



UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E DE FLUIDOS

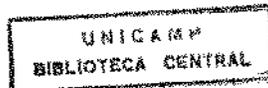
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TCC DEFENDIDA POR Vicente Luiz Scalon  
E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 20/08/93  
[Signature]  
ORIENTADOR

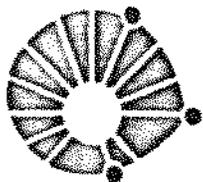
## Formação de Gelo em Torno de Cilindros Verticais

26/93

Autor: Vicente Luiz Scalon  
Orientador: Kamal A. R. Ismail

Campinas, 11 de Fevereiro de 1994.





UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA TÉRMICA E DE FLUIDOS

TESE DE MESTRADO

# Formação de Gelo em Torno de Cilindros Verticais

Autor: Vicente Luiz Scalon

Orientador: Kamal A. R. Ismail

---

Prof. Dr. Kamal A. R. Ismail, Presidente

---

Prof. Dr. Carlos Alberto C. Altemani

---

Prof. Dr. Nelson Murcia

Campinas, 20 de agosto de 1993.

# Índice

Índice	1
Resumo	3
Abstract	4
Agradecimentos	5
Nomenclatura	6
Figuras	10
Tabelas	12
<b>1 O Estudo do Fenômeno de Formação de Gelo</b>	<b>13</b>
1.1 Introdução . . . . .	13
1.2 Aspectos práticos . . . . .	14
1.3 Medidas experimentais . . . . .	15
1.4 Fenômeno de cristalização . . . . .	16
1.5 Os modelos de formação de gelo . . . . .	17
1.6 Relevância deste trabalho . . . . .	19
<b>2 Formulação do Problema</b>	<b>20</b>
2.1 Considerações iniciais . . . . .	20
2.2 Formulação do campo de escoamento . . . . .	23
2.3 Formulação do campo de temperatura e umidade . . . . .	23
2.4 Avaliação do processo de formação de gelo . . . . .	24
<b>3 Resolução da Equação do Momentum</b>	<b>25</b>
3.1 Mudança no sistema de coordenadas . . . . .	25
3.2 Adimensionalização das variáveis . . . . .	27
3.3 Condições de contorno . . . . .	28
3.3.1 Condições padrão . . . . .	29
3.3.2 Condições de Newman . . . . .	29
3.4 Procedimento computacional . . . . .	29
3.5 Discussão a respeito da malha utilizada . . . . .	31
3.6 Resultados . . . . .	33

<b>4</b>	<b>Resolução da Temperatura e Umidade</b>	<b>38</b>
4.1	Equações básicas para a representação do fenômeno . . . . .	38
4.2	Discretização das equações tipo vorticidade . . . . .	39
4.3	Interpolação polinomial das propriedades na fronteira . . . . .	41
4.4	Procedimento de resolução . . . . .	42
4.4.1	Condições de contorno para os campos de temperatura e umidade . . . . .	42
4.5	Determinação dos adimensionais $Nu$ e $Sh$ a partir dos campos de temperatura e umidade. . . . .	43
4.6	Resultados . . . . .	44
4.6.1	Campo de temperatura . . . . .	44
4.6.2	Campo de umidade . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Modelagem do Processo de Formação de Gelo</b>	<b>49</b>
5.1	Crescimento unidimensional dos cristais . . . . .	49
5.2	Condições de acoplamento . . . . .	53
5.3	Fase de ramificação dos cristais . . . . .	54
5.4	Formulação geral para a obtenção da condutividade . . . . .	57
5.5	Procedimento computacional . . . . .	59
5.6	Discussões sobre o modelo . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Resultados, Discussões e Conclusões</b>	<b>66</b>
6.1	Resultados Obtidos . . . . .	66
6.2	Conclusões . . . . .	82
	<b>Bibliografia</b>	<b>83</b>
<b>A</b>	<b>Comparação dos Modelos de Formação de Gelo mais Utilizados</b>	<b>87</b>
A.1	Modelo Parish-Sepsy . . . . .	87
A.1.1	Análise crítica . . . . .	90
A.2	Modelo Padki-Sherif-Nelson . . . . .	91
A.2.1	Descrição do método . . . . .	91
A.2.2	Análise crítica do modelo . . . . .	93
A.3	Modelo Jones-Parker . . . . .	94
A.3.1	Análise crítica . . . . .	96
<b>B</b>	<b>Discretização das Equações Básicas do Fenômeno de Formação de Gelo</b>	<b>97</b>
B.1	Primeira fase . . . . .	97
B.2	Segunda fase . . . . .	99

## Resumo

Neste trabalho procurou desenvolver-se um método que permitisse avaliações locais de propriedades no processo de formação de gelo. Para isto é necessário conhecer os valores locais dos coeficientes de película e portanto resolver os campos de escoamento, temperatura e concentração. Utilizou-se método de vorticidade e função corrente para a solução do campo de escoamento. As equações para resolução do campo de temperaturas e umidade também tiveram seus fluxos convectivos convertidos de forma a se tornarem dependentes da função corrente.

Obtidos os coeficientes de película usou-se um modelamento de dois estágios para a determinação da taxa de crescimento da fronteira de gelo. Os resultados obtidos foram plotados, analisados e comparados com resultados numéricos experimentais obtendo uma boa concordância. Resultados adicionais mostrando a variação da densidade, distribuição de temperatura, espessura da camada de gelo foram analisados e comentados.

Os resultados deste trabalho são da maior importância nos futuros estudos de formação de gelo e também na otimização energética do processo de degelo.

## Abstract

This investigation describes a model which permits evaluating the local properties during the process of frost formation. To achieve this objective it was necessary to know the local heat and mass transfer coefficient and hence solve the flow, heat and humidity fields. The solution is based upon converting the fields function in terms of the vorticity and stream function. Once the local heat and mass transfer coefficients are determined a two stage model for the frost formation was used to determine the growth rate of the frost layer. The results were then compared with existing numerical and experimental results and good agreement were found. Additional results were obtained to demonstrate the variation of frost density, temperature field and frost thickness. These results were analyzed and commented.

The results obtained from this investigation are important in future studies in frost formation as well as in the energy optimization of the defrosting process.

# Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais quero prestar as minhas homenagens:

Aos meus pais pelo apoio e incentivo para que este trabalho fosse terminado.

A minha esposa pela compreensão da dedicação a este trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Kamal A.R. Ismail, que me mostrou os caminhos a serem seguidos.

A todos os professores e colegas do DETF, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão desta tese.

# Nomenclatura

## Letras

<i>a</i>	coeficientes que acompanham as propriedades após a discretização;
PRD	produto genérico de adimensionais;
U.A.	umidade absoluta;
<i>F</i>	indica a correção devido a tortuosidade do meio poroso;
<i>Re</i>	número de Reynolds;
<i>Pr</i>	número de Prandtl;
<i>Sc</i>	número de Schimdt;
<i>Nu</i>	número de Nusselt;
<i>Sh</i>	número de Sherwood;
<i>h</i>	coeficiente de película de transferência de calor;
<i>h<sub>m</sub></i>	coeficiente de película de transferência de massa;
<i>S</i>	fator de sobre-relaxação no SOR.
<i>r</i>	coordenada radial;
$\bar{r}$	coordenada r adimensional;
<i>T</i>	temperatura;
<i>W</i>	fração de massa;
<i>w</i>	fração de massa adimensionalizada;
<i>u</i>	velocidade na direção radial $\xi$ ;
<i>v</i>	velocidade na direção angular $\eta$ ;
<i>v<sub>s</sub></i>	velocidade de fronteira;
<i>R</i>	raio do cilindro;
<i>t</i>	tempo;
<i>E</i>	coeficiente de acoplamento adimensional, sendo $\bar{E}$ dimensional;

$U$	velocidade;
$c_p$	calor específico;
$K_{frac}$	fração utilizada na determinação do $d_0$ ;
$k$	condutividade térmica;
$D$	difusividade térmica;
$\mathcal{D}$	diâmetro do tubo;
$d$	diâmetro da coluna de gelo;
$T$	tortuosidade;
$N$	número de nós na direção avaliada;
$P$	pressão;
$p$	pressão parcial;
$q$	calor transferido;

### Letras Gregas

$\alpha$	coeficiente de correção para regime permanente ou laminar para transferência de calor dentro do gelo na primeira fase de solidificação;
$\theta$	coordenada angular;
$\Theta$	temperatura adimensionalizada;
$\nu$	viscosidade cinemática;
$\xi$	coordenada radial transformada para trabalho com vorticidade e função corrente;
$\eta$	coordenada axial transformada para trabalho com vorticidade e função corrente;
$\omega$	vorticidade;
$\Omega$	vorticidade adimensionalizada;
$\psi$	função corrente;
$\Psi$	função corrente adimensionalizada;
$\epsilon$	fração de sólido no meio poroso;
$\chi$	fração de gás no meio poroso;
$\tau$	tempo adimensionalizado;
$\rho$	densidade;
$\phi$	propriedade genérica;
$\lambda$	entalpia de sublimação do vapor;

- $\Delta$  indica a distância e o tamanho do Volume de Controle (trabalha-se com grade uniforme) na direção da coordenada que o segue;

### Superescritos

- + tempo posterior;  
\* tempo intermediário;  
- tempo anterior;  
 $n$  valor em uma nova iteração;  
 $v$  valor na iteração anterior;

### Subscritos

- $\infty$  condição de corrente livre;  
 $w$  condição na parede;  
 $e$  propriedade avaliada na evaporação;  
 $g$  indica propriedades do gelo;  
 $ar$  propriedades do ar;  
 $ef$  indica propriedades do gelo como meio poroso;  
 $f$  propriedades do gelo com sua porosidade atual;  
 $tr$  avaliado na transição entre as etapas.  
 $no$  propriedade avaliada na face norte;  
 $so$  propriedade avaliada na face sul;  
 $es$  propriedade avaliada na face leste;  
 $we$  propriedade avaliada na face oeste;  
 $P$  propriedade avaliada no ponto nodal local;  
 $N$  propriedade avaliada no ponto nodal norte;  
 $S$  propriedade avaliada no ponto nodal sul;  
 $E$  propriedade avaliada no ponto nodal leste;  
 $W$  propriedade avaliada no ponto nodal oeste;  
 $i, j$  indica uma posição específica na malha.  
 $\gamma$  propriedades da fase vapor;

---

$\beta$	propriedades da fase sólida;
$d$	propriedade associada ao diâmetro;
$\delta$	propriedade avaliada na fronteira;
$0$	associada aos valores iniciais admitidos;
$sat$	propriedade de saturação;
$vap$	associada a propriedade de vapor;
$S$	indica valores de propriedades na superfície;

### Abreviações

V.C	volume de controle;
LU	método de decomposição de matrizes;

# Figuras

1.1	Formação do gelo em seu estágio inicial . . . . .	17
1.2	Diagrama da penetração do condensado . . . . .	18
2.1	Esquema geral do problema . . . . .	21
3.1	Transformações do sistema de coordenadas . . . . .	26
3.2	Comparação dos campos do escoamento para as três formas de discretização com $Re = 200$ . . . . .	35
3.3	Comparação dos resultados obtidos por outros autores para $Re = 200$ . . . . .	36
3.4	Comparação da vorticidade da superfície para $Re = 200$ . . . . .	37
4.1	Visualização das derivadas de $\Psi$ nas faces. . . . .	41
4.2	Resolução do campo de temperaturas considerando as diversas discretizações do campo de escoamento . . . . .	45
4.3	Resolução do campo de temperaturas obtidos por outros autores . . . . .	45
4.4	Valores do Nusselt na parede considerando as diversas discretizações do campo de escoamento e valores experimentais. . . . .	46
4.5	Valores do campo de umidade para $Re = 200$ . . . . .	47
4.6	Valores do Sherwod na parede para $Re = 200$ . . . . .	47
5.1	Valores dos tempos de transição na faixa de $-20^{\circ}\text{C}$ a $0^{\circ}\text{C}$ . . . . .	50
5.2	Esquema do formato do crescimento do cristal. . . . .	51
5.3	Cilindro de gelo circundado de ar num V.C. . . . .	53
5.4	Esquema do volume utilizado dentro do meio poroso. . . . .	55
5.5	Gráfico dos valores de $F$ e $F_s$ em função da $T_e$ . . . . .	56
5.6	Comparação dos resultados do modelo utilizado com os de Dietenberg . . . . .	59
5.7	Comparação entre a distribuição radial de densidades para $\Delta r$ constante e variando. . . . .	63
5.8	Tipos de cristais formados . . . . .	64
5.9	Varição da densidade com o tempo em função do tipo de cristal . . . . .	65
6.1	Distribuição da camada de gelo ao longo do cilindro para uma umidade de $0.005 \text{ kg/kg}$ ar seco. . . . .	67
6.2	Varição da espessura da camada de gelo ao longo do tempo. . . . .	67
6.3	Varição da densidade de um ponto médio da camada de gelo ao longo do tempo. . . . .	68
6.4	Varição da temperatura de superfície da camada de gelo ao longo do tempo. . . . .	69
6.5	Varição da velocidade da interface gelo-ar ao longo do tempo. . . . .	70

---

6.6	Varição da espessura da camada de gelo para dois pontos distintos ao longo do tempo. . . . .	71
6.7	Varição da densidade de um ponto médio da camada de gelo para diferentes posições ao longo do tempo. . . . .	72
6.8	Varição da temperatura de superfície da camada de gelo para diferentes posições ao longo do tempo. . . . .	73
6.9	Varição da velocidade da fronteira gelo-ar para diferentes posições ao longo do tempo. . . . .	74
6.10	Varição da espessura da camada de gelo em função da posição angular. . . . .	75
6.11	Varição da densidade em um ponto médio da camada de gelo em função da posição angular. . . . .	76
6.12	Varição da temperatura de superfície da camada de gelo em função da posição angular. . . . .	77
6.13	Varição da densidade em função da posição radial. . . . .	78
6.14	Varição da temperatura em função da posição radial. . . . .	79
6.15	Varição da Taxa de Transmissão local com a concentração em função do tempo. . . . .	80
6.16	Varição da Taxa de Transmissão global com a concentração em função do tempo. . . . .	81

## Tabelas

3.1	Tabela de adimensionais utilizados para Vorticidade-Função Corrente . . . . .	27
3.2	Resultados obtidos para diversos números de Reynolds associados a diversas malhas para $\xi_{\infty} = 1,5$ . . . . .	32
3.3	Caracterização da otimização do programa de resolução do escoamento para condições de fronteira fixa. . . . .	33
5.1	Valores de $K_{frac}$ adotados. . . . .	53

# 1

## O Estudo do Fenômeno de Formação de Gelo

### 1.1 Introdução

A formação de gelo é um fenômeno que aparece em muitas aplicações comerciais e industriais como no caso de asa de aviões, rotores de compressores, evaporadores de sistemas de refrigeração e muitos outros. A formação de gelo em equipamentos, na maior parte das vezes, prejudica o seu desempenho tornando necessário um processo de degelo para que o equipamento volte a operar em condições normais. A medida que o tempo passa a camada de gelo cresce e vai ficando mais densa, tornando ainda mais difícil o processo de degelo. No caso específico de evaporadores o processo de degelo é feito de forma não técnica e mais ainda, a distribuição das barra de degelo é feita sem qualquer fundamento científico. Como resultado disto obtém-se um mau desempenho dos equipamentos e maior gasto energético. Um estudo detalhado sobre o fenômeno de formação de gelo, os efeitos dos vários fatores operacionais e geométricos devem ajudar na melhora dos sistemas de degelo.

O fenômeno de formação de gelo tem sido objeto de muitos estudos há algum tempo, sendo que o primeiro trabalho publicado, segundo Chung e Algren [4], foi feito por Piennig em 1933 e publicado na *Gesundhids Ingenieur*, revista alemã. De lá para cá foram feitas pesquisas em diversos países e percebeu-se que, graças a este fenômeno, uma grande quantidade de energia era perdida em sistemas de refrigeração.

A perda de energia pode ser encarada por duas frentes: uma, a mais óbvia, é a perda na transferência de calor que é desviada para solidificar o vapor de água existente no ar; a outra seria a perda de carga nos evaporadores devido a diminuição na área de fluxo provocada pelo volume de gelo acumulado entre os tubos do evaporador.

No entanto o estudo do processo de formação de gelo é de relativa complexidade, fato que se deve aos seguintes fatores:

- as propriedades do gelo variam de acordo com as condições do ar que está escoando ao seu redor o que implica na formação de uma camada de gelo estratificada com diferentes propriedades desde o início de sua formação até o estágio final.

- a fronteira da interface gelo-ar está em movimento com a formação das camadas de gelo, característica típica de problemas de mudança de fase.
- a temperatura da superfície de gelo varia com o espessura da camada de gelo.
- as condições do escoamento variam simultaneamente com o incremento da espessura do gelo, pois a geometria do corpo é constantemente alterada.
- existe um fenômeno de difusão da superfície do gelo para o seu interior que altera, de forma significativa, as propriedades das camadas internas de gelo.

Devido a todas estas dificuldades anteriormente citadas a maioria dos estudos feitos na área são experimentais ou da investigação dos efeitos provocados pela presença da camada de gelo.

## 1.2 Aspectos práticos

A primeira frente de estudos é aquela que observa apenas os efeitos provocados pelo crescimento da frente de gelo. Nestes estudos destacam-se os de Stoecker [38]: ele fez uma análise comparativa dos efeitos da formação de gelo na troca de calor e perda de pressão e concluiu se tratar de parcela mais significativa a influência da formação de gelo sobre a perda de pressão. Esta publicação é uma das mais antigas obtidas e já foi publicada em uma revista que se dedicava exclusivamente a publicações envolvendo refrigeração.

Considerando esta mesma linha de avaliação das perdas energéticas, Niederer [19] procurou avaliar a influência do fenômeno de formação de gelo na troca de calor, para tanto utilizou-se de sua influência nos parâmetros da expressão de um coeficiente global de troca de calor:

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{f_i} + \frac{\mathcal{R}}{f_o}$$

onde  $U$  = coeficiente global de transferência de calor;  
 $f_i$  = coeficiente interno de transferência de calor;  
 $f_o$  = coeficiente externo de transferência de calor;  
 $\mathcal{R}$  = razão entre as áreas interna e externa.

Com esta análise o autor mostrou também que cerca de 20% do total de energia trocado no processo deve ser utilizado para o degelo do sistema, acentuando ainda mais a necessidade de um projeto correto que tente amenizar os efeitos da formação de gelo.

O degelo consiste, então, em uma terceira fonte de perda de energia a ser incluída quando consideramos que, para que o sistema volte a funcionar de forma eficiente, ele deve ser feito em um período regular. Existem estudos a respeito das formas de degelo, em outro artigo o próprio Niederer [20] faz uma descrição dos métodos mais utilizados no mercado, dividindo-as em três grupos básicos:

1. Degelo por ar: trata-se do método mais simples de todos consistindo apenas na circulação de ar dentro do sistema de refrigeração quando este é desligado. Este sistema é o mais barato mas sua utilização é restrita a temperaturas acima de 2°C. Uma observação importante a ser feita é que a utilização de ar aquecido não pode ser incluída neste grupo.

2. Degelo elétrico: sistema que se vale de aquecedores elétricos posicionados dentro do evaporador que são ligados quando o sistema deixa de funcionar. Neste caso o evaporador precisa ser pré resfriado antes que o sistema volte a funcionar.
3. Degelo por água: semelhante ao sistema elétrico, mas este se utiliza de água quente. Trata-se de um método muito eficiente mas sujeito ao problema de sobrepressão na linha de água.
4. Degelo por gás quente: é o mais complexo dos sistemas de degelo pois, em alguns casos, faz com que o gás quente, que deveria circular pelo condensador, circule pelo evaporador. Neste tipo de sistema é necessário tomar muito cuidado com o retorno de líquido para o compressor.

Para todos os sistemas de degelo é de fundamental importância um sistema que retire a água resultante do gelo derretido do circuito de refrigeração pois, caso contrário, a umidade faz com que o gelo volte a se formar rapidamente. Para controle dos sistemas de degelo utilizam-se normalmente *timers* que repetem o processo em tempos determinados.

Na área de degelo encontramos ainda publicações como a de Segal [34], que trabalhou com sistemas compactos e Pace [23] estudou a influência da umidade na formação de gelo procurando relacioná-la com a quantidade de energia perdida de acordo com a estação do ano.

### 1.3 Medidas experimentais

Outra área muito prolífera em publicações com a relação de formação de gelo é a área experimental, Stoecker [38], em seu trabalho já citado anteriormente, se valia de um procedimento experimental para confirmar suas hipóteses. Este foi também um dos primeiros trabalhos a tentar medir a evolução da espessura do gelo em função do tempo sendo que, no entanto, na época não eram bem conhecidos todos os parâmetros que influenciavam neste processo.

O trabalho publicado por Chung e Algren [4] faz uma descrição completa de uma montagem utilizada para um ensaio de formação de gelo em torno de um cilindro. O trabalho se utilizou de dois cilindros, um instrumentado para as medidas de transferência de calor enquanto o outro era utilizado para as medidas de transferência de massa. No final do trabalho os autores apresentam gráficos com os resultados das medidas obtidas, inclusive das propriedades do gelo como, por exemplo, a condutividade térmica.

Numa nova fase do estudo do fenômeno de formação de gelo se iniciou com trabalhos de Brian citados em diversos artigos citados nas referências e com uma tese de doutorado de Shah [36]. No entanto estes trabalhos estão voltados para a área físico-química trabalhando com temperaturas extremamente baixas e de pequena utilização no cotidiano. Porém foram estes trabalhos de criogenia os responsáveis por um novo impulso nas pesquisas do fenômeno de formação de gelo no final da década de 60.

Em trabalho mais recente Schneider [33] utilizou-se de equações semi-empíricas para obter estimativas da espessura da camada de gelo, procurando sempre compará-las com os resultados obtidos experimentalmente. No seu modelo a espessura da camada de gelo, apesar da dependência da equação da energia e da difusão, é trabalhada uma expressão de forma que o valor da posição da fronteira se tornasse independente do número de Reynolds e alguns outros fatores.

Monaghan, Grealish e Oosthuizen trabalharam em diversos testes com condições de insuflamento de ar monitoradas continuamente. Os resultados obtidos nos diversos testes foram graficados de forma que se pudesse ver a influência das condições de insuflamento sobre o tamanho da camada de gelo.

A variação das propriedades do gelo com parâmetros definidos são também responsáveis por um grande número de trabalhos, talvez até o maior número delas. Um dos estudos mais citados é o feito Yonko e Sepsy [43] no qual os autores, se valendo de resultados experimentais, fazem uma regressão da condutividade térmica em função da densidade. A relação entre a densidade e condutividade térmica não é novidade, ela é, muitas vezes, utilizada para obter estimativas da condutividade térmica de isolantes com bons resultados, o que sugeriu a sua utilização em gelo de baixa densidade.

Nesta mesma linha de estimativa das propriedades do gelo podem ser encontrados outros trabalhos como de Jones e Parker [14] e Ostin e Anderson [22], obtendo correlações através de uma análise diferenciada ou apenas gráficos das variações das propriedades no ensaio.

No entanto o trabalho mais abrangente publicado para a obtenção da condutividade térmica do gelo é sem dúvida o publicado por Dietenberg [6]. Neste trabalho o autor se utiliza de conceitos de associação de malhas em meios porosos para obter expressões para condutividade máxima e mínima para o gelo. Com estes valores e dados experimentais obtidos por outros autores elabora-se uma equação interpolante válida para qualquer valor de densidade. Apesar de bem mais complexo que as equações interpolantes tradicionais este método praticamente não tem restrições. Neste trabalho este método foi utilizado e para a sua melhor compreensão consulte a secção 5.4.

## 1.4 Fenômeno de cristalização

Outra linha dentro da área de formação de gelo é a área que procura estabelecer as propriedades em função do tipo de estrutura cristalina formada pelo gelo. Hayashi et al. [12] procuram descrever os tipos de cristais formados de acordo com o período de formação de gelo. Os períodos de formação são divididos em três grupos:

1. Período de crescimento unidimensional do cristal;
2. Período de crescimento tridimensional;
3. Período de fronteira plenamente desenvolvida ou período de crescimento quase-estático;

Esta subdivisão tem se tornado fundamental na elaboração dos modelos mais recentes que, para obter resultados cada vez mais aproximados, estão subdividindo o modelo de formação de gelo de acordo com as fases citadas acima.

Em seu artigo, Tokura, Saito e Kishinami, elaboram, a partir do conhecimento de como ocorre fenômeno de cristalização, adimensionais para cálculo da condutividade térmica mesmo em estágios primários. A figura (1.1) mostra como ocorre a formação de gelo desde a formação das gotículas.

Neste artigo o autor fornece formas de identificar o tipo de cristal a ser formado a partir da temperatura da superfície de gelo ( $t_e$ ) e da diferença das concentrações entre a corrente livre e a de saturação na superfície do gelo ( $\Delta C$ ).

O autor não estuda com maiores detalhes o terceiro período, mas Aoki et al. [1] faz um estudo detalhado a respeito. Este período é extremamente complexo pois envolve a permeação da água formada na superfície do gelo quando a temperatura da superfície do mesmo atinge temperatura maior, ou igual, à de fusão da água. Esta água condensada começa então a adentrar pelos poros do gelo congelando em patamares inferiores, como o mostrado na figura (1.2). Nesta figura são descritos dois processos de permeação de água que são dependentes da temperatura alcançada pela superfície da camada de gelo e

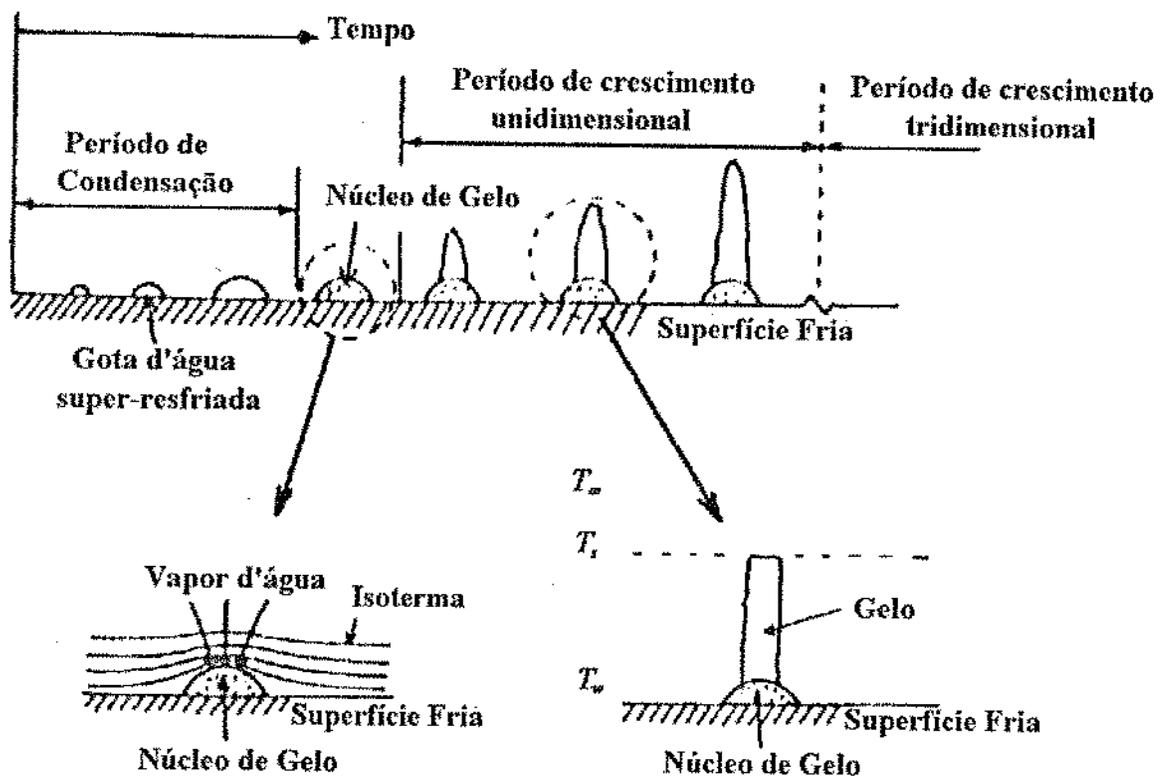


Figura 1.1: Formação do gelo em seu estágio inicial [42]

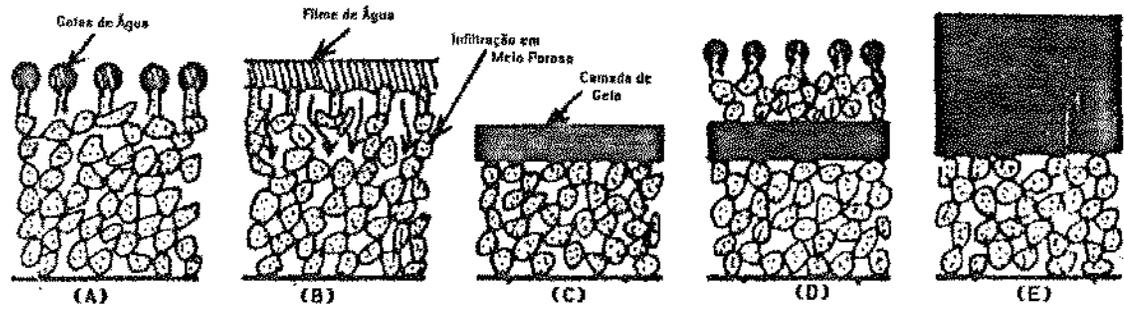
indicam o tipo da *pattern* a ser formada. Obviamente que os processos de permeação ocorrem quando a temperatura está relativamente próxima a  $0^{\circ}\text{C}$ .

O fato do congelamento ocorrer em patamares inferiores cria uma espécie de camada impermeável pela qual não há mais penetração de água, isto implicaria numa alteração significativa das propriedades acima desta camada impermeável. No entanto, de todas as fases, esta é a menos estudada por se tratar de uma fase dificilmente encontrada na prática em sistemas de refrigeração. Isto se deve ao fato que, antes da chegada desta etapa, em que a temperatura de superfície já se encontra próxima a  $0^{\circ}\text{C}$ , deve ter sido feito algum tipo de descongelamento do sistema utilizando um dos métodos descritos anteriormente. Dos artigos estudados nenhum fornece dados sobre a alteração das propriedades físicas do gelo envolvidas nesta fase.

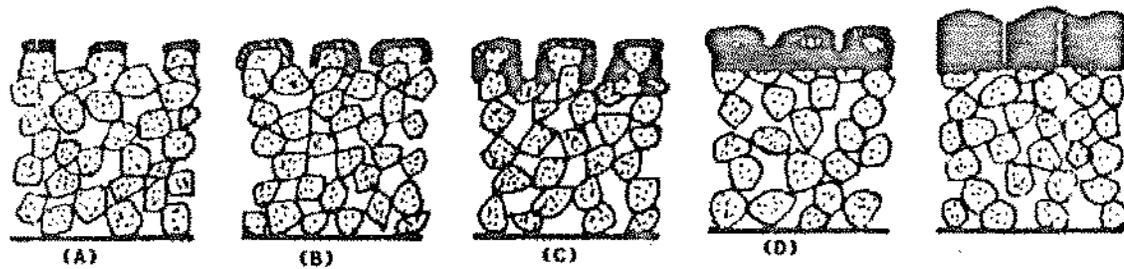
Em outro estudo Seki et al. [35], ainda nesta área, fizeram um estudo envolvendo crescimento de cristais para diferentes ângulos de ataque de uma placa plana super resfriada. Dados das propriedades físicas também são obtidos.

## 1.5 Os modelos de formação de gelo

O primeiro modelo de formação de gelo obtido é o modelo de Chung e Algren[4]. Trata-se de um modelo que se baseia fortemente em dados experimentais por eles obtidos, referência [5], com o fim específico de elaborá-lo. Apesar de já se utilizar de uma série de conceitos este modelo é composto principalmente por equações empíricas.



Etapas da formação do gelo - Pattern tipo I



Etapas da formação do gelo - Pattern tipo II

Figura 1.2: Diagrama da penetração do condensado [1]

Outro modelo mais recente e um pouco mais elaborado é o modelo proposto por Parish e Sepsy [26] para a resolução em torno de um cilindro. Este modelo procura resolver as equações que estão envolvidas no processo de formação de gelo: equação do momentum, da energia e de concentrações de vapor. No entanto para resolver o problema de formação de gelo, apenas balanços globais são considerados. O modelo foi estudado e uma sinopse de seu método de utilização pode ser visto na secção A.1.

O primeiro modelo a considerar de forma significativa a maior parte dos processos envolvidos no fenômeno da formação de gelo é o modelo proposto por Jones e Parker [14]. Neste modelo, apesar de ser efetuado um balanço global, todos os fenômenos e principalmente a variação das propriedades internas do gelo passaram a ser considerados tornando-se portanto um balanço fisicamente mais representativo. A descrição detalhada deste método é mostrada na secção A.3.

Procurando adaptar este modelo para trabalhar de forma local, Sami e Duong [30] fizeram algumas alterações no modelo de Jones e Parker procurando obter resultados de maior acuracidade. No entanto, de seu artigo é difícil a compreensão completa da metodologia utilizada sendo possível verificar, apenas, que o mesmo obtém resultados para valores locais, principalmente da densidade e conseqüentemente da condutividade.

Outro modelo extremamente simples foi proposto por Padki, Sheriff e Nelson [25] para que se possa avaliar de forma rápida, sem grande custo computacional ou intelectual, valores para formação de gelo em geometrias simples. Este método usa muitas equações empíricas para avaliação principalmente dos coeficientes de película para transferência de calor e massa. Sua grande vantagem se baseia no fato que para qualquer situação geométrica na qual se conheça o coeficiente de transferência de calor, ou se possua algum método para avaliá-lo, é possível obter estimativas sobre a taxa de crescimento de gelo. No entanto

se trata de um modelo muito aproximado e que só deve ser usado no caso de inoperância dos demais métodos ou para uma avaliação mais grosseira. Para uma melhor compreensão do método consulte a secção A.2.

Finalmente o último método descrito é, até agora o mais completo de todos, pois envolve todos os fenômenos presentes no processo de formação do gelo. Este modelo é representativo das duas primeiras fases do processo descritas anteriormente. Este modelo permite uma avaliação local de todas as propriedades e procura representar todos os processos envolvidos no fenômeno.

## 1.6 Relevância deste trabalho

Este trabalho foi feito procurando simular todo o processo de formação de gelo a partir de suas expressões básicas. Como já se viu diversos estudos foram feitos mas nenhum com abrangência maior do que este. Este estudo pode portanto avaliar fatores que outros não conseguem por trabalhar apenas dentro de uma certa faixa.

Veja por exemplo fatores que podem ser considerados neste estudo e que não podem ser estudados por nenhum outro dos vistos:

- i - Como o método se utiliza de um modelo geral para o cálculo da condutividade não existe limite para o valor da densidade atingida pelo gelo.
- ii - O modelo trabalha com avaliação local das propriedades, permitindo com isto que se avalie os pontos críticos de formação de gelo e não apenas balanços globais.
- iii - Como o escoamento é resolvido pode-se trabalhar com as mudanças de fronteira no caso de se tratar de um fator relevante.
- iv - O campo de temperaturas e concentrações é também resolvido permitindo que se englobe com facilidade condições não lineares que se aproximem das condições de contorno que realmente se apresentam no processo. Este é o caso de temperatura e concentração na superfície com valores próximos aos realmente encontrados, e não com valores fixos como os utilizados usualmente.
- v - Modelo completamente teórico permitindo avaliação de propriedades a partir do acoplamento entre a simulação das duas fases distintas de crescimento de cristal.

Com estes objetivos foi iniciado este trabalho visando o estabelecimento metodologias de cálculo confiáveis e usando modelos de formulação mais generalizada de modo a permitir comparação com resultados disponíveis, avaliar as diferenças e identificar as causas. Paralelamente estão sendo feitos estudos experimentais para obter informações sobre os efeitos dos diversos arranjos, espaçamento e número de fileiras de tubos.

Visando a aplicação na área de evaporadores este estudo se baseia, num primeiro instante na formação de gelo em torno de um cilindro vertical numa temperatura baixa com ar úmido escoando normal ao tubo. Os conceitos aqui utilizados foram baseados em uma geometria cilíndrica, no entanto estes conceitos podem ser estendidos a quaisquer geometrias. As informações obtidas serão utilizadas junto com medidas experimentais para prever o comportamento de uma unidade de evaporador.

# 2

## Formulação do Problema

### Introdução

Para que o problema de formação de gelo em torno de um cilindro vertical possa ser resolvido nos moldes mostrados na figura (2.1), é necessário que se resolva as equações do momentum, energia e transferência de massa. Estas equações englobam uma série de termos que dependendo das hipóteses podem ser suprimidos, para tanto utilizando uma notação vetorial mostraremos os termos que foram suprimidos, procurando explicar o porquê, e se possível avaliar a ordem de grandeza do mesmo.

### 2.1 Considerações iniciais

Para efeito de simplificação e melhor visualização dos termos das equações usou-se uma notação vetorial e a definição de uma série de operadores. Assim sendo para um sistema bidimensional de coordenadas polares define-se os operadores vetoriais:

$$\begin{aligned}\nabla\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\vec{i}_\theta \\ \text{div}(\vec{P}) &= \nabla\cdot\vec{P} = \frac{\partial P_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_\theta}{\partial\theta} \\ \frac{D\phi}{Dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\phi\end{aligned}$$

A equação da continuidade pode ser expressa através dos operadores já definidos como:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\text{div}(\vec{V}) = 0$$

Admitindo o valor de  $\mu$  constante a equação do momentum, pode ser expressa por:

$$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{B} - \nabla p + \mu\left[\nabla^2\vec{V} + \frac{1}{3}\nabla\text{div}(\vec{V})\right]$$

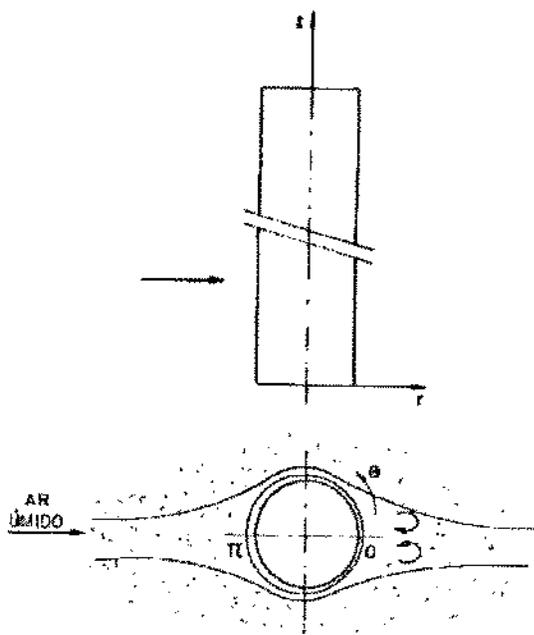


Figura 2.1: Esquema geral do problema

A equação da energia completa pode ser expressa por:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} + \text{div}(q) - q''' = \mathcal{B}T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi$$

sendo que  $\mathcal{B}$  é o coeficiente de expansão térmica dado por:

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p=\text{cte}}$$

e  $\Phi$  a função de dissipação viscosa.

A equação da continuidade de fases, quando não ocorrem reações químicas entre os componentes, pode ser expressa por:

$$\frac{DW}{Dt} = D_{ar} \nabla W$$

sendo  $D_{ar}$  o coeficiente de difusão do vapor d'água no ar.

A partir destas expressões adotaram-se as hipóteses simplificadoras para a resolução do campo de temperaturas, umidade e escoamento:

1. variação da densidade desprezível, pois as variações de temperatura e pressão são pequenas;
2. cilindro na posição vertical não existindo ação das forças de campo.
3. não existe nenhum processo interno que provoque geração de calor.

Assim sendo as expressões acima se reduzirão a:

- Equação da continuidade, baseada na hipótese (1):

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

- Equação do momentum, baseada na hipótese (1) e (2):

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V}$$

- Equação da energia, baseada na hipótese (1) e (3):

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} + \operatorname{div}(q) = \mu \Phi$$

- Equação da continuidade de fases:

$$\frac{DW}{Dt} = D_{ar} \nabla W$$

Na equação da energia pode-se avaliar o termo de dissipação viscosa, em comparação ao termo condutivo, a partir de uma análise feita de forma unidimensional da camada limite feita por Blasius. Segundo Holman [13] se considerarmos a variação radial das propriedades mais significativa que a angular e com isto se fizer uma análise de grandeza, que implica considerar que na fronteira da camada limite a velocidade será  $U_\infty$  e na parede do tubo ela é nula, tem-se:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{dr^2} \approx \alpha \frac{T_\infty - T_w}{\delta^2} \quad \text{e} \quad \frac{\mu}{\rho c_p} \left( \frac{\partial U}{dr} \right)^2 \approx \frac{\mu}{\rho c_p} \frac{U_\infty^2}{\delta^2}$$

Efetuada a comparação de ambos se verificará que se:

$$Pr \frac{U_\infty^2}{c_p(T_\infty - T_w)} \ll 1$$

então os termos de dissipação viscosa serão desprezíveis, no caso supondo:

- o regime é laminar sobre diâmetros pequenos, assim dificilmente a velocidade superará 2 m/s;
- para se ter uma troca de calor significativa a diferença de temperaturas deve ser no mínimo 10 K.
- o valor de  $Pr$  pode ser admitido como 0,7 para o ar e o  $c_p$  de 1000 J/kg.

Assim:

$$Pr \frac{U_\infty^2}{c_p(T_\infty - T_w)} = 0,7 \frac{2^2}{1000 \cdot 10} = 2,8 \times 10^{-4}$$

que é um valor significativamente menor que 1 indicando que o termo de dissipação viscosa pode ser desprezado.

Eliminando-se estes termos consegue-se através dos métodos numéricos resolver as expressões obtidas, assim sendo nas próximas secções serão tecidos comentários a respeito do método de solução destas equações.

## 2.2 Formulação do campo de escoamento

A resolução do campo de escoamentos é na realidade uma etapa demorada em qualquer modelo que a envolva. Além de demorada é também bastante complexa e os modelos que a resolvem com certa eficácia são ainda poucos. Na elaboração deste trabalho num primeiro momento tentou-se resolver a equação do escoamento em torno de um cilindro usando-se um método tipo SIMPLE. Para isto baseado em métodos recentes nos quais pode-se trabalhar com sistemas cartesianos genéricos e, no nosso caso especificamente, ainda ortogonal, utilizou-se o método proposto por Raithby, Galpin e Van Doormal [28, 11]. No entanto se conseguiu obter por este método soluções satisfatórias devido a diversas razões, a principal foi o fato de se trabalhar com uma grande parcela de informações explicitamente, ou seja, no termo fonte. Além disto as expressões dos coeficientes se tornaram relativamente complexas indicando que facilmente apareceriam erros na sua implementação que poderiam impedir a convergência do método. Existem também modelos mais genéricos como o proposto por Karki e Patankar [15, 16], que resolveriam qualquer sistemas de coordenadas, mesmo não ortogonais, mas com este método não se foi feito nenhum tipo de teste.

Como nesta primeira tentativa não se obteve sucesso buscou-se uma solução clássica: a resolução acoplada das equações de vorticidade e função corrente. Este método foi desenvolvido para que pudesse ser eliminada uma das variáveis envolvidas na resolução da equação do momentum: a pressão. A obtenção das equações básicas deste método depende de uma diferenciação trocada, ou seja a equação do momentum numa coordenada é derivada em função de outra e vice-versa. A soma das expressões resultantes fornecerá a equação da vorticidade. A expressão que seria obtida, para o caso de coordenadas polares, é mostrada a seguir:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] = \nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.1)$$

sendo que

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (2.2)$$

Baseando se nisto a equação da vorticidade fica:

$$\omega = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.3)$$

Repare que nestas expressões a pressão realmente não aparece mais. Para verificar o método de resolução utilizado para esta equação veja o capítulo 3.

## 2.3 Formulação do campo de temperatura e umidade

As equações da energia e continuidade de fases, também sofrem pequenas alterações ao se converterem para o formato de vorticidade e função corrente: as velocidades que aparecem nos termos convectivos serão expressas como derivadas do campo de função corrente. Assim sendo a equação da energia, já com as simplificações admitidas anteriormente pode ser expressa como:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\rho c_p}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( T \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] = k \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.4)$$

A equação da continuidade de fascs, por sua vez, pode ser expressa por:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( W \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( W \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right] = D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right] \quad (2.5)$$

Estas expressões são resolvidas no capítulo 4 de forma a se obter os coeficientes de película para transferência de massa e calor.

## 2.4 Avaliação do processo de formação de gelo

Com base nos coeficientes locais de película obtido no procedimento anterior foi montada uma formulação unidimensional para prever o crescimento da camada de gelo sobre o cilindro. Uma descrição detalhada deste modelo adotado pode ser visto no capítulo 5.

A interligação de todo este procedimento permite a obtenção de resultados para o crescimento da fronteira de gelo em torno de um cilindro e uma série de considerações que serão feitas no decorrer deste trabalho.

# 3

## Resolução da Equação do Momentum

### Introdução

A resolução de escoamento em torno de cilindro por vorticidade e função corrente foi motivo de diversos estudos, Fornberg [10] mostra um resumo de todos os trabalhos feitos até a publicação de seu artigo. Os trabalhos feitos para a resolução deste sistema se dividem em duas frentes: uma que procura resolver o problema em regime permanente, da qual o artigo citado é um dos maiores expoentes e outras frente, da qual tratam a maioria dos artigos desta área que resolve a equação como transiente dos quais fazem parte as publicações de Chun e Boehm [3] e de Son e Harranty [37].

Levando em conta este fato o método preferido seria o primeiro, no entanto este apresenta alguns inconvenientes graves, tais como:

- i - precisa resolver simultaneamente as equações de vorticidade e função corrente e não simplesmente acopladas;
- ii - métodos iterativos de solução de matrizes não conseguem resolver o problema, somente métodos diretos como LU ou pivoteamento;
- iii - as soluções obtidas são bem mais restritas se limitando a número de Reynolds mais baixos.

Certamente este método de solução não apresenta apenas inconvenientes, sua resolução, apesar de envolver a inversão de uma matriz composta por um grande número de elementos, é bem mais rápida que a solução dependente do tempo. Além disto os resultados fornecidos neste caso apresentam convergência mais rápida sem que, no entanto compensem os inconvenientes apresentados pelo método de regime permanente, o que conduziu o trabalho para a solução em regime transiente.

### 3.1 Mudança no sistema de coordenadas

Foi verificado que a solução das equações de vorticidade e função corrente da forma mostrada nas equações (2.1) a (2.3), não pode ser otimizada para uma solução de resultados suficientemente precisos. Isto porque para a obtenção de uma boa solução destas equações é preciso que se trabalhe com a fronteira

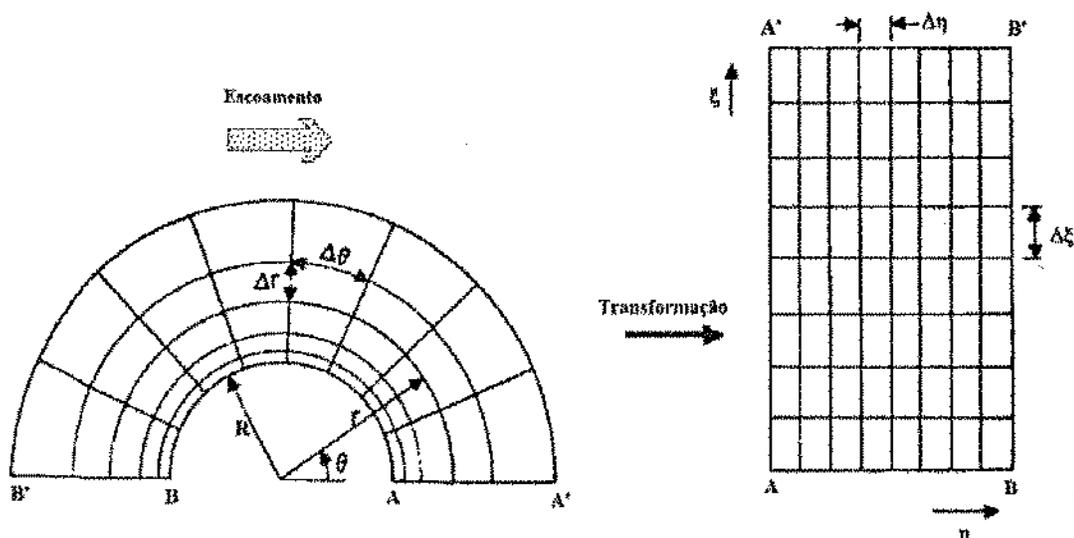


Figura 3.1: Transformações do sistema de coordenadas

externa a distâncias suficientemente grandes e também com uma malha extremamente fina, principalmente na fronteira próxima ao cilindro. Para resolver este contraste foi proposta a seguinte transformação de coordenadas:

$$r = R \exp(\pi\xi) \quad \text{e} \quad \theta = \pi\eta$$

Introduzindo estas coordenadas obtém-se uma grade que é refinada nas proximidades da superfície do cilindro e vai se tornando mais grosseira a medida que o raio vai aumentando. Obtém-se também, neste caso, um sistema de resolução muito mais simples. Para um melhor esclarecimento das alterações introduzidas no sistema vide a figura (3.1) e tome o cuidado de reparar no sentido do escoamento: verificando que o ponto de estagnação frontal ocorre para  $\theta = \pi$  ou  $\eta = 1$ .

Considerando a correlação das derivadas:

$$dr = \pi \exp(\pi\xi) d\xi = \pi r d\xi \quad \text{e} \quad d\theta = \pi d\eta$$

vê-se que a alteração de coordenadas conduz a diferentes expressões equivalentes às equações (2.1) a (2.3). A equação da vorticidade sofrerá alterações da forma que se segue:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{\pi^2 r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right] = \nu \left[ \frac{1}{\pi^2 r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\pi^2 r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right]$$

que, se denominamos  $\bar{E} = \pi r$  temos:

$$\bar{E}^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \omega \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \right] = \nu \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} \right] \quad (3.1)$$

sendo que

$$v = -\frac{1}{\bar{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad u = \frac{1}{\bar{E}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad (3.2)$$

Adimensionais	Raio	Tempo	Vorticidade	F. Corrente	Reynolds
Expressões	$r = r/R$	$\tau = tU_\infty/R$	$\Omega = \omega R/U_\infty$	$\Psi = \psi/RU_\infty$	$Re = U_\infty D/\nu$

Tabela 3.1: Tabela de adimensionais utilizados para Vorticidade-Função Corrente

Utilizando as mesmas transformações na equação da continuidade obtemos:

$$0 = \frac{1}{\pi^2 r^2 \omega} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \right) - \frac{1}{\pi^2 r^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \right)$$

que fica desta forma automaticamente satisfeita, tornando desnecessária a sua solução.

Ao se substituir  $\bar{E} = \pi r$  na definição de vorticidade obtém-se a outra expressão a ser resolvida:

$$\bar{E}^2 \omega = \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \quad (3.3)$$

Estas expressões são a forma dimensional para a equação da vorticidade e função corrente, no entanto elas são apresentadas normalmente na forma adimensional. Na secção seguinte é mostrado como é feita a adimensionalização destas expressões.

### 3.2 Adimensionalização das variáveis

O parâmetro mais importante em um escoamento é sem dúvida o número de Reynolds. Levando isto em consideração buscou-se uma adimensionalização em que o termo adimensional resultasse no número de Reynolds e, para isto, foram definidos os adimensionais mostrados na tabela (3.1).

Com isto foi possível adimensionalizar as expressões (3.1) e (3.3). O resultado obtido para a equação do momentum foi:

$$E^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Omega \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) \right] = \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \right] \quad (3.4)$$

A equação da vorticidade adimensionalizada fica:

$$E^2 \Omega = \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right) \quad (3.5)$$

O valor do acoplamento  $E$  também sofre alterações:

$$E = \frac{\pi R \exp(\pi \xi)}{R} = \pi \exp(\pi \xi)$$

Estas equações (3.4) e (3.5), juntamente com o novo valor de  $E$ , são as expressões que serão resolvidas ao longo deste trabalho para a obtenção do campo de escoamento em torno do cilindro.

### 3.3 Condições de contorno

Antes da resolução do sistema de equações proposto é necessário que se estabeleça as condições de contorno. As condições nas posições da superfície do cilindro e de simetria são fornecidas pelo escoamento potencial mas representam o que ocorre no escoamento real. As expressões para  $\Psi$  são as seguintes:

$$\begin{aligned}\xi = 0 & \quad \Psi = 0 \\ \eta = 0 & \quad \Psi = 0 \\ \eta = 1 & \quad \Psi = 0\end{aligned}$$

Em relação à vorticidade o raciocínio não é imediato, principalmente no que se refere ao valor da mesma na superfície do cilindro. Para expressar a vorticidade nesta posição é preciso lembrar da expressão geral da vorticidade, ou seja, a expressão (3.5). Repare também que na superfície do cilindro  $\Psi = 0 =$  constante, assim pode-se afirmar que:

$$\left. \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right|_{\xi=0} = 0$$

que implica portanto em:

$$E^2 \Omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}$$

Além disto as condições de derivada na região interna do cilindro não existem, o que nos leva a afirmar que as condições de  $\Omega$  são dadas pelas condições externas ao cilindro. Percebe-se portanto que é necessário conhecer o campo de  $\Psi$  para poder avaliar a vorticidade na superfície. A aproximação da derivada pode ser feita numericamente utilizando da série de Taylor. Como se trata de uma aproximação bastante crítica foi utilizada uma aproximação de segunda ordem como proposta por Son e Harranty[37]:

$$\Omega_{i,1} = \frac{8\Psi_{i,2} - \Psi_{i,3}}{2E^2\Delta\xi} \quad (3.6)$$

As demais condições de simetria respeitam as mesmas imposições do campo de função corrente:

$$\begin{aligned}\eta = 0 & \quad \Omega = 0 \\ \eta = 1 & \quad \Omega = 0\end{aligned}$$

Estas condições podem ser melhor compreendidas quando observada a expressão da vorticidade em função da velocidade:

$$\bar{E}\Omega = \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

Como existe a simetria a velocidade  $v$  tem que ser nula em toda linha  $\eta = 0$  e  $\eta = 1$ , não variando portanto com  $\xi$ . O outro termo é uma derivada em função de  $\xi$ , que no caso da simetria é anulada diretamente. Assim sendo percebe-se que o valor da vorticidade tem que ser nulo nestas linhas.

Note que as condições de contorno na fronteira mais afastada ( $\xi = \xi_\infty$ ) ainda não foram comentadas, fato que se deve a, até agora, não existir um consenso sobre a melhor forma de representá-las. As condições de contorno mais utilizadas na literatura em geral são aquelas que serão tratadas como condições padrão que nada mais são do que a especificação das condições de corrente livre como sendo as condições

encontradas na fronteira proposta. Este é o procedimento mais utilizado por se tratar de condições de fácil implementação. Entretanto no seu estudo Fornberg [10], nos leva a acreditar que na maior parte dos casos se considerarmos condições diferentes de fronteira poderemos obter resultados significativos com um domínio menor. Neste caso especificamente foram estudadas duas condições de fronteira: as condições padrão e condições de Newman.

### 3.3.1 Condições padrão

As condições padrão são aquelas em que as condições afastadas ( $\xi = \xi_\infty$ ) são especificadas como sendo as condições fixas para corrente livre. Assim sendo temos:

$$\Psi = \exp(\xi_\infty \pi) \sin(\pi \eta) \quad (3.7)$$

$$\Omega = 0 \quad (3.8)$$

### 3.3.2 Condições de Newman

Nesta fase se considerou que os valores, na realidade, podem não ter chegado aos valores de corrente livre, no entanto, o seu comportamento deve estar próximo ao comportamento da corrente livre. Isto implica em que as derivadas das propriedades a serem obtidas devem estar próximas das de corrente livre. Com base nisto foram implantadas as condições de contorno:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \pi \exp(\xi_\infty \pi) \sin(\pi \eta) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0 \quad (3.10)$$

Com estas condições de contorno alteradas foram obtidos novos resultados. Existem outras condições propostas na literatura como a *condição mista*, proposta por Fornberg [10], no entanto, neste trabalho limitou-se o estudo a estas duas condições já citadas.

## 3.4 Procedimento computacional

A resolução do problema proposto se baseia na solução de duas equações acopladas resolvidas de forma independente. Assim sendo as soluções são feitas de forma independente mas um passo na resolução de  $\Omega$  e outro na solução de  $\Psi$ .

Os valores iniciais tanto do campo de funções correntes como do campo de vorticidades foi dado como sendo do escoamento potencial:

$$\Psi = \bar{r} \left( 1 - \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \sin(\pi \eta)$$

$$\Omega = 0$$

A solução da função corrente foi feita baseando-se numa discretização feita em volumes finitos. Assim sendo a expressão (3.5) fica:

$$\int_{we}^{es} \int_{so}^{no} E^2 \Omega d\xi d\eta = \int_{we}^{es} \int_{so}^{no} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} \right) d\xi d\eta + \int_{we}^{es} \int_{so}^{no} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} \right) d\xi d\eta$$

A resolução desta integral resulta em:

$$E^2 \Omega_P \Delta \xi \Delta \eta = \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_n - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_s \right] \Delta \eta + \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_e + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_w \right] \Delta \xi$$

Sendo que as derivadas ainda podem ser calculadas na interface do volume, através de aproximações lineares:

$$E^2 \Omega_P \Delta \xi \Delta \eta = \left[ \left( \frac{\Psi_N - \Psi_P}{\Delta \xi} \right) - \left( \frac{\Psi_P - \Psi_S}{\Delta \xi} \right) \right] \Delta \eta + \left[ \left( \frac{\Psi_E - \Psi_P}{\Delta \eta} \right) + \left( \frac{\Psi_P - \Psi_W}{\Delta \eta} \right) \right] \Delta \xi$$

Esta matriz pode ser resolvida a partir de métodos de solução iterativos. Na literatura o sistema mais usado é o SOR, que nada mais é que o método iterativo Gauss-Siedel com um fator de sobre-relaxação para acelerar o processo de convergência. Na realidade, neste processo a correção cada novo ponto do método é calculado a partir dos valores anteriores. Assim:

$$\Psi_i^n = (1 - S) \Psi_i^v + S \left( \sum_{k=1}^{i-1} a_k \Psi_k^n + \sum_{k=i+1}^N a_k \Psi_k^v \right)$$

onde:  $\Psi$  indica o valor da função na posição;  
 $S$  o fator de sobre-relaxação;  
 $a$  o coeficiente que acompanha a propriedade na expressão;  
 $N$  a dimensão do sistema.  
e os superescritos:  
 $n$  valores já calculados nesta iteração;  
 $v$  valores calculados na iteração anterior.

Sendo que o valor de  $S$  deve ser tal que acelere o processo de convergência dos sistemas de equações. Neste caso a expressão utilizada para o cálculo de  $S$  foi a proposta por Son e Harranty [37]:

$$S = \frac{2}{1 + \pi \sqrt{\frac{1/l_r^2 + 1/l_\theta^2}{2}}} \quad (3.11)$$

onde  $l_r$  é o número de pontos da malha na direção radial e  $l_\theta$  é o número de pontos na direção angular.

Este procedimento foi repetido diversas vezes para a matriz até que o valor de alteração máximo na solução do sistema chegasse a:

$$|\Psi_i^n - \Psi_i^v| \leq 10^{-5} \text{ para todo } 1 \leq i \leq N$$

que foram adotados como valores corretos para a distribuição admitida do campo de vorticidades.

A discretização da equação da vorticidade é discutida de forma detalhada na secção 4.2. Aqui nos limitaremos a comentar como foi resolvido o sistema de equações resultante desta discretização.

O sistema é transiente, para tanto usamos um ADI dependente do tempo onde a solução é obtida num dos sentidos num tempo intermediário  $\tau + \Delta\tau/2$  e no outro sentido no tempo posterior  $\tau + \Delta\tau$ . A expressão geral a ser resolvida seria a equivalente a equação (4.6), que depende da utilização do ADI transiente.

A metodologia utilizada foi proposta por Son e Harranty que indica a resolução explícita num sentido, a partir de valores já conhecidos em um determinado tempo indicados na expressão pelo superescrito  $-$ . Para calcular o valor da propriedade em um tempo intermediário  $\tau + \Delta\tau/2$ , que na equação abaixo corresponde ao superescrito  $*$ , utiliza-se a expressão:

$$E^2 \frac{(\Omega^* - \Omega^-)}{\Delta\tau} \Delta\xi \Delta\eta + \left[ \Omega_{es}^* \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right)_{es} - \Omega_{we}^* \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right)_{we} \right] \Delta\eta - \left[ \Omega_{no}^- \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right)_{no} - \Omega_{so}^- \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right)_{so} \right] \Delta\xi \quad (3.12)$$

$$= \frac{2}{\text{PRD}} \left[ \left( \frac{\Omega_E^* - \Omega_P^*}{\Delta\xi} - \frac{\Omega_P^* - \Omega_W^*}{\Delta\xi} \right) \Delta\eta + \left( \frac{\Omega_N^- - \Omega_P^-}{\Delta\eta} - \frac{\Omega_P^- - \Omega_S^-}{\Delta\eta} \right) \Delta\xi \right]$$

Obtido os valores neste tempo intermediário, pode-se calcular o valor no tempo posterior  $\tau + \Delta\tau$ , indicado pelo superescrito  $+$ , através da expressão:

$$E^2 \frac{(\Omega^+ - \Omega^*)}{\Delta\tau} \Delta\xi \Delta\eta + \left[ \Omega_{es}^* \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right)_{es} - \Omega_{we}^* \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} \right)_{we} \right] \Delta\eta - \left[ \Omega_{no}^+ \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right)_{no} - \Omega_{so}^+ \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \right)_{so} \right] \Delta\xi \quad (3.13)$$

$$= \frac{2}{\text{PRD}} \left[ \left( \frac{\Omega_E^* - \Omega_P^*}{\Delta\xi} - \frac{\Omega_P^* - \Omega_W^*}{\Delta\xi} \right) \Delta\eta + \left( \frac{\Omega_N^+ - \Omega_P^+}{\Delta\eta} - \frac{\Omega_P^+ - \Omega_S^+}{\Delta\eta} \right) \Delta\xi \right]$$

Com este novo campo de vorticidades pode-se recalculer o campo de função corrente e assim sucessivamente até que se alcance o limite de convergência admitido como  $|\Omega^+ - \Omega^-| < 10^{-4}$  para todos os valores de  $\Omega$  na superfície do cilindro.

### 3.5 Discussão a respeito da malha utilizada

Discutir a malha trabalhando-se com vorticidade e função corrente não é uma tarefa fácil pois são muitos os fatores que influenciam na convergência do método. Além disto temos que verificar que a malha seja refinada o suficiente para obter uma precisão razoável. A tabela (3.2) mostra diversos valores obtidos em diversas resoluções de escoamentos e diversos número de Reynolds, para as condições de  $\xi_\infty = 1,5$ , discretização na forma de diferenças centradas e condições de contorno padrão. Os efeitos provocados por cada um dos fatores são discutidos na secção de resultados, no entanto alguns pontos de importância fundamental na definição da malha serão discutidos a seguir.

Um primeiro ponto bastante importante é que o refinamento da malha não é muito crítico, veja o caso do  $Re = 40$ , mesmo na malha mais grossa utilizada os resultados não se afastam muito dos obtidos em outros estudos, no entanto, por uma questão de coerência com estudos anteriores e também por apresentarem resultados dentro de uma faixa mais aceitável optamos por uma malha em  $Re = 200$  de 51 por 41.

Cumpramos ressaltar que o  $\Delta\tau$  é um fator extremamente importante na convergência ou não do método, repare que para existe um valor crítico de convergência. A maior parte dos estudos obtidos procura tratar o método como se tratando de um transiente normal, sendo assim valores de  $\Delta\tau$ , menores forneciam uma melhor descrição das alterações sofridas pelo escoamento ao longo do tempo. No entanto este transiente é apenas um artifício uma vez que todas as resoluções partem de um escoamento potencial (inviscido) para chegar na solução desejada, fato impossível de ser obtido em escoamentos reais. Por isto não houve neste estudo preocupação com as etapas de desenvolvimento do escoamento e sim a procura de um tempo ótimo no qual obteremos a solução no menor tempo computacional possível.

$Re$	$\Delta\tau$	Tamanho da Malha		Resultados
		$\xi$	$\eta$	
2	0.01	51	31	converge
2	0.02	51	31	diverge
40	0.30	41	31	converge
40	0.33	41	31	converge
40	0.35	41	31	converge
40	0.36	41	31	converge
40	0.37	41	31	diverge
40	0.38	41	31	diverge
40	0.23	51	21	converge
40	0.24	51	21	diverge
40	0.21	51	31	converge
40	0.22	51	31	converge
40	0.23	51	31	converge
40	0.24	51	31	diverge
40	0.23	51	41	converge
40	0.24	51	41	diverge
40	0.15	61	31	converge
40	0.16	61	31	diverge
40	0.10	71	31	converge
40	0.11	71	31	converge
40	0.12	71	31	diverge
100	0.40	51	31	converge
100	0.50	51	31	converge
100	0.53	51	31	converge
100	0.54	51	31	converge
100	0.55	51	31	diverge
200	0.62	51	31	converge
200	0.63	51	31	converge
200	0.64	51	31	diverge
300	0.46	51	31	converge
400	0.51	51	31	converge
400	0.52	51	31	diverge

Tabela 3.2: Resultados obtidos para diversos números de Reynolds associados a diversas malhas para  $\xi_\infty = 1,5$ .

Estes estudos, feitos anteriormente, permitem uma análise interessante de como se comporta a convergência do método. Repare que a medida que aumentamos o Reynolds e mantemos a mesma malha podemos trabalhar com  $\Delta\tau$  maiores para obter o processo de convergência. Fato análogo a este pode ser observado com o refinamento em  $\xi$ , no entanto quanto mais refinada a malha menor o  $\Delta\tau$  que pode ser utilizado.

Finalmente pode-se observar o fato já ressaltado por alguns autores, que o refinamento angular, ou seja, em  $\eta$ , não altera o tempo crítico de convergência.

$\Delta\tau$	Tempo real de CPU	Número de Iterações	Máxima vorticidade na sup.	malha	$\xi_\infty$	Discretização
0.1	13094.3	1933	13.1158	51 × 41	1.5	polinomial
0.2	5760.8	1097	13.1117	51 × 41	1.5	polinomial
0.3	4847.6	790	13.1102	51 × 41	1.5	polinomial
0.4	2779.4	445	13.1864	51 × 41	1.5	polinomial
0.3	5801.3	832	13.3717	61 × 41	1.2	dif. centrais
0.35	30134.3	1495	12.7601	61 × 41	1.5	dif. centrais

Tabela 3.3: Caracterização da otimização do programa de resolução do escoamento para condições de fronteira fixa.

O tempo computacional para diversas outras configurações pode ser visto na tabela (3.3), que permite uma avaliação do tempo real necessário para a solução do programa em diversos casos assim como o número de iterações necessários para a convergência e a máxima vorticidade na superfície do cilindro. O acompanhamento do número de iterações e do tempo real de CPU se torna necessário pois a medida que aumenta-se o  $\Delta\tau$  existe a tendência de aumento no tempo de cada iteração. Comparação com valores experimentais serão feitas ao final deste capítulo.

Por todos estes fatores pode-se verificar que a escolha da malha neste método é bastante complexa e envolve um grande trabalho de otimização devendo-se obter a malha mais grossa possível que fornece resultados dentro da faixa esperada e ainda o tempo de convergência ótimo que está diretamente ligado à malha. Neste trabalho a malha ótima foi escolhida de forma subjetiva, baseando-se em trabalhos de outrem, apenas o  $\Delta\tau$  foi realmente otimizado.

### 3.6 Resultados

Foram feitos diversos testes para a resolução do escoamento principalmente para número de Reynolds de 200 e 40. Os testes foram feitos de forma a estudar a influência dos diversos parâmetros na acuracidade e velocidade de convergência da solução. Os parâmetros principais nos quais foram feitos testes foram:

**Incremento de tempo:** parâmetro que funciona basicamente como um fator de subrelaxação para a resolução acoplada de vorticidade e função corrente, pois, ao que tudo indica os métodos iterativos, tipo ADI, não resolvem diretamente, na forma de regime permanente, estas equações acopladas.

Por motivos óbvios, comprovados por observações perante o computador, um incremento de tempo maior resulta em uma velocidade de convergência sensivelmente maior pois isto implica no uso de um fator de subrelaxação menor. Feito isto foi verificado que o resultado do regime permanente não é afetado de forma significativa, apesar do valor dos campos de vorticidade e função corrente serem afetados em seus respectivos tempos reais. Obviamente este aumento do incremento de tempo não é ilimitado, pois se assim o fosse não precisaria ser usado podendo ser usado o fator máximo  $\infty$  que levaria a zerar a parcela correspondente ao tempo e que resolvessemos o problema no regime permanente.

O valor do incremento máximo de tempo é obtido de forma iterativa: define-se o incremento de tempo e se verifica se o programa converge ou não. No entanto veremos a seguir que este incremento máximo varia com uma série de outros parâmetros.

**Refinamento em  $\xi$ :** também é um parâmetro preponderante e obviamente quanto maior o refinamento em  $\xi$  maior o tempo que o computador leva para efetuar cada iteração, pois é maior o número de operações que o mesmo tem que realizar.

No entanto esta não é a única forma que o refinamento em  $\xi$  influi no andamento da resolução: um maior refinamento implica numa diminuição do incremento máximo de tempo para a resolução do sistema de equações. Assim sendo o refinamento prejudica duplamente a velocidade de convergência do sistema de equações.

No que tange a precisão o esperado ocorre um maior refinamento melhora a precisão dos resultados, no entanto tem que ser analisado com muito cuidado até onde esta precisão deve ser melhorada para não comprometer o andamento do problema.

**Refinamento em  $\eta$**  também aumenta o tempo de convergência, pois aumenta o número de operações que o computador deve fazer, no entanto seu refinamento não tem influência perceptível sobre o incremento de tempo.

O refinamento em  $\eta$  produz melhora dos resultados mas de forma mais tênue do que o em  $\xi$ .

**Posição do  $\xi_\infty$ :** tem uma influência importante principalmente sobre a acuracidade dos resultados, se o  $\xi_\infty$  é colocado dentro de uma área onde o escoamento ainda esta se desenvolvendo isto induzirá a erro significativo no campo de escoamentos e vorticidade. A diminuição do  $\xi_\infty$  leva a uma diminuição do incremento de tempo máximo que leva à convergência.

Se for utilizada condição de Newman na fronteira o erro é ocasionado é diminuído de forma significativa. No entanto ele se encontra numa região de turbulência e dificilmente deixará de haver oscilações das condições de fronteira que impedirão a convergência do método. No caso estudado, mais especificamente usando um  $\xi_\infty$  de 1.2 e 1.0, percebe-se que a oscilação dos valores da vorticidade no corpo do cilindro atinge o valor mínimo em ponto próximo ao esperado, no entanto a partir daí o oscilação começa a aumentar novamente sem que haja a continuidade da convergência.

Por outro lado o uso de  $\xi_\infty$  excessivamente afastado vai implicar no uso de uma malha refinada para obter uma boa acuracidade, que vai levar a um tempo de CPU elevado para obter a solução desejada, para tanto buscou-se obter  $\xi_\infty$  ótimo que concilie os dois fatores.

**Tipo de discretização:** foram testados os dois tipos de discretização do escoamento central e polinomial, alguns resultados obtidos para o campo de escoamentos são mostrados nas figura (3.2).

A figura (3.3) mostra alguns resultados obtidos na literatura. O primeiro resultado foi obtido por Fornberg [10] e obtido a partir da solução em regime permanente. Se compararmos este resultado ao obtido neste trabalho veremos que a região atingida por vórtices é maior, o que é fruto de um desenvolvimento não pleno do escoamento. Os dois gráficos de resultados mostrados na sequência utilizaram o regime transiente da mesma forma que este trabalho, eles foram obtidos por Son e Harranty [37] e por Chun e Böehm [3]. Os resultados obtidos também podem ser comparados ao deste trabalho, no entanto o resultado deste trabalho têm uma maior afea atingida por vórtices, o que pode ser explicado pelo uso de um  $\Delta\tau$  maior.

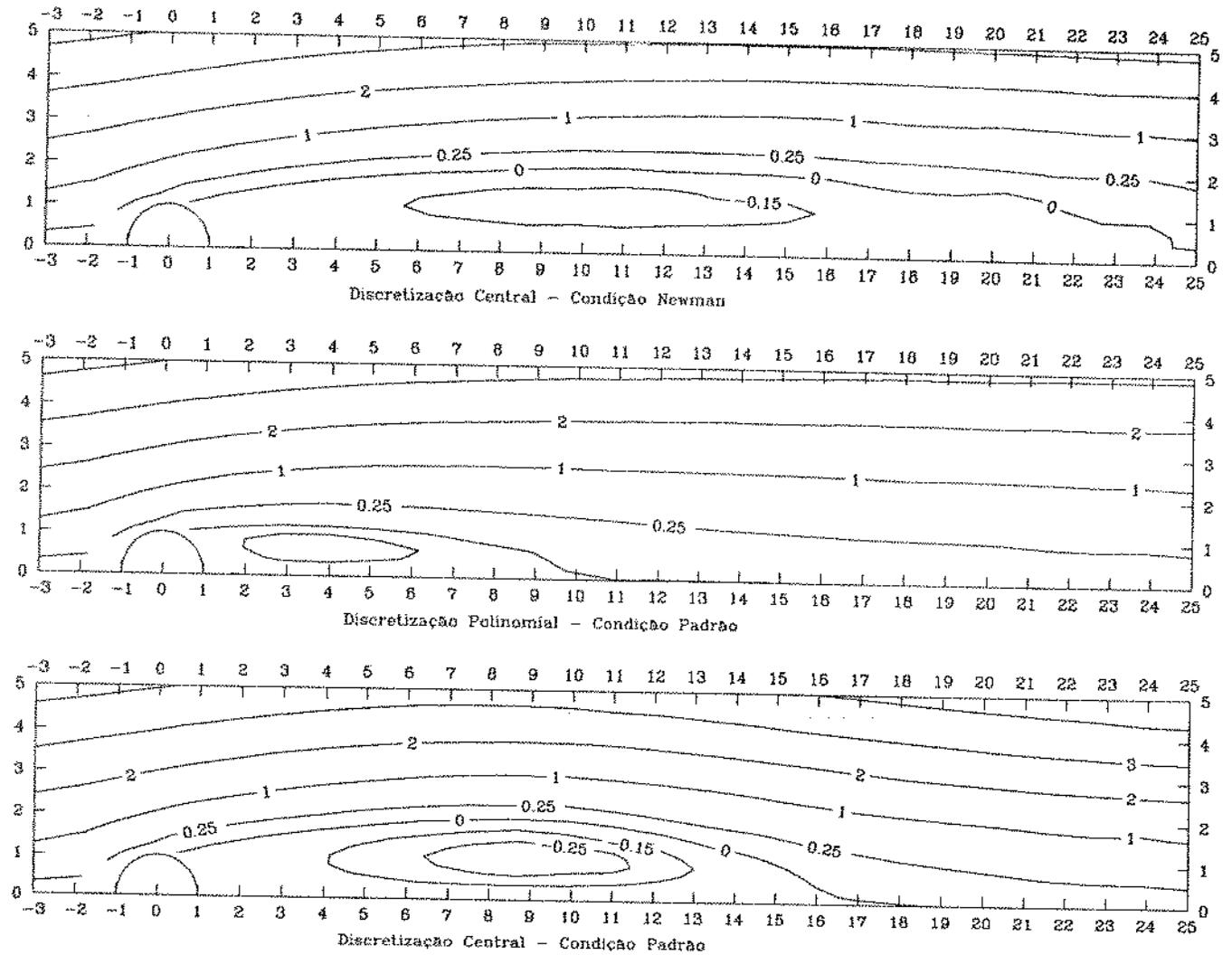


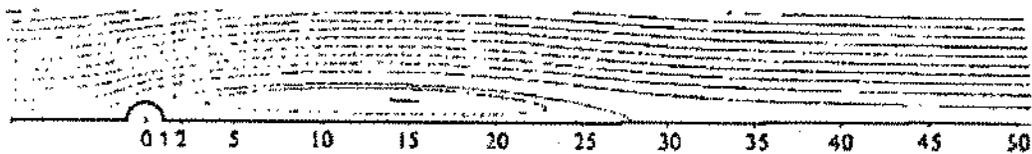
Figura 3.2: Comparação dos campos do escoamento para as três formas de discretização com  $Re = 200$

Foram testadas duas formas de discretização variando as condições de fronteira:

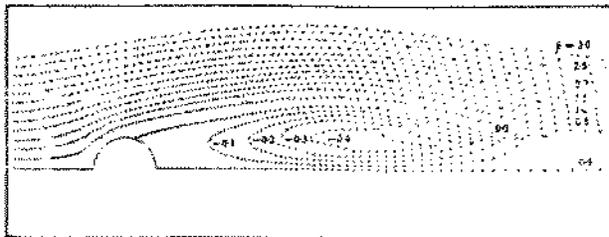
1. **Discretização Polinomial:** utilizando-se da discretização polinomial, proposta inicialmente por Patankar [27], com condições fixas na fronteira, as condições padrão.
2. **Discretização Central:** utilizando a discretização central com condições fixas na fronteira e com condições de Newman na fronteira.

Um fator que é utilizado normalmente para verificar a coerência dos resultados obtidos é o valor da vorticidade na superfície do cilindro. No nosso caso foi feito um gráfico que mostra a variação da vorticidade ao longo do ângulo  $\theta$  para as diversas discretizações e  $Re = 200$ , vide figura (3.4).

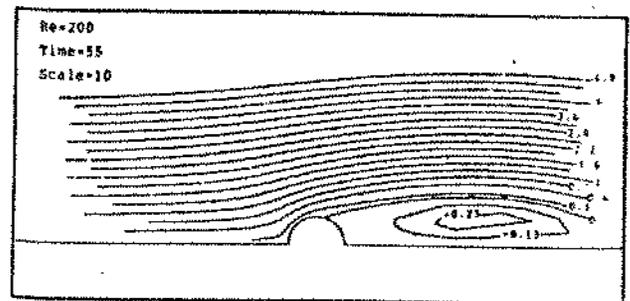
Existem diversos outros trabalhos com vorticidade e função corrente que apresentam resultados semelhantes aos obtidos neste trabalho. No entanto a maioria deles se utiliza desta resolução baseada na



(A) Resultados obtidos por Fornberg[10]



(B) Resultados obtidos por Son and Harranty [37]



(C) Resultados obtidos por Chun e Boehm [3]

Figura 3.3: Comparação dos resultados obtidos por outros autores para  $Re = 200$ 

subrelaxação, apenas um trabalho, Fornberg [10] consegue resolver este sistema diretamente em regime permanente. Este trabalho utiliza uma série de artifícios dentre os quais a condição de Newman na fronteira. No entanto o seu procedimento é relativamente complexo em termos matemáticos utilizando inclusive dois grids sobrepostos para a resolução do sistema. Além disto os resultados que se consegue obter neste trabalho são bastante limitados, o máximo para  $Re = 300$  e ainda utilizando  $Re$  anteriores como passo inicial para o cálculo.

A utilização do sistema envolvendo um pseudo-transiente é mais demorada e menos precisa no entanto consegue-se se for o caso, valores de  $Re$  bem superiores ao 300 do regime permanente, bastando para isto dispor de um bom tempo computacional. Além disto a formulação para resolução numérica dos sistema é bem mais simples.

Tentou-se também acelerar a solução do regime permanente fazendo com que fosse dado um tempo para que o escoamento adquirisse algumas características do escoamento viscoso, utilizando-se o regime transiente e depois de um certo tempo fosse resolvido em regime permanente, através do ADI. No entanto isto não se mostrou um procedimento eficiente que, acredito, se deva ao fato que quando se obtém uma solução chamada de definitiva, indicando que a oscilação da vorticidade na superfície do corpo assume valores significativamente pequenos, não tem-se a garantia de que todo o campo de vorticidades e função corrente tenha convergido.

Este mesmo fato pode explicar os resultados obtidos com a discretização polinomial subestimarem, de maneira significativa, o tamanho da esteira formada, figura (3.4). O que pode ter acontecido é que a discretização polinomial acelerou de forma significativa os valores das propriedades da superfície sem que no entanto tenha dado tempo suficiente para desenvolver todo o campo de escoamentos.

Esta afirmação a respeito da convergência indicando que a mesma ocorre primeiro na superfície já foi feita, de uma forma indireta, por Sonnemberg [37] quando propõe que o critério de convergência adotado seja o da vorticidade na superfície.

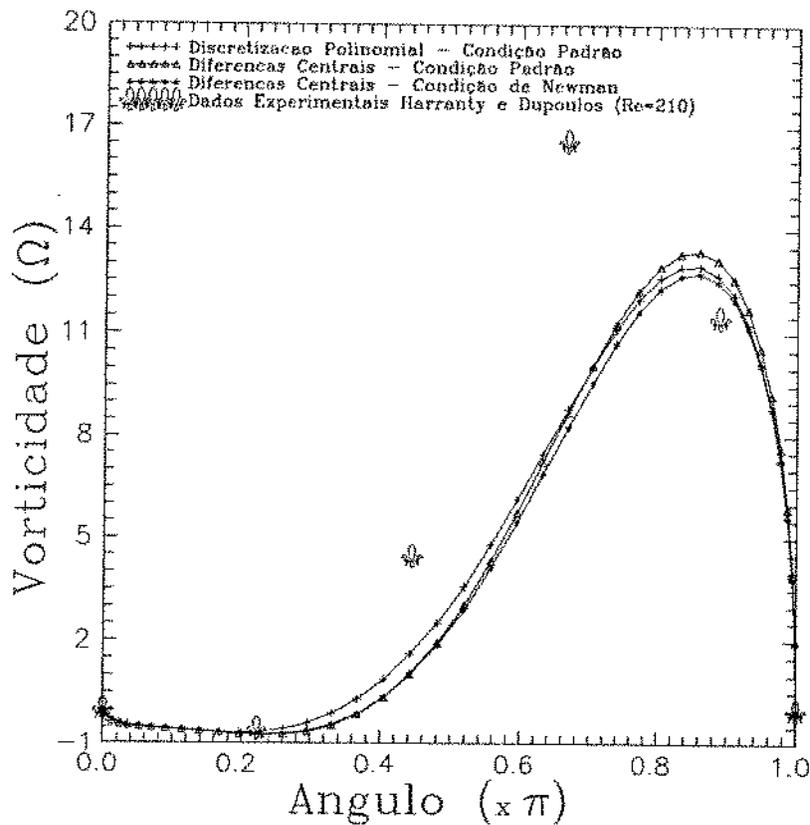


Figura 3.4: Comparação da vorticidade da superfície para  $Re = 200$

Para uma comparação dos resultados obtidos pode-se utilizar o campo de vorticidades na superfície. A figura (3.4) mostra também resultados experimentais obtidos por Dimopoulos e Harranty [7] para os valores da vorticidade na superfície. Os valores apresentam uma certa concordância, no entanto seria necessário conhecer a margem de erro das medidas experimentais, pois Fornberg [10] que trabalhou com o regime permanente e uma associação de malhas que ao que tudo indica forneceria resultados melhores que esta simulação obteve valores ainda mais baixos, que se afastariam ainda mais dos valores experimentais. No entanto a concordância dos resultados permite-nos garantir que o modelo é representativo do fenômeno físico.

# 4

## Resolução dos Campos de Temperatura e Umidade

### Introdução

A resolução do campo de temperaturas e umidades é significativamente mais simples do que a resolução do campo de escoamento mostrada no capítulo 3, no entanto, esta resolução depende dos resultados obtidos nesta primeira etapa. Através da adimensionalização o campo de temperaturas  $\Theta$  é resolvido sendo possível com isto obter os resultados para o coeficiente de película. A resolução do campo de temperaturas é similar à equação da vorticidade com adimensionais diferentes.

Neste capítulo buscou-se a resolução do sistema de equações e obter assim resultados para os coeficientes de transferência de massa e energia. Os resultados obtidos foram comparados com alguns outros resultados, numéricos e experimentais, mostrando uma boa concordância.

### 4.1 Equações básicas para a representação do fenômeno

Repare que as equações (2.4) e (2.5) são similares podendo ser resolvidas da mesma forma, desde que sejam utilizados os adimensionais corretos. Para a adimensionalização considera-se os adimensionais mostrados na tabela (3.1) e além deles:

$$\Theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} \quad \text{e} \quad w = \frac{W - W_\infty}{W_w - W_\infty}$$

que podem ser substituídos nas equações citadas resultando nas respectivas expressões adimensionais:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{1}{\bar{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( \Theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Theta \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} \right) \right] = \frac{kR}{\rho c_p U_\infty R^2} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.1)$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{1}{\bar{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left( w \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( w \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{r}} \right) \right] = \frac{DR}{U_\infty R^2} \left[ \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial w}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.2)$$

Os produtos que aparecem multiplicando os termos difusivos podem ser convertidos para produtos de adimensionais conhecidos, bastando lembrar que:

$$\begin{aligned} \text{Número de Reynolds} &= \frac{\rho U_{\infty} 2R}{\mu} \\ \text{Número de Prandt} &= \frac{\mu c_p}{k} \\ \text{Número de Schimidt} &= \frac{\mu}{\rho D} \end{aligned}$$

Antes de substituir estes adimensionais é conveniente lembrar que deve-se fazer também a conversão para as coordenadas de trabalho adequadas  $\xi$  ( $\bar{r} = \exp(\pi\xi)$ ) e  $\eta$  ( $\theta = \pi\eta$ ). Fazendo as substituições propostas obtém-se as seguintes expressões adimensionais:

$$E^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \Theta \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Theta \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) = \frac{2}{Re Pr} \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.3)$$

e a da umidade:

$$E^2 \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( w \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( w \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) = \frac{2}{Re Sc} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.4)$$

sendo que o valor de  $E$  foi definido no capítulo 3 e equivale a  $\pi\bar{r}$ .

Estas são as equações básicas que devem ser resolvidas, na secção 4.2 mostrar-se-á a discretização deste tipo de equações através da introdução de uma propriedade genérica  $\phi$ , e cujo os grupos adimensionais serão representados por PRD. Este procedimento permite uma economia significativa de tempo pois engloba numa única discretização as equações de umidade, temperatura e vorticidade.

## 4.2 Discretização das equações tipo vorticidade

As equações tipo vorticidade denotam um grupo amplo de expressões que se apresentam sempre no mesmo formato, e que portanto apresentam a mesma discretização. Sendo assim será feita a discretização para uma propriedade genérica  $\phi$  e cujo o produto de adimensionais que acompanha o termo difusivo é PRD, que deixaria a expressão genérica na forma:

$$E^2 \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) = \frac{2}{PRD} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} \right) \quad (4.5)$$

Utilizando a técnica de *volumes finitos* elevamos o nível mínimo das derivadas da equação:

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^{es} \int_{w\epsilon}^{no} \int_{s0} E^2 \frac{\partial \phi}{\partial \tau} d\tau d\xi d\eta + \int_{\tau}^{es} \int_{w\epsilon}^{no} \int_{s0} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) d\tau d\xi d\eta - \int_{\tau}^{es} \int_{w\epsilon}^{no} \int_{s0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) d\tau d\xi d\eta \\ = \frac{2}{PRD} \left( \int_{\tau}^{es} \int_{w\epsilon}^{no} \int_{s0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} d\tau d\xi d\eta + \int_{\tau}^{es} \int_{w\epsilon}^{no} \int_{s0} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} d\tau d\xi d\eta \right) \end{aligned}$$

que equivale a expressão na forma implícita:

$$E^2(\phi - \phi^-)\Delta\xi\Delta\eta + \left[ \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{es} - \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{we} \right] \Delta\eta\Delta\tau - \left[ \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{no} - \left( \phi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{so} \right] \Delta\xi\Delta\tau$$

$$= \frac{2}{\text{PRD}} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{es} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_{we} \right] \Delta\eta + \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{no} - \left( \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)_{so} \right] \Delta\xi \right\} \Delta\tau$$

Podemos fazer ainda uma aproximação linear das primeiras derivadas na fronteira. Fazendo isto e dividindo a expressão por  $\Delta\tau$  temos:

$$E^2 \frac{(\phi - \phi^-)}{\Delta\tau} \Delta\xi\Delta\eta + \left[ \phi_{es} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{es} - \phi_{we} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{we} \right] \Delta\eta - \left[ \phi_{no} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{no} - \phi_{so} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{so} \right] \Delta\xi \quad (4.6)$$

$$= \frac{2}{\text{PRD}} \left[ \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta\xi} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta\xi} \right) \Delta\eta + \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta\eta} - \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta\eta} \right) \Delta\xi \right]$$

Esta expressão já está próxima à completamente discretizada, no entanto, temos que resolver ainda os problemas:

**Avaliação das propriedades na interface dos VCs** este é um problema típico de convecção e já estudado o suficiente a solução adotada é a mais utilizada nestes casos e trata-se da interpolação polinomial proposta por Patankar [27]. Uma descrição mais caracterizada do método pode ser vista na secção 4.3.

**Avaliação das derivadas da função corrente nas interfaces** este é um problema que se apresenta ao observarmos mais detalhadamente as expressões acima verificaremos que as derivadas são avaliadas em uma interface paralela à direção de derivação, o que dificilmente ocorre. A saída foi interpolar as propriedades nos limites da interface e com eles estimar o valor da derivada. Para uma melhor visualização vide a figura 4.1.

Observando-se a figura (4.1) notamos que pode-se obter as propriedades nos extremos do VC através da interpolação das quatro propriedades mais próximas. Assim sendo partindo do princípio que a discretização foi feita baseando-se em fronteiras centradas temos:

$$\Psi_{ne} = \frac{\Psi_N + \Psi_P + \Psi_{NE} + \Psi_E}{4}$$

$$\Psi_{nw} = \frac{\Psi_N + \Psi_P + \Psi_{NW} + \Psi_W}{4}$$

$$\Psi_{se} = \frac{\Psi_S + \Psi_P + \Psi_{SE} + \Psi_E}{4}$$

$$\Psi_{sw} = \frac{\Psi_S + \Psi_P + \Psi_{SW} + \Psi_W}{4}$$

As derivadas da propriedade  $\Psi$  na fronteira que, na realidade, correspondem ao influxo ou efluxo podem ser calculadas pela diferença do valor da função corrente em seus pontos extremos:

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{no} = \frac{\Psi_{ne} - \Psi_{nw}}{\Delta\xi} = \frac{\Psi_{NE} + \Psi_E - \Psi_{NW} - \Psi_W}{4\Delta\xi}$$

$$\left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{so} = \frac{\Psi_{se} - \Psi_{sw}}{\Delta\xi} = \frac{\Psi_{SE} + \Psi_E - \Psi_{SW} - \Psi_W}{4\Delta\xi}$$

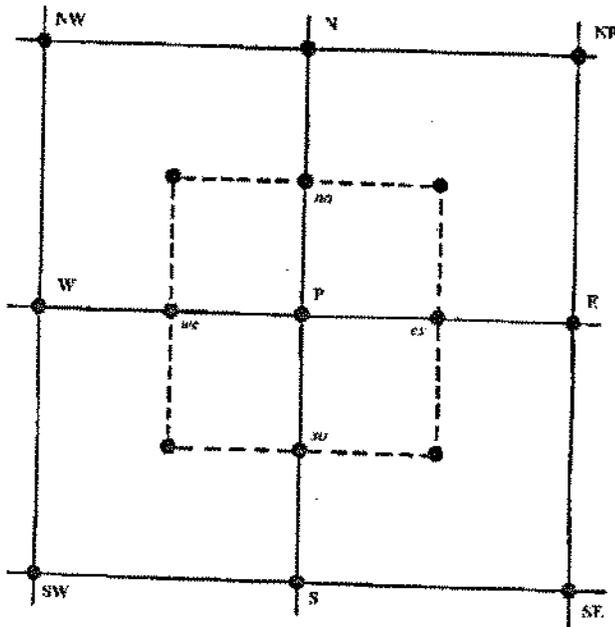


Figura 4.1: Visualização das derivadas de  $\Psi$  nas faces.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)_{ea} &= \frac{\Psi_{ne} - \Psi_{se}}{\Delta \eta} = \frac{\Psi_{NE} + \Psi_N - \Psi_{SE} - \Psi_S}{4\Delta \eta} \\ \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right)_{so} &= \frac{\Psi_{nw} - \Psi_{sw}}{\Delta \eta} = \frac{\Psi_{NW} + \Psi_N - \Psi_{SW} - \Psi_S}{4\Delta \eta} \end{aligned}$$

Desta forma todas as propriedades foram interpoladas e a representação dos fluxos é feita de forma sensivelmente mais precisa.

### 4.3 Interpolação polinomial das propriedades na fronteira

Como foi citado no capítulo 3 para simulação numérica de problemas envolvendo convecção o método mais utilizado é o método polinomial proposto por Patankar [27]. Este método procura simular a solução exata de um problema unidimensional, ou seja uma solução exponencial, sem que haja para isto um grande custo computacional. A metodologia deste problema consistiu em fazer-se uma interpolação polinomial na faixa de  $Pe$  variando entre 0 e 10 e obter a soluções o mais próximo possível. Para valores menores que zero e maiores que 10 foram adotados valores constantes que representam bem a função exata.

No caso, procurou-se tratar os valores do termo geral com uma relação direta com o termo difusivo. Os resultados obtidos conduzem a:

$$\frac{a_E}{D_E} = A(|Pe_{es-we}|); \quad \frac{a_W}{D_W} = A(-|Pe_{es-we}|); \quad \frac{a_N}{D_N} = A(|Pe_{no-so}|); \quad \frac{a_S}{D_S} = A(-|Pe_{no-so}|);$$

Sendo que a função  $A(|Pe|)$ :

$$A(|Pe|) = \text{MAX} \left[ 0, 1 - \left( \frac{|Pe|}{10} \right)^5, 1 \right];$$

Utilizando esta aproximação para os as propriedades nas interfaces, obrigatoriamente o termo  $a_P$  deve ser calculado por:

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + (F_{es} - F_{we} + F_{no} - F_{so})$$

sendo que o valor  $F$  representa o fluxo atravessando a fronteira. Obviamente que se existem termos além dos termos difusivos-convectivos eles não estão englobados nesta expressão e devem ser ainda somados os termos, como é o caso da parcela devido à variação temporal.

Sendo que o  $Pe$  é a relação entre os termos difusivos e convectivos, que equivale ao valor do coeficiente que acompanha os termos convectivos dividido pelo equivalente  $2/PRD$

Finalmente cabe aqui uma observação, a equação da vorticidade foi resolvida para diversos casos e tanto para a condição de discretização polinomial, como de diferenças centrais. As demais expressões, umidade e temperatura foram resolvidas apenas para a discretização polinomial.

#### 4.4 Procedimento de resolução

Como foi visto as equações já foram completamente discretizadas para os diversos casos. A partir deste ponto é possível chegar a uma solução utilizando-se o sistema de resolução ADI. Para a vorticidade é preciso utilizar-se do ADI transiente, no entanto tanto na resolução do campo e temperaturas como no de umidades utiliza-se o ADI-Regime Permanente. Os resultados obtidos serão mostrados em secções posteriores.

Considerando que neste capítulo as expressões serão resolvidas para regime permanente a expressão (4.6), que equivale a:

$$\left[ \phi_{es} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{es} - \phi_{we} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right)_{we} \right] \Delta \eta - \left[ \phi_{no} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{no} - \phi_{so} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right)_{so} \right] \Delta \xi = \quad (4.7)$$

$$\frac{2}{PRD} \times \left[ \left( \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi} - \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta \xi} \right) \Delta \eta + \left( \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta} - \frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta \eta} \right) \Delta \xi \right]$$

que é a expressão vista na secção 4.2 sem os termos dependentes do tempo.

Esta é a expressão que resolve tanto o campo de escoamento como o de umidade, bastando para isto substituir o valor da derivadas de  $\Psi$  nas faces. Cabe ressaltar novamente que no caso da resolução do campo de vorticidades foram usados tanto a discretização polinomial como a de diferenças centrais e para este caso, estudo do campo de temperaturas e umidades, foi utilizada apenas a discretização polinomial.

No que se refere a malha, foi utilizada a mesma da resolução do escoamento, pela facilidade de entrada dos dados tornando desnecessária a interpolação do campo de  $\Psi$ . Assim sendo, pressupoem-se que a malha que deu resultados significativos para o escoamento fornecerá, também, bons resultados para o campo de temperaturas e umidade. Os resultados obtidos e comparações com resultados de outros autores são mostrados no final deste capítulo.

##### 4.4.1 Condições de contorno para os campos de temperatura e umidade

As condições de contorno para a solução do campo de temperaturas foram adotadas de forma simplificada tal que, conhecido o campo de  $\Psi$ , tenha-se:

$$\eta = 0 \rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0;$$

$$\begin{aligned}\eta = 1 &\rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0; \\ \xi = 0 &\rightarrow \Theta = 1; \\ \xi = 1 &\rightarrow \Theta = 0;\end{aligned}$$

Isto implica obviamente na temperatura de parede constante e igual a  $T_w$ . Neste caso quando começa a ocorrer o crescimento da fronteira isto deixa de ocorrer e valores diferentes para  $\Theta_w$  dever ao ser estabelecidos em função da nova temperatura de superfície.

No que tange ao campo de umidades todas as observações feitas anteriormente são válidas e as condições de contorno similares:

$$\begin{aligned}\eta = 0 &\rightarrow \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \\ \eta = 1 &\rightarrow \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \\ \xi = 0 &\rightarrow w = 1; \\ \xi = 1 &\rightarrow w = 0;\end{aligned}$$

#### 4.5 Determinação dos adimensionais $Nu$ e $Sh$ a partir dos campos de temperatura e umidade.

Até o momento foram mostradas as etapas a serem cumpridas para obtenção dos campos de temperatura e umidade, o que na realidade não resolve o problema pois o que interessa, na realidade, são os coeficientes de película dos processos de transferência de calor e massa. Obviamente que é o campo de temperatura e umidade que vai nos fornecer estes coeficientes  $h$  e  $h_m$ , através dos adimensionais  $Nu$  e  $Sh$ . Para obter estes adimensionais é preciso trabalhar um pouco ainda com as expressões.

**Nusselt:** fornecerá o valor de  $h$  quando desejado. Para obter o Nusselt a partir do campo de temperaturas é simples. Imaginemos a taxa de calor que é transferida por condução.

$$q_r = -k_f A_n \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{k_f}{r(T_w - T_\infty)} A_n \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}$$

Por outro lado a expressão para o caso de coeficiente de película seria:

$$q_r = h A_n (T_\infty - T_l) = -\frac{h}{T_w - T_\infty} A_n \Theta_l$$

Assim como  $Nu = hD/k$  temos igualando as expressões:

$$-\frac{h}{T_\infty - T_w} \Theta_l = -\frac{k_f}{r(T_\infty - T_w)} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \rightarrow \frac{hr}{k_f} = \frac{1}{\Theta_l} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}$$

Como o Nusselt é definido em função do diâmetro  $D$ , temos que:

$$\frac{hD}{k_f} = \frac{2}{\Theta_l} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \tag{4.8}$$

Para o caso de  $T = T_w$ ,  $\Theta_l = 1$ .

Sherwod: segue um raciocínio análogo ao do Nusselt, admitindo o fluxo de massa por difusão:

$$m_r = -D_f A_n \frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{D_f}{r(W_w - W_\infty)} A_n \frac{\partial w}{\partial \xi}$$

e a expressão do coeficiente de película:

$$m_r = h_m A_n (W_\infty - W_l) = -\frac{h_m}{W_w - W_\infty} A_n w_l$$

resultando também na expressão similar:

$$Sh = \frac{h_m D}{D} = \frac{2}{w_l} \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (4.9)$$

Sendo que se  $W_l = W_w$  temos que  $w_l = 1$ .

## 4.6 Resultados

### 4.6.1 Campo de temperatura

Os resultados do campo de temperaturas foram usados para comparar os resultados obtidos com alguns dados anteriores, principalmente [3]. Foram obtidos resultados a partir das três condições de escoamento propostos no capítulo 3.

A resolução deste caso considerou temperatura de parede constante para efetuar a comparação dos resultados. Os campos obtidos para a distribuição de temperaturas em torno do cilindro para este caso estão mostrados na figura (4.2) e é bem similar ao obtido na bibliografia. A figura (4.3) mostra resultados similares obtidos por Chun et al. [3].

A comparação do campo de temperaturas tão somente não fornece boa acuracidade para a verificação da resolução, para tanto calculou-se o valor do Nusselt em torno de todo o cilindro e comparou-se novamente o resultado com [3], obtendo aqui também concordância entre os resultados. Os valores obtidos para o Nusselt em função do ângulo do cilindro e comparados a resultados experimentais está mostrado na figura (4.4).

Os resultados apresentam a concordância desejada, no entanto, o que foi mais surpreendente foi que resultados de escoamento tão diferentes para as diversas condições, vide figura (3.2), conduzem a resultados praticamente idênticos de campo de temperaturas e Nusselt próximo à parede. Considerando isto, para este caso específico onde o que se deseja são coeficientes de película localizados nas imediações da parede, deve ser usado para o escoamento as condições que levam a uma rápida estabilização não importando se conduzem a erros em posições mais afastadas do cilindro. A forma mais conveniente no caso estudado seria a utilização da discretização polinomial, que apresenta resultados bem mais rápidos que os demais métodos.

Para uma a confirmação dos valores obtidos foram colocados no gráfico, figura (4.4), alguns pontos experimentais obtidos por Eckert e Soehghen[8] que fizeram avaliações experimentais da transferência de calor local em torno de um cilindro. Os resultados obtidos mostram boa concordância entre os pontos e não é possível uma melhor comparação pois não foi informada a temperatura do ar para o caso do teste. Na avaliação numérica o número de Prandtl adotado foi 0,72.

Além disso, para uma melhor confirmação da acuracidade dos resultados, calculou-se o Nusselt médio a partir de todos estes valores verificamos que este valor concorda com as expressões empíricas bastante



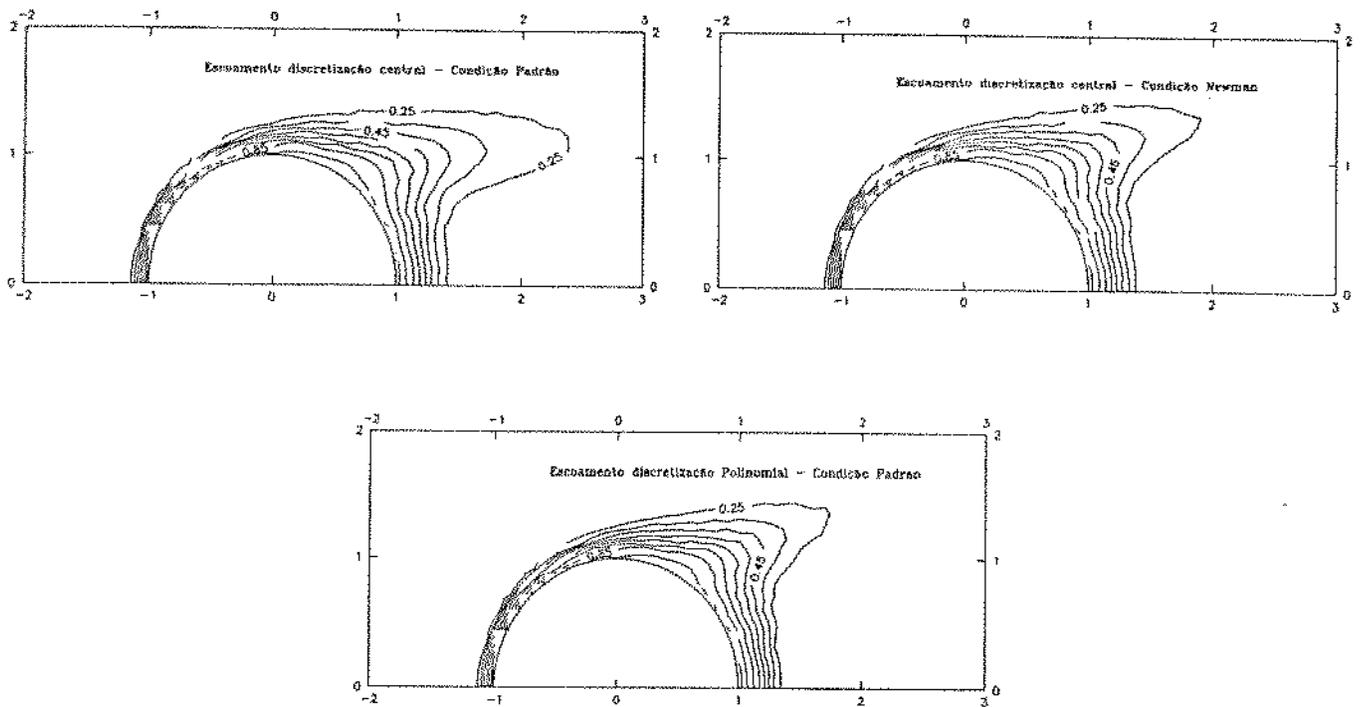


Figura 4.2: Resolução do campo de temperaturas considerando as diversas discretizações do campo de escoamento

utilizadas para este fim, neste caso específico a verificação foi feita a partir das expressões empíricas fornecidas por Holman [13]:

$$Nu = 0,683 Re^{0,466} Pr^{1/3} \text{ para } Re = 200$$

Avaliando o valor de Nusselt por esta expressão obtém-se um valor de 7,16, e o valor médio obtido dos valores mostrados na figura (4.4) é 6,4. Assim sendo os valores médios, se levarmos em conta o desvio da primeira expressão, estão dentro da faixa esperada.

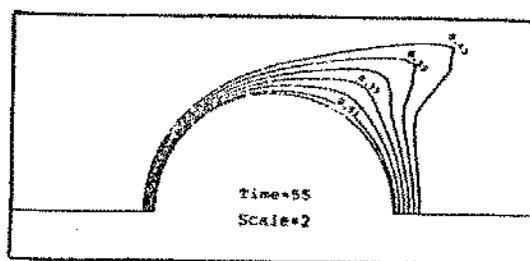


Figura 4.3: Resolução do campo de temperaturas obtidos por Chun et al [3] para  $Re = 200$ .

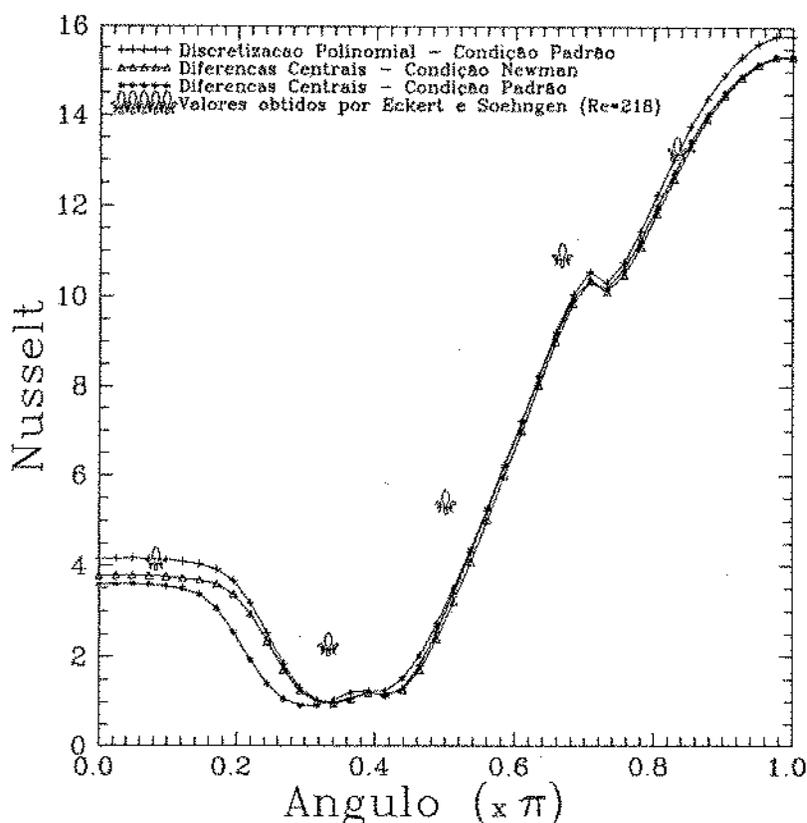


Figura 4.4: Valores do Nusselt na parede considerando as diversas discretizações do campo de escoamento e valores experimentais.

#### 4.6.2 Campo de umidade

Quanto à resolução do campo de umidades não há resultados com os quais se possa comparar, no entanto como a sua solução é idêntica a do campo de temperaturas acredito que a comparação anterior já sirva para confirmar a acuracidade dos resultados desta solução também. Os valores de  $Sh$  na parede e sua variação ao longo do cilindro estão mostrados na figura (4.6). Como foi visto que para o campo de temperaturas o tipo de discretização utilizada não afeta de forma significativa o campo obtido. Serão mostradas as curvas de isoumidade e dos valores de  $Sh$  apenas para um caso, utilizou-se para isto o caso das condições de Newman na fronteira distante. Os resultados obtidos para um número de Schmidt de 0,59 estão mostrados na figura (4.5).

Para comparação dos resultados não se conseguiu valores experimentais, no entanto fez-se a comparação pela expressão de Lewis, que relaciona os coeficientes de película de transferência de massa e calor:

$$\frac{h}{h_m} = \rho c_p \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{2/3} = \rho c_p Le^{2/3}$$

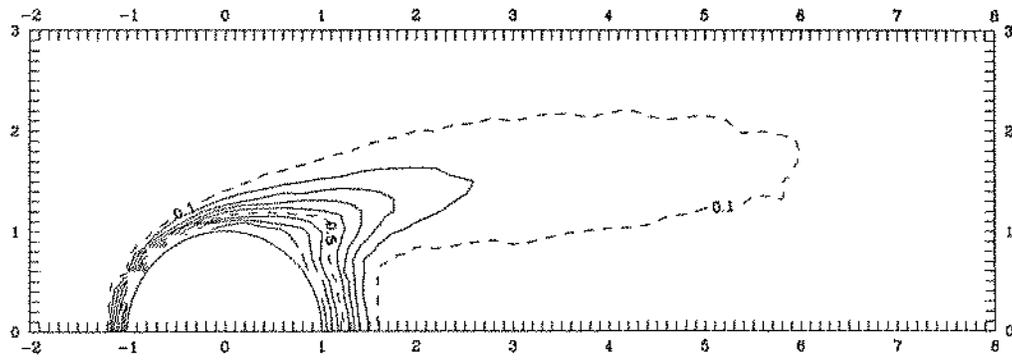


Figura 4.5: Valores do campo de umidade para  $Re = 200$ .

isto implica que:

$$\frac{Nu}{Sh} = \frac{\rho c_p D}{k} Le^{2/3}$$

que resultaria em um  $Sh$  médio de 6,39, tomando-se o  $Nu$  da expressão empírica ou 5,71, tomando-se o

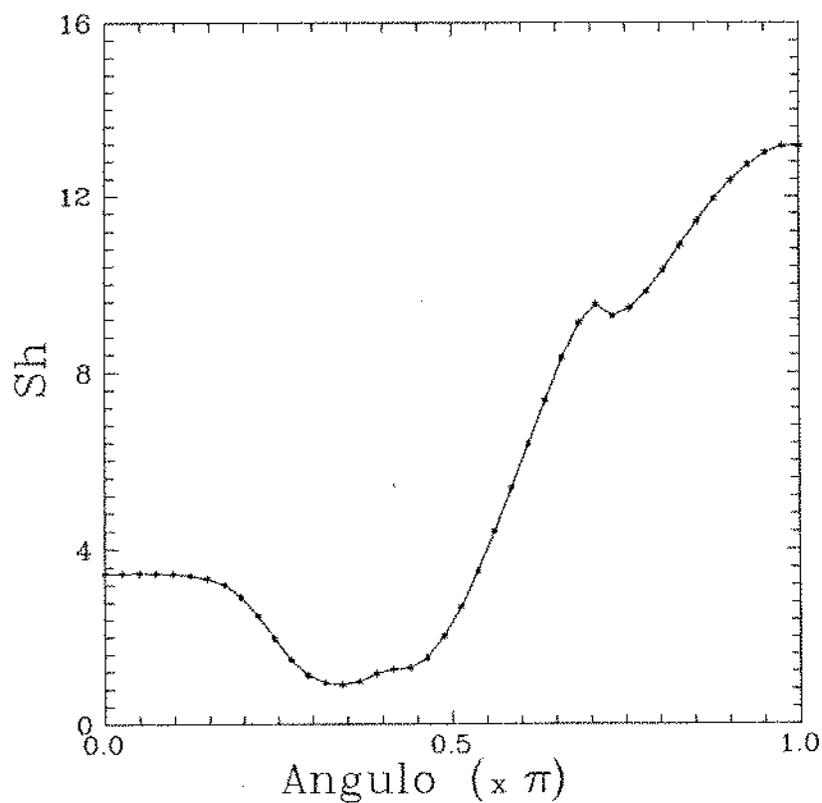


Figura 4.6: Valores do Sherwod na parede para  $Re = 200$ .

$Nu$  médio da figura (4.4). Calculando o  $Sh$  médio dos valores mostrados na figura (4.6) obtém-se o valor de 5,76, que praticamente coincide com o resultado do gráfico anterior.

O método acima não é exato, mas é comumente utilizado na literatura para obtenção de coeficientes de película, devendo portanto apresentar bons resultados e permitindo afirmar que o modelo utilizado para transferência de massa é representativo do fenômeno físico.

# 5

## Modelagem do Processo de Formação de Gelo

### Introdução

Como foi visto no capítulo 1 o processo de formação de gelo se subdivide em diversas etapas. Para uma modelagem mais abrangente e por se tratarem dos processos mais importantes neste fenômeno Tao et al[40] subdividiram a sua formulação em duas etapas básicas:

**Crescimento unidimensional dos cristais:** período no qual forma-se e ocorre o crescimento na direção vertical á superfície.

**Ramificação dos cristais:** onde os cristais vizinhos começam a interagir entre si formando uma rede complexa. Neste estágio o gelo é tratado como um meio poroso.

O modelo fornece também o parâmetro indicador de que a transição entre um estágio e outro está ocorrendo, este parâmetro é o tempo de transição( $t_{tr}$ ). Este tempo é obtido como sendo 2/3 do tempo de transição fornecido por Hayashi et al [12], que pode ser visto na figura (5.9). Esta aproximação não é exata, como veremos adiante, pois o fator primordial para a transição não seria a temperatura de evaporação e sim o tipo de cristal formado, no entanto este trabalho usará a mesma formulação do modelo, mesmo porque ainda não se conseguiu nenhum tipo variável que expresse a taxa de deposição. Os valores assim obtidos para o  $t_{tr}$  foram plotados no gráfico da figura (5.1).

Conhecendo o procedimento geral veremos agora uma descrição mais detalhada do método que, apesar de se tratar de um método recente, aparece como o mais completo método para simulação de fenômenos de formação de gelo.

### 5.1 Crescimento unidimensional dos cristais

É a primeira fase no processo de formação de gelo e corresponde à formação de núcleos e seu consequente crescimento na direção normal à superfície. Segundo o elaborador, este processo não tem grande

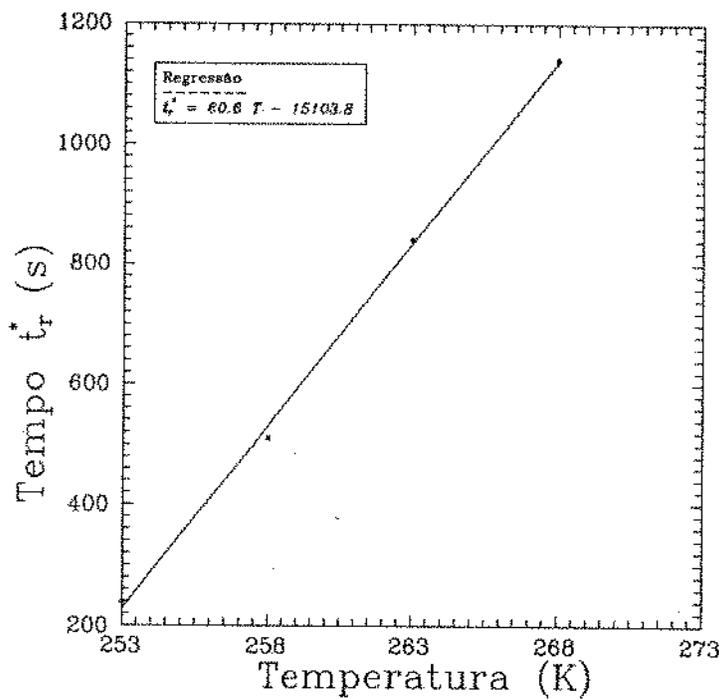


Figura 5.1: Valores dos tempos de transição na faixa de  $-20^{\circ}\text{C}$  a  $0^{\circ}\text{C}$ .

influência sobre os resultados obtidos na próxima fase pois se trata de um processo extremamente rápido mas, no entanto é uma etapa que deve ser cumprida para que se chegue ao próximo estágio.

Para conseguir formular este problema foi admitido que o crescimento do cristal ocorre com este tendo sempre um formato cilíndrico de raio não constante como o mostrado na figura (5.2). Se considerarmos uma parcela  $dr$  da figura veremos:

- o balanço energético:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variação da} \\ \text{energia interna} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Calor latente devido} \\ \text{a mudança da fronteira} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo de Calor} \\ \text{entrando no volume} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Fluxo de calor} \\ \text{saindo do volume} \end{array} \right\}$$

Com isto podemos analisar termo a termo:

Variação da energia interna	$\rho_g c_{p,g} \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\pi}{4} d^2 dr$
Calor devido ao mov. da fronteira	$-\rho_g \lambda \frac{\pi}{4} \left[ \left( d + \frac{\partial d}{\partial t} dt \right)^2 - d^2 \right] dr = -\rho_g \lambda \frac{\pi}{4} 2d \frac{\partial d}{\partial t} dr$
Calor entrando no volume	$q_r + q_{\text{conv}} = -k_g \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \frac{\partial T}{\partial r} + h(\pi d dr)(T_\gamma - T_\beta)$
Calor saindo do volume	$q_{r+dr} = - \left\{ k_g \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[ k_g \left( \frac{\pi}{4} d^2 \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right] dr \right\}$

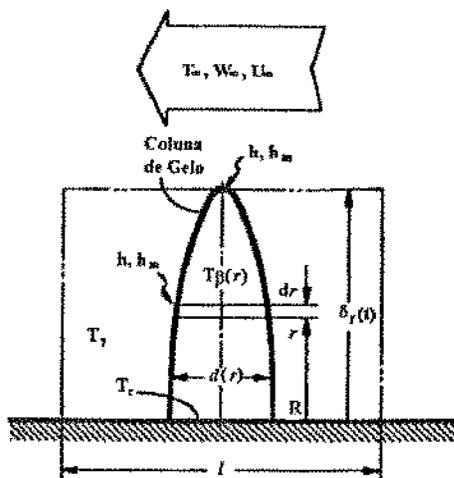


Figura 5.2: Esquema do formato do crescimento do cristal.

Efetuando-se com estes termos o balanço global obtém-se:

$$\rho_g c_{p,g} d \frac{\partial T}{\partial t} = 4h(T_\gamma - T_\beta) + \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial r} \left( k_g d^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 2\rho_g \lambda \frac{\partial d}{\partial t}$$

ou melhor

$$\rho_g c_{p,g} d \frac{\partial T}{\partial t} = 4h(T_\gamma - T_\beta) + 2k_g \frac{\partial d}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} + k_g d \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + 2\rho_g \lambda \frac{\partial d}{\partial t} \quad (5.1)$$

• balanço mássico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Variação} \\ \text{da massa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de transf.} \\ \text{de massa} \end{array} \right\}$$

Com isto analisando termo a termo:

Variação da massa	$\rho_g \frac{\pi}{4} \frac{\partial d}{\partial t} \left[ \left( d + \frac{\partial d}{\partial t} dt \right)^2 - d^2 \right] dr = \rho_g \frac{\pi}{4} 2d \frac{\partial d}{\partial t} dr$
Taxa de transf. de massa	$h_m (\pi d dr) (W_\gamma - W_\beta)$

onde  $W_\beta$  indica concentração avaliada à temperatura  $T_\beta$  e leva a:

$$\rho_g \frac{\partial d}{\partial t} = 2h_m (W_\gamma - W_\beta) \quad (5.2)$$

### Condições de contorno

Esta formulação está sujeita às seguintes condições de contorno:

i -  $r = \delta$ : onde tem-se um processo de transferência de massa ocorrendo. Supondo o diâmetro da superfície igual a  $d_0$ :

$$d = d_0 \quad (5.3)$$

$$\rho_g d_0 \frac{d\delta}{dt} = h_m d_0 (W_\infty - W_\delta) \rightarrow \frac{d\delta}{dt} = \frac{h_m}{\rho_g} (W_\infty - W_\delta) \quad (5.4)$$

$$-\rho_g \lambda d_0 \frac{d\delta}{dt} = k_g d_0 \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_\delta + h d_0 (T_\infty - T_s) \rightarrow \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_\delta = \frac{h}{k_g} (T_\infty - T_s) + \frac{\rho_g \lambda}{k_g} \frac{d\delta}{dt} \quad (5.5)$$

ii -  $r = 0$ : o diâmetro da superfície é assumido igual ao seu posterior e a temperatura de superfície igual à temperatura de evaporação:

$$T_s = T_e \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial d}{\partial r} = 0 \quad (5.7)$$

iii -  $t = 0$ : que são as condições iniciais do fenômeno:

$$d = d_0 \quad (5.8)$$

$$\delta = \delta_0 \quad (5.9)$$

$$T_\delta = T_e \quad (5.10)$$

### Observações finais

- O valor de  $T_\gamma$  é uma função peso dependente do fator  $\alpha$  que pode variar entre 0, para  $Re$  muito baixos, e 1, para  $Re$  muito altos. Assim:

$$T_\gamma = \alpha T_\infty + (1 - \alpha) T_\beta$$

- Não se compreende bem como ocorre o fenômeno de nucleação, o que implica num desconhecimento do número e da distância entre si dos núcleos. Assim sendo, foi estabelecida a condição de um núcleo por volume. Obviamente que o diâmetro do núcleo formado não pode superar o tamanho do volume, para tanto o diâmetro adotado é tal que forneça uma continuidade entre a velocidade de fronteira nas etapas:

$$d_0 = K_{frac} [\text{Tamanho do Volume na dir. paralela à superfície}]$$

onde  $K_{frac}$  teve como valores adotados os mostrados na tabela (5.1).

- Outro detalhe é que o  $\delta_0$  não pode ser zero, basicamente por dificuldades numéricas, como subdividir regiões que não existem. Assim sendo é assumido um valor bem pequeno para  $\delta_0$ , no caso:

$$\delta_0 = \frac{d_0}{30}$$

$\Delta C < 0.008$	$0.008 < \Delta C < 0.01$	$0.01 < \Delta C < 0.013$	$\Delta C > 0.013$
0,50	0,65	0,70	0,75

Valores de  $\Delta C$  dados em  $\text{kg/m}^3$ .

Tabela 5.1: Valores de  $K_{frac}$  adotados.

## 5.2 Condições de acoplamento

Para fazer o modelamento completo do fenômeno de congelamento é necessário que se faça uma adaptação da solução obtida para que esta funcione como passo inicial do próximo estágio. As adaptações são as seguintes, para cada uma das  $i$  subdivisões:

$$\varepsilon_{\beta,i} = \frac{\pi d^2}{4l^2} \quad (5.11)$$

$$T_i = \varepsilon_{\beta,i} T_{\beta} + (1 - \varepsilon_{\beta,i}) T_{\gamma} \quad (5.12)$$

$$\rho_{f,i} = \varepsilon_{\beta,i} \rho_{\beta} + (1 - \varepsilon_{\beta,i}) \rho_{\gamma} \quad (5.13)$$

$$c_{p,i} = \varepsilon_{\beta,i} c_{p,\beta,i} + (1 - \varepsilon_{\beta,i}) c_{p,\gamma,i} \quad (5.14)$$

Cabe ressaltar que aqui existe uma conversão que tem semelhança a um efeito degrau. Na realidade o processo de transformação de colunas para um meio poroso é um processo que não ocorre instantaneamente, no entanto na simulação numérica torna-se obrigatória a simulação uma transformação instantânea. Isto implica em transformar as colunas de gelo da primeira fase em meio poroso, fazendo com que o gelo agrupado nas colunas de repente se espalhasse por todo o volume formando um meio poroso com as propriedades médias entre o gelo e o ar. Para ilustrar esta transformação que é um artifício eminentemente numérico vide a figura (5.3).

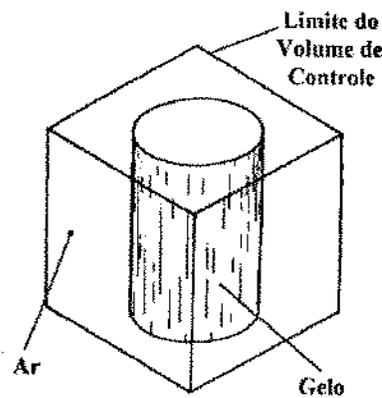


Figura 5.3: Cilindro de gelo circundado de ar num V.C.

### 5.3 Fase de ramificação dos cristais

Esta fase começa a tratar o gelo como um meio poroso, e segundo a sua formulação e representa o processo fisicamente até que a infiltração do condensado se torne um fator preponderante, ou seja, a temperatura  $T_s$  atinja  $-5\text{ }^\circ\text{C}$ .

O modelamento foi feito baseando-se nas seguintes hipóteses:

- (a) Transporte de massa e energia unidimensional;
- (b) Pressão interna do meio poroso uniforme;
- (c) Equilíbrio termodinâmico ( $T_{\text{fase sólida}} = T_{\text{fase líquida}}$ );
- (d) Predominância do processo de difusão sobre o convectivo dentro do meio poroso;
- (e) O ar que se encontra dentro do meio poroso se encontra saturado.

Assumindo uma fração de volume  $\Delta V$  dentro do meio poroso da forma mostrada na figura (5.4), obteremos diretamente as expressões para:

- balanço de energia:

$$\rho_f c_{p,f} \frac{\partial T}{\partial t} - \dot{m} \lambda = \frac{\partial}{\partial r} \left( k_{ef} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (5.15)$$

- balanço de massa:

– fase  $\gamma$  - baseando-se na hipótese do efeito da difusão ocorrendo primeiramente.

$$\frac{\partial \varepsilon_\gamma W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( D_{ef} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \quad (5.16)$$

– fase  $\beta$  - gelo baseando-se na hipótese (e) temos:

$$\frac{\partial m_\beta}{\partial t} = \dot{m} = W - W_{sat} \quad (5.17)$$

para um determinado V.C.

Verifica-se se entre os valores de unidades calculados se existem alguns acima da saturação, os que forem encontrados serão sublimados, ou seja, convertidos para gelo aumentando a fração de sólido.

#### Condições de contorno

As condições iniciais são fornecidas pela formulação anterior, assim como as condições próximas à superfície, pelo menos no que se refere à temperatura.

No entanto as condições na fronteira móvel são expressas de forma diferente:

$$h_m(W_\infty - W_\delta) = D_{ef,s} \frac{\partial W}{\partial r} + \rho_{f,s} \frac{d\delta}{dt} \quad (5.18)$$

$$h(T_\infty - T_s) = k_{ef} \frac{\partial T}{\partial r} - \rho_{f,s} \lambda \frac{d\delta}{dt} \quad (5.19)$$

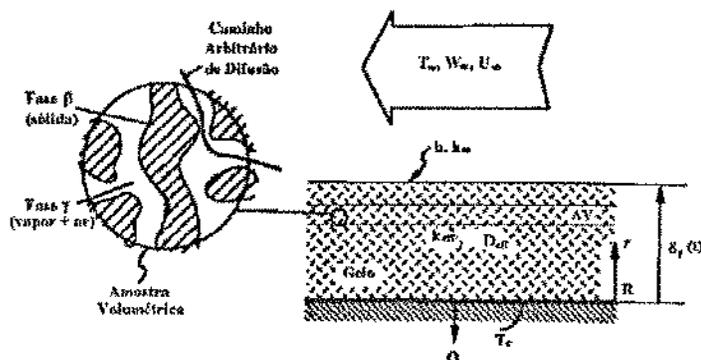


Figura 5.4: Esquema do volume utilizado dentro do meio poroso.

### Observações finais a respeito das propriedades

- As propriedades do gelo foram avaliadas a partir de expressões empíricas encontradas em [6] (condutividade) e [24] (calor e volume específicos).

$$k_g = \frac{630}{T} \quad [\text{W/m K}] \quad (5.20)$$

$$c_{p,g} = 2.11656 + 7.2845 \times 10^{-3}T \quad [\text{kJ/kg K}] \quad (5.21)$$

$$v_g = 1.0907 \times 10^{-3} + 1.4635 \times 10^{-3}T \quad [\text{m}^3/\text{kg}] \quad (5.22)$$

- As propriedades do ar seco também devem ser avaliadas:

$$k_{ar} = 0.001968 + 8.15 \times 10^{-5}T \quad [\text{W/m K}] \quad (5.23)$$

$$c_{p,ar} = 1.004 \quad [\text{kJ/kg K}] \quad (5.24)$$

$$\rho_{ar} = \frac{344.9}{T} \quad [\text{kg/m}^3] \quad (5.25)$$

- A boa avaliação do  $k$  do meio poroso é de fundamental importância para a obtenção de bons resultados. Para se conhecer o  $k$  do gelo existem uma série de expressões que o relacionam com a densidade do gelo, no entanto uma expressão mais complexa pode ser vista na secção 5.4. Tao et al [40] usaram a expressão:

$$k_{ef} = 0.02422 + 7.214 \times 10^{-4}\rho_f + 1.1797 \times 10^{-6}\rho_f^2 \quad (5.26)$$

proposta por Yonko e Sepsy [43], no entanto usaremos uma expressão mais geral.

- O coeficiente de difusão também precisa ser corrigido, sendo que sua expressão real seria

$$D_{ef} = \varepsilon_\gamma D(1 + F) \quad (5.27)$$

O valor do coeficiente de difusão real pode ser dado pela expressão [30]:

$$D = 2.19 \left( \frac{T}{256} \right)^{1.81} \times 10^{-5}$$

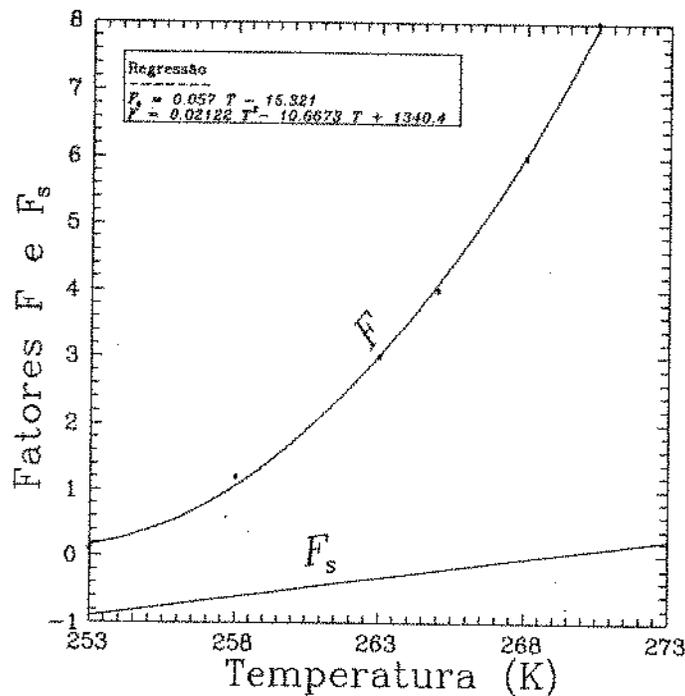


Figura 5.5: Gráfico dos valores de  $F$  e  $F_s$  em função da  $T_e$ .

Depois de calculado o valor de  $D_{ef,s}$  se utiliza então o valor de  $F_s$ . Os valores de  $F$  e  $F_s$  são encontrados na figura (5.5). Sendo que o valor de  $D_r$  é o coeficiente difusivo avaliado à temperatura de evaporação.

- É necessário também conhecer a pressão de saturação em diversas concentrações e assim obter o valor da concentração na região próxima à superfície. Uma expressão empírica foi usada em [25]:

$$\ln(p_{\text{vap,sat}}) = \frac{C_1}{T} + C_2 + C_3T + C_4T^2 + C_5T^3 + C_6T^4 + C_7\ln(T)$$

onde  $C_1 = -5674.5359$ ,  $C_2 = 6.392547$ ,  $C_3 = -0.9677843 \times 10^{-2}$ ,  
 $C_4 = 0.62215701 \times 10^{-6}$ ,  $C_5 = 0.20747825 \times 10^{-8}$ ,  $C_6 = 0.9484024 \times 10^{-12}$ ,  
 $C_7 = 4.1635019$

válida na faixa  $-100 < T < 0^\circ\text{C}$ .

A pressão de saturação é usada para calcular a umidade de saturação a uma determinada temperatura. Isto é possível utilizando-se a expressão:

$$\text{U.A.} = 0.6218 \frac{p_{\text{vap,sat}}}{P_{\text{total}} - p_{\text{vap,sat}}}$$

Se necessitamos a concentração da fase ar ( $\gamma$ ) podemos aproximar através de:

$$W = \text{U.A.} \cdot \rho_{ar}$$

- O volume específico total segundo [31] para o ar úmido pode ser obtido pela expressão (convertida para unidades do SI):

$$v = 1.6168 \times 10^{-2} \frac{T}{P} \left( 1 + \frac{p_{vap}}{P} \right)$$

- O valor do calor latente de sublimação pode ser dado pela expressão mostrada em [26]:

$$\begin{aligned} \lambda = h_{vap,T} - h_{gelo,T} &= -0.04667T(R) + 1220.1 \text{ [BTU/lbm]} \\ &= -0.195386T(K) + 2837.77 \text{ [kJ/kg]} \end{aligned} \quad (5.28)$$

- Ao final do procedimento deve-se recalculiar o valor da densidade, condutividade e coeficientes de difusão da superfície e internos para cada um dos volumes, o que pode ser feito através das expressões (5.13), (5.26) e (5.27) respectivamente.

#### 5.4 Formulação geral para a obtenção da condutividade do gelo em função da densidade e temperatura

A determinação da condutividade do gelo a partir das condições do escoamento foi motivo de diversos estudos, desde alguns da década de 60, como os de Brian, até os dias de hoje. No entanto os estudos feitos inicialmente se aplicavam em faixas relativamente pequenas com condições específicas. Diversos destes estudos são citados na referência, no entanto, Dieterberg [6] a partir dos trabalhos de Biguria e Wenzel generalizou esta faixa e obteve um procedimento que funciona para qualquer densidade entre a do ar e a do gelo, e ainda funciona para temperaturas entre 80 e 273 K. Nesta secção estudaremos este modelo de forma mais detalhada.

O modelo de Dieterberg se baseia no tratamento do gelo como um meio poroso, e para tanto ele define a fração volumétrica  $\varepsilon$  como sendo:

$$\varepsilon = \frac{\rho_g - \rho_f}{\rho_g - \rho_a} \quad (5.29)$$

Neste estudo parte-se do princípio de que o gelo é formado por: cilindros de gelo com bolhas de ar, ou por: placas e esferas de gelo. Assim sendo é a combinação de todos estes componentes que fornece a condutividade do gelo. A expressão final para a condutividade do gelo é dada por:

$$k_{ef} = \frac{1}{4} \left\{ (3\varepsilon_c - 1)k_1 + (3\chi_c - 1)k_u + \sqrt{[(3\varepsilon_c - 1)k_1 + (3\chi_c - 1)k_u]^2 + 8k_1k_u} \right\} \quad (5.30)$$

onde:  $k_u = (1 - \varepsilon)k_b + \varepsilon k_c$  (limitante superior)  
 $k_1 = (1 - \varepsilon)k_p + \varepsilon k_s$  (limitante inferior)

Definindo:

$$\begin{aligned} a &= k_{e,ar}/k_{gelo} \\ k_{e,ar} &= k_{ar} + T_s k_v / \varepsilon \\ T_s &= 1/(1 + F_s) \end{aligned}$$

As diversas parcelas que contribuem para a condutividade são:

i - Parcela devido às bolhas de ar ( $k_b$ ):

$$k_b = k_g \frac{1 - 2\varepsilon \left( \frac{1-a}{2+a} \right)}{1 + \varepsilon \left( \frac{1-a}{2+a} \right)}$$

ii - Parcela devida aos cilindros de gelo ( $k_c$ ):

$$k_c = (1 - \varepsilon)k_g + \varepsilon k_{e,ar}$$

iii - Parcela devida às esferas de gelo ( $k_s$ ):

$$k_s = k_g \frac{3 + \varepsilon(a-1)}{3 - \varepsilon \left( \frac{a-1}{a} \right)}$$

iv - Parcela devida às placas de gelo ( $k_p$ ):

$$k_p = \frac{k_g k_{e,ar}}{(1 - \varepsilon)k_{e,ar} + \varepsilon k_g}$$

Sendo ainda que o valor de  $\varepsilon_c$  é dado pela expressão obtida através da correlação com dados experimentais:

$$\varepsilon_c = 13.6(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_1)^2 \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \right) + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)^2}{2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \right]$$

sendo:  $\varepsilon_1 = 0.1726(T/273.16)$

$\varepsilon_2 = 0.751$

$\varepsilon_3 = 0.3 \sin(\pi/2 [1 - (T/273.16)]/[1 - (T_e/273.16)])$

no entanto se  $\varepsilon < \varepsilon_1$  então deve ser utilizado  $\varepsilon_c = 0$ .

E finalmente quanto ao valor de  $\chi_c$ , ele é definido como:

$$\chi_c = 1 - \varepsilon_c$$

Apenas uma crítica deve ser feita a este modelo: no ponto onde este se refere ao cálculo da condutividade térmica efetiva do ar. Neste ítem o autor procura corrigir a condutividade do ar devido à umidade nele presente, mas nesta análise, porém, não foi considerado nem a umidade relativa nem a absoluta, sendo utilizado apenas o  $k$  do vapor. Como o valor da umidade do ar encontrado dentro do gelo é ínfimo, pois o ar mesmo que esteja saturado está a uma temperatura muito baixa foi dado a preferência pela utilização no modelo o  $k$  do ar seco. Para verificar que isto não levou a resultados errôneos apresentamos na figura (5.6) o gráfico que mostra os valores sem considerar a umidade e os retirados da referência [6].

Assim sendo todos os valores necessários para o cálculo da condutividade foram avaliados e é possível calcular os valores dentro da faixa permitida. Analisando bem verificar-se-á que este modelo é bem mais complexo que os modelos utilizados normalmente, no entanto, ele praticamente não possui limitações o que, por si só, já é uma grande vantagem.

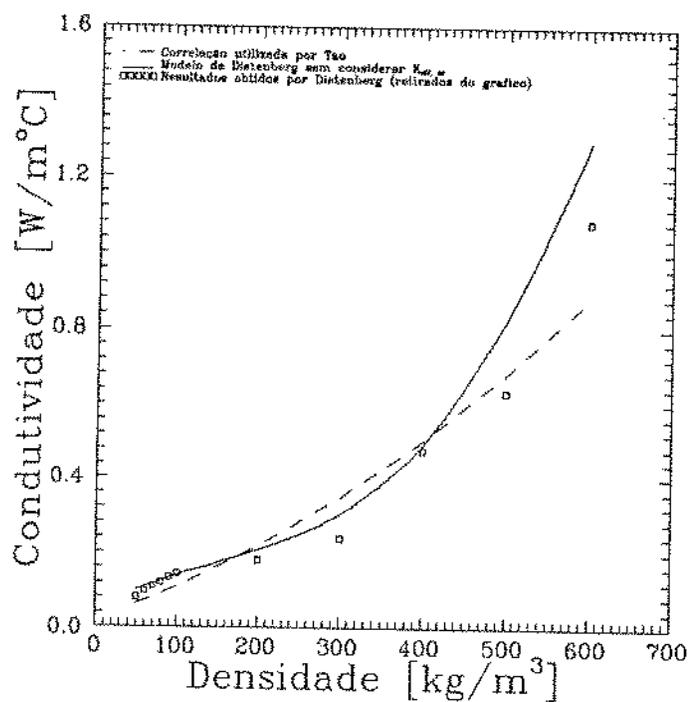


Figura 5.6: Comparação dos resultados do modelo utilizado com os de Dietenberg [6].

## 5.5 Procedimento computacional

Com os procedimentos mostrados em secções anteriores é possível trabalhar com as expressões de forma a obter:

- o crescimento da fronteira de gelo;
- a distribuição da temperatura ao longo da camada de gelo.

Para a discretização das equações foi utilizado o método de diferenças finitas com as condições na fronteira alteradas em casos onde é necessário conhecer a propriedade e têm-se como condição de Newman na fronteira. Para isto utiliza-se a extrapolação baseada na série de Taylor:

$$\phi_{n-1} = \phi_n - \frac{d\phi}{dx} \Delta x$$

foi usada. A discretização completa das expressões obtidas para ambas as fase é discutida de forma mais detalhada no apêndice B, nos itens que se seguem mostrar-se-á apenas as equações discretizadas.

Primeira fase

Fronteira  $r = r_{cil} + \delta$ 

Diâmetro da coluna de gelo	$d = d_0$
Posição da interface	$\frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t} = \frac{h_m}{\rho_g}(W_\infty - W_s)$
Fluxo de calor	$\frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} = \frac{h}{k_g}(T_\infty - T_P^+) + \frac{\rho_g \lambda}{k_g} \frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t}$

Fronteira  $r = r_{cil}$ 

Diâmetro da coluna de gelo	$d_P = d_0$
Fluxo de calor	$T_0 = T_e$

Situação inicial de todos os pontos ( $t = 0$ )

Diâmetro da coluna de gelo	$d_P = d_0$
Posição da interface	$\delta = d_0/30$
Fluxo de calor	$T_P = T_e$

Expressões para os pontos internos

Diâmetro da coluna de gelo	$\frac{d_P^+ - d_P^-}{\Delta t} = \frac{2h_m}{\rho_g}(W_\gamma - W_\beta)$
Fluxo de calor	$\rho_g c_{p,g} d \frac{(T_P^+ - T_P^-)}{\Delta t} \Delta r = 4h(T_\gamma - T_P^+) \Delta r +$ $\frac{2\rho_g \lambda}{\Delta t} (d_P^+ - d_P^-) \Delta r + 2k_g \left[ \frac{T_N^+ + T_P^+}{2} \frac{d_N^+ - d_P^+}{\Delta r} - \frac{T_P^+ + T_S^+}{2} \frac{d_P^+ - d_S^+}{\Delta r} \right] +$ $k_g \left[ \frac{d_N^+ + d_P^+}{2} \frac{T_N^+ - T_P^+}{\Delta r} - \frac{d_P^+ + d_S^+}{2} \frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} \right] + \frac{2\rho_g \lambda}{\Delta t} (d_P^+ - d_P^-) \Delta r$

Note que a condição de fluxo de calor tem que ser resolvida por meio de algum método de resolução de sistemas, no nosso caso TDMA, no entanto o diâmetro pode ser resolvido explicitamente, com base no último campo de temperaturas.

## Segunda fase

Fronteira  $r = r_{cil} + \delta$ 

Umidade  $W_P^+ = W_{sat}^+$

Posição da interface  $h_m(W_\infty - W_P^+) = D_{ef,s} \frac{W_P^+ - W_S^+}{\Delta r} + \rho_{f,P} \frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t}$

Fluxo de calor  $h(T_\infty - T_P^+) = k_{ef} \frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} - \rho_{f,P} \lambda \frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t}$

Por estas expressões percebe-se que não houve preocupação com a massa solidificada na fronteira  $\delta$ , foi especificada apenas que a densidade neste ponto é exatamente igual à do ponto anterior. Esta é uma aproximação importante que implica em desconsideração completa da parcela de variação da energia interna, inclusive da parcela de massa solidificada citada anteriormente. No entanto esta desconsideração não representa parcela significativa da perda do calor, pois nesta área o aumento maior de energia interna é fornecido pela variação na posição da fronteira plenamente considerada.

Fronteira  $r = r_{cil}$ 

Umidade  $W_P^+ = W_P^- + \frac{2D_{ef}}{(1 - \varepsilon_P^-)} \frac{W_N^+ - W_P^+}{(\Delta r)^2} \Delta t$

Fluxo de calor  $T_P = T_e$

Expressões para os pontos internos

Umidade  $\left[ (1 - \varepsilon_P^-) \frac{(W_P^+ - W_P^-)}{\Delta t} \right] \Delta r = \frac{D_{ef}}{\Delta r} (W_N^+ - 2W_P^+ + W_S^+)$

Fluxo de calor  $\rho_{f,c_p,f} \frac{T_P^+ - T_P^-}{\Delta t} \Delta r + \dot{m} \lambda \Delta r = k_{ef} \left( \frac{T_N^+ - T_P^+}{\Delta r} - \frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} \right)$

A fração solidificada, como já foi dito anteriormente, é obtida a partir dos valores calculados de umidade que estiverem acima da saturação. Obviamente se ocorrer que todas as umidades estejam acima da temperatura de orvalho não haverá parcela solidificada. A expressão que indica a massa solidificada pode ser dada por:

$$\dot{m}_P = (W_P - W_{sat,T_P}) \Delta t \text{ se } W_P > W_{sat,T_P}$$

As novas densidades podem ser calculadas a partir da massa depositada  $\dot{m}$ , exceto na fronteira que é assumida igual à imediatamente anterior ( $\rho_{f,P}^+ = \rho_{f,S}^+$ ). A expressão é:

$$\rho_{f,P}^+ = \rho_{f,P}^- + \dot{m}_P \Delta t$$

**Acoplamento**

As condições de acoplamento são as fornecidas pelas expressões (5.11) até (5.14), que são válidas para qualquer ponto  $i$ .

## 5.6 Discussões sobre o modelo

Já foi discutido sobre o efeito degrau utilizado no acoplamento da densidade entre as duas fases que utilizamos como artifício para resolver um problema eminentemente físico. Temos que considerar outra limitação numérica: o crescimento da fronteira faz com que ao trabalhar com número de divisões fixas o tamanho de cada volume de controle se torne muitas vezes maior que o que iniciamos isto poderia nos levar a erros significativos se não considerarmos uma correção para a densidade. Para tanto, calculamos uma nova densidade média para cada um dos VCs, quando obtemos um novo  $\delta$ . Com isto conseguimos que a densidade, na média continue representando aquele novo VC maior. Para isto consideramos que todo o crescimento ( $\Delta\delta$ ) ocorreu com a densidade do último VC e os demais volumes podem ter a sua densidade recalculada utilizando da expressão genérica:

$$\rho_i = \frac{\rho_i \Delta r + [\rho_{i+1}(i+1) - \rho_i i] \Delta\delta / l_r}{\Delta r + \Delta\delta / l_r} \quad (5.31)$$

onde  $l_r$  é o número de subdivisões radiais e :

$$\Delta\delta = \delta^+ - \delta^-$$

Para verificar se a expressão fornecia valores razoáveis que não provocaria grandes discrepâncias sobre o modelo fez-se uma comparação entre os resultados de um programa que se utilizava da correção e outro que trabalhava com o número limite de pontos variando procurando deixar o  $\Delta r$  aproximadamente constante. O resultado obtido para a distribuição radial em uma posição angular dada é mostrado na figura (5.7).

Os resultados, apesar de aparecerem acentuados no gráfico cuja escala é bem ampliada, não apresentam uma diferença de valores significativa em termos de valores entre as distribuições. Entretanto quando comparamos o tempo despendido pelos dois programas verificamos que o número de pontos variando exige um grande tempo computacional, enquanto o primeiro programa resolve sempre um sistema de 10 incógnitas, o segundo até onde foi possível esperar já estava resolvendo um sistema de 400 incógnitas para um tempo não superior a três horas.

Foi feita também uma terceira curva para indicar a distribuição de densidade onde não se fez nenhum tipo de correção, ou seja, não se utilizou da expressão (5.31). Observe que neste caso a distribuição é um pouco deturpada, mas mesmo assim os seus valores em termos reais não se afastam muito dos demais. Como o fato de efetuar a correção não altera de forma significativa o tempo computacional e, de certa forma, melhora os resultados optou-se por esta alternativa como forma final.

Cabe ressaltar ainda que o gráfico da figura (5.7) foi montado para valores de coeficiente de película em  $\theta = 0$ , atrás do cilindro, e ainda para uma concentração  $W_\infty = 0,01$  kg/kg. Os resultados foram obtidos para um tempo de 4 horas. Finalmente a este respeito é possível afirmar que a melhor relação custo-computacional/benefício é obtida no segundo caso, que fez com que no programa geral fosse utilizado a resolução com número de pontos fixos.

Outro fator de vital importância para o modelo é a determinação do diâmetro inicial das colunas de gelo (primeira fase), principalmente no caso específico de regime laminar em que não há crescimento diametral da coluna de gelo, ou seja, o fator  $\alpha$  é admitido como sendo 0. Assim sendo estabelecemos uma metodologia para a determinação das densidade de transição. Esta metodologia consiste em tentar fazer com que o desvio de velocidade de fronteira entre a primeira e segunda fase seja suave, assim sendo ao

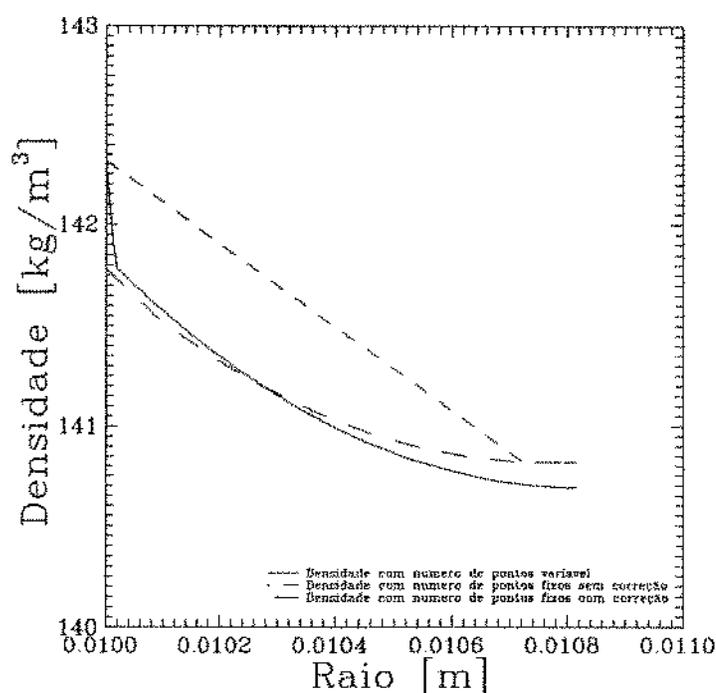


Figura 5.7: Comparação entre a distribuição radial de densidades para  $\Delta r$  constante e variando.

admitirmos a diâmetro correto quando o gelo sofre a transformação em degrau, descrito anteriormente, o crescimento de fronteira continua aparecendo na curva de forma suave.

Com base na literatura, basicamente Hayashi et al [12], poderia também ser desenvolvido um procedimento para a determinação da densidade na fase de transição. Isto é possível se verificarmos o gráfico mostrado na figura (5.8) onde temos os tipos de cristais formados.

Na figura (5.8) encontramos também as regiões em que pode-se identificar o tipo de gelo formado. Nesta figura em função da diferença de concentração entre a corrente livre e a parede ( $\Delta C$ ) e a temperatura de evaporação  $t_e$  torna possível traçar um perfil do tipo de gelo formado.

A partir do momento que está determinado o tipo de cristal formado podemos nos utilizar de outro gráfico desta mesma publicação onde o autor faz um acompanhamento experimental da densidade em diversos tipos de cristalização do gelo, como está mostrado na figura (5.9).

No entanto, na prática, este procedimento não fornece resultados melhores que o anterior. A explicação lógica encontrada para isto é que o autor não considerou todos os fatores envolvidos no fenômeno. Acredito que o fator realmente importante a ser considerado seria a taxa de deposição do gelo, que apesar de envolver o  $\Delta C$  e a  $t_{ev}$ , não são os fatores únicos e devem ser incluídos nesta lista pelo menos o  $h_m$ . Isto no entanto deve ser objeto de futuros estudos e depende de uma confirmação experimental, mas o método desenvolvido tenta acoplar as fases pelo primeiro método descrito, ou seja, a continuidade da velocidade de fronteira.

Veja também que se a hipótese do fator preponderante incluir o coeficiente de transferência de massa  $h_m$ , podemos ter em torno do cilindro diversos tipos de gelo com densidades diferentes. Para simplificação do modelo o acoplamento das velocidades foi feito por uma posição intermediária de taxa de transferência

Tipo da Formação		Período de Crescimento do Cristal	Período de Crescimento da Fronteira			
A	A-I					
	A-II					
B	B-I					
	B-II					
C	C-I					
	C-II					
	C-III					
D	D-I					
	D-II					

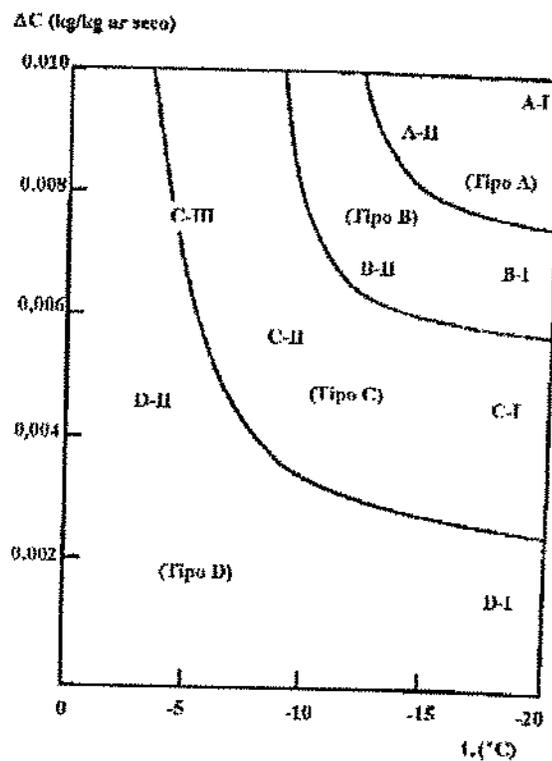


Figura 5.8: Tipos básicos de cristais formados segundo Hayashi [12]

de massa e estendida às demais posições.

Os resultados obtidos com este modelo, bem como alguns comentários, serão mostrados no capítulos posterior.

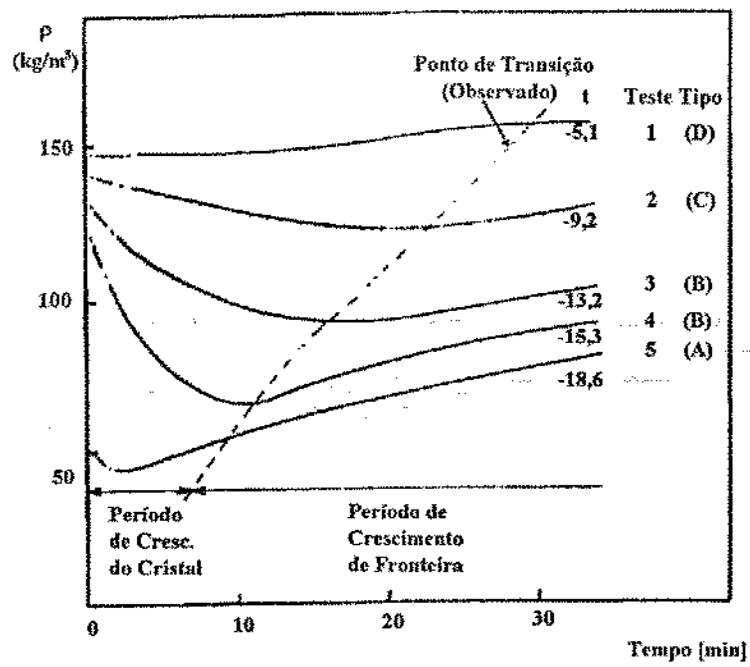


Figura 5.9: Variação da densidade com o tempo em função do tipo de cristal segundo Hayashi [12]

# 6

## Resultados, Discussões e Conclusões

### 6.1 Resultados Obtidos

Resolvidos os campos hidrodinâmico, térmico e de umidade, através do modelo proposto neste trabalho, foi possível obter alguns gráficos que mostram a a variação das propriedades do gelo e a sua taxa de deposição. Numa primeira etapa não se considerou o movimento da fronteira e nem o fato de que a temperatura na parede do tubo não é uniforme. Com estas simplificações montou-se o modelo genérico que não precisa recalcular continuamente os coeficientes de película e portanto fornece resultados mais rápidos. Este modelo otimizado tem ainda restrição do número de Reynolds, que não pode ser muito elevado, pois isto leva a parcela de resolução do escoamento a resultados errôneos. Neste caso específico trabalhou-se com numero de Reynolds de 200, obtendo boa concordância com os resultados numéricos e experimentais disponíveis podendo ser utilizado para obtenção dos valores de coeficiente de película, ou de seus adimensionais, com boa precisão. Estes coeficientes de película são os resultados importantes obtidos desta primeira fase e podem ser vistos nas figuras (4.4) e (4.6).

Partindo destes valores de coeficiente de película foi possível realizar todos os cálculos das propriedades locais e de crescimento da fronteira. A figura (6.1) mostra como se comporta a camada de gelo em torno de um cilindro de diâmetro de 10 mm. Este resultado concorda plenamente com o esperado em termos de distribuição da camada de gelo, distribuição esta que é definida principalmente pelos coeficientes locais de transferência de massa. No gráfico o valor de  $t_{tr}$  pode ser obtido pela expressão mostrada na regressão da figura (5.1) e o tempo final pode ser obtido dos gráficos de variação transiente.

Foi citado diversas vezes a influência do valor inicial de  $d_0$  na densidade, principalmente em regime laminar. Como pode ser visto na figura (6.1) a taxa de deposição se altera significativamente em função do ângulo, se a taxa de deposição é um fator importante para a densidade deveríamos considerar valores de  $K_{frac}$  também em função do ângulo. No entanto isto acarreta em um processo iterativo lento para se obter valores de densidade que se encaixem em cada posição angular, e que deve ser desenvolvido em estudos futuros. Neste estudo não foi possível se estender até este ponto sendo adotada a densidade de um ponto médio ( $\pi/2$ ) para todos os demais. Valores da variação da espessura da camada de gelo para o ponto de estagnação ao longo do tempo também estão mostrados, vide figura (6.2).

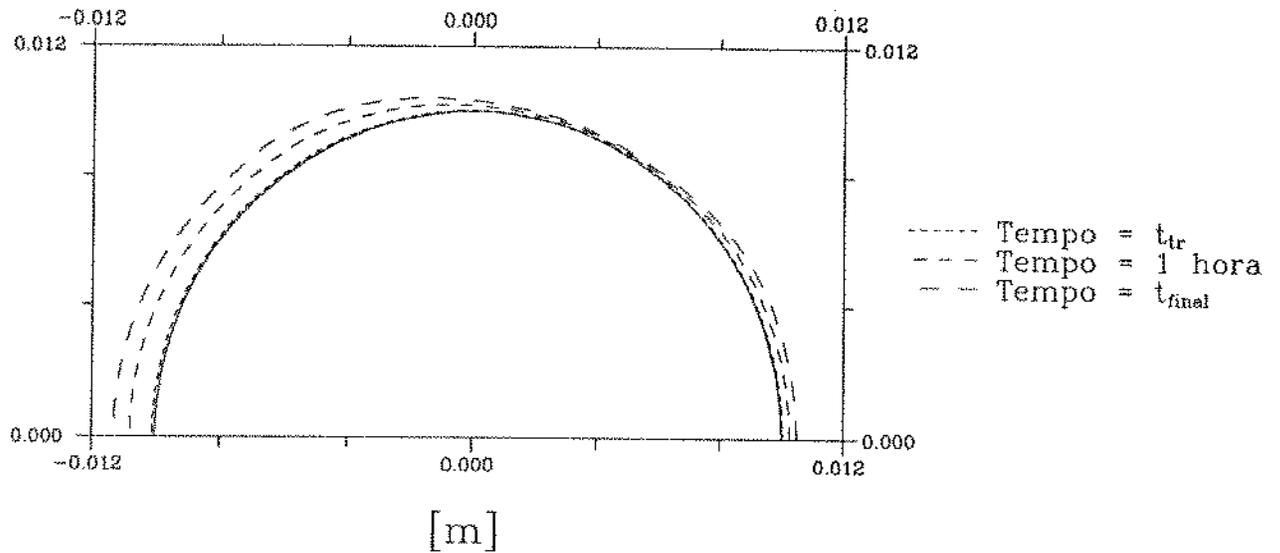


Figura 6.1: Distribuição da camada de gelo ao longo do cilindro para uma umidade de 0.005 kg/kg ar seco.

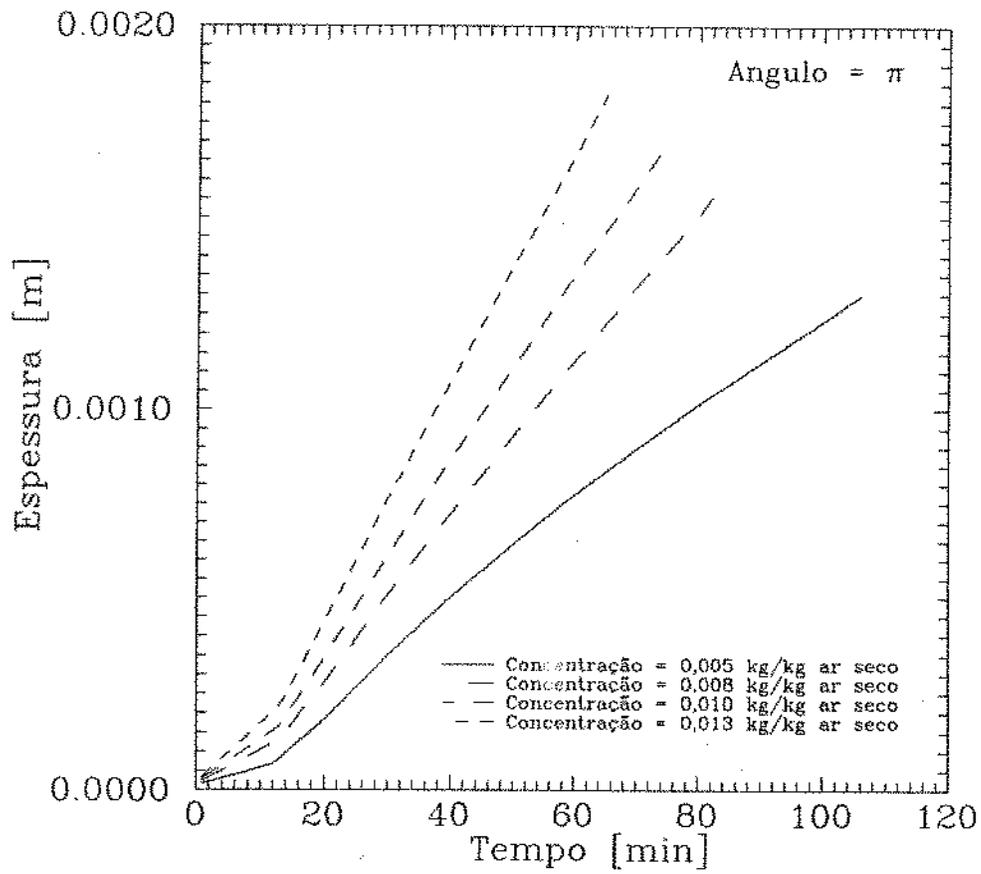


Figura 6.2: Variação da espessura da camada de gelo ao longo do tempo.

Um estudo importante é o que leva ao conhecimento das variações das propriedades do gelo e de deposição ao longo do tempo. Para não tornar o estudo repetitivo, com varios gráficos para diversas posições  $\theta$ , estipulou-se um ângulo de referência, também adotado como sendo  $\pi$ , ou seja a posição equivalente ao ponto de estagnação frontal ao escoamento. Assim sendo todas as variações das propriedades ao longo do tempo, para as diversas concentrações, são mostradas para este determinado ângulo. As variações da espessura de gelo, densidade, temperatura de superfície e velocidade de fronteira podem ser vistos nas figuras (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5), respectivamente.

A figura (6.2) mostra como varia a espessura do gelo em função do tempo e da concentração. Os resultados obtidos apresentam um comportamento dentro do esperado onde concentrações maiores, para as mesmas condições, resultam em camadas de gelo mais espessas. Existe uma pequena região no início do gráfico que apresenta uma inclinação menor, equivalente a uma menor taxa de crescimento de fronteira. Esta região engloba o período até o tempo de transição e esta menor inclinação se deve a uma densidade de gelo muito maior nesta primeira etapa, equivalente à do gelo sólido.

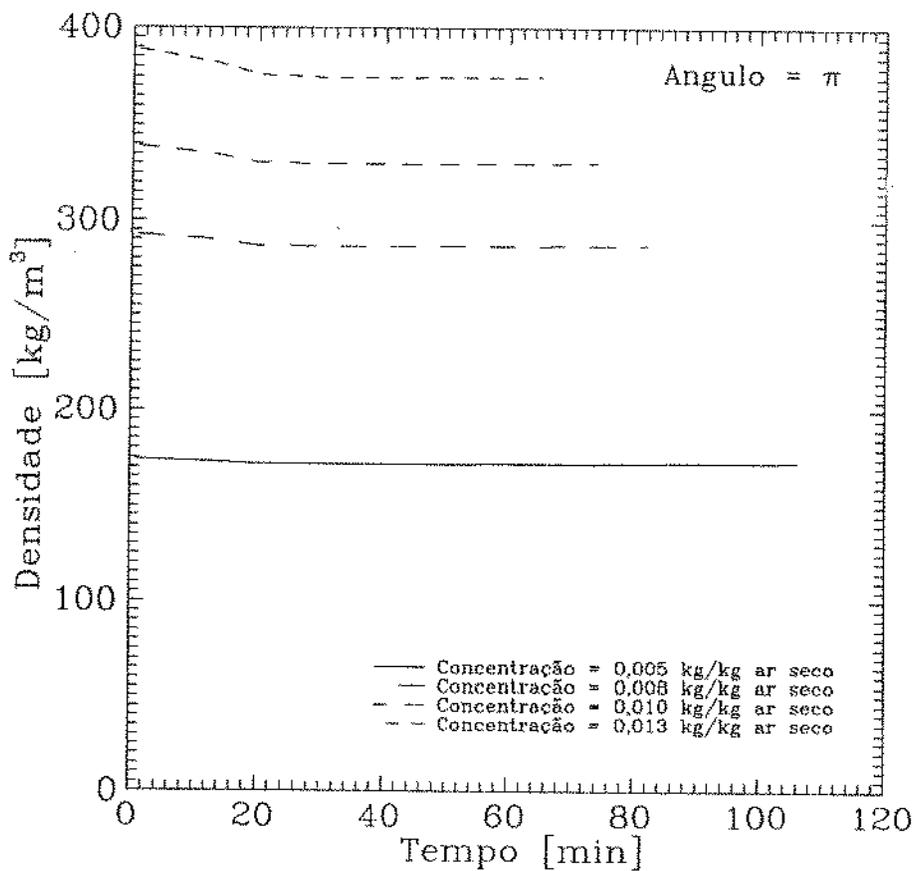


Figura 6.3: Variação da densidade de um ponto médio da camada de gelo ao longo do tempo.

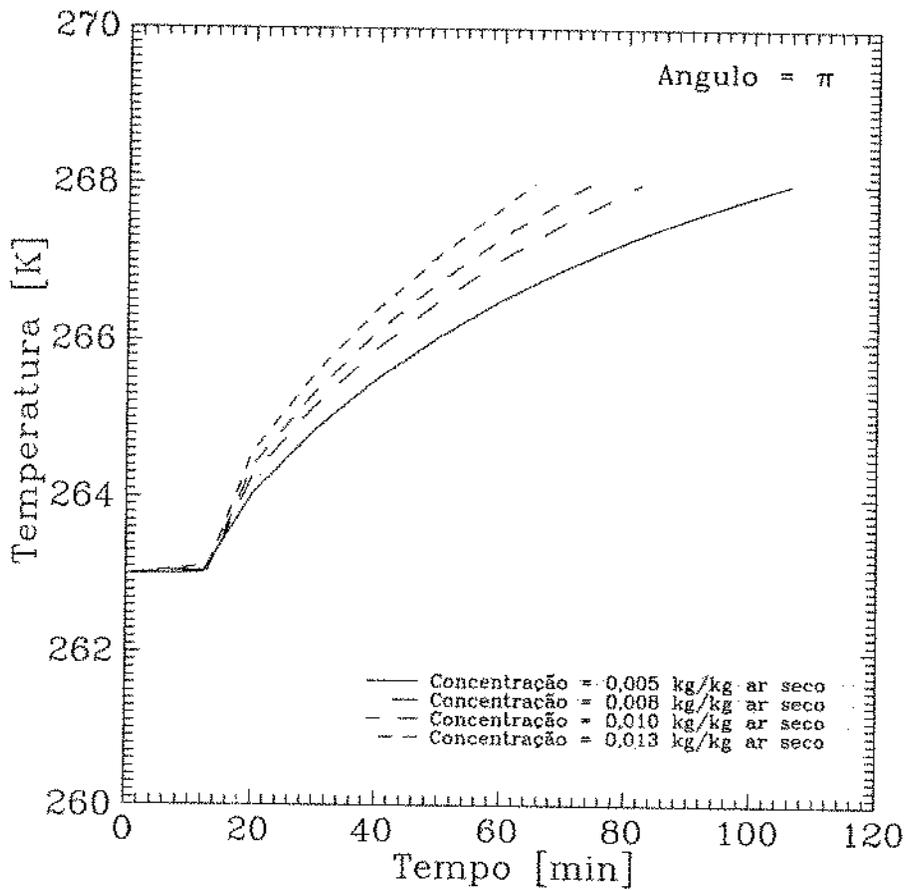


Figura 6.4: Variação da temperatura de superfície da camada de gelo ao longo do tempo.

A variação da densidade com o tempo, para uma posição intermediária entre a superfície do tubo e de gelo, está mostrada na figura (6.3). Este gráfico não permite uma visualização clara do comportamento da densidade ao longo do tempo, ele permite apenas que se tenha uma idéia da variação da densidade com a concentração. Estes valores de densidade são bastante influenciados pelo valor de  $d_0$ , que por sua vez foram determinados a partir de valores de  $K_{frac}$  que davam coerência física ao modelo. O gráfico mostra também que a variação da concentração tem um maior efeito sobre a densidade do que a infiltração longo do tempo.

O acoplamento dos parâmetros densidade e espessura da camada de gelo são os principais responsáveis pela determinação da temperatura de superfície, assim uma boa avaliação da condutividade a partir da densidade, como o modelo de Dietenberg utilizado, se faz necessário para que se obtenha valores coerentes de temperatura de superfície para um dado fluxo de calor. A temperatura de superfície é um parâmetro importante de avaliação do modelo de formação de gelo pois é o principal indicador do fluxo de calor que atravessa a superfície. Além disto, neste caso específico, a temperatura da superfície é o indicador que permite a continuidade ou não da simulação, uma vez que a formulação utilizada só é válida para

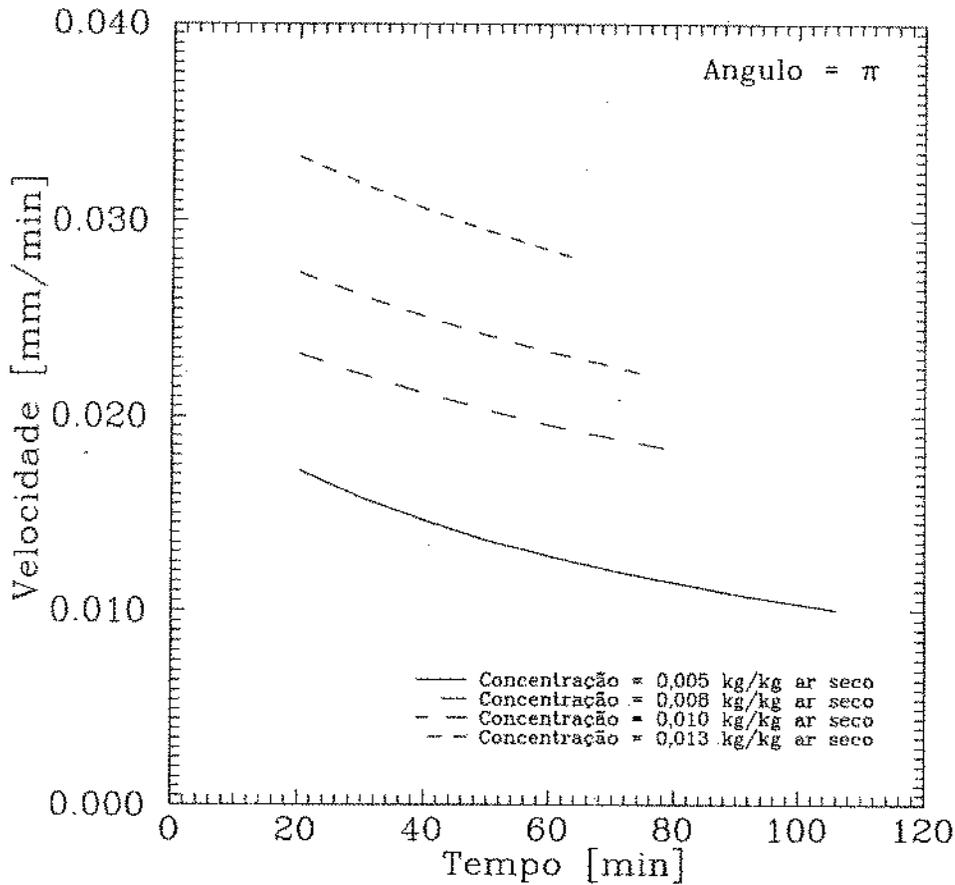


Figura 6.5: Variação da velocidade da interface gelo-ar ao longo do tempo.

temperaturas abaixo de 268 K.

A variação da temperatura da superfície da camada de gelo com o tempo é mostrada na figura (6.4). Veja que as concentrações mais elevadas apresentam maiores densidades, conseqüentemente maior  $k_{ef}$ , implicando numa menor temperatura de superfície para um mesmo fluxo de calor, como era esperado. Nota-se também que até a fase de transição obtém-se linhas de menor inclinação indicando uma taxa de crescimento da temperatura da superfície menor, isto se deve ao fato que na primeira fase da formação de gelo o modelo se utiliza de colunas de gelo sólido de condutividade térmica bem superior à do meio poroso, que é como o gelo é tratado na segunda etapa.

Apresenta-se na figura (6.5) o gráfico da velocidade de fronteira em função do tempo que foi o item linearizado para obter os valores corretos de  $K_{frac}$ , mas que, para isto, sofria uma correção para a densidade média do volume, englobando gelo e o ar que o circundava. Como a velocidade da primeira fase, sem a correção, tem valores bem inferiores aos da segunda fase, o gráfico citado mostra apenas a velocidade depois da fase de transição.

Para uma melhor visualização do comportamento das propriedades e também de como as propriedades

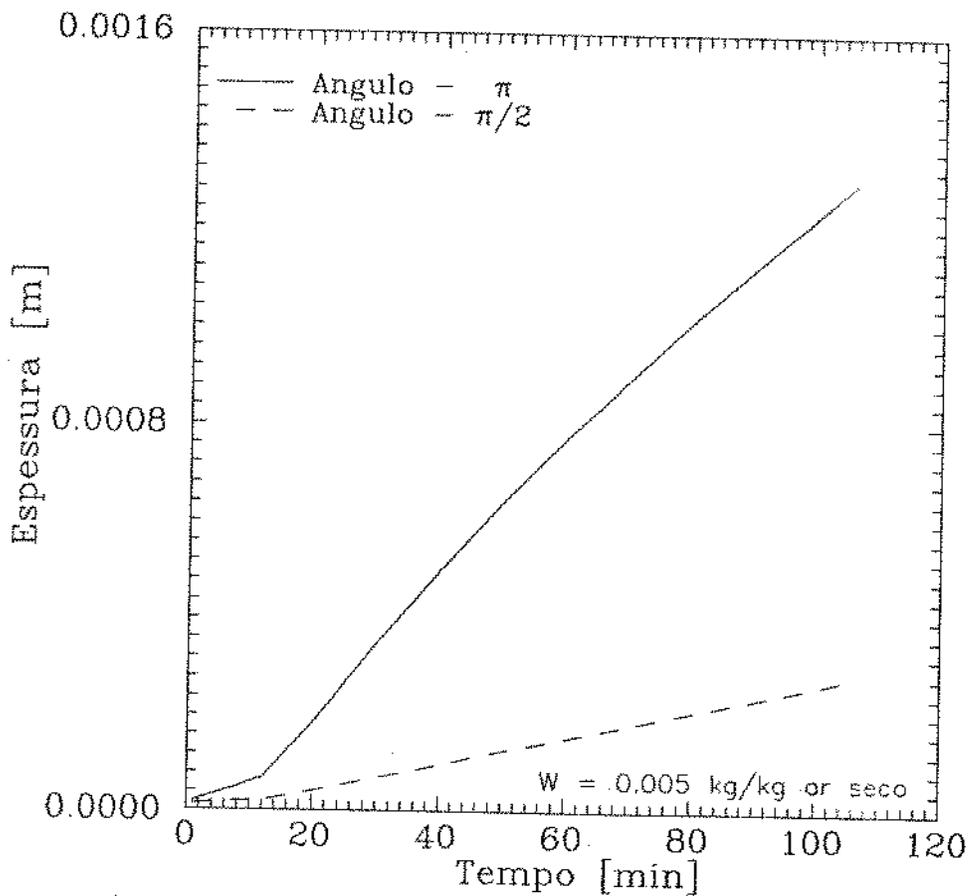


Figura 6.6: Variação da espessura da camada de gelo para dois pontos distintos ao longo do tempo.

variam ao longo do tempo em diferentes posições foram feitos gráficos para uma determinada concentração em pontos específicos. Neste caso usou-se sempre duas posições fixas:  $\pi$ , o ponto frontal ao escoamento e  $\pi/2$ , ponto intermediário do cilindro. A comparação foi feita para uma  $U.A._{\infty} = 0,005 \text{ kg/kg ar seco}$ .

A figura (6.6) mostra a variação da espessura da camada de gelo em função do tempo para as duas posições. No ponto de estagnação a taxa de crescimento de fronteira é muito maior que no ponto  $\pi/2$ , fato que se deve aos maiores coeficientes de película de transferência de calor e massa que ocorrem na posição frontal. Percebe-se nesta posição também uma leve curvatura na linha, indicando o início de um processo de desaceleração.

A figura (6.7) mostra a variação da densidade em função do tempo e da posição. Através da análise deste gráfico é possível verificar que a densidade aumenta de forma mais significativa na região frontal. Este fato também é devido aos maiores coeficientes de película da posição  $\pi$ , que acarretaram em gradientes de temperaturas mais acentuados e conseqüentemente maior difusão do vapor para as camadas internas.

Nota-se também nesta figura uma diminuição da densidade num primeiro instante. Este fator também

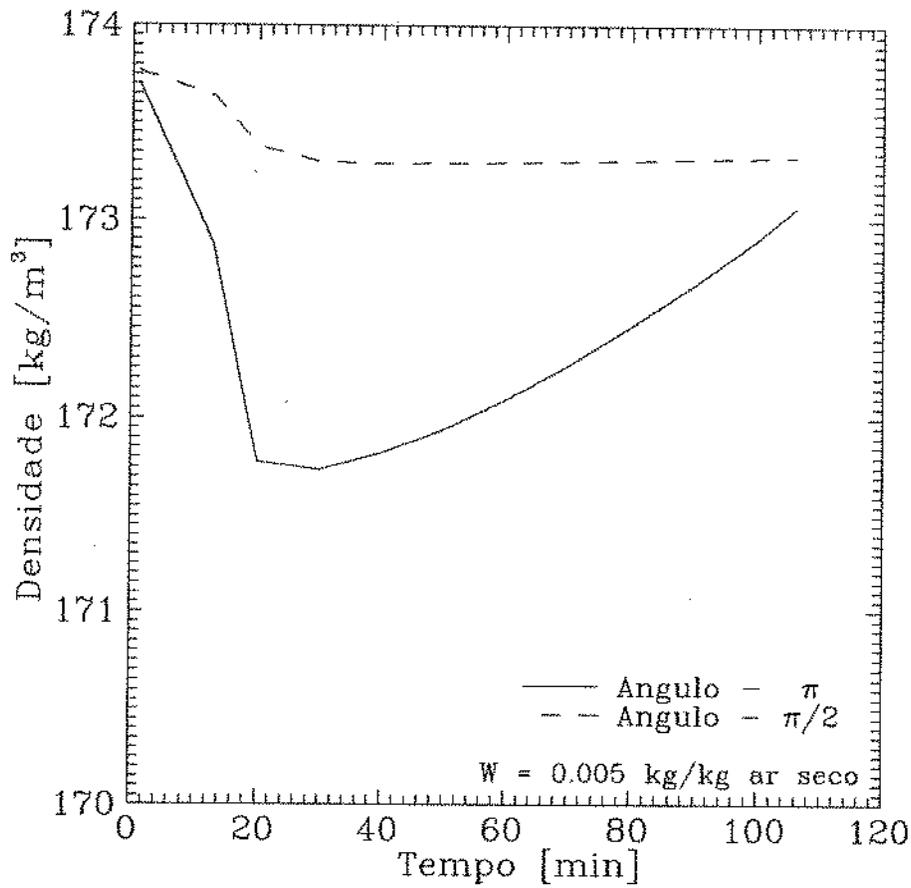


Figura 6.7: Variação da densidade de um ponto médio da camada de gelo para diferentes posições ao longo do tempo.

foi observado por Hayashi et al. [12], figura (5.9), no entanto no caso específico deste trabalho ele nada mais é do que um fator incorporado devido à geometria cilíndrica. A medida que o raio aumenta, aumenta o tamanho do V.C. considerado, que resulta, conseqüentemente, numa diminuição da densidade. Quando o crescimento do volume é suplantado pela infiltração de massa a densidade volta a crescer.

Esta diminuição inicial da densidade foi notada por diversos autores, e mesmo os que trabalharam com valores experimentais sobre uma placa plana. Tokura et. al. [42] atribui esta diminuição da densidade a uma mudança ocorrida no fenômeno de cristalização, esta ocorre no instante em que se passa da etapa de nucleação para a etapa de crescimento de cristal. No entanto, neste modelo tanto o fenômeno de nucleação como crescimento do cristal estão englobados na primeira etapa e a diminuição da densidade se deve exclusivamente aos fatores geométricos.

Na figura (6.8) é possível verificar o comportamento da temperatura da superfície de gelo ao longo do tempo nas duas posições distintas. Como existem diferenças significativas entre as espessuras nestes dois pontos a temperatura da região frontal atinge valores mais altos que a da posição intermediária, sendo a

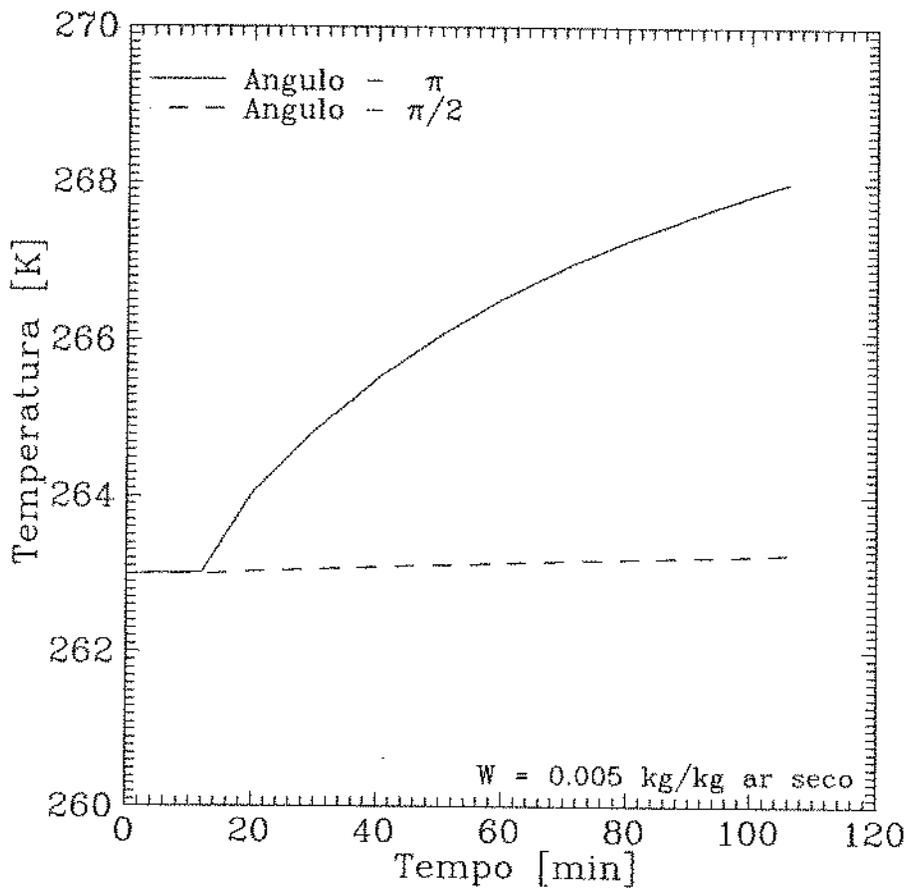


Figura 6.8: Variação da temperatura de superfície da camada de gelo para diferentes posições ao longo do tempo.

primeira a atingir a temperatura limite de 268 K.

Na figura (6.9) podem ser vistos os valores de velocidade de crescimento de fronteira que apenas confirmam os resultados que já foram comentados quando da discussão do gráfico de crescimento de fronteira, no entanto, ele serve para que se tenha uma idéia de como variam as velocidades nas posições. Outro fato relevante que pode ser observado é que, apesar de não se notar ainda uma desaceleração significativa no ponto  $\pi/2$ , é possível visualizá-la neste ponto frontal, onde se encontram as temperaturas de superfície mais altas.

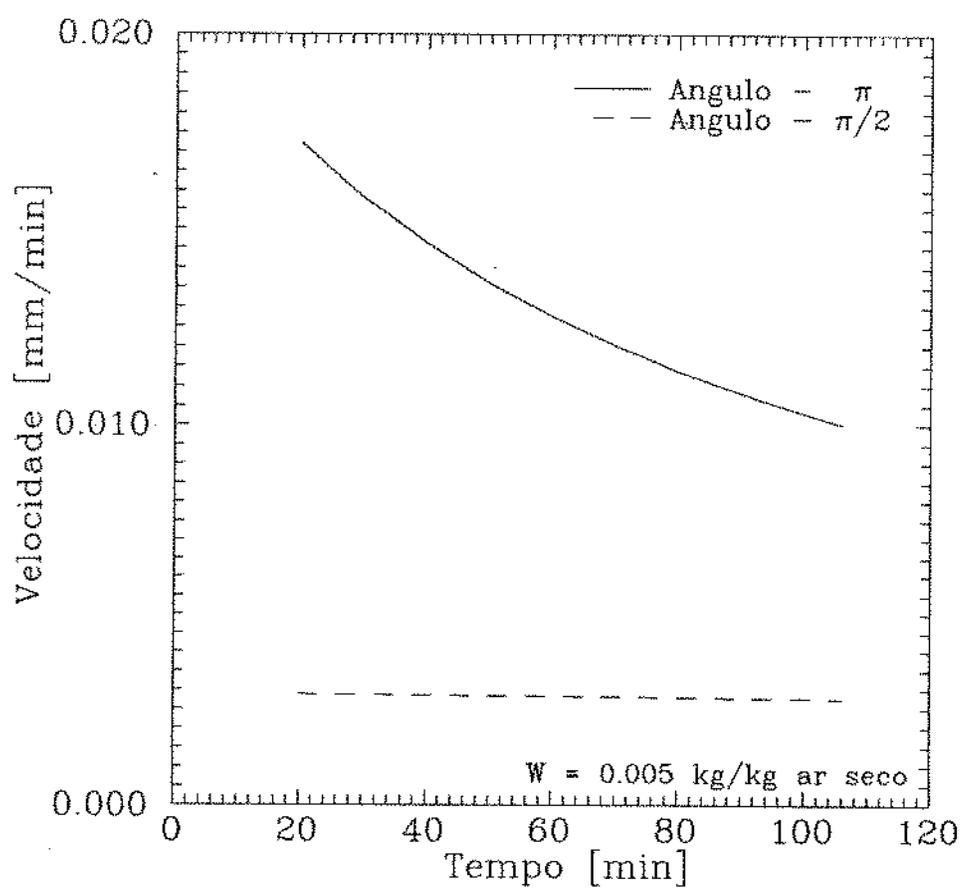


Figura 6.9: Variação da velocidade da fronteira gelo-ar para diferentes posições ao longo do tempo.

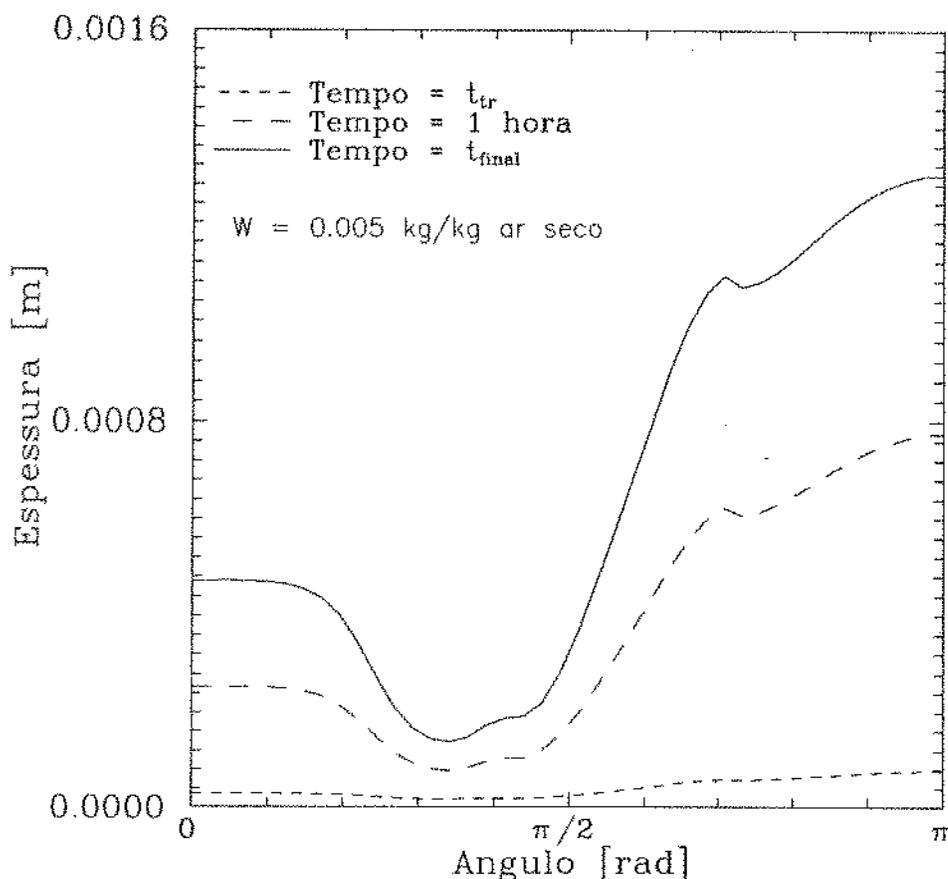


Figura 6.10: Variação da espessura da camada de gelo em função da posição angular.

A seguir apresenta-se um novo grupo de gráficos, são curvas que mostram a variação angular das propriedades em tempos determinados. Estes tempos são basicamente três: o  $t_{tr}$  ou tempo de transição, quando se passa uma hora do início da contagem do tempo inicial e no final quando a máxima temperatura de superfície atinge 268 K. Os valores mostrados nos gráficos que se seguem também foram obtidos para concentrações no infinito de 0,005 kg/kg ar seco.

O primeiro gráfico, figura (6.10), mostra de forma um pouco mais detalhada que o da figura (6.1) como varia a espessura da camada de gelo. A variação angular das propriedades obtidas são dependentes dos coeficientes de película obtidos anteriormente, tanto que as suas curvas em muito se parecem com as obtidas para  $Nu$  e  $Sh$ . A variação da espessura da camada de gelo se enquadra bem nestes termos, e de acordo com o que era esperado o maior crescimento da espessura do gelo se dá num primeiro instante na posição correspondente ao ponto de estagnação.

A variação angular da densidade por sua vez é mostrada na figura (6.11) onde encontramos densidade de um ponto médio radial graficada para os diversos tempos. Nota-se também que o crescimento da densidade é maior nas proximidades do ponto de estagnação e onde se obtém menor densidade do momento

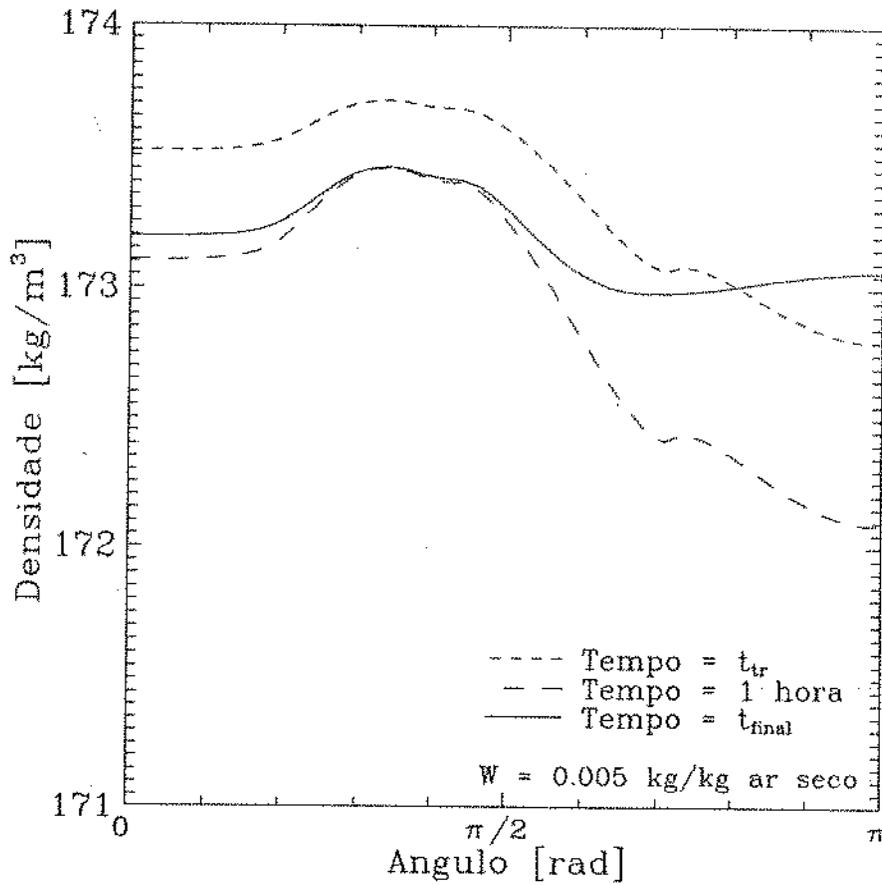


Figura 6.11: Variação da densidade em um ponto médio da camada de gelo em função da posição angular.

da transição. Este fato é eminentemente numérico, pois se fosse usada uma densidade inicial variando ao longo do tubo, fatores como este poderiam ser corrigidos.

Encerrando este grupo é apresentada a variação da temperatura em função da posição angular mostrado na figura (6.12). Como o ponto de maior densidade e de maior espessura é o ponto de estagnação, nele se encontra também a maior temperatura de superfície. Fundamentalmente pode se afirmar que em termos de formação de gelo em torno de cilindros o ponto crítico é o ponto de estagnação, pois nele se apresentam todas as situações complicadoras analisadas neste escoamento em regime laminar.

Fez-se também um acompanhamento da temperatura e densidade ao longo do raio, pois até agora os valores que se tinha para a densidade eram retirados do raio médio e os de temperatura, da superfície. Para que fosse feito o acompanhamento claro do comportamento das propriedades ao longo do raio adimensionalizou-se a coordenada radial no gráfico de forma que o valor da posição varia de  $R$ , o raio do cilindro, até  $\delta$  a posição da interface. Esta adimensionalização permite uma melhor visualização do comportamento das propriedades, no entanto implica em que os seus valores de coordenada radial não podem ser comparados para tempos diferentes, uma vez que o  $\delta$  varia constantemente com o tempo. Os

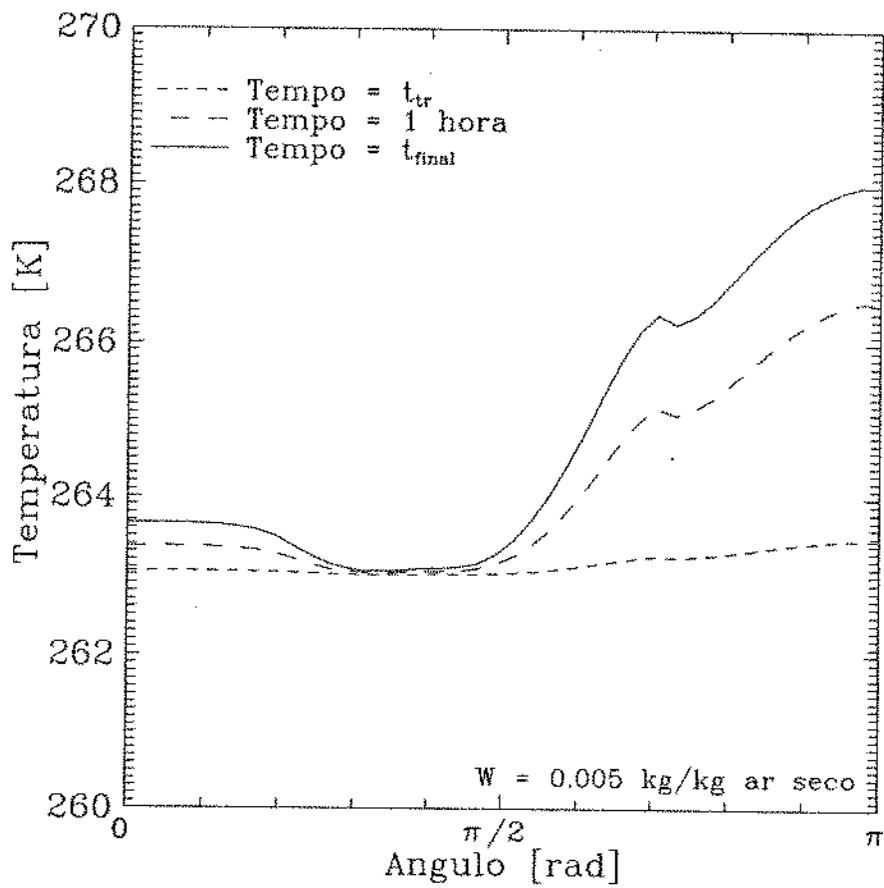


Figura 6.12: Variação da temperatura de superfície da camada de gelo em função da posição angular.

valores mostrados nestes gráficos correspondem a uma umidade de 0,005 kg/kg ar seco e posição angular  $\pi$ .

A variação da densidade ao longo da posição radial é mostrada na figura (6.13). Levando-se em conta o fato de que se trabalha com uma densidade média, não se pode afirmar que em nenhuma posição radial específica houve uma diminuição real da densidade, pois com o aumento da espessura de gelo modifica-se o tamanho da "amostra volumétrica" para a densidade e o valor passa a ser representativo de uma maior região.

A variação radial da temperatura para os diversos tempos é mostrada na figura (6.14). Repare que a distribuição de temperatura é linear ao longo do volume indicando portanto que o congelamento interno do vapor não representa um desvio significativo no calor transferido. Além disto, graças a esta observação, pode se afirmar que a variação interna dos valores de densidade não é suficiente para alterar de forma significativa, os valores da condutividade térmica.

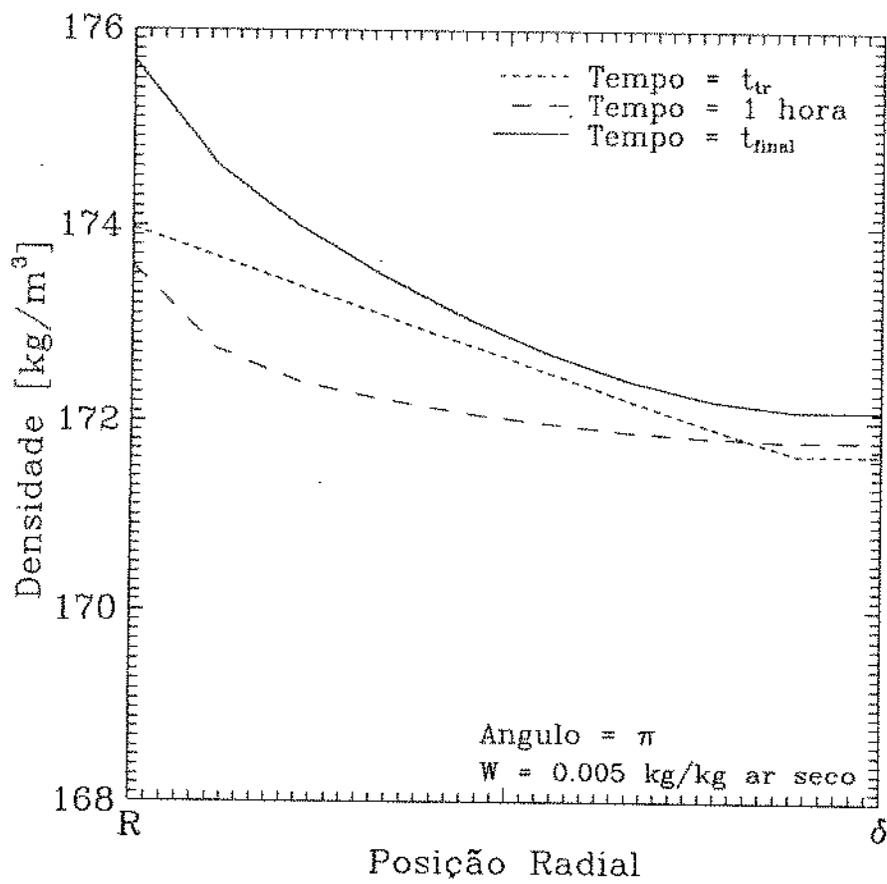


Figura 6.13: Variação da densidade em função da posição radial.

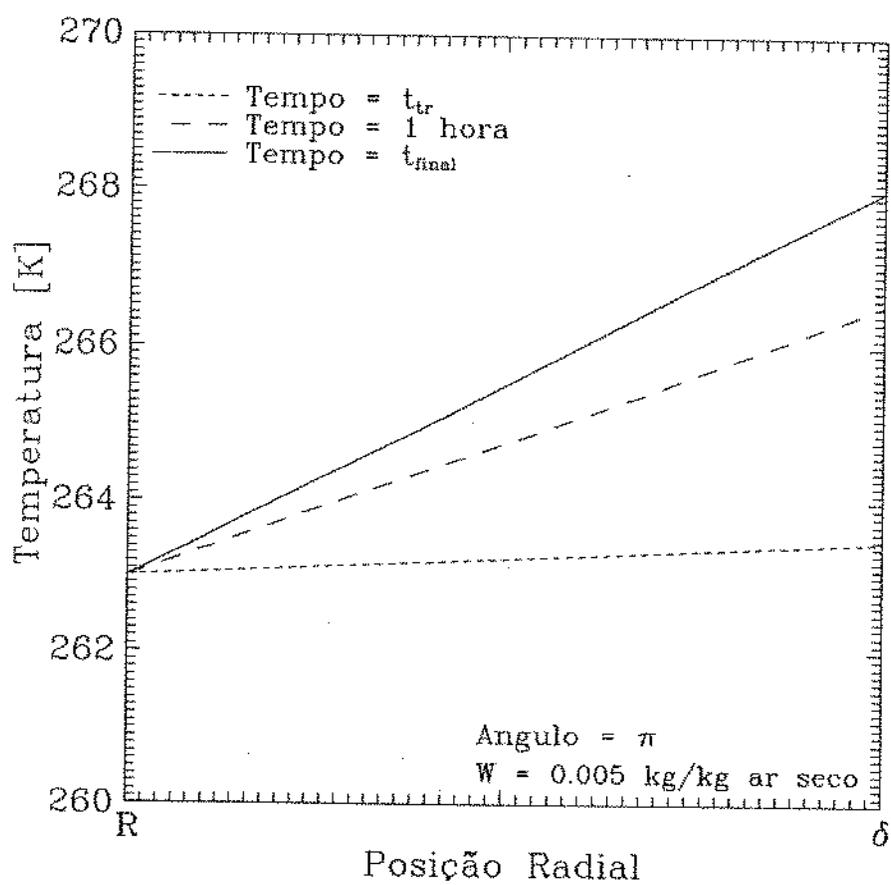


Figura 6.14: Variação da temperatura em função da posição radial.

Visando o interesse prático do processo de formação de gelo, que é basicamente um problema de perda de energia, definiu-se um fator a que denominamos Taxa de Transmissão como sendo:

$$\text{Taxa de Transmissão} = \frac{\text{Energia transmitida por convecção}}{\text{Energia transmitida se não houvesse gelo}}$$

Este fator permite que seja feita uma análise global envolvendo a quantidade de energia perdida pela presença do gelo, pois, como foi visto anteriormente, a maior parcela de energia que se perde não é pelo fenômeno de formação de gelo em si mas sim pelo isolamento que a camada de gelo sobre o tubo provoca. Analisando a área desta curva até um tem-se idéia da fração de energia que se perdeu, a partir do valor máximo que desconsidera a formação de gelo.

A figura (6.15) mostra a variação local da Taxa de Transmissão para a posição  $\pi$  para diversas concentrações. A figura (6.16) mostra os valores desta taxa quando se efetua um balanço global em torno de todo o cilindro. Pode ser visto claramente que quanto maior a umidade maior a perda de calor por congelamento. Além disto quanto maior a camada de gelo formada pior a Taxa de Transferência.

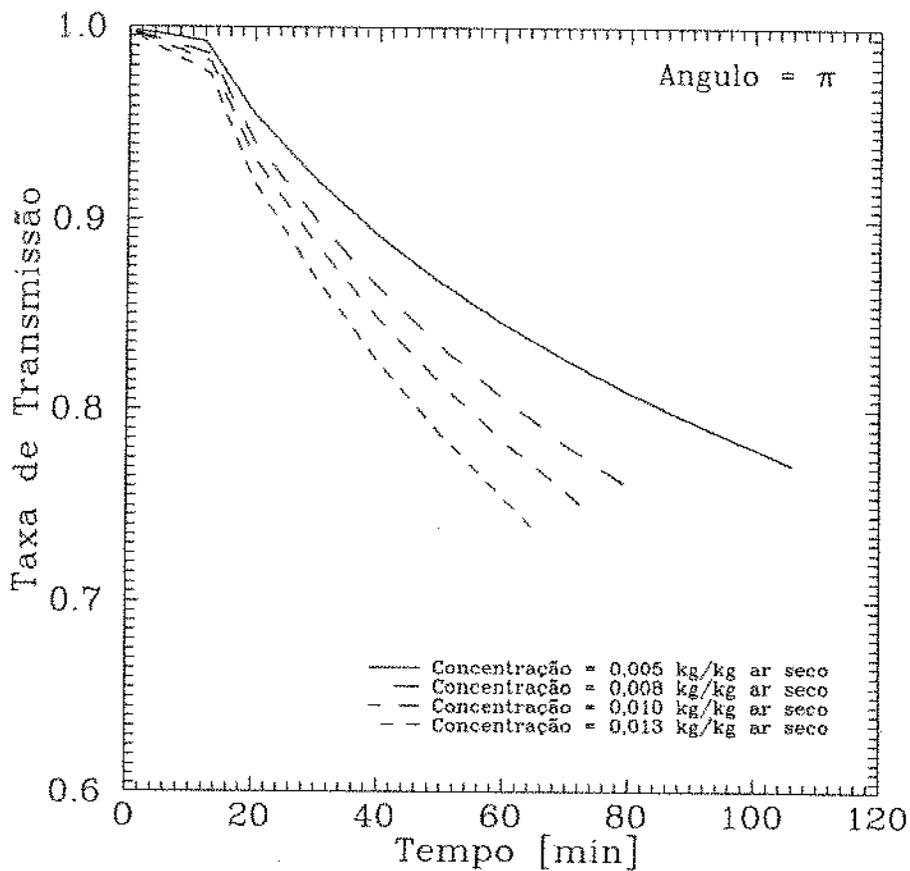


Figura 6.15: Variação da Taxa de Transmissão local com a concentração em função do tempo.

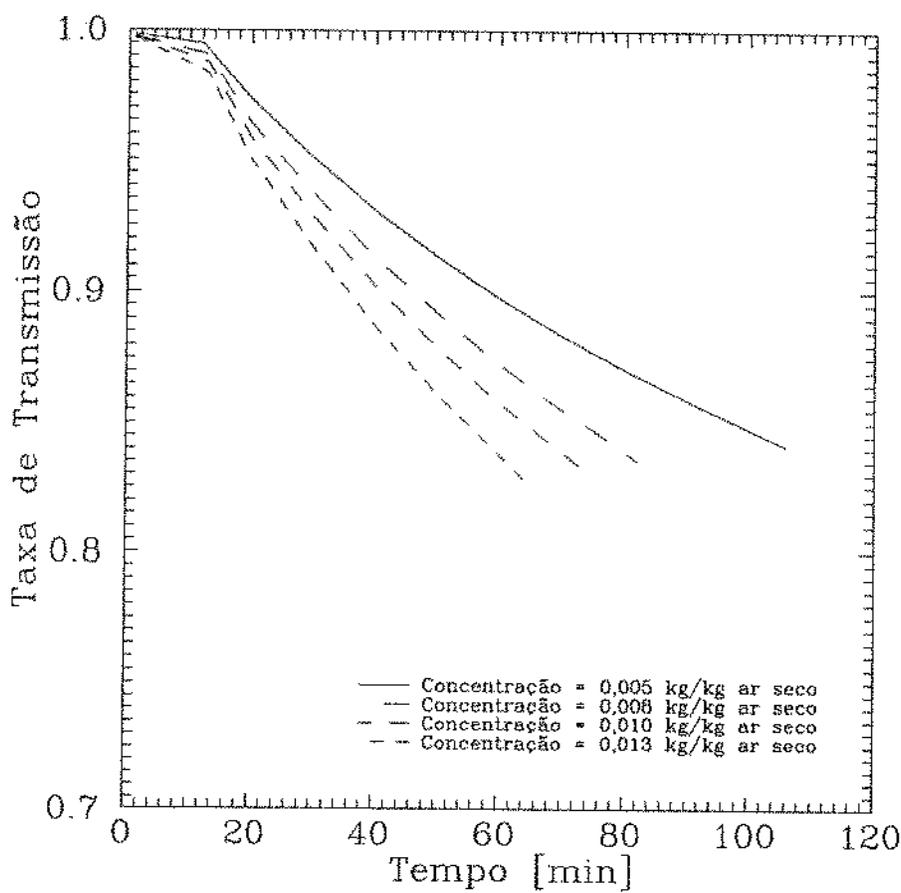


Figura 6.16: Variação da Taxa de Transmissão global com a concentração em função do tempo.

Verificando as perdas de energia nota-se que os valores após uma hora de simulação já apresentam uma perda significativa, mesmo para valores de umidade relativa em torno de 50%, que seria o de umidade 0,01 para a temperatura de 25°C. Neste ponto já se nota que o isolamento provocado pela camada de gelo e a energia gasta para aumentá-lo representam 15% a menos do total que era inicialmente transferido. Este gráfico serve para acentuar a importância da elaboração de processos ótimos de degelo.

A comparação com dados experimentais é um componente complexo neste estudo de formação de gelo pois envolve uma série de parâmetros, principalmente os diretamente ligados à taxa de deposição e transferência de calor. Assim sendo não se consegue na literatura as mesmas condições estudadas e a comparação acaba ficando comprometida. Assim sendo os valores encontrados na literatura são normalmente valores experimentais a respeito dos quais não se têm valores de coeficientes de película e mesmo conhecendo parâmetros como Reynolds, Umidade relativa ou absoluta, temperatura de evaporação e temperatura de corrente livre não se consegue fazer uma comparação direta.

Mesmo que se consiga aproximar os coeficientes de película por expressões empíricas as medidas de formação de gelo são feitas normalmente sobre placas e os valores apresentados são na realidade valores

médios em uma distância considerada o que dificulta principalmente no que se refere à comparação de propriedades.

Por fim estes fatores podem apenas ser considerados para comparação em termos de ordem de grandeza, ou seja para condições próximas os valores de posição de fronteira não diferem muito entre si. Enfim nestes termos pode-se afirmar que os valores aqui obtidos mostram uma certa concordância com os valores apresentados por Schneider [33], Jones e Parker [14], Monaghan et. al. [18] e diversos outros, principalmente os valores de fronteira no ponto de estagnação.

Por outro lado, se considerarmos os valores de densidade no entanto se verificará que os valores aqui encontrados são, na média, um pouco superiores aos obtidos na literatura. Isto ocorre basicamente por exigência do modelo pois, para o bom funcionamento deste, tem-se que trabalhar com a densidade média alta, para que não ocorra grandes desvios das condições ideais do ponto de estagnação. As publicações encontradas na literatura na sua maioria das vezes tratam de valores médios em toda amostra, assim sendo se fosse implementadas as condições de diâmetro  $d_0$  variando ao longo da posição angular do tubo se conseguiria diminuir os valores de densidade na média obtido em torno do mesmo, se aproximando dos valores encontrados na literatura.

## 6.2 Conclusões

Como foi visto o estudo do processo de formação de gelo vem tendo grandes avanços nos últimos anos, e se percebe que é um fator importante em termos de perdas energéticas, conseguir minimizar estas perdas é um objetivo que tem se aproximado cada vez mais.

Simulações do tipo feita neste trabalho procuram contribuir para isto, uma vez que permitem uma melhor avaliação do processo e da variação das diversas propriedades envolvidas no mesmo. A simulação do fenômeno de formação de gelo é também uma etapa importante a ser cumprida na simulação de processos de descongelamento.

Neste trabalho foi utilizado um modelo completo que envolve campos hidrodinâmicos, térmico e de umidade resolvidos de forma acoplada usando a técnica de volumes finitos. Os resultados obtidos representam um passo além dos trabalhos já desenvolvidos, procurando levantar novas questões para futuros estudos a serem desenvolvidos nos pontos críticos citados. Dentre estes pontos destacam-se:

- valores para temperaturas de evaporação diferentes de  $-10^{\circ}\text{C}$ .
- elaboração de um modelo que considere variações locais do diâmetro inicial, obtendo assim densidades mais representativas em torno de todo o cilindro.
- utilização de modelos mais recentes que o de Ryan[29] na elaboração dos fatores  $F$  e  $F_s$  que são críticos no modelo.
- estudo da influência das condições de contorno não lineares na resolução do escoamento, energia e difusão.
- levantamento experimental dos valores locais de densidade na transição.

## Bibliografia

- [1] Aoki, K., Katayama, K. and Hayashi, Y.  
"A Study on Frost Formation (The Process of Frost Formation involving the Phenomena of Water Permeation and Freezing)"  
Bulletin of JSME, 26, pp 87-93, 1983.
- [2] Burmeister, H.  
"Convective Heat Transfer"  
John Wiley and Sons, 1989.
- [3] Chun, W. and Boehm, R.F.  
"Calculation of Forced Flow and Heat Transfer around a Cylinder in Crossflow"  
Numerical Heat Transfer, 15, pp 101-122, 1989.
- [4] Chung, P.M. and Algren, A.B.  
"Frost Formation and Heat Transfer on a Cylinder Surface in Humid Air Cross Flow - Part I"  
Heating Piping and Air Conditioning, pp 171-178, 1958.
- [5] Chung, P.M. and Algren, A.B.  
"Frost Formation and Heat Transfer on a Cylinder Surface in Humid Air Cross Flow - Part II"  
Heating Piping and Air Conditioning, pp 115-122, 1958.
- [6] Dietenberg, M.A.  
"Generalized Correlation of the Water Frost Thermal Conductivity"  
Int. J. Heat and Mass Transfer, 26(4), pp 607-619, 1983.
- [7] Dimopoulos, H.G. e Harrarty, T.J.  
"Velocity Gradients at the Wall for Flow around Cylinder for Reynolds Numbers between 60 and 360"  
J. Fluid Mechanics, 33, pp 303-319, 1968.
- [8] Eckert, E.R.G. e Soehgen, E.  
"Distribution of Heat Transfer Coefficients around Circular Cylinders at Reynolds Numbers from 20 to 500"  
Trans. of ASME, pp 343-347, 1952.
- [9] Farag, I.H. Virameteekul, N. & Phetteplace, G.  
"Phase Change Numerical Heat Transfer Analysis with Applications to Frost Shielding"  
Heat Transfer Engineering, 19(2), pp 29-36, 1991.

- [10] Fornberg, B.  
"A numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder"  
J. Fluid Mechanics, 98(4), pp 819-855, 1980.
- [11] Galpin, G.D., Raythby, G.D. e Van Doormal, J.P.  
"Discussion of Upstream-Weighted Advection Approximation for Curved Grids"  
Numerical Heat Transfer, 9, pp 241-246, 1986.
- [12] Hayashi, Y., Aoki, A., Adachi, A., Hori, K.  
"Study of Frost Properties Correlating with Frost Formation Types"  
Journal of Heat Transfer, 99, pp 239-245, 1977.
- [13] Holman, J.P.  
"Transferência de Calor"  
Mc Graw Hill, 1986.
- [14] Jones, B.W. and Parker, J.D.  
"Frost Formation with Varying Environmental Parameters"  
Journal of Heat Transfer, 97, pp 255-259, 1975.
- [15] Karki, K.C. and Patankar, S.V.  
"Calculation Procedure for Viscous Incompressible Flows in Complex Geometries"  
Numerical Heat Transfer, 14, pp 295-307, 1988.
- [16] Karki, K.C. e Patankar, S.V.  
"Solution of Two Dimensional Incompressible Flows Using a Curvilinear Coordinate System based Calculation Procedure"  
Numerical Heat Transfer, 14, pp 309-321, 1988.
- [17] Kundu, D., Haji-Sheikh, A. e Lou, D.Y.S.  
"Pressure and Heat Transfer in Crossflow Between two Parallel Plates"  
Numerical Heat Transfer, 19(A), pp 345-360, 1991.
- [18] Monaghan, P.F, Grealish, F. and Oothuizen, P.H.  
"Frost Growth and Heat Transfer for a Row of Vertical Cylindrical Tubes Located Outdoors - General Trends"  
Experimental Thermal and Fluid Science, 4, pp 406-417, 1991.
- [19] Niederer, D.H.  
"Defrosting of Air Units in Central Systems"  
ASHRAE-Transactions, pp 581-591.
- [20] Niederer, D.H.  
"Frosting and Defrosting Effects on Coil Heat Transfer"  
ASHRAE-Transactions, pp 467-473, 1976.
- [21] O'Neill, P.J. and Crawford, R.R.  
"Thermal Performance Analysis of Finned Tube Heat Exchangers at Low Temperatures and Airflow"

- Rates"  
ASHRAE-Transactions, pp 244-260.
- [22] Ostin, R. and Anderson, S.  
"Frost Growth Parameters in a Forced Air Stream"  
Int. J. Heat and Mass Transfer, 34(4), pp 1009-1017, 1991.
- [23] Pace, D.P.  
"The Removal or Retarding of Frost Formation on Supermarket-Type Freezers"  
ASHRAE-Transactions, pp 592-595.
- [24] Padilha, A.  
"Estudo Teórico Experimental do Movimento da Frente Solidificação por Super Resfriamento no Interior do Duto"  
Tese de Doutorado, FEM, UNICAMP, 20/90, 1990.
- [25] Padki, M.M., Sherif, S.A. and Nelson, R.M.  
"A Simple Method for Modelling Frost Formation in Different Geometries"  
ASHRAE-Transactions, 95(2), pp 1127-1137, 1989.
- [26] Parish, H.C. and Sepsy, C.F.  
"A Numerical Analysis of The Frost Formation Under Forced Convection"  
ASHRAE-Transactions, pp 236-251, 1972.
- [27] Patankar, S.V.  
"Numerical Heat Transfer and Fluid Flow"  
Hemisphere, 1980.
- [28] Raythby, G.D., Galpin, P.F. e Van Doormal, J.P.  
"Prediction of Heat and Fluid Flow in Complex Geometries Using a General Orthogonal Coordinates"  
Numerical Heat Transfer, 9, pp 125-142, 1986.
- [29] Ryan, D., Carbonell, R.G. and Whitaker, S.  
"Effective Diffusivities for Catalytic Pellets under Reactive Conditions"  
Chemical Engineering Science, 35, pp 10-16, 1980.
- [30] Sami, S.M. and Duong, T.  
"Mass and Heat Transfer during Frost Growth"  
ASHRAE-Transactions, 95(1), pp 158-165, 1989.
- [31] Sanches, C.G. e Pereira, J.T.  
"Controle Térmico de Ambientes"  
CABS - Apostila, 1986.
- [32] Schlichting, H.  
"Boundary Layer Theory"  
Mc-Graw Hill Book Company, 1968.

- [33] Schneider, H.W.  
"Equation of the Growth Rate of Frost forming in Cooled Surfaces"  
Int. J. Heat and Mass Transfer, 21, pp 1019-1024, 1978.
- [34] Segal, S.C.  
"Defrosting of Packaged Refrigeration Systems"  
ASHRAE-Transactions, pp 596-605.
- [35] Seki, N., Fukusano, S. and Matsuo, K.  
"Incipient Phenomena of Frost Formation"  
Bulletin of JSME, 27, pp 2476-2482, 1984.
- [36] Shah, Y.T.  
"Theory of frost formation"  
Doctor's Thesis of M.I.T., 1969.
- [37] Son, J.S. and Hanratty, T.J.  
"Numerical Solution for the Flow around a Cylinder at Reynolds Number of 40, 200 and 500"  
J. Fluid Mechanics, 35(2), pp 369-386, 1969.
- [38] Stoecker, W.F.  
"How the Frost Formation on Coils Affects Refrigeration Systems"  
Refrigerating Engineering, pp 42-46, 1957.
- [39] Tal, R., Lee, D.N. and Sirignano, W.A.  
"Heat and Momentum Transfer around a pair of spheres in viscous flow"  
Int. J. Heat and Mass Transfer, 27(11), pp 1953-1962, 1984.
- [40] Tao, Y.-X., Besant, R.W. e Reskallah, K.S.  
"A Mathematical Model for Predicting the Densification of Frost on a Flat Plate"  
Int. J. Heat and Mass Transfer, 2, pp 353-363, 1993.
- [41] Tao, Y.-X., Besant, R.W. e Rezkallah, K.S.  
"Unsteady Heat and Mass Transfer with Phase Changes in a Insulation Slab: Frosting Effects"  
Int. J. Heat and Mass Transfer, 34, pp 1593-1603, 1991.
- [42] Tokura, I., Saito, H. and Kishinami, K.  
"Study on Properties and Growth Rate of Frost Layer on Cold Surfaces"  
Journal of Heat Transfer, 105, pp 895-901, 1983.
- [43] Yonko, J.D. and Sepsy, C.F.  
"An Investigation of the Thermal Conductivity of Frost while Forming on a Flat Horizontal Plate"  
ASHRAE-Transactions, pp I11-I1.10, 1967.

## Apêndice

# A

## Comparação dos Modelos de Formação de Gelo mais Utilizados

### Introdução

Neste capítulo faremos uma análise de modelos encontrados na literatura para a determinação da taxa de formação de gelo em torno de corpos onde tem-se ar úmido escoando.

Durante a pesquisa bibliográfica foram encontrados dois modelos que por simplicidade convencionaremos chamar Modelo Parish-Sepsy, ao modelo proposto por Parish e Sepsy [26] e Modelo Padki-Sherif-Nelson para o modelo proposto pelos autores homônimos [25]. Ao final da descrição de cada um dos modelos procuraremos fazer uma análise crítica dos mesmos, procurando mostrar, segundo o nosso ponto de vista as vantagens e desvantagens de cada um dos métodos.

Poderia se considerar ainda um terceiro modelo, proposto por Chung e Algren [5], que apesar de ter trabalhado bastante com um modelamento matemático, baseavam suas proposições em resultados experimentais obtidos. Por este motivo e por se tratar de um modelo feito há bastante tempo ele não será descrito junto aos demais.

Um terceiro modelo é descrito no apêndice é um modelo genérico bastante utilizado, é o modelo Jones-Parker. Este modelo é um modelo de balanço global, que não permite avaliação local de propriedades, no entanto este modelo representa bem todos os fenômenos envolvidos no processo de formação de gelo.

### A.1 Modelo Parish-Sepsy

Feito no início da década e 70, ele tem por base a resolução das equações básicas, momentum, energia, difusão e continuidade, dentro de uma camada limite. Já supondo as hipóteses de similaridade as expressões para cada uma destas equações seriam:

- Equação do momentum:

$$\frac{\rho}{g_c} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

- Equação da Energia:

$$\rho c_p \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

- Equação de Difusão:

$$U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial y} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

- Equação da Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

onde  $U$  e  $V$  são respectivamente as velocidades nas direções  $x$  e  $y$ .

O primeiro passo deste modelo é a determinação do campo de velocidades, pois dela depende a resolução das demais equações (energia e difusão). Para a determinação deste campo de velocidades é necessário a resolução concomitante das equações de momentum e continuidade. Como o autor se utiliza de hipótese de camada limite baseando sua resolução na proposta por Blasius [32], ele não obtém valores para os pontos onde já houve o descolamento da camada limite. Assim sendo o autor se utiliza, para esta faixa do escoamento, de dados obtidos experimentalmente.

O método de solução, para a região próxima ao ponto de estagnação, proposto se baseia em diferenças finitas sendo que a equação discretizada ficaria

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{V_{m,n}}{4\Delta y} - \frac{g_c \mu}{2\rho \Delta y^2} \right] U_{m+1,n-1} + \left[ -\frac{U_{m,n}}{\Delta x} - \frac{g_c \mu}{\rho \Delta y^2} \right] U_{m+1,n} + \left[ -\frac{V_{m,n}}{4\Delta y} - \frac{g_c \mu}{2\rho \Delta y^2} \right] U_{m+1,n+1} \\ & = \frac{g_c}{\rho} \left( \frac{dp}{dx} \right)_n + \frac{V_{m,n}}{4\Delta y} [U_{m,n-1} - U_{m,n+1}] + \frac{U_{m,n}^2}{\Delta x} + \frac{g_c}{2\rho(\Delta y)^2} [U_{m,n-1} - 2U_{m,n} + U_{m,n+1}] \end{aligned}$$

que se trata, na realidade, de uma expressão implícita da posição  $m+1$ , determinados a partir dos valores da posição  $m$ . Numa visão geral o programa roda em torno do cilindro, passo a passo, resolvendo as equações na camada limite a cada nova posição.

A continuidade expressa em diferenças finitas fica da seguinte forma:

$$V_{m+1,n} = V_{m+1,n-1} - \frac{\Delta y}{2\Delta x} (U_{m+1,n} - U_{m,n} + U_{m+1,n-1} - U_{m,n-1})$$

Como o valor de  $V_{m,0}$  é conhecido para qualquer valor de  $m$ , pode-se calcular o campo de velocidades  $V$ , desde que seja conhecido o campo da velocidade  $U$ , a partir da equação da continuidade.

A outra condição de contorno conhecida é  $V_{m,\infty}$ , para qualquer  $m$ . O autor sugere o método de Ritchmeyer para a solução do campo total de velocidades, mas a referência sugerida não foi encontrada.

mas diversos trabalhos existem sobre esta solução e este não constitui um empecilho à utilização do método.

Conhecido o campo de velocidades da combinação da solução numérica e dados experimentais é possível resolver as equações restantes. A primeira a ser resolvida é a equação da energia, estabelecendo-se como condições de contorno: temperatura da parede do cilindro conhecida e igual a  $T_s$  e a temperatura fora da camada limite térmica igual a  $T_\infty$ .

Se fizermos o balanço energético de um elemento de na interface sólido líquido temos:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Energia} \\ \text{Armazenada} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Calor de} \\ \text{Convecção} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Calor de} \\ \text{Sublimação} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Calor de} \\ \text{Condução} \end{array} \right)$$

O autor despreza a energia armazenada por se tratar de uma quantia ínfima comparada às demais, o que implica, matematicamente, que o primeiro termo da equação seja anulado.

Podemos definir o coeficiente de película de forma que:

$$H_c = \frac{Q_{\text{cnv}}}{T_\infty - T_0}$$

O calor de condução pode ser obtida através da expressão:

$$Q_{\text{cnd}} = K_g(T_0 - T_i)$$

onde  $K_g$  é a condutância térmica da camada de gelo que envolve o cilindro e é dada por:

$$K_g = \left\{ (R + R_j) \sum_{j=1}^J \frac{\ln[(R_{\text{cil}} + R_{\text{gelo}})_j / (R_{\text{cil}} + R_{\text{gelo}})_{j+1}]}{K_{fj}} \right\}^{-1}$$

onde  $J$  é o número de camadas de gelo superpostas até aquele instante. A hipótese de camadas de gelo superpostas é feita devido a grande alteração nas propriedades físicas do gelo ao longo do processo. Assim ao considerarmos o  $K_{fj}$  levamos em consideração a condutividade de cada uma das camadas individualmente melhorando assim a acuracidade do método.

Finalmente o calor de sublimação é dado pela expressão:

$$Q_{\text{sub}} = m_{\text{água}}(e_{\text{vapor}} - e_{\text{sólido}})$$

e para facilitar a utilização supomos que a diferença das entalpias entre vapor e sólido tem uma dependência linear da temperatura, assim

$$Q_{\text{sub}} = m_{\text{água}}(AT - B)$$

e o valor de  $m_{\text{água}}$  só pode ser obtido depois de resolvida a equação de difusão.

Utilizando a Lei de Fick para a difusão temos:

$$H_d = \frac{m_{\text{água}}}{C_\infty - C_0}$$

Substituindo na expressão do balanço de energia podemos determinar a temperatura de superfície do gelo:

$$T_0 = \frac{K_g T_s + H_d(C_\infty - C_0)B + H_c T_\infty}{K_g + H_d(C_\infty - C_0)A + H_c}$$

Com esta expressão conseguimos boas estimativas para  $T_0$ , acelerando a convergência do processo iterativo da resolução da equação da energia.

Para posição inicial admite-se a similaridade entre o campo de temperaturas e o campo de velocidades:

$$\frac{T_{1,n} - T_{1,0}}{T_{1,nn} - T_{1,0}} = \frac{U_{1,n} - U_{1,0}}{U_{1,nn} - U_{1,0}}$$

onde o  $nn$  é o ponto final da camada limite. Tendo a distribuição inicial as demais distribuições são simples de serem encontradas pois trata-se de uma equação parabólica.

Assim a equação da energia escrita em diferenças finitas fica sendo:

$$\begin{aligned} & U_{m,n} \left[ \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \right] + V_{m,n} \left[ \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n-1} + T_{m+1,n+1} - T_{m+1,n-1}}{4\Delta y} \right] \\ & = \left[ \frac{K}{2\rho c_p (\Delta y)^2} \right] [T_{m,n-1} - 2T_{m,n} + T_{m,n+1} + T_{m+1,n-1} - 2T_{m+1,n} + T_{m+1,n+1}] \end{aligned}$$

O aparecimento simultâneo dos termos  $T_{m+1}$  e  $T_m$  se deve a uma sub-relaxação no cálculo da temperatura

$$T_{m+1,n} = \frac{(T_{m+1,n})_{\text{hip.}} + T_{m,n}}{2}$$

Além deste artifício outros dois são usados para resolver a equação da energia:

- reduzido o passo angular de 2 para 0,5 grau
- temperatura de superfície do gelo adotada constante para todo o domínio.

Para a resolução do problema de difusão as mesmas hipóteses da camada limite térmica são adotadas, inclusive as condições de contorno são semelhantes: nas proximidades da superfície do gelo  $C = C_0$  (concentração de saturação à temperatura  $T_0$ ) e no final da camada limite  $C = C_\infty$ .

Assim a equação discretizada da equação difusão em diferenças finitas fica:

$$\begin{aligned} & U_{m,n} \left[ \frac{C_{m+1,n} - C_{m,n}}{\Delta x} \right] + V_{m,n} \left[ \frac{C_{m,n+1} - C_{m,n-1} + C_{m+1,n+1} - C_{m+1,n-1}}{4\Delta y} \right] \\ & = \frac{D}{(\Delta y)^2} [C_{m,n-1} - 2C_{m,n} + C_{m,n+1} + C_{m+1,n-1} - 2C_{m+1,n} + C_{m+1,n+1}] \end{aligned}$$

sendo resolvida também de forma análoga à da energia.

### A.1.1 Análise crítica

O modelo proposto é relativamente antigo e tem algumas falhas de revisão (pelo menos uma falha clara) mas como a formulação pode ser refeita isto é relativamente fácil de ser contornado. Além disto o modelo falha em

- modelo baseado em similaridade que implica em grande simplificação mas dificulta entrada de condições de contorno diferentes.

- necessidade de dados experimentais para a determinação de parte do campo de velocidades.
- se baseia em um modelo de similaridade entre campos de velocidades, temperatura e concentração para que o problema possa ser resolvido.

Como vantagens este modelo apresenta:

- um modelamento bastante simplificado.
- trabalho em coordenadas cartesianas, que facilita, em muito, a formulação e resolução.

## A.2 Modelo Padki-Sherif-Nelson

Este modelo é bem recente, foi publicado pela ASHRAE Transactions de 1989, tratando-se de um modelo simplificado para geometrias não complexas. O modelo foi desenvolvido, no artigo, tanto para cilindros como para placas. No nosso caso centraremos a atenção no caso do cilindro.

### A.2.1 Descrição do método

Se considerarmos o balanço de energia num elemento de fluido na interface gelo-ar, veremos que:

$$\left( \begin{array}{c} \text{Calor} \\ \text{Conduzido pelo} \\ \text{Gelo} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \text{Calor} \\ \text{Perdido por} \\ \text{Convecção} \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} \text{Calor Devido} \\ \text{ao Congelamento} \\ \text{do Vapor} \end{array} \right)$$

que pode ser expresso matematicamente através da integral por todo o cilindro de:

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} L_t d_f \theta [h_\theta (T_\infty - T_{p\theta}) + L h_{v\theta} (W_\infty - W_{p\theta})] d\theta$$

onde  $L_t$  comprimento do cilindro  
 $d_f$  diâmetro do gelo em torno do cilindro  
 $h$  coeficiente de transferência de calor  
 $h_v$  coeficiente de transferência de massa  
 $T$  temperatura  
 $L$  calor latente  
 $W$  umidade absoluta

e os subscritos  $\infty$  relativo às propriedades de corrente livre  
 $p$  relativo às propriedades próximas à superfície do gelo  
 $\theta$  valor local no ângulo  $\theta$

No entanto a analogia de Lewis nos fornece o coeficiente de transferência de massa diretamente do coeficiente de transferência de calor. Este fato se baseia na suposição de um campo de velocidades com distribuição próxima ao campo de concentrações de vapor (maiores detalhes consulte [13]). Assim sendo:

$$h_{v\theta} = \frac{h_\theta}{\rho_m c_{pm}} Le^{-2/3}$$

onde o número de Lewis é dado por  $Le = \alpha/D$ , sendo  $D$  o coeficiente de difusão.

Se os dois coeficientes  $h$  e  $h_v$  são relacionados podemos pensar em um coeficiente geral  $h_i$ . Se reagruparmos a expressão podemos obter com este coeficiente geral:

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} L_t d_{f\theta} h_{i\theta} [\rho_m c_{pm} (T_\infty - T_{p\theta}) + L(W_\infty - W_{p\theta})] d\theta$$

onde  $\rho_m c_{pm} = \rho_{ar} c_{par} + \rho_{vapor} c_{pvapor}$  com subscrito  $m$  indicativo de mistura.

Este agrupamento, da forma que foi feito permite a introdução da entalpia do ar úmido:

$$i_{p\theta} = \rho_{ar} c_{par} T_{p\theta} + W_{p\theta} (L + \rho_{vapor} c_{pvapor} T_{p\theta})$$

$$i_\infty = \rho_{ar} c_{par} T_\infty + W_\infty (L + \rho_{vapor} c_{pvapor} T_\infty)$$

Assim a expressão do calor transferido pode ser escrita em função das entalpias do ar, ficando:

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} L_t d_{f\theta} h_{i\theta} (i_\infty - i_{p\theta}) d\theta$$

Fizemos o balanço considerando apenas a parcela de calor relacionada ao congelamento e convecção, no entanto esta parcela deve ser igual ao calor transferido por condução da parede do cilindro até a superfície do gelo. Se equacionarmos este calor de condução obteríamos:

$$Q = \int_0^{2\pi} K_{f\theta} L_t \frac{T_{p\theta} - T_s}{\ln(d_{f\theta}/d_s)} d\theta$$

sendo o subscrito  $s$  relativo à superfície do cilindro.

De acordo com o comentado anteriormente as duas expressões se equivalem e podem ser igualadas. Se trabalharmos algebricamente com as equações obtemos com isto a expressão para a temperatura da superfície do gelo,  $T_{p\theta}$ :

$$T_{p\theta} = \frac{h_{i\theta} i_\infty \ln(d_{f\theta}/d_s) + 2K_{f\theta} T_s - L h_{i\theta} W_{p\theta} d_{f\theta} \ln(d_{f\theta}/d_s)}{h_{i\theta} \rho_m c_{pm} d_{f\theta} \ln(d_{f\theta}/d_s) + 2K_{f\theta}}$$

que é um fator fundamental para a determinação da troca de calor na próxima iteração.

Quanto a concentração da umidade na superfície da camada de gelo admitimos como que o ar esteja saturado, assim a concentração seria dada por:

$$W_{p\theta} = 0,62198 \frac{P_{vap, sat}}{P_{total} - P_{vap, sat}}$$

A pressão de saturação, da expressão acima, pode ser admitida como uma função exclusiva da temperatura e pode ser determinada através de expressões empíricas, como a seguinte:

$$\ln(P_{vap, sat}) = \frac{C_1}{T_{p\theta}} + C_2 + C_3 T_{p\theta} + C_4 T_{p\theta}^2 + C_5 T_{p\theta}^3 + C_6 T_{p\theta}^4 + C_7 \ln(T_{p\theta})$$

onde as constantes são:

$C_1 =$	$-5674,5359$	$C_5 =$	$0,20747825 \times 10^{-8}$
$C_2 =$	$6,3925247$	$C_6 =$	$0,9484024 \times 10^{-12}$
$C_3 =$	$-0,9677843 \times 10^{-2}$	$C_7 =$	$4,1635019$
$C_4 =$	$0,62215701 \times 10^{-6}$		

válidas para a faixa de  $-100^\circ\text{C}$  a  $0^\circ\text{C}$ .

Com isto obtém-se também a taxa média de crescimento de gelo por unidade de área,  $m_v$ , que é dada por:

$$m_v = \int_0^{2\pi} \frac{d_{f\theta} h_{v\theta} (W_\infty - W_{p\theta})}{2\pi d_{f\text{med}}} d\theta$$

Com a taxa de crescimento obtemos também o incremento na espessura do gelo ( $\Delta S_{f\theta}$ ) e a nova posição da frente ( $S_{f\theta}$ ) que são dados por:

$$\Delta S_{f\theta} = \frac{m_v \Delta \tau}{\rho_{f\theta}} \text{ e } S_{f\theta}^{i+1} = S_{f\theta}^i + \Delta S_{f\theta}$$

Como o  $h$  a ser adotado é obtido de expressões empíricas, todos os valores e coeficientes que dependem dele podem ser obtidos diretamente. Para o cálculo das propriedades do ar utiliza-se a temperatura de mistura ( $T_m = (T_{p\theta} + T_\infty)/2$ ). Assim sendo quando partimos do  $\tau = 0$  temos conhecida a espessura da camada de gelo ( $S_{f\theta} = 0$ ) e tudo pode ser calculado em um primeira análise. Depois de tudo calculado o procedimento pode ser repetido para os valores obtidos e assim sucessivamente.

No final deste artigo são mostradas correlações empíricas para a densidade e condutividade do gelo. Fornece também uma expressão para corrigir a densidade do gelo quando a temperatura da superfície chega a  $0^\circ\text{C}$ , e o vapor condensado se infiltra pelos poros do gelo, congelando em camadas inferiores e aumentando consequentemente a densidade das mesmas.

### A.2.2 Análise crítica do modelo

Um fator que atrapalha bastante o modelo é o valor do coeficiente de película adotado com base em expressões empíricas. Uma série de fatores distorcem as condições das expressões empíricas como:

- transferência de calor entre o gelo e o ar, com uma superfície de contato relativamente indefinida.
- deformação da geometria inicial a medida que aumenta a camada de gelo.
- erro inerente de expressões empíricas.
- dificuldade de encontrar expressões empíricas que forneçam o coeficiente local de transferência de calor, para uma análise mais detalhada.

Outro fato que, ao meu ver, prejudica o método é a utilização da analogia de Lewis, sendo difícil determinar os intervalos onde o erro da hipótese de semelhança e do campo de temperaturas seja válido.

No entanto é conveniente ressaltar a abrangência deste modelo que pode ser estendido a uma grande diversidade de problemas, bastando para isto que seja conhecido uma expressão do coeficiente de transferência de calor. Além deste ponto o modelo tem a seu favor a sua grande simplicidade.

### A.3 Modelo Jones-Parker

Este modelo não envolve a formação de gelo em torno de um cilindro, mas, da mesma forma que o modelo de Tao et al. [40], é um modelo unidimensional que estuda o movimento da fronteira de gelo com balanço global.

A primeira consideração feita no modelo é que a taxa de incremento interno da densidade é dada pela parcela de massa que consegue cruzar a fronteira e o incremento da fronteira é dado pelo restante do fluxo mássico. Em termos de expressões teríamos:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_f}{dt}\delta &= \dot{m}_{sd} \\ \frac{d\delta}{dt}\rho_f &= \dot{m}_t - \dot{m}_{sd}\end{aligned}$$

O fluxo total de vapor é dado por:

$$\dot{m}_t = h_m(W_\infty - W_s) \quad (\text{A.1})$$

Assumindo que a variação de densidade é muito maior na direção perpendicular à superfície que na paralela à superfície, pode-se admitir algumas simplificações que levam à expressão:

$$\dot{m}_v = -D \left( \frac{dW}{dx} \right)_s$$

Esta seria uma expressão geral para transferência de vapor, para este caso específico de um processo difusivo em meio poroso, deve-se efetuar uma correção para a tortuosidade. Isto pode ser feito alterando-se a expressão anterior da seguinte forma:

$$\dot{m}_{sd} = -D \left( \frac{dW}{dx} \right)_s \times \frac{(1 - \rho_s/\rho_g)}{\tau_s}$$

Usando-se as relações de gases ideais tem-se:

$$\left( \frac{dW}{dx} \right)_s = \frac{M_v}{RT_s} \left( \frac{dP_v}{dx} \right)_s$$

e ainda pela regra da cadeia:

$$\left( \frac{dW}{dx} \right)_s = \frac{M_v}{RT_s} \left( \frac{dP_v}{dT} \right)_s \left( \frac{dT_s}{dx} \right)_s$$

Esta última expressão pode ser substituída na expressão de  $\dot{m}_{sd}$  obtendo-se:

$$\dot{m}_{sd} = -D \frac{(1 - \rho_s/\rho_g)}{\tau_s} \frac{M_v}{RT_s} \left( \frac{dP_v}{dT} \right)_s \left( \frac{dT_s}{dx} \right)_s \quad (\text{A.2})$$

Agora se assumirmos que a densidade do gelo não varia com  $x$ , mas apenas com o tempo, temos:

$$\frac{d\rho_f}{dt} = \frac{\dot{m}_{sd}}{\delta} \quad (\text{A.3})$$

e com isto:

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{h_m(W_\infty - W_s) - \dot{m}_{sd}}{\rho_f} \quad (\text{A.4})$$

No entanto para se conhecer a temperatura da superfície é necessário efetuar um balanço energético:

$$k_{eff} \left[ \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x+dx} - \left( \frac{dT}{dx} \right)_x \right] = -\lambda(\dot{m}_{x+dx} - \dot{m}_x)$$

que equivale a

$$k_{eff} \frac{d^2T}{dx^2} = -\lambda \frac{d\dot{m}}{dx}$$

Como se trabalha sem considerar variações internas a camada de gelo, o que é feita a seguinte aproximação linear:

$$\frac{d\dot{m}}{dx} = -\frac{\dot{m}_{sd}}{\delta}$$

que implica em

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\lambda \dot{m}_{sd}}{k_{eff} \delta}$$

Assim pode-se resolver a equação da energia em diversos pontos:

- na parede:

$$T = T_e \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{h(T_\infty - T_s) + \dot{m}_t \lambda}{k_{eff}} \quad (\text{A.6})$$

- em posições intermediárias  $x$ :

$$\frac{dT}{dx} = \left. \frac{dT}{dx} \right|_w + \frac{d^2T}{dx^2} x \text{ ou}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{h(T_\infty - T_s) + \dot{m}_t \lambda}{k_{eff}} - \frac{\lambda \dot{m}_{sd}}{k_{eff} \delta} x \text{ ou seja}$$

$$T = T_e + \frac{h(T_\infty - T_s) + \dot{m}_t \lambda}{k_{eff}} x - \frac{\lambda \dot{m}_{sd}}{k_{eff} \delta} x^2$$

- na superfície:

$$\frac{dT}{dx} = \frac{h(T_\infty - T_s) + \dot{m}_t \lambda}{k_{eff}} - \frac{\lambda \dot{m}_{sd}}{k_{eff}} \text{ ou seja} \quad (\text{A.7})$$

$$T = T_e + \left[ \frac{h(T_\infty - T_s) + \dot{m}_t \lambda}{k_{eff}} - \frac{\lambda \dot{m}_{sd}}{k_{eff}} \right] \delta \quad (\text{A.8})$$

Assim foram obtidas as expressões para o campo de temperaturas, bastando para isto substituir as expressões de  $\dot{m}_t$  e  $\dot{m}_{sd}$ . Pode-se com isto resolver as equações de variação da densidade e variação da fronteira com o tempo, que são as expressões básicas do método.

### A.3.1 Análise crítica

Este método, como foi dito, até a presente data era o método mais utilizado para modelamento numérico do processo de formação de gelo, no entanto trata-se de um modelo de balanço global que não permite avaliação das propriedades dentro do volume definido. Este método foi o método mais utilizado na bibliografia obtida, no entanto ele não foi usado neste trabalho devido a publicação mais recente de Tao et al. [40], que considera variações locais de densidade.

Este modelo ainda tem a vantagem de permitir a análise de todo o processo não tendo seu uso restrito a nenhuma fase específica.

## Apêndice

# B

## Discretização das Equações Básicas do Fenômeno de Formação de Gelo

### Introdução

Por não se tratar de um fator primordial e também por não possuir grandes complicações para se obter a equação discretizada não se tratou deste ponto no capítulo 5, no entanto para que não pairasse nenhuma dúvida sobre a discretização neste apêndice foram colocadas as etapas intermediárias divididas pela fase.

Convém ressaltar ainda que o método de discretização utilizado no tempo trabalha com as propriedades de forma implícita, ou seja, no tempo avançado. Este método foi escolhido por de tratar de um método estável e que no caso unidimensional não aumenta de forma significativa o custo computacional.

### B.1 Primeira fase

As equações básicas para esta fase são as de crescimento diametral e crescimento radial. Portanto partindo da equação mostrada anteriormente para o crescimento diametral, a partir do balanço energético, tem-se a equação (5.1) integrada da forma:

$$\int_{t}^{no} \int_{so} \rho_g c_{p,g} d \frac{\partial T}{\partial t} dt dr = \int_{t}^{no} \int_{so} 4h(T_\gamma - T_\beta) dr dt + \int_{t}^{no} \int_{so} 2k_g \frac{\partial d}{\partial r} \frac{\partial T}{\partial r} dr dt + \int_{t}^{no} \int_{so} k_g d \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} dr dt + \int_{t}^{no} \int_{so} 2\rho_g \lambda \frac{\partial d}{\partial t} dt dr$$

Resolvendo as integrais e dividindo a expressão resultante por  $\Delta t$  tem-se:

$$\rho_g c_{p,g} d \frac{(T_P^+ - T_P^-)}{\Delta t} \Delta r = 4h(T_\gamma - T_P^+) \Delta r + 2k_g \left[ \left( T \frac{\partial d}{\partial r} \right)_{no}^+ - \left( T \frac{\partial d}{\partial r} \right)_{so}^+ \right] +$$

$$k_g \left[ \left( d \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{no}^+ - \left( d \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{so}^+ \right] + \frac{2\rho_g \lambda}{\Delta t} (d_P^+ - d_P^-) \Delta r$$

Podemos utilizar neste caso aproximação por diferenças centrais sem grandes problemas. Aproximação linear para as propriedades da fronteira também foi utilizada, assim sendo a propriedade qualquer  $\phi$  numa interface  $f$  entre os pontos  $P$  e  $F$  numa discretização de fronteiras centradas e grade homogênea pode ser expressa por:

$$\phi_f = \frac{\phi_P + \phi_F}{2}$$

Isto produz a versão discretizada da expressão:

$$\rho_g c_{p,g} d \frac{(T_P^+ - T_P^-)}{\Delta t} \Delta r = 4h(T_\gamma - T_P^+) \Delta r + 2k_g \left[ \frac{T_N^+ + T_P^+}{2} \frac{d_N^+ - d_P^+}{\Delta r} - \frac{T_P^+ + T_S^+}{2} \frac{d_P^+ - d_S^+}{\Delta r} \right] + k_g \left[ \frac{d_N^+ + d_P^+}{2} \frac{T_N^+ - T_P^+}{\Delta r} - \frac{d_P^+ + d_S^+}{2} \frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} \right] + \frac{2\rho_g \lambda}{\Delta t} (d_P^+ - d_P^-) \Delta r$$

Se considerar-se a equação (5.2) obtida para o balanço mássico integrada têm-se:

$$\int_t^{no} \int_{so} \rho_g \frac{\partial d}{\partial t} dt dr = \int_t^{no} \int_{so} 2h_m (W_\gamma - W_\beta) dt dr$$

que resulta em

$$\frac{d_P^+ - d_P^-}{\Delta t} = \frac{2h_m}{\rho_g} (W_\gamma - W_\beta)$$

lembrando que  $W_\beta$  representa a umidade de saturação avaliada em  $T_P^+$  e  $W_\gamma$  à temperatura  $T_\gamma$ .

Para este caso específico de regime laminar adotou-se  $\alpha = 0$  que implica no não crescimento diametral.

Se considerarmos o mesmo balanço feito agora na superfície determinaremos o crescimento da fronteira têm-se, que o diâmetro já é conhecido por hipótese:

$$d_P^+ = d_0$$

e ainda que a taxa mássica transmitida pela superfície superior é transformada em gelo incrementando a fronteira como mostrado na equação (5.4):

$$\int_t^{no} \int_{so} \rho_g \frac{\partial \delta}{\partial t} dt dr = \int_t^{no} \int_{so} h_m (W_\gamma - W_s) dt dr$$

que implica em:

$$\frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t} = \frac{h_m}{\rho_g} (W_\infty - W_s)$$

Efetuando-se o balanço energético na fronteira como mostrado na equação (5.5) e integrando-o obtém-se:

$$\int_t \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_s dt = \int_t \frac{h}{k_g} (T_\infty - T_s) dt + \int_t \frac{\rho_g \lambda}{k_g} \frac{d\delta}{dt} dt$$

Neste ponto convém ressaltar que é determinada na fronteira o fluxo de calor, no entanto deseja-se conhecer o valor da propriedade deste ponto específico. Para isto poderia se considerar um V.C. significativamente menor que os demais e assim obter uma temperatura significativa da superfície. No entanto isto complicaria a discretização e resolução do sistema introduzindo um grid não homogêneo. Como a variação das propriedades permite seguiu-se uma simplificação feita por Tao et al. [40] que equivale a uma expansão em Série de Taylor de primeira ordem. Assim para a propriedade  $\phi$  obtém-se

$$\phi_{n-1} = \phi_n - \left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_n \Delta r$$

Assim a equação integrada dividida por  $\Delta t$  fica:

$$\frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} = \frac{h}{k_g}(T_\infty - T_P^+) + \frac{\rho_g \lambda}{k_g} \frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t}$$

E para finalizar as condições na superfície do cilindro:

$$\begin{aligned} T_P &= T_e \\ \frac{dd}{dr} &= 0 \longrightarrow d_P = d_N \end{aligned}$$

## B.2 Segunda fase

As equações básicas da segunda etapa do processo de formação de gelo foram dadas no capítulo já citado. Para obter as equações discretizadas usamos um método de volumes finitos. Considerando isto a equação de balanço mássico da fase  $\gamma$  é obtida a partir da equação da difusão dada pela expressão (5.17) integrada:

$$\int_t^{no} \int_{so} \varepsilon_\gamma \frac{\partial W}{\partial t} dt dr = \int_t^{no} \int_{so} \frac{\partial}{\partial r} \left( D_{ef} \frac{\partial W}{\partial r} \right) dr dt$$

que integrada supondo variação da fração de sólido suficientemente pequena para ser desprezada, e dividida por  $\Delta t$  resulta em:

$$(1 - \varepsilon_P^-) \frac{W_P^+ - W_P^-}{\Delta t} \Delta r = D_{ef} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{no} - \left( \frac{\partial W}{\partial r} \right)_{so} \right]$$

e discretizada completamente:

$$(1 - \varepsilon_P^-) \frac{W_P^+ - W_P^-}{\Delta t} \Delta r = D_{ef} \left( \frac{W_N^+ - W_P^+}{\Delta r} - \frac{W_P^+ - W_S^+}{\Delta r} \right)$$

A equação de balanço de massa da fase  $\beta$  é dada pela parcela de umidade que ultrapassa a saturação após o cálculo:

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \dot{m}_P = (W_P - W_{sat})$$

E para os pontos internos tem-se ainda a equação da energia dada pela integral da equação (5.15)

$$\int_t^{no} \int_{so} \rho_f c_{p,f} \frac{\partial T}{\partial t} dt dr + \int_t^{no} \int_{so} \dot{m} \lambda dr dt = \int_t^{no} \int_{so} \frac{\partial}{\partial r} \left( k_{ef} \frac{\partial T}{\partial r} \right) dr dt$$

que integrada e dividida por  $\Delta t$  resulta em

$$\rho_f c_{p,f} \frac{T_P^+ - T_P^-}{\Delta t} \Delta r + \dot{m}_P \lambda \Delta r = k_{ef} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{no} - \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)_{so} \right]$$

que discretizada resulta em:

$$\rho_f c_{p,f} \frac{T_P^+ - T_P^-}{\Delta t} \Delta r + \dot{m} \lambda \Delta r = k_{ef} \left( \frac{T_N^+ - T_P^+}{\Delta r} - \frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} \right)$$

Para o ponto na superfície do gelo as mesmas considerações feitas para a primeira etapa devem ser refeitas agora, assim a equação (5.18) integrada fica:

$$\int_t h_m (W_\infty - W_s) dt = \int_t D_{ef,s} \frac{\partial W}{\partial r} dt + \int_t \rho_{f,s} \frac{d\delta}{dt} dt$$

que substituído pela expressão de primeira ordem da Série de Taylor, integrado e dividido por  $\Delta t$  fica:

$$h_m (W_\infty - W_P^+) = D_{ef,s} \frac{W_P^+ - W_S^+}{\Delta r} + \rho_{f,P} \frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t}$$

A expressão (5.19) corresponde balanço energético na fronteira e integrada resulta em:

$$\int_t h (T_\infty - T_\delta) dt = \int_t k_{ef} \frac{\partial T}{\partial r} dt - \int_t \rho_{f,s} \lambda \frac{d\delta}{dt} dt$$

que integrada, substituída por Série de Taylor e dividida por  $\Delta t$  resulta em:

$$h (T_\infty - T_P^+) = k_{ef} \frac{T_P^+ - T_S^+}{\Delta r} - \rho_{f,P} \lambda \frac{\delta^+ - \delta^-}{\Delta t}$$

Quanto à expressão na superfície do tubo tem-se o balanço mássico:

$$\int_t^{no} \int_{so} \dot{m} dt dr = \int_t^{no} \int_{so} \frac{D_{ef}}{\varepsilon_\gamma} \frac{d^2 W}{dr^2} dt dr$$

que dividida por  $\Delta t$  e considerando a mudança de  $\varepsilon$  desprezível no incremento do tempo, equivale a expressão :

$$\dot{m}_P \frac{\Delta r}{2} = \frac{D_{ef}}{1 - \varepsilon_P} \left[ \left( \frac{dW}{dr} \right)_{no}^+ - \left( \frac{dW}{dr} \right)_{so}^+ \right]$$

que se torna:

$$\dot{m}_P \frac{\Delta r}{2} = \frac{D_{ef}}{1 - \varepsilon_P} \frac{W_N^+ - W_P^+}{\Delta r}$$

quando se lembra que não existe saída de massa pela superfície do tubo.

Finalmente as expressões para as densidades em cada volume podem ser dadas pela expressão:

$$\int_t \frac{\partial \rho_f}{\partial t} dt = \int_t \dot{m} dt$$

que conduz a:

$$\rho_{f,P}^+ = \rho_{f,P}^- + \dot{m} \Delta t$$

exceto na fronteira de mudança de fase onde se adota a hipótese:

$$\rho_{f,P}^+ = \rho_{f,S}^+$$