

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA E
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
COMISSÃO DE PROGRAMA MULTIDISCIPLINAR DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

**Cálculo dos coeficientes de reflexão e
transmissão em meios anisotrópicos**

Autor: Luís Fernando Katsuda Ito Cypriano
Orientador: Rodrigo de Souza Portugal

Este exemplar corresponde à redação final
da tese defendida por _____
_____ aprovada
pela comissão julgadora em ____/____/____

Orientador

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA E
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
COMISSÃO DE PROGRAMA MULTIDISCIPLINAR DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO**

**Cálculo dos coeficientes de reflexão e
transmissão em meios anisotrópicos**

Autor: Luís Fernando Katsuda Ito Cypriano
Orientador: Rodrigo de Souza Portugal

Curso: Ciências e Engenharia de Petróleo
Área de Concentração: Reservatórios e Gestão

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à Comissão de Pós Graduação em Ciências e Engenharia de Petróleo da Faculdade de Engenharia Mecânica e Instituto de Geociências, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo.

Campinas, 2010
S.P. – Brasil.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

C992c Cypriano, Luís Fernando Katsuda Ito
Cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão em
meios anisotrópico / Luís Fernando Katsuda Ito
Cypriano. --Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: Rodrigo de Souza Portugal.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Anisotropia. 2. Método sísmico de reflexão. 3.
Reflexão. 4. Transmissão. I. Portugal, Rodrigo de
Souza. II. Universidade Estadual de Campinas.
Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Calculation of the reflection and transmission coefficients in
anisotropic media

Palavras-chave em Inglês: Anisotropy, Seismic reflection method, Reflection,
Transmission

Área de concentração: Reservatórios e Gestão

Titulação: Mestre em Ciências e Engenharia de Petróleo

Banca examinadora: Lúcio Tunes Santos, Joerg Schleicher, Alcides Aggio
Sobrinho

Data da defesa: 16/07/2010

Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

4

4-14

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA E
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
COMISSÃO DE PROGRAMA MULTIDISCIPLINAR DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS E ENGENHARIA DE PETRÓLEO
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Cálculo dos coeficientes de reflexão e
transmissão em meios anisotrópicos

Autor: Luís Fernando Katsuda Ito Cypriano
Orientador: Rodrigo de Souza Portugal

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:



Prof. Dr. Lúcio Tunes Santos, Presidente
DMA/IMECC/UNICAMP



Prof. Dr. Joerg Schleicher
DMA/IMECC/UNICAMP



Prof. Dr. Akides Aggio Sobrinho
PETROBRAS

Campinas, 16 de Julho de 2010

Dedicatória:

Dedico este trabalho aos que amo muito: ao meu irmão, João Guilherme, pela companhia e sorrisos de uma morada à outra. À minha querida mãe, Cristina, sábia e guerreira. Aos meus avôs e avós que eu admiro e me inspiram. À minha amada Geovanna e todos os meus amigos, pelas confusões, viagens, loucuras e sobriedades.

Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores (yin-yang): Dr. Rodrigo de Souza Portugal e Dr. Ivan Pšenčík, por todos os ensinamentos, tanto os acadêmicos quanto os pessoais, e também pela inestimável companhia. Este trabalho jamais seria concluído sem suas orientações. Aos meus colegas Daniel L. Macedo e José Jadson Sampaio, pela companhia em uma sala repleta de questões de Geofísica e três mentes cheias de teorias (não necessariamente corretas). Ao Luís d'Afonseca (Akiles), aquele que tinha as teorias necessariamente corretas. À minha colega Evângela Patrícia Alvez pela companhia e nossas discussões sobre AVO. Aos meus colegas, quem muito me ajudaram durante a preparação de minhas apresentações, Bruno Z. Honório e Letícia de Ávila Acquaviva. Aos Drs. Emilson Pereira Leite e Einer Iversen pelos conselhos e correções em meu exame de qualificação. Ao Dr. Alcides Aggio Sobrinho pela presença e conselhos em minha defesa de tese. Ao Dr. Joerg Schleicher por conselhos e correções em ambas as bancas de minha qualificação e defesa. Ao Dr. Lúcio Tunes Santos por presidir ambas as minhas bancas de defesa e tese; sua prontidão e auxílio nestas retas finais de meu trabalho foram fundamentais. Aos Drs. Sergio N. Bordalo e Antonio C. Bannwart por permitir que eu desenvolvesse parte deste trabalho em Praga. À Sonia A. G. de Oliveira e Michelle C. Fulaneto pelo grande auxílio, mesmo a longas distâncias. Ao Departamento de Geofísica da Academia de Ciências da República Tcheca, especialmente ao Dr. Miroslav Novotný e Lucia Fojtikova, quem tive o prazer de dividir sala durante meus estudos em Praga, à Jan Zedník e Jitka Zedníková pelos auxílios no instituto e aos meus companheiros de discussões, especialmente durante almoços, Jan Michálek, Luděk Vecsey, Hana Karousová e Tuna Enken.

Agradeço o apoio financeiro da Agência Nacional do Petróleo - ANP e da Financiadora de Estudos e Projetos - FINEP, através do Programa de Recursos Humanos da ANP para o Setor Petróleo e Gás Natural - PRH-ANP/MME/MCT.

Em memória de meu pai e todos que me trouxeram as felicidades do passado. Eu as distribuo na minha jornada.

Obrigado.

Resumo

CYPRIANO, Luís Fernando Katsuda Ito, Cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão em meios anisotrópicos, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2010. 80 p. Dissertação de Mestrado.

A maioria dos métodos de imageamento de subsuperfície aplicados em projetos de Exploração e Produção (E&P) de hidrocarbonetos assume o meio elástico isotrópico (ISO). Os meios isotrópicos, em contrapartida aos modelos anisotrópicos, são aqueles cujas velocidades das ondas sísmicas não dependem da direção de propagação. Entretanto, muitas rochas obtidas de testemunhos apresentam anisotropia. Logo, é natural que estudos dos meios anisotrópicos sejam feitos com o intuito de aumentar a precisão do imageamento sísmico. As anisotropias são classificadas de acordo com as simetrias apresentadas. As simetrias mais comuns em exploração de hidrocarbonetos são as simetrias transversalmente isotrópicas (TI) e ortorrômbicas (ORT).

Quando uma onda impinge uma interface são geradas ondas refletidas e transmitidas. A razão entre as amplitudes dos vetores de deslocamento da onda incidente em relação às ondas geradas são os coeficientes de reflexão/ transmissão (R/T) de deslocamento. Os coeficientes R/T podem ser expressos explicitamente por fórmulas apenas em casos de alta simetria, por exemplo, isotrópica. Caso contrário os coeficientes R/T devem ser obtidos de um sistema de equações algébricas lineares obtidas das condições de contorno na interface.

Neste trabalho desenvolvemos um código para calcular os coeficientes de reflexão e transmissão (R/T) para interfaces entre meios anisotrópicos. Dois critérios para a distinção das ondas geradas na interface são adotados em adição ao critério convencional da literatura. As simetrias utilizadas para os testes sintéticos foram as simetrias ISO, TI e ORT. O testes exemplificam algumas características básicas dos coeficientes R/T, como equivalência entre interfaces e simetrias inclinadas e a reciprocidade dos coeficientes normalizados pela energia.

Palavras Chave

Anisotropia, Método sísmico de reflexão, Reflexão, Transmissão.

Abstract

CYPRIANO, Luís Fernando katsuda Ito, Cálculo dos coeficientes de reflexão e transmissão em meios anisotrópicos, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2010. 80 p. Dissertação de Mestrado.

The great majority of the methods for imaging subsurface invested in hydrocarbons Exploration and Production (E&P) assumes isotropic elastic medium (ISO). The isotropic models are those which velocities of seismic waves do not depend on the direction of propagation. However many core rocks exhibit anisotropy. Thus, the assumption of anisotropic media is natural in order to increase the accuracy of seismic imaging. The anisotropies are classified according to their symmetries. The most common symmetries in hydrocarbon E&P are the transversely isotropic (TI) and orthorhombic (ORT) symmetries.

When a seismic wave impinges at an interface between two media, it generates reflected and transmitted waves. The ratio between the amplitudes of displacement vectors of the incident and the generated waves are the displacement reflection/transmission (R/T) coefficients. The R/T coefficients can be expressed by explicit formulas in cases of higher symmetries, e.g. isotropy. Otherwise they are obtained numerically from a system of inhomogeneous linear algebraic equations derived from the boundary conditions in the interface.

We develop a code to evaluate the R/T coefficients interfaces between two anisotropic media. We adopt two criteria in addition to the conventional one for distinguishing the generated waves. The symmetries used for the synthetic tests were symmetries ISO, TI and ORT. The tests illustrate some basic characteristics of the R/T coefficients, as equivalence between tilted symmetries and interfaces, and the reciprocal of the energy normalized R/T coefficients.

Key Words

Anisotropy, Seismic reflection method, Reflection, Transmission.

Índice

Lista de Figuras.....	xix
Lista de Tabelas	xxiii
Nomenclatura.....	xxv
Capítulo 1	1
Introdução	1
1.1. Amplitudes	1
1.2. Descrição dos meios geológicos.....	2
1.3. Os coeficientes de reflexão e transmissão (R/T)	3
1.4. Motivação e objetivos.....	4
1.5. Sistema de coordenadas e notação.....	4
Capítulo 2.....	5
Teoria.....	5
2.1. Vetor de deslocamento	5
2.2. Tensor de deformação	6
2.3. Tensor de tensão	7
2.4. Relações entre tensão e deformação.....	7
2.5. Parâmetros elásticos	8

2.6.	Causas de anisotropias na Terra e simetrias	9
2.7.	Simetrias dos meios anisotrópicos.....	10
2.8.	Equação elastodinâmica para meios sólidos homogêneos	12
2.9.	Interfaces	14
2.10.	Ondas planas.....	14
2.11.	A Matriz de Christoffel.....	15
2.12.	Vetores de polarização.....	17
2.13.	Velocidades de grupo e transporte de energia	18
2.14.	Relação entre velocidade de grupo e velocidade de fase.....	18
2.15.	Tipos de ondas	18
2.16.	Degenerescências e direções singulares	19
2.17.	Superfície de velocidade de fase	20
2.18.	Ondas planas não-homogêneas.....	20
2.19.	Reflexão e transmissão de ondas planas.....	22
2.20.	Descrição das ondas geradas e incidente.....	22
2.21.	Condição de contorno na interface	23
2.22.	Transformação do vetor de vagarosidade através da interface.....	24
2.23.	Seleção dos vetores de vagarosidade das ondas geradas.....	28
2.24.	Coefficientes R/T	29
2.25.	Coefficientes R/T energéticos.....	30
Capítulo 3.....		35
Metodologia.....		35
3.1.	Parâmetros de anisotropia de onda-qP e parâmetro de separação de onda-qS..	36

3.2.	Rotação da interface e das simetrias.....	37
3.3.	Meios isotrópicos.....	38
3.4.	Critério de distinção das ondas-qP, qS1 e qS2.....	39
3.5.	Ortogonalidade dos vetores $g^{(qS1)}$ e $g^{(qS2)}$ em direções singulares	42
3.6.	Modelos selecionados.....	42
Capítulo 4.....		47
Resultados.....		47
4.1.	Critério de classificação das ondas cisalhantes para a onda incidente	47
4.2.	Critério de classificação das ondas cisalhantes para as ondas geradas.....	56
4.3.	Equivalência entre interfaces e simetrias inclinadas	61
4.4.	Reciprocidade dos coeficientes R/T energéticos	63
Capítulo 5.....		67
Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos.....		67
Capítulo 6.....		69
Referências		69
Apêndices.....		71
A.	Notações e operações.....	71
A.I.	Produto interno e produto vetorial.....	72
A.II.	Determinante	72

A.III.	Operações diferenciais.....	72
B.	Teoria elástica.....	75
B.I.	Condição de equilíbrio	75
B.II.	Simetria do tensor de tensão.....	76
B.III.	Equação do movimento	77
B.IV.	Energia de deformação	78

Lista de Figuras

- Figura 1:** Esquema da lei de Snell. Uma onda incidente, cujo vetor de vagarosidade é $\mathbf{p}^{(i)}$, gera ondas refletidas e ondas transmitidas, cujos vetores de vagarosidade são $\mathbf{p}^{(r)}, \dots, \mathbf{p}^{(t)}$. Os vetores de vagarosidade azuis representam as ondas que propagam no meio 1 e os vetores de vagarosidade em vermelho representam as ondas que propagam no meio 2. As ondas geradas e incidente possuem a mesma projeção tangencial à interface dos seus vetores de vagarosidade..... 26
- Figura 2:** Reciprocidade dos coeficientes $R(E)$. Ambos os esquemas resultam no mesmo valor para seus coeficientes de reflexão energéticos. Em azul: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente de meio 1, em verde: o vetor de vagarosidade da onda refletida..... 32
- Figura 3:** Reciprocidade dos coeficientes $R(E)$. Ambos os esquemas resultam no mesmo valor para seus coeficientes de reflexão energéticos. Em vermelho: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente de meio 2, em verde: o vetor de vagarosidade da onda refletida..... 32
- Figura 4:** Reciprocidade dos coeficientes $T(E)$. Ambos os esquemas resultam no mesmo valor para seus coeficientes de transmissão energéticos. Em azul: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente do meio 1, em vermelho: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente de meio 2, e em verde: o vetor de vagarosidade da onda refletida. . 33
- Figura 5:** Esquema do critério de polarização: a) as três possíveis polarizações para uma onda propagando na direção do vetor \mathbf{N} . Em azul: o vetor de polarização $\mathbf{g}^{(qP)}$, em vermelho: o vetor de polarização $\mathbf{g}^{(qS1)}$ e em verde: o vetor de polarização $\mathbf{g}^{(qS2)}$. b) Conjunto de três vetores de polarização possíveis para uma onda propagando na direção do vetor \mathbf{N}' . c) Para classificar um dos vetores de polarização da onda cisalhante é utilizada a equação 3.13. d) O vetor de polarização da onda cisalhante é determinado..... 40
- Figura 6:** Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI4. As superfícies são distintas pelo critério da velocidade..... 47

Figura 7: Superfícies de velocidade de fase das ondas-qP, qS1 e qS2 obtidas pelo critério da velocidade. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.....	48
Figura 8: Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI4. As superfícies são distintas pelo critério da polarização ao longo do azimute.	49
Figura 9: Superfícies de velocidade de fase das ondas-qP, qS1 e qS2 obtidas pelo critério da polarização aplicado à azimutes diferentes e mesma inclinação. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.....	50
Figura 10: Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI4. As superfícies são distintas pelo critério da polarização ao longo da inclinação.	51
Figura 11: Superfícies de velocidade de fase das ondas-qP, qS1 e qS2 obtidas pelo critério da polarização aplicado à inclinações diferentes e mesmo azimute. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.....	52
Figura 12: Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI4. As superfícies são distintas pelo critério da polarização ao longo da inclinação. Em direções singulares são consideradas a ortogonalidade dos vetores de polarização.	53
Figura 13: Superfícies de velocidade de fase do meio HTI4. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.....	54
Figura 14: Superfícies de velocidade de fase dos meios HTI1, HTI2, HTI3 e ORT1. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.....	55
Figura 15: Coeficientes R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} para o modelo HTI4/ISO2. A onda incidente é obtida pelo critério de polarização ao longo da inclinação e as ondas geradas pelo critério das velocidades.....	57
Figura 16: Regiões nas quais os módulos dos coeficientes de reflexão R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} possuem valores invertidos devido à classificação imprópria das ondas cisalhantes geradas.	58

Figura 17: Coeficientes R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} para o modelo HTI4/ISO2. As ondas incidentes e geradas são obtidas pelo critério de polarização ao longo da inclinação do ângulo de incidência.....	59
Figura 18: Regiões nas quais os módulos dos coeficientes de reflexão R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} são corrigidas, em relação à figura 17, pela classificação correta das ondas cisalhantes geradas.....	60
Figura 19: Equivalência entre os coeficientes de reflexão entre interfaces e simetrias inclinadas. No topo: interface plana ISO1/TTI3, abaixo: interface inclinada ISO1/HTI3.....	61
Figura 20: Equivalência entre os coeficientes de transmissão entre interfaces e simetrias inclinadas. No topo: interface plana ISO1/TTI3, abaixo: interface inclinada ISO1/HTI3.....	62
Figura 21: Reciprocidade dos coeficientes de transmissão energéticos.	64
Figura 22: Os coeficientes de transmissão de deslocamento não são recíprocos. O modelo ISO2/ORT1 não possui as regiões onde o módulo dos coeficientes decresce, no modelo ORT1/ISO2 esta região corresponde aos ângulos de inclinação no intervalo de $60^\circ - 90^\circ$...	65

Lista de Tabelas

Tabela 1: tabela de relação entre os índices i,j e k,l e os índices α e β (notação de Voigt).....	8
Tabela 2: Parâmetros AV_{qP} e AV_{qS} dos meios anisotrópicos.....	44

Nomenclatura

Letras Latinas

A – amplitude	[m]
a_{ijkl} – parâmetros elásticos normalizados pela densidade	$[(\text{m/s})^2]$
c – velocidade de fase	$[\text{m/s}^2]$
c_{ijkl} – parâmetros elásticos	[Pa]
$C_{\alpha\beta}$ – parâmetros elásticos em notação de Voigt	[Pa]
E_{ij} – tensor de deformação finito	
e_{ij} – tensor de pequena deformação (tensor de deformação)	
f – densidade de força volumétrica	$[\text{N/m}^2]$
F – sinal analítico	
g – vetor de polarização	
H – matriz de rotação	
I – matriz identidade	
N – vetor normal à frente de onda	
p – vetor de vagarosidade	$[(\text{m/s}^2)^{-1}]$
t – tempo	[s]
T – vetor de deformação	[Pa]
u – vetor de deslocamento	[m]

Letras Gregas

Γ – Matriz de Christoffel	[(m/s) ²]
ρ – densidade	[Kg/m ³]
σ_{ij} – tensor de tensão	[Pa]
ϕ – fase dos coeficientes de reflexão/transmissão	[rad]

Superescritos

G – ondas geradas
I – onda incidente

Subscritos

α, β – índices de Voigt

Abreviações

ANI – Anisotrópico
AVO – Amplitude-Versus-Offset.
E&P – Exploração e Produção
HTI – Isotropia transversal com eixo de simetria horizontal
ISO – isotrópico
ORT – Ortorrômbico
R – Reflexão

$R^{(E)}$ – coeficientes de reflexão energéticos

$R^{(E)}$ – coeficientes de transmissão energéticos

T – Transmissão

TI – Isotropia transversal

TTI – Isotropia transversal com eixo inclinado

VTI - Isotropia transversal com eixo de simetria vertical

Capítulo 1

Introdução

Os métodos de imageamento sísmico possuem papel fundamental nos projetos do segmento de Exploração e Produção (E&P), desde obtenção de imagens e caracterização das estruturas geológicas ao monitoramento do reservatório. Tais métodos tornam-se cada vez mais essenciais ao passo de seu crescente sucesso exploratório, devido principalmente ao desenvolvimento de técnicas de aquisição, utilização de ferramentas computacionais mais avançadas e desenvolvimento de algoritmos e teorias. Com estes avanços, atualmente é possível descrever as características da subsuperfície mais realisticamente.

Imageamento sísmico por reflexão, ou simplesmente sísmica de reflexão, é um dos métodos utilizados para obtenção de imagens do interior da Terra. A sísmica de reflexão consiste basicamente em gerar ondas sísmicas, em superfície, através de fontes controladas e monitorar as ondas refletidas por heterogeneidades da subsuperfície. As ondas sísmicas podem ser acústicas ou elásticas, de acordo com o tipo de meio em que se propagam. As heterogeneidades relevantes são mudanças abruptas ou graduais das propriedades elásticas das rochas nas quais as ondas sísmicas se propagam. Quando são abruptas, nas interfaces que separam estas heterogeneidades são geradas ondas refletidas e ondas transmitidas. O monitoramento é feito através de receptores espalhados em arranjos sobre uma linha ou uma área da superfície terrestre. Estes receptores geram sismogramas, que são o registro da energia das ondas refletidas em função do tempo. A sísmica de reflexão utiliza os dados dos sismogramas para estimar a posição destes refletores e caracterizar as estruturas geológicas da subsuperfície.

1.1. Amplitudes

Para o imageamento de subsuperfície é vital que sejam feitas análises de velocidades e de amplitudes registradas no sismograma. Análise das amplitudes sísmicas teve seu início na década de 1970, quando *bright spots* em sessões empilhadas eram utilizadas para determinação de reservatórios de gás. Logo se constatou a importância da variação da amplitude com a posição

dos receptores sísmicos (*offset*) para diagnosticar anomalias de fluídos (Hilterman, 2001). Atualmente as análises de amplitudes, e.g. *amplitude-versus-offset* (AVO), são de grande importância para a caracterização de reservatórios.

Entre as várias propriedades que influenciam a amplitude das ondas sísmicas, e.g. espalhamento geométrico, os coeficientes de reflexão e transmissão (R/T) possuem grande importância. Portanto estudar os coeficientes de R/T é uma forma de compreender melhor o dado do sismograma, a fim de se obter maiores informações da geologia.

1.2. Descrição dos meios geológicos

Os meios que compõem a subsuperfície são descritos por diversas propriedades físicas, como densidade, porosidade, elasticidade e outros. Os meios homogêneos são aqueles que possuem tais propriedades constantes ao longo do espaço, enquanto que os meios heterogêneos possuem dependência espacial. Quando as propriedades do meio variam com a posição, as características da onda sísmica, como velocidades, também dependem da posição espacial.

Os meios isotrópicos, em contexto da sísmica, são aqueles cujas velocidades das ondas sísmicas são independentes da direção de propagação. Inicialmente os dados sísmicos apresentavam pouca variação nas velocidades sísmicas, o que justificava a adoção de modelos isotrópicos. Entretanto, com o avanço das técnicas de aquisição sísmica, advieram arranjos de fontes-receptores cada vez mais extensos. Isto implica, geralmente, em grandes ângulos de incidência nas interfaces, i.e. mudanças maiores nas direções de propagação, os quais evidenciam a dependência da velocidade nos dados adquiridos em campo ao ângulo de propagação e reflexão da onda sísmica. Tal constatação justifica a substituição de aproximações isotrópicas convencionais por modelos anisotrópicos. O modelo anisotrópico é aquele que assume a dependência das velocidades em relação à direção de propagação da onda sísmica.

As anisotropias decorrem de heterogeneidades pequenas quando comparado ao comprimento de onda sísmica e são presentes em estruturas geológicas importantes para o estudo de reservatórios de hidrocarbonetos, e.g. meios fraturados (Worthington, 2008) e folhelhos (Ougier-Simonin, Sarout, & Guéguen, 2009). Propriedades sísmicas resultantes de orientações preferenciais nos minerais de rochas podem apresentar variações de velocidades da onda-P de 1.5

por cento em arenitos a 12 por cento em folhelhos de acordo com a direção de propagação da onda (Valcke, Casey, Lloyd, Kendall, & Fisher, 2006). A consideração de anisotropia foi primeiramente utilizada para correções no cálculo das velocidades de ondas sísmicas, permitindo correções nas localizações das interfaces; posteriormente veio a ser utilizada em análises de amplitudes (Li, Downton, & Xu, 2007), permitindo a caracterização das interfaces e dos reservatórios.

As anisotropias são classificadas de acordo com as simetrias em que podem se apresentar. As simetrias mais comuns em exploração de hidrocarbonetos são as simetrias transversalmente isotrópicas (TI) e ortorrômbicas (ORT) (Thomsen, *Understanding Seismic Anisotropy in Exploration and Exploitation.*, 2002).

1.3. Os coeficientes de reflexão e transmissão (R/T)

Quando uma onda plana incide em uma interface plana, a qual separa dois meios distintos, são geradas na interface ondas planas. As ondas geradas dependem do ângulo de incidência da onda incidente e das características de ambos os meios nos quais as ondas se propagam. O número de ondas geradas depende das propriedades da vizinhança da interface, que são expressas em termos das condições de contorno na interface. As ondas geradas são compostas por ondas refletidas e ondas transmitidas, cada qual possuindo direção e velocidade de propagação, polarização e amplitude específicas. A razão das amplitudes das ondas refletidas/transmitidas em relação à amplitude da onda incidente são os coeficientes de reflexão/transmissão (R/T) de deslocamento. Os coeficientes R/T, quando normalizados pela energia, são conhecidos como coeficientes R/T energéticos e representam as frações das energias das ondas geradas em relação à energia da onda incidente.

Ambos os coeficientes R/T são geralmente expressos em função dos ângulos de incidência da onda incidente. No caso isotrópico, podemos obter as fórmulas explícitas para os coeficientes R/T, entretanto em meios anisotrópicos, os coeficientes R/T são descritos de forma explícita somente para casos de alta simetria, e.g. transversalmente isotrópica com eixo vertical (VTI). Fórmulas aproximadas para simetrias de menores graus podem ser obtidas, como nos trabalhos de Daley & Hron (1979), Vavryčuk & Pšenčík (1988) e Shuey (1985). Valores não aproximados

para os coeficientes R/T em meios anisotrópicos geralmente devem ser obtidos da solução numérica do sistema de equações provenientes das condições de contorno da interface.

1.4. **Motivação e objetivos**

Este trabalho propõe estudar os coeficientes R/T de deslocamento e energéticos devido à sua grande importância para a caracterização de reservatórios de hidrocarbonetos. Como modelos isotrópicos não podem descrever completamente as características de um meio cujas heterogeneidades são pequenas (em termos do comprimento de onda utilizado na sísmica), consideramos os meios anisotrópicos.

A metodologia utilizada para a obtenção dos coeficientes R/T é válida para qualquer tipo de simetria dos meios anisotrópicos e da interface entre eles. Portanto são investigados os casos em que as simetrias e as interfaces planas são inclinadas entre si.

Para a obtenção dos coeficientes R/T em meios anisotrópicos foi desenvolvido um código em FORTRAN baseados nos procedimentos de Gajewski & Pšenčík, 1987. Procedimentos complementares são apresentados no capítulo 3, entre estes procedimentos, são adotados dois critérios para a distinção das ondas incidentes e geradas em meios anisotrópicos ao contrário do procedimento convencional, o qual pode gerar resultados errados para os coeficientes R/T para determinados ângulos de incidência.

1.5. **Sistema de coordenadas e notação**

Consideramos as fórmulas descritas em sistemas de coordenadas cartesianos. É utilizada a notação de índices subscritos para vetores e matrizes; os índices subscritos i, j, k, l e m podem assumir os valores de 1 a 3, os índices subscritos α e β assumem valores de 1 a 6. É adotada a convenção de Einstein quanto à soma de índices repetidos. Esta notação é descrita mais detalhadamente no Apêndice A.

Capítulo 2

Teoria

Consideramos os meios nos quais as ondas sísmicas se propagam como meios perfeitamente elásticos. Meios perfeitamente elásticos são temporariamente deformados quando sujeitos a uma carga externa que retornam ao seu estado inicial ao se retirar tal carga; o estado inicial das estruturas geológicas é de equilíbrio estático, onde as pressões cujas rochas são submetidas não mudam com o tempo.

A aplicação de uma força em uma determinada região causa deformação, primeiro em sua vizinhança e depois progressivamente às regiões mais distantes. Este processo é conhecido como propagação de onda. A propagação de onda é conectada com transmissão de energia, que é transportada de uma partícula a outra, e não pelo fluxo de partículas, que somente oscilam em torno de suas posições médias.

Para a descrição da onda sísmica introduziremos os conceitos do vetor de deslocamento, tensores de deformação e tensão, os quais fazem parte da teoria elástica dos meios nos quais as ondas se propagam. Maiores informações sobre a teoria elástica encontram-se no Apêndice B.

2.1. Vetor de deslocamento

Em um sistema de coordenadas cartesianas x_1, x_2, x_3 , uma partícula é deslocada de um ponto inicial $P[x_1, x_2, x_3]$, durante a deformação em um dado instante t , para o ponto $P'[x'_1, x'_2, x'_3]$. O deslocamento da partícula é dado pelo vetor de deslocamento \mathbf{u} . O vetor de deslocamento \mathbf{u} pode ser descrito em função de P , abordagem de Lagrange, ou em função de P' , abordagem de Euler. Adotamos a abordagem de Lagrange, tal que:

$$x'_i = x_i + u_i(x_k, t) = x_i + u_i(P, t). \quad (2.1)$$

A abordagem de Lagrange permite determinar a velocidade e aceleração do movimento da partícula de maneira mais direta que a abordagem de Euler, mais utilizada em hidrodinâmica. A velocidade do movimento da partícula é dada por

$$\dot{u}_i(x_k, t) = u_{i,t}(x_k, t), \quad (2.2)$$

e a aceleração da partícula é dada por:

$$\ddot{u}_i(x_k, t) = u_{i,tt}(x_k, t), \quad (2.3)$$

2.2. Tensor de deformação

O tensor de deformação finito E_{jk} é um tensor de segunda ordem que caracteriza a deformação na vizinhança do ponto P:

$$E_{jk} = 1/2(u_{k,j} + u_{j,k} + u_{i,j}u_{i,k}). \quad (2.4)$$

O tensor de deformação finito é simétrico ($E_{jk} = E_{kj}$); e devido ao terceiro termo em (2.4) o tensor de deformação finito é não linear. Elementos do tensor de deformação finito são adimensionais e geralmente não excedem valores maiores que da ordem de 10^{-4} , e.g. processos tectônicos são de ordem de 10^{-5} . Considerando-se deformações pequenas, onde

$$|u_{i,j}| \ll 1, \quad (2.5)$$

é possível negligenciar o termo não linear da expressão para E_{jk} e obter o tensor de pequena deformação e_{jk} , tal que:

$$e_{jk} = 1/2(u_{k,j} + u_{j,k}). \quad (2.6)$$

O tensor de pequena deformação é simétrico e linear.

Os tensores de deformação descrevem apenas a deformação que o corpo é sujeito e não contém informações a respeito de deslocamento ou rotação do corpo como um todo.

2.3. Tensor de tensão

A resistência do meio às deformações é causada por forças internas; estas forças internas são as tensões. Quando não existem deformações a resultante entre as forças externas e as tensões é zero. As forças de tensão são aplicadas nas vizinhanças das partículas do meio que estão em contato direto, logo são conhecidas como forças de contato, e são expressas em termos dos vetores de tensão ou tração T . Os vetores de tensão são vetores de densidades de força por unidade de área, significando que a tensão total é calculada como a integral de área das tensões do corpo.

O tensor de tensão σ_{ij} descreve o campo de tensão nas redondezas do ponto em que é especificado. Especificado o tensor de tensão σ_{ij} é possível determinar o vetor de tensão ou tração T que age em um elemento de superfície arbitrário através da relação:

$$T_i = \sigma_{ji}n_j, \quad (2.7)$$

onde n é o vetor unitário perpendicular ao elemento de superfície.

O tensor de tensão é simétrico e pode ser descrito por seis componentes independentes. O sistema de unidades dos vetores de tensão e tensores de tensão comumente utilizado é o pascal (Pa), $1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$.

2.4. Relações entre tensão e deformação

Os tensores de tensão e de deformação são mutuamente dependentes, uma vez que descrevem tensões e deformações do meio. A relação entre ambos os tensores é denominada relação constitutiva. A relação constitutiva depende do tipo de meio, que pode ser plásticos, elásticos, viscoso, entre outros. Neste trabalho consideramos meios elásticos, cuja relação constitutiva é a lei de Hooke:

$$\sigma_{ij}(x_m) = c_{ijkl}(x_m)e_{kl}(x_m), \quad (2.8)$$

onde c_{ijkl} são elementos de um tensor de quarta ordem. Estas constantes são os parâmetros elásticos, os quais descrevem as características elásticas dos meios em que as ondas sísmicas se propagam.

2.5. Parâmetros elásticos

Os parâmetros elásticos c_{ijkl} representam um tensor de quarto grau constituído de 81 elementos. Entretanto, o meio elástico impõe simetrias ao tensor que reduzem o número de elementos independentes para 21.

Devido às simetrias do tensor de tensão (Apêndice B, seção B.II), em relação aos índices i e j ; e dos tensores de deformação, em relação aos k e l , obtemos:

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} . \quad (2.9)$$

Da energia de deformação (Apêndice B, seção B.IV), obtemos:

$$c_{ijkl} = c_{klij} . \quad (2.10)$$

Por causa das simetrias 2.9 apenas seis combinações entre os índices i, j e k, l são necessárias para descrever os parâmetros elásticos do meio. Logo os índices i, j e k, l podem ser substituídos pelos índices $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ e $\beta = 1, 2, \dots, 6$, neste caso os coeficientes podem ser representados pela matriz C , cujos elementos são dados por $C_{\alpha\beta}$. A relação entre os índices é dada pela tabela Tabela 1.

i, j ou k, l	1,1	2,2	3,3	2,3	1,3	1,2
\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow	\updownarrow
α ou β	1	2	3	4	5	6

Tabela 1: tabela de relação entre os índices i, j e k, l e os índices α e β (notação de Voigt).

A substituição dos índices i, j e k, l por α e β é uma compressão de notação, chamada compressão de Voigt. Quando os parâmetros elásticos são descritos pela matriz C , eles são

descritos em notação de Voigt. Devido à simetria 2.10 os parâmetros elásticos em notação de Voigt também são simétricos:

$$C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}. \quad (2.11)$$

Logo, podemos representar a matriz \mathbf{C} pelos elementos contidos e acima da diagonal principal:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Os parâmetros elásticos são descritos por unidades de tensão, em pascals.

2.6. Causas de anisotropias na Terra e simetrias

Os meios são descritos pela densidade ρ e os parâmetros elásticos c_{ijkl} . Diferentes tipos de estruturas geológicas possuem valores diferentes de densidade e parâmetros elásticos. Anisotropias ocorrem quando há presença de estruturas internas alinhadas de um meio, o que determina comportamentos elásticos distintos a depender da direção de investigação. Geralmente estas anisotropias apresentam orientações privilegiadas e simetrias dominantes. Estas estruturas internas podem ser de diversas naturezas.

As principais causas de anisotropia observável sismicamente são (Helbig, 1994):

- Orientação de cristais alongados devido ao fluxo de rochas;
- Orientação preferencial de grãos com eixo maior coincidente com a direção horizontal;
- Compactação vertical devido à pressão litostática, tendendo orientar o eixo maior de grãos na direção horizontal;
- Presença de fraturas com plano orientado na direção de maior esforço tectônico;
- Grandes recristalizações em processos metamórficos, determinando foliações e/ou xistosidades;

- Compactação horizontal, ou oblíqua, devido compressão tectônica; e
- Abertura ou fechamento de fraturas ou poros, alinhando-se na direção de maior esforço.

A anisotropia inerente ao meio devido à orientação de heterogeneidades em escala microscópica (Winterstein, 1990) é considerada anisotropia intrínseca.

As anisotropias dos meios são classificadas de acordo com suas simetrias. Cada simetria determina o número de parâmetros elásticos independentes; podemos descrever o caso mais geral com 21 parâmetros independentes (caso triclinico); quanto maior o grau de simetria, menor o número de parâmetros independentes. O caso de maior simetria é o isotrópico, descrito por apenas dois parâmetros elásticos independentes. As simetrias dos meios anisotrópicos mais importantes em exploração de hidrocarbonetos são a isotropia transversal (TI) e ortorrômbica (ORT) (Thomsen, 2002), estas simetrias são descritas no Apêndice C.

2.7. Simetrias dos meios anisotrópicos

Nesta seção apresentamos as simetrias mais importantes para a exploração de hidrocarbonetos. Estas simetrias são representadas pelas matrizes de Voigt e possuem orientações especiais, nas quais eixos de simetria coincidem com os eixos cartesianos. Orientações diferentes podem ser obtidas através de rotações dos parâmetros elásticos conforme o Capítulo 3.2.

Meio isotrópico

Os meios isotrópicos são invariantes perante qualquer rotação e podem ser descritos por apenas dois parâmetros independentes. Existem várias duplas de parâmetros que podem descrever um meio isotrópico, como módulo de Young e a razão de Poisson; o módulo de compressibilidade e o módulo de incompressibilidade ou ainda as velocidades de ondas P e S. Entretanto, geralmente são utilizados os parâmetros de Lamé λ e μ .

Os parâmetros elásticos, descrito em notação de Voigt, em termos dos parâmetros de Lamé são:

$$\mathbf{C}^{ISO} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Meios transversalmente isotrópicos

Os meios transversalmente isotrópicos (TI) são típicos em meios que apresentam sistemas de fraturas alinhadas (Hudson, 1981), folhelhos e acamamentos (Thomsen, 2002). Os meios (TI) podem ser descritos por cinco parâmetros independentes. Os meios TI possuem um eixo de simetria espacial, qualquer rotação em torno deste eixo de simetria não altera o tensor c_{ijkl} . Isto significa que o plano perpendicular a este eixo comporta-se isotropicamente. Os casos especiais cujos eixos de simetria são verticais e horizontais são os casos de simetrias: transversalmente isotrópica com eixo vertical (VTI) e transversalmente isotrópica com eixo horizontal (HTI), respectivamente.

Quando eixo de simetria do meio coincide com x_3 do sistema de coordenadas cartesianas, os parâmetros elásticos em notação de Voigt são:

$$\mathbf{C}^{VTI} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ & & & & & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Quando eixo de simetria do meio coincide com x_1 do sistema de coordenadas cartesianas, os parâmetros elásticos em notação de Voigt são:

$$\mathbf{C}^{HTI} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{22} - 2C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{55} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Meios ortorrômbicos

Os meios ortorrômbicos (ORT) são típicos em folhelhos, sequência de estratos com sistema de fraturas verticais (Thomsen, 2002). Os meios ORT são descritos por 9 parâmetros elásticos independentes. São caracterizados por 3 eixos de simetria mutuamente ortogonais. Qualquer rotação de 180° em torno destes eixos não altera o tensor c_{ijkl} . Neste caso podemos descrever um meio ortorrômbico cujos eixos de simetria são coincidentes com os eixos cartesianos pela matriz

$$\mathbf{C}^{ORT} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

2.8. Equação elastodinâmica para meios sólidos homogêneos

A propagação de ondas em meios elásticos é descrita pela equação de onda elastodinâmica. Esta equação deriva da equação do movimento (Apêndice B.III):

$$f_i + \sigma_{ij,j} = \rho u_{i,tt}. \quad (2.17)$$

Inserindo a relação de tensão-deformação 2.8 na equação do movimento 2.17 obtemos

$$f_i + (c_{ijkl}e_{kl})_{,j} = \rho u_{i,tt} . \quad (2.18)$$

Doravante utilizaremos os parâmetros elásticos normalizados pela densidade a_{ijkl} , isto é

$$a_{ijkl} = c_{ijkl}/\rho . \quad (2.19)$$

Os parâmetros elásticos normalizados pela densidade também podem ser expressos pela notação de Voigt

$$A_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}/\rho . \quad (2.20)$$

Os parâmetros elásticos normalizados pela densidade possuem dimensão em $(m/s)^2$.

Como meios homogêneos possuem densidade ρ constante, substituindo os parâmetros elásticos pelos parâmetros elásticos normalizados pela densidade na equação 2.18, obtemos

$$f_i/\rho + (a_{ijkl}e_{kl})_{,j} = u_{i,tt} ; \quad (2.21)$$

utilizando a relação (2.6) reescrevemos a equação (2.21) somente em termos do vetor de deslocamento, tal que

$$f_i/\rho + 1/2[a_{ijkl}(u_{k,l} + u_{l,k})]_{,j} = u_{i,tt} . \quad (2.22)$$

A forma mais geral da equação elastodinâmica em deslocamento é dada por:

$$f_i/\rho + (a_{ijkl}u_{k,l})_{,j} = u_{i,tt} . \quad (2.23)$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial de segunda ordem com coeficientes variáveis.

Em meios homogêneos os parâmetros elásticos normalizados pela densidade são constantes e a equação 2.23 é reduzida para

$$a_{ijkl}u_{k,jl} + f_i/\rho = u_{i,tt} . \quad (2.24)$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial linear vetorial de segunda ordem com coeficientes constantes.

Consideramos que as demais forças são desprezíveis comparadas às forças de geração da onda sísmica, logo o termo f , que descreve a densidade de forças volumétricas, está relacionado somente à geração de onda. Este termo é denominado como termo da fonte, pois representa a fonte das ondas sísmicas. Neste trabalho iremos considerar a equação elastodinâmica 2.24 fora da região onde a fonte sísmica possui influência, logo o termo f é zero. Logo a equação 2.24 torna-se homogênea e podemos reescrevê-la como

$$a_{ijkl}u_{k,jl} = u_{i,tt} . \quad (2.25)$$

2.9. Interfaces

Os parâmetros elásticos e densidades podem variar continuamente em um meio, neste caso as equações de movimento podem ser definidas. Entretanto existem interfaces entre estes meios nas quais a continuidade dos parâmetros elásticos e das densidades são violados.

Em interfaces entre meios, os vetores de deslocamento e suas derivadas devem obedecer às condições de contorno, que são especificadas para vários tipos de interface e meio. Consideramos interfaces entre sólidos em contato soldado, o qual previne deslizamento e difusão de material nas interfaces. Entre meios sólidos as condições de contorno são a continuidade do vetor de deslocamento e continuidade do vetor de tração através da interface.

2.10. Ondas planas

As ondas planas são uma das possíveis soluções para a equação elastodinâmica para meios homogêneos (2.25). Ondas planas são ondas cujas superfícies de fase constante são planos paralelos, os quais são normais à direção de propagação.

Consideramos as ondas planas transientes, que diferentemente das ondas harmônicas que oscilam em frequência única constante, são compostas por várias frequências e podem apresentar sinais arbitrários. A forma de uma onda transiente é descrita pelo sinal analítico F .

Consideramos a equação de ondas planas transientes da seguinte forma:

$$u_i(\mathbf{x}, t) = Ag_i F(t - p_m x_m), \quad (2.26)$$

onde a parte real de \mathbf{u} é o vetor de deslocamento, A é a amplitude de oscilação, \mathbf{g} é o vetor de polarização, o qual é unitário e possui direção de oscilação da onda, F é sinal analítico da onda transiente, e \mathbf{p} é o vetor de vagarosidade, definido por

$$p_i = N_i/c. \quad (2.27)$$

O vetor \mathbf{N} é unitário, perpendicular à frente de onda e paralelo ao vetor de vagarosidade. O escalar c é a velocidade de fase da onda transiente.

2.11. A Matriz de Christoffel

Inserindo a solução de onda plana transiente (2.26) na equação elastodinâmica para meios homogêneos (2.25) obtemos

$$a_{ijkl}g_k p_l p_j - g_i = 0. \quad (2.28)$$

Reescrevemos a equação (2.28) em termos do vetor \mathbf{N} e da velocidade de fase c , através da relação 2.23:

$$(\Gamma_{ik} - c^2 \delta_{ik})g_k = 0, \quad (2.29)$$

onde

$$\Gamma_{ik} = a_{ijkl}N_j N_l. \quad (2.30)$$

A matriz $\mathbf{\Gamma}$ é a matriz de Christoffel. A matriz de Christoffel é uma matriz 3x3 simétrica de elementos reais, tal que

$$\Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}. \quad (2.31)$$

Matrizes simétricas reais possuem autovalores reais e autovetores mutuamente ortogonais. A matriz de Christoffel é também definida positiva, ou seja, para qualquer vetor \mathbf{d} , diferente de zero, vale a desigualdade:

$$\Gamma_{ik}d_id_k > 0. \quad (2.32)$$

Uma importante característica de matrizes definidas positivas é a de possuírem autovalores positivos.

A equação 2.29 é chamada de equação de Christoffel e sua equação característica é

$$\det(\mathbf{\Gamma} - c^2\mathbf{I}) = 0, \quad (2.33)$$

onde os quadrados das velocidades de fases c^2 são os autovalores da matriz de Christoffel $\mathbf{\Gamma}$

A equação característica 2.33 é uma equação polinomial de terceira ordem para c^2 :

$$\lambda_0 + \lambda_1 c^2 + \lambda_2 (c^2)^2 + \lambda_3 (c^2)^3 = 0, \quad (2.34)$$

onde os coeficientes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ e λ_3 são:

$$\lambda_0 = \Gamma_{11}\Gamma_{22}\Gamma_{33} - \Gamma_{13}^2\Gamma_{22} - \Gamma_{23}^2\Gamma_{11} - \Gamma_{12}^2\Gamma_{33}, \quad (2.35)$$

$$\lambda_1 = \Gamma_{11}\Gamma_{22} + \Gamma_{22}\Gamma_{33} + \Gamma_{11}\Gamma_{33} - \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{12}^2, \quad (2.36)$$

$$\lambda_2 = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} + \Gamma_{33}, \quad (2.37)$$

$$\lambda_3 = -1. \quad (2.38)$$

Como a matriz de Christoffel é real, simétrica e definida positiva, seus autovalores c^2 são reais e positivos. Para uma dada direção N existem três pares de velocidades de fase $\pm c^{(1)}$, $\pm c^{(2)}$ e $\pm c^{(3)}$. Consideramos apenas as velocidades positivas. Cada uma das três velocidades de fase positivas corresponde a uma onda propagando no meio anisotrópico. Logo, para um dado meio, descrito pelos parâmetros elásticos normalizados pela densidade a_{ijkl} , existem três velocidades de fase $c^{(1)}(N)$, $c^{(2)}(N)$ e $c^{(3)}(N)$ associadas à propagação de ondas. Os casos isotrópicos são uma exceção e possuem duas velocidades de fase idênticas, estas são associadas apenas a dois tipos de onda.

Reescrevendo a equação 2.33 em termos dos vetores de vagarosidade, obtemos a equação da superfície de vagarosidade:

$$\det(\tilde{\Gamma} - \mathbf{I}) = 0, \quad (2.39)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}_{ik} = a_{ijkl} p_l p_j. \quad (2.39)$$

2.12. Vetores de polarização

Cada autovalor da matriz de Christoffel está associado a um autovetor \mathbf{g} , que especifica a polarização da onda. Nos casos em que os autovalores são distintos, os autovetores correspondentes são unicamente determinados. Os autovetores da matriz de Christoffel são mutuamente ortogonais e representam três diferentes polarizações. Cada vetor de polarização está associado a uma velocidade de fase. Geralmente os vetores de polarização em meios anisotrópicos não são paralelos e não são perpendiculares ao vetor \mathbf{N} .

Reescrevendo a equação de Christoffel (2.29) em termos da matriz \mathbf{M} , obtemos

$$M_{ik} g_k = 0, \quad (2.40)$$

onde

$$M_{ik} = \Gamma_{ik} - c^2 \delta_{ik}. \quad (2.41)$$

A equação 2.40 representa a ortogonalidade do vetor \mathbf{g} em relação a cada uma das linhas da matriz \mathbf{M} . Isto significa que pelo menos duas das linhas da matriz \mathbf{M} são dependentes. O vetor de polarização é paralelo aos vetores não nulos resultantes do produto vetorial entre as linhas da matriz \mathbf{M} . Logo, o vetor de polarização \mathbf{g} determinado deste modo é obtido da normalização:

$$g_k g_k = 1. \quad (2.42)$$

Multiplicando a equação de Christoffel (2.29) por \mathbf{g} , obtemos

$$(\Gamma_{ik} - c^2 \delta_{ik}) g_i g_k = \Gamma_{ik} g_i g_k - c^2 = 0, \quad (2.43)$$

que implica em

$$\Gamma_{ik}g_i g_k = c^2. \quad (2.44)$$

2.13. Velocidades de grupo e transporte de energia

A propagação de ondas planas está associada ao transporte de energia. A velocidade do fluxo de energia é a velocidade de grupo da onda. A velocidade de grupo \mathbf{v} aponta a direção de propagação de energia e é dada por:

$$v_i = a_{ijkl}p_j g_k. \quad (2.45)$$

O valor e a direção da velocidade de grupo também variam com a direção de \mathbf{N} .

2.14. Relação entre velocidade de grupo e velocidade de fase

Geralmente a direção da velocidade de grupo \mathbf{v} em meios anisotrópicos é diferente da direção de propagação da frente de onda. A projeção da velocidade de grupo \mathbf{v} em relação ao vetor unitário \mathbf{N} que indica a direção de propagação da frente de onda, é dada por:

$$v_i N_i = c^{-1} a_{ijkl} N_l N_i g_j g_k = c^{-1} \Gamma_{jk} g_j g_k. \quad (2.46)$$

Inserindo a equação 2.44 na equação 2.46, obtemos a relação entre a velocidade de grupo \mathbf{v} e a velocidade de fase c :

$$v_i N_i = c. \quad (2.47)$$

Logo a velocidade de grupo $|\mathbf{v}|$ é maior ou igual à velocidade de fase c .

2.15. Tipos de ondas

Cada dupla de autovalor c e autovetor \mathbf{g} corresponde uma das três possíveis ondas em meios anisotrópicos. A onda mais rápida, i.e. de maior velocidade c , é a onda-qP. Como em

meios anisotrópicos as polarizações geralmente não são alinhadas com o vetor normal à frente de onda N , a onda-qP representa uma onda de natureza quase compressiva (por isso dá-se o nome qP) e sua polarização g é a mais próxima à N . As outras duas ondas são ondas quase cisalhantes qS1 e qS2, estas ondas possuem velocidades menores do que a onda-qP e seus vetores de polarização estão contidos no plano perpendicular à polarização da onda-qP.

Em meios isotrópicos é possível identificar somente duas ondas que se propagam com velocidades distintas, estas ondas são a onda de compressão (onda-P) e a onda cisalhante (onda-S). Assim como nos meios anisotrópicos as ondas compressoras são as mais rápidas, entretanto sua polarização g é paralela em relação à N , logo é utilizada a nomenclatura P para a onda compressora, ao invés da nomenclatura qP, o mesmo ocorre para a onda-S. A onda-S geralmente é decomposta em componentes verticais e horizontais cujas respectivas polarizações recebem a nomenclatura SH e SV, no entanto com uma única velocidade.

2.16. Degenerescências e direções singulares

Quando dois autovalores da matriz de Christoffel Γ_{ik} são iguais, dizemos que o caso é degenerado. Em casos degenerados dois dos três autovetores não podem ser unicamente especificados. Em meios isotrópicos esta degenerescência ocorre em todas as direções de propagação, entretanto em meios anisotrópicos este caso ocorre somente em direções singulares. Em meios isotrópicos os dois autovalores distintos representam as ondas-P e as ondas-S. Em meios anisotrópicos os três autovalores representam as ondas-qS1, ondas-qS2 e ondas-qP.

As ondas-P e qP sempre são unicamente especificadas, logo as degenerescências ocorrem somente para ondas cisalhantes ou quase-cisalhantes. Os autovetores das ondas-S e qS para casos degenerados podem ser quaisquer dois vetores unitários mutuamente perpendiculares e contidos no plano perpendicular ao autovetor da onda-P ou onda-qP. Geralmente em meios isotrópicos os autovetores da onda-S são decompostos em uma projeção vertical (onda-SV) e uma horizontal (onda-SH).

2.17. Superfície de velocidade de fase

A dependência direcional da propagação de ondas em meios anisotrópicos pode ser representada através de superfícies de velocidades de fase. A superfície de velocidade de fase é especificada pelo contorno dos pontos especificados pelo vetor radial \mathbf{r} , tal que

$$r_i = cN_i, \quad (2.48)$$

Onde c é a velocidade de grupo e N é o vetor normal unitário à frente de onda.

As superfícies de velocidade de fase para um meio anisotrópico consistem em três superfícies. A superfície externa é a superfície da onda mais rápida, onda-qP. As outras superfícies internas são as superfícies das ondas qS1 e qS2. As superfícies de velocidades de fase das ondas qS1 e qS2 sempre possuem pontos em comum, elas se tangenciam ou interceptam nas direções singulares em que suas velocidades de fase são coincidentes.

Em meios isotrópicos as superfícies de velocidades de fase consistem de duas casacas esféricas concêntricas. A superfície externa representando a onda-P e a superfície interna representando a onda-S.

2.18. Ondas planas não-homogêneas

As ondas planas não-homogêneas, em meios perfeitamente elásticos, são resultantes dos processos de reflexão e transmissão de ondas planas; são caracterizadas por possuírem vetores de vagariedade complexos, tais que

$$p_k = p_k^{Re} + ip_k^{Im}, \quad (2.49)$$

onde as componentes reais e imaginárias do vetor de vagariedade são perpendiculares entre si. A amplitude das ondas não-homogêneas é caracterizada por decrescer rapidamente à medida que se propaga, estas ondas possuem decrescimento máximo na direção \mathbf{p}^{Im} .

As ondas planas não-homogêneas são caracterizadas por dois planos característicos: um plano de fase constante, tal que

$$p_k^{Re} x_k = constante ; \quad (2.50)$$

e um plano de amplitude constante

$$p_k^{Im} x_k = constante . \quad (2.51)$$

A relação entre o vetor de vagarosidade e a velocidade de fase é dada pela equação iconal, sejam vetores de fases reais ou complexos:

$$p_k p_k = c^{-2} . \quad (2.52)$$

Isto implica em:

$$p_k^{Re} p_k^{Re} - p_k^{Im} p_k^{Im} = Re(c^{-2}) \quad (2.53)$$

e

$$2p_k^{Re} p_k^{Im} = Im(c^{-2}) . \quad (2.54)$$

Em meios elásticos a equação 2.54 é reduzida a:

$$p_k^{Re} p_k^{Im} = 0 . \quad (2.55)$$

O vetor de polarização \mathbf{g} de uma onda não-homogênea também é complexo e pode ser obtido da multiplicação das linhas da matriz M_{ik} , como na Seção 2.12. A normalização dos vetores de polarização complexos é estendida para:

$$g_k g_k^* = 1 . \quad (2.56)$$

O vetor de velocidade de grupo é um vetor real que, em termos complexos, é dado por:

$$v_i = a_{ijkl} (p_l g_j g_k^* + p_l^* g_j^* g_k) . \quad (2.57)$$

Reescrevendo a equação 2.47 em termos do vetor de vagarosidade \mathbf{p} , obtemos

$$v_i p_i = 1 , \quad (2.58)$$

inserindo o vetor de vagarosidade complexo (2.49) obtemos as seguintes relações:

$$v_i p_i^{Re} = 1, \quad (2.59)$$

$$v_i p_i^{Im} = 0. \quad (2.60)$$

O vetor de velocidade de grupo \mathbf{v} é paralelo à componente real do vetor de vagarosidade \mathbf{p}^{Re} e perpendicular à componente imaginária \mathbf{p}^{Im} .

2.19. Reflexão e transmissão de ondas planas

Quando uma onda plana impinge uma interface ela gera ondas planas em ambos os lados da interface. O número de ondas planas geradas depende dos tipos dos meios em ambos os lados da interface. Em interfaces entre meios anisotrópicos para cada onda incidente são geradas seis ondas, três refletidas e três transmitidas.

Consideramos uma interface plana Σ separando dois meios distintos. A origem das coordenadas cartesianas está contida na interface Σ . A interface plana é descrita pelo vetor normal unitário \mathbf{n} , tal que

$$n_i x_i = 0, \quad x_i \in \Sigma. \quad (2.61)$$

Os dois meios estão em contato soldado na interface plana Σ . O primeiro meio é aquele no qual a onda incidente se propaga. Adotamos o sentido do vetor \mathbf{n} como o sentido que aponta da interface para o primeiro meio (meio 1) logo no primeiro meio vale a expressão

$$n_i x_i > 0, \quad (2.62)$$

e no segundo meio (meio 2) vale

$$n_i x_i < 0. \quad (2.63)$$

2.20. Descrição das ondas geradas e incidente

As ondas planas são descritas em termos do vetor de deslocamento pela equação 2.26; a onda incidente à interface plana é discriminada pelo índice I , tal que

$$u_i^{(I)}(\mathbf{x}, t) = A^{(I)} g_i^{(I)} F^{(I)}(t - p_k^{(I)} x_k); \quad (2.64)$$

as ondas geradas são discriminadas pelo índice G , tal que

$$u_i^{(G)}(\mathbf{x}, t) = A^{(G)} g_i^{(G)} F^{(G)}(t - p_k^{(G)} x_k), \quad G = 1, \dots, 6, \quad (2.65)$$

onde os três tipos de ondas refletidas qS1, qS2 e qP são discriminados respectivamente pelos índices $G=1, 2$ e 3 ; e os três tipos de ondas transmitidas qS1, qS2 e qP são discriminados respectivamente por $G=4, 5$ e 6 . Quando as ondas geradas se propagam em meios isotrópicos, os índices representam as reflexões/transmissões das projeções SV e SH da onda cisalhante e a onda-P respectivamente.

2.21. Condição de contorno na interface

A onda incidente e as ondas refletidas propagam no primeiro meio, enquanto as ondas transmitidas propagam no segundo meio. Para qualquer instante t e qualquer ponto \mathbf{x} da interface Σ a condição de continuidade do vetor de deslocamento através da interface Σ é dada por

$$\begin{aligned} u_i^{(I)}(\mathbf{x}, t) + u_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + u_i^{(2)}(\mathbf{x}, t) + u_i^{(3)}(\mathbf{x}, t) \\ = u_i^{(4)}(\mathbf{x}, t) + u_i^{(5)}(\mathbf{x}, t) + u_i^{(6)}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.66)$$

inserindo (2.64) e (2.65) obtemos

$$\begin{aligned} -A^{(1)} g_i^{(1)} F^{(1)}(t - p_k^{(1)} x_k) - A^{(2)} g_i^{(2)} F^{(2)}(t - p_k^{(2)} x_k) \\ - A^{(3)} g_i^{(3)} F^{(3)}(t - p_k^{(3)} x_k) + A^{(4)} g_i^{(4)} F^{(4)}(t - p_k^{(4)} x_k) \\ + A^{(5)} g_i^{(5)} F^{(5)}(t - p_k^{(5)} x_k) + A^{(6)} g_i^{(6)} F^{(6)}(t - p_k^{(6)} x_k) \\ = A^{(I)} g_i^{(I)} F^{(I)}(t - p_k^{(I)} x_k). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Considerando o sinal analítico das ondas geradas igual ao sinal analítico da onda incidente em qualquer instante t e qualquer ponto \mathbf{x} da interface Σ , tal que

$$F^{(I)}(t - p_k^{(I)} x_k) = F^{(G)}(t - p_k^{(G)} x_k), \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad G = 1, \dots, 6, \quad (2.68)$$

podemos reescrever a condição de contorno dos vetores de deslocamento na seguinte forma:

$$-A^{(1)} g_i^{(1)} - A^{(2)} g_i^{(2)} - A^{(3)} g_i^{(3)} + A^{(4)} g_i^{(4)} + A^{(4)} g_i^{(4)} + A^{(4)} g_i^{(4)} = A^{(I)} g_i^{(I)}. \quad (2.69)$$

O vetor de tração é dado pela equação 2.7, que após a inserção da relação constitutiva (2.8), pode ser reescrita na forma a seguir:

$$T_i = c_{ijkl} e_{kl} n_j = c_{ijkl} n_j u_{k,l}. \quad (2.70)$$

Inserindo a equação 2.26 obtemos

$$T_i = \rho a_{ijkl} n_j A g_k p_l F'(t - p_m x_m). \quad (2.71)$$

Considerando a equivalência da derivada do sinal analítico na interface Σ podemos escrever a condição de continuidade dos vetores de tração:

$$-A^{(1)} X_i^{(1)} - A^{(2)} X_i^{(2)} - A^{(3)} X_i^{(3)} + A^{(4)} X_i^{(4)} + A^{(5)} X_i^{(5)} + A^{(6)} X_i^{(6)} = A^{(I)} X_i^{(I)}, \quad (2.72)$$

onde

$$X_i = \rho a_{ijkl} n_j g_k p_l. \quad (2.73)$$

2.22. Transformação do vetor de vagarosidade através da interface

Da condição de continuidade do sinal analítico na interface plana Σ , equação 2.68; qualquer par de pontos, $\mathbf{x}^{(I)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ pertencentes à interface Σ , obedece a igualdade:

$$p_k^{(I)} (x_k^{(1)} - x_k^{(2)}) = p_k^{(G)} (x_k^{(1)} - x_k^{(2)}), \quad G = 1, \dots, 6. \quad (2.74)$$

Logo, as componentes dos vetores de vagarosidade $\mathbf{p}^{(I)}$ e $\mathbf{p}^{(G)}$ tangenciais à interface Σ são iguais. Podemos decompor o vetor de vagarosidade em duas componentes, tal que

$$p_i = b_i + \xi n_i, \quad (2.75)$$

onde \mathbf{b} é o vetor tangencial à interface plana Σ e ξ é a projeção do vetor de vagarosidade normal à interface plana.

De acordo com a equação 2.74 as projeções tangenciais dos vetores de vagarosidade da onda incidente e das ondas geradas devem ser iguais, logo

$$p_i^{(I)} - (p_k^{(I)} n_k) n_i = p_i^{(G)} - (p_k^{(G)} n_k) n_i = b_i. \quad (2.76)$$

A equação 2.76 pode ser reescrita em termos das velocidades de fase e dos ângulos entre o vetor normal à interface \mathbf{n} e o vetor perpendicular à frente de onda \mathbf{N} , como a lei de Snell para meios anisotrópicos:

$$\frac{\sin \theta^{(I)}}{c^{(I)}(\theta^{(I)})} = \frac{\sin \theta^{(G)}}{c^{(G)}(\theta^{(G)})}, \quad G = 1, \dots, 6. \quad (2.77)$$

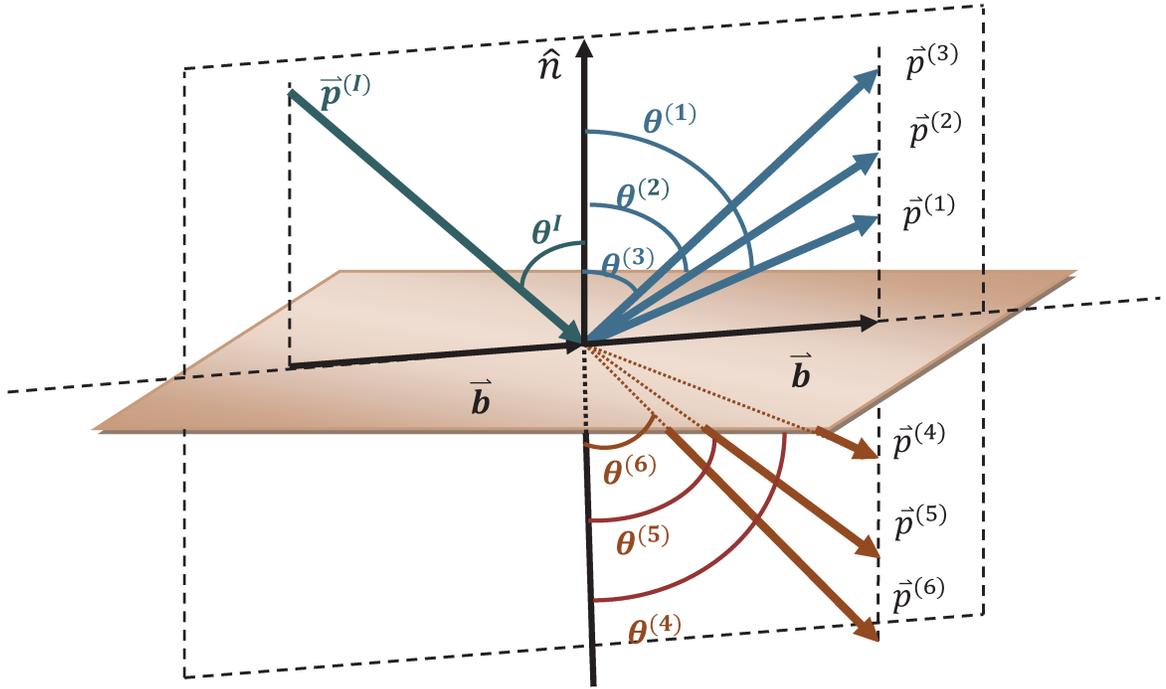


Figura 1: Esquema da lei de Snell. Uma onda incidente, cujo vetor de vagarosidade é $\mathbf{p}^{(l)}$, gera ondas refletidas e ondas transmitidas, cujos vetores de vagarosidade são $\mathbf{p}^{(1)}, \dots, \mathbf{p}^{(6)}$. Os vetores de vagarosidade azuis representam as ondas que propagam no meio 1 e os vetores de vagarosidade em vermelho representam as ondas que propagam no meio 2. As ondas geradas e incidente possuem a mesma projeção tangencial à interface dos seus vetores de vagarosidade.

Cada um dos meios, separados pela interface Σ , está relacionado a três superfícies de vagarosidade. Para obter a componente normal ξ dos vetores de vagarosidade das ondas refletidas e transmitidas é necessário que a equação da superfície de vagarosidade seja resolvida para o primeiro e o segundo meio respectivamente. Inserindo a equação 2.75 na equação da superfície de vagarosidade (2.39), obtemos

$$\det[e_{ik} + \xi f_{ik} + \xi^2 g_{ik}] = 0, \quad (2.78)$$

onde

$$e_{ik} = a_{ijkl} b_l b_j - \delta_{ik}, \quad (2.79)$$

$$f_{ik} = a_{ijkl} (b_j n_l + n_j b_l), \quad (2.80)$$

$$g_{ik} = a_{ijkl}n_jn_l. \quad (2.81)$$

Do determinante da equação 2.78 obtemos uma equação polinomial de sexto grau para ξ :

$$\xi^6 c_6 + \xi^5 c_5 + \xi^4 c_4 + \xi^3 c_3 + \xi^2 c_2 + \xi c_1 + c_0 = 0, \quad (2.82)$$

Onde os sete coeficientes são dados por:

$$c_0 = \frac{1}{6} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} (e_{li} e_{mj} e_{nk}), \quad (2.83)$$

$$c_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} (f_{li} e_{mj} e_{nk}), \quad (2.84)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} (f_{li} f_{mj} e_{nk} + g_{li} e_{mj} e_{nk}), \quad (2.85)$$

$$c_3 = \frac{1}{6} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} (f_{li} f_{mj} f_{nk} + 6g_{li} f_{mj} e_{nk}), \quad (2.86)$$

$$c_4 = \frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} [g_{li} (f_{mj} f_{nk} + g_{mj} e_{nk})], \quad (2.87)$$

$$c_5 = \frac{1}{2} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} g_{li} g_{mj} f_{nk}, \quad (2.88)$$

$$c_6 = \frac{1}{6} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} g_{li} g_{mj} g_{nk}, \quad (2.89)$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.

Com o aumento do ângulo de inclinação da onda incidente, algumas raízes da equação 2.82 passam de reais a complexas, e a onda correspondente se torna evanescente. As ondas evanescentes são ondas não homogêneas, pois seus vetores de vagarosidade são complexos, e seus planos de amplitude constante são paralelos ao plano da interface. O ângulo a partir do qual a onda gerada se torna evanescente é o ângulo crítico. Ângulos menores pertencem à região subcrítica; e ângulos maiores que o ângulo crítico pertence à região sobre crítica.

2.23. Seleção dos vetores de vagarosidade das ondas geradas

A equação 2.82 possui seis raízes, entretanto somente três delas possuem significado físico, portanto devemos excluir três raízes. As raízes reais de significado físico são aquelas cujos fluxos de energia apontam para os meios nos quais se propagam. Portanto as ondas refletidas devem possuir os vetores de velocidade de grupo \mathbf{v} em direção ao primeiro meio, tal que

$$n_i v_i = n_i a_{ijkl}^{(1)} p_l g_j g_k > 0 ; \quad (2.90)$$

enquanto que as ondas transmitidas devem possuir os vetores de velocidade de grupo em direção ao segundo meio, tal que

$$n_i v_i = n_i a_{ijkl}^{(2)} p_l g_j g_k < 0 . \quad (2.91)$$

Em meios perfeitamente elásticos os coeficientes da equação 2.82 são reais, isto implica que raízes complexas ocorrem em pares de complexos conjugados. As raízes complexas de significado físico são aquelas que satisfazem a condição de radiação, ou seja, suas amplitudes devem reduzir com o aumento da distância da interface Σ . Logo a componente imaginária das raízes das ondas geradas deve obedecer:

$$Im(\xi) n_k x_k > 0 . \quad (2.92)$$

Portanto, para a nossa orientação do vetor \mathbf{n} , as ondas refletidas devem obedecer à seguinte relação:

$$Im(\xi) > 0 , \quad (2.93)$$

E as ondas transmitidas devem obedecer:

$$Im(\xi) < 0 . \quad (2.94)$$

Raízes complexas correspondem a ondas evanescentes, as quais são não homogêneas. Neste trabalho apesar de não calculamos os coeficientes R/T para ondas geradas não homogêneas, entretanto para uma dada incidência não são todas as ondas geradas que se tornam

evanescentes, logo nós utilizamos as polarizações e tensões das ondas evanescentes para o cálculo dos coeficientes R/T das demais ondas geradas que são homogêneas.

2.24. Coeficientes R/T

Os coeficientes R/T de deslocamento são as razões das amplitudes das ondas geradas ($A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$, $A^{(4)}$, $A^{(5)}$, $A^{(6)}$) em relação à amplitude da onda incidente $A^{(I)}$. Logo os seis coeficientes R/T são:

$$R_{IG} = \frac{A^{(G)}}{A^{(I)}}, \quad G = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.95)$$

onde o índice I pode ser substituído pelo tipo da onda incidente em meios anisotrópicos, qS1, qS2 ou qP. Para o caso cujo primeiro meio é isotrópico o índice I pode ser substituído pelos tipos de projeção da polarização da onda incidente SV/SH ou pela onda qP.

As condições de contorno (2.69) e (2.72) representam um sistema de equações algébricas lineares não-homogêneas, podemos reescrevê-las como:

$$L_{\alpha\beta} D_{\beta} = U_{\alpha}, \quad (2.96)$$

onde

$$\mathbf{L} \equiv \begin{pmatrix} -g_1^{(1)} & -g_1^{(2)} & -g_1^{(3)} & g_1^{(4)} & g_1^{(5)} & g_1^{(6)} \\ -g_2^{(1)} & -g_2^{(2)} & -g_2^{(3)} & g_2^{(4)} & g_2^{(5)} & g_2^{(6)} \\ -g_3^{(1)} & -g_3^{(2)} & -g_3^{(3)} & g_3^{(4)} & g_3^{(5)} & g_3^{(6)} \\ -X_1^{(1)} & -X_1^{(2)} & -X_1^{(3)} & X_1^{(4)} & X_1^{(5)} & X_1^{(6)} \\ -X_2^{(1)} & -X_2^{(2)} & -X_2^{(3)} & X_2^{(4)} & X_2^{(5)} & X_2^{(6)} \\ -X_3^{(1)} & -X_3^{(2)} & -X_3^{(3)} & X_3^{(4)} & X_3^{(5)} & X_3^{(6)} \end{pmatrix}, \quad (2.97)$$

$$\mathbf{D} = (R_{IqS1}, R_{IqS2}, R_{IqP}, T_{IqS1}, T_{IqS2}, T_{IqP})^T, \quad (2.98)$$

$$\mathbf{U} = (g_1^{(I)}, g_2^{(I)}, g_3^{(I)}, X_1^{(I)}, X_2^{(I)}, X_3^{(I)})^T. \quad (2.99)$$

A matriz L é a matriz de deslocamento-tensão para as ondas geradas, o vetor U é o vetor de deslocamento-tensão para a onda incidente e o vetor D é vetor de coeficientes R/T de deslocamento.

Os coeficientes R/T são grandezas complexas e podem ser representados em termos de coordenadas polares:

$$R_{IG} = |R_{IG}|e^{i\phi_R}, \quad T_{IG} = |T_{IG}|e^{i\phi_T}, \quad (2.100)$$

onde ϕ_R é a fase do coeficiente de reflexão e ϕ_T é a fase do coeficiente de transmissão.

2.25. Coeficientes R/T energéticos

Os coeficientes R/T de deslocamento podem ser relacionados ao fluxo de energia na interface Σ . A onda incidente fornece fluxo de energia positivo para a interface, enquanto que as ondas geradas fornecem fluxo de energia positivo para os meios ao redor da interface. A razão entre o fluxo de energia das ondas geradas em relação à onda incidente para um elemento da interface Σ é

$$\frac{\rho^{(M)}|A^{(G)}| |v_i^{(G)} n_i|}{\rho^{(1)}|A^{(I)}| |v_i^{(I)} n_i|}, \quad M = 1,2, \quad (2.101)$$

onde o índice M está relacionado ao primeiro ou segundo meio, $M=1$ para ondas refletidas e $M=2$ para ondas transmitidas. Quando o vetor de vazarosidade p é complexo a onda gerada é não homogênea e obtemos

$$|v_i n_i| = 0. \quad (2.102)$$

Os coeficientes R/T energéticos ($R^{(E)}/ T^{(E)}$) são os coeficientes de reflexão e transmissão normalizados pela energia e relacionam o fluxo de energia das ondas geradas em relação à onda incidente, tal que

$$R_{IG}^{(E)} R_{IG}^{(E)*} = \frac{\rho^{(1)} |A^{(G)}| |v_i^{(G)} n_i|}{\rho^{(1)} |A^{(I)}| |v_i^{(I)} n_i|}, \quad T_{IG}^{(E)} T_{IG}^{(E)*} = \frac{\rho^{(2)} |A^{(G)}| |v_i^{(G)} n_i|}{\rho^{(1)} |A^{(I)}| |v_i^{(I)} n_i|}, \quad (2.103)$$

onde neste caso os índices subscritos I e G não obedecem à convenção de Einstein, pois estes índices são utilizados somente para denotar o tipo de onda incidente e gerada para o determinado coeficiente $R^{(E)}/T^{(E)}$.

Os coeficientes R/T energéticos são normalizados, logo é válida a seguinte igualdade:

$$R_{IS1}^{(E)} R_{IS1}^{(E)*} + T_{IS1}^{(E)} T_{IS1}^{(E)*} + R_{IS2}^{(E)} R_{IS2}^{(E)*} + T_{IS2}^{(E)} T_{IS2}^{(E)*} + R_{IP}^{(E)} R_{IP}^{(E)*} + T_{IP}^{(E)} T_{IP}^{(E)*} = 1. \quad (2.104)$$

A relação entre os coeficientes R/T de deslocamento e os coeficientes $R^{(E)}/T^{(E)}$ é dado por:

$$R_{IG}^{(E)} = R_{IG} \left(\frac{\rho_1 |v_i^{(G)} n_i|}{\rho_1 |v_i^{(I)} n_i|} \right)^{1/2}, \quad T_{IG}^{(E)} = T_{IG} \left(\frac{\rho_2 |v_i^{(G)} n_i|}{\rho_1 |v_i^{(I)} n_i|} \right)^{1/2}. \quad (2.105)$$

Uma importante característica dos coeficientes $R^{(E)}/T^{(E)}$ é a reciprocidade. Coeficientes R/T, que são não energéticos, não são necessariamente recíprocos e possuem grandes diferenças principalmente após ângulos críticos de incidências. As deduções das reciprocidades dos coeficientes $R^{(E)}/T^{(E)}$ podem ser obtidas conforme Chapman (1994), as quais foram obtidas para interfaces planas horizontais. Neste trabalho generalizamos a reciprocidade dos coeficientes para qualquer interface plana, seja ela horizontal ou inclinada.

Existem três casos de reciprocidade dos coeficientes $R^{(E)}/T^{(E)}$. O primeiro caso consiste na reciprocidade dos coeficientes de reflexão de uma onda incidente proveniente do meio 1. Esta onda incidente I gera uma onda refletida G , cujo coeficiente de reflexão é conhecido. O mesmo valor para o coeficiente de reflexão pode ser obtido quando o tipo de onda refletida anteriormente, G , incide na interface. Para isto, o ângulo de incidência deve ser idêntico ao ângulo de reflexão anterior. É importante ressaltar que a relação entre a onda incidente - refletida deve inverter-se, e.g. qP-qS1 torna-se qS1-qP. Logo o coeficiente de reflexão $R_{qP \ qS1}^{(E)}$ é o mesmo que $R_{qS1 \ qP}^{(E)}$ quando a onda-qP incide com orientação oposta da qual foi refletida. A Figura 2 representa este primeiro caso de reciprocidade.

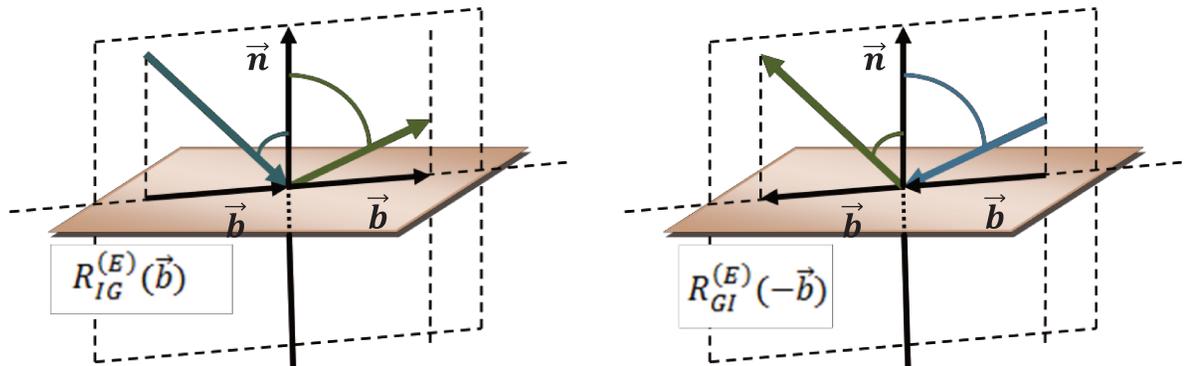


Figura 2: Reciprocidade dos coeficientes $R^{(E)}$. Ambos os esquemas resultam no mesmo valor para seus coeficientes de reflexão energéticos. Em azul: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente de meio 1, em verde: o vetor de vagarosidade da onda refletida.

O segundo caso de reciprocidade é o da reflexão de uma onda proveniente do meio 2. Para isto é necessário distinguir os coeficientes de reflexão/transmissão em relação ao primeiro caso. Coeficientes de reflexão/transmissão de ondas incidentes provenientes do meio 2 recebem a seguinte notação: $\check{R}^{(E)} / \check{T}^{(E)}$. A Figura 3 representa o segundo caso de reciprocidade.

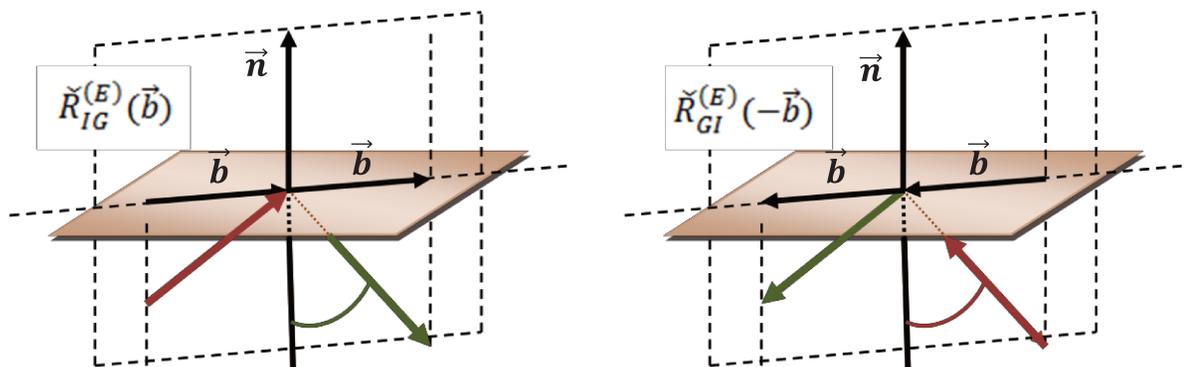


Figura 3: Reciprocidade dos coeficientes $\check{R}^{(E)}$. Ambos os esquemas resultam no mesmo valor para seus coeficientes de reflexão energéticos. Em vermelho: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente de meio 2, em verde: o vetor de vagarosidade da onda refletida.

O terceiro caso de reciprocidade é o da transmissão de ondas através da interface plana. Neste caso é de vital importância distinguir as incidências de um meio e do outro. A Figura 4 representa o terceiro caso.

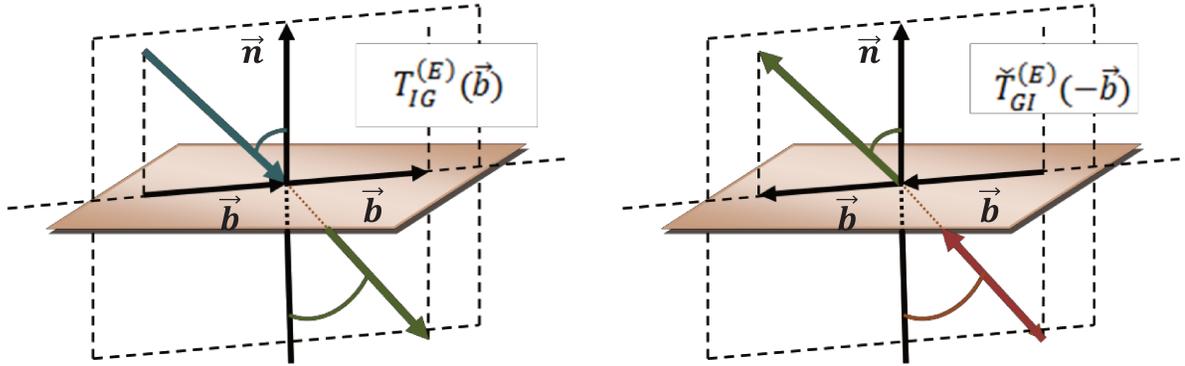


Figura 4: Reciprocidade dos coeficientes $\check{T}^{(E)}$. Ambos os esquemas resultam no mesmo valor para seus coeficientes de transmissão energética. Em azul: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente do meio 1, em vermelho: o vetor de vagarosidade da onda incidente, proveniente de meio 2, e em verde: o vetor de vagarosidade da onda refletida.

Os três casos de reciprocidade dos coeficientes R/T energéticos podem ser escritos explicitamente em função da projeção dos vetores de vagarosidade tangentes à interface:

$$R_{IG}^{(E)}(b_i) = R_{GI}^{(E)}(-b_i), \quad (2.106)$$

$$\check{R}_{IG}^{(E)}(b_i) = \check{R}_{GI}^{(E)}(-b_i), \quad (2.107)$$

$$T_{IG}^{(E)}(b_i) = \check{T}_{GI}^{(E)}(-b_i). \quad (2.108)$$

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo, estão descritos um resumo da metodologia utilizada para o cálculo dos coeficientes R/T e os métodos complementares à teoria do Capítulo 2. Eles consistem na classificação dos graus de anisotropia para uma dada simetria, rotação das simetrias e da interface plana, simplificações das equações para meios isotrópicos, critérios de classificação para as ondas-qS1 e qS2 e determinação das polarizações em direções singulares. Em adição aos métodos mencionados, este capítulo apresenta os modelos utilizados para os resultados presentes no Capítulo 4.

Para o cálculo dos coeficientes R/T foi desenvolvido um código em FORTRAN, o qual utiliza os parâmetros elásticos, as densidades de dois meios e a orientação do vetor normal à interface plana entre estes meios como dados de entrada. Os parâmetros elásticos e as densidades estão contidos na Seção 3.7. Para cada conjunto de dados são calculados os três possíveis autovalores e os respectivos autovetores da matriz de Christoffel de uma onda incidente (conforme as Seções 2.11 e 2.12), o código assume a direção inicial da onda incidente como uma incidência paralela ao eixo x_3 e varia a passo constante os ângulos de inclinação e azimute da onda incidente. Não são calculados valores para ondas incidentes provenientes do meio 2 e nem de ondas incidentes paralelas à interface plana. Os autovalores da matriz de Christoffel não são calculados para incidência de uma onda propagando paralela à interface nem para incidências de ondas provenientes do meio 2. Os três autovalores obtidos correspondem às velocidades das ondas-qS1, qS2 e qP; dois critérios podem ser utilizados para esta classificação: o critério das velocidades (Seção 3.4) e o critério das polarizações (Seção 3.5). Classificada as três possíveis ondas, é escolhida uma como a onda incidente e seus vetores de tensão e velocidade de grupo são calculados conforme as fórmulas do capítulo 2. Para cada ângulo de incidência é calculado o vetor de vagariedade da onda incidente, com este vetor são calculados os vetores de vagariedade, polarizações, velocidades de grupo e tensões das ondas geradas (Seções 2.22 e 2.23). As ondas geradas para cada meio devem ser classificadas pelo critério da velocidade ou da polarização. Com os dados das ondas geradas e da onda incidente a matriz deslocamento-tensão é

obtida e o sistema de equações provenientes das condições de contorno pode ser resolvido pelo método de Cramer. Desta forma os coeficientes R/T são obtidos.

Em meios isotrópicos são utilizadas as equações da Seção 3.3, pois são simplificações das equações em meios anisotrópicos e reduzem o custo computacional. Estas equações consistem nas equações das velocidades e polarizações (autovalores e autovetores da matriz de Christoffel) e a equação de transformação do vetor de vazarosidade da onda incidente através da interface.

Em direções singulares, onde os autovalores da matriz de Christoffel são degenerados, adotamos o procedimento da Seção 3.6. Próximos a esta região podem ocorrer dificuldades problemas para determinação e classificação das ondas cisalhantes.

3.1. Parâmetros de anisotropia de onda-qP e parâmetro de separação de onda-qS

Existem diversas maneiras de representar e classificar os meios anisotrópicos; neste trabalho a representação das anisotropias é através da superfície de velocidade de fase do meio e a classificação das anisotropias é dada por sua simetria e pelo seu grau. O grau de anisotropia adotado é expresso em termos dos parâmetros de anisotropia de onda-qP (AV_{qP}) e separação de onda-qS (AV_{qS}).

As anisotropias são caracterizadas pela diferença de suas velocidades de fase em direções diferentes. Consideramos o parâmetro de anisotropia de onda-qP AV_{qP} como função de suas velocidade de fase mínima $c_{min}^{(qP)}$ e velocidade de fase máxima $c_{Max}^{(qP)}$:

$$AV_{qP} = 100 \left[\frac{c_{max}^{(qP)} - c_{min}^{(qP)}}{0.5 (c_{max}^{(qP)} + c_{min}^{(qP)})} \right]. \quad (3.1)$$

O parâmetro de separação de onda-S AV_{qS} é dado como função das velocidades das ondas qS1 e qS2, tal que:

$$AV_{qS} = 100 \left[\frac{c_{max}^{(qS1)} - c_{min}^{(qS2)}}{0.5 (c_{max}^{(qS1)} + c_{min}^{(qS2)})} \right]. \quad (3.2)$$

Os parâmetros AV_{qP} e AV_{qS} são dados em unidades de porcentagem.

3.2. Rotação da interface e das simetrias

Diversos modelos podem ser obtidos para diferentes inclinações da interface plana Σ , que geralmente é considerada como sendo horizontal, i.e. o vetor \mathbf{n} (unitário e normal à interface) possui direção vertical. Por isso consideramos a direção horizontal como a direção de referência da interface plana Σ . Modelos diferentes também podem ser obtidos quando simetrias dos meios anisotrópicos são inclinadas em relação a direções de referência. Para a obtenção de diferentes inclinações de interfaces e simetrias nos baseamos nos trabalhos de Iversen & Pšencík (2007 e 2008).

Em termos da interface plana Σ , qualquer direção do vetor \mathbf{n} em relação a uma direção de referência, pode ser especificada por três rotações intrínsecas subseqüentes. Cada rotação intrínseca é feita sobre três de ângulos Θ_1 , Θ_2 e Θ_3 , os quais são conhecidos como ângulos de Euler. A matriz de rotação \mathbf{H} é dada por

$$H_{ij} = H_{ik}^{\Theta_1} H_{kl}^{\Theta_2} H_{lj}^{\Theta_3}. \quad (3.3)$$

Existem diversas convenções para as matrizes de rotação intrínsecas, neste trabalho consideramos a convenção yxz , cujas matrizes de rotação intrínsecas são:

$$\mathbf{H}^{\Theta_1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{H}^{\Theta_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{H}^{\Theta_3} = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

A direção do vetor \mathbf{n} em relação à direção de referência especificada pelo vetor \mathbf{n}' tem a seguinte forma:

$$n_i = H_{ii'} n'_{i'}. \quad (3.7)$$

Podemos especificar novas direções para as simetrias dos meios anisotrópicos da mesma maneira, logo os coeficientes elásticos normalizados pela densidade a_{ijkl} de uma simetria é

especificada também por três ângulos de rotação em relação a uma direção de referência. A transformação, ou rotação, de uma dada simetria é dada por

$$a_{ijkl} = H_{ii'}H_{jj'}H_{kk'}H_{ll'}a'_{i'j'k'l'} . \quad (3.8)$$

3.3. Meios isotrópicos

Os meios isotrópicos são os meios de maior simetria. Para estes meios, as equações apresentadas no Capítulo 2 podem ser reescritas de maneira reduzida devido ao alto grau de simetria dos coeficientes elásticos.

As velocidades das ondas P e S em meios isotrópicos são obtidas de forma direta:

$$c^P = a_{1111} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho} , \quad c^S = a_{2323} = \sqrt{\mu/\rho} , \quad (3.9)$$

onde μ e λ são os parâmetros de Lamé e ρ é a densidade.

O vetor de polarização da onda-P é paralelo ao vetor de vagarosidade da onda, de modo que:

$$g_i^{(P)} = p_i^{(P)} / \sqrt{p_i^{(P)} p_i^{(P)*}} , \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{p}^{(P)}$ é o vetor de vagarosidade da onda-P.

A onda-S é decomposta em duas ondas SV e SH, cujas respectivas polarizações são obtidas do produto vetorial:

$$g_i^{(SH)} = \varepsilon_{ijk} p_j^{(S)} n_k , \quad g_i^{(SV)} = \varepsilon_{ijk} g_j^{(SH)} p_k^{(S)} , \quad (3.11)$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, $\mathbf{p}^{(S)}$ é o vetor de vagarosidade da onda-S e \mathbf{n} é o vetor normal à interface plana Σ .

Quando um dos meios separados pela interface Σ é isotrópico, os vetores de vagarosidades das ondas refletidas e transmitidas são obtidos respectivamente das fórmulas:

$$p_i^{(g)} = \pm \left[\sqrt{\left(1/c^{(g)^2}\right) - \left(1/c^{(I)^2}\right) + \left(p_i^{(I)} n_i\right)^2} \right] n_i + b_i, \quad (3.12)$$

onde o sinal + é utilizado para as ondas refletidas e o sinal – para as transmitidas, o índice g indica as velocidades e vetores de vagarosidades da onda gerada; e o índice I indica a velocidade e o vetor de vagarosidade da onda incidente.

3.4. Critério de distinção das ondas-qP, qS1 e qS2

Em meios isotrópicos a onda-P e as componentes SV e SH são facilmente determinadas para uma dada direção de propagação através do critério das velocidades, entretanto em meios anisotrópicos velocidades e polarizações das ondas-qS1, qS2 e qP devem ser determinadas por diferentes critérios.

Critério das velocidades de fase

O critério das velocidades consiste em classificar as ondas-qP com as ondas de maior velocidade de fase, seguidas das ondas qS2, e por fim as ondas qS1 (as de menor velocidades). O critério das velocidades permite distinguir claramente as ondas-qP das ondas cisalhantes qS1 e qS2, entretanto as ondas-qS1 e qS2 podem apresentar direções nas quais suas velocidades coincidem ou mesmo invertem suas relações entre mais rápida e mais lenta. Geralmente este efeito é negligenciado, uma vez que muitos trabalhos sobre coeficientes de reflexão e transmissão investigam somente casos de incidência de ondas-qP.

Neste trabalho contribuimos com a extensão do conceito do critério das velocidades de fase para ondas evanescentes e o critério das polarizações das ondas cisalhantes. Estes métodos têm como principal objetivo contribuir para a distinção correta das ondas em direções singulares, direções em que as ondas cisalhantes invertem suas relações de velocidade e direções de incidência a partir das quais as ondas geradas tornam-se não-homogêneas (evanescentes).

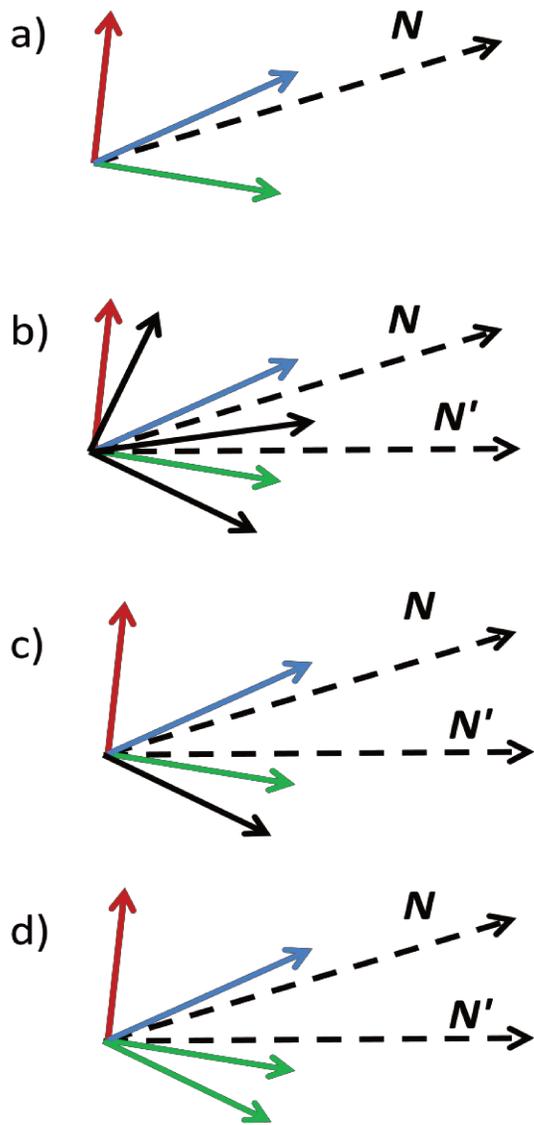


Figura 5: Esquema do critério de polarização: a) as três possíveis polarizações para uma onda propagando na direção do vetor N . Em azul: o vetor de polarização $\mathbf{g}^{(qP)}$, em vermelho: o vetor de polarização $\mathbf{g}^{(qS1)}$ e em verde: o vetor de polarização $\mathbf{g}^{(qS2)}$. b) Conjunto de três vetores de polarização possíveis para uma onda propagando na direção do vetor N' . c) Para classificar um dos vetores de polarização da onda cisalhante é utilizada a equação 3.13. d) O vetor de polarização da onda cisalhante é determinado.

Podemos utilizar o critério das velocidades para as ondas incidentes sem nenhum acréscimo conceitual, entretanto, para os casos das ondas geradas, atenção especial é dada para incidências a partir dos ângulos críticos das reflexões/transmissões, quando as ondas geradas tornam-se ondas evanescentes. Como as componentes b dos vetores de vagariedade, paralelos à interface plana Σ , são iguais para todas as ondas geradas (equação 2.76), aquelas de maior velocidade possuem menores componentes do vetor de vagariedade perpendiculares à interface plana Σ . Com o aumento da inclinação estas componentes tendem a diminuir até tornarem-se imaginárias (ondas evanescentes). As primeiras ondas geradas a se tornarem não-homogêneas são as ondas qP, seguidas das ondas qS2 e finalmente qS1. Com o aumento do ângulo de incidência na região pós-crítica há o aumento da componente imaginária do vetor de vagariedade, que reduz a velocidade de fase da onda gerada (equação 2.53).

Logo, quando as ondas geradas tornam-se evanescentes a ordenação das ondas deve ser inverso, sendo as ondas de maior velocidades as qS1, seguidas das qS2 e então qP.

Quando o meio no qual a onda incidente se propaga possui direção singular coincidente à vertical, o critério de polarização não é inicialmente utilizado. Pois neste caso, será utilizada a ortogonalidade dos vetores de

polarização (Seção 3.5). A classificação das ondas cisalhantes pelo critério da polarização, neste caso, é feito a partir do primeiro ângulo de incidência diferente de zero (vertical).

Critério da polarização das ondas

O critério da polarização assume que a variação dos vetores de polarização é contínua ao longo da direção de propagação; em termos numéricos, consiste na avaliação dos vetores de polarização da vizinhança de uma dada direção de propagação da frente de onda. Este critério é utilizado para distinção das ondas qS1 e qS2 (a onda qP é determinada pelo critério das velocidades).

Consideramos os três possíveis vetores de polarização $\mathbf{g}^{(qP)}$, $\mathbf{g}^{(qS1)}$ e $\mathbf{g}^{(qS2)}$, mutuamente perpendiculares, para uma onda plana cuja direção de propagação é especificada pelo vetor N , como na Figura 5. Para uma dada direção N' próxima à direção N , é possível a propagação de três ondas, tal que seus vetores de polarização são $\mathbf{g}'^{(1)}$, $\mathbf{g}'^{(2)}$ e $\mathbf{g}'^{(3)}$. Dentre os vetores $\mathbf{g}'^{(1)}$, $\mathbf{g}'^{(2)}$ e $\mathbf{g}'^{(3)}$, aquele associado à maior velocidade de fase é classificado como o vetor de polarização da onda-qP, e.g. $\mathbf{g}'^{(3)} = \mathbf{g}'^{(qP)}$. Supomos que o vetor $\mathbf{g}'^{(1)}$ é um dos dois vetores de polarização restantes, i.e. é o vetor de polarização de uma das ondas cisalhantes. Aplicamos o produto interno entre o vetor $\mathbf{g}'^{(1)}$ e os vetores $\mathbf{g}^{(qS1)}$ e $\mathbf{g}^{(qS2)}$. Caso o produto com $\mathbf{g}^{(qS1)}$ tenha o maior módulo o vetor $\mathbf{g}'^{(1)}$ é classificado como o vetor de polarização da onda-qS1 propagando na direção N' , do contrário é o vetor de polarização da onda-qS2. Logo, podemos classificar as ondas através da relação abaixo:

$$|\mathbf{g}'^{(1)}| = \begin{cases} |\mathbf{g}'^{(qS1)}|, & |\mathbf{g}'^{(1)} \mathbf{g}^{(qS1)}| > |\mathbf{g}'^{(1)} \mathbf{g}^{(qS2)}|; \\ |\mathbf{g}'^{(qS2)}|, & |\mathbf{g}'^{(1)} \mathbf{g}^{(qS1)}| < |\mathbf{g}'^{(1)} \mathbf{g}^{(qS2)}|. \end{cases} \quad (3.13)$$

O sentido do vetor de polarização é determinado por:

$$\mathbf{g}'^{(S)} = \begin{cases} +|\mathbf{g}'^{(S)}|, & |\mathbf{g}'^{(S)}| \mathbf{g}^{(S)} > 0; \\ -|\mathbf{g}'^{(S)}|, & |\mathbf{g}'^{(S)}| \mathbf{g}^{(S)} < 0; \end{cases} \quad S = qS1, qS2. \quad (3.14)$$

3.5. Ortogonalidade dos vetores $g^{(qS1)}$ e $g^{(qS2)}$ em direções singulares

Em direções singulares somente um vetor de polarização pode ser obtido para as ondas quase-cisalhantes. Aplicando o produto vetorial deste vetor de polarização com o vetor de polarização da onda qP obtemos a terceira polarização.

Após a determinar da terceira polarização o sentido do vetor é especificado pela equação 3.14. As ondas quase-cisalhantes são classificadas como nas seções anteriores (3.4 e 3.5).

3.6. Modelos selecionados

Os meios selecionados neste trabalho consistem em dois meios isotrópicos ISO1 e ISO2; quatro meios de isotropia transversal TI1, TI2, TI3 e TI4; e um meio ortorrômbico ORT1. Os meios são descritos pelos parâmetros elásticos normalizados pela densidade notação de Voigt e pelas densidades. As interfaces planas são consideradas como horizontais a menos que seja especificado o contrário.

Os meios ISO1 e ISO2 são descritos pelos seguintes parâmetros e densidade:

$$A_{\alpha\beta}^{ISO1} = \begin{pmatrix} 10,23 & 3,41 & 3,41 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 3,41 & 10,23 & 3,41 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 3,41 & 3,41 & 10,23 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,41 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,41 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,41 \end{pmatrix} \left(\frac{km}{s}\right)^2, \quad \rho^{ISO1} = 2,5 \frac{g}{cm^3},$$

$$A_{\alpha\beta}^{ISO2} = \begin{pmatrix} 20,25 & 6,75 & 6,75 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 6,75 & 20,25 & 6,75 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 6,75 & 6,75 & 20,25 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,75 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,75 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,75 \end{pmatrix} \left(\frac{km}{s}\right)^2, \quad \rho^{ISO2} = 2,8 \frac{g}{cm^3}.$$

Os meios TI1, TI2, TI3 e TI4 são baseados nos trabalhos de Shearer & Chapman (1989). Estes modelos foram derivados de expressões teóricas para meios fraturados (Hudson 1981). As

matrizes de Voigt destes meios são escritas para orientação do eixo de simetria coincidente com o eixo x_I das coordenadas cartesianas, i.e. eixos de simetrias horizontais (HTI), valem:

$$A_{\alpha\beta}^{HTI1} = \begin{pmatrix} 20,04 & 7,41 & 7,41 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 7,41 & 20,22 & 7,46 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 7,41 & 7,46 & 20,22 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,38 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 5,10 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 5,10 \end{pmatrix} \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2, \quad \rho^{TI1} = 2,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

$$A_{\alpha\beta}^{HTI2} = \begin{pmatrix} 14,02 & 5,18 & 5,18 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 5,18 & 19,40 & 6,64 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 5,18 & 6,64 & 19,40 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,38 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 5,10 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 5,10 \end{pmatrix} \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2, \quad \rho^{TI2} = 2,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

$$A_{\alpha\beta}^{HTI3} = \begin{pmatrix} 11,91 & 4,40 & 4,40 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 4,40 & 19,11 & 6,35 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 4,40 & 6,36 & 19,11 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,38 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 5,10 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 5,10 \end{pmatrix} \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2, \quad \rho^{TI3} = 2,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3},$$

$$A_{\alpha\beta}^{HTI4} = \begin{pmatrix} 19,63 & 7,26 & 7,26 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 7,26 & 20,16 & 7,40 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 7,26 & 7,40 & 20,16 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 6,38 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,48 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 3,48 \end{pmatrix} \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2, \quad \rho^{TI4} = 2,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

O meio ORT_1 é baseado de Iversen & Pšenčík (2007 e 2008) e é representado pela matriz de Voigt, tal que seus eixos de simetria coincidem com os eixos cartesianos.

$$A_{\alpha\beta}^{ORT1} = \begin{pmatrix} 9,00 & 3,60 & 2,25 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 3,60 & 9,84 & 2,40 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 2,25 & 2,40 & 5,94 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 2,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 1,60 & 0,00 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 2,18 \end{pmatrix} \left(\frac{\text{km}}{\text{s}}\right)^2, \quad \rho^{ORT1} = 2,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Os parâmetros de anisotropia de onda-P AV_{qP} e o parâmetro de separação de onda-S AV_{qS} dos meios anisotrópicos utilizados constam na Tabela 2.

	AV_{qP} (%)	AV_{qS} (%)
TI1	3,4	11,2
TI2	16,2	11,2
TI3	23,5	11,2
TI4	8,4	30,1
ORT1	25,6	29,5

Tabela 2: Parâmetros AV_{qP} e AV_{qS} dos meios anisotrópicos

Utilizamos as superfícies de velocidade de fase e os parâmetros de anisotropia AV_{qP} e AV_{qS} para verificar os critérios de classificação das ondas cisalhantes para cada um dos meios. As ondas cisalhantes incidentes são calculadas utilizando o melhor critério obtido para seu respectivo meio (Seção 4.1). A classificação das ondas cisalhantes geradas para cada modelo de interface é feito a partir dos gráficos dos coeficientes R/T (Seção 4.2).

Utilizamos o modelo de interface plana horizontal ISO1/ISO2 para representar os coeficientes R/T convencionais, o qual não apresenta variações para mudanças no azimute de incidência.

Duas orientações para o meio TI3 são utilizadas: uma orientação com eixo de simetria vertical (VTI3) e uma orientação com eixo de simetria inclinado (TTI3). O meio TTI3 é obtido da rotação da simetria HTI3 em torno do eixo x_2 de um ângulo de -30° , i.e. os ângulos de rotações

intrínsecas são: $\theta_1=-30^\circ$, $\theta_2=0^\circ$ e $\theta_3=0^\circ$. O modelo ISO1/HTI3, para uma interface inclinada de 30° em torno do eixo x_2 , é comparado com o modelo ISO1/TTI3.

A verificação da reciprocidade dos coeficientes R(E)/T(E) é exemplificada pelo modelo ISO2/ORT1.

Capítulo 4

Resultados

Os coeficientes R/T obtidos são descritos em termos de gráficos em coordenadas polares, cujas coordenadas radiais são os ângulos de inclinação e as coordenadas angulares são os ângulos de azimute da onda incidente. Coeficientes R/T para ondas não-homogêneas não são calculados.

4.1. Critério de classificação das ondas cisalhantes para a onda incidente

Adotamos o meio HTI4, o de maior parâmetro AV_{qS} , para determinar qual dos critérios de classificação de ondas cisalhantes é mais adequado. A Figura 6 consiste nas duas superfícies de velocidade de fase classificadas pelo critério da velocidade. Inicialmente não adotamos nenhum critério para as a obtenção das polarizações em direções singulares (Seção 3.6).

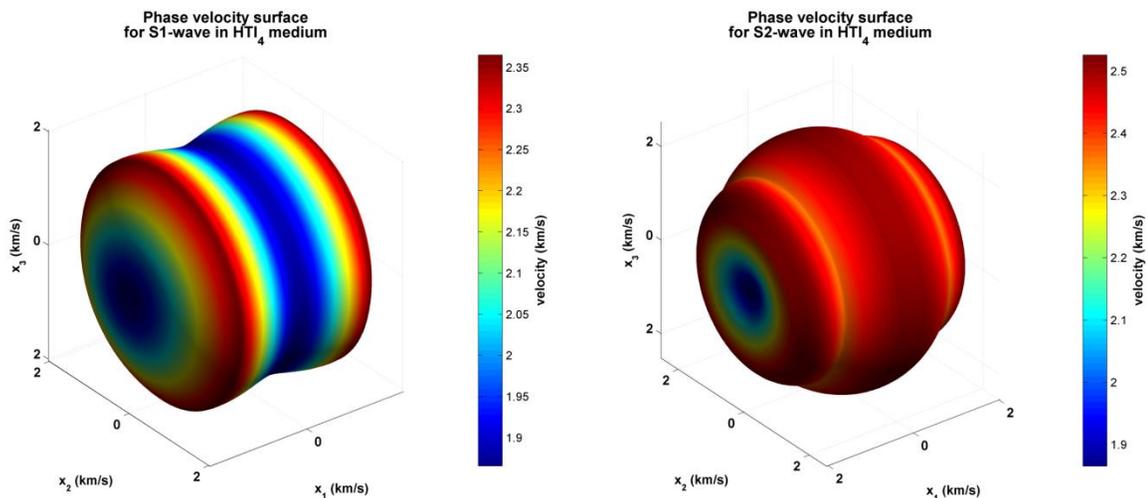


Figura 6: Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI4. As superfícies são distintas pelo critério da velocidade.

Phase velocity surfaces in HTI₄ medium

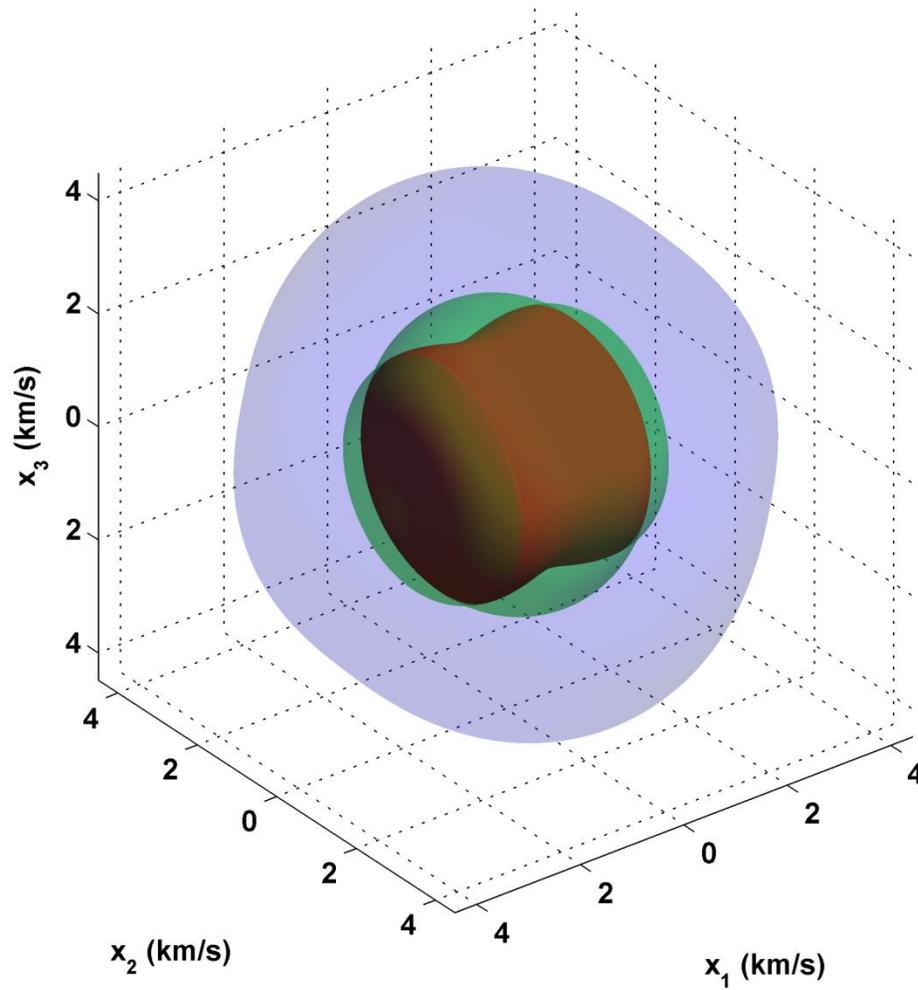


Figura 7: Superfícies de velocidade de fase das ondas-qP, qS1 e qS2 obtidas pelo critério da velocidade. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.

A Figura 7 apresenta as três superfícies de velocidade de fase para o meio HT4. Como é possível observar, as superfícies das ondas-qS1 e qS2 formam um par de superfícies: uma interna e outra externa. A superfície da onda-qP engloba as outras duas.

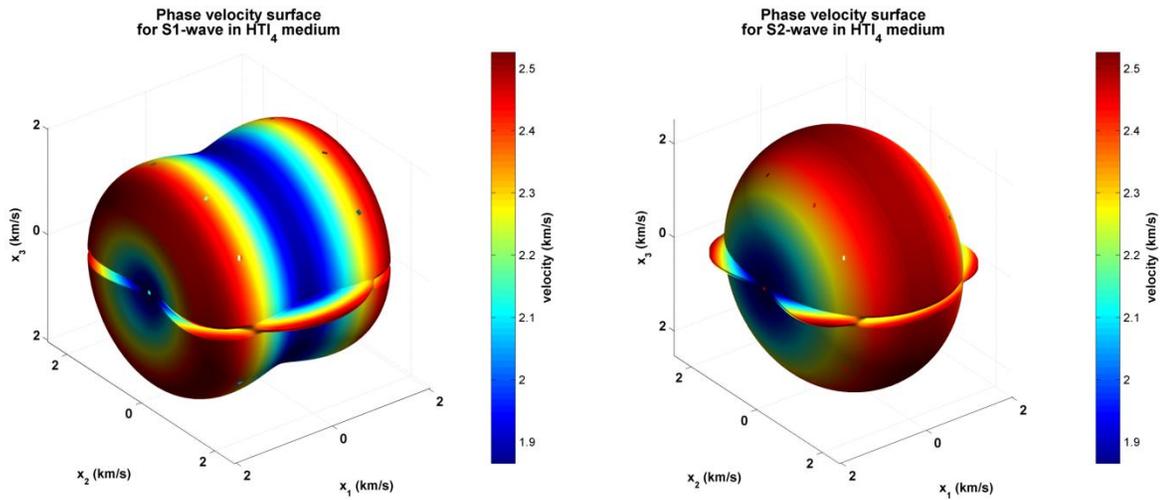


Figura 8: Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI₄. As superfícies são distintas pelo critério da polarização ao longo do azimute.

A Figura 8 é obtida quando o critério da polarização ao longo da variação azimutal é utilizado. No caso em que o critério da polarização é ao longo da variação azimutal os vetores N à N' (Seção 3.5) pertencem ao mesmo ângulo de inclinação porém azimutes adjacentes, logo a avaliação dos vetores de polarização vizinhos é feita pelo produto 3.13 entre direções N e N' de mesma inclinação.

Phase velocity surfaces in HTI₄ medium

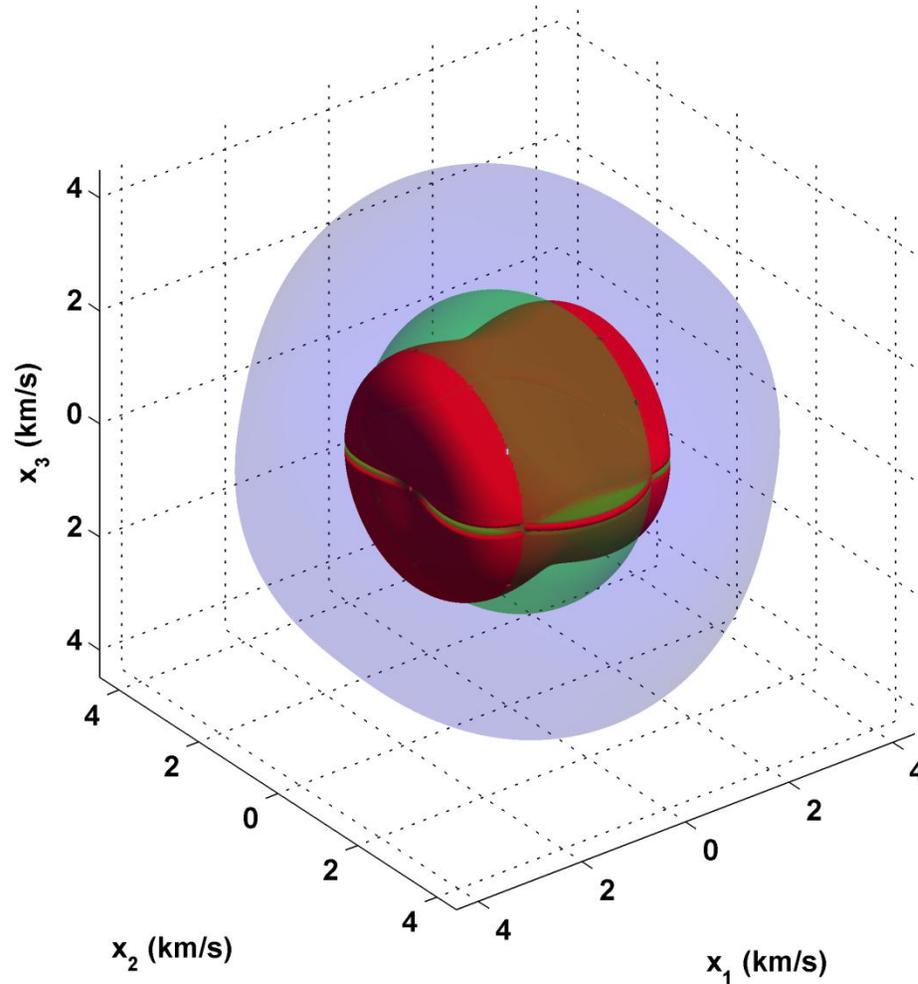


Figura 9: Superfícies de velocidade de fase das ondas-qP, qS1 e qS2 obtidas pelo critério da polarização aplicado à azimutes diferentes e mesma inclinação. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.

De acordo com a Figura 9, as superfícies de velocidade de fase das ondas-qS1 e qS2 se cruzam, portanto não consistem mais em um par de superfícies que possam ser classificadas como interna e externa. Portanto não podemos considerar as velocidades das ondas-qS1 menores do que as velocidades das ondas-qS2 para qualquer ângulo de propagação. Diferentes ângulos de propagação possuem diferentes relações entre as velocidades das ondas quase-cisalhantes. A velocidade de fase da onda-qP é sempre mais rápida e sempre pode ser distinta.

Apesar do critério da polarização ao longo da variação azimutal permitir distinguir ambas as superfícies cruzando em quase todos os ângulos de propagação, ela falha para grandes ângulos de inclinação.

O critério da polarização também pode ser aplicado ao longo das inclinações, i.e. para direções de propagação de mesmos azimutes e diferentes inclinações. Aplicando o critério desta maneira, obtemos a Figura 10 e a Figura 11.

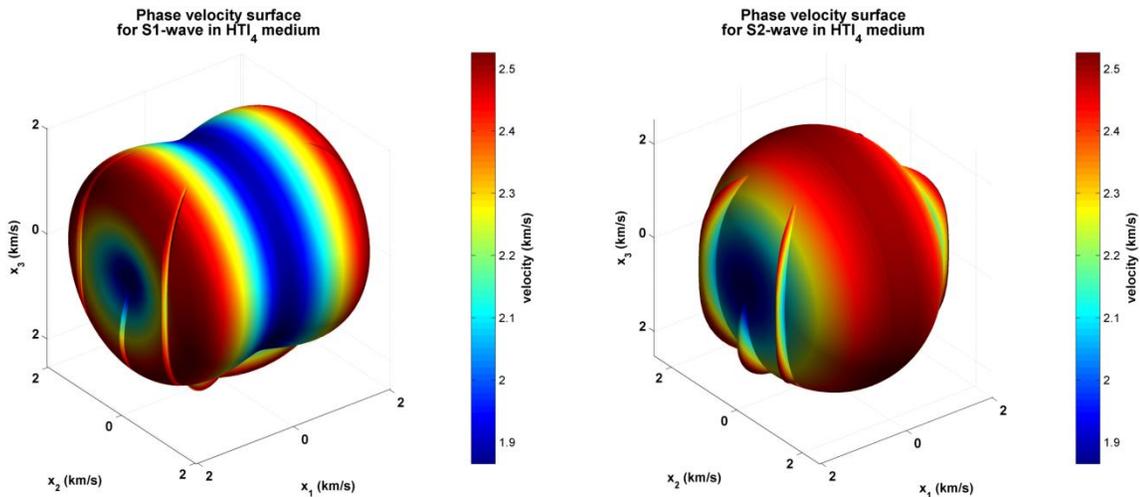


Figura 10: Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI4. As superfícies são distintas pelo critério da polarização ao longo da inclinação.

Observa-se que as superfícies de velocidade de fase cruzam-se, porém este critério também é falho para determinados tipos de azimutes. Estas falhas ocorrem em direções singulares onde as superfícies de velocidade de fase coincidem e são propagados ao longo dos ângulos de inclinação.

Em adição ao critério de polarização ao longo da inclinação, para classificação das ondas cisalhantes, consideramos a ortogonalidade dos vetores de polarização (Seção 3.6). Neste caso obtemos as Figuras 12 e 13.

Phase velocity surfaces in HTI₄ medium

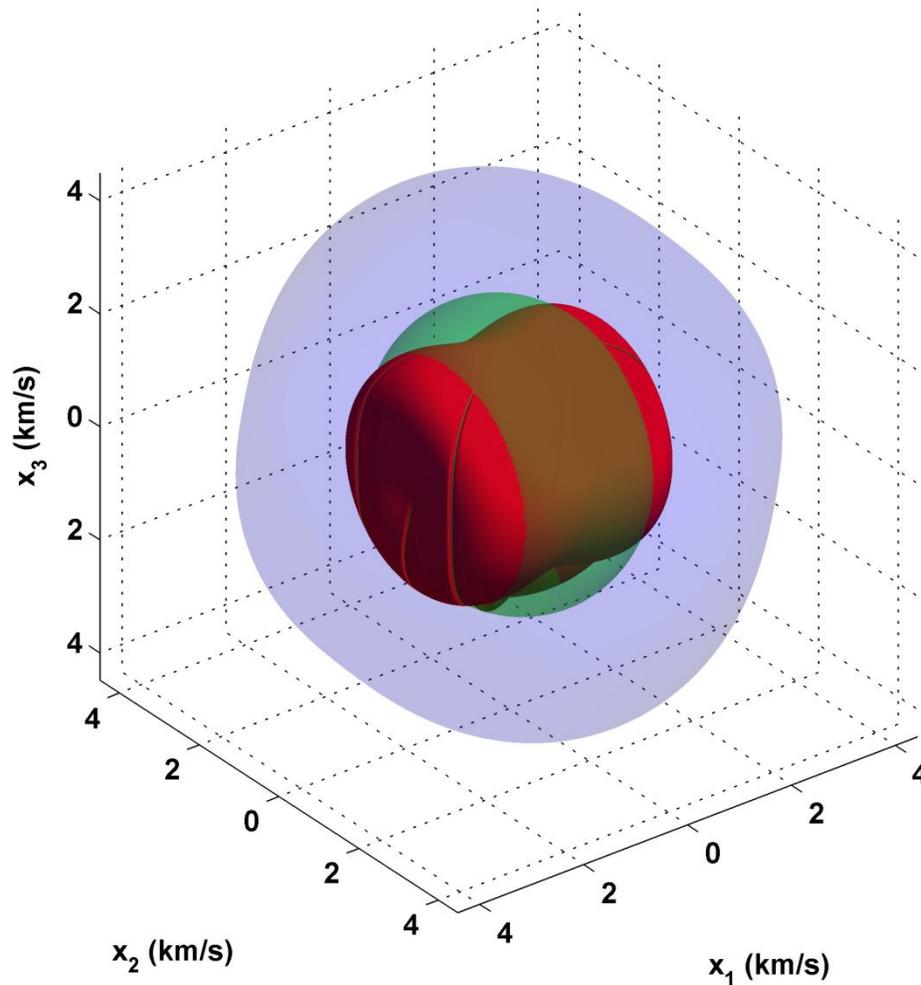


Figura 11: Superfícies de velocidade de fase das ondas-qP, qS1 e qS2 obtidas pelo critério da polarização aplicado à inclinações diferentes e mesmo azimuth. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.

A Figura 12 consiste nas superfícies de velocidade de fase das ondas cisalhantes para o meio HTI₄. Estas superfícies representam a melhor classificação das ondas cisalhantes obtidas para este meio. A Figura 13 consiste nas três superfícies de velocidade de fase.

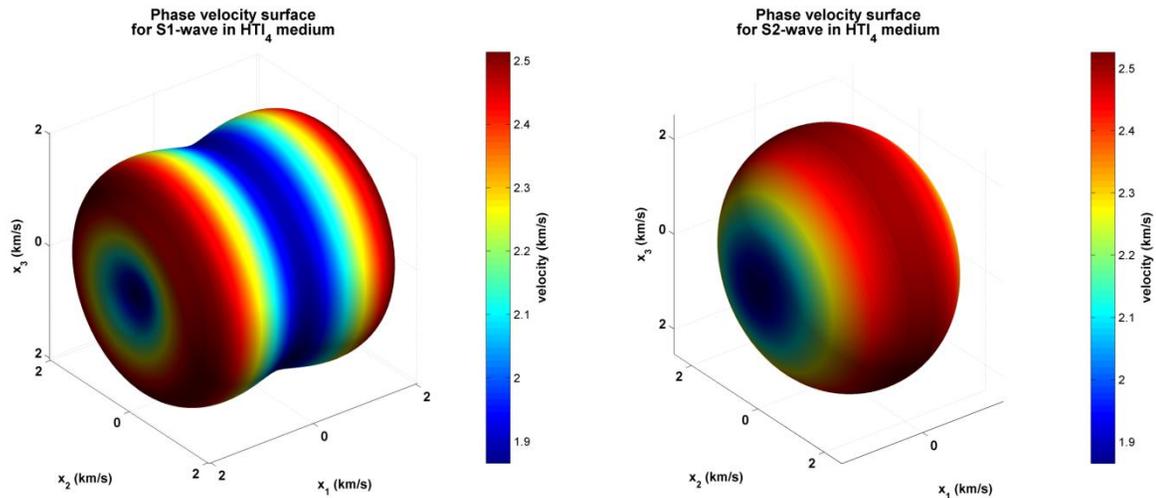


Figura 12: Superfícies de velocidade de fase para as ondas-qS1 e qS2 de um meio HTI4. As superfícies são distintas pelo critério da polarização ao longo da inclinação. Em direções singulares são consideradas a ortogonalidade dos vetores de polarização.

A Figura 14 consiste nas superfícies de velocidade de fase para os meios HTI1, HTI2, HTI3 e ORT1. Estas superfícies são obtidas pela mesma metodologia utilizada no meio HTI4. Em todos os casos é necessário a consideração da ortogonalidade dos vetores de polarização em direções singulares.

As superfícies de velocidade de fase das ondas cisalhantes para o meio HTI1 foram obtidas pelo critério da polarização ao longo das inclinações e as demais foram obtidas pelo critério das velocidades, pois neste último caso as superfícies somente se tangenciam e não se cruzam.

Os critérios para a classificação das ondas-cisalhantes não podem ser inferidos através dos parâmetros AV_{qP} e AV_{qS} , pois estes parâmetros não contem informações suficientes para o tipo de intersecção das superfícies, i.e. superfícies que se cruzam ou tangenciam.

Phase velocity surfaces
in HTI₄ medium

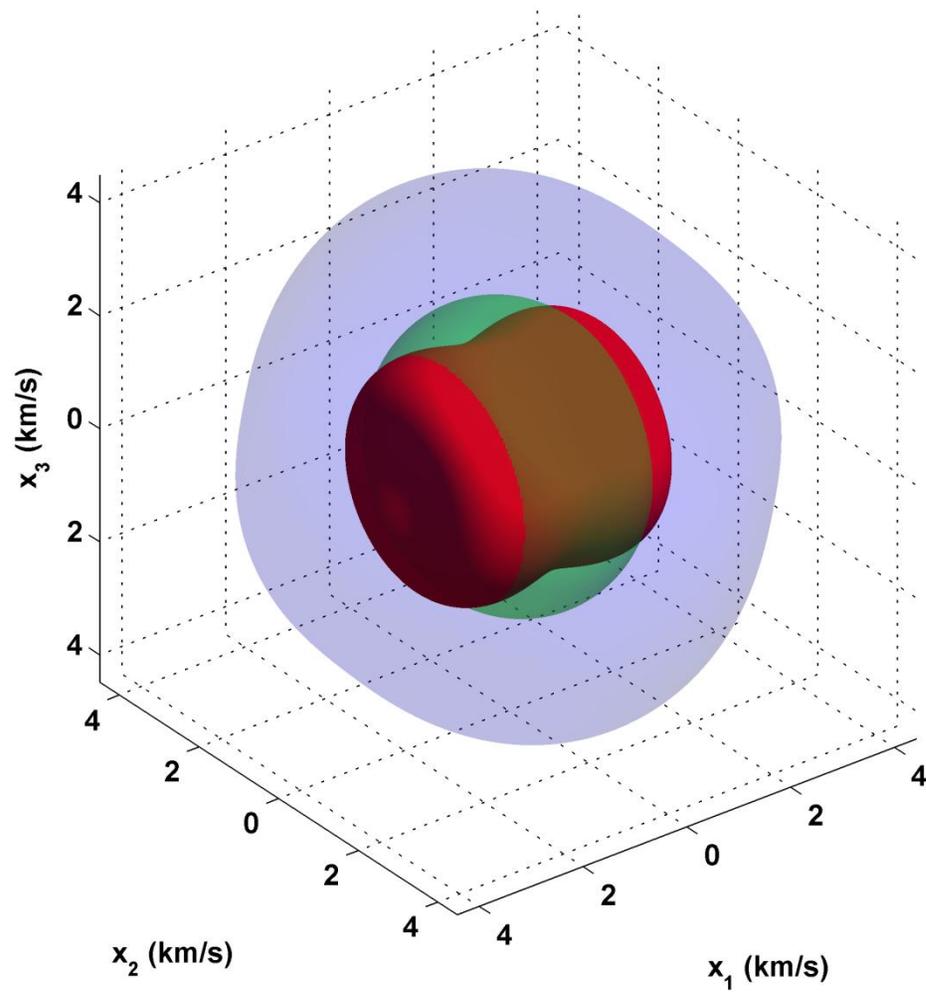


Figura 13: Superfícies de velocidade de fase do meio HTI₄. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.

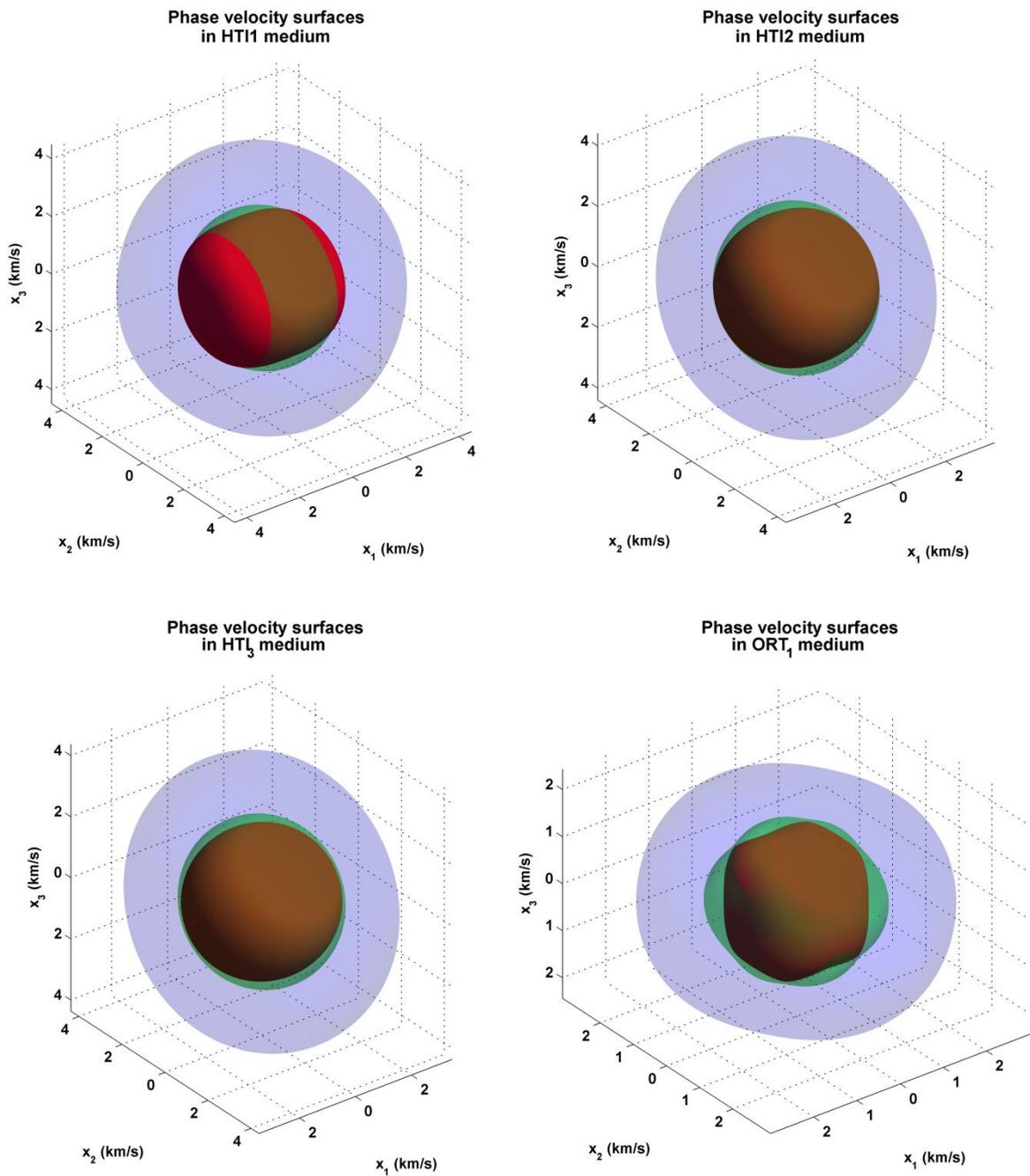


Figura 14: Superfícies de velocidade de fase dos meios HTI1, HTI2, HTI3 e ORT1. Em vermelho: superfície da onda-qS1, em verde: superfície da onda-qS2 e em azul: superfície da onda-qP.

4.2. Critério de classificação das ondas cisalhantes para as ondas geradas

Quando as velocidades e polarizações de uma onda são obtidas para um intervalo de azimutes e inclinações, é necessária a classificação das ondas cisalhantes. Logo, a onda incidente deve ser classificada corretamente. Classificações erradas geram coeficientes errados, por exemplo: determinadas regiões de um coeficiente R_{qS1qP} podem apresentar os valores obtidos da incidência de uma onda-qS2 ao invés da onda-qS1, ou seja, valores do coeficiente R_{qS2qP} . A metodologia utilizada na seção anterior, para a classificação das ondas cisalhantes, pode ser utilizada sem nenhuma alteração para a classificação das ondas incidentes. Em ambos os casos, as velocidades são obtidas com a variação do vetor N na matriz de Christoffel Γ_{ik} (Seção 2.10).

As ondas geradas estão sujeitas ao mesmo erro que as ondas incidentes, logo também devem ser classificadas. Entretanto, as ondas geradas são obtidas da transformação do vetor de vagarosidade através da interface (Seção 2.21), logo a os vetores $N^{(G)}$ das ondas geradas podem variar abruptamente mesmo para pequenas variações do ângulo de incidência.

O modelo a seguir exemplifica uma correção dos coeficientes de reflexão através da classificação das ondas cisalhantes das ondas geradas. O modelo consiste na interface plana horizontal HTI4/ISO2. A Figura 15 apresenta os coeficientes R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} . As ondas incidentes qS2 obedecem ao critério de polarização enquanto que as ondas geradas qS1 e qS2 obedecem ao critério das velocidades. Na Figura 16 estão marcadas duas regiões onde os valores dos coeficientes R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} estão trocados devido á classificação imprópria das ondas cisalhantes naquela região. A Figura 17 apresenta os coeficientes de reflexão obtidos quando as ondas cisalhantes geradas são classificadas pelo método das polarizações. A Figura 18 indica as regiões corrigidas pela classificação correta das polarizações das ondas cisalhantes.

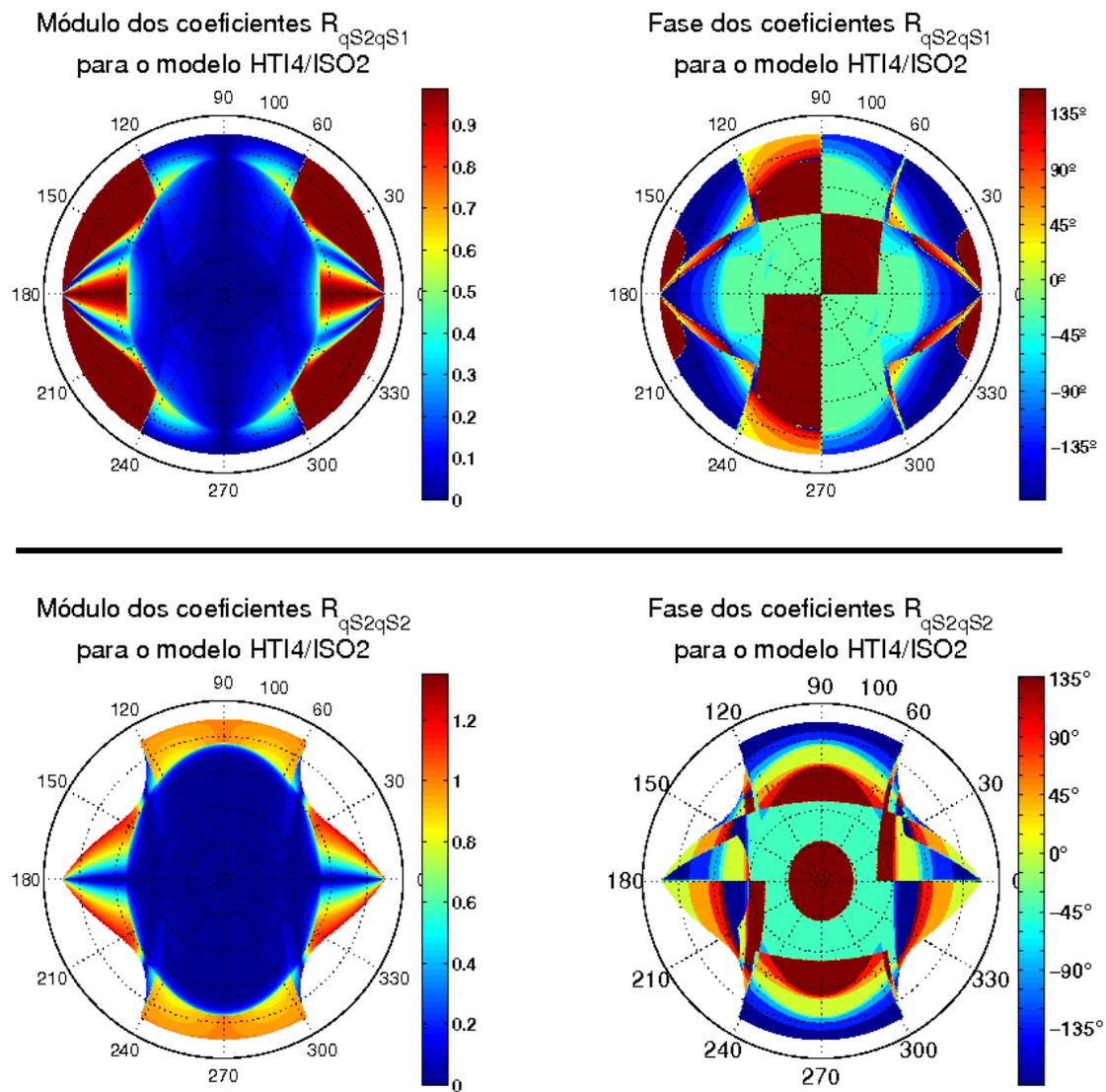
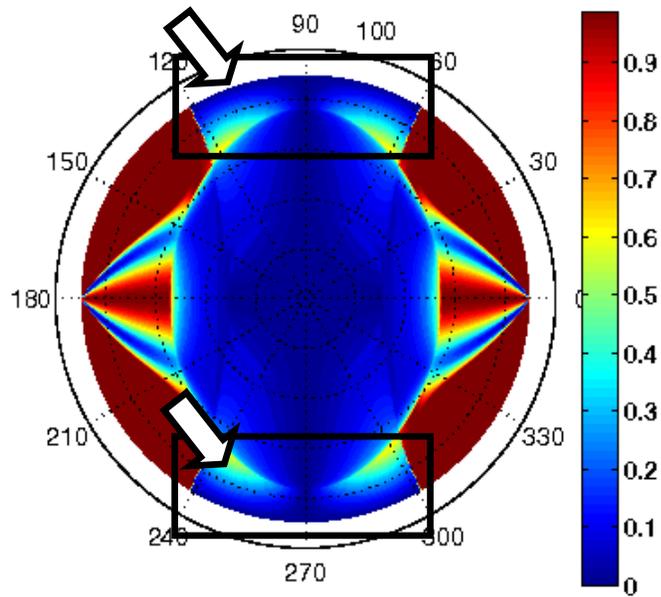


Figura 15: Coeficientes R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} para o modelo HTI4/ISO2. A onda incidente é obtida pelo critério de polarização ao longo da inclinação e as ondas geradas pelo critério das velocidades.

Módulo dos coeficientes R_{qS2qS1}
para o modelo HTI4/ISO2



Módulo dos coeficientes R_{qS2qS2}
para o modelo HTI4/ISO2

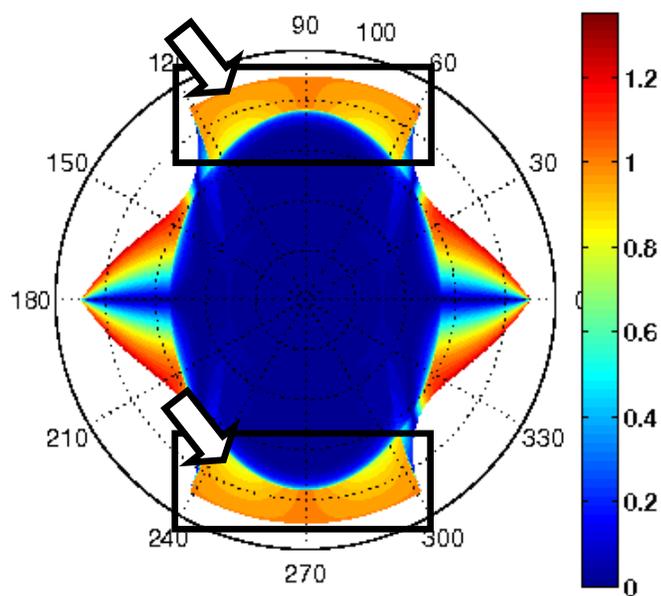


Figura 16: Regiões nas quais os módulos dos coeficientes de reflexão R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} possuem valores invertidos devido à classificação imprópria das ondas cisalhantes geradas.

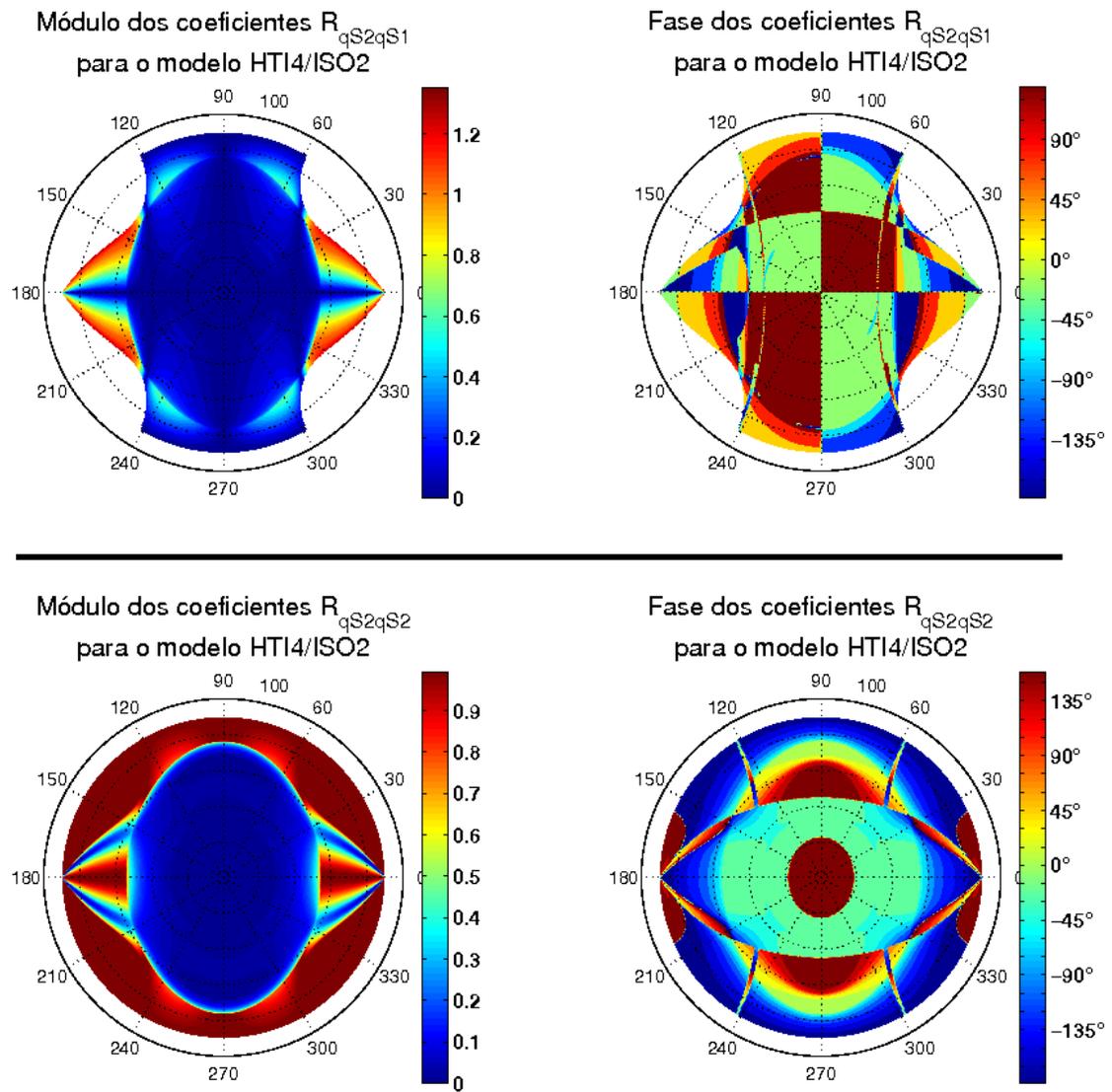
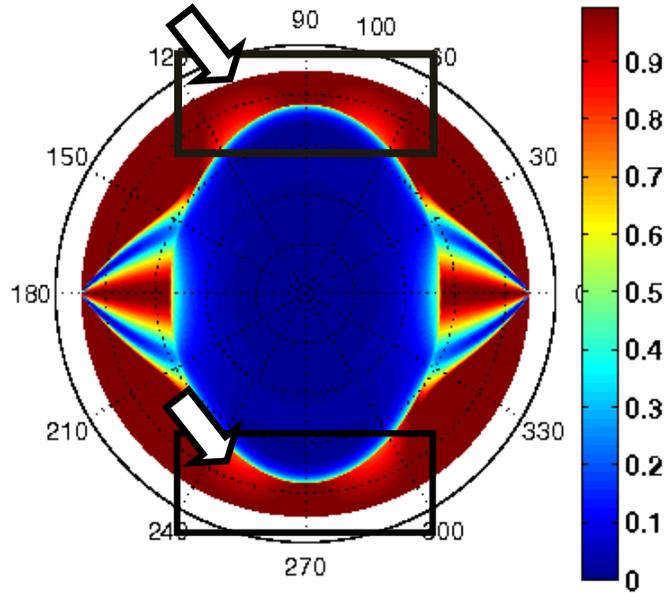


Figura 17: Coeficientes R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} para o modelo HTI4/ISO2. As ondas incidentes e geradas são obtidas pelo critério de polarização ao longo da inclinação do ângulo de incidência.

Módulo dos coeficientes R_{qS2qS2}
para o modelo HTI4/ISO2



Módulo dos coeficientes R_{qS2qS1}
para o modelo HTI4/ISO2

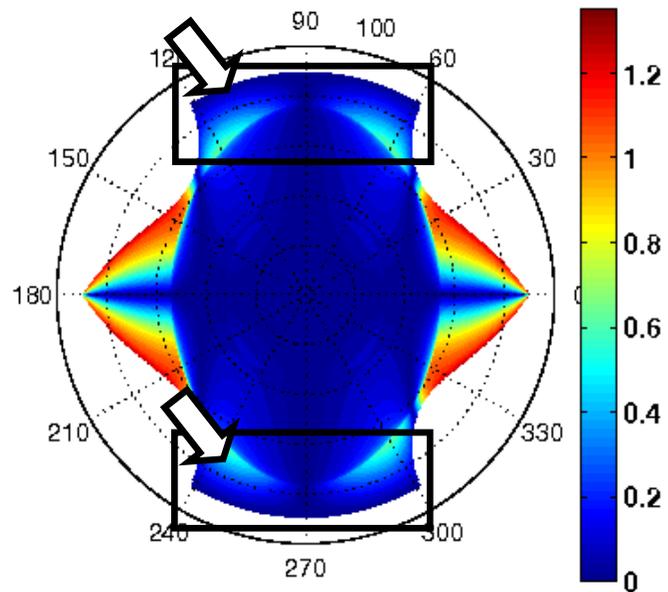


Figura 18: Regiões nas quais os módulos dos coeficientes de reflexão R_{qS2qS1} e R_{qS2qS2} são corrigidas, em relação à figura 17, pela classificação correta das ondas cisalhantes geradas.

4.3. Equivalência entre interfaces e simetrias inclinadas

Nesta seção utilizamos dois exemplos para demonstrar a equivalência entre modelos de interfaces e simetrias inclinadas. Dois modelos são utilizados, uma interface horizontal ISO1/TTI3 e uma interface ISO1/HTI3 rotacionada de 30° em torno do eixo x_2 .

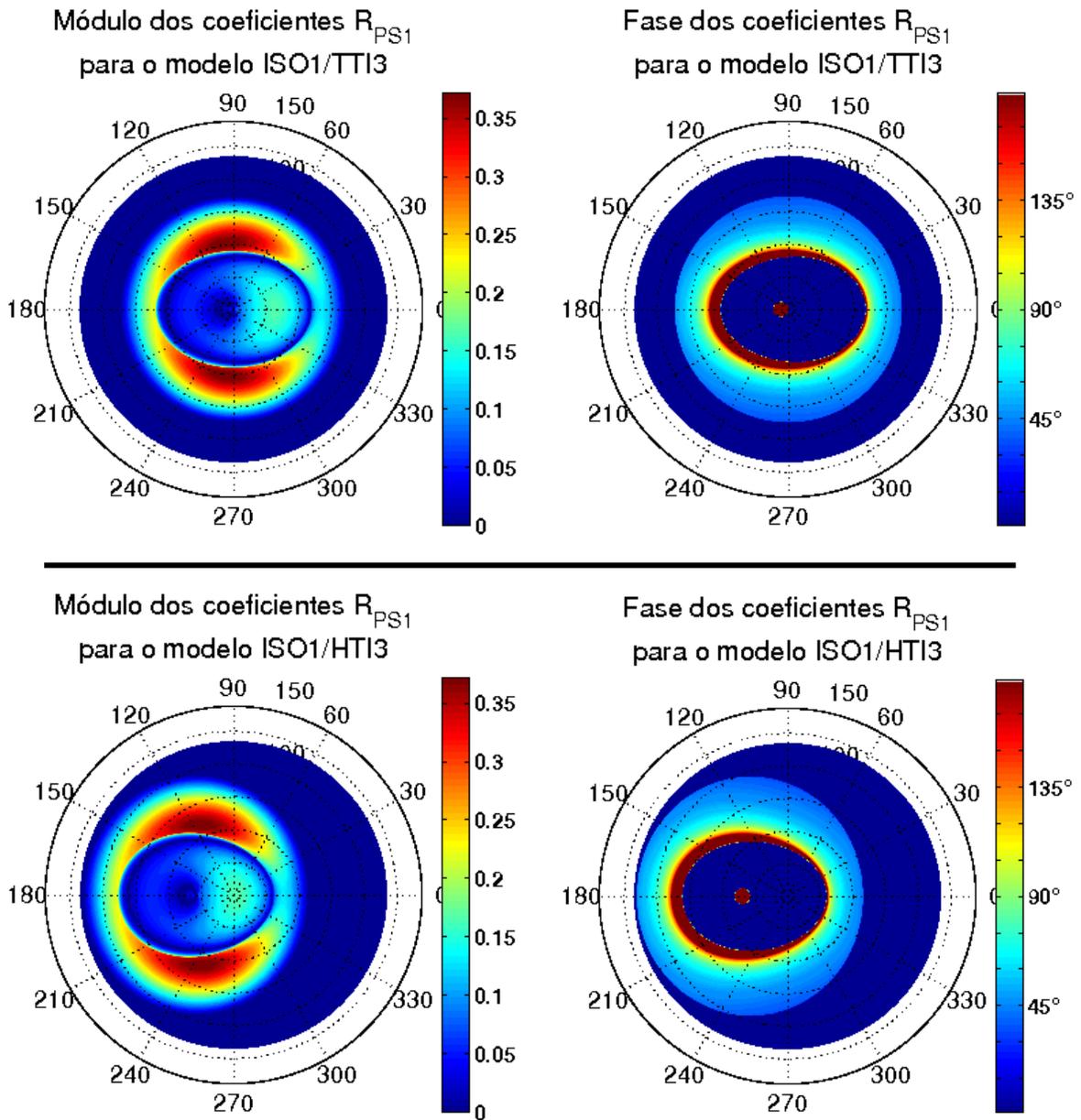


Figura 19: Equivalência entre os coeficientes de reflexão entre interfaces e simetrias inclinadas. No topo: interface plana ISO1/TTI3, abaixo: interface inclinada ISO1/HTI3.

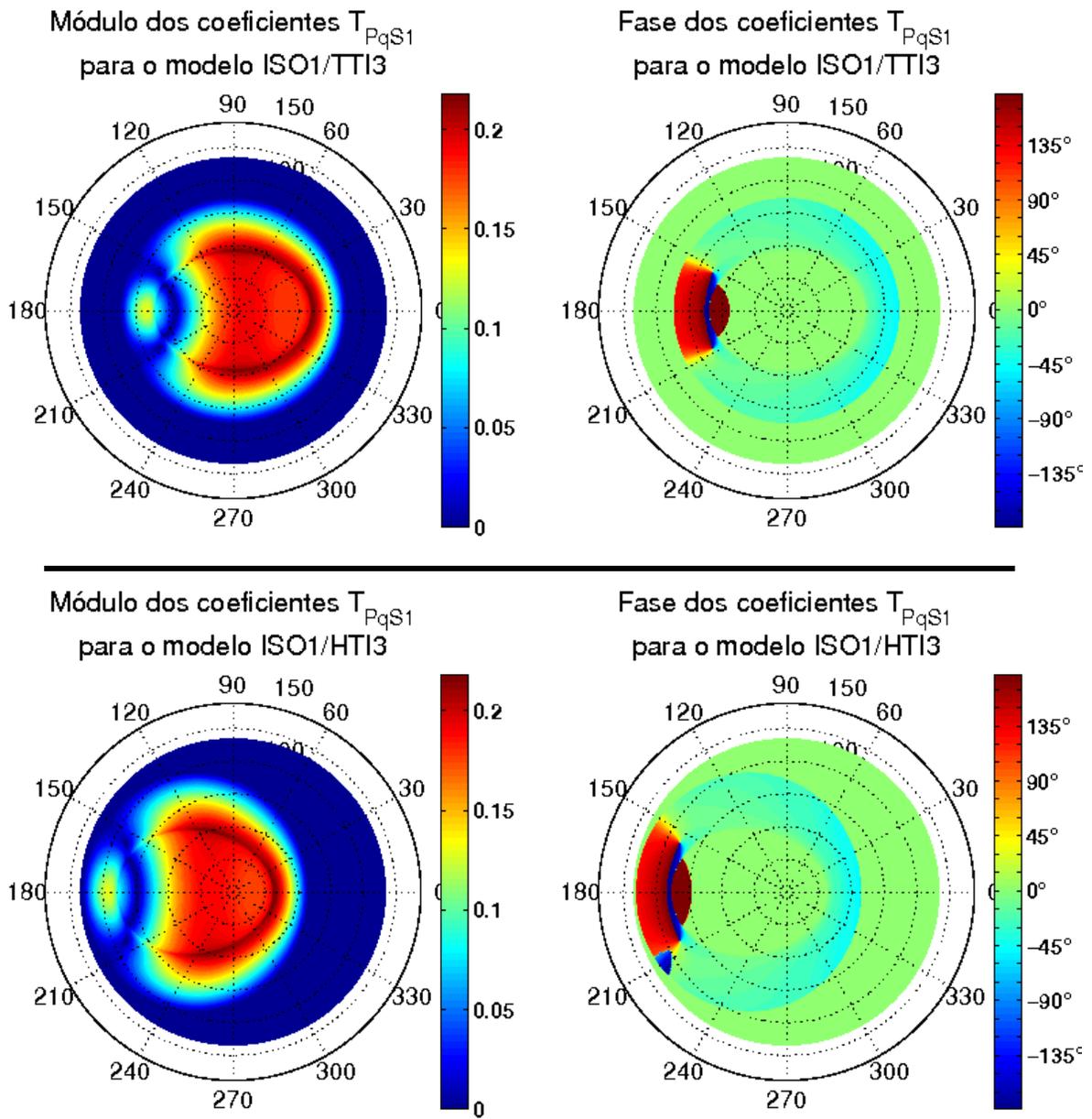


Figura 20: Equivalência entre os coeficientes de transmissão entre interfaces e simetrias inclinadas. No topo: interface plana ISO1/TTI3, abaixo: interface inclinada ISO1/HTI3.

Podemos obter os mesmos coeficientes R/T de modelos diferentes, a despeito de uma translação do centro das coordenadas, como mostram a Figura 19 e a Figura 20. Logo, os coeficientes R/T são propriedades locais e dependem somente das orientações relativas entre as simetrias e a interface, e não dependem de suas orientações absolutas em relação às coordenadas cartesianas.

4.4. Reciprocidade dos coeficientes R/T energéticos

Nesta seção apresentamos um exemplo de reciprocidade dos coeficientes de transmissão energéticos. Os modelos utilizados são as interfaces horizontais ORT1/ISO2 e ISO2/ORT1.

A Figura 21 mostra que o comportamento dos coeficientes de transmissão $qP-S1$ e $S1-qP$, para as interfaces ORT1/ISO2 e ISO2/ORT1, são recíprocos. Esta reciprocidade significa que os mesmos coeficientes podem ser obtidos quando invertemos a relação onda incidente-gerada. É importante ressaltar que os ângulos de incidência e geração (transmissão) não são os mesmos, por isso os coeficientes de módulo entre 0,0 à 0,4 (localizados após os máximos de 0,4 – 0,5) obtidos do modelo ORT1/ISO2 estão localizados em um intervalo de $60^\circ - 90^\circ$ de inclinação, enquanto que os coeficientes de mesmo módulo para o modelo ISO2/ORT1 estão localizados em um intervalo estreito próximo à $55^\circ - 60^\circ$ de inclinação. Isto significa que grandes variações nos ângulos de incidência do modelo ORT1/ISO2 geram pequenas variações no ângulo de transmissão. Quando invertemos o modelo para ISO2/ORT1, são necessárias pequenas variações nos ângulos de incidência para obter os mesmos valores dos coeficientes R/T.

Na Figura 22 observamos que o modelo ORT1/ISO2 possui uma região onde o módulo dos coeficientes T decrescem de 0,4 à 0,0. Esta região, assim como na Figura 21 (coeficientes $T^{(E)}$ para o modelo ORT1/ISO2), está localizada aproximadamente entre os ângulos de $60^\circ - 90^\circ$ de inclinação. Quando analisado o modelo ISO2/ORT1, observamos que esta região de decrescimento não existe para os coeficientes T (Figura 22), entretanto existe, apesar do intervalo estreito, para os coeficientes $T^{(E)}$ (Figura21). A Figura 22 exemplifica a não reciprocidade dos coeficientes R/T de deslocamento.

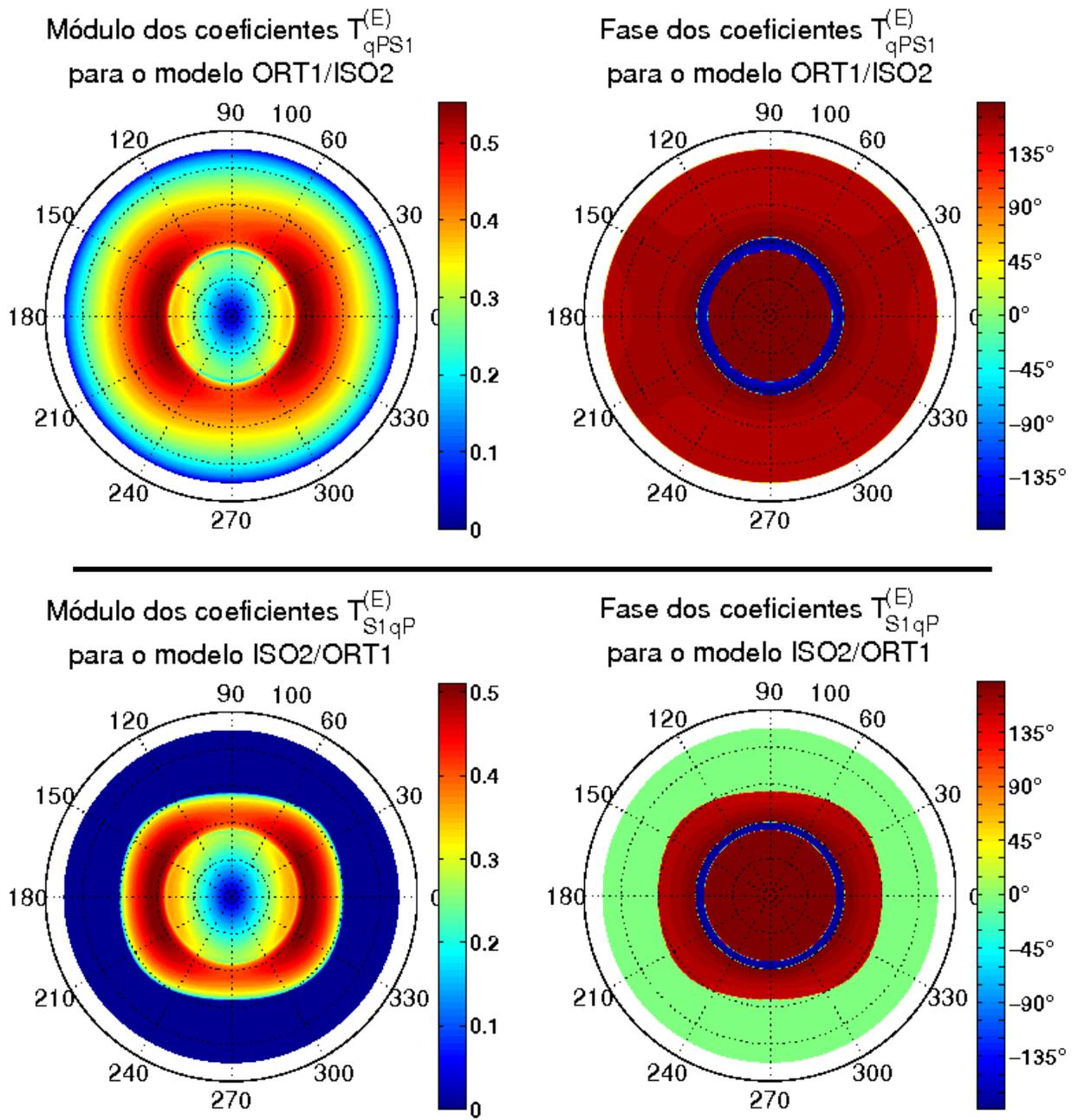


Figura 21: Reciprocidade dos coeficientes de transmissão energéticos.

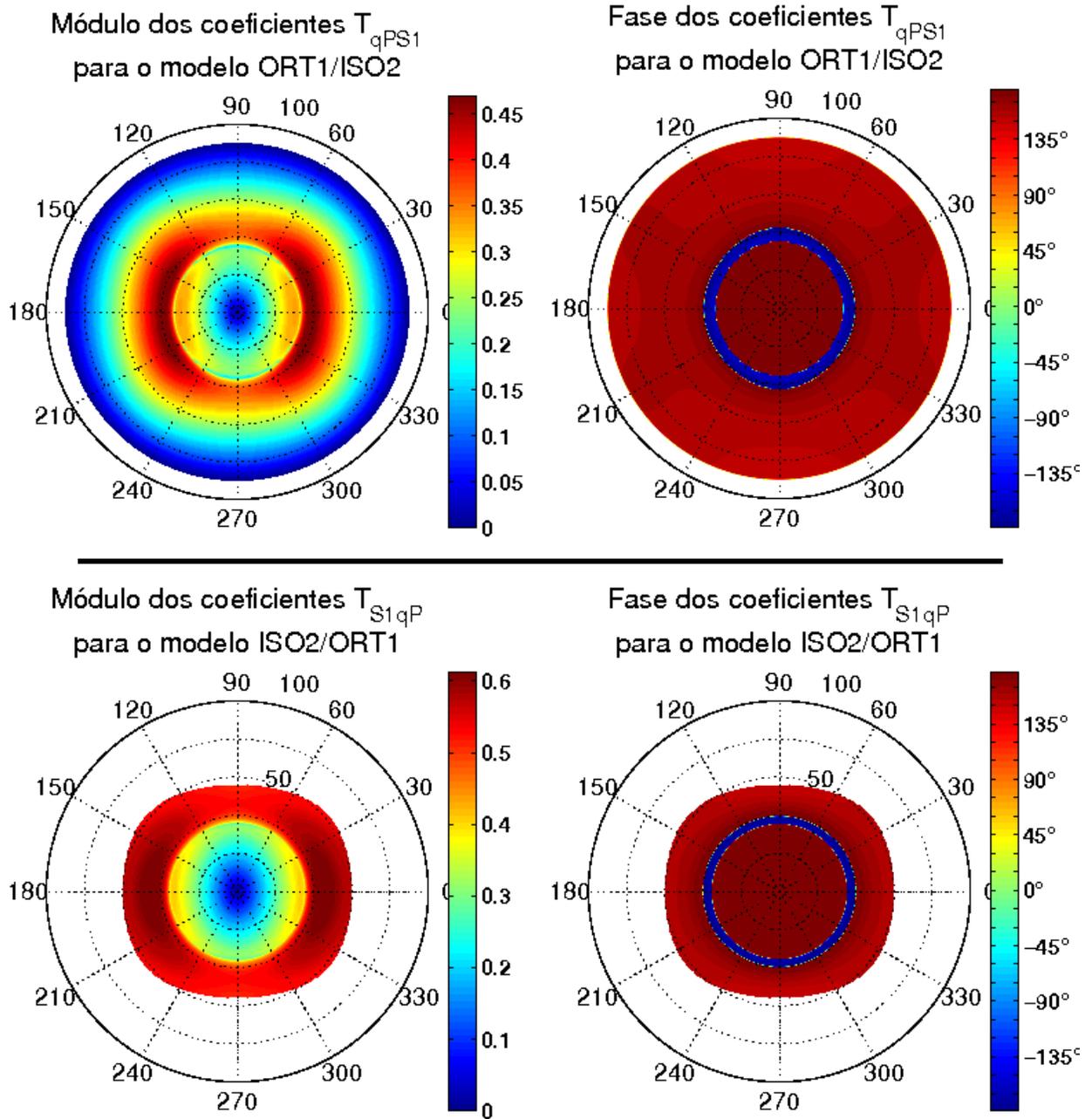


Figura 22: Os coeficientes de transmissão de deslocamento não são recíprocos. O modelo ISO2/ORT1 não possui as regiões onde o módulo dos coeficientes decresce, no modelo ORT1/ISO2 esta região corresponde aos ângulos de inclinação no intervalo de $60^\circ - 90^\circ$.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos

Foi desenvolvido um método para obtenção dos coeficientes R/T para meios anisotrópicos de simetria geral através da solução das equações de contorno na interface. Dificuldades computacionais em regiões próximas à direções singulares são comuns e devem ser analisadas cuidadosamente. Os coeficientes R/T foram estendidos aos coeficientes $R^{(E)}/T^{(E)}$, os quais possuem natureza recíproca.

Foi verificada a importância da determinação das ondas qS1 e qS2 para a obtenção correta dos coeficientes R/T . Dois critérios foram utilizados, o das velocidades e o critério dos vetores de polarização. O critério da polarização é necessário somente nos casos em que as ondas qS1 e qS2 possuem superfícies de velocidade de fase que se cruzam, nos demais casos, onde as superfícies de velocidades de fase se tangenciam, o método das velocidades é suficiente.

As anisotropias foram estudadas de acordo com suas simetrias, através dos coeficientes AV_{qP} , AV_{qS} e das superfícies de velocidade de fase. Superfícies de velocidade de fase das ondas qS1 e qS2 com mesmo AV_S podem se cruzar ou se tangenciar, logo os coeficientes AV_S não são adequados para verificação da necessidade de utilização do critério de polarização para as ondas qS1 e qS2.

Foram feitos testes para interfaces planas horizontais e inclinadas; e para simetrias transversais horizontais e inclinadas. Constatou-se a que os coeficientes R/T dependem da orientação relativa entre as simetrias e a interface plana. Logo, o cálculo dos coeficientes R/T pode ser abordado sempre como um problema local. Demonstrações de propriedades e simetrias podem ser simplificadas adotando interfaces planas horizontais.

Como a base da análise e modelagem AVO consiste nas equações aproximadas para os coeficientes R/T , sugerimos para trabalhos futuros a comparação entre os resultados exatos, obtidos pela metodologia abordada neste trabalho, e as aproximações disponíveis na literatura.

Recomenda-se para trabalhos futuros a extensão da metodologia utilizada para o cálculo dos coeficientes R/T para ondas-não homogêneas, i.e. meios não necessariamente elásticos e

ondas evanescentes. Também se recomenda o estudo mais profundo dos vetores de polarização para adoção de critérios mais sofisticados para a classificação das ondas cisalhantes, assim como o estudo de parâmetros de anisotropia que melhor descreva as características do meio.

Capítulo 6

Referências

- Backus, G. E. (1962). Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophys. Res.* (67), 4427-4440.
- Bulant, P., & Kliměš, L. (2008). Numerical comparison of the isotropic-common-ray and anisotropic-common-ray approximations of the coupling ray theory. *Geophys. J. Int.* (175), 357-374.
- Červený, V. (1997). *Seismic Ray Theory, Report 5*. Praha: Department of Geophysics of Charles University Prague.
- Chapman, C. (1994). Reflection/Transmission coefficient reciprocities in anisotropic media. *Geophys. J. Int.* , 116, pp. 498-501.
- Daley, P. F., & Hron, F. (January de 1979). Reflection and transmission coefficients for seismic waves in ellipsoidally anisotropic media. *Geophysics* , 44, pp. 27-38.
- Daley, P. F., & Hron, F. (June de 1977). Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media. *Bulletin of the Seismological Society of America* , 67, pp. 661-675.
- Farra, V., & Pšenčík, I. (2008). First-order ray computations of coupled S waves in inhomogeneous weakly anisotropic media. *Geophys. J. Int.* , 173, pp. 979-989.
- Gajewski, D., & Pšenčík, I. (1987). Computation of high-frequency seismic wavefields in 3-D laterally inhomogeneous anisotropic media. *Geophys.J.R.astr.Soc.* , 91, pp. 383-411.
- Helbig, K. (1994). Foundations of anisotropy for exploration seismics. *Handbook of Exploration Geophysics* , 22.
- Hilterman, F. J. (2001). *Seismic amplitude interpretation* (Vol. SEG/EAGE Dist. Instr. Series No. 4). Society of Exploration Geophysicists.
- Hudson, J. A. (1981). Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. (64), 133-150.
- Iversen, E., & Pšenčík, I. (2008). Ray tracing and inhomogeneous dynamic ray tracing for anisotropy specified in curvilinear coordinates. *Geophys. J. Int.* (174), 316-330.

- Iversen, E., & Pšenčík, I. (2007). Ray tracing for continuously rotated local coordinates belonging to a specified anisotropy. *Stud. Geophys. Geod.* (51), 37-58.
- Kliměs, L., & Bulant, P. (2004). Errors due to the common ray approximations of the coupling ray Theory. *Stud. Geophys. Geod* (48), 117-142.
- Li, Y., Downton, J., & Xu, Y. (March de 2007). Practical aspects of AVO modeling. *The Leading Edge* , pp. 295-311.
- Ougier-Simonin, A., Sarout, J., & Guéguen, Y. (2009). A simplified model of effective elasticity for anisotropic shales. *geophysics* , 74, pp. D57-D63.
- Pšenčík, I. (2000). *Basics of plane wave propagation and the seismic ray method, lecture notes*. Salvador, Brazil: PPPG/UFBa.
- Shearer, P. M., & Chapman, C. H. (1989). Ray tracing in azimuthally anisotropic media - I. Results for models of aligned cracks in upper crust. *Geophysical Journal* (96), 51-64.
- Shuey, R. T. (1985). A simplification of the Zoeppritz equations. *Geophysics* , 50, p. 609-614.
- Thomsen, L. (2002). *Understanding Seismic Anisotropy in Exploration and Exploitation*. Society of Exploration Geophysicists.
- Thomsen, L. (2002). *Understanding Seismic Anisotropy in Exploration and Exploitation*. (Vol. SEG/EAGE Dist. Instr. Series No. 5). Society of Exploration Geophysicists.
- Valcke, S. L., Casey, M., Lloyd, G. E., Kendall, J.-M., & Fisher, Q. J. (2006). Lattice preferred orientation and seismic anisotropy in sedimentary rocks. (166), pp. 652-666.
- Vavryčuk, V., & Pšenčík, I. (November-December de 1988). PP-wave reflection coefficients in weakly anisotropic elastic media. *Geophysics* , 63, pp. 2129-2141.
- Winterstein, D. F. (1990). Velocity anisotropy terminology for geophysicists. *Geophysics* (55), 1070-1088.
- Worthington, M. H. (July de 2008). Interpreting seismic anisotropy in fractured reservoirs. *First Break* , 26, pp. 57-63.

Apêndices

A. Notações e operações

Vetores e matrizes são determinados por índices subscritos, os quais assumem os valores 1, 2 e 3 a menos que seja especificado outros valores. Desta forma, os símbolos x_i e d_{ij} denotam um vetor tridimensional e uma matriz 3x3 respectivamente.

É adotada a convenção de Einstein quanto à somatória de índices repetidos; desta maneira a soma sobre os índices de 1 à 3 é subentendida, tal que:

$$u_i v_i = \sum_{i=1}^3 u_i v_i. \quad (\text{A.1})$$

As definições acima são estendidas à definição de tensores. Tensores de posto zero são escalares, tensores de posto um e dois são vetores e matrizes respectivamente. O número de índices subscritos deve ser igual ao posto do tensor, logo um tensor T_{ijkl} é um tensor de posto quatro.

Tensores de um mesmo posto podem somar-se ou subtrair-se gerando um novo tensor de mesmo posto, isto é:

$$A_{ij} \pm B_{ij} = C_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

Multiplicação de tensores pode ocorrer entre tensores de posto diferente. Caso os índices de ambos os tensores sejam diferentes, o tensor resultante possui aumento em seu posto, tal que:

$$A_{ij} B_{klm} = C_{ijklm}. \quad (\text{A.3})$$

A multiplicação de dois tensores de postos diferentes com índices iguais reduz o posto do tensor resultante, tal que:

$$A_{ij} B_j = C_i, \quad (\text{A.4})$$

ou ainda

$$A_{ij}B_{ij} = C . \quad (\text{A.5})$$

A.I. Produto interno e produto vetorial

Dado dois vetores \boldsymbol{w} e \boldsymbol{v} , definimos o produto interno como:

$$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = w_i v_i . \quad (\text{A.6})$$

O produto vetorial entre \boldsymbol{w} e \boldsymbol{v} é definido como:

$$(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v})_i = \varepsilon_{ijk} w_j v_k , \quad (\text{A.7})$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, definido por:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } i, j \text{ e } k \text{ formam uma combinação par de } 1, 2 \text{ e } 3, \\ -1 & \text{se } i, j \text{ e } k \text{ formam uma combinação ímpar de } 1, 2 \text{ e } 3. \\ 0 & \text{se } i, j \text{ e } k \text{ forem repetidos.} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

A.II. Determinante

O determinante de uma matriz \boldsymbol{M} é definido como:

$$\det(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{6} \varepsilon_{lmn} \varepsilon_{ijk} M_{li} M_{mj} M_{nk} . \quad (\text{A.9})$$

A.III. Operações diferenciais

Os operadores gradiente, divergente e rotacional são definidos respectivamente como:

$$\text{grad}(A) = \frac{\partial A}{\partial x_i} = A_{,i} , \quad (\text{A.10})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} , \quad (\text{A.11})$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} . \quad (\text{A.12})$$

Observe que foi utilizada a notação $,i$ para indicar que houve uma derivada parcial com relação a x_i .

B. Teoria elástica

Este apêndice contém os fundamentos necessários em teoria elástica para a obtenção da equação de equilíbrio estático de um meio deformado e equação do movimento de um meio perturbado.

Para as deduções a seguir não introduzimos os conceitos dos vetores de deslocamento x , tensores de deformação e_{ij} e tensores de tensão σ_{ij} , os quais são apresentados respectivamente nas seções 2.1, 2.2 e 2.3. A relação entre os tensores de deformação e tensão é dada pela Lei de Hooke:

$$\sigma_{ij}(x_m) = c_{ijkl}(x_m)e_{kl}(x_m), \quad (\text{B.1})$$

onde c_{ijkl} são os parâmetros elásticos do meio.

Consideramos os vetores de deslocamento em coordenadas de Lagrange a menos que seja especificado o contrário.

B.I. Condição de equilíbrio

Consideramos um pequeno volume V , em equilíbrio estático, de um meio deformado. O volume V é cercado por uma superfície fechada S , descrita pelo vetor unitário normal n . O volume V está sujeito a uma força externa, cuja densidade de força por unidade de volume é f . Em equilíbrio, a soma de todas as forças e a soma de todos os momentos das partículas em V devem se anular.

A consideração das forças resultantes, em um meio deformado, iguais a zero é dada por

$$\iiint_V f_j dV + \iint_S \sigma_{ij} n_i dS = 0. \quad (\text{B.2})$$

Aplicando o teorema de Gauss na integral de superfície da equação B.2, resulta em

$$\iiint_V \left(f_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_i} \right) dV = 0, \quad (\text{B.3})$$

onde \mathbf{x}' é o vetor radial do ponto deslocado do volume V em coordenadas de Euler:

$$x'_i = x_i + u_i(x'_k, t). \quad (\text{B.4})$$

Como a integral da equação B.3 é sobre um volume arbitrário e o integrando é uma função contínua ao longo das coordenadas espaciais, em qualquer ponto do meio deformado é respeitada a seguinte relação:

$$f_j + \partial \sigma_{ij} / \partial x'_i = 0. \quad (\text{B.5})$$

Considerando a regra da cadeia para a derivada parcial do tensor de tensão, obtemos:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_k}{\partial x'_i} \right). \quad (\text{B.6})$$

Para deformações pequenas, podemos negligenciar o produto entre as derivadas parciais na equação B.6:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_i} \sim \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}. \quad (\text{B.7})$$

Substituindo a aproximação B.7 em B.5, obtemos a equação de equilíbrio estático em coordenadas de Lagrange

$$f_j + \sigma_{ij,i} = 0. \quad (\text{B.8})$$

B.II. Simetria do tensor de tensão

Em equilíbrio, a soma dos momentos também deve ser nula, isto é:

$$\iiint_V \varepsilon_{ijk} x'_j f_k dV + \iint_S \varepsilon_{ijk} x'_j \sigma_{lk} n_l dS = 0. \quad (\text{B.9})$$

Utilizando o teorema de Gauss na integral de superfície da equação B.9, obtemos

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} x'_j \sigma_{lk} n_l dS = \iiint_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV + \iiint_V \varepsilon_{ijk} x'_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x'_i} dV. \quad (\text{B.10})$$

Ao aplicarmos a aproximação B.7 na equação B.10 obtemos a seguinte igualdade:

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} x'_j \sigma_{lk} n_l dS = \iiint_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV + \iiint_V \varepsilon_{ijk} x'_j \sigma_{lk,l} dV. \quad (\text{B.11})$$

Utilizando a equação de equilíbrio estático B.8 na segunda integral volumétrica em B.11:

$$\iint_S \varepsilon_{ijk} x'_j \sigma_{lk} n_l dS = \iiint_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV - \iiint_V \varepsilon_{ijk} x'_j f_k dV. \quad (\text{B.12})$$

Inserindo B.12 em B.9, para um volume V arbitrário, obtemos:

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} = \sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Logo o tensor de tensão é simétrico e pode ser descrito por apenas 6 componentes independentes.

B.III. Equação do movimento

A equação B.8 descreve o equilíbrio estático. De acordo com o princípio de d'Alembert, equações estáticas se tornam dinâmicas quando é adicionado a elas termo(s) de forças inerciais. Ao adicionarmos à equação B.8 o termo de uma força inercial, resultante das forças externas e da tensão interna, sobre o volume V do meio, obtemos a equação do movimento, tal que:

$$f_j + \sigma_{ij,i} = \rho u_{j,tt}, \quad (\text{B.14})$$

onde ρ é a densidade do meio.

A equação B.14 é a equação básica para a solução de problemas relacionados à propagação de ondas, chamada equação do movimento.

B.IV. Energia de deformação

Quando um meio é deformado, temperaturas e energias internas podem sofrer alterações. Consideramos meios adiabáticos, logo não há transmissão de calor no processo de deformação. Isto significa que o trabalho, cujo resultado é a deformação, no meio não será transformado em energia térmica, mas somente em energia interna.

O balanço entre as variações das energias interna U e cinética K em relação ao trabalho da deformação W , resultante das densidades de forças aplicadas em um dado volume V , é obtido da primeira lei da termodinâmica, que em casos adiabáticos é dado por:

$$dU + dK = dW. \quad (\text{B.15})$$

A energia interna devido à deformação está relacionada a uma energia potencial, tal que:

$$dU = \iiint_V \tau dV, \quad (\text{B.16})$$

onde τ é a densidade de energia de deformação.

Inserindo a equação B.16 na equação B.15 e aplicando a derivada em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \tau dV + \frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt}. \quad (\text{B.17})$$

A energia potencial está relacionada ao meio em seu estado original, logo as coordenadas são lagrangeanas, e a equação B.17 pode ser reescrita como:

$$\iiint_V \frac{\partial \tau}{\partial t} dV + \frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt}. \quad (\text{B.18})$$

O trabalho das forças externas é expresso em relação às densidades volumétricas e superficiais de força, f e T respectivamente. A variação do vetor de deslocamento no intervalo de $(t, t+dt)$ é $\mathbf{u}_i dt$. Logo o trabalho é dado por

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V f_j u_{i,t} dV + \iint_S \sigma_{ij} n_i u_{i,t} dS, \quad (\text{B.19})$$

onde S é a superfície fechada de V . O vetor \mathbf{n} é o vetor unitário com direção normal ao exterior da superfície S . Aplicando o teorema de Gauss, na integral de superfície, obtemos

$$\iint_S \sigma_{ij} n_i u_{i,t} dS = - \iiint_V f_i u_{i,t} dV + \iiint_V \rho u_{i,tt} u_{i,t} dV + \iiint_V \sigma_{ij} e_{ij,t} dV. \quad (\text{B.20})$$

Logo:

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_V \rho u_{i,tt} u_{i,t} dV + \iiint_V \sigma_{ij} e_{ij,t} dV. \quad (\text{B.21})$$

A energia cinética K é dada por:

$$K = \frac{1}{2} \iiint_V \rho u_{i,t} u_{i,t} dV; \quad (\text{B.22})$$

e sua variação com o tempo, assumindo a densidade ρ independente em relação ao tempo, é dada por:

$$\frac{dK}{dt} = \iiint_V \rho u_{i,tt} u_{i,t} dV. \quad (\text{B.23})$$

Com isto obtemos, para a expressão B.18:

$$\iiint_V \tau_{,t} dV - \iiint_V \sigma_{ij} e_{ij,t} dV = 0. \quad (\text{B.24})$$

Como o volume V é arbitrário, para satisfazer a equação B.24,

$$\tau_{,t} = \sigma_{ij} e_{ij,t}. \quad (\text{B.25})$$

Para um ponto de V e intervalo dt isto implica em

$$d\tau = \sigma_{ij} de_{ij}. \quad (\text{B.26})$$

Logo

$$\sigma_{ij} = \partial\tau/\partial e_{ij}. \quad (\text{B.27})$$

Como σ_{ij} é uma função linear de e_{ij} (lei de Hooke generalizada), as derivadas acima devem ser funções lineares de e_{ij} e τ deve ser uma função quadrática de e_{ij} . Definimos, para deformações nulas, densidades de energia de deformação também nulas. Logo, τ é uma função quadrática homogênea. Para uma função quadrática homogênea temos:

$$\frac{\partial\tau}{\partial e_{ij}} e_{ij} = 2\tau. \quad (\text{B.28})$$

Logo obtemos:

$$\tau = 1/2 (\sigma_{ij} e_{ij}). \quad (\text{B.29})$$

Inserindo a equação B.1 em B.29 obtemos

$$\tau = 1/2 (c_{ijkl} e_{kl} e_{ij}), \quad (\text{B.30})$$

Da definição B.30 para a densidade de energia obtemos

$$c_{ijkl} = \frac{\partial^2\tau}{\partial e_{ij}\partial e_{kl}} = \frac{\partial^2\tau}{\partial e_{kl}\partial e_{ij}} = c_{klij}. \quad (\text{B.31})$$

Logo os parâmetros elásticos são simétricos em relação aos índices i e j ; e k e l .