

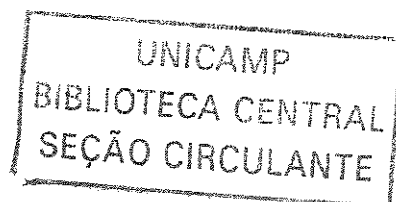
ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL D
TESE DEFENDIDA POR ALEXANDRE SCHALCH
MENDES E APROVADA PEL
COMISSÃO JULGADORA EM 02 / 02 / 2005
Pablo Siqueira
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Desenvolvimento e Validação de
Metodologia para Análise de Vibrações
Torcionais em Motores de Combustão Interna**

Autor: Alexandre Schalch Mendes
Orientador: Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles
Co-orientador: Prof. Dr. Douglas E. Zampieri

03/2005



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Desenvolvimento e Validação de Metodologia para Análise de Vibrações Torcionais em Motores de Combustão Interna

Autor: Alexandre Schalch Mendes

Orientador: Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles

Co-orientador: Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005
S.P. – Brasil

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	M522d
V	EX
TOMBO BC/	63615
PROC.	16.P.00076.05
C	☐
D	☒
PREÇO	11,00
DATA	12/05/05
Nº CPU	

CAMP

Lab-id 349188

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

M522d Mendes, Alexandre Schalch
Desenvolvimento e validação de metodologia para
análise de vibrações torcionais em motores de combustão
interna / Alexandre Schalch Mendes. --Campinas, SP:
[s.n.], 2005.

Orientadores: Pablo Siqueira Meirelles, Douglas E.
Zampieri.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Motores de combustão interna. I. Meirelles, Pablo
Siqueira. II. Zampieri, Douglas E. III. Universidade
Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia
Mecânica. IV. Título.

Título em Inglês: Development and validation of a methodology for torsional
vibrations analysis in internal combustion engines.

Palavras-chave em Inglês: Internal combustion engines

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestrado

Banca examinadora: Robson Pederiva, Álvaro Costa Neto

Data da defesa: 02/2/2005

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

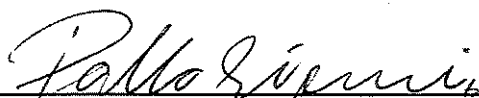
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

**Desenvolvimento e Validação de
Metodologia para Análise de Vibrações
Torcionais em Motores de Combustão Interna**

Autor: Alexandre Schalch Mendes

Orientador: Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles

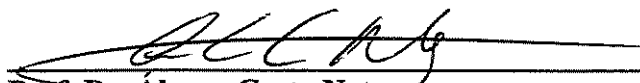
Co-orientador: Prof. Dr. Douglas Eduardo Zampieri



**Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP**

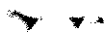


**Prof. Dr. Robson Pederiva
DPM/FEM/UNICAMP**



**Prof. Dr. Alvaro Costa Neto
USP/EESC**

Campinas, 02 de Fevereiro de 2005.



Dedicatória

Dedico este trabalho à minha esposa, aos meus pais e ao meu irmão.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ter sido concluído sem o auxílio das pessoas e empresas às quais presto minha homenagem:

Ao meu orientador e co-orientador, que me indicaram os caminhos a serem seguidos.

Ao Sr. Heiner Klier, que me auxiliou no desenvolvimento de vários cálculos e metodologias abrangidas por este estudo.

À MWM Motores Diesel Ltda., que forneceu recursos técnicos para a realização deste trabalho.

À Trelleborg Automotive – AVS Brasil Getoflex Ltda., que realizou as medições para a validação do modelo matemático utilizado.

Resumo

MENDES, Alexandre Schalch, *Desenvolvimento e Validação de Metodologia para Análise de Vibrações Torcionais em Motores de Combustão Interna*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 135 p., Dissertação de Mestrado.

Este trabalho tem como objetivo a análise do fenômeno das vibrações torcionais em árvores de manivelas de motores de combustão interna para aplicações veiculares. Como exemplo, a formulação proposta será aplicada no estudo da árvore de manivelas de um motor fabricado pela empresa MWM Motores Diesel Ltda., de seis cilindros em linha, quatro tempos, considerando-se a utilização de um amortecedor de vibrações de material elastomérico acoplado ao componente. Da análise das vibrações torcionais é possível de se obter os torques atuantes em cada secção do virabrequim. Estes esforços poderão ser aplicados posteriormente como condições de contorno a um modelo de elementos finitos, para que juntamente aos demais carregamentos existentes, seja feita a verificação do ciclo de fadiga atuante, de modo a avaliar o coeficiente de segurança do componente. Apesar de não ser este o foco deste trabalho, pode-se notar a importância da análise das vibrações torcionais no dimensionamento estrutural de uma árvore de manivelas. Iremos comparar as amplitudes de vibrações torcionais teóricas às obtidas experimentalmente, para a validação do modelo matemático proposto.

Palavras Chave

- Vibrações Torcionais, Motores de Combustão Interna.

Abstract

MENDES, Alexandre Schalch, *Development and Validation of a Methodology for Torsional Vibrations Analysis in Internal Combustion Engines*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 135 p., Dissertação de Mestrado.

The scope of this work is the study of the crankshaft torsional vibration phenomenon for internal combustion engines. As an example, the formulation will be applied to an engine for a vehicular application, manufactured by MWM Motores Diesel Ltda., with six cylinders in line configuration, four strokes and considering a rubber damper assembled to the component. From the torsional vibrations analysis, it is possible to calculate the actuating torque in each crankshaft section. These loads can be applied as boundary conditions to a finite element model and with the consideration of the other existing loads it is possible to determine the fatigue cycle, to calculate the safety factor of the component. This is not the objective of this work, but it is possible to note the importance of the torsional vibrations analysis in the structural dimensioning of the crankshafts. The obtained results by the presented methodology will be compared to the measured values for the validation of the proposed mathematical model.

Key Words

- Torsional Vibrations, Internal Combustion Engines.

Índice

Nomenclatura	ix
1. Introdução	1
2. Revisão da Literatura	6
3. Modelagem Teórica	10
3.1. Cinemática do sistema biela-manivela	10
3.2. Esforços dinâmicos – Forças de inércia	14
3.2.1. Forças de inércia alternativas	14
3.2.2. Forças de inércia rotativas	14
3.3. Esforços dinâmicos – Força de combustão	16
3.4. Forças resultantes na manivela	17
3.5. Análise das vibrações torcionais	20
3.5.1. Modelo matemático equivalente	20
3.5.2. Redução das inércias do trem de engrenagens	23
3.5.3. Determinação das características dinâmicas do absorvedor	24
3.5.4. Determinação das características dinâmicas do sistema	27
3.5.5. Determinação do torque de excitação	32

3.5.6. Solução por equações de estado	34
3.5.7. Resposta do sistema através da integral de convolução	36
4. Resultados e Discussões	41
4.1. Dados de entrada (motor de 191 kW a 2500 rpm)	41
4.2. Torciogramas teóricos	46
4.3. Dados de entrada (motor de 176 kW a 2400 rpm)	57
4.4. Torciograma teórico	60
4.5. Torciograma experimental	61
4.6. Temperatura da borracha do amortecedor	62
5. Conclusões e Sugestões para Próximos Trabalhos	66
Referências Bibliográficas	68
Bibliografia	71
Apêndice A	74
Apêndice B	82
Apêndice C	110

Nomenclatura

Letras Latinas

a – aceleração instantânea do pistão	[m/s ²]
C – coeficiente de amortecimento total	[N.m.s/rad]
Ca – coeficiente de amortecimento absoluto	[N.m.s/rad]
Cr – coeficiente de amortecimento relativo	[N.m.s/rad]
d – fator de perda	[-]
dp – diâmetro do pistão	[m]
f – rotação do motor	[rpm]
F_{ia} – força de inércia alternativa	[N]
F_{ir} – força de inércia rotativa	[N]
F_g – força dos gases	[N]
F_r – força radial resultante	[N]
F_{ra} – força radial das inércias rotativas	[N]
F_{rp} – força radial dos gases	[N]
F_t – força tangencial resultante	[N]
F_{ta} – força tangencial das inércias alternativas	[N]
F_{tp} – força tangencial dos gases	[N]
G – Módulo de cisalhamento dinâmico	[MPa]
I – momento de inércia	[kg.m ²]
I_{alt} – momento de inércia das massas alternativas	[kg.m ²]
int_rpm – intervalo entre rotações	[rpm]
Kt – rigidez torcional	[N.m/rad]
L – comprimento da biela (distância entre centros)	[m]
m_a – massas alternativas	[kg]
m_{ab} – massa alternativa da biela	[kg]
m_b – massa total da biela	[kg]
m_{rb} – massa rotativa da biela	[kg]
M_t – momento torçor	[N.m]
ord_ign – ordem de ignição	[-]
r – raio da manivela ou meio curso do pistão	[m]
rpm_min – rotação mínima do motor	[rpm]
rpm_max – rotação máxima do motor	[rpm]
s – curso do pistão	[m]
v – velocidade instantânea do pistão	[m/s]
x – posição instantânea do pistão	[m]

.....

Letras Gregas

α – ângulo do virabrequim	[°]
β – ângulo da biela	[°]
δ – ângulo de perda	[rad]
θ – amplitude das vibrações torcionais	[rad]
λ – relação entre o raio da manivela e o comprimento da biela	[-]
ϕ – ângulo de fase	[rad]
χ – número de perda	[-]
ω – velocidade angular do virabrequim	[rad/s]
ω_n – frequência natural do sistema	[rad/s]
Ω – frequência de excitação	[rad/s]

.....

Abreviações

PMS – Ponto Morto Superior
DPMS – Depois do Ponto Morto Superior
SBR – Styrene Butadiene Rubber
NR – Natural Rubber
AVT – Análise de Vibrações Torcionais

.....

Siglas

DMC - Departamento de Mecânica Computacional

Capítulo 1

Introdução

Uma árvore de manivelas está sujeita a uma série de esforços dinâmicos que atuam de forma periódica gerando vibrações e conseqüentemente tensões, as quais poderão ser quantificadas para que possamos assegurar a integridade estrutural do componente.

Atualmente, devido às exigências técnicas e comerciais, existe a necessidade dos motores de combustão interna operar com pressões de combustão cada vez mais elevadas, utilizando-se componentes que devem ser otimizados de forma a evitarmos o seu dimensionamento incorreto.

Sendo assim, foi desenvolvida uma metodologia para o cálculo das amplitudes de vibrações torcionais e torques gerados por estas condições de operação, para que se avalie a resistência estrutural das árvores de manivelas dos motores de combustão interna, utilizados nas mais variadas aplicações.

As figuras 1.1 e 1.2 mostram respectivamente, uma ilustração do motor no qual foram feitas as análises de vibrações torcionais e sua curva de oferta. Já a figura 1.3 apresenta a fotografia de uma árvore de manivelas que apresentou falha estrutural devido às vibrações torcionais.

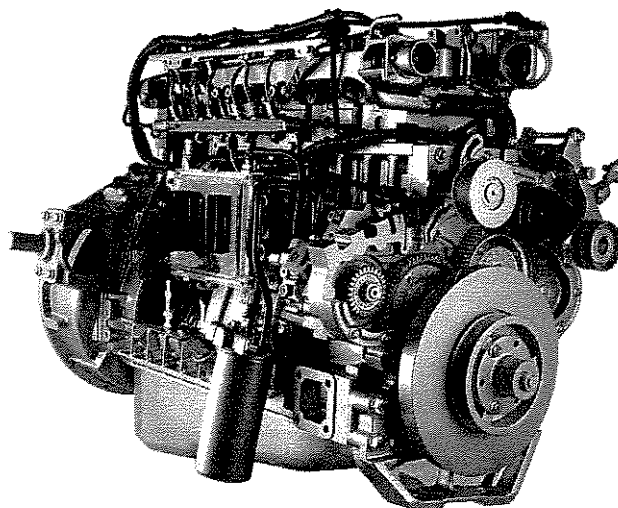


Figura 1.1: Motor *Acteon*® de 7,2 litros produzido pela MWM Motores Diesel Ltda.

Este trabalho está dividido em quatro partes principais. Na revisão da literatura são evidenciados os trabalhos semelhantes ao desse estudo e destacam-se os principais objetivos a serem alcançados.

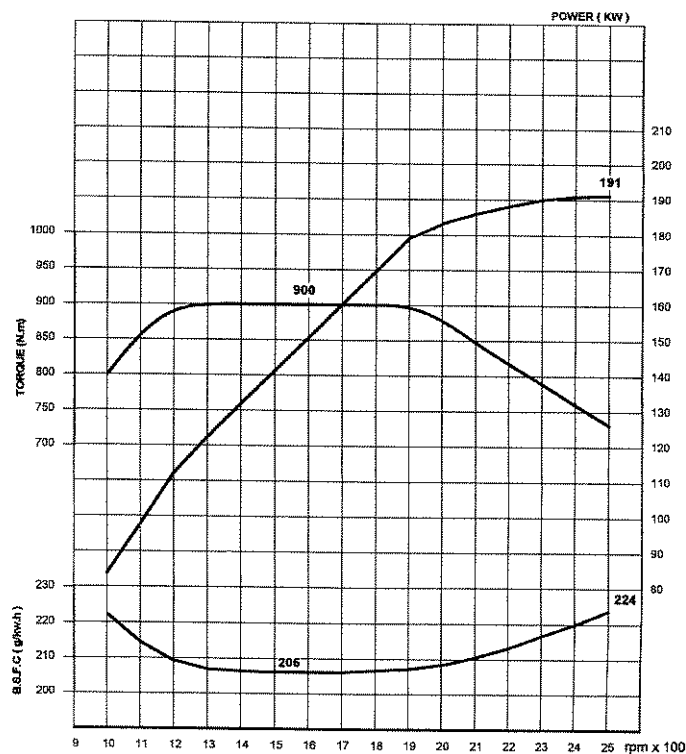


Figura 1.2: Curva de oferta do motor *Acteon*®

Em seguida, é apresentada toda a abordagem matemática utilizada para a realização dos cálculos, mostrando passo a passo todos os conceitos necessários para a compreensão do assunto, partindo-se da análise cinemática do sistema biela-manivela e a posterior quantificação dos esforços dinâmicos. Determinados esses carregamentos, iniciaremos a descrição da metodologia para o cálculo e análise das vibrações torcionais, explicando como deverá ser obtido um sistema equivalente que irá simular o componente real e dele tiraremos todas as informações necessárias para que se atendam aos nossos objetivos.

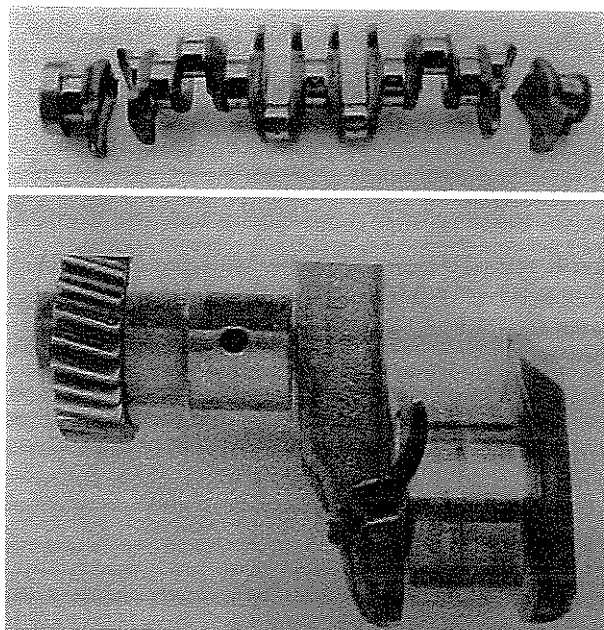


Figura 1.3: Falha estrutural em uma árvore de manivelas devido às vibrações torcionais excessivas

No capítulo 4, serão apresentados os resultados obtidos, identificando e explicando todos os pontos que são importantes para a conclusão da análise. Esses resultados são comparados às amplitudes das vibrações torcionais medidas em um motor similar, com equipamentos próprios para essa finalidade.

Ao final, são apresentadas as conclusões do trabalho, evidenciando a validade da metodologia adotada e são sugeridos temas para trabalhos posteriores que complementem esse estudo. Os trabalhos que contribuíram para a realização dessa tese são indicados nas referências bibliográficas e literaturas relacionadas ao assunto são apresentadas na parte de bibliografia.

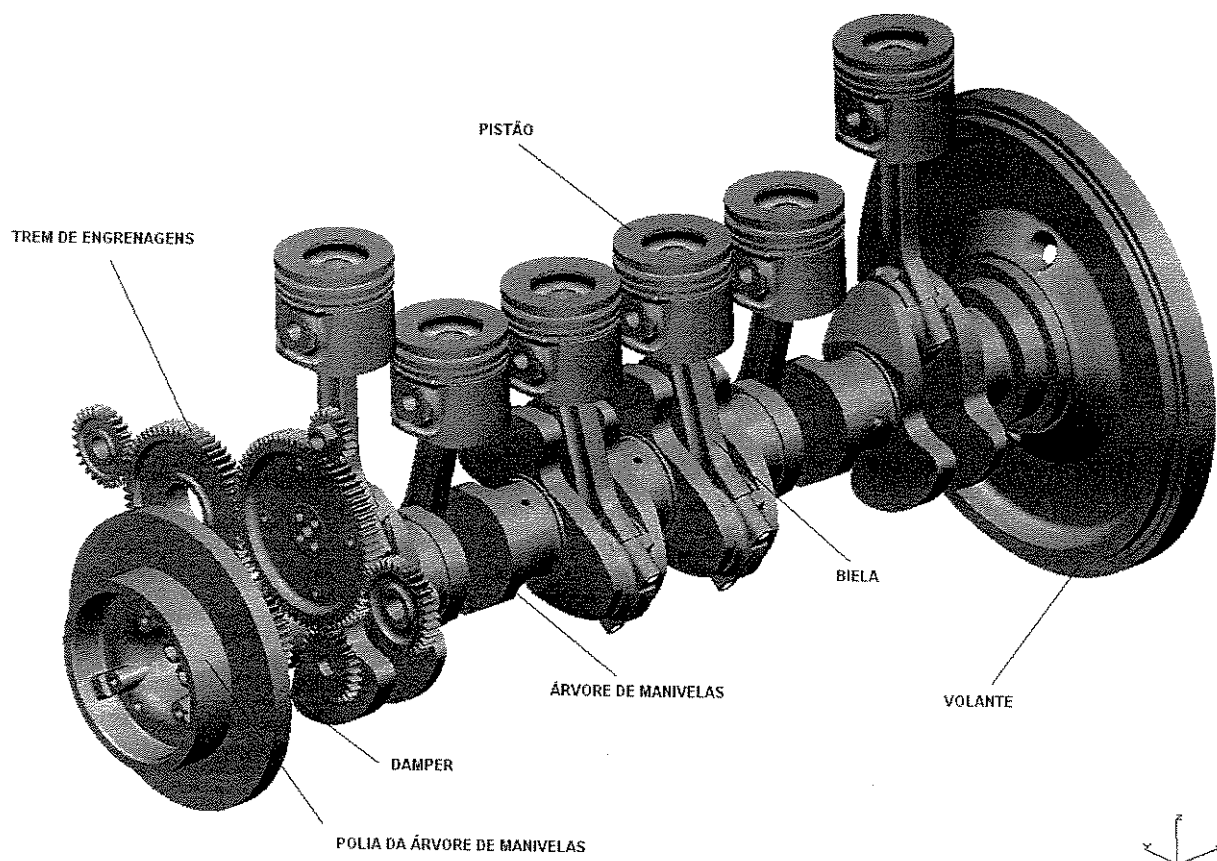


Figura 1.4: Árvore de manivelas e demais componentes responsáveis pela geração de torque do motor

As principais características técnicas do motor, cuja árvore de manivelas é objeto deste estudo, são as seguintes:

- Seqüência de ignição: 1-5-3-6-2-4;
- Sentido de rotação: Anti-horário, visto pelo volante;
- Comprimento da biela: 207 mm;
- Diâmetro do pistão: 105 mm;
- Meio curso do pistão: 68,5 mm;
- Torque máximo: 900 N.m a 1300 rpm;
- Potência máxima: 191 kW a 2500 rpm;
- Rotação máxima do motor: 2850 rpm;

Em relação ao exemplo estudado neste trabalho, devido à maior potência a ser obtida do motor, conseguida através do aumento do diâmetro e curso dos pistões e aliados à adaptação de um sistema de injeção eletrônica de combustível, maiores solicitações no virabrequim iriam surgir, tornando necessária a verificação do dimensionamento estrutural deste componente, visando determinar a viabilidade de sua utilização nesta nova aplicação. O principal motivo que levou ao estudo dessa metodologia de cálculo foi a necessidade de se compreender esses fenômenos vibratórios para possamos prever o comportamento dinâmico da árvore de manivelas, evitando-se investimentos financeiros em alterações desnecessárias nos ferramentais já existentes para o forjamento das peças.

Existem no mercado, programas computacionais destinados ao cálculo das vibrações torcionais em virabrequins, dentre os quais podemos citar o *Bricks*® da empresa AVL List GmbH, que utilizam abordagens matemáticas diferentes da proposta neste estudo, apresentando porém, resultados muito semelhantes. No Apêndice A são mostrados resultados comparativos entre o referido “software” e o programa desenvolvido neste trabalho, indicando estas semelhanças. A abordagem matemática escolhida foi a do método das equações de estado. O método das coordenadas principais foi descartado, visto que este último requer matrizes diagonais para os cálculos, fato este, que não ocorre em certos casos na prática.

A idéia de desenvolver um programa de computador para a realização desses cálculos teve como um dos principais objetivos, a aquisição da tecnologia necessária para o desenvolvimento de componentes, para o uso em novos motores comercializados pela empresa MWM Motores Diesel Ltda.

Outro ponto crucial para a tomada da decisão do desenvolvimento deste programa, foi a facilidade de implementação de novas ferramentas de cálculos, específicas para o motor em estudo. Podemos citar como exemplos: A consideração de pressões de combustão diferentes para cada faixa de rotação do motor, implementação de amortecedores viscosos, utilização de amortecedores de duas massas, simulação de falha ou falta de combustão em um ou mais cilindros, etc.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

As vibrações torcionais existem nos motores de combustão interna, devido à aplicação de excitações periódicas que atuam nos componentes responsáveis pela geração de torque, tais como: Árvore de manivelas, bielas, pistões, etc. A componente tangencial da força atuante no pistão exerce uma ação de torção periódica, ora atuando num sentido ora em outro, promovendo as vibrações torcionais. Esse fenômeno pode em alguns casos, gerar deslocamentos angulares de grandes amplitudes, ocasionando falhas estruturais na árvore de manivelas e em outros componentes do motor.

Basicamente, a análise é feita iniciando-se pela obtenção de um modelo discretizado da árvore de manivelas, o qual deverá possuir características de inércia, rigidez e amortecimento que represente o sistema real da melhor forma possível. Em seguida, devemos calcular o torque de excitação levando-se em conta as forças dos gases gerados pela combustão no interior do cilindro e as forças de inércia. Por se tratar de excitações periódicas, a análise da resposta dinâmica deverá ser feita expandindo-se esse torque em série de Fourier e os deslocamentos serão calculados para cada ordem de vibração. As amplitudes obtidas podem ser comparadas às obtidas experimentalmente e dessa forma, podemos avaliar estruturalmente o virabrequim, prever e reduzir níveis de ruído, analisar juntas de fixação de volantes, polias, etc.

Johnston, P. R. e Shusto, L. M. [1], desenvolveram e aplicaram uma técnica para analisar o comportamento das vibrações torcionais em motores Diesel no regime permanente e transitório de operação, através do método de superposição modal. Os resultados obtidos dessas análises são comparados aos obtidos experimentalmente.

Alguns sistemas podem apresentar vibrações excessivas em algumas rotações específicas. Este fenômeno foi primeiramente estudado por Draminsky [2]. Hestermann e Stone [3] apontaram que as causas dos inesperados deslocamentos de grandes amplitudes em múltiplos da rotação do motor, são as inércias variáveis do sistema biela-manivela.

No passado os efeitos ocasionados pelas características variáveis das inércias dos motores de combustão internas, não eram computados por serem considerados desprezíveis nos cálculos das vibrações torcionais. Recentemente, verificou-se que os efeitos secundários das inércias poderiam levar a inúmeras falhas em motores de grande porte. Paricha, M. S. [4], examinou em detalhes esses efeitos, incluiu em seu trabalho os estudos de Draminsky e ao final concluiu que em certas circunstâncias de operação, a interação das forças de combustão com os efeitos secundários de ressonância, podem ser extremamente danosas aos virabrequins.

O efeito da consideração dos momentos de inércia como sendo não constantes nas vibrações torcionais de árvores de manivelas, também foram estudados por Brusa et al. [5]. A introdução de funções que levam em conta a variação da inércia do sistema em função do ângulo do virabrequim deve ser considerada principalmente quando as massas das bielas e pistões forem significativamente grandes, quando comparadas aos demais componentes do motor. Neste trabalho foi considerado apenas o efeito das vibrações torcionais, desprezando-se os deslocamentos axiais. Do estudo do comportamento vibratório das árvores de manivelas feito na referência [5] conclui-se que apesar da existência das vibrações axiais e flexionais, além das torcionais, estas últimas são as que correspondem aos modos mais críticos de vibração para os componentes dos motores de combustão interna.

Song et al. [6] analisaram a influência do acoplamento entre as vibrações torcionais e axiais nas árvores de manivelas. Este acoplamento gera vibrações de grandes amplitudes quando as frequências naturais axiais e torcionais são iguais, ou quando a frequência natural do modo axial é o dobro da torcional.

Lacy [7] reportou a análise torcional de um motor de quatro cilindros, ciclo Otto à gasolina. Neste modelo os nós do virabrequim representam os munhões, os quais são conectados aos

mancais principais levando-se em conta as propriedades elásticas do filme de óleo. Estas propriedades influenciam na rigidez radial e rotacional, bem como o amortecimento do filme de óleo. Boysal e Rahnejat [8] utilizaram o equacionamento proposto por Lacy e incluíram num modelo de multi-corpos, a influência da dinâmica dos corpos rígidos de todas as inércias envolvidas para avaliar o ruído gerado pelas vibrações do motor.

A estimativa dos coeficientes de amortecimento torcional nos motores de combustão interna, foi inicialmente estudada pelos pesquisadores Den Hartog [9] e Ker Wilson [10], entre outros. Estes coeficientes eram obtidos através de observações empíricas em motores específicos para este fim e os valores obtidos eram na maioria das vezes, imprecisos, gerando grandes variações na resposta dinâmica dos sistemas analisados.

Modelos teóricos e híbridos para estimativa dos coeficientes de amortecimento, foram propostos por Iwamoto e Wakabayashi [11], os quais levam a relações analíticas entre o amortecimento e outros parâmetros mensuráveis dos motores. Wang e Lim [12] chegaram a estimativas precisas do coeficiente de amortecimento absoluto de um motor monocilíndrico acionado por um motor elétrico. Foram levados em conta os dois primeiros modos de vibrar do sistema e os coeficientes de amortecimento para esses modos foram obtidos em função do ângulo do virabrequim.

Y. Honda e T. Saito [13] estudaram as vibrações torcionais em um motor Diesel de seis cilindros, com um amortecedor de borracha para redução dos efeitos vibratórios. O método de análise utilizado foi pela matriz de transição de estado, que pode ser verificado na referência [20] e foi observado que a influência da rigidez dinâmica do elastômero é mais significativa para as características vibratórias do sistema, do que o amortecimento do motor e do “damper” em si. Esta característica é determinada principalmente pela geometria da borracha e as características da composição química do componente.

As vibrações torcionais são geralmente calculadas considerando-se um comportamento uniforme do motor, com pressões de combustão idênticas entre os cilindros. Esta condição é verdadeira apenas no início de operação da máquina, ou sob condições ideais de manutenção do

equipamento. Na prática, estas condições dificilmente ocorrem e variações consideráveis no espectro das forças de excitação podem existir, influenciando de forma substancial as vibrações torcionais. Maragonis, I.E. [14] realizou uma pesquisa, na qual essas diferenças dos esforços entre os cilindros foram levadas em consideração. Resultados teóricos e experimentais são apresentados ao final do estudo, mostrando que realmente existem situações em que as amplitudes das vibrações podem divergir bastante das esperadas.

Capítulo 3

Modelagem Teórica

3.1 Cinemática do sistema biela-manivela

Inicialmente para que se entenda o comportamento dinâmico de um motor de vários cilindros, é necessária a compreensão e o equacionamento cinemático para um motor monocilíndrico, tal como em [18], [19]. Esta formulação será utilizada futuramente para a determinação dos esforços atuantes no sistema.

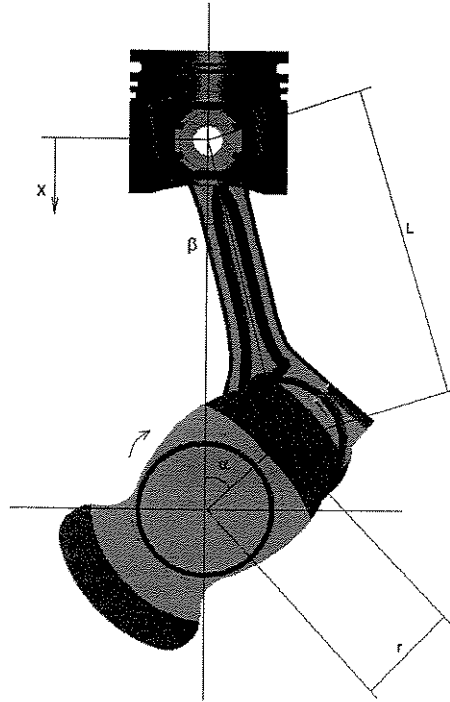


Figura 3.1: Sistema biela-manivela

A posição instantânea do pistão em relação ao PMS pode ser escrita em função dos ângulos e dimensões destacados na figura 3.1:

$$x = (r + L) - (r \cdot \cos \alpha + L \cdot \cos \beta) \quad (3.1)$$

Agrupando os termos:

$$x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot (1 - \cos \beta) \quad (3.2)$$

Podemos obter o ângulo da biela β em função do ângulo do virabrequim α . Chamando de λ , a relação entre o meio curso da árvore de manivelas e o comprimento da biela, temos:

$$\sin \beta = \frac{r}{L} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \beta = \lambda \cdot \sin \alpha \quad ;$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha} \quad (3.3)$$

$$\therefore x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha}) \quad (3.4)$$

Expandindo em série a expressão da equação 3.3, teremos:

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \lambda^4 \cdot \sin^4 \alpha - \frac{1}{16} \lambda^6 \cdot \sin^6 \alpha + \dots$$

A partir das relações trigonométricas:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha ;$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cdot \cos 4\alpha ;$$

$$\sin^6 \alpha = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cdot \cos 2\alpha + \frac{3}{16} \cdot \cos 4\alpha - \frac{1}{32} \cdot \cos 6\alpha$$

E fazendo-se as devidas substituições, chegaremos finalmente à seguinte expressão:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\lambda^4}{64} \cdot \cos 4\alpha + \frac{\lambda^6}{512} \cdot \cos 6\alpha + \dots$$

Portanto, a equação que descreverá o movimento do pistão em relação ao PMS pode ser escrita da seguinte forma, desconsiderando-se os termos superiores à segunda ordem:

$$x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot \frac{\lambda^2}{4} (1 - \cos 2\alpha) \quad (3.5)$$

Podemos agora, obter as equações da velocidade e aceleração instantâneas do pistão, como segue:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dx}{d\alpha};$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dv}{d\alpha}$$

Onde a velocidade angular da árvore de manivelas ω , pode ser expressa como:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{60} \quad ; \text{ com } f = [\text{rpm}]$$

Derivando a equação 3.5 e fazendo a substituição, teremos:

$$v = \omega \cdot r \cdot \left(\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha \right) \quad (3.6)$$

Derivando a equação 3.6, teremos:

$$a = \omega^2 \cdot r \cdot (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha) \quad (3.7)$$

Podemos ainda, utilizar mais termos da série e considerar a seguinte equação para a obtenção da aceleração:

$$a = \omega^2 \cdot r \cdot \left(\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha - \frac{\lambda^3}{4} \cos 4\alpha + \frac{9\lambda^5}{128} \cos 6\alpha \right)$$

Determinada a equação da aceleração instantânea do pistão, é possível a determinação dos esforços dinâmicos atuantes no sistema. Esse equacionamento será demonstrado a seguir.

3.2 Esforços dinâmicos – Forças de inércia

Existem dois tipos de forças inerciais que atuam no sistema biela-manivela. As massas envolvidas podem ser reduzidas e separadas basicamente em dois tipos, sendo uma primeira de movimento puramente rotativo e outra que descreve um movimento linear alternativo.

3.2.1 Forças de inércia alternativas

São esforços decorrentes do movimento das massas alternativas. Essas massas podem ser consideradas como sendo a soma das massas do pistão incluindo pino, anéis, travas e a massa alternativa da biela. A divisão das massas da biela será explicada na sequência.

Para obtenção da força de inércia alternativa, utilizaremos a seguinte expressão:

$$F_{ia} = m_a \cdot r \cdot \omega^2 \left(\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha - \frac{\lambda^3}{4} \cos 4\alpha + \frac{9\lambda^5}{128} \cos 6\alpha \right) \quad (3.8)$$

A consideração apenas dos termos de primeira e segunda ordens para o cálculo da força de inércia alternativa, não implica numa redução significativa na precisão dos cálculos. Foi observado que a diferença entre esses valores é menor que 0,55%.

3.2.2 Forças de inércia rotativas

São forças geradas pelas massas que possuem movimento puramente rotativo. Podem ser consideradas como sendo a soma da massa rotativa da biela com a massa da manivela do virabrequim.

É importante observar que, dependendo do grau de balanceamento da árvore de manivelas maiores ou menores serão as tensões geradas por esses esforços. Porém, para o cálculo das vibrações torcionais, não se torna necessária a quantificação dessas solicitações e neste caso, iremos determiná-las apenas de modo informativo.

A força de inércia rotativa pode ser obtida através da equação:

$$F_{ir} = m_r \cdot r \cdot \omega^2 \quad (3.9)$$

A biela, como visto, pode ser dividida em duas massas equivalentes, uma que irá descrever um movimento alternativo e outra de movimento rotativo puro. Utilizaremos as seguintes relações para essa divisão, conforme a figura abaixo:

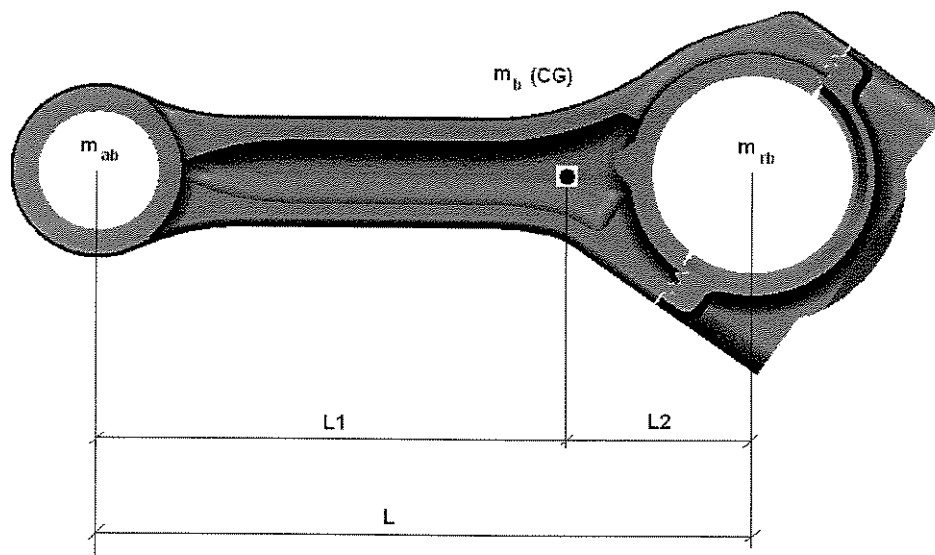


Figura 3.2: Divisão das massas da biela

$$m_{ab} = \frac{m_b \cdot L2}{L} ; m_{rb} = \frac{m_b \cdot L1}{L}$$

A divisão de massas é descrita na referência [18].

3.3 Esforços dinâmicos – Força de combustão

É a força gerada pelos gases na fase da combustão. Através da curva de pressão interna do cilindro em função do ângulo da árvore de manivelas, é possível calcular a força instantânea atuante no pistão. É interessante a obtenção dessas curvas através de métodos experimentais.

As curvas $p = f(\alpha)$ variam segundo o regime de operação e rotação do motor, podendo ser obtidas através da utilização de um transdutor de pressão instalado geralmente no cabeçote do motor, de forma a medir a pressão no interior do cilindro. Um sinal de referência e um sensor de rotações também são necessários para que se obtenha o ângulo instantâneo da árvore de manivelas em relação ao PMS do pistão.

Essas curvas têm o formato mostrado na figura 3.3.

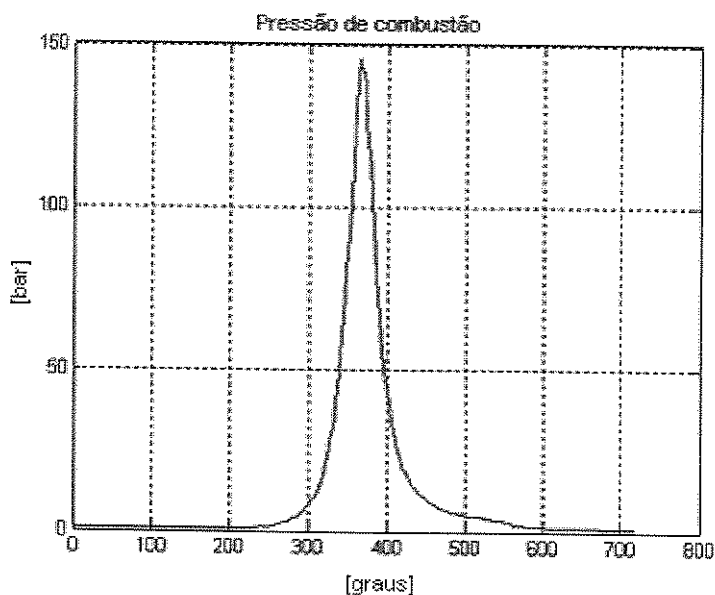


Figura 3.3: Curva experimental $p = f(\alpha)$ para a condição de 2500 rpm a plena carga.

A força atuante no pistão para um determinado valor de pressão pode ser obtida através da equação:

$$F_g = p \cdot \frac{\pi \cdot dp^2}{4} \quad (3.10)$$

3.4 Forças resultantes na manivela

Conforme a figura 3.4, podemos observar que com a decomposição da força no pistão, surgirão duas componentes que irão atuar no moente do virabrequim (eixo da árvore de manivelas que se conecta à biela). Uma radial que irá promover a flexão das manivelas e outra tangencial que será a responsável pela geração de torque no motor. Será apresentado a seguir o equacionamento dessas forças, porém, apenas as forças tangenciais terão importância na análise de vibrações torcionais proposta neste trabalho.

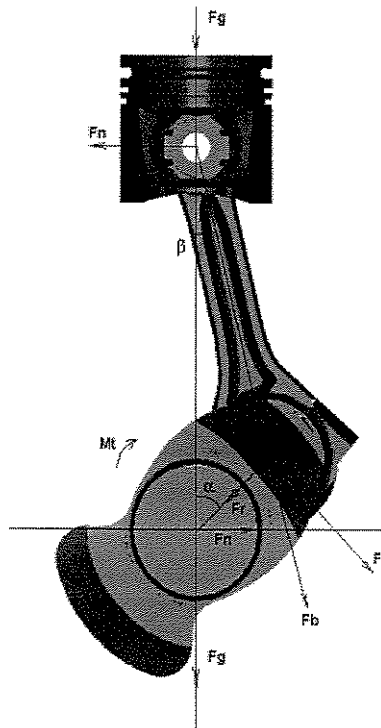


Figura 3.4: Esforços atuantes na árvore de manivelas

A força tangencial, indicada na figura 3.4, decorrente da pressão de combustão será:

$$F_{tp} = F_g \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (3.11)$$

E a força tangencial devido às forças de inércia, que foi obtida pela da equação 3.8, será:

$$F_{ta} = F_{ia} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (3.12)$$

Podemos calcular agora a força tangencial resultante que atuará no moente, da seguinte forma:

$$\vec{F}_t = \vec{F}_{tp} + \vec{F}_{ta} \quad (3.13)$$

A força radial resultante pode ser calculada seguindo a mesma metodologia.

$$F_{rp} = F_g \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (3.14)$$

$$F_{ra} = F_{ia} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (3.15)$$

$$\vec{F}_r = \vec{F}_{rp} + \vec{F}_{ra} \quad (3.16)$$

Nas figuras 3.5 e 3.6, podemos observar a variação dessas componentes em função do ângulo da árvore de manivelas para o caso do motor utilizado como exemplo.

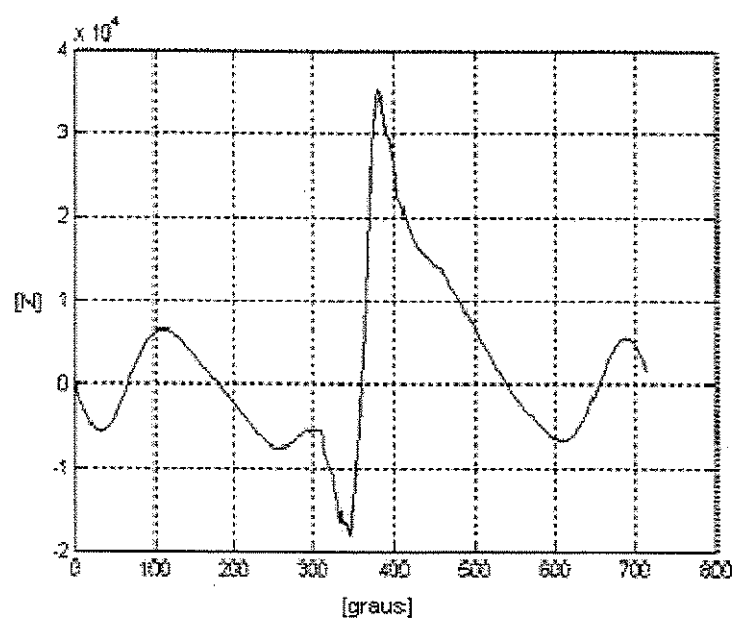


Figura 3.5: Força tangencial teórica resultante para a condição de 2500 rpm a plena carga

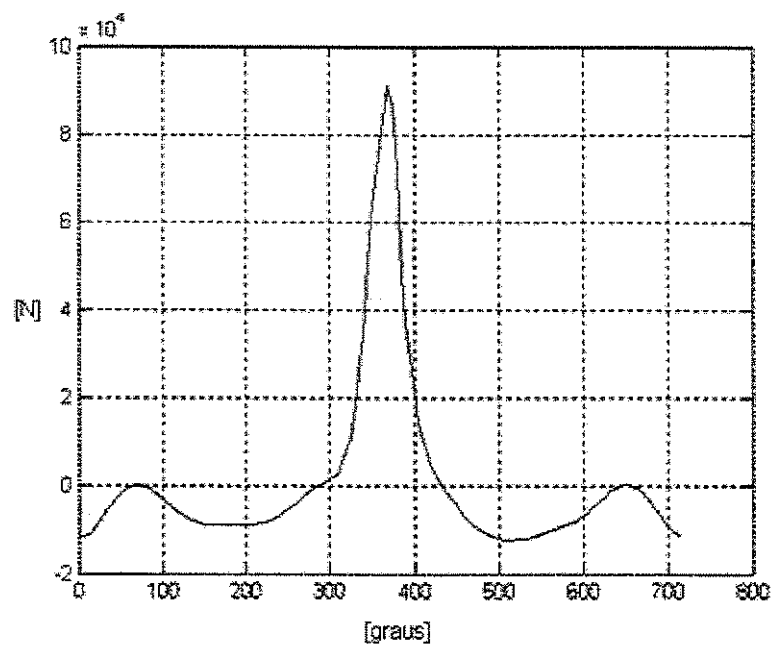


Figura 3.6: Força radial teórica resultante para a condição de 2500 rpm a plena carga

3.5 Análise das vibrações torcionais

As árvores de manivelas estão sujeitas simultaneamente a vibrações axiais, flexionais e torcionais. Este estudo abordará apenas os efeitos das vibrações torcionais. Conceitos básicos da análise de vibrações podem ser revisados em [20], [21], [22].

As condições de operação do motor geram algumas vezes, amplitudes de vibrações torcionais elevadas resultando em altas tensões de cisalhamento que podem comprometer o projeto do componente.

Para reduzir essas tensões, podemos utilizar amortecedores de vibrações torcionais do tipo viscoso, de borracha, etc., que na maioria das vezes são fixados parte frontal da árvore de manivelas (lado oposto ao volante). É possível ainda, ajustar as curvas de pressão de combustão através dos recursos existentes nos sistemas de injeção eletrônica de combustível, de forma a prolongar o tempo de atuação da força tangencial na árvore de manivelas, reduzindo as amplitudes das vibrações.

3.5.1 Modelo matemático equivalente

Para que possamos efetuar os cálculos, é necessário que seja obtido um sistema massa-mola do tipo torcional, que represente da melhor forma possível a árvore de manivelas mostrada na figura 1.4.

Esse sistema, no caso do motor de seis cilindros que faz parte do nosso estudo, possuirá onze graus de liberdade e será representado da seguinte forma:

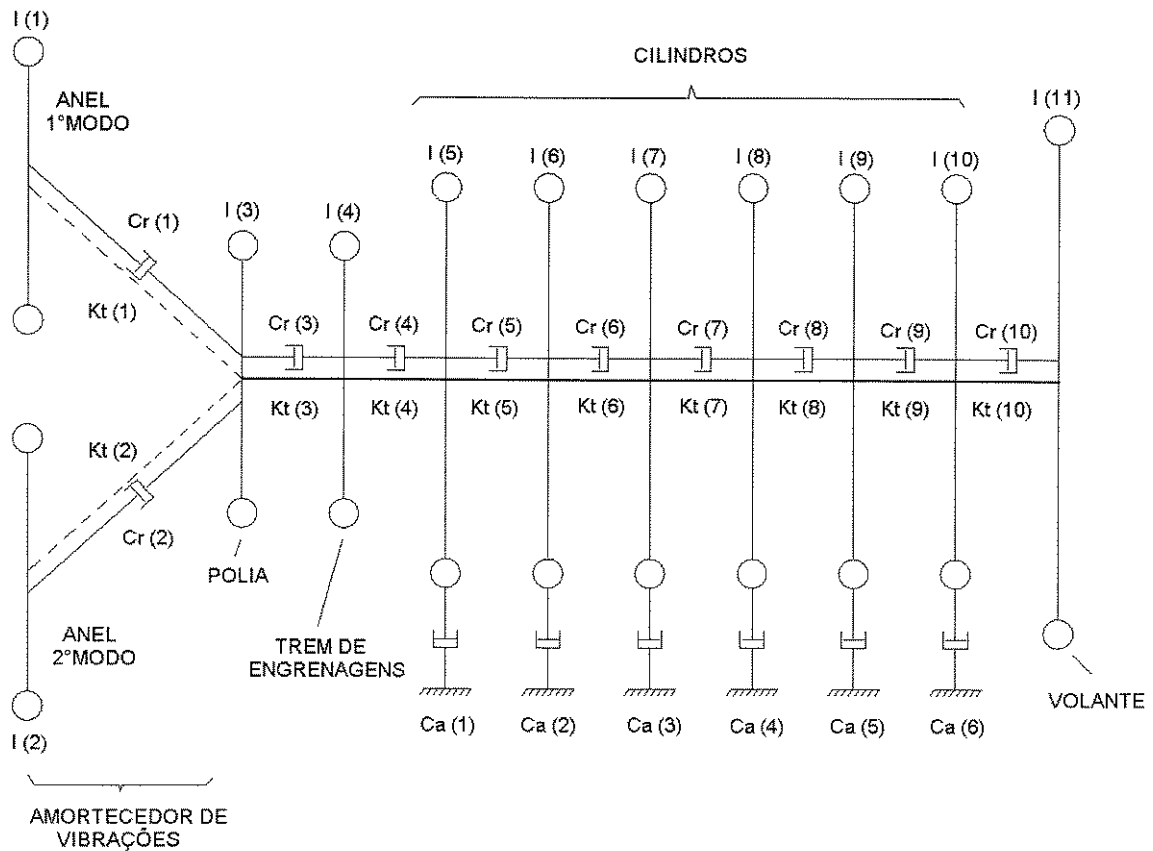


Figura 3.7: Modelo equivalente

Os valores das inércias $I(1 \dots 11)$ e rigidezes torcionais $Kt(1 \dots 10)$ entre cada elemento, podem ser obtidos através de softwares de CAD e CAE respectivamente e oferecem excelente precisão quando comparados aos valores obtidos experimentalmente.

As figuras 3.8 e 3.9, representam respectivamente os modelos geométricos a partir dos quais foram determinadas as inércias e rigidezes torcionais utilizadas na montagem das matrizes do modelo.

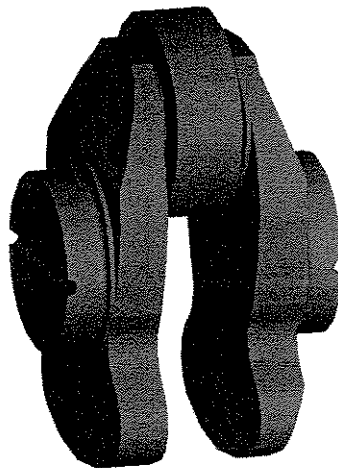


Figura 3.8: Modelo para obtenção da inércia de uma manivela, incluindo a massa rotativa da biela

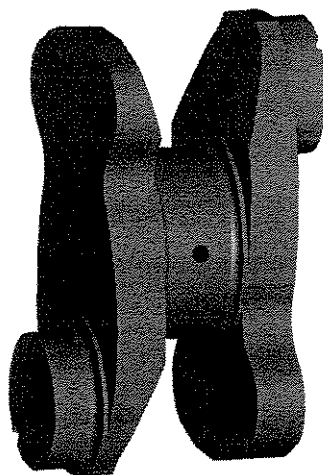


Figura 3.9: Modelo para obtenção da rigidez torcional entre as manivelas do virabrequim

3.5.2 Redução das inércias do trem de engrenagens

No caso do nosso estudo, existe um trem de engrenagens na parte frontal da árvore de manivelas, o qual é responsável pela transmissão de potência para agregados e demais acionamentos, tais como: Bomba de alta pressão, árvore do comando de válvulas, compressores de ar, etc.

Para obtermos a inércia reduzida de um sistema qualquer acionado por uma engrenagem (2), em relação ao eixo de rotação de uma engrenagem motora (1), utilizaremos a relação apresentada pela equação 3.17:

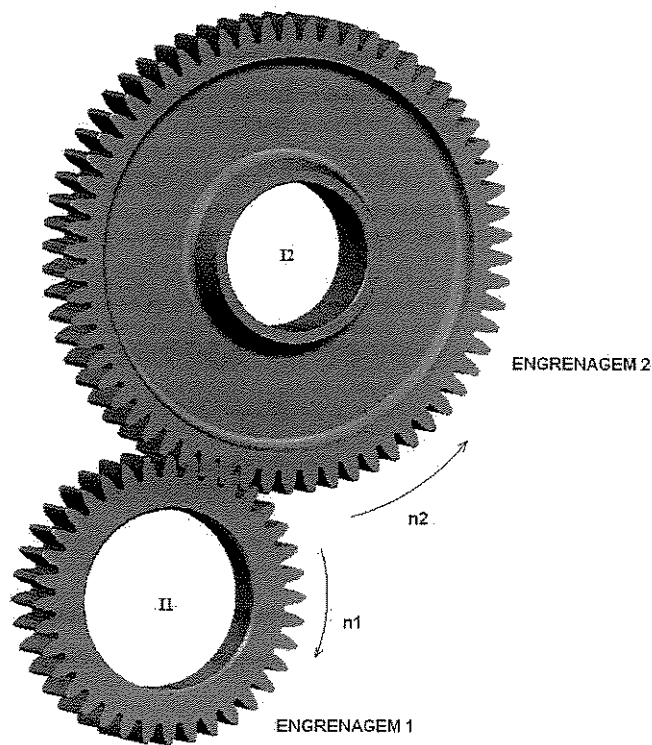


Figura 3.10: Esquema para redução da inércia de eixos com rotações diferentes (n_1 e n_2)

$$I_{red} = I_2 \cdot \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 \quad (3.17)$$

Deveremos utilizar esta redução de inércia para todas as engrenagens e acionamentos que compõem o trem e considerar a somatória destas inércias, como sendo um dos graus de liberdade do modelo equivalente, conforme descrito na referência [15].

3.5.3 Determinação das características dinâmicas do absorvedor

A figura 3.11 mostra um detalhe em corte do amortecedor de vibrações torcionais considerado neste estudo:

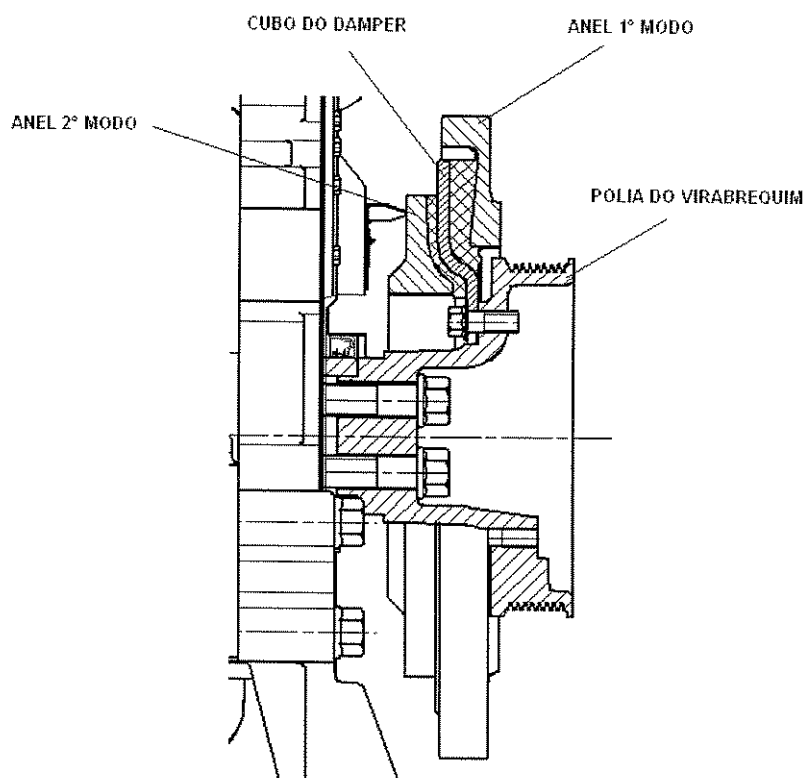


Figura 3.11: Amortecedor de vibrações torcionais de massa dupla

A rigidez dinâmica do elastômero utilizado no amortecedor, neste caso um composto de 70% de SBR e 30% de NR, será obtida através de um modelo de elementos finitos, cuja borracha possui um módulo de cisalhamento dinâmico (G) situado na faixa de 1,5 a 3,0 MPa. Estes valores, são os usualmente encontrados para os elastômeros.

Através da aplicação de um torque conhecido e da obtenção do deslocamento angular nas inércias do “damper”, é possível calcular as rigidezes do componente. Este método é o mesmo utilizado para a obtenção das rigidezes entre as manivelas do virabrequim descrito anteriormente.

Dessa forma, são obtidos os seguintes valores de rigidezes para o componente:

- Anel do 1° modo $I(1) = 0,1230 \text{ kg.m}^2$: $64254 \text{ N.m/rad} \leq K_t(1) \leq 127999 \text{ N.m/rad}$.
- Anel do 2° modo $I(2) = 0,0273 \text{ kg.m}^2$: $88887 \text{ N.m/rad} \leq K_t(2) \leq 177252 \text{ N.m/rad}$.

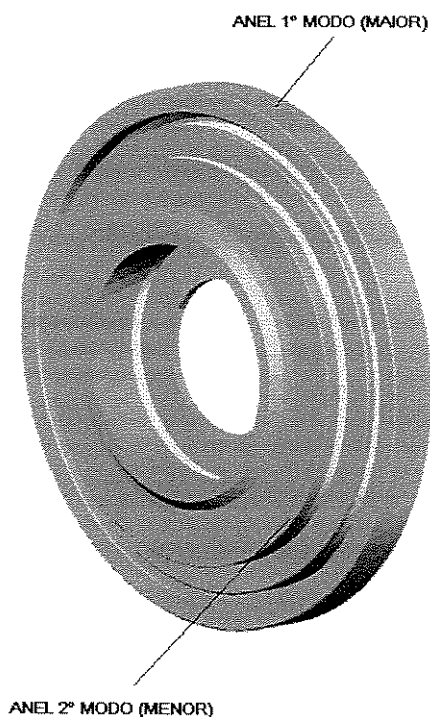


Figura 3.12: Modelo para a obtenção das rigidezes dinâmicas do amortecedor de vibrações

A rigidez dinâmica da borracha varia em função da sua temperatura. Para os nossos cálculos foram considerados os seguintes valores dessa propriedade:

$$K_t(1) = 105000 \text{ N.m/rad} \text{ e } K_t(2) = 150000 \text{ N.m/rad}$$

Esses valores foram baseados em medições realizadas em componentes similares, considerando a borracha a uma temperatura de aproximadamente 95°C.

O coeficiente de amortecimento do elastômero do absorvedor pode ser calculado conforme o equacionamento mostrado a seguir, de acordo com a referência [15].

Definindo o fator de perda:

$$d = \frac{Cr \cdot \omega_n}{Kt} \quad (3.18)$$

E definindo também o número de perda:

$$\chi = \tan \delta = \frac{Cr \cdot \Omega}{Kt} \quad (3.19)$$

Onde Kt e Cr são respectivamente a rigidez dinâmica e o coeficiente de amortecimento relativo da borracha utilizada no anti-vibrador. É possível de se verificar que para $\Omega = \omega_n$, teremos $\chi = d$. O fator de perda do elastômero situa-se na faixa: $0,2 \leq d \leq 0,3$ e nos cálculos utilizaremos o valor: $d = 0,25$.

No desenvolvimento do projeto de um amortecedor de vibrações, é interessante que sejam manufaturadas algumas peças, que contenham compostos de borracha com diferentes rigidezes dinâmicas, para simular as variações que possam ocorrer no processo de fabricação do absorvedor. Dessa forma, podemos escolher a melhor faixa de rigidezes para o componente.

Segundo Klier, H. [15], deveremos linearizar a rigidez dinâmica do amortecedor na condição de ressonância e adotá-la como sendo constante para as demais condições de operação do motor. Utilizando este procedimento, não estaremos comprometendo os resultados das análises, visto que, as amplitudes de maior importância para a verificação são as que ocorrem nas condições de ressonância do sistema, pois são estas que promoverão as maiores solicitações na árvore de manivelas.

3.5.4 Determinação das características dinâmicas do sistema

Nesta seção serão estudadas as características dinâmicas do sistema, incluindo as matrizes de inércia, amortecimento, rigidez, autovalores, autovetores e fatores de amortecimento.

Para vibrações mecânicas temos:

$$[M] \cdot \{\ddot{\theta}(t)\} + [C] \cdot \{\dot{\theta}(t)\} + [K] \cdot \{\theta(t)\} = \{T(t)\} \quad (3.20)$$

Onde $\{\theta(t)\}$ e $\{T(t)\}$ são vetores que representam respectivamente as amplitudes de vibração e os esforços de excitação atuantes em cada inércia do sistema. No nosso caso eles serão vetores (11 x 1).

A seguir iremos apresentar o equacionamento matemático do sistema equivalente representado na figura 3.7.

Considerando-se que $\sum \vec{M} = 0$:

Para a inércia I(1):

$$-I(1) \cdot \ddot{\theta}(1) - Cr(1) \cdot \dot{\theta}(1) - Kt(1) \cdot \theta(1) + Cr(1) \cdot \dot{\theta}(3) + Kt(1) \cdot \theta(3) = 0 \Rightarrow$$

$$I(1) \cdot \ddot{\theta}(1) + Cr(1) \cdot \dot{\theta}(1) + Kt(1) \cdot \theta(1) - Cr(1) \cdot \dot{\theta}(3) - Kt(1) \cdot \theta(3) = 0$$

Para a inércia I(2):

$$I(2) \cdot \ddot{\theta}(2) + Cr(2) \cdot \dot{\theta}(2) + Kt(2) \cdot \theta(2) - Cr(2) \cdot \dot{\theta}(3) - Kt(2) \cdot \theta(3) = 0$$

Para a inércia $I(3)$, considerando o absorvedor do 1º modo:

$$-I(3) \cdot \ddot{\theta}(3) - Cr(3) \cdot \dot{\theta}(3) - Kt(3) \cdot \theta(3) - Cr(1) \cdot \dot{\theta}(3) - Kt(1) \cdot \theta(3) + Cr(1) \cdot \dot{\theta}(1) + \dots$$

$$Kt(1) \cdot \theta(1) + Cr(3) \cdot \dot{\theta}(4) + Kt(3) \cdot \theta(4) = 0$$

Para a inércia $I(3)$, considerando o absorvedor do 2º modo:

$$-I(3) \cdot \ddot{\theta}(3) - Cr(3) \cdot \dot{\theta}(3) - Kt(3) \cdot \theta(3) - Cr(2) \cdot \dot{\theta}(3) - Kt(2) \cdot \theta(3) + Cr(2) \cdot \dot{\theta}(2) + \dots$$

$$Kt(2) \cdot \theta(2) + Cr(3) \cdot \dot{\theta}(4) + Kt(3) \cdot \theta(4) = 0 ;$$

Reorganizando as equações anteriores, obteremos respectivamente:

$$I(3) \cdot \ddot{\theta}(3) + [Cr(3) + Cr(2)] \cdot \dot{\theta}(3) + [Kt(3) + Kt(2)] \cdot \theta(3) - Cr(2) \cdot \dot{\theta}(2) - Kt(2) \cdot \theta(2) - \dots$$

$$Cr(3) \cdot \dot{\theta}(4) - Kt(3) \cdot \theta(4) = 0 ;$$

$$I(3) \cdot \ddot{\theta}(3) + [Cr(3) + Cr(1)] \cdot \dot{\theta}(3) + [Kt(3) + Kt(1)] \cdot \theta(3) - Cr(1) \cdot \dot{\theta}(1) - Kt(1) \cdot \theta(1) - \dots$$

$$Cr(3) \cdot \dot{\theta}(4) - Kt(3) \cdot \theta(4) = 0$$

Finalmente, reunindo as duas equações anteriores teremos:

$$I(3) \cdot \ddot{\theta}(3) + [Cr(3) + Cr(2) + Cr(1)] \cdot \dot{\theta}(3) + [Kt(3) + Kt(2) + Kt(1)] \cdot \theta(3) - Cr(2) \cdot \dot{\theta}(2) - \dots$$

$$Cr(1) \cdot \dot{\theta}(1) - Kt(2) \cdot \theta(2) - Kt(1) \cdot \theta(1) - Cr(3) \cdot \dot{\theta}(4) - Kt(3) \cdot \theta(4) = 0$$

Para a inércia $I(4)$:

$$-I(4) \cdot \ddot{\theta}(4) - Cr(4) \cdot \dot{\theta}(4) - Kt(4) \cdot \theta(4) - Cr(3) \cdot \dot{\theta}(4) - Kt(3) \cdot \theta(4) + Cr(3) \cdot \dot{\theta}(3) + \dots$$

$$Kt(3) \cdot \theta(3) + Cr(4) \cdot \dot{\theta}(5) + Kt(4) \cdot \theta(5) = 0 \Rightarrow$$

$$I(4) \cdot \ddot{\theta}(4) + [Cr(4) + Cr(3)] \cdot \dot{\theta}(4) + [Kt(4) + Kt(3)] \cdot \theta(4) - Cr(3) \cdot \dot{\theta}(3) - Kt(3) \cdot \theta(3) - \dots$$

$$Cr(4) \cdot \dot{\theta}(5) - Kt(4) \cdot \theta(5) = 0$$

Para uma inércia genérica $I(i)$:

$$-I(i) \cdot \ddot{\theta}(i) - Cr(i) \cdot \dot{\theta}(i) - Kt(i) \cdot \theta(i) - Cr(i-1) \cdot \dot{\theta}(i) - Kt(i-1) \cdot \theta(i) + Cr(i-1) \cdot \dot{\theta}(i-1) + \dots$$

$$Kt(i-1) \cdot \theta(i-1) + Cr(i) \cdot \dot{\theta}(i+1) + Kt(i) \cdot \theta(i+1) = 0 \Rightarrow$$

$$I(i) \cdot \ddot{\theta}(i) + [Cr(i) + Cr(i-1)] \cdot \dot{\theta}(i) + [Kt(i) + Kt(i-1)] \cdot \theta(i) - Cr(i-1) \cdot \dot{\theta}(i-1) - Kt(i-1) \cdot \theta(i-1) - \dots$$

$$Cr(i) \cdot \dot{\theta}(i+1) - Kt(i) \cdot \theta(i+1) = 0$$

Para a inércia $I(11)$:

$$-I(11) \cdot \ddot{\theta}(11) - Cr(10) \cdot \dot{\theta}(11) - Kt(10) \cdot \theta(11) + Cr(10) \cdot \dot{\theta}(11) + Kt(10) \cdot \theta(11) = 0 \Rightarrow$$

$$I(11) \cdot \ddot{\theta}(11) + Cr(11) \cdot \dot{\theta}(11) + Kt(11) \cdot \theta(11) - Cr(10) \cdot \dot{\theta}(11) - Kt(10) \cdot \theta(11) = 0$$

Escrevendo na forma matricial, teremos:

Matriz de inércia:

$$[M]_{(11 \times 11)} = \begin{bmatrix} I(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I(6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I(7) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I(8) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I(9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I(10) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I(11) \end{bmatrix}$$

As massas alternativas deverão ser introduzidas nos cálculos como inércias equivalentes, que deverão possuir a mesma quantidade de movimento dos pistões.

Utilizaremos nos cálculos a inércia média para uma rotação da árvore de manivelas. Seu valor pode ser quantificado através da equação abaixo, conforme apresentado em [18].

$$I_{alt} = m_a \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} \right) \quad (3.21)$$

A inércia alternativa deverá ser somada às inércias das manivelas do virabrequim, ou seja, às inércias I(5 .. 10).

Matriz de amortecimento absoluto:

$$[Ca]_{(11 \times 11)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Ca(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ca(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ca(3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ca(4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ca(5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Ca(6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Este amortecimento existe devido ao contato entre os anéis dos pistões e os cilindros do bloco do motor. Podemos notar que apenas as inércias correspondentes às manivelas do virabrequim possuem valores de amortecimento absoluto.

De acordo com experiências em motores similares, será adotado para o coeficiente de amortecimento absoluto o valor de 6 N.m.s/rad.

Matriz de amortecimento relativo:

$$[Cr]_{(11 \times 11)} =$$

$$\begin{bmatrix} Cr(1) & 0 & -Cr(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Cr(2) & -Cr(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Cr(1) & -Cr(2) & Cr(3)+Cr(2)+Cr(1) & -Cr(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Cr(3) & Cr(4)+Cr(3) & -Cr(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Cr(4) & Cr(5)+Cr(4) & -Cr(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(5) & Cr(6)+Cr(5) & -Cr(6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(6) & Cr(7)+Cr(6) & -Cr(7) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(7) & Cr(8)+Cr(7) & -Cr(8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(8) & Cr(9)+Cr(8) & -Cr(9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(9) & Cr(10)+Cr(9) & -Cr(10) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Cr(10) & Cr(10) \end{bmatrix}$$

Da mesma forma que o coeficiente de amortecimento do elastômero foi obtido através da equação 3.18, podemos calcular essa grandeza para as manivelas do virabrequim. Os valores do fator de perda a serem considerados para diferentes tipos de motores são mostrados na referência [16]. Para motores Diesel, quatro tempos, com seis cilindros em linha, turbo-alimentados, o fator de perda será: $d = 0,035$.

Matriz de amortecimento total:

$$[C]_{(11 \times 11)} = [Ca]_{(11 \times 11)} + [Cr]_{(11 \times 11)}$$

Matriz de rigidez:

$$[Kt]_{(11 \times 11)} =$$

$$\begin{bmatrix} Kt(1) & 0 & -Kt(1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Kt(2) & -Kt(2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Kt(1) & -Kt(2) & Kt(3)+Kt(2)+Kt(1) & -Kt(3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Kt(3) & Kt(4)+Kt(3) & -Kt(4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Kt(4) & Kt(5)+Kt(4) & -Kt(5) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt(5) & Kt(6)+Kt(5) & -Kt(6) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt(6) & Kt(7)+Kt(6) & -Kt(7) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt(7) & Kt(8)+Kt(7) & -Kt(8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt(8) & Kt(9)+Kt(8) & -Kt(9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt(9) & Kt(10)+Kt(9) & -Kt(10) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt(10) & Kt(10) \end{bmatrix}$$

3.5.5 Determinação do torque de excitação

O torque de excitação é uma função periódica e a sua aplicação no modelo equivalente será feita através dos seus harmônicos. Pode-se notar que as excitações só aparecem nas posições do vetor correspondentes aos cilindros do motor, posições estas, onde ocorrem as explosões.

$$\{T(t)\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad M_t^1(t) \quad M_t^2(t) \quad M_t^3(t) \quad M_t^4(t) \quad M_t^5(t) \quad M_t^6(t) \quad 0\}^T$$

O torque de excitação é uma função do ângulo do virabrequim e será calculado pela equação:

$$M_t = F_t \cdot r \quad (3.22)$$

Onde F_t é a força tangencial obtida pela equação 3.13.

A expressão abaixo mostra o torque de excitação representado pelos seus harmônicos obtidos da série de Fourier, sendo A_n e B_n os coeficientes da série conforme referência [24].

$$M_t^k(t) = \frac{A_0^k}{2} + \sum_{n=1}^{24} \left[A_n^k \cdot \cos(n\omega \cdot t) + B_n^k \cdot \sin(n\omega \cdot t) \right] \quad (3.23)$$

O índice k indica o cilindro para o qual será feita a expansão da curva de torque, visto que existe uma defasagem em sua aplicação de cilindro para cilindro. Essa defasagem, em graus do virabrequim, é função do intervalo de ignição do motor e obviamente do número de cilindros. Como este estudo é baseado em um motor de 4 tempos e 6 cilindros: $k = 1 \dots 6$, com uma defasagem de 120° nas manivelas.

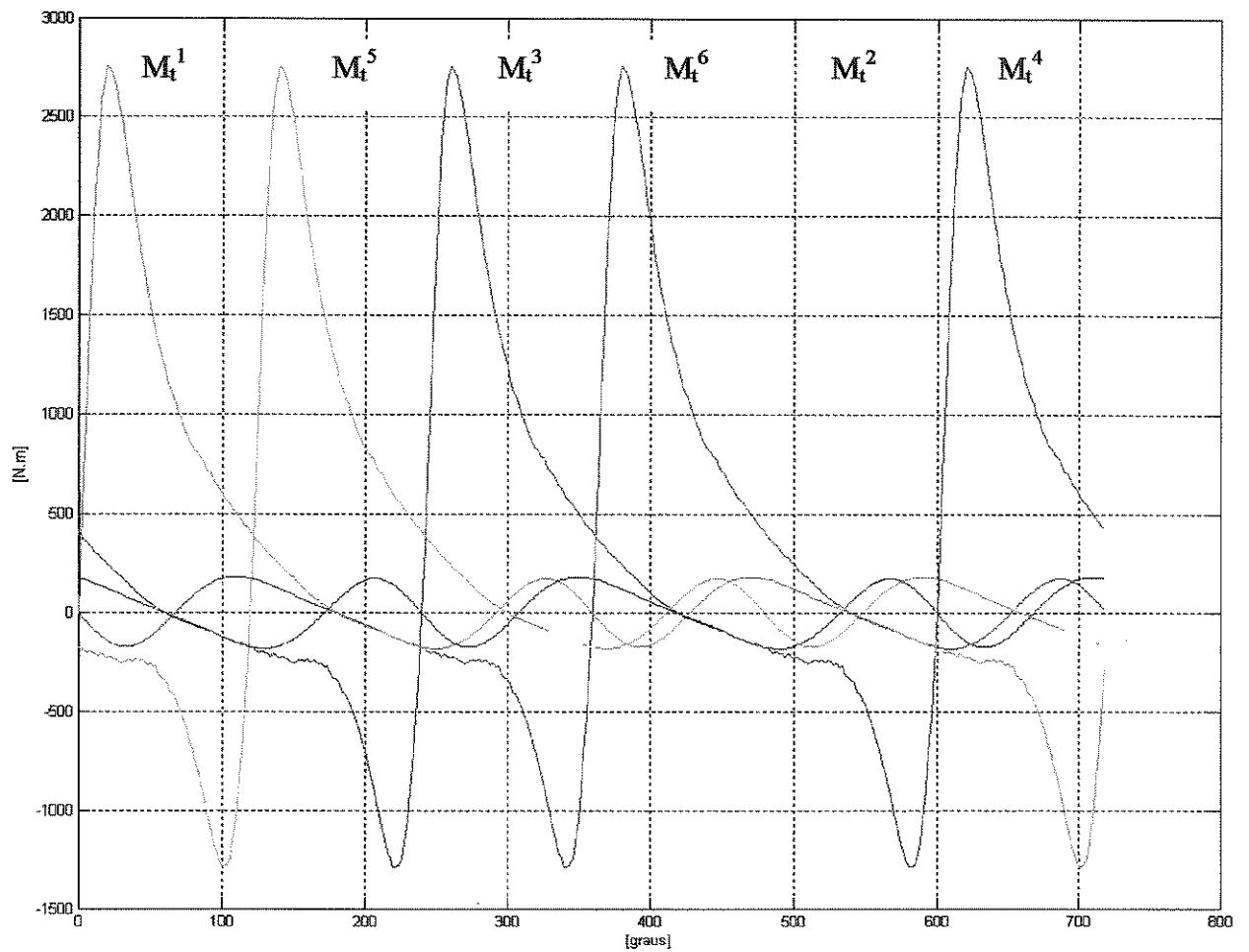


Figura 3.13: Curvas de torque teóricas para uma condição de 2600 rpm a plena carga

O índice n representa o número de termos da série no qual desejamos realizar a expansão. A maioria dos autores considera que 24 termos são suficientes para que se obtenha uma precisão satisfatória nos cálculos.

Podemos ainda reescrever a equação 3.23 da seguinte forma:

Sabendo-se que:

$$\cos(n\omega \cdot t) = \frac{e^{in\omega \cdot t} + e^{-in\omega \cdot t}}{2} \quad ; \quad \sin(n\omega \cdot t) = \frac{e^{in\omega \cdot t} - e^{-in\omega \cdot t}}{2i}$$

Teremos:

$$A_n^k \cdot \cos(n \omega \cdot t) + B_n^k \cdot \sin(n \omega \cdot t) = A_n^k \cdot \frac{e^{in \omega \cdot t} + e^{-in \omega \cdot t}}{2} +$$

$$B_n^k \cdot \frac{e^{in \omega \cdot t} - e^{-in \omega \cdot t}}{2i} = \frac{1}{2} (A_n^k - iB_n^k) \cdot e^{in \omega \cdot t} + \frac{1}{2} (A_n^k + iB_n^k) \cdot e^{-in \omega \cdot t}$$

Fazendo:

$$C_n^k = \frac{1}{2} \cdot (A_n^k - iB_n^k) \quad \text{e} \quad \bar{C}_n^k = \frac{1}{2} \cdot (A_n^k + iB_n^k)$$

Obtém-se finalmente:

$$M_t^k(t) = \frac{A_0^k}{2} + \sum_{n=1}^{24} \left[C_n^k \cdot e^{in \omega \cdot t} + \bar{C}_n^k \cdot e^{-in \omega \cdot t} \right] \quad (3.24)$$

O termo A_0 da série de Fourier não produz vibrações no eixo da árvore de manivelas, mas sim um momento torçor constante sobre o qual irão somar-se as vibrações torcionais.

3.5.6 Solução por equações de estado

Definiremos agora um vetor de estado e sua derivada no tempo:

$$x(t) = \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} \quad ; \quad \dot{x}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Pode-se expressar o comportamento dinâmico do virabrequim através do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b(t) \quad ; \quad x(0) = \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \dot{\theta}(0) \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Onde $x(0)$ é a condição inicial do sistema. A matriz $[A]$ e o vetor $\{b(t)\}$ são expressos da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1} \cdot Kt & -M^{-1} \cdot C \end{bmatrix} \quad ; \quad b(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1} \cdot T(t) \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

Onde $[A]$ possui dimensão (22×22) e $\{b\}$ a dimensão de (22×1) .

O vetor das excitações $\{b(t)\}$ tem a seguinte forma:

$$b(t) = \begin{Bmatrix} b1(t) \\ b2(t) \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

Onde:

$$b1(t) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T ;$$

$$b2(t) = M^{-1} \cdot T(t) = \left\{ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{M_i^1(t)}{I(5)} \ \frac{M_i^2(t)}{I(6)} \ \frac{M_i^3(t)}{I(7)} \ \frac{M_i^4(t)}{I(8)} \ \frac{M_i^5(t)}{I(9)} \ \frac{M_i^6(t)}{I(10)} \ 0 \right\}^T$$

No vetor $\{b2(t)\}$, podemos observar que a última e as primeiras linhas são as que representam respectivamente, o volante e a parte frontal da árvore de manivelas. Como essas inércias não possuem excitações externas, seus valores são nulos.

Substituindo os coeficientes da série de Fourier e definindo os vetores:

$$b_o = \left\{ \{0\}; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{A_o^1}{I(5)} \quad \frac{A_o^2}{I(6)} \quad \frac{A_o^3}{I(7)} \quad \frac{A_o^4}{I(8)} \quad \frac{A_o^5}{I(9)} \quad \frac{A_o^6}{I(10)} \quad 0 \right\}^T ;$$

$$b_n = \left\{ \{0\}; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{C_n^1}{I(5)} \quad \frac{C_n^2}{I(6)} \quad \frac{C_n^3}{I(7)} \quad \frac{C_n^4}{I(8)} \quad \frac{C_n^5}{I(9)} \quad \frac{C_n^6}{I(10)} \quad 0 \right\}^T ;$$

$$\overline{b_n} = \left\{ \{0\}; 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\overline{C_n^1}}{I(5)} \quad \frac{\overline{C_n^2}}{I(6)} \quad \frac{\overline{C_n^3}}{I(7)} \quad \frac{\overline{C_n^4}}{I(8)} \quad \frac{\overline{C_n^5}}{I(9)} \quad \frac{\overline{C_n^6}}{I(10)} \quad 0 \right\}^T ;$$

Onde: $\{0\} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T$

Podemos escrever que:

$$b(t) = \frac{b_o}{2} + \sum_{n=1}^{24} \left[b_n \cdot e^{in\omega \cdot t} + \overline{b_n} \cdot e^{-in\omega \cdot t} \right] \quad (3.29)$$

3.5.7 Resposta do sistema através da integral de convolução

A resposta de um sistema vibratório excitado periodicamente e representado pela sua equação de estado pode ser obtida através da matriz fundamental, ou matriz de transição de estado:

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} \quad (3.30)$$

E da integral de convolução, conforme a referência [20]:

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot b(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot b_0 \cdot d\tau + \sum_{n=1}^{24} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau}) d\tau \quad (3.31)$$

Como estamos interessados apenas na resposta permanente do sistema, iremos desconsiderar a resposta transitória para as condições iniciais $\Phi(t) \cdot x(0)$.

A primeira integral representa o termo constante da série de Fourier. Este termo não produz vibrações, mas apenas um torque constante nas secções do virabrequim.

As integrais abrangidas pelo somatório da expressão da resposta à excitação periódica serão as responsáveis pelas vibrações torcionais. Sendo assim:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{24} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau}) d\tau \quad (3.32)$$

Solução das integrais do somatório:

$$x_n(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot (b_n \cdot e^{in\omega\tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau}) d\tau \Rightarrow$$

$$x_n(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot b_n \cdot e^{in\omega\tau} d\tau + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau} d\tau \Rightarrow$$

$$x_n(t) = \int_0^t e^{A \cdot t} \cdot e^{-A \cdot \tau} \cdot b_n \cdot e^{in\omega\tau} d\tau + \int_0^t e^{A \cdot t} \cdot e^{-A \cdot \tau} \cdot \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega\tau} d\tau \Rightarrow$$

$$x_n(t) = e^{A \cdot t} \cdot \int_0^t e^{(in\omega - A) \cdot \tau} \cdot b_n \cdot d\tau + e^{A \cdot t} \cdot \int_0^t e^{(-in\omega - A) \cdot \tau} \cdot \bar{b}_n \cdot d\tau \Rightarrow$$

$$x_n(t) = e^{A \cdot t} \cdot \left[(in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot e^{(in\omega \cdot I - A) \cdot \tau} \Big|_0^t \cdot b_n + (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot e^{(-in\omega \cdot I - A) \cdot \tau} \Big|_0^t \cdot \overline{b_n} \right] \Rightarrow$$

$$x_n(t) = e^{A \cdot t} \cdot \left[(in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot (e^{(in\omega \cdot I - A) \cdot t} - I) \cdot b_n + (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot (e^{(-in\omega \cdot I - A) \cdot t} - I) \cdot \overline{b_n} \right] \Rightarrow$$

Considerando a propriedade comutativa da matriz fundamental, cuja demonstração pode ser vista na referência [20]:

$$x_n(t) = e^{A \cdot t} \cdot (e^{(in\omega \cdot I - A) \cdot t} - I) \cdot (in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n + e^{A \cdot t} \cdot (e^{(-in\omega \cdot I - A) \cdot t} - I) \cdot (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot \overline{b_n}$$

$$x_n(t) = (e^{(in\omega \cdot I) \cdot t} - e^{A \cdot t}) \cdot (in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n + (e^{(-in\omega \cdot I) \cdot t} - e^{A \cdot t}) \cdot (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot \overline{b_n} \Rightarrow$$

$$x_n(t) = (in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n \cdot e^{(in\omega \cdot I) \cdot t} - (in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n \cdot e^{A \cdot t} + \dots$$

$$\dots + (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot \overline{b_n} \cdot e^{(-in\omega \cdot I) \cdot t} - (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot \overline{b_n} \cdot e^{A \cdot t}$$

Sendo assim:

$$x_n(t) = (in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n \cdot e^{(in\omega \cdot I) \cdot t} + (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot \overline{b_n} \cdot e^{(-in\omega \cdot I) \cdot t} - \dots$$

$$\dots - e^{A \cdot t} \left[(-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot b_n + (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \cdot \overline{b_n} \right]$$

Definiremos agora a matriz de frequência e sua conjugada:

$$F_n = (in\omega \cdot I - A)^{-1} \quad \text{e} \quad \overline{F_n} = (-in\omega \cdot I - A)^{-1} \quad (3.33)$$

Definiremos também o vetor de resposta em frequência e seu conjugado:

$$g_n = F_n \cdot b_n \quad \text{e} \quad \overline{g_n} = \overline{F_n} \cdot \overline{b_n} \quad (3.34)$$

Portanto, a resposta para uma ordem n poderá ser obtida da seguinte forma:

$$x_n(t) = g_n \cdot e^{in\omega \cdot t} + \bar{g}_n \cdot e^{-in\omega \cdot t} - e^{A \cdot t} \cdot (g_n + \bar{g}_n) \quad (3.35)$$

Para $t \rightarrow \infty$ e sendo o sistema assintoticamente estável, é possível verificar que o último termo da equação acima se anula e portanto a resposta permanente de ordem n será:

$$x_n(t) = \theta_n(t) = g_n \cdot e^{in\omega \cdot t} + \bar{g}_n \cdot e^{-in\omega \cdot t} \quad (3.36)$$

O vetor de resposta em frequência tem dimensão (22×1) , sendo que as onze primeiras linhas representam os deslocamentos angulares e as onze últimas, as velocidades angulares. No nosso estudo, estaremos interessados nas amplitudes de vibrações torcionais, ou sejam, as primeiras linhas do vetor.

Utilizando-se as relações de Euler, podemos dizer que:

$$\theta_{n_j}(t) = (g_{n_j} + \bar{g}_{n_j}) \cdot \cos(n\omega \cdot t) + i \cdot (g_{n_j} - \bar{g}_{n_j}) \cdot \sin(n\omega \cdot t) \Rightarrow$$

$$\theta_{n_j}(t) = 2 \cdot \text{Re}(g_{n_j}) \cdot \cos(n\omega \cdot t) - 2 \cdot \text{Im}(g_{n_j}) \cdot \sin(n\omega \cdot t)$$

Através das relações trigonométricas, é possível obter finalmente as equações que determinam a amplitude de vibração e a fase para cada ordem n da excitação, para cada inércia j :

$$\theta_{n_j} = \Theta_{n_j} \cdot \cos(n\omega \cdot t - \phi_{n_j}) \quad \text{Com: } j = 1 \dots 11 \text{ e } n = 1 \dots 24 \quad (3.37)$$

Onde a amplitude de vibração será:

$$\Theta_{n_j} = 2 \cdot \sqrt{[\text{Re}(g_{n_j})]^2 + [\text{Im}(g_{n_j})]^2} = 2 \cdot |g_{n_j}| \quad (3.38)$$

E a fase:

$$\phi_{n_j} = \text{atan} \frac{-\text{Im}(g_{n_j})}{\text{Re}(g_{n_j})} \quad (3.39)$$

Finalmente, é possível obter a amplitude global de vibração torcional através da seguinte equação:

$$\theta_j = \sum_{n=1}^{24} \Theta_{n_j} \cdot \cos(n\omega \cdot t - \phi_{n_j}) \quad (3.40)$$

Resumindo a metodologia a ser empregada, para cada frequência de excitação, ou seja, cada rotação do motor, existirá um torque diferente que deverá ser expandido em uma série de Fourier contendo 24 termos, atuando com uma defasagem entre cada um dos cilindros e operações matriciais trabalhosas que deverão ser efetuadas para cada passo do processo.

Sendo assim, foi desenvolvido um programa de computador escrito em *Matlab*®, para a realização de todos os cálculos envolvidos. Comparando-se os resultados obtidos com as amplitudes de vibrações torcionais medidas, iremos verificar a eficiência da metodologia empregada.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

A partir do programa de computador mencionado anteriormente e considerando os dados de entrada indicados abaixo, obtidos pelo método dos elementos finitos e medições experimentais, apresentaremos a seguir os resultados das análises.

4.1 Dados de entrada (motor de 191 kW a 2500 rpm)

$$m_a = 2,378 \text{ kg}$$

$$L = 207 \text{ mm}$$

$$s = 137 \text{ mm}$$

$$d_p = 105 \text{ mm}$$

$$\text{ord_ign} = 1-5-3-6-2-4$$

$$\text{rpm_min} = 1000 \text{ rpm}$$

$$\text{rpm_max} = 2850 \text{ rpm}$$

$$\text{int_rpm} = 50 \text{ rpm}$$

Inércias [kg.m²]:

$$I(1) = 0,1230 \quad (\text{Anel do amortecedor} - 1^\circ \text{ modo})$$

$$I(2) = 0,0273 \quad (\text{Anel do amortecedor} - 2^\circ \text{ modo})$$

$$I(3) = 0,0350 \quad (\text{Polia do virabrequim e cubo do amortecedor})$$

$$I(4) = 0,0140 \quad (\text{Trem de engrenagens})$$

$$I(5) = 0,0468 \quad (1^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(6) = 0,0328 \quad (2^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$I(7) = 0,0468$	(3ª manivela do virabrequim e massas alternativas)
$I(8) = 0,0468$	(4ª manivela do virabrequim e massas alternativas)
$I(9) = 0,0328$	(5ª manivela do virabrequim e massas alternativas)
$I(10) = 0,0488$	(6ª manivela do virabrequim e massas alternativas)
$I(11) = 1,6990$	(Volante e platô da embreagem)

Rigidez torcional [N.m/rad]:

$Kt(1) = 105000$	(Rigidez dinâmica – 1º anel)
$Kt(2) = 150000$	(Rigidez dinâmica – 2º anel)
$Kt(3) = 1064000$	
$Kt(4) = 1510000$	
$Kt(5) = 1254000$	
$Kt(6) = 1254000$	
$Kt(7) = 1254000$	
$Kt(8) = 1254000$	
$Kt(9) = 1254000$	
$Kt(10) = 2089000$	

Amortecimento absoluto [N.m.s/rad]:

$Ca(1) = 6$	(1º cilindro)
$Ca(2) = 6$	(2º cilindro)
$Ca(3) = 6$	(3º cilindro)
$Ca(4) = 6$	(4º cilindro)
$Ca(5) = 6$	(5º cilindro)
$Ca(6) = 6$	(6º cilindro)

Amortecimento relativo:

$d_damper = 0,25$	(Fator de perda da borracha do amortecedor)
$d_motor = 0,035$	(Fator de perda para as manivelas do virabrequim)

As figuras 4.1 e 4.2 ilustram (sem escala) os deslocamentos das inércias para os dois primeiros modos torcionais de vibração do sistema.

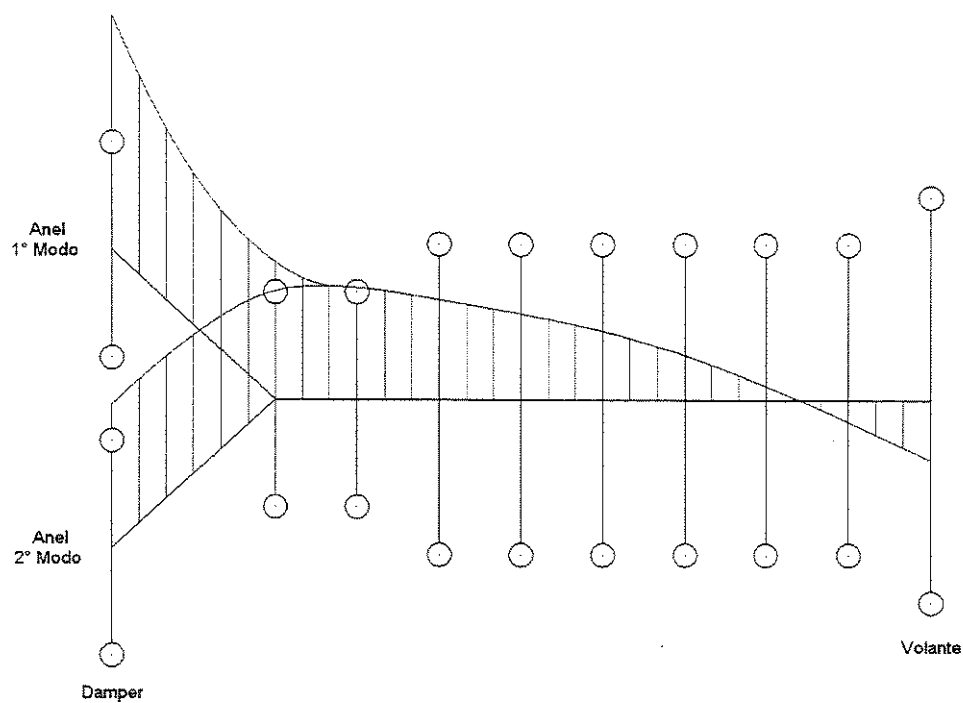


Figura 4.1: Representação gráfica do 1º modo de vibrar (112,23 Hz)

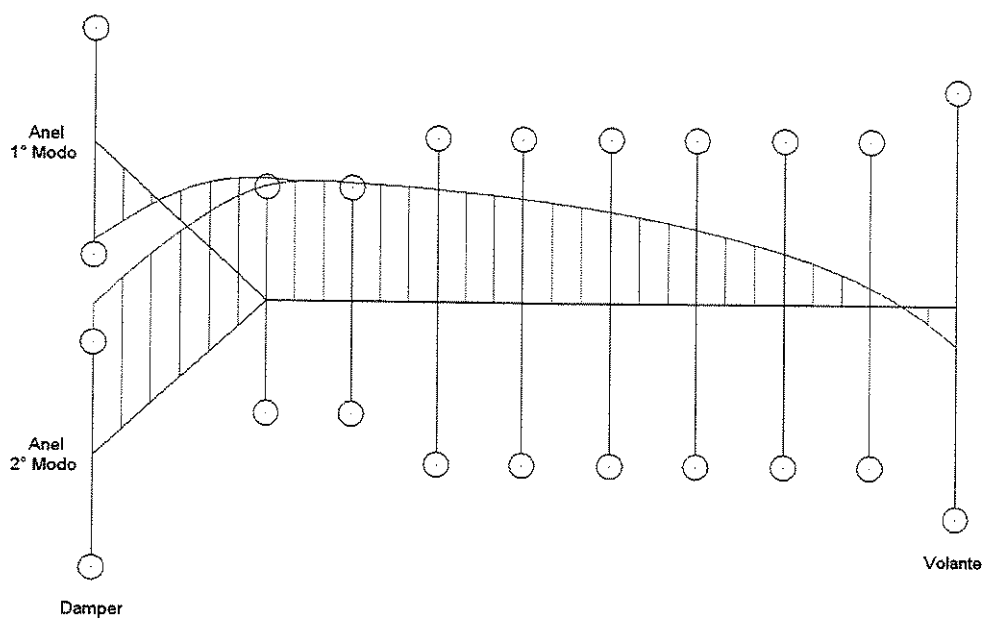


Figura 4.2: Representação gráfica do 2º modo de vibrar (229,37 Hz)

As figuras 4.3 e 4.4 representam respectivamente, a pressão no interior dos cilindros em função do ângulo do virabrequim a plena carga na rotação de 1000 rpm e a variação dos picos de pressão para diversas rotações do motor. Os gráficos da pressão para as demais rotações são qualitativamente semelhantes ao da figura 4.3.

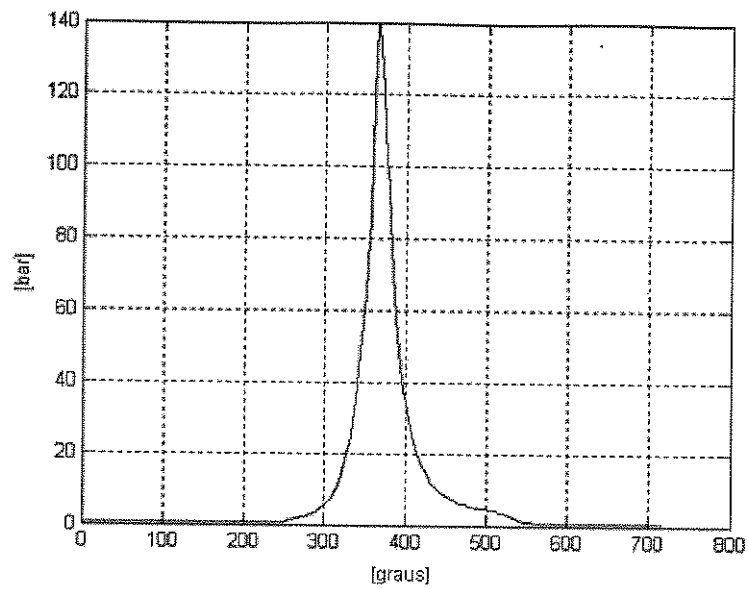


Figura 4.3: Curva experimental de pressão de combustão a 1000rpm e plena carga

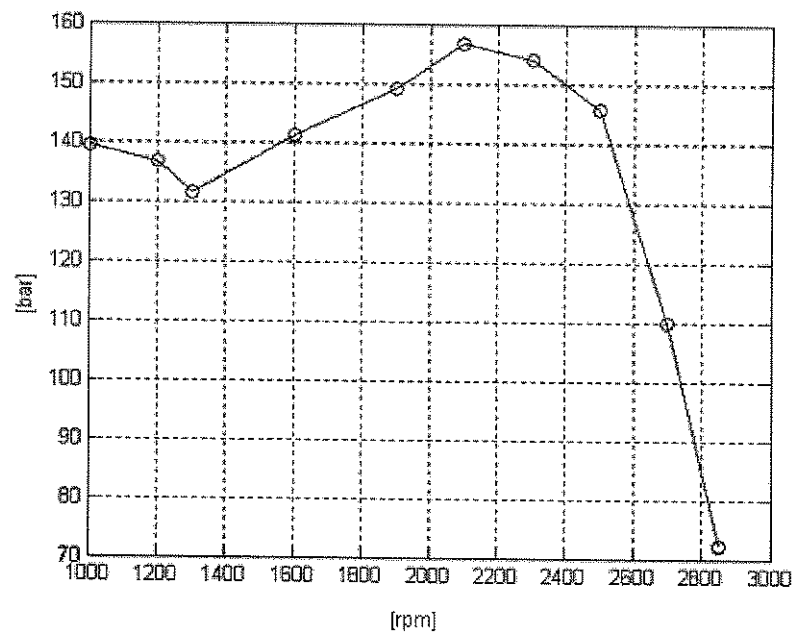


Figura 4.4: Picos de pressão de combustão em função da rotação do motor

4.2 Torciogramas teóricos

A figura 4.5 mostra os resultados obtidos dos cálculos das amplitudes das vibrações torcionais referentes à polia do virabrequim I(3).

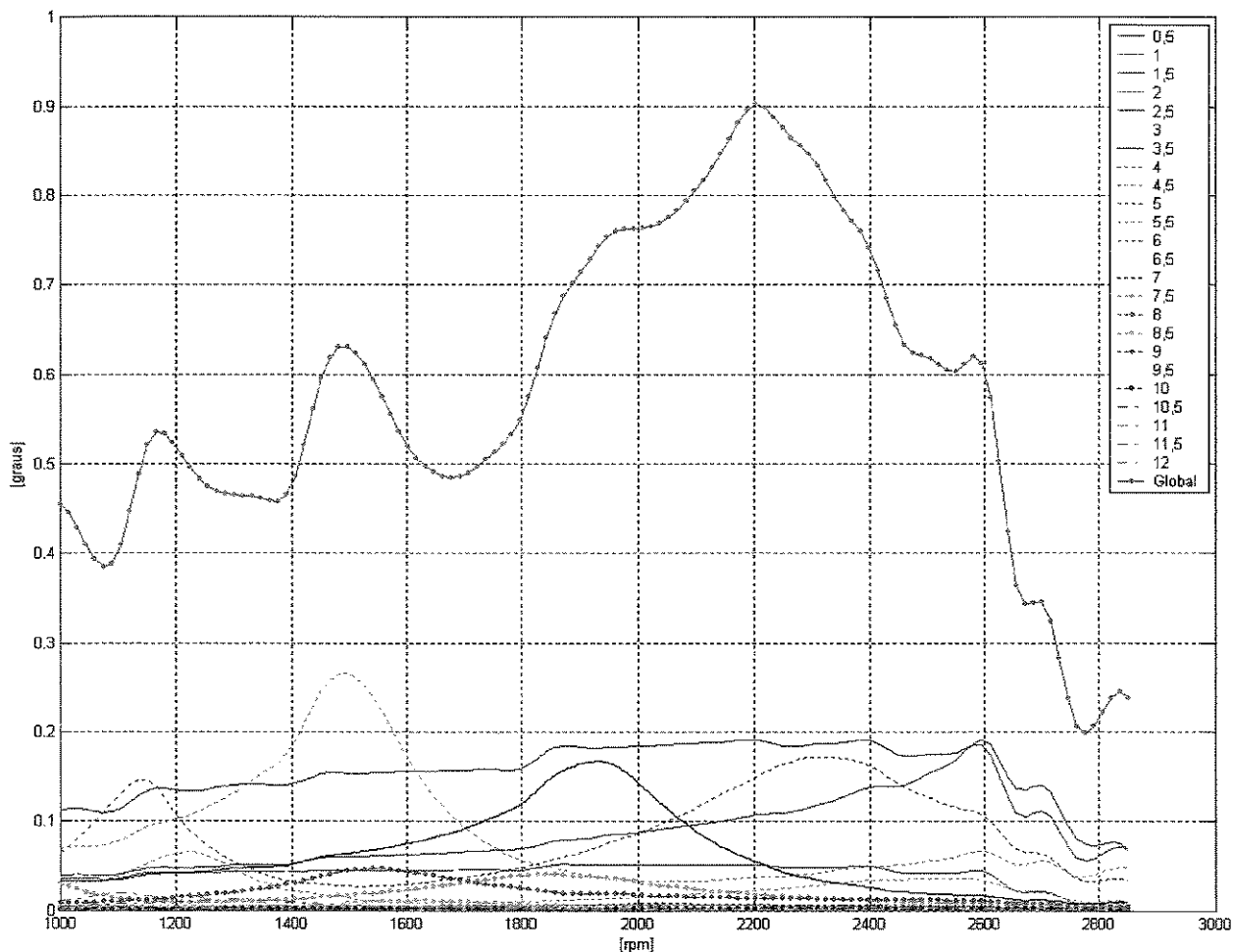


Figura 4.5: Amplitudes de vibrações torcionais

As ordens que aparecem em valores fracionados ($0,5^a$ / $1,0^a$ / $1,5^a$...), ocorrem pelo fato do motor ser de 4 tempos, ou seja, a cada duas voltas da árvore de manivelas existirá um período da excitação. Como exemplo, a 3^a ordem corresponde ao 6° harmônico do torque de excitação, sendo assim, a cada duas revoluções do virabrequim existirão 6 oscilações na resposta do sistema, conseqüentemente 3 oscilações por rotação. Esta explicação pode ser vista em detalhes nas referências [9] e [10].

A partir dos cálculos efetuados, é possível também obter os valores dos torques atuantes entre cada inércia do modelo discretizado da árvore de manivelas.

Conhecendo-se as amplitudes globais de vibração de duas inércias consecutivas e a rigidez torcional entre as mesmas, é possível de se determinar o torque atuante nesta secção. Essa torção é importante para o dimensionamento da árvore de manivelas e também dos parafusos utilizados na fixação do volante, polias, etc.

É interessante salientar que as amplitudes globais de vibração são obtidas pela soma vetorial das amplitudes de cada ordem de vibração e a diferença de amplitudes entre inércias deve ser obtida considerando-se a fase dos vetores para cada instante.

A equação abaixo resume a metodologia descrita para a obtenção do torque atuante em uma determinada secção e a figura 4.6 ilustra os resultados desses cálculos:

$$T_{j-1} = \left| \theta_j - \theta_{j-1} \right| \cdot Kt_{j-1} \quad ; \text{ com } j = 2 \dots 11 \quad (4.1)$$

Outro ponto a ser observado, é que o termo constante da serie de Fourier deverá ser somado a este torque tantas vezes quantas forem o número de inércias responsáveis pela geração de torque à frente da secção analisada. Por exemplo, no caso da fixação entre o volante e o 6º cilindro, esse termo deverá ser somado 6 vezes ao torque das vibrações torcionais, pelo fato de existirem 6 cilindros em operação no motor.

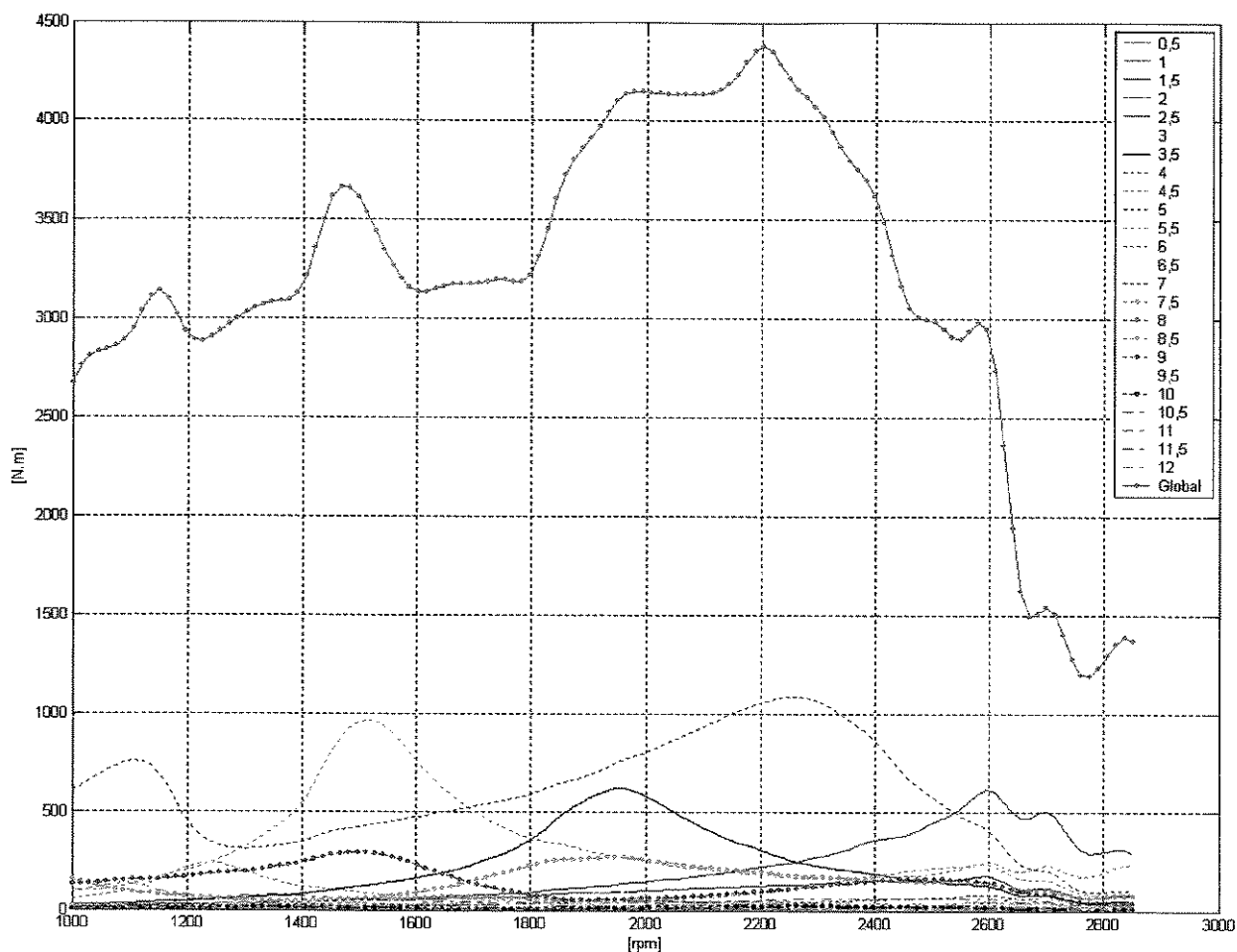


Figura 4.6: Torque atuante entre o volante e o 6º cilindro

Analisando-se a figura 4.5 podemos obter algumas informações. As ordens que possuem maiores amplitudes de vibração são, entre outras causas, responsáveis pela geração de ruídos em engrenagens e demais acionamentos. Esse tipo de ruído também é conhecido como “rattle-noise”.

As ordens principais de vibração são as de valor inteiro e múltiplas do número de cilindros do motor, para maiores detalhes vide referência [19]. Do ponto de vista estrutural, deveremos focar a análise na 3ª, 4,5ª e 6ª ordens. A ordem 1,5ª apesar de apresentar amplitudes elevadas, de até aproximadamente 0,20°, é ocasionada por movimento de corpo rígido e não irá gerar torções consideráveis nas secções do virabrequim.

Altas ordens como a 9ª e a 12ª, possuem pouca energia e não geram vibrações que possam comprometer a integridade do sistema. Tradicionalmente, as vibrações torcionais são analisadas até a 12ª ordem conforme as referências [15], [16], [17]. Porém, no caso do motor analisado, podemos notar que as amplitudes das ordens superiores à 9ª, são desprezíveis.

A amplitude global de vibração é apenas um valor indicativo e não implica em conclusões imediatas. Nas rotações de deslocamentos angulares globais mais elevados, geralmente ocorrem as maiores solicitações no virabrequim e no amortecedor de vibrações torcionais. Um indicativo para a verificação estrutural da árvore de manivelas e demais componentes associados, é a análise do torque atuante em cada manivela, como mostrado na figura 4.6.

Conhecendo-se o valor do momento torçor, é possível verificar se as juntas aparafusadas para a fixação do volante e da polia são capazes de transmitir os torques atuantes, ou ainda, é possível a verificação do nível de tensões nas regiões críticas do virabrequim através de análises pelo método dos elementos finitos, por exemplo.

É possível reduzir as amplitudes de vibração das ordens 4,5ª e 6ª, modificando-se o composto da borracha do amortecedor. Porém, a amplitude do 1º modo de vibrar excitado pela 3ª ordem não sofrerá reduções significativas de amplitude. Esta ordem é bastante susceptível à variação das inércias do sistema, como pode ser visto na figura 4.7. As grandes amplitudes das ordens 4,5ª e 6ª, são as principais responsáveis pelos ruídos de alta frequência.

Se aumentarmos a inércia do volante, iremos reduzir as amplitudes da 3ª ordem nas baixas rotações, porém a amplitude de vibração do 1º modo irá aumentar de modo considerável e será difícil reduzi-la alterando-se apenas as características dinâmicas do “damper”.

Podemos verificar também, que existe uma sobreposição de dois modos de vibrar (1º modo excitado pela 3ª ordem com o 2º modo excitado pela 6ª ordem) numa rotação próxima de 2300 rpm. Esta coincidência é responsável pela alta solicitação dos componentes nessa rotação e este foi um dos motivos pelo qual optou-se pela utilização de um amortecedor com duas massas, de forma a reduzir as amplitudes do 2º modo de vibrar.

As pequenas oscilações que ocorrem em determinadas faixas de rotação para todas as ordens simultaneamente, são decorrentes das variações nas curvas de pressão de combustão existentes entre as rotações. Essas variações são inerentes dos mapas de calibração da injeção eletrônica de combustível e quanto maior for o número de curvas medidas e adicionadas ao programa de cálculo, menores serão essas oscilações nos gráficos.

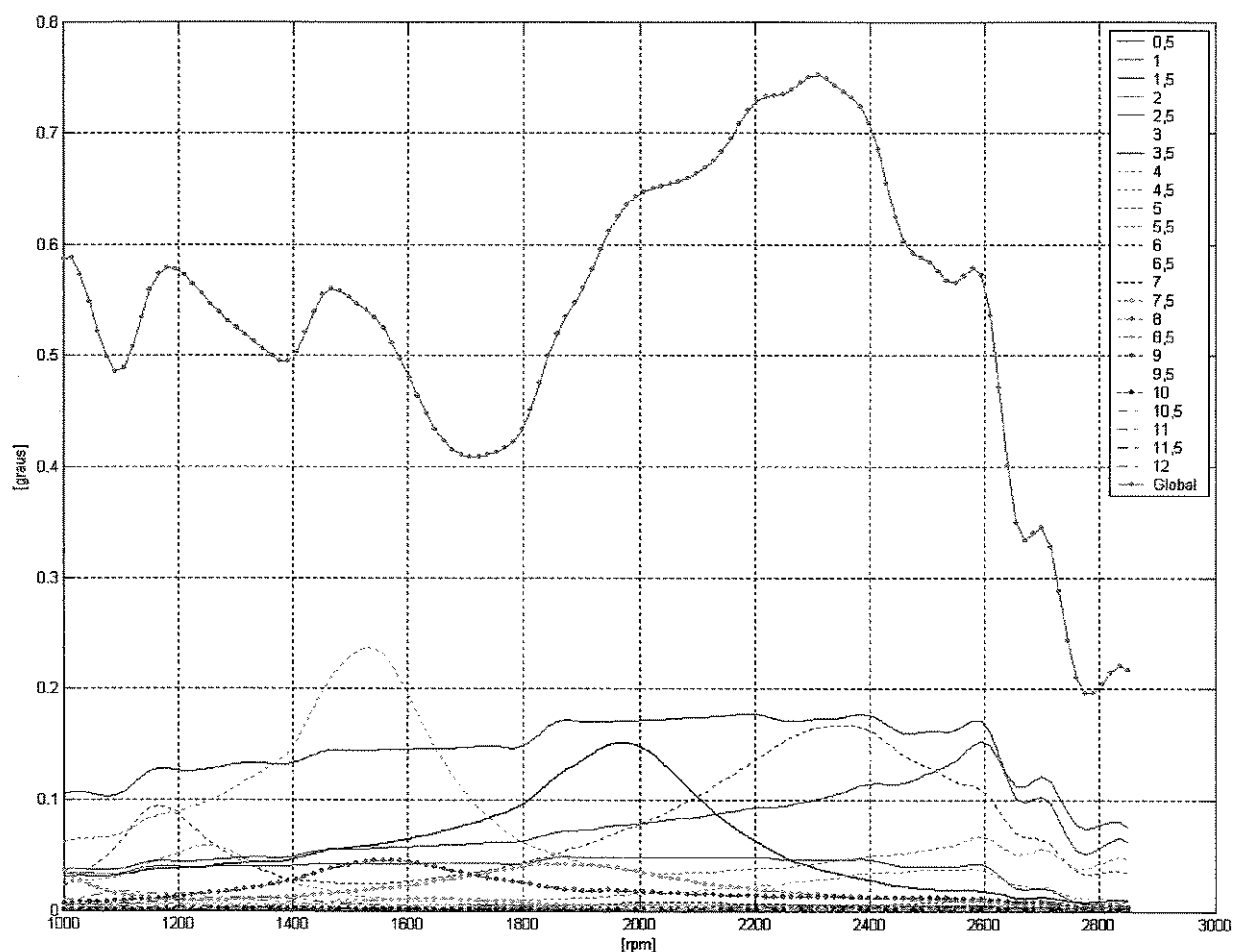


Figura 4.7: Amplitudes de vibrações torcionais considerando-se redução na inércia do volante

Os resultados apresentados na figura 4.7 foram obtidos considerando-se uma redução de aproximadamente 30% no valor da inércia do volante e sistema de embreagem do motor. Podemos notar um aumento do grau de irregularidade nas baixas rotações e uma redução considerável na amplitude da 3ª ordem / 1º modo de vibrar. As demais ordens não apresentaram reduções significativas nas amplitudes.

As figuras 4.8 e 4.9 mostram as amplitudes de vibrações torcionais, considerando-se os limites inferiores e superiores das faixas de rigidezes dinâmicas dos elastômeros do amortecedor apresentadas no item 3.5.3. Através desses resultados podemos observar a influência da variação dessa propriedade na resposta do sistema.

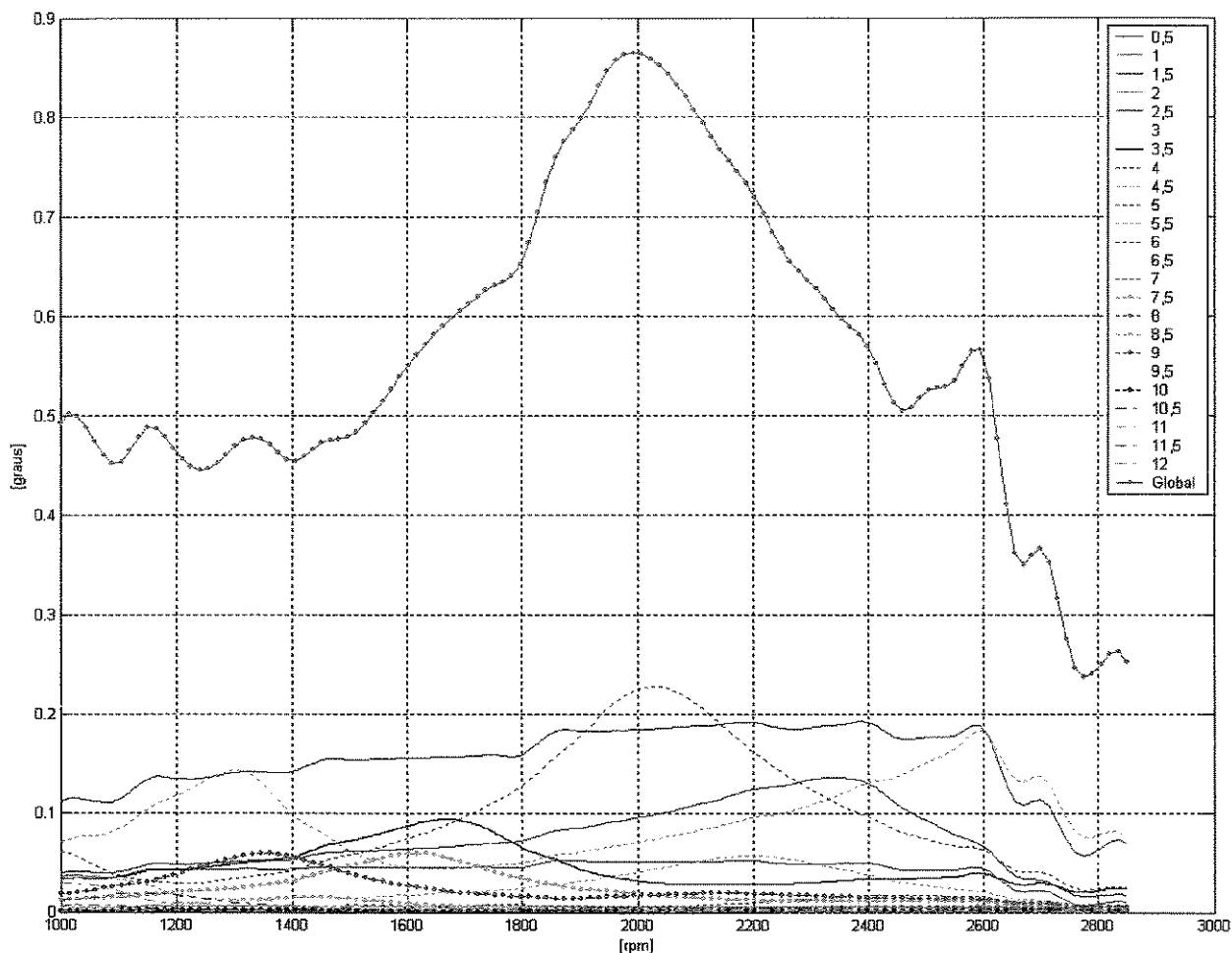


Figura 4.8: Amplitudes de vibrações torcionais com $K_t(1) = 64254 \text{ N.m/rad}$ e $K_t(2) = 88887 \text{ N.m/rad}$

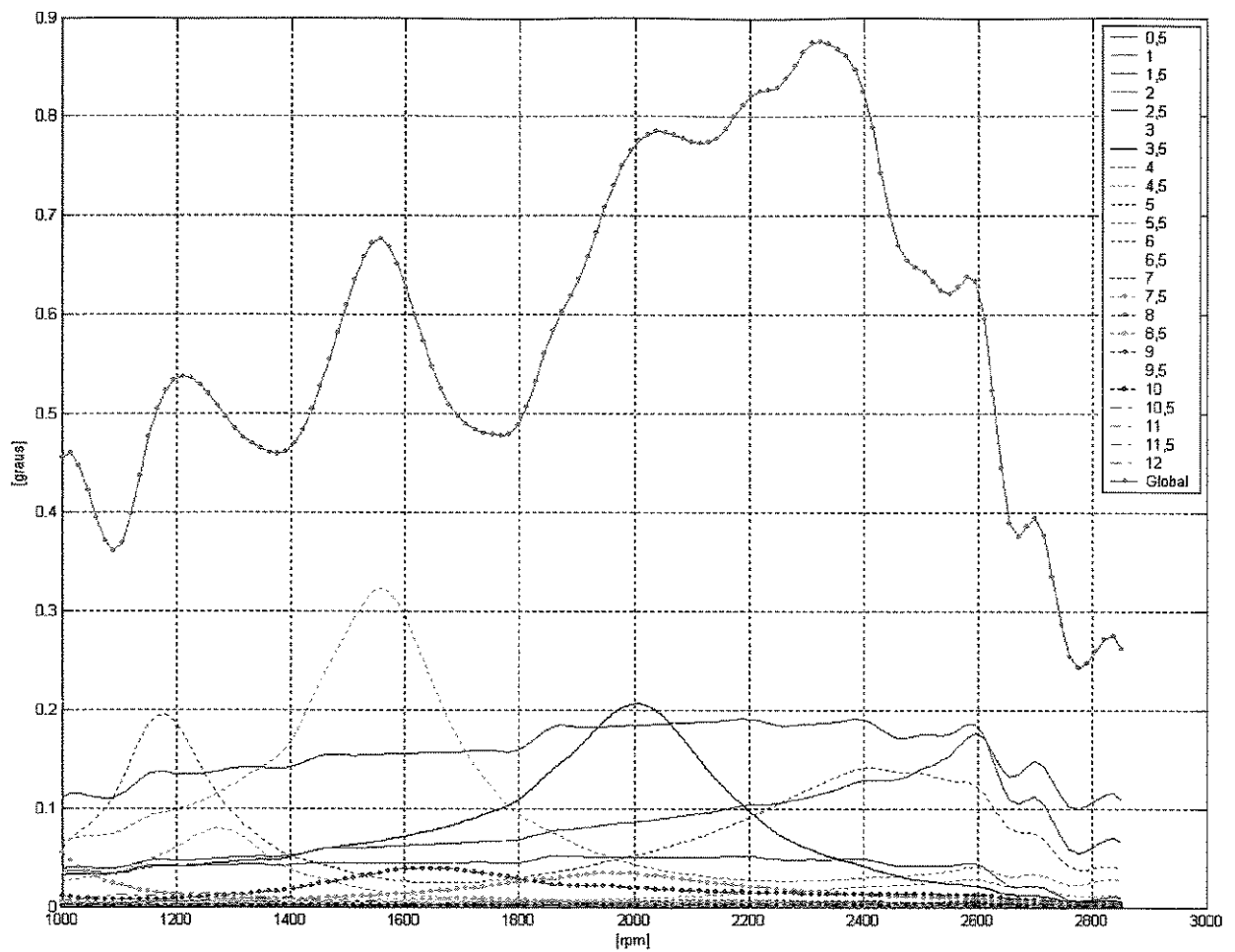


Figura 4.9: Amplitudes de vibrações torcionais com $K_t(1) = 127999 \text{ N.m/rad}$ e $K_t(2) = 177252 \text{ N.m/rad}$

Neste caso específico, rigidezes dinâmicas menores levaram a amplitudes de vibração mais baixas, porém, calculando-se o torque atuante entre o volante e a primeira manivela, poderemos verificar que o valor máximo desse esforço será praticamente o mesmo para os dois exemplos e continuaria próximo dos 4400 N.m.

A partir das características de amortecimento do “damper” é possível determinar a potência dissipada pelo componente para cada rotação do motor. Esse cálculo é importante para que se determine o nível de solicitação do absorvedor, pois, caso a capacidade de dissipação de potência em forma de calor seja excedida, haverá um superaquecimento do componente e uma conseqüente degradação da borracha. Com isso o “damper” pode perder a sua função, podendo acarretar no cisalhamento do elastômero ou ainda numa falha estrutural da árvore de manivelas.

Podemos quantificar essa grandeza através da expressão:

$$\dot{Q}_j = \int_0^t Cr_j \cdot \left(\dot{\theta}_j - \dot{\theta}_3 \right)^2 dt \quad ; \quad j = 1, 2 \quad (4.2)$$

Assim como no cálculo do torque atuante em cada secção do virabrequim, a potência dissipada deverá ser calculada pela soma vetorial de cada ordem das velocidades angulares e a diferença de velocidades entre as inércias deverá ser obtida considerando-se a fase dos vetores em cada instante.

As figuras 4.10 e 4.11 representam a potência dissipada pelos elastômeros dos anéis do primeiro e segundo modos respectivamente, considerando-se os dados de entrada mostrados no início deste capítulo.

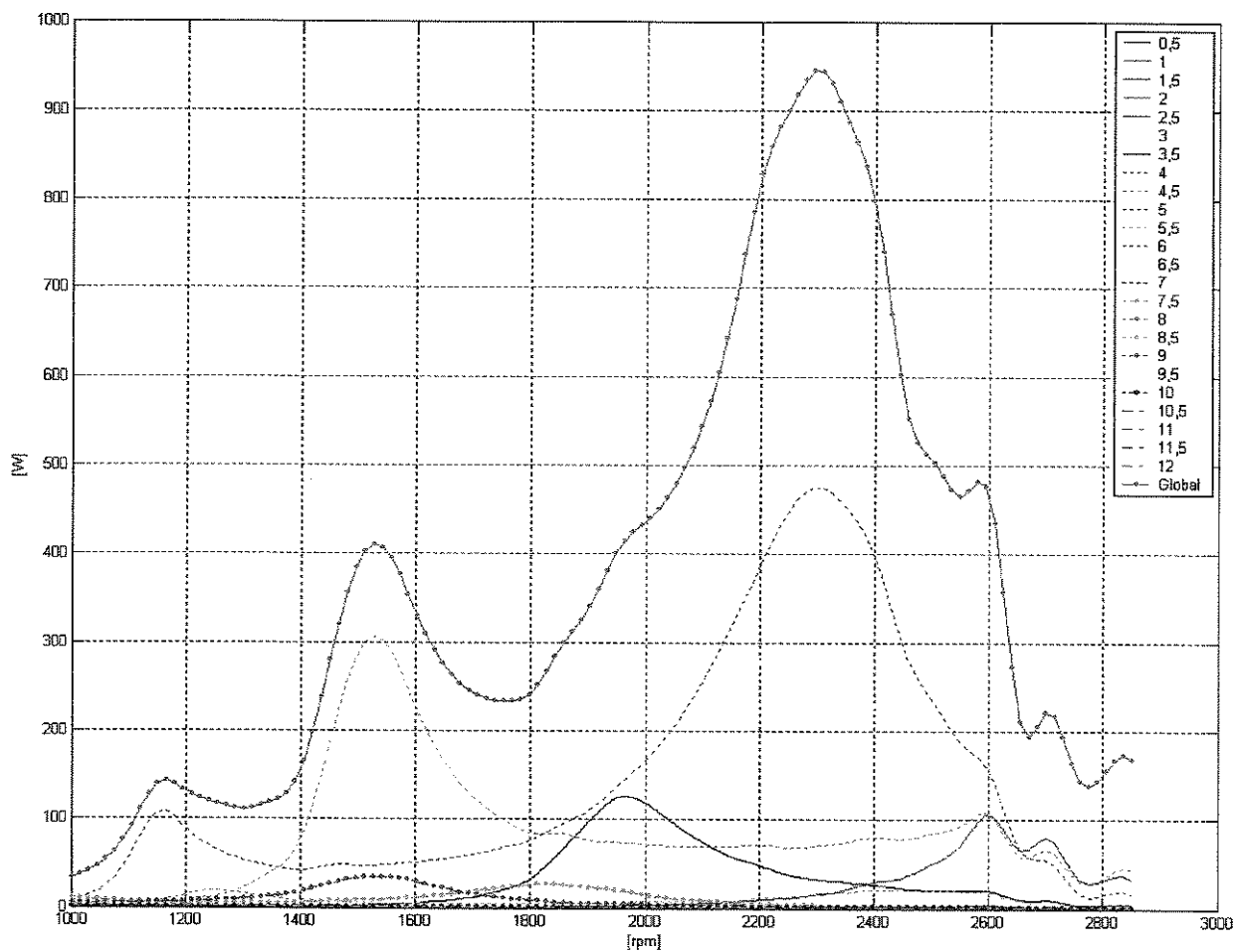


Figura 4.10: Potência dissipada pela borracha do anel do primeiro modo de vibrar

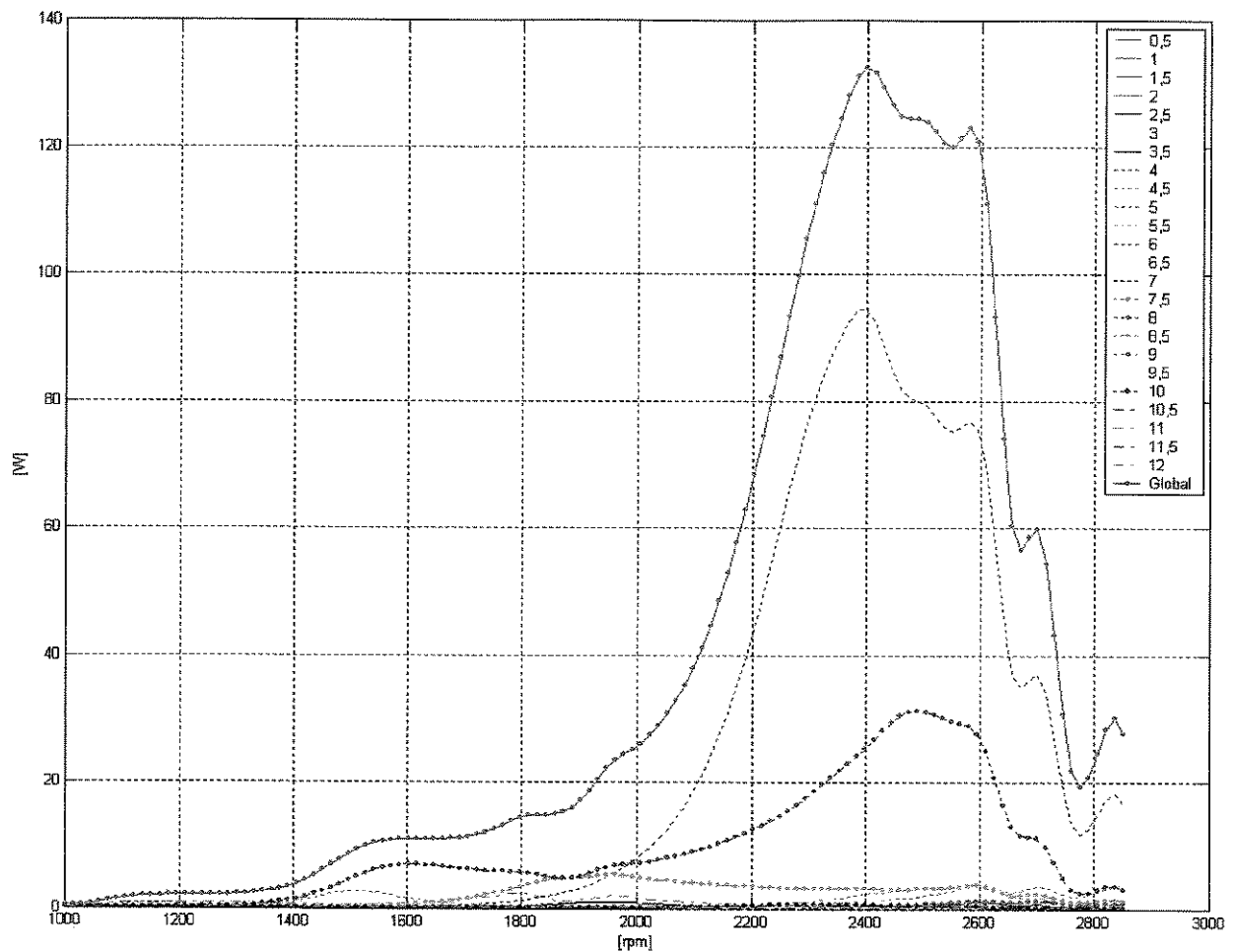


Figura 4.11: Potência dissipada pela borracha do anel do segundo modo de vibrar

Observando a figura 4.10, podemos verificar que para uma rotação próxima dos 2300 rpm a potência dissipada pelo amortecedor é de 930 W. Conforme experiências com aplicações semelhantes, sabe-se que a potência máxima possível de ser dissipada por este tipo de componente é de aproximadamente 500 W nesta rotação. Sendo assim, podemos presumir que esse “damper” irá apresentar falhas na borracha do primeiro anel. Já para o segundo anel, não ocorrerão problemas estruturais.

Observações em testes de veículos em condições de operação próximas à de potência máxima e em dinamômetros na condição de 2300 rpm a plena carga, indicaram sobre-carga na borracha do primeiro anel. Notou-se um superaquecimento do amortecedor de vibrações, que acarretou numa deterioração da borracha e como consequência, a perda de propriedades mecânicas do elastômero.

Alguns amortecedores apresentaram apenas um leve desprendimento do primeiro anel, gerando ruídos na parte frontal do motor, o que levou à parada do teste e detecção do problema antes do colapso total do componente. Já em outros testes, houve a falha catastrófica do “damper” com o desprendimento total do anel.

A figura 4.12 mostra a falha de um amortecedor durante um teste em veículo nas condições descritas anteriormente. De um modo geral, os componentes apresentaram falha funcional com uma média de 66.000 km.

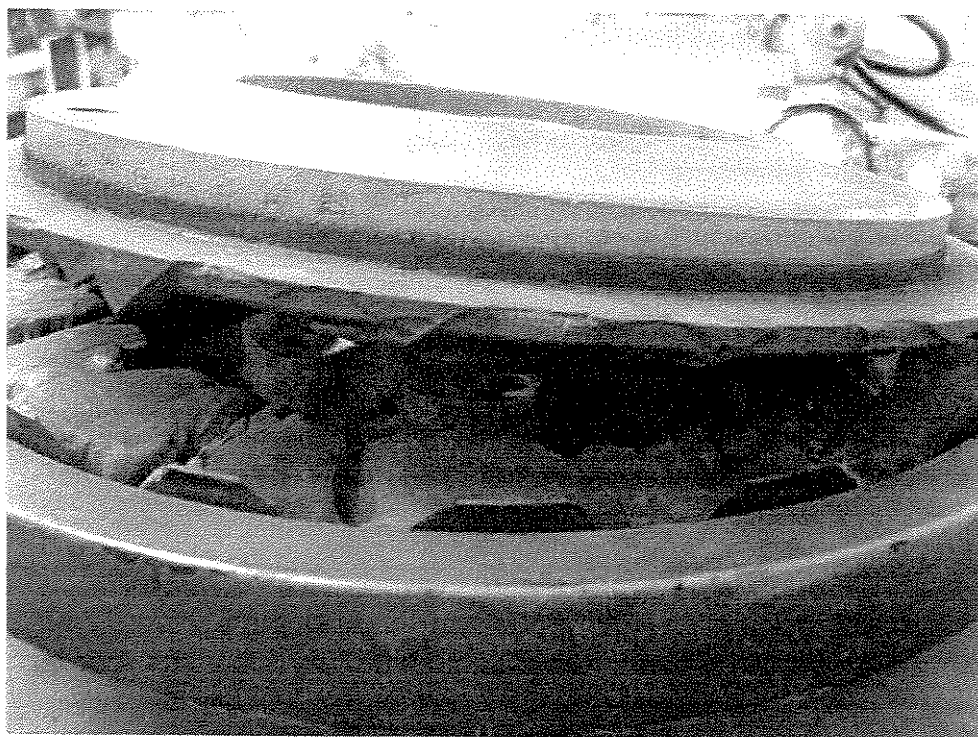


Figura 4.12: Falha do amortecedor por cisalhamento da borracha do primeiro anel

Para a validação do modelo matemático proposto, serão confrontados os resultados teóricos calculados utilizando-se a formulação apresentada, com os resultados experimentais obtidos em um dinamômetro da empresa MWM Motores Diesel Ltda., utilizando-se equipamentos para medições de vibrações torcionais da empresa Trelleborg Automotive – AVS Brasil Getoflex Ltda.

4.3 Dados de entrada (motor de 176 kW a 2400 rpm)

$$m_a = 2,437 \text{ kg}$$

$$L = 207 \text{ mm}$$

$$s = 129 \text{ mm}$$

$$d_p = 103 \text{ mm}$$

$$\text{ord_ign} = 1-5-3-6-2-4$$

$$\text{rpm_min} = 1000 \text{ rpm}$$

$$\text{rpm_max} = 3050 \text{ rpm}$$

$$\text{int_rpm} = 50 \text{ rpm}$$

Inércias [kg.m²]:

$$I(1) = 0,1230 \quad (\text{Anel do amortecedor} - 1^\circ \text{ modo})$$

$$I(2) = 0,0273 \quad (\text{Anel do amortecedor} - 2^\circ \text{ modo})$$

$$I(3) = 0,0350 \quad (\text{Polia do virabrequim e cubo do amortecedor})$$

$$I(4) = 0,0140 \quad (\text{Trem de engrenagens})$$

$$I(5) = 0,0463 \quad (1^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(6) = 0,0325 \quad (2^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(7) = 0,0463 \quad (3^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(8) = 0,0463 \quad (4^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(9) = 0,0325 \quad (5^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(10) = 0,0472 \quad (6^\text{a} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(11) = 1,12 \quad (\text{Volante e platô da embreagem})$$

Rigidez torcional [N.m/rad]:

$$K_t(1) = 105000 \quad (\text{Rigidez dinâmica} - 1^\circ \text{ anel})$$

$$K_t(2) = 150000 \quad (\text{Rigidez dinâmica} - 2^\circ \text{ anel})$$

$$K_t(3) = 1064000$$

$$K_t(4) = 1510000$$

$$K_t(5) = 1254000$$

$$K_t(6) = 1254000$$

$$K_t(7) = 1254000$$

$$K_t(8) = 1254000$$

$$K_t(9) = 1254000$$

$$K_t(10) = 2089000$$

Amortecimento absoluto [N.m.s/rad]:

$$C_a(1) = 6 \quad (1^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(2) = 6 \quad (2^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(3) = 6 \quad (3^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(4) = 6 \quad (4^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(5) = 6 \quad (5^\circ \text{ cilindro})$$

$$C_a(6) = 6 \quad (6^\circ \text{ cilindro})$$

Amortecimento relativo:

$$d_{\text{damper}} = 0,25 \quad (\text{Fator de perda da borracha do amortecedor})$$

$$d_{\text{motor}} = 0,035 \quad (\text{Fator de perda para as manivelas do virabrequim})$$

As figuras 4.13 e 4.14 representam respectivamente, a pressão no interior dos cilindros em função do ângulo do virabrequim e a variação dos picos de pressão para os intervalos de rotação do motor.

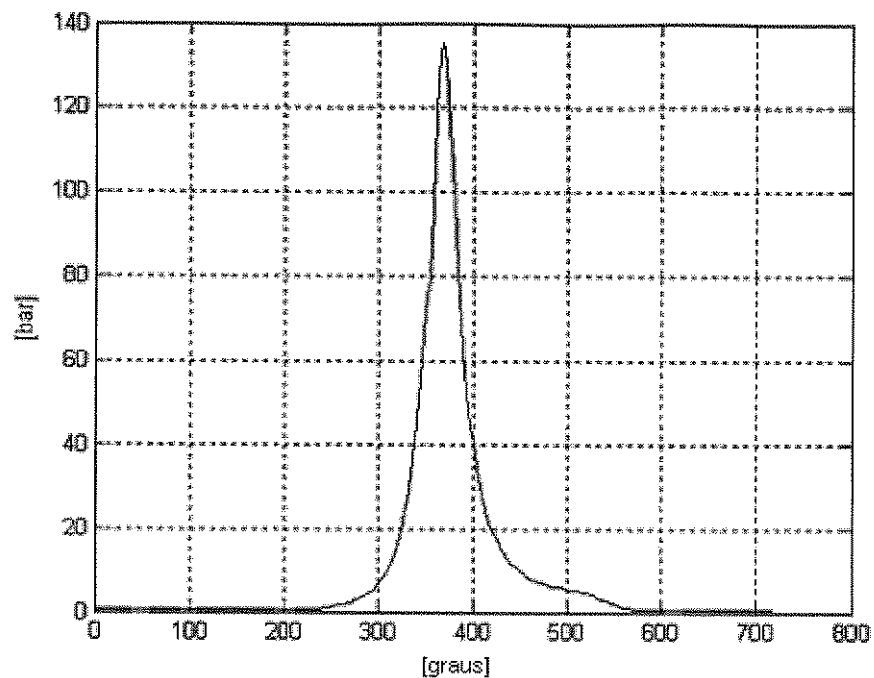


Figura 4.13: Curva experimental de pressão de combustão a 1800rpm em plena carga

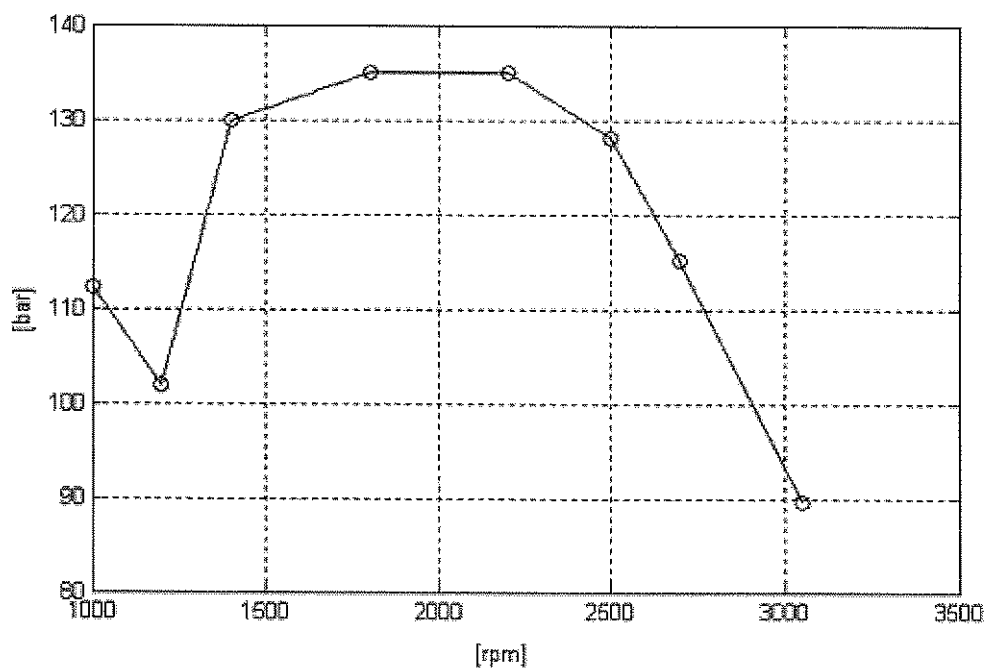


Figura 4.14: Picos de pressão de combustão em função da rotação do motor

4.4 Torciograma teórico

A figura 4.15 mostra as amplitudes de vibrações torcionais calculadas, enquanto que a figura 4.16 apresenta os resultados medidos em dinamômetro. Para efeito de comparação os gráficos estão em escalas semelhantes. No torciograma experimental não é apresentada a amplitude global de vibração.

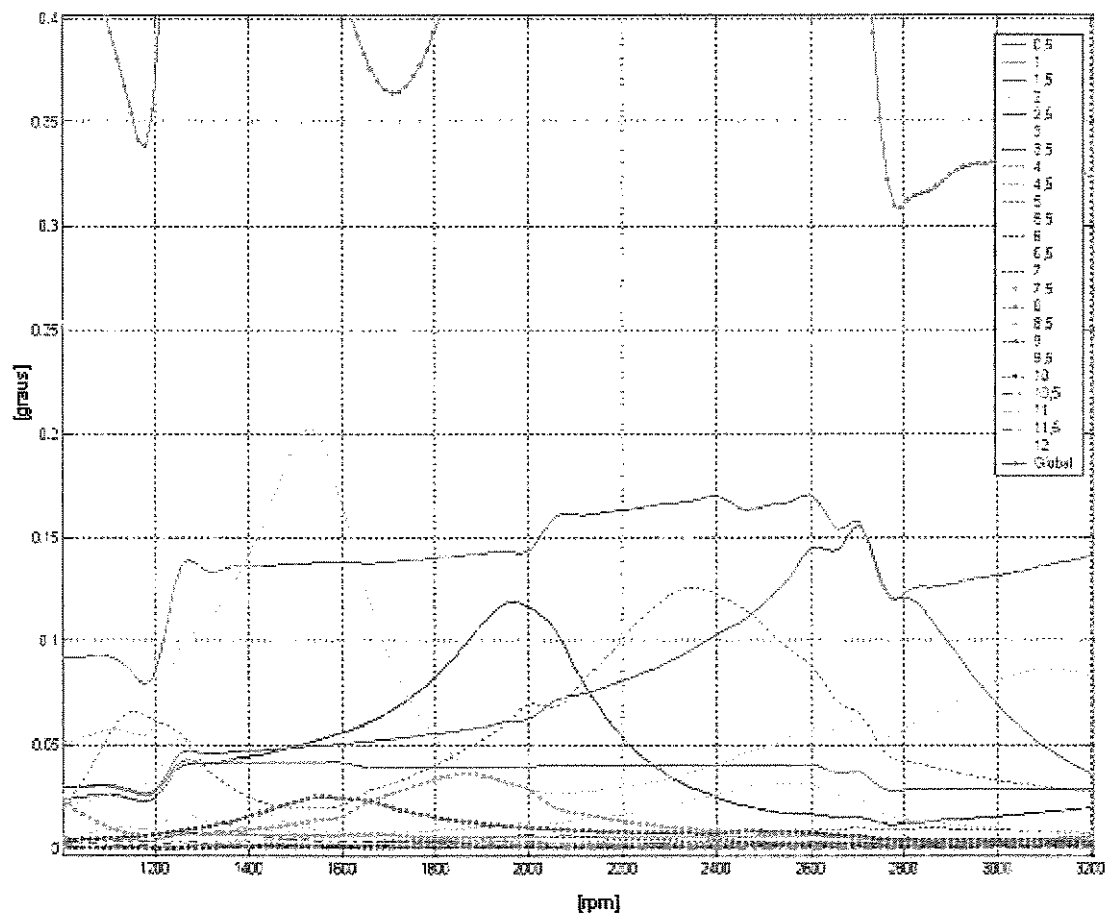


Figura 4.15: Amplitudes de vibrações torcionais

4.5 Torciograma experimental

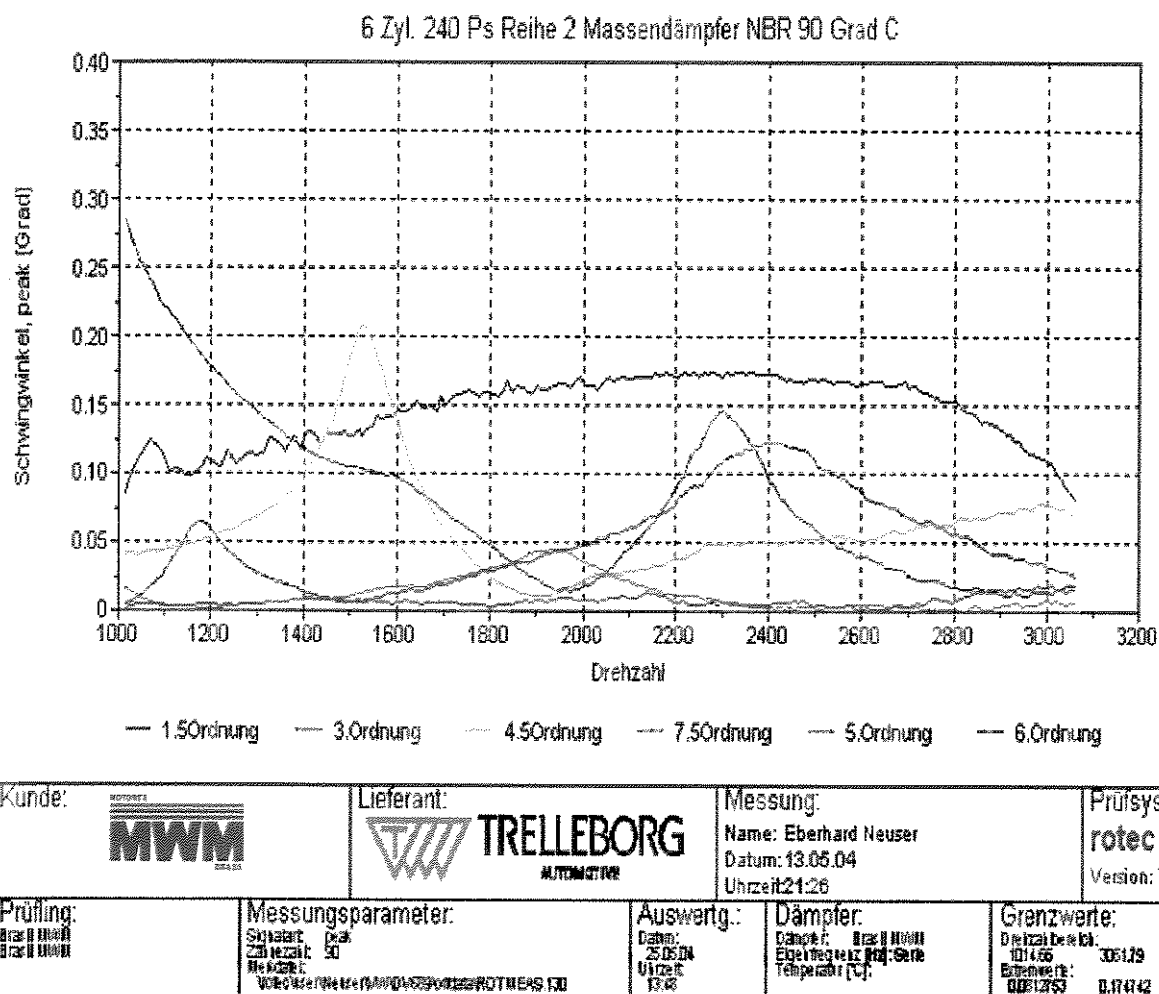


Figura 4.16: Amplitudes de vibrações torcionais das ordens mais significativas

4.6 Temperatura da borracha do amortecedor

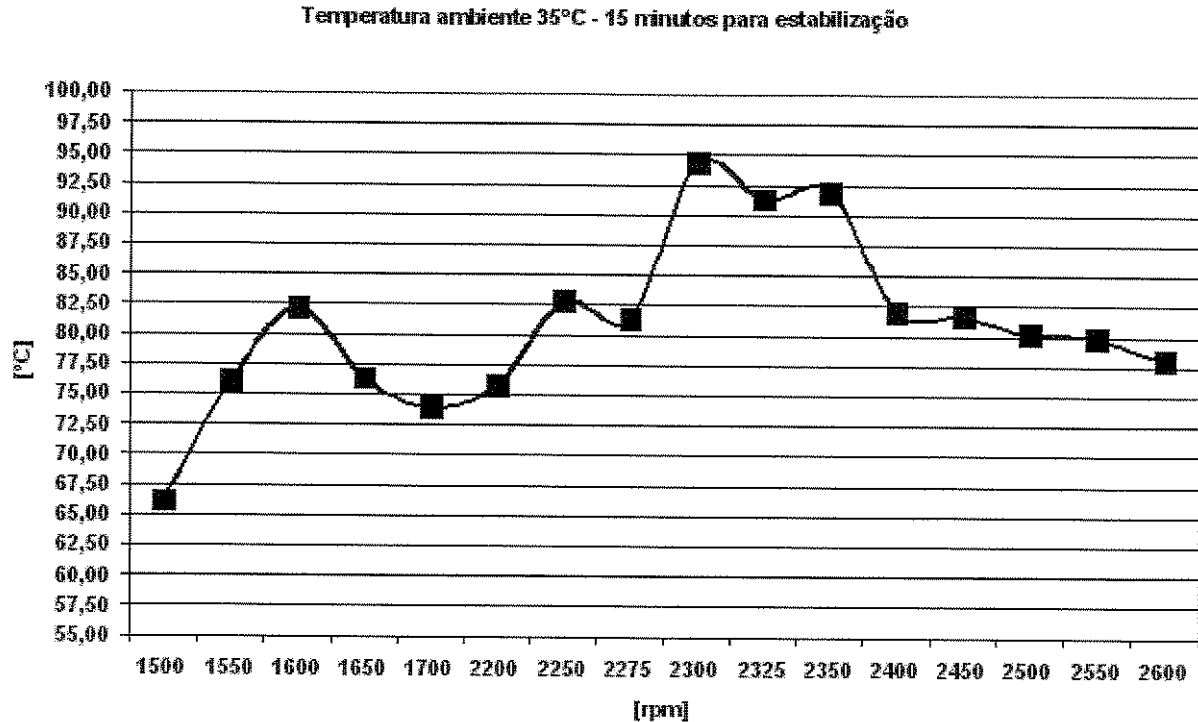
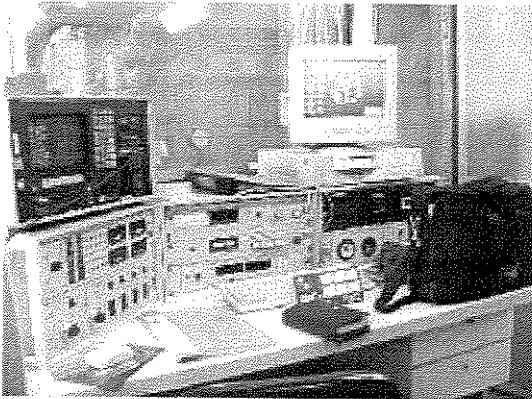


Figura 4.17: Medições de temperatura no anti-vibrador

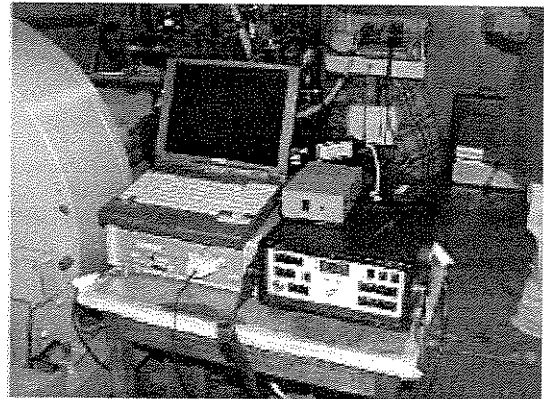
Podemos notar que as amplitudes de vibração calculadas são muito próximas às obtidas experimentalmente e que os valores máximos de temperatura no amortecedor de vibrações torcionais ocorrem nas ressonâncias do sistema. Na rotação de 1600 rpm, ocorre um aumento de temperatura devido à influência do 1º modo de vibrar excitado pela 4,5ª ordem, estabilizando-se em aproximadamente 82 °C. A maior temperatura (≈ 95 °C) acontece por volta de 2300 rpm, rotação esta, em que praticamente coincidem as ressonâncias do 1º modo / 3ª ordem e do 2º modo / 6ª ordem. Todas as temperaturas foram obtidas após a estabilização de 15 minutos.

Como vimos anteriormente, a rigidez dinâmica e o coeficiente de amortecimento do elastômero variam com a temperatura. Um amortecedor de vibrações eficiente deve possuir um composto elastomérico que permita pequenas variações dessas propriedades durante toda a sua faixa de operação.

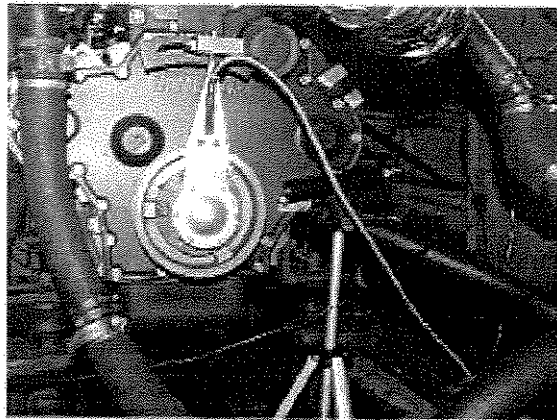
Existem algumas formas para a medição das vibrações torcionais. Entre elas podemos destacar a utilização de sensores a “laser” e “encoder”, que em conjunto com equipamentos de aquisição de dados, irão obter as amplitudes das vibrações. Não é o objetivo deste trabalho o detalhamento dos métodos experimentais para AVT, mas apenas a utilização desses métodos para a validação do modelo matemático proposto. A figura 4.18 apresenta os equipamentos que foram utilizados para essas medições.



(a) – Painel de controle do dinamômetro



(b) – Sistema de aquisição de dados



(c) – Encoder e Laser para medições das amplitudes

Figura 4.18: Detalhes da instrumentação para medição de vibrações torcionais

As amplitudes das vibrações torcionais são usualmente apresentadas no formato dos torciogramas mostrados nesse trabalho. Porém, é possível ainda analisar essas vibrações através de diagramas de Campbell. A figura abaixo ilustra os resultados de medições em um motor com calibração de 152 kW a 2600 rpm, obtidos em dinamômetro da empresa MWM Motores Diesel Ltda.

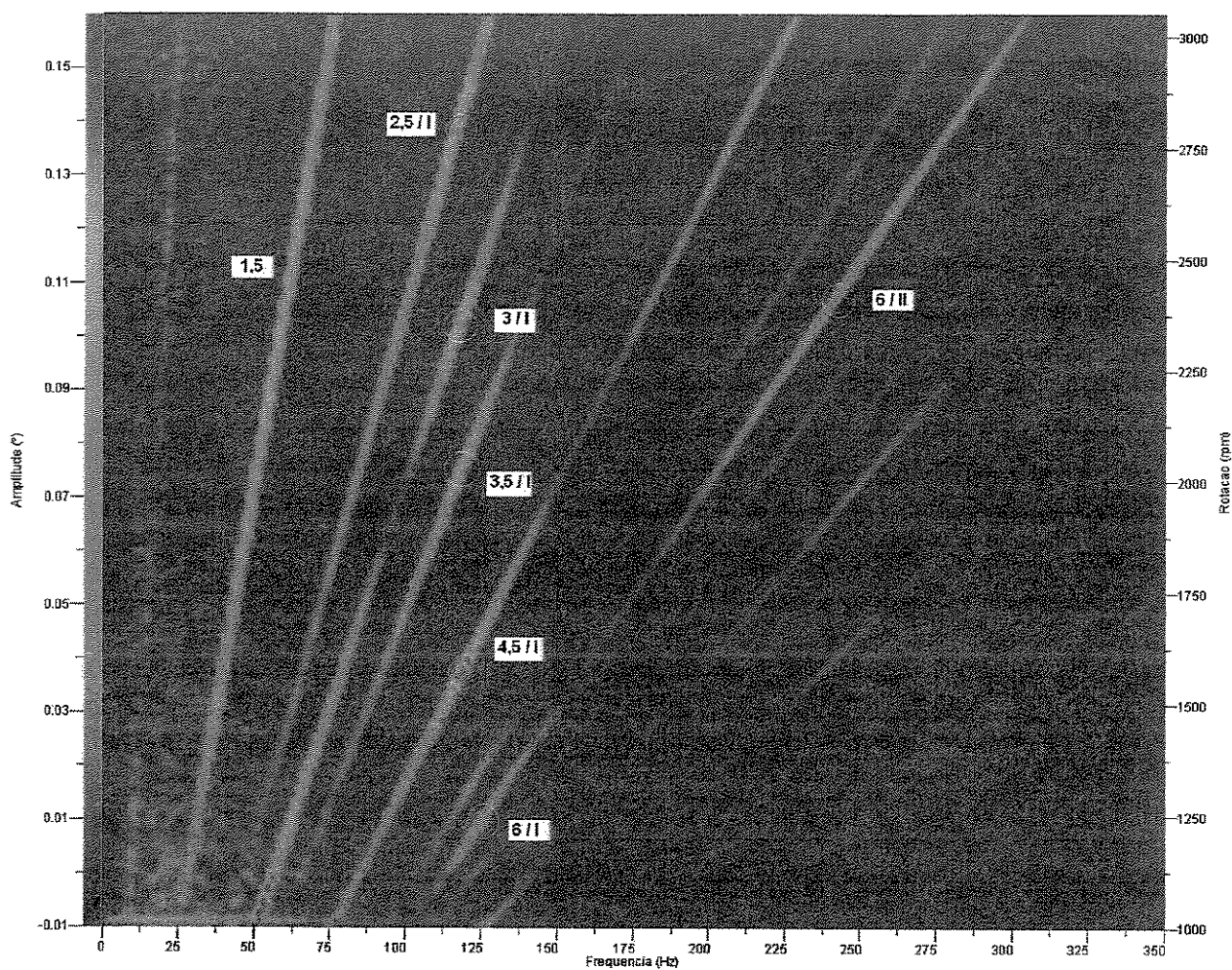


Figura 4.19: Diagrama de Campbell para análise de vibrações torcionais

No gráfico da figura 4.19 é possível observar as ressonâncias (destacadas por um círculo branco), as ordens que aparecem como retas inclinadas e os modos de vibrar indicados como: (I) para o 1° modo e (II) para o 2° modo.

No eixo das abscissas estão indicadas as frequências, onde podemos verificar o primeiro modo de vibrar próximo dos 120 Hz, enquanto que o segundo modo situa-se próximo dos 240 Hz, sendo este excitado pela 6ª ordem.

O eixo das ordenadas à direita, apresenta as rotações do motor e nele podemos notar a proximidade do 1° modo de vibrar sendo excitado pela 3ª ordem com o 2° modo excitado pela 6ª ordem, ocorrendo próximo dos 2300 rpm. Ainda no eixo vertical, porém à esquerda, iremos obter as amplitudes das vibrações torcionais, que podem ser estimadas em função da cor na qual são apresentadas no gráfico.

Capítulo 5

Conclusões e Sugestões para os Próximos Trabalhos

Analisando os resultados obtidos, podemos verificar que a metodologia utilizada para as análises de vibrações torcionais em árvores de manivelas de motores de combustão interna mostrou-se eficaz, apresentando resultados muito próximos aos obtidos experimentalmente e podemos concluir que as hipóteses adotadas para as análises, são válidas e podem ser estendidas a virabrequins de motores com dimensões semelhantes. Podemos ainda mencionar que os parâmetros adotados a partir de experiências anteriores (tal como o valor do amortecimento absoluto) foram coerentes, tendo em vista esses resultados.

Segundo os critérios de projeto, recomenda-se que as amplitudes das vibrações torcionais para a árvore de manivelas analisada sejam no máximo de $0,25^\circ$ por ordem. Esses critérios visam garantir a integridade estrutural do componente e reduzir os níveis de ruídos gerados pelos deslocamentos de grandes amplitudes. Dessa forma, analisando a figura 4.5, podemos notar que existem ordens de vibração com amplitudes superiores à máxima recomendada (1° modo / 3^a ordem e 1° modo / ordem $4,5^a$) e dessa forma o uso do amortecedor de vibrações torcionais de borracha considerado nesta análise não é recomendado.

Também é possível observar através da figura 4.10 que a potência dissipada pelo amortecedor de borracha é elevada para este tipo de componente e por intermédio de experiências anteriores, podemos afirmar que a probabilidade de ocorrerem falhas estruturais é grande.

Para que seja possível a obtenção da potência especificada pelo motor estudado, será necessária a utilização de um “damper” do tipo viscoso acoplado ao virabrequim. Este tipo de amortecedor, apesar de possuir um custo maior que o similar de borracha, possui uma maior capacidade de amortecimento o que proporciona menores amplitudes de vibrações, tornando a aplicação viável tecnicamente.

O amortecimento se dá pelo movimento relativo entre um anel de inércia pré-determinada e a carcaça do componente, acoplados por um filme de silicone de pequena espessura. Através de propriedades, tais como: Viscosidade dinâmica do silicone, temperatura e área de contato do fluido, é possível a determinação da rigidez dinâmica e do amortecimento do “damper” em função da frequência de operação. Dessa forma, podemos calcular as amplitudes das vibrações torcionais e comprovar a eficiência deste tipo de componente. Este estudo, juntamente com o acoplamento das vibrações axiais e flexionais às torcionais, podem ser objetos de análise em trabalhos futuros.

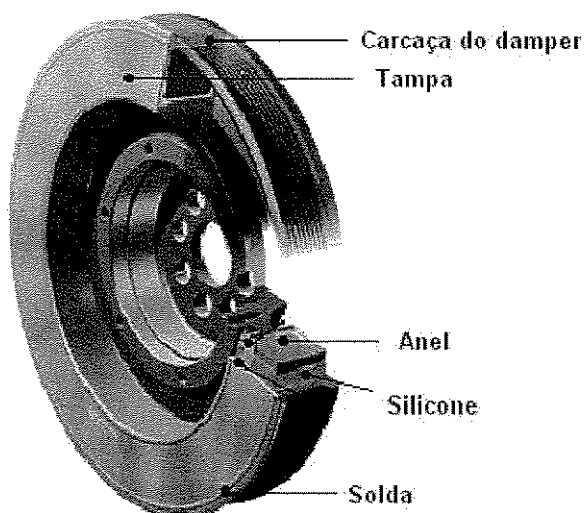


Figura 5.1: Detalhe de um amortecedor de vibrações torcionais do tipo viscoso

Referências Bibliográficas

- [1] Johnston, P. R. e Shusto, L. M., Analysis of Diesel engine crankshaft torsional vibrations. *SAE Special Publications*. 1987, p.21-26, ISSN: 0099-5908, ISBN: 0-89883-985-8
- [2] Draminski, P., Extended treatment of secondary resonance. *Ship Build. Marine Eng. Int.* 1988, p.180-186
- [3] Hestermann, D. C. and Stone, B. J., Secondary inertia effects in the torsional vibration of reciprocating engines. *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1994, 208(C1), p.11-15
- [4] Pasricha, M. S., Effect of the gas forces on parametrically excited torsional vibrations of reciprocating engines. *Journal of Ship Research*. 2001, v.45, is.4, p.262-268
- [5] Brusa, E., Delprete, C. and Genta, G., Torsional vibration of crankshafts: Effect of non-constant moments of inertia. *Journal of Sound and Vibration*. 1997, 205(2), p.135-150
- [6] Song, X. G., Song, T. X., Xue, D. X. And Li, B. Z., Progressive torsional-axial continued vibrations in crankshaft systems: A phenomenon of coupled vibration. *Trans. ASME, Rotating Mach. Vehicle Dyn.* 1991, 35, p.319-323
- [7] Lacy, D. J., Computers in analysis techniques for reciprocating engine design. *ImechE International Conference on Vibration and Rotating Machinery*. C14/87, 1987, p.55-68
- [8] Boysal, A. and Rahnejat, Torsional vibration analysis of a multi-body single cylinder internal combustion engine model. *Appl. Math. Modeling*. 1997, 21:481-493

- [9] Den Hartog, J. P., Mechanical vibrations. *New York: Dover Publications.* 1985
- [10] Ker Wilson, W., Practical solution of torsional vibration problems. *New York: John Wiley & Sons Inc.* 1963
- [11] Iwamoto, S. and Wakabayashi, K., A study on the damping characteristics of torsional vibration in Diesel engines. *Journal of the Marine Engineering Society.* 20, 1985
- [12] Wang, Y. and Lim, T. C., Prediction of torsional damping coefficients in reciprocating engine. *Journal of Sound and Vibration.* 2000, 238(4), p.710-719
- [13] Honda, Y., Saito, T., Dynamic characteristics of torsional rubber dampers and their optimum tuning. *SAE Technical Paper Series.* 870580, 1987, 8 p.
- [14] Maragonis, I. E., The torsional vibrations of marine Diesel engines under fault operation of its cylinders. *Forschung im Ingenieurwesen – Engineering Research.* 1992, v.58, p.13-25
- [15] Maass H., Klier H., Kräfte, momente und deren ausgleich in der verbrennungskraftmaschine. *Springer-Verlag/Wien.* 1981, ISBN 3-211-81677-1
- [16] Hafner K. E., Maass H., Torsionsschwingungen in der verbrennungskraftmaschine. *Springer-Verlag/Wien.* 1985, ISBN 3-211-81793-X
- [17] Hafner K. E., Maass H., Theorie der triebwerksschwingungen der verbrennungskraftmaschine. *Springer-Verlag/Wien.* 1984, ISBN 3-211-81792-1
- [18] Brunetti F., Garcia O., Motores de Combustão Interna. *FEI.* 1992
- [19] Taylor C. F., The internal combustion engine in theory and practice. *MIT Press.* 1985, Cap.8, v.2, ISBN 0-262-70027-1

- [20] Muller P. C., Schiehlen W. O., Linear vibrations. *Martinus Nijhoff Publishers*. 1985, ISBN 90-247-2983-1
- [21] Meirovitch L., Principles and techniques of vibration. *Prentice Hall*. 2000
- [22] Inman D. J., Engineering vibration. *Prentice Hall*. 2001, ISBN 0-13-726142-X
- [23] Dedini, K. L. C., Cavalcante P. F., Modelagem e análise de máquinas rotativas e estrutura de suporte. *Unicamp*. 2001
- [24] Arruda J. R. F., Huallpa B. N., Introdução à análise espectral. *Unicamp*. 2002
- [25] Mendes, A. S., Raminelli, L. F., Gomes, M. P., Dimensionamento estrutural da árvore de manivelas de um motor Diesel de alta potência. *Paper SAE 2003-01-3530*

Bibliografia

- [1] Ashrafiuon, H. e Whitman, A. M., Asymptotic analysis of the torsional vibrations in reciprocating machinery. *Journal of Vibration and Acoustics – Transactions of the ASME*. 1996, v.118, p.485-490
- [2] Dittrich, G. e Krumm, H., Parametrically excited torsional vibrations in systems of engines and driven machines with periodically varying moments of inertia. *Forschung im Ingenieurwesen – Engineering Research*. 1980, v.46, p.181-195
- [3] Pasricha, M. S. e Carnegie, W. D., Effects of variable inertia on damped torsional vibrations of Diesel engine systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1976, v.46, p.339-345
- [4] Shiraev, M. P. e Khudozhi, V. A., Method of calculating torsional vibrations in a power unit with a nonlinear silicone damper. *Russian Engineering Journal*. 1974, v.54, p.52-55
- [5] Shiraev, M. P., Damping of torsional vibrations in internal combustion engines. *Russian Engineering Journal*. 1973, v.53, p.17-20
- [6] Hopkins, R. B., Torsional vibrations in agricultural tractors. *SAE Transactions*. 1968, v.76, p.89
- [7] B.I.C.E.R.A., A handbook on torsional vibration. *Cambridge University Press*. 1958
- [8] Spaetgens, T. W., Holzer method for forced-damped torsional vibrations. *Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME*. 1950, v.17, p.59-63

- [9] Poritsky, H., Forced torsional vibrations with damping – An extension of Holzer's method. *Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME*. 1947, v.14, p.168
- [10] Jeng, V. e Tsai, Y. L., Correlation between torsional and translational vibration. *Structural Engineering and Mechanics*. 2002, v.13, n.6, p.671-694
- [11] Gold, P. W., Application of torsional vibrations in marine drives. *ASME – Internal Combustion Engine Division*. 2003, v.40, p.329-337
- [12] Jakobsen, S. B., Coupled axial and torsional vibration calculations on long-stroke Diesel engines. *Transactions – Society of Naval Architects and Marine Engineers*. 1991, v.99, p.405-419
- [13] Jenzer, J., Torsional vibration and admissible limits in marine propulsion installations. *ASME – Internal Combustion Engine Division*. 2003, v.40, p.289-296
- [14] Drex1, J., Torsional dampers and alternative systems to reduce driveline vibrations. *SAE Technical Paper Series*. 1987, 11p.
- [15] Anderson, R. J. e Xu, Z., New method for estimating amplitudes of torsional vibration for engine crankshafts. *International Journal of Vehicle Design*. 1988, v.9, n.2, p.252-261
- [16] Dougty, S., Fundamentals of IC engine torsional vibration. *ASME*. 1988, ICE6, 7p.
- [17] Chen, S. K. e Chang, T., Crankshaft torsional and damping simulation – An update and correlation with test results. *SAE Technical Paper Series*. 861226, 1986, 22p.
- [18] Wakabayashi, K., Honda, Y., Kodama, T., Dynamic characteristics of torsional viscous-friction dampers on reciprocating engine shaftings. *SAE Technical Paper Series*. 921726, 1992, p.1-21

- [19] Smith, R. C. e Koss, L. L., Design of crankshafts vibration dampers. *National Conference Publication – Institution of Engineers*. 1990, n.90, p.300-304
- [20] Heisler, H., Advanced engine technology. *SAE International*. 1995, Cap.3, ISBN 1-56091-734-2

Apêndice A

Para efeito comparativo, serão apresentados os resultados da análise de vibrações torcionais de um motor de seis cilindros, similar ao analisado, que possui um amortecedor de massa simples para a absorção das vibrações torcionais.

Essa comparação será feita analisando-se os resultados do programa desenvolvido neste estudo e um programa para a análise de vibrações torcionais da AVL List GmbH.

A.1 Dados de entrada (motor de 152 kW a 2600 rpm)

$$m_a = 2,321 \text{ kg}$$

$$L = 207 \text{ mm}$$

$$s = 129 \text{ mm}$$

$$d_p = 103 \text{ mm}$$

$$\text{ord_ign} = 1-5-3-6-2-4$$

$$\text{rpm_min} = 1000 \text{ rpm}$$

$$\text{rpm_max} = 2850 \text{ rpm}$$

$$\text{int_rpm} = 50 \text{ rpm}$$

Inércias [kg.m²]:

$$I(1) = 0,0500 \quad (\text{Anel do amortecedor})$$

$$I(2) = 0,0204 \quad (\text{Polia do virabrequim e cubo do amortecedor})$$

$$I(3) = 0,0414 \quad (1^{\text{a}} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(4) = 0,0276 \quad (2^{\text{a}} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(5) = 0,0414 \quad (3^{\text{a}} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(6) = 0,0414 \quad (4^{\text{a}} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(7) = 0,0276 \quad (5^{\text{a}} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(8) = 0,0423 \quad (6^{\text{a}} \text{ manivela do virabrequim e massas alternativas})$$

$$I(9) = 0,974 \quad (\text{Volante e platô da embreagem})$$

Rigidez torcional [N.m/rad]:

$$K_t(1) = 65000 \quad (\text{Rigidez dinâmica da borracha})$$

$$K_t(2) = 1606000$$

$$K_t(3) = 1278000$$

$$K_t(4) = 1278000$$

$$K_t(5) = 1291000$$

$$K_t(6) = 1278000$$

$$K_t(7) = 1278000$$

$$K_t(8) = 2198000$$

Amortecimento absoluto [N.m.s/rad]:

$Ca(1) = 5,2$ (1° cilindro)

$Ca(2) = 5,2$ (2° cilindro)

$Ca(3) = 5,2$ (3° cilindro)

$Ca(4) = 5,2$ (4° cilindro)

$Ca(5) = 5,2$ (5° cilindro)

$Ca(6) = 5,2$ (6° cilindro)

Amortecimento relativo:

$d_damper = 0,22$ (Fator de perda da borracha do amortecedor)

$d_motor = 0$ (Fator de perda para as manivelas do virabrequim)

Como podemos observar, o amortecimento relativo entre as inércias do virabrequim foi desconsiderado.

As figuras que serão mostradas a seguir representam a pressão no interior do cilindro em função do ângulo do virabrequim e rotação do motor respectivamente. Neste caso, esta curva foi considerada como sendo constante para todas as faixas de operação, pelo fato do software utilizado não permitir variações nas pressões de combustão entre diferentes rotações.

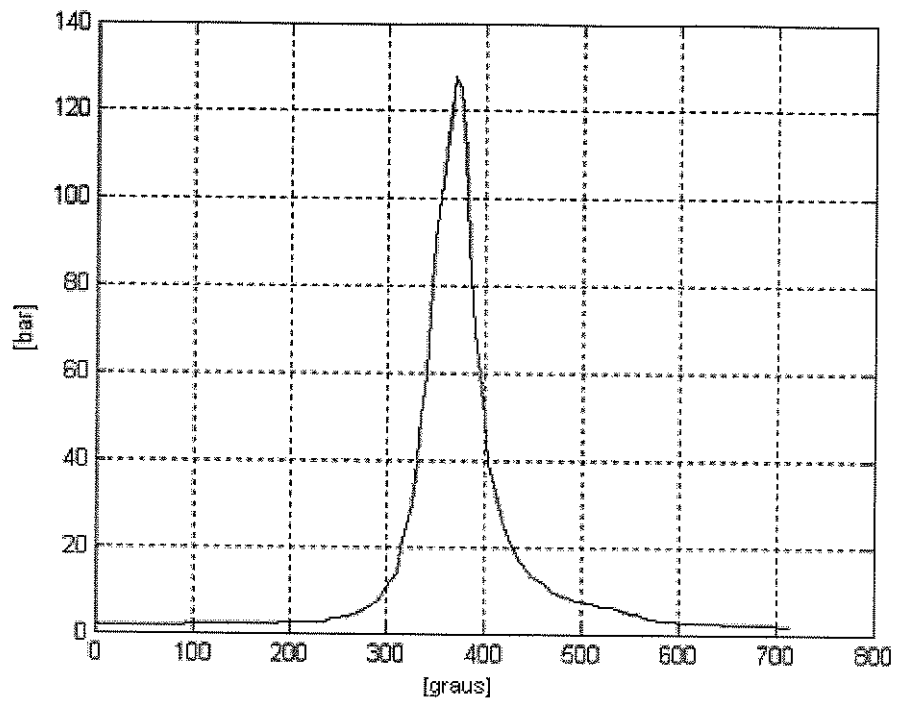


Figura A.1: Curva teórica de pressão de combustão

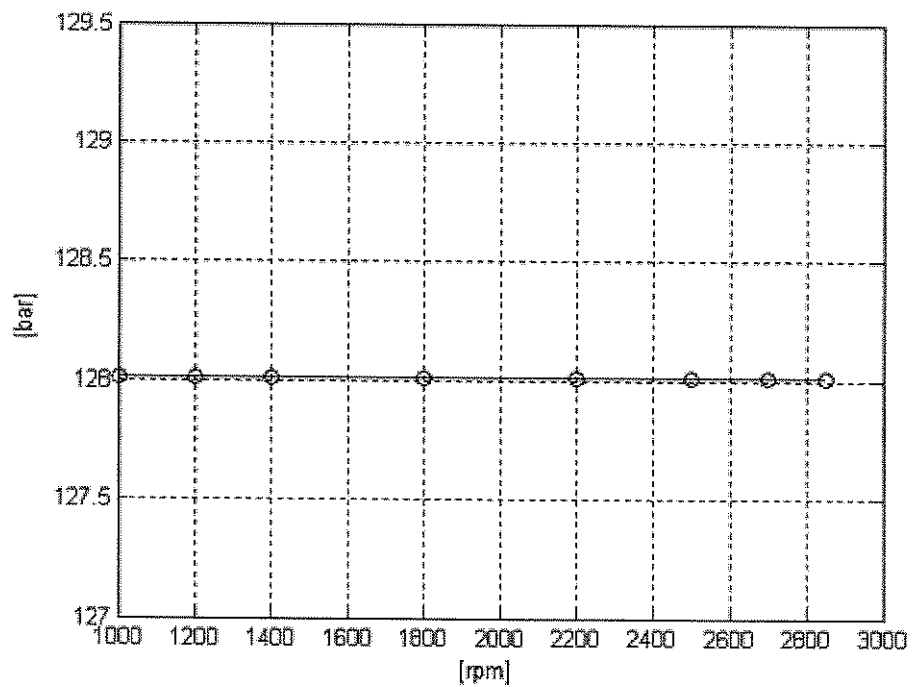


Figura A.2: Picos de pressão de combustão em função da rotação do motor

A.2 Torciogramas teóricos

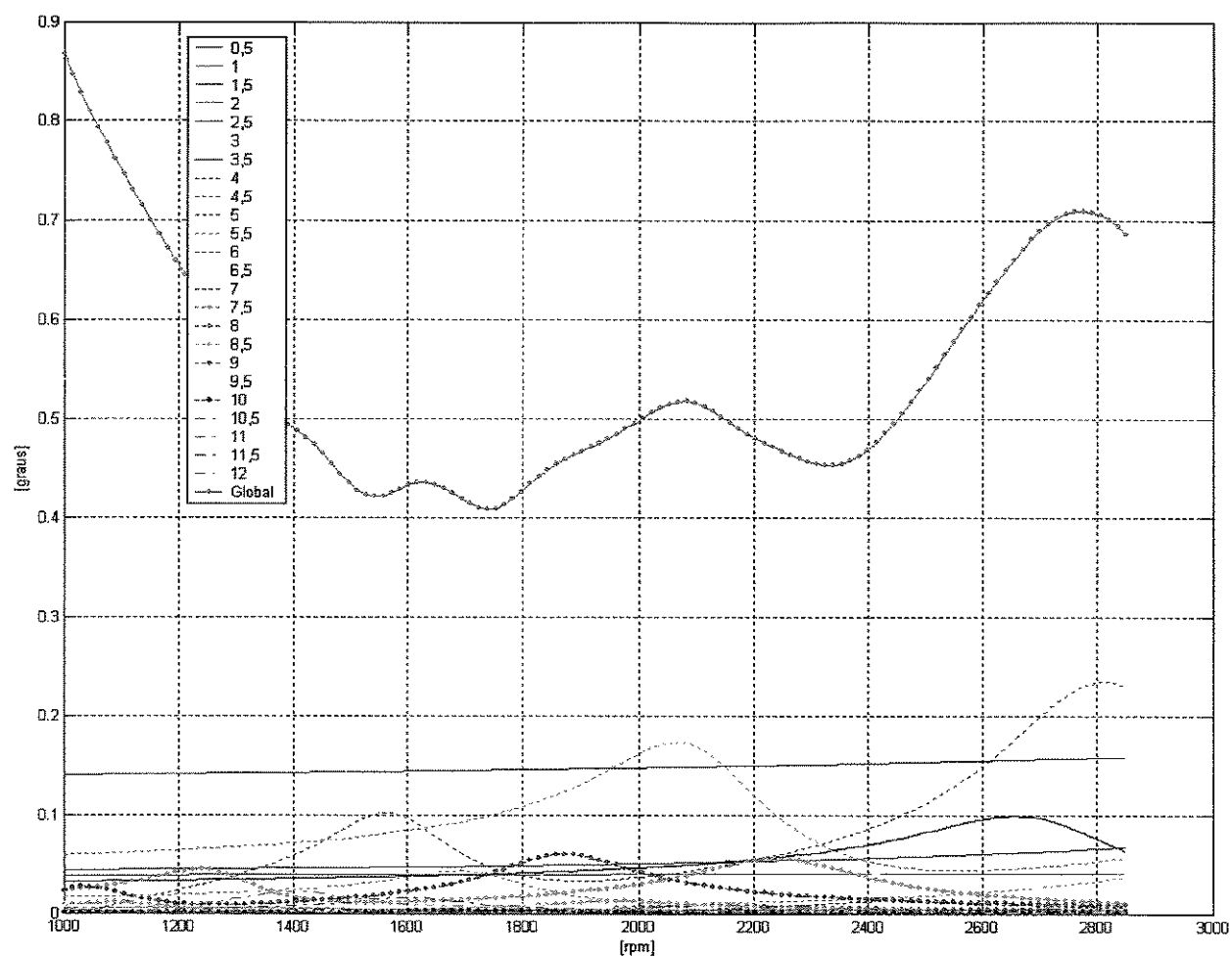


Figura A.3: Amplitudes de vibrações torcionais

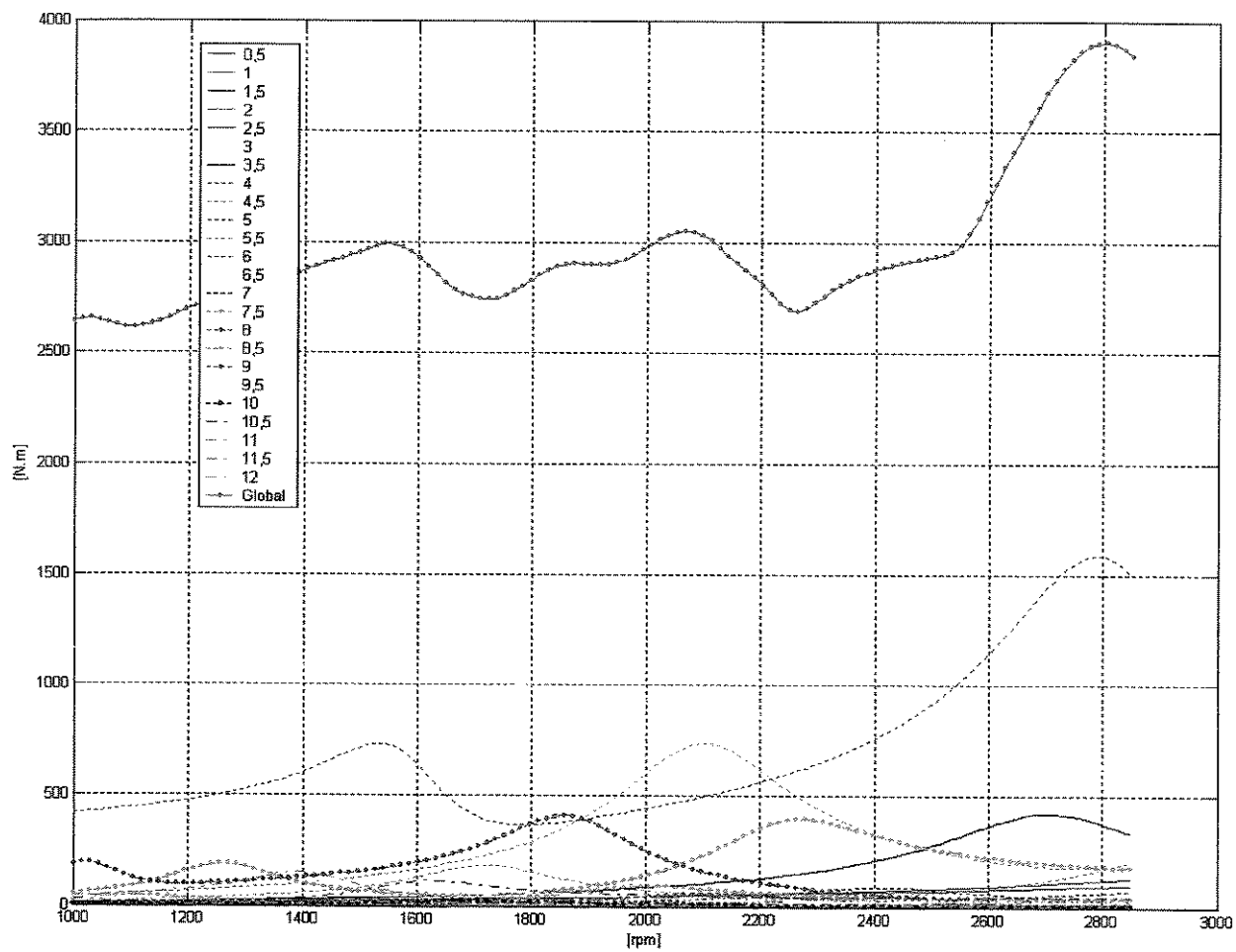


Figura A.4: Torque atuante entre o volante e o 6° cilindro

A.3 Torciogramas teóricos obtidos pelo software da AVL

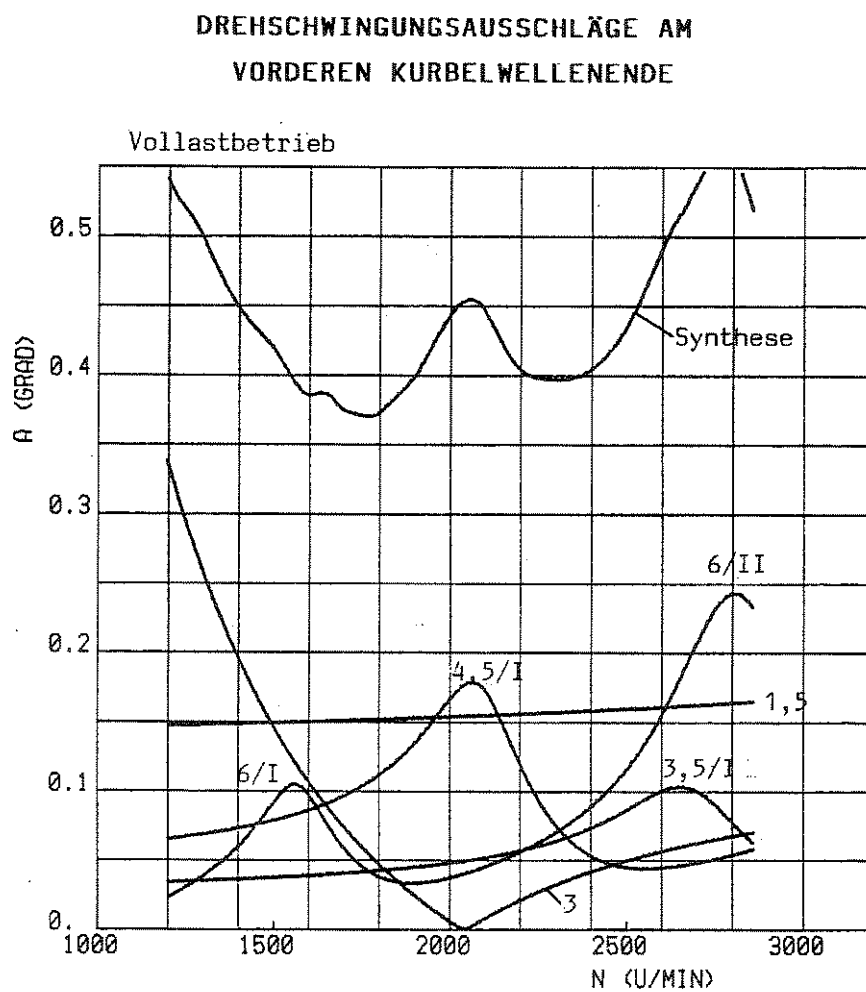


Figura A.5: Amplitudes de vibrações torcionais das ordens mais significativas

DREHMOMENTENÜBERTRAGUNG AM SCHWUNGRADSEITIGEN KURBELWELLENENDE

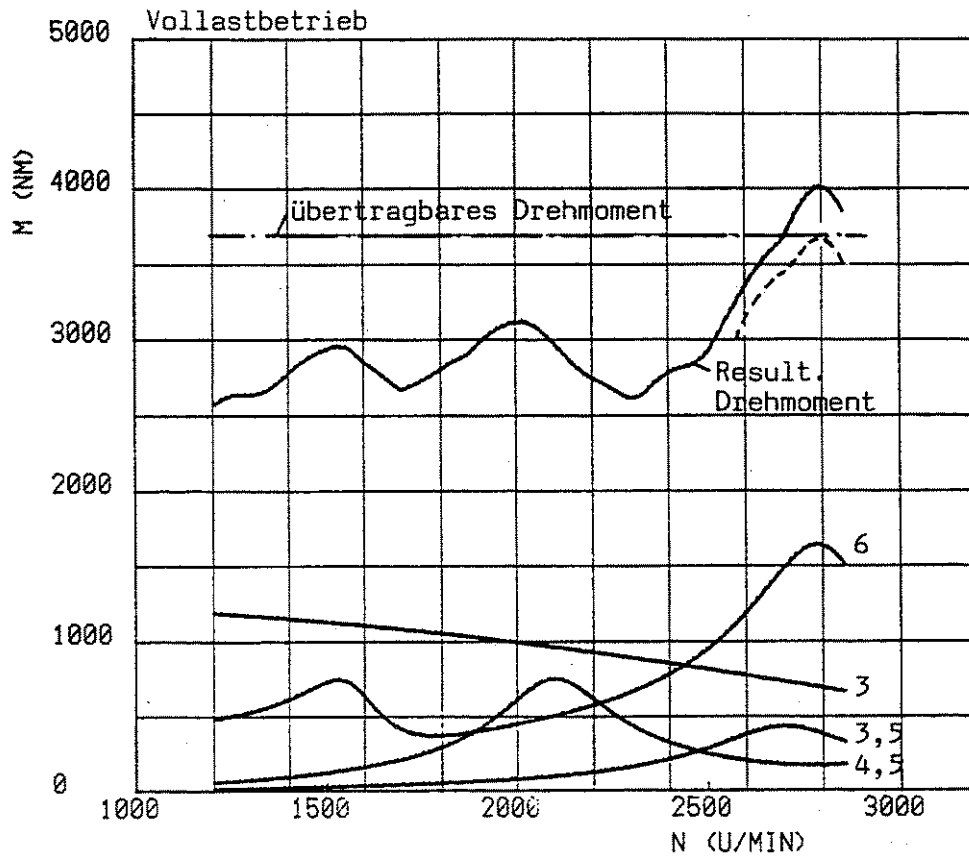


Figura A.6: Torque atuante entre o volante e o 6° cilindro das ordens mais significativas

Comparando-se as figuras A.3, A.4, A.5 e A.6, podemos verificar que a metodologia proposta neste trabalho é válida, visto que os resultados obtidos são muito semelhantes.

Apêndice B

Listagem do programa *Vybratorq*¹ escrito em *Matlab*®, desenvolvido para a realização das análises de vibrações torcionais.

¹ Programa registrado no INPI sob a numeração provisória: 00064704.

```

clc
clear all
close all
format short

%Dados de entrada
disp('PROGRAMA PARA O CÁLCULO DAS VIBRAÇÕES TORCIONAIS DE ÁRVORES DE
MANIVELAS');
disp(' ');
disp(' ');
disp('Especificação dos dados do motor:');
disp(' ');
ma=input('Massas alternativas [kg]: ');
disp(' ');
L=input('Comprimento da biela [mm]: ');
disp(' ');
s=input('Curso do pistão [mm]: ');
disp(' ');
d=input('Diâmetro do pistão [mm]: ');
disp(' ');
ord_ign=input('Sequência de ignição (entre colchetes, separado por espaços):
');
disp(' ');
n=input('Numero de inércias: ');
disp(' ');
rpm_min=input('Rotação mínima a ser considerada [rpm]: ');
disp(' ');
rpm_max=input('Rotação máxima a ser considerada [rpm]: ');
disp(' ');
int_rpm=input('Intervalo entre rotações [rpm]: ');
disp(' ');
Tcap_polia=input('Torque mínimo capaz de ser transmitido pelo lado da polia
[N.m]: ');
disp(' ');
Tcap_volante=input('Torque mínimo capaz de ser transmitido pelo lado do
volante [N.m]: ');
disp(' ');

```

```

Tipo_damper=input('Tipo de analise: (1)Sem damper; (2)Damper de borracha
simples; (3)Damper de borracha duplo: ');
disp(' ');
disp(' ');
disp('Especificação das inércias, iniciando pelo amortecedor de vibrações
[kg.m²]:')
for w=1:n
    a=['I ' num2str(w) ' = '];
    disp(a);
    I(w)=input('');
    disp(' ');
end
disp(' ');
disp('Especificação da rigidez torcional entre as inércias [N.m/rad]:')
for w=1:n-1
    a=['Kt ' num2str(w) ' = '];
    disp(a);
    kt(w)=input('');
    disp(' ');
end
disp(' ');
disp('Especificação do amortecimento absoluto nas inércias [N.m.s/rad]:')
for w=1:n
    a=['Ca ' num2str(w) ' = '];
    disp(a);
    c_abs(w)=input('');
    disp(' ');
end
disp(' ');
if Tipo_damper==2 | Tipo_damper==3
    d_motor=input('Fator de perda do virabrequim: ');
    disp(' ');
    d_damper=input('Fator de perda da borracha do amortecedor de vibrações
torcionais: ');
    disp(' ');
    disp(' ');
end

```

```

%Matriz de inércia
%Inércia das massas alternativas
Ialt=(ma*(s/2)^2*(0.5+((s/2)/L)^2/8))/1000000;
for w=1:length(ord_ign)
    I(n-w)=I(n-w)+Ialt;
end
I=diag(I);
%Inércia de interesse para a plotagem dos gráficos (default: Polia do
virabrequim)
if Tipo_damper==3
    I_plot=3;
elseif Tipo_damper==2
    I_plot=2;
elseif Tipo_damper==1
    I_plot=1;
end

%Curvas experimentais de pressão de combustão (p x alfa)
Curvas_Pressao_Combustao_612_260cv
clc

%Autovalores e Autovetores
AV=inv(I)*Kt;
[Auto_Vetores,Auto_Valores]=eig(AV);
Freq=flipud(1/(2*pi)*(diag(Auto_Valores).^0.5));
disp('Frequências Naturais [Hz]')
format bank
Freq
format short
disp('Modos de Vibrar')
Matriz_Modal=fliplr(Auto_Vetores)

%Suavização dos trechos de transição
Smoothing

%Plotagem do gráfico
Graficos

```

```

%Sub-estrutura pressão de combustão (Curvas_Pressao_Combustao_612_260cv)
Step=(rpm_max-rpm_min)/int_rpm+1;
index_rotacao=1;
%Curva 1
rpm_inicial=rpm_min;
rpm_final=1100;
p=[0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.9  1.2  1.5  1.5
    1.5  1.7  1.9  1.7  1.9  2.2  2.2  2.2  2.4  2.4  2.6  2.9  2.6
    3.4  3.6  3.6  4.1  4.4  5.1  5.1  5.6  6  6.5  7.2  7.5  8.5
    9.2  10.2  11.2  12.4  13.6  15  16.5  18.4  20.4  22.8  25.5  28.4  31.7
    35.2  39  43.4  48  52.1  56.5  60.6  64  80.3  84.8  104.7  118.1
    130.2  139.2  139.4  133.1  127.5  121.5  111.3  102.3  94.8  85.1  78.3  70.5
    64.5  58.7  53.1  48.8  44.4  41  37.6  34.7  32  29.3  27.6  24.9  23.5
    22.1  20.3  19.4  18.2  17.2  16  15.3  14.3  13.9  12.4  11.6  11.4  10.7
    10.4  9.9  9.5  9.2  8.7  8.5  8  8  7.5  7.3  7  7  6.8  6.5  6.3
    6  6  5.8  5.8  5.5  5.3  5.1  5.3  5.1  4.8  4.8  5.1  4.6  4.6
    4.6  4.6  4.6  4.1  4.3  4.1  4.1  4.1  4.1  4.1  3.9  3.6  3.6  3.4
    3.1  2.9  3.1  2.7  2.7  2.4  2.2  2.2  2.2  1.9  1.5  1.5  1.2  0.9
    0.9  0.9  1.2  0.9  0.9  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros
    Calculo_Vibracoes_Torcionais

```

```

    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1
end
%Curva 2
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=1250;
p=[0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.9  0.9  1.2  1    1.2  1.5  1.5  1.5  1.7  1.7
    1.7  1.7  1.9  2.2  2.2  2.4  2.4  2.9  2.9  3.2  3.4  3.6  3.9
    4.1  4.4  4.6  4.8  5.3  5.5  6.3  6.5  7.5  8    8.7  9.5  10.4
    11.4 12.4 13.6 14.5 16    17.7 19.6 21.3 24    26.7 29.6 32.9
    36.8 40.7 45.6 50.4 55.5 60.8 66.2 71.1 75.4 78.8 88.9 94.8
    109.3 116.1 128.9 130.9 136.7 132.8 130.9 123.6 115.4 107.1 98.2 90.4
    82.4 75.2 69.1 62.8 57.9 52.8 48.7 44.6 40.9 37.8 35.1 32.5
    30.1 28.1 26.2 24.5 22.8 21.3 20.1 18.9 18.2 17.2 16.2 15.5
    14.5 14 13.3 12.6 12.1 11.4 11.4 10.7 10.4 9.9 9.5 9.5 8.9
    8.5 8.2 8 7.7 7.5 7.5 7.3 7 7 6.8 6.8 6.5 6.3 5.8
    6 5.8 6 5.8 5.8 5.5 5.5 5.5 5.3 5.3 5.3 5.3 5 5 5
    4.8 4.6 4.8 4.6 4.4 4.4 4.1 3.8 3.6 3.4 3.2 2.9 2.9
    2.7 2.7 2.4 2.2 2.2 1.9 1.7 1.5 1.5 1.2 1.2 0.9 0.9
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros

```

```

    Calculo_Vibracoes_Torcionais
    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1
end
%Curva 3
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=1400;
p=[0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.9    0.9
    0.9    0.9    0.9    0.9    0.9    0.9    0.9    0.9    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2
    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.5    1.2    1.5    1.7    1.5    1.7    1.7
    1.7    1.7    1.9    2.2    2.4    2.4    2.7    2.9    2.9    3.1    3.4    3.6    3.9
    4.4    4.4    4.8    5.1    5.8    6.1    6.5    7    7.5    8.2    8.7    9.5    10.4
    11.6    12.6    13.8    15.5    16.7    18.7    20.6    22.8    25.2    28.1    31.3    34.9
    38.8    43.1    47.8    52.8    58.2    63.8    69.3    74.2    78.8    82.4    87.5    97.2
    102.5    115.2    120    128.9    128.7    131.4    126.8    124.8    116.2    109.8    99.6    93.1
    83.6    77.8    70.3    64.5    59.1    54.1    50.2    45.6    42.4    39.5    36.1    33.7
    31.3    29.1    27.4    25.5    23.6    22.3    21.1    19.9    18.7    17.7    16.8    16.2    15
    14.5    13.8    13.1    12.6    11.9    11.4    10.9    10.4    10.2    9.9    9.5    9.2    8.9
    8.5    8.5    8    8    7.5    7.3    7    7    6.8    6.8    6.5    6.3    6.3    6    6    5.8
    5.6    5.6    5.6    5.6    5.3    5.6    5.1    5.3    5.3    5.1    5.1    4.8    4.8
    4.4    4.6    4.4    4.1    3.9    3.9    3.9    3.6    3.6    3.1    3.1    2.9    2.9
    2.7    2.7    2.4    2.2    2.2    1.7    1.7    1.5    1.5    1.5    1.2    1.2    1.2
    0.9    0.9    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao

```

```

Serie_de_Fourier_Cilindros
Calculo_Vibracoes_Torcionais
index_rotacao=index_rotacao+1;
clc
Step=Step-1
end
%Curva 4
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=1800;
p=[0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.5  0.7  0.7  0.7  0.7  1  1.2  1  1.2  1.2  1.5  1.2  1.5  1.7
    1.7  1.9  2.2  2.4  2.7  2.7  2.7  2.9  3.1  3.1  3.6  3.6  3.9
    4.4  4.6  5.1  5.3  6.3  6.8  7.3  7.8  9  9.5  10.4  11.4  12.6
    13.8  15.3  17  18.7  20.8  23  25.5  28.4  31.7  35.4  39.5  44.1  48.7
    54.3  59.6  65.7  72  77.8  83.6  88.5  92.8  102.3  108.1  116.6  128.7  132.6
    140.6  140.1  141.1  136  131.6  126.3  117.3  109.6  100.1  91.9  84.1  76.6
    70.5  64.2  58.9  53.8  49.2  45.3  41.9  38.5  35.9  33.2  30.8  28.8
    26.9  25.2  23.8  22.3  20.6  19.6  18.6  17.7  16.5  15.8  14.8  14  13.3
    12.8  12.4  11.9  11.6  10.9  10.4  10.2  9.7  9.2  9  8.5  8.2  8  7.8
    7.5  7.3  7  6.8  6.5  6.5  6.3  6  5.8  5.8  5.8  5.6  5.3  5.3
    5.3  5.1  5.3  5.1  4.8  5  5  5.1  4.8  4.8  4.6  4.4  3.9  3.9
    3.9  3.9  3.6  3.6  3.4  3.1  3.1  2.7  2.7  2.4  2.4  2.2  2.2
    1.9  1.7  1.4  1.4  1.2  1.2  1  1  0.7  1  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final

```

```

Calculo_Torque_Excitacao
Serie_de_Fourier_Cilindros
Calculo_Vibracoes_Torcionais
index_rotacao=index_rotacao+1;
clc
Step=Step-1
end
%Curva 5
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=1900;
p=[0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  1  1  1  1  1
    1.2  1  1.2  1.5  1.5  1.7  1.7  1.7  1.9  1.9  2.2  2.2  2.2
    2.4  2.7  2.9  2.9  3.4  3.4  3.6  3.9  4.1  4.6  4.6  5.1  5.6
    5.8  6.3  6.8  7  7.6  8.5  9  9.9  10.9  11.9  13.1  14.3  15.8
    17.2  18.9  20.8  23 25.5 28.4 31.5 34.9 38.8 43.4 48.2 53.6 59.9
    66.2  73 80 86.8 93.3 99.1 105.4 115.6 121.9 129.7 139.9 145.5 147.4
    149.1 147.4 142.5 137.9 129.7 121.4 114.7 107.1 98.7 90.1 83.9 76.8
    70.5  65.2  60.1  55.5  51.1  47.5  43.6  40.2  37.8  35.1  33 30.8 28.8
    27.1  25.5  24 22.8 21.6 20.4 19.1 18.4 17.5 16.5 15.8 15.3 14.5
    13.8  13.3  12.8  12.1  11.9  11.4  11.1  10.9  10.7  9.9  9.9  9.7  9.2
    9  8.7  8.5  8.2  8.2  8  7.7  7.5  7.3  7  7  6.5  6.5  6.5  6.5
    6.5  6.8  6.3  6.3  6.3  6.3  6  5.8  6  5.8  5.6  5.3  5.3  5.1
    5.1  4.8  4.6  4.4  4.4  4.1  3.9  3.6  3.6  3.4  3.1  2.9  2.9
    2.7  2.4  2.4  2.2  1.9  1.9  2.2  1.5  1.5  1.5  1.4  1.2  1.4
    1.2  1.5  1.2  1.4  1.2  0.9  0.9  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7];

```

```

for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros
    Calculo_Vibracoes_Torcionais
    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1

```

```
end
```

```
%Curva 6
```

```
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
```

```
rpm_final=2200;
```

```

p=[0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  1  1  1  0.7  1  1  1  1  1  1  1.2  1  1.5  1.5  1.7
    1.9  1.9  1.9  1.9  1.9  2.2  2.2  2.2  2.7  2.7  2.9  2.9  3.1
    3.1  3.4  3.6  3.9  4.1  4.6  4.6  4.8  5.3  5.8  6  6.5  7.3
    7.7  8.5  9.2  9.9  10.9 11.6 12.6 13.8 15.3 17 18.7 24 22.5
    25.2 27.9 31 34.4 38.5 43.1 48.2 53.8 59.6 66.2 73.2 80.2 86.8
    93.3 98.7 108.8 120.7 127.5 136.5 148.6 152.7 154.2 156.6 153.7 146.4
    140.6 134.3 125.8 117.6 109.6 100.1 91.9 84.8 77.8 70.8 65 59.9 55
    50.7 47 43.6 40.2 37.3 34.7 32.5 30.3 28.4 26.7 25 23.8 22.3
    20.8 19.9 18.9 17.9 17 16.2 15.3 14.5 13.8 13 12.6 12.1 11.9
    11.4 10.9 10.7 10.7 9.9 9.7 9.5 9 9 8.7 8.5 8.2 8 7.7
    7.5 7.5 7.3 7.3 7 7 6.8 6.5 6.5 6.3 6.3 6 6 6 5.8
    5.8 5.8 5.6 5.6 5.3 5.6 5 5.3 5.3 4.8 4.8 4.6 4.6
    4.4 4.1 3.9 3.9 3.6 3.6 3.6 3.4 3.4 3.1 2.9 2.7 2.7
    2.2 2.2 2.2 1.9 1.9 1.9 1.7 1.7 1.5 1.5 1.7 1.5 1.5
    1.5 1.5 1.5 1.5 1.7 1.2 1.5 1.5 1.2 1.5 1.5 1.5 1.5
    1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 1.5 0.9 0.9 0.9 0.9 0.9
    0.9 0.9 0.9 0.9 0.9 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
    0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7

```

```

0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros
    Calculo_Vibracoes_Torcionais
    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1
end
%Curva 7
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=2400;
p=[0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    1    1    1    1    1    1    1    0.7    1    1    1    1.2    1.2    1.2    1.5
    1.5    1.5    1.5    1.7    1.7    1.9    2.2    2.2    2.4    2.4    2.6    2.9    2.9
    3.1    3.4    3.6    3.9    4.1    4.4    4.6    5.1    5.3    5.8    6.5    6.8    7.3
    7.8    8.2    9.2    9.9    10.6    11.6    12.8    14.1    15.3    16.7    18.2    20.4
    22.3    24.5    26.9    30.3    33.5    37.1    41.5    46.3    51.6    57.7    63.8    70.5
    77.8    84.6    91    96.7    107.9    122.2    128    136.7    149.6    154    150.8    152.7    151.5
    142.1    135    130.7    121.7    111.8    103.5    96    87.8    79.8    73.5    67.9    62.3    56.7
    52.4    48.7    44.8    41.5    38.3    35.6    33.2    30.5    28.8    26.7    25.2    23.7
    22.3    21.3    19.9    18.9    17.9    16.7    16.2    15.8    14.8    14.3    13.6    13.1
    12.4    12.1    11.4    11.1    10.4    9.9    9.7    9.5    9.2    9    8.7    8.5    8    8
    7.5    7.5    7.5    7.3    7    7    6.8    6.8    6.5    6.5    6.3    6.3    6.3    6.3
    6    5.8    6    5.8    5.8    5.6    5.6    5.6    5.6    5.1    5.3    5.1    5.1    4.8
    4.8    4.8    4.6    4.6    4.4    4.4    4.1    3.9    3.9    3.6    3.4    3.1    2.9
    2.9    2.7    2.7    2.4    2.7    2.2    2.4    2.7    2.2    2.2    2.2    1.9    1.9
    1.7    1.9    1.7    1.7    1.7    1.7    1.7    1.7    1.9    1.5    1.5    1.7    1.5
    1.7    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.2    1.2
    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    0.9    0.9    0.9    0.9
    0.9    0.9    0.9    0.9    0.9    0.9    0.9    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7

```

```

0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
0.7    0.7    0.7    0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros
    Calculo_Vibracoes_Torcionais
    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1
end
%Curva 8
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=2600;
p=[0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7
    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.7    0.9
    0.9    0.9    1.5    1.5    1.2    1.2    1.5    1.2    1.2    1.5    1.7    1.7    1.7
    1.9    1.9    2.2    2.2    2.7    2.7    2.9    2.9    3.4    3.4    3.6    4.1    4.1
    4.6    5.1    5.3    5.8    6.3    6.8    7.5    8    8.5    9.5    10.2    10.9    12.1
    13.1    14.1    15.5    16.9    19.2    20.8    23.1    25.9    28.6    31.8    35.4    39.5
    43.9    49.2    54.3    60.4    66.4    72.9    80    86.1    91.4    100.6    115.1    122.2    129
    139.6    145.7    144.2    142.1    142.1    137.5    127.5    119.5    113    104    93.8    86.1
    79.3    72.7    66.2    60.4    55.5    51.1    46.8    42.9    39.5    36.6    34    31.5    28.8
    27.1    25.2    23.5    22.1    20.1    19.1    18.1    17.2    16.2    15.3    14.3    14    13.3
    12.8    12.1    11.6    11.1    10.7    10.2    9.7    9.5    9    8.7    8.5    8.2    8    7.8
    7.3    7    7    6.5    6.8    6.3    6.3    6.1    5.8    5.6    5.8    5.6    5.3    5.3
    5.1    5.3    4.8    5.1    4.8    4.8    4.8    4.4    4.5    4.6    4.6    4.4    4.4
    4.1    4.1    4.1    4.1    3.9    3.9    3.6    3.6    3.4    3.4    3.4    3.4    3.1
    3.1    3.1    2.9    2.9    2.9    2.7    2.7    2.2    2.2    1.7    1.9    1.7    1.9
    1.9    1.7    1.5    1.5    1.7    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5    1.5
    1.5    1.5    1.5    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2
    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    1.2    0.9    0.9    0.9

```

```

0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.9  0.7
0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros
    Calculo_Vibracoes_Torcionais
    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1
end
%Curva 9
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=2700;
p=[0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.5  1  1  1
    1  1.2  1.2  1.5  1.5  1.7  1.7  1.9  2.2  2.4  2.4  2.9  2.9
    3.4  3.6  3.9  4.1  4.6  5.1  5.3  6.1  6.3  7  7.8  8.5  9.5
    10.2  11.1  12.4  13.6  15.3  17.2  18.9  21.3  23.5  26.4  29.3  32.7
    36.4  40.5  44.8  49.7  54.3  59.4  63.8  67.9  75.6  89.9  96.2  97.2
    99.4  106.9  109.8  103.8  95.8  91.9  88.7  80.5  71.3  64.7  60.1  54.8
    49.2  43.6  39.8  36.5  33.2  29.8  27.1  24.5  22.8  20.8  19.1  17.4
    16.2  14.8  13.8  12.6  11.9  10.9  10.2  9.5  9  8.2  8  7.3  7  6.3
    6.3  5.6  5.3  5.1  5.1  4.6  4.6  4.1  4.1  4.1  3.6  3.4  3.4
    3.1  2.9  2.7  2.7  2.4  2.7  2.4  2.4  2.2  2.4  1.9  2.2  2.2
    2.2  1.9  1.9  1.7  1.7  1.7  1.7  1.7  1.9  1.5  1.7  1.5  1.7
    1.5  1.7  1.5  1.5  1.5  1.2  1.2  1.2  1.2  1.4  1.2  1.1  1
    1.2  1  1.2  0.7  1  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7
    0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7  0.7

```

```

0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros
    Calculo_Vibracoes_Torcionais
    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1
end
%Curva 10
rpm_inicial=rpm_final+int_rpm;
rpm_final=rpm_max;
p=[0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.5 0.7 0.7 1 1 1.2 1.2 1.5 1.7 1.9
2.2 2.2 2.4 2.7 2.9 3.4 3.6 4.1 4.6 5.1 5.8 6.1 6.5
7.5 8.5 9.2 10.2 11.1 12.6 13.8 15.5 17.2 19.1 21.6 24.2
26.9 30.1 33.2 36.8 40.7 44.4 47.8 50.7 53.3 55.5 58.7 63.8
72.2 70.8 64 59.1 58.7 57.5 52.4 45.1 40 37.1 34.4 30.8 27.1 24
21.8 20.1 18.2 16.5 14.5 13.1 11.9 10.9 9.9 9.2 8 7.5 6.8
6.3 5.8 5.3 4.8 4.4 4.1 3.9 3.4 3.1 3.1 2.7 2.4 2.2
2.2 1.7 1.9 1.5 1.5 1.2 1.5 1.2 1.2 0.7 1 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7

```

```

0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7
0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7 0.7];
for rotacao=rpm_inicial:int_rpm:rpm_final
    Calculo_Torque_Excitacao
    Serie_de_Fourier_Cilindros
    Calculo_Vibracoes_Torcionais
    index_rotacao=index_rotacao+1;
    clc
    Step=Step-1
end

%Sub-estrutura para cálculo do torque resultante (Calculo_Torque_Excitacao)
clear Mtemp Mt
ALFA=0;
for w=1:length(p)
    BETA=asin((s/2)/L)*sin(ALFA);
    Fg=9.8*p(w)*1.0197*((pi*(d/10)^2)/4);
    Ftg=Fg*sin(ALFA+BETA)/cos(BETA);
    Fi=ma*(s/2000)*(2*pi*rotacao/60)^2*(cos(ALFA)+((s/2)/L)*cos(2*ALFA)+...
        (1/4)*((s/2)/L)^3*cos(4*ALFA)+(9/128)*((s/2)/L)^5*cos(6*ALFA));
    Fti=Fi*sin(ALFA+BETA)/cos(BETA);
    Mtemp(w)=(Ftg-Fti)*s/2000;
    ALFA=ALFA+(720/length(p))*pi/180;
end
Cn=1/length(Mtemp)*fft(Mtemp);
ALFA=0:(720/length(p))*(pi/180):4*pi-(720/length(p))*(pi/180);
Mt=zeros(length(ord_ign),length(ALFA));
index_torque=1;
i=sqrt(-1);
for GAMA=0:(720/length(ord_ign))*(pi/180):4*pi-(720/length(p))*(pi/180);
    for w=2:25
        for j=1:length(ALFA)
            Mt(index_torque,j)=Mt(index_torque,j)+abs(Cn(w))*exp(i*((w-1)/2)*(ALFA(j)-GAMA));
        end
    end
end

```

```

        end
        index_torque=index_torque+1;
    end
    Mt=Mt+Cn(1);

%Sub-estrutura para expansão em série de Fourier (Serie_de_Fourier_Cilindros)
clear Cn
if length(ord_ign)==3
    Cn(length(I)-3,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(3),:)); %Cilindro 1
    Cn(length(I)-2,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(2),:)); %Cilindro 2
    Cn(length(I)-1,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(1),:)); %Cilindro 3
    Cn(length(I),:)=0; %Volante
end
if length(ord_ign)==4
    Cn(length(I)-4,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(2),:)); %Cilindro 1
    Cn(length(I)-3,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(4),:)); %Cilindro 2
    Cn(length(I)-2,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(3),:)); %Cilindro 3
    Cn(length(I)-1,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(1),:)); %Cilindro 4
    Cn(length(I),:)=0; %Volante
end
if length(ord_ign)==6
    Cn(length(I)-6,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(6),:)); %Cilindro 1
    Cn(length(I)-5,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(5),:)); %Cilindro 2
    Cn(length(I)-4,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(4),:)); %Cilindro 3
    Cn(length(I)-3,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(3),:)); %Cilindro 4
    Cn(length(I)-2,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(2),:)); %Cilindro 5
    Cn(length(I)-1,:)=1/length(Mt)*fft(Mt(ord_ign(1),:)); %Cilindro 6
    Cn(length(I),:)=0; %Volante
end

%Sub-estrutura para cálculo das vibrações torcionais
(Calculo_Vibracoes_Torcionais)
i=sqrt(-1);
TETA_polia=0;
TETA_cilindro_1=0;
TETA_cilindro_6=0;
TETA_volante=0;
potencia_damper=0;

```

```

OMEGA=2*pi*rotacao/60;
b1=zeros(length(I),1);
t=linspace(0,2*60/rotacao,500);
for w=2:25
    Matriz_Amortecimento_Rigidez
    b2=inv(I)*Cn(1:length(I),w);
    b=[b1;b2];
    F=inv(i*((w-1)/2)*OMEGA*eye(2*length(I),2*length(I))-A);
    g=F*b;
    TETA_ordem_polia=2*abs(g(I_plot))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-angle(g(I_plot)));
    maximo_ordem(w,index_rotacao)=180/pi*max(TETA_ordem_polia);
    TETA_polia=TETA_polia+(2*abs(g(I_plot))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-angle(g(I_plot))));
    maximo_global(index_rotacao)=180/pi*max(abs(TETA_polia));
    Torque_Extremidades
    if Tipo_damper==2 | Tipo_damper==3
        Potencia_Damper
    end
end

%Sub-estrutura para determinação das matrizes de amortecimento e rigidez
(Matriz_Amortecimento_Rigidez)
%Matriz de amortecimento relativo
if Tipo_damper==1
    for j=1:length(I)-1
        c_rel(j)=d_motor*kt(j)/(2*pi*((w-1)/2)*rotacao/60);
    end
    Cr(1,1)=c_rel(1);
    Cr(length(I),length(I))=c_rel(length(I)-1);
    for j=2:length(I)-1
        Cr(j,j)=c_rel(j-1)+c_rel(j);
    end
    for j=1:length(I)-1
        Cr(j,1+j)=-c_rel(j);
        Cr(1+j,j)=-c_rel(j);
    end
elseif Tipo_damper==2
    for j=2:length(I)-1

```

```

        c_rel(j)=d_motor*kt(j)/(2*pi*((w-1)/2)*rotacao/60);
    end
    c_rel(1)=d_damper*kt(1)/(2*pi*((w-1)/2)*rotacao/60);
    Cr(1,1)=c_rel(1);
    Cr(length(I),length(I))=c_rel(length(I)-1);
    for j=2:length(I)-1
        Cr(j,j)=c_rel(j-1)+c_rel(j);
    end
    for j=1:length(I)-1
        Cr(j,1+j)=-c_rel(j);
        Cr(1+j,j)=-c_rel(j);
    end
elseif Tipo_damper==3
    for j=3:length(I)-1
        c_rel(j)=d_motor*kt(j)/(2*pi*((w-1)/2)*rotacao/60);
    end
    c_rel(1)=d_damper*kt(1)/(2*pi*((w-1)/2)*rotacao/60);
    c_rel(2)=d_damper*kt(2)/(2*pi*((w-1)/2)*rotacao/60);
    Cr(1,1)=c_rel(1);
    Cr(length(I),length(I))=c_rel(length(I)-1);
    for j=2:length(I)-1
        Cr(j,j)=c_rel(j-1)+c_rel(j);
    end
    for j=1:length(I)-1
        Cr(j,1+j)=-c_rel(j);
        Cr(1+j,j)=-c_rel(j);
    end
    Cr(1,2)=0;
    Cr(2,1)=0;
    Cr(2,2)=c_rel(2);
    Cr(1,3)=-c_rel(1);
    Cr(3,1)=-c_rel(1);
    Cr(3,3)=c_rel(3)+c_rel(2)+c_rel(1);
    Cr(3,4)=-c_rel(3);
end
%Matriz de amortecimento absoluto
Ca=diag(c_abs);
%Matriz de amortecimento

```

```

C=Ca+Cr;
%Matriz de rigidez
Kt(1,1)=kt(1);
Kt(length(I),length(I))=kt(length(I)-1);
for j=2:length(I)-1
    Kt(j,j)=kt(j-1)+kt(j);
end
for j=1:length(I)-1
    Kt(j,1+j)=-kt(j);
    Kt(1+j,j)=-kt(j);
end
if Tipo_damper==3
    Kt(1,2)=0;
    Kt(2,1)=0;
    Kt(2,2)=kt(2);
    Kt(1,3)=-kt(1);
    Kt(3,1)=-kt(1);
    Kt(3,3)=kt(3)+kt(2)+kt(1);
    Kt(3,4)=-kt(3);
end
%Matriz de estado
A1=zeros(length(I),length(I));
A2=eye(length(I));
A3=-inv(I)*Kt;
A4=-inv(I)*C;
A=[A1 A2;A3 A4];

%Sub-estrutura para cálculo do torque atuante nas extremidades da árvore de
manivelas (Torque_Extremidades)
%Extremidade do damper
TETA_ordem_cilindro_1=2*abs(g(I_plot+1))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(I_plot+1)));
DELTA_ordem_cilindro_1=TETA_ordem_polia-TETA_ordem_cilindro_1;
torque_ordem_cilindro_1(w,index_rotacao)=max(abs(DELTA_ordem_cilindro_1))*kt(I
_plot);
TETA_cilindro_1=TETA_cilindro_1+(2*abs(g(I_plot+1))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(I_plot+1))));
DELTA_cilindro_1=TETA_polia-TETA_cilindro_1;

```

```

torque_cilindro_1(index_rotacao)=max(abs(DELTA_cilindro_1.*kt(I_plot)));
torque_polia_max(index_rotacao)=Tcap_polia;
%Extremidade do volante
TETA_ordem_cilindro_6=2*abs(g(length(I)-1))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(length(I)-1)));
TETA_ordem_volante=2*abs(g(length(I)))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(length(I))));
DELTA_ordem_volante=TETA_ordem_cilindro_6-TETA_ordem_volante;
torque_ordem_volante(w,index_rotacao)=max(abs(DELTA_ordem_volante))*kt(length(
I)-1);
TETA_cilindro_6=TETA_cilindro_6+(2*abs(g(length(I)-1))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(length(I)-1))));
TETA_volante=TETA_volante+(2*abs(g(length(I)))*cos(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(length(I)))));
DELTA_volante=TETA_cilindro_6-TETA_volante;
torque_volante(index_rotacao)=max(abs(DELTA_volante.*kt(length(I)-
1)))+length(ord_ign)*real(Cn(length(I)-1,1));
torque_volante_max(index_rotacao)=Tcap_volante;

%Sub-estrutura para cálculo da potência dissipada pelo damper
(Potencia_Damper)
%Carga no damper ordem
OMEGA_anel=-2*abs(g(I_plot-1))*((w-1)/2)*OMEGA*sin(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(I_plot-1)));
OMEGA_polia=-2*abs(g(I_plot))*((w-1)/2)*OMEGA*sin(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(I_plot)));
DELTA_OMEGA=OMEGA_anel-OMEGA_polia;
potencia_damper_ordem_n=mean((c_rel(I_plot-1)*DELTA_OMEGA).*DELTA_OMEGA);
potencia_damper_ordem(w,index_rotacao)=potencia_damper_ordem_n;
%Carga no damper global
OMEGA_anel=-2*abs(g(I_plot-1))*((w-1)/2)*OMEGA*sin(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(I_plot-1)));
OMEGA_polia=-2*abs(g(I_plot))*((w-1)/2)*OMEGA*sin(((w-1)/2)*OMEGA*t-
angle(g(I_plot)));
DELTA_OMEGA=OMEGA_anel-OMEGA_polia;
potencia_damper=potencia_damper+mean((c_rel(I_plot-
1)*DELTA_OMEGA).*DELTA_OMEGA);
potencia_damper_global(index_rotacao)=potencia_damper;

```

```

%Sub-estrutura para suavização das curvas (Smoothing)
%Suavização das curvas das amplitudes de vibração por ordem
x=1:length(maximo_ordem);
xx=1:0.3:length(maximo_ordem);
for w=2:25
    yy_ordem(w,:)=interp1(x,maximo_ordem(w,:),xx,'spline');
    yy_torque_ordem_volante(w,:)=interp1(x,torque_ordem_volante(w,:),xx,'spline');
    yy_torque_ordem_cilindro_1(w,:)=interp1(x,torque_ordem_cilindro_1(w,:),xx,'spline');
    if Tipo_damper==2 | Tipo_damper==3
        yy_potencia_damper_ordem(w,:)=interp1(x,potencia_damper_ordem(w,:),xx,'spline');
    end
end
maximo_ordem=abs(yy_ordem);
torque_ordem_volante=abs(yy_torque_ordem_volante);
torque_ordem_cilindro_1=abs(yy_torque_ordem_cilindro_1);
if Tipo_damper==2 | Tipo_damper==3
    potencia_damper_ordem=abs(yy_potencia_damper_ordem);
end
%Suavizacao das curvas das amplitudes de vibração global
yy_global=interp1(x,maximo_global,xx,'spline');
yy_torque_volante=interp1(x,torque_volante,xx,'spline');
yy_torque_cilindro_1=interp1(x,torque_cilindro_1,xx,'spline');
yy_torque_polia_max=interp1(x,torque_polia_max,xx,'spline');
yy_torque_volante_max=interp1(x,torque_volante_max,xx,'spline');
maximo_global=yy_global;
torque_volante=yy_torque_volante;
torque_cilindro_1=yy_torque_cilindro_1;
torque_polia_max=yy_torque_polia_max;
torque_volante_max=yy_torque_volante_max;
if Tipo_damper==2 | Tipo_damper==3
    yy_potencia_damper=interp1(x,potencia_damper_global,xx,'spline');
    potencia_damper_global=yy_potencia_damper;
end
end

```

```

%Sub-estrutura para plotagem dos gráficos (Graficos)
%Amplitudes das vibrações torcionais
figure
maximo_ordem=transpose(maximo_ordem);
rpm=linspace(rpm_min,rpm_max,length(maximo_ordem));
plot(rpm,maximo_ordem(:,2),'b-')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,3),'g-')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,4),'r-')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,5),'c-')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,6),'m-')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,7),'y-')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,8),'k-')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,9),'b:')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,10),'g:')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,11),'r:')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,12),'c:')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,13),'m:')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,14),'y:')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,15),'k:')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,16),'g:.'')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,17),'r:.'')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,18),'c:.'')

```

```

hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,19),'m-.')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,20),'y-.')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,21),'k-.')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,22),'b-.')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,23),'g-.')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,24),'r-.')
hold on
plot(rpm,maximo_ordem(:,25),'c-.')
hold on
plot(rpm,maximo_global,'b.-')
hold on
grid on
title('Torsional vibrations amplitudes')
xlabel('Engine Speed [1/min]')
ylabel('Amplitude [deg]')
legend('0,5','1','1,5','2','2,5','3','3,5','4','4,5','5','5,5','6','6,5','7','7,5','8','8,5','9','9,5','10','10,5','11','11,5','12','Global')
hold off
%Torque atuante na extremidade do volante
figure
torque_ordem_volante=transpose(torque_ordem_volante);
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,2),'b-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,3),'g-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,4),'r-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,5),'c-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,6),'m-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,7),'y-')

```

```

hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,8),'k-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,9),'b:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,10),'g:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,11),'r:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,12),'c:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,13),'m:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,14),'y:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,15),'k:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,16),'g:.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,17),'r:.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,18),'c:.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,19),'m:.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,20),'y:.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,21),'k:.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,22),'b-.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,23),'g-.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,24),'r-.'')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_volante(:,25),'c-.'')
hold on
plot(rpm,torque_volante,'b-.'')

```

```

hold on
plot(rpm,torque_volante_max,'k.-')
grid on
title('Crankshaft rear end actuating torque')
xlabel('Engine Speed [1/min]')
ylabel('Torque [N.m]')
legend('0,5','1','1,5','2','2,5','3','3,5','4','4,5','5','5,5','6','6,5','7','7,5','8','8,5','9','9,5','10','10,5','11','11,5','12','Global','Permissible')
hold off
%Torque atuante na extremidade do damper
figure
torque_ordem_cilindro_1=transpose(torque_ordem_cilindro_1);
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,2),'b-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,3),'g-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,4),'r-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,5),'c-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,6),'m-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,7),'y-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,8),'k-')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,9),'b:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,10),'g:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,11),'r:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,12),'c:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,13),'m:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,14),'y:')
hold on

```

```

plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,15),'k:')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,16),'g:~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,17),'r:~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,18),'c:~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,19),'m:~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,20),'y:~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,21),'k:~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,22),'b-~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,23),'g-~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,24),'r-~')
hold on
plot(rpm,torque_ordem_cilindro_1(:,25),'c-~')
hold on
plot(rpm,torque_cilindro_1,'b-~')
hold on
plot(rpm,torque_polia_max,'k-~')
grid on
title('Crankshaft front end actuating torque')
xlabel('Engine Speed [1/min]')
ylabel('Torque [N.m]')
legend('0,5','1','1,5','2','2,5','3','3,5','4','4,5','5','5,5','6','6,5','7','7,5','8','8,5','9','9,5','10','10,5','11','11,5','12','Global','Permissible')
hold off
%Carga no damper
if Tipo_damper==2 | Tipo_damper==3
    figure
    potencia_damper_ordem=transpose(potencia_damper_ordem);
    plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,2),'b-')
    hold on

```

```

plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,3),'g-')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,4),'r-')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,5),'c-')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,6),'m-')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,7),'y-')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,8),'k-')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,9),'b:')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,10),'g:')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,11),'r:')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,12),'c:')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,13),'m:')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,14),'y:')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,15),'k:')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,16),'g:.'')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,17),'r:.'')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,18),'c:.'')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,19),'m:.'')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,20),'y:.'')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,21),'k:.'')
hold on

```

```

plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,22),'b-.')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,23),'g-.')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,24),'r-.')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_ordem(:,25),'c-.')
hold on
plot(rpm,potencia_damper_global,'b-.')
grid on
title('Damper load')
xlabel('Engine Speed [1/min]')
ylabel(' [W] ')
legend('0,5','1','1,5','2','2,5','3','3,5','4','4,5','5','5,5','6','6,5','7','7,5','8','8,5','9','9,5','10','10,5','11','11,5','12','Global')
hold off
end

```

Apêndice C

A teoria contida nesta tese de mestrado foi utilizada na a elaboração do Paper: Dimensionamento Estrutural da Árvore de Manivelas de um Motor Diesel de Alta Potência (SAE 2003-01-3530) apresentado no Congresso SAE 2003, vide referência [25].

O trabalho obteve o certificado de Menção Honrosa na categoria “Motores” do referido congresso.

Dimensionamento Estrutural da Árvore de Manivelas de um Motor Diesel de Alta Potência

Alexandre Schalch Mendes
Luiz Fernando Raminelli
Marcelo Peregrina Gomez
MWM Motores Diesel Ltda.

Copyright © 2003 Society of Automotive Engineers, Inc

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo o dimensionamento estrutural da árvore de manivelas de um motor Diesel de quatro cilindros, quatro tempos, considerando as cargas geradas pela combustão, inércias e vibrações torcionais, desconsiderando a utilização do amortecedor de vibrações acoplado ao componente.

Essas condições de contorno serão aplicadas a um modelo de elementos finitos para a verificação do ciclo de fadiga atuante, para que finalmente, seja avaliado o coeficiente de segurança do componente.

INTRODUÇÃO

Uma árvore de manivelas está sujeita a uma série de esforços dinâmicos que atuam de forma periódica, gerando vibrações e conseqüentemente tensões, as quais deverão ser quantificadas para que possamos assegurar a integridade estrutural do componente.

Atualmente, devido às exigências tanto técnicas quanto comerciais, existe a necessidade dos motores de combustão interna operar com pressões de combustão cada vez mais elevadas, utilizando-se componentes que devem ser otimizados da melhor forma possível.

Os métodos modernos de cálculo permitem uma precisa avaliação dos níveis de tensões atuantes nas árvores de manivelas, bem como a verificação da sua resistência à fadiga. Desse modo, é possível obter coeficientes de segurança que garantam uma confiabilidade suficiente para que não ocorram falhas de campo, bem como evitar o super dimensionamento dos componentes.

CINEMÁTICA DO SISTEMA BIELA-MANIVELA

Inicialmente, para que se entenda o comportamento dinâmico de um motor de vários cilindros, é necessária a compreensão e equacionamento cinemático para um motor de um único cilindro [1], [2], [3].

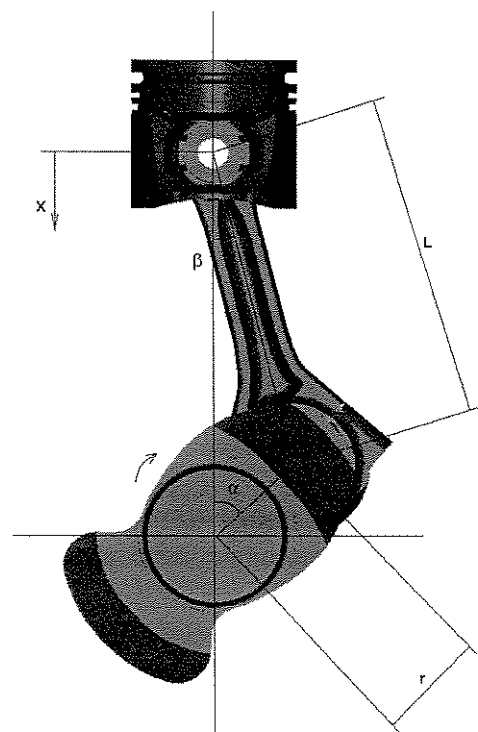


Figura 1: Sistema biela / manivela.

A posição instantânea do pistão em relação ao TDC pode ser escrita em função dos ângulos e dimensões destacados na figura 1:

$$x = (r + L) - (r \cdot \cos \alpha + L \cdot \cos \beta) \quad (1)$$

Agrupando os termos, temos:

$$x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot (1 - \cos \beta) \quad (2)$$

Podemos obter o ângulo β como sendo uma função do ângulo α . Chamando de λ a relação entre o meio curso da árvore de manivelas e o comprimento da biela, temos:

$$\sin \beta = \frac{r}{L} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \sin \beta = \lambda \cdot \sin \alpha ;$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha} \quad (3)$$

$$\therefore x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot (1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha}) \quad (4)$$

Expandindo em série a expressão da equação 3, temos:

$$\cos \beta = 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \cdot \sin^2 \alpha - \frac{1}{8} \lambda^4 \cdot \sin^4 \alpha - \frac{1}{16} \lambda^6 \cdot \sin^6 \alpha$$

Das relações trigonométricas, temos:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha ;$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cdot \cos 4\alpha ;$$

$$\sin^6 \alpha = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cdot \cos 2\alpha + \frac{3}{16} \cdot \cos 4\alpha - \frac{1}{32} \cdot \cos 6\alpha$$

Fazendo-se as devidas substituições na equação 4, chegaremos finalmente à seguinte expressão:

$$\cos \beta = 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \frac{\lambda^2}{4} \cdot \cos 2\alpha - \frac{\lambda^4}{64} \cdot \cos 4\alpha + \frac{\lambda^6}{512} \cdot \cos 6\alpha + \dots$$

Como λ é um número pequeno, os termos superiores à segunda ordem podem ser desprezados sem que haja um comprometimento com a precisão dos cálculos. Portanto, a expressão que descreve o movimento do pistão em relação ao TDC pode ser escrita como:

$$x = r \cdot (1 - \cos \alpha) + L \cdot \frac{\lambda^2}{4} (1 - \cos 2\alpha) \quad (5)$$

Podemos agora, obter as equações da velocidade e aceleração instantâneas do pistão, da seguinte maneira:

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dx}{d\alpha} ;$$

$$a = \ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dv}{d\alpha}$$

Onde ω é a velocidade angular da árvore de manivelas e pode ser expressa como:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n$$

Derivando a equação 5, teremos:

$$v = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot r \cdot (\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha) \quad (6)$$

Derivando a equação 6, teremos:

$$a = (2 \cdot \pi \cdot n)^2 \cdot r \cdot (\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha) \quad (7)$$

DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS DINÂMICOS

FORÇA DA COMBUSTÃO – É a força gerada pelos gases durante o processo da combustão. Com a curva da pressão interna do cilindro em função do ângulo da árvore de manivelas, é possível calcular a força instantânea atuante no pistão. Geralmente é interessante obter essas curvas por métodos experimentais.

As curvas $p=f(\alpha)$ variam de acordo com o regime de operação e a rotação do motor e podem ser obtidas através da utilização de um sensor de pressão, instalado geralmente no cabeçote do motor, de forma a medir a pressão no interior do cilindro. Um “trigger” e um sensor de rotações também são necessários para que se calcule o ângulo instantâneo da árvore de manivelas em relação ao TDC do pistão.

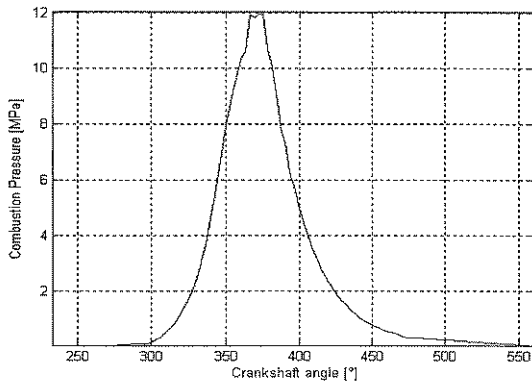


Figura 2: Curva $p = f(\alpha)$ para a condição de 2500 rpm.

A força atuante no pistão, para um determinado valor da pressão de combustão, pode ser obtida através da seguinte equação:

$$F_g = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad (8)$$

Onde d é o diâmetro do pistão.

FORÇAS DE INÉRCIA – Existem dois tipos de forças de inércia que atuam num sistema biela / manivela.

As massas envolvidas nesse tipo de sistema podem ser reduzidas e separadas basicamente em dois tipos, uma primeira que possui movimento puramente rotativo e outra que descreve um movimento alternativo. São essas massas que irão gerar os esforços que serão quantificados a seguir.

Força de Inércia Alternativa – São esforços decorrentes do movimento das massas alternativas (m_a). Estas massas podem ser consideradas como sendo a soma das massas do pistão incluindo pino, anéis, travas e a massa alternativa da biela.

Partindo do princípio onde $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$, teremos a seguinte expressão para obtenção da força de inércia alternativa:

$$F_a = m_a \cdot r \cdot \omega^2 \left(\cos \alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha - \frac{\lambda^3}{4} \cos 4\alpha + \frac{9\lambda^5}{128} \cos 6\alpha \right)$$

A consideração apenas dos termos de primeira e segunda ordem para o cálculo da força de inércia alternativa, não implica em uma redução na precisão dos cálculos.

A força tangencial de inércia pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$F_{ta} = F_a \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (9)$$

Força de Inércia Rotativa – São forças geradas pelas massas que possuem movimento puramente rotativo (m_r). Essas massas podem ser consideradas como sendo a soma da parte rotativa da biela e da manivela do virabrequim.

É importante observar, que dependendo do grau de balanceamento da árvore de manivelas, maiores ou menores serão as tensões geradas por esses esforços.

A força de inércia rotativa pode ser quantificada através da seguinte equação:

$$F_r = m_r \cdot r \cdot \omega^2 \quad (10)$$

A biela, como visto, pode ser dividida em duas massas equivalentes. Uma que irá descrever um movimento alternativo e outra de movimento rotativo puro.

De um modo geral podemos utilizar, sem comprometer a precisão nos cálculos, as seguintes relações:

$$\text{Massa alternativa da biela: } m_{ab} = \frac{1}{3} \cdot m_b$$

$$\text{Massa rotativa da biela: } m_{rb} = \frac{2}{3} \cdot m_b$$

Onde m_b é a massa total da biela, incluindo bronzinas, parafusos e bucha.

FORÇAS RESULTANTES NA ÁRVORE DE MANIVELAS – De acordo com a figura abaixo, podemos notar que com a decomposição da força no pistão, teremos duas componentes que irão atuar no moente da árvore de manivelas, uma radial que irá promover a flexão das manivelas gerando tensões elevadas nos raios dos moentes e munhões e uma outra componente que será a responsável pela geração de torque no motor.

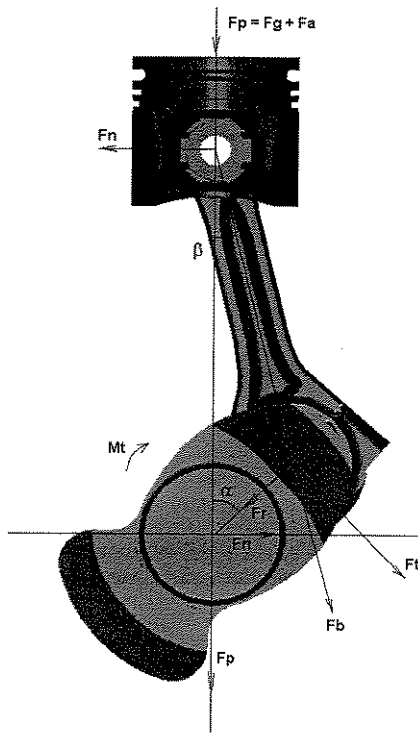


Figura 3: Esforços atuantes na árvore de manivelas.

A força tangencial decorrente da pressão de combustão será:

$$F_{tp} = F_g \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (11)$$

Podemos calcular agora a força tangencial resultante que atuará no moente da árvore de manivelas:

$$F_t = F_{tp} - F_{ta} \quad (12)$$

Considerando a próxima equação, é possível quantificar a força radial devido à combustão e seguindo a mesma metodologia, podemos calcular a força radial resultante considerando os efeitos das forças de inércia.

$$F_{rp} = F_g \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta} \quad (13)$$

Nas figuras abaixo, podemos observar a variação dessas forças em função do ângulo da árvore de manivelas.

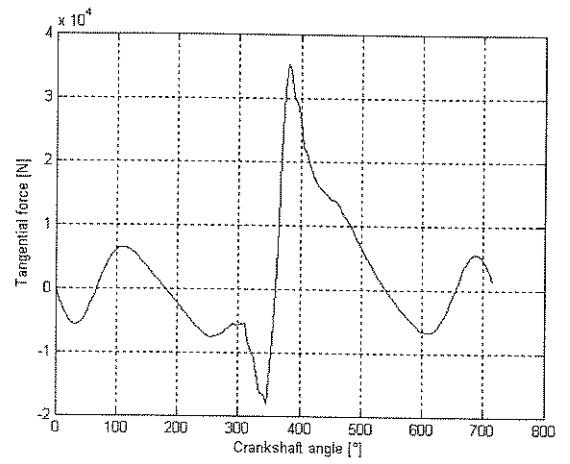


Figura 4: Força tangencial para a condição de 2500 rpm.

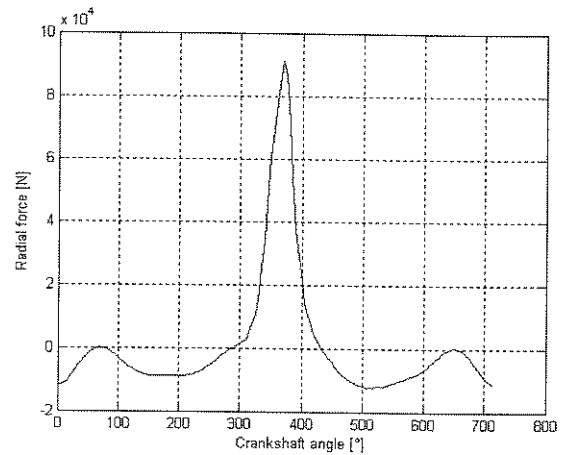


Figura 5: Força radial para a condição de 2500 rpm.

Podemos notar que o valor da força radial é consideravelmente superior ao da força tangencial e dessa forma, as tensões de flexão costumam ser maiores que as de torção.

Esta afirmação é verdadeira se partirmos do princípio que a árvore de manivelas seja projetada de tal forma, onde a excitação proveniente das forças tangenciais não irá gerar deslocamentos de grandes amplitudes e conseqüentemente tensões de cisalhamento elevadas.

Esse tipo de verificação é possível de ser realizada através de um cálculo que permita a obtenção das amplitudes decorrentes das vibrações.

O procedimento para esse tipo de cálculo será demonstrado a seguir.

VIBRAÇÕES TORCIONAIS – As árvores de manivelas estão sujeitas simultaneamente a vibrações axiais, flexionais e torcionais. Os métodos atuais de projeto consideram apenas os efeitos gerados pelas vibrações torcionais [4], [5], [6].

Atualmente, o projeto da árvore de manivelas deve prever sua utilização em aplicações onde são necessárias altas pressões de combustão, para que se atenda às normas atuais de emissões e aos altos torques e potências requeridas para os mais variados tipos de aplicações.

Esses fatores algumas vezes resultam em amplitudes de vibrações torcionais extremamente elevadas, gerando altas tensões de cisalhamento e comprometendo o projeto do componente.

Para reduzir essas tensões de cisalhamento, podem ser utilizados amortecedores de vibrações torcionais do tipo viscoso, histerético, etc., que são na sua maioria, fixados na parte anterior da árvore de manivelas. É possível ainda, modificar o formato das curvas de combustão, através dos recursos existentes nos sistemas de injeção eletrônica de combustível, de forma a prolongarmos o tempo de atuação da força tangencial na árvore de manivelas. Neste estudo, foi verificado que não existe a necessidade de utilizarmos o amortecedor de vibrações.

Modelo Matemático Equivalente – Para que possamos efetuar os cálculos, é necessário que seja montado um sistema massa/mola do tipo torcional que represente da melhor forma possível a árvore de manivelas em estudo.

Esse sistema, no caso de um motor de quatro cilindros, pode possuir seis graus de liberdade e ser representado da seguinte forma:

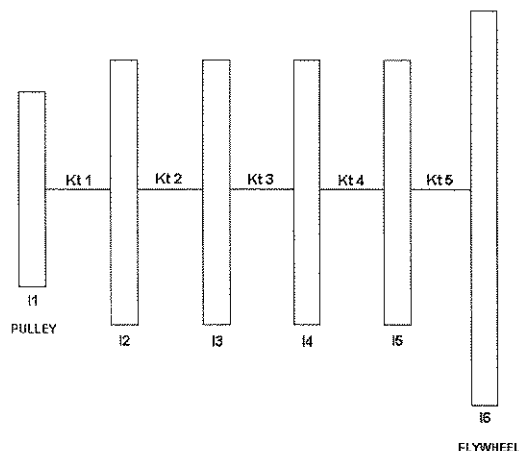


Figura 6: Modelo equivalente.

Os valores das inércias e rigidez torcional entre cada elemento podem ser obtidos através de softwares de CAD e CAE respectivamente e oferecem excelente precisão quando comparados aos valores obtidos experimentalmente.

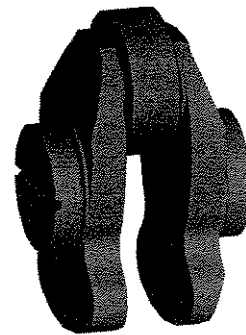


Figura 7: Modelo para obtenção da inércia de uma manivela.

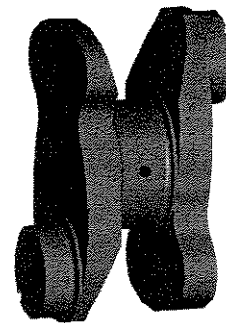


Figura 8: Modelo para obtenção da rigidez torcional entre as manivelas.

É importante observar que a inércia da massa rotativa da biela deve ser incorporada à inércia da manivela.

Autovalores e Autovetores – Partindo da equação diferencial para as vibrações mecânicas e valores das inércias e rigidezes obtidos, é possível pela análise modal, calcular as frequências naturais e modos de vibrar da árvore de manivelas.

Para vibrações mecânicas temos:

$$M \cdot \ddot{\theta}(t) + C \cdot \dot{\theta}(t) + K \cdot \theta(t) = T(t) \quad (14)$$

Onde $\theta(t)$ e $T(t)$ são vetores que representam respectivamente as amplitudes de vibração e o torque de excitação para cada inércia do sistema.

As matrizes de inércia, rigidez e amortecimento são montadas da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} Kt_1 & -Kt_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Kt_1 & Kt_1 + Kt_2 & -Kt_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Kt_2 & Kt_2 + Kt_3 & -Kt_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Kt_3 & Kt_3 + Kt_4 & -Kt_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Kt_4 & Kt_4 + Kt_5 & -Kt_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Kt_5 & Kt_5 \end{bmatrix}$$

A matriz de amortecimento pode ser obtida como sendo uma proporção das matrizes de inércia e rigidez, de acordo com a seguinte equação:

$$\mathbf{C} = \alpha \cdot [\mathbf{M}] + \beta \cdot [\mathbf{K}] \quad (15)$$

Como no nosso caso, não estamos considerando a utilização de anti-vibrador, e o material do virabrequim é isotrópico, a matriz de amortecimento pode ser considerada como sendo proporcional apenas à matriz de rigidez.

Portanto:

$$\mathbf{C} = \beta \cdot \mathbf{K}$$

O fator β utilizado nos cálculos foi ajustado a partir de comparações entre as amplitudes obtidas teoricamente e as medidas experimentalmente e seu valor é 0,000018.

As massas alternativas deverão ser substituídas por inércias equivalentes, as quais deverão possuir a mesma energia cinética do movimento dos pistões.

Utilizaremos nos cálculos a inércia média durante uma rotação da árvore de manivelas e seu valor pode ser quantificado através da seguinte equação:

$$I_{alt} = ma \cdot r^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda^2}{8} \right) \quad (16)$$

Com as matrizes definidas, podemos obter agora as frequências naturais e os modos de vibrar do componente, a partir das seguintes equações [7]:

$$\det[-\lambda^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]] = 0 \quad (17)$$

$$[-\lambda^2 [\mathbf{M}] + [\mathbf{K}]] \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (18)$$

Iremos obter, no nosso caso, 6 valores de λ^2 que satisfazem a condição imposta do determinante da equação 17. Esses valores representam o quadrado das frequências naturais do sistema.

Admitindo os valores das frequências naturais obtidas anteriormente e calculando o sistema de equações formado a partir da equação 18, é possível chegar às relações de deslocamentos que são os modos próprios de vibrar.

Cada modo correspondente a uma frequência natural, irá ser representado na forma de um vetor coluna $\{\mathbf{X}\}$, ou seja:

$$\text{Para } \lambda = \lambda_1 \Rightarrow \mathbf{X}^{(1)} = \{X_1^{(1)} \quad X_2^{(1)} \quad \dots \quad X_6^{(1)}\}^T$$

$$\text{Para } \lambda = \lambda_2 \Rightarrow \mathbf{X}^{(2)} = \{X_1^{(2)} \quad X_2^{(2)} \quad \dots \quad X_6^{(2)}\}^T$$

E assim até a sexta frequência λ .

$$\text{Para } \lambda = \lambda_6 \Rightarrow \mathbf{X}^{(6)} = \{X_1^{(6)} \quad X_2^{(6)} \quad \dots \quad X_6^{(6)}\}^T$$

Encontrados os seis modos, podemos montar agora a matriz dos modos de vibrar, ou matriz modal.

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} X_1^{(1)} & X_1^{(2)} & X_1^{(3)} & X_1^{(4)} & X_1^{(5)} & X_1^{(6)} \\ X_2^{(1)} & X_2^{(2)} & X_2^{(3)} & X_2^{(4)} & X_2^{(5)} & X_2^{(6)} \\ X_3^{(1)} & X_3^{(2)} & X_3^{(3)} & X_3^{(4)} & X_3^{(5)} & X_3^{(6)} \\ X_4^{(1)} & X_4^{(2)} & X_4^{(3)} & X_4^{(4)} & X_4^{(5)} & X_4^{(6)} \\ X_5^{(1)} & X_5^{(2)} & X_5^{(3)} & X_5^{(4)} & X_5^{(5)} & X_5^{(6)} \\ X_6^{(1)} & X_6^{(2)} & X_6^{(3)} & X_6^{(4)} & X_6^{(5)} & X_6^{(6)} \end{bmatrix}$$

Através da normalização, é possível obter matrizes diagonalizadas.

$$\tilde{\mathbf{M}} = [\Phi]^T \cdot [\mathbf{M}] \cdot [\Phi] \quad (19)$$

$$\hat{\Phi} = [\Phi] \cdot [\tilde{M}]^{-1/2} \quad (20)$$

$$\overline{M} = [\hat{\Phi}]^T \cdot [M] \cdot [\hat{\Phi}] \quad (21)$$

$$\overline{K} = [\hat{\Phi}]^T \cdot [K] \cdot [\hat{\Phi}] \quad (22)$$

$$\overline{C} = [\hat{\Phi}]^T \cdot [C] \cdot [\hat{\Phi}] \quad (23)$$

Determinação dos Fatores de Amortecimento – A partir das matrizes diagonalizadas podemos obter os fatores de amortecimento para cada modo de vibrar, utilizando a seguinte equação:

$$\zeta = \frac{[\overline{C}_{n,n}]}{2 \cdot \sqrt{[\overline{K}_{n,n}]}} ; \text{ com } n = 1 \dots 6 \quad (24)$$

Solução através da Equação de Estado – Definiremos agora um vetor de estado e sua derivada no tempo:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{Bmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Pode-se expressar o comportamento dinâmico do virabrequim através do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) ; \quad \mathbf{x}(0) = \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \dot{\theta}(0) \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Onde $\mathbf{x}(0)$ é a condição inicial do sistema. A matriz $[\mathbf{A}]$ e o vetor $\{\mathbf{b}\}$ possuem a seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{T}(t) \end{bmatrix} \quad (27)$$

A matriz $[\mathbf{A}]$ possui dimensões (12×12) para seis graus de liberdade e o vetor das excitações $\{\mathbf{b}\}$, a dimensão de (12×1) .

Cálculo do Torque de Excitação – Como visto anteriormente o momento torçor que atua na árvore de manivelas varia de acordo com o ângulo do virabrequim, com

a rotação e a carga do motor. Podemos quantificar este torque através da seguinte equação:

$$Mt = Ft \cdot r \quad (28)$$

O torque atuante em cada manivela é uma função periódica contínua e a solução para esse tipo de excitação é obtida a partir da sua expansão em série de Fourier [8].

$$Mt^k(t) = \frac{Ao^k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^k \cdot \cos(n\omega \cdot t) + B_n^k \cdot \sin(n\omega \cdot t) \right] \quad (29)$$

O índice k indica o cilindro para o qual faremos a expansão da curva de torque, visto que existe uma defasagem na sua aplicação, de cilindro para cilindro. Essa defasagem, em graus do virabrequim, é função do intervalo de ignição do motor e obviamente do valor de k . O índice n representa o número de termos da série em que se deseja realizar a expansão. A maioria dos autores considera como ideal a expansão em 24 termos, porém, para a maioria dos casos dos motores Diesel, 20 termos são suficientes.

A figura seguinte mostra graficamente o princípio da expansão em série de Fourier.

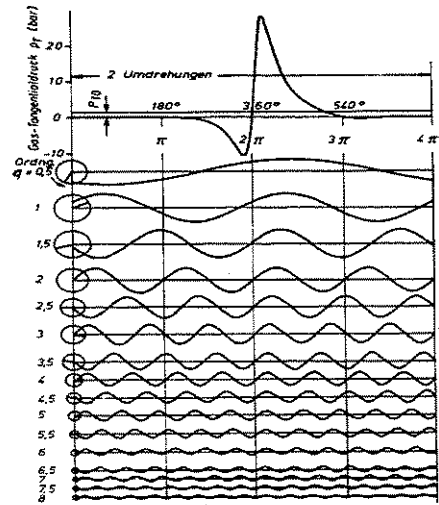


Figura 9: Exemplo de expansão em série de Fourier de uma curva de pressão tangencial.

Podemos ainda reescrever a equação 29 da seguinte forma:

Sabendo-se que:

$$\cos(n\omega \cdot t) = \frac{e^{in\omega \cdot t} + e^{-in\omega \cdot t}}{2} \quad ; \quad \sin(n\omega \cdot t) = \frac{e^{in\omega \cdot t} - e^{-in\omega \cdot t}}{2i}$$

Teremos:

$$A_n^k \cdot \cos(n\omega \cdot t) + B_n^k \cdot \sin(n\omega \cdot t) = A_n^k \cdot \frac{e^{in\omega \cdot t} + e^{-in\omega \cdot t}}{2} -$$

$$iB_n^k \cdot \frac{e^{in\omega \cdot t} - e^{-in\omega \cdot t}}{2i} = \frac{1}{2}(A_n^k - iB_n^k)e^{in\omega \cdot t} + \frac{1}{2}(A_n^k + iB_n^k)e^{-in\omega \cdot t}$$

Fazendo:

$$C_n^k = \frac{1}{2}(A_n^k - iB_n^k) \quad \text{e} \quad \bar{C}_n^k = \frac{1}{2}(A_n^k + iB_n^k)$$

Obtém-se finalmente:

$$M t^k(t) = \frac{A o^k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^k \cdot e^{in\omega \cdot t} + \bar{C}_n^k \cdot e^{-in\omega \cdot t} \right] \quad (30)$$

O termo (Ao) da série de Fourier não irá produzir vibrações no eixo da árvore de manivelas, mas sim um momento torçor constante sobre o qual irão se superpor às vibrações torcionais.

Podemos agora obter o vetor das excitações {b} da seguinte forma:

$$b_n(t) = \begin{Bmatrix} b1_n \\ b2_n \end{Bmatrix}$$

onde:

$$b1_n = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}^T ;$$

$$b2_n = \left\{ 0 \quad \frac{C_n^4}{I2} \quad \frac{C_n^3}{I3} \quad \frac{C_n^2}{I4} \quad \frac{C_n^1}{I5} \quad 0 \right\}^T$$

No vetor {b2}, podemos observar que a primeira e a última linhas são as que representam a parte anterior da árvore de manivelas e o volante respectivamente. Como essas inércias não possuem excitações externas, seus valores no vetor são nulos.

Cálculo da Resposta Permanente do Sistema - A resposta de um sistema vibratório excitado periodicamente, representado pela sua equação de estado, pode ser obtida através da matriz fundamental, ou matriz de transição de estado:

$$\Phi(t) = e^{A \cdot t} \quad (31)$$

E a integral de convolução:

$$x(t) = \Phi(t) \cdot x(0) + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot b_0 \cdot d\tau +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega \cdot \tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega \cdot \tau}) \cdot d\tau \quad (32)$$

Como estamos interessados apenas na resposta permanente do sistema, podemos desconsiderar a resposta transitória $\Phi(t) \cdot x(0)$. Desenvolvendo-se a primeira integral e as integrais abrangidas pelo somatório da expressão da resposta à excitação periódica, teremos respectivamente como resultados:

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{A \cdot t} \cdot [e^{-A \cdot t} - I] \cdot (-A^{-1}) \cdot b_0 = \frac{1}{2} [I - e^{A \cdot t}] \cdot (-A^{-1}) \cdot b_0$$

E:

$$x_n(t) = \int_0^t \Phi(t-\tau) \cdot (b_n \cdot e^{in\omega \cdot \tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega \cdot \tau}) d\tau =$$

$$\int_0^t e^{A \cdot (t-\tau)} \cdot (b_n \cdot e^{in\omega \cdot \tau} + \bar{b}_n \cdot e^{-in\omega \cdot \tau}) d\tau$$

A primeira integral refere-se ao termo constante da série de Fourier e como visto, este não promove vibrações na árvore de manivelas, sendo assim podemos desconsiderá-lo.

Expandindo a soma da segunda integral e aplicando as propriedades comutativas da matriz fundamental, teremos:

$$x_n(t) = -e^{A \cdot t} \cdot [(in\omega I - A)^{-1} \cdot b_n + (-in\omega I - A)^{-1} \cdot \bar{b}_n]$$

Onde [I] é a matriz identidade de dimensões (12 x 12).

Podemos definir agora uma matriz que chamaremos de matriz de frequência, de dimensões (12 x 12) e a sua conjugada:

$$F_n = (in\omega I - A)^{-1} \quad ; \quad \bar{F}_n = (-in\omega I - A)^{-1} \quad (33)$$

Definiremos também, o vetor de resposta em frequência e seu conjugado:

$$g_n = F_n \cdot b_n \quad ; \quad \bar{g}_n = \bar{F}_n \cdot \bar{b}_n \quad (34)$$

Dessa forma a resposta para uma ordem n, poderá ser obtida da seguinte forma:

$$x_n(t) = g_n \cdot e^{in\omega \cdot t} + \bar{g}_n \cdot e^{-in\omega \cdot t} - e^{A \cdot t} \cdot (g_n + \bar{g}_n)$$

Considerando que $t \rightarrow \infty$ e sendo o sistema assintoticamente estável, é possível verificar que o último termo da equação acima se anula e portanto, a resposta permanente de ordem n será:

$$x_n(t) = \theta_n(t) = g_n \cdot e^{in\omega \cdot t} + \bar{g}_n \cdot e^{-in\omega \cdot t} \quad (35)$$

O vetor de resposta em frequência $\{g\}$ tem dimensões (12 x 1). As seis primeiras linhas representam os deslocamentos angulares e as seis últimas as velocidades angulares. No nosso caso, estaremos interessados apenas nas amplitudes de vibrações torcionais, ou sejam, as primeiras linhas do vetor.

Utilizando-se as relações de Euler, podemos dizer que:

$$\theta_{n_j}(t) = (g_{n_j} + \bar{g}_{n_j}) \cdot \cos(n\omega \cdot t) + i \cdot (g_{n_j} - \bar{g}_{n_j}) \cdot \sin(n\omega \cdot t) =$$

$$2 \cdot \text{Re}(g_{n_j}) \cdot \cos(n\omega \cdot t) - 2 \cdot \text{Im}(g_{n_j}) \cdot \sin(n\omega \cdot t)$$

Com $j = 1 \dots 6$.

Através das relações trigonométricas, é possível obter finalmente as equações que determinam a amplitude de vibração e a fase para cada ordem n da excitação e para cada inércia j:

$$\theta_{n_j} = \Theta_{n_j} \cdot \cos(n\omega \cdot t - \phi_{n_j}) \quad (36)$$

Onde a amplitude de vibração será:

$$\Theta_{n_j} = 2 \cdot \sqrt{[\text{Re}(g_{n_j})]^2 + [\text{Im}(g_{n_j})]^2} = 2 \cdot |g_{n_j}| \quad (37)$$

E a fase:

$$\phi_{n_j} = \tan^{-1} \frac{-\text{Im}(g_{n_j})}{\text{Re}(g_{n_j})} \quad (38)$$

Finalmente, é possível obter a amplitude global de vibração torcional através da seguinte equação:

$$\theta_j = \sum_{n=1}^{24} \Theta_{n_j} \cdot \cos(n\omega \cdot t - \phi_{n_j}) \quad (39)$$

Na figura seguinte podemos observar graficamente as amplitudes das vibrações torcionais calculadas para a árvore de manivelas considerada nesta análise.

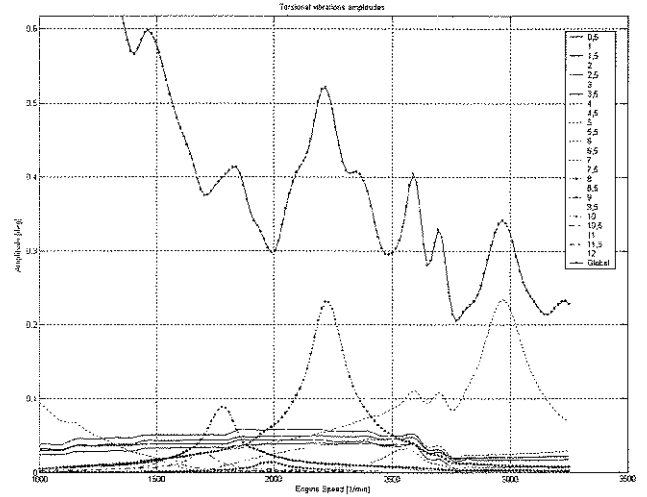


Figura 10: Torciograma.

Através da combinação dessas amplitudes com os demais carregamentos, é possível a verificação das tensões atuantes na árvore de manivelas utilizando-se um modelo de elementos finitos.

BALANCEAMENTO DINÂMICO DA ÁRVORE DE MANIVELAS

As árvores de manivelas dos motores de quatro cilindros em linha são balanceadas estaticamente, devido à disposição das manivelas.

Porém durante o funcionamento, irão surgir momentos de fletores no virabrequim que são gerados pelo desbalanceamento dinâmico. Dependendo da rotação do motor, poderão ocorrer desalinhamentos nos munhões que acarretarão no desgaste excessivo das bronzinas e em casos extremos, até a falha do componente.

Para reduzir ou anular esses efeitos, são introduzidas massas em oposição aos moentes, que têm esta finalidade. Geralmente, é recomendável o balanceamento de 60 a 100% das massas rotativas do motor. Em alguns casos é feita também a compensação de um percentual das massas alternativas.

O percentual ou grau de balanceamento pode ser calculado através do equacionamento que segue:

$$PB = \frac{M_R}{M_I} \cdot 100\% \quad (40)$$

Onde:

$$M_I = m_2 \cdot r_2 \cdot d_2 + m_5 \cdot r_5 \cdot d_2$$

$$M_R = m_1 \cdot r_1 \cdot d_1 + m_3 \cdot r_3 \cdot d_3 + m_4 \cdot r_4 \cdot d_4 + m_6 \cdot r_6 \cdot d_6$$

O balanceamento da árvore de manivelas em estudo é de aproximadamente 60 %.

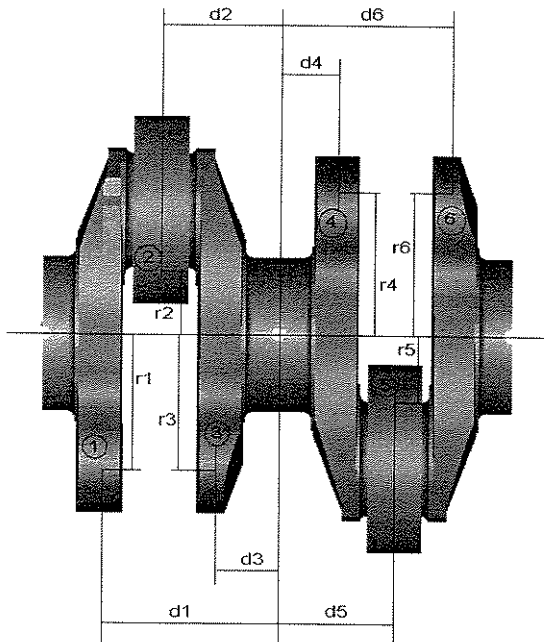


Figura 11: Dimensões para verificação do balanceamento.

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

MODELO – Utilizando um modelo geométrico completo ou parcial da árvore de manivelas e incluindo-se a região dos mancais do bloco do motor, de modo a considerar a sua rigidez, iremos gerar através elementos sólidos tetraédricos parabólicos, a malha de elementos finitos, a qual deve ser refinada nas regiões de concentração de tensões, ou seja, nos raios dos moentes e munhões e nos furos de óleo lubrificante.

Deveremos considerar elementos de contato entre os munhões da árvore de manivelas e os mancais principais. No caso de uma análise estática, não é necessária a consideração da rigidez do filme de óleo, visto que a complicação para a obtenção deste parâmetro, não irá justificar o ganho de precisão nos resultados. Numa análise modal, entretanto, esta rigidez afeta de forma considerável os valores das frequências naturais calculadas.

Os esforços transmitidos da biela para a árvore de manivelas podem ser aplicados sob a forma de pressão, distribuída em uma área de atuação previamente verificada, sem que exista a necessidade de simular o contato entre o olhal maior e o moente. Essa simplificação resulta em um ganho considerável no tempo de processamento e o erro cometido será menor que 4,8 %.

Como iremos considerar o efeito das forças de inércia rotativas, deveremos incluir nos moentes as massas rotativas das bielas.

O modelo de elementos finitos considerado para esta análise possui 192543 elementos e 321086 nós.

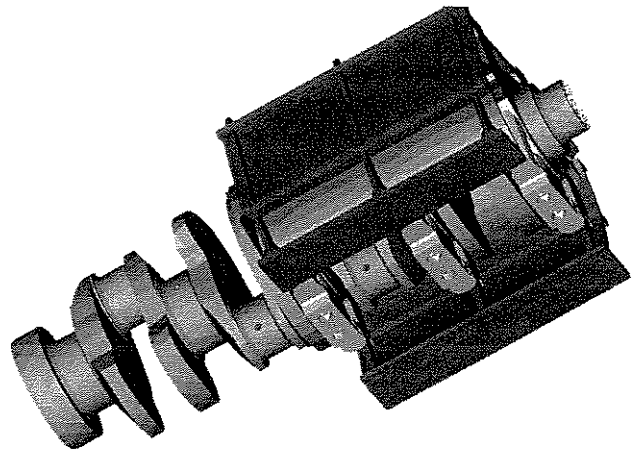


Figura 12: Modelo de elementos finitos

CONDIÇÕES DE CONTORNO – Deveremos analisar todas as condições de utilização do motor para definirmos qual é a mais crítica. De um modo geral, as condições mais severas são as de torque máximo, potência máxima e máxima rotação do motor.

Não é possível de antemão, dizer qual dessas condições será a de maior solicitação, pois existem diversos fatores que implicam em níveis de tensão mais ou menos elevados.

Para esse caso específico de aplicação, foram considerados os seguintes carregamentos:

Força Radial atuante na Árvore de Manivelas – De acordo com a equação 12, teremos:

Condição de máximo torque:
(130 bar, 12° ATDC @ 1200 rpm): $F_r = 103097 \text{ N}$.

Condição de potência máxima:
(130 bar, 12° ATDC @ 2500 rpm): $F_r = 92318 \text{ N}$.

Condição de máxima rotação:
(80 bar, 6° ATDC @ 3300 rpm): $F_r = 43141 \text{ N}$.

Força de Inércia Alternativa – De acordo com a equação 9, teremos:

Condição de máximo torque:
(TDC @ 1200 rpm): $F_a = 3480 \text{ N}$.

Condição de potência máxima:
(TDC @ 2500 rpm): $F_a = 15104 \text{ N}$.

Condição de máxima rotação:
(TDC @ 3300 rpm): $F_a = 24746 \text{ N}$.

Força de Inércia Rotativa – Baseado na equação 10, poderemos aplicar o carregamento referente às massas rotativas do sistema. Normalmente os programas comerciais de análises pelo método dos elementos finitos, possuem uma forma bastante simples para aplicação dessas cargas, que consiste na imposição da velocidade angular do eixo para cada uma das condições apresentadas nos itens anteriores.

Torque Indicado do Motor – Esse carregamento é o termo constante obtido da expansão da curva do torque instantâneo em série de Fourier. Obviamente, esse termo é diferente para cada condição de operação do motor.

Amplitudes das Vibrações Torcionais – Esses valores são obtidos através de um programa de computador específico, onde foi implementado o equacionamento exposto anteriormente.

Conhecidos os valores das amplitudes para cada ordem de vibração e para cada manivela, aplicam-se rotações no virabrequim correspondentes a cada condição de funcionamento. Abaixo, estão especificados os ângulos de vibração na extremidade anterior do virabrequim.

Condição de máximo torque: 0,04° @ 1200 rpm.

Condição de potência máxima: 0,18° @ 2500 rpm.

Condição de máxima rotação: 0,24° @ 3300 rpm.

Deverão ser aplicadas condições de simetria restringir o movimento do bloco do motor, bem como restrições de rotação no virabrequim de modo a evitar movimentos de corpo rígido.

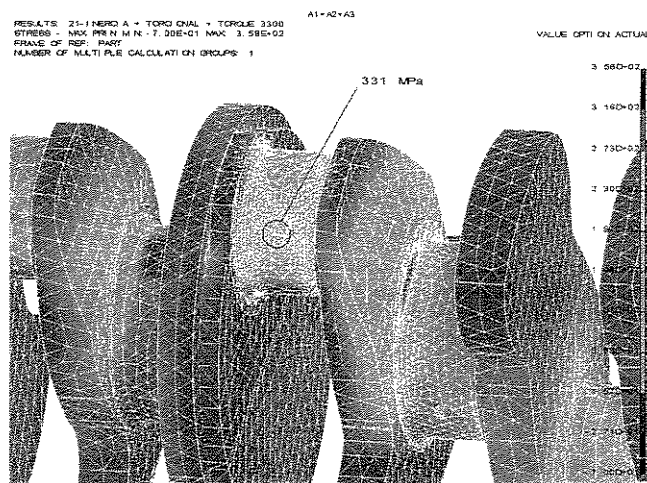


Figura 13: Tensão máxima principal.

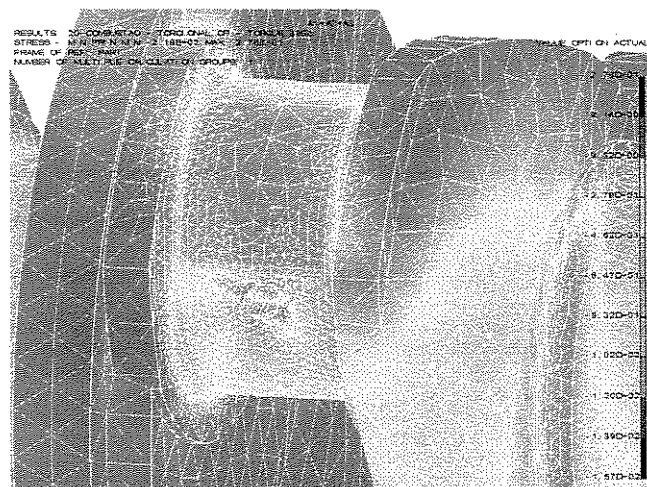


Figura 14: Tensão mínima principal.

VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FADIGA DA ÁRVORE DE MANIVELAS

A teoria utilizada para a verificação do limite de resistência à fadiga neste estudo é baseada nos conceitos da

fadiga de alto ciclo, considerando-se que o componente terá vida infinita para um número de ciclos superior a 10^7 .

Os carregamentos aplicados no modelo de elementos finitos deverão ser combinados, de modo a obtermos os maiores ciclos de fadiga para cada condição de operação do motor.

O ciclo crítico de fadiga para a árvore de manivelas em questão foi obtido combinando-se os seguintes carregamentos:

A tensão máxima principal foi calculada somando-se as tensões geradas pela força radial, forças de inércia rotativas, amplitudes das vibrações torcionais e o torque indicado do motor.

A tensão mínima principal é o resultado da soma entre as forças de inércia alternativas, forças de inércia rotativas, amplitudes das vibrações torcionais de sentido oposto às anteriores e o torque indicado do motor.

Como as vibrações torcionais são de pequena amplitude, as tensões de cisalhamento atuantes na árvore de manivelas são pequenas e portanto, é possível a utilização de um diagrama de Goodman modificado, para análise de tensões de flexão.

Abaixo são mostradas algumas relações úteis para a verificação da resistência à fadiga de um componente:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (41)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (42)$$

Onde:

σ_m = Tensão média

σ_a = Amplitude da tensão cíclica

$\sigma_{\max}$ = Tensão máxima

$\sigma_{\min}$ = Tensão mínima

A figura seguinte torna mais evidentes as relações acima demonstradas.

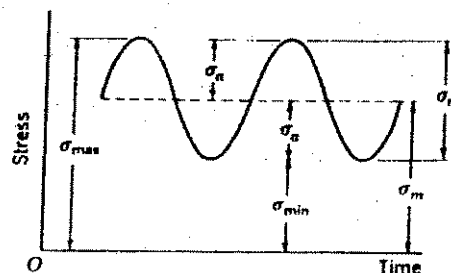


Figura 15: Tensões cíclicas.

Obtida a tensão média do ciclo e tendo disponível o diagrama de Goodman para o material da árvore de manivelas, é possível avaliar o coeficiente de segurança à fadiga do componente [9], [10].

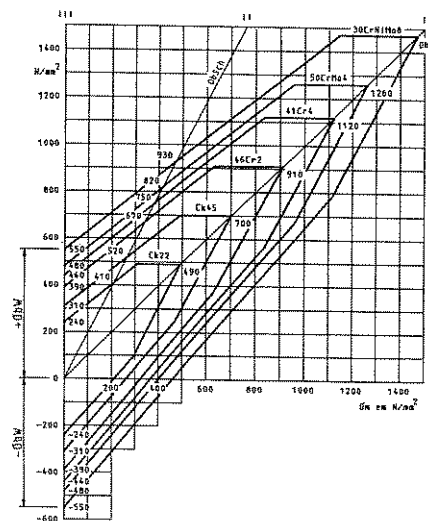


Figura 16: Diagrama de Goodman modificado.

A obtenção do limite de fadiga do material deve ser feita preferencialmente, através de peças acabadas para que se leve em consideração todos os fatores que têm influência na determinação do limite de fadiga.

Devido ao alto custo para obtermos essa propriedade através da quebra de vários componentes, podemos avaliar a resistência do componente, utilizando-se os fatores modificadores da resistência à fadiga.

FATORES MODIFICADORES DO LIMITE DE FADIGA – A partir do limite de fadiga de um corpo de prova padronizado, é possível estimar o limite de fadiga de um componente qualquer, utilizando-se os fatores descritos abaixo.

$$\sigma_{bw} = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot k_f \cdot \sigma_{bw}' \quad (43)$$

Onde:

σ_{bw} = Limite de fadiga por flexão alternada do corpo de prova

σ_{bw}' = Limite de fadiga por flexão alternada do componente

k_a = Fator de acabamento superficial

k_b = Fator de tamanho

k_c = Fator de confiabilidade

k_d = Fator de temperatura

k_e = Fator do efeito das concentrações de tensão

k_f = Fatores diversos

Basicamente, são quatro os fatores que deverão ser levados em consideração para essa análise:

Fator de Acabamento Superficial – Em função da rugosidade superficial de uma peça e da sua resistência à tração, existirá uma grande variação no limite de fadiga. Essa variação foi bastante estudada para o caso dos aços e poderá ser utilizada para os ferros fundidos nodulares e aços fundidos.

Para uma rugosidade superficial de 4 μm e um limite de ruptura de 1800 MPa, o fator de acabamento superficial será de 0,855.

Fator de Tamanho – Este fator leva em consideração a redução que existe na resistência à fadiga de um componente, em função do aumento do seu diâmetro e pode ser quantificado através da seguinte equação:

$$k_b = 1,189 \cdot d^{-0,097} \quad (44)$$

Considerando o diâmetro dos moentes de 63 mm, teremos como fator de tamanho 0,796.

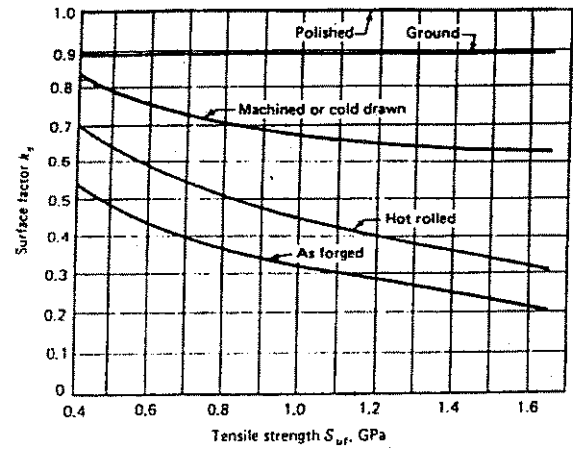


Figura 17: Fator de acabamento superficial [10].

Fator de Confiabilidade – Devido à natureza estatística do valor do limite de fadiga de um material, torna-se necessária a introdução desse fator para a estimativa dessa propriedade. Geralmente os ensaios de fadiga são realizados com uma confiabilidade de 50%.

Para efeito de cálculo, consideramos confiabilidades entre 95 a 99%, seguindo a distribuição normal, que implicam respectivamente em fatores de 0,868 a 0,814.

Fator de Temperatura – Leva em consideração o efeito da redução do limite de fadiga, que ocorre com o aumento da temperatura na qual o componente está sujeito.

Existirá uma redução considerável nesta propriedade, para temperaturas acima de 350 °C. Como as árvores de manivelas operam em temperaturas inferiores, podemos considerar $k_d = 1,0$.

Outros fatores modificadores do limite de fadiga dos componentes como, por exemplo, os devidos às concentrações de tensão, já estão sendo levados em consideração no modelo de elementos finitos.

Considerando todos esses fatores, é possível a determinação do limite de fadiga corrigido para as regiões tratadas termicamente. Esse valor será de 366 Mpa.

Pelo fato das árvores de manivelas serem componentes onde falhas estruturais não são admitidas, torna-se necessária a consideração de um fator de segurança à fadiga, compatível com as características do material e os desvios do processo de fabricação, que por mais controlados que sejam sempre existirão.

A figura seguinte mostra o diagrama de Goodman para a árvore de manivelas analisada, incluindo as tensões do carregamento responsável pelo maior ciclo de fadiga encontrado.

As linhas tracejadas representam os limites onde, estatisticamente não deverão ocorrer falhas estruturais no componente.

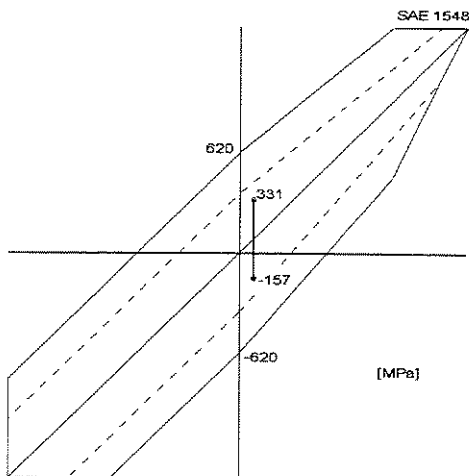


Figura 18: Diagrama de Goodman para o componente.

O coeficiente de segurança à fadiga para a árvore de manivelas analisada é de 2,47.

Considerando-se todos os efeitos que possam ter influência neste componente, estimamos que o coeficiente de segurança mínimo a ser admitido é de 1,73.

CARACTERÍSTICAS DO MOTOR CONSIDERADO NESTE ESTUDO

A seguir serão apresentadas as principais características do motor cuja árvore de manivelas foi objeto deste estudo.

Seqüência de ignição: 1-3-4-2

Sentido de rotação: Anti-horário, visto pelo volante.

Comprimento da biela: 207 mm

Diâmetro do pistão: 105 mm

Meio curso da árvore de manivelas: 68,5 mm

Torque máximo: 700 N.m @ 1200 rpm

Potência máxima: 152 kW @ 2500 rpm

Rotação máxima do motor: 2850 rpm

Massas alternativas: 2,417 kg

Inércias [kg.m²]:

I1 = 0,0340

I2 = 0,0438

I3 = 0,0438

I4 = 0,0624

I5 = 0,0448

I6 = 0,460

Rigidez torcional [N.m/rad]:

Kt1 = 1516000

Kt2 = 1271000

Kt3 = 1612000

Kt4 = 1186000

Kt5 = 2212000

Frequências naturais da árvore de manivelas:

1º: 0,0 4º: 1212,0 Hz

2º: 332,6 Hz 5º: 1458,6 Hz

3º: 761,7 Hz 6º: 1637,6 Hz

Diâmetro dos moentes: 63 mm

Diâmetro dos munhões: 86 mm

Material da árvore de manivelas: SAE J403 – UNS G15480

CONCLUSÕES

De acordo com os resultados obtidos, verifica-se que a árvore de manivelas analisada não apresentará problemas estruturais quando em funcionamento.

A utilização de uma curva de combustão otimizada irá promover baixas amplitudes de vibrações torcionais. Sendo assim, de acordo com a metodologia de cálculo apresentada, verifica-se que é possível a remoção do anti-vibrador do virabrequim.

REFERÊNCIAS

- [1] Maass H., Klier H., 1981, Kräfte, Momente und deren Ausgleich in der Verbrennungskraftmaschine, Springer-Verlag/Wien, ISBN 3-211-81677-1.
- [2] Brunetti F., Garcia O., 1992, Motores de Combustão Interna, FEL.
- [3] Taylor C. F., 1985, The Internal Combustion Engine in Theory and Practice – Vol. 2, MIT Press, ISBN 0-262-70027-1.
- [4] Muller P. C., Schiehlen W. O., 1985, Linear Vibrations, Martinus Nijhoff Publishers, ISBN 90-247-2983-1.
- [5] Meirovitch L., 2000, Principles and Techniques of Vibration, Prentice Hall.
- [6] Inman D. J., 2001, Engineering Vibration, Prentice Hall, ISBN 0-13-726142-X.
- [7] Dedini, K. L. C., Cavalcante P. F., 2001, Modelagem e Análise de Máquinas Rotativas e Estrutura de Suporte, Unicamp.
- [8] Arruda J. R. F., Huallpa B. N., 2002, Introdução à Análise Espectral, Unicamp.
- [9] Dieter G. E., 1988, Mechanical Metallurgy, McGraw-Hill.
- [10] Shigley J. E., 1986, Mechanical Engineering Design, McGraw-Hill.