UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Bruno Sávio Boghossian dos Santos

ANÁLISE DINÂMICA DE TRANSMISSÕES POR CORREIA SERPENTINA E AUTOTENSIONADOR

Campinas - 2010

90/2010

Bruno Sávio Boghossian dos Santos

ANÁLISE DINÂMICA DE TRANSMISSÕES POR CORREIA SERPENTINA E AUTOTENSIONADOR

Dissertação Apresentada ao Curso de Mestrado da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Mecânica dos Sólidos e Proejtos Mecâncos

Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

Campinas – SP

2010

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Sa59a	Santos, Bruno Sávio Boghossian dos Análise dinâmica de transmissões por correia serpentina e autotensionador / Bruno Sávio Boghossian dos Santos. --Campinas, SP: [s.n.], 2010. Orientador: Robson Pederiva. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Vibração. 2. Correias e transmissão por correias. I. Pederiva, Robson. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Dynamic analisys of serpentine belt drivers and tensioner

Palavras-chave em Inglês: Vibration, Belts and belting

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Rodrigo Nicoleti

Data da defesa: 26/07/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETOS MECÂNICOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

ANÁLISE DINÂMICA DE TRANSMISSÕES POR CORREIA SERPENTINA E AUTOTENSIONADOR

Autor: Bruno Sávio Boghossian dos Santos
Orientador: Prof. Dr. Robson Pederiva

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Robson Pederiva (orientador)
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Katia Lucchesi Cavalca

Prof(a). Dr(a). Katia Lucchesi Cavalca Dedini
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP

Rodrigo Nicoletti

Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti
Universidade de São Paulo – USP - São Carlos

Campinas, 26 de julho de 2010

Agradecimentos

A Deus que me criou para o louvor de sua glória. A Jesus Cristo por ter me dado a sua vida para que eu pudesse viver.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Robson Pederiva, pela paciência e constante dedicação e incentivo em todos os momentos. Meu reconhecimento e gratidão por todos os momentos dispensados a mim nos caminhos do conhecimento para a realização deste trabalho.

Aos meus pais Manoel e Mirtes, pela base que me levou a conclusão de mais uma etapa em minha vida.

A minha namorada Talita, por ser minha maior incentivadora durante toda essa jornada e por pacientemente ter renunciado em muitos momentos a minha presença.

Enfim, a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, minha eterna gratidão.

Resumo

O acoplamento entre os movimentos de rotação do braço do tensionador e os movimentos transversais dos tramos de correia adjacentes à polia do tensionador é investigado neste trabalho. As equações de movimento de um sistema composto por três polias, correia serpentina e um autotensionador são derivadas a partir do Princípio de Hamilton. Estas equações formam a base para as análises do equilíbrio e vibração linear.

Dois métodos são descritos para a solução das equações do equilíbrio. A solução numérica converte rapidamente e fornece a base para a análise da vibração linear. A solução linear aproximada fornece uma indicação da efetividade do design do tensionador, ou seja, sua capacidade de manter a tensão de tração constante, medida a partir da constante de suporte desenvolvida nesta análise.

Uma solução de forma fechada baseada no método de Holzer é proposta para analisar as vibrações livres. Dois loops de iteração são utilizados na solução. Um loop interno para a estrutura cíclica e um loop externo para o tensionador.

A principal conclusão deste estudo é que um acoplamento linear existe entre os movimentos de rotação do braço do tensionador e os movimentos transversais dos tramos de correia adjacentes à polia do tensionador e produzem respostas dinâmicas diferentes de quando o mesmo é desconsiderado.

Um aplicativo para a implementação do modelo foi desenvolvido em Visual Basic

Palavras-chave: Correias – Serpentina – Autotensionador – Vibrações

Abstract

The coupling between the tensioner rotational movement and the transverse movement of the belt spans adjacent to the tensioner pulley is investigated in this study. Hamilton's Principle is used to derive the governing equations of motion which provide the basis for the equilibrium and linear vibration analysis.

Two methods are described for solving the equations of equilibrium. The exact, nonlinear, iterative solution converges quickly, and provides the basis for the linear vibration analysis. The approximated solution provides an indication of the system design effectiveness by the tensioner support constant derived in the study.

A closed form solution based on the Holzer's method is proposed for solving the linear vibration analysis problem. Two iterations loops are used in the solution. An internal loop for the cyclic structure and an external loop for the tensioner arm.

A major conclusion of this study is that linear coupling exists between rotational and transverse vibrations, and often produces different dynamic response than that predicted by ignoring coupling.

A software was developed in Visual Basic to implement the model.

Key words: Belts – Serpentine – Tensioner – Vibration

Lista de Ilustrações

Lista de Tabelas

Nomenclatura

Letras Latinas

$\boldsymbol{A}$ - Área transversal da correia

$\boldsymbol{E}$- Módulo de Yong

$\boldsymbol{EA}$ - Rigidez longitudinal da correia

$\boldsymbol{F_a}$ - Força de atrito

$\boldsymbol{F_{dn}}$ - Força dinâmica do tramo n

$\boldsymbol{FC}$ - Força Centrífuga

$\boldsymbol{J_n}$ - Momento de Inércia da polia n

$\boldsymbol{k_n}$ - Coeficiente de elasticidade do tramo n

$\boldsymbol{k_g}$ - Rigidez do braço do tensionador devido às mudanças geométricas

$\boldsymbol{k_{gr}}$ - Porção de k_g

$\boldsymbol{k_r}$ - Rigidez rotacional da mola do tensionador

$\boldsymbol{k_s}$ - Rigidez do braço do tensionador devido à mola do tensionador

$\boldsymbol{k_b}$ **-** Rigidez do braço do tensionador devido ao estiramento da correia

$\boldsymbol{l_n}$ – Comprimento do tramo de correia n

$\boldsymbol{L}$ – Comprimento total da correia

$\boldsymbol{l_{1b}, l_{12},, l_{2b}, l_{22}}$ ...- Comprimentos auxiliares

$\boldsymbol{M}$ - Massa da correia

$\boldsymbol{m}$ - Massa da correia por unidade de comprimento

$\boldsymbol{N}$ - Força normal

$\boldsymbol{r_n}$ - Raio da polia n

$\boldsymbol{T}$ – Energia cinética

$\boldsymbol{T_c}$ - Tensão centrifuga da correia

$\boldsymbol{T_{dn}(t)}$ - Tensão dinâmica da correia do tramo n

$\boldsymbol{T_{on}}$ - Tensão operacional da correia no equilíbrio do tramo n

$\boldsymbol{T_r}$ - Tensão da correia na referência (velocidade zero e sem carga)

$\boldsymbol{T_{tn}}$ – Tensão de tração do tramo n

$\boldsymbol{U}$ – Energia potencial

$\boldsymbol{u_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ - Deslocamento longitudinal do tramo n

$\boldsymbol{u_{n,t}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ –Derivada temporal de $\boldsymbol{u_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$

$\boldsymbol{u_{n,x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$**-** Derivada espacial de $\boldsymbol{u_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$

$\boldsymbol{v}$ - velocidade axial da correia

$\boldsymbol{v_n}$ - velocidade de propagação das ondas transversais do tramo n relativo à correia

$\boldsymbol{v'_{an}}$ - velocidade de propagação de fase do tramo n

$\boldsymbol{v'_n}$ - velocidade média efetiva da onda do tramo n

$\boldsymbol{x_s}$ – Deslocamento do centro da polia do tensionador na direção do movimento do braço do tensionador

$\boldsymbol{W}$ – Trabalho externo

$\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ - Deslocamento transversal do tramo n

$\boldsymbol{w_{n,t}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ –Derivada temporal de $\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$

$\boldsymbol{w_{n,x}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$**-** Derivada espacial de $\boldsymbol{w_n}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$

Letras Gregas

$\boldsymbol{\alpha_1}$ **,** $\boldsymbol{\alpha_2}$ - Ângulos auxiliares, formado entre o braço do tensionador e os tramos 1 e 2

$\boldsymbol{\delta_1, \delta_2, \delta_3}$ **-** Deslocamento da polia em relação à referencia

$\boldsymbol{\epsilon_1}$ - Deformação dinâmica do tramo de correia pelo seu comprimento inicial

$\boldsymbol{\epsilon_o}$ - Deformação estática do tramo de correia pelo seu comprimento inicial

$\boldsymbol{\epsilon_x}$ - Razão da deformação total do tramo de correia pelo seu comprimento inicial

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \epsilon_1$$

$\boldsymbol{\theta_{3r}}$ - Deformação inicial da mola do braço do tensionador

$\boldsymbol{\theta_n}$ - Deslocamento rotacional da polia n

$\boldsymbol{\xi_i}$ - $\frac{d(\cos\psi_n)}{dx_s}$

$\boldsymbol{\sigma_n}$ - Coordenada angular da polia n

$\boldsymbol{\chi_n}$ - Deslocamento ao longo do arco da polia n

$\boldsymbol{\psi_1}$, $\boldsymbol{\psi_2}$ - Ângulos de alinhamento, formados entre a reta perpendicular ao braço do tensionador e os tramos da correia 1 e 2 respectivamente

$\boldsymbol{\phi_n}$- Ângulo de abraçamento da correia na polia n

$\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\kappa}$ - Constantes de suporte

$\boldsymbol{\mu}$ - coeficiente de atrito

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Correias serpentina são aquelas que possuem uma razão entre espessura e largura muito pequena. No mercado são conhecidas por poly-v, micro v, estriada ou outro nome e são utilizadas para o acionamento de vários acessórios automotivos ao mesmo tempo, tais como, alternador, direção hidráulica, bomba de água e ar condicionado. Foi inventada por Jim Vance da companhia Gates e foi utilizada pela primeira vez em 1979 no Ford Mustang. Como estas correias possuem um comprimento maior que o convencional, um tensionador é adicionado para manter uma tensão adequada. A figura 1.1 mostra um exemplo de um acionamento com correia serpentina.

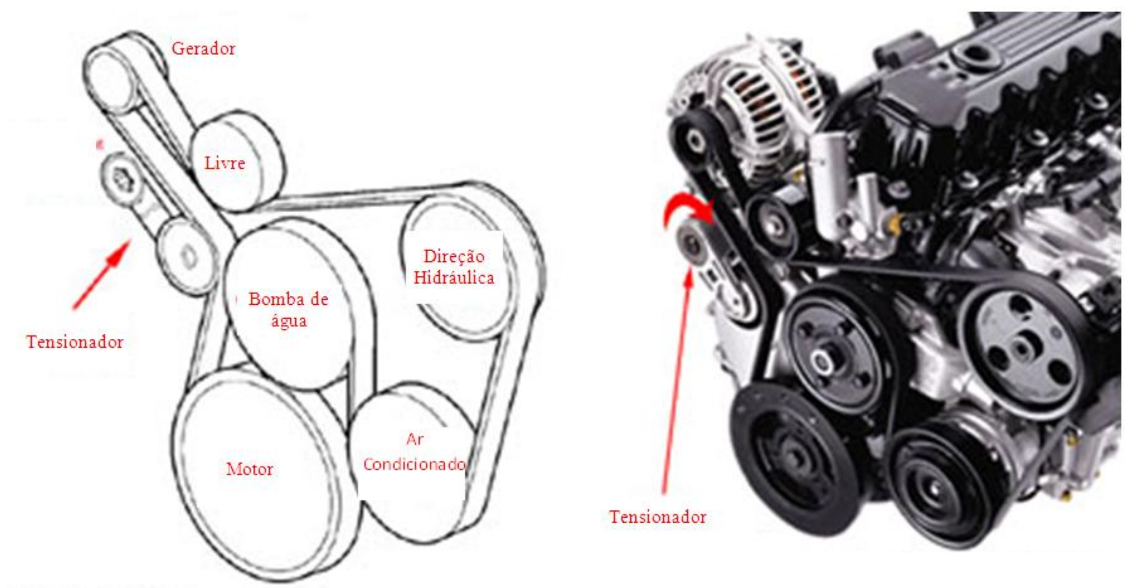


Figura 1.1 – Acionamento por correia serpentina
(fonte:www.wjjeeps.com/serpentine.htm)

Até sua invenção, os acessórios automotivos eram quase que exclusivamente acionados por diversas correias V (figura 1.2) devido ao seu baixo custo e ruído se comparada a outros sistemas de acionamento. Entretanto, a maioria dos fabricantes recomenda sua substituição a cada 40.000 km aproximadamente e é difícil manter uma tensão constante apropriada ao longo de sua vida útil.

A introdução da correia serpentina aumentou consideravelmente a confiabilidade e reduziram os requerimentos de manutenção em relação às correias V. A melhora de desempenho resulta de um stress mais baixo e maior dissipação de calor. Também diminuiu os problemas de ruído e vibrações nos acessórios.

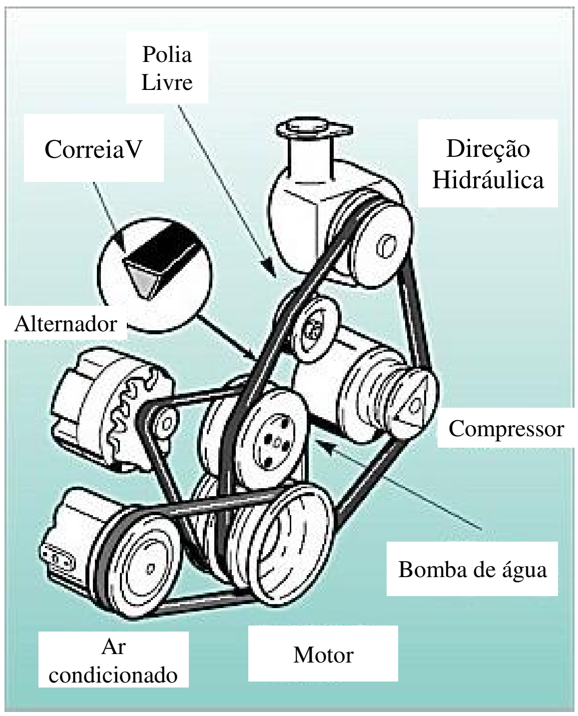


Figura 1-2. Acionamento por correias V (fonte: www.mistematic.co.uk/aircon/systems.htm)

Todavia, um projeto e disposição dos acessórios inadequados podem causar o aparecimento de vibração e ruídos indesejáveis. A vibração e ruídos de sistemas acionados por serpentina afetam a percepção dos passageiros quanto ao conforto, qualidade e a confiabilidade do sistema. A vibração dos acessórios pode transmitir vibração e ruídos excessivos a outras estruturas do veículo e aos passageiros e pode causar fadiga e falha de componentes do sistema. Portanto, conhecer o comportamento dinâmico do sistema antes de sua produção é de grande interesse, pois grandes mudanças de layout dos acessórios são necessárias para uma mudança significativa nos modos de vibração.

Dois tipos de vibração ocorrem em sistemas acionados por correias e polias fixas. A vibração rotacional das polias em torno de seus eixos e a vibração transversal dos tramos de correia. A vibração rotacional produz uma deformação longitudinal na correia. Desta forma a correia age como uma mola longitudinal (Figura 1.3). A vibração transversal é a vibração dos tramos da correia no sentido transversal ao do movimento e agem como uma corda ou uma viga (Figura 1.4)

Figura 1.3 – Vibração Rotacional

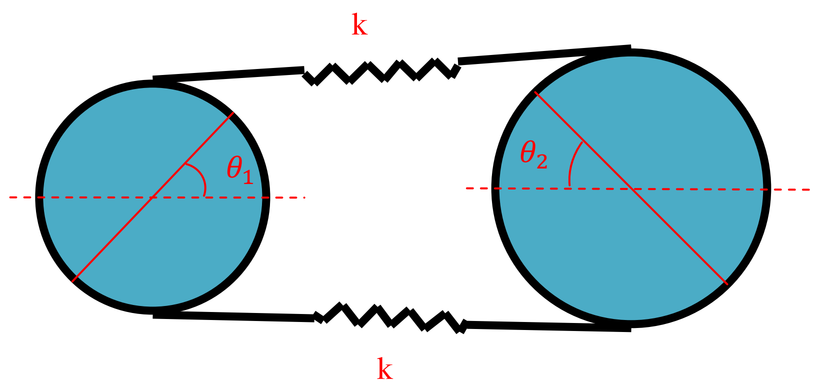


Figura 1.3 – Vibração Rotacional

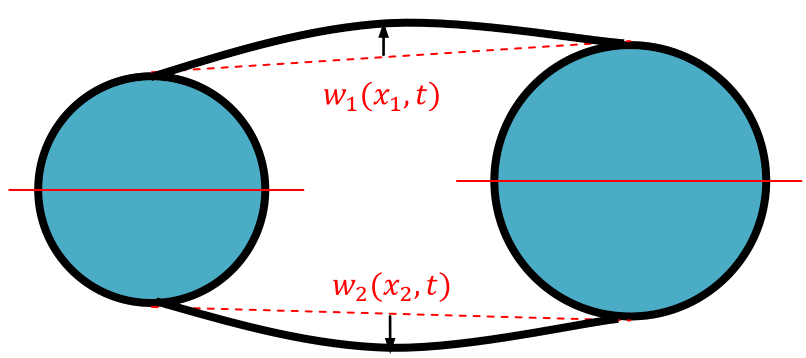


Figura 1.4 – Vibração Transversal

Ambos os tipos de vibração podem ser excitados por momentos aplicados às polias dos acessórios ou motor, excentricidades ou irregularidade das polias, propriedades das correias e movimento dos suportes das polias.

A vibração rotacional induz variações na tensão na correia que promovem fadiga nas correias e mancais, induzem forças de reação nos mancais produzindo ruídos e podem causar escorregamento das polias.

A vibração transversal também induz variações de tensão na correia com as mesmas consequências da vibração rotacional, com o adicional de produzir ruído diretamente.

Uma das características dos sistemas acionados por correia serpentina é a utilização de um tensionador de mola (figura 1.5) que melhora consideravelmente o desempenho dinâmico compensando automaticamente as variações de tensões conforme as condições de operação se alteram. O movimento do braço do tensionador leva à mudanças na geometria do sistema que afetam as características dinâmicas do mesmo. Existe um acoplamento linear entre o movimento rotacional das polias e tensionador e o movimento transversal dos tramos da correia adjacentes ao tensionador. A investigação deste acoplamento é um dos principais objetivos deste estudo.

Figura 1.5 Tensionador de mola (fonte: www.gatesbrasil.com.br/catalogo/automotivo/tensionadores)

Este estudo apresenta as equações de movimento não linear utilizando o princípio de Hamilton. As equações incluem o acoplamento entre o movimento do braço do tensionador e o movimento transversal dos tramos adjacentes.

Para a solução do equilíbrio são apresentados dois métodos para o cálculo das tensões de operação e a posição do braço do tensionador baseado na posição de repouso. O método numérico (exato) encontra o estado de equilíbrio pela iteração das equações do equilíbrio. O método aproximado é uma solução de forma fechada baseado na linearização das equações de equilíbrio. Este método define uma constante de suporte baseada na constante introduzida por Mote (MOTE, 1965-a) em seu estudo sobre serras de fita. A constante de suporte indica a capacidade do sistema de manter uma tensão de tração constante durante a operação e a estabilidade do sistema na posição de repouso.

As equações lineares de movimento acoplam os movimentos angulares das polias e braço do tensionador com os movimentos transversais dos tramos adjacentes ao tensionador. Uma solução de forma fechada é desenvolvida utilizando o método de Holzer para encontrar as frequências naturais do sistema.

Um software foi desenvolvido para implementar o modelo apresentado e os resultados comparados com outros resultados disponíveis na literatura.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Correias fazem parte de uma classe de sistemas mecânicos chamados de materiais com movimento axial (KOIVURA, 1998). Outros sistemas desta classe incluem: mantas de papel em máquinas de papel ou impressoras, enrolamento e desenrolamento de fibras têxteis, fitas magnéticas, transmissões por correntes, serras de fita, fluídos em tubos, etc. Apesar da alta velocidade de transporte ser uma característica, vibrações nestes sistemas são normalmente indesejáveis. Movimentos transversais em serras de fita produzem um corte de pouca qualidade e aumenta a quantidade de resíduos. Em gravações com fitas magnéticas a vibração longitudinal da fita em relação ao cabeçote acelera o desgaste e produz modulações nas gravações.

A vibração transversal de uma corda com movimento uniforme ao longo de seu comprimento foi estudado por Archilbald e Emslie (1958). As equações de movimento foram obtidas tanto pela aplicação do Princípio de Hamilton quanto pelo método Newtoniano e os efeitos da velocidade axial no espectro de vibração avaliado.

O comportamento de ondas estacionárias transversais de uma corda em movimento com uma das extremidades tendo oscilação harmônica foi investigada por Sack (1954). Foram investigadas a velocidade de propagação efetiva e a velocidade de propagação da fase da onda. Neste estudo também foi abordado o impacto do amortecimento do meio.

Swope and Ames (1963) investigaram a oscilação de uma corda enquanto esta é enrolada em uma bobina. Um problema de grande interesse para a indústria têxtil. O método de D'Alembert é utilizado para o caso de uma corda de comprimento infinito e para o caso de comprimento finito.

Nos estudos acima a rigidez à flexão é considerada pequena de forma a considerar o material uma corda. Entretanto, para alguns materiais a rigidez de flexão é importante na modelagem e o sistema deve ser modelado como uma viga. Serge Abrate (1992) apresenta um parâmetro baseado na rigidez à flexão, tensão inicial e comprimento do material para avaliar qual modelo é o mais adequado.

Mote (1965-a) estudou a dinâmica de serras de fita. Ele analisou a dependência da tensão e frequencia com a velocidade axial e a rigidez da fixação das polias. Desenvolveu uma constante adimensional, η, que mede a efetividade do sistema em manter a tensão de tração constante; $\eta = 1$ corresponde a uma melhor capacidade de se manter a tensão de tração e $\eta = 0$ corresponde ao oposto. Beickmann desenvolveu uma constante de suporte para sistemas acionados por correia tipo serpentina e tensionador.

Mote e Wu (1985) e Wang e Mote (1986) estudaram o acoplamento linear entre a vibração rotacional e a vibração transversal em torno do equilíbrio em um sistema de duas polias e fita de corte. Suas análises mostraram que um erro significante no espectro de vibrações ocorre se este acoplamento é negligenciado.

Ulsoy *et al* (1985) descreveu os mecanismos de instabilidade para um sistema com duas polias e um tensionador dinâmico. Variações de tensão na correia ocorrem devido a flutuações de torque nas polias. Essas variações parametricamente excitam a vibração transversal da correia ocasionando instabilidade do tipo Mathieu.

Beikemann (1992) conduziu uma análise teórica e experimental de um sistema acionado por uma correia tipo serpentina e um tensionador dinâmico. Seu estudo mostra a existência de um acoplamento linear entre as vibrações rotacionais e transversais nos tramos da correia adjacentes ao tensionador. Faz também uma análise não linear demonstrando que a frequência natural de um modo de vibração rotacional pode parametricamente excitar um modo de vibração transversalmente dominante.

Moon e Wickert (1996) investigaram a vibração não linear de um sistema de transmissões por correia contendo polias excêntricas. Experimentos demonstraram o papel da não linearidade na vibração da correia, em particular nas regiões próximas à ressonância e a altas velocidades.

Kim e Lee (1998) desenvolveram um modelo matemático para a análise da vibração não linear livre e forçada de um sistema com duas polias e correias considerando a rigidez dos mancais das polias. A condição de contorno em uma dimensão de Mote e Wu (1985) e Wang e Mote (1986) foi expandida para duas dimensões.

Zhang e Zu (1998) utilizou o mesmo protótipo apresentado por Beikmann (1992) para estudar a vibração linear e não linear de sistemas de transmissão por correia serpentina. Ao invés de utilizar o método proposto por Beikmann para a obtenção das freqüências naturais foi obtida uma equação característica que fornece conclusões sobre o efeito dos parâmetros de projeto.

Suweken e Horssen (2003-a)(2003-b) elaboraram dois modelos para descrever a vibração transversal em correias transportadoras com velocidade variando harmonicamente. No primeiro modelo (2003-a) a correia foi considerada como uma corda e no segundo (2003-b) como uma viga. Verificaram um comportamento dinâmico complicado quando o a freqüência de oscilação da velocidade da correia é a soma ou diferença de qualquer duas freqüências naturais do sistema com velocidade zero.

Sendo este o primeiro trabalho nesta linha de pesquisa, realizado pelo Departamento de Projetos Mecânicos da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, fazia-se necessário a obtenção do conhecimento de base para o desenvolvimento de trabalhos futuros. Sendo assim, esta dissertação é baseada no estudo desenvolvido por Beikemann (1992).

3 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

3.1 Considerações iniciais

A transmissão de potência em sistemas acionados por correia só é possível em decorrência do atrito existente entre a polia e a correia. Para se obter este atrito deve-se submeter o conjunto a uma tensão inicial T_r que comprimirá a correia sobre a polia de forma uniforme e essa força será igual em todos os tramos da correia.

Entretanto, quando o sistema é colocado em operação os tramos da correia são submetidos a diferentes tensões. Um primeiro efeito ocorre devido ao equilíbrio de momentos, por exemplo na polia motora, com a aplicação de um momento de acionamento, as tensões T_1 e T_2 serão diferentes, sendo T_1 maior que T_2 (figura 3.1). Se considerarmos que a correia se comporta como um corpo elástico, haverá diferenças de enlongamentos entre os dois tramos da correia originando o fenômeno conhecido como creep (Shigley, J.E., Mischke, C.R., 1989)

Na polia movida o mesmo fenômeno ocorre de maneira inversa.

Outro efeito ocorre devido ao efeito da velocidade da correia, que causará enlongamentos pela ação das forças centrípetas envolvidas.

Para a análise destes fenômenos, considera-se a polia motora mostrada na figura 3.1, onde:

- ϕ é o ângulo de abraçamento
- T_{o1} é a tensão total do tramo 1
- T_{o2} é a tensão total do tramo 2
- T_t é tensão de tração
- dT e a variação da tensão de tração ao longo do elemento infinitesimal

- N é a reação normal

- F_a é a força de atrito

- μ é coeficiente de atrito

- T_c é a tensão centrífuga

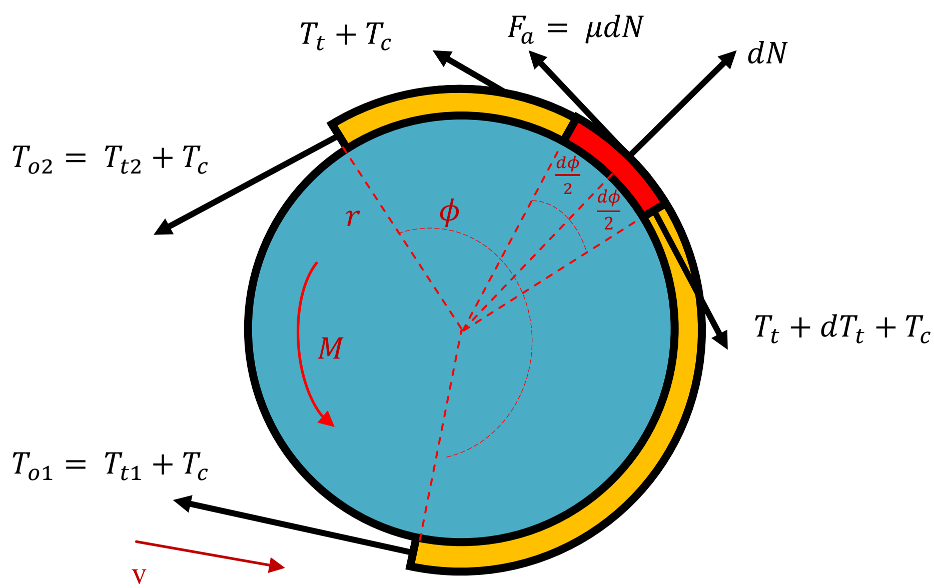


Figura 3.1 – Tensões na Correia ao longo do arco de abraçamento

A figura mostra as forças atuantes em um elemento infinitesimal de ângulo total $d\phi$

Considerando o equilíbrio de forças neste elemento sem considerarmos o efeito da rotação, tem-se:

Na Direção Tangencial: $(T_t + dT_t)\cos\frac{d\phi}{2} - T_t\cos\frac{d\phi}{2} = \mu\, dN$

$$(3.1.1)$$

Na direção Normal: $(T_t + dT_t)\, sen\frac{d\phi}{2} + T_t\, sen\frac{d\phi}{2} = dN$

(3.1.2)

Sendo $d\phi$ é muito pequeno pode-se considerar $\cos\frac{d\phi}{2} = 1$, $sen\frac{d\phi}{2} = \frac{d\phi}{2}$ e $dT_t\frac{d\phi}{2} = 0$. Assim as equações (3.1.1) e (3.1.2) tornam-se:

Na direção Tangencial: $dT_t = \mu\, dN$

(3.1.3)

Na direção Normal: $T_t\, d\phi = dN$

(3.1.4)

Substituindo dN de (3.1.4) em (31.3) e integrando:

$$\int_0^{\phi} \mu\, d\phi = \int_{T_{t2}}^{T_{t1}} \frac{dT_t}{T_t}$$

(3.1.5)

$$\mu\, \phi = \ln T_{t1} - \ln T_{t2}$$

(3.1.6)

$$T_{t1} = T_{t2}\, e^{\mu\phi}$$

(3.1.7)

A equação (3.1.7) mostra que a tensão de tração varia exponencialmente ao longo do ângulo de abraçamento da polia.

Considerando-se o efeito da rotação tem-se:

$$2\, T_c\, sen\frac{d\phi}{2} = \frac{dmv^2}{r}$$

(3.1.8)

Onde m é a massa específica da correia.

Sendo o comprimento do elemento infinitesimal igual a $rd\phi$ e a sua massa $mrd\phi$:

$$T_c d\phi = mrd\phi\frac{v^2}{r}$$

(3.1.9)

$$T_c = mv^2$$

(3.1.10)

Logo, a tensão total de equilíbrio a qual um tramo de correia n está sujeito é dada por:

$$T_{on} = T_{tn} + T_c$$

(3.1.11)

onde,

- T_{tn} é a tensão de tração

- T_c é a tensão centrífuga

3.2 Equações de Movimento Não-Lineares

As equações de movimento serão desenvolvidas para um sistema genérico representado na Figura 3.2. Este sistema é formado por quatro elementos discretos (polias e braço do tensionador) e três elementos contínuos (tramos da correia). As equações de movimento governam a resposta do sistema às seguintes variáveis:

- $\theta_1(t), \theta_2(t), \theta_3(t), \theta_4(t)$: deslocamentos angulares das polias e tensionador, e serão representados por θ_n.

- $w_1(x,t), w_2(x,t),\ w_3(x,t)$: deslocamentos transversal dos tramos da correia e serão representados por w_n.

- $u_1(x,t), u_2(x,t),\ u_3(x,t)$: deslocamento longitudinal dos tramos da correia e serão representados por u_n.

onde, n representa o enésimo elemento, x é a coordenada espacial dos sistemas de referências generalizados e t é o tempo.

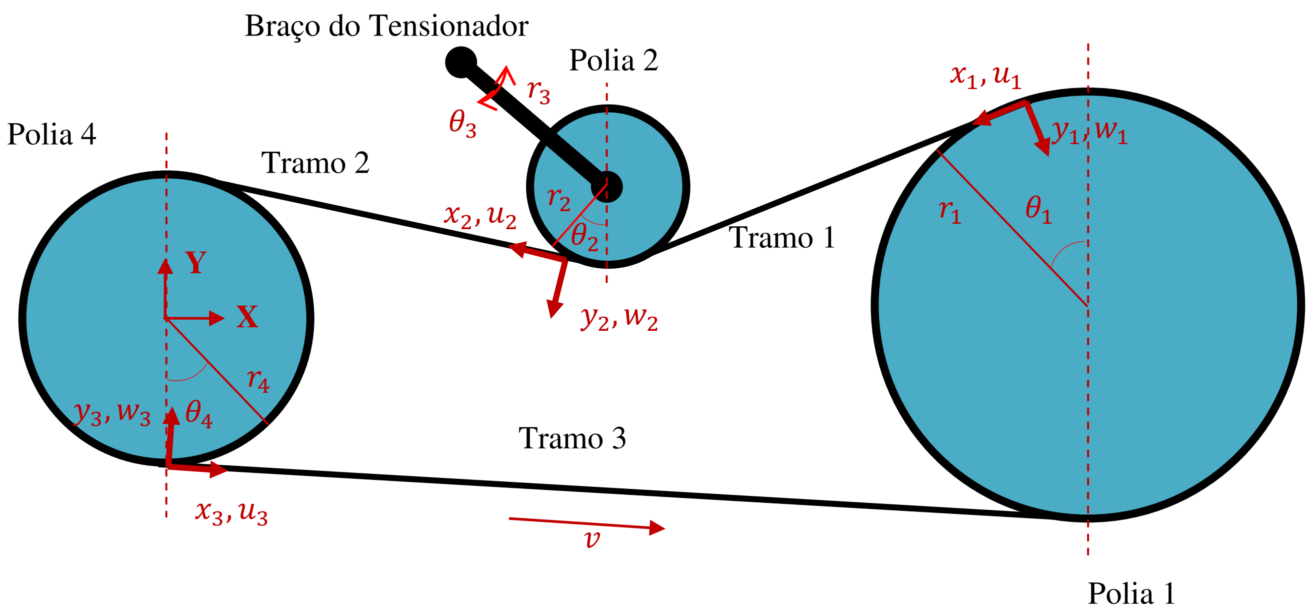


Figura 3.2 – Sistema de 3 polias com Tensionador

As seguintes simplificações são assumidas:

- A rigidez de flexão é desprezível em relação à rigidez longitudinal, dessa forma a correia é modelada como se fosse uma corda.

- A velocidade axial da correia, v, é constante e uniforme

- As propriedades físicas (EA, m) da correia são uniformes mesmo durante seu estiramento

- O amortecimento é desprezível

- O escorregamento da correia é desprezível

- A tensão da correia na polia decresce linearmente ao longo do arco de abraçamento

- Os pontos de contato da correia com as polias não variam

O princípio de Hamilton será utilizado para o desenvolvimento das equações de movimento não lineares (MEIROVITCH, 1971) (MEIROVITCH, 2007) (BRUN, 2007).

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U + W)\, dt = 0$$

(3.2.1)

onde, T é a energia cinética, U a energia potencial e W o trabalho das forças externas.

A velocidade do movimento transversal da correia é dada por:

$$\frac{dw(x,t)}{dt} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\,\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$

(3.2.2)

Como dx/dt é a velocidade axial da correia v:

$$\frac{dw(x,t)}{dt} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}$$

(3.2.3)

$$\frac{dw(x,t)}{dt} = w_{,t} + v\, w_{,x}$$

(3.2.4)

onde os subscritos $_{,t}$ e $_{,x}$ representam as derivadas parciais em relação a t e x respectivamente.

Similarmente, a velocidade longitudinal é dada por:

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + v\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

(3.2.5)

$$\frac{du(x,t)}{dt} = u_{,t} + v\, u_{,x}$$

(3.2.6)

A energia cinética das polias é:

$$T_{polias} = \frac{1}{2} J_n \left(\frac{v}{r_n} + \theta_{n,t}\right)^2$$

(3.2.7)

onde J_n e r_n são o momento de inércia e o raio do enésimo elemento discreto (polia ou tensionador).

E a energia cinética do braço do tensionador:

$$T_{tensionador} = \frac{1}{2} J_3 \; {\theta_{3,t}}^2$$

(3.2.8)

A energia cinética total do sistema será:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{v}{r_1} + \theta_{1,t}\right)^2 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{v}{r_2} + \theta_{2,t}\right)^2 + \frac{1}{2} J_3 \; {\theta_{3,t}}^2 + \frac{1}{2} J_4 \left(\frac{v}{r_4} + \theta_{4,t}\right)^2$$
$$+ \int_0^{l_1} \frac{1}{2} \, m \left\{ \left(w_{1,t} + v w_{1,x}\right)^2 + \left(u_{1,t} + v u_{1,x} + v\right)^2 \right\} dx_1$$
$$+ \int_0^{l_2} \frac{1}{2} m \, \left\{ \left(w_{2,t} + v w_{2,x}\right)^2 + \left(u_{2,t} + v u_{2,x} + v\right)^2 \right\} dx_2$$
$$+ \int_0^{l_3} \frac{1}{2} \, m \left\{ \left(w_{3,t} + v w_{3,x}\right)^2 + \left(u_{3,t} + v u_{3,x} + v\right)^2 \right\} dx_3$$

(3.2.9)

A energia potencial de um tramo da correia é dada por (KIM at al, 1999):

$$U_{tramo} = 1/2 \int_0^{l} \int_A E \, \epsilon_x^2 \, dA \, dx$$

(3.2.10)

onde, A é a área da seção transversal da correia, E é o módulo de Young, e ϵ_x é a razão da deformação total do tramo de correia pelo seu comprimento inicial e é dada por:

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + \epsilon_1$$

(3.2.11)

onde:

ϵ_oé a deformação específica devido à tensão estática ao longo do comprimento da correia. Para uma tensão T_o uniforme:

$$\epsilon_o = \frac{T_o}{EA}$$

(3.2.12)

ϵ_1 resulta da componente dinâmica da tensão.

A figura 3.3 mostra um elemento dx da correia sendo deformado:

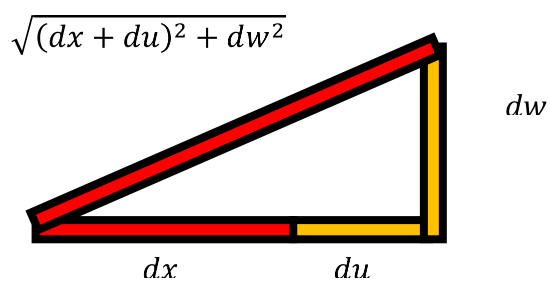


Figura 3.3 – Deformação de um elemento dx da correia

A razão da deformação e o tamanho inicial, ϵ_1é dada por:

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{(dx + du)^2 + dw^2} - dx}{dx}$$

(3.2.13)

$$\epsilon_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1$$

(3.2.14)

$$\epsilon_1 = \sqrt{\left(1 + u_{,x}\right)^2 + w_{,x}^2} - 1$$

(3.2.15)

Utilizando a Série de Taylor para linearizar (3.2.15) (CHEN at AL, 2007):

$$\epsilon_1 = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2$$

(3.2.16)

Assim a energia potencial de um tramo correia é dada por:

$$U_{tramo} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E\,(\epsilon_o + \epsilon_1)^2 dA\, dx$$

(3.2.17)

$$U_{tramo} = \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{T_o}{EA} + u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2\right)^2 dx$$

(3.2.18)

A tensão total de cada tramo da correia é:

$$T_n(x_n) = \epsilon_x . EA = T_{on} + EA\,(u_{n,x} + \frac{1}{2}\, w_{n,x}^2)$$

(3.2.19)

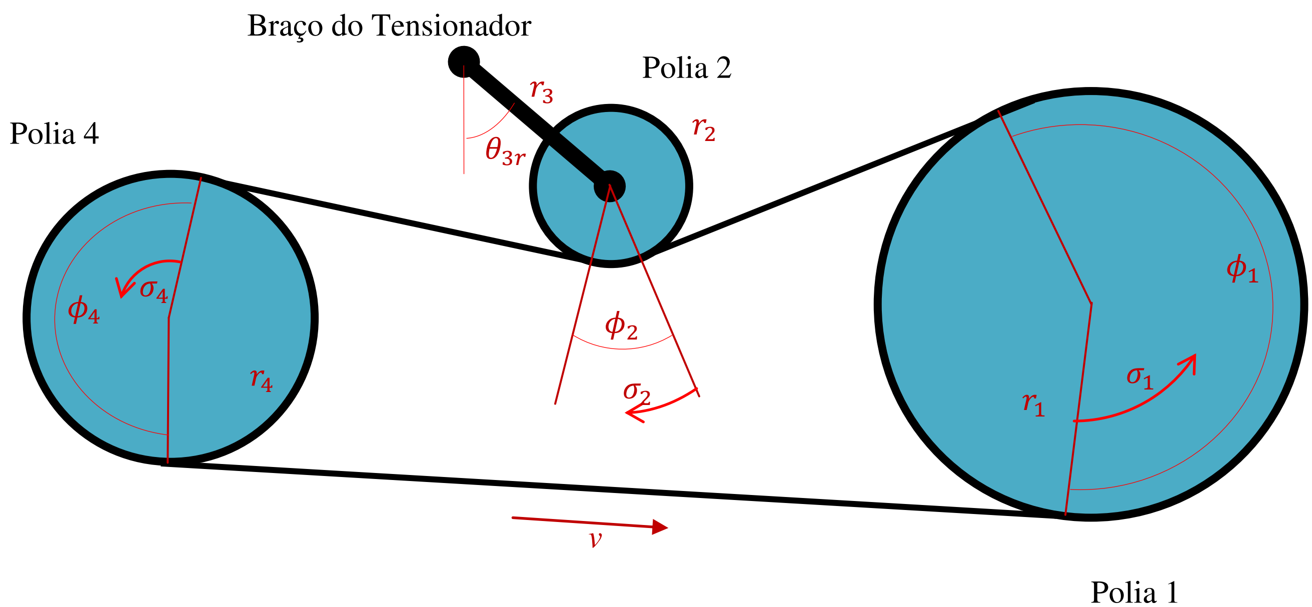
A energia potencial armazenada na correia ao longo do arco de abraçamento das polias total do sistema é obtida pela integração da variação da tensão total ao longo do arco de abarcamento. Para a polia 1:

$$U_{Polia1} = \frac{EA}{2} \int_0^{\phi_1} \left(\frac{T_3(l_3)}{EA} + \frac{\sigma_1}{\phi_1}\left(\frac{T_1(0)}{EA} - \frac{T_3(l_3)}{EA}\right)\right)^2 r_1 d\sigma_1$$

(3.2.20)

onde, σ_n e ϕ_n são respectivamente a coordenada e ângulo de abraçamento da polia n e θ_{3r} é a deflexão da mola do tensionador na posição de referência (*v=0*) (Figura 3.4).

O termo $\frac{\sigma_1}{\phi_1}$ determina a proporcionalidade entre T_1 e T_3 ao longo do arco de abraçamento $r_1 d\sigma_1$.



Figuras 3.4 – Coordenadas angulares e ângulos de abraçamento

A energia potencia do braço do tensionador é

$$U_{tensionador} = \frac{1}{2} k_r (\theta_3 + \theta_{3r})^2$$

(3.2.21)

onde θ_{3r} é a deflexão inicial da mola do tensionador.

Assim, a energia potencia total do sistema é:

$$
\begin{aligned}
U = \frac{1}{2}k_r(\theta_3 + \ \theta_{3r})^2 \\
&+ \frac{EA}{2}\int_0^{\phi_1}\left(\frac{T_3(l_3)}{EA} + \ \frac{\sigma_1}{\phi_1}\left(\frac{T_1(0)}{EA} - \ \frac{T_3(l_3)}{EA}\right)\right)^2 r_1 d\sigma_1 \\
&+ \frac{EA}{2}\int_0^{\phi_2}\left(\frac{T_1(l_1)}{EA} + \ \frac{\sigma_2}{\phi_2}\left(\frac{T_2(0)}{EA} - \ \frac{T_1(l_1)}{EA}\right)\right)^2 r_2 d\sigma_2 \\
&+ \frac{EA}{2}\int_0^{\phi_4}\left(\frac{T_2(l_2)}{EA} + \ \frac{\sigma_4}{\phi_4}\left(\frac{T_3(0)}{EA} - \ \frac{T_2(l_2)}{EA}\right)\right)^2 r_4 d\sigma_4 \\
&+ \frac{EA}{2}\int_0^{l_1}\left(\frac{(T_{o1})}{EA} + u_{1,x} + \frac{1}{2}w_{1,x}^2\right)^2 dx_1 \\
&+ \frac{EA}{2}\int_0^{l_2}\left(\frac{(T_{o2})}{EA} + u_{2,x} + \frac{1}{2}w_{2,x}^2\right)^2 dx_2 \\
&+ \frac{EA}{2}\int_0^{l_1}\left(\frac{(T_{o3})}{EA} + u_{1,x} + \frac{1}{2}\ w_{1,x}^2\right)^2 dx_3
\end{aligned}
\tag{3.2.22}
$$

O trabalho das forças externas será:

$$
W = M_1\theta_1 + M_2\theta_2 + M_3\theta_3 + M_4\theta_4 \tag{3.2.23}
$$

onde M_n é o torque aplicado às n polias pelos acessórios e motor.

Substituindo as equações (3.2.9), (3.2.22) e (3.2.23) em (3.2.1) as equações de movimento para os tramos da correia são:

$$m\left(-w_{1,tt}-2vw_{1,xt}-v^2w_{1,xx}\right)+\left(\left(EA(u_{1,x}+\frac{1}{2}\ w_{1,x}^2)+T_{o1}\right)w_{1,x}\right)_{,x}=0$$

$$m\left(-w_{2,tt}-2vw_{2,xt}-v^2w_{2,xx}\right)+\left(\left(EA(u_{2,x}+\frac{1}{2}\ w_{2,x}^2)+T_{o2}\right)w_{2,x}\right)_{,x}=0$$

$$m\left(-w_{3,tt}-2vw_{3,xt}-v^2w_{3,xx}\right)+\left(\left(EA(u_{3,x}+\frac{1}{2}\ w_{3,x}^2)+T_{o3}\right)w_{3,x}\right)_{,x}=0$$

(3.2.24)

$$m\left(-u_{1,tt}-2vu_{1,xt}-v^2u_{1,xx}\right)+\left(EA(u_{1,x}+\frac{1}{2}\ w_{1,x}^2)+T_{o1}\right)_{,x}=0$$

$$m\left(-u_{2,tt}-2vu_{2,xt}-v^2u_{2,xx}\right)+\left(EA(u_{2,x}+\frac{1}{2}\ w_{2,x}^2)+T_{o2}\right)_{,x}=0$$

$$m\left(-u_{3,tt}-2vu_{3,xt}-v^2u_{3,xx}\right)+\left(EA(u_{3,x}+\frac{1}{2}\ w_{3,x}^2)+T_{o3}\right)_{,x}=0$$

(3.2.25)

Existem três componentes de aceleração nestas equações:

- a aceleração local, $w_{n,tt}$ ou $u_{n,tt}$

- a aceleração de Coriolis, $2vw_{n,xt}\ ou\ 2vu_{n,xt}$

- a aceleração centrípeta, $v^2w_{n,xx}$ ou $v^2u_{n,xx}$

A rigidez longitudinal da correia é muito maior que a rigidez transversal. Como consequência, as freqüências de oscilação das ondas longitudinais serão muito maiores que as das ondas transversais. Nesta condição os termos de inércia de (3.2.25) podem ser negligenciados e a tensão dinâmica é considerada uniforme ao longo do tramo da correia. Assim a tensão dinâmica dos tramos da correias se torna:

$$T_{dn}(t)=EA\left(u_{n,x}+\frac{1}{2}w_{n,x}^2\right)=\frac{EA}{l_n}\left[u_n(l_n,t)-u_n(0,t)+\frac{1}{2}\int_0^{l_n}\{w_{n,x}(x_n,t)\}^2dx_n\right]$$

(3.2.26)

e as equações de movimento se tornam:

$$m\left(-w_{1,tt} - 2vw_{1,xt} - v^2 w_{1,xx}\right) + \ (T_{d1} + T_{o1})w_{1,xx} = 0$$

$$m\left(-w_{2,tt} - 2vw_{2,xt} - v^2 w_{2,xx}\right) + \ (T_{d2} + T_{o2})w_{2,xx} = 0$$

$$m\left(-w_{3,tt} - 2vw_{3,xt} - v^2 w_{3,xx}\right) + \ (T_{d3} + T_{o3})w_{3,xx} = 0$$

(3.2.27)

$$u_{1,tt} + 2vu_{1,xt} + v^2 u_{1,xx} = 0$$

$$u_{1,tt} + 2vu_{1,xt} + v^2 u_{1,xx} = 0$$

$$u_{1,tt} + 2vu_{1,xt} + v^2 u_{1,xx} = 0$$

(3.2.28)

As equações de movimento das polias são:

Para a polia1:

$$(T_{d1} + T_{o1})r_1 - (T_{d3} + T_{o3})r_1 + M_1 = J_1\theta_{1,tt}$$

(3.2.29)

Para a polia 2:

$$-(T_{d1} + T_{o1})r_2 + (T_{d2} + T_{o2})r_2 + M_2 = J_2\theta_{2,tt}$$

(3.2.30)

Para a polia 4:

$$-(T_{d2} + T_{o2})r_4 + (T_{d3} + T_{o3})r_4 + M_4 = J_4\theta_{4,tt}$$

(3.2.31)

Para o tensionador:

$$\left[mvw_{1,t}(l_1) + \left(mv^2 - (T_{d1} + T_{o1})\right)w_{1,x}(l_1)\right]r_3\cos(\theta_3 + \alpha_1)$$
$$+ \left(mv^2 - (T_{d1} + T_{o1})\right)r_3 sen(\theta_3 + \alpha_1)$$
$$+ \left[mvw_{2,t}(0) - (T_{d2} + T_{o2} - mv^2)w_{2,x}(0)\right]r_3\cos(-\theta_3 + \alpha_2)$$
$$+ (T_{d2} + T_{o2} - mv^2)r_3 sen(-\theta_3 + \alpha_2) + M_3 - k_r(\theta_3 + \theta_{3r}) = J_3\theta_{3,tt}$$

(3.2.32)

onde α_1 e α_2 são os ângulos formados entre os tramos da correia e o braço do tensionador (figura 3.5).

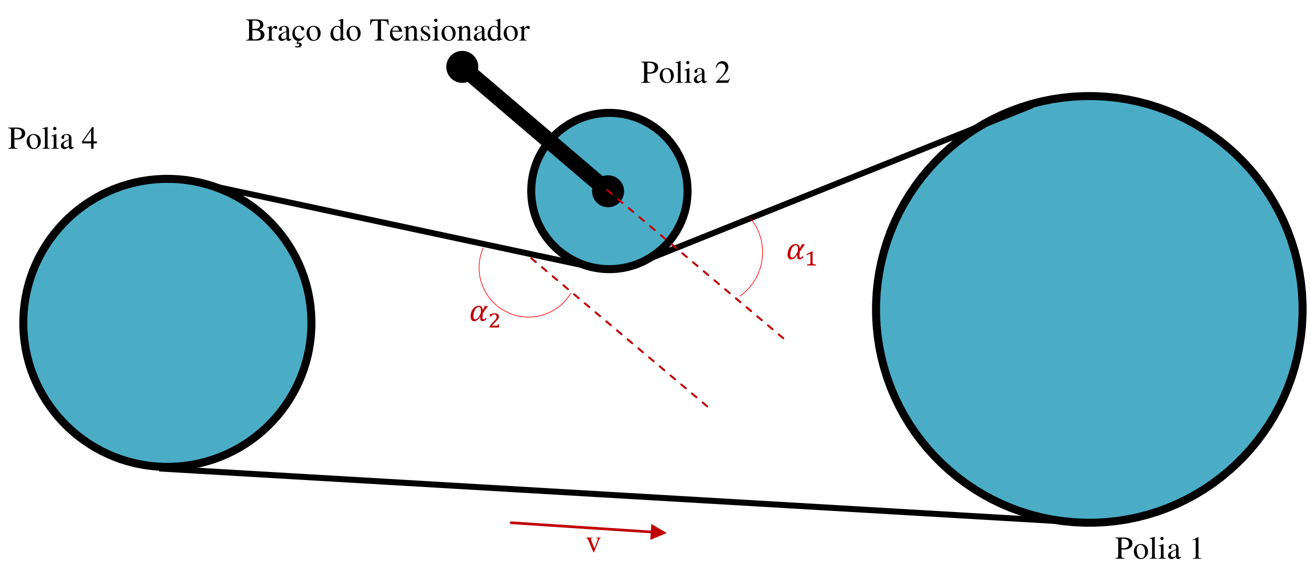


Figura 3.5 – Ângulos α_1 e α_2

A aceleração angular do tensionador é proporcional:

- às tensões dos trechos de correias adjacentes

- à força da mola

- aos termos de inércia

- ao torque aplicado ao tensionador

As equações de (3.2.27) a (3.2.32) constituem as equações não lineares do sistema da Figura 3.2 e descrevem os movimentos acoplados de rotação das polias e transversais dos tramos da correia.

3.3 Equações de movimento do Equilíbrio

Para se encontrar as equações de equilíbrio os termos derivados no tempo das equações não lineares são zerados.

Assim as equações de movimento dos tramos de correias (3.2.27) se tornam:

$$(-mv^2 + T_{o1})w_{1,xx} = 0$$

$$(-mv^2 + T_{o2})w_{2,xx} = 0$$

$$(-mv^2 + T_{o3})w_{3,xx} = 0$$

(3.3.1)

pois, por definição $T_{dn} = 0$ no equilíbrio. Assim, $w_{n,xx} = 0$, o que significa que os tramos da correia devem ser retos e $w_n(x_n) = 0$

As equações de movimento das polias (3.2.29) a (3.2.31) se tornam:

Para a polia 1:

$$(T_{o1} - T_{o3})r_1 + M_{o1} = 0$$

(3.3.2)

Para a polia 2:

$$(T_{o2} - T_{o1})r_2 + M_{o2} = 0$$

(3.3.3)

Para a polia 4:

$$(T_{o3}-T_{o2})r_4 + M_{o4} = 0$$

(3.3.4)

onde M_o é o momento estático aplicado às polias.

A equação de movimento do tensionador (3.2.32) se torna:

$$(mv^2 - T_{o1})r_3 sen\alpha_1 + (T_{02} - mv^2)r_3 sen\alpha_2 - k_r\theta_{3r} + M_{03} = 0$$

(3.3.5)

Considerando que $T_{oi} = T_{ti} + mv^2$

$$-T_{t1}r_3 sen\alpha_1 + T_{t2}r_3 sen(\alpha_2) - k_r\theta_{3r} + M_{03} = 0$$

(3.3.6)

As equações de (3.3.1) a (3.3.6) representam as equações de movimento do equilíbrio.

3.4 - Equações de movimento Lineares

As equações de movimento serão linearizadas em torno do estado de equilíbrio.

As equações lineares de movimento dos tramos da correia são:

$$m(w_{1,tt} + 2vw_{1,xt}) - T_{t1}w_{1,xx} = 0$$

$$m(w_{2,tt} + 2vw_{2,xt}) - T_{t2}w_{2,xx} = 0$$

$$m(w_{3,tt} + 2vw_{3,xt}) - T_{t3}w_{3,xx} = 0$$

(3.4.1)

As equações lineares de movimento para as polias são:

Para polia 1 :

$$(T_{d1} - T_{d3})r_1 + M_{d1} = J_1\theta_{1,tt}$$

(3.4.2)

Para a polia 2:

$$(T_{d2} - T_{d1})r_2 + M_{d2} = J_2\theta_{2,tt}$$

(3.4.3)

Para a polia 4:

$$(T_{d3} - T_{d2})r_4 + M_{d4} = J_4\theta_{4,tt}$$

(3.4.4)

onde M_{di} é o componente dinâmico do momento aplicado na polia n.

Considerando $\chi_n = r_n\theta_n$, $F_{dn} = M_{dn}/r_n$ e $m_n = J_n/r_n^2$, as equações (3.4.2) a (3.4.4) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$T_{d1} - T_{d3} + F_{d1} = m_1\chi_{1,tt}$$

(3.4.5)

$$T_{d2} - T_{d1} + F_{d2} = m_2\chi_{2,tt}$$

(3.4.6)

$$T_{d3} - T_{d2} + F_{d4} = m_4\chi_{4,tt}$$

(3.4.7)

Os termos das tensões dinâmicas, T_{dn} acoplam as deformações da correia ao movimento das polias através de termos lineares e não lineares (3.2.26). A componente linear de T_{dn}é devido ao deslocamento longitudinal dos tramos da correia. A componente não linear, que envolve a integral do quadrado da inclinação do deslocamento transversal, é negligenciada no modelo linear. Desta forma, no modelo linear, o movimento transversal dos tramos da correia são desacoplados dos movimentos das polias e as tensões dinâmicas se tornam:

$$T_{d1} = k_1(\chi_3 cos\psi_1 + \chi_2 - \chi_1)$$

(3.4.8)

$$T_{d2} = k_2(\chi_3 cos\psi_2 + \chi_4 - \chi_2)$$

(3.4.9)

$$T_{d3} = k_3(\chi_1 - \chi_4)$$

(3.4.10)

onde $k_n = EA/l_n$ e ψ_n é o ângulo entre os tramo de correia n com a perpendicular ao braço do tensionador (figura 3.6), definidos como ângulos de alinhamento.

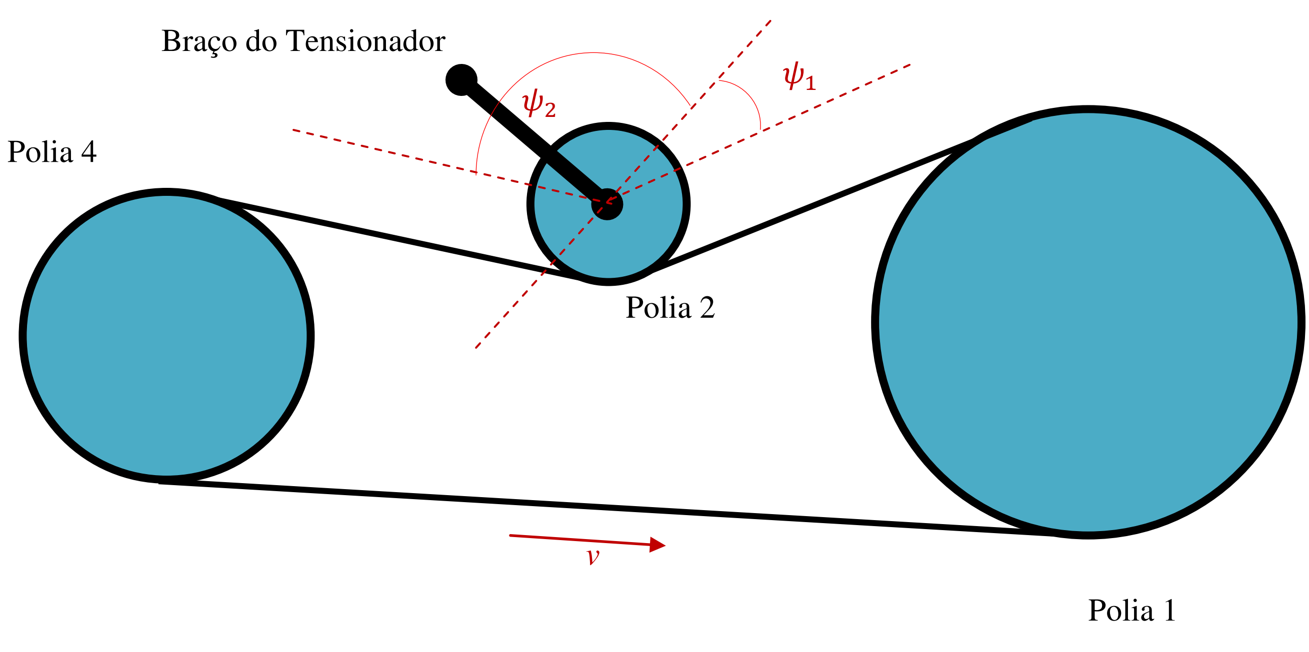


Figura 3.6 – Ângulos ψ_1eψ_2

Omitindo os termos não lineares em (3.2.32) e utilizando relações trigonométricas a equação de movimento linear do tensionador se torna:

$$\left(-T_{t1}w_{1,x}(l_1) + mcw_{1,t}(l_1)\right) r_3 sen\psi_1 - T_{d1}r_3cos\psi_1 - T_{t1}r_3\theta_3 sen\psi_1 + \ (T_{t2}w_{2,x}(0) - \ mcw_{2,t}(0,t))\, r_3 sen\,\psi_2 - T_{d2}r_3cos\psi_2 + \ T_{t2}r_3\theta_3 sen\psi_2 + M_{d3} - \ k_r\theta_3 = \mathrm{J}_3\theta_{3,\mathrm{tt}}$$

(3.4.11)

A equação acima mostra que há acoplamento linear entre o movimento transversal dos tramos das correias e o movimento rotacional do tensionador.

Substituindo as equações (3.4.8) a (3.4.10) em (3.4.11) e utilizando a relação $\chi_n = r_n\theta_n$ a equação de movimento do tensionador se torna:

$$\left(-T_{t1}w_{1,x}(l_1,t) + mvw_{1,t}(l_1,t)\right) sen\psi_1 + \ \left(T_{t2}w_{2,x}(0,t) - \ mvw_{2,t}(0,t)\right) \ sen\,\psi_2 - \ k_1(\chi_3\cos\psi_1 + \chi_2 - \chi_1)\cos\psi_1 - \mathrm{k}_2(\chi_3\cos\psi_2 + \chi_4 - \chi_2)\cos\psi_2 - \ \mathrm{k}_4\chi_3 = \mathrm{m}_3\chi_{3,\mathrm{tt}}$$

(3.4.12)

onde:

$$k_4 = k_s + k_{gr}$$

(3.4.13)

$$k_s = \frac{k_r}{r_3^2}$$

(3.4.14)

$$k_{gr} = \frac{T_{t1}sen\psi_1 - \ T_{t2}sen\psi_2}{r_3}$$

(3.4.15)

k_s é definido como rigidez da mola e k_{gr} é uma porção da rigidez geométrica definida na próxima seção.

3.5 Equações de movimento lineares desprezando-se a inércia da correia

A ínércia da correia é relativamente muito menor que a inérica das polias. Um modelo aproximado que descreve somente a vibração rotacional das polias pode ser obtido desprezando-se a inércia da correia.

Desconsiderando a inércia da correia nas equações (3.4.1) torna-se necessário que $w_{n,xx} = 0$, ou seja, que os tramos da correia sejam uma reta. Logo, o deslocamento transversal dos tramos 1 e 2 são lineares e o coeficiente de inclinação são:

$$w_{1,x}(l_1) = \frac{w_1(l_1)}{l_1} = \frac{r_3\theta_3 sin\psi_1}{l_1}$$

$$w_{2,x}(0) = \frac{-w_2(0)}{l_2} = \frac{-r_3\theta_3 sin\psi_2}{l_2}$$

(3.5.1)

Utilizando (3.5.1) em (3.4.11):

$$\left(-T_{t1}\ \frac{r_3\theta_3 sin\psi_1}{l_1}\right) r_3 sen\psi_1 - T_{d1} r_3 cos\psi_1 - T_{t1} r_3 \theta_3 sin\psi_1 + \left(T_{t2}\ \frac{r_3\theta_3 sin\psi_2}{l_2}\right) r_3 sen\psi_2 - T_{d2} r_3 cos\psi_2 + T_{t2} r_3 \theta_3 sen\psi_2 + M_{d3} - K_r\theta_3 = J_3\theta_{3,tt}$$

(3.5.2)

Dividindo a equação acima por r_3 e sendo $\chi_n = r_n\theta_n$,:

$$-T_{d1}cos\psi_1 - T_{d2}cos\psi_2 + Fd_3 - \chi_3\left(T_{t1}\left(-sen(\psi_1)\left(-\frac{sen\psi_1}{l_1} - \frac{1}{r_3}\right)\right) + T_{t2}\left(-sen(\psi_2)\left(-\frac{sen\psi_2}{l_2} - \frac{1}{r_3}\right)\right) + k_s/r_3^2\right) = m_3\chi_{3,tt}$$

(3.5.3)

Como (ver figura 4.4):

$$\psi_1 = \epsilon_1 - \delta_1$$

(3.5.4)

$$sen\psi_1 = sen(\epsilon_1 - \delta_1) = sen\epsilon_1 \cos\delta_1 - \cos\epsilon_1 \, sen\,\delta_1)$$

(3.5.5)

e

$$sen\epsilon_1 = \frac{l_{1b}}{l_{12}} \qquad \cos\epsilon_1 = l_{1a}/l_{12}$$

(3.5.6)

$$sen\delta_1 = \frac{r_1 + r_2}{l_{12}} \qquad \cos\delta_1 = l_1/l_{12}$$

(3.5.7)

Tem-se:

$$-\frac{sen\psi_1}{l_1} = \left(-\frac{l_{1b}}{l_{12}^2} + \frac{l_{1a}(r_1 + r_2)}{l_1\, l_{12}^2}\right)$$

(3.5.8)

Semelhantemente:

$$-\frac{sen\psi_2}{l_2}=\left(-\frac{l_{2b}}{l_{22}^2}+\frac{l_{1a}(r_1+r_2)}{l_1\,l_{12}^2}\right)$$

(3.5.9)

Assim, utilizando (3.5.8) e (3.5.9), a equação (3.5.3) se torna:

$$-k_1(\chi_3\,cos\psi_1+\chi_2-\ \chi_1)cos\psi_1-\ k_2(\chi_3cos\psi_2+\chi_4-\chi_2)cos\psi_2+\ F_{d3}-\ \left(k_s+k_g\right)\chi_3$$
$$=m_3\chi_{3,tt}$$

(3.5.10)

onde:

$$k_s=\frac{k_r}{{r_3}^2}$$

(3.5.11)

$$k_g=T_{t1}(-sen\psi_1)\left(\frac{-l_{1b}}{l_{12}^2}+\frac{l_{1a}(r_1+r_2)}{l_1\,l_{12}^2}-\frac{1}{r_3}\right)+T_{t2}(-sen\psi_2)\left(\frac{-l_{2b}}{l_{22}^2}+\frac{l_{2a}(r_2+r_4)}{l_2\,l_{22}^2}-\frac{1}{r_3}\right)$$

(3.5.12)

k_s é definido como rigidez da mola e k_g como a rigidez geométrica e $l_{1b}, l_{12},, l_{2b}, l_{22}$, são retas auxiliares (ver apêndice A).

A rigidez geométrica se dá devido à mudança dos ângulos de alinhamento com a rotação do braço do tensionador, o que altera o momento criado pelas tensões de tração no braço do tensionador.

Será mostrado que a rigidez da mola e a rigidez geométrica são de grande influência na capacidade do sistema manter uma tensão de tração constante.

4 EQUILÍBRIO ESTACIONÁRIO DO BRAÇO DO TENSIONADOR

4.1 Introdução

Dois métodos são descritos para resolver as equações de movimento do equilíbrio descritas anteriormente. As soluções fornecem as tensões dos tramos da correia e a posição do tensionador no equilíbrio estacionário Ambos os métodos partem da posição de referência (*v=0*) e determinam o equilíbrio baseado na geometria e propriedades elásticas do sistema. O primeiro método é numérico e determina o estado de equilíbrio estacionário através da solução numérica das equações de movimento para o equilíbrio. O segundo método aplica uma expansão da série de Taylor de primeira ordem em torno do equilíbrio de forma a obter uma aproximação linear da solução exata. Este método fornece base para importantes conclusões sobre o design de sistemas com tensionadores.

O estado de referencia é definido como o estado na qual a velocidade axial da correia é zero e a tensão é uniforme em todos os tramos da correia. A tensão neste estado será T_r.

O equilíbrio estacionário é o estado na qual a velocidade axial da correia é constante e diferente de zero. Neste estado a tensão, já definida anteriormente, é $T_{on} = T_{tn} + T_c$.

Desprezando a fricção do rolamento do tensionador em (3.3.5), ou seja, $T_t = T_{t1} = T_{t2}$, a deflexão do braço do tensionador no estado de referencia é (figura 4.1):

$$\theta_{3r} = \frac{T_t r_3 (sen\alpha_2 - \ sen\alpha_1)}{k_r}$$

(4.1.1)

A força tangencial F_t no braço do tensionador é:

$$F_t = \frac{k_r \theta_{3r}}{r_3}$$

(4.1.2)

Logo:

$$F_t = T_t\ (sen\alpha_2 - sen\alpha_1)$$

(4.1.3)

$$T_{t1} = T_{t2} = \frac{F_t}{(sen\alpha_2 - sen\alpha_1)}$$

(4.1.4)

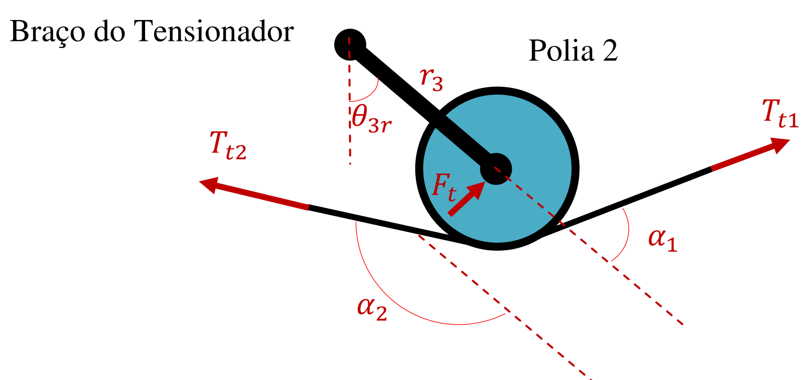


Figura 4.1 – Forças no braço do tensionador

A equação (4.1.1) pode ser utilizada para encontrar a deflexão do braço do tensionador na posição de referencia e a equação (4.1.4) para encontrar as tensões nos tramos da correia adjacentes ao tensionador.

No equilíbrio estacionário, as equações (4.1.1), (4.1.2) e (4.1.4) definem a relação entre a deflexão do tensionador, a tensão de tração dos tramos da correia e a força tangente ao tensionador no centro da polia.

4.2 Solução Numérica

Quando o sistema é colocado em movimento o incremento de tensão na correia faz com que a mesma tenha seu comprimento aumentado. Devido a este aumento a força da mola do tensionador irá movimentar o tensionador. O tamanho total da correia e as tensões são funções da posição do tensionador. A posição do tensionador em operação pode ser calculada conhecendo-se sua posição no estado de referência.

O tamanho total da correia em operação será dado por:

$$L_o = L_r + \Delta L_o$$

(4.2.1)

onde, L_o é o comprimento total da correia em operação, L_r é comprimento total da correia na referência e ΔL_o é o aumento do comprimento da correia.

Lo é :

$$L_o = \sum_{n=i}^{p} l_{on} + r_n \phi_{on}$$

(4.2.2)

l_{on} e ϕ_{on} são o comprimento do tramo de correia e o ângulo de abraçamento do enésimo elemento e p é o número de polias.

Delta Lo é:

$$\Delta L_o = \frac{1}{EA}\, l_{o1}(T_r - T_{o1}) + \; r_1 \phi_{o1}\left(T_r - \frac{1}{2}(T_{o1} + T_{o3})\right) + \frac{1}{EA} l_{o2}(T_r - T_{o2}) +$$

$$r_2 \phi_{02}\left(T_r - \frac{1}{2}(T_{o2} + T_{o1})\right) + \frac{1}{EA} l_3(T_r - T_{o3}) + \frac{1}{EA} r_3 \phi_{o4}(T_r - \frac{1}{2}(T_{o2} + \; T_{o3})$$

(4.2.3)

onde se assume que a tensão média na correia em um arco da polia varia linearmente ao longo do arco da polia.

Para um dado valor inicial de θ_3 em operação pode-se calcular L_o e ΔL_o. O erro deste valor inicial será uma função de θ_3:

$$F(\theta_3) = L_r - (L_0 - \Delta L_o) \tag{4.2.4}$$

O método de Newton–Raphson é utilizado para ajustar o valor de θ_3 até que $F(\theta_3)$ seja muito próximo de zero, onde a posição do tensionador no estado de operação é encontrada.

4.3 Solução Linear Aproximada

O método numérico, apresentado na seção anterior, resolve o problema do equilíbrio com uma boa precisão. Entretanto, não fornece nenhuma indicação da efetividade do design do tensionador. A solução linear aproximada gera uma solução de forma fechada que pode ser usada para identificar as variáveis chaves da efetividade do sistema, ou seja, a capacidade de manter a tensão de tração constante.

A solução linear será desenvolvida considerando os efeitos do tensionamento centrífugo.

4.3.1 Constantes de Suporte

Em seu estudo, Mote (1965-a) considerou o seguinte sistema com diferentes configurações no suporte de uma das polias (figura 4.2):

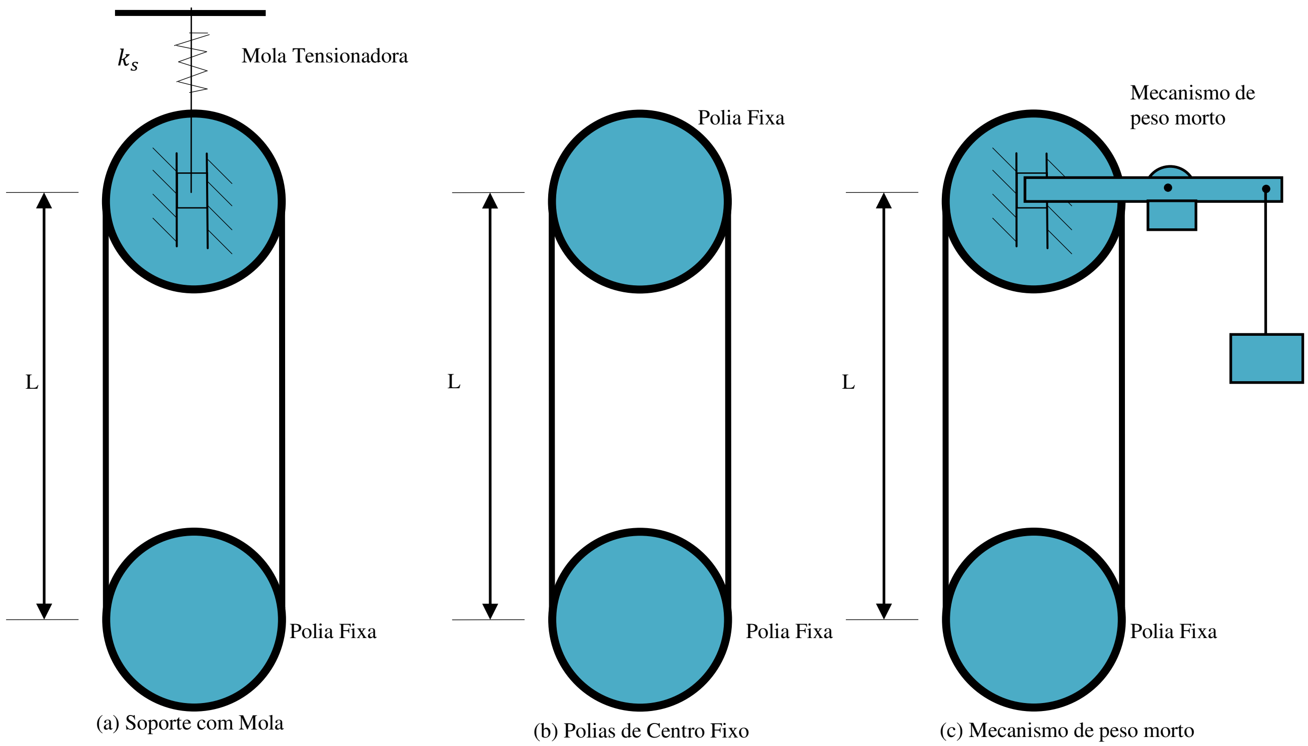


Figura 4.2 – Representação de um sistema de serra de fita com diferentes suportes de uma polia.

A mola do sistema (a) restringe o movimento da polia devido à tensão adicionada à correia. No sistema (b) ambas as polias são fixas, logo $\mathrm{k_s} = \infty$. No sistema (c) o movimento da polia da correia não é inibido com o alongamento da correia, e $\mathrm{k_s} = 0$.

Se a polia tiver seu movimento permitido, a mesma se deslocará uma distância δ_3 devido à tensão centrífuga somente (fig.4.3). Este deslocamento depende da velocidade axial da correia, comprimento e propriedades do material, e é:

$$\delta_3 = \frac{\rho L}{E} v^2$$

(4.3.1.1)

onde, ρ é a densidade da correia.

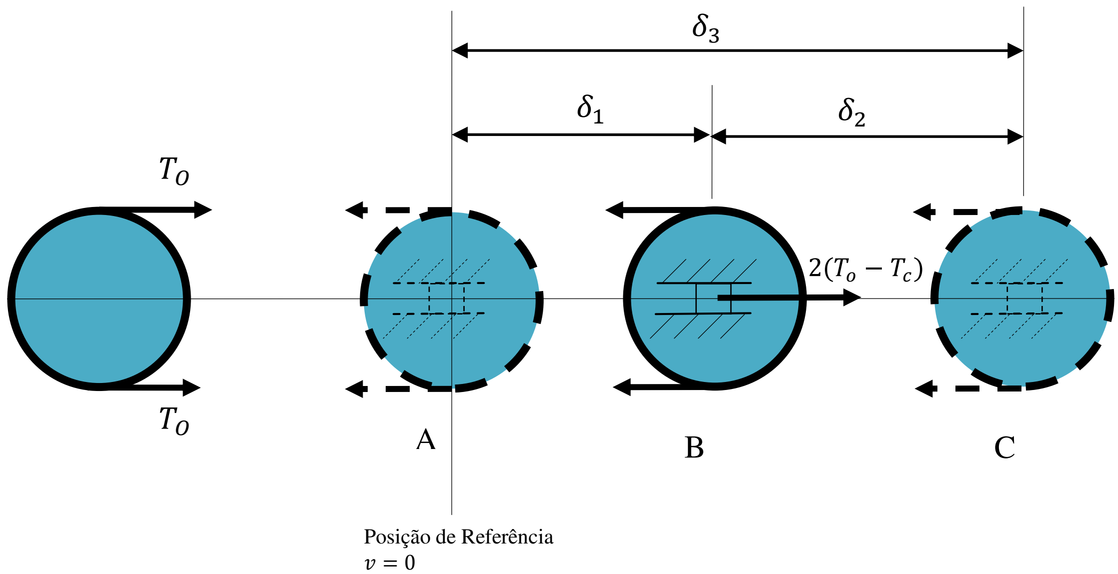


Figura 4.3 – Deslocamento da polia devido á tensão centrífuga

Assim, se o coeficiente de rigidez k_s não inibe este deslocamento, e a tensão de tração for constante, a polia passa de posição A a C. Mas em geral, há uma restrição a este deslocamento e a polia se move a uma posição intermediária entre A e C, posição B (figura 4.3). O comprimento BC é associado ao decréscimo da tensão de tração e o comprimento AB é associado ao decréscimo da carga do suporte. Portanto, no equilíbrio da correia e polia no ponto B:

$$2\left(T_t - \delta_2 \frac{EA}{L}\right) = 2\,T_t - k_s \delta_1$$

(4.3.1.2)

Utilizando (4.3.1.1) e (4.3.1.2), a resultante do deslocamento dinâmico δ_1é:

$$\delta_1 = \frac{T_c}{\frac{1}{2}k_s + \frac{EA}{L}}$$

(4.3.1.3)

Ainda no ponto B tem-se:

$$2T_0 - 2T_c = 2T_r - k_s T_c \frac{1}{\left(\frac{1}{2}k_s + \frac{EA}{L}\right)}$$

(4.3.1.4)

$$T_0 = T_r + T_c \left(1 - \frac{k_s}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}k_s + \frac{EA}{L}}\right)$$

(4.3.1.5)

Como:

$$\left(1 - \frac{k_s}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}k_s + \frac{EA}{L}}\right) = \frac{2EA}{2EA + k_s L} = \frac{1}{1 + \frac{k_s L}{2EA}} = \eta$$

(4.3.1.6)

Assim, a tensão total no equilíbrio estacionário é:

$$T_o = T_r + \eta m v^2$$

(4.3.1.7)

onde:

$$\eta = 1 - \kappa$$

(4.3.1.5)

η é definida como a constante de suporte. No sistema acima, η depende somente da razão da rigidez de suporte pela rigidez da correia. A constante η varia de 0 a 1, sendo que quando $\eta = 0$ ambas as polias tem o centro fixo ($k_s = \infty$) e quando $\eta = 1$ a tensão é provida por um mecanismo de peso morto ($k_s = 0$).

A tensão de tração é obtida por:

$$T_t = T_r - \kappa m v^2$$

(4.3.1.2)

onde , $\kappa = 1 - \eta$

Logo, a tensão de tração decresce com o incremento da velocidade axial ao menos que $\kappa = 0$, ou seja, η =1.

Note que devido ao movimento da polia tensionadora ser paralelo ao movimento dos tramos da fita, os ângulos de alinhamento não se alteram. Como resultado, η é independente do deslocamento da polia tensionadora.

4.3.2 Constante de suporte para mecanismos acionados por correia serpentina e tensionador

Com base nos estudos de Mote (1965), Beikmann (1996) desenvolveu uma formulação para a constante de suporte para sistemas de acionamento por correia serpentina.

Devido ao movimento do braço do tensionador não ser, geralmente, paralelo ao movimento dos tramos adjacentes os ângulos de alinhamento mudam com o movimento do braço do tensionador. Assim, η é uma função do deslocamento do braço do tensionador.

Sem a presença de forças aplicadas pelos acessórios, as tensões T_t, T_o e T_c são consideradas uniformes ao longo do sistema. Da formulação de η e κ, tem-se na referência que:

$$\eta = \frac{dT_0}{dT_c} \qquad v = 0, x_s = 0 \tag{4.3.2.1}$$

$$\kappa = -\frac{dT_t}{dT_c} \qquad v = 0, x_s = 0 \tag{4.3.2.2}$$

onde: x_s é a deflexão do braço do tensionador em relação a posição de referência.

Uma expansão da série de Taylor de primeira ordem para as tensões das equações (4.3.2.1) e (4.3.2.2) são:

$$T_o \approx T_r + \eta m v^2$$

(4.3.2.3)

$$T_t \approx T_r - \kappa m v^2$$

(4.3.2.4)

onde $\kappa = 1 - \eta$.

A diferencial do comprimento total da correia, dL, é dividida em componentes devido à tensão centrífuga e a tensão de tração:

$$dL = (dL)_c + (dL)_t$$

(4.3.2.5)

onde,

$$(dL)_c = \left(\frac{L}{EA}\right) dT_c$$

(4.3.2.6)

$$(dL)_t = \left(\frac{L}{EA}\right) dT_t$$

(4.3.2.7)

A relação dL/dx_s é definida como o ganho de tensionador (ver apêndice A) e pode ser expressa como:

$$\frac{dL}{dx_s} = cos\psi_1 + cos\psi_2$$

(4.3.2.8)

Substituindo (4.3.2.5) em (4.3.2.8):

$$(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)\, dx_s \;=\; \left(\frac{L}{EA}\right) dT_c \;+\; \left(\frac{L}{EA}\right) dT_t$$

(4.3.2.9)

Uma segunda relação envolvendo dT_t é encontrada diferenciando a equação (3.3.6) em relação a x_s. Sendo :

$$\psi_1 + \alpha_1 = \pi \qquad\qquad \psi_2 + \alpha_2 = \frac{3\pi}{2}$$

(4.3.2.10)

$$sen\alpha_1 = sen(\pi - \psi_1) = \cos(\psi_1) \qquad\qquad sen\alpha_2 = sen\left(\frac{3\pi}{2} - \psi_2\right) = -\cos(\psi_2)$$

(4.3.2.11)

A equação (3.3.6) se torna:

$$-T_{t1} r_3 cos\psi_1 - \; T_{t2} r_3 cos\psi\_2 - \; k_r \theta_{3r} = 0$$

(4.3.2.12)

Diferenciando a tensão em relação a dx_se utilização $\chi_3 = \; \theta_3 r_3$:

$$\frac{dT_{t1}}{dx_s} cos\psi_1 + T_{t1}\frac{cos\psi_1}{dx_s} + \frac{dT_{t2}}{dx_s} cos\psi_2 + T_{t2}\frac{\cos\psi_2}{dx_s} = -k_s \chi_3$$

Como $T_{t1} = T_{t2}$

$$dT_t = \; -\frac{(T_t(\xi_1 + \; \xi_2) + K_s) dx_s}{(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)}$$

(4.3.2.13)

onde ξ_1 e ξ_2 são definidos como (ver Apêndice A) :

$$\xi_1 = \frac{d\cos\psi_1}{dx_s} = -sen\left(-\frac{1}{r_3} - \frac{l_{1b}}{l_{12}} + \frac{(r_1 + r_2)l_{1a}}{l_{12}^2 l_1}\right)$$

(4.3.2.14)

$$\xi_2 = \frac{d\cos\psi_2}{dx_s} = -sen\left(-\frac{1}{r_3} - \frac{l_{2b}}{l_{22}} + \frac{(r_2 + r_4)l_{2a}}{l_{22}^2 l_2}\right)$$

(4.3.2.15)

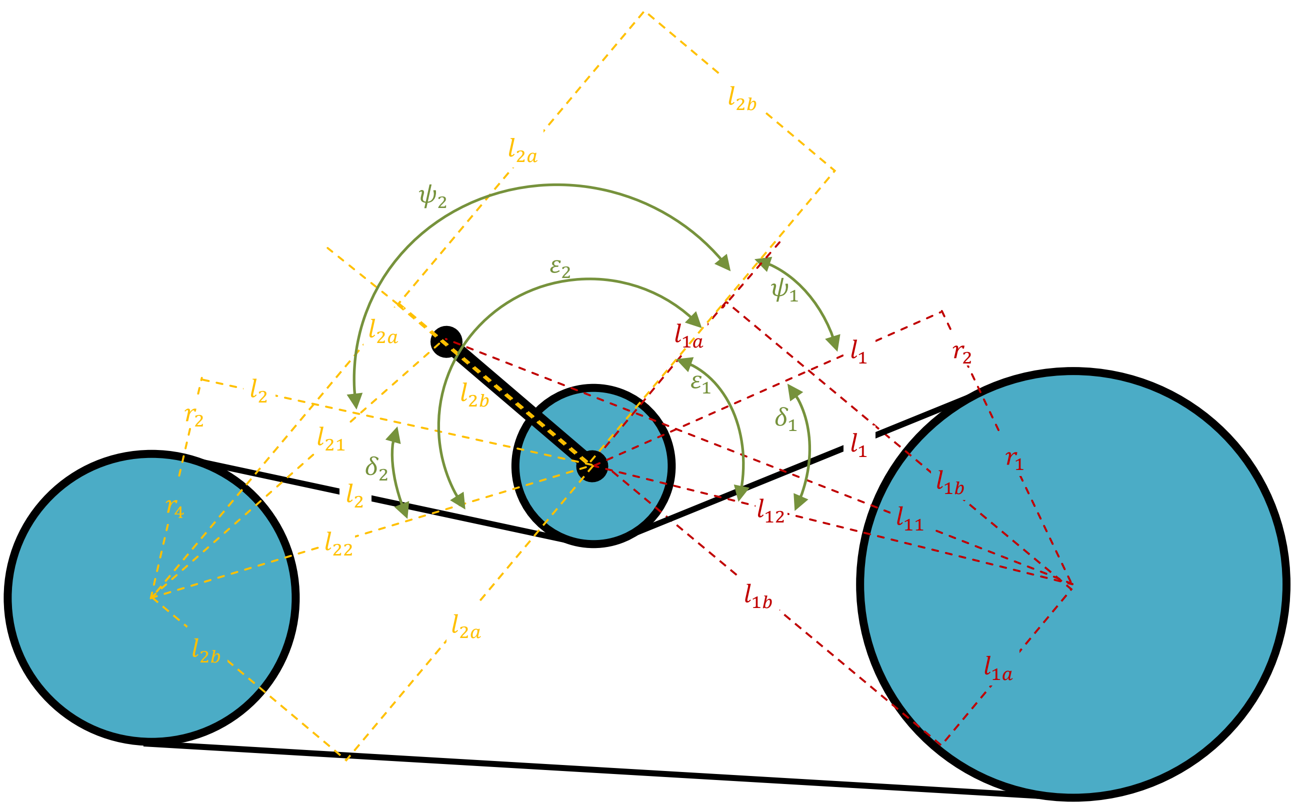


Figura 4.4 - Retas e ângulos auxiliares

Resolvendo as equações (4.3.2.9) e (4.3.2.13) simultaneamente para dT_t:

$$dT_t = \frac{-dT_c}{\frac{EA}{L}\left(\frac{(cos\psi_1 + cos\psi_2)^2}{P_t(\xi_1 + \xi_2) + K_s}\right) + 1}$$

(4.3.2.16)

Usando (4.3.2.2):

$$\kappa = \left[\frac{1}{\frac{EA}{L}\left(\frac{(cos\psi_1 + cos\psi_2)^2}{T_t(\xi_1 + \xi_2) + K_s}\right) + 1}\right]$$

(4.3.2.17)

Sendo $dT_o = dT_t + \ dT_c$, e substituindo dT em (4.3.2.13),

$$dT_o = \frac{dT_c}{\frac{L}{EA}\left(\frac{T_t(\xi_1 + \xi_2) + K_s}{(cos\psi_1 + cos\psi_2)^2}\right) + 1}$$

(4.3.2.18)

E substituindo (4.3.2.18) em (4.3.2.16):

$$\eta = \frac{1}{\frac{L}{EA}\left(\frac{T_t(\xi_1 + \xi_2) + K_s}{(cos\psi_1 + cos\psi_2)^2}\right) + 1}$$

(4.3.2.19)

Note que para $v = 0$, $T_t = T_r$.

A formulação acima é válida para rotações infinitesimais do braço do tensionador, e fornece uma aproximação de primeira ordem do estado de operação. Adicionalmente, fornece uma medida simples da efetividade do mecanismo do tensionador. Assim, η pode ser considerado como a habilidade do sistema em manter a tensão de tração constante. Sendo n=1 excelente e η=0 muito ruim.

4.3.3 Interpretação da Constante de Suporte η

Na seção anterior a constante de suporte η foi definida como a derivada da tensão de operação total em relação à tensão centrífuga. Ao se multiplicar os numeradores de denominadores por $\left(\frac{EA}{L}\right)(cos\psi_1 + cos\psi_2)^2$ tem-se:

$$\eta = \frac{k_b}{(k_b + k_g + k_s)}$$

(4.3.3.1)

onde,

$$k_b = \left(\frac{EA}{L}\right)(cos\psi_1 + cos\psi_2)^2$$

$$k_g = T_r(\xi_1 + \xi_2)$$

$$k_s = \frac{k_r}{r_3^2}$$

(4.3.3.2)

- k_b é definido como a rigidez da correia e resulta da deformação longitudinal da correia e é sempre positiva

-k_g é definido como a rigidez geométrica (ver capítulo 3) e resulta da mudança dos ângulos de alinhamento. Pode ser positiva, negativa ou nula

- k_s é definido como a rigidez da mola (ver capítulo 3) e resulta da mola do tensionador e é sempre positiva

Logo, η, pode ser interpretado como a razão da rigidez da correia pela rigidez total do sistema.

4.3.4 Características da Constante de Suporte η

Nos sistemas de serra de fitas estudados por Mote (1965) η varia de 0 a 1. Entretanto, para o caso de transmissões por correia e autotensionador, η depende da rigidez geométrica $\mathrm{k_g}$, que pode ser positiva, negativa ou nula. Assim, $-\infty < \eta < \infty$. Vamos analisar os seguintes casos limítrofes:

- Rigidez da mola infinita, $\mathrm{k_s} \rightarrow \infty$: neste caso o sistema de acionamento por correia tipo serpentina e tensionador se reduz a um sistema de polias de centro fixos e $\eta = 0$

- Rigidez geométrica nula, $\mathrm{k_g} \rightarrow 0$:: neste caso $|dL/dx_s|$ (ver apêndice A) é máximo e $0 < \eta < 1$. Se aproxima de 1 quando $\mathrm{k_s} \rightarrow 0$ e se aproxima de Zero quando $\mathrm{k_s} \rightarrow \infty$.

- Rigidez da mola nula, $\mathrm{k_s} \rightarrow 0$: Neste caso se $\mathrm{k_g} > 0$, $0 < \eta < 1$. Mas se $\mathrm{k_g} < 0$, haverá tres possibilidades:

1) Se $(k_b + k_g) \geq 0$: $1 < \eta \leq \infty$

2) Se $(k_b + k_g) < 0$: $\eta < 0$, o que resulta em instabilidade

3) Se $k_g = 0$: $\eta = 1$

Normalmente tem-se $k_s \ll k_b, |k_g| \ll k_b$ e $k_s + k_g > 0$. Com estas condições, a constante de suporte encontra-se aproximadamente entre 0 e 1 ($0 < \eta < 1$). Entretanto para algumas posições do braço do tensionador, $k_s + k_g < 0$ e $\eta > 1$.

4.3.5 Efeito da Constande de Suporte η na Estabilidade

Manter a estabilidade no estado de operação é essencial para o sistema. A estabilidade na referência é determinada como segue.

A energia potencial no estado de referência é:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{EA}{L_r}\right)(L_r - L)^2 + \frac{1}{2}k_s x_s^2$$

(4.3.5.1)

Onde L_r é o comprimento da correia no estado de referência e L é o comprimento da correia sem nenhuma tensão aplicada.

Aplicando a derivada em relação ao movimento do braço do tensionador, x_s,

$$\frac{dU}{dx_s} = \frac{EA}{L_r}\,(L_r - L)\frac{dL_r}{dx_s} + k_s x_s$$

(4.3.5.2)

Conforme definido no Apêndice A, $\frac{dL_r}{dx_s}$ é o ganho do tensionador:

$$\frac{dL_r}{dx_s} = (\cos\psi_1 + \cos\psi_2)$$

(4.3.5.3)

e

$$(L_r - L) = \left(\frac{L_r}{EA}\right)T_r$$

(4.3.5.4)

Assim:

$$\frac{dU}{dx_s} = T_r\,(\cos\psi_1 + \cos\psi_2) + \; k_s x_s$$

(4.3.5.5)

Aplicando-se a segunda derivada e utilizando a definição de $\xi_n = d(cos\psi_n)/dx_s$:

$$\frac{d^2U}{dx_s^2} = \frac{dT_r}{dx_s}\,(\cos\psi_1 + \cos\psi_2) + \; T_r(\xi_1 + \; \xi_2) + k_s$$

(4.3.5.6)

Usando:

$$dL = \frac{L_r}{EA}\,dT_r$$

(4.3.5.7)

Tem:se

$$\frac{dT_r}{dx_s} = \frac{EA}{L_r}\frac{dL_r}{dx_s} = \left(\frac{EA}{L_r}\right)(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)$$

(4.3.5.8)

Substituindo (4.3.5.8) em (4.3.5.6):

$$\frac{d^2U}{dx_s^2} = \frac{EA}{L_r}\,(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)^2 + \; T_r(\xi_1 + \; \xi_2) + k_s$$

(4.3.5.9)

Assim, o requisito para estabilidade na referência é que $\frac{d^2U}{dx_s^2} > 0$

$$\frac{EA}{L_r}\,(\cos\psi_1 + \cos\psi_2)^2 + \; T_r(\xi_1 + \; \xi_2) + k_s > \; 0$$

(4.3.5.10)

Ou seja:

$$k_b + k_g + k_s > 0$$

(4.3.5.11)

Portanto, para que o sistema seja estável a rigidez total deve ser maior que zero. Conforme discutido na seção anterior, k_be k_s são sempre positivos, enquanto k_g pode ser positivo ou negativo.

Alternativamente pode-se reescrever (4.3.5.11) como:

$$\eta > 0$$

Logo, η , além de ser um indicador da capacidade do sistema em manter a tensão de tração também é um indicador da estabilidade do sistema.

5 MÉTODO PARA A DETERMINAÇÃO DAS FREQUENCIAS NATURAIS

5.1 Introdução

Uma solução de forma fechada é proposta por Beikmann (1996) para analisar as vibrações livres associadas às equações (3.4.1) a (3.4.4) e (3.4.11), usando as tensões dinâmicas (3.4.5) a (3.4.7) através do método de Holzer.

O método de Holzer envolve três principais passos. Primeiro, uma solução geral das equações de movimento incluindo constantes de integração é sugerida. Em seguida, o número de constantes é reduzido pelas condições de contorno em uma extremidade da estrutura. Finalmente, a frequência natural ω é determinada de forma que uma solução não trivial satisfaça a última condição de contorno na outra extremidade da estrutura. O erro entre o valor calculado e o valor conhecido é zero quando ω é a frequência natural do sistema.

Entretanto, o sistema de serpentina é composto por uma estrutura cíclica (polias e correias) e o braço do tensionador. A estrutura cíclica não tem uma extremidade e reage dinamicamente com o braço do tensionador. Portanto, dois loops de iteração são utilizados na solução. Um loop interno para a estrutura cíclica e um loop externo para o tensionador.

Primeiramente são atribuídos valores para ω, a frequência de oscilação; para T_{d2}, a tensão dinâmica do tramo de correia 2; e para χ_4, o deslocamento da polia 4. ω é iterado no loop externo e T_{d2} é iterado no loop interno. O valor de χ_4é arbitrariamente designado como $1/\omega^2$. As equações de movimento das polias são resolvidas sucessivamente no loop interno até o recálculo de T_{d2}. A diferença entre o valor assumido e o valor encontrado é calculada e o valor de T_{d2} é reajustado até que a diferença seja zero. Depois os deslocamentos transversais dos tramos da correia são calculados com os resultados do loop interno e são verificados na equação de movimento do tensionador no loop externo. No loop externo o valor de ω é ajustado e o loop interno repetido até que a equação de movimento do tensionador seja satisfeita.

5.2 Loop interno

Assume-se que a tensão dinâmica T_{dn} e o deslocamento das polias χ_n tenham o seguinte movimento harmônico:

$$T_{dn} = \hat{T}_{dn} \cos \omega t \quad n = 1,2,3 \tag{5.2.1}$$

$$\chi_n = \hat{\chi}_n cos\omega t \qquad n = 1,2,3,4 \tag{5.2.2}$$

onde, $\hat{T}_{dn}$ e $\hat{\chi}_n$são a amplitude da tensão dinâmica e o deslocamento das polias e tensionador respectivamente.

Valores para $\hat{T}_{d2}$ e $\hat{\chi}_4$ são assumidos. O valor de $\hat{\chi}_4$ é arbitrário, pois a amplitude da autofunção é arbitrária e permanece fixo enquanto $\hat{T}_{d2}$ é ajustado. As equações de movimento das polias (3.4.5) a (3.4.10) são resolvidas consecutivamente da seguinte forma:

$$\hat{T}_{d3} = \hat{T}_{d2} - m_4 \omega^2 \hat{\chi}_4 \tag{5.2.3}$$

$$\hat{\chi}_1 = \hat{\chi}_4 + \frac{\hat{T}_{d3}}{K_3} \tag{5.2.4}$$

$$\hat{T}_{d1} = \hat{T}_{d3} - m_1\omega^2\hat{\chi}_1$$

(5.2.5)

$$\hat{\chi}_2 = \frac{\hat{T}_{d1} - \hat{T}_{d2}}{m_2\omega^2}$$

(5.2.6)

$$\hat{\chi}_3 = \frac{\frac{\hat{T}_{d1}}{K_1} + \chi_1 - \chi_2}{cos\psi_1}$$

(5.2.6)

e finalmente

$$\hat{T}_{d2a} = K_2(\hat{\chi}_3 cos\psi_2 - \hat{\chi}_2 + \hat{\chi}_4)$$

(5.2.7)

Note que $\hat{T}d_{2a}$ é uma função do valor assumido para $\hat{T}_{d2}$. Assim o método de Newton–Raphson é utilizado para ajustar $\hat{T}_{d2}$ até que $\hat{T}_{d2a} = \hat{T}_{d2}$

5.3 Loop Externo

O loop externo captura o acoplamento entre o movimento transversal dos tramos adjacentes ao tensionador e o movimento do braço do tensionador. Para isso, soluções gerais para o movimento transversal dos tramos da correia são comparadas à equação de movimento do tensionador. As soluções gerais envolvem constantes de integração que podem ser determinadas através das condições de contorno. A satisfação da última condição de contorno fornece uma equação característica, referida como função erro, para a determinação das frequências naturas ω_r. Duas análises podem ser executadas. Uma no sentido anti-horário, começando pelo tramo de correia 1 e terminando no tramo de correia 2; e outra no sentido horário, começando pelo tramo de correia 2 e terminando no tramo de correia 1. As duas análises são executadas, pois a função erro contém singularidades.

A solução geral da equação de movimento transversal para um tramo de correia apresentada por Sack (1954) é

$$w_n(x,t) = e^{i\omega t} e^{\frac{i\omega t}{v'_{an}}} \left[A\, sen\left(\frac{\omega x}{v'_n}\right) + B\cos\left(\frac{\omega x}{v'_n}\right)\right] + e^{-i\omega t} e^{-e^{\frac{i\omega t}{v'_a}}} \left[C\, sen\left(\frac{\omega x}{v'_n}\right) + D\cos\left(\frac{\omega x}{v'_n}\right)\right]$$

(5.3.1)

onde:

$$i = \sqrt{-1}$$

(5.3.2)

e a velocidade de propagação de fase é

$$v'_{an} = \frac{v_n^2 - v^2}{v}$$

(5.3.3)

e a velocidade média efetiva da onda é:

$$v'_n = \frac{v_n^2 - v^2}{v_n}$$

(5.3.4)

onde, v é a velocidade axial da correia e v_né a velocidade de propagação das ondas transversais relativo à correia:

$$v_n = \sqrt{\frac{T_{on}}{m}}$$

(5.3.5)

5.3.1 Loop Externo no Sentido anti-horário

Usando as condições de contorno do tramo 1, $w_1(0,t) = 0$ e $w_1(l_1,t) = \hat{\chi}_3 cos\omega t\ sen\psi_1$, para determinar as constantes de integração de (5.3.1), tem-se:

$$w_1(x,t) = a_1 sen\left(\frac{\omega x}{v_1'}\right)\cos\left(\omega t + \omega\left(\frac{x-l_1}{v_{a1}'}\right)\right)$$

(5.3.1.1)

$$a_1 = \frac{\hat{\chi}_3\ sen\psi_1}{sen\left(\frac{\omega l_1}{v_1'}\right)}$$

(5.3.1.2)

Usando a condição de contorno do tramo 2 $w_2(0,t) = \hat{\chi}_3 cos\omega t\ sen\psi_2$ em (5.3.1):

$$w_2(x,t) = \left[a_2\ sen\left(\frac{\omega x}{v_2'}\right) + \hat{\chi}_3\ sen\psi_2 \cos\left(\frac{\omega x}{v_2'}\right)\right]\cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v_{a2}'}\right)\right)$$

(5.3.1.3)

Para se determinar o valor de a_2 as soluções acima são substituídas na equação de movimento do braço do tensionador (3.4.12):

$$\left(-T_{t1}w_{1,x}(l_1,t) + mvw_{1,t}(l_1,t)\right)sen\psi_1 + \left(T_{t2}w_{2,x}(0,t) - mvw_{2,t}(0,t)\right)sen\,\psi_2$$
$$- k_1(\chi_3\cos\psi_1 + \chi_2 - \chi_1)\cos\psi_1 - k_2(\chi_3\cos\psi_2 + \chi_4 - \chi_2)\cos\psi_2 - k_4\chi_3$$
$$= m_3\chi_{3,tt}$$

(5.3.1.4)

Utilizando (3.4.8), (3.4.9) e a segunda derivada de χ_3 no tempo:

$$\left(Tt_1 w_{1,x}(l_1) - mcw_{1,t}(l_1)\right) sen\psi_1 + \left(-T_{t2} w_{2,x}(0) + mcw_{2,t}(0)\right) sen\psi_2 + Td_1 cos\psi_1 + Td_2 cos\psi_2 + k_4 \hat{\chi}_3 cos\omega t = m_3 \omega^2 \hat{\chi}_3 cos\omega t$$

(5.3.1.5)

Substituindo os valores de $w_{1,x}(l_1), w_{1,t}(l_1), w_{2,x}(0),\ w_{2,t}(0)$ e (5.2.1) na equação acima:

$$\frac{T_{t1} a_1 \omega}{v_1'} \cos\left(\frac{\omega l_1}{v_1'}\right) sen\psi_1 + \hat{T}_{d1}\ cos\psi_1 - \frac{T_{t2} a_2 \omega}{v_2'}\ sen\psi_2 + \hat{T}_{d2} cos\psi_2 + k_4 \hat{\chi}_3 = m_3 \omega^2 \hat{\chi}_3$$

(5.3.1.6)

Isolando a_2:

$$a_2 = \frac{\frac{T_{t1} a_1 \omega}{v_1'} \cos\left(\frac{\omega l_1}{v_1'}\right) sen\psi_1 + \hat{T}_{d1} cos\psi_1 + \hat{T}_{d2} cos\psi_2 + (\ k_4 - m_3 \omega^2)\ \hat{\chi}_3}{\frac{T_{t_2} \omega}{v_2'} sen\psi_2}$$

(5.3.1.7)

Com o valor de a_2 agora é possível avaliar a última condição de contorno $w_2(l_2, t) = 0$ em (5.3.1.3):

$$w_2(l_2, t) = \left[a_2\ sen\left(\frac{xl_2}{v_2'}\right) + \hat{\chi}_3\ sen\psi_2 \cos\left(\frac{\omega l_2}{v_2'}\right)\right] \cos\left(\omega\left(t + \frac{l_2}{v_{a2}'}\right)\right) = 0$$

Logo essa condição de contorno só será satisfeita somente quando o termo

$$w_{2erro} = \left[a_2\ sen\left(\frac{xl_2}{v_2'}\right) + \hat{\chi}_3\ sen\psi_2 \cos\left(\frac{\omega l_2}{v_2'}\right)\right]$$

(5.3.1.8)

for igual a zero, determinando que o valor de ω é uma frequência natural. A frequência ω é então ajustada pelo método de Newton–Raphson e o loop interno é reavaliado até que w_{2erro} seja muito próximo de zero.

5.3.2 Loop Externo no Sentido Horário

A mesma análise é feita no sentido horário, ou seja, começando pelo tramo 2 e terminando no tramo 1.

Assim as condições de contorno para o tramo 2, $w_2(0,t) = \hat{\chi}_3 \cos\omega t \, sen\psi_2$ e $w_2(l_2,t) = 0$, para determinar as constantes de integração de (6.2.1), tem-se:

$$w_2(x,t) = a_2 sen\left(\frac{\omega(l_2 - x)}{v_2'}\right) \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{v'_{a2}}\right)\right)$$

(5.3.2.1)

onde:

$$a_2 = \frac{\chi_3 sen\psi_2}{sen\left(\frac{\omega l_2}{v_2'}\right)}$$

(5.3.2.2)

Utilizando a equação de movimento do braço do tensionador (3.4.12):

$$a_1 = \frac{\frac{T_{t2} a_2 \omega l_2}{v_2'} \cos\left(\frac{\omega l_2}{v_2'}\right) sen\psi_2 + \hat{T}_{d1} cos\psi_1 + \hat{T}_{d2} cos\psi_2 + (k_4 - m_3\omega^2)\chi_3}{\frac{T_{t1}\omega \, sen\psi_1}{v_1'}}$$

(5.3.2.3)

A última condição de contorno $w_1(0,t) = 0$, é satisfeita somente quando o termo

$$w_{1erro} = \left[a_1\, sen\left(\frac{xl_1}{v_1'}\right) + \hat{\chi}_3\, sen\psi_1 \cos\left(\frac{\omega l_1}{v_1'}\right)\right]$$

(5.3.2.4)

for igual a zero, determinando que o valor de ω é uma frequência natural. A frequência ω é então ajustada pelo método de Newton–Raphson e o loop interno é reavaliado até que $\mathrm{w_{1erro}}$ seja muito próximo de zero.

5.3.3 Vibração Transversão do Tramo 3

A vibração transversal do tramo 3 não está acoplado aos movimentos dos outros componentes do sistema na análise linear. A solução geral de Sack (1954) com as condições de contorno do tramo 3 ($w_3(0,t) = w_3(l_3,t) = 0$) se resume a:

$$\omega_n = n\pi v'_3/l_3 \qquad\qquad n = 1,2,3 \ldots$$

(5.3.3.1)

onde, v'_3 é definido da mesma forma que v'_1 e v'_2 para os tramos 1 e 2 respectivamente.

6 DISCUSSÃO E ANÁLISE TEÓRICA

Um aplicativo para a implementação do modelo apresentado neste trabalho foi desenvolvido em Visual Basic. A tela do software é mostrada na figura 6.1

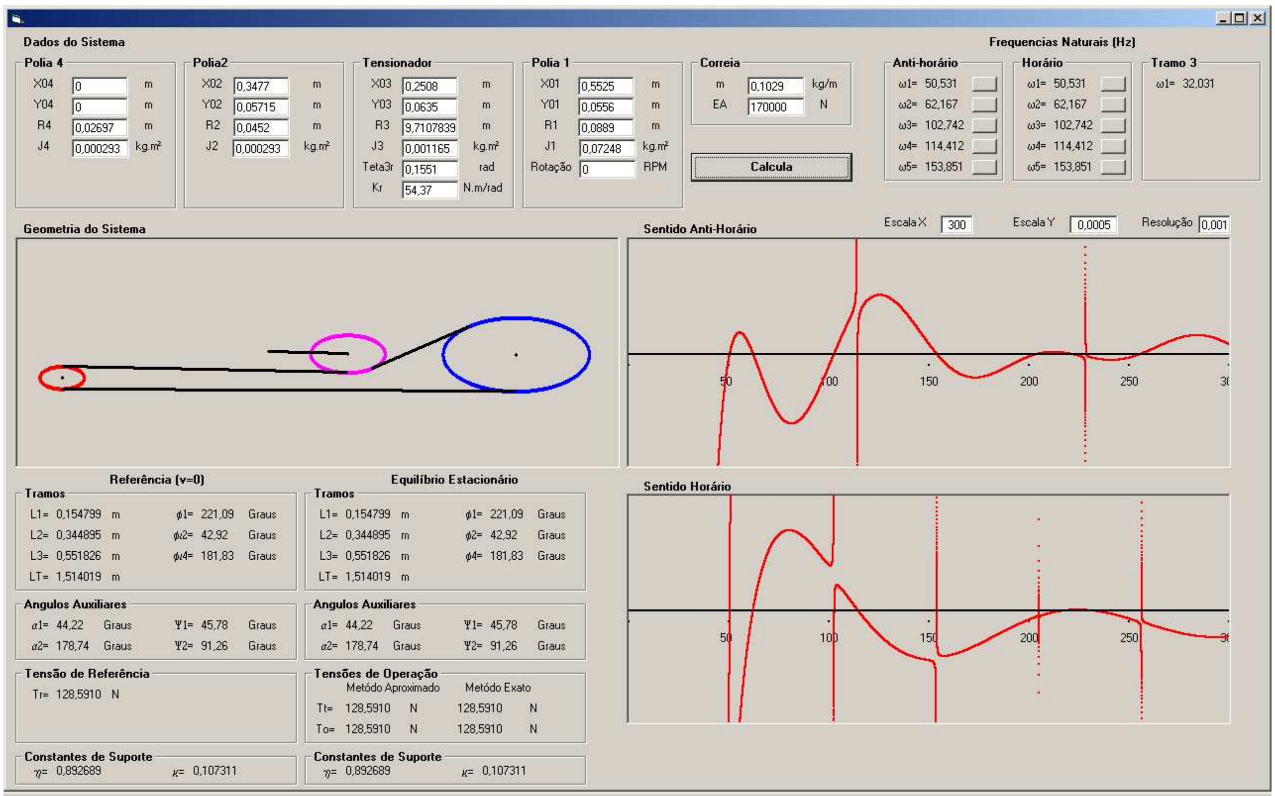


Figura 6.1 – Tela do Sistema Implementado

Na seção dados do sistema são inseridos as dimensões e características das polias e correia. Após se acionar o botão Calcula o software apresenta uma representação gráfica do sistema, os comprimentos dos tramos da correia, os ângulos auxiliares, as tensões de tração e de operação e as constantes de suporte tanto para a posição de referencia quanto para o posição em operação. Apresenta ainda as frequências naturais do sistema, os gráfico das funções erros (5.3.1.8) e (5.3.2.4) e os modos de vibração dos tramos 1 e 2 ao se clicar nos botões ao lado das frequências naturais. .

A fim de validar o software foram utilizados os dados do protótipo desenvolvido por Beikmann. A tabela 6.1 contém os dados deste sistema:

	Polia 1	Polia 2	Tensionador	Polia 4	Correia
Posição X (m)	0,5525	0,3477	0,2508	0	-
Posição Y (m)	0,0556	0,05715	0,0635	0	-
Raio (m)	0,0889	0,0452	0,097	0,02697	-
Momentos de Inércia (kg-m²)	0,07248	0,000293	0,001165	0,000293	-
Constante de Rigidez da Mola do Tensionador	-	-	54,37	-	-
Módulo de Rigidez Longitudinal	-	-	-	-	170000
Massa Específica da Correia (kg/m)	-	-	-	-	0,1029

Tabela 6.1 – Dados do Sistema

Os resultados obtidos foram comparados com os dados obtidos por Beikmann (1996) e L.Zhang at al (2007). A tabela mostra a comparação dos resultados obtidos com o sistema com velocidade zero. Pode-se notar que a correlação entre os resultados é muito boa.

Modo de Vibração	Experimental (Beikmann)	Teórico (Beikmann)	Teórico (L.Chang)	Teórico (presente estudo)	Modo Dominante
1	33	32,03	32,03	32,03	1º Modo de Vibração Tramo 3
2	51,75	50,52	50,53	50,53	1º Modo de Vibração Tramo 2
3	62,5	62,22	62,18	62,17	1º Modo de Vibração Tensionador
4	N.D.	N.D.	102,5	102,74	2º Modo de Vibração Tramo 2
5	N.D.	N.D.	114,19	114,41	1º Modo de Vibração Tramo 1
6	N.D.	N.D.	153,75	153,85	3º Modo de Vibração Tramo 2

Tabela 6.2 – Comparação entre os resultados obtidos por Beikmann (1996), L.Chang (2007) e o presente estudo

O primeiro modo de vibração ocorre a 32,03 hz e é o modo transversal do tramo 3.

As figuras de 6.2 a 6.7 mostram os modos de vibração de 2 a 6 obtidos pelo aplicativo e uma representação esquemática. Os modos de vibração das polias não são representados por não fazerem parte do escopo deste trabalho.

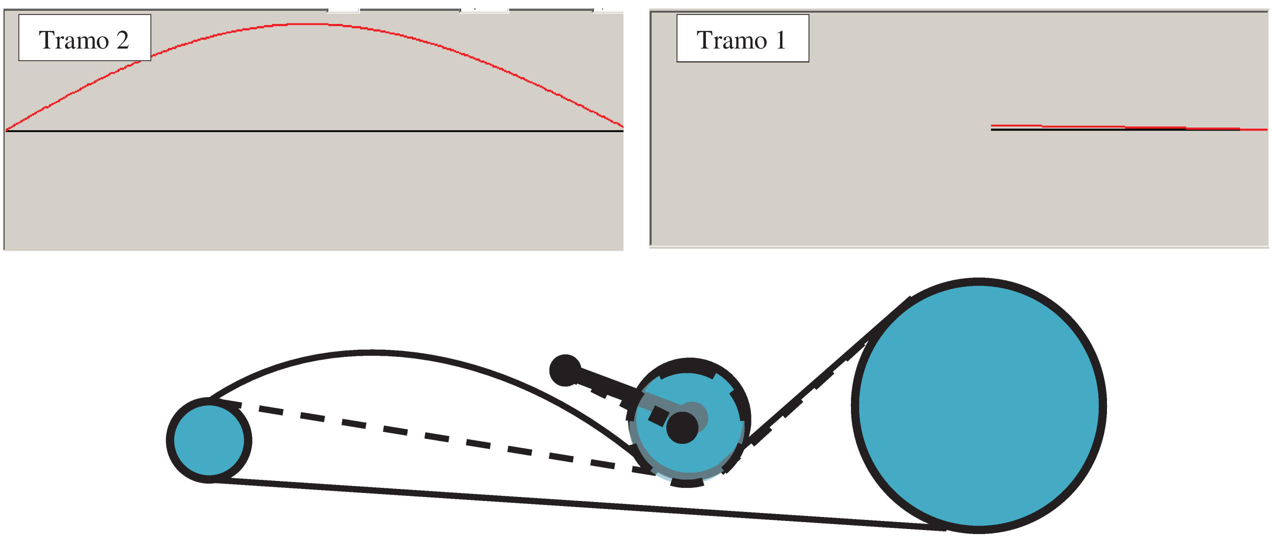


Figura 6.2. 1º Modo de Vibração do Tramo 2 a 50,531 Hz

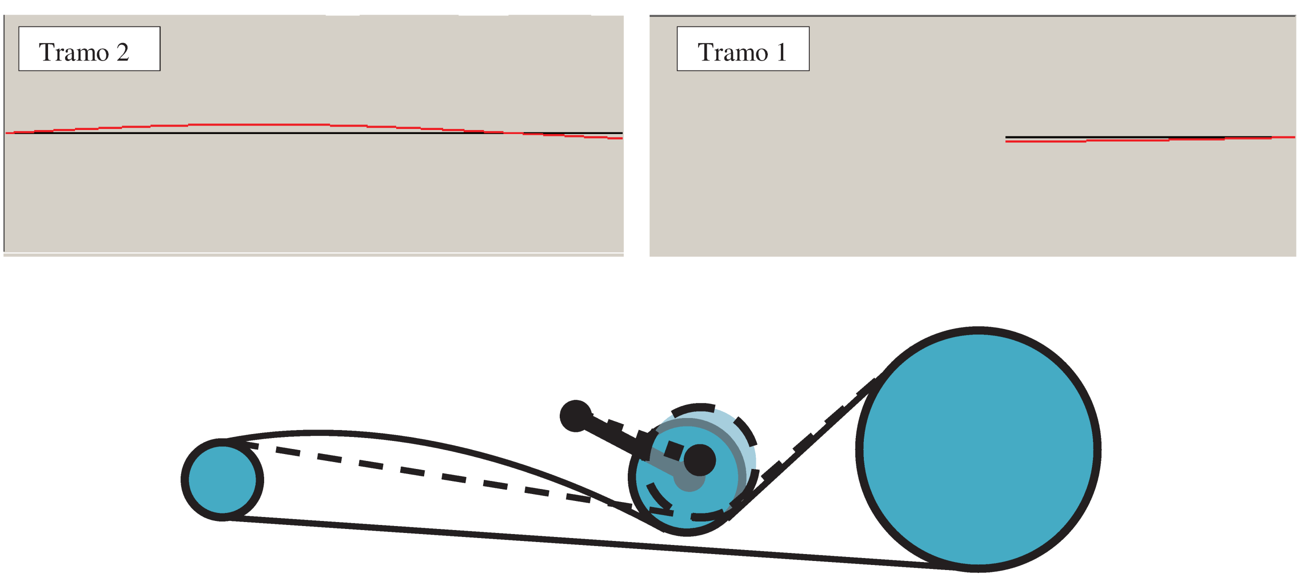


Figura 6.3. 1º Modo de vibração do tensionador a 62,17 H

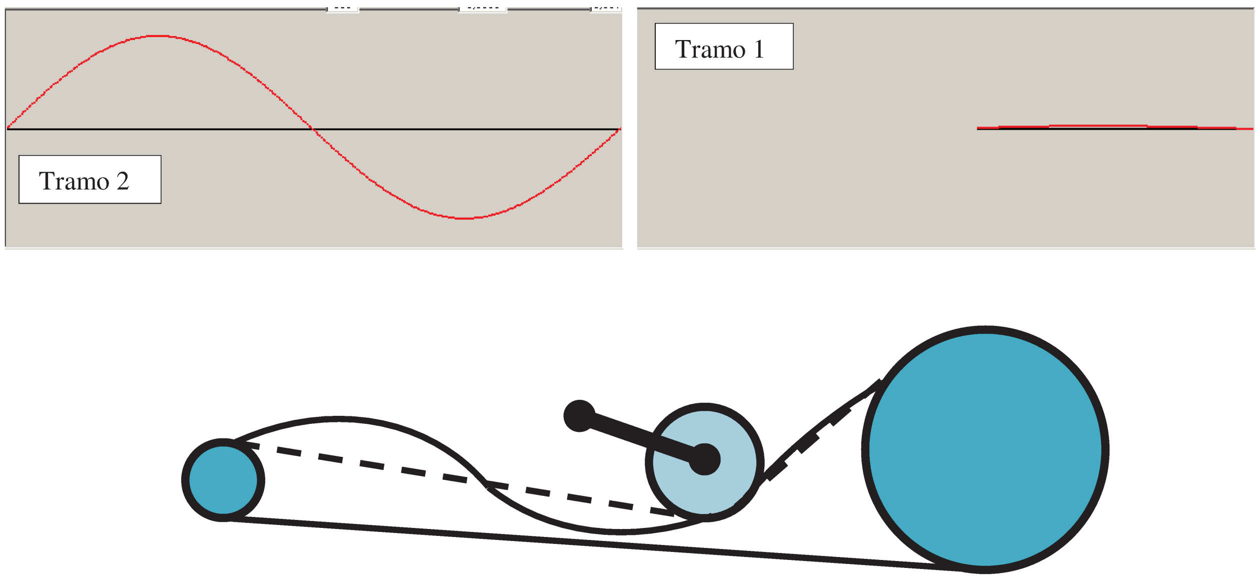


Figura 6.4 2º Modo de Vibração do Tramo 2 a 102,742 Hz

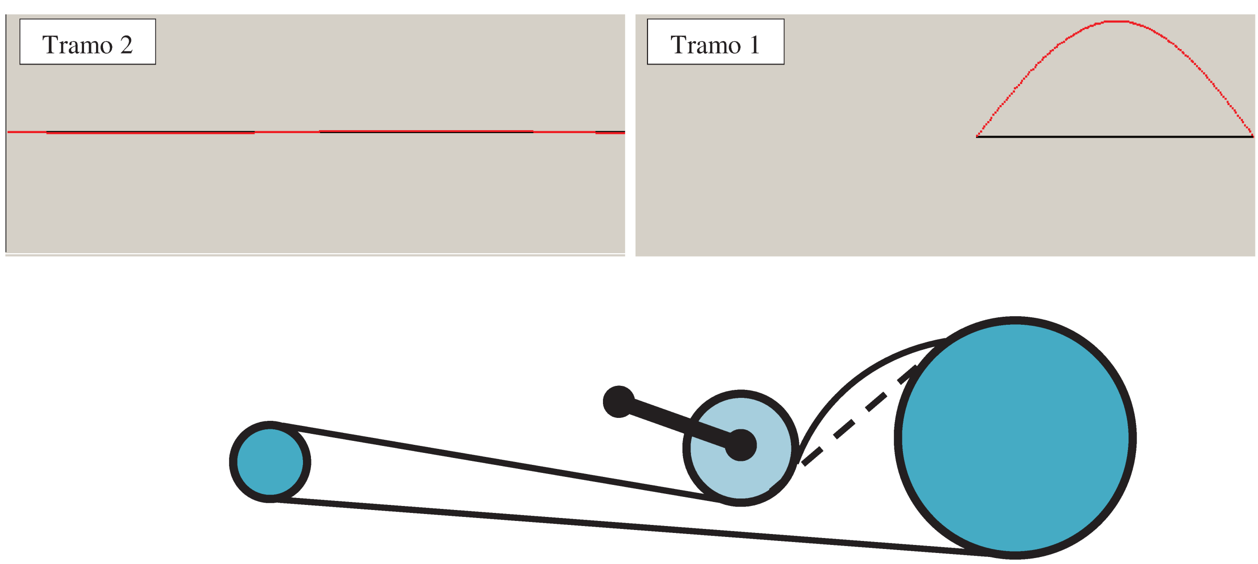


Figura 6.5. 1º Modo de Vibração do Tramo 1 a 114,442 Hz

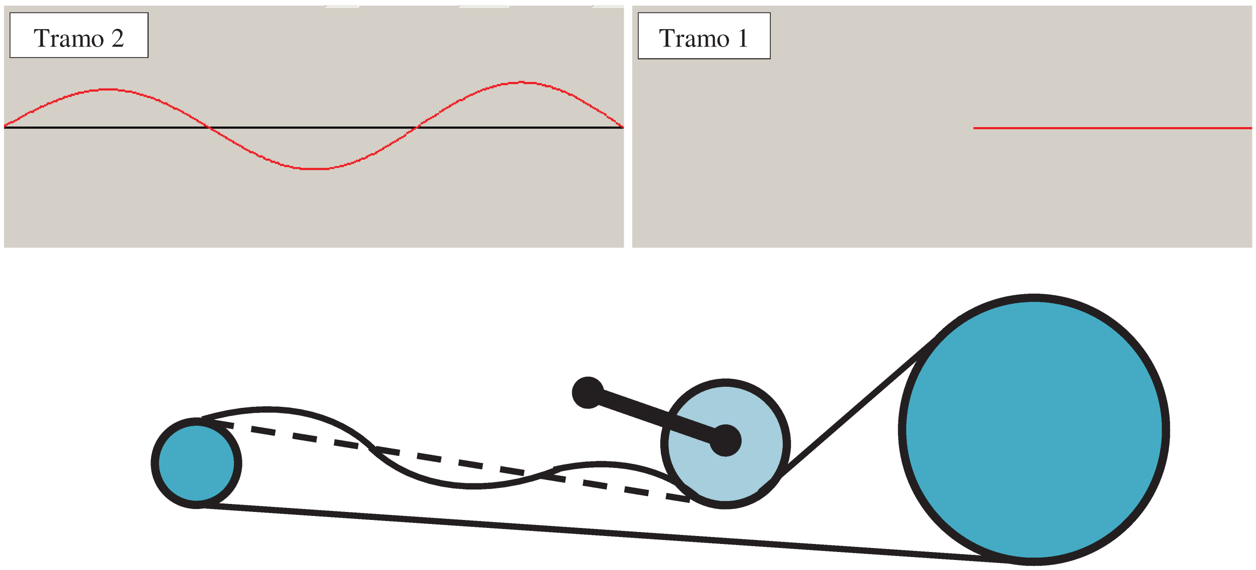


Figura 6.6 3º Modo de Vibração do Tramo 2 a 153,85 Hz

6.1 Relação entre o Método Exato e Aproximado

No capítulo 4 dois métodos para o cálculo das tensões foram utilizados. A solução numérica fornece uma solução exata, mas não dá nenhuma indicação da efetividade do tensionador, ou seja, sua capacidade de manter a tensão de tração constante. A solução linear fornece uma solução aproximada e desenvolve a constante de suporte η para descrever a efetividade do tensionador.

A diferença dos resultados obtidos pelos métodos numérico e aproximado é mostrado na Figura 6.7. A diferença é dada por:

$$\frac{T_{t(aproximado)} - T_{t(exato)}}{T_{t(exato)}} \times 100 \tag{6.1.1}$$

onde $T_{t(aproximado)}$ é a tensão calculada pelo método aproximado e $T_{t(exato)}$ é a tensão calculada pelo método exato.

A correlação entre os métodos é excelente para baixas velocidades e boa para velocidades maiores. Assim, concluí-se que as constantes de suporte, ηe κ, fornecem uma avaliação útil do sistema.

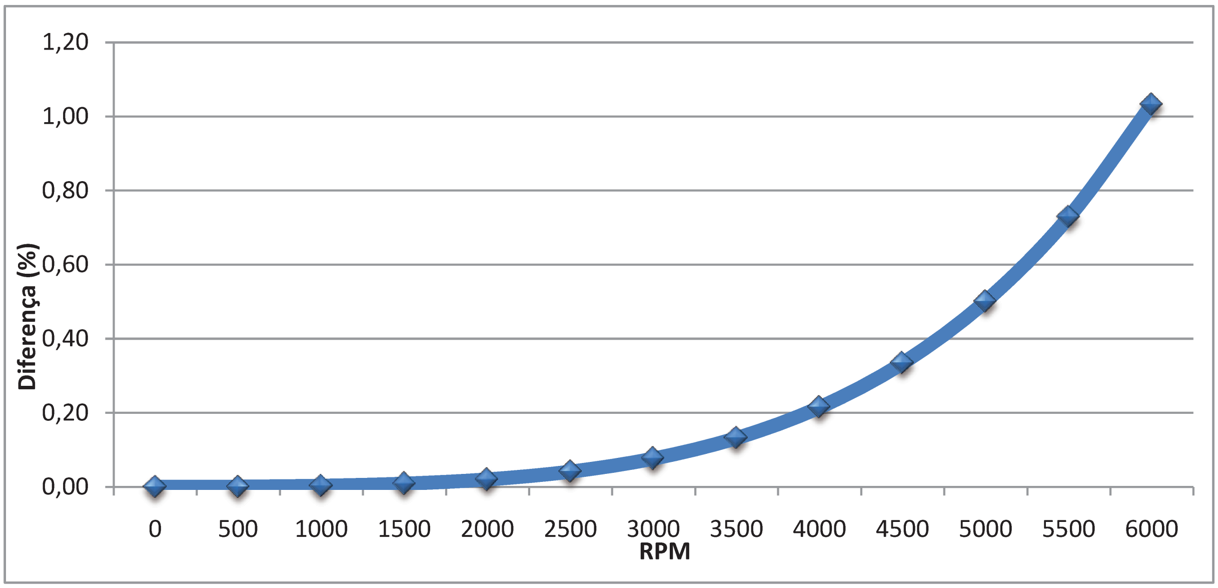


Figura 6.7 – Erro do Método Aproximado

6.2 Características da Função Erro

As frequências naturais são determinadas ao satisfazer a última condição de contorno através de em uma função erro que depende da frequência nas equações (5.3.1.8) e (5.3.2.4). Frequências onde o erro é zero são as frequências naturais. Entretanto, esta função erro exibe singularidades que dificultam a busca por raízes.

Aplicando-se o método de Holzer no sentido anti-horário (onde $w_2(l_2, t)$ é avaliado por último), o coeficiente a_1 é calculado e representa a magnitude do deslocamento transversal do tramo 1. A equação de a_1 é:

$$a_1 = \frac{\hat{\chi}_3 \, sen\psi_1}{sen\left(\frac{\omega l_1}{v_1'}\right)} \tag{6.2.1}$$

e é singular em $\omega = n \, \pi \, v_1'/l_1$, onde n é um inteiro. Esta singularidade é inerente da equação erro (5.3.1.7) e seriam as frequências naturais do tramo 1 se o mesmo tivesse as duas extremidades fixas. Se a massa da correia é pequena se comparada com a inércia das polias (o que normalmente acontece), ou se o braço do tensionador for praticamente perpendicular ao tramo 1, certamente as frequências naturais serão muito próximas ou iguais a de um tramo com as extremidades fixas. Assim, algumas raízes da equação erro estão próximas às essas singularidades. Similarmente, a análise no sentido horário, produz singularidades próximas às frequências naturais do tramos 2 se tivesse as duas extremidades fixas.

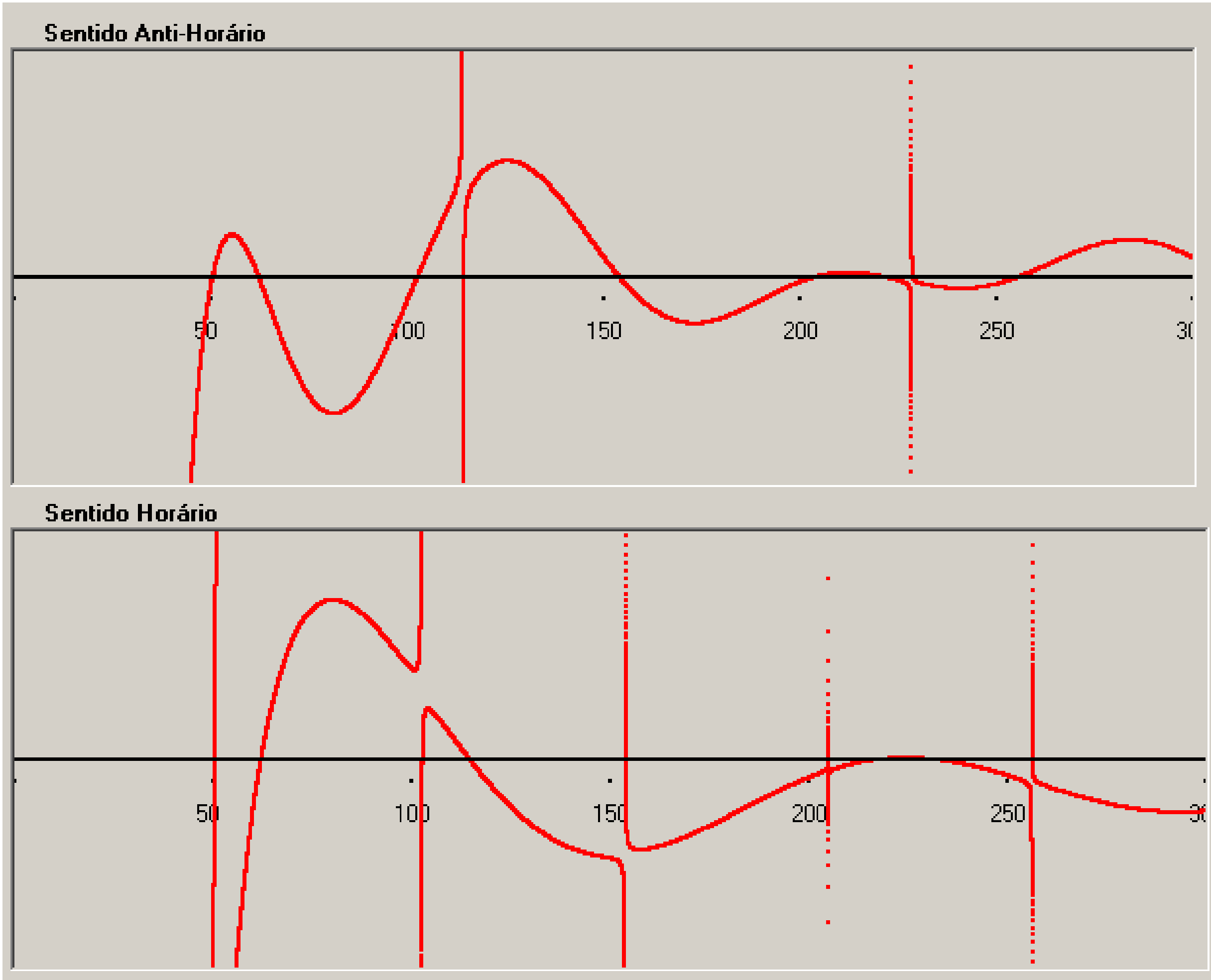


Figura 6.8 – Singularidades da Função Erro

Estas singularidades causam dois tipos de problemas numéricos:

- A singularidade passa de –infinito a +infinito (ou vice-versa) sem cruzar o zero, mas numericamente aparenta ter cruzado, podendo gerar uma raiz falsa

- a função erro pode passar de –infinito a + infinito e retornar próximo ao seu valor original numa faixa de frequência tão pequena que a raiz pode não ser identificada devido a uma inadequada resolução de frequência. A frequência adequada para evitar esta dificuldade depende de cada problema.

Felizmente, as singularidades das analises no sentido horário não coincidem com as do sentido anti-horário, exceto para o caso em que $l_1 = \left(\frac{p}{q}\right) l_2$, onde p e q são inteiros.

Assim, as raízes próximas de pontos de singularidades em uma análise podem ser reconhecidas pelo cruzamento do zero na outra análise, conforme mostrado na Figura 6.8. . Ao se realizar a análise nos dois sentidos se assegura que todas as frequências naturais serão encontradas com uma resolução de frequência razoável.

6.3 Frequências Naturais e Velocidade da Correia

A Figura 6.9 a relação das frequências naturais com o aumento da velocidade da correia (rotação da polia 1). Observa-se que as frequências naturais, dos modos em que a vibração transversal é predominante, decrescem com o aumento da rotação. O modo de vibração rotacional do braço do tensionador (62,17 Hz a 0 RPM) permanece praticamente constante até a rotação 4000 RPM.

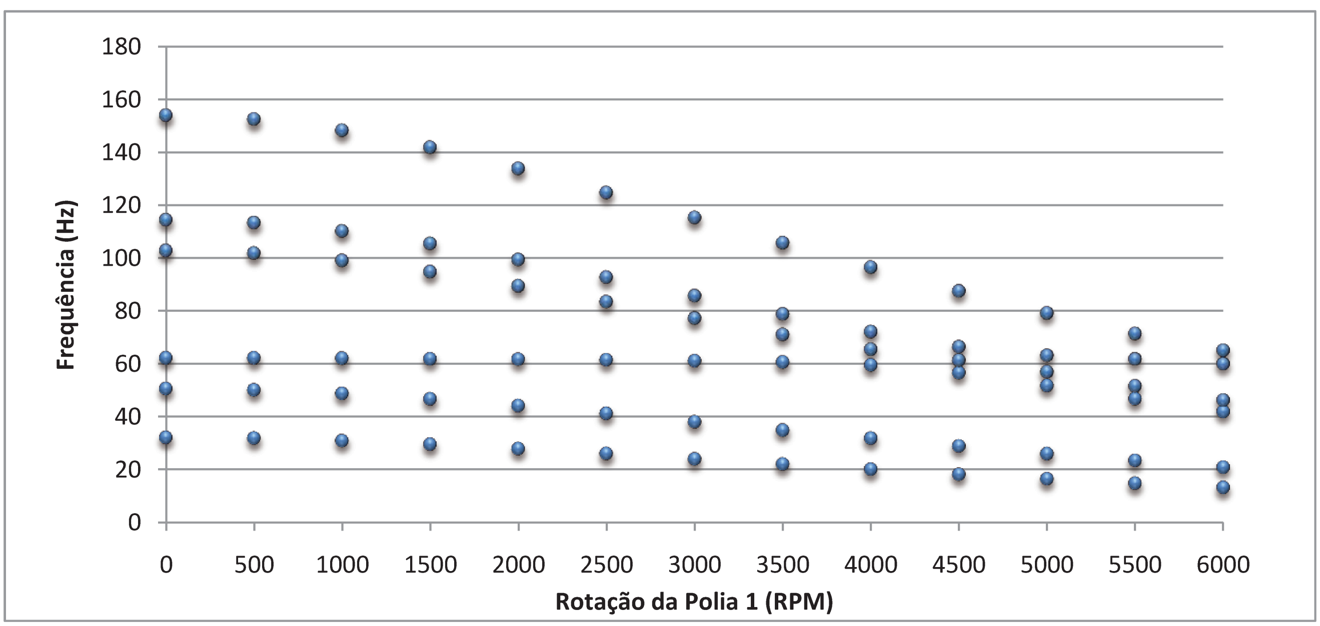


Figura 6.9 Frequências Naturais x Velocidade

A partir de 4000 RPM, as frequências, dos modos em que a vibração transversal é dominante, se aproximam da frequência de vibração do braço do tensionador (modo rotacional dominante). A partir desta rotação os modos de vibração transversais ganham energia do modo de vibração rotacional e vice-versa. A determinação do modo de vibração dominante já não é tão obvia.

A figura 6.10 mostra a clara distinção dos modos de vibração dominante a 0 RPM. Observa-se a 62,17 hz o modo de vibração rotacional do tensionador e a 102,74 o modo de vibração transversal do tramo 2.

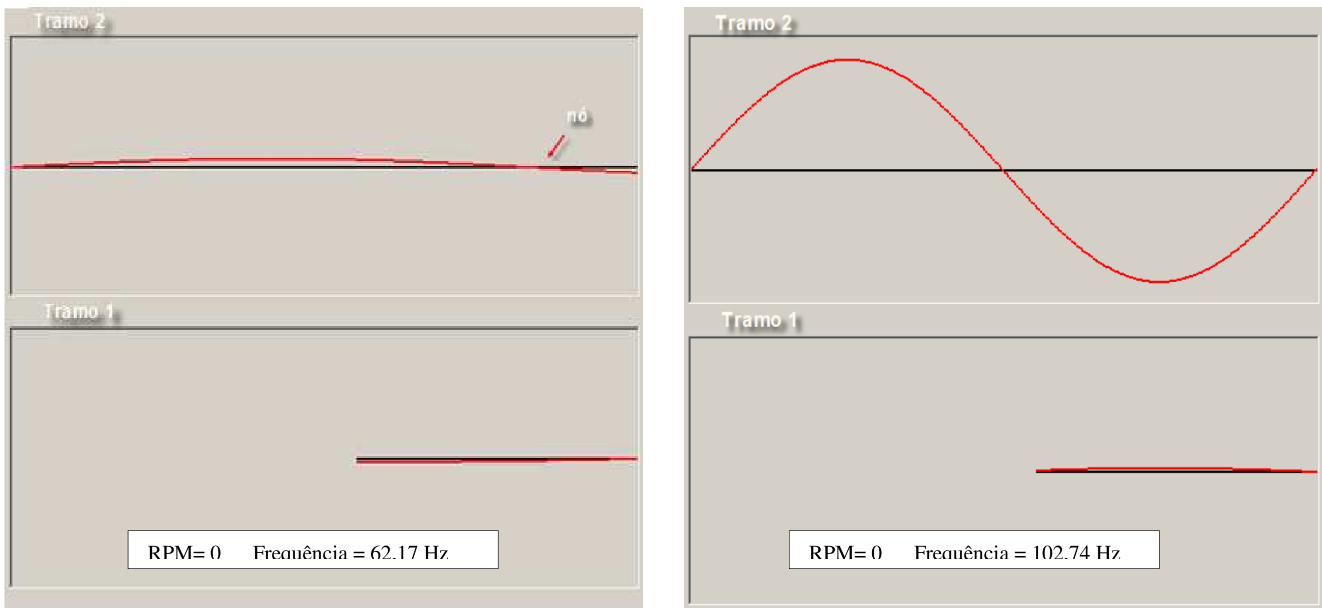


Figura 6.10 Frequências naturais a 0 RPM, com modo de vibração rotacional dominante (braço do tensionador) a 62,17 Hz e modo de vibração transversal do Tramo 2 a 102,74 Hz

A figura 6.11 mostra que a 5000 RPM a influência do modo de vibração transversal no modo de vibração rotacional e vice-versa.

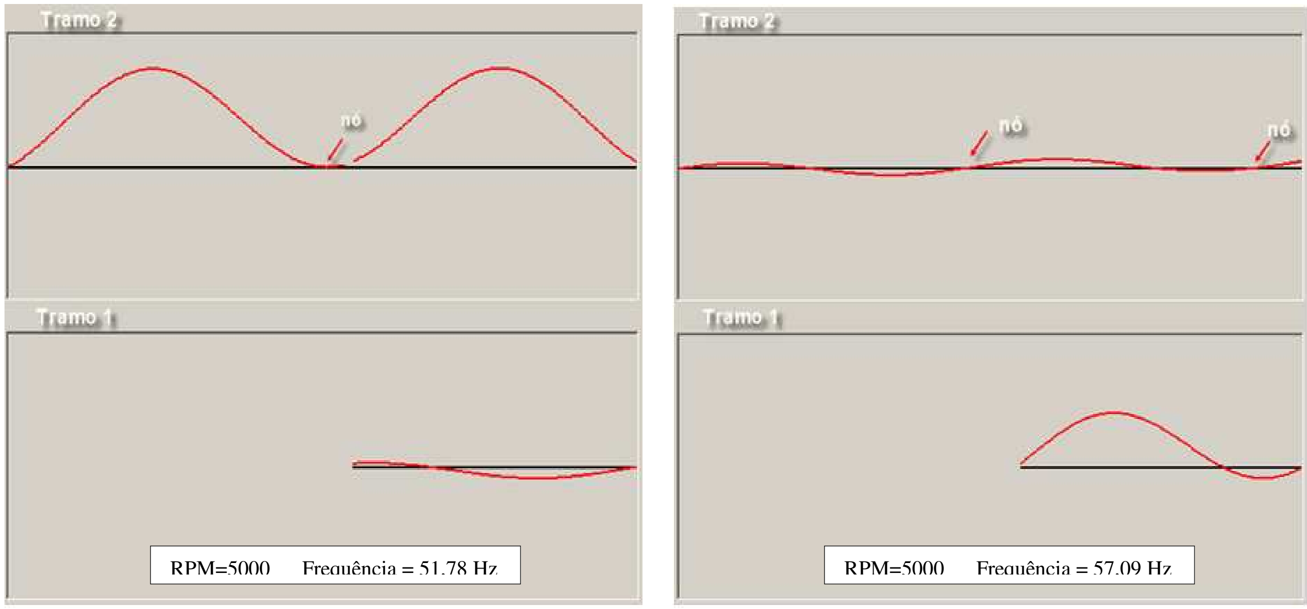


Figura 6.11 Frequências naturais a 5000 RPM apresentando tanto modos de vibrações transversais e rotacionais

Segundo Koivurova (1998), as frequencias naturais de materiais com movimento axial decrescem monotonicamente com o aumento da velocidade e atingem zero quando a velocidade da correia se iguala à velocidade da onda transversal.

6.4 Efeito da orientação do braço do tensionador

A orientação do braço do tensionador afeta a vibração do sistema de 3 maneiras:

- relacionando as tensões e geometria à velocidade da correia e a constante de suporte η.

- alterando a rigidez do braço do tensionador derivada do módulo de rigidez da correia

- determinando os termos de acoplamento linear entre o movimento do braço do tensionador e o movimento transversal dos tramos adjacentes

A tabela 6.3 mostra o efeito da orientação do braço tensionador nas frequências naturais. Nota-se que o 3º modo de vibração (1º modo de vibração do tensionador) é o que sofre maiores alterações, permanecendo as frequencias relacionadas aos tramos praticamente inalteradas. Isto ocorre devido à variação da geometria do sistema.

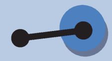
Modo de Vibraçaõ	ψ_1 ; ψ_2			
	 (45,78 ; 91,26)	 (49,54 ; 87,51)	 (53,29 ; 83,76)	 (60,79 ; 76,26)
1	32,03	32,03	32,03	32,03
2	50,53	50,65	50,73	50,83
3	62,17	64,31	66,28	69,54
4	102,74	102,76	102,77	102,80
5	114,41	114,46	114,51	114,61
6	153,85	153,86	153,86	153,78

Tabela 6.3 – Efeito da orientação do braço do tensionador

6.5 Efeito do Acoplamento do Movimento do Braço do Tensionador com o Movimento das Correias

Se desconsiderarmos o acoplamento do movimento do braço do tensionador com o movimento das correias o sistema apresentará modos de vibração puramente rotacionais e puramente transversais. Neste caso as extremidades dos tramos de correia são consideradas fixas e a frequência natural de vibração do braço tensionador é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_r}{J_3}}$$

(6.5.1)

A vibração transversal do braço do tensionador é dada pela solução de SACK (1954) especializada para a condição de correias com extremidades fixas (ver seção 5.3.3).

A tabela 6.4 compara as frequências naturais de vibração considerando o sistema desacoplado e acoplado a 0 RPM e a 4000 RPM. Observa-se que as frequências naturais dos tramos 1 e 2 permanecem praticamente inalteradas nas duas considerações. Entretanto, a frequência natural do braço do tensionador é alterada pelo acoplamento entre o movimento de rotação do braço e os movimento transversais dos tramos 1 e 2.

	Frequencias Naturais a 0 RPM (Hz)	
	Sem Acoplamento	Com Acomplamento
Tensionador	34,38	62,17
Tramo 1	114,18	114,41
Tramo 2	51,25	50,53

	Frequencias Naturais a 4000 RPM (Hz)	
	Sem Acoplamento	Com Acomplamento
Tensionador	34,38	65,65
Tramo 1	71,41	72,19
Tramo 2	32,12	31,89

Tabela 6.4 Comparação das frequências naturais com sistema desacoplado e acoplado

A boa aproximação das frequencias de vibração dos tramos 1 e 2 pode ser explicada pela pequena amplitude de vibração do braço do tensionador para o sistema em questão (tabela 6.1). Se parâmetros do sistema forem alterados o acoplamento pode ter um efeito maior nas frequências naturais dos tramos 1 e 2. A tabela 6.5 mostra a comparação das frequências naturais considerando o sistema desacoplado e acoplado a 0 RPM. Para este sistema foi alterado somente a massa especifica da correia, de 0,1029 kg/m para 0,3 kg/m.

	Frequencias Naturais a 0 RPM (Hz)	
	Sem Acoplamento	Com Acomplamento
Tensionador	34,38	65,65
Tramo 1	48,97	68,55
Tramo 2	21,98	29,83

Tabela 6.5 Comparação das frequências naturais com o sistema desacoplado e acoplado considerando uma massa específica da correia de 0,3 kg/m

Nota-se que o acoplamento entre a vibração rotacional do braço do tensionador e a vibração transversal dos tramos adjacentes produz respostas diferentes daquelas quando o mesmo é desconsiderado.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

O acoplamento linear entre o movimento de rotação do braço do tensionador e o movimento transversal dos tramos da correia adjacentes à polia do tensionador foi investigado neste trabalho.

Uma solução exata para a determinação das frequências naturais e os modos de vibração foi desenvolvida e as s principais conclusões são:

- as frequências naturais dependem da velocidade da correia devido às mudanças de tensões e mudanças na geometria do sistema. As frequências naturais dos tramos da correia decaem mais rapidamente com o aumento da velocidade do que a frequência natural do braço do tensionado.

- a orientação do braço do tensionador produz uma alteração mais significativa na frequência natural do braço do tensionador, enquanto que as frequências naturais dos tramos da correia sofrem pequenas alterações.

- o acoplamento entre as vibração rotacional do braço do tensionador e a vibração transversal dos tramos adjacentes produz respostas diferentes daquelas quando o mesmo é desconsiderado.

Sugestões para trabalhos futuros:

- construção de uma bancada de teste para a verificação experimental deste trabalho

- executar análise não linear para avaliação da resposta temporal do sistema

- Inclusão do efeito de amortecimento no sistema (viscoso e histerético)

Referências

ABRATE, S. Vibrations of Belts and Belt Drives. **Mechanism and Machine Theory.** v.27, n.6, p.645-659, 1992

ARCHIBALD, F.R.; EMSLIE, A.G. The Vibration of a String Having a Uniform Motion Along its Length. **Journal of Applied Mechanics,** v.80, p.347-348, 1958

BEIKMANN, R.S. **Static and Dynamic Behaviour of Serpentine Belt Drive System: Theory and Experiment**. 1992, 173p. Ph.D Dissertation, University of Michigan.

BRUN, J.L. Hamilton's Principle for Beginners. **European Journal of Physics,** v.28, p.487-491, 2007.

CHEN, L; ZHANG, W.; ZU, J. Nonlinear Dynamics for Transverse Motion of Axxially Moving Strings. **Chaos, Solutions & Fractals,** doi:10.1016/j.chaos.2007.07.023

KIM, S.K; LEE, J.M. Analysis of the Non-linear Vibration Characteristics of a Belt-Driven Systems. **Journal of Sound and Vibration,** v.223, n.5, p.723-740, 1999

KOIVURA, H. **Dynamic Behaviour of an Axxially Moving Membrane Interacting With the Sorrounding Air and Making Contact With Supporting Structures**. 1998, 80p. Academic Dissertation, University of Oulu.

MEIROVITCH, L. Analytical Methods in Vibrations. In: **_____**. **Advanced Principles of Dynamics.** The Macmillan Company, 1971. cap. 2, p.30-54

MEIROVITCH, L. Principles and Techniques of Vibrations. In:**_____.Distributed-Parameter Systems**. Prentice Hall, Inc, 2007. cap.7, p.361-493

MOTE, C.D. A Study of Band Saw Vibrations. **Journal of the Franklin Institute,** v.279, n.6, p.431-444, 1965-b

MOTE, C.D. On the Nonlinear Oscillation of an Axially Moving String. **Journal of Applied Mechanics,** p.463-463, June 1996

MOTE, C.D. Some Dynamic Characteristics of Band Saws. **Forest Products Journal**, p.37-41, 1965-a

MOTE, C.D; WU, W.Z. Vibration Coupling in Continuous Belt and Band Systems. **Journal of Sound and Vibration,** v.102, n.1, p.1-9, 1985

SACK, R.A. Transverse Oscillations in Travellling Strings. **British Journal of Applied Phisics,** v.5, p.224-226, 1954

Shigley, J.E.; Mischke, C.R., Mechanical Engineering Design In: **Flexible Mechanical Elementes,** McGraw-Hill Book Company, 1989. cap.17, p.665-679

SUWEKEN, G; HORSSEN, W.T. On the Transversal Vibrations of a Conveyor Belt With a Low and Time-Varing Velocity. Part I: The String-Like Case. **Journal of Sound and Vibration,** v.264, p.117-113, 2003-a

SUWEKEN, G; HORSSEN, W.T. On the Transversal Vibrations of a Conveyor Belt With a Low and Time-Varing Velocity. Part II: The Beam-Like Case. **Journal of Sound and Vibration,** v.267, p.1007-1027, 2003-b

SWOPE, R.D.; AMES, W.F. Vibration of a Moving Threadiline. **Journal of the Franklin Institute,** v.275, n.1, p.36-55, 1963

ULSOY, A.G.; WHITESELL, J.E.; HOOVEN, M.D. Desing of Belt-Tensioner Systems for Dynamic Stability. **Transactions of the ASME**, v.107, p.282-290, 1985

WANG, C.D; MOTE, C.D. Vibration Coupling Analysis of Band/Wheel Mechanical Systems. **Journal of Sound and Vibration,** v.109, n.2, p.237-258, 1986

WICKERT, J.A.; MOON, J. Non-linear Vibration of Power Transmission Belts. **Academic Press Limited,** v.200, n.4, p.419-431, 1997

WICKERT, J.A.; MOTE, C.D. Current Research on the Vibration and Stability of Axially Moving Materials. **Shock and Vibration Digest,** v.20, n.5, p.3-13, 1998

ZHANG, L.; ZU, J.W. Modal Analysis of Serpentine Belt Drive Systems. **Journal of Sound and Vibration,** v.222, n.2, p.259-279, 1999

APÊNDICE A – Cálculo Auxiliáres

Cálculo de $(dl_1)/(dx_s)$, $(dl_{1b})/(dx_s)$ e $(dl_{1a})/(dx_s)$

A figuara A1 mostra a posição inicial e uma posição incremental da deflexão do

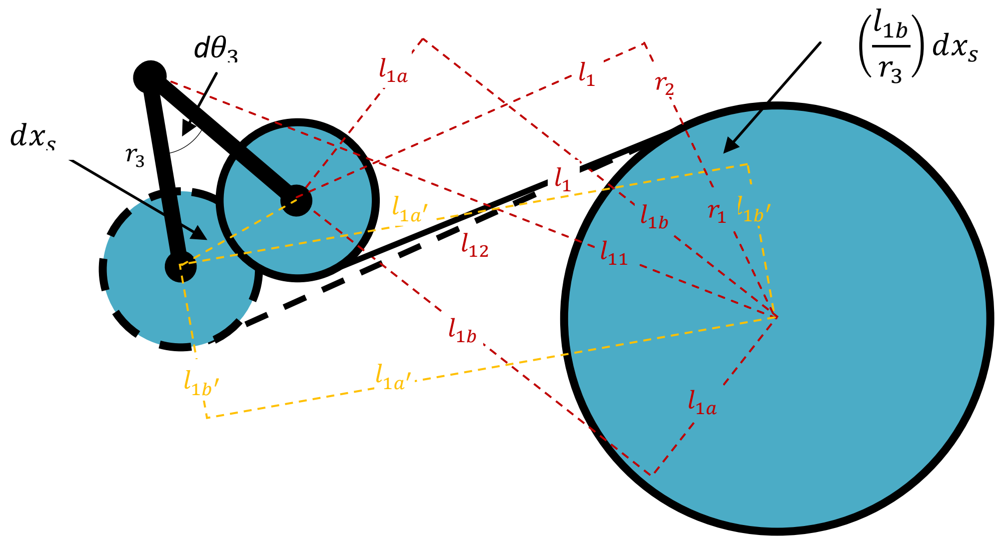


Figura A.1 – Variação das retas auxiliares no tramo de correia 1 com a rotação do tensionador

tensionador. Quando o braço do tensionador rotaciona dteta3, as retas auxiliares rotacionam no mesmo ângulo. Como o pivô do tensionador e o centro da polia 1 são fixos, l_{11} é constante, assim:

$$(r_3 + l_{1b})^2 = l_{11}^2 = (r_3 + l_{1b'})^2 + l_{1a'}^2 \tag{A.1}$$

Expandindo:

$$r_3^2 + 2r_3 l_{1b} + l_{1b}^2 + l_{1a}^2 = r_3^2 + 2r_3 l_{1b'} + l_{1b'}^2 + l_{1a'}^2 \tag{A.2}$$

Note que para pequenas deflexões:

$$l_{1a'} = l_{1a} + dl_{1a} = l_{1a} + dx_s + \frac{l_{1b}}{r_3} dx_s = l_{1a} + \left(1 + \frac{l_{1b}}{r_3}\right) dx_s \tag{A.3}$$

$$l_{1b'} = l_{1b} + dl_{1b} \tag{A.4}$$

Substituindo (A.2) em (A.1):

$$2r_3 l_{1b} + l_{1b}^2 + l_{1a}^2 = 2r_3(l_{1b} + dl_{1b}) + l_{1b}^2 + 2l_{1b} dl_{1b} + \left(l_{1a} + \left(1 + \frac{l_{1b}}{r_3}\right) dx_s\right)^2 \tag{A.5}$$

Ignorando os termos de segunda ordem dx_s^2 :

$$\frac{dl_{1b}}{dx_s} = -\frac{l_{1a}}{r_3} \tag{A.6}$$

e de (A.4):

$$\frac{dl_{1a}}{dx_s} = 1 + \frac{l_{1b}}{r_3} \tag{A.7}$$

Da Figura A.1 tem-se:

$$l_1 = \sqrt{l_{1a}^2 + l_{1b}^2 - (r1 + r2)^2} \tag{A.8}$$

Derivando $l_1$em dx_s:

$$\frac{dl_1}{dx_s} = \frac{\left(l_{1a}\frac{dl_{1a}}{dx_s} + \ l_{1b}\frac{dl_{1b}}{dx_s}\right)}{l_1}$$

(A.9)

Utilizando (A7) e (A8) em (A.9):

$$\frac{dl_1}{dx_s} = \frac{\left(l_{1a}\left(1 + \frac{l_{1b}}{r_3}\right) - \ l_{1b}\frac{l_{1a}}{r_3}\right)}{l_1}$$

(A.10)

Simplificando:

$$\frac{dl_1}{dx_s} = \frac{l_{1a}}{l_1}$$

(A.11)

Cálculo de $(dl_2)/(dx_s)$, $(dl_{2b})/(dx_s)$ e $(dl_{2a})/(dx_s)$

Utilizando a Figura A.2 e o mesmo raciocínio anterior:

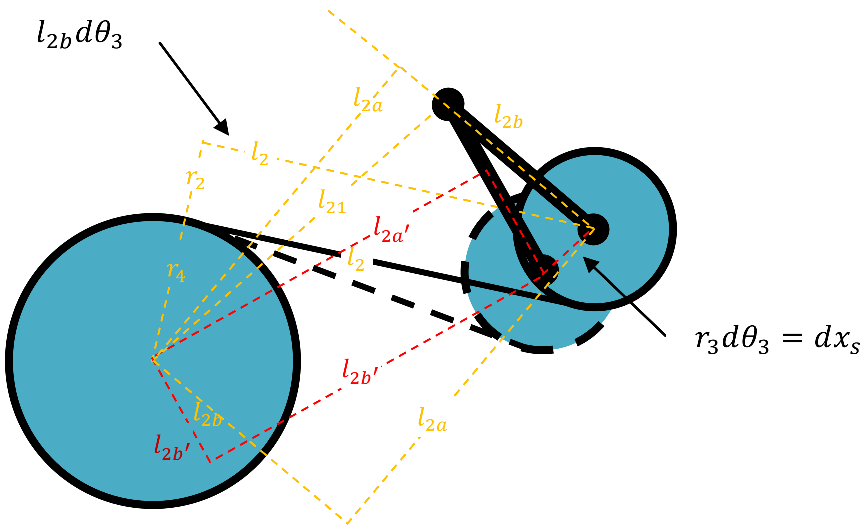


Figura A.2 – Variação das retas auxiliares no tramo de correia 2 com a rotação do tensionador

$$\frac{dl_{2a}}{dx_s} = 1 + \frac{l_{1b}}{r_3} \tag{A.12}$$

$$\frac{dl_{2b}}{dx_s} = -\frac{l_{1a}}{r_3} \tag{A.13}$$

$$\frac{dl_2}{dx_s} = \frac{l_{2a}}{l_1} \tag{A.14}$$

Cálculo de $dL/(dx_s)$ - Ganho do Tensionador

A relação $dL/(dx_s)$ utilizada no cálculo das constantes de suporte pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{dL}{dx_s} = \frac{dL_1}{dx_s} + \frac{dL_2}{dx_s}$$

(A.15)

onde, L é comprimento total da correia, dL_1 é o incremento infinitesimal na região do tramo de correia 1, e dL_2 é o incremento infinitesimal no comprimento da região do tramo de correia 2.

O incremento no comprimento na região do tramo 1 é o aumento do próprio tramo mais a quantidade enrolada / desenrolada das polias 1 e 2:

$$\frac{dL_1}{dx_s} = \frac{dl_1}{dx_s} + (r_1 + r_2)\frac{d\rho_1}{dx_s}$$

(A.16)

A fim de simplificar, um ângulo parcial de abraçamento é definido na coordenada local:

$$\rho_1' = \tan^{-1}\left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{r_1 + r_2}{l_1}\right)$$

(A.17)

Como $\rho_1' = \rho_1 + \rho_{10}$ (ρ_{10}=constante), suas derivadas são iguais em relação a x_s:

$$\frac{d\rho_1}{dx_s} = \frac{d\rho_1'}{dx_s} = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)}\right)\left(\frac{-(x_1 - x_2)\frac{dy_2}{dx_s} + (y_1 - y_2)\frac{dx_2}{dx_s}}{(x_1 - x_2)^2}\right) + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{r_1 + r_2}{l_1}\right)^2}\right)\left(\frac{0 - (r_1 + r_2)\frac{dl_1}{dx_s}}{l_1^2}\right)$$

(A.18)

Utilizando (A.11) :

$$\frac{d\rho_1}{dx_s} = \left(\frac{1}{l_1^2 + (r_1 + r_2)^2}\right)(l_1 sen\psi_1 + \ r_1 + r_2)cos\psi_2) - \left(\frac{1}{l_1^2 + (r_1 + r_2)^2}\right)\left(\frac{(r_1 + r_2)l_{1a}}{l_1}\right)$$

(A.19)

pois nas coordenadas locais:

$$\frac{dx_1}{dx_s} = \ -sen\psi_1$$

(A.20)

$$\frac{dx_2}{dx_s} = \ -sen\psi_2$$

(A.21)

$$l_1 = (x_1 - \ x_2)$$

(A.22)

$$(r_1 + r_2) = (y_2 - y_1)$$

(A.23)

Notando que:

$$l_{12} = l_1^2 + (r_1 + r_2)^2$$

(A.24)

Tem-se:

$$\frac{d\rho_1}{dx_s} = \left(\frac{1}{l_{12}^2}\right)[\ l_1 sen\psi_1 + (r_1 + r_2)\left(cos\psi_1 - \frac{l_{1a}}{l_1}\right)$$

(A.25)

Como $\psi_1 = \ \epsilon_1 - \ \delta_1$:

$$\frac{d\rho_1}{dx_s} = \left(\frac{1}{l_{12}^2}\right)[\ l_1(sen\varepsilon_1 \cos\delta_1 - cos\varepsilon_1 sen\delta_1)$$

$$+ (r_1 + r_2)\left(cos\varepsilon_1 cos\delta_1 + sen\varepsilon_1 sen\delta_1 - \frac{l_{1a}}{l_1}\right)$$

(A.26)

Substituindo os valores das relações trigonométricas (Figuras A1 e A2):

$$\frac{d\rho_1}{dx_s} = \left(\frac{1}{l_{12}^2}\right)\left[\ l_1\left(\frac{l_{1b}l_1 - l_{1a}(r_1 + r_2)}{l_{12}^2}\right) + (r_1 + r_2)\left(\frac{l_{1a} + l_1 + l_{1b}(r_1 + r_2)}{l_{12}^2} - \frac{l_{1a}}{l_1}\right)\right]$$

(A.27)

Expandindo e agrupando termos:

$$\frac{d\rho_1}{dx_s} = \left(\frac{1}{l_{12}^2}\right)\left[\ l_1\left(\frac{l_{1b}l_{1^2} + l_{1b}(r_1 + r_2)}{l_{12}^2}\right) - \frac{l_{1a}}{l_1}(r_1 + r_2)\right]$$

(A.28)

Simplificando:

$$\frac{d\rho_1}{dx_s} = \frac{l_{1b}}{l_{12}^2} - \frac{(r_1 + r_2)}{l_1 l_{12}^2} l_{1a}$$

(A.29)

Substituindo (A.19) e (A.11) em (A.29):

$$\frac{dL_1}{dx_s} = \frac{dl_{1a}}{l_1} + (r_1 + r_2)\left(\frac{l_{1b}}{l_{12}^2} - \frac{(r_1 + r_2)l_{1a}}{l_1 l_{12}^2}\right)$$

(A.30)

Desenvolvendo:

$$\frac{dL_1}{dx_s} = \frac{dl_{1a}}{l_1} + \frac{(r_1 + r_2)l_{1b}}{l_{12}^2} - \frac{(r_1 + r_2)^2 l_{1a}}{l_1 l_{12}^2}$$

(A.31)

Utilizando as relações trigonométricas:

$$sen\delta_1 = \frac{(r_1 + r_2)}{l_{12}}$$

$$sen\varepsilon_1 = \frac{l_{1b}}{l_{12}}$$

(A.32)

Tem-se:

$$\frac{dL_1}{dx_s} = \frac{dl_{1a}}{l_1} + sen\delta_1 sen\epsilon_1 - \frac{l_{1a}}{l_1} sen^2\delta_1$$

(A.33)

Combinando termos:

$$\frac{dL_1}{dx_s} = \frac{dl_{1a}}{l_1}\cos^2\delta_1 + sen\delta_1 sen\varepsilon_1$$

(A.34)

Utilizando as relações trigonométricas:

$$cos\delta_1 = l_1/l_{12}$$

$$cos\varepsilon_1 = l_{1a}/l_{12}$$

(A.35)

Tem-se

$$\frac{dL_1}{dx_s} = cos\delta_1 cos\varepsilon_1 + \; sen\delta_1 sen\varepsilon_1 = \cos(\varepsilon_1 - \delta_1)$$

(A.36)

ou,

$$\frac{dL_1}{dx_s} = cos\psi_1$$

(A.37)

Similarmente:

$$\frac{dL_2}{dx_s} = cos\psi_2$$

(A.38)

Substituindo (A.37) e (A.38) em (A.16):

$$\frac{dL}{dx_s} = cos\psi_1 + cos\psi_2$$

(A.39)

Cálculo de $\boldsymbol{\xi_1} = (\boldsymbol{d\cos\psi_1})/(\boldsymbol{dx_s})$ e $\boldsymbol{\xi_2} = (\boldsymbol{d\cos\psi_2})/(\boldsymbol{dx_s})$

$$\xi_1 = \frac{d\cos\psi_1}{dx_s} = -sen\psi_1(\frac{d\psi_1}{dx_s})$$

(A.40)

Da Figura A.1:

$$\psi_1 = \varepsilon_1 - \delta_1$$

(A.41)

e

$$\psi_1 = \tan^{-1}\left(\frac{l_{1b}}{l_{1a}}\right) - \tan^{-1}(\frac{r_1 + r_2}{l_1})$$

(A.42)

Logo:

$$\frac{d\psi_1}{dx_s} = \left(\frac{1}{1+\left(\frac{l_{1b}}{l_{1a}}\right)^2}\right)\left(\frac{l_{1a}\frac{dl_{1b}}{dx_s} - l_{1b}\frac{dl_{1a}}{dx_s}}{l_{1a}^2}\right) - \left(\frac{1}{1+\left(\frac{r_1+r_2}{l_1}\right)^2}\right)\left(\frac{0-(r_1+r_2)\frac{dl_1}{dx_s}}{l_1^2}\right)$$

(A.43)

Utilizando (A.6), (A.7) e (A.11):

$$\frac{d\psi_1}{dx_s} = \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{l_{1a}^2}\right)(l_{1a}^2 + \ l_{1b}^2)}\right)\left(\frac{l_{1a}\left(-\frac{l_{1a}}{r_3}\right) - l_{1b\left(1+\frac{l_{1b}}{r_3}\right)}}{l_{1a}^2}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{l_1^2}\right)(l_1^2 + (r_1+r_2)^2)}\right)\left(\frac{(r_1+r_2)\frac{l_{1a}}{l_1}}{l_1^2}\right)$$

(A.44)

Notando que:

$$l_{12}^2 = l_1^2 + (r_1+r_2)^2 = l_{1a}^2 + l_{1b}^2$$

(A.45)

Tem-se:

$$\frac{d\psi_1}{dx_s} = -\frac{(l_{1a}^2 + l_{1b}^2)}{l_{12}^2 r_3} - \frac{l_{1b}}{l_{12}^2} + \frac{(r_1+r_2)l_{1a}}{l_{12}^2 l_1}$$

(A.46)

e

$$\frac{d\psi_1}{dx_s} = -\frac{1}{r_3} - \frac{l_{1b}}{l_{12}^2} + \frac{(r_1+r_2)l_{1a}}{l_{12}^2 l_1}$$

(A.47)

Substituindo em (A.40):

$$\xi_1 = \frac{dcos\psi_1}{dx_s} = -sen\psi_1 \left(\frac{1}{r_3} - \frac{l_{1b}}{l_{12}^2} + \frac{(r_1 + r_2) l_{1a}}{l_{12}^2 l_1} \right)$$

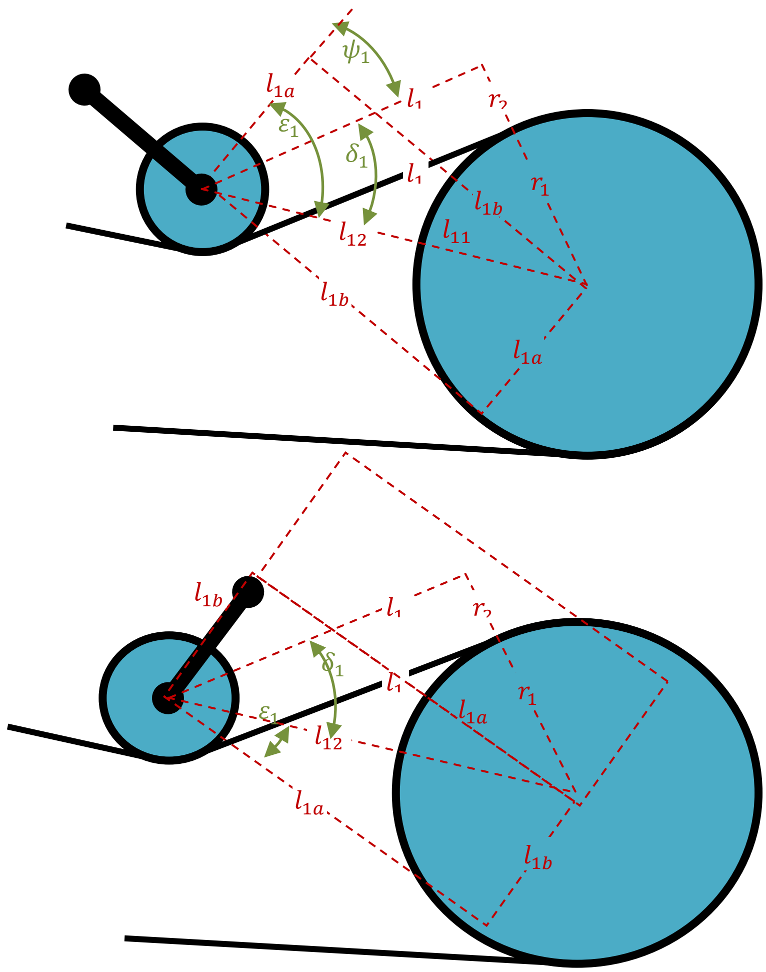
(A.48)

Similarmente:

$$\xi_2 = \frac{dcos\psi_2}{dx_s} = -sen\psi_2 \left(\frac{1}{r_3} - \frac{l_{2b}}{l_{12}^2} + \frac{(r_2 + r_4) l_{2a}}{l_{22}^2 l_2} \right)$$

(A.49)

Observa-se que o ângulo δ_n depende somente dos centros da polia e que independe do braço do tensionador, enquanto o ângulo ϵ_n depende somente da posição do braço do tensionador. Ambos devem ser medidos a partir de l_{12} e devem ser positivos no sentido anti-horário e negativo no sentido horário.



$$\psi_1 = \epsilon_1 - \delta_1$$

$$\psi_1 = (-\epsilon_1) - \delta_1$$

Figura A.3 Ângulos δ_n e ϵ_n

APÊNDICE B – Cálculo dos Ângulos de Abraçamento

Para um sistema constituído de 2 polias o ângulo de abraçamento para uma configuração do tipo aberta, ou seja, em que ambas as polias tem o mesmo sentido de rotação (figura B1) é dada por:

$$\phi_d = \pi - 2\, asen\, \frac{D-d}{2C}$$

$$\phi_d = \pi + 2\, asen\, \frac{D-d}{2C}$$

(B.1)

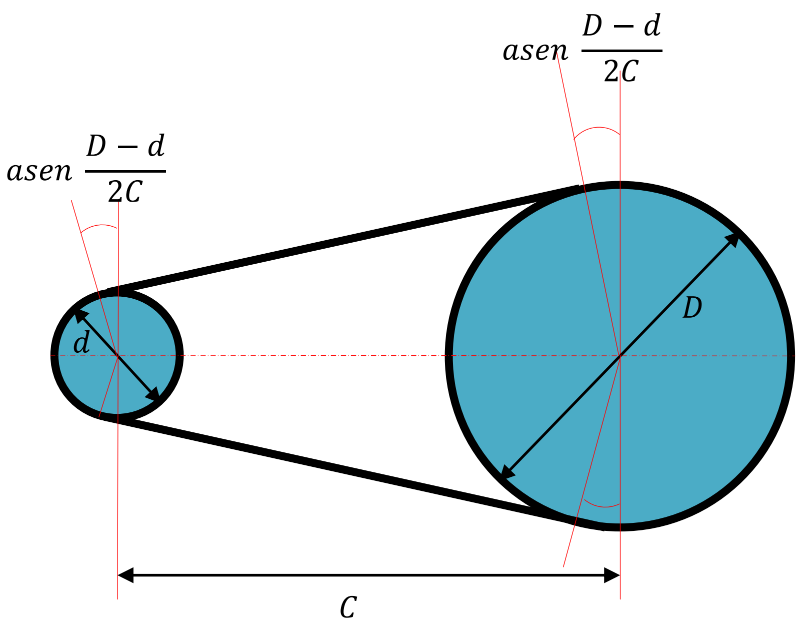


Figura 1B – Configuração aberta

E para uma configuração do tipo cruzada, ou seja, em que as polias possuem sentidos de rotação diferentes (Figura 2B):

$$\phi = \pi + 2\, asen\, \frac{D-d}{2C}$$

(B.2)

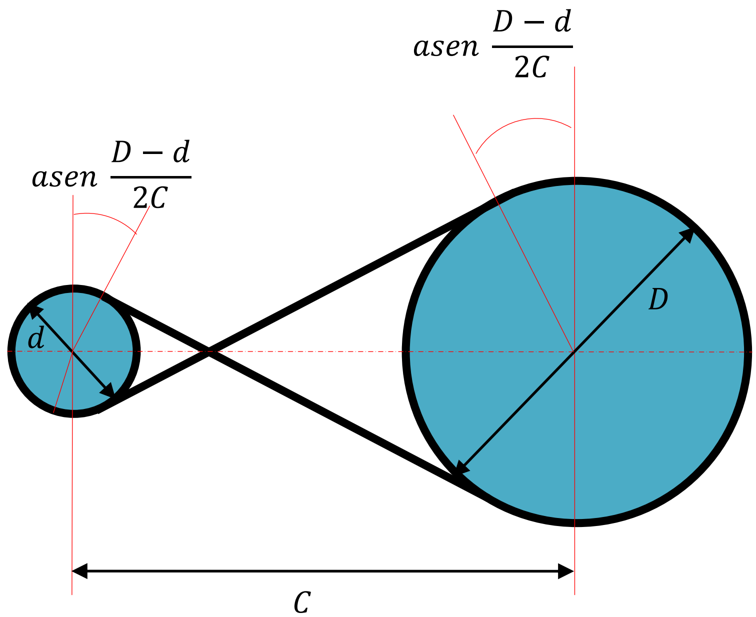


Figura B2 – Configuração do Tipo Cruzada

No caos de um sistema com 3 polias a relação não é tão direta. Nota-se que a configuração entre as polias 2 e 4 e entre as polias 1 e 2 podem ser do tipo cruzada e que a configuração entre as polias 4 e 1 são do tipo direta.

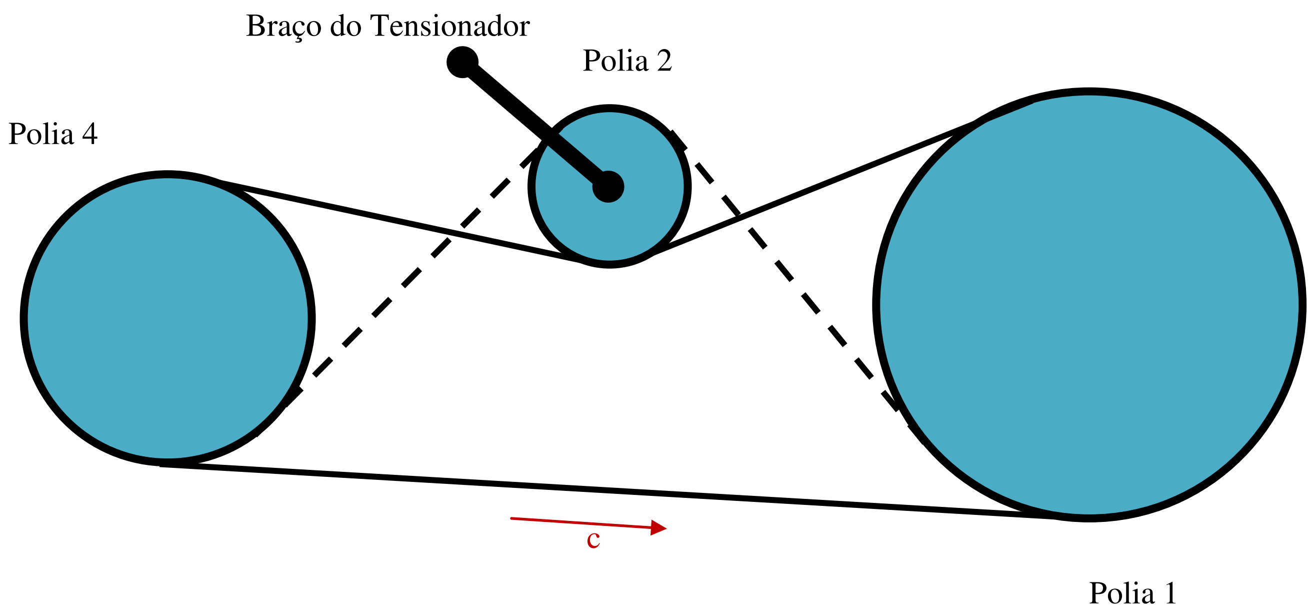


Figura B3 – Representação da configuração cruzada entre as polias 4 e 2 e polias 1 e 2

Considerando somente as polias 4 e 2 (Figura B4), nota-se que deve-se levar em consideração no cálculo do ângulo de abraçamento a inclinação da reta que liga os centros das polias em relação ao eixo X.

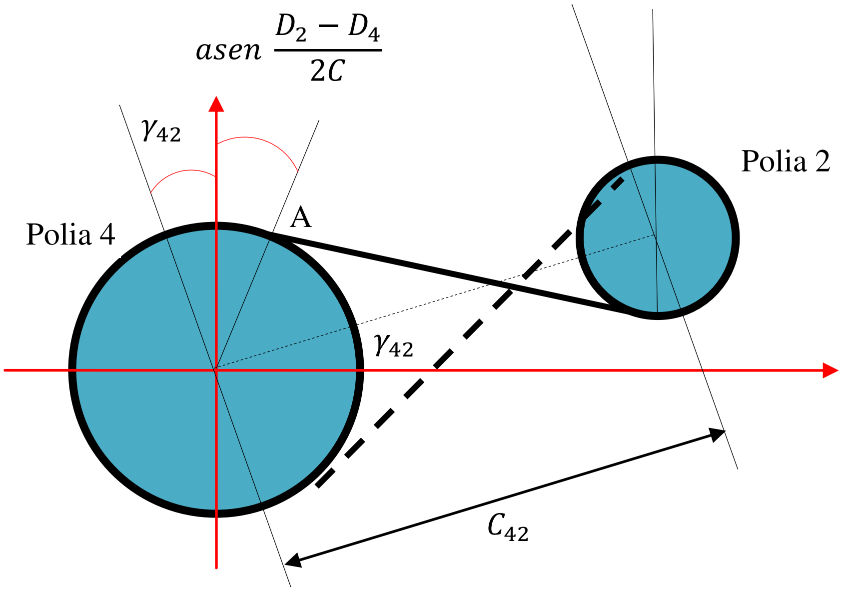


Figura B4 –Ângulo de Abraçamento da Polia 4 em relação à Polia 2

Considerando-se as somente as polias 4 e 1

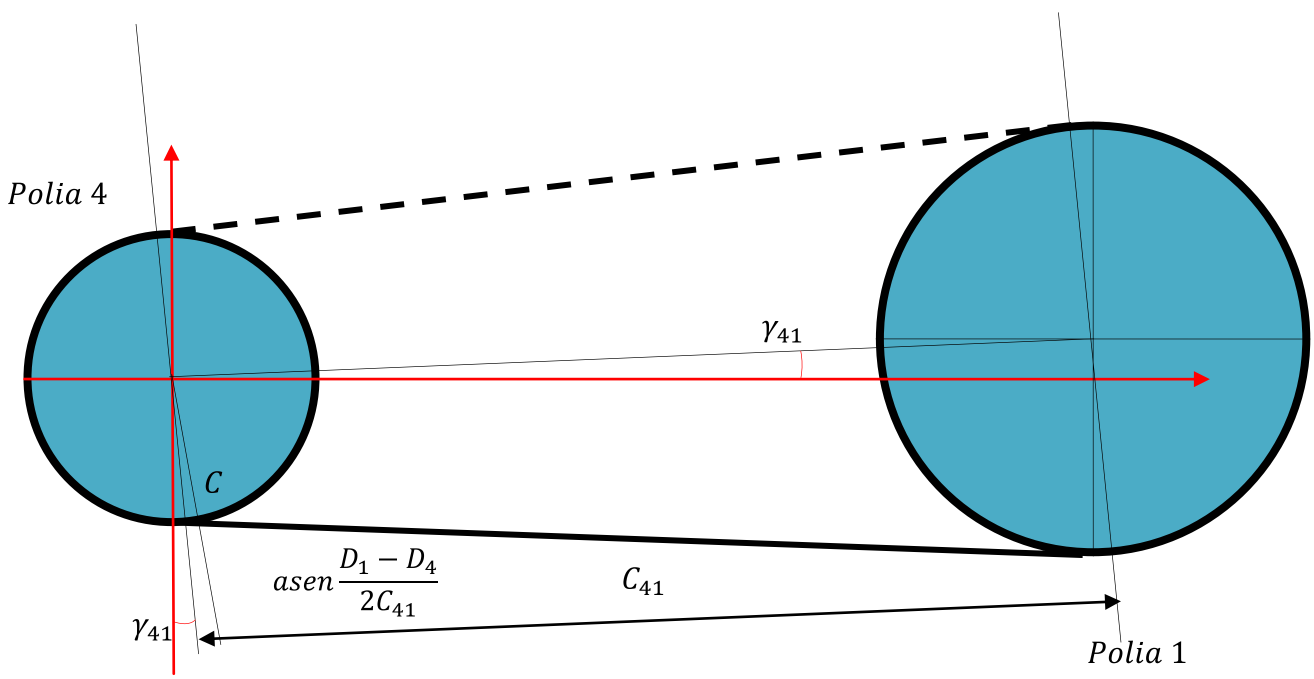


Figura B5 – Ângulo de Abraçamento da Polia 4 em relação à Polia 1

Assim tem-se que o ângulo de abraçamento da polia 4 é:

$$\phi_4 = \pi + asen\ \frac{D_2 - D_4}{2C} - \ \gamma_{42} + asen\frac{D_1 - D_4}{2C_{41}} + \gamma_{41}$$

(B.3)

O mesmo raciocínio é utilizado para a obtenção dos ângulos de abraçamento das Polias 2 e 1.

Outra forma de cálculo dos ângulos de abraçamento é obtida através de um método iterativo.

As equações paramétricas da polia 4 são:

$$X_4 = X_{o4} + r_4 \cos{(\theta)}$$

$$Y_4 = Y_{o4} + r_4 \text{sen}\ (\theta)$$

(B.4)

onde o ponto (X_{o4},Y_{o4}) é a cordenada do centro da polia 4 e θ varia de 0 a 2π.

Dá-se um valor para o ângulo θ, θ_{42}, obtendo-se o ponto A (Figura B6)

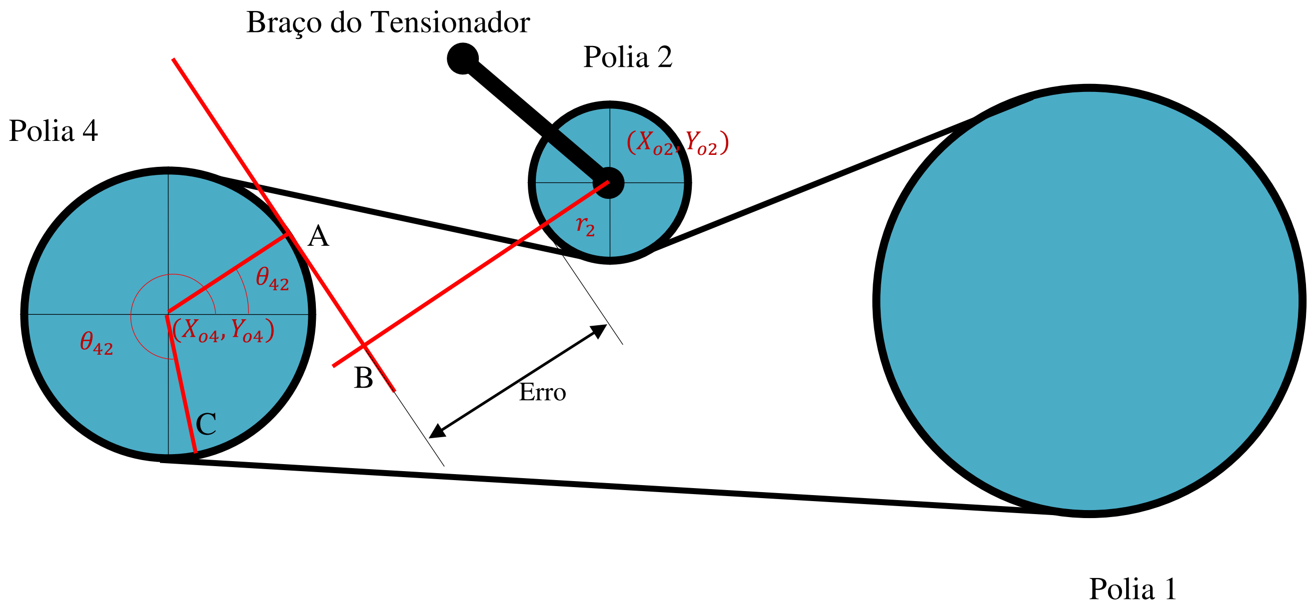


Figura B6 – Metódo iterativo para cálculo do ângulo de abraçamento da Polia 4

A equação da reta que passa por (X_{o4},Y_{o4}) e A é:

$$Y_{o4} - Y_A = \tan\theta \;\; (X_{o4} - X_A)$$

(B.5)

A equação da reta que passa por A e é perpendicular a reta (B.5) é:

$$Y - Y_A = -\frac{1}{\tan\theta} \; (X - X_A)$$

(B.6)

A reta que passa pelo centro da Polia 2 e é perpendicular à reta (B.6) é :

$$Y - Y_{o2} = \tan\theta \, (X - X_{o2})$$

(B.7)

O ponto de intersecção, B, de (B.7) com (B.6) é:

$$X_B = \frac{\tan\theta \, (X_{o2} + X_A) + \; Y_A - Y_{o2}}{2 \tan\theta}$$

$$Y_B = -\tan\theta\,(X_B - X_A) + Y_A$$

(B.8)

A distância do centro da Polia 2 ao ponto B é :

$$D_{2B} = \sqrt{(Y_{o2} - Y_B)^2 + (X_{o2} - X_b)^2}$$

(B.9)

A diferença entre D_{2B} e o raio da Polia 2 é definida como uma função erro:

$$erro = D_{2B} - r_2$$

(B.10)

Quando (B.10) for igual a zero a reta AB é a reta que representa o tramo de correia 2 e o θ é o ângulo, em relação ao eixo X, em a reta AB toca a polia 4.

Assim o θ é ajustado até que (B.10) seja muito próximo de zero.

Da mesma forma o ponto C é determinado encontrando-se a reta tangente às Polias 4 e 1. Logo:

$$\phi_4 = \theta_{41} - \theta_{42}$$

(B.11)

O mesmo método é utilizado para encontrar os ângulos de abraçamento das demais polias.