ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA	1
TESE DEFENDIDA POR PAULO LEE KUNG	•
CAETAND CHANG EAPROVADA	1
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 03 / 08 / 2010	
Planarullo	
ORIENTADOR	

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Paulo Lee Kung Caetano Chang

Estudo e Simulação Numérica de Materiais Poro-Elásticos Periódicos

Campinas, 2010

87/2010

Paulo Lee Kung Caetano Chang

Estudo e Simulação Numérica de Materiais Poro-Elásticos Periódicos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Renato Pavanello

Campinas 2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

_

C362e	Chang, Paulo Lee Kung Caetano Estudo e simulação de materiais poro-elásticos periódicos / Paulo Lee Kung Caetano Chang Campinas, SP: [s.n.], 2010.
	Orientador: Renato Pavanello. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.
	 Poroelasticidade. 2. Estruturas periódicas. 3. Acústica. 4. Absorção. 5. Método dos elementos finitos. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Numerical simulation of periodic porous materials Palavras-chave em Inglês: Poroelastic, Periodic structures, Acoustics, Absorption, Finite elements method Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica Banca examinadora: Marcelo Areias Trindade, Janito Vaqueiro Ferreira Data da defesa: 03/08/2010 Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Estudo e Simulação Numérica de Materiais Poro-Elásticos Periódicos

Autor: Paulo Lee Kung Caetano Chang

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

quaullo

Prof. Dr. Renato Pavanello, Presidente

DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Marcelo Areias Trindade

USP/São Carlos

ariere

Prof. Dr. Janito Vaqueiro Ferreira DMC/FEM/UNICAMP

Campinas, 03 de agosto de 2010.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Chang e Maria Rita.

Agradecimentos

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao professor Dr. Renato Pavanello pela paciência e pela orientação, nestes últimos 30 meses, que foram vitais para a realização desta tese.

E agradeço também à minha família e amigos, sempre presentes nos bons e maus momentos.

Resumo

CHANG, Paulo Lee Kung Caetano. Estudo e Simulação Numérica de Materiais Poro-Elásticos Periódicos. 2010. 149p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Neste trabalho estuda-se a propagação de ondas em meios elásticos periódicos e meios poro-elásticos. Para o estudo da propagação de ondas em meios elásticos periódicos, modelos discretos uni e bidimensionais são gerados – seguindo padrões encontrados na literatura – e simulados para a obtenção da estrutura de banda e da resposta em frequência, com o objetivo de observar-se o fenômeno *band gap*. Em seguida, estuda-se a propagação de ondas e a absorção em meios poro-elásticos periódicos. As equações diferenciais de movimento acopladas da poro-elasticidade são obtidas da formulação mista (u,p), baseada no modelo de Biot-Allard. A modelagem numérica do problema de propagação de ondas em meios poro-elásticos é feita utilizando-se o método dos elementos finitos. Mostra-se por meio de simulações numéricas como os padrões de periodicidade influenciam na estrutura de banda da matriz elástica do material poro-elástico e no comportamento global da curva de absorção. Finamente, as principais conclusões são apresentadas e sugestões para trabalhos futuros são propostas.

Palavras-chave:

Poroelasticidade, Estruturas Periódicas, Acústica, Absorção, Método dos Elementos Finitos.

Abstract

CHANG, Paulo Lee Kung Caetano. Numerical Simulation of Periodic Porous Materials. 2010. 149p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

In this work, a study of propagation of sound in elastic periodic materials and poroelastic media is made. One and two dimension discreet models are produced – following the literature – for the purpose of studying wave propagation in periodic elastic materials. The band structure and the frequency response of these materials are obtained by simulation of these models with the intention of observing the phenomenon of band gap. The case for periodic porous media is then studied. The wave equations for the poroelastic media are derived from the mixed displacement-pressure formulation based on the Biot-Allard's poroelasticity equations. The numerical solution of the wave propagation in porous media problem is calculated by the finite element method. It is showed how different periodic patterns affect the band structure of the solid phase of the porous materials and its acoustic absorption. Finally, the main conclusions are presented and some suggestions for future work are made.

Keywords:

Poroelastic, Periodic Structures, Acoustics, Absorption, Finite Elements Method.

Lista de Figuras

Escultura por Euseblo Sempere. Consiste em cilindros de aço inoxidável de	
$2,9~\mathrm{cm}$ de diâmetro dispostos periodicamente em uma seção quadrangular	
(Gorishnyy <i>et al.</i> , 2005)	3
Estrutura Unidimensional Infinita	11
Estrutura Unidimensional Semi-Infinita	14
Estrutura unidimensional diatômica	18
Estrutura de banda do material unidimensional diatômico da figura (3.3)	21
Exemplo de uma estrutura unidimensional multiatômica	21
Esquema estrutural de uma célula bidimensional multiatômica	25
Disposição e nomenclatura das molas para a massa $m_{r,s}$	25
Região irredutível de Brillouin, onde o perímetro do triângulo ABC marca	
os valores do vetor de onda γ para o qual o problema de auto-valor deve ser	
avaliado	29
Estrutura bi-periódica	30
Célula da estrutura bi-periódica	31
Componentes do tensor de tensões em um elemento cúbico infinitesimal do	
material poro-elástico	35
Esquema do experimento 2: a malha flexível gera uma pressão na matriz	
elástica $p_{me},$ enquanto o ar dentro da malha mantém-se à pressão constante p_0	41
Esquema do experimento 3: material sem a cobertura da malha flexível e	
submetido a um acréscimo de pressão p_f	42
Curvas dos fatores de forma $G_{tc}(z)$ e $G_{pp}(z')$ para $z' = \frac{3}{4}z$	53
	Escultura por Euseblo Sempere. Consiste em cilindros de aço inoxidável de 2,9 cm de diâmetro dispostos periodicamente em uma seção quadrangular (Gorishnyy et al., 2005)

5.1	Esquema das condições de contorno de uma dado elemento por o-elástico (Silva, $\ $	
	2007)	68
6.1	Estrutura unidimensional periódica (alumínio-PMMA) e modelo discreto equiv-	
	alente	74
6.2	Curvas de dispersão $w = f(\gamma)$ para a malha $N = 4. \dots \dots \dots \dots$	76
6.3	Primeiro band gap para as malhas com N=4, 16 e 64 massas	76
6.4	Curva $\beta = f(w)$: primeiro e terceiro Band Gap para a malha $N = 4$	77
6.5	Estrutura finita com $M = 2$ células	77
6.6	Função resposta em frequência para as malhas com M = 2, 5 e 10 células	78
6.7	Deslocamento das massas da malha com M=10 células para frequências distintas.	79
6.8	Célula bidimensional: matriz flexível com inclusão periódica rígida	80
6.9	Estrutura de banda correspondente à propagação de ondas na malha bidimen-	
	sional infinita.	81
6.10	Malha bidimensional finita.	82
6.11	Resposta em frequência para diferentes malhas	83
6.12	Resposta em frequência da malha para valores frequências de 52,1 kHz (a) e	
	54,8 kHz (b)	84
6.13	Esquema da discretização da barra Alumínio-PMMA por elementos finitos. $% \left({{{\mathbf{x}}_{i}}} \right)$	85
6.14	Curvas de dispersão e FRF para a barra alumínio-PMMA discretizada pelo	
	método dos E.F. em 4, 8, 16, 32, 64 elementos	87
6.15	Comparação dos modelos de discretização da barra alumínio-PMMA pelo	
	método dos E.F., com 64 elementos, e por um sistema massa-mola, com 64	
	massas	88
6.16	Configuração geral dos modelos simulados nesta seção. \ldots	89
6.17	Malha de elementos finitos utilizada para o cálculo da impedância: elemento	
	quad 4. Malha bidimensional com 8 elementos acústicos (Azul) e 80 elementos	
	porosos (Vermelho)	91
6.18	Impedância da fibra de vidro	91
6.19	Configuração dos modelos para o cálculo da absorção	92

6.20	Malha por o-elástica com 80 elementos bidimensionais quadrilaterais isoparamétr 	cos
	do tipo quad4	93
6.21	Comparação da impedância e da absorção da lã de vidro obtida para os mod-	
	elos estrutural e fluido equivalente	95
6.22	Curvas de absorção da lã de vidro com espessura igual a 10 cm, calculadas	
	pelos modelos de Biot-Allard e fluido equivalente	96
6.23	Curvas de absorção da espuma A e da espuma B, ambas com espessura igual	
	a 10 cm, calculadas pelos modelos de Biot-Allard e fluido equivalente $\ .\ .\ .$	98
6.24	Esquema da análise da estrutura poro-elástica periódica unidimensional	100
6.25	Estrutura de banda e resposta em frequência para N=10 do material espuma	
	A/lã de vidro	102
6.26	Curvas de absorção da estrutura por o-elástica espuma A/lã de vidro para N=1,	
	2, 5 e 10 células	103
6.27	Curvas de absorção da lã de vidro, espuma A e espuma B com espessuras de	
	5, 10 25 e 50 cm	105
6.28	Mapa da potência dissipada estrutural, viscosa e térmica na frequência de 850	
	Hz para estruturas do tipo espA/lã, com 1 e 5 células	106
6.29	Mapa da potência dissipada estrutural, viscosa e térmica nas frequências de	
	300 e 500 Hz para a estrutura do tipo esp A/lã com 5 células	107
6.30	Curvas de absorção da estrutura poro-elástica lã de vidro/ espuma A para	
	N=1, 2, 5 e 10 células	108
6.31	Estrutura de banda e resposta em frequência para N=10 do material esp B/lã.	108
6.32	Curvas de absorção da estrutura por o-elástica espuma B/lã de vidro para N=1,	
	2, 5 e 10 células	109
6.33	Esquema da análise da estrutura por o-elástica periódica bidimensional. $\ .\ .$	111
6.34	Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 1: matriz=espuma B; in-	
	clusão=lã de vidro; $l_{cel} = 7cm$; $l_{inc} = 0, 5l_{cel}$.	114
6.35	Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 2: matriz=espuma B; in-	
	clusão=lã de vidro; $l_{cel} = 7cm$; $l_{inc} = 0,75l_{cel}$.	115

6.36	Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 3: matriz=espuma A; in-	
	clusão=lã de vidro; $l_{cel} = 7cm$; $l_{inc} = 0,75l_{cel}$.	116
6.37	Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 4: matriz=espuma A; in-	
	clusão=lã de vidro; $l_{cel} = 3, 5cm; l_{inc} = 0, 75l_{cel}$.	117
A.1	Posição do tubo cilíndrico no eixo cartesiano	125
A.2	Forças agindo no elemento diferencial do fluido viscoso	127
A.3	Campo de velocidade do fluido na seção transversal do tubo cilíndrico	127
A.4	Configuração do por o "achatado" modelado por duas placas paralelas $\ .\ .\ .$	129
A.5	Amostra de um material poro-elástico de poros cilíndricos submetido à uma	
	diferença de pressão constante $p_2 - p_1 \dots \dots$	132
A.6	Material poro-elástico com poros oblíquos em campo acústico plano normal à	
	sua superfície	134
C.1	Região da camada limite térmica de um poro [27]	143
D.1	Modelo para o cálculo da absorção de um material poro-elástico homogêneo:	
	Problema 1D	146
D.2	Curvas de absorção do Problema 1D para N=5, 10, 20 e 40 elementos	147
D.3	Modelo para o cálculo da absorção de uma célula contendo 2 materiais poro-	
	elásticos distintos: Problema 2D	148
D.4	Curvas de absorção do Problema 2D para N=4, 8, 12, 16, 20 e 24 elementos	149

Lista de Tabelas

4.1	Constantes e funções para o cálculo de \tilde{b} e \tilde{K}	55
6.1	Tabela com as propriedades do materiais poro-elásticos	90
6.2	Composição e geometria das células poro-elásticas bidimensionais estudadas	112
D.1	Erros relativos e tempos de simulação do problema 1D	146
D.2	Erros relativos e tempos de simulação do problema 1D	149

Sumário

1	Introdução			1
	1.1	Objeti	vos	2
	1.2	Estrut	ura do Texto	4
2	Rev	visão B	ibliográfica	5
	2.1	Band	Gaps em Estruturas Elásticas Periódicas	5
	2.2	Propa	gação de Ondas em Materiais Poro-Elásticos	6
3	Pro	pagaçâ	io de Ondas em Meios Periódicos	10
	3.1	Band	Gaps	10
	3.2	Propa	gação de ondas em materiais elásticos periódicos	11
		3.2.1	Estruturas infinitas monoatômicas	11
		3.2.2	Estruturas infinitas diatômicas	18
		3.2.3	Estruturas infinitas multiatômicas	21
	3.3	Discre	tização de Materiais Elásticos Periódicos por Elementos Finitos	29
4	Pro	pagaçã	io de Ondas em Meios Poro-elásticos	34
	4.1	Model	o Biot-Allard	35
		4.1.1	Relação tensão-deformação	35
		4.1.2	Relações dinâmicas e forças inerciais	44
		4.1.3	Função potencial dissipativa – forças viscosas	50
	4.2	Formu	ılação Mista (u,p)	55

5	Mét	todo d	os Elementos Finitos Aplicado ao Problema Poro-Elástico	59
	5.1	Formu	llação Fraca	59
	5.2	Aprox	imação por Elementos Finitos	61
	5.3	Aprox	imação por Elementos Finitos: Contorno	67
		5.3.1	Condições de contorno impostas: pressão	68
		5.3.2	Condições de contorno impostas: deslocamento	69
		5.3.3	Acoplamento poro-elástico/acústico	70
		5.3.4	Acomplamento poro-elástico/poro-elástico	71
6	Res	ultado	s e Discussão	73
	6.1	Band	Gaps em Estruturas Elásticas Periódicas	74
		6.1.1	Malha unidimensional	74
		6.1.2	Malha bidimensional	79
		6.1.3	Discretização da estrutura periódica pelo método dos elementos finitos	85
	6.2	Model	agem Numérica da Propagação de Ondas em Materiais Poro-elásticos .	89
		6.2.1	Validação do modelo numérico	89
		6.2.2	Cálculo da absorção	92
	6.3	Discus	são da Periodicidade em Materiais Poro-Elásticos	99
		6.3.1	Estruturas poro-elásticas periódicas unidimensionais	99
		6.3.2	Estruturas poro-elásticas periódicas bidimensionais	109
7	Con	nclusõe	s	118
\mathbf{A}	Efei	itos Vi	scosos em Poros	125
	A.1	Escoar	mento Viscoso Harmônico em Tubos Cilíndricos e Placas Paralelas Infinita	s125
		A.1.1	Tubo cilíndrico	125
		A.1.2	Placas paralelas	129
	A.2	Escoar	mento do Fluido em Múltiplos Poros	132
		A.2.1	Poros cilíndricos	132
		A.2.2	Poros achatados	133
		A.2.3	Fluxo em poros oblíquos: Tortuosidade	134

B Efeitos Térmicos em Poros

\mathbf{C}	Tortuosidade Dinâmica e Comprimentos Característicos Viscoso e Térmico14						
	C.1	Tortuosidade dinâmica	141				
	C.2	Comprimento característico viscoso	142				
	C.3	Comprimento característico Térmico	143				
	C.4	Função $G(z)$ avaliada por (Jonhson <i>et al</i> , 1987) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	144				
F							
D	Análise de Convergência 1						
	D.1	Problema 1D	145				
	D.2	Problema 2D	147				

137

Capítulo 1

Introdução

Materiais poro-elásticos são amplamente utilizados devido suas propriedades de absorção e isolação acústica – associadas às suas características de amortecimento – em projetos de controle de ruídos em automóveis, isolamento acústico em aeronaves, projetos de controle da qualidade do som em ambientes domésticos e industriais, customização de teatros e auditórios, isolação de estúdios de gravação etc.

Estudos extensivos vêm sendo conduzidos visando o modelamento analítico e numérico de problemas que envolvem a propagação de ondas, acústicas e elásticas, em materiais poroelásticos. Nos últimos 30 anos, foram desenvolvidos vários modelos numéricos utilizando o método dos elementos finitos para a avaliação da absorção acústica de materiais poroelásticos, fato impulsionado pelo grande número de aplicações desse material na indústria e pela comprovada eficiência da aplicação de métodos de simulação em projetos de sistemas vibro-acústicos. Nesse contexto, um dos principais desafios consiste em melhorar as propriedades de absorção acústica dos materiais poro-elásticos na região de baixas frequências, sem o aumento substancial do peso.

Em contrapartida, aplicações estruturais de materiais elásticos periódicos em que faz-se uso do fenômeno *band gap* – ou *stop band* – são pouco exploradas em aplicações da vibroacústica. Estas estruturas periódicas geram interferência nas ondas que a atravessam; numa dada faixa de frequência, essas ondas são dispersadas e não se propagam pela estrutura – tal é o *band gap*. Para essas estruturas existe um grande potencial de aplicação na indústria como, por exemplo, filtros mecânicos, dispositivos sônicos, isoladores acústicos etc. Em construções civis, a acústica arquitetônica pode também beneficiar-se do fenômeno band gap. Um exemplo seria a escultura feita por Euseblo Sempere, composta por tubos cilíndricos dispostos periodicamente em uma seção quadrangular (Figura 1.1). Em 1995, o Instituto de Ciências de Madri mostrou que as ondas que se propagavam perpendicularmente aos eixos dos cilindros da escultura eram intensamente atenuadas à frequência de 1670 Hz. Esse resultado gerou a primeira evidência experimental da existência de band gaps para ondas mecânicas (Gorishnyy *et al.*, 2005). No meio acadêmico, o estudo, por exemplo, de estruturas elásticas nano-periódicas podem levar a novas descobertas sobre o comportamento de materiais elásticos periódicos e futuras aplicações.

Nos últimos 15 anos, verifica-se um enorme crescimento na comunidade científica de estudos e publicações sobre *band gaps* fonônicos (do inglês *phononic*), impulsionado, em grande parte, pela vasta quantidade de textos e artigos já existentes sobre *band gaps* fotônicos (do inglês *photonic*), fenômeno que ocorre em estruturas periódicas com materiais de propriedades dielétricas diferentes, em que, numa certa banda de frequência, ondas eletromagnéticas não se propagam pela estrutura do cristal. Como os problemas de propagação de ondas elásticas e eletromagnéticas são similares, grande parte da teoria utilizada no estudo de materiais periódicos elásticos provém de estudos anteriores em cristais fotônicos.

Neste trabalho, pretende-se abrir uma nova frente de estudos que se refere à utilização de modelos poro-elásticos como estudo de *band gaps* fonônicos. O número de estudos e publicações referentes ao estudo de estruturas periódicas contendo materiais poro-elásticos na comunidade científica é praticamente nulo – os estudos da área concentram-se, atualmente, na otimização topológica da geometria desses materiais, mas pouco se estudou sobre a ocorrência de *band gaps* em estruturas periódicas poro-elásticas.

1.1 Objetivos

O presente trabalho dedica-se ao estudo e a modelagem do fenômeno de *band gap* aplicado ao projeto de sistemas de absorção poro-acústicos. Nesse contexto, o objetivo principal é estudar e compreender os fenômenos de cancelamento de frequência presentes em estruturas periódicas gerando, para tanto, uma ferramenta de simulação para representar este



Figura 1.1: Escultura por Euseblo Sempere. Consiste em cilindros de aço inoxidável de 2,9 cm de diâmetro dispostos periodicamente em uma seção quadrangular (Gorishnyy *et al.*, 2005).

comportamento em materiais elásticos e poro-elásticos.

Como objetivos específicos, ressaltam-se os seguintes:

- Entender a fenomenologia e implementar modelos elásticos discretizados (tipo massamola ou por elementos finitos) periódicos infinitos;
- Avaliação do surgimento de *band gaps* e estudo de seu efeito em modelos finitos;
- Estudo e utilização de um modelo poro-elástico discretizado e aproximado usando o método dos elementos finitos;
- Projeto e construção de um simulador de sistemas poro-acústicos periódicos finitos;
- Avaliação do surgimento do fenômeno de *band gap* em sistemas periódicos poro-acústicos e sua influência nas curvas de absorção do sistema.

1.2 Estrutura do Texto

Para expor a metodologia adotada e os resultados obtidos com vistas a alcançar os objetivos pretendidos, o presente texto foi organizado da maneira a seguir:

No capítulo 2, apresenta-se uma revisão histórica da literatura sobre *band gaps* fonônicos, sobre a poro-elasticidade e sobre a aplicação do método dos elementos finitos em problemas poro-elásticos.

O capítulo 3 mostra a teoria estudada sobre o fenômeno *band gap*; algumas ferramentas matemáticas para a discretização e cálculo da estrutura de banda de materiais elásticos periódicos ilimitados encontradas na literatura são expostas.

No capítulo 4, apresenta-se o estudo feito sobre a propagação de ondas em meios poroelásticos. É exposta a evolução dos modelos de equações diferenciais do problema da poroelasticidade acoplada, assim como as definições e hipóteses simplificadoras pertinentes.

O capítulo 5 introduz a implementação do método dos elementos finitos aplicado ao problema da poro-elasticidade acoplada.

O capítulo 6 contém a validação e os resultados obtidos da aplicação das teoria apresentadas nos capítulos 3, 4 e 5, assim como os resultados do estudo sobre materiais poro-elásticos periódicos.

No capítulo 7, apresentam-se as conclusões do presente trabalho e as propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Neste capítulo apresenta-se um breve histórico sobre o desenvolvimento dos modelos teóricos e métodos numéricos para a resolução de problemas da poro-elasticidade na acústica e da propagação de ondas em meios elásticos periódicos.

2.1 Band Gaps em Estruturas Elásticas Periódicas

Um dos primeiros trabalhos sobre a propagação de ondas em estruturas elásticas periódicas é apresentado por Brillouin (1953). Neste trabalho, o autor estuda materiais elásticos em níveis atômicos e mostra – a partir do cálculo de curvas de dispersão da frequência em função do número de onda de um material, também denominada de estrutura de banda – a existência de *band gaps* para estruturas diatômicas e multiatômicas periódicas infinitas.

Em Mead (1996), um resumo é feito sobre as teorias e métodos criados pela Universidade de Southampton para a análise da propagação de ondas em estruturas periódicas.

O estudo teórico e experimental de cadeias unidimensionais periódicas massa-molas é realizado por Parmley *et al.* (1995) e uma boa aproximação dos resultados é obtida.

Langlet *et al.* (1995) utiliza o método dos elementos finitos para o cálculo das curvas de dispersão de materiais periódicos. O autor utiliza-se das relações de Bloch-Floquet para que somente uma célula periódica tenha de ser modelada para o cálculo da estrutura de banda de estruturas bidimensionais periódicas.

Suzuki e Yu (1998) usa o método numérico PWE (*plane wave expansion*) para o cálculo

da estrutura de banda de um meio periódico tridimensional do tipo FCC (*face centered cubic*). O método PWE tem sua origem nas teorias e métodos desenvolvidos para o estudo e a modelagem da propagação de ondas eletromagnéticas da física óptica.

Evidências experimentais da existência de *band gaps* em estruturas periódicas bidimensionais é apresentado por Vasseur *et al.* (1998). O autor utiliza o método PWE para o cálculo da estrutura de banda de um meio, composto por materiais compósitos dispostos de forma periódica, como cilindros em um matriz de resina epóxi, e compara essas curvas de dispersão com resultados experimentais obtendo uma boa aproximação dos mesmos.

Kafesaki *et al.* (2001) mostra a possibilidade da criação de guias de ondas dentro de um material elástico, para frequências dentro da região de *band gap*, a partir da inclusão de defeitos no mesmo.

Jensen (2003) apresenta uma teoria para a modelagem de estruturas elásticas periódicas uni e bidimensionais, infinitas e finitas, em estruturas do tipo massa-mola, para o cálculo das curvas de dispersão (frequência \times n^o de onda) e FRF (função resposta em frequência) dessas estruturas, mostrando, assim, a presença de *band gaps* nessas e uma boa aproximação de seus resultados.

Movchan *et al.* (2006) estuda a propagação de ondas de Bloch-Floquet em materiais compósitos periódicos contínuos e discretos (malhas massa-mola), que apresentam modos de vibração altamente localizados devido a inclusões de defeitos no mesmo, e a relação da frequência em que esses modos de vibração aparecem, e as frequências de *band gap* da estrutura.

Lazarov e Jensen (2007) mostram a existência de *band gaps* a baixas frequências em estruturas do tipo massa-mola unidimensionais com molas não-lineares, e a possibilidade de deslocar as regiões de *gap* mudando o grau de não-linearidade dos osciladores ou a amplitude da onda.

2.2 Propagação de Ondas em Materiais Poro-Elásticos

Um dos pioneiros na formulação da teoria da poro-elasticidade foi Biot. Sua teoria clássica para a propagação de ondas em materiais poro-elásticos foi apresentada inicialmente em 1956

(Biot, 1956ab). Nesses trabalhos, a formulação do problema acoplado é feita calculando-se os funcionais – ou funções potenciais – do material e derivando-se a equação diferencial do movimento a partir da aplicação da equação de Lagrange. A influência da dissipação viscosa entre as fases sólida e fluida do material é considerada: Biot (1956b) sugere que o coeficiente de amortecimento viscoso do material é função da frequência e pode ser descrito por uma única expressão. Para diferentes materiais porosos, com distintas redes internas de poros, o amortecimento viscoso comporta-se – em função da frequência – qualitativamente de forma semelhante. Biot (1962) reescreve a teoria clássica da propagação de ondas em meios poro-elásticos e comenta brevemente sobre efeitos de anisotropia, viscoelasticidade, processos químicos dos grãos e efeitos de superfície e dissipações térmicas e eletrocinéticas na propagação de ondas neste meio.

Em Rice e Cleary (1976), uma formulação modificada para a teoria clássica de Biot é apresentada e são propostas novas constantes físicas para o problema poro-elástico. Estas constantes são obtidas por meio de um conjunto de ensaios mais simplificado.

Jonhson *et al.* (1987) estuda as características físicas e o comportamento de um fluido confinado em um poro de um material poro-elástico. Nesse trabalho são definidos novos parâmetros físicos como os comprimentos característicos viscoso e térmico e a tortuosidade dinâmica. É também proposta uma nova função para o cálculo dos efeitos de dissipação viscosa de mais fácil computação e boa aproximação das funções propostas por Biot (1956b).

Champoux e Allard (1991) apresentam um modelo teórico da tortuosidade dinâmica em função da frequência. Os resultados teóricos obtidos são comparados com resultados experimentais de medidas acústicas de um material poroso rígido e saturado de ar.

Allard (1993) compila inúmeros estudos sobre a propagação de ondas em materiais poroelásticos e apresenta de forma sistemática a formulação clássica de Biot, levando em consideração efeitos térmicos dissipativos do fluido nos poros do material, a qual é denominada de formulação clássica de Biot-Allard.

Atalla *et al.* (1998) apresentam a chamada formulação mista (u,p) do problema acoplado poro-elástico a partir de manipulações algébricas da formulação clássica de Biot-Allard, a qual modela o problema acoplado em função dos deslocamentos da fase sólida e fluida. O problema é acoplado pelos deslocamentos da fase sólida e a pressão do fluido, diminuindo, dessa forma, o número de equações do sistema de 6 para 4, o que permite a simulação numérica do problema poro-elástico pela formulação mista (u,p) em tempos menores que o mesmo problema dado pela formulação clássica de Biot-Allard.

Um modelo numérico de elementos finitos isoparamétricos com 8 nós é aplicado por Craggs (1978) para a previsão do comportamento acústico de materiais porosos com estruturas rígidas. Craggs (1979) mostra o procedimento para o acoplamento entre meios acústicos e poro-elásticos na formulação de elementos finitos em um modelo para o cálculo de absorção acústica. A validação do método é feita a partir de resultados analíticos.

No artigo proposto por Kang e Bolton (1995) é desenvolvido um modelo numérico em elementos finitos bidimensional de um elasto-absorvedor usado em controles passivos de ruído. O modelo é aplicado à formulação clássica de Biot e métodos para acoplar as fases acústicas e poro-elásticas, quando a interface entre ambas as fases está ou não selada por uma membrana, são desenvolvidos. O modelo é validado por resultados analíticos.

Panneton e Atalla (1997) utilizam o método dos elementos finitos para simulação numérica de problemas tridimensionais da poro-elasticidade acoplada da formulação clássica de Biot-Allard. Um esquema de programação das matrizes dos elementos é colocado em evidência e as condições de acoplamento entre as fases acústicas e poro-elásticas são descritas em detalhe. Uma aproximação para o coeficiente de amortecimento viscoso para baixas frequências é proposta e mostra-se que essa aproximação lineariza o problema de auto-valor poro-elástico.

Atalla *et al.* (1998) propõe a formulação mista (u,p) do problema poro-elástico e sua forma integral fraca. Debergue *et al.* (1999) apresentam as diversas condições de contorno e acoplamento para a formulação fraca mista (u,p). O estudo torna evidente as vantagens de se usar a formulação mista (u,p) quando comparada com a formulação clássica (u,U), em relação às condições e matrizes de acoplamento entre os domínios acústico, elástico e poro-elástico.

As contribuições dos trabalhos do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica (DMC/FEM), dadas por Silva e Pavanello (2003,2004a), estão relacionadas à implementação e testes das formulações desenvolvidas e encontradas na literatura, em um ambiente de programação Orientada a Objetos aliada à linguagem C++. No trabalho de Silva e Pavanello (2004b), utilizando-se uma modelagem com elementos finitos poro-elásticos para a prescrição da resposta de absorção, algumas variações geométricas para dispositivos de isolamento acústico têm seus diversos resultados confrontados. Em Silva (2007), a otimização da absorção de materiais poro-elásticos a baixas frequências é realizada para o modelo de elementos finitos do mesmo. Nesse trabalho, o guia de ondas acústico semiinfinito é modelado como uma matriz de acoplamento que correlaciona a potência de entrada e os modos da onda acústica no tubo de Kundt e a integral fraca no contorno acústico/poroelástico, teoria apresentada anteriormente por Atalla *et al.* (2001b).

Capítulo 3

Propagação de Ondas em Meios Periódicos

3.1 Band Gaps

O fenômeno físico denominado *band gap*, ou *stop band*, refere-se à não propagação de ondas, sejam essas elásticas, acústicas, eletromagnéticas etc., em uma dada faixa de valores de frequência, no meio onde esta ocorre. Neste capítulo evidência-se a ocorrência desse fenômeno em meios elásticos periódicos.

Um dos primeiros estudos sobre *band gaps* em meios periódicos elásticos foi realizado por Brillouin (1946). Neste trabalho, Brillouin modela o meio elástico como um sistema de partículas discretas que interagem com sua vizinhança – não necessariamente imediata, como no caso de um sistema massa-mola – para uma, duas e três dimensões. O trabalho feito pelo autor concentra-se na modelagem de estruturas periódicas infinitas. Para esses modelos, Brillouin mostra que existem certas faixas de frequência em que a solução harmônica não existe. Nessas faixas de frequência, a solução matemática da onda apresenta um fator de atenuação que impede sua propagação em meios infinitos. Essas faixas de frequência são denominadas *stop bands* ou *band gaps*.

3.2 Propagação de ondas em materiais elásticos periódicos

Nesta seção, o modelo matemático da propagação de ondas em estruturas unidimensionais – também denominadas de monoatômicas por analogia à microestrutura do material – e bidimensionais infinitas proposto por Brillouin (1946) é revisto. O objetivo, neste caso, é entender o fenômeno *band gap* e a possibilidade de se modelá-lo.

3.2.1 Estruturas infinitas monoatômicas

Denomina-se material elástico monoatômico aquele representado por partículas alinhadas e igualmente espaçadas ao longo do eixo x, como mostrado na figura 3.1.

Figura 3.1: Estrutura Unidimensional Infinita

Desta forma, a posição da partícula n, num dado instante de tempo, pode ser escrita como:

$$x_n = nd + u_n \tag{3.1}$$

onde u_n é o deslocamento da partícula em questão e d mede a distância entre as partículas do sistema. O deslocamento u_n é propagado ao longo do sistema de forma harmônica se o sistema físico proposto admitir uma solução da forma:

$$\begin{cases} u_n = Ae^{2\pi i(\nu t - and)} = Ae^{i(wt - kn)} \\ a = \frac{1}{\lambda}, \quad k = 2\pi ad, \quad w = 2\pi\nu \end{cases}$$
(3.2)

onde ν é a frequência, t, o tempo, a, o número de onda, λ , o comprimento de onda, w, a frequência angular e k é o produto do número de onda a pelo período d (distância entre as partículas) da estrutura, multiplicado por 2π , sendo denominado também número de onda. Aplicando-se a solução acima à partícula n + 1, tem-se:

$$u_{n+1} = Ae^{i(wt - k(n+1))} = Ae^{i(wt - kn)}e^{-ik} = u_n e^{-ik}.$$
(3.3)

Observando a equação (3.3), pode-se definir a variável k como a mudança de fase entre a partícula $n \in n+1$ para uma dada frequência de onda, já que k varia em função da frequência. Será mostrado mais adiante que é a relação entre $k \in w$ que define se uma dada onda propaga ou não no meio infinito. Da equação (3.3) pode-se também observar que a mesma solução é obtida para qualquer $k' = k + 2m\pi$, onde m é um inteiro qualquer. Sendo assim, a mesma solução para w será obtida para cada k', ou seja, w é uma função periódica de k:

$$\begin{cases} w = f(k) & \text{periodo } 2\pi \operatorname{em} k = 2\pi ad \\ \nu = F(a) & \text{periodo } \frac{1}{d} \operatorname{em} a \end{cases}$$
(3.4)

Dessa forma, a avaliação das funções $f \in F$ é necessária somente em uma certa faixa de valores de k, ou a, dadas por $-\pi \le k \le \pi$ e $-\frac{1}{2d} \le a \le \frac{1}{2d}$. Essa limitação significa que:

$$\lambda = \frac{1}{|a|} \ge 2d \tag{3.5}$$

Ou seja, o menor comprimento de onda possível é o dobro do período da estrutura e corresponde à frequência $\nu_c = f(1/2d)$, denominada frequência crítica ou de corte, que corresponde à máxima frequência em que há propagação de ondas no sistema.

Considera-se agora que a função u_n é o deslocamento longitudinal da partícula n e assumese que existe interação entre todas as partículas. Assim, a distância entre duas partículas ne n + m é:

$$r_{n,n+m} = x_{n+m} - x_n = md + u_{n+m} - u_n \tag{3.6}$$

A energia de interação entre duas partículas pode ser definida como uma função potencial da distância entre as mesmas, da forma:

$$U(r) = U(|x_{n+m} - x_n|)$$
(3.7)

A energia potencial total do sistema será, então, o somatório da energia de interação entre todos as partículas do sistema:

$$U = \sum_{n} \sum_{m>0} U(x_{n+m} - x_n)$$
(3.8)

onde *m* ficou restrito a um número positivo para que a energia potencial de um par de partículas não seja somada duas vezes, além de permitir a retirada do sinal módulo de Δx .

Considerando que o deslocamento u_n seja bem menor que a distância d entre as partículas, pode-se expandir a função potencial na série de Taylor em torno da posição md, e desprezar os termos polinomiais de ordem superior a 2, obtendo-se:

$$U(x_{n+m} - x_n) = U(md) + (u_{n+m} - u_n) U'(md) + \frac{1}{2}(u_{n+m} - u_n)^2 U''(md)$$
(3.9)

onde U(md) representa a energia de interação entre as partículas $n \in n + m$ em suas posições de equilíbrio.

A energia potencial total do sistema pode ser escrita, então, da forma:

$$U = \sum_{n} \sum_{m>0} \left[U(md) + (u_{n+m} - u_n) U'(md) + \frac{1}{2} (u_{n+m} - u_n)^2 U''(md) \right]$$
(3.10)

A força F_p agindo na partícula p é dada pela derivada da energia potencial total com relação ao deslocamento u_p da partícula p, e portanto:

$$F_{p} = -\frac{\partial U}{\partial u_{p}} = -\frac{\partial}{\partial u_{p}} \sum_{n} \sum_{m>0} \left[U(md) + (u_{n+m} - u_{n}) U'(md) + \frac{1}{2} (u_{n+m} - u_{n})^{2} U''(md) \right]$$

$$= -\frac{\partial}{\partial u_{p}} \sum_{m>0} \left[(u_{p+m} - u_{p}) U'(md) + \frac{1}{2} (u_{p+m} - u_{p})^{2} U''(md) + (u_{p} - u_{p-m}) U'(md) + \frac{1}{2} (u_{p} - u_{p+m})^{2} U''(md) \right]$$

$$= -\sum_{m>0} \left[-U'(md) - (u_{p+m} - u_{p}) U''(md) + U'(md) + (u_{p} - u_{p+m}) U''(md) \right]$$

(3.11)

Rearranjando a equação e escrevendo o termo $U(md) = U_m$, obtém-se, finalmente:

$$F_p = \sum_{m>0} U''_m (u_{p+m} + u_{p-m} - 2u_p)$$
(3.12)

Pode-se ver que os termos U'_m se cancelam dentro do somatório. Considerando-se então uma estrutura semi-infinita a partir da origem n = 0, conforme mostrado na figura (3.2), é necessário aplicar, para cada partícula n, uma força externa F_n para manter as últimas partículas da estrutura não perturbadas (distância de equilíbrio entre as partículas permanece constante e igual a d). Essa força deve incluir as derivadas das energias de interação virtual entre a partícula n da estrutura semi-infinita e as partículas (-n) = (-1, -2, -3, ...) – energias de interação que estariam presentes caso a estrutura fosse infinita – de forma que o módulo de F_n é dado por:

$$F_n = \sum_{m>0} U'_{-(n+m)} \tag{3.13}$$

Portanto, a força total aplicada, necessária para manter a estrutura sem perturbações, é:



Figura 3.2: Estrutura Unidimensional Semi-Infinita

Se a força externa for diferente de F_t ou diferentemente distribuída, perturbações irão ocorrer nas partículas próximas do fim da estrutura, podendo ocorrer dois casos: (1) a perturbação se dissipa ao se afastar da origem, ficando confinada às partículas próximas à origem; (2) a perturbação se estende pela estrutura como função periódica da distância. Caso não seja aplicada nenhuma força externa, a estrutura não se perturbará somente se os termos U'_m , para todo m, forem iguais a zero. Caso contrário, ambos os tipos de comportamento citados anteriormente podem ocorrer.

A equação do movimento pode então ser formulada como:

$$M\ddot{u}_p = F_p = \sum_{m>0} U''_m (u_{p+m} + u_{p-m} - 2u_p)$$
(3.15)

sendo M a massa da partícula p.

Assumindo a solução da equação de movimento como dada pela equação (3.2) para n = p, obtém-se:

$$(-4\pi^2\nu^2)MAe^{i2\pi(\nu t-apd)} = \sum_{m>0} U_m''(e^{-i2\pi mda} + e^{i2\pi mda} - 2)Ae^{i2\pi(\nu t-apd)}$$
(3.16)

Rearranjando a equação (3.16), considerando $A \neq 0$ (solução não trivial), e lembrando que $(e^{-2\pi m da} + e^{2\pi m da}) = 2\cos(2\pi m a d)$ e que $e^{i2\pi(\nu t - apd)}$ nunca se anula, pode-se escrever a equação (3.16) da forma:

$$M\pi^{2}\nu^{2} = \frac{1}{2}\sum_{m>0} U_{m}^{''}(1 - \cos(2\pi mad)) = \sum_{m>0} U_{m}^{''}\sin^{2}(\pi amd)$$
(3.17)

A equação (3.17) representa o movimento da partícula p, levando-se em conta as interações com todas as demais partículas do sistema infinito periódico. Se for considerado que a energia de interação entre as partículas cai rapidamente com a distância, pode-se escrever a equação de movimento da partícula p (Equação 3.17) considerando que esta interage somente com a sua vizinhança mais próxima, para $0 < m \le m'$, onde m' é um número finito.

Interação com a vizinhança imediata

Se for considerado que as partículas interagem somente com as partículas mais próximas (m' = 1), então a equação de equilíbrio dada pela equação (3.17) representa um sistema massa-mola infinito em vibração livre, e a equação (3.17) se torna:

$$M\pi^{2}\nu^{2} = \sum_{0 < m \le 1} U''_{m} \sin^{2}(\pi amd) = U'' \sin^{2}(\pi ad)$$
(3.18)

A velocidade de propagação da onda para o caso em que há interação somente com a vizinhança próxima é, então:

$$V = \frac{|\nu|}{a} = \sqrt{\frac{U''}{M}} \frac{|\sin(\pi ad)|}{|\pi a|} = d\sqrt{\frac{U''}{M}} \frac{|\sin(\pi ad)|}{|\pi ad|}$$
(3.19)

Para uma onda de comprimento infinito $(\lambda \rightarrow \infty, \, a \rightarrow 0),$ a equação acima se torna:

$$V_{\infty} = d\sqrt{\frac{U''}{M}} \tag{3.20}$$

Para a análise do caso em que o meio elástico é modelado como um meio contínuo e o comprimento de onda é comparativamente grande em relação ao espaçamento d, é necessário definir-se parâmetros médios entre as massas. A tensão média T agindo na partícula p pode ser vista como a resultante de forças na mesma e, a partir da equação (3.11) com m = 1, pode ser escrita como:

$$T = U''(d)(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$
(3.21)

A deformação média entre $p \in p+1$ pode ser definida simplesmente como $(u_{p+1} - u_p)/d$, e a deformação média ϵ , entre $p-1 \in p+1$, é, então:

$$\epsilon = \frac{(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)}{d} \tag{3.22}$$

Definindo E como a razão entre a tensão T e deformação média ϵ , tem-se:

$$E = \frac{T}{\epsilon} = d U''(d) \tag{3.23}$$

Assim, se for considerada a densidade linear média da estrutura como $\rho = M/d$, substituindo U'' = E/d e $M = \rho d$ na equação (3.20) – pois em meios contínuos $\lambda >> d$ –, obtém-se a equação da velocidade de propagação da onda no meio, da seguinte forma:

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{3.24}$$

Vê-se então que, quando $\lambda >> d$ (hipótese da teoria do contínuo), a velocidade de propagação da onda não mais depende do comprimento da estrutura, mas somente das propriedades do material. Vale apontar também que, se E for entendido como o módulo de elasticidade do material e ρ sua densidade, então a equação (3.24) será idêntica à equação de velocidade de onda em barras ($c = \sqrt{E/\rho}$).

Analisando a velocidade de propagação de onda na estrutura quando a frequência de onda é crítica (comprimento da onda é o menor possível e igual a 2d e ad = 1/2), obtém-se o valor da última como:

$$\nu_c = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{U''}{M}} \tag{3.25}$$

A frequência crítica ν_c também é denominada frequência de corte, pois representa o maior valor de frequência em que é possível uma onda propagar. Para frequências acima desse valor, a equação (3.18) só será verdadeira para números de onda complexos ($a = \pm \alpha \pm i\beta$). Para um número de onda complexo, a equação (3.2) é escrita da forma:

$$u_n = A e^{i2\pi(\nu t \pm \alpha nd)} e^{\pm 2\pi\beta nd} \tag{3.26}$$

Considerando que a onda se propaga da esquerda para a direita e reconhecendo que a presença do termo $e^{+2\pi\beta nd}$, com $\beta > 0$, na equação (3.26) implica que os deslocamentos das partículas da estrutura infinita crescem infinitamente, violando, assim, a 1^{*a*} lei da termodinâmica, a equação da onda tem a forma:

$$u_n = A e^{i2\pi(\nu t - \alpha nd)} e^{-2\pi\beta nd} \tag{3.27}$$

Assim, é possível verificar que entre $n \in n + 1$ a amplitude da onda decairá devido ao termo complexo do número de onda, de forma que a longas distâncias da partícula n, a onda não mais se propagará.

3.2.2 Estruturas infinitas diatômicas

Considera-se que a estrutura infinita é composta periodicamente por duas partículas com massas distintas, como ilustrado na figura (3.3). A distância entre as posições de equilíbrio das partículas é igual à $d_1 = d/2$, e a interação entre as mesmas ocorre somente com as partículas vizinhas.

Figura 3.3: Estrutura unidimensional diatômica

Na estrutura ilustrada pela figura (3.3), vê-se que as partículas com massa M_1 têm suas posições de equilíbrio dadas por números ímpares ((2n + 1)d/2), e as partículas com massa M_2 têm suas posições de equilíbrio dadas por números pares ((2n)d/2 = nd). Dessa forma, considerando a força F_p agindo na *p*-ésima partícula, dada pela equação (3.12) para m = 1(interação somente com a vizinhança mais próxima), é possível escrever as seguintes equações diferenciais de equilíbrio:

$$\begin{cases}
F_{2n} = U_1''(u_{2n-1} + u_{2n+1} - 2u_{2n}) = M_2 \ddot{u}_{2n} \\
F_{2n+1} = U_1''(u_{2n} + u_{2n+2} - 2u_{2n+1}) = M_1 \ddot{u}_{2n+1}
\end{cases}$$
(3.28)

Dada as equações de movimento, assume-se soluções de ondas para as partículas ímpares e pares dadas por:

$$\begin{cases} u_{2n} = A_2 e^{i(wt - 2nk_1)} \\ u_{2n+1} = A_1 e^{i(wt - (2n+1)k_1)} \end{cases}$$
(3.29)

onde:

$$\begin{cases} k_1 = 2\pi a d_1 = 2\pi a \frac{d}{2} = \frac{1}{2}k \\ w = 2\pi\nu \\ a = \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$
(3.30)

É importante notar que a primeira das equações (3.29) representa uma onda propagandose somente nas partículas de massa M_2 , enquanto a segunda representa uma onda propagandose somente nas partículas de massa M_1 . Além disso, as ondas geradas devido a um dado distúrbio na estrutura devem possuir o mesmo comprimento e frequência para cada partícula. No entanto, isso não é verdade para as amplitudes das mesmas: as amplitudes das ondas que se propagam pelas partículas de massa M_1 e M_2 podem diferir tanto em módulo como em fase. Substituindo a equação (3.29) na equação (3.28), obtém-se:

$$M_{2}(-A_{2}w^{2})e^{i(wt-2nk_{1})} = U_{1}''(A_{1}e^{ik_{1}} + A_{1}e^{-ik_{1}} - 2A_{2})e^{i(wt-2nk_{1})}$$

$$M_{1}(-A_{1}w^{2})e^{i(wt-(2n+1)k_{1})} = U_{1}''(A_{2}e^{ik_{1}} + A_{2}e^{-ik_{1}} - 2A_{1})e^{i(wt-(2n+1)k_{1})}$$
(3.31)

Como $e^{i(wt-2nk_1)} \neq 0$ e $e^{i(wt-(2n+1)k_1)} \neq 0$, e sabendo que $e^{ik_1} + e^{-ik_1} = 2\cos k_1$, obtém-se, rearranjando a equação (3.31):

$$\begin{cases} A_2(M_2w^2 - 2U_1'') + 2A_1U_1''\cos k_1 = 0\\ A_1(M_1w^2 - 2U_1'') + 2A_2U_1''\cos k_1 = 0 \end{cases}$$
(3.32)

Na forma matricial, pode-se escrever a equação (3.32) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix}
 M_2 w^2 - 2U_1'' & 2U_1'' \cos k_1 \\
 2U_1'' \cos k_1 & M_1 w^2 - 2U_1''
 \end{bmatrix}
 \begin{cases}
 A_2 \\
 A_1
 \end{cases}
 = \{0\}$$
(3.33)

O sistema acima terá solução não-trivial quando seu determinante for igual a zero, ou seja, quando $w \in k_1$ sejam tais que:

$$(M_2w^2 - 2U_1'')(M_1w^2 - 2U_1'') - 4U_1''^2\cos^2 k_1 = 0$$
(3.34)

Expandindo o primeiro termo e rearranjando a equação (3.34), obtém-se:

$$w^{4} - 2U_{1}^{''} \left(\frac{1}{M_{1}} + \frac{1}{M_{2}}\right) w^{2} + 4\frac{U_{1}^{''2}}{M_{1}M_{2}} \sin^{2} k_{1} = 0$$
(3.35)

A relação entre as amplitudes de onda das partículas de massa M_1 e M_2 é dada por:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{M_1 - M_2 \mp \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1M_2\cos 2k_1}}{2M_1\cos k_1}$$
(3.36)

Pode-se ver que existem dois valores de w^2 que satisfazem a equação (3.35), de forma que existem dois valores de w que satisfazem a mesma equação, pois a frequência deve ser sempre positiva. Sendo assim, para um dado valor de número de onda (k_1) existem dois valores de frequência (w) que satisfazem as condições de propagação de onda impostas pelo sistema representado na equação (3.32), ou seja, para um dado k_1 , existem duas frequências possíveis nas quais a onda se propaga pela estrutura. Dessa forma, a curva w em função de k_1 terá dois ramos, como mostrado na figura (3.4).

Pode-se ver que, como no caso da estrutura monoatômica, existe um valor máximo de frequência para o qual é possível uma onda propagar-se pela estrutura. Além disso, entre os ramos superior e inferior da figura (3.4) existe uma faixa de valores de frequência $(\Delta w = w_2 - w_1)$ para o qual a equação (3.35) é satisfeita somente se k_1 for complexo, de forma que as ondas nessa faixa de frequência não se propagam pela estrutura diatômica infinita. Essa faixa de valores de frequência é comumente denominada de *band gap* ou *stop band* (Brillouin, 1953).


Figura 3.4: Estrutura de banda do material unidimensional diatômico da figura (3.3).

3.2.3 Estruturas infinitas multiatômicas

Estruturas Unidimensionais

Um exemplo de uma estrutura unidimensional infinita periódica está ilustrado na figura (3.5). As várias partículas que compõem a estrutura são agrupadas em células que se repetem durante toda a extensão da mesma. Se for considerado que as interações entre as partículas ocorrem somente com as partículas imediatamente próximas, então o sistema de equações diferenciais que descreve a interação entre as partículas será do tipo massa-mola.



Figura 3.5: Exemplo de uma estrutura unidimensional multiatômica

O procedimento para a solução desse sistema é semelhante ao procedimento para sistemas massa-molas finitos convencionais, porém, devido às condições de contorno serem diferentes, algumas considerações extras devem ser feitas. Os exemplos utilizados a seguir e seus métodos de solução são baseados no artigo de Jensen (2003).

A figura (3.5) mostra a configuração de um sistema massa-mola unidimensional infinito, onde um grupo de massas e molas forma uma célula que se repete ao longo de toda a estrutura. A equação diferencial da j-ésima massa da p-ésima célula é dada por:

$$m_j \ddot{u}_{p+j} = k_j (u_{p+j+1} - u_{p+j}) - k_{j-1} (u_{p+j} - u_{p+j-1})$$
(3.37)

para p = n N, onde N é o número de massas na célula e n é um inteiro qualquer. Para que haja propagação de onda na estrutura, a solução para a mesma massa deve ser da forma:

$$u_{p+j} = A_j e^{i((p+j)\gamma - wt)}$$
(3.38)

onde $\gamma = \frac{2\pi d}{\lambda}$ é o número de onda.

Substituindo a equação (3.38) em (3.37), obtém-se:

$$-w^{2}m_{j}A_{j}e^{i((p+j)\gamma-wt)} = k_{j}(A_{j+1}e^{i((p+j)\gamma-wt)}e^{i\gamma} - A_{j}e^{i((p+j)\gamma-wt)}) - k_{j-1}(A_{j}e^{i((p+j)\gamma-wt)} - A_{j-1}e^{i((p+j)\gamma-wt)}e^{-i\gamma})$$
(3.39)

Como $e^{i((p+j)\gamma-wt)} \neq 0$, então, cancelando os termos comuns e rearranjando a equação (3.39), tem-se:

$$A_j(k_j + k_{j-1}) + A_{j+1}(-k_j e^{i\gamma}) + A_{j-1}(-k_{j-1} e^{-i\gamma}) + A_j(-w^2 m_j) = 0$$
(3.40)

Para levar em conta a periodicidade da célula, impõe-se a seguinte condição de contorno:

$$A_{j-1} = A_N, \quad para \quad j = 1$$

$$A_{j+1} = A_1, \quad para \quad j = N$$
(3.41)

Na forma matricial, a equação (3.40) pode ser escrita como:

$$([K(\gamma)] - w^2[M])\vec{A} = \vec{0}$$
(3.42)

onde [K] é a matriz de rigidez complexa e [M] é a matriz diagonal de massas. O sistema acima também pode ser escrito como um problema de autovalor e autovetor da forma:

$$([\tilde{K}] - w^2[I])\vec{A'} = \vec{0}$$
(3.43)

sendo,

$$\vec{A'} = [M]^{-\frac{1}{2}} \vec{A}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{K} \end{bmatrix} = [M]^{-\frac{1}{2}} [K] [M]^{-\frac{1}{2}}$$
(3.44)

е

$$[M]^{-1} = [M]^{-\frac{1}{2}}[M]^{-\frac{1}{2}}$$
(3.45)

A equação (3.40), ou sua forma matricial dada pela equação (3.42), permite obter a solução da equação de onda na estrutura unidimensional infinita, para qualquer conjunto periódico de partículas que interagem em sua vizinhança imediata como um sistema do tipo massamola unidimensional. Para mostrar a equivalência entre a teoria desenvolvida nessa seção e a teoria desenvolvida por Brillouin (1953), mostrada na seção anterior, pode-se escrever a equação (3.40) para uma célula possuindo massas $m_1 e m_2$, obtendo-se:

$$\begin{cases} A_1(k_1+k_2) + A_2(-k_1e^{i\gamma}) + A_0(-k_0e^{-i\gamma}) + A_1(-w^2m_1) = 0\\ A_2(k_2+k_1) + A_3(-k_2e^{i\gamma}) + A_1(-k_1e^{-i\gamma}) + A_2(-w^2m_2) = 0 \end{cases}$$
(3.46)

Das condições de contorno dadas pela equação (3.41), tem-se:

$$\begin{cases}
A_0 = A_3 \\
A_3 = A_1 \\
k_0 = k_2
\end{cases}$$
(3.47)

Pode-se então escrever a equação (3.46) da forma:

$$\left(\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_1 e^{i\gamma} - k_2 e^{-i\gamma} \\ -k_2 e^{i\gamma} - k_1 e^{-i\gamma} & k_1 + k_2 \end{bmatrix} - w^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \right) \begin{cases} A_1 \\ A_2 \end{cases} = \{0\}$$
(3.48)

Finalmente, considerando que as forças elásticas entre m_1 - m_2 e m_2 - m_1 são iguais, ou seja, $k_1 = k_2 = k$, e sabendo que $e^{i\gamma} + e^{-i\gamma} = 2\cos(\gamma)$, pode-se escrever a equação (3.40) da forma:

$$\left(\begin{bmatrix} 2k - w^2 m_1 & -2k \cos \gamma \\ -2k \cos \gamma & 2k - w^2 m_2 \end{bmatrix} \right) \left\{ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} \right\} = \{0\}$$
(3.49)

Observa-se que a equação (3.49) e a equação (3.33) produzem resultados idênticos, mostrando que as teorias desenvolvidas por Brillouin (1953) – para o caso específico em que a interação entre as partículas ocorre somente com a vizinhança imediata (m = 1) – e por Jensen (2003) estão em acordo. Por indução, conclui-se que o método descrito neste capítulo representa, de forma correta, a ocorrência do fenômeno *band gap* em sistemas massa-mola infinitos. Além disso, a forma descrita neste item permite uma generalização direta para problemas bidimensionais e tridimensionais.

Estruturas Bidimensionais

O procedimento para a solução do caso bidimensional é o mesmo utilizado para o caso unidimensional e considera-se que as partículas interagem somente com as massas imediatamente vizinhas. No entanto, no caso bidimensional cada partícula possui 2 graus de liberdade (x e y) e interage com 8 outras partículas, o que aumenta consideravelmente o custo computacional. A figura (3.6) ilustra a configuração massa-mola estudada.

Para escrever a equação de equilíbrio do sistema, considera-se que cada massa $m_{r,s}$ possui 4 molas acopladas $k_{r,s,1}$, $k_{r,s,2}$, $k_{r,s,3}$ e $k_{r,s,4}$ (Figura 3.7) que permitem sua interação com as massas $m_{r+1,s}$, $m_{r+1,s+1}$, $m_{r,s+1}$ e $m_{r-1,s+1}$ respectivamente, enquanto as massas $m_{r-1,s}$, $m_{r-1,s-1}$, $m_{r,s-1}$ e $m_{r+1,s-1}$ interagem com a massa $m_{r,s}$ a partir das molas $k_{r-1,s,1}$, $k_{r-1,s-1,2}$, $k_{r,s-1,3}$ e $k_{r+1,s-1,4}$, respectivamente.



Figura 3.6: Esquema estrutural de uma célula bidimensional multiatômica



Figura 3.7: Disposição e nomenclatura das molas para a massa $m_{r,s}$

E considerado também que os deslocamentos das massas são pequenos o suficiente para que, por exemplo, a relação entre o deslocamento na direção y da massa $m_{r+1,s+1}$ e a força elástica aplicada à massa $m_{r,s}$ seja linear. Para o cálculo das forças elásticas exercidas pelas molas diagonais ($k_{r,s,2}$ e $k_{r,s,4}$) considera-se, por exemplo, a distância H da massa $m_{r+1,s+1}$ à massa $m_{r,s}$. Sendo h_x a projeção na direção x da distância H entre as duas massas, e h_y a projeção na direção y, tem-se que:

$$H = f(h_x, h_y) = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$$
(3.50)

Considerando pequenos deslocamentos, pode-se obter a forma linear da variação da distância absoluta (ΔH) em função de sua projeção na direção y (Δh), pela série de Taylor, da forma:

$$\Delta H = \Delta f(h_y) = \frac{\partial f(h_x, h_y)}{\partial h_y} \Big|_{\substack{h=h_{y0} \\ h_y=h_x}} (\Delta h_y)$$
$$= \frac{\partial \sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{\partial h_y} \Big|_{\substack{h_y=h_x}} (\Delta h_y)$$
(3.51)
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta h_y$$

A partir desse resultado, pode-se calcular a força aplicada na direção x pelo deslocamento vertical $v - \operatorname{com} v = \Delta h_y - \operatorname{da} \operatorname{massa} m_{r+1,s+1}$ na massa $m_{r,s}$, da forma:

$$F_{x,v} = k_{r,s,2} \Delta H \cos \theta$$

= $k_{r,s,2} \frac{\sqrt{2}}{2} v \frac{\sqrt{2}}{2}$
= $\frac{1}{2} v k_{r,s,2}$ (3.52)

Devido à simetria do problema, é possível escrever também, para $u = \Delta h_x$, que:

$$F_{y,u} = \frac{1}{2}uk_{r,s,2} \tag{3.53}$$

Das considerações feitas, pode-se finalmente escrever as equações de equilíbrio nas direções dos eixos cartesianos $x \in y$ da massa $m_{r,s}$, da forma:

$$m_{r,s}\ddot{u}_{p+r,q+s} = k_{r,s,1}(u_{p+r+1,q+s} - u_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r,s,2}(u_{p+r+1,q+s+1} - u_{p+r,q+s} + v_{p+r+1,q+s+1} - v_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r,s,4}(u_{p+r-1,q+s+1} - u_{p+r,q+s} - v_{p+r-1,q+s+1} + v_{p+r,q+s}) + k_{r-1,s,1}(u_{p+r-1,q+s} - u_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r-1,s-1,2}(u_{p+r-1,q+s-1} - u_{p+r,q+s} + v_{p+r-1,q+s-1} - v_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r+1,s-1,4}(u_{p+r-1,q+s+1} - u_{p+r,q+s} - v_{p+r-1,q+s+1} + v_{p+r,q+s})$$

$$(3.54)$$

$$m_{r,s}\ddot{v}_{p+r,q+s} = k_{r,s,3}(v_{p+r,q+s+1} - v_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r,s,2}(v_{p+r+1,q+s+1} - v_{p+r,q+s} + u_{p+r+1,q+s+1} - u_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r,s,4}(v_{p+r-1,q+s+1} - v_{p+r,q+s} - u_{p+r-1,q+s+1} + u_{p+r,q+s}) + k_{r-1,s,3}(v_{p+r,q+s-1} - v_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r-1,s-1,2}(v_{p+r-1,q+s-1} - v_{p+r,q+s} + u_{p+r-1,q+s-1} - u_{p+r,q+s}) + \frac{1}{2}k_{r+1,s-1,4}(v_{p+r-1,q+s+1} - v_{p+r,q+s} - u_{p+r-1,q+s+1} + u_{p+r,q+s})$$

$$(3.55)$$

onde a equações (3.54) e (3.55) representam as equações de equilíbrio nas direções dos eixos $x \in y$, respectivamente.

Assumindo a solução harmônica para os deslocamentos $u \in v$ da forma:

$$u_{p+r,q+s} = A_{r,s}e^{i((p+r)\gamma_x + (q+s)\gamma_y - wt)}$$

$$v_{p+r,q+s} = B_{r,s}e^{i((p+r)\gamma_x + (q+s)\gamma_y - wt)}$$
(3.56)

onde $A_{r,s}$ e $B_{r,s}$ são as amplitudes de onda, w a frequência de onda e γ_x e γ_y as componentes do vetor de onda γ , a substituição da equação (3.56) nas equações (3.54) e (3.55) resulta em:

$$(D_{x,s,r} - m_{r,s}w^{2})A_{r,s} + \tilde{k}_{r,s}B_{r,s} = k_{r,s,1}e^{i\gamma_{x}}A_{r+1,s} + \frac{1}{2}k_{r,s,2}\left(e^{i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}A_{r+1,s+1} + e^{i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}B_{r+1,s+1}\right) + \frac{1}{2}k_{r,s,4}\left(e^{i(\gamma_{y}-\gamma_{x})}A_{r-1,s+1} - e^{i(\gamma_{y}-\gamma_{x})}B_{r-1,s+1}\right) + k_{r-1,s,1}e^{-i\gamma_{x}}A_{r-1,s} + \frac{1}{2}k_{r-1,s-1,2}\left(e^{-i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}A_{r-1,s-1} + e^{-i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}B_{r-1,s-1}\right) + \frac{1}{2}k_{r+1,s-1,4}\left(e^{i(\gamma_{x}-\gamma_{y})}A_{r+1,s-1} - e^{i(\gamma_{x}-\gamma_{y})}B_{r+1,s-1}\right) (3.57)$$

$$(D_{y,s,r} - m_{r,s}w^{2})B_{r,s} + \tilde{k}_{r,s}A_{r,s} = k_{r,s,3}e^{i\gamma_{y}}B_{r,s+1} + \frac{1}{2}k_{r,s,2}\left(e^{i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}B_{r+1,s+1} + e^{i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}A_{r+1,s+1}\right) + \frac{1}{2}k_{r,s,4}\left(e^{i(\gamma_{y}-\gamma_{x})}B_{r-1,s+1} - e^{i(\gamma_{y}-\gamma_{x})}A_{r-1,s+1}\right) + k_{r-1,s,3}e^{-i\gamma_{y}}B_{r,s-1} + \frac{1}{2}k_{r-1,s-1,2}\left(e^{-i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}B_{r-1,s-1} + e^{-i(\gamma_{x}+\gamma_{y})}A_{r-1,s-1}\right) + \frac{1}{2}k_{r+1,s-1,4}\left(e^{i(\gamma_{x}-\gamma_{y})}B_{r+1,s-1} - e^{i(\gamma_{x}-\gamma_{y})}A_{r+1,s-1}\right) (3.58)$$

onde:

$$D_{x,r,s} = k_{r,s,1} + k_{r-1,s,1} + \frac{1}{2}(k_{r,s,2} + k_{r,s,4} + k_{r-1,s-1,2} + k_{r+1,s-1,4})$$
(3.59)

$$D_{y,r,s} = k_{r,s,3} + k_{r,s-1,3} + \frac{1}{2}(k_{r,s,2} + k_{r,s,4} + k_{r-1,s-1,2} + k_{r+1,s-1,4})$$
(3.60)

$$\tilde{k}_{r,s} = \frac{1}{2} (k_{r,s,2} - k_{r,s,4} + k_{r-1,s-1,2} - k_{r+1,s-1,4})$$
(3.61)

Para escrever as equações (3.57) e (3.58) na forma matricial, pode-se substituir o vetor de índices (r, s) por um único índice l, fazendo a transformação:

$$l = sN_x + r$$
, onde $r = 1, ..., N_x$ e $s = 1, ..., N_y$; (3.62)

Dessa forma, pode-se montar o vetor deslocamento do sistema da forma $\vec{A} = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_l, B_l\}^T$. Substituindo, então, condições de contorno similares às condições de contorno para o caso unidimensional, obtém-se finalmente:

$$([K(\gamma_x, \gamma_y)] - w^2[M]) \vec{A} = \vec{0}$$
 (3.63)

e o problema de auto-valor e auto-vetor pode ser obtido de forma idêntica ao caso unidimensional (eq. 3.43).

Vê-se que a matriz de rigidez no caso bidimensional depende agora de duas variáveis $(\gamma_x \in \gamma_y)$. No entanto, não é necessário resolver o sistema da equação (3.63) para todas as

combinações possíveis de $\{\gamma_x = 1, \ldots, \frac{\pi}{N_x}; \gamma_y = 1, \ldots, \frac{\pi}{N_y}\}$. Brillouin (1953) mostra que os valores do vetor de onda necessários para a avaliação completa da frequência compreendem todas as combinações possíveis de γ_x e γ_y dentro da região delimitada pelo triângulo *ABC*, denominada região irredutível de Brillouin (Figura 3.8). Além disso, Jensen (2003) comenta que, mesmo sem justificativas matemáticas, é de consenso geral entre pesquisadores que basta a avaliação de γ_x e γ_y no perímetro da triângulo *ABC* para a análise do problema de auto-valor dado pela equação (3.63).



Figura 3.8: Região irredutível de Brillouin, onde o perímetro do triângulo ABC marca os valores do vetor de onda γ para o qual o problema de auto-valor deve ser avaliado

3.3 Discretização de Materiais Elásticos Periódicos por Elementos Finitos

A formulação apresentada em Brillouin (1953) considera materiais elásticos com estruturas microscópicas periódicas, discretizando-os em partículas que interagem com partículas vizinhas – onde, no caso mais simples, a interação é do tipo massa-mola.

Jensen (2003) utiliza a mesma idéia para calcular as curvas de dispersão em materiais elásticos com periodicidade macroscópica em que a estrutura elástica é discretizada por um sistema massa-mola. Entretanto, um sistema massa-mola não consegue representar de forma eficiente materiais contínuos bi ou tridimensionais. Nesses casos, uma melhor representação desses pode ser obtida utilizando-se o método dos elementos finitos. Seguindo a metodologia apresentada por Langlet *et al* (1995), o cálculo das curvas de dispersão (estrutura de banda) para materiais elásticos periódicos discretizados por elementos finitos é feito aplicando-se a condição de contorno dada pela relação de Bloch que, para materiais bidimensionais (Figura 3.9), pode ser escrita da forma:

$$F(x + d_x, y + d_y) = e^{id_x k_x} e^{id_y k_y} F(x, y)$$
(3.64)

onde k_x e k_y representam as componentes do vetor de onda e F(x,y) é uma função harmônica qualquer.



Figura 3.9: Estrutura bi-periódica

Aplicar a relação expressa na equação (3.64) em uma das células de uma estrutura biperiódica (Figura 3.10) significa considerar que esta se repete infinitamente em ambas as direções do plano da estrutura. Para a aplicação da equação (3.64), subdivide-se o contorno da célula retangular em quatro lados e quatro quinas (Figura 3.10) e as condições de contorno, devido à periodicidade da estrutura, podem ser escritas para a função deslocamento como sendo:

$$\vec{u}_{L3} = \vec{u}_{L1} e^{ik_x d_x}$$

$$\vec{u}_{L4} = \vec{u}_{L2} e^{ik_y d_y}$$

$$\vec{u}_{C2} = \vec{u}_{C1} e^{ik_y d_y}$$

$$\vec{u}_{C3} = \vec{u}_{C1} e^{ik_x d_x}$$

$$\vec{u}_{C4} = \vec{u}_{C1} e^{ik_x d_x} e^{jk_y d_y}$$
(3.65)



Figura 3.10: Célula da estrutura bi-periódica

A equação (3.65) estabelece uma relação de dependência entre pontos da estrutura, nas direções x e y, afastados pelas distâncias $d_x e d_y$, respectivamente. Sendo assim, discretizando uma das células da estrutura periódica por elementos finitos, os deslocamentos dos nós em L3, L4, C2, C3 e C4 não são mais independentes.

Aplicando, então, a equação (3.65), observa-se que o vetor deslocamento dos nós da estrutura pode ser descrito a partir dos nós da célula, em que a função de onda é independente da forma:

$$\vec{u} = [T_u]\vec{u}_R = [T_u] \begin{cases} \vec{u}_{C1} \\ \vec{u}_{L1} \\ \vec{u}_{L2} \\ \vec{u}_I \end{cases}$$

$$(3.66)$$

onde o índice I representa os nós internos da estrutura elástica discretizada.

Do equilíbrio de forças entre as células adjacentes, a relação 3.64 pode ser aplicada para obter-se:

$$\vec{f} = [T_f]\vec{f}_R = [T_f] \begin{cases} \vec{f}_{C1} \\ \vec{f}_{L1} \\ \vec{f}_{L2} \\ \vec{0} \end{cases}$$
(3.67)

Da aplicação do método dos elementos finitos, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$([K] - w^2[M]) \,\vec{u} = \vec{f} \tag{3.68}$$

Substituindo as relações 3.66 e 3.67 no sistema linear 3.68 e multiplicando por $[T_u]^{*T}$ – onde o sobrescrito *T representa o complexo conjugado de uma matriz – obtém-se:

$$[T_u]^{*T} \left([K] - w^2[M] \right) [T_u] \vec{u}_R = [T_u]^{*T} [T_f] \vec{f}_R$$
(3.69)

Como $[T_u]^{*T}[T_f] = 0$, o sistema linear a ser resolvido é:

$$([K_R] - w^2[M_R]) \vec{u}_R = \vec{0}$$
(3.70)

onde

$$[K_R] = [T_u]^{*T}[K][T_u]$$

$$[M_R] = [T_u]^{*T}[M][T_u]$$

(3.71)

As matrizes $[K_R]$ e $[M_R]$ são denominadas de matrizes de rigidez e massa reduzidas e são ambas hermitianas e a solução do problema de auto-valor representado pela equação (3.70) produzirá, portanto, valores positivos para a frequência w para valores positivos do vetor de onda $\vec{k} = \{k_x, k_y\}^T$ (Langlet *et al.*, 1995).

Por último, a frequência w é função periódica de \vec{k} e a solução do problema pode ser limitada aos valores de \vec{k} na região irredutível de Brillouin delimitada na figura (3.8).

Capítulo 4

Propagação de Ondas em Meios Poro-elásticos

Nesta seção são desenvolvidas as equações diferencias que regem o fenômeno de propagação de ondas em meios poro-elásticos. Uma compilação dos trabalhos de Biot (1956ab) e Allard (1993) é apresentada para a obtenção do modelo Biot-Allard de equações diferenciais acopladas, em relação aos deslocamentos da estrutura elástica (u_x, u_y, u_x) e do fluido que compõe o material poro-elástico $(U_x, U_y \in U_z)$. O trabalho de Jonhson *et al.* (1987) também é utilizado como referência e complementa o modelo Biot-Allard com a introdução de novas constantes físicas e novos modelos para funções utilizadas para o cálculo de coeficientes variáveis na frequência e que aparecem, implicita e explicitamente, nas equações diferencias de movimento do material poro-elástico. Definido o modelo Biot-Allard, utiliza-se os trabalhos de Atalla *et al.* (1998, 2001) para a obtenção de formulação "mista (u,p)", a qual redefine o modelo de Biot-Allard em um sistema de equações diferenciais acopladas como função dos deslocamentos da estrutura elástica e da pressão no fluido $(u_x, u_y, u_z e p)$.

Para a realização dos cálculos que se seguem nesta seção, serão consideradas as seguintes hipóteses:

 (i) O comprimento da onda que se propaga no meio poro-elástico é suficientemente maior que o elemento volumétrico escolhido, que por sua vez é pequeno o suficiente para que as propriedades de continuidade sejam válidas, de forma que as propriedades médias dentro do elemento possam ser consideradas constantes;

- (ii) O corpo sólido do material poro-elástico é representado por uma estrutura elástica isotrópica e homogênea, onde todos os poros estão interconectados;
- (iii) O fluido presente no material poro-elástico é considerado Newtoniano e preenche todo o volume poroso do material;
- (iv) A amplitude de excitação do meio poro-elástico é considerada pequena o suficiente para que a deformação do material seja linear e dependa somente da direção da excitação – quando o material é isotrópico;
- (v) A propagação de ondas no meio poro-elástico é considerado um processo adiabático.

4.1 Modelo Biot-Allard

4.1.1 Relação tensão-deformação

As componentes do tensor de tensões de um elemento infinitesimal poro-elástico estão representadas na figura (4.1).



Figura 4.1: Componentes do tensor de tensões em um elemento cúbico infinitesimal do material poro-elástico

Subdivide-se, então, o tensor de tensões em dois componentes escrevendo o tensor de tensões total σ_{ij}^t como:

$$\sigma_{ij}^t = \sigma_{ij}^s + \sigma_{ij}^f \tag{4.1}$$

onde σ_{ij}^s engloba as tensões geradas pelas forças agindo na matriz elástica do elemento poroelástico e, portanto, representado por:

$$\sigma_{ij}^{s} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$
(4.2)

Da teoria da mecânica do contínuo, sabe-se que o tensor σ_{ij}^s é simétrico, o que permite escrever que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{13} = \sigma_{31}$ e $\sigma_{23} = \sigma_{32}$. Já as tensões geradas pelas forças agindo na fase fluida são representadas por:

$$\sigma_{ij}^{f} = s\delta_{ij} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}, \quad s = -\phi p \tag{4.3}$$

onde ϕ é a porosidade do meio e p a pressão do fluido.

De forma semelhante, as deformações da matriz elástica ϵ_{ij} podem ser descritas – em sua forma linear – pelo tensor de deformações infinitesimais:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) = \begin{bmatrix} u_{1,1} & \frac{1}{2} \left(u_{1,2} + u_{2,1} \right) & \frac{1}{2} \left(u_{1,3} + u_{3,1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(u_{2,1} + u_{1,2} \right) & u_{2,2} & \frac{1}{2} \left(u_{2,3} + u_{3,2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(u_{3,1} + u_{1,3} \right) & \frac{1}{2} \left(u_{3,2} + u_{2,3} \right) & u_{3,3} \end{bmatrix}$$
(4.4)

Já as deformações na fase fluida ξ_{ij} são dadas por:

$$\xi_{ij} = U_{k,k} \delta_{ij} = \begin{bmatrix} U_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & U_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & U_{3,3} \end{bmatrix}$$
(4.5)

onde as variáveis u_i e U_i representam os deslocamentos médios avaliados no elemento poroelástico da matriz elástica e do fluido, respectivamente, e o índice "vírgula", a diferenciação na notação indicial.

Definidas as expressões para as tensões e deformações do material poro-elástico, devese, então, achar a relação entre ambas. Para tanto, é desconsiderada a presença de forças dissipativas e assume-se, portanto, que o sistema físico em questão é conservativo. Sendo assim, pode-se considerar que a diferença entre os estados de energia de um sistema em repouso – livre da aplicação de forças, portanto não deformado e caracterizado por um estado de energia mínimo – e de um sistema onde forças de excitação externas estão presentes, é função da deformação do mesmo, sendo esta diferença denominada de energia de deformação.

Sabendo que a energia de deformação W é função da deformação, ou seja, $W = W(\epsilon_{ij}, \xi_{ij}) = W(\epsilon_{ij}, \xi)$, onde $\xi = U_{k,k}$, pode-se escrever que:

$$dW = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \xi} d\xi$$
(4.6)

Assumindo que a função energia de deformação é quadrática e positiva definida, pode-se escrever, da teoria da mecânica do contínuo (Lai *et al.*, 1999), a seguinte relação:

$$\sigma_{ij}^{s} = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}}$$

$$s = \frac{\partial W}{\partial \xi}$$
(4.7)

A teoria da mecânica do contínuo mostra também que, se a relação dada pela equação (4.7) vale, o tensor de quarta ordem linear que dá a relação entre a tensão e a deformação (relação constitutiva) é simétrico e W pode ser escrito como:

$$W = \sigma_{ij}^{s} \epsilon_{ij} + \sigma_{ij}^{f} \xi_{ij} = \sigma_{11}^{s} \epsilon_{11} + \sigma_{22}^{s} \epsilon_{22} + \sigma_{33}^{s} \epsilon_{33} + 2(\sigma_{12}^{s} \epsilon_{12} + \sigma_{13}^{s} \epsilon_{13} + \sigma_{23}^{s} \epsilon_{23}) + s\xi$$
(4.8)

Observa-se, das equações (4.7) e (4.8), que o tensor tensão-deformação de quarta ordem pode ser representado por uma matriz 7X7 contendo 28 coeficientes distintos. Este número de coeficientes pode ser reduzido usando as propriedades de isotropia do material e de simetria do tensor tensão-deformação. Em materiais isotrópicos, as tensões e deformações principais coincidem. Escrevendo, então, a relação tensão-deformação nas direções principais para uma material poro-elástico isotrópico, obtém-se:

$$\sigma_{I} = B_{1}\epsilon_{I} + B_{2}(\epsilon_{II} + \epsilon_{III}) + Q\xi$$

$$\sigma_{II} = B_{1}\epsilon_{II} + B_{2}(\epsilon_{I} + \epsilon_{III}) + Q\xi$$

$$\sigma_{III} = B_{1}\epsilon_{III} + B_{2}(\epsilon_{I} + \epsilon_{II}) + Q\xi$$

$$s = Q'\epsilon_{kk} + R\xi$$
(4.9)

onde $B_1, B_2, Q', Q \in R$ são constantes elásticas a serem definidas.

A relação tensão-deformação pode, então, ser escrita da forma:

$$\left\{\begin{array}{c}
\sigma_{I} \\
\sigma_{II} \\
\sigma_{III} \\
s\end{array}\right\} = \left[\begin{array}{cccc}
B_{1} & B_{2} & B_{2} & Q \\
B_{2} & B_{1} & B_{2} & Q \\
B_{2} & B_{2} & B_{1} & Q \\
Q' & Q' & Q' & R\end{array}\right] \left\{\begin{array}{c}
\epsilon_{I} \\
\epsilon_{II} \\
\epsilon_{III} \\
\xi\end{array}\right\}$$
(4.10)

Como o tensor tensão-deformação é simétrico (Q' = Q), existem, portanto, somente 4 constantes elásticas distintas que realizam a transformação linear $\sigma = F(\epsilon)$. Introduzindo novas constantes $A = B_2$ e $N = B_1/2 - A$, pode-se reescrever a equação (4.9) em sua forma mais familiar, dada pela equação (4.11).

$$\sigma_{I} = 2N\epsilon_{I} + A\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$\sigma_{II} = 2N\epsilon_{II} + A\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$\sigma_{III} = 2N\epsilon_{III} + A\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$s = Q\epsilon_{kk} + R\xi$$

(4.11)

onde as constantes elásticas $A \in N$ são equivalentes às constantes de Lamé.

Utilizando-se das propriedades dos invariantes dos tensores $\sigma_{ij}^s \in \epsilon_{ij}$, pode-se escrever a relação dada pela equação (4.11) para as direções ortogonais $x_1, x_2 \in x_3$:

$$\sigma_{11} = 2N\epsilon_{11} + A\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$\sigma_{22} = 2N\epsilon_{22} + A\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$\sigma_{33} = 2N\epsilon_{33} + A\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$\sigma_{12} = 2N\epsilon_{12}$$

$$\sigma_{13} = 2N\epsilon_{13}$$

$$\sigma_{23} = 2N\epsilon_{23}$$

$$s = Q\epsilon_{kk} + R\xi$$

(4.12)

A relação dada pela equação (4.12) pode também ser reescrita na forma mais compacta dada pela equação (4.13).

$$\sigma_{ij}^{s} = 2N\epsilon_{ij} + A\epsilon_{kk}\delta_{ij} + Q\xi\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^{f} = (Q\epsilon_{kk} + R\xi)\delta_{ij} = -\phi p\delta_{ij}$$
(4.13)

Por fim, substituindo a constante A por P-2N, a equação (4.13) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ij}^{s} = 2N\epsilon_{ij} + \left[(P - 2N)\epsilon_{kk} + Q\xi \right] \delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^{f} = \left[Q\epsilon_{kk} + R\xi \right] \delta_{ij} = -\phi p \delta_{ij}$$
(4.14)

Caracterização das constantes $P, N, Q \in R$

Seguem a discussão e a caracterização das constantes P, N, Q e R, propostas originalmente por Allard (1993), sob o ponto de vista da engenharia.

Em primeira instância, observa-se que se Q = 0, então a primeira equação da expressão (4.13) torna-se idêntica à relação tensão-deformação para sólidos elásticos dada pela lei de Hooke (Equação 4.15). Da mesma maneira, quando Q = 0, a segunda equação da expressão (4.13) toma forma equivalente à equação de estado linear para fluidos invíscidos e R pode ser comparado ao módulo volumétrico do fluido. Isto é, o sistema desacoplado pode ser escrito por:

$$\sigma_{ij}^{s} = 2N\epsilon_{ij} + A(\epsilon_{kk})\delta_{ij}$$

$$-\phi p = R\xi$$

$$(4.15)$$

Observa-se, então, que o termo $Q\xi$ relaciona a dilatação do fluido – imerso na matriz elástica – com as tensões agindo na matriz elástica, e $Q\epsilon_{kk}$ relaciona a dilatação da estrutura com a variação da pressão do fluido. Allard (1993) afirma também que a constante Q deriva do potencial de energia de interação E_{pi} que, por volume unitário, é dado por:

$$E_{pi} = Qu_{i,i}U_{j,j} = Q\epsilon_{ii}\xi_{jj} \tag{4.16}$$

Defini-se, então, a constante Q como o coeficiente de acoplamento fluido-estrutura do material poro-elástico.

Para a avaliação das constantes P, N, $Q \in R$, Allard (1993) descreve 3 experimentos, apresentados na sequência.

1. O material poro-elástico é submetido somente a esforços cortantes ($\epsilon_{kk} = \xi = 0$), de forma que as tensões no mesmo valem:

$$\sigma_{ij}^s = 2N\epsilon_{ij}; \qquad \sigma_{ij}^f = 0 \tag{4.17}$$

Da equação (4.17), fica claro que N é o módulo de cisalhamento do material poroelástico, e consequentemente da matriz elástica, já que o fluido não oferece resistência a esforços cortantes ($\sigma_{ij}^f = 0$).

2. É aplicada uma pressão p_{me} na matriz elástica do material, enquanto a pressão interna (p_0) do fluido é mantida constante. Isso pode ser realizado cobrindo o material poroelástico com uma malha flexível submetida a uma pressão p_{me} (Figura 4.2).



Figura 4.2: Esquema do experimento 2: a malha flexível gera uma pressão na matriz elástica p_{me} , enquanto o ar dentro da malha mantém-se à pressão constante p_0

Tendo em vista este carregamento, o sistema de equações (4.14) pode ser escrito como:

$$-p_{me} = \left(P - \frac{3}{4}N\right)\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$0 = Q\epsilon_{kk} + R\xi$$
(4.18)

onde $-p_{me} = \sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$.

Definindo K_b como o módulo volumétrico da matriz elástica, obtém-se, do experimento proposto, que:

$$K_b = -\frac{p_{me}}{\epsilon_{kk}} \tag{4.19}$$

3. O material poro-elástico é submetido a um acréscimo de pressão (p_f) no fluido, como mostrado na figura (4.3).

Neste experimento, a porosidade do material não varia com a aplicação da pressão, e a deformação da matriz elástica é a mesma deformação obtida caso a matriz não fosse porosa, podendo ser associada a uma simples mudança de escala (Allard, 1993).

Das condições de contorno definidas na figura (4.3), tem-se que o tensor de tensões da matriz elástica vale:

$$\sigma_{ij}^s = -p_f (1 - \phi) \delta_{ij} \tag{4.20}$$



Figura 4.3: Esquema do experimento 3: material sem a cobertura da malha flexível e submetido a um acréscimo de pressão p_f

sendo ϕ a porosidade do meio poro-elástico. A equação 4.14 pode ser escrita da forma:

$$-p_f(1-\phi) = \left(P - \frac{3}{4}N\right)\epsilon_{kk} + Q\xi$$

$$-\phi p_f = Q\epsilon_{kk} + R\xi$$
(4.21)

Então, define-se como K_s o módulo volumétrico do material que compõe a estrutura elástica do material poro-elástico, e K_f como o módulo volumétrico do fluido, onde:

$$K_s = -\frac{p_f}{\epsilon_{kk}}; \qquad K_f = -\frac{p_f}{\xi} \tag{4.22}$$

Das equações (4.19) a (4.22), deduz-se um sistema de três equações e três icógnitas (P, $Q \in R$) dado por:

$$\frac{\frac{Q}{K_s} + \frac{R}{K_f} = \phi}{\left(\frac{P - \frac{3}{4}N}{K_s}\right) + \frac{Q}{K_f} = 1 - \phi}$$

$$\left[\left(P - \frac{3}{4}N\right) - \frac{Q^2}{R} \right] / K_b = 1$$

$$(4.23)$$

A resolução do sistema dado pela equação (4.23) permite o cálculo das constates P, Q e R. Seus valores estão expressos na equação (4.24).

$$P = \frac{(1-\phi) \left[1-\phi - \frac{K_b}{K_S} \right] K_s + \phi \frac{K_s}{K_f} K_b}{1-\phi - \frac{K_b}{K_S} + \phi \frac{K_s}{K_f}} + \frac{3}{4} N$$

$$Q = \frac{\left[1-\phi - \frac{K_b}{K_S} \right] \phi K_s}{1-\phi - \frac{K_b}{K_S} + \phi \frac{K_s}{K_f}}$$

$$R = \frac{\phi^2 K_s}{1-\phi - \frac{K_b}{K_S} + \phi \frac{K_s}{K_f}}$$
(4.24)

Algumas considerações podem ser feitas para simplificar os resultados dados pela equação (4.24). Sabe-se que, para a maioria dos casos (Allard, 1993):

$$K_s >> K_b \tag{4.25}$$

е

$$\frac{K_s}{K_f} >> \frac{1-\phi}{\phi} \tag{4.26}$$

Ainda, caso o fluido presente no material poro-elástico seja o ar – considerado como gás ideal –, uma importante igualdade pode ser estabelecida da forma (Atalla *et al.*, 2001):

$$\phi\left(1+\frac{Q}{R}\right)\simeq1\tag{4.27}$$

É possível, então, reescrever a equação (4.24) da forma:

$$P = K_b + \frac{(1-\phi)^2}{\phi} K_f + \frac{4}{3}N$$

$$Q = (1-\phi)K_f$$

$$R = \phi K_f$$
(4.28)

Nota-se, então, que a constante R, quando o fluido que embebe o material poro-elástico é o ar, vale simplesmente o módulo volumétrico K_f do volume de ar dentro do poro. Como pode ser visto na seção (4.1.3), a influência da viscosidade do fluido não é considerada diretamente na relação constitutiva do material poro-elástico; a influência da condução de calor no fluido dentro dos poros nas constantes elásticas é, no entanto, considerada por Allard (1993)¹.

 $^{^1{\}rm O}$ desenvolvimento da teoria apresentada pelo autor encontra-se no apêndice B

Pode-se observar, do apêndice B, que o módulo volumétrico K_f do fluido – neste caso, o ar – dentro dos poros do material, quando levado em conta os efeitos térmicos, é dado por \tilde{K} definido na equação (B.18).

O valor das constantes elásticas, quando os efeitos de condução de calor no ar são considerados, valem, então:

$$P = K_b + \frac{(1-\phi)^2}{\phi}\tilde{K} + \frac{4}{3}N$$

$$Q = (1-\phi)\tilde{K}$$

$$R = \phi\tilde{K}$$
(4.29)

Sendo assim, fica definido parcialmente o modelo poro-elástico e as constantes necessárias para a sua caracterização.

4.1.2 Relações dinâmicas e forças inerciais

Analisa-se, inicialmente, a relação entre as tensões e acelerações do elemento poro-elástico sem serem levadas em consideração as forças viscosas ². Para tanto, algumas considerações devem ser feitas:

- (i) O fluido imerso é invíscido;
- (ii) Os poros do material poro-elástico são pequenos em relação ao tamanho do elemento, que é, por sua vez, pequeno em relação ao comprimento da onda que excita o material.

Uma consequência importante da última hipótese adotada é que o padrão da velocidade microscópica do fluido se torna o mesmo padrão de um fluido incompressível. Chega-se à essa conclusão partindo do princípio de que o campo de velocidades – gerado por uma onda que se propaga pelo meio em questão – de um fluido incompressível em obstáculos relativamente pequenos comparados ao comprimento de onda, assemelha-se ao campo de velocidades de um fluido incompressível. Sendo assim, o padrão microscópico das velocidades do fluido

 $^{^{2}\}mathrm{A}$ viscosidade será considerada mais adiante no texto com a inclusão de um coeficiente de amortecimento \tilde{b} na equação diferencial do movimento

relativo à matriz elástica depende somente da direção de fluxo e não da magnitude do mesmo. Assumindo também que o fluido é invíscido, o campo de velocidades é, então, função linear das componentes macroscópicas da velocidade na matriz elástica (\dot{u}_i) e no fluido (\dot{U}_i) (Biot, 1956a).

Considerando que o material poro-elástico pode ser modelado como isotrópico, onde os deslocamentos nas direções x_1 , x_2 e x_3 são dinamicamente desacoplados, a expressão de energia cinética é dada, então, por:

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{u}_i \rho_{11} \dot{u}_i + \dot{u}_i \rho_{12} \dot{U}_i + \frac{1}{2} \dot{U}_i \rho_{22} \dot{U}_i$$
(4.30)

Pode-se ver que existem três coeficientes de massa, os quais dependem da natureza e geometria da matriz elástica e da densidade do fluido (Allard, 1993). A equação (4.30) é dada para as velocidades macroscópicas – que são as médias das velocidades microscópicas no elemento poro-elástico – da matriz elástica e do fluido, diferindo, portanto, da expressão da energia cinética em função das velocidades microscópicas, dada por:

$$E_{c} = \frac{1}{2}(1-\phi)\rho_{s}|\dot{\vec{u}}_{micro}| + \frac{1}{2}\phi\rho_{f}|\dot{\vec{U}}_{micro}|$$
(4.31)

Da formulação lagrangiana é possível calcular, a partir da equação (4.30), as forças inerciais $q^s \in q^f$ que agem na matriz elástica e no fluido do elemento poro-elástico, respectivamente, dadas por:

$$q_i^s = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} = \rho_{11} \ddot{u}_i + \rho_{12} \ddot{U}_i$$

$$q_i^f = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{U}_i} = \rho_{12} \ddot{u}_i + \rho_{22} \ddot{U}_i$$
(4.32)

Tem-se, então, que as forças inerciais derivadas da equação (4.30) são funções lineares das acelerações da matriz elástica e do fluido, e da interação inercial entre ambos. Fisicamente, a aceleração do fluido imerso na matriz elástica do elemento poro-elástico produz uma força inercial de reação na matriz elástica e vice-versa, mesmo sem a presença da viscosidade, de forma que ρ_{11} e ρ_{22} não correspondem às densidades médias da estrutura e do fluido (Allard, 1993). Para a avaliação dos coeficientes ρ_{11} , ρ_{22} e ρ_{12} , considera-se, inicialmente, o caso onde não há movimento relativo entre a matriz elástica e o fluido $(u_i = U_i)$, de forma que não há interação inercial entre ambas. Nesse caso, a expressão da energia cinética em função das velocidades macroscópicas e microscópicas são equivalentes.

A seguinte relação pode, então, ser estabelecida:

$$\rho_{11} + 2\rho_{12} + \rho_{22} = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f = \rho_{total}$$
(4.33)

Para $u_i = U_i$, pode-se escrever também, a partir da equação (4.31), que:

$$q_i^f = \phi \rho_f \ddot{U}_i \tag{4.34}$$

Da comparação entre as equações (4.32) e (4.34) – para $u_i = U_i$ –, obtém-se que:

$$\rho_{12} + \rho_{22} = \phi \rho_f \tag{4.35}$$

e, a partir da equação (4.33), obtém-se que:

$$\rho_{11} + \rho_{12} = (1 - \phi)\rho_s \tag{4.36}$$

Assumindo, agora, que a matriz elástica permanece estática $(u_i = 0)$, tem-se que:

$$q_i^s = \rho_{12} \ddot{U}_i$$

$$q_i^f = \rho_{22} \ddot{U}_i$$
(4.37)

Observa-se neste caso que, mesmo com estrutura elástica imóvel, existe uma força de reação inercial agindo na matriz devido à aceleração do fluido. Essa força de reação inercial pode ser entendida como a força necessária para manter a matriz elástica parada quando o fluido se movimenta. Sendo assim, esta força possui direção oposta à aceleração \ddot{U} ; consequentemente, chega-se à conclusão de que $\rho_{12} < 0$.

Definidas as relações entre os coeficientes de massa e as massas reais da estrutura sólida e do fluido dadas pelas equações (4.35) e (4.36), resta, então, avaliar os coeficientes ρ_{11} , ρ_{12} e ρ_{22} em função da geometria interna do material poro-elástico. Para tanto, deve-se introduzir o conceito de tortuosidade.

Considerando a estrutura de um material poroso composta por poros interconectados que formam uma rede de "tubos" por onde o fluido embebido escoa, a tortuosidade de uma material poroso está associada ao grau de desorganização de sua rede porosa. Quanto maior a tortuosidade de uma material poroso, maior a dificuldade do fluido embebido escoar neste³.

Se a matriz elástica permanece estática ($\dot{u}_i = 0$) e as forças viscosas estão sendo desconsideradas, pode-se escrever a relação entre o gradiente de pressão e a velocidade média de escoamento da fase fluida, ambos na direção x_1 , para um material com porosidade ϕ e tortuosidade k_s , dada pela equação (A.59):

$$-\phi p_{,1} = jwk_s \rho_f \phi U_1 \tag{4.38}$$

Pode-se também rescrever a constante de tortuosidade em sua forma mais conhecida α_{∞} , dada pela equação (C.6).

Sabendo que $q_1^f = -\phi p_{,1}$, e que, para uma onda se propagando à frequência w, $\ddot{U}_1 = jw\dot{U}_1$, a equação (4.37) permite escrever:

$$\rho_{22} = \phi \alpha_{\infty} \rho_f \tag{4.39}$$

Da equação (4.35), obtém-se:

$$\rho_{12} = \phi \rho_f - \phi \alpha_\infty \rho_f = -(\alpha_\infty - 1)\phi \rho_f \tag{4.40}$$

e, finalmente,

$$\rho_{11} = (1 - \phi)\rho_s + (\alpha_{\infty} - 1)\phi\rho_f \tag{4.41}$$

 $^{^{3}}$ Uma melhor definição do conceito de tortuosidade é dado por Allard (1993) e Johson *et al.* (1987). Um resumo da definição de tortuosidade apresentada nestas referências encontra-se em anexo no texto.

As equações (4.39) a (4.41) relacionam as densidades aparentes e físicas com a tortuosidade e a porosidade.

Equação diferencial sem a inclusão de forças viscosas

A equação diferencial do movimento para sistemas conservativos (sem a inclusão de forças dissipativas) pode ser calculada aplicando-se o princípio de Hamilton, descrito por:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_p) dt = 0 \delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2)$$
(4.42)

onde E_c e E_p representam as energias cinética e potencial do sistema, e q_k representa as coordenadas generalizadas.

Desconsiderando as forças de corpo e escolhendo q_k como os deslocamentos do fluido e da estrutura ($U_i \in u_i$), pode-se escrever:

$$E_{c} = \int_{V_{0}} \left(\frac{1}{2} \dot{u}_{i} \rho_{11} \dot{u}_{i} + \dot{u}_{i} \rho_{12} \dot{U}_{i} + \frac{1}{2} \dot{U}_{i} \rho_{22} \dot{U}_{i} \right) dV$$

$$E_{p} = \int_{V_{0}} W dV - \int_{S_{0}} \bar{t}_{i}(t) u_{i} dS - \int_{S_{0}} \bar{p}_{i}(t) U_{i} dS$$
(4.43)

onde $\bar{t}_i(t)$ e $\bar{p}_i(t)$ são as forças externas na superfície do material poro-elástico, e

$$W = \sigma_{ij}^s \epsilon_{ij} + \sigma_{ij}^f \xi_{ij} \tag{4.44}$$

Pode-se reescrever a equação (4.42) como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta\{E_c\} - \delta\{E_p\}\right) dt = 0 \tag{4.45}$$

Os variacionais das energias cinética e potencial podem ser dados por:

$$\delta\{E_c\} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i + \frac{\partial E_c}{\partial \dot{U}_i} \delta \dot{U}_i\right) dV \tag{4.46}$$

е

$$\delta\{E_p\} = \int_{V_0} \delta\{W\} dV - \int_{S_0} \delta\{\bar{t}_i(t)u_i\} dS - \int_{S_0} \delta\{\bar{p}_i(t)U_i\} dS$$

=
$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta\epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial \xi_{ij}} \delta\xi_{ij}\right) dV - \int_{S_0} \bar{t}_i(t) \delta u_i dS - \int_{S_0} \bar{p}_i(t) \delta U_i dS$$
(4.47)

Avaliando o primeiro termo dentro da integral logo à direita do sinal de igualdade da equação (4.47):

$$\int_{V_0} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} \sigma_{ij}^s (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV$$
(4.48)

Como o tensor de tensões é simétrico ($\sigma_{ij}^s = \sigma_{ji}^s$), pode-se simplificar a equação (4.48) usando o teorema de Green e obter-se:

$$\int_{V_0} \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_{V_0} \sigma_{ij}^s \delta u_{i,j} dV
= \int_{V_0} \left[(\sigma_{ij}^s \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}^s \delta u_i \right] dV
= \int_{S_0} \sigma_{ij}^s \delta u_i n_j dS - \int_{V_0} \sigma_{ij,j}^s \delta u_i dV$$
(4.49)

Repetindo o mesmo procedimento para o segundo termo da mesma integral, obtém-se:

$$\int_{V_0} \frac{\partial W}{\partial \xi_{ij}} \delta \xi_{ij} dV = \int_{S_0} \sigma_{ij}^f \delta U_i n_j dS - \int_{V_0} \sigma_{ij,j}^f \delta U_i dV$$
(4.50)

Avaliando agora o termo $\delta\{E_c\}$:

$$\delta\{E_{c}\} = \int_{V_{0}} [\rho_{11}\dot{u}_{i}\delta\dot{u}_{i} + \rho_{12}\dot{U}_{i}\delta\dot{u}_{i} + \rho_{12}\dot{u}_{i}\delta\dot{U}_{i} + \rho_{22}\dot{U}_{i}\delta\dot{U}_{i}]dV$$
(4.51)

Integrando, por partes, no tempo, o primeiro termo da equação (4.51), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \rho_{11} \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dt = \rho_{11} \left[\dot{u}_i \delta u_i \right]_{t_1}^{t_2} - \rho_{11} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_i \delta u_i dt$$

$$= -\rho_{11} \int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_i \delta u_i dt$$
(4.52)

onde $[\dot{u}_i \delta u_i]_{t_1}^{t_2} = 0$ pois $\delta q_k(t_1) = \delta q_k(t_2).$

Seguindo o mesmo procedimento para os três últimos termos dentro da integral da equação (4.51), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\{E_c\} dt = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{V_0} [(\rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i)\delta u_i + (\rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i)\delta U_i] dV dt$$
(4.53)

Substituindo as equações (4.47), (4.49), (4.50) e (4.53) na equação (4.45), chega-se a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_c - E_p) = -\int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{V_0} (\rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i - \sigma_{ij,j}^s) \delta u_i dV + \int_{V_0} (\rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i - \sigma_{ij,j}^f) \delta U_i dV + \int_{S_0} (-\bar{t}_i(t) + \sigma_{ij}^s n_j) \delta u_i dS + \int_{S_0} (-\bar{p}_i(t) + \sigma_{ij}^f n_j) \delta U_i dS \right] dt = 0$$
(4.54)

A equação (4.54) vale para $\delta u_i \in \delta U_i$ quaisquer em $V_0 \in S_0$ somente se:

$$\rho_{11}\ddot{u}_{i} + \rho_{12}\ddot{U}_{i} - \sigma_{ij,j}^{s} = 0 \qquad em \ V_{0}
\rho_{12}\ddot{u}_{i} + \rho_{22}\ddot{U}_{i} - \sigma_{ij,j}^{f} = 0 \qquad em \ V_{0}
\bar{t}_{i}(t) = \sigma_{ij}^{s}n_{j} \qquad em \ S_{0}
\bar{p}_{i}(t) = \sigma_{ij}^{f}n_{j} \qquad em \ S_{0}$$
(4.55)

As duas primeiras equações da expressão (4.55) compõem os sistemas de equações diferencias do movimento acopladas para materiais poro-elásticos sem a ação de forças dissipativas. As duas últimas equações são as condições naturais de contorno do sistema.

4.1.3 Função potencial dissipativa – forças viscosas

Na seção anterior, a equação diferencial do movimento para o meio poro-elástico – acoplada nas variáveis $u_i \in U_i$, que representam os valores médios das velocidades reais microscópicas, da estrutura porosa e do fluido, em um dado elemento do material – foi obtida desconsiderandose a viscosidade do fluido. No entanto, sabe-se que as forças viscosas possuem um papel relevante na descrição dinâmica do corpo poro-elástico.

Biot (1956b) introduz uma função potencial de dissipação para a descrição das forças viscosas presentes no meio poro-elástico. O autor considera a função potencial de dissipação

como homogênea quadrática, e como função dos deslocamentos generalizados $u_i \in U_i$; ademais, como o material é considerado isotrópico, as direções ortogonais devem ser desacopladas. Considera-se também que as forças viscosas desaparecem quando o movimento relativo médio entre a matriz elástica e o fluido é nulo $(u_i - U_i = 0)$; e a função potencial de dissipação pode ser escrita como:

$$D = \frac{1}{2} (\dot{u}_i - \dot{U}_i) \tilde{b} (\dot{u}_i - \dot{U}_i)$$
(4.56)

onde \tilde{b} é função da frequência de propagação da onda que excita o material poro-elástico, e relaciona linearmente as forças viscosas e as velocidades relativas da estrutura porosa e do fluido.

Para a avaliação do coeficiente \tilde{b} é necessário transpor a influência das forças viscosas do nível micro para o nível macroscópico do material. Para tanto, Biot investiga problemas de propagação de ondas em um fluido presente em duas configurações simples: tubos cilíndricos e placas plana paralelas – ambas consideradas como sendo extremos opostos da geometria que um poro pode ter. Este estudo pode ser encontrado nos trabalhos de Biot (1956b) e Allard (1993), cuja síntese encontra-se no apêndice A.

Avaliação do coeficiente \tilde{b}

Considera-se, inicialmente, que a matriz elástica permanece imóvel $(u_i = 0)$. Para a obtenção da equação diferencial do movimento do elemento, admite-se que a viscosidade do fluido não influencia diretamente nas forças inerciais e elásticas do elemento, sendo que sua influencia dinâmica é totalmente considerada pela função potencial de dissipação. Utilizando-se dos resultados apresentados pela equação (4.55) e da definição da função dissipativa dada pela equação (4.56), pode-se escrever:

$$\rho_{11}\ddot{u}_i + \rho_{12}\ddot{U}_i - \sigma^s_{ij,j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{u}_i} = -\tilde{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i)$$

$$\rho_{12}\ddot{u}_i + \rho_{22}\ddot{U}_i - \sigma^f_{ij,j} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{U}_i} = \tilde{b}(\dot{u}_i - \dot{U}_i)$$
(4.57)

Se $u_i = 0$ e sabendo que sabendo que $\sigma_{ij}^f = -\phi p \delta_{ij}$ e $\rho_{22} = \phi \alpha_{\infty} \rho_f$, obtém-se, a partir da equação (4.57), que:

$$-\phi p_{,i} = \rho_{22} \ddot{U}_i + \tilde{b} \dot{U}_i \tag{4.58}$$

Para o caso em que uma onda de frequência w se propaga em um tubo cilíndrico na direção x_1 , a equação (4.58) pode ser escrita como:

$$-\phi p_{,1} = jw\rho_{22}\dot{U}_1 + \tilde{b}\dot{U}_1 \tag{4.59}$$

Comparando as equações (4.59) e (A.58), conclui-se que:

$$\tilde{b} = \sigma \phi^2 G_{tc}(z), \qquad z = \sqrt{\frac{8w\rho_f k_s}{\sigma \phi}}$$
(4.60)

onde σ representa a resistividade do material poroso, definida como a razão entre o gradiente da pressão e o fluxo volumétrico da fase fluida. A função $G_{tc}(z)$ representa o desvio, em função da frequência, entre o valor das forças viscosas produzidas no contato fluido-sólido quando o fluido se desloca harmonicamente por um tubo cilíndrico, e quando este flui não harmonicamente (condição de fluxo de Poiseuille).

Da mesma forma, aplicando a a equação (4.58) para o caso onde uma onda se propaga em placas planas paralelas, e comparando o resultado com a equação (A.60), obtém-se:

$$\tilde{b} = \sigma \phi^2 G_{pp}(z'), \qquad z' = \sqrt{\frac{3w\rho_f k_s}{\sigma \phi}}$$

$$(4.61)$$

sendo que a função $G_{pp}(z')$ é o equivalente da função $G_{tc}(z)$ para o caso de um fluido se propagando entre placas paralelas. Observa-se que ambas as funções são iguais à unidade quando w = 0.

Dos resultados das equações (4.60) e (4.61), conclui-se que o coeficiente \tilde{b} pode ser escrito, de forma geral, como:

$$\tilde{b} = \sigma \phi^2 \tilde{F}(A\sqrt{w}) \tag{4.62}$$

onde a função qualquer \tilde{F} e a constante A dependem da geometria da seção transversal dos poros.

É interessante, porém, que \tilde{b} possa ser descrito por uma única função \tilde{F} independente da geometria dos poros do material, tal que a caracterização de \tilde{b} para diferentes materiais dependa somente da aferição da constante A. Seguindo este raciocínio, Biot (1956b) mostra que as funções $G_{tc}(z)$ e $G_{pp}(z')$ são muito similares quando:

$$z = \frac{4}{3}z' \tag{4.63}$$

Isso pode ser observado na figura (4.4) onde estão ilustrados as curvas $G_{tc}(z) \in G_{pp}(\frac{3}{4}z)$ em função dos valores de z.



Figura 4.4: Curvas dos fatores de forma $G_{tc}(z)$
e $G_{pp}(z')$ para $z'=\frac{3}{4}z$

Substituindo a equação (4.63) na expressão de z' dada pela equação (4.61), obtém-se:

$$\sigma \phi^2 G_{tc}(z) \cong \sigma \phi^2 G_{pp}(z), \qquad z = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{3w\rho_f k_s}{\sigma \phi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(4.64)$$

Escrevendo, então, a expressão de z na forma:

$$z = c \left(\frac{3w\rho_f k_s}{\sigma\phi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.65}$$

onde c é uma constante que depende somente da geometria o poro, pode-se, por fim, escrever uma expressão geral para \tilde{b} da forma:

$$\tilde{b} = \sigma \phi^2 G(z) \tag{4.66}$$

para $G(z) = G_{tc}(z)$ e z dado pela equação (4.65).

Neste caso, se os poros do material poro-elástico possuem geometria cilíndrica, a constante c deve ser avaliada como igual a 1, e se os poros são chatos, c deve se aproximar de $\sqrt{2/3}$.

Biot (1956b) assumiu que a expressão (4.66) produz resultados satisfatórios para quaisquer seções transversais dos poros de um material, desde que a constante c seja avaliada corretamente. Allard (1993) se aprofunda um pouco mais sobre o assunto e tabela alguns valores para c; o comportamento das funções $G_{pp}(z)$ e $G_{tc}(z)$ para baixas e altas frequências também é discutido.

Tem-se, então, que a função G(z) permite a cálculo de \tilde{b} para geometrias diversas dos poros. Johnson *et al.* (1987) também propõe uma função para o cálculo de \tilde{b} , dada por:

$$G_j(w) = \left(1 + \frac{4j\alpha_\infty^2 \eta \rho_0 w}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(4.67)

onde Λ é o comprimento característico viscoso, α_{∞} é a tortuosidade do material poro-elástico, η a viscosidade cinemática e ρ_0 a densidade do fluido. As definições dessas constantes estão mostradas no apêndice A.

A função $G_j(w)$ é mais comumente usada que a função G(z) para o cálculo do coeficiente dissipativo (\tilde{b}) , entre outros motivos, por ser mais fácil de calcular que G(z) (Allard, 1993). Neste trabalho, optou-se pela função $G_j(w)$ para a realização dos cálculos necessários.

Equação diferencial do movimento com dissipação viscosa

Definidas todas as constantes do problema, a equação diferencial de movimento do modelo Biot-Allard pode ser escrita da forma:

$$\sigma_{ij,j}^{s} = \rho_{11}\ddot{u}_{i} + \rho_{12}\ddot{U}_{i} + \dot{b}(\dot{u}_{i} - \dot{U}_{i})$$

$$\sigma_{ij,j}^{f} = \rho_{12}\ddot{u}_{i} + \rho_{22}\ddot{U}_{i} - \tilde{b}(\dot{u}_{i} - \dot{U}_{i})$$
(4.68)

As variáveis $\tilde{b} \in \tilde{K}$ são apresentadas na tabela (4.1).

$\tilde{b} = \phi^2 \sigma \tilde{G}$	$\tilde{K} = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1)F(B^2 w)}$
$F(B^2w) = \left[1 + \frac{\sigma'\phi}{jw\rho_f\alpha_{\infty}}\tilde{G}'\right]^{-1}$	
$G(z) = -\frac{z\sqrt{-j}}{4} \frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})} \left/ \left[1 - \frac{2}{z\sqrt{-j}} \frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})} \right] \right.$	
$\tilde{G} = G(z)$	$\tilde{G} = G(Bz')$
$z = c \left(\frac{8w\alpha_{\infty}\rho_f}{\sigma\phi}\right)^{\frac{1}{2}}$	$z' = \left(\frac{8w\alpha_{\infty}\rho_f}{\sigma'\phi}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{c'} \left(\frac{8w\alpha_{\infty}\rho_f}{\sigma\phi}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\tilde{G} = G_j(w) = \left(1 + \frac{4j\alpha_{\infty}^2\eta\rho_f w}{\sigma^2\Lambda^2\phi^2}\right)$	$\tilde{G} = G'_j(B^2w) = \left(1 + \frac{4j\alpha_\infty^2\eta\rho_f B^2w}{\sigma'^2\Lambda'^2\phi'^2}\right)$

Tabela 4.1: Constantes e funções para o cálculo de \tilde{b} e \tilde{K}

4.2 Formulação Mista (u,p)

A formulação mista (u,p), proposta por Allard *et al.* (1998), modifica a formulação Biot-Allard escrevendo-a em função dos deslocamentos da matriz elástica e da pressão no elemento poro-elástico. Para tanto, é necessário reescrever o sistema de equações diferenciais no domínio da frequência e escrever o deslocamento da fase fluida em função da pressão do elemento poro-elástico.

Considerando que as variáveis $u_i \in U_i$ possuem dependência no tempo dado pela função e^{jwt} , a equação (4.68) pode ser escrita da forma:

$$\sigma_{ij,j}^{s} + w^{2}\rho_{11}u_{i} + w^{2}\rho_{12}U_{i} - jw\tilde{b}(u_{i} - U_{i}) = 0$$

$$\sigma_{ij,j}^{f} + w^{2}\rho_{12}u_{i} + w^{2}\rho_{22}U_{i} + jw\tilde{b}(u_{i} - U_{i}) = 0$$
(4.69)

Definindo-se funções densidade no domínio da frequência que englobam os efeitos viscosos, tem-se:

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} + \frac{\tilde{b}}{jw}$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} - \frac{\tilde{b}}{jw}$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} + \frac{\tilde{b}}{jw}$$
(4.70)

Aplicando-se as equações (4.70) e (4.3) na equação (4.69), obtém-se o sistema de equações diferenciais do movimento, para o material poro-elástico, da seguinte forma:

$$\sigma_{ij,j}^{s} + w^{2} \tilde{\rho}_{11} u_{i} + w^{2} \tilde{\rho}_{12} U_{i} = 0$$

$$-\phi p_{,i} + w^{2} \tilde{\rho}_{12} u_{i} + w^{2} \tilde{\rho}_{22} U_{i} = 0$$
(4.71)

Da segunda equação do sistema (4.71), pode-se escrever:

$$U_i = \frac{\phi}{\tilde{\rho}_{22}w^2} p_{,i} - \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} u_i = 0$$
(4.72)

Substituindo a equação (4.72) na equação diferencial do movimento da fase sólida do material, representada na primeira linha da equação (4.71), obtém-se:

$$w^{2}\tilde{\rho}u_{i} + \phi \frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}}p_{,i} + \sigma^{s}_{ij,j} = 0$$
(4.73)

sendo

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \frac{(\tilde{\rho}_{12})^2}{\tilde{\rho}_{22}}$$
(4.74)

Para que a equação diferencial (4.73) dependa somente de $u_i \in p$, é necessário eliminar a dependência de U_i dos tensores de tensão $\sigma_{ij}^s \in \sigma_{ij}^f$, dados pelas equações em (4.13), as quais, escritas em função dos deslocamentos $u_i \in U_i$, são:

$$\sigma_{ij}^{s}(u_{i}, U_{i}) = 2N \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + Au_{k,k}\delta_{ij} + QU_{k,k}\delta_{ij}$$

$$\sigma_{ij}^{f}(u_{i}, U_{i}) = -\phi p\delta_{ij} = Qu_{k,k}\delta_{ij} + RU_{k,k}\delta_{ij}$$

$$(4.75)$$
Isolando a variável U_i na relação constitutiva da fase fluida na equação (4.75) e substituindo na relação constitutiva da fase sólida, obtém-se:

$$\sigma_{ij}^{s}(u_{i},p) = \left(A - \frac{Q^{2}}{R}\right)u_{k,k}\delta_{ij} + 2N\frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - \phi\frac{Q}{R}p\delta_{ij}$$
(4.76)

O tensor de tensões da fase sólida pode, então, ser escrito da forma:

$$\sigma_{ij}^s(u_i, p) = \hat{\sigma}_{ij}^s(u_i) - \phi \frac{Q}{R} p \delta_{ij}$$
(4.77)

onde

$$\hat{\sigma}_{ij}^s(u_i) = \left(A - \frac{Q^2}{R}\right)\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2N\epsilon_{ij} = \left(K_b - \frac{2}{3}N\right)\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2N\epsilon_{ij} \tag{4.78}$$

O resultado apresentado na equação (4.78) é obtido a partir das equações (4.14) e (4.26). Substituindo a equação (4.77) na equação (4.73), obtém-se, finalmente, a equação diferencial do movimento da fase sólida em função dos deslocamentos da matriz elástica e da pressão, dado por:

$$\hat{\sigma}_{ij,j}^s + w^2 \tilde{\rho} u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0 \tag{4.79}$$

onde

$$\tilde{\gamma} = \phi \left(\frac{\tilde{\rho}_{12}}{\tilde{\rho}_{22}} - \frac{Q}{R} \right) \tag{4.80}$$

Para a obtenção da equação diferencial do movimento da fase fluida em função de $u_i e p$, tira-se o divergente da equação (4.72) e combina-se esse resultado com a relação constitutiva da fase fluida (eq. 4.75), obtendo-se:

$$p_{,kk} + \frac{\tilde{\rho}_{22}}{R} w^2 p - \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} w^2 u_{k,k} = 0$$
(4.81)

Equações diferenciais da formulação (u,p) no domínio da frequência

O sistema de equações diferenciais da onda em materiais poro-elásticos, quando as equações estão em função dos deslocamentos da fase sólida e da pressão, é dado por:

$$\hat{\sigma}_{ij,j}^s + w^2 \tilde{\rho} u_i + \tilde{\gamma} p_{,i} = 0 \tag{4.82a}$$

$$\frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}}p_{,kk} + w^2 \frac{\phi^2}{R}p - w^2 \tilde{\gamma} u_{k,k} = 0$$
(4.82b)

A formulação mista (u,p) resultante é adequada para uma implementação eficiente do problema poro-elástico acoplado e será utilizada na sequência deste trabalho.

Capítulo 5

Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema Poro-Elástico

Para a resolução numérica dos problemas apresentados neste trabalho, foi utilizado o método dos elementos finitos. O método escolhido para a obtenção da forma integral fraca das equações diferenciais dadas pela formulação mista (u,p) da equação (4.82) foi o residual; as integrais de corpo e contorno foram calculadas pela aplicação da integração de Gauss em elementos quadrilaterais isoparamétricos (quad4).

5.1 Formulação Fraca

A avaliação variacional de um sistema discretizado pode ser feita em sub-domínios geométricos denominados elementos. Para a obtenção da forma fraca das equações do sistema (4.82) para estes elementos, deve-se escrever o resíduo do sistema a partir da multiplicação da equação diferencial da fase sólida pela função ponderadora δu_i , e a fase fluida pela ponderação δp , e integrar o produto no domínio, para obter-se:

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij,j}^{s} \delta u_i d\Omega + w^2 \int_{\Omega} \tilde{\rho} u_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\gamma} p_{,i} \delta u_i d\Omega = 0$$
(5.1a)

$$\int_{\Omega} \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} \delta p d\Omega + w^2 \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{R} p \delta p d\Omega - w^2 \int_{\Omega} \tilde{\gamma} u_{i,i} \delta p d\Omega = 0$$
(5.1b)

A intenção da formulação fraca é diminuir o grau das derivadas que aparecem nas integrais de forma a ser possível a utilização de funções de interpolação polinomiais de menor grau. Integrando por partes o primeiro termo da equação (5.1a) e aplicando o teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij,j}^{s} \delta u_{i} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\hat{\sigma}_{ij}^{s} \delta u_{i} \right)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^{s} \delta u_{i,j} d\Omega
= \int_{\Gamma} \hat{\sigma}_{ij}^{s} n_{j} \delta u_{i} d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^{s} \delta u_{i,j} d\Omega$$
(5.2)

Os mesmos procedimentos podem ser realizados para o primeiro e terceiro termo da equação (5.1b) para obter-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,ii} \delta p d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} n_i \delta p d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega$$
(5.3)

е

$$\int_{\Omega} \tilde{\gamma} u_{i,i} \delta p d\Omega = \int_{\Gamma} \tilde{\gamma} u_i n_i \delta p d\Gamma - \int_{\Omega} \tilde{\gamma} u_i \delta p_{,i} d\Omega$$
(5.4)

Substituindo as equações (5.2), (5.3) e (5.4) no sistema (5.1), obtém-se, por fim, a forma fraca do problema, dada por (Silva, 2007):

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^{s} \delta u_{i,j} d\Omega - w^{2} \int_{\Omega} \tilde{\rho} u_{i} \delta u_{i} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\gamma} p_{,i} \delta u_{i} d\Omega - \int_{\Gamma} \hat{\sigma}_{ij}^{s} n_{j} \delta u_{i} d\Gamma = 0$$

$$(5.5a)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega - w^2 \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{R} p \delta p d\Omega - w^2 \int_{\Omega} \tilde{\gamma} u_i \delta p_{,i} d\Omega + w^2 \int_{\Gamma} \left(\tilde{\gamma} u^n - \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22} w^2} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta p d\Gamma = 0$$
(5.5b)

Com base na discretização do sistema por elementos, é possível propor um esquema de aproximação numérica do tipo aproximação modal.

5.2 Aproximação por Elementos Finitos

Na aproximação por elementos finitos, o domínio Ω é discretizado em vários elementos, onde considera-se que as propriedades físicas do material poro-elástico mantêm-se constantes, e que a equação (5.5) é válida no domínio elementar Ω_e , ou seja:

$$\sum_{k=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} \hat{\sigma}_{ij}^s \delta u_{i,j} d\Omega_e - w^2 \int_{\Omega_e} \tilde{\rho} u_i \delta u_i d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \tilde{\gamma}_e p_{,i} \delta u_i d\Omega_e - \int_{\Gamma_e} \hat{\sigma}_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma_e \right) = 0$$
(5.6a)
$$\sum_{k=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega_e - w^2 \int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{R} p \delta p d\Omega_e - w^2 \int_{\Omega_e} \tilde{\gamma} u_i \delta p_{,i} d\Omega_e + w^2 \int_{\Gamma_e} \left(\tilde{\gamma} u^n - \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22} w^2} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta p d\Gamma_e \right) = 0$$
(5.6b)

As variáveis do problema são aproximadas nos nós do elemento a partir de funções de interpolação; a soma, então, das contribuições nodais de cada elemento permite a montagem do sistema global para o domínio Ω . A aproximação das variáveis para os k pontos do elemento é feita da seguinte forma:

$$u_i \simeq [N_u]^T \{\bar{u}\}$$

$$p \simeq [N_p]^T \{\bar{p}\}$$
(5.7)

onde $\{\bar{u}\}$ e $\{\bar{p}\}$ representam os valores nodais dos deslocamentos da matriz elástica e da pressão, isto é:

$$\{\bar{u}\} = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ \dots \ u_k \ v_k \ w_k\}^T$$

$$\{\bar{p}\} = \{p_1 \ p_2 \ p_3 \ \dots \ p_k\}^T$$

(5.8)

As matrizes $[N_u]^T \in [N_p]^T$ valem:

$$[N_{u}]^{T} = \begin{bmatrix} N_{1} & 0 & 0 & N_{2} & 0 & 0 & N_{3} & 0 & 0 & \dots & N_{k} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1} & 0 & 0 & N_{2} & 0 & 0 & N_{3} & 0 & \dots & 0 & N_{k} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1} & 0 & 0 & N_{2} & 0 & 0 & N_{3} & \dots & 0 & 0 & N_{k} \end{bmatrix}_{3 \times k}$$
(5.9)

$$\left[N_p\right]^T = \left[\begin{array}{cccc} N_1 & N_2 & N_3 & \dots & N_k \end{array}\right]_{1 \times k}$$
(5.10)

Para a aproximação nodal das derivadas espaciais dos deslocamentos da matriz elástica $(u_{i,j})$, utiliza-se a transformação linear $[L^u]$:

$$[L^{u}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{1}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_{2}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_{3}}\\ \frac{\partial}{\partial x_{2}} & \frac{\partial}{\partial x_{1}} & 0\\ \frac{\partial}{\partial x_{3}} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_{1}}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_{3}} & \frac{\partial}{\partial x_{2}} \end{bmatrix}_{6\times3}$$
(5.11)

e pode-se escrever:

$$u_{i,j} \simeq \underbrace{\left[L^{u}\right] \left[N_{u}\right]^{T}}_{\left[B_{u}\right]} \left\{\bar{u}\right\}$$
(5.12)

De forma semelhante, o gradiente da pressão $p_{,i}$ pode ser escrito como:

$$p_{,i} \simeq \underbrace{\left[L^{p}\right] \left[N_{p}\right]^{T}}_{\left[B_{p}\right]} \left\{\bar{p}\right\}$$

$$(5.13)$$

onde

$$[L^{p}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{3}} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$
(5.14)

Matriz de Rigidez [K]

Para aproximar a primeira integral da forma fraca da equação diferencial da fase sólida (equação 5.6a), dada por:

$$\int_{\Omega_e} \hat{\sigma}^s_{ij} \delta u_{i,j} d\Omega_e \tag{5.15}$$

escreve-se a equação (4.78) na sua forma matricial:

$$\begin{pmatrix}
\hat{\sigma}_{11}^{s} \\
\hat{\sigma}_{22}^{s} \\
\hat{\sigma}_{33}^{s} \\
\hat{\sigma}_{33}^{s} \\
\hat{\sigma}_{12}^{s} \\
\hat{\sigma}_{13}^{s} \\
\hat{\sigma}_{23}^{s}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
K_{b} + \frac{4}{3}N & K_{b} - \frac{2}{3}N & K_{b} - \frac{2}{3}N & 0 & 0 & 0 \\
K_{b} - \frac{2}{3}N & K_{b} + \frac{4}{3}N & K_{b} - \frac{2}{3}N & 0 & 0 & 0 \\
K_{b} - \frac{2}{3}N & K_{b} - \frac{2}{3}N & K_{b} + \frac{4}{3}N & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & N & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & N & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N
\end{pmatrix} \begin{bmatrix}
\epsilon_{11} \\
\epsilon_{22} \\
\epsilon_{33} \\
2\epsilon_{12} \\
2\epsilon_{13} \\
2\epsilon_{23}
\end{bmatrix} \\
\{\hat{\sigma}^{s}\}$$

$$(5.16)$$

O gradiente da variação admissível do deslocamento pode ser aproximada por:

$$\delta u_{i,j} \simeq [B_u] \{ \delta \bar{u} \} \tag{5.17}$$

Para a aproximação nodal do termo (5.15) no elemento, substitui-se as equações (5.16) e (5.17) em (5.15), e obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \hat{\sigma}_{ij}^s \delta \bar{u}_{i,j} d\Omega_e \simeq \int_{\Omega_e} \{ \hat{\sigma}^s \} \cdot [B_u] \{ \delta \bar{u} \} d\Omega_e = \int_{\Omega_e} [B_u]^T [D] \{ \epsilon \} d\Omega_e \cdot \{ \delta \bar{u} \}$$
(5.18)

onde o símbolo (\cdot) representa o produto escalar. Da equação (5.12), pode-se escrever que:

$$\{\epsilon\} \simeq [B_u] \{\bar{u}\} \tag{5.19}$$

Substituindo o resultado da equação (5.19) na equação (5.18), obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \hat{\sigma}_{ij}^s \delta u_{i,j} d\Omega_e \simeq \int_{\Omega_e} \left[B_u \right]^T \left[D \right] \left[B_u \right] d\Omega_e \left\{ \bar{u} \right\} \cdot \left\{ \delta \bar{u} \right\}$$
(5.20)

Defini-se, então, a matriz de rigidez do problema como:

$$[K] = \int_{\Omega_e} \left[B_u \right]^T \left[D \right] \left[B_u \right] d\Omega_e \tag{5.21}$$

Matriz de Massa [M]

A aproximação em elementos finitos da segunda integral da equação diferencial da fase sólida do material poro-elástico (equação 5.6a) é dada por:

$$\int_{\Omega_{e}} \tilde{\rho} u_{i} \delta u_{i} d\Omega_{e} \simeq \tilde{\rho} \int_{\Omega_{e}} \left([N_{u}]^{T} \{\bar{u}\} \right) \cdot \left([N_{u}]^{T} \{\delta\bar{u}\} \right) d\Omega_{e}
= \tilde{\rho} \int_{\Omega_{e}} \left([N_{u}]^{T} \{\delta\bar{u}\} \right)^{T} \left([N_{u}]^{T} \{\bar{u}\} \right) d\Omega_{e}
= \tilde{\rho} \int_{\Omega_{e}} \{\delta\bar{u}\}^{T} [N_{u}] [N_{u}]^{T} \{\bar{u}\} d\Omega_{e}
= \tilde{\rho} \int_{\Omega_{e}} [N_{u}] [N_{u}]^{T} d\Omega_{e} \{\bar{u}\} \cdot \{\delta\bar{u}\}$$
(5.22)

Defini-se, então, a matriz de massa $\left[M \right]$ como:

$$[M] = \tilde{\rho} \int_{\Omega_e} [N_u] [N_u]^T d\Omega_e$$
(5.23)

Matriz de Acoplamento da fase sólida [C]

Fazendo, agora, a aproximação em elementos finitos da terceira integral da equação (5.6a), obtém-se para cada elemento:

$$\int_{\Omega_{e}} \tilde{\gamma} p_{,i} \delta u_{i} d\Omega_{e} \simeq \tilde{\gamma} \int_{\Omega_{e}} [B_{p}] \{\bar{p}\} \cdot [N_{u}]^{T} \{\delta \bar{u}\} d\Omega_{e}
= \tilde{\gamma} \int_{\Omega_{e}} ([B_{p}] \{\bar{p}\})^{T} [N_{u}] \{\delta \bar{u}\} d\Omega_{e}
= \tilde{\gamma} \int_{\Omega_{e}} [N_{u}] [B_{p}] d\Omega_{e} \{\bar{p}\} \cdot \{\delta \bar{u}\}$$
(5.24)

A matriz de acoplamento da fase sólida é, portanto, definida por:

$$[C] = \tilde{\gamma} \int_{\Omega_e} [N_u] [B_p] d\Omega_e \tag{5.25}$$

Matriz Volumétrica [H]

Aproximando o primeiro termo da equação diferencial da fase fluida (equação 5.6b), obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{\bar{\rho}_{22}} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega_e \simeq \frac{\phi^2}{\bar{\rho}_{22}} \int_{\Omega_e} \left([B_p] \{\bar{p}\} \right) \cdot \left([B_p] \{\delta \bar{p}\} \right) d\Omega_e$$

$$= \frac{\phi^2}{\bar{\rho}_{22}} \int_{\Omega_e} \left[B_p \right]^T \left[B_p \right] d\Omega_e \{\bar{p}\} \cdot \{\delta \bar{p}\}$$
(5.26)

A matriz volumétrica é, então:

$$[H] = \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} \int_{\Omega_e} \left[B_p \right]^T \left[B_p \right] d\Omega_e$$
(5.27)

Matriz de Inércia [Q]

Aproximando o segundo termo da equação (5.6b), obtém-se:

$$\int_{\Omega_e} \frac{\phi^2}{R} p \delta p d\Omega_e \simeq \frac{\phi^2}{R} \int_{\Omega_e} \left([N_p]^T \{\bar{p}\} \right) \cdot \left([N_p]^T \{\delta \bar{p}\} \right) d\Omega_e$$

$$= \frac{\phi^2}{R} \int_{\Omega_e} [N_p] [N_p]^T d\Omega_e \{\bar{p}\} \cdot \{\delta \bar{p}\}$$
(5.28)

Defini-se, então, a matriz de inércia como:

$$[Q] = \frac{\phi^2}{R} \int_{\Omega_e} \left[N_p \right] \left[N_p \right]^T d\Omega_e$$
(5.29)

Matriz de Acoplamento da fase fluida $[C_f]$

Aproximando para elementos finitos o termo de acoplamento da equação diferencial da fase fluida, chega-se ao seguinte resultado:

$$\int_{\Omega_e} \tilde{\gamma} u_i \delta p_i d\Omega_e \simeq \tilde{\gamma} \int_{\Omega_e} [B_p] \{\delta \bar{p}\} \cdot [N_u]^T \{\bar{u}\} d\Omega_e$$

$$= \tilde{\gamma} \int_{\Omega_e} [B_p]^T [N_u]^T d\Omega_e \{\bar{u}\} \cdot \{\delta \bar{p}\}$$
(5.30)

A matriz de acoplamento da fase fluida é, portanto, a transposta da matriz de acoplamento da fase sólida:

$$[C_f] = \tilde{\gamma} \int_{\Omega_e} \left[B_p \right]^T \left[N_u \right]^T d\Omega_e = \left[C \right]^T$$
(5.31)

Montagem das Matrizes

Das equações (5.20) a (5.31), pode-se escrever o sistema (5.5) da forma:

$$\left(\begin{bmatrix} [K] - w^2 [M] & -[C] \\ -w^2 [C]^T & [H] - w^2 [Q] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{p}\} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \{F_s\} \\ \{F_f\} \end{array} \right\} \right) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \{\delta\bar{u}\} \\ \{\delta\bar{p}\} \end{array} \right\} = 0 \quad (5.32)$$

Os termos $\{F_s\}$ e $\{F_f\}$ representam as forças externas agindo, respectivamente, nas fases sólida e fluida do material poro-elástico e são dadas pelas integrais de contorno presentes, também respectivamente, nas equações (5.6a) e (5.6b). A avaliação dessas integrais dependem das condições de contorno impostas e de acoplamento do elemento em questão e é realizada na seção (5.3). Ademais, como as variações admissíveis $\{\delta \bar{u}\}$ e $\{\delta \bar{p}\}$ são diferentes de zero, a aproximação por elementos finitos do sistema (5.1) pode ser obtida pela resolução do sistema de equações lineares dada por:

$$\begin{bmatrix} [K] - w^2 [M] & -[C] \\ -w^2 [C]^T & [H] - w^2 [Q] \end{bmatrix} \begin{cases} \{\bar{u}\} \\ \{\bar{p}\} \end{cases} = \begin{cases} \{F_s\} \\ \{F_f\} \end{cases}$$
(5.33)

5.3 Aproximação por Elementos Finitos: Contorno

Nesta seção, analisa-se as integrais de contorno que aparecem na formulação fraca do problema poro-elástico escrito na equação (5.5). Essas integrais são chamadas de condições de contorno naturais, pois são impostas naturalmente quando o problema é escrito em sua forma fraca.

A análise das integrais para as condições de acoplamento poro-elástico/acústico e poroelástico/poro-elástico, pressão, deslocamento e restrições impostas segue as deduções apresentadas nos trabalhos de Debergue *et al.* (1999) e Atalla *et al* (2001a).

Primeiramente, definem-se as integrais de contorno da forma:

$$I_{\delta u_i} = \int_{\Gamma} \hat{\sigma}^s_{ij} n_j \delta u_i d\Gamma$$
(5.34)

$$I_{\delta p} = \int_{\Gamma} \left(\tilde{\gamma} u^n - \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22} w^2} \frac{\partial p}{\partial n} \right) \delta p d\Gamma$$
(5.35)

A equação (5.34) pode ser reescrita utilizando-se a equação (4.79), obtendo-se:

$$I_{\delta u_i} = -\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \left(1 + \frac{Q}{R}\right) p \delta u^n d\Gamma$$
(5.36)

Das equações (4.72) e (4.81), a equação (5.35) pode, também, ser reescrita como:

$$I_{\delta p} = -\int_{\Gamma} \phi\left(1\frac{Q}{R}\right) u^{n} \delta p d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi\left(U^{n} - u^{n}\right) \delta p d\Gamma$$
(5.37)

Como dito anteriormente, as equações (5.36) e (5.37) representam as ações das forças externas às fases sólida e fluida, respectivamente, agindo no elemento poro-elástico; seus valores dependem das condições de contorno impostas e de acoplamento do domínio poro-elástico,



Figura 5.1: Esquema das condições de contorno de uma dado elemento poro-elástico (Silva, 2007)

analisadas na sequência. A figura (5.1) ilustra as possíveis interações no contorno de um elemento poro-elástico.

5.3.1 Condições de contorno impostas: pressão

Dado um campo de pressão p_{Γ} imposto em Γ_i , as seguintes condições de contorno aplicamse às equações (5.36) e (5.37):

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{s} n_{j} = -p_{\Gamma} \delta i j n_{j} \\ p = p_{\Gamma} \end{cases} \quad \text{em } \Gamma_{i} \tag{5.38}$$

A equação (5.38) impõe o equilíbrio das tensões normais (1^{*a*} equação) e a compatibilidade cinemática entre as pressões impostas e as pressões internas no contorno do elemento (2^{*a*} equação). Como a pressão p_{Γ} é imposta, a variação admitida δp_{Γ} é igual a zero e as integrais de contorno (5.36) e (5.37) valem:

$$I_{\delta u_i} = \int_{\Gamma} \left(1 - \phi \left(1 + \frac{Q}{R} \right) \right) p_{\Gamma} \delta u^n d\Gamma$$
(5.39)

$$I_{\delta p} = 0 \tag{5.40}$$

Observa-se que $I_{\delta u_i}$ é a integral de contorno na forma fraca de um domínio elástico excitado por um campo de pressão. Supondo que o fluido que permeia o material poro-elástico em questão é o ar, a integral (5.39) pode ser simplificada utilizando o resultado da equação (4.24):

$$\phi\left(1+\frac{Q}{R}\right)\simeq1\tag{5.41}$$

e a integral (5.39) se torna:

$$I_{\delta u_i} = 0 \tag{5.42}$$

Neste caso, $I_{\delta u_i}$ também é nulo, sendo possível concluir que a excitação imposta pelo campo de pressão do ar na estrutura sólida pode ser negligenciada. Basta, portanto, imporse $p = p_{\Gamma}$ em Γ_i para a aferição da condição imposta, mostrando mais uma vantagem da formulação (u,p) do problema poro-elástico em comparação ao modelo clássico de Biot-Allard.

5.3.2 Condições de contorno impostas: deslocamento

Quando o deslocamento da matriz elástica $u_{i\Gamma}$ é imposto em Γ_i , as condições de contorno que se aplicam às equações (5.36) e (5.37) são:

$$\begin{cases} u_i = u_{i\Gamma} & \text{em } \Gamma_i \\ u_{\Gamma}^n = (1 - \phi)u^n + \phi U^n \Rightarrow U^n - u^n = 0 \end{cases}$$
 (5.43)

onde a primeira condição garante a continuidade da fase elástica e a segunda, o equilíbrio de fluxo entre as fases elástica e fluida. Sendo o deslocamento da matriz elástica fixado, sua variação admitida $\delta \bar{u}_i$ é nula e as integrais de contorno (5.36) e (5.37) valem:

$$I_{\delta u_i} = 0 \tag{5.44}$$

$$I_{\delta p} = -\int_{\Gamma} \phi\left(1 + \frac{Q}{R}\right) u_{i\Gamma} \delta p d\Gamma$$
(5.45)

Da equação (5.41), obtém-se:

$$I_{\delta p} = -\int_{\Gamma} u_{\Gamma}^{n} \delta p d\Gamma$$
(5.46)

de forma que $I_{\delta p}$ torna-se a integral de contorno do domínio acústico quando um deslocamento estrutural é imposto.

5.3.3 Acoplamento poro-elástico/acústico

Dado o campo de pressão p^a de um domínio acústico de densidade ρ_a , as integrais na forma fraca no contorno entre os domínios poro-elástico e acústico podem ser combinadas somando-se as contribuições de cada domínio $(I^{por} + I^a)$, obtendo-se:

$$I_{\delta u_i} = -\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^s n_j \delta u_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \left(1 + \frac{Q}{R}\right) p \delta u^n d\Gamma$$
(5.47)

$$I_{\delta p} = -\int_{\Gamma} \phi \left(1 + \frac{Q}{R}\right) \bar{u}^n \delta p d\Gamma - \int_{\Gamma} \phi \left(U^n - u^n\right) \delta p d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{\rho_a w^2} \frac{\partial p^a}{\partial n} \delta p d\Gamma$$
(5.48)

Observa-se que o último termo da equação (5.48) possui um sinal positivo, já que $\vec{n}_a = -\vec{n}$, onde \vec{n}_a e \vec{n} são o vetores normais da superfície de contato poro/acústico dos elementos acústico e poro-elástico, respectivamente. As condições no contorno em que ocorre o acoplamento são:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{s} n_{j} = -p^{a} n_{j} \\ \frac{1}{\rho_{a} w^{2}} \frac{\partial p^{a}}{\partial n} = (1 - \phi) u^{n} + \phi U^{n} \qquad \text{em } \Gamma_{i} \\ p = p^{a} \end{cases}$$
(5.49)

onde a primeira condição garante o equilíbrio entre as tensões normais, a segunda, o equilíbrio de fluxo, e a terceira, a compatibilidade cinemática entre os domínios poro-elástico e acústico.

Substituindo as condições de contorno dadas pela equação (5.49) nas equações (5.47) e (5.48), obtém-se:

$$I_{\delta u_i} = -\int_{\Gamma} \left(1 - \phi \left(1 + \frac{Q}{R} \right) \right) p^a \delta u^n d\Gamma$$
(5.50)

$$I_{\delta p} = -\int_{\Gamma} \left(1 - \phi \left(1 + \frac{Q}{R} \right) \right) u^n \delta p d\Gamma$$
(5.51)

As equações (5.50) e (5.51) mostram que o acoplamento entre os domínios poro-elástico e acústico ocorre de forma simétrica em relação ao deslocamento normal da matriz elástica e a pressão do domínio acústico. Ademais, compatibilidade cinemática entre as pressões de ambos os domínios ($p = p^a$) ainda deve ser imposta.

Mais uma vez, caso o fluido presente nos domínios poro-elástico e acústico seja o ar, a equação (5.41) vale e as integrais $I_{\delta u_i}$ e $I_{\delta p}$ se tornam nulas. Neste caso, somente a compatibilidade cinemática das pressões deve ser imposta, mostrando, novamente, que a formulação (u,p) é mais vantajosa que a formulação (u,U) (modelo de Biot-Allard), pois, nesta última, as integrais de contorno não são nulas (Debergue *et al.*, 1999).

5.3.4 Acomplamento poro-elástico/poro-elástico

O acoplamento entre dois domínios poro-elásticos distintos, indicados pelos índices 1 e 2, é realizado somando-se suas integrais de contorno na forma fraca – dadas pelas equações (5.36) e (5.38) – e impondo as condições de contorno dadas na referência (Panneton e Atalla, 1997), as quais são:

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^{s1} n_j = \sigma_{ij}^{s2} n_j \\ \phi_1(U_1^n u_1^n) = \phi_2(U_2^n u_2^n) \\ u_i^1 = u_i^2 \\ p_1 = p_2 \end{cases}$$
(5.52)

onde a primeira condição garante o equilíbrio das tensões totais normais ao contorno do elemento, a segunda garante a continuidade entre os deslocamentos da matriz elástica e do

fluido, e a terceira e quarta condições, a compatibilidade cinemática dos domínios.

A partir das condições impostas, as integrais de contorno podem ser escritas da forma:

$$I_{\delta u_i} = -\int_{\Gamma} \phi_1 \left(1 + \frac{Q_1}{R_1}\right) p_1 \delta u_1^n d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi_2 \left(1 + \frac{Q_2}{R_2}\right) p_2 \delta u_2^n d\Gamma$$
(5.53)

$$I_{\delta p} = -\int_{\Gamma} \phi_1 \left(1 + \frac{Q_1}{R_1}\right) u_1^n \delta p_1 d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi_2 \left(1 + \frac{Q_2}{R_2}\right) u_2^n \delta p_2 d\Gamma$$
(5.54)

Tem-se então que o acoplamento entre dois elementos poro-elásticos ocorre de forma simétrica em relação ao deslocamento da fase sólida normal ao contorno e à pressão no mesmo. A diferença entre os sinais dos termos integrais de $I_{\delta u_i}$ e $I_{\delta p}$ ocorre pois $\vec{n_1} = -\vec{n_2}$. Assim como para o acoplamento entre elementos poro-elásticos e acústicos, a compatibilidade cinemática também deve ser manualmente imposta, o que significa impor as condições de compatibilidade cinemática dadas por $u_1^n = u_2^n$ e $p_1 = p_2$.

Por último, para materiais absorvedores poro-elásticos clássicos, onde o ar é o fluido presente, as integrais $I_{\delta u_i}$ e $I_{\delta p}$ se anulam e é necessário somente, para a resolução do problema em questão, impor as condições cinemáticas.

Capítulo 6

Resultados e Discussão

Este capítulo divide-se em três partes principais. Primeiramente são apresentados os resultados obtidos do estudo feito sobre *band gaps*. Visa-se, nesta primeira parte, mostrar graficamente a ocorrência de *band gaps* estruturais a partir do cálculo das estruturas de banda (ou curvas de dispersão) e da função resposta em frequência (FRF) em estruturas elásticas periódicas uni e bidimensionais; e validar o programa computacional feito estes cálculos.

A segunda parte deste capítulo refere-se ao estudo e simulação numérica de problemas acoplados da poro-elasticidade. Busca-se, nesta seção, validar o programa de elementos finitos implementado¹ e entender os fenômenos que regem a propagação de ondas e a absorção destas em materiais poro-elásticos.

Por último, visa-se analisar os efeitos de periodizar materiais poro-elásticos, buscando, nesta última análise, verificar se existe a presença do fenômeno *band gap* na propagação de ondas nesses materiais ou, mais especificamente, se as curvas de absorção de materiais poro-elásticos periódicos possuem correlação direta com as curvas de dispersão de sua matriz elástica.

¹O programa em questão foi implementado no Matlab® e serviu de ferramenta para os cálculos das estruturas de banda e FRFs de materiais elásticos periódicos, e das curvas de absorção dos materiais porosos

6.1 Band Gaps em Estruturas Elásticas Periódicas

Os objetivos gerais desta seção são validar a metodologia de análise estudada para sistemas periódicos estruturais e mostrar a ocorrência de *band gaps* em estruturas elásticas.

6.1.1 Malha unidimensional

Apresentam-se agora as estruturas de banda e as curvas de resposta em frequência para estruturas elásticas unidimensionais discretizadas em sistemas massa-mola. O objetivo é validar o modelo unidimensional implementado e mostrar graficamente o fenômeno *band gap* e como se comportam os deslocamentos das massas das estruturas finitas dentro e fora da região de *band gap*.

A malha unidimensional estudada consiste na representação de uma estrutura elástica periódica² em sistemas do tipo massa-mola, considerando os casos infinito e finito. A figura (6.1) ilustra uma célula, ou um período, do material periódico estudado.



Figura 6.1: Estrutura unidimensional periódica (alumínio-PMMA) e modelo discreto equivalente.

Para a célula discreta esquematizada na figura (6.1) (onde N = 4), os valores das massas e constantes de mola dos materiais que compõem a estrutura são:

²Os dados da estrutura são: Barra unidimensional com 0.15 m de comprimento e seção transversal de área igual à 0,0375 m², composta por 50% alumínio ($\rho_{al} = 2830 \ kg/m^3$ e $E_{al} = 70,9 \ GPa$) e 50% PMMA ($\rho_{pmma} = 1200 \ kg/m^3$ e $E_{pmma} = 5,28 \ GPa$) (Jensen, 2003).

$$m_{1} = m_{4} = 3,98kg$$

$$m_{2} = m_{3} = 1,69kg$$

$$k_{1} = k_{4} = 70,9 \ 10^{9}kg/s^{2}$$

$$k_{2} = k_{3} = 5,28 \ 10^{9}kg/s^{2}$$
(6.1)

Malha unidimensional infinita

Foram estudados modelos de malha infinita para células discretizadas em 4, 16 e 64 massas seguindo o esquema ilustrado pela figura (6.1).

A figura (6.2) mostra as curvas de frequência em função do número de onda ($w = f(\gamma)$) para malha N = 4. Observa-se que a estrutura apresenta seus 3 primeiros *band gaps* nas faixas de frequências entre 5,2 a 12,0 kHz, 13,5 a 26,6 kHz e 26,8 a 42,4 kHz.

Na figura (6.3) compara-se o primeiro gap para as malhas com 4, 16 e 64 massas. Vê-se que a malha N = 4 apresenta uma boa aproximação do primeiro gap, o que, obviamente, não ocorre para os gaps em faixas de frequências maiores, já que a discretização mais grosseira da malha impede a avaliação das frequências naturais de maiores valores da estrutura e, portanto, não permite uma predição mais acurada dos gaps de ordem superior.

A estrutura de banda das figuras (6.2) e (6.3) estão de acordo com os resultados apresentados em Jensen (2003). Este resultado permite a validação do método implementado para o cálculo das curvas de dispersão em estruturas periódicas do tipo massa-mola unidimensionais.

Pode-se também visualizar as faixas de frequências onde ocorrem os gaps da estrutura unidimensional estudada de outra forma, escrevendo o termo complexo do número de onda em função da frequência. Para tanto, escreve-se o número de onda na forma $\gamma = \pi/N + i\beta$, caso queira-se observar o primeiro e o terceiro gap, ou na forma $\gamma = i\beta$, para observar-se o segundo gap. Variando β , obtém-se curvas do tipo $\beta = f(w)$, como ilustrado na figura (6.4). Nesta figura, as formas geométricas fechadas demarcam as faixas de frequências onde o termo imaginário do número de onda é não nulo. Portanto, essas formas geométricas fechadas demarcam as regiões de band gap. Pode-se observar que o resultado apresentado pela figura



Figura 6.2: Curvas de dispersão $w = f(\gamma)$ para a malha N = 4.



Figura 6.3: Primeiro band gap para as malhas com N=4, 16 e 64 massas.

(6.4) está coerente com a figura (6.2).



Figura 6.4: Curva $\beta = f(w)$: primeiro e terceiro Band Gap para a malha N = 4.

Malha unidimensional finita

Para o caso de estruturas finitas, as faixas de frequência onde ocorrem *band gaps* são caracterizadas por uma forte atenuação da propagação de sinais harmônicos nestas faixas de frequência. Para se estudar, então, os *band gaps* de uma estrutura finita, excita-se a estrutura com uma força harmônica, conforme mostrado na figura (6.5), e calcula-se a resposta, na frequência, da última massa oposta à massa excitada. Variando-se, então, a frequência de excitação harmônica, pode-se calcular a função resposta em frequência (FRF) da estrutura.



Figura 6.5: Estrutura finita com M = 2 células.

As malhas estudadas possuem 2, 5 e 10 células do tipo N = 4 dispostas linearmente, como ilustrado na figura (6.5). A figura (6.6) ilustra os resultados obtidos para essas malhas. É possível observar que a faixa de frequência para a qual verifica-se uma atenuação da FRF da malha M = 10 (5,3 a 12,1 kHz) possui valores bem próximos à faixa do primeiro gap (5,2 a 12,0 kHz) previsto pela estrutura de banda da estrutura infinita. Vê-se também que o gap da malha M = 5 ocorre em uma faixa de frequências bem próxima à da malha M = 10, enquanto que a malha M = 2 apresenta divergência com relação ao limite direito de seu *band* gap.

Conclui-se da figura (6.6) que estruturas com maior número de células apresentam valores inferiores da FRF nas regiões de *band gaps*, o que é intuitivo, se for observado que nessas regiões e para as malhas estudadas a atenuação da excitação se dá progressivamente ao decorrer da estrutura, como mostrado na figura (6.7). Esta característica de atenuação da onda, para frequências dentro da faixa de *band gap* evidencia que esta ocorre devido à reflexão da onda nos contornos das células periódicas do material.



Figura 6.6: Função resposta em frequência para as malhas com $M = 2, 5 \in 10$ células.



Figura 6.7: Deslocamento das massas da malha com M=10 células para frequências distintas.

6.1.2 Malha bidimensional

Os resultados obtidos para o modelo massa-mola bidimensional são apresentados nesta seção, com o objetivo de validar o modelo bidimensional implementado para o cálculo da estrutura de banda e FRF da malha discreta e observar o comportamento da FRF para frequências dentro da faixa de *band gap*.

A célula utilizada para a construção da malha bidimensional consiste em uma estrutura quadrada com lado igual 0,02 m, representada por 5×5 massas conectadas por molas, onde as 3×3 massas centrais representam a inclusão de um material mais rígido e denso que a matriz, representada pelas massas periféricas, mais leve e flexível, segundo o esquema da figura (6.8).

Considerando o alumínio como o material representado pelas massas internas e o epóxi, pelas massas periféricas, os valores das massas e constantes de molas, internas e externas, são:



Figura 6.8: Célula bidimensional: matriz flexível com inclusão periódica rígida.

$$m_{mat} = 1,82 \cdot 10^{-2} \ kg$$

$$m_{inc} = 4,53 \cdot 10^{-2} \ kg$$

$$k_{mat,1} = k_{mat,3} = 4,1 \cdot 10^{9} \ N/m$$

$$k_{mat,2} = k_{mat,4} = \frac{1}{2}4,1 \cdot 10^{9} \ N/m$$

$$k_{inc,1} = k_{inc,3} = 70,9 \cdot 10^{9} \ N/m$$

$$k_{inc,2} = k_{inc,4} = \frac{1}{2}70,9 \cdot 10^{9} \ N/m$$
(6.2)

A rigidez das molas diagonais foi definida como metade da rigidez das molas horizontais e verticais para obter-se uma melhor aproximação qualitativa em relação ao modelo de materiais contínuos isotrópicos em estado plano de deformação, quando o coeficiente de Poisson é aproximadamente $\nu = 0, 3$ (Jensen, 2003).

Malha infinita bidimensional

Resolvendo a equação (3.63) da seção (3.2.3), para a malha infinita com a geometria da célula indicada pela figura (6.8) e constantes dadas na expressão (6.2), obtém-se, como no caso unidimensional, a estrutura de banda que está ilustrada na figura (6.9). Observa-se na figura (6.9) que sua abcissa varia de C-A-B-C, percorrendo o perímetro triângulo ABC da figura (3.8) que representa a região irredutível de Brillouin.

Na figura (6.9), pode-se observar uma região de vazio entre as frequências 46,6 a 57,4 kHz. Nesta faixa de frequências não existe solução real para a frequência e o número de

onda, de forma que é impossível a propagação de ondas em qualquer direção da malha, caracterizando-a como um *band gap*.

A estrutura de banda ilustrada da figura (6.9) mostra-se em acordo com o resultado encontrado por Jensen (2003). Este resultado permite validar o modelo massa-mola bidimensional infinito implementado.



Figura 6.9: Estrutura de banda correspondente à propagação de ondas na malha bidimensional infinita.

Malha finita bidimensional

Foram estudadas malhas finitas de diferentes tamanhos, construídas a partir do agrupamento das células bidimensionais descritas anteriormente, como mostra a figura (6.10). A mesma figura também ilustra a configuração dos apoios, da força aplicada e dos pontos (A e B) onde foi calculada a FRF do sistema.



Figura 6.10: Malha bidimensional finita.

A figura (6.11) mostra as curvas FRF do sistema para os pontos A e B. Pode-se observar que a malha $M_x = M_y = 3$ não apresenta uma queda da FRF dentro da região de *band* gap do caso infinito. Ao contrário, pode-se observar vários picos de ressonância nesta faixa de frequência. Já para as malhas com maior número de células, é possível observar uma considerável atenuação da FRF dentro da região de *band gap* prevista para malha infinita, estando em acordo com o resultado da figura (6.9).

No limite superior desta faixa, observa-se que existem picos da FRF; estes estão associados às ressonâncias locais dos pontos A e B. Na figura (6.12a) está ilustrado o mapa da resposta em frequência da malha $M_x = M_y = 21$, à frequência de 52,1 kHz. É possível verificar, nesta figura, que as amplitudes dos deslocamentos das massas caem continuamente em relação à distância ao ponto de aplicação da força, como esperado para uma frequência dentro da faixa de *band gap* da estrutura. Já na figura (6.12b), onde está ilustrado o mapa da resposta em frequência em 54,8 kHz da malha $M_x = M_y = 21$, verifica-se que a região periférica livre da malha se encontra em ressonância.

Os resultados das figuras (6.11) e (6.12) foram observados por Jensen (2003) e estão de acordo com o mesmo.



(b) ponto B

Figura 6.11: Resposta em frequência para diferentes malhas



(a) 52,1 kHz



(b) 54,8 kHz

Figura 6.12: Resposta em frequência da malha para valores frequências de 52,1 kHz (a) e 54,8 kHz (b).

6.1.3 Discretização da estrutura periódica pelo método dos elementos finitos

O objetivo dessa análise é comparar o modelo unidimensional periódico massa-mola e o modelo discretizado pelo método dos elementos finitos (E.F.), e verificar a validade deste último. Faz-se também uma análise de convergência desse último.

Aplica-se, então, a teoria apresentada na seção (3.3) para o cálculo da estrutura de banda e da FRF da estrutura periódica unidimensional Alumínio-PMMA. A malha massa-mola é descrito pela relação (6.1); a malha de elementos finitos é discretizada em elementos unidimensionais lineares, como dado na figura (6.13), onde exemplifica-se uma malha com 8 elementos.



Figura 6.13: Esquema da discretização da barra Alumínio-PMMA por elementos finitos.

A figura (6.14) compara a 2^a e 3^a curva de dispersão – o que corresponde a análise do segundo gap – e a FRF de modelos discretizados em 4, 8, 16, 32 e 64 elementos. Observase que as malhas convergem monotonicamente quando refinados. Vê-se que as curvas de dispersão e as FRFs dos modelos menos refinados distanciam-se do modelo com 64 elementos quando são calculadas em frequências progressivamente maiores, de forma que somente a malha com 32 elementos produz resultados próximos da malha com 64 elementos. Já para frequências de até 13 kHz (limite superior do primeiro gap), vê-se, a partir das curvas de FRF das malhas, que somente a malha com 4 elementos apresenta-se divergente em relação ao modelo mais refinado. Observa-se também que os resultados apresentados pela estrutura de banda – composta pelas curvas de dispersão – e as FRF do modelo discretizado com 64 elementos mostram-se em acordo, ambos prevendo a presença de um 2° gap dentro da faixa de frequências entre 15,7 e 24,6 kHz. Compara-se, por fim, os resultados obtidos pela discretização da barra de alumínio-PMMA em elementos finitos e um sistema massa-mola. Na figura (6.15) estão ilustradas as curvas de dispersão e de resposta em frequência de ambos os modelos. Observa-se que ambos os modelos produzem resultados muito próximos e valida-se, portanto, o modelo implementado em elementos finitos.





Figura 6.14: Curvas de dispersão e FRF para a barra alumínio-PMMA discretizada pelo método dos E.F. em 4, 8, 16, 32, 64 elementos.



(b) FRF

Figura 6.15: Comparação dos modelos de discretização da barra alumínio-PMMA pelo método dos E.F., com 64 elementos, e por um sistema massa-mola, com 64 massas.

6.2 Modelagem Numérica da Propagação de Ondas em Materiais Poro-elásticos

Esta seção tem como objetivo validar o modelo numérico implementado para o cálculo da absorção do problema da poro-elasticidade acoplada, discutir a validade de aplicação dos modelos de fluido equivalente e de Biot-Allard e avaliar as contribuições das absorções por interação viscosa, térmica e da estrutura elástica na absorção total de materiais poro-elásticos. As propriedades dos materiais utilizados nos modelos simulados encontram-se na tabela (6.1). Uma análise de convergência encontra-se no apêndice D e serve como guia para a escolha das malhas de elementos finitos em estudo nesta seção.

6.2.1 Validação do modelo numérico

O objetivo deste exemplo é validar o programa de simulação baseado no método dos elementos finitos, e desenvolvido para a realização dos cálculos do problema de propagação de ondas em meios poro-elásticos. Os modelos simulados nesta seção consistem em materiais poro-elásticos bidimensionais, inseridos na extremidade de um tubo de Kundt, oposta à extremidade onde aplica-se uma excitação acústica. A figura (6.16) ilustra a configuração do problema.



Figura 6.16: Configuração geral dos modelos simulados nesta seção.

	α_{∞}	ϕ	$\phi \rho_s (kg/m^3)$	$\sigma(Ns/m^4)$	N(kPa)	$ u_b $	$\Lambda(m)$	$\Lambda'(m)$
Lã de Vidro	1.06	0.94	130	40000	2200(1+i0.1)	0	$0.56 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-4}$
Espuma A	2.52	0.97	31	87000	55(1+i0.055)	0.3	$37 \cdot 10^{-6}$	$119 \cdot 10^{-6}$
Espuma B	1.98	0.99	16	65000	18(1+i0.1)	0.3	$0.37 \cdot 10^{-4}$	$1.21 \cdot 10^{-4}$

Tabela 6.1: Tabela com as propriedades do materiais poro-elásticos

Para a validação do programa implementado, foram calculadas as impedâncias de camadas de lã de vidro (Tabela 6.1) de dimensões infinitas no plano perpendicular ao eixo de incidência da onda, e espessuras iguais a 10 cm e 5,6 cm pela função analítica proposta por Allard (1993). Estes resultados foram comparados aos resultados obtidos pelo programa de elementos finitos implementado para a formulação mista (u,p) do modelo de Biot-Allard. A malha utilizada para o cálculo da impedância está ilustrada na figura (6.2.1), onde o elemento utilizado foi o elemento linear quadrilateral de 4 pontos (quad4). Para o cálculo da impedância, considerase que o campo acústico é excitado por uma onda acústica de velocidade v_0 fixa, de forma que a integral de contorno da excitação acústica vale:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{w^2 \rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{L_y}{iw} v_0 \tag{6.3}$$

onde ρ_0 é a densidade do campo acústico. A impedância na entrada vale, então, $Z_{ent} = p_{ent}/v_0$, e a impedância na face do material pode ser calculada por:

$$Z_{face} = \rho_0 c_0 \frac{-iZ_{ent} \cot(-L_{acus} w/c_0) + \rho_0 c_0}{Z_{ent} - i\rho_0 c_0 \cot(-L_{acus} w/c_0)}$$
(6.4)

onde c_0 é a velocidade da onda no meio acústico e L_{acus} representa a distância entre a entrada da onda e a face do material poro-elástico.

Os resultados das impedâncias calculadas estão ilustrados na figura (6.18); observa-se uma boa concordância entre o modelo analítico e o numérico. Este resultado serve para validar o programa de elementos finitos implementado, utilizado para a realização dos cálculos desta seção.



Figura 6.17: Malha de elementos finitos utilizada para o cálculo da impedância: elemento quad4. Malha bidimensional com 8 elementos acústicos (Azul) e 80 elementos porosos (Vermelho).



(b) Material com 5.6 cm de espessura

Figura 6.18: Impedância da fibra de vidro

6.2.2 Cálculo da absorção

Tem-se como objetivo, nesta seção, verificar as diferenças entre os modelos fluido equivalente e Biot-Allard de materiais poro-elásticos, e os casos para os quais o primeiro é valido.

Calculou-se a absorção de estruturas poro-elásticas homogêneas com 10 cm de espessura pelos métodos fluido equivalente e Biot-Allard. Os materiais estudados foram a lã de vidro, a espuma A e a espuma B, e suas propriedades estão descritas na tabela (6.1). Os modelos estudados seguem o modelo descrito pela figura (6.19a); a malha utilizada para os cálculos dos modelos é composta por 2×40 elementos poro-elásticos e está ilustrada na figura (6.20). Nos modelos estudados, a interação entre o domínio acústico e o domínio poro-elástico foi modelada pelo acoplamento do guia de ondas acústico com os elementos poro-elásticos no contorno Γ_{pa} , como mostrado na figura (6.19b).



Figura 6.19: Configuração dos modelos para o cálculo da absorção

Para o acoplamento entre o guia de ondas acústico e o domínio poro-elástico, a integral de contorno em Γ_{pa} foi escrita como:

$$\int_{\Gamma_{pa}} \frac{1}{\rho_0 w^2} \frac{\partial p}{\partial n} \delta p d\Gamma = \frac{1}{iw} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A(y_1, y_2) \ p(y_2) \delta p(y_1) d\Gamma d\Gamma - \frac{1}{iw} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A(y_1, y_2) \ p(y_2) \delta p_b(y_1) d\Gamma d\Gamma$$
(6.5)

onde p é a pressão no contorno, p_b a pressão de bloqueio e o operador de admitância A é dado por:


Figura 6.20: Malha poro-elástica com 80 elementos bidimensionais quadrilaterais isoparamétricos do tipo quad4

$$A(y_1, y_2) = \sum_m \frac{k_m}{\rho_0 w N_m} \varphi_m(y_1) \varphi_m(y_2)$$
(6.6)

sendo o termo k_m o número de onda complexo, φ_m a forma modal ortogonal do guia de onda e N_m a norma dos modos ortogonais. Estes são dados por:

$$k_m = i \sqrt{\frac{w^2}{c_0^2} - \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2}$$

$$\varphi_m(y) = \cos\left(\frac{m\pi y}{L_y}\right)$$

$$N_m = \int_{\Gamma_{pa}} |\varphi_m(y)|^2 d\Gamma$$
(6.7)

A teoria sobre a modelagem do domínio acústico por um guia de ondas planas é vista em detalhes nos trabalhos de Atalla *et al.* (2001b), Sgard *et al.* (2005) e Silva (2007); a teoria referente à decomposição modal do guia de ondas planas pode ser vista no texto de Kinsler *et al.* (1999). A resolução do modelo poro-elástico de Biot-Allard com o guia de ondas acústico deu-se a partir da aplicação do método dos elementos finitos – com elementos isoparamétricos quad4 para o domínio Ω e isoparamétrico unidimensional para o domínio Γ – na forma fraca do problema acoplado, dada por:

$$\int_{\Omega} \hat{\sigma}_{ij}^{s} \delta u_{i,j} d\Omega - w^{2} \int_{\Omega} \tilde{\rho} u_{i} \delta u_{i} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{\gamma} p_{,i} \delta u_{i} d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \frac{\phi^{2}}{w^{2} \tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\phi^{2}}{R} p \delta p d\Omega - \int_{\Omega} \tilde{\gamma} u_{i} \delta p_{,i} d\Omega - \frac{1}{iw} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A(y_{1}, y_{2}) p(y_{2}) \delta p(y_{1}) d\Gamma d\Gamma$$

$$= -\frac{1}{iw} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A(y_{1}, y_{2}) p(y_{2}) \delta p_{b}(y_{1}) d\Gamma d\Gamma$$
(6.8)

O cálculo da absorção total foi, então, realizado pela seguinte operação:

$$\alpha_{total} = \frac{\Pi^s_{diss} + \Pi^v_{diss} + \Pi^t_{diss}}{\Pi_{inc}}$$
(6.9)

onde Π^s_{diss} , Π^v_{diss} e Π^s_{diss} dão as contribuições da estrutura, dos efeitos de viscosidade e térmicos, respectivamente, na dissipação total, no material poro-elástico, da potência Π_{inc} da onda acústica incidente . Os termos de dissipação da potência foram calculadas por:

$$\Pi_{diss}^{s} = \frac{1}{2} \Im(\{\bar{u}\}^{T} [K] \{\bar{u}\})$$

$$\Pi_{diss}^{v} = \frac{1}{2} \Im(-w^{2} \{\bar{u}\}^{T} [M] \{\bar{u}\} + \frac{1}{w^{2}} \{\bar{p}\}^{T} [H] \{\bar{p}\} - 2 \{\bar{p}\}^{T} [C] \{\bar{u}\})$$

$$\Pi_{diss}^{t} = \frac{1}{2} \Im(-\{\bar{p}\}^{T} [Q] \{\bar{p}\})$$
(6.10)

e a potência da onda incidente foi calculada por:

$$\Pi_{inc} = \frac{L_y |p_0|}{2\rho_0 c_0} \tag{6.11}$$

onde p_0 é a amplitude da onda acústica plana incidente.

Para o cálculo da absorção do modelo de fluido equivalente, seguiram-se os mesmos procedimentos realizados para o modelo de Biot-Allard, substituindo-se a equação da forma fraca deste último pela equação:

$$\int_{\Omega} \frac{\phi^2}{w^2 \tilde{\rho}_{22}} p_{,i} \delta p_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\phi^2}{R} p \delta p d\Omega - \frac{1}{iw} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A(y_1, y_2) \ p(y_2) \delta p(y_1) d\Gamma d\Gamma$$

$$= -\frac{1}{iw} \int_{\Gamma_{pa}} \int_{\Gamma_{pa}} A(y_1, y_2) \ p(y_2) \delta p_b(y_1) d\Gamma d\Gamma$$
(6.12)

e os valores das potências dissipadas calculados foram dados por:

$$\Pi^{s}_{diss} = 0$$

$$\Pi^{v}_{diss} = \frac{1}{2} \Im \left(\frac{1}{w^{2}} \{ \bar{p} \}^{T} [H] \{ \bar{p} \} \right)$$

$$\Pi^{t}_{diss} = \frac{1}{2} \Im \left(- \{ \bar{p} \}^{T} [Q] \{ \bar{p} \} \right)$$
(6.13)

Na figura (6.21) estão ilustradas as curvas de impedância e absorção total da lã de vidro, calculadas pelos modelos fluido equivalente e Biot-Allard. Observa-se que, exceto nas regiões próximas às frequências de 460 Hz e 1400 Hz, as curvas de impedância e absorção calculadas

pelo modelo de fluido equivalente mostram-se próximas às curvas calculadas pelo modelo de Biot-Allard.



Figura 6.21: Comparação da impedância e da absorção da lã de vidro obtida para os modelos estrutural e fluido equivalente

Do cálculo das frequências naturais da matriz elástica da lã de vidro – sem levar em conta a presença do ar –, conclui-se que essa discrepância ocorre devido à ressonância entre a matriz elástica e a fase fluida da lã de vidro.

Pode-se calcular as frequências naturais da matriz elástica da lã de vidro pela equação:

$$f_{nat}^{(i)} = i \frac{1}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{6.14}$$

onde L é o espessura do material por o-elástico, ρ a densidade e E o módulo de elasticidade linear dado por:

$$E = N\left(\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} + \frac{4}{3}\right); \tag{6.15}$$

Observa-se, da equação (6.14), que a 1^a e 3^a frequência natural da matriz elástica da lã de vidro valem, aproximadamente, 460 Hz e 1382 Hz, para as quais as curvas de impedância e absorção do modelo de fluido equivalente divergem das curvas do modelo de Biot-Allard. Sendo que o modelo de fluido equivalente considera a matriz elástica do material como estática, este não é capaz de avaliar corretamente a absorção do material poroso nas faixas de frequência em que a matriz elástica do material encontra-se em movimento. A figura (6.22) exemplifica este problema.



Figura 6.22: Curvas de absorção da lã de vidro com espessura igual a 10 cm, calculadas pelos modelos de Biot-Allard e fluido equivalente

Vê-se da figura (6.22) que o valor da contribuição da matriz elástica na absorção total (curva de absorção estrutural) encontra-se próximo a zero na maior parte da extensão da faixa de frequências de 0 à 2000 Hz. A absorção estrutural mostra-se relevante à absorção total somente nas faixas de frequências próximas à 1^a e à 3^a frequência natural da matriz elástica da lã de vidro. Esse aumento considerável no valor da absorção estrutural às frequências de ressonância ocorre pois a dissipação de potência da matriz elástica dá-se devido ao armazenamento de parte da energia da onda acústica incidente como energia potencial elástica, devido à deformação da matriz elástica, ou seja, quanto maior as amplitudes das velocidades da matriz elástica, maior a potência que esta dissipa.

Sendo assim, conclui-se que a matriz elástica da lã de vidro permanece quase estática – ou pelo menos apresenta velocidades baixas o suficiente para ter influência desprezível na absorção – exceto quando o material encontra-se em ressonância com a onda acústica incidente. Essa condição é descrita por Allard (1993) como condição de semi-desacoplamento, em que a onda que se propaga no material poro-elástico pode ser dividida em duas: uma que se propaga primariamente na fase fluida e outra que se propaga primariamente pela fase sólida, sendo que a primeira pouco influencia na segunda. Este fenômeno ocorre para materiais poro-elásticos onde a matriz elástica é bem mais densa e bem menos compressível que o fluido embebido, como é o caso da lã de vidro e do ar. Para casos, portanto, em que a condição de semi-desacoplamento ocorre, o modelo de fluido equivalente parece ser uma aproximação razoável.

Analisando-se as curvas de absorção para a espuma tipo A e tipo B, ilustradas na figura (6.23), vê-se que a absorção pelo modelo de fluido equivalente mostra-se divergente, principalmente às frequências abaixo de 1000 Hz, da absorção calculada pelo modelo de Biot-Allard. Supõe-se que essa divergência deva-se ao fato de que as matrizes elásticas das espumas A e B, mesmo sendo consideravelmente mais densas que o ar, possuem módulos volumétricos da mesma ordem que o ar, de forma que a condição de semi-desacoplamento não é válida para estes materiais. Pode-se observar na figura (6.23) que a contribuição das absorções estruturais das espumas A e B são relativamente mais significativas que a absorção estrutural da lã de vidro (Figura (6.22)). Além disso, vê-se que o comportamento das curvas de absorção viscosa e térmica, para as espumas A e B, calculadas pelo modelo de Biot-Allard, não seguem o padrão das curvas de absorção viscosa e térmica calculadas pelo modelo de fluido equivalente. Este último modelo mostrou-se, portanto, não adequado para as simulações dos materiais poro-elásticos como a espuma A e B. Como os materiais simulados neste trabalho possuem em sua composição, pelo menos em parte, a espuma A ou a B, o modelo de Biot-Allard foi o utilizado para todas as simulações que seguem neste texto.



(b) Espuma B

Figura 6.23: Curvas de absorção da espuma A e da espuma B, ambas com espessura igual a 10 cm, calculadas pelos modelos de Biot-Allard e fluido equivalente

6.3 Discussão da Periodicidade em Materiais Poro-Elásticos

Discute-se nesta seção o comportamento da absorção acústica em materiais poro-elásticos arranjados periodicamente. O objetivo principal é o de avaliar qual seria a influência dos *band gaps* sobre o comportamento de sistemas de absorção poro-acústicos. A teoria apresentada por Langlet *et al.* $(1995)^3$ é utilizada para calcular as curvas de dispersão das matrizes elásticas de estruturas porosas periódicas, sem a presença do ar (no vácuo), as quais são comparadas com as curvas de absorção do modelo acoplado matriz elástica-ar.

6.3.1 Estruturas poro-elásticas periódicas unidimensionais

O estudo feito para materiais unidimensionais deu-se da seguinte forma:

- (i) A célula poro-elástica unidimensional é definida como a junção de duas placas contendo materiais poro-elásticos distintos;
- (ii) A matriz elástica da célula poro-elástica é discretizada pelo método dos elementos finitos em 8 elementos isoparamétricos unidimensionais e aplica-se à condição de contorno de periodicidade da forma: $F_9 = F_1 e^{ikd}$, onde F representa uma função espacial qualquer, como o deslocamento ou a força, d representa o comprimento da célula, e os índices 1 e 9 referem-se ao primeiro e último nó da malha da célula; as curvas de dispersão que formam a estrutura de banda da matriz elástica são, então, calculadas;
- (iii) Monta-se a malha discreta de várias estruturas periódicas finitas com a concatenação de N=10 células poro-elásticas; considera-se somente as matrizes elásticas das estruturas periódicas porosas; aplicam-se forças harmônicas em uma das extremidades das estruturas e realizam-se os cálculos das FRFs na outra extremidade;
- (iv) Utiliza-se do programa de elementos finitos desenvolvido neste trabalho para o cálculo da absorção acústica de várias estruturas com 1, 2, 5 e 10 células. A célula poro-elástica que compõe estas estruturas foram discretizadas em 2×8 elementos isoparamétricos

 $^{^{3}}$ Seção 3.3

bidimensionais – o problema é, no entanto, ainda unidimensional – do tipo quad4. As equações diferencias da poro-elasticidade seguem o modelo de Biot-Allard.

A figura (6.24) esquematiza os cálculos das curvas de dispersão, das FRFs e das curvas de absorção da estrutura unidimensional periódica. As propriedades dos materiais poro-elásticos estudados estão descritos na tabela 6.1.



Figura 6.24: Esquema da análise da estrutura poro-elástica periódica unidimensional.

As curvas de dispersão foram calculadas para o material poro-elástico no vácuo, ou seja, foi considerado somente sua matriz elástica sem a presença do fluido – no caso o ar – de imersão. O motivo principal dessa simplificação deve-se à formulação do problema de autovalor, dado pelas equações (3.70) e (3.71), ser quadrática e implícita na frequência quando aplicada ao modelo poro-elástico acoplado Biot-Allard, ou mesmo para o modelo de fluido equivalente. Para melhor ilustrar o problema descrito, considera-se a formulação de fluido equivalente dada pela equação diferencial (6.16):

$$p_{,ii} + \frac{w^2}{c^2}p = 0 \tag{6.16}$$

onde $c^2 = \tilde{R}/\tilde{\rho}_{22}$, sendo $\tilde{R} \in \tilde{\rho}_{22}$ variáveis complexas e funções da frequência angular w. Seguindo os procedimentos apresentados neste texto, o modelo de elementos finitos para a equação diferencial (6.16) pode ser escrito da forma:

$$\left([H] + \frac{w^2}{c^2} [Q]\right) \{p\} = \{f\}$$
(6.17)

Aplicando a teoria apresentada na seção 3.3 no sistema (6.17), obtém-se o problema de auto-valor – $g(w^2, k_x, k_y) = 0$ – dado por:

$$det\left([H_R] + w^2 \frac{1}{c^2} [Q_R]\right) = 0$$
(6.18)

A resolução da equação (6.18) retorna valores de w^2 em função do vetor de onda \vec{k} e permite calcular as curvas de dispersão do problema. No entanto, a velocidade de propagação da onda c é função da frequência (c = c(w)). Sendo assim, a equação (6.18) não pode ser resolvida por métodos tradicionais, e sua resolução está fora do escopo deste trabalho.

Devido, então, à falta de ferramentas para o cálculo das curvas de dispersão do modelo poro-elástico acoplado, decidiu-se pela análise da matriz elástica sem a presença do ar.

O primeiro material testado é uma composição do tipo espuma A/lã de vidro em uma célula unidimensional de 5 cm de espessura – em relação à figura (6.24), tem-se que o material 1 é a espuma A, o material 2, a lã de vidro, e que d = 0,05 m. A estrutura de banda, FRF e absorção acústica do material espA/lã estão ilustrados nas figuras (6.25) e (6.26).

Nota-se que a figura (6.25) mostra duas curvas de resposta em frequência para a mesma estrutura periódica espA/lã finita com 10 células encadeadas; uma das curvas representa a resposta em frequência da estrutura quando considera-se somente a parte real do módulo elástico da matriz elástica do material, a outra, quando considera-se também o termo imaginário. Como pode ser observado na tabela 6.1, as constantes elásticas de Lamé (N) de materiais poro-elásticos são complexas. As propriedades mecânicas complexas caracterizam um modelo de amortecimento estrutural, cujos valores indicam um amortecimento mais acentuado na faixa de médias-altas frequências. Pode-se notar este comportamento nas curvas de absorção das figuras (6.22) e (6.23a) – lã de vidro e espuma A, respectivamente –, da seção anterior, onde vê-se que o segundo pico de absorção estrutural – devido à ressonância – mostra-se mais amortecido que o primeiro.



(a) Estrutura de banda

(b) FRF para estrutura com N=10 células

Figura 6.25: Estrutura de banda e resposta em frequência para N=10 do material espuma A/lã de vidro.

As curvas de dispersão mostradas na figura (6.25a) representam a parte real das frequências angulares complexas, obtidas em função das componentes $k_x e k_y$ do vetor de onda \vec{k} , que são reais. Observa-se, a partir da figura (6.25b), que ambas as curvas de resposta em frequência apresentam uma queda na amplitude dentro da região do primeiro *gap*, previsto a partir da figura (6.25a). Vê-se, portanto, que a estrutura de banda calculada para a estrutura periódica espA/lã, da figura (6.25a), está em acordo com as curvas de resposta em frequência da figura (6.25b).

A resposta em frequência dada pela figura (6.25b) mostra, no entanto, que existe uma frequência de ressonância dentro do *gap* previsto. A existência dessa frequência de ressonância fica evidente quando se observa as curvas de absorção da figura (6.26), nas quais o pico de absorção estrutural ocorre na vizinhança da frequência de ressonância dentro do *gap*. Vê-se na figura (6.26) que as curvas de absorção estrutural possuem, mesmo para as estruturas com 5 e 10 células, valores relativamente altos na vizinhança da frequência de 860 Hz, e dentro



Figura 6.26: Curvas de absorção da estrutura poro-elástica espuma A/lã de vidro para N=1, 2, 5 e 10 células.

da região de *band gap*, onde esperava-se observar valores próximos a zero para a absorção estrutural, devido ao não-movimento da matriz elástica.

Observa-se também que, à medida que a malha é aumentada – N=2, 5 e 10 –, os modos de baixa frequência têm mais influência, sendo possível observar o aparecimento de vários picos nas curvas de absorção estrutural, viscosa e total. Vê-se também que o valor da absorção à frequências bem próximas à zero crescem à medida que a malha é aumentada.

Cabe notar, neste caso, que a dimensão da célula foi mantida constante e, portanto, a espessura total do poroso L varia para cada valor de N, sendo L = Nd e d = 5 cm. Neste caso, a espessura maior do revestimento contribui para melhorar o desempenho nas baixas frequências. A figura (6.27) ilustra as curvas de absorção total de estruturas poro-elásticas homogêneas de lã de vidro, espuma A e espuma B, com 5, 10, 25 e 50 cm – espessuras idênticas às espessuras da malha periódica com N=1, 2, 5 e 10 células, respectivamente. É possível observar a partir da figura (6.27) que, assim como no caso da malha periódica espA/lã para d = 5 cm, os valores de absorção, para frequências próximas a zero, da lã de vidro e espumas A e B, são maiores quando os materiais em questão são mais espessos. Conclui-se, portanto, que esta não é uma característica exclusiva da estrutura periódica espA/lã.

Cabe também salientar que as estruturas porosas com N = 5 e N = 10 possuem espessuras de 25 e 50 cm – quando a espessura da célula é de 5 cm – sendo inviáveis em aplicações de engenharia para a maioria dos casos. A despeito disso, escolheu-se a espessura dada da célula porosa de forma que o primeiro *gap* de sua matriz elástica ocorre-se dentro do limite de frequência de 2000 Hz – já que valores inferiores da espessura deslocam o *gap* para frequências maiores.

A partir da figura (6.26), pode-se verificar que as curvas de absorção de estruturas tipo espA/lã, com números de células distintos, apresentam, a partir da frequência limite inferior do *gap*, comportamento semelhante. Vê-se, por exemplo, que a diferença do valor de pico da absorção estrutural entre as estruturas com 1, 2, 5 e 10 células é pequena, quando se espera que com o aumento da periodicidade, uma queda na absorção estrutural ocorra na região de *band gap* da fase sólida do material poroso.

Destacam-se dois motivos para explicar o comportamento das curvas de absorção das estruturas periódicas com números de células distintos da figura (6.26). Em primeiro lugar, a excitação da matriz elástica devido à onda acústica incidente não ocorre no contorno desta, mas sim em seu volume e quase que exclusivamente nas regiões de ressonância; além disso, a penetração da onda acústica no material poro-elástico é limitada à região próxima do contorno onde o material é excitado (entende-se que isso ocorre devido às propriedades amortecedoras e dissipativas dos materiais poro-elásticos escolhidos neste exemplo).

Este fenômeno fica evidente quando se observa os mapas da potência dissipada à frequência de 850 Hz das estruturas espA/lã com 1 e 5 células, ilustrados na figura (6.28). Da figura (6.28b) pode-se concluir que a dissipação de potência tanto estrutural, como viscosa e térmica ocorrem basicamente na primeira célula da estrutura, para a frequência de 850 Hz. Con-



Figura 6.27: Curvas de absorção da lã de vidro, espuma A e espuma B com espessuras de 5, 10 25 e 50 cm.

siderando, então, que a excitação não ocorre no contorno, mas sim no volume do material, conclui-se que, devido à baixa penetração da onda acústica no meio poro-elástico, a excitação do meio acústico na matriz elástica ocorre – no caso do material espA/lã, para a frequência de 850 Hz – somente no início da estrutura periódica, não se propagando por toda a matriz elástica.

Sendo assim, é possível explicar o motivo das curvas de absorção das estruturas espA/lã com 1, 2, 5 e 10 células serem semelhantes, se for considerado que a dissipação de potência destas ocorre quase que exclusivamente na primeira célula para frequências maiores que a

frequência limite inferior do gap dessas estruturas.

Da figura (6.29), vê-se que esse parece ser realmente o caso: à frequência de 500 Hz (acima do limite inferior do gap), as dissipações de potência estrutural, viscosa e térmica da estrutura espA/lã com N=5 concentram-se quase que somente na região ocupada pela primeira célula, enquanto que à frequência de 300 Hz – abaixo do limite inferior do gap – é possível observar que a dissipação de potência estrutural ocorre em todas as células. Pode-se relacionar, então, este resultado com a observação anterior da figura (6.26), onde vê-se que os modos de baixas frequências apresentam maior influência para as malhas com N=2, 5 e 10 do material espA/lã, quando comparadas à malha N=1. A absorção para baixas frequências – no caso do material espA/lã, para frequências abaixo do limite inferior do gap – melhora com o aumento da malha, devido à melhor distribuição da dissipação estrutural por todo material, quando compara-se esta com a distribuição da dissipação estrutural para frequências maiores.



Figura 6.28: Mapa da potência dissipada estrutural, viscosa e térmica na frequência de 850 Hz para estruturas do tipo espA/lã, com 1 e 5 células.

A baixa penetração da onda acústica no meio poro-elástico ressalta a importância do arranjo espacial do material poroso próximo à região de incidência da onda acústica sobre sua propriedade de absorção. Um exemplo disso é dado pela figura (6.30), onde estão ilustradas as curvas de absorção de estruturas contendo 1, 2, 5 e 10 células de 5 cm do tipo lã/espA; isto é, inverteu-se a ordem do materiais. Enquanto a curva de dispersão e a resposta em



Figura 6.29: Mapa da potência dissipada estrutural, viscosa e térmica nas frequências de 300 e 500 Hz para a estrutura do tipo espA/lã com 5 células.

frequência das matrizes elásticas dos materiais espA/lã e lã/espA são idênticas, o mesmo não pode ser dito de suas curvas de absorção. A comparação das figuras (6.26) e (6.30) mostra uma diferença entre as curvas de absorção desses dois materiais e ilustra a importância do arranjo espacial dos materiais porosos em sua absorção – tema importante quando se pretende otimizar a absorção de uma estrutura absorvedora composta por camadas de diferentes materiais poro-elásticos.

Refazendo, agora, o procedimento ilustrado na figura (6.24) para uma estrutura composta por células do tipo espuma B/lã de vidro com 5 cm de espessura, encontra-se a mesma tendência no comportamento das curvas de dispersão, FRF e absorção encontradas para a estrutura espA/lã. Esses resultados estão ilustrados nas figuras (6.31) e (6.32).

A partir dos resultados apresentados, pode-se observar que a aplicação de estruturas poroelásticas periódicas alteram as propriedades de absorção do sistema completo, todavia, não foi possível estabelecer relações de causa e efeito diretas neste caso.



Figura 6.30: Curvas de absorção da estrutura poro-elástica lã de vidro/ espuma A para N=1, 2, 5 e 10 células



Figura 6.31: Estrutura de banda e resposta em frequência para N=10 do material espB/lã.



Figura 6.32: Curvas de absorção da estrutura poro-elástica espuma B/lã de vidro para N=1, 2, 5 e 10 células

6.3.2 Estruturas poro-elásticas periódicas bidimensionais

Este item trata da análise dos resultados de estruturas poro-elásticas periódicas bidimensionais. A análise realizada é similar à análise feita para o caso unidimensional, onde só se propagam ondas planas, e foi realizada da forma abaixo explicitada.

- (i) A célula poro-elástica bidimensional consiste em uma matriz quadrada de dimensão *l_{cel}*, com uma inclusão, também quadrada, composta por um material poroso distinto, de dimensão *l_{inc}*;
- (ii) A matriz elástica da célula poro-elástica é discretizada em elementos isoparamétricos bidimensionais quad4 – os números de elementos de cada célula indicados na tabela

(6.2). Aplica-se a condição de contorno de periodicidade para meios infinitos dada na seção (3.3):

$$\vec{u}_{L3} = \vec{u}_{L1} e^{ik_x d_x}$$

$$\vec{u}_{L4} = \vec{u}_{L2} e^{ik_y d_y}$$

$$\vec{u}_{C2} = \vec{u}_{C1} e^{ik_y d_y}$$

$$\vec{u}_{C3} = \vec{u}_{C1} e^{ik_x d_x}$$

$$\vec{u}_{C4} = \vec{u}_{C1} e^{ik_x d_x} e^{jk_y d_y}$$

(6.19)

As curvas de dispersão que formam a estrutura de banda da matriz elástica são, então, calculadas.

- (iii) Monta-se a malha discreta de estruturas periódicas finitas compostas por 7×7 (M=7) células poro-elásticas. Considera-se somente as matrizes elásticas das estruturas periódicas porosas; aplica-se uma força harmônica nas estruturas e realiza-se os cálculos das FRFs nos pontos A e B, indicados na figura (6.33).
- (iv) Utiliza-se o programa de elementos finitos desenvolvido neste trabalho para o cálculo da absorção acústica de estruturas periódicas finitas com M=1, 3 e 7 células em ambas as direções do plano. As células poro-elásticas que compõe estas estruturas foram discretizadas pelo mesmo tipo e número de elementos utilizados para discretizar a matriz elástica somente (Tabela 6.2); o modelo poro-elástico utilizado é o de Biot-Allard; o guia de ondas acústico é acoplado ao domínio acústico discretizado em elementos isoparamétricos do tipo quad4, como indicado na figura (6.33).

A figura 6.33 ilustra o procedimento de análise descrito. As composições das células poro-elásticas estão expostas na tabela (6.2).

O primeiro material estudado é composto pela célula 1, descrita na tabela (6.2). A estrutura de banda, FRF e absorção deste material estão ilustradas nas figura (6.34).

Observa-se que a estrutura de banda e a resposta em frequência (Figuras 6.34a, 6.34b e 6.34c) estão em acordo; a faixa de frequências onde ocorre o *band gap* é, no entanto, relativamente pequena. Dessa forma, não se verifica a presença do *gap* na curva de absorção



Figura 6.33: Esquema da análise da estrutura poro-elástica periódica bidimensional.

estrutural para quaisquer das estruturas com 1x1, 3x3 ou 7x7 células. Do contrário, percebese que o pico da absorção estrutural ocorre junto à frequência limite superior do *gap*. Vê-se também das figuras (6.34d), (6.34e) e (6.34f) que, assim como no caso unidimensional, os modos de baixas frequências apresentam maior influência para as malhas com maior número de células (M=3 e 7).

	Célula 1	Célula 2	Célula 3	Célula 4
Material Externo	espuma B	espuma B	espuma A	espuma A
Material de Inclusão	lã de vidro	lã de vidro	lã de vidro	lã de vidro
L_{cel}	7 cm	$7~\mathrm{cm}$	$7 \mathrm{~cm}$	$3,5~\mathrm{cm}$
L_{inc}	$0,5 L_{cel}$	$0,75 \ L_{cel}$	$0,75 \ L_{cel}$	$0,75 \ L_{cel}$
N^o de Elementos	12×12	12×12	12×12	8×8

Tabela 6.2: Composição e geometria das células poro-elásticas bidimensionais estudadas

Analisando a estrutura poroso composta pela célula 2 – célula que possui a mesma composição poro-elástica da célula 1, mas com o material de inclusão de dimensão $l_{inc} = 0,75l_{cel}$ – observa-se a presença de um gap de maior extensão na frequência, como visto nas figuras (6.35a), (6.35b) e (6.35c). A análise das curvas de absorção deste material e do material composto pela célula 1, permite a observação de dois padrões: a tendência do pico de absorção estrutural ocorrer próximo da frequência limite superior do gap da estrutura, e uma absorção estrutural quase nula na faixa de frequência da primeira metade do gap previsto, revelando uma presença tímida do fenômeno de band gap na absorção da estrutura. Novamente neste caso torna-se difícil estabelecer uma relação de causa e efeito direto entre o band gap da fase estrutural e o comportamento da curva de absorção.

Esses padrões são reforçados pela observação das curvas de absorção do 3^o material estudado, formado a partir da célula 3, na qual o material que compõe a matriz externa é a espuma A. As curvas de absorção desse material estão ilustradas na figura 6.36.

Por fim, analisa-se o material composto pela célula 4, que é um modelo em escala 1/2 da célula 3. Para este material, espera-se que o 1° gap da fase estrutural ocorra para maiores frequências que o 1° gap do material 3, pois células periódicas de dimensões menores apresentam seus band gaps em faixas de frequências mais altas. As figuras (6.37a), (6.37b) e (6.37c) confirmam o esperado, apresentando um gap na faixa de frequências de aproximadamente 900 Hz a 2300 Hz, sendo que o gap do material 3 encontra-se na faixa de aproximadamente 440 Hz a 1110 Hz. Das figuras (6.37), (6.37) e (6.37), observa-se que as curvas de absorção estrutural para M=1, 3 e 7 apresentam, assim como os resultados anteriores, baixos valores

dentro da maior parte da região de *band gap* e altos valores nas frequências próximas do limite superior do *gap*. É possível observar também que as malhas do material 4 com maior número de células apresentam maior número de picos na absorção estrutural, viscosa e total, para frequências abaixo do limite inferior do *gap*.

Os resultados obtidos mostram que foi desenvolvida uma ferramenta computacional e uma metodologia para a análise de estruturas poro-elásticas periódicas, usando o método dos elementos finitos e modelos poro-acústicos acoplados e desacoplados. Inúmeras possibilidades podem ser tratadas, todavia um estudo sistemático, associado à técnica de otimização, foge do escopo deste trabalho.



Figura 6.34: Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 1: matriz=espuma B; inclusão=lã de vidro; $l_{cel} = 7cm$; $l_{inc} = 0, 5l_{cel}$.



Figura 6.35: Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 2: matriz=espuma B; inclusão=lã de vidro; $l_{cel} = 7cm$; $l_{inc} = 0,75l_{cel}$.



Figura 6.36: Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 3: matriz=espuma A; inclusão=lã de vidro; $l_{cel} = 7cm$; $l_{inc} = 0,75l_{cel}$.



Figura 6.37: Curvas de dispersão, FRF e absorção do material 4: matriz=espuma A; inclusão=lã de vidro; $l_{cel} = 3, 5cm$; $l_{inc} = 0, 75l_{cel}$.

Capítulo 7

Conclusões

Neste estudo sobre *band gaps* em materiais elásticos periódicos calculou-se as curvas de dispersão da célula periódica para obtenção da estrutura de banda do material e pôde-se observar a presença de regiões onde, em uma dada faixa de frequência, não existem soluções reais, para a frequência (w) e o vetor de onda (\vec{k}), para o problema de auto-valor do tipo $f(w^2, \vec{k}) = 0$. Nesta faixa ocorre o fenômeno denominado *band gap*, em que não ocorre a propagação da onda no material, para qualquer direção.

Este estudo foi aplicado para modelos de células periódicas uni e bidimensionais. O cálculo das respostas em frequência de modelos equivalentes finitos destes materiais periódicos mostrou que dentro da região de *band gap* verificam-se quedas bruscas nas amplitudes da resposta, evidenciando a presença do fenômeno *band gap* em estruturas elásticas periódicas finitas. A boa concordância entre as curvas de dispersão de estruturas periódicas infinitas, com as funções de resposta em frequência de sistemas periódicos finitos, serviu para validar o método utilizado para a previsão das faixas de frequência em que o *band gap* ocorre.

Já do estudo de materiais poro-elásticos pôde-se verificar os efeitos do fenômeno de semidesacoplamento entre a fase sólida e a fase fluida, quando o fluido é o ar, para os materiais poro-elásticos estudados. Este fenômeno ocorre devido à grande diferença entre a densidade e compressibilidade desses materiais. Atribuiu-se a este fenômeno o motivo de ter sido possível verificar uma boa concordância entre os modelos poro-elásticos misto (u,p) e fluido equivalente quando o material estudado foi a lã de vidro – material bem mais denso e menos compressível que o ar. Na última análise feita – quando foi estudado o comportamento de materiais poro-elásticos periódicos – dois problemas principais se destacaram.

Comenta-se primeiro sobre o cálculo da estrutura de banda do modelo poro-elástico acoplado misto (u,p), derivado da formulação de Biot-Allard. Mostrou-se que o problema de auto-valor obtido – o qual deve ser resolvido para a obtenção da estrutura de banda do material – para o modelo misto (u,p), ou mesmo para o modelo de fluido equivalente, possui coeficientes variáveis e, portanto, necessita de métodos especiais de resolução que não foram implementados neste trabalho. Em consequência disso, calculou-se a estrutura de banda somente da matriz elástica do material poro-elástico, sem se levar em consideração a presença do ar nesta. Isso empobreceu a análise do comportamento da absorção na presença do fenômeno *band gap*. A despeito disso, a análise feita evidenciou certos fenômenos como a baixa infiltração da onda acústica no material poroso e alterações das componentes estruturais da absorção.

O segundo comentário é a respeito da escolha da absorção como função objetivo para o estudo dos materiais poro-elásticos periódicos. Mostrou-se que para os casos estudados não se evidenciou benefícios em se usar topologias periódicas para absorvedores acústicos. Um motivo que pode-se destacar foi a baixa penetração da onda acústica nos materiais porosos periódicos estudados devido a suas propriedades amortecedoras, e as dimensões de suas células periódicas, relativamente grandes, necessárias para que o *band gap* ocorre-se, para as fases sólidas desses materiais, em frequências de até 2000 Hz – faixa de frequência de interesse neste estudo. Como a onda acústica dissipa-se quase que totalmente na região próxima à interface acústica-porosa dos materiais estudados, concluiu-se que o restante do material pouco contribui para a absorção desse.

Outro fator revelante à baixa eficiência, na absorção, do uso de topologias periódicas nos materiais porosos estudados, é a configuração do problema da absorção acústica de materiais porosos. Nesta, busca-se evitar a reflexão da onda acústica que incide no material poroso. Todavia, sabe-se que o fenômeno de *band gap* em materiais periódicos ocorre devido à reflexão da onda nas regiões de contato entre as células periódicas destes materiais. Dado este fato, a transmissibilidade/Perda de transmissão parece ser uma melhor escolha, comparada à absorção, para a análise de materiais poro-acústicos periódicos. O estudo da influência de *band gaps* sobre a transmissibilidade de revestimentos poroacústicos periódicos é, portanto, uma opção para trabalhos futuros. Além disso, os casos limites de materiais poro-elásticos com inclusões sólidas, ou materiais com dupla porosidade periódica, considerando-se cavidades acústicas distribuídas ao longo do meio poroso, foram ainda pouco explorados, sendo ambas as linhas de trabalho opções a serem exploradas em trabalhos futuros.

Adicionalmente, menciona-se a importância de se efetuar ensaios em tubo de impedância para a validação e análise de sensibilidade das variáveis dos sistemas estudados. Certamente esta é uma importante proposta para trabalhos futuros.

Em relação à etapa de concepção, destaca-se a necessidade de propor-se novas técnicas de otimização paramétricas de forma e topológicas para a obtenção das concepções ótimas deste tipo de sistema.

A despeito dos problemas encontrados nas aplicações escolhidas, pode-se afirmar que uma ferramenta computacional flexível foi desenvolvida e pôde ser usada na análise de sistemas poro-acústicos periódicos. Além disso, conclui-se que a metodologia para o estudo do fenômeno de *band gap* em sistemas massa-mola, estruturais discretizados por elementos finitos e poro-acústicos acoplados mostrou-se adequada, podendo ser expandida em vários novos tópicos de pesquisa.

Bibliografia

- ALLARD, J.F. Propagation of Sound in Porous Media: Modeling Sound Absorbing Materials. New York: Elsevier, 1993.
- [2] ATALLA, N.; PANNETON, R.; DEBERGUE, P. A mixed displacement-pressure formulation of poroelastic materials. Journal of Acoustical Society of America, v.104, n.3, p.1444-1452, 1998.
- [3] ATALLA, N.; HAMDI, M.A.; PANNETON, R. Enhanced weak integral formulation for the mixed (u,p) poroelastic equations. Journal of Acoustical Society of America, v.109, n.6, p.3065-3068, 2001a.
- [4] ATALLA, N.; PANNETON, R.; SGARD, F.; OLNY, X. Acoustic absorption of macroperforated porous materials. Journal of Sound and Vibration, v.243, n.4, p.659-678, (2001b).
- BIOT, M. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-satured porous solid. I.
 Low-Frequency Range. Journal of Acoustical Society of America, v.28, p.168-191, 1956a.
- BIOT, M. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-satured porous solid. I.
 Higher Frequency Range. Journal of Acoustical Society of America, v.28, p.168-191, 1956b.
- BRILLOUIN, L. Wave Propagation in Periodic Structures. New York: Dover Publications Inc, 1953.

- [8] CHAMPOUX, Y.; ALLARD, J.F. Dynamic tortuosity and bulk modulos in air-satured porous media. Journal of Applied Physics, v.70, n.4, p.1975-1979, 1991.
- [9] CRAGGS, A. A finite element model for rigid porous absorbing materials. Journal of Sound and Vibration, v.61, p.101-111, 1978.
- [10] CRAGGS, A. Coupling of finite element acoustic absorption models. Journal of Sound and Vibration, v.66, n.4, p.605-613, 1979.
- [11] DEBERGUE, P.; PANNETON, R.; ATALLA, N. Boundary conditions for the weak formulation of the mixed (u,p) poroelasticity problem. Journal of Acoustical Society of America, v.106, n.5, p.2383-2390, 1999.
- [12] GORISHNYY, T.; MALDOVAN, M.; ULLAL, C., THOMAS, E. Sound Ideas. Physics World, dez/2005. Acedido em 14 de junho de 2010, no site: http://physicsworld.com/cws/archive/print/18/12.
- [13] JENSEN, J.S. Phononic Band Gaps and Vibrations in One and Two-Dimensional Mass-Spring Structures. Journal of Sound and Vibration, v.266, p.1053-1078, 2003.
- [14] JOHNSON, D.; KOPLIK, J.; DASHEN, R. Theory of dynamics permeability and tortuasity in fluid-saturated porous media. Journal of Fluid Mechanics, v.176, p.379-02, 1987.
- [15] KAFESAKI, M.; SIGALAS, M.M.; GARCÍA, N. Wave guides in two-dimensional elastic wave band-gap materials. Physica B, v.296, p.190-194, 2001.
- [16] KANG, Y.J.; BOLTON, J.S. Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical finite elements. Journal of Acoustical Society of America, v.98, n.1, p.635-643, 1995.
- [17] KINSLER, L.E.; FREY, A.R.; COPPENS, A.B.; SANDERS, J.V. Fundamentals of Acoustics. USA: John Wiley & Sons, 4th ed., 1999. 560p.
- [18] LAI, W.M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. Introduction to Continuum Mechanics, Butterworth-Heinemann. USA: Pergamon, 3rd ed., 1999. 560p.

- [19] LANGLET, P.; HLADKY-HENNION, A.C.; DECARPIGNY, J.N. Analysis of the propagation of plane acoustic waves in passive periodic materials using the finite element method. Journal of the Acoustical Society of America, v.98, n.5, 1995.
- [20] LAZAROV, B.S.; JENSEN, J.S. Low-frequency band gaps in chains with attached nonlinear oscillators. International Journal of Non-Linear Mechanics, v.42, p.1186-1193, 2007.
- [21] MEAD, D.J. Wave Propagation In Continuous Periodic Structures: Research Contributions From Southhampton, 1964–1995. Journal of Sound and Vibration, v.190, n.3, p.495-524, 1996.
- [22] MOVCHAN, A.B; MOVCHAN, N.V.; HAQ, S. Localised vibration modes and stop bands for continuous and discrete periodic structures. Materials Science and Engineering A v.431, p.175-183, 2006.
- [23] PARMLEY, S.; ZOBRIST, T.; CLOUGH, T.; PERRIS-MILLER, A.; MAKAELA, M.; YU, R. Phononic band structure in a mass chain. Appllied Physics Letters, v67, n.6, 1995.
- [24] PANNETON, R.; ATALLA, N. An efficient finite element scheme for solving the threedimensional poroelasticity problem in acoustics. Journal of Acoustical Society of America, v.101, p.3287-3298, 1997.
- [25] RICE, J.R.; CLEARY, M.P. Some basic stress-diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. Reviews of Geophysics and Space Physics, v.14, p.227-241, 1976.
- [26] SGARD, F.; OLNY, X.; ATALLA, N.; and CASTEL, F. On the use of perforations to improve the sound absorption of porous materials. Applied Acoustics, v.66, p.625-651, 2005.
- [27] SILVA, F.I.; PAVANELLO, R. Numerical analysis of the coupled poroelasticity using the finite element method. Anais do XVII Cobem, 2003.

- [28] SILVA, F.I.; PAVANELLO, R. Estudo de formulações simétricas da poro-elasticidade. Anais do III Cobem, 2004a.
- [29] SILVA, F.I.; PAVANELLO, R. Implementação computacional de um modelo acústicoporoelástico usando o método dos elementos finitos. Anais do V Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, 2004b.
- [30] SILVA, Francisco Ilson J. Síntese Computacional de Absorvedores Acústicos Poroelásticos. 2007. 225p. Dissertação (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- [31] SUZUKI, T.; YU, P.K.L. Complex Elastic Wave Band Structures In Three-Dimensional Periodic Elastic Media. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, v.46, n.1, p.115-138, 1998.
- [32] VASSEUR, J.O.; DEYMIER, P.A.; FRANTZISKONIS, G.; HONG, G.; DJAFARI-ROUHANI, B.; DOBRZYNSKI, L. Experimental evidence for the existence of absolute acoustic band gaps in two-dimensional periodic composite media. Journal of Physics: Condensed Matter v.10, p.6051-6064, 1998.

Apêndice A

Efeitos Viscosos em Poros

- A.1 Escoamento Viscoso Harmônico em Tubos Cilíndricos e Placas Paralelas Infinitas
- A.1.1 Tubo cilíndrico



Figura A.1: Posição do tubo cilíndrico no eixo cartesiano

Para o cálculo do campo de velocidades fluido dentro do tubo, considera-se que o tubo permanece estático e que os efeitos térmicos – troca de calor entre o fluido e tubo – podem ser desconsiderados.

Da figura (A.1), escreve-se o campo de velocidade do fluido da forma:

$$\vec{v} = (0, 0, v_3), \qquad v_3 = v_3(x_1, x_2, t)$$
 (A.1)

Dada a configuração da velocidade (equação A.1), a tensão viscosa provocada pela variação da velocidade na direção x_1 , num dado ponto (x_1, x_2) , é dada por:

$$\sigma_{31}(x_1, x_2) = -\eta \frac{\partial v_3(x_1, x_2, t)}{\partial x_1}$$
(A.2)

onde η representa a viscosidade do fluido.

A tensão da
da pela variação da velocidade na direção x_2 é escrita por:

$$\sigma_{32}(x_1, x_2) = -\eta \frac{\partial v_3(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}$$
(A.3)

Das equações (A.2) e (A.3), a força resultante das tensões viscosas em $M \in M'$ (figura A.2) vale:

$$\Delta F_{v} = \left[\left(-\eta \frac{\partial v_{3}(x_{1},x_{2},t)}{\partial x_{1}} + \eta \frac{\partial v_{3}(x_{1}+\Delta x_{1},x_{2})}{\partial x_{1}} \right) / \Delta x_{1} + \left(-\eta \frac{\partial v_{3}(x_{1},x_{2},t)}{\partial x_{2}} + \eta \frac{\partial v_{3}(x_{1},x_{2}+\Delta x_{2})}{\partial x_{2}} \right) / \Delta x_{2} \right] \Delta x_{1} \Delta x_{2} \Delta x_{3}$$
(A.4)

A força resultante devido a variação da pressão $p = p(x_3)$ é:

$$\Delta F_p = \left(p(x_3) - p(x_3 + \Delta x_3)\right) \Delta x_1 \Delta x_2 = -\left[\frac{p(x_3 + \Delta x_3) - p(x_3)}{\Delta x_3}\right] \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \quad (A.5)$$

A força inercial do elemento volumétrico da figura (A.2) vale:

$$F_I = \dot{v}_3 \rho_f \ \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \tag{A.6}$$

onde ρ_f é a densidade do fluido.

Das equações (A.4), (A.5) e (A.6), aplica-se a equação de Newton e, para $\Delta x_i \rightarrow 0$, obtém-se:



Figura A.2: Forças agindo no elemento diferencial do fluido viscoso

$$\eta \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x_3} = \rho_f \dot{v}_3 \tag{A.7}$$

Escrevendo a equação (A.7) para o problema axissimétrico em torno de x_3 (figura A.3) e considerando que $v_3(x_1, x_2, t) = v_3(x_1, x_2)e^{jwt}$, tem-se que:



Figura A.3: Campo de velocidade do fluido na seção transversal do tubo cilíndrico Reescrevendo a equação (A.8), o problema em questão é apresentado da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial r} - \frac{j w \rho_f}{\eta} v_3 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{1}{\eta}$$
c.c.
$$\begin{cases}
v_3 \to \text{finito} \quad r \to 0 \\
v_3 = 0 \quad r = R
\end{cases}$$
(A.9)

A equação (A.9) é a equação de Bessel de ordem zero. Sua solução geral, satisfazendo a 1^a c.c., é:

$$v_{3}(r) = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x_{3}} \frac{1}{jw\rho_{f}}}_{\text{col} \text{ particular}} + \underbrace{AJ_{0}(l \cdot r)}_{\text{col} \text{ particular}}$$
(A.10)

sol. particular sol. homogênea

onde

$$l = \sqrt{-\frac{jw\rho_f}{\eta}} \tag{A.11}$$

e a função J_0 é a função de Bessel de ordem zero. Da segunda condição de contorno, obtém-se:

$$v_{3}(r = R) = 0 = -\frac{\partial p}{\partial x_{3}} \frac{1}{jw\rho_{f}} + AJ_{0}(lR)$$

$$\downarrow \qquad (A.12)$$

$$A = \frac{1}{J_{0}(lR)} \frac{\partial p}{\partial x_{3}} \frac{1}{jw\rho_{f}}$$

Substituindo a equação (A.12) na equação (A.10), obtém-se a solução da velocidade v_3 do fluido, a qual vale:

$$v_3(r) = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{1}{jw\rho_f} \left[1 - \frac{J_0(lr)}{J_0(lR)} \right]$$
(A.13)

O valor médio de v_3 na seção transversal $x_3 = constante$ pode ser calculado por:

$$\bar{v}_3 = \frac{\int_0^R v_3(r) 2\pi r dr}{\int_0^R 2\pi r dr}$$
(A.14)

Sabendo que J_0 possui a propriedade:

$$\int_{0}^{a} r J_{0}(r) dr = a J_{1}(a) \tag{A.15}$$

a velocidade média na seção transversal do tubo é dada por:

$$\bar{v}_3 = \frac{1}{\pi R^2} 2\pi \left(-\frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} \right) \left[\int_0^R r dr - \frac{1}{J_0(lR)} \int_0^R r J_0(lr) dr \right]$$
(A.16)
Fazendo a substituição u = lr, a solução da última integral é:

$$-\frac{1}{J_0(lR)}\frac{1}{l^2}\int_0^{Rl} uJ_0(u)du = -\frac{R}{l}\frac{J_1(lR)}{J_0(lR)}$$
(A.17)

Substituindo a equação (A.17) na equação (A.16) e escrevendo $lR = \sqrt{-jz}$, onde o termo admensional z vale:

$$z = \sqrt{\frac{w\rho_f R^2}{\eta}} \tag{A.18}$$

encontra-se:

$$\bar{v}_3(w) = -\frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left[1 - \frac{2}{z\sqrt{-j}} \frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})} \right]$$
(A.19)

Finalmente, isolando $\partial p/\partial x_3$ e manipulando algebricamente a equação (A.19), obtém-se a lei de Newton em função da velocidade média \bar{v}_3 , dada por:

$$\underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x_3}}_{-\underbrace{jw\rho_f\bar{v}_3}} = \underbrace{jw\rho_f\bar{v}_3}_{-\underbrace{jw\rho_f\bar{v}_3}} + \underbrace{jw\rho_f\bar{v}_3\frac{2}{z\sqrt{-j}}\frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})}\frac{1}{\left[1-\frac{2}{z\sqrt{-j}}\frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})}\right]}}_{-\underbrace{jw\rho_f\bar{v}_3}}$$

termo elástico

termo inercial

termo viscoso

(A.20)

A.1.2 Placas paralelas



Figura A.4: Configuração do poro "achatado" modelado por duas placas paralelas

O problema ilustrado na figura (A.4) refere-se à propagação de ondas em um fluido contido entre duas placas planas paralelas e infinitas no plano x_1-x_2 , quando estas permanecem estáticas. Dada a geometria do problema, o campo de velocidade do fluido é:

$$\vec{v} = (0, 0, v_3), \qquad v_3 = v_3(x_1, t)$$
 (A.21)

A tensão devido à viscosidade é dada por:

$$\sigma_{31} = \eta \frac{\partial v_3(x_1, t)}{\partial x_1} \tag{A.22}$$

Seguindo os mesmos procedimentos utilizados para a resolução do problema de escoamento viscoso harmônico em tubos cilíndricos, encontra-se que a força de reação viscosa, para o problema aqui considerado, é dada por:

$$\Delta F_v = \eta \frac{\partial^2 v_3(x_1, t)}{\partial x_1^2} \tag{A.23}$$

e a lei de Newton pode ser escrita da forma:

$$\rho_f \frac{\partial v_3}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \eta \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} \tag{A.24}$$

Para uma onda de frequência angular w se propagando na direção x_3 , pode-se escrever $v_3(x_1,t) = v_3(x_1)e^{jwt}$, e o problema a ser resolvido pode ser escrito da forma:

$$\begin{cases} \eta \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} - j w \rho_f v_3 = \frac{\partial p}{\partial x_3} \\ v_3 = 0 \quad \text{em} \quad x_1 = \pm a \end{cases}$$
(A.25)

A solução da equação diferencial (A.25) é dada por:

$$v_3(x_1) = \underbrace{-\frac{1}{jw\rho_f}\frac{\partial p}{\partial x_3}}_{(A.26)} + \underbrace{Ae^{l'x_1} + Be^{-l'x_1}}_{(A.26)}$$

sol. particular sol. homogênea

onde

$$l' = \sqrt{\frac{jw\rho_f}{\eta}} \tag{A.27}$$

Substituindo as condições de contorno na equação (A.26), obtém-se:

$$\begin{cases} v_3(a) = 0 = -\frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} + Ae^{l'a} + Be^{-l'a} \\ v_3(-a) = 0 = -\frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} + Ae^{-l'a} + Be^{l'a} \end{cases}$$
(A.28)

Do sistema (A.28), encontra-se que:

$$A = B = \frac{1}{2} \frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{1}{\cosh(l'a)}$$
(A.29)

Substituindo a equação (A.29) na equação (A.26), obtém-se:

$$v_3 = -\frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left(1 - \frac{\cosh(l'x_1)}{\cosh(l'a)} \right)$$
(A.30)

A velocidade média da seção transversal $x_3 = constante$ é, então, calculada por:

$$\bar{v}_3 = \frac{\int_{-a}^{a} v_3 dx_1}{\int_{-a}^{a} dx_1} \tag{A.31}$$

Sabendo que $\int \cosh(u) du = \sinh(u)$, a equação (A.31) pode ser escrita como:

$$\bar{v}_3 = -\frac{1}{2a} \frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left[\int_{-a}^{a} dx_1 - \frac{1}{\cosh(l'a)} \int_{-a}^{a} \cosh(l'x_1) dx_1 \right]$$
(A.32)

Resolvendo a integral e fazendo a substituição $l'a = z'\sqrt{j}$, onde

$$z' = \sqrt{\frac{w\rho_f a^2}{\eta}} \tag{A.33}$$

obtém-se:

$$\bar{v}_3 = -\frac{1}{jw\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_3} \left[1 - \frac{1}{z'\sqrt{j}} \tanh(z'\sqrt{j}) \right]$$
(A.34)

Finalmente, isolando $\partial p/\partial x_3$ e manipulando algebricamente a equação (A.34), obtém-se a lei de Newton em função da velocidade média \bar{v}_3 , dada por:

$$\underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x_3}}_{=} \underbrace{jw\rho_f \bar{v}_3}_{=} + \underbrace{jw\rho_f \bar{v}_3}_{=} \begin{bmatrix} \frac{\tanh(z'\sqrt{j})}{z'\sqrt{j}} \\ 1 - \frac{\tanh(z'\sqrt{j})}{z'\sqrt{j}} \end{bmatrix}}_{=}$$
(A.35)

termo elástico

termo inercial

termo viscoso

A.2 Escoamento do Fluido em Múltiplos Poros

A.2.1 Poros cilíndricos

Considere um material com poros cilíndricos idênticos, perpendiculares à superfície e uniformemente distribuídos, como ilustrado na figura (A.5). Definindo n como o n^o de poros de raio R por unidade de área da seção transversal, pode-se definir a resistividade de fluxo como:



Figura A.5: Amostra de um material poro-elástico de poros cilíndricos submetido à uma diferença de pressão constante $p_2 - p_1$

O valor da velocidade média de escoamento \bar{v} pode ser avaliado a partir da equação (A.20). Para baixas frequências, a equação (A.20) pode ser escrita da forma [1]:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{4}{3}jw\rho_f\bar{v} + \frac{8\eta}{R^2}\bar{v}$$
(A.37)

Então, para w = 0, o valor de \bar{v} é dado por:

$$\bar{v} = \frac{R^2}{8\eta} \left(-\frac{\partial p}{\partial x} \right) \tag{A.38}$$

e a resistividade de fluxo pode ser reescrita da forma:

$$\sigma = \frac{8\eta}{R^2(n\pi R^2)} \tag{A.39}$$

Reconhecendo que a porosidade é $\phi = n\pi R^2$ e substituindo na equação (A.39), obtém-se:

$$\sigma = \frac{8\eta}{R^2\phi} \tag{A.40}$$

Combinando equações (A.40) e (A.18), pode-se reescrever a variável z em função da resistividade de fluxo:

$$z = \left(\frac{8w\rho_f}{\sigma\phi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.41}$$

Pode-se, então, escrever que:

$$\frac{\rho_f j w}{z} = -\frac{\sigma \phi z (\sqrt{-j})^2}{8} \tag{A.42}$$

e a equação (A.20) pode ser reescrita como:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = jw\rho_f \bar{v} + \bar{v}\phi\sigma G_{tc}(z) \tag{A.43}$$

 ${\rm onde}$

$$G_{tc}(z) = -\frac{z\sqrt{-j}}{4} \frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})} \frac{1}{\left[1 - \frac{2}{z\sqrt{-j}} \frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})}\right]}$$
(A.44)

A.2.2 Poros achatados

Seguindo os mesmos procedimentos utilizados para poros cilíndricos, chega-se aos seguintes resultados:

$$\sigma = \frac{3\eta}{\phi a^2} \tag{A.45}$$

$$z' = \left(\frac{3w\rho_f}{\phi\sigma}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.46}$$

$$\frac{\rho_f w}{z'} = \frac{\sigma \phi z'}{3} \tag{A.47}$$

Dessa forma, a equação (A.35) pode ser reescrita da forma:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = jw\rho_f \bar{v} + \bar{v}\phi\sigma G_{pp}(z') \tag{A.48}$$

onde

$$G_{pp}(z') = \frac{z'\sqrt{j}}{3} \frac{\tanh(z'\sqrt{j})}{\left[1 - \frac{\tanh(z'\sqrt{j})}{z'\sqrt{j}}\right]}$$
(A.49)

A.2.3 Fluxo em poros oblíquos: Tortuosidade

(Allard, 1993) introduz o conceito de o conceito de tortuosidade a partir de um exemplo simples, repetido nesta seção. Este exemplo consiste no problema de fluxo de um fluido num dado material com poros oblíquos à superfície do mesmo, como ilustrado na figura (A.6), onde os eixos perpendiculares às seções transversais dos poros fazem ângulos de $\pm \varphi$ com à normal da superfície.



Figura A.6: Material poro-elástico com poros oblíquos em campo acústico plano normal à sua superfície

Considerando que os poros do material são cilíndricos, a porosidade é dada por:

$$\phi = \frac{n\pi R^2}{\cos(\varphi)} \tag{A.50}$$

onde n é o número de poros por unidade de área de superfície do material e R é o valor dos raios dos poros.

O gradiente de pressão nos poros é dado por:

$$\frac{p_2 - p_1}{L} = (p_2 - p_1) \frac{\cos(\varphi)}{d}$$
(A.51)

Sendo a velocidade média do fluido nos poros cilíndricos oblíquos do material dada por $|\bar{v}_{x_1}| = |\bar{v}_{x_2}| = \bar{v}$, a resistividade de fluxo pode ser escrita como:

$$\sigma = \frac{p_2 - p_1}{n(\bar{\nu}\pi R^2)d} = \frac{8\eta}{n\pi R^4 \cos\varphi} = \frac{8\eta}{\phi R^2 \cos^2(\varphi)}$$
(A.52)

Combinando as equações (A.52) e (A.18), pode-se escrever a variável z da forma:

$$z = \left(\frac{8w\rho_f k_s}{\sigma\phi}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.53}$$

onde

$$k_s = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \tag{A.54}$$

Comparando as equações (A.52), (A.40), (A.53) e (A.41), vê-se que estas diferem somente pela constante k_s , definida como a tortuosidade do material poroso. Concluí-se portanto que, para o exemplo dado, a constante k_s representa o grau de obliquidade dos poros do material. Sendo assim, pode-se associar a tortuosidade, em materiais com uma rede complexa de poros, à uma medida de desorganização, ou desalinhamento, dos poros destes materiais. Vale observar também que $k_s \geq 1$ e que a resistividade de fluxo varia linearmente com o mesmo.

Dadas equações (A.52), (A.53) e, para poros oblíquos, as seguintes relações:

$$\bar{v}_x = \bar{v}_{x_i} \cos(\varphi) \tag{A.55}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\cos(\varphi)} \frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{A.56}$$

pode-se reescrever a lei de Newton (equação A.43) como:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = jw\rho_f \bar{v} \frac{1}{\cos^2(\varphi)} + \bar{v}\phi\sigma G_{tc}(z)$$
(A.57)

Considerando que a força elástica agindo na superfície do material vale $F_e = -\phi \frac{\partial p}{\partial x}$, a equação (A.57) pode ser escrita da forma:

$$-\phi \frac{\partial p}{\partial x} = jw\rho_f \phi k_s \bar{v} + \bar{v}\phi^2 \sigma G_{tc}(z) \tag{A.58}$$

Agora, se a viscosidade do fluido for desconsiderada, tem-se que:

$$-\phi \frac{\partial p}{\partial x} = j w \rho_f \phi k_s \bar{v} \tag{A.59}$$

Vale observar que a equação (A.59) vale para qualquer geometria da seção transversal do material.

Repetindo os cálculos feitos considerando, agora, que os poros possuem formato achatado (placas paralelas), obtém-se a lei de Newton (equação A.43) da forma:

$$-\phi \frac{\partial p}{\partial x} = jw\rho_f \phi k_s \bar{v} + \bar{v} \phi^2 \sigma G_{pp}(z') \tag{A.60}$$

Desconsiderando a viscosidade do fluido, a equação (A.60) pode ser escrita como:

$$-\phi \frac{\partial p}{\partial x} = jw\rho_f \phi k_s \bar{v} \tag{A.61}$$

Vê-se que as equações (A.59) e (A.61) são idênticas. Como já observado anteriormente, tem-se que, desconsiderando a viscosidade, a geometria da seção transversal dos poros da matriz elástica do material não influencia na dinâmica do fluido, somente a tortuosidade.

Apêndice B

Efeitos Térmicos em Poros

Neste capítulo segue o desenvolvimento matemático apresentado por (Allard, 1993) que correlaciona os fenômenos de condução térmica em tubos cilíndricos e placas paralelas com as propriedades do fluido escoando em ambas. Na teoria apresentada aqui, o fluido em questão é o ar considerado como gás ideal.

A equação linearizada que descreve a condução térmica do ar é dada por:

$$k\nabla^2 \tau = \frac{jwT_0}{P_0} \left(\rho_{ar} c_v p - P_0 c_p \mu_a\right) \tag{B.1}$$

e a equação de estado do ar, considerado como gás ideal, é dada por:

$$p = \frac{P_0}{\rho_{ar}T_0} \left(\rho_{ar}\tau + T_0\mu_a\right) \tag{B.2}$$

onde p é a pressão e ρ_{ar} a densidade do ar; as variáveis τ e μ_a são, respectivamente, a temperatura e a densidade acústica do meio; P_0 e T_0 representam a pressão e a temperatura médias do ambiente; c_v e c_p são os calores específicos à volume e pressão constantes, respectivamente, e k, a condutividade térmica.

Eliminando a variável μ_a das equações (B.1) e (B.2) e aplicando a seguinte identidade (válida para gases ideais):

$$\rho_{ar}\left(c_p - c_v\right) = \frac{P_0}{T_0} \tag{B.3}$$

chega-se à equação diferencial da condução de calor no ar dada por:

$$\nabla^2 \tau - \frac{jw\gamma}{\upsilon'} \tau = -\frac{jw}{k}p \tag{B.4}$$

onde $\gamma = c_p/c_v \in \upsilon' = k/\rho_{ar}c_v$.

Considerando o problema em questão como sendo o escoamento do ar em um tubo cilíndrico (seção A.1.1) e que a variação da temperatura acústica (τ) na direção x_3 (fig. A.1) é desprezível em relação à sua variação na direção radial, pode-se escrever a equação (B.4) da forma:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2^2} - \frac{jw\gamma}{\upsilon'}\tau = -\frac{jw}{k}p \tag{B.5}$$

Observa-se que a equação diferencial (B.5) possui a mesma forma da equação (A.7). Definindo a variável $w' = wB^2$, onde $B^2 = \eta \gamma / \rho_{ar} v'$ é o número de Prandtl, pode-se comparar ambas as equações (B.5) e (A.7), dadas, respectivamente, por:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial x_2^2} - \frac{j w' \rho_{ar}}{\eta} \tau = -\frac{j w' v' \rho_{ar}}{k \eta \gamma} p \tag{B.6}$$

е

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} - \frac{jw\rho_{ar}}{\eta}v_3 = \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x_3} \tag{B.7}$$

concluindo-se que:

$$\tau = \frac{pv'}{k\gamma}\psi\left(x_1, x_2, B^2w\right) \tag{B.8}$$

е

$$v_3 = -\frac{1}{jw\rho_{ar}}\frac{\partial p}{\partial x_3}\psi\left(x_1, x_2, w\right) \tag{B.9}$$

A função $\psi(x_1, x_2, w)$ das equações (B.8) e (B.9) é a solução do problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} - \frac{j w \rho_{ar}}{\eta} \psi = -\frac{1}{\eta} \psi \\ x_1^2 + x_2^2 = R^2 \to \psi = 0 \end{cases}$$
(B.10)

Da equação (A.19), é possível escrever a lei de Newton da seguinte forma:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = jw\tilde{\rho} \langle v_3 \rangle \tag{B.11}$$

onde $\langle v_3 \rangle$ representa o valor médio da velocidade do fluido na seção transversal do tubo. A variável $\tilde{\rho}$ que multiplica o termo inercial da equação (B.11) é denominada de densidade efetiva e inclui os efeitos das forças viscosas agindo no fluido. Da equação (A.19), esta vale:

$$\tilde{\rho} = \rho_{ar} \left/ \left[1 - \frac{2}{z\sqrt{-j}} \frac{J_1(z\sqrt{-j})}{J_0(z\sqrt{-j})} \right] \right.$$
(B.12)

ou, das equações (B.9) e (B.11),

$$\tilde{\rho} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} \frac{1}{jw \langle v_3 \rangle} = \frac{\rho_{ar}}{\langle \psi (x_1, x_2, w) \rangle}$$
(B.13)

Paralelamente, pode-se definir a função, na frequência, do módulo volumétrico do ar, como:

$$\tilde{K} = -\frac{p}{\langle \xi \rangle} \tag{B.14}$$

onde $\langle \xi \rangle$ representa o valor médio da dilatação do ar na seção transversal do tubo. Sabendo, da definição da densidade acústica linearizada [17], que $\mu_a = -\xi \rho_{ar}$ e, da equação (B.2), que:

$$\langle \mu_a \rangle = \frac{\rho_{ar}}{P_0} p - \frac{\rho_{ar}}{T_0} \langle \tau \rangle \tag{B.15}$$

a expressão para o módulo volumétrico \tilde{K} pode ser reescrita da forma:

$$\tilde{K} = \frac{P_0}{1 - \frac{P_0 v'}{T_0 k \gamma} \left\langle \psi \left(x_1, x_2, B^2 w \right) \right\rangle} \tag{B.16}$$

Por fim, usando as definições de γ e υ' , a equação (B.3) e a notação:

$$\langle \psi (x_1, x_2, w) \rangle = F(w)$$

$$\langle \psi (x_1, x_2, b^2 w) \rangle = F(B^2 w)$$
(B.17)

o valor do módulo volumétrico \tilde{K} em função da frequência é dado por:

$$\tilde{K} = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) F(B^2 w)} \tag{B.18}$$

е

$$F\left(B^{2}w\right) = \left[1 - \frac{2}{Bz\sqrt{-j}}\frac{J_{1}\left(Bz\sqrt{-j}\right)}{J_{0}\left(Bz\sqrt{-j}\right)}\right]$$
(B.19)

O mesmo procedimento pode ser seguido para obter-se a solução do problema de condução de calor do ar escoando em placas planas é considerado. Para tal problema, o módulo volumétrico é dado pela equação (B.18), quando a função $F(B^2w)$ vale:

$$F\left(B^{2}w\right) = \left[1 - \frac{2}{Bz'\sqrt{j}}\frac{\tanh\left(Bz'\sqrt{j}\right)}{Bz'\sqrt{j}}\right]$$
(B.20)

Se for considerado o escoamento em múltiplos poros oblíquos – seguindo os procedimentos das seções (A.2) – a função $F(B^2w)$, presente nas equações (B.20) e (B.19), toma a forma:

$$F(w) = \left[1 + \frac{\sigma'\phi}{jb^2w\rho_{ar}k_s}G(z)\right]^{-1}$$
(B.21)

onde σ' é a resistividade térmica, k_s é a tortuosidade definida pela equação (A.54) e o fator de forma G(z) é definido na seção (4.1.3).

Apêndice C

Tortuosidade Dinâmica e Comprimentos Característicos Viscoso e Térmico

Nesta seção será introduzido brevemente os conceitos de tortuosidade dinâmica, comprimentos característicos viscoso e térmico definidos por (Allard, 1993) e (Johnson *et al*, 1987).

C.1 Tortuosidade dinâmica

Antes de tudo, faz-se referência às equações (A.58), (A.60), (A.53) e (A.54), apresentadas na seção (A.2), para obter-se a lei de Newton na forma:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} = jw\tilde{\rho}\bar{v}_3 \tag{C.1}$$

onde a densidade efetiva dinâmica é definida por:

$$\tilde{\rho} = k_s \rho_f F(w)^{-1} \tag{C.2}$$

para

$$F(w) = \left[1 + \frac{\sigma\phi}{jw\rho_{ar}k_s}G(z)\right] \tag{C.3}$$

A função, ou fator de forma, G(z) que aparece na equação (C.3) pode ser substituída tanto pela função $G_{tc}(z)$ quanto por $G_{pp}(z')$. Usando os resultados da seção (4.1.3), o fator de forma pode ser definido para uma geometria qualquer dos poros do material dado que $G(z) = G_{tc}(z)$ e $z = c (8w\rho_{ar}k_s/\sigma\phi)$.

(Jonhson *et al*, 1987) introduz o conceito de tortuosidade dinâmica $\tilde{\alpha}(w)$, o qual relaciona linearmente a densidade efetiva e a densidade do fluido da forma:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\alpha}\rho_f \tag{C.4}$$

Comparando as equações (C.2) e (C.4), conclui-se que:

$$\tilde{\alpha} = k_s \left(1 + \frac{\sigma \phi}{j w \rho_f k_s} G(z) \right) \tag{C.5}$$

(Allard, 1993) mostra que a função $\tilde{\alpha}(w)$, quando $w \to \infty$, produz a identidade:

$$\tilde{\alpha}(w \to \infty) = \alpha_{\infty} = k_s \tag{C.6}$$

Vê-se, então, que α_{∞} depende somente da geometria da matriz elástica e é idêntico ao parâmetro de tortuosidade (k_s) definido por (Allard, 1993).

C.2 Comprimento característico viscoso

Considere o poro representado na figura (C.1) onde β é a menor distância entre o ponto M e a parede do poro. Considere também que a largura da película viscosa, dada por $\delta_v = (2\eta/\rho_f w)^{\frac{1}{2}}$, possui dimensões muito inferiores à do poro para altas frequências. Para este problema, a velocidade microscópica do fluido no ponto M é dada por:

$$v_m(r) = v_i(r_w) \left[1 - e^{-j\beta q} \right] \tag{C.7}$$

onde $v_i(r_w)$ representa a velocidade na parede do poro ($\beta = 0$) quando desconsiderada a viscosidade e $q = (-j+1)/\delta$ [1].

Dado o campo de velocidade v_i , defini-se o comprimento característico viscoso Λ como:

$$\Lambda = 2 \frac{\int_V v_i^2(r) dV}{\int_A v_i^2(r_w) dA}$$
(C.8)



Figura C.1: Região da camada limite térmica de um poro [27]

onde $v_i(r)$ é a velocidade dentro do poro quando desconsiderado os efeitos viscosos [14].

Observa-se que Λ depende somente da geometria do poro e possui unidade de comprimento. O comprimento característico viscoso, por sua definição, reflete o efeito do cisalhamento que o fluido sofre ao passar pelo poro [27].

C.3 Comprimento característico Térmico

(Allard, 1993) mostra que para altas frequências, dado o poro representado pela figura (C.1), o valor macroscópico da temperatura acústica τ é dado por:

$$\langle \tau \rangle = \frac{\upsilon' p}{k\gamma} \left[1 - (1-j) \frac{\delta_{\upsilon}}{B\Lambda'} \right]$$
 (C.9)

Nesta equação, Λ' é definido por:

$$\Lambda' = 2 \frac{V_{poro}}{A_{poro}} \tag{C.10}$$

onde V_{poro} e A_{poro} são, respectivamente, o volume e a área da superfície do poro em contato com o ar. O parâmetro Λ' é denominado comprimento característico térmico e, assim como Λ , depende somente da geometria do poro e possui unidade de comprimento.

(Allard, 1993) mostra também que para altas frequências, o módulo volumétrico do ar dentro do poro da figura (C.1) pode ser escrito como:

$$\tilde{K} = \frac{\gamma P_0}{\gamma - (\gamma - 1) \left[1 - (1 - j)\frac{\delta_v}{B\Lambda'}\right]} \tag{C.11}$$

Para ambas as constantes $\Lambda \in \Lambda'$, existem técnicas de medição experimental que permitem suas avaliações para materiais poro-elásticos variados.

C.4 Função G(z) avaliada por (Jonhson *et al*, 1987)

Na seção 4.1.3 foi comentado que as funções $G_{tc}(z) \in G_{pp}(z')$ são similares quando:

$$z = c \left(8w\rho_f \alpha_\infty / \sigma \phi \right)^{1/2} \tag{C.12}$$

de forma que é possível descrever o comportamento viscoso de vários materiais porosos a partir de uma única função G(z) – que pode ser tanto $G_{tc}(z)$ como $G_{pp}(z')$ – desde que as constantes $c, \alpha_{\infty}, \sigma \in \phi$ sejam avaliadas corretamente para cada material.

(Jonhson et al, 1987) introduz uma nova função:

$$G_j(w) = \left(1 + \frac{4j\alpha_\infty^2 \eta \rho_f w}{\sigma^2 \Lambda^2 \phi^2}\right) \tag{C.13}$$

e argumenta que esta é equivalente à função G(z) apresentada anteriormente.

De fato, (Allard, 1993) mostra que quando σ , $\phi \in \alpha_{\infty}$ são idênticas em ambas as funções $G_j(w) \in G(z)$, e quando:

$$\Lambda = \frac{1}{c} \left(\frac{8\eta \alpha_{\infty}}{\sigma \phi} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{C.14}$$

G(z) e $G_j(w)$ produzem resultados similares, e a diferença final no cálculo da impedância e do n^o de onda usando ambas as funções pode ser desprezada. Dado então que o cálculo da função $G_j(w)$ é mais simples de ser realizado que o cálculo da função G(z), é preferível o uso da primeira para os cálculos de \tilde{b} e \tilde{K} apresentados na seção 4.1.3 e apêndice B.

Apêndice D

Análise de Convergência

Faz-se, nesta seção, a análise de convergência do programa desenvolvido para o cálculo da absorção e outras propriedades de materiais poro-elásticos bidimensionais. Analisam-se dois casos: a absorção de um material poro-elástico homogêneo e a absorção de uma célula contendo dois materiais poro-elásticos distintos. As configurações de ambos os casos estão ilustradas nas figuras (D.1) e (D.3). As curvas de absorção de cada modelo simulado são comparadas e os tempos de simulação e erros relativos são computados. O cálculo do erro relativo é dado por:

$$\Delta \alpha_{mod} = \max\left(\frac{|\alpha_{mod} - \alpha_{ref}|}{\alpha_{ref}}\right) \times 100\% \tag{D.1}$$

sendo α_{mod} a absorção do modelo para o qual calcula-se o erro relativo, e α_{ref} a absorção do modelo mais refinado simulado.

D.1 Problema 1D

Para a análise da convergência do problema 1D (Figura D.1), foram simulados modelos contendo 5, 10, 20 e 40 elementos na direção de propagação da onda no meio poroso e 2 elementos na direção normal à propagação da onda. As absorções acústicas desses modelos foram calculadas para a faixa de frequência de 0 a 3000 Hz, em intervalos de 10 Hz (300 pontos). As curvas de absorção obtidas estão ilustradas na figura (D.2); os tempos de simulação

e os erros máximos das curvas de absorção dos modelos com 5, 10 e 20 elementos, em relação ao modelo com 40 elementos, estão expostos na tabela (D.1).

Da figura (D.2) vê-se que as curvas de absorção de todos os modelos simulados apresentamse bem próximas. A curva de absorção do modelo com 5 elementos distancia-se, nas frequências mais altas, das curvas de absorção dos modelos mais refinados, mas mantém forma semelhante. Da tabela (D.1) observa-se que o erro máximo relativo do modelo com 20 elementos é ínfimo e concluí-se o refinamento subsequente da malha não é necessário para o prolema em questão.



Figura D.1: Modelo para o cálculo da absorção de um material poro-elástico homogêneo: Problema 1D

N	5	10	20	40
Erro	4,7%	1,2%	$0,\!2\%$	0%
Tempo	10,5s	19,5s	31,7s	54,0s

Tabela D.1: Erros relativos e tempos de simulação do problema 1D



Figura D.2: Curvas de absorção do Problema 1D para N=5, 10, 20 e 40 elementos

D.2 Problema 2D

Para a análise de convergência do problema 2D (Figura D.3), simularam-se modelos nos quais o meio poroso foi discretizado em N por N elementos, para valores de N iguais à 4, 8, 12, 16, 20 e 24. O cálculo da absorção acústica de cada modelo foi realizado dentro do faixa de 0 a 3000 Hz, em intervalos de 20 Hz (150 pontos). As curvas de absorção obtidas estão ilustradas na figura (D.4); os tempos de simulação e os erros máximos das curvas de absorção dos modelos com 4, 8, 12, 16 e 20×20 elementos, em relação ao modelo com 24×24 elementos, estão expostos na tabela (D.2).

Da figura (D.3) vê-se que somente a curva de absorção do modelo com 4×4 elementos diverge da curva do modelo mais refinado com 24×24 elementos, para frequências a partir de 500 Hz; os demais modelos possuem curvas de absorção próximas, apresentando, no entanto, um certo desvio para frequências próximas à 1000 Hz – região onde verifica-se os maiores valores de erros relativos. Da tabela (D.2) observa-se que o erro relativo cai bruscamente quando se refina o meio poroso em até 12×12 elementos, e depois mantém-se próximo a 2,5%. Da mesma tabela, vê-se que o tempo de simulação do modelo com N = 16 é quase o dobro do tempo necessário para a simulação do modelo com N = 12 elementos. Concluí-se, portanto, que a malha com N = 12 elementos produz, para o caso estudado, resultados razoavelmente próximos do modelo mais refinado com N = 24 e, tendo em vista que deve-se simular estruturas porosas compostas por várias células discretizadas em $N \times N$ elementos, e que o modelo com N = 12 produz, para o caso estudado, resultados razoavelmente próximos ao modelo com N = 24, concluí-se que a malha com 12×12 elementos apresenta a melhor relação custo-benefício para os casos estudados na seção (6.3.2).



Figura D.3: Modelo para o cálculo da absorção de uma célula contendo 2 materiais poroelásticos distintos: Problema 2D



Figura D.4: Curvas de absorção do Problema 2D para N=4, 8, 12, 16, 20 e 24 elementos

N	4	8	12	16	20	24
Erro	22,7%	10,5%	$3{,}5\%$	$2,\!5\%$	$2,\!6\%$	0%
Tempo	6,7s	14,5s	30,3s	58,9s	102,7s	$166,\!6s$

Tabela D.2: Erros relativos e tempos de simulação do problema 1D