

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Tese de Mestrado

Título: Análise Dinâmica de Sistemas de Transmissão de Torque

Autor: Wilson Roberto Nassar

Orientador: Prof. Dr. Hans Ingo Weber

019/91

Campinas, SP - Agosto, 1991

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL  
DA TESE DEFENDIDA POR Wilson Roberto  
Nassar E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 30/08/91  
LTL  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Tese de Mestrado

Título da Tese: Análise Dinâmica de Sistemas de Transmissão de Torque

Autor: Wilson Roberto Nassar

Orientador: Prof. Dr. Hans Ingo Weber

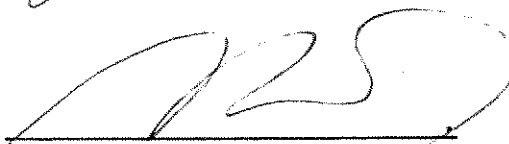
Aprovado por



Prof. Dr. Hans Ingo Weber, Presidente



Prof. Dr. Antonio Arlindo Guidetti Porto



Prof. Dr. Moysés Zindeluk

Campinas, 30 de Agosto de 1991.

À minha esposa Tereza, minhas filhas Marília Gabriela e Fernanda e meu filho Gustavo.

## Agradecimentos

Agradeço aos Professores, Colegas e Funcionários da UNICAMP pela colaboração durante toda a execução deste trabalho.  
à Companhia Siderúrgica Paulista pela oportunidade para a realização deste Mestrado.

## Resumo

Esta dissertação apresenta técnicas experimentais e teóricas para a análise dinâmica de sistemas de transmissão de torque com folga.

É apresentada a preparação para medição de torque em um sistema de transmissão, incluindo todas as etapas de construção de um banco de ensaio, por exemplo, ensaios específicos para a determinação de propriedades dos equipamentos utilizados.

Um modelo matemático é elaborado para a simulação numérica do sistema. Neste modelo é apresentada a solução para as não linearidades introduzidas pela folga e pelo impacto.

As simulações teóricas e experimentais são efetuadas para diferentes condições operacionais, com a comparação e comentários dos resultados obtidos.

## Abstract

This dissertation presents experimental and theoretical techniques for the dynamic analysis of torque transmission systems with clearance.

A procedure for the measurement of the torque of a transmission system is presented, including the construction stages of a test rig and tests for the determination of the characteristics of the measuring equipment.

A mathematical model for the numeric simulation of the system is elaborated. This model presents the solution for non-linearities introduced by the clearance and impacts.

Theoretical and experimental simulations are performed for different operational conditions followed by their comparison and comments of results.

# Lista de Figuras

|      |                                                                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Modelo básico para aplicação do método dos parâmetros concentrados . . .                                                                      | 4  |
| 1.2  | Discretização do sinal no tempo . . . . .                                                                                                     | 5  |
| 2.1  | Ponta de Eixo do Motor . . . . .                                                                                                              | 10 |
| 2.2  | Banco de Ensaio - Rigidez da Ponta de Eixo do Motor . . . . .                                                                                 | 12 |
| 2.3  | Sistema de Dois Graus de Liberdade - Rigidez da Ponta de Eixo do Motor .                                                                      | 12 |
| 2.4  | Espectro para determinação da Rigidez da Ponta de Eixo do Motor - 200<br>Hz de fundo de escala . . . . .                                      | 14 |
| 2.5  | Espectro para determinação da Rigidez da Ponta de Eixo do Motor - 400<br>Hz de fundo de escala . . . . .                                      | 15 |
| 2.6  | Banco de Ensaio - Momento de Inércia do Freio . . . . .                                                                                       | 16 |
| 2.7  | Sistema de Um Grau de Liberdade - Momento de Inércia do Freio . . . . .                                                                       | 17 |
| 2.8  | Representação do deslocamento da barra . . . . .                                                                                              | 17 |
| 2.9  | Espectro para Determinação do Momento de Inércia do Freio . . . . .                                                                           | 19 |
| 2.10 | Ponta de Eixo do Freio . . . . .                                                                                                              | 20 |
| 2.11 | Espectro para Determinação da Rigidez da Ponta de Eixo do Freio - Pri-<br>meira Frequência Natural . . . . .                                  | 22 |
| 2.12 | Espectro para Determinação da Rigidez da Ponta de Eixo do Freio - Se-<br>gunda Frequência Natural . . . . .                                   | 23 |
| 2.13 | Transmissão de Torque no Semi-Acoplamento . . . . .                                                                                           | 26 |
| 2.14 | Colagem e Ligação dos Extensômetros . . . . .                                                                                                 | 28 |
| 2.15 | Esquema de Funcionamento do Transmissor de Sinal - Transformador Ro-<br>tativo . . . . .                                                      | 31 |
| 2.16 | Bancada para Calibração do Torquímetro . . . . .                                                                                              | 32 |
| 2.17 | Gráfico de Calibração do Torquímetro . . . . .                                                                                                | 34 |
| 2.18 | a) Distribuição de Rigidez e Inércia no Torquímetro; b) Esquema da Rigidez<br>em Série; c) Momentos de Inércia e Rigidez Equivalente. . . . . | 36 |
| 2.19 | Medida de Rotação . . . . .                                                                                                                   | 38 |
| 2.20 | Medida de Corrente e Tensão da Armadura e Corrente de Campo do Motor                                                                          | 38 |
| 2.21 | Medida de Corrente de Campo do Freio . . . . .                                                                                                | 39 |

|      |                                                                                                                                      |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.22 | Medida do Torque . . . . .                                                                                                           | 39 |
| 2.23 | Conjunto de Instrumentos de Medição . . . . .                                                                                        | 40 |
| 2.24 | Analizador Espectral Scientific-Atlanta . . . . .                                                                                    | 40 |
| 2.25 | Vista Geral da Bancada de Ensaio . . . . .                                                                                           | 41 |
| 2.26 | Sistema de Transmissão . . . . .                                                                                                     | 41 |
| 3.1  | Esquema Básico do Banco de Ensaio do Sistema sem Folga . . . . .                                                                     | 43 |
| 3.2  | Esquema de Discretização do Sistema sem Folga . . . . .                                                                              | 45 |
| 3.3  | Acoplamento com Folga . . . . .                                                                                                      | 46 |
| 3.4  | Esquema Básico do Banco de Ensaio do Sistema com Folga . . . . .                                                                     | 47 |
| 3.5  | Esquema da Discretização do Sistema com Folga . . . . .                                                                              | 47 |
| 3.6  | Modelo Dinâmico Típico de Acoplamento com Folga . . . . .                                                                            | 49 |
| 3.7  | Características dos modelos: a) Linear sem amortecimento; b) Não linear sem amortecimento; c) Não linear com amortecimento . . . . . | 50 |
| 3.8  | Detalhe do Acoplamento com pino . . . . .                                                                                            | 56 |
| 3.9  | Constante de Rigidez entre o Pino e o Furo com Folga . . . . .                                                                       | 57 |
| 3.10 | Modelo de Acoplamento Típico com Máxima Abertura de Folga . . . . .                                                                  | 62 |
| 3.11 | Gráfico de Reversão de Velocidade de um Motor Elétrico de Acionamento . . . . .                                                      | 63 |
| 3.12 | Coefficiente de Amortecimento Viscoso do Torque . . . . .                                                                            | 68 |
| 4.1  | Fluxograma Para Elaboração do Programa Para Determinação da Resposta no Tempo . . . . .                                              | 75 |
| 4.2  | Curvas de Histerese para Sistema de Dois Graus de Liberdade - $\dot{\alpha} = 10\text{rad/s}$ . . . . .                              | 78 |
| 4.3  | Tempo de Impacto para Sistema de Dois Graus de Liberdade - $\dot{\alpha} = 10\text{rad/s}$ . . . . .                                 | 79 |
| 4.4  | Curvas de Histerese para Sistema de Dois Graus de Liberdade - $\dot{\alpha} = 5\text{rad/s}$ . . . . .                               | 80 |
| 4.5  | Tempo de Impacto para Sistema de Dois Graus de Liberdade - $\dot{\alpha} = 5\text{rad/s}$ . . . . .                                  | 81 |
| 4.6  | Torque de Partida do Motor Elétrico . . . . .                                                                                        | 83 |
| 4.7  | Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Teórico . . . . .                                                 | 85 |
| 4.8  | Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Teórico . . . . .                                              | 86 |
| 4.9  | Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Teórico . . . . .                                              | 87 |
| 4.10 | Reversão no Acionamento - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Teórico . . . . .                                                | 88 |
| 4.11 | Reversão no Acionamento - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Teórico . . . . .                                             | 89 |
| 4.12 | Reversão no Acionamento - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Teórico . . . . .                                             | 90 |
| 4.13 | Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Teórico . . . . .                                                    | 92 |

|      |                                                                                              |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.14 | Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Teórico . . . . .         | 93  |
| 4.15 | Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Teórico . . . . .         | 94  |
| 4.16 | Curvas de Histerese para o Equipamento com Aceleração da Carga - pino de 6 mm . . . . .      | 95  |
| 4.17 | Tempo de Impacto para o Equipamento com Aceleração da Carça - pino de 6 mm . . . . .         | 96  |
| 5.1  | Relação entre Corrente de Campo do Freio e Corrente da Armadura . . . . .                    | 99  |
| 5.2  | Relação entre o Torque na Transmissão e a Corrente da Armadura . . . . .                     | 100 |
| 5.3  | Relação entre o Torque na Transmissão e a Corrente de Campo do Freio . . . . .               | 101 |
| 5.4  | Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Experimental . . . . .    | 103 |
| 5.5  | Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Experimental . . . . . | 104 |
| 5.6  | Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Experimental . . . . . | 105 |
| 5.7  | Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Experimental . . . . .       | 106 |
| 5.8  | Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Experimental . . . . .    | 107 |
| 5.9  | Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Experimental . . . . .    | 108 |

# Lista de Tabelas

|     |                                                                                         |     |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 | Primeiro Levantamento para Calibração . . . . .                                         | 32  |
| 2.2 | Segundo Levantamento para Calibração . . . . .                                          | 33  |
| 2.3 | Terceiro Levantamento para Calibração . . . . .                                         | 33  |
| 4.1 | Frequências e Modos Naturais do Sistema sem Folga . . . . .                             | 71  |
| 4.2 | Frequências e Modos Naturais do Sistema com Folga e Desacoplado . . . . .               | 71  |
| 4.3 | Frequências e Modos Naturais do Sistema com Folga e Acoplado com Pino de 6 mm . . . . . | 71  |
| 4.4 | Frequências e Modos Naturais do Sistema com Folga e Acoplado com Pino de 8 mm . . . . . | 72  |
| 4.5 | Runge- Kutta de 4. <sup>a</sup> ordem . . . . .                                         | 72  |
| 4.6 | Resultado do TAF na Partida do Equipamento - Valor Teórico . . . . .                    | 84  |
| 4.7 | Resultado do TAF na Reversão do Equipamento - Valor Teórico . . . . .                   | 97  |
| 4.8 | Resultado do TAF na Aceleração da Carga - Valor Teórico . . . . .                       | 97  |
| 5.1 | Resultado do TAF na Partida do Equipamento - Valor Experimental . . . . .               | 102 |
| 5.2 | Resultado do TAF na Reversão do Equipamento - Valor Experimental . . . . .              | 102 |
| 6.1 | Comparação entre Resultados Teóricos e Experimentais . . . . .                          | 109 |

# Conteúdo

|          |                                                                   |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                 | <b>1</b>  |
| 1.1      | Análise das Vibrações Torcionais . . . . .                        | 2         |
| 1.1.1    | Análise Teórica . . . . .                                         | 3         |
| 1.1.2    | Processamento de Sinais . . . . .                                 | 4         |
| 1.2      | Medição das Vibrações Torcionais . . . . .                        | 6         |
| <b>2</b> | <b>Bancada de Ensaio para Análise de Vibrações Torcionais</b>     | <b>8</b>  |
| 2.1      | Propriedades do Acionamento e da Carga . . . . .                  | 8         |
| 2.1.1    | Acionamento . . . . .                                             | 9         |
| 2.1.2    | Carga . . . . .                                                   | 13        |
| 2.2      | Sistema de Transmissão de Torque . . . . .                        | 24        |
| 2.2.1    | Especificação do Transmissor de Sinal . . . . .                   | 24        |
| 2.2.2    | Projeto do Eixo de Transmissão de Torque . . . . .                | 24        |
| 2.2.3    | Projeto do Acoplamento . . . . .                                  | 25        |
| 2.3      | Construção do Torquímetro . . . . .                               | 27        |
| 2.3.1    | Seleção e Colagem dos Extensômetros Elétricos . . . . .           | 27        |
| 2.3.2    | Conexão do Transmissor de Sinal . . . . .                         | 30        |
| 2.3.3    | Calibração do Torquímetro . . . . .                               | 30        |
| 2.3.4    | Propriedades do Torquímetro . . . . .                             | 35        |
| 2.4      | Instrumentação . . . . .                                          | 37        |
| <b>3</b> | <b>Modelo Matemático</b>                                          | <b>42</b> |
| 3.1      | Equações de Movimento do Sistema sem Folga . . . . .              | 43        |
| 3.2      | Equações de Movimento do Sistema com Folga . . . . .              | 45        |
| 3.3      | Análise da Folga do Sistema . . . . .                             | 48        |
| 3.3.1    | Descrição da Folga nas Equações de Movimento do Sistema . . . . . | 49        |
| 3.3.2    | Identificação das Propriedades do Contato . . . . .               | 51        |
| 3.3.3    | Matriz de Rigidez e Matriz de Amortecimento com Folga . . . . .   | 59        |

|       |                                                                                   |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.3.4 | Considerações Gerais sobre a Aplicação do Modelo Matemático da<br>Folga . . . . . | 61  |
| 3.4   | Determinação do Torque do Acionamento e da Carga . . . . .                        | 64  |
| 3.5   | Amortecimento dos Eixos de Acionamento, do Motor e do Freio . . . . .             | 66  |
| 3.6   | Considerações Finais . . . . .                                                    | 68  |
| 4     | Programas Computacionais e simulações . . . . .                                   | 69  |
| 4.1   | Frequências e Modos Naturais Torcionais do Sistema . . . . .                      | 70  |
| 4.2   | Método de Integração Numérica . . . . .                                           | 70  |
| 4.3   | Programa para Obtenção da Resposta no Tempo . . . . .                             | 72  |
| 4.4   | Resultados das Simulações . . . . .                                               | 73  |
| 4.4.1 | Verificação do Modelo de Impacto . . . . .                                        | 76  |
| 4.4.2 | Curva de Partida do Motor Elétrico . . . . .                                      | 82  |
| 4.4.3 | Influência da Folga no Sistema de Transmissão . . . . .                           | 82  |
| 5     | Resultados Experimentais . . . . .                                                | 98  |
| 5.1   | Levantamento de Características do Equipamento . . . . .                          | 98  |
| 5.2   | Medidas de Torque na Transmissão . . . . .                                        | 98  |
| 6     | Conclusões . . . . .                                                              | 109 |

# Capítulo 1

## Introdução

Os equipamentos eletromecânicos dos mais diversos tipos constituem-se basicamente de três partes fundamentais: acionamento, transmissão e carga. Como pode ser observado, estas três partes podem assumir as configurações mais diversas nas máquinas existentes atualmente.

O uso do equipamento provoca no decorrer do tempo o desgaste de seus componentes, alteração da distribuição de cargas, redução da estabilidade, ruído, vibração, fadiga e quebra.

A investigação do estado em que se encontra a máquina, para avaliação do desempenho e determinação da necessidade de manutenção, aplica as mais diversas técnicas, desde uma análise visual ou de ruído até sofisticados instrumentos e métodos computacionais para processamento de sinais e cálculos.

Uma dessas técnicas de investigação é a análise das vibrações torcionais do sistema. Esta análise é aplicada normalmente ao sistema de transmissão do equipamento.

As vibrações torcionais podem ter sua origem em qualquer uma das partes fundamentais. Os acionamentos com motores de combustão interna introduzem esforços externos, gerados na alternância do movimento dos pistões, que provocam vibrações torcionais. Os motores elétricos também não proporcionam um torque totalmente suave. O torque do motor elétrico oscila com uma frequência igual a duas vezes a da linha de alimentação. As vibrações torcionais, introduzidas pelo motor elétrico, são bem observadas na partida e em condições de elevadas solicitações.

As cargas em sua grande maioria, normalmente provocam vibrações torcionais no sistema, principalmente pelo fato de ser esta a parte do equipamento sujeita a oscilações bruscas em seu comportamento. As máquinas de fluxo, tanto rotativas como alternativas, são fontes de vibrações torcionais. Os impactos externos que ocorrem frequentemente no funcionamento de diversos tipos de equipamentos, também provocam estas vibrações.

Na transmissão, diversos componentes mecânicos podem gerar torques internos que

provocam o aparecimento das vibrações torcionais. Os principais exemplos são as engrenagens, acoplamentos de diversos tipos, correntes e correias. Nestes elementos as vibrações estão diretamente relacionadas com as folgas, excentricidades, erros de engrenamento, deslizamento em correias e na própria deterioração do equipamento.

A redução das vibrações torcionais pode ser obtida através de inúmeras técnicas conhecidas e utilizadas nos equipamentos existentes atualmente. A roda livre, por exemplo, cuja finalidade principal é o armazenamento de energia cinética, também reduz a amplitude da vibração torcional pois aumenta o momento de inércia na transmissão diminuindo a aceleração angular ( $\ddot{\theta} = T/I$ ). Uma aplicação desta técnica pode ser encontrada na referência [1], onde o controle é feito por uma inércia que é acoplada ao sistema por uma embreagem eletromagnética nas situações em que a vibração atinge níveis pré determinados. Motores de combustão interna com maior número de cilindros podem ser melhor balanceados torcionalmente em sua operação. Para alterar a frequência natural do sistema, o que pode se tornar necessário para trabalhar fora da faixa de ressonância, deve-se modificar a rigidez do eixo de transmissão. Para determinados tipos de transmissões é possível a aplicação de acoplamentos torcionalmente flexíveis.

Amortecedores também podem ser projetados para reduzir as vibrações torcionais. Estes amortecedores constituem-se basicamente de uma massa acoplada ao eixo, sendo submetida ao atrito seco ou fluido. Alguns tipos podem trabalhar como absorvedor ou neutralizador dinâmico de vibrações, sendo sintonizados para uma frequência de ressonância específica. Um dos primeiros amortecedores utilizado ficou conhecido como amortecedor de Lanchester, as referências [2] e [3] apresentam os princípios teóricos para a aplicação deste dispositivo e de outros meios para reduzir as vibrações torcionais.

Além das técnicas mencionadas, as melhorias e aperfeiçoamentos obtidos na fabricação dos componentes das máquinas têm contribuído para a redução das vibrações torcionais em diversos equipamentos.

O objetivo deste trabalho consiste na aplicação da extensometria para a medição das vibrações torcionais em um sistema de transmissão típico com folga. Um modelo matemático será desenvolvido para a avaliação do comportamento do sistema quando submetido a diferentes condições de trabalho, considerando a influência da folga na transmissão.

## 1.1 Análise das Vibrações Torcionais

A análise das vibrações vem passando por um processo de evolução nos últimos anos que se caracteriza principalmente pela utilização de técnicas modernas, desenvolvidas nos diversos campos da engenharia.

Para efeito de descrição, a análise de vibrações pode ser dividida em dois segmentos. O primeiro pode ser considerado como sendo a análise de vibrações teórica ou clássica. O segundo pode ser denominado de processamento de sinais. Em ambos os casos a uti-

lização de recursos modernos na área de computação, medição e aquisição de sinais vem proporcionando um grande desenvolvimento.

As principais características da análise de vibrações, especificadas relativamente aos problemas torcionais, são descritas a seguir.

### 1.1.1 Análise Teórica

Os objetivos típicos para a análise teórica das vibrações são: [4]

- Determinar as frequências naturais;
- Avaliar o efeito causado na frequência natural e na amplitude de vibração devido a alteração de um ou mais parâmetros do sistema (análise de sensibilidade);
- Calcular as amplitudes de vibração e torques de pico com uma excitação torcional permanente;
- Calcular os torques dinâmicos e torques internos em condições transientes (por exemplo, na partida da máquina);
- Avaliar a estabilidade torcional do acionamento com a aplicação do controle de velocidade automático.

A base para atingir os objetivos descritos, através da análise teórica, é a obtenção de um modelo matemático que possibilite a simulação em um computador das condições reais da operação do equipamento. A solução do modelo fornece as variações de torque do sistema em função do tempo.

O modelamento de um sistema pode ser dividido em dois tipos: (1) Sistemas discretizado ou de parâmetros concentrados; (2) Sistemas contínuos ou de parâmetros distribuídos. Considerando a facilidade de concentração em estações bem definidas das inércias do sistema a ser analisado, o modelo matemático será feito pelo método dos parâmetros concentrados. Em sistemas mais complexos, ou quando é exigido um maior refinamento na análise de um componente específico do sistema o método dos parâmetros distribuídos é o mais indicado. A figura 1.1 apresenta o modelo para a análise de um sistema com apenas dois graus de liberdade. Este modelo descreve exatamente a idéia básica para a aplicação do método dos parâmetros concentrados. As inércias incluem em cada estação a metade do valor da inércia relativa ao eixo de ligação somado ao seu próprio valor.

A maior dificuldade na solução destes sistemas é o tratamento das não linearidades que ocorrem na formulação do modelo. Esta particularidade pode ocorrer no acionamento, na transmissão ou na carga.

No capítulo 3 serão descritos os detalhes da análise teórica de um sistema de transmissão.

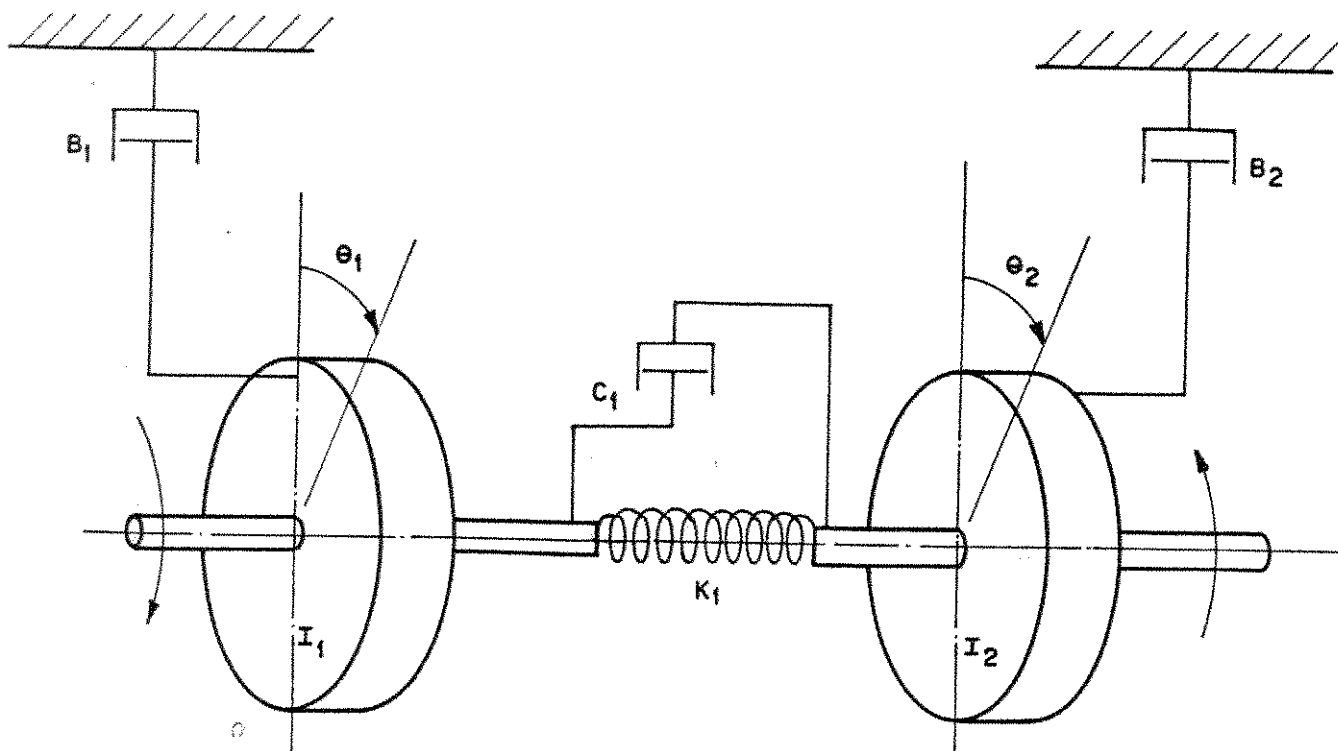


Figura 1.1: Modelo básico para aplicação do método dos parâmetros concentrados

### 1.1.2 Processamento de Sinais

O sinal obtido na simulação ou medição por intermédio de um transdutor no sistema mecânico é uma combinação dos múltiplos efeitos que ocorrem no equipamento. A análise de sinal pode ser definida como sendo o conjunto de técnicas que tem por objetivo identificar em um sinal complexo as respectivas fontes. A análise do sinal vibratório pode ser dividida em dois grupos: (1) Domínio do tempo; e (2) Domínio da frequência.

Inicialmente o principal instrumento para obter o sinal na análise vibratória foi o osciloscópio. Com a aplicação de dois transdutores na mesma posição, deslocados de  $90^\circ$  entre si é possível a obtenção de órbitas, que permitem o diagnóstico de algumas causas de vibrações.

O grande impulso dado à análise de sinais foi a aplicação do algoritmo de Cooley e Tukey [5] denominado "Fast Fourier Transform", mais conhecido como FFT (Transformada Rápida de Fourier). Este algoritmo permitiu a execução da transformada de Fourier discreta em um tempo de processamento extremamente reduzido nos cálculos efetuados com computadores digitais. O estudo do sinal no domínio da frequência é conhecido como análise espectral. Foram desenvolvidos analisadores de vibração, o que possibilitou a aplicação da análise espectral no diagnóstico de problemas dos sistemas eletromecânicos.

A análise de sinal em instrumentos digitais é necessariamente discretizada. Sendo  $x(t)$  um sinal contínuo, podemos obter um sinal discreto  $x(n)$  com intervalos de tempo  $\Delta t$ ,

figura 1.2.

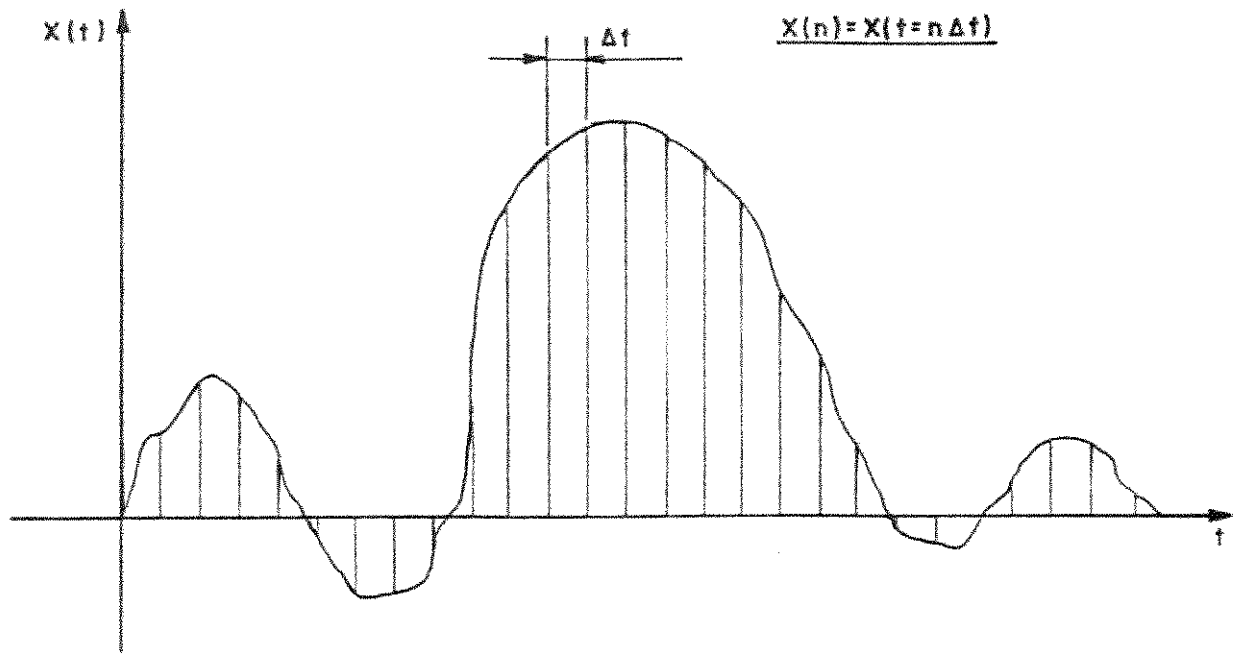


Figura 1.2: Discretização do sinal no tempo

A transformada de Fourier contínua do sinal discreto  $x(n)$  é obtida em:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i2\pi f n \Delta t} \quad (1.1)$$

A transformada de Fourier do sinal discreto é periódica. A frequência com que o sinal é amostrado chama-se “frequência de amostragem”, sendo:

$$f_a = \frac{1}{\Delta t}$$

A obtenção do espectro de frequências a partir da expressão 1.1 exige a amostragem de infinitos valores do sinal  $x(t)$ . Para a execução do espectro dentro de uma amostragem finita de  $x(t)$  é necessária a definição da transformada de Fourier discreta  $X(k)$ , [6].

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{n-1} x(n) e^{-i2\pi kn/N}$$

onde:

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

$N$  = número total de pontos

Nos capítulos seguintes serão apresentadas aplicações da análise de sinal no estudo das vibrações torcionais.

## 1.2 Medição das Vibrações Torcionais

A aplicação da análise espectral permitiu o conhecimento de diagnósticos específicos para inúmeros problemas típicos dos sistemas eletromecânicos. O desenvolvimento obtido está associado principalmente às medições efetuadas nos mancais das máquinas, que sem dúvida é o local ideal para a colocação dos transdutores utilizados nas medições de vibrações de translação.

O desenvolvimento de diagnósticos para os sinais de vibrações torcionais em equipamentos eletromecânicos é bastante reduzido na literatura específica. As principais análises existentes são referentes ao estudo da partida de alguns equipamentos, redução de vibrações torcionais em turbo máquinas [4] e na análise de TAF ("Torque Amplification Factor" - Fator de Amplificação de Torque) [7], [8], [9] e [10]. O TAF é a relação entre o torque do equipamento em uma condição crítica e o torque normal de operação.

A maior dificuldade para o desenvolvimento da análise de vibrações torcionais é a medição e transmissão do sinal de uma base móvel para uma base fixa. Os sinais de vibrações torcionais apresentam muita utilidade na análise do comportamento transiente das máquinas, devido às oscilações no acionamento e na carga, como também na análise de problemas de engrenagens e folgas de transmissões.

O método mais utilizado na medição aplica os extensômetros elétricos, dispostos em um ângulo de 45 graus em relação ao eixo de simetria. Este método apresenta inúmeras vantagens, sendo que as mais importantes são: medição com elevada precisão, tamanho e custo reduzido, baixo peso, excelente resposta para medições dinâmicas e ótima linearidade.

Apesar destas inúmeras vantagens o método apresenta dificuldades de utilização na medição de vibrações torcionais, para as quais devem ser tomados cuidados especiais. A principal dificuldade é a necessidade de transmissão do sinal medido da parte rotativa da máquina para o meio externo. A radiotelemetria (AM,FM), os anéis com escovas, a indução magnética e o infra-vermelho são os meios mais empregados na transmissão do sinal. Normalmente a aplicação destes sistemas requer modificações e adaptações no equipamento, em determinados casos afetando as condições de segurança da máquina e exigindo um custo muito elevado, inviabilizando as medições. A sujeira dos equipamentos e os ruídos presentes no campo, constituem um outro problema sério para as medições. A colagem dos extensômetros deve seguir um critério muito específico para atingir os objetivos previstos. O posicionamento deve ser de acordo com as tensões que definem a

medida que está sendo feita. Na medição de torque puro, devem ser eliminados os efeitos da flexão.

Devem ser tomadas precauções especiais com relação à possibilidade de interferências das condições ambientais, tais como a temperatura e os agentes químicos. As referências [11] e [12] apresentam as recomendações para a instalação dos extensômetros.

Existem inúmeros tipos de equipamentos comercializados para facilitar a medição de vibrações torcionais, aplicando como transdutor principal o extensômetro elétrico. A referência [13] apresenta uma variedade de transdutores para aplicação em medições de vibrações torcionais. A referência [4] menciona outros tipos de instrumentos, que não utilizam os extensômetros.

Considerando que em termos práticos a extensometria é o método mais desenvolvido para a medição de campo, no Capítulo 2 são apresentados todos os detalhes necessários para a aplicação desta técnica.

## Capítulo 2

# Bancada de Ensaio para Análise de Vibrações Torcionais

A construção de uma bancada de ensaio para a simulação de um sistema de transmissão de torque com folga apresenta uma série de dificuldades.

Inicialmente é necessária a definição de um tipo de acoplamento que permita a variação das folgas através de um sistema simples e de desmontagem rápida. Além disso o sistema deve permitir a ocorrência de um fator de amplificação de torque suficientemente grande para ser detectado.

Para a transmissão do sinal do eixo para o meio externo é utilizado no ensaio um equipamento que aplica o método da indução magnética. Este tipo de aparelho é disponível comercialmente para diversas faixas de diâmetro.

A determinação de todas as propriedades físicas, mecânicas e elétricas dos componentes do sistema de transmissão apresenta muitas dificuldades, pois nem todos os valores necessários estão disponíveis nos manuais dos equipamentos. Para determinados casos, como será descrito neste capítulo, são preparados dispositivos experimentais específicos.

Para a simulação de oscilações no acionamento e na carga são utilizados painéis elétricos que permitem uma atuação em comandos que controlam os parâmetros que determinam o comportamento destes equipamentos.

Em seguida são apresentadas com detalhes todas as etapas de preparação de uma bancada para a transmissão de sinal em um sistema rotativo.

### 2.1 Propriedades do Acionamento e da Carga

A etapa inicial para a construção da bancada de ensaio é o conhecimento detalhado de todas as características importantes do acionamento e da carga. As propriedades e dimensões destes equipamentos definem os demais componentes do sistema de transmissão.

Para o acionamento será utilizado um motor elétrico de corrente contínua e para a carga um freio eletromagnético

### 2.1.1 Acionamento

As características nominais do motor elétrico empregado na experiência são as seguintes:

|                        |                                 |
|------------------------|---------------------------------|
| marca:                 | WEG                             |
| tipo:                  | G - com ventilação independente |
| potência de excitação: | 730 W                           |
| momento de inércia:    | 0,08 kgm <sup>2</sup>           |
| peso:                  | 1170 N                          |
| tensão da armadura:    | 240 V                           |
| corrente de armadura:  | 87 A                            |
| potência nominal:      | 18,4 kW                         |
| rotação nominal:       | 3000 rpm                        |
| tensão de campo:       | 240 V                           |
| corrente de campo:     | 1,6 A                           |
| regime:                | S1                              |
| isolamento:            | classe F                        |

Para a análise teórica do sistema será necessária a determinação de algumas propriedades que não estão disponíveis na referência [14].

No modelamento da transmissão é utilizada a rigidez torcional da ponta de eixo do motor. Não sendo disponível o desenho detalhado do conjunto rotativo, são elaborados dois métodos para a obtenção desta propriedade. Em primeiro lugar é feito um levantamento dimensional da ponta de eixo. Porém, neste levantamento o motor não é desmontado totalmente, sendo que as dimensões são tomadas pelas janelas de inspeção existentes na carcaça. A figura 2.1 apresenta o resultado do levantamento.

Para a determinação da rigidez da ponta de eixo é necessária a determinação dos valores de rigidez dos seus diversos trechos. Para os trechos cilíndricos, sem chaveta, o valor da rigidez torcional é:

$$K_t = \frac{\pi G D^4}{32l} \quad (2.1)$$

onde:

G - módulo de elasticidade transversal

D - diâmetro do eixo

l - comprimento do eixo

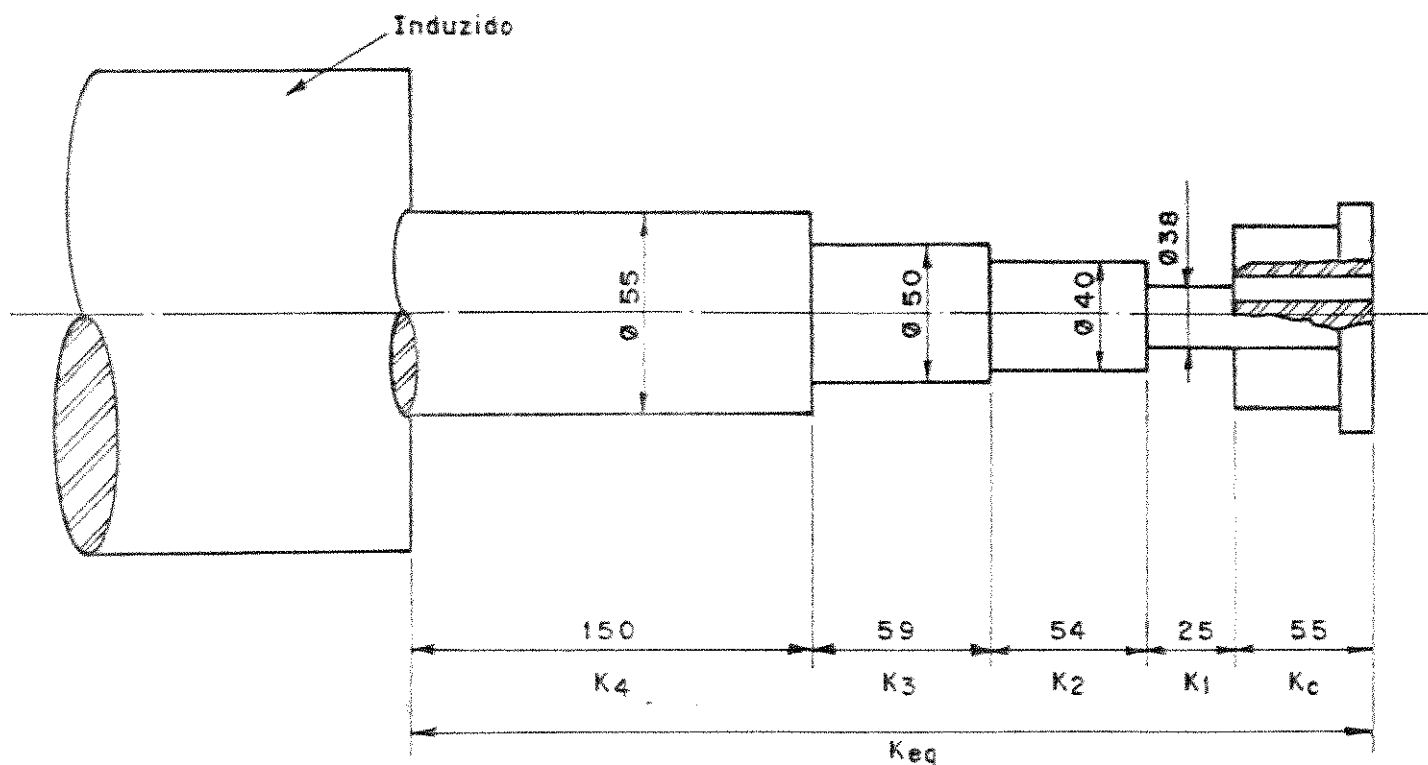


Figura 2.1: Ponta de Eixo do Motor

Considerando a deflexão da chaveta como sendo função apenas das tensões de cisalhamento e utilizando a definição da flexibilidade, a rigidez torcional de uma chaveta pode ser obtida com relativa precisão na expressão:

$$K_c = \frac{2bG_c l_c R^2}{s} \quad (2.2)$$

onde:

$b$  - largura da chaveta

$G_c$  - módulo de elasticidade transversal da chaveta

$l_c$  - comprimento da chaveta

$R$  - raio do eixo

$s$  - altura da chaveta

Substituindo os valores nas equações 2.1 e 2.2, são obtidos os seguintes valores de rigidez, conforme indicados na figura 2.1:

$$K_c = 3149000 \text{ N.m/rad}$$

$$K_1 = 649333 \text{ N.m/rad}$$

$$K_2 = 370569 \text{ Nm/rad}$$

$$K_3 = 828040 \text{ Nm/rad}$$

$$K_4 = 476851 \text{ Nm/rad}$$

O valor da rigidez equivalente  $K$  da ponta de eixo do motor é obtida por associação das molas parciais e resulta:

$$K = 130123 \text{ Nm/rad (valor obtido através de levantamento dimensional)}$$

O segundo método utilizado para determinar a rigidez torcional do eixo do motor é experimental. Conforme pode ser observado na figura 2.2, a extremidade do eixo que será utilizada para o acionamento é travada por um dispositivo na base do sistema. Na outra extremidade é instalado um semi-acoplamento, sendo montada no mesmo uma pequena barra de aço em posição horizontal e perpendicular ao eixo, conforme detalhe na figura 2.2. A pequena barra tem duas finalidades: serve de local de apoio para um transdutor de vibração (acelerômetro) e ponto de aplicação de uma carga de impacto para excitar as frequências naturais do eixo do motor.

Como o objetivo do ensaio é a determinação da rigidez torcional, o acelerômetro é colocado em posição tangencial ao eixo. Da mesma forma, o impacto é aplicado tangencialmente.

A representação esquemática do banco de ensaio da figura 2.2, para formulação das equações de movimento e obtenção de uma expressão analítica da frequência natural, é apresentada pelo sistema de dois graus de liberdade da figura 2.3.

A referência [15] apresenta a formulação geral para sistemas com dois graus de liberdade e também a expressão para a determinação das frequências naturais. A adaptação desta expressão para o sistema da figura 2.3 é apresentada na equação 2.3. Deve ser observado que, no caso do motor, as pontas de eixo são simétricas ( $K_1 = K_2$ ).

$$W_n^2 = \frac{1}{2} \frac{K(I_1 + 2I_2)}{I_1 I_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{K I_1 + 2K I_2}{I_1 I_2} \right)^2 - \frac{4K^2}{I_1 I_2}} \quad (2.3)$$

onde:

$W_n$  - Frequência Natural em rad/s

$K$  - Rigidez da ponta de eixo do motor em Nm/rad

$I_1$  - Momento de inércia de massa do semi-acoplamento em  $\text{kgm}^2$

$I_2$  - Momento de inércia de massa do motor elétrico em  $\text{kgm}^2$

A equação 2.3 pode ser utilizada na determinação da rigidez torcional da ponta de eixo do motor, desde que seja conhecida a frequência natural  $W_n$ .

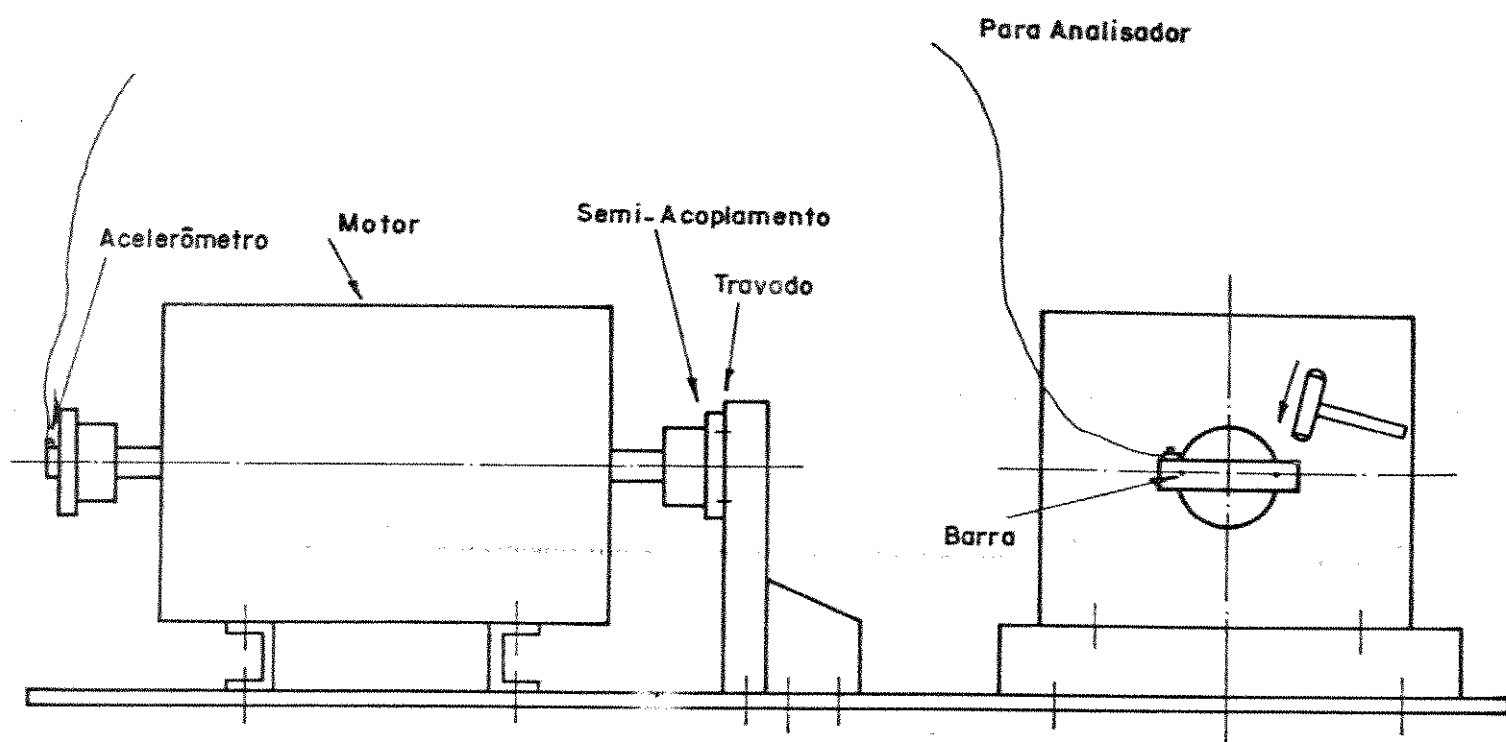


Figura 2.2: Banco de Ensaio - Rigidez da Ponta de Eixo do Motor

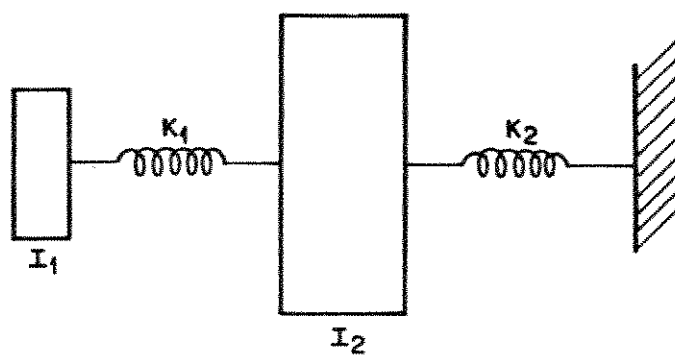


Figura 2.3: Sistema de Dois Graus de Liberdade - Rigidez da Ponta de Eixo do Motor

Utilizando um analisador espectral é possível gravar um espectro de frequências correspondente à aplicação de um ensaio conforme descrito anteriormente. Para a obtenção dos sinais correspondentes aos gráficos das figuras 2.4 e 2.5, o aparelho é ajustado para a gravação do sinal após o disparo do “trigger” interno com 10% do fundo de escala, obtendo-se assim um espectro imediatamente após o impacto. A figura 2.4 apresenta a frequência de 146,5 Hz como sendo a de maior amplitude. Após diversas medidas efetuadas, fica claro que esta é a frequência natural torcional do sistema.

Neste ensaio é suficiente a determinação da primeira frequência natural, pois o sistema é simétrico. Na equação 2.3 o valor da frequência deve ser obtido utilizando-se o sinal negativo. A frequência natural corresponde a 920,5 rad/s.

O valor de  $I_2$ , na equação 2.3, corresponde ao momento de inércia do motor, ou seja, 0,08  $kgm^2$ . O momento de inércia  $I_1$  do semi-acoplamento é obtido na referência [16], sendo o seu valor 0,0035  $kgm^2$ . Substituindo-se os valores em 2.3, obtém-se:

$$K = 137162 \text{ Nm/rad (valor obtido através de ensaio)}$$

Comparando os resultados, obtemos um desvio de 5,1%. Considerando que o segundo método representa uma medida direta no equipamento, incorporando características não obtidas no levantamento dimensional, este resultado será considerado como sendo o que melhor representa a rigidez torcional da ponta de eixo do motor.

Devido aos problemas ocorridos no painel elétrico original, um outro painel é adaptado para a conversão de corrente alternada em corrente contínua. Com este painel são modificadas a tensão e a corrente do campo. Os valores de alimentação do campo passaram para 150 V e 1,0 A.

### 2.1.2 Carga

Para a simulação da carga do equipamento é utilizado um variador de velocidade adaptado para funcionamento como freio eletromagnético. O manual do fabricante, [17], apresenta poucas características do equipamento. Os dados para referência são:

marca: Pemava  
carça: VAR 20

O comportamento do freio é definido pelo valor da corrente de campo que circula na bobina. Esta corrente pode ser controlada através de um potenciômetro, que faz parte de um painel de controle específico do equipamento, [17]. Para obter as características de operação do freio, são efetuados ensaios no equipamento completamente montado, estes resultados estão apresentados no Capítulo 5.

Para elaboração do modelo matemático é necessário obter o momento de inércia de

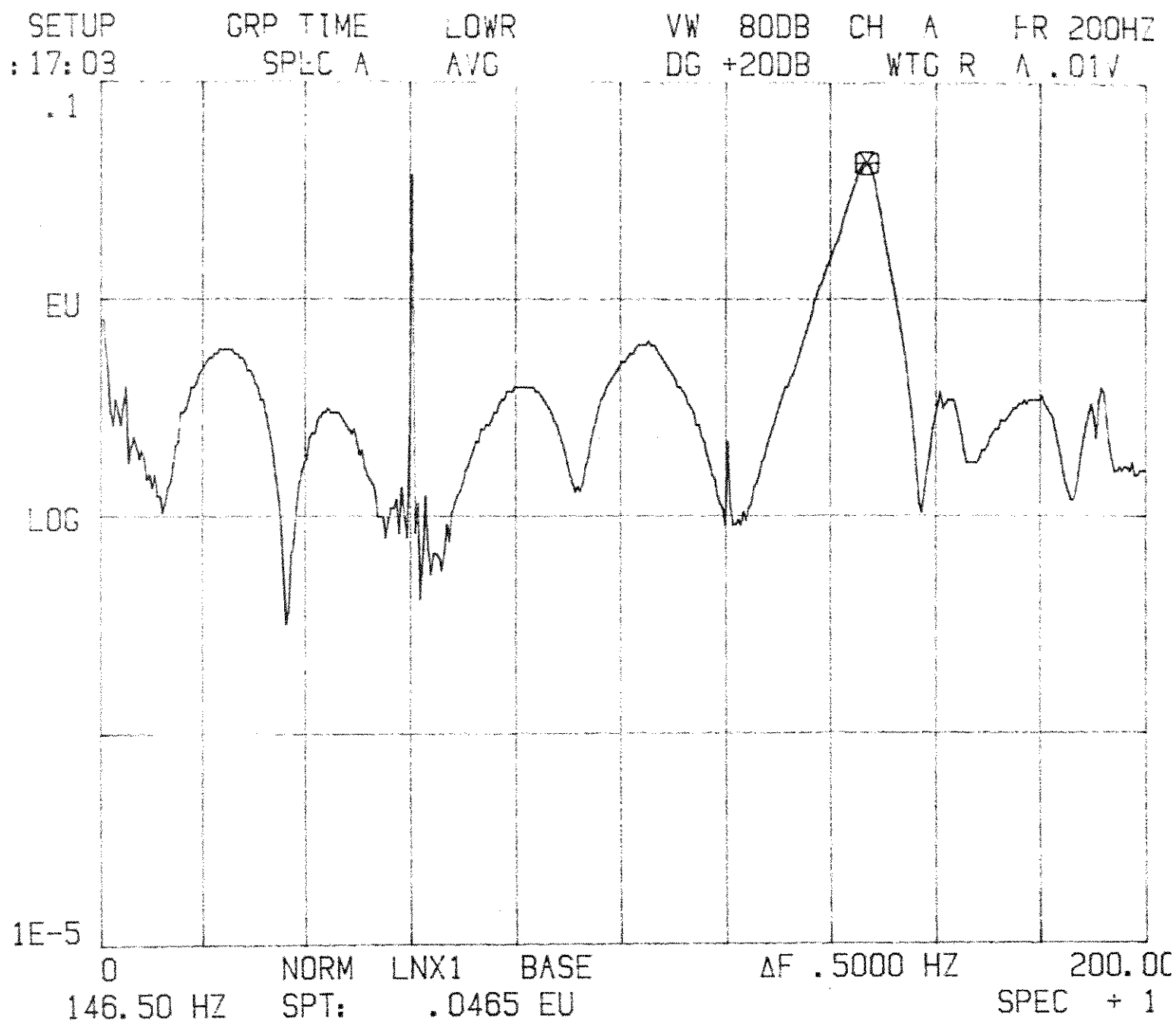


Figura 2.4: Espectro para determinação da Rigidez da Ponta de Eixo do Motor - 200 Hz de fundo de escala

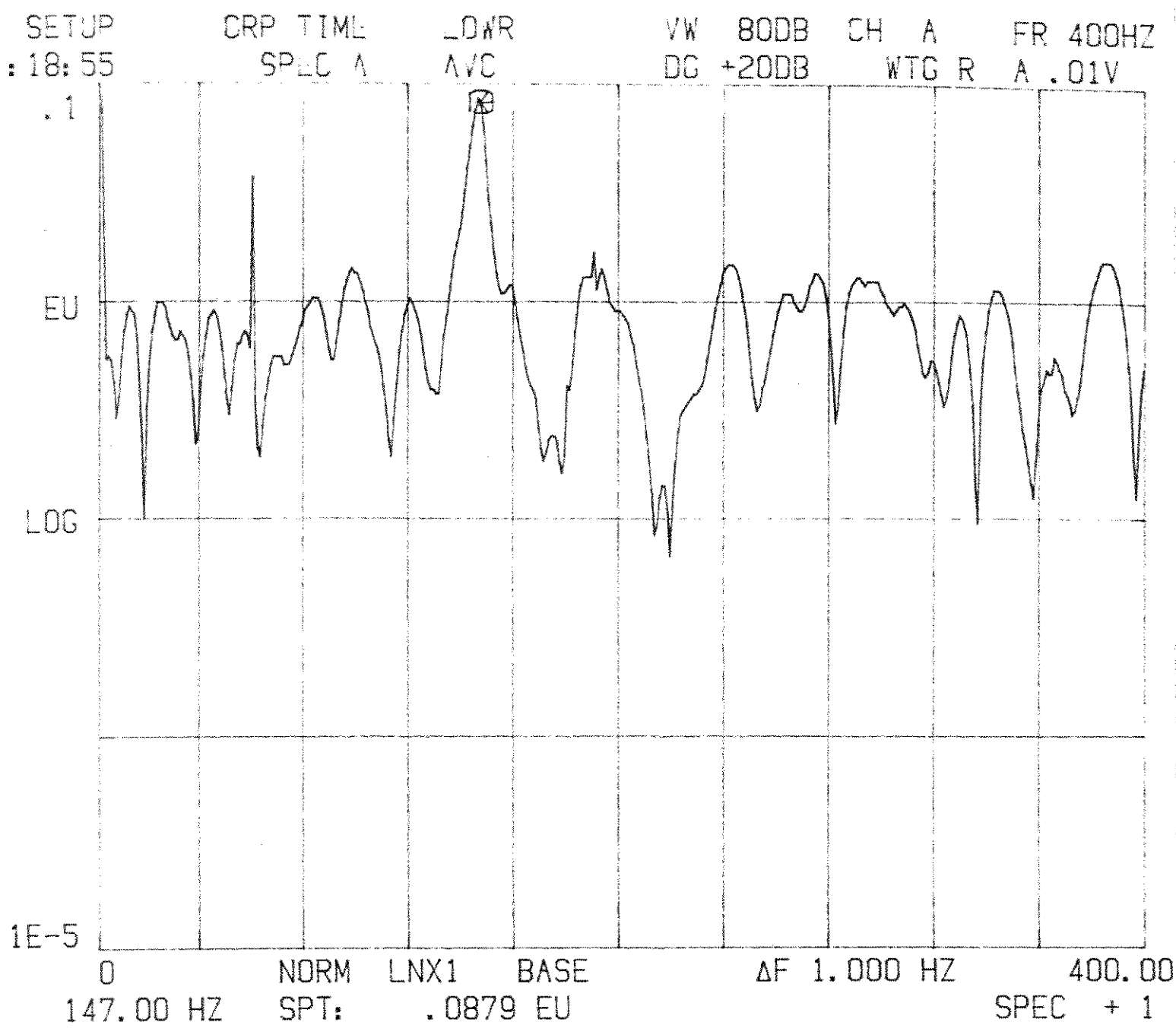


Figura 2.5: Espectro para determinação da Rígidez da Ponta de Eixo do Motor - 400 Hz de fundo de escala

massa e a rigidez da ponta de eixo da embreagem, estes valores não estão disponíveis na referência [17].

Na determinação do momento de inércia do freio é preparado um ensaio específico, utilizando a bancada descrita na figura 2.6. Na extremidade da ponta de eixo a ser acionada é montada uma barra de alumínio, com momento de inércia baixo em relação ao esperado para o freio. Em uma extremidade a barra é firmemente fixada ao acoplamento, na outra extremidade é apoiada sobre uma mola com base para nivelamento e constante de mola  $K_m$ .

Para a execução do ensaio é montado um transdutor de vibração (acelerômetro) sobre a barra, conforme indicado na figura 2.6. O analisador espectral é ajustado para gravar o sinal após o disparo do "trigger" e em seguida é aplicado um impacto sobre a barra, sendo o aparelho acionado para a gravação do sinal.

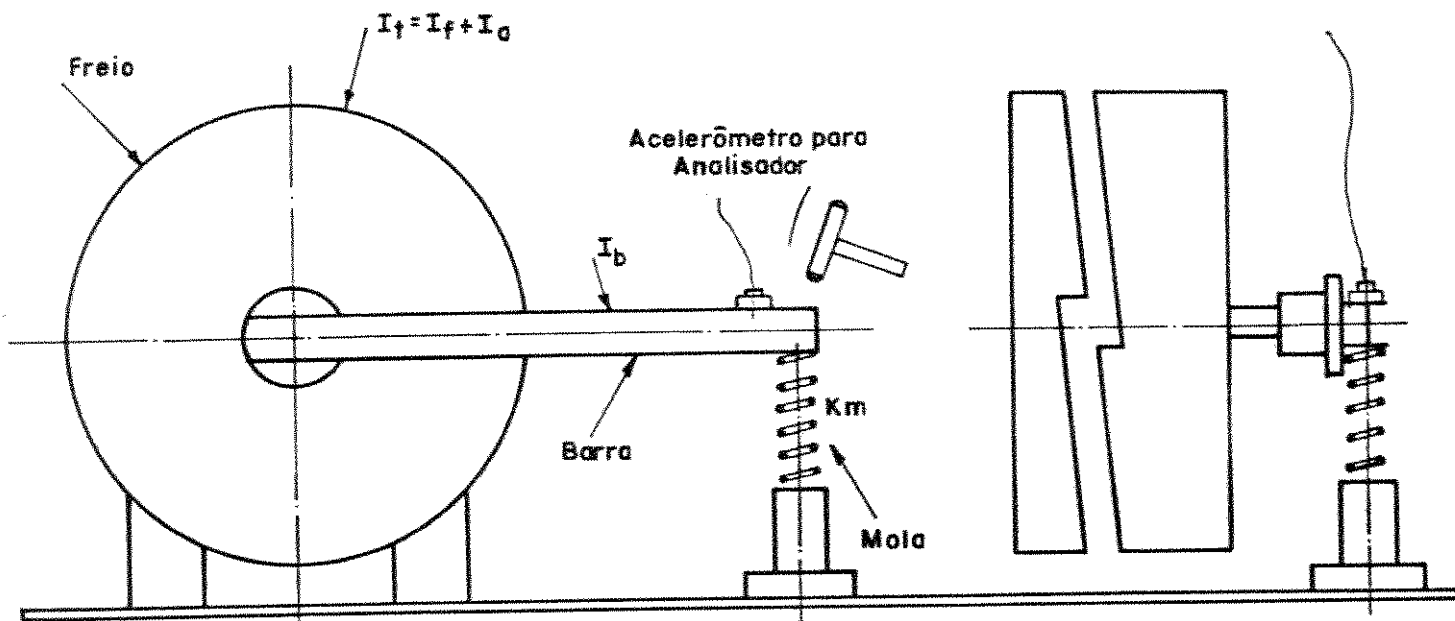


Figura 2.6: Banco de Ensaio - Momento de Inércia do Freio

A representação esquemática do banco de ensaio da figura 2.6, para a formulação das equações de movimento e obtenção de uma expressão analítica da frequência natural é apresentada na figura 2.7

A equação de movimento do sistema é:

$$I\ddot{\Theta} + K_t\Theta = F(t)$$

Os valores de  $I$  e  $K_t$  são definidos na figura 2.7, sendo:

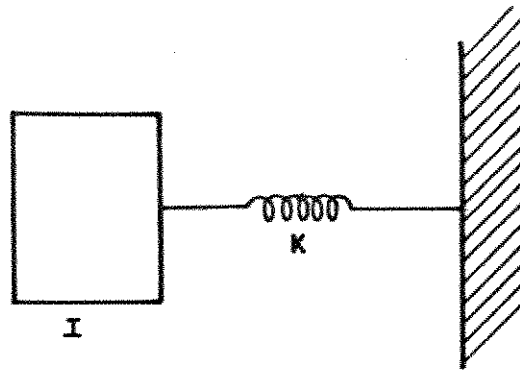


Figura 2.7: Sistema de Um Grau de Liberdade - Momento de Inércia do Freio

$$I = I_t + I_b$$

onde:

$I_t$  - Momento de Inércia do freio ( $I_f$ ) somado ao Momento de Inércia do Acoplamento.

$I_b$  - Momento de Inércia da Barra.

A figura 2.8 apresenta o esquema de deslocamento da barra.

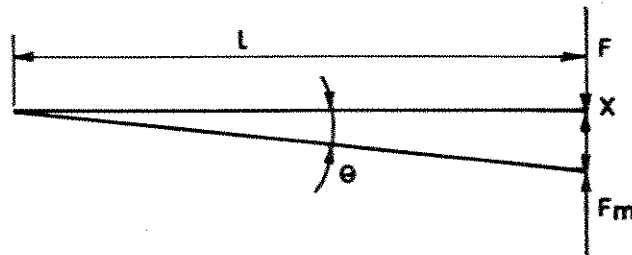


Figura 2.8: Representação do deslocamento da barra

Considerando que para pequenos ângulos podemos linearizar o deslocamento angular fazendo:  $\Theta = x/l$ .

Utilizando as definições de torque e frequência natural obtemos a expressão:

$$W_n = \sqrt{\frac{K_m l^2}{I_t + I_b}} \quad (2.4)$$

A frequência natural obtida no ensaio conforme bancada da figura 2.6 é de 5,12 Hz, sendo o espectro apresentado na figura 2.9. Este valor é confirmado após inúmeras medições. Os demais valores a serem substituídos em 2.4 para o cálculo de  $I_t$  são:

$$K_m = 959,3 N/m$$

$$I_b = 0,04067 kgm^2$$

$$l = 0,6765 m$$

Substituindo os valores tem-se:

$$I_t = 0,3827 kgm^2$$

A aplicação deste método é verificada para o modelamento do mesmo sistema com dois graus de liberdade, considerando a rigidez do eixo entre o acoplamento e o rotor do freio. O resultado obtido é praticamente o mesmo. Um ensaio semelhante com o motor elétrico, cujo momento de inércia é conhecido, confirma os dados de catálogo.

O valor do momento de inércia do acoplamento é  $0,0038 kgm^2$ , subtraindo este valor de  $I_t$  é obtido o valor do momento de inércia do freio: ~~—~~

$$I_f = 0,379 kgm^2$$

Para a determinação da rigidez da ponta de eixo do freio é utilizado o mesmo procedimento empregado no caso do motor elétrico. Porém, neste caso as dificuldades encontradas são maiores do que no caso anterior.

Da mesma forma que no motor elétrico, para o freio também não é disponível o desenho de detalhes do conjunto rotativo. Portanto, a determinação da rigidez pode ser feita com o levantamento dimensional ou então com a medida da frequência natural.

O levantamento dimensional do eixo do freio é de difícil execução, pois não existe acesso para as partes internas. A figura 2.10 apresenta um esboço para o eixo do lado acionado do freio.

Utilizando as equações 2.1 e 2.2 determina-se a rigidez para os diversos trechos do eixo, conforme indicações da figura 2.10.

$$K_c = 21094377 N m/rad$$

$$K_1 = 375704 N m/rad$$

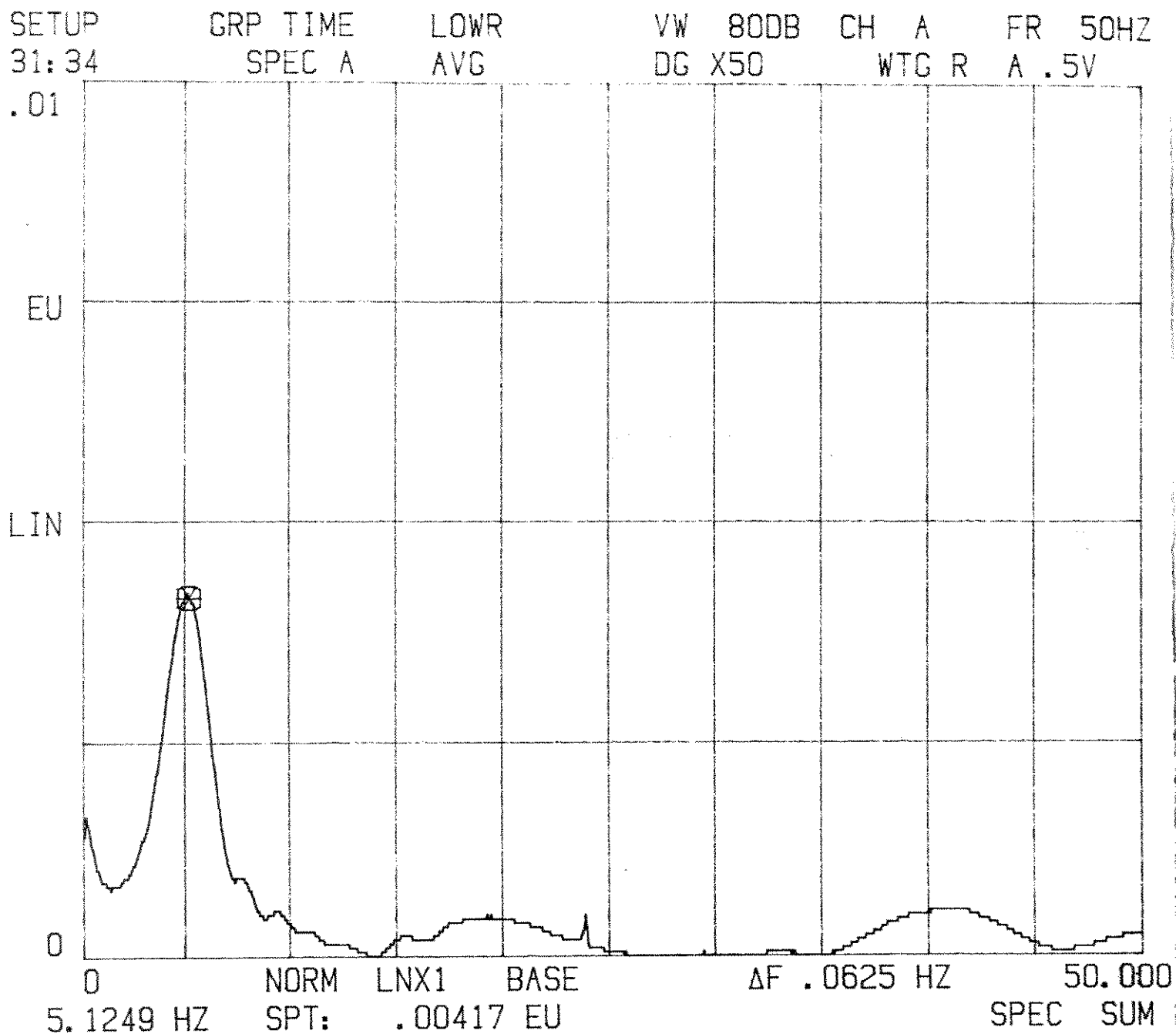


Figura 2.9: Espectro para Determinação do Momento de Inércia do Freio

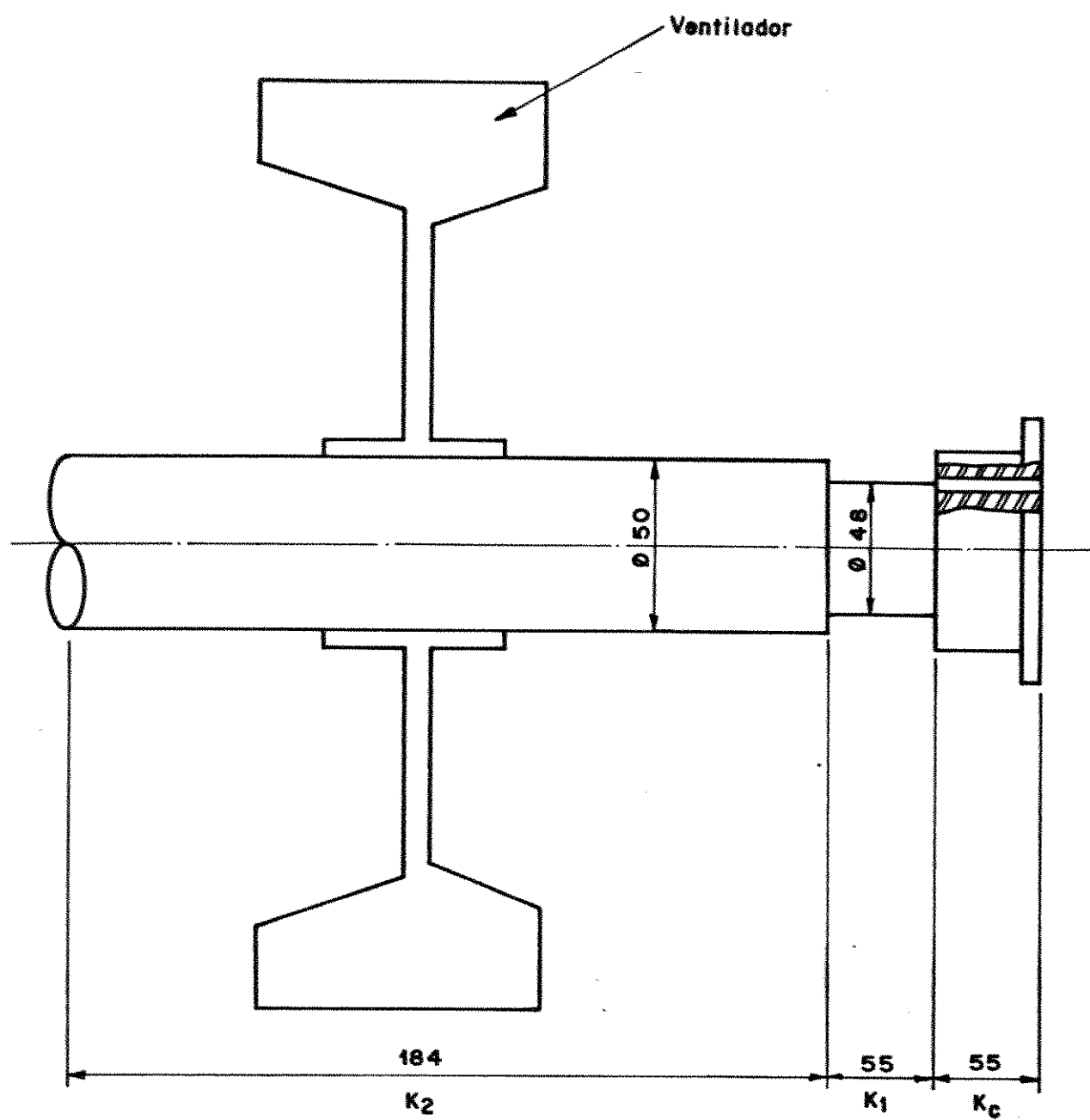


Figura 2.10: Ponta de Eixo do Freio

$$K_2 = 264445 \text{ Nm/rad}$$

O valor resultante para a rigidez torcional é obtido com a associação em série das molas correspondentes a cada trecho, sendo:

$$K = 153950 \text{ Nm/rad}$$

A determinação experimental da rigidez da ponta de eixo do freio é feita com a bancada semelhante à da figura 2.2.

Devido as dificuldades de montagem e as características não simétricas do freio, neste teste é necessário um maior cuidado. Nas medidas efetuadas pode ocorrer dificuldade na separação das frequências naturais de torção e de flexão do eixo.

Considerando o fato de que as pontas de eixo do freio não são simétricas, neste caso são levantadas as duas primeiras frequências naturais do sistema. As figuras 2.11 e 2.12 apresentam os espectros de frequências. Na figura 2.11 o valor de 70,62 Hz corresponde à primeira frequência e a figura 2.12 com 407,49 Hz apresenta a segunda frequência natural do sistema.

A equação 2.3 não pode ser utilizada neste caso ( $K_1 \neq K_2$ ). Utilizando a referência [15] a equação das frequências naturais de um sistema com dois graus de liberdade, sendo  $K_1$  diferente de  $K_2$ , é:

$$W_n^2 = \frac{1}{2} \frac{I_1 K_2 + I_2 (K_1 + K_2)}{I_1 I_2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{I_1 K_2 + I_2 (K_1 + K_2)}{I_1 I_2} \right)^2 - \frac{4[(K_1 + K_2)K_2 - K_2^2]}{I_1 I_2}} \quad (2.5)$$

Substituindo os valores de  $I_1$  e  $I_2$ , que valem 0,379 e 0,0035  $\text{kgm}^2$  respectivamente, é obtida uma relação entre as frequências naturais, determinadas pelas figuras 2.11 e 2.12, e os valores de rigidez procurados.

A determinação de  $K_1$  e  $K_2$  é feita com um programa iterativo, após a substituição dos valores conhecidos na equação 2.5. Os valores obtidos são:

$$K_1 = 162960 \text{ Nm/rad}$$

$$K_2 = 85048 \text{ Nm/rad}$$

Sendo  $K_1$  a ponta de eixo do lado do acionamento, este é o valor a ser utilizado no modelamento.

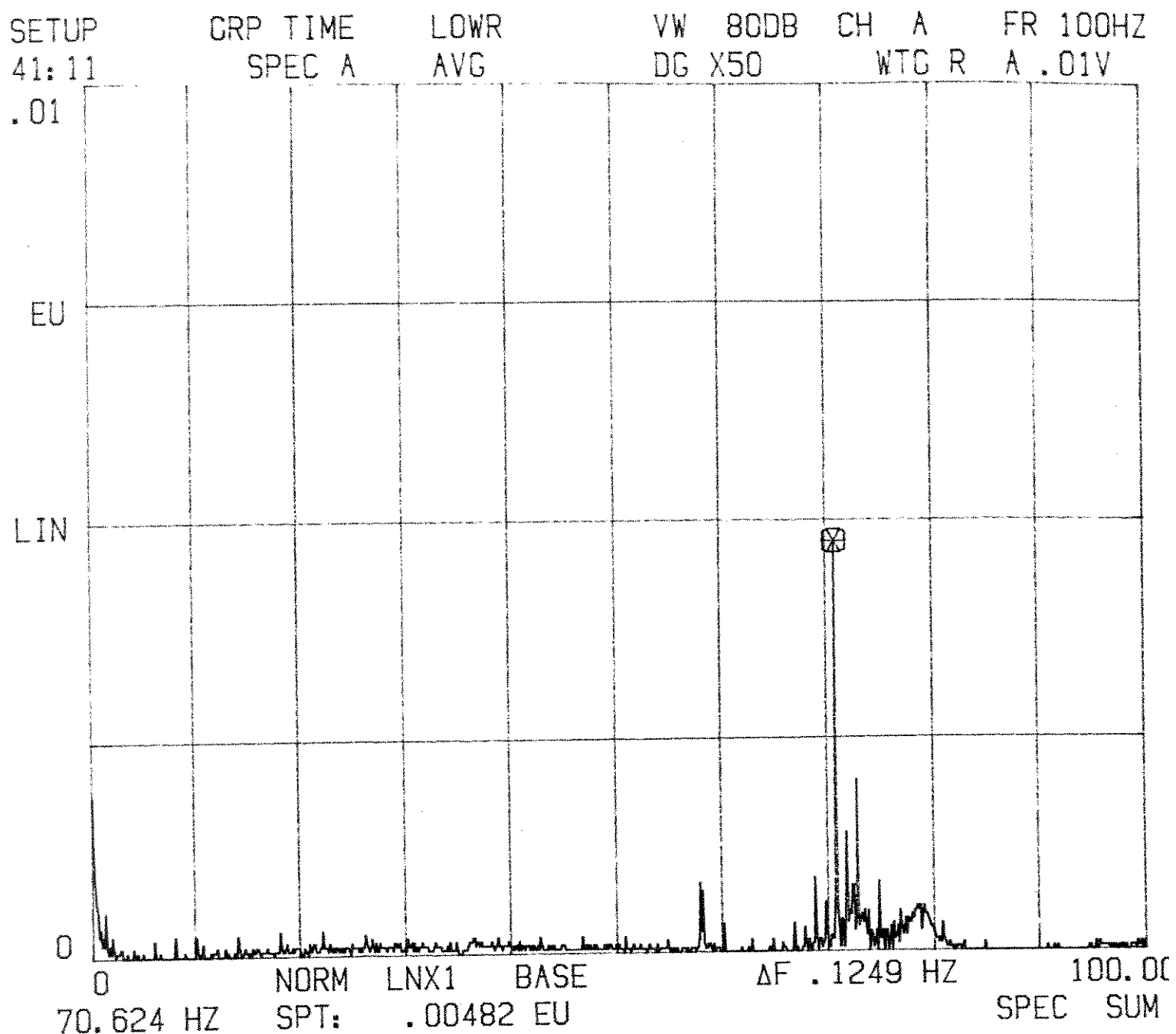


Figura 2.11: Espectro para Determinação da Rígidez da Ponta de Eixo do Freio - Primeira Frequência Natural

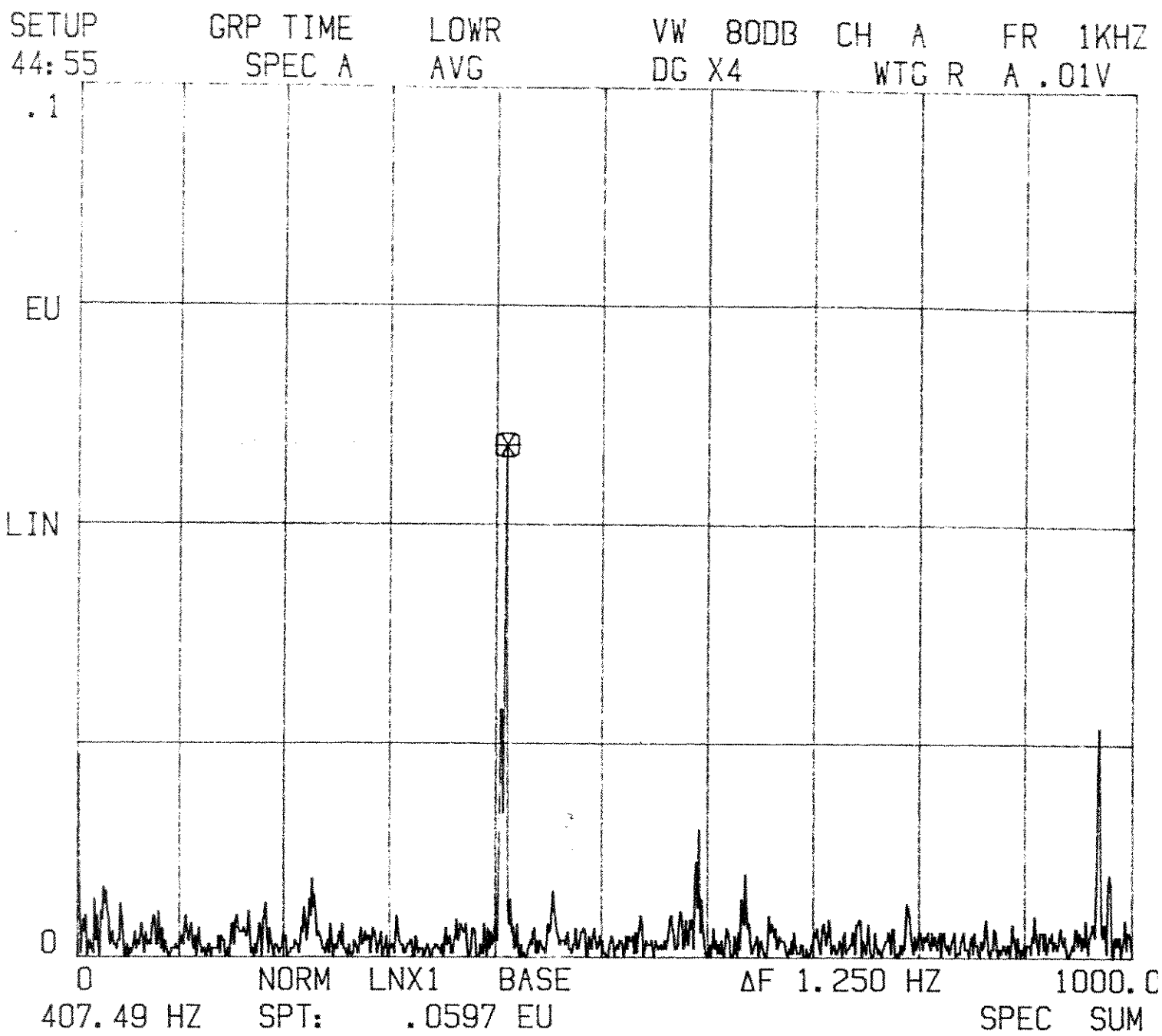


Figura 2.12: Espectro para Determinação da Rígidez da Ponta de Eixo do Freio - Segunda Frequência Natural

Comparando o valor obtido através da medição do espectro e o valor obtido pelo levantamento dimensional, obtém-se um desvio de 5,5%. Para os cálculos e simulações seguintes será considerado o valor experimental de  $K_1 = 162960 \text{ Nm/rad}$ .

## 2.2 Sistema de Transmissão de Torque

O sistema de transmissão de torque é a parte principal da bancada de ensaio, em função dos objetivos deste trabalho. Nesta parte será feita a variação da folga de acionamento e a transmissão do sinal. As etapas de preparação do sistema de transmissão de torque são descritas a seguir.

### 2.2.1 Especificação do Transmissor de Sinal

Para a definição do transmissor de sinal devem ser observadas as características geométricas a serem atendidas e as características do sinal a ser medido. Para a utilização do aparelho devem ser tomados cuidados especiais com relação à segurança e verificadas as limitações elétricas e mecânicas.

As características completas do transmissor de sinal podem ser obtidas na referência [18]. Alguns dados referentes ao aparelho são descritos a seguir:

|                     |                                      |
|---------------------|--------------------------------------|
| fabricante:         | S. Himmelstein and Company           |
| referência:         | 6065                                 |
| modelo:             | MCRT 6 - 02 (AH,AH)                  |
| série:              | 6 - 177                              |
| rotação:            | 0 - 7500 rpm - bidirecional          |
| canal de excitação: | 1, AH                                |
| canal de sinal:     | 2, AH                                |
| momento de inércia: | $1,2715 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$ |

O princípio de funcionamento deste aparelho é basicamente de um transformador rotativo e os detalhes podem ser obtidos no item referente à conexão do transmissor de sinal.

### 2.2.2 Projeto do Eixo de Transmissão de Torque

O projeto do eixo deve atender às características geométricas do transmissor de sinal utilizado, permitir a colagem dos extensômetros e possibilitar uma variação de deformação devido ao torque transmitido compatível com a sensibilidade dos extensômetros.

Com relação ao transmissor o diâmetro do eixo fica limitado a 38,1 mm, o que corresponde ao diâmetro do furo de passagem do eixo.

Para o sistema o eixo foi dimensionado em 25,4 mm. Considerando a potência e rotação nominal do motor, é determinado o torque nominal transmitido:

$$T = 61,33 \text{ Nm}$$

A tensão de cisalhamento no eixo, provocada pelo torque nominal, é:

$$\tau = 38,12 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

A tensão de escoamento do material do eixo é de  $200 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ . Portanto, o diâmetro de 25,4 mm atende às condições do ensaio.

As propriedades do eixo de transmissão estão relacionadas a seguir:

|                                          |                                     |
|------------------------------------------|-------------------------------------|
| material:                                | Aço ABNT 1020                       |
| módulo de elasticidade longitudinal (E): | $21 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$    |
| módulo de elasticidade transversal (G):  | $7,96 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$  |
| rigidez torcional:                       | $16121 \text{ Nm/rad (*)}$          |
| momento de inércia longitudinal:         | $6 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2 (*)$ |

(\*) nestes cálculos não foram incluídas as extremidades correspondentes às chavetas.

### 2.2.3 Projeto do Acoplamento

O acoplamento a ser utilizado deve atender duas condições fundamentais: transmitir o movimento do motor para a carga e permitir a variação de folgas para a simulação de diferentes condições de operação.

As propriedades do acoplamento relativas ao material são as mesmas do eixo. O cálculo da rigidez torcional própria é apresentado no item referente às propriedades do torquímetro.

Um detalhe muito importante para o estudo do sistema é a análise da rigidez torcional entre os semi-acoplamentos, devido à transmissão do torque pelos pinos. A figura 2.13 apresenta um corte transversal entre os semi-acoplamentos, mostrando a posição dos pinos na transmissão.

Considerando que exista um perfeito alinhamento e a distribuição dos esforços seja exatamente igual entre os pinos e os furos, o torque transmitido é:

$$T = 3FR \quad (2.6)$$

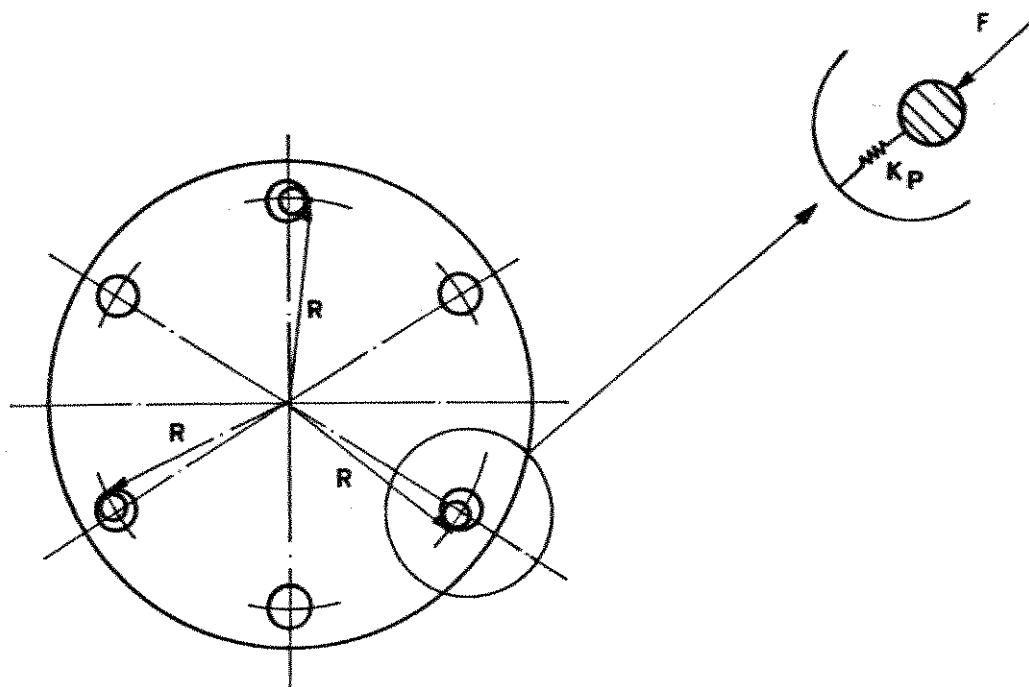


Figura 2.13: Transmissão de Torque no Semi-Acoplamento

onde:

$F$  - força entre o furo e o pino

$R$  - raio entre o centro do acoplamento e o centro do pino

O valor da força  $F$  é obtida na equação da mola.

$$F = K_p \alpha \quad (2.7)$$

onde:

$K_p$  - rigidez do contato entre o furo e o pino

$\alpha$  - deformação no contato

O torque transmitido é obtido na equação:

$$T = K_f \theta \quad (2.8)$$

A relação entre a deformação angular  $\theta$  e a deformação linear  $\alpha$  é obtida na expressão:

$$\text{sen} \theta = \frac{\alpha}{R} \quad (2.9)$$

Para pequenos ângulos  $\text{sen} \theta \approx \theta$ ;

$$\theta = \frac{\alpha}{R} \quad (2.10)$$

Substituindo 2.10 e 2.7 em 2.6, tem-se:

$$T = 3K_p R^2 \theta \quad (2.11)$$

Comparando 2.11 com 2.8, o valor de  $K_f$  para os pinos fica:

$$K_f = 3K_p R^2 \quad (2.12)$$

Portanto, para a determinação da rigidez torcional da transmissão no acoplamento é necessário obter a rigidez do contato entre o pino e o furo do acoplamento. Este detalhe é discutido no Capítulo 3, no tratamento da não linearidade do sistema devido à folga do acoplamento.

## 2.3 Construção do Torquímetro

Denomina-se torquímetro o conjunto de peças do sistema de transmissão preparadas para a medição do torque. Os componentes do torquímetro são:

- dois semi-acoplamentos
- um eixo de transmissão
- transmissor de sinal

A construção do torquímetro é uma etapa do processo de medição de torque que exige uma série de considerações práticas e teóricas, que têm por objetivo garantir o sucesso das medições efetuadas. Em seguida são descritas as etapas para a preparação de um torquímetro.

### 2.3.1 Seleção e Colagem dos Extensômetros Elétricos

A utilização de extensômetros elétricos para a medição de torque, como já foi mencionado anteriormente, é o processo mais difundido. Apesar dos diversos cuidados necessários para a utilização destes elementos, as vantagens do uso do extensômetro elétrico, tornam este método o mais indicado.

As especificações do extensômetro utilizado são descritas a seguir:

|                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| fabricante:                 | Hottinger Baldwin Messtechnik GMBH |
| tipo:                       | 3/120 X Y Z L                      |
| resistência:                | $120 \Omega \pm 1\%$               |
| fator de sensibilidade:     | $1,99 \pm 1\%$                     |
| coeficiente de temperatura: | 95 ppm/K                           |

O extensômetro descrito acima apresenta a possibilidade de utilização em ponte de Wheatstone completa, conforme mostrado na figura 2.14.

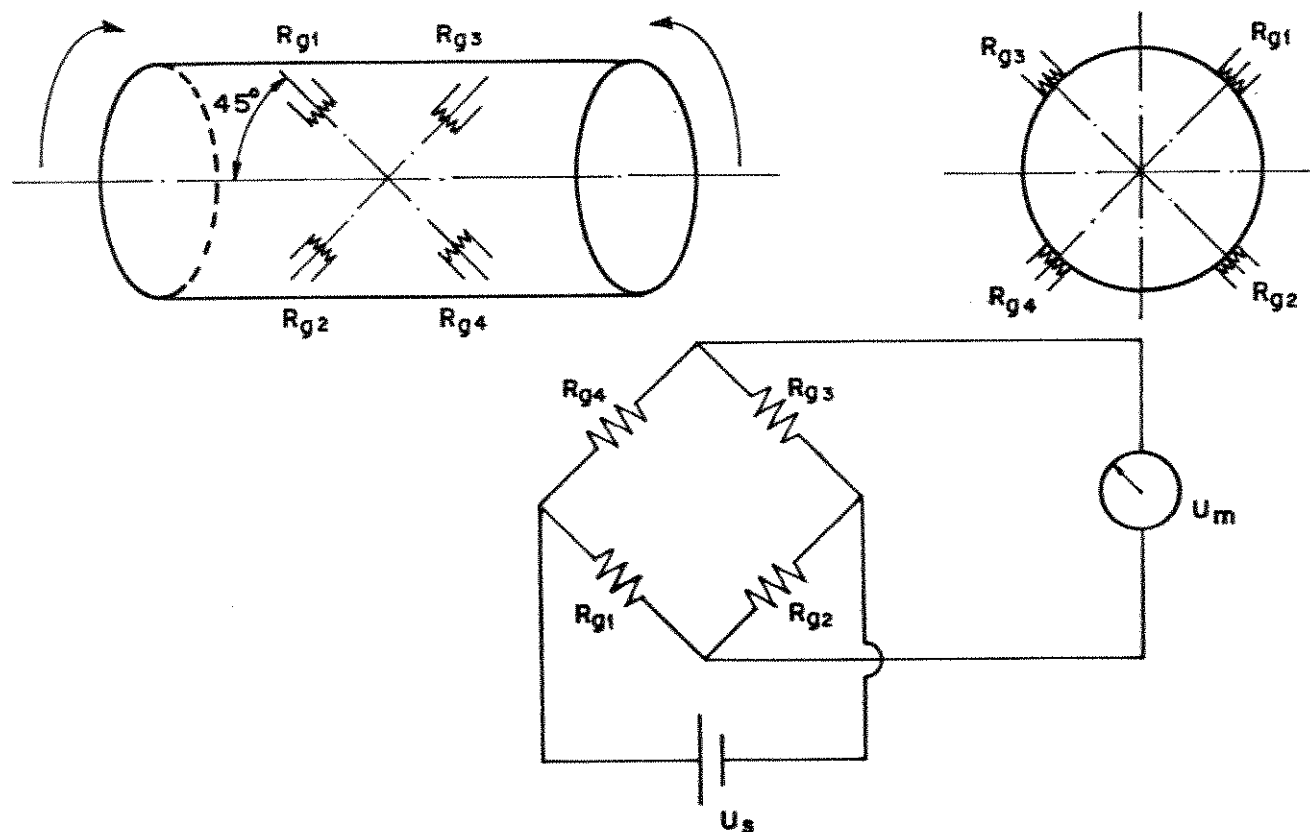


Figura 2.14: Colagem e Ligação dos Extensômetros

A colagem dos extensômetros conforme mostrado na figura 2.14 permite a eliminação das tensões de flexão. Na direção de  $45^\circ$  em relação ao eixo de simetria os extensômetros irão deformar conforme as tensões de tração e compressão, que definem o torque transmi-

tido. As deformações de tração e compressão, devido à flexão, são anuladas pelos pares  $Rg_1/Rg_2$  e  $Rg_3/Rg_4$ . A utilização de 4 extensômetros iguais permite a compensação de deformação devido à dilatação térmica.

Com a deformação do extensômetro é provocado um desbalanceamento da ponte, devido à variação da resistência elétrica. As equações básicas para a análise deste sinal são as seguintes:

$$U_m = K_s \varepsilon_1 U_s \quad (2.13)$$

onde:

$U_m$  - tensão medida

$K_s$  - fator de sensibilidade

$\varepsilon_1$  - deformação por tração  $U_s$  - tensão de alimentação

Para o torque puro, a deformação  $\gamma$  é definida por:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \quad (2.14)$$

onde:

$\varepsilon_2$  - deformação por compressão

Utilizando a expressão do torque:

$$T = \frac{\pi R^3 G (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} \quad (2.15)$$

Sendo  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ , obtendo o valor de  $\varepsilon_1$  em 2.15 e substituindo em 2.13 é obtido o valor da tensão medida ( $U_m$ ) em função do torque:

$$U_m = \frac{K_s T}{\pi R^3 G} U_s \quad (2.16)$$

onde:

T - momento torsor

R - raio do eixo

G - módulo de elasticidade transversal

Conforme figura 2.14 as deformações torcionais  $\varepsilon$  serão positivas em  $Rg_1$  e  $Rg_3$  e negativas em  $Rg_2$  e  $Rg_4$ .

A colagem dos extensômetros exige uma série de outros cuidados especiais para garantir resultados perfeitos na medição. A referência [11] apresenta a metodologia completa para preparação da superfície, colagem e proteção dos extensômetros. No caso da medição de torque é fundamental o posicionamento correto do extensômetro a  $45^\circ$  em relação ao eixo de simetria.

### 2.3.2 Conexão do Transmissor de Sinal

O transmissor de sinal é a interface entre o sensor (extensômetro elétrico) e um receptor externo ao sistema.

A referência [18] apresenta a descrição do transformador rotativo da S. Himmelstein and Company. O princípio de funcionamento do transmissor de sinal é facilmente compreendido na figura 2.15.

O transmissor descrito na figura possui um par de transformadores rotativos. No primeiro transformador é feita a alimentação da ponte com a tensão  $U_s$ , que passa da bobina primária estática para a bobina secundária rotativa. No segundo transformador é feita a recepção do sinal  $U_m$ , que passa da bobina primária rotativa para a bobina secundária fixa. Estes transformadores correspondem respectivamente ao canal 1 de excitação e canal 2 de sinal, mencionados no item 2.2.1 sobre a especificação do transmissor de sinal. O número de canais do aparelho pode ser superior aos deste modelo. O princípio de funcionamento dos transformadores pode ser encontrado na referência [19].

### 2.3.3 Calibração do Torquímetro

Após a colagem dos extensômetros e conexão do transmissor, o torquímetro tem a sua montagem concluída com a colocação dos semi-acoplamentos em suas extremidades.

A aquisição do sinal analógico do transmissor é feita por um equipamento específico. O instrumento utilizado neste caso é o PR 9307 da Philips, cujos detalhes de aplicação e operação estão na referência [20]. Este instrumento permite a calibração da ponte, indica o valor de desequilíbrio ( $U_m$ ) e possui uma saída de tensão para conexão do sinal medido ( $U_m$ ) com outros instrumentos (osciloscópio e analisador espectral). O sinal de alimentação da ponte ( $U_s$ ) também é obtido no PR 9307, que permite alimentação em níveis diferentes de tensão. Neste caso  $U_s$  deve ser de 4 V, em função do limite de corrente dos extensômetros.

Para a calibração do torquímetro é necessária a montagem de uma bancada de ensaio. A figura 2.16 apresenta a bancada utilizada para esta finalidade.

A primeira etapa da calibração é o balanceamento do aparelho PR 9307, conforme indicações do manual mencionado na referência [20]. Selecionados os ajustes de balanceamento do aparelho, o indicador analógico deve ser colocado no valor zero, para a condição descrita na bancada. Como pode ser observado na figura 2.16 o aparelho é calibrado com a barra e o porta peso montados. Para facilitar a leitura pode ser utilizado um multímetro digital conectado ao terminal de saída do aparelho. Em seguida os pesos são adicionados e a cada valor é feita a leitura correspondente, após a colocação de todos os pesos são feitas as leituras no sentido inverso. Este procedimento é repetido pelo menos três vezes, sendo os valores indicados nas tabelas 2.1, 2.2 e 2.3.

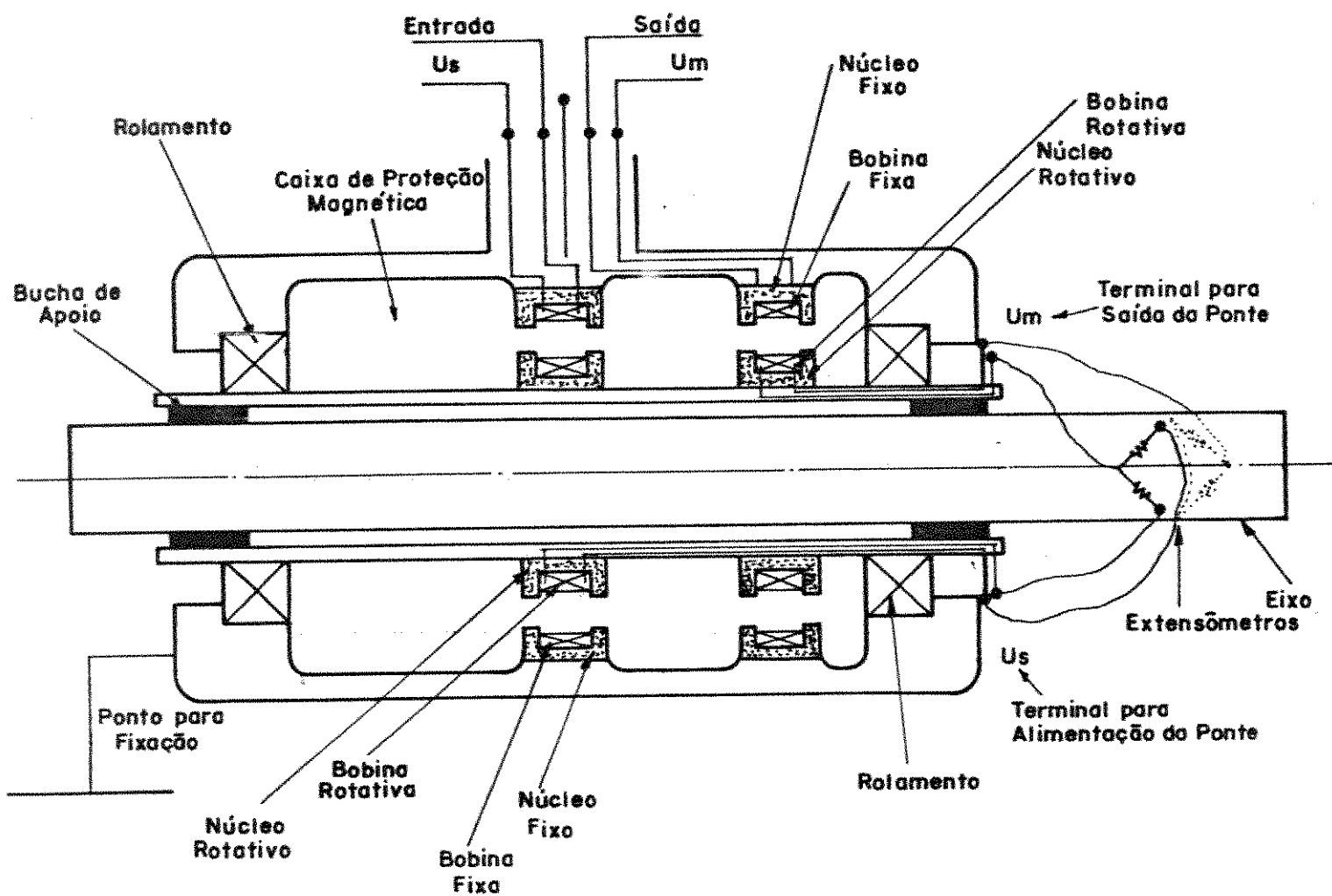


Figura 2.15: Esquema de Funcionamento do Transmissor de Sinal - Transformador Rotativo

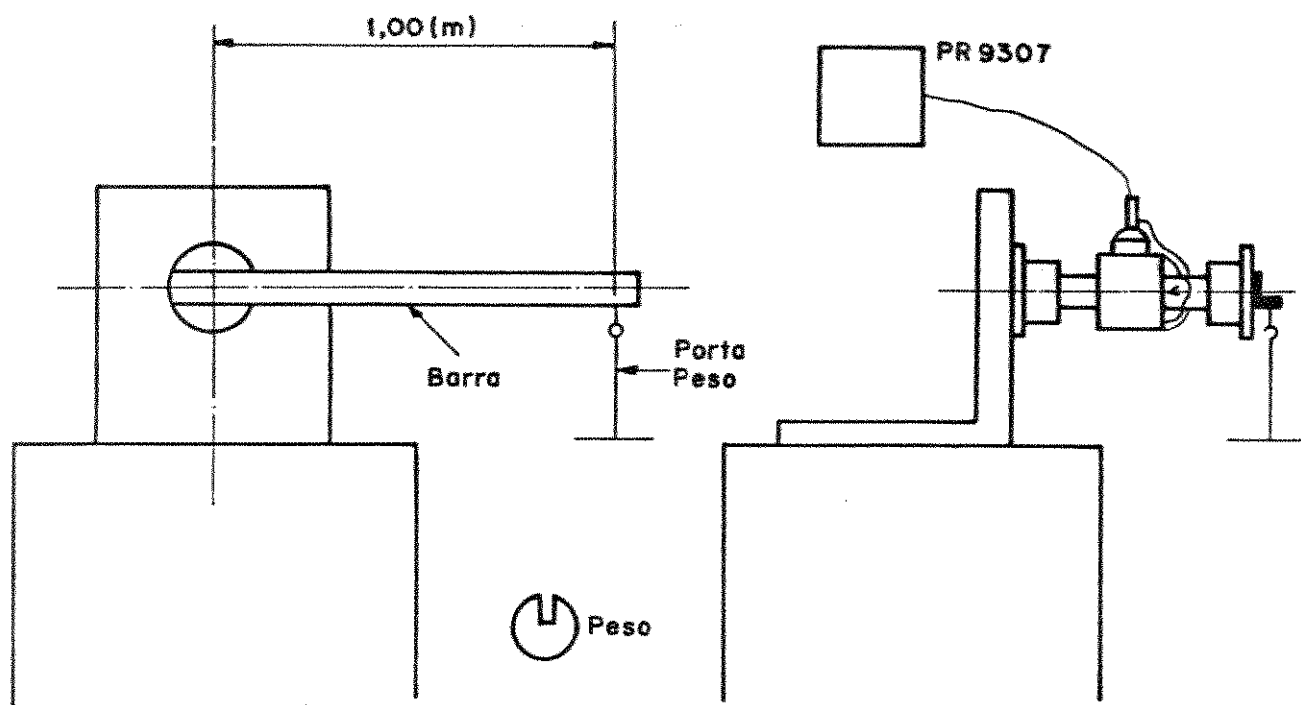


Figura 2.16: Bancada para Calibração do Torquímetro

| n | Acréscimo |        |            | Decréscimo |        |            |
|---|-----------|--------|------------|------------|--------|------------|
|   | P - kgf   | T - Nm | $U_m$ - mV | P - kgf    | T - Nm | $U_m$ - mV |
| 1 | 1,0000    | 9,81   | 17,8       | -1,9939    | 78,19  | 147,3      |
| 2 | 0,9959    | 19,58  | 35,6       | -1,9934    | 58,64  | 110,0      |
| 3 | 0,9914    | 29,30  | 53,7       | -1,9934    | 39,08  | 72,5       |
| 4 | 0,9965    | 39,08  | 72,2       | -0,9965    | 29,30  | 54,0       |
| 5 | 1,9934    | 58,64  | 109,6      | -0,9914    | 19,58  | 35,8       |
| 6 | 1,9934    | 78,19  | 147,3      | -0,9959    | 9,81   | 17,9       |
| 7 | 1,9939    | 97,75  | 185,0      | -1,0000    | 0      | 0,1        |

Tabela 2.1: Primeiro Levantamento para Calibração

| n | Acréscimo |        |            | Decréscimo |        |            |
|---|-----------|--------|------------|------------|--------|------------|
|   | P - kgf   | T - Nm | $U_m$ - mV | P - kgf    | T - Nm | $U_m$ - mV |
| 1 | 1,0000    | 9,81   | 17,6       | -1,9939    | 78,19  | 147,2      |
| 2 | 0,9959    | 19,58  | 35,4       | -1,9934    | 58,64  | 109,5      |
| 3 | 0,9914    | 29,30  | 53,5       | -1,9934    | 39,08  | 72,3       |
| 4 | 0,9965    | 39,08  | 72,1       | -0,9965    | 29,30  | 53,9       |
| 5 | 1,9934    | 58,64  | 109,4      | -0,9914    | 19,58  | 35,8       |
| 6 | 1,9934    | 78,19  | 147,0      | -0,9959    | 9,81   | 17,9       |
| 7 | 1,9939    | 97,75  | 184,6      | -1,0000    | 0      | 0,1        |

Tabela 2.2: Segundo Levantamento para Calibração

| n | Acréscimo |        |            | Decréscimo |        |            |
|---|-----------|--------|------------|------------|--------|------------|
|   | P - kgf   | T - Nm | $U_m$ - mV | P - kgf    | T - Nm | $U_m$ - mV |
| 1 | 1,0000    | 9,81   | 17,9       | -1,9939    | 78,19  | 147,2      |
| 2 | 0,9959    | 19,58  | 35,8       | -1,9934    | 58,64  | 109,6      |
| 3 | 0,9914    | 29,30  | 53,9       | -1,9934    | 39,08  | 72,4       |
| 4 | 0,9965    | 39,08  | 72,3       | -0,9965    | 29,30  | 54,0       |
| 5 | 1,9934    | 58,64  | 109,6      | -0,9914    | 19,58  | 35,9       |
| 6 | 1,9934    | 78,19  | 147,2      | -0,9959    | 9,81   | 18,0       |
| 7 | 1,9939    | 97,75  | 184,7      | -1,0000    | 0      | 0,3        |

Tabela 2.3: Terceiro Levantamento para Calibração

Com os valores das tabelas e utilizando um programa de regressão linear é obtido o gráfico da figura 2.17. A equação do torquímetro, já indicada no gráfico é:

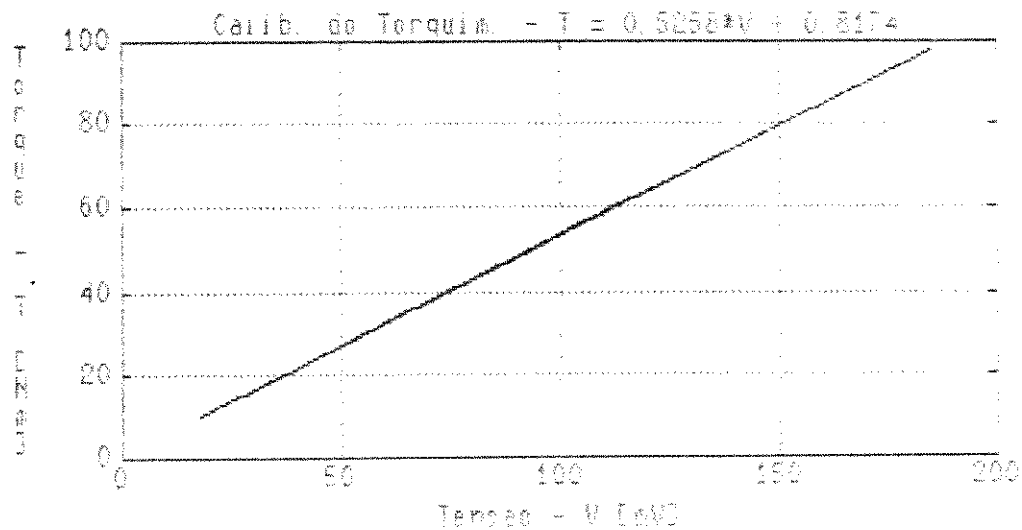


Figura 2.17: Gráfico de Calibração do Torquímetro

$$T = 0,5258U_m + 0,8174 \quad (2.17)$$

É importante verificar se os valores lidos correspondem às expectativas teóricas. Para isto, deve ser utilizada a equação 2.16 com os valores mencionados abaixo.

$$K_s = 1,99 \text{ (especificado para o extensômetro)}$$

$$R = 12,7 \cdot 10^{-3} m$$

$$G = 7,962 \cdot 10^{10} N/m^2$$

$$U_m = \frac{1,99T}{\pi(12,7 \cdot 10^{-3})^3 7,962 \cdot 10^{10}}$$

$$U_m = 1,5536 \cdot 10^{-4} T$$

$$T = 64368.0U_m$$

Considerando  $U_m$  em milivolts, tem-se:

$$T = 64,368U_m$$

Para a ponte completa e sensibilidade 1 (mv), conforme selecionado no aparelho, é necessário ajustar o fundo de escala com o fator 125. Este valor pode ser obtido na referência [20] ou no próprio aparelho.

Portanto, o valor de torque corrigido é:

$$T = \frac{643,680U_m}{125}$$

$$T = 0,5150U_m \quad (2.18)$$

A equação 2.17 de calibração e a equação 2.18 teórica apresentam valores muito próximos, com desvios da ordem de 2%. Este resultado demonstra que a preparação e montagem do torquímetro apresentam excelente qualidade.

#### 2.3.4 Propriedades do Torquímetro

Para modelamento do sistema pelo método dos parâmetros concentrados, deve-se determinar o momento de inércia e a rigidez torcional do conjunto formado pelos componentes do torquímetro. A figura 2.18 apresenta a sequência de operações para determinação destas propriedades.

Os valores de rigidez torcional dos diversos trechos descritos na figura 2.18 são obtidos pelas equações 2.1 e 2.2 e seus valores calculados são:

$$K_{A1} = 112256939 \text{ Nm/rad}$$

$$K_{A2} = 4398191 \text{ Nm/rad}$$

$$K_e = 16121 \text{ Nm/rad}$$

A constante de rigidez torcional equivalente do torquímetro é:

$$K = 16060 \text{ Nm/rad}$$

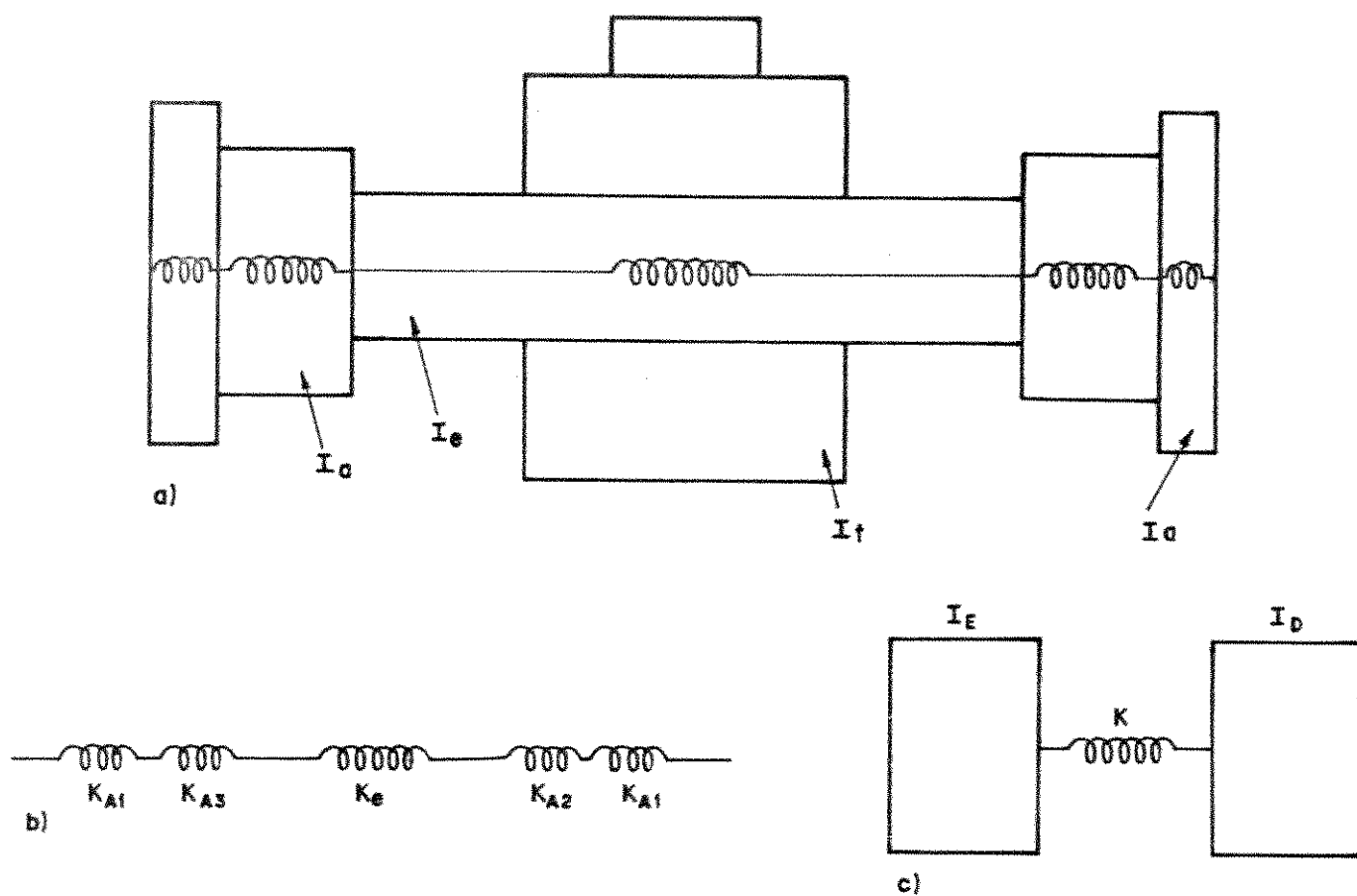


Figura 2.18: a) Distribuição de Rigidez e Inércia no Torquímetro; b) Esquema da Rigidez em Série; c) Momentos de Inércia e Rigidez Equivalente.

Como pode ser observado, o valor da rigidez torcional equivalente é praticamente igual à do eixo, os acoplamentos e chavetas alteram muito pouco este valor.

Os momentos de inércia  $I_E$  e  $I_D$  são iguais. Para obter os valores deve-se somar ao momento de inércia dos semi-acoplamentos a metade do momento de inércia do eixo e do transmissor, o que resulta:

$$I_E = I_D = I_{sa} + I_t/2 + I_e/2$$

$$I_{sa} = 0,0038 \text{ kgm}^2$$

$$I_t = 0,0012715 \text{ kgm}^2$$

$$I_e = 6 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2$$

$$I_E = I_D = 0,0045 \text{ kgm}^2$$

## 2.4 Instrumentação

Para a obtenção do torque e avaliação do comportamento do motor e do freio, foram efetuadas diversas medições, que são descritas pelas figuras de 2.19 a 2.22 apresentadas a seguir. Os instrumentos utilizados estão mencionados nos diagramas de blocos, que foram construídos separadamente para facilitar a compreensão.

As fotografias apresentadas nas figuras 2.23 e 2.24 apresentam os principais instrumentos utilizados. A figura 2.26 apresenta um detalhe do sistema de transmissão e a figura 2.25 contém o conjunto completo utilizado no ensaio.

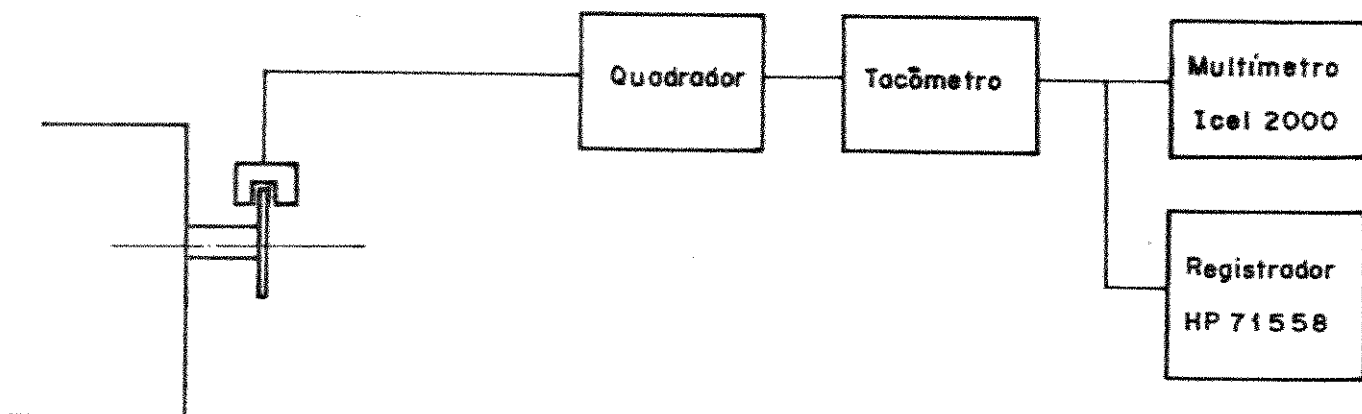


Figura 2.19: Medida de Rotação

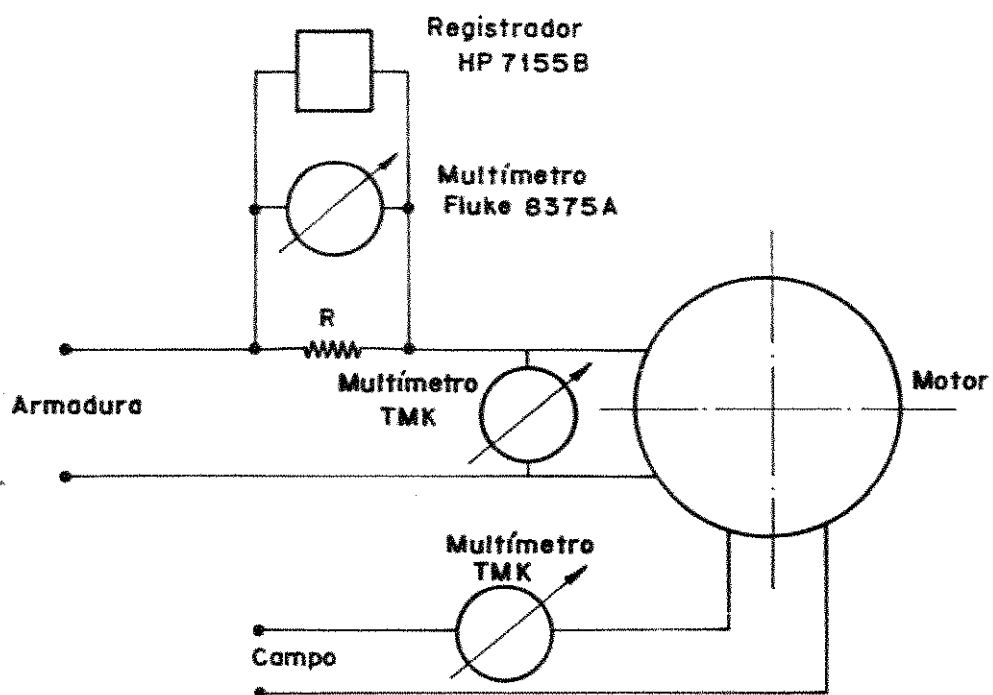


Figura 2.20: Medida de Corrente e Tensão da Armadura e Corrente de Campo do Motor

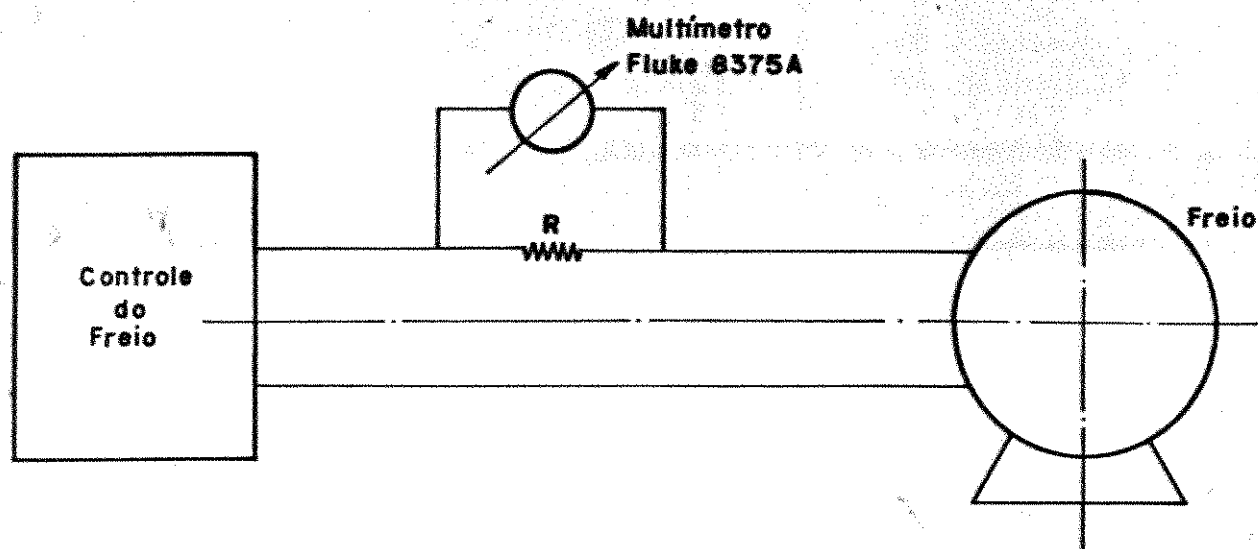


Figura 2.21: Medida de Corrente de Campo do Freio

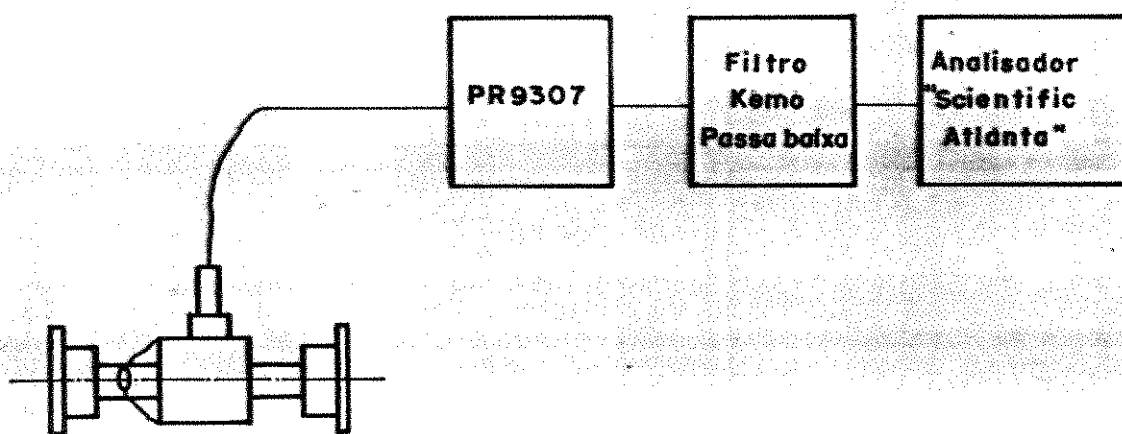


Figura 2.22: Medida do Torque

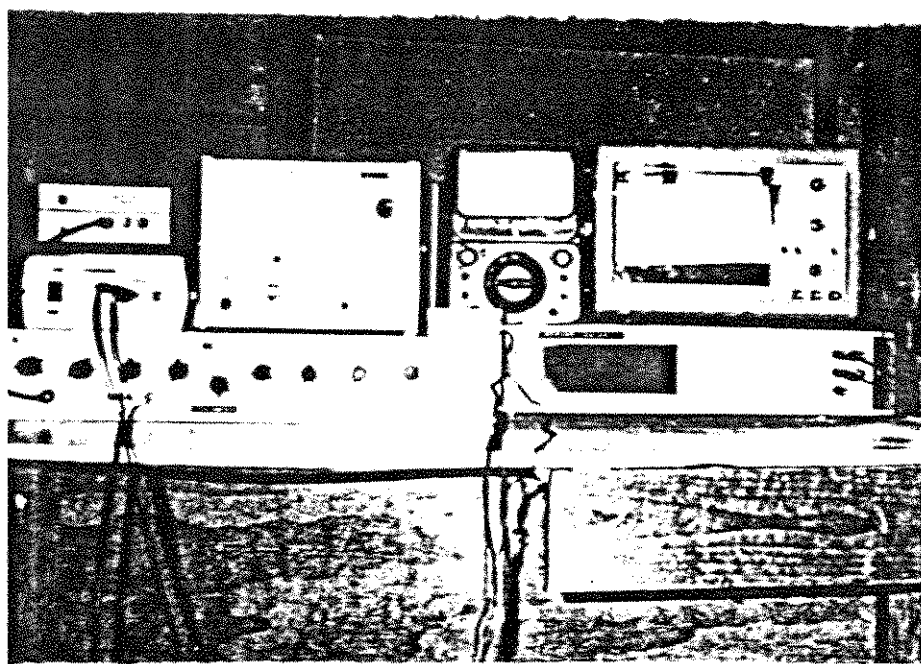


Figura 2.23: Conjunto de Instrumentos de Medição

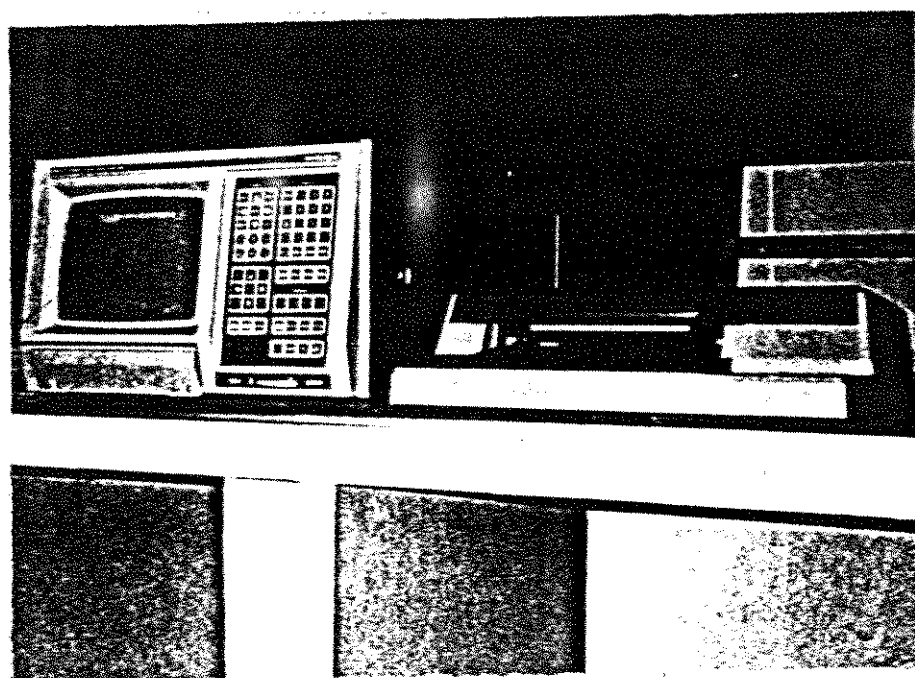


Figura 2.24: Analisador Espectral Scientific-Atlanta

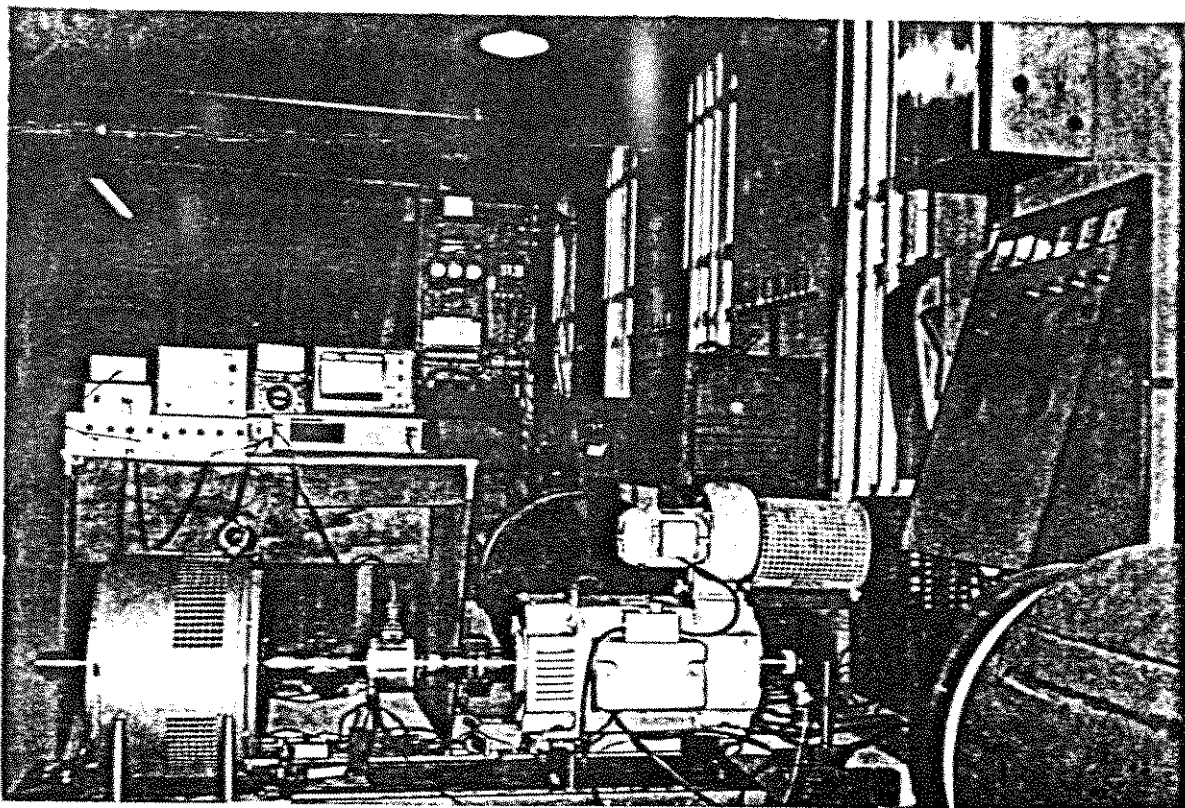


Figura 2.25: Vista Geral da Bancada de Ensaio

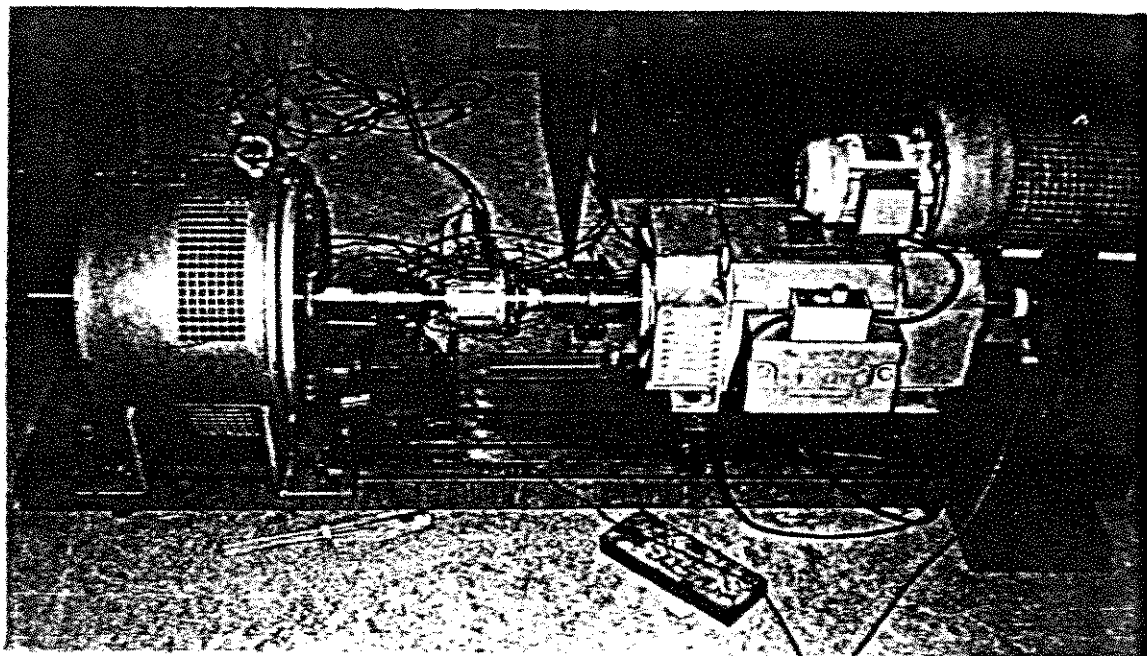


Figura 2.26: Sistema de Transmissão

## Capítulo 3

# Modelo Matemático

A obtenção de um modelo matemático constitui uma importante etapa na análise do comportamento de um sistema torcional. Dependendo das características do equipamento, em determinadas solicitações de operação, o torque transmitido pode alcançar valores bem superiores ao torque de trabalho normal. A simulação de diferentes condições de carga, para identificação da resposta transiente, permite um conhecimento detalhado da influência dos parâmetros envolvidos.

O equipamento é modelado, como já foi mencionado nos capítulos anteriores, pelo método dos parâmetros concentrados. As referências [4] e [7], apresentam exemplos de sistemas dinâmicos modelados com este método. O Capítulo 2 apresentou técnicas utilizadas para a obtenção de algumas propriedades do sistema. Quando existe a necessidade de uma análise mais detalhada, outras propriedades do sistema devem ser consideradas. Neste caso são incluídos os amortecimentos e as folgas. As folgas terão um tratamento particular, pois representam um importante item no desenvolvimento deste trabalho.

Definidos os parâmetros citados acima, é possível descrever o sistema através de equações de movimento. Na forma matricial, pelas Leis de Newton, obtém-se:

$$[I]\{\ddot{\Theta}\} + [C]\{\dot{\Theta}\} + [K]\{\Theta\} = \{T(t)\} \quad (3.1)$$

onde:

$[I]$  - matriz de inércia

$[C]$  - matriz de amortecimento

$[K]$  - matriz de rigidez

$\{\Theta\}$  - vetor deslocamento angular

$\{T(t)\}$  - vetor do torque externo aplicado ao sistema

O modelamento do sistema é feito de duas formas diferentes. No primeiro caso é considerado o sistema sem folgas e posteriormente é incluída a folga no acoplamento. Com base nas propriedades obtidas no Capítulo 2 e outras a serem determinadas neste

Capítulo é definido o número de graus de liberdade para a integração numérica da equação 3.1.

### 3.1 Equações de Movimento do Sistema sem Folga

A figura 3.1 apresenta o esquema básico do sistema descrito no banco de ensaio apresentado no Capítulo 2.

Esta figura representa uma situação ideal em que o sistema não apresenta folga.

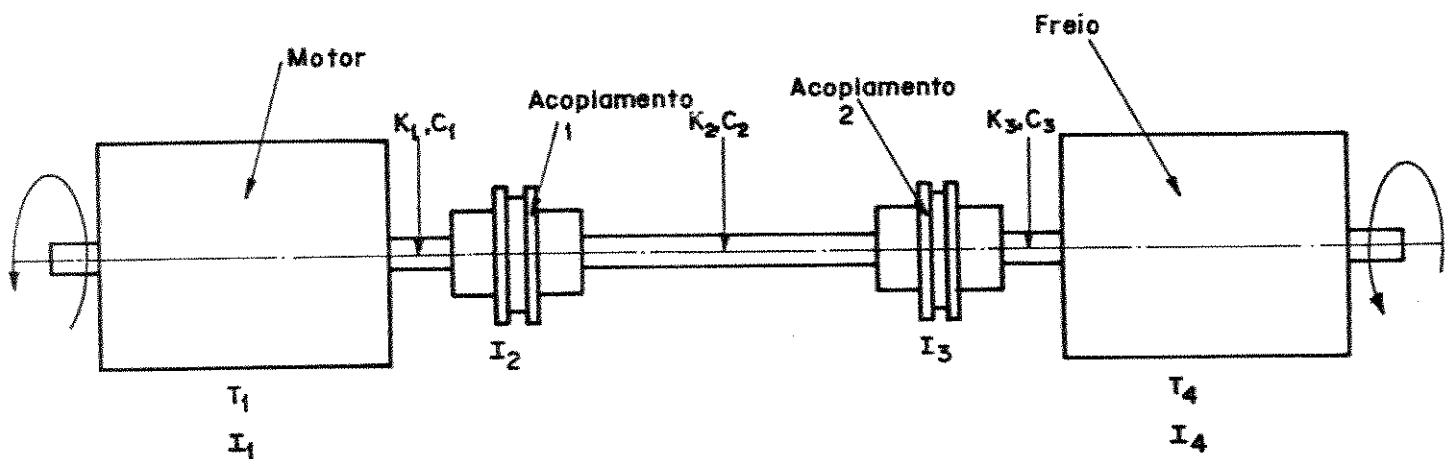


Figura 3.1: Esquema Básico do Banco de Ensaio do Sistema sem Folga

A descrição de cada parâmetro é feita a seguir.

- $T_1(t)$  - torque do motor para acionar o sistema
- $I_1$  - momento de inércia do motor
- $K_1$  - constante de rigidez torcional da ponta de eixo do motor
- $C_1$  - constante de amortecimento da ponta de eixo do motor
- $I_2$  - momento de inércia do acoplamento 1
- $K_2$  - constante de rigidez torcional do eixo do torquímetro
- $C_2$  - constante de amortecimento do eixo do torquímetro
- $I_3$  - momento de inércia do acoplamento 2
- $K_3$  - constante de rigidez torcional da ponta de eixo do freio
- $C_3$  - constante de amortecimento da ponta de eixo do freio
- $T_4(t)$  - torque do freio para simular a carga
- $B_1$  - constante de amortecimento do motor
- $B_4$  - constante de amortecimento do freio
- $I_4$  - momento de inércia do freio

Considerando os parâmetros concentrados mencionados acima a figura 3.2 representa o esquema de discretização do sistema. A rigidez do pino sem folga é muito elevada, desta forma os dois semi-acoplamentos representam uma única inércia. Na determinação de  $I_2$  e  $I_3$  o momento de inércia da ponta de eixo do motor e do freio não foram incluídos, são considerados integralmente em  $I_1$  e  $I_4$  respectivamente, sendo estes valores muito pequenos os resultados não serão alterados.

A partir da figura 3.2 obtém-se o sistema de equações diferenciais 3.2.

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\Theta}_1 + C_1(\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2) + K_1(\Theta_1 - \Theta_2) + B_1 \dot{\Theta}_1 &= T_1(t) \\
 I_2 \ddot{\Theta}_2 + C_1(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1) + C_2(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_3) + K_1(\Theta_2 - \Theta_1) + K_2(\Theta_2 - \Theta_3) &= 0 \\
 I_3 \ddot{\Theta}_3 + C_2(\dot{\Theta}_3 - \dot{\Theta}_2) + C_3(\dot{\Theta}_3 - \dot{\Theta}_4) + K_2(\Theta_3 - \Theta_2) + K_3(\Theta_3 - \Theta_4) &= 0 \\
 I_4 \ddot{\Theta}_4 + C_3(\dot{\Theta}_4 - \dot{\Theta}_3) + K_3(\Theta_4 - \Theta_3) + B_4 \dot{\Theta}_4 &= T_4(t) \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Escrevendo o sistema na forma de matrizes e comparando com a equação 3.1, são obtidas as matrizes de inércia, rigidez e amortecimento para o sistema sem folga.

$$[I] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix}$$

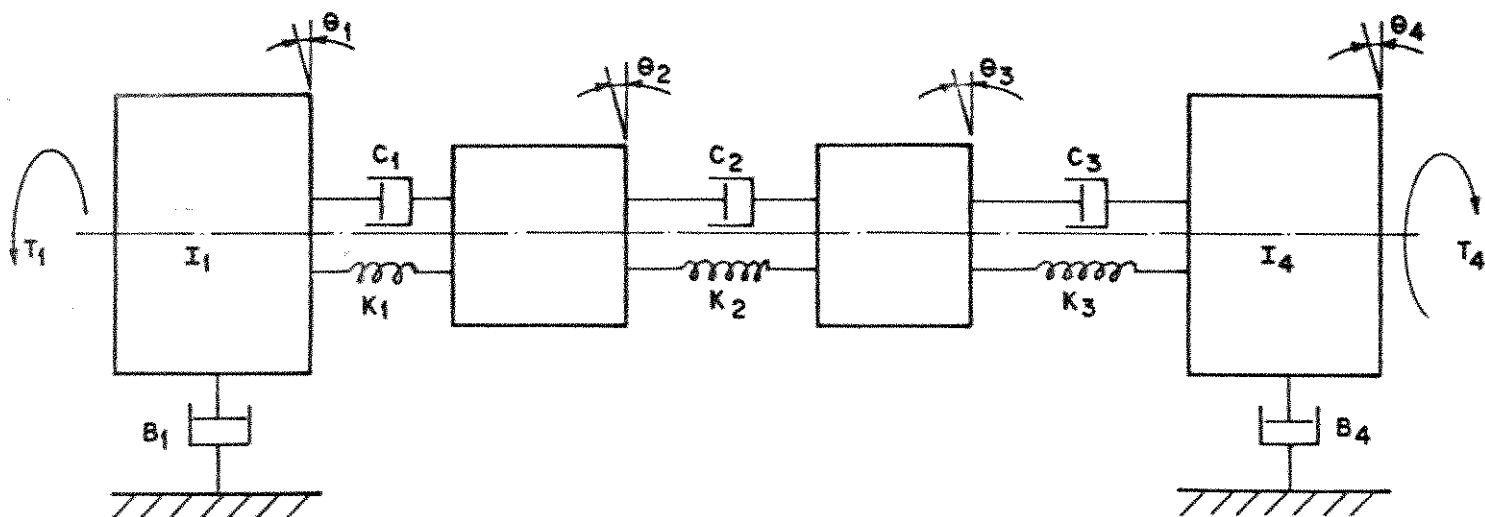


Figura 3.2: Esquema de Discretização do Sistema sem Folga

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 \\ -K_1 & (K_1 + K_2) & -K_2 & 0 \\ 0 & -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_1 + B_1) & -C_1 & 0 & 0 \\ -C_1 & (C_1 + C_2) & -C_2 & 0 \\ 0 & -C_2 & (C_2 + C_3) & -C_3 \\ 0 & 0 & -C_3 & (C_3 + B_4) \end{bmatrix}$$

### 3.2 Equações de Movimento do Sistema com Folga

A folga do sistema é colocada entre os semi-acoplamentos que unem o motor com o torquímetro. A figura 3.3 apresenta a forma do pino para o acoplamento 1, sendo que no detalhe é mostrada a folga \$Z\$.

O equipamento descrito na figura 3.1 será alterado com a existência da folga no acoplamento 1. Para a análise da folga, o acoplamento 1 deve ser dividido em dois momentos de inércia correspondentes aos semi-acoplamentos. A figura 3.4 apresenta a nova configuração do sistema, incluindo a folga.

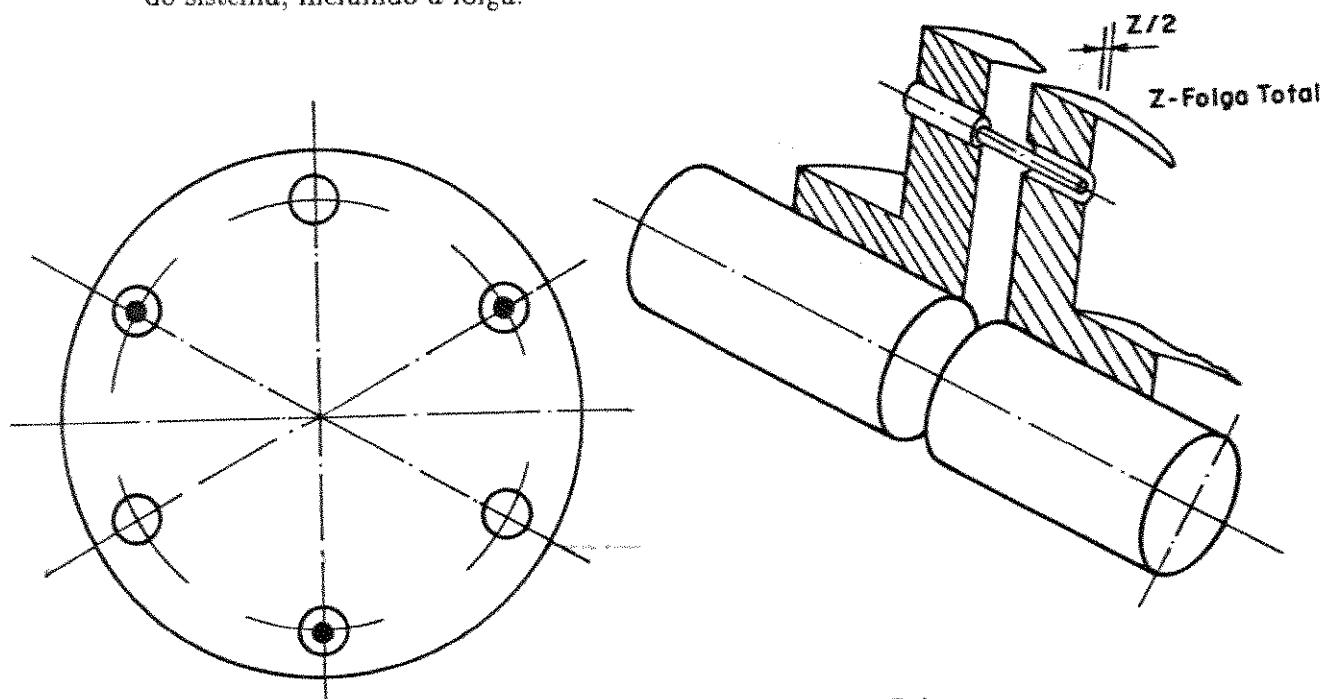


Figura 3.3: Acoplamento com Folga

Considerando a semelhança entre os esquemas do sistema sem folga e com folga, são apresentados a seguir apenas os parâmetros que aparecem neste último sistema e não constam do primeiro. Os parâmetros incluídos pela consideração da folga são:

- $I_m$  - momento de inércia do semi-acoplamento do motor
- $\bar{K}_f$  - rigidez torcional equivalente do acoplamento com folga
- $\bar{C}_f$  - amortecimento equivalente do acoplamento com folga
- $I_t$  - momento de inércia do semi-acoplamento do torquímetro

Incluindo os parâmetros mencionados acima a figura 3.5 representa o esquema do sistema com folga. Neste Capítulo ainda será analisada a não linearidade introduzida pela folga e as propriedades do contato entre o pino e o furo na transmissão do torque pelo acoplamento.

A partir da figura 3.5 obtém-se o sistema de equações diferenciais para o sistema com folga.

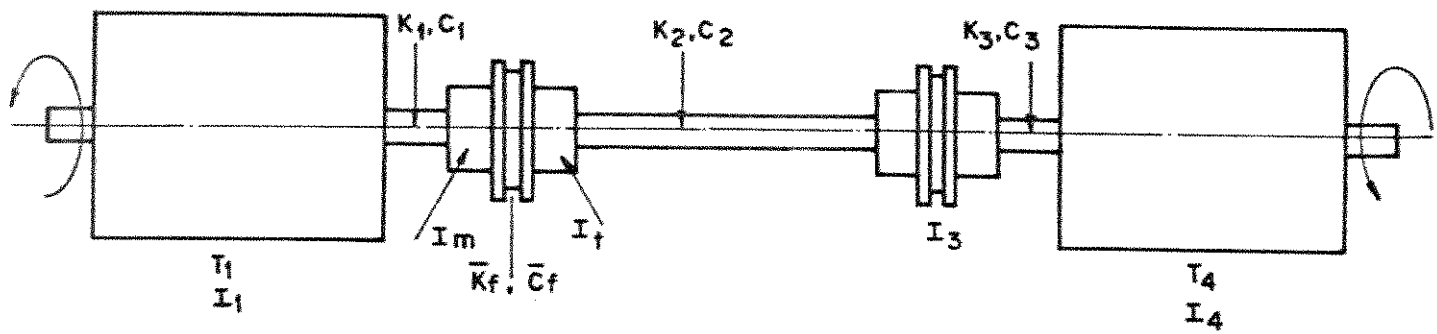


Figura 3.4: Esquema Básico do Banco de Ensaio do Sistema com Folga

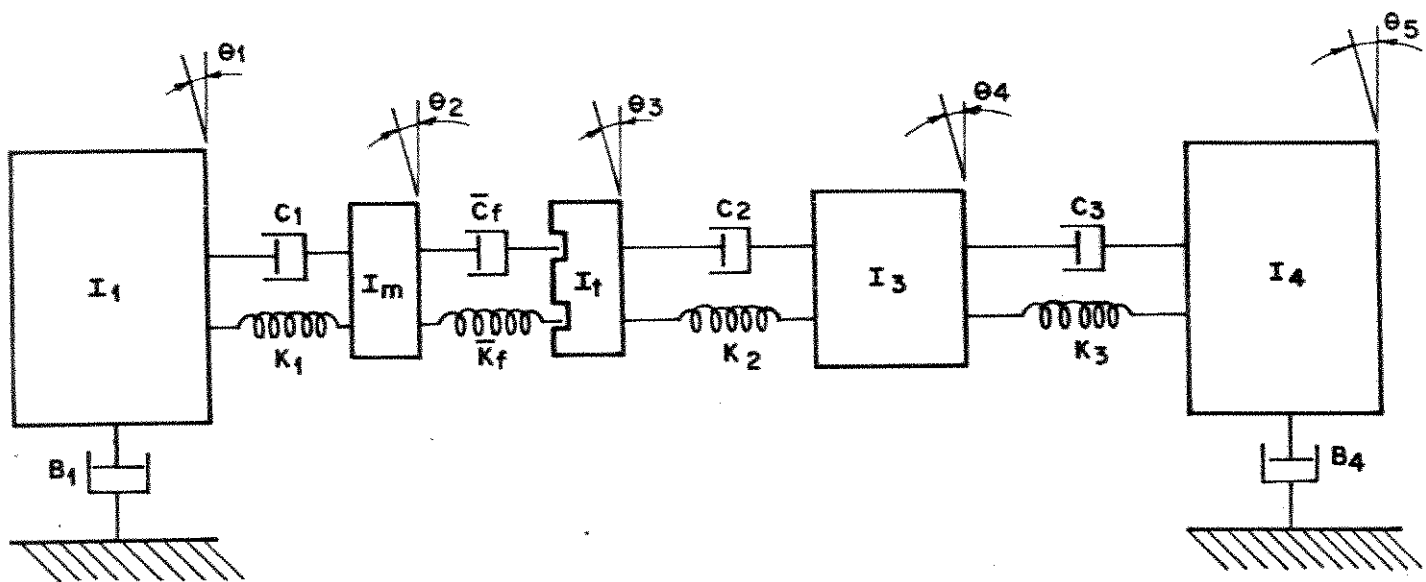


Figura 3.5: Esquema da Discretização do Sistema com Folga

$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\Theta}_1 + C_1(\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2) + K_1(\Theta_1 - \Theta_2) + B_1 \dot{\Theta}_1 &= T_1(t) \\
I_m \ddot{\Theta}_2 + C_1(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1) + \bar{C}_f(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_3) + K_1(\Theta_2 - \Theta_1) + \bar{K}_f(\Theta_2 - \Theta_3) &= 0 \\
I_t \ddot{\Theta}_3 + \bar{C}_f(\dot{\Theta}_3 - \dot{\Theta}_2) + C_2(\dot{\Theta}_3 - \dot{\Theta}_4) + \bar{K}_f(\Theta_3 - \Theta_2) + K_2(\Theta_3 - \Theta_4) &= 0 \\
I_3 \ddot{\Theta}_4 + C_2(\dot{\Theta}_4 - \dot{\Theta}_3) + C_3(\dot{\Theta}_4 - \dot{\Theta}_5) + K_2(\Theta_4 - \Theta_3) + K_3(\Theta_4 - \Theta_5) &= 0 \\
I_4 \ddot{\Theta}_5 + C_3(\dot{\Theta}_5 - \dot{\Theta}_4) + K_3(\Theta_5 - \Theta_4) + B_4 \dot{\Theta}_5 &= T_4(t) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Escrevendo o sistema de equações na forma de matrizes e comparando com a equação 3.1 são obtidas as matrizes do sistema com folga, apresentadas a seguir.

$$[J] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & (K_1 + \bar{K}_f) & -\bar{K}_f & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{K}_f & (\bar{K}_f + K_3) & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & (K_3 + K_4) & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_1 + B_1) & -C_1 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & (C_1 + \bar{C}_f) & -\bar{C}_f & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{C}_f & (\bar{C}_f + C_3) & -C_3 & 0 \\ 0 & 0 & -C_3 & (C_3 + C_4) & -C_4 \\ 0 & 0 & 0 & -C_4 & (C_4 + B_4) \end{bmatrix}$$

Estas matrizes, após a substituição dos valores numéricos, constituem a base de entrada de dados no programa de simulação numérica apresentado no Capítulo 4.

### 3.3 Análise da Folga do Sistema

O estudo da folga é uma das etapas mais complexas na análise dinâmica do sistema torcional. Apesar das semelhanças nas equações de movimento dos sistemas, que podem

ser observadas nas referências [7], [8], [9] e [21], os problemas de contato são bastante diversificados. A determinação das propriedades do contato tem estudos particularizados no caso de engrenamento, acoplamentos e uniões dos mais diversos tipos, [21], [22] e [23].

Portanto, a análise do comportamento do sistema com folga pode ser dividido em duas etapas:

- Descrição da folga nas equações de movimento do sistema.
- Identificação das propriedades do contato.

### 3.3.1 Descrição da Folga nas Equações de Movimento do Sistema

A figura 3.6 apresenta o modelo dinâmico para o acoplamento de duas superfícies com folga, cujo valor é representado pela letra  $Z$ . Este modelo típico pode ser aplicado para qualquer sistema com deslocamento de translação ou rotação.

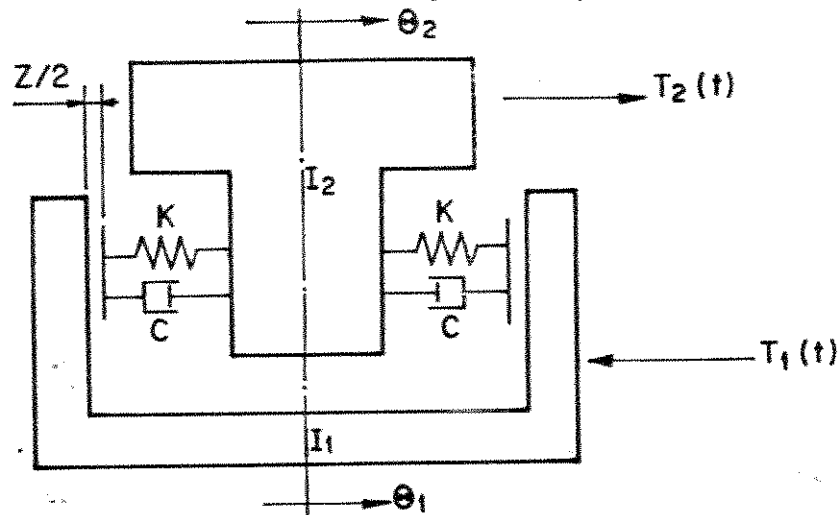


Figura 3.6: Modelo Dinâmico Típico de Acoplamento com Folga

A figura 3.7 apresenta graficamente as diversas etapas do deslocamento relativo entre as duas superfícies do sistema com folga. A figura 3.7.a apresenta um modelo puramente linear das forças de impacto envolvidas na análise da folga. Na figura 3.7.b é considerada a variação não linear das forças de impacto devido a rigidez torcional, ainda sem o amortecimento do sistema. O modelo mais completo das forças de impacto no sistema com folga é apresentado na figura 3.7.c onde são consideradas as perdas por histerese durante o impacto.

Como pode ser observado pelos modelos apresentados, o estudo do sistema particular com folga apresentado na figura 3.6, dependendo das considerações, introduz mais uma não linearidade ao sistema principal. Os aspectos da não linearidade do contato serão

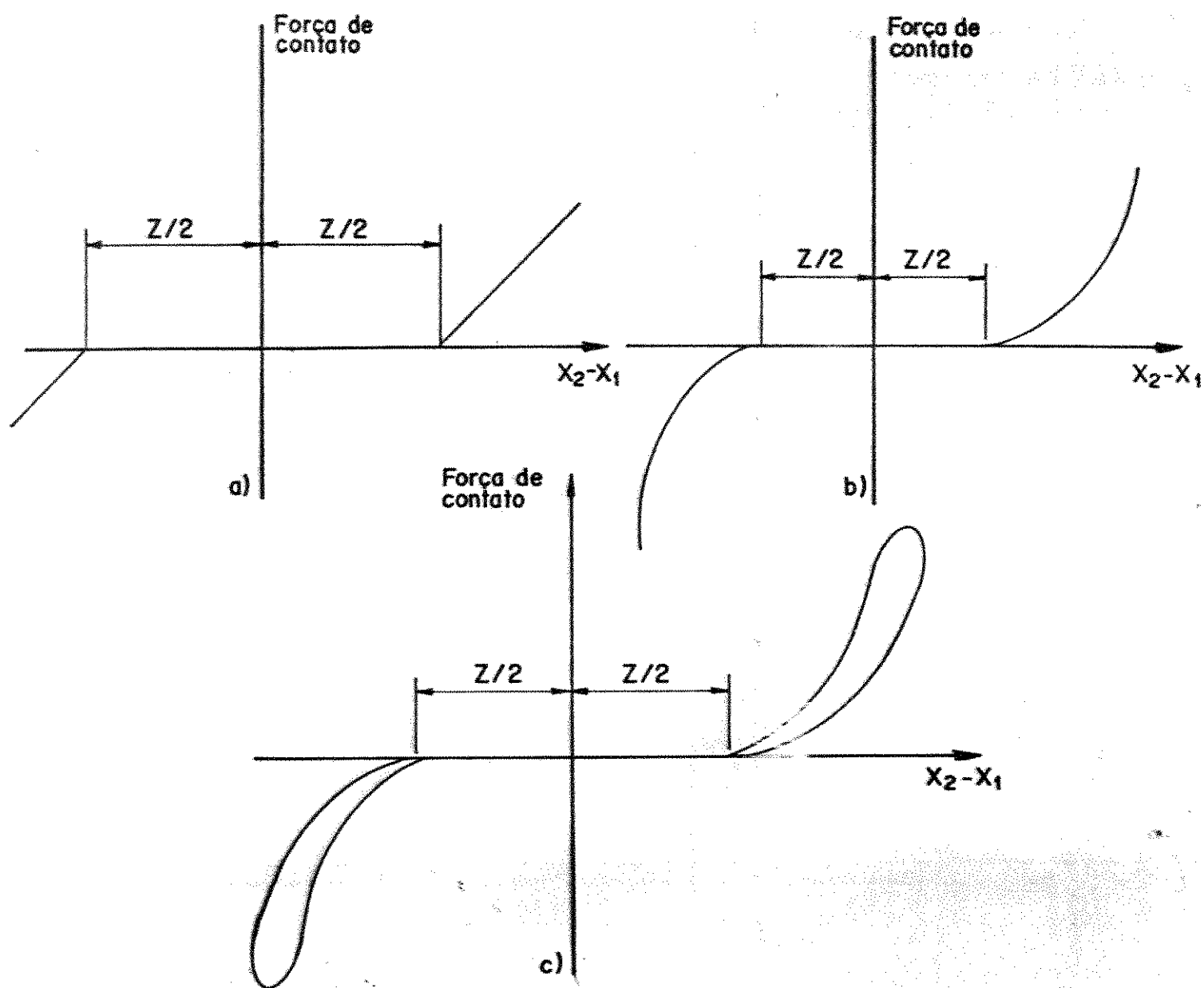


Figura 3.7: Características dos modelos: a) Linear sem amortecimento; b) Não linear sem amortecimento; c) Não linear com amortecimento

discutidos no item a seguir. Para o modelamento de uma folga obtém-se as seguintes equações de movimento.

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\Theta}_1 &= T_1(t) \\
 I_2 \ddot{\Theta}_2 &= T_2(t) \quad |\Theta_2 - \Theta_1| \leq Z/2 \\
 I_1 \ddot{\Theta}_1 + \bar{K}_f(\Theta_1 - \Theta_2)^n + \bar{C}_f(\dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2) &= T_1(t) \\
 I_2 \ddot{\Theta}_2 + \bar{K}_f(\Theta_2 - \Theta_1)^n + \bar{C}_f(\dot{\Theta}_2 - \dot{\Theta}_1) &= T_2(t) \quad |\Theta_2 - \Theta_1| \geq Z/2
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde:

$\bar{K}_f$  - Rigidez torcional equivalente do processo de contato em função do deslocamento relativo.

$\bar{C}_f$  - Amortecimento equivalente do processo de contato em função do deslocamento relativo.

$n$  - Expoente que depende do tipo de superfície em contato, sendo seu valor definido pela Teoria de Hertz.

As equações 3.4 apresentam os aspectos relativos à descrição do posicionamento das superfícies durante as fases do contato, com base nos trabalhos de diversos autores mencionados na bibliografia. Este modelo corresponde ao descrito na figura 3.7.c. O modelo original de impacto, perfeitamente linear, com coeficiente de amortecimento e de mola constante é mencionado em alguns trabalhos como modelo de Kelvin-Voigt, sendo seus inconvenientes descritos nas referências [23] e [24].

A solução definitiva do problema, para a obtenção das forças de rigidez e amortecimento, depende da determinação de  $\bar{K}_f$ ,  $\bar{C}_f$  e do valor do expoente  $n$ .

### 3.3.2 Identificação das Propriedades do Contato

A obtenção de  $\bar{K}_f$  e  $\bar{C}_f$  depende da geometria das superfícies em contato e também das propriedades dos elementos.

Y. A. Khulief e A. A. Shabana apresentam um estudo para a análise do impacto em um sistema com folga utilizando o método de balanceamento de energia. Com base no trabalho destes autores são apresentadas a seguir as deduções de  $K_f$  e  $C_f$ , sendo incluído no modelo a condição não linear da força de rigidez. Nesta primeira etapa da dedução não são incluídas as características geométricas da folga, que são apresentadas no item 3.3.3 para a determinação de  $\bar{K}_f$  e  $\bar{C}_f$ .

Para as deduções a seguir são utilizadas as seguintes notações:

- 1 - índice referente ao corpo 1
- 2 - índice referente ao corpo 2
- $I_1$  - momento de inércia do corpo 1
- $I_2$  - momento de inércia do corpo 2
- $\omega_1$  - velocidade angular do corpo 1 em posição intermediária
- $\omega_2$  - velocidade angular do corpo 2 em posição intermediária
- $\bar{\omega}_1$  - velocidade angular do corpo 1 no início do impacto
- $\bar{\omega}_2$  - velocidade angular do corpo 2 no início do impacto
- $\omega_1'$  - velocidade angular do corpo 1 no final da restituição
- $\omega_2'$  - velocidade angular do corpo 2 no final da restituição
- $\omega_{12}$  - velocidade angular instantânea comum
- $\bar{\omega}_{12}$  - velocidade angular relativa no início da compressão
- $\Theta_{12}$  - valor da deformação máxima
- $\Theta_{12}$  - valor da deformação em posição intermediária
- $\dot{\Theta}_{12}$  - velocidade angular relativa em posição intermediária

### Determinação do Coeficiente de Rigidez pela Energia

O processo de impacto pode ser dividido em duas fases:

- (1) Fase de compressão: nesta etapa ocorrem as deformações elásticas dos dois corpos até que a velocidade angular relativa seja reduzida a zero.
- (2) Fase de restituição: inicia no fim da compressão e termina quando os corpos se separam.

Utilizando a Equação da Conservação de Energia, admitindo que no tempo do impacto os corpos possuem apenas o movimento de rotação e desprezando a elasticidade para simplificação, tem-se:

$$\frac{1}{2}I_1\bar{\omega}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\bar{\omega}_2^2 = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_{12}^2 + \int_0^{\Theta_{12}} K_f \Theta_{12}^n d\Theta_{12} \quad (3.5)$$

$$\omega_{12} = \bar{\omega}_1 + \Delta\omega_1 = \bar{\omega}_2 + \Delta\omega_2$$

Pela Lei de Conservação de Quantidade de Movimento, tem-se:

$$I_1\Delta\omega_1 + I_2\Delta\omega_2 = 0 \quad (3.6)$$

Com estas equações pode ser obtido o valor de  $\omega_{12}$  na equação:

$$\omega_{12} = \left[ \frac{I_2}{(I_1 + I_2)} \right] \left[ \bar{\omega}_2 + \left( \frac{I_1}{I_2} \right) \bar{\omega}_1 \right] \quad (3.7)$$

Admitindo que o coeficiente de rigidez  $K_f$  seja constante (isto é confirmado no estudo do contato pelas formulações de Hertz), a equação 3.5, após algumas simplificações fornece:

$$K_f = \frac{n+1}{2} \gamma \frac{\bar{\omega}_{12}}{\dot{\Theta}_{12}^{n+1}} \quad (3.8)$$

onde:

$$\gamma = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2}$$

### Determinação do Coeficiente de Amortecimento pela Energia

O torque de amortecimento introduz no modelo a energia de dissipação durante o processo de colisão. A energia de dissipação pode ser ocasionada pelo atrito interno do material e/ou devido às pequenas deformações plásticas na zona de contato.

A perda de energia cinética, denominada  $\Delta E$ , pode ser determinada em:

$$\Delta E = \frac{1}{2} I_1 (\bar{\omega}_1^2 - \omega_1'^2) + \frac{1}{2} I_2 (\bar{\omega}_2^2 - \omega_2'^2) \quad (3.9)$$

Considerando a relação da Conservação da Quantidade de Movimento:

$$I_1 (\bar{\omega}_1 - \omega_1') + I_2 (\bar{\omega}_2 - \omega_2') = 0 \quad (3.10)$$

Introduzindo o coeficiente de restituição  $\lambda$ :

$$\lambda (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2) = (\omega_2' - \omega_1') \quad (3.11)$$

onde:

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

As equações 3.10 e 3.11 fornecem:

$$\omega_1' = \left( \frac{I_1 - \lambda I_2}{I_1 + I_2} \right) \bar{\omega}_1 + \left( \frac{(1 + \lambda) I_2}{I_1 + I_2} \right) \bar{\omega}_2 \quad (3.12)$$

$$\omega_2' = \left( \frac{(1 + \lambda) I_1}{I_1 + I_2} \right) \bar{\omega}_1 + \left( \frac{I_2 - \lambda I_1}{I_1 + I_2} \right) \bar{\omega}_2 \quad (3.13)$$

Substituindo estas equações na equação 3.9 e efetuando algumas simplificações, tem-se:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left( \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right) (1 - \lambda^2) (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)^2 \quad (3.14)$$

No início do impacto temos que:

$$\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2$$

Substituindo na equação 3.14, obtém-se:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1 - \lambda^2) I_1 I_2}{I_1 + I_2} \right] \bar{\omega}_{12}^2 \quad (3.15)$$

A perda de energia cinética  $\Delta E$  é igual à energia cinética devido ao atrito interno do material, em termos de amortecimento pode ser escrita a seguinte expressão para  $\Delta E$ :

$$\Delta E = \oint C_f \dot{\Theta} d\Theta_{12} \quad (3.16)$$

Sendo  $\oint$  a integral em torno do ciclo de histerese.

A equação 3.16 pode ser utilizada para determinar o coeficiente de amortecimento  $C_f$ . Para obter a solução da integral da curva de histerese é necessária uma relação entre  $\dot{\Theta}_{12}$  em função de  $\Theta_{12}$ .

Esta relação é obtida com a aplicação das equações 3.5 e 3.10. Após algumas substituições e simplificações é definida a seguinte expressão para a velocidade relativa  $\dot{\Theta}_{12}$  durante a deformação  $\Theta_{12}$ .

$$\dot{\Theta}_{12} = \sqrt{\bar{\omega}_{12}^2 - \left( \frac{K_f(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} \right) \frac{2}{n+1} \Theta_{12}^{n+1}} \quad (3.17)$$

Para garantir que o torque de amortecimento satisfaça as condições de contorno em ambas as fases do contato e de separação, a função de amortecimento  $C_f = \mu \Theta_{12}^n$  deve ser assim considerada. Agora a função de amortecimento satisfaz a natureza física do torque de amortecimento, que não existe antes do contato e desaparece após a separação das duas superfícies em contato.

Substituindo 3.17 em 3.16, obtém-se:

$$\Delta E = 2 \int_0^{\bar{\Theta}_{12}} \mu \Theta_{12} \sqrt{\bar{\omega}_{12}^2 - \frac{2\beta^2 \Theta_{12}^{n+1}}{n+1}} d\Theta_{12} \quad (3.18)$$

definindo:

$$\beta^2 = \frac{K_f(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}$$

Desenvolvendo a expressão de  $\Delta E$

$$\Delta E = -\frac{2}{3} \mu \beta \left\{ \left[ \left( \frac{\bar{\omega}_{12}}{\beta} \right)^2 - 2 \frac{\bar{\Theta}_{12}^{n+1}}{n+1} \right]^{3/2} - \left( \frac{\bar{\omega}_{12}}{\beta} \right)^3 \right\} \quad (3.19)$$

Utilizando as equações 3.15 e 3.19 e substituindo os valores já definidos de  $\lambda$  e  $\beta$ , é obtida a expressão:

$$\frac{1}{2}\gamma(1-\lambda^2)\bar{\omega}_{12}^2 = -\frac{2}{3}\mu\beta \left\{ \left[ \left( \frac{\bar{\omega}_{12}}{\beta} \right)^2 - 2\frac{\bar{\Theta}_{12}^{n+1}}{n+1} \right]^{3/2} - \left( \frac{\bar{\omega}_{12}}{\beta} \right)^3 \right\} \quad (3.20)$$

Simplificando a equação 3.20 é obtido o valor de  $\mu$ :

$$\mu = \frac{3}{4} \left\{ \frac{K_f(1-\lambda^2)\bar{\omega}_{12}^2}{\left[ \bar{\Theta}_{12}^3 - \left( \bar{\omega}_{12}^2 - 2\beta^2 \frac{\bar{\Theta}_{12}^{n+1}}{n+1} \right)^{3/2} \right]} \right\} \quad (3.21)$$

Após a determinação do coeficiente de rigidez e de amortecimento, o torque do par de impacto é destrito por:

$$T_{12} = K_f\bar{\Theta}_{12}^n + (\mu\bar{\Theta}_{12}^n)\dot{\bar{\Theta}}_{12} \quad (3.22)$$

### Estudo do Contato pela Teoria de Hertz

As equações 3.8 e 3.21 definem as propriedades da rigidez e amortecimento pela aplicação do balanceamento de energia e da lei da conservação da quantidade de movimento. É importante observar que na dedução, o coeficiente de rigidez é considerado constante sendo este resultado confirmado a seguir para o tipo de acoplamento estudado. A utilização do modelo obtido no item anterior depende da determinação do coeficiente de restituição  $\lambda$  e da máxima deformação relativa  $\bar{\Theta}_{12}$ .

As formulações para o estudo do contato são baseadas nos trabalhos de H. Hertz (1881). Na referência [25] é apresentado o desenvolvimento completo do estudo do contato entre esferas e posteriormente é formulado o caso geral para determinação das deformações de contato entre qualquer superfície.

S. Dubowsky complementou os estudos para o caso do contato entre cilindros. Este é um dos tipos de contato mais comum nos diversos equipamentos. O resultado deste trabalho pode ser obtido na referência [21].

Para a configuração dos pinos internos, ocorre o acoplamento descrito na figura 2.13, semelhante ao contato existente no banco de ensaio.

De acordo com os resultados dos trabalhos do autor citado anteriormente, o valor do deslocamento relativo entre os dois elementos em contato, definido por  $\bar{\Theta}_{12}$  anteriormente, é obtido na expressão modificada para análise do movimento de rotação e contato entre três pinos no acoplamento. Os detalhes desta modificação pode ser obtido no item 2.2.3 sobre o projeto do acoplamento. A equação obtida é apresentada a seguir:

$$\bar{\Theta}_{12} = \left( \frac{J_1 + J_2}{2a} \right) \frac{T_{12}}{3R^2} \left[ \ln \left( \frac{(r_1 + r_2)(2a)^3 e}{r_1 r_2 (J_1 + J_2)} \right) - \ln T_{12} \right] \quad (3.23)$$

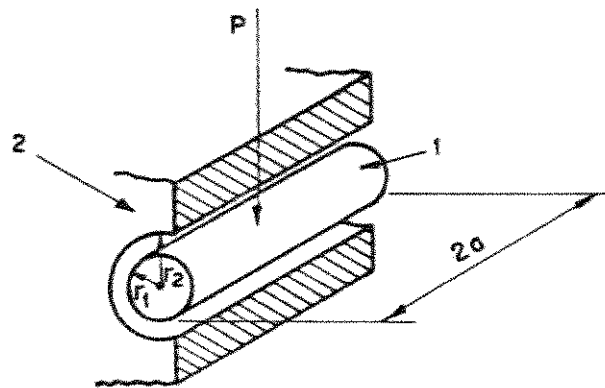


Figura 3.8: Detalhe do Acoplamento com pino

onde:  
 $J_i = \frac{1-\delta_i^2}{\pi E_i}$   
 $\delta_i$  - coeficiente de Poisson  
 $E_i$  - módulo de elasticidade dos corpos em contato  
 $T_{12}$  - torque de contato  
 $R$  - raio do acoplamento no centro dos furos  
 $r_1$  - raio do pino (cilindro interno)  
 $r_2$  - raio do furo (cilindro externo)  
 $2a$  - comprimento do pino  
 $e$  - base logarítmica natural  
 $i$  - 1, para o pino  
 $i$  - 2, para o furo

A expressão acima foi analisada para duas condições diferentes de pino interno em contato com furo de 10 mm. Para as duas situações foi desenvolvido um programa para ajustagem de polinômio. Este estudo demonstra que a melhor ajustagem para  $\Theta_{12}$  x  $P$  são as retas definidas na figura 3.9.

As equações obtidas são:

- Para o pino de 8 mm de diâmetro:

$$T_{12} = 2,871 \cdot 10^6 \Theta_{12} \quad (3.24)$$

- Para o pino de 6 mm de diâmetro:

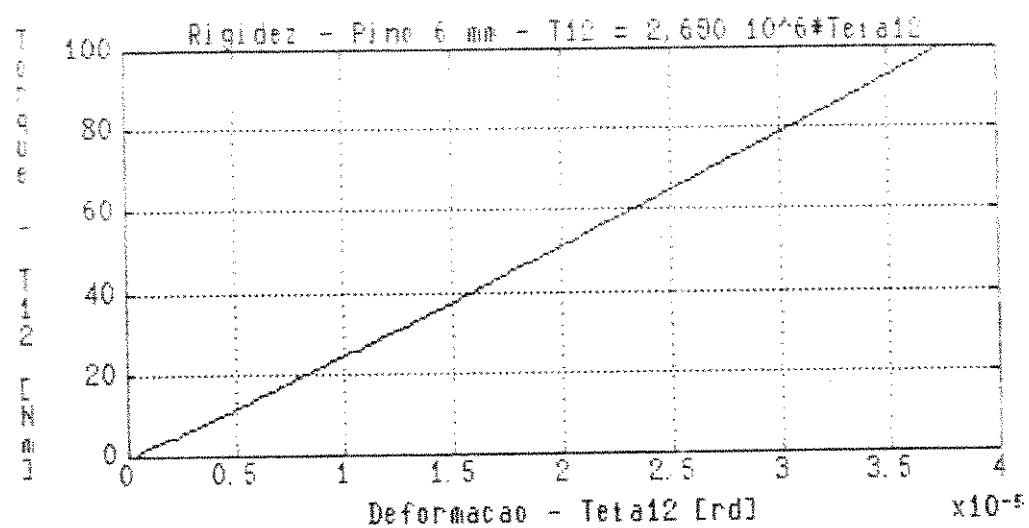
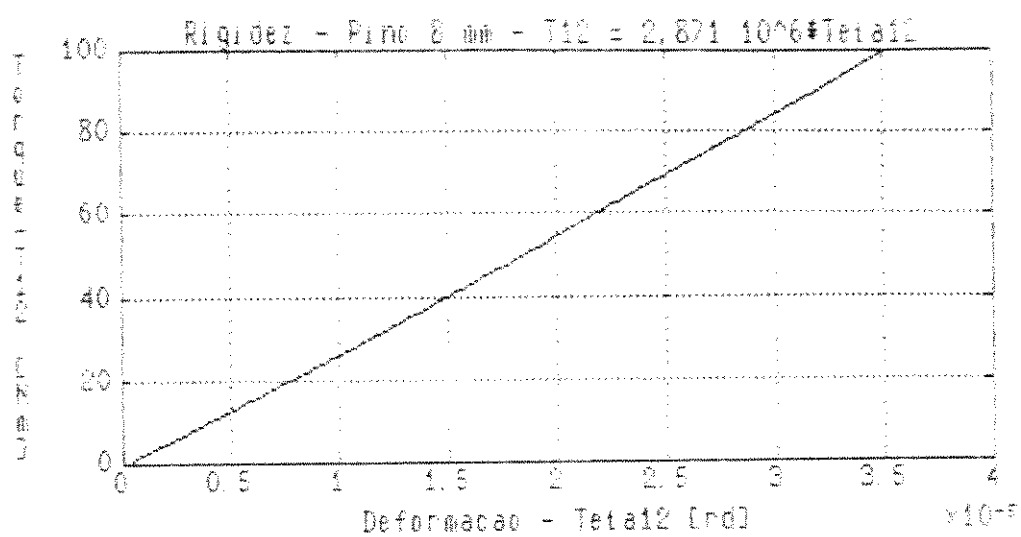


Figura 3.9: Constante de Rigidez entre o Pino e o Furo com Folga

$$T_{12} = 2,690 \cdot 10^6 \Theta_{12} \quad (3.25)$$

Os valores da constante de rigidez torcional são:

$$K = 2,871 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad} - \text{para o pino de 8 mm}$$

$$K = 2,690 \cdot 10^6 \text{ Nm/rad} - \text{para o pino de 6 mm}$$

Estes resultados comprovam as considerações feitas na determinação da rigidez. A possibilidade de linearização do coeficiente de rigidez torcional facilita bastante a integração numérica das equações de movimento do sistema.

Substituindo o valor de  $\beta$  na equação 3.8, obtém-se:

$$\dot{\Theta}_{12} = \sqrt{\frac{\bar{\omega}_{12}^2}{\beta^2} \frac{n+1}{2}} \quad (3.26)$$

Utilizando este valor na equação 3.21 e fazendo algumas simplificações é obtido o seguinte resultado:

$$\mu = \frac{3}{4} \frac{K_f(1 - \lambda^2)}{\bar{\omega}_{12}} \quad (3.27)$$

Com este valor o coeficiente de amortecimento é determinado na expressão:

$$C_f = \frac{3}{4} K_f(1 - \lambda^2) \frac{\Theta_{12}^n}{\bar{\omega}_{12}} \quad (3.28)$$

Esta expressão demonstra a não linearidade do coeficiente de amortecimento. A sua determinação depende da velocidade relativa no início do impacto ( $\bar{\omega}_{12}$ ), da posição do deslocamento relativo durante o contato ( $\Theta_{12}$ ) e do coeficiente de restituição.

A velocidade e o deslocamento são determinados na solução numérica das equações de movimento do sistema.

O coeficiente de restituição será discutido no item 3.3.4.

Os resultados obtidos neste modelo simplificado podem ser aplicados em sistemas de mais de dois graus de liberdade. Deve ser observado neste caso que o valor de  $\gamma$  deve ser definido na expressão:

$$\gamma = \frac{\sum I_1 \sum I_2}{\sum I_1 + \sum I_2} \quad (3.29)$$

### 3.3.3 Matriz de Rigidez e Matriz de Amortecimento com Folga

Os resultados obtidos no item anterior serão utilizados no estudo do sistema com folga. Para a aplicação dos valores obtidos são necessárias algumas considerações para a montagem das matrizes de rigidez e amortecimento.

Observando a figura 3.7 e relacionando com a folga entre 2 e 3 da figura 3.5, são feitas as seguintes considerações:

- Para  $(\Theta_m - \Theta_t) \geq Z/2$

A deformação relativa real entre os corpos será:

$$\Theta_{mt} = (\Theta_m - \Theta_t) - Z/2$$

Para a rigidez:

$$T_{mt}^K = K_f \left[ 1 - \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right] (\Theta_m - \Theta_t)$$

Portanto:

$$\bar{K}_f = K_f \left[ 1 - \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right]$$

Para o amortecimento:

$$T_{mt}^C = \frac{3}{4} K_f (1 - \lambda^2) \left[ 1 - \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right] \frac{\Theta_m - \Theta_t}{\bar{\omega}_{mt}} (\dot{\Theta}_m - \dot{\Theta}_t)$$

Portanto:

$$\bar{C}_f = \frac{3}{4} K_f (1 - \lambda^2) \left[ 1 - \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right] \frac{\Theta_m - \Theta_t}{\bar{\omega}_{mt}}$$

- Para  $-Z/2 \leq (\Theta_m - \Theta_t) \leq Z/2$

A deformação relativa real entre os corpos será zero (0).

Portanto:

$$T_{mt}^K = T_{mt}^C = 0$$

$$\bar{K}_f = \bar{C}_f = 0$$

- Para  $(\Theta_m - \Theta_t) \leq -Z/2$

A deformação relativa real entre os corpos será:

$$\Theta_{mt} = (\Theta_m - \Theta_t) + Z/2$$

Para a rigidez:

$$T_{mt}^K = K_f \left[ 1 + \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right] (\Theta_m - \Theta_t)$$

Portanto:

$$\bar{K}_f = K_f \left[ 1 - \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right]$$

Para o amortecimento:

$$T_{mt}^C = \frac{3}{4} K_f (1 - \lambda^2) \left[ 1 + \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right] \frac{\Theta_m - \Theta_t}{\bar{\omega}_{mt}} (\dot{\Theta}_m - \dot{\Theta}_t)$$

Portanto:

$$\bar{C}_f = \frac{3}{4} K_f (1 - \lambda^2) \left[ 1 - \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} \right] \frac{\Theta_m - \Theta_t}{\bar{\omega}_{mt}}$$

Fazendo as seguintes considerações:

$$1 - \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} = Z_{dir}$$

$$1 + \frac{Z}{2(\Theta_m - \Theta_t)} = Z_{inv}$$

As matrizes de rigidez e amortecimento do sistema com folga são obtidas pela substituição dos seguintes valores, dependendo da condição do contato:

- Valores a serem substituídos nas matrizes para o contato direto:

$$\bar{K}_f = K_f Z_{dir}$$

$$\bar{C}_f = C_f Z_{dir}$$

- Valores a serem substituídos nas matrizes sem o contato:

$$\bar{K}_f = \bar{C}_f = 0$$

- Valores a serem substituídos nas matrizes para o contato inverso:

$$\bar{K}_f = K_f Z_{inv}$$

$$\bar{C}_f = C_f Z_{inv}$$

### 3.3.4 Considerações Gerais sobre a Aplicação do Modelo Matemático da Folga

A utilização do modelo matemático desenvolvido para o estudo do impacto, na análise de um equipamento eletromecânico real, deve ser feita conhecendo-se as suas limitações.

Em primeiro lugar devem ser observadas as características geométricas do contato entre os pinos e os furos no acoplamento. O modelo linear da rigidez de contato é válido para o caso em que existe um alinhamento perfeito entre o pino e o furo. Esta condição é praticamente impossível, pois exige um perfeito alinhamento entre o acionamento e a carga, além de precisão absoluta dos componentes do equipamento.

A formulação geral para o torque transmitido corresponde ao valor descrito na equação 3.22. No caso de cilindros paralelos o valor de “n”, encontrado na expressão mencionada anteriormente, está situado entre 1,0 e 1,5, conforme referência [24]. Para as simulações do modelo é utilizado o valor  $n = 1$ . No banco de ensaio deve ser mantido o melhor alinhamento possível.

As verificações numéricas do modelo de impacto são apresentadas no Capítulo 4. O modelo deve ser avaliado com relação à sua aplicação no estudo do comportamento dinâmico de um equipamento eletromecânico com folga.

A obtenção do amortecimento no impacto depende do coeficiente de restituição. Para valores limitados de velocidade relativa de impacto W. Goldsmith, conforme mencionado na referência [24], estabelece que o coeficiente de restituição pode ser determinado pela expressão:

$$\lambda = 1 - \eta \bar{\omega}_{12} \quad (3.30)$$

Para o caso do aço, bronze e marfim o valor de  $\eta$  encontra-se entre 0,08 e 0,32. A equação 3.30 pode ser utilizado para velocidade relativa de impacto da ordem de 0,5 m/s. Para valores de velocidade relativa mais elevados a expressão não deve ser utilizada, pois o valor do coeficiente de restituição passa a depender das propriedades do material e da geometria das superfícies na região do contato.

Conforme resultados experimentais de J. Tafel, mencionados na referência [26], o coeficiente de restituição do impacto entre aço e aço se encontra entre 0,6 e 1,0. Neste ensaio foi determinado que  $\lambda$  diminui com o aumento da velocidade relativa de impacto e aumenta com o incremento da dureza.

Os resultados experimentais demonstram que o modelo de impacto adotado é bastante preciso para coeficientes de restituição superiores a 0,75, conforme referência [22].

A aplicação do modelo na análise do comportamento dinâmico de um equipamento eletromecânico, depende da avaliação das velocidades relativas de impacto entre os seus componentes.

As situações críticas de operação de um equipamento, que podem ocasionar elevadas velocidades na folga são:

- Partida do equipamento
- Reversão brusca
- Aceleração da carga

A figura 3.10 apresenta a posição crítica dos componentes do equipamento, que corresponde à máxima abertura de folga, para a ocorrência de uma das situações mencionadas.

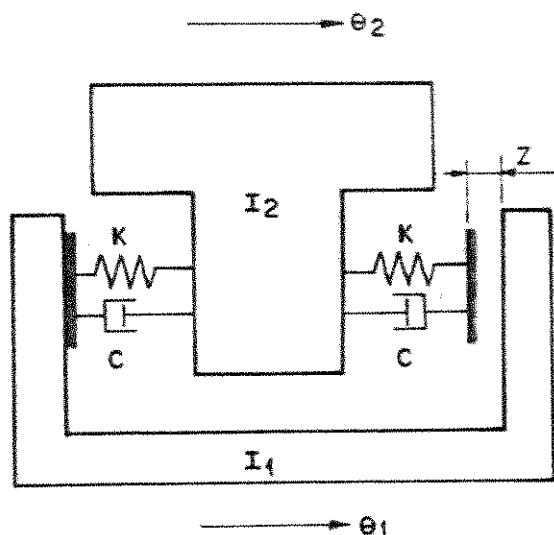


Figura 3.10: Modelo de Acoplamento Típico com Máxima Abertura de Folga

A partida do equipamento, com base no modelo da figura 3.10, é feita com a aceleração do corpo 1 (motor), sendo que o corpo 2 (carga) permanece parado, até receber o impacto

do corpo 1 após este percorrer o espaço correspondente à folga ( $Z$ ). Para valores de folga, aceleração angular e diâmetros normais de acoplamentos encontrados em equipamentos reais a velocidade linear relativa de impacto não atinge o valor de 0,5 m/s na partida do equipamento. Esta análise não considera uma possível passagem pela ressonância.

A figura 3.11 descreve a situação de reversão de um equipamento. Utilizando o modelo dinâmico típico de acoplamento com máxima abertura de folga da figura 3.10, é observado que o equipamento está inicialmente com velocidade  $\omega_1 = \omega_2$ . Em um determinado instante  $t_1$  o motor é frenado. O corpo 1 (motor) atinge a velocidade zero e posteriormente é acelerado ao valor  $-\omega_1$  no instante  $t_2$ . Entre o intervalo  $t_1$  e  $t_2$  ocorre o impacto.

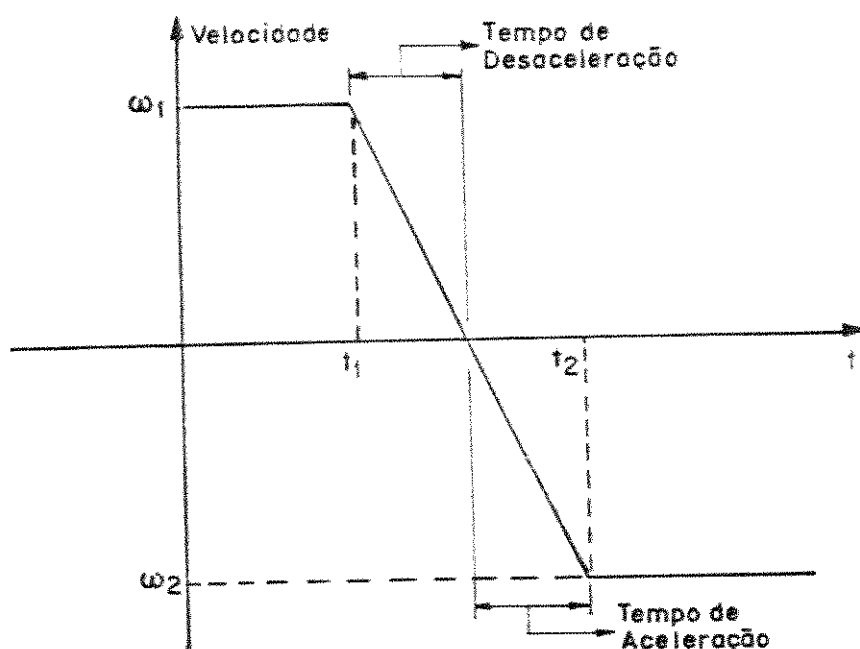


Figura 3.11: Gráfico de Reversão de Velocidade de um Motor Elétrico de Acionamento

A condição crítica na reversão é determinada pelo tempo de desaceleração do acionamento. Caso a frenagem fosse instantânea a velocidade de impacto seria a própria velocidade  $\omega_2 \approx \omega_1$ . Evidentemente esta situação não ocorre na prática. O tempo de frenagem deve seguir um critério de dimensionamento dos elementos de máquinas para evitar danos no equipamento. Sendo conhecido o torque do freio, este tempo pode ser calculado nas equações de movimento do sistema. Estes detalhes podem ser obtidos na referência [27]. Não serão feitas considerações sobre esta situação devido a diversidade dos parâmetros envolvidos nos equipamentos. Esta condição é agravada pelo fato de que na fase de fechamento da folga no sentido inverso, o torque de frenagem é aplicado somente ao motor, até ocorrer o choque inverso. Portanto, a utilização do modelo de impacto em situações de frenagem deve passar por verificações com relação a velocidade relativa.

A aceleração da carga é uma situação que pode provocar valores elevados de velocidade de impacto. Uma avaliação típica desta situação é apresentada na referência [10] onde é analisada a entrada de placas nos cilindros dos laminadores. O impacto da placa com velocidade superior à velocidade periférica do cilindro pode provocar a abertura das folgas do acionamento, seguida de um impacto no momento que o sistema é desacelerado e as folgas são eliminadas. No modelo da figura 3.10 esta situação corresponde à aceleração do corpo 2, provocando a abertura da folga, seguida de uma desaceleração brusca ocasionando o impacto. A previsão das condições de velocidade relativa para este caso depende de cada tipo de equipamento. A referência [10], apresenta um modelo matemático desta situação para laminadores de chapas grossas e cadeiras de laminação de tiras a quente. Portanto, a utilização do modelo de impacto neste caso depende do conhecimento do comportamento da carga com relação à abertura e fechamento da folga.

### 3.4 Determinação do Torque do Acionamento e da Carga

O acionamento e a carga são os responsáveis pelos torques externos ao sistema. A determinação do comportamento destes equipamentos é fundamental para a obtenção de um modelo teórico que represente as condições reais do sistema.

Os estudos efetuados para analisar o motor elétrico e o freio eletromagnético, com os seus respectivos painéis de alimentação e controle, não atingem o objetivo completo neste trabalho. A maior dificuldade encontrada está na obtenção de um modelo matemático para a resposta transiente. A conclusão destes estudos depende de um maior aprofundamento na análise do comportamento dinâmico das máquinas elétricas e também do controle de sistemas.

A simulação do acionamento e da carga é feita com base em levantamentos no próprio equipamento (Capítulo 5) e para determinados casos podem ser utilizados os resultados teóricos.

Apesar das dificuldades mencionadas acima, alguns resultados foram obtidos com o modelamento do motor de corrente contínua, através de suas equações dinâmicas básicas.

O acoplamento eletromecânico do sistema pode ser obtido entre o conjugado magnético ( $T$ ) e a tensão gerada ( $e_a$ ), definidos nas expressões:

$$T = K_a \Phi_d i_a \quad (3.31)$$

$$e_a = K_a \Phi_d \omega_m \quad (3.32)$$

$$K_a = \frac{P Z_a}{2\pi a}$$

onde:

$\Phi_d$  - fluxo de entreferro

$i_a$  - corrente de armadura

$\omega_m$  - velocidade angular

P - número de polos

$Z_a$  - número total de condutores

a - número de caminhos paralelos do enrolamento

O desempenho do sistema será determinado pelas equações anteriores, juntamente com as equações dinâmicas do sistema mecânico, com as equações tensão corrente para os circuitos de armadura e com a curva de magnetização do motor.

Considerando uma máquina motora ideal de corrente contínua, com enrolamento de campo e saturação magnética desprezível, o fluxo no entreferro no eixo direto  $\Phi_d$  é então linearmente proporcional à corrente de campo ( $i_f$ ), as equações 3.31 e 3.32 serão:

$$T = K_c i_f i_a \quad (3.33)$$

$$e_a = K_c i_f \omega_m \quad (3.34)$$

Sendo  $K_c$  uma constante característica do motor.

Considerando o caso em que a indutância mútua entre os circuitos de campo e armadura é nula, a equação de tensão para o circuito de campo é:

$$V_f = L_{ff} p i_f + R_f i_f \quad (3.35)$$

onde:

$L_{ff}$  - indutância própria do campo

$i_f$  - corrente do campo

$R_f$  - resistência do campo

$p = d/dt$

A equação de tensão para o circuito de armadura é:

$$V_{ta} = K_c i_f \omega_m + L_{aq} p i_a + R_a i_a \quad (3.36)$$

onde:

$V_{ta}$  - tensão terminal da armadura

$i_a$  - corrente da armadura

$R_a$  - resistência da armadura

$L_{aq}$  - auto-indutância do circuito da armadura

O painel elétrico de conversão de corrente alternada em contínua para a alimentação do

motor elétrico tem características específicas para o ensaio. A tensão do campo e a corrente do campo são mantidas constantes. O controle do motor é feito por um potenciômetro que regula a tensão de armadura.

Para o painel utilizado os valores do campo são:

$$V_f = 150V$$

$$i_f = 1A$$

Para a caracterização do motor elétrico no sistema eletromecânico, conforme as equações de movimento do sistema, é necessário a determinação do torque do motor na equação 3.33. Nesta equação  $K_c$  e  $i_f$  são constantes, faltando assim a determinação da corrente de armadura, obtida na equação diferencial 3.36.

A equação 3.36 apresenta algumas não linearidades que não serão analisadas neste trabalho, alguns detalhes sobre este assunto pode ser obtido na referência [19].

Esta solução teórica para o comportamento do motor é válida apenas para condições específicas de operação, como por exemplo, a partida do equipamento. Para um regime de carga transitória esta solução não atende. Neste caso deve ser incluída uma análise do controle efetuado pelo painel elétrico.

Com relação ao freio eletromagnético, que simula a carga do equipamento, as informações existentes são insuficientes para o equacionamento teórico do seu comportamento. A análise é feita com base nos levantamentos efetuados no equipamento, sendo os resultados apresentados no Capítulo 5.

### 3.5 Amortecimento dos Eixos de Acionamento, do Motor e do Freio

A referência [4] apresenta uma série de considerações, teóricas e experimentais, para a determinação do amortecimento em sistemas de transmissão.

Para eixos de aço, o amortecimento entre dois momentos de inércia consecutivos de uma transmissão, pode ser obtido de uma forma aproximada na seguinte expressão:

$$C_n = 0,035 \sqrt{\frac{K_n I_n I_{n+1}}{I_n + I_{n+1}}} \quad (3.37)$$

onde:

$C_n$  - amortecimento do eixo de ordem  $n$

$K_n$  - constante de rigidez do eixo de ordem  $n$

$I_n$  - momento de inércia de ordem  $n$

$I_{n+1}$  - momento de inércia de ordem  $n+1$

O coeficiente de amortecimento  $B_n$ , relativo à carga e ao acionamento, é definido pelas perdas por atrito nos mancais e escovas e pelas perdas no ventilador de resfriamento.

Para o torque de atrito de um componente “ $n$ ” pode ser feita a seguinte aproximação:

$$T_n = -B_n \dot{\Theta}_n \quad (3.38)$$

A potência dissipada é definida por:

$$P_n = -B_n \dot{\Theta}_n^2 \quad (3.39)$$

Se a potência de perda pode ser estimada para uma velocidade constante do eixo  $\Omega$ , o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente é obtido em:

$$B_n = \frac{P_n}{\Omega^2} \quad (3.40)$$

Para os ventiladores o torque hidrodinâmico de trabalho é função do quadrado da velocidade de rotação. Neste caso a potência absorvida pelo componente de ordem “ $n$ ” com velocidade  $\Omega$ , pode ser definida na expressão:

$$P_n = -B'_n \Omega^3 \quad (3.41)$$

Para uma análise linear o coeficiente de amortecimento viscoso de um componente “ $n$ ” pode ser obtido pela inclinação da curva do torque em função da velocidade, na velocidade de operação do eixo, conforme a figura 3.12.

$$B_n = 2B'_n \Omega \quad (3.42)$$

Este valor corresponde à contribuição da carga hidrodinâmica para o coeficiente de amortecimento viscoso do componente de ordem “ $n$ ”.

Os valores aproximados para os coeficientes de amortecimento viscoso, definidos pelas expressões acima, são os seguintes:

- Para os eixos de transmissão

$$C_1 = 1,12 Nms/rad - \text{sem folga}$$

$$C_1 = 0,78 Nms/rad - \text{com folga}$$

$$C_2 = 0,29 Nms/rad - \text{sem folga}$$

$$C_2 = 0,24 Nms/rad - \text{com folga}$$

$$C_3 = 1,27 Nms/rad$$

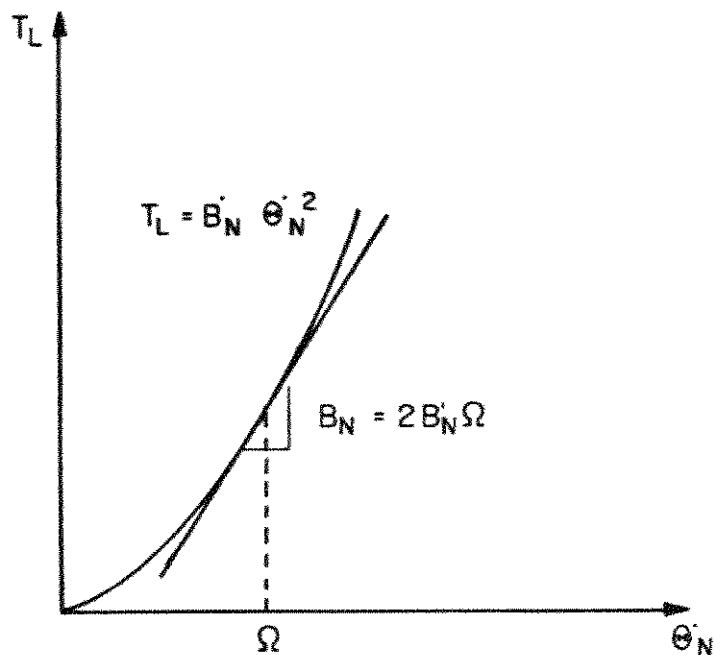


Figura 3.12: Coeficiente de Amortecimento Viscoso do Torque

O coeficiente de amortecimento devido ao impacto  $C_f$  é determinado no modelo de impacto

- Para o motor e o freio
 
$$B_1 = 0,0235 \text{ Nms/rad}$$

$$B_4 = 0,0695 \text{ Nms/rad}$$

Estes valores são determinados após o levantamento das potências de perdas do motor e do freio na velocidade de rotação do ensaio.

### 3.6 Considerações Finais

Com os resultados definidos nos Capítulos 2 e 3 é possível obter todas as características do equipamento, necessárias para a simulação em um computador.

Alguns valores foram definidos exclusivamente a partir do modelo matemático. Para estas propriedades do sistema existem limitações com relação à construção de bancos de ensaio e verificação do modelo teórico. No caso da folga, por exemplo, as deformações no contato são muito pequenas para serem verificadas sem a utilização de recursos apropriados para a medição. Os valores de amortecimento, definidos no final deste capítulo, também exigem ensaios especiais para a sua determinação, os quais não foram incluídos neste trabalho.

## Capítulo 4

# Programas Computacionais e simulações

O computador desempenha uma importante função na análise de vibrações. O desenvolvimento do equipamento (hardware) alcançado nos últimos anos tornaram possíveis a análise de um número cada vez maior de informações em tempo cada vez mais reduzido, com precisão muito elevada. Esta característica permitiu ao computador digital ocupar um importante espaço na análise de vibrações.

Para o aproveitamento dos recursos oferecidos pelos computadores é necessário o desenvolvimento de programas (software) com objetivos específicos. Com a possibilidade de análise de grande quantidade de resultados com alta velocidade, problemas mais complexos podem ser estudados. Esta característica aumenta a necessidade de conhecimento dos elementos responsáveis pelo desenvolvimento dos programas.

Determinados programas, como é o caso do Matlab [28], por exemplo, possuem funções específicas de engenharia que permitem grandes facilidades no estudo dos sistemas vibratórios e na análise de sinais.

O objetivo principal deste Capítulo é a obtenção de um programa para a simulação do sistema referente à bancada de ensaio descrita no Capítulo 2. O programa desenvolvido permite a simulação de condições de carga e acionamento teóricos, obtidos a partir da avaliação do comportamento real do equipamento. A simulação da resposta do motor para uma condição de carga aleatória não reproduz as características reais, pois este tipo de análise envolve o conhecimento dos parâmetros de controle do acionamento. As referências [10], [29] e [30] apresentam algumas considerações necessárias para este tipo de análise.

## 4.1 Frequências e Modos Naturais Torcionais do Sistema

O cálculo das frequências e modos naturais de um sistema é uma das etapas preliminares para a análise dinâmica. O conhecimento das frequências naturais permite identificar o aparecimento de ressonâncias no sistema. Os modos naturais podem auxiliar na identificação de pontos para a instalação de sensores e pontos de atuação de dispositivos para alterar uma determinada frequência.

O método de Holzer é o primeiro algoritmo desenvolvido para a determinação das frequências e modos naturais de um sistema com grande número de graus de liberdade, sendo sua aplicação apresentada nas referências [2] e [4].

Considerando o modelo matemático desenvolvido no Capítulo 3, a utilização de um programa no Matlab utilizando funções específicas, permite o cálculo rápido das frequências e modos naturais do sistema. Este cálculo é feito a partir da determinação dos autovalores e autovetores da matriz de transição  $[A]$ , conforme expressão a seguir. Os fundamentos teóricos para este cálculo podem ser obtidos na referência [31].

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [E] \\ -[I]^{-1}[K] & -[I]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

onde:

$[0]$  - matriz nula  $n \times n$

$[E]$  - matriz unidade  $n \times n$

$[I]^{-1}$  - inversa da matriz de inércia  $n \times n$

$[C]$  - matriz de amortecimento  $n \times n$

$[K]$  - matriz de rigidez  $n \times n$

A avaliação da influência de um determinado parâmetro pode ser feita com bastante rapidez, com a utilização deste programa.

As tabelas 4.1 a 4.4 apresentam os resultados numéricos obtidos. Os dados referentes às matrizes do sistema já foram determinados nos Capítulos 2 e 3. O amortecimento variável da folga não é considerado neste cálculo, pois a sua influência é muito pequena.

## 4.2 Método de Integração Numérica

A resposta no tempo de um sistema dinâmico com vários graus de liberdade é obtida através da integração numérica das equações de movimento definidas no Capítulo 3.

Existem diversos métodos numéricos para a integração de sistemas de equações diferenciais [15], [32], [33] e [34]. A referência [35] apresenta um estudo comparativo entre os seis principais métodos de integração numérica aplicados na solução de sistemas dinâmicos não lineares.

|                    | 1      | 2       | 3       | 4       |
|--------------------|--------|---------|---------|---------|
| Frequência Natural | 0      | 68,88   | 692,07  | 764,60  |
| $\Theta_1$         | 1,0000 | 1,0000  | -0,0997 | 0,0472  |
| $\Theta_2$         | 1,0000 | 0,8907  | 1,0000  | -0,5878 |
| $\Theta_3$         | 1,0000 | -0,1285 | 0,6306  | 1,0000  |
| $\Theta_4$         | 1,0000 | -0,2278 | -0,0144 | -0,0190 |

Tabela 4.1: Frequências e Modos Naturais do Sistema sem Folga

|                    | 1      | 2       | 1      | 2       | 3       |
|--------------------|--------|---------|--------|---------|---------|
| Frequência Natural | 0      | 978,66  | 0      | 286,71  | 751,97  |
| $\Theta_1$         | 1,0000 | -0,0475 | -      | -       | -       |
| $\Theta_2$         | 1,0000 | 1,0000  | -      | -       | -       |
| $\Theta_3$         | -      | -       | 1,0000 | 1,0000  | -0,1903 |
| $\Theta_4$         | -      | -       | 1,0000 | 0,0907  | 1,0000  |
| $\Theta_5$         | -      | -       | 1,0000 | -0,0139 | -0,0196 |

Tabela 4.2: Frequências e Modos Naturais do Sistema com Folga e Desacoplado

|                    | 1      | 2       | 3       | 4       | 5       |
|--------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Frequência Natural | 0      | 68,70   | 686,6   | 764,0   | 5798,1  |
| $\Theta_1$         | 1,0000 | 1,0000  | -0,0979 | 0,0446  | -0,0013 |
| $\Theta_2$         | 1,0000 | 0,8912  | 0,9712  | -0,5547 | 1,0000  |
| $\Theta_3$         | 1,0000 | 0,8855  | 1,0000  | -0,5672 | -0,8237 |
| $\Theta_4$         | 1,0000 | -0,1290 | 0,5843  | 1,0000  | 0,0012  |
| $\Theta_5$         | 1,0000 | -0,2277 | -0,0137 | -0,0190 | 0,0000  |

Tabela 4.3: Frequências e Modos Naturais do Sistema com Folga e Acoplado com Pino de 6 mm

|                    | 1      | 2       | 3       | 4       | 5       |
|--------------------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Frequência Natural | 0      | 68,70   | 688,8   | 764,0   | 5986,9  |
| $\Theta_1$         | 1,0000 | 1,0000  | -0,0980 | 0,0448  | -0,0012 |
| $\Theta_2$         | 1,0000 | 0,8912  | 0,9730  | -0,5567 | 1,0000  |
| $\Theta_3$         | 1,0000 | 0,8858  | 1,0000  | -0,5684 | -0,8250 |
| $\Theta_4$         | 1,0000 | -0,1289 | 0,5865  | 1,0000  | 0,0011  |
| $\Theta_5$         | 1,0000 | -0,2277 | -0,0138 | -0,0190 | 0,0000  |

Tabela 4.4: Frequências e Modos Naturais do Sistema com Folga e Acoplado com Pino de 8 mm

Os métodos mais utilizados, que na realidade constituem-se em duas famílias de algoritmos distintos, são o Métodos de Newmark [36] e de Runge-Kutta.

O método utilizado neste trabalho é o de Runge-Kutta. Este método explícito foi desenvolvido em 1895 por C. Runge [37] e aprimorado em 1901 por W. Kutta [38].

O algoritmo básico é aplicado na solução de uma equação diferencial de primeira ordem do tipo  $\dot{\Theta} = f(\Theta, t)$ . Este algoritmo pode ser adaptado para a solução de sistemas de equações diferenciais de 2.<sup>a</sup> Ordem, como é o caso das equações que descrevem os sistemas dinâmicos.

| t                 | $\{\Theta\}$                   | $\{\Theta\}$                   | $\{\dot{\Theta}\}$       |
|-------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------|
| $t_1 = t_1$       | $K_1 = \{\Theta\}_1$           | $g_1 = \{\Theta\}_1$           | $f_1 = F(t_1, K_1, g_1)$ |
| $t_2 = t_1 + h/2$ | $K_2 = \{\Theta\}_1 + g_1 h/2$ | $g_2 = \{\Theta\}_1 + f_1 h/2$ | $f_2 = F(t_2, K_2, g_2)$ |
| $t_3 = t_1 + h/2$ | $K_3 = \{\Theta\}_1 + g_2 h/2$ | $g_3 = \{\Theta\}_1 + f_2 h/2$ | $f_3 = F(t_3, K_3, g_3)$ |
| $t_4 = t_1 + h$   | $K_4 = \{\Theta\}_1 + g_3 h$   | $g_4 = \{\Theta\}_1 + f_3 h$   | $f_4 = F(t_4, K_4, g_4)$ |

Tabela 4.5: Runge- Kutta de 4.<sup>a</sup> ordem

Os novos valores de  $\Theta$  e  $\dot{\Theta}$  são obtidos em:

$$\{\Theta\}_{i+1} = \{\Theta\}_i + \frac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4)$$

$$\{\dot{\Theta}\}_{i+1} = \{\dot{\Theta}\}_i + \frac{h}{6}(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)$$

A tabela é descrita para  $i = 1$ , obtendo-se os valores a partir das condições iniciais, os novos valores calculados permitem o incremento de  $i$  para a obtenção dos valores seguintes no intervalo de tempo considerado.

Os vetores  $\{\Theta\}$ ,  $\{\dot{\Theta}\}$  e  $\{\ddot{\Theta}\}$  são de ordem  $n$ . A função  $F(t,K,g)$  é obtida a partir do sistema de equações diferenciais do modelo matemático, conforme Capítulo 3.

O método de Runge-Kutta, como pode ser confirmado na referência [35], é considerado um dos mais preciso na solução de equações diferenciais não lineares. A principal dificuldade encontrada na aplicação deste método é a resolução de sistemas com rigidez muito elevada e momentos de inércia baixos. Nestes sistemas a frequência natural pode ser elevada ou então a diferença entre a frequência menor e maior pode ser muito alta. Para estes casos é necessário escolher um tempo de discretização compatível com a frequência natural mais elevada, o que resulta em um tempo de programação elevado.

A referência [39] apresenta um estudo do desempenho do método de Runge-Kutta em sistemas com descontinuidades. O intervalo recomendado para o incremento do tempo é  $\Delta t < 0,1/\omega_n$ , sendo  $\omega_n$  a frequência natural mais elevada.

Para reduzir o tempo de programação pode ser utilizado um micro computador com co-processador aritmético ou então de uma linha mais avançada. Em termos de programação pode ser implementado o Runge-Kutta com incremento variável.

### 4.3 Programa para Obtenção da Resposta no Tempo

A figura 4.1 apresenta a sequência utilizada para a criação do programa de integração dos sistemas de equações diferenciais mencionados no Capítulo 3 na forma de fluxograma. A estrutura básica apresentada permite uma grande variedade de entrada e saída de dados para a análise de sistemas de transmissão de torque e outros sistemas vibratórios com vários graus de liberdade.

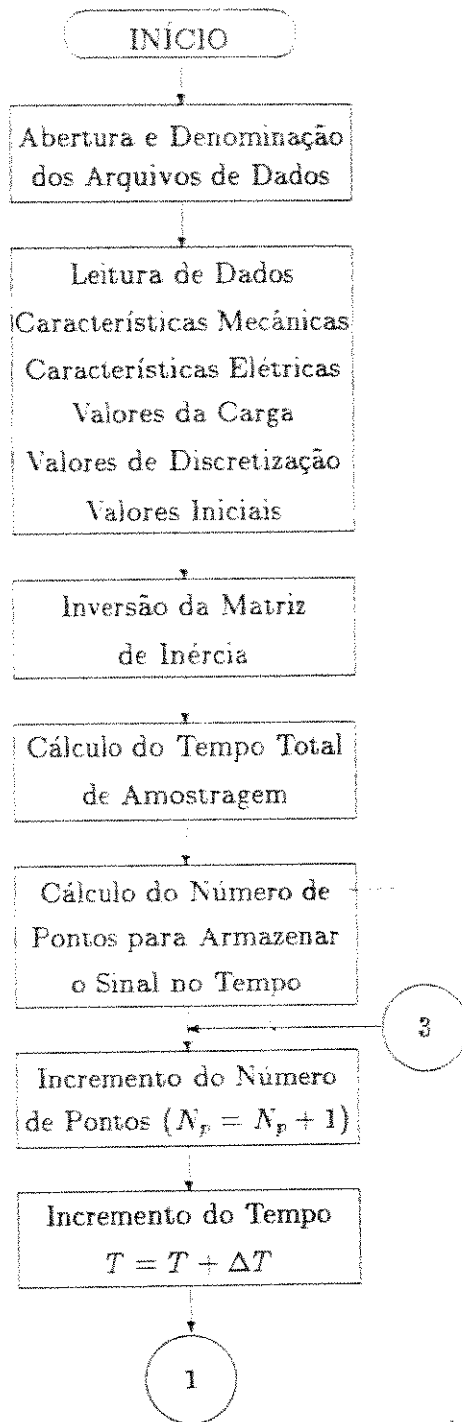
Para a utilização do programa em sistemas onde a folga não é considerada, pode ser utilizado o mesmo fluxograma, sendo alterada apenas a subrotina (A) na montagem das matrizes.

O cálculo dos torques de acionamento e da carga pode ser feito em subrotinas específicas, facilitando a alteração destas características do sistema.

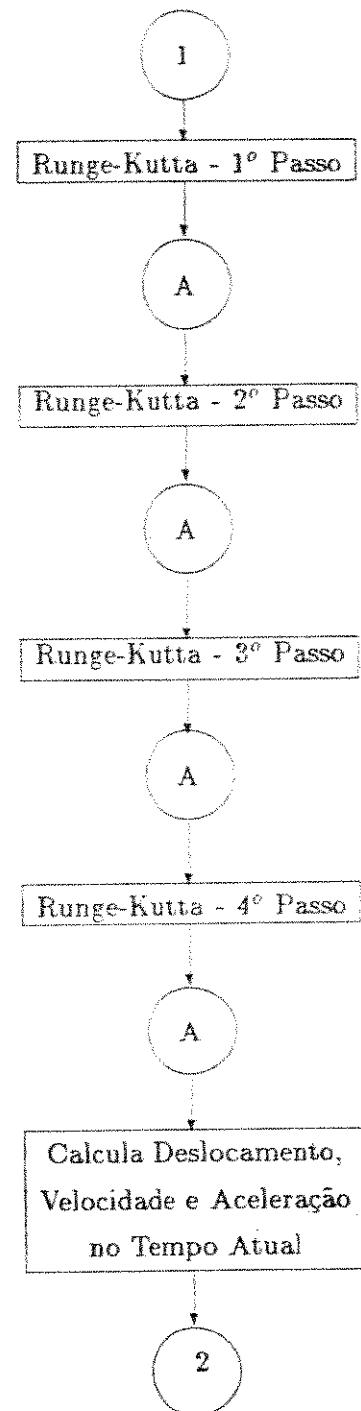
A folga analisada nas simulações encontra-se entre as estações (2) e (3), conforme descrito no Capítulo 3. Esta característica do programa pode ser modificada através de alterações na sub-rotina (A), na parte referente à montagem das matrizes de rigidez e amortecimento.

### 4.4 Resultados das Simulações

A obtenção de um modelo matemático que represente as condições reais de operação de um sistema eletromecânico completo (acionamento, transmissão e carga), necessita do conhecimento das características de operação de todos os componentes do sistema. Como



continua...



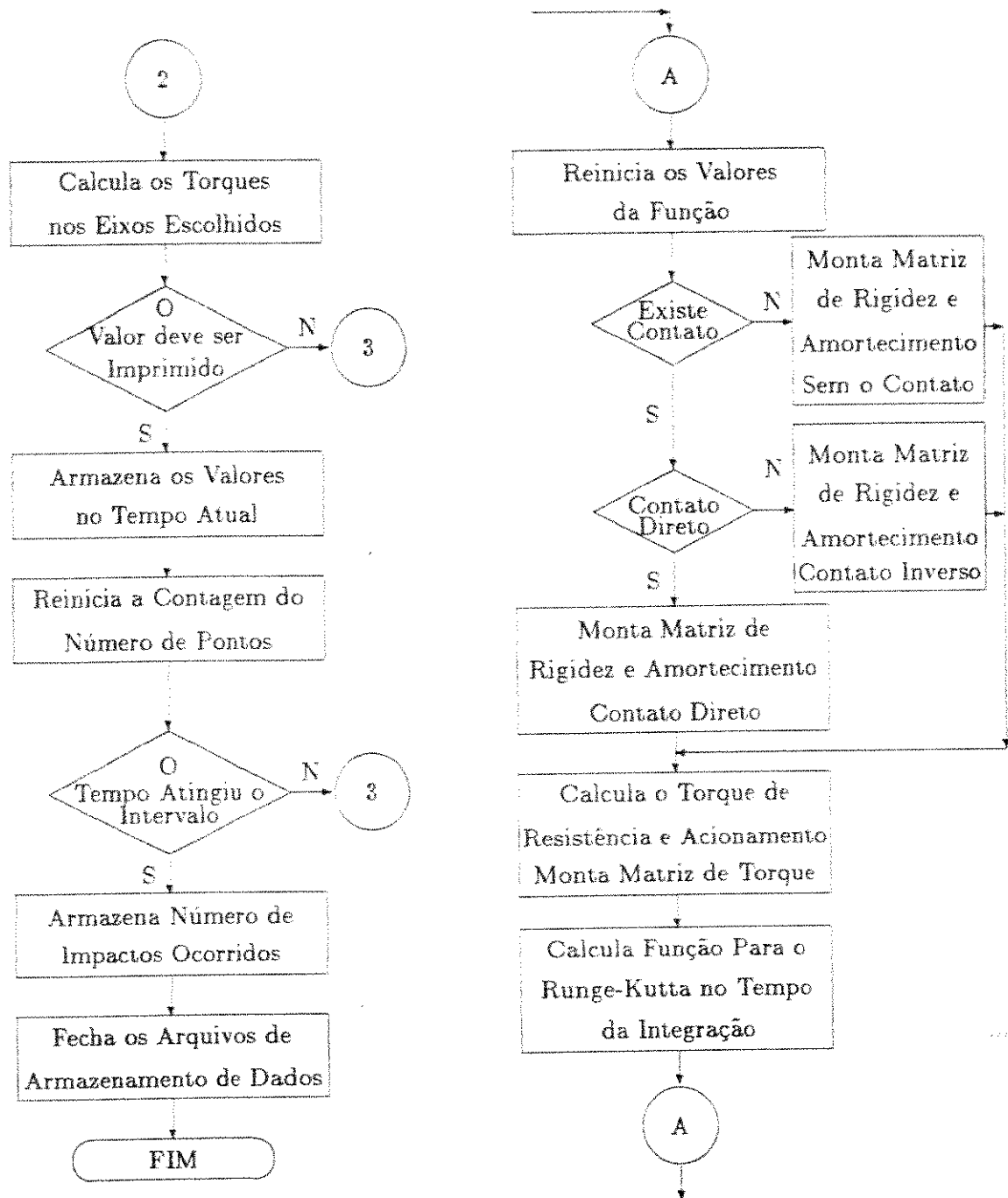


Figura 4.1: Fluxograma Para Elaboração do Programa Para Determinação da Resposta no Tempo

já foi mencionado nos Capítulos anteriores, neste trabalho não foram determinadas as características reais de operação do motor e do freio em condições transientes.

Apesar desta deficiência os programas desenvolvidos permitem uma grande variedade de simulações, que podem representar as condições reais de trabalho do equipamento. Para identificar as características do comportamento do motor e do freio, foram feitos alguns ensaios que constam do Capítulo 5.

#### 4.4.1 Verificação do Modelo de Impacto

O modelo de impacto utilizado na simulação é obtido a partir dos trabalhos descritos na referência [22], sendo que modelos semelhantes têm sido aplicados por diversos autores, o que pode ser encontrado na referência [41].

Para avaliação do modelo foi desenvolvido um programa computacional que determina as características do impacto de um sistema conforme descrito na figura 3.6. Este sistema básico é constituído pelo par de impacto representado pelos momentos de inércia  $I_1$  e  $I_2$ .

Esta simulação tem como objetivo apenas a verificação do modelo de impacto, apesar dos resultados obtidos poderem ser utilizados na avaliação do sistema, esta será feita com o modelo completo.

Para facilitar a implementação do programa e a análise dos resultados, o sistema foi reduzido a apenas duas equações de movimento da forma:

$$\begin{aligned}\ddot{\alpha} &= \bar{T} & \text{para } |\Theta_1 - \Theta_2| < Z/2 \\ \ddot{\alpha} + \bar{K}_f \alpha + \bar{C}_f \dot{\alpha} &= \bar{T} & \text{para } |\Theta_1 - \Theta_2| \geq Z/2\end{aligned}$$

Neste sistema tem-se:

$$\bar{T} = \frac{T_1(t)}{I_1} + \frac{T_2(t)}{I_2}$$

- No contato direto

$$\bar{K}_f = K_f \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \left( 1 - \frac{Z}{2\alpha} \right)$$

$$\bar{C}_f = \frac{3}{4} K_f (1 - \lambda^2) \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \left( 1 - \frac{Z}{2\alpha} \right)$$

- No contato inverso

$$\bar{K}_f = K_f \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \left( 1 + \frac{Z}{2\alpha} \right)$$

$$\bar{C}_f = \frac{3}{4} K_f (1 - \lambda^2) \left( \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \left( 1 + \frac{Z}{2\alpha} \right)$$

$$\alpha = \Theta_1 - \Theta_2$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\Theta}_1 - \dot{\Theta}_2$$

$$\ddot{\alpha} = \ddot{\Theta}_1 - \ddot{\Theta}_2$$

Para a simulação são utilizados os seguintes valores:

$$I_1 = 0,40 \text{ kgm}^2$$

$$I_2 = 0,12 \text{ kgm}^2$$

$$K_f = 2871000 \text{ Nm/rad}$$

$$\lambda = 0,80$$

$$Z = 0,0021 \text{ rad}$$

Para as condições iniciais:

$$\alpha = 0$$

$$\dot{\alpha} = 10 \text{ rad/s}$$

O sistema é simulado sem nenhum torque externo aplicado, ou seja:  $\bar{T} = 0$ .

A figura 4.2 e 4.3 mostram os resultados obtidos para os dois primeiros impactos ocorridos, sendo um no sentido direto e outro no sentido inverso. Os laços de histerese apresentam a energia dissipada nestes impactos. Na figura seguinte é apresentado o tempo de duração dos impactos e a intensidade do torque para esta situação. Durante o tempo de 0,3 s são registrados 18 contatos diretos e 17 contatos inversos.

Para avaliar a importância da velocidade relativa do par de impacto no comportamento do sistema com folga as figuras 4.4 e 4.5 apresentam a simulação efetuada anteriormente, modificando-se apenas a condição inicial de velocidade relativa  $\dot{\alpha}$  que neste caso vale 5 rad/s. No mesmo período de integração são registrados 15 contatos diretos e 15 contatos inversos.

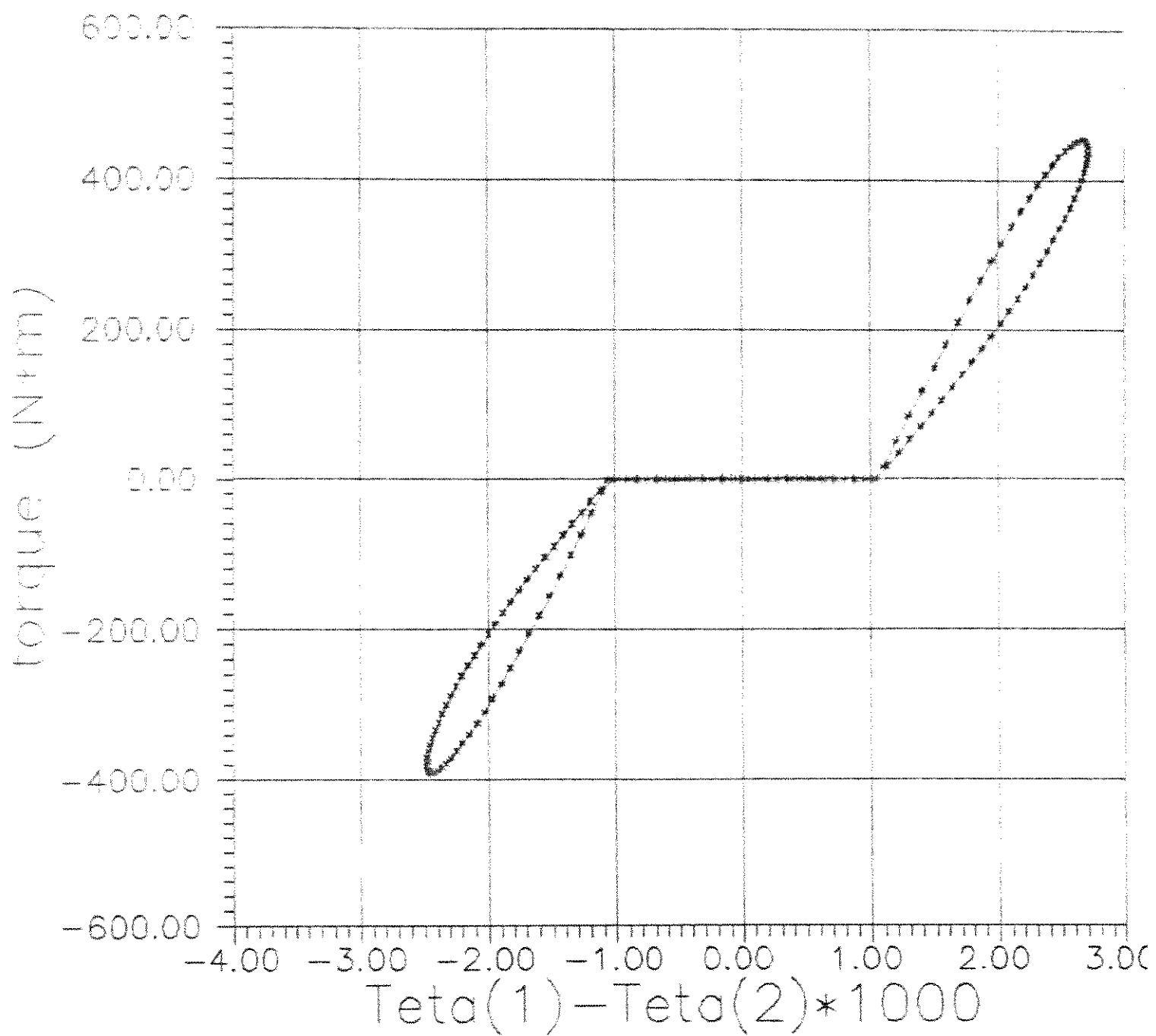


Figura 4.2: Curvas de Histerese para Sistema de Dois Graus de Liberdade -  $\dot{\alpha} = 10 \text{ rad/s}$

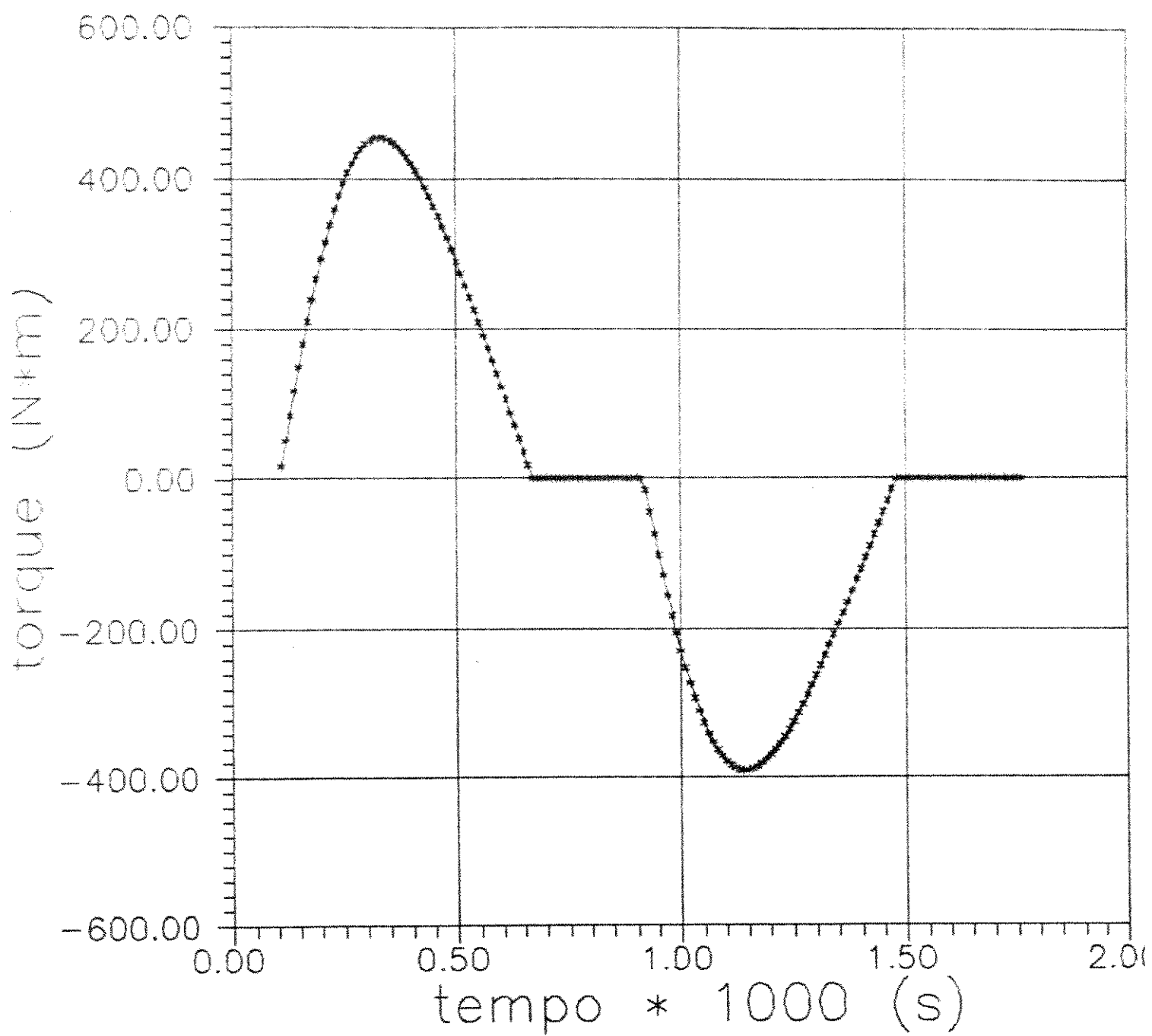


Figura 4.3: Tempo de Impacto para Sistema de Dois Graus de Liberdade -  $\dot{\alpha} = 10 \text{ rad/s}$

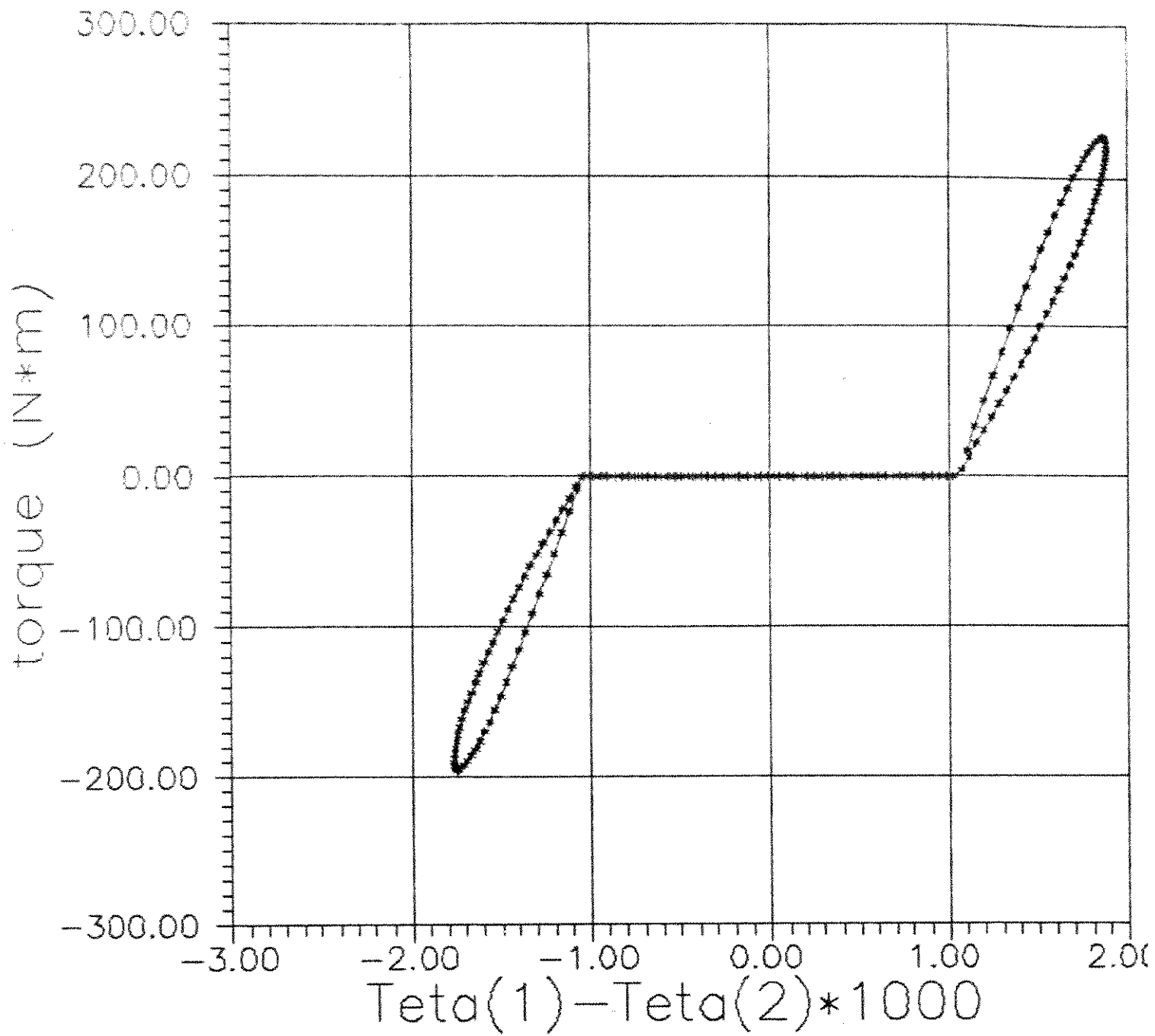


Figura 4.4: Curvas de Histerese para Sistema de Dois Graus de Liberdade -  $\dot{\alpha} = 5 \text{ rad/s}$

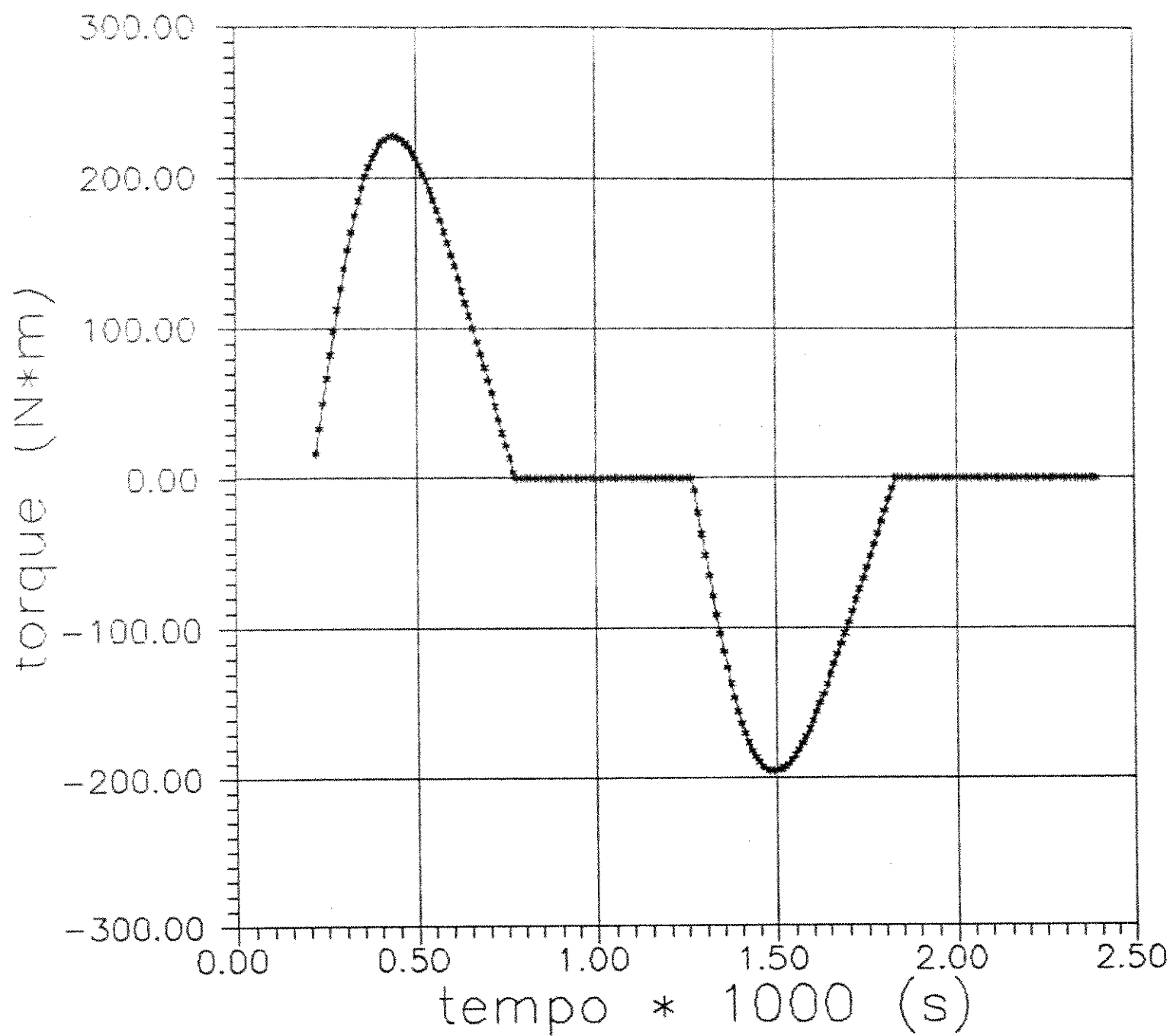


Figura 4.5: Tempo de Impacto para Sistema de Dois Graus de Liberdade -  $\dot{\alpha} = 5 \text{ rad/s}$

#### 4.4.2 Curva de Partida do Motor Elétrico

No Capítulo 3 foram descritas as equações básicas do motor elétrico de corrente contínua. Estas equações não podem ser utilizadas na simulação de condições transientes pois não definem os parâmetros de controle do acionamento quando este é submetido a uma condição variável de trabalho.

Para a identificação de algumas características do motor estas equações têm utilidade. Neste caso será determinada a curva de partida do motor elétrico, de acordo com as propriedades e limitações do painel de alimentação mencionado no Capítulo 2.

A curva de torque de partida do motor elétrico é apresentada na figura 4.6. Com estes resultados é possível analisar a velocidade de resposta do motor durante um acionamento. Na obtenção destas curvas não é considerada carga resistiva acoplada ao sistema, a não ser os amortecimentos descritos no capítulo anterior. Uma resistência de 1 Ohm representa a resistência equivalente do circuito de armadura. Esta simulação não considera a folga no acoplamento.

#### 4.4.3 Influência da Folga no Sistema de Transmissão

A presença da folga no sistema de transmissão de um equipamento eletromecânico pode influenciar em seu funcionamento, principalmente com relação aos esforços internos gerados pelos impactos em situações diversas de carregamento.

No item 3.3.4 foram apresentadas as situações críticas de operação de um equipamento que podem alterar o seu comportamento, principalmente com a presença de folgas na transmissão.

Considerando estas situações serão efetuadas as simulações no programa de integração. As funções de torque do motor e torque da carga foram introduzidas no modelo com base nos ensaios do equipamento, cujos resultados estão apresentados no Capítulo 5, e na simulação teórica do torque de partida.

O parâmetro utilizado por diversos autores na avaliação da folga de uma transmissão é o Fator de Amplificação de Torque (TAF). Considerando as condições de operação de um equipamento, o valor do torque de referência deve representar uma situação em que não ocorra amplificações ou então represente o torque permanente. Deve ser observado que as amplificações podem ser causadas por fatores que não sejam exclusivamente as folgas na transmissão.

- Partida do Equipamento.

Normalmente os equipamentos eletromecânicos possuem dispositivos de proteção que reduzem significativamente os efeitos de uma sobrecarga que pode ocorrer na partida do equipamento.

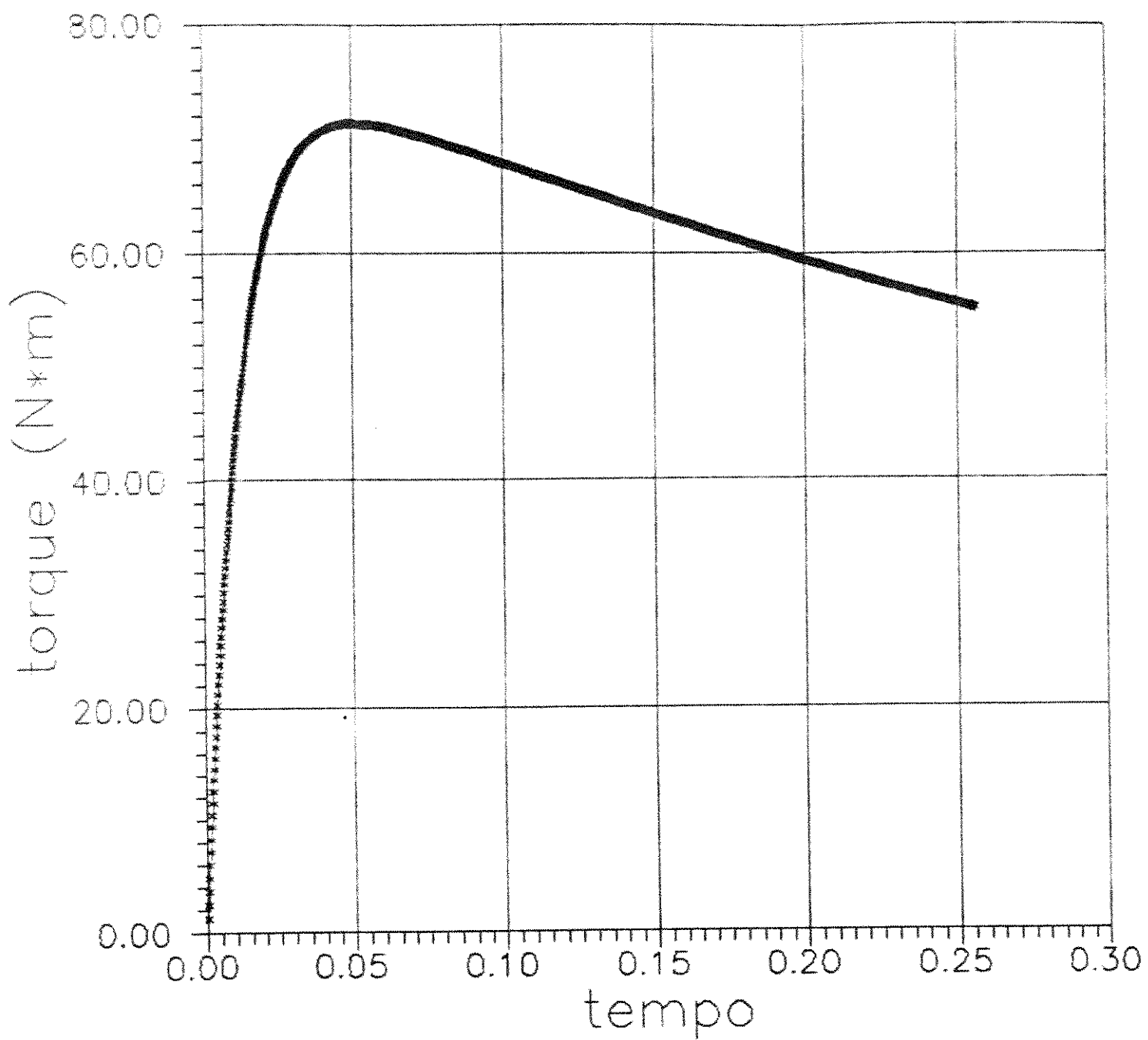


Figura 4.6: Torque de Partida do Motor Elétrico

Na avaliação dos efeitos que podem ocorrer na transmissão com folga será considerada a situação mais desfavorável. O motor, com velocidade inicial zero, terá a sua partida com a máxima aceleração possível, sendo aplicado o valor correspondente ao limite de seu painel de acionamento. A folga estará na sua máxima abertura, não sendo considerada carga resistiva acoplada ao acionamento.

As figuras 4.7, 4.8 e 4.9 apresentam os resultados para três diferentes condições de folga. Como pode ser observado nos gráficos, o valor de torque é superior para a folga maior. Considerando o torque de partida na medição sem folga como o valor de referência, os TAFs atingidos nesta simulação são apresentados na tabela 4.6.

| Pino (mm) | Folga (rad) | TAF  |
|-----------|-------------|------|
| 6         | 0,084       | 3,11 |
| 8         | 0,042       | 2,05 |
| 10        | -           | 1,00 |

Tabela 4.6: Resultado do TAF na Partida do Equipamento - Valor Teórico

Uma outra situação que necessita uma análise mais detalhada é a partida do equipamento passando pela ressonância. No ensaio a ser realizado não ocorre esta situação, pois a máxima rotação atingida corresponde a 20 Hz e a frequência natural mais baixa é de 68,60 Hz. Não será feita análise teórica deste caso, a referência [42] apresenta um estudo sobre este assunto.

- Reversão no Acionamento.

A reversão é uma característica operacional comum a diversos equipamentos. Normalmente antes da reversão é feita a frenagem do equipamento. Quando é necessária a reversão rápida, o torque de frenagem pode ser elevado.

Nesta simulação é considerado o equipamento com a folga fechada para o acionamento. Uma carga equivalente a 25 Nm esta aplicada ao sistema. Em um determinado instante é acionado o freio no motor, com um torque equivalente de -80 Nm. Os valores de TAF, com relação ao torque permanente do sistema, podem ser obtidos nos gráficos das figuras 4.10, 4.11 e 4.12 que correspondem aos resultados descritos na tabela 4.7.

O valor negativo é consequência do torque de frenagem. A rotação do equipamento no instante de aplicação do freio é de 120 rad/s.

- Aceleração da Carga.

Esta última situação ocorre em diversos equipamentos em função de oscilações no acionamento e na carga, provocando a abertura da folga durante a operação. Após a

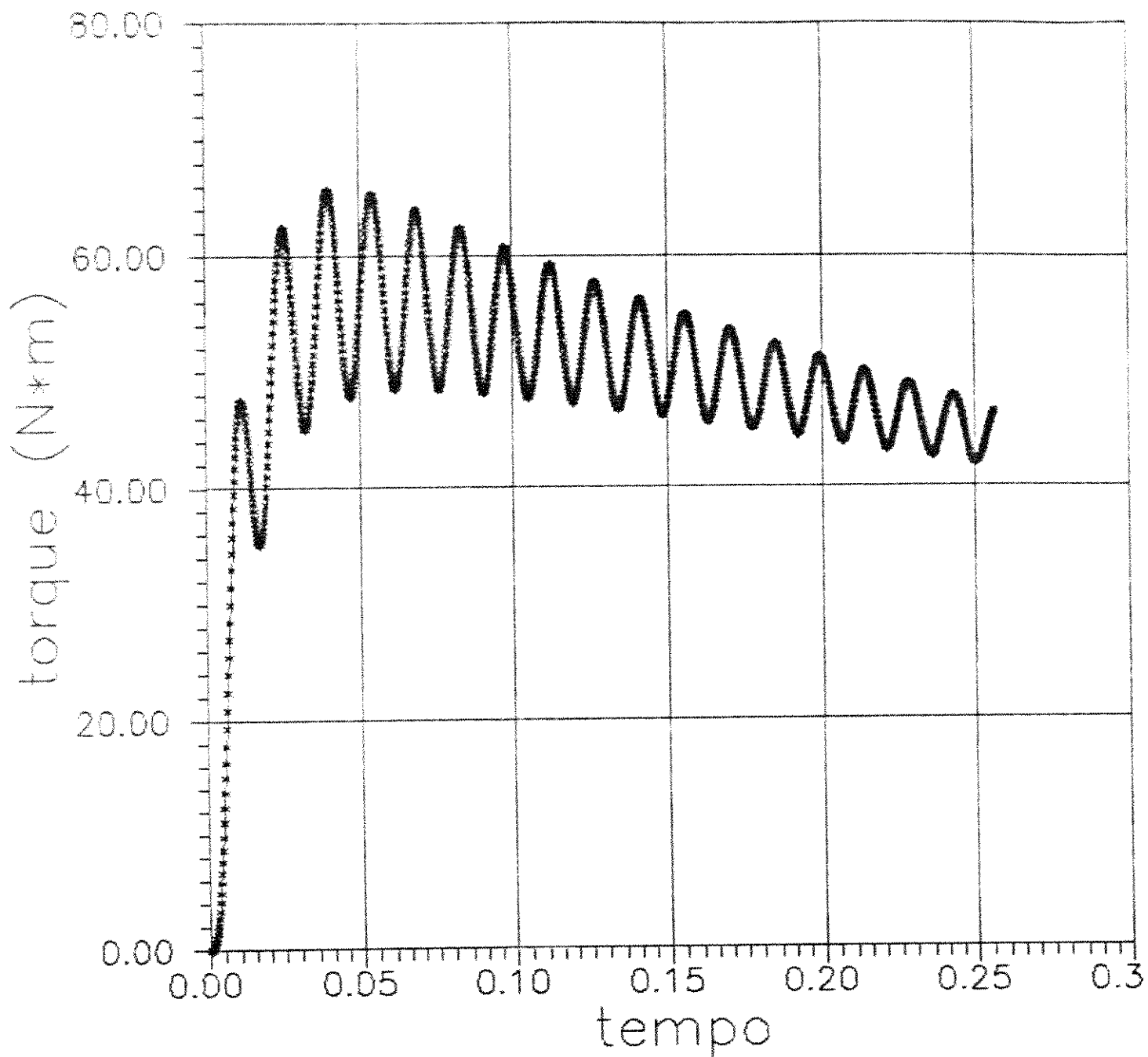


Figura 4.7: Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Teórico

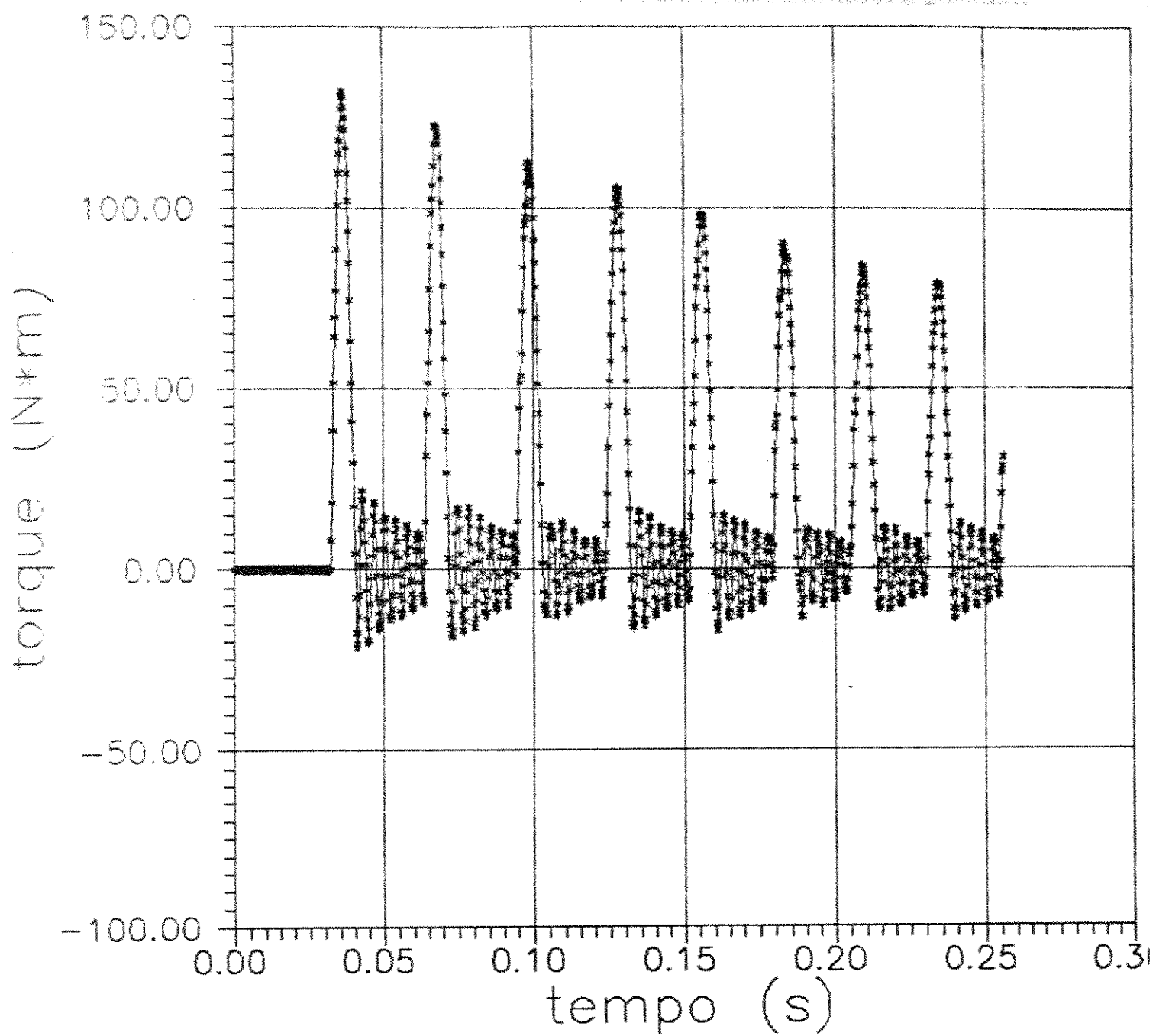


Figura 4.8: Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Teórico

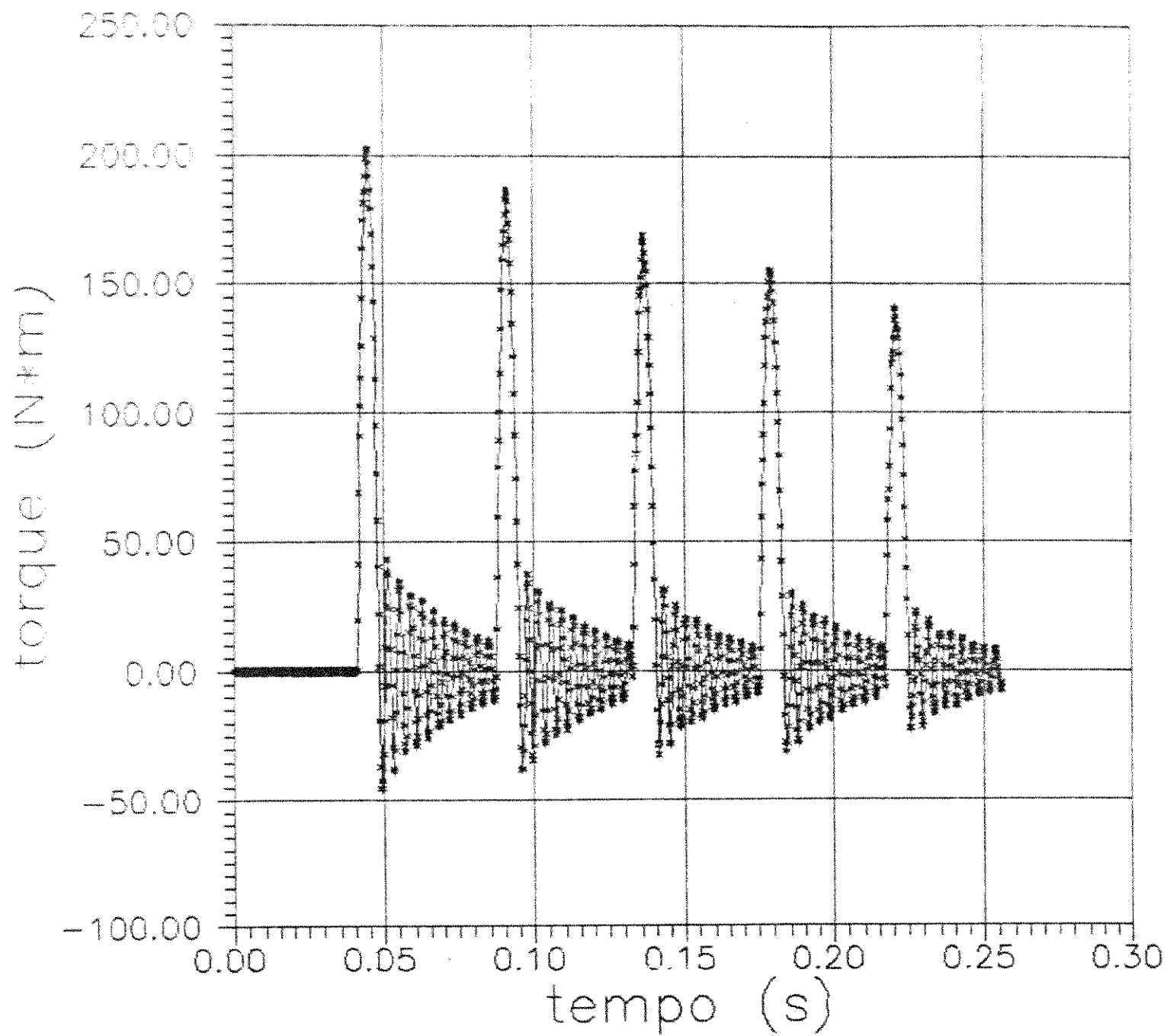


Figura 4.9: Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Teórico

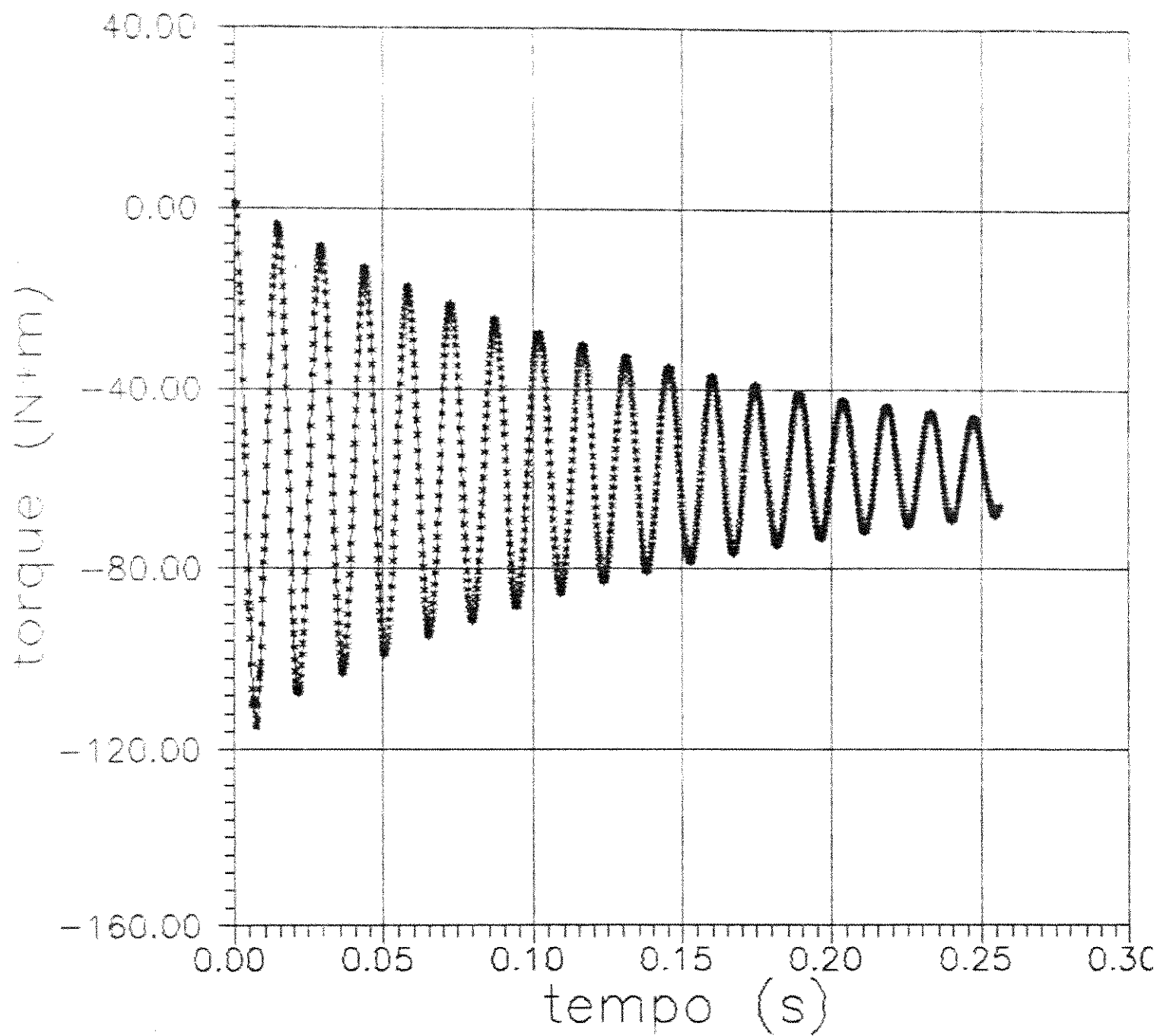


Figura 4.10: Reversão no Acionamento - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Teórico

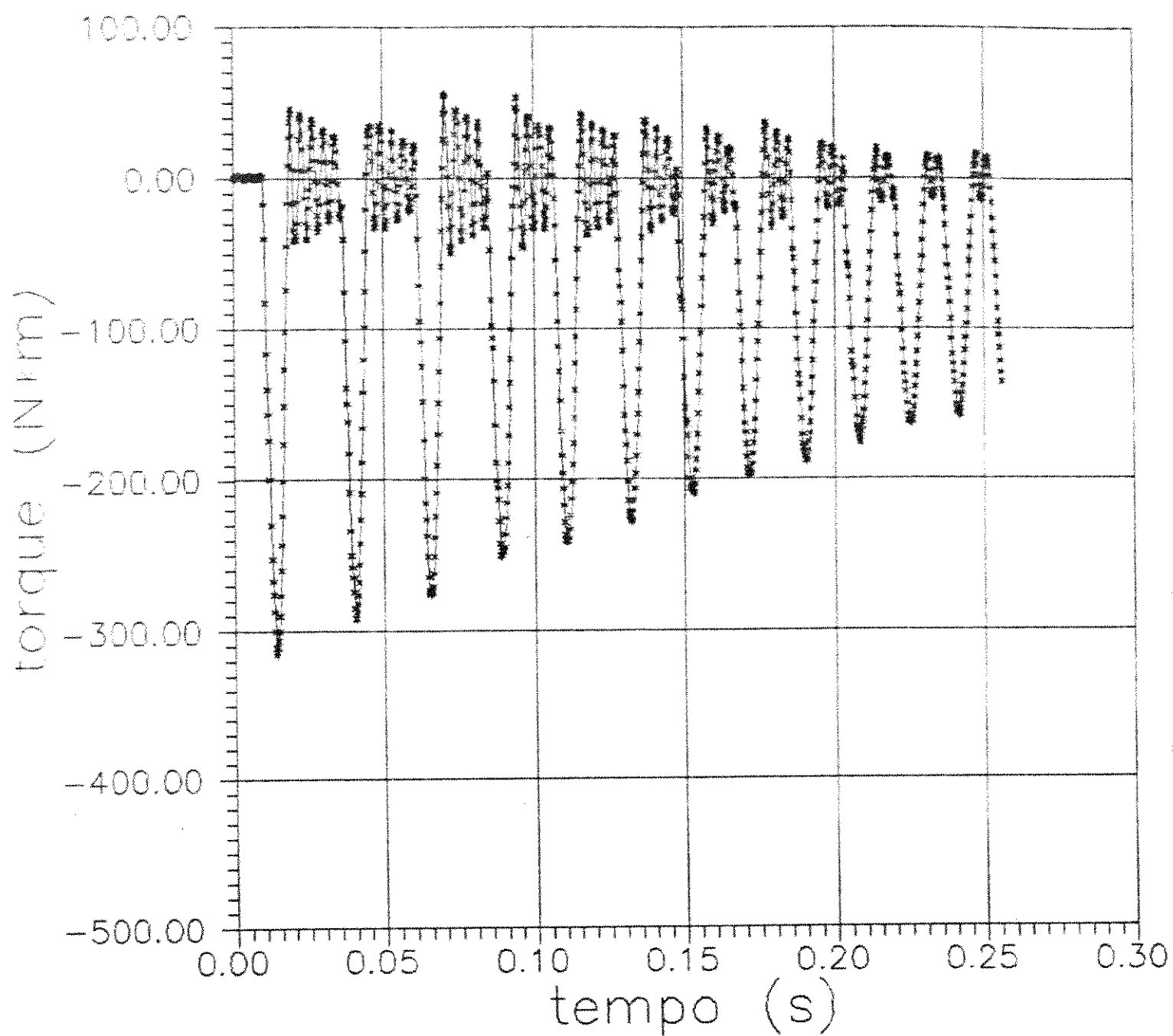


Figura 4.11: Reversão no Acionamento - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Teórico

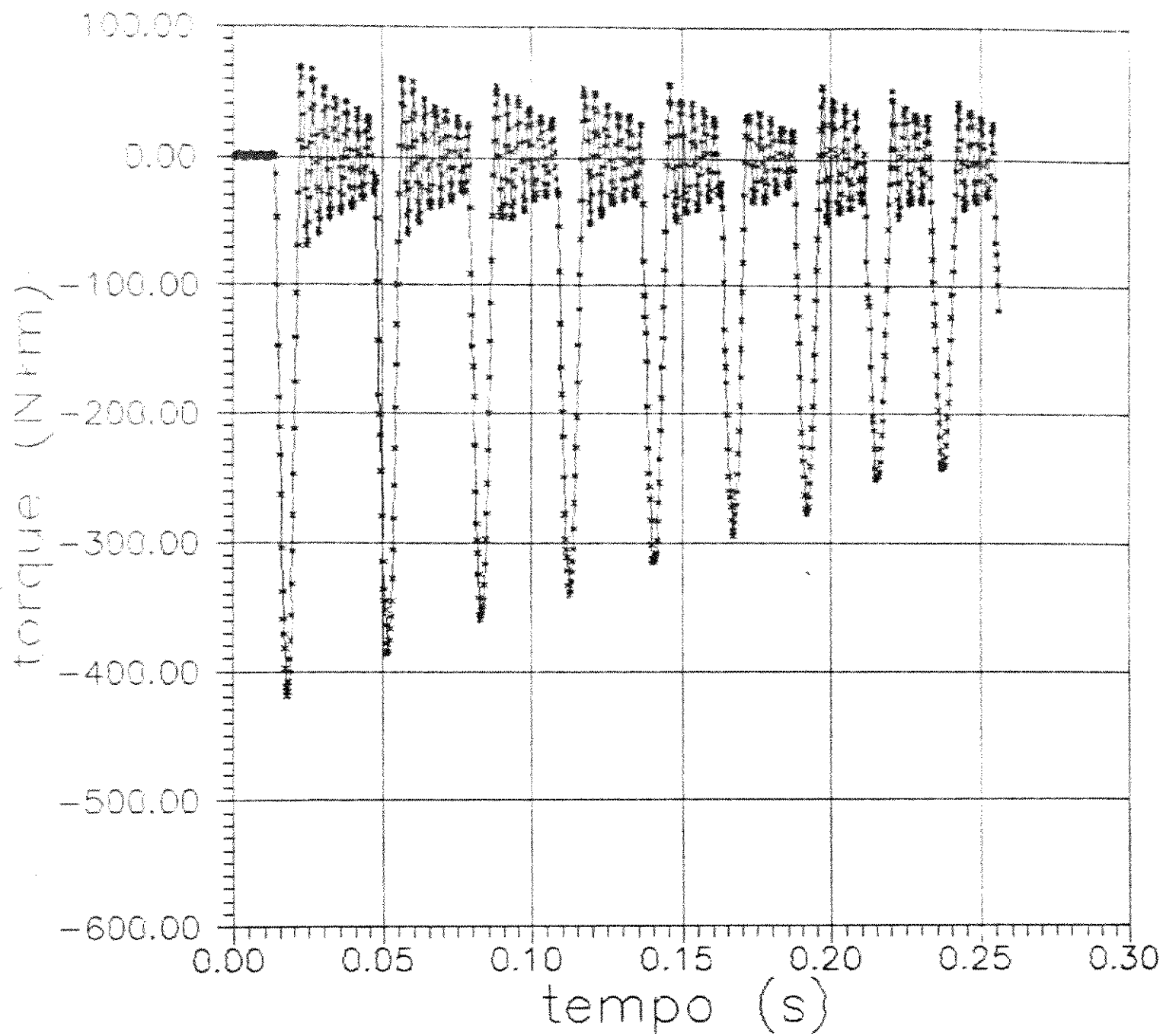


Figura 4.12: Reversão no Acionamento - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Teórico

abertura da folga ocorre o impacto, com a tendência do acionamento manter a condição estável de operação.

As condições iniciais para esta simulação consideram uma velocidade ligeiramente maior da carga que provoca a máxima abertura da folga. Sendo 118 rad/s a velocidade do lado motor e 120 rad/s a velocidade do lado da carga. O torque equivalente da carga é considerado de 25 Nm e o torque motor tem uma parcela constante de 25 Nm e uma componente de estabilização de  $4(\dot{\Theta}_1 - 120)$ , sendo  $\dot{\Theta}_1$  a velocidade angular do motor. As figuras 4.13, 4.14 e 4.15 apresentam os resultados obtidos na integração numérica do sistema. Os valores de TAF com relação ao torque permanente de estabilização para este caso são apresentados na tabela 4.8.

Nesta simulação foram obtidos os gráficos correspondentes à curva de histerese e do tempo de duração do impacto, respectivamente figuras 4.16 e 4.17, para a avaliação do máximo torque desenvolvido no par de impacto e da dissipação de energia no primeiro contato. Estes resultados demonstram o elevado valor do torque de impacto entre os pinos e furos com um curto intervalo de duração. Este gráfico corresponde ao pino de 6 mm, sendo o TAF registrado no acoplamento de 7,66.

A ocorrência de TAF superior a 1,00 para o equipamento sem folga na reversão e na aceleração da carga, deve-se à aplicação repentina do torque de frenagem no primeiro caso e no segundo caso à diferença de velocidade inicial. Estas condições determinam acelerações das inércias e consequentemente, valores de torque maior do que o permanente, mesmo na transmissão sem folga. A existência de folga determina um TAF mais elevado devido ao impacto.

Deve ser observado nas curvas simuladas o aparecimento de uma frequência menor do que as frequências naturais, resultado da repetição do processo de impacto através da ligação não linear de equações lineares com graus de liberdade distintos. Estas novas frequências naturais não lineares no processo de impacto podem ser visualizadas na figura 4.8, com 38 Hz e na figura 4.9 com 26 Hz. Este fenômeno repete-se também para a aceleração da carga com frequências de 54 Hz e 45 Hz, respectivamente. O aumento da folga implica em uma redução desta frequência não linear.

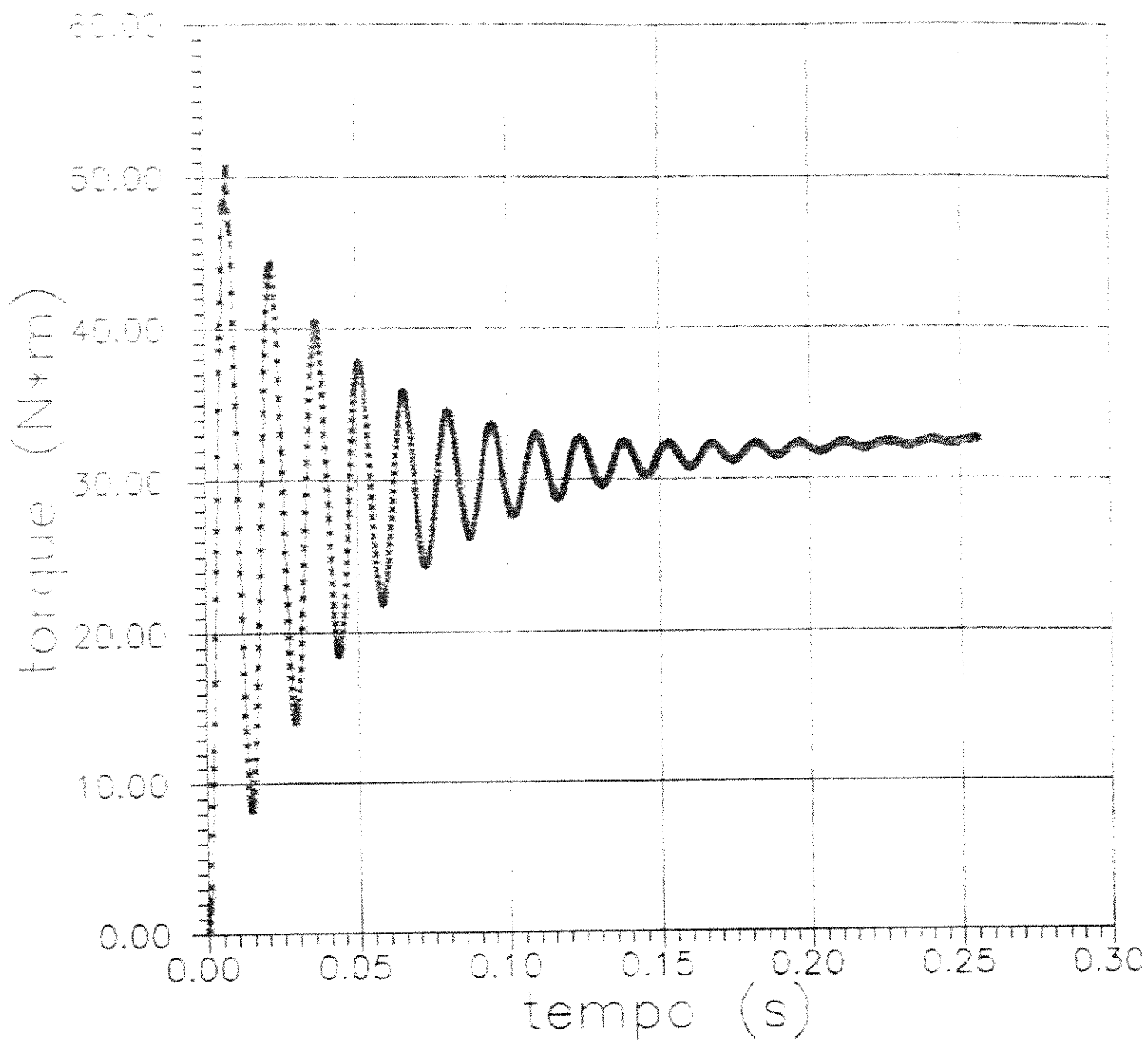


Figura 4.13: Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Teórico

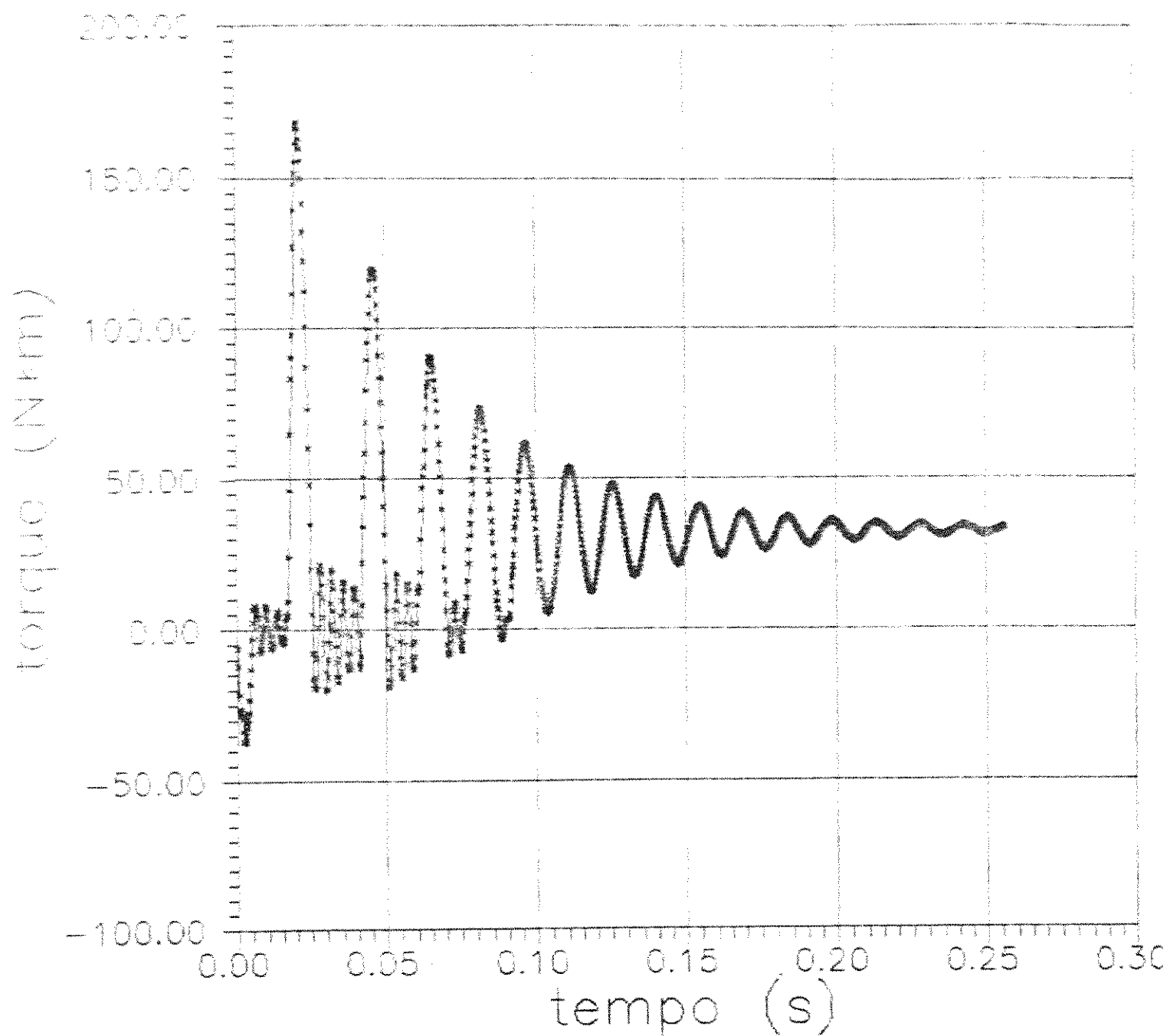


Figura 4.14: Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Teórico

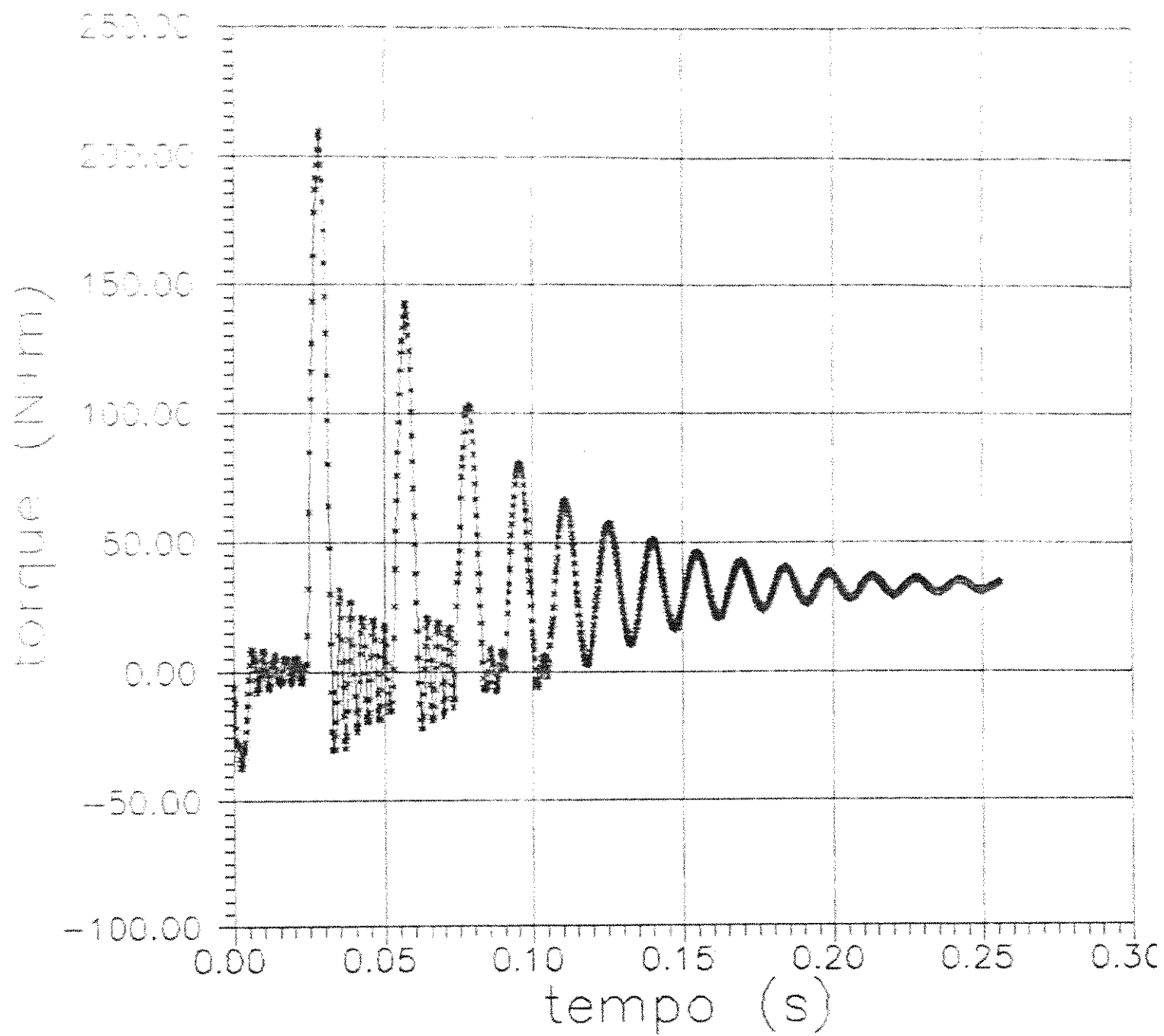


Figura 4.15: Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Teórico

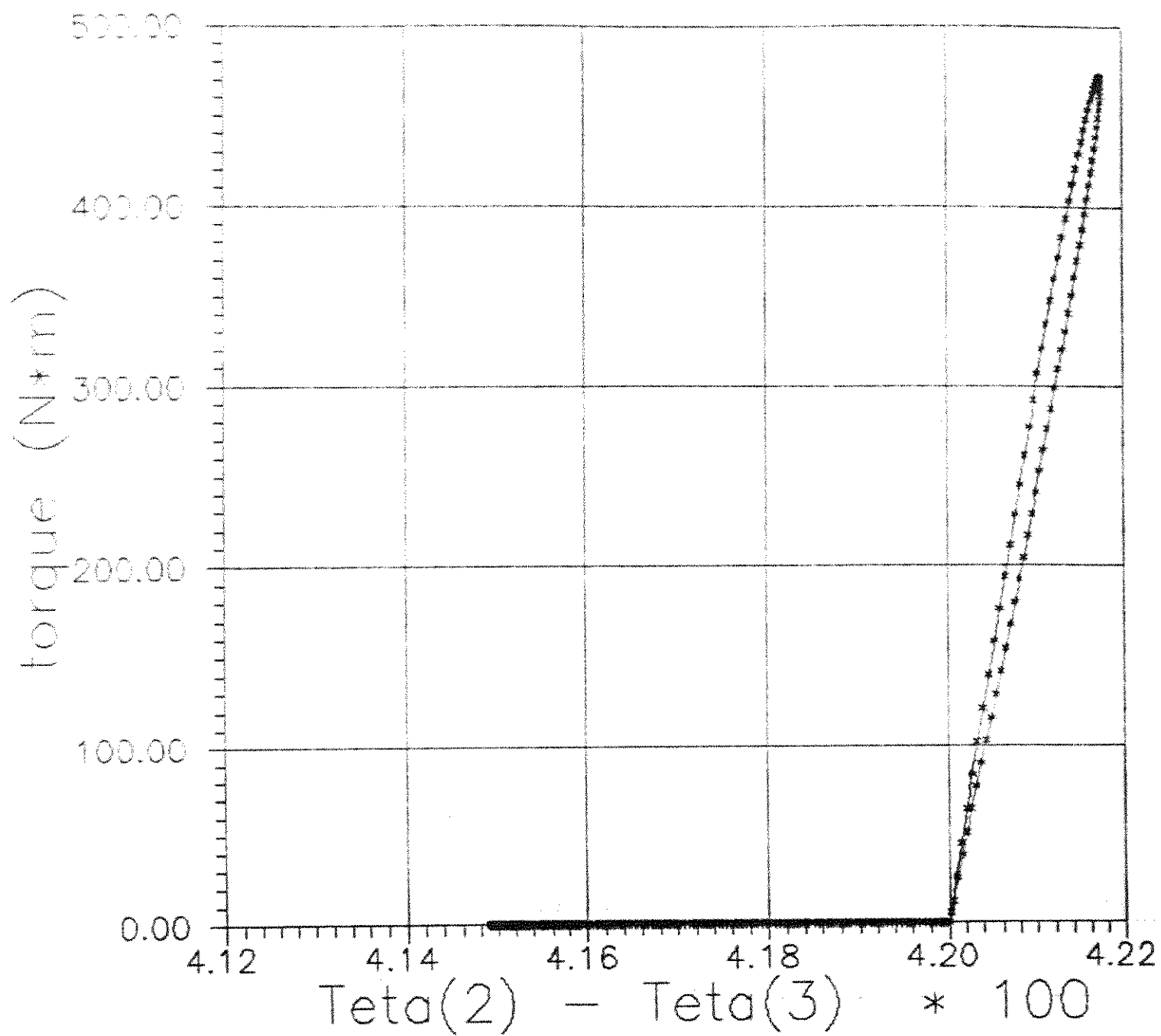


Figura 4.16: Curvas de Histerese para o Equipamento com Aceleração da Carga - pino de 6 mm

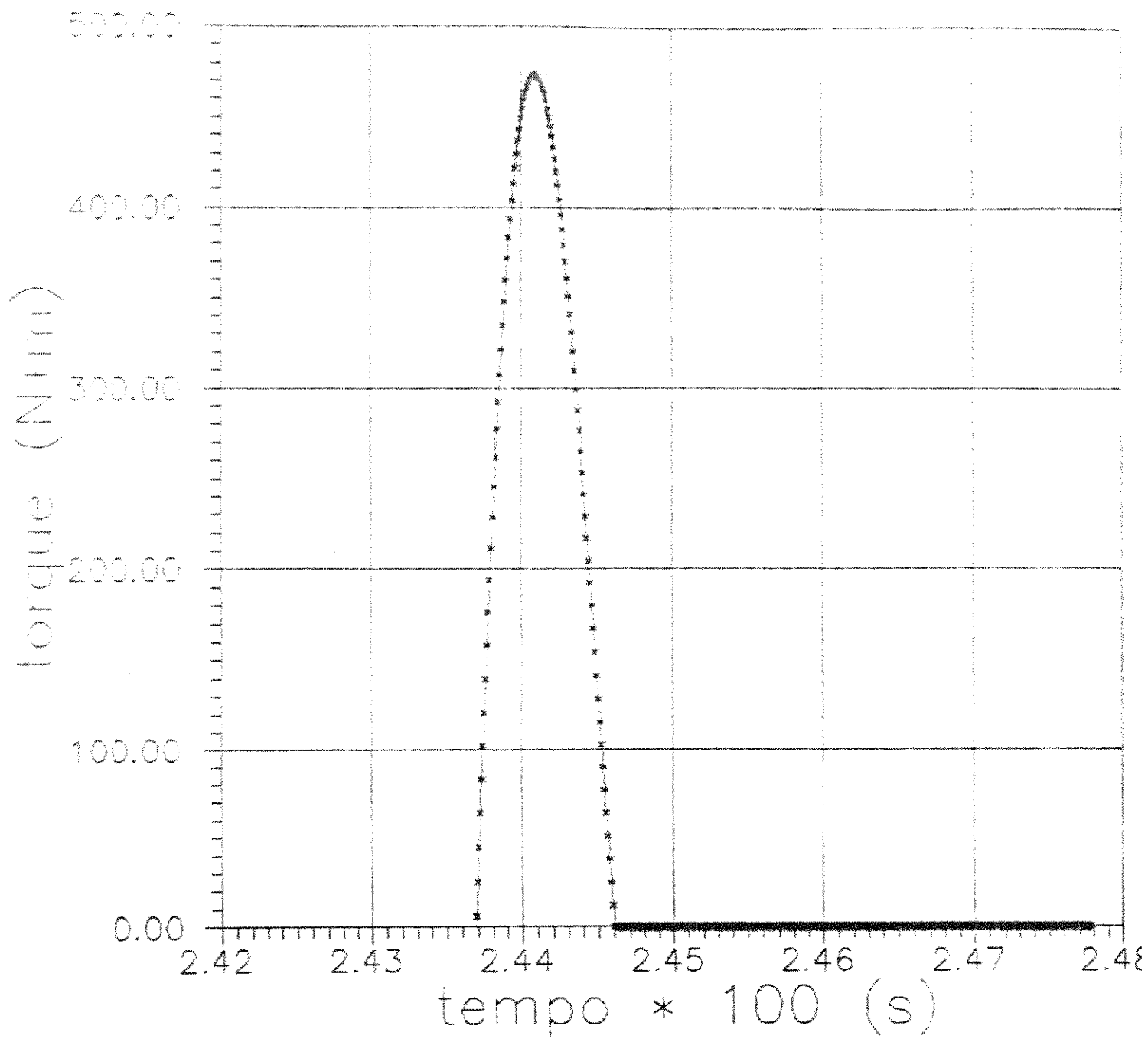


Figura 4.17: Tempo de Impacto para o Equipamento com Aceleração da Carga - pino de 6 mm

| Pino (mm) | Folga (rad) | TAF  |
|-----------|-------------|------|
| 6         | 0,084       | 7,64 |
| 8         | 0,042       | 5,72 |
| 10        | -           | 2,11 |

Tabela 4.7: Resultado do TAF na Reversão do Equipamento - Valor Teórico

| Pino (mm) | Folga (rad) | TAF  |
|-----------|-------------|------|
| 6         | 0,084       | 6,00 |
| 8         | 0,042       | 4,86 |
| 10        | -           | 1,46 |

Tabela 4.8: Resultado do TAF na Aceleração da Carga - Valor Teórico

## Capítulo 5

# Resultados Experimentais

O principal objetivo experimental deste trabalho é a medição do torque na transmissão. Além desta medida foram realizados ensaios para identificação das características do motor e do freio, sendo estes valores utilizados na simulação teórica realizada no Capítulo 4

### 5.1 Levantamento de Características do Equipamento

Os parâmetros elétricos que definem a variação do torque no equipamento são: corrente de armadura do motor e a corrente de campo do freio. Para avaliar o comportamento do torque com relação a estes valores foi utilizada a instrumentação descrita no Capítulo 2, sendo os resultados obtidos apresentados nos gráficos das figuras 5.1, 5.2 e 5.3.

### 5.2 Medidas de Torque na Transmissão

O equipamento utilizado na gravação do sinal correspondente ao torque é o analisador espectral da Scientific-Atlanta (SD380), sendo os detalhes da montagem da bancada de medição descritos no Capítulo 2.

As gravações do sinal têm o objetivo específico de levantar as situações críticas de operação, já definidas. No banco de ensaio não foi possível reproduzir a simulação teórica correspondente à reversão do acionamento, pois neste caso é necessário um freio de atuação rápida acoplado ao motor.

- Partida do Equipamento.

O torque de partida é medido para diferentes condições de folga. O TAF é considerado em relação ao valor definido na curva teórica de partida do motor elétrico, com o valor de 66 Nm.

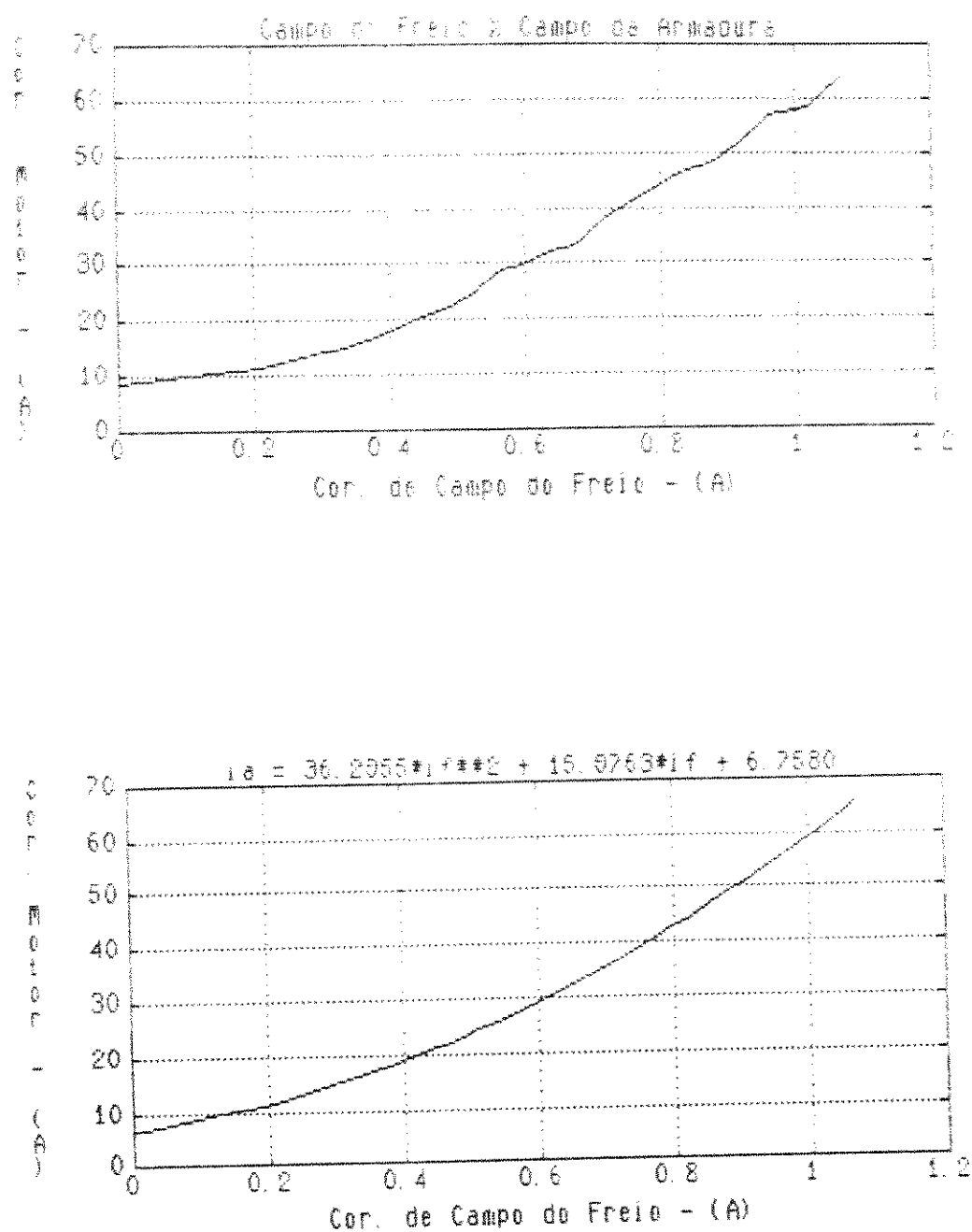


Figura 5.1: Relação entre Corrente de Campo do Freio e Corrente da Armadura

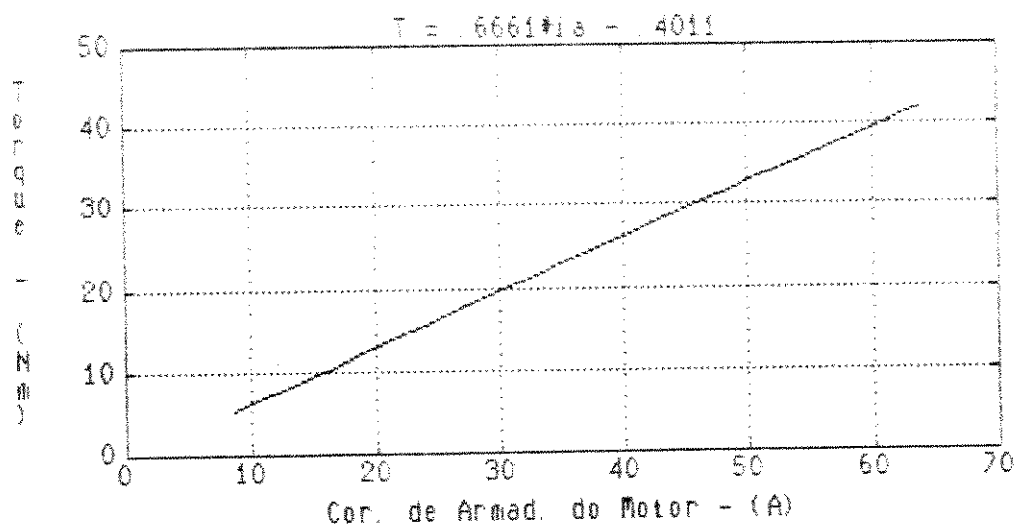
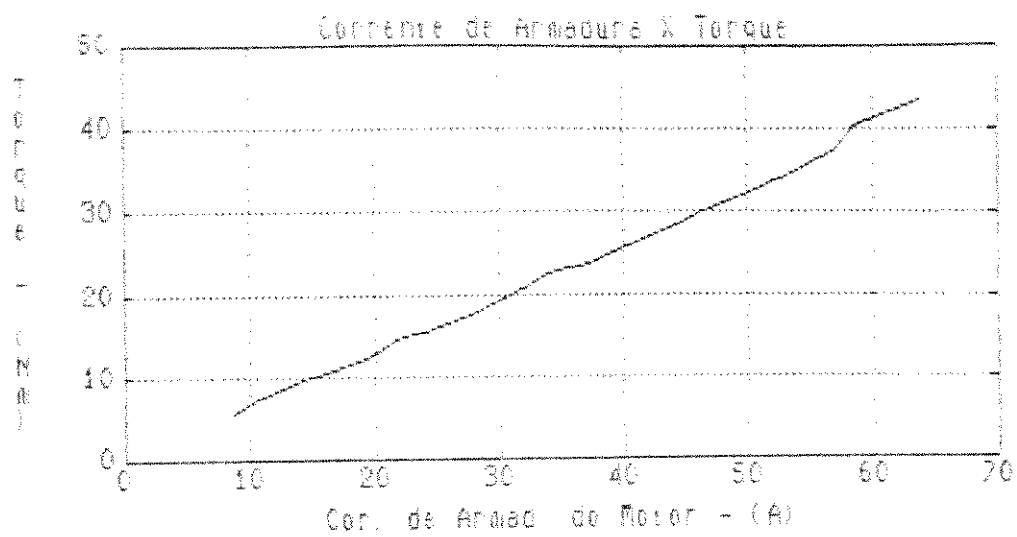


Figura 5.2: Relação entre o Torque na Transmissão e a Corrente da Armadura

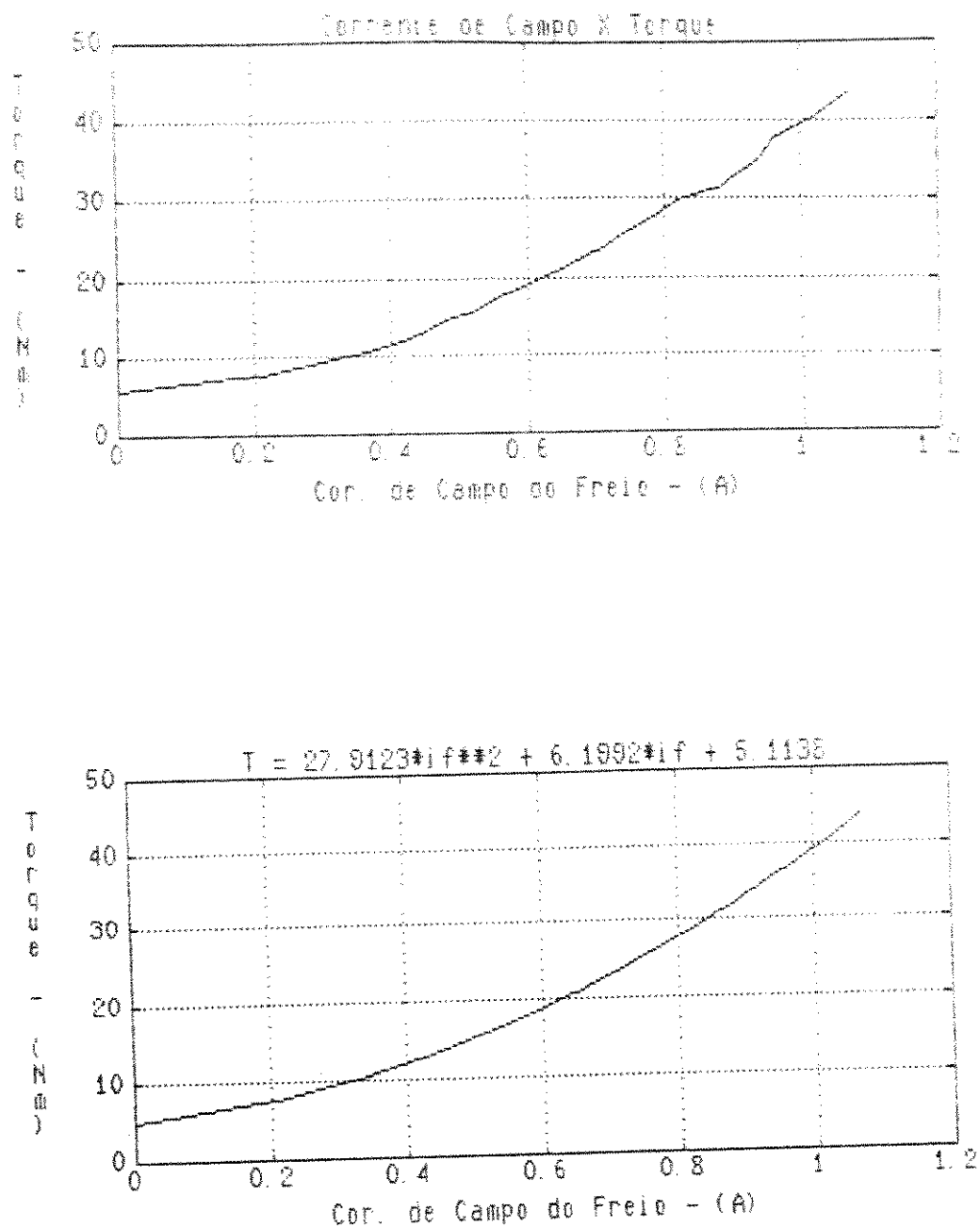


Figura 5.3: Relação entre o Torque na Transmissão e a Corrente de Campo do Freio

A figura 5.4 apresenta o comportamento do torque na partida com o pino de 10 mm. A amplitude máxima registrada para esta situação é de 97,7 Nm.

Nas medições do torque de partida com folga, foi mantida a máxima abertura antes de colocar o sistema em movimento.

Para o pino de 8 mm, conforme figura 5.5, o torque máximo registrado é de 111,0 Nm. Com o pino de 6 mm, figura 5.6, é obtido um torque de 144 Nm.

Os valores de TAF são apresentados na tabela abaixo.

| Pino (mm) | Folga (rad) | TAF  |
|-----------|-------------|------|
| 6         | 0,084       | 2,18 |
| 8         | 0,042       | 1,68 |
| 10        | -           | 1,48 |

Tabela 5.1: Resultado do TAF na Partida do Equipamento - Valor Experimental

- Aceleração da Carga.

Para este ensaio é aplicado o freio eletromagnético. Utilizando o potenciômetro graduado da corrente de campo do freio, é provocada uma frenagem pulsante com um torque permanente de 35 Nm. Com a pulsação é obtida a abertura da folga e o consequente impacto na transmissão.

A figura 5.7 apresenta o resultado obtido com o pino de 10 mm, que corresponde à simulação de uma condição sem folga, com o torque máximo de 93,3 Nm.

O resultado obtido para o pino de 8 mm é representado pelo gráfico da figura 5.8, com o torque máximo de 151 Nm.

A figura 5.9 corresponde ao pino de 6 mm, com torque máximo de 173 Nm.

A tabela com os TAFs é apresentada abaixo.

| Pino (mm) | Folga (rad) | TAF  |
|-----------|-------------|------|
| 6         | 0,084       | 4,94 |
| 8         | 0,042       | 4,31 |
| 10        | -           | 2,66 |

Tabela 5.2: Resultado do TAF na Reversão do Equipamento - Valor Experimental

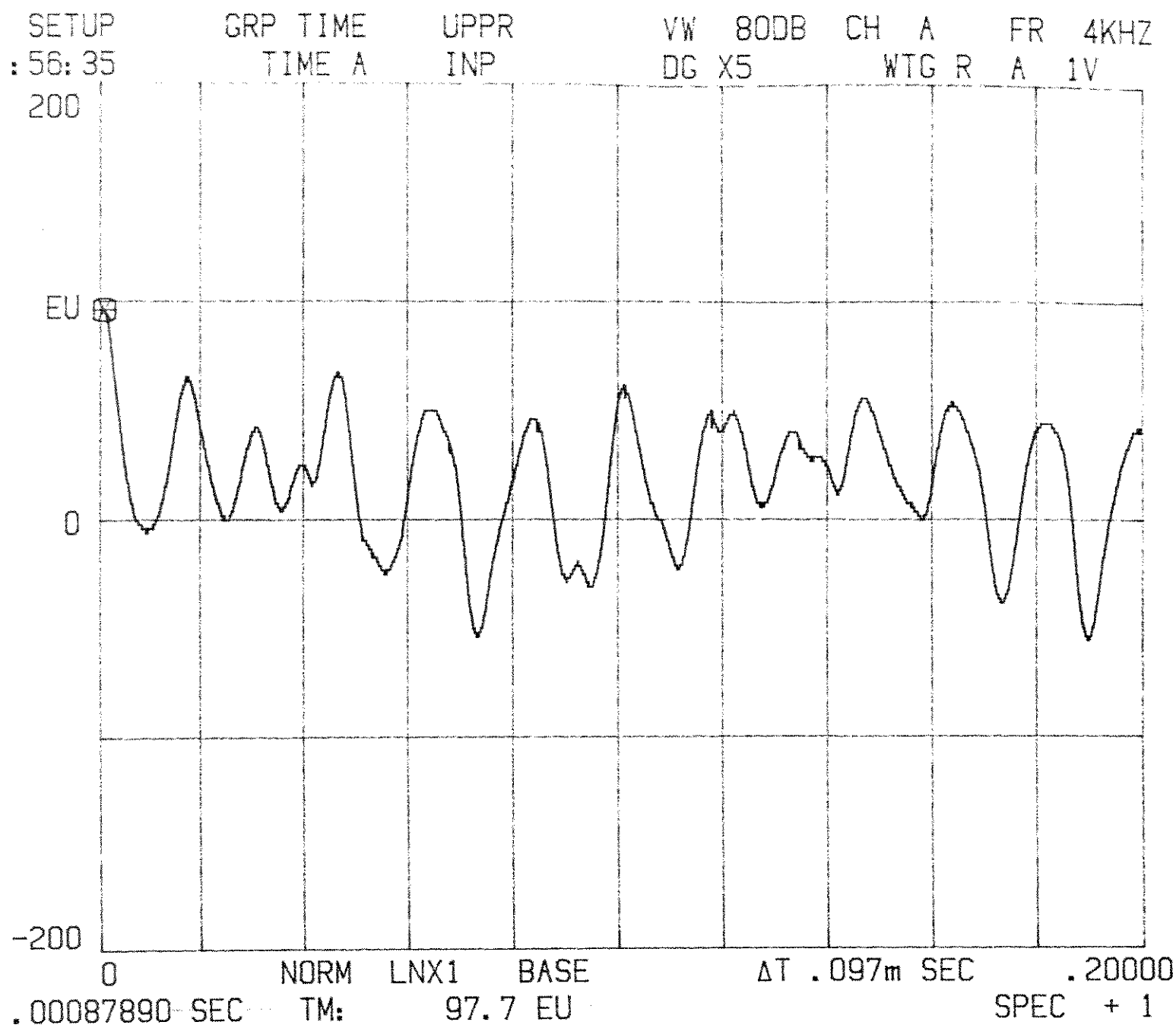


Figura 5.4: Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Experimental

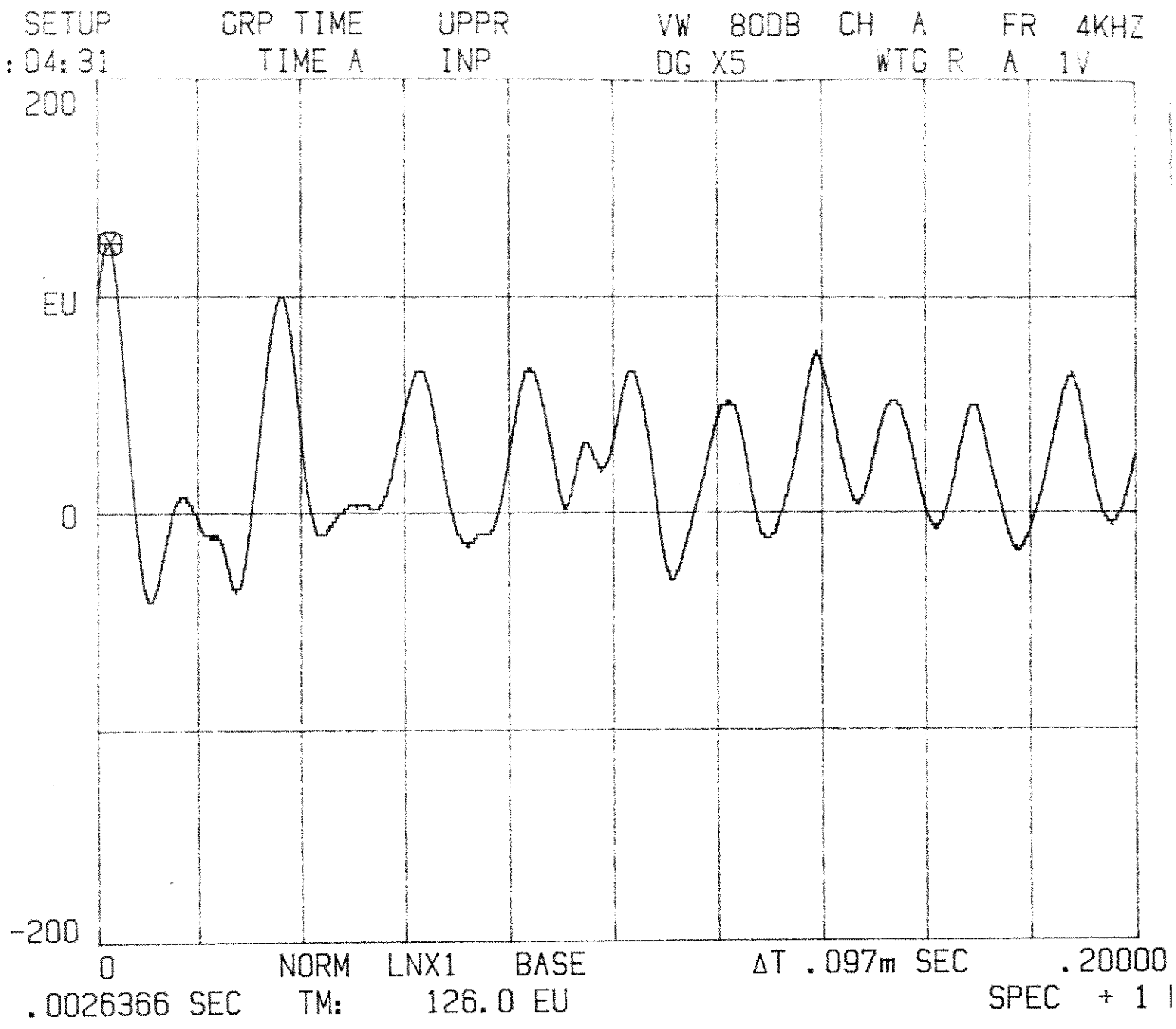


Figura 5.5: Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Experimental

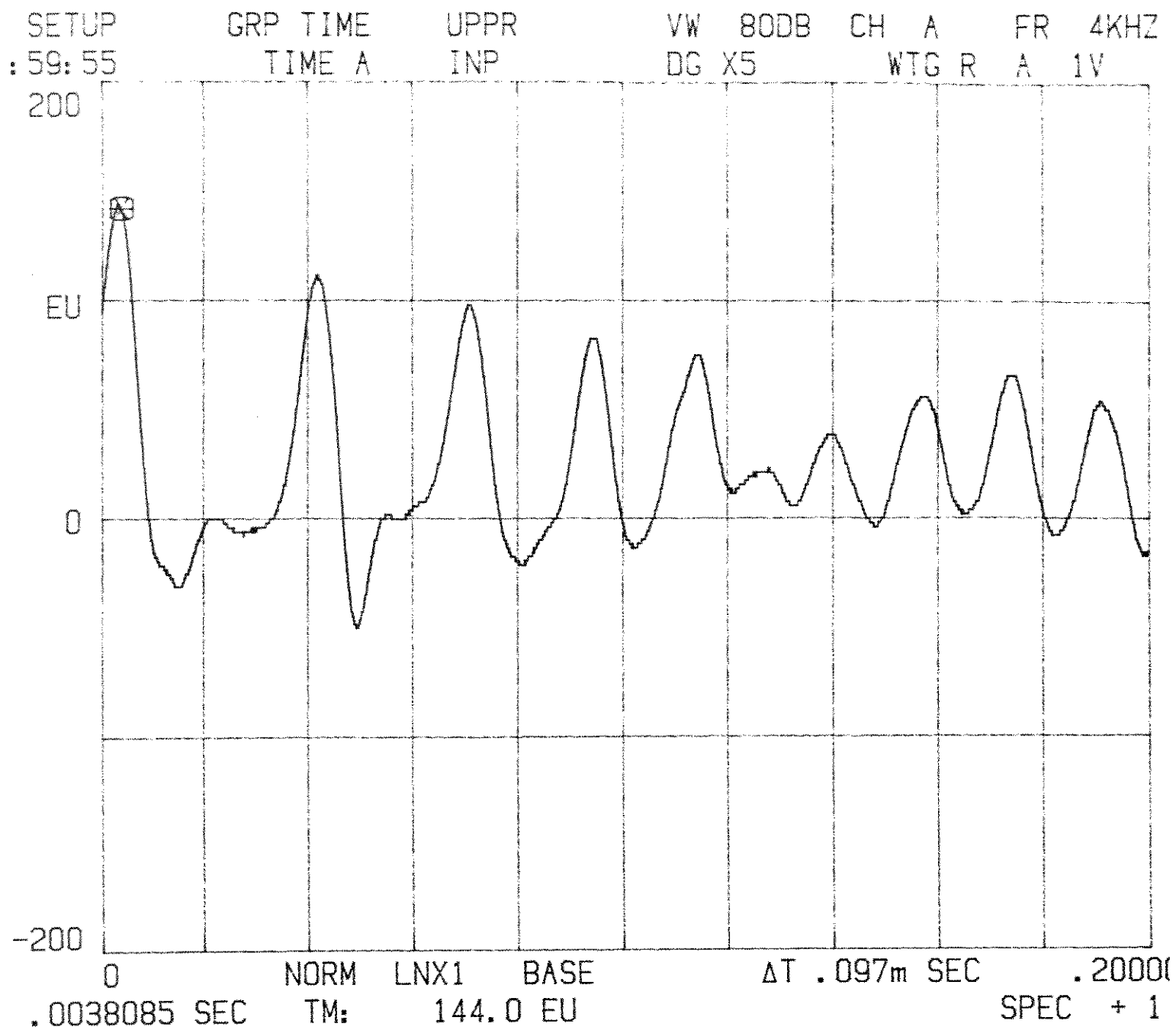


Figura 5.6: Partida do Equipamento - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Experimental

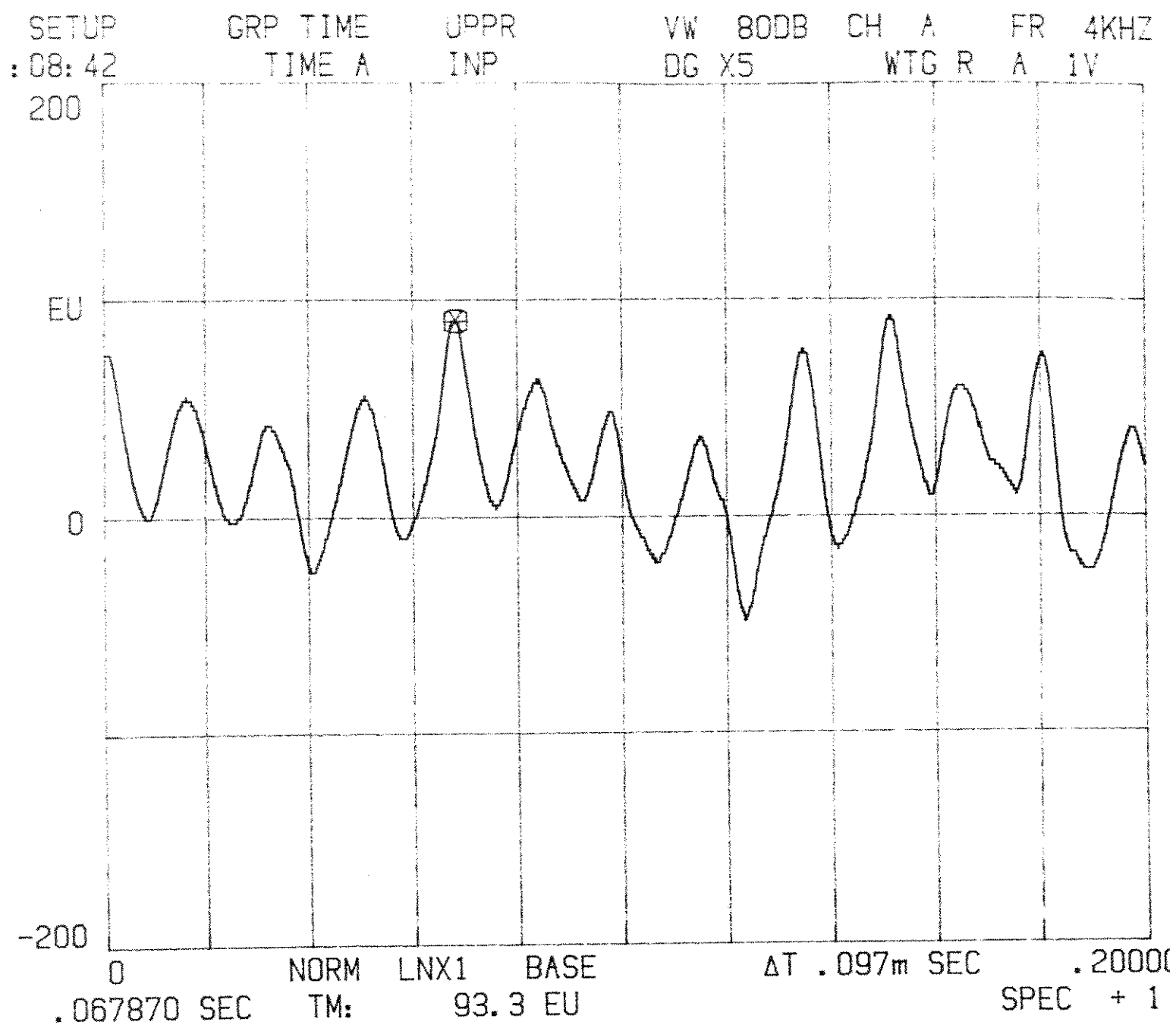


Figura 5.7: Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Sem Folga - Resultado Experimental

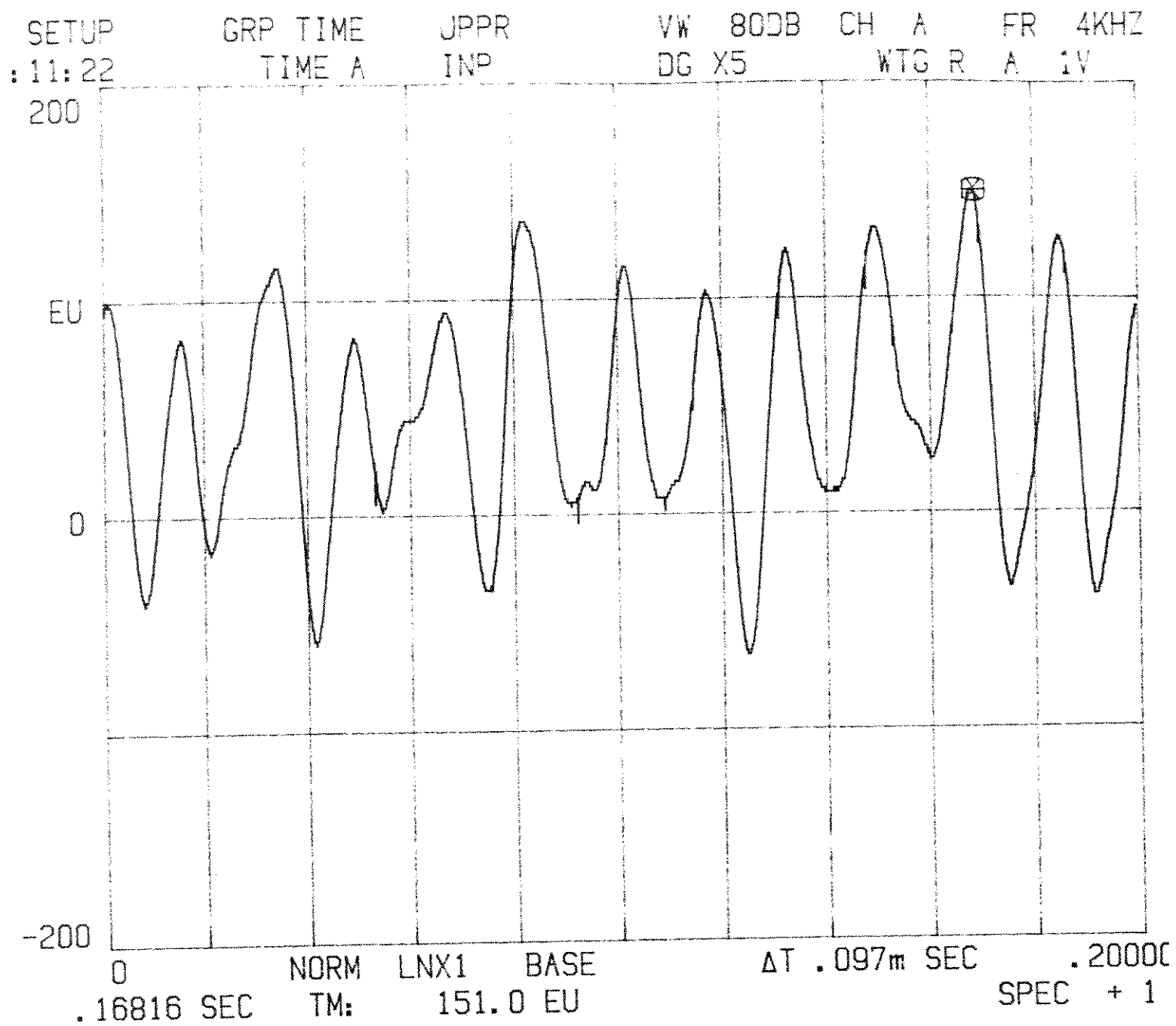


Figura 5.8: Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 8 mm - Resultado Experimental

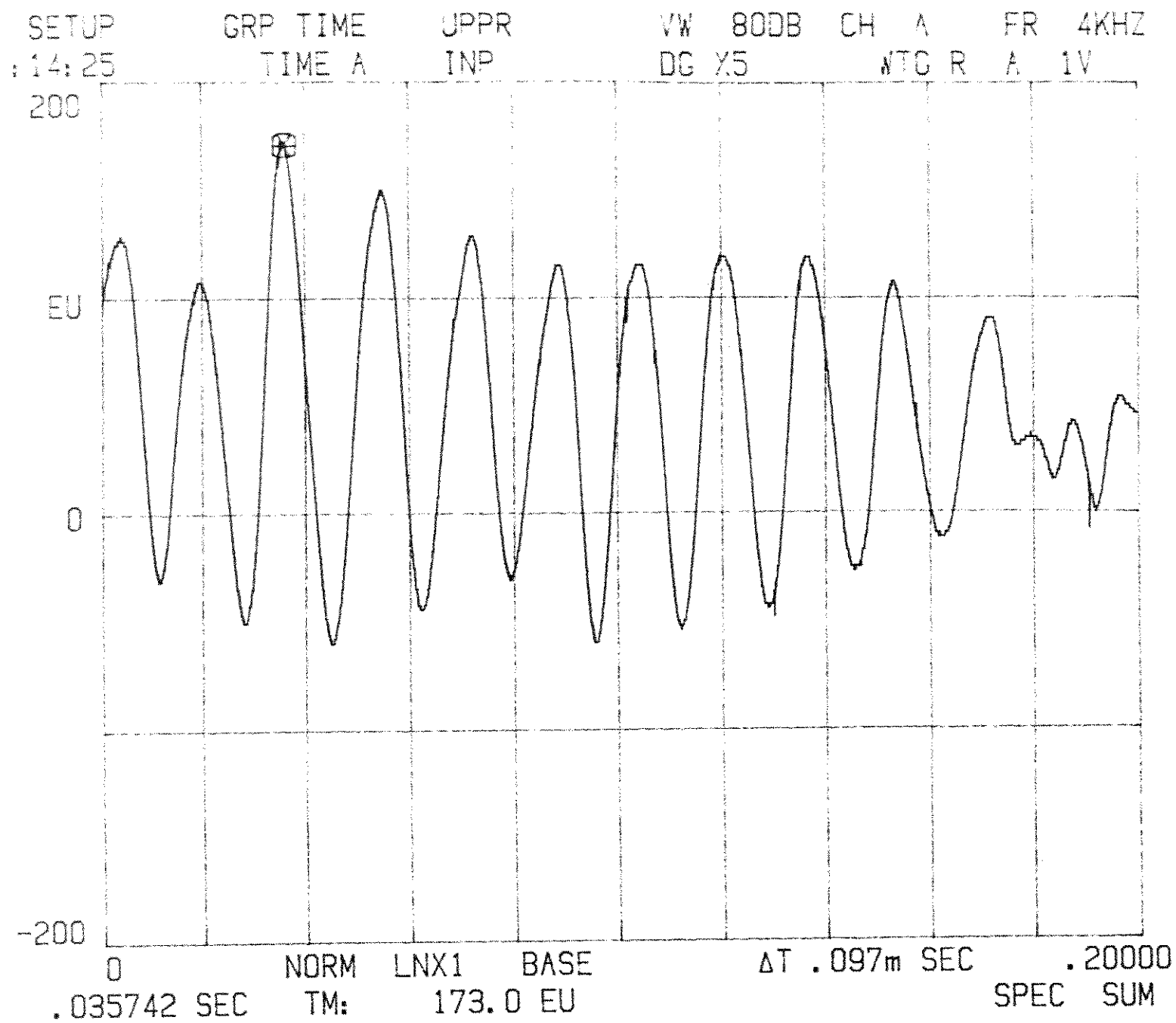


Figura 5.9: Aceleração da Carga - Resposta no Tempo - Pino de 6 mm - Resultado Experimental

## Capítulo 6

### Conclusões

Os resultados obtidos confirmam o comportamento dinâmico do torque em sistemas de transmissão com folga apresentado em diversos trabalhos sobre o assunto, podendo ser observado principalmente nas referências [7], [10], [21] e [40].

A comparação entre os valores teóricos e experimentais deve ser feita levando em consideração as limitações do modelo matemático. As condições de operação da simulação digital são feitas com o objetivo de representar as condições de operação experimentais. A comparação entre os resultados, utilizando como parâmetro o TAF, é apresentada abaixo:

| operação     | Partida |       |      | Aceleração |      |      |
|--------------|---------|-------|------|------------|------|------|
|              | 10 mm   | 8 mmm | 6 mm | 10 mm      | 8 mm | 6 mm |
| pino         |         |       |      |            |      |      |
| teórico      | 1,00    | 2,05  | 3,11 | 1,46       | 4,86 | 6,00 |
| experimental | 1,48    | 1,68  | 2,18 | 2,66       | 4,31 | 4,94 |
| desvio       | -48%    | 18%   | 30%  | -82%       | 11%  | 18%  |

Tabela 6.1: Comparação entre Resultados Teóricos e Experimentais

Os desvios existentes nos resultados podem ser atribuídos a duas origens diferentes. No primeiro caso devem ser consideradas as aproximações no modelo pela falta de representação do comportamento elétrico real do motor e do freio. O segundo aspecto a ser observado são as aproximações no comportamento mecânico. Os erros de alinhamento, tolerâncias de fabricação e distribuição irregular de esforços, apesar dos cuidados tomados, não são totalmente eliminados. Este fato pode ser observado no caso do pino de 10 mm, que procura representar o equipamento sem folga no modelo teórico. Na prática este fato não ocorre, a montagem do pino de 10 mm torna o acoplamento praticamente rígido, aumentando os esforços devido à impossibilidade de um perfeito alinhamento. Neste caso

os resultados teóricos e experimentais apresentam os maiores desvios para as situações simuladas.

Além destes dois fatores, deve ser considerado no sinal experimental a influência de utilização de um filtro passa baixa, que pode ter atenuado o efeito da folga.

O modelo de impacto utilizado na representação da folga pode fornecer importantes informações sobre os esforços atuantes na transmissão do equipamento. Além disso, permite avaliar a importância do amortecimento na dissipação de energia durante o impacto. A aplicação deste modelo é amplamente discutida nas referências [22], [24], [41] e [43]. Este modelo de impacto apresenta bons resultados na avaliação do comportamento de um acoplamento com folga, sendo a rigidez de contato determinada pela Teoria de Heriz. Esta aplicação é semelhante a sistemas reais, incluindo diversas condições de operação normalmente encontradas na prática.

Uma colaboração muito importante que pode ser obtida no modelo teórico é a sua utilização no dimensionamento de componentes mecânicos de transmissão de torque, submetidos a impactos. Com a obtenção dos esforços em diferentes condições de operação é possível avaliar fatores como desgaste e fadiga na região de contato entre os componentes. Estas informações são fundamentais na definição das propriedades físicas e mecânicas necessárias ao material, como também as características do projeto do equipamento para a garantia do desempenho de componentes. Este fato pode ser observado em inúmeros trabalhos sobre análise de falhas de componentes mecânicos, que normalmente estão associadas às condições de operação descritas.

Um fator fundamental para gerar torques elevados na transmissão é a velocidade relativa dos corpos no instante do choque. Os ensaios efetuados podem ter uma grande soma de informações com a medição da velocidade relativa do motor e do freio, fazendo a correlação entre estas medidas e o torque na transmissão. Com estes resultados é possível a identificação de parâmetros relativos ao impacto, utilizando o modelo apresentado.

O desenvolvimento atual dos sistemas eletromecânicos tem como tendência a redução do peso e o aumento das velocidades de trabalho. Uma consequência direta destes fatores é que inúmeros equipamentos operem com rotações superiores à sua frequência natural. Este caso não ocorre no banco de ensaio, não sendo efetuada uma análise teórica deste assunto no decorrer do trabalho. Porém, é de grande importância na atualidade a avaliação do TAF e do comportamento de uma transmissão com folga passando pela ressonância.

Uma outra característica importante dos equipamentos modernos é o refinamento da qualidade do produto sob todos os aspectos. Esta situação necessita sistemas de controle com tempo de resposta extremamente elevado, incluindo os acionamentos com motores de corrente alternada. Estas condições operacionais geram oscilações na transmissão com frequências bem elevadas, que podem provocar um aumento do TAF nos componentes com folga.

# Bibliografia

- [1] Cardinali, R., "*Controle de Vibrações pelo Acoplamento de uma Inércia Através de uma Embreagem Eletromagnética*", Campinas, UNICAMP, Engenharia Mecânica, 1987.
- [2] Den Hartog, J. P., *Mechanical Vibrations*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1956.
- [3] Thomson, W. T., *Teoria da Vibração com Aplicações*, Rio de Janeiro, Editôra Interciência, 1978.
- [4] Vance, Jonh M., *Rotordynamics of Turbomachinery*, New York, John Wiley and Sons, 1988.
- [5] Cooley, J. W. and Tukey, J. W., "*An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series*", *Mathematics of Computation*, Vol. 19, 1965, pp 297-301.
- [6] Newland, D. E., *An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis*, New York, Longman, 2nd edition, 1984.
- [7] Kashay, A. M., Voelker, F. C. and Smalley, A. J., "*Dynamic Shock Phenomena in Rolling Mills*", *Journal of Engineering for Industry*, May, 1972, pp 647-659.
- [8] Kataoka, M., Ohno, S. and Suzuki, T., "*Forced Torsional Vibration of a Two Degrees of Freedom System with a Clearance*", *Bulletin of JSME*, (1st Report: Experiment and Simulation), Vol. 29, n.º 256, October, 1986, pp 3491-3498, (2nd Report: Analytical Solution), Vol. 29, n.º 257, November, 1986, pp 3822-3829.
- [9] Xu, Y., Y., Qin, M., H and Li, L., "*Self Excited Vibration with Clearance - Dynamic Problems in Rolling Mill(II)*".
- [10] Monaco, Guy, "*Dynamics of Rolling Mills, Mathematical Models and Experimentals Results*", *Iron and Steel Engineer*, December, 1977, pp 35-46.
- [11] KYOWA, *Strain Gage and Temperature Sensor, Instruction Manual*.

- [12] Holister, G. S., *Experimental Stress Analysis*, Cambridge, University Printing House, 1967.
- [13] Verhoef, W. H., "Measuring Torsional Vibration", *Instrumentation Technology*, November, 1977, pp 61-66.
- [14] WEG Máquinas S.A., *Motores de Corrente Contínua*, Jarágua do Sul.
- [15] Meirovitch, L., *Elements of Vibration Analysis*, Singapore, McGraw-Hill, 1986.
- [16] TRANSMOTÉCNICA, *Acoplamentos Elásticos, Catálogo Técnico*.
- [17] PEMAVA, *Acionamentos Variáveis, Catálogo Técnico*.
- [18] S. Himmelstein and Company, *Operation and Technical Data MCRT Rotatory Transformer*.
- [19] Fitzgerald, A. E., Kingsley Jr., C. and Kusko, A., *Máquinas Elétricas*, São Paulo, McGraw-Hill, 1975.
- [20] PHILIPS, *PR 9307, Instruction Manual*.
- [21] Dubowsky, S. and Freudenstein, F., "Dynamic Analysis of Mechanical Systems with Clearance", *Journal of Engineering for Industry*, February, 1971, (Part 1: Formation of Dynamic Model), pp 305-309, (Part 2: Dynamic Response), pp 310-316.
- [22] Khulief, Y. A. and Shabana, A. A., "A Continuous Force Model for the Impact Analysis of Flexible Multibody Systems", *Mechanical Machine Theory*, Vol. 22, nº 3, pp. 213-224.
- [23] Magalhães, F. L., e Zindeluk, M., "Amplificação do Choque Torcional de Sistemas Engrenados", IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, Dezembro, 1987, pp. 781-784.
- [24] Hunt, K. H. and Crossley, F. R. E., "Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact", *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Junho, 1975, pp 440-445.
- [25] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1984.
- [26] Dubbel, *Manual do Engenheiro Mecânico*, 13.ª Edição Alemã, 1.ª Edição Brasileira, Editora Hemus, 1979.
- [27] Shigley, Joseph Edward, *Mechanical Engineering Design, First Metric Edition*, McGraw-Hill, Singapore. 1986.

- [28] Moler, C., Little, J. and Bangert, S., *PC-Matlab for MS-DOS Personal Computers*, Califórnia, The Mathworks, Inc., Versão 3.1 PC, 1987.
- [29] Doi, K., Ishikawa, K., Tsukuda, H., Yamamoto, K., Suganuma, N. and Naito, T., "Analysis and Control Systems for Shaft Vibration in Steel Rolling Processes", Kawasaki Steel Technical Report, n.º 17, October, 1987, pp. 73-80.
- [30] Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice/Hall do Brasil, 1982.
- [31] Müller, P. C. and Schiehlen, W. O., *Linear Vibrations*, Dordrecht, Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [32] Kopechonova, N. V. and Maron, I. A., *Computational Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, 1975.
- [33] Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., *Applied Numerical Methods*, New York, John Wiley and Sons, Inc., 1969.
- [34] Bathe, Klaus-Jurgen and Wilson, Edward L., *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, New Jersey, Prentice-Hall, 1976.
- [35] Bert, C. W. and Strickilin, J. D., "Comparative Evaluation of Six Different Numerical Integration Methods for Non-Linear Dynamic Systems", Journal of Sound and Vibration, 127(2), 1988, pp. 221-229.
- [36] Newmark, N. M., "A Method of Computation for Structural Dynamics", Journal of the Engineering Mechanics Division, American Society of Civil Engineers, n.º 85, 1959, pp. 67-94.
- [37] Runge, C., "Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen", Mathematische Annalen, n.º 46, 1895, pp. 167-178.
- [38] Kutta, W., "Beitrag zur näherungsweise Integration Totaler Differentialgleichungen", Zeitschrift für Mathematik und Physik, n.º 46, 1901, pp. 435-453.
- [39] Brown, J. M. B., Soong, K., Borthwick, W. K. D., Gandhi, M. V. and Thompson, B. S., "The Performance of the Runge-Kutta Method in the Context of Mechanism System with Discontinuities".
- [40] Wunsch, D., und Seeliger, A., "Schwingungsminderung in Maschinensystemen durch rechnergestützte Parameterdiskussion in der Konstruktionsphase", Konstruktion, 28, Jahrgang, September, 1976, Heft 9, pp. 347-352.

- [41] Lankarini, H. M. and Nikraves, P. E., "*A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems*", Journal of Mechanical Design, Vol. 112, September, 1990, pp. 369-376.
- [42] Yanabe, S., Tokyhashi, H. and Tamura, A., "*Nonstationary Vibration of a System with Backlash Passing through a Resonance*", Bulletin of JSME, Vol. 29, n.º 248, February, 1986, pp. 533-540.
- [43] Hirata, T. and Scieszko, J. L., "*Influência de Rigidez da Base nos Parâmetros da Colisão*", Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Vol. XI, n.º 1, pp. 1-15.