

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR Francisco de
Carvalho Santos E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 25.02.08

.....
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Modelo numérico elastoplástico de contato com rolamento aplicado à análise de fadiga de rodas ferroviárias

Autor: **Francisco de Carvalho Santos**

Orientador: **Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Jr.**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Modelo numérico elastoplástico de contato com rolamento aplicado à análise de fadiga de rodas ferroviárias

Autor: **Francisco de Carvalho Santos**
Orientador: **Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Jr.**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2008
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Santos, Francisco de Carvalho
Sa59m Modelo numérico elastoplástico de contato com rolamento
aplicado à análise de fadiga de rodas ferroviárias / Francisco de
Carvalho Santos – Campinas, SP: [s.n.], 2008.

Orientador: Auteliano Antunes dos Santos Junior
Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Rodas de vagões. 2. Mecânica de contato. 3.
Plasticidade. 4. Metais – Fadiga. 5. Método dos elementos
finitos. 6. Ferrovias. I. Santos Junior, Auteliano Antunes dos.
II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de
Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: An elastoplastic numerical model of rolling contact applied to
analyze the fatigue of railroad wheels.

Palavras-chave em Inglês: Railroad wheel, Wheel-rail contact, Plasticity, fatigue,
Finite element, contact stress.

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e Projeto Mecânico.

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica.

Banca examinadora: Renato Pavanello, Itamar Ferreira, Roberto Spinola Barbosa,
Lucio Tunes dos Santos.

Data da defesa: 25/02/2008

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

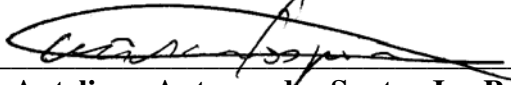
TESE DE DOUTORADO

**Modelo numérico elastoplástico de contato com
rolamento aplicado à análise de fadiga de rodas
ferroviárias**

Autor: **Francisco de Carvalho Santos**

Orientador: **Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Jr.**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



Prof. Dr. Auteliano Antunes dos Santos Jr., Presidente
DPM / FEM / UNICAMP



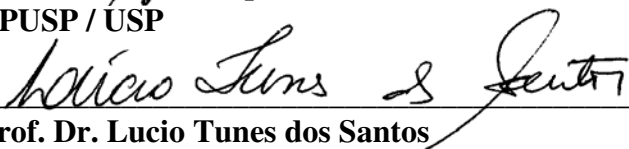
Prof. Dr. Renato Pavanello
FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Itamar Ferreira
FEM / UNICAMP



Prof. Dr. Roberto Spinola Barbosa
EPUSP / USP



Prof. Dr. Lucio Tunes dos Santos
IMECC / UNICAMP

Campinas, 25 de Fevereiro de 2008

Dedicatória

A minha família, meu pai Sergio, Dina, meu irmão Paulo, minha mãe Andréa e minha avó Yolanda, sem eles esse trabalho não seria possível.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Auteliano, meu amigo e companheiro de tantos anos, que ajudou nas horas difíceis e esteve presente durante toda essa longa jornada.

Ao Prof. Spinola pelo apoio durante todo esse trabalho. Que esta parceria possa se prolongar por muito tempo.

A Profa. Larissa por toda ajuda, que foi fundamental em certos momentos desse trabalho.

Ao Prof. Pavanello, pela ajuda durante esse trabalho, sempre prestativo todas as vezes que o procurei.

Ao Prof. Lucio pelos momentos de aprendizado que me proporcionou ao longo desses anos, que ajudaram em muito a minha formação.

Aos meus amigos e companheiros desta longa jornada, Marcílio, Sidney, Aliandro, Flavio Napolitano, Carlos Souto, Sergio Cosso, Sergio Dela Antonio, que tantas alegrias e tristezas compartilhamos juntos em todos esses anos. Que estas amizades possam ser eternas independentemente da onde estivermos.

Ao Prof. Pérsio pela paciência e ajuda no uso do cluster do DGT. Obrigado pelo seu apoio e boa vontade, que foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

A André Beim e a Tresca pela licença do software e pelo apoio na fase final deste trabalho. Que esta parceria possa durar muito.

A FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

SANTOS, Francisco de Carvalho, *Modelo numérico elastoplástico de contato com rolamento aplicado à análise de fadiga de rodas ferroviárias*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2008. 210 p. Tese (Doutorado).

Este trabalho propõe um modelo numérico de contato roda-trilho, baseado no método dos elementos finitos, para estimar a vida em fadiga até o surgimento da trinca, e quanto à falha por escamação, de uma roda ferroviária classe C de um vagão de carga de uma ferrovia nacional, de Serra dos Carajás. O modelo tem como principal contribuição à abordagem elastoplástica juntamente com a inclusão das tensões residuais provenientes do tratamento térmico do processo de fabricação da roda. O modelo de elementos finitos utilizou técnicas de submodelagem, tanto na determinação no campo de tensões residuais de fabricação, quanto no de contato roda-trilho. Para efeito de comparação, determinaram-se as tensões e deformações também com um modelo semi-analítico elástico, baseado na teoria de Hertz, além de um modelo numérico elastoplástico sem tensões residuais de fabricação. A vida foi determinada através de dois critérios de fadiga, que incorporam a influência das tensões hidrostáticas e planos críticos. O critério de alto ciclo de Dang Van foi modificado para adaptar-se ao problema de dois corpos em contato. O outro critério utilizado foi o de Fatemi–Socie, baseado em deformações cisalhantes. O número de ciclos encontrado para o início da trinca foi então corrigido de acordo com uma distribuição normal estatística da posição lateral do ponto de contato. O trabalho mostrou que as tensões residuais, benéficas para a propagação de trincas, reduzem a vida até o surgimento destas.

Palavras Chave:

- Roda ferroviária, contato roda-trilho, plasticidade, fadiga, elementos finitos, tensão de contato.

Abstract

SANTOS, Francisco de Carvalho, *An elastoplastic numerical model of rolling contact applied to analyze the fatigue of railroad wheels*, Campinas: Faculty of Mechanical Engineering, State University of Campinas, 2008. 210 p. Doctoral Thesis.

This work proposes a wheel-rail contact model based on finite element method to estimate the fatigue life to shelling, until the beginning of the crack of a railroad wheel class C of a heavy-hull Brazilian railroad from Serra dos Carajás. The main contribution of this work is the elastoplastic approach with the inclusion of the residual stress generated by the heat treatment of the wheel manufacture process. Submodeling techniques were used to determinate the residual stresses from manufacture process and the contact stresses. Aiming the comparison, the wheel-rail contact stresses was calculated using an analytic model, based on Hertz theory, and a numeric model (FEM) without residual stress from the manufactured process. The fatigue life was calculated using two criterions based on critical planes and hydrostatic stresses. The high cycle fatigue criterion from Dang Van was adapted to be used in contact problems. The other one was the Fatemi–Socie criterion, based on shear strains. The number of cycles until the arising of the fatigue crack was correct using a statistical normal distribution of the lateral position of the contact point. This work shows that the residual stress generated by the manufacture process, which prevents the crack propagation, reduces the fatigue life until the arising of the crack.

Key words:

- Railroad wheel, wheel-rail contact, plasticity, fatigue, finite element, contact stress.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Objetivos e contribuições	4
1.2	Limitações do estudo	5
1.3	Apresentação do trabalho	6
2	Revisão Bibliográfica.....	8
2.1	Contato mecânico: teorias analíticas	8
2.2	Métodos numéricos: elastoplasticidade.	12
2.3	Fadiga de rolamento	17
2.4	Ensaio experimentais	21
3	Teorias Analíticas e Semi-Analíticas.....	23
3.1	Equações básicas da elasticidade	23
3.2	Funções de potência – Boussinesq e Cerruti.....	26
3.3	Campo de deslocamentos.....	28
3.4	Teoria de Hertz.....	29
3.4.1	Deslocamento vertical: abordagem geométrica.....	30
3.4.2	Deslocamento vertical: abordagem numérica.....	36
3.4.3	Semi-eixos da elipse de contato	38
3.4.4	Distribuição de pressão no contato	40
3.5	Campo de Tensões sub-superficiais	41
3.5.1	Abordagem numérica.....	41
3.5.2	Abordagem semi-analítica	43
3.6	Conclusões	47

4	Critérios de falha e plasticidade	48
4.1	Critérios de fadiga e resistência	48
4.1.1	Componentes do tensor desvio e tensão hidrostática	50
4.1.2	Critério das tensões principais	51
4.1.3	Critério de Tresca	51
4.1.4	Critério de Sines	51
4.1.5	Critério de Crossland	52
4.1.6	Critério de Dang Van.....	52
4.1.6.1	Tensão de cisalhamento equivalente	54
4.1.7	Critério de Dan Van Modificado – proposta de cálculo da vida (N).....	57
4.1.8	Critério de Fatemi & Socie	61
4.1.9	Tensão em um plano qualquer.....	62
4.1.10	Tensão média de cisalhamento e amplitude de tensão.	63
4.1.11	Mínima circunferência circunscrita	66
4.1.12	Cálculo e acúmulo do dano.....	69
4.2	Plasticidade.	70
4.2.1	Conceitos básicos de plasticidade.....	70
4.2.2	Decomposição elastoplástica do tensor deformação.	71
4.2.3	Critério de escoamento (“Yield Criterion”).....	73
4.2.3.1	Critério de Von Mises.....	74
4.2.4	Critério de fluxo plástico (“Plastic Flow Criterion”).....	75
4.2.4.1	Função de fluxo	77
4.2.4.2	Plasticidade associativa e o critério de Prandtl–Reuss.	78
4.2.5	Critério de encruamento (“Hardening Criterion”).....	79
4.2.5.1	Encruamento isotrópico (“Isotropic hardening”)	81
4.2.5.2	Encruamento cinemático (“Kinematic hardening”) – O Efeito Bauschinger	82
4.2.5.3	Modelo de encruamento linear de Prager	83
5	Modelagem numérica	85
5.1	Contato roda–trilho	86

5.2	Modelo de tratamento térmico inicial	87
5.2.1	Etapa 1: Pré-aquecimento (austenitização).....	89
5.2.2	Etapa 2: Têmpera.....	89
5.2.3	Etapa 3: Revenimento.....	90
5.2.4	Etapa 4: Resfriamento.....	91
5.2.5	Modelo térmico transiente	91
5.2.5.1	Carregamento térmico e condições de contorno.....	92
5.2.5.2	Propriedades térmicas utilizadas	94
5.2.6	Modelo estrutural.....	95
5.2.6.1	Carregamento estrutural e condições de contorno.....	95
5.2.6.2	Propriedades mecânicas.....	97
5.3	Modelo de contato roda – trilho elastoplástico (MEF)	105
5.3.1	Submodelagem	106
5.3.2	Criação do modelo completo (malha grossa)	107
5.3.3	Criação do submodelo (malha refinada).....	110
5.3.4	Elementos de contato	112
5.3.5	Condições de carregamento de contorno	114
5.3.5.1	Modelo completo.....	114
5.3.5.2	Submodelo	117
5.4	Modelo de contato roda – trilho elastoplástico com tensões residuais de fabricação (MEF + Fab).....	118
5.4.1	Criação do submodelo	119
5.4.2	Condições de carregamento e contorno	120
5.5	Propriedades do material utilizado.....	121
5.6	Procedimento para determinação da vida da roda.....	122
6	Resultados e Discussão	124
6.1	Processo de fabricação	124
6.1.1	Análise térmica	124
6.1.2	Análise estrutural	128
6.2	Contato roda–trilho	132
6.2.1	Modelo elástico (Ana Elás)	132

6.2.2	Modelo elástico com tensões residuais de fabricação (Ana Elás + Fab).....	137
6.2.3	Modelo elastoplástico (MEF)	140
6.2.4	Modelo elastoplástico com tensões residuais de fabricação (MEF + Fab).....	152
6.3	Cálculo da fadiga.....	162
6.3.1	Modelo elástico (Ana Elás)	162
6.3.1.1	Critério de Dang Van Modificado	163
6.3.1.2	Critério de Fatemi & Socie	169
6.3.2	Modelo elástico com tensões residuais de fabricação (Ana Elás + Fab).....	172
6.3.2.1	Critério de Dang Van Modificado	173
6.3.2.2	Critério de Fatemi & Socie	175
6.3.3	Modelo elastoplástico (MEF)	178
6.3.3.1	Critério de Dang Van Modificado	178
6.3.3.2	Critério de Fatemi & Socie	181
6.3.4	Modelo elastoplástico com tensões residuais de fabricação (MEF + Fab.).....	183
6.3.4.1	Critério de Dang Van Modificado	183
6.3.4.2	Critério de Fatemi & Socie	186
6.4	Comparação entre os modelos e os critérios utilizados	188
6.4.1	Comparação entre as componentes de tensão dos modelos estudados.....	188
6.4.2	Passeio lateral da roda	192
6.4.3	Comparação entre os critérios de fadiga.....	195
7	Conclusão e Sugestões	199
8	Referências Bibliográficas	203

Lista de Figuras

Figura 1.1: Roda danificada em serviço em ferrovia norte-americana (SANTOS, 1992).	2
Figura 3.1: Cubo de tensões. Componentes do estado de tensão em ponto	24
Figura 3.2: Modelo de semi-espaco elástico.	27
Figura 3.3: Esboço dos raios de curvatura de dois sólidos arbitrários em contato.	30
Figura 3.4: Deformações na superfície de contato (a). Vista de topo dos sólidos em contato (b).	32
Figura 3.5: Deslocamentos entre dois corpos em contato.	35
Figura 4.1: Esboço do estado de tensão em função da posição do ponto durante o rolamento – rotação do plano das tensões principais.....	53
Figura 4.2: Representação gráfica do critério de Dang Van.	56
Figura 4.3: Tensão de cisalhamento τ_{sp} num ponto Q do material projetada em um plano.....	56
Figura 4.4: Representação gráfica do critério de Dang Van proposto para o cálculo da vida.	59
Figura 4.5: Uso das tensões equivalentes de Dang Van em um diagrama de Wöhler.	60
Figura 4.6: Representação das tensões atuantes em um plano Δ	62
Figura 4.7: Ciclo da tensão de cisalhamento.....	64
Figura 4.8: Circunferência circunscrevendo uma curva de um ciclo de tensão.	66
Figura 4.9: Gráfico tensão – deformação uniaxial para materiais dúcteis.	71
Figura 4.10: Gráfico tensão – deformação uniaxial. Modelo matemático.	72
Figura 4.11: Vetor de fluxo de Prandtl – Reuss.	79

Figura 4.12: Modelo de encruamento isotrópico.	81
Figura 4.13: Modelo de encruamento cinemático.	83
Figura 5.1: Processo de têmpera sofrido pela roda.	90
Figura 5.2: Efeito da tensão residual circunferencial de compressão em uma trinca radial.	90
Figura 5.3: Esquema do processo de tratamento térmico na pista da roda.	91
Figura 5.4: Modelo axissimétrico da roda.	92
Figura 5.5: Malha de elementos do modelo da roda.	92
Figura 5.6: Convecção aplicada ao contorno da roda durante a têmpera.	93
Figura 5.7: Condições de contorno na roda para análise estrutural.	96
Figura 5.8: Exemplo de temperaturas aplicadas como carregamento na análise estrutural.	96
Figura 5.9: Gráfico do limite de escoamento em função da temperatura para roda classe C (não ajustado).	100
Figura 5.10: Gráfico da tensão de escoamento em função da temperatura para rodas classe C e classe L.	101
Figura 5.11: Gráfico da tensão de escoamento em função temperatura para roda classe C, ajustado para as condições ensaiadas.	102
Figura 5.12: Gráfico do módulo de elasticidade em função da temperatura para roda classe C (ajustado).	102
Figura 5.13: Gráfico da tensão – deformação em função de várias temperaturas – roda classe L.	103
Figura 5.14: Gráfico da tensão – deformação em função de várias temperaturas – roda classe C.	103
Figura 5.15: Perfis planos da roda e do trilho. Vista frontal (a) e vista isométrica (b).	108
Figura 5.16: Modelo completo (3D) da roda e do trilho. Vista lateral e isométrica	109
Figura 5.17: Modelo completo 3D da roda e do trilho. Vista em corte.	110
Figura 5.18: Submodelo do contato roda – trilho. Vista isométrica.	111
Figura 5.19: Submodelo do contato roda – trilho. Vista lateral e em corte.	112
Figura 5.20: Elementos de contato. Roda (vermelho) e trilho (azul).....	113

Figura 5.21: Esquema do contato usado em elementos finitos.	113
Figura 5.22: Região do cubo da roda.	114
Figura 5.23: Condições de contorno e carregamento no modelo completo.	115
Figura 5.24: Região de interpolação das condições de contorno (deslocamentos).	117
Figura 5.25: Rotação dos nós do contorno de corte do submodelo.	119
Figura 5.26: Rotação de todos os nós do submodelo.	120
Figura 5.27: Gráfico do ensaio de tração para um corpo de prova do aro da roda classe C na temperatura ambiente.	122
Figura 5.28: Fluxograma da metodologia de análise do contato roda–trilho.	123
Figura 6.1: Distribuição de temperatura na roda (°C), após o fim da têmpera (345 segundos). ..	125
Figura 6.2: Distribuição de temperatura na roda (em °C), após o fim do revenimento (3,7 horas).	126
Figura 6.3: Distribuição de temperatura na roda (em °C), após o fim do resfriamento (14 horas).	126
Figura 6.4: Nós selecionados para o histórico de temperaturas e tensões e caminho onde será traçado o gráfico de tensão em função da profundidade (linha vermelha).	127
Figura 6.5: Variação da temperatura (em °C) ao longo de todo processo de fabricação para dois pontos no aro da roda: pista e base do aro.	127
Figura 6.6: Distribuição da tensão (MPa) circunferencial no aro da roda após o fim da têmpera (345 segundos).	128
Figura 6.7: Distribuição da tensão (MPa) circunferencial no aro da roda após o fim do revenimento (3,7 horas).	129
Figura 6.8: Distribuição da tensão (MPa) circunferencial no aro da roda após o fim do resfriamento (8,6 horas).	129
Figura 6.9: Variação da tensão circunferencial (MPa) ao longo do aro da roda para cada etapa do processo de fabricação: têmpera, revenimento e resfriamento.	130
Figura 6.10: Variação da tensão circunferencial (MPa) nas etapas de têmpera e revenimento para dois pontos na roda: pista e base do aro.	131
Figura 6.11: Variação da tensão circunferencial (MPa) em todo processo de fabricação para dois pontos na roda: pista e base do aro.	131

Figura 6.12: Esboço do contato roda – trilho: (a) vista lateral. (b) vista transversal.	133
Figura 6.13: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z).	135
Figura 6.14: Variação da tensão normal vertical (σ_z) e cisalhante (τ_{xz}) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z).	135
Figura 6.15: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z, considerando vários pontos na direção longitudinal (x).	136
Figura 6.16: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) e cisalhante (τ_{xz}) em função de z, considerando vários pontos na direção longitudinal (x).	137
Figura 6.17: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) com tensões residuais.	138
Figura 6.18: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) com tensões residuais.	138
Figura 6.19: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) com tensões residuais.	139
Figura 6.20: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z, considerando vários pontos na direção longitudinal (x) com tensões residuais.	139
Figura 6.21: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) com tensões residuais.	140
Figura 6.22: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) com tensões residuais.	140
Figura 6.23: Submodelo adotado e os caminhos escolhidos para verificação dos resultados.	141
Figura 6.24: Tensão de Von Mises em função da distância descrita pelo caminho 1.	141
Figura 6.25: Tensão de Von Mises em função da distância descrita pelo caminho 2.	142
Figura 6.26: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação plástica.	142
Figura 6.27: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação total.	143

Figura 6.28: Variação da deformação plástica equivalente ao longo da distância percorrida, em um ponto de máxima deformação plástica localizada abaixo da superfície da roda.	143
Figura 6.29: Distribuição de tensão vertical (direção z) na região de contato da roda e do trilho, após cinco ciclos de carregamento (MPa). Vista isométrica e vista frontal.	144
Figura 6.30: Distribuição da tensão cisalhante τ_{yz} na região do contato, após cinco ciclos de carregamento (MPa). Vista longitudinal.	145
Figura 6.31: Distribuição de tensão de Von Mises, após cinco ciclos de carregamento (MPa). Vista longitudinal e vista lateral (em corte no centro do contato).	146
Figura 6.32: Distribuição da deformação plástica equivalente, após cinco ciclos de carregamento. Vista longitudinal e vista lateral (em corte no centro do contato)... ..	146
Figura 6.33: Razão entre a tensão de Von Mises e o limite de escoamento. Vista longitudinal e vista lateral (em corte no centro do contato).	147
Figura 6.34: Vista isométrica da região de contato.	147
Figura 6.35: Formato e distribuição de pressão na região de contato (MPa). a) estático; b) após um ciclo.	148
Figura 6.36: Formato e distribuição de pressão na região de contato (MPa). a) após dois ciclos; b) após três ciclos.	148
Figura 6.37: Formato e distribuição de pressão na região de contato (MPa). a) após quatro ciclos; b) após cinco ciclos.	148
Figura 6.38: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF.	149
Figura 6.39: Variação da tensão normal vertical (σ_x) e cisalhante (τ_{xz}) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF.	150
Figura 6.40: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF.	150
Figura 6.41: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF.	151
Figura 6.42: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) e cisalhante (τ_{xy}) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF.	151
Figura 6.43: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF.	152

Figura 6.44: Distribuição das tensões na direção longitudinal (x) após o término da têmpera (MPa). a) Modelo sólido, b) Modelo axissimétrico.	153
Figura 6.45: Distribuição das tensões na direção longitudinal (x) após o término do revenimento (MPa). a) Modelo sólido, b) Modelo axissimétrico.	153
Figura 6.46: Distribuição das tensões na direção longitudinal (x) após o término do resfriamento (MPa). a) Modelo sólido, b) Modelo axissimétrico.	154
Figura 6.47: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação plástica.	154
Figura 6.48: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação total.	155
Figura 6.49: Variação da deformação plástica equivalente ao longo da distância percorrida, em um ponto de máxima deformação plástica localizada abaixo da superfície da roda.	155
Figura 6.50: Distribuição de tensão vertical (direção z) na região de contato da roda e do trilho, após um ciclo de carregamento (MPa). Vista isométrica e vista transversal.	156
Figura 6.51: Distribuição da tensão cisalhante τ_{yz} na região do contato, após um ciclo de carregamento (MPa). Vista transversal.	157
Figura 6.52: Distribuição de tensão de Von Mises, após o um ciclo de carregamento (MPa). Vista transversal e vista lateral (em corte no centro do contato).	157
Figura 6.53: Distribuição da deformação plástica equivalente, após o um ciclo de carregamento. Vista transversal e vista lateral (em corte no centro do contato).	158
Figura 6.54: Razão entre a tensão de Von Mises e o limite de escoamento. Vista transversal e vista lateral (em corte no centro do contato).	158
Figura 6.55: Formato e distribuição de tensão na região de contato (MPa). a) estático; b) após um ciclo.	159
Figura 6.56: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF + Fab.	159
Figura 6.57: Variação da tensão normal vertical (σ_x) e cisalhante (τ_{xy}) em função de x, considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF + Fab.	160
Figura 6.58: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de x, considerando vários pontos na longitudinal (z) – MEF + Fab.	160

Figura 6.59: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF + Fab.	161
Figura 6.60: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) e cisalhante (τ_{xy}) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF + Fab.	161
Figura 6.61: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de z, considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF + Fab.	162
Figura 6.62: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – Modelo semi-analítico.	165
Figura 6.63: Máxima tensão equivalente de Dang Van em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	166
Figura 6.64: Dano máximo calculado em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	166
Figura 6.65: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.....	167
Figura 6.66: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.....	168
Figura 6.67: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo de carregamento.....	170
Figura 6.68: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	171
Figura 6.69: Dano máximo calculado em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	171
Figura 6.70: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.	172
Figura 6.71: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – Modelo semi-analítico com tensões residuais.....	173
Figura 6.72: Máxima tensão equivalente de Dang Van em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	174
Figura 6.73: Dano máximo em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.....	174
Figura 6.74: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.....	175
Figura 6.75: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.....	175

Figura 6.76: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo de carregamento.....	176
Figura 6.77: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	176
Figura 6.78: Dano máximo calculado cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	177
Figura 6.79: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.	177
Figura 6.80: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – MEF.	178
Figura 6.81: Máxima tensão equivalente de Dang Van em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	179
Figura 6.82: Dano máximo cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.....	179
Figura 6.83: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.....	180
Figura 6.84: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.....	181
Figura 6.85: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo.	181
Figura 6.86: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	182
Figura 6.87: Dano máximo cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.....	182
Figura 6.88: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.	183
Figura 6.89: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – MEF + Fab.	184
Figura 6.90: Máxima tensão equivalente de Dang Van cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	184
Figura 6.91: Dano máximo calculado em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	185
Figura 6.92: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.....	185

Figura 6.93: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.....	186
Figura 6.94: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo.	186
Figura 6.95: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.	187
Figura 6.96: Dano máximo cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.....	187
Figura 6.97: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.	188
Figura 6.98: Comparação das componentes do tensor σ_x e σ_y , em função da direção x e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab.....	189
Figura 6.99: Comparação das componentes do tensor σ_z e τ_{xy} , em função da direção x e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab.....	189
Figura 6.100: Comparação das componentes do tensor τ_{yz} e τ_{xz} , em função da direção x e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab.....	190
Figura 6.101: Comparação das componentes do tensor σ_x e σ_y , em função da direção z e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab.....	191
Figura 6.102: Comparação das componentes do tensor σ_z e τ_{xy} , em função da direção z e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab.....	191
Figura 6.103: Comparação das componentes do tensor τ_{yz} e τ_{xz} , em função da direção z e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab.....	192
Figura 6.104: Variação da posição lateral em função to tempo de percurso (BARBOSA, 2007).....	193
Figura 6.105: Histograma e distribuição normal do passeio.....	193
Figura 6.106: Probabilidade de o deslocamento lateral ser nulo.....	194
Figura 6.107: Variação de τ_{dv} em função da distância de rolamento para o ponto crítico de cada um dos quatro modelos analisados.....	198
Figura 6.108: Variação do número de ciclos em função da distância de rolamento para o ponto crítico de cada um dos quatro modelos analisados.....	198

Lista de Tabelas

Tabela 5.1: Informação sobre a duração de cada etapa.....	91
Tabela 5.2: Informações dos passos de tempo na análise estrutural.	97
Tabela 5.3: Tensão de escoamento em função da temperatura para o aço de rodas classe C.	99
Tabela 5.4: Tensão de escoamento (σ_y) para rodas classe C e L em função das temperaturas. ..	100
Tabela 5.5: Tensão de escoamento final para classe C, módulo de elasticidade e deformação correspondente ao ponto de escoamento.	102
Tabela 5.6: Pontos da curva tensão – deformação (classe C) e a diferença entre pontos consecutivos.	104
Tabela 5.7: Valores do carregamento aplicado.	118
Tabela 5.8: Propriedades mecânicas do ensaio de tração – Roda classe C.	122
Tabela 6.1: Informações dos passos de tempo na análise térmica.	125
Tabela 6.2: Propriedades mecânicas e carregamento usado na análise semi-analítica.	133
Tabela 6.3: Propriedades geométricas usadas na análise elástica.	133
Tabela 6.4: Número de pontos e intervalos utilizados para o cálculo dos tensores de tensão.	134
Tabela 6.5: Semi-eixos da elipse, pressão máxima e tensão equivalente máxima encontrada através da Teoria de Hertz.	134
Tabela 6.6: Semi-eixos da elipse, pressão máxima e tensão equivalente máxima encontrada no modelo numérico.	144
Tabela 6.7: Semi-eixos da elipse, pressão máxima e tensão equivalente máxima encontrada no modelo numérico com tensões residuais.	156
Tabela 6.8: Propriedades utilizadas no critério de Dang Van Modificado.	163

Tabela 6.9: Propriedades utilizadas com o critério Fatemi & Socie (Moyar & Stone, 1991).....	169
Tabela 6.10: Comparação entre os modelos e critérios utilizados. DVM: Critério de Dang Van Modificado; F-S: Critério de Fatemi & Socie.	195
Tabela 6.11: Diferença entre as tensões normais dos pontos críticos dos modelos MEF e MEF + Fab.....	196

Nomenclatura

Letras Latinas

a – semi-eixo maior da elipse de contato

a_{adv} – constante de Dang Van

A – constante geométrica dos corpos em contato

b – semi-eixo menor da elipse de contato

B – constante geométrica dos corpos em contato

C – calor específico

e – excentricidade da elipse

E – módulo de elasticidade

$E(e)$ – integral elíptica completa

F – força vertical

G – módulo de cisalhamento

h – convecção térmica

H – módulo de encruamento

i – índice do tensor de tensões

J – segundo invariante do tensor desvio

k – razão dos semi-eixos da elipse

$K(e)$ – integral elíptica completa

l – cosseno diretor perpendicular ao plano

m – cosseno diretor tangente ao plano

n – cosseno diretor tangente ao plano

N – integral
p – posição no ciclo de carregamento
P – esforço na região contato
R – raio de curvatura máximo
R' – raio de curvatura mínimo
S – tensor desvio
t – tempo
T – temperatura
u – deslocamento

Letras Gregas

α – ângulo entre os corpos em contato
 β – tensor deslocamento (“back stress”)
 σ – tensão normal
 σ_y – limite de escoamento
 ε – deformação normal
 γ – deformação cisalhante
 θ – elevação de um plano
 ϕ – azimuth de um plano
 μ – coeficiente de atrito
 η – vetor diferença entre o tensor de tensões e o tensor deslocamento
 ρ – densidade
 τ – tensão cisalhante
 δ – aproximação dos corpos em contato
 ψ – função de fluxo plástico
 ν – coeficiente de Poisson

Subscritos

a – amplitude

dv – Dang Van

h – hidrostático

i – índice do tensor de tensões

j – índice do tensor de tensões

m – média

p – plástica

x – direção longitudinal

vm – Von Mises

y – direção lateral

z – direção vertical

1 – corpo 1

2 – corpo 2

Abreviações

ANA ELÁS – Analítico elástico

ANA ELÁS + Fab – Analítico elástico com tensões residuais de fabricação

CVRD – Companhia Vale do Rio Doce

DPM – Departamento de Projeto Mecânico

FAB – Fabricação

FEM – Faculdade de Engenharia Mecânica

IPT – Instituto de Pesquisas Tecnológicas

MEF – Método dos elementos finitos

Capítulo 1

Introdução

As grandes ferrovias de carga de todo mundo têm buscado meios de aumentar cada vez mais a sua capacidade de transporte. Ferrovias como as da Austrália já transportam 36 toneladas por eixo, o que equivale a 144 toneladas por vagão. No entanto, esse aumento tem um preço. Têm sido reportados inúmeros problemas de falhas em rodas devido ao aparecimento de defeitos em sua superfície de rolamento. Esse tipo de falha pode causar desde o mau funcionamento de outros componentes mecânicos, até a retirada das rodas de serviço. Muitas vezes, o aparecimento de trincas não significa que a roda deva ser retirada de serviço. Rodas de múltiplas vidas permitem usinagem da banda de rolamento a fim de eliminar as trincas existentes. Com isso, a roda passa a ter um tempo de vida adicional, mas há um custo de reperfilamento e parada para manutenção, que é significativo quando o problema é crítico. Em alguns casos, as trincas se propagam na direção radial, podendo encontrar uma região onde a tensão de compressão se transforma em tração e levar a falhas catastróficas.

Em 1998, a mídia noticiou que uma composição ferroviária de passageiros na Alemanha havia descarrilado por quebra de uma de suas rodas, causando vítimas fatais e prejuízos elevados. Assim como nesse caso, muitos acidentes que estão relacionados à quebra de rodas tiveram como origem trincas superficiais que se propagaram na direção radial em regiões de tração circunferencial. A Figura 1.1 mostra uma roda em um desses casos em uma ferrovia norte-americana. Nesta figura, o cubo e parte da alma da roda ainda permaneceram presos ao eixo, mas o restante não. Problemas como esses podem ter consequências econômicas importantes. Além disso, vidas podem ser perdidas em casos extremos, conforme ocorrido.

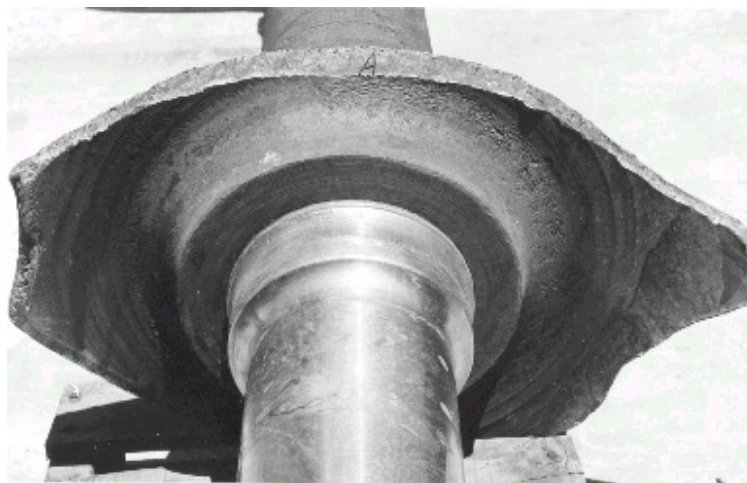


Figura 1.1: Roda danificada em serviço em ferrovia norte-americana (SANTOS, 1992).

As trincas na superfície geram um tipo de dano distribuído muito significativo também para as ferrovias brasileiras. O “shelling”, conhecido no meio ferroviário brasileiro como escamação, surge devido ao alto carregamento mecânico suportado pelas rodas e pode ser agravado pela frenagem. Quando uma roda está sob carregamento muito elevado, pode ocorrer escoamento à compressão do material da região de contato. Caso o limite de escoamento seja excedido, poderá haver tração nessa região quando a roda deixar o contato. De qualquer forma, haverá variação na tensão, que é uma das condições para o surgimento e a propagação de pequenas trincas na superfície de rolamento. Como é sabido, as trincas inicialmente se originam e se propagam por fadiga na direção da tensão máxima de cisalhamento (aproximadamente 45° com o plano de contato). Quando essas trincas se encontram ou encontram trincas sub-superficiais, que surgem quando a tensão de cisalhamento máxima está abaixo da superfície de contato, podem causar desprendimento de pequenos pedaços do material. A frenagem agrava esse fenômeno, visto que o superaquecimento da roda causa uma sensível redução nas suas propriedades de resistência mecânica, podendo reduzir o limite de resistência em até 50%. Esse tipo de falha, por escamação, é o objeto de estudo desse trabalho.

Além das tensões mecânicas aplicadas, a escamação pode ser influenciada pelas tensões já existentes nas rodas novas. Tensões residuais contribuem significativamente para as falhas de elementos mecânicos, embora também possam atuar de forma oposta. Elementos mecânicos

solicitados além de seu limite elástico sofrem alteração no estado inicial de tensões e a nova distribuição pode tornar o material mais susceptível à falha do que é previsto por modelos elásticos. Processos de fabricação criados para evitar ou controlar essas tensões muitas vezes não incluem ferramentas que permitam o controle eficiente do produto final, permitindo resultados diferentes dos previstos. O acompanhamento das modificações em serviço no estado de tensões desses elementos mecânicos, em especial naqueles cuja falha pode levar a danos catastróficos, é fundamental para a segurança dos dispositivos e sistemas onde estão instalados.

A questão que se coloca atualmente é: como prever a vida em serviço das rodas ferroviárias? Os parâmetros usados hoje se baseiam em abordagens elásticas e em observações do desempenho em serviço ao longo de muitos anos. Com base nessa experiência e resultados, a Associação Americana de Ferrovias construiu uma tabela que apresenta o diâmetro de roda recomendado para cada carregamento previsto. Como os materiais das rodas são divididos em classes, com propriedades e composição normalizadas, é possível escolher a roda para cada aplicação. Por exemplo, a roda utilizada na Estrada de Ferro Carajás – CVRD é a de 38 polegadas (965 mm), de material classe C. Não obstante, o problema de escamação ainda é grave nessa ferrovia.

Para prever a vida em serviço de rodas ferroviárias é necessário entender o problema completo e abordá-lo de forma adequada. Este envolve o uso de valores reais de carregamento e propriedades do material, modelos de comportamento do material adequados, modelos para cálculo das tensões representativos e modelos de falha condizentes com o processo de geração das trincas. A literatura atual não aborda todos os aspectos do problema, principalmente pela complexidade deste. Assim, os modelos para cálculo publicados são geralmente elásticos e não levam em conta as tensões residuais de fabricação existentes; usam também contato cilíndrico com uma aproximação para o caso geral no qual se enquadra o contato roda-trilho. Além disso, normalmente utilizam modelos para cálculo de vida baseados em resultados para engrenagens. Como contribuição para o estudo do problema, esse trabalho se propõe analisar as seguintes questões:

1. Qual a distribuição de tensões residuais gerada pelo processo de fabricação?

2. Qual o efeito das tensões residuais de fabricação sobre as tensões no contato entre a roda e o trilho, considerando contato elástico?
3. Qual é a importância em considerar o modelo elastoplástico cumulativo para o contato entre a roda e o trilho, desprezando as tensões residuais de fabricação?
4. Qual o efeito das tensões residuais de fabricação sobre as tensões de contato utilizando o modelo elastoplástico?
5. Qual é o modelo atual mais adequado para o cálculo da vida para rodas ferroviárias para vagões com carga elevada?
6. Qual o efeito do uso das diferentes abordagens descritas nos itens 2, 3, 4 sobre a previsão da vida em serviço das rodas ferroviárias?

A menos do item (1), não há registro na literatura de estudos que analisem os problemas descritos. Mesmo para o item citado, não há registro de cálculos para as rodas com as dimensões utilizadas no país. Outras questões se somarão às citadas no aprofundamento futuro do estudo, a ser realizado em trabalhos futuros.

1.1 Objetivos e contribuições

Este trabalho tem como contribuição e objetivo principal estimar a vida de rodas ferroviárias quanto à falha por escamação e até o início de trincas, através de um modelo numérico para o cálculo do campo de tensões e deformações, levando em conta as tensões residuais de fabricação e a abordagem elastoplástica do problema de contato com o trilho. Como objetivos secundários, pode-se citar a modificação proposta no critério de fadiga utilizado, as rotinas desenvolvidas para o cálculo da vida em serviço da roda, além das macros (rotinas) utilizadas no pacote comercial adotado para construção do modelo de contato proposto. Essas rotinas e macros permitem expandir o problema estudado para outras classes de rodas e agregar outros tipos de carregamento (frenagem, esforços tangenciais).

Para efeito de comparação serão estudados mais três modelos de contato: um semi-analítico elástico baseado na teoria de Hertz (1882); um modelo semi-analítico elástico (Hertz, 1882) somando-se as tensões residuais de fabricação e um modelo numérico elastoplástico sem tensões residuais de fabricação. Uma comparação será realizada também entre a vida calculada por todos os modelos analisados, visando definir qual deles é o mais adequado para o cálculo da vida da roda em estudo.

Como ferramenta, será utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF), através do pacote comercial ANSYS[®], para o cálculo das tensões e deformações em rodas ferroviárias classe C, usadas em vagões de carga da Companhia Vale do Rio Doce e sob condições de operação da ferrovia de Carajás. Esse método será usado em todos os modelos numéricos. Para a estimativa de vida serão utilizados dois critérios de fadiga, sendo um deles uma modificação proposta pelo autor de um critério existente, adaptando para utilização em fadiga de contato. O outro critério será usado sem modificações e já foi utilizado para estimar vida em rodas ferroviárias (Moyar & Stone, 1991). Esses critérios foram implementados no pacote comercial MATLAB[®].

1.2 Limitações do estudo

A complexidade do problema impossibilita a abordagem de todas as possíveis variáveis que influenciam na vida em serviço das rodas. Abaixo, está relacionado algumas das principais limitações, dentre outras que são discutidas ao longo do texto. A análise destas outras variáveis deverá fazer parte de estudos futuros.

- Não está sendo analisado o efeito da frenagem na geração de tensões residuais adicionais. Sabe-se que, em situações críticas de frenagem, o gradiente de temperaturas pode levar à alteração da distribuição de tensões residuais nas rodas, o que teria influência significativa na redução da vida em serviço.
- Não está sendo analisado o efeito das tensões térmicas, causadas pelo aquecimento durante a frenagem. Essas tensões são cíclicas, mas com uma periodicidade muito inferior a das cargas mecânicas no contato. Uma abordagem que levaria em conta tais

tensões poderia considerar um valor médio de tensões térmicas, mas está além dos objetivos desse trabalho.

- Não está sendo considerada a possível variação da carga vertical ao longo do trajeto percorrido pela roda. Conforme o veículo translada, o esforço sobre a roda varia devido à movimentação, irregularidades na via, e outros efeitos. Para este trabalho apenas um valor fixo da carga é considerado, corrigido por um fator dinâmico.

1.3 Apresentação do trabalho

Para atingir os objetivos propostos, a documentação escrita deste trabalho será apresentada da seguinte forma:

- Este primeiro capítulo com a localização do problema, os objetivos e a apresentação das limitações do estudo;
- O capítulo 2, que descreve a revisão bibliográfica sobre as teorias de contato analíticas e numéricas, além de critérios de fadiga de contato;
- O capítulo 3 descreve as teorias básicas analíticas e semi-analíticas sobre o contato mecânico entre dois corpos deformáveis modelagem numérica e a aplicação desta ao problema de contato, bem como a revisão de trabalhos sobre o assunto;
- O capítulo 4 descreve os critérios de fadiga de contato utilizados, além do proposto e a teoria básica sobre plasticidade que está implementado no software adotado;
- O capítulo 5 descreve os modelos numéricos utilizados, o modelo numérico proposto para o cálculo das tensões na roda e propriedades e carregamentos utilizados;
- O capítulo 6 apresenta os resultados obtidos, a sua análise e discussão. Apresenta também comparações entre métodos analíticos e numéricos, além da estimativa da vida

da roda em serviço utilizando os dois critérios adotados. Também serão discutidas as limitações encontradas no uso de cada método e modelo;

- O capítulo 7 mostra a conclusão geral do trabalho, onde serão apresentadas as dificuldades encontradas e as propostas para continuidade das pesquisas a partir dos resultados obtidos.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Contato mecânico: teorias analíticas

O ano de 1882 pode ser considerado como o início dos estudos sobre contato mecânico entre dois corpos quaisquer. Foi nesse ano que Hertz (1882) publicou o seu primeiro e único trabalho versando sobre o assunto. A partir de observações de duas lentes de vidro, prensadas uma contra a outra através de uma força normal, ele notou que a região de contato entre elas tinha formato elíptico e que esta poderia ser determinada em função dessa força e dos raios de curvatura dos corpos, além de propriedades de rigidez. Para tanto, utilizou as soluções para o deslocamento vertical, proposta por Bussinesq (Love, 1929) que já eram conhecidas naquela época. Além disso, ele calculou também a distribuição de pressão sobre a elipse de contato. Conhecida hoje em dia como a Teoria de Hertz, ela é restrita ao contato entre corpos elásticos sem fricção e modelados como semi-espaço (dimensão dos corpos muito maiores do que a região de contato). Isso, porém não tira o mérito dessa teoria que é utilizada até hoje e serviu de base para muitas outras teorias elaboradas ao longo dos anos.

No final da década de vinte, Carter (1926) foi o primeiro a considerar o fenômeno de escorregamento entre dois corpos em contato de rolamento. Seu objeto de estudo era uma roda ferroviária de uma locomotiva em contato com o trilho. Ele considerou apenas o escorregamento longitudinal e determinou as forças tangenciais naquela direção.

Em 1940, Way (WAY, 1940) mostrou a importância na determinação do campo de tensões em um semi-espaço elástico, sujeito a uma distribuição de carga proveniente do contato entre dois sólidos. Através das equações da elasticidade e do campo de deslocamentos determinado por Boussinesq e Cerruti, ele apontou procedimentos para determinar as expressões que calculam o campo de tensões sub-superficial devido a diferentes distribuições de pressão e regiões de contato.

Pouco tempo depois, Mc'Ewen (1948), propôs expressões analíticas, inéditas até então, para determinar o campo de tensões proveniente do contato entre dois cilindros sujeito a um carregamento normal e tangencial. O contato foi modelado como deformação plana partindo de funções de potência composta de números complexos. Todo o problema foi estudado no campo elástico, tendo a solução clássica proposta por Hertz como fonte de distribuição de pressão entre os corpos.

Em 1953, Smith & Liu (SMITH & LIU, 1953) apresentaram equações para o cálculo do campo de tensões sub-superficial devido ao contato entre dois cilindros (região de contato retangular), considerando uma distribuição de pressão calculada por Hertz (1882). O modelo era elástico e podia incluir ou não o escorregamento entre os corpos. As equações foram deduzidas a partir dos deslocamentos verticais e tangenciais, determinados através de uma função de potência. O deslizamento nesse modelo obedecia à Lei de Coulomb, onde o valor máximo da força tangencial era dado pelo produto do coeficiente de atrito e da força normal máxima. Eles também foram um dos primeiros a levantar a importância da magnitude das tensões cisalhantes, localizando seu valor máximo abaixo da superfície quando apenas cargas verticais eram consideradas. Caso houvesse aplicação de esforços tangenciais, as tensões cisalhantes seriam deslocadas em direção à superfície de contato, mas para coeficientes de fricção elevados, a tensão de cisalhamento máximo ocorreria em um ponto na superfície. Smith & Liu também foram pioneiros na importância do levantamento da magnitude, direção e sentido das tensões em um ponto que esteja sob contato de rolamento. Neste caso, o carregamento aplicado é constante, mas os esforços no contato mudam em relação ao ponto considerado. A partir disso, eles puderam observar que as tensões principais giravam à medida que o ponto se deslocava sobre a região de contato, tornando a amplitude das tensões difícil de ser determinada. Décadas mais tarde, essas

observações teriam grande relevância no estabelecimento de diversos critérios de fadiga, especialmente entre corpos rolantes.

Fessler & Ollerton (1957) investigaram o campo de tensões proveniente do contato entre dois corpos de forma toroidal, carregados radialmente (área de contato elíptica), através de medições realizadas com técnicas de fotoelasticidade e cálculo utilizando expressões analíticas. A partir disso, propuseram uma expressão para calcular tensões de cisalhamento em planos ortogonais, tendo como origem equações já conhecidas. Tanto o experimento quanto os cálculos concentram-se na obtenção das tensões de cisalhamento nos planos $x = 0$ e $y = 0$, pois são nesses planos em que elas atingem valores máximos. As formas e tamanhos da região de contato, obtidas através dos experimentos, mostraram-se em concordância com a Teoria de Hertz. Os valores de tensões e a sua localização também se mostraram de acordo com resultados experimentais.

Lundberg & Sjövall (1958) propuseram expressões semi-analíticas para o cálculo do campo de tensões, superficial e sub-superficial, gerado pelo contato entre dois corpos quaisquer, onde a região de contato apresenta um formato elíptico. Essas expressões foram estendidas para o caso de contato entre dois cilindros e duas esferas.

Em 1958, Johnson (JOHNSON, 1958) estendeu a teoria de Carter (bidimensional) para uma teoria tridimensional. Ele baseou seu modelo em 2 esferas rolando uma sobre a outra, onde tanto o microescorregamento longitudinal quanto o lateral foram considerados. Para tanto dividiu a superfície de contato em 2 regiões distintas – uma região de escorregamento e outra de adesão. Assumiu então a área de adesão como sendo um círculo dentro da região de contato. A área de escorregamento seria a diferença entre a área total de contato e a área de adesão.

Johnson e Vermeulen (1964) estenderam essa análise para o caso da região de contato elíptica. Com base nessa hipótese, eles calcularam valores aproximados para coeficientes de rigidez no contato C_{ij} : parâmetro que depende diretamente do formato da região de contato e do coeficiente de Poisson. Esse coeficiente de rigidez define a resistência à movimentação em um determinado plano e direção.

Em 1966, Goodman & Hamilton (GOODMAN & HAMILTON, 1966) determinaram analiticamente o campo de tensões sub-superficial para o modelo de contato entre duas esferas (região de contato circular). Seus estudos utilizavam a Teoria de Hertz para o cálculo da distribuição de pressão superficial e a Lei de Coulomb para o deslizamento. Assim como o trabalho de Smith & Liu (1953), Goodman & Hamilton utilizaram números complexos nas funções de potência que seriam usadas nos cálculos dos deslocamentos e, conseqüentemente, das expressões para as tensões sub-superficiais. As componentes do tensor de tensões são determinadas utilizando a parte complexa dessas expressões.

No fim da década de 60, o holandês Kalker apresentou, em sua tese de doutorado (KALKER, 1967), uma teoria inédita no conceito de contato com escorregamento entre corpos rolantes. Em sua teoria, Kalker (KALKER, 1967; KALKER, 1990), determinou e calculou com bastante precisão os esforços tangenciais atuantes no contato entre dois corpos rolantes, além de parâmetros de rigidez envolvidos na dinâmica do contato. Essa teoria ficaria conhecida como Teoria Linear. Seu trabalho, que utiliza também a Teoria de Hertz e foi aprimorado ao longo dos últimos trinta anos, inclui a formulação de diversos algoritmos rápidos aproximados, como FASTSIM (KALKER, 1990; KALKER, 2000), além de programas computacionais exatos (CONTACT (KALKER, 1990)) que ajudaram a determinar e calcular os esforços no contato entre corpos rolantes. Seu trabalho teve uma importância especial para o meio ferroviário, pois sua teoria de contato explicava e calculava diversos fenômenos e parâmetros encontrados no contato roda-trilho, tais como os microescorregamentos, movimento de “*hunting*” (passeio lateral do veículo), ângulo de ataque (ângulo de “*yaw*”), “*spin*” (rotação) e muitos outros.

Keer & Mowry (1979) deduziram equações analíticas para a obtenção do campo de tensões completo devido ao contato entre duas esferas idênticas, isotrópicas e sujeitas, primeiramente, à carga normal e depois à carga tangencial. As soluções foram obtidas separadamente (carga normal e tangencial) e depois compostas para obtenção das tensões sujeitas a ambas às cargas. Uma ênfase maior foi dada no estudo do carregamento tangencial no contato e sua influência nas tensões.

As expressões propostas anteriormente para o cálculo das tensões provenientes do contato elíptico em regime elástico (LUNDBERG & SJÖVALL, 1958) foram reapresentadas por Sackfield & Hills (1983). Porém, elas continham erros que não permitiam que os resultados concordassem com os obtidos diretamente através da integral dos componentes do tensor de tensões (SANTOS et. al., 2004).

Em 1984, Kannel e Tevaarwerk calcularam as tensões sub-superficiais para corpos de curvatura quaisquer em contato de rolamento ou deslizamento. Para isso eles usaram a clássica solução de Boussinesq e Cerruti para o campo de deslocamento e as equações determinadas por Mindlin (MINDLIN, 1936; MINDLIN, 1949) para o campo de tensões. As tensões foram calculadas por integração numérica, utilizando as expressões das tensões para carga pontual ao longo de toda elipse, através do método de Simpson e de um dos métodos de Gauss.

Anos depois, Hills & Sackfield (1985) estudaram o contato entre dois cilindros em regime elástico com escorregamento e entre duas esfera, também nas mesmas condições (SACKFIELD & HILLS, 1988a; SACKFIELD & HILLS, 1988b).

Em 1987, Ahmadi et al. obtiveram a solução para o campo de tensões proveniente de um carregamento unicamente tangencial para uma área de contato retangular em um semi-espaço elástico. Seu trabalho teve como fonte os estudos de Cerruti (in LOVE, 1944).

Uma revisão de diversas expressões para o cálculo do campo de tensões devido ao contato entre corpos de diversos formatos, pode ser obtida & Sackfield (1993).

2.2 Métodos numéricos: elastoplasticidade.

Em 1985 Bhargava et al. (BHARGAVA et al., 1985a) simularam, através do método dos elementos finitos, o contato de rolamento puro em um modelo plano (deformação plana) elastoplástico. O rolamento foi simulado transladando uma distribuição de pressão hertziana aplicada sobre uma área ao longo do modelo. Apenas um passo (ciclo de rolamento) foi simulado. Os resultados foram comparados com um modelo semi-analítico perfeitamente plástico

(MERWIN & JOHNSON, 1963). Apesar de validar as diretrizes básicas do modelo semi-analítico, as componentes de tensões e deformações residuais mostraram-se bastante diferentes daquelas calculadas numericamente (MEF), no que diz respeito à sua magnitude.

Em seguida, Bhargava et al. (1985b) repetiram a mesma simulação numérica, entretanto, considerando agora múltiplos passos de carregamentos. As diretrizes do modelo de Merwin & Johnson (1963) não foram consideradas. Foi observado que o "shakedown" elástico iria ocorrer para uma razão, entre a pressão máxima no contato e o limite de escoamento ao cisalhamento, de aproximadamente 3,5. O incremento de deformação por ciclo de carregamento é aproximadamente cinco vezes o calculado pelo método de Merwin & Johnson (1963). A magnitude das tensões residuais mostrou-se elevada em relação ao modelo semi-analítico, à medida que o número de passes aumentava. Para esse modelo plano, a estabilização das tensões e deformações se deu após quatro passes.

Kulkarni et al. (1990a) também simularam o contato de rolamento com diversos ciclos de carregamento em um modelo elastoplástico através do MEF, porém com um modelo tridimensional e abaixo do limite de "shakedown" elástico.

No mesmo ano, Kulkarni et al. (1990b) fizeram as mesmas simulações, usando o mesmo modelo, entretanto atuando acima do limite de "shakedown" elástico.

Pouco depois, Kulkarni et al. (1991) utilizaram o mesmo modelo, desta vez simulando o contato de rolamento entre uma roda ferroviária e um trilho, com o objetivo de analisar as tensões neste último. Diferente de trabalhos anteriores, a região de contato foi estabelecida como sendo elíptica, e o carregamento dado por um elipsóide. Ambos foram estimados pela Teoria de Hertz. O modelo analisado tinha o formato de um quarto de cilindro, onde as cargas eram transladadas sobre a sua superfície reta, a fim de simular o processo de rolamento.

Nayak, em 1991, propôs um método para calcular a distribuição de tensão para o caso de contato não-hertziano (não considera as restrições do modelo de Hertz), tendo como base à própria Teoria de Hertz (NAYAK, 1991). Seu modelo de contato foi baseado no contato entre

dois cilindros e, portanto, com a área de contato retangular. Segundo Nayak, para casos de contato não-hertziano, o problema na obtenção das dimensões da área de contato pode ser resolvido com o quadrado do semi-eixo da região de contato sendo representado por um polinômio de grau seis, que é função da direção longitudinal do cilindro. Os coeficientes do polinômio são determinados com auxílio de experimentos onde é medida, através de impressão, a área de contato. Nayak, concluiu que seu método proposto para determinar tensões de contato não-hertziano entre dois corpos elásticos tem uma boa precisão quando comparado com valores obtidos através da própria teoria clássica de Hertz. Esse método também pode ser usado para o caso da região de contato elíptica.

Em 1993, Dang Van & Maitournam (DANG VAN & MAITOURNAM, 1993) propuseram algoritmos para o cálculo das tensões e deformações em um modelo elastoplástico sujeito a um carregamento móvel (normal e tangencial) em regime permanente ("steady state"). Por considerar esse regime, o carregamento aplicado move-se junto com o sistema de coordenadas, que está fixo ao modelo. Isto resulta em cargas paradas aplicadas na superfície deste, ou seja, não há necessidade de mover o carregamento para obter-se a distribuição de tensão e deformação em todo corpo, após um passo completo de carga. Esses algoritmos foram implementados utilizando o método dos elementos finitos (MEF) como base. Para tanto, supõe-se que o modelo seja infinito na direção de rolamento, ou no caso da utilização do MEF, que o modelo seja suficientemente grande nessa direção. As deformações plásticas são obtidas integrando-se o domínio na direção de rolamento do infinito até o ponto em estudo (ponto em que se encontram as cargas). Dois métodos foram apresentados para tanto. O primeiro, chamado de *método estacionário passo - a - passo* (PPSM), calcula as tensões e deformações para cada passo (ciclo) de carga. Para atingir-se o estado estabilizado, deve-se executar vários passos de carga. O segundo método desenvolvido é o *método estacionário direto* (DSM), o qual calcula as tensões e deformações no regime estabilizado diretamente, sem que seja preciso simular todos os passos de carga. Esse método, porém, é aproximado. Basicamente, os algoritmos propostos apresentam a mesma formulação para o cálculo dos parâmetros envolvidos na plasticidade clássica. Entretanto, a deformação plástica e o seu incremento serão derivados, quando necessários, em função da coordenada de rolamento ao invés de derivados em função do tempo. Os resultados obtidos por ambos os métodos mostraram-se bastante próximos dos calculados por Bhargava, et al. (1988), entretanto apresentam certa

discrepância quando comparados com os de Hearle & Johnson (1987), provavelmente devido à inclusão de forças tangenciais no contato.

O MEF foi utilizado por Hansson em 2001, com a finalidade explorar as limitações da Teoria de Hertz (HANSSON, 2001). Para tanto, utilizou o contato roda - trilho como uma típica aplicação do modelo de Hertz. O modelo geométrico proposto consistia em um cilindro sendo comprimido em um plano semi-infinito, que simulava o contato roda - trilho. Além disso, foram utilizados elementos de contato para estabelecer uma condição de equilíbrio entre os corpos, e assim, determinar o campo de tensões e deformações na região de contato. Tanto regimes elásticos quanto elastoplásticos foram considerados. Os resultados mostraram, quando utilizado o modelo elástico, que a Teoria de Hertz é adequada para o cálculo das tensões de contato, devido a sua simplicidade e baixo custo computacional. Entretanto, algumas condições de contorno devem ser obedecidas (Hertz, 1882; Johnson, 1987). Para um modelo elastoplástico, ocorrendo o escoamento do material, a área de contato aumenta logo, as tensões desenvolvidas ali tendem a diminuir.

Telliskivi & Olofsson (2001) desenvolveram uma ferramenta computacional baseada em elementos finitos para analisar o contato mecânico estático entre uma roda ferroviária e um trilho. Essa ferramenta foi incorporada no pacote comercial ANSYS® e tem como principal função utilizar perfis de rodas e trilhos medidos para calcular as tensões de contato em um modelo tridimensional. Forças tangenciais oriundas do comportamento dinâmico do veículo eram calculadas através de softwares comerciais como GENSYS®, MEDYNA® ou CONTACT® (KALKER, 1990) e inseridos no modelo de elementos finitos. Dois pontos de contato foram analisados: entre o centro da pista da roda e o centro do boleto do trilho e outro entre o flange e o canto do trilho. As tensões obtidas através do modelo numérico foram comparadas com as calculadas pela Teoria de Hertz e pelo software CONTACT®. Quando o ponto de contato encontrava-se no meio da pista da roda, as tensões normais máximas entre os três métodos não apresentavam diferenças significativas. Entretanto, quando o contato ocorria no flange da roda, a magnitude da tensão máxima divergia completamente entre os três métodos. As tensões e a área de contato no modelo numérico (MEF) eram 200 e 300 % menores que os modelos analíticos, respectivamente. Isso ocorre, pois no contato com o flange da roda os menores raios de curvatura

envolvidos têm uma ordem de grandeza muito próxima do tamanho da região de contato, o que viola um dos princípios básicos tanto no modelo de Hertz quanto no CONTACT[®]: o princípio do semi-espaço elástico (corpos com dimensões muito maiores que a região de contato). Para o contato entre as regiões centrais da roda e do trilho, as diferenças foram menores no que diz respeito às tensões: aproximadamente 30%. Isso ocorre principalmente devido a plasticidade do material.

Uma formulação para o problema elastoplástico devido ao contato em um semi-espaço foi proposta por Dong & Bonnet (2001). Assim como o trabalho de Dang Van & Maitournam (1993), foi elaborado um algoritmo elastoplástico para resolução do problema de contato com rolamento, desta vez utilizando o método dos elementos de contorno (BEM) como base. Segundo os autores, esse método tem boa aplicação em problemas com domínio sem contorno (domínios infinitos). Os resultados, quando comparados com outros métodos, são bastante satisfatórios.

Jiang et al (2002) simularam, através do método dos elementos finitos, o contato de rolamento em regime elastoplástico. Utilizaram um modelo tridimensional em forma de cubo, onde o carregamento normal era dado por uma distribuição de pressão hertziana, com a região de contato de forma circular. Foi aplicado também um carregamento tangencial, tanto na direção de rolamento quanto na direção lateral, que tinha magnitude proporcional à força normal (Lei de Coulomb). Não foi considerado escorregamento parcial. Considerando um contato de rolamento ideal, as tensões e deformações residuais são independentes da coordenada na direção de rolamento. Para ocorrer uma deformação plástica em rolamento puro, o limite de “shakedown” elástico, razão entre a pressão máxima (elástica) no contato e o limite de escoamento em cisalhamento, deverá ser maior que 2,79, para essas características de contato. O acúmulo de deformação plástica (“shakedown” plástico) só irá ocorrer se essa razão for superior a 4,26, também para rolamento puro. Com a inclusão de forças tangenciais, essa razão começa a diminuir, assim como as deformações plásticas passam a ocorrer mais próximas a superfície de contato. Devido ao esforço computacional, apenas seis passes de rolamento foram realizados. Resultados da simulação mostraram que para se atingir tensões residuais estáveis, são necessários mais de 30 passos de rolamento. Além disso, tensões residuais de compressão próximas à superfície de contato aumentam proporcionalmente a aplicação das forças tangenciais. O mesmo

ocorrendo com as deformações, sendo o aumento dado de forma exponencial. De forma geral, essa análise elastoplástica tridimensional revelou que os esforços tangenciais têm uma grande influência nas tensões e deformações residuais próximas a superfície de contato.

Ainda em 2002, Xu & Jiang (XU & JIANG, 2002) desenvolveram, utilizando novamente MEF, um modelo plano elastoplástico de contato com rolamento. O rolamento era simulado deslocando-se uma área de contato retangular ao longo da superfície do plano que tinha uma espessura axial constante. O carregamento normal obedecia a Teoria de Hertz e o tangencial, considerando agora um escorregamento parcial, baseava-se no modelo de Carter (1926) para esforços tangenciais longitudinais. Os esforços tangenciais simulavam tanto um corpo acionado (valores negativos), como acionador (valores positivos). Para atingirem-se as tensões residuais estáveis foram necessários aproximadamente, 40 passos de rolamento. A condição de escorregamento parcial provou influenciar de forma significativa as tensões e deformações residuais na direção de rolamento, somente para pontos próximos à superfície de contato. Entretanto, as tensões residuais na direção axial não foram muito influenciadas pelo escorregamento parcial. Tensões residuais de tração foram encontradas quando se simulava um corpo acionado, acelerando assim a propagação de trincas. Para um corpo acionador, as tensões residuais foram de compressão. Um aumento no coeficiente de fricção deslocaria a deformação de cisalhamento máxima em direção à superfície.

Gordon & Perlman (2002) fizeram um estudo para determinar as tensões residuais provenientes do processo de fabricação de uma roda forjada de um carro de passageiros do metrô norte-americano. Para tanto, realizaram simulações através do MEF usando o programa ABAQUS®. O estudo determinou a magnitude das tensões compressivas circunferenciais e sua importância na segurança do transporte metroviário.

2.3 Fadiga de rolamento

Em 1989, Dang Van et al. (1989) propuseram um critério de fadiga de alto ciclo aplicado especialmente para o estado multiaxial de tensão. Esse critério calcula uma tensão cisalhante equivalente baseada na combinação da amplitude da tensão de cisalhamento microscópica

desenvolvida em determinados planos (planos críticos), responsável pela nucleação de trincas e de uma fração da tensão hidrostática, esta contribuindo para abertura de micro-trincas. Esse critério, ao contrário de muitos outros, considera simultaneamente a rotação do plano principal (fadiga de rolamento) e a influência da tensão média do ciclo de carregamento. O mérito desse critério reside no fato de que os valores instantâneos atuantes em “planos de cisalhamento” em um ponto do material são considerados para o cálculo. A dificuldade desse critério, segundo alguns autores (Ekberg, 2000), está na determinação da tensão média do ciclo e dos planos considerados críticos.

Flavenot & Skalli (1989) compararam diversos critérios de fadiga multiaxial com resultados experimentais. Eles concluíram que os critérios que consideram a tensão hidrostática em seus cálculos (critério de Sines, Crossland, Dang Van), dão uma satisfatória previsão da vida em fadiga, especialmente para casos onde a tensão residual está presente. Para esses casos, a tensão residual é adicionada ao tensor de tensões, se elas estiverem dentro do regime elástico. Caso contrário, algumas técnicas especiais deveriam ser usadas.

Moyar & Stone (1991) estimaram a vida em serviço de uma roda ferroviária de classe U, utilizando um modelo analítico elástico simplificado para contato entre cilindros. A vida para o início de trincas foi calculada utilizando o critério de Fatemi & Socie, baseado em deformações cisalhantes e planos críticos. Resultados apresentaram um valor de vida baixo (34 km) para o início das trincas, provavelmente fruto do tipo de modelo de contato adotado. Os autores sugeriram a inclusão de efeitos não-lineares (plasticidade, contato real entre roda e trilho) como forma de tornar o modelo mais real.

Em 2000, Ringsberg, et. al. (2000) estudaram o início de trincas de fadiga em trilhos usados para carros de passageiros. Para tanto, fizeram uma simulação por elementos finitos em um modelo de dois discos idênticos. A vida foi estimada utilizando diversos critérios de fadiga, como Coffin–Manson (in BANNANTINE, COMER & HANDROCK, 1991) e Dang Van (1989). Para tanto, diversos níveis de carga e coeficientes de atrito foram adotados. Resultados mostraram, para um mesmo caso (carregamento e coeficiente de atrito iguais), vidas muito distintas entre os critérios de fadiga adotados, variando entre $1,5 \times 10^3$ a 4×10^5 ciclos.

No mesmo ano Ringsberg, (2000) estudou o início de trincas de fadiga em um trilho, para um comportamento cíclico em ratchetting (acúmulo de deformação plástica em todo ciclo de carga até a falha do material), utilizando três modelos elastoplásticos de material: o modelo de Lemaitre & Chaboche (1990), que inclui os dois tipos de encruamento, isotrópico e cinemático; o modelo de Bower (1989), que inclui apenas o encruamento isotrópico; e um modelo mais complexo desenvolvido por Jiang & Sehitoglu (1996), que inclui diversos parâmetros no cálculo do modelo de encruamento cinemático. As tensões e deformações foram calculadas utilizando um modelo numérico de contato do tipo cilindro-plano (2D) em um semi-espço infinito. Os resultados apresentaram diferenças significativas entre dois dos modelos estudados. Os modelos de Lemaitre & Chaboche (1990) e de Bower (1989), entretanto, mostraram magnitudes de deformação cisalhante idênticas em todos os ciclos de carregamento. O modelo de encruamento que melhor representou o comportamento de “ratchetting” do trilho foi o desenvolvido por Jiang & Sehitoglu (1996), porém, este requer ensaios mais completos para determinação dos diversos parâmetros pertinentes ao modelo.

Santos (2000) modelou o contato roda – trilho utilizando o MEF em regime elástico. Foi também calculado a magnitude dos esforços tangenciais no contato, fruto da dinâmica do vagão. Foi observado que, em regime elástico e para o carregamento adotado, as tensões equivalentes excediam o limite de escoamento do material. Com isso, uma análise elastoplástica deveria ser adotada.

Ekberg et al. (2001) estimaram o início da trinca em fadiga para o contato roda – trilho utilizando o critério de falha de Dang Van (Dang Van et al. 1989). A partir da teoria clássica de Hertz (1886), eles determinaram analiticamente a região elíptica de contato e através de integrais numéricas calcularam as tensões superficiais e sub-superficiais devido ao contato. A partir desses dados, eles constataram que a falha ocorrerá a uma distância de 3,5 mm abaixo da superfície de contato da roda. Apesar de o modelo considerar uma nova hipótese para o início da falha em uma roda ferroviária devido ao carregamento mecânico, Ekberg propôs que novos estudos sejam feitos no sentido de incluir os efeitos do escoamento plástico do material da roda.

Pouco tempo depois, Ekberg & Kabo (2002) estudaram numericamente a influência de um defeito (vazio) contido no disco de uma roda ferroviária na magnitude das tensões e deformações na vizinhança desse vazio. Para tanto construíram um modelo bidimensional elastoplástico utilizando o método dos elementos finitos através de pacote comercial. A roda e o trilho foram modelados como um cilindro e uma superfície plana respectivamente. O defeito era modelado como uma circunferência com 1 mm de diâmetro localizado a 15 mm abaixo da região de contato. O carregamento foi aplicado através de uma pressão de contato hertziana e deslocado horizontalmente através da superfície de contato, a fim de simular o rolamento da roda. A partir dos resultados, observou-se que as maiores magnitudes de tensão ocorreram quando o carregamento estava próximo do defeito (na direção horizontal) e que defeitos encontrados mais afastados da direção de rolamento não iriam influenciar uma eventual fadiga de rolamento.

Yokoyama et al. (2002) pesquisaram a influência do ângulo de ataque da roda na fadiga de contato e no desgaste, em diversos tipos de trilhos. Para tanto usaram um dispositivo de ensaio, em escala reduzida, do tipo “disco contra disco” para simular a roda e o trilho. Foram levantados dados do início de danos provenientes da fadiga de rolamento, como a escamação, em função da magnitude do ângulo de ataque. Pode-se notar que o início da escamação decresce com o aumento do ângulo de ataque para todos os tipos de trilhos testados. Segundo eles, a taxa de desgaste apresentou-se maior à medida que o ângulo de ataque aumentou de 3° para 5°.

Em 2002, Bernasconi (2002) apresentou algoritmos para o cálculo da amplitude e da tensão média de critérios de fadiga baseados em planos críticos e invariantes de tensão. Esses algoritmos são métodos matemáticos que calculam a amplitude e a tensão média de um ciclo de carga através do raio e do centro da mínima circunferência circunscrita, respectivamente, ao caminho descrito por uma tensão equivalente durante esse ciclo (PAPADOPOULOS, 1998). Dos algoritmos apresentados (pontos combinados, método incremental e método de otimização – minimax) o mais eficiente e rápido foi o método de otimização, apresentado na forma da rotina “fminimax” implementada no pacote computacional MATLAB®, que se mostrou praticamente independente do número de pontos contido no ciclo. O método de pontos combinados proporciona um resultado bastante preciso, mas demanda um tempo razoável de cálculo, uma vez que aumenta fatorialmente. O método incremental, apesar de preciso quando há poucos pontos no

ciclo, é extremamente sensível a esse número, tornando-se lento e mais impreciso à medida que o número de pontos aumenta.

Sraml, Flasker & Potrc (2003) calcularam a vida em fadiga de um modelo bidimensional, onde uma distribuição de pressão, normal e tangencial, rolava sobre um plano, simulando o contato cilindro-plano. A vida foi estudada utilizando o critério de Coffin–Manson (BANNANTINE et al., 1990). Vários coeficientes de atrito foram adotados. O número de ciclos até a falha apresentou uma grande variação de valores (entre 1000 e 100000 ciclos), dependendo do coeficiente adotado.

Pouco depois, Sraml, Flasker & Potrc (2004) realizou o mesmo estudo, com a diferença que o critério de Dang Van (DANG VAN et al. 1989) foi utilizado para determinar se ocorreria falha e em que ponto. Nenhuma vida foi calculada com esse critério.

Em 2005, Bernasconi (2005) aplicou o método da mínima circunferência circunscrita para o cálculo da tensão média (PAPADOPOULOS, 1998) com o objetivo de calcular a vida em fadiga de uma roda ferroviária através do critério de Dang Van (DANG VAN et al. 1989). As tensões hidrostáticas residuais na roda foram medidas através de raio-X, e um valor médio circunferencial constante foi considerado em toda roda. Esse valor foi somado ao tensor hidrostático proveniente do contato e a plasticidade foi desprezada. A forma e a posição da região de contato foram determinadas com a rotina de cálculo desenvolvida por Kalker (KALKER, 1990; KALKER, 1996; KALKER, 2000).

2.4 Ensaios experimentais

Na década de 80, Kumar (Kumar, 1981; Kumar, 1983; Kumar, 1989; Kumar, 1992) publicou vários trabalhos relacionados à determinação das tensões no contato roda – trilho com o auxílio da Teoria de Hertz e de um dispositivo de ensaio que simulava, através de discos, o contato entre uma roda ferroviária e um trilho. A partir desses experimentos, Kumar fez importantes observações sobre o contato roda - trilho, que de certa maneira foram excluídas de teorias analíticas passadas, tais como o efeito do escoamento plástico. Segundo suas observações,

as tensões calculadas com a Teoria de Hertz só seriam válidas para os primeiros ciclos de carregamento. Após esses primeiros ciclos, ocorreria escoamento do material em contato, além de desgaste, o que acarretaria um aumento significativo da região de contato e conseqüentemente uma redução nos valores das tensões. De fato isso ocorre, pois a máxima tensão calculada segundo Hertz está muito acima do limite de escoamento do aço da roda ou do trilho (Santos, 1992).

Capítulo 3

Teorias Analíticas e Semi-Analíticas

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos do contato entre corpos rolantes, que utiliza elementos da teoria da elasticidade para o cálculo das tensões superficiais e sub-superficiais geradas pelo contato entre dois corpos.

3.1 Equações básicas da elasticidade

Seja um estado triaxial de tensões e o tensor de tensões dado na forma matricial:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \text{eq. 3.1}$$

onde σ_x , σ_y , σ_z , são as tensões normais e τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} as tensões cisalhantes. Apesar de o tensor ter nove componentes, apenas seis serão analisadas, pois ele é simétrico em relação a diagonal principal. O tensor é calculado no ponto, segundo a orientação do cubo de tensões da Figura 3.1.

Na elasticidade, a lei que relaciona tensões e deformações é chamada de Lei de Hooke. Considerando as deformações nas três direções do sistema coordenado (efeito de Poisson), essa lei passa a se chamar Lei de Hooke Generalizada. Escrevendo as tensões em função das deformações, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_x + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \text{eq. 3.2}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_y + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \text{eq. 3.3}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_z + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z), \quad \text{eq. 3.4}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \quad \text{eq. 3.5}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz}, \quad \text{eq. 3.6}$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz}, \quad \text{eq. 3.7}$$

onde ε_x , ε_y , ε_z são as deformações devido às tensões normais σ_x , σ_y , σ_z e γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} são as deformações cisalhantes, consequência das tensões cisalhantes τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} , respectivamente; ν é o coeficiente de Poisson e E é o Módulo de Elasticidade.

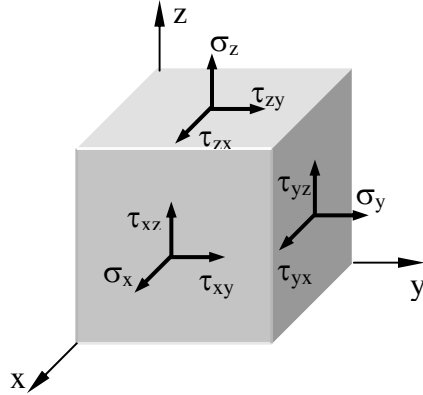


Figura 3.1: Cubo de tensões. Componentes do estado de tensão em ponto

Utilizando a notação indicial, pode-se reescrever as equações acima em uma única expressão:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad \text{eq. 3.8}$$

Utilizando o módulo de cisalhamento (G) e a constante de Lamé (λ) dados pelas equações,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \text{eq. 3.9}$$

a Lei de Hooke Generalizada pode ser reescrita em como:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}. \quad \text{eq. 3.10}$$

Da Teoria da Elasticidade, pode-se relacionar as deformações com os deslocamentos.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, & \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}, \end{aligned} \quad \text{eq. 3.11}$$

Substituindo as relações acima na Lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma_x = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \text{eq. 3.12}$$

$$\sigma_y = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \text{eq. 3.13}$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \text{eq. 3.14}$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \text{eq. 3.15}$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad \text{eq. 3.16}$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right). \quad \text{eq. 3.17}$$

3.2 Funções de potência – Boussinesq e Cerruti

A primeira abordagem conhecida para determinação do campo de tensões e deslocamentos em um sólido foi inicialmente proposta por Boussinesq (in LOVE, 1944; in MINDLIN, 1936) utilizando as chamadas funções de potência, através de um modelo sólido de semi-espaco elástico sujeito a uma determinada distribuição de carregamento. Um modelo sólido é considerado semi-espaco elástico quando todos os seus pontos se encontram em apenas um lado de um plano z , que satisfaz a condição $\{(x, y, z) : z \geq 0\}$, e quando as dimensões destes corpos são muito maiores quando comparado com a região estudada. Estudos semelhantes foram feitos por Cerruti (in LOVE, 1944), mas desta vez considerando apenas o carregamento tangencial. Essa abordagem clássica proposta por Boussinesq e Cerruti tem, entre suas aplicações, o estudo do efeito de uma distribuição de tensões proveniente de um contato entre dois sólidos em todo o sólido sob estudo. A Teoria de Potência e a Teoria da Elasticidade foram utilizadas para auxiliar a determinação dos campos de tensões, conforme será apresentado a seguir.

Considerando um modelo de semi-espaco, dado pela Figura 3.2, define-se um ponto $C(\xi, \eta)$ qualquer, dentro da região de distribuição de carregamento S , que no caso é uma região de contato. $A(x, y, z)$ é um ponto arbitrário dentro de um dos sólidos. Define-se a distância R como sendo o módulo do vetor posição dado pela eq. 3.18. Esse vetor representa a distância entre o ponto superficial C e o ponto A qualquer dentro do sólido.

$$R = \left((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2 \right)^{1/2}. \quad \text{eq. 3.18}$$

A função $p_z(\xi, \eta)$ representa a distribuição de pressão na superfície de contato entre os corpos e $q_x(\xi, \eta)$ e $q_y(\xi, \eta)$ as distribuições de tensões tangenciais na direção x e y respectivamente (Figura 3.2). A partir disso, define-se as funções de potência ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , como sendo funções que representam a carga total aplicada em determinada direção (x, y ou z). Além disso, essas funções também satisfazem à equação de Laplace (JOHNSON, 1985).

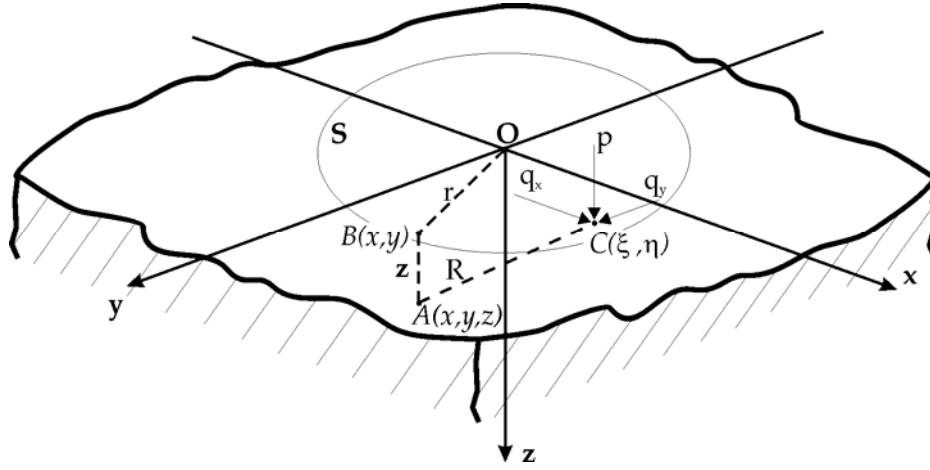


Figura 3.2: Modelo de semi-espaço elástico.

$$\phi_1 = \iint_S p_x(\xi, \eta) (z \ln(R + z) - R) d\xi d\eta, \quad \text{eq. 3.19}$$

$$\phi_2 = \iint_S p_y(\xi, \eta) (z \ln(R + z) - R) d\xi d\eta, \quad \text{eq. 3.20}$$

$$\phi_3 = \iint_S p_z(\xi, \eta) (z \ln(R + z) - R) d\xi d\eta. \quad \text{eq. 3.21}$$

Adicionalmente, definem-se as derivadas das funções de potência ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 como sendo:

$$\psi_1 = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \iint_S p_x(\xi, \eta) \ln(R + z) d\xi d\eta, \quad \text{eq. 3.22}$$

$$\psi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \iint_S p_y(\xi, \eta) \ln(R + z) d\xi d\eta, \quad \text{eq. 3.23}$$

$$\psi_3 = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \iint_S p_z(\xi, \eta) \ln(R + z) d\xi d\eta. \quad \text{eq. 3.24}$$

A partir dessas funções, observa-se que elas são harmônicas em relação à x , y , z e por isso devem satisfazer a equação de Laplace (JOHNSON, 1985),

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad \nabla^2 \psi = 0, \quad \text{eq. 3.25}$$

onde:

$$\phi = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z}, \quad \psi = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}. \quad \text{eq. 3.26}$$

3.3 Campo de deslocamentos

O campo de deslocamento elástico considerando um ponto qualquer no semi-espaco foi calculado por Boussinesq e Cerruti (in Love, 1929), utilizando as funções do item anterior. A dedução das componentes do vetor deslocamento é extensa e complexa, ficando como referencia o trabalho de Love (1944) e Prescott (1946). Como resultado, os deslocamentos u_x , u_y , u_z são dados pelas seguintes equações:

$$u_x = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \phi}{\partial x} - z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}, \quad \text{eq. 3.27}$$

$$u_y = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_3}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \phi}{\partial y} - z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\}, \quad \text{eq. 3.28}$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left\{ \frac{\partial \psi_3}{\partial z} + (1 - 2\nu) \psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad \text{eq. 3.29}$$

Para a aplicação das equações anteriores aos problemas de contato, inicialmente considera-se apenas a ação de uma distribuição de tensão normal superficial $p_z(\xi, \eta)$, consequência de forças verticais, a qual irá ocorrer em uma condição de contato sem fricção ($q_x(\xi, \eta)$ e $q_y(\xi, \eta)$ são nulos). Sendo assim, teremos:

$$\psi_1 = \phi_1 = \psi_2 = \phi_2 = 0. \quad \text{eq. 3.30}$$

Com essas simplificações, as funções harmônicas podem ser reduzidas a:

$$\phi = \frac{\partial \phi_3}{\partial z} = \psi_3 = \iint_S p_z(\xi, \eta) \ln(R + z) d\xi d\eta, \quad \text{eq. 3.31}$$

$$\psi = \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \iint_S p_z(\xi, \eta) \frac{1}{R} d\xi d\eta. \quad \text{eq. 3.32}$$

Substituindo as simplificações acima nas equações de deslocamento, teremos:

$$u_x = -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\}, \quad \text{eq. 3.33}$$

$$u_y = -\frac{1}{4\pi G} \left\{ (1 - 2\nu) \frac{\partial \phi}{\partial y} + z \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\}, \quad \text{eq. 3.34}$$

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left\{ 2(1 - \nu) \psi - z \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\}. \quad \text{eq. 3.35}$$

Para a obtenção dos deslocamentos devido a uma distribuição tangencial longitudinal ou lateral de carregamento, repete-se o mesmo procedimento acima considerando agora, apenas as funções ψ_i e ϕ_i correspondentes. O deslocamento total pode ser obtido pelo soma dos três deslocamentos devido a cada um dos tipos de carregamento.

3.4 Teoria de Hertz

Quando Hertz determinou o formato da região de contato, ele usou basicamente a observação de duas lentes de vidro sendo comprimidas uma contra a outra por um carregamento normal. A partir disso, ele concluiu que quando os corpos em contato tiverem um formato arbitrário, não obedecendo a nenhuma simetria, a região de contato terá uma forma elíptica.

Para que a Teoria de Hertz possa ser aplicada, são necessárias que algumas condições sejam estabelecidas. São elas:

- Os corpos em contatos devem ser elásticos, ou seja, obedecem a Lei de Hooke;
- O contato deve ser estático, não havendo fricção entre os corpos. Como consequência, não haverá desenvolvimento de forças tangenciais;
- Vale o princípio de semi-espaço, para o qual as dimensões dos corpos devem ser muito maiores que a região de contato. Isso é necessário para garantir que o campo

de tensão calculado dentro da região de contato entre dois sólidos, não seja influenciado pela proximidade dos seus contornos;

- O problema de contato deve considerar apenas pequenas deformações para que possa ser válida a Teoria da Elasticidade.

Com base nessas informações, ele utilizou duas abordagens, uma geométrica e outra numérica, ambas necessárias para calcular os valores dos semi-eixos a e b da elipse. A distribuição de pressão em uma região elíptica também foi calculada como sendo um elipsóide, onde a pressão máxima esta localizada no centro da elipse e atinge o valor nulo no contorno desta. Pode-se notar que, apesar de ser conhecida como uma teoria analítica, a teoria estabelecida por Hertz contém cálculos numéricos, necessários para determinação precisa dos semi-eixos do contato, conforme será visto a seguir:

3.4.1 Deslocamento vertical: abordagem geométrica

Como primeira observação, Hertz resolveu o problema de contato utilizando variáveis geométricas, a partir de um modelo de semi-espaco elástico. Sejam dois sólidos quaisquer, onde R_1 e R'_1 são os raios de curvatura máximo e mínimo do corpo 1, respectivamente. O mesmo conceito pode ser usado com os raios R_2 e R'_2 do corpo 2, conforme Figura 3.3.

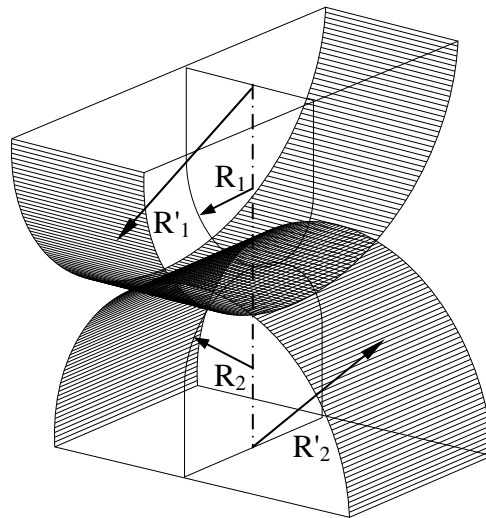


Figura 3.3: Esboço dos raios de curvatura de dois sólidos arbitrários em contato.

Inicialmente o contato entre os corpos é realizado em apenas um ponto. Adota-se z como sendo a distância entre dois pontos na superfície dos corpos, próximos ao ponto de contato, e medida perpendicularmente a esta região. As superfícies dos sólidos que estão em contato são representadas por quadráticas, onde os eixos x e y são tangentes à área de contato e o eixo z perpendicular a eles, conforme equação abaixo:

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1x^2 + C_1xy + B_1y^2, \\ z_2 &= A_2x^2 + C_2xy + B_2y^2. \end{aligned} \quad \text{eq. 3.36}$$

Considerando a distancia z como sendo,

$$z = z_1 + z_2, \quad \text{eq. 3.37}$$

podemos reescrever as equações acima como:

$$z = (A_1 + A_2)x^2 + (C_1 + C_2)xy + (B_1 + B_2)y^2. \quad \text{eq. 3.38}$$

Pela equação acima, se forem considerados apenas valores sobre o eixo x , os termos que contém a variável y irão desaparecer. O mesmo pode ser dito quando se considera o eixo y . Então, conclui-se que o termo xy deste polinômio será nulo se os pontos estiverem sobre os eixos x ou y . Logo, tem-se:

$$z = Ax^2 + By^2. \quad \text{eq. 3.39}$$

Nesta expressão, A e B são constantes geométricas desconhecidas, que dependem exclusivamente dos raios de curvatura dos corpos no ponto de contato. Assumindo que a equação acima descreve a região de contato, ela será então, elíptica. Para determinação dos semi-eixos da elipse, as constantes geométricas A e B devem ser calculadas a fim de resolver este polinômio.

Para tanto, considere a distância z_1 como sendo a medida do plano tangente até algum ponto arbitrário C ou D pertencente à superfície do corpo 1 perto do ponto de contato, conforme Figura 3.4 (a). Adotam-se os sistemas de coordenadas (U_1, V_1) e (U_2, V_2) como sendo solidários aos corpos respectivamente, formando um ângulo α , como ilustra a Figura 3.4 (b).

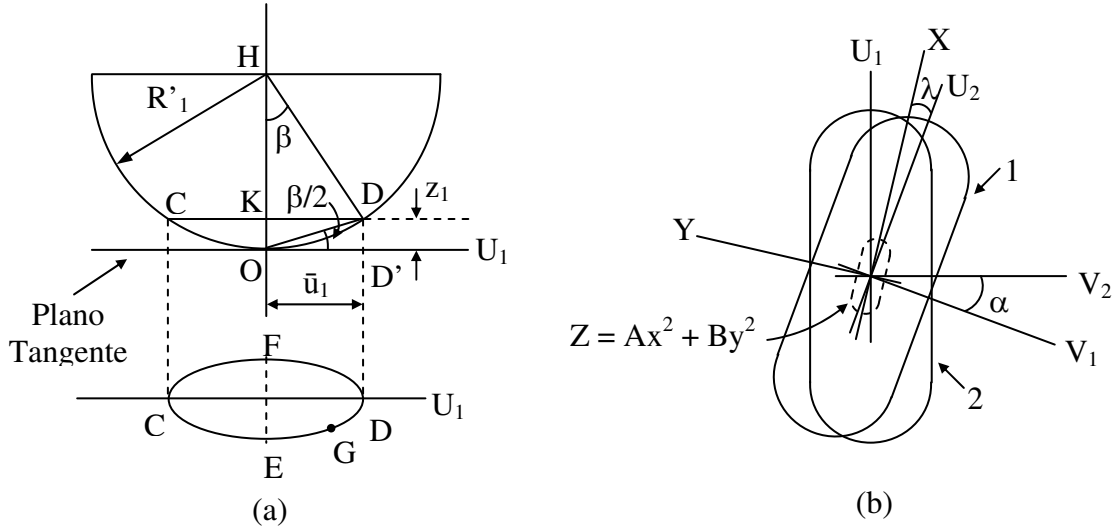


Figura 3.4: Deformações na superfície de contato (a). Vista de topo dos sólidos em contato (b).

Se o contato é pontual, à distância z_1 , da superfície de contato ao ponto C ou D , é encontrada pelo triângulo “ ODD' ”:

$$z_1 = u_1 \tan\left(\frac{1}{2}\beta\right) = \frac{1}{2}\bar{u}_1\beta. \quad \text{eq. 3.40}$$

Considerando o ângulo β como sendo muito pequeno e R'_1 aproximadamente igual à distância “ HK ”, podemos deduzir do triângulo HKD :

$$\tan \beta = \beta = \frac{KD}{HK} = \frac{\bar{u}_1}{R'_1}. \quad \text{eq. 3.41}$$

Substituindo a eq. 3.41 na eq. 3.40, teremos:

$$z_1 = \frac{\bar{u}_1^2}{2R'_1}. \quad \text{eq. 3.42}$$

De maneira análoga, à distância z_1 do ponto de contato ao ponto E ou F , que se encontram no plano do raio R_1 é:

$$z_1 = \frac{\bar{v}_1^2}{2R_1}. \quad \text{eq. 3.43}$$

À distância de um ponto G arbitrário, o qual não esta necessariamente sobre os eixos principais, será a soma das distancias z_1 dadas pelas eq. 3.42 e eq. 3.43. À distância z_2 relativa ao corpo 2 pode ser calculada de maneira análoga ao corpo 1.

$$z_1 = \frac{\bar{u}_1^2}{2R_1'} + \frac{\bar{v}_1^2}{2R_1'}, \quad z_2 = \frac{\bar{u}_2^2}{2R_2'} + \frac{\bar{v}_2^2}{2R_2'}. \quad \text{eq. 3.44}$$

A distância total z será dada pela soma de z_1 e z_2 .

$$z = \frac{\bar{u}_1^2}{2R_1'} + \frac{\bar{v}_1^2}{2R_1'} + \frac{\bar{u}_2^2}{2R_2'} + \frac{\bar{v}_2^2}{2R_2'}. \quad \text{eq. 3.45}$$

Para determinar as constantes A e B, deve-se rearranjar a eq. 3.45 para que esta fique no mesmo formato da eq. 3.39. Para tanto, pode-se eliminar as variáveis u_2 e v_2 usando as seguintes relações:

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_1 \cos \alpha + \bar{v}_1 \sin \alpha, \quad \bar{v}_2 = -\bar{u}_1 \sin \alpha + \bar{v}_1 \cos \alpha. \quad \text{eq. 3.46}$$

Substituindo na eq. 3.45 ficamos:

$$z = A' \bar{u}_1^2 + 2H' \bar{u}_1 \bar{v}_1 + B' \bar{v}_1^2, \quad \text{eq. 3.47}$$

onde:

$$2A' = \left(\frac{1}{R_1'} \right) + \left(\frac{1}{R_2'} \right) \cos^2 \alpha + \left(\frac{1}{R_2'} \right) \sin^2 \alpha, \quad \text{eq. 3.48}$$

$$2H' = \left[\left(\frac{1}{R_2'} \right) - \left(\frac{1}{R_2'} \right) \right] \sin \alpha \cos \alpha, \quad \text{eq. 3.49}$$

$$2B' = \left(\frac{1}{R_1'} \right) + \left(\frac{1}{R_2'} \right) \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{R_2'} \right) \cos^2 \alpha. \quad \text{eq. 3.50}$$

Fazendo a mudança de coordenadas de (U_1, V_1) to (X, Y) , teremos:

$$\bar{u}_1 = x \cos \lambda - y \sin \lambda, \quad \bar{v}_1 = x \sin \lambda + y \cos \lambda. \quad \text{eq. 3.51}$$

Substituindo as equações anteriores na eq. 3.47, iremos obter a eq. 3.39 original, onde as constantes geométricas procuradas são:

$$A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) - \frac{1}{4} \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \right]^2 - 4 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \sin^2 \alpha}, \quad \text{eq. 3.52}$$

$$B = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right) + \frac{1}{4} \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \right]^2 - 4 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \sin^2 \alpha}. \quad \text{eq. 3.53}$$

As equações acima podem ser reduzidas se usarmos as seguintes relações:

$$A + B = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2} \right), \quad \text{eq. 3.54}$$

$$B - A = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \right]^2 - 4 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1} \right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2} \right) \sin^2 \alpha}, \quad \text{eq. 3.55}$$

onde α é o ângulo formado entre os planos que contém os raios máximos dos dois corpos.

Considere agora uma situação onde dois corpos com formato qualquer (convexos) são deformados após serem solicitados por uma carga normal. A Figura 3.5 ilustra essa situação. Pode-se observar que, quando o contato é inicialmente pontual (antes da deformação), a distância entre dois pontos $S_1(x, y, z_1)$ e $S_2(x, y, z_2)$ em relação ao plano x-y é:

$$z = z_1 + z_2 = Ax^2 + By^2. \quad \text{eq. 3.56}$$

Durante a compressão dois pontos distantes do contato, T_1 e T_2 se movem em direção à origem O (centro da região de contato) paralelamente ao eixo z e deslocando-se de δ_1 e δ_2 respectivamente (Figura 3.5). Se os sólidos não se deformassem, seus perfis iriam sobrepor-se

como mostrado pela linha pontilhada. Como essa situação não irá acontecer, os corpos se deformam e os pontos $S_1(x,y,z_1)$ e $S_2(x,y,z_2)$ se deslocam da magnitude de $\bar{u}_{z1}$ e $\bar{u}_{z2}$, relativo aos pontos T_1 e T_2 respectivamente. Se após a deformação os pontos $S_1(x,y,z_1)$ e $S_2(x,y,z_2)$ estão coincidentes, teremos:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} + z = \delta_1 + \delta_2. \quad \text{eq. 3.57}$$

Utilizando a eq. 3.56, obtemos a seguinte expressão para os deslocamentos:

$$\bar{u}_{z1} + \bar{u}_{z2} = \delta - Ax^2 - By^2, \quad \text{eq. 3.58}$$

onde:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2. \quad \text{eq. 3.59}$$

A seguir será apresentada a abordagem numérica que irá combinar-se com o resultado obtido neste item e permitir a determinação dos semi-eixos da elipse.

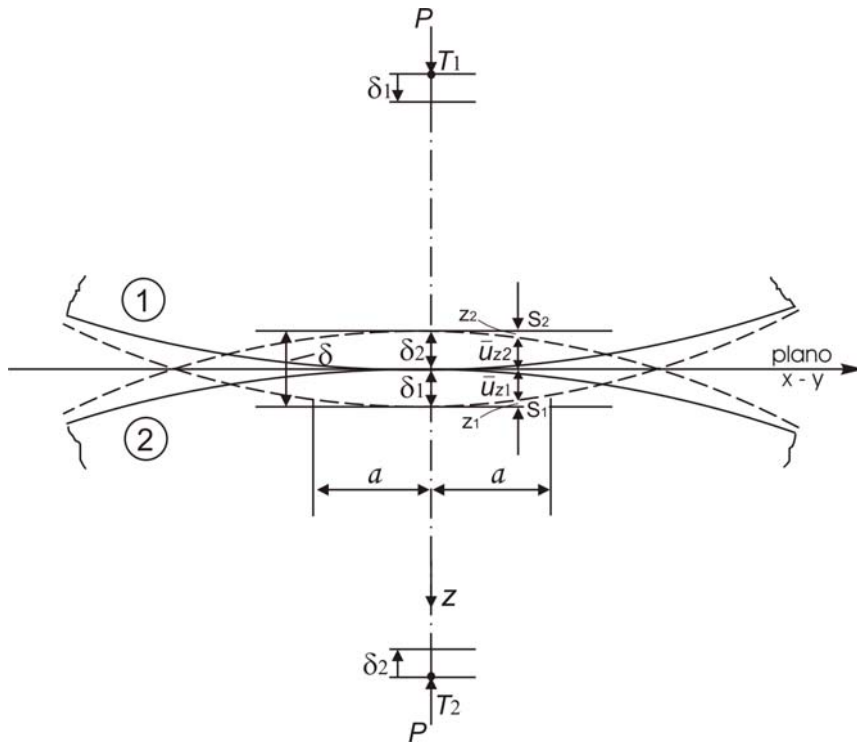


Figura 3.5: Deslocamentos entre dois corpos em contato.

3.4.2 Deslocamento vertical: abordagem numérica

Conforme foi mostrado no item 3.2 (eq. 3.32), a função de potência dada por Boussinesq, considerando apenas o carregamento vertical (as cargas horizontais são nulas) é expressa por:

$$\psi(x, y, z) = \iint_S \{1 - (\xi/a)^2 - (\eta/b)^2\}^{1/2} R^{-1} d\xi d\eta. \quad \text{eq. 3.60}$$

A partir da eq. 3.35, se expressa o deslocamento vertical apenas na superfície de contato ($\bar{u}_{z1,2} : z = 0$), pois o campo de tensões será determinado apenas na superfície e dentro da elipse. Vale ressaltar que essa equação reflete apenas o deslocamento para um dos corpos. O outro corpo terá o mesmo deslocamento, sendo que o deslocamento total será dado pela soma dos dois. Logo,

$$\bar{u}_{z1}(x, y) = \frac{1 - \nu_1}{2\pi G_1} (\psi)_{z=0}. \quad \text{eq. 3.61}$$

A substituição da função de potência na expressão do deslocamento vertical levaria a uma integral dupla que só poderia ser resolvida numericamente. Entretanto, como estamos lidando com uma expressão que esta sendo integrada em toda uma região elíptica, a integral dupla da eq. 3.60 pode ser reduzida a uma integral simples. Isso é possível através de teoremas aplicados a funções de potência representadas por um elipsóide, como é o caso proposto por Hertz. A demonstração desses teoremas é muito extensa, podendo ser encontrado no trabalho de Kellogg (1954). Logo, a expressão genérica para a potência dada pela eq. 3.60, considerando qualquer ponto dentro do sólido, pode ser expressa como:

$$\psi(x, y, z) = \frac{3F}{4} \int_{\lambda_1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} - \frac{z^2}{w} \right) \times \frac{dw}{\sqrt{\{(a^2 + w)(b^2 + w)w\}}}, \quad \text{eq. 3.62}$$

onde N é a força total aplicada no contato e λ_1 é a maior raiz positiva da função:

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} = 1. \quad \text{eq. 3.63}$$

Como dito anteriormente, apenas a superfície de contato será analisada, ($z = 0$), logo a função de potência pode ser reescrita como:

$$\psi(x, y, 0) = \frac{3F}{4} \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + w} - \frac{y^2}{b^2 + w} \right) \times \frac{dw}{\{(a^2 + w)(b^2 + w)w\}^{1/2}}. \quad \text{eq. 3.64}$$

O valor de λ_I nesse caso será nulo para todos os pontos dentro da elipse de contato, pois à medida que z tende a zero, λ_I também tende a zero. Portanto para o deslocamento vertical de um dos corpos, tem-se:

$$\bar{u}_{z_1} = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} (L - Mx^2 - Ny^2). \quad \text{eq. 3.65}$$

O deslocamento total de ambos os corpos em contato é dado pela soma dos deslocamentos conforme expressão anterior.

$$\bar{u} = \bar{u}_{z_1} + \bar{u}_{z_2}, \quad \text{eq. 3.66}$$

$$\bar{u}_z = \frac{1}{\pi E^*} (L - Mx^2 - Ny^2), \quad \text{eq. 3.67}$$

onde E^* é o módulo de elasticidade equivalente, dado por:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}. \quad \text{eq. 3.68}$$

Na equação anterior os parâmetros, M , N e L são:

$$M = \frac{3F}{4} \int_0^\infty \frac{dw}{\{(a^2 + w)^3(b^2 + w)w\}^{1/2}} = \frac{3F}{2e^2 a^3} \{K(e) - E(e)\}, \quad \text{eq. 3.69}$$

$$N = \frac{3F}{4} \int_0^\infty \frac{dw}{\{(a^2 + w)(b^2 + w)^3 w\}^{1/2}} = \frac{3F}{2e^2 a^3} \left\{ \frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right\}, \quad \text{eq. 3.70}$$

$$L = \frac{3F}{4} \int_0^\infty \frac{dw}{\{(a^2 + w)(b^2 + w)w\}^{1/2}} = \frac{3F}{2a} K(e). \quad \text{eq. 3.71}$$

Conforme se pode observar, a integral da eq. 3.64 pode ser separada em três outras integrais que, através de uma pequena manipulação, tornam-se integrais elípticas completas. Essas integrais podem ser computadas rapidamente através de algoritmo de Gauss-Salamim, que utiliza médias aritméticas e geométricas para a resolução de integrais elípticas (ABRAMOWITZ & STEGUN, 1965).

Nas equações anteriores, $E(e)$ e $K(e)$ são as integrais elípticas completas de primeira e segunda ordem, sendo e o argumento dessas integrais dado pela excentricidade da elipse, e k como a razão entre os semi-eixos, conforme expressões abaixo:

$$\begin{aligned} k &= b/a & b < a, \\ e &= \sqrt{1 - k^2} & b < a, \\ e &= \sqrt{1 - 1/k^2} & b > a. \end{aligned} \quad \text{eq. 3.72}$$

3.4.3 Semi-eixos da elipse de contato

O cálculo das expressões que fornecem os semi-eixos da elipse de contato podem ser obtidos igualando-se os deslocamentos dados pela eq. 3.58 e eq. 3.67

$$\delta - Ax^2 - By^2 = \frac{1}{\pi E^*} (L - Mx^2 - Ny^2). \quad \text{eq. 3.73}$$

Comparando os dois lados da eq. 3.73, pode-se determinar os valores das constantes geométricas em função das integrais elípticas.

$$A = \frac{M}{\pi E^*}, \quad B = \frac{N}{\pi E^*}, \quad \delta = \frac{L}{\pi E^*}. \quad \text{eq. 3.74}$$

Substituindo os valores das variáveis L, M, N, nas expressões acima, teremos:

$$A = \frac{3F}{2e^2 a^3 \pi E^*} \{ K(e) - E(e) \}, \quad \text{eq. 3.75}$$

$$B = \frac{3F}{2e^2 a^3 \pi E^*} \left\{ \frac{a^2}{b^2} E(e) - K(e) \right\}, \quad \text{eq. 3.76}$$

$$\delta = \frac{3F}{2a\pi E^*} K(e). \quad \text{eq. 3.77}$$

Dividindo a eq. 3.76 por eq. 3.75:

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 E(e) - K(e)}{K(e) - E(e)}. \quad \text{eq. 3.78}$$

Através da expressão acima, nota-se que os semi-eixos a e b dependem da excentricidade da elipse e de A e B . Como os valores das constantes geométricas são calculados em função dos raios de curvatura, a variável a ser determinada é a própria excentricidade e , uma vez que a razão a/b pode ser escrita em função da excentricidade, conforme a eq. 3.72. Portanto, para a determinação dos semi-eixos adota-se um processo iterativo atribuindo-se um valor inicial para excentricidade nos módulos das integrais elípticas e recalculando o seu valor, conforme expressão abaixo:

$$e_{i+1}^2 = \frac{B}{A} \left[\frac{e_i^2}{E(e_i)/K(e_i) - 1} + 1 \right] + 1. \quad \text{eq. 3.79}$$

O problema recai em qual valor inicial deve-se atribuir para excentricidade para iniciar as iterações. Vários autores sugerem valores, que podem minimizar o número total de iterações para convergência da equação. Greenwood (1985) propôs utilizar a assintótica da eq. 3.78, para valores de A/B , como valor inicial:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{B}{A}\right)^{4/3}}. \quad \text{eq. 3.80}$$

Rearranjando a eq. 3.75 e substituindo o valor da excentricidade da elipse calculado, torna-se possível determinar o valor do semi-eixo a . O semi-eixo b pode ser encontrado através da relação dada pela eq. 3.72. Portanto:

$$a = \sqrt[3]{\frac{3F}{2\pi A E^* e^2} \{K(e) - E(e)\}}. \quad \text{eq. 3.81}$$

3.4.4 Distribuição de pressão no contato

Para obter a expressão da distribuição pressão em uma região elíptica, Hertz partiu da própria função ψ dada pela eq. 3.62. Tomando como base o deslocamento vertical apenas na superfície de contato (eq. 3.61), e calculando a deformação a partir do deslocamento, pode-se determinar a tensão na direção vertical (z) ou a distribuição de pressão no contato, com o auxílio da eq. 3.14.

$$P(x, y) = \sigma_z = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad \text{eq. 3.82}$$

.Fazendo a derivada da função ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{3F}{2} z \int_0^\infty \frac{dw}{w \sqrt{\{(a^2 + w)(b^2 + w)w\}}}. \quad \text{eq. 3.83}$$

Nota-se que esta derivada é nula na superfície ($z = 0$) e que, como foi dito, o valor de $\lambda \rightarrow 0$ para $z \rightarrow 0$ proporcionalmente. Após a resolução da equação integral (eq. 3.83), tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{3Fz^2}{2ab} \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{1}{\lambda \sqrt{\lambda}}. \quad \text{eq. 3.84}$$

Então, para $\lambda \rightarrow 0$ e utilizando a eq. 3.63 tem-se:

$$z^2 = \lambda \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad \text{eq. 3.85}$$

Com o auxílio desta última expressão, a distribuição de pressão pode ser achada substituindo o valor da derivada de ψ na eq. 3.82.

$$P(x, y) = \frac{3F}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}. \quad \text{eq. 3.86}$$

3.5 Campo de Tensões sub-superficiais

Para o cálculo do campo de tensões abaixo da superfície de contato é necessário o uso dos deslocamentos calculados a partir das soluções de Boussinesq e Cerruti, demonstradas no item 3.2. Utilizando os deslocamentos, calcula-se as deformações e finalmente as tensões. Dois tipos de abordagem podem ser usados: numérico e semi-analítico.

3.5.1 Abordagem numérica

Neste tipo de abordagem, utilizam-se os deslocamentos calculados a partir de funções de potência. Substituindo os deslocamentos dados pelas eq. 3.27, eq. 3.28, eq. 3.29, a qual considera apenas o carregamento normal, nas expressões dadas pela Lei de Hooke, e calculando as derivadas, pode-se calcular o tensor de tensões em qualquer ponto em um espaço tridimensional. Logo:

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \left(2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right), \quad \text{eq. 3.87}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2\pi} \left(2\nu \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right), \quad \text{eq. 3.88}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \quad \text{eq. 3.89}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{2\pi} \left((1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right), \quad \text{eq. 3.90}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}, \quad \text{eq. 3.91}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{2\pi} z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}. \quad \text{eq. 3.92}$$

Pode-se observar que a maior dificuldade está em determinar o valor das funções ψ e ϕ , que envolvem uma integral dupla, e suas derivadas de primeira e segunda ordem. Por não existirem primitivas delas, deve-se adotar algum método de integração numérica que possa resolver de forma rápida e precisa essas integrais. Para valores de z longe da origem do sistema cartesiano, grande parte das tensões são resolvidas rapidamente e com bastante precisão. Porém, para valores de z muito próximos da origem, as integrais tornam-se instáveis (funções singulares), requerendo um tempo maior de cálculo para obter-se valores satisfatórios. Isso ocorre devido ao fato da função que está sendo integrada tender a infinito à medida que o ponto avaliado se aproxima do plano $z = 0$. Alguns métodos, como regra de Simpson, provaram-se eficientes na resolução das integrais, porém requeriam um grande número de intervalos a fim de que se atingisse uma boa precisão. Métodos mais elaborados, como os métodos de Gauss, apresentaram melhores resultados, tanto na precisão, quanto no tempo de cálculo.

Apesar de esta abordagem numérica ser satisfatória na determinação do campo de tensões em um sólido, devido a uma distribuição de carregamento qualquer, existe um procedimento quase totalmente analítico, onde se pode determinar todo o tensor de tensões sem o auxílio de métodos numéricos. Por isso, o tempo de cálculo é extremamente reduzido, principalmente para pontos próximos da superfície de contato. A única restrição feita é com relação à distribuição de carregamento na superfície de contato, que deve ser um elipsóide. O único procedimento numérico adotado nessa análise consiste na resolução de algumas integrais elípticas que, como foi dito anteriormente, podem ser resolvidas rapidamente através de algoritmos simples e rápidos. Esse método é mais rápido do que o procedimento numérico. Essa abordagem será apresentada a seguir.

3.5.2 Abordagem semi-analítica

A abordagem semi-analítica para determinação do campo de tensão sub-superficial devido ao contato foi originalmente proposta por Lundberg & Sjövall (1953), quando estes estudavam o contato entre corpos elásticos, com a finalidade de calcular as tensões e deformações devido a uma região de contato elíptica. Anos mais tarde, Sackfield & Hills (1983a; 1983c; 1993) publicaram as mesmas expressões para o contato elíptico considerando apenas o carregamento normal. Essas expressões, no entanto, contém alguns erros de sinal matemático que influenciam diretamente no cálculo das tensões. No mesmo ano e seguintes apresentaram as mesmas expressões considerando agora o carregamento tangencial (SACKFIELD & HILLS, 1983b; SACKFIELD & HILLS, 1993). Outros trabalhos dos mesmos autores com a mesma abordagem, considerando o contato entre duas esferas (HILLS & SACKFIELD, 1987) e dois cilindros podem ser citados como referência para o cálculo de tensões sub-superficiais.

Para determinar as equações semi-analíticas que permitirão o cálculo dos seis componentes do tensor de tensões, deve-se partir da função de potência dada pela eq. 3.62 e do polinômio da eq. 3.63. Atribuindo-se valores para as coordenadas (x,y,z) do ponto em estudo, pode-se encontrar o valor de λ_l , maior raiz desse polinômio. Uma observação importante, que será adotada ao longo desse procedimento, diz respeito ao comportamento da coordenada z em função da variável λ do polinômio. A partir da eq. 3.93, obtida da eq. 3.63, nota-se que, para pontos tendendo a superfície ($z \rightarrow 0$) e dentro da elipse de contato, o valor de λ converge para zero. Porém, a relação z^2/λ permanece finita, uma vez que no limite ela converge para um número diferente de zero conforme a expressão abaixo.

$$\frac{z^2}{\lambda} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad \text{eq. 3.93}$$

Para pontos sobre o eixo z ($x = y = 0$) e na superfície ($z \rightarrow 0$) essa razão é igual a 1. É importante lembrar que quando forem calculados pontos na origem do sistema, o valor de z nunca pode ser nulo, uma vez que ocorrerá uma indeterminação do tipo “0/0” na razão z^2/λ . Portanto, deve-se adotar um valor muito pequeno, proporcional às dimensões da elipse.

Inicialmente o cálculo será realizado para os três componentes do tensor que dependem da coordenada z : σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} . Essas componentes dependem exclusivamente da função ψ e de suas derivadas em relação à x , y , z , o que torna os cálculos menos trabalhosos e mais precisos. A fim de facilitar a forma como as expressões das tensões serão apresentadas e, principalmente, a implementação destas em uma rotina de cálculo, a partir desse ponto até o fim deste item as coordenadas x , y , z terão seus valores normalizados pelo maior semi-eixo da elipse de contato (a) e a raiz λ será normalizada pelo quadrado do semi-eixo. Isso fará com que as tensões sejam completamente independentes do tamanho da elipse, o que evitará erros de cálculo especialmente para valores mais próximos a superfície de contato ($z \rightarrow 0$). A nova expressão normalizada a partir da eq. 3.63 a ser resolvido será:

$$\frac{x^2}{1 + \lambda} + \frac{y^2}{k^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda^2} = 1. \quad \text{eq. 3.94}$$

Então, utilizando as eq. 3.62, eq. 3.89, eq. 3.91, eq. 3.92 e fazendo as derivadas necessárias, teremos as seguintes expressões:

$$\frac{\sigma_z}{p_0} = -\frac{kz^3}{\lambda^5 HL}, \quad \text{eq. 3.95}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{p_0} = -\frac{kxz^2}{\lambda^3 (1 + \lambda^2) HL}, \quad \text{eq. 3.96}$$

$$\frac{\tau_{yz}}{p_0} = -\frac{k y z^2}{\lambda^3 (k^2 + \lambda^2) HL}, \quad \text{eq. 3.97}$$

onde:

$$H = \left(\frac{x}{1 + \lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{y}{k^2 + \lambda^2} \right)^2 + \left(\frac{z}{\lambda^2} \right)^2, \quad \text{eq. 3.98}$$

$$L = \sqrt{(1 + \lambda^2)(k^2 + \lambda^2)}.$$

Lembrando que:

$$p_o = \frac{3F}{2\pi ab}. \quad \text{eq. 3.99}$$

Pode-se observar que as expressões anteriores não dependem de nenhum processo numérico, apenas de operações analíticas e da resolução das raízes de um polinômio.

As outras três componentes do tensor, σ_x , σ_y , τ_{xy} dependem da função ϕ , que é obtida a partir da integração da função ψ em relação à coordenada z . Essa dedução é complexa, uma vez que os autores que determinaram essas expressões já citadas, não deixaram explicito esse procedimento. Sabe-se que existe a necessidade de uma transformação de variável, que irá tornar possível calcular a função em questão. Portanto, a seguir serão apresentadas as expressões finais para o cálculo direto das três tensões restantes. A diferença para o primeiro grupo de tensões calculado anteriormente diz respeito as integrais elípticas que agora estão presentes.

Lembrando que as tensões σ_x , σ_y , τ_{xy} são dadas por:

$$\frac{\sigma_x}{p_o} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \text{eq. 3.100}$$

$$\frac{\sigma_y}{p_o} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \text{eq. 3.101}$$

$$\frac{\tau_{xy}}{p_o} = -(1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \quad \text{eq. 3.102}$$

As respectivas derivas em função de ψ serão dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -kz \left[I_1 - \left(\frac{x^2}{(1 + \lambda^2)^2 \lambda HL} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -kz \left[I_2 - \left(\frac{y^2}{(k^2 + \lambda^2)^2 \lambda HL} \right) \right], \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -2\nu kz I_3, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -\frac{kxyz}{\lambda HL^3}. \end{aligned} \quad \text{eq. 3.103}$$

Finalmente, as derivadas da função ϕ são:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= k \left[-zI_1 + \left(-y\theta_1 - x\theta_2 + \frac{1}{e^2} - \frac{z}{e^2 \lambda} \sqrt{\frac{k^2 + \lambda^2}{1 + \lambda^2}} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= k \left[-zI_2 - \left(-y\theta_1 - x\theta_2 + \frac{1}{e^2} - \frac{z}{e^2 \lambda} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{k^2 + \lambda^2}} \right) \right], \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= -k(x\theta_1 - y\theta_2).\end{aligned}\tag{eq. 3.104}$$

Os ângulos auxiliares θ_1 e θ_2 são dados por:

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\tan^{-1}(ny/D)}{n^3}, & \theta_2 &= \frac{\tanh^{-1}(nx/C)}{n^3} & b/a < 1, \\ \theta_1 &= \frac{\tanh^{-1}(ny/D)}{n^3}, & \theta_2 &= \frac{\tan^{-1}(nx/C)}{n^3} & b/a > 1.\end{aligned}\tag{eq. 3.105}$$

onde,

$$C = 1 + \lambda^2 + N, \quad D = k^2 + \lambda^2 + N, \quad n = \sqrt{|1 - k^2|}.\tag{eq. 3.106}$$

As variáveis I_1 , I_2 e I_3 são integrais que podem ser expressas em termos das integrais elípticas incompletas, $E(\varphi, k)$ e $F(\varphi, k)$, de primeira e segunda ordem.

Para $k < 1$:

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{e^2} [K(\varphi, e) - E(\varphi, e)], \\ I_2 &= \frac{1}{e^2} \left[\frac{E(\varphi, e)}{k^2} - K(\varphi, e) - \frac{1}{k^2 \lambda} \sqrt{\frac{k^2 + \lambda^2}{1 + \lambda^2}} + \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{1 + \lambda^2}{k^2 + \lambda^2}} \right], \\ I_3 &= \frac{1}{k^2} \left[+ \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{k^2 + \lambda^2}{1 + \lambda^2}} - E(\varphi, e) \right], \\ \tan(\varphi) &= \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}\tag{eq. 3.107}$$

Para $k > 1$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{ke^2} \left[E(e) - E(\varphi, e) - \frac{1}{k^2} (K(e) - K(\varphi, e)) \right], \\
I_2 &= \frac{1}{k^3 e^2} \left[K(e) - K(\varphi, e) - E(e) + E(\varphi, e) - \frac{ke^2}{2} \sqrt{\frac{1+\lambda}{k^2+\lambda}} \operatorname{sen}(2\varphi) \right], \\
I_3 &= -\frac{1}{k} \left[E(e) - E(\varphi, e) - \cot(\varphi) \frac{1}{k} \sqrt{\frac{k^2+\lambda}{1+\lambda}} \right], \\
\tan(\varphi) &= \lambda.
\end{aligned} \tag{eq. 3.108}$$

3.6 Conclusões

Os métodos analíticos de contato apresentados têm como base a teoria formulada por Hertz a mais de um século, e que se mantém válida até hoje, se obedecidos os seus princípios básicos. Esses métodos atuam no campo da elasticidade, onde as pequenas deformações são válidas e a relação entre a tensão e deformação permanece linear. O tensor de tensões em qualquer ponto dos sólidos em contato pode ser determinado através de expressões semi-analíticas, de forma rápida e precisa, não sendo necessário uma abordagem numérica completa. Apesar disso, quando se tem o surgimento de deformações plásticas permanentes (não-linearidade) esses métodos não são mais válidos, exigindo, assim, o uso de um método numérico para determinação correta do comportamento dos corpos em contato.

Capítulo 4

Critérios de falha e plasticidade

Neste capítulo serão descritos alguns critérios de fadiga utilizados em contato de rolamento. Também será detalhado o uso do critério adotado para o cálculo da vida de rodas ferroviárias, objeto de estudo deste trabalho, bem como os parâmetros e rotinas envolvidas nele, justificando sua escolha em relação aos demais.

4.1 Critérios de fadiga e resistência

Durante muitos anos, a falha em componentes mecânicos metálicos foi objeto de estudo no campo da engenharia, especialmente quando essa falha se dá por fadiga. Para estruturas submetidas a carregamentos uniaxiais, diversos critérios foram estudados e desenvolvidos. Exemplos clássicos desta condição são os diagramas de Goodman e Haigh, que podem ser usados na predição de vida em situações de carregamentos mais simples (flexão ou torção). Porém, quando estruturas e componentes estão sujeitos a um estado de carregamento multiaxial, critérios mais complexos são necessários a fim de permitir a estimativa da vida do componente de forma confiável.

Num estado de tensões multiaxiais o comportamento da fadiga torna-se mais complexo, uma vez que o tensor é definido por seis componentes (no caso mais geral). No caso uniaxial, o tensor de tensões possui apenas uma componente. Para quantificar a influencia do estado de tensão multiaxial na vida em fadiga, é necessário adotar uma tensão equivalente, que represente

de forma adequada esse tensor. Essa tensão poderá ser tanto uma grandeza apenas escalar quanto vetorial (cisalhamento). Neste caso, a tensão equivalente é calculada para diferentes planos e em diferentes instantes de tempo. Como exemplo de estado multiaxial de tensões podemos citar o contato de rolamento.

Durante o rolamento, é importante observar o comportamento das tensões principais, no que diz respeito a sua direção e sentido. Durante um ciclo de carregamento no rolamento ocorre a rotação das tensões principais em cada ponto do material. Este fato deve estar incorporado ao critério de fadiga utilizado, pois as tensões principais não agem na mesma direção durante todo o ciclo de tensão. Assim, o dano por fadiga pode ser iniciado em diferentes direções (planos) para diferentes ciclos de tensões.

Basicamente existem três tipos de abordagens para problema fadiga de contato. A primeira delas consiste em achar a direção onde ocorre o maior dano. Esta direção é dada por um plano, chamado de “plano crítico”. Provavelmente este método é mais facilmente aplicado, se o plano crítico puder ser identificado antecipadamente. Um exemplo desse critério é o critério de Tresca (DIETER, 1988; SHIGLEY, 2001; NORTON, 1998).

A segunda abordagem é utilizar uma tensão equivalente baseada em um invariante de tensão que, logicamente, tem a mesma magnitude em todas as direções. O resultado é um critério fácil de ser utilizado, contudo ele despreza outra direção crítica de dano que possa existir. Os critérios de Sines, Crossland e Von Mises podem ser citados como exemplos (DANG VAN ET AL, 1989; FLAVENOT & SKALLI, 1989; EKBERG, 2002)

Na terceira abordagem, calcula-se a tensão equivalente adotada para todos os planos de cisalhamento de interesse, uma vez que pode haver mais de um plano crítico em um mesmo ciclo. Em seguida, o dano deve ser acumulado para um grande número de possíveis planos críticos e para diversos pontos do corpo em estudo, o que resulta num aumento significativo de esforços computacionais. O critério de Dang Van pode ser citado como exemplo (DANG VAN ET AL, 1989). A seguir são apresentados alguns conceitos de tensão usados na definição dos critérios de fadiga.

4.1.1 Componentes do tensor desvio e tensão hidrostática

Considerando o tensor de tensões dado pela Eq. 3.1, atuante em um determinado ponto do material, pode-se dividi-lo em duas partes: *tensor hidrostático* ou *tensor de tensões médio* (σ_h) e o *tensor de tensões desvio* (σ_{ij}^d), que representa as tensões de cisalhamento.

A componente hidrostática do tensor de tensões representa a energia total que pode ser armazenada em um material, sem que ele falhe. Isso só ocorre se ele for carregado hidrostaticamente, isto é, as tensões desenvolvidas em um ponto do material são iguais em todas as direções. Com isso, o componente hidrostático produz apenas mudança no volume do material. Quantitativamente, a tensão hidrostática é o valor médio das tensões normais agindo em um ponto e pode ser equacionada como:

$$\sigma_h = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \quad \text{eq. 4.1}$$

O componente hidrostático do tensor produz apenas mudanças de volume de material e não causa deformação plástica. Experimentos mostram que o surgimento de trincas por fadiga em um componente mecânico é independente da tensão hidrostática (DIETER, 1988), embora a fratura seja fortemente influenciada por esta.

O tensor desvio é formado pelo tensor total, extraindo-se as tensões hidrostáticas. Pelo fato do tensor desvio comportar as tensões de cisalhamento, este será responsável por levar à falha do material solicitado, além de contribuir para as deformações plásticas. A decomposição do tensor de tensões é dada por (NORTON, 2000):

$$s_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{ii} + \sigma_{ij} \quad i, j=1,2,3, \quad \text{eq. 4.2}$$

$$s_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix}. \quad \text{eq. 4.3}$$

Nota-se facilmente que o tensor desvio envolve apenas as tensões de cisalhamento. A seguir, a análise de alguns critérios para tensão equivalente considerando caso de fadiga multiaxial.

4.1.2 Critério das tensões principais

Este critério de resistência, principalmente utilizado em materiais frágeis, e não considera a variação de ângulo das tensões principais. Sua desvantagem é que ele prevê o mesmo dano por fadiga com carregamento hidrostático puro e com carregamento uniaxial com o mesmo σ_I . Isto não está de acordo com dados empíricos.

$$\sigma_{eq} = \max \sigma_i^a \quad i, j=1,2,3. \quad \text{eq. 4.4}$$

4.1.3 Critério de Tresca

É principalmente utilizado como critério de escoamento do material. Neste caso, não se considera a rotação das tensões principais nem a influência da tensão média σ_m . Este critério é usado principalmente para materiais dúcteis. O parâmetro p indica a posição do ponto no ciclo.

$$\tau_{eq} = \max_p \left(\frac{\sigma_i^a(p) - \sigma_j^a(p)}{2} \right) \quad i, j=1,2,3. \quad \text{eq. 4.5}$$

4.1.4 Critério de Sines

Neste critério de fadiga, já existe a presença da tensão de cisalhamento média τ_m , que tem grande influência no comportamento da fadiga, o que está de acordo com resultados experimentais (WANG & MILLER, 1991). Tanto a tensão de cisalhamento octaédrica como a tensão equivalente de Von Mises podem ser utilizadas como amplitude de tensão (τ_a) no critério. Finalmente, apenas valores positivos da tensão equivalente (maiores do que o limite de resistência à fadiga por cisalhamento τ_e) causam dano. Este critério não leva em conta a rotação do plano principal e tensões principais (in BANNANTINE, COMER & HANDROCK, 1991).

$$\tau_{eq} = \tau_a + 3\alpha\sigma_{h_{med}}, \quad \text{eq. 4.6}$$

onde α é um parâmetro do material e σ_{hmed} é a tensão hidrostática média, positiva quando houver tração.

4.1.5 Critério de Crossland

O critério de fadiga de Crossland é praticamente igual ao critério de Sines, porém considerando a tensão hidrostática máxima durante o ciclo de tensão para um determinado ponto. No entanto, os aspectos mencionados acima para o critério de Sines também são limitantes aqui.

$$\tau_{eq} = \tau_a + 3\alpha\sigma_{h_{max}}. \quad \text{eq. 4.7}$$

4.1.6 Critério de Dang Van

O critério de fadiga de Dang Van tem como aplicação principal componentes sujeitos a um estado multiaxial de tensões e a fadiga de alto ciclo. Ele é um critério baseado em planos críticos, onde se assume que a estabilização em regime elástico (“shakedown” elástico) irá ocorrer antes do início de trincas.

Quando se considera um estado geral multiaxial de tensões e deformações, é necessária a atenção especial sobre alguns tópicos durante a escolha do critério a ser utilizado.

- Durante o estado multiaxial de tensões, como o rolamento de um corpo sobre o outro, as tensões e direções (plano) principais não são fixas, havendo rotação delas durante o ciclo de carregamento, conforme Figura 4.1;
- Ele deve considerar a influência das tensões hidrostáticas;
- Ele deve considerar a influência das tensões médias de cisalhamento. Segundo experimentos (WANG & MILLER, 1991), a tensão média de cisalhamento tem grande influência na vida em fadiga do componente sujeito a tensão cisalhante alternada;
- O critério deve também representar todo ciclo de carga. Tensões e deformações, que vão ocasionar o dano por fadiga, devem ser precisamente descritas ao longo do ciclo completo (tensões calculadas pontualmente);

- As tensões cisalhantes devem poder ser calculadas em qualquer plano de cisalhamento.

Umas das características do contato de rolamento, como dito anteriormente, é a rotação do plano das tensões principais durante o ciclo de carregamento. Esse fato foi observado, primeiramente, na análise de tensões de contato feita por Smith & Liu (1953). Isso é ilustrado na Figura 4.1.

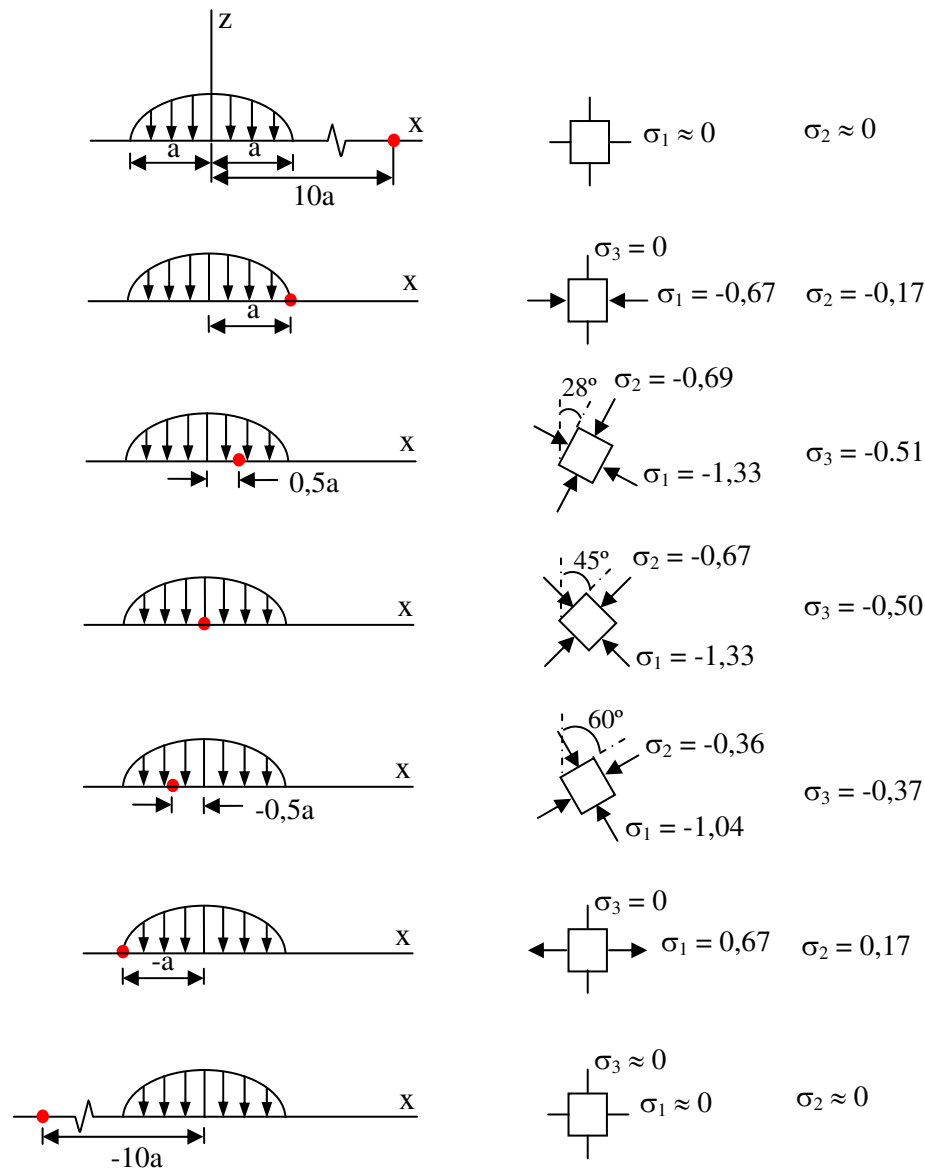


Figura 4.1: Esboço do estado de tensão em função da posição do ponto durante o rolamento – rotação do plano das tensões principais.

O critério de Dang Van, ao contrário de outros como os de Sines e Crossland (Dang Van, et. al., 1989), leva em conta a rotação do plano das tensões principais, uma vez que a tensão de cisalhamento equivalente é calculada para todo possível plano que passa pelo ponto do material estudado. Este critério também incorpora a influência das tensões hidrostáticas, que apresentam elevadas magnitudes especialmente dentro da região de contato.

Por este critério se basear em planos e pelas tensões de cisalhamento desempenharem um papel importante na avaliação do material em estudo, a tensão equivalente do critério de Dang Van será de cisalhamento. A expressão para essa tensão de cisalhamento equivalente deve incorporar todos os fatores mencionados anteriormente para que possa justificar o seu uso na predição da fadiga em rodas ferroviárias, oriundas do carregamento mecânico e das tensões residuais de fabricação.

Conforme será mostrado, o critério de Dang Van consegue satisfazer essas condições, de forma que pode ser utilizado na previsão de vida de rodas ferroviárias, objeto de estudo deste trabalho. A seguir será apresentada a equação para o cálculo da tensão equivalente de Dang Van e as variáveis envolvidas na sua aplicação.

4.1.6.1 Tensão de cisalhamento equivalente

O critério de Dang Van define uma tensão equivalente (cisalhamento) como uma combinação da diferença da tensão de cisalhamento em um determinado plano e o seu valor médio durante um ciclo de carga (amplitude de tensão) e a tensão hidrostática (positiva quando ocorrer tração e negativa quando compressão). O critério utiliza valores instantâneos tanto da tensão de cisalhamento quanto da hidrostática, isto é, a magnitude das tensões é calculada para cada ponto do material e em função do tempo (ou da posição no ciclo de carga). De forma geral, esse critério estabelece que o dano devido à fadiga irá ocorrer somente se em um determinado ponto, posição (p) e plano (θ), uma das inequações abaixo for satisfeita. Somente valores positivos de τ_{DV1} maiores que τ_e e valores negativos de τ_{DV2} menores que $-\tau_e$ induzem ao dano.

$$\tau_{DV1} = \tau_a(p, \theta) + a_{dv}\sigma_h(p) > \tau_e, \quad \text{eq. 4.8}$$

$$\tau_{DV2} = \tau_a(p, \theta) - a_{dv}\sigma_h(p) < -\tau_e, \quad \text{eq. 4.9}$$

onde $\tau_a(p)$ é a amplitude de tensão de cisalhamento, calculada pela diferença entre a tensão de cisalhamento instantânea $\tau_{sp}(p)$ em um plano específico e a tensão média (τ_m) durante um ciclo de carga; $\sigma_h(p)$ é a tensão hidrostática (positiva em tração) função do tempo neste mesmo ponto; τ_e é o limite de resistência à fadiga no cisalhamento puro e a_{dv} é um parâmetro do material que representa a influência da tensão hidrostática no ponto em estudo. Ele é deduzido a partir das inequações do critério e é dado por:

$$a_{dv} = \frac{3}{2} \frac{2\tau_e - S_e}{S_e}, \quad \text{eq. 4.10}$$

onde S_e é o limite de resistência à fadiga na flexão. Esses parâmetros são usualmente determinados por dois ensaios de fadiga: flexão ou tração – compressão e torção pura.

A tensão de cisalhamento instantânea é calculada em um determinado plano que passa por um ponto qualquer do sólido. Por ser função do tempo, depende da sua posição no ciclo de carregamento. O uso da amplitude de tensão se justifica pelo fato de que a tensão de cisalhamento instantânea não é capaz de levar o material à falha por fadiga. Por isso “extraí-se” o valor da tensão média do ciclo da tensão de cisalhamento calculada no plano. A forma de cálculo dessas tensões será demonstrada em itens posteriores.

A Figura 4.2 é uma representação gráfica do critério de Dang Van. Dados os valores das tensões em um plano de cisalhamento especificado num ponto do material durante um ciclo, pode-se achar as tensões equivalentes máxima τ_{DV1}^* e mínima τ_{DV2}^* . Se estas forem maiores do que o limite de fadiga para cisalhamento puro do material τ_e ou menores do que $-\tau_e$, respectivamente, então é considerado que ocorra falha por fadiga.

Um plano de cisalhamento, definido de acordo com a Figura 4.3 é chamado plano crítico se pelo menos uma das tensões equivalentes τ_{DV1} ou τ_{DV2} for maior do que τ_e , durante um ciclo de tensão. Uma vez que o plano de cisalhamento crítico é desconhecido inicialmente, o critério deve ser desenvolvido e examinado, em princípio, para todos os possíveis planos contendo o ponto

considerado. O plano que contiver a maior tensão equivalente para um determinado ponto, durante um ciclo de carga, será dito crítico para aquele ponto. O mesmo procedimento deve ser repetido para todos os pontos em estudo. É importante enfatizar que mais de um plano de cisalhamento em um ponto do material pode ser crítico num determinado instante de tempo, e que a ponta do vetor τ_{sp} geralmente gira em torno do ponto no plano em que é calculado durante o ciclo de tensão.

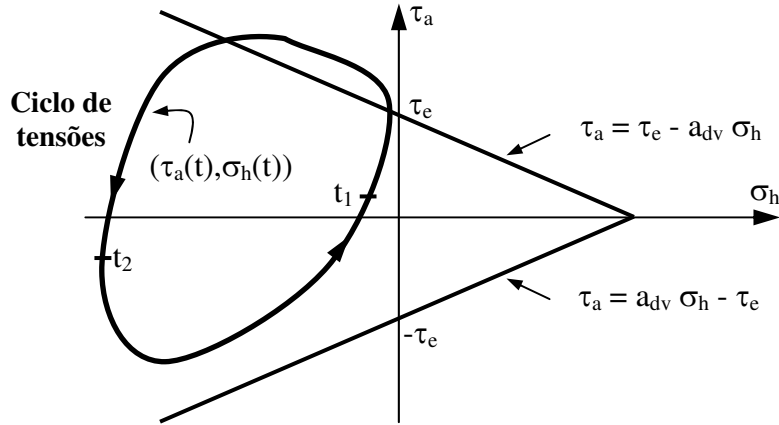


Figura 4.2: Representação gráfica do critério de Dang Van.

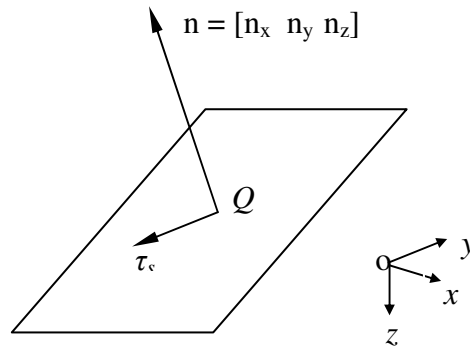


Figura 4.3: Tensão de cisalhamento τ_{sp} num ponto Q do material projetada em um plano.

Observando a eq. 4.8 e a eq. 4.9, este critério apenas diz qual a posição no espaço e se ocorrerá ou não a falha. Caso deseja-se estimar o número de ciclos (N), deve adotar um método específico, como gráfico S–N, conforme será visto ao longo deste trabalho. Será analisado também, o fato que materiais sujeitos à fadiga de contato não apresentam um limite de fadiga, isto é, todo valor de tensão vai induzir um dano ao material em algum momento da sua vida em

serviço, mesmo que isso ocorra para um grande número de ciclos. Logo o critério de fadiga de Dang Van deve ser adaptado para incorporar esse comportamento.

4.1.7 Critério de Dan Van Modificado – proposta de cálculo da vida (N).

O critério de Dang Van, original, tem o propósito de informar se ocorrerá ou não falha por fadiga (início da trinca) e em que ponto (posição no espaço). Contudo, ele não fornece nenhuma informação sobre a vida em fadiga esperada se o critério for satisfeito (eq. 4.8 ou eq. 4.9). Para o caso de fadiga de contato, isso requer uma atenção especial.

Morrison & Cram (in NORTON, 2000), ao longo de muitos anos, realizaram separadamente um estudo experimental da resistência à fadiga superficial. Nos experimentos, cilindros de diversos tipos de materiais foram postos em contato de rolamento, com e sem deslizamento. Foi observado que, enquanto aços e outros materiais solicitados à flexão ou axialmente exibem um limite de resistência à fadiga para vida infinita, os corpos submetidos à fadiga de contato não apresentam nenhuma propriedade equivalente. Ou seja, não existe uma inflexão ("joelho") ou tensão limite no diagrama S-N (Diagrama de Wöhler) para qual abaixo deste valor a vida seja infinita. Sendo assim, é de se esperar que a falha por fadiga de contato ocorra em algum momento da vida do componente solicitado, caso atinja um número suficientes de ciclos. Como o contato roda - trilho é um exemplo típico desta teoria, pode-se esperar que a roda irá falhar por fadiga superficial em algum momento da sua vida.

Ekberg (EKBERG, 2000) utilizou um diagrama S-N para estimar o número de ciclos até o início da falha por fadiga de uma roda ferroviária submetida a um carregamento elevado (180 kN). Ele estabeleceu que o limite de resistência à fadiga fosse para 10^6 ciclos. Com isso, a vida estimada foi da ordem de 10^5 ciclos. Este valor é considerado baixo para uma roda submetida a esta magnitude de carregamento. Rodas pertencentes a vagões de carga e que são do tipo múltipla vida, como é o objeto de estudo desse trabalho, são retiradas para o primeiro reperfilamento com aproximadamente 100 milhões de ciclos. Sendo assim, propõe-se um novo critério para o cálculo da vida, utilizando o critério de fadiga de Dang Van ou o de Dang Van modificado, conforme será apresentado a seguir.

Considere-se a quantidade de dano D_i como resultante de um dado ciclo de tensão sujeito a um determinado carregamento e que passa sobre um ponto do material. Esse cálculo será feito utilizando-se um diagrama de Wöhler (S – N). A relação entre o dano e a vida, é dada pela seguinte expressão:

$$D_i = \frac{1}{N_i}, \quad \text{eq. 4.11}$$

onde o índice i é o nível de tensão correspondente àquela vida ou dano.

Inicialmente, como o plano crítico é desconhecido, o critério deve ser examinado para todos os possíveis planos de cisalhamento que passam por cada ponto do material e a cada instante do ciclo. Levando-se em consideração o fato da não existência de um limite de resistência à fadiga de contato, o critério de Dang Van deve ser adaptado.

Observando a eq. 4.8 e eq. 4.9 nota-se que, caso não seja adotado nenhum limite τ_e , apenas valores positivos de τ_{DV1} e negativos de τ_{DV2} podem induzir algum dano. Logo, cada ponto do material estudado irá ter um "limite de resistência à fadiga", que será o coeficiente linear da reta formada pelo critério de Dang Van. Esse valor será a tensão equivalente τ_{DV}^* em um ponto, ao longo de um ciclo de carga e para todos os planos possíveis. Sendo assim, durante um ciclo de carregamento descrito por cada ponto, haverá um instante de maior dano (menor vida). Logo, pode-se propor as seguintes modificações nas expressões para o cálculo da tensão equivalente:

$$\tau_{DV1}^* = \max_{\theta, p} \{ \tau_a(p, \theta) + a_{dv} \sigma_h(p) \} > 0, \quad \text{eq. 4.12}$$

$$\tau_{DV2}^* = \max_{\theta, p} \{ \tau_a(p, \theta) - a_{dv} \sigma_h(p) \} < 0. \quad \text{eq. 4.13}$$

Com essas expressões, apenas valores positivos e negativos de τ_{DV1}^* e τ_{DV2}^* , respectivamente, levarão o ponto à falha por fadiga. Dessa forma, o critério de fadiga multiaxial de Dang Van pode ser utilizado em problemas de contato, estando de acordo com experimentos realizados (in NORTON, 2000). A representação gráfica do critério será modificada para atender as novas expressões, conforme mostra a Figura 4.4:

As retas tracejadas representam os "limites" para o ciclo de carga descrito por cada ponto em um determinado plano. Cada reta equivale a um valor de vida, como se pode ver mais adiante. A reta que for tangente ao ciclo representará o maior dano (ou menor valor de vida) e será usada no cálculo da vida para aquele ponto. Quanto maior o coeficiente linear (τ_{DV}^*) da reta, maior o dano. São essas equações que serão utilizadas durante todo o trabalho para o cálculo da vida em serviço da roda ferroviária.

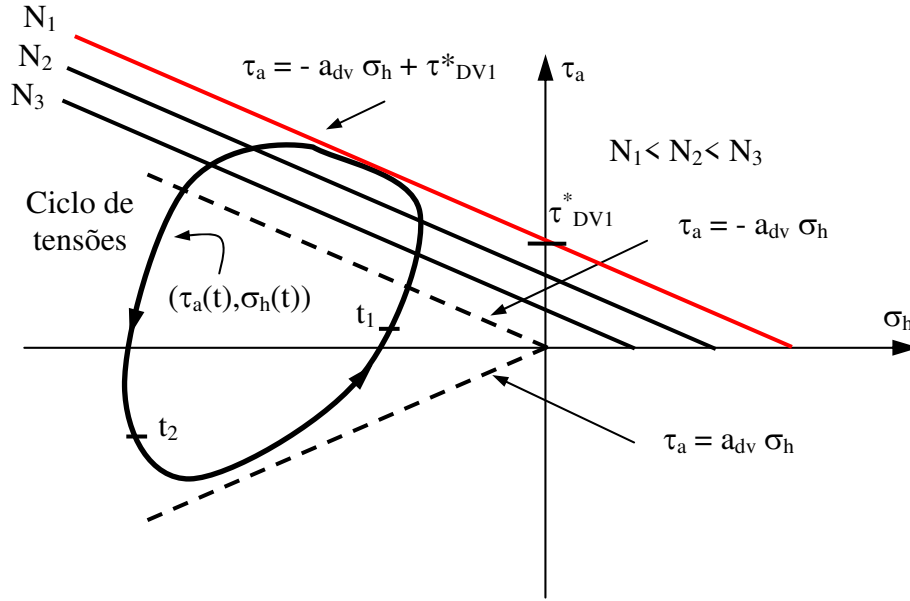


Figura 4.4: Representação gráfica do critério de Dang Van proposto para o cálculo da vida.

Esses valores de tensão equivalente encontrados são então inseridos no diagrama de Wöhler, a fim de que a vida possa ser estimada para aquele nível de tensão, conforme ilustra a Figura 4.5. Como a relação entre a vida e a sollicitação em um diagrama S–N (Wöhler) é representada por uma hipérbole (NORTON, 2000; JUVINALL, 2001), podemos equacionar o problema, desde que conhecidas duas propriedades. A equação da curva é dada por:

$$S_n = \tau'_f N^{b'} \quad \text{eq. 4.14}$$

onde S_n é o nível de tensão genérico correspondente a uma vida N . Nesse caso será o valor da tensão equivalente de Dang Van. Os parâmetros τ'_f , coeficiente de resistência à fadiga em cisalhamento, e b' , expoente de resistência à fadiga, são constantes definidas para cada material.

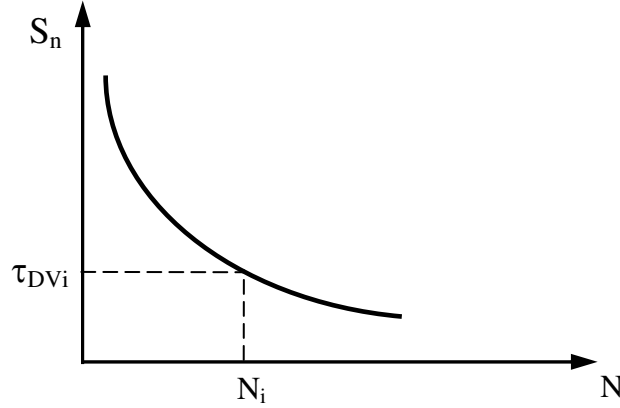


Figura 4.5: Uso das tensões equivalentes de Dang Van em um diagrama de Wöhler.

Estes parâmetros são tabelados por Fec & Utrata (in MOYAR & STONE, 1991) em diversas temperaturas para rodas ferroviárias classe C e U sendo a primeira, objeto de estudo desse trabalho. Como dito anteriormente, componentes sujeitos a fadiga de contato não apresentam um limite de resistência. Utilizando o valor da tensão equivalente de Dang Van e substituindo na equação anterior, tem-se:

$$\tau_{DV}^* = \tau_f' N^{b'}. \quad \text{eq. 4.15}$$

Igualando a eq. 4.12 e eq. 4.13, tem-se a expressão final proposta pelo autor para o critério de cálculo da vida de uma roda ferroviária em serviço.

$$\max_{\theta, t} \{ |\tau_a(t, \theta) \pm a_{dv} \sigma_h(t)| \} = \tau_f' N^{b'}. \quad \text{eq. 4.16}$$

O módulo do valor de tensão utilizado nessa expressão tem como objetivo acomodar valores negativos da tensão equivalente que por ventura possam ocorrer. O valor da vida da roda pode ser determinado isolando-se N na eq. 4.14, logo:

$$N = \left(\frac{\max_{\theta, t} \{ |\tau_a(t, \theta) \pm a_{dv} \sigma_h(t)| \}}{\tau_f'} \right)^{\frac{1}{b'}}, \quad \text{eq. 4.17}$$

onde apenas valores que satisfizerem a eq. 4.12 e eq. 4.13 serão usados para calcular a vida do respectivo ponto em estudo.

Como é sabido, um componente raramente é submetido a apenas um nível de carga ou tensão, durante sua vida em serviço. Com isso, deve-se calcular cada contribuição dada pelos diversos níveis de carga atuantes e combinar as respectivas parcelas de vida. Isso será mostrado a seguir com a teoria de acúmulo de dano.

4.1.8 Critério de Fatemi & Socie

Outro critério que será utilizado para estimar a vida em fadiga da roda é também um critério de planos críticos, mas desta vez, baseado em deformações cisalhantes. Ele é uma modificação do critério de Coffin–Manson (in SHIGLEY, 2004) e foi proposto por Fatemi & Socie (1988). É dado por:

$$\gamma'_a = \gamma_a \left(1 + K \frac{\sigma_n}{\sigma_y} \right) = \frac{\tau'_f}{G} (2N)^{b'} + \gamma'_f (2N)^{c'}, \quad \text{eq. 4.18}$$

onde, γ'_a é a amplitude de deformação cisalhante modificada; γ_a é a amplitude de deformação cisalhante atual projetada em um plano crítico; K é um fator de influência da tensão normal; σ_n é a tensão normal resultante existente em um plano crítico; σ_y é tensão de escoamento; G o módulo de rigidez, função do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson; τ'_f é o coeficiente de resistência à fadiga por cisalhamento; γ'_f é o coeficiente de ductilidade à fadiga por cisalhamento; b' é expoente de resistência à fadiga e c' é o expoente de ductilidade à fadiga.

Esse tipo de critério é usado para falhas em baixo ciclo. Assim como o critério de Dang Van, ele considera as grandezas cisalhantes (deformações) e tensões normais atuantes em cada ponto do corpo. Ao contrário do critério de Dang Van, este já incorpora o cálculo da vida em sua expressão.

A eq. 4.18 não tem solução em forma fechada, logo não é possível calcular diretamente o valor do número de ciclos (N). Para tanto, usou-se o método de Newton para realizar as iterações, usando a seguinte expressão:

$$(2N)_{i+1} = (2N)_i - \frac{\frac{\tau'_f}{G} (2N)_i^{b'} + \gamma'_f (2N)_i^{c'} - \gamma'}{\frac{\tau'_f}{G} b' (2N)_i^{b'-1} + \gamma'_f c' (2N)_i^{c'-1}}. \quad \text{eq. 4.19}$$

Nessa expressão, os valores de “2N” calculados na interação anterior, são usados para calcular a vida na interação atual. As iterações prosseguem até a convergência de “2N”.

4.1.9 Tensão em um plano qualquer.

Em um ponto qualquer do espaço passam infinitos planos. Considere um plano Δ qualquer passando por esse ponto. O plano em questão será definido pelo vetor normal (n) e dois vetores tangentes a ele e linearmente independentes entre si (l e r). Esses vetores podem ser escritos em função dos ângulos de azimuth e elevação (φ, θ). A tensão normal, de cisalhamento e a resultante são representadas pelos vetores σ_n , τ_{sp} e S_n respectivamente, conforme Figura 4.6.

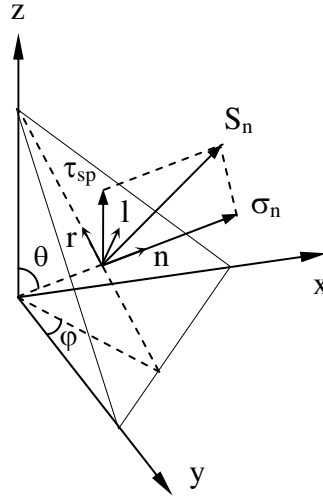


Figura 4.6: Representação das tensões atuantes em um plano Δ .

Considere agora o tensor de tensões,

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ sim & & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad \text{eq. 4.20}$$

atuante em um ponto. Pode-se escrever o tensor resultante em um plano qualquer como:

$$S_n = \sigma_{ij} n_j. \quad \text{eq. 4.21}$$

Os vetores n, r, l são escritos em função dos ângulos φ , e θ .

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi) \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{eq. 4.22}$$

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ -\cos(\theta) \text{sen}(\varphi) \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad l = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O vetor S_n é a decomposição de dois vetores: um perpendicular ao plano Δ (σ_n) e outro tangente a ele (τ_{sp}). Sendo σ_n a projeção do vetor S_n na direção normal (n), teremos:

$$\sigma_n = (S_n n_i) n_i \quad \Rightarrow \quad \sigma_n = (\sigma_{ij} n_j n_i) n_i. \quad \text{eq. 4.23}$$

Logo, o vetor da tensão de cisalhamento resultante no plano Δ será dado pela diferença entre os dois vetores acima e a magnitude pelo módulo.

$$\tau_{sp} = S_n - \sigma_n \quad \Rightarrow \quad \tau_{sp} = \sigma_{ij} n_j - (\sigma_{ij} n_j n_i) n_i. \quad \text{eq. 4.24}$$

A tensão de cisalhamento em um plano pode ser escrita também em função dos vetores r e l . Logo:

$$\tau_{sp} = n_i^T \sigma_{ij} \begin{bmatrix} l_i \\ r_i \end{bmatrix}. \quad \text{eq. 4.25}$$

4.1.10 Tensão média de cisalhamento e amplitude de tensão.

Para calcular as tensão de cisalhamento média e a amplitude de tensão em um ponto específico do material de um corpo durante um ciclo de carregamento, deve-se inicialmente

definir corretamente o conceito desses parâmetros, de forma que o procedimento de cálculo seja independente do caminho descrito pela tensão de cisalhamento ao longo do seu ciclo.

Considere o ciclo de carga complexo da Figura 4.7, onde a ponta do vetor S_n descreve uma curva fechada no espaço (Φ). Pode-se observar que a tensão normal resultante no plano σ_n mantém a sua direção constante, variando apenas a magnitude, à medida que o ciclo é traçado. Por este fato, a definição de tensão média e amplitude de tensão da tensão normal pode ser baseada apenas no valor algébrico $\sigma_{ij}n_i n_j$, que é uma função escalar do tempo. A amplitude de tensão (σ_a) será dada pela diferença entre o maior e menor valor da tensão atingida durante um ciclo e a média (σ_m) será a simples média aritmética entre elas.

$$\sigma_a = \frac{\left[\max_t (\sigma_{ij}n_i n_j) - \min_t (\sigma_{ij}n_i n_j) \right]}{2}, \quad \text{eq. 4.26}$$

$$\sigma_m = \frac{\left[\max_t (\sigma_{ij}n_i n_j) + \min_t (\sigma_{ij}n_i n_j) \right]}{2}. \quad \text{eq. 4.27}$$

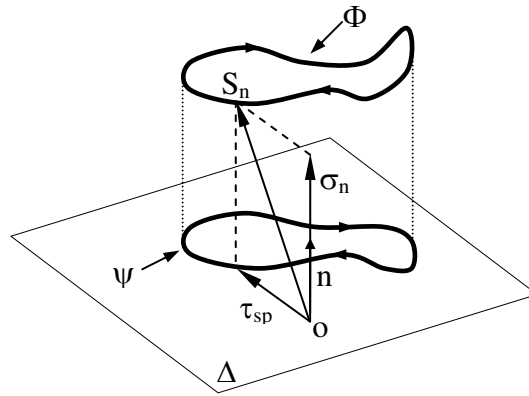


Figura 4.7: Ciclo da tensão de cisalhamento.

A abordagem fica mais complexa quando se define a amplitude e o valor médio da tensão de cisalhamento (τ_m). Isso se deve ao fato que, ao contrário da tensão normal, que conserva a sua direção ao longo de um ciclo, a tensão de cisalhamento resultante no plano muda tanto em magnitude quanto em direção durante todo ciclo de carregamento. Como se pode observar através da Figura 4.7, a extremidade do vetor τ descreve uma curva Ψ , que é a projeção de Φ no

plano, portanto τ é uma função vetorial periódica no tempo. Logo, deseja-se achar a amplitude e um valor médio de uma função vetorial.

Durante muitos anos pesquisadores propuseram métodos para determinação tanto da tensão média de cisalhamento (τ_m), quanto a sua amplitude (τ_a). Duas propostas principais para carregamento multiaxial podem ser citadas: a da maior projeção e a da maior corda (PAPADOPOULOS, 1998).

A proposta da maior projeção estabelece que várias linhas contidas no plano Δ sejam traçadas através da origem O . A curva Ψ é então projetada sobre essas linhas e a amplitude é dada pela metade da maior dessas projeções. A tensão média é a distância entre a origem (O) e o ponto médio da maior projeção. Esse método, apesar de ser bastante simples, não pode ser empregado para todos os tipos de ciclos, pois algumas situações mostraram que podem ocorrer resultados ambíguos (PAPADOPOULOS, 1998), especialmente na definição da tensão média.

A segunda proposta tenta resolver o problema através do maior diâmetro da curva Ψ . Esse método, discutido em detalhes por Lemaitre & Chaboche (1990), estabelece que sejam traçadas todas as cordas que passem por dois pontos da curva em questão. A amplitude será dada pela metade do maior diâmetro da curva. A tensão média será o segmento de reta que une a origem da curva ao ponto médio da maior corda. Essa proposta é, sem dúvida, um avanço em relação à proposta da maior projeção. Porém, também existem exemplos onde essa proposta leva a resultados ambíguos, especialmente quanto ao cálculo da tensão média. Um desses exemplos é quando a curva Ψ tem a forma de um triângulo isósceles. Outros contra-exemplos podem ser encontrados em literatura (PAPADOPOULOS, 1998).

Pode-se concluir então que os dois métodos citados apesar de darem uma definição clara da amplitude e da tensão média de cisalhamento em um ciclo de carregamento, não podem ser aplicadas a certos tipos de ciclo. Por essa razão, houve a necessidade de encontrar um método que não tivesse tais restrições com relação ao tipo de ciclo. Isso levou ao método da mínima circunferência circunscrita.

4.1.11 Mínima circunferência circunscrita

Para definir a amplitude e a tensão média de cisalhamento sem que haja ambigüidade nos resultados, ao contrário dos métodos anteriores, primeiro a tensão média (τ_m) será determinada, e só depois a amplitude (τ_a). Essa seqüência é necessária, pois a amplitude e a tensão média poderão ser calculadas qualquer que seja a forma do ciclo de tensão.

Assume-se que o vetor τ_m está localizado no plano Δ . A amplitude de tensão será igual ao segmento de reta que une a ponta do vetor τ_m , com origem em O , ao ponto mais distante da curva Ψ . O problema se resume em determinar a localização de τ_m . A proposta consiste em posicionar o vetor τ_m de forma que ele aponte para o centro da menor circunferência que circunscreva à curva em questão, conforme mostra a Figura 4.8. Logo, a amplitude de tensão será dada pelo raio desta circunferência. A essa abordagem é dado o nome de “Mínima Circunferência Circunscrita”.

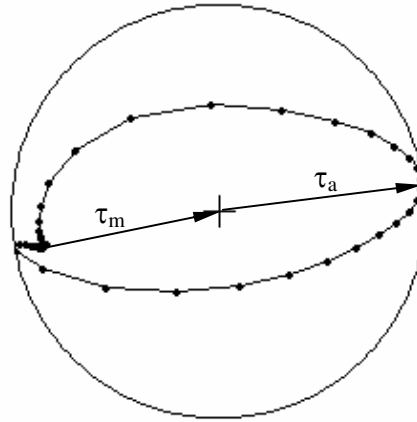


Figura 4.8: Circunferência circunscrevendo uma curva de um ciclo de tensão.

Considerando que a curva descrita pela tensão de cisalhamento é variável, para diferentes planos passando pelo mesmo ponto, conclui-se que esta é função dos ângulos φ e θ que definem um plano. Para calcular a máxima amplitude da tensão de cisalhamento (τ_a), em um determinado ponto, será necessário levar em conta diversos planos que passam por esse ponto, ou seja, buscar o maior valor de $\tau_a(\varphi, \theta)$ através de vários ângulos φ e θ , conforme relação abaixo:

$$\max \tau_a = \max_{\phi, \theta} \{ \tau_a(\phi, \theta) \}, \quad \text{eq. 4.28}$$

A proposta da mínima circunferência foi inicialmente abordada por Dang Van, Griveau & Message (1989). Porém, uma abordagem matemática imprópria para o algoritmo de cálculo da mínima circunferência foi apresentada naquele trabalho. Como será visto mais adiante, essa proposta é um típico problema de otimização chamado de “minimax”.

Considere o plano original Δ definido pela sua normal n . As tensões de cisalhamento (τ_{sp}) são computadas utilizando a eq. 4.25, para este plano, em diversos instantes de tempo t_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), ao longo de todo ciclo de carregamento. Portanto, a curva descrita por τ_{sp} é aproximada por um polígono de diversos pontos (t_i), onde quanto maior o número de intervalos de tempo, mais próximo ele estará da curva Ψ . Inicialmente, existem infinitas circunferências pertencentes a Δ que contêm o polígono em questão. A menor de todas essas circunferências é única, e é chamada de mínima circunferência circunscrita.

Matematicamente, o problema pode ser formulado da seguinte forma: inicialmente assume-se que um ponto qualquer $\mathbf{w}'$ contido no plano Δ é candidato a ser o centro da menor circunferência. Entretanto, existem infinitas delas que podem conter a curva Ψ e que podem ser traçadas com este centro. Estabelece-se que a menor dessas circunferências terá um raio R' igual ao maior segmento de reta entre todos os traçados a partir do centro $\mathbf{w}'$ até os pontos que descrevem a curva Ψ . Portanto, para um dado centro inicial $\mathbf{w}'$ o raio R' do menor círculo com este centro será dado por:

$$R' = \max_{t_i} \| \tau(t_i) - \mathbf{w}' \|. \quad \text{eq. 4.29}$$

A relação acima corresponde à parte maximizada do problema de otimização, ou seja, dado um centro arbitrário define-se como raio inicial à máxima distância entre esse centro e os pontos da curva Ψ , garantindo que esta se encontra compreendida dentro de uma circunferência inicial de raio R' .

À parte minimizada do problema “*minimax*” é apresentada da seguinte forma: após ser encontrado a circunferência centrada em um ponto candidato a centro $\mathbf{w}'$, outro ponto $\mathbf{w}''$ é escolhido, a fim de gerar outra circunferência que contenha a curva Ψ , mas com um raio R'' menor que o anterior. Esse procedimento é realizado adotando diversos centros, sempre buscando um raio menor que o anterior. Em outras palavras, busca-se minimizar a expressão anterior, variando a posição do centro ($\mathbf{w}$). Logo, a expressão completa para o problema “*minimax*”, que calcula a tensão média de cisalhamento dado um ciclo de carregamento é dada por:

$$\tau_m = \min_{\mathbf{w}} \left\{ \max_{t_i} \left\| \tau(t_i) - \mathbf{w}' \right\| \right\}. \quad \text{eq. 4.30}$$

Uma vez que o centro da mínima circunferência é encontrado, o valor da tensão média e a amplitude da tensão de cisalhamento em um determinado plano podem ser achadas pelas seguintes expressões:

$$\tau_m = \|\tau_m\|, \quad \text{eq. 4.31}$$

$$\tau_a = \max_{t_i} \left\| \tau(t_i) - \tau_m \right\|. \quad \text{eq. 4.32}$$

A resolução desse problema pode-se ser feita com a utilização de diversos tipos de algoritmos. O algoritmo de pontos combinados proposto por Papadopoulos (1998) é bastante simples. Entretanto, por ser baseado em uma análise combinatória, o tempo de resolução é diretamente proporcional ao número de pontos do ciclo. Quanto maior a discretização da curva que representa o ciclo, maior o tempo de resolução. Dang Van (1989) propôs utilizar um método incremental, onde o raio da circunferência aumentava proporcionalmente a um parâmetro $\mathbf{k}$ definido como dado de entrada do algoritmo. Esse método se mostrou rápido, porém bastante sensível à forma do ciclo e a magnitude da constante $\mathbf{k}$. Ciclos com formas variadas necessitavam de diferentes parâmetros $\mathbf{k}$ para atingir resultados precisos, além disso, o número de pontos também exerce uma grande influência na resolução do algoritmo.

Por se tratar de um problema de otimização, a melhor forma de abordá-lo é utilizando algum algoritmo próprio para esse tipo de problema (*minimax*). Este tipo de problema é abordado exaustivamente por matemáticos, existindo diversos algoritmos para resolvê-lo. O pacote

computacional MATLAB[®] possui uma função de otimização chamada “*fminimax*” implementada para problemas que envolvem maximização e minimização de funções matemáticas. Esta função foi usada anteriormente (Bernasconi, 2002) com resultados bastante precisos no cálculo da tensão média e da amplitude de tensão. Diferente das outras rotinas propostas, a função “*fminimax*” apresentou um tempo de cálculo praticamente independente do número de pontos no ciclo. Por essas razões, ela foi utilizada neste trabalho para o cálculo da tensão média e amplitude de tensão de cisalhamento. Essa rotina exige que seja definida uma função que descreva as variáveis que serão otimizadas.

4.1.12 Cálculo e acúmulo do dano

Um modelo muito comum utilizado para o acúmulo de dano é a regra de Palmgreen–Miner. Este é um critério linear, onde o dano escalar D é tomado como a soma da contribuição dos danos parciais, independentemente da ordem e da sequência em que os diferentes ciclos de carregamento são aplicados.

Assim, assume-se que ocorre falha por fadiga num ponto do material quando o montante total de dano acumulado D atinge o valor entre 0,7 e 2,3, normalmente 1,0 (Shigley, 2004).

$$D = \sum_{i=1}^m D_i = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{N_i}. \quad \text{eq. 4.33}$$

O número N_i representa a vida em fadiga em um nível único de tensão, no qual n_i ciclos são aplicados. O valor de D que corresponde à falha, inicialmente assumido igual a 1, pode ser ajustado com base em dados de laboratório ou dados da vida em serviço real da roda.

Isto acontece em muitas aplicações, pois o valor $D = 1$ não está de acordo com resultados de experimentos e estatísticas de dano. Muitas sugestões têm sido feitas sobre como ajustar a regra de Palmgreen–Miner, sendo que as abordagens são as mais variadas possíveis. Ekberg (Ekberg, 1995) comparou as principais delas. Além disso, parte de seus estudos a análise de um valor para calibrar o dano D com dados experimentais e por probabilidade (Ekberg, 1996).

4.2 Plasticidade.

Este tópico trata de conceitos sobre os parâmetros envolvidos na análise de tensões com corpos em regime elastoplástico. Para caracterizar a lei constitutiva do material, certos critérios devem ser bem definidos de acordo com o tipo de problema e material com o qual se está trabalhando. Uma breve explicação dos critérios de escoamento, de fluxo plástico e de encruamento a serem utilizados, bem como a escolha do tipo dentro de cada um deles, é apresentada a seguir, a fim de determinar o modelo de plasticidade adequado ao contato roda – trilha.

4.2.1 Conceitos básicos de plasticidade.

Ensaaios uniaxiais de tração de materiais dúcteis apresentam a curva tensão – deformação do tipo mostrada Figura 4.9. Considerando, inicialmente, o corpo sujeito a uma carga que segue o caminho $O_oY_oZ_o$, sua tensão axial será elevada de zero a um valor σ_o . Durante esse caminho, o trecho O_oY_o é reto e caso o corpo seja descarregado do ponto Y_o , ele retorna ao seu estado de tensão e deformação inicial no ponto O_o . Nesse segmento o material é dito de comportamento linear elástico. Além do ponto Y_o , a inclinação curva muda significativamente. Quando o carregamento é invertido no ponto Z_o , o corpo retorna a um estado sem tensão (Z_oO_I), mas com uma permanente mudança de forma. Essa mudança na forma do corpo é representada por uma deformação permanente ε_p . Recarregando monotonicamente o corpo para uma tensão σ_1 , ele seguirá o caminho $O_IY_IZ_I$. Semelhante ao caminho elástico inicial (O_oY_o), o segmento O_IY_I é reto. Isso mostra que descarregando a partir do ponto Y_I , este será trazido para o estado de tensão nula, sem que ocorra nenhum acréscimo na deformação plástica. Caso o corpo seja carregado novamente além do ponto Y_I , mais deformação plástica deve ocorrer.

A partir da descrição feita acima, pode-se extrair algumas importantes propriedades usadas na construção de um modelo constitutivo de plasticidade. São elas:

1. A existência de um domínio elástico, dentro do qual o material é dito puramente elástico, isto é, não há nenhum desenvolvimento de deformação permanente

(plástica). Esse domínio elástico é delimitado pelo *limite de escoamento*. Veja que os segmentos O_oY_o e O_IY_I definem domínios elásticos em dois diferentes estados, associados aos limites de escoamento dos pontos Y_o e Y_I .

2. Quando o material é carregado além do limite de escoamento, deformações plásticas ocorrem, proporcionando sua evolução (acúmulo).
3. Junto com a evolução das deformações plásticas, observa-se também a evolução da próprio limite de escoamento. Isso é visto pela diferença de tensão para atingir os pontos Y_o e Y_I .

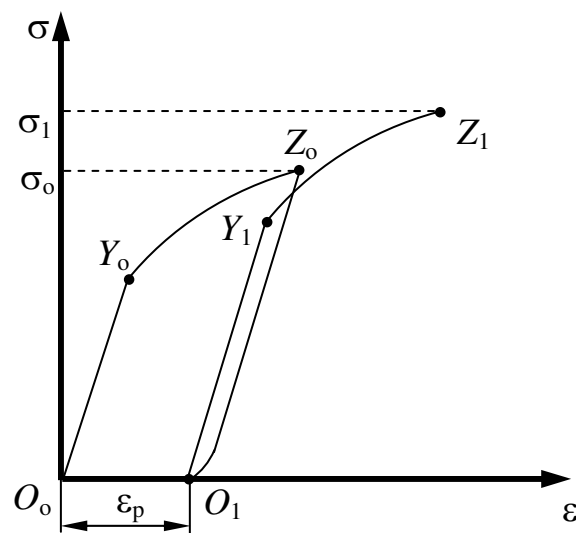


Figura 4.9: Gráfico tensão – deformação uniaxial para materiais dúcteis.

Vale salientar que essas propriedades são observadas não só em metais, mas também em concreto, plásticos, rochas e muitos outros. Nos itens a seguir será formulado o modelo constitutivo usado na plasticidade, usando os conceitos definidos acima. Os elementos contidos nesse modelo formam as bases da Teoria de Plasticidade.

4.2.2 Decomposição elastoplástica do tensor deformação.

A partir da curva tensão – deformação apresentada no item anterior, pode-se derivar uma versão idealizada desta, conforme mostra Figura 4.10. Primeiramente, a diferença entre o descarregamento e o recarregamento é ignorada (segmento Z_oO_I e O_IY_I na Figura 4.9), fazendo

com que os pontos Z_o e Y_l coincidam. Durante o escoamento plástico, a curva tensão – deformação segue o caminho $O_oY_oY_lZ_l$. Essa curva é obtida sempre que uma carga continua é aplicada, a partir do estado livre de tensões O_o .

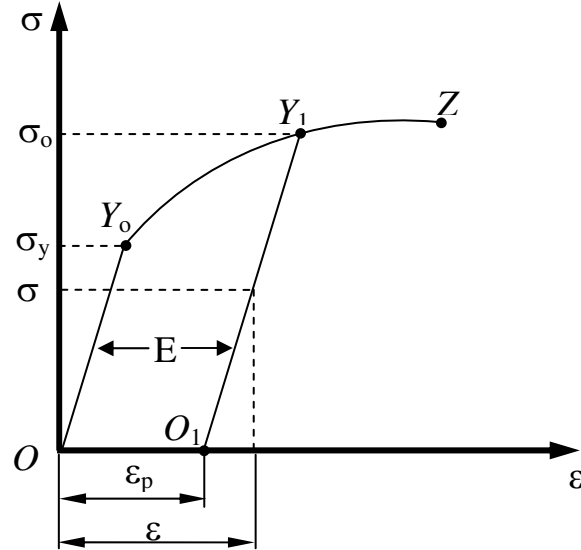


Figura 4.10: Gráfico tensão – deformação uniaxial. Modelo matemático.

Conforme visto, caso haja um descarregamento a partir do ponto Y_l , haverá deformação plástica. Logo, o comportamento do corpo no segmento O_lY_l é considerado elástico com uma deformação plástica ϵ_p e limite de escoamento σ_y . Para uma tensão σ qualquer dentro do trecho O_lY_l , será válida a seguinte expressão:

$$\sigma = E(\epsilon - \epsilon_p), \quad \text{eq. 4.34}$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e ϵ a deformação total. Note que a diferença entre a deformação total (ϵ) e a plástica (ϵ_p) é completamente reversível, não acarretando mais acúmulo de deformações plásticas. Isso motiva a decomposição da deformação total.

Uma das hipóteses mais importantes que compõem a parte de pequenas deformações da Teoria da Plasticidade é o da decomposição da deformação total, ϵ , na soma de uma componente elástica (reversível), ϵ_e , e uma componente plástica (permanente) ϵ_p :

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p. \quad \text{eq. 4.35}$$

Sendo assim, a deformação elástica uniaxial é definida como:

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_p. \quad \text{eq. 4.36}$$

As expressões anteriores são válidas para situações unidimensionais (uniaxial). Entretanto, para um caso generalizado (tridimensional) de deformação, podemos proceder da mesma forma separando o tensor de *deformação total* $\{\varepsilon\}$ na soma de um tensor *elástico* $\{\varepsilon_e\}$ e um tensor *plástico* $\{\varepsilon_p\}$.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_e\} + \{\varepsilon_p\}. \quad \text{eq. 4.37}$$

A lei constitutiva elástica pode ser expressa, para o caso multiaxial, como:

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon_e\}. \quad \text{eq. 4.38}$$

4.2.3 Critério de escoamento (“Yield Criterion”).

Conforme determinado anteriormente, a existência de um domínio elástico delimitado por um limite de escoamento torna necessária a definição de uma função de escoamento, que tem a seguinte forma:

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y, \quad \text{eq. 4.39}$$

onde σ_y é a tensão de escoamento uniaxial. Esta expressão é válida para o caso unidimensional.

Portanto, a partir do conceito de escoamento apresentado no item anterior, o domínio elástico irá abranger todos os pontos situados em:

$$|\sigma| < \sigma_y. \quad \text{eq. 4.40}$$

Com isso, podemos concluir que nenhuma tensão acima da de escoamento é permitida. As tensões no ponto, ou estão dentro do domínio elástico ($\Phi(\sigma, \sigma_y) < 0$), ou no contorno deste $\Phi(\sigma, \sigma_y) = 0$. Sendo assim, toda e qualquer tensão, tem que satisfazer a seguinte expressão:

$$\Phi(\sigma, \sigma_y) \leq 0. \quad \text{eq. 4.41}$$

Caso as tensões estejam no contorno do domínio elástico, ou um descarregamento elástico, ou escoamento plástico ocorrerá. Para tensões além do limite elástico (fora do domínio), correções deverão ser feitas à tensão e ao domínio elástico. Isso será explicado mais adiante.

As expressões anteriores são válidas para um estado uniaxial de tensão. Quando a função de escoamento tiver valor negativo apenas deformações elásticas ocorrerão. Para o caso tridimensional de tensão os mesmos conceitos serão válidos. Logo, a eq. 4.41 pode ser reescrita como:

$$\Phi(\sigma, A) \leq 0, \quad \text{eq. 4.42}$$

onde Φ , que é a função de escoamento, agora é função do estado de tensão no ponto σ , e um conjunto de “forças termodinâmicas de encruamento” (A). Essas forças irão assumir valores de parâmetros que dependerão do modelo de encruamento a ser usado. A seguir, será apresentado o critério de escoamento usado para o modelo deste trabalho.

4.2.3.1 Critério de Von Mises

Proposto por Von Mises (in NORTON, 2000; DIETER, 1988), este critério de escoamento é o mais aplicado aos metais dúcteis. Ele estabelece que o escoamento irá acontecer quando o segundo invariante do tensor desvio (J_2) atingir um valor crítico.

$$J_2(s) = R(\alpha). \quad \text{eq. 4.43}$$

O valor crítico R é função de uma variável interna de encruamento α , que será definida posteriormente. Esse critério pode ser caracterizado como um critério de energia, onde apenas a energia de distorção armazenada no material pode causar plasticidade. Ou seja, somente o tensor desvio causará escoamento no material. O segundo invariante J_2 é função das tensões do tensor desvio dado pela eq. 4.3:

$$s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0, \quad \text{eq. 4.44}$$

$$J_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\tau_{xy} + 2\tau_{xz} + 2\tau_{yz}. \quad \text{eq. 4.45}$$

Define-se como tensão equivalente de Von Mises:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{3J_2(s)}. \quad \text{eq. 4.46}$$

Logo a função de escoamento ficará:

$$\Phi(\sigma) = \sqrt{3J_2(s)} - \sigma_y. \quad \text{eq. 4.47}$$

O escoamento ocorrerá caso o valor $\Phi(\sigma)$ seja maior que zero.

Diversos outros critérios de escoamento como critério de Tresca, Mohr–Coulomb, Drucker–Prager, Hill, podem ser achados em literatura (ZIENKIEWICZ. & TAYLOR, 2000; COOK, 1995). O critério de Von Mises, por ser amplamente usado em materiais dúcteis isotrópicos, como o do caso em estudo, foi o adotado neste trabalho.

4.2.4 Critério de fluxo plástico (“Plastic Flow Criterion”).

As expressões anteriores definiram o critério de escoamento plástico, ou seja, quando as deformações plásticas começam a ocorrer. Adota-se que, quando houver plasticidade, a taxa de deformação plástica $\dot{\epsilon}_p$ será positiva em tração e negativa em compressão. O fluxo plástico estabelece como as deformações plásticas irão evoluir (direção, sentido) ao longo do encruamento do material. Portanto, o critério de fluxo plástico para um modelo uniaxial pode ser expresso como:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \text{sign}(\sigma), \quad \text{eq. 4.48}$$

onde sign é definido como:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} +1 & \text{se } a \geq 0 \\ -1 & \text{se } a < 0 \end{cases}. \quad \text{eq. 4.49}$$

Na expressão anterior, $\dot{\gamma}$ é um escalar denominado *multiplicador plástico*. O termo $sign(\sigma)$ irá indicar a direção em que as deformações plásticas irão evoluir.

Uma das condições impostas para o cálculo do multiplicador plástico é que ele não assuma valores negativos, ou seja:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \text{eq. 4.50}$$

e também que satisfaça:

$$\Phi \dot{\gamma} = 0. \quad \text{eq. 4.51}$$

As eq. 4.50 e eq. 4.51 estabelecem que, segundo o critério de escoamento, a taxa de deformação plástica é nula dentro do domínio elástico. Então:

$$\Phi < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}_p = 0. \quad \text{eq. 4.52}$$

Caso a tensão coincida com o limite de escoamento atual, fluxo plástico irá ocorrer, logo:

$$\Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}_p \neq 0. \quad \text{eq. 4.53}$$

As eq. 4.51, eq. 4.52 e eq. 4.53 podem ser combinadas, levando a:

$$\Phi \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi \dot{\gamma} = 0. \quad \text{eq. 4.54}$$

As expressões acima são válidas para casos uniaxiais de tensão. Para a formulação do fluxo plástico em uma situação mais geral (tridimensional), é necessário definir além da taxa de deformação plástica, variáveis internas, que são variáveis associadas ao fenômeno dissipativo. Para o critério de fluxo plástico, a variável interna é o próprio tensor de deformação plástica. Outras variáveis surgirão quando da definição do critério de encruamento. Logo, para o fluxo plástico:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} N, \quad \text{eq. 4.55}$$

onde o tensor N é denominado tensor de fluxo, e é dado por:

$$N = N(\sigma, A). \quad \text{eq. 4.56}$$

Nessa expressão, N é a direção do tensor de deformação plástica durante sua evolução. O parâmetro A representa as forças de encruamento que serão definidas em função do modelo de encruamento adotado. Essas expressões definem as condições sob as quais a evolução das deformações plásticas irá ocorrer.

4.2.4.1 Função de fluxo

Na formulação de modelos de plasticidade multidimensionais é conveniente definir o critério de fluxo plástico de forma mais genérica, em termos de uma função de fluxo, ou potência plástica. Essa potência é dada na forma de uma função Ψ , que tem a seguinte forma geral:

$$\Psi = \Psi(\sigma, A). \quad \text{eq. 4.57}$$

Sendo assim, o tensor de fluxo N pode ser rescrito como:

$$N = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad \text{eq. 4.58}$$

e a eq. 4.55 como:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}. \quad \text{eq. 4.59}$$

Nota-se, com essa definição, que a função de fluxo só faz sentido quando ela é diferenciável. Sendo assim, o tensor N pode ser interpretado como sendo um tensor normal à superfície de Ψ , em um espaço tensorial n .

Apesar da função Ψ ser diferenciável nos casos mais simples de plasticidade, muitas vezes o modelo de plasticidade estudado requer o uso de funções que não são diferenciáveis. Tais casos não serão abordados nesse trabalho, uma vez que o modelo de plasticidade requerido pelo material usado não utiliza funções de fluxo desse tipo. A seguir veremos os tipos mais comuns de função de fluxo

4.2.4.2 Plasticidade associativa e o critério de Prandtl–Reuss.

Um modelo de plasticidade é classificado como *associativo* quando a função de fluxo (Ψ) plástico é definida como sendo a própria função de escoamento (Φ) do critério adotado:

$$\Psi \equiv \Phi. \quad \text{eq. 4.60}$$

Qualquer outra escolha diferente para a função de fluxo plástico, vai caracterizar o modelo de plasticidade como *não-associativo*. Logo, a taxa de deformação plástica pode ser reescrita substituindo a eq. 4.60 na eq. 4.59:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \quad \text{eq. 4.61}$$

Pode-se observar que a direção das deformações plásticas é normal à superfície de escoamento. Metais e outros materiais que exibem comportamento inelástico incompressível adotam esse tipo de modelo. Para os modelos não-associativos a taxa de deformação plástica não é normal à *superfície de escoamento*.

Quando se substitui a função de escoamento de Von Mises na função de fluxo plástico, obtém-se a regra de fluxo plástico de Prandtl–Reuss. Assim, para o vetor de fluxo:

$$N = \frac{\partial (\sqrt{3J_2(s)})}{\sigma}, \quad \text{eq. 4.62}$$
$$N = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s}{\|s\|}.$$

Logo o critério de fluxo fica:

$$\dot{\epsilon}_p = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s}{\|s\|}. \quad \text{eq. 4.63}$$

Na Figura 4.11 tem-se uma representação gráfica da regra de Prandtl – Reuss. Esse critério é geralmente usado em conjunto com o critério de Von Mises. Essa junção é usualmente conhecida como o *modelo associativo de Von Mises*.

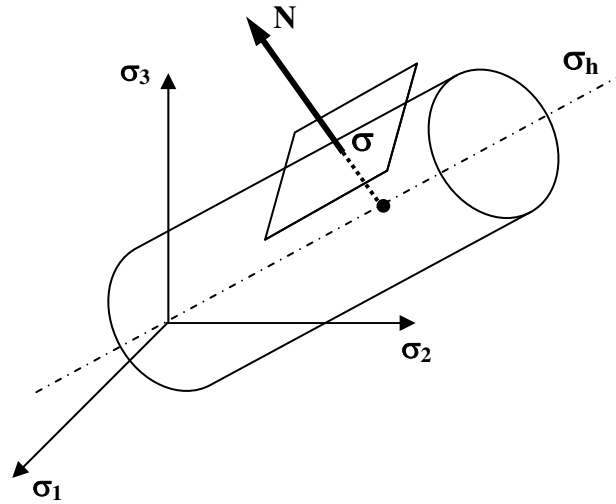


Figura 4.11: Vetor de fluxo de Prandtl – Reuss.

4.2.5 Critério de encruamento (“Hardening Criterion”).

Completando a caracterização do modelo constitutivo de plasticidade tem-se o critério de encruamento ou lei de encruamento (endurecimento). Como dito anteriormente, uma “evolução” da função de escoamento é acompanhada de uma “evolução” da deformação plástica. Essa “evolução” é conhecida por encruamento ou endurecimento (“hardening”) e descreve como a “superfície” de escoamento muda (em tamanho, forma, posição) em consequência das deformações plásticas.

Considerando inicialmente um modelo uniaxial, o encruamento será incorporado assumindo que a tensão de escoamento é dada por:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p), \quad \text{eq. 4.64}$$

onde $\bar{\varepsilon}_p$ é a deformação plástica acumulada axial definida por:

$$\bar{\varepsilon}_p = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_p| dt. \quad \text{eq. 4.65}$$

Para um ensaio uniaxial temos:

$$\bar{\varepsilon}_p = \begin{cases} \varepsilon_p & (tração) \\ -\varepsilon_p & (compressão) \end{cases} \quad \text{eq. 4.66}$$

Então podemos escrever:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = |\dot{\varepsilon}_p|. \quad \text{eq. 4.67}$$

Tomando como base a eq. 4.48, temos para o caso uniaxial:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_p = \dot{\gamma}. \quad \text{eq. 4.68}$$

As expressões apresentadas são válidas para o caso uniaxial, onde a tensão de escoamento varia em função da deformação plástica acumulada. Para casos bidimensionais ou tridimensionais, o encruamento é representado pelas mudanças na força termodinâmica de encruamento (A) após o escoamento plástico. Essas mudanças afetam o tamanho, a forma e a orientação da superfície de escoamento definida pela eq. 4.42. Outros parâmetros que devem ser definidos, afim de que o encruamento seja equacionado, são as variáveis internas (α). Essas variáveis complementam o critério de fluxo plástico (eq. 4.55) e são dadas pela forma:

$$\dot{\alpha} = \dot{\gamma}H, \quad \text{eq. 4.69}$$

onde, H é o módulo de encruamento, que define a evolução das variáveis de encruamento, e é dado por:

$$H = H(\sigma, A). \quad \text{eq. 4.70}$$

Usando o conceito de fluxo plástico, podemos escrever o módulo de encruamento em função da função de fluxo plástico:

$$H = -\frac{\partial \Psi}{\partial A}. \quad \text{eq. 4.71}$$

Reescrevendo a eq. 4.69:

$$\dot{\alpha} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial A}. \quad \text{eq. 4.72}$$

Os modelos de encruamento mais comuns utilizados são apresentados a seguir.

4.2.5.1 Encruamento isotrópico (“Isotropic hardening”)

O modelo é dito isotrópico quando a evolução da superfície de escoamento é, durante o encruamento, uma expansão uniforme da superfície original. Não há translação, apenas aumento de tamanho, conforme Figura 4.12.

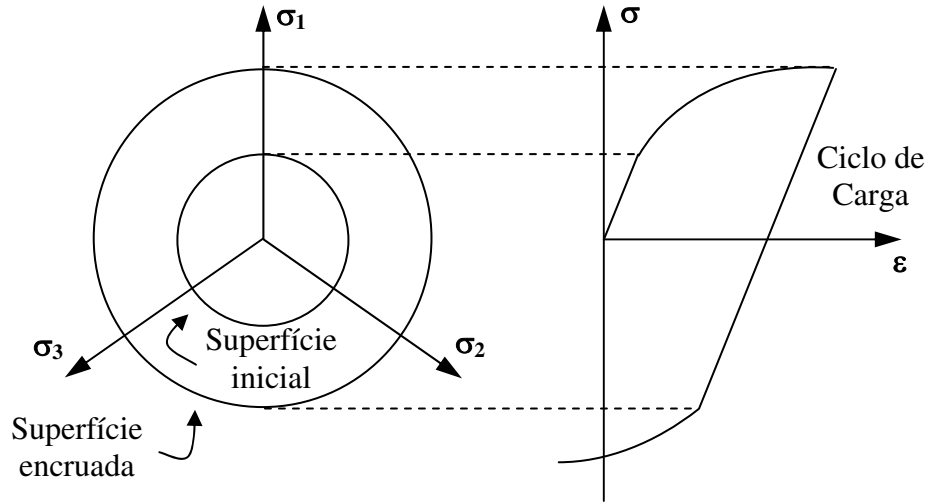


Figura 4.12: Modelo de encruamento isotrópico.

Para definir as variáveis internas associadas a esse modelo, uma abordagem específica deve ser adotada, visando definir como a tensão de escoamento irá evoluir. A abordagem mais comum é através da deformação de encruamento (“Strain Hardening”). Esse modelo usa a deformação plástica efetiva ($\bar{\epsilon}_p$) como variável interna de encruamento isotrópico. Ela também é conhecida como deformação plástica acumulada. É expressa por:

$$\bar{\epsilon}_p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p} dt = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}_p\| dt. \quad \text{eq. 4.73}$$

E sua taxa é dada por:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_p : \dot{\epsilon}_p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\dot{\epsilon}_p\|. \quad \text{eq. 4.74}$$

Portanto, o tamanho da superfície de escoamento será afetado, fazendo a tensão de escoamento em função de $\bar{\varepsilon}_p$. Logo:

$$\sigma_y = \sigma_y(\bar{\varepsilon}_p). \quad \text{eq. 4.75}$$

A eq. 4.75 define a chamada curva de encruamento, que é a única propriedade plástica determinada experimentalmente. Se a relação entre σ_y e $\bar{\varepsilon}_p$ for linear, tem-se um modelo de encruamento linear; senão, será dito encruamento não-linear.

A força termodinâmica de encruamento (A) será a inclinação da curva de encruamento dada pela tensão de escoamento em função da deformação plástica efetiva. Logo, considerando uma tensão de escoamento inicial (σ_{y0}), referente ao estado inicial do material, temos:

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}_p) = \sigma_{y0} + A(\bar{\varepsilon}_p). \quad \text{eq. 4.76}$$

Usando a eq. 4.72 juntamente com a definição da variável interna (eq. 4.74) e o conceito de fluxo plástico associativo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_p &= -\dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial A} = -\dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial A}, \\ \dot{\bar{\varepsilon}}_p &= \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad \text{eq. 4.77}$$

4.2.5.2 Encruamento cinemático (“Kinematic hardening”) – O Efeito Bauschinger

Quando a superfície de escoamento preserva a sua forma e tamanho, mas translada no espaço tensorial, o encruamento é dito cinemático. Esse tipo de encruamento é frequentemente observado em experimentos que, após o carregamento e encruamento em uma direção, o material apresenta uma diminuição na resistência ao escoamento no sentido oposto. Esse fenômeno é conhecido como o *Efeito Bauschinger*. A Figura 4.13 ilustra esse efeito juntamente com a evolução da superfície de escoamento. Então, a expressão para o modelos de Von Mises com encruamento cinemático, fica:

$$\Phi(\sigma, \beta) = \sqrt{3J_2(s(\sigma) - \beta)} - \sigma_y, \quad \text{eq. 4.78}$$

onde o tensor β é a força de encruamento cinemático, conhecido como “back-stress”. A tensão σ_y é a constante que define o raio da superfície de escoamento.

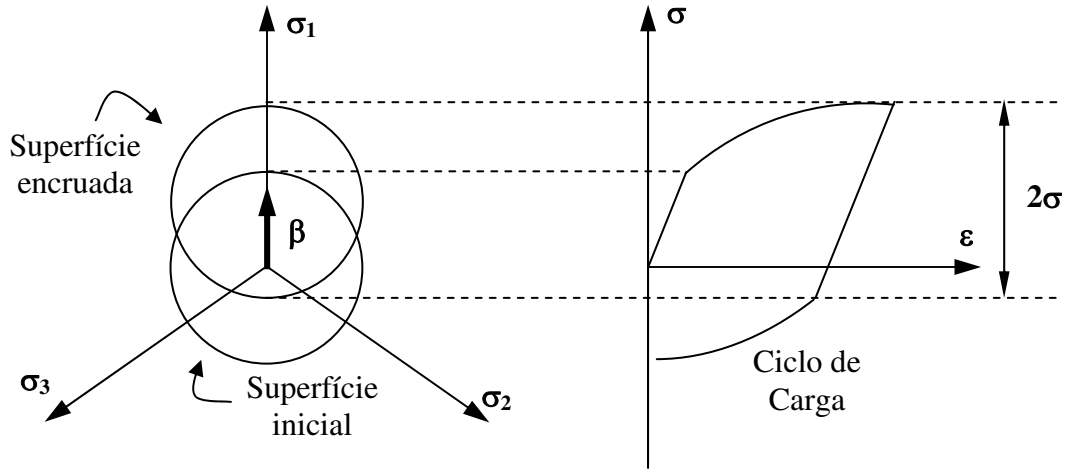


Figura 4.13: Modelo de encruamento cinemático.

O “back-stress” pode ser entendido com o tensor de translação da superfície de escoamento no espaço de tensões. Observando a eq. 4.78, pode-se introduzir o encruamento cinemático em outros modelos de plasticidade, substituindo o $s(\sigma)$ pela diferença $s(\sigma) - \beta$ na definição da função de escoamento.

4.2.5.3 Modelo de encruamento linear de Prager

Para completar o conceito de encruamento cinemático apresentado, é necessário definir a expressão para o cálculo do tensor desvio (“back-stress”). Uma das regras mais comuns é a de Prager, caracterizada por ser linear. Segundo esta regra, a taxa de evolução de β é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{2}{3} H \dot{\epsilon}_p, \\ \dot{\beta} &= \frac{2}{3} H \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma},\end{aligned}\tag{eq. 4.79}$$

onde, H agora é o módulo de encruamento cinemático linear.

Uma variação do modelo linear de Prager pode ser obtida, substituindo o módulo de encruamento constante (H), por uma função genérica da deformação plástica efetiva.

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \frac{2}{3} H(\bar{\varepsilon}_p) \dot{\varepsilon}_p, \\ \dot{\beta} &= \frac{2}{3} H(\bar{\varepsilon}_p) \dot{\gamma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma},\end{aligned}\tag{eq. 4.80}$$

onde,

$$H(\bar{\varepsilon}_p) = \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial \bar{\varepsilon}_p}.\tag{eq. 4.81}$$

O parâmetro $\bar{\beta}$ dado pela eq. 4.82, que define a curva de encruamento cinemática. Esta curva pode ser obtida através de um ensaio de tração uniaxial com reversão de carga.

$$\bar{\beta} = \bar{\beta}(\bar{\varepsilon}_p).\tag{eq. 4.82}$$

Como podemos notar das expressões anteriores, a força termodinâmica de encruamento, cinemático nesse caso é o próprio tensor β . A variável interna é a própria deformação plástica, pois:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.\tag{eq. 4.83}$$

Capítulo 5

Modelagem numérica

Ao longo das últimas décadas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido constantemente aperfeiçoado devido ao surgimento de problemas cada vez mais complexos, que requerem ferramentas mais elaboradas e completas, que possam propor soluções a estes problemas. Os princípios do MEF foram descobertos no início do século passado e na década de 40 foi publicado o primeiro trabalho matemático sobre o assunto. Na década de 50, engenheiros aplicaram o método na indústria aeronáutica, no modelamento de asas de avião. Durante as décadas de 60 e 70 o desenvolvimento da computação e da micro computação contribuiu para o surgimento de pacotes computacionais multidisciplinares que ajudaram na resolução de problemas que antes seriam considerados impossíveis de serem solucionados.

Diversos problemas na engenharia são extremamente difíceis de serem solucionados por uma medição direta das grandezas que se deseja obter. Apesar de a medição experimental ser um método preciso para fornecer os valores efetivos dos parâmetros desejados, muitas vezes esse procedimento é custoso e sensível, tornando os resultados imprecisos. Apesar desses revezes, o experimento prático, quando bem sucedido, pode fornecer informações para ajustar o modelo numérico, de forma a torná-lo cada vez mais próximo do resultado real.

Métodos analíticos também são muito usados na engenharia, especialmente para cálculo de tensão e deformação. Entretanto, apesar de serem relativamente fácil de trabalhar e de oferecerem um tempo de resposta pequeno, métodos analíticos são, na sua maioria, restritos ao regime estático e a casos ideais.

Sendo assim, métodos numéricos como o Método dos Elementos Finitos, tornam-se necessários para resolver problemas cuja solução não é possível ou viável através dos métodos mais diretos ou simples.

5.1 Contato roda–trilho

A forma da região de contato entre uma roda e um trilho é definida por uma elipse. Essa região é calculada utilizando a Teoria de Hertz (Hertz, 1882), aceita até os dias de hoje para o cálculo da área de contato entre dois corpos elásticos. A região de contato é função dos raios de curvatura da roda e do trilho, do carregamento e de propriedades dos materiais envolvidos. Entretanto, para fazer uso da dessa teoria, é necessário se ater a algumas limitações, conforme foi descrito no item 3.4.

A solução exata para o cálculo das tensões superficiais de contato foi apresentada por Hertz. Essas tensões porém, estão limitadas ao contato entre corpos perfeitamente elásticos sem fricção (conforme diz a sua teoria). Sendo assim, a aplicação da Teoria de Hertz no contato entre uma roda ferroviária e um trilho torna-se ainda mais incompleta quando se leva em consideração os fenômenos da plasticidade e do escorregamento, presentes no contato roda – trilho.

Para um carregamento de 120 toneladas por vagão (30 toneladas por eixo e 15 toneladas por roda) ou mais, a área de contato que se desenvolve na interface é pequena, e tensões equivalentes máximas da ordem de 900 MPa podem ser desenvolvidas segundo a Teoria de Hertz (Santos, 2000). O limite de escoamento do aço da roda, conforme ensaio realizado, equivale à aproximadamente 750 MPa, tornando assim, inevitável a ocorrência de escoamento e formação de uma região plástica no contato. Como há escoamento, as tensões efetivamente desenvolvidas no contato roda – trilho se encontram abaixo do valor calculado pela Teoria de Hertz.

O outro fator importante que está presente quando se trata de contato roda – trilho é o desenvolvimento de forças tangenciais na região de contato. Estas forças são provenientes do comportamento dinâmico do veículo e podem contribuir para o aumento das tensões de

cisalhamento superficial, tornando a falha por escamação (“shelling”) mais significativa, conforme estudos recentes de Santos (2000).

Diante dos diversos fatores a considerar, a busca de novas ferramentas para o cálculo das tensões de contato entre dois corpos tornou-se inevitável. Com o avanço dos métodos numéricos nas últimas décadas, aliado ao progresso na área softwares computacionais, o Método dos Elementos Finitos tornou-se uma ferramenta fundamental para a determinação de tensões de contato, permitindo levar em consideração diversos fatores excluídos das teorias analíticas desenvolvidas até o momento. Com isso, um modelo de contato roda–rilho pode ser desenvolvido em software computacional, levando-se em consideração não só a não – linearidade do material, a plasticidade, mas também a não–linearidade geométrica no contato propriamente dito entre a roda e o trilho. Além disso, o rolamento da roda sobre o trilho também será considerado. Como a análise será feita em regime elastoplástico, tensões e deformações residuais são esperadas. Tudo isso irá permitir determinar com maior realismo as tensões geradas no contato. Apesar do modelo atual ainda não conter todos os parâmetros envolvidos no contato roda–trilho, ele fornece as tensões residuais estabilizadas na roda após diversos ciclos de carregamento.

5.2 Modelo de tratamento térmico inicial

Rodas ferroviárias, durante a sua vida em serviço, estão sujeitas a carregamentos mecânicos e térmicos. Esses carregamentos podem levar as rodas à falhas pelo surgimento de trincas, tanto na superfície de rolamento, quanto embaixo dela.

Para evitar que essas trincas surjam e se propaguem, causando até o rompimento por completo da roda, uma das possibilidades existentes é que estas sejam fabricadas com tensões de compressão na região do aro. Essas tensões de compressão provêm exclusivamente do tratamento térmico sofrido pela roda, na superfície de rolamento, durante o seu processo de fabricação. As rodas fabricadas através do processo de forjamento são, geralmente, mais resistentes que as rodas fabricadas por fundição (MINICUCCI, 2003).

Durante o processo de fabricação de uma roda ferroviária forjada existem certas etapas que devem ser conhecidas e compreendidas, a fim de que se possa obter o estado final de tensões residuais. Através de contato com a empresa MWL foi possível realizar uma visita às instalações da fábrica e acompanhar o processo de tratamento térmico que cria as tensões residuais da roda. Para esse tipo de roda, o processo que induz tensões residuais é o da têmpera e revenimento.

A fim de simular numericamente as etapas do tratamento térmico sofrido pela roda e, por consequência, determinar as tensões residuais de fabricação, torna-se necessário construir um modelo elastoplástico representativo da roda. O tipo de análise utilizado será térmico – estrutural transiente, pois todo carregamento aplicado é de origem térmica e irá causar as tensões residuais que se quer medir. Além disso, a duração da aplicação das cargas térmicas será levada em consideração, conforme o procedimento do próprio tratamento térmico. Para realizar essa análise, utilizou-se do Método dos Elementos Finitos (MEF) através do pacote comercial ANSYS® v.10.0.

Como esta análise vai ser seguida de uma análise de contato mecânico, que utiliza apenas elementos puramente estruturais, ela foi dividida em duas partes distintas: térmica e depois estrutural. Esta simulação poderia ser feita em uma só parte, com a análise térmica e a estrutural sendo realizadas de uma só vez. Para isso seria usado um tipo de elemento multidisciplinar (“couple field”) que trabalha simultaneamente com grandezas de vários campos. Entretanto, como na sequência da simulação do processo de tratamento térmico será simulado o contato mecânico entre a roda e o trilho, esse elemento multidisciplinar não iria ser compatível com o elemento elastoplástico requerido para a análise de contato. Sendo assim, para análise térmica usou-se um elemento térmico, com apenas um grau de liberdade, a temperatura.

Primeiramente, todo o processo de tratamento térmico foi simulado, armazenando-se toda distribuição de temperatura ao longo da roda para cada instante de aplicação e para todas as etapas: do processo de têmpera, revenimento e resfriamento. De posse desses resultados, trocou-se o tipo de elemento, para um que suporte deslocamentos e plasticidade. As temperaturas armazenadas na etapa anterior, correspondente a cada instante e a cada etapa, são aplicadas como carregamento nodal. É muito importante que a aplicação da carga seja feita pelas temperaturas

gravadas em cada instante, pois como o processo envolve não-linearidade (plasticidade), a resposta do sistema também é não-linear. Com isso, caso sejam considerados apenas os valores finais das temperaturas, estas seriam aplicadas linearmente, acarretando uma resposta diferente da desejada.

Os tópicos a seguir descrevem as etapas do tratamento térmico. Cada uma será simulada por elementos finitos ao longo desse trabalho.

5.2.1 Etapa 1: Pré-aquecimento (austenitização)

Durante o processo de indução de tensões residuais por têmpera e revenimento, serão impostas diferentes condições de contorno à roda. Inicialmente assume-se que a roda está a uma temperatura uniforme, que geralmente é maior do que a temperatura de austenitização.

No processo de forjamento, altas tensões residuais são criadas devido à deformação plástica causada pela conformação plástica da roda. Isso acarreta um pré-revenimento, a uma temperatura elevada, por tempo suficiente para que sejam removidas essas tensões indesejadas. Para fins de simulação numérica, assume-se que no início do processo de têmpera – revenimento a roda estará livre de qualquer tensão residual, na temperatura de austenitização, desprezando-se assim essa etapa de pré-revenimento.

5.2.2 Etapa 2: Têmpera

Após a roda sofrer o pré-aquecimento, esta colocada em um recipiente na posição horizontal com diversos jatos d'água apontados para a superfície de rolamento. Através desses jatos e com a roda girando a certa velocidade, a pista de rolamento, assim como todo o aro, sofrerá um resfriamento brusco. Isso causará um endurecimento nessa região. Enquanto isso, a alma e o cubo da roda permanecem quentes e de certa forma “moles”. Posteriormente, quando o cubo e alma da roda esfriarem e se contraírem, tensões residuais circunferenciais de compressão surgirão no aro. A Figura 5.1 ilustra esse processo.

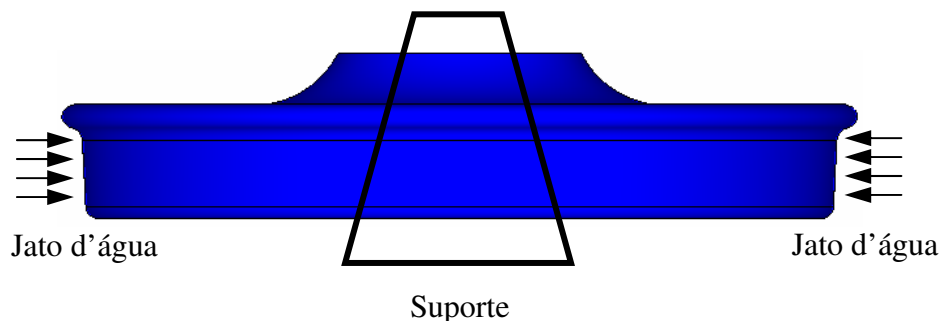


Figura 5.1: Processo de têmpera sofrido pela roda.

Estes tipos de tensões residuais de compressão na superfície são extremamente desejados, pois elas previnem que trincas nucleadas, se propagem radialmente através do aro da roda. Isso pode ser visto na Figura 5.2.

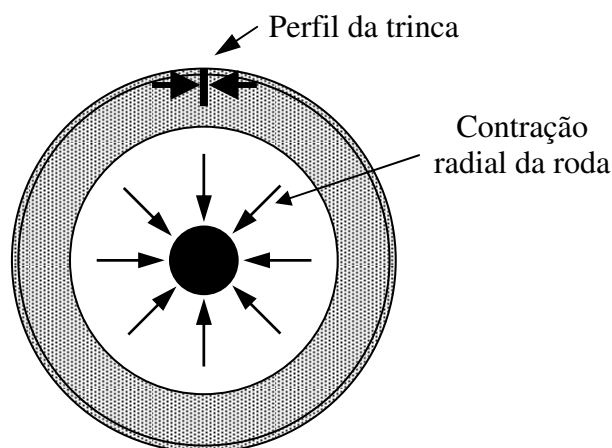


Figura 5.2: Efeito da tensão residual circunferencial de compressão em uma trinca radial.

5.2.3 Etapa 3: Revenimento

Na seqüência da têmpera tem-se o revenimento, que consiste no reaquecimento da roda a uma temperatura de aproximadamente 550° C. A finalidade dessa etapa é produzir um alívio das tensões originadas na têmpera pela transformação de qualquer estrutura martensítica presente em esferodite, aumentando assim a tenacidade à fratura. Este processo pode ser executado em qualquer temperatura abaixo da temperatura de início da austenitização.

5.2.4 Etapa 4: Resfriamento

Nessa etapa a roda é resfriada até a temperatura ambiente (30°C) em convecção livre. O resfriamento dura aproximadamente 14 horas. No gráfico a seguir, temos um esquema das etapas do tratamento térmico descrito anteriormente, onde as temperaturas referem-se ao meio em que a roda está exposta. Na Tabela 5.1, os tempos gastos em cada uma das fases descritas, assim como as temperaturas finais, são apresentados. E mostrado também o incremento de tempo utilizado na simulação do tratamento térmico.

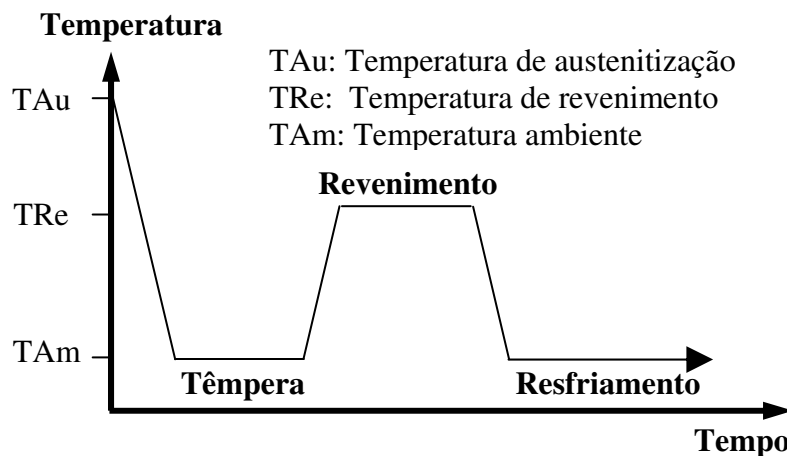


Figura 5.3: Esquema do processo de tratamento térmico na pista da roda.

Tabela 5.1: Informação sobre a duração de cada etapa.

	Duração (s)	Tempo de início (s)	Incrementos (s)	Temperatura Final (°C)
Têmpera	345	1	1	137 (pista)
Revenimento	13320	346	10	550
Resfriamento	50000	13666	100	30
TOTAL	63665			

5.2.5 Modelo térmico transiente

Devido à simetria geométrica da roda em relação ao eixo vertical é necessário apenas o modelamento do plano que contém o perfil da roda, conforme Figura 5.4. Logo, o modelo será tratado como axissimétrico, visto que todo carregamento térmico proveniente do processo de fabricação também é axissimétrico, isto é, distribuído em torno de toda circunferência da roda. O perfil da roda foi importado de software de CAD e trabalhado dentro do ANSYS®.

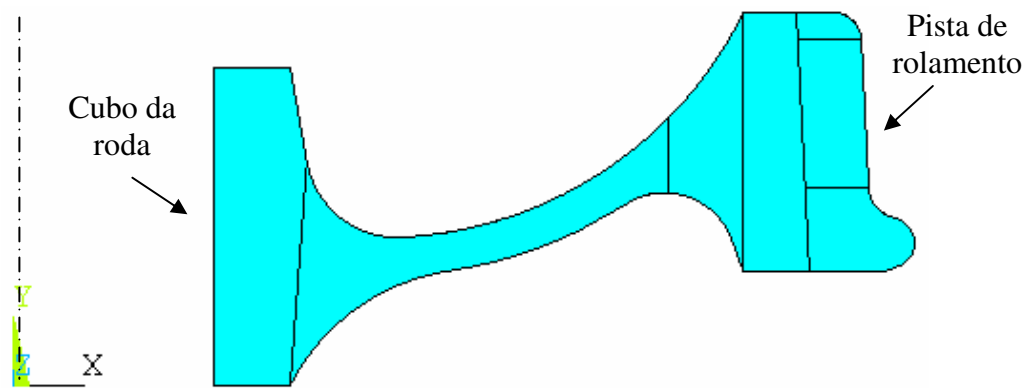


Figura 5.4: Modelo axissimétrico da roda.

A malha foi gerada usando apenas elementos quadráticos isoparamétricos de quatro nós. A divisão do modelo em diversas áreas possibilitou gerar uma malha mapeada, além de um refinamento na região de interesse: no aro, na a região de contato com o trilho. O elemento usado foi o “PLANE 55”, com a opção axissimétrica ativada, da própria biblioteca do ANSYS®. Após diversos estudos de convergência, definiu-se a malha utilizada, que está ilustrada na Figura 5.5.

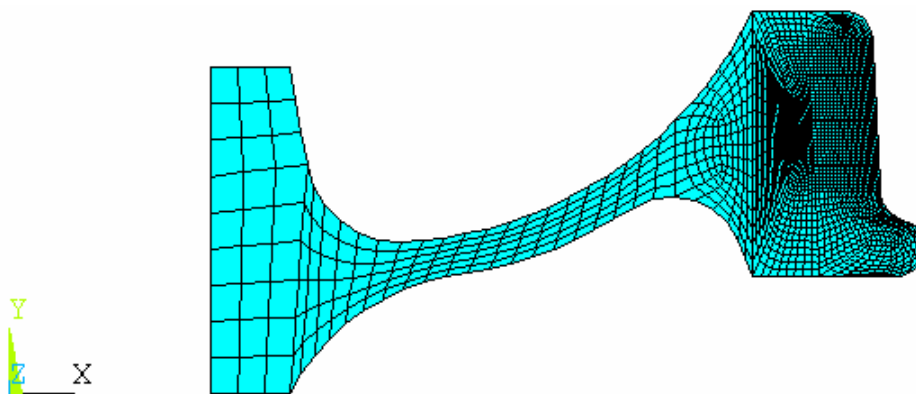


Figura 5.5: Malha de elementos do modelo da roda.

5.2.5.1 Carregamento térmico e condições de contorno

Conforme explicado anteriormente, a etapa de pré-aquecimento para alívio de tensão da roda será resumida considerando toda a roda a uma temperatura inicial uniforme de 860 °C. Nessa etapa a roda está livre de qualquer tensão ou deformação. Sendo a temperatura o único grau de liberdade da análise térmica, não será aplicada nenhuma restrição a deslocamentos.

Durante a têmpera, toda roda está sujeita a troca de calor com o meio. Portanto no seu contorno será aplicada convecção, conforme mostram as setas vermelhas na Figura 5.6. O valor do coeficiente de convecção (h) foi determinado por Santos (1996), o qual concluiu que para rodas em serviço o valor representativo seria de $25 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$. Como durante a têmpera a roda gira a uma velocidade menor da de serviço, um valor de $15 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$ foi utilizado.

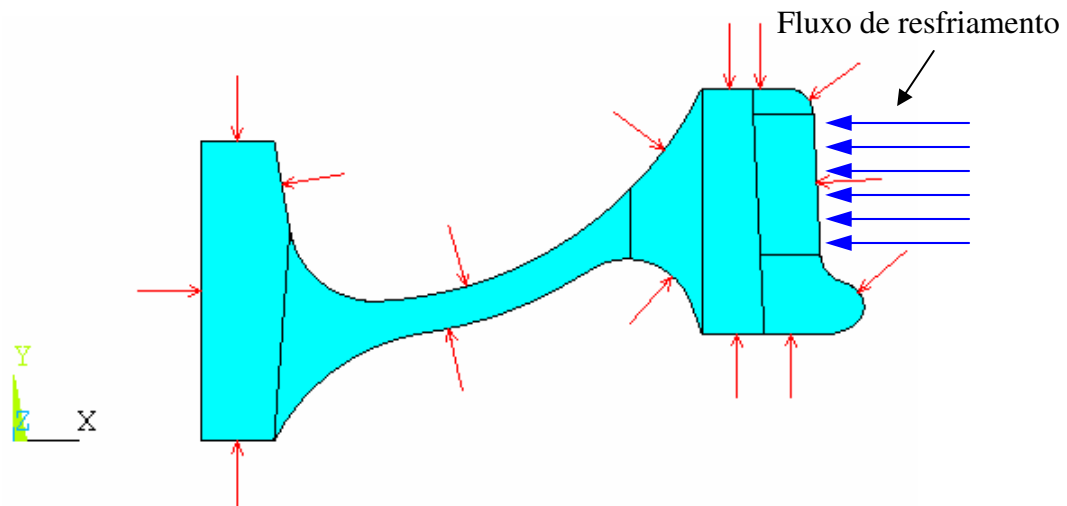


Figura 5.6: Convecção aplicada ao contorno da roda durante a têmpera.

Para simular os jatos d'água resfriando a superfície de rolamento, optou-se por utilizar um fluxo (potência) de calor inverso (calor saindo da roda) aplicado nessa superfície. A dificuldade inicial seria como determinar o valor desse fluxo de forma a representar com precisão o resfriamento da pista de rolamento, uma vez que esse dado não foi medido ou disponível em literatura para o tipo de roda em estudo.

Através de contatos com a MWL do Brasil (MINICUCCI, 2003), fabricante de rodas, soube-se que após o processo de têmpera a superfície de rolamento se encontrava aproximadamente a $137 \text{ }^\circ\text{C}$. De posse desses dados, pôde-se calcular a quantidade de calor necessária para reduzir a temperatura da pista, que se encontrava inicialmente a $860 \text{ }^\circ\text{C}$ (temperatura de pré-aquecimento) até $137 \text{ }^\circ\text{C}$ usando o tempo de resfriamento previsto (5,75 minutos). Para tanto, foram utilizados também o calor específico da roda e a massa desta.

Com isso, achou-se a potência necessária que deve ser aplicada (negativamente) para simular os jatos d'água. O valor encontrado foi de aproximadamente -147 kW. Esse valor foi distribuído na região da pista de rolamento (Figura 5.6).

Após o processo de têmpera, tem início o revenimento para alívio de tensões. Para simular essa etapa, o fluxo de resfriamento é retirado e a convecção tem seu valor reduzido, uma vez que a roda encontra-se parada. Segundo Santos (1996), o valor para o coeficiente de convecção com roda parada é de aproximadamente $10 \text{ W/m}^2 \text{ }^\circ\text{C}$. Consultando novamente o fabricante, obtivemos o tempo de revenimento, assim como a temperatura do forno para uma roda de 38 polegadas. A roda deveria ficar aproximadamente 3,7 horas a uma temperatura de $500 \text{ }^\circ\text{C}$.

Terminado do revenimento, resfriou-se a roda a temperatura ambiente de $30 \text{ }^\circ\text{C}$. Novamente a simulação foi realizada aplicando-se uma convecção em toda superfície da roda com o mesmo valor usado no revenimento ($10 \text{ W / mm}^2 \text{ }^\circ\text{C}$).

A seguir, os valores das propriedades térmicas utilizadas e como elas variam com a temperatura.

5.2.5.2 Propriedades térmicas utilizadas

Como é sabido, algumas propriedades térmicas variam com a temperatura. Logo, para atingir-se resultados precisos e coerentes, é necessário definir essas propriedades para um intervalo de temperaturas onde o modelo vai ser trabalhado.

As propriedades térmicas foram retiradas de literatura da AAR – “Association of American Railroads” (AAR, 1984) e consistem em: calor específico (C); condutividade térmica (k) e convecção (h). Apesar de esta referência ser um pouco antiga, ela foi revista a pouco tempo e permanece com os dados inalterados.

O calor específico e a condutividade térmica variam linearmente com a temperatura, e são dados pelas funções abaixo.

$$C = 0,39T + 433,6 \quad [J / Kg \text{ } ^\circ C], \quad \text{eq. 5.1}$$

$$k = -1,87 \times 10^{-5}T + 4,83 \times 10^{-2}T \quad [W / mm \text{ } ^\circ C]. \quad \text{eq. 5.2}$$

O coeficiente de convecção foi assumido constante para todas as temperaturas, conforme sugestão da própria AAR (AAR, 1984). Seu valor irá variar apenas conforme a etapa do tratamento térmico na qual se está se trabalhando.

$$h = \begin{cases} 15 [W / mm^2 \text{ } ^\circ C] & \text{tempera} \\ 10 [W / mm^2 \text{ } ^\circ C] & \text{revenimento e resfriamento} \end{cases}. \quad \text{eq. 5.3}$$

5.2.6 Modelo estrutural

Após o término da análise térmica, a etapa estrutural tem início, com a finalidade de obter as tensões e deformações residuais. A primeira providência é trocar o elemento térmico por um estrutural que suporte plasticidade e tenha as mesmas características do anterior (quadrático de 4 nós). O elemento escolhido dentro da biblioteca de elementos do ANSYS® foi o PLANE182. Todo carregamento e condições de contorno da análise térmica foram retirados, uma vez que este elemento não suporta esses parâmetros.

5.2.6.1 Carregamento estrutural e condições de contorno

A fase estrutural será simulada da mesma forma que a fase térmica, em três etapas. Inicialmente deve-se aplicar restrições a modelo, uma vez que este sofrerá deformações. Isso evita o movimento de corpo livre do modelo.

Na etapa de têmpera, conforme visita a fabrica de rodas da MWL do Brasil, constatou-se que a roda é apoiada em um suporte enquanto gira e recebe os jatos d'água. Assim, as restrições na direção verticais foram impostas na região do cubo da roda, conforme Figura 5.7. O fato das restrições estarem na parte de cima da roda, é porque a roda está com o flange para cima, enquanto sofre o processo de têmpera. A posição do modelo não influencia na análise.

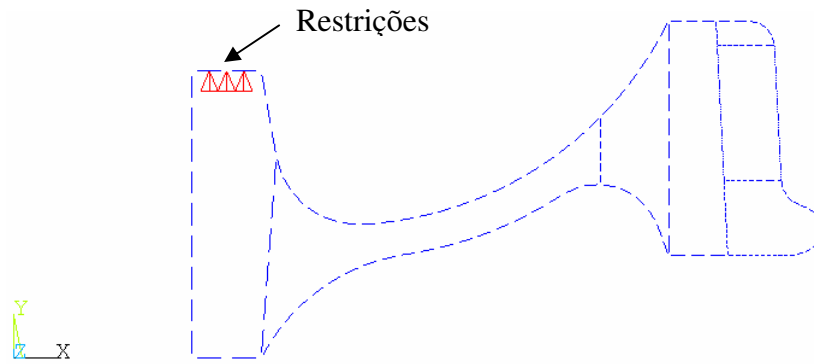


Figura 5.7: Condições de contorno na roda para análise estrutural.

O carregamento aplicado provém das temperaturas armazenadas durante a análise térmica, que são aplicadas como “forças” nessa etapa. Um fato importante deve ser levado em consideração nessa aplicação: como a evolução temperaturas ao longo a análise não é função linear do tempo, a aplicação do gradiente final de temperatura após a têmpera (por exemplo) não irá fornecer as tensões corretas. Quando isto é feito, o software aplica linearmente o valor final das temperaturas, dividido em sub-passos previamente especificados.

Como isso, as temperaturas armazenadas a cada instante durante a fase térmica serão aplicadas individualmente, a fim de que a resposta do modelo seja capturada de forma correta. O mesmo irá ocorrer para todas as outras fases (revenimento e resfriamento). Um exemplo das temperaturas aplicadas é mostrado na Figura 5.8.

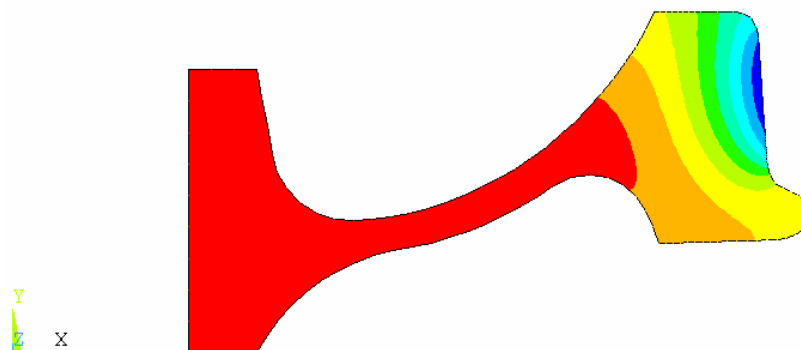


Figura 5.8: Exemplo de temperaturas aplicadas como carregamento na análise estrutural.

O início da simulação de uma nova fase deve ser feito como uma sequência da fase anterior, pois as tensões e deformações finais de uma fase serão as iniciais da seguinte. A Tabela 5.2 mostra como foi dividida a análise estrutural. Cada incremento de tempo (sub-passo) da análise térmica foi aplicado como um passo de carga individual, usando apenas um sub-passo.

Tabela 5.2: Informações dos passos de tempo na análise estrutural.

	Duração (s)	Passo de carga	Sub-passos	Incremento de tempo (s)
Têmpera	345	354	1	345 / 354
Revenimento	13320	1341	1	13320 / 1300
Resfriamento	50000	633	1	50000 / 600
TOTAL	63665	2254		

5.2.6.2 Propriedades mecânicas

Para a análise estrutural é necessária a definição de parâmetros de rigidez do material. Quando trabalhamos com plasticidade, além das variáveis envolvidas em uma análise elástica, é imprescindível especificar parâmetros de escoamento e encruamento do material em função de critérios adotados. Todo modelo de plasticidade requer o uso de uma curva tensão – deformação, que irá representar o comportamento do material.

Por tratar-se de aço, que neste caso é um material relativamente dúctil, e considerando a isotropia do material, foi adotado para critério de escoamento o modelo de Von Mises. Para o encruamento, o modelo cinemático foi escolhido.

Para esses modelos adotados, é necessário especificar as constantes elásticas e elastoplásticas. Na elasticidade, temos o módulo de elasticidade (E) e o coeficiente de Poisson (ν). A parte plástica é representada por uma curva tensão – deformação, que pode ser bi-linear ou multilinear. Curvas bi-lineares são formadas pela tensão de escoamento, o módulo de encruamento, além do módulo de elasticidade. Apesar desse tipo de curva poder ser utilizado, é preferível o uso de uma do tipo multilinear, pois metais dúcteis dificilmente apresentam comportamento linear durante o encruamento. Uma curva multilinear é composta de diversos pares tensão – deformação. Essa curva é extraída de um ensaio mecânico de tração em um corpo de prova do material. Esse ensaio foi realizado a temperatura ambiente apenas.

Como essa análise estrutural é precedida de uma análise térmica, onde as temperaturas são usadas como carregamento (conforme visto no item anterior), o parâmetro que fará ligação entre a influência das temperaturas e o desenvolvimento das tensões e deformações é o coeficiente de expansão térmica. Será ele que propiciará o surgimento das deformações térmicas a partir da variação da temperatura em cada ponto do modelo.

Como o processo de tratamento térmico de uma roda ferroviária forjada é composto de etapas que envolvem não só altas temperaturas, mas também grandes variações, a simulação numérica realizada também necessitará de dados que representem essas condições adequadamente.

Parâmetros como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e limite de escoamento, assim como todo comportamento mecânico do material, variam significativamente com a temperatura. Por isso, a necessidade de se realizar ensaios mecânicos em diferentes níveis de temperatura. Devido à impossibilidade realizar tais ensaios, procurou-se em literatura curvas tensão – deformação de um material próximo ao utilizada e que variasse com a temperatura. Esse tipo de ensaio é difícil de ser encontrado em literatura, especialmente para um aço do tipo em estudo. A idéia foi obter parâmetros de materiais que se assemelhassem ao da roda classe C.

As curvas tensão–deformação encontradas, para diversas temperaturas (30 a 900 °C) e que mais se aproximavam ao material procurado, se referiam a uma roda classe L (GORDON & PERLMAN, 2003). Esse material, por ser muito menos resistente que o da classe C, não iria fornecer a precisão adequada nos parâmetros calculados. Porém, essas curvas poderiam servir de base para estimar o comportamento das curvas de resistência da roda em estudo. O mesmo ocorreu para o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. Esses parâmetros só estavam disponíveis para classe L.

Alguns valores para o limite de escoamento, referentes à roda classe C (objeto de estudo), foram encontrados em literatura (SANTOS, 1992). Entretanto, o intervalo de temperatura desses dados era de 38 a 649 °C. Como especificado anteriormente, os valores de temperatura variam de

25 a 860 °C para a simulação proposta. Como isso, correções foram feitas com base nos valores encontrados, a fim de se ajustar esses valores. Com bases nos dados disponíveis pode-se aproximar os valores da classe L para o da classe C.

Inicialmente, os valores do limite de escoamento encontrados para classe C foram escritos para as respectivas temperaturas, conforme mostra a Tabela 5.3. A seguir, traçou-se um gráfico com essas tensões e suas respectivas temperaturas. Uma linha de tendência foi definida, usando um polinômio de terceira ordem, conforme Figura 5.9. Nota-se que esse polinômio ajustou-se bem a essa curva, observando o valor de R-quadrado que está bem próximo a 1. Todavia, essa linha de tendência, se for extrapolada, vai nos fornecer valores negativos da tensão de escoamento para temperaturas maiores que 700 °C. Como isso não é possível, tendo em vista que esses dados provêm de ensaios de tração, conclui-se que o polinômio não se ajusta para valores fora da faixa de pontos fornecidos.

Tabela 5.3: Tensão de escoamento em função da temperatura para o aço de rodas classe C.

Temperatura (°C)	Tensão de Escoamento (MPa) para roda classe C
38	792,0
93	717,0
204	683,0
316	655,0
371	590,0
427	538,0
482	482,0
510	414,0
538	406,0
566	324,0
593	276,0
621	245,0
649	138,0

Como se dispõe de valores da tensão de escoamento da roda classe L abrangendo toda a faixa de temperatura necessária, estas foram usadas para a correção da faixa de valores das tensões de escoamento da roda classe C. Em virtude das tensões de escoamento da roda classe L também serem fornecidas, iremos usá-las como base para o cálculo de todos os outros parâmetros.

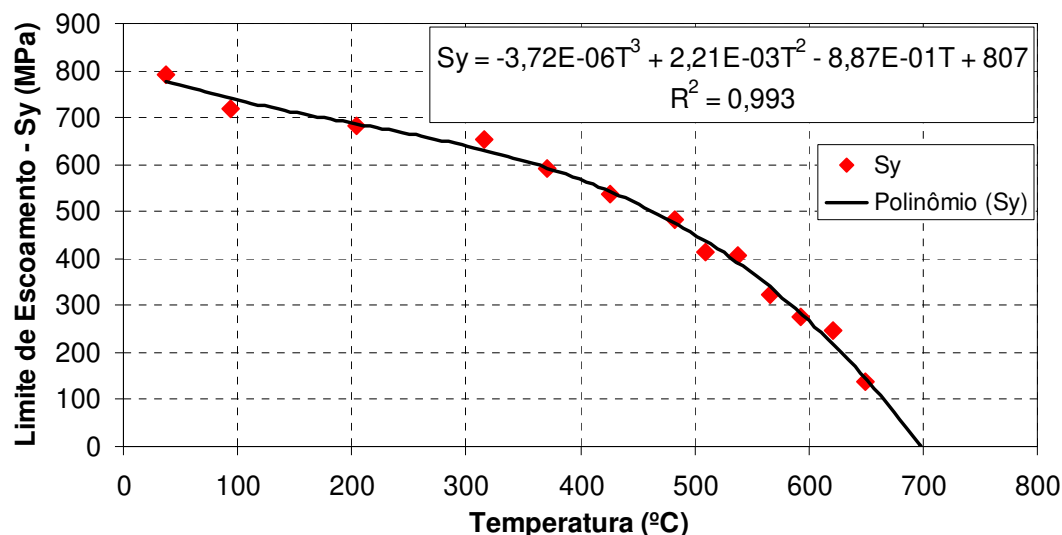


Figura 5.9: Gráfico do limite de escoamento em função da temperatura para roda classe C (não ajustado).

Na Tabela 5.4, primeira coluna, têm-se os valores do limite de escoamento (classe C) não ajustado, obtidos a partir do polinômio, em função das temperaturas definidas para classe L. Seus limites de escoamento também estão presentes. Nota-se o valor negativo da tensão de escoamento da classe C para as temperaturas mais elevadas.

Tabela 5.4: Tensão de escoamento (σ_y) para rodas classe C e L em função das temperaturas.

T (°C)	σ_y (MPa) classe C (não ajustado)	σ_y (MPa) classe L	σ_y (C) / σ_y (L)	σ_y (MPa) classe C (ajustado)
25	786,1	448,2	1,754	786,1
230	674,6	450,0	1,499	674,6
358	602,0	338,6	1,778	602,0
452	514,1	308,4	1,667	514,1
567	336,5	140,2	2,400	254,2
650	142,6	80,0	1,782	145,1
704	-20,1	41,8	-0,481	75,7
900	-913,1	12,4	-73,635	22,5

Normalizando o valor do escoamento da classe C pelo valor da classe L, teremos um fator de correção para cada temperatura. Como até 650 °C os fatores tem valores muito próximos, calculou-se uma média simples apenas entre eles, que definiu o fator base para correção. Sendo assim, as tensões da roda classe C foram corrigidas multiplicando a média dos fatores pelas

tensões da classe C. Como as relações das tensões entre as duas classes não apresentaram mudança significativa, optou-se por corrigir apenas as tensões correspondentes às quatro temperaturas mais altas. O valor ajustado também está na Tabela 5.4. O gráfico contendo os valores de tensão em função da temperatura para as três situações descritas é apresentado na Figura 5.10.

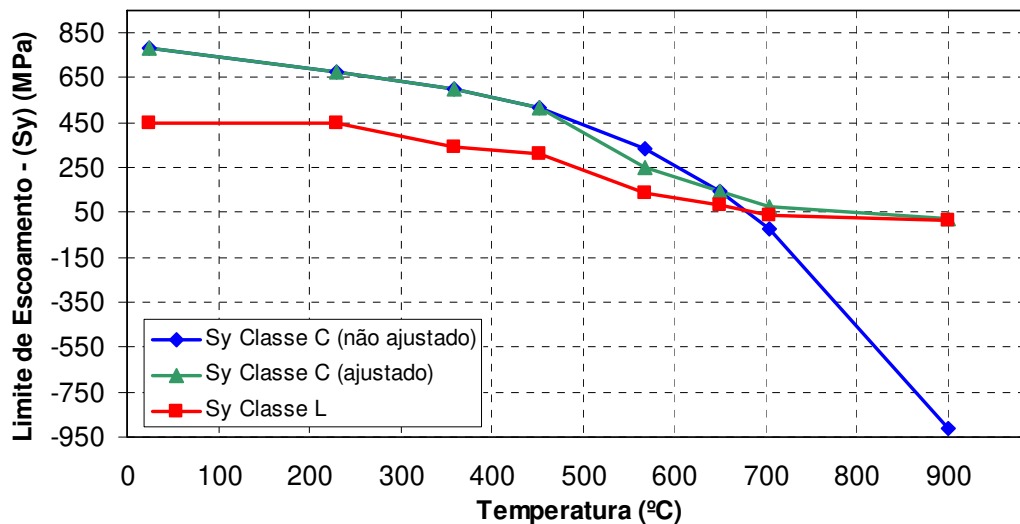


Figura 5.10: Gráfico da tensão de escoamento em função da temperatura para rodas classe C e classe L.

Observando a última coluna da Tabela 5.4, vê-se que o valor da tensão de escoamento a temperatura ambiente (25 °C) difere daquele obtido através do ensaio do corpo de prova do material da roda classe C. Portanto, um ajuste adicional é necessário para corrigir as tensões de escoamento das outras temperaturas, tendo como base a tensão obtida no ensaio (751 MPa). Dividindo-se esse valor pelo valor corrigido para classe C (786,1 MPa), tem-se o fator que, multiplicado pelas outras tensões, leva as tensões de escoamento finais usadas no modelo. Isso é ilustrado na Tabela 5.5.

O módulo de elasticidade usado para temperaturas elevadas na classe C, foi o mesmo utilizado para classe L. A deformação mostrada na Tabela 5.5 refere-se à deformação correspondente a tensão de escoamento. Ela é obtida através da relação da Lei de Hooke. A Figura 5.11 e a Figura 5.12 ilustram a variação da tensão de escoamento e do módulo de elasticidade em função da temperatura, respectivamente.

Tabela 5.5: Tensão de escoamento final para classe C, módulo de elasticidade e deformação correspondente ao ponto de escoamento.

T (°C)	σ_y (MPa) classe C (utilizado)	E (GPa) Classe C	ε (mm/mm)
25	751,0	210	0,003576
230	644,5	201	0,003206
358	575,1	193	0,002980
452	491,1	172	0,002855
567	242,9	102	0,002381
650	138,6	83	0,001670
704	72,3	50	0,001446
900	21,5	43	0,000500

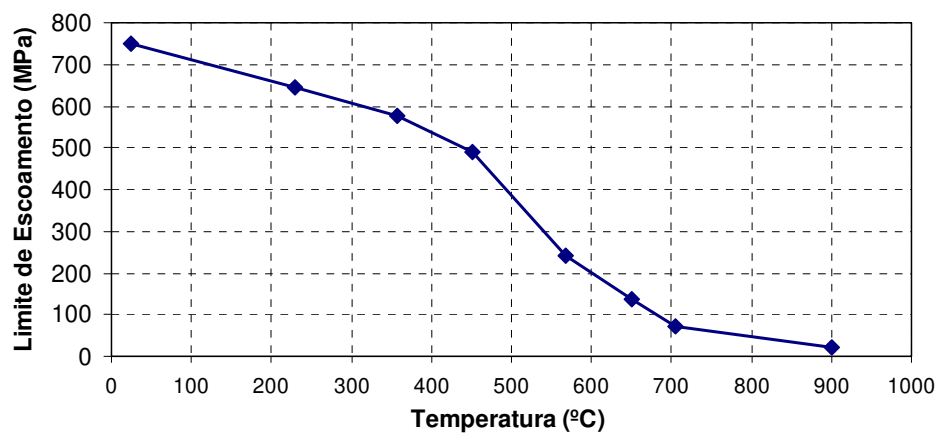


Figura 5.11: Gráfico da tensão de escoamento em função temperatura para roda classe C, ajustado para as condições ensaiadas.

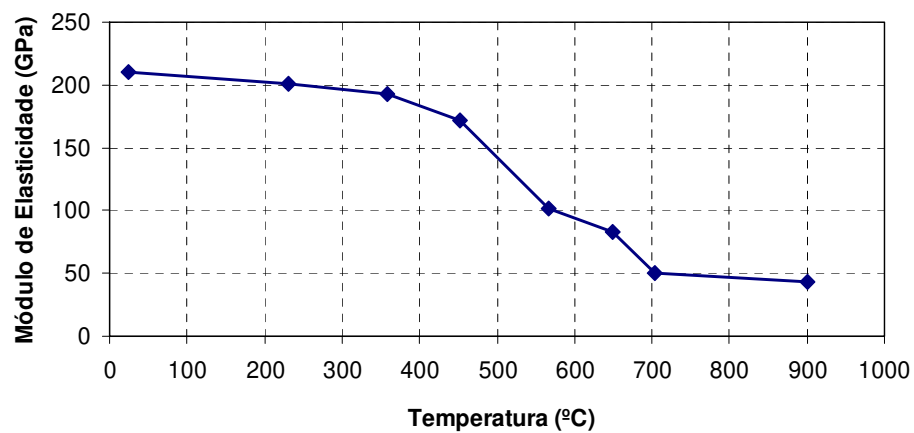


Figura 5.12: Gráfico do módulo de elasticidade em função da temperatura para roda classe C (ajustado).

Como o objetivo desse procedimento era obter dados mais exatos para construção das curvas tensão–deformação a altas temperaturas, as curvas para roda classe C podem ser construídas. Observando o gráfico da Figura 5.13, nota-se que as curvas para classe L apresentam um comportamento padrão entre as temperaturas. As tensões para uma mesma deformação variam quase linearmente e de forma constante. Usando esse princípio, pode-se traçar as curvas para a classe C, usando como base a curva do ensaio realizado a temperatura ambiente.

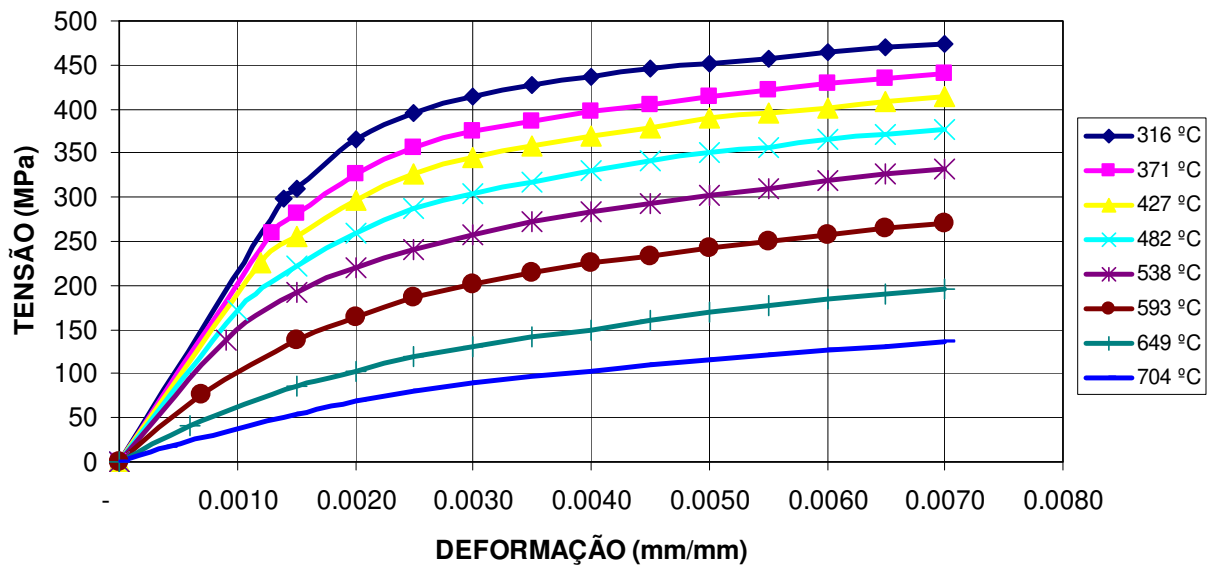


Figura 5.13: Gráfico da tensão – deformação em função de várias temperaturas – roda classe L.

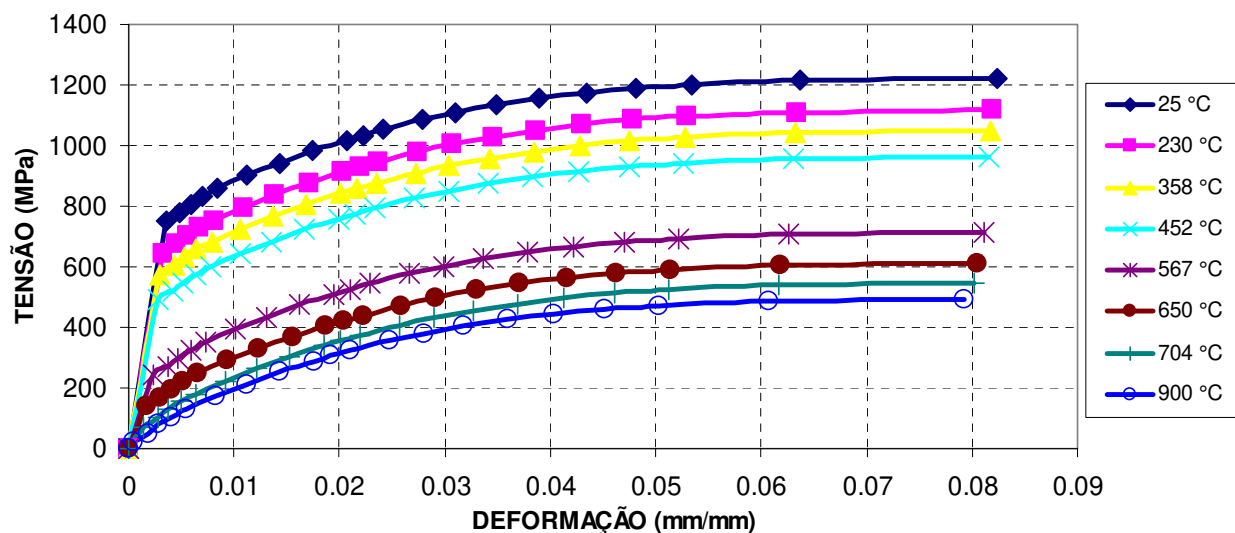


Figura 5.14: Gráfico da tensão – deformação em função de várias temperaturas – roda classe C.

Na Tabela 5.6, exibe-se os valores obtidos no ensaio e os valores da variação entre dois pontos consecutivos de tensão e deformação desta curva ($\sigma_i - \sigma_{i+1}$ e $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$). Tomando como ponto inicial o limite de escoamento e a deformação de cada uma das temperaturas definidas anteriormente, soma-se a variação entre os dois primeiros pontos a esses valores. O procedimento é repetido, sempre somando a variação seguinte, ao ponto que acabou de ser determinado. Um gráfico com todas as curvas tensão – deformação, que irão ser usadas na simulação, é apresentado na Figura 5.14.

Tabela 5.6: Pontos da curva tensão – deformação (classe C) e a diferença entre pontos consecutivos.

Tensão (MPa)	Deformação	Diferença ($\sigma_i - \sigma_{i=1}$)	Diferença ($\varepsilon_i - \varepsilon_{i=1}$)
751,0	0,003576	28,55	0,001304
779,6	0,004880	28,42	0,001034
808,0	0,005914	25,78	0,001137
833,8	0,007051	25,33	0,001413
859,1	0,008464	42,54	0,002791
901,7	0,011255	41,38	0,002998
943,0	0,014254	38,93	0,003170
982,0	0,017424	36,67	0,003239
1018,6	0,020663	16,37	0,001620
1035,0	0,022283	17,53	0,001826
1052,5	0,024110	32,81	0,003722
1085,3	0,027831	24,62	0,003205
1110,0	0,031036	24,94	0,003825
1134,9	0,034862	21,46	0,004135
1156,4	0,038997	18,88	0,004411
1175,3	0,043408	15,34	0,004756
1190,6	0,048164	11,79	0,005204
1202,4	0,053367	14,37	0,010373
1216,8	0,063740	7,22	0,018609
1224,0	0,082349		

O coeficiente de expansão térmica está disponível para roda classe C, através de literatura da A.A.R. (AAR, 1984). Segundo ela, esse coeficiente varia linearmente com a temperatura, conforme equação abaixo:

$$\alpha = 1,065 \times 10^{-5} T + 6,44810^{-9} \quad [1 / ^\circ C]. \quad \text{eq. 5.4}$$

Esse coeficiente de expansão é calculado em termos da secante da curva de deformação térmica em função da temperatura.

5.3 Modelo de contato roda – trilho elastoplástico (MEF)

A definição do tipo de modelo proposto ocorreu com base nos seguintes fatos. Primeiro, as tensões residuais de fabricação são calculadas utilizando um modelo axissimétrico, isto é, plano (2D). Isso só é possível porque a todo carregamento usado no processo de fabricação, e também no modelo, é aplicado em torno de toda circunferência da roda. Além disso, toda carga aplicada nesse tipo de modelo obrigatoriamente é repetida em torno de toda circunferência. O segundo fato provém do modelo de contato mecânico. Por ter o seu carregamento mecânico apenas na direção vertical (carga do vagão), o modelo axissimétrico não poderia ser utilizado. Algumas técnicas de modelagem que usam elementos harmônicos, isto é, elementos aplicados a situações de geometria axissimétrica e cargas não-axissimétrica, que usam séries de Fourier na aplicação das cargas e cálculo dos deslocamentos, poderiam ser usados. Entretanto, como o objetivo deste trabalho é o cálculo das tensões de contato em regime elastoplástico, o uso dessa técnica não seria possível, pois a série de Fourier usa o princípio da superposição, o que exige que o comportamento do material e da geometria seja linear elástico.

Por esses motivos, e para superar as limitações das abordagens tradicionais (analíticas e elásticas) do contato roda – trilho, um modelo de elementos finitos elastoplástico 3D é necessário. Depois de investigar diversas metodologias, sejam elas analíticas ou numéricas, um modelo numérico de contato – roda trilho foi proposto. Essa proposta tem algumas vantagens sobre os métodos analíticos e numéricos clássicos anteriormente desenvolvidos (GOODMAN, 1966; BHARGAVA ET ALL, 1985; BHARGAVA ET ALL, 1987; SRAML ET ALL, 2004). Primeiro, um modelo 3D real pode calcular de forma adequada as tensões próximas à região de contato. Segundo, ele inclui a não – linearidade geométrica e do material (plasticidade). Pode ser usado também para simular movimentos dinâmicos da roda, como rotação, passeio (“hunting”).

Por se tratar de um modelo 3D, que inclui não só a não-linearidade do material (plasticidade), mas também a não linearidade geométrica (contato), o esforço computacional é

elevado. Por isso, foi necessário utilizar técnicas que propiciassem a redução do número de graus de liberdade. A técnica utilizada foi a de submodelagem, que é a criação de um submodelo a partir de um modelo completo. O procedimento de modelagem passo a passo, incluindo a técnica de submodelagem, será descrito a seguir.

5.3.1 Submodelagem

Esta técnica é conhecida como o método de deslocamento aplicado no contorno da região de interface (corte). Essa região representa o contorno entre o modelo completo e o submodelo, que é a parte de interesse deste. Essa técnica consiste em resolver primeiramente o modelo completo, discretizado com uma malha de elementos grossa. Em seguida a região de interesse desse modelo é “extraída” do modelo completo e discretizada com uma malha mais fina. Os deslocamentos calculados no contorno da interface entre os modelos são aplicados como condição de contorno no submodelo.

A técnica de submodelagem é baseada no princípio de St. Venant, que estabelece que se a distribuição de forças real em um modelo é substituída por um sistema estático equivalente, o campo de tensões e deformações é alterado apenas nas regiões próximas a aplicação das forças. Isso implica que os efeitos da concentração de tensão são restritos apenas a essa região de concentração. Logo, se os contornos do submodelo são distantes o suficiente da região de concentração de tensão, os resultados calculados no submodelo serão adequados (exatos).

Além de propiciar um resultado preciso em uma determinada região do modelo analisado, a submodelagem tem as seguintes vantagens:

- Permite uma redução considerável no tempo de processamento, uma vez que apenas a região de interesse é modelada com uma malha mais fina;
- Possibilita experimentar diferentes formas para a região de interesse;
- Permite demonstrar a influência dos diferentes níveis de refino da malha nos resultados;
- Possibilita facilmente a inclusão de outros tipos de carregamento, como o da frenagem.

É importante salientar que a técnica de submodelagem é aplicável tanto a análises lineares quanto não-lineares. Pode-se definir dois tipos de análises não-lineares: dependente do histórico de carregamento (não-conservativo) e independente do histórico de carregamento (conservativo).

Para uma análise independente do histórico de carregamento, a energia é conservada, isto é, a configuração final do modelo não irá depender do histórico de carregamento, contanto que as cargas finais sejam as mesmas no início e no fim da análise. Para uma análise dependente do histórico de carregamento, a energia não é conservada, logo a ordem de aplicação das cargas é importante. Um exemplo desse tipo de análise são aquelas que incluem plasticidade ou fricção, onde uma parte da energia é perdida no sistema.

Como o caso em estudo neste trabalho (contato roda-trilho) envolve plasticidade, tem-se um sistema não-conservativo. Logo, o histórico de carregamento é importante para obter-se um resultado coerente. Com isso, os deslocamentos retirados do contorno de corte do modelo completo e que serão aplicados nessa região no submodelo devem corresponder a cada sub-passo da carga total, uma vez que esta é aplicada em incrementos em análises não-lineares. Caso se aplicasse apenas os deslocamentos finais do passo de carga, estes seriam aplicados linearmente pelo software, o que levaria a resultados diferentes ao esperado.

A seguir, dá-se descrição dos passos para construção do modelo de contato roda – trilho proposto utilizando a técnica descrita anteriormente.

5.3.2 Criação do modelo completo (malha grossa)

Inicialmente os perfis planos da roda e do trilho foram desenhados em um software de CAD e importados para o ANSYS®. Tanto o perfil da roda, quanto do trilho foram divididos em diversas áreas, a fim de se ter um maior controle sobre a densidade da malha utilizada, além de facilitar a geração de uma malha mapeada (que obedece a um padrão) e a definição de vários materiais tanto na roda, quanto no trilho. Isso é necessário porque partes da roda e do trilho possuem tanto material elástico quanto material plástico. Isso é ilustrado na Figura 5.15. O sistema global de coordenadas está no centro do eixo da roda, isto é, no seu eixo de revolução. O

eixo da roda não foi considerado, pois todo carregamento será transmitido do centro do eixo, para o cubo da roda. Na Figura 5.15 tem-se as vistas frontal e isométrica dos perfis.

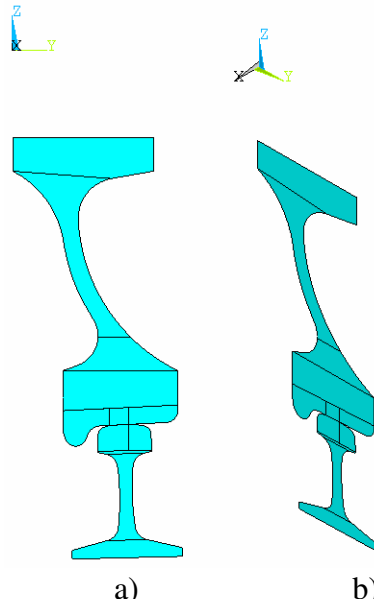


Figura 5.15: Perfis planos da roda e do trilho. Vista frontal (a) e vista isométrica (b).

Em seguida, uma malha de elementos foi gerada primeiramente no plano, utilizando-se elementos quadrados de quatro nós isoparamétricos, mas que não leva nenhum grau de liberdade com ele. Esse tipo de elemento, chamado de MESH200 na biblioteca do ANSYS®, é utilizado apenas como base para uma posterior geração de um modelo tridimensional a partir de um modelo plano. Ele não contribui para a matriz de rigidez, pois não tem graus de liberdade. Através da manipulação na divisão das linhas de contorno da roda e do trilho e de seus próprios perfis em pequenas áreas, foi possível gerar uma malha mapeada. Isso, apesar de não ser imprescindível, vai ajudar bastante na extração dos vetores contendo os tensores de tensão para futura manipulação, além de permitir gerar um sólido também mapeado.

Para o modelo sólido, tanto do trilho quanto da roda, foi escolhido um elemento hexaédrico (cubo) de oito nós (SOLID185). Através da revolução do perfil da roda em torno do seu eixo em 360° e da extrusão do perfil do trilho ao longo de sua normal a uma distância de 600 milímetros, que corresponde à distância entre dois dormentes, pode-se obter os respectivos sólidos. Como a região de interesse está localizada na região de contato, e esta é muito pequena em relação ao tamanho dos corpos em contato, um grande refinamento da malha foi necessário em torno dessa

região, tanto na roda como no trilho. Isso foi feito para que houvesse elementos suficientemente pequenos para discretizar toda região de contato e, por consequência, obter resultados mais precisos. Além disso, o refinamento também se estendeu por quase todo interior do aro, pois altos gradientes de tensão e zonas de plasticidade são encontradas sub-superficialmente à pista da roda.

Algumas técnicas de geração de malha foram empregadas, a fim de diminuir o número de elementos e, consequentemente, o número de graus de liberdade, reduzindo o esforço computacional. Nas regiões adjacentes a região de contato, dois volumes, um de cada lado, foram gerados, a fim de acomodar elementos tetraédricos de ordem quadrática. Isso permitiu criar uma região de transição onde o número de elementos da face do perfil pode ser reduzido nas regiões distantes do contato.

A malha gerada do par roda – trilho, com os elementos descritos anteriormente, pode ser observada na Figura 5.16. Na Figura 5.17 tem-se um corte transversal na região de contato, onde se pode observar a densidade de elementos internos à roda. À medida que se afasta da região de contato, na direção circunferencial, os elementos vão gradativamente aumentando de tamanho.

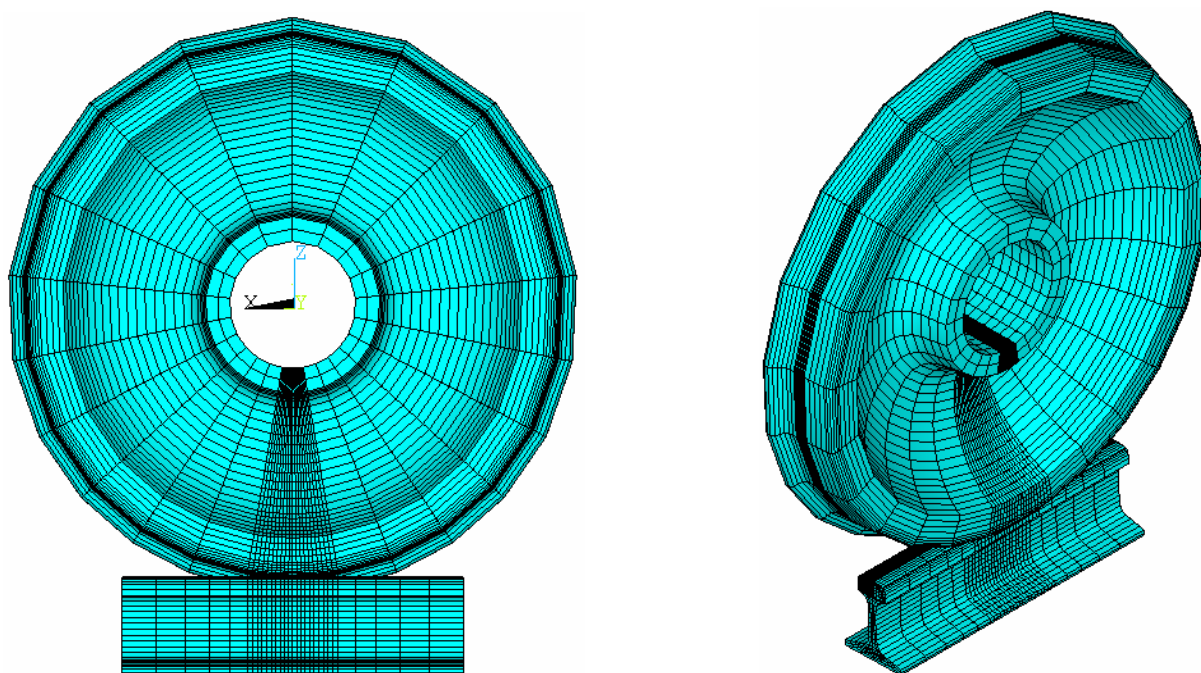


Figura 5.16: Modelo completo (3D) da roda e do trilho. Vista lateral e isométrica

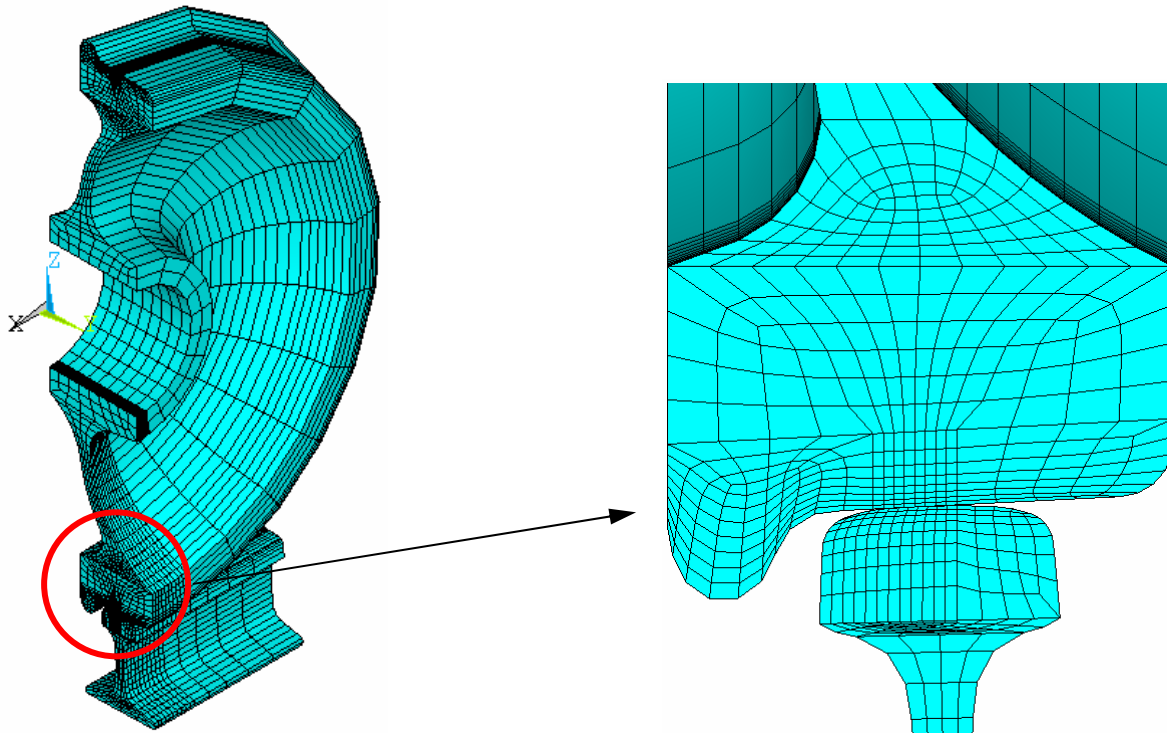


Figura 5.17: Modelo completo 3D da roda e do trilho. Vista em corte.

Uma vez finalizada a construção do modelo completo, define-se as condições de carregamento e contorno (descritas mais adiante) e realiza-se a sua análise. É importante armazenar todos os passos e sub-passos de carregamento, que serão usados como condições de contorno na análise posterior do submodelo.

5.3.3 Criação do submodelo (malha refinada)

O submodelo é parcialmente independente do modelo completo de malha grossa, porém alguns pontos devem ser considerados. A localização do submodelo deve ser a mesma do modelo completo e o mesmo tipo de elemento usado na malha grossa deve ser usado no submodelo.

Após o término da análise do modelo completo, apaga-se toda sua base de dados (elementos, geometria e condições de contorno) e gera-se o submodelo. É importante que o nome dado a este submodelo ("jobname") seja diferente do modelo completo, pois este será usado em etapa posterior.

Como dito anteriormente, as regiões de contorno do submodelo devem estar afastadas o suficiente da região de concentração de tensão. Para o caso em estudo, a região de contato entre a roda e o trilho é onde se concentra todo campo de tensão gerado no modelo. Logo, o submodelo da roda foi definido como sendo toda região do aro dentro de um arco de aproximadamente 250 milímetros, conforme será justificado mais a diante. Assim, garante-se que o contorno deste submodelo está não só afastado da região de contato, mas também em uma região elástica. Para o trilho, o submodelo é a região do boleto entre uma distância longitudinal de 600 milímetros, que corresponde à distância entre dois dormentes. A Figura 5.18 e a Figura 5.19 ilustram os dois submodelos: roda e trilho.

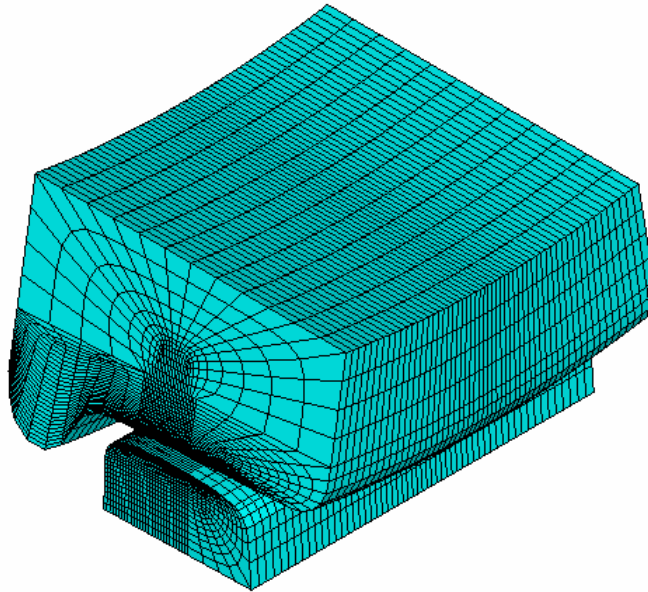


Figura 5.18: Submodelo do contato roda – trilho. Vista isométrica.

Todas as condições de contorno e carregamento aplicadas ao submodelo virão dos resultados obtidos no modelo completo. Através dos nós previamente identificados na região de corte do submodelo, os deslocamentos que serão aplicados nesta região são calculados pelo software por interpolação dos resultados do modelo completo. Para cada nó na região de corte do submodelo, o programa usa o elemento correspondente no modelo completo para determinar os valores dos deslocamentos a serem aplicados. Esses valores são então interpolados nos nós do contorno de corte do submodelo usando as funções de forma dos elementos, conforme será detalhado mais a diante.

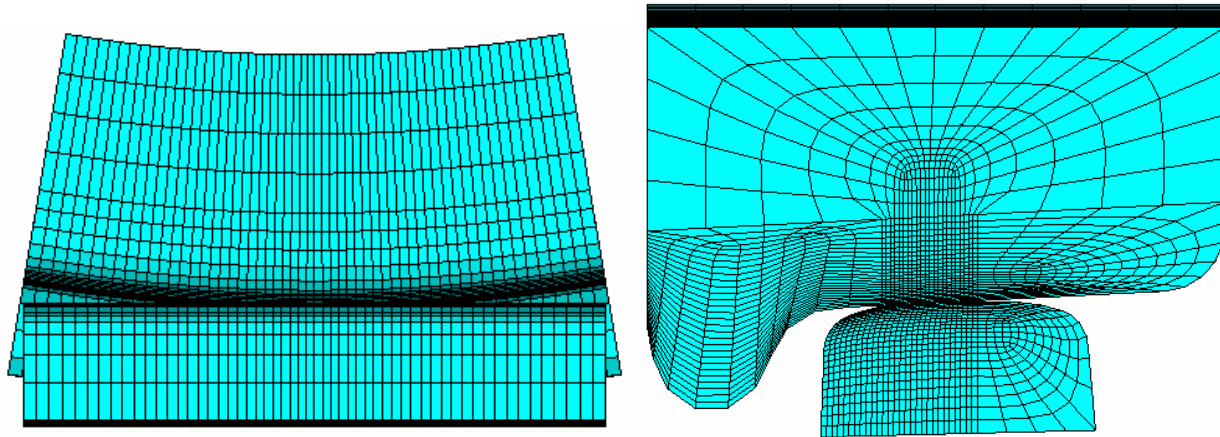


Figura 5.19: Submodelo do contato roda – trilho. Vista lateral e em corte.

5.3.4 Elementos de contato

Uma análise real de contato entre dois corpos deve obrigatoriamente ter, na interface roda – trilho, aquilo que em elementos finitos se chama “elementos de contato”. É através desses elementos que as superfícies que irão entrar em contato são reconhecidas pelo programa. São eles que impedem que a roda tenha movimento de corpo livre quando lhe for aplicado o carregamento vertical. Utilizando algoritmos de otimização, o programa estabelece o equilíbrio (contato) entre as duas superfícies, gerando as tensões e deformações. Nos softwares atuais de elementos finitos, a superfície do par que vai se estabelecer o contato é dividida em dois tipos: para superfície de contato (CONTACT) e superfície alvo (TARGET). Os elementos de contato são divididos da mesma forma.

A superfície de contato (CONTACT) é geralmente deformável. Como tanto a roda como o trilho são considerados deformáveis, não fará diferença na escolha das superfícies. A roda foi escolhida como superfície de contato e o elemento usado foi o CONTACT173 do banco de elementos do ANSYS®. O trilho por sua vez foi escolhido como superfície alvo através do elemento TARGET170, com a opção de superfície deformável nas configurações do elemento. Através de teorias analíticas (Hertz,1882), pode-se saber previamente qual será a dimensão da área de contato e assim, selecionar elementos suficientes para cobri-la por inteiro.

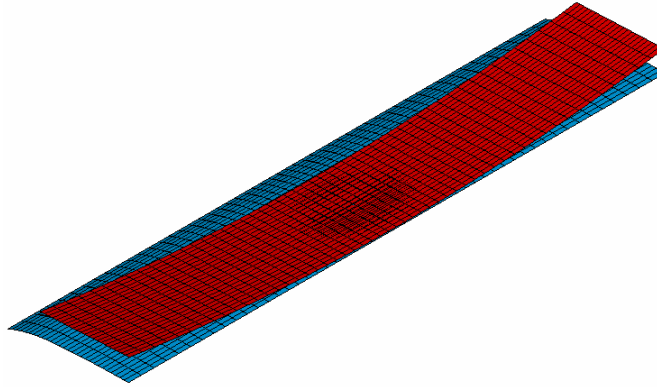


Figura 5.20: Elementos de contato. Roda (vermelho) e trilho (azul)

O algoritmo utilizado foi o Lagrangiano Aumentado (ANSYS, 2006). Esse algoritmo exige a definição de um parâmetro chamado de rigidez de penalidade (ou rigidez de contato), que ajuda forçar a compatibilidade entre as superfícies de contato. A rigidez de penalidade pode ser interpretada como a rigidez de uma “mola” que atua na interface de contato, como mostra Figura 5.21. Logo, matematicamente, certa quantidade de “penetração” é exigida para manter o equilíbrio. Entretanto, sabe-se que fisicamente os corpos em contato não sofrem penetração. Por isso, a penetração deve se manter a mínima possível. Logo, uma tolerância de penetração de 0,01 milímetros foi previamente definida.

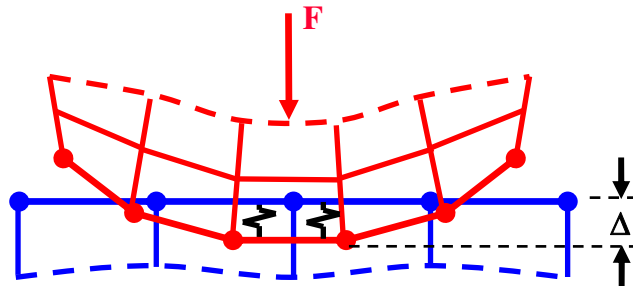


Figura 5.21: Esquema do contato usado em elementos finitos.

Na roda, foi criado um “nó piloto” na região central do eixo. Ele tem como finalidade receber todas as condições de contorno e carregamento a serem aplicadas nesta. Como o eixo não foi modelado, a transmissão do carregamento se dará através de uma espécie de “contato” entre o “nó piloto” criado e o cubo da roda. Para isso usa-se como opção de algoritmo o MPC (MultiPoint Constraint), cuja finalidade é conectar o ponto de carga à malha do modelo quando estes não estão conectados. Isso se dará pela criação de barras rígidas entre o “nó piloto” e o cubo

da roda (Figura 5.22). Define-se primeiramente como superfície alvo (TARGET) o “nó piloto”, configurando-o como rígido. A superfície de contato (CONTACT) será o cubo da roda. O uso dessa técnica permite que se imponham ao modelo grandes deslocamentos (como será feito com a roda), pois as equações que definem as “barras” rígidas vão ser atualizadas a cada interação, ou seja, à medida que o modelo se desloca.

A roda sofreu restrição na direção lateral (x), impedindo seu deslocamento nessa direção. Isso é feito restringindo-se o “nó piloto” nessa direção, o que restringe também todo o cubo da roda.

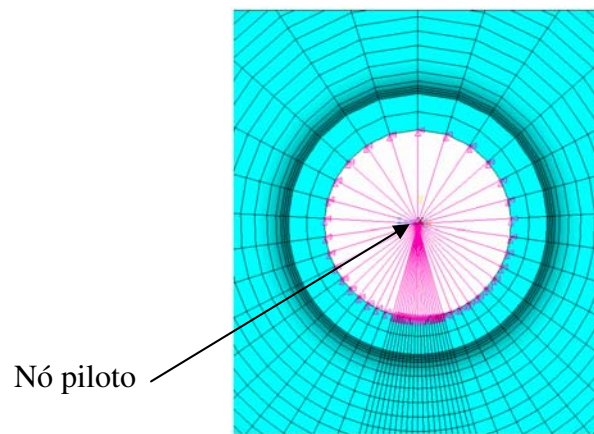


Figura 5.22: Região do cubo da roda.

5.3.5 Condições de carregamento de contorno

As condições de contorno e carregamento foram divididas de acordo com os dois modelos de contato utilizados: modelo completo e submodelo.

5.3.5.1 Modelo completo

Na análise do modelo completo, mostrado na Figura 5.23, o modelo inteiro é resolvido, armazenando-se todos os passos e sub-passos de carga. No modelo completo, temos o carregamento dividido em duas partes: carga vertical e carga de rolamento.

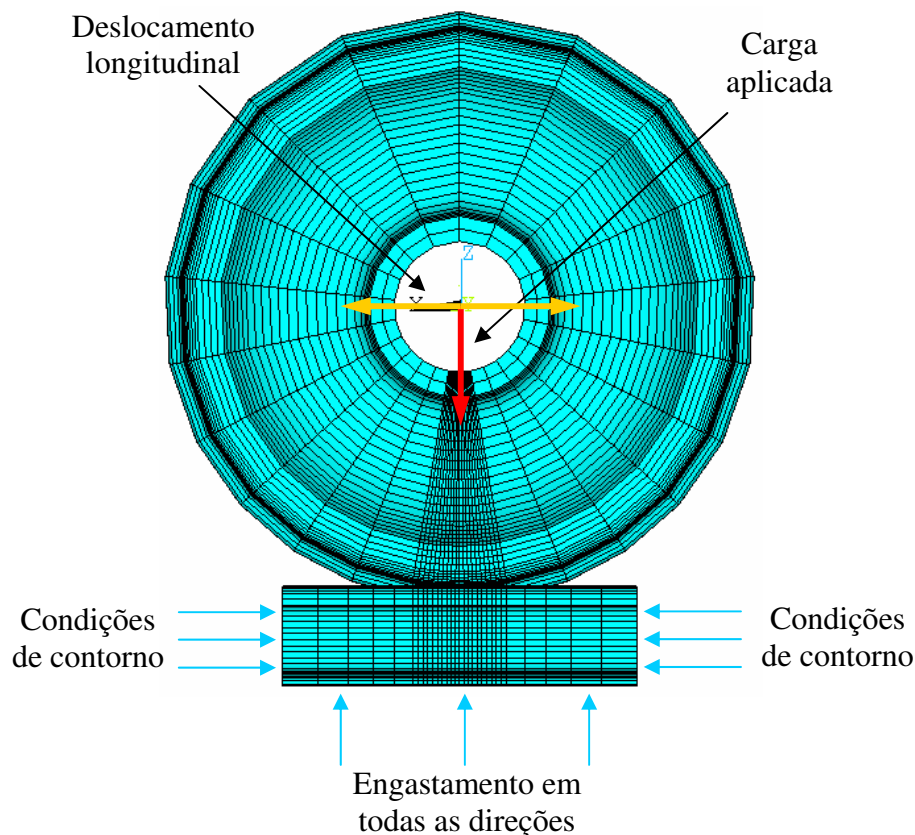


Figura 5.23: Condições de contorno e carregamento no modelo completo.

O carregamento vertical usado na simulação corresponde à carga máxima de 30 toneladas por eixo utilizada nos vagões da Vale do Rio Doce. Logo, tem-se 15 toneladas de carregamento por roda. Entretanto, devido a imperfeições na via e condições dinâmicas adversas, esse carregamento pode chegar, em certas ocasiões, ao dobro do seu valor nominal (Barbosa, 2006). Sendo assim, segundo o especialista em dinâmica de veículos Prof. Roberto Spinola Barbosa (2006), optou-se por usar um fator dinâmico a fim de corrigir o carregamento nominal para um valor mais próximo do de serviço. Uma carga majorada em $\pm 30\%$ é uma média razoável para as ferrovias da Vale do Rio Doce. Logo, o valor utilizado é de 19,5 toneladas por roda. A aplicação da carga será feita no “nó piloto”, conforme Figura 5.23.

Durante sua vida em serviço, a roda sofre inúmeros ciclos de carregamento. Esses ciclos vão levar o material da roda a acumular deformações, até que a roda falhe em poucos ciclos ou entre em regime permanente de deformação. É sabido que a roda não falha em baixo ciclo, logo

haverá um momento em que não ocorrerão mais deformações plásticas. Afirma-se, então, que o material atingiu um “shakedown” elástico. Isso, aliado ao fato da existência de não – linearidade devido ao contato com o trilho, fará com que alguns ciclos de carregamento sejam necessários, afim de que as tensões na roda entrem em regime permanente. Por esse aspecto, as tensões e deformações após vários ciclos de carga serão diferentes das de um carregamento estático apenas. Logo é importante simular o rolamento da roda, a fim de obter esse estado permanente de tensões.

Através de simulações prévias, observou-se que a concentração de tensão na roda, restringi-se apenas à região de contato. Isso comprova as teorias analíticas que usam o princípio do semi-espaço elástico: o corpo e tem dimensões muito maiores que a região de concentração de tensão. Por isso, cada ponto da roda irá sofrer o mesmo nível de tensão em algum instante durante o ciclo de carga. Sendo assim, foi necessário rolar apenas um setor da roda, para frente e para trás, garantindo que ele fosse grande suficiente para que o seu contorno não influenciasse no contato. O tamanho desse setor baseou-se em simulações prévias onde a roda foi rolada em um arco de aproximadamente 45°. Observando-se o ponto inicial de contato na superfície da roda, notou-se que após este deixar o contato (tem início o rolamento) e decorrido certa distância de rolamento, as tensões no ponto estabilizavam, não importando a distância de rolamento percorrida. Foi então definido um arco de aproximadamente 200 milímetros para representar a região de rolamento. Estima-se que cinco ciclos serão suficientes para atingir a estabilidade no nível das tensões. Logo, a simulação do rolamento da roda foi realizada aplicando-se um deslocamento longitudinal (direção de rolamento) no nó piloto (Figura 5.23). Devido ao atrito existente no contato entre a roda e o trilho, a roda irá sofrer um rolamento.

Para condições de contorno nas faces livres do trilho foram impostas condições de simetria, isto é, restrição a todos os nós na direção longitudinal (z). Na base, ele foi engastado em todas as direções (Figura 5.23). As condições de contorno na roda para que ela não sofra nenhum movimento de "corpo livre" é o próprio contato com o trilho.

5.3.5.2 Submodelo

No submodelo os carregamentos são os deslocamentos nas três direções, x , y , z , extraídos da região de corte do modelo completo. Eles são interpolados no contorno entre o submodelo e o modelo completo. A Figura 5.24 tem-se a região onde estarão os nós que receberão os deslocamentos calculados anteriormente. Tanto na fase estática (estabelecimento do contato entre a roda e trilho antes do rolamento), quanto na de rolamento, os deslocamentos aplicados devem corresponder a cada sub-passo da análise do modelo completo. Isso é importante, pois devido ao contato, que tem comportamento não-linear, os deslocamentos terão uma resposta não linear também. Logo, a aplicação dos deslocamentos correspondente a cada instante de rolamento (sub-passo) do modelo completo deve proporcionar uma resposta correta para o submodelo.

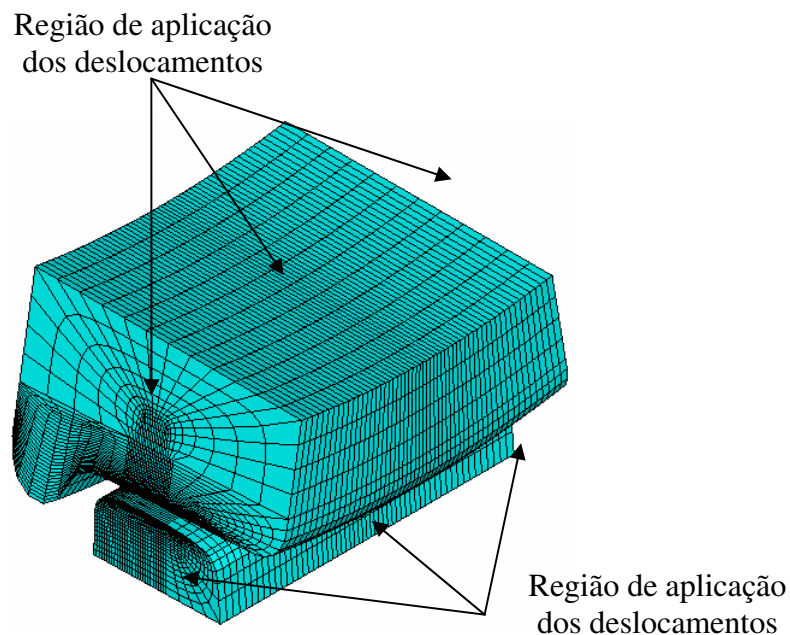


Figura 5.24: Região de interpolação das condições de contorno (deslocamentos).

Na Tabela 5.7 tem-se um resumo de todo carregamento aplicado durante a simulação. O primeiro ciclo rola a roda do ponto central (primeiro ponto de contato estático) para um dos lados. Por isso usa-se metade do valor total de rolamento. Nos demais ciclos, a roda é rolada de um extremo ao outro da região de roda pré-definida. O valor negativo significa um rolamento em um sentido, e positivo para o sentido oposto.

Tabela 5.7: Valores do carregamento aplicado.

	Carga (kN)	Deslocamento Longitudinal (mm)
Estático	195	0
1º Ciclo	195	-60
		+60
2º Ciclo	195	+60
		-60
3º Ciclo	195	-60
		+60
4º Ciclo	195	+60
		-60
5º Ciclo	195	-60
		+60

5.4 Modelo de contato roda – trilho elastoplástico com tensões residuais de fabricação (MEF + Fab)

O modelo de contato proposto inclui, além do contato de rolamento descrito no item anterior, as tensões residuais provenientes do tratamento térmico do processo de fabricação da roda.

Como durante o processo de fabricação, a roda sofre deformação plástica em todo aro e ao longo de toda sua circunferência, uma grande quantidade de elementos seria necessária nessa região, para determinar de forma precisa às tensões e deformação oriundas do processo. A primeira vista, a roda inteira teria que ser modelada para o processo de fabricação, seguido da aplicação do carregamento vertical para, então, simular o contato e o rolamento sobre o trilho. Esse procedimento seria extremamente pesado computacionalmente, pois exigiria uma grande quantidade de elemento, pelo menos na região do aro, ao longo de toda circunferência da roda. Além disso, o rolamento da roda sobre o trilho seria realizado com a roda inteira, perdendo assim, os benefícios da técnica de submodelagem utilizada no modelo sem tensões residuais de fabricação.

Para superar esses inconvenientes, desenvolveu-se um procedimento que reduz o processo de fabricação do modelo sólido tridimensional a uma pequena região qualquer do aro da roda,

que será pré-definida. Para tanto, serão utilizados os resultados do modelo plano axissimétrico de tensões residuais descrito anteriormente e os resultados do modelo completo de malha grossa ou do submodelo refinado sem tensões residuais. Basicamente, duas grandezas provenientes desses dois modelos serão utilizadas: temperaturas e deslocamentos.

5.4.1 Criação do submodelo

Inicialmente constrói-se um submodelo tridimensional da região desejada do aro da roda, com uma extensão circunferencial suficientemente grande para uso na fase de contato e rolamento com o trilho. Como serão necessários os resultados do modelo sem tensão residual, à região do submodelo será a mesma adotada para este modelo.

Esse processo de submodelagem será realizado entre o modelo plano axissimétrico e o submodelo tridimensional. Como esses modelos apresentam geometrias distintas (um sólido e outro plano) e a técnica de submodelagem requer, os nós do modelo 3D devem ser deslocados para o plano x-y, onde foi construído o modelo axissimétrico. Para tanto, os nós devem ser “desvinculados” do modelo sólido (áreas e volumes) e depois rotacionados para o plano x-y. Em seguida, duas operações distintas devem ser realizadas para gravação das posições dos nós no submodelo: uma, selecionando-se os nós do contorno de corte, onde os deslocamentos serão interpolados, e outra selecionando-se os nós de todo submodelo, onde as temperaturas serão interpoladas. Na Figura 5.25 e na Figura 5.26 tem-se as duas situações representadas.

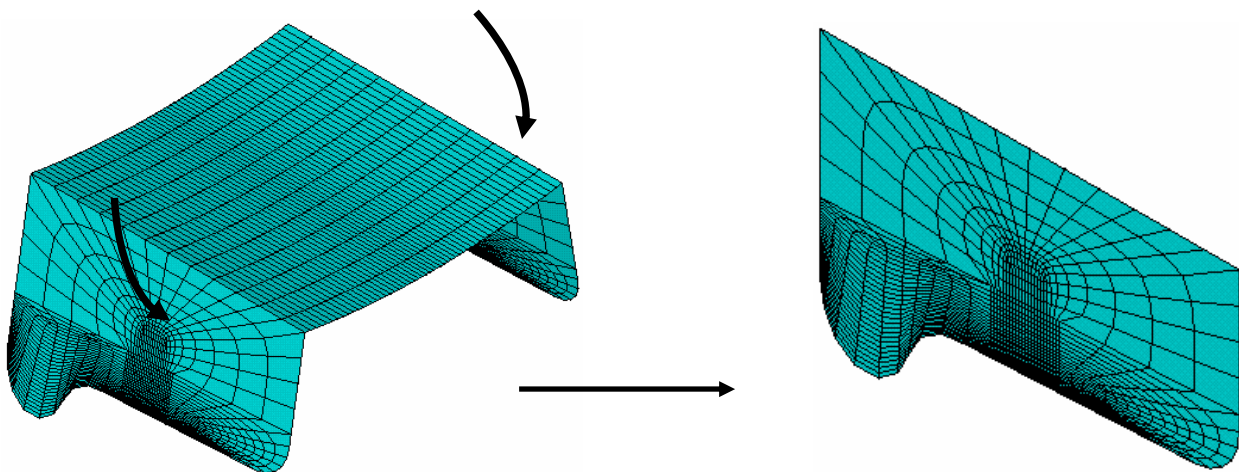


Figura 5.25: Rotação dos nós do contorno de corte do submodelo.

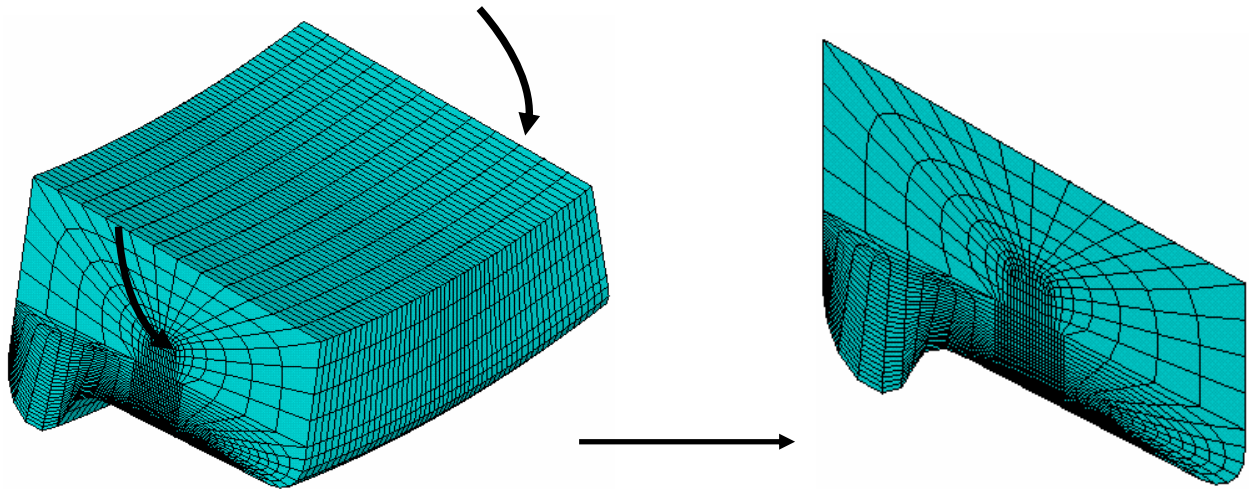


Figura 5.26: Rotação de todos os nós do submodelo.

Após a operação de desvinculação dos nós e da sua rotação, não pode-se mais usar esse modelo para o resto da análise, uma vez que os nós não encontram-se mais nas posições originais para análise. Por isso deve-se usar um modelo previamente salvo antes da rotação.

5.4.2 Condições de carregamento e contorno

Duas interpolações são, então, realizadas. Primeiramente interpola-se o deslocamento dos nós na região de corte do submodelo, a partir do modelo axissimétrico. Essa operação de ser feita para cada instante de tempo (passo de carga) da análise do processo de fabricação, uma vez que ela é não-linear em toda sua extensão. A segunda interpolação é feita com todos os nós a partir das temperaturas, também para cada instante de tempo. Como a malha do modelo axissimétrico e do submodelo sólido são iguais, apenas há uma copia das grandezas para os nós, não havendo necessidade de interpolação.

Realizada as interpolações, deve-se fazer uma correção dos deslocamentos aplicados no contorno do submodelo. Isso se faz necessário, pois o modelo axissimétrico, o qual os deslocamentos foram obtidos, é um modelo plano com os eixos x , y , z representando as direções radial, axial e circunferencial, respectivamente. Todos os deslocamentos e tensões obtidos nesse modelo serão dados nessas direções. Como o modelo sólido é construído em coordenadas cartesianas, a simples aplicação desses deslocamentos levaria a um resultado incorreto. Por isso

os deslocamentos obtidos do modelo axissimétrico foram transformados em coordenadas cartesianas e depois aplicados ao modelo. A expressão a seguir mostra essas transformações.

$$\begin{aligned} U_{x_i}^{solido}(t) &= U_{x_i}^{plano}(t) \sin(\theta), \\ U_{y_i}^{solido}(t) &= U_{y_i}^{plano}(t), \\ U_{z_i}^{solido}(t) &= U_{x_i}^{plano}(t) \cos(\theta), \end{aligned} \quad \text{eq. 5.5}$$

onde U é o deslocamento; θ é o ângulo que o deslocamento do nó faz com o plano x-y; i é o número do nó e t é o passo de carga que correspondente a cada instante do processo de fabricação. Realizadas essas etapas, temos um modelo tridimensional menor, com todas as condições de contorno necessárias para o cálculo das tensões residuais de fabricação.

Finalizado o cálculo das tensões residuais de fabricação, o contato e o rolamento da roda sobre o trilho são simulados aplicando-se os deslocamentos obtidos através da análise de contato com o modelo completo e malha grossa, no contorno de corte desse submodelo proposto. Para esse modelo, foram simulados um ciclo de carga.

5.5 Propriedades do material utilizado

Para o modelo de rolamento proposto, foi usada a curva tensão – deformação obtida através de ensaio de tração realizado das dependências da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP. O resultado do ensaio, repetindo o que foi apresentado na Figura 5.14, é apresentado na Figura 5.27.

O corpo de prova para esse ensaio foi extraído da região do aro de uma roda classe C e cedido pela empresa MWL. Nota-se que esse material apresenta uma elevada resistência mecânica, como era de se esperar em virtude do tratamento térmico. A Tabela 5.8 apresenta um resumo das propriedades obtidas no ensaio.

Para a realização da simulação, deve-se entrar primeiro com as propriedades elásticas – módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. Em seguida, deve-se entrar com as propriedades

plásticas para o modelo de encruamento adotado. Por se tratar de um metal dúctil, foi escolhido o modelo cinemático de encruamento multilinear, como já dito. Os pontos formados pelo par tensão – deformação são inseridos no software, sendo obrigatório que o primeiro ponto, após a região elástica seja a tensão de escoamento e sua respectiva deformação. Vinte pontos no total são permitidos.

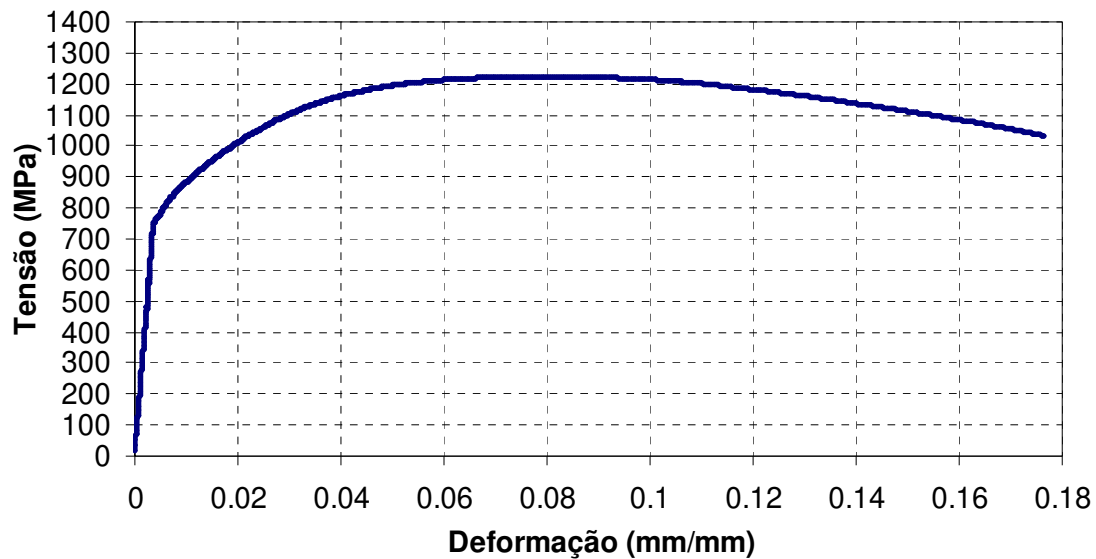


Figura 5.27: Gráfico do ensaio de tração para um corpo de prova do aro da roda classe C na temperatura ambiente.

Tabela 5.8: Propriedades mecânicas do ensaio de tração – Roda classe C.

Propriedade	Valor
Módulo de Elasticidade	210 GPa
Coefficiente de Poisson	0,3
Limite de escoamento	751 MPa
Limite de resistência à tração	1220 MPa

5.6 Procedimento para determinação da vida da roda

O fluxograma do procedimento de análise da vida em serviço do modelo proposto se encontra na Figura 5.28.

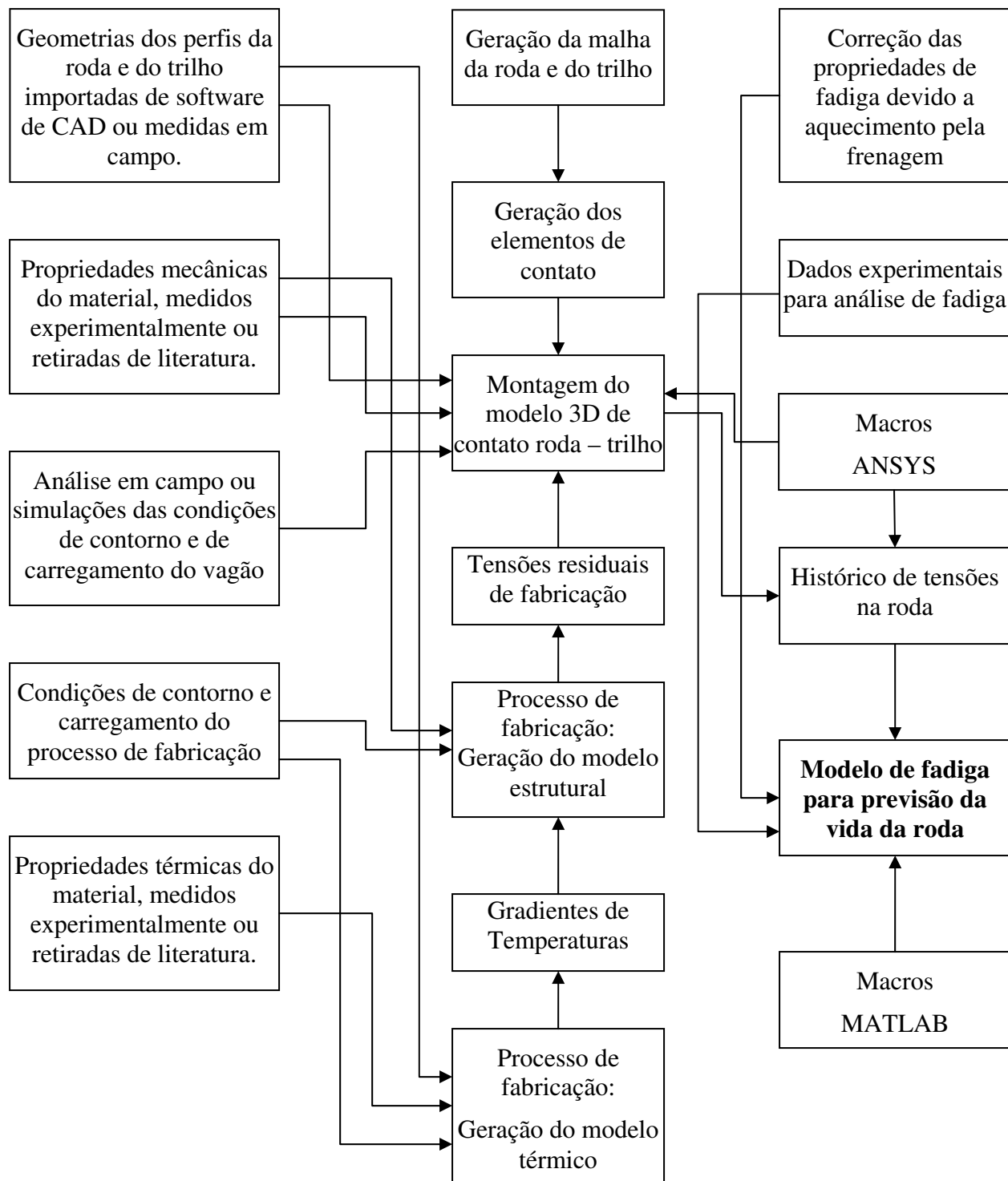


Figura 5.28: Fluxograma da metodologia de análise do contato roda–trilho.

Capítulo 6

Resultados e Discussão

Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações e estimativa da vida em serviço da roda ferroviária em estudo. Ao final, será feita uma comparação entre os modelos estudados, incluindo o modelo proposto, no que diz respeito à magnitude das tensões e a vida estimada com cada um deles.

6.1 Processo de fabricação

Utilizando o procedimento descrito no Capítulo 3 simulou-se a sequência completa para obtenção das tensões residuais, a partir do tratamento térmico de uma roda ferroviária forjada nova. Todo processo foi simulado em duas partes: primeiro a térmica, com a obtenção da distribuição de temperatura em toda roda durante todas as etapas do tratamento térmico, e depois a estrutural, onde essas temperaturas obtidas, em cada instante de tempo, são usadas na geração das tensões residuais de compressão.

6.1.1 Análise térmica

Fazendo uso dos tempos definidos para cada etapa do processo de tratamento térmico e os incrementos máximo e mínimo, pode-se determinar não só as temperaturas finais de cada etapa, mas também todo o histórico de temperaturas ao longo da análise. Os incrementos mínimos foram usados apenas no início de cada etapa, como forma de obter uma resposta mais contínua do modelo durante nessa fase inicial.

Tabela 6.1: Informações dos passos de tempo na análise térmica.

	Duração (s)	Etapas	Incremento de tempo mínimo (s)	Incremento de tempo máximo (s)
Têmpera	345	1	0,01	1
Revenimento	13320	2	0,1	10
Resfriamento	50000	3	0,5	100
TOTAL	63665			

Na Figura 6.1 tem-se a distribuição de temperatura no instante final da fase de têmpera. A temperatura mínima de 138 ° C obtida corresponde ao valor medido pelo fabricante (MWL). De fato, esse valor medido foi utilizado para calibração da potência de resfriamento usada durante a simulação da têmpera, que é feita por jatos de água. Como era de se esperar, a maior parte da roda (cubo e alma) se encontram próximos à temperatura inicial de têmpera, que é de 860 °C.

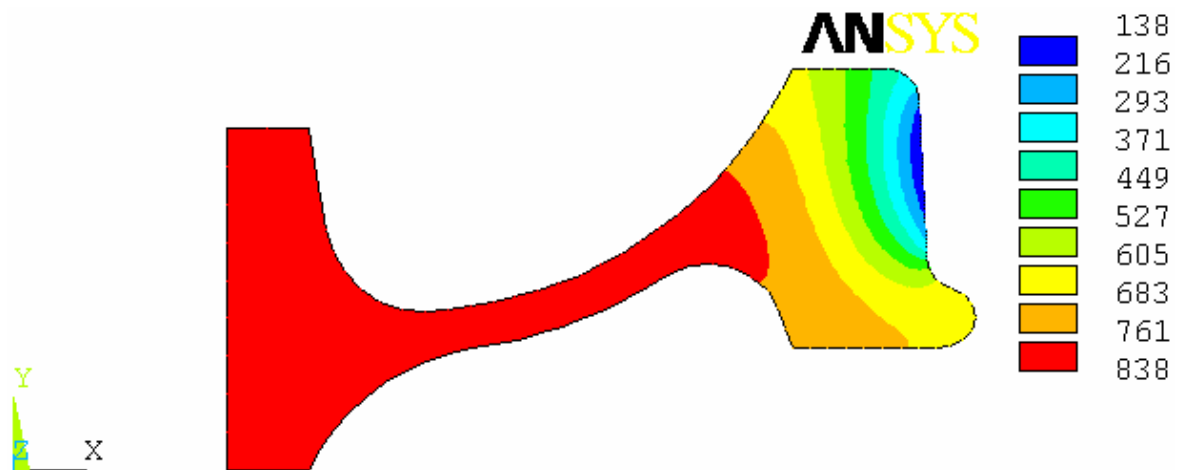


Figura 6.1: Distribuição de temperatura na roda (°C), após o fim da têmpera (345 segundos).

A distribuição de temperatura após 3,7 horas de revenimento é mostrada na Figura 6.2. A temperatura obtida no modelo é bem próxima à temperatura do forno de revenimento, que é de 550 ° C, o que mostra a adequação dos parâmetros de condução e convecção adotados.

A Figura 6.3 ilustra a distribuição final de temperatura após o resfriamento da roda, no fim de todo processo de tratamento térmico, após aproximadamente 14 horas. A temperatura ambiente ajustada foi de aproximadamente 25 ° C.

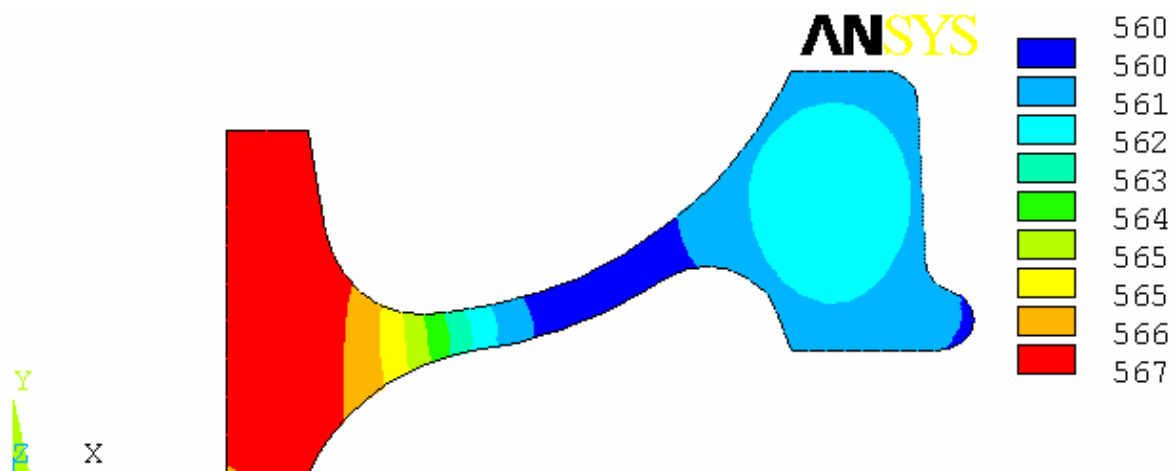


Figura 6.2: Distribuição de temperatura na roda (em °C), após o fim do revenimento (3,7 horas).

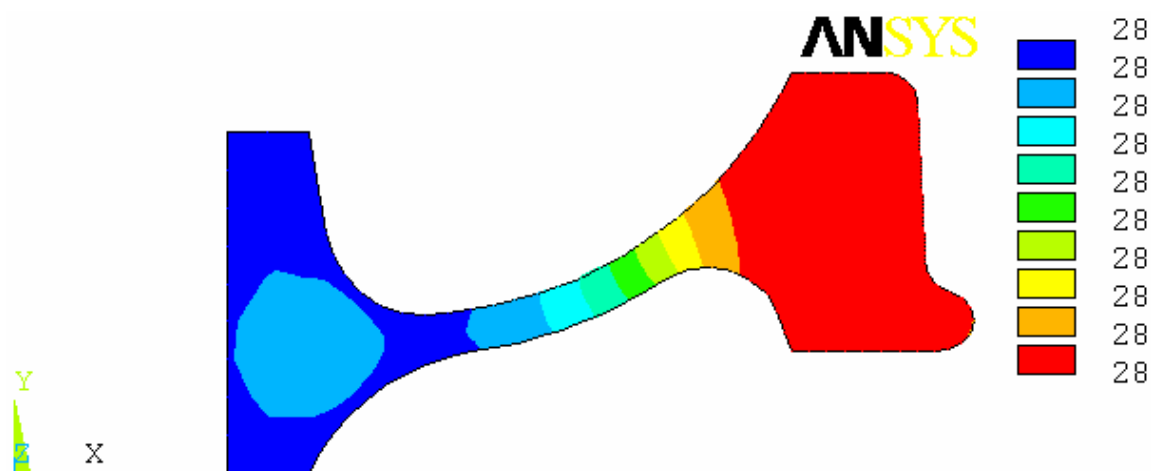


Figura 6.3: Distribuição de temperatura na roda (em °C), após o fim do resfriamento (14 horas).

Como a simulação do processo de tratamento térmico é transiente, torna-se difícil analisar o comportamento das temperaturas na roda apenas observando seus gradientes pelas figuras anteriores. Sendo assim, traçou-se gráficos bidimensionais (x-y) de pontos selecionados na roda, a fim de observar o comportamento das temperaturas e tensões ao longo do processo. Sendo o aro da roda a região de estudo, pois ali é onde se concentram as tensões provenientes do contato, dois pontos foram escolhidos para representar o histórico de temperaturas ao em função do tempo. Um ponto se encontra na superfície de rolamento e outro na base do aro (Figura 6.4). A linha vermelha representa o caminho através do qual as diversas grandezas (temperatura, tensões, deformações) serão traçadas nos gráficos, ao longo desse trabalho (vide Figura 6.5).

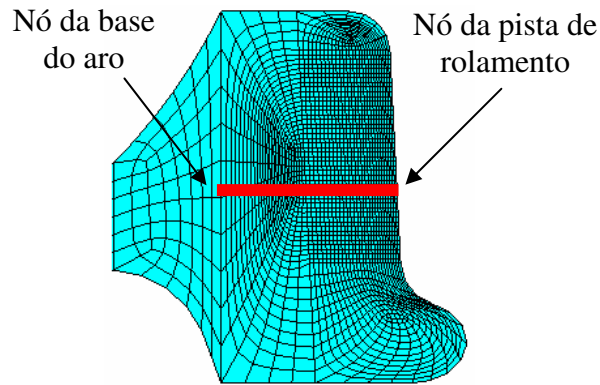


Figura 6.4: Nós selecionados para o histórico de temperaturas e tensões e caminho onde será traçado o gráfico de tensão em função da profundidade (linha vermelha).

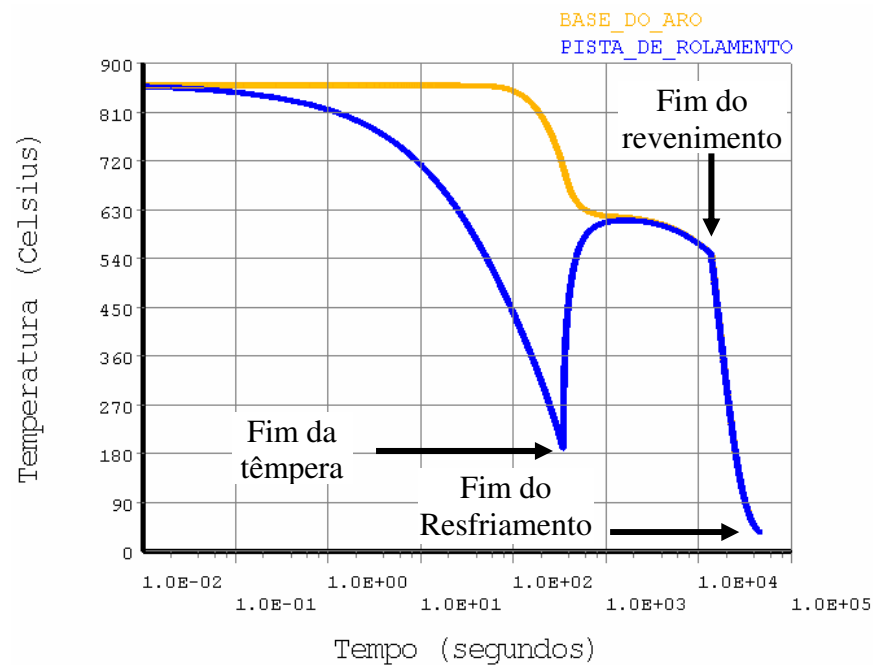


Figura 6.5: Variação da temperatura (em °C) ao longo de todo processo de fabricação para dois pontos no aro da roda: pista e base do aro.

No gráfico da Figura 6.5 tem-se uma representação da variação da temperatura durante todo processo de tratamento térmico, começando a uma temperatura de 860 °C, passando pela têmpera, revenimento e terminado a temperatura ambiente. A escala de tempo no eixo das abscissas é logarítmica, devido ao fato de que todo processo é longo, com etapas que não têm duração uniforme. Pode-se observar no gráfico, que os dois pontos apresentam uma variação não-

linear com o tempo. Isso justifica a aplicação do gradiente de temperatura correspondente a cada instante para a obtenção das tensões e deformações residuais. O fim de cada etapa é indicado também no gráfico.

6.1.2 Análise estrutural

Seguindo a análise térmica, as temperaturas obtidas são usadas como dados de entrada para a análise estrutural. Todas essas temperaturas calculadas ao longo do processo representam as cargas térmicas que causarão as tensões residuais. A Figura 6.6, Figura 6.7 e Figura 6.8 apresentam distribuição de tensões circunferenciais imediatamente após o fim de cada fase.

Na Figura 6.6 nota-se o surgimento de tensões de tração na região onde ocorreu a têmpera (pista de rolamento). Isso ocorre devido ao resfriamento brusco ocorrido nessa região, que estava a uma temperatura elevada (860 °C), devido à ação dos jatos de água.

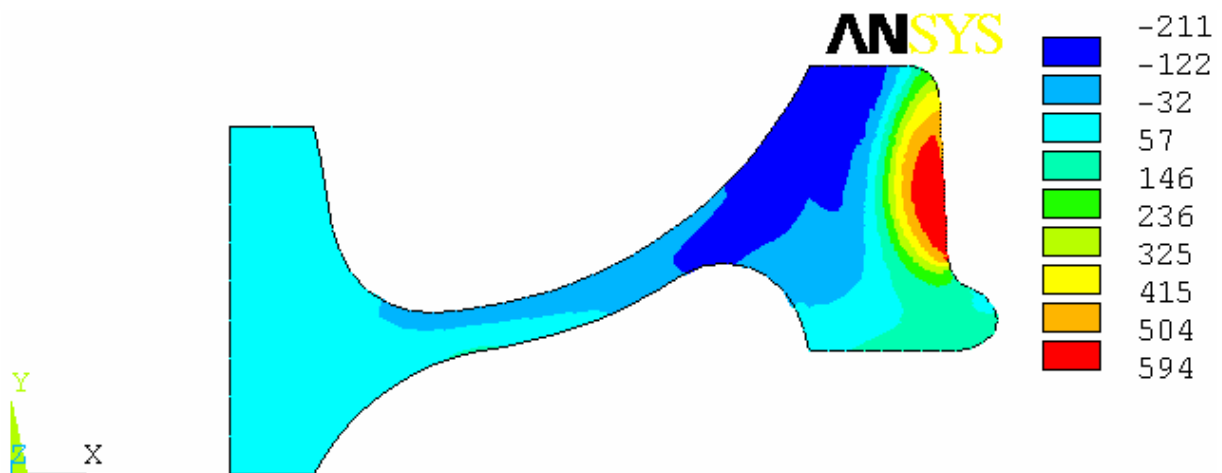


Figura 6.6: Distribuição da tensão (MPa) circunferencial no aro da roda após o fim da têmpera (345 segundos).

Na Figura 6.7, que representa a distribuição de tensão após o fim do revenimento, pode-se notar o surgimento das tensões circunferenciais de compressão no aro. Isso ocorre devido ao alívio de tensões proveniente do revenimento.



Figura 6.7: Distribuição da tensão (MPa) circunferencial no aro da roda após o fim do revenimento (3,7 horas).

A Figura 6.8 representa o estado final de tensões residuais circunferenciais após o fim do processo. O objetivo de obtenção das tensões residuais circunferenciais de compressão foi alcançado, uma vez que quase toda extensão do aro está sob compressão. Pode-se notar que os contornos de distribuição de tensão são iguais aos do fim do revenimento. Entretanto, as tensões residuais de compressão são mais elevadas no fim do processo. A região de tração na concordância entre a alma e o aro tem como função equilibrar a compressão sofrida pela pista. O valor máximo de tensões está de acordo com medições feitas, utilizando técnicas de ultra-som, realizadas por Minicuci (MINICUCI, 2003).

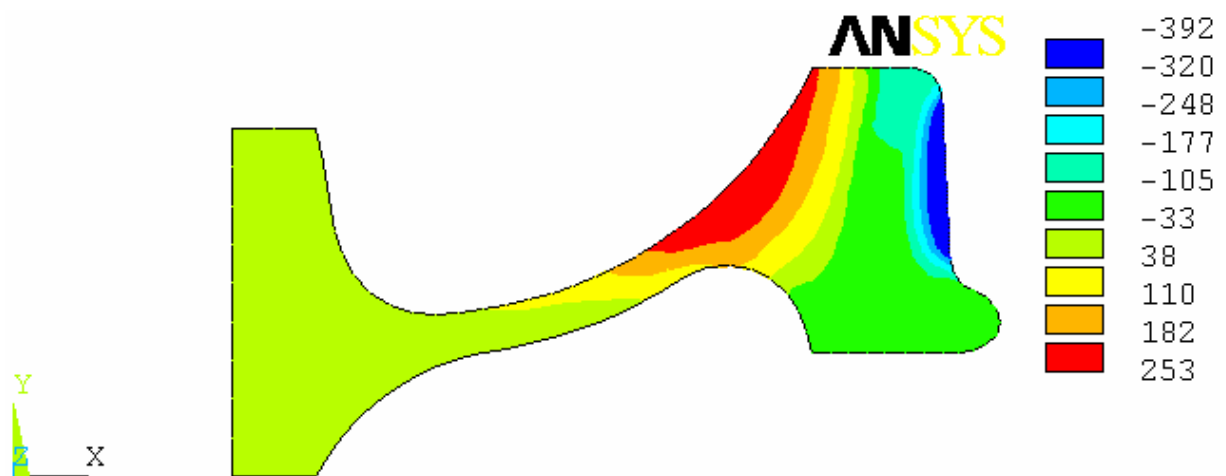


Figura 6.8: Distribuição da tensão (MPa) circunferencial no aro da roda após o fim do resfriamento (8,6 horas).

No gráfico da Figura 6.9 tem-se à variação das tensões circunferenciais ao longo do aro (através da linha vermelha da Figura 6.4), correspondente às distribuições de tensão da Figura 6.6 a Figura 6.8. A profundidade de penetração das tensões residuais no aro está de acordo com as práticas de manutenção em rodas, tanto de vagões de carga quanto de carros de passageiros (GORDON & PERLMAN, 2003). A espessura do aro de uma roda múltipla vida, como a usada neste trabalho, é de aproximadamente 70 milímetros. Segundo Gordon & Perlman (2003), rodas podem continuar em serviço, na ausência de trincas, até o aro sofrer desgaste ou ser reperfilado para uma espessura mínima de 38 milímetros.

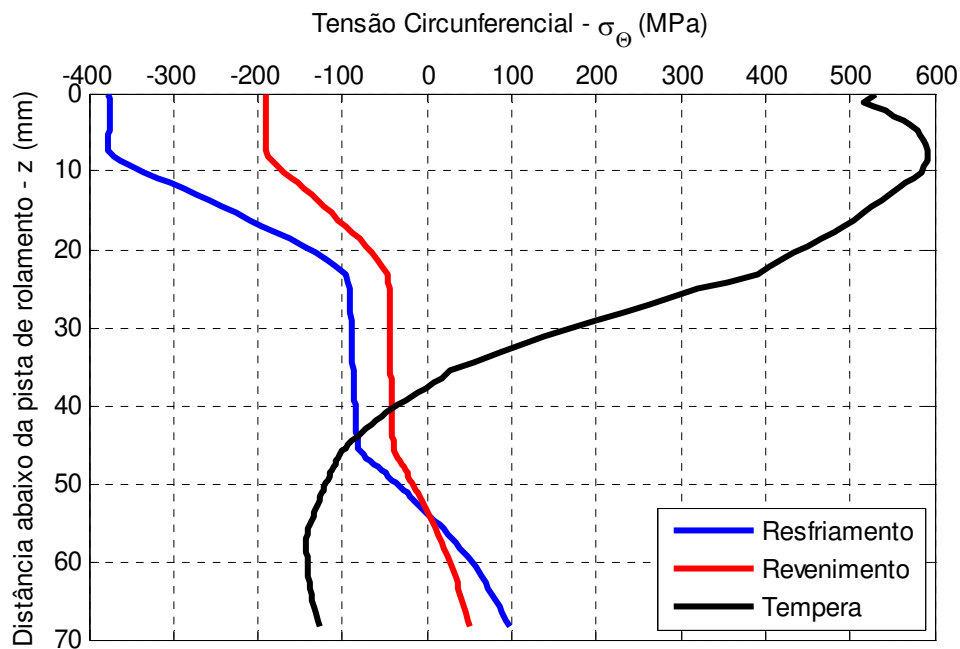


Figura 6.9: Variação da tensão circunferencial (MPa) ao longo do aro da roda para cada etapa do processo de fabricação: têmpera, revenimento e resfriamento.

Os dois nós indicados na Figura 6.4 foram escolhidos para que o histórico de tensões circunferenciais ao longo do processo fosse analisado. A Figura 6.10 representa os primeiros 1000 segundos do processo para ilustrar com detalhes o início da simulação, uma vez que a etapa de têmpera é bem menor que as outras duas. Pode-se notar que a superfície de rolamento, durante os 6 minutos de têmpera, apresenta uma tensão de tração significativa, que aumenta à medida que essa região resfria rapidamente e se contrai. Essa contração é resistida pelo resto da roda. A base do aro não é praticamente afetada pela têmpera, logo suas tensões são aproximadamente nulas.

No início do revenimento, que pode ser observado na Figura 6.11, e que engloba todo processo, as tensões (na pista de rolamento e na base do aro) decrescem rapidamente. Decorrido algum tempo do revenimento, as tensões estabilizam-se até o fim dessa etapa e o início do resfriamento. No resfriamento as tensões na pista de rolamento sofrem um novo aumento em compressão, enquanto que na base do aro permanecem praticamente inalteradas.

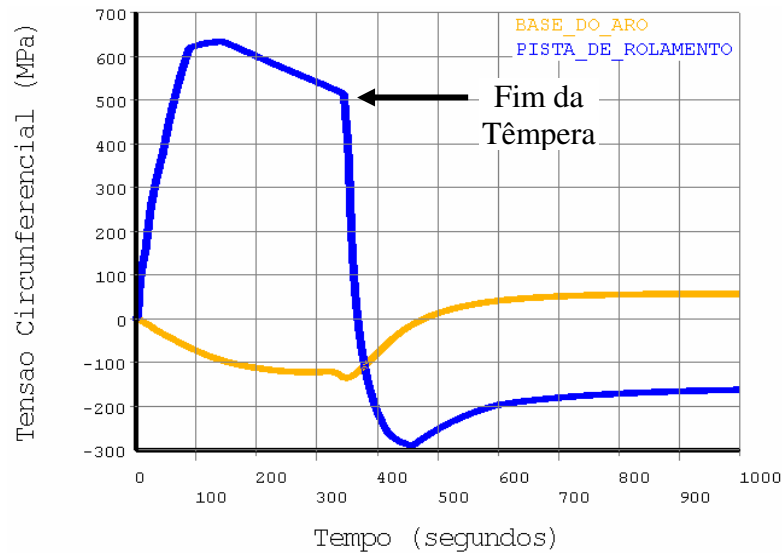


Figura 6.10: Variação da tensão circunferencial (MPa) nas etapas de têmpera e revenimento para dois pontos na roda: pista e base do aro.

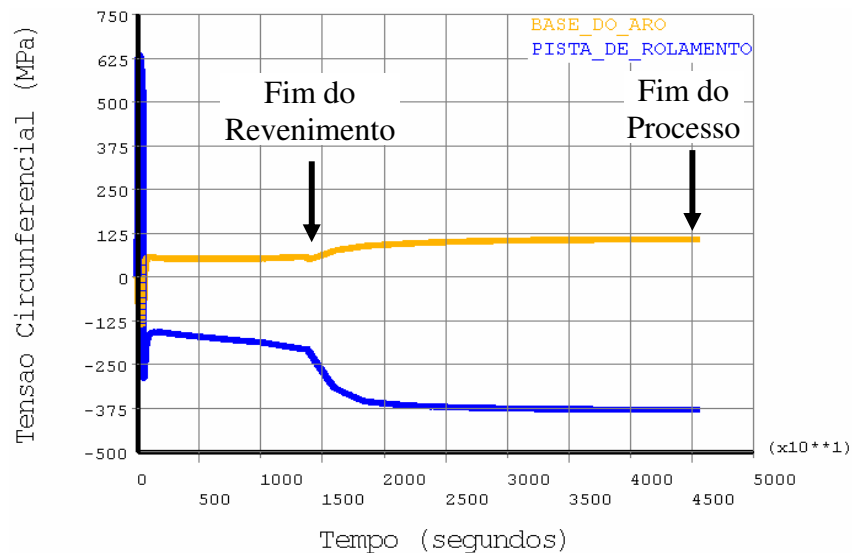


Figura 6.11: Variação da tensão circunferencial (MPa) em todo processo de fabricação para dois pontos na roda: pista e base do aro.

6.2 Contato roda–trilho

Após a determinação das tensões residuais de fabricação, será realizado o cálculo das tensões provenientes do contato roda – trilho. Inicialmente quatro modelos serão utilizados, sendo dois deles semi-analíticos, um numérico e o modelo proposto, também numérico. O primeiro modelo será o semi-analítico, elástico, baseado na Teoria de Hertz. Para tanto, serão usadas as equações desenvolvidas no Capítulo 3. O segundo modelo terá, além das tensões calculadas no modelo anterior, também as tensões residuais de fabricação. O terceiro modelo será numérico elastoplástico, conforme descrito no Capítulo 5. Finalmente, modelo proposto terá as tensões residuais de fabricação como condição inicial para uma simulação do contato roda – trilho elastoplástica. Ao final de todas as simulações, será realizada uma comparação entre os modelos utilizados.

6.2.1 Modelo elástico (Ana Elás)

A análise semi-analítica elástica foi realizada com base nas expressões desenvolvidas no Capítulo 3. O método, apesar de analítico, requer que integrais elípticas sejam resolvidas a fim de que algumas componentes do tensor de tensões possam ser determinadas. Por isso, o método não pode ser considerado puramente analítico, com uma solução em forma fechada.

A teoria de Hertz (1882) foi usada para determinação do formato da região de contato, que no caso roda – trilho será uma elipse, e a distribuição de pressão na interface de contato entre a roda e o trilho. Essa distribuição de pressão será a fonte de esforços que irá gerar tensores de tensão em quaisquer pontos dos corpos em contato, definidos por um vetor tridimensional (x_i, y_i, z_i) .

Um programa, composto de diversas rotinas, foi construído utilizando o pacote comercial MATLAB 7.3[®], para o cálculo de todos os parâmetros necessários para determinação das tensões originadas no contato.

A Tabela 6.2 apresenta as propriedades mecânicas e o carregamento utilizados como dados de entrada no programa. Essas propriedades foram extraídas da curva do ensaio de tração realizado nas dependências da Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP. O carregamento equivale à carga máxima de um vagão da Vale do Rio Doce, Estrada de Ferro Carajás, de 120 toneladas. Isso nos dá 15 toneladas por roda de carregamento. Conforme discutido no Capítulo 5, foi acrescentado um fator dinâmico constante de 1,3 a carga.

Tabela 6.2: Propriedades mecânicas e carregamento usado na análise semi-analítica.

E (MPa)	ν	Carregamento (ton)
210000	0,3	$15 \pm 4,5$

A roda adotada foi de 38” de diâmetro (965,2 mm) e o trilho do tipo TR-58 com 10” (254 mm) de raio do boleto. A Tabela 6.3 apresenta esses e outros parâmetros utilizados, que seguem o esquema da Figura 6.12 e da Figura 3.3.

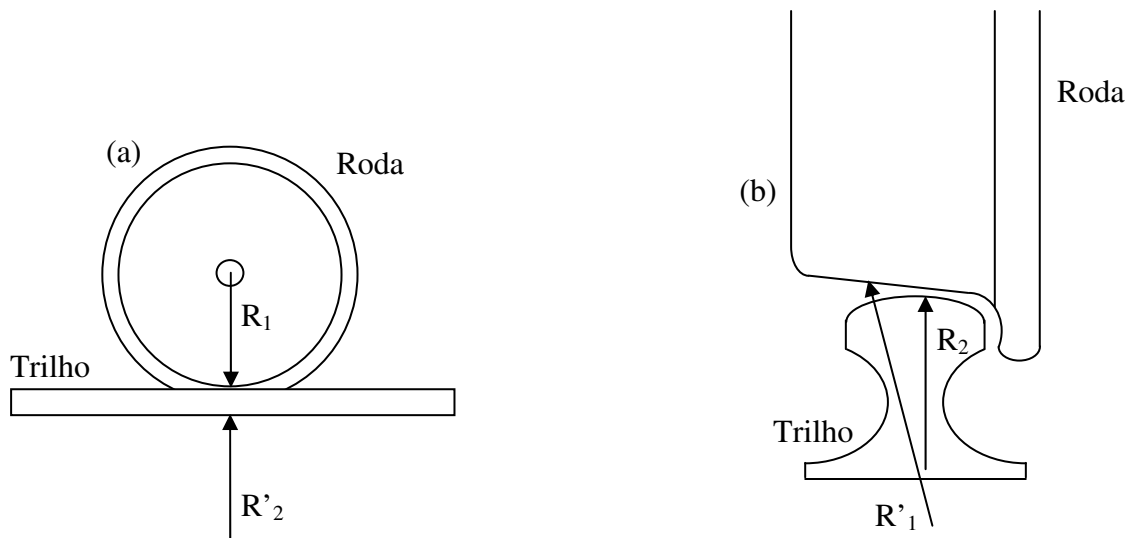


Figura 6.12: Esboço do contato roda – trilho: (a) vista lateral. (b) vista transversal.

Tabela 6.3: Propriedades geométricas usadas na análise elástica.

R'_1 (mm)	R_1 (mm)	R'_2 (mm)	R_2 (mm)	α
∞	482,6 (19")	∞	254 (10")	90°

O número de pontos e o intervalo adotado, nas três direções, estão na Tabela 6.4. Os vetores posição (x,y,z) foram gerados a partir da malha adotada do modelo de elementos finitos e usados para os modelos analíticos. A razão disso é, posteriormente, comparar o comportamento das tensões entre os modelos analisados de forma coerente. Com esses vetores foi possível determinar a posição de cada ponto da roda que se deseja estudar e, assim, determinar as tensões neles.

Tabela 6.4: Número de pontos e intervalos utilizados para o cálculo dos tensores de tensão.

Direção longitudinal (x) – mm	Direção lateral (y) – mm	Direção vertical (z) – mm
58 pontos [-58,58]	23 pontos [-12,12]	27 pontos [0, 22]

Antes do cálculo dos tensores de tensão, é necessário determinar os semi-eixos a e b da região de contato e a pressão máxima atuante ali. Esses resultados provêm diretamente da Teoria de Hertz. A Tabela 6.5 apresenta os valores calculados, conforme as equações apresentadas no capítulo 3.

Tabela 6.5: Semi-eixos da elipse, pressão máxima e tensão equivalente máxima encontrada através da Teoria de Hertz.

a (mm)	b (mm)	$P_{\max}$ (MPa)	σ_{vm} (MPa)
9,4	6,1	1620	997

Observa-se que a máxima tensão equivalente (Von Mises) calculada para estas propriedades e carregamento definidos, é superior ao limite de escoamento determinado em ensaio para este material (750 MPa). Como mencionado no Capítulo 4, o critério de escoamento adotado para o material da roda (liga dútil) foi o de Von Mises. Logo, conclui-se que o material sofrerá escoamento plástico, o que conduz a necessidade de uma análise numérica. Os resultados desta análise serão mostrados posteriormente.

Na Figura 6.13 e na Figura 6.14 tem-se a variação dos componentes do tensor de tensões com a direção do rolamento (longitudinal – x), para vários pontos abaixo da superfície de

rolamento (direção z) e posição lateral nula ($y = 0$). As tensões normais (σ_x , σ_y , σ_z) apresentam o seu valor máximo no centro do rolamento (0,0,0) e na superfície de contato ($z = 0$). Todas as tensões normais são de compressão.

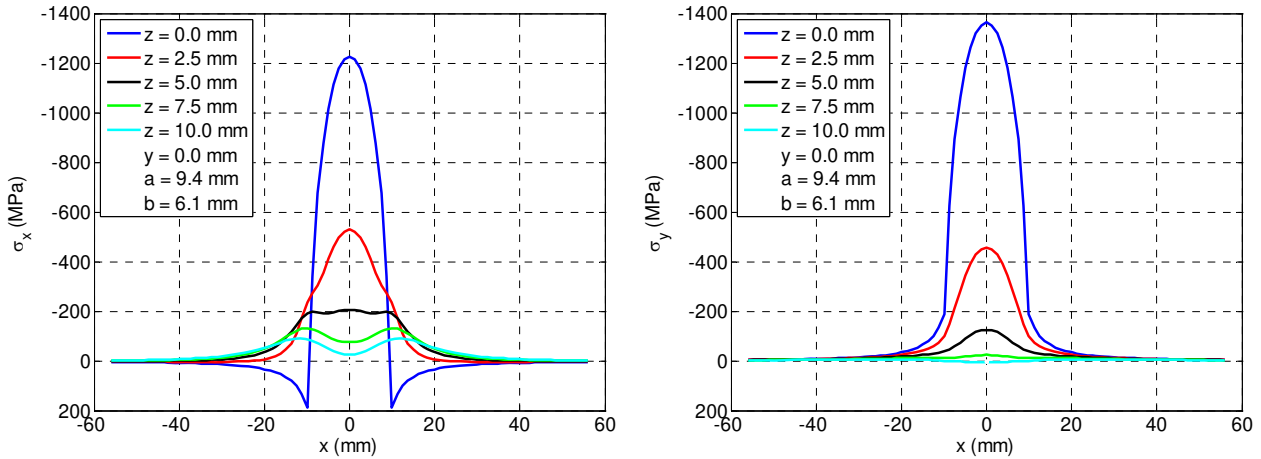


Figura 6.13: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z).

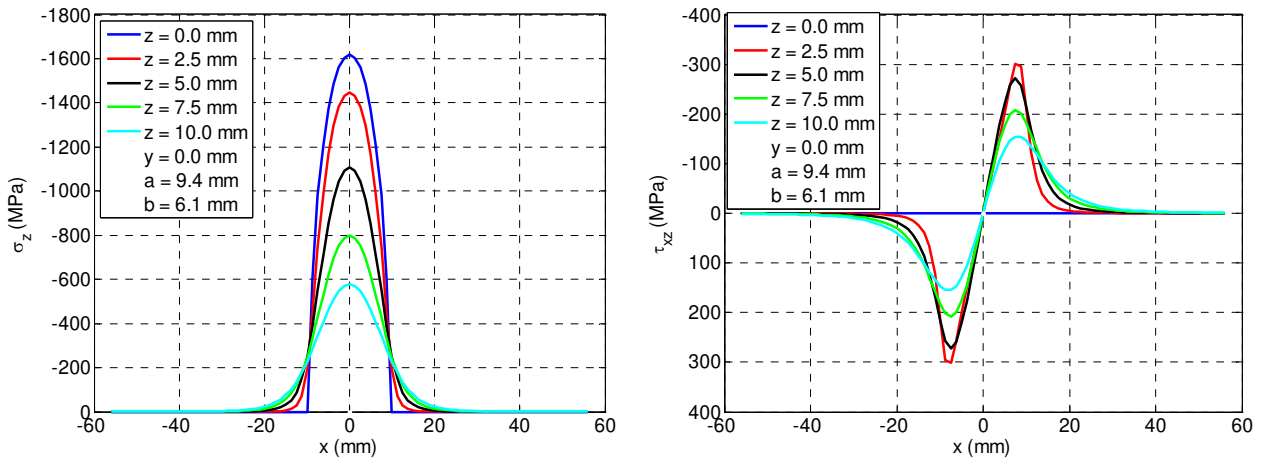


Figura 6.14: Variação da tensão normal vertical (σ_z) e cisalhante (τ_{xz}) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z).

À medida que os pontos vão se distanciando da superfície (região do contato), as tensões vão tendendo a zero. Com relação à direção do rolamento, as tensões são nulas a partir de aproximadamente ± 30 mm, o que se leva a concluir que a concentração de tensões é restrita a região em torno do contato. A tensão σ_x , calculada na superfície e na mesma direção da variável independente (x), tem o seu valor invertido (para positivo) no instante em que ultrapassa a borda

da elipse de contato. Depois tende a zero, à medida que se afasta do centro. O mesmo comportamento aconteceria com a tensão σ_y ao longo do eixo y .

As tensões cisalhantes têm um comportamento um pouco diferente. Como o carregamento tem seu eixo de aplicação no centro do contato, elas serão nulas neste ponto, e aumentam à medida que se afasta do centro do contato, voltando a diminuir com o afastamento. Para $z = 0$ a tensão τ_{xz} é nula. As componentes τ_{xy} e τ_{yz} não são mostradas, pois para posição lateral escolhida ($y = 0$) todas são nulas, independente da profundidade do ponto.

A variação das tensões com os pontos abaixo da superfície da roda pode ser vista na Figura 6.15 e Figura 6.16. Foram consideradas diversas posições longitudinais com $y = 0$. Para pontos mais próximos do centro do contato ($x = 0$), as tensões normais têm seus valores máximos na superfície de contato. Pontos mais afastados do centro tendem a ter os valores máximos um pouco abaixo da superfície. As tensões cisalhantes, pelo contrário, tem o seu valor máximo abaixo da superfície. É justamente nessa região, que ocorrerão as maiores deformações plásticas, como será visto mais adiante. Além disso, este é um local onde as trincas têm maior probabilidade de surgir, conforme a literatura. Todas as componentes vão convergindo para zero, à medida que a profundidade aumenta. As componentes τ_{xy} e τ_{yz} são nulas, devido à coordenada lateral ser nula também no exemplo adotado.

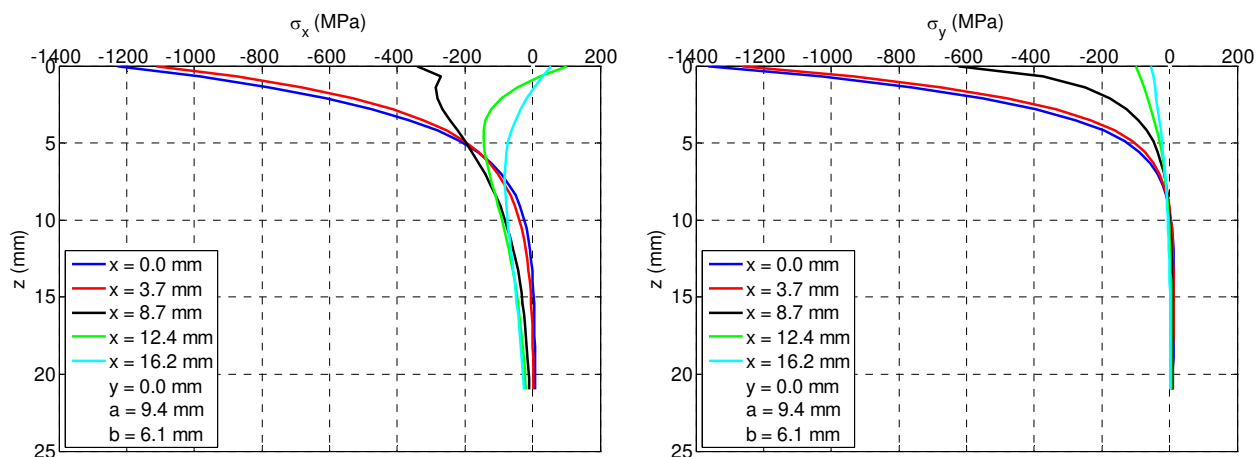


Figura 6.15: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z , considerando vários pontos na direção longitudinal (x).

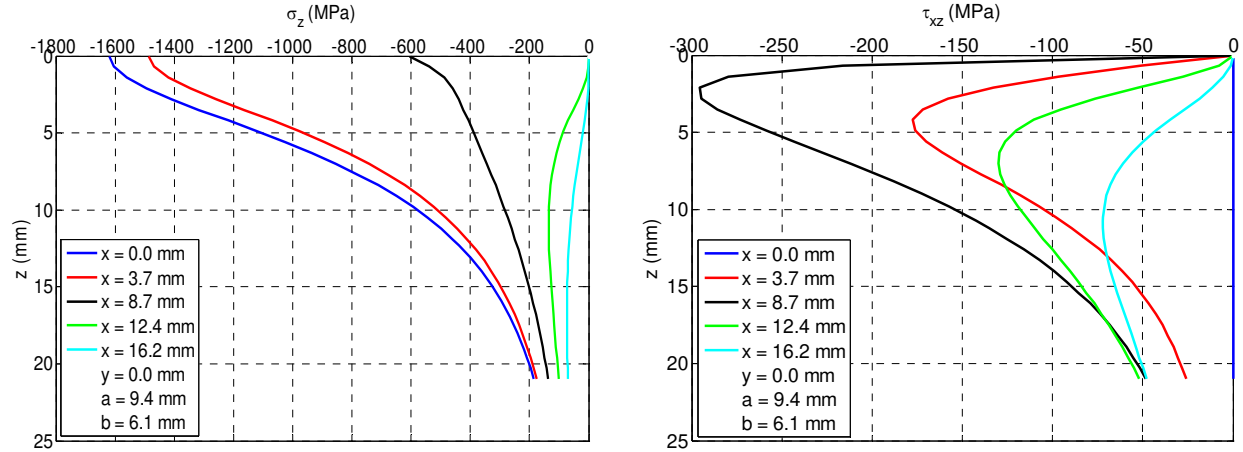


Figura 6.16: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) e cisalhante (τ_{xz}) em função de z , considerando vários pontos na direção longitudinal (x).

6.2.2 Modelo elástico com tensões residuais de fabricação (Ana Elás + Fab)

As tensões elásticas, calculadas anteriormente, serão compostas com as tensões residuais de fabricação simuladas através do modelo numérico axissimétrico. Essa combinação tem como objetivo ser comparada com uma das simulações numéricas elastoplástica que incluirá as tensões residuais de fabricação. Sabe-se que caso a roda, apresentando tensões residuais iniciais, não sofra mais deformação plástica (não ocorre mais escoamento) após estabelecer o contato com o trilho, o sistema irá permanecer em regime elástico, e as tensões no contato poderão ser somadas as residuais (Bernasconi, 2005).

Na Figura 6.17 pode-se perceber a influência das tensões circunferenciais residuais de compressão nas componentes σ_x e σ_y . Ao longo de todo ciclo, há presença de tensões, mesmo após a passagem do ponto pela região de contato. Na Figura 6.18 nota-se que não há presença de tensões residuais na direção vertical (radial), uma vez que o processo de fabricação gera tensões de compressão na direção circunferencial.

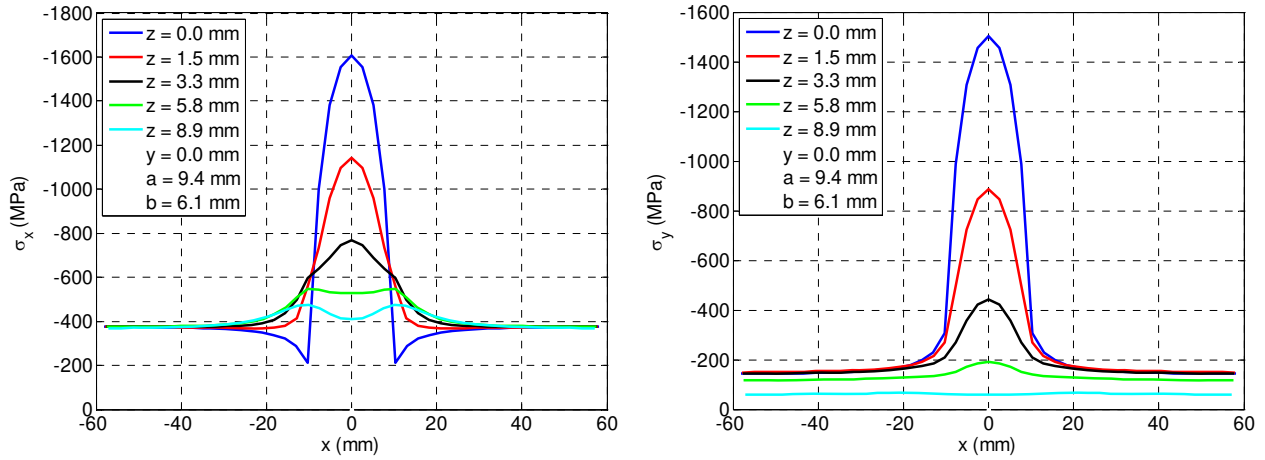


Figura 6.17: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) com tensões residuais.

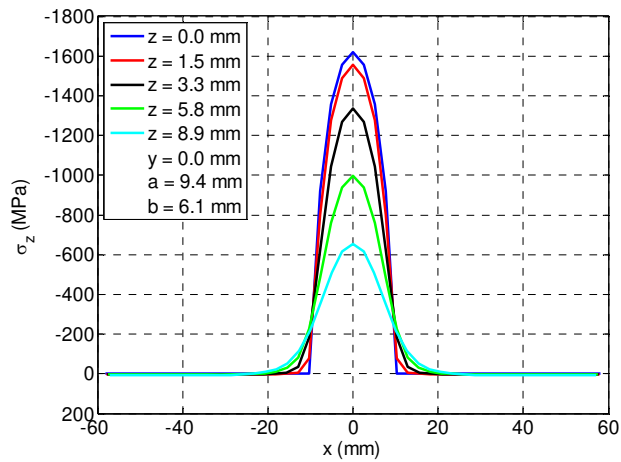


Figura 6.18: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) com tensões residuais.

As tensões cisalhantes da Figura 6.19 apresentam comportamento distinto. A componente τ_{yz} apresenta apenas uma tensão residual bem pequena, uma vez que para o ponto analisado ($y = 0$) não há tensões desse tipo. A componente τ_{xz} , por outro lado, não apresenta nenhuma tensão residual.

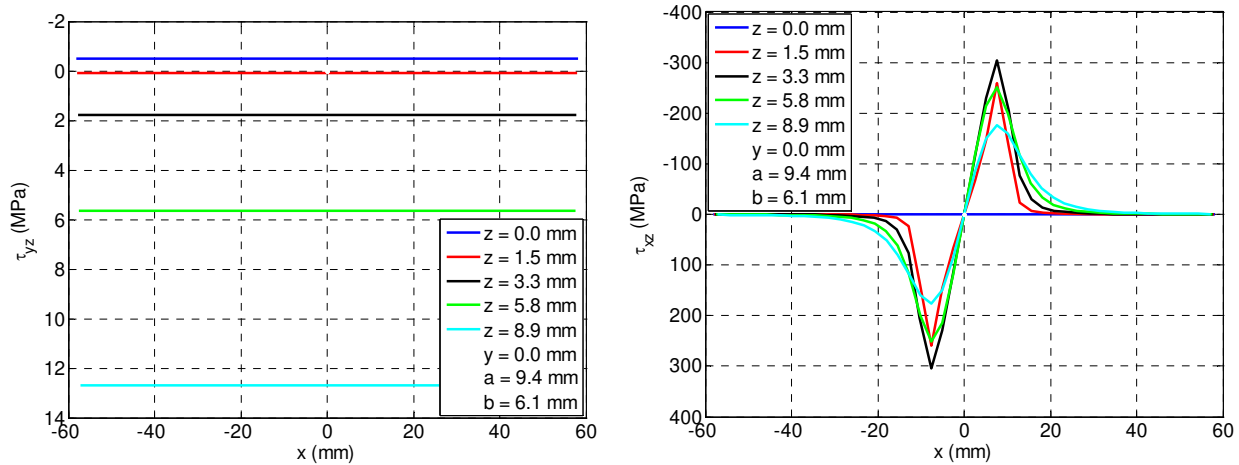


Figura 6.19: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) com tensões residuais.

O comportamento das tensões ao longo da profundidade (Figura 6.20 a Figura 6.22) segue o mesmo padrão anterior, com acréscimos de tensão apenas nas componentes. σ_x , σ_y e τ_{yz} .

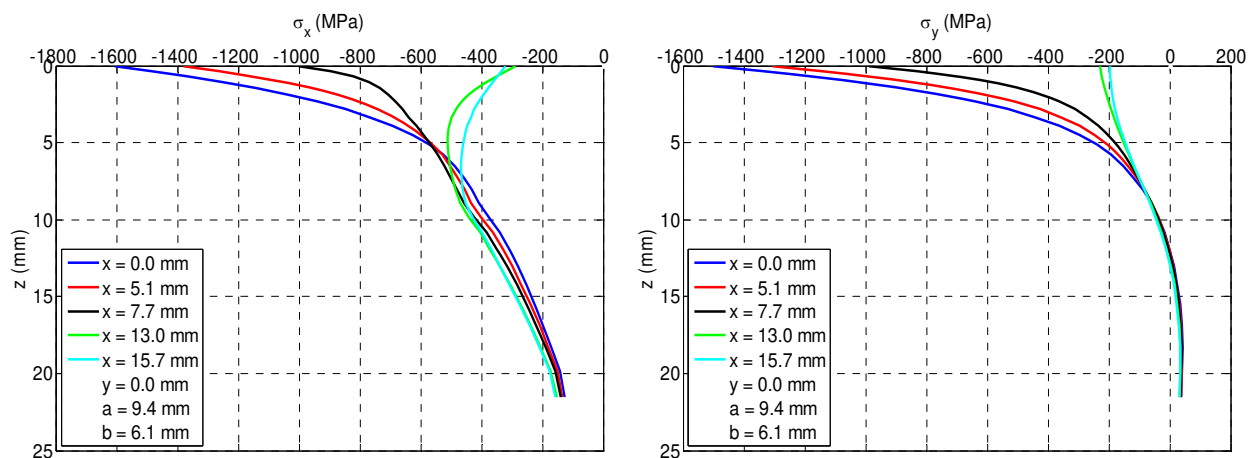


Figura 6.20: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z , considerando vários pontos na direção longitudinal (x) com tensões residuais.

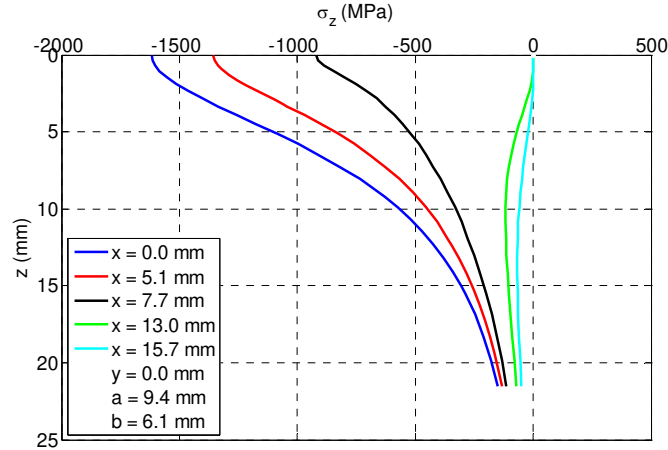


Figura 6.21: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) com tensões residuais.

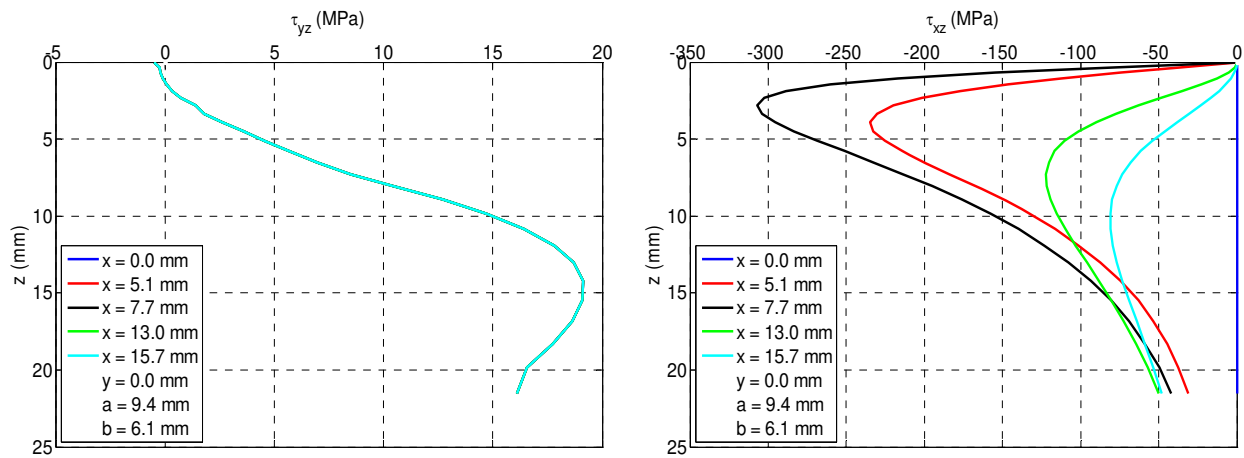


Figura 6.22: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) com tensões residuais.

6.2.3 Modelo elastoplástico (MEF)

A análise elastoplástica numérica foi realizada, conforme descrito no capítulo 5, aplicando cinco ciclos de carregamento à roda, que estava sujeita a uma força vertical constante de 19,5 toneladas.

Como foi utilizada a técnica de submodelagem, e conforme o procedimento descrito no Capítulo 5 deve-se verificar se os resultados no contorno de corte escolhido para o submodelo são

semelhantes entre o modelo completo e o submodelo. Para tanto, define-se uma seqüência de pontos em duas direções (caminhos) para verificação dos resultados, conforme Figura 6.23.

Na Figura 6.24 tem-se a tensão de Von Mises em função do caminho traçado na direção do rolamento da roda (caminho 1). Na Figura 6.25 o mesmo gráfico é traçado, mas desta vez para o caminho na direção lateral da roda (caminho 2). Em ambas as situações, pode-se notar uma concordância adequada entre as tensões dos dois modelos nesse contorno. A maior diferença entre as tensões obtidas através das duas malhas, segundo esses gráficos, é de 4,5%. Assim a malha do modelo completo no contorno de corte e a localização do submodelo são adequados para análise.

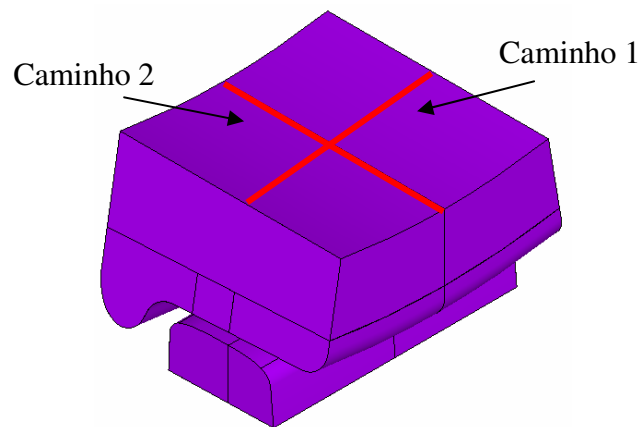


Figura 6.23: Submodelo adotado e os caminhos escolhidos para verificação dos resultados.

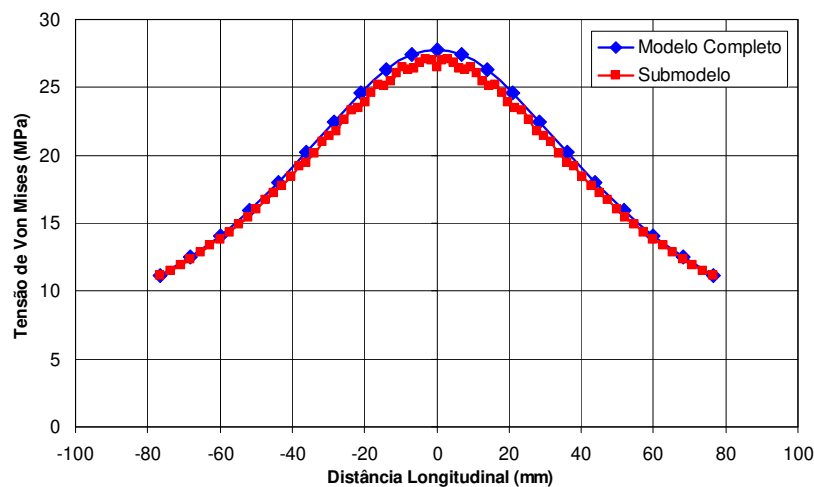


Figura 6.24: Tensão de Von Mises em função da distância descrita pelo caminho 1.

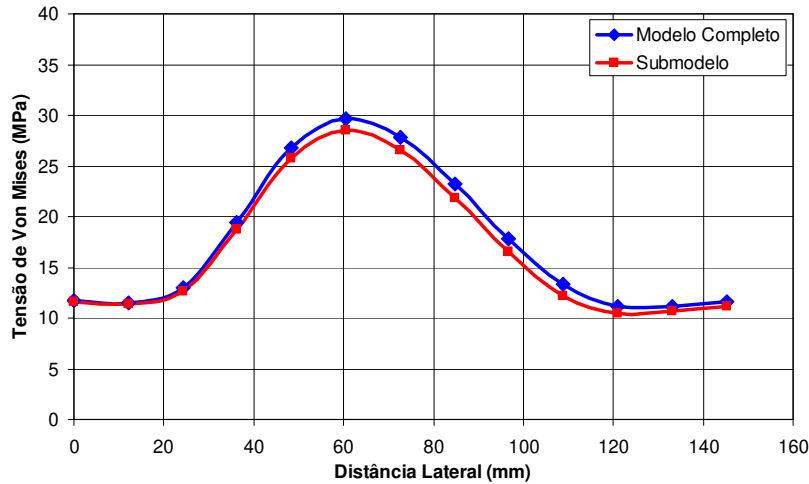


Figura 6.25: Tensão de Von Mises em função da distância descrita pelo caminho 2.

No gráfico da Figura 6.26 tem-se o ciclo de histerese do ponto de maior deformação plástica sofrida pela roda, localizado pouco abaixo da superfície de rolamento, que mostra a variação da tensão equivalente de Von Mises em função da deformação plástica equivalente. Após o primeiro ciclo de carregamento, nota-se a ocorrência de grande deformação plástica. A partir do terceiro ciclo o material entra em regime elástico, mas com uma deformação plástica permanente. Esse fenômeno também pode ser chamado de “shakedown” elástico, o qual é característico de fadiga de alto ciclo e de metais dúcteis.

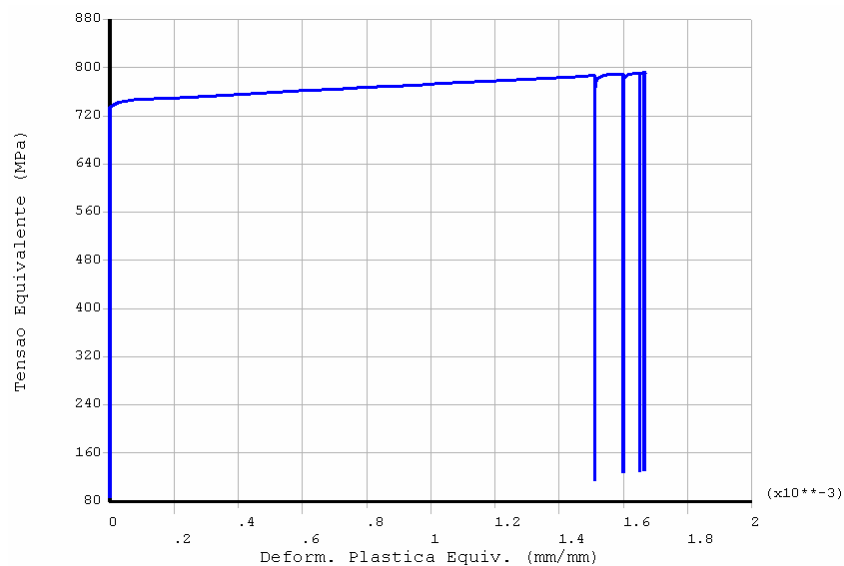


Figura 6.26: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação plástica.

Na Figura 6.27 tem-se, para o mesmo ponto usado anteriormente, o gráfico da tensão de Von Mises, mas agora em função da deformação total. Na Figura 6.28 a deformação plástica equivalente é traçada em função da distância percorrida ao longo dos ciclos. Após três ciclos, nota-se que ocorre uma estabilização da deformação plástica, que não aumentará mais de valor com os ciclos subseqüentes.

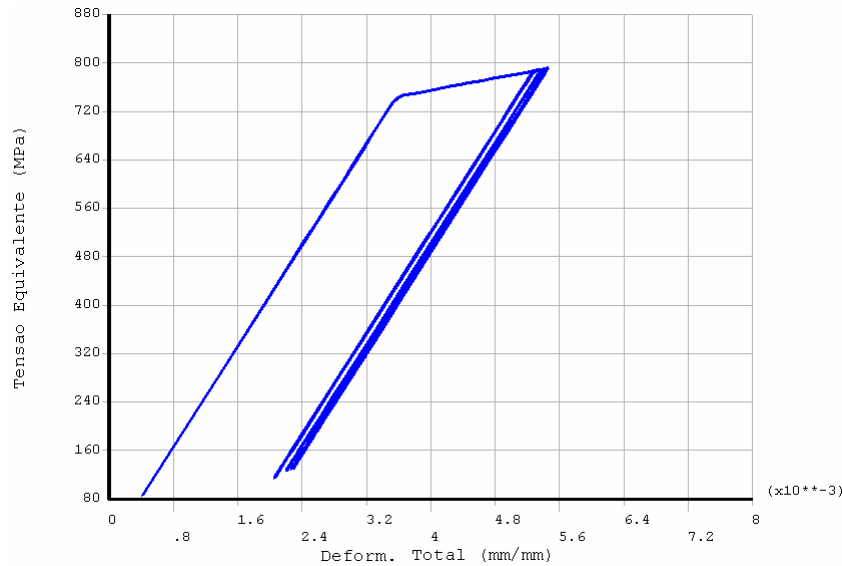


Figura 6.27: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação total.

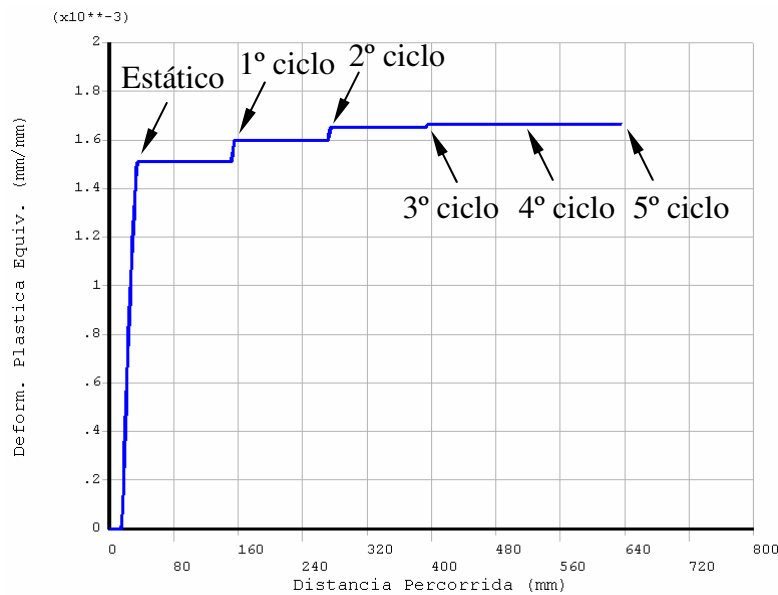


Figura 6.28: Variação da deformação plástica equivalente ao longo da distância percorrida, em um ponto de máxima deformação plástica localizada abaixo da superfície da roda.

A Tabela 6.6 apresenta as dimensões da região de contato, pressão máxima de Von Mises ao final do quinto ciclo. Nota-se que, apesar das dimensões da elipse serem praticamente iguais, a pressão máxima e a maior tensão de Von Mises são diferentes, revelando a influência da análise elastoplástica.

Tabela 6.6: Semi-eixos da elipse, pressão máxima e tensão equivalente máxima encontrada no modelo numérico.

a (mm)	b (mm)	$P_{\max}$ (MPa)	σ_{vm} (MPa)
9,0	6,5	1442	792

A Figura 6.29 mostra a distribuição de tensão normal vertical (direção z) na região do contato. Esta tensão é a de maior magnitude do tensor de tensões. Pode-se observar que o maior valor de tensão é encontrado na interface roda – trilho, o que ocorre também com a tensão vertical calculada com a Teoria de Hertz (analítica). Entretanto, a magnitude da máxima tensão vertical é diferente. Isso se deve à plasticidade presente no modelo numérico, que reduz as tensões para níveis menores que o modelo elástico.

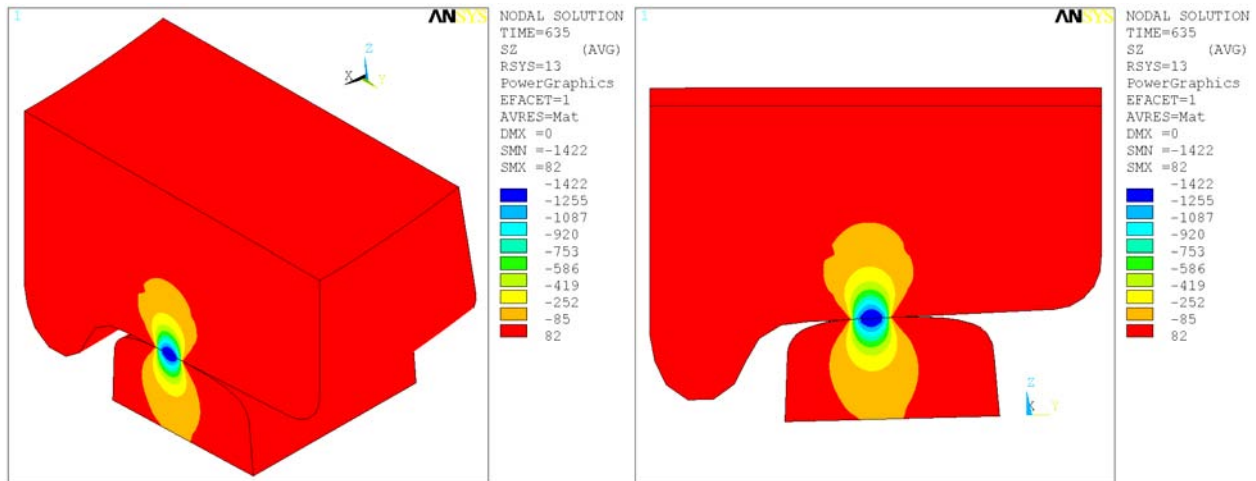


Figura 6.29: Distribuição de tensão vertical (direção z) na região de contato da roda e do trilho, após cinco ciclos de carregamento (MPa). Vista isométrica e vista frontal.

A distribuição de tensão cisalhante para o plano YZ (τ_{yz}), pode ser encontrada na Figura 6.30. Observa-se que na linha de centro da área de contato, os valores de tensão são nulos. Isso ocorre, pois na direção da força vertical aplicada (carregamento aplicado na roda), que passa pelo centro da região de contato, não ocorre nenhum cisalhamento. A máxima tensão cisalhante ocorrerá, então, em lados opostos ao centro do contato e pouco abaixo da superfície, tanto da roda quanto do trilho. Esses valores são praticamente iguais em magnitude, mas de sentidos opostos (sinal trocado), tanto em relação à roda e o trilho, quanto ao plano vertical de contato.

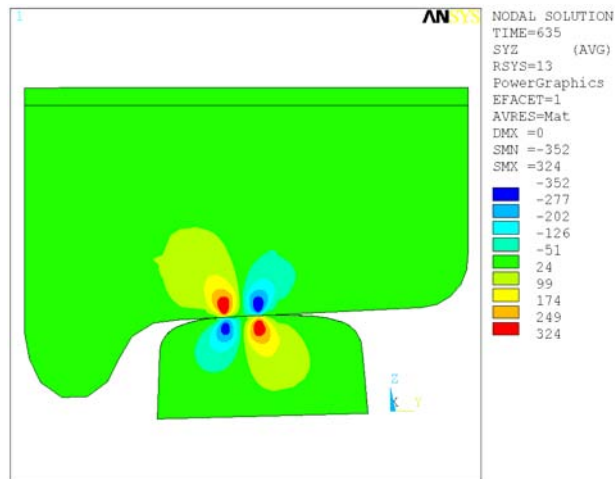


Figura 6.30: Distribuição da tensão cisalhante τ_{yz} na região do contato, após cinco ciclos de carregamento (MPa). Vista longitudinal.

Em virtude do surgimento dessa tensão de cisalhamento tem-se, nessa região, a deformação plástica da roda e do trilho. A Figura 6.31 ilustra a distribuição da tensão equivalente de Von Mises em duas vistas: longitudinal (direção de rolamento) e lateral, em um corte feito no centro da área de contato. Pode-se notar o “rastros” de tensão residual proveniente do rolamento. O valor máximo de tensão equivalente encontrado após cinco ciclos de carregamento foi de 792 MPa, o que esta coerente com o valor do limite de escoamento inicial adotado (750 MPa).

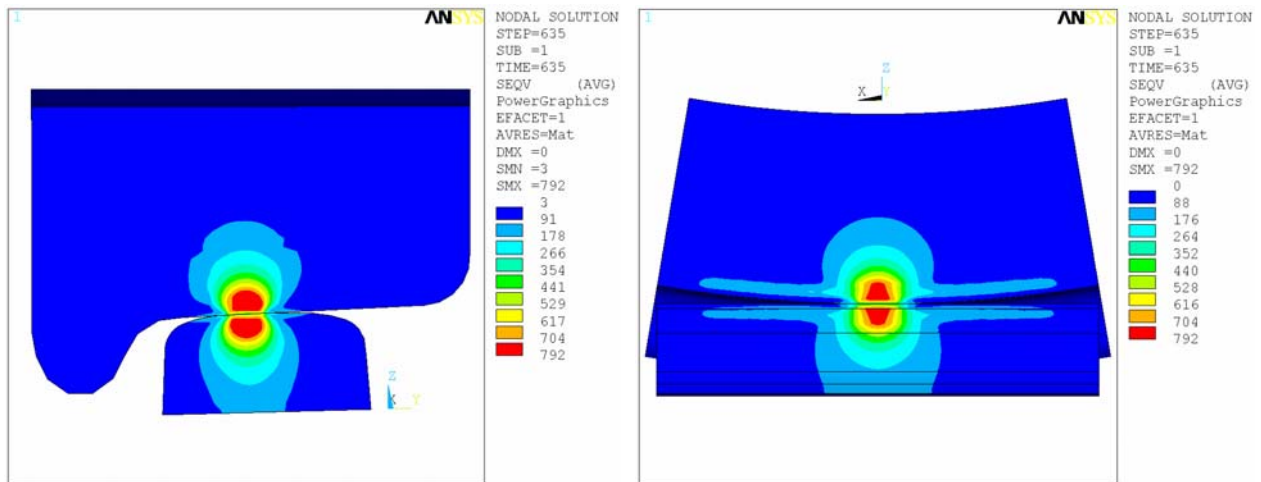


Figura 6.31: Distribuição de tensão de Von Mises, após cinco ciclos de carregamento (MPa).
Vista longitudinal e vista lateral (em corte no centro do contato).

Na Figura 6.32 tem-se a distribuição de deformação plástica equivalente e na Figura 6.33 a razão entre tensão de Von Mises e o limite de escoamento, para o último ciclo. Caso este número seja maior que um, o escoamento plástico terá ocorrido. Nota-se que as deformações plásticas são bem localizadas, se concentrando a poucos milímetros abaixo da superfície de contato (aproximadamente 10 mm).

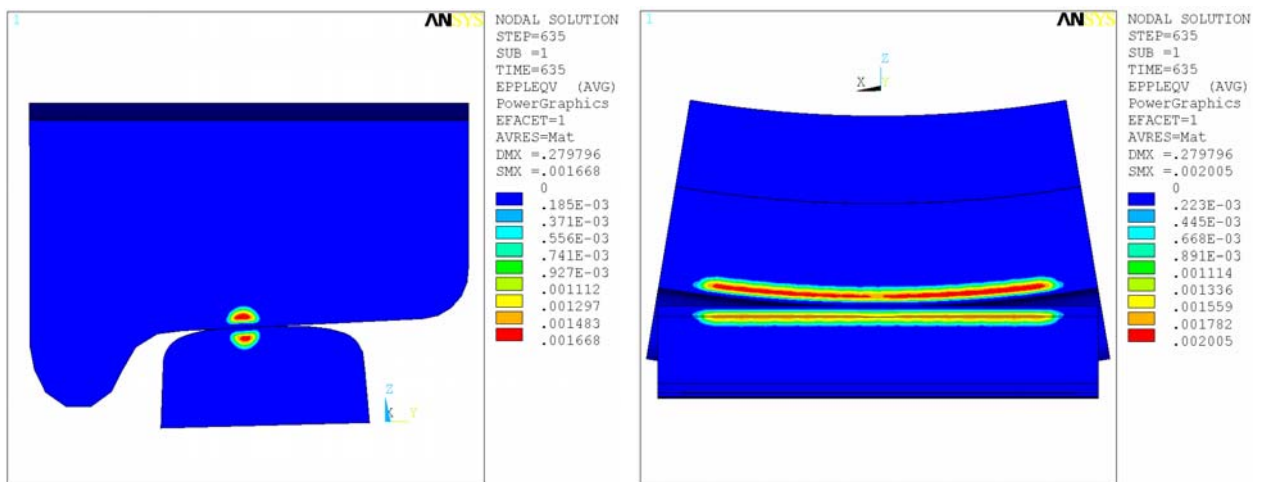


Figura 6.32: Distribuição da deformação plástica equivalente, após cinco ciclos de carregamento. Vista longitudinal e vista lateral (em corte no centro do contato).

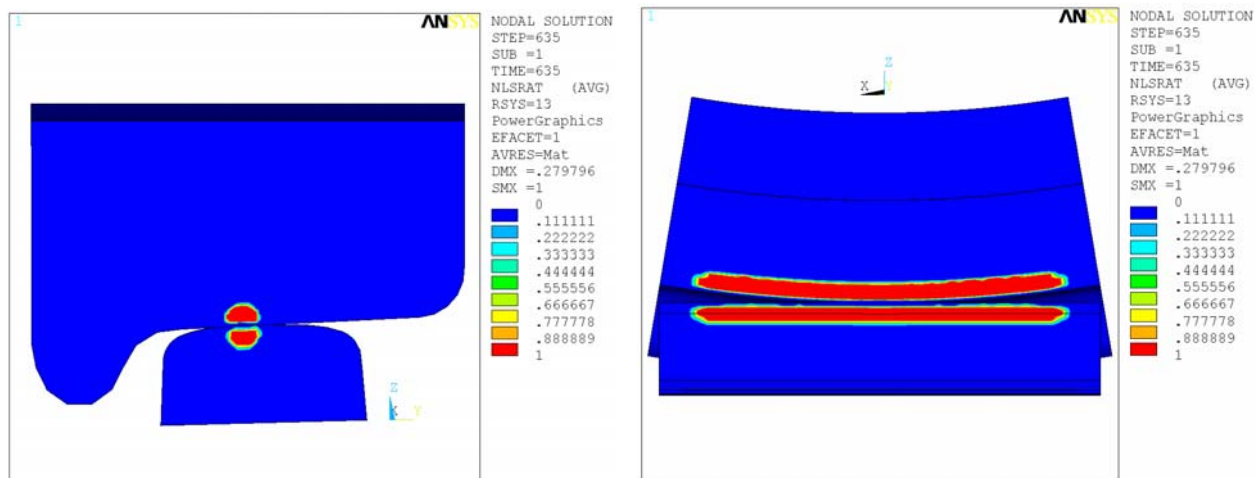


Figura 6.33: Razão entre a tensão de Von Mises e o limite de escoamento. Vista longitudinal e vista lateral (em corte no centro do contato).

Da Figura 6.34 à Figura 6.37 podem ser vistas as distribuições de pressão no contato ao final de cada um dos seis ciclos de carregamento. Pode-se observar que nos três primeiros ciclos a região de contato sofre uma pequena mudança em sua forma, indo de um perfil mais alongado na direção longitudinal, para uma forma mais arredondada ao final do terceiro ciclo. A partir daí, não ocorre mais nenhuma mudança significativa no formato da região de contato. No que diz respeito à magnitude das tensões de contato, a variação é desprezível, ficando em menos de 1%, para a relação entre o maior e o menos valor alcançado.

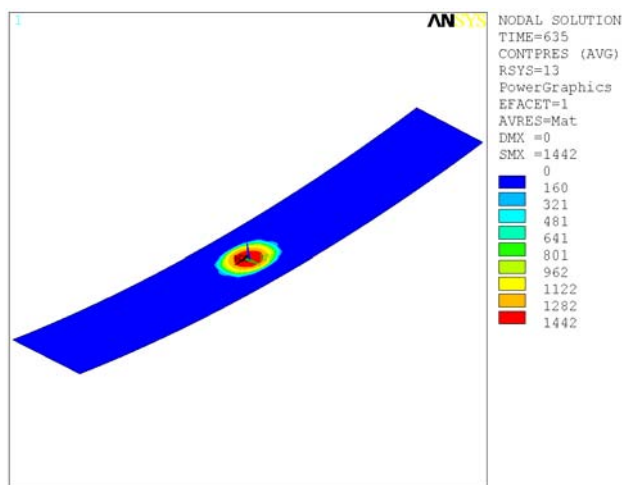


Figura 6.34: Vista isométrica da região de contato.

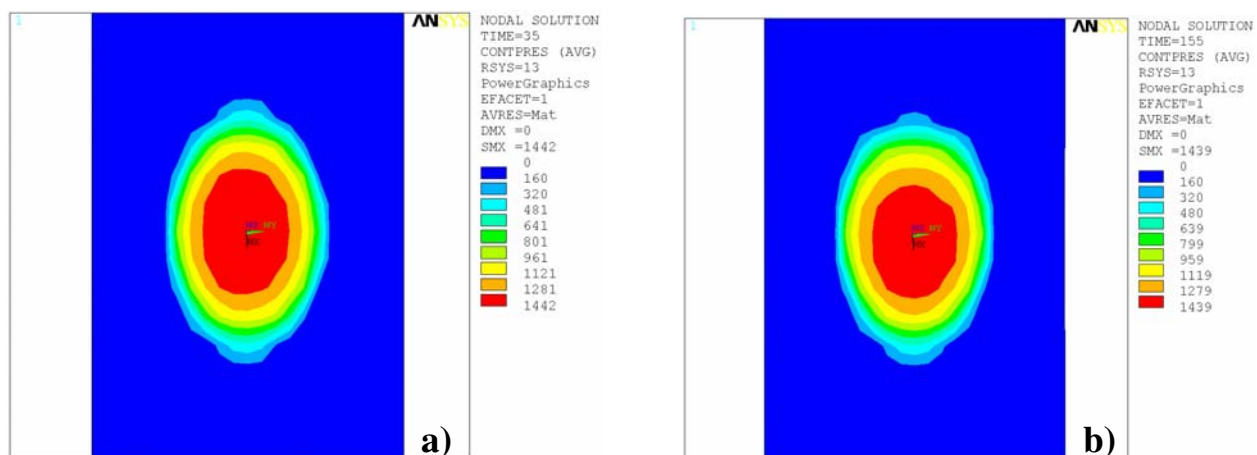


Figura 6.35: Formato e distribuição de pressão na região de contato (MPa). a) estático; b) após um ciclo.

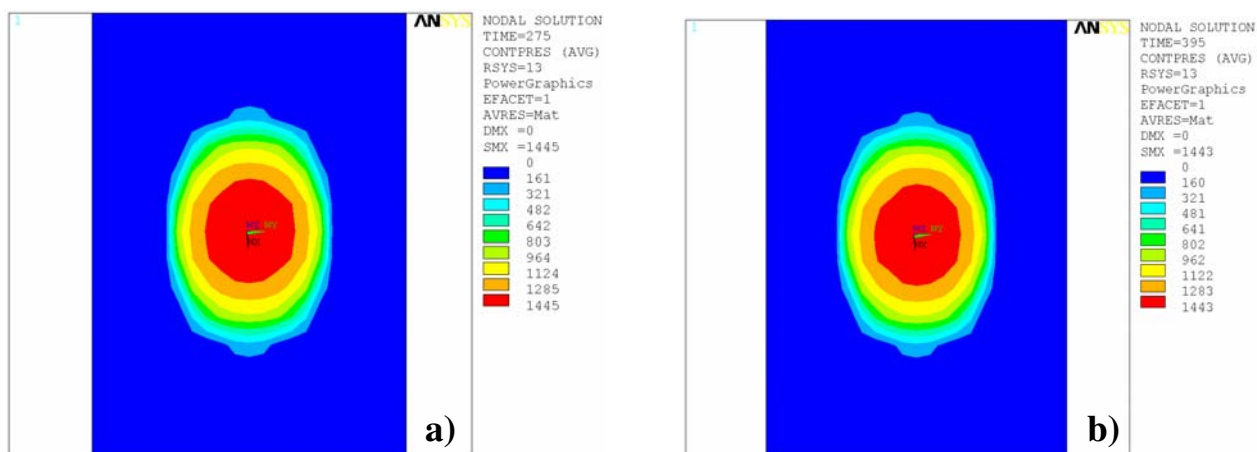


Figura 6.36: Formato e distribuição de pressão na região de contato (MPa). a) após dois ciclos; b) após três ciclos.

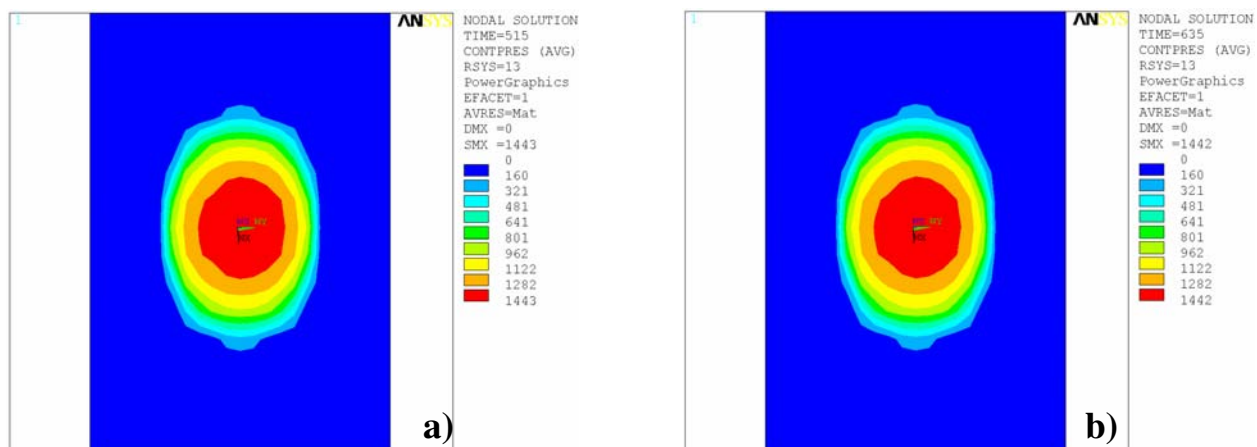


Figura 6.37: Formato e distribuição de pressão na região de contato (MPa). a) após quatro ciclos; b) após cinco ciclos.

A seguir, foi traçado o comportamento das componentes de tensão, em gráficos bidimensionais, a fim de que se possa ver com mais detalhes a variação das tensões em função do ciclo e da profundidade.

Na Figura 6.38, as componentes σ_x e σ_y apresentam um comportamento similar ao do modelo semi-analítico. Porém, pode-se notar um acúmulo de tensões residuais em pontos um pouco abaixo da superfície e afastados da região de contato. Isso é fruto das do comportamento elastoplástico, que após cinco ciclos de carga induziu deformações plásticas e tensões residuais na roda. Para pontos na superfície ou muito abaixo desta, as tensões residuais são praticamente inexistentes.

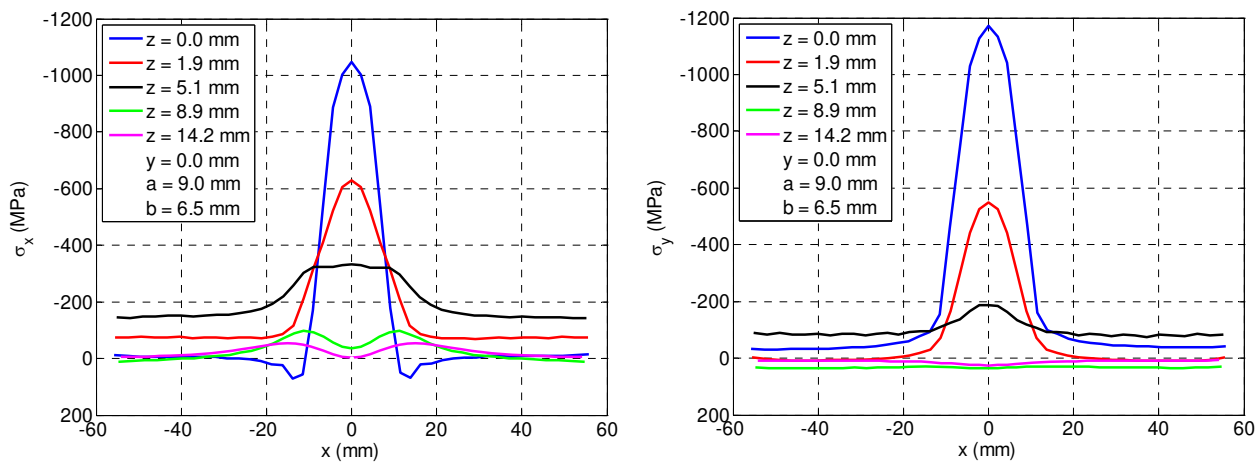


Figura 6.38: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF.

Na Figura 6.39 observa-se que a tensão σ_z não apresenta nenhuma componente residual, independente da posição no ciclo e da profundidade do ponto. Isso está de acordo com pesquisas realizadas por Merwin e Johnson (1963), que determinaram que a superfície de contato, para estar em equilíbrio, não deve apresentar tensões residuais perpendiculares a ela.

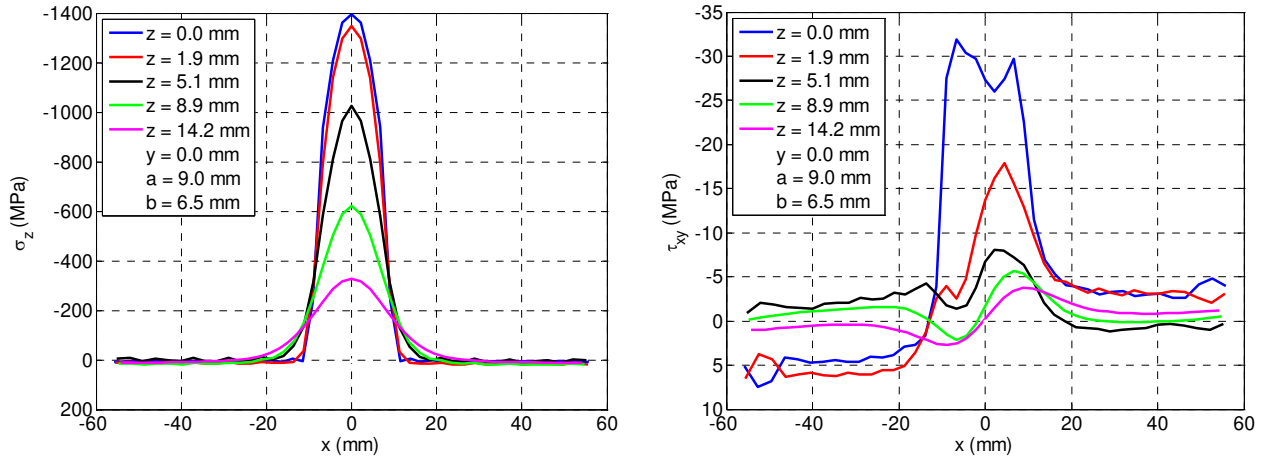


Figura 6.39: Variação da tensão normal vertical (σ_x) e cisalhante (τ_{xz}) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF.

As tensões cisalhantes (Figura 6.39 e Figura 6.40) têm, aproximadamente, o mesmo padrão dos modelos anteriores. Entretanto, pode-se notar que não existe mais uma simetria perfeita em relação ao centro do contato. Devido ao atrito, proveniente do rolamento, seus valores são máximos em pontos mais próximos da superfície de contato (τ_{xz} e τ_{yz}).

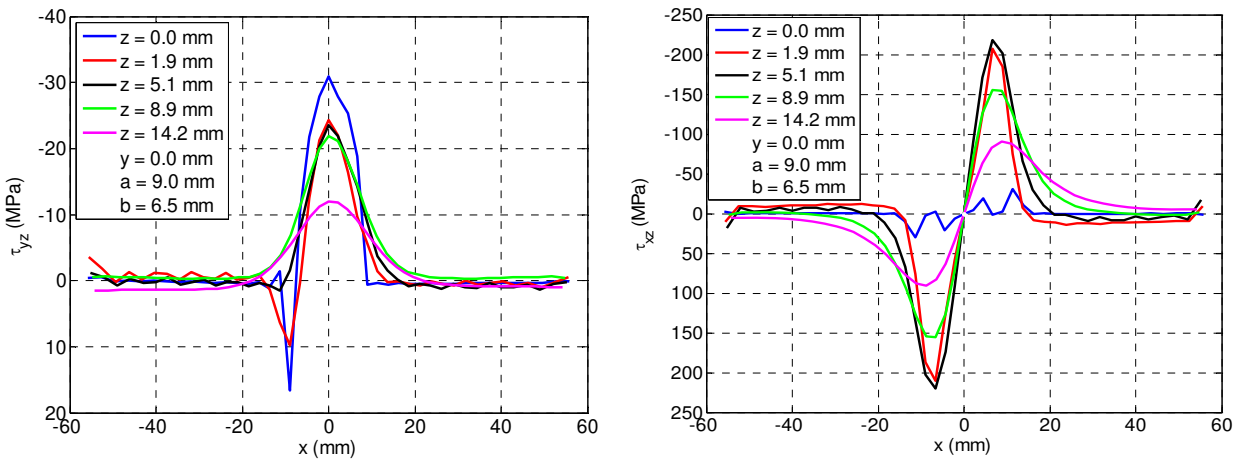


Figura 6.40: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF.

Nas figuras a seguir, tem-se o comportamento das componentes do tensor, em função da profundidade, para alguns instantes durante o ciclo. Na Figura 6.41 e Figura 6.42, as tensões normais σ_x , σ_y e σ_z têm o seu valor máximo na superfície, assim como o modelo semi-analítico,

porém com valores um pouco menores. À medida que o ponto se afasta da superfície, os valores tendem rapidamente a zero. A tensão σ_z sofre bastante variação entre os instantes do ciclo, já que está na direção da carga vertical aplicada.

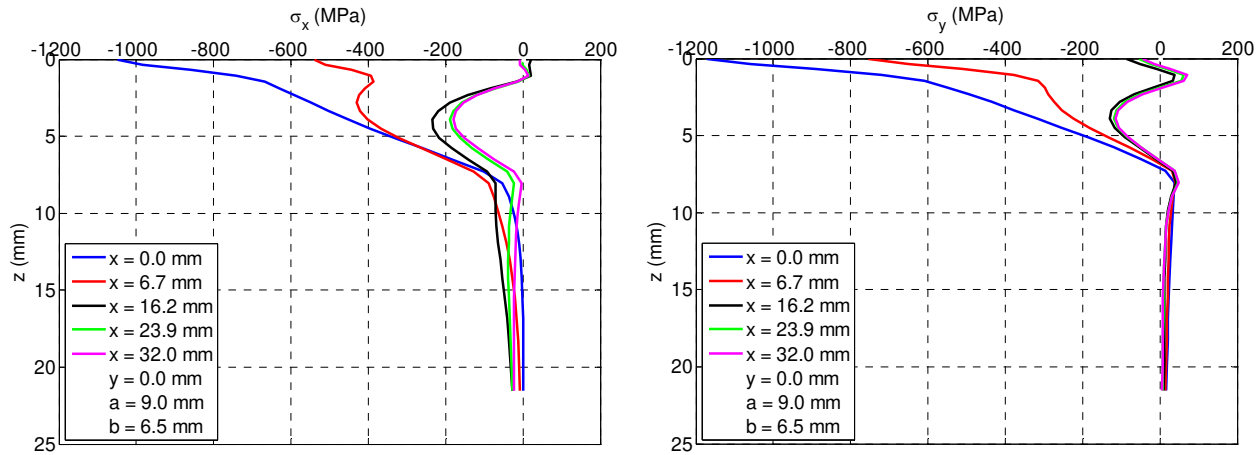


Figura 6.41: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF.

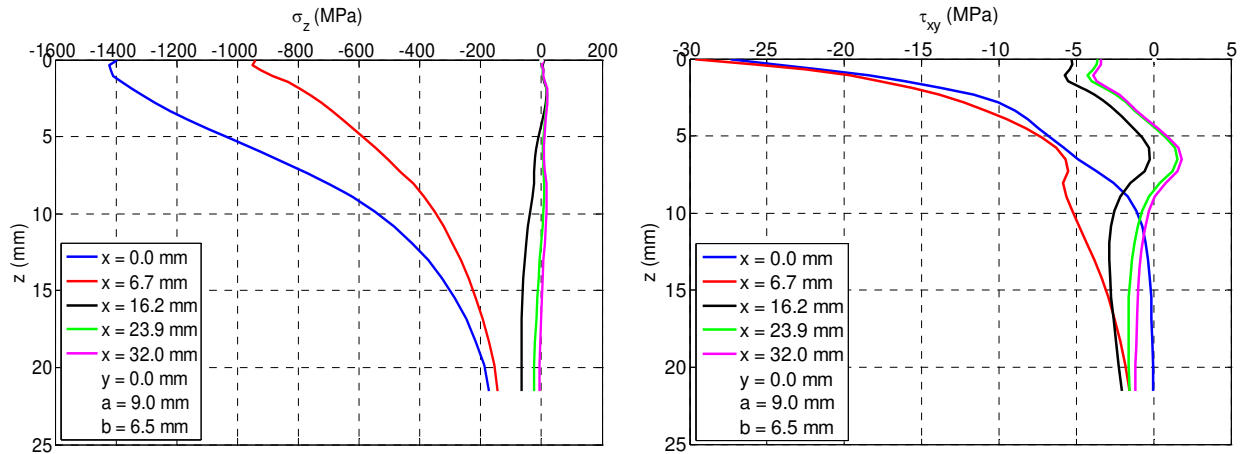


Figura 6.42: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) e cisalhante (τ_{xy}) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF.

A tensão de cisalhamento τ_{xy} tem o seu valor máximo na superfície, ao contrário do modelo semi-analítico, que apresenta essa componente nula para o ponto em questão. Isso se deve à presença do rolamento, que contribui para o cisalhamento da superfície de rolamento, aumentando a magnitude deste nessa região. O mesmo acontece com a componente τ_{yz} (Figura

6.43). A componente τ_{xz} , que atua em plano perpendicular e na direção da superfície de rolamento, tem o maior valor de tensão de cisalhamento e ocorre abaixo da superfície, localização das maiores deformações plásticas.

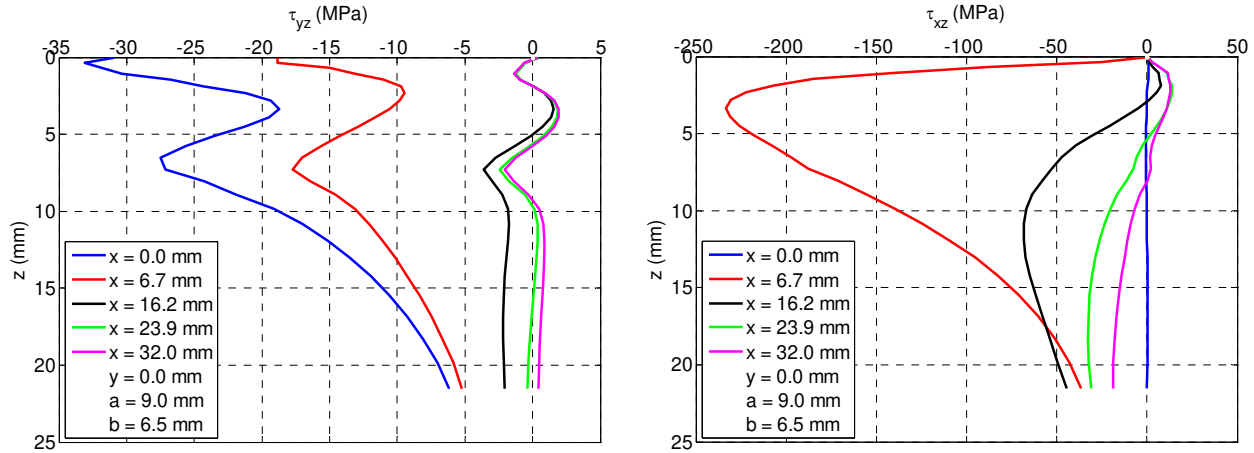


Figura 6.43: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF.

6.2.4 Modelo elastoplástico com tensões residuais de fabricação (MEF + Fab)

A análise elastoplástica considerando as tensões residuais de fabricação, conforme descrito no capítulo 5, foi realizada em duas etapas: primeiro calculou-se as tensões residuais ao final do processo de fabricação e depois se aplicou o carregamento vertical de 19,5 toneladas, representado pelas condições de contorno (deslocamentos) obtidas no submodelo sem tensões residuais.

Para mostra que as condições de contorno e carregamento do processo de fabricação do modelo de contato proposto estavam corretas, comparou-se as tensões residuais obtidas com este modelo, com as do modelo axissimétrico. A Figura 6.44, a Figura 6.45 e a Figura 6.46 mostram as tensões residuais na direção longitudinal (x) após o término da têmpera, revenimento e resfriamento, respectivamente. Nota-se uma distribuição de tensões idênticas. A variação da magnitude das tensões entre os modelos é inferior a 3%.

Outro fator que pode explicar essa diferença é o fato de que no modelo plano axissimétrico as tensões nos três eixos principais são calculadas no sistema de coordenadas cilíndrico, para o qual as tensões σ_x , σ_y , σ_z , nos eixos X, Y, Z, correspondem à direção radial, axial e circunferencial, respectivamente. No modelo sólido, como foi explicado no capítulo 5, as tensões são calculadas no sistema cartesiano, com as tensões σ_x , σ_y , σ_z correspondendo às respectivas direções (X, Y, Z).

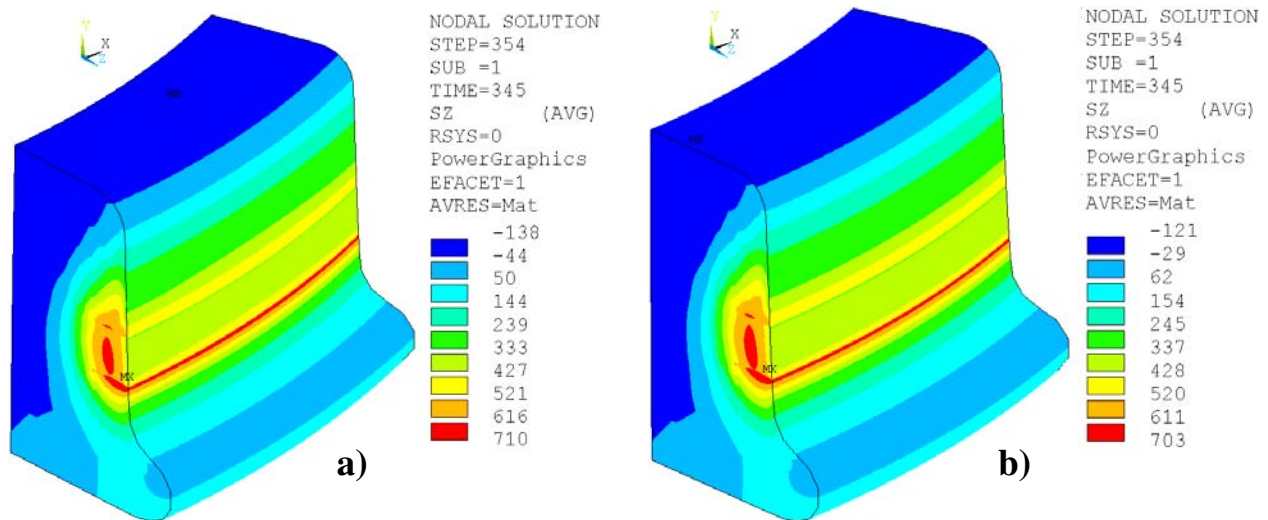


Figura 6.44: Distribuição das tensões na direção longitudinal (x) após o término da têmpera (MPa). a) Modelo sólido, b) Modelo axissimétrico.

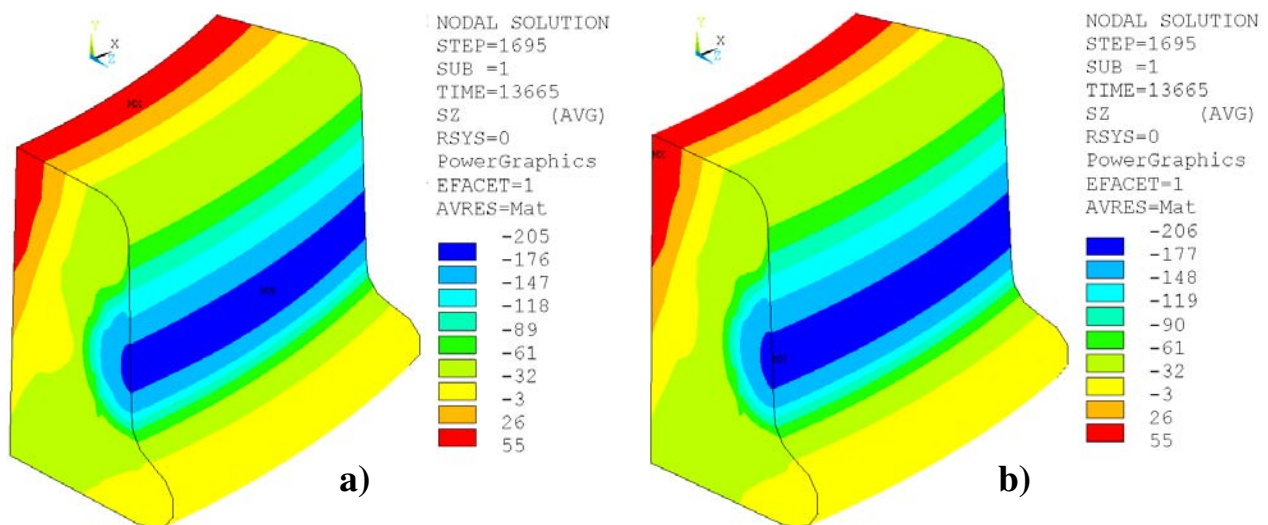


Figura 6.45: Distribuição das tensões na direção longitudinal (x) após o término do revenimento (MPa). a) Modelo sólido, b) Modelo axissimétrico.

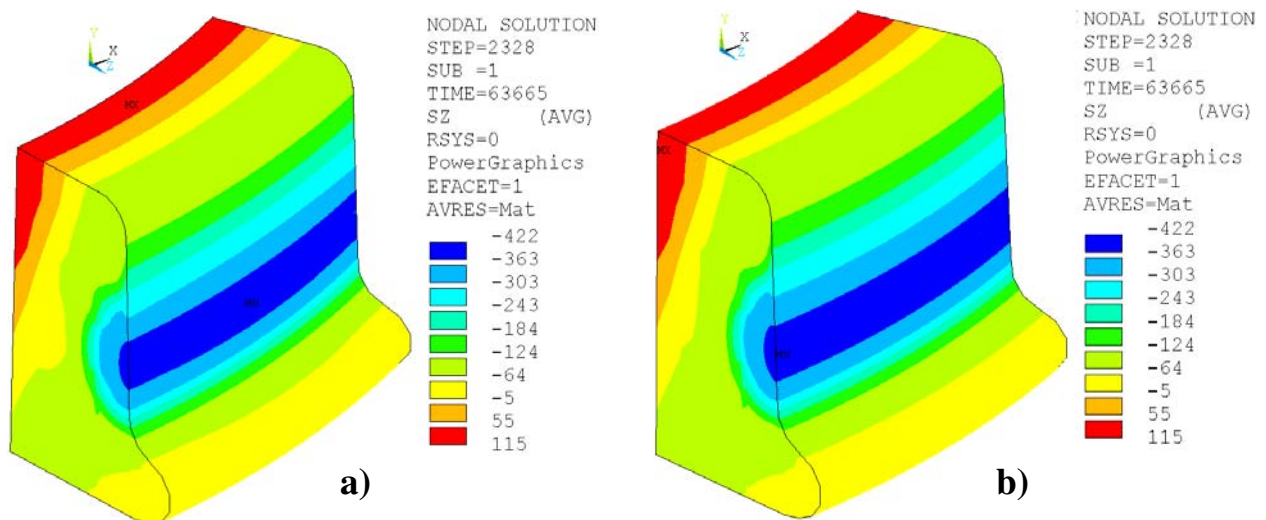


Figura 6.46: Distribuição das tensões na direção longitudinal (x) após o término do resfriamento (MPa). a) Modelo sólido, b) Modelo axissimétrico.

No gráfico da Figura 6.47 o ciclo de histerese para ponto de maior deformação plástica sofrida pela roda, durante a fase de rolamento, é mostrado como a variação da tensão equivalente de Von Mises em função da deformação plástica equivalente. Nota-se que, devido à presença de tensões residuais, o rolamento tem início com uma tensão não nula. Após o primeiro ciclo de carregamento, nota-se também a ocorrência de grande deformação plástica, assim como no caso do rolamento sem tensões residuais.

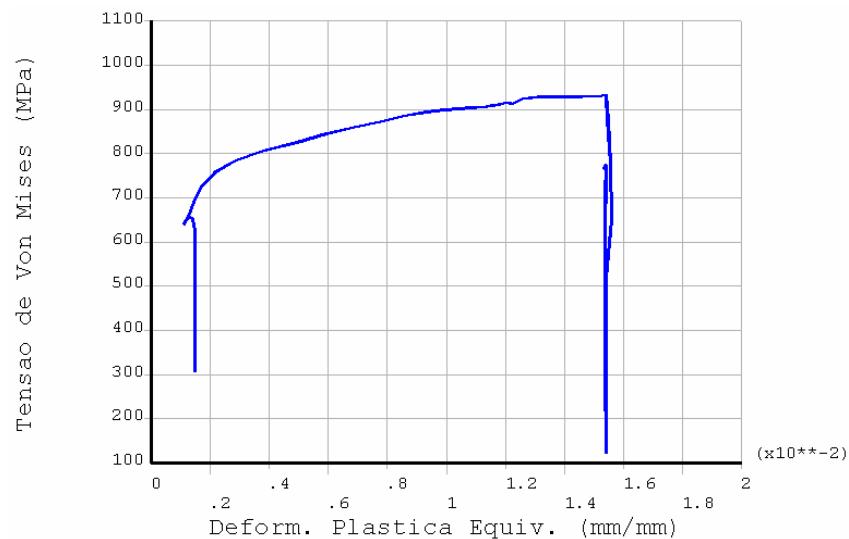


Figura 6.47: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação plástica.

Na Figura 6.48 tem-se, para o mesmo ponto usado anteriormente, o gráfico da tensão de Von Mises em função da deformação total. No gráfico da Figura 6.49 a deformação plástica equivalente é traçada em função da distância percorrida ao longo dos ciclos. Apesar de apenas um ciclo ter sido simulado, nota-se uma variação muito pequena de deformação plástica após o primeiro ciclo ter sido completado.

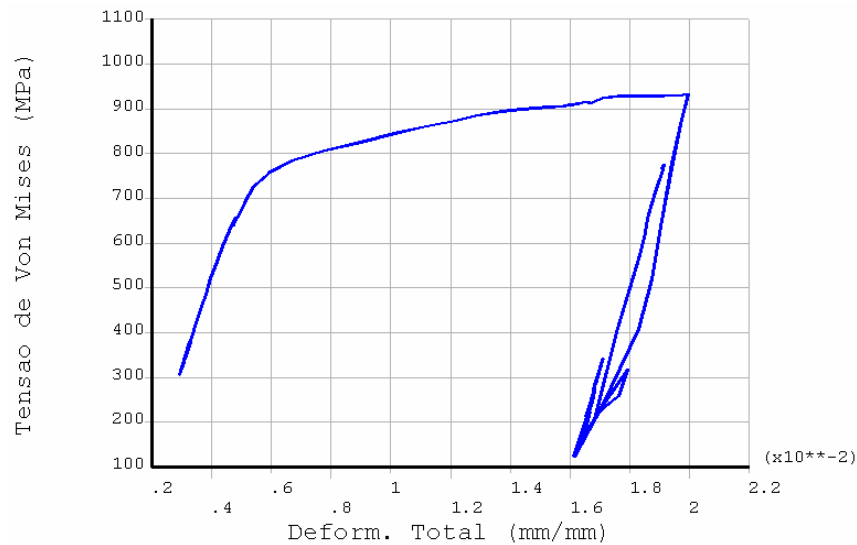


Figura 6.48: Ciclo de histerese para um ponto de máxima deformação plástica, localizado abaixo da superfície da roda. Tensão de Von Mises em função da deformação total.

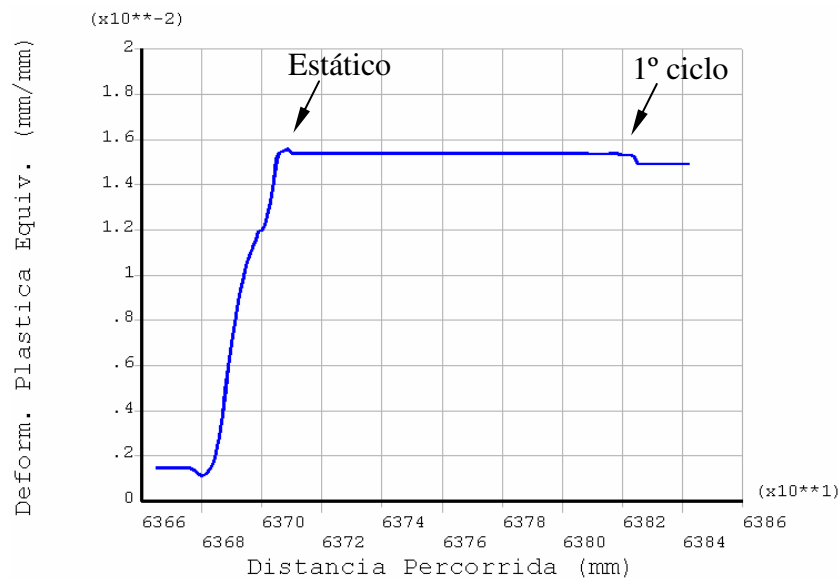


Figura 6.49: Variação da deformação plástica equivalente ao longo da distância percorrida, em um ponto de máxima deformação plástica localizada abaixo da superfície da roda.

A Tabela 6.7 apresenta as dimensões da região de contato e da pressão máxima de Von Mises ao final do segundo ciclo. Nota-se que essas grandezas são maiores que as encontradas com o modelo sem tensões residuais, o que mostra a influencia das tensões residuais de fabricação. A princípio, segundo a Teoria de Hertz para o cálculo da tensão vertical máxima (pressão), quanto maior for a região de contato, menor será essa pressão para um mesmo carregamento vertical, o que não ocorre neste caso. Portanto, a Teoria analítica de Hertz não se aplica as situações em regime elastoplástico e com a presença de tensões residuais iniciais.

Tabela 6.7: Semi-eixos da elipse, pressão máxima e tensão equivalente máxima encontrada no modelo numérico com tensões residuais.

a (mm)	b (mm)	$P_{\max}$ (MPa)	σ_{vm} (MPa)
10,4	8,2	2100	882

A Figura 6.50 mostra a distribuição de tensão normal vertical (direção z) na região do contato na roda. Pode-se observar que o maior valor de tensão é encontrado também na interface roda – trilho. Porém nota-se a distribuição de tensão não tem mais o formato de um elipsóide perfeito como no caso sem tensão residual.

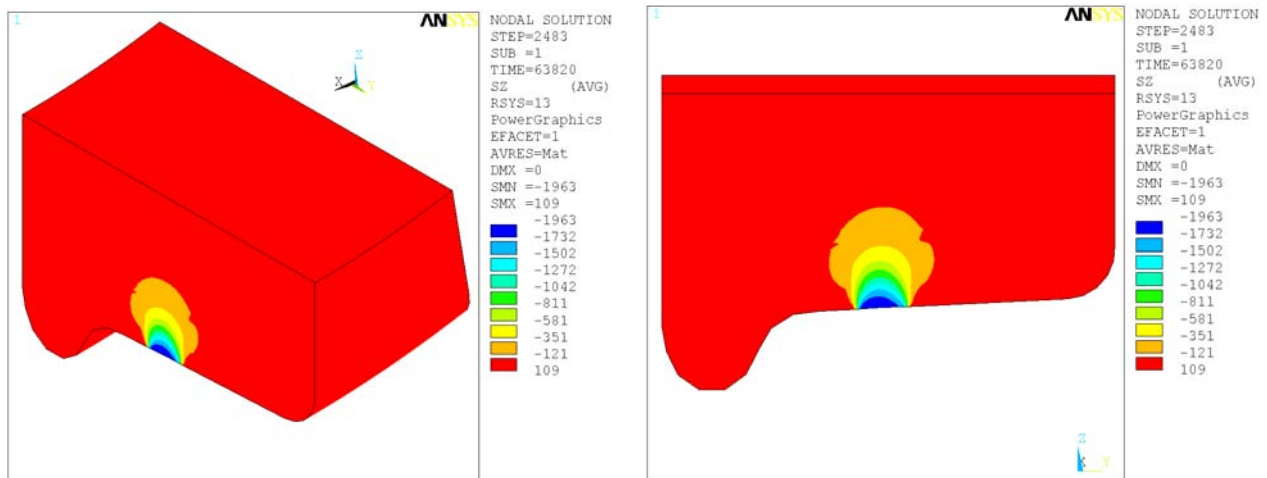


Figura 6.50: Distribuição de tensão vertical (direção z) na região de contato da roda e do trilho, após um ciclo de carregamento (MPa). Vista isométrica e vista transversal.

A distribuição de tensão cisalhante para o plano YZ (τ_{yz}), pode ser encontrada na Figura 6.51. Assim como os modelos anteriores, os maiores valores são encontrados abaixo da superfície e deslocados da linha de centro do contato.

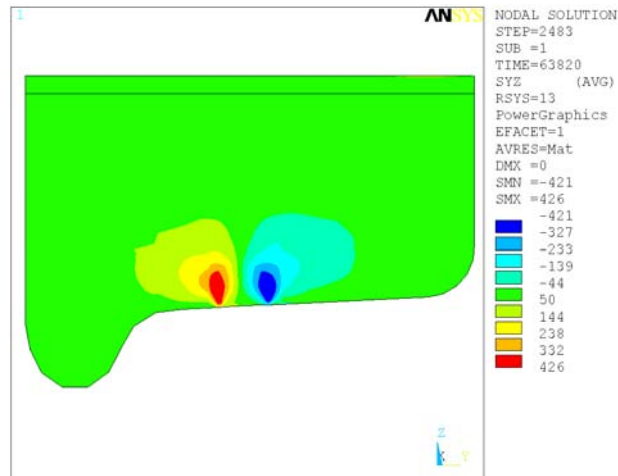


Figura 6.51: Distribuição da tensão cisalhante τ_{yz} na região do contato, após um ciclo de carregamento (MPa). Vista transversal.

A Figura 6.52 ilustra a distribuição da tensão equivalente de Von Mises. O valor máximo da tensão equivalente encontrado após um ciclo de carregamento foi de 899 MPa, acima do limite de escoamento do material a temperatura ambiente (750 MPa).

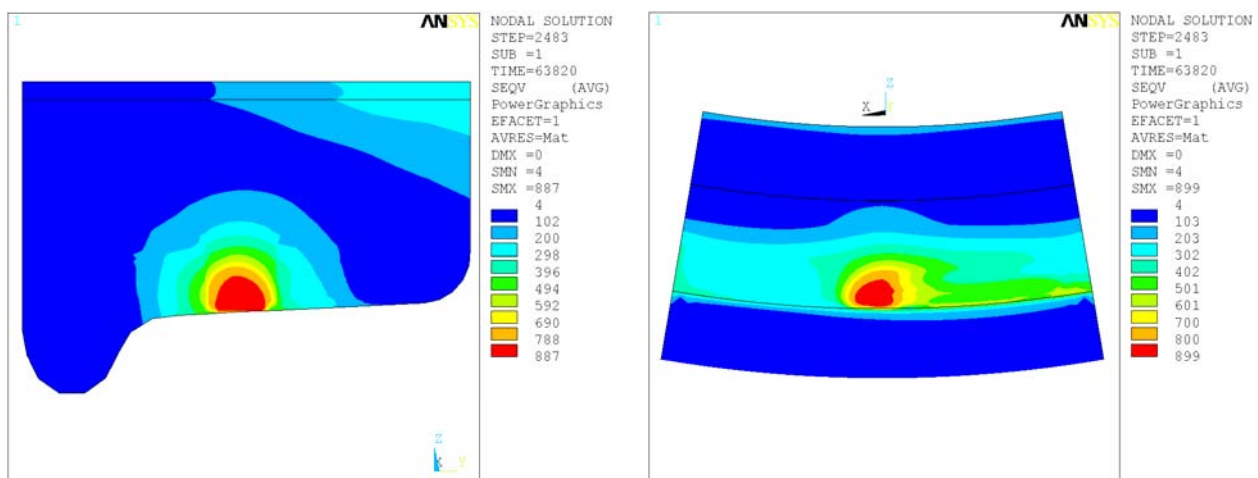


Figura 6.52: Distribuição de tensão de Von Mises, após o um ciclo de carregamento (MPa). Vista transversal e vista lateral (em corte no centro do contato).

Na Figura 6.53 tem-se a distribuição de deformação plástica equivalente e na Figura 6.54 a razão entre tensão de Von Mises e o limite de escoamento, após o primeiro ciclo. Nota-se que as deformações plásticas estão espalhadas ao longo de todo aro, devido ao processo de tratamento térmico.

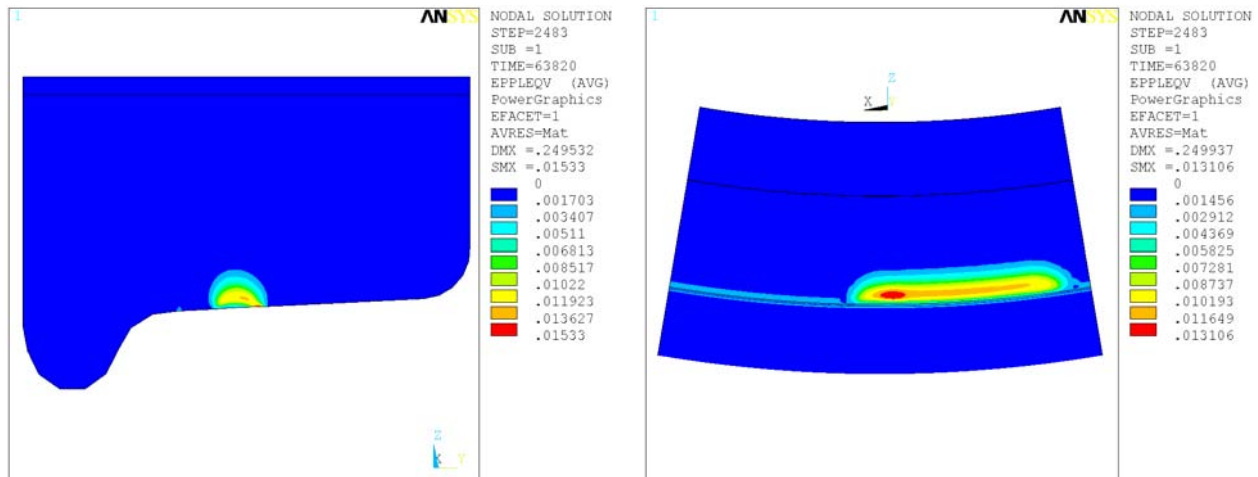


Figura 6.53: Distribuição da deformação plástica equivalente, após o um ciclo de carregamento.

Vista transversal e vista lateral (em corte no centro do contato).

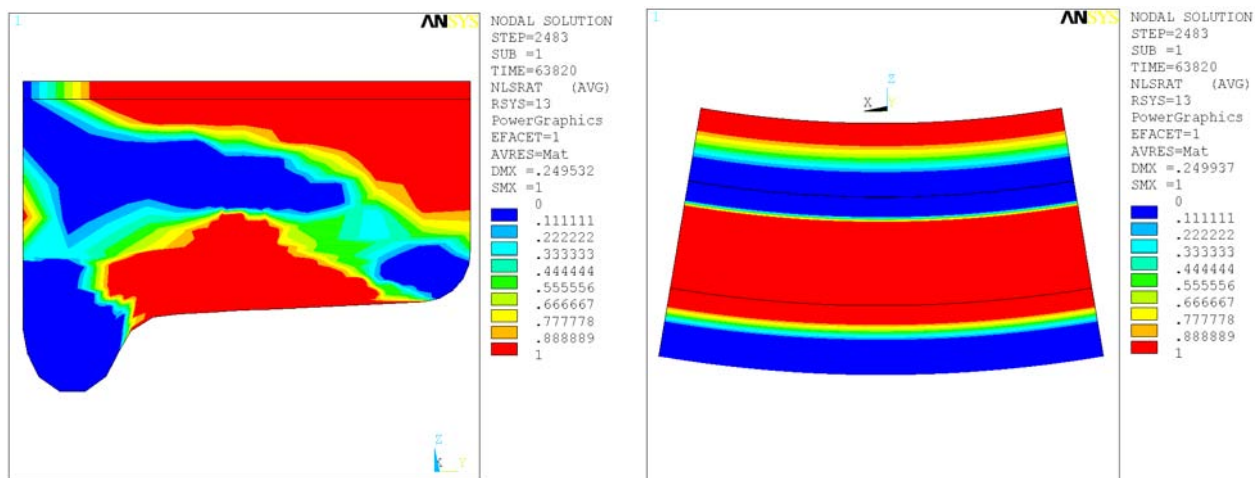


Figura 6.54: Razão entre a tensão de Von Mises e o limite de escoamento. Vista transversal e vista lateral (em corte no centro do contato).

Apesar da magnitude da pressão de contato ser praticamente a mesma após um ciclo, pode-se notar que o formato da região de contato sofre uma mudança visível, além da localização da

pressão máxima ter sido deslocada do centro do contato (indicada pelo sistema de coordenadas), conforme Figura 6.55.

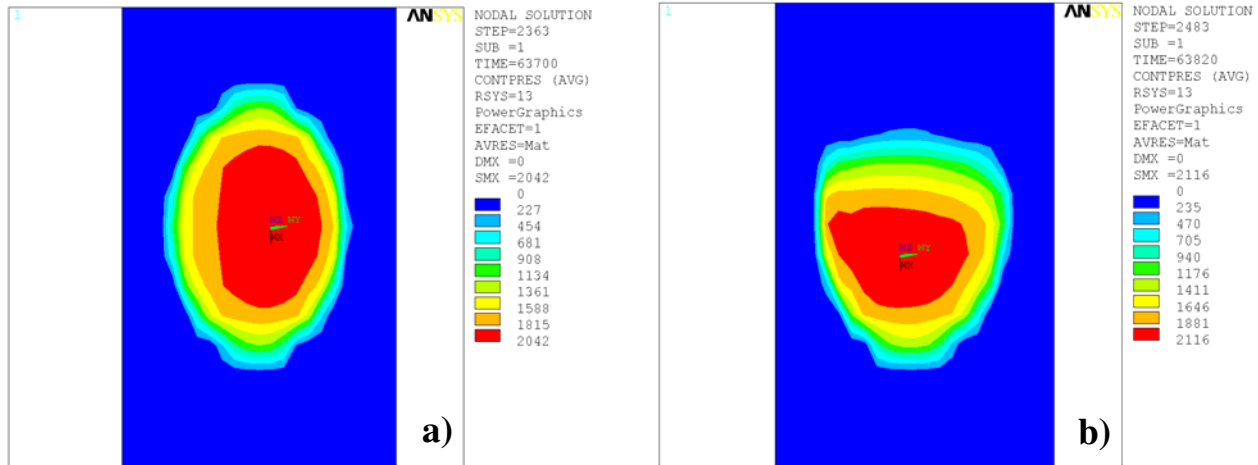


Figura 6.55: Formato e distribuição de tensão na região de contato (MPa). a) estático; b) após um ciclo.

Nos gráficos da Figura 6.56 tem-se as componentes de tensão σ_x e σ_y . Observa-se um comportamento assimétrico em relação ao eixo x , fruto de apenas um ciclo de rolamento. Novamente observa-se a presença de tensões residuais em regiões distantes do contato. Pontos distantes da superfície apresentam apenas tensões residuais de fabricação.

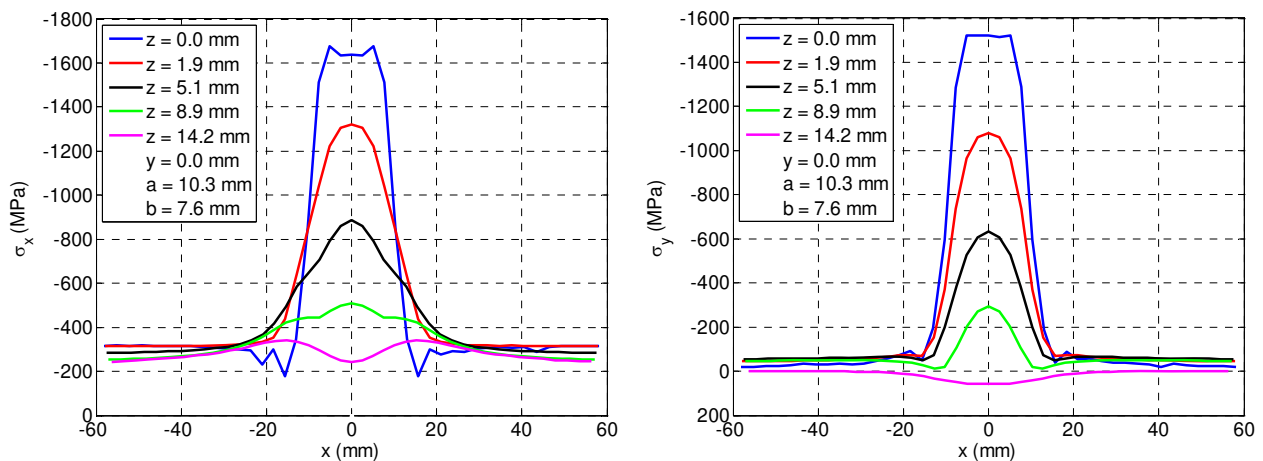


Figura 6.56: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF + Fab.

As tensões normais verticais (Figura 6.57) não apresentam valores residuais fora da região de contato, assim como o modelo numérico anterior. As tensões cisalhantes (Figura 6.57 e Figura 6.58) apresentam valores baixos se comparadas às normais. A mudança de rigidez sofrida pela roda durante o tratamento térmico pode ocasionar o comportamento aleatório observado, principalmente para tensões na superfície de contato ($z = 0$) onde há a presença de atrito. Também, pode-se notar que não existe mais uma simetria perfeita do cisalhamento em relação ao centro do contato, especialmente para tensões na superfície de rolamento ($z = 0$).

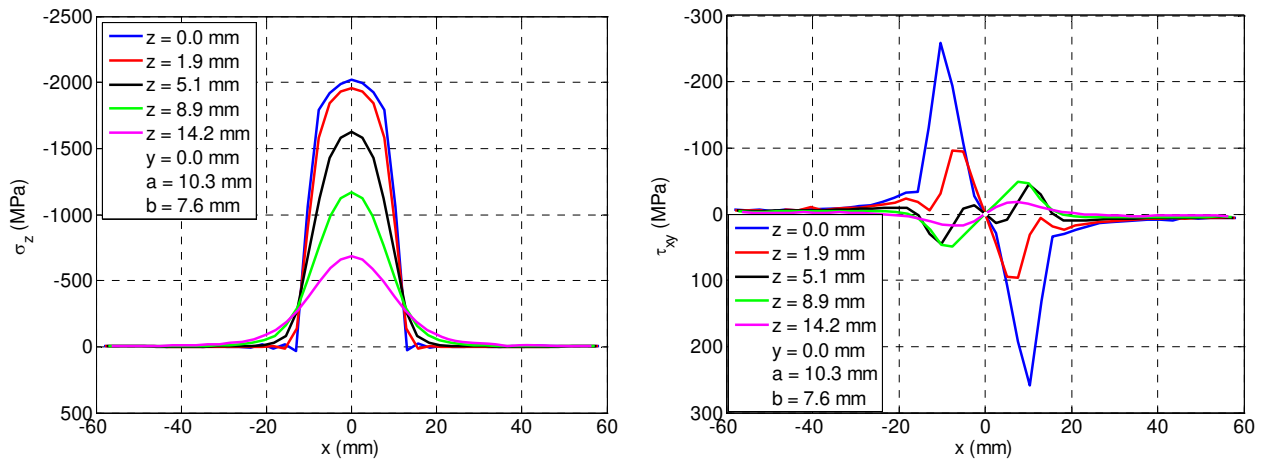


Figura 6.57: Variação da tensão normal vertical (σ_x) e cisalhante (τ_{xy}) em função de x , considerando vários pontos na profundidade (z) – MEF + Fab.

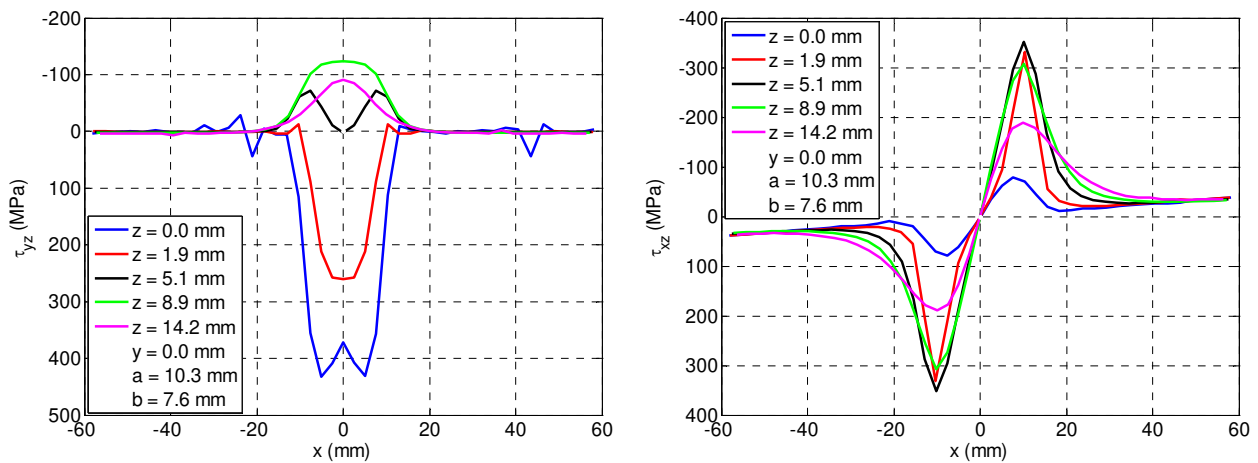


Figura 6.58: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de x , considerando vários pontos na longitudinal (z) – MEF + Fab.

Na Figura 6.59 e Figura 6.60 nota-se que as tensões normais diminuem com o aumento da profundidade. Porém, devido às tensões de fabricação, a tensão circunferencial σ_x converge para um valor negativo constante. As outras tensões convergem para zero.

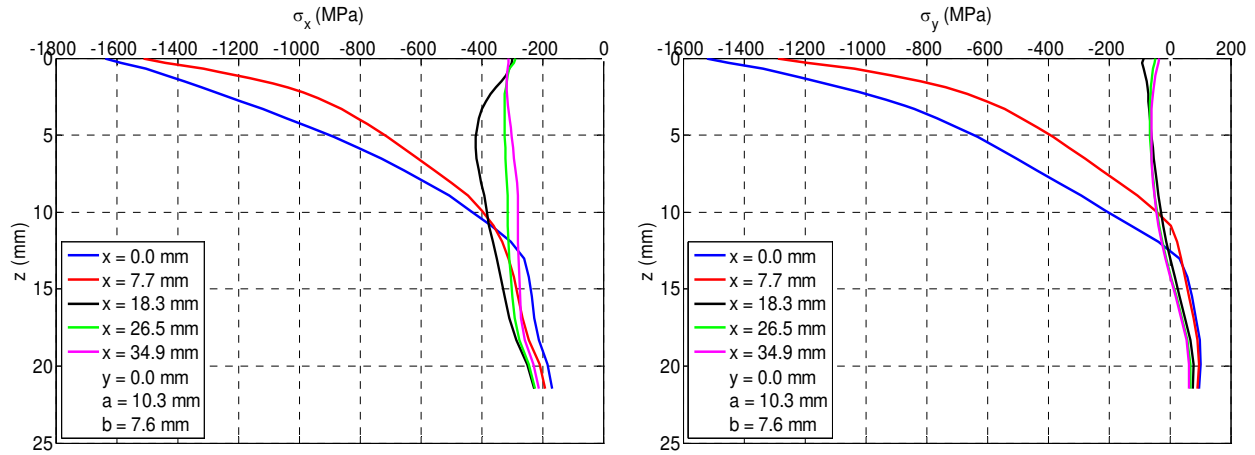


Figura 6.59: Variação da tensão normal longitudinal (σ_x) e lateral (σ_y) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF + Fab.

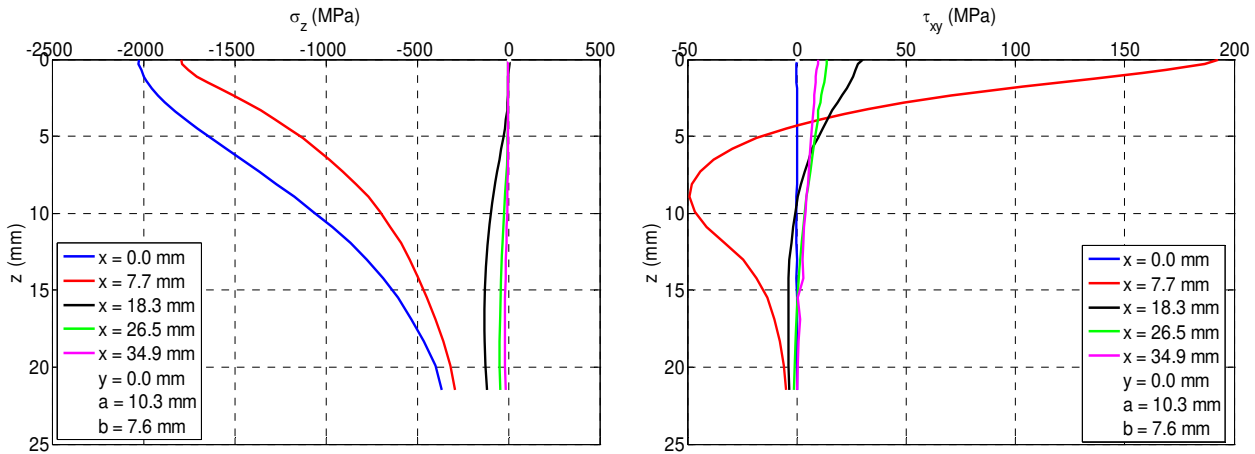


Figura 6.60: Variação da tensão normal longitudinal (σ_z) e cisalhante (τ_{xy}) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF + Fab.

As tensões de cisalhamento (Figura 6.60 e Figura 6.61) apresentam relativamente valores baixos, à exceção de τ_{xz} , atuante na direção de rolamento. Todas convergem para valor nulo, à medida que aumenta a distância da superfície de rolamento.

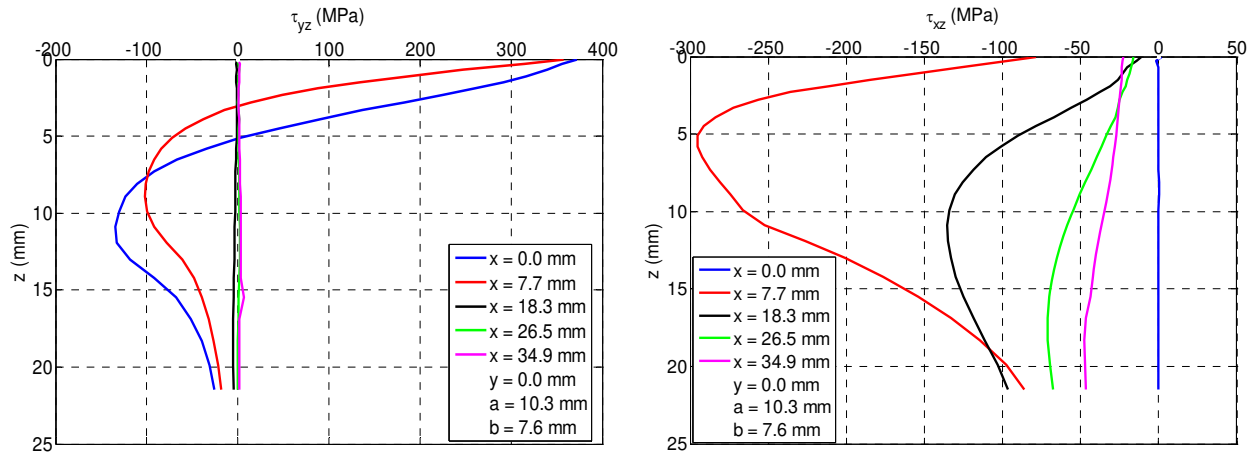


Figura 6.61: Variação da tensão cisalhante (τ_{yz}) e (τ_{xz}) em função de z , considerando vários pontos na longitudinal (x) – MEF + Fab.

Para fins de comparação, ao final deste capítulo serão apresentadas, nos mesmos gráficos, as tensões calculadas para os quatro modelos estudados.

6.3 Cálculo da fadiga

Após os cálculos para determinação dos tensores de tensão, a vida em fadiga para o início da trinca foi estimada. Vale ressaltar que essa vida não compreende a vida útil da roda. Para tanto, como foi descrito no Capítulo 4, foram utilizados dois critérios de fadiga: o critério de Dang Van, modificado para atender as características do contato de rolamento, baseado em tensões cisalhantes e planos críticos e o critério de Fatemi & Socie, baseado em deformações cisalhantes e também em planos críticos. Para cada um dos quatro modelos adotados foi estimado o ponto mais crítico, o de menor vida, para os dois critérios.

Ao final, será feita uma comparação entre as vidas calculadas por todos os modelos, e a variação as tensões ao longo dos eixos coordenados, para os pontos críticos selecionados.

6.3.1 Modelo elástico (Ana Elás)

As tensões calculadas no item 6.2.1 serão usadas para alimentar os dois critérios adotados. Inicialmente, os tensores de tensão são gerados e armazenados em matrizes. O número de pontos

em cada direção foi definido a partir do modelo de elementos finitos elastoplástico e serão usados para todos os modelos, analíticos e numéricos. Isso é importante, uma vez que, por coerência, deve-se usar o mesmo número de pontos e limites dos vetores posição para todos os modelos estudados, a fim de permitir uma futura comparação entre eles. Esse critério foi adotado, pois apesar do modelo analítico comportar vetores de direção (x, y, z) com qualquer número de pontos, o modelo numérico (MEF) é restrito pelo número de nós, em função do tamanho da malha adotada, para geração dos pontos onde serão calculadas as tensões. Sabe-se, porém, que isso pode ser contornado realizando interpolações entre os nós a fim de aumentar o número de pontos nos vetores de direção, o que não foi feito neste trabalho.

Sendo os modelos adotados do tipo que se baseiam em planos críticos, deve-se definir um número de planos que serão usados na avaliação dos critérios. Como por um ponto no espaço passam infinitos planos, foi adotada uma varredura, com intervalos de 15°, de todas as combinações possíveis entre os dois ângulos que definem um plano (azimute e elevação). Com isso tem-se um número considerável de planos, que irá incluir também o plano a 45°, que é de importância no estudo da tensão cisalhante máxima. O número de pontos e a faixa de valores são os mesmos apresentados na Tabela 6.4.

6.3.1.1 Critério de Dang Van Modificado

Conforme descrito no Capítulo 4, o critério de Dang Van foi modificado para adaptar-se às características encontradas na modelagem do contato de rolamento (Morrison & Cram, in NORTON, 2000). A Tabela 6.8 apresenta as propriedades utilizadas no critério para o modelo analítico. Essas propriedades também são válidas para os outros modelos.

Tabela 6.8: Propriedades utilizadas no critério de Dang Van Modificado.

S_{ut} (MPa)	S_e (MPa)	τ_e (MPa)	a_{dv}	nº de planos
1220	610	352	0,23	266

onde, S_{ut} é o limite de resistência a tração, retirado ensaio de tração realizado em corpo de prova da roda (Capítulo 5); τ_e o limite de resistência à fadiga ao cisalhamento puro; a_{dv} o parâmetro que indica a influência das tensões hidrostáticas no critério e S_e é o limite de resistência à fadiga na flexão, calculado a partir do seguinte modelo utilizado frequentemente em resistência dos materiais (JUVINALL & MARSHEK, 1999; NORTON, 2000):

$$\begin{aligned} S_e &= 0,5S_{ut}, \\ S_e &= 610 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad \text{eq. 6.1}$$

O valor de τ_e , limite de resistência à fadiga no cisalhamento puro, é calculado a partir do próprio limite de resistência na flexão, através da seguinte expressão (JUVINALL & MARSHEK, 1999; NORTON, 2000):

$$\begin{aligned} \tau_e &= S_e \times 0,577, \\ \tau_e &= 352 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad \text{eq. 6.2}$$

Logo, o fator a_{dv} usado para o cálculo da tensão equivalente de Dang Van, conforme expressão definida no Capítulo 4 é:

$$\begin{aligned} a_{dv} &= \frac{3}{2} \times \frac{2 \times 352 - 610}{610}, \\ a_{dv} &= 0,23. \end{aligned} \quad \text{eq. 6.3}$$

As tensões calculadas conforme descrito no item 6.2.1 foram utilizadas como entrada para o critério. A varredura para determinação da tensão equivalente de Dang Van foi realizada nas direções longitudinal (eixo x), lateral (eixo y) e vertical (perpendicular a superfície de contato, eixo z) para todas as combinações possíveis de pontos (x_i , y_i , z_i) e número de planos definidos (Tabela 6.4 e Tabela 6.8).

A tensão média de cada ponto, usada na determinação da amplitude da tensão cisalhante durante o seu ciclo de carregamento, projetada em um determinado plano, foi calculada conforme descrito no Capítulo 4. Uma rotina de otimização foi construída a partir de funções prontas disponíveis no pacote computacional utilizado. O cálculo da vida em fadiga, para todos os

modelos e critérios utilizados, foi realizado através de um programa, e suas diversas rotinas, construído utilizando o pacote comercial MATLAB 7.3[®].

Na Figura 6.62 tem-se o ciclo do ponto mais crítico na roda, considerando todos os planos analisados, descrito em um gráfico da amplitude da tensão de cisalhamento em função da tensão hidrostática, para a situação de carga adotada. O valor em destaque, 260.1 MPa, que define o ponto que a reta corta o eixo das ordenadas (σ_h), representa o maior valor da tensão equivalente de Dang Van encontrado durante o ciclo de carregamento, para o ponto mais crítico (menor vida). O plano crítico encontrado tem cossenos diretores [0,000 0,707 -0,707].

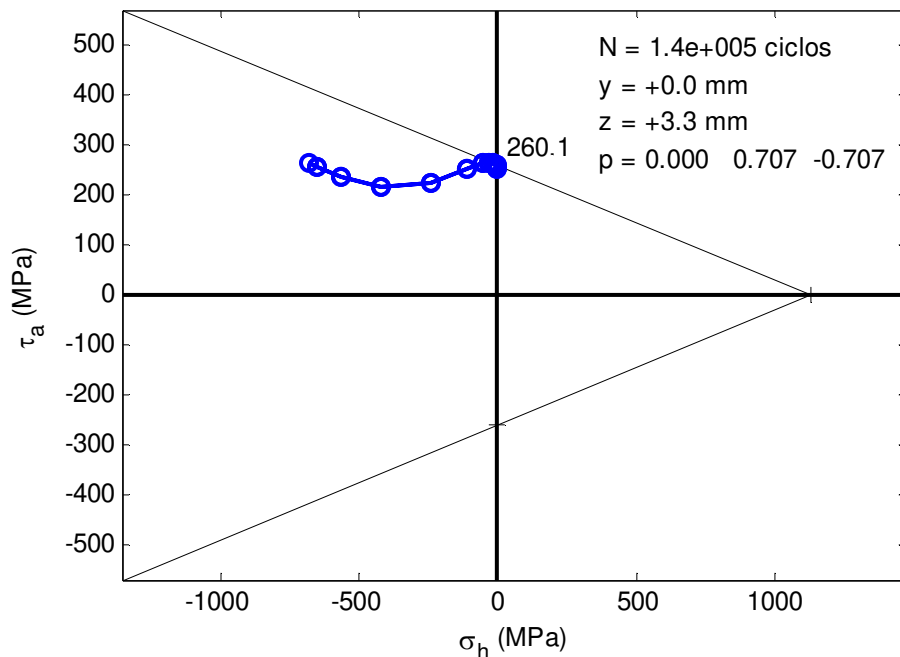


Figura 6.62: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – Modelo semi-analítico.

Uma visão geral da variação da tensão τ_{dv} em função de todos os pontos analisados na roda, dados pelos pares (y_i, z_i) pode ser vista na Figura 6.63. Para cada par, considerou-se o instante no ciclo (direção x) de maior tensão equivalente. Do lado esquerdo, uma vista de topo da distribuição de tensão. O ponto mais crítico, o de maior tensão τ_{dv} , está localizado a 3,3 mm abaixo da superfície de rolamento da roda e com deslocamento lateral nulo ($y = 0$ mm) em relação ao centro da região de contato (0, 0, 0).

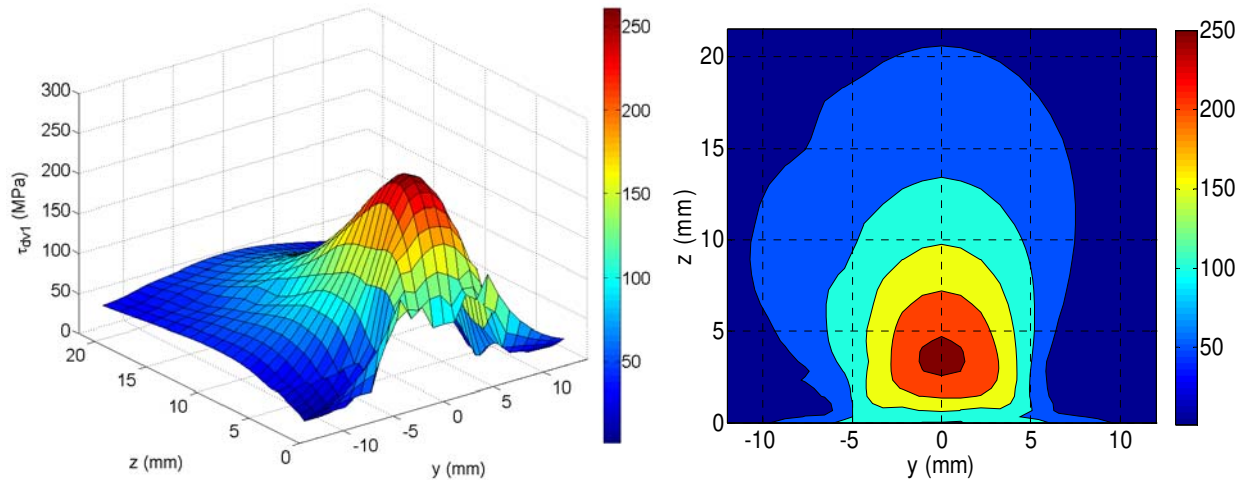


Figura 6.63: Máxima tensão equivalente de Dang Van em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

Na Figura 6.64 tem-se os mesmos gráficos anteriores, com a diferença que apenas o máximo dano, considerando todos os planos de cisalhamento avaliados, passando por cada ponto do aro da roda estudado, é mostrado em função das coordenadas y e z . Observa-se que o maior dano, e conseqüentemente a menor vida (inverso do dano), se dará onde ocorre a máxima tensão τ_{dv} . A menor vida encontrada foi de $1,4 \times 10^5$ ciclos. Por se tratar de uma vida baixa para uma roda ferroviária de vagões de carga, essa vida representa o número de ciclos para o início da trinca e não para a fratura completa da roda. Isso se confirma também pelo próprio critério adotado, que estabelece apenas o início ou não de trincas, e em que ponto elas ocorrem.

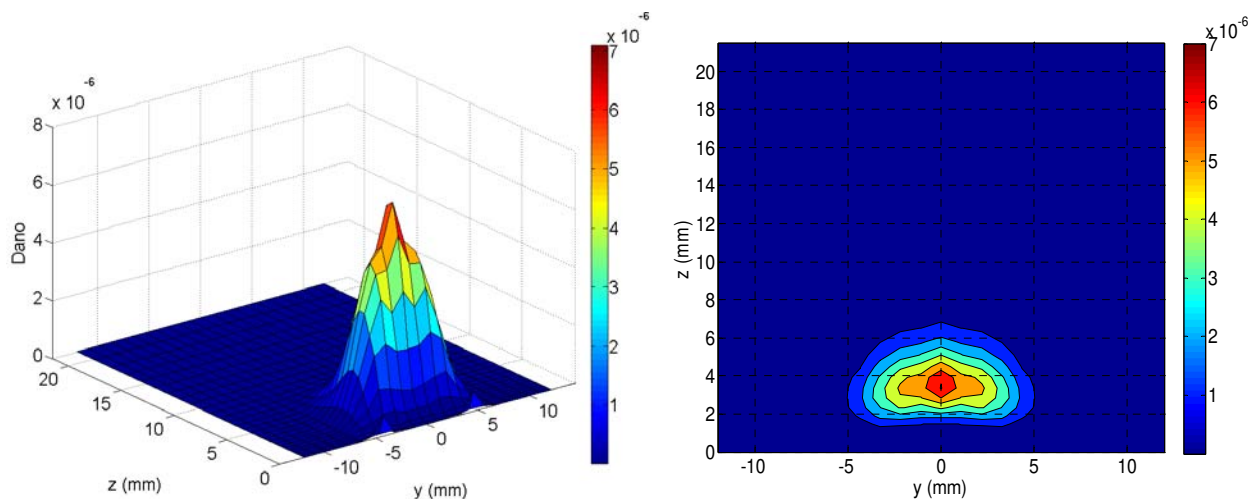


Figura 6.64: Dano máximo calculado em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

Definidas as coordenadas y e z do ponto crítico, falta determinar em que instante do ciclo (direção longitudinal x) ocorrerá o início da trinca. O programa construído para determinar esse ponto irá armazenar a coordenada x que tiver o menor valor numérico de τ_{dv} . Em determinados instantes do ciclo, para um mesmo ponto, os valores de τ_{dv} têm uma variação desprezível, podendo ocorrer diversos instantes com tensões equivalentes iguais.

Para contornar esse problema, foi traçado um gráfico, na Figura 6.65, da variação de τ_{dv} , assim como da tensão hidrostática e a amplitude de tensão, em função da direção do ciclo de carregamento. Através deste gráfico, nota-se a ocorrência de uma estabilização, tanto de τ_a quanto de τ_{dv} , à medida que se afasta do centro do contato. Portanto, o maior valor de τ_{dv} permanece praticamente inalterado em uma determinada faixa do ciclo. Sendo assim, o instante ou posição longitudinal em que ocorrerá o início da trinca por fadiga será o ponto mais próximo da região da roda em contato com o trilho, que apresenta a maior tensão τ_{dv} , ou seja, $x = 18$ mm.

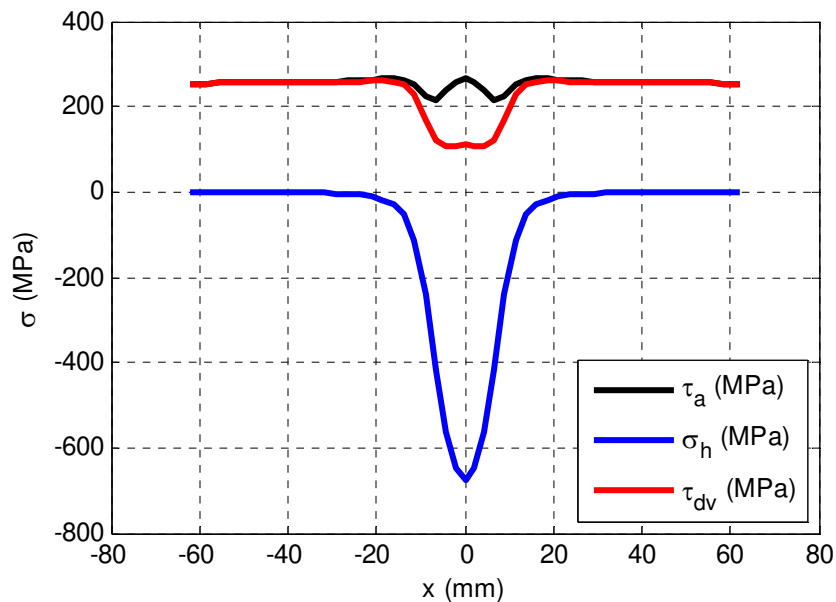


Figura 6.65: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.

Como se pode observar também, a tensão hidrostática tem seu valor máximo no centro do ciclo. Isso é esperado uma vez que todas as tensões normais, com coordenada $y = 0$, tem seu valor máximo no centro da região de contato ($x = 0$). A amplitude de tensão (τ_a), que depende das

componentes do tensor de tensões, da tensão média e no plano ao qual ela é projetada, tem seus valores mais elevados no ponto central da região de contato e nas regiões do ciclo mais afastadas do centro. Isso pode ser explicado pelo formato do caminho descrito pela tensão de cisalhamento resultante, representativa do tensor de tensões de um ponto.

A Figura 6.66 apresenta a descrição do ciclo projetado no plano mais crítico para o ponto de menor vida encontrado neste modelo. O ponto verde indicado na figura representa a origem do ciclo, que no rolamento da roda equivale aos pontos da roda mais afastados do centro do contato. Como este modelo de contato é elástico, não há tensões residuais, o caminho descrito pela tensão de cisalhamento resultante começa e termina com as duas componentes projetadas da amplitude de tensão nulas. O raio da circunferência é a maior amplitude de tensão durante o ciclo e o centro é a tensão média do ponto durante este ciclo. Logo, os instantes de maior amplitude serão aqueles localizados no centro do contato e nas regiões mais distantes dele. Isso é representado na Figura 6.65 pela linha preta. Os dois pontos de menor amplitude, segundo a Figura 6.66, serão aqueles mais próximos do centro da circunferência, que na Figura 6.65, são os declínios da curva de amplitude próximo ao centro. É importante lembrar que cada plano que passa por um ponto produz um caminho diferente, durante o ciclo da tensão cisalhante projetada no plano. Logo, o comportamento tanto de τ_a , quanto de τ_{dv} , deve variar com o ponto e o plano.

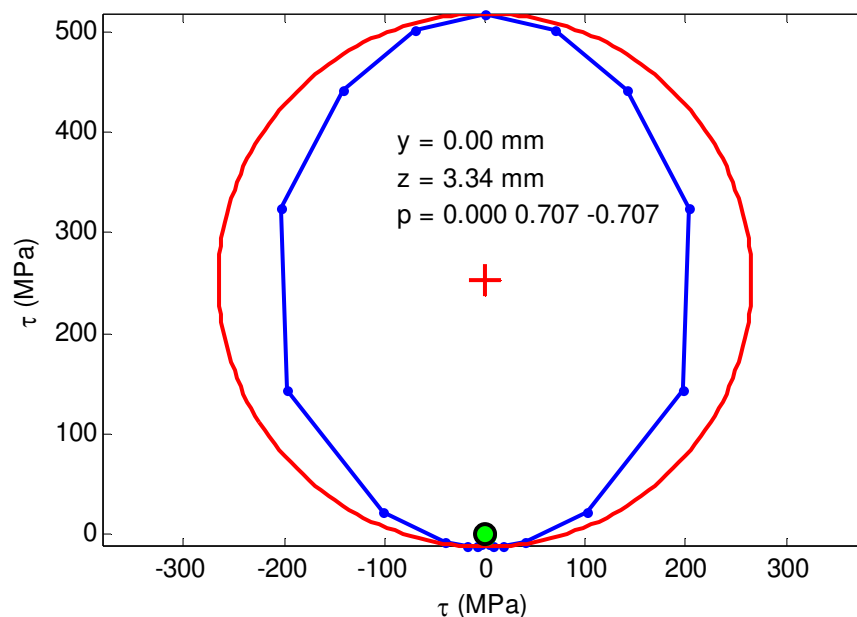


Figura 6.66: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.

Já a tensão equivalente (τ_{dv}) tem o seu valor máximo nos pontos um pouco deslocados do centro (0,0). Isso se justifica pois, além de τ_{dv} acompanhar a curva de τ_a as tensões hidrostáticas influenciam o seu cálculo, conforme estabelece o critério. Na região do centro do contato, a tensão hidrostática é máxima, o que acarreta uma redução em τ_{dv} , segundo o critério adotado. Afastando-se um pouco do centro, as tensões hidrostáticas começam a diminuir, ao mesmo tempo em que τ_a começa a aumentar novamente. É justamente nessa região que ocorrerão as tensões equivalentes mais elevadas. Nas regiões mais afastadas do centro, a tensão hidrostática tem seu valor tendendo à zero (pelo menos no caso de contato elástico). Já as tensões cisalhantes (τ_a e τ_{dv}), estabilizam-se em um determinado valor, pois elas dependem da tensão média do ciclo, que para este ponto tem valor diferente de zero. Vale ressaltar que as tensões normais de compressão inibem o surgimento de trincas, aumentando o número de ciclos para o seu surgimento.

6.3.1.2 Critério de Fatemi & Socie

O outro critério de fadiga adotado para este trabalho foi o de Fatemi & Socie (1988), baseado no conhecido critério de Coffin–Manson.

A Tabela 6.9 apresenta as propriedades para temperatura ambiente, utilizadas no modelo analítico (Moyar & Stone, 1991). Elas também são válidas para os outros modelos. Os parâmetros são descritos no capítulo 4.

Tabela 6.9: Propriedades utilizadas com o critério Fatemi & Socie (Moyar & Stone, 1991).

τ'_f (MPa)	γ'_f	b'	c'	G (MPa)	σ_y (MPa)	K
970	2,938	-0,111	-0,721	80769	750	0,6

Mais uma vez o cálculo da amplitude foi realizado extraindo-se a deformação média durante um ciclo de carregamento, que foi calculada através da mínima circunferência circunscrita, só que desta vez foi utilizada a deformação cisalhante modificada.

Na Figura 6.67 mostra-se como o número de ciclos (N) até o início da trinca está variando em função da profundidade, para diversos pontos na direção lateral da roda. Sabe-se que apenas um único ponto irá representar a vida da roda, e este ponto será o que apresentar menor vida. Observando o gráfico, nota-se que os pontos que estão na posição central do contato ($y = 0$) apresentam menor vida. Destes, o ponto que está a uma profundidade de 3,3 mm será o ponto crítico que representará a vida na roda, para este modelo. No gráfico à direita, aparece em destaque apenas a curva para a posição $y = 0$.

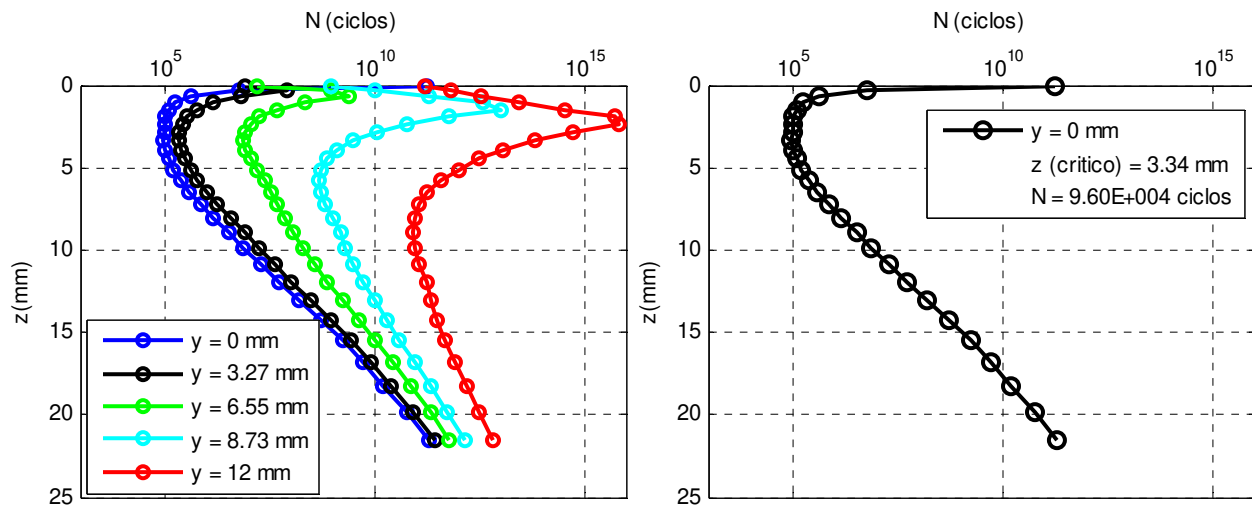


Figura 6.67: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo de carregamento.

A Figura 6.68 e a Figura 6.69 mostram a distribuição da amplitude de deformação cisalhante e do dano em função das coordenadas de todos os pontos analisados. Para cada par (y_i, z_i) considerado adotou-se a posição ao longo do ciclo (x_i) de maior deformação e dano. Observa-se que, assim como no critério de Dang Van Modificado, o dano é bem localizado e simétrico em relação a direção lateral (y), restringindo-se a aproximadamente 10 mm lateralmente e até uma profundidade (z) de 8 mm. O resto dos pontos tem dano praticamente nulo.

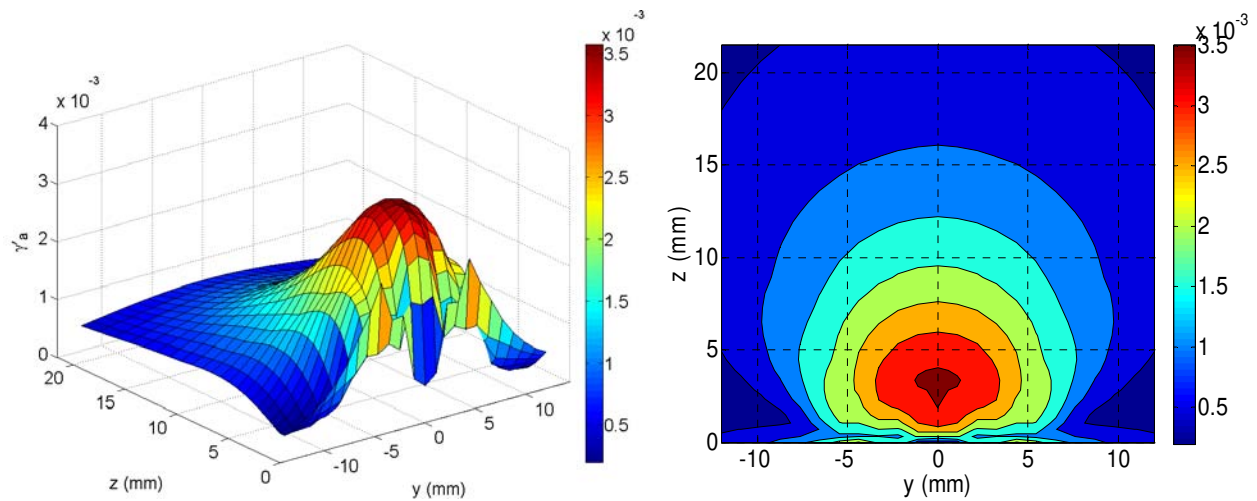


Figura 6.68: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

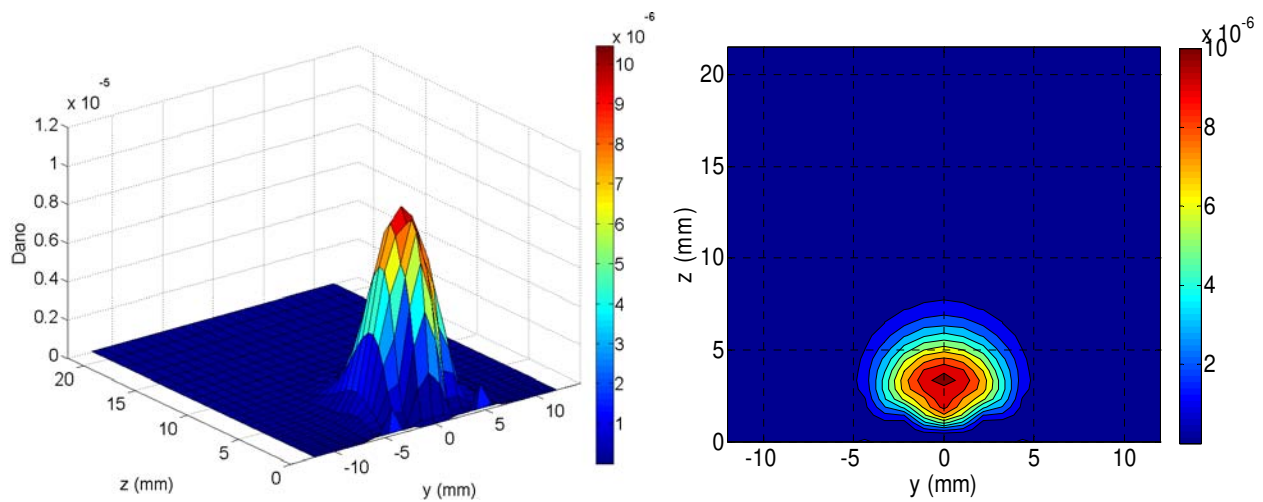


Figura 6.69: Dano máximo calculado em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

A determinação do instante do ciclo em que a falha irá ocorrer pode ser obtida através do gráfico da Figura 6.70. A variação da amplitude da deformação cisalhante modificada (γ'_a) e o comportamento do número de ciclos para o ponto e plano em questão são mostrados em função da direção de rolamento (x). O maior valor de γ'_a e, conseqüentemente, o menor número de ciclos, ocorrerá quando o ponto estudado estiver em $x = 8$ mm. Este ponto corresponde a uma vida de aproximadamente 96000 ciclos. Observa-se que no centro da região de contato a vida é infinita, conseqüência das altas tensões e deformações normais de compressão encontradas nessa

região. A amplitude de deformação praticamente nula no centro do ciclo se deve ao formato do caminho descrito pelo ciclo da deformação cisalhante resultante, que tem a forma fechada e passa pelo centro da circunferência. À medida que o ponto estudado se afasta do contato, as tensões e deformações vão diminuindo e vida tende a infinito novamente.

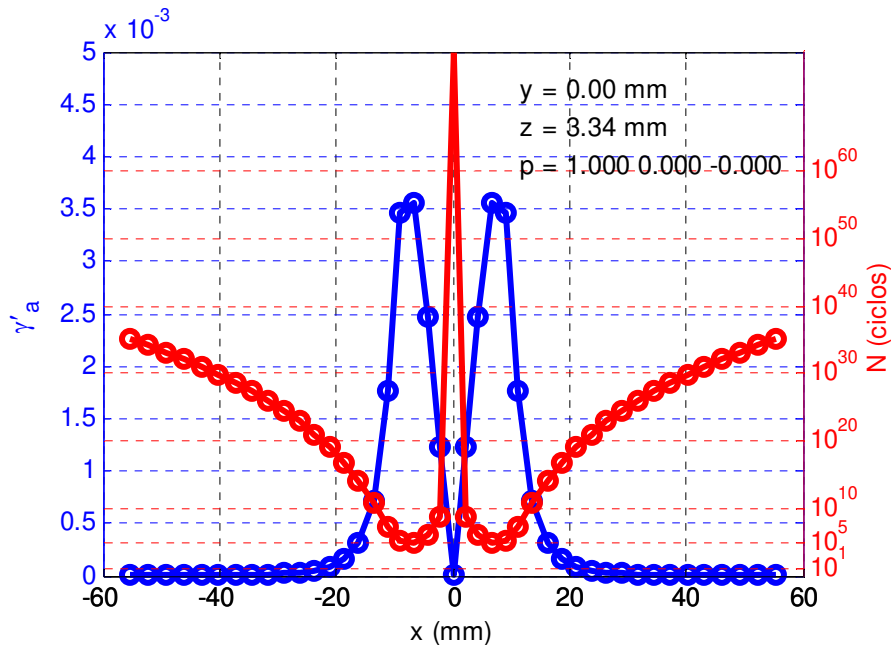


Figura 6.70: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.

6.3.2 Modelo elástico com tensões residuais de fabricação (Ana Elás + Fab)

As tensões elásticas somadas às tensões de fabricação serão usadas para calcular a vida deste modelo. O objetivo deste cálculo é determinar se o número de ciclos para o início da trinca em fadiga é próximo ao do modelo numérico elastoplástico com tensões residuais. Caso o modelo não sofra mais escoamento plástico após o carregamento mecânico ser aplicado, as tensões residuais de fabricação poderão ser somadas às tensões provenientes do contato, sem a necessidade de simulação por elementos finitos.

6.3.2.1 Critério de Dang Van Modificado

Os mesmos parâmetros utilizados no modelo elástico serão usados neste modelo. Os tensores de tensão previamente calculados analiticamente e somados com as tensões residuais de fabricação servirão de entrada para o modelo.

No gráfico da Figura 6.71 pode-se ver o caminho descrito pelo ciclo de carga para o ponto mais crítico da roda. Pode-se notar que, diferentemente do modelo analítico apresentado anteriormente, no qual o ciclo começa e termina com tensão hidrostática nula, desta vez, devido à presença de tensões residuais de compressão, a tensão residual hidrostática compressiva (negativa) está presente em todo ciclo de carga.

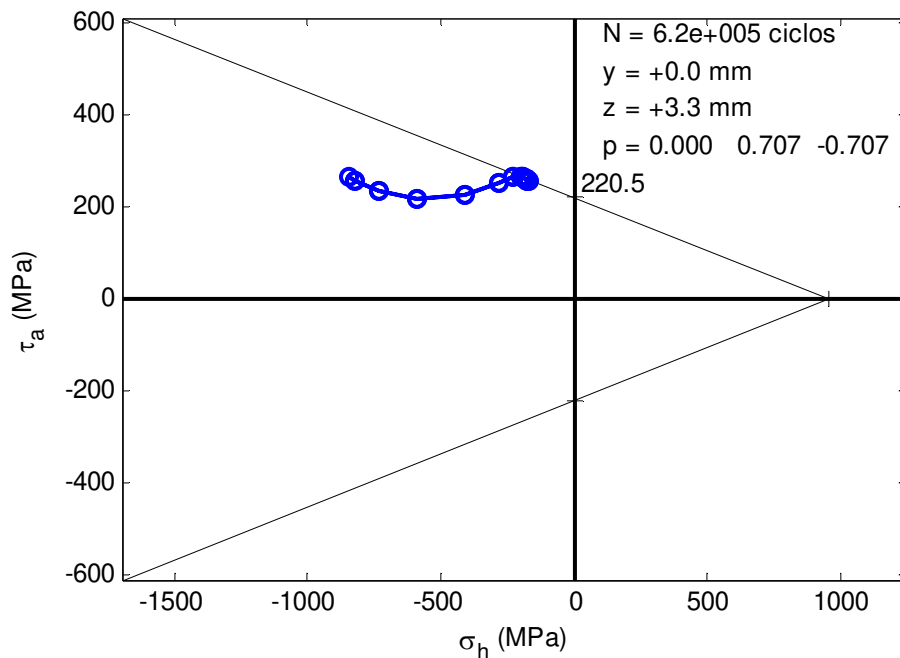


Figura 6.71: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – Modelo semi-analítico com tensões residuais.

O ponto mais crítico encontrado apresenta 220,5 MPa de tensão equivalente e tem sua localização igual à do modelo semi-analítico sem tensões residuais: $y = 0$ mm e $z = 3,3$ mm, conforme Figura 6.72. O formato da curva é praticamente idêntico, sendo diferente apenas em magnitude. Apesar disso, o maior dano ou a menor vida encontrada é de $6,2 \times 10^5$ ciclos (Figura 6.73), o que é quase 5 vezes maior do que o valor da vida calculada com o modelo analítico. Isso

ocorre devido à presença das tensões compressivas, que inibem o surgimento de trincas, aumentando assim a vida da roda.

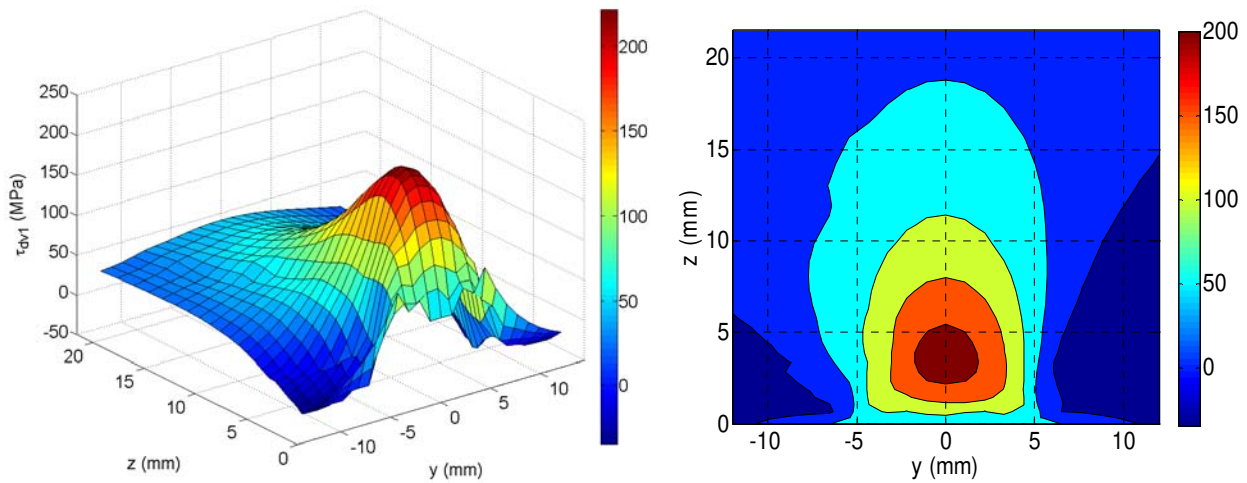


Figura 6.72: Máxima tensão equivalente de Dang Van em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

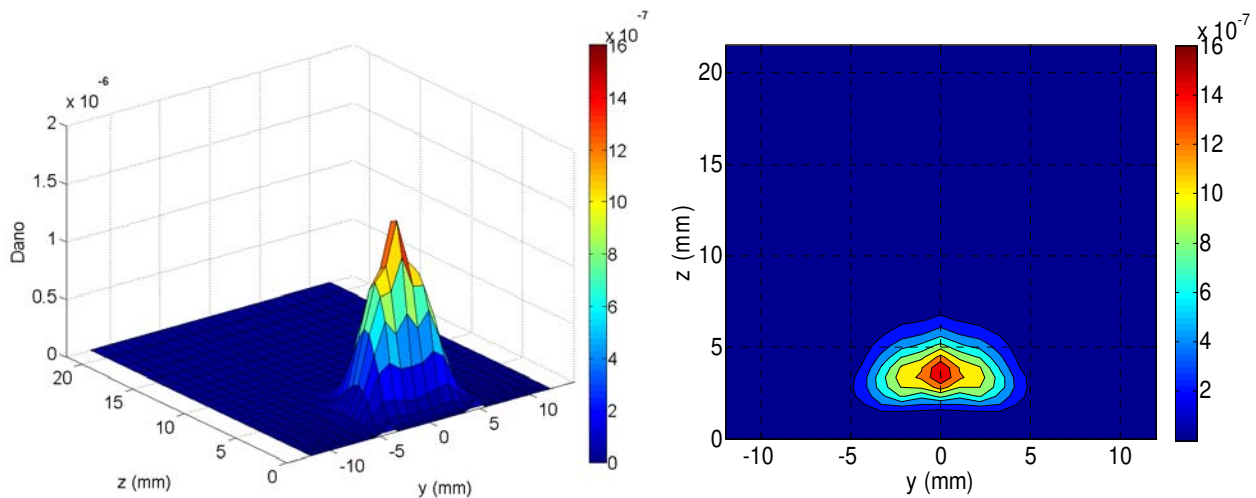


Figura 6.73: Dano máximo em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

A posição ao longo do ciclo também é igual, aproximadamente 18 mm, conforme Figura 6.74. Na Figura 6.75 pode-se observar o deslocamento da origem do ciclo de tensões, proveniente das tensões residuais. Isso faz com que todo ciclo sofra um deslocamento, que irá refletir nos valores da amplitude de tensão e da tensão média. Isso só foi possível perceber graças à abordagem vetorial realizada através do método da mínima circunferência.

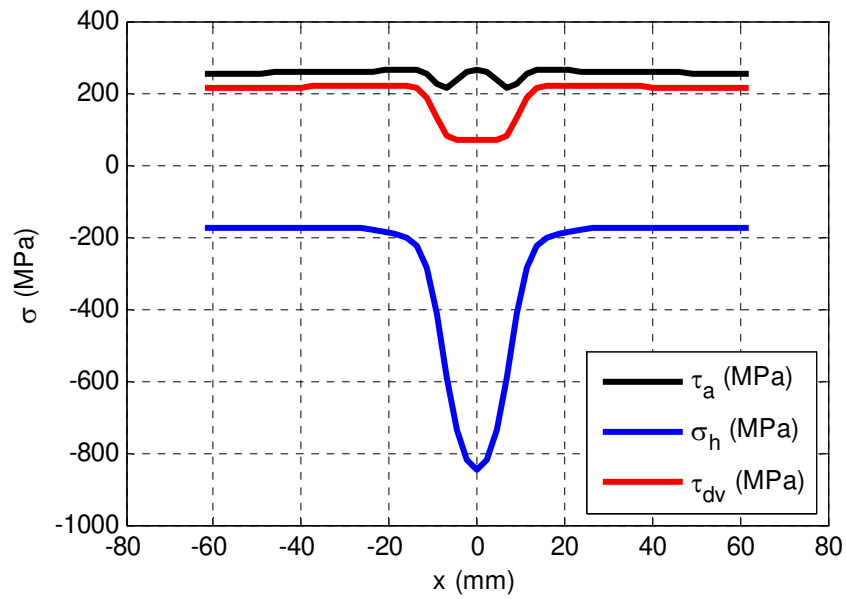


Figura 6.74: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.

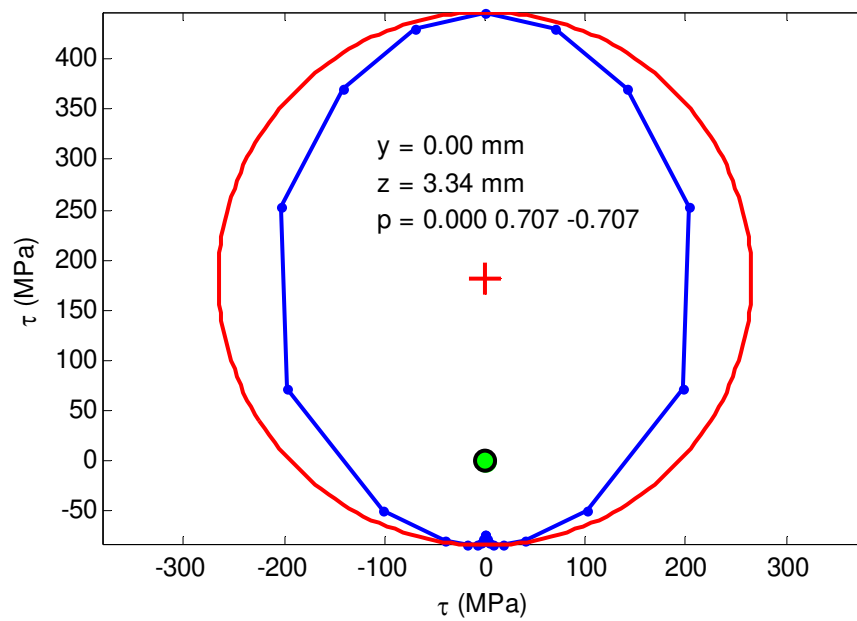


Figura 6.75: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.

6.3.2.2 Critério de Fatemi & Socie

Na Figura 6.76 mostra-se como o número de ciclos está variando em função da profundidade, para diversos pontos na direção lateral da roda. Observando o gráfico, nota-se que

os pontos que estão na posição central do contato ($y = 0$) apresentam menor vida. Destes, o ponto que está a uma profundidade de 3,3 mm será o ponto crítico que representará a vida na roda, para este modelo. No gráfico à direita, da mesma forma que anteriormente, aparecem em destaque apenas a curva para a posição $y = 0$.

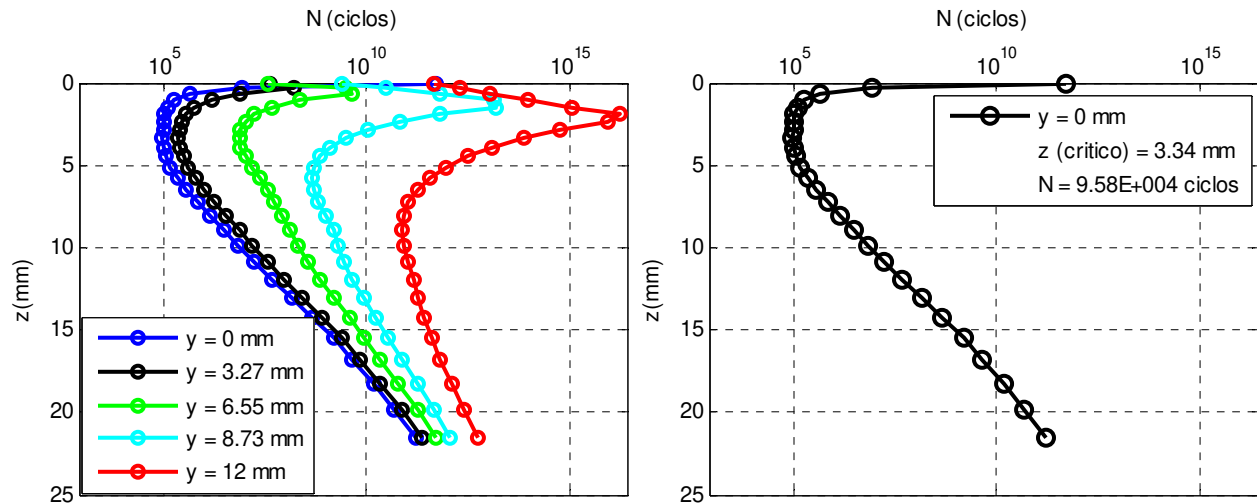


Figura 6.76: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo de carregamento.

Na Figura 6.77 e a Figura 6.78 tem-se a distribuição da amplitude de deformação cisalhante e do dano em função das coordenadas de todos os pontos analisados. Observa-se que são praticamente idênticas ao do modelo anterior.

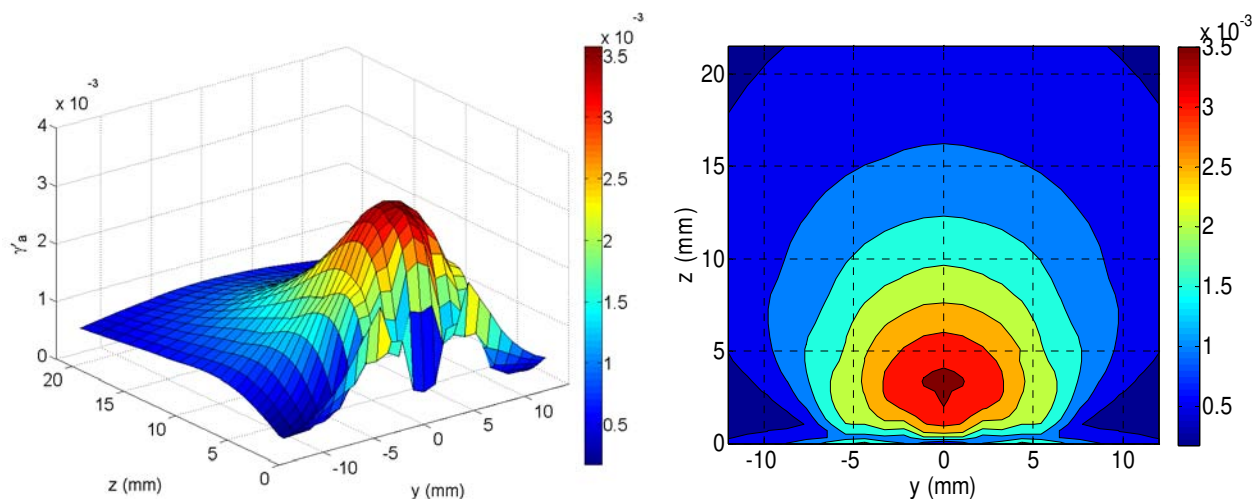


Figura 6.77: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

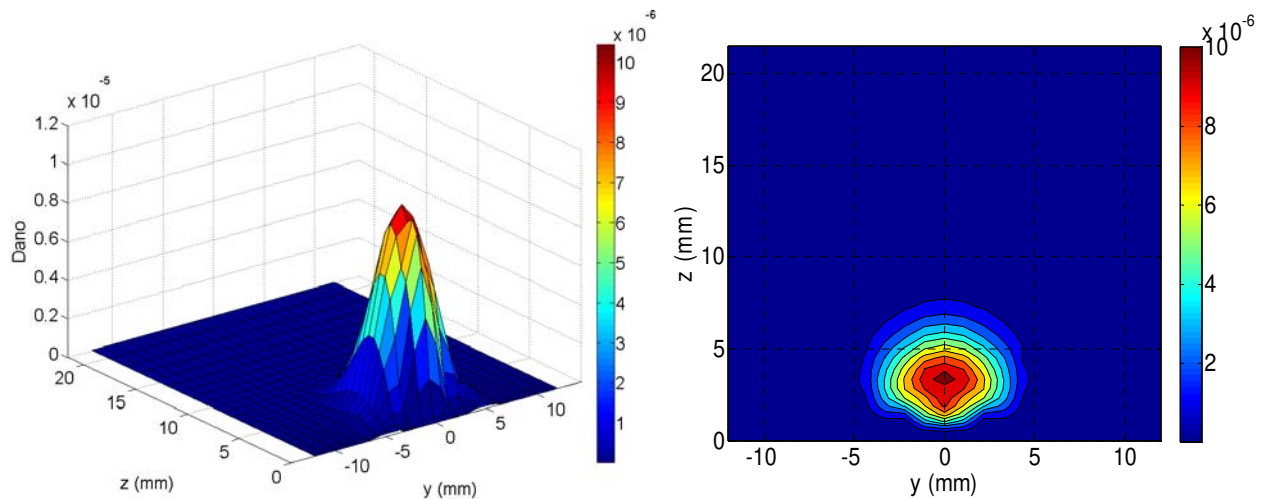


Figura 6.78: Dano máximo calculado cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

A determinação do instante do ciclo em que a falha irá ocorrer pode ser obtida através do gráfico da Figura 6.79. O maior valor de γ'_a , e consequentemente, o menor número de ciclos, ocorrerá quando o ponto estudado estiver em $x = \pm 6,7$ mm. Este ponto corresponde a uma vida de aproximadamente $9,58 \times 10^4$ ciclos. Esse gráfico também é semelhante ao do modelo semi-analítico sem tensões residuais.

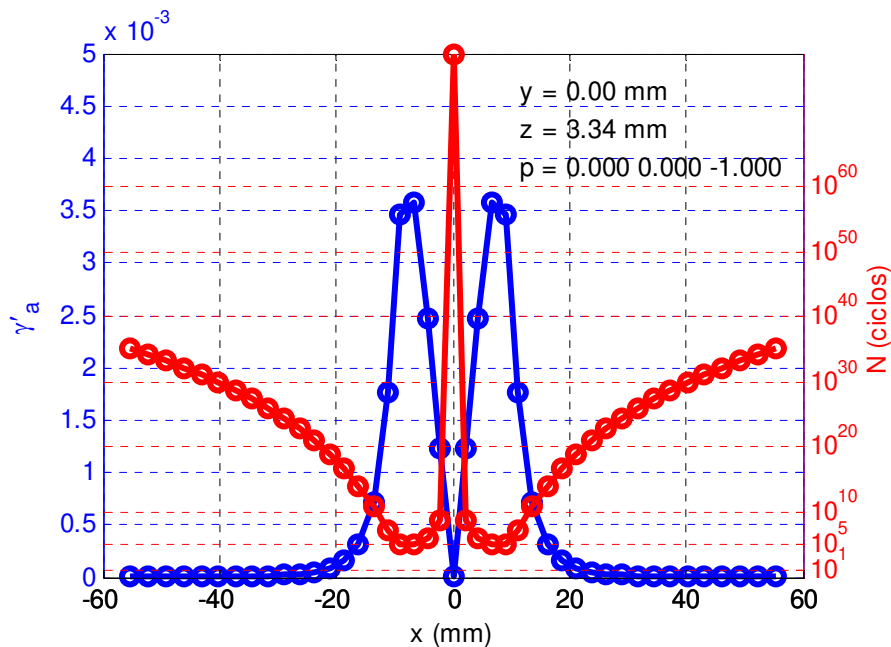


Figura 6.79: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.

6.3.3 Modelo elastoplástico (MEF)

As tensões calculadas através da simulação numérica serão usadas para alimentar os critérios usados neste modelo. As propriedades utilizadas anteriormente permanecem as mesmas. Os vetores posição e os tensores gerados pelas macros para traçar os gráficos de tensão anteriores serão usados também aqui.

6.3.3.1 Critério de Dang Van Modificado

Neste modelo, o caminho descrito pelo ciclo do ponto mais solicitado é apresentado na Figura 6.80. Por ser um modelo em regime elastoplástico e o material sofrer escoamento, como demonstrado anteriormente, surgem tensões residuais. As tensões residuais hidrostáticas têm valores baixos e são de compressão, como era de se esperar devido ao carregamento imposto.

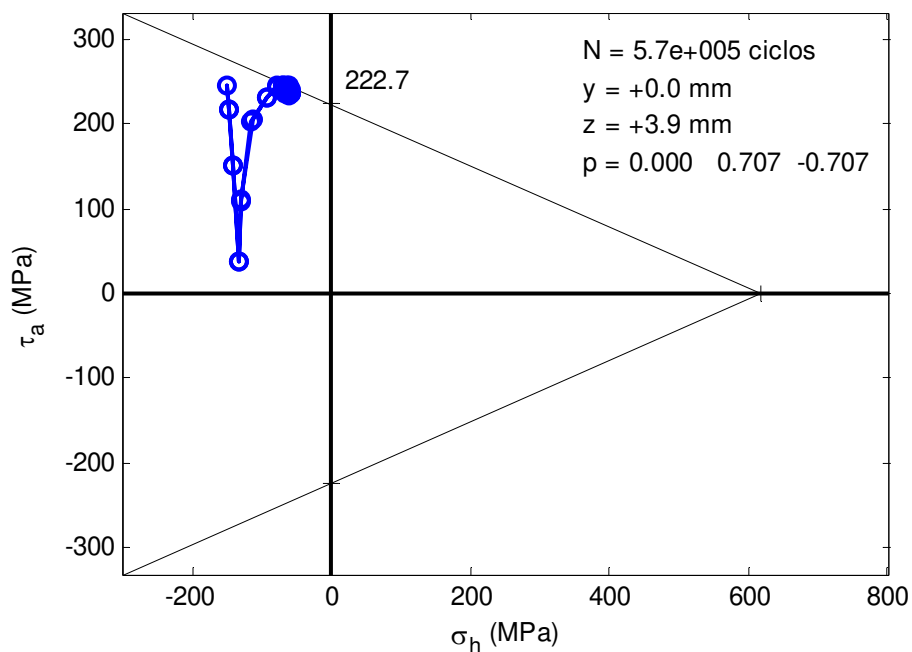


Figura 6.80: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – MEF.

Observando a Figura 6.81, pode-se determinar que a máxima tensão τ_{dv} encontrada foi de 222,7 MPa, menor que a encontrada com o modelo analítico, pois em regime elastoplástico as

tensões e deformações tendem a diminuir. O ponto crítico está localizado em $y = 0$ mm e $z = 3,9$ mm, valores estes praticamente iguais aos do modelo semi-analítico elástico.

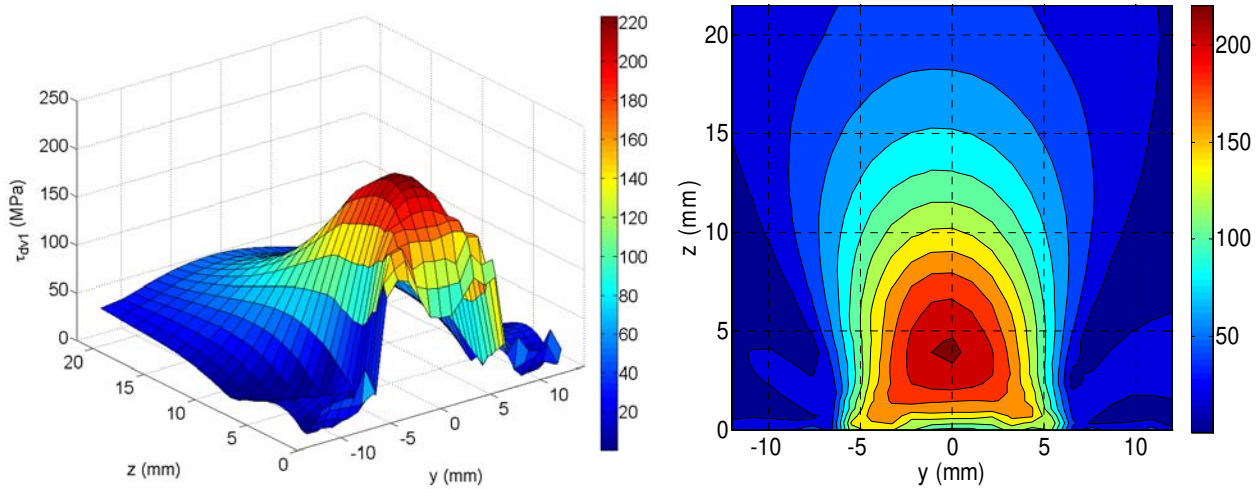


Figura 6.81: Máxima tensão equivalente de Dang Van em cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

Na Figura 6.82, tem-se a distribuição do dano na região da roda analisada. Diferentemente do caso semi-analítico, essas curvas não apresentam uma simetria perfeita. Isso pode ser em parte explicado pelo escoamento plástico sofrido pela porção do aro da roda em contato com o trilho, o que acarreta uma não uniformidade na distribuição de tensão sub-superficial (onde ocorre o escoamento). A menor vida encontrada, equivalente ao máximo τ_{dv} calculado foi de $5,7 \times 10^5$ ciclos. Esse valor é 4 vezes maior que o encontrado para o modelo semi-analítico.

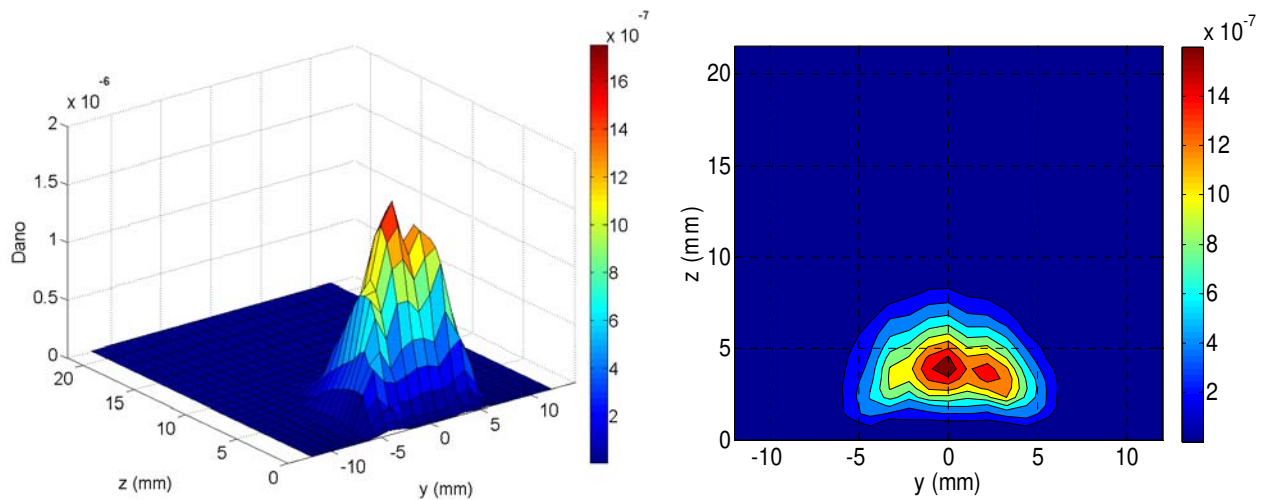


Figura 6.82: Dano máximo cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

Na Figura 6.83 pode-se definir que o instante do ciclo em que a falha irá ocorrer será também aproximadamente em $x = 18$ mm. Nota-se que na posição central do rolamento o valor de τ_{dv} sofre um pequeno aumento antes de reduzir e aumentar até estabilizar-se. Isso se deve ao aumento acentuado de τ_a nesse ponto (linha preta), que nos outros modelos, apesar de existir, era menor. A explicação é a mesma descrita do item 6.3.1.1. Como τ_{dv} é diretamente proporcional a τ_a , esta aumenta na mesma proporção.

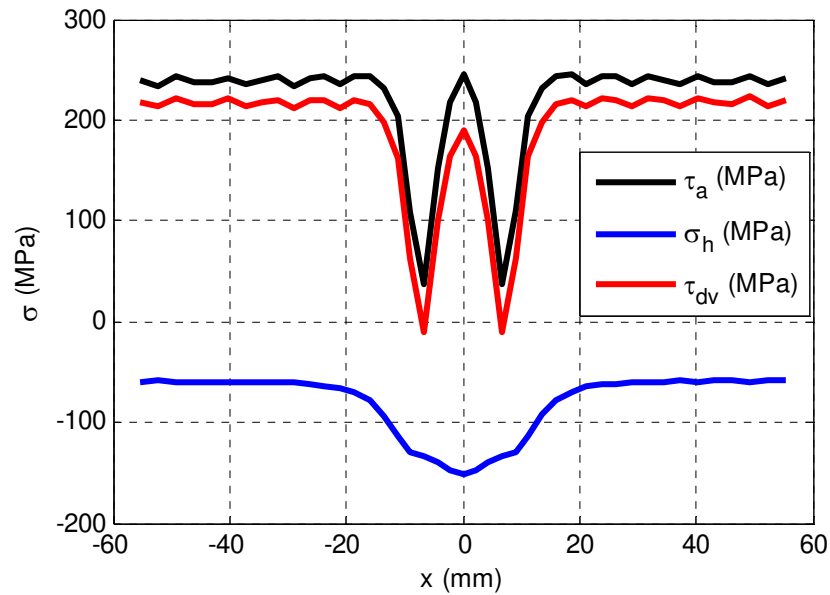


Figura 6.83: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.

Na Figura 6.84 tem-se o ciclo descrito pela tensão cisalhante. Nota-se que, como no caso das tensões analíticas somadas com as tensões residuais de fabricação, a origem do ciclo esta deslocada do valor nulo de tensão equivalente de Dang Van (posição (0,0)). Entretanto, neste caso, as tensões residuais são consequência direta apenas do rolamento. Isso quer dizer que durante todo ciclo, após estabilização das tensões em todos os pontos que sofreram deformação plástica, essa região da roda apresentará tensões residuais.

Observando os co-senos diretores, nota-se que o plano em que a falha irá ocorrer está a 45° em relação ao centro do contato.

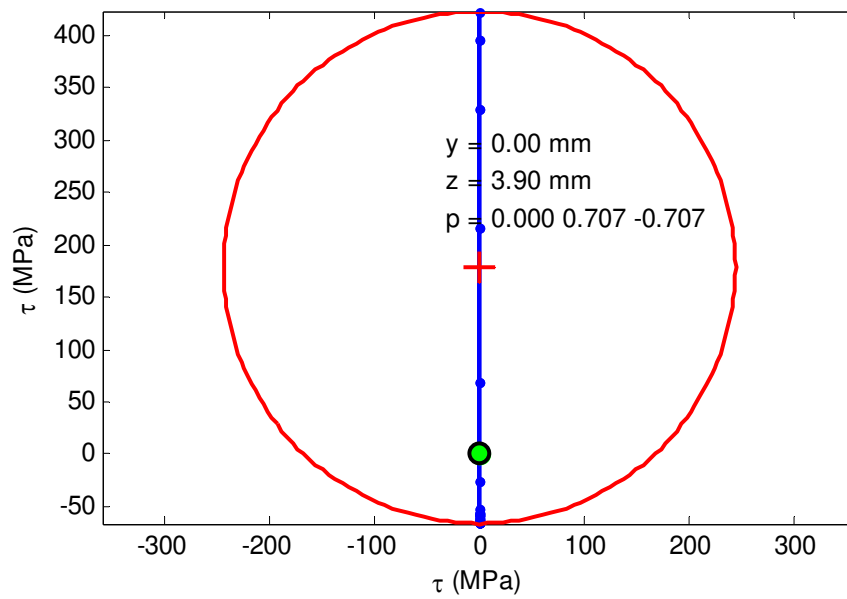


Figura 6.84: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.

6.3.3.2 Critério de Fatemi & Socie

Os parâmetros utilizados nesse modelo são os mesmos dos modelos anteriores. Na Figura 6.85 observa-se que o menor número de ciclos irá ocorrer em $y = 0$ mm e $z = 3,3$ mm, exatamente como nos outros modelos.

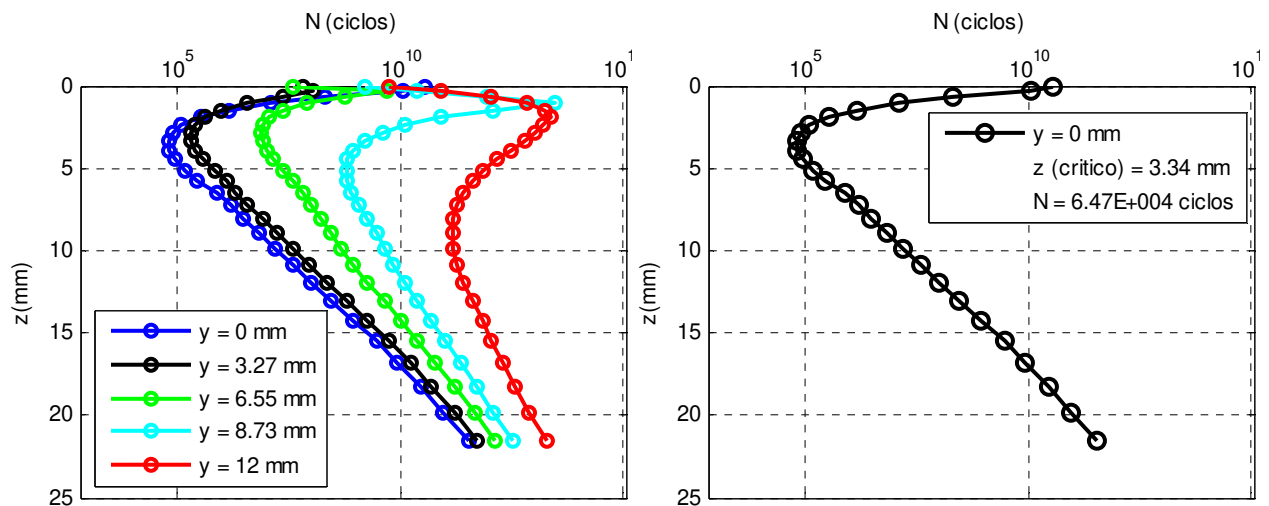


Figura 6.85: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo.

Na Figura 6.86 e a Figura 6.87 tem-se a distribuição da amplitude de deformação cisalhante e do dano em função das coordenadas de todos os pontos analisados. A variação da amplitude da deformação cisalhante modificada é bem diferente da dos modelos analíticos, conforme Figura 6.88. O instante do ciclo de carregamento em que a falha irá ocorrer será aproximadamente em $x = 6,7$ mm. O número de ciclos para o início da trinca é de $6,47 \times 10^4$ ciclos, que é menor que a vida encontrada com o mesmo critério no modelo semi-analítico. Isso ocorre possivelmente devido à presença de deformações plásticas, que aumentaram as deformações cisalhantes nos planos críticos. Essa e as outras diferenças entre os modelos e critérios serão discutidas mais adiante.

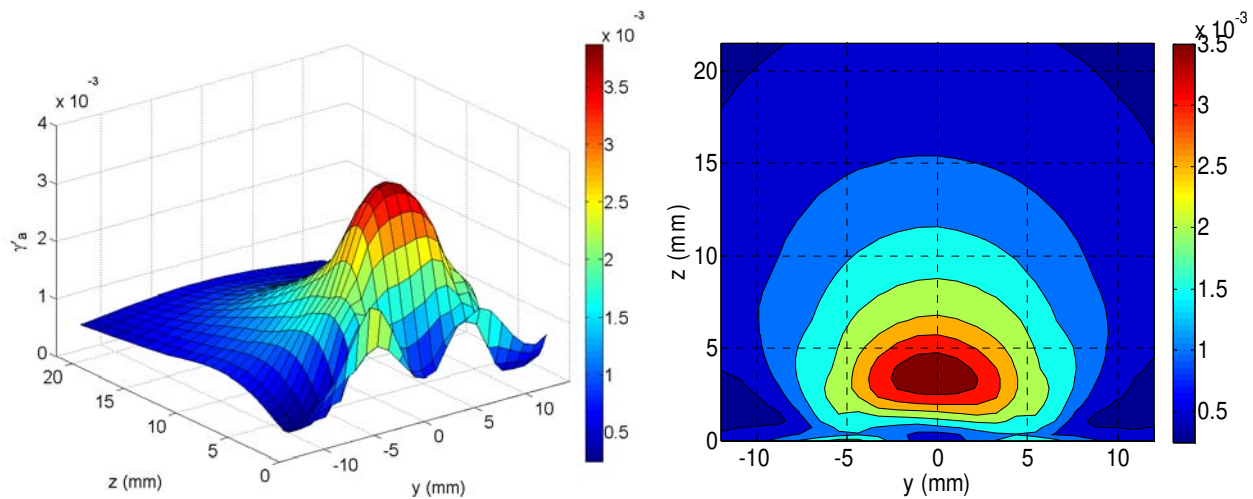


Figura 6.86: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

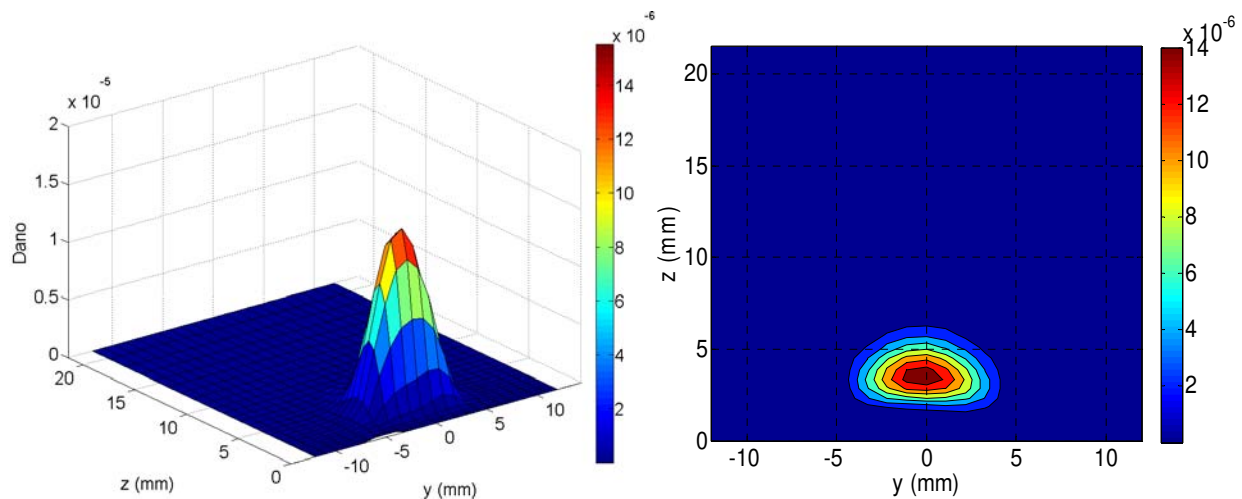


Figura 6.87: Dano máximo cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

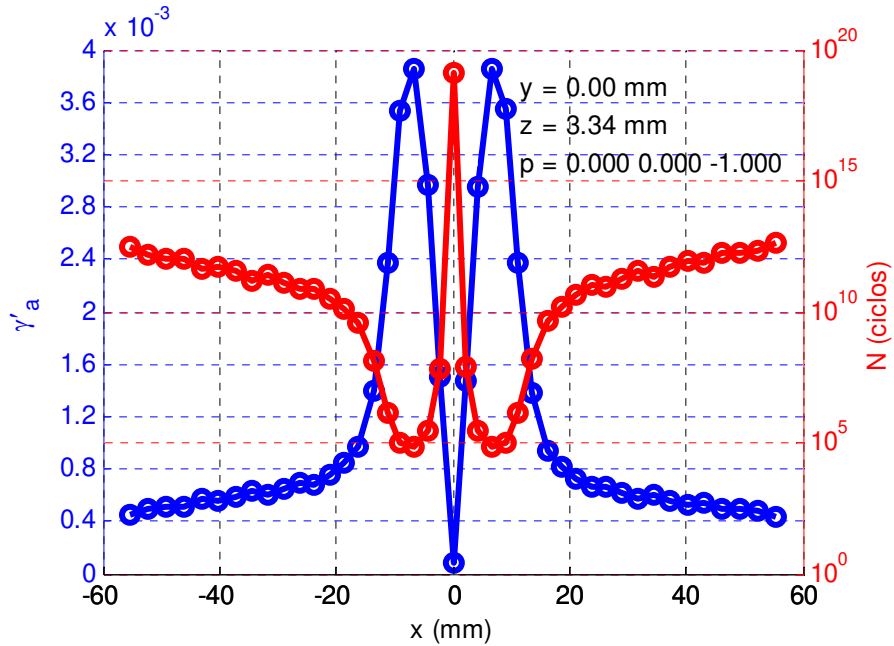


Figura 6.88: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.

6.3.4 Modelo elastoplástico com tensões residuais de fabricação (MEF + Fab.)

As tensões calculadas através da simulação numérica serão usadas como entrada neste modelo. As propriedades utilizadas anteriormente permanecem as mesmas. Os vetores posição são os mesmos usados no modelo numérico sem tensão de fabricação.

6.3.4.1 Critério de Dang Van Modificado

Na Figura 6.89 tem-se o caminho descrito pelo ponto e o plano mais crítico, durante seu ciclo. A presença das tensões de fabricação pode ser notada neste gráfico. O maior valor da tensão equivalente de Dang Van foi de 264,2 MPa, maior que a do modelo sem tensões de fabricação. A razão será discutida mais adiante na comparação entre os modelos.

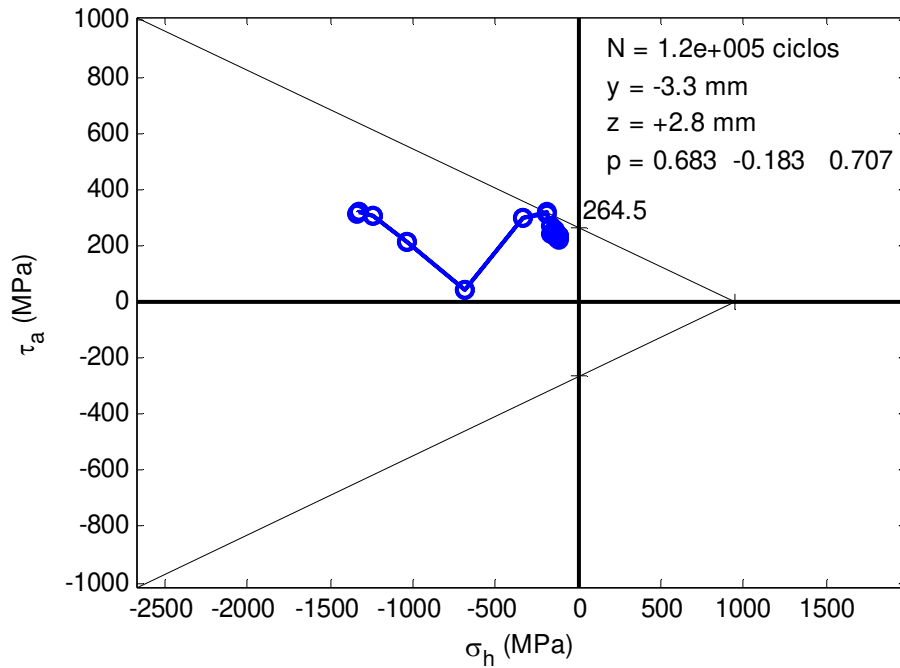


Figura 6.89: Critério de Dang Van expresso em função da amplitude da tensão de cisalhamento e da tensão hidrostática – MEF + Fab.

Na Figura 6.90 e na Figura 6.91 observa-se que o ponto mais crítico, de maior τ_{dv} , e consequentemente, maior dano, localiza-se deslocado lateralmente e abaixo da superfície. A localização do ponto crítico está praticamente igual a dos modelos anteriores, diferindo apenas no valor da posição lateral que não é nula ($y = -3,3$ mm). A menor vida encontrada, equivalente ao máximo τ_{dv} calculado foi de $1,2 \times 10^5$ ciclos, menor que o modelo MEF (sem tensão residual).

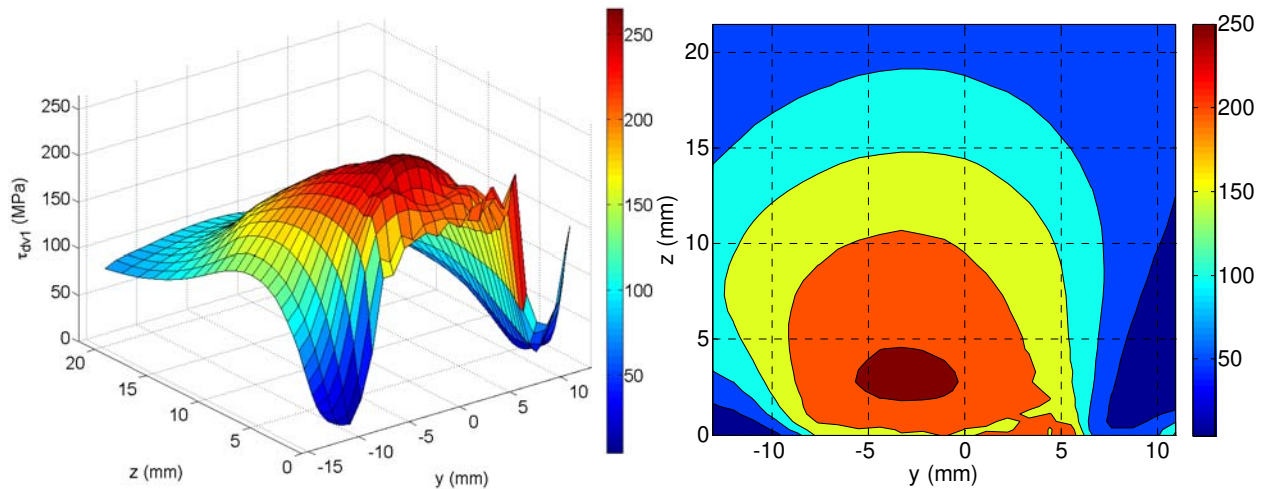


Figura 6.90: Máxima tensão equivalente de Dang Van cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

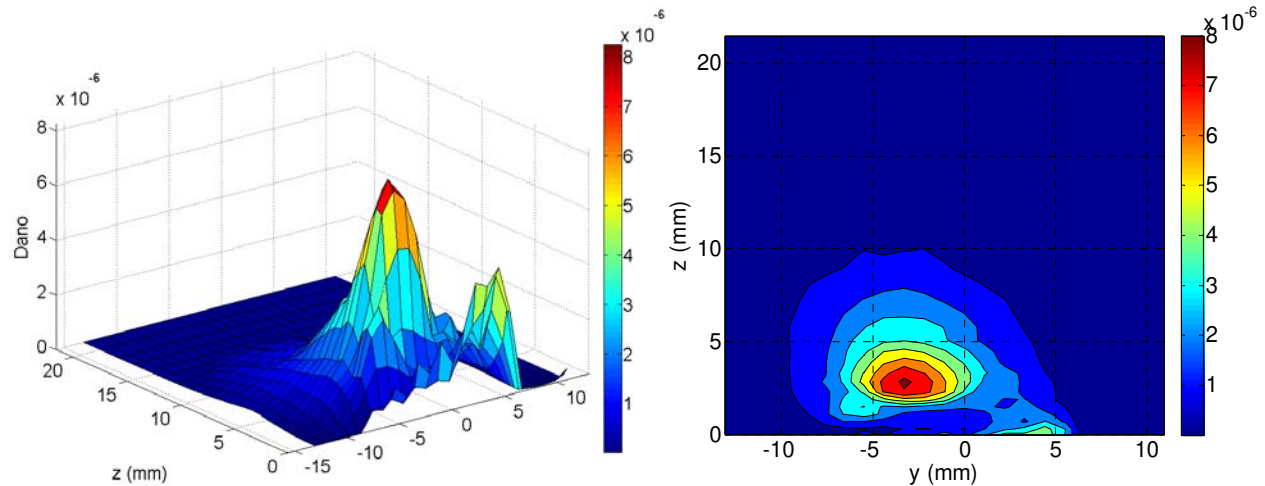


Figura 6.91: Dano máximo calculado em cada ponto e plano analisado, em função de z e y. Vista isométrica e de topo.

O instante do ciclo onde ocorrerá à falha pode ser definido através da Figura 6.92. O ponto de maior τ_{dv} se encontra a aproximadamente 18 mm do centro do contato. A queda dos valores da amplitude de tensão τ_a , próximo à região de contato, pode ser justificada através o ciclo descrito pela tensão de cisalhamento projetada no plano crítico (Figura 6.93). Em determinado instante, a distância entre o centro da circunferência e os pontos do ciclo diminui, à medida que estes passam próximo ao centro. Como era esperado, as tensões hidrostáticas aumentam no centro do contato e diminuem para um valor residual, à medida que os pontos se afastam do contato,

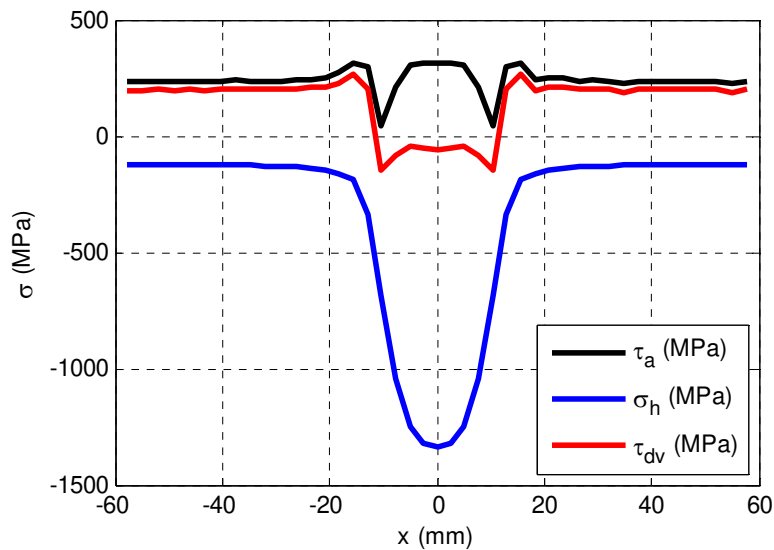


Figura 6.92: Variação das tensões equivalente de Dang Van, amplitude de tensão e hidrostática em função dos instantes do ciclo para o ponto mais crítico.

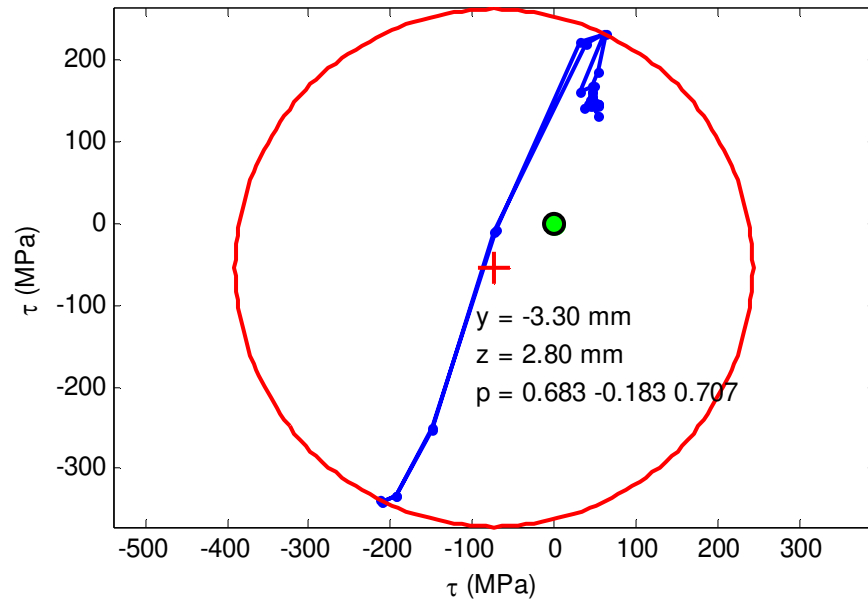


Figura 6.93: Mínima circunferência circunscrita para o ponto e plano mais crítico.

6.3.4.2 Critério de Fatemi & Socie

Os parâmetros utilizados nesse modelo são os mesmos dos modelos anteriores. Na Figura 6.94 observa-se que o menor número de ciclos irá ocorrer no ponto $y = -7,6 \text{ mm}$ e $z = 2,3 \text{ mm}$. Para posições laterais até 7 mm a variação no número de ciclos é muito pequena.

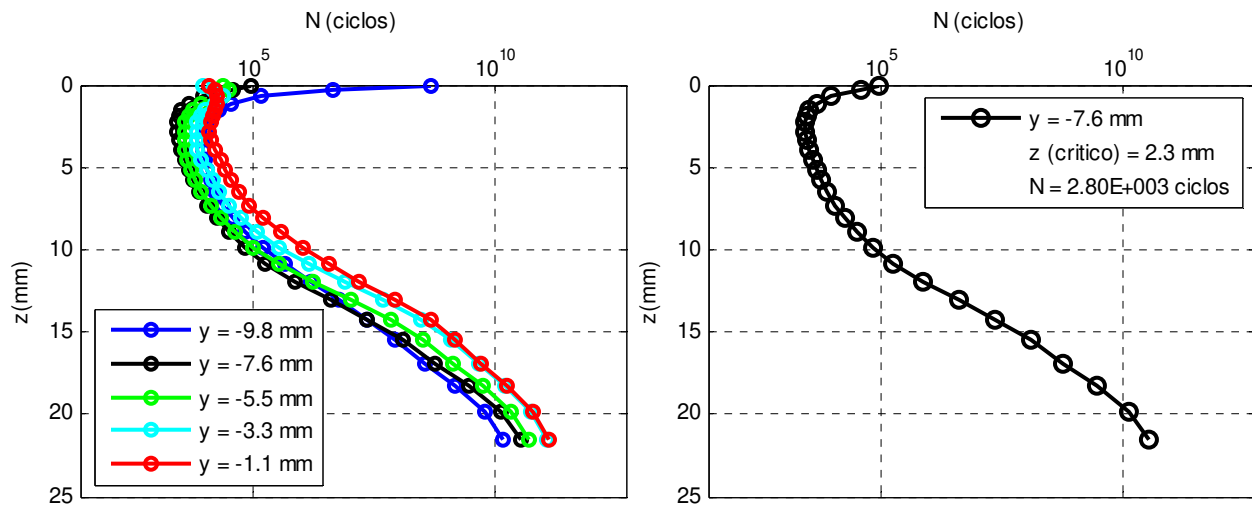


Figura 6.94: Variação do número de ciclos até o surgimento da trinca em função da profundidade, para vários instantes do ciclo.

Na Figura 6.95 e a Figura 6.96, observa-se a assimetria da distribuição do dano e do cisalhamento em relação ao centro do contato. Isso se deve exclusivamente a presença das tensões de fabricação.

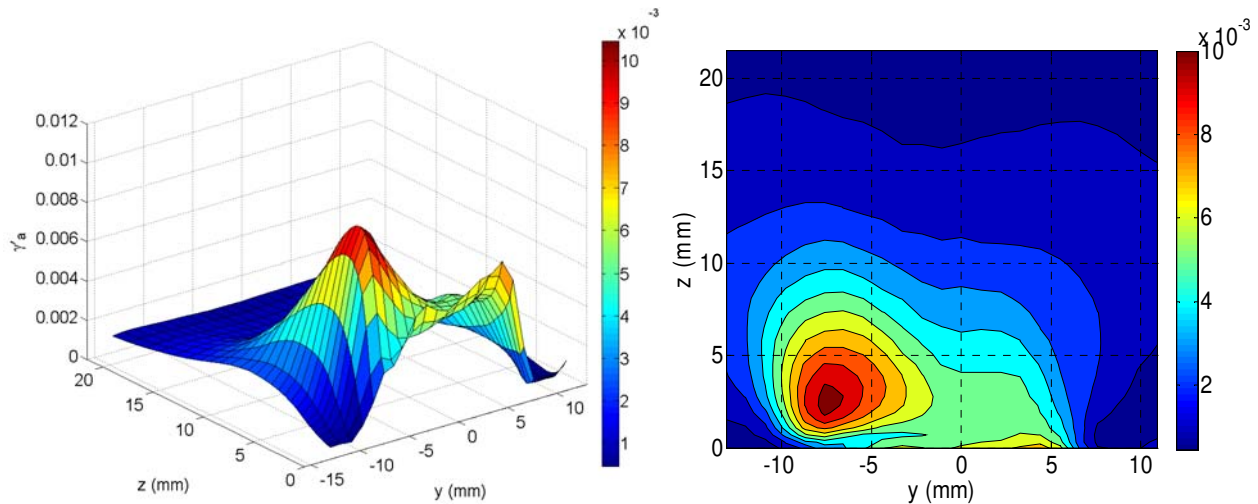


Figura 6.95: Amplitude de tensão cisalhante máxima calculada cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

A variação da amplitude da deformação cisalhante modificada é bem diferente dos modelos analíticos, conforme Figura 6.97. O instante do ciclo de carregamento em que a falha irá ocorrer será aproximadamente em $x = 2,5$ mm. O número de ciclos para o início da trinca é de 64700 ciclos, como já dito.

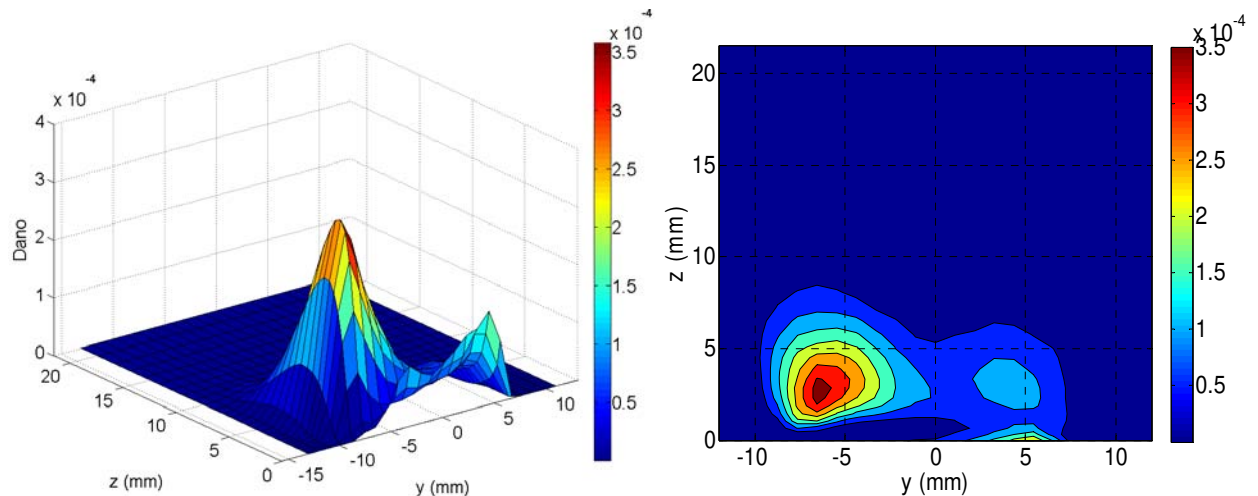


Figura 6.96: Dano máximo cada ponto e plano analisado, em função de z e y . Vista isométrica e de topo.

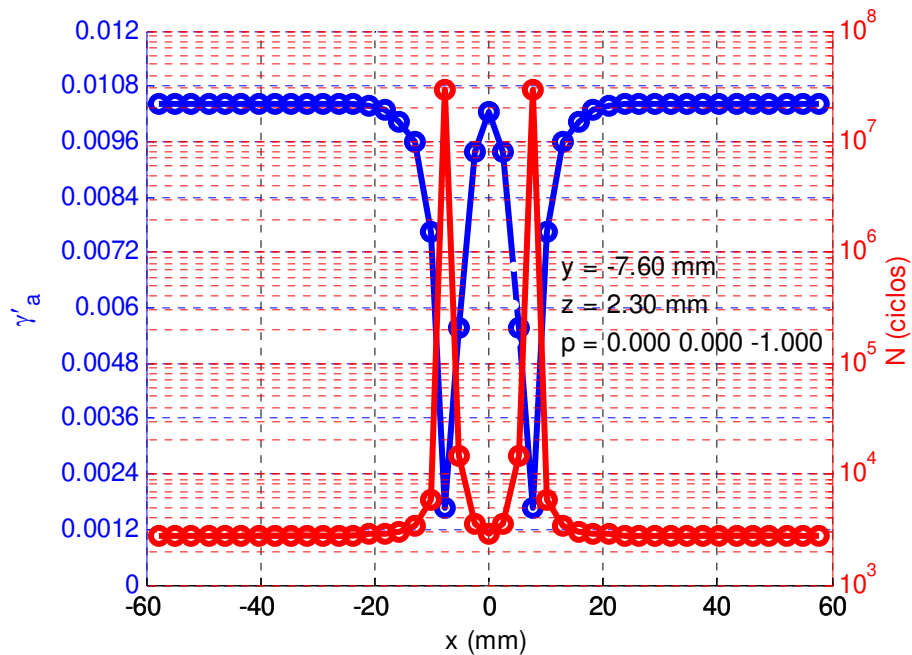


Figura 6.97: Variação da amplitude de tensão cisalhante máxima e da vida em função dos instantes do ciclo.

6.4 Comparação entre os modelos e os critérios utilizados

Neste tópico é feita a comparação entre os modelos e critérios estudados neste trabalho. Inicialmente comparou-se as componentes do tensor de tensões para o ponto mais crítico do modelo proposto (MEF + Fab) e em seguida os critérios adotados. Também foi realizado um tratamento estatístico do dano calculado em cada modelo e critério, com relação à distribuição do passeio lateral da roda. Isso permite estimar a vida até a retirada da roda para reperfilamento.

6.4.1 Comparação entre as componentes de tensão dos modelos estudados

Na Figura 6.98 e Figura 6.99 tem-se a variação das tensões normais para o ponto mais crítico dado pelo modelo proposto (MEF + Fab). As maiores tensões normais, como era de se esperar, foram às calculadas com o modelo numérico com tensões residuais de fabricação, seguido do modelo semi-analítico também com tensões de fabricação. É visível o aumento dessas tensões, fruto das tensões compressivas induzidas pelo processo de fabricação da roda. A tentativa de uma soma direta entre as tensões originadas pelo contato semi-analítico e as tensões

do processo de fabricação (modelo Semi-analítico + Fab), como uma alternativa ao modelo MEF + Fab, não se mostrou válida. Apesar de estes dois modelos (Semi-analítico + Fab e MEF + Fab), terem valores de tensão residual próximos, o pico de tensão na região de contato apresentou diferença significativa. Na Figura 6.99, a componente σ_z apresenta uma diferença pequena entre os modelos, para este ponto, apenas se destacando o modelo MEF + Fab com a maior tensão. Como não há tensões residuais devido ao rolamento e ao processo de fabricação na direção vertical (z), todos os modelos apresentam tensão nula fora da região de contato e não existe nenhuma diferença entre os modelos semi-analíticos.

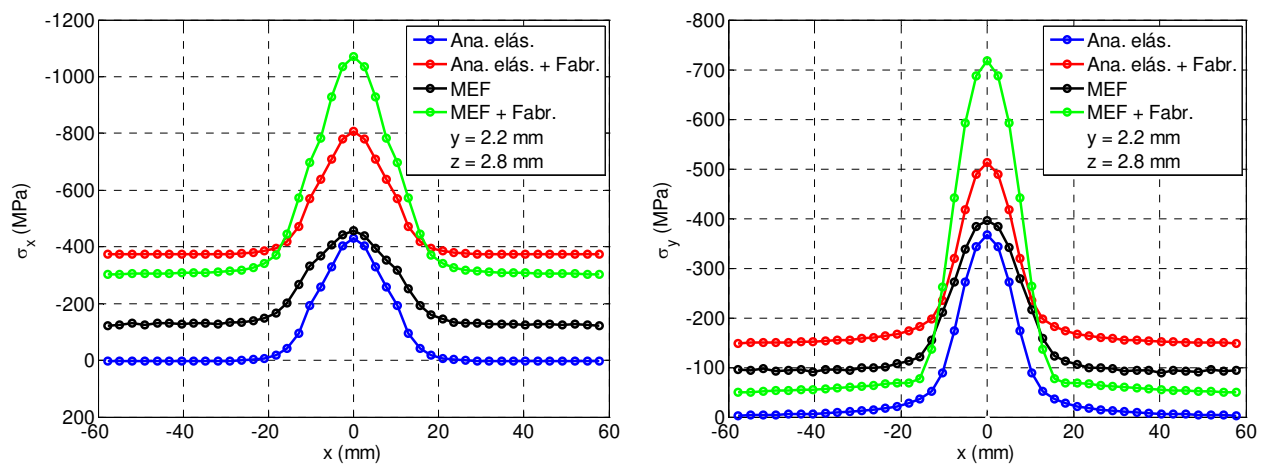


Figura 6.98: Comparação das componentes do tensor σ_x e σ_y , em função da direção x e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab..

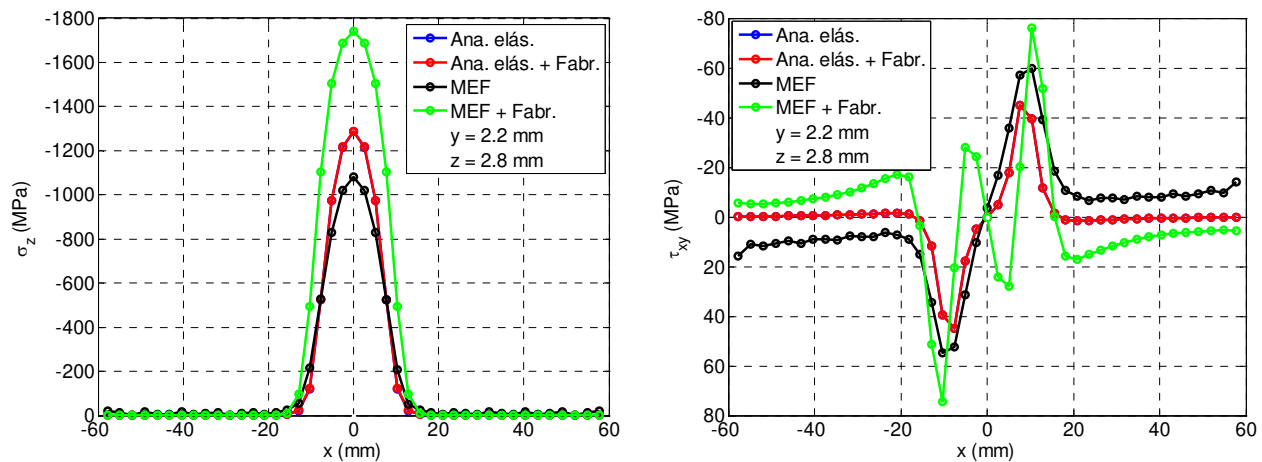


Figura 6.99: Comparação das componentes do tensor σ_z e τ_{xy} , em função da direção x e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab..

As tensões cisalhantes, na Figura 6.99 e Figura 6.100, apresentam um comportamento similar entre os modelos, exceção feita no modelo MEF + Fab que apresenta um padrão distinto dos demais. Observa-se que não existe praticamente nenhuma tensão residual cisalhante em nenhum dos modelos para este ponto. A tensão τ_{xz} , apresenta o maior valor entre as tensões cisalhantes, pois esta componente atua no plano perpendicular e longitudinalmente à superfície de contato, que está sujeita aos esforços provenientes do rolamento.

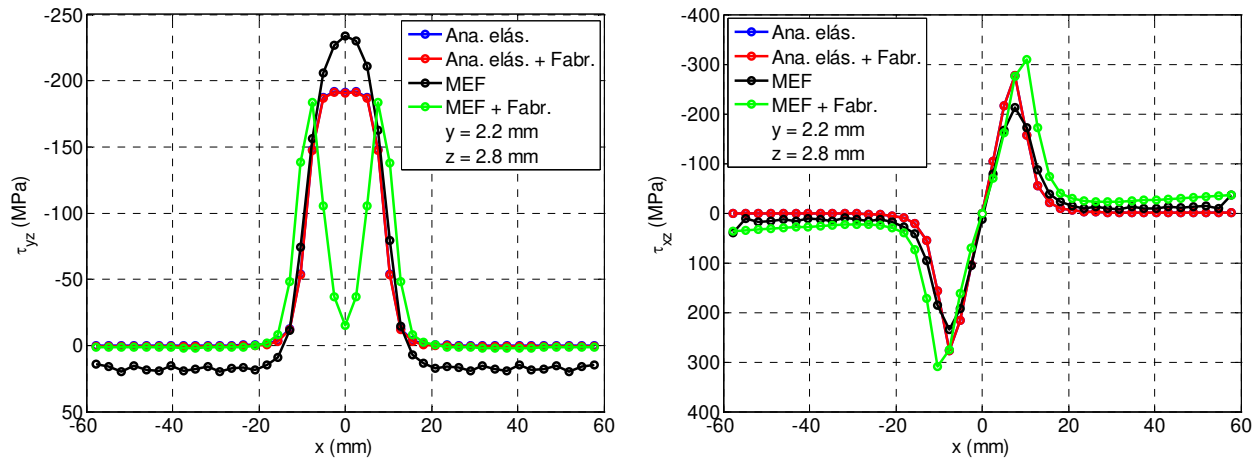


Figura 6.100: Comparação das componentes do tensor τ_{yz} e τ_{xz} , em função da direção x e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fab..

Nas figuras a seguir, o comportamento das componentes do tensor, em função da profundidade, tem uma diferença maior entre os modelos. Na Figura 6.101 as tensões normal σ_x tem o seu valor máximo abaixo da superfície, para o ponto em questão, que está em uma posição $x = 16$ mm. As tensões provenientes dos modelos com tensão residual de fabricação apresentam valores maiores e têm um comportamento semelhante. A componente σ_y do modelo semi-analítico com tensões de fabricação tem um valor maior que as demais para pontos próximos a superfície de contato.

Na Figura 6.102 componente σ_z dos três modelos tem um comportamento bastante semelhante entre eles, apesar de magnitudes um pouco diferentes para pontos mais abaixo da superfície.

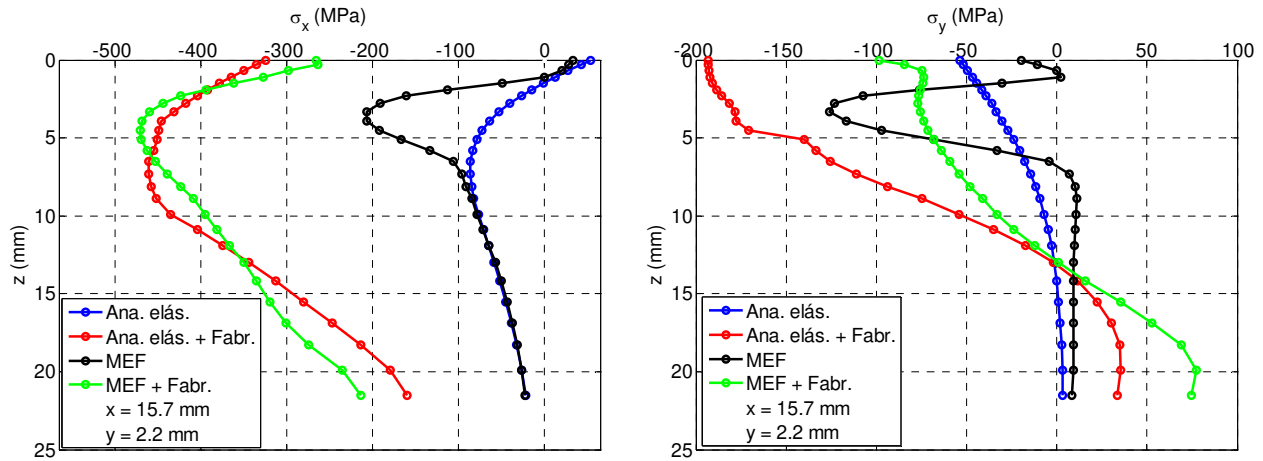


Figura 6.101: Comparação das componentes do tensor σ_x e σ_y , em função da direção z e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fabr..

As tensões de cisalhamento, mostradas na Figura 6.102 e Figura 6.103, tem o seu valor máximo abaixo da superfície. Os valores máximos entre os modelos são muito próximos, com uma magnitude maior encontrada para o modelo MEF + Fab. As componentes τ_{xy} e τ_{xz} dos modelos semi-analíticos tem valores iguais, pois não existem essas componentes nas tensões de fabricação somadas ao modelo.

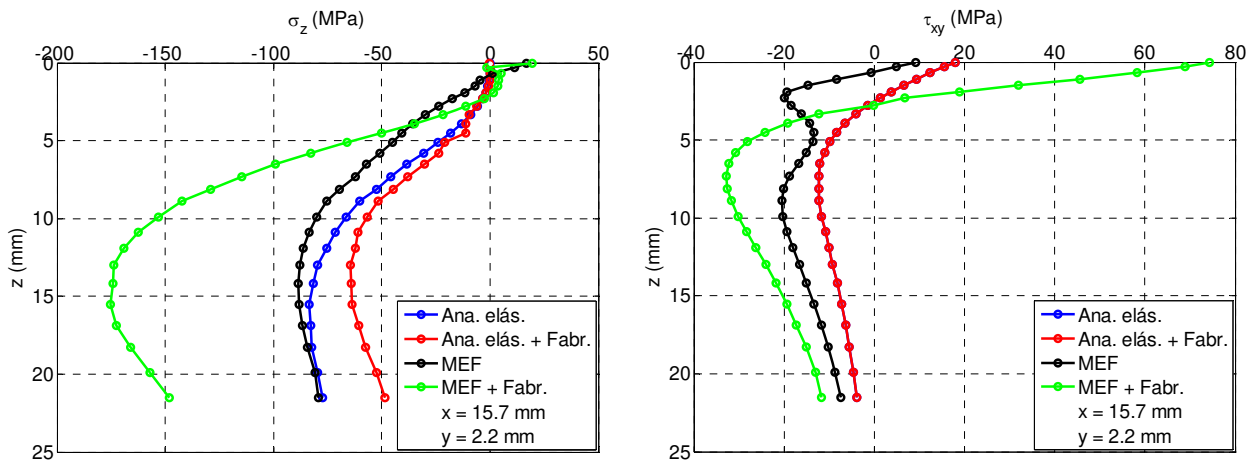


Figura 6.102: Comparação das componentes do tensor σ_z e τ_{xy} , em função da direção z e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fabr..

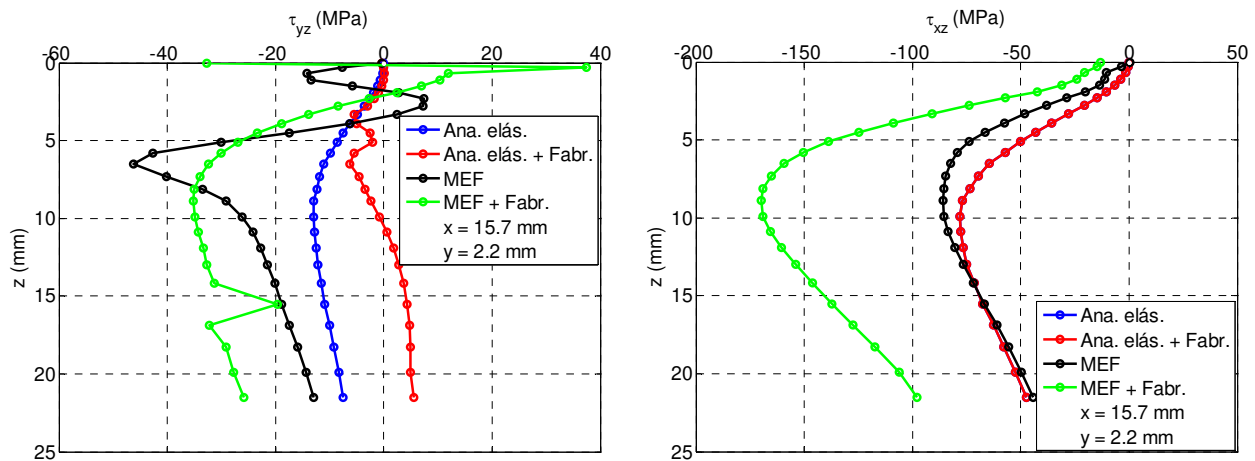


Figura 6.103: Comparação das componentes do tensor τ_{yz} e τ_{xz} , em função da direção z e entre os quatro modelos estudados, para o ponto mais crítico do modelo MEF+Fabr..

6.4.2 Passeio lateral da roda

Antes da comparação entre os critérios de fadiga adotados, foi feito um tratamento estatístico dos danos calculados para cada modelo, considerando-se o passeio lateral da roda, a fim de determinar a distância percorrida pela roda até a sua retirada de serviço para reperfilamento. É sabido que durante a sua vida, a roda não permanece centrada apenas em um ponto de contato com o trilho. Devido à dinâmica do vagão, o rodeiro, e conseqüentemente a roda, apresentam um movimento de passeio lateral (“*hunting*”) que desloca o ponto de contato de sua posição central. Logo, um determinado ponto na região de contato da roda não estará, durante toda sua vida em serviço, sujeito ao mesmo nível de carga. Vale ressaltar que este trabalho limitou-se a trabalhar com modelos de contato apenas em tangente (em linha reta), ou seja, com deslocamento lateral nulo. Com isso, todo dano, e conseqüentemente, todo ciclo calculado supõem que o ponto mais crítico da roda estará sujeito, durante toda sua vida, àquela magnitude de dano. Então, torna-se necessário determinar a probabilidade desse ponto estar no centro do contato durante a permanência em serviço da roda.

Através de dados medidos pelo IPT e fornecidos pelo prof. Roberto Spinola Barbosa (Barbosa, 2007), pode-se traçar um gráfico da variação da posição lateral da roda em função do tempo de percurso. Essa variação é composta tanto de trechos em tangente, como de curvas.

Como apenas o trecho em tangente interessa, isolou-se o trecho em linha reta do gráfico para posterior análise estatística. Isso é ilustrado na Figura 6.104.

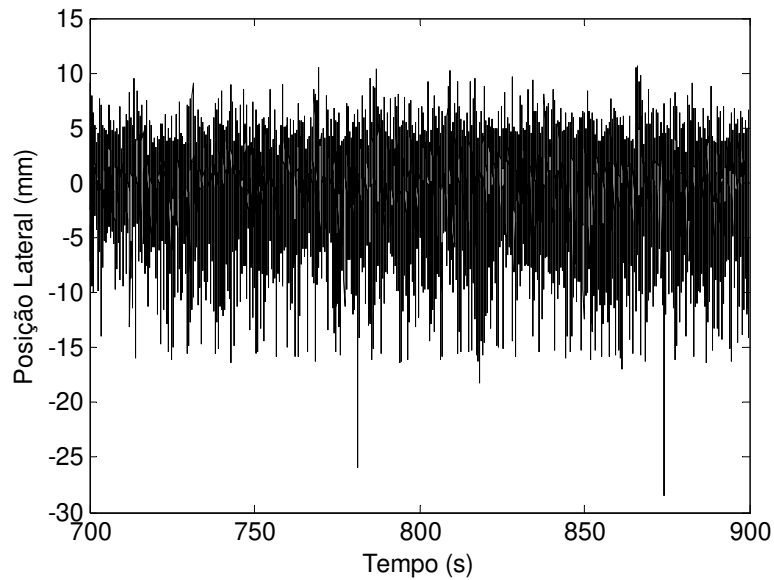


Figura 6.104: Variação da posição lateral em função do tempo de percurso (BARBOSA, 2007).

Na Figura 6.105 é apresentado o histograma com o número de incidências da posição lateral para o trecho selecionado. Foi calculado também a média e o desvio padrão para esse trecho. Com esses dados, pode-se traçar a curva de distribuição normal para o trecho.

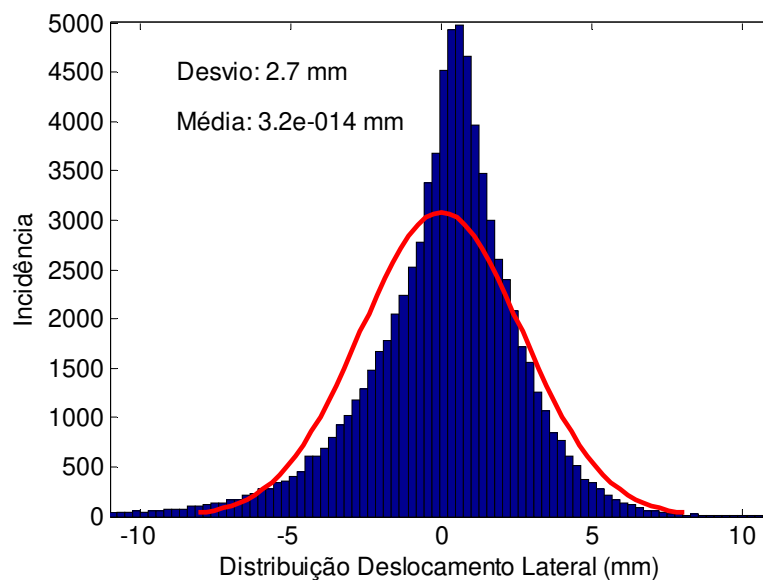


Figura 6.105: Histograma e distribuição normal do passeio.

Como os modelos adotados calculam as tensões e os danos considerando que o ponto mais crítico sempre está sob o mesmo carregamento (deslocamento lateral nulo), buscou-se qual a probabilidade do ponto de contato estar em uma pequena faixa no centro (deslocamento nulo). Para tanto, dividiu-se a faixa de passeio lateral da roda, conforme Figura 6.104, em 23 pontos, que é o número de nós nessa direção nos modelos estudados. A probabilidade é de aproximadamente 12,9%, conforme Figura 6.106.

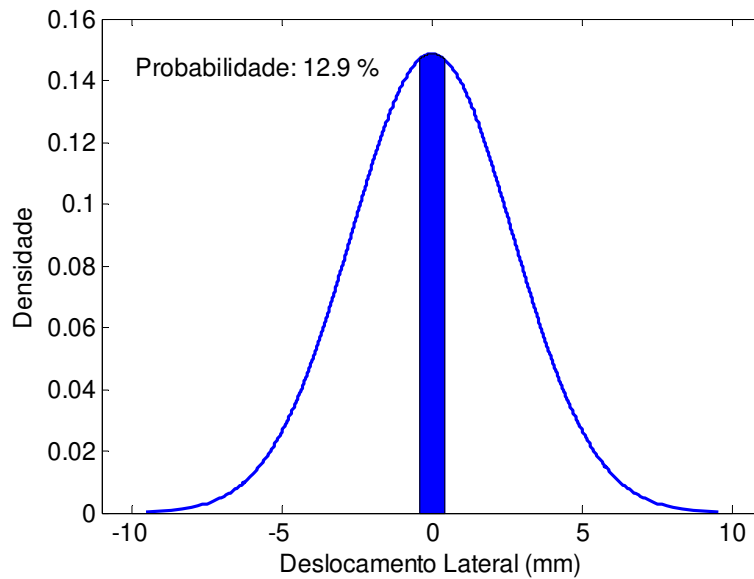


Figura 6.106: Probabilidade de o deslocamento lateral ser nulo.

Com esse dado, calculou-se a distância, em quilômetros, percorrida pela roda, para uma situação em tangente até a sua retirada de serviço. Para isso usou-se a seguinte expressão:

$$d = \frac{2\pi R_r}{sD}, \quad \text{eq. 6.4}$$

onde d é a distância percorrida; R_r o raio da roda; D o dano máximo calculado e s a probabilidade do ponto estar na faixa central do contato. Como o diâmetro da roda adotada é 38" (965 mm), tem-se um perímetro de aproximadamente 3 metros. Com esses dados, chega-se aos valores apresentados na Tabela 6.10.

6.4.3 Comparação entre os critérios de fadiga

. Na Tabela 6.10 tem-se um resumo dos três critérios adotados em cada um dos modelos de contato estudados. As coordenadas dos pontos onde a falha ocorre primeiro foram praticamente iguais nos modelos semi-analíticos e o numérico sem tensão de fabricação (MEF). O mesmo acontece para o plano encontrado. A única exceção é o modelo MEF + Fab, que apresentou um ponto ligeiramente diferente, o mesmo ocorrendo para o plano crítico. Isso pode ser justificado, pelo fato deste modelo sofrer novo escoamento plástico, fenômeno observado apenas nele, após o contato da roda com o trilho. Isso faz com que surja uma nova distribuição de tensões e deformações, diferente do observado nos modelos sem presença de tensões residuais de fabricação.

Tabela 6.10: Comparação entre os modelos e critérios utilizados. DVM: Critério de Dang Van Modificado; F-S: Critério de Fatemi & Socie.

	x (mm)	y (mm)	z (mm)	plano	Dano	N (ciclos)	d (10 ³ km)
Ana Elás (DVM)	18,0	0,0	3,3	0,000 0,707 -0,707	7,14E-6	1,4x10 ⁵	3,2
Ana Elás + Fab. (DVM)	18,0	0,0	3,3	0,000 0,707 -0,707	1,61E-6	6,2x10 ⁵	14,5
MEF (DVM)	18,0	0,0	3,9	0,000 0,707 -0,707	1,75E-6	5,7x10 ⁵	13,3
MEF + Fab. (DVM)	15,6	-3,3	2,8	0,683 -0,183 0,707	8,33E-6	1,2x10 ⁵	2,8
Ana Elás (F-S)	8,0	0,0	3,3	1,000 0,000 0,000	1,04E-5	9,6x10 ⁴	2,2
Ana Elás + Fab. (F-S)	6,7	0,0	3,3	0,000 0,000 -1,000	1,05E-5	9,6x10 ⁴	2,2
MEF (F-S)	6,7	0,0	3,3	0,000 0,000 -1,000	1,55E-5	6,5x10 ⁴	1,5
MEF + Fab. (F-S)	2,5	-7,6	2,3	0,000 0,000 -1,000	3,73E-4	2,8 x10 ³	0,6

A vida em fadiga até o surgimento da trinca, calculada utilizando o critério de Dang Van Modificado apresentou grande diferença entre os quatro modelos estudados. Para o modelo semi-analítico foi encontrada uma vida de aproximadamente 3200 km, contra de 14500 km do modelo Ana Elás + Fab. Este modelo é caracterizado por ser uma soma direta entre as tensões

provenientes do contato e as tensões residuais de fabricação. Portanto, a princípio, pode-se concluir que a presença de tensões normais de compressão contribuiu para o aumento da vida no modelo semi-analítico com tensões de fabricação. No entanto, conforme já dito, esse modelo não é adequado, pois ocorrerá escoamento plástico após o contato da roda e o trilho, na presença de tensões residuais. Por este fato, uma superposição (soma) não é válida.

O modelo MEF atingiu uma vida de 13300 km e o modelo MEF + Fab 2800 km. Neste caso, o modelo com tensões de fabricação apresentou uma vida menor. Como foi mencionado, o processo de fabricação induz tensões circunferenciais de compressão com objetivo de impedir, e até fechar, trincas que eventualmente surjam e se propaguem na direção radial da roda. Este trabalho estuda o problema de escamação superficial (“shelling”), onde as tensões de fabricação não têm nenhuma ação benéfica direta.

No modelo MEF, a maior tensão normal é a vertical, perpendicular à região de contato. As outras componentes normais apresentam magnitude elevada, porém menor que a vertical. O modelo MEF + Fab apresentou um aumento significativo na tensão normal na direção longitudinal (σ_x), devido à presença de tensões residuais de fabricação compressivas. A diferença das tensões entre os dois modelos pode ser vista na Tabela 6.11. Apesar de duas componentes manterem uma diferença aproximadamente constante, o valor da componente longitudinal (σ_x) apresentou um aumento significativo (94%).

Tabela 6.11: Diferença entre as tensões normais dos pontos críticos dos modelos MEF e MEF + Fab.

	x (mm)	y (mm)	z (mm)	σ_x	σ_y	σ_z
MEF (DVM)	18,0	0,0	3,9	-212 MPa	-124 MPa	-8 MPa
MEF + Fab. (DVM)	15,6	-2,2	2,8	-410 MPa	-70 MPa	-5 MPa
Diferença				94 %	-44 %	-38 %

Considerando, que a tensão de cisalhamento máxima é dada pela diferença entre as tensões principais, e estas são diretamente proporcionais as tensões normais, ocorrerá um aumento

natural da tensão de cisalhamento no modelo MEF + Fab. Com isso a amplitude da tensão de cisalhamento projetada em um plano aumentará e, conseqüentemente, a tensão equivalente de Dang Van. A vida em fadiga, por sua vez, tenderá a diminuir.

A vida em fadiga até o surgimento da trinca, para o critério de Fatemi & Socie apresentou valores muito próximos entre os modelos, conforme se pode observar na Tabela 6.10. A exceção feita ao modelo de MEF + Fab. Esses valores, entretanto, foram bem menores que os calculados pelo critério de Dang Van Modificado. Isso pode ser justificado pelo fato deste critério ser baseado no tensor de deformações e na deformação cisalhante resultante no plano crítico, o que torna a vida calculada influenciada por estas deformações. Além disso, ele teve como base o critério de Coffin–Manson (BANNANTINE, et al., 1990), que utiliza deformações normais elásticas e plásticas no cálculo do número de ciclos. Este tipo de critério é frequentemente classificado como de baixo ciclo, ou seja, é empregado para componentes que apresentam vida menor que 10^3 ciclos. Como já é sabido, o tipo de roda estudado e nas condições de carregamento adotadas tem uma vida, até a retirada de serviço para reperfilamento, muito superior à encontrada com esse critério. De qualquer forma, o que está sendo estudado é o surgimento da trinca e não a falha da roda.

Na Figura 6.107 e Figura 6.108 tem-se a comparação entre os quatro modelos, em relação à variação da tensão equivalente de Dang Van e do número de ciclos em função da distância de rolamento. Para tanto, usou-se o ponto e o plano crítico de cada um dos modelos analisados (Tabela 6.10).

Os números de ciclos encontrados com o critério de Dang Van, neste trabalho, estão próximos aos de outros autores, levando-se em consideração o tipo de modelo e critério adotado por cada um. Moyer e Stone, (1991) calcularam uma vida de $1,29 \times 10^4$ ciclos ou 34 quilômetros usando um modelo de contato elástico para cilindros em uma roda de 33". J.W Ringsberg, et al. (2000), calcularam, utilizando diversos critérios, uma vida média de $3,49 \times 10^4$ ciclos para um trilho ferroviário. Ekberg (2000), utilizando um modelo elástico analítico achou uma vida de $7,69 \times 10^5$ ciclos (2126 km) para uma roda de 35".

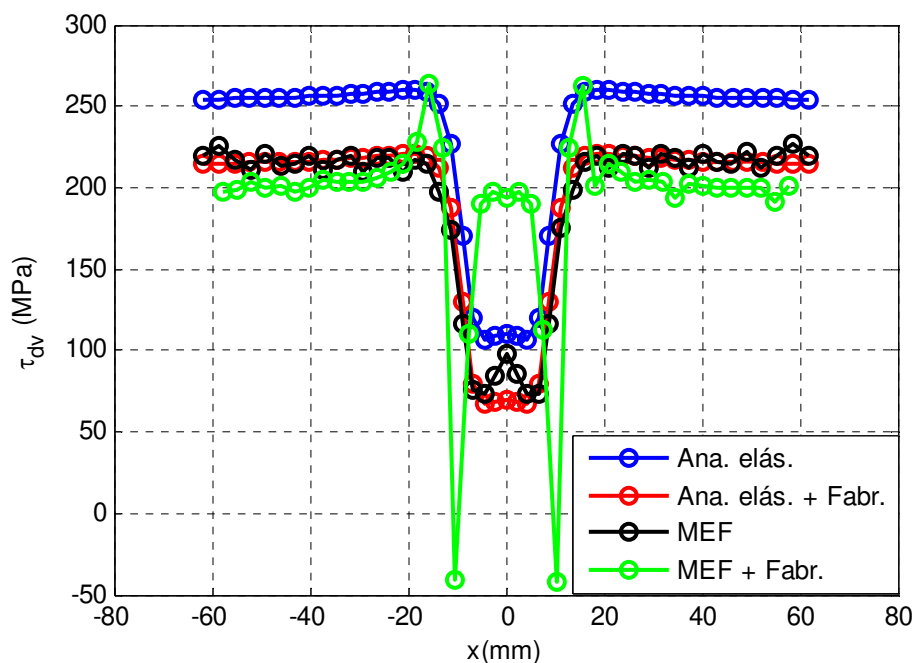


Figura 6.107: Variação de τ_{dv} em função da distância de rolamento para o ponto crítico de cada um dos quatro modelos analisados.

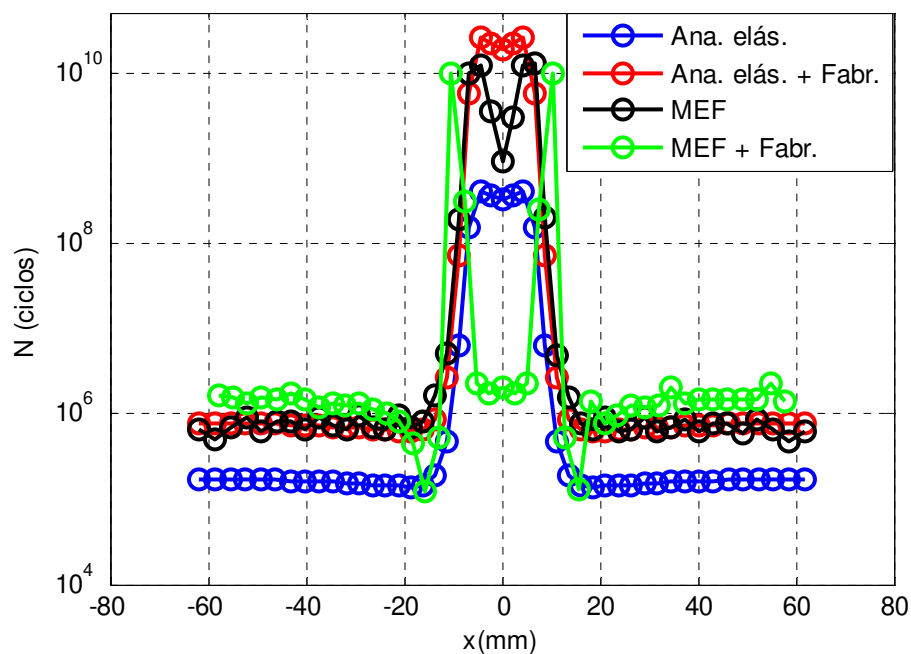


Figura 6.108: Variação do número de ciclos em função da distância de rolamento para o ponto crítico de cada um dos quatro modelos analisados.

Capítulo 7

Conclusão e Sugestões

Através desse trabalho foi possível propor um modelo de contato roda – trilho, em regime elastoplástico, para o cálculo da vida em fadiga até o surgimento da trinca de uma roda ferroviária, que incorporasse as tensões residuais originadas do processo de fabricação. Com este modelo, pôde-se conhecer e estudar a influência destas tensões residuais no contato roda - trilho e na vida da roda até o surgimento da trinca. Também foi proposta uma pequena modificação em um dos critérios de fadiga, com objetivo de adaptá-lo aos problemas de contato com rolamento. Conforme visto, o objetivo inicial proposto foi plenamente atingido.

Foram utilizados quatro modelos de contato e dois critérios de fadiga. Os dois modelos semi-analíticos têm com base na Teoria de Hertz, sendo que em um deles foi feita uma soma direta das tensões de fabricação calculadas numericamente. Os outros dois modelos são numéricos em regime elastoplástico e baseados no método dos elementos finitos. Em um deles apenas o contato com rolamento foi considerado. No modelo proposto, as tensões de fabricação foram incorporadas. Nesses modelos, foram utilizadas técnicas de submodelagem e o auxílio do modelo plano axissimétrico (simulação do processo de fabricação) para determinação do campo de tensões.

Um dos critérios de fadiga utilizado é o critério de Dang Van, aplicado ao estado multiaxial de tensões, baseado em planos críticos e que incorpora a influência das tensões hidrostáticas durante o ciclo de carga. Este critério foi modificado com o propósito de adaptar-se ao problema de contato com rolamento e incorporar o cálculo da vida em fadiga. O segundo critério, de

Fatemi & Socie, baseia-se em deformações cisalhantes, também em planos críticos e tem origem no critério de Coffin–Manson. Ele considera a influência das tensões normais nos planos estudados e é utilizado em regime de baixo ciclo.

O modelo de contato proposto possibilitou a inclusão das tensões residuais de fabricação apenas na região da roda em que o contato e o rolamento seriam simulados. Neste caso, as técnicas de submodelagem foram bastante úteis na redução do número de elementos presentes no modelo. Além disso, pode-se utilizar resultados do modelo axissimétrico, que é empregado quando se deseja calcular apenas as tensões de fabricação na roda, sem posterior contato com o trilho.

Foram encontradas diferenças na magnitude das tensões calculadas, em especial entre os modelos analíticos e os numéricos, quanto à variação abaixo da pista de rolamento. Isso mostra a influência das tensões residuais de fabricação e das originadas da plasticidade do material.

Como foi discutido, o aumento da tensão normal em uma direção acarretou um aumento significativo da amplitude da tensão de cisalhamento no plano crítico, segundo o modelo proposto. Com isso, a vida em fadiga até o surgimento da trinca do modelo MEF + Fab foi menor que a do modelo MEF (sem tensões residuais de fabricação). Isso indica que o processo de tratamento térmico, neste modelo numérico, que é altamente desejável para conter a propagação de trincas, é prejudicial quando se analisa o seu surgimento.

O número de ciclos encontrado até o surgimento da trinca com o critério de Fatemi & Socie apresentou valor baixo, o que era esperado devido a tratar-se de um critério de baixo ciclo.

Alguns tópicos que não foram considerados ao longo deste trabalho permitem a definição de um conjunto de sugestões para pesquisas futuras, complementares ao estudo aqui apresentado. Dentre as sugestões, temos:

- ✓ Validação do modelo proposto através de experimentos que meçam as tensões residuais de fabricação e as tensões devido ao contato. A medição de tensões

residuais é extremamente difícil, porém técnicas de ultra-som têm sido empregadas com sucesso (MINICUCCI, 2003). Essas mesmas técnicas podem ser usadas para medir tensões no contato, ou até mesmo em regiões próximas (PAU, AYMERICH & GINESU, 2000; PAU, 2005);

- ✓ Ensaios para determinação das propriedades mecânicas em temperaturas elevadas. Isso permitiria ter um conhecimento melhor do comportamento das tensões e deformações em temperaturas acima da ambiente, o que aumentaria a exatidão do cálculo das tensões de fabricação;
- ✓ Inclusão dos efeitos da frenagem no modelo numérico e, conseqüentemente, na vida em serviço. A frenagem pode ocasionar mudança no padrão de tensões residuais, podendo até inverter seu sentido, o que poderia levar a uma diminuição na vida da roda;
- ✓ Simulação do contato roda-trilho com o vagão inscrito em curva. Nessa posição, mais difícil de ser simulada analiticamente (Teoria de Hertz), tem-se o conhecido contato duplo, onde além do contato da pista de rolamento da roda com o trilho, ocorrerá também o contato do friso (flange) da roda com a lateral do boleto do trilho. Esta situação pode gerar tensões altas no friso da roda, que podem influenciar também a vida em fadiga;
- ✓ Inclusão dos esforços tangenciais, conseqüência do comportamento dinâmico do vagão. Esses esforços podem ocasionar a mudança da localização do ponto crítico na análise de fadiga e conseqüentemente da vida da roda;
- ✓ Aplicação dos diversos níveis de carga vertical ao longo da vida da roda. Apesar já ter sido considerado, neste trabalho, $\pm 30\%$ do valor médio do carregamento vertical, este foi aplicado de forma constante durante toda análise. É sabido que, devido ao estado da via, a roda não permanece sob ação de apenas uma magnitude de carga vertical. Além disso, níveis de carga diferentes acarretam o surgimento de

campos de tensões distintos, o que certamente terá uma influência direta na vida em serviço da roda;

- ✓ Buscar uma redução do tempo total de processamento do modelo proposto seja pela diminuição do submodelo ou pela redução do número de passos de carga na análise. A gravação das tensões e deformações oriundas do processo de fabricação, calculadas pelo modelo para futuro uso na fase de contato e rolamento, poderia reduzir muito a análise do modelo com tensões residuais, uma vez que as tensões de fabricação já estariam calculadas, e bastaria apenas sua aplicação como tensão inicial no modelo.

Capítulo 8

Referências Bibliográficas

A.A.R. Procedure for the analytic evaluation of locomotive and freight car wheel designs. **Manual of standards and recommended practices**, New York, S-660-83, p. G-31-G35, 1984

AHMADI, N. et al. The interior stress field caused by tangential loading of a rectangular patch on an elastic half space. **Journal of Tribology**, New York, v. 109, n. 4, p. 627-629, Oct. 1987.

ANSYS, Inc. **User guide for revision 10.0**. Ansys, Inc. Houston, 2006.

AYMERICH, F.; PAU, M. Assessment of nominal contact area parameters by means of ultrasonic waves. **Journal of Tribology**, New York, v. 126, n. 4, p. 639-645, Oct. 2004.

BANNANTINE, J. A.; COMER, J. J.; HANDROCK, J. L. **Fundamentals of Metal Fatigue Analysis**, 1st ed. New Jersey: Prentice Hall, 1990. 273p.

BARBOSA, R.S. **Aplicação de sistemas multicorpos na dinâmica de veículos guiados**. 1999. 273p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

BARBOSA, R.S. Medição do passeio lateral da roda com rodeiro instrumentado. **Comunicação privada**, São Paulo, 2007.

- BERNASCONI, A. Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of the second invariant of the stress deviator in fatigue criteria applications. **International Journal of Fatigue**, London, v. 24, n. 6, p. 649-657, Jun. 2002.
- BERNASCONI, A. et al. An integrated approach to rolling contact sub-surface fatigue assessment of railway wheels. **Wear**, Amsterdam, v. 258, n. 1, p. 973-980, 2005.
- BHARGAVA, V.; HAHN, G. T.; RUBIN, C. A. An elastic – plastic finite element model of rolling contact: Part I – Analysis of single contacts. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 52, n. 1, p. 67-74, Mar. 1985.
- BHARGAVA, V.; HAHN, G. T.; RUBIN, C. A. An elastic – plastic finite element model of rolling contact: Part II – Analysis of repeated contacts. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 52, n. 1, p. 75-82, Mar. 1985.
- BHARGAVA, V.; RUBIN, C. A.; HAHN, G. T. The effects of indent residual stresses on mixed mode cyclic crack growth driving forces for bearing inner rings. **Journal of Tribology**, New York, v. 109, n. 4, p. 634-639, Oct. 1987.
- BHARGAVA, V.; HAHN, G. T.; RUBIN, C. A. Analysis of rolling contact with kinematic hardening for a rail steel properties. **Wear**, Amsterdam, v. 122, n. 3, p. 267-283, Mar. 1988.
- BLARASIN, A. et al. An approach for fatigue analysis of railway wheels. In: INTERNATIONAL WHEELSET CONGRESS, I3, 2001, Rome. **Proceedings...** Rome: Lucchini, 2001.
- BOWER, A. F.; JOHNSON, K. L. The influence of strain hardening on cumulative plastic deformation in rolling and sliding line contact. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Oxford v. 37, n. 4. p. 471-493, 1989.

BOWER, A. F.; JOHNSON, K. L. Shakedown, residual stress and plastic flow in repeated wheel - rail contact. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON RAIL QUALITY AND MAINTENANCE FOR MODERN RAILWAY OPERATION, 1, 1992, Delft. **Rail Quality and Maintenance for Modern Railway Operation**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. p. 239-249.

BROWN, M. W.; MILLER, K. J. A theory for fatigue failure under multiaxial stress – strain conditions. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers**, London, v. 187, p. 65-73, 1973.

CARTER, F. W. On the action of a locomotive driving wheel. **Proceeding of the Royal Society of London**, London, v. 112, p. 151-157, Aug. 1926.

COOK, R. D. **Finite Element modeling for stress analysis**. 1st ed. New York: John Wiley & Sons, 1995. 459p.

DANG VAN, K. et al. Criterion for high cycle fatigue failure under multiaxial loading. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BIAXIAL / MULTIAXIAL FATIGUE, 2nd, 1985, Sheffield. **Biaxial and Multiaxial Fatigue**. Cambridge: EGF Publication, 1989. v. 3. p. 459-478.

DANG VAN, K.; GRIVEAU, B.; MESSAGE, O. On a new multiaxial fatigue limit criterion: Theory and application. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BIAXIAL / MULTIAXIAL FATIGUE, 2nd, 1985, Sheffield. **Biaxial and Multiaxial Fatigue**. Cambridge: EGF Publication, 1989. v. 3. p. 479-496.

DANG VAN, K.; MAITOURNAM, M. H. Steady – state flow in classical elastoplasticity: applications to repeated rolling and sliding contact. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Oxford v. 41, n. 11. p. 1691-1710, Nov. 1993.

- DANG VAN, K.; MAITOURNAM, M. H.; PRASIL, B. Elastoplastic analysis of repeated moving contact application to railways damage phenomena. **Wear**, Amsterdam, v. 196, p. 77-81, Aug. 1996.
- DANG VAN, K.; MAITOURNAM, M. H. Rolling contact in railways: modeling, simulation and damage prediction. **Wear**, Amsterdam, v. 253, n. 1-2, p. 219-227, Jul. 2002.
- DANG VAN, K.; MAITOURNAM, M. H. On some recent trends in modeling of contact fatigue and wear in rails. **Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.**, London, v. 26, n. 10, p. 939-948, Oct. 2003.
- DERESIEWICK, H. A note on second – order Hertz contact. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 28, n. 1, p. 141-142, Mar. 1961.
- DESIMONE, H.; BERNASCONI, A.; BERETTA, S. On the application of Dag Van to rolling contact fatigue. **Wear**, Amsterdam, v. 260, p. 567-572, 2006.
- DIETER, G. E. **Mechanical Metallurgy**. SI Metric Edition. London: McGraw-Hill, 1988, 751p.
- DONZELLA, G. et al. The effect of block braking on the residual stress state of a solid railway wheel. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 212, n. 2, p. 145-158, Aug. 1998.
- DYSON, A. Approximate calculations of hertzian compressive stresses and contact dimensions. **Journal of Mechanical Engineering Sciences**, London, v. 7, n. 2, p. 224-227, 1965.
- DYSON, A.; EVANS, P. H.; SNIDLE, R. W. A simple, accurate method for calculation of stresses and deformation in elliptical Hertzian contacts. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part C**, London, v. 206, n. 3, p. 139-141, 1992.

- EASON, G. The stresses produced in a semi – infinite solid by a moving surface force. **International Journal of Engineering Science**. London, v. 2, p. 581-609, 1965.
- EKBERG, A.; BJARNEHED, H.; LUNDÉN, R. A fatigue life model for general rolling contact with application to wheel – rail damage. **Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.**, London, v. 18, n. 10, p. 1189-1199, 1995.
- EKBERG, A. Rolling contact fatigue of railway wheels – computer modeling and in-field data. In: 2nd MINI CON. ON CONTACT MECHANICS AND WEAR OF WHEEL/RAIL SYSTEMS, 2nd, 1996, Budapest. **Proceedings...** Budapest: Technical University of Budapest, 1996. p. 154-163.
- EKBERG, A. Rolling contact fatigue of railway wheels – a parametric study. **Wear**, Amsterdam, v. 211, p. 280-288, Nov. 1997.
- EKBERG, A.; LINDQVIST, R.; OLOFSSON, M. Multiaxial fatigue – A probabilistic analysis of initiation in cases of defined stress cycles. INTERNATIONAL FATIGUE CONGRESS, 7, 1999, Beijing. **Proceedings...** Beijing, 1999.
- EKBERG, A. **Rolling contact fatigue of railway wheels**. 2000. 27p. Thesis (PhD) – Department of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg.
- EKBERG, A.; MARAIS, J. Effects of imperfections on fatigue initiation in railway wheels. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 214, n. 1, p. 45-54, Mar. 2000.
- EKBERG, A.; KABO, E.; ANDERSSON, H. An engineering model for predicting of rolling contact fatigue of railway wheels. **Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.**, London, v. 25, n. 10, p. 899-909, Oct, 2002.

- EKBERG, A.; KABO, E.; ANDERSSON, H. Predicting rolling contact fatigue of railway wheels. INTERNATIONAL WHEELSET CONGRESS, I3, 2001, Rome. **Proceedings...** Rome: Lucchini, 2001.
- ESAULOV, V. P.; SLADKOVSKII, A. V. Stress-Strain of solid railway wheels. **Strength of Materials**, New York, v. 22, p. 1481-1486, Jun. 1991.
- FATEMI, A.; SOCIE, D. F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out – of – phase loading. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, New York, v. 11, n. 3, p. 149-165, Mar. 1988.
- FISCHER–CRIPPS, A. C. **Introduction to contact mechanics**. 1st ed. New York: Springer, 2000. 243p.
- FLAVENOT, J. F.; SKALLI, N. A comparison of multiaxial fatigue criteria incorporating residual stress effects. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON BIAXIAL / MULTIAXIAL FATIGUE, 2nd, 1985, Sheffield. **Biaxial and Multiaxial Fatigue**, London, 1989. p. 437-457.
- FLETCHER, D. I.; BEYNON, J. H. Equilibrium of crack growth and wear rates during unlubricated rolling – sliding contact of pearlitic rail steel. **Proc. of Instn. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 214, n. 2, p. 93-105, Jun. 2000.
- GARG, V. K.; ANAND, S. C.; HODGE JR, P. G. Elastic – plastic analysis of a wheel rolling on a rigid track. **Int. Journal of Solids Structures**, London, v. 10, n. 9, p. 945-956, Sep. 1974.
- GARUD, Y. S. Multiaxial fatigue: a survey of the state of the art. **Journal of Testing and Evaluation**, West Conshohocken, v. 9, n. 3, p. 165-178, May 1981.
- GLADWELL, G. M. L. On some unbounded contact problems in plane elasticity theory. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 43, n. 2, p. 263-267, Jun. 1976.

- GOODMAN, L. E. Contact stress analysis of normally loaded rough spheres. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 29, n. 3, p. 515-522, Sep. 1966.
- GORDON, J.; PERLMAN, A. B. Evaluation of service - induced residual stresses in railroad commuter car wheels. In: ASME IMECE RTD, 1998, Anaheim - CA. **Proceedings...** Anaheim, v. 15, Nov. 1998.
- GORDON, J.; PERLMAN, A. B. Estimation of residual stresses in railroad commuter car wheels following manufacture. **Report No. DOT/FRA/ORD - 03/24**, Springfield, Jun. 2003.
- GORYACHEVA, I. G. **Contact mechanics in tribology**. 1st ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 344p.
- GREENWOOD, J. A. Formulas for moderately elliptical hertzian contacts. **Journal of Tribology**, New York, v. 107, n. 4, p. 501-504, Oct. 1985.
- HAHN, G. T. et al. Analysis of the rolling contact residual stresses and cyclic plastic deformation of SAE 52100 steel ball bearings. **Journal of Tribology**, New York, v. 109, n. 4, p. 618-626, Oct. 1987.
- HAINES, D. J.; OLLERTON, E. Contact stress distribution on elliptical contact surfaces subjected to radial and tangential forces. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers**, London, v. 177, n. 4, p. 45-54, 1963.
- HAMILTON, G. M.; GOODMAN, L. E. The stress field created by a circular sliding contact. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 33, n. 2, p. 371-376, Jun. 1966.
- HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. **MATLAB 6 – Curso Completo**. 1st ed. São Paulo: Prentice Hall, 2003, 676p.

HANSSON, A. H. **Contact mechanics – exploring some limitations of Hertzian theory**. 2001. 27p. Thesis (Msc) – Department of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg.

HANUS, E.; MAITOURNAM, M. H.; DANG VAN, K. Pressure rolling contact: steady state flow analysis and comparison with experimental data. **Int. Journal of Solids Structures**, London, v. 33, n. 25, p. 3739-3753, Oct. 1996.

HARDER, R. F. **Numerical analysis of hertzian and non – hertzian wheel – rail contacts**. 1995. 230 p. Thesis (Ph.D.) – Faculty of the Oregon Graduate Institute of Science & Technology, Oregon Graduate Institute of Science & Technology, Oregon.

HEARLE, A. D.; JOHNSON, K. L. Cumulative plastic flow in rolling and sliding line contact. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 54, n. 1, p. 1-7, Mar. 1987.

HELLIER, A. K.; CORDEROY, D. J. H.; LAKELAND, D. A contact mechanics study of shelling under rolling contact. In: **TRIBOLOGY CONFERENCE**, 1990, Brisbane. **Proceedings ...** Brisbane: The institution of engineers Australia, 1990, p. 64- 69.

HERTZ, H. R. **Miscellaneous Papers**. 8th ed. London: Macmillan & Co, 1896. Cap. 5 – On the contact of two elastic solids, p. 146-162.

HERTZ, H. R. **Miscellaneous Papers**. 8th ed. London: Macmillan & Co, 1896. Cap. 6 – On the contact of rigid elastic solids and on hardness, p. 163-183.

HILLS, D. A.; SACKFIELD, A. Sliding contact between dissimilar elastic cylinders. **Journal of Tribology**, New York, v. 107, n. 4, p. 463-466, Oct. 1985.

HILLS, D. A.; SACKFIELD, A. The stress field induced by normal contact between dissimilar spheres. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 54, n. 1, p. 8-14, March 1987.

HILLS, D. A.; NOWELL, D.; SACKFIELD, A. **Mechanics of Elastic Contact**. 1st ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1993. 496p.

JERGÉUS, J. Martensite formation and residual stresses around railway wheel flats. **Proc. of Instn. of Mechanical Engineers: Part C**, London, v. 212, n. 1, p. 69-79, Feb. 1998.

JIANG, Y.; SEHITOGLU, H. An analytical approach to elastic – plastic stress analysis of rolling contact. **Journal of Tribology**, New York, v. 116, n. 3, p. 577-587, Jul. 1994.

JIANG, Y.; SEHITOGLU, H. Rolling contact stress analysis with the application of a new plasticity model. **Wear**, Amsterdam, v. 191, p. 35-44, Jan. 1996.

JIANG, Y.; SEHITOGLU, H. A model for rolling contact failure. **Wear**, Amsterdam, v. 224, n. 1, p. 38-49, Jan. 1999.

JIANG, Y.; XU, B.; SEHITOGLU, H. Three-dimensional elastic – plastic stress analysis of rolling contact. **Journal of Tribology**, New York, v. 124, n. 4, p. 699-708, Oct. 2002.

JOHNSON, K. L. The effect of a tangential contact force upon the rolling motion of an elastic sphere on a plane. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 25, p. 339-346, Sep. 1958.

JOHNSON, K. L. The influence of elastic deformation upon the motion of a ball rolling between two surfaces. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers**, v. 173, n. 34, p. 795-806, Sep. 1959.

JOHNSON, K. L. Inelastic Contact: Plastic flow and shakedown. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTACT MECHANICS AND WEAR OF WHEEL/RAIL SYSTEMS, 1, 1982, Vancouver. **Proceedings...** Waterloo: University of Waterloo Press, 1983. p. 79-101.

JOHNSON, K. L. One hundred years of Hertz contact. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, v. 196, n. 39, p. 363-378, Sep. 1982.

JOHNSON, K. L. **Contacts Mechanics**. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 451p.

JUVINALL, R. C. C.; MARSHEK, K. M. **Fundamental of Machine Component Design**. 3rd ed. New York: Jon Wily & Sons, 1999. 912p.

KABO, E.; EKBERG, A. Fatigue initiation in railway wheels – on the influence of defects. In: CONTACT MECHANICS AND WEAR OF RAIL/WHEEL SYSTEMS, 5, 2000, Tokyo. **Proceedings...** Tokyo, 2000.

KABO, E. Material defects in rolling contact fatigue – influence of overloads and defect clusters. **International Journal of Fatigue**, London, v. 24, n. 8, p. 887-894, Aug. 2002.

KALKER, J. J. **On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction**. 1967. 155 p. Thesis (Ph.D.) – Department of Mechanical Engineering, Delft University of Technology, Delft.

KALKER, J. J. **Three – Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact**. 1st ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. 314p.

KALKER, J. J. Wheel-rail rolling contact theory. **Wear**, Amsterdam, v. 144, p. 243-261, 1991.

KALKER, J. J. Wheel – rail contact: Theory, algorithms and applications. **Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics**, Delft University of Technology, Report n. 96-69, 1996.

KALKER, J. J. Rolling contact phenomena: Linear elasticity. **Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics**, Delft University of Technology, Report n. 00-09, 2000.

- KANNEL, J. W.; TEVAARWERK J. L. Subsurface stress evaluations under rolling / sliding contacts. **Journal of Tribology**, New York, v. 106, n. 1, p. 96-103, Jan. 1984.
- KAPOOR, A.; JOHNSON, K. L. Effect of changes in contact geometry on shakedown of surfaces in rolling / sliding contact. **Int. Journal of Mechanical Sciences**, London, v. 34, n. 3, p. 223-239, 1992.
- KEER, L. M.; MOWRY, D. B. The stress field created by a circular sliding contact on transversely isotropic spheres . **Int. Journal of Solids Structures**, London, v. 15, p. 33-39, 1979.
- KRAL, E. R.; KOMVOPOULOS, K.; BOGY, D. B. Elastic – plastic finite element analysis of repeated indentation of a half - space by a rigid sphere. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 60, n. 4, p. 829-841, Dec. 1993.
- KRAL, E. R.; KOMVOPOULOS, K. Three - dimensional finite element analysis of subsurface stresses and shakedown due to repeated sliding on a layered medium. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 63, n. 4, p. 967-973, Dec. 1996.
- KRAUSE, H.; POLL, G. Plastic deformation of wheel – rail surfaces. **Wear**, Amsterdam, v. 113, p. 123-130, 1986.
- KULKARNI, S. M. et al. Elastoplastic finite element analysis of three – dimensional pure rolling contact at the shakedown limit. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 57, n.1, p. 57-65, Mar. 1990a.
- KULKARNI, S. M. et al. Elastoplastic finite element analysis of three – dimensional pure rolling contact above the shakedown limit. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 58, n. 2, p. 347-353, Jun. 1990b.

- KULKARNI, S. M. et al. Elastoplastic finite element analysis of repeated three – dimensional, elliptical rolling contact with rail wheel properties. **Journal of Tribology**, New York, v. 113, n. 3, p. 434-441, Jul. 1991.
- KUMAR, A. M. et al. Elastoplastic finite element analysis of two – dimensional rolling and sliding contact deformation of bearing steel. **Journal of Tribology**, New York, v. 111, n. 2, p. 309-314, Apr. 1989.
- KUMAR, S.; GARG, V. K.; ANNIGERI, B. Adhesion and creep zone investigation of planar elastic steel on steel contacts with friction – a finite element analysis. In: THE WINTER ANNUAL MEETING OF ASME, 1, 1980, Illinois. **The General Problem of Rolling Contact**. New York: ASME, 1980. AMD – v. 40, p. 107-119.
- KUMAR, S.; RAJKUMAR, B. R. A laboratory investigation of wheel rail contact for freight cars. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 103, p. 246-255, May 1981.
- KUMAR, S. et al. Effect of kinematic oscillation on tractive characteristics of steel wheel on rail. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 105, p. 61-63, May 1983.
- KUMAR, S.; ADENWALA, Y. S.; RAJKUMAR, B. R. Experimental investigation of contact stresses between a U.S. locomotive wheel and rail. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 105, p. 64-70, May 1983.
- KUMAR, S., KRISHNAMOORTHY, P.K., PRASANNA RAO, D.L. Influence of car tonnage and wheel adhesion on rail and wheel wear: A laboratory study. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 108, p. 48-58, Feb. 1986.
- KUMAR, S.; SINGH, S. P. Heavy axel load wheel – rail contact stresses and their tread – crown curvature relationships. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 111, p. 382-387, Nov. 1989a.

KUMAR, S.; SINGH, S. P. Rail head geometry, rail rolling and wheel – rail contact tilting analysis for heavy axle loads. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 111, p. 375-381, Nov. 1989b.

KUMAR, S., SINGH, S. P. A laboratory investigation of threshold stress in wheel – rail interaction for heavy axle loads. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 114, p. 109-115, Feb. 1992a.

KUMAR, S., SINGH, S.P. Threshold stress in new wheel/rail interaction for limiting rail damage under heavy axle loads. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 114, p. 284-288, Aug. 1992b.

LANGLAIS, T. E.; VOGEL, J. H.; CHASE, T. R. Multiaxial cycle counting for critical plane methods. **International Journal of Fatigue**, London, v. 25, n. 7, p. 641-647, Jul. 2003.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solids materials**. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 500p.

LI, L. Y.; WU, C. Y.; THORNTON, C. A theoretical model for the contact of elastoplastic bodies . **Proc. of Instn. of Mechanical Engineers: Part C**, London, v. 215, p. 421-431, 2002.

LOVE, A. E. H. The stress produced in a semi – infinite solid by pressure on part of the boundary. **Phil. Trans. Royal Society**, v. 228, p. 377-420, Oct. 1929.

LOVE, A.E.H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. 4th ed. New York: Dover Publications, 1944, 643p.

LUNDBERG, G.; SJÖVALL, H. Stress and deformation in elastic contacts. The Institution of Theory of Elasticity and Strength of Materials, Chalmers University of Technology. **Publication n° 4**, Gothenburg, 1958.

- LUNDÉN, R. Fatigue durability of tread – braked railway wheels – on admissible combinations of axle load, train speed and signaling distance. **Proc. of Instn. of Mechanical Engineers**, London, v. 205, p. 21-33, 1991.
- LUNDÉN, R. Contact region fatigue of railway wheels under combined mechanics rolling pressure and thermal brake loading. **Wear**, Amsterdam, v. 144, p. 57-70, 1991.
- McDOWELL, D. An approximate algorithm for elastic – plastic two – dimensional rolling / sliding contact. **Wear**, Amsterdam, v. 211, n. 2, p. 237-246, Nov. 1997.
- MERWIN, J. E.; JOHNSON, K. L. An analysis of plastic deformation in rolling contact. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 177, n. 25, p. 676-690, 1963.
- M'EWEN, E. Stresses in elastic cylinders in contact along a generatrix. **Philosophical Magazine**, Cambridge, v. 40, p. 454-459, 1949.
- MILLER, W. R.; OHJI, K.; MARIN, J. Rotating principal stress axes in high – cycle fatigue. **Journal of Basic Engineering**, New York, v. 89, p. 76-80, March 1967.
- MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi – infinite solid. **Physics**, v. 7, p. 195-202, May 1936.
- MINDLIN, R. D. Compliance of elastic bodies in contact. **Journal of Applied Mechanics**, v. 16, n. 3, p. 259-268, Sep. 1949.
- MINDLIN, R. D.; DERESIEWICK, H. Elastic spheres in contact under varying oblique forces. **Journal of Applied Mechanics**, v. 20, p. 327-344, Sep. 1953.
- MINICUCCI, D. J. **Avaliação de tensões por ultra-som no aro em rodas ferroviárias forjadas novas : classe C**. 2003. 119p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

- MOAVENI, S. **Finite Element Analysis: Theory and Application with ANSYS**. 1st ed. New Jersey: Prentice Hall, 1999. 527p.
- MOYAR, G. J.; STONE, D. H. An analysis of the thermal contributions to railway wheel shelling. **Wear**, Amsterdam, v. 144, p. 117-138, 1991.
- MUTTON, P. J.; EPP, C. J.; DUDEK, J. Rolling contact fatigue in railway wheels under high axle loads. **Wear**, Amsterdam, v. 144, p. 139-152, 1991.
- NAYAK, L. Singularity consideration in numerical solution of contact stress problems. **Journal of Lubrication Technology**, New York, v. 104, p. 352-356, July 1982.
- NAYAK, L. A simplified approach to predict elastic pressure distribution in non-hertzian contact stress problems. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 113, p. 218-223, May 1991.
- NORTON, R. L. **Machine Design: An Integrated Approach**. 2nd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 1048p.
- OLOFSSON, U.; TELLISKIVI, T. Wear, plastic deformation and friction of two rail steels – a full scale test and laboratory study. **Wear**, Amsterdam, v. 254, n. 1-2, p. 80-93, Jan. 2003.
- ORRINGER, O. Crack propagation and fracture in contacting bodies. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, London, v. 19, n. 11, p. 1329-1338, 1996.
- ORRINGER, O. et al. Residual stress and its consequences on both sides of the wheel – rail interface. **Wear**, Amsterdam, v. 191, p. 25-34, Jan. 1996.
- PAPADOPOULOS, I. V. et al. Comparative study of multiaxial high – cycle fatigue criteria for metals. **International Journal of Fatigue**, London, v. 19, n. 3, p. 219-235, Mar. 1997.

- PAPADOPOULOS, I. V. Critical plane approaches in high – cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, London, v. 21, n. 3, p. 269-285, Mar. 1998.
- PAU, M.; AYMERICH, F.; GINESU, F. Ultrasonic measurement of nominal contact area and contact pressure in a wheel – rail system. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 214, n. 4, p. 231-243, Dec. 2000.
- PAU, M. Ultrasonic waves for effective assessment of wheel-rail anomalies. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 219, n. 2, p. 79-90, 2005.
- PAUL, B.; HASHEMI, J. Contact pressures on closely conforming elastic bodies. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 48, n. 3, p. 543-548, Sep. 1981.
- PETERSSON, M. Two – dimensional finite element simulation of the thermal problem at railway block braking. **Proc. of Instn. of Mechanical Engineers: Part C**, London, v. 216, p. 259-273, 2002.
- POLACH, O. A fast wheel – rail forces calculation computer code. **Vehicle Systems Dynamics**, Lisse, v. 33, p. 728-739, 1999.
- RINGSBERG, J. W. **Rolling contact fatigue of railway rails with emphasis on crack initiation**. 2000. 36p. Thesis (PhD) – Department of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg.
- RINGSBERG, J. W., et al. Rolling contact fatigue of rails – finite element modeling of residual stresses, strains and crack initiation. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 214, n. 1, p. 7-19, Mar. 2000.

RINGSBERG, J. W., et al. Prediction of fatigue crack initiation for rolling contact fatigue. **International Journal of Fatigue**, London, v. 22, n. 3, p. 205-215, Mar. 2000.

RINGSBERG, J. W., et al. Cyclic ratcheting and failure of a pearlitic rail steel. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, New York, v. 23, n. 9, p. 747-758, Sep. 2000.

RINGSBERG, J. W. Life prediction of rolling contact fatigue crack initiation. **International Journal of Fatigue**, London, v. 23, n. 7, p. 575-586, Aug. 2001.

RINGEBERG, J. W.; JOSEFSON, B. L. Finite element analyses of rolling contact fatigue crack initiation in railheads. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 215, n. 4, p. 243-259, Dec. 2001.

RINGSBERG, J. W.; LINDBÄCK, T. Rolling contact fatigue analysis of rails including numerical simulations of the rail manufacturing process and repeated wheel-rail contact loads. **International Journal of Fatigue**, London, v. 25, n. 6, p. 547-568, Jun. 2003.

RINGSBERG, J. W., BERGKVIST, A. On propagation of short rolling contact fatigue cracks. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, New York, v. 26, n. 10, p. 747-758, Oct. 2003.

RUSIN, T. M.; KLEESCHULTE, D. G.; COUGHLIN, J. M. Application of the finite element method in the development of improved railroad car wheel designs. **Journal of Engineering for Industry**, New York, v. 101, p. 378-384, Aug. 1979.

SACKFIELD, A.; HILLS, D. A. Some useful results in the classical Hertz contact problem. **Journal of Strain Analysis**, London, v. 18, n. 2, p. 101-105, 1983.

SACKFIELD, A.; HILLS, D. A. Sliding of a general axisymmetric point contact. **Journal of Tribology**, New York, v. 110, n. 3, p. 492-498, Jul. 1988a.

SACKFIELD, A.; HILLS, D. A. Sliding contact between dissimilar elastic bodies. **Journal of Tribology**, New York, v. 110, n. 4, p. 592-596, Oct. 1988b.

SACKFIELD, A.; HILLS, D. A.; NOWELL, D. The stress field induced by a general elliptical Hertzian contact. **Journal of Tribology**, New York, v. 115, n. 4, p. 705-706, Oct. 1993.

SANTOS, A.A. **Problemas causados pelo aquecimento em rodas ferroviárias - O ensaio Krauss**. 1992. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SANTOS, F. C.; SANTOS Jr, A. A. Vida em serviço de roda ferroviárias de vagões de carga. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INGENIERIA MECANICA, 4, 1999, Santiago. **Anais...** Santiago: Universidad de Santiago de Chile, 1999, v. 2

SANTOS, F. C. **Análise do contato roda – trilho e sua influência na vida em serviço de rodas ferroviárias**. 2000. 151p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SANTOS, F. C.; SANTOS Jr, A. A. Análise elastoplástica de rodas de vagões de carga utilizando o método dos elementos finitos . In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENGENHARIA MECÂNICA (COBEM), 16, 2001, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, v. 12, p. 267-276, 2001.

SANTOS, F. C.; SANTOS Jr, A. A.; SANTOS, L. T.; BRUNI, F. Evaluation of subsurface contact stresses in railroad wheel using an elastic half-space model. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Science & Engineers**, Rio de Janeiro, v. 26, n. 4, p. 420-429, 2004.

SEELY, F. B.; SMITH, J. O. **Advanced Mechanics of Materials**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1955. Cap. 11 – Contact Stresses, p. 342- 378p.

- SEHITOGLU, H.; JIANG, Y. R. Residual stress analysis in rolling contact. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON RAIL QUALITY AND MAINTENANCE FOR MODERN RAILWAY OPERATION, 1, 1992, Delft. **Rail Quality and Maintenance for Modern Railway Operation**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. p. 349-358.
- SINGH, K. P.; PAUL B. Numerical solution of non – hertzian elastic contact problems. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 41, n. 2, p. 484-489, Jun. 1974.
- SMITH, J. O.; LIU, C. K. Stresses due to tangential and normal loads on an elastic solid with application to some contact stress problems. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 20, p. 157-166, Jun. 1953.
- SRAML, M.; FLASKER, J.; POTRC, I. Numerical procedure for predicting the rolling contact fatigue crack initiation. **International Journal of Fatigue**, London, v. 25, n. 7, p. 585-595, Jul. 2003.
- SRAML, M.; FLASKER, J.; POTRC, I. Critical plane modeling of fatigue initiation under rolling and sliding contact. **Journal of Strain Analysis**, London, v. 39, n. 2, p. 225-236, 2004.
- TELLISKIVI, T.; OLOFSSON, U. Contact mechanics analysis of measured wheel – rail profiles using the finite element method. **Proc. of Inst. of Mechanical Engineers: Part F**, London, v. 215, n. 2, p. 65-72, Jun. 2001.
- TELLISKIVI, T. et al. **A tool and a method for FE analysis of wheel and rail interaction**. Disponível em: <www.damek.kth.se/~ulfs/Publications/Pitt_5.pdf>. Acesso em: 26 de Junho de 2002.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970, 567p.

WAY, S. Some observations on the theory of contact pressures. **Journal of Applied Mechanics**, New York, v. 7, p. 147-157, Dec. 1940.

WANG, C. H.; MILLER, K. J. The effect of mean shear stress on torsional fatigue behavior. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, London, v. 14, n. 2 / 3, p. 293-307, 1991.

WU, H.; WANG, J. M. Non – hertzian conformal contact at wheel – rail interface. **A.A.R – Transportation Technology Center**, Pueblo, p. 137-144, 1996.

XU, B.; JIANG, Y. Elastic – plastic finite element analysis of partial slip rolling contact. **Journal of Tribology**, New York, v. 124, n. 1, p. 20-26, Jan. 2002.

YOKOYAMA, H. et al. Effect of the angle of attack on flaking behavior in pearlitic and bainitic steel rails. **Wear**, Amsterdam, v. 253, n. 1-2, p. 60-66, Jul. 2002.

YU, M.; MORAN, B.; KEER, L. M. A direct analysis of two – dimensional elastic – plastic rolling contact. **Journal of Tribology**, New York, v. 115, n. 2, p. 227-236, Apr. 1993.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **Finite Element Method, Vol. 1: The Basis**. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 689p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **Finite Element Method, Vol. 2: Solid Mechanics**. 5th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 459p.