EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TEJE DEFENDIDA POR Elipe Manzel da Silva Incknantel E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 03 109 12010

Katia ducheri Corralco, ORIENTADOR

## UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Felipe Wenzel da Silva Tuckmantel

# Integração de Sistemas Rotor-Mancais Hidrodinâmicos-Estrutura de Suporte para Resolução Numérica

Campinas, 2010.

119/2010

Felipe Wenzel da Silva Tuckmantel

# Integração de Sistemas Rotor-Mancais Hidrodinâmicos-Estrutura de Suporte para Resolução Numérica

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Profa. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini

Campinas 2010

## FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

| T799i | Tuckmantel, Felipe Wenzel da Silva<br>Integração de sistemas rotor-mancal hidrodinâmico-<br>estrutura de suporte para resolução numérica / Felipe<br>Wenzel da Silva Tuckmantel – Campinas, SP: [s.n.],<br>2010.                |
|-------|---|
|       | Orientador: Kátia Lucchesi Cavalca Dedini.<br>Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de<br>Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.   |
|       | <ol> <li>Rotores – Dinâmica. 2. Máquinas. 3. Método dos<br/>elementos finitos. I. Dedini, Kátia Lucchesi Cavalca.</li> <li>II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de<br/>Engenharia Mecânica. III. Título.</li> </ol> |

Titulo em Inglês: Integration of rotor-hydrodynamic bearings-support structure systems for numerical resolution Palavras-chave em Inglês: Rotordynamics, Machines, Finite element method. Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico. Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica. Banca examinadora: Kátia Lucchesi Cavalca Dedini, Pablo Siqueira Meirelles, Marcelo Braga dos Santos. Data da defesa: 03/09/2010. Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica.

# UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

# Integração de Sistemas Rotor-Mancais Hidrodinâmicos-Estrutura de Suporte para Resolução Numérica

Autor: Felipe Wenzel da Silva Tuckmantel Orientador: Prof. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Katia duccheni Caval

Prof. Dra. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles

Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM

5-6.

Prof. Dr. Mareelo Braga dos Santos Universidade Federal de Uberlândia – UFU/FEMEC

Campinas, 03 de Setembro de 2010.

Dedico este trabalho à meus queridos pais, namorada, irmão e amigos.

### AGRADECIMENTOS

Sou grato a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade de conhecer e contar com a colaboração de pessoas muito importantes, às quais presto minha homenagem e sem as quais este trabalho não estaria finalizado:

Aos meus pais José Luiz e Rosangela, pelo exemplo, pelo apoio e incentivo em todos os momentos de minha vida.

À minha namorada Verônica, pelos quase dez anos de convivência, carinho, apoio e compreensão,

Ao meu irmão Adolfo, pelo companheirismo.

Agradeço a professora Kátia Lucchesi Cavalca pela dedicação, paciência e horas dispostas a me orientar, desde a Iniciação Científica.

Aos amigos do Laboratório LAMAR pelo incentivo, amizade, pelo ambiente descontraído, e pelas contribuições para o enriquecimento e conclusão deste trabalho.

A todos os professores, colegas e funcionários da faculdade, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

A Schaeffler Brasil Ltda, na pessoa do Sr. Mario Junghahnel e do Sr. Gilson Arima, pela parceria que viabilizou a realização deste projeto.

Também a todos os amigos que compreenderam as ausências, quando dispus de horas de lazer para dedicá-las ao estudo.

V

"O insucesso é apenas uma oportunidade para recomeçar de novo com mais inteligência"

### **RESUMO**

O estudo de máquinas rotativas ocupa uma posição destacada no contexto de máquinas e estruturas, tendo em vista a grande aplicação das máquinas rotativas e a importância de conhecer o seu funcionamento com fins de otimização e de projeto para diminuição de custos, melhora de qualidade e aumento da vida útil dos componentes.

Estas máquinas, e seus componentes, possuem características peculiares em seu funcionamento, as quais se refletem em seu comportamento dinâmico e, conseqüentemente, nos problemas mecânicos a estes associados. A análise do comportamento das máquinas rotativas envolve considerável complexidade, já que são constituídas, geralmente, por um sistema de equipamentos que abrangem, além do rotor, eixos e mancais, fundação e outros equipamentos auxiliares, como, por exemplo, selos de fluxo. Portanto, para se estudar o comportamento dinâmico desses sistemas, é necessário determinar a interação de todos os componentes para o entendimento dos fenômenos envolvidos.

O sistema rotativo foi matematicamente modelado através da modelagem do eixo por elementos finitos, através de um conjunto de discos rígidos e segmentos de eixo com massa e elasticidade distribuídas, e dos mancais hidrodinâmicos, cuja representação ocorre a partir de seus coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento. A fundação também teve sua influência contemplada pelas representações por Parâmetros Concentrados, Impedância Mecânica e Coordenadas Mistas.

Portanto, neste trabalho, desenvolveu-se a configuração do pacote computacional, a padronização da entrada e saída dos arquivos, a implementação dos elementos de viga e de disco rígido, a excitação por desbalanceamento, a determinação dos carregamentos nos mancais e a resposta dinâmica do sistema no domínio da freqüência, tendo como objetivo robustez, flexibilidade, confiabilidade, além de usabilidade e interface amigável do pacote.

*Palavras-chave:* Máquinas Rotativas, Análise Dinâmica, Método dos Elementos Finitos, Integração de Sistemas, Pacote Computacional.

## ABSTRACT

The Rotordynamics occupies a prominent position in the design of machines and structures, due to the wide application of rotating machinery and the importance of the knowledgment of its operation for purposes of optimization and design for cost reduction, quality improvement and increased component life cycle.

These machines and their components have peculiar characteristics in its operation, which will reflect in its dynamic behavior and, consequently, on the mechanical problems associated with these. The behavior of rotating machinery involves considerable complexity, as they are composed, usually by a system of equipment which includes, besides the rotor, shafts and bearings, foundation and other auxiliary equipment, for example, shaft seals. Therefore, to study the dynamic of these systems, it is necessary to determine the interaction of all components for understanding the phenomena involved.

The rotation system was mathematically modeled by the shaft modeling through the Finite Element Method, through a set of disks and shaft segments with elasticity and mass distribution, and hydrodynamic bearings, whose representation occurs through the coefficients of equivalent stiffness and damping. The foundation also had its influence covered by the formulation of Concentrated Parameters, Mechanical Impedance and Mixed Coordinates.

Therefore, in this work, it is developed the computational package configuration, standardization of input and output files, the implementation of beam elements and disks, the unbalance excitation, the determination of loads on the bearings and the frequency dynamic response of the system, aiming at robustness, flexibility, reliability, usability and user-friendly of the software.

*Key Words:* Rotating Machinery, Dynamic Analysis, Finite Element Method, Systems Integration, Computational Package.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| Figura 1.01: Esquema de turbo-gerador composto de três turbinas.                               | 1           |
|--|-------------|
| Figura 3.01: Configuração típica de um sistema rotativo (NELSON e McVAUGH, 1976)               | 16          |
| Figura 3.02: Transformação de coordenadas entre os sistemas de referência inercial e rotaciona | <b>.</b> 1. |
|  | 17          |
| Figura 3.03: Elemento de viga e suas coordenadas cartesianas.                                  | 21          |
| Figura 3.04: Elemento de viga cônico.  | 26          |
| Figura 3.05: Representação de um mancal hidrodinâmico (MACHADO e CAVALCA, 2009)                | 29          |
| Figura 3.06: Geometria do mancal radial (MACHADO e CAVALCA, 2009)                              | 32          |
| Figura 3.07: Sistema de coordenadas (MACHADO e CAVALCA, 2009)                                  | 33          |
| Figura 3.08: Malha do mancal radial.   | 34          |
| Figura 3.09: Modelo para o filme de fluido nos mancais (MACHADO e CAVALCA, 2009)               | 34          |
| Figura 3.10: Excitação por desbalanceamento de massa concentrado                               | 37          |
| Figura 3.11: Representação de um sistema rotor-mancais-fundação (CAVALCA, 1993)                | 42          |
| Figura 4.01: Fluxograma do pacote computacional <i>Rotortest</i>                               | 49          |
| Figura 4.02a: Interface – módulo de Materiais  | 50          |
| Figura 4.02b: Interface – módulo de Suportes, mancal multi-lobular.                            | 51          |
| Figura 4.02c: Interface – módulo de Eixos.   | 51          |
| Figura 4.02d: Interface – módulo de montagem do Sistema  | 52          |
| Figura 4.02e: Interface - módulo das Condições de Processamento, mancal multi-lobular          | 52          |
| Figura 4.03: Fluxograma do algoritmo de Processamento 1 – Análise Estática.                    | 53          |
| Figura 4.04a: Fluxograma do algoritmo de Processamento 2 - Coeficientes dos Suportes           | 54          |
| Figura 4.04b: Fluxograma do algoritmo de Processamento 2 – Coeficientes dos Suportes -,        |             |
| mancais multi-lobulares.   | 54          |
| Figura 4.05: Fluxograma do algoritmo de Processamento 3 - Interpolação dos Coeficientes dos    | 3           |
| Suportes   | 55          |
| Figura 4.06: Fluxograma do algoritmo de Processamento 4 – Análise Dinâmica                     | 56          |
| Figura 5.01: Convenção adotada em Resistência dos Materiais                                    | 59          |
| Figura 5.02: Convenção adotada em Estática   | 59          |
| Figura 5.03: Viga engastada.   | 62          |
| Figura 5.04: Viga bi-apoiada   | 63          |
| Figura 5.05: Viga bi-engastada   | 65          |
| Figura 5.06: Viga bi-apoiada com peso próprio  | 66          |
| Figura 5.07: Viga em balanço com peso próprio  | 68          |
| Figura 5.08: Viga hiperestática  | 70          |
| Figura 5.09: Bancada experimental do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR)                 | 73          |
| Figura 5.10a: Rotor Laval.   | 73          |
| Figura 5.10b: Rotor Laval MEF.   | 74          |
| Figura 5.11: Representação gráfica de amplitude e fase nas direções Y e Z em relação ao plano  | i           |
| complexo, e da magnitude do vetor deslocamento A e seu ângulo de direção $\theta$              | 75          |
| Figura 5.12: Amplitude da resposta em freqüência, rotor Laval.                                 | 76          |
| Figura 5.13: Ângulo de orientação do vetor amplitude de vibração, rotor Laval                  | 77          |

| Figura 5.14: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (disco), rotor Laval.                      | . 77  |
|--|-------|
| Figura 5.15: Diagrama de Campbell, rotor Laval   | . 78  |
| Figura 5.16: Deformação do rotor em 25,07 Hz, rotor Laval  | . 78  |
| Figura 5.17: Rotor com disco descentralizado MEF.  | . 79  |
| Figura 5.18: Diagrama de Campbell, rotor com disco descentralizado                                       | . 80  |
| Figura 5.19: Amplitude da resposta em freqüência, rotor com disco descentralizado.                       | . 80  |
| Figura 5.20: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 6 (disco), rotor com disco                   |       |
| descentralizado.   | . 81  |
| Figura 5.21a: Deformação do rotor em 31,67 Hz, rotor com disco descentralizado                           | . 81  |
| Figura 5.21b: Deformação do rotor em 168,8 Hz, rotor com disco descentralizado                           | . 82  |
| Figura 5.21c: Deformação do rotor em 181,6 Hz, rotor com disco descentralizado                           | . 82  |
| Figura 5.21d: Deformação do rotor em 269,1 Hz, rotor com disco descentralizado                           | . 83  |
| Figura 5.22: Rotor com dois discos MEF.  | . 83  |
| Figura 5.23: Diagrama de Campbell, rotor com dois discos.  | . 84  |
| Figura 5.24a: Amplitude de vibração nó 6 (disco 1), rotor com dois discos (Caso 1)                       | . 85  |
| Figura 5.24b: Ângulo de fase nó 6 (disco 1), rotor com dois discos (Caso 1).                             | . 85  |
| Figura 5.25a: Amplitude de vibração nó 10 (disco 2), rotor com dois discos (Caso 1)                      | . 86  |
| Figura 5.25b: Ângulo de fase nó 10 (disco 2), rotor com dois discos (Caso 1),                            | . 86  |
| Figuras 5.26a e 5.26b: Deformações do rotor em 24.67 e 72.26 Hz, rotor com dois discos (Cas              | 0     |
| 1)   | . 86  |
| Figura 5.27a: Amplitude de vibração nó 6 (disco 1), rotor com dois discos (Caso 2)                       | . 87  |
| Figura 5.27b: Ângulo de fase nó 6 (disco 1), rotor com dois discos (Caso 2),                             | . 87  |
| Figura 5.28a: Amplitude de vibração nó 10 (disco 2), rotor com dois discos (Caso 2)                      | . 87  |
| Figura 5.28b: Ângulo de fase nó 10 (disco 2), rotor com dois discos (Caso 2),                            | . 88  |
| Figuras 5.29a e 5.29b: Deformações do rotor em 24,67 e 72,26 Hz, rotor com dois discos (Cas              | 0     |
| 2)   | . 88  |
| Figura 5.30a: Amplitude de vibração nó 6 (disco 1), rotor com dois discos (Caso 3),                      | . 88  |
| Figura 5.30b: Ângulo de fase nó 6 (disco 1), rotor com dois discos (Caso 3),                             | . 89  |
| Figura 5.31a: Amplitude de vibração nó 10 (disco 2), rotor com dois discos (Caso 3)                      | . 89  |
| Figura 5.31b: Ângulo de fase nó 10 (disco 2), rotor com dois discos (Caso 3),                            | . 89  |
| Figuras 5.32a e 5.32b: Deformações do rotor em 24.67 e 72.26 Hz, rotor com dois discos (Case             | 0     |
| 3)   | . 90  |
| Figuras 5.33 a 5.35: Resposta ao desbalanceamento nos nós 3 (mancal 1). 8 (massa concentrad              | la)   |
| e 16 (fundação ou pedestal 1), fundação por Parâmetros Concentrados (Estudo 1),                          | . 93  |
| Figura 5.36a: Representação da fundação no modelo do rotor Laval. Estudo 2.                              | . 94  |
| Figura 5.36b: Representação da fundação por coordenadas generalizadas no modelo do rotor                 | • • • |
| Laval. Estudo 2.   | . 95  |
| Figuras 5.37 a 5.39: Função resposta ao desbalanceamento nós 3 (mancal 1), 8 (massa                      |       |
| concentrada) e 16 (pedestal) fundação por Parâmetros Concentrados (Estudo 2)                             | 96    |
| Figuras 5 40 a 5 42: Função resposta ao desbalanceamento nós 3 (mancal 1), 8 (massa                      | • > 0 |
| concentrada) e 16 (pedestal), fundação por Impedância Mecânica (Estudo 2)                                | . 97  |
| Figuras 5.43 a 5.46: Função resposta ao desbalanceamento nós 3 (mancal 1), 8 (massa                      |       |
| concentrada). 16 (pedestal) e coordenadas generalizadas $\alpha_1$ e $\alpha_2$ fundação por Coordenadas |       |
| Generalizadas (Estudo 2).  | . 98  |
| Figuras 5.47a, 5.47b e 5.47c: Deformações do rotor em 19.26, 24.91 e 29.13 Hz, Estudo 2                  | 100   |
| Figura 5.48: Representação do rotor Laval com fundação flexível. Estudo 3.                               | 101   |
| C r  |       |

| Figuras 5.49 a 5.53: Função resposta ao desbalanceamento nos mancais (nós 3 e 13), na m                  | nassa           |
|--|-----------------|
| concentrada (nó 8) e nos pedestais (nós 16 e 17), fundação por Impedância Mecânica (Est                  | udo 3).<br>106  |
| Figuras 5.54 a 5.58: Função resposta ao desbalanceamento nos mançais (nós 3 e 13), na m                  | assa            |
| concentrada (nó 8) e nos pedestais (nós 16 e 17), fundação por Coordenadas Mistas (Estud                 | do 3).          |
| Figuras 5.59a e 5.59b: Deformação do rotor em 24.99 e 49.9 Hz. Estudo 3.                                 | 108             |
| Figura 6.01: Diagrama das reacões nos apoios na direcão vertical, rotor Laval,                           | 110             |
| Figuras 6.02a e 6.02b: Distribuição de pressão a 25,6 Hz e a 71,8 Hz, mancal cilíndrico (r<br>Laval).    | otor<br>111     |
| Figuras 6.03a e 6.03b: Distribuição de pressão a 25,6 Hz e a 71,8 Hz, mancal elíptico (rote Laval).      | or<br>112       |
| Figuras 6.04a e 6.04b: Distribuição de pressão a 25,6 Hz e a 71,8 Hz, mancal tri-lobular (i              | rotor           |
| Laval).<br>Figure 6.05: Convenção adotada para o pocição angular   | 113             |
| Figuras 6.06 a 6.08: Lócus do centro do eixo: mancais cilíndricos, elípticos e tri-lobulares             | (rotor          |
| Laval).  | 117             |
| Figura 6.09: Distribuição de Pressão no Mancal Elíptico (MACHADO, 2009)                                  | 118             |
| Figura 6.10a: Coeficientes de rigidez do mancal cilíndrico, rotor Laval                                  | 118             |
| Figura 6.10b: Coeficientes de amortecimento do mancal cilíndrico, rotor Laval.                           | 118             |
| Figura 6.11a: Coeficientes de rigidez do mancal elíptico, rotor Laval.                                   | 119             |
| Figura 6.11b: Coeficientes de amortecimento do mancal elíptico, rotor Laval.                             | 119             |
| Figura 6.12a: Coeficientes de rigidez do mancal tri-lobular, rotor Laval.                                | 119             |
| Figura 6.12b: Coeficientes de amortecimento do mancal tri-lobular, rotor Laval.                          | 119             |
| Figura 6.13: Diagrama de Campbell, mancal tri-lobular (rotor Laval)                                      | 121             |
| Figura 6.14: Deformação do rotor em 25,07 Hz, mancal tri-lobular (rotor Laval).                          | 122             |
| Figura 6.15a: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 3 (mancal 1), mancal cilíndri (rotor Laval) | ico<br>122      |
| Figura 6.15b: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (disco), mançal cilíndrico (              | rotor           |
| Laval).  |                 |
| Figura 6.16a: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 3 (mancal 1), mancal elíptico               | ) (rotor<br>123 |
| Figura 6 16h: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (disco), mançal elímitico (r              | otor            |
| Laval).  |                 |
| Figura 6.17a: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 3 (mancal 1), mancal tri-lobu (retor Level) | ılar            |
| (10101 Laval)  | 124             |
| I gual)  | 125             |
| $Eigung \in 19$ , Turko grupo (CAVALCA 1002)   | 123             |
| Figura 0.18: Turbo-grupo (CAVALCA, 1995).  | 120             |
| Figura 6.19: Diagrama das reações nos apoios na direção vertical para o turbo-grupo                      | 120             |
| Figura 6.20h. Coefficientes de ingluez no mancal 1 do turbo-grupo  | 120             |
| Figura 6.210. Coefficientes de rigidaz no manest 2 de turbo, grupo,                                      | 128<br>120      |
| Figura 6.21a. Coefficientes de ingluez no mancal 2 do turbo-grupo  | 128<br>120      |
| Figura 6.220; Coaficientes de rigidar no manael 2 de turbe, crupe  | 120             |
| Figura 0.22a. Coefficientes de rigidez no mancal 5 do turbo-grupo  | 129             |
| rigura 0.220. Coefficientes de amortecimento no mancal 3 do turbo-grupo                                  | 129             |

| Figura 6.23a: Coeficientes de rigidez no mancal 4 do turbo-grupo                          | 129 |
|---|-----|
| Figura 6.23b: Coeficientes de amortecimento no mancal 4 do turbo-grupo                    | 129 |
| Figura 6.24a: Coeficientes de rigidez no mancal 5 do turbo-grupo                          | 130 |
| Figura 6.24b: Coeficientes de amortecimento no mancal 5 do turbo-grupo                    | 130 |
| Figura 6.25a: Coeficientes de rigidez no mancal 6 do turbo-grupo                          | 130 |
| Figura 6.25b: Coeficientes de amortecimento no mancal 6 do turbo-grupo                    | 130 |
| Figura 6.26a: Coeficientes de rigidez no mancal 7do turbo-grupo                           | 131 |
| Figura 6.26b: Coeficientes de amortecimento no mancal 7 do turbo-grupo                    | 131 |
| Figura 6.27: Diagrama de Campbell, turbo-grupo  | 132 |
| Figura 6.28: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 2 (mancal 1), turbo-grupo     | 132 |
| Figura 6.29: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (excitação 1), turbo-grupo  | 133 |
| Figura 6.30: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 19 (mancal 2), turbo-grupo    | 133 |
| Figura 6.31: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 26 (mancal 6), turbo-grupo    | 134 |
| Figura 6.32: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 32 (excitação 2), turbo-grupo | 134 |
| Figura 6.33: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 39 (mancal 7), turbo-grupo    | 135 |
| Figura 6.34: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 48 (mancal 3), turbo-grupo    | 135 |
| Figura 6.35: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 57 (excitação 3), turbo-grupo | 136 |
| Figura 6.36: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 63 (mancal 4), turbo-grupo    | 136 |
| Figura 6.37: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 69 (mancal 5), turbo-grupo    | 137 |
| Figura 6.38a: Deformação do rotor em 17,5 Hz, turbo-grupo                                 | 138 |
| Figura 6.38b: Deformação do rotor em 70,0 Hz, turbo-grupo                                 | 138 |
| Figura 6.38c: Deformação do rotor em 138,3 Hz, turbo-grupo                                | 139 |
| Figura 6.38d: Deformação do rotor em 197,4 Hz, turbo-grupo                                | 139 |

## LISTA DE TABELAS

| Tabela 5.01: Dados modelo 1  | 63   |
|--|------|
| Tabela 5.02: Resultados modelo 1   | 63   |
| Tabela 5.03: Dados modelo 2.   | 64   |
| Tabela 5.04: Resultados modelo 2   | 64   |
| Tabela 5.05: Dados modelo 3.   | 66   |
| Tabela 5.06: Resultados modelo 3   | 66   |
| Tabela 5.07: Dados modelo 4.   | 67   |
| Tabela 5.08: Resultados modelo 4.  | 68   |
| Tabela 5.09: Dados modelo 5  | 69   |
| Tabela 5.10: Resultados modelo 5   | 69   |
| Tabela 5.11: Dados modelo 6  | 71   |
| Tabela 5.12: Resultados modelo 6   | 71   |
| Tabela 5.13: Dados da força de excitação por massa residual desbalanceada, rotor Laval     | 74   |
| Tabela 5.14: Dados geométricos, rotor com dois discos                                      | 84   |
| Tabela 5.15: Dados para as forças de excitação externa por massa residual desbalanceada, r | otor |
| com dois discos  | 85   |
| Tabela 5.16: Dados da fundação por Parâmetros Concentrados, Estudo 1                       | 91   |
| Tabela 5.17: Parâmetros da estrutura de fundação na direção vertical (z), Estudo 2         | 94   |
| Tabela 5.18: Parâmetros da estrutura de fundação na direção vertical (z), Estudo 3         | 104  |
| Tabela 6.01: Características geométricas dos mancais hidrodinâmicos.                       | 109  |
| Tabela 6.02: Posição de equilíbrio   | 113  |
| Tabela 6.03: Coordenada angular dos picos de pressão                                       | 114  |
| Tabela 6.03: Características geométricas dos mancais hidrodinâmicos do turbo-grupo         | 126  |
| Tabela 6.04: Dados para as forças de excitação externa por massa residual desbalanceada    | 126  |
| Tabela 6.05: Forças de reação nos mancais do turbo-grupo.                                  | 127  |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| I   | Sistema de coordenadas fixo ou inercial $(X,Y,Z)$                  |
|---|--|
| R   | Sistema de coordenadas rotacional ( $x, y, z$ )                    |
| [M]   | Matriz de massa global   |
| [C]   | Matriz de amortecimento global                                     |
| $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix}$                 | Matriz de rigidez global   |
| $\left\{F ight\}$                                 | Vetor de excitação   |
| $\{x\}$   | Vetor de deslocamento  |
| [R]   | Matriz de transformação do sistema de referência fixo para o móvel |
| $\{q\}$   | Vetor deslocamento relativo ao sistema de coordenadas fixo         |
| $\{p\}$   | Vetor deslocamento relativo ao sistema de coordenadas rotacional   |
| (V,W)   | Deslocamentos de translação nas direções $(Y, Z)$ em $\Im$         |
| (v,w)   | Deslocamentos de translação nas direções ( $y, z$ ) em $\Re$       |
| $(B,\Gamma)$                                      | Deslocamentos de rotação ao redor dos eixos $(Y, Z)$ em $\Im$      |
| $(\beta,\gamma)$                                  | Deslocamentos de rotação ao redor dos eixos ( $y, z$ ) em $\Re$    |
| $(\boldsymbol{\beta}_{y},\boldsymbol{\beta}_{z})$ | Deslocamentos de cisalhamento em $\Im$                             |
| $\{ \mathcal{Q} \}$                               | Vetor de forças externas relativo a 3                              |
| $\{P\}$   | Vetor de forças externas relativo a R                              |
| $\{ {\cal Q}_c \}$                                | Vetor da componente cosseno da força desbalanceada                 |
| $\{Q_s\}$   | Vetor da componente seno da força desbalanceada                    |
| $\eta$  | Massa residual   |
| ξ   | Excentricidade   |
| Р   | Carregamento axial   |
| Т   | Torque axial   |
| ω   | Velocidade angular de precessão do rotor – rotação ao redor de $X$ |

| Ω                                   | Velocidade de rotação própria do rotor – rotação ao redor do eixo $x (\Omega = \dot{\phi})$ |
|-------------------------------------|---|
| $\phi$                              | Ângulo de rotação própria   |
| $\lambda = \Omega / \omega$         | Razão de velocidade   |
| Т                                   | Energia cinética  |
| V                                   | Energia potencial   |
| $\delta W$                          | Variação de trabalho  |
| $[\Psi]$                            | Matriz de funções de forma de deslocamentos translacionais                                  |
| $[\Phi]$                            | Matriz de funções de forma de deslocamentos rotativos                                       |
| [ <i>x</i> ]                        | Matriz de forma de deformação por cisalhamento  |
| $\begin{bmatrix} M_T \end{bmatrix}$ | Matriz de inércia de translação do elemento   |
| $\left[M_{R}\right]$                | Matriz de inércia de rotação do elemento  |
| [G]                                 | Matriz giroscópica do elemento  |
| [C]                                 | Matriz de amortecimento interno do elemento   |
| $\left[K_{B}\right]$                | Matriz de rigidez de flexão do elemento   |
| $\begin{bmatrix} K_s \end{bmatrix}$ | Matriz de rigidez de cisalhamento do elemento   |
| $\begin{bmatrix} K_A \end{bmatrix}$ | Matriz de rigidez de carregamento axial do elemento   |
| $\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix}$ | Matriz de rigidez de torque axial do elemento   |
| Φ                                   | Efeito do cisalhamento transversal ( $\Phi = 12EI\chi/GAl^2$ )                              |
| χ                                   | Fator de forma de cisalhamento transversal  |
| A                                   | Área do elemento  |
| Ι                                   | Momento de inércia do elemento  |
| $I_d$                               | Inércia diametral   |
| $I_p$                               | Inércia polar   |
| т                                   | Massa do disco rígido   |
| S                                   | Posição axial ao longo do eixo do elemento  |
| l                                   | Comprimento do elemento   |
| V                                   | Posição axial adimensional ( $v = s/l$ )  |

| r                               | Raio interno do elemento                             |
|---------------------------------|--|
| R                               | Raio externo do elemento                             |
| m                               | Razão dos raios ( $m = r/R$ )                        |
| ρ                               | Razão de raio interno ( $\rho = r_j / r_i$ )         |
| σ                               | Razão de raio externo ( $\sigma = R_j / R_i$ )       |
| E                               | Módulo de elasticidade (módulo de Young) do material |
| G                               | Módulo de elasticidade transversal do material       |
| υ                               | Coeficiente de Poisson                               |
| μ                               | Massa por unidade de comprimento ( $\mu = \rho A$ )  |
| $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ | Coeficientes polinomiais                             |
| t                               | Tempo  |

### Subscritos

| i, j | Nós extremidades esquerda e direita do elemento |  |
|------|---|--|
|      | I   |  |

1,2,... Termos particulares em uma matriz ou expressão polinomial

### Sobrescritos

.

- , Diferenciação com respeito à posição
  - Diferenciação com respeito ao tempo

# SUMÁRIO

| 1 INTRODUÇÃO   | 1   |
|--|-----|
| 1.1 Justificativa e Objetivo do trabalho                       | 3   |
| 1.2 Descrição do trabalho e dos capítulos                      | 3   |
| 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA  | 5   |
| 2.1 Modelagem do rotor pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) | 5   |
| 2.2 Mancais hidrodinâmicos                                     | 9   |
| 2.3 Fundação e Método das Coordenadas Mistas                   | 11  |
| 2.4 Diagrama de Campbell                                       | 14  |
| 3 MODELAGEM MATEMÁTICA   | 15  |
| 3.1 Elemento de Disco Rígido                                   | 20  |
| 3.2 Elemento de Viga Cilíndrica                                | 21  |
| 3.3 Elemento de Viga Cônica                                    | 26  |
| 3.4 Mancais  | 28  |
| 3.5 Excitação por Desbalanceamento de Massa                    | 36  |
| 3.6 Montagem da matriz global e Solução do sistema             | 38  |
| 3.7 Fundação   | 42  |
| 4 MODELAGEM COMPUTACIONAL                                      | 48  |
| 5 VALIDAÇÃO TEÓRICA E EXPERIMENTAL                             | 58  |
| 5.1 Análise Estática   | 58  |
| 5.1.1 Modelo 1: Viga engastada                                 | 62  |
| 5.1.2 Modelo 2: Viga bi-apoiada                                | 63  |
| 5.1.3 Modelo 3: Viga bi-engastada                              | 65  |
| 5.1.4 Modelo 4: Viga bi-apoiada com peso próprio               | 66  |
| 5.1.5 Modelo 5: Viga em balanço com peso próprio               | 68  |
| 5.1.6 Modelo 6: Viga hiperestática                             | 70  |
| 5.2 Análise Dinâmica   | 72  |
| 5.2.1 Rotor Laval  | 72  |
| 5.2.2 Rotor com disco descentralizado                          | 79  |
| 5.2.3 Rotor com dois discos rígidos                            | 83  |
| 5.2.4 Fundação   | 91  |
| 6 SIMULAÇÃO DE SISTEMAS COMPLETOS                              | 109 |
| 6.1 Rotor Laval com mancais hidrodinâmicos                     | 109 |
| 6.2 Turbo-grupo  | 126 |
| 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS                               | 141 |
| 7.1 Sugestões de Trabalhos Futuros                             | 142 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS                                     | 143 |
| ANEXO A – FUNÇÕES DE FORMA PARA O ELEMENTO DE VIGA CILÍNDRICO  | 151 |
| ANEXO B – MATRIZES DO ELEMENTO DE VIGA CILÍNDRICO              | 152 |
| ANEXO C – COEFICIENTES PARA O ELEMENTO DE VIGA CÔNICO          | 155 |
| ANEXO D – FUNÇÕES DE FORMA PARA O ELEMENTO DE VIGA CÔNICO      | 156 |
| ANEXO E – MATRIZES DO ELEMENTO DE VIGA CÔNICO                  | 157 |

## 1 INTRODUÇÃO

Entende-se por rotores os elementos acoplados radialmente aos eixos rotativos, os quais apresentam consideráveis massas e inércias em relação ao sistema, e possuem movimento girante solidário ao eixo.

Os rotores de máquinas têm como objetivo transmitir potência através de seu movimento de rotação. Estão presentes na vida cotidiana de grande parte da população mundial, em inúmeras aplicações, desde rodas de bicicletas, ventiladores, eixos de motor, compressores, discos rígidos de computadores até giroscópios de alta precisão, utilizados em equipamentos sofisticados de orientação. Esses equipamentos muitas vezes são parte integrante de plantas de produção ou centrais de geração de energia, de forma que, uma parada imprevista pode acarretar grande perda financeira.

Na figura 1.01 observa-se o esquema de um turbo-gerador a vapor composto por turbinas de alta, média e baixa pressão, utilizadas para maximizar o aproveitamento energético do vapor. As turbinas, o gerador e o excitador formam o conjunto rotativo desta máquina que é sustentado por mancais.



Figura 1.01: Esquema de turbo-gerador composto de três turbinas.

Rotores de máquinas têm, enquanto em operação, grande quantidade de energia rotacional, e pequena quantidade de energia vibracional. O objetivo da dinâmica de rotores, enquanto aplicada a máquinas rotativas, é analisar como os níveis de vibração em torno da posição desejada podem ser mantidos tão pequenos quanto possível. (KRAMER, 1993).

Portanto, como seu projeto e otimização são de extrema importância para a diminuição de custos e melhora da qualidade de grande parte das máquinas, torna-se fundamental estudar o comportamento do sistema.

A análise do comportamento das máquinas rotativas envolve considerável complexidade, já que estas máquinas são constituídas, geralmente, por um sistema de equipamentos que abrangem, além do rotor, eixos e mancais, fundação e outros equipamentos auxiliares, como, por exemplo, selos de fluxo. Portanto, para se estudar o comportamento dinâmico desses sistemas, é necessário determinar a interação de todos os componentes para o entendimento dos fenômenos envolvidos.

Vários modelos matemáticos têm sido desenvolvidos para simular as condições de trabalho de sistemas rotativos e avaliar seu comportamento real, isto é, são desenvolvidos métodos para melhor modelar máquinas reais, como no caso de máquinas rotativas de grande porte. Entretanto, segundo Lees, Sinha e Friswell (2009), determinar um modelo confiável de máquina rotativa, capaz de prever seu comportamento dinâmico, assim como as possíveis falhas nesses sistemas, é um grande desafio, ainda em aberto.

Metodologias analíticas são aplicadas no estudo do comportamento dinâmico de estruturas ou sistemas mecânicos apresentando, porém, a desvantagem de solucionar na precisão necessária somente sistemas mais simples. Já modelos matemáticos computadorizados são amplamente desenvolvidos com objetivo de solucionar problemas mais complexos de vibrações em máquinas e sua estrutura de suporte. Tais metodologias utilizam modelos refinados que, no entanto, nem sempre apresentam uma resposta rápida, devido ao elevado tempo computacional envolvido no processo, para obtenção das respostas dinâmicas.

#### 1.1 Justificativa e Objetivo do trabalho

Tendo em vista a grande aplicação das máquinas rotativas e a importância de conhecer o seu funcionamento com fins de otimização, de melhor entendimento dos parâmetros de projeto para diminuição de custos, melhora de qualidade e aumento da vida útil dos componentes, para diagnose de falhas, para controle robusto baseado em modelos, entre outros, é que o presente trabalho propõe a modelagem computacional do sistema completo.

#### 1.2 Descrição do trabalho e dos capítulos

A presente dissertação é composta por sete capítulos, além dos seus anexos. O conteúdo de cada capítulo está resumido abaixo.

O Capítulo 1 apresenta o objetivo do trabalho e a visão geral do tema desenvolvido nesta dissertação de mestrado.

O Capítulo 2 contém uma revisão bibliográfica dos assuntos abordados, apresentando trabalhos expressivos e relevantes nas áreas de modelagem de rotores pelo método dos elementos finitos, de mancais hidrodinâmicos e da estrutura de suporte (fundação). A modelagem matemática do sistema rotativo e a teoria de dinâmica de rotores utilizada neste trabalho são detalhadas no Capítulo 3. No Capítulo 4 é apresentada a modelagem computacional do sistema, mostrando a logística das informações para atingir o objetivo de analisar o sistema. Dessa forma, os capítulos 3 e 4 são complementares para um total entendimento da modelagem adotada.

Os resultados das simulações, a discussão e validação dos sistemas integrados são apresentadas no Capítulo 5, avaliando-se os resultados para o modelo de elementos finitos proposto e para a fundação considerada flexível. Já o Capítulo 6 tem o objetivo de apresentar os recursos em modelagem até então disponíveis no programa de simulação numérica, permitindo a

análise do rotor, dos mancais hidrodinâmicos radiais de configuração fixa, da excitação por desbalanceamento de massa, além dos resultados que podem ser visualizados por diferentes ferramentas a fim de auxiliar o analista a interpretá-los, valendo-se, para tanto, de sistemas mecânicos de maior complexidade.

O Capítulo 7, finalmente, contém as observações e conclusões finais da dissertação, além das sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, é apresentado um levantamento bibliográfico envolvendo diversos temas relacionados à dinâmica de rotores, revelando parte do que já foi pesquisado e das contribuições científicas fornecidas à área. São abordados os conceitos envolvidos na integração do sistema completo rotor-mancais-fundação, como: modelagem do sistema rotativo através do Método dos Elementos Finitos, os mancais hidrodinâmicos, a estrutura de suporte ou fundação e, conseqüentemente, o método das coordenadas mistas e a utilização do diagrama de Campbell.

#### 2.1 Modelagem do rotor pelo Método dos Elementos Finitos (MEF)

Nos primórdios da dinâmica de rotores, Rankine (1869) observou a existência de velocidades críticas. Em 1883, Laval construiu a turbina que, posteriormente, recebeu seu nome, e resolveu o problema de operação silenciosa, utilizando um eixo extremamente flexível e sua faixa de operação era de até 40000 rotações por minuto. O objetivo era a auto-centragem do disco acima da velocidade crítica, um fenômeno que ele intuitivamente reconheceu.

Em 1895, surgiram as investigações fundamentais de Dunkerley e Föppl. Então, torna-se conhecido que um eixo tem diversas velocidades críticas e que, sob certas circunstâncias, estas eram coincidentes com as freqüências naturais de um eixo não-rotativo. Com a finalidade de calcular as velocidades críticas de eixos cilíndricos com vários discos e mancais, a teoria de Reynolds foi aplicada e o rotor Jeffcott foi, então, introduzido por Föppl. O efeito giroscópico também foi considerado, juntamente com sua dependência da velocidade. A solução requerida da equação da freqüência, àquela época, somente foi possível para modelos simples. Dunkerley descobriu, como resultado de numerosas medições, a relação conhecida atualmente como Southwell, pela qual a primeira velocidade crítica pode ser calculada, mesmo para sistemas complexos.

Jeffcott (1919) explica a ciência da dinâmica dos rotores em uma forma gráfica, ainda utilizada atualmente e, por esta razão, o rotor introduzido por Föppl futuramente recebeu seu nome.

Stodola (1910) apresentou um procedimento gráfico para o cálculo de velocidades críticas, o qual foi largamente utilizado até o advento da computação digital, sendo substituído pelo método da matriz de transferência de Myklestad (1944) e Prohl (1945).

Portanto, os sistemas rotor-mancais flexíveis têm sido analisados por muitos métodos matemáticos diferentes ao longo do tempo e Eshleman (1972) apresentou uma revisão deles.

Entretanto, desde 1970, diversos pesquisadores da área de análise dinâmica de rotores têm estudado a utilização do método dos elementos finitos para a modelagem de sistemas rotativos, tal como introduzido por Archer (1963).

Os primeiros trabalhos na área foram de Ruhl (1970) e de Ruhl e Booker (1972), os quais utilizavam um modelo de elemento finito de um sistema turbo rotor a fim de estudar a estabilidade e a resposta desbalanceada. O elemento finito de Ruhl incluía a energia de flexão elástica e a energia cinética de translação. Aproximadamente no mesmo período, Thorkildsen (1972) desenvolveu um elemento mais geral que o de Ruhl ao incluir a inércia de rotação e momentos giroscópicos. Polk (1974) apresentou um estudo sobre a freqüência natural de rotação e análise da velocidade crítica, utilizando um elemento finito de viga de Rayleigh. Em uma adição ao artigo de Polk, apresentou o desenvolvimento de um elemento de viga de Timoshenko, mas não apresentou resultados numéricos. Diana, Massa e Pizzigoni (1975) publicaram resultados de uma análise de elemento finito de um eixo rotativo, possuindo um elemento similar ao de Ruhl. Ainda no mesmo ano, Dimaragonas (1975) apresentou uma formulação geral para um elemento com os efeitos de inércia translacional, inércia rotacional, momentos giroscópicos, flexão e amortecimento interno.

Gasch (1976) publicou artigo que evoluía a partir do modelo de Dimaragonas, incluindo também os efeitos de excentricidade distribuída. Nelson e McVaugh (1976) também

apresentaram um estudo que utilizava um elemento de viga de Rayleigh de eixo rotativo, similar ao de Polk. Em adição, as equações do elemento foram desenvolvidas tanto no sistema de referência fixo quanto no sistema móvel rotacional e, considerava a carga axial, momentos giroscópicos, inércia de translação e rotação além da rigidez à flexão. Este trabalho também apresentou um elemento de disco rígido, e foi generalizado, por Zorzi e Nelson (1977), pela inclusão de amortecimento interno viscoso e histerético, como apresentado anteriormente por Dimaragonas e por Gasch. Finalmente, Zorzi e Nelson (1980) apresentaram um trabalho que considerava o torque axial, desenvolvendo ainda as equações de movimento do elemento nos sistemas de referência fixo e móvel. Ainda no mesmo ano, Nelson (1980) adicionou deformação por cisalhamento transversal à teoria de viga de Rayleigh para desenvolver um elemento de viga de Timoshenko. Este trabalho comparou os resultados obtidos com as soluções clássicas de forma fechada de sistemas contínuos, como os apresentados por Dym e Shames (1973) e por Eshlemans e Eubanks (1969) em seus estudos da velocidade crítica de um rotor contínuo.

Todos estes equacionamentos possuem em comum a consideração da secção transversal do elemento como sendo cilíndrica, de onde vem a área e a inércia serem constantes ao longo do comprimento. O movimento destes elementos é representado por oito graus de liberdade: duas translações e duas rotações, em cada uma das extremidades do elemento. Contudo, modernos rotores podem apresentar geometrias longe de serem uniformes em função do comprimento; sendo estas mudanças na secção transversal acomodadas, principalmente, pela modelagem do rotor como uma série de cilindros intercalados. Para secções cônicas, os erros induzidos pela aproximação por cilindros intercalados podem ser grandes. Como um resultado disto, Rouch e Kao (1979) desenvolveram um elemento de viga linearmente cônico de Timoshenko para uso na dinâmica de rotores. Este elemento foi baseado no trabalho de Thomas, Wilson, e Wilson (1973), que determinaram que a representação ótima da deformação por cisalhamento era adicionar duas coordenadas em cada extremidade do elemento, resultando em doze graus de liberdade por elemento. O elemento de Rouch e Kao estendeu a formulação anterior pela inclusão dos efeitos giroscópicos e pela representação da área e da inércia como polinômios de segunda e quarta ordem, respectivamente, como função dos raios. As matrizes do elemento foram obtidas por integração numérica, e, portanto, nenhuma expressão de forma fechada foi apresentada. Também foi indicado que as coordenadas do cisalhamento poderiam ser condensadas fora do elemento ou sistema de equações sem significativa perda de precisão. Posteriormente, To (1981) desenvolveu expressões polinomiais de forma fechada para a massa e rigidez, para o elemento linearmente cônico de Timoshenko, novamente utilizando doze graus de liberdade.

Já em 1985, Greenhil, Bickford e Nelson estenderam a teoria do elemento de viga de Timoshenko para secção transversal linearmente cônica, utilizando a representação cinemática de Thomas, Wilson, e Wilson, a fim de desenvolver expressões polinomiais fechadas para matrizes do elemento adequadas à utilização em programação computacional. O elemento incluiu os efeitos de inércia translacional e rotacional, momentos giroscópicos, carregamento axial, amortecimento interno e desbalanceamento de massa concentrado, e o sistema de equações de movimento também é apresentado em ambos os referenciais fixo e rotacional.

Uma formulação alternativa é dada por Genta e Gugliotta (1988), os quais modelam um elemento cônico de Timoshenko com dois graus de liberdade complexos por nó. Os autores discordam da abordagem que adiciona dois graus de liberdade em cada nó, referente à deformação por cisalhamento, por duas razões: a primeira é acreditarem que esta é adequada apenas para aplicações envolvendo estruturas simples, sem descontinuidades geométricas e restringidas apenas nas extremidades, uma vez que é necessário ou realizar a condensação das matrizes dos elementos no sistema de coordenadas local, a fim de diminuir os graus de liberdade relacionados ao cisalhamento, ou negligenciar as descontinuidades do cisalhamento; a segunda razão é por este tipo de elemento se comportar não muito diferentemente do elemento sem as coordenadas adicionadas, apesar do número de graus de liberdade ser maior e sua formulação mais complexa. Uma vantagem apresentada pelo elemento apresentado por Genta e Gugliotta é a possibilidade de representar rotores que possuam grande conicidade, tais como turbinas aeronáuticas, sem a necessidade de redução excessiva do comprimento do elemento, pois isto acarreta a diminuição da razão entre o comprimento e o diâmetro. Uma vez que a teoria de viga utilizada na formulação do elemento é correta para altos valores da relação supracitada é interessante não reduzir sobremaneira seu comprimento. Além disto, o elemento cônico aproxima melhor perfis parabólicos, comumente encontrados em turbinas de geração de energia.

Geralmente, os métodos numéricos são utilizados para a determinação do comportamento estático ou dinâmico dos componentes do sistema (KRÄMER, 1993; LALLANE e FERRARIS, 1998). Desde então, o MEF foi extensamente aplicado à análise de dinâmica de rotores, incluindo outros efeitos aos modelos, para mais precisamente representar um sistema real e, portanto, proporcionar um estudo teórico confiável dos sistemas em questão.

A modelagem dinâmica do sistema rotativo estudado deve conter interações entre todos os seus sub-componentes: eixos, mancais, selos de fluxo, acoplamentos, discos, fundação e solo. O MEF trata um sistema contínuo através de uma aproximação para sistema discreto, cuja modelagem consiste em um conjunto de elementos que, individualmente, são considerados contínuos, o que torna o método muito interessante em aplicações para a dinâmica de rotores. Este método expressa o deslocamento de qualquer ponto do sistema contínuo em termos dos deslocamentos de um conjunto finito de pontos, obtidos através de uma função de interpolação. Resultados satisfatórios, no estudo de problemas estruturais, têm sido obtidos com essa abordagem.

#### 2.2 Mancais hidrodinâmicos

Os primeiros estudos relacionados à influência do comportamento dinâmico dos mancais lubrificados sobre as máquinas rotativas são datados de 1883 e 1885, e foram realizados por Tower, onde foi relatado o fato de que um rotor quando corretamente colocado em movimento de rotação seria sustentado pelo filme de óleo. Em 1884, com algumas simplificações nas equações de Navier-Stokes, Reynolds estabeleceu a equação diferencial para o perfil de pressões que atuam entre duas superfícies em movimento relativo, devido à variação da pressão interna no filme de fluido existente entre duas superfícies.

A equação diferencial desenvolvida por Reynolds (1886) é do tipo parcial não homogênea, com coeficientes variáveis e de complexa resolução matemática direta. Assim, Petrov e Tower, que trabalhavam no campo experimental, tiveram seus trabalhos confirmados teoricamente. Esta

equação descreve, em sua forma simplificada, o desenvolvimento da pressão interna nas direções circunferencial e axial do mancal. Uma limitação para a resolução da equação de Reynolds, por muito tempo, foi o desconhecimento das condições de contorno necessárias para sua integração, diretamente relacionadas ao conhecimento da pressão do filme de óleo nas extremidades do mancal.

O trabalho publicado por Reynolds apresentou muitos conceitos novos para o nível do conhecimento dos pesquisadores da época, tais como: folga radial, relação com o fenômeno de cavitação nas partes divergentes dos mancais, além do próprio conceito de mancais infinitamente longos, desprezando o termo referente ao fluxo do lubrificante e os gradientes de pressão na direção axial.

Em 1904, Sommerfeld publicou uma solução analítica para a equação de Reynolds, aplicada a mancais longos. Esta solução foi obtida integrando a Equação de Reynolds a partir de novas condições de contorno, considerando, para tanto, a inexistência de perdas de óleos na extremidade do mancal. Desta forma, foi obtida a equação do perfil de pressão em função de parâmetros específicos, como por exemplo, posição angular, folga radial, razão de excentricidade, velocidade de rotação do eixo e viscosidade do fluido.

Embora já existisse uma solução para o mancal longo, a aplicação desses mancais apresentava ainda algumas restrições. Entre essas, destacam-se a possibilidade de redução da folga radial a zero, devido à ocorrência de pequenas deflexões do eixo ou também desalinhamentos. Com isso, houve a necessidade de estudar e analisar o comportamento hidrodinâmico em mancais curtos. Desta forma, Ocvirk propôs em 1952, uma solução da equação de Reynolds para aplicação em mancais curtos, no qual é considerado o termo de perdas nas extremidades. Essa solução negligencia o termo que leva em conta o fluxo circunferencial do mancal, por considerar o mesmo pequeno quando comparado ao fluxo na direção axial do eixo (fluxo de perda).

A idéia de representar as características dinâmicas de um mancal hidrodinâmico por meio de coeficientes de rigidez e amortecimento foi introduzida por Stodola (1925) e Hummel (1926).

O objetivo era aperfeiçoar o cálculo da velocidade crítica de um rotor incluindo a flexibilidade do filme de óleo do mancal. Paralelamente, Newkirk e Taylor (1924 e 1925) descreveram o fenômeno de instabilidade fluido-induzida e, desde então, vários pesquisadores relacionaram o problema de instabilidade com as propriedades dos coeficientes dos mancais (BENTLY et al., 2001; GUNTER, 2006; CASTRO e CAVALCA, 2008).

Lund (1964) publicou um método para o cálculo de coeficientes dinâmicos de rigidez e amortecimento linearizados, a serem introduzidos na equação de movimento matricial do sistema rotativo.

Os modelos numéricos para mancais cilíndricos, elípticos e tri-lobulares foram propostos por Pinkus (1956; 1958; 1959) e recentemente implementados por Machado (2009).

#### 2.3 Fundação e Método das Coordenadas Mistas

A fundação é toda a estrutura que sustenta o rotor, e os mancais são os pontos de conexão desta estrutura de suporte com o rotor. Em outras palavras, o rotor se conecta com a fundação através dos mancais. Através destas conexões, as forças causadas pelo movimento do rotor desbalanceado são transmitidas à fundação, que reage nos mancais, interferindo na resposta do rotor. Essa reação da fundação depende de seu amortecimento e rigidez. A fundação pode apresentar rigidez elevada e, por essa razão, muitas vezes é considerada como infinita.

Para simular o comportamento de uma fundação, Weber (1961) estendeu o método da matriz de transferência, aplicando-o a um modelo com duas vigas, as quais representavam o rotor e uma fundação de mesa. Como resultado deste modelo, obteve-se uma combinação do comportamento vibratório do rotor e da fundação, demonstrando a influência da estrutura de suporte, apesar do modelo simplificado da fundação.

11

Wilson e Brebbia (1971) propuseram uma solução para representar o comportamento de fundações de aço para máquinas rotativas, no qual utilizaram o método dos elementos finitos para obter as matrizes de massa e rigidez e, deste modo, calcular as freqüências naturais e os modos de vibrar, através do cálculo dos auto-vetores e auto-valores.

Morton (1972) propôs um modelo matemático para o cálculo de um rotor suportado por vários mancais, considerando os acoplamentos entre movimentos horizontais e verticais dos mancais (coeficientes cruzados). Os mancais hidrodinâmicos foram incorporados ao sistema através dos coeficientes de rigidez e amortecimento lineares do filme de óleo e, considerou-se a estrutura de suporte representada por sistemas massa-mola.

Gasch (1976) propôs representá-la através das suas matrizes de rigidez dinâmica, obtidas através da inversão da soma das matrizes de receptância dos deslocamentos horizontais e verticais da fundação obtidas experimentalmente. Beolchini (1982) propôs um sistema de parâmetros de massa e realizou uma análise paramétrica para demonstrar a influência dos vários parâmetros da fundação.

Craggs (1987) propôs um método para a montagem de um sistema completo para simular o comportamento de um turbo-gerador. A fundação e os mancais hidrodinâmicos foram representados por coordenadas generalizadas e acoplados ao eixo pelos nós de conexão. O autor propõe que o modelo de elementos finitos do rotor seja condensado através da utilização de coordenadas generalizadas contendo seus modos de vibrar mais significativos, permitindo-se concentrar no cálculo dos deslocamentos das coordenadas de interesse.

Em 1992, Stephenson e Rouch incluíram os efeitos de fundação no modelo de uma máquina rotativa através de seus parâmetros modais. A FRF de uma estrutura de fundação foi medida e, usando-se análise modal, massa, amortecimento, rigidez da fundação foram calculados. Contudo, este método apresenta o inconveniente de que, quando o número de modos identificados é menor que o número de pontos medidos, devem ser criados modos fictícios para manter a matriz de auto-vetores quadrada, facilitando sua inversão.

12

Cavalca (1993) utilizou o método das coordenadas mistas para incluir o efeito da fundação nos rotores, utilizando coordenadas físicas do rotor e coordenadas modais da fundação. O método apresenta como vantagem não requerer a inversão da matriz de flexibilidade para obter a matriz de impedância mecânica da fundação, permitindo, desta forma, a utilização de um número variável de modos, pois não é necessária a inversão da matriz dos auto-vetores para o cálculo do sistema completo. Cavalca et al. (2006) apresentou uma metodologia para analisar a influência da fundação no sistema rotor-mancais e comparar a resposta do sistema rotor-mancais com o sistema rotor-mancais. É utilizado um modelo de elementos finitos do rotor e um modelo experimental da fundação.

Okabe (2007), em seu trabalho, investigou os efeitos da fundação e dos mancais hidrodinâmicos no comportamento dinâmico de uma máquina rotativa. Análises experimentais foram feitas na fundação e seus parâmetros modais foram obtidos através da análise modal das funções resposta em freqüência. Utilizando o método das coordenadas mistas (CAVALCA, 1993), a fundação foi incorporada ao sistema rotor-mancais. Análise modal complexa foi realizada no sistema rotor-mancais-fundação e a influência dos efeitos da fundação na resposta do rotor foram analisados.

A fundação, quando incorporada ao sistema rotor-mancais, aumenta, portanto, a complexidade do modelo, resultando em um sistema com maior número de graus de liberdade. O método das coordenadas mistas consiste em, através da aplicação da aproximação modal, reduzir o número de graus de liberdade do modelo da fundação, considerando apenas os modos de vibrar mais significativos na faixa de freqüências operacionais do rotor. Os parâmetros modais da fundação são obtidos através de análise modal. Os graus de liberdade relacionados aos modos mais significativos da fundação são transformados para coordenadas principais, permitindo, assim, representar diretamente esses modos. Portanto, o sistema final é modelado através de uma equação de movimento em coordenadas mistas (CAVALCA, 1993): coordenadas físicas para o rotor e coordenadas principais para a fundação. As coordenadas principais permitem a diagonalização das matrizes de massa, amortecimento e rigidez da fundação. O modelo do sistema rotor-mancais-fundação é dividido em dois subsistemas (rotor-mancais e fundação),

13

sendo cada um deles analisado separadamente. A resposta do sistema completo é obtida integrando-se os modelos dos dois sub-sistemas.

#### 2.4 Diagrama de Campbell

Em 1924, Wilfred Campbell utilizou diagramas de freqüência de vibração por rotação pela primeira vez, para avaliar a vibração axial de volantes de disco de turbinas a gás em função da rotação. O objetivo foi contribuir para estudos das várias formas de vibração axial e propagação de ondas nos discos, pela General Electric Company. Estudos foram realizados para investigar as constantes falhas por fadiga observadas nos equipamentos da empresa.

A função do diagrama de freqüência-rotação, que mais tarde passou a ser conhecido como diagrama de Campbell, é determinar as freqüências naturais de vibração do sistema, determinando-se, nas curvas, quais freqüências coincidem com a freqüência de rotação. Campbell (1924) utiliza este diagrama para registrar as freqüências de onda de corrente elétrica de bobinas que detectavam, por variação do fluxo de campo magnético, a aproximação e o afastamento do volante do disco, devido às vibrações axiais. Com a freqüência da corrente elétrica das bobinas, podia-se obter a freqüência de vibração axial do disco. Bobinas estacionárias eram capazes de diferenciar duas formas de vibração axial do disco caracterizadas pela forma de propagação: a direta, onde a vibração se propaga no mesmo sentido de rotação da turbina, e a retrógrada, onde a propagação ocorre em sentido oposto.

Desde então, o diagrama de Campbell tem grande importância na dinâmica de rotores, podendo ser obtido analiticamente através do calculo dos auto-valores do sistema em função da rotação. É amplamente utilizado em projetos de máquinas rotativas para prever prováveis regiões de ressonância.

## **3 MODELAGEM MATEMÁTICA**

A modelagem dinâmica do sistema rotativo deve contemplar as interações entre os seus componentes ou sub-sistemas, a saber: rotores, mancais, selos de fluxo, acoplamentos, fundação. Dentro deste contexto, o Método dos Elementos Finito trata um sistema contínuo, discretizando-o em um conjunto de elementos que, individualmente, são considerados contínuos. Este método expressa o deslocamento de qualquer ponto do sistema contínuo em termos dos deslocamentos de um conjunto finito de pontos, obtidos através de uma função de interpolação. Resultados satisfatórios, no estudo de problemas estruturais, têm sido obtidos com esta abordagem, contudo, os problemas não são considerados resolvidos, e, desta forma, a investigação dos fenômenos e o desenvolvimento de diferentes modelos e abordagens continua.

Sendo o foco deste trabalho a estruturação do programa de análise do sistema rotativo, optou-se por, em uma primeira versão do pacote computacional, implementar os algoritmos referentes à modelagem do eixo por elementos finitos, através de um conjunto de discos rígidos e segmentos de eixo com massa e elasticidade distribuídas, e dos mancais hidrodinâmicos, cuja representação ocorre a partir de seus coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento. Também a fundação foi considerada, sendo sua modelagem também apresentada no decorrer do presente capítulo. Os efeitos dos acoplamentos, dos selos de fluxo e de excitações tais como o empenamento e o desalinhamento do eixo, entre outras, não estão presentes na atual versão, sendo, porém, objetos de estudo esperados para futuras atualizações.

Uma configuração típica de um sistema rotativo, o qual inclui discos, elementos de eixo e mancais, é ilustrada a seguir, juntamente com os dois sistemas de coordenadas que são utilizados para a descrição do movimento do sistema.



Figura 3.01: Configuração típica de um sistema rotativo (NELSON e McVAUGH, 1976).

O sistema de referência  $XYZ(\mathfrak{I})$  apresentado é o referencial inercial adotado também neste trabalho. X é o eixo axial, enquanto Y e Z são os eixos transversais horizontal e vertical, respectivamente. O sistema de referência  $xyz(\mathfrak{R})$  é o referencial rotacional e é definido em relação ao referencial inercial  $\mathfrak{I}$  pela rotação  $\omega t$  ao redor do eixo X, com  $\omega$  denotando a velocidade de rotação de precessão, já que os eixos X e x são colineares e coincidentes com a linha de centro do rotor não-deformado.

Para pequenas deformações transversais os vetores de deslocamentos angulares  $(B,\Gamma)$  são aproximadamente colineares com os eixos (Y,Z), respectivamente, e, portanto, o ângulo de rotação própria  $\phi$ , para uma velocidade constante do sistema e deformação torsional negligenciável, é  $\Omega t$  onde  $\Omega$  denota a velocidade de rotação própria do rotor.

Os deslocamentos ou graus de liberdade  $(V,W,B,\Gamma)$  de uma secção transversal com relação a  $\Im$  são transformados para os correspondentes deslocamentos relativos a  $\Re$   $(v,w,\beta,\gamma)$  pela transformação ortogonal:

$$\{q\} = [R]\{p\}$$
(3.01)

$$\{q\} = \begin{cases} V \\ W \\ B \\ \Gamma \end{cases} \qquad \qquad \{p\} = \begin{cases} v \\ w \\ \beta \\ \gamma \end{cases} \qquad (3.02)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega t & -\sin \omega t \\ 0 & 0 & \sin \omega t & \cos \omega t \end{bmatrix}$$
(3.03)

onde,  $\{q\}$  é o vetor deslocamento relativo ao sistema de coordenadas fixo,  $\{p\}$  é o vetor deslocamento relativo ao sistema de coordenadas rotacional e [R] é a matriz de transformação ortogonal. A figura 3.02 mostra a geometria e a obtenção da matriz de transformação de coordenadas, aqui denominada matriz de transformação [*R*].



Figura 3.02: Transformação de coordenadas entre os sistemas de referência inercial e rotacional.

Os graus de liberdade V e W são os deslocamentos na direção horizontal Y e direção vertical Z, respectivamente; e  $B \in \Gamma$  são os deslocamentos angulares aos eixos Y e Z, respectivamente. O mesmo vale para os graus de liberdade de deslocamento  $(v,w,\beta,\gamma)$  referentes ao sistema de coordenadas rotacional  $\Re$ .

E, para uso posterior, as derivadas de primeira e segunda ordem da equação 3.01 são,

$$\{\dot{q}\} = \omega[S]\{p\} + [R]\{\dot{p}\}$$
(3.04a) 
$$\{\ddot{q}\} = [R]\{\{\ddot{p}\} - \omega^{2}\{p\}\} + 2\omega[S]\{\dot{p}\}$$
(3.04b)

onde

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\omega t & -\cos\omega t & 0 & 0\\ \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sin\omega t & -\cos\omega t\\ 0 & 0 & \cos\omega t & -\sin\omega t \end{bmatrix}$$
(3.05)

Para efeitos de modelagem através do método dos elementos finitos, o sistema contínuo é dividido em um número finito de elementos, os quais são conectados entre si por nós. É possível, então, realizar o cálculo da energia cinética (Ti), energia de deformação (Ui) e o termo de dissipação de energia (Ri) de cada elemento i, em função dos deslocamentos dos nós em sua fronteira. Portanto, para uma estrutura com N elementos, a soma das energias de cada elemento determina a energia estrutural global.

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_{i} \qquad \qquad U = \sum_{i=1}^{N} U_{i} \qquad \qquad R = \sum_{i=1}^{N} R_{i} \qquad (3.06)$$

A energia cinética, a energia de deformação e o trabalho das forças não-conservativas globais são,

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^{T} [M] \{ \dot{q} \}$$
(3.07)
$$U = \frac{1}{2} \{q\}^{T} [K] \{q\}$$
$$R = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^{T} [C] \{\dot{q}\}$$

Com a aplicação da equação de Lagrange (Eq. 3.08), é possível obter a equação de movimento do sistema completo. Esta metodologia foi utilizada por diversos autores na literatura, como Lallane e Ferraris (1998).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = F_i, \text{ para } i = 1, 2, ..., N$$
(3.08)

em que  $q_i$  é a i-ésima coordenada generalizada e  $F_i$  é a força generalizada atuando na direção da iésima coordenada generalizada.

A equação de movimento do sistema completo é, portanto,

$$[M]\{\dot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{F(t)\}$$
(3.09)

onde,

[M], [C] e [K] são as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

{F} é o vetor de excitação.

 $\{q\}$  é o vetor dos graus de liberdade, ou ainda, o vetor deslocamento relativo ao sistema de coordenadas inercial.

A seguir são apresentadas as modelagens dos componentes do sistema, ou seja, elemento de disco rígido, elemento de viga e mancais, além da excitação por desbalanceamento de massa. Duas formulações são apresentadas para o elemento de viga, ambas para o modelo de viga de Timoshenko (com cisalhamento transversal), contudo, a primeira representa uma viga de secção cilíndrica, enquanto a segunda, um elemento de viga cônico.

#### 3.1 Elemento de Disco Rígido

As equações de movimento do disco são apresentadas por Nelson e MacVaugh (1976), considerando um disco rígido, cujo centro de massa coincide com a linha de centro elástica do rotor. A equação de movimento, resultante da aplicação da equação de Lagrange e, referenciada no sistema inercial (*X*,*Y*,*Z*), assumindo-se uma restrição da velocidade de rotação própria como constante,  $\dot{\phi} = \Omega$ , é:

$$\left( \left[ M_T \right] + \left[ M_R \right] \right) \left\{ \dot{q} \right\} - \Omega \left[ G \right] \left\{ \dot{q} \right\} = \left\{ F \right\}$$

$$(3.10)$$

O vetor deslocamento {q} foi apresentado anteriormente na equação 3.02. As matrizes de inércia translacional  $[M_T]$ , de inércia rotativa  $[M_R]$  e giroscópica [G] são dadas por,

onde, *m* é a massa do disco e  $J_t$  e  $J_p$  são os momentos de inércia transversal (ou diametral) e polar. Para uma coroa circular, ou elemento de viga tubular, esses momentos de inércia são,

$$J_{t} = \frac{1}{12} m \left[ \frac{3}{4} \left( D_{e}^{2} + D_{i}^{2} \right) + L^{2} \right] \qquad \qquad J_{p} = \frac{1}{8} m \left( D_{e}^{2} + D_{i}^{2} \right)$$
(3.12)

Para um elemento de disco de espessura infinitesimal, ou seja, comprimento L=0, temos

$$J_p = 2J_t \tag{3.13}$$

Esta aproximação é válida para elementos de disco, ou seja, elementos cilíndricos onde a dimensão do diâmetro predomina consideravelmente sobre a dimensão do comprimento axial do elemento.

# 3.2 Elemento de Viga Cilíndrica

Um elemento de viga típico, com secção transversal uniforme circular (localizado entre seus nós *i* e *j*), cujo equacionamento é apresentado neste trabalho, foi baseado nos trabalhos de Nelson e McVaugh (1976) e de Nelson (1980), sendo desenvolvido no sistema de coordenadas inercial. O elemento de viga de Timoshenko apresenta quatro graus de liberdade por nó, sendo dois de translação e dois de rotação. Este elemento engloba os efeitos das inércias de translação e de rotação, momentos giroscópicos, energia elástica de flexão, carregamento axial, torque axial, energia de deformação por cisalhamento e amortecimento interno.

A figura 3.03 apresenta uma representação esquemática de um elemento de viga com suas coordenadas e graus de liberdade.



Figura 3.03: Elemento de viga e suas coordenadas cartesianas.

É importante notar que os deslocamentos  $(V,W,B,\Gamma)$  além de serem função do tempo, também o são da posição axial *s* ao longo do eixo *X* do elemento. O vetor deslocamento no sistema fixo, para o elemento de viga apresentado, é:

$$\{q\}^T = \{ V_i \ W_i \ B_i \ \Gamma_i \ V_j \ W_j \ B_j \ \Gamma_j \}$$
(3.14)

A translação da linha de centro da secção transversal, negligenciando o movimento axial, é dada por dois deslocamentos (V, W) que consistem de uma contribuição  $(V_{\alpha}, W_{\alpha})$  devido à flexão e uma contribuição  $(V_{\sigma}, W_{\sigma})$  devido ao cisalhamento. A rotação da secção transversal é descrita pelos ângulos de rotação  $(B, \Gamma)$  os quais estão associados com a deformação por flexão do elemento pelas equações:

$$B = -\frac{\partial W_{\alpha}}{\partial s} \qquad \qquad \Gamma = -\frac{\partial V_{\alpha}}{\partial s} \tag{3.15}$$

A translação de um ponto interno no elemento é escolhida a fim de obedecer à relação,

$$\begin{cases} V(s,t) \\ W(s,t) \end{cases} = \left[ \Psi(s) \right] \{q(t)\}$$
(3.16)

onde a matriz de restrição espacial é dada por

$$[\Psi(s)] = \begin{bmatrix} [\Psi_V(s)] \\ [\Psi_W(s)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 & 0 & 0 & \psi_4 \\ 0 & \psi_1 & -\psi_2 & 0 & 0 & \psi_3 & -\psi_4 & 0 \end{bmatrix}$$
(3.17)

e é uma matriz de funções de forma de deslocamentos translacionais. As funções de forma individuais,  $\psi_i(s) = \alpha_i(s) + \Phi \beta_i(s)$  para i = 1, 2, 3, 4, representam os modos de deslocamento estáticos associados com deslocamento unitário de uma das coordenadas da extremidade com todas as outras coordenadas restritas a zero. As funções  $\alpha_i(s)$  são associadas com a energia de deformação por flexão e as funções  $\beta_i(s)$  são devidas à energia de deformação por cisalhamento de uma viga de Timoshenko. Estas funções são apresentadas no Anexo A.

Portanto, as rotações podem ser expressas da seguinte forma:

$$\begin{cases} B(s,t) \\ \Gamma(s,t) \end{cases} = [\Phi(s)]\{q(t)\}$$
(3.18)

com,

$$\left[ \Phi(s) \right] = \begin{bmatrix} \left[ \Phi_B(s) \right] \\ \left[ \Phi_{\Gamma}(s) \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1 & -\phi_2 & 0 & 0 & -\phi_3 & \phi_4 & 0 \\ \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \phi_3 & 0 & 0 & \phi_4 \end{bmatrix}$$
(3.19)

representando a matriz de funções de forma de deslocamentos rotativos. As funções de forma individuais,  $\phi_i(s) = \varepsilon_i(s) + \Phi \delta_i(s)$  para i = 1, 2, 3, 4, representam funções de forma de rotação estáticas associadas com deslocamento unitário de uma das coordenadas da extremidade com todas as outras coordenadas restritas a zero. As funções  $\varepsilon_i(s) = \delta_i(s)$  estão relacionadas à flexão e à deformação por cisalhamento, respectivamente, para uma viga de Timoshenko e também são apresentadas no Anexo A.

As equações dos elementos podem ser determinadas pela integral de balanço de energia,

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt$$
(3.20)

Para deslocamentos virtuais, ou ainda, alterações virtuais de configuração do elemento estrutural, as equações de movimento são determinadas, no equilíbrio, pela relação:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta[T - U] dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0$$
(3.21)

onde T e U são, respectivamente, as energias cinética e potencial do elemento e  $\delta W$  representa o trabalho virtual realizado pelas forças não-conservativas, forças de amortecimento, além de qualquer outra não contabilizada na função de energia potencial.

A energia do elemento completo é obtida pela integração das equações acima ao longo do comprimento do elemento, sendo cada termo dado por,

$$T = \frac{1}{2} \{ \dot{q} \}^{T} ( [M_{T}] + [M_{R}]) \{ \dot{q} \} - \{ \dot{q} \}^{T} ( \Omega[G] + [C]) \{ \dot{q} \}$$
(3.22)

$$V = \frac{1}{2} \{q\}^{T} ([K_{B}] - [K_{A}] - [K_{T}]) \{q\}$$
(3.23)

$$\delta W = \{\delta q\}^T \left(\{F_c\} \cos \Omega t + \{F_s\} \sin \Omega t\right)$$
(3.24)

Sendo  $\{F_c\}$  o vetor das componentes horizontais e  $\{F_s\}$  o vetor das componentes verticais das forças externas.

A aplicação do Princípio Estendido de Hamilton, com energia e trabalho, produz a seguinte equação de movimento para o elemento finito, utilizando-se a restrição da velocidade de rotação própria constante,  $\dot{\phi} = \Omega$ ,

$$([M_T] + [M_R])\{\ddot{q}\} - (\Omega[G] + [C])\{\dot{q}\} + ([K_B] - [K_A] - [K_T])\{q\} = \{F\}$$
(3.25)

onde,

 $[M_T]$  é a matriz de inércia de translação do elemento;

 $[M_R]$  é a matriz de inércia de rotação do elemento;

[G] é a matriz giroscópica do elemento;

[*C*] é a matriz de amortecimento interno do elemento;

 $[K_B]$  é a matriz de rigidez de flexão do elemento;

 $[K_A]$  é a matriz de rigidez axial do elemento;

 $[K_T]$  é a matriz de rigidez torsional do elemento;

{F} é vetor de força externas no elemento.

Esta equação relaciona o movimento do elemento no sistema de coordenadas fixo e todas as matrizes são simétricas, com exceção da matriz giroscópica [*G*] e da matriz de rigidez torcional [*K<sub>T</sub>*], que são anti-simétricas. Esta equação é a mais completa, envolvendo os termos associados às deformações torsional e axial, as quais ainda não estão consideradas no presente modelo. As matrizes do elemento e os vetores de força incluem o efeito da deformação por cisalhamento através do parâmetro  $\Phi$  (equação 3.26), com exceção das matrizes de rigidez axial e torsional. Se os efeitos do cisalhamento são ignorados, o parâmetro  $\Phi$  é nulo e o modelo torna-se idêntico a uma viga Euler-Bernoulli.

$$\Phi = 12EJ_t \chi / GAl^2 \tag{3.26}$$

onde, *E* é o módulo de Young do material, *G* é o módulo de elasticidade transversal,  $J_t$  é o momento de inércia transversal, *l* é o comprimento, *A* é a área da secção do elemento e  $\chi$  o fator de cisalhamento.

O fator de cisalhamento  $\chi$  pode ser calculado a partir do coeficiente de poisson v do material. Para uma seção circular com diâmetro interno não nulo (coroa circular), o fator de cisalhamento pode ser calculado de acordo com Cowper (1966).

$$\chi = \frac{6(1+\upsilon)(1+m^2)^2}{(7+6\upsilon)(1+m^2)^2 + (20+12\upsilon)m^2}$$
(3.27)

onde *m* é a relação entre o raio interno *r* e o raio externo *R*, m = r/R.

As matrizes do elemento de viga cilíndrico encontram-se no Anexo B, com exceção da matriz de amortecimento. É importante observar que o amortecimento estrutural a ser considerado é do tipo proporcional às matrizes de massa e rigidez do elemento, dado pela relação (3.28). Para eixos de material metálico, o valor de  $\alpha$  é usualmente zero, e o valor de  $\beta$  é um valor estimado, que depende do material do eixo (WEIMING e NOVAK, 1996; SANTANA, 2009).

$$[R] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{3.28}$$

Quando os valores do amortecimento proporcional são função de  $\alpha$ , espera-se que as freqüências de ressonância e os modos de vibrar em altas freqüências sejam amortecidos, predominando os modos em baixas freqüências e, ao contrário, para quando o amortecimento depender primordialmente de  $\beta$ .

### 3.3 Elemento de Viga Cônica

Um modelo linear para análise dinâmica de rotores foi desenvolvido por Genta e Gugliotta (1988), baseado em um trabalho anterior dos autores (GENTA et al., 1984). Este modelo é baseado no método dos elementos finitos e inclui uma formulação consistente das matrizes, para elementos de viga de secção axissimétrica constante, apresentando dois graus de liberdade complexos em cada nó.

A figura 3.04 apresenta uma viga cônica anular com diâmetros, externo e interno, variando linearmente.



Figura 3.04: Elemento de viga cônico.

Com a notação apresentada na figura, a expressão para a área A e para os momentos de inércia diametral  $J_t$  e polar  $J_p$  da secção transversal são,

$$A(v) = A_i \left( 1 + \alpha_1 v + \beta_1 v^2 \right)$$
(3.29)

$$J_{t}(v) = J_{ti} \left( 1 + \alpha_{2}v + \beta_{2}v^{2} + \gamma_{2}v^{3} + \delta_{2}v^{4} \right) \qquad \qquad J_{p} = 2J_{d} \qquad (3.30)$$

onde os coeficientes são apresentados no Anexo C e a coordenada adimensional v é,

$$v = \frac{s}{l} \tag{3.31}$$

Os deslocamentos da viga podem ser expressos, em notação complexa (Genta, 1985), como,

$$\left\{\overline{z}\right\} = \begin{cases} y + iz\\ \phi_z - i\phi_y \end{cases} = \begin{bmatrix} n_1\\ n_2 \end{bmatrix} \{\overline{q}\}$$
(3.32)

O vetor  $\{\overline{q}\}$  listando as coordenadas complexas generalizadas é,

$$\{\overline{q}\}^T = [y_i, \phi_{zi}, y_j, \phi_{zj}] + i[z_i, -\phi_{yi}, z_j, -\phi_{yj}]$$

$$(3.33)$$

As funções de forma são baseadas na formulação usual para um elemento de viga de Timoshenko e são apresentadas no Anexo D. Estas funções estão em razão do parâmetro  $\Phi$ (equação 3.26), que pode ser computado pela utilização das propriedades geométricas *A*,  $J_t e \chi$  da secção transversal, no centro do elemento. O fator de cisalhamento  $\chi$  é dado pela equação 3.27. Os efeitos contemplados por esta formulação são: inércia de translação, inércia de rotação, momentos giroscópicos, amortecimento proporcional, e rigidez relacionada à flexão, ao carregamento axial e ao cisalhamento. Mesmo quando as matrizes do elemento forem obtidas em notação complexa, que é mais adequada ao estudo da velocidade angular de sistemas axissimétricos, o elemento proposto pode também ser utilizado para sistemas não-axissimétricos, ou ainda, onde a presença de mancais hidrodinâmicos introduz assimetrias nas matrizes de rigidez e amortecimento. Usualmente, utilizando-se uma notação baseada em coordenadas físicas, os graus de liberdade são listados na ordem a seguir,

$$\{q\}^{T} = \left[y_{i}, \phi_{zi}, y_{j}, \phi_{zj}, z_{i}, -\phi_{yi}, z_{j}, -\phi_{yj}\right]$$
(3.34)

e a equação de movimento pode ser escrita como,

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{y} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} G \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{yy} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{yz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_{zy} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{yz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{yy} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{yz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{zy} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{r} \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \\ \left\{ q \right\} = \begin{cases} \operatorname{Re}(\{f_{o}\}e^{i\Omega_{u}}) \\ \operatorname{Im}(\{f_{o}\}e^{i\Omega_{u}}) \end{cases}$$
(3.35)

As matrizes do elemento são apresentadas no Anexo E e são todas simétricas quando em coordenadas complexas. A matriz giroscópica tem a particularidade de ser proporcional à matriz de inércia de rotação e a matriz de amortecimento estrutural é proporcional somente às matrizes de rigidez relativas à flexão e ao cisalhamento.

Contudo, conforme a equação 3.35, as matrizes de momentos giroscópicos e de amortecimento interno estrutural são anti-simétricas quando se referem às matrizes do sistema completo.

# **3.4 Mancais**

Sempre que duas partes têm movimento relativo, estas constituem um mancal por definição, independentemente de seu formato ou configuração. Em um sistema rotativo, estes são os dispositivos responsáveis pela ligação entre a parte móvel e a estrutura fixa. Além de absorvedor de vibrações, outra importante função dos mancais é o de guiar ou restringir graus de liberdade durante a movimentação do eixo, dissipando o mínimo de energia possível.

O uso de materiais para separar as duas superfícies em contato, em movimento relativo, é amplamente utilizado e conhecido pelo termo lubrificação. Esse termo está associado à introdução de um filme de fluido entre as superfícies que apresentam movimento relativo entre si, com o objetivo de evitar o contato direto entre as partes sólidas. Dessa forma, o óleo altera o atrito seco, entre duas superfícies sólidas, para atrito viscoso entre as superfícies sólidas e um fluido.

A figura 3.05 esquematiza a presença do fluido em um mancal hidrodinâmico. No início do movimento desses mancais, ocorre contato direto entre o eixo e as paredes do mancal. Com o movimento relativo entre as partes sólidas, o fluido é forçado para a região inferior do eixo devido às forças de cisalhamento geradas pelo eixo de rotação. Esse fato origina altas pressões na superfície do mancal, as quais suportam o peso próprio do rotor, e previnem o contato entre o eixo e os mancais que o suportam, prevenindo e reduzindo, conseqüentemente, o desgaste e as falhas em máquinas rotativas.



Figura 3.05: Representação de um mancal hidrodinâmico (MACHADO e CAVALCA, 2009).

Tapia (2003) afirma que a caracterização dos mancais hidrodinâmicos e do seu filme de óleo tem por objetivo fornecer suporte numérico para a quantificação das forças transmitidas por estes componentes, forças estas causadas pelo peso próprio do rotor, acrescida de um desbalanceamento residual deste, e eventualmente, por outras fontes de excitação externa, por exemplo. Isto é feito para que se conheça o comportamento do sistema estudado, neste caso, um rotor suportado por mancais hidrodinâmicos, caracterizando os modos de vibrar deste sistema (suas freqüências naturais e formas modais). Machado e Cavalca (2009) acrescentam que a equivalência entre o filme de óleo e conjunto de molas e amortecedores equivalentes faz uso de equações linearizadas simples, cujas respostas obtidas coincidem, em um número expressivo de casos, com sistemas reais estudados. Entretanto, o estudo dos coeficientes dinâmicos é uma tarefa complexa, para a qual muitos pesquisados têm dedicado esforços para a resolução (LUND, 1987; WANG e KHONSARI, 2006; MERUANE e PASCUAL, 2008; MACHADO e CAVALCA, 2009).

Para modelar os mancais hidrodinâmicos, utilizou-se o modelo proposto e implementado por Machado e Cavalca (2009) e, integrado ao pacote computacional *Rotortest* durante a execução deste trabalho. Segundo esta metodologia, procura-se modelar o filme de óleo considerando o carregamento devido ao peso do rotor e as características geométricas do mancal, que definem a expressão para a espessura do filme de lubrificante, responsável, por sua vez, pelo campo de pressões e forças hidrodinâmicas de sustentação geradas. O lubrificante pode ser discretizado por um modelo mola-amortecedor e a avaliação dos coeficientes é realizada através das forças de sustentação obtidas a partir da distribuição de pressão. O método das diferenças finitas ou o método dos volumes finitos foi aplicado para obter a solução da distribuição de pressão (equação de Reynolds). Os autores estudaram os coeficientes dinâmicos para diferentes geometrias de mancais hidrodinâmicos (cilíndrico, elíptico, multi-lobular).

A equação básica que descreve o comportamento do fluido lubrificante na folga radial do mancal hidrodinâmico é a equação de Reynolds. A equação de Reynolds (1886) é a base da teoria moderna da lubrificação hidrodinâmica. Ao ser aplicada no estudo do filme de óleo de mancais, a solução desta equação fornece a distribuição de pressão no óleo, ou seja, determina-se  $p(z, \Theta)$  de acordo com a geometria do mancal. Este campo de pressão é a informação necessária para a resolução da maioria dos problemas básicos na análise de mancais hidrodinâmicos.

A equação de Reynolds pode ser obtida por duas maneiras: a partir das equações de Navier-Stokes, juntamente com as equações de continuidade, ou a partir do princípio de conservação de massa. O fluido foi considerado Newtoniano, ou seja, a tensão de cisalhamento do fluido é proporcional à taxa de deformação. Desta forma, pode-se escrever que:

$$\tau_x = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.36}$$

sendo  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido lubrificante.

A equação diferencial básica, que governa a distribuição de pressão no filme lubrificante, presente na folga dentro de um mancal radial, é chamada de Equação de Reynolds.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 \mu U \frac{\partial h}{\partial x} + 12 \mu \frac{\partial h}{\partial t}$$
(3.37)

na qual t denota o tempo, x e z as coordenadas cartesianas,  $\mu$  a viscosidade absoluta do lubrificante, U a velocidade tangencial na superfície do rotor e h a espessura do filme de óleo (dada pela equação 3.38).

Considera-se, conforme ilustrado na figura 3.06, um eixo circular de raio R, girando a uma velocidade angular absoluta  $\Omega$  em um mancal cilíndrico de raio R + f (onde f é a folga radial, diferença entre o raio do mancal e o raio do eixo) e comprimento axial L na direção Z. As coordenadas do centro C do eixo são denotadas por  $x_c$  e  $y_c$  em um sistema inercial, cuja origem se dá no centro do mancal que é designado por O. A distância entre o centro do munhão (eixo) e o centro do mancal é definida como excentricidade e. Será definida uma coordenada angular  $\theta$ , medida a partir da posição de espessura máxima do filme ( $h_{máx}$ ), que se localiza onde a extensão da linha CO corta a superfície do mancal em B.



Figura 3.06: Geometria do mancal radial (MACHADO e CAVALCA, 2009).

A espessura do filme de óleo é:

$$h = f + e\cos\theta = f(1 + \varepsilon\cos\theta) \tag{3.38}$$

onde  $\varepsilon = e/f \acute{e}$  conhecida como razão de excentricidade.

Sob condição de carga estática, o eixo opera no ponto do espaço dado pela excentricidade e e pelo ângulo de atitude  $\phi$ . Isto significa que, se a carga externa não variar com o tempo, a posição do eixo também não mudará. Em uma máquina real, sempre haverá variações da carga externa, ou efeitos internos como o desbalanceamento. Usualmente, estas cargas são pequenas comparadas com a carga estática, de modo que o eixo move-se em uma pequena órbita em torno da posição de equilíbrio.

As forças calculadas no sistema de coordenadas móvel são denotadas por força radial  $F_r$ , na direção da mínima espessura de filme, e força tangencial  $F_t$ , a 90° de  $F_r$ , as quais também podem ser calculadas no sistema fixo, denotadas por  $F_x$  e  $F_y$ .

As forças  $F_r$  e  $F_t$  devem ser relacionadas com as forças externas aplicadas, como peso próprio, forças devido a engrenamento, no caso de multiplicadores ou redutores de velocidade, ou empuxo radial do vapor no caso de turbinas. Contudo, nesta análise, o sistema mecânico está em equilíbrio, e considera-se a carga externa *w* aplicada na direção vertical para baixo.

Em um sistema de coordenadas x-y (sistema fixo) com origem no centro do mancal e o eixo x sendo a direção em que a carga estática está sendo aplicada (figura 3.07), as forças de reação originadas do filme de óleo lubrificante, calculadas utilizando a solução da equação de Reynolds para a distribuição de pressão, são dadas por:

$$\begin{cases} F_x \\ F_y \end{cases} = -\int_{-L/2}^{L/2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} p. \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases} R \, d\theta \, dz$$
 (3.39)

Na equação 3.39 (MACHADO e CAVALCA, 2009), p é a pressão gerada no interior do filme de óleo, R é o raio do mancal, L é o comprimento axial do mancal, z é a coordenada axial e  $\theta$  é a coordenada angular circunferencial, originada no sentido anti-horário, a partir do eixo x (de acordo com a figura 3.07). A extensão do filme de óleo vai de  $\theta_1$  até  $\theta_2$ , onde ambos os ângulos são funções de z. O referencial utilizado para obtenção das forças na equação 3.39 é apresentado na figura 3.08, juntamente com a sua malha.



Figura 3.07: Sistema de coordenadas (MACHADO e CAVALCA, 2009).



Figura 3.08: Malha do mancal radial.

O lubrificante é discretizado num modelo mola-amortecedor (figura 3.09) e caracterizado por coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento K e C, respectivamente.



Figura 3.09: Modelo para o filme de fluido nos mancais (MACHADO e CAVALCA, 2009).

Como pode ser observado, as forças de reação são funções das coordenadas x e y, e da velocidade instantânea do centro do eixo,  $\dot{x} e \dot{y}$  ("ponto" indica derivada no tempo). Uma vez que, para pequenas amplitudes de deslocamentos,  $\Delta x e \Delta y$ , medidos a partir da posição de equilíbrio estático ( $x_0 e y_0$ ), a expansão em série de Taylor até primeira ordem origina:

$$F_{x} = F_{x0} + K_{xx}\Delta x + K_{xy}\Delta y + C_{xx}\Delta \dot{x} + C_{xy}\Delta \dot{y}$$
  

$$F_{y} = F_{y0} + K_{yx}\Delta x + K_{yy}\Delta y + C_{yx}\Delta \dot{x} + C_{yy}\Delta \dot{y}$$
(3.40)

Os termos (Kxx e Kyy) e (Rxx e Ryy) são chamados coeficientes diretos de rigidez e amortecimento, e os termos (Kxy e Kyx) e (Rxy e Ryx) são chamados coeficientes acoplados ou cruzados ("cross-coupling coefficients"). Como  $(x_0 e y_0)$  é a posição de equilíbrio, então  $F_{y0} = 0$ , enquanto que  $F_{x0}$  deve igualar a carga estática W.

Os coeficientes são as derivadas parciais avaliadas na posição de equilíbrio, dadas pela equação 3.41 para  $K_{xy}$  e  $C_{xy}$ . A análise é realizada de forma análoga para os coeficientes restantes.

$$K_{xy} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0 \qquad \qquad C_{xy} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right)_0 \tag{3.41}$$

De posse de todos os coeficientes, a equação de movimento para um elemento de mancal é,

$$[C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\}$$
(3.42)

onde,

$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{VV} & k_{VW} & k_{VB} & k_{V\Gamma} \\ k_{WV} & k_{WW} & k_{WB} & k_{W\Gamma} \\ k_{BV} & k_{BW} & k_{BB} & k_{B\Gamma} \\ k_{\Gamma V} & k_{\Gamma W} & k_{\Gamma B} & k_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix}$$
(3.43a) 
$$\begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{VV} & c_{VW} & c_{VB} & c_{V\Gamma} \\ c_{WV} & c_{WW} & c_{WB} & c_{W\Gamma} \\ c_{BV} & c_{BW} & c_{BB} & c_{B\Gamma} \\ c_{\Gamma V} & c_{\Gamma W} & c_{\Gamma B} & c_{\Gamma\Gamma} \end{bmatrix}$$
(3.43b)

sendo [C] e [K] as matrizes de amortecimento e rigidez, respectivamente, do mancal, em função da velocidade de rotação do eixo,  $\{q\}$  o vetor deslocamento no sistema de referência fixo e  $\{F\}$  o vetor de forças de sustentação do mancal no mesmo sistema de coordenadas.

A modelagem matemática dos mancais aqui apresentada, e baseada no trabalho de Machado (2009), apresenta o referencial local do mancal (figura 3.06), o qual rotaciona com relação ao referencial inercial do sistema completo (figura 3.01). Desta forma, as equações 3.36 a 3.42, apresentadas nesta seção, são consideradas no referencial inercial apresentado por

Machado. Contudo, apesar desta rotação entre os sistemas de coordenadas, os coeficientes calculados têm os seus valores e sinais mantidos. Os coeficientes com índices X e Y são inseridos na matriz dos coeficientes do mancal nas posições referentes aos índices W e V, respectivamente, das equações 3.43a e 3.43b.

O comportamento dos mancais em sua grande maioria é bem representado pela equação 3.42, desde que o passo de freqüência utilizado para o cálculo dos seus coeficientes esteja de acordo com o passo de freqüência do rotor analisado, ou, alternativamente, poucos valores de coeficientes podem ser extrapolados através de funções polinomiais.

### 3.5 Excitação por Desbalanceamento de Massa

Os termos de força podem incluir massa desbalanceada, forças de conexão, e outros efeitos externos. Contudo, o desbalanceamento é conhecido como sendo uma das causas mais comuns de vibração em máquinas e está presente, em maior ou menor grau, em praticamente todas as máquinas rotativas. É considerada, ainda, a mais significativa fonte de excitação de rotores. O desbalanceamento gera uma força centrípeta, que atuará nos mancais e na estrutura de suporte da máquina. Tal força é periódica (se medida de um ponto estacionário) quando a máquina está em operação, e gira na velocidade de rotação do eixo, sendo sua freqüência de vibração, portanto, síncrona (1x a velocidade do eixo).

Existem muitas causas para a existência do desbalanceamento em um rotor. Entre estas estão: a montagem incorreta, porosidade em peças fundidas, densidade não uniforme do material, tolerâncias de fabricação, ganho ou perda de material durante a operação, ações de manutenção, troca de parafusos ou qualquer outro evento que afete a distribuição de massa (PRABHU e SEKHAR, 2008). Ou mesmo em um rotor balanceado, a condição de balanceamento se deteriora durante a operação de uma máquina devido a várias razões, como acúmulo de resíduos, corrosão, erosão e impacto de partículas.

Um dos procedimentos de balanceamento em máquinas rotativas envolve, basicamente, a identificação da magnitude e da posição do desbalanceamento e aplicação de uma massa corretiva a 180° para compensar o desbalanceamento, o que resulta na aproximação do centro de massa ao centro geométrico (linha de centro que une os mancais) e, conseqüentemente, em uma operação mais suave da máquina. Essa estratégia pode se repetir para vários planos de desbalanceamento ao longo de uma máquina rotativa.

Na figura 3.10,  $\xi$  é a excentricidade,  $\Omega$  é a velocidade de rotação própria do eixo e *F* é a força de desbalanceamento concentrada no nó, sendo suas componentes nas direções horizontal e vertical  $F_Y$  e  $F_Z$ .



Figura 3.10: Excitação por desbalanceamento de massa concentrado.

Quando o rotor gira, devido ao fato de o centro de massa não coincidir com o centro de rotação do elemento, forças radiais centrípetas são geradas no rotor. Em outras palavras, a presença do desbalanceamento da massa, como vetor girante, resulta em uma excitação harmônica. A massa residual  $\eta$  gira com velocidade  $\Omega$ , excentricidade  $\xi$  em relação ao eixo de rotação da peça;  $\phi$  é o ângulo inicial de desbalanceamento. Esta condição atuará somente na velocidade síncrona para primeira harmônica, ou seja, quando a precessão do rotor for sincronizada com a rotação própria e, portanto, se uma resposta experimental possuir vibrações

em harmônicas superiores, tal comportamento não será devido ao desbalanceamento (WOWK, 2000; RAO, 2001; XU e MARANGONI, 1994).

Segundo Lalanne e Ferraris (1998), para derivar a força de desbalanceamento, é necessário determinar a posição e velocidade da massa residual em relação ao referencial inercial. Determina-se, então, a energia cinética do ponto material e, conseqüentemente, a força de desbalanceamento:

$$\{F\} = \{F_c\} \cos \Omega t + \{F_s\} \sin \Omega t = \Omega^2 \eta \xi \begin{cases} \cos(\Omega t + \phi) \\ \sin(\Omega t + \phi) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$
(3.44)

sendo  $F_c$  a componente da força em cosseno e  $F_s$  a componente em seno.

Temos que o desbalanceamento é aplicado aos graus de liberdade de translação do nó, nas direções y e z.

# 3.6 Montagem da matriz global e Solução do sistema

Com o modelo de cada componente do sistema rotativo, é possível obter as equações globais do sistema. As matrizes de cada elemento são agrupadas em uma matriz global e suas posições nas matrizes globais estão relacionadas aos graus de liberdade. Retomando equação 3.09, que é a equação dinâmica global do sistema, apresentada novamente a seguir, considera todos os graus de liberdade do sistema rotativo com *N* nós.

$$[M]{\ddot{q}(t)} + [C]{\dot{q}(t)} + [K]{q(t)} = {F(t)}$$
(3.09)

$$\{q(t)\} = \{V_1 \ W_1 \ B_1 \ \Gamma_1 \ V_1 \ W_2 \ B_2 \ \Gamma_2 \ \dots \ V_N \ W_N \ B_N \ \Gamma_N \ \}^T$$
(3.45)

A equação 3.09 é dependente do tempo t. [M], [C], e [K] são as matrizes globais de massa, amortecimento, giroscópica e de rigidez;  $\{F(t)\}$  é o vetor de todas as forças externas atuantes no sistema. O agrupamento das matrizes elementares na matriz global é realizado através da superposição dessas matrizes. Neste agrupamento, os termos das matrizes elementares são somados aos termos do mesmo grau de liberdade de outra matriz elementar. Após realizar a sobreposição de todas as matrizes elementares, relativas aos elementos de eixo, mancais e discos, obtêm-se as matrizes globais. As forças devido às falhas atuam nos GDL correspondentes ao nó onde a força está aplicada.

O sistema é resolvido, neste caso, somente para a primeira harmônica. Considerando-se o vetor deslocamento do sistema q(t) e as forças de excitação F(t) variando de forma senoidal com o tempo, tem-se:

$$\{q(t)\} = \{q_o\} e^{j(\Omega t + \varphi)} = \{q_o\} e^{j\Omega t} e^{j\varphi}$$

$$\{F(t)\} = \{F_o\} e^{j(\Omega t + \varphi)} = \{F_o\} e^{j\Omega t} e^{j\varphi}$$

$$(3.46)$$

em que  $\{q\}$  e  $\varphi$  são as amplitudes e fases das respostas do sistema e  $\{F\}$  e  $\varphi$  são as amplitudes e fases das forças de excitação, respectivamente.

Após substituir a primeira e segunda derivadas de q(t), com relação ao tempo, na equação 3.09, obtém-se a equação de movimento no domínio da freqüência,

$$\left(-\Omega^{2}[M]+j\Omega([C]+\Omega[G])+[K])(q_{o})\right) = \{F_{o}\}$$
(3.47)

A solução do sistema de equações lineares resulta no vetor de amplitudes dos deslocamentos.

A solução das reações em cada um dos nós do rotor para a determinação dos carregamentos nos mancais, também chamada neste trabalho de Análise Estática, é realizada pela equação 3.48, a qual também é determinada pela solução do sistema de equações lineares.

$$[K]{q} = {F_{eq}}$$

$$(3.48)$$

A matriz de rigidez global [K] apresentada na equação 3.48 considera os mancais apoiados, restringindo os graus de liberdade de translação desses nós. O vetor de forças equivalentes devido às forças e momentos externos e, especialmente, ao peso próprio do rotor, para um elemento de viga, é:

$$\{F_{eq}\} = \begin{cases} 0 \\ q_o L/2 \\ -q_o L^2/12 \\ 0 \\ 0 \\ q_o L/2 \\ q_o L^2/12 \\ 0 \end{cases}$$
(3.49)

O vetor de forças equivalentes é dado para os nós *i* e *j* do elemento de viga. O carregamento linearmente distribuído no elemento de viga cilíndrico,  $q_o$ , definido em função da densidade  $\rho$ , da aceleração da gravidade *g* e dos diâmetros externo (*D*) e interno (*d*) é:

$$q_{o} = \frac{\pi \rho g}{4} \left( D^{2} - d^{2} \right)$$
(3.50)

Para um elemento de viga cônico, os diâmetros foram considerados no centro de massa do elemento, ou seja, em 3/4 do comprimento axial do elemento.

Esse mesmo vetor de forças equivalentes, para um elemento de disco rígido, em função do carregamento  $q_o$  é dado na equação 3.51, onde o carregamento  $q_o$  da expressão 3.50 é ainda multiplicado pela espessura do disco.

$$\left\{F_{eq}\right\} = \begin{cases} 0\\ q_o\\ 0\\ 0\\ 0 \end{cases}$$
(3.51)

Neste trabalho, o diagrama de Campbell é constituído de curvas que mostram como variam os autovalores do sistema em função da freqüência de rotação do rotor. Os autovalores do sistema são obtidos a partir do problema de valor próprio.

O problema de valor próprio do sistema é definido pela representação da equação de movimento do sistema rotativo na forma de espaço de estado:

$$\{\dot{q}_{ee}\} = [A_{ee}]\{q_{ee}\} + \{F_{ee}\}$$
(3.52)

Onde,

$$\begin{bmatrix} A_{ee} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

$$\{F_{ee} \} = \begin{cases} \{0\} \\ \{F\} \end{cases}$$

$$\{q_{ee} \} = \{V \ W \ B \ \Gamma \ \dot{V} \ \dot{W} \ \dot{B} \ \dot{\Gamma} \ \}^{T}$$

$$\{\dot{q}_{ee} \} = \{V \ \ddot{W} \ \ddot{B} \ \ddot{\Gamma} \ \dot{V} \ \dot{W} \ \dot{B} \ \dot{\Gamma} \ \}^{T}$$

$$(3.53)$$

[I] é a matriz identidade. Em seguida, os autovalores  $\lambda$  da matriz [ $A_{ee}$ ] são obtidos.

$$\left(\left[A_{ee}\left(\Omega\right)\right] - \left[I\right]\lambda(\Omega)\right) = \left\{0\right\}$$
(3.54)

#### 3.7 Fundação

Para completar o estudo do comportamento dinâmico das máquinas rotativas, dentro do escopo deste trabalho, é necessário determinar a interação entre todos os componentes previamente descritos. Como seu comportamento é significativamente influenciado pelo comportamento de uma fundação (ou estrutura de suporte) flexível, deve-se estudar a fundação de modo que a máquina seja projetada para um limite de vibrações aceitáveis, e ainda, a fim de reduzir a energia vibracional transmitida ao solo (MAKRIS et al., 1997).

A modelagem matemática consiste em analisar o sistema completo rotor-suportes-fundação (figura 3.11) como dois subsistemas, separadamente: rotor-suportes e fundação (WEIMING e NOVAK, 1996). Dessa forma, cada subsistema é analisado e a resposta do sistema completo é obtida unificando-se as respostas dinâmicas dos subsistemas. O método das impedâncias mecânicas da fundação e o método das coordenadas mistas serão apresentados nesta seção.



Figura 3.11: Representação de um sistema rotor-mancais-fundação (CAVALCA, 1993).

Partindo do método das impedâncias mecânicas (DIANA et al., 1982) utilizado para a simulação de sistema completo, desenvolveu-se um novo método matemático, que consiste na

modificação do primeiro método com relação a matriz das impedâncias mecânicas, evitando, deste modo, os problemas de ordem numérica quando da inversão da matriz de flexibilidade. O método das coordenadas mistas consiste em descrever o vetor dos deslocamentos dos nós de conexão da estrutura, como variáveis independentes a partir de uma aproximação modal (DIANA et al., 1988 e CAVALCA, 1993). Nessa transformação, é utilizado um vetor de coordenadas mistas, físicas para o rotor e generalizadas para a fundação, que descreve o comportamento do sistema completo. Dessa forma, somente os modos que contribuem efetivamente na resposta do sistema são considerados.

A equação do sistema rotor-mancais (CAVALCA, 1993) é montada considerando a inércia do rotor, amortecimento e rigidez do eixo, bem como os coeficientes dos mancais.

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{rr} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} R_{fr} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{cases} \left\{ \ddot{q}_{r}(t) \right\} \\ \left\{ \ddot{q}_{f}(t) \right\} \end{cases} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{rr} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{rf} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{cases} \left\{ \dot{q}_{r}(t) \right\} \\ \left\{ \dot{q}_{f}(t) \right\} \end{cases} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{rr} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{rf} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left\{ q_{r}(t) \right\} \\ \left\{ q_{f}(t) \right\} \end{bmatrix} = \begin{cases} \left\{ F_{r} \right\} \\ \left\{ 0 \right\} \end{bmatrix} + \begin{cases} \left\{ 0 \right\} \\ \left\{ F_{f} \right\} \end{cases}$$
(3.55)

Onde:

 $\ddot{q}_r, \dot{q}_r, q_r$  são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do rotor;

 $\ddot{q}_f, \dot{q}_f, q_f$  são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento dos nós de conexão entre rotor e fundação:

 $M_{rr}, C_{rr}, K_{rr}$  são as matrizes de massa, amortecimento (com matriz giroscópica) e rigidez do rotor;

 $M_{ff}, C_{ff}, K_{ff}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do filme de óleo dos mancais;

 $F_r$  é a força externa devido ao desbalanceamento do rotor;

 $F_f$  é a força transmitida da fundação ao rotor, através dos nós de conexão posicionados nos mancais;

O índice *r* corresponde ao rotor, e o índice *f* corresponde aos nós conexão do rotor com a fundação.

A equação de movimento da fundação é,

$$\left[M_{f} \| \ddot{q}_{f}(t) \} + \left[C_{f} \| \dot{q}_{f}(t) \} + \left[K_{f} \| q_{f}(t) \} = \{F_{f}(t) \}$$
(3.56)

onde,

 $M_f$ ,  $C_f$ ,  $K_f$ : matrizes de massa, amortecimento e rigidez da fundação modelada por elementos finitos;

 $q_f$ : vetor dos deslocamentos dos nós da fundação em coordenadas físicas;

Para a resolução da equação acima no domínio da freqüência, assume-se uma força de excitação harmônica:

$$\left\{F_{f}\right\} = \left\{F_{fo}\right\} e^{j\Omega t}$$
(3.57)

Sendo a resposta da estrutura proporcional à excitação, os deslocamentos dos nós de conexão da fundação podem ser descritos como:

$$\left\{q_{f}\right\} = \left\{q_{fo}\right\} e^{j\Omega t}$$
(3.58)

A resposta dinâmica da fundação, no domínio da freqüência é, portanto,

$$\left(-\Omega^{2}\left[M_{f}\right]+j\Omega\left[C_{f}\right]+\left[K_{f}\right]\right)\left(q_{fo}\right)=\left\{F_{fo}\right\}$$
(3.59)

Segundo Cavalca (1993), para resolver a equação de movimento do sistema completo, é definido um vetor de coordenadas generalizadas para a fundação, utilizando a aproximação modal definida pela seguinte equação:

$$\{q_f\} = [\Phi]\{p\}$$

$$(3.60)$$

p é o vetor de coordenadas generalizadas e  $[\Phi]$  é a matriz modal (ou matriz dos modos próprios da fundação).

A aproximação modal permite a diagonalização das matrizes de massa e rigidez da fundação, através da matriz modal, devido à ortogonalidade dos modos próprios de vibrar. A utilização das coordenadas modais tem a vantagem de dispensar a inversão da matriz de flexibilidade para se obter a matriz de impedância mecânica da fundação. Vale destacar que a matriz de amortecimento estrutural da fundação será diagonalizada pela matriz modal somente se o amortecimento estrutural for do tipo proporcional às matrizes de massa e rigidez da fundação (equação 3.28).

Os parâmetros modais da fundação podem ser obtidos experimentalmente, através de técnicas clássicas de análise modal. A equação de movimento para a fundação, em coordenadas principais, é:

$$[m_{f}]\{\ddot{p}(t)\} + [c_{f}]\{\dot{p}(t)\} + [k_{f}]\{p(t)\} = -[\Phi]^{T}\{F_{f}\}$$
(3.61)

onde,  $[m_f]$ ,  $[r_f]$  e  $[k_f]$  são as matrizes diagonais de massa, amortecimento e rigidez em coordenadas principais e p é o vetor de coordenadas principais associadas aos modos da fundação.

Substituindo  $F_f$  na equação 3.57, e desprezando a inércia do filme de óleo ( $[M_{ff}] = [0]$ ), obtém-se a equação de movimento para o sistema completo, em coordenadas mistas (CAVALCA, 1993):

$$\begin{bmatrix} [M_{rr}] & [0] \\ [0] & [m_{f}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{rr}] & [C_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rf}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\Phi]^{T} [C_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\Phi]^{T} [C_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\Phi]^{T} [K_{fr}] & [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{r}(t) \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{ff}] \Phi \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi]^{T} [K_{$$

Considerando uma força de excitação harmônica  $\{F_r\} = F_{ro}e^{j\Omega t}$  e a resposta da estrutura proporcional à excitação  $\begin{cases} \{q_r\} \\ \{p\} \end{cases} = \begin{cases} \{q_{ro}\} \\ \{p_o\} \end{cases} e^{j\Omega t}$ , a representação da equação 3.62 no domínio da freqüência torna-se:

$$\left(-\Omega^{2}[M]+j\Omega[C]+[K]\right)\left\{\begin{array}{l} \left\{q_{ro}\right\}\right\}\\ \left\{p_{o}\right\}\right\}=\left\{F_{ro}\right\}$$
(3.63)

A equação acima pode ser escrita como:

$$\left[\overline{E}(\Omega, p)\right]\left\{\overline{Z}_{o}\right\} = \left\{F_{ro}\right\}$$
(3.64)

 $\begin{bmatrix} \overline{E}(\Omega, p) \end{bmatrix} \text{ é a matriz elastodinâmica modificada do sistema completo rotor-suportes-fundação;} \\ \{ \overline{Z}_o \} = \begin{cases} \{q_{ro}\} \\ \{p_o\} \end{cases} \text{ é o vetor das coordenadas mistas;} \end{cases}$ 

 $\{q_{ro}\}$  é a amplitude da resposta em freqüência das coordenadas físicas do rotor;  $\{p_o\}$  é a amplitude da resposta em freqüência das coordenadas principais da fundação.

A equação 3.64 escrita na forma matricial é:



onde:

$$\begin{split} \begin{bmatrix} E \end{bmatrix} &= -\Omega^{2} \begin{bmatrix} M_{rr} \end{bmatrix} + j\Omega \begin{bmatrix} C_{rr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rr} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} j\Omega \begin{bmatrix} C_{rf} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{rf} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}^{T} \begin{pmatrix} j\Omega \begin{bmatrix} C_{fr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{fr} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}^{T} \begin{pmatrix} j\Omega \begin{bmatrix} C_{ff} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ff} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \\ \end{split}$$
(3.65)

Sendo  $[\bar{I}(\Omega, p)]$  a matriz de impedâncias em coordenadas generalizadas:

$$\left[\bar{I}(\Omega, p)\right] = -\Omega^2 \left[m_f\right] + j\Omega \left[c_f\right] + \left[k_f\right]$$
(3.66)

Uma vez obtidos os parâmetros modais da fundação, esta poderá ser representada apenas pelos modos mais significativos, presentes na faixa de freqüências analisada, independentemente do número de graus de liberdade associados aos pontos de conexão (mancais).

O método das coordenadas mistas foi desenvolvido a partir do método das impedâncias mecânicas da fundação, o qual considera apenas as coordenadas físicas, tanto do rotor quanto da fundação. Neste caso, a equação de movimento do sistema completo, no domínio da freqüência, é dada por:

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 \begin{bmatrix} [M_{rr}] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} + j\Omega \begin{bmatrix} [C_{rr}] & [C_{rf}] \\ [C_{fr}] & [C_{ff}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rf}] \\ [K_{fr}] & [K_{ff}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [I(\Omega, p)] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_{ro} \\ q_{fo} \end{pmatrix} = \begin{cases} \{F_{ro}\} \\ \{0\} \end{cases}$$
(3.67)

A matriz das impedâncias mecânicas  $[I(\Omega, p)]$  é dada em função das matrizes de massa, amortecimento e rigidez da fundação no sistema de coordenadas físicas,

$$[I(\Omega, p)] = -\Omega^2 [M_f] + j\Omega [C_f] + [K_f]$$
(3.68)

Também neste caso, a matriz das impedâncias mecânicas pode ser obtida experimentalmente, ou ainda, a partir de um modelo por elementos finitos da fundação, seguido pela análise de modos próprios de vibrar, pois os deslocamentos nos pontos de conexão da fundação com o rotor devem ser representados pela aproximação da equação 3.60.

# **4 MODELAGEM COMPUTACIONAL**

O pacote computacional Rotortest, como já dito anteriormente, tem como objetivo a análise dinâmica de sistemas rotativos, modelando, para tanto, seus componentes e suas interações. A logística das informações é, portanto, complexa, uma vez que diferentes componentes e modelos podem ser utilizados. Este pacote computacional foi inicialmente desenvolvido por pesquisadores na Itália, no Politécnico de Milão, e trazido ao Brasil pela pesquisadora Kátia Lucchesi Cavalca, que então acabara de concluir seu doutorado no Departamento de Mecânica do citado Instituto, gerando rotinas e novas abordagens em diversas etapas da modelagem do sistema completo. Contudo, após consecutivas migrações de sistemas operacionais e plataformas computacionais, decidiu-se por reestruturar completamente o programa, baseando-se na configuração com a qual o software era organizado. Os modelos de viga de Bernoulli foram substituídos por modelos de viga de Timoshenko que levam em consideração o efeito de cisalhamento transversal, além do efeito do movimento giroscópico. As rotinas de cálculo e análise dos mancais hidrodinâmicos também foram inteiramente desenvolvidas, utilizando ferramentas mais atuais e robustas. O principal objetivo desta primeira versão é construir uma base a partir da qual outros componentes mecânicos, outros modelos de falha etc, possam ser implementados e integrados ao software de modo organizado e padronizado. Portanto, neste trabalho, desenvolveu-se a configuração do pacote computacional, a padronização da entrada e saída dos arguivos, a implementação dos elementos de viga e de disco rígido, a excitação por desbalanceamento de massa concentrada, a análise estática e dinâmica do sistema, inclusive a consideração da estrutura de suporte na matriz global do sistema.

Buscando-se robustez, flexibilidade para incorporar novos modelos, confiabilidade nos resultados, além de usabilidade e interface amigável, optou-se por estruturar o pacote em dois blocos distintos:

- Interface: no pré-processamento, compreende a definição do problema e discretização do sistema e, no pós-processamento, a visualização dos resultados.
- Análises: compreende o processamento dos dados e determinação dos resultados.

A interface foi programada em Microsoft Visual Studio 2008, enquanto as rotinas de análise estão na linguagem Intel Fortran 11.0. O fluxograma do programa *Rotortest* é apresentado de forma reduzida na figura 4.01. O pacote computacional tem configuração de módulos, distintos, mas dependentes entre si. Esta estrutura é ilustrada pelo seguinte exemplo: para definir um eixo de um rotor, é necessário escolher o material, a fim de representar suas propriedades mecânicas nos equacionamentos das matrizes do elemento; este material, contudo, deve ser previamente definido no respectivo módulo de Materiais.



Figura 4.01: Fluxograma do pacote computacional Rotortest.

Ainda de acordo com a figura 4.01, nota-se que a fase de processamento, é subdividida em quatro etapas. A primeira é a determinação do carregamento estático nos mancais, carregamentos estes que são de fundamental importância na fase seguinte, de determinação dos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento dos suportes. A terceira fase trata da interpolação dos

coeficientes dos suportes para a faixa de freqüência de análise do rotor, ao passo que a quarta e última fase, é a determinação do comportamento dinâmico do sistema considerado. A seqüência seguida para os processamentos, seqüência esta crescente, está demonstrada no fluxograma do programa pelas marcações coloridas. Estas fases do processamento são detalhadas em fluxogramas no decorrer deste capítulo.

A dependência dos módulos entre si é patente nas figuras que mostram a interface, uma vez que, para possibilitar a montagem do sistema, deve-se previamente criar pelo menos um eixo e um mancal. A montagem do sistema trata, portanto, dos dados construtivos ou físicos de eixos e suportes, além da consideração de excitações agindo neste sistema. Posteriormente, os dados de freqüência de análise, de condições de operação e de processamento são requisitados ao usuário, de acordo com a figura 4.01.

As interfaces contendo os módulos dos Materiais, Suportes, Eixos, montagem do Sistema e das Condições de Processamento do suporte são mostradas nas figuras 4.02a a 4.02e.

| cibir     | Ferramentas | Propriedades                              | Aco          |          |
|-----------|-------------|---|--------------|----------|
| Primeiro  | Inserir     | Módulo de Elasticidade (E)                | 210          | [GPa]    |
| Anterior  |             | Módulo de Elasticidade<br>Transversal (G) | 75.8         | [GPa]    |
|           | Editar      | Densidade                                 | 7860         | [kg/m^3] |
| Posterior |             | Coeficiente de Poisson                    | 0.28         |          |
| L'Iltimo  | Excluir     | Coeficiente de Poisson                    | 0.28<br>Cano | elar     |

Figura 4.02a: Interface – módulo de Materiais.

|                          | Geometria         | r      |           |
|--------------------------|-------------------|--------|-----------|
|                          | Lóbulos           | 2      |           |
| Esquematização do Mancal | Diâmetro do Eixo  | 30     | [mm]      |
| L1<br>90                 | Folga Radial      | 90     | [microns] |
|                          | Largura do Mancal | 20     | [mm]      |
|                          | Rasgo Axial       | 25     | [°]       |
| 270                      | Pré-carga         | 0.45   |           |
|                          | Confirmer         | Cancel |           |

Figura 4.02b: Interface – módulo de Suportes, mancal multi-lobular.

| Arquivo Visualização Ajuda   |  |
|--|--|
|  |  |
| Eixo   |  |
| Arquivo Exibir Ferramentas Ajuda   |  |
| □ Ferramentas □ □ Propriedades □   |  |
| flag Elemento Disco Rígido   |  |
| Inserir Inde Lone toget  |  |
| Dia. Externo nó i 90 [mm] Dia. Interno nó i 0 [mm]   |  |
| Editor Dia. Externo nó j 0 [mm] Dia. Interno nó j 0 [mm]   |  |
| Editar Massa Jones III   |  |
| Comprimento j47 [mm] Concentrada [2.3 [Kg]   |  |
| Excluir Confirmar Cancelar   |  |
|  |  |
| -Visualização  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| Programa Rotortest, versão 1.0 beta. Inicializando<br>Carregando Materiais<br>Carregando Lubrificantes<br>Materiais<br>Escorando Materiais |  |

Figura 4.02c: Interface – módulo de Eixos.

| Acoplam     | Eixo    | Mancal<br>Inserir | Selo de fluxo | Excitação<br>Inserir |
|-------------|---------|-------------------|---------------|----------------------|
| undação     | Excluir | Excluir           | Excluir       | Excluir              |
|             |         | Coef. Manual      |               |                      |
| aunzayau    |         |                   |               |                      |
| Z<br>→<br>X |         |                   |               |                      |
|             | ,<br>   |                   |               |                      |

Figura 4.02d: Interface – módulo de montagem do Sistema.

| 🖩 frmAnalSuporte_MancAX  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| Cond. Operacao Propr. Processamento  |  |  |  |
| Metodo Numerico Diferencas Finitas 💽<br>Temperatura Uniforme 💽                   |  |  |  |
| Valor Inicial [10 [microns]  |  |  |  |
| Valor Inicial 20 [microns]   |  |  |  |
| Distância entre<br>pontos em -r- 0.009 erro velocidade (1E-06<br>(para ∨F) 1E-06 |  |  |  |
| Distância entre 0.009 erro pressão 1E-11   |  |  |  |
| Velocidade a [rad/s]   |  |  |  |
| I✓ Calcular  |  |  |  |
| Confirmar Cancelar   |  |  |  |

Figura 4.02e: Interface – módulo das Condições de Processamento, mancal multi-lobular.

Os fluxogramas para cada um dos processamentos são apresentados a seguir:



Figura 4.03: Fluxograma do algoritmo de Processamento 1 – Análise Estática.

Para a Análise Estática do rotor é necessário a montagem da matriz de rigidez, do vetor de forças devido ao peso estático, entre outros passos (figura 4.03), para que os carregamentos nos mancais possam ser determinados. Para resolver os sistemas lineares das equações 3.48, utilizouse a função LIN\_SOL\_GEN\_INT da biblioteca IMSL do FORTRAN e, para a multiplicação de matrizes, foi escolhida a função MRRRR\_INT da referida biblioteca.

A figura 4.04a mostra a lógica utilizada no cálculo dos coeficientes equivalentes dos mancais, onde há possibilidade do usuário calcular os coeficientes referentes a somente um mancal, sendo esta avaliação de grande valia, caso seja necessário mudar as condições de operação e de processamento deste mancal, economizando tempo computacional, que seria desperdiçado no cálculo de coeficientes que não são necessários calcular. As subrotinas de cálculo dos coeficientes dos mancais estão sendo desenvolvidas, com exceção da subrotina referente ao mancal multi-lobular (MACHADO, 2009) que está operacional (figura 4.04b).



Figura 4.04a: Fluxograma do algoritmo de Processamento 2 - Coeficientes dos Suportes.



Figura 4.04b: Fluxograma do algoritmo de Processamento 2 – Coeficientes dos Suportes -, mancais multilobulares.
Para a modelagem dos lubrificantes e inclusão de seus efeitos na dinâmica do rotor, adotase procedimento semelhante ao utilizado para a caracterização das propriedades mecânicas dos materiais, onde o usuário dispõe de algumas possibilidades de modelagem da viscosidade do fluido.

A terceira etapa de processamento trata da interpolação dos coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento dos suportes, pois por questões de custo computacional, os mancais são avaliados em menor número de freqüências que o sistema, a intervalos maiores entre as mesmas. Para a interpolação, utilizou-se da função CSIEZ\_INT da biblioteca Intel IMSL.



Figura 4.05: Fluxograma do algoritmo de Processamento 3 - Interpolação dos Coeficientes dos Suportes.

A análise dinâmica do sistema (Processamento 4) permite ao usuário que condições de contorno sejam impostas aos nós de suporte (mancais e selos de fluxo), sem a necessidade de que os dados dos mancais e da fundação sejam conhecidos. Esta primeira aproximação do problema possibilita que análises qualitativas sejam realizadas.

Numa análise mais completa, tanto os suportes quanto a estrutura de suporte podem ter sua influência considerada na dinâmica do sistema, conforme mostra o fluxograma da figura 4.06. É interessante notar que a fundação experimental pode ser incluída na resposta dinâmica do sistema rotativo através ou do método das Coordenadas Mistas ou da Impedância Mecânica. Com os resultados obtidos, é possível construir os gráficos de amplitude e fase em função da freqüência para os graus de liberdade considerados, assim como a deformação operacional do rotor e o diagrama de Campbell. As funções utilizadas da biblioteca IMSL do Fortran são: LIN\_SOL\_GEN para a resolução do sistema de equações lineares, LINRG\_INT para inversão de matrizes, MRRRR\_INT e MCRCR\_INT para multiplicação de matrizes, EVCRG\_INT e EVCCG\_INT para a determinação dos auto-valores e auto-vetores do sistema. Convém destacar que os auto-valores e auto-vetores, na presente versão do software, não são obtidos para os sistemas com fundação pelos métodos das coordenadas mistas e das impedâncias mecânicas.



Figura 4.06: Fluxograma do algoritmo de Processamento 4 - Análise Dinâmica.

Finalmente, é importante aqui apresentar algumas razões fundamentais que estimularam o desenvolvimento e aprimoramento desta versão do pacote computacional no grupo de pesquisa do laboratório de máquinas rotativas.

Existe hoje uma retomada, crescente e promissora, em temas associados a problemas presentes em máquinas rotativas de pequeno, médio e grande porte, envolvendo setores industriais que vão desde empresas voltadas a produção de componentes automobilísticos, até as conhecidas plantas de geração de energia, de diversos tipos, a saber, hidrelétricas, termoelétricas e eólicas.

Estas máquinas, e seus componentes, possuem características peculiares em seu funcionamento, as quais se refletem em seu comportamento dinâmico e, conseqüentemente, nos problemas mecânicos a estes associados. Técnicas analíticas e experimentais estão cada vez mais próximas e elaboradas do ponto de vista técnico, o que exige uma forte e consolidada formação de base para abordagens mais desafiadoras e aprofundadas dos problemas associados a estas máquinas.

Assim sendo, considerou-se interessante a estruturação do pacote computacional envolvendo praticamente todos os pesquisadores do laboratório, em contribuições distintas, porém voltadas ao mesmo objetivo comum, através deste trabalho de integração de sistemas do tipo rotor-mancais-fundação. Desta forma, atingiu-se a difusão uniforme do conhecimento de base em modelagem de máquinas rotativas, que agora poderá ser transmitido às gerações futuras que utilizarão esta ferramenta, uma vez que o conteúdo envolvido é de comum domínio do grupo de pesquisa. O pacote é estruturado de forma a receber novas contribuições e agregar novos componentes ao sistema completo.

# **5 VALIDAÇÃO TEÓRICA E EXPERIMENTAL**

A validação dos sistemas integrados na representação de grupos rotativos completos iniciase do ponto de vista da teoria básica envolvida nos modelos por elementos finitos aqui utilizados na modelagem do eixo e dos rotores. Desta forma, partiu-se de uma fase preliminar de validação onde, após a implementação computacional de cada modelo numérico, fez-se a verificação teórica com elementos simples de viga, passíveis de solução direta através da teoria de resistência dos materiais. Assim sendo, os modelos foram sistematicamente certificados em níveis de dificuldade crescente, buscando a robustez da abordagem computacional. Desta forma, foram realizados testes com condições de contorno padrão em resistência dos materiais, como viga engastada, bi-engastada, bi-apoiada, assim como viga em balanço e hiperestática. Todos os casos foram avaliados pelo algoritmo computacional e pelos modelos analíticos da resistência dos materiais. Posteriormente, a resposta dinâmica do rotor Laval também foi obtida por simulação numérica, analisando-se a influência do momento giroscópico na vibração de um rotor com disco descentralizado e de um rotor com dois discos. Finalmente, para o mesmo rotor Laval, a fundação, aqui modelada por um sistema massa-amortecedor-mola, pelo método das Impedâncias Mecânicas e pelo método das Coordenadas Mistas, foi introduzida no sistema e a concordância dos resultados foi analisada.

#### 5.1 Análise Estática

Após a construção das matrizes de massa, rigidez, amortecimento e efeito giroscópico de eixos e rotores por elementos finitos, é necessário avaliar as reações nos apoios, associadas às diferentes condições de contorno, onde o sistema girante é suportado por mancais. Estas reações são fundamentais para integrar o algoritmo de cálculo para inserção dos mancais no sistema completo.

Portanto, com o intuito de verificar o algoritmo de resolução das reações nos apoios do eixo, ou ainda, dos carregamentos nos mancais do rotor, aqui denominada análise estática, simulações foram realizadas, cujos resultados são comparados aos obtidos analiticamente pela Resistência dos Materiais. Para esta comparação, utilizou-se somente a rigidez à flexão do elemento de viga.

Conseqüentemente, foram consideradas as matrizes de rigidez dos elementos de viga e de disco rígido, e a superposição das matrizes dos elementos para formar a matriz global.

Os sistemas de referência utilizados são:



Figura 5.01: Convenção adotada em Resistência dos Materiais.



Figura 5.02: Convenção adotada em Estática.

Nos cálculos analíticos, realizados através da Resistência dos Materiais foi considerada a teoria técnica de vigas que relaciona o deslocamento da viga com as propriedades geométricas do elemento e mecânicas do material, através das seguintes equações:

$$EI_{zz} \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x)$$
(5.01)

$$EI_{zz} \frac{d^3 v(x)}{dx^3} = V_y(x) = \int q(x) + c_1$$
(5.02)

$$EI_{zz} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = M_z(x) = \int \int q(x) + c_1 x + c_2$$
(5.03)

$$EI_{zz} \frac{dv(x)}{dx} = EI_{zz} \theta_z(x) = \iiint q(x) + \frac{1}{2}c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$
(5.04)

$$EI_{zz}v(x) = \iiint q(x) + \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{2}c_2x^2 + c_3x + c_4$$
(5.05)

q(x),  $V_y(x)$ ,  $M_z(x)$ ,  $\theta_z(x)$  e v(x) são, respectivamente, o carregamento, o esforço cortante, o momento fletor, o deslocamento angular e o deslocamento translacional da viga em função da posição axial. Já as propriedades geométricas da viga são contempladas pelo momento de inércia de área I<sub>zz</sub>, enquanto o material é representado pelo módulo de elasticidade E.

São considerados seis modelos para os testes, que utilizam como material o aço (E = 210GPa e  $\rho = 7860 kg/m^3$ ):

- Modelo 1: viga engastada na extremidade esquerda e com força P e momento M na extremidade direita;
- Modelo 2: viga bi-apoiada em ambas extremidades e carregamento em posição intermediária;
- Modelo 3: viga bi-engastada nas extremidades e carregamento em posição axial intermediária;

- Modelo 4: viga bi-apoiada em ambas extremidades, considerando o peso próprio do eixo;
- Modelo 5: viga em balanço, apoiada em dois mancais, considerando o peso próprio do eixo e carregamento na extremidade sem apoio;
- Modelo 6: viga hiperestática, apoiada em três pontos.

O peso do eixo nos modelos 4 e 5 é considerado nos cálculos de Resistência dos Materiais através da massa do disco rígido e desprezando a massa dos demais elementos. Portanto, os valores obtidos podem ser ligeiramente diferentes aos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, uma vez que o último considera, além da massa do disco, também a massa dos demais elementos de viga. O modelo 6 concentra a força peso de todo o eixo no nó do disco tanto nos modelos por elementos finitos, quanto no modelo analítico.

Para cada um dos modelos descritos acima são apresentadas as condições de carregamento, as condições de contorno, assim como as equações de restrição, quando necessárias. As equações do deslocamento angular, da flecha, do esforço cortante e do momento fletor, em função da posição axial no eixo, são dadas para os modelos 1 a 4. Ao passo que um sistema matricial que relaciona as constantes de integração e outras incógnitas contidas na equação de carregamento, no caso as forças de reação nos mancais, são obtidas para os modelos 5 e 6.

Finalmente, os dados geométricos e de carregamento são apresentados em tabelas, assim como os resultados para o modelo analítico por Resistência dos Materiais, e para o modelo pelo Método dos Elementos Finitos através das formulações de viga de Nelson (viga de Timoshenko) e de Genta e Gugliotta (elemento cônico). Os resultados são apresentados nos apoios e/ou engastes, exceção feita no primeiro modelo, onde também são apresentados na extremidade sujeita ao carregamento. Pelo fato de os modelos 5 e 6 estarem no formato de sistema de equações, por simplicidade, somente as forças de reação nos apoios foram comparadas.

## 5.1.1 Modelo 1: Viga engastada

Representação física:



Figura 5.03: Viga engastada.

Carregamento:

$$q(x) = 0 \tag{5.06}$$

Condições de contorno:

$$\theta(x = 0) = \theta_1 = 0$$
  

$$v(x = 0) = v_1 = 0$$
  

$$V(x = L) = V_2 = P$$
  

$$M(x = L) = M_2 = M$$
  
(5.07)

Equações analíticas:

$$V(x) = P$$
  

$$M(x) = M - P(L - x)$$
  

$$\theta(x) = \left(Mx + Px\left(\frac{1}{2}x - L\right)\right) / EI$$
  

$$v(x) = \left(\frac{1}{2}Mx^{2} + \frac{1}{2}Px^{2}\left(\frac{1}{3}x - L\right)\right) / EI$$
  
(5.08)

Os dados geométricos e de excitação utilizados são:

| Tabela 5.01: Dados modelo 1. |      |       |       |  |  |  |  |  |
|------------------------------|------|-------|-------|--|--|--|--|--|
| D [m]                        | L[m] | P [N] | M[Nm] |  |  |  |  |  |
| 0,01                         | 0,25 | 10    | -10   |  |  |  |  |  |

Resultados:

|                                  | Tabela 5.02: Resultados filodelo 1. |       |         |       |         |             |         |  |  |  |  |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------|---------|-------|---------|-------------|---------|--|--|--|--|
|                                  |                                     |       |         | Me    | odelo   |             |         |  |  |  |  |
| Analítico Viga Nelson Viga Genta |                                     |       |         |       |         | e Guggliota |         |  |  |  |  |
| GDL                              | Nó                                  | 1     | 2       | 1     | 2       | 1           | 2       |  |  |  |  |
| v                                |                                     | 0     | -0,0035 | 0     | -0,0035 | 0           | -0,0035 |  |  |  |  |
| θ                                |                                     | 0     | 0,0273  | 0     | 0,0273  | 0           | 0,273   |  |  |  |  |
| V                                |                                     | 10    | -10     | 10    | -10     | 10          | -10     |  |  |  |  |
| М                                |                                     | -12,5 | 10      | -12,5 | 10      | -12,5       | 10      |  |  |  |  |

#### Tabela 5.02: Resultados modelo 1

## 5.1.2 Modelo 2: Viga bi-apoiada

Representação física:



Figura 5.04: Viga bi-apoiada.

Carregamento:

$$q(x) = P\langle x - a \rangle^{-1} + M \langle x - a \rangle^{-2}$$
(5.09)

Condições de contorno:

$$M(x = 0) = M_{1} = 0$$
  

$$v(x = 0) = v_{1} = 0$$
  

$$M(x = L) = M_{3} = 0$$
  

$$v(x = L) = v_{3} = 0$$
  
(5.10)

Equações analíticas:

$$V(x) = P\langle x-a \rangle^{0} + M \langle x-a \rangle^{-1} - \frac{P}{L}(L-a) - \frac{M}{L}$$

$$M(x) = P\langle x-a \rangle^{1} + M \langle x-a \rangle^{0} - \frac{P}{L}(L-a)x - \frac{M}{L}x$$

$$\theta(x) = \left(\frac{1}{2}P\langle x-a \rangle^{2} + M\langle x-a \rangle^{1} - \frac{1}{2}\frac{P}{L}(L-a)x^{2} - \frac{1}{2}\frac{M}{L}x^{2} - \frac{1}{6}\frac{P}{L}(L-a)^{3} - \frac{1}{2}\frac{M}{L}(L-a)^{2} + \frac{1}{6}PI(L-a) + \frac{1}{6}ML\right) / EI$$

$$v(x) = \left(\frac{1}{6}P\langle x-a \rangle^{3} + \frac{1}{2}M\langle x-a \rangle^{2} - \frac{1}{6}\frac{P}{L}(L-a)x^{3} - \frac{1}{6}\frac{M}{L}x^{3} - \frac{1}{6}\frac{P}{L}(L-a)^{3}x - \frac{1}{2}\frac{M}{L}(L-a)^{2}x + \frac{1}{6}PI(L-a)x + \frac{1}{6}MLx\right) / EI$$
(5.11)

Dados geométricos e de excitação são:

| Tabela 5.03: Dados modelo 2. |      |       |       |       |       |  |  |  |  |
|------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|--|--|--|--|
| D [m]                        | L[m] | a [m] | b [m] | P [N] | M[Nm] |  |  |  |  |
| 0,01                         | 0,5  | 0,2   | 0,3   | -10   | 0     |  |  |  |  |

Resultados:

|                                      | 1abela 5.04: Kesultados modelo 2. |        |        |                |         |                |         |  |  |  |  |  |
|--------------------------------------|-----------------------------------|--------|--------|----------------|---------|----------------|---------|--|--|--|--|--|
|                                      |                                   |        | Modelo |                |         |                |         |  |  |  |  |  |
| Analítico Viga Nelson Viga Genta e G |                                   |        |        |                |         |                |         |  |  |  |  |  |
| GDL                                  | Nó                                | 1      | 3      | 1              | 3       | 1              | 3       |  |  |  |  |  |
| v                                    |                                   | 0      | 0      | 0              | 0       | 0              | 0       |  |  |  |  |  |
| θ                                    |                                   | 0,0016 | 0,0014 | 0,00155        | 0,00136 | 0,00155        | 0,00135 |  |  |  |  |  |
| V                                    |                                   | 6      | 4      | 6              | 4       | 6              | 4       |  |  |  |  |  |
| М                                    |                                   | 0      | 0      | $1,7x10^{-16}$ | 0       | $1,1x10^{-16}$ | 0       |  |  |  |  |  |

#### Tabala 5 04: Posultados modelo 2

## 5.1.3 Modelo 3: Viga bi-engastada

Representação física:



Figura 5.05: Viga bi-engastada.

Carregamento:

$$q(x) = P\langle x - a \rangle^{-1}$$
(5.12)

Condições de contorno:

$$\theta(x = 0) = \theta_1 = 0$$
  

$$v(x = 0) = v_1 = 0$$
  

$$\theta(x = 0) = \theta_3 = 0$$
  

$$v(x = L) = v_3 = 0$$
  
(5.13)

Analítico:

$$V(x) = P\langle x - a \rangle^{0} - \frac{P}{L^{2}} (L - a)^{2} \left( 1 + \frac{2a}{L} \right)$$
  

$$M(x) = P\langle x - a \rangle^{1} - \frac{P}{L^{2}} (L - a)^{2} \left( 1 + \frac{2a}{L} \right) x + \frac{Pa}{L^{2}} (L - a)^{2}$$
  

$$\theta(x) = \left( \frac{1}{2} P\langle x - a \rangle^{2} - \frac{1}{2} \frac{P}{L^{2}} (L - a)^{2} \left( 1 + \frac{2a}{L} \right) x^{2} + \frac{Pa}{L^{2}} (L - a)^{2} x \right) / EI$$
(5.14)

$$v(x) = \left(\frac{1}{6}P\langle x-a \rangle^{3} - \frac{1}{6}\frac{P}{L^{2}}(L-a)^{2}\left(1+\frac{2a}{L}\right)x^{3} + \frac{1}{2}\frac{Pa}{L^{2}}(L-a)^{2}x^{2}\right) / EI$$

Dados geométricos e de excitação:

| Tabela 5.05: Dados modelo 3. |      |       |       |       |  |  |  |  |  |
|------------------------------|------|-------|-------|-------|--|--|--|--|--|
| D [m]                        | L[m] | a [m] | b [m] | P [N] |  |  |  |  |  |
| 0,01                         | 0,5  | 0,25  | 0,25  | -10   |  |  |  |  |  |

Resultados:

|   | Tabela 5.06: Resultados modelo 3. |        |       |        |       |        |       |  |  |  |  |  |
|---|-----------------------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--|--|--|--|--|
|   |                                   | Modelo |       |        |       |        |       |  |  |  |  |  |
| Analítico Viga Nelson Viga Genta e Guggli |                                   |        |       |        |       |        |       |  |  |  |  |  |
| GDL                                       | Nó                                | 1      | 3     | 1      | 3     | 1      | 3     |  |  |  |  |  |
| V   |                                   | 0      | 0     | 0      | 0     | 0      | 0     |  |  |  |  |  |
| $\theta$                                  |                                   | 0      | 0     | 0      | 0     | 0      | 0     |  |  |  |  |  |
| V   |                                   | 5      | 5     | 5      | 5     | 5      | 5     |  |  |  |  |  |
| М   |                                   | -0,625 | 0,625 | -0,625 | 0,625 | -0,625 | 0,625 |  |  |  |  |  |

## 5.1.4 Modelo 4: Viga bi-apoiada com peso próprio

Representação física:



Figura 5.06: Viga bi-apoiada com peso próprio.

Carregamento:

$$q(x) = P\langle x - a \rangle^{-1} + M \langle x - a \rangle^{-2}$$
(5.15)

Condições de contorno:

$$M(x = 0) = M_{1} = 0$$
  

$$v(x = 0) = v_{1} = 0$$
  

$$M(x = L) = M_{3} = 0$$
  

$$v(x = L) = v_{3} = 0$$
  
(5.16)

Equações analíticas:

$$V(x) = P\langle x-a \rangle^{0} + M \langle x-a \rangle^{-1} - \frac{P}{L}(L-a) - \frac{M}{L}$$

$$M(x) = P\langle x-a \rangle^{1} + M \langle x-a \rangle^{0} - \frac{P}{L}(L-a)x - \frac{M}{L}x$$

$$\theta(x) = \left(\frac{1}{2}P\langle x-a \rangle^{2} + M\langle x-a \rangle^{1} - \frac{1}{2}\frac{P}{L}(L-a)x^{2} - \frac{1}{2}\frac{M}{L}x^{2} - \frac{1}{6}\frac{P}{L}(L-a)^{3} - \frac{1}{2}\frac{M}{L}(L-a)^{2} + \frac{1}{6}PI(L-a) + \frac{1}{6}ML\right) / EI$$

$$v(x) = \left(\frac{1}{6}P\langle x-a \rangle^{3} + \frac{1}{2}M\langle x-a \rangle^{2} - \frac{1}{6}\frac{P}{L}(L-a)x^{3} - \frac{1}{6}\frac{M}{L}x^{3} - \frac{1}{6}\frac{P}{L}(L-a)^{3}x - \frac{1}{2}\frac{M}{L}(L-a)^{2}x + \frac{1}{6}PI(L-a)x + \frac{1}{6}ML\right) / EI$$
(5.17)

Dados geométricos e de excitação:

Tabela 5.07: Dados modelo 4.

| D [m] | L[m]  | a [m] | b [m] | $D_{disco} [m]$ | $L_{disco} [m]$ | P [N] | M[Nm] |
|-------|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|-------|-------|
| 0,01  | 0,375 | 0,125 | 0,25  | 0,05            | 0,1             | -10   | 10    |

### Resultados:

|     | Tabela 5.08: Resultados modelo 4. |         |          |                        |                         |                        |                        |  |  |  |  |  |
|-----|-----------------------------------|---------|----------|------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|--|--|--|--|--|
|     |                                   |         |          | Mod                    | lelo                    |                        |                        |  |  |  |  |  |
|     |                                   | Ar      | nalítico | Viga N                 | elson                   | Viga Genta             | Viga Genta e Guggliota |  |  |  |  |  |
| GDL | Nó                                | 1       | 3        | 1                      | 3                       | 1                      | 3                      |  |  |  |  |  |
| v   |                                   | 0       | 0        | 0                      | 0                       | 0                      | 0                      |  |  |  |  |  |
| θ   |                                   | 0,0041  | -0,0057  | 0,00043                | -0,0059                 | 0,0043                 | -0,0059                |  |  |  |  |  |
| V   |                                   | -9,7068 | 34,6466  | -9,1195                | 35,4554                 | -9,1195                | 35,4554                |  |  |  |  |  |
| М   |                                   | 0       | 0        | $7,825 \times 10^{-3}$ | $-3,149 \times 10^{-2}$ | $7,835 \times 10^{-3}$ | $-3,14910^{-2}$        |  |  |  |  |  |

## 5.1.5 Modelo 5: Viga em balanço com peso próprio

Representação física:



Figura 5.07: Viga em balanço com peso próprio.

Carregamento:

$$q(x) = R\langle x - a \rangle^{-1} \tag{5.18}$$

Condições de contorno:

$$v(x = 0) = v_1 = 0$$
  

$$M(x = 0) = M_1 = 0$$
(5.19)

$$V(x = L) = V_3 = P$$
$$M(x = L) = M_3 = M$$

Restrições:

$$v(x=a) = v_2 = 0 (5.20)$$

Constantes de integração:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L & 1 & \frac{1}{6}(L-a)^3 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ \frac{PL-M}{a} \\ \frac{P}{6a}(L-a)L^3 - \frac{M}{6a}L^3 \\ \frac{P}{6}(L-a)a^2 - \frac{M}{6}a^3 \end{bmatrix}$$
(5.21)

Dados:

Tabela 5.09: Dados modelo 5.

| D [m] | L[m]  | a [m] | b [m] | $D_{disco} [m]$ | $L_{disco} [m]$ | P [N] | M[Nm] |  |  |  |  |
|-------|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|-------|-------|--|--|--|--|
| 0,01  | 0,325 | 0,25  | 0,075 | 0,05            | 0,1             | -10   | 10    |  |  |  |  |

Resultados:

Tabela 5.10: Resultados modelo 5.

|     |    | Modelo    |          |             |          |                        |          |  |  |
|-----|----|-----------|----------|-------------|----------|------------------------|----------|--|--|
|     |    | Analítico |          | Viga Nelson |          | Viga Genta e Guggliota |          |  |  |
| GDL | Nó | 1         | 2        | 1           | 2        | 1                      | 2        |  |  |
| V   |    | 38.4580   | -33.3182 | 38.4214     | -33.0242 | 38.4214                | -33.0242 |  |  |

## 5.1.6 Modelo 6: Viga hiperestática

Representação física:



Figura 5.08: Viga hiperestática.

Carregamento:

$$q(x) = R_2 \langle x - a \rangle^{-1} + P \langle x - b \rangle^{-1} + R_4 \langle x - c \rangle^{-1} + R_5 \langle x - d \rangle^{-1}$$
(5.22)

Condições de contorno:

| $V(x=0) = V_1 = 0$ |        |
|--------------------|--------|
| $M(x=0) = M_1 = 0$ | (5.22) |
| $V(x=L) = V_6 = 0$ | (5.23) |
| $M(x=L) = M_6 = 0$ |        |

Restrições:

$$v(x = a) = v_2 = 0$$
  

$$v(x = c) = v_4 = 0$$
  

$$v(x = d) = v_5 = 0$$
  
(5.24)

#### Constantes de integração:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L-a & L-c & L-d \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 & \frac{(c-a)^3}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 1 & \frac{(d-a)^3}{6} & \frac{(d-c)^3}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ R_2 \\ R_4 \\ R_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ -P(L-b) \\ 0 \\ -\frac{P(c-b)^3}{6} \\ -\frac{P(d-b)^3}{6} \end{bmatrix}$$
(5.25)

Dados:

Tabela 5.11: Dados modelo 6.

| D [m] | L[m] | a [m] | b [m] | c [m] | d [m] | $D_{disco} [m]$ | L <sub>disco</sub> [m] | <i>P</i> [ <i>N</i> ] |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-----------------|------------------------|-----------------------|
| 0,012 | 0,7  | 0,05  | 0,35  | 0,495 | 0,65  | 0,05            | 0,1                    | -31,5                 |

**Resultados:** 

Tabela 5.12: Resultados modelo 6.

|     | Modelo |           |        |         |                            |        |         |
|-----|--------|-----------|--------|---------|----------------------------|--------|---------|
|     |        | Analítico |        |         | Nelson / Genta e Guggliota |        |         |
| GDL | Nó     | 2         | 4      | 5       | 2                          | 4      | 5       |
| V   |        | 5.968     | 37.865 | -12.333 | 5.968                      | 37.866 | -12.334 |

É possível afirmar que os resultados obtidos são satisfatórios para o truncamento na quarta casa decimal, tanto ao se comparar os resultados dos MEF ao analítico, quanto dos dois modelos de viga por elementos finitos entre si. Os maiores erros ocorrem nos modelos 4 e 5, sendo o maior erro no cálculo da força (cerca de 6%) no modelo 4. Como já citado anteriormente, os desvios nos cálculos dos modelos 4 e 5 devem-se ao fato de o modelo pelo MEF considerar o peso de todas as vigas e disco, enquanto que o modelo analítico considera somente o peso devido ao disco.

A análise estática permite concluir, portanto, que tanto o algoritmo de transformação das matrizes do sistema de referência local para o global, quanto o algoritmo de superposição das matrizes do elemento na matriz do sistema estão corretos.

#### 5.2 Análise Dinâmica

O objetivo da análise dinâmica é verificar se as matrizes de inércia de translação e de rotação dos elementos de viga e disco rígido estão corretas. Isto é realizado ao compararem-se os resultados obtidos pelo software *Rotortest*, através da análise das freqüências naturais do rotor Laval bi-apoiado, ou seja, eliminando-se os graus de liberdade de translação do eixo no interior dos mancais.

Também é interesse notar a influência do momento giroscópico no comportamento do sistema. Para tanto, um rotor com disco descentralizado foi inicialmente avaliado. Posteriormente, um rotor com dois discos, simétricos em relação aos mancais, permitiu o estudo dos modos de vibrar excitados para o rotor em função da orientação da excitação.

Finalmente, a modelagem da fundação e análise do sistema completo é realizada para os três tipos de representações possíveis para a estrutura de suporte (ou fundação), a saber: Parâmetros Concentrados, Impedâncias Mecânicas e Coordenadas Mistas.

#### 5.2.1 Rotor Laval

O rotor Laval é composto por um eixo flexível e um disco rígido, o qual está posicionado equidistante aos mancais, os quais, por sua vez, sustentam o eixo rotativo. A configuração geométrica do sistema é apresentada na figura 5.10a, cujas dimensões foram escolhidas por

representarem a bancada experimental utilizada no Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR-DPM-FEM) e apresentada na figura 5.09.



Figura 5.09: Bancada experimental do Laboratório de Máquinas Rotativas (LAMAR).



Figura 5.10a: Rotor Laval.

O modelo elaborado por Elementos Finitos possui 15 nós, representados pelos pontos em vermelho na figura 5.10, e 15 elementos finitos, sendo estes 14 elementos de viga e um disco rígido.



Figura 5.10b: Rotor Laval MEF.

As propriedades do eixo, considerado de aço, são: módulo de elasticidade E = 210 GPa, densidade  $\rho = 7860$  kg/m<sup>3</sup> e coeficiente de proporcionalidade do amortecimento,  $\beta = 2x10^{-4}$ , aqui considerado do tipo estrutural proporcional. O coeficiente  $\beta$  é um valor estimado e, para eixos de aço, é um valor conhecido de trabalhos precedentes, como Weiming e Novak (1996). Todas as análises futuras tomam as propriedades mecânicas do aço como padrão a ser utilizado.

Os elementos de mancal, representados pelos triângulos na figura 5.10b, têm largura de 20 mm e diâmetro de 30 mm, sendo que o eixo (munhão) no interior dos mancais deve ser dividido em dois elementos de viga na interface com o fluido, de forma que a força de reação e os coeficientes de rigidez e amortecimento sejam avaliados na posição axial central do mancal. O disco, localizado na posição média entre os mancais, é modelado pelo elemento de disco rígido.

Inicialmente, o eixo é considerado apoiado sobre os mancais, ou seja, seus graus de liberdade de translação são eliminados da matriz do sistema, sendo submetido a uma excitação por desbalanceamento de massa no nó central do disco, para a faixa de freqüência de 1 a 72 Hz. Os dados da excitação são apresentados na tabela 5.13.

| Tabela 5.15. Dados da loi ça de exertação por massa residuar desbaranceada, rotor Davar. |                     |                    |            |  |
|--|---------------------|--------------------|------------|--|
| Posição [nó]   | Massa residual [kg] | Excentricidade [m] | Ângulo [°] |  |
| 8  | $1 \times 10^{-3}$  | $3,7x10^{-2}$      | 0          |  |

Tabela 5.13: Dados da forca de excitação por massa residual desbalanceada, rotor Laval

Os valores de excitação também foram escolhidos de forma a representar uma condição factível de operação da bancada de testes do LAMAR. A excitação por desbalanceamento de

massa concentrada é considerada na bancada através da inserção de massa em furos adequados em determinadas posições angulares.

A representação gráfica da terminologia adotada está detalhada na figura 5.11:



Figura 5.11: Representação gráfica de amplitude e fase nas direções Y e Z em relação ao plano complexo, e da magnitude do vetor deslocamento A e seu ângulo de direção θ.

onde,

Z Amplitude do vetor deslocamento na direção z;

- $\theta z$  Ângulo de fase da componente Z;
- Y Amplitude do vetor deslocamento na direção y;
- $\theta y$  Ângulo de fase da componente Y;

A Amplitude (norma) do vetor deslocamento no plano transversal ( $A = \sqrt{Y^2 + Z^2}$ );

$$\theta$$
 Ângulo de orientação do vetor A ( $tg\theta = \frac{Z}{Y}$ ).

A figura 5.12 apresenta a magnitude da resposta em freqüência para cada um dos nós do rotor. O eixo vertical indica a amplitude (norma do vetor deslocamento) da resposta enquanto os

eixos horizontais indicam a freqüência em Hertz e a posição axial do eixo. Essa figura tem como objetivo apresentar o comportamento do rotor do ponto de vista do modo operacional (ou deformação do rotor a certa velocidade de rotação), facilitando futuras análises em nós de interesse, tais como os que contêm os mancais.

Como esperado, o sistema apresenta resposta simétrica devido à geometria do sistema e à excitação ser imposta no nó do disco que é o nó central. A maior amplitude de vibração ocorre no disco, o que se dá por este concentrar a maior parte da massa do rotor, sendo os mancais considerados rígidos. Também, as amplitudes de translação nos mancais são nulas, uma vez que a condição de contorno de apoio assume deslocamento nulo.

A figura 5.13 apresenta o ângulo entre a amplitude resultante em cada nó do rotor e o eixo das abscissas (horizontal), estando esta grandeza relacionada ao ângulo de direção do vetor amplitude de vibração, ocorrendo sua inversão de 180º na passagem pela freqüência natural do sistema.



Figura 5.12: Amplitude da resposta em freqüência, rotor Laval.



Figura 5.13: Ângulo de orientação do vetor amplitude de vibração, rotor Laval.

A freqüência natural do sistema ocorre em 25,07 Hz e os deslocamentos na direção Y e Z são iguais, como pode ser observado na figura 5.14 para o disco central. A primeira velocidade crítica do sistema também fica evidente no diagrama de Campbell (figura 5.15), sendo dada pela intersecção da reta  $\omega=\Omega$  para a primeira harmônica, onde  $\omega$  é a freqüência de excitação e  $\Omega$  é a freqüência de rotação. Esse valor de freqüência natural é próximo à freqüência obtida experimentalmente no banco de provas do laboratório (LAMAR), segundo trabalho conduzido por Castro (2007). O rotor se comporta de forma idêntica nas direções horizontal e vertical, pois mancais isotrópicos foram considerados.



Figura 5.14: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (disco), rotor Laval.



A figura 5.16 mostrar a deformação do rotor, em cada um dos nós discretizados, na primeira velocidade crítica, vibrando o sistema em seus primeiro modo de flexão.



A diferença de 3 Hz entre as freqüências naturais obtidas experimentalmente (CASTRO, 2007) e as obtidas numericamente neste trabalho deve-se ao modelo computacional não

contemplar todos os componentes mecânicos da bancada, como é o caso do acoplamento flexível, percebido na figura 5.09.

#### 5.2.2 Rotor com disco descentralizado

A influência do momento giroscópico agindo no rotor é observável pela utilização de um rotor similar ao Laval, contudo com o disco rígido deslocado de sua posição axial central. Deste modo, o mesmo rotor utilizado na simulação anterior, teve seu disco rígido deslocado do nó 8 para o nó 6, mantendo, porém, os demais dados geométricos. A excitação por desbalanceamento de massa foi aplicada novamente no disco e, portanto, no nó 6 (figura 5.17) para os mesmos valores de massa desbalanceada, excentricidade e ângulo. O sistema é considerado apoiado e foi avaliado para a faixa de freqüência de 1 a 285 Hz.



Figura 5.17: Rotor com disco descentralizado MEF.

Pela análise do diagrama de Campbell observam-se os primeiros modos operacionais de vibrar do rotor, nas velocidades críticas de rotação de, aproximadamente: 31,67; 168,8; 181,6 e 269,1 rotações por segundo. As velocidades de 168,8 e 181,6 correspondem, ambas, a modos de vibrar mistos entre o primeiro e o segundo modos próprios, sendo estes, porém, muito amortecidos.

As freqüências críticas de 31,67 e 181,6 Hz são excitadas no disco e são, portanto, freqüências em que ocorre ressonância, segundo é possível constatar no gráfico de amplitude da freqüência de vibração (figura 5.19). Neste caso, a maior amplitude não ocorre no disco, pois os mancais considerados como apoios rígidos limitam a energia dissipada através de vibração em pontos próximos a si, que é exatamente o que ocorre com o disco que se situa próximo ao

primeiro mancal. O deslocamento do disco que no modelo do rotor Laval era de 450 µm passa a ser de menos de 350 µm para o modelo atual na primeira freqüência natural. É interessante notar que, no disco, a segunda freqüência de ressonância não é facilmente percebida e, portanto, o rotor tem em seu comportamento dinâmico maior influência do primeiro modo, uma vez que a severidade das ressonâncias ocorrendo nestas velocidades críticas depende principalmente da força de excitação harmônica.



Figura 5.18: Diagrama de Campbell, rotor com disco descentralizado.



Figura 5.19: Amplitude da resposta em freqüência, rotor com disco descentralizado.



Figura 5.20: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 6 (disco), rotor com disco descentralizado.

As deformações do rotor são apresentadas para as rotações críticas e os primeiro e segundo modos de vibrar em flexão são facilmente reconhecíveis pelo seu formato característico.



Figura 5.21a: Deformação do rotor em 31,67 Hz, rotor com disco descentralizado.







Figura 5.21c: Deformação do rotor em 181,6 Hz, rotor com disco descentralizado.



O comportamento dinâmico obtido para um disco não-central está de acordo com Kramer (1993), sendo o efeito do momento giroscópico importante para a modelagem do eixo, especialmente para eixos com baixas razões entre comprimento e diâmetro.

#### 5.2.3 Rotor com dois discos rígidos

Também para verificar o efeito giroscópico na resposta do rotor, um terceiro modelo, com dois discos é estudado para três diferentes casos de excitação. O rotor modelado pelo Método dos Elementos Finitos é apresentado na figura 5.22 e na tabela 5.14. Nos nós 6 e 10 estão os elementos de disco rígido. É considerado o amortecimento estrutural proporcional à matriz de rigidez pelo coeficiente  $\beta$ , tomando o valor de 0,0002.



Figura 5.22: Rotor com dois discos MEF.

| Elemento | Diâmetro [mm] | Largura [mm] | Massa [kg] |
|----------|---------------|--------------|------------|
| 1        | 13            | 40           | 0          |
| 2        | 30            | 10           | 0          |
| 3        | 30            | 10           | 0          |
| 4        | 13            | 72,5         | 0          |
| 5        | 13            | 72,5         | 0          |
| 6        | 90            | 47           | 2,3        |
| 7        | 13            | 72,5         | 0          |
| 8        | 13            | 72,5         | 0          |
| 9        | 13            | 72,5         | 0          |
| 10       | 13            | 72,5         | 0          |
| 11       | 90            | 47           | 2,3        |
| 12       | 13            | 72,5         | 0          |
| 13       | 13            | 72,5         | 0          |
| 14       | 30            | 10           | 0          |
| 15       | 30            | 10           | 0          |
| 16       | 13            | 40           | 0          |

Tabela 5.14: Dados geométricos, rotor com dois discos.



Figura 5.23: Diagrama de Campbell, rotor com dois discos.

O sistema apresenta duas freqüências críticas (24,67 e 72,26 Hz) para a faixa de análise de 1 a 160 Hz.

Uma vez que análise deste modelo tem por objetivo verificar a influência da orientação da excitação na contribuição dos modos de vibrar na resposta do sistema, três diferentes casos são

simulados e resumidos a seguir, sendo avaliadas as FRDs (funções resposta ao desbalanceamento) nos discos e as deformações do rotor nas velocidades críticas.

Tabela 5.15: Dados para as forças de excitação externa por massa residual desbalanceada, rotor com dois discos.

| Caso | Posição [nó] | Massa residual [kg] | Excentricidade [m]   | Ângulo [°] |
|------|--------------|---------------------|----------------------|------------|
| 1    | 6            | $1 \times 10^{-3}$  | 3,7x10 <sup>-2</sup> | 0          |
|      | 10           | $1 \times 10^{-3}$  | 3,7x10 <sup>-2</sup> | 0          |
| 2    | 6            | $1 \times 10^{-3}$  | 3,7x10 <sup>-2</sup> | 0          |
|      | 10           | $1 \times 10^{-3}$  | 3,7x10 <sup>-2</sup> | 180        |
| 3    | 6            | $1 \times 10^{-3}$  | $3,7x10^{-2}$        | 0          |

















Figura 5.28b: Ângulo de fase nó 10 (disco 2), rotor com dois discos (Caso 2).



Figuras 5.29a e 5.29b: Deformações do rotor em 24,67 e 72,26 Hz, rotor com dois discos (Caso 2).











Pela análise das figuras, destaca-se a influência da força na excitação em determinados modos de vibrar, pois no Caso 1, somente o primeiro modo em flexão é observado, tanto pelas FRDs (figuras 5.24a, 5.24b, 5.25a e 5.25b) quanto pela deformação do rotor (figuras 5.26a e 5.26b). No Caso 2, a segunda freqüência crítica aparece devido à defasagem de 180 graus entre as massas desbalanceadas, ao passo que, no terceiro e último caso, ambas, 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> freqüências naturais, contribuem na analise de vibração, sendo que o primeiro modo de vibrar apresenta-se com maior influência.

No caso 1, com as excitações atuando simultaneamente em fase em ambos os discos rígidos, a freqüência de ressonância excitada é aquela de 24,67, percebida pelos picos de amplitude nos gráficos de amplitude de translação (figuras 5.24a e 5.25a), excitando o primeiro modo em flexão, evidenciado pela orientação de todos os nós nas deformações do rotor nas figuras 5.26a e 5.26b. Convém lembrar que o sistema é isotrópico, pois os mancais são considerados apoiados como condição de contorno. Também pela simetria do rotor e da excitação, as respostas para ambos os nós 6 e 10 são idênticas.

Para o caso 2, a freqüência de ressonância ocorre em 72,26 Hz, na qual o sistema vibra no segundo modo, de acordo com a deformação do rotor, apresentada nas figuras 5.29a e 5.29b. As respostas nos nós 6 e 10 são idênticas e, importante observar que, devido ao fato das excitações serem em fase opostas, as amplitudes de deslocamento dos nós 6 e 10 na ressonância passam de 463  $\mu$ m no caso anterior para 170  $\mu$ m, ou seja, diminuem em aproximadamente 37%.

No caso 3, o rotor vibra no primeiro modo de flexão na primeira velocidade crítica (24,67 Hz) e no segundo modo de flexão na segunda velocidade crítica (72,26 Hz). Apesar do formato das FRDs serem semelhantes em ambas as direções (vertical e horizontal) e das amplitudes
próximas à ressonância também se apresentarem próximas em magnitude, ocorre uma variação entre os nós 6 e 10 devido à excitação ser imposta somente no nó 6.

#### 5.2.4 Fundação

Utilizando-se novamente o mesmo rotor Laval da figura 5.10, contudo agora apoiado sobre mancais lubrificados cilíndricos, a influência da estrutura de suporte, ou ainda, fundação, é avaliada. A variação do comportamento do rotor devido ao apoio sobre mancais hidrodinâmicos não será aqui discutida, uma vez que este assunto será tratado no próximo capítulo. Portanto, importa considerar apenas a influência devido aos diferentes modelos utilizados para a fundação.

O primeiro teste para a fundação, aqui denominado Estudo 1, consiste em variar parâmetros concentrados hipotéticos da modelagem por um sistema massa-amortecedor-mola (MAM), considerando-os iguais para ambos os pedestais dos mancais, considerados solidários à fundação, de acordo com a tabela 5.16.

| Tabela 5.10. Daulos da fundaçã | ao por 1 arametros ( | concenti auos, Estudo | 1.                 |
|--------------------------------|----------------------|-----------------------|--------------------|
| Caso                           | $M_{ij}$             | C <sub>ij</sub>       | K <sub>ij</sub>    |
| 1 (Rigidez Baixa)              | $1 x 10^{0}$         | $1x10^{1}$            | $1 \times 10^{2}$  |
| 2 (Rigidez Alta)               | $1 \times 10^{5}$    | $1 x 10^{10}$         | $1 \times 10^{12}$ |

Tabela 5.16: Dados da fundação por Parâmetros Concentrados, Estudo 1

com ij representando os parâmetros cruzados e diretos para as direções vertical (z) e horizontal (y), respectivamente.

As FRDs são apresentadas somente para os nós 3 (mancal 1), 8 (disco rígido) e 16 (pedestal 1) devido à simetria geométrica do rotor. As respostas consideradas para efeito de análise são as que ocorrem na direção vertical.

A magnitude da translação na direção vertical do disco diminui com a diminuição dos valores dos parâmetros concentrados ao passar do caso 2 para o caso 1, já que uma parcela cada

vez maior da energia, inserida no sistema pela excitação, será dissipada pela vibração do eixo nos mancais e ainda nos pedestais associados à fundação.

Portanto, a freqüência de ressonância do sistema rotativo diminui progressivamente do caso 1 para o caso 2, sendo, respectivamente, 25,15 e 36,69 Hz.

Nota-se que para uma fundação hipotética com massa, rigidez e amortecimento muito baixos (caso 1), surge uma freqüência natural na rotação de 36,69 Hz, graças ao acoplamento do eixo com a fundação. Como a primeira freqüência da fundação é de 10 Hz, a ressonância do rotor será uma combinação dos efeitos da freqüência natural da fundação com a do eixo. A freqüência natural da fundação para o caso 2, estimada pela relação  $\omega = \sqrt{k/m}$ , de aproximadamente 3000 Hz, está bem acima da faixa de freqüência analisada, não apresentando, portanto, influência no comportamento do sistema. Desta forma, fundações que apresentem freqüências naturais próximas às freqüências naturais do rotor, permitem que o sistema seja analisado em dois subsistemas separadamente, a saber, eixo-suportes e fundação.





Figuras 5.33 a 5.35: Resposta ao desbalanceamento nos nós 3 (mancal 1), 8 (massa concentrada) e 16 (fundação ou pedestal 1), fundação por Parâmetros Concentrados (Estudo 1).

Uma comparação entre as vibrações do mancal e do pedestal permite observar que não ocorrem diferenças entre a fundação rígida e aquela por parâmetros concentrados para o caso 2. Este resultado é esperado, pois ambos os modelos apresentam vibrações praticamente nulas nos pedestais. Na fundação rígida, isto ocorre devido às condições de contorno, ao passo que o resultado para a fundação por parâmetros concentrados está em conformidade por simular, para o mesmo sistema físico, uma fundação com massa, rigidez e amortecimento muito superiores aos do eixo flexível, de modo que sua freqüência natural não interfere na faixa de freqüência do rotor.

Finalmente, o comportamento obtido pela fundação rígida e pela fundação por parâmetros concentrados para o segundo caso (alta rigidez) são muito próximos entre si, indicando a robustez dos resultados obtidos através da integração dos programas dentro do pacote *Rotortest*.

Para as mesmas configurações do eixo e dos mancais, assim como das excitações externas, outra análise é realizada (Estudo 2), com a finalidade de avaliar a conformidade dos resultados obtidos para o rotor, considerando-se agora as fundações representadas por Parâmetros Concentrados, pelo Método das Impedâncias Mecânicas e pelo Método das Coordenadas Mistas.



Figura 5.36a: Representação da fundação no modelo do rotor Laval, Estudo 2.

A fundação é considerada agindo somente no grau de liberdade de translação em z. Desta forma, os demais graus de liberdade da fundação são eliminados da matriz global. A tabela 5.17 apresenta os valores para o sistema massa-mola-amortecedor que representa a fundação. Para a obtenção da fundação por impedâncias mecânicas, esses mesmos valores de massa, rigidez e amortecimento são transformados na matriz dinâmica da fundação, para a faixa de freqüência na qual o rotor é analisado. Para a fundação por coordenadas mistas (figura 5.36b) as matrizes são diagonalizadas pela matriz dos modos de vibrar da fundação, modos estes previamente determinados:  $\left[\Phi\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

| Pedestal | М   | С   | K                 |
|----------|-----|-----|-------------------|
| 1        | 7,5 | 300 | $1,5 \times 10^5$ |
| 2        | 7,5 | 300 | $1,5 \times 10^5$ |

Tabela 5.17: Parâmetros da estrutura de fundação na direção vertical (z), Estudo 2.



Figura 5.36b: Representação da fundação por coordenadas generalizadas no modelo do rotor Laval, Estudo 2.

Os deslocamentos nos pedestais, em coordenadas físicas, na direção vertical,  $Z_{16} e Z_{17}$ , são combinação linear das coordenadas generalizadas  $p_1 e p_2$  com os modos de vibrar  $[\Phi]$  da fundação:







Figuras 5.37 a 5.39: Função resposta ao desbalanceamento nós 3 (mancal 1), 8 (massa concentrada) e 16 (pedestal), fundação por Parâmetros Concentrados (Estudo 2).





Figuras 5.40 a 5.42: Função resposta ao desbalanceamento nós 3 (mancal 1), 8 (massa concentrada) e 16 (pedestal), fundação por Impedância Mecânica (Estudo 2).





Figuras 5.43 a 5.46: Função resposta ao desbalanceamento nós 3 (mancal 1), 8 (massa concentrada), 16 (pedestal) e coordenadas generalizadas q<sub>1</sub> e q<sub>2</sub>, fundação por Coordenadas Generalizadas (Estudo 2).

O comportamento da resposta para o grau de liberdade de translação em y é mantido, ocorrendo uma freqüência de ressonância nesta direção igual à obtida para o sistema com fundação rígida. A diferença fica por conta da magnitude do deslocamento, especialmente

próximo à freqüência natural. A máxima amplitude de vibração para o disco é de 335,1 e 243,7 µm, para a fundação rígida e para a fundação por parâmetros concentrados, respectivamente.

A resposta na direção vertical (z) apresenta duas freqüências de ressonância bem definidas, devido à presença de uma fundação flexível em relação ao rotor e aos mancais: 19,26 e 29,13 Hz. Há ainda uma terceira freqüência natural em 24,91 Hz, a qual se trata da freqüência do eixo, já observada na resposta para a fundação rígida. A deformação do rotor é apresentada, nessas freqüências, nas figuras 5.47a, 5.47b e 5.47c.





Figuras 5.47a, 5.47b e 5.47c: Deformações do rotor em 19.26, 24.91 e 29.13 Hz, Estudo 2.

Em 19,26 Hz (figura 5.47a) nota-se a o primeiro modo de flexão do rotor com a influência da fundação nas localizações dos mancais, onde ocorrem deslocamentos em fase, que correspondem ao segundo modo de vibrar da fundação. Na freqüência de 24,91 Hz, conforme esperado, predomina o primeiro modo em flexão do eixo na deformação do rotor. Em 29,13 Hz temos o primeiro modo em flexão do eixo sob influência do segundo modo de vibrar da fundação.

A consideração da fundação, atuando na direção vertical, faz com que a resposta torne-se bastante anisotrópica se comparada com a fundação rígida, a qual possui anisotropia somente em função do mancal hidrodinâmico cilíndrico. As amplitudes de vibração na localização do disco rígido, na direção vertical, são inferiores às obtidas para a direção horizontal, em praticamente toda faixa de freqüência analisada.

Interessante notar que, na localização dos mancais, ocorre apenas a freqüência de ressonância do eixo, excitada pelo desbalanceamento, na direção horizontal, enquanto mais duas freqüências são excitadas pela fundação na direção vertical. Nos pedestais, solidários à fundação, a vibração em y é nula, pois este grau de liberdade é considerado fixo, enquanto que a vibração em z apresenta as três supracitadas freqüências naturais. Desta forma, observa-se a resposta da fundação, excitada pela vibração no eixo, e vice-versa, a resposta do eixo ao desbalanceamento de massa sob influência das freqüências naturais da fundação, efeito este que não seria percebido caso conduzida uma análise que considerasse os dois subsistemas separadamente. Este resultado

exemplifica a importância de análises globais, para que fundações consideradas elásticas sejam contempladas no comportamento dinâmico de sistemas rotativos.

A partir dos resultados obtidos para os diferentes modelos de fundação, demonstra-se sua concordância e a robustez do pacote computacional. Cabe salientar que, para o modelo por Coordenadas Mistas, as respostas na fundação são apresentadas em duas figuras separadamente, associadas às coordenadas generalizadas (independentes), consideradas em sua representação matemática e, sendo a vibração nos pedestais uma combinação linear dos modos de vibrar, somente o segundo modo de vibrar considerado para a fundação (1,1) influencia no seu comportamento, o que é fisicamente correto uma vez que os sistemas massa-amortecedor-mola que representam a fundação estão em paralelo. Porém, o comportamento do sistema é o mesmo, como já dito anteriormente.

Uma última análise, Estudo 3, é realizada para o mesmo rotor, alterando-se a fundação. Serão avaliadas as respostas obtidas pelo método das Impedâncias Mecânicas e pelo Método das Coordenadas Mistas para uma fundação com duas massas, molas e amortecedores, novamente considerados na direção vertical, enquanto que na direção horizontal os pedestais são considerados fixos, de acordo a figura 5.48:



Figura 5.48: Representação do rotor Laval com fundação flexível, Estudo 3.

A equação de movimento da fundação é uma equação diferencial de 2ª ordem da forma:

$$[M]\{\ddot{z}\} + [C]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \{F\}$$
(5.27)

Para a configuração da fundação têm-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$
(5.28)

A matriz de impedância mecânica é obtida por:

$$\left(-\Omega^2[M] + i\Omega[C] + [K]\right) \tag{5.29}$$

Considerando-se o deslocamento  $z = Ze^{i\Omega t}$  e a força  $f = Fe^{i\Omega t}$  a equação de movimento assume na forma a seguir:

$$\left(-\Omega^{2}[M]+i\Omega[C]+[K]\right)Ze^{i\Omega t}=Fe^{i\Omega t}$$
(5.30)

Para achar as freqüências naturais, ou seja, os autovalores, têm-se que:

$$\det\left(-\Omega^{2}[M]+i\Omega[C]+[K]\right)=0$$
(5.31)

Assume-se que o amortecimento é muito pequeno, sendo desconsiderado no cálculo das freqüências naturais e, portanto:

$$\det \begin{bmatrix} -\Omega^2 m_1 + k_1 & k_1 \\ -k_1 & -\Omega^2 m_2 + k_1 + k_2 \end{bmatrix} = 0$$
(5.32)

As freqüências naturais (auto-valores) são:

$$\omega^{2} = \frac{-(-m_{1}(k_{1}+k_{2})-m_{2}k_{1})\pm\sqrt{(-m_{1}(k_{1}+k_{2})-m_{2}k_{1})^{2}-4(m_{1}m_{2})(k_{1}k_{2})}}{2k_{1}k_{2}}$$
(5.33)

O i-ésimo modo de vibrar é dado por:

$$\mu_{i} = \frac{Z_{1}^{(i)}}{Z_{2}^{(i)}} = -\frac{k_{1}}{\omega_{i}^{2}m_{1} + k_{1}} = -\frac{\omega_{i}^{2}m_{2} + k_{1} + k_{2}}{k_{1}}$$
(5.34)

Portanto, tem-se os auto-vetores a estes associados:

$$\begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1^{(1)} & Z_1^{(2)} \\ Z_2^{(1)} & Z_2^{(2)} \end{bmatrix}$$
(5.35)

A partir da matriz dos modos de vibrar da fundação, e escrevendo o vetor de coordenadas físico em função do vetor de coordenadas independentes é possível diagonalizar as matrizes de massa e rigidez da fundação, e obter essas mesmas matrizes no sistema de coordenadas independentes. A matriz de amortecimento será diagonalizada sob consideração de amortecimento estrutural proporcional para fundação:

$$[m] = [\Phi]^T [M] [\Phi] \qquad [k] = [\Phi]^T [K] [\Phi] \qquad [c] = \alpha [m] + \beta [k] \qquad (5.36)$$

A relação entre as coordenadas independentes e físicas é dada por,

$$\{Z\} = [\Phi]\{p\} \tag{5.37}$$

Portanto,

$$\begin{cases} Z_1 \\ Z_2 \end{cases} = \begin{cases} Z_1^{(1)} p_1 + Z_1^{(2)} p_2 \\ Z_2^{(1)} p_1 + Z_2^{(2)} p_2 \end{cases}$$
(5.38)

Desta forma, demonstrada tanto a obtenção da matriz de impedância mecânica quanto a obtenção das matrizes de massa, amortecimento e rigidez no sistema de coordenadas

independentes, os métodos da Impedância Mecânica e das Coordenadas Mistas são utilizados para modelar a fundação a partir dos dados da tabela 5.18.

| Tubelu 2110. Tutulleti 05 uu esti ututu ue tulluuçub lui ulteçub vet iteui (2), Estudo 3. |                     |            |                      |   |             |  |  |
|---|---------------------|------------|----------------------|---|-------------|--|--|
| m1 [kg]   | m <sub>2</sub> [kg] | k1 [N/m]   | k <sub>2</sub> [N/m] | α | β           |  |  |
| 15  | 15                  | $1x10^{6}$ | $1x10^{8}$           | 0 | $2x10^{-4}$ |  |  |

Tabela 5.18: Parâmetros da estrutura de fundação na direção vertical (z), Estudo 3

As funções resposta ao desbalanceamento (FRD) são apresentadas nas figuras 5.49 a 5.53 para Impedância Mecânica e nas figuras 5.54 a 5.58 para Coordenadas Mistas. As curvas são avaliadas para os dois mancais, para o disco rígido e para os dois pedestais, e podem ser consideradas iguais para ambos os modelos.

O sistema rotativo possui as freqüências naturais de 24,99 e 49,9. O cálculo das freqüências naturais da fundação (equação 5.32) resulta nas freqüências naturais de 50,1 e 505,8 Hz. A matriz modal [ $\Phi$ ] dada pela equação 5.34 é  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,01 & -100 \end{bmatrix}$ .

Devido à faixa de análise do sistema rotativo ter limite máximo de 73 Hz, espera-se que somente o primeiro modo da fundação influencie na resposta dinâmica do rotor e, portanto, que maiores amplitudes sejam encontradas tanto no pedestal 1 quanto no mancal 1. A fundação vibra em fase na primeira freqüência natural, porém com amplitude 100 vezes maior na coordenada vertical referente ao pedestal 1, ao passo que a mesma vibra em oposição de fase na segunda freqüência, com a mesma proporção de amplitudes, conquanto, este modo de vibrar tem maior amplitude na vibração do pedestal 2.

A influência da fundação não é evidente na resposta dinâmica da massa concentrada (nó 8). Contudo, a magnitude do deslocamento diminui se comparada ao mesmo rotor com fundação considerada rígida. Para os mancais não há diferença na vibração horizontal. Porém, para a direção vertical, a amplitude de vibração é maior e estão presentes as freqüências naturais já mencionadas.





Figuras 5.49 a 5.53: Função resposta ao desbalanceamento nos mancais (nós 3 e 13), na massa concentrada (nó 8) e nos pedestais (nós 16 e 17), fundação por Impedância Mecânica (Estudo 3).







Figuras 5.54 a 5.58: Função resposta ao desbalanceamento nos mancais (nós 3 e 13), na massa concentrada (nó 8) e nos pedestais (nós 16 e 17), fundação por Coordenadas Mistas (Estudo 3).

Pela análise da deformação do rotor, nas rotações correspondentes aos picos de amplitude, o primeiro modo operacional de flexão é excitado para todas as freqüências naturais do sistema, com a singularidade de na freqüência de 49,9 Hz, o primeiro mancal ter amplitude de vibração maior.



Figuras 5.59a e 5.59b: Deformação do rotor em 24,99 e 49,9 Hz, Estudo 3.

# 6 SIMULAÇÃO DE SISTEMAS COMPLETOS

Neste capítulo, serão apresentados os recursos em modelagem até então disponíveis no programa de simulação numérica de sistemas rotor-mancais-fundação. Um dos objetivos deste capítulo é, inicialmente, analisar a influência de diferentes tipos de mancais hidrodinâmicos, a saber, cilíndrico, elíptico e tri-lobular, na resposta dinâmica de um rotor Laval, apoiado em fundação rígida. Em seguida, será desenvolvido o modelo de um turbo-grupo com três eixos e sete mancais, cuja finalidade é apresentar a modelagem de um sistema rotativo próxima a uma aplicação prática.

### 6.1 Rotor Laval com mancais hidrodinâmicos

Para o rotor Laval da figura 5.10, com excitação por massa residual desbalanceada, aplicada no disco rígido, investiga-se a influência de diferentes mancais hidrodinâmicos, através de seus coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento, na resposta em freqüência do sistema, considerando-se uma fundação rígida. Para tanto, mancais cilíndricos, elípticos e trilobulares foram utilizados. As características geométricas (número de lóbulos, comprimento axial (L), diâmetro (D), folga radial (Cr), ângulo entre lóbulos (Tito) e pré-carga nos lóbulos) são apresentadas na tabela 6.01. Os mancais operam à temperatura de 30°C, com o óleo ISO VG32.

A viscosidade é avaliada pelo programa durante o processamento e pode ser estimada por diferentes modelos dependentes da temperatura e da pressão no fluido lubrificante. Os cálculos da pressão nos mancais são realizados pelo Método das Diferenças Finitas (MACHADO, 2009).

| Designação | Lóbulos | L [mm] | D [mm] | Cr [µm] | Tito [°] | Pré-Carga |  |  |  |  |  |  |  |
|------------|---------|--------|--------|---------|----------|-----------|--|--|--|--|--|--|--|
| Cilíndrico | 1       | 20     | 30     | 90      | 0        | 0         |  |  |  |  |  |  |  |
| Elíptico   | 2       | 20     | 30     | 90      | 15       | 0,25      |  |  |  |  |  |  |  |
| Trilobado  | 3       | 20     | 30     | 90      | 10       | 0,50      |  |  |  |  |  |  |  |

Tabela 6.01: Características geométricas dos mancais hidrodinâmicos.

Após a modelagem do sistema rotativo, o primeiro passo durante a realização da análise é obter o diagrama de esforços cortantes para determinar as reações nos mancais, ou seja, o carregamento ao qual o mancal está submetido, que deve ser equilibrado pela força de sustentação do filme de óleo, considerando-se, a priori, a condição de lubrificação hidrodinâmica.



Figura 0.01: Diagrama das reações nos apoios na direção verticai, rotor Lavai.

Percebe-se que a configuração geométrica do eixo faz com que grande proporção do peso esteja concentrada no disco central, gerando uma força de aproximadamente 24 N. O peso do rotor é equilibrado pelas forças de reação nos mancais, que são de 15 N para ambos os mancais, devido à simetria do eixo.

Como já discutido no capítulo 3, a reação gerada nos mancais, devido à sustentação do eixo pelo filme de óleo, é utilizada para o cálculo do campo de pressão do óleo a cada velocidade de rotação do eixo, utilizada na análise do mancal e, a partir deste campo de pressão, é obtida a força de sustentação hidrodinâmica, pela integração da distribuição de pressão no interior do mancal. Aplicando-se uma perturbação à força de sustentação, coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento são obtidos, tornando possível a integração fuido-estrutural do sistema (MACHADO, 2009; MACHADO e CAVALCA, 2009). A distribuição de pressão, para cada um

dos mancais analisados, é apresentada para as velocidades de rotação de 25,6 Hz (figuras 6.02a, 6.03a e 6.04a) e de 71,8 Hz (figuras 6.02b, 6.03b e 6.04b). A coordenada angular, ou ângulo circunferencial do mancal, nos gráficos de distribuição de pressão, é definida na figura 6.05, para os mancais elíptico e trilobular. Para o mancal cilíndrico, o ângulo é definido a partir da posição de equilíbrio do mancal para cada velocidade de rotação.



Figuras 6.02a e 6.02b: Distribuição de pressão a 25,6 Hz e a 71,8 Hz, mancal cilíndrico (rotor Laval).



Figuras 6.03a e 6.03b: Distribuição de pressão a 25,6 Hz e a 71,8 Hz, mancal elíptico (rotor Laval).



Figuras 6.04a e 6.04b: Distribuição de pressão a 25,6 Hz e a 71,8 Hz, mancal tri-lobular (rotor Laval).

Antes de fazer uma análise detalhada das distribuições de pressão apresentadas, é feita uma avaliação comparativa das excentricidades adimensionais e dos ângulos de equilíbrio, para os três casos simulados. A tabela 6.02 mostra esses resultados em detalhe.

| Velocidade [Hz] | 25,6           |                | 71,8           |                |  |  |
|-----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--|--|
| Manaal          | Excentricidade | Ângulo de      | Excentricidade | Ângulo de      |  |  |
| Mancal          | adimensional   | equilíbrio [°] | adimensional   | equilíbrio [°] |  |  |
| Cilíndrico      | 0,1817         | 75,95          | 0,0686         | 83,00          |  |  |
| Elíptico        | 0,1710         | 103,22         | 0,0766         | 109,00         |  |  |
| Tri-lobular     | 0,0487         | 54,35          | 0,0175         | 53,34          |  |  |

## Tabela 6.02: Posição de equilíbrio.

Para todos os mancais, as pressões têm comportamento parabólico na direção axial, alcançando valores máximos no centro da coordenada axial dos mesmos (0,35 m). Os picos de pressão, para as configurações estudadas, assim como o ângulo em que ocorrem, são apresentados na tabela 6.03. Os ângulos da tabela 6.03 são obtidos das figuras de distribuição de pressão e referem-se à convenção adotada na figura 6.05. Para os mancais cilíndricos, os valores de ângulo de pressão máxima, a partir das figuras 6.02a e 6.02b, correspondentes ao ângulo com referência ao ponto de equilíbrio, são transformados para a convenção utilizada.

| Velocidade [Hz] | 25            | 5,6        | 7             | 1,8        |  |
|-----------------|---------------|------------|---------------|------------|--|
| Mancal          | Pressão [kPa] | Ângulo [°] | Pressão [kPa] | Ângulo [°] |  |
| Cilíndrico      | 50,83         | 8,5        | 49,39         | 2,0        |  |
| Elíptico -      | 80,35         | 76,5       | 171,3         | 58,5       |  |
|                 | 53,87         | 211,5      | 158,0         | 220,5      |  |
|                 | 220,2         | 36,0       | 521,8         | 31,5       |  |
| Tri-lobular     | 173,6         | 144,0      | 477,5         | 148,5      |  |
|                 | 127,5         | 265,5      | 428,6         | 265,5      |  |

Tabela 6.03: Coordenada angular dos picos de pressão.



Figura 6.05: Convenção adotada para a posição angular.

No mancal cilíndrico, picos de pressão da ordem de 50 kPa são alcançados na região de 0 a 180°, contados a partir do ângulo de equilíbrio. No mancal elíptico dois picos de pressão são notados, nos lóbulos inferior e superior, respectivamente, enquanto três picos de pressão aparecem para cada lóbulo do mancal tri-lobular. Os lóbulos inferiores são os mais carregados para ambos os mancais multi-lobulares. As pressões que ocorrem no mancal elíptico são

superiores às que ocorrem no mancal cilíndrico, e os picos de pressão que ocorrem no mancal trilobular são os mais elevados.

Para os mancais elíptico e tri-lobular, a distribuição de pressão se torna mais homogênea, comparando-se os diversos lóbulos, com a diminuição da excentricidade (ou aumento da velocidade). Pode-se notar que, para essas geometrias, o aumento da velocidade de rotação está diretamente relacionado a um aumento da capacidade de sustentação no mancal.

As figuras 6.06 a 6.08 mostram o lugar geométrico (ou lócus) do centro do eixo para os diferentes tipos de mancais estudados nesse trabalho. Os resultados são mostrados em coordenadas polares. A excentricidade adimensional foi avaliada como função do ângulo de atitude originado da posição de equilíbrio do eixo. No caso dos mancais elípticos e tri-lobulares, os valores da excentricidade e do ângulo de atitude correspondem aos valores da posição de equilíbrio do mancal total, uma vez que esses tipos de mancais têm valores de excentricidade e ângulo de atitude para cada lóbulo, separadamente.

A excentricidade adimensional foi avaliada em relação à folga radial do mancal. Isso equivale a dizer que, quando a excentricidade adimensional é 1, há contato metal-metal entre o eixo e a bucha do mancal, e quando a excentricidade é nula, o eixo e o mancal são concêntricos.





Figuras 6.06 a 6.08: Lócus do centro do eixo: mancais cilíndricos, elípticos e tri-lobulares (rotor Laval).

Observa-se que, conforme esperado, em baixas velocidades de rotação, a excentricidade do mancal é muito elevada, diminuindo gradativamente conforme a rotação do eixo aumenta. Esse fenômeno ocorre devido ao fato de que o mancal tende a centrar-se com o eixo em altas rotações. No que se refere ao ângulo de equilibrio, tem-se um aumento do mesmo a medida que a velocidade aumenta. Isso ocorre porque em baixas excentricidades (alta rotação) a distribuição é mais homogênea, fazendo com que a força de reação na porção inferior direita do mancal seja maior.

No mancal elíptico, a força criada na porção esquerda do lóbulo inferior (ver figura 6.09, região I) possui uma força resultante horizontal muito alta, devido à elevada convergência na região. Essa força será equilibrada pelas demais regiões com pressão (figura 6.09 regiões II e III), somente se o centro do eixo se deslocar para cima e para a direita. Esse movimento aumenta a pressão na metade superior da cunha e no lado direito da porção inferior.



Figura 6.09: Distribuição de Pressão no Mancal Elíptico (MACHADO, 2009).

No que diz respeito ao mancal tri-lobular, a porção superior do lócus mostra o efeito provocado pelos dois lóbulos laterais, os quais diminuem o ângulo de atitude para valores inferiores aos encontrados nos demais mancais radiais. Esse fenômeno é de decisiva importância na estabilidade deste tipo de mancal.

Os coeficientes de rigidez e amortecimento, em função da velocidade de rotação do eixo, obtidos para cada um dos mancais em estudo, são apresentados nas figuras 6.10 a 6.12.



Coef. Amortecimento x 10<sup>6</sup> Ryy Ryz 2 Rzy Rzz 1.5 Amortecimento [Ns/m] 0.5 0 70 10 20 30 40 50 60 Rotação [Hz]

Figura 6.10a: Coeficientes de rigidez do mancal cilíndrico, rotor Laval.

Figura 6.10b: Coeficientes de amortecimento do mancal cilíndrico, rotor Laval.



Figura 6.12a: Coeficientes de rigidez do mancal trilobular, rotor Laval.

Figura 6.12b: Coeficientes de amortecimento do mancal tri-lobular, rotor Laval.

Os coeficientes de amortecimento, para todos os casos analisados, foram numericamente muito próximos, assim como o comportamento da curva nos gráficos. No que diz respeito aos coeficientes de amortecimento cruzados ( $C_{yz}$  e  $C_{zy}$ ), devido ao fato de que estes derivam de um operador auto-adjunto, devem ser iguais (LUND, 1987).

Em relação aos coeficientes de rigidez, nota-se que seus valores, para o mancal cilíndrico, são menores do que os valores encontrados para as demais geometrias. Esse fato ocorre devido à

pré-carga existente nos mancais elípticos e tri-lobulares. Conforme a figura 6.11a (mancal elíptico), há um aumento significativo nos valor dos coeficientes de rigidez na direção z (direção vertical), tanto do coeficiente cruzado ( $K_{yz}$ ), como do coeficiente direto ( $K_{zz}$ ).

Para o mancal tri-lobular, os coeficientes de rigidez têm um aumento significativo em magnitude. Observa-se que, além dos coeficientes na direção z (vertical), o coeficiente direto de rigidez  $K_{yy}$  (direção horizontal) também apresenta um aumento expressivo (figura 6.12a).

No que diz respeito à estabilidade, pode-se fazer uma análise qualitativa através da relação entre os coeficientes de rigidez cruzados e diretos. Via de regra, um mancal será mais estável quanto maior for esta diferença em uma dada direção, desde que o coeficiente direto seja maior que o cruzado. No caso do mancal cilíndrico, para altas velocidades de rotação, o coeficiente cruzado  $K_{yz}$  supera o coeficiente direto  $K_{zz}$  e, portanto, torna-se instável.

Os mancais elípticos têm, para altas velocidades de rotação, o coeficiente direto  $K_{zz}$  maior que o cruzado  $K_{yz}$  e, portanto, apesar de uma diferença pequena, em módulo, este mancal é mais estável que o mancal cilíndrico.

Nos mancais tri-lobulares, a principal vantagem é que o coeficiente de rigidez direto  $K_{yy}$  também aumenta de maneira expressiva, aumentando a diferença entre todos os coeficientes de rigidez diretos e cruzados, tornando o mancal tri-lobular, desta forma, o mais estável dentre os mancais de geometria fixa.

O último passo na análise do sistema consiste em obter a resposta dinâmica do sistema completo. Para tanto, os coeficientes dos mancais são interpolados na faixa de freqüência do rotor por uma função cúbica. São, então, obtidas as respostas ao desbalanceamento e os auto-valores e auto-vetores do sistema. O diagrama de Campbell, que é construído a partir dos autovalores, está apresentado abaixo para o mancal tri-lobular.



Figura 6.13: Diagrama de Campbell, mancal tri-lobular (rotor Laval).

A consideração de mancais flexíveis anisotrópicos, através de seus coeficientes equivalentes, aqui ilustrada para o mancal tri-lobular, fica caracterizada no diagrama de Campbell pelo surgimento de uma reta próxima e abaixo da primeira harmônica (figura 6.13). O diagrama de Campbell, para as demais configurações de mancais em estudo, não são apresentados por terem comportamento similar ao da figura 6.13.

As freqüências naturais do sistema rotativo continuam as mesmas se comparadas ao sistema que considera os mancais como condições de contorno de apoio (figura 5.15). Portanto, a freqüência natural do rotor em 25,07 Hz demonstra que o sistema rotativo, neste caso, é pouco influenciado pelos mancais, dependendo, em grande parte, das propriedades de rigidez e massa do eixo. O rotor tem deformação, na freqüência de ressonância, característica do primeiro modo de vibrar de flexão, conforme a figura 6.14.



As funções resposta ao desbalanceamento (FRDs) para os nós de mancal e massa concentrada, para cada uma das geometrias de mancal, são:



Figura 6.15a: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 3 (mancal 1), mancal cilíndrico (rotor Laval).



Figura 6.15b: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (disco), mancal cilíndrico (rotor Laval).



Figura 6.16a: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 3 (mancal 1), mancal elíptico (rotor Laval).



Figura 6.16b: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (disco), mancal elípitico (rotor Laval).



Figura 6.17a: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 3 (mancal 1), mancal tri-lobular (rotor Laval).



Figura 6.17b: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (disco), mancal tri-lobular (rotor Laval).

As amplitudes de vibração na ressonância no nó 8 (disco), para os mancais cilíndrico, elíptico e tri-lobular são de, respectivamente, 334, 413 e 408 µm. Portanto, como quanto maior a vibração no disco maior a rigidez do mancal, o mancal mais rígido é o elíptico, seguido pelo trilobular e cilíndrico. Como já ressaltado, a freqüência natural do rotor não apresenta mudanças com relação ao mancal considerado apoiado (25,07 Hz), para as configurações de mancal e de eixo consideradas para este estudo.

Anisotropia é inserida no sistema pelos mancais flexíveis, o que pode ser percebido pela diferença entre as respostas nas direções horizontal e vertical, tanto nos mancais quanto no disco rígido. O maior efeito de anisotropia é encontrado no sistema com mancal elíptico, e o grau de anisotropia para o sistema, tanto com mancal cilíndrico quanto com mancal tri-lobular, é semelhante (figura 6.17a).

#### 6.2 Turbo-grupo

Será apresentada, na seqüencia, uma aplicação prática (CAVALCA, 1993) do pacote de programas *Rotortest*. Um turbo-grupo, composto por três eixos e sete mancais, e discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, é esquematizado na figura 6.18. Nesta figura os mancais são representados por triângulos azuis enquanto as excitações são representadas pelas setas cinza. Os dados geométricos dos mancais e as características das excitações por massa desbalanceada são apresentados, respectivamente, nas tabelas 6.03 e 6.04. Os acoplamentos entre os eixos são considerados rígidos.



Figura 6.18: Turbo-grupo (CAVALCA, 1993).

|        |              | 8       |        |        |         | 8,       |           |
|--------|--------------|---------|--------|--------|---------|----------|-----------|
| Mancal | Posição [nó] | Lóbulos | L [mm] | D [mm] | Cr [µm] | Tito [°] | Pré-Carga |
| 1      | 2            | 3       | 216    | 304    | 337     | 5        | 0,20      |
| 2      | 19           | 3       | 150    | 355,3  | 337     | 5        | 0,20      |
| 6      | 26           | 2       | 370    | 431,1  | 435     | 5        | 0,25      |
| 7      | 39           | 2       | 300    | 430,9  | 435     | 5        | 0,25      |
| 3      | 48           | 2       | 286    | 456    | 300     | 5        | 0,25      |
| 4      | 63           | 2       | 286    | 456    | 300     | 5        | 0,25      |
| 5      | 69           | 1       | 160    | 220    | 400     | 0        | 0         |

Tabela 6.03: Características geométricas dos mancais hidrodinâmicos do turbo-grupo.

Tabela 6.04: Dados para as forças de excitação externa por massa residual desbalanceada.

|           |              | 3 3 1               |                    |            |
|-----------|--------------|---------------------|--------------------|------------|
| Excitação | Posição [nó] | Massa residual [kg] | Excentricidade [m] | Ângulo [°] |
| 1         | 8            | $2,5x10^{-2}$       | $4x10^{-1}$        | 90         |
| 2         | 32           | $5 \times 10^{-2}$  | $4x10^{-1}$        | 180        |
| 3         | 57           | $1 \times 10^{-1}$  | $4x10^{-1}$        | 0          |

O diagrama do esforço cortante na direção vertical (z) é calculado e a maior força de reação encontra-se no mancal 6. Interessante notar que a reação no mancal situado na extremidade direita do rotor (mancal sete), tem sentido oposto às que ocorrem nos demais mancais.


Figura 6.19: Diagrama das reações nos apoios na direção vertical para o turbo-grupo.

Resumindo-se o gráfico do diagrama das reações nos apoios (figura 6.19), obtêm-se os valores das forças utilizadas no cálculo da distribuição de pressão, lócus do eixo e coeficientes equivalentes para cada um dos mancais.

| Mancal | F <sub>z</sub> [kN] |
|--------|---------------------|
| 1      | 126,0               |
| 2      | 113,0               |
| 6      | 266,9               |
| 7      | 235,2               |
| 3      | 255,5               |
| 4      | 443,2               |
| 5      | -153,7              |

Tabela 6.05: Forças de reação nos mancais do turbo-grupo.

Os mancais hidrodinâmicos, operando à temperatura de 30°C, com óleo ISO VG32 (viscosidade de 60,45 mPa.s), têm seus coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento determinados para a faixa de freqüência de 15 a 335 Hz. O Método dos Volumes Finitos foi utilizado para a resolução da distribuição de pressão no interior dos mancais.



Figura 6.20a: Coeficientes de rigidez no mancal 1 do turbo-grupo.



Figura 6.21a: Coeficientes de rigidez no mancal 2 do turbo-grupo.



Figura 6.20b: Coeficientes de amortecimento no mancal 1 do turbo-grupo.



Figura 6.21b: Coeficientes de amortecimento no mancal 2 do turbo-grupo.



Figura 6.22a: Coeficientes de rigidez no mancal 3 do turbo-grupo.



Figura 6.23a: Coeficientes de rigidez no mancal 4 do turbo-grupo.



Figura 6.22b: Coeficientes de amortecimento no mancal 3 do turbo-grupo.



Figura 6.23b: Coeficientes de amortecimento no mancal 4 do turbo-grupo.



Figura 6.24a: Coeficientes de rigidez no mancal 5 do turbo-grupo.



Figura 6.25a: Coeficientes de rigidez no mancal 6 do turbo-grupo.



Figura 6.24b: Coeficientes de amortecimento no mancal 5 do turbo-grupo.



Figura 6.25b: Coeficientes de amortecimento no mancal 6 do turbo-grupo.



Tanto os coeficientes de rigidez quanto os de amortecimento têm comportamento similar entre os pares de mancais 1 e 2, 3 e 4, 6 e 7. O comportamento do mancal 5 diverge bastante do obtido para os demais, com os coeficientes de rigidez diminuindo com o aumento da velocidade de rotação do eixo, devido, principalmente, a sua configuração geométrica, pois é um mancal cilíndrico. O fato do sentido da força ser negativo não influi nos coeficientes, uma vez que estes representam a medida da força de sustentação do mancal, a qual equilibra a força de carregamento devido ao eixo.

Com relação à estabilidade, em altas velocidades, comparando-se a diferença, em módulo, entre os coeficientes  $K_{zz}$  e  $K_{yz}$  e,  $K_{yy}$  e  $K_{zy}$ , os mais estáveis são, em ordem crescente, 5 (cilíndrico), 1 e 2 (tri-lobulares) e, finalmente, os mancais 3, 4, 6 e 7 (elípticos). A menor estabilidade dos mancais tri-lobulares, se comparados aos elípticos, deve-se às menores cargas a que estão sujeitos e às pré-cargas inferiores.

O diagrama de Campbell para o turbo-grupo, considerando os mancais como apoiados, é utilizado para a determinação das freqüências críticas do sistema rotativo. Na figura 6.27, as primeiras 15 freqüências críticas são apresentadas no diagrama de Campbell. Deve-se, contudo, investigar em quais das freqüências ocorrem elevadas amplitudes, em condições de operação, já que muitos dos modos de vibrar são amortecidos, especialmente nas freqüências críticas mais elevadas, a ponto destas não serem sequer detectados na resposta no domínio da freqüência.



Com o intuito de investigar as freqüências naturais ocorrendo nos nós de interesse, ou seja, nós de mancal (2, 19, 26, 39, 48, 63, 69) e de excitação (8, 32, 57), a resposta ao desbalanceamento de massa residual é avaliada, para as rotações mínima e máxima de, respectivamente, 15 e 335 Hz.



Figura 6.28: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 2 (mancal 1), turbo-grupo.



Figura 6.29: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 8 (excitação 1), turbo-grupo.



Figura 6.30: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 19 (mancal 2), turbo-grupo.



Figura 6.31: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 26 (mancal 6), turbo-grupo.



Figura 6.32: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 32 (excitação 2), turbo-grupo.



Figura 6.33: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 39 (mancal 7), turbo-grupo.



Figura 6.34: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 48 (mancal 3), turbo-grupo.



Figura 6.35: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 57 (excitação 3), turbo-grupo.



Figura 6.36: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 63 (mancal 4), turbo-grupo.



Figura 6.37: Amplitude de vibração vertical e horizontal nó 69 (mancal 5), turbo-grupo.

A amplitude de vibração da resposta na direção horizontal é maior que na direção vertical nos pontos de localização dos mancais. Para os nós de excitação, ocorre o contrário, com a amplitude na direção vertical maior que na horizontal. Nota-se que as amplitudes máximas nos nós de excitação são aproximadamente o dobro das amplitudes máximas nos mancais. O mancal cilíndrico é o menos rígido de todos, o que pode ser verificado pelas amplitudes máximas nas direções y e z, respectivamente (figura 6.37). Os demais mancais apresentam vibrações na mesma ordem de grandeza.

Uma particularidade para os nós de excitação (8, 32 e 57) é a ocorrência de uma primeira freqüência natural em 17,5 Hz na direção vertical (z), com amplitude bem superior às que ocorrem para as demais velocidades de rotação do eixo, devendo o sistema operar fora desta situação crítica. O efeito da anisotropia para os nós de excitação é pequeno, especialmente para altas rotações, ao passo que o efeito da anisotropia na resposta dos mancais é expressivo.

Algumas das freqüências naturais percebidas são: 17.5; 20.7; 27.1; 39.8, 46.2; 49.3; 70.0; 76.4; 87.5, 92.3, 130.5, 135.3, 144.8, 178.3, 195.8, 216.5 e 273.7 Hz. Contudo, o modo de vibrar operacional será apresentado para as velocidades de 17.5, 70.0, 138.3 e 197.4 Hz.





Desta forma, verifica-se que, no caso do turbo-grupo aqui analisado, as diversas combinações possíveis, entre os modos de vibrar dos três rotores, geram uma ampla gama de possibilidades em termos de modos operacionais do conjunto rotativo. Certamente, o sistema rotativo, em operação prática, apresenta comportamento consideravelmente complexo à medida que mais componentes são incorporados e detalhados em sua modelagem, como por exemplo,

acoplamentos flexíveis, selos de fluxo e estruturas de suporte (ou fundação). Tais contribuições são agora viáveis dentro do pacote computacional *Rotortest* em sua atual versão.

Além da análise especifica de cada rotor do turbo-grupo, a análise do conjunto completo mostra-se como um importante requisito de projeto para este grupo de máquinas.

#### 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho adota a modelagem do sistema rotativo completo para melhor representação do comportamento dinâmico da máquina, sendo sua principal contribuição a logística das informações e a padronização dos arquivos utilizados no software *Rotortest*, possibilitando futuras atualizações e desenvolvimentos de novos modelos de forma estruturada e robusta.

Foi realizada uma ampla revisão da literatura com ênfase nas áreas de modelagem do sistema mecânico através do Método dos Elementos Finitos. Esse item visou explanar o desenvolvimento da pesquisa na área em que o presente trabalho se insere, buscando mostrar os avanços e as necessidades de desenvolvimento. Essa revisão da literatura foi complementada por capítulos específicos sobre a modelagem matemática e computacional de sistemas rotativos e discutição da metodologia utilizada.

A modelagem do sistema adotada neste trabalho considera modelos de discos rígidos e elementos de viga para representação do rotor, além dos mancais hidrodinâmicos radiais, através de seus coeficientes equivalentes de rigidez e amortecimento; também a fundação teve seu comportamento contemplado na resposta do sistema completo por três diferentes abordagens, a saber: Parâmetros Concentrados de Massa-Amortecimento-Rigidez, Método das Impedâncias Mecânicas e Método das Coordenadas Mistas.

Partiu-se de uma fase preliminar de validação onde, após a implementação computacional de cada modelo numérico, foi realizada a verificação teórica com elementos simples de viga, passíveis de solução direta através da teoria de resistência dos materiais, e avaliadas as reações nos apoios, associadas às diferentes condições de contorno. Posteriormente, a resposta dinâmica do rotor Laval também foi obtida por simulação numérica, analisando-se a influência do momento giroscópico na vibração de um rotor com disco descentralizado e de um rotor com dois discos. Finalmente, para o mesmo rotor Laval, a fundação foi introduzida no sistema e a concordância dos resultados foi analisada.

A influência de diferentes tipos de mancais hidrodinâmicos na resposta dinâmica de um rotor Laval e a modelagem de um turbo-grupo também foram objeto de estudo deste trabalho.

As simulações proporcionaram resultados coerentes e satisfatórios, que levaram a conclusões que validaram os modelos utilizados, espelhando também um equacionamento consistente e uma modelagem correta do problema. A concordância dos resultados e a robustez do pacote computacional demonstram que a metodologia adotada pode ser extendida a outros modelos de máquinas rotativas. Também ficam demonstradas as potencialidades de análise do sistema através do diagrama de esforços, da distribuição de pressão, lócus do eixo e coeficientes dinâmicos equivalentes nos suportes, além da resposta em freqüência (amplitude e fase), diagrama de Campbell e deformação operacional do rotor.

#### 7.1 Sugestões de Trabalhos Futuros

Certamente, o sistema rotativo, em operação prática, apresenta comportamento consideravelmente complexo, à medida que mais componentes são incorporados e detalhados em sua modelagem. Tais contribuições são viáveis dentro do pacote computacional *Rotortest* em sua atual versão. A seguir são listados alguns desdobramentos de pesquisa decorrentes deste trabalho.

- Introdução da análise de vibrações axiais e torcionais;
- Consideração de diferentes modelos de falha, tais como o desalinhamento e empenamento de eixos, forças externas devidas ao engrenamento e/ou fluido de operação, entre outras;
- Modelagem de acoplamentos flexíveis e selos de fluxo;
- Introdução de mancais hidrodinâmicos segmentado e axial e, de mancais de elementos rolantes, além de efeitos diversos, como a temperatura nas propriedades dos lubrificantes.
- Análise no domínio do tempo: start up e run down.
- Efeito do solo.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

ARCHER, J. S. Consistent mass matrix for distributed mass systems. ASME Journal of Structural Division, v. 89, p. 161, 1963.

BENTLY, D. E.; GOLDMAN, P.; YU, J. J. The advantages of dynamic stiffness parameters over classical bearing coefficients. **Orbit**, v. 3, p. 23-208, 2001.

BEOLCHINI, G. C. A parametric analysis for vibrating machine foundations. In: International Conference Rotordynamic Problems in Power Plants, 1982, Rome. **Proceedings...** Rome: International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science, 1982, p. 191-201.

CAMPBELL, W. E. The protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration. **Trans. ASME**, p. 31–160, 1924.

CASTRO, H. F. Análise de Mancal Hidrodinâmico sob instabilidade fluido-induzida. 2007. 176 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

CASTRO, H. F.; CAVALCA, K. L. Analysis of fluid-induced instability using dynamic stiffness and nonlinear journal bearing model. In: 9TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON VIBRATION IN ROTATING MACHINERY, 2008, Exeter. IMechE2008, London, v. 1. p. 359-370, 2008.

CAVALCA, K. L. L'Interazione tra rotori e struttura portante: metodologie per la sua modellazione. 1993. 143 p. Tese (Doutorado) - Milano: Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano.

CAVALCA, K. L.; CAVALCANTE, P. F.; OKABE, E. P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. **Mechanical Systems And Signal Processing**, Cambridge, UK, v. 19, n. 1, p. 157-174, 2006.

CHILDS, D. Turbomachinery rotordynamics. Phenomena, modeling and analysis. John Wiley & Sons, New York, 1993. 476 p.

COWPER, G. R. The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. Journal of Applied Mechanics, v. 33, p. 335-340, 1966.

CRAGGS, A. A component mode method for modelling dynamics of turbo-generator sets. **Journal of Sound and Vibration**, v. 117, n. 2, p. 277-288, 1987.

CRAIG, R. R. Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods. New York: John Wiley & Sons, 1981. 585 p.

DIANA, G.; CHELI, F.; VANIA, A. A method to identify the foundation modal parameters through measurements of the rotor vibrations. In: Fifth International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, 1988, Cambridge. **Proceedings...** Cambridge: Institution of Mechanical Engineers, 1988, p. 217-222.

DIANA, G.; MASSA, E.; PIZZIGONI. A finite element method for computing oil whirl instability of a rotating shaft supported by elastic bearings, **I. Mech. E.**, p. 659-663, 1975.

DIANA, G.; MASSA, E.; PIZZIGONI, B.; MARCANTONI-TADDEI, C. A forced vibration method to calculate the oil film instability threshold for rotor-foundation systems. In: International Conference Rotordynamic Problems in Power Plants, 1982, Rome. **Proceedings...** Rome: International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science, 1982, p. 191-201.

DIMARAGONAS, A. D. A general method for stability analysis of rotating shafts. **Ingenieur-Archive**, v. 44, p. 9-20, 1975.

DUNKERLEY, S. On the whirling and vibration of shafts. **Phil. Trans. of the Royal Society**, v.185, n. I, p. 279-360, 1895.

DYM, C. L.; SHAMES, I. H. Solid mechanics – A variational approach, McGraw-Hill, 1973.

EHRICH, F. F. Handbook of Rotordynamics, New York: McGraw Hill, 1992.

ESHLEMAN, R. L. Critical speeds and response of flexible rotor systems. **ASME Flexible Rotor-Bearing System Dynamics**, v. 1, 1972.

ESHLEMAN, R. L.; EUBANKS, R. A. On the critical speeds of a continuous rotor. **ASME** Journal of Engineering for Industry, v. 91, p. 1180-1188, 1969.

FÖPPL, A. Das Problem der Lavalschen Turbinenwelle. Der Civilingenieur, v. 4, p. 335-342, 1895.

GASCH, R. Vibration of large turbo-rotors in fluid film bearings on an elastic foundation. **Journal of Sound and Vibration**, v. 47, p. 53-73, 1976.

GENTA, G. Consistent matrices in rotor dynamics. Meccanica, v. 20, p. 421-430, 1985.

GENTA, G.; GUGLIOTTA, A. A conical element for finite element rotor dynamics. **ASME Journal of Sound and Vibration**, v. 120, p. 175-182, 1988.

GENTA, G.; GUGLIOTTA, A., BRUSSINO, G. Um modello per lo studio dinâmico dei rotori. **VII Congress Naz. AIMETA**, Thieste, 1984.

GUNTER, E. J. Unbalance Response and Field Balancing of an 1150-MW Turbine-Generator with Generator Bow. In: Seventh International Conference on Rotor Dynamics, 2006, Vienna. **Proceedings...** Vienna: International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science, 2006, Paper-ID 331, 10p.

GREENHILL, L. M.; BICKFORD, W. B.; NELSON, H. D. A conical beam finite element for rotor dynamics analysis. Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, v. 107, p. 421-430, 1985.

HUMMEL, C. Kristische Drehzahlen als Folge der Nachgiebgkeit des Schmiermittels im Lager, VDI Forschungsheft, 1926. 287p.

JEFFCOTT, H. H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighbourhood of a whirling speed. **Phil. Mag.**, v. 6, n. 37, p. 304-314, 1919.

KRAMER., E. Dynamics of rotors and fundations. New York: Springer-Verlag., 1993. 381p.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. **Rotordynamics prediction in engineering**, Chichester: John Wiley & Sons, 1998, 266 p.

LEE, C. W. Vibration Analysis of Rotors. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993. 312p.

LEES, A. W.; SINHA, J.; FRISWELL, M.I. Model based identification of rotating machines. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 23, n. 6, p. 1884-1893, 2009.

LUND, J. W. Spring and damping coefficients for the tilting-pad journal bearing. **ASME Transactions**, n.7, p.342-352, 1964.

LUND, J. W. Review of the concept of dynamic coefficients for fluid film journal bearings. **ASME Journal of Tribology**, v. 109, p. 37-41, 1987.

MACHADO, T. H. **Avaliação de mancais hidrodinâmicos para aplicação em altas rotações e elevadas condições de carga**. 2009. 87 p. Trabalho de Graduação – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

MACHADO, T. H.; CAVALCA, K. L. Evaluation of dynamic coefficients for fluid journal bearings with different geometries. In: 20TH INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM 2009, 2009. Proceedings of the 20th International Congress of Mechanical Engineering. Rio de Janeiro: ABCM, 2009. v. 1. p. 1-11.

MAKRIS, N.; TAZOH, T.; YUN, X.; FILL, A. C. Prediction of the measured response of a scaled soil-pile-superstructure system. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 16, n. 2, p. 113-124, 1997.

MERUANE, V.; PASCUAL, R. Identification of nonlinear dynamic coefficients in plain journal bearings. **Tribology International**, v. 41, p. 743-754. 2008.

MORTON, P. G. Analysis of rotors supported upon many bearings. Journal of Mechanical Enginnering Science, v. 14, n. 1, p. 25-33, 1972.

MYKLESTAD, N. O. A new method of calculating natural modes of uncoupled bending vibrations. **Int. Aeron. Sci.**, v. 11, p. 153-162, 1944.

NELSON, H. D. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory. **ASME Journal** of Mechanical Design, v. 102, n. 4, p. 793-803, 1980.

NELSON, H. D.; McVAUGH, J. M. The dynamics of rotor-bearing systems using finite elements. **ASME Journal of Engineering for Industry**, v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976.

NEWKIRK, B. L.; TAYLOR, H. D. Shaft whipping. General Electric Review, v. 27, n. 3, p. 169-178, 1924.

NEWKIRK, B. L.; TAYLOR, H. D. Shaft whipping due to oil action in journal bearings. General Electric Review, v. 28, n. 8, 1925, 1925.

OCVIRK, E W. Short bearing approximation for full journal bearings. National Advisory Committee for Aeronautics, Technical Note 2808, Cornell University, 1952.

OKABE, E. P. Interação rotor-estrutura: modelo teórico-experimental. 2007. 154 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PINKUS, O. Analysis of eliptical bearings. Transactions of ASME, v. 78, p. 965-973, 1956.

PINKUS, O. Solution of Reynolds equation for finite journal bearings. **Transactions of ASME**, v. 80, p. 858-864, 1958.

PINKUS, O. Analysis and characteristics of three-lobe bearings. **Journal of Basic Engineering**, p. 49-55, 1959.

POLK, S. R.. Finite element formulation and solution of flexible rotor-rigid disc systems for natural frequencies and critical whirl speeds. **MSE Engineering Report**, Arizona State University, 1974.

PRABHU B. S.; SEKHAR, A. S. **Dynamic analysis of rotating systems and applications**. UK: Multi Science Publishing Co. Ltd, 2008.

PROHL, M. A. A general method of calculating critical speeds of flexible rotors. **ASME Journal Appl. Mech. Trans.**, v. 67, n. E, p. 142-146, 1945.

RANKINE, W. J. M. On the centrifugal force of rotating shafts. The Engineer, v. 27, 1869.

RAO, J. S. A note on Jeffcott warped rotor. Mechanism and machine theory, v. 36, n. 5, p. 563–575, 2001.

REYNOLDS, O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. **Philosophical Transactions of Royal Society of London**, Series A, v. 177, Part 1, p.157-234, 1886.

ROUCH, K. E.; KAO, J. S. A tapered beam finite element for rotor dynamics analysis. **ASME** Journal of Sound and Vibration, v. 66, n. 1, p. 119-140, 1979.

RUHL, R. L. Dynamics of distributed parameter turborotor systems: transfer matrix and finite element techniques. 1970. Tese (Doutorado), Cornell University, Ithaca, N. Y.

RUHL, R. L.; BOOKER, J. F. A finite element model for distributed parameter turborotor systems. **ASME Journal of Engineering for Industry**, v.94, p. 128-132, 1972.

SANTANA, P.M. **Resposta complexa de um sistema rotor-mancais-fundação**. 2009. 94 p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SOMMERFELD, A. Zur Hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Zs. Math. and Phys., v. 50, n. 1, p. 97-155, 1904.

STEPHENSON, R. W.; ROUCH, K. E. Generating matrices of the foundation structure of a rotor system from test data. **Journal of Sound and Vibration**, v. 154, n. 3, p. 467-484, 1992.

STODOLA, A. Kritische Wellenstorung infolge der Nachgiebigkeit des Oelpolsters im Lager. Schweizerische Bauzeiting, v. 85, p. 265-266, 1925.

TAPIA, A. T. Modelagem dos acoplamentos mecânicos nos sistemas horizontais rotoracoplamento-mancal. 2003. 250 p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TO, C. W. S. A linearly tapered beam finite element incorporating shear deformation and rotatory inertia for vibration analysis. **ASME Journal of Sound and Vibration**, v. 78, n. 4, p. 475-484, 1981.

TOWER, B. First report on friction experiments. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 632-659, 1883.

TOWER, B. Second report on friction experiments. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 58-70, 1885.

THOMAS, D. L.; WILSON, J. M.; WILSON, R. R. Timoshenko beam finite elements. **ASME** Journal of Sound and Vibration, v. 31, n. 3, p. 315-330, 1973.

THORKILDSEN, T. Solution of a distributed mass and unbalanced rotor system using a consistent mass matrix approach. **MSE Engineering Report**, Arizona State University, 1972.

WANG, K. F.; KHONSARI, M. M. Bifurcation analysis of a flexible rotor supported by two fluid-film journal bearings. **Journal of Tribology**, v. 128, n. 3, p. 594-604, 2006.

WEBER, H. Über das gemeinsame Schwingungsverhalten von Welle und Fundament bei Turbinenanlagen. **VDI-Berichte**, n. 48, p. 55-62, 1961.

WEIMING, L.; NOVAK, M. Dynamic behaviour of turbine-generator-foundation systems. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 24, n. 3, p. 339-360, 1996.

WILSON, R. R.; BREBBIA, C. A. Dynamic behaviour of steel foundations for turbo-alternators. **Journal of Sound and Vibration**, v. 18, n. 3, p. 405-416, 1971.

WOWK, V. Machine vibration: alignment. New York: McGraw-Hill, 2000.

XU, M.; MARANGONI, D. Vibration analysis of a motor – flexible coupling – rotor system subjected to misalignment and unbalance, part I: Theoretical model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 176, n. 5, p. 663-680, 1994.

XU, M., MARANGONI, D., Vibration analysis of a motor – flexible coupling – rotor system subjected to misalignment and unbalance, part II: Experimental validation. Journal of Sound and Vibration, v. 176, n. 5, p. 681- 691, 1994.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D. Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping. **ASME Journal of Engineering for Power**, v. 99, n. 1, p. 71-76, 1977.

ZORZI, E. S.; NELSON, H. D. The dynamics of rotor-bearing systems with axial torque – A finite element approach. **ASME Journal of Mechanical Design**, v. 102, p. 158-161, 1980.

## ANEXO A – FUNÇÕES DE FORMA PARA O ELEMENTO DE VIGA CILÍNDRICO

O presente anexo apresenta tanto a matriz de funções de forma de deslocamentos translacionais [ $\Psi$ ] quanto a matriz de funções de forma de deslocamentos rotativos [ $\Phi$ ] para o elemento de viga cilíndrico. As funções de forma individuais para os deslocamentos translacionais e rotativos,  $\psi_i(s) = \frac{1}{1+\Phi} [\alpha_i(s) + \Phi \beta_i(s)]$  e  $\phi_i(s) = \frac{1}{1+\Phi} [\varepsilon_i(s) + \Phi \delta_i(s)]$ , respectivamente, representam os modos de deslocamento estático associados com deslocamento unitário de uma das coordenadas da extremidade com todas as outras coordenadas restritas a zero. As funções  $\alpha_i(s) \in \varepsilon_i(s)$  estão relacionadas com a energia de deformação por flexão, enquanto as funções  $\beta_i(s) \in \delta_i(s)$  estão relacionadas com a energia de deformação por cisalhamento de uma viga de Timoshenko.

$$\alpha_1 = 1 - 3v^2 + 2v^3$$
 (A.01a)  $\beta_1 = 1 - v$  (A.02a)

$$\alpha_2 = l(v - 2v^2 + v^3)$$
(A.01b)
 $\beta_2 = \frac{l}{2}(v - v^2)$ 
(A.02b)

$$\alpha_3 = 3v^2 - 2v^3$$
 (A.01c)  $\beta_3 = v$  (A.02c)

$$\alpha_4 = \frac{l}{2} \left( -v + v^2 \right)$$
(A.01d)
 $\beta_4 = \frac{l}{2} \left( -v + v^2 \right)$ 
(A.02d)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{l} (6v^2 - 6v)$$
 (A.03a)  $\delta_1 = 0$  (A.04a)

$$\varepsilon_2 = 1 - 4v + 3v^2$$
 (A.03b)  $\delta_2 = 1 - v$  (A.04b)

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{l} \left( -6v^2 + 6v \right)$$
 (A.03c)  $\delta_3 = 0$  (A.04c)

$$\varepsilon_4 = 3v^2 - 2v$$
 (A.03d)  $\delta_4 = v$  (A.04d)

onde,  $v = \frac{s}{l}$  (equação 3.31).

## ANEXO B – MATRIZES DO ELEMENTO DE VIGA CILÍNDRICO

A formulação apresentada por Ehrich (1992), baseada nos trabalhos de Nelson e McVaugh (1976) e por Nelson (1980). As matrizes de inércia, dos momentos giroscópicos, de rigidez à flexão, ao carregamento axial e ao torque para um elemento de viga cilíndrico são apresentadas neste anexo. Todas as matrizes do elemento no sistema de coordenadas local são simétricas, exceção feita à matriz dos momentos giroscópicos e de rigidez ao torque. A influência do cisalhamento transversal é contemplada através do parâmetro  $\Phi$  (equação 3.26).

• Matriz de Inércia

$$[M] = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \mu_2 l & \mu_4 & 0 & 0 & -\mu_5 l \\ \mu_1 & -\mu_2 l & 0 & 0 & \mu_4 & \mu_5 l & 0 \\ & \mu_3 l^2 & 0 & 0 & -\mu_5 l & \mu_6 l^2 & 0 \\ & & \mu_3 l^2 & \mu_5 l & 0 & 0 & \mu_6 l^2 \\ & & & \mu_1 & 0 & 0 & -\mu_2 l \\ & & & & \mu_1 & \mu_2 l & 0 \\ & & & & & \mu_3 l^2 & 0 \end{bmatrix}$$
(B.01)

• Matriz de Momento Giroscópico

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -\mu_7 & \mu_8 l & 0 & 0 & \mu_7 & \mu_8 l & 0 \\ 0 & 0 & \mu_8 l & -\mu_7 & 0 & 0 & \mu_8 l \\ & 0 & -\mu_9 l^2 & \mu_8 l & 0 & 0 & \mu_{10} l^2 \\ & 0 & 0 & \mu_8 l & -\mu_{10} l^2 & 0 \\ & 0 & 0 & -\mu_7 & -\mu_8 l & 0 \\ & & 0 & 0 & -\mu_8 l \\ & & 0 & -\mu_9 l^2 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$
(B.02)

• Matriz de Rigidez à Flexão

$$[K_{B}] = \frac{E J_{t}}{l^{3}(1+12\Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6l & -12 & 0 & 0 & 6l \\ 12 & -6l & 0 & 0 & -12 & -6l & 0 \\ & 4l^{2}(1+3\Phi) & 0 & 0 & 6l & 2l^{2}(1-6\Phi) & 0 \\ & & 4l^{2}(1+3\Phi) & -6l & 0 & 0 & 2l^{2}(1-6\Phi) \\ & & & 12 & 0 & 0 & -6l \\ & & & & & 12 & 6l & 0 \\ & & & & & & & 4l^{2}(1+3\Phi) \end{bmatrix}$$
(B.03)  
sim.

• Matriz de Rigidez ao Carregamento Axial

$$\begin{bmatrix} K_{A} \end{bmatrix} = \frac{F_{x}}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & 3l & -36 & 0 & 0 & 3l \\ 36 & -3l & 0 & 0 & -36 & -3l & 0 \\ & 4l^{2} & 0 & 0 & 3l & -l^{2} & 0 \\ & 4l^{2} & -3l & 0 & 0 & -l^{2} \\ & 36 & 0 & 0 & -3l \\ & & 36 & 3l & 0 \\ & & & 4l^{2} & 0 \\ sim. & & & & 4l^{2} \end{bmatrix}$$
(B.04)

• Matriz de Rigidez ao Torque

$$\begin{bmatrix} K_T \end{bmatrix} = M_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & -1/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & -1/l \\ 1/l & 0 & 0 & -1/2 & -1/l & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/l & 1/2 & 0 & 0 & -1/l & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 1/l \\ 0 & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 1/l \\ -1/l & 0 & 0 & -1/2 & 1/l & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/l & 1/2 & 0 & 0 & 1/l & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$
(B.05)

O amortecimento é considerado proporcional:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{B.06}$$

Os coeficientes utilizados nas formulações das matrizes acima são:

$$\mu_1 = (156 + 3528\Phi + 20160\Phi^2)\alpha_T + (36)\alpha_R$$
(B.07a)

$$\mu_2 = (22 + 462\Phi + 2520\Phi^2)\alpha_T + (3 - 180\Phi)\alpha_R$$
(B.07b)

$$\mu_{3} = (4 + 84\Phi + 504\Phi^{2})\alpha_{T} + (4 + 60\Phi + 1440\Phi^{2})\alpha_{R}$$
(B.07c)
$$\mu_{R} = (54 + 1512\Phi + 10080\Phi^{2})\alpha_{R}$$
(B.07d)

$$\mu_4 = (54 + 1512\Phi + 10080\Phi^2)\alpha_T - (36)\alpha_R$$
(B.07d)
(B.07d)
(B.07d)

$$\mu_{5} = (13 + 378\Phi + 2520\Phi^{2})\alpha_{T} - (3 - 180\Phi)\alpha_{R}$$
(B.07e)

$$\mu_{6} = -(3 + 84\Phi + 504\Phi^{2})\alpha_{T} - (1 + 60\Phi - 720\Phi^{2})\alpha_{R}$$
(B.07f)
$$\mu_{R} = (72)\alpha_{R}$$
(B.07g)

$$\mu_7 = (72)\alpha_R \tag{B.07g}$$

$$\mu_8 = 2(3 - 180\Phi)\alpha_R \tag{B.07h}$$
(B.07h)

$$\mu_9 = 2(4 + 60\Phi + 1440\Phi^2)\alpha_R \tag{B.07i}$$

$$\mu_{10} = 2(1+60\Phi)\alpha_R \tag{B.07j}$$

onde,

$$\alpha_{T} = \frac{\rho A l}{420(1+12\Phi)^{2}}$$
(B.08a)
$$\alpha_{R} = \frac{\rho A r^{2}}{120l(1+12\Phi)^{2}}$$
(B.08b)

# ANEXO C – COEFICIENTES PARA O ELEMENTO DE VIGA CÔNICO

Os coeficientes utilizados para o cálculo da área A e para os momentos de inércia diametral (ou transversal)  $J_t$  e polar  $J_p$  da secção transversal de uma viga cônica, assim como no cálculo das matrizes do elemento no sistema de coordenadas local, são:

$$\alpha_1 = 2\pi \left( \frac{R_i \Delta R - r_i \Delta r}{A_i} \right) A_i \qquad (C.01) \qquad \beta_1 = \pi \left( \frac{\Delta R^2 - \Delta r^2}{A_i} \right) A_i \qquad (C.02)$$

$$\alpha_{2} = \pi \left( R_{i}^{3} \Delta R - r_{i}^{3} \Delta r \right) / J_{ii} \qquad (C.03) \qquad \beta_{2} = 3 \pi \left( R_{i}^{2} \Delta R^{2} - r_{i}^{2} \Delta r^{2} \right) / 2 J_{ii} \qquad (C.04)$$

$$\gamma_2 = \pi (R_i \Delta R^3 - r_i \Delta r^3) / J_{ii}$$
 (C.05)  $\delta_2 = \pi (\Delta R^4 - \Delta r^4) / 4 J_{ii}$  (C.06)

onde,

$$\Delta R = R_j - R_i \qquad (C.07) \qquad \Delta r = r_j - r_i \qquad (C.08)$$

# ANEXO D – FUNÇÕES DE FORMA PARA O ELEMENTO DE VIGA CÔNICO

As funções de forma para um elemento de viga cônico são baseadas na formulação usual para um elemento de viga de Timoshenko e estão em função do parâmetro  $\Phi$  (equação 3.26), que pode ser computado pela utilização das propriedades geométricas *A*,  $J_t \in \chi$  da secção transversal, no centro do elemento.

$$[n_{1}]^{T} = \left(\frac{1}{1+\Phi}\right) \begin{bmatrix} 1+\Phi(1-\nu)-3\nu^{2}+2\nu^{3}\\ l\nu\left[1+\frac{1}{2}\Phi(1-\nu)-2\nu+\nu^{2}\right]\\ \nu(3\nu-2\nu^{2}+\Phi)\\ l\nu\left[-\frac{1}{2}\Phi(1-\nu)-\nu+\nu^{2}\right]\end{bmatrix}$$

$$(D.01)$$

$$[n_{2}]^{T} = \left[\frac{1}{l(1+\Phi)}\right] \begin{bmatrix} 6\nu(\nu-1)\\ l\left[1-4\nu+3\nu^{2}+\Phi(1-\nu)\right]\\ -6\nu(\nu-1)\\ l\left[-2\nu+3\nu^{2}+\Phi\nu\right]\end{bmatrix}$$

$$(D.02)$$

### ANEXO E – MATRIZES DO ELEMENTO DE VIGA CÔNICO

As matrizes de inércia de translação e de rotação, dos momentos giroscópicos, de rigidez à flexão, ao carregamento axial e ao cisalhamento, assim como a matriz de amortecimento, para um elemento de viga cônico, segundo formulação apresentada por Genta e Gugliotta (1988), são:

• Matriz de Inércia Translacional

$$[M_{T}] = \frac{\rho A_{i} l}{1260(1+\Phi)^{2}} \begin{bmatrix} m_{1} & lm_{2} & m_{3} & -lm_{4} \\ l^{2}m_{5} & lm_{6} & -l^{2}m_{7} \\ & m_{8} & -lm_{9} \\ sim. & l^{2}m_{10} \end{bmatrix}$$
(E.01)

• Matriz de Inércia Rotacional

$$[M_{R}] = \frac{\rho I_{di}}{210(1+\Phi)^{2}} \begin{bmatrix} m_{11} & lm_{12} & -m_{11} & lm_{13} \\ l^{2}m_{14} & -lm_{12} & -l^{2}m_{15} \\ m_{11} & -lm_{13} \\ sim. & l^{2}m_{16} \end{bmatrix}$$
(E.02)

Matriz de Momento Giroscópico

$$[G] = 2[M_R] \tag{E.03}$$

• Matriz de Rigidez de Flexão

$$\begin{bmatrix} K_B \end{bmatrix} = \frac{EI_{di}}{105l^3(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} k_1 & lk_2 & -k_1 & lk_3 \\ l^2k_4 & -lk_2 & l^2k_5 \\ k_1 & -lk_3 \\ sim. & l^2k_6 \end{bmatrix}$$
(E.04)

• Matriz de Rigidez ao Carregamento Axial

$$\begin{bmatrix} K_A \end{bmatrix} = \frac{P}{30l(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} k_{10} & lk_{11} & -k_{10} & lk_{11} \\ l^2 k_{12} & -lk_{11} & -l^2 k_{13} \\ k_{10} & -lk_{11} \\ sim. & l^2 k_{12} \end{bmatrix}$$
(E.05)

• Matriz de Rigidez ao Cisalhamento Transversal

$$\begin{bmatrix} K_s \end{bmatrix} = \frac{GA_i \Phi^2}{12\chi l(1+\Phi)^2} \begin{bmatrix} k_7 & lk_8 & -k_7 & lk_8 \\ l^2 k_9 & -lk_8 & l^2 k_9 \\ k_7 & -lk_8 \\ sim. & l^2 k_9 \end{bmatrix}$$
(E.06)

• Matriz de Amortecimento Proporcional

$$[C] = \beta([K_B] + [K_S]) \tag{E.07}$$

Os coeficientes utilizados na formulação das matrizes do elemento de viga cônico são apresentados abaixo:

$$m_{1} = (468 + 882\Phi + 420\Phi^{2}) + \alpha_{1}(108 + 210\Phi + 105\Phi^{2}) + \beta_{1}(38 + 78\Phi + 42\Phi^{2})$$
(E.08a)

$$m_{2} = (66 + 115.5\Phi + 52.5\Phi^{2}) + \alpha_{1}(21 + 40.5\Phi + 21\Phi^{2}) + \beta_{1}(8.5 + 18\Phi + 10.5\Phi^{2})$$
(E.08b)  
(1.62 - 2504 - 2104 <sup>2</sup>) - (01 - 1004 - 1054 <sup>2</sup>) - 2(46 - 1114 - 624 <sup>2</sup>) (E.08b)

$$m_{3} = (162 + 378\Phi + 210\Phi^{2}) + \alpha_{1}(81 + 189\Phi + 105\Phi^{2}) + \beta_{1}(46 + 111\Phi + 63\Phi^{2})$$
(E.08c)

$$m_4 = (39 + 94.5\Phi + 52.5\Phi^2) + \alpha_1(18 + 40.5\Phi + 21\Phi^2) + \beta_1(9.5 + 21\Phi + 10.5\Phi^2)$$
(E.08d)

$$m_{5} = (12 + 21\Phi + 10.5\Phi^{2}) + \alpha_{1}(4.5 + 9\Phi + 5.25\Phi^{2}) + \beta_{1}(2 + 4.5\Phi + 3\Phi^{2})$$
(E.08e)  
$$m_{-} = (39 + 94.5\phi + 52.5\phi^{2}) + \alpha_{1}(21 + 54\phi + 31.5\phi^{2}) + \beta_{1}(2.5 + 34.5\phi + 21\phi^{2})$$
(E.08f)

$$m_{6} = (9 + 94.5\psi + 52.5\psi) + \alpha_{1}(21 + 54\psi + 51.5\psi) + \beta_{1}(12.5 + 54.5\psi + 21\psi)$$
(E.08g)  
$$m_{7} = (9 + 21\Phi + 10.5\Phi^{2}) + \alpha_{1}(4.5 + 10.5\Phi + 5.25\Phi^{2}) + \beta_{1}(2.5 + 6\Phi + 3\Phi^{2})$$
(E.08g)

$$m_8 = (468 + 882\Phi + 420\Phi^2) + \alpha_1(360 + 672\Phi + 315\Phi^2) + \beta_1(290 + 540\Phi + 252\Phi^2)$$
(E.08h)

$$m_{9} = (66 + 115.5\Phi + 52.5\Phi^{2}) + \alpha_{1}(45 + 75\Phi + 31.5\Phi^{2}) + \beta_{1}(32.5 + 52.5\Phi + 21\Phi^{2})$$
(E.08i)

$$m_{10} = (12 + 21\Phi + 10.5\Phi^{2}) + \alpha_{1}(7.5 + 12\Phi + 5.25\Phi^{2}) + \beta_{1}(5 + 7.5\Phi + 3\Phi^{2})$$
(E.08j)

$$m_{11} = 252 + 126\alpha_2 + 72\beta_2 + 45\gamma_2 + 30\delta_2$$
(E.08k)  
$$m_{11} = 21 - 105\phi + c_1(21 - 42\phi) + \beta_1(15 - 21\phi) + c_1(105 - 12\phi) + \delta_1(75 - 75\phi)$$
(E.08k)

$$m_{12} = 21 - 105\Phi + \alpha_2(21 - 42\Phi) + \beta_2(15 - 21\Phi) + \gamma_2(10.5 - 12\Phi) + \delta_2(7.5 - 7.5\Phi)$$
(E.081)  
$$m_2 = 21 - 105\Phi - 63\alpha + \beta_2(6 + 42\Phi) - \gamma_2(7.5 + 30\Phi) - \delta_2(7.5 + 22.5\Phi)$$
(E.081)

$$m_{13} = 21 - 105\Phi - 63\alpha_2\Phi - \beta_2(6 + 42\Phi) - \gamma_2(7.5 + 30\Phi) - \delta_2(7.5 + 22.5\Phi)$$
(E.08m)  
$$m_{14} = 28 + 38\Phi + 70\Phi^2 + \alpha_2(7 - 7\Phi + 17.5\Phi^2) + \beta_2(4 - 7\Phi + 7\Phi^2) + \beta_2(4 - 7\Phi^2) + \beta_2(4$$

$$\gamma_{2}(2.75 - 5\Phi + 3.5\Phi^{2}) + \delta_{2}(2 - 3.5\Phi + 2\Phi^{2})$$
(E.08n)

$$m_{15} = 7 + 35\Phi - 35\Phi^{2} + \alpha_{2} (3.5 + 17.5\Phi - 17.5\Phi^{2}) + \beta_{2} (3 + 10.5\Phi - 10.5\Phi^{2}) + \gamma_{2} (2.75 + 7\Phi - 7\Phi^{2}) + \delta_{2} (2.5 + 5\Phi - 5\Phi^{2})$$
(E.08o)

$$m_{16} = 28 + 35\Phi + 70\Phi^{2} + \alpha_{2}(21 + 42\Phi + 52.5\Phi^{2}) + \beta_{2}(18 + 42\Phi + 42\Phi^{2}) + \gamma_{2}(16.25 + 40\Phi + 35\Phi^{2}) + \delta_{2}(15 + 37.5\Phi + 30\Phi^{2})$$
(E.08p)

$$k_1 = 630\alpha_2 + 504\beta_2 + 441\gamma_2 + 396\delta_2 + 1260$$
(E.09a)  
$$k_2 = 630\alpha_2 + 504\beta_2 + 441\gamma_2 + 396\delta_2 + 1260$$
(E.09b)

$$k_{2} = 630 + 210\alpha_{2} + 14/\beta_{2} + 120\gamma_{2} + 114\delta_{2} - \Phi(105\alpha_{2} + 105\beta_{2} + 94.5\gamma_{2} + 84\delta_{2})$$
(E.09b)  
$$k_{2} = 630 + 420\alpha_{2} + 357\beta_{2} + 315\gamma_{2} + 282\delta_{2} + \Phi(105\alpha_{2} + 105\beta_{2} + 94.5\gamma_{2} + 84\delta_{2})$$
(E.09c)

$$k_{3} = 650 + 420\alpha_{2} + 557\beta_{2} + 515\gamma_{2} + 282\delta_{2} + \Phi(105\alpha_{2} + 105\beta_{2} + 94.5\gamma_{2} + 84\delta_{2})$$
(E.09c)

$$k_{4} = 420 + 210\Phi + 105\Phi^{2} + \alpha_{2}(105 + 52.5\Phi^{2}) + \beta_{2}(56 - 35\Phi + 35\Phi^{2}) + \gamma_{2}(42 - 42\Phi + 26.25\Phi^{2}) + \delta_{2}(36 - 42\Phi + 21\Phi^{2})$$
(E.09d)

$$k_{5} = 210 - 210\Phi - 105\Phi^{2} + \alpha_{2}(105 - 105\Phi - 52.5\Phi^{2}) + \beta_{2}(91 - 70\Phi - 35\Phi^{2}) + \gamma_{2}(84 - 52.5\Phi - 26.25\Phi^{2}) + \delta_{2}(78 - 42\Phi - 21\Phi^{2})$$
(E.09e)

$$k_{6} = 420 + 210\Phi + 105\Phi^{2} + \alpha_{2}(315 + 210\Phi + 52.5\Phi^{2}) + \beta_{2}(266 + 175\Phi + 35\Phi^{2}) + \gamma_{2}(231 + 147\Phi + 26.25\Phi^{2}) + \delta_{2}(204 + 126\Phi + 21\Phi^{2})$$
(E.09f)

$$k_7 = 12 + 6\alpha_1 + 4\beta_1$$
(E.09g)

$$k_{8} = 6 + 3\alpha_{1} + 2\beta_{1}$$
(E.09h)  

$$k_{9} = 3 + 1.5\alpha_{1} + \beta_{1}$$
(E.09i)  

$$k_{10} = 36 + 60\Phi + 3\Phi^{2}$$
(E.09j)  

$$k_{11} = 3$$
(E.09k)  

$$k_{12} = 4 + 5\Phi + 2.5\Phi^{2}$$
(E.09l)  

$$k_{13} = 1 + 5\Phi + 2.5\Phi^{2}$$
(E.09m)