

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

Este exemplar corresponde a redação final
da tese defendida por José Roberto
Fagundes Netto e aprovada
pela comissão julgadora em 03/12/1993.

Luiz Felipe Moura
ORIENTADOR

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
Mecânica como requisito parcial para a obtenção do título
de Mestre em Engenharia de Petróleo

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
BIFÁSICOS A BOLHAS E PISTONADO USANDO
UM MÉTODO EULERIANO-LAGRANGEANO

Autor: José Roberto Fagundes Netto 139

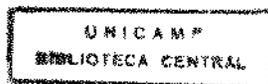
Orientador: Luiz Felipe M. Moura t

Co-orientador: Iberê Nascentes Alves n

60/93

Campinas, S.P.

1993

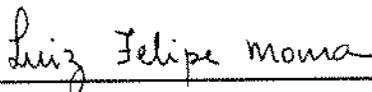


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PETRÓLEO

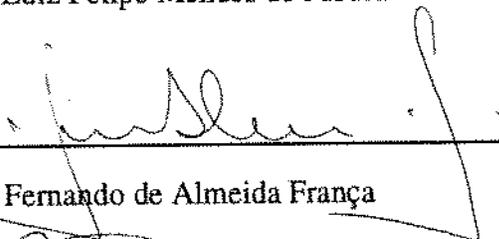
A dissertação "Simulação numérica de escoamentos bifásicos a bolhas e pistonado usando um método Euleriano-Lagrangeano" elaborada por José Roberto Fagundes Netto foi aceita pela Subcomissão de Pós-Graduação em Engenharia de Petróleo como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Petróleo.

Campinas, 03 de dezembro de 1993

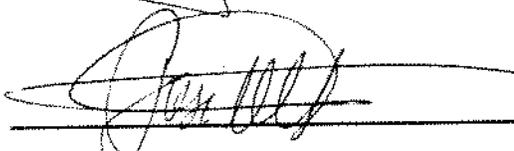
Banca Examinadora



Prof. Dr. Luiz Felipe Mendes de Moura



Prof. Dr. Fernando de Almeida França



Prof. Dr. José Maria Saiz Jabardo

Este trabalho é dedicado à minha
mulher Rita, pelo seu apoio e
compreensão.

Sumário

Nomenclatura.....	iii
Resumo	vii
Abstract.....	viii
1. Introdução	1
2. Revisão da Literatura	3
2.1 escoamento de bolhas em meio líquido.....	3
2.2 Modelos para o escoamento pistonado vertical.....	9
2.3 O enfoque Lagrangeano-Euleriano	13
3. Descrição do modelo proposto.....	15
3.1 Equações para a fase dispersa	16
3.2 Equações para a fase contínua.....	18
3.3 Solução analítica das equações da fase dispersa	19
3.4 Discretização espacial das equações da fase contínua	23
3.5 Força exercida por uma partícula sobre a fase contínua	26
3.6 Função forma da bolha e cálculo da fração de líquido.....	29
3.7 Solução discretizada no tempo da fase contínua.....	31
3.8 Modelo de forma e coeficiente de arrasto das bolhas	34
3.9 Modelo da velocidade de esteira da bolha	40
3.10 Outros modelos utilizados.....	45
3.11 Procedimento de solução adotado	46
4. Análise do modelo e dos resultados obtidos.....	47
4.1 Análise teórica do modelo.....	47
4.2 Validação do modelo.....	52
4.3 Análise dos resultados.....	64
5. Conclusões e Recomendações	77

Anexo A.....	79
Anexo B.....	85
Anexo C.....	88
Referências Bibliográficas.....	93

Nomenclatura

Símbolo	Descrição	Unidades	
		S.I.	(campo)
a_M	aceleração da mistura gás-líquido	m / s^2	
A	área da tubulação	m	
A_f	área frontal equivalente de uma bolha	m^2	
A_F	área do filme de líquido	m^2	
C_0, C_1	coeficientes p/ cálculo da velocidade de bolhas	-	
C_2	coeficiente definido por Griffith & Wallis [14]	-	
C^*	coeficiente definido por Moissis & Griffith [23]	-	
C_A	coeficiente do termo de massa virtual	-	
C_D	coeficiente de arrasto	-	
C_L	compressibilidade do líquido	Pa^{-1}	(psi ⁻¹)
d_e	diâmetro equivalente da bolha	m	(mm)
D	diâmetro da tubulação	m	(pol.)
D_B	diâmetro da projeção horizontal de uma bolha	m	(mm)
D_s	diâmetro de uma esfera	m	
E	razão de aspecto de uma bolha ($E = H_B / D_B$)	-	
$E\delta^D$	número de Eötvos baseado no diâmetro do tubo	-	
$E\delta$	número de Eötvos baseado no diâmetro da bolha	-	
f_{at}	fator de atrito de Fanning líquido-tubo	-	
F	força	N	
F_A	força de massa virtual	N	
F_{BL}	força resultante das bolhas na fase contínua	N	
F_D	força de arrasto	N	
F_{GL}	força que a fase gasosa exerce sobre a líquida	N	
F_R	número de Froude	-	
F_{WL}	força de atrito entre a parede do tubo e o líquido	N	
g	aceleração gravitacional	m / s^2	
H	altura	m	
H_B	altura de bolha	m	
L	comprimento	m	
L_C	comprimento de célula	m	
L_E	comprimento de estabilização do escoamento	m	
L_P	comprimento do pistão de líquido	m	
L_T	comprimento do tubo	m	

Símbolo	Descrição	Unidades	
		S.I.	(campo)
\dot{m}	fluxo mássico	Kg / s	
Mo	número de Morton	-	
P	pressão	Pa	(Kg/cm ²)
QM	quantidade de movimento	N	
r	posição radial ou distância horizontal entre bolhas	m	(mm)
r_e	raio equivalente da bolha	m	(mm)
r_w	escala para o cálculo da velocidade de esteira	m	(mm)
R	raio de curvatura de uma bolha em seu vértice	m	(mm)
R_B	raio da projeção horizontal de uma bolha	m	(mm)
Re	número de Reynolds	-	
Re_M	número de Reynolds da mistura	-	
Re_P	número de Reynolds da partícula	-	
Re_{PL}	número de Reynolds do pistão de líquido	-	
R_s	raio de uma esfera	m	
R_T	raio da tubulação	m	(pol.)
S_L	área de contato do líquido com a parede do tubo	m ²	
t	tempo	s	
t_{CPU}	tempo de CPU	s	(min)
T	temperatura absoluta	°K	
u	velocidade	m / s	
u_A	velocidade de uma bolha em meio estagnado	m / s	
u_B	velocidade de uma bolha	m / s	
u_{BT}	velocidade de uma bolha de Taylor	m / s	
u_C	velocidade da esteira na linha de centro da bolha	m / s	
u_{EST}	velocidade da esteira de uma bolha	m / s	
u_F	velocidade do filme de líquido	m / s	
u_{GS}	velocidade superficial de gás	m / s	
u_L	velocidade do líquido	m / s	
u_{LS}	velocidade superficial de líquido	m / s	
u_M	velocidade da mistura gás-líquido	m / s	
u_{NEG}	velocidade da esteira junto à parede do tubo	m / s	
u_{PL}	velocidade da mistura na seção de pistão de líquido	m / s	
u_R	velocidade da bolha relativa à mistura	m / s	
u_R^0	velocidade relativa inicial de uma bolha	m / s	
u_T	velocidade efetiva que a bolha percebe o meio	m / s	
u_{∞}	velocidade relativa terminal de uma bolha	m / s	

Símbolo	Descrição	Unidades	
		S.I.	(campo)
V	volume	m ³	
V _C	volume total dos pistões de líquido	m ³	
V _G	volume da fase gasosa	m ³	
V _L	volume da fase líquida	m ³	
Y	número de viscosidade	-	
z	posição axial ou distância vertical entre bolhas	m	
z _C	posição axial do centro de uma célula	m	
α _{BT}	fração de vazio na seção da bolha de Taylor	-	
α _F	fração volumétrica do filme de líquido	-	
α _G	fração volumétrica de gás	-	
α _L	fração volumétrica de líquido	-	
α _{PL}	fração de vazio no pistão de líquido	-	
β	razão entre a altura da bolha e o comprimento total	-	
Γ	taxa de transferência de massa do gás p/ o líquido	Kg / s	
δz	comprimento total dos pistões de líquido na célula	m	
ε	rugosidade absoluta do tubo	m	(mm)
η _i (z,t)	função definida por Mortensen & Trapp [24]	m ⁻¹	
η _{ic} (t)	fração volumétrica da bolha i em um volume	-	
μ _L	viscosidade do líquido	Pa.s	(cP)
θ	posição angular	rd	
ρ	densidade	Kg / m ³	
ρ _G	densidade do gás	Kg / m ³	
ρ _L	densidade do líquido	Kg / m ³	
ρ _M	densidade da mistura	Kg / m ³	
σ	tensão superficial	N / m	
τ _{WL}	tensão cizalhante devido à fricção com a parede	Pa	
χ(z,t)	função de intermitência definida por Fabre [11]	-	
Ω	razão entre as velocidades de mistura local e média	-	

Subscrito	Descrição
i	propriedade da bolha identificada pelo índice i
j	valor médio na célula j da malha de discretização onde é realizado o balanço da quantidade de movimento
k	valor médio na célula k da malha de discretização onde é realizado o balanço de massa
BC	bolhas cilíndricas
NC	bolhas não-cilíndricas
JUS	à jusante da tubulação
MON	à montante da tubulação

Resumo

Uma modelagem para o escoamento bifásico vertical a bolhas e pistonado é proposta, através de uma abordagem Lagrangeana para a fase discreta e um tratamento Euleriano para a fase contínua. Cada bolha é tratada individualmente através de três equações: as de balanço de massa e de quantidade de movimento e a que determina a sua posição em relação a um referencial fixo na tubulação. A fase contínua é resolvida através da discretização com malhas defasadas das duas equações de balanço: de massa e de quantidade de movimento. O acoplamento entre as equações das duas fases é realizado através da fração volumétrica e das forças interfaciais.

Foi desenvolvido um simulador computacional baseado neste modelo que, devido à abordagem individualizada dada às bolhas, permite que se faça um tratamento estatístico dos resultados. Pode-se determinar, em cada ponto da tubulação, o valor médio e o desvio padrão da altura das bolhas, do comprimento dos pistões de líquido, das velocidades das fases e do gradiente de pressão.

Os valores calculados foram comparados com dados pesquisados na literatura e apresentaram um resultado satisfatório tanto para a altura das bolhas como para o comprimento dos pistões de líquido. As velocidades e o gradiente de pressão previstos obtiveram boa correlação com os valores medidos.

Foi realizada ainda uma análise de sensibilidade para avaliar como os resultados são influenciados pela variação da vazão volumétrica das fases, do diâmetro do tubo e da pressão na extremidade jusante da tubulação.

Abstract

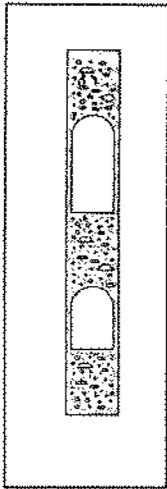
A model to predict the behaviour of vertical two-phase flow regimes, such as bubbles and slug flow has been proposed, using a Lagrangian representation of the discrete phase and a Eulerian representation of the continuous phase. Each bubble is modeled individually through three equations: the mass and the momentum balance equations and the bubble position equation. The continuous phase is solved using a staggered mesh for the mass and momentum equations. Volumetric fraction and interfaces forces provide the coupling of the phase models.

A computer program has been developed based on this model and it allows a statistical treatment of the results, due to the individual bubbles approach. It's possible to calculate the average and standard deviation of the bubbles heights, liquid slugs lengths, phase velocities and pressure gradient, for each pipe position.

The results were checked against existing data and a reasonable agreement for the lengths was obtained. The velocities and pressure gradient show a good correlation with measured data.

It was also performed a sensitive analysis to check the influence of the phases volumetric flow rates, pipe diameter and outlet pressure on the simulation results.

1. Introdução



Quando líquido e gás escoam numa tubulação vertical, diversas configurações geométricas - denominadas padrões de escoamento - podem ocorrer. No escoamento ascendente os padrões usualmente aceitos na literatura são: *bolhas*, *pistonado*, *agitante*, *anular* e *bolhas dispersas*.

O padrão pistonado, também chamado intermitente, é o mais freqüente em tubulações e poços produtores de petróleo, ocorrendo num amplo espectro de vazões das fases e é caracterizado por um escoamento alternado de líquido e gás. Quando esse padrão de escoamento é observado, a maior parte da fase gasosa se apresenta em grandes bolhas cilíndricas em forma de projétil chamadas *bolhas de Taylor*. O restante da fase gasosa encontra-se no seio dos pistões de líquido, dispersa em pequenas bolhas. A bolha de Taylor ocupa quase toda a seção transversal da tubulação e possui movimento ascendente em relação ao líquido. O pistão de líquido ocupa toda a seção da tubulação e perde massa através do filme líquido descendente que ocupa o espaço entre a tubulação e a bolha de Taylor que o sucede, ao mesmo tempo que agrega massa do filme líquido proveniente da bolha de Taylor que o antecede, conforme descrito esquematicamente na figura 2.1, página 11.

O escoamento em regime permanente do padrão pistonado, devido a sua importância, já foi amplamente estudado, ressaltando-se o trabalho de **Fernandes** [12]. Esse trabalho e a maioria dos que se seguiram basearam-se no conceito de célula unitária, definida como sendo uma unidade representativa do escoamento com duas seções, a primeira constituída pela bolha de Taylor e pelo filme líquido e a segunda pelo pistão de líquido com as bolhas dispersas. A modelagem se baseia na idéia que essa célula se repete de maneira uniforme com o tempo, ciclicamente, com dimensões e velocidades constantes para o mesmo ponto no espaço. Sabe-se, no entanto, que não é assim que o fenômeno acontece. Ao contrário, os pistões de líquido e as grandes bolhas alternam-se com dimensões variadas e aparentemente aleatórias, mesmo no regime permanente na região de escoamento plenamente desenvolvido, embora uma média seja mantida.

Para tentar compreender melhor o fenômeno deve-se entender como se forma o escoamento pistonado. Sabe-se que a formação das bolhas de Taylor se dá a alguma distância da entrada da tubulação, a partir da coalescência de bolhas menores. Quando duas bolhas estiverem a uma distância tal que a esteira provocada pela que vai à frente não perturbe o movimento da de trás, elas se manterão estáveis. Caso contrário elas se aproximarão até a coalescência. O escoamento é dito plenamente desenvolvido quando todas as bolhas estiverem estabilizadas, sem sofrerem influência das bolhas à sua frente e quando ocorrer equilíbrio entre a coalescência das bolhas e a fragmentação das bolhas maiores.

O objetivo deste trabalho é propor um modelo que considere e reproduza a formação do padrão pistonado. Devido ao processo de formação do padrão torna-se de certa forma intuitivo que, para modelá-lo adequadamente, deve-se acompanhar cada bolha individualmente. Isso sugere um tratamento Lagrangeano para a fase discreta, ou seja, cada partícula é descrita por equações desenvolvidas em relação a um referencial fixo na própria partícula. A fase líquida é considerada um meio contínuo, e por isso, tratada a partir do enfoque Euleriano, como usualmente é realizado.

O trabalho teve como ponto de partida o artigo de **Mortensen & Trapp** [24], onde os autores propuseram um modelo para simulação numérica do escoamento bifásico no padrão bolhas utilizando uma abordagem Euleriana-Lagrangeana. Esse modelo foi estendido de modo a tratar adequadamente o padrão pistonado.

Para diferentes diâmetros de tubulação, vazões de líquido, vazões de gás e pressões deseja-se determinar:

- Padrão de escoamento predominante (bolhas ou pistonado);
- Distância necessária para se atingir o padrão pistonado estável;
- Média e desvio padrão do comprimento das bolhas e dos pistões de líquido;
- Média e desvio padrão da velocidade das bolhas de Taylor;
- Média e desvio padrão da pressão e da velocidade dos pistões de líquido.

Os resultados encontrados são comparados com dados da literatura e modelos existentes.

2. Revisão da Literatura

2.1 escoamento de bolhas em meio líquido

Os primeiros trabalhos publicados na literatura e de interesse para o estudo do escoamento bifásico pistonado vertical foram aqueles voltados à determinação da velocidade de ascensão das grandes bolhas cilíndricas em meio líquido.

Um dos trabalhos mais antigos de referência obrigatória é o de **Davies & Taylor** [9], publicado em 1950. Esse trabalho descreve, em sua primeira parte, o perfil e a velocidade de ascensão de bolhas de ar em água e nitrobenzeno em um meio de extensão praticamente infinita. Observações dos perfis de grandes bolhas obtidas a partir de fotografias indicam que a superfície superior dessas bolhas é esférica. A velocidade de ascensão no meio estagnado foi calculada teoricamente admitindo escoamento potencial do fluido ao redor de uma esfera onde a pressão na superfície é constante. Obteve-se o seguinte valor:

$$u_A = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{g \cdot R_s} = 0.471 \cdot \sqrt{g \cdot D_s} \quad (2.1)$$

onde R_s é o raio e D_s o diâmetro da esfera. Experimentalmente, os autores comprovaram esse valor para bolhas, utilizando o raio de curvatura da bolha em seu vértice no lugar de R_s . A segunda parte do trabalho foi dedicada ao estudo do movimento de uma grande bolha penetrando em um tubo vertical inicialmente cheio de líquido, e que teve sua extremidade inferior aberta para a atmosfera. Enquanto a bolha penetra na tubulação, o líquido é expulso, devido à ação da força gravitacional, através do espaço anular formado entre a bolha e a parede do tubo. Uma modelagem do perfil da bolha e sua velocidade de ascensão no líquido é proposta e se obtém uma solução aproximada a partir do truncamento no primeiro termo da série de funções de Bessel, solução do problema. Chega-se ao valor teórico para a velocidade de ascensão de:

$$u_A = C_1 \cdot \sqrt{g \cdot D} \quad (2.2)$$

onde $C_1 = 0.328$ e D é o diâmetro do tubo. Medidas experimentais com tubos de 7.94 cm foram obtidas resultando em valores para a constante C_1 entre 0.330 e 0.346.

Nicklin et al. [25] publicaram em 1962 um artigo onde apresentam uma teoria de escoamento pistonado baseado em experimentos. Algumas observações interessantes quanto à forma das bolhas cilíndricas foram descritas:

- O perfil do nariz da bolha independe de seu comprimento;
- A fração de líquido na região da bolha situa-se entre 10.2 e 10.7 %;
- A bolha consiste de um nariz ao redor do qual o líquido acelera livremente pela ação da gravidade, e uma região onde a força gravitacional no filme de líquido é contrabalançada pelas forças cizalhantes da parede do tubo e da bolha, e a espessura deste filme torna-se constante.

Os resultados experimentais mostram que a velocidade de ascensão das bolhas em líquido estacionário pode ser descrita pela equação (2.2) com $C_1 = 0.35$. Essa velocidade independe do tamanho da bolha e só é modificada quando existe escoamento de líquido através da seção acima da bolha. Os autores concluem que essa velocidade é função apenas da hidrodinâmica do nariz da bolha. Quando o fluido está em movimento, a velocidade da bolha é correlacionada por:

$$u_b = C_0 \cdot u_{pL} + 0.35 \cdot \sqrt{g \cdot D} \quad (2.3)$$

sendo u_{pL} a velocidade do pistão de líquido à frente da bolha. O gráfico de C_0 em função do números de Reynolds do pistão de líquido (Re_{pL}) do trabalho de Nicklin, não reproduzido aqui, mostra que C_0 assume o valor constante de 1.2 para Re_{pL} maior que 8000, enquanto para números de Reynolds próximos de zero esse valor se aproxima de 2. Os autores concluem que a velocidade da bolha é aproximadamente a soma da velocidade do líquido na linha de centro do tubo com a velocidade de ascensão em fluido estagnado. Vários anos mais tarde, em 1986, Fréchet [13] publicou resultados de medidas experimentais que concordaram com as observações de Nicklin e o levaram a propor uma correlação para determinar C_0 :

$$C_0 = 1.2 + \frac{0.8}{1 + 10^{-8} \cdot Re^{2.55}} \quad (2.4)$$

Em artigo publicado também em 1962, White & Beardmore [35] relataram resultados experimentais realizados com bolhas cilíndricas e tentaram modelar a velocidade de ascensão destas bolhas em fluido estagnado, incluindo efeitos de forças viscosas e

superficiais. Os autores apresentaram uma correlação gráfica relacionando três variáveis adimensionais:

$$F_R = \frac{u_A^2}{g \cdot D} \quad (\text{número de Froude}),$$

$$E\ddot{o}^D = \frac{\rho_L \cdot g \cdot D^2}{\sigma} \quad (\text{número de E\ddot{o}tvos}) \quad e$$

$$Y = \frac{g \cdot \mu_L^4}{\rho_L \cdot \sigma^3}.$$

As principais conclusões dos autores foram:

- Para $E\ddot{o}^D < 4$ a bolha não se movimenta;
- A velocidade não é afetada pela tensão superficial caso $E\ddot{o}^D > 70$, pela viscosidade caso $\frac{\rho_L^2 \cdot g \cdot D^3}{\mu_L^2} > 3 \cdot 10^5$ e por efeitos inerciais caso $\sqrt{F_R} < 0.05$;
- Bolhas não cilíndricas, de capa esférica, também seguem a correlação gráfica apresentada;
- A velocidade da bolha cilíndrica independe de seu comprimento;
- Quando efeitos viscosos e superficiais são desprezíveis, a velocidade da bolha de gás é descrita pela equação (2.2) onde a constante C_1 assume o valor 0.345.

Ainda em 1962, **Moissis & Griffith** [23] estudaram a velocidade das bolhas cilíndricas na região de entrada da tubulação. Foi considerada a influência da esteira de uma bolha na bolha que a sucede, e correlacionou-se a constante C_1 da equação (2.2) com a distância entre bolhas ou o comprimento do pistão, L_p :

$$C_1 = C^* \cdot \left(1 + 8 \cdot e^{-1.06 \cdot L_p / D} \right) \quad (2.5)$$

onde C^* é o coeficiente de equilíbrio, apresentado graficamente contra o número de Reynolds baseado na velocidade da bolha, diâmetro do tubo e viscosidade do líquido. Para $Re \geq 4$, C^* assume o valor constante de 0.35.

Em 1978, **Collins et al.** [6] publicaram uma teoria para descrever o movimento de grandes bolhas em líquido não estagnado em uma tubulação. A teoria assume que o líquido ao redor da bolha é ideal, com uma distribuição inicial de vorticidade que depende do perfil de velocidades do líquido à frente da bolha. Soluções aproximadas são dadas tanto para perfis laminares quanto para turbulentos. Os resultados encontrados confirmam o trabalho de

Nicklin desde que o volume da bolha exceda $(0,4 D)^3$. O raio de curvatura da bolha em seu vértice é, nesse caso, igual a $0,71 \cdot D$ [11].

A influência da tensão superficial na velocidade de ascensão de bolhas foi ainda estudada por **Bendixsen** [4] em 1985 e por **Couët & Strumolo** [7] em 1987.

Outro assunto importante, quando se trata as partículas gasosas de forma discreta, é o estudo da cinética das pequenas bolhas não-cilíndricas. Muitos trabalhos foram publicados abordando tanto a geometria das bolhas como suas velocidades de ascensão em meio líquido e respectivos coeficientes de arrasto.

Em 1960, **Harmathy** [15] publicou um artigo onde desenvolveu uma teoria que fornece um método simples para se calcular a velocidade terminal de partículas fluidas se movendo em meio infinito ou de extensão restrita. O modelo é válido, segundo o autor, desde que o número de Reynolds do escoamento seja superior a 500. De acordo com Harmathy, pequenas partículas fluidas são esféricas ou levemente elipsoidais e se movem em trajetória retilínea. Partículas de dimensões intermediárias assumem uma forma definitivamente elipsoidal, tornando-se cada vez mais distorcidas quanto maior forem; e se movem em zig-zag ou em trajetória helicoidal cuja amplitude diminui com o aumento da deformação. Partículas maiores assumem a forma de capa esférica e seu movimento é praticamente retilíneo. A transição entre os perfis foi determinada em função do número de Eötvos baseado no diâmetro equivalente da bolha:

$$E\ddot{o} = \frac{\Delta\rho \cdot g \cdot d_e^2}{\sigma} \quad (2.6)$$

O coeficiente de arrasto foi definido como:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot \left(\frac{\pi \cdot d_e^2}{4} \right) \cdot u_A^2} \quad (2.7)$$

onde F_D é a força de arrasto, d_e o diâmetro equivalente da bolha, ρ_L a densidade do meio contínuo e u_A a velocidade de ascensão da bolha. O autor sugeriu que, para $E\ddot{o} \leq 1$ as partículas comportam-se como esferas sólidas, e nesse caso $C_D = 0,44$. Para número de Eötvos entre 1 e 13 as bolhas foram classificadas de elipsoidais moderadas e o coeficiente de arrasto seria dado por $C_D = 0,5676 \cdot \sqrt{E\ddot{o}}$. As capas esféricas surgiram para $E\ddot{o} > 40$ e o

coeficiente de arrasto assumiria novamente um valor constante, igual a 2.6. Harmathy considerou que o coeficiente de arrasto seria função apenas da geometria da bolha, e como as bolhas do tipo capa esférica têm geometria fixa, deveriam ter C_D constante, ao contrário das elipsoidais que se deformam quando crescem de tamanho. O coeficiente de arrasto das bolhas, quando o número de Eötvos variasse de 13 a 40, cresceria suavemente do valor calculado para bolhas elipsoidais moderadas em $E\ddot{o} = 13$ até o valor assumido para capas esféricas em $E\ddot{o} = 40$. É interessante notar que para bolhas elipsoidais, a utilização de uma correlação para o coeficiente de arrasto proporcional a $\sqrt{E\ddot{o}}$ torna a velocidade terminal da bolha independente do tamanho da partícula, fato comprovado experimentalmente por outros autores [17]. A velocidade terminal resultante dessa correlação é :

$$u = 1.53 \cdot \sqrt[4]{\frac{\Delta\rho \cdot g \cdot \sigma}{\rho_L^2}} \quad (2.8)$$

Para as capas esféricas a velocidade terminal é dada por:

$$u = 0.715 \cdot \sqrt{\frac{\Delta\rho \cdot g \cdot d_e}{\rho_L}} \quad (2.9)$$

O efeito da parede na velocidade terminal foi também objeto de estudo e uma equação semi-empírica foi proposta correlacionando a velocidade terminal em meio restrito com a velocidade terminal em meio infinito. O autor observou um diâmetro de tubo crítico, abaixo do qual as bolhas cilíndricas são incapazes de se movimentarem, correspondendo a $E\ddot{o}^D = 3.36$.

Em seu livro publicado em 1978, **Clift et al.** [5] realizaram um extraordinário trabalho de compilação, normalização e revisão crítica do estado da arte do estudo do movimento, transferência de calor e de massa de bolhas, gotas e partículas sólidas em escoamento multifásico. Destacam-se a análise das partículas fluidas e a proposta de critérios para estabelecer a transição entre as diversas geometrias assumidas por essas partículas: esféricas, elipsoidais e capas esféricas.

Em 1979, **Ishii & Zuber** [17] escreveram um artigo onde desenvolveram correlações para o coeficiente de arrasto e para a velocidade relativa de escoamento disperso de bolhas, gotas e partículas sólidas. O modelo se aplica a escoamento multiparticulado onde tanto o meio disperso quanto o contínuo são tratados através de valores médios. Foram

aplicados critérios de similaridade com o escoamento de uma partícula isolada e o conceito de viscosidade da mistura, que é função da fração volumétrica da fase dispersa. No caso de partículas fluidas, três regimes de escoamento foram previstos: o **regime viscoso**, quando as partículas teriam geometria esférica e o coeficiente de arrasto dependeria da viscosidade; o **regime distorcido**, quando o coeficiente de arrasto seria independente da viscosidade, mas aumentaria linearmente com o diâmetro equivalente da partícula até um limite máximo, quando então a partícula atingiria a condição de capa esférica, no caso das bolhas, ou se desintegraria, no caso de gotas. Esse último regime foi denominado pelos autores de **regime agitante-turbulento**. O efeito da presença de outras partículas, devido à sua resistência e à deformação do campo de escoamento, foi computado no valor do coeficiente de arrasto. Esse enfoque inviabiliza a utilização desse modelo em conjunto com a velocidade do meio alterado por esteiras de partículas, já que o mesmo efeito estaria sendo contabilizado duas vezes, como será discutido neste trabalho na seção 3.8.

Não se pode deixar de citar, em qualquer revisão de literatura sobre escoamento bifásico vertical, o artigo de **Taitel et al.** [30] que trata das transições entre os diversos padrões de escoamento, através de uma modelagem fundamentada em conceitos físicos. Esses modelos incorporam o efeito de propriedades dos fluidos e dimensões da tubulação, e assim, não possuem as limitações dos mapas de transição empíricos ou baseados em correlações. A transição bolhas/pistonado foi determinada considerando que a fração de vazio máxima do padrão bolhas era igual a 25%. Essa transição ficaria então definida por:

$$u_{LS} = 3 \cdot u_{GS} - 1.15 \cdot 4 \sqrt{\left(\frac{g \cdot \Delta\rho \cdot \sigma}{\rho_L^2} \right)} \quad (2.10)$$

e independe do diâmetro do tubo. A transição pistonado/anular se daria quando o escoamento de gás for suficiente para sustentar uma gota de líquido, equilibrando a ação da gravidade com a força de arrasto. Isso aconteceria para uma velocidade superficial de gás dada por:

$$u_{GS} = 3.1 \cdot 4 \sqrt{\left(\frac{g \cdot \Delta\rho \cdot \sigma}{\rho_G^2} \right)} \quad (2.11)$$

e também independe do diâmetro da tubulação. O padrão de escoamento agitante foi definido por Taitel como um padrão instável, que antecede a formação do padrão pistonado e só seria

observado até uma certa distância da entrada da tubulação. Esse padrão seria caracterizado por um movimento oscilante do líquido, ou seja, o comprimento do pistão entre duas bolhas cilíndricas seria menor que o valor mínimo para um comportamento estável. O comprimento de tubo L_E necessário para se estabilizar o padrão pistonado define a transição pistonado/agitante e obedeceria a seguinte equação:

$$\frac{L_E}{D} = 40.6 \cdot \left(\frac{u_{Gs} + u_{Ls}}{\sqrt{g \cdot D}} + 0.22 \right) \quad (2.12)$$

assim, para cada posição da janela de observação tem-se uma curva de transição. A última transição prevista era entre os padrões pistonado e bolhas dispersas. Esse padrão seria observado quando a turbulência do líquido fosse de tal ordem que o gás se manteria na forma de pequenas esferas, sem coalescer e formar bolhas de Taylor.

Esse modelo para determinação dos padrões de escoamento é, ainda hoje, largamente empregado na indústria do petróleo.

2.2 Modelos para o escoamento pistonado vertical

Diversos modelos têm sido apresentados na literatura, visando explicar e prever o comportamento do padrão de escoamento pistonado. A grande maioria desses modelos, no entanto, trata a fase gasosa através de parâmetros médios. Esses modelos normalmente têm sucesso na previsão de gradiente de pressão e velocidades das fases, mas não estão preparados para prever o comprimento médio das bolhas de Taylor e dos pistões de líquido e, muito menos, para estimar o padrão de distribuição dessas variáveis. Apenas recentemente, esforços foram realizados no sentido de tratar o escoamento pistonado de forma estatística.

Em 1961, **Griffith & Wallis** [14] realizaram a primeira tentativa de esboçar um modelo para o escoamento pistonado plenamente desenvolvido em tubo vertical de seção circular. Para a determinação do comprimento de bolha foi proposta uma correlação baseada no comprimento do pistão de líquido, no diâmetro do tubo, nas vazões das fases e na velocidade de ascensão da bolha de Taylor. Tal correlação possui dois coeficientes ajustados empiricamente. O conhecimento do comprimento do pistão de líquido é necessário para se ter o comprimento da bolha. Um gráfico levantado experimentalmente correlaciona o

comprimento do pistão com o diâmetro do tubo. Os autores tentaram correlacionar a velocidade de ascensão da bolha através de uma equação da forma:

$$u = C_1 \cdot C_2 \cdot \sqrt{g \cdot D} \quad (2.13)$$

onde C_1 seria o coeficiente para ascensão em fluido estagnado e C_2 se correlacionaria com a velocidade do fluido. Infelizmente, não conseguiram uma correlação razoável para C_2 em função do número de Reynolds do líquido, devido ao grande espalhamento dos pontos experimentais obtidos. Os resultados mais interessantes obtidos por Griffith & Wallis foram para o gradiente de pressão. A observação dessa variável permitiu-lhes estimar a flutuação desse valor, ou seja, estimar a variação máxima do gradiente de pressão e o período dessa flutuação. O gradiente médio de pressão foi estimado em:

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = \rho_M \cdot g + \frac{4 \cdot \tau_{WL}}{D} \quad (2.14)$$

onde ρ_M é a densidade média do escoamento e τ_{WL} é a tensão cizalhante provocada pela fricção com a parede. Este atrito com a parede deve ser calculado avaliando a tensão cizalhante do escoamento monofásico plenamente desenvolvido do líquido à velocidade da mistura e multiplicando este valor pela razão entre a vazão volumétrica do líquido e a total. O grande mérito desse trabalho foi ter sido o primeiro modelo para o escoamento pistonado, com determinação de gradiente de pressão. É interessante notar que utilizou-se, ainda que implicitamente, o conceito de célula unitária, que veio a se tornar tão popular mais tarde.

Em 1969, **Wallis** [34] introduziu o conceito de célula unitária [11] para o cálculo do gradiente de pressão em escoamento pistonado. A proposta baseou-se no modelo de deslizamento simplificado para regime permanente em escoamento plenamente desenvolvido.

Em 1983, **Fernandes et al.** [12] publicaram um trabalho onde um modelo hidrodinâmico foi descrito a partir do processo físico que os autores imaginaram ocorrer no escoamento pistonado gás-líquido em tubo vertical, plenamente desenvolvido e em regime permanente. O modelo pode ser usado para determinar diversos parâmetros do escoamento pistonado turbulento, tais como: a velocidade média de gás e de líquido na região do pistão de líquido e na região da bolha de Taylor, a razão entre o comprimento dessas duas regiões, a fração de vazio total e em cada região, a frequência de passagem das bolhas e o gradiente de

pressão. Esse artigo é um marco na história do estudo do escoamento pistonado vertical, pois foi o primeiro modelo abrangente desse padrão. Fernandes baseou-se no conceito de células unitárias, que é a representação do escoamento por uma unidade composta de um pistão de líquido e uma bolha de Taylor (veja figura 2.1). Vários modelos que se seguiram adotaram esse conceito e são, na verdade, meras variantes deste.

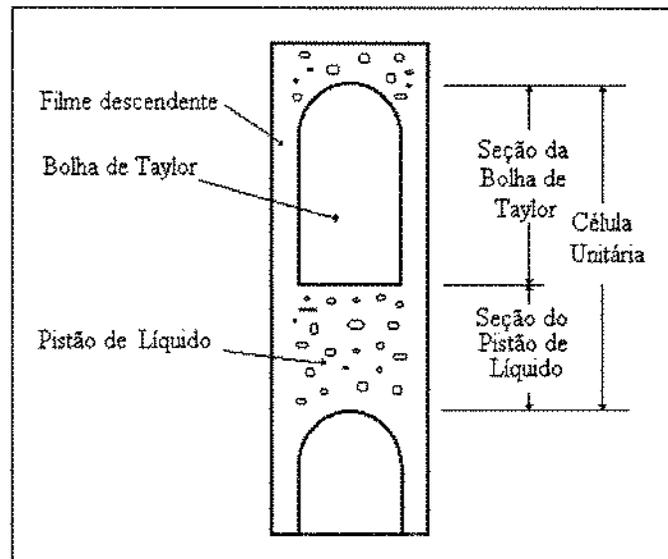


Figura 2.1 - Célula unitária do modelo de Fernandes [12]

O modelo básico é composto de oito equações algébricas e onze variáveis. Assumindo conhecidas as velocidades superficiais do líquido e do gás restam nove incógnitas: as frações de vazio total, na seção da bolha de Taylor (α_{BT}) e na seção do pistão de líquido (α_{PL}); a razão entre o comprimento da bolha de Taylor e o comprimento total da célula (β); as velocidades de cada fase em cada seção e a velocidade de translação da bolha de Taylor. Quatro das equações resultam do balanço de massa de cada fase, na célula e relativamente a um referencial fixo na bolha. Uma das equações correlaciona a fração de vazio total com α_{BT} , α_{PL} e β . Duas equações constitutivas permitem calcular a velocidade de translação da bolha de Taylor e a velocidade da fase gasosa na seção do pistão de líquido. Uma última equação correlaciona a velocidade do filme líquido e α_{BT} . Tem-se então oito equações e nove incógnitas. Os autores sugerem duas opções: assumir que a fração de vazio no pistão de líquido é conhecida ou solucionar um conjunto adicional de nove equações e oito incógnitas que, juntamente com as equações do modelo básico, formam um sistema de dezessete equações e dezessete incógnitas. Aparentemente, o modelo simplificado apresenta resultados tão bons quanto o completo, quando se adota para α_{PL} o valor da fração de vazio da transição

entre os padrões bolha e pistonado que, de acordo com Taitel et al. [30], ocorre em $\alpha_{PL} = 0.25$. Outras equações para a determinação da frequência de passagem das bolhas e para o cálculo do gradiente de pressão são propostas.

Em 1987, **Sylvester** [29] publicou seu trabalho propondo alterações no modelo de Fernandes. O autor utilizou as mesmas equações exceto a que determina a velocidade de translação da bolha de Taylor. Fernandes utilizou a equação de Nicklin - eq. (2.3) - com coeficiente $C_0 = 1.29$ enquanto Sylvester adotou o coeficiente original ($C_0 = 1.20$). O fechamento do sistema foi obtido através de uma correlação empírica, baseada nos dados de Fernandes, para a fração de vazio no pistão de líquido:

$$\alpha_{PL} = \frac{u_{GS}}{0.425 + 2.65 \cdot (u_{GS} + u_{LS})} \quad (2.15)$$

Orell & Rembrand [26], em 1986, propuseram um modelo, resultado de algumas simplificações do de Fernandes, considerando não haver escorregamento entre as bolhas e a fase contínua no pistão de líquido e igualando a velocidade de translação da bolha de Taylor com a velocidade de gás na região da bolha. O sistema ficou reduzido a seis equações e sete incógnitas e os autores sugeriram um modelo para a determinação da fração de vazio no pistão (α_{PL}). A comparação com resultados experimentais de outros autores mostrou ótimo desempenho na previsão dos parâmetros de escoamento, exceto justamente para α_{PL} .

Em 1990, **Taitel & Barnea** [31] publicaram uma abrangente revisão do escoamento pistonado e propuseram um modelo para regime permanente. Ainda baseado no conceito de célula unitária, o modelo proposto é, no entanto, mais completo que o de Fernandes. Esse modelo aplica-se tanto para escoamento vertical quanto para horizontal e inclinado, e apresenta como contribuição maior um tratamento cuidadoso do perfil das bolhas de Taylor. Os balanços de massa levaram em conta a variação na espessura do filme líquido com a posição, ao contrário dos modelos anteriores. Esse rigor foi penalizado com a necessidade de se resolver numericamente equações diferenciais, enquanto os outros modelos se restringiam a resolver um conjunto de equações algébricas. A influência do nariz da bolha no cálculo do gradiente de pressão, objeto de um estudo de **Barnea** [2] em 1990, certamente motivou a elaboração desse artigo.

Fabre & Liné [11] apresentaram um trabalho em 1992 propondo uma nova linha de solução do escoamento pistonado, através de um *modelo de células estatísticas*. Esse modelo utiliza a média estatística de um conjunto de equações não-lineares - as equações de conservação - e trata as propriedades físicas através de médias ponderadas em cada padrão de escoamento: disperso, na seção do pistão de líquido; ou separado, na seção da bolha de Taylor. A ponderação das propriedades foi efetuada através de uma função $\chi(x,t)$ característica de intermitência, que assume o valor 0 em um padrão e 1 no outro (adotou-se arbitrariamente o valor 1 para escoamento separado). As equações ponderadas envolvem a probabilidade de ocorrência de cada padrão. A solução do problema, no entanto, dependia de algumas equações de fechamento: para o movimento das grandes bolhas, para a distribuição das fases nos padrões disperso e separado, e para a determinação do comprimento característico de cada padrão. Cada uma dessas questões foi objeto de uma vasta revisão bibliográfica e de uma análise crítica das limitações dos modelos existentes.

2.3 O enfoque Lagrangeano-Euleriano

Em 1991, **Trapp & Mortensen** [32] apresentaram um modelo de escoamento bifásico com partículas discretas em meio contínuo. Em 1992 [24] e 1993 [33], novos artigos foram escritos pelos mesmos autores detalhando esse modelo. Foi feito um acoplamento entre uma descrição Euleriana da fase contínua e a representação Lagrangeana da fase discreta. Trata-se de uma abordagem intermediária entre o modelo de dois fluidos, totalmente baseado em valores médios, e a descrição local instantânea de modelagem impraticável [33]. Para o caso particular de escoamento isotérmico sem troca de massa, duas equações (balanço de massa e de quantidade de movimento) foram resolvidas para cada fase, sendo que as variáveis da fase dispersa são função apenas do tempo. Uma quinta equação permitiu calcular a posição da partícula no referencial Euleriano, baseada na sua velocidade e posição anterior. O acoplamento entre as equações das duas fases foi realizado, no balanço de massa, admitindo que o volume ocupado pelas partículas não era disponível à fase contínua; e nas equações de quantidade de movimento, considerando que a força interfacial sobre o líquido era igual à

soma das forças de arrasto e de massa virtual de cada partícula presente no volume de controle das equações do meio contínuo.

O primeiro acoplamento se mostrou extremamente problemático devido à natureza discreta da soma dos volumes das partículas, contrastando com a necessidade de uma função de natureza suave para a fração de líquido (α_l). A adoção de uma função com variações bruscas para $\alpha_l(z,t)$ provocava, durante a solução da equação de balanço de massa da fase contínua, fortes oscilações na velocidade do líquido. Essas oscilações, que ocorrem fisicamente de forma localizada, no processo de discretização eram estendidas a toda uma célula com resultados desastrosos. Os autores propuseram uma suavização espacial dessa função, adotando para cada partícula o seu volume real e uma altura suavizada igual ao comprimento da célula de discretização. Esse artifício permitiu que se obtivesse uma solução suave para a fase contínua, mas tal solução talvez não possua mais nenhum compromisso com a realidade. Além disso, essa suavização só atinge seus objetivos quando a altura real das partículas for bem menor que o comprimento da célula de discretização das equações da fase contínua.

O modelo foi validado com dados de laboratório obtidos com velocidades superficiais da fase discreta extremamente baixas, da ordem de 0.05 m/s. Os parâmetros comparados limitaram-se a propriedades da fase dispersa, de modo que a validade do processo de suavização não pôde ser avaliada.

3. Descrição do modelo proposto

A modelagem desenvolvida neste trabalho, baseada na de **Trapp & Mortensen** [24] [32] [33], caracteriza a fase dispersa através de uma descrição Lagrangeana, enquanto a fase contínua é descrita através de um enfoque Euleriano.

As seguintes hipóteses básicas foram adotadas:

- Escoamento isotérmico;
- Não há troca de massas entre as fases líquida e gasosa;
- Não há quebra de bolhas devido à turbulência do líquido;
- As bolhas coalescem sempre que colidem;
- A pressão é conhecida na saída da tubulação (condição de contorno);
- As vazões são conhecidas na entrada da tubulação (condição de contorno).

Ambas as fases podem ser compressíveis e neste caso, a fase gasosa é considerada ideal e a fase líquida deve ter uma compressibilidade constante.

Foram desenvolvidos modelos que descrevem as bolhas quanto à forma, arrasto, coalescência e esteira provocada. O líquido é descrito através de propriedades médias em cada célula de discretização.

As bolhas ocupam um espaço não disponível à fase contínua. O deslocamento de bolhas cilíndricas provoca uma transferência contínua de massa líquida entre o pistão acima da bolha e o pistão de líquido abaixo dela, através do filme descendente localizado entre a bolha e a parede do tubo. O volume total dos pistões de líquido de uma célula de discretização é o volume dessa célula subtraído do volume ocupado pelas bolhas cilíndricas e seus respectivos filmes de líquido.

O modelo proposto é unidimensional, já que as equações diferenciais utilizadas são unidimensionais. No entanto, os modelos de coalescência e de esteira adotados requerem que as partículas sejam localizadas no espaço através de coordenadas tridimensionais (z, r e θ). Deve-se notar que as coordenadas horizontais não se alteram durante o movimento da partícula, exceto quando houver coalescência.

Serão utilizados indistintamente os termos "*fase discreta*" e "*partículas*" para denotar as bolhas de gás em geral, "*bolhas cilíndricas*" para as bolhas de Taylor e "*bolhas*

não-cilíndricas" para as bolhas dispersas nos pistões de líquido. Os termos "*fase contínua*" e "*fluido*" serão utilizados para a fase líquida dos pistões de líquido e o termo "*filme*" para a fase líquida ao redor das bolhas cilíndricas. Os pistões de líquido serão denominados simplesmente "*pistão*". Note que foram definidas três regiões distintas: a região da bolha de Taylor, a do filme líquido e a do pistão.

O esquema de solução resolve as equações das fases consecutivamente:

- São determinadas as novas posições e velocidades de todas as partículas, baseadas nas propriedades da fase contínua do passo de tempo anterior;
- São resolvidas as equações diferenciais parciais que caracterizam a fase contínua, determinando-se assim as suas velocidades e pressões;
- Estas pressões são utilizadas para atualizar as densidades e os volumes das bolhas, completando assim o cálculo para um intervalo de tempo.

Note que ao se resolver uma fase, são adotadas as propriedades da outra fase recém atualizadas.

3.1 Equações para a fase dispersa

A fase dispersa é tratada, como já mencionado, através de um enfoque Lagrangeano. Cada bolha é acompanhada individualmente por três equações: a da continuidade, a da quantidade de movimento e a da posição.

Outros modelos foram desenvolvidos para caracterizar a forma, o coeficiente de arrasto e a velocidade da esteira.

A equação da continuidade para a fase dispersa pode ser escrita:

$$\frac{d(\rho_i \cdot V_i)}{dt} = -\Gamma_i \quad (3.1)$$

onde Γ_i é a taxa de transferência de massa da bolha i para a fase líquida medida em massa por unidade de tempo; ρ_i e V_i são a densidade e o volume desta bolha i .

O modelo teórico admite troca de massa entre fases. No entanto, o modelo computacional desenvolvido não incorporou essa facilidade, considerando $\Gamma_i = 0$.

A equação da quantidade de movimento para a fase dispersa é:

$$\rho_i \cdot V_i \cdot \frac{du_i}{dt} = -\rho_i \cdot V_i \cdot g - V_i \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_i - F_i \quad (3.2)$$

onde F_i é a força que a bolha i exerce sobre a fase contínua, $\rho_i \cdot V_i \cdot g$ é a força gravitacional agindo sobre a bolha e $(\partial P/\partial z)_i$ é o gradiente de pressão no local da bolha i .

A força F_i pode ser decomposta em duas parcelas:

$$F_i = F_{Di} + F_{Ai} \quad (3.3)$$

onde F_{Di} é a força devido ao arrasto interfacial,

$$F_{Di} = 0.5 \cdot \rho_L \cdot C_{Di} \cdot A_{fi} \cdot |u_i - u_T| \cdot (u_i - u_T) \quad (3.4)$$

e ρ_L é a densidade do líquido; C_{Di} é o coeficiente de arrasto da bolha i ; u_i é a velocidade da bolha i e u_T é a velocidade local da mistura gás-líquido na posição da bolha, definida na seção 3.8. A_{fi} é a área frontal equivalente da bolha i definida por:

$$A_{fi} = \pi \cdot d_e^2 / 4 \quad (3.5)$$

onde d_e é o diâmetro equivalente da bolha.

F_{Ai} é a força de massa virtual, termo necessariamente presente no transiente e que considera a variação do volume de líquido influenciado pelo arrasto devido à variação da velocidade relativa da bolha i na mistura. Esta é a única força considerada devido ao transiente. Forças como o termo histórico de Basset, forças devido a oscilações da partícula e outras foram desprezadas.

$$F_{Ai} = C_a \cdot \rho_L \cdot V_i \cdot (du_i / dt - a_M) \quad (3.6)$$

e C_a é o coeficiente de massa adicionada e a_M é a aceleração da mistura gás-líquido.

O coeficiente de massa adicionada foi assumido igual a 0.5. [24] [16]

Substituindo (3.4) e (3.6) em (3.2), tem-se:

$$\left(\rho_i + C_a \cdot \rho_L \right) \cdot \frac{du_i}{dt} = -\rho_i \cdot g + C_a \cdot \rho_L \cdot a_M - \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_i - \frac{\rho_L \cdot C_{Di} \cdot A_{fi}}{2 \cdot V_i} \cdot |u_{Ri}| \cdot u_{Ri} \quad (3.7)$$

onde u_{Ri} é a velocidade relativa da bolha i , definida por:

$$u_{Ri} = u_i - u_T \quad (3.8)$$

O tratamento Lagrangeano torna as variáveis das partículas função unicamente do tempo. Assumindo o coeficiente de arrasto da partícula e as variáveis da fase contínua constantes durante o intervalo de integração, pode-se resolver analiticamente a equação (3.7) para a velocidade relativa $\mathbf{u}_{Ri}(t)$, eliminando-se assim os erros inerentes à solução numérica.

Após calcular a velocidade da bolha i , pode-se calcular analiticamente sua nova posição através da equação:

$$\frac{dz_i}{dt} = u_i \quad (3.9)$$

3.2 Equações para a fase contínua

A fase contínua é tratada com um enfoque Euleriano. Essas equações são resolvidas, como será visto, através de discretização com malhas defasadas, ou seja, as células onde há conservação de massa são deslocadas das células onde é efetuado o balanço da quantidade de movimento.

A equação de balanço de massa para a fase contínua poderá ser escrita:

$$\frac{\partial(\alpha_L \cdot \rho_L \cdot V_C)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_L \cdot \rho_L \cdot V_C \cdot u_L)}{\partial z} = \sum_i (\eta_{ic} \cdot \Gamma_i) \quad (3.10)$$

onde α_L é a fração de líquido no pistão; ρ_L é a densidade do líquido; u_L é a velocidade do líquido; $V_C(t)$ é o volume dos pistões de líquido presentes no volume de controle V ; $\eta_{ic}(t)$ é a fração volumétrica da bolha i no volume V e assume o valor 1 quando a bolha estiver totalmente dentro desse volume, 0 quando estiver totalmente fora, e um valor fracionário quando estiver atravessando a fronteira desse volume. O somatório engloba a transferência de massa para todas as bolhas presentes em V .

A equação da quantidade de movimento para a fase contínua, desprezando o termo devido à transferência de massa entre as fases, é:

$$\alpha_L \cdot \rho_L \cdot V_C \cdot \frac{\partial u_L}{\partial t} + \alpha_L \cdot \rho_L \cdot V_C \cdot u_L \cdot \frac{\partial u_L}{\partial z} = -\alpha_L \cdot \rho_L \cdot V_C \cdot g - F_{WL} - \alpha_L \cdot V_C \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + F_{BL} \quad (3.11)$$

onde F_{BL} é a resultante das forças que as partículas exercem sobre a fase contínua e as forças de difusão viscosa e turbulenta foram substituídas por um modelo de atrito com a parede do tubo (F_{WL}) definido por:

$$F_{WL} = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot f_{at} \cdot S_L \cdot |u_L| \cdot u_L \quad (3.12)$$

sendo S_L a área do contato líquido-tubo e f_{at} o fator de atrito entre o líquido e a parede do tubo.

3.3 Solução analítica das equações da fase dispersa

A equação (3.7) pode ser rearranjada, lembrando que $a_M = du_T / dt$:

$$\begin{aligned} (\rho_i + C_a \cdot \rho_L) \cdot \left(\frac{du_i}{dt} - \frac{du_T}{dt} \right) = & -\rho_i \cdot g - \rho_i \cdot a_M - \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_i - \\ & - \frac{\rho_L \cdot C_{Di} \cdot A_{fi}}{2 \cdot V_i} \cdot |u_{Ri}| \cdot u_{Ri} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\text{onde } du_T / dt = (\partial u_T / \partial t) + u_i \cdot (\partial u_T / \partial z) \quad (3.14)$$

Usando u_{Ri} como definido em (3.8) e fazendo:

$$A = \rho_i + C_a \cdot \rho_L \quad (3.15)$$

$$B = -\rho_i \cdot (g + a_M) - \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_i \quad (3.16)$$

$$C = \frac{\rho_L \cdot C_{Di} \cdot A_{fi}}{2 \cdot V_i} \quad (3.17)$$

pode-se reescrever a equação (3.13) :

$$A \cdot \frac{du_{Ri}}{dt} = -C \cdot |u_{Ri}| \cdot u_{Ri} + B \quad (3.18)$$

Existe solução analítica para esta equação quando o intervalo de tempo de integração for pequeno o suficiente para que se possa assumir os coeficientes **A**, **B** e **C**, definidos acima, constantes. Com isso, a equação (3.18) transforma-se numa equação diferencial ordinária de $u_{Ri}(t)$.

Note que a nova velocidade da bolha - u_i - será determinada pela equação (3.8), utilizando o valor de u_T estimado para o novo passo de tempo:

$$u_T^{N+1} \cong u_T^N + a_M^N \cdot \Delta t \quad (3.19)$$

A equação (3.9) que define a posição da partícula pode também ser resolvida analiticamente.

A integração completa das equações (3.9) e (3.18) encontra-se no **anexo A**. Os resultados para os quatro casos possíveis, já que **A** e **C** são sempre positivos, e definindo :

$$u_{\infty} = \sqrt{\frac{|B|}{C}} \quad , \quad \kappa = \frac{C}{A} \quad , \quad \omega = u_{\infty} \cdot \kappa = \frac{\sqrt{|B| \cdot C}}{A} \quad (3.20)$$

são:

Caso 1 : $B = 0$

$$u_{Ri} = \frac{u_{Ri}^0}{1 + |u_{Ri}^0| \cdot \kappa \cdot \Delta t} \quad (3.21)$$

$$\Delta z = \begin{cases} u_T \cdot \Delta t + \left(\frac{du_T}{dt} \right) \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} & , \text{para } u_{Ri}^0 = 0 \\ \frac{u_{Ri}^0}{|u_{Ri}^0|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(1 + |u_{Ri}^0| \cdot \kappa \cdot \Delta t) + u_T \cdot \Delta t + \left(\frac{du_T}{dt} \right) \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} & , \text{para } u_{Ri}^0 \neq 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

onde u_{Ri}^0 é a velocidade relativa inicial.

Caso 2 : $u_{Ri}^0 \cdot B \geq 0$ e $B \neq 0$

Este é o caso mais comum cuja solução é:

$$u_{Ri} = \frac{B}{|B|} \cdot u_{\infty} \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (3.23)$$

onde
$$\xi = \frac{u_{\infty} + |u_{Ri}^0|}{u_{\infty} - |u_{Ri}^0|} \quad (3.24)$$

$$\Delta z = \frac{B}{|B|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\left| \frac{\xi \cdot e^{\omega \cdot \Delta t} + e^{-\omega \cdot \Delta t}}{\xi + 1} \right| \right) + u_T \cdot \Delta t + \left(\frac{du_T}{dt} \right) \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (3.25)$$

Caso 3: $u_{Ri}^0 \cdot B < 0$, $\Delta t \leq \Delta t^0$

onde Δt^0 é o intervalo de tempo necessário para anular a velocidade relativa u_{Ri} , definido por:

$$\Delta t^0 = \frac{1}{\omega} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{|u_{Ri}^0|}{u_\infty} \right) \quad (3.26)$$

A solução é:

$$u_{Ri} = -\frac{B}{|B|} \cdot u_\infty \cdot \left[\frac{|u_{Ri}^0| - u_\infty \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t)}{u_\infty + |u_{Ri}^0| \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t)} \right] \quad (3.27)$$

$$\Delta z = -\frac{B}{|B|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\frac{|u_{Ri}^0|}{u_\infty} \cdot \sec(\omega \cdot \Delta t) + \cos(\omega \cdot \Delta t) \right) + u_T \cdot \Delta t + \left(\frac{du_T}{dt} \right) \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (3.28)$$

A figura 3.1 mostra a variação de $(u_{Ri} / u_\infty) \times (\omega \cdot \Delta t)$ para valores positivos de B .

Cada curva deste gráfico representa um valor inicial ($\omega \cdot \Delta t = 0$) de u_{Ri} / u_∞ .

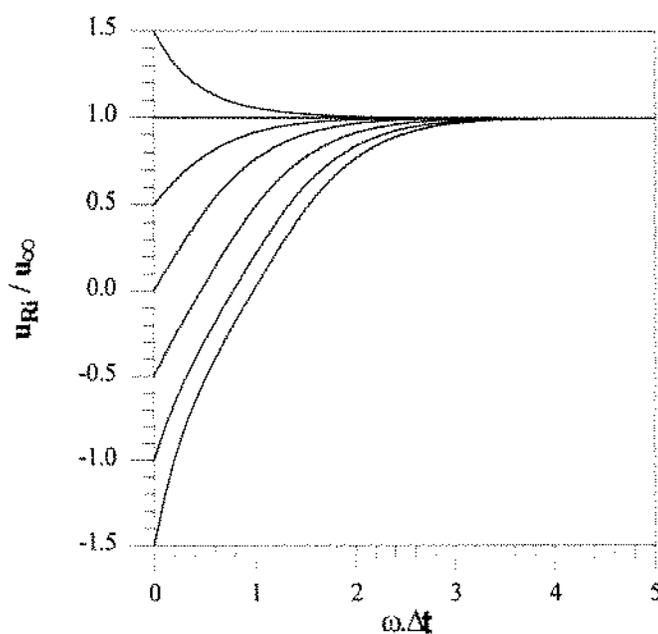


Figura 3.1: Gráfico $(u_{Ri} / u_\infty) \times (\omega \cdot \Delta t)$ para $B > 0$

Caso 4: $u_{Ri}^0 \cdot B < 0, \Delta t > \Delta t^0$

$$u_{Ri} = \frac{B}{|B|} \cdot u_\infty \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (3.29)$$

onde $\xi = e^{-2\omega \cdot \Delta t^0}$ (3.30)

$$\Delta z = \frac{B}{|B|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\frac{u_\infty \cdot \cosh(\omega \cdot \Delta t - \omega \cdot \Delta t^0)}{\sqrt{(u_{Ri}^0)^2 + (u_\infty)^2}} \right) + u_T \cdot \Delta t + \left(\frac{du_T}{dt} \right) \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (3.31)$$

A variável **B** representa o balanço entre o empuxo e a força gravitacional, por unidade de volume. Este valor sendo negativo indica que a partícula terá uma velocidade relativa de equilíbrio negativa, caso típico de sólidos em líquido. No caso de escoamento de gás em líquido, existe uma possibilidade matemática de, na solução discretizada do líquido, esse ser desacelerado de tal forma que **B** venha a ser negativo. Como foi dito, neste caso a velocidade de equilíbrio será também negativa.

O gráfico da figura 3.2 mostra a variação de $(u_{Ri}/u_{\infty}) \times (\omega \cdot \Delta t)$, para $u_{Ri}^0/u_{\infty} = 1/2$ e **B** positivo e negativo.

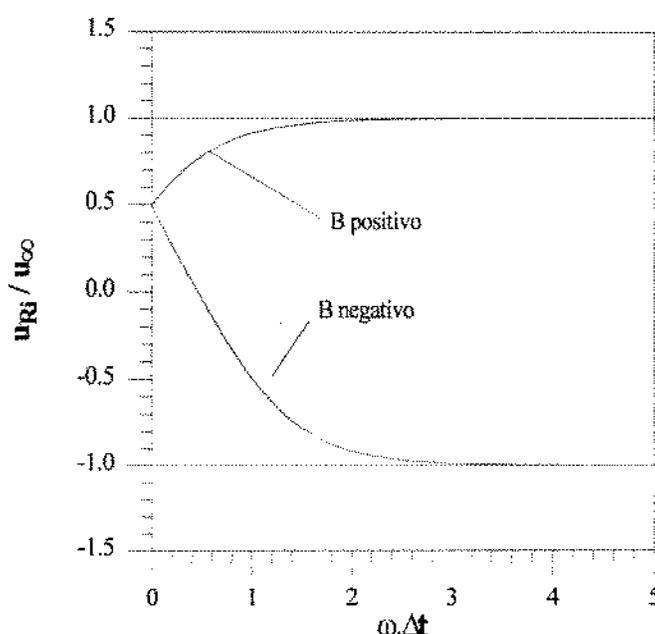


Figura 3.2 : Gráfico $(u_{Ri} / u_{\infty}) \times (\omega \cdot \Delta t)$ para $u_{Ri}^0 / u_{\infty} = 1/2$

Utilizando a equação (3.8) e substituindo u_T^{N+1} pela equação (3.19) tem-se para todos os casos:

$$u_i^{N+1} = u_{Ri}^{N+1} + u_T^N + \left(\frac{du_T^N}{dt} \right) \cdot \Delta t \quad (3.32)$$

$$z_i^{N+1} = z_i^N + \Delta z \quad (3.33)$$

É interessante notar que, de acordo com a figura 3.1, para valores iniciais de u_{Ri}^0 entre $\pm 1.5 u_{\infty}$, a velocidade de equilíbrio é alcançada em $\omega \cdot \Delta t \cong 4$. Para ar-água e com o líquido em regime permanente, ω assume valores entre 45 e 90 s^{-1} , o que significa que as partículas atingem a velocidade de equilíbrio num intervalo de tempo da ordem de 0.05 a 0.10 segundos.

3.4 Discretização espacial das equações da fase contínua

As equações de conservação da fase contínua, (3.10) e (3.11), são resolvidas através de um esquema de discretização semi-implícito de malhas defasadas, conforme proposto em [24],[32] e [33].

As células onde a massa se conserva serão identificadas pelo índice K e têm pressão e densidades constantes. As células onde o balanço de quantidade de movimento é efetuado, identificadas pelo índice J , possuem velocidade constante, conforme o esquema da figura 3.3.

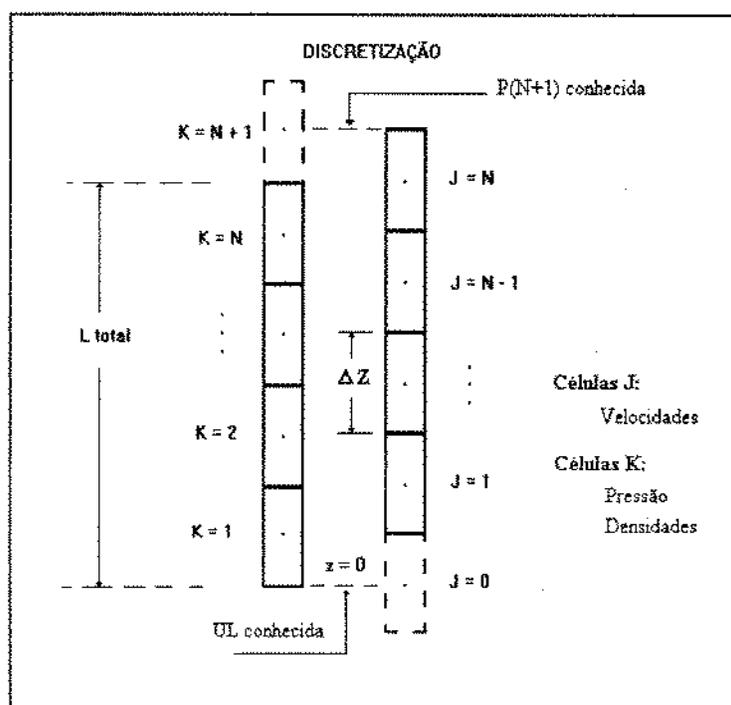


Figura 3.3 - Esquema de discretização adotado

A discretização da equação de conservação da massa (3.10) será realizada em cada célula K . A primeira diferencial desta equação pode ser expandida, lembrando que:

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} = \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial P} \right)_T \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial T} \right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = C_L \cdot \rho_L \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) \quad (3.34)$$

para escoamento isotérmico ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) onde a compressibilidade do líquido, assumida constante, é definida por:

$$C_L = \frac{1}{\rho_L} \cdot \left(\frac{\partial \rho_L}{\partial P} \right)_T \quad (3.35)$$

O volume dos pistões de líquido (V_{CK}) presentes em uma célula K é o volume dessa célula (V_K) subtraído da soma dos volumes das bolhas de Taylor e seus respectivos filmes presentes em K , ou seja:

$$V_{CK} = V_K - \sum_{BC} [\eta_{iK}(t) \cdot H_i(t) \cdot A] \quad (3.36)$$

onde η_{iK} é a fração volumétrica da bolha i na célula K ; H_i é a altura da bolha i , A é a área da seção da tubulação e o somatório é de todas as bolhas cilíndricas presentes em K . Pode-se então calcular a variação temporal de V_{CK} :

$$\frac{\partial V_{CK}}{\partial t} = -A \cdot \sum_{BC} \left[\eta_{iK} \cdot \frac{dH_i}{dt} + H_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] = - \sum_{BC} \left[\frac{\eta_{iK}}{(1-\alpha_F)} \cdot \frac{dV_i}{dt} + A \cdot H_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] \quad (3.37)$$

onde α_F é a razão entre a área do filme líquido e a área do tubo na região da bolha de Taylor com espessura de filme constante.

De modo análogo pode-se definir a variação da fração de líquido do pistão com o tempo a partir de:

$$\alpha_{LK} = 1 - \alpha_{CK} = 1 - \frac{1}{V_{CK}} \cdot \sum_{NC} [\eta_{iK}(t) \cdot V_i(t)] \quad (3.38)$$

onde o somatório agora envolve apenas as bolhas não-cilíndricas presentes na célula K . Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_{LK}}{\partial t} &= -\frac{1}{V_{CK}} \cdot \sum_{NC} \left[\eta_{iK} \cdot \frac{dV_i}{dt} + V_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] + \frac{1}{V_{CK}^2} \cdot \sum_{NC} [\eta_{iK} \cdot V_i] \cdot \frac{\partial V_{CK}}{\partial t} = \\ &= -\frac{1}{V_{CK}} \cdot \sum_{NC} \left[\eta_{iK} \cdot \frac{dV_i}{dt} + V_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] - \\ &\quad - \frac{(1-\alpha_{LK})}{V_{CK}} \cdot \sum_{BC} \left[\frac{\eta_{iK}}{(1-\alpha_F)} \cdot \frac{dV_i}{dt} + A \cdot H_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\alpha_{LK} \cdot \rho_{LK} \cdot V_{CK})}{\partial t} &= \rho_{LK} \cdot V_{CK} \cdot \frac{\partial \alpha_{LK}}{\partial t} + \alpha_{LK} \cdot V_{CK} \cdot \frac{\partial \rho_{LK}}{\partial t} + \alpha_{LK} \cdot \rho_{LK} \cdot \frac{\partial V_{CK}}{\partial t} = \\ &= \alpha_{LK} \cdot V_{CK} \cdot \rho_{LK} \cdot C_L \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - \rho_{LK} \cdot \left\{ \sum_{NC} \left[\eta_{iK} \cdot \frac{dV_i}{dt} + V_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{BC} \left[\frac{\eta_{iK}}{(1-\alpha_F)} \cdot \frac{dV_i}{dt} + A \cdot H_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

O gradiente de fluxo mássico pode ser discretizado, lembrando que esse termo representa a diferença entre a vazão mássica que sai e a que entra no volume de controle:

$$\frac{\partial(\alpha_L \cdot \rho_L \cdot V_C \cdot u_L)}{\partial z} = A \cdot (\alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot u_{LJ} - \alpha_{LJ-1} \cdot \rho_{LJ-1} \cdot u_{LJ-1}) \quad (3.41)$$

onde α_{LJ} é a fração de líquido média dos pistões de líquido presentes na célula **J**; ρ_{LJ} é a densidade média do líquido na célula **J**; **A** é a área da seção do tubo e u_{LJ} é a velocidade média do líquido na célula **J**.

Para uma melhor modelagem do fenômeno, deve-se representar a transferência de massa (\dot{m}) que ocorre continuamente entre os filmes e os pistões de líquido, dentro de um volume de controle. Esta transferência pode ser desmembrada em duas parcelas: a primeira representa o balanço do fluxo de massa entre filmes e pistões considerando os filmes com volume constante, que só será diferente de zero quando bolhas de Taylor atravessarem a fronteira do volume de controle. Neste caso, assumiu-se a hipótese que o espaço deixado na célula de onde a bolha e seu filme saem será preenchido por uma massa de líquido correspondente ao volume de líquido expulso da célula na qual a bolha e seu filme entram. Assim, caso haja deslocamento de uma bolha de Taylor por uma fronteira - um fenômeno localizado - também haverá uma transferência localizada de massa líquida no sentido inverso ao deslocamento dessa bolha. O saldo desta transferência de massa em um volume de controle é dado por:

$$\dot{m}_1 = -\rho_{LK} \cdot \sum_{BC} \left[A \cdot H_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] \quad (3.42)$$

A segunda parcela representa a massa líquida transferida entre filmes e pistões de líquido adjacentes quando as bolhas cilíndricas variam de altura devido a oscilação na pressão no local onde se encontram. O saldo dessa transferência de massa em um volume de controle é dado por:

$$\dot{m}_2 = -\sum_{BC} \eta_{iK} \cdot A_F \cdot \frac{dH_i}{dt} = -\sum_{BC} \eta_{iK} \cdot \frac{\alpha_F}{(1-\alpha_F)} \cdot \frac{dV_i}{dt} \quad (3.43)$$

onde A_F é a área do filme de líquido.

Pode-se então escrever a equação de balanço de massa da fase contínua discretizada no espaço:

$$\alpha_{LK} \cdot \rho_{LK} \cdot V_{CK} \cdot C_L \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - \rho_{LK} \cdot \left\{ \sum_{NC} \left[\eta_{iK} \cdot \frac{dV_i}{dt} + V_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] + \sum_{BC} \left[\eta_{iK} \cdot \frac{dV_i}{dt} \right] \right\} + A \cdot [\alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot u_{LJ} - \alpha_{LJ-1} \cdot \rho_{LJ-1} \cdot u_{LJ-1}] = \sum_i^{em K} \eta_{iK} \cdot \Gamma_i \quad (3.44)$$

Os valores de densidade não estão definidos nas fronteiras da célula **K**, conforme requerido pelo termo de gradiente de (3.44). Esses valores serão assumidos iguais aos respectivos valores à montante.

A equação de balanço da quantidade de movimento (3.11) será discretizada para uma célula **J**, observando-se que o termo convectivo pode ser escrito:

$$\alpha_L \cdot \rho_L \cdot V_C \cdot u_L \cdot \frac{\partial u_L}{\partial z} = \alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot A \cdot u_{LJ} \cdot (u_{LJ} - u_{LJ-1}) \quad (3.45)$$

Assim:

$$\alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot V_{CJ} \cdot \frac{\partial u_{LJ}}{\partial t} + \alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot A \cdot u_{LJ} \cdot (u_{LJ} - u_{LJ-1}) = -\alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot V_{CJ} \cdot g - \alpha_{LJ} \cdot A \cdot (P_{K+1} - P_K) - \frac{1}{2} \cdot f_{at} \cdot \rho_{LJ} \cdot S_{LJ} \cdot |u_{LJ}| \cdot u_{LJ} + F_{BJ} \quad (3.46)$$

onde F_{BJ} é a soma das forças exercidas por todas as partículas sobre a fase contínua existente na célula **J**.

Dividindo a equação (3.46) por $(\alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot V_{CJ})$ chega-se à forma discretizada no espaço da equação de balanço da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial u_{LJ}}{\partial t} + u_{LJ} \cdot \frac{u_{LJ} - u_{LJ-1}}{\delta z} = -g - \frac{1}{\rho_{LJ}} \cdot \frac{P_{K+1} - P_K}{\delta z} - \frac{2 \cdot f_{at}}{\alpha_{LJ} \cdot D} \cdot |u_{LJ}| \cdot u_{LJ} + \frac{F_{BJ}}{\alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ} \cdot V_{CJ}} \quad (3.47)$$

onde δz é a soma dos comprimentos dos pistões de líquido presentes na célula **J**.

3.5 Força exercida por uma partícula sobre a fase contínua

As partículas não-cilíndricas exercem sobre o meio contínuo uma força F_i como definida em (3.3), ou seja, igual à soma das forças de arrasto e de massa virtual.

As bolhas cilíndricas, no entanto, não se encontram dispersas no pistão de líquido, mas intercaladas entre pistões adjacentes. No desenvolvimento da seção 3.4 não se considerou essa descontinuidade entre os pistões de líquido de uma célula. Na verdade, esta abordagem não apresenta problemas desde que se leve em conta corretamente a força exercida pelas bolhas de Taylor e seus respectivos filmes nos pistões que as sucedem.

Em 1988, **Barnea** [2] publicou um estudo onde mostrou haver uma variação de pressão ao longo do nariz da bolha, e que esse gradiente deveria ser levado em consideração na análise do escoamento pistonado.

Pode-se estimar esse gradiente de pressão através de uma análise em regime permanente do balanço da quantidade de movimento do gás e do filme líquido nessa região, através do modelo de fases separadas. A figura 3.4 apresenta esquematicamente uma bolha de Taylor e seu respectivo filme de líquido.

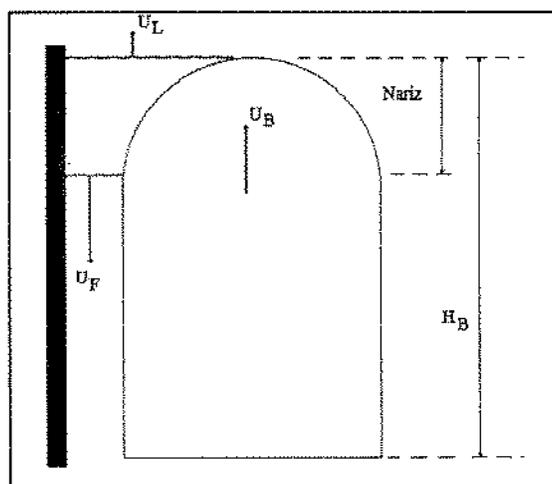


Figura 3.4 - Bolha Cilíndrica

Assim para o gás tem-se:

$$0 = -\rho_G \cdot g \cdot V_G - V_G \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) - F_{GL} \quad (3.48)$$

e para o filme:

$$\Delta QM = -\rho_L \cdot g \cdot V_L - V_L \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) + F_{GL} + F_{wL} \quad (3.49)$$

onde V_G e V_L são os volumes do gás e do filme; F_{GL} é a força que o gás exerce sobre o filme; F_{WL} é a força de atrito da parede do tubo sobre o filme e ΔQM é a variação de quantidade de movimento do filme.

Somando as duas equações e assumindo que a força de atrito da parede no filme pode ser desprezado na região do nariz da bolha, pode-se escrever:

$$\Delta QM + V \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = -(\rho_L \cdot V_L + \rho_G \cdot V_G) \cdot g \quad (3.50)$$

É interessante notar que quando uma bolha de Taylor atinge uma altura tal que se estabelece um filme de espessura constante, a quantidade de movimento desse filme e a pressão não se alteram mais. A equação (3.50) não se aplica, já que o atrito entre o filme e a parede não é mais desprezível. Note ainda que como a velocidade do filme líquido no nariz da bolha passa de um valor positivo para um negativo, a força de atrito - que já é pequena - também inverte o seu sentido, tornando o efeito resultante igual a zero para alguma altura de bolha.

A força que uma bolha cilíndrica e seu filme líquido exercem sobre o pistão que os sucedem é formada por duas parcelas: a primeira resulta do gradiente de pressão existente ao longo da altura da bolha e a segunda é devida à quantidade de movimento negativa adicionada ao pistão pela massa de líquido proveniente do filme. Assim:

$$F_i = \Delta QM + V \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) = -(\rho_L \cdot V_L + \rho_G \cdot V_G) \cdot g \quad (3.51)$$

Este resultado só é válido para bolhas cuja altura, ou espessura de filme, permita que se despreze o atrito entre o filme e a parede do tubo. Neste caso pode-se escrever:

$$F_i = -\rho_M \cdot A \cdot H_i \cdot g \quad (3.52)$$

onde ρ_M é a densidade média na região da bolha de Taylor, A é a área do tubo e H_i a altura da bolha i . Para bolhas maiores, tanto a quantidade de movimento quanto a pressão não mais se alteram. Ainda assim, a equação (3.52) é aplicável, desde que se utilize a altura máxima H_{Bmax} até a qual a equação (3.50) é válida. No modelo computacional adotou-se $H_{Bmax} = 3 \cdot D$, onde D é o diâmetro da tubulação.

Desse modo a força que as partículas exercem sobre a fase contínua (F_{BJ}) da equação (3.47) pode ser escrita:

$$F_{BJ} = \sum_{NC} \eta_{iJ} \cdot F_{iNC} + \sum_{BC} F_{iBC} \quad (3.53)$$

onde η_{iJ} é a fração volumétrica da bolha i na célula J ; F_{iNC} é definida pela equação (3.3) e F_{iBC} é definida pela equação (3.52).

3.6 Função forma da bolha e cálculo da fração de líquido

Para fins de cálculo de fração volumétrica de uma bolha em uma célula, fração de líquido nos pistões de líquido nas células e comprimento ou volume desses pistões, é necessário definir uma função que represente o perfil de bolhas e que seja independente das variáveis de escoamento tais como pressão e velocidade. Adotou-se para todas as bolhas menores presentes nos pistões de líquido (bolhas não-cilíndricas) um perfil elíptico onde a altura e o volume são iguais aos valores reais da bolha. Note que para bolhas esféricas e elipsoidais o perfil adotado será igual ao perfil verdadeiro. Para bolhas do tipo capa esférica, no entanto, haverá uma diferença entre o perfil adotado e o real. As bolhas de Taylor e seus respectivos filmes de líquido, para o cálculo do comprimento efetivo dos pistões de líquido, serão representados por um cilindro de altura igual à da bolha e seção igual à da tubulação.

Definindo H_B como a altura real de uma bolha não-cilíndrica e R_B o seu raio no centro de massa (veja figura 3.5), a superfície de uma bolha elíptica pode ser definida pela equação:

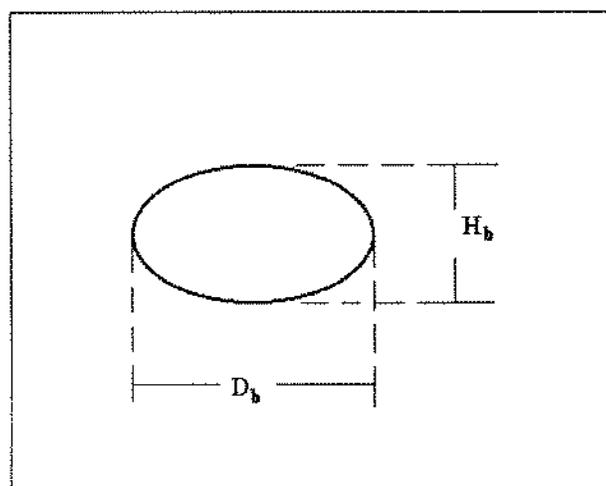


Figura 3.5 - Bolha com perfil elíptico

$$\frac{r^2}{R_B^2} + \frac{z^2}{(H_B/2)^2} = 1 \quad (3.54)$$

Seja a função $\eta_i(\mathbf{z}, t)$ definida como a proposta por **Mortensen & Trapp** [24]:

$$\eta_i(\mathbf{z}, t) = \eta_i(z - z_i(t)) = \frac{A_i(\mathbf{z}, t)}{V_i(t)} \quad (3.55)$$

onde $\mathbf{z}_i(t)$ é a posição do centro de massa da bolha i no instante t ; $A_i(\mathbf{z}, t)$ é a área da bolha i na coordenada \mathbf{z} e no tempo t e $V_i(t)$ é o volume da bolha i no tempo t .

Combinando as duas equações anteriores e lembrando que:

$$V_i(t) = \int A_i(\mathbf{z}, t) \cdot dz \quad (3.56)$$

pode-se deduzir a expressão de η_i :

$$\eta_i(\mathbf{z}, t) = \frac{3}{2 \cdot H_B} \cdot \left(1 - 4 \cdot \left(\frac{z - z_i(t)}{H_B} \right)^2 \right) \quad , \text{ para } |z - z_i(t)| \leq H_B / 2 \quad (3.57)$$

$$\eta_i(\mathbf{z}, t) = 0 \quad , \text{ para } |z - z_i(t)| > H_B / 2 \quad (3.58)$$

A fração volumétrica de uma bolha em uma célula pode ser calculada a partir destas expressões. É importante notar que quando uma bolha se encontra totalmente dentro de uma célula, a fração volumétrica é igual a um e quando a bolha estiver totalmente fora da célula esse valor é zero. Só haverá um valor diferente de zero ou um quando a bolha estiver cruzando uma fronteira da célula. Para se calcular a fração volumétrica da bolha na célula em um instante t , basta integrar a equação (3.57) no espaço da célula, ou seja:

$$\eta_{iC}(t) = \int_{V_c} [\eta_i(z - z_i(t)) \cdot dz] = \frac{1}{2} + \frac{\lambda \cdot (3 - \lambda^2)}{4} \quad (3.59)$$

onde: $\lambda = -1$, se $|z_i(t) - z_c| > \frac{L_c + H_B}{2}$

$\lambda = +1$, se $|z_i(t) - z_c| < \frac{L_c - H_B}{2}$

e $\lambda = \frac{L_c - 2 \cdot |z_i(t) - z_c|}{H_B}$, nos demais casos

sendo L_C o comprimento da célula e z_C a posição do centro da célula.

Para as grandes bolhas cilíndricas, a equação (3.59) pode ser simplificada para:

$$\eta_{iC}(t) = 0.5 \cdot (1 + \lambda) \quad (3.60)$$

3.7 Solução discretizada no tempo da fase contínua

O esquema de solução proposto para a fase contínua é baseado no utilizado por **Mortensen & Trapp** [24], [32], [33]. Resolve-se, inicialmente, a equação (3.47) explicitamente para a velocidade, adotando o gradiente de pressão calculado no passo de tempo anterior:

$$u_{LJ}^{\text{exp}} = \frac{u_{LJ}^n - \Delta t \cdot \left(u_{LJ}^n \cdot \frac{\Delta_J u_L^n}{\delta z} + g + \frac{\Delta_{K+1} P^n}{\rho_{LJ}^n \cdot \delta z} - \frac{F_{BJ}}{\alpha_{LJ} \cdot \rho_{LJ}^n \cdot V_{CJ}} \right)}{1 + \frac{2 \cdot f_{at}}{D \cdot \alpha_{LJ}} \cdot |u_{LJ}^n| \cdot \Delta t} \quad (3.61)$$

onde $\Delta_J u_L = u_{LJ} - u_{LJ-1}$ e $\Delta_{K+1} P = P_{K+1} - P_K$

Pode-se definir um fator **Fp** tal que

$$u_{LJ}^{n+1} = u_{LJ}^{\text{exp}} + Fp_J^n \cdot (\Delta_{K+1} P^{n+1} - \Delta_{K+1} P^n) \quad (3.62)$$

onde u_{LJ}^{n+1} é a solução da equação (3.47) assumindo o gradiente de pressão no novo passo de tempo. Substituindo (3.61) e (3.62) em (3.47) chega-se ao valor de **Fp_J**:

$$Fp_J^n = - \frac{\frac{\Delta t}{\rho_{LJ}^n \cdot \delta z}}{1 + \frac{2 \cdot f_{at}}{D \cdot \alpha_{LJ}} \cdot |u_{LJ}^n| \cdot \Delta t} \quad (3.63)$$

de modo que, obtido $\Delta_{K+1} P^{n+1}$, tem-se a solução para a velocidade.

Para se calcular esse valor utiliza-se a equação de conservação de massa da fase contínua (3.44) e a equação de conservação de massa da fase dispersa (3.1) que, para gases ideais, pode ser escrita:

$$\rho_i \cdot \frac{dV_i}{dt} + V_i \cdot \frac{\rho_i}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -\Gamma_i \quad (3.64)$$

de onde vem:

$$\frac{dV_i}{dt} = - \left\{ \frac{V_i}{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\Gamma_i}{\rho_i} \right\} \quad (3.65)$$

Substituindo esse resultado em (3.44) e rearranjando pode-se chegar a:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_{LK}}{P_K} \cdot \left[\alpha_{LK} \cdot V_{CK} \cdot C_L \cdot P_K + \sum_{NC+BC} (\eta_{iK} \cdot V_i) \right] \cdot \frac{\partial P_K}{\partial t} + A \cdot \Delta_J (\alpha_L \cdot \rho_L^n \cdot u_L^{n+1}) = \\ & = \rho_{LK} \cdot \sum_{NC} \left[V_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] - \sum_{NC} \left[\eta_{iK} \cdot \Gamma_i \cdot \left(\frac{\rho_{LK}}{\rho_i} - 1 \right) \right] - \sum_{BC} \left[\eta_{iK} \cdot \Gamma_i \cdot \left(\frac{\rho_{LK}}{(1-\alpha_F) \cdot \rho_i} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Note que os dois últimos termos à direita do sinal de igualdade dependem da troca de massa entre as fases e, por isso, serão considerados nulos. Substituindo em (3.66) o valor de u_L^{n+1} da equação (3.62) e lembrando que:

$$\Delta_{K+1} P^{n+1} - \Delta_{K+1} P^n = \Delta_T P_{K+1} - \Delta_T P_K \quad (3.67)$$

chega-se a:

$$-a_{J-1} \cdot \Delta_T P_{K-1} + (b_K + a_{J-1} + a_J) \cdot \Delta_T P_K - a_J \cdot \Delta_T P_{K+1} = rhs_K \quad (3.68)$$

onde:

$$a_j = \frac{\alpha_{LJ} \cdot A \cdot \Delta t / \delta z}{1 + \frac{2 \cdot f_{AT}}{D \cdot \alpha_{LJ}} \cdot |u_{LJ}^n| \cdot \Delta t} \quad (3.69)$$

$$b_K = \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\rho_{LK}}{P_K} \cdot \left[\alpha_{LK} \cdot V_{CK} \cdot C_L \cdot P_K + \sum_{NC+BC} (\eta_{iK} \cdot V_i) \right] \quad (3.70)$$

$$rhs_K = \rho_{LK} \cdot \sum_{NC} \left[V_i \cdot \frac{d\eta_{iK}}{dt} \right] - A \cdot \Delta_J (\alpha_L \cdot \rho_L \cdot u_L^{exp}) + T_{MK} \quad (3.71)$$

e T_{MK} é o termo de transferência de massa definido por:

$$T_{MK} = \left\{ \sum_{NC} \left[\eta_{iK} \cdot \Gamma_i \cdot \left(1 - \frac{\rho_{LK}}{\rho_i} \right) \right] + \sum_{BC} \left[\eta_{iK} \cdot \Gamma_i \cdot \left(1 - \frac{\rho_{LK}}{(1-\alpha_F) \cdot \rho_i} \right) \right] \right\} \quad (3.72)$$

e foi considerado nulo no simulador desenvolvido.

Esse resultado se aplica às células $K = 2$ a $N-1$. Para as extremidades do tubo deve-se acoplar as condições de contorno do problema. Adotou-se como C.C. na base do tubo uma velocidade superficial de líquido conhecida u_{LS}^0 . Assim, a equação para a célula $K=1$ torna-se:

$$(b_1 + a_1) \cdot \Delta_T P_1 - a_1 \cdot \Delta_T P_2 = rhs_1 \quad (3.73)$$

onde:

$$rhs_1 = \rho_{L1} \cdot \sum_{NC} \left(V_i \cdot \frac{d\eta_{il}}{dt} \right) - A \cdot (\rho_{L1} \cdot \alpha_{L1} \cdot u_{L1}^{exp} - \rho_{L0} \cdot u_{LS}^0) + T_{M1} \quad (3.74)$$

A outra condição de contorno é pressão constante à jusante da tubulação, de modo que $\Delta_T P_{N+1} = 0$ e, para a célula $K = N$, tem-se:

$$(b_N + a_N + a_{N-1}) \cdot \Delta_T P_N - a_{N-1} \cdot \Delta_T P_{N-1} = rhs_N \quad (3.75)$$

Note que a primeira parcela de rhs_K em (3.71) e (3.74) representa a influência do deslocamento de bolhas não-cilíndricas através da fronteira da célula K nas variáveis da fase contínua. Este valor é conhecido neste instante, já que as novas posições das partículas foram calculadas pela equação (3.33).

O problema se resume na resolução do seguinte sistema matricial:

$$\overline{\mathbf{M}} \times \begin{bmatrix} \Delta_T P_1 \\ \Delta_T P_2 \\ \Delta_T P_3 \\ \dots \\ \Delta_T P_{N-1} \\ \Delta_T P_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rhs_1 \\ rhs_2 \\ rhs_3 \\ \dots \\ rhs_{N-1} \\ rhs_N \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

onde:

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & b_2 + a_2 + a_1 & -a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & b_3 + a_3 + a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} + a_{N-1} + a_{N-2} & -a_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-1} & b_N + a_N + a_{N-1} \end{bmatrix}$$

Note que \mathbf{M} é uma matriz tridiagonal, simétrica e diagonalmente dominante, desde que b_K seja diferente de zero. Isso garante que haja uma solução única para o problema.

Resolvendo (3.76) tem-se as diferenças temporais da pressão para todas as células K . Introduzindo esses valores e (3.63) em (3.62) calcula-se as velocidades de líquido no novo passo de tempo. As novas pressões vêm da aplicação direta de:

$$P_K^{n+1} = P_K^n + \Delta_T P_K \quad (3.77)$$

Estes valores de pressão permitirão, através das equações de estado, atualizar as densidades das fases e os novos volumes das partículas discretas e, conseqüentemente, a fração de vazio em cada célula.

3.8 Modelo de forma e coeficiente de arrasto das bolhas

Uma das opções para se modelar a força de arrasto provocada pela passagem das bolhas no líquido seria basear-se no trabalho de **Ishii & Zuber** [17], onde um modelo de arrasto de partículas em meio multiparticulado é proposto. Esse modelo, no entanto, foi desenvolvido para tratamento da fase dispersa como um todo, utilizando-se valores médios. Caso fosse utilizado, todas as partículas de mesma dimensão teriam a mesma velocidade terminal. Em outras palavras, a perturbação na velocidade do meio devido a presença de outras partículas próximas - o efeito de esteira - está inserido no próprio coeficiente de arrasto C_D , e este deve ser usado em conjunto com a velocidade da partícula relativa à velocidade média do líquido, sem perturbação. Neste caso não se obteria jamais a aproximação entre partículas que torna possível a coalescência entre elas, mecanismo principal de formação das grandes bolhas cilíndricas.

O enfoque Lagrangeano das partículas, de modo individualizado, requer a adoção de um coeficiente de arrasto que possa ser utilizado em conjunto com a velocidade efetiva que a bolha "percebe" o meio contínuo. Em vista disso, considerou-se mais adequado utilizar o coeficiente de arrasto desenvolvido para partículas isoladas em conjunto com a velocidade do meio alterada tanto pela esteira de bolhas próximas quanto pela posição radial da bolha, levando em consideração o perfil de velocidade. Assim, a força de arrasto definida pela equação (3.4) utiliza a velocidade do meio u_T que pode ser escrita:

$$u_T = \Omega \cdot u_M + u_{EST} \quad (3.78)$$

onde a velocidade média da mistura u_M é calculada por:

$$u_M = \alpha_L \cdot u_L + \sum_{NC} \left[\frac{\eta_{iC} \cdot V_i \cdot u_i}{V_C} \right] \quad (3.79)$$

e Ω é a razão entre a velocidade local da mistura e a sua velocidade média na seção. Este coeficiente é função da posição radial local e do número de Reynolds da mistura (Re_M), definido por:

$$Re_M = \frac{\rho_L \cdot D \cdot u_M}{\mu_L} \quad (3.80)$$

onde ρ_L e μ_L são as densidade e viscosidade do líquido respectivamente e D é o diâmetro da tubulação. Para escoamento turbulento, $Re_M > 4000$, assumiu-se que a velocidade da mistura segue a lei exponencial com expoente $1/7$. Para escoamento laminar, $Re_M < 2000$, adotou-se um perfil parabólico para a velocidade da mistura. Na transição o coeficiente é interpolado entre os valores limítrofes, ponderado por Re_M .

A velocidade local devido a uma possível esteira (u_{EST}) será discutida na próxima seção.

A figura 3.6 mostra os tipos de bolha adotados neste trabalho. Aumentando-se o volume das bolhas, evolui-se de bolhas esféricas para distorcidas ou elípticas, daí para capas esféricas e, quando o diâmetro da bolha se aproxima do diâmetro do tubo, para bolhas cilíndricas ou bolhas de Taylor. Adotou-se uma transição suave entre as capas esféricas e as bolhas de Taylor, quando a presença da parede do tubo começa a ser percebida, a qual se denominou capas deformadas.

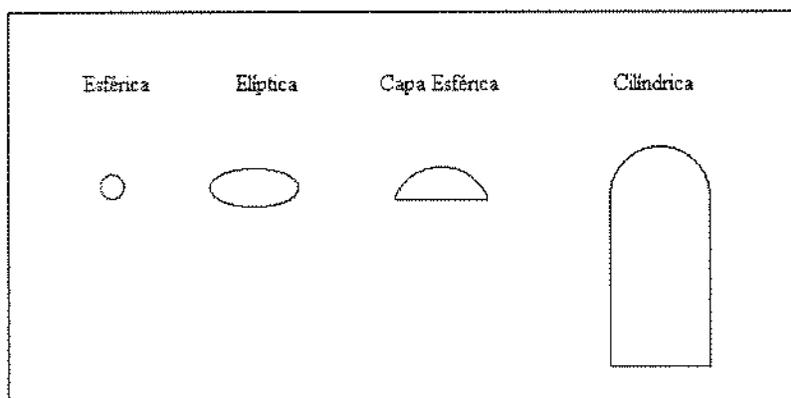


Figura 3.6 - Tipos de bolhas adotados

As bolhas esféricas possuem trajetória de ascensão no meio contínuo retilínea [15]. O coeficiente de arrasto para uma partícula isolada é uma função do número de Reynolds da partícula (Re_p) definido por:

$$Re_p = \frac{\rho_L \cdot d_e \cdot u_{Ri}}{\mu_L} \quad (3.81)$$

onde ρ_L e μ_L são as densidade e viscosidade do líquido respectivamente; u_{Ri} é a velocidade relativa definida em (3.78) e d_e é o diâmetro equivalente da bolha.

Foram avaliadas fórmulas para o cálculo do coeficiente de arrasto segundo três autores: **Clift** [5], **Harmathy** [15] e o próprio **Ishii** [17]. Uma das formas sugeridas por Clift para bolhas esféricas é a seguinte:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \cdot (1 + 0.15 \cdot Re_p^{0.687}) \quad \text{para } Re_p < 800 \quad (3.82)$$

Ishii propõe:

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \cdot (1 + 0.10 \cdot Re_p^{0.75}) \quad (3.83)$$

Harmathy, com a ressalva que seus resultados só devem ser usados para $Re_p > 500$, propõe para bolhas esféricas o valor constante:

$$C_D = 0.44 \quad (3.84)$$

Neste trabalho optou-se pela equação de Ishii até o limite de $Re_p \leq 1000$ e, acima desse valor, a constante de Harmathy.

Para bolhas distorcidas-elipsoidais existe um consenso na literatura que a velocidade terminal de ascensão independe do diâmetro. Normalmente, o coeficiente de arrasto para esse tipo de bolha é apresentado como proporcional à raiz quadrada do número de Eötvos ($E\ddot{o}$) definido por:

$$E\ddot{o} = \frac{\Delta\rho \cdot g \cdot d_e^2}{\sigma} \quad (3.85)$$

onde $\Delta\rho$ é a diferença entre as densidades do líquido e da bolha; g é a aceleração gravitacional e σ a tensão superficial. Harmathy propõe:

$$C_D = 0.5676 \cdot \sqrt{E\ddot{o}} \quad (3.86)$$

e Ishii sugere:

$$C_D = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{E\ddot{o}} \quad (3.87)$$

Adotou-se nesse trabalho o coeficiente proposto por Ishii.

O terceiro tipo de bolha, capa esférica, se caracteriza por possuir coeficiente de arrasto constante [5], [17]. Interpretando o que Ishii denomina regime agitante-turbulento como sendo a condição da presença desse tipo de bolha, ele e Clift concordam em:

$$C_D = \frac{8}{3} \quad (3.88)$$

e Harmathy propõe:

$$C_D = 2.6 \quad (3.89)$$

Adotou-se o valor sugerido por Clift e Ishii.

As bolhas de Taylor possuem uma velocidade de ascensão em meio estagnado, em condições tais que se possa desprezar as forças devido à tensão superficial e à viscosidade, de [5], [7], [9], [12],[22], [25], [34], [35]:

$$u_{Ri} \cong 0.35 \cdot \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_L} \cdot g \cdot D} \quad (3.90)$$

onde D é o diâmetro da tubulação. Esse resultado implica em um coeficiente de arrasto definido como em [32]:

$$C_D = 10.884 \cdot \frac{d_e}{D} \quad (3.91)$$

A transição entre os diversos tipos de bolha baseou-se nos três trabalhos citados, mas principalmente visando a continuidade no coeficiente de arrasto. O gráfico da figura 3.7 mostra as transições entre bolhas esféricas, distorcidas-elipsoidais e capas esféricas segundo esses autores.

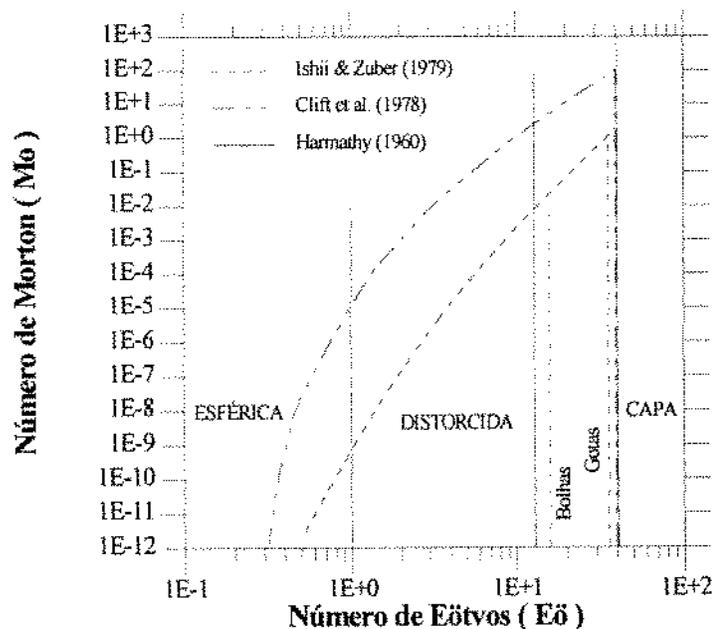


Figura 3.7 - Transições segundo diversos autores

O eixo horizontal representa o número de Eötvos, conforme já definido e o eixo vertical representa o número de Morton, definido por:

$$Mo = \frac{\Delta \rho \cdot g \cdot \mu_L^4}{\rho_L^2 \cdot \sigma^3} \quad (3.92)$$

Considerou-se que a transição de bolha esférica para bolha distorcida acontece quando os valores de C_D calculados por (3.83) e (3.87) se igualam. Note que essa transição depende de Re_p . A transição entre bolha distorcida e capa esférica se dá, de acordo com Clift, para $Eö = 40$. Segundo Harmathy, bolhas distorcidas existem para $Eö \leq 13$, capas esféricas para $Eö \geq 40$ e existe uma transição suave entre os dois modelos. Já Ishii sustenta que para partículas gasosas a transição ocorre em $Eö = 16$ e para partículas líquidas em $Eö = 36$. O conceito de Harmathy parece mais razoável, prevendo uma região de transição entre os dois tipos de bolha. No entanto, por simplificação e para garantir a continuidade em C_D adotou-se a transição em $Eö = 16$.

O efeito de parede, de acordo com Clift, pode ser percebido para valores de d_e/D tão pequenos quanto 0.3. Novamente, para manter a continuidade em C_D , considerou-se que a equação (3.91) se aplica a partir de $d_e = 0.245D$. Neste limite, os valores determinados pelas equações (3.88) e (3.91) são iguais. Para esta dimensão e considerando que a bolha é do tipo capa esférica, o diâmetro real da bolha no plano horizontal é de aproximadamente 43% do diâmetro da tubulação.

Alguns autores [15], [35] sustentam que a equação (3.90) aplica-se também a bolhas do tipo capa esférica de diâmetros maiores. Assim, apesar do efeito da parede começar a ser percebido no coeficiente de arrasto a partir de $d_e/D = 0.245$, as transições entre os tipos capa esférica, capa deformada e bolha de Taylor foram definidas por critérios meramente geométricos. Capas esféricas têm, em média, um ângulo interno de 50° [5], [8] que foi assumido constante. Admitiu-se que a maior capa esférica possui um raio de curvatura igual ao raio máximo de uma bolha de Taylor (Rb_{MAX}). A transição entre capa esférica e bolha de Taylor é feita geometricamente suave, mantendo-se o raio de curvatura da bolha constante e variando o ângulo interno de 50° a 90° . A menor bolha de Taylor é uma semi-esfera de raio Rb_{MAX} .

As geometrias adotadas foram:

- Bolhas esféricas :

$$H_B = D_B = d_e \quad (3.93)$$

onde H_B é a altura e D_B é o diâmetro da bolha.

- Bolhas elipsoidais:

Quanto maior o número de Eötvos, mais distorcida torna-se a bolha. Clift propõe uma correlação entre a razão de aspecto da bolha - E - e o número de Eötvos - $E\delta$:

$$E = \frac{1}{(1 + 0.163 \cdot E\delta^{0.757})} \quad , \text{ para } Mo \leq 10^{-6} \text{ e } E\delta < 40 \quad (3.94)$$

Essa correlação foi utilizada até o limite $E\delta \leq 16$, apesar de apresentar uma pequena descontinuidade nas transições para bolha esférica e para capa esférica. A condição $Mo \leq 10^{-6}$ é satisfeita para fluidos usuais, não muito viscosos.

$$D_B = \frac{d_e}{\sqrt[3]{E}} \quad (3.95)$$

$$H_B = E \cdot D_B \quad (3.96)$$

- Capas Esféricas:

$$D_B = 1.7470 \cdot d_e \quad (3.97)$$

$$H_B = 0.23315 \cdot D_B \quad (3.98)$$

A figura 3.8 mostra um esquema de uma bolha do tipo capa esférica

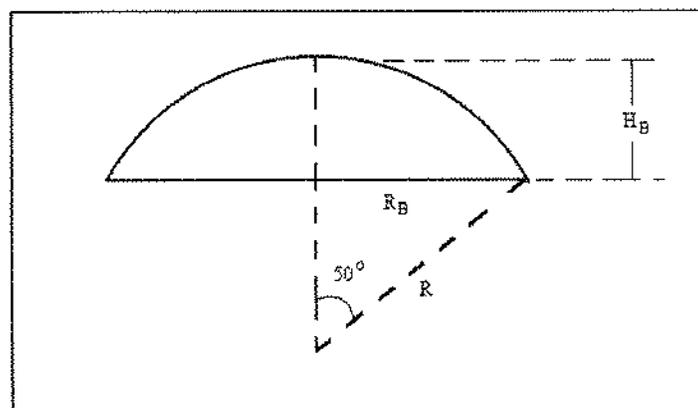


Figura 3.8 - Capa esférica

- Bolhas cilíndricas :

O nariz das bolhas cilíndricas foi considerado como uma semi-esfera de raio igual ao da bolha que, por sua vez, é igual a 0.93 vezes o raio do tubo. No **anexo B** são discutidos os motivos pelos quais se adotou esta razão entre os raios da bolha e do tubo. Assim:

$$D_b = 0.93 \cdot D \quad (3.99)$$

$$H_b = \frac{D_b}{6} \cdot \left(1 + 4 \cdot \frac{d_e^3}{D_b^3} \right) \quad (3.100)$$

3.9 Modelo da velocidade de esteira da bolha

Na seção anterior foi dito que a velocidade com que uma bolha "percebe" o meio contínuo a sua volta é composta de dois termos, um dos quais denominado esteira. Este termo representa a perturbação na velocidade do meio devido ao deslocamento de uma bolha com velocidade superior à do meio. Foram desenvolvidos dois modelos para quantificar essa perturbação, em qualquer posição da tubulação.

O primeiro modelo se aplica quando a bolha geradora da esteira possui dimensão pequena em relação à tubulação. Neste caso se utiliza a teoria clássica descrita por **Schlichting** [28] para bolhas se deslocando em meio infinito, onde a distribuição radial da esteira é exponencial:

$$u_{EST}(z, r) = u_C(z) \cdot e^{-(r/r_w)^2} \quad (3.101)$$

onde $u_C(z)$ é a velocidade da esteira ao longo da linha de centro da bolha geradora; r_w é um parâmetro de escala a ser definido; z é a distância vertical à bolha e r é a distância horizontal à linha de centro conforme indicado na figura 3.9.

O coeficiente de arrasto pode ser definido por:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot \pi \cdot r_e^2 \cdot u_R^2} \quad (3.102)$$

onde F_D é a força de arrasto; r_e é o raio equivalente da bolha e u_R a velocidade relativa da bolha.

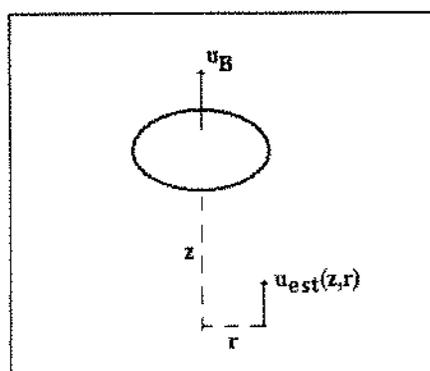


Figura 3.9 - Esteira provocada por bolhas

A força de arrasto deve ser igual à variação de quantidade de movimento devido à esteira, ou seja:

$$F_D = \rho_L \cdot u_R \cdot \int_0^{\infty} u_{EST} \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) \cdot dr \quad (3.103)$$

e integrando chega-se a:

$$F_D = \rho_L \cdot u_R \cdot u_C \cdot \pi \cdot r_W^2 \quad (3.104)$$

Substituindo a equação (3.104) em (3.102) pode-se determinar o valor de r_W :

$$\left(\frac{r_W}{r_e} \right)^2 = \frac{C_D}{2} \cdot \frac{u_R}{u_C} \quad (3.105)$$

e a velocidade da esteira pode ser escrita como:

$$u_{EST}(r, z) = u_C(z) \cdot \exp\left(-\frac{2}{C_D} \cdot \frac{u_C(z)}{u_R} \cdot \left(\frac{r}{r_e}\right)^2\right) \quad (3.106)$$

O problema se resume agora em calcular a velocidade da esteira ao longo do centro da bolha geradora $u_C(z)$. Em um trabalho publicado em 1971, **Crabtree** [8] descreveu um experimento para medir indiretamente a velocidade da esteira provocada por uma bolha, a partir da medição da velocidade de aproximação de uma segunda bolha, posicionada na mesma linha vertical da primeira. Apesar do experimento ter se restringido a capas esféricas, os resultados obtidos serão adotados também para bolhas esféricas e distorcidas. Os pontos experimentais obtidos foram mostrados em um gráfico $u_C(z)/u_R \times z/r_e$.

A correlação proposta pelos autores é:

$$\frac{u_C(z)}{u_R} = \frac{6.2}{z/r_e} \quad (3.107)$$

Mortensen & Trapp [24], utilizando os mesmos dados experimentais, propuseram uma segunda correlação:

$$u_C(z) = u_R \cdot [0.45 + 0.12 \cdot (z/R_B) + 0.01 \cdot (z/R_B)^2]^{-1} \quad (3.108)$$

onde R_B é o raio real da bolha no plano horizontal que, para capas esféricas cujo ângulo interno é 50° , é igual a :

$$R_B = 1.747 \cdot r_e \quad (3.109)$$

Os pontos obtidos por **Crabtree** [8] situam-se na faixa de z/r_e entre 5 e 40. O espalhamento existente permite diversas correlações. O autor não observou aproximação para bolhas espaçadas de um valor superior a $40 r_e$. Este fato sugere que o decaimento da velocidade de esteira com a distância deve ser acentuado. Uma correlação com base exponencial possivelmente seria mais adequada. A função

$$\frac{u_c(z)}{u_R} = 1.22 \cdot e^{-(z/r_e)/16} \quad (3.110)$$

ajusta bem os pontos experimentais, com a vantagem de um decaimento mais rápido para distâncias superiores à $40 r_e$.

O gráfico da figura 3.10 mostra as três correlações na faixa de z/r_e entre 0 e 100. Para $z/r_e = 62$, por exemplo, a correlação de **Crabtree** prevê uma velocidade de esteira de 10% do valor de u_R , enquanto a de Mortensen prevê 5.8% e a exponencial resulta em 2.5%.

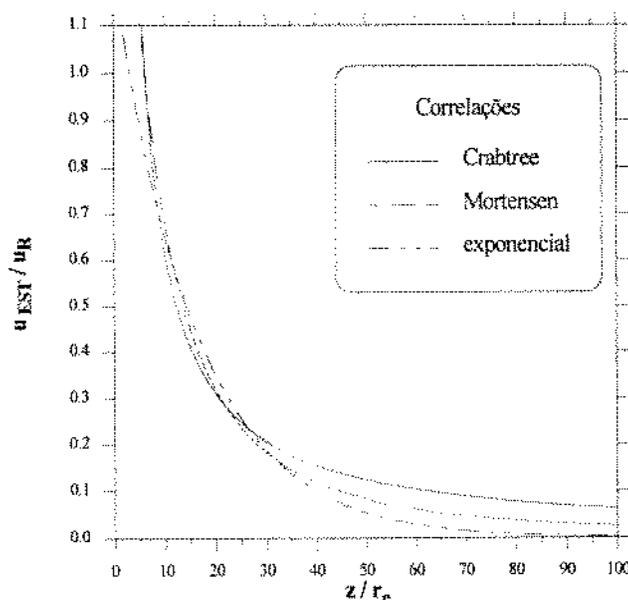


Figura 3.10 - Velocidade da esteira na linha de centro da bolha

As equações (3.106) e (3.110) permitem calcular a velocidade da esteira provocada por uma bolha pequena, em qualquer posição (z,r) relativa à bolha.

Um segundo modelo foi desenvolvido com o objetivo de calcular a esteira provocada por uma bolha cilíndrica, já que o modelo clássico de bolha em meio infinito, obviamente, não se aplica. Sabe-se que junto a bolha e próximo à parede do tubo, a velocidade do meio é negativa, devido ao jato do filme líquido.

Uma formulação simples para a esteira pode ser conseguida com algumas hipóteses: seja $u_{NEG}(z)$ o valor da velocidade descendente junto à parede, a uma distância z da bolha, e $U(z,r)$ tal que:

$$U(z,r) = u_{EST}(z,r) + u_{NEG}(z) \quad (3.111)$$

A figura 3.11 mostra esquematicamente essas velocidades. Admite-se ainda que U tenha um perfil exponencial de expoente $1/7$, ou seja:

$$U(z,r) = \frac{60}{49} \cdot \langle U \rangle \cdot \left(1 - \frac{r}{R_T}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (3.112)$$

onde $\langle U \rangle$ é a média de $U(z,r)$ na seção; r é a posição radial e R_T é o raio do tubo. Note que:

$$\langle U \rangle = \langle u_{EST} + u_{NEG} \rangle = \langle u_{EST} \rangle + \langle u_{NEG} \rangle = u_{NEG} \quad (3.113)$$

já que u_{NEG} é constante na seção e a média da velocidade de esteira na seção é zero, devido à continuidade. Pode-se então escrever:

$$u_{EST}(z,r) = \frac{60}{49} \cdot u_{NEG}(z) \cdot \left(1 - \frac{r}{R_T}\right)^{\frac{1}{7}} - u_{NEG}(z) \quad (3.114)$$

ou ainda:

$$u_{EST}(z,r) = \frac{60}{49} \cdot u_{NEG}(z) \cdot \left\{ \left(1 - \frac{r}{R_T}\right)^{\frac{1}{7}} - \frac{49}{60} \right\} \quad (3.115)$$

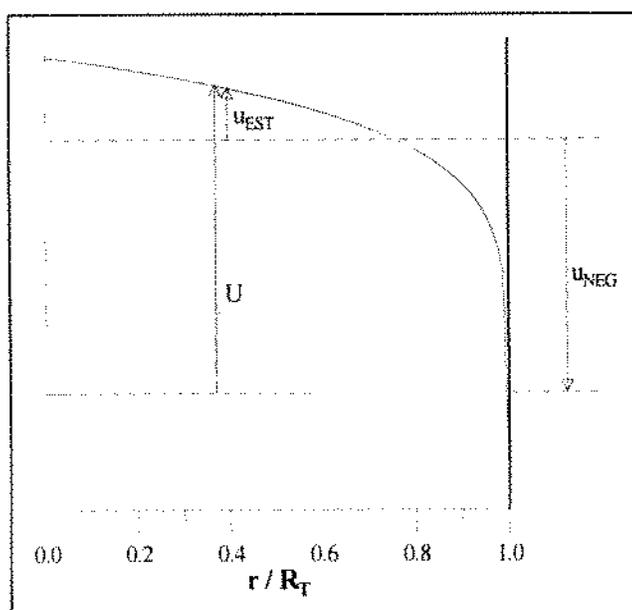


Figura 3.11 - Esteira de bolha cilíndrica

Sabe-se que o valor da velocidade da esteira decresce assintoticamente com a distância. Assim, admitindo que: $u_{NEG}(z) = u^* \cdot e^{-\xi \cdot z}$ e que para $z = 0$ e $r = 0$ a velocidade do meio é a velocidade do gás no centro da bolha cilíndrica, ou seja: $u_{EST}(0,0) = \frac{60}{49} \cdot u_R$, tem-se: $u^* = \frac{60}{11} \cdot u_R$. Daí pode-se escrever:

$$u_{EST}(z,r) = \frac{60}{49} \cdot u_R \cdot e^{-\xi \cdot z} \cdot \left\{ \frac{60}{11} \cdot \left(1 - \frac{r}{R_T} \right)^{\frac{1}{7}} - \frac{49}{11} \right\} \quad (3.116)$$

O valor de ξ será determinado considerando-se dois critérios: uma transição contínua entre os dois modelos e os valores relatados na literatura de comprimento estável dos pistões de líquido. Note que na linha de centro da bolha, temos:

$$\text{modelo 1 : } u_c(z) = 1.22 \cdot u_R \cdot e^{-(z/r_e)/16} \quad (3.117)$$

$$\text{modelo 2 : } u_c(z) = 1.22 \cdot u_R \cdot e^{-\xi \cdot z} \quad (3.118)$$

De onde se conclui que $\xi = 1 / (16 \cdot r_e^t)$, onde r_e^t é o raio equivalente da bolha onde ocorre a transição entre os dois modelos. É razoável admitir que esta transição se dá quando a presença da parede começa a ser percebida pelas partículas, ou seja, na transição entre capa esférica e capa deformada. Pode-se mostrar que a maior capa esférica, como definida na seção 3.8, possui $r_e = 0.204 D$, onde D é o diâmetro da tubulação. Assim tem-se:

$$\xi = \frac{1}{16 \cdot r_e^t} \cong \frac{0.30}{D} \quad (3.119)$$

e o segundo modelo está completo. Deve-se ainda verificar o segundo critério para se determinar o valor de ξ . Para $z = 16 D$, comprimento de pistão de líquido reportado por **Taitel et al.** [30] como estável, a velocidade da esteira é de apenas 1% da velocidade relativa da bolha cilíndrica, o que mostra que esse modelo é coerente.

A figura 3.12 mostra os perfis das velocidades da esteira, a uma distância $z = 5D$ da bolha, para a maior capa esférica e para a menor bolha cilíndrica. Estes são os limites, mínimo e máximo respectivamente, da capa deformada.

A equação (3.116) só foi usada para bolhas cilíndricas. Para bolhas do tipo capa deformada, adotou-se a interpolação entre os dois modelos, já que a distribuição radial de cada modelo não permite um ponto com transição contínua.

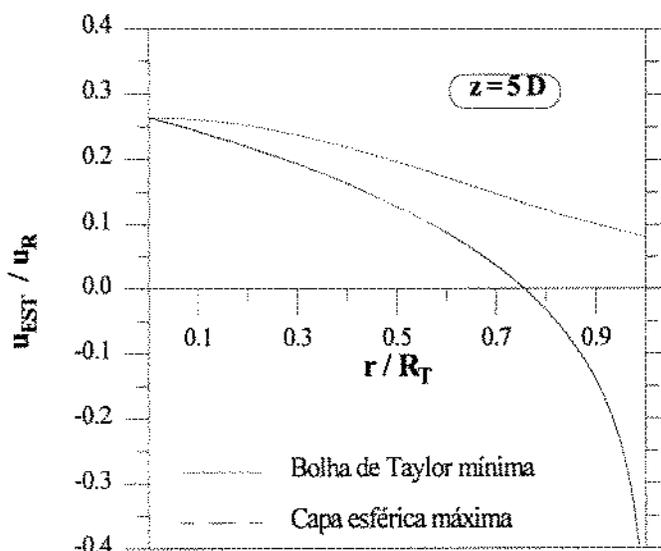


Figura 3.12 - Perfil da esteira para $z = 5D$

3.10 Outros modelos utilizados

O modelo adotado para a coalescência entre duas bolhas permite que se estabeleça um valor mínimo de superposição horizontal e vertical para que esta se processe. Utilizou-se nas simulações uma superposição mínima vertical igual a zero e horizontal igual a 50% do diâmetro da menor bolha. Estes valores representam o critério de que duas bolhas irão coalescer caso:

- Apenas se toquem em suas projeções verticais;
- A projeção horizontal do centro da bolha menor esteja no interior da projeção horizontal da bolha maior.

Quando apenas o critério de superposição horizontal não é satisfeito, está se representando a situação das bolhas que, ao se aproximarem, deformam-se e invertem de posição, sem que haja coalescência.

O modelo para calcular o fator de fricção do líquido com a parede é um modelo desenvolvido para escoamento monofásico, que considera a possibilidade de escoamento laminar ou turbulento e que, para escoamento turbulento, inclui o efeito da rugosidade relativa do tubo. Por falta de um critério mais adequado, adotou-se que o escoamento será laminar caso o número de Reynolds definido por $Re = \rho_L \cdot u_L \cdot D / \mu_L$ seja menor que 2000 e nesse caso tem-se $f_{at} = 16/Re$. Caso o número de Reynolds seja superior a 4000, o fator de fricção será calculado pela equação simplificada de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f_{st}}} = -4 \cdot \text{Log}_{10} \left[\frac{\varepsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{\text{Re}} \cdot \text{Log}_{10} \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} + \frac{13}{\text{Re}} \right) \right] \quad (3.120)$$

onde ε / D é a rugosidade relativa do tubo.

Na transição ($2000 < \text{Re} < 4000$) adotou-se uma interpolação linear, de modo a se ter continuidade do fator de atrito em toda a faixa de Re .

A entrada de bolhas é realizada respeitando-se a velocidade superficial de gás especificada como condição de contorno, e as bolhas são distribuídas aleatoriamente quanto ao volume, entre valores limites especificados. As bolhas serão introduzidas na tubulação em um trecho de entrada de comprimento igual a $10D$, distribuídas também aleatoriamente nesta seção. A velocidade inicial é igual ao fluxo volumétrico total, ou seja, as bolhas entram na tubulação com a mesma velocidade do líquido (velocidade relativa igual a zero).

Não se está considerando troca de massa entre as fases ($\Gamma_i = 0$).

3.11 Procedimento de solução adotado

Ao se iniciar um passo de tempo, considera-se conhecidas todas as variáveis do instante anterior. O procedimento de cálculo em cada tempo segue as seguintes etapas:

- Para cada bolha é determinada sua velocidade e posição no novo instante;
- Introduce-se na seção de entrada da tubulação as novas bolhas, correspondendo ao fluxo volumétrico de gás especificado;
- São calculadas as novas velocidades de líquido em cada célula **J** e as novas pressões em cada célula **K**;
- Atualiza-se as densidades de líquido e gás, o volume de cada bolha e o gradiente de pressão em cada célula **J**;
- São eliminadas as bolhas que saem pela extremidade superior do tubo;
- As bolhas que satisfazem o critério de coalescência estabelecido são agrupadas;
- Calcula-se a velocidade da mistura para cada célula **J**;
- Calcula-se as frações de vazio nos pistões de líquido e a razão entre o comprimento total dos pistões e o da célula, em cada célula **J** e **K**;
- Imprime-se os resultados desse passo de tempo.

4. Análise do modelo e dos resultados obtidos

Este capítulo está subdividido em três seções. A primeira seção é dedicada a uma análise crítica do modelo, sob o ponto de vista teórico. Na segunda seção são comparados os resultados obtidos com alguns dados experimentais encontrados na literatura. A última seção traz uma análise de uma série de simulações, de modo a se identificar como os resultados são influenciados pelos parâmetros especificados, tais como: as velocidades superficiais de líquido e de gás, a pressão e o diâmetro da tubulação.

4.1 Análise teórica do modelo

O modelo proposto baseou-se no trabalho de **Trapp & Mortensen** [24], [32], [33]. O simulador desenvolvido por estes autores trata de maneira idêntica as bolhas dispersas no meio líquido e as bolhas de Taylor. A proposta atual trata cada uma dessas bolhas de uma maneira diferenciada.

No modelo proposto as equações de balanço de quantidade de movimento e de posição de cada bolha são resolvidas analiticamente, eliminando-se os erros inerentes à discretização. É possível obter uma solução analítica para estas equações, desde que se assumam algumas hipóteses, também assumidas na solução discretizada. Deve-se admitir que as variáveis da fase líquida - velocidade e pressão - e o coeficiente de arrasto de cada partícula possam ser considerados constantes durante o intervalo de integração. A solução analítica é extremamente vantajosa na entrada das bolhas na tubulação, quando as velocidades relativas são nulas. Na solução discretizada, a força de arrasto é nula durante todo o intervalo de integração, o que provoca grandes acelerações iniciais nas partículas. Na solução analítica essa distorção desaparece.

As bolhas dispersas seguem o enfoque proposto por Trapp, interagindo com a fase contínua através das forças de arrasto e de massa virtual. A velocidade do meio contínuo é afetada pelas bolhas dispersas através destas forças interfaciais. O estudo aqui proposto tem, como maior contribuição, o tratamento diferenciado dado às bolhas cilíndricas. Sabe-se que este tipo de bolha perturba fortemente o gradiente de pressão e, por isso, deve ser tratado de maneira específica. Enquanto as bolhas menores influenciam o diferencial de pressão apenas

pela sua participação na densidade da mistura, as bolhas de Taylor alteram drasticamente a velocidade do meio contínuo e a pressão ao longo de seu comprimento pode ser considerada praticamente constante [14], [31], [34]. Assumiu-se que a fase contínua em uma célula de discretização é a massa de líquido presente apenas nos pistões de líquido. Esta hipótese considera que o volume formado pelas bolhas de Taylor e seus respectivos filmes de líquido interage com a fase contínua de modo diverso das bolhas dispersas. Considera-se haver continuamente uma desaceleração, ou uma aceleração negativa, da fase contínua entre o topo e a base da bolha de Taylor. Esta desaceleração é considerada no balanço da quantidade de movimento da fase contínua, assim como o peso do gás e do filme de líquido presentes no nariz da bolha.

Ao se considerar uma contínua transferência de massa entre os pistões de líquido acima e abaixo de uma mesma bolha de Taylor, é possível resolver as equações da fase contínua sem a necessidade de adotar uma solução suavizada para a função fração de líquido, como discutido na seção 2.3. O comportamento instável observado por Trapp & Mortensen pode ser explicado através da equação da continuidade do líquido que, para fluido incompressível e sem troca de massa entre as fases, pode ser escrita:

$$\frac{\partial \alpha_L}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_L \cdot u_L)}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

Com o tratamento individualizado dado às partículas, a fração de líquido α_L é função de uma soma finita dos volumes das bolhas presentes no volume de controle. Se uma bolha de grande dimensão deixa este volume de controle no intervalo de tempo considerado, pode ocorrer que $\frac{\partial \alpha_L}{\partial t}$ assuma um valor tão grande que a solução para a equação (4.1):

$$\alpha_{LJ} \cdot u_{LJ} = \alpha_{LJ-1} \cdot u_{LJ-1} - \Delta z \cdot \left(\frac{\partial \alpha_{LK}}{\partial t} \right) \quad (4.2)$$

seja negativa. Na verdade esta solução é correta, desde que se recorde que u_{LJ} é a velocidade na fronteira do volume de controle K . O problema ocorre quando se utiliza esse valor estritamente local como um valor representativo da velocidade do líquido em toda uma célula de discretização. Note que, quando uma bolha de Taylor atravessa a fronteira do volume de controle, a velocidade calculada nesta fronteira é a velocidade do filme descendente de líquido. Esta é a razão pela qual no trabalho de Trapp & Mortensen, sem tratamento

diferenciado para bolhas cilíndricas, foi necessário recorrer a uma suavização da função fração de líquido.

Outro conceito implementado foi o modelo de esteira para bolhas cilíndricas levando em consideração a presença da parede do tubo, conforme discutido na seção 3.9. No trabalho de Mortensen, o modelo para calcular a esteira de todas as bolhas é o desenvolvido para meio infinito.

O modelo proposto neste trabalho possui uma limitação para a altura máxima que uma bolha cilíndrica possa atingir. Esta altura não pode ser maior que o comprimento de uma célula de discretização. Essa limitação resulta da imposição de haver massa da fase contínua em todas as células da malha de discretização para que o problema tenha solução. Por este motivo não se pode utilizar o modelo em condições próximas à transição entre os padrões pistonado e anular.

As bolhas cilíndricas, durante uma simulação, podem atingir de 2 a 2.5 vezes a sua altura média. Recomenda-se dimensionar as células com comprimento pelo menos três vezes a altura média esperada das bolhas.

Para se determinar o valor ideal para o intervalo de tempo de cada etapa de solução, deve-se analisar seus efeitos tanto no cálculo das bolhas quanto no cálculo da fase contínua. A solução analítica para a fase gasosa permite, teoricamente, que se adote qualquer valor para esse parâmetro. No entanto, admitiu-se que a velocidade e pressão da fase contínua eram constantes durante o intervalo de integração. Assim, existe uma limitação de fato. Note que, embora a variação da velocidade da fase contínua seja normalmente suave, a velocidade de uma possível esteira possui uma dependência exponencial com a distância entre as bolhas. Um passo de tempo longo pode provocar a uma bolha, sob forte influência de uma esteira, um deslocamento várias vezes maior que a distância que a separa da bolha causadora da esteira. Essa bolha ultrapassaria a bolha a sua frente e continuaria com a mesma velocidade, como se ainda estivesse sob influência da esteira. Essa distorção deve ser evitada.

Do ponto de vista da fase contínua, o tratamento implícito dado ao gradiente de pressão no balanço da quantidade de movimento dispensa a necessidade de se adotar como limite de estabilidade a velocidade do som no meio. Deve-se, no entanto, respeitar o critério do limite material de Courant fazendo $\Delta t \leq \Delta z / u_{MAX}$, onde u_{MAX} é a maior velocidade entre

os fluidos. Este critério equivale a limitar o intervalo de tempo de modo que uma bolha não atravesse toda uma célula de discretização em uma etapa de solução. Este limite é muito elevado para que se possa considerar constante a velocidade de esteira, como discutido no parágrafo anterior. Após analisar as respostas obtidas variando esse parâmetro, adotou-se como padrão para Δt o intervalo de tempo necessário para que uma bolha percorra a distância equivalente a um diâmetro da tubulação, escoando na velocidade média das bolhas, ou seja: $\Delta t \cong D / u_B$.

A utilização do simulador permite que se observe um comportamento interessante da velocidade do pistão de líquido na saída da tubulação, quando a pressão do sistema é baixa. Nessa condição a velocidade do pistão de líquido apresenta um comportamento oscilante, com uma frequência de oscilação igual a frequência de saída das bolhas da tubulação e com uma amplitude proporcional a altura média das bolhas. Esse comportamento possivelmente reproduz a realidade e pode ser explicado do seguinte modo: no espaço de tempo que uma bolha leva para sair da tubulação, a pressão do sistema como um todo aumenta, já que o espaço deixado por essa bolha é ocupado pelo pistão que a sucede. Esse aumento na pressão do sistema causa um aumento na densidade das bolhas, reduzindo seu volume. O espaço deixado pela contração das bolhas deve ser ocupado pelo líquido. Assim, parte do volume de líquido que entra à montante da tubulação nesse intervalo de tempo preenche esse espaço e apenas uma parte se desloca efetivamente na extremidade jusante do tubo, o que causa a queda observada na velocidade. Por outro lado, quando o pistão de líquido deixa a tubulação a pressão do sistema cai, reduzindo a densidade das bolhas que se expandem. Esta expansão provoca a expulsão de um volume de líquido superior ao volume que entra na tubulação, refletindo-se em um aumento da velocidade à jusante. É possível estimar essa flutuação na velocidade. **Griffith & Wallis** [14] determinaram a flutuação na pressão através de:

$$\Delta(\Delta P) = \rho_L \cdot g \cdot L_p \quad (4.3)$$

Para gases ideais pode-se aproximar a variação do volume das bolhas por:

$$|\Delta V_G| = \frac{\left(\sum V_B\right) \cdot \Delta(\Delta P)}{P} = \frac{(1 - \alpha_L) \cdot V \cdot \rho_L \cdot g \cdot L_p}{P} \quad (4.4)$$

A variação na velocidade do líquido pode ser calculada já que:

$$\Delta u = \frac{|\Delta V_G|}{A \cdot \Delta t} \quad e \quad \Delta t = \frac{L_P}{u_{PL}}$$

onde A é a área da tubulação, Δt o tempo que o pistão de líquido leva para sair da tubulação, L_P é o comprimento do pistão e u_{PL} é a velocidade média do pistão, assumida igual ao fluxo volumétrico total. Com isso:

$$\frac{\Delta u}{u_{PL}} = (1 - \alpha_L) \cdot \frac{\rho_L \cdot g \cdot L_T}{P} \quad (4.5)$$

onde L_T é o comprimento do tubo. A pressão média P pode ser estimada aproximadamente por:

$$P = P_{JUS} + (\alpha_L \cdot \rho_L \cdot g \cdot L_T) / 2 \quad (4.6)$$

Para $P_{JUS} \ll (\alpha_L \cdot \rho_L \cdot g \cdot L_T) / 2$ a equação (4.5) pode ser escrita:

$$\frac{\Delta u}{u_{PL}} = \frac{2 \cdot (1 - \alpha_L)}{\alpha_L} \quad (4.7)$$

Quando a fração de líquido é da ordem de 50%, a velocidade do pistão de líquido pode variar entre 0 e $2 \cdot u_{PL}$, com uma frequência de oscilação próxima a da saída das bolhas e pistões na extremidade superior da tubulação.

Para minimizar essas oscilações deve-se procurar trabalhar com a tubulação pressurizada sempre que possível. Para $P_{JUS} \gg (\alpha_L \cdot \rho_L \cdot g \cdot L_T) / 2$ e para valores usuais de α_L tem-se $\Delta u / u_{PL} \ll 1$, que é o desejável.

A maior restrição do simulador desenvolvido é não possuir um modelo de quebra de bolhas pela turbulência da fase contínua, como observado por **Taitel et al.** [30] entre outros. Esta facilidade não era do escopo previsto para este trabalho, mas sua ausência inviabilizou a utilização de um modelo de desintegração da cauda das bolhas de Taylor pela ação do filme descendente. O modelo previsto era baseado no de **Fernandes et al.** [12]. A fração de vazio resultante imediatamente atrás da bolha de Taylor era de tal ordem que, sem um modelo de turbulência, as pequenas bolhas geradas rapidamente coalesciam, ora com a bolha de onde foram geradas, ora entre elas formando uma nova bolha de Taylor. Não se conseguiu manter um pistão de líquido aerado estável.

4.2 Validação do modelo

Para a aferição do grau de confiabilidade do simulador desenvolvido em cada uma das variáveis calculadas, procurou-se na literatura dados experimentais obtidos na faixa de aplicação do modelo. Quatro variáveis calculadas foram verificadas: a altura da bolha, o comprimento do pistão de líquido, a velocidade das bolhas e o gradiente de pressão. Uma outra variável importante, a fração de vazio no pistão de líquido, não pôde ser calculada apropriadamente, conforme discutido na seção anterior. Os dados experimentais foram obtidos a partir de três trabalhos: o de **Griffith & Wallis** [14], o de **Mao & Dukler** [20] e o de **Liné & Masbernat** [18].

4.2.1 Comparação com os dados de Griffith & Wallis [14]

O aparato experimental utilizado por Griffith & Wallis consistia de uma tubulação de 18 pés (aprox. 5.5 m) de diâmetros 1/2", 3/4" e 1", onde foram injetados água e ar. A comparação foi realizada apenas com os dados relativos a 1", já que nos tubos de menor diâmetro as forças superficiais não poderiam ser desprezadas como o foram no modelo. Adotou-se na simulação pressão à jusante de 98.1 kPa (1 Kg/cm²) e temperatura de 25 °C. O tubo foi discretizado em dez células e o intervalo de tempo foi estimado de modo que as bolhas percorressem a distância equivalente a um diâmetro do tubo por passo de tempo. As bolhas introduzidas na entrada da tubulação possuíam raio equivalente entre 1 e 3 mm. Estimou-se que as bolhas saíam da tubulação após 216 passos de tempo. Cada simulação teve duração de 1000 passos de tempo e a estatística dos dados foi realizada nos últimos 500. As vazões de líquido e de gás foram medidas à montante do aparato, assim não foi necessário corrigir o valor desses dados. Os autores mediram experimentalmente a altura média das bolhas, o comprimento médio dos pistões de líquido e o gradiente de pressão.

A figura 4.1 mostra os pontos experimentais em um mapa de padrão de escoamento como proposto por **Taitel et al.** [30]. Os quatro pontos inferiores referem-se na verdade a líquido estagnado, não sendo possível representá-los fielmente em um gráfico Log-Log. A linha tracejada refere-se a transição teórica bolhas-pistonado, que, de acordo com Taitel, não se observa em tubulações de 1" com escoamento ar-água.

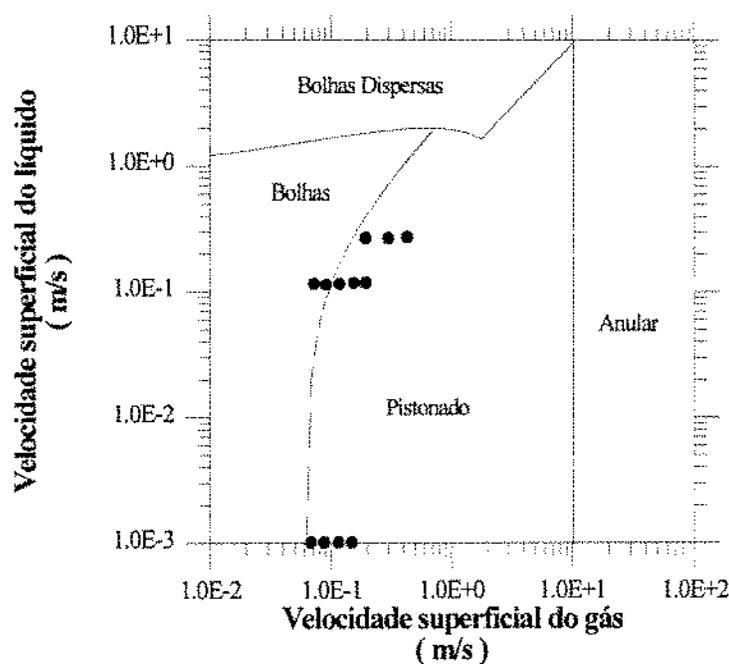


Figura 4.1 - Dados de Griffith & Wallis [14] no mapa de padrão de escoamento de Taitel

A tabela 4.1 mostra os resultados experimentais e os obtidos pelo modelo. Os casos marcados com (*) foram simulados com o tubo dividido em apenas sete células, devido ao tamanho máximo atingido pelas bolhas.

Tabela 4.1 - Comparação com dados de Griffith & Wallis [14]

Caso	u_{LS} m/s	u_{GS} m/s	Δt s	H_B / D		L_P / D		dP/dz [Pa/m]		
				medido	modelo	medido	modelo	medido	modelo	
01	0.000	0.068	0.100	5.65	3.23	10	14.2	7355	7520	
02	0.000	0.088	0.090	6.3	5.81	13	13.2	6982	7103	
03	0.000	0.116	0.080	8.1	7.24	13	13.1	6453	6383	*
04	0.000	0.149	0.070	10.7	7.69	15	15.7	5953	5553	*
05	0.116	0.073	0.060	2.9	1.89	10.5	13.5	8189	7942	
06	0.114	0.091	0.060	3.6	2.41	13	12.4	7875	7591	
07	0.116	0.118	0.055	4.8	3.08	13	13.8	7433	7132	
08	0.117	0.155	0.050	6.5	4.26	10.5	13.0	6884	6617	
09	0.118	0.195	0.045	8.2	7.82	15	15.0	6404	6115	*
10	0.268	0.194	0.035	1	4.91	n.d.	14.6	7502	7148	*
11	0.268	0.300	0.030	6.5	8.33	10	13.5	6502	6244	*
12	0.273	0.431	0.025	9.8	11.1	13	12.0	5658	5529	*

As figuras 4.2, 4.3 e 4.4 apresentam os resultados comparativos de altura de bolha, comprimento do pistão e gradiente de pressão respectivamente.

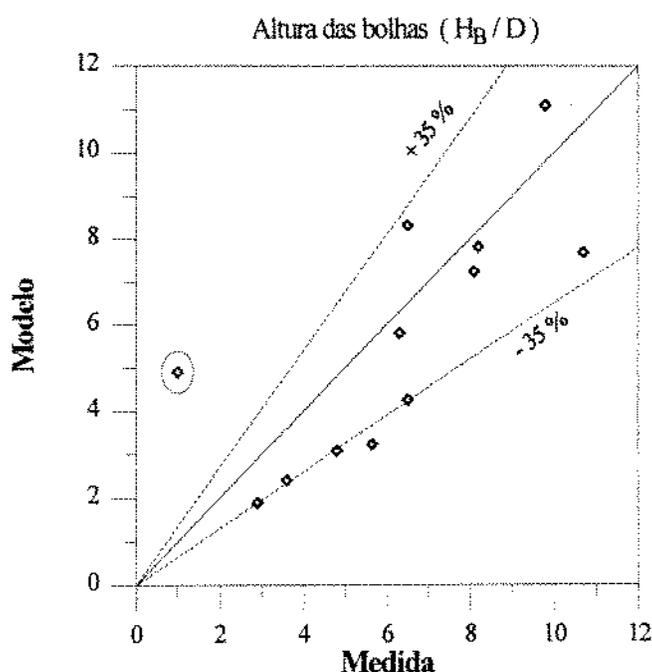


Figura 4.2 - Comparação da altura das bolhas com dados de Griffith & Wallis [14]

O modelo aparentemente apresentou uma tendência de subestimar a altura das bolhas. No entanto, há de se levar em consideração que o valor calculado pelo simulador é uma média de todas as bolhas presentes nos últimos 3 pés (1 m) do tubo, enquanto os dados experimentais são médias apenas das bolhas de Taylor presentes nesse trecho da tubulação. É de se esperar que para baixos valores da fração de vazio, correspondendo às menores alturas de bolha, a presença de pequenas bolhas do tipo *capa esférica* tenham influenciado na média calculada. Já para as frações de vazio mais elevadas, onde as bolhas são maiores, é menos provável a presença de capas esféricas a 200D da entrada da tubulação. Os valores calculados situam-se numa faixa de $\pm 35\%$ dos medidos. O ponto destacado por um círculo, caso 10 da tabela 4.1, corresponde provavelmente a um erro experimental, já que o valor do comprimento do pistão de líquido desse caso não foi informado e o valor da altura da bolha não segue a tendência dos demais pontos experimentais.

Os valores calculados para o comprimento do pistão de líquido apresentaram uma boa concordância com os medidos, quando estes eram superiores a 11 diâmetros. Na verdade, como será visto na seção seguinte, o modelo apresenta uma tendência de estimar este parâmetro sempre entre 12 e 17 diâmetros da tubulação.

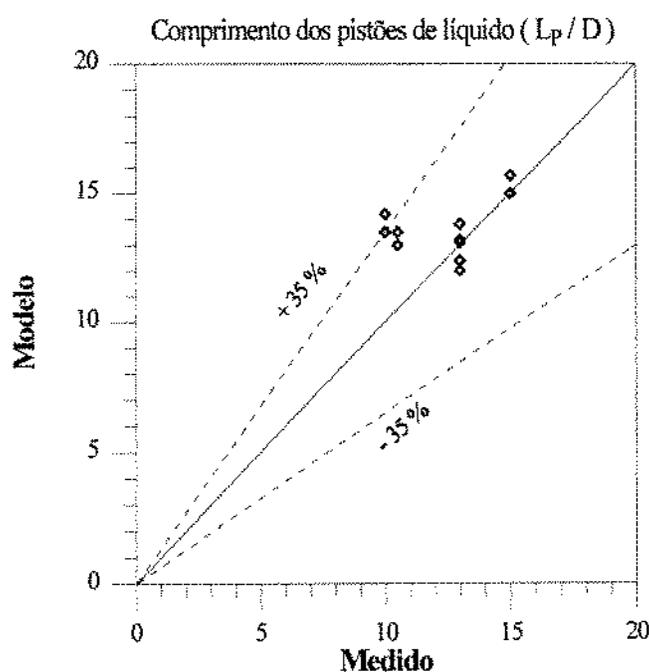


Figura 4.3 - Comparação do comprimento dos pistões de líquido com dados de Griffith & Wallis [14]

Os melhores resultados, porém, ocorreram na comparação do gradiente de pressão. Os valores calculados situaram-se dentro de uma faixa de $\pm 5\%$ do medido, com uma ligeira tendência do modelo de subestimar esse parâmetro.

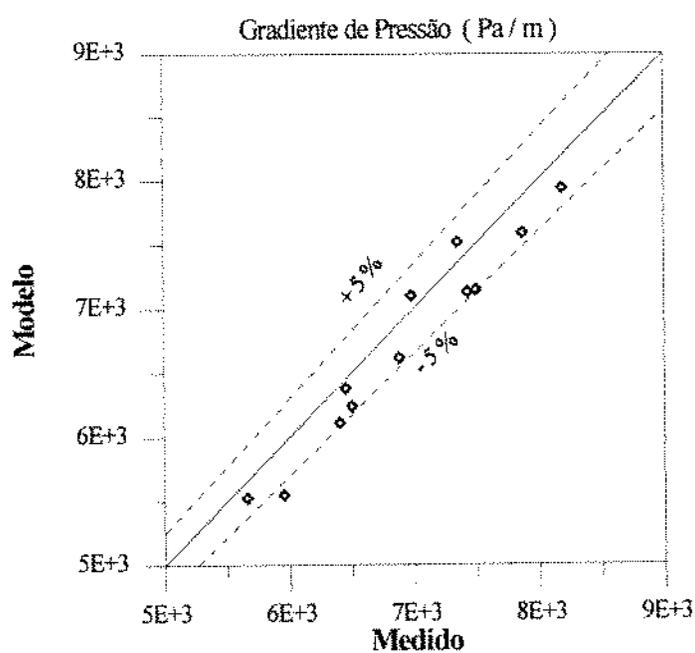


Figura 4.4 - Comparação do gradiente de pressão com dados de Griffith & Wallis [14]

4.2.2 Comparação com os dados de Mao & Dukler [20]

O aparato experimental utilizou um tubo de 12 m x 2", conectado a um separador ar-líquido à pressão atmosférica. Os fluidos eram ar e uma solução de mesma viscosidade e densidade da água, mas com uma baixa tensão superficial (0.01 N/m). A temperatura reportada é de 25 ± 3 °C. Os dados publicados referem-se a três estações de medição, situadas a 5.46, 6.68 e 8.87 metros da entrada do tubo. Os dados de velocidade superficial das fases foram medidas na última estação (@ 8.87 m). Isso tornou necessário corrigir a velocidade superficial do gás relatada para a pressão na entrada da tubulação, conforme requerido pelo simulador. Devido ao elevado tamanho das maiores bolhas em cada caso, tornou-se necessário discretizar a tubulação em apenas quatro células de 3 m cada. Ainda assim, apenas três dos cinco casos reportados no padrão pistonado puderam ser simulados. Como cada caso foi medido em três pontos diferentes tem-se nove valores para comparação. O intervalo de tempo foi estimado de modo que as bolhas percorressem a distância equivalente a um diâmetro do tubo por passo de tempo. As bolhas introduzidas na entrada da tubulação possuíam raio equivalente entre 1 e 5 mm. Estimou-se que as bolhas sairiam da tubulação após 236 passos de tempo. Cada simulação teve duração de 1000 passos de tempo e a estatística dos dados foi realizada nos últimos 500 passos. Os autores mediram, experimentalmente, o valor médio e o desvio padrão da altura das bolhas, do comprimento dos pistões de líquido e da velocidade das bolhas. A tabela 4.2 identifica os casos simulados, cujos resultados experimentais e os obtidos pelo modelo encontram-se na tabela 4.3.

Tabela 4.2 - Dados para comparação com experimento de Mao & Dukler [20]

Casos	u_{LS} m/s	u_{GS} m/s	Δt segundos	$(u_{GS})_{MON}$ m/s
01	0.322	0.76	0.030	0.61
02	0.490	0.76	0.030	0.53
03	0.121	0.16	0.075	0.10

Na tabela 4.3, os valores médios da altura de bolha e do comprimento do pistão de líquido encontram-se em diâmetros da tubulação. A velocidade é dada em m/s. O desvio padrão (d.p.) é dado em percentagem do valor médio. As posições 5.46m, 6.68m e 8.87m são as localizações das estações de medição do aparato experimental.

Tabela 4.3 - Comparação com dados de Mao & Dukler [20]

Posição →		5.46 m		6.68 m		8.87 m	
Casos	Altura bolha	medido	modelo	medido	modelo	medido	modelo
01	média d.p.(%)	10.2 46.2	9.56 74.0	12.0 57.2	11.5 73.4	17.0 50.3	14.4 54.8
02	média d.p.(%)	7.87 42.5	7.25 61.3	8.66 40.4	8.32 66.6	11.5 48.0	11.1 64.1
03	média d.p.(%)	3.54 53.6	2.92 104	4.13 88.0	3.78 84.6	3.92 87.8	4.99 61.8

Posição →		5.46 m		6.68 m		8.87 m	
Casos	Comp. pistão	medido	modelo	medido	modelo	medido	modelo
01	média d.p.(%)	11.4 50.3	9.57 50.2	12.4 55.5	11.1 34.7	15.6 47.8	11.4 31.7
02	média d.p.(%)	10.6 45.7	9.17 49.1	12.4 47.0	10.4 50.5	15.0 51.8	12.2 44.2
03	média d.p.(%)	12.2 54.2	12.5 36.7	10.2 59.2	12.7 31.9	12.5 54.1	12.8 28.1

Posição →		5.46 m		6.68 m		8.87 m	
Casos	Veloc. bolha	medido	modelo	medido	modelo	medido	modelo
01	média d.p.(%)	1.80 20.8	1.46 13.7	1.77 28.3	1.35 15.6	1.625 21.9	1.36 25.5
02	média d.p.(%)	1.96 18.0	1.46 16.8	1.95 17.4	1.64 15.9	1.876 18.2	1.70 19.8
03	média d.p.(%)	0.71 25.5	0.55 10.5	0.69 27.4	0.56 7.7	0.658 28.4	0.555 11.2

O gráfico da figura 4.5 apresenta os pontos experimentais de Mao & Dukler no mapa de padrão de escoamento de Taitel. Os pontos cheios são aqueles que puderam ser simulados com quatro células de 3 m. Considerou-se que a redução do número de células não permitiria obter resultados adequados para a comparação. Dos pontos não simulados, apenas dois foram observados no padrão pistonado. Os demais encontravam-se em transição ou totalmente no padrão agitante.

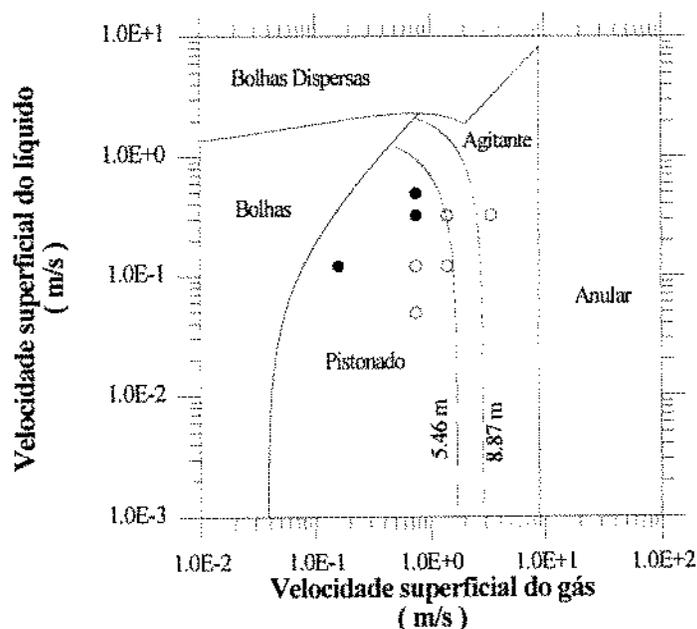


Figura 4.5 - Dados de Mao & Dukler [20] no mapa de padrão de escoamento de Taitel

As figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam uma comparação entre os valores calculados e medidos da altura das bolhas, do comprimento dos pistões de líquido e da velocidade das bolhas. A figura 4.6 mostra que o modelo prevê a altura da bolha com um erro menor que 20%, praticamente repetindo o desempenho obtido para as bolhas maiores com os dados de Griffith & Wallis [14], cuja tubulação possuía outro diâmetro.

Para o comprimento dos pistões de líquido, o gráfico da figura 4.7 mostra que os valores previstos pelo modelo apresentam erros inferiores a 25% dos valores medidos. É interessante notar que os dados relativos à primeira estação de medição, onde o escoamento ainda está em desenvolvimento, também obtiveram um bom desempenho.

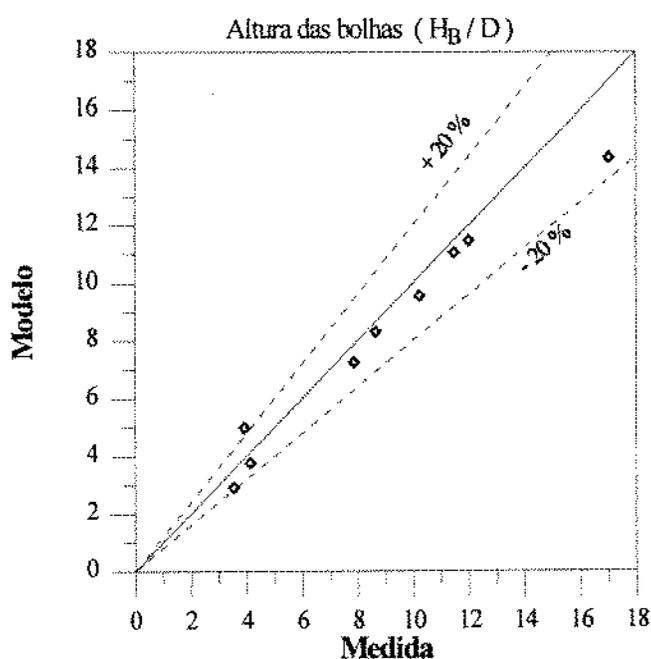


Figura 4.6 - Comparação da altura das bolhas com dados de Mao & Dukler [20]

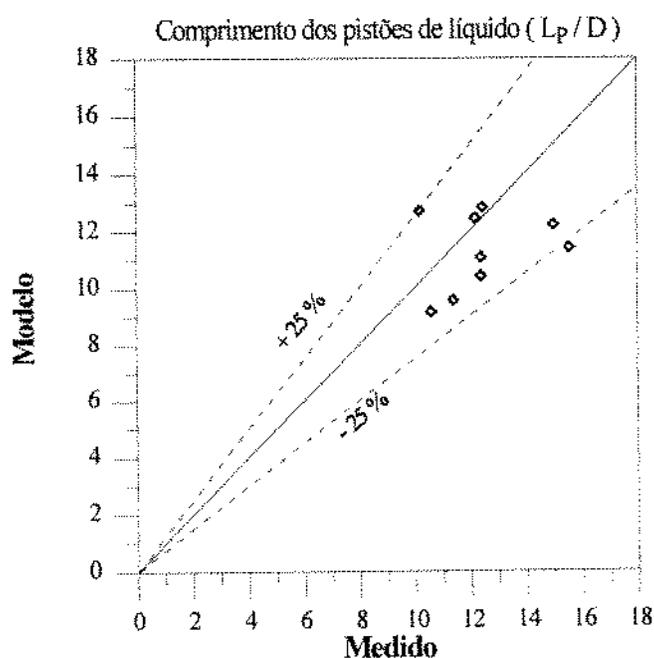


Figura 4.7 - Comparação do comprimento do pistão com dados de Mao & Dukler [20]

A figura 4.8 mostra que o modelo prevê uma velocidade de bolhas inferior à medida. A diferença média é de 16.8%. Esta diferença pode ser explicada, já que a velocidade prevista pelo modelo é a velocidade do centro de massa da bolha, enquanto a velocidade medida, pela metodologia adotada, é a velocidade do nariz da bolha. Como a bolha ao se deslocar encontra pressões cada vez menores, ela se expande e esta expansão causa um aumento aparente na velocidade. Esse fenômeno é particularmente importante quando a

pressão absoluta do sistema é baixa, como é o caso desse experimento. Outra possível fonte dessa diferença é o fato de que o modelo, como já foi discutido na seção 4.1, não consegue manter o pistão de líquido aerado como o é na realidade. A coalescência de bolhas dispersas no pistão de líquido no nariz das bolhas de Taylor causa um aumento aparente na velocidade dessas bolhas. **Mao & Dukler** [19] discutiram esse assunto e explicaram a diferença entre os coeficientes adotados por **Nicklin et al.** [25] e por **Fernandes et al.** [12] para a equação da velocidade da bolha de Taylor, à luz dessa hipótese.

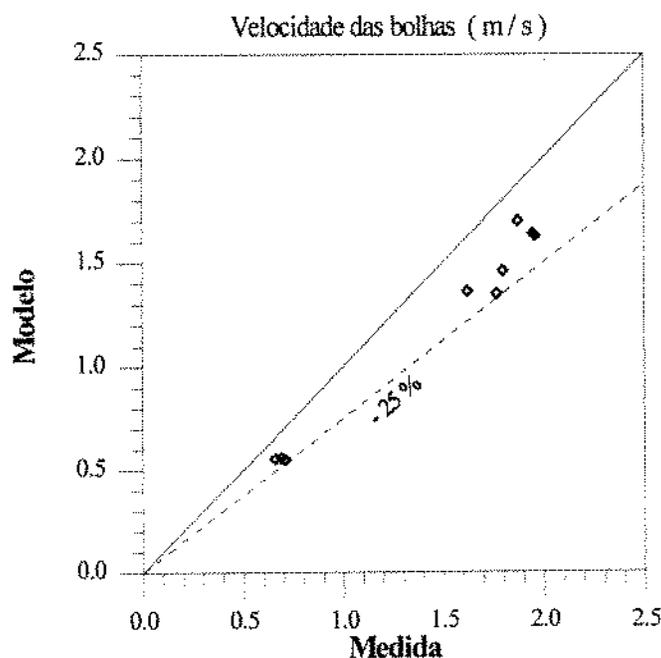


Figura 4.8 - Comparação da velocidade das bolhas com dados de Mao & Dukler [20]

Se os valores médios dos parâmetros medidos por Mao & Dukler puderam ser previstos pelo modelo com uma pequena margem de erro, o desvio padrão apresentou diferenças de até $\pm 60\%$ em relação ao medido. A figura 4.9 mostra a comparação entre os valores calculados e medidos do desvio padrão, em percentagem, dos três parâmetros determinados.

A despeito do grande espalhamento dos pontos pode-se assumir que o desvio padrão previsto apresenta um erro considerável, mas limitado. Como esse parâmetro mede a distribuição esperada das variáveis, possui menor importância que os valores médios, esses sim com um melhor resultado.

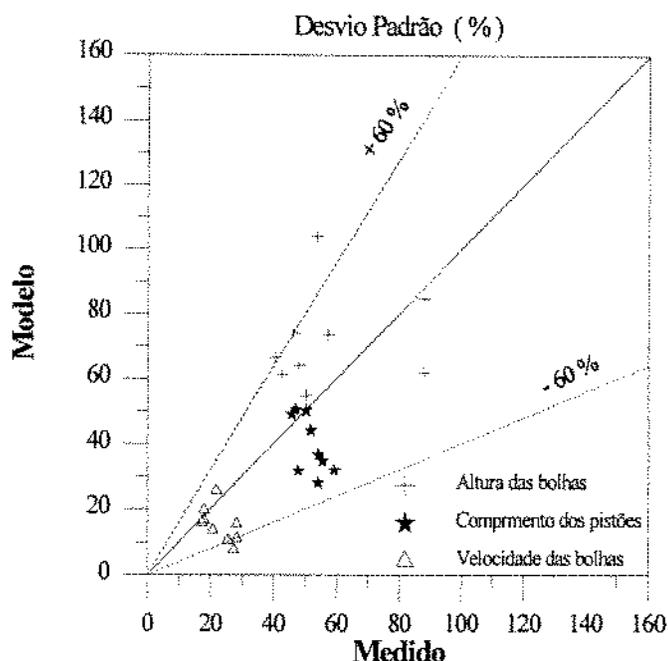


Figura 4.9 - Comparação do desvio padrão com dados de Mao & Dukler [20]

4.2.3 Comparação com os dados de Liné & Masbernat [18]

Os autores utilizaram o circuito de testes de Boussens, equipado no aparato de fluxo vertical com uma tubulação de 25 m x 3". Os fluidos utilizados foram gás e óleo a uma pressão de 981.0 kPa (10 Kg/cm²). As propriedades dos fluidos estão relatadas no artigo. A temperatura adotada na simulação foi de 20 °C e a tubulação foi discretizada em cinco células de 5m (casos 1, 2 e 4) e em quatro células de 6.25m (casos 3 e 5). O intervalo de tempo foi estimado de modo que as bolhas percorressem a distância equivalente a um diâmetro do tubo por passo de tempo. As bolhas introduzidas na entrada da tubulação puderam variar entre 1 e 8 mm de raio equivalente. Estimou-se que as bolhas saíam da tubulação após 328 passos de tempo. Cada simulação teve duração de 1000 passos de tempo e a estatística dos dados foi realizada nos últimos 500. Os autores mediram experimentalmente os valores médios da velocidade das bolhas e do gradiente de pressão.

A figura 4.10 apresenta os pontos experimentais no mapa de padrão de escoamento de Taitel. Os pontos cheios representam os dados que puderam ser simulados pelo modelo, e utilizados na comparação.

A tabela 4.4 apresenta os resultados experimentais e os obtidos pelo modelo.

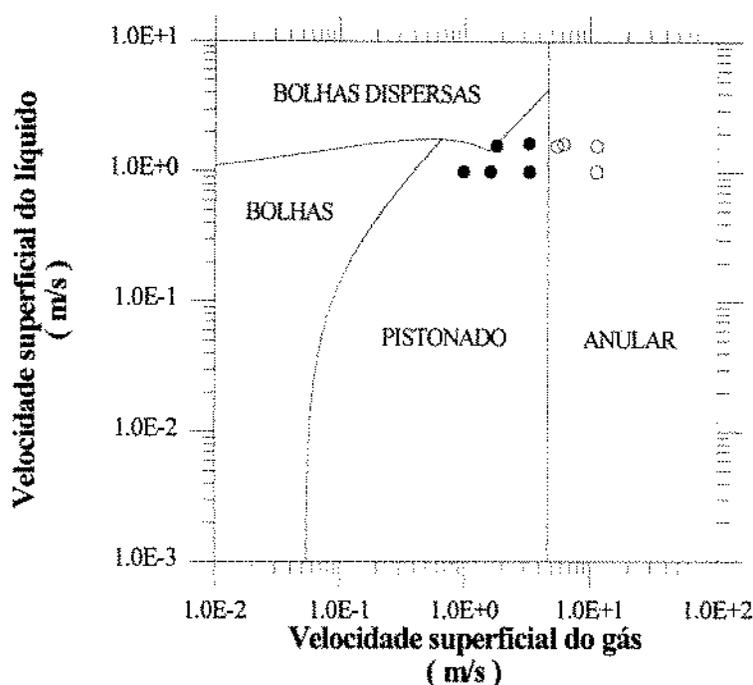


Figura 4.10 - Dados de Liné & Masbernat [18] no mapa de padrão de escoamento de Taitel

Tabela 4.4 - Dados para comparação com experimento de Liné & Masbernat [18]

Caso	u_{GS} m/s	u_{LS} m/s	Δt s	Veloc. bolha (m/s)		dP/dz (Pa/m)	
				medido	modelo	medido	modelo
1	0.98	1.00	0.030	2.7	2.78	5760	5570
2	1.61	1.00	0.020	3.9	3.58	4690	4765
3	3.31	1.00	0.015	5.6	5.73	3650	3740
4	1.80	1.60	0.020	n.d.	4.55	5670	5665
5	3.30	1.66	0.010	6.25	6.60	5000	4965

A previsão do modelo para esses dados foi muito boa. Os valores previstos para a velocidade da bolha mantiveram-se numa faixa de erro inferior a 10%. O gradiente de pressão obteve novamente o melhor desempenho, com erro menor que 5%. Os resultados experimentais foram obtidos com o sistema pressurizado ($P = 10 \text{ Kg/cm}^2$). Como foi discutido na seção 4.1, este procedimento evita oscilações tanto na velocidade do líquido quanto na pressão. É possível que essa particularidade tenha contribuído para o melhor desempenho observado nesta comparação.

As figuras 4.11 e 4.12 mostram a comparação dos parâmetros calculados com os valores experimentais reportados.

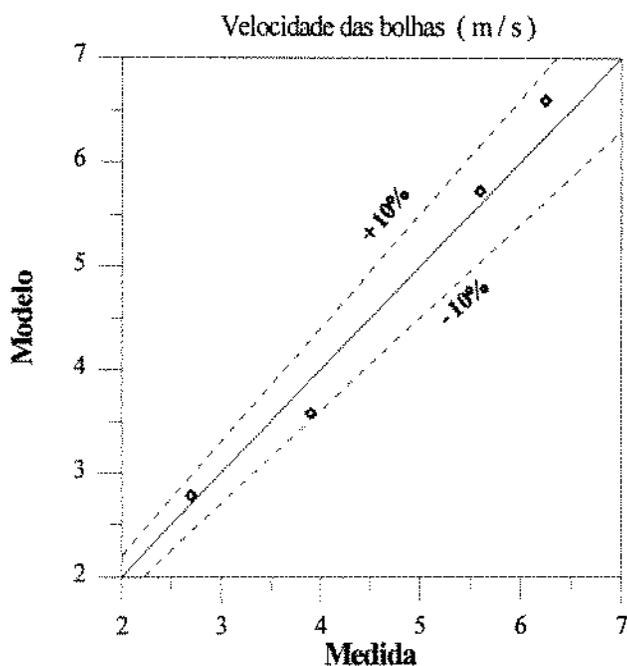


Figura 4.11 - Comparação da velocidade das bolhas com dados de Liné & Masbernat [18]

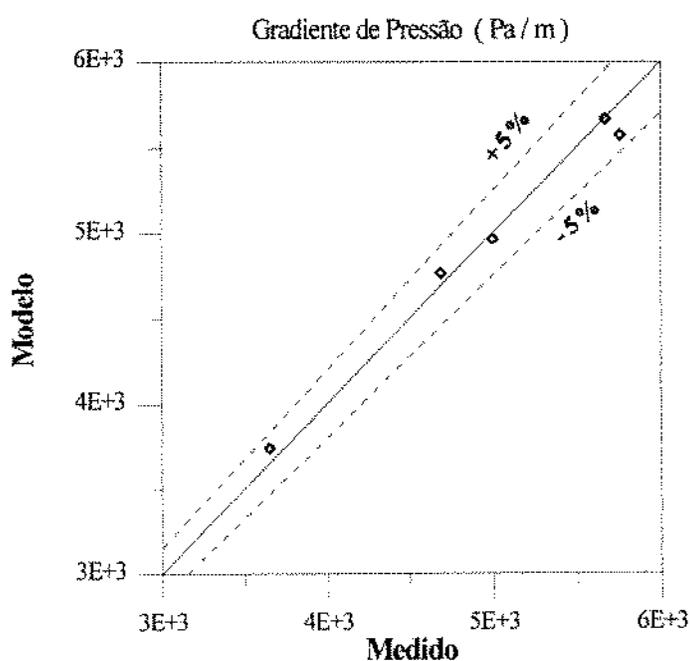


Figura 4.12 - Comparação do gradiente de pressão com dados de Liné & Masbernat [18]

O modelo teve seu desempenho verificado através da comparação de seus resultados com três trabalhos experimentais de diferentes autores, utilizando diferentes diâmetros de tubulação, fluidos e pressões. Para cada variável comparada - altura da bolha, comprimento de pistão, velocidade da bolha e gradiente de pressão - foram utilizados dados de dois autores diferentes. Os resultados apresentados permitem admitir que a precisão do modelo é da ordem de 35% para a altura das bolhas e para o comprimento dos pistões de

líquido, de 10% para a velocidade do centro de massa da bolha e de 5 % para o gradiente de pressão. Os únicos dados experimentais referentes ao desvio padrão dessas variáveis indicam um fraco desempenho do modelo na previsão da distribuição dos parâmetros com relação à média, apesar de se manter a ordem de grandeza desse valor, com erro da ordem de $\pm 60 \%$.

4.3 Análise dos resultados

De modo a verificar a influência dos dados de entrada do modelo em seus resultados foram realizadas diversas simulações. Adotou-se um padrão para comparação com os demais casos. Este padrão é o caso denominado **A09** e representa uma simulação em tubulação de 25m x 2", de uma mistura ar-água a 20 °C, pressão à jusante de 490.5 kPa (5 Kgf/cm²) manométrica ou 591.66 kPa_{ABS}, velocidade superficial tanto de líquido quanto de gás de 0.30 m/s medidas à montante da tubulação. A discretização foi realizada através de dez células de 2.5 m cada e o intervalo de tempo utilizado foi de 0.05 segundos, suficiente para que uma bolha percorra a distância equivalente a um diâmetro de tubulação em sua velocidade média. Como a tubulação possui comprimento de quase 500 diâmetros, a primeira bolha deve sair à jusante após 500 passos de tempo aproximadamente. A simulação teve duração de 2000 passos e a estatística dos resultados foi feita nos últimos 1000 passos.

Antes de qualquer comparação, deve-se verificar a capacidade de repetição dos valores calculados entre simulações com os mesmos parâmetros de entrada. Os resultados irão variar, já que na entrada da tubulação existe uma distribuição aleatória de posição e volume das bolhas. Três casos iguais ao caso padrão foram simulados (B01, B02 e B03). Os resultados encontram-se na tabela 4.5.

Os valores encontrados, apesar de não determinísticos, apresentam um grau de repetição muito bom para todas as variáveis envolvidas.

A primeira comparação efetuada refere-se a variação nas vazões dos fluidos. Foram simulados, para cada caso, 2000 passos de tempo. Estimou-se o valor de intervalo de tempo de modo que a primeira bolha saia da tubulação após 500 passos de tempo. A tabela 4.6 apresenta as velocidades superficiais dos fluidos à montante e o respectivo intervalo de tempo adotado. Os resultados médios apresentados na tabela 4.7 foram obtidos nos últimos 1000 passos de tempo, quando espera-se que o fluxo esteja totalmente desenvolvido.

Tabela 4.5 - Comparação entre os resultados de quatro simulações com os mesmos dados

CASOS →	A09	B01	B02	B03	Média
H_B / D d.p. (%)	10.7 36.1	10.3 36.7	10.7 30.9	10.9 47.1	$10.6 \pm 3 \%$ 37.7
L_p / D d.p. (%)	13.7 38.9	13.4 28.3	13.6 27.7	14.0 37.5	$13.7 \pm 2 \%$ 33.1
$\beta = H_B / (H_B + L_p)$	0.4385	0.4346	0.4403	0.4378	$0.4378 \pm 0.7 \%$
u_B (m/s) d.p. (%)	0.996 10.6	0.993 9.9	0.996 10.7	0.999 10.6	$0.996 \pm 0.3 \%$ 10.5
dP/dz (Pa/m)	6285	6277	6273	6285	$6280 \pm 0.1 \%$
P_{MON} (kPa) d.p. (%)	748.80 0.47	748.59 0.42	748.49 0.45	748.78 0.48	$748.66 \pm 0.02 \%$ 0.45

Tabela 4.6 - Dados da variação nas vazões volumétricas

Caso	u_{LS} m/s	u_{GS} m/s	Δt s	Caso	u_{LS} m/s	u_{GS} m/s	Δt s
A01	1.00	0.01	0.035	A10	0.10	0.01	0.125
A02	1.00	0.03	0.035	A11	0.10	0.03	0.125
A03	1.00	0.10	0.030	A12	0.10	0.10	0.100
A04	1.00	0.30	0.030	A13	0.10	0.30	0.070
A05	1.00	1.00	0.020	A14	0.03	0.01	0.150
A06	0.30	0.01	0.080	A15	0.03	0.03	0.150
A07	0.30	0.03	0.080	A16	0.03	0.10	0.125
A08	0.30	0.10	0.070	A17	0.03	0.30	0.080
A09	0.30	0.30	0.050				

A figura 4.13 mostra estes pontos no mapa de padrão de escoamento de Taitel. Barnea [3] sugere que uma bolha seja considerada cilíndrica quando sua altura for maior ou igual a dois diâmetros da tubulação. Utilizou-se então, neste modelo, a altura média das bolhas como critério para a transição bolhas-pistonado. Assumiu-se que a transição ocorreria quando a altura média das bolhas fosse igual a três diâmetros do tubo. A linha pontilhada da figura 4.13, paralela à transição do modelo de Taitel, representa essa transição. Essa curva foi levantada com o auxílio do gráfico da figura 4.14 onde a altura média das bolhas é apresentada para cada valor de vazão das fases.

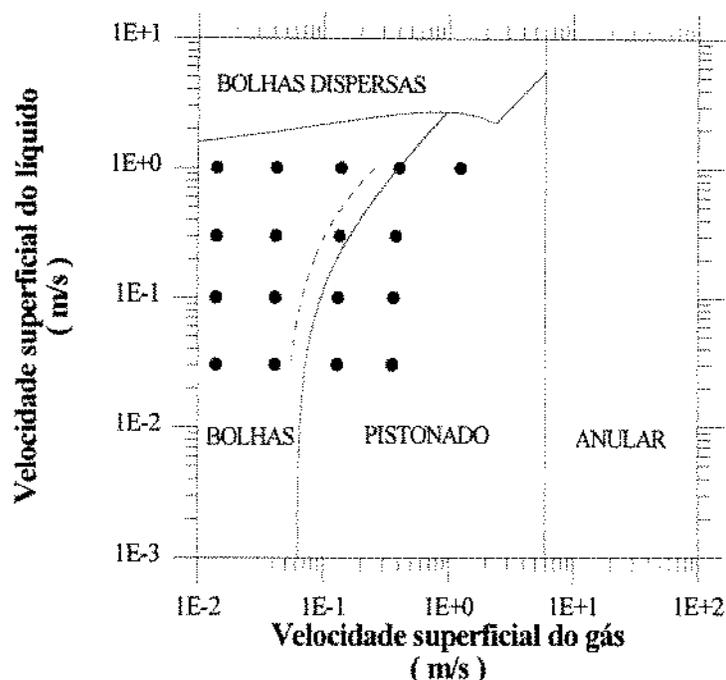


Figura 4.13 - Pontos simulados no mapa de padrão de escoamento de Taitel

A tabela 4.7 apresenta os resultados de velocidade média da bolha (u_B), velocidade média do pistão de líquido (u_{PL}), gradiente médio de pressão (dP/dz) em Pa/m e velocidade superficial do gás à jusante calculada através de $(u_{GS})_{JUS} = (u_{GS})_{MON} \cdot \frac{P_{MON}}{P_{JUS}}$, fórmula válida para gases ideais. São apresentados ainda, os valores médios da altura das bolhas (H_B) e do comprimento dos pistões de líquido (L_P) na saída do tubo, em valores relativos ao diâmetro da tubulação (D), assim como a razão $\beta = H_B / (H_B + L_P)$. Por fim, o número médio de bolhas na tubulação (N_B) e o tempo de CPU em minutos (t_{CPU}), em um microcomputador modelo AT386- DX - 40 MHz com coprocessador aritmético.

O gráfico da figura 4.14 apresenta curvas para cada velocidade superficial de líquido, do comportamento da altura média das bolhas com a velocidade superficial de gás. Neste gráfico encontram-se identificados os valores das velocidades de gás que provocam bolhas de altura média igual a três diâmetros, para cada velocidade de líquido. Esses valores foram os utilizados no gráfico da figura 4.13 para mostrar a transição bolhas-pistonado (linha pontilhada), de acordo com o critério estabelecido no modelo.

Tabela 4.7 - Resultados da variação nas vazões volumétricas

Caso	u_B m/s	u_{PL} m/s	dP/dz Pa/m	$(u_{GS})_{JUS}$ m/s	H_B/D -	L_p/D -	β -	N_B -	t_{CPU} min.
A01	1.49	1.010	9945	0.0142	0.25	-	-	545	846.9
A02	1.51	1.031	9800	0.0424	0.66	-	-	371	295.7
A03	1.60	1.101	9335	0.1394	1.69	13.9	0.1084	382	307.7
A04	1.86	1.303	8205	0.4040	4.80	14.3	0.2513	420	437.3
A05	2.76	2.011	5850	1.2473	15.2	13.8	0.5241	414	570.6
A06	0.63	0.310	9655	0.0141	0.52	-	-	293	235.2
A07	0.65	0.330	9320	0.0418	1.29	14.5	0.0817	286	215.5
A08	0.74	0.401	8305	0.1351	3.90	14.6	0.2108	338	327.4
A09	1.00	0.602	6285	0.3797	10.7	13.7	0.4385	343	345.7
A10	0.38	0.110	9520	0.0140	0.77	15.0	0.0488	231	135.4
A11	0.41	0.130	8990	0.0414	1.90	13.5	0.1234	266	228.7
A12	0.50	0.202	7470	0.1316	5.70	13.2	0.3016	307	-
A13	0.75	0.410	5090	0.3645	17.4	14.1	0.5524	308	335.2
A14	0.33	0.040	9465	0.0140	0.88	14.7	0.0565	199	130.0
A15	0.35	0.060	8835	0.0412	2.25	13.7	0.1411	243	184.6
A16	0.41	0.131	6950	0.1294	7.25	13.5	0.3494	272	260.5
A17	0.67	0.333	4470	0.3567	22.2	14.3	0.6082	298	358.3

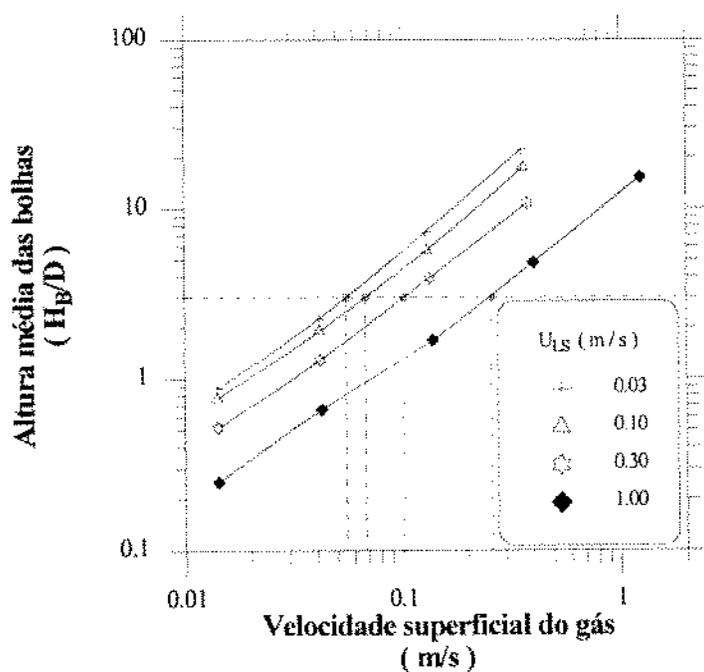


Figura 4.14 - Variação da altura média das bolhas com as vazões dos fluidos

Griffith & Wallis [14] propuseram uma correlação para a altura das bolhas, a partir dos dados medidos para tubos de 1/2", 3/4" e 1". A correlação pode ser escrita sob a forma:

$$\frac{H_B}{D} = \frac{\frac{x}{0.913} \cdot \left(\frac{L_P}{D}\right) + 0.5761}{1 - \frac{x}{0.913}} \quad (4.8)$$

onde $x = \frac{u_{GS}}{u_B}$, u_{GS} é a velocidade superficial do gás, u_B é a velocidade das bolhas de Taylor,

L_P é o comprimento do pistão e D o diâmetro do tubo. A faixa de aplicação da correlação, segundo seus autores, é para altura de bolhas entre dois e vinte diâmetros. A figura 4.15 mostra uma comparação entre os dados simulados e os previstos pela equação (4.8). O modelo apresenta resultados compatíveis com a fórmula de Griffith & Wallis, que possui a vantagem da simplicidade.

A figura 4.16 apresenta um gráfico da altura da bolha (em diâmetros da tubulação) pela razão entre a velocidade superficial do gás e a velocidade da bolha de Taylor. Aparentemente, para as mesmas condições de pressão, temperatura, diâmetro do tubo e fluidos envolvidos existe uma função entre essas duas variáveis adimensionais. É interessante notar que a razão u_{GS}/u_B , para os casos onde não há bolhas dispersas no pistão de líquido, é igual à fração de vazio.

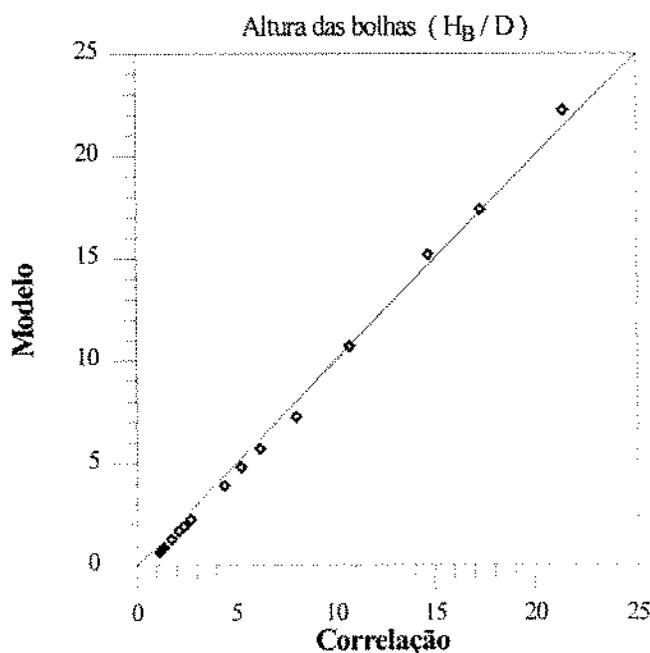


Figura 4.15 - Comparação entre o modelo e a correlação de Griffith & Wallis [14]

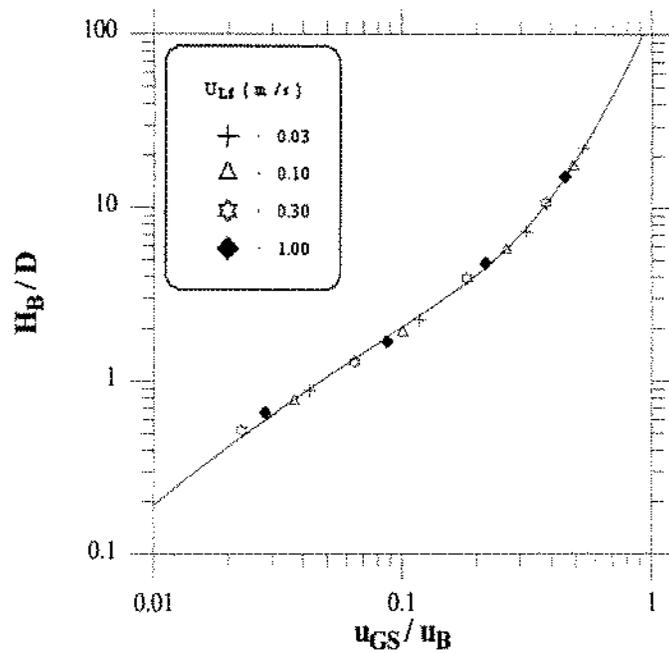


Figura 4.16 - Gráfico $(H_B/D) \times (u_{GS}/u_B)$

A figura 4.17 apresenta os resultados para o comprimento médio dos pistões de líquido. **Barnea & Shemer** [3] já haviam observado que o valor médio do comprimento dos pistões de líquido situa-se na faixa entre $10D$ e $15D$, e que esse valor seria independente das vazões dos fluidos. **Dukler et al.** [10] sugerem valores entre $8D$ e $16D$. No modelo desenvolvido, esse parâmetro variou entre $12D$ e $17D$, sem haver também uma correlação clara com as vazões.

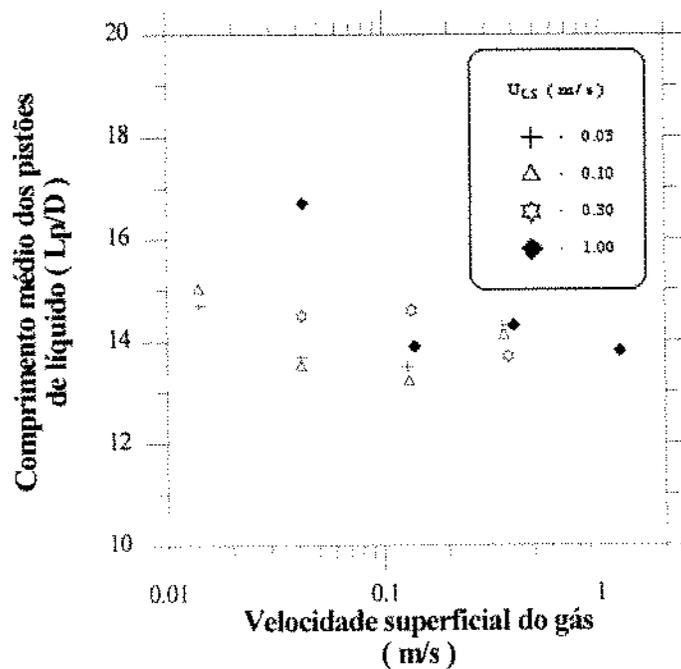


Figura 4.17 - Variação do comprimento médio dos pistões com as vazões dos fluidos

A velocidade média das bolhas de Taylor deve, teoricamente, obedecer a equação de Nicklin apresentada no capítulo 2. A figura 4.18 apresenta os resultados obtidos com o modelo e a linha tracejada representa a equação de Nicklin com uma perfeita concordância.

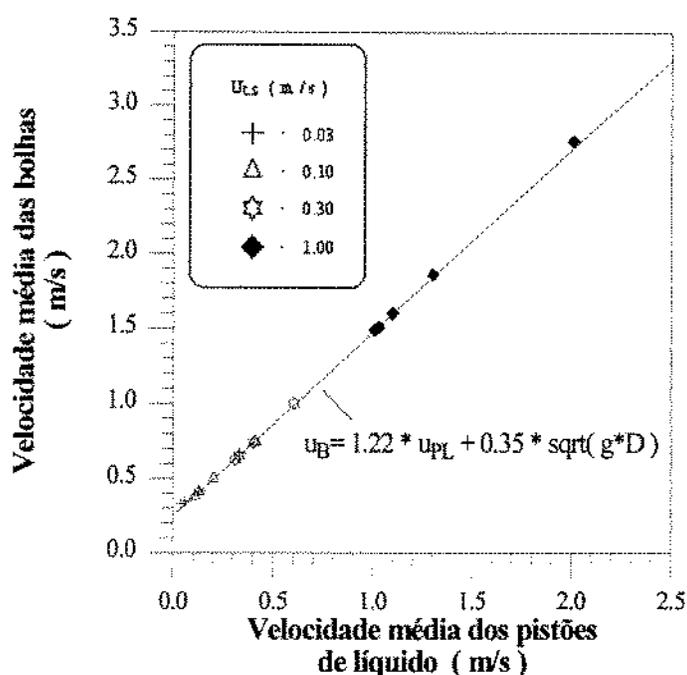


Figura 4.18 - Variação da velocidade das bolhas com a velocidade dos pistões de líquido

O comportamento do gradiente de pressão é apresentado na figura 4.19. Nota-se que, para baixas vazões de líquido e de gás, o gradiente calculado se aproxima do gradiente hidrostático do líquido ($\rho_L \cdot g$). Para vazões de líquido próximas a zero, mesmo um pequena vazão de gás já é suficiente para reduzir o gradiente, como pode ser observado. Quanto maior a vazão de líquido, maior é o gradiente, devido a parcela de atrito. Aumentando-se a vazão de gás, ao contrário, reduz-se o gradiente, devido a redução da componente gravitacional. O comportamento observado está coerente com a realidade.

Para verificar a influência do diâmetro da tubulação nos parâmetros calculados, foram simuladas tubulações de uma, duas (padrão), três e quatro polegadas, para as mesmas condições do caso padrão. Visando manter exatamente as mesmas condições de simulação, alterou-se o intervalo de tempo em cada caso, de modo que uma bolha percorra, neste intervalo, uma distância de um diâmetro em sua velocidade média esperada. Especificou-se ainda que as bolhas introduzidas na entrada da tubulação terão, no máximo, um raio equivalente de 10% do diâmetro do tubo. A tabela 4.8 apresenta, para cada diâmetro, os

valores utilizados para o intervalo de tempo (Δt) e para o maior raio equivalente das bolhas introduzidas. São ainda mostrados os valores calculados para a altura média das bolhas, para o comprimento médio dos pistões de líquido, para a velocidade média das bolhas e para o gradiente de pressão.

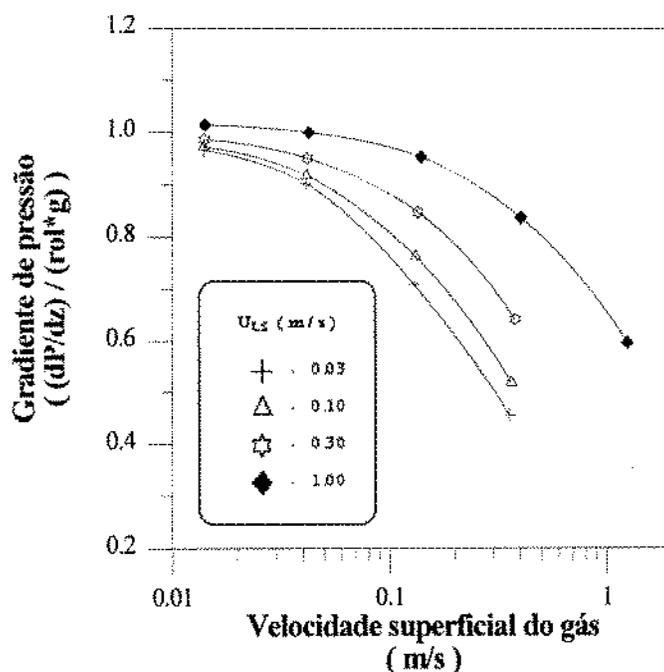


Figura 4.19 - Variação do gradiente de pressão com as vazões dos fluidos

Tabela 4.8 - Influência do diâmetro da tubulação

D pol.	Δt seg.	$(r_e)_{MAX}$ mm.	H_B/D -	L_p/D -	u_B m/s	dP/dz Pa/m
1	0.025	2.5	11.7	13.6	0.92	5904
2	0.050	5.0	10.7	13.7	1.00	6285
3	0.075	7.5	9.7	13.6	1.06	6572
4	0.100	10.0	9.6	14.2	1.11	6771

A altura média das bolhas varia ligeiramente, apresentando um decaimento assintótico com o aumento diâmetro. O comprimento médio dos pistões de líquido não sofre qualquer influência. O gráfico da figura 4.20 mostra que a velocidade média das bolhas aumenta linearmente com a raiz quadrada do diâmetro do tubo. Esta relação linear era prevista por Nicklin [25].

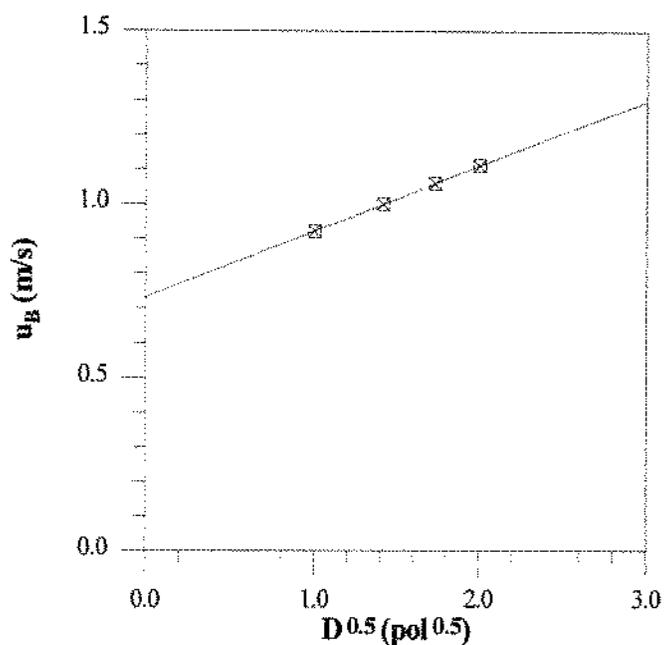


Figura 4.20 - Variação da velocidade das bolhas com \sqrt{D}

O gradiente de pressão cresce com o aumento do diâmetro, conforme mostrado no gráfico da figura 4.21. O motivo pode ser explicado pela relação anterior: quanto maior o diâmetro, maior a velocidade das bolhas de gás, maior o escorregamento e, conseqüentemente menor a fração de vazio. Com isso, a densidade da mistura e a parcela gravitacional do gradiente de pressão são maiores. Apesar da parcela devido ao atrito com a parede ser menor, o comportamento da componente gravitacional é predominante.

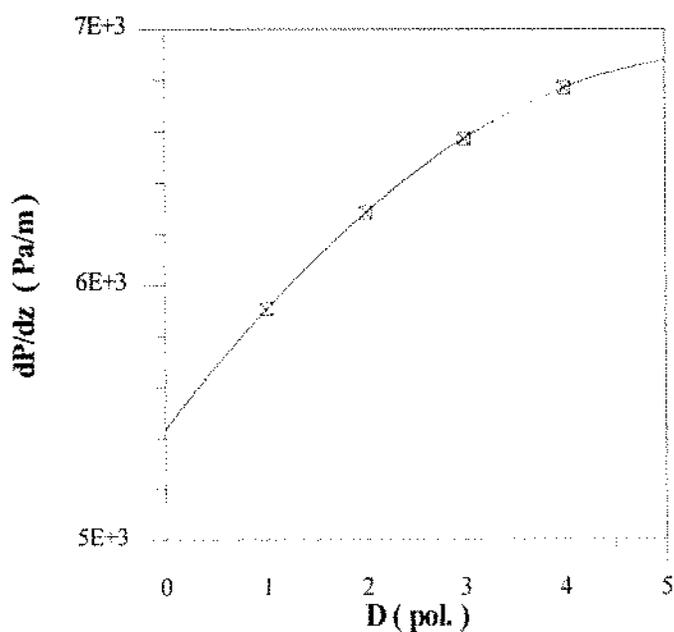


Figura 4.21 - Variação do gradiente de pressão com o diâmetro

A figura 4.22 mostra, para os quatro casos, a variação do comprimento médio dos pistões de líquido com a posição. Para este gráfico foram realizadas estatísticas em 100 trechos de 0.25m cada, durante os últimos 1000 passos de tempo. Apesar da dificuldade em se quantificar a distância da entrada da tubulação onde o escoamento possa ser considerado plenamente desenvolvido, qualitativamente pode-se verificar que, quanto maior o diâmetro, maior é esta distância. Os valores de desvio padrão de cada variável não sofreram alterações significativas.

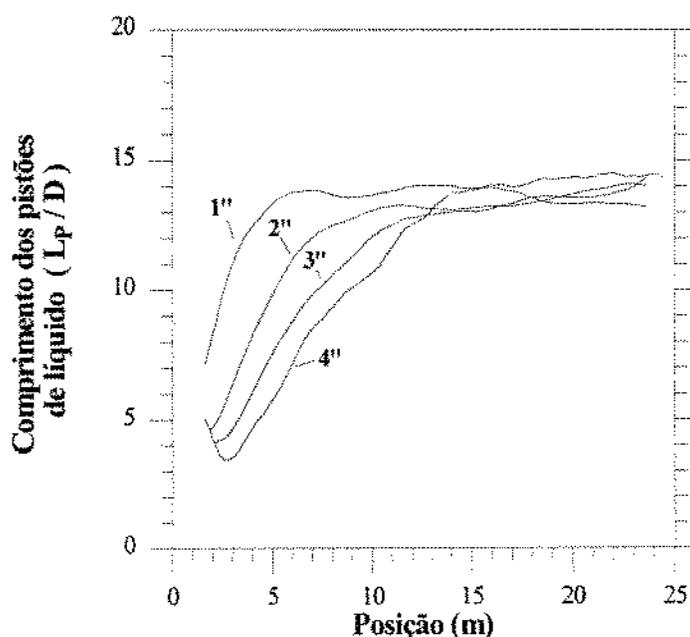


Figura 4.22 - Variação do comprimento médio dos pistões de líquido com a posição

A influência da pressão nos resultados foi avaliada simulando a condição padrão com dois outros valores à jusante da tubulação: 98.1 kPa (1 Kg/cm²) e 882.9 kPa (9 Kg/cm²). Não se consegue manter exatamente as mesmas condições nos três casos, já que o mesmo valor da velocidade superficial do gás na saída da tubulação (0.38 m/s) corresponde a diferentes valores na entrada: 0.20 m/s para pressão de 98.1 kPa, 0.30 m/s para 490.5 kPa (padrão) e 0.33 m/s para 882.9 kPa.

O resultado mais importante observado é o comportamento das propriedades do líquido, principalmente a vazão volumétrica. A figura 4.23 mostra, para os três casos, o comportamento da velocidade dos pistões de líquido na saída da tubulação ao longo do tempo. Nota-se claramente que quanto maior é a pressão, menor é a amplitude da oscilação desta velocidade, confirmando o que foi discutido na seção 4.1.

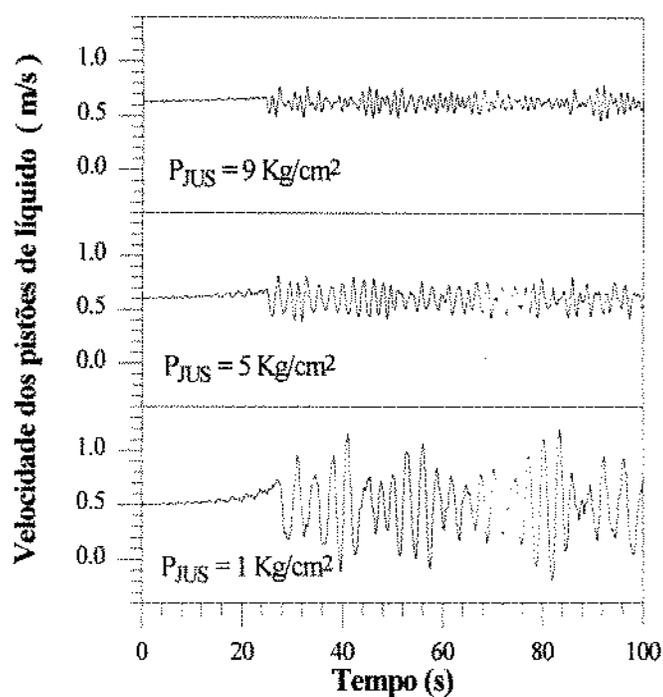


Figura 4.23 - Variação da velocidade dos pistões de líquido à jusante com o tempo

A figura 4.24 mostra o comportamento da pressão à montante da tubulação com o tempo para cada caso. Nota-se que, para baixas pressões, existe também um acréscimo na amplitude de oscilação daquela variável.

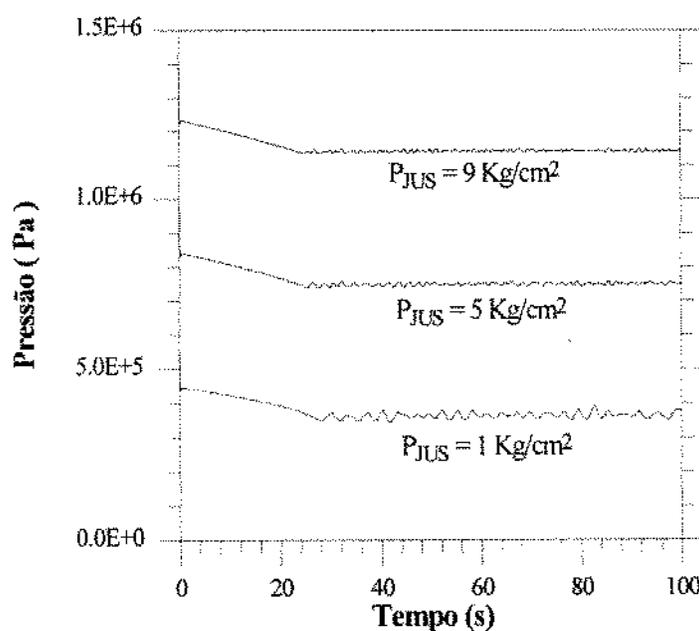


Figura 4.24 - Variação da pressão à montante com o tempo

Quando uma bolha sai da tubulação à jusante, o acréscimo da pressão no sistema provoca um aumento na densidade de todas as bolhas na tubulação, o que causa um aumento adicional da pressão abaixo de cada uma delas. Este fenômeno causa uma amplificação da

oscilação da pressão à montante da tubulação, que será maior quanto menor for a pressão média.

Foram avaliados como os resultados do caso padrão eram influenciados pela variação de alguns parâmetros específicos da simulação, tais como: tamanho da célula de discretização, incremento de tempo utilizado e dimensão das bolhas introduzidas na tubulação.

A tubulação foi dividida em cinco, dez e dezesseis trechos sem que se verificasse qualquer alteração nos valores calculados, exceto por um ligeiro acréscimo na pressão calculada à montante, quando o número de trechos é maior. Este comportamento era esperado, já que quanto maior o número de trechos, mais próxima da entrada da tubulação está o centro da primeira célula, e portanto, maior a sua pressão.

A influência do incremento de tempo foi verificada para os valores de 0.025, 0.05 e 0.10 segundos. Nesta faixa de variação não houve alteração nos valores médios calculados, mas os valores de desvio padrão sofreram ligeira queda com o aumento do intervalo de tempo. Na escolha do passo de tempo a ser utilizado deve-se evitar a aceleração do processo de coalescência das bolhas, como foi discutido na seção 4.1.

Verificou-se ainda o comportamento dos resultados variando o tamanho máximo das bolhas introduzidas na tubulação entre 3.5, 5.0, 7.5 e 10 mm de raio equivalente. Todos os valores médios mantiveram-se inalterados, mas o desvio padrão da altura das bolhas sofreu uma significativa redução no trecho inicial do tubo quando as bolhas eram maiores. A maior diferença foi no número médio de bolhas na tubulação e, conseqüentemente, no tempo de CPU. A tabela 4.9 apresenta estes valores e verifica-se que, para bolhas de até 3.5 mm, o tempo foi extremamente elevado.

Tabela 4.9 - Influência do raio máximo das bolhas introduzidas

$(r_e)_{MAX}$ mm.	Número de bolhas	t_{CPU} minutos
3.5	900	3164.0
5.0	343	345.7
7.5	117	27.9
10.0	71	10.4

As comparações realizadas variando os parâmetros de simulação permitiram definir o critério utilizado em todas as modelagens realizadas. Deve-se utilizar sempre o maior número de trechos possível, desde que o comprimento das células seja maior que três vezes a altura média das bolhas. O incremento de tempo sugerido é aquele que permita uma bolha percorrer a distância equivalente a um diâmetro do tubo em um passo de tempo. O raio equivalente máximo das bolhas introduzidas na tubulação deve ser de aproximadamente 10 % do diâmetro do tubo.

5. Conclusões e Recomendações

As seguintes conclusões resumem os resultados obtidos neste trabalho:

1. Foi desenvolvido um simulador computacional para o escoamento bifásico vertical, com um enfoque Lagrangeano para a fase dispersa e Euleriano para a fase contínua;
2. O modelo proposto é adequado para escoamento isotérmico e sem troca de massa entre as fases;
3. Não se conseguiu modelar a desintegração da cauda das grandes bolhas cilíndricas pela ação do filme de líquido, devido à ausência de um modelo de quebra de bolhas em meio altamente turbulento;
4. As variáveis previstas pelo modelo foram comparadas com dados experimentais, obtendo um desempenho satisfatório. Foram utilizados valores reportados por três autores, que usaram diferentes fluidos e diâmetros de tubulação;
5. Com base nesses dados, pode-se esperar uma precisão de $\pm 35\%$ tanto nos resultados de altura média das bolhas quanto nos de comprimento médio dos pistões de líquido, $\pm 10\%$ nos valores previstos para a velocidade do centro de massa das bolhas e $\pm 5\%$ no gradiente de pressão calculado;
6. A distribuição desses parâmetros, medida pelo desvio padrão, só pôde ser comparada com dados de um único autor. Esses valores apresentaram erros de até $\pm 60\%$;
7. O critério de transição adotado entre os padrões de escoamento *bolhas* e *pistonado* (altura média das bolhas igual a três vezes o diâmetro da tubulação) praticamente coincide com a transição prevista pelo modelo de **Taitel et al.** [30];
8. O modelo prevê a altura média das bolhas com uma boa concordância com a correlação proposta por **Griffith & Wallis** [14], dentro da faixa de aplicação desta correlação (altura das bolhas entre dois e vinte diâmetros do tubo);
9. A pressão média do sistema influencia a oscilação das velocidades das fases e da própria pressão. Quanto mais baixa for a pressão do sistema, maior será a amplitude destas oscilações, cuja frequência é a de saída das bolhas da tubulação.

As seguintes recomendações são feitas para futuros estudos:

1. Estudar um modelo para a quebra de bolhas em meio altamente turbulento. Os trabalhos de **Hinze** [16] e de **Otake et al.** [27] podem ser utilizados como referências iniciais;
2. Desenvolver um mecanismo de desintegração da cauda das grandes bolhas cilíndricas pela ação do filme de líquido. O artigo de **Fernandes et al.** [12] apresenta um modelo que pode ser utilizado como ponto de partida para esse estudo;
3. Integrar no modelo proposto o cálculo mais preciso do perfil das bolhas de Taylor, determinado pelas características dos fluidos e do escoamento. **Alves** [1] e **Mao & Dukler** [21] e [22] apresentam propostas que devem ser consideradas;
4. Incluir as equações de energia para que se possa modelar escoamentos não isotérmicos. O artigo de **Mortensen & Trapp** [24] apresenta o desenvolvimento destas equações.
5. Introduzir um modelo de troca de massa entre as fases líquida e gasosa para que se possa aplicar o simulador em poços de petróleo;
6. Obter mais dados experimentais de altura das bolhas e comprimento dos pistões de líquido. Procurar obter estes dados utilizando pressões tais, que o efeito de oscilação das velocidades das fases seja desprezível.

Anexo A

Integração analítica das equações da fase dispersa

A equação diferencial ordinária a ser integrada é:

$$A \cdot \frac{du}{dt} = -C \cdot |u| \cdot u + B \quad (\text{A.1})$$

onde A e C são positivos. Devemos analisar todas as hipóteses possíveis, de acordo com o sinal do coeficiente B e da velocidade u .

Hipótese 1: $u \geq 0$ e $B > 0$

Fazendo $u_\infty = \sqrt{|B|/C}$ e $\kappa = C/A$ podemos escrever:

$$\frac{du}{u_\infty^2 - u^2} = \kappa \cdot dt \quad (\text{A.2})$$

Para $u_\infty \geq u$, tem-se a solução:
$$\frac{1}{2 \cdot u_\infty} \cdot \ln \left(\frac{u_\infty + u}{u_\infty - u} \right) \Bigg|_{u_0}^u = \kappa \cdot \Delta t \quad (\text{A.3})$$

Chamando $\xi = \frac{u_\infty + u_0}{u_\infty - u_0}$ e $\omega = \kappa \cdot u_\infty$ tem-se:
$$\frac{u_\infty + u}{u_\infty - u} = \xi \cdot e^{2 \cdot \omega \cdot \Delta t} \quad \text{ou ainda}$$

$$u = u_\infty \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2 \cdot \omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2 \cdot \omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (\text{A.4})$$

Para $u_\infty < u$ tem-se:
$$\frac{1}{2 \cdot u_\infty} \cdot \ln \left(\frac{u - u_\infty}{u + u_\infty} \right) \Bigg|_{u_0}^u = -\kappa \cdot dt \quad (\text{A.5})$$

e então:
$$\frac{u - u_\infty}{u + u_\infty} = -\frac{1}{\xi} \cdot e^{-2 \cdot \omega \cdot \Delta t} \quad \text{ou ainda}$$

$$u = u_\infty \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2 \cdot \omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2 \cdot \omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (\text{A.6})$$

que é o mesmo resultado de (A.4).

Hipótese 2: $u < 0$ e $B > 0$

A equação diferencial fica:

$$\frac{du}{u_\infty^2 + u^2} = \kappa \cdot dt \quad (\text{A.7})$$

cuja solução é:
$$\frac{1}{u_\infty} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{u}{u_\infty} \right) \Bigg|_{u_0}^u = \kappa \cdot \Delta t \quad (\text{A.8})$$

daí, pode-se escrever:

$$\tan^{-1}\left(\frac{u}{u_{\infty}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{u_0}{u_{\infty}}\right) + \omega \cdot \Delta t \quad (\text{A.9})$$

Calculando a tangente e lembrando que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a) \cdot \tan(b)}$ tem-se:

$$\frac{u}{u_{\infty}} = \frac{(u_0/u_{\infty}) + \tan(\omega \cdot \Delta t)}{1 - (u_0/u_{\infty}) \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t)} \quad (\text{A.10})$$

e rearranjando:

$$u = u_{\infty} \cdot \frac{u_0 + u_{\infty} \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t)}{u_{\infty} - u_0 \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t)} \quad (\text{A.11})$$

Deve-se notar que este resultado só é válido enquanto u for negativo. No entanto, se Δt for grande o suficiente, u pode tornar-se positivo e, neste caso, deve-se utilizar-se a equação (A.4) do caso 1. O valor de Δt a partir do qual a velocidade será positiva é dado ao se anular o numerador da equação (A.11), ou seja:

$$\Delta t^0 = \frac{1}{\omega} \cdot \tan^{-1}\left(\frac{|u_0|}{u_{\infty}}\right) \quad (\text{A.12})$$

Assim, caso o intervalo de tempo seja inferior a Δt^0 , a equação (A.11) é aplicável. Caso contrário, utiliza-se a equação (A.4) tomando-se o cuidado de se usar $u_0 = 0$ e $\Delta t = \Delta t - \Delta t^0$. Neste caso: $\xi = 1$ e tem-se:

$$u = u_{\infty} \cdot \left(\frac{e^{2 \cdot \omega \cdot (\Delta t - \Delta t^0)} - 1}{e^{2 \cdot \omega \cdot (\Delta t - \Delta t^0)} + 1} \right) \quad (\text{A.13})$$

e chamando agora $\xi = e^{-2 \cdot \omega \cdot \Delta t^0}$ pode-se escrever, para $\Delta t > \Delta t^0$,

$$u = u_{\infty} \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2 \cdot \omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2 \cdot \omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (\text{A.14})$$

expressão semelhante à equação (A.4).

Hipótese 3: $u < 0$ e $B < 0$

Este caso é equivalente ao caso 1, já que podemos escrever a equação diferencial da forma:

$$\frac{d(-u)}{u_{\infty}^2 - (-u)^2} = \kappa \cdot dt \quad (\text{A.15})$$

e por analogia à equação (A.2), pode-se escrever a solução como:

$$u = -u_{\infty} \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (\text{A.16})$$

onde ξ é definido agora por: $\xi = \frac{u_{\infty} - u_0}{u_{\infty} + u_0}$

Hipótese 4: $u \geq 0$ e $B < 0$

Este caso é equivalente ao caso 2, já que a equação diferencial pode ser escrita de maneira similar à equação (A.7):

$$\frac{d(-u)}{u_{\infty}^2 + (-u)^2} = \kappa \cdot dt \quad (\text{A.17})$$

Utilizando procedimento análogo ao anterior, pode-se definir o intervalo de tempo Δt^0 necessário para se anular a velocidade pela equação (A.12) e a solução, enquanto a velocidade u é positiva, ou seja, enquanto $\Delta t < \Delta t^0$, será dada por:

$$u = u_{\infty} \cdot \frac{u_0 - u_{\infty} \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t)}{u_{\infty} + u_0 \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t)} \quad (\text{A.18})$$

Quando o intervalo de tempo for grande o suficiente para que a velocidade torne-se negativa, ou seja, quando $\Delta t > \Delta t^0$, a solução fica:

$$u = -u_{\infty} \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (\text{A.19})$$

com $\xi = e^{-2\omega \cdot \Delta t^0}$.

Hipótese 5: $u \geq 0$ e $B = 0$

Neste caso tem-se:

$$\frac{du}{u^2} = -\kappa \cdot dt \quad (\text{A.20})$$

cuja solução é: $-\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u_0} \right) = -\kappa \cdot \Delta t$ (A.21)

ou ainda:

$$u = \frac{u_0}{1 + u_0 \cdot \kappa \cdot \Delta t} \quad (\text{A.22})$$

Hipótese 6: $u < 0$ e $B = 0$

Neste caso a equação diferencial fica:

$$\frac{du}{u^2} = \kappa \cdot dt \quad (\text{A.23})$$

cuja solução é:

$$u = \frac{u_0}{1 - u_0 \cdot \kappa \cdot \Delta t} \quad (\text{A.24})$$

Pode-se resumir as seis hipóteses acima em quatro casos possíveis:

Caso 1: $B = 0$

De (A.22) e (A.24) tem-se:

$$u = \frac{u_0}{1 + |u_0| \cdot \kappa \cdot \Delta t} \quad (\text{A.25})$$

Caso 2: $u \cdot B \geq 0$ e $B \neq 0$

De (A.4), (A.6) e (A.16) tem-se:

$$u = \frac{B}{|B|} \cdot u_\infty \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (\text{A.26})$$

onde $\xi = \frac{u_\infty + |u_0|}{u_\infty - |u_0|}$

Caso 3: $u \cdot B < 0$ e $\Delta t \leq \Delta t^0$

onde: $\Delta t^0 = \frac{1}{\omega} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{|u_0|}{u_\infty} \right)$

De (A.11) e (A.18) tem-se:

$$u = \frac{B}{|B|} \cdot u_\infty \cdot \frac{u_\infty \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t) - |u_0|}{|u_0| \cdot \tan(\omega \cdot \Delta t) + u_\infty} \quad (\text{A.27})$$

Caso 4: $u \cdot B < 0$ e $\Delta t > \Delta t^0$

De (A.14) e (A.19) tem-se:

$$u = \frac{B}{|B|} \cdot u_\infty \cdot \left(\frac{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} - 1}{\xi \cdot e^{2\omega \cdot \Delta t} + 1} \right) \quad (\text{A.28})$$

onde $\xi = e^{-2\omega \cdot \Delta t^0}$.

A solução para a posição da partícula pode ser igualmente resolvida analiticamente, desde que sejam assumidas certas hipóteses. Note que a velocidade da bolha é dada por: $u_B = u_R + u_T$ onde u_R é a velocidade relativa determinada pelas equações (A.25) a (A.28) e u_T é a velocidade do meio (ou da mistura), levando-se em conta a esteira de bolhas próximas. Se for possível aproximar $u_T(t)$ por:

$$u_T(t) = u_T(t^0) + \frac{du_T(t^0)}{dt} \cdot (t - t^0) \quad (\text{A.29})$$

considerando a derivada total constante no intervalo $t-t^0$, pode-se calcular o deslocamento da partícula nesse intervalo de tempo através de:

$$\Delta z = \int_{t^0}^t u_B \cdot dt = \int_0^{\Delta t} u_R(\tau) \cdot d\tau + u_T(t^0) \cdot \Delta t + \frac{du_T(t^0)}{dt} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2}$$

ou

$$\Delta z = \delta z + u_T(t^0) \cdot \Delta t + \frac{du_T(t^0)}{dt} \cdot \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad (\text{A.30})$$

onde

$$\frac{du_T(t^0)}{dt} = \frac{\partial u_T(t^0)}{\partial t} + u_B(t^0) \cdot \frac{\partial u_T(t^0)}{\partial z}$$

e

$$\delta z = \int_0^{\Delta t} u_R(\tau) \cdot d\tau$$

Para cada caso tem-se uma solução de δz :

Caso 1 : $B = 0$

Integrando a equação (A.25):

$$\begin{aligned} \text{para } u_0 = 0, \quad \delta z &= 0 \\ \text{para } u_0 \neq 0, \quad \delta z &= \frac{u_0}{|u_0|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(1 + |u_0| \cdot \kappa \cdot \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Caso 2 : $u \cdot B \geq 0$ $B \neq 0$

Integrando a equação (A.26):

$$\delta z = \frac{B}{|B|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\left| \frac{\xi \cdot e^{\omega \cdot \Delta t} + e^{-\omega \cdot \Delta t}}{\xi + 1} \right| \right) \quad (\text{A.32})$$

$$\text{onde } \xi = \frac{u_x + |u_0|}{u_x - |u_0|}$$

Caso 3 : $u \cdot B < 0 \quad \Delta t \leq \Delta t^0$

Integrando a equação (A.27):

$$\delta z = -\frac{B}{|B|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\frac{|u_0|}{u_\infty} \cdot \sin(\omega \cdot \Delta t) + \cos(\omega \cdot \Delta t) \right) \quad (\text{A.33})$$

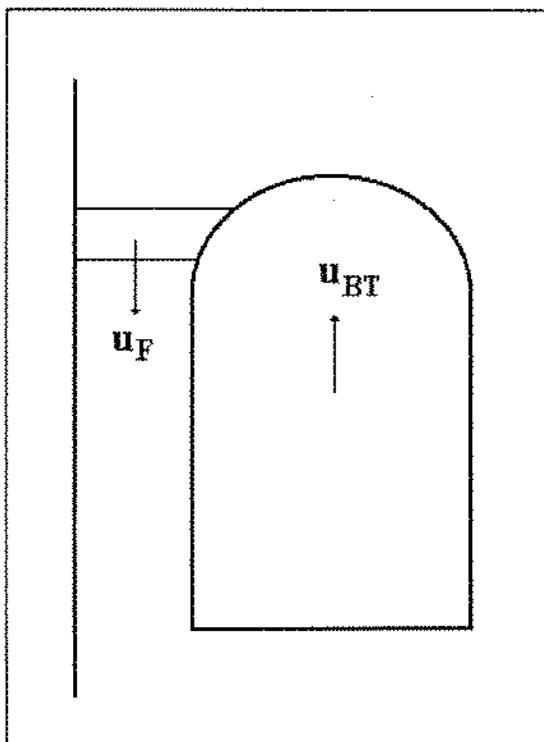
Caso 4 : $u \cdot B < 0 \quad \Delta t > \Delta t^0$

Neste caso faz-se $\delta z = \delta z_1 + \delta z_2$, onde δz_1 será calculado por (A.33) com $\Delta t = \Delta t^0$ e δz_2 será calculado por (A.32) com $\xi = 1$ e $\Delta t = \Delta t - \Delta t^0$. Assim,

$$\delta z = \frac{B}{|B|} \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \ln \left(\frac{u_\infty \cdot \cosh(\omega \cdot \Delta t - \omega \cdot \Delta t^0)}{\sqrt{u_\infty^2 + u_0^2}} \right) \quad (\text{A.34})$$

Anexo B

Análise do filme de líquido ao redor de uma Bolha de Taylor



Balanço de massa na Bolha de Taylor:

Considerando fluxo incompressível pode-se escrever:

$$u_{PL} = u_{BT} \cdot (1 - \alpha_F) + u_F \cdot \alpha_F \quad (B.1)$$

onde $\alpha_F = \frac{A_F}{A} = 1 - \alpha_{BT}$

Balanço de massa no filme:

$$\frac{\partial (\alpha_F \cdot (u_F - u_{BT}))}{\partial z} = 0$$

ou ainda: $(u_F - u_{BT}) \cdot \frac{\partial \alpha_F}{\partial z} + \alpha_F \cdot \frac{\partial u_F}{\partial z} = 0 \quad (B.2)$

Balanço da quantidade de movimento no filme:

$$\rho_L \cdot \alpha_F \cdot V \cdot (u_F - u_{BT}) \cdot \frac{\partial (u_F - u_{BT})}{\partial z} = -\rho_L \cdot \alpha_F \cdot V \cdot g - \tau_{WL} \cdot \pi \cdot D \cdot L + F_{GL} \quad (B.3)$$

onde τ_{WL} é a tensão cizalhante com a parede e F_{GL} é a força exercida pela bolha no filme e que será desprezada.

Dividindo (B.3) por $\rho_L \cdot V$ e fazendo $\tau_{wl} = \frac{1}{2} \cdot f_{at} \cdot \rho_L \cdot |u_F| \cdot u_F$ tem-se:

$$\alpha_F \cdot (u_F - u_{BT}) \cdot \frac{\partial u_F}{\partial z} = -\alpha_F \cdot g - \frac{2 \cdot f_{at}}{D} \cdot |u_F| \cdot u_F \quad (B.4)$$

Substituindo (B.2) em (B.4) de modo a eliminar a diferencial da velocidade, tem-se:

$$(u_F - u_{BT})^2 \cdot \frac{\partial \alpha_F}{\partial z} = \frac{2 \cdot f_{at}}{D} |u_F| \cdot u_F + \alpha_F \cdot g \quad (B.5)$$

Note que α_F só irá se estabilizar quando o termo a direita do sinal de igualdade for igual a zero. Isso se dará apenas quando u_F for negativo e:

$$u_F = -\sqrt{\frac{\alpha_F \cdot g \cdot D}{2 \cdot f_{at}}} \quad (B.6)$$

Pela equação (B.1) e utilizando o resultado de Nicklin et al. [25] para a velocidade da bolha em meio líquido turbulento:

$$u_F = 1.2 \cdot u_{PL} + 0.35 \cdot \sqrt{g \cdot D} - \frac{0.2 \cdot u_{PL} + 0.35 \cdot \sqrt{g \cdot D}}{\alpha_F} \quad (B.7)$$

Igualando (B.6) e (B.7) de modo a eliminar u_F tem-se:

$$K \cdot \alpha_F^{1.5} + [1.2 \cdot v + 0.35] \cdot \alpha_F - [0.2 \cdot v + 0.35] = 0 \quad (B.8)$$

onde $K = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot f_{at}}}$ e $v = \frac{u_{PL}}{\sqrt{g \cdot D}}$

Para estimar o valor da fração volumétrica do filme adotou-se um fator de atrito entre o filme líquido e a parede da tubulação constante e igual a 0.005. Assim $K = 10$ e a equação (B.8) pode ser solucionada para cada valor de v , conforme a tabela B.1:

Tabela B.1 - Possíveis valores de D_B / D

v	α_F	D_B / D
∞	0.167	0.913
19.5	0.1536	0.920
5.12	0.1351	0.930
1.46	0.1164	0.940
0	0.09975	0.9488

onde D_B/D é a razão entre os diâmetros da Bolha de Taylor e da tubulação e é calculada por:

$$D_B/D = \sqrt{(1 - \alpha_f)} \quad (\text{B.9})$$

Para $D = 2$ polegadas e fluxo volumétrico entre 0.5 e 10 m/s tem-se v variando entre 0.7 e 14.1. Para $D = 4$ polegadas essa faixa de fluxo volumétrico implica em v entre 0.5 e 10. Adotou-se no simulador computacional um valor constante de D_B/D igual a 0.930.

Anexo C

Determinação das velocidades características do problema

O problema a ser resolvido consta de uma equação de conservação da massa para cada bolha e uma para a fase contínua e uma equação de balanço da quantidade de movimento para cada bolha, além de uma para a fase contínua. Assim, para um sistema com N bolhas tem-se (2.N+2) equações diferenciais. As variáveis independentes são \mathbf{x} e \mathbf{t} , enquanto as variáveis dependentes são \mathbf{u}_i e V_i , para $i = 1, 2, \dots, N$ além de \mathbf{u}_L e P .

As equações da fase dispersa, para a condição particular de fluxo sem troca de fases ($\Gamma_i = 0$), temperatura constante e gás ideal são:

Continuidade:

$$V_i \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + P \cdot \frac{\partial V_i}{\partial t} = 0 \quad (C.1)$$

Quantidade de movimento:

$$(\rho_i + C_a \cdot \rho_L) \cdot \frac{du_i}{dt} - C_a \cdot \rho_L \cdot \left(\frac{\partial u_L}{\partial t} + u_i \cdot \frac{\partial u_L}{\partial z} \right) + \frac{\partial P}{\partial z} = \underbrace{\left[-\rho_i \cdot g - \frac{F_{Di}}{V_i} \right]}_{E_i} \quad (C.2)$$

Para a fase contínua, as equações são:

Continuidade:

$$\alpha_L \cdot C_L \cdot \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{1}{V_C} \cdot \sum_i^{em C} \left[\eta_{ic} \cdot \frac{dV_i}{dt} \right] + \alpha_L \cdot C_L \cdot u_L \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \alpha_L \cdot \frac{\partial u_L}{\partial z} = rhs_1 \quad (C.3)$$

Quantidade de movimento:

$$\alpha_L \cdot \frac{\partial u_L}{\partial t} + \frac{1}{\rho_L \cdot V_C} \cdot \sum_i^{em C} \left[\eta_{ic} \cdot \rho_i \cdot V_i \cdot \frac{du_i}{dt} \right] + \alpha_L \cdot u_L \cdot \frac{\partial u_L}{\partial z} + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = rhs_2 \quad (C.4)$$

Podemos rearranjar esse sistema em uma forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_L & b_1 & \dots & b_N & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_L C_L & 0 & 0 & \dots & 0 & d_1 & \dots & d_N \\ 0 & a & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a & 0 & 0 & c_N & 0 & \dots & 0 \\ V_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & P & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ V_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & P \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial P / \partial t \\ \partial u_L / \partial t \\ \partial u_1 / \partial t \\ \dots \\ \partial u_N / \partial t \\ \partial V_1 / \partial t \\ \dots \\ \partial V_N / \partial t \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_L / \rho_L & \alpha_L \cdot u_L & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_L \cdot C_L \cdot u_L & \alpha_L & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a \cdot u_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 1 & a \cdot u_N & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \partial P / \partial z \\ \partial u_L / \partial z \\ \partial u_1 / \partial z \\ \dots \\ \partial u_N / \partial z \\ \partial V_1 / \partial z \\ \dots \\ \partial V_N / \partial z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rhs_2 \\ rhs_1 \\ E_1 \\ \dots \\ E_N \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

onde $a = -\rho_L \cdot C_a$, $b_i = \frac{\eta_{ic} \cdot \rho_i \cdot V_i}{\rho_L \cdot V_c}$, $c_i = \rho_i + C_a \cdot \rho_L$ e $d_i = -\frac{\eta_{ic}}{V_c}$

Para se determinar as velocidades características do problema, deve-se fazer $\det(\lambda \mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0$, onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são as matrizes da equação (C.5). Assim,

$$\begin{vmatrix} -\alpha_L / \rho_L & \alpha_L \cdot (\lambda - u_L) & b_1 \cdot \lambda & \dots & b_N \cdot \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_L \cdot C_L \cdot (\lambda - u_L) & -\alpha_L & 0 & \dots & 0 & d_1 \cdot \lambda & \dots & d_N \cdot \lambda \\ -1 & a \cdot (\lambda - u_1) & c_1 \cdot \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & a \cdot (\lambda - u_N) & 0 & 0 & c_N \cdot \lambda & 0 & \dots & 0 \\ V_1 \cdot \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & P \cdot \lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ V_N \cdot \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & P \cdot \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (C.6)$$

O cálculo do determinante de uma matriz $(2N+2) \times (2N+2)$ requer uma simplificação da mesma através de operações entre linhas.

Fazendo: linha [1] = linha [1] - (b_k / c_k) . linha [k+2], para $k = 1, 2, \dots, N$

linha [2] = linha [2] - (d_k / P) . linha [k+N+2], para $k = 1, 2, \dots, N$

tem-se:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a \cdot (\lambda - u_1) & c_1 \cdot \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & a \cdot (\lambda - u_N) & 0 & 0 & c_N \cdot \lambda & 0 & \dots & 0 \\ V_1 \cdot \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & P \cdot \lambda & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ V_N \cdot \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & P \cdot \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (C.7)$$

onde:

$$x_{11} = -\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{b_i}{c_i} \right]$$

$$x_{12} = \alpha_L \cdot (\lambda - u_L) - \sum_{i=1}^N \left[\frac{b_i}{c_i} \cdot a \cdot (\lambda - u_i) \right]$$

$$x_{21} = \alpha_L \cdot C_L \cdot (\lambda - u_L) - \sum_{i=1}^N \left[\frac{d_i}{P} \cdot V_i \cdot \lambda \right] = \alpha_L \cdot C_L \cdot (\lambda - u_L) + \frac{(1 - \alpha_L) \cdot \lambda}{P}$$

$$x_{22} = -\alpha_L$$

O determinante acima pode ser reescrito como:

$$\det(\lambda \cdot A - B) = P^N \cdot (c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_N) \cdot \lambda^{2N} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (C.8)$$

Verifica-se que a equação (C.8) possui $2N$ raízes $\lambda = 0$ e as outras duas raízes saem do determinante da matriz 2×2 . As $2N$ raízes $\lambda = 0$ eram esperadas, já que as $2N$ variáveis dependentes das partículas são função apenas de t .

É possível calcular as outras duas raízes em alguns casos particulares:

1. ($\alpha_L \rightarrow 1$):

Nesse caso tem-se:

$$x_{11} = -\frac{\alpha_L}{\rho_L}, \quad x_{12} = \alpha_L \cdot (\lambda - u_L), \quad x_{21} = \alpha_L \cdot C_L \cdot (\lambda - u_L), \quad x_{22} = -\alpha_L$$

$$\text{e } \det_{22} = \frac{\alpha_L^2}{\rho_L} - \alpha_L^2 \cdot C_L \cdot (\lambda - u_L)^2 = 0 \quad (\text{C.9})$$

$$\text{cuja solução é } \lambda = u_L \pm \sqrt{\frac{1}{\rho_L \cdot C_L}} = u_L \pm \sqrt{\frac{dP}{d\rho_L}} \quad (\text{C.10})$$

Note que o segundo termo a direita do sinal de igualdade é a velocidade do som na fase líquida, como era de se esperar.

2. ($\alpha_L \neq 1$):

Nesse caso deve-se estudar duas hipóteses:

2.1. $C_a = 0$.

Caso o coeficiente de massa adicionada não seja considerado, pode-se fazer algumas simplificações, visto que $a = 0$, $c_i = \rho_i$, $x_{11} = -\frac{\alpha_L}{\rho_L} + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_{ic} \cdot V_i}{\rho_L \cdot V_C} = \frac{1-2 \cdot \alpha_L}{\rho_L}$ e

$$x_{12} = \alpha_L \cdot (\lambda - u_L).$$

Deve-se supor que $\alpha_L \cdot C_L \cdot P \ll (1 - \alpha_L)$. Pode-se resolver:

$$\det_{22} = \frac{\alpha_L \cdot (2 \cdot \alpha_L - 1)}{\rho_L} - \alpha_L \cdot (\lambda - u_L) \cdot \frac{(1 - \alpha_L) \cdot \lambda}{P} = 0 \quad (\text{C.11})$$

cuja solução é:

$$\lambda = \frac{u_L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u_L}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-2 \cdot \alpha_L}{1-\alpha_L}\right) \cdot \frac{P}{\rho_L}} \quad (\text{C.12})$$

É interessante notar que para valores pequenos (menores que 0.5) da fração de líquido, a velocidade característica deixa de ser real e o problema torna-se mal posto.

2.2. $C_a \neq 0$.

Neste caso pode-se supor que $C_a \cdot \rho_L \gg \rho_i$ e assim:

$$c_i = -a = C_a \cdot \rho_L, \quad x_{11} = -\frac{\alpha_L}{\rho_L}, \quad x_{12} = \alpha_L \cdot (\lambda - u_L), \quad x_{21} = \alpha_L \cdot C_L \cdot (\lambda - u_L) + \frac{(1 - \alpha_L) \cdot \lambda}{P}$$

e $x_{22} = -\alpha_L$ e a equação a se resolver é:

$$\det_{22} = \frac{\alpha_L^2}{\rho_L} - \alpha_L \cdot (\lambda - u_L) \cdot \frac{(1 - \alpha_L) \cdot \lambda}{P} = 0 \quad (C.13)$$

cuja solução é:

$$\lambda = \frac{u_L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u_L}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_L}{1 - \alpha_L}\right) \frac{P}{\rho_L}} \quad (C.14)$$

A solução definida em (C.14) ainda pode ser dividida em 2 hipóteses:

- $\alpha_L \rightarrow 0$: Tem-se as características $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = u_L$
- $\alpha_L \neq 0$: Supondo que a segunda parcela do discriminante de (C.14) seja muito maior que a primeira parcela, pode-se escrever:

$$\lambda = \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_L}{1 - \alpha_L}\right) \frac{P}{\rho_L}} \quad (C.15)$$

Referências Bibliográficas

- 1 Alves, I.N.- Slug Flow Phenomena in inclined pipes - PhD Thesis - The University of Tulsa, 1991
- 2 Barnea, D.- Effect of bubble shape on pressure drop calculations in vertical slug flow - Int. J. Multiphase Flow, vol.16, pp.79-89, 1990
- 3 Barnea,D.; Shemer L.- Void fraction measurements in vertical slug flow: applications to slug characteristics and transition - Int. J. Multiphase Flow, vol.15, pp.495-504, 1989
- 4 Bendiksen, K.H.- On the motion of long bubbles in vertical tubes - Int. J. Multiphase Flow, vol.11, pp.797-812, 1985
- 5 Clift, R.; Grace, J. R.; Weber, M.E.- Bubbles, Drops and Particles - Academic Press, Inc., 1978
- 6 Collins, R.; de Moraes, F.F.; Davidson, J.F.; Harrison, D.- The motion of a large gas bubble rising through liquid flowing in a tube - J. Fluid Mech., vol.89, pp.497-514, 1978
- 7 Couët, B.; Strumolo, G.S.- The effects of surface tension and tube inclination on a two-dimensional rising bubble - J. Fluid Mech., vol.184, pp.1-14, 1987
- 8 Crabtree, J.R.; Bridgwater, J.- Bubble coalescence in viscous liquids - Chem. Eng. Sci., vol.26, pp.839-851, 1971
- 9 Davies, R.M.; Taylor, G.- The mechanics of large bubbles rising through extended liquids and through liquids in tubes - Proc. Royal Soc. London - series A:200, pp.375-390, 1950
- 10 Dukler, A.E.; Maron, D.M.; Brauner, N.- A physical model for predicting the minimum stable slug length - Chem. Eng. Sci., vol.40, pp.1379-1385, 1985
- 11 Fabre, J.; Liné, A.- Modeling of two-phase slug flow - Annu. Rev. Fluid Mech., vol.24, pp.21-46, 1992
- 12 Fernandes, R.C.; Semiat, R.; Dukler, A.E.- Hydrodynamic model for gas-liquid slug flow in vertical tubes - AIChE J., vol.29, pp.981-989, 1983
- 13 Fréchou, D.- Étude expérimentale de l'écoulement gaz-liquide ascendant à deux et trois fluides en conduite verticale - Rev. Inst. Fr. Pét., vol.41, pp.115-129, 1986

- 14 Griffith, P.; Wallis, G.B.- Two-phase slug flow - J. Heat Transfer, vol. 83, pp. 307-320, 1961
- 15 Harmathy, T.Z.- Velocity of large drops and bubbles in media of infinite or restricted extent - AIChE J., vol.6, pp.281-288, 1960
- 16 Hinze, J.O.- Turbulence - McGraw-Hill, 1975
- 17 Ishii, M.; Zuber, N.- Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows - AIChE J., vol.25, pp.843-855, 1979
- 18 Liné, A.; Masbernat, L.- Écoulements intermittents de gaz et de liquide en conduite verticale - Rev. Inst. Fr. Pét., vol.40, pp.323-338, 1985
- 19 Mao, Z.-S.; Dukler, A.E.- Rise velocity of a Taylor bubble in a train of such bubbles in a flowing liquid - Chem. Eng. Sci., vol.40, pp.2158-2160, 1985
- 20 Mao, Z.-S. ; Dukler, A.E.- An experimental study of gas-liquid slug flow - Exp. Fluids, vol.8, pp.169-182, 1989
- 21 Mao, Z.-S.; Dukler, A.E.- The motion of Taylor bubbles in vertical tubes. I - A numerical simulation for the shape and rise velocity of Taylor bubbles in stagnant and flowing liquid - J. Comput. Phys., vol.91, pp.132-160, 1990
- 22 Mao, Z.-S.; Dukler, A.E.- The motion of Taylor bubbles in vertical tubes. II - Experimental data and simulations for laminar and turbulent flow - Chem. Eng. Sci., vol.46, pp.2055-2064, 1991
- 23 Moissis, R.; Griffith, P.- Entrance effects in a two-phase slug flow - J. Heat Transfer, vol.84, pp.29-39, 1962
- 24 Mortensen, G.A.; Trapp, J.A.- Two-phase flow modeling with discrete particle - Proc. ASME Winter Annual Meeting, Anaheim, Ca - HTD - vol.220, pp.73-85, 1992
- 25 Nicklin, D.J.; Wilkes, J.O.; Davidson, J.F.- Two-phase flow in vertical tubes - Trans. Instn. Chem. Engrs., vol.40, pp.61-68, 1962
- 26 Orell, A.; Rembrand, R.- A model for gas-liquid slug flow in a vertical tube - Ind. Eng. Chem. Fundam., vol.25, pp.196-206, 1986
- 27 Otake, T.; Tone, S.; Nakao, K.; Mitsuhashi, Y.- Coalescence and breakup of bubbles in liquids - Chem. Eng. Sci., vol.32, pp.377-383, 1977
- 28 Schlichting, H.- Boundary Layer Theory - Pergamon Press, New York, 1955

- 29 Sylvester, N.D.- A mechanistic model for two-phase vertical slug flow in pipes - Trans. of the ASME, vol.109, pp.206-213, 1987
- 30 Taitel, Y.; Barnea, D.; Dukler, A.E.- Modelling flow pattern transitions for steady upward gas-liquid flow in vertical tubes - AIChE J. , vol.26, pp.345-354, 1980
- 31 Taitel, Y.; Barnea, D.- Two-phase slug flow - Adv. Heat Transfer, vol.20, pp.83-132, 1990
- 32 Trapp, J.A.; Mortensen, G.A.; Ransom, V.H.- Particle-fluid two-phase flow modeling - Proc. Advances in Math.,Comp. and Reactor Physics, American Nuclear Society, 1991
- 33 Trapp, J.A.; Mortensen, G. A.-A discrete particle model for bubble-slug two-phase flows - J. Comp.Phys., vol.107, 1993
- 34 Wallis, G.B.- One dimensional two-phase flow - Mc-Graw Hill, New York, 1969
- 35 White, E.T.; Beardmore. R.H.- The velocity of single cylindrical air bubbles through liquids contained in vertical tubes - Chem. Eng. Sci., vol.17, pp.351-361, 1962

