um valor de k que resulta numa curva de tensão bem ajustada com a curva do ensaio quase estático.

O resultado é mostrado na figura 5.22, onde são colocadas algumas curvas mostrando a convergência para a região inicial da curva estática.

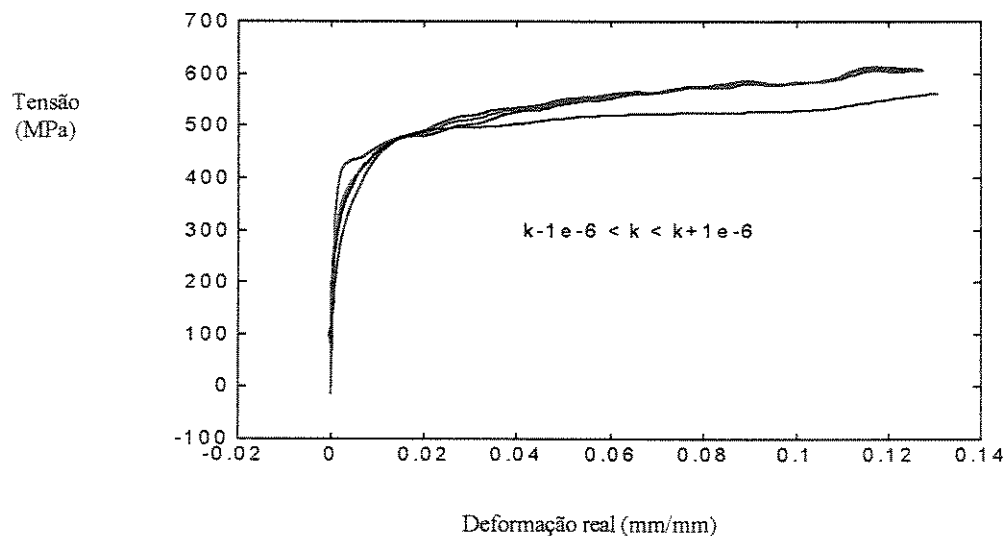


Figura-5.22: Com a correção do instante de início do pulso
A curva converge para a curva estática (preto)
para $k=11e-6$ s

Uma constante de $11 \cdot 10^{-6}$ segundos foi necessária para o ajuste dos tempos do sinal da barra de transmissão. Isto se deve a dificuldade de localização do ponto de início do pulso num sinal extremamente irregular. Para o sinal da barra de incidência a constante foi zero.

5.7.3- Curvas de tensão com componentes de frequências mais altas

Após o ajuste do tempo de início do pulso são obtidas as curvas de tensão e deformação considerando componentes de frequências mais elevadas. Neste caso considera-se o somatório para $M = 200, 400$ e 800 . As curvas obtidas são idênticas à curva anterior para $M = 100$. O resultado é

mostrado na figura 5.23, junto com a curva do ensaio quase estático e a curva ajustada por Rittel, para permitir uma avaliação do ajuste efetuado. A faixa de frequências bem como razão entre raio e comprimento de onda, para cada valor máximo de M , podem ser verificados na tabela-II, página 71.

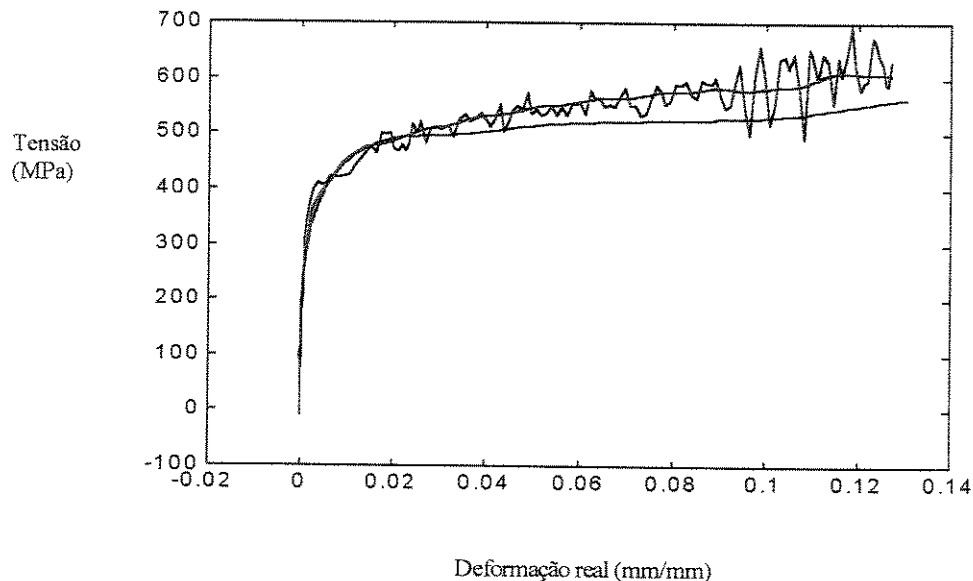


Figura-5.23: A inclusão de componentes de frequência mais elevada não alterou a curva ajustada anteriormente.

Curva preta sem dispersão = ensaio quase estático

Curva preta com dispersão = ajuste efetuado por Rittel

5.8 Comentários

a) Para se obter a deformação média do corpo de prova pela expressão (5.18) é utilizado o pulso refletido integrado em relação ao tempo. Neste caso, é necessário que seja obtido um bom ajuste da frente ou início do pulso. Esta região contém todas as informações necessárias para a obtenção da curva de tensão-deformação. Quanto ao restante do pulso, basta que o ajuste efetuado resulte num valor médio igual ao valor médio do sinal. As áreas

sob as curvas da figura 5.17 são iguais, como pode ser comprovado pelos resultados mostrados na figura 5.18.

b) Para obter a tensão no corpo de prova com a expressão (5.11) necessita-se de um bom ajuste do pulso transmitido. Como o objetivo é avaliar a tendência do material sob a ação de deformação elevada, não é necessário um ajuste muito refinado deste pulso. A utilização de um número maior de componentes d_j para o pulso de excitação, como feito no início $1 \leq j \leq N = 30$, promove um ajuste mais refinado do sinal e produz uma curva de tensão com ondulações maiores. Um refinamento maior do pulso apenas acentua as oscilações sem, contudo, alterar a tendência da curva de tensão, como mostrado na figura 5.20. É muito importante o ajuste correto da frente ou início do pulso. Esta região contém todas as informações para a obtenção da curva tensão-deformação.

c) A obtenção da curva de tensão em função de deformação depende muito de se estabelecer com boa precisão o instante de início do pulso, tanto na barra de incidência quanto na barra de transmissão. O procedimento utilizado permite o ajuste deste instante através da avaliação da convergência com o trecho inicial da curva de tensão do ensaio de compressão quase estático ou convencional.

d) Após obter as curvas utilizando as equações (5.1) e (5.2) considerando as cem primeiras frequências, ou seja $1 \leq m \leq M = 100$, e um pulso de excitação com 15 coeficientes $1 \leq j \leq N = 15$, aumenta-se o número de componentes de frequências para $1 \leq m \leq M = 200$, $1 \leq m \leq M = 400$ e $1 \leq m \leq M = 800$. Não é observada diferença entre estas curvas e a obtida inicialmente. Isto mostra que as frequências elevadas não contribuem de forma significativa para a deformação ou deslocamento nas barras.

Capítulo 6

Conclusões, comentários e sugestões

São apresentadas a seguir as principais conclusões deste trabalho, bem como sugestões para seu futuro desenvolvimento.

Dos resultados obtidos neste trabalho conclui-se que:

a) Pode-se utilizar funções harmônicas para obter a solução da equação diferencial da barra livre axissimétrica. Neste caso a barra finita se comporta como uma região limitada de uma barra infinita percorrida por pulsos de tração e compressão propagando em sentidos contrários. A superposição destes pulsos nas extremidades da barra resulta em deslocamentos radiais nulos nestas seções, sendo necessário impor apenas a condição de tensões normais nulas nas extremidades. A solução independe da relação entre o diâmetro e o comprimento da barra.

b) A utilização de funções harmônicas, para representar os deslocamentos da barra livre, é confirmada pela solução através de elementos finitos.

c) Para barra longas, como as barras utilizadas para obter os sinais analisados neste trabalho onde a relação entre comprimento (l) e diâmetro (d) é da ordem de $\frac{l}{d} = 100$, as tensões de cisalhamento não são significativas e as tensões normais podem ser consideradas uniformes ao longo da seção da barra.

d) A utilização da solução da barra livre para o tratamento dos sinais se resume na obtenção do carregamento aplicado na barra. Para barra longa o carregamento pode ser considerado uniforme ao longo da seção da barra, sendo apenas uma função do tempo.

e) A utilização da solução da barra livre independe da razão entre comprimento e diâmetro da barra. Entretanto, para barras curtas a hipótese de tensões uniformes na seção inicial da barra deve ser revista. Neste caso, a equação (3.55) deverá ser recalculada considerando um pulso genérico $Z(r,t)$.

f) A primeira etapa para obter a curva de tensão em função da deformação, no teste com as barras de Hopkinson, é determinar a deformação no corpo de prova utilizando o pulso refletido na barra de incidência. Considera-se que este pulso é gerado por uma carga aplicada na extremidade da barra em contato com o corpo de prova. A deformação no corpo de prova é função do deslocamento da extremidade da barra, como mostra a equação (5.18). Pelo método dos mínimos quadrados determina-se a carga aplicada e, a seguir, obtém-se o deslocamento da extremidade da barra em função do tempo. Neste caso deve-se determinar com precisão o instante inicial em que a carga é aplicada, o que é equivalente ao instante em que inicia o deslocamento da extremidade da barra. Então, como descrito no capítulo 5, ajusta-se o vetor dos tempos até obter um gráfico dos deslocamentos em função do tempo com deslocamento inicial igual a zero.

g) Para obter a tensão no corpo de prova utiliza-se o pulso transmitido. Considera-se que este é gerado por uma carga aplicada na extremidade da barra de transmissão em contato com o corpo de prova. A carga aplicada é determinada pelo método dos mínimos quadrados. A seguir obtém-se deformação em função do tempo na extremidade da barra e a tensão no corpo de prova é determinada pela equação (5.11). Para determinar

com precisão o instante em que a carga é aplicada na barra avalia-se a convergência da curva de tensão em função da deformação em relação à curva do teste convencional, como descrito no capítulo 5.

Para futuro desenvolvimento sugere-se:

a) Utilizar o modelo de mecânica do contínuo para ajuste dos sinais obtidos em experimentos com barras curtas, ou seja, barras com $\frac{l}{d} \ll 100$, onde l é o comprimento da barra e d o seu diâmetro. Neste caso, deve-se obter as expressões para tensões e deformações, considerando as equações apresentadas no capítulo 3, para o pulso de excitação variável no tempo e ao longo do raio da barra, ou seja, $Z = Z(r, t)$ na equação (3.55). Mantendo o comprimento das barras e a relação entre diâmetro e comprimento do corpo de prova, como indicado por Davies e Hunter, efetuar teste para barras e corpo de prova com diâmetros maiores.

b) Pode-se desprezar a inércia do corpo de prova quando as dimensões deste atendem a recomendação de Davies e Hunter. Neste caso as barras são tratadas separadamente, e passam a ser consideradas barras livres, tendo numa extremidade a carga de excitação ou a reação do corpo de prova. Desta forma, utilizam-se funções harmônicas para obter a solução da equação diferencial da barra axissimétrica. Entretanto, é necessária a avaliação de uma solução adequada para o caso em que a inércia do corpo de prova não possa ser desprezada e as barras não possam ser consideradas isoladamente, pois, as funções harmônicas não representam a solução de uma barra axissimétrica com condições de contorno diferentes das condições livre ou engastada. Neste caso deve-se avaliar a possibilidade de utilização dos auto-vetores obtidos através da solução pelo método de

elementos finitos, em conjunto com as frequências obtidas da equação de Pochhammer-Chree.

c) Avaliar a aplicação do procedimento proposto neste trabalho, para determinação da curva de tensão de materiais considerados insensíveis à taxa de deformação, como as ligas de alumínio 6061-T6 e 7075-T6.

REFERÊNCIAS

- Bancroft,D. (1941). The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars, *Physical Review*, Vol. 59, p. 588-593 .
- Bendat, J. S., Piersol, A. G. (1980). *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, New York, John Wiley & Sons.
- Bertholf,L.D., Karnes,C.H. (1975). Two-dimensional analysis of the split Hopkinson Pressure bar system – *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 23 p. 1-19 , Pergamon Press.
- Bismarck-Nasr, M. N. (1993). *Finite Elements In Applied Mechanics*. Divisão de Engenharia Aeronáutica – Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) - Centro Técnico Aeroespacial (CTA) – São José dos Campos, São Paulo, Brasil.
- Chree, C. (1889). The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coordinates: Their solution and application", *Trans. Camb. Philos. Soc.* 14 250-369
- Davies, E. D. H. , Hunter , S. C. (1963). The Dynamic Compression Testing of Solids by The Split Hopkinson Pressure Bar –*J. Mech. Phys. Solids*, p.155-179.
- Davies, R. M. (1948). A critical study of the Hopkinson Pressure Bar – *Philosophical Transactions A* , Vol. 240 , 1948 , p.375-457.
- Davies, R.M. (1948b). A simple modification of the Hopkinson pressure bar ,*Proc. 7th Int. Cong. On Applied Mechanics: Vol. 1"*, p. 404.
- Davies, R.M., Owen, J.D., Edwards, D.H. and Thomas, D.E. (1950). Pressure measurements in detonating gases using pressure bar techniques, *Proc. R. Soc. Lond. A* 204 17-19.
- Doyle, J. F.(1989). *Wave Propagation in Structures – An FFT-Based Spectral Analyses Methodology*. Spring-Verlag New York, Inc.
- Felice,C.W. (1986). *The Response of Soil to Impulse Loads Using the Split Hopkinson Pressure*

- Bar –AFWL –TR-85-92 Final Report May.
- Follansbee, P. S. , Frantz , C.(1983). Wave propagation in the Split Hopkinson Pressure Bar
January, Vol. 105 ,p.61-66 –Journal of Engineering Materials and Technology .
- Follansbee, P.S. (1985). The Hopkinson bar" in "Metals Handbook vol. 8 (9th edn.), pp. 198 203,
publ. American Society of Metals, Metals Park, Ohio.
- Follansbee, P.S. (1986). High strain rate deformation of FCC metals and alloys in Metallurgical
Applications of Shock Wave and High Strain Rate Phenomena", ed. L.E.Murr,K.P.
Staudhammer and M.A. Meyers, pp. 451-480, publ. Marcel Dekker, NewYork.
- Follansbee, P.S. (1989). Analysis of the strain-rate sensitivity at high strain rates in fcc and bcc
metals, Inst. Phys. Conf. Ser. 102 213-220.
- Follansbee, P.S. and Kocks, U.F. (1988). A constitutive description of the deformation of copper
based on the use of the mechanical threshold stress as an internal state variable, Acta
metall. 3681-93.
- Follansbee, P.S. and Weertman, J. (1982). On the question of flow stress at high strain rates
controlled by dislocation viscous flow, Mech. Mater. 1 345-350.
- Follansbee, P.S., Regazzoni, G. and Kocks, U.F. (1984). The transition to drag controlled
deformation in copper at high strain rates, Inst. Phys. Conf. Ser. 70 71-80.
- Gong,J.C. , Malvern,L.E. , Jenkins , D.A. (1990). Dispersion Investigation in the Split Hopkinson
Pressure Bar – Journal of Engineering Materials and Technology –july, vol 112, p.309-314 .
- Gorham, D.A. Wu, X.J. (1997) -An empirical method of dispersion correction in the compressive
Hopkinson bar test, J. de Physique IV 7 223-228.
- Gorham, D.A. and Wu, X.J. (1996). An empirical method for correcting dispersion in pressure bar
measurements of impact stress, Meas. Sci. & Technol. 7 1227-1232.

- Gorham, D.A., Pope, P.H. and Field, J.E. (1992). An improved method for compressive stress-strain measurements at very high strain rates, Proc. Roy. Soc. A438 153-70.
- Gorham, D.A. (1991). The effect of specimen dimensions on high strain rate compression measurements of copper, J. Phys D: Appl. Phys 24 1489-92 (1991).
- Gorham, D.A. (1991). An effect of specimen size in the high strain rate compression test, J. de Physique IV, Coll C3, Vol 1, 411-8.
- Gorham, D.A. (1989) -Specimen inertia in high strain rate compression, J. Phys. D. 22, 1888-1893.
- Gorham, D.A. (1983). A numerical method for the correction of dispersion in pressure bar signals, J. Phys. E. V. 16, pp 477-479.
- Grafton, P. E. and Strome, D. R. (1963). Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method. AIAA J., 1, 2342-2347.
- Hopkinson, B. (1914). A Method of Measuring The Pressure Produced in The Detonation of High Explosives or by The Impact of Bullets. Phil. Trans. Roy. Soc. 213A, p. 375
- Kolsky, H. (1963)- Stress Waves in Solids - , p.54 Dover Publications .
- Kolsky, H. and Douch, L.S. (1962). "Experimental studies in plastic wave propagation", J Mech. Phys. Solids 10 195-223.
- Kolsky, H. (1949). An Investigation of the Mechanical Properties of Materials at Very High Rates of Loading – Proceedings of the Physical Society, B, Vol.62, pp.676-701.
- Lifshitz, J.M. , Leber, H. (1993). Data Processing in the Split Hopkinson Pressure Bar Tests-Int. J. Impact Engng , Vol.15 N.6 , p. 723-733.
- Love, A. E. H. (1927). A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity – 4th, p.288 Dover Publications.
- Mandel, J., Brun, L. (1976). Mechanical Waves in Solids – CISM Courses and Lectures N°222 – International Center for Mechanical Sciences – SPRINGER-VERLAG WIEN NEW YORK.

- Meyers, M.A. , Chawla, K. K. (1982). *Princípios de Metalurgia Mecânica*, p.80, Editora Edgard Blücher Ltda.
- Newland, D. E. (1968). *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, New York, Longman Inc., 1968.
- Parry,D.J., Walker A . G., Dixon,P. R. (1995). Hopkinson bar pulse smoothing - Meas.Sci. Technol. 6 (1995) p.443-446 IOP Publishing Ltd.
- Pochhammer, L. (1876). "Über Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen I einem unbegrenzten isotropen Kreiszylinder", J. reine angew. Math. 81 324-336
- Ramesh, K.T. e Narasimhan, S. (1996) – Finite Deformations and the Dynamic Measurement of Radial Strains in Compression Kolsky Bar Experiments – Int. J Solids Structures Vol.33 Nº25, p.3723-3738.
- Safford, N. A. (1992) – Materials Testing up to 10^5 s^{-1} Using a Miniaturised Hopkinson Bar With Dispersion Corrections. Proceedings of The International Symposium on Intense Dynamic Loading and Its Effects – Chengdu, China, June.
- Thomson, W. T.(1973) – Teoria da Vibração, cap. 6 p. 178, Editora Interciência-1978.
- Tyas, A., Watson, A. J.(2001) – An investigation of frequency domain dispersion correction of pressure bar signals Int. Journal of Impact Engineering 25, p. 87-101, 2001
- Weaver Jr., W. , Johnston, P. R.(1984). *Finite Elements for Structural Analysis* , Prentice-Hall, Inc.
- Wu, X.J. & Gorham, D.A. (1997) -Stress equilibrium in the SHPB test, J. de Physique IV 91 96.
- Yew,E.H. and Chen,C.S. (1978). Experimental Study of dispersive Waves in Beam and Rod using FFT – ASME Journal of Applied Mechanics, Vol 45, pp.940-942.
- Yokoyama,T. and Kishida,K. (1986)-A Microcomputer-Based System for the High-Speed Compression Test by the Split Hopkinson Pressure Bar Technique-Journal of Testing and Evaluation, 1986pp.236-242-ASTM
- Zhao, H. (1997). "Testing of polymeric foams at high and medium strain rates", Polymer Testing **16** 507-516
- Zhao, H. (1998). "A study of specimen thickness effects in the impact tests on polymers by

numeric simulations", Polymer 39 1103-1106

Zhao, H. and Gary, G. (1995). "A three dimensional analytical solution of the longitudinal wave propagation in an infinite linear viscoelastic cylindrical bar: Application to experimental techniques", J. Mech. Phys. Solids 43 1335-1348

Zhao, H., Gary, G.(1997)- A New Method for The Separation of Waves. Application to The SHPB Technique for an Unlimited Duration of Measurement. J. Mech. Phys. Solids, Vol 45, N°7 , p. 1185-1202.

Zhao, H., Gary, G.(1996). On The Use of SHPB Techniques to Determine The Dynamic Behavior of Materials in The Range of Small Strains. Int. J. Solids Structures Vol.33, N° 23, p. 3363-3375.

Anexo I

Programas para determinação da curva de tensão em função da deformação

Aplicação do modelo de mecânica do contínuo

A-1.1 PROGRAMA HFAAL.M

```
% PROGRAMA QUE DETERMINA
%   a) FREQUÊNCIAS representada pela variável AL(m)
%   a partir dos auto-valores da barra livre  $A(m)=m \cdot \pi/L$ 
%   utilizando o polinômio de Felice como aproximação da
%   equação de frequência de Pochhammer-Chree
%   b) COEFICIENTES F1(m) para obtenção da deformação e V1(m) deslocamentos
%*****
%   MATERIAL
% VALORES ASSUMIDOS PARA AS CONSTANTES DO AÇO MARAGING'
% módulo de elasticidade (Kgf/cm2)
E=1.9368e6;
% razão de Poisson
mi=0.29;
% peso específico (Kgf/cm3)
mp=7.889e-3;
% massa específica (mp/g  $g=981\text{cm/s}^2$ )
mo=mp/981;
%*****
% constante de Lamè
l=E*mi/((1+mi)*(1-2*mi));
G=E/(2*(1+mi));Co=(E/mo)^0.5;
% VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO DA ONDA NUM MEIO UNIDIMENSIONAL(cm/s)
Co=(E/mo)^0.5
% VELOCIDADES DE PROPAGAÇÃO DE ONDA EM MEIO ELÁSTICO TRIDIMENSIONAL
INFINITO
% para onda de dilatação (cm/s)
C1=((l+2*G)/mo)^0.5;
C12=mo/(l+2*G);
% para onda de distorção (cm/s)
C2=(G/mo)^0.5;
C22=mo/G;
```

```

%*****
%grau de liberdade para o polinômio (utilizar no mínimo m1=4)
m1=6;
na=input('número de auto-valores(M) na = ');
%*****
%    DIMENSÕES DAS BARRAS
% raio da barra (cm)
R=0.635;
% comprimento da barra 1 em cm;
L1=120;
% comprimento da barra 2 em cm ;
L2=60;
%*****
%    CÁLCULO BARRA 1
%*****
L=L1;
%DETERMINAÇÃO DOS AUTO-VALORES ALFA(n) E A(n)
%utilizando o polinômio de Felice
A=[zeros(1,na)];
AL=[zeros(1,na)];
n=0;
while n<na
n=n+1;
A(n)=n*pi/L;
a=R*A(n)/(2*pi);
AL(n)=A(n)*Co*(0.5764+0.4236/(22*a^4+12.8*a^3-2.77*a^2+0.92*a^1.5+1));
end
%*****
% calculando OS COEFICIENTES F1 e V1
V1=[zeros(1,na)];
F1=[zeros(1,na)];
i=0;
while i<na
i=i+1;
h(i)=(AL(i)^2*C12-A(i)^2);
k(i)=(AL(i)^2*C22-A(i)^2);
%calculando a constante C
    B1=0;
    B2=0;
    i2=0;
    while i2<=m1
        jo=2*i2;
        B2=B2+(-1)^i2*h(i)^i2*R^jo*(k(i)-A(i)^2-h(i)/(i2+1))/(2^jo*(prod(1:i2))^2);
        B1=B1+(-1)^i2*k(i)^i2*R^jo*(-2+1/(i2+1))/(2^jo*(prod(1:i2))^2);
        i2=i2+1;
    end
end
%calculando os vetores C1 (Cn) e C2 (C'n)

```

```

i2=0;
while i2<=m1
j=i2+1;
j1=2*i2+1;
j2=2*i2;
C1(j)=(-1)^i2*A(i)*(B1*h(i)^j+B2*k(i)^i2)/(2^j1*prod(1:i2)*prod(1:(i2+1)));
C2(j)=(-1)^i2*(-B1*A(i)^2*h(i)^i2+B2*k(i)^i2)/(2^j2*(prod(1:i2))^2);
i2=i2+1;
end
%calculando o coeficiente F1 e V1
A1=0;
A11=0;
j=0;
while j<=m1
j1=j+1;
j2=0;
A2=0;
A22=0;
while j2<=m1
j3=j2+1;
j4=2*(j+j2)+4;
j5=2*(j+j2)+2;
j6=2*j+1;
A2=A2+C1(j1)*C1(j3)*R^j4/j4+C2(j1)*C2(j3)*R^j5/j5;
A22=A22+C2(j1)*C2(j3)*R^j5/j3;
j2=j2+1;
end
A1=A1+A2;
A11=A11+A22;
j=j+1;
end
V1(i)=A11/(A1*mo*L*AL(i)^3);
F1(i)=-A(i)*V1(i);
end
save hbar1 F1 V1 A AL R L Co E mi l G mo
%*****
%    DIMENSÕES DA BARRA 2
% raio da barra (cm)
R=0.635;
%comprimento da barra (cm)
L=L2;
%*****
%    CÁLCULO BARRA 2
%*****
%DETERMINAÇÃO DOS AUTO-VALORES ALFA(n) E A(n)
%utilizando o polinômio de Felice
% AQUI O na É O m DA SOMATÓRIA FÓRMULA

```

```

A=zeros(1,na);
AL=zeros(1,na);
n=0;
while n<na
n=n+1;
A(n)=n*pi/L;
a=R*A(n)/(2*pi);
AL(n)=A(n)*Co*(0.5764+0.4236/(22*a^4+12.8*a^3-2.77*a^2+0.92*a^1.5+1));
end
%*****
% calculando OS COEFICIENTES F1 e V1
V1=zeros(1,na);
F1=zeros(1,na);
i=0;
while i<na
i=i+1;
h(i)=(AL(i)^2*C12-A(i)^2);
k(i)=(AL(i)^2*C22-A(i)^2);
%calculando a constante C
    B1=0;
    B2=0;
    i2=0;
    while i2<=m1
        jo=2*i2;
        B2=B2+(-1)^i2*h(i)^i2*R^jo*(k(i)-A(i)^2-h(i)/(i2+1))/(2^jo*(prod(1:i2))^2);
        B1=B1+(-1)^i2*k(i)^i2*R^jo*(-2+1/(i2+1))/(2^jo*(prod(1:i2))^2);
        i2=i2+1;
    end
%calculando os vetores C1 (Cn) e C2 (C'n)
    i2=0;
    while i2<=m1
        j=i2+1;
        j1=2*i2+1;
        j2=2*i2;
        C1(j)=(-1)^i2*A(i)*(B1*h(i)^j+B2*k(i)^i2)/(2^j1*prod(1:i2)*prod(1:(i2+1)));
        C2(j)=(-1)^i2*(-B1*A(i)^2*h(i)^i2+B2*k(i)^i2)/(2^j2*(prod(1:i2))^2);
        i2=i2+1;
    end
%calculando o coeficiente F
    A1=0;
    A11=0;
    j=0;
    while j<=m1
        j1=j+1;
        j2=0;
        A2=0;
        A22=0;

```

```

while j2<=m1
j3=j2+1;
j4=2*(j+j2)+4;
j5=2*(j+j2)+2;
j6=2*j+1;
A2=A2+C1(j1)*C1(j3)*R^j4/j4+C2(j1)*C2(j3)*R^j5/j5;
A22=A22+C2(j1)*C2(j3)*R^j5/j3;
j2=j2+1;
end
A1=A1+A2;
A11=A11+A22;
j=j+1;
end
V1(i)=A11/(A1*mo*L*AL(i)^3);
F1(i)=-A(i)*V1(i);
end
save hbar2 F1 V1 A AL R L Co E mi l G mo

```

A-1.2 PROGRAMA HCURTEN.M

```
%
%   OBTENÇÃO DA CURVA TENSÃO DEFORMAÇÃO
%   UTILIZANDO APENAS OS SINAIS
%   REFLETIDO PARA OBTER DEFORMAÇÃO
%       E
%   TRANSMITIDO PARA OBTER TENSÃO
% O AJUSTE DE SINAL É FEITO CONSIDERANDO
% APENAS ONDAS SE PROPAGANDO PARA DIREITA
% QUANDO A ONDA SE PROPAGA PARA A ESQUERDA
% AS VARIÁVEIS SÃO ALTERADAS PARA  $z'=L-z$  E  $t'=t-T_0$ 
%*****
% DADOS OBTIDOS PELO PROGRAMA HFAAL.M
% hbar1 e hbar2
%*****
% comprimento do corpo de prova
LCP=1.273;
% raio do corpo de prova
RCP=0.379;
T=input('tempo de duração do pulso T = ');
n=input('número de auto-valores(M) M menor ou igual a na M = ');
%*****
% SUBDIVISÃO DO SINAL DE ENTRADA(CARGAS NA EXTREMIDADE DA BARRA)
N=input('número de subdivisões do tempo do pulso N = ');
dt=T/N;
pid=input(' ajuste do ponto de inicio do pulso DA BARRA 1 pid = ');
pip=input(' ajuste do ponto de inicio do pulso DA BARRA 2 pip = ');
%*****
%SINAL MEDIDO
% x - É O INSTANTE DE TEMPO EM QUE A DEFORMAÇÃO FOI MEDIDA
% y - É A DEFORMAÇÃO MEDIDA
% O SINAL MEDIDO DEVERÁ SER DIVIDIDO EM:
% PULSO REFLETIDO
% xx2 representado o tempo e yy2 representado a deformação
% PULSO transmitido - na segunda barra
% xx é o tempo e yy a deformação
% O ARQUIVO DE DADOS DEVERÁ SER DENOMINADO BRBOA
load brboa
%*****
%   BARRA 1
load hbar1
% redefinindo a dimensão do vetor dos coeficientes
f1=[F1(1,1:n)];
v1=[V1(1,1:n)];
```

```

%*****
%tempo para o sinal percorrer a barra
To=L/Co;
%*****
% ajuste da deformação refletida (Er)
% registrada pelo strain-gage 1
% determinando o vetor dr pelos mínimos quadrados
%PONTO DA BARRA ONDE FOI MEDIDO O SINAL
z=63;
xr=xx2-To-pid*1e-6;
yr=yy2;
[t1,t2]=size(xr);
FSr=zeros(t1,N);
i=0;
while i<t1
i=i+1;
t=xr(i);
j=0;
while j<N
j=j+1;
Sr=zeros(n,1);
m=0;
while m<n
m=m+1;
Sr(m)=(1/(2*dt))*(cos(AL(m)*(t-j*dt)-A(m)*z)-cos(AL(m)*(t-(j-1)*dt)-A(m)*z));
end
FSr(i,j)=f1*Sr;
end
end
P=[ones(t1,1)];
FSr=[P FSr];
dr=(FSr.'*FSr)\(FSr.'*yr);
% obtendo as deformações
Er=FSr*dr;
%*****
% deslocamento refletido na interface 1
z=0;
Ti=0;
Tf=T;
TT=5e-7;
txr=[Ti:TT:Tf]';
[t1,t2]=size(txr);
FSvr=zeros(t1,N);
Pvr=[zeros(t1,1)];
i=0;
while i<t1
i=i+1;

```

```

t=txr(i);
j=0;
while j<N
j=j+1;
Svr=zeros(n,1);
m=0;
while m<n
m=m+1;
S1=(1/(2*dt))*(sin(AL(m)*(t-j*dt)-A(m)*z)-sin(AL(m)*(t-(j-1)*dt)-A(m)*z));
So=(1/(2*dt))*(sin(AL(m)*(Ti-j*dt)-A(m)*z)-sin(AL(m)*(Ti-(j-1)*dt)-A(m)*z));
Svr(m)=S1-So;
end
FSvr(i,j)=v1*Svr;
Pvr(i)=-Co*(t-Ti);
end
end
% obtendo o deslocamento refletido na interface 1
FSvr=[Pvr FSvr];
Vr1=FSvr*dr;
%deformação no corpo de prova
Ecp=(-2*Vr1/LCP)/10;
%*****
% BARRA 2
load hbar2
% redefinindo a dimensão do vetor dos coeficientes
f1=[F1(1,1:n)];
v1=[V1(1,1:n)];
%*****
%tempo para o sinal percorrer a barra
To=L/Co;
%*****
% ajuste do sinal TRANSMITIDO
% determinando o vetor d2 pelos mínimos quadrados
%PONTO DA BARRA ONDE FOI MEDIDO O SINAL
z=32.5;
xt=xx-pip*1e-6;
yt=yy;
[t1,t2]=size(xt);
FSt=zeros(t1,N);
i=0;
while i<t1
i=i+1;
t=xt(i);
j=0;
while j<N
j=j+1;
St=zeros(n,1);

```

```

m=0;
while m<n
m=m+1;
St(m)=(1/(2*dt))*(cos(AL(m)*(t-j*dt)-A(m)*z)-cos(AL(m)*(t-(j-1)*dt)-A(m)*z));
end
FSt(i,j)=f1*St;
end
end
P=[ones(t1,1)];
FSt=[P FSt];
d2=(FSt.'*FSt)/(FSt.*yt);
% obtendo as deformações
Et=FSt*d2;
%*****
% deformação interface 2
z=0;
Ti=0;
Tf=T;
TT=5e-7;
txt=[Ti:TT:Tf]';
[t1,t2]=size(txt);
FSt=[zeros(t1,N)];
i=0;
while i<t1
i=i+1;
t=txt(i);
j=0;
while j<N
j=j+1;
St=[zeros(n,1)];
m=0;
while m<n
m=m+1;
St(m)=(1/(2*dt))*(cos(AL(m)*(t-j*dt)-A(m)*z)-cos(AL(m)*(t-(j-1)*dt)-A(m)*z));
end
FSt(i,j)=f1*St;
end
end
% obtendo a deformação na interface 2
P=[ones(t1,1)];
FSt=[P FSt];
Et2=FSt*d2;
% tensão no corpo de prova
Scp1=-((E*(R/RCP)^2)*Et2)/(9.81*10);
%*****
Ev1=log(Ecp+1);
Ev=Ev1(1:100);

```

```

Scp=Scp1(1:100);
figure(1)
plot(Ev,Scp,'k')
title('curva tensão-deformação ')
xlabel('deformação verdadeira Ev=log(1+Ecp)')
ylabel('tensão Scp MPa ')
figure(2)
plot(xt, yt, 'k', xt, Et, 'r')
title('sinal transmitido')
figure(3)
plot(xr, yr, 'k', xr, Er, 'r')
title('sinal refletido')
%*****

```

Anexo II

Programas de elementos finitos.

Para ajuste dos sinais da barra livre

A-2.1 PROGRAMA MALHATRLM

```
% programa para gerar malha triangular
% para a barra axissimétrica
% e estabelecer um fator de correção da matriz de rigidez
% através da solução do problema estático
%*****
% DADOS DE ENTRADA
% DEFININDO A MALHA DE ELEMENTOS
nr=input(' número DIVISÕES na direção radial = ');
nz=input(' número de elementos na direção axial = ');
% O NUMERO DE ELEMENTOS EM CADA DIREÇÃO É 2nr e 2nz
%*****
% DIMENSÕES DA BARRA
Rb=input(' raio da barra Rb = ');
Lb=input(' comprimento da barra Lb = ');
%*****
% AJUSTE DA RIGIDEZ DO MODELO
% Para que a rigidez dos elementos junto ao eixo da barra
% não seja elevada de mais em relação a rigidez dos outros
% elementos adota-se um raio mínimo de 0.001 cm.
% Para avaliar o efeito do raio mínimo arbitrado, é resolvido
% o problema estático e comparado os deslocamentos com um valor
% analítico. O resultado é apresentado na forma de erro %
Rmin=input(' raio mínimo para corrigir rigidez Rmin= ');
%*****
% PROPRIEDADES DO MATERIAL
% AÇO MARAGING - AISI Grau 18Ni(300)
% módulo de elasticidade (Kgf/cm2)
Em=1.8639e6;
% razão de Poisson
mi=0.3014;
% Peso específico (Kgf/cm3)
mp=8e-3;
% aceleração da gravidade ( g=981cm/s2)
% massa específica em (Kgf*s2/cm4)
```

```

mo=mp/981;
% constantes de Lamè
% Lam = lambda
Lam=Em*mi/((1+mi)*(1-2*mi));
G=Em/(2*(1+mi));
%*****
% número de elementos
NE=2*nr*nz;
% número de nós
NN=(nr+1)*(nz+1);
% matriz dos elementos e seus pontos nodais
No=zeros(NE,3);
%*****
%NOTA:Para o componente da matriz No(i,j)
%   i é o número do elemento i = 1,2,3,...,2*nr*nz=NE
%   j o índice do nó do elemento base j = 1,2,3
%*****
l=0;
while l<nz
l=l+1;
%gerando os nós de cada elemento
    k=0;
    while k<nr
        k=k+1;
        k1=2*k-1;
        %elemento impar
        ne=2*(l-1)*nr+k1;
% nó 1 do elemento impar
        No(ne,1)=(l-1)*nr+l+(k-1);
% nó 1 do elemento par
        No(ne+1,1)=No(ne,1);
% nó 2 do elemento impar
        No(ne,3)=No(ne,1)+nr+1;
% nó 3 do elemento impar
        No(ne,2)=No(ne,3)+1;
% nó 2 do elemento par
        No(ne+1,2)=No(ne,1)+1;
% nó 3 do elemento par
        No(ne+1,3)=No(ne,2);
    end
end
%*****
% coordenadas dos pontos nodais
DR=Rb/nr;
DL=Lb/nz;
% gerando os nós e suas coordenadas
R=zeros(NN,1);

```

```

Z=zeros(NN,1);
%*****
l=0;
while l<nz+1
l=l+1;
%gerando os nó 1 de cada elemento
    k=0;
    while k<nr+1
        k=k+1;
% indice do nó
        i=(l-1)*nr+1+(k-1);
% coordenadas do nó
        R(i)=(k-1)*DR;
        Z(i)=(l-1)*DL;
    end
end
%
%alterando o raio dos elementos junto ao eixo da barra
i=0;
while i<nz
i=i+1;
j=2*(i-1)*nr+1;
j1=No(j,1);
j3=No(j,3);
R(j1)=Rmin;
R(j3)=Rmin;
end
%*****
%*****início da solução do problema estático*****
%*****para ajuste da matriz de rigidez*****
%*****
%gerando a matriz rigidez global
K=zeros(2*NN,2*NN);
i=0;
while i<NE
i=i+1;
% gerando a matriz de rigidez do elemento
KE=zeros(6,6);
% definindo as coordenadas dos nós do elemento
r1=R(No(i,1));
r2=R(No(i,2));
r3=R(No(i,3));
z1=Z(No(i,1));
z2=Z(No(i,2));
z3=Z(No(i,3));
% definindo as funções de forma x(i)
D=r1*(z2-z3)+r2*(z3-z1)+r3*(z1-z2);

```

```

b11=(r2*z3-r3*z2)/D;
b12=(z2-z3)/D;
b13=(r3-r2)/D;
b21=(r3*z1-r1*z3)/D;
b22=(z3-z1)/D;
b23=(r1-r3)/D;
b31=(r1*z2-r2*z1)/D;
b32=(z1-z2)/D;
b33=(r2-r1)/D;
%função de forma no ponto médio
rm=(r1+r2+r3)/3;
zm=(z1+z2+z3)/3;
x(1)=b11+b12*rm+b13*zm;
x(2)=b21+b22*rm+b23*zm;
x(3)=b31+b32*rm+b33*zm;
%Derivadas da função de forma
xr(1)=b12;
xr(2)=b22;
xr(3)=b32;
xz(1)=b13;
xz(2)=b23;
xz(3)=b33;
B=[b11 b12 b13;b21 b22 b23;b31 b32 b33];
a=(z3-z1)/(r2-r1);
d=z1-a*r1;
if r2==r3
F1=a*(r2-r1)+(d-z1)*log(r2/r1);
F2=0.25*a^2*(r2^2-r1^2)+a*d*(r2-r1)+0.5*(d^2-z1^2)*log(r2/r1);
F3=a^2*(r2^3-r1^3)/6+0.5*a*d*(r2^2-r1^2)+0.5*(d^2-z1^2)*(r2-r1);
F4=a^3*(r2^3-r1^3)/9+0.5*a^2*d*(r2^2-r1^2)+a*d^2*(r2-r1)+(d^3-z1^3)*log(r2/r1)/3;
else
F1=-(a*(r2-r1)+(d-z3)*log(r2/r1));
F2=-(0.25*a^2*(r2^2-r1^2)+a*d*(r2-r1)+0.5*(d^2-z3^2)*log(r2/r1));
F3=-(a^2*(r2^3-r1^3)/6+0.5*a*d*(r2^2-r1^2)+0.5*(d^2-z3^2)*(r2-r1));
F4=-(a^3*(r2^3-r1^3)/9+0.5*a^2*d*(r2^2-r1^2)+a*d^2*(r2-r1)+(d^3-z3^3)*log(r2/r1)/3);
end
% gerando os elementos da matriz de rigidez do elemento
i1=0;
while i1<3
i1=i1+1;
j1=i1-1;
while j1<3
j1=j1+1;
c1=B(i1,1)*B(j1,1);
c2=B(i1,1)*B(j1,2)+B(i1,2)*B(j1,1);
c3=B(i1,1)*B(j1,3)+B(i1,3)*B(j1,1);
c4=B(i1,2)*B(j1,2);

```

```

c5=B(i1,2)*B(j1,3)+B(i1,3)*B(j1,2);
c6=B(i1,3)*B(j1,3);
XI=c1*F1+c2*D/2+c3*F2+c4*rm*D/2+c5*F3+c6*F4;
KE(i1,j1)=(rm*D/2)*((Lam+2*G)*xz(i1)*xz(j1)+G*xr(i1)*xr(j1));
KE(j1,i1)=KE(i1,j1);
K1=G*xz(i1)*xz(j1);
KE(i1+3,j1+3)=(rm*D/2)*((Lam+2*G)*xr(i1)*xr(j1)+K1)+(D/6)*Lam*(xr(j1)+xr(i1))+(Lam+2*G)*XI;
KE(j1+3,i1+3)=KE(i1+3,j1+3);
end
end
i1=0;
while i1<3
i1=i1+1;
j1=0;
while j1<3
j1=j1+1;
KE(i1,j1+3)=(rm*D/2)*(Lam*xz(i1)*xr(j1)+G*xr(i1)*xz(j1))+(D/6)*Lam*xz(i1);
KE(j1+3,i1)=KE(i1,j1+3);
end
end
% transferindo as matrizes dos elementos para as matrizes globais
I(1)=2*No(i,1)-1;
I(2)=2*No(i,2)-1;
I(3)=2*No(i,3)-1;
I(4)=2*No(i,1);
I(5)=2*No(i,2);
I(6)=2*No(i,3);
i1=0;
while i1<6
i1=i1+1;
I1=I(i1);
i2=0;
while i2<6
i2=i2+1;
I2=I(i2);
K(I1,I2)=K(I1,I2)+KE(i1,i2);
end
end
end
%*****
% vetor de carga aplicado na extremidade inicial da barra
% CARGA UNIFORME = 1
Q=zeros(2*NN,1);
i=0;
while i<nr
i=i+1;

```

```

j=2*i;
r1=R(No(j,1));
r2=R(No(j,2));
z1=Z(No(j,1));
z2=Z(No(j,2));
LL=((r2-r1)^2+(z2-z1)^2)^0.5;
q1=(LL/6)*(2*r1+r2);
q2=(LL/6)*(r1+2*r2);
I1=2*No(j,1)-1;
I2=2*No(j,2)-1;
Q(I1)=Q(I1)+q1;
Q(I2)=Q(I2)+q2;
end
%*****
% INTRODUCENDO VÍNCULO NA EXTREMIDADE INAL DA BARRA
i=-1;
while i<nr
i=i+1;
j=2*NN-(2*i+1);
Q(j)=0;
j1=0;
while j1<2*NN
j1=j1+1;
if j1==j;
K(j1,j)=1;
else
K(j1,j)=0;
K(j,j1)=0;
end
end
end
%*****
% solução do problema estático
v=K\Q;
% verificação do deslocamento para avaliar rigidez
dex=Lb/Em;
'erro percentual %'
erro=(1-v(1)/dex)*100
%*****
%*****fim da solução do problema estático*****
%*****para avaliação da rigidez*****
%*****
% salvando os dados para o programa barratri
save mtri No R Z Rb Lb nr nz NE NN Lam G Em mi mo

%*****

```

A-2.2 PROGRAMA BARRATRLM

```
% programa para gerar as matrizes de rigidez e massa e vetor de carga
%   para a barra axissimétrica
%   com elementos toroidal triangular
%   obter os auto valores auto vetores
%   Separar os modos na direção axial
%   para permitir avaliar o comprimento de onda
%*****
% dados de entrada
% 'o modo de deformação do círculo nodal é definido'
% 'pelo período da função cos(n.TETA) que pode ser 0 1 2 3 ...'
n=input(' modo de deformação do círculo nodal n = ');
%*****
% carregando os dados do programa MALHATRLM
% No=relação dos elementos e seus nós
% R e Z =coordenadas dos nós
% NE = número de elementos
% NN = número de nós
% nr = número de divisões na direção radial
% nz = número de divisões na direção axial
% Rb = raio da barra
% Lb = comprimento da barra
% Lam e G parâmetros de Lamè
% Em = módulo de elasticidade
% mi = razão de Poisson
% mo = massa específica
load mtri
%*****
%gerando as matrizes de massa e rigidez Globais
K=[zeros(2*NN,2*NN)];
M=[zeros(2*NN,2*NN)];
i=0;
while i<NE
i=i+1;
% gerando as matrizes do elemento
KE=[zeros(6,6)];
ME=[zeros(6,6)];
% definindo as coordenadas dos nós do elemento
r1=R(No(i,1));
r2=R(No(i,2));
r3=R(No(i,3));
z1=Z(No(i,1));
z2=Z(No(i,2));
z3=Z(No(i,3));
% definindo as funções de forma x(i)
```

```

D=r1*(z2-z3)+r2*(z3-z1)+r3*(z1-z2);
b11=(r2*z3-r3*z2)/D;
b12=(z2-z3)/D;
b13=(r3-r2)/D;
b21=(r3*z1-r1*z3)/D;
b22=(z3-z1)/D;
b23=(r1-r3)/D;
b31=(r1*z2-r2*z1)/D;
b32=(z1-z2)/D;
b33=(r2-r1)/D;
%função de forma no ponto médio
rm=(r1+r2+r3)/3;
zm=(z1+z2+z3)/3;
x(1)=b11+b12*rm+b13*zm;
x(2)=b21+b22*rm+b23*zm;
x(3)=b31+b32*rm+b33*zm;
%Derivadas da função de forma
xr(1)=b12;
xr(2)=b22;
xr(3)=b32;
xz(1)=b13;
xz(2)=b23;
xz(3)=b33;
B=[b11 b12 b13;b21 b22 b23;b31 b32 b33];
a=(z3-z1)/(r2-r1);
d=z1-a*r1;
if r2==r3
F1=a*(r2-r1)+(d-z1)*log(r2/r1);
F2=0.25*a^2*(r2^2-r1^2)+a*d*(r2-r1)+0.5*(d^2-z1^2)*log(r2/r1);
F3=a^2*(r2^3-r1^3)/6+0.5*a*d*(r2^2-r1^2)+0.5*(d^2-z1^2)*(r2-r1);
F4=a^3*(r2^3-r1^3)/9+0.5*a^2*d*(r2^2-r1^2)+a*d^2*(r2-r1)+(d^3-z1^3)*log(r2/r1)/3;
else
F1=-(a*(r2-r1)+(d-z3)*log(r2/r1));
F2=-(0.25*a^2*(r2^2-r1^2)+a*d*(r2-r1)+0.5*(d^2-z3^2)*log(r2/r1));
F3=-(a^2*(r2^3-r1^3)/6+0.5*a*d*(r2^2-r1^2)+0.5*(d^2-z3^2)*(r2-r1));
F4=-(a^3*(r2^3-r1^3)/9+0.5*a^2*d*(r2^2-r1^2)+a*d^2*(r2-r1)+(d^3-z3^3)*log(r2/r1)/3);
end
% gerando os elementos da matriz de rigidez do elemento
i1=0;
while i1<3
i1=i1+1;
j1=i1-1;
while j1<3
j1=j1+1;
c1=B(i1,1)*B(j1,1);
c2=B(i1,1)*B(j1,2)+B(i1,2)*B(j1,1);
c3=B(i1,1)*B(j1,3)+B(i1,3)*B(j1,1);

```

```

c4=B(i1,2)*B(j1,2);
c5=B(i1,2)*B(j1,3)+B(i1,3)*B(j1,2);
c6=B(i1,3)*B(j1,3);
XI=c1*F1+c2*D/2+c3*F2+c4*rm*D/2+c5*F3+c6*F4;
KE(i1,j1)=(rm*D/2)*((Lam+2*G)*xz(i1)*xz(j1)+G*xr(i1)*xr(j1))+G*n^2*XI;
KE(j1,i1)=KE(i1,j1);
K1=G*xz(i1)*xz(j1);
KE(i1+3,j1+3)=(rm*D/2)*((Lam+2*G)*xr(i1)*xr(j1)+K1)+(D/6)*Lam*(xr(j1)+xr(i1))+(Lam+G*(2
+n^2))*XI;
KE(j1+3,i1+3)=KE(i1+3,j1+3);
end
end
i1=0;
while i1<3
i1=i1+1;
j1=0;
while j1<3
j1=j1+1;
KE(i1,j1+3)=(rm*D/2)*(Lam*xz(i1)*xr(j1)+G*xr(i1)*xz(j1))+(D/6)*Lam*xz(i1);
KE(j1+3,i1)=KE(i1,j1+3);
end
end
ME(1,1)=(mo*D/120)*(6*r1+2*r2+2*r3);
ME(4,4)=ME(1,1);
ME(1,2)=(mo*D/120)*(2*r1+2*r2+r3);
ME(2,1)=ME(1,2);
ME(4,5)=ME(1,2);
ME(5,4)=ME(1,2);
ME(1,3)=(mo*D/120)*(2*r1+r2+2*r3);
ME(3,1)=ME(1,3);
ME(4,6)=ME(1,3);
ME(6,4)=ME(1,3);
ME(2,2)=(mo*D/120)*(2*r1+6*r2+2*r3);
ME(5,5)=ME(2,2);
ME(2,3)=(mo*D/120)*(r1+2*r2+2*r3);
ME(3,2)=ME(2,3);
ME(5,6)=ME(2,3);
ME(6,5)=ME(2,3);
ME(3,3)=(mo*D/120)*(2*r1+2*r2+6*r3);
ME(6,6)=ME(3,3);
% transferindo as matrizes dos elementos para as matrizes globais
I(1)=2*No(i,1)-1;
I(2)=2*No(i,2)-1;
I(3)=2*No(i,3)-1;
I(4)=2*No(i,1);
I(5)=2*No(i,2);
I(6)=2*No(i,3);

```

```

i1=0;
while i1<6
i1=i1+1;
I1=I(i1);
i2=0;
while i2<6
i2=i2+1;
I2=I(i2);
K(I1,I2)=K(I1,I2)+KE(i1,i2);
M(I1,I2)=M(I1,I2)+ME(i1,i2);
end
end
end
'matrizes concluidas'
%*****
% determinando auto-valores e auto-vetores
[V,d]=eig(M\K);
d=diag(V.'*M*V);
%normalização pela massa
d=diag(d.^(-0.5));
V=V*d;
%obtendo as frequências
K=V.'*K*V;
W=diag(K);
W=W.^0.5;
'obtidos autovalores e autovetores'
%*****
% vetor de carga aplicado na extremidade inicial da barra
%
Q=zeros(2*NN,1);
i=0;
while i<nr
i=i+1;
j=2*i;
r1=R(No(j,1));
r2=R(No(j,2));
z1=Z(No(j,1));
z2=Z(No(j,2));
LL=((r2-r1)^2+(z2-z1)^2)^0.5;
q1=(LL/6)*(2*r1+r2);
q2=(LL/6)*(r1+2*r2);
I1=2*No(j,1)-1;
I2=2*No(j,2)-1;
Q(I1)=Q(I1)+q1;
Q(I2)=Q(I2)+q2;
end
Q=V.'*Q;

```

```

%*****
save btri V W Q
' frequencias e auto vetores gravados em btri'
%*****
%separando os deslocamentos longitudinais e radiais da superficie
Vv=zeros(nz+1,2*NN);
Vu=zeros(nz+1,2*NN);
j=0;
while j<2*NN
j=j+1;
i=0;
while i<nz+1
i=i+1;
i1=2*(nr+1)*(i-1)+2*nr+1;
Vv(i,j)=V(i1,j);
Vu(i,j)=V(i1+1,j);
end
end
%*****
% ordenando as frequencias em Hz
[WH,I]=sort(W/(2*pi));
Co=(Em/mo)^0.5;
[n1,n2]=size(WH);
WH2=WH(2:n1);
[n3,n4]=size(WH2);
Ca=zeros(n3,1);
Ra=zeros(n3,1);
i=0;
while i<n3
i=i+1;
Ca(i)=WH2(i)*2*Lb/(i*Co);
Ra(i)=Rb*i/(2*Lb);
end
zz=[1:n3];
s=[0:Lb/nz:Lb];
figure(1)
plot(s,Vv(:,I(2)), 'k',s,Vv(:,I(3)), 'r',s,Vv(:,I(4)), 'b',s,Vv(:,I(5)), 'g',s,Vv(:,I(6)), 'y')
title('cinco primeiros modos longitudinais')
figure(2)
plot(s,Vu(:,I(2)), 'k',s,Vu(:,I(3)), 'r',s,Vu(:,I(4)), 'b',s,Vu(:,I(5)), 'g',s,Vu(:,I(6)), 'y')
title('cinco primeiros modos radiais')
%carregando a frequencia exata
load frqal
figure(3)
plot(zz,WH2/1000,'r',1:400,Alfa/10,'k')
title('frequências em KHz')
% carregando a solução exata para comparação

```

```

load slfrq
figure(4)
plot(Ra,Ca,'r',Rex,Cex,'k')
title('solução da equação de frequência')
%*****
save ptri Ra Ca Rex Cex WH2 I Alfa Vv Vu

```

A-2.3 PROGRAMA AJUSTRIM

```
% PROGRAMA PARA AJUSTE DOS SINAIS DA BARRA LIVRE
%   UTILIZANDO O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS
% O AJUSTE É FEITO PELA IDENTIFICAÇÃO DO PULSO
%   DE EXCITAÇÃO DA BARRA
%*****
%   DADOS DE ENTRADA
en=input(' número do elemento onde o pulso foi medido en = ');
NF=input(' número máx. de frequencia para o ajuste NF = ');
kt=input(' fator de ajuste (tentativa)do vetor dos tempos kt = ');
J=input(' definir número de componentes para pulso de input J = ');
T=input(' definir tempo de duração do pulso T = ');
%*****
% CARREGANDO O SINAIS OBTIDOS EM LABORATÓRIO
load sinais1
%   pulso incidente e refletido
% xx2-vetor dos tempos e y02-vetor das deformações
%   pulso indidente
% xx1-vetor dos tempos e y01-vetor das deformações
%*****
% CARREGANDO AUTOVETORES FREQUENCIAS E VETOR DE REPARTIÇÃO DE
CARGA
% carregando dados do program BARRATRIM
%   V autovetores W frequencias Q repartição de carga
load btri
%*****
% CARREGANDO DADOS SOBRE O MODELO DE ELEMENTOS FINITOS
% carregando os dados do programa MALHATRIM
% No=relação dos elementos e seus nós
% R e Z =coordenadas dos nós
% NE = número de elementos
% NN = número de nós
% nr = número de divisões na direção radial
% nz = número de divisões na direção axial
% Rb = raio da barra
% Lb = comprimento da barra
% Lam e G parâmetros de Lamè
% Em = módulo de elasticidade
% mi = razão de Poisson
% mo = massa específica
load mtri
%*****
% COORDENADAS DOS NÓS DO ELEMENTO
r1=R(No(en,1));
```

```

r2=R(No(en,2));
r3=R(No(en,3));
z1=Z(No(en,1));
z2=Z(No(en,2));
z3=Z(No(en,3));
%*****
% DERIVADAS EM RELAÇÃO A z DAS FUNÇÕES DE FORMA
D=r1*(z2-z3)+r2*(z3-z1)+r3*(z1-z2);
b13=(r3-r2)/D;
b23=(r1-r3)/D;
b33=(r2-r1)/D;
xz=[b13 b23 b33];
%*****
% SELECIONANDO AS LINHAS DA MATRIZ DE AUTOVETORES CORRESPONDENTES
% AO ELEMENTO
% índices dos deslocamentos longitudinais
i1=2*No(en,1)-1;
i2=2*No(en,2)-1;
i3=2*No(en,3)-1;
V1=[V(i1,:);V(i2,:);V(i3,:)];
%*****
% ORDENANDO AS FREQUENCIAS
[w,I]=sort(W);
% REMOVENDO O MODO DE CORPO RIGIDO
% E DEFININDO O NÚMERO MÁXIMO DE COMPONENTES DE FREQUENCIA
[n1,n2]=size(w);
if NF<n1
w=w(2:NF+1);
I=I(2:NF+1);
else
NF=n1;
w=w(2:NF+1);
I=I(2:NF+1);
end
% ORDENANDO AS COLUNAS DA MATRIZ DOS AUTOVETORES DO ELEMENTO
% E ORDENANDO O VETOR DE REPARTIÇÃO DE CARGA
% E DEFININDO O NÚMERO MÁXIMO DE COMPONENTES
i=0;
while i<NF
i=i+1;
j=0;
while j<3
j=j+1;
Ve(j,i)=V1(j,I(i));
Qe(i)=Q(I(i));
end
end

```

```

% OBTENDO O VETOR DOS COEFICIENTES Fm (1 por NF)
Fm=xz*Ve;
%*****
% IDENTIFICAÇÃO DO INPUT UTILIZANDO O PULSO INCIDENTE
% definindo o intervalo de tempo para ajuste
% e introduzindo o ajuste dos tempos
xx1=xx1+kt;
[t1,t2]=size(xx1);
% incremento de tempo de discretização do input
dt=T/J;
FS=[zeros(t1,J)];
i=0;
while i<t1
i=i+1;
t=xx1(i);
j=0;
while j<J
j=j+1;
S=[zeros(NF,1)];
m=0;
while m<NF
m=m+1;
a=w(m);
S(m)=(Qe(m)*J/(T*a^3))*(sin(a*(t-j*dt))-sin(a*(t-(j-1)*dt)));
end
FS(i,j)=Fm*S;
end
end
d=(FS.*FS)/(FS.*y01);
Ez=FS*d;
%*****
% REPRODUZINDO OS SINAIS INCIDENTE E REFLETIDO
xx2=xx2+kt;
[t1,t2]=size(xx2);
FS=[zeros(t1,J)];
i=0;
while i<t1
i=i+1;
t=xx2(i);
j=0;
while j<J
j=j+1;
S=[zeros(NF,1)];
m=0;
while m<NF
m=m+1;
a=w(m);

```

```

S(m)=(Qe(m)*J/(T*a^3))*(sin(a*(t-j*dt))-sin(a*(t-(j-1)*dt)));
end
FS(i,j)=Fm*S;
end
end
Ez1=FS*d;
%*****
figure(1)
plot(xx1,y01,'k',xx1,Ez,'r')
figure(2)
plot(xx2,y02,'k',xx2,Ez1,'r')
%*****

```