

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Sobre a utilização de B-splines no Método dos Elementos  
Finitos para a solução de Barras, Vigas e Placas Finas**

Autor: **Paschoal Perdão Junior**

Orientador: **Prof. Dr. Fernando Iguti**

Campinas, 1999

São Paulo – Brasil

**UNICAMP**  
**BIBLIOTECA CENTRAL**  
**SEÇÃO CIRCULANTE**

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA  
TESE DEFENDIDA POR Paschoal Perdão  
Junior E APROVADA PELA  
COMISSÃO JULGADORA EM 28.07.1999

i  
UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL

Fernando Iguti  
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

**Sobre a utilização de B-splines no Método dos Elementos  
Finitos para a solução de Barras, Vigas e Placas Finas**

Autor: **Paschoal Perdão Junior**

Orientador: **Prof. Dr. Fernando Iguti**

Tese de Doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica - Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico - Curso: Engenharia Mecânica

Campinas, 1999  
São Paulo – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

~~P262s~~

P4122

Perdão Junior, Paschoal.

Sobre a utilização de B-splines no método dos elementos finitos para a solução de barras, vigas e placas finas / Paschoal Perdão Junior. --Campinas, SP: [s.n.], 1999.

Orientador: Fernando Iguti.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Método dos elementos finitos. 2. Placas (Engenharia). 3. Barras (Engenharia). 4. Vigas. 5. Spline, teoria do. I. Iguti, Fernando. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

Sobre a utilização de B-splines no Método dos Elementos Finitos  
para a solução de Barras, Vigas e Placas Finas

Autor: Paschoal Perdão Junior

Orientador: Prof. Dr. Fernando Iguti



---

Prof. Dr. Fernando Iguti  
Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP



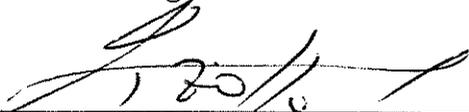
---

Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto  
Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP



---

Prof. Dr. Renato Pavanello  
Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP



---

Prof. Dr. Isaias Vizotto  
Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP



---

Prof. Dr. Francisco Antonio Menezes  
Faculdade de Engenharia Civil – UNICAMP

Campinas, 28 de julho de 1999.

6819180278

Aos meus pais, Paschoal e Alice, e à minha noiva Eva,  
por todo o amor e pela compreensão diante da  
necessidade de minha ausência

## AGRADECIMENTOS

Sobretudo agradeço à Mãe Rainha e Vencedora Três Vezes Admirável de Schönstatt pela sua intercessão junto a Nosso Senhor Jesus Cristo para a realização deste trabalho.

Agradeço formalmente ao Prof. Dr. Luiz Roberto de Almeida Gabriel, da Faculdade de Matemática da UNESP de Presidente Prudente, em função de suas importantes sugestões numa primeira fase deste trabalho. Agradeço também ao Prof. Dr. José Vitório Zago, da Faculdade de Matemática da UNICAMP, em virtude de sua valiosa contribuição no sentido de me colocar diretamente em contato com a teoria das “Funções B-splines”. Aproveito também a oportunidade para agradecer ao Prof. Dr. Renato Pavanello, da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, por suas “participações” extremamente importantes ao longo da orientação desse trabalho.

Também relevo meus agradecimentos ao Prof. Dr. Fernando Iguti por ter-me aceitado como seu orientado.

Muito tenho a agradecer ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, responsável direto pela condução da orientação deste trabalho. Reconheço que sem a inteligente e eficaz orientação dispensada pelo Prof. Euclides, esse trabalho jamais poderia ser transformado em tese de doutorado. Peço a Jesus Cristo, o Filho de Deus Vivo, que mantenha sempre sua Luz sobre a mente do Prof. Euclides de Mesquita Neto, possibilitando continuidade ao seu trabalho de orientação e pesquisa.

Agradeço ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelos recursos fornecidos durante o período de desenvolvimento da pesquisa.

Estendo também meus agradecimentos a todos os professores, colegas e funcionários da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, especialmente aos do Departamento de Mecânica Computacional.

# **Sobre a utilização de B-splines no Método dos Elementos Finitos para a solução de Barras, Vigas e Placas Finas**

## **Resumo**

Este trabalho trata de expor detalhadamente, passo a passo, todos os requisitos necessários à utilização de B-splines como funções de forma, dentro do método dos elementos finitos, para aproximar a solução de estruturas de Barras, Vigas e Placas Finas. Característica à própria essência das B-splines, a suavidade, proporcionada pela continuidade  $C_2$  desses polinômios cúbicos, fornece todo um conceito de “robustez” a essas funções de aproximação, aumentando a precisão e a rapidez de convergência dos resultados obtidos.

Uma etapa importante do presente trabalho é a introdução de nós auxiliares adicionais na definição das B-Splines próximas ao contorno das estruturas. Na formulação utilizada, o emprego de nós auxiliares, e a inclusão do quarto trecho polinomial de uma Spline cúbica nos elementos de extremidade vem a garantir a completitude do espaço de aproximação. Estes nós auxiliares proporcionaram mais um grau de liberdade aos nós posicionados junto ao contorno da discretização. Este grau de liberdade adicional permite através de uma operação matricial a transformação das incógnitas do problema, de coeficientes das B-Splines para grandezas físicas, viabilizando a inclusão das condições de contorno físicas na formulação. Este procedimento é um avanço em relação às formulações reportadas na literatura, onde um “ajuste” nas B-Splines próximas ao contorno é realizado.

Diversos exemplos numéricos, tanto em estruturas unidimensionais como em placas finas mostram a eficiência da formulação apresentada.

# **About the use of B-splines Functions in the Finite Element Method to the solution of Bar and Beam structures and Thin Plates**

## **Abstract**

The present Thesis is a step by step formulation for the use of B-splines Functions in the Finite Element Method to approximate de solution of Bars, Beams and Thin Plates structures. The smooth character of the B-Splines given by the  $C_2$  continuity of these cubic polynomials provides a robust frame to the trial functions, increasing thus convergence and precision of the solutions.

One important contribution of this work is the addition of auxiliary nodes in the definition of the B-Splines in the vicinity of the structure boundaries. These auxiliary nodes allow the inclusion of a fourth polynomial term in the interpolation of Spline elements close to the boundaries, which garantees the completeness of the approximation spaces.

The auxiliary spline nodes also permits the introduction of an extra physical degree of freedom at the boundaries of the structures. This additional degree of freedom, together with a coordinate transformation, allow the system equation to be written in terms of the physical boundary quantities. This procedure is an improvement, when compared to other formulations, which require a modification in the Spline functions near the boundaries, to account for the correct boundary conditions.

Numerical examples for one- and two-dimensional structures show the efficiency and accuracy of the proposed methodologies.

## CONTEÚDO

<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 CONSIDERAÇÕES ENVOLVENDO A UTILIZAÇÃO DE SPLINES EM ENGENHARIA ESTRUTURAL</b>	<b>3</b>
<b>3 CONSIDERAÇÕES GERAIS INERENTES AOS FUNDAMENTOS DE SPLINES</b>	<b>20</b>
3.1 POLINÔMIOS	20
3.2 INTERPOLAÇÃO	22
3.2.1 INTRODUÇÃO	22
3.2.2 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL	23
3.3 SPLINES	24
3.3.1 INTRODUÇÃO	24
3.3.2 A BASE B-SPLINE	26
3.4 APROXIMAÇÕES ENVOLVENDO SPLINES	27
3.4.1 DETERMINAÇÃO DOS 4 TRECHOS POLINOMIAIS DE UMA SPLINE CÚBICA COMPLETA	28
3.4.1.1 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O PRIMEIRO CONJUNTO DE ABSCISSAS	31
3.4.1.2 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O SEGUNDO CONJUNTO DE	32

3.4.1.3 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O TERCEIRO CONJUNTO DE ABSCISSAS	33
3.4.1.4 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O QUARTO CONJUNTO DE ABSCISSAS	35
3.4.1.5 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O QUINTO CONJUNTO DE ABSCISSAS	36
3.4.1.6 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O SEXTO CONJUNTO DE ABSCISSAS	37
3.4.1.7 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O SÉTIMO CONJUNTO DE ABSCISSAS	38
3.5 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA SPLINES: LOCAL X GLOBAL	39
3.6 INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES UTILIZANDO-SE B-SPLINES	46
<b>4 UTILIZAÇÃO DE B-SPLINES COMO FUNÇÕES DE FORMA, EM ELEMENTOS FINITOS, PARA RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS - BARRAS E VIGAS</b>	<b>89</b>
4.1 INTRODUÇÃO	89
4.2 AJUSTE DE FUNÇÕES UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE FORMA	89
4.3 APROXIMAÇÕES POR RESÍDUOS PONDERADOS	92
4.4 O MÉTODO DE GALERKIN	93
4.5 APROXIMAÇÃO DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	93

4.6 APROXIMAÇÃO POR “RESÍDUOS PONDERADOS - MÉTODO DE GALERKIN” DA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS REFERENTES A PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS	95
4.6.1 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE BARRA	95
4.6.2 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE VIGA	101
4.7 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DA SPLINE EM COORDENADAS FÍSICAS	110
4.7.1 RECONSTITUIÇÃO DE GRANDEZAS FÍSICAS, REFERENTES AOS GRAUS DE LIBERDADE NODAIS DA ESTRUTURA, ATRAVÉS DE PONDERAÇÃO ENVOLVENDO OS COEFICIENTES DAS SPLINES	111
4.7.2 A POSSIBILIDADE DE ASSOCIAÇÃO DE MAIS UM GRAU DE LIBERDADE, PARA OS NÓS DE EXTREMIDADE DA DISCRETIZAÇÃO, EM FUNÇÃO DO NÓ AUXILIAR	116
4.7.3 A METODOLOGIA ENVOLVENDO A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS (COEFICIENTES) DA INTERPOLAÇÃO POR SPLINE EM COORDENADAS FÍSICAS	121
4.7.3.1 INTRODUÇÃO	121
4.7.3.2 A METODOLOGIA PROPRIAMENTE DITA	122
4.8 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DO MÉTODO ÀS ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS - BARRAS E VIGAS	125
4.8.1 INTRODUÇÃO	125

4.8.2	ESTRUTURA EM FORMA DE BARRA EM BALANÇO DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS	126
4.8.3	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS	151
4.8.4	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR QUATRO ELEMENTOS	178
4.8.5	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR OITO ELEMENTOS	184
4.8.6	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIENGASTADA DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS	190
4.8.7	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIENGASTADA DISCRETIZADA POR QUATRO ELEMENTOS	196
4.8.8	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIENGASTADA DISCRETIZADA POR OITO ELEMENTOS	203
4.8.9	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA ENGASTE-APOIO DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS	209
4.8.10	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA ENGASTE-APOIO DISCRETIZADA POR QUATRO ELEMENTOS	215
4.8.11	ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA ENGASTE-APOIO DISCRETIZADA POR OITO ELEMENTOS	223
4.8.12	ESTRUTUR EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS	230

4.8.13 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA EM BALANÇO DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS	236
<b>5 UTILIZAÇÃO DE B-SPLINES COMO FUNÇÕES DE FORMA, EM ELEMENTOS FINITOS, PARA RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS - PLACAS ELÁSTICAS FINAS</b>	<b>244</b>
5.1 INTRODUÇÃO	244
5.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE PLACA NO SISTEMA CARTESIANO DE COORDENADAS (ENFOQUE CLÁSSICO-ANALÍTICO)	245
5.2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	245
5.2.2 EQUILÍBRIO DO ELEMENTO DE PLACA	246
5.2.3 RELAÇÕES ENTRE TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO	249
5.2.4 FORÇAS INTERNAS EXPRESSADAS EM TERMOS DE “w”	252
5.3 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE PLACAS ORTOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS	256
5.4 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS	270
5.5 A METODOLOGIA BIDIMENSIONAL EMPREGADA, UTILIZANDO-SE SPLINES NA APROXIMAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS SOLICITADAS À FLEXÃO	284
5.5.1 INTRODUÇÃO	284

5.5.2	A METODOLOGIA UTILIZADA NA COMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA INTERPOLADO POR SPLINES	285
5.5.3	A METODOLOGIA UTILIZADA NA COMPOSIÇÃO DO VETOR DE CARGA DO SISTEMA INTERPOLADO POR SPLINES	300
5.5.4	A METODOLOGIA UTILIZADA NA MONTAGEM E DEFINIÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO EMPREGADA NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM FORMA DE PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS	304
5.6	EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DO MÉTODO ÀS ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS - PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS	314
5.6.1	INTRODUÇÃO	314
5.6.2	ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TODO O SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	318
5.6.3	ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA ENGASTADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	326
5.6.4	ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA CONCENTRADA CENTRAL	335
5.6.5	ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA ENGASTADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA CONCENTRADA CENTRAL	349

5.6.6 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA DISTRIBUÍDA SENOIDAL	358
5.6.7 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TRÊS BORDOS E LIVRE NO QUARTO BORDO, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	367
5.6.8 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA COM REENTRÂNCIA, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA	385
<b>6 COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES</b>	<b>398</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	

## LISTA DE FIGURAS

### CAPÍTULO 3

- Figura (3.1): Os quatro polinômios e as condições de continuidade de uma B-spline. 29
- Figura (3.2): Sistemas de Coordenadas: Global e Local. 40
- Figura (3.3): Definição de uma B-spline num sistema de coordenadas global. 42
- Figura (3.4): Sub-domínio Local contendo os 4 trechos de uma B-spline. 43
- Figura (3.5): Spline cúbica definida, numericamente, segundo um sistema de coordenadas global. 44
- Figura (3.6): Sub-domínio utilizado para a interpolação. 44
- Figura (3.7): Gráfico da função a ser interpolada. 48
- Figura (3.8): Posicionamento de uma B-spline em cada nó da discretização. 49
- Figura (3.9): Posicionamento dos 4 trechos de uma B-spline nos 3 sub-intervalos, através da criação de 2 nós auxiliares. 51
- Figura (3.10): B-spline com os limites de cada trecho numerados seqüencialmente. 53
- Figura (3.11): Deslocamento da spline cúbica de tamanho 1, de modo a garantir a presença de seus 4 trechos entre 0 e 1. 54
- Figura (3.12): Os quatro trechos de uma B-spline posicionados entre 0 e 1. 55
- Figura (3.13): Complemento do gráfico da função a ser interpolada através da colocação dos nós, sobre os quais serão posicionadas as Splines. 56
- Figura (3.14): Função interpolada  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ , no domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ). 68

Figura (3.15): Função interpoladora $g_1(x)$ para o primeiro sub-intervalo ( $0 \leq x \leq 2$ ).	68
Figura (3.16): Função interpoladora $g_2(x)$ para o segundo sub-intervalo ( $2 \leq x \leq 4$ ).	68
Figura (3.17): Função interpoladora $g_3(x)$ para o terceiro sub-intervalo ( $4 \leq x \leq 6$ ).	69
Figura (3.18): Função interpoladora completa constituída pela união de $(g_1(x) + g_2(x) + g_3(x))$ , no domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ).	69
Figura (3.19): Plotagem da função interpolada $f(x)$ juntamente com a função interpoladora completa $g(x)$ , no domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ).	69
Figura (3.20): Domínio completo subdividido em um único sub-intervalo.	76
Figura (3.21): Redefinição genérica para os nós da discretização adotada.	82
Figura (3.22): Dois sub-intervalos consecutivos de uma discretização genérica.	86

## CAPÍTULO 4

Figura (4.1): Barra discretizada por dois elementos, sem vinculação, solicitada por uma carga axial uniformemente distribuída.	98
Figura (4.2): Barra em balanço, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga axial concentrada na extremidade livre.	100
Figura (4.3): Viga discretizada por dois elementos, sem vinculação, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	104
Figura (4.4): Viga bi-apoiada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	107
Figura (4.5): Determinação da influência dos coeficientes dos nós adjacentes ao Nó C em função da ordenada das B-splines neste nó C.	113

- Figura (4.6): Posicionamento dos trechos de uma B-spline nos elementos de um modelo estrutural unidimensional interpolado por spline. 117
- Figura (4.7): Posicionamento dos trechos de uma B-spline nos elementos de um modelo estrutural unidimensional interpolado por spline, admitindo-se dois novos nós auxiliares à discretização. 119
- Figura (4.8): Barra tracionada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga axial concentrada,  $F = 1\text{N}$ , na extremidade livre. 127
- Figura (4.9): Colocação dos nós e dos pontos intermediários (5 e 6) dos dois elementos da discretização da barra. 130
- Figura (4.10): Translações  $w$  da barra tracionada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 149
- Figura (4.11): Deformações  $\varepsilon$  da barra tracionada, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica. 150
- Figura (4.12): Viga biapoiada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída. 152
- Figura (4.13): Colocação dos nós dos dois elementos da discretização da viga. 155
- Figura (4.14): Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Popov (1978)). 175
- Figura (4.15): Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 175
- Figura (4.16): Momentos Fletores  $M$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 176

Figura (4.17): Esforços cortantes $V$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.	177
Figura (4.18): Viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	179
Figura (4.19): Deslocamentos transversais $w$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.	180
Figura (4.20): Rotações $\theta$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparadas com a solução analítica.	181
Figura (4.21): Momentos Fletores $M$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.	182
Figura (4.22): Esforços Cortantes $V$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.	183
Figura (4.23): Viga biapoiada, discretizada por oito elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	185
Figura (4.24): Deslocamentos transversais $w$ da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	186
Figura (4.25): Rotações $\theta$ da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparadas com a solução analítica.	187
Figura (4.26): Momentos Fletores $M$ da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	188
Figura (4.27): Esforços Cortantes $V$ da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	189

- Figura (4.28): Viga biengastada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída. 191
- Figura (4.29): Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (solução analítica obtida através de integração da equação diferencial e imposição das condições de contorno). 192
- Figura (4.30): Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica. 193
- Figura (4.31): Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 194
- Figura (4.32): Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 195
- Figura (4.33): Viga biengastada, discretizada por quatro elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída. 197
- Figura (4.34): Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica. 198
- Figura (4.35): Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparadas com a solução analítica. 199
- Figura (4.36): Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica. 200
- Figura (4.37): Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica. 201

Figura (4.38): Viga biengastada, discretizada por oito elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	203
Figura (4.39): Deslocamentos transversais $w$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	204
Figura (4.40): Rotações $\theta$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparadas com a solução analítica.	205
Figura (4.41): Momentos Fletores $M$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	206
Figura (4.42): Esforços Cortantes $V$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	207
Figura (4.43): Viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	209
Figura (4.44): Deslocamentos transversais $w$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (solução analítica obtida através de integração da equação diferencial e imposição das condições de contorno).	210
Figura (4.45): Rotações $\theta$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica.	211
Figura (4.46): Momentos Fletores $M$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.	212
Figura (4.47): Esforços Cortantes $V$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.	213

Figura (4.48): Viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	216
Figura (4.49): Deslocamentos transversais $w$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.	218
Figura (4.50): Rotações $\theta$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparadas com a solução analítica.	219
Figura (4.51): Momentos Fletores $M$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.	220
Figura (4.52): Esforços Cortantes $V$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.	221
Figura (4.53): Viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.	223
Figura (4.54): Deslocamentos transversais $w$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	225
Figura (4.55): Rotações $\theta$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparadas com a solução analítica.	226
Figura (4.56): Momentos Fletores $M$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	227
Figura (4.57): Esforços Cortantes $V$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.	228
Figura (4.58): Viga biapoiada, discretizada por dois elementos, solicitada por um momento puro na extremidade direita.	230

- Figura (4.59): Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Popov (1978)). 232
- Figura (4.60): Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica. 233
- Figura (4.61): Momentos Fletores  $M$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 234
- Figura (4.62): Esforços Cortantes  $V$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 235
- Figura (4.63): Viga em balanço, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga concentrada na extremidade livre. 237
- Figura (4.64): Deslocamentos transversais  $w$  para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Popov (1978)). 239
- Figura (4.65): Rotações  $\theta$  para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica. 240
- Figura (4.66): Momentos Fletores  $M$  da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 241
- Figura (4.67): Esforços Cortantes  $V$  da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica. 242

## CAPÍTULO 5

- Figura (5.1): Forças Internas e Externas no elemento da superfície média da placa. 248
- Figura (5.2): Interferência (Sobreposição) das B-splines adjacentes, definindo a área de influência para uma B-spline posicionada sobre o Nó Central “Zero”. 287
- Figura (5.3): Sobreposição dos trechos de uma spline cúbica posicionada sobre o nó “i” com os trechos de uma spline cúbica posicionada sobre o nó “i+2”.  
288
- Figura (5.4): Disposição da função B-spline em duas dimensões de uma discretização genérica. 290
- Figura (5.5): Área de Influência Bidimensional para uma B-spline “colocada” sobre o nó “386” (nó genérico de uma discretização genérica).  
292
- Figura (5.6): Contribuições para a linha “386” - coluna “386” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines (discretização genérica). 294
- Figura (5.7): Contribuições para a linha “386” - coluna “385” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines (discretização genérica). 295
- Figura (5.8): Procedimento genérico para obtenção das funções de duas variáveis. 297
- Figura (5.9): Inclusão de Nós Auxiliares em uma discretização bidimensional. 300
- Figura (5.10): Posicionamento de uma spline bidimensional sobre o nó “i” visando a geração da função de forma  $N_i(x, y)$  do vetor de carga .  
302
- Figura (5.11): Esquema auxiliar para a definição da matriz de transformação  $[K_c]$ . 311

- Figura (5.12): Determinação da posição sobre a qual se dará a plotagem comparada dos resultados obtidos para os deslocamentos, rotações, momentos fletores e esforços cortantes das diferentes placas a serem analisadas. 316
- Figura (5.13): Convenção para a vinculação dos bordos das estruturas em forma de placa a serem analisadas. 317
- Figura (5.14): Placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. 319
- Figura (5.15): Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. 320
- Figura (5.16): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959)). 321
- Figura (5.17): Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com a solução analítica. 322
- Figura (5.18): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica. 323
- Figura (5.19): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica. 324
- Figura (5.20): Placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. 327

- Figura (5.21): Perspectiva da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. 328
- Figura (5.22): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com uma solução aproximada (soluções aproximadas compostas a partir de um procedimento sugerido por Szilard (1974)). 329
- Figura (5.23): Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com uma solução aproximada. 330
- Figura (5.24): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com uma solução aproximada. 331
- Figura (5.25): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com uma solução aproximada. 332
- Figura (5.26): Placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central. 336
- Figura (5.27): Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central. 337
- Figura (5.28): Aplicação da carga concentrada “P” na posição  $u = \frac{a}{2}$  e  $v = \frac{b}{2}$  (ponto central) da placa simplesmente apoiada. 339
- Figura (5.29): Nós genéricos de uma discretização também genérica. 342

Figura (5.30): Nós responsáveis pela geração das contribuições diferentes de zero, referentes à

parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$ , para as linhas do vetor de carga do sistema interpolado por spline,  $\{f_i^s\}$ , em função de uma carga concentrada aplicada no nó “i”. 343

Figura (5.31): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959)). 344

Figura (5.32): Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com a solução analítica. 345

Figura (5.33): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica. 346

Figura (5.34): Esforços Cortantes  $Q$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica. 347

Figura (5.35): Placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central. 350

Figura (5.36): Perspectiva da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central. 351

Figura (5.37): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com uma solução aproximada

- (soluções aproximadas compostas a partir de um procedimento sugerido por Szilard (1974)). 352
- Figura (5.38): Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com uma solução aproximada. 353
- Figura (5.39): Momentos Fletores M da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com uma solução aproximada. 354
- Figura (5.40): Esforços Cortantes V da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com uma solução aproximada. 355
- Figura (5.41): Placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga distribuída segundo um perfil senoidal. 359
- Figura (5.42): Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga distribuída segundo um perfil senoidal. 360
- Figura (5.43): Deslocamentos w da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959)). 362
- Figura (5.44): Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com a solução analítica. 363

Figura (5.45): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica. 364

Figura (5.46): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica. 365

Figura (5.47): Placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. 368

Figura (5.48): Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. 369

Figura (5.49): Placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

386

Figura (5.50): Perspectiva da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. 387

## LISTA DE TABELAS

### CAPÍTULO 3

Tabela (3.1): Comparação entre os resultados obtidos para o primeiro sub-intervalo.	65
Tabela (3.2): Comparação entre os resultados obtidos para o segundo sub-intervalo.	66
Tabela (3.3): Comparação entre os resultados obtidos para o terceiro sub-intervalo.	67

### CAPÍTULO 4

Tabela (4.1): Translações $w$ da barra engastada (barra em balanço), discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	149
Tabela (4.2): Deformações $\varepsilon$ da barra engastada (barra em balanço), discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	150
Tabela (4.3): Deslocamentos transversais $w$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	175
Tabela (4.4): Rotações $\theta$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	176
Tabela (4.5): Momentos Fletores $M$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	176
Tabela (4.6): Esforços cortantes $V$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	177
Tabela (4.7): Deslocamentos transversais $w$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	180

Tabela (4.8): Rotações $\theta$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	181
Tabela (4.9): Momentos Fletores $M$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	182
Tabela (4.10): Esforços Cortantes $V$ da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	183
Tabela (4.11): Deslocamentos transversais $w$ da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	187
Tabela (4.12): Rotações $\theta$ da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	187
Tabela (4.13): Momentos Fletores $M$ da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	188
Tabela (4.14): Esforços Cortantes $V$ da barra biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	189
Tabela (4.15): Deslocamentos transversais $w$ da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	193
Tabela (4.16): Rotações $\theta$ da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	193
Tabela (4.17): Momentos Fletores $M$ da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	194
Tabela (4.18): Esforços Cortantes $V$ da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	195

Tabela (4.19): Deslocamentos transversais $w$ da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	199
Tabela (4.20): Rotações $\theta$ da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	200
Tabela (4.21): Momentos Fletores $M$ da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	200
Tabela (4.22): Esforços Cortantes $V$ da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	201
Tabela (4.23): Deslocamentos transversais $w$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	205
Tabela (4.24): Rotações $\theta$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	205
Tabela (4.25): Momentos Fletores $M$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	206
Tabela (4.26): Esforços Cortantes $V$ da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	207
Tabela (4.27): Deslocamentos transversais $w$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	211
Tabela (4.28): Rotações $\theta$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	212
Tabela (4.29): Momentos Fletores $M$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	213

Tabela (4.30): Esforços Cortantes $V$ da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	214
Tabela (4.31): Deslocamentos transversais $w$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	218
Tabela (4.32): Rotações $\theta$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	219
Tabela (4.33): Momentos Fletores $M$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	220
Tabela (4.34): Esforços Cortantes $V$ da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	221
Tabela (4.35): Deslocamentos transversais $w$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	225
Tabela (4.36): Rotações $\theta$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	226
Tabela (4.37): Momentos Fletores $M$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	227
Tabela (4.38): Esforços Cortantes $V$ da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	228
Tabela (4.39): Deslocamentos transversais $w$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	232
Tabela (4.40): Rotações $\theta$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	233

Tabela (4.41): Momentos Fletores $M$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	234
Tabela (4.42): Esforços Cortantes $V$ da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	235
Tabela (4.43): Deslocamentos transversais $w$ para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	239
Tabela (4.44): Rotações $\theta$ para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	240
Tabela (4.45): Momentos Fletores $M$ da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	241
Tabela (4.46): Esforços Cortantes $V$ da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	242

## CAPÍTULO 5

Tabela (5.1): Deslocamentos $w$ da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução analítica.	321
Tabela (5.2): Rotações $\theta$ da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.	322

- Tabela (5.3): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 323
- Tabela (5.4): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 324
- Tabela (5.5): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada. 329
- Tabela (5.6): Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparadas numericamente com uma solução aproximada. 330
- Tabela (5.7): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada. 331
- Tabela (5.8): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada. 332
- Tabela (5.9): Deslocamento  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparado numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) . 333

- Tabela (5.10): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). 334
- Tabela (5.11): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 344
- Tabela (5.12): Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparadas numericamente com a solução analítica. 345
- Tabela (5.13): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 346
- Tabela (5.14): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 347
- Tabela (5.15): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada. 352
- Tabela (5.16): Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparadas numericamente com uma solução aproximada. 353

- Tabela (5.17): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada. 354
- Tabela (5.18): Esforços Cortantes  $Q$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada. 355
- Tabela (5.19): Deslocamento  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparado numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). 356
- Tabela (5.20): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). 357
- Tabela (5.21): Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 362
- Tabela (5.22): Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparadas numericamente com a solução analítica. 363
- Tabela (5.23): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 364

- Tabela (5.24): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica. 365
- Tabela (5.25): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização  $6 \times 6$ . 370
- Tabela (5.26): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização  $12 \times 12$ . 372
- Tabela (5.27): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização  $24 \times 24$ . 375
- Tabela (5.28): Esforços Cortantes  $V$  nos apoios da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização  $6 \times 6$ . 377
- Tabela (5.29): Esforços Cortantes  $V$  nos apoios da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização  $12 \times 12$ . 378

Tabela (5.30): Esforços Cortantes  $V$  nos apoios da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização  $24 \times 24$ . 379

Tabela (5.31): Coeficientes  $C$  das splines cúbicas utilizadas na interpolação da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos. 380

Tabela (5.32): Deslocamento central  $w$  do bordo livre da placa simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparado numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). 384

Tabela (5.33): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo também três elementos. 392

Tabela (5.34): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo doze elementos. 392

Tabela (5.35): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos,

comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo quarenta e oito elementos.

393

Tabela (5.36): Esforços Cortantes  $V$  e Momentos Fletores  $M$  da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo também três elementos. 393

Tabela (5.37): Esforços Cortantes  $V$  e Momentos Fletores  $M$  da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo doze elementos. 394

Tabela (5.38): Esforços Cortantes  $V$  e Momentos Fletores  $M$  da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo quarenta e oito elementos. 395

Tabela (5.39): Coeficientes  $C$  das splines cúbicas utilizadas na interpolação da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos. 396

## NOMENCLATURA

$A$  = área da seção transversal da estrutura;

$E$  = módulo de elasticidade de Young do material da estrutura

$J$  = momento de inércia à flexão da seção transversal da estrutura, em relação a seus eixos centroidais;

$w$  = deslocamento longitudinal ou axial para barras, e transversal para vigas e placas;

$p(x)$  = carregamento axial distribuído ao longo da barra;

$p_0$  = carregamento axial constante distribuído ao longo da barra;

$[K_m^s]$  = matriz de rigidez do sistema interpolado por splines;

$\{f_i^s\}$  = vetor de carga do sistema interpolado por splines;

$q(x)$  = carregamento transversal distribuído ao longo da extensão longitudinal da viga;

$q_0$  = carregamento transversal constante distribuído ao longo da extensão longitudinal da viga, e ao longo de toda a área da placa;

$\{c_m^s\}$  = vetor dos coeficientes das splines;

$c_m^s$  = coeficiente do nó "m", sobre o qual o topo da spline cúbica está posicionado;

$[K_c]$  = matriz de transformação composta pelos valores das ordenadas das funções splines e suas respectivas primeiras derivadas nos nós de extremidade da discretização;

$\{w_c\}$  = vetor composto pelos deslocamentos transversais e rotações (para vigas e placas), respectivamente, nos nós e nos nós de extremidade da discretização, e vetor composto somente pelos deslocamentos axiais para barras;

$[K_{\text{físico}}]$  = matriz de rigidez física da estrutura;

$\{f_{\text{físico}}\}$  = vetor de carga físico da estrutura;

$\varepsilon$  = deformação apresentada por estrutura em forma de barra;

$\theta$  = rotação apresentada por estrutura em forma de viga e em forma de placa;

$M$  = momento fletor apresentado por estrutura em forma de viga e em forma de placa;

$V$  = esforço cortante apresentado por estrutura em forma de viga e de placa;

$L$  = comprimento do vão da estrutura em forma de barra e em forma de viga;

$t$  = espessura da placa;

$\nu_x$  = coeficiente de Poisson na direção “x” da placa ortotrópica;

$\nu_y$  = coeficiente de Poisson na direção “y” da placa ortotrópica;

$D_x$  = rigidez à flexão na direção “x” da placa ortotrópica;

$D_y$  = rigidez à flexão na direção “y” da placa ortotrópica;

$D_t$  = rigidez à torção da placa ortotrópica;

$G_{xy}$  = módulo cisalhante da placa ortotrópica;

$p(x, y)$  = carregamento transversal distribuído ao longo da área da placa;

$E_x$  = módulo de elasticidade de Young na direção “x” da placa ortotrópica;

$E_y$  = módulo de elasticidade de Young na direção “y” da placa ortotrópica;

$\nu$  = coeficiente de Poisson da placa isotrópica;

$D$  = rigidez à flexão da placa isotrópica;

$L_u$  = comprimento do vão da placa na direção “u”;

$L_v$  = comprimento do vão da placa na direção “v”.

# *1 INTRODUÇÃO*

Conforme McGuire (1968), para se acompanhar o aumento da sofisticação e da complexidade dos métodos matemáticos avançados, os quais possibilitam um entendimento mais profundo do comportamento das formas estruturais correntemente empregadas em engenharia, torna-se necessário um domínio mais completo da própria teoria matemática responsável por tais métodos. O domínio mais completo dessa teoria matemática viabiliza seu emprego em métodos já mais explorados e mais disponíveis na literatura universal.

Há algumas décadas, a análise estrutural em engenharia pode experimentar notáveis avanços proporcionados pelo advento de equipamentos, com tecnologia realmente diferenciada, através dos quais conferiu-se maior capacidade de cálculo aliada à possibilidades extremamente rápidas de execução dos processamentos.

Esse novo estágio do desenvolvimento humano, além de viabilizar o investimento em pesquisas visando a melhoria e o aperfeiçoamento dos métodos numéricos até então existentes, incentivou o aparecimento de novos métodos numéricos ainda mais evoluídos.

Figurando como um dos grandes “produtos” conquistados por essa nova realidade tecnológica que emergiu, o método dos elementos finitos já tendo sido amplamente utilizado para análise estrutural em engenharia, mais recentemente, teve uma significativa evolução, em termos de precisão e convergência dos resultados, devido ao emprego de splines como funções de forma para aproximar grandezas físicas e geométricas.

As splines cúbicas eram utilizadas por engenheiros para ajustar curvas através de pontos dados, e a energia de deformação minimizada por tais splines é proporcional, aproximadamente, à integral do quadrado da segunda derivada da spline.

A utilização de interpolação por spline, a qual é uma interpolação polinomial por partes, encontra grande aplicação em casos onde se deseja eliminar a “instabilidade numérica”, ou seja, em casos onde aproveita-se a propriedade, do polinômio interpolador, de não oscilar entre os nós. Um polinômio interpolador estável numericamente demonstra-se bastante atrativo em termos de sua

utilização dentro do método dos elementos finitos, ainda mais se esse polinômio de grau três, por exemplo uma B-spline, possuir características de suavidade representadas pela continuidade de sua primeira e segunda derivadas.

Este trabalho visa contribuir para a análise do projeto estrutural de engenharia, estudando-se técnicas que envolvem a utilização de métodos numéricos computacionalmente viáveis.

Objetiva-se, através da implementação de um elemento sub-paramétrico quadrático de quatro nós, analisar componentes estruturais sob a forma de placas finas por meio do método dos elementos finitos, empregando-se dentro deste B-splines como funções de forma para aproximação do campo de deslocamentos de tais estruturas.

Em todo o trabalho procurou-se reproduzir, detalhadamente, todos os passos necessários para a preparação e a posterior utilização de B-splines (funções tipicamente caracterizadas pela suavidade e robustez) como funções de forma em elementos finitos, proporcionando subsídios para o seu emprego generalizado dentro da análise estrutural em engenharia.

Através de um estudo detalhadamente descrito, além de estruturas bidimensionais em forma de placas elásticas finas, foram analisados casos envolvendo estruturas tipicamente unidimensionais como barras e vigas. Alguns dos resultados obtidos foram comparados com os resultados fornecidos pelo programa ANSYS. Todos os resultados obtidos, envolvendo várias situações de vínculos e geometria para barras, vigas e placas foram comparados com os resultados disponíveis na literatura, obtidos mediante o emprego de análise estrutural clássica ou analítica.

## ***2 CONSIDERAÇÕES ENVOLVENDO A UTILIZAÇÃO DE SPLINES EM ENGENHARIA ESTRUTURAL***

O problema de flexão de placas tem sido uma área muito atraente em termos de pesquisa dentro da mecânica estrutural envolvida pelas engenharias.

Conforme Appa (1988), em análise aeroelástica pelo método dos elementos finitos, diferentes procedimentos de discretização são empregados para determinar as cargas estruturais e aerodinâmicas. Além de acrescentar que, para formular as equações do movimento, é necessário representar as cargas de ar equivalente nos pontos da malha estrutural e representar as deflexões estruturais nos pontos da malha aerodinâmica, esse autor cita que, ao longo dos anos, muitos esquemas têm sido propostos para obter essas transformações necessárias, contudo, a aplicação desses métodos, freqüentemente, impõe algumas restrições no formato dos dados estruturais ou, então, o método apresenta-se com inconveniências ao uso.

Para essas transformações, R. F. Taylor, K. L. Miller e R. A. Brockman (1981) apud Appa (1988) utilizaram uma aproximação alternativa através de uma rede de malhas retangulares e polinomiais hermitianas.

Appa (1988), citando o emprego de superfícies infinitas por spline e as limitações que a utilização da superfície em forma de placa infinita oferece para a obtenção dessas discretizações, sugere como alternativa uma placa uniforme finita, ou seja, uma superfície finita por spline onde elementos de placa representam um dado molde de projeto por um número de elementos de flexão quadrilaterais ou triangulares.

Luah e Fan (1989) apresentaram o método do elemento finito por spline para análise de vibração livre em cascas de revolução. O elemento por spline, o qual é baseado na teoria clássica de casca fina, emprega um conjunto de funções de forma B-spline para a interpolação da geometria e dos

deslocamentos. Tal elemento engloba as boas características e propriedades do método dos elementos finitos e da interpolação por spline.

Para análise de vibração livre de cascas de revolução, a conveniência do elemento de casca fina axisimétrica de dupla curvatura, desenvolvido por Luah e Fan (1989) com base na técnica de interpolação por spline modificada, foi amplamente demonstrada através da precisão e eficiência resultantes da análise de várias cascas de revolução. Além de cascas com espessura variável poderem ser modeladas e analisadas por esse elemento, a aproximação utilizada pode ser estendida a elementos bidimensionais mais gerais de casca.

Peng-Cheng e Jian-Guo (1989) apresentaram um método semianalítico para análise estática de cascas rasas. Funções spline, cúbicas e quárticas, e séries foram utilizadas como funções de forma para aproximação dos deslocamentos, as quais satisfazem as condições de contorno para obter-se a solução aproximada de cascas rasas. Formulou-se um esquema computacional unificado adaptado para vários tipos de condições de contorno.

Em comparação com o método dos elementos finitos convencional, o método desenvolvido por Peng-Cheng e Jian-Guo (1989) é de maior precisão, possui um menor número de incógnitas e é mais fácil de ser programado. Através de comparação com outros métodos, os vários resultados numéricos obtidos são, efetivamente, mais precisos em função das boas propriedades das séries e splines cúbicas e quárticas, as quais são polinomiais por partes que apresentam ortogonalidade.

O interessante nessa publicação de Peng-Cheng e Jian-Guo é que foi formulado um esquema computacional unificado para adaptar-se a vários tipos de condições de contorno, possibilitando ao método uma versatilidade de aplicação em termos das diferentes condições de vínculos apresentadas pelas estruturas analisadas.

Liang (1989) cita que o maior problema na análise por elementos finitos é a descontinuidade de tensões e deformações, nos contornos, entre elementos. É um problema de continuidade geométrica. Este autor apresenta uma interpolação por B-splines e por função de Bézier para dar continuidade geométrica à função deslocamento, garantindo uma continuidade por partes nas tensões e deformações estruturais. É apresentada também uma conexão entre o CAD geométrico e a análise por elementos finitos.

Conforme Leung e Au (1990), no método da faixa finita por spline desenvolvido por Cheung e seus colaboradores, enquanto funções spline são utilizadas na direção longitudinal, funções de forma polinomiais convencionais são utilizadas na direção ortogonal para a construção da função deslocamento. Essa aproximação tem sido empregada com sucesso na resolução de vários problemas estáticos, dinâmicos e de estabilidade de placas e cascas.

Ainda segundo Leung e Au (1990), o uso de funções spline em ambas as direções para solução de problemas de placas e cascas tem sido apresentado por vários pesquisadores como Shik (1979) e Qin (1985). Nessa formulação, a função deslocamento é definida por parâmetros nos nós, alguns dos quais são fictícios fora da placa ou casca. Por isso, a introdução das condições de contorno e o “*assembly*” de elementos envolverá, perto ou no contorno, extensivas modificações nas funções spline. Em menor escala, esse inconveniente está também presente no método da faixa finita por spline.

Leung e Au (1990) propuseram que os parâmetros nos nós fictícios, sobre ou fora do contorno, fossem totalmente eliminados e, assim, as matrizes dos elementos finitos fossem formadas. O *assembly* de elementos e a introdução das condições de contorno seguem o procedimento padrão de elementos finitos. O elemento resultante apresentou-se similar a um elemento de alta ordem, ainda que, dentro dos intervalos, as funções de interpolação fossem cúbicas. A aproximação utilizada, por meio de transformação de coordenadas da interpolação por splines em coordenadas físicas, para resolução de problemas envolvendo vigas e placas mostrou-se flexível e precisa englobando várias condições de contorno.

Esta publicação de Leung e Au foi a base segundo a qual o presente trabalho foi fundamentado, ou seja, o presente trabalho teve sua origem com base na constituição de uma única matriz de rigidez para a estrutura a ser analisada, independente das condições apresentadas pelos vínculos nos contornos desta. A partir da constituição dessa matriz de rigidez, efetuou-se a transformação de coordenadas da interpolação por splines cúbicas em coordenadas físicas, empregada por Leung e Au.

Esse procedimento, envolvendo a criação de nós auxiliares responsáveis pela associação de mais um grau de liberdade aos nós periféricos das discretizações uni e bidimensionais, foi detalhadamente exposto. O trabalho também conta com a apresentação de um exemplo de interpolação por splines cúbicas comentado, e com a exposição de vários exemplos comentados envolvendo a análise, mediante a interpolação por splines cúbicas, de estruturas unidimensionais em forma de barra e de vigas, e bidimensionais em forma de placas isotrópicas elásticas finas.

Dentre os exemplos de placas finas estudados, ressalta-se a análise feita em uma placa com reentrância, na qual ocorre a sobreposição de nós auxiliares. Para o posicionamento de splines cúbicas sobre estes nós auxiliares sobrepostos, os quais também ocorrem nas estruturas em forma de placas com furos, foi buscada uma solução de forma a se obter uma matriz de transformação não singular. Ao longo de toda a descrição desse procedimento desenvolvido foram feitos comentários com base nos fundamentos da teoria de splines, aos quais dedicou-se um capítulo especial neste trabalho.

Grigorenko e Berenov (1990) propuseram uma aproximação, através do método da colocação por spline, para resolver problemas estáticos bidimensionais de cascas rasas e placas retangulares no plano, com rigidez variável e cantos opostos engastados e simplesmente apoiados. Enquanto o método da colocação por spline foi utilizado em uma das direções coordenadas, a integração numérica pelo método da ortogonalização discreta foi utilizada na outra direção coordenada.

Grigorenko e Berenov (1990) enfatizam que, além de possibilitar que as condições de contorno citadas fossem satisfeitas, tal aproximação possibilitou a obtenção da solução procurada com um alto grau de precisão através da região na qual o problema estava sendo resolvido. A mesma aproximação já havia sido utilizada, com sucesso por esses autores, na solução de problemas relativos ao estado de tensão-deformação de cascas rasas e placas com cantos opostos engastados.

Cheung e Li (1990) desenvolveram o método da faixa finita por spline para análise de pontes contínuas. Foram combinadas funções de forma convencionais e funções B-splines, em cada uma das direções ortogonais das pontes, para aproximação dos deslocamentos.

Conforme Cheung e Li (1990), além desse método ser mais flexível no tratamento das condições de contorno e ser mais preciso para aplicar forças concentradas e cargas axiais, do que o método da faixa finita convencional que utiliza funções de viga contínua, ele é mais eficiente em termos computacionais que o método dos elementos finitos convencional, pois este requer três vezes mais incógnitas nos nós dos elementos para atingir a mesma continuidade de segunda ordem garantida pela utilização de B-splines.

Nos últimos dez anos, conforme Peng-Cheng e Hong-Bo (1991), baseado em consideráveis avanços no desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos, muitos estudos para análises estáticas, de vibração, dinâmicas e de flambagem para placas e cascas têm sido desenvolvidos pela utilização do método do elemento por spline.

Conforme Peng-Cheng e Hong-Bo (1991), Antes (1974), Mizusawa et al. (sem referência do ano da publicação), Shih Chung-Tze (1979), Shen Peng-Cheng et al. (1986, 1987 e 1989) têm apresentado os procedimentos do método do elemento finito por spline, com variável única, para análise de placas e cascas baseada no princípio variacional. Por tal análise envolver menos incógnitas, um alto grau de precisão e uma facilidade de programação, ela pode ser aplicada, via microcomputador, a estruturas com forma regular.

Nessa publicação, Peng-Cheng e Hong-Bo ainda incluem que, com base no desenvolvimento do método dos elementos finitos, uma classe de formulação mista para análise de flexão de placa foi apresentada por L. R. Herrmann (1967), F. A. Mirza e M. D. Olson (1980), W. Altman e F. Venancio Filho (1974) e Fumio Fujii (1983).

Peng-Cheng e Hong-Bo (1991) utilizam funções spline bicúbicas para construir momentos fletores e campos de deslocamentos transversais. As equações do elemento por spline com variáveis múltiplas são derivadas com base no princípio de Hellinger-Reissner. Alguns exemplos numéricos voltados para a análise de flexão de placas são apresentados, e a precisão dos resultados, através de comparação com outros métodos, é fortemente evidenciada.

É interessante acrescentar que Peng-Cheng e Hong-Bo, nessa publicação de 1991, impõem as condições de contorno da estrutura na própria função spline utilizada na interpolação, o que implica na necessidade de alterações destas funções posicionadas sobre os nós próximos às extremidades da estrutura. Tais alterações variam em função do vínculo segundo o qual a estrutura se submete em cada extremidade do contorno.

Gupta, Kiusalaas e Saraph (1991) descreveram a análise de cascas axisimétricas, por meio de elementos finitos, baseada em splines cúbicas. Os elementos apresentados são isoparamétricos, isto é, geometria e deslocamentos são descritos por splines cúbicas. Nos nós interiores do meridiano, os graus de liberdade são dois deslocamentos nodais. Três graus de liberdade foram utilizados nos nós dos cantos: dois deslocamentos e a rotação do meridiano.

Gupta, Kiusalaas e Saraph (1991) acrescentam que, se a interpolação por B-spline garante continuidade da primeira e da segunda derivadas, a curvatura meridional e os momentos fletores nos nós interiores são também contínuos. Talvez o mais importante benefício da interpolação por spline cúbica seja a ausência de descontinuidades de tensão nos nós. Para demonstrar a capacidade do elemento, foram resolvidos três exemplos: cilindro solicitado por momento no canto superior, cúpula esférica sob pressão uniforme e casca ramificada.

Mizusawa (1991) tratou as vibrações de placas setoriais anulares isotrópicas, com condições de contorno arbitrárias, utilizando o método do elemento por spline. Para demonstrar a precisão do método, vários exemplos foram resolvidos e os resultados comparados com os obtidos por métodos analíticos e numéricos. Obteve-se boa precisão.

Mizusawa (1991) apresentou parâmetros de frequência de placas setoriais anulares com cantos livres e suportes pontuais, os quais apresentam grande dificuldade para serem resolvidos analiticamente. O método pode também ser utilizado, sem dificuldade, para analisar placas setoriais anulares com espessura variável ou com enrijecedores.

Conforme Gutkowski, Chen e Puckett (1991), em função do método dos elementos finitos aplicado ao contínuo tornar-se ineficiente para alguns casos, realizaram-se pesquisas no sentido da redução do grau de discretização geométrica pelo uso de “*elementos por faixa (strip elements)*” ou de “*macro elementos*”. Para problemas envolvendo análise de placas, a utilização do método da faixa

finita tem aumentado a eficiência computacional. Como extensão de tal método tem-se a incorporação de funções B-spline na formulação direta básica de rigidez.

Ainda conforme Gutkowski, Chen e Puckett (1991), pesquisas recentes direcionadas ao “*método da faixa composta*”, onde membros-suportes interiores, flexíveis ou rígidos, são incorporados numa formulação direta de rigidez, apontam algumas dificuldades de convergência relacionadas à performance. Outras pesquisas incluem a derivação dos “*elementos da faixa finita*” e o uso de funções spline numa formulação de faixa finita por spline.

Nessa publicação de 1991, Gutkowski, Chen e Puckett apresentaram uma formulação para o método da faixa finita baseado em funções B-spline com nós desigualmente espaçados, e aplicaram-na a problemas elementares de flexão de placa. A introdução de nós desigualmente espaçados permite refinamento local seletivo de uma malha na faixa finita por spline, melhorando a precisão da solução e a razão de convergência.

Segundo Gutkowski, Chen e Puckett (1991), na comparação com o método convencional da faixa finita, funções spline conduzem a notáveis melhoramentos na convergência para placas planas solicitadas por cargas concentradas e placas rigidamente suportadas por suportes interiores igualmente espaçados. Um aspecto prático da formulação do método da faixa finita por spline é que descontinuidades são incorporadas como condições de contorno localizadas. Condições de contorno prescritas são impostas pela modificação de somente três splines adjacentes, sem transmitir o efeito além dessa região (o método proposto utiliza modificações nas splines próximas ao contorno).

Conforme Fan e Luah (1992), há quase um século e meio atrás, a teoria clássica de placa foi estabelecida por Kirchhoff (Gustav Kirchhoff (1850): “Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe” – Journal Angewandte Mathematik 40(1)- 51-58). Essa teoria descreve o comportamento da placa somente em termos da deflexão da superfície média. A função representante da deflexão é uma função de duas coordenadas ortogonais no plano da placa e tem que satisfazer uma equação diferencial de quarta ordem, a qual, juntamente com as condições de contorno, define completamente a superfície deformada.

Há mais de 30 anos atrás, a solução desse problema clássico de placa fina, que atraiu bastante o esforço dos pesquisadores, foi inovada e facilitada pelo desenvolvimento do método dos elementos finitos.

Segundo Fan e Luah (1992), a literatura voltada para elementos finitos tratando o problema de flexão de placa é bastante vasta: Hrabok e Hrudey (1984) têm contribuído com uma excelente revisão envolvendo uma coleção de 150 publicações nesta área, Batoz et al. (1980) têm apresentado uma discussão detalhada de vários elementos, com três nós, triangulares para flexão de placa.

Conforme Fan e Luah (1992), embora teoricamente atrativa, a formulação de elementos finitos baseada na teoria clássica de placa fina é numericamente ineficiente. Isto é devido principalmente ao fato de que as equações clássicas de Kirchhoff, que descrevem a flexão de placa fina, exigem continuidade  $C^1$  (continuidade da primeira derivada) da função responsável pela deflexão, para a convergência das aproximações por elementos finitos. Essa dificuldade contribuiu para que muitos pesquisadores focassem seu interesse em aproximações alternativas que exigem somente continuidade  $C^0$  (sem continuidade em suas derivadas).

Conforme Fan e Luah (1992), um grande número de elementos  $C^0$  para flexão de placas foi desenvolvido ao longo dos anos, e as teorias mais comuns sobre as quais são baseados esses elementos são a de Reissner (1945) ou Mindlin (1951) e a do conceito de casca degenerada (Ahmad et al. 1970). Esses elementos empregam simplicidade na formulação, e são aplicáveis às placas moderadamente grossas sob consideração da deformação cisalhante.

Segundo Fan e Luah (1992), uma séria desvantagem ocorre quando esses elementos são utilizados para análise de estruturas em forma de placas finas, nas quais ocorre o *locking* devido ao cisalhamento (vários procedimentos visando atenuar o problema têm sido utilizados).

Ainda conforme Fan e Luah (1992), mais recentemente tem emergido uma nova direção de pesquisa em análise estrutural numérica: a aplicação de funções spline em vários métodos de solução (por exemplo no método dos elementos finitos) para problemas de engenharia. Vantagens da interpolação por spline, como maior precisão e eficiência, têm sido demonstradas.

A mais notável contribuição em termos da aplicação de funções spline na solução de problemas de engenharia, conforme Fan e Luah (1992), é o método da faixa finita por spline desenvolvido por Cheung et al. (1982). Nesse método, as funções trigonométricas anteriormente utilizadas no método da faixa finita foram substituídas por funções  $B_3$ -spline. Muitas características indesejáveis do método convencional da faixa finita, tal como a deficiência na manipulação de cargas concentradas, foram vencidas.

Conforme Fan e Luah (1992), com as contribuições de Tham et al. (1986); Li et al. (1986); Zhu e Cheung (1989), o método da faixa finita por spline desfrutou de um contínuo desenvolvimento e é capaz de resolver uma série extensa de problemas de engenharia.

Numerosos outros autores, citados por Fan e Luah (1992), têm também tratado da utilização de funções spline para interpolação, como primeiro exemplo, Mizusawa et al. (1979 e 1980) utilizaram funções B-spline de várias ordens, como funções coordenadas no método de Rayleigh-Ritz, para resolver problemas de vibração e flambagem de placas oblíquas; como segundo exemplo, Shen e Wang (1987) estudaram a estática e a vibração de cascas através da utilização de splines cúbicas e

quínticas, as vantagens da interpolação por splines, tais como alta precisão e eficiência, foram demonstradas; um terceiro exemplo foi a citação de Moore et al. (1984), que empregaram funções B-spline e funções B-spline racionais para representação geométrica do elemento de casca, mostrando que, com essa técnica, superfícies complicadas de casca podem ser modeladas precisamente ou mesmo exatamente; uma última citação refere-se a Fan e Luah (1990), que desenvolveram um elemento axisimétrico de casca utilizando funções spline para interpolação da geometria e dos deslocamentos. Observou-se excelente performance do elemento e o método foi estendido para análise de vibração livre.

Fan e Luah (1992) propuseram um novo elemento finito por spline para análise de placas arbitrárias de Kirchhoff. O elemento emprega um conjunto de funções de forma B-spline para interpolação dos deslocamentos e adota uma aproximação subparamétrica para a geometria geral. Desde que siga-se o procedimento da formulação padrão de deslocamento, esse método é teoricamente simples, e a implementação computacional do elemento é direta. Além de uma avaliação numérica do elemento, discute-se a formulação deste em detalhes; a precisão e eficiência do elemento proposto são amplamente demonstradas.

Conforme Luah e Fan (1992), placas de configurações complicadas são comumente utilizadas em muitas estruturas de engenharia, apesar das dificuldades matemáticas envolvidas nestas análises. A formulação rigorosa e a solução da equação diferencial governante é bastante tediosa, exceto para alguns casos simples de placas retangulares e circulares.

Ainda segundo Luah e Fan (1992), em aplicações práticas, estruturas em forma de placas são mais complicadas em relação aos modelos simples através dos quais a análise teórica pode ser rapidamente executada. A complexidade, a despeito da anisotropia e não-homogeneidade, pode ser devida a um ou mais dos seguintes fatores:

1. Rigidez não-uniforme.
2. Carregamento não- uniforme.
3. Presença de aberturas interiores.
4. Condições de contorno mistas e suportes pontuais.
5. Geometria complexa.

No presente estágio do desenvolvimento da mecânica estrutural, conforme Luah e Fan (1992), o método dos elementos finitos apresenta-se como a primeira escolha para análise de estruturas complicadas em forma de placas. O problema reside somente na formulação dos elementos finitos, que devem apresentar aptidão no tratamento das várias complexidades que surgem em decorrência da necessidade prática de precisão.

Luah e Fan (1992), responsáveis pela criação do elemento finito quadrilateral de nove nós por spline (usado para análise geral de placa fina), investigaram a conveniência desse elemento no estudo de placas complicadas. A precisão e robustez do elemento são inicialmente analisadas através de um conjunto de testes envolvendo problemas que examinam os efeitos de vários fatores, tais como distorção de malha e um grande número de aspectos relacionados à performance.

Nessa publicação de 1992, Luah e Fan apresentam exemplos numéricos de placas complicadas, envolvendo análises estática e de vibração livre, para mostrar a utilidade prática do elemento.

Cheung e Kong (1993a) estudaram a estabilidade de placas deformáveis por cisalhamento, sob tensões iniciais constantes, pelo método da faixa finita por spline. A teoria de placa de terceira ordem foi utilizada como base para o desenvolvimento do elemento por faixa. Tal elemento é aplicável à análise de placas retangulares com recortes e placas laminares com configuração arbitrária de lâminas e de condições de suporte.

A função clássica B-spline, segundo Cheung e Kong (1993a), foi modificada de modo a proporcionar um elemento, de faixa finita por spline, resultante que incorporasse vantagens da interpolação por spline e a versatilidade do método dos elementos finitos. Um conjunto de análises demonstrativas foram apresentadas de modo a mostrar a validade do método da faixa finita por spline modificada e a precisão do elemento por faixa. Nesse método, a imposição das condições de contorno da estrutura é feita na própria função spline responsável pela interpolação, o que implica na necessidade de uma série de mudanças nas splines posicionadas próximas ao contorno da discretização.

Cheung e Kong (1993b) propuseram uma aproximação local-global para análise de placas laminadas grossas. Tal aproximação trata uma placa laminada grossa como um corpo elástico anisotrópico não-homogêneo tridimensional.

Inicialmente, conforme Cheung e Kong (1993b), a seção transversal de uma placa laminada é discretizada por elementos convencionais de oito nós. A função de interpolação ao longo do vão da placa é definida por função B-spline; as funções deslocamento podem ser expressadas como o produto de funções de forma isoparamétricas usuais por função spline. As seis componentes das tensões, as frequências naturais fundamentais e as cargas de flambagem críticas são determinadas com precisão satisfatória através de exemplos numéricos.

Fan e Luah (1993) utilizaram o elemento de placa por spline de nove nós para análise de vibração livre de placas gerais. A formulação é baseada na teoria clássica de placa fina de Kirchhoff, onde emprega-se funções de forma B-spline para construção da função deslocamento bidimensional, e funções Lagrangianas biquadráticas para a interpolação geométrica.

O elemento de nove nós, desenvolvido por Fan e Luah (1993), tem 21 graus de liberdade e é de forma quadrilateral arbitrária com cantos curvos. A precisão e eficiência do elemento para análise de vibração livre foram demonstradas através de exemplos numéricos. Particularmente, ilustra-se os efeitos da geometria do elemento, tais como os relacionados ao aspecto, obliquidade, forma de distorção, contorno curvo e irregularidades de malha.

Ainda segundo Fan e Luah (1993), além do elemento apresentar-se bastante insensível a tais irregularidades, resultados muito precisos foram obtidos através de análise por malha grosseira. Além do mais, mostrou-se que o elemento atingiu alta precisão e eficiência, em função das interpolações por spline dentro do método dos elementos finitos, sem qualquer sacrifício da aplicabilidade geral.

Com a definição de elementos finitos quadráticos por B-spline, Gardner, Gardner e Dag (1993) propuseram elementos infinitos Hermitianos para estender a aplicabilidade desses elementos finitos a regiões ilimitadas.

Utilizando problemas para testar e comparar essa técnica com procedimentos já publicados, Gardner, Gardner e Dag (1993) mostraram que a solução envolvendo o elemento finito quadrático por B-spline tem, como esperado, apresentou limites de erro mais baixos que a solução por elemento linear. A efetividade da formulação exposta foi comprovada.

Um método para otimizar a forma da seção transversal de uma barra prismática sob torção de Saint-Venant, utilizando integração direta das equações integrais, foi desenvolvido por Schramm e Pilkey (1993). No método, são tratados os problemas de maximização da rigidez a torção e a minimização da massa, a forma da seção transversal é descrita por curvas B-splines. Conforme os autores, o método mostrou-se muito eficiente em função da combinação de um método de integração direta para o problema de torção e da descrição da forma estrutural por curvas B-splines.

Recentemente, sob influência dos computadores e métodos numericamente avançados, conforme Ye (1994), tem sido dado mais atenção ao projeto de placas imperfeitas através das teorias de grandes deflexões.

Segundo o conteúdo desse mesmo trabalho apresentado em 1994, na teoria das pequenas deflexões, onde essas são muito menores que a espessura da placa, pode-se utilizar a superposição. Assim, em relação à pequena deflexão de uma placa inicialmente curva carregada perpendicularmente, a deflexão total é igual à soma da deflexão inicial mais a deflexão resultante da carga aplicada na placa plana.

Sob consideração das grandes deflexões, conforme Ye (1994), onde essas são de ordem equivalente à espessura da placa, as equações governantes são não-lineares e a superposição não pode ser utilizada. Nessa publicação de 1994, o mesmo autor ainda cita que Timoshenko (1959) sugeriu

uma análise exata para grandes deflexões de uma placa infinitamente longa, possuindo deflexões iniciais, sob carregamento perpendicular em sua face côncava. Posteriormente, uma variedade de diferentes métodos foram desenvolvidos.

Estudando problemas de grandes deflexões e pós-flambagem, Ye (1994) cita que Bushton (1970) apresentou um método de relaxação dinâmica para placas retangulares com imperfeições iniciais, Domburian et al. (1976) baseou-se no método de perturbação, e Tillerson et al. (1973) no método dos elementos finitos para tratamento desse problema.

Ye (1994) utiliza um método iterativo de elementos de contorno e o método dos elementos finitos como uma aproximação alternativa para flexão não linear de placas com imperfeições iniciais. Um elemento quadrático retangular por spline é empregado, via elementos finitos, visando uma boa aproximação dos deslocamentos no plano e deformações.

Segundo Ye (1994), visto que as funções spline são as mais suaves funções de interpolação, em comparação com outras polinomiais por partes como funções Lagrangianas e Hermite, sua utilização permite boa precisão mesmo com discretização grosseira, a qual reduz o tamanho da matriz e o número de iterações exigido pela análise não-linear.

Utilizando-se uma variedade de métodos, segundo Mizusawa (1994), um extenso estudo em análise de flexão de placas oblíquas solicitadas por cargas transversais tem sido executado. A análise de flexão de placas oblíquas é considerada como um problema padrão para verificar e comparar a precisão de diferentes modelos matemáticos e elementos finitos.

Geralmente, conforme Mizusawa (1994), a análise de flexão de placas oblíquas é mais difícil, em relação à placas retangulares, devido à presença de uma singularidade de tensão no canto obtuso. Essa singularidade é intensificada com um aumento no ângulo oblíquo.

Mais recentemente, ainda segundo Mizusawa (1994), vários modelos discretos por spline, tais como o método do elemento por spline, Mizusawa et al. (1979), o método da faixa finita por spline, Cheung e Fan (1983), o método da faixa por spline, Shen Peng-Cheng e Wang Jian-Guo (1986) e Mizusawa e Kajita (1987), o método da faixa combinada por spline, Chen, Gutkowski e Puckett (1990), e o método integral por spline, Hadid e Bashi (1990), têm sido propostos para análise de problemas de placa e casca.

Mizusawa (1994) ainda cita que, Mizusawa, Kajita e Naruoka (1979 e 1980) apresentaram o método do elemento por spline, o qual é um método alternativo de elemento finito baseado no deslocamento, para analisar vibração e flambagem de placas oblíquas; e que Li, Cheung e Tham (1986) analisaram placas oblíquas em flexão utilizando o modelo da faixa finita por spline cúbica combinado com o conceito sub-paramétrico conforme.

Mizusawa (1994) utiliza o método do elemento por spline para análise de deflexões e momentos fletores de placas obliquas isotrópicas, com condições de contorno arbitrárias, solicitadas por carga uniforme e concentrada. A precisão e convergência dos resultados foram demonstradas através da utilização de modelos de elemento por spline de alta ordem e malhas com várias divisões. Através de comparação com resultados calculados por outros métodos numéricos, os resultados obtidos apresentaram um bom ajuste.

Conforme Madasamy e Kalyanaraman (1994), estruturas utilizadas em aplicações de engenharia têm aberturas em virtude de objetivos funcionais. A análise elástica de lajes de piso com aberturas retangulares ou de suportes abertos para colunas, pela teoria clássica de placa, prevê momentos singulares e forças cisalhantes nos cantos de tais aberturas e suportes.

Madasamy e Kalyanaraman (1994) acrescentam ainda que, apesar do método dos elementos finitos garantir a solução para tais estruturas, a razão de convergência pode ser significativamente reduzida. Para vencer tal problema, ou a malha de elementos finitos é refinada localmente, ou um modelo de elemento finito com finalidade especial, com base na formulação de tensão híbrida, é utilizado.

Segundo Madasamy e Kalyanaraman (1994), um refinamento de malha conduz a um grande número de graus de liberdade, e assim a um aumento do tempo computacional. Um modelo de elemento finito híbrido além de ser mais complicado que o método dos elementos finitos baseado no deslocamento, consome mais tempo.

Por outro lado, Madasamy e Kalyanaraman (1994) lembram que o método dos elementos finitos de ordem mais alta e o método clássico da faixa finita enfrentam dificuldades, devido à continuidade da ordem mais alta de suas funções deslocamento, na modelagem de problemas com gradientes de tensão acentuados.

Para vencer tais problemas, Madasamy e Kalyanaraman (1994) utilizaram o método da faixa finita por spline, com base na teoria clássica de placa fina, para modelar os recortes com eficiência.

Em função de problemas planos de tensão e de flexão de placas com abertura poderem ser analisados, com eficiência e precisão, pela utilização da flexibilidade da modelagem no método da faixa finita por spline, Madasamy e Kalyanaraman, nessa publicação de 1994, estenderam o método para a análise de tais problemas através da utilização de nós em seções apropriadamente desiguais e de modificações das splines no contorno.

Conforme Madasamy e Kalyanaraman (1994), além dos resultados do método da faixa finita por spline indicarem convergência monotônica de tensões em vez da convergência oscilatória (Fenômeno de Gibb) encontrada no método convencional da faixa finita, os resultados do método da faixa finita

por spline são mais precisos, com um menor número de graus globais de liberdade, em relação ao método dos elementos finitos. Segundo os mesmos autores, o tempo computacional e a armazenagem requeridos são significativamente reduzidos no método da faixa finita por spline.

Nessa publicação de Madasamy e Kalyanaraman (1994), foi utilizada a imposição das condições de contorno da estrutura através de modificações nas próprias funções splines, empregadas na interpolação, posicionadas próximas à extremidade da discretização.

Segundo Peng-Cheng e Peixiang (1995), uma considerável quantidade de trabalhos sobre análise numérica de problemas de flexão de placas isotrópicas, baseados na teoria clássica de placa fina, tem sido desenvolvida nas últimas décadas, por exemplo, o método das diferenças finitas, Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), o método dos elementos finitos, Zienkiewicz e Cheung (1964), o método da faixa finita, Cheung (1976), o método dos elementos de contorno, Jaswon e Maiti, (1968), e o método do elemento finito por spline, Chung-Tze (1979).

Ainda conforme Peng-Cheng e Peixiang (1995), em função do modelo de placa de Kirchhoff, o qual negligencia os efeitos cisalhantes transversais, apresentar imprecisões quando utilizado em placas moderadamente grossas e em placas constituídas por materiais não isotrópicos, importantes trabalhos têm sido apresentados onde o tipo de deslocamento assumido pelos elementos de placa inclui o efeito cisalhante.

Peng-Cheng e Peixiang (1995) citam também que Pryor et al. (1970) apresentaram uma análise de placa de Reissner através do método dos elementos finitos; Benson e Hinton (1976) apresentaram uma solução por faixa finita grossa para problemas de estática, vibração livre e estabilidade com base no princípio da energia potencial; Wu Chang-Chun (1982) apresentou um elemento híbrido triangular para flexão de placa baseado no princípio da energia mista com efeitos cisalhantes; Wang Jian-Guo et al. (1992) desenvolveram o método dos elementos de contorno para placa grossa de Reissner em fundação elástica; Shen Peng-Cheng et al. (1987) desenvolveram na última década, para análise de placas e cascas, modelos de elemento finito por spline baseados no princípio da energia potencial e as aplicações de funções cúbicas de interpolação B-spline.

Peng-Cheng e Peixiang (1995) utilizaram funções de interpolação B-spline, de dualidade na forma do produto, para construir os deslocamentos generalizados  $w$ ,  $\phi_x$  e  $\phi_y$ , para placas moderadamente grossas. As equações do elemento finito utilizando spline são derivadas com base no princípio da energia potencial. O método do elemento finito utilizando spline, para várias relações espessura/comprimento de placas moderadamente grossas, apresentou alta precisão e boas características de convergência. Resultados numéricos, envolvendo exemplos sob comparação com outros métodos, demonstraram a precisão, eficiência e segurança da metodologia desenvolvida.

Essa publicação de 1995 de Peng-Cheng e Peixiang utiliza a imposição das condições de contorno da estrutura, que está sendo interpolada por splines cúbicas, através de modificações nas splines posicionadas próximas às extremidades da discretização.

Conforme Qin e Terzopoulos (1995), análises dinâmicas através de B-splines triangulares fornecem uma aproximação unificada e sistemática para uma variedade de problemas de modelagem sólida, incluindo combinação de forma, projeto baseado em restrições e projeto paramétrico. B-splines triangulares “suportam” manipulação direta e escultura interativa de formas utilizando-se ferramentas baseadas em força.

Qin e Terzopoulos (1995) desenvolveram um novo modelo, empregando B-splines triangulares em análise dinâmica, com base em uma elegante geometria por B-spline triangular e princípios físicos de dinâmica. O comportamento dinâmico desse modelo, resultante da integração numérica das equações diferenciais de movimento, produziu completo significado físico e variação de forma altamente intuitiva. Várias aplicações de B-splines triangulares foram demonstradas em análise dinâmica. Técnicas de análise por elementos finitos foram utilizadas para transformar as equações de movimento em algoritmos numericamente eficientes.

Com base no princípio variacional de deslocamento, Wang e Li (1996) desenvolveram um método geral, chamado método do elemento de membro finito por spline, para análise de flambagem de membros de parede fina submetidos à flexão pura, com seções transversais arbitrárias. Uma função spline transformada foi utilizada para simular os deslocamentos por abaulamento ao longo da seção transversal do membro de parede fina.

A análise, desenvolvida por Wang e Li nessa publicação de 1996, leva em conta o efeito cisalhante lento. Após comparação dos resultados com os da teoria clássica e com os fornecidos pelo “COSMOS/M” (um programa de análise por elementos finitos), a versatilidade, precisão e eficiência do método proposto são plenamente demonstrados. A forte convergência mostrada nos exemplos numéricos prediz a confiabilidade dos resultados.

Iarve (1996) propôs um procedimento numérico, baseado numa aproximação polinomial independente por spline, para resolver problemas de valor de contorno em compósitos laminados em forma de placas com aberturas, onde são determinados os deslocamentos e as componentes de tensão interlaminares em coordenadas curvilíneas. O procedimento é conveniente para o tratamento de problemas contendo regiões que envolvem singularidades.

Conforme Iarve (1996), além da aproximação por spline eliminar os problemas de compatibilidade entre elementos que, na presença de singularidades de campo, conduzem a resultados insatisfatórios através da análise por elementos finitos; ela oferece continuidade dos campos de

deslocamento, deformação e tensão dentro dos domínios homogêneos, ao mesmo tempo que preserva as vantagens da aproximação local, tais como esparsidade do sistema de equações resultante.

Iarve (1996) propôs uma solução assintótica válida na vizinhança da abertura, na interface de duas camadas ortotrópicas de espessura arbitrária, que foi desenvolvida para verificar a aproximação por spline baseada na solução para todo o campo. Observou-se uma excelente conformidade para tensões interlaminares em laminado sob tração uniaxial.

Iarve (1996), ao obter solução para todo o campo tridimensional dos compósitos em forma de placas contendo aberturas, onde foram mostradas tensões convergentes e condições de contorno consistentes, tais como continuidade de tração interlaminar, cita que a aproximação por spline polinomial, idealmente adaptada para problemas cuja solução envolve comportamento singular, tem sido aplicada à análise de tensão tridimensional de compósitos práticos contendo dezenas de camadas.

Conforme Luo e Wang (1996), sabe-se que o método de funções spline encontrou aplicações amplamente difundidas no Projeto Geométrico Auxiliado por Computador, CAD Geométrico, e em computação por elementos finitos. Muitas superfícies são intrinsecamente bivariáveis e não podem ser adequadamente representadas por produtos tensoriais. Além do que, aproximantes efetivos necessitam ser locais, isto é, o valor da superfície em um ponto é influenciado somente pela informação em suas vizinhanças.

Ainda segundo Luo e Wang (1996), em casos gerais, considera-se uma triangularização ou partição quadrilateral de uma dada região e, então, discute-se a estrutura de um espaço de funções spline polinomiais ou funções spline racionais na partição. No caso de triangularização, o qual tem muitas aplicações em Projeto Geométrico Auxiliado por Computador, CAD Geométrico, e em computações por elementos finitos, existem muitos resultados através de funções spline polinomiais, Branhill e Farin (1981), Sablonniere (1985) e Wang (1985), e através de funções spline racionais, Birkhoff e Mansfield (1974), Gout (1979), Wachspress (1975) e Wachspress (1991).

Luo e Wang (1996) dedicaram-se às partições quadrilaterais, as quais são também, freqüentemente, utilizadas em Projeto Geométrico Auxiliado por Computador, CAD Geométrico, e em análises por elementos finitos. Foram definidas e construídas funções spline racionais  $C^1$ , sobre qualquer partição quadrilateral regular de um domínio limitado, simplesmente ou multiplamente conectado, através das quais foram obtidas funções de forma quadrilaterais  $C^1$  para serem empregadas em análises de elementos finitos.

Dawe e Wang (1996) desenvolveram o método da faixa finita por spline para prever o comportamento geometricamente não linear de compósitos em forma de placas retangulares laminadas. O método, o qual dedica uma atenção especial às condições de contorno e que pode ser

ajustado apropriadamente ao tratamento de laminados fortemente anisotrópicos, apresentou-se intrinsecamente mais versátil que o método semi-analítico da faixa finita.

Nessa publicação de 1996, Dawe e Wang citam a necessidade da criação de nós auxiliares externos à discretização que, além de completar a definição da função spline nos elementos de extremidade (permitem a inclusão de todos os trechos polinomiais de uma spline completa nesses elementos de extremidade), possibilitam a prescrição das condições de contorno à estrutura analisada. Tal procedimento, que constitui uma das bases sobre as quais se fundamenta o presente trabalho, será bastante discutido e explorado ao longo dos capítulos 3, 4 e 5.

Conforme Lodha, Sheehan, Pang e Wittenbrink (1996), um problema crucial em computação gráfica, em CAD geométrico e em visualização científica é a avaliação e comparação da qualidade dos interpoladores de superfície. A incerteza geométrica é a medida do erro na interpolação. Nesse trabalho, os autores apresentam novos métodos para visualização da incerteza geométrica mediante várias técnicas de interpolação, entre as quais aquela que emprega B-splines e spline utilizada na análise de placa fina.

Maekawa e Chalfant (1998) afirmam que, desde o início de um projeto, é dedicada pouca atenção à implementação de superfícies desenvolvidas, as quais são amplamente utilizadas em várias aplicações de engenharia. Nessa publicação de 1998, os autores descreveram um método, bastante simples para os usuários, onde superfícies são habilmente desenvolvidas em termos de uma representação por B-spline, cujas duas diretrizes assentam em planos paralelos.

Maekawa e Chalfant (1998) também apresentaram um novo método, necessário para recorte em placa e análise por elementos finitos, para o desenvolvimento e geração de tais superfícies desenvolvidas por B-spline.

Conforme Kagan, Fischer e Bar-Yoseph (1998), na maioria dos sistemas CAD existentes, projeto geométrico e análise mecânica são operados em módulos separados. A iteração intensiva entre esses módulos é bastante desejável devido à natureza iterativa de um típico processo que envolve o desenvolvimento de produto.

Nessa publicação de 1998, os autores formularam uma nova aproximação unificada que fornece um alto nível de iteração para projeto e análise. A idéia foi de integrar um conceito de projeto geométrico, baseado em mecânica, com o módulo de análise mecânica em um ambiente uniforme de elementos finitos por B-spline. Demonstrou-se a praticidade da aplicação de funções B-spline como funções-base do método dos elementos finitos para projeto e análise de placas. A adequação do método foi demonstrada por comparação, com o método do elemento espectral, das características de convergência, complexidade e custo computacional.

Tan e Dawe (1998) estenderam a capacidade do método da faixa finita por spline para determinar as tensões de flambagem e as frequências naturais de placas prismáticas, constituídas por compósitos laminados, e estruturas em forma de cascas. O procedimento, o qual permite que as estruturas prismáticas possuam condições de contorno e seções transversais gerais, foi desenvolvido com base na deformação cisalhante de primeira ordem de placa, na teoria clássica de placa fina e na teoria de casca.

Conforme Tan e Dawe (1998), o procedimento, que ainda inclui a incorporação de uma técnica de sub-estruturação maciça, provou a grande flexibilidade da faixa finita por spline em termos de combinação das condições de contorno específicas em toda a estrutura.

Segundo Vermeulen e Heppler (1998), o método da aproximação de campo por B-spline é utilizado para construir modelos discretos de viga reta de Timoshenko. A discretização da viga tradicional de Timoshenko trata deflexão e rotação como variáveis de campo independentes e permite o uso funções com continuidade  $C^0$ , porém o “locking” por cisalhamento pode ocorrer no comportamento desses modelos.

Nessa publicação de 1998, Vermeulen e Heppler apresentam uma nova explanação do “locking” por cisalhamento e selecionam uma variedade de campos de interpolação por B-spline onde não ocorre o fenômeno.

Utilizando a aproximação campo-consistência, Patel, Ganapathi e Saravanan (1999) analisaram, baseados em funções B-spline, o fenômeno de locking por cisalhamento-membrana em elementos curvos flexíveis submetidos ao cisalhamento. A redistribuição consistente dos campos de deformação cisalhante e de membrana, no mais baixo nível, conduziu a resultados precisos para vigas bastante grossas e extremamente finas, as quais não apresentaram efeitos emergentes de locking por cisalhamento ou membrana (foi utilizado um esquema de integração cheia para avaliação de todos os termos da energia de deformação). Mediante análise de vibração, a capacidade e efetividade do elemento curvo de barra por B-spline foram demonstradas.

Utilizando a aproximação campo-consistência, Ganapathi, Patel, Saravanan e Touratier (1999) analisaram, baseados em funções B-spline, o fenômeno de locking por cisalhamento-membrana em elementos curvos flexíveis submetidos ao cisalhamento. A redistribuição consistente dos campos de deformação cisalhante e de membrana, no mais baixo nível, conduziu a resultados precisos para vigas bastante grossas e extremamente finas, as quais não apresentaram efeitos emergentes de locking por cisalhamento ou membrana (foi utilizado um esquema de integração cheia para avaliação de todos os termos da energia de deformação). Mediante análise estática, a capacidade e efetividade do elemento curvo de barra por B-spline foram demonstradas.

## **3 CONSIDERAÇÕES GERAIS INERENTES AOS FUNDAMENTOS DE SPLINES**

### **3.1 POLINÔMIOS**

Muitos dos métodos numéricos mais atuais para engenharia estrutural fazem uso de polinômios. As razões são simples. Conforme Persiano (1996), polinômios são fáceis de computar pois seu cálculo exige apenas as operações aritméticas de soma e produto que qualquer processador dispõe entre seu conjunto de instruções básicas, e as executa com eficiência. Além disso, polinômios são flexíveis o bastante para aproximar, ao menos teoricamente, qualquer função contínua com a precisão que se desejar. De fato, os cálculos de funções trigonométricas, logaritmos e exponenciais são realizados pelas *run-time libraries* através de aproximações por polinômios.

Todas as derivadas de polinômios são polinômios e portanto contínuas. Além de serem riquíssimos em propriedades, polinômios formam espaços vetoriais e são soluções de diversos problemas variacionais e de equações diferenciais.

Não obstante a limitação na ordem de diferenciabilidade, tem-se como uma interessante opção não só para modelagem geométrica, como também para a própria função de forma no método numérico de análise estrutural, as splines. Splines são polinomiais por partes, e, como tal, mantêm a maioria das propriedades dos polinômios, a menos da ordem de diferenciabilidade que é limitada.

Em contrapartida, conforme Persiano (1996), a flexibilidade das splines depende mais do número de partes polinomiais de que é composta do que do grau dos polinômios envolvidos. Como conseqüência, é possível manter baixo o grau dos polinômios (e com isso os custos de cálculo) sem perder em poder de expressão. Splines também formam espaços vetoriais.

A terceira alternativa atraente é a das funções racionais. Por serem razão de polinômios não requerem nada além de mais uma operação aritmética em seus cálculos. Apesar de indefinidas em alguns pontos, as racionais aumentam o escopo dos modelos paramétricos permitindo a representação

exata de formas implicitamente representáveis por polinômios. Por fim, unindo as duas últimas categorias depara-se com as splines racionais.

O produto de um polinômio (ou uma spline ou uma racional) por um número real é um polinômio (ou uma spline ou uma racional). A soma de dois polinômios (ou duas splines ou duas racionais) também resulta em um polinômio (ou uma spline ou uma racional). Essas operações básicas satisfazem a propriedade comum de distributividade do produto sobre a soma.

Estas operações sobre os polinômios caracterizam o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a um dado  $n$  como um espaço vetorial (denotado  $P^n$ ). Os “vetores” desse espaço são os polinômios e os escalares são reais. A soma de vetores corresponde à soma das respectivas funções e o produto de um vetor por um escalar corresponde ao produto do polinômio por um real. É simples verificar que as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas pelos polinômios do espaço  $P^n$ . Splines e racionais podem de modo semelhante ser organizadas em espaços vetoriais.

A estrutura de espaço vetorial dessas funções é fundamental em dois aspectos. Por serem espaços de dimensão finita, cada função de um desses espaços admite uma representação finita, ou seja, é possível caracterizá-la por um conjunto finito de números, o que é fundamental para o seu armazenamento computacional. O segundo aspecto é o da formulação linear, dado que qualquer função do espaço pode ser expressa por combinação linear de um conjunto finito de funções de base. Essas funções de base investem-se no papel de funções de forma.

Um polinômio  $p$  de grau  $n$  possui a forma geral:

$$p(t) = a_0(t)^0 + a_1(t)^1 + \dots + a_n(t)^n \quad (3.1)$$

onde  $a_n$  é não nulo. Nessa forma podemos distinguir por um lado os coeficientes  $a_i$  que são reais quaisquer e por outro os monômios  $(t)^i$ , que são polinômios elementares. Essa representação de polinômios é denominada *forma algébrica* ou *forma monomial*. Na forma algébrica, um polinômio  $p$  fica inteiramente definido pela seqüência de seus coeficientes algébricos  $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Por conto disso, segundo Persiano (1996), pode-se representar o polinômio  $p$  por seus coeficientes algébricos.

## 3.2 INTERPOLAÇÃO

### 3.2.1 INTRODUÇÃO

Seja um conjunto de  $n + 1$  pontos de coordenadas  $(x_i, y_i)$ , com  $i$  variando de 0 até  $n$ , tal que  $y_i = \phi(x_i)$ , onde  $\phi(x)$  é uma função desconhecida. Se for desejado obter o valor de  $\bar{y} = \phi(\bar{x})$ ,  $x_0 < \bar{x} < x_n$ , então deve-se encontrar uma função  $f(x)$  que se aproxime adequadamente de  $\phi(x)$ , calculando-se o valor aproximado  $\bar{y} = f(\bar{x})$ .

A função  $f(x)$  é chamada de função de aproximação do conjunto de pontos conhecidos, e pode ser de dois tipos:

- a) função de interpolação, representada por uma curva que passa por todos os pontos do conjunto; é mais empregada nos casos em que os valores conhecidos podem ser considerados como exatos e confiáveis (tais valores devem ser mantidos:  $f(x_i) = \phi(x_i)$ ), a interpolação pode ser empregada, por exemplo, quando os dados conhecidos relacionam grandezas físicas obtidas através de métodos confiáveis;
- b) função de ajuste, representada por uma curva que se aproxima de  $\phi(x)$ , porém não passa obrigatoriamente pelos pontos conhecidos; é geralmente empregada nos casos em que os dados conhecidos são considerados aproximados ou relativamente confiáveis como, por exemplo, os obtidos através de levantamentos estatísticos (deseja-se o comportamento médio de um fenômeno, e não os valores exatos).

A função de interpolação  $f(x)$  pode ser de vários tipos, tais como:

-) exponencial:  $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$  ;

-) logarítmica:  $f(x) = a + b \cdot \ln(x)$  ;

-) potencial:  $f(x) = a \cdot x^b$  ;

-) potencial em  $x$ :  $f(x) = a \cdot b^x$  ;

-) polinomial:  $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$  ; e

-) spline (que é composta por partes de polinômios, por isso chamada de polinomial por partes).

Conforme Diegues (1992), a função de interpolação  $f(x)$  pode ser também uma combinação de funções da forma

$$f(x) = c_0 \cdot f_0(x) + c_1 \cdot f_1(x) + \dots + c_n \cdot f_n(x), \quad (3.2)$$

onde  $f_i(x)$  são funções escolhidas para cada caso, e  $c_i$  são coeficientes a serem determinados.

Em termos de funções de aproximação, evidencia-se o papel das funções reais nos mais variados métodos numéricos utilizados em engenharia estrutural. A classe de funções utilizadas para aproximar é de importância fundamental para os algoritmos responsáveis pelos métodos. Funções trigonométricas, por exemplo, embora convenientes e largamente empregadas como funções de forma em muitos métodos numéricos, são de cômputo mais oneroso, conforme Persiano (1996).

### 3.2.2 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Quando não se tem idéia de qual função utilizar em uma interpolação, deve-se optar pelo polinômio de grau  $n$ , pois é sempre possível passar a curva que o representa por  $n+1$  pontos conhecidos. Pode-se considerar que o polinômio seja uma combinação de funções, tal que,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n [c_i \cdot f_i(x)] , \quad (3.3)$$

onde,

$c_i$  é o coeficiente do termo de grau  $i$ ; e

$$f_i(x) = x^i .$$

Portanto, para um conjunto de  $n+1$  pontos conhecidos, pode-se fazer uma interpolação polinomial de grau  $m$ , sendo  $1 \leq m \leq n$ , bastando utilizar  $m+1$  pontos deste conjunto. Assim, pode-se ter a interpolação linear ( $m = 1$ ), a interpolação quadrática ( $m = 2$ ), a interpolação cúbica ( $m = 3$ ), e assim por diante até a interpolação polinomial de grau  $n$  ( $m = n$ ).

Quando a quantidade de pontos conhecidos ( $n+1$ ) é muito grande, além do processo numérico de interpolação polinomial, utilizando todos os pontos, poder tornar-se pouco eficiente, os pontos mais afastados daquele que se deseja interpolar, muitas vezes, exercem pouca influência no cálculo do resultado final. Nesse caso, segundo Dieguez (1992), pode ser utilizada a interpolação iterativa linear, através da qual obtém-se resultados satisfatórios com maior rapidez.

O estudo do erro cometido em uma interpolação polinomial de grau  $n$  pode ser feito, simplificadamente, comparando-se o resultado obtido com os resultados de interpolações de graus inferiores, constatando a sua convergência para um valor mais próximo do exato, conforme Diegues (1992).

### 3.3 SPLINES

#### 3.3.1 INTRODUÇÃO

Podem ocorrer casos em que a interpolação polinomial não forneça resultados coerentes, ou só os forneça em um intervalo restrito de valores. É o caso do conjunto de dados gerados pela função  $y = 10 \cdot (1 + 25x^2)^{-1}$ , em que, somente no intervalo  $[-0,4 ; 0,4]$  obtém-se valores satisfatórios através da interpolação polinomial de grau 10. Fora deste intervalo, os valores obtidos são completamente incoerentes e, aumentando-se o grau do polinômio interpolador, ficam mais afastados dos valores exatos. Isto acontece devido a erros de arredondamento e de truncamento que crescem com o grau do polinômio. Evidentemente, ao diminuir-se o grau do polinômio, a precisão não será satisfatória.

Nesses casos, deve-se utilizar outros métodos de interpolação que evitem os inconvenientes de precisão. Uma solução consiste no emprego de pedaços de polinômios de grau baixo e fixo, passando por uma quantidade de pontos igual a este grau, mais uma unidade. Para isso, deve-se dividir o intervalo total em subintervalos contendo a quantidade de pontos necessária. Assim é a interpolação linear utilizando 2 pontos (e um polinômio de grau 1), a interpolação quadrática utilizando 3 pontos (e um polinômio de grau 2), e a interpolação cúbica utilizando 4 pontos (e um polinômio de grau 3).

O inconveniente, nesses casos, é que vão existir pontos angulosos nas extremidades dos subintervalos, e não haverá concordância entre as diversas curvas.

Uma alternativa para evitar os pontos angulosos e concordar as curvas entre os subintervalos, segundo Dieguez (1992), é a simulação da utilização de uma curva flexível, ou régua elástica, ou ainda uma spline mecânica.

Uma spline pode ser definida como sendo uma régua capaz de moldar-se a uma curva contínua, que passa por um conjunto de pontos fixos distintos, muito utilizada pelos desenhistas.

A diferença entre a spline e as curvas polinomiais que interpolam os pontos de um subintervalo é que, os pedaços de polinômio da spline se superpõem, iniciando um a cada ponto, enquanto que, no outro método não há superposição e somente uma curva interpola este subintervalo.

Conforme Dieguez (1992), a spline cúbica pode ser definida como sendo aquela que assume a forma da curva mecânica, isto é, a curva em que a energia potencial de deformação é mínima. Esta energia potencial é proporcional à curvatura, ou seja, à segunda derivada da curva.

A definição matemática formal de spline cúbica, segundo Diegues (1992), é apresentada a seguir.

Sejam  $n + 1$  pontos distintos, cujas coordenadas são  $(x_i, y_i)$ , com  $i$  variando de  $0$  até  $n$ , tal que  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Seja, também, a função  $f(x)$  definida no intervalo  $[x_0, x_n]$ . Se  $f(x)$  representa uma curva spline cúbica que passa por esses pontos deve satisfazer as seguintes condições:

- $f(x)$  é um polinômio cúbico no subintervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ , para  $i$  variando de  $0$  até  $n-1$ , ao qual chamar-se-á de  $p_i(x)$ ;
- $f(x_i) = y_i$ , com  $i$  variando de  $0$  até  $n$ , ou seja, a curva passa por todos os pontos conhecidos;
- $f(x)$ ,  $f'(x)$  e  $f''(x)$  são contínuas no intervalo  $[x_0, x_n]$ , ou seja:

$$p_i(x_{i+1}) = p_{i+1}(x_{i+1}),$$

$$p'_i(x_{i+1}) = p'_{i+1}(x_{i+1}),$$

$$p''_i(x_{i+1}) = p''_{i+1}(x_{i+1}), \text{ para } i \text{ variando de } 0 \text{ até } n-2.$$

d) condições de contorno:

-) extremidade livre:  $f''(x_0) = 0$  e  $f''(x_n) = 0$ ,

-) extremidade engastada:  $f'(x_0)$  e  $f'(x_n)$  são conhecidos.

Quando a spline cúbica tem suas extremidades livres é chamada de “spline cúbica natural”, e se aproxima do formato de uma haste flexível forçada a passar por todos os pontos conhecidos.

A condição de extremidade engastada é utilizada quando se conhece a inclinação da tangente à curva nas extremidades do intervalo, permitindo uma melhor aproximação para os valores interpolados.

Como  $p_i(x)$  é um polinômio cúbico no intervalo  $(x_i, x_{i+1})$ , pode-se defini-lo como sendo

$$p_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad (3.4)$$

para  $i$  variando de  $0$  até  $n-1$ , onde  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  são coeficientes reais diferentes para cada um dos subintervalos  $[x_i, x_{i+1}]$ . Seja, também, o comprimento de cada subintervalo  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , com  $i$  variando de  $0$  até  $n-1$ .

Utilizando as condições que os polinômios têm que satisfazer para que a função composta por eles seja uma spline, pode-se desenvolver toda a formulação matemática da “*spline cúbica*”, conforme Diegues (1992).

### 3.3.2 A BASE B-SPLINE

Conforme Persiano (1996), a representação cardinal de splines naturais não é conveniente para todas as aplicações. A própria condição de derivada segunda nula nos nós extremos das splines naturais não é adequada, por exemplo, a diversas situações de modelagem.

A base B-spline é uma base de splines com propriedades bem mais notáveis e que permite a representação de qualquer spline polinomial que se anule fora do intervalo  $[x_0, x_m]$ .

Um dos atributos notáveis das splines da base B-spline, segundo Persiano (1996), é terem todas suporte limitado e “pequeno”. O suporte de uma função é o fecho do conjunto de pontos de seu domínio onde seu valor é não nulo. Polinômios e splines naturais têm todo o conjunto dos reais por domínio. As funções da base B-spline apresentam um suporte bem menor, ou seja, um suporte compacto.

Na seqüência de nós  $(x_0, x_1, \dots, x_m)$  com  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m$ , a base B-spline do espaço  $S^0(x_0, x_1, \dots, x_m)$  constitui-se das funções indicadoras dos intervalos entre nós:

$$N_i^0(x) = \begin{cases} 1 & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ 0 & \text{caso contra'rio} \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, m-1$$

Conforme Persiano (1996), estas funções são positivas, seu somatório é a função constante 1 no  $[x_0, x_m)$ , e o suporte de  $N_i^0$  é o intervalo  $[x_i, x_{i+1})$ .

A base B-spline do espaço  $S^1(x_0, x_1, \dots, x_m)$  é formada pelas funções:

$$N_i^1(x) = \begin{cases} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}) \\ \frac{x_{i+2} - x}{x_{i+2} - x_{i+1}} & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}) \\ 0 & \text{caso contra'rio} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m-2 \quad (3.5)$$

Estas funções são positivas, seu somatório é a função constante 1 no intervalo  $[x_1, x_{m-1})$ , o suporte de  $N_i^1$  é o intervalo  $[x_i, x_{i+2}]$ , e  $N_i^1(u_{i+1}) = 1$ . Além disso, a integral de  $N_i^1$  iguala-se a  $\frac{x_{i+2} - x_i}{2}$ , ou seja, à metade da largura do seu suporte, segundo Persiano (1996).

De uma forma geral, conforme Persiano (1996), pode-se definir a base B-spline de grau  $n$  por:

$$N_i^n(x) = (n+1) \int_{-\infty}^x \left( \frac{N_i^{n-1}(s)}{x_{i+n} - x_i} - \frac{N_{i+1}^{n-1}(s)}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} \right) ds \quad 0 \leq i \leq m-n-1 \quad (3.6)$$

e comprovar as seguintes propriedades das funções da base:

a) **continuidade**:  $N_i^n$  possui todas as suas derivadas contínuas até ordem  $n-1$ ;

b) **suporte limitado**:  $N_i^n$  tem por suporte o intervalo  $[x_i, x_{i+n+1}]$ ;

c) **positividade**: para todo  $x$ ,  $1 \geq N_i^n(x) \geq 0$  ;

d) **partição da unidade**: para todo  $x$ ,  $\sum_{i=0}^{m-k-1} N_i^n(x) = 1$  ;

e) **derivada**: para todo  $x \in [x_n, x_{m-n}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-n-1$  vale

$$\frac{dN_i^n(x)}{du} = (n+1) \left( \frac{N_i^{n-1}(x)}{x_{i+n} - x_i} + \frac{N_{i+1}^{n-1}(x)}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} \right) \quad (3.7)$$

f) **integral**: para todo  $i = 0, 1, \dots, m$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_i^n(s) ds = \frac{x_{i+n+1} - x_i}{n+1} \quad (3.8)$$

g) **recursividade**: para todo  $x$ ,  $i = 0, 1, \dots, m-n-1$  vale

$$N_i^n(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n} - x_i} N_i^{n-1}(x) + \frac{x_{i+n+1} - x}{x_{i+n+1} - x_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(x) \quad (3.9)$$

Todas essas propriedades decorrem diretamente da definição recursiva (3.6), conforme Persiano (1996).

### 3.4 APROXIMAÇÕES ENVOLVENDO SPLINES

Nesta seção são deduzidas as expressões para os dezesseis coeficientes dos quatro trechos polinomiais de uma spline cúbica completa, em função de suas abscissas. É feita também uma particularização de polinômios, visando o emprego destes na análise de estruturas em forma de placas, para alguns conjuntos de abscissas.

### ***3.4.1 DETERMINAÇÃO DOS 4 TRECHOS POLINOMIAIS DE UMA SPLINE CÚBICA COMPLETA***

Uma Spline Cúbica, por ser uma função polinomial por partes constituída de quatro trechos, pode ser definida em termos genéricos como uma função composta por quatro polinômios cúbicos, um em cada trecho, sendo que nos limites desses trechos além de ocorrer continuidade em termos das ordenadas da B-spline, ocorre também continuidade da primeira e da segunda derivada desses polinômios.

Ou seja, para se definir uma B-spline completa é necessário a determinação de quatro polinômios cúbicos que respeitem as condições de continuidade, nos limites dos trechos nos quais estes estão posicionados, em termos das ordenadas das funções e de suas derivadas, primeira e segunda.

A definição de quatro polinômios cúbicos completos implica na determinação de 16 coeficientes, ou seja, na determinação de 16 incógnitas, as quais só podem ser encontradas mediante a existência de 16 equações. Nos três limites internos da spline cúbica, mediante as condições de continuidade da função e de suas derivadas (primeira e segunda), são geradas 9 dessas 16 equações.

No limite inicial do primeiro trecho e no limite final do quarto trecho, mediante a imposição do valor da função e de suas derivadas, também a primeira e segunda, são geradas mais seis equações, perfazendo um total de 15 equações. A última equação, necessária para se completar o número de 16 equações, surge através da imposição do valor da função no limite final do segundo trecho, ou no limite inicial do terceiro trecho. Nessa abcissa central, o valor da função pode ser imposto igual a um, que corresponde à B-spline normalizada.

Dessa forma, constitui-se um sistema linear de 16 equações a 16 incógnitas.

Esquemáticamente, as incógnitas representativas dos coeficientes dos quatro polinômios cúbicos completos e as imposições responsáveis pela geração das equações necessárias para a resolução do sistema linear podem ser convenientemente posicionadas conforme a Figura (3.1):

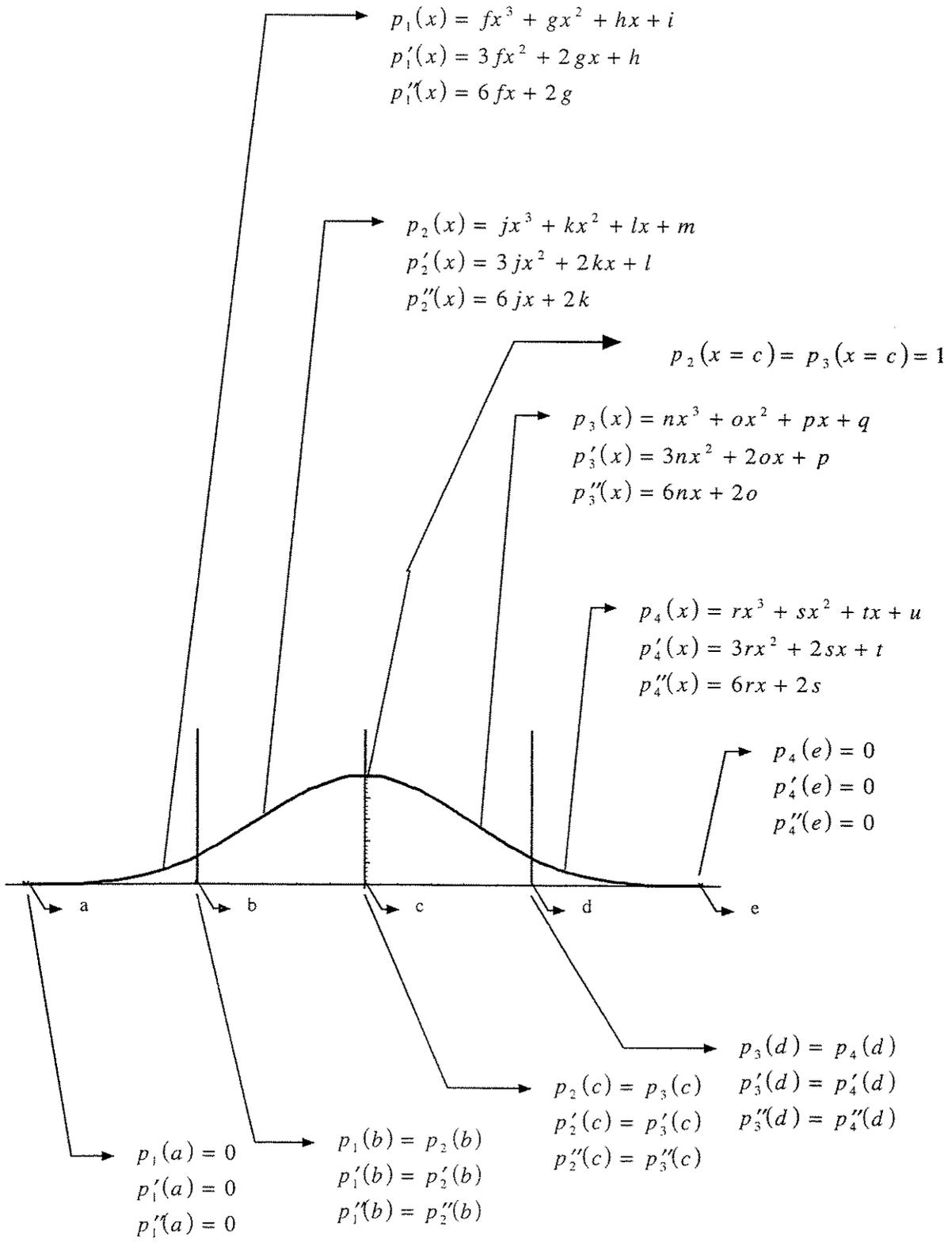


Figura (3.1): Os quatro polinômios e as condições de continuidade de uma B-spline.

Genericamente, em função dos valores das abscissas da B-spline, “a”, “b”, “c”, “d” e “e”, os coeficientes dos quatro polinômios cúbicos são apresentados como:

$$r = \frac{\frac{1}{(d-c)^2} - \frac{1}{(b-c)^2} - \frac{(d-b)}{(a-c)^2 \cdot (b-a) \cdot (d-c)} \cdot \left[ c-a - \frac{(c-a)^3}{(b-c)^2} \right]}{\left( \frac{e-c}{a-c} \right)^2 \cdot \frac{(e-d) \cdot (c-b)}{(d-c) \cdot (b-a)} \cdot \left[ c-a - \frac{(c-a)^3}{(b-c)^2} \right] + e-c + \frac{(c-e)^3}{(d-c)^2}} ; \quad (3.10)$$

$$s = (-r) \cdot 3 \cdot e ; \quad (3.11)$$

$$t = r \cdot 3 \cdot e^2 ; \quad (3.12)$$

$$u = (-r) \cdot e^3 ; \quad (3.13)$$

$$n = r \cdot \left[ 1 + \left( \frac{c-e}{d-c} \right)^3 \right] - \frac{1}{(d-c)^3} ; \quad (3.14)$$

$$o = \frac{3 \cdot d}{(d-c)^3} - r \cdot 3 \cdot \left[ e + d \cdot \left( \frac{c-e}{d-c} \right)^3 \right] ; \quad (3.15)$$

$$p = r \cdot 3 \cdot \left[ e^2 + d^2 \cdot \left( \frac{c-e}{d-c} \right)^3 \right] - \frac{3 \cdot d^2}{(d-c)^3} ; \quad (3.16)$$

$$q = (-r) \cdot \left[ e^3 + d^3 \cdot \left( \frac{c-e}{d-c} \right)^3 \right] + \frac{d^3}{(d-c)^3} ; \quad (3.17)$$

$$f = r \cdot \frac{\left( \frac{e-c}{a-c} \right)^2 \cdot \frac{(e-d) \cdot (c-b)}{(d-c) \cdot (b-a)} + \frac{(d-b)}{(a-c)^2 \cdot (b-a) \cdot (d-c)} ; \quad (3.18)$$

$$g = (-f) \cdot 3 \cdot a ; \quad (3.19)$$

$$h = f \cdot 3 \cdot a^2 ; \quad (3.20)$$

$$i = (-f) \cdot a^3 ; \quad (3.21)$$

$$j = f \cdot \left[ 1 + \left( \frac{c-a}{b-c} \right)^3 \right] - \frac{1}{(b-c)^3} ; \quad (3.22)$$

$$k = (-f) \cdot 3 \cdot \left[ a + b \cdot \left( \frac{c-a}{b-c} \right)^3 \right] + \frac{3 \cdot b}{(b-c)^3} ; \quad (3.23)$$

$$l = f \cdot 3 \cdot \left[ a^2 + b^2 \cdot \left( \frac{c-a}{b-c} \right)^3 \right] - \frac{3b^2}{(b-c)^3} ; \quad (3.24)$$

e

$$m = f \cdot \left[ -a^3 - b^3 \cdot \left( \frac{c-a}{b-c} \right)^3 \right] + \frac{b^3}{(b-c)^3} . \quad (3.25)$$

Dessa forma, os dezesseis coeficientes dos quatro polinômios cúbicos componentes de uma B-spline completa são determinados, genericamente, em função das abscissas “a”, “b”, “c”, “d” e “e” dessa B-spline, as quais podem ou não limitar intervalos de mesmo tamanho, ou seja, essas abscissas podem ou não estar igualmente espaçadas.

### **3.4.1.1 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O PRIMEIRO CONJUNTO DE ABCISSAS**

A necessidade da particularização dos polinômios componentes de uma B-spline para alguns conjuntos compostos por diferentes abscissas centrais, sobre as quais o topo dessa função se posicionará, se dá em função do emprego desses variados conjuntos na análise de placas isotrópicas elásticas finas.

Para o caso dos intervalos serem igualmente espaçados e para o primeiro conjunto de abscissas ( $a = -5$ ;  $b = -4$ ;  $c = -3$ ;  $d = -2$ ;  $e = -1$ ), as equações (3.10) a (3.25) tornam-se:

para o primeiro trecho ( $-5 \leq x \leq -4$ ):

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{75}{4}x + \frac{125}{4} \right. \quad (3.26a)$$

$$\left\{ p_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{75}{4} \right. \quad (3.26b)$$

$$\left\{ p_1''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2} \right. \quad (3.26c)$$

para o segundo trecho ( $-4 \leq x \leq -3$ ):

$$\left\{ p_2(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{33}{4}x^2 - \frac{117}{4}x - \frac{131}{4} \right. \quad (3.27a)$$

$$\left\{ p_2'(x) = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{33}{2}x - \frac{117}{4} \right. \quad (3.27b)$$

$$\left\{ p_2''(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{33}{2} \right. \quad (3.27c)$$

para o terceiro trecho ( $-3 \leq x \leq -2$ ):

$$\left\{ p_3(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{21}{4}x^2 + \frac{45}{4}x + \frac{31}{4} \right. \quad (3.28a)$$

$$\left\{ p_3'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{2}x + \frac{45}{4} \right. \quad (3.28b)$$

$$\left\{ p_3''(x) = \frac{9}{2}x + \frac{21}{2} \right. \quad (3.28c)$$

para o quarto trecho ( $-2 \leq x \leq -1$ ):

$$\left\{ p_4(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \right. \quad (3.29a)$$

$$\left\{ p_4'(x) = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \right. \quad (3.29b)$$

$$\left\{ p_4''(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right. \quad (3.29c)$$

### 3.4.1.2 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O SEGUNDO CONJUNTO DE ABCISSAS

Para o caso dos intervalos serem igualmente espaçados e para o segundo conjunto de abscissas ( $a = -4$ ;  $b = -3$ ;  $c = -2$ ;  $d = -1$ ;  $e = 0$ ), as equações (3.10) a (3.25) tornam-se:

para o primeiro trecho ( $-4 \leq x \leq -3$ ):

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{4}x^3 + 3x^2 + 12x + 16 \right. \quad (3.30a)$$

$$\left\{ p_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 6x + 12 \right. \quad (3.30b)$$

$$\left\{ p_1''(x) = \frac{3}{2}x + 6 \right. \quad (3.30c)$$

para o segundo trecho ( $-3 \leq x \leq -2$ ):

$$\left\{ p_2(x) = -\frac{3}{4}x^3 - 6x^2 - 15x - 11 \right. \quad (3.31a)$$

$$\left\{ p_2'(x) = -\frac{9}{4}x^2 - 12x - 15 \right. \quad (3.31b)$$

$$\left\{ p_2''(x) = -\frac{9}{2}x - 12 \right. \quad (3.31c)$$

para o terceiro trecho ( $-2 \leq x \leq -1$ ):

$$\left\{ p_3(x) = \frac{3}{4}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \right. \quad (3.32a)$$

$$\left\{ p_3'(x) = \frac{9}{4}x^2 + 6x + 3 \right. \quad (3.32b)$$

$$\left\{ p_3''(x) = \frac{9}{2}x + 6 \right. \quad (3.32c)$$

para o quarto trecho ( $-1 \leq x \leq 0$ ):

$$\left\{ p_4(x) = -\frac{1}{4}x^3 \right. \quad (3.33a)$$

$$\left\{ p_4'(x) = -\frac{3}{4}x^2 \right. \quad (3.33b)$$

$$\left\{ p_4''(x) = -\frac{3}{2}x \right. \quad (3.33c)$$

### **3.4.1.3 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O TERCEIRO CONJUNTO DE ABCISSAS**

Para o caso dos intervalos serem igualmente espaçados e para o terceiro conjunto de abscissas ( $a = -3$ ;  $b = -2$ ;  $c = -1$ ;  $d = 0$ ;  $e = 1$ ), as equações (3.10) a (3.25) tornam-se:

para o primeiro trecho ( $-3 \leq x \leq -2$ ):

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{4}x + \frac{27}{4} \right. \quad (3.34a)$$

$$\left\{ p_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{27}{4} \right. \quad (3.34b)$$

$$\left\{ p_1''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2} \right. \quad (3.34c)$$

para o segundo trecho ( $-2 \leq x \leq -1$ ):

$$\left\{ p_2(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{15}{4}x^2 - \frac{21}{4}x - \frac{5}{4} \right. \quad (3.35a)$$

$$\left\{ p_2'(x) = -\frac{9}{4}x^2 - \frac{15}{2}x - \frac{21}{4} \right. \quad (3.35b)$$

$$\left\{ p_2''(x) = -\frac{9}{2}x - \frac{15}{2} \right. \quad (3.35c)$$

para o terceiro trecho ( $-1 \leq x \leq 0$ ):

$$\left\{ p_3(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \right. \quad (3.36a)$$

$$\left\{ p_3'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \right. \quad (3.36b)$$

$$\left\{ p_3''(x) = \frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \right. \quad (3.36c)$$

para o quarto trecho ( $0 \leq x \leq 1$ ):

$$\left\{ p_4(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \right. \quad (3.37a)$$

$$\left\{ p_4'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \right. \quad (3.37b)$$

$$\left\{ p_4''(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \right. \quad (3.37c)$$

### 3.4.1.4 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O QUARTO CONJUNTO DE ABCISSAS

Para o caso dos intervalos serem igualmente espaçados e para o quarto conjunto de abscissas ( $a = -2$ ;  $b = -1$ ;  $c = 0$ ;  $d = 1$ ;  $e = 2$ ), as equações (3.10) a (3.25) tornam-se:

para o primeiro trecho ( $-2 \leq x \leq -1$ ):

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2 \right. \quad (3.38a)$$

$$\left\{ p_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x + 3 \right. \quad (3.38b)$$

$$\left\{ p_1''(x) = \frac{3}{2}x + 3 \right. \quad (3.38c)$$

para o segundo trecho ( $-1 \leq x \leq 0$ ):

$$\left\{ p_2(x) = -\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 \right. \quad (3.39a)$$

$$\left\{ p_2'(x) = -\frac{9}{4}x^2 - 3x \right. \quad (3.39b)$$

$$\left\{ p_2''(x) = -\frac{9}{2}x - 3 \right. \quad (3.39c)$$

para o terceiro trecho ( $0 \leq x \leq 1$ ):

$$\left\{ p_3(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1 \right. \quad (3.40a)$$

$$\left\{ p_3'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 3x \right. \quad (3.40b)$$

$$\left\{ p_3''(x) = \frac{9}{2}x - 3 \right. \quad (3.40c)$$

para o quarto trecho ( $1 \leq x \leq 2$ ):

$$\left\{ p_4(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 2 \right. \quad (3.41a)$$

$$\left\{ p_4'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x - 3 \right. \quad (3.41b)$$

$$\left\{ p_4''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \right. \quad (3.41c)$$

### 3.4.1.5 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O QUINTO CONJUNTO DE ABCISSAS

Para o caso dos intervalos serem igualmente espaçados e para o quinto conjunto de abscissas ( $a = -1$ ;  $b = 0$ ;  $c = 1$ ;  $d = 2$ ;  $e = 3$ ), as equações (3.10) a (3.25) tornam-se:

para o primeiro trecho ( $-1 \leq x \leq 0$ ):

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \right. \quad (3.42a)$$

$$\left\{ p_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right. \quad (3.42b)$$

$$\left\{ p_1''(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \right. \quad (3.42c)$$

para o segundo trecho ( $0 \leq x \leq 1$ ):

$$\left\{ p_2(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \right. \quad (3.43a)$$

$$\left\{ p_2'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right. \quad (3.43b)$$

$$\left\{ p_2''(x) = -\frac{9}{2}x + \frac{3}{2} \right. \quad (3.43c)$$

para o terceiro trecho ( $1 \leq x \leq 2$ ):

$$\left\{ p_3(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{5}{4} \right. \quad (3.44a)$$

$$\left\{ p_3'(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{30}{4}x + \frac{21}{4} \right. \quad (3.44b)$$

$$\left\{ p_3''(x) = \frac{9}{2}x - \frac{30}{4} \right. \quad (3.44c)$$

para o quarto trecho ( $2 \leq x \leq 3$ ):

$$\left\{ p_4(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{4}x + \frac{27}{4} \right. \quad (3.45a)$$

$$\left\{ p_4'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{18}{4}x - \frac{27}{4} \right. \quad (3.45b)$$

$$\left\{ p_4''(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{18}{4} \right. \quad (3.45c)$$

### 3.4.1.6 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O SEXTO CONJUNTO DE ABCISSAS

Para o caso dos intervalos serem igualmente espaçados e para o sexto conjunto de abscissas ( $a = 0$ ;  $b = 1$ ;  $c = 2$ ;  $d = 3$ ;  $e = 4$ ), as equações (3.10) a (3.25) tornam-se:

para o primeiro trecho ( $0 \leq x \leq 1$ ):

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{4}x^3 \right. \quad (3.46a)$$

$$\left\{ p_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 \right. \quad (3.46b)$$

$$\left\{ p_1''(x) = \frac{3}{2}x \right. \quad (3.46c)$$

para o segundo trecho ( $1 \leq x \leq 2$ ):

$$\left\{ p_2(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \right. \quad (3.47a)$$

$$\left\{ p_2'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 6x - 3 \right. \quad (3.47b)$$

$$\left\{ p_2''(x) = -\frac{9}{2}x + 6 \right. \quad (3.47c)$$

para o terceiro trecho ( $2 \leq x \leq 3$ ):

$$\left\{ p_3(x) = \frac{3}{4}x^3 - 6x^2 + 15x - 11 \right. \quad (3.48a)$$

$$\left\{ p_3'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 12x + 15 \right. \quad (3.48b)$$

$$\left\{ p_3''(x) = \frac{9}{2}x - 12 \right. \quad (3.48c)$$

para o quarto trecho ( $3 \leq x \leq 4$ ):

$$\left\{ p_4(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x^2 - 12x + 16 \right. \quad (3.49a)$$

$$\left\{ p_4'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - 12 \right. \quad (3.49b)$$

$$\left\{ p_4''(x) = -\frac{3}{2}x + 6 \right. \quad (3.49c)$$

### **3.4.1.7 PARTICULARIZAÇÃO DOS POLINÔMIOS PARA O SÉTIMO CONJUNTO DE ABCISSAS**

Para o caso dos intervalos serem igualmente espaçados e para o sétimo conjunto de abscissas ( $a = 1; b = 2; c = 3; d = 4; e = 5$ ), as equações (3.10) a (3.25) tornam-se:

para o primeiro trecho ( $1 \leq x \leq 2$ ):

$$\left\{ p_1(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \right. \quad (3.50a)$$

$$\left\{ p_1'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right. \quad (3.50b)$$

$$\left\{ p_1''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right. \quad (3.50c)$$

para o segundo trecho ( $2 \leq x \leq 3$ ):

$$\left\{ p_2(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - \frac{45}{4}x + \frac{31}{4} \right. \quad (3.51a)$$

$$\left\{ p_2'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{45}{4} \right. \quad (3.51b)$$

$$\left\{ p_2''(x) = -\frac{9}{2}x + \frac{21}{2} \right. \quad (3.51c)$$

para o terceiro trecho ( $3 \leq x \leq 4$ ):

$$\left\{ p_3(x) = \frac{3}{4}x^3 - \frac{33}{4}x^2 + \frac{117}{4}x - \frac{131}{4} \right. \quad (3.52a)$$

$$\left\{ p_3'(x) = \frac{9}{4}x^2 - \frac{33}{2}x + \frac{117}{4} \right. \quad (3.52b)$$

$$\left\{ p_3''(x) = \frac{9}{2}x - \frac{33}{2} \right. \quad (3.52c)$$

para o quarto trecho ( $4 \leq x \leq 5$ ):

$$\left\{ p_4(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{75}{4}x + \frac{125}{4} \right. \quad (3.53a)$$

$$\left\{ p_4'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{15}{2}x - \frac{75}{4} \right. \quad (3.53b)$$

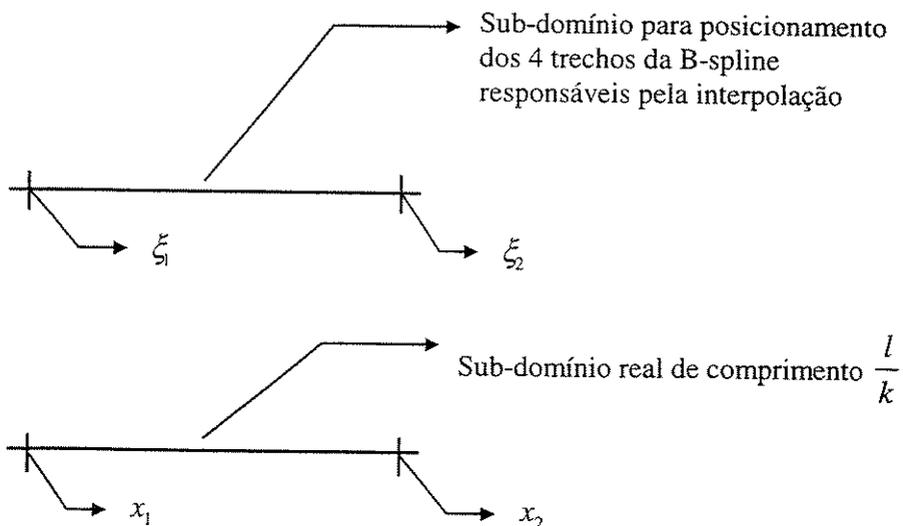
$$\left\{ p_4''(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2} \right. \quad (3.53c)$$

E assim, a partir das expressões gerais dos coeficientes dos polinômios em função das abscissas que definem os limites dos trechos, para quaisquer intervalos é possível a definição de uma spline cúbica completa.

### **3.5 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS PARA SPLINES: LOCAL X GLOBAL**

Uma interpolação por sub-domínios tal que o comprimento do sub-domínio onde posicionam-se os trechos da B-spline, responsável pela interpolação, difere do comprimento do sub-domínio real, segundo o qual o domínio completo foi subdividido, necessita de uma transformação de um sistema de

coordenadas local para um sistema de coordenadas global. Essa transformação inicia-se a partir dos dois sub-domínios apresentados na Figura (3.2).



**Figura (3.2): Sistemas de Coordenadas: Global e Local.**

Suponha-se que o domínio (intervalo) completo, de comprimento  $l$ , tenha sido subdividido em  $k$  sub-domínios (sub-intervalos) de comprimento  $\frac{l}{k}$ .

Suponha-se, ainda, que num sistema de coordenadas global, os limites de um certo sub-domínio sejam  $x_1$  e  $x_2$  (com  $x_2 = x_1 + \frac{l}{k}$ ), e os limites desse sub-domínio sejam  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , num sistema de coordenadas local (segundo o qual os quatro trechos da spline cúbica, responsáveis pela interpolação, serão posicionados). Uma relação linear entre o sistema de coordenadas local com o sistema de coordenadas global é da forma

$$\xi = a \cdot x + b \tag{3.54}$$

Sendo que

$$\begin{cases} p/ & x = x_1 \rightarrow \xi = \xi_1 \\ p/ & x = x_2 \rightarrow \xi = \xi_2 \end{cases}$$

Então,

$$a = \frac{\xi_1 - \xi_2}{x_1 - x_2}; e$$

$$b = \frac{\xi_2 x_1 - \xi_1 x_2}{x_1 - x_2}.$$

Fazendo-se  $x_2 = x_1 + \frac{l}{k}$ ; tem-se:

$$a = \frac{l}{k}(\xi_2 - \xi_1); e$$

$$b = \frac{l}{k} \left[ \xi_1 \cdot \frac{l}{k} - (\xi_2 - \xi_1) \cdot x_1 \right].$$

Como pretende-se trabalhar com o posicionamento dos quatro trechos de uma B-spline em um sub-domínio, definido segundo um sistema de coordenadas local, com seus limites variando de 0 a 1 ( $\xi_1 = 0$  e  $\xi_2 = 1$ ), tem-se:

$$a = \frac{k}{l}; \quad (3.55)$$

$$b = -\frac{k}{l} \cdot x_1; e \quad (3.56)$$

$$\xi = \frac{k}{l} \cdot x - \frac{k}{l} \cdot x_1. \quad (3.57)$$

Onde:

$\xi$  = sistema de coordenadas local, segundo o qual os quatro trechos de uma spline cúbica serão posicionados a fim de que seja possível a interpolação por sub-domínios, definidos com limites locais variando de 0 a 1;

$x$  = sistema de coordenadas global, segundo o qual o domínio (intervalo) completo foi subdividido em sub-domínios, definidos com limites globais variando de  $x_1$  a  $x_2$

$$\left( \text{com } x_2 = x_1 + \frac{l}{k} \right);$$

$l$  = comprimento do domínio completo;

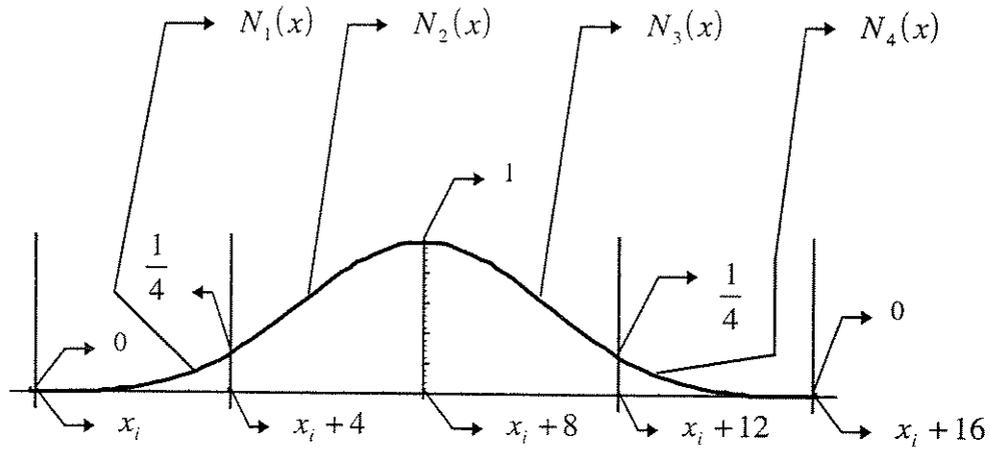
$k$  = nº de sub-domínios, segundo os quais o domínio completo foi subdividido; e

$x_1$  = limite inicial global do sub-domínio.

Esse procedimento de transformação de coordenadas é aplicável também quando se deseja, por motivos justificáveis em termos de praticidade e simplicidade, a integração de uma determinada

função utilizando-se um sistema de coordenadas local diferente do sistema de coordenadas global que essa função foi definida.

Digamos que se deseja a integração de uma B-spline definida num sistema de coordenadas global como apresentado na Figura (3.3), onde as funções  $N_i(x)$  são os polinômios cúbicos, de tamanho 4, que compõem uma B-spline cujo topo foi posicionado sobre a abscissa  $x_i + 8$ .



**Figura (3.3): Definição de uma B-spline num sistema de coordenadas global.**

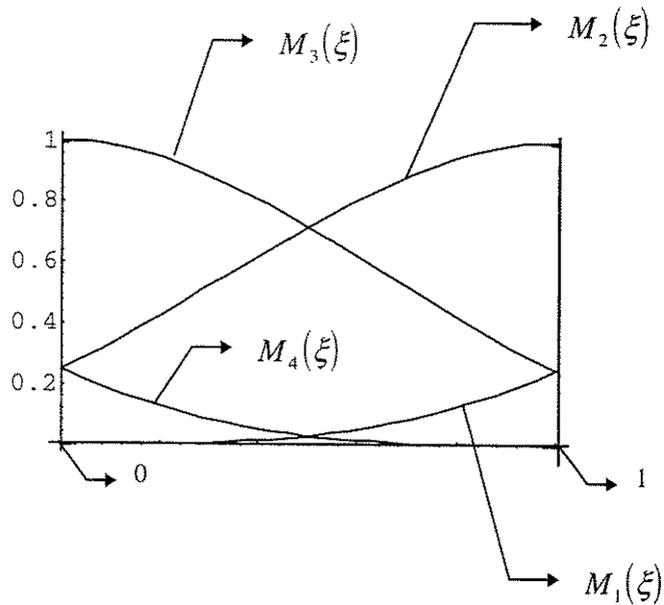
A área sob essa spline cúbica pode ser calculada através de um sub-domínio, definido segundo um sistema de coordenadas local, com seus limites variando de 0 a 1, sendo que no interior desse sub-domínio estão contidos os 4 trechos de uma B-spline completa de tamanho 1, como mostra a Figura (3.4). Nesta figura, as funções  $M_i(\xi)$  são os polinômios cúbicos, segundo um sistema de coordenadas local, responsáveis pela definição de cada um dos quatro trechos polinomiais dessa B-spline, ou seja,

$M_1(\xi)$  = primeiro trecho polinomial de uma B-spline, cujo topo foi posicionado sobre a abscissa 2 de um eixo definido segundo um sistema de coordenadas local;

$M_2(\xi)$  = segundo trecho polinomial de uma B-spline, cujo topo foi posicionado sobre a abscissa 1 de um eixo definido segundo um sistema de coordenadas local;

$M_3(\xi)$  = terceiro trecho polinomial de uma B-spline, cujo topo foi posicionado sobre a abscissa 0 de um eixo definido segundo um sistema de coordenadas local; e

$M_4(\xi)$  = quarto trecho polinomial de uma B-spline, cujo topo foi posicionado sobre a abscissa -1 de um eixo definido segundo um sistema de coordenadas local.



**Figura (3.4): Sub-domínio Local contendo os 4 trechos de uma B-spline.**

A área, segundo um sistema de coordenadas global, sob a B-spline é

$$A = \int_{x_i}^{x_i+4} N_1(x) dx + \int_{x_i+4}^{x_i+8} N_2(x) dx + \int_{x_i+8}^{x_i+12} N_3(x) dx + \int_{x_i+12}^{x_i+16} N_4(x) dx .$$

Como

$$\xi = \frac{k}{l} \cdot x - \frac{k}{l} \cdot x_1 ; e$$

$$k = 4 .$$

Tem-se que

$$x = \frac{l}{4} \cdot \xi + x_1 ; e$$

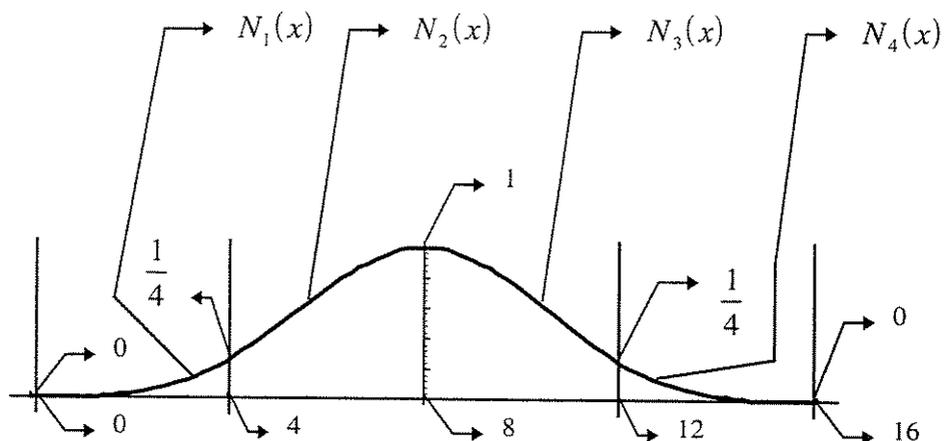
$$dx = \frac{l}{4} d\xi .$$

A área, segundo um sistema de coordenadas local, pode ser calculada por

$$A = \int_0^1 N_1(f(\xi)) \frac{l}{4} d\xi + \int_0^1 N_2(f(\xi)) \frac{l}{4} d\xi + \int_0^1 N_3(f(\xi)) \frac{l}{4} d\xi + \int_0^1 N_4(f(\xi)) \frac{l}{4} d\xi . \rightarrow$$

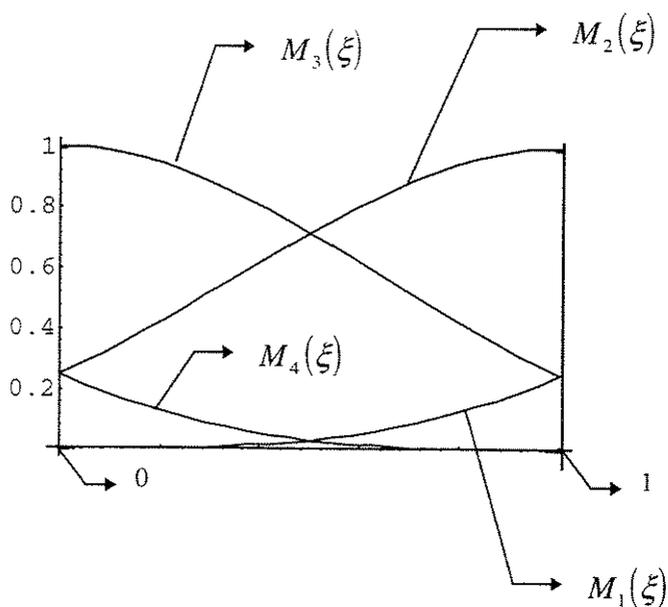
$$\rightarrow A = \frac{l}{4} \left( \int_0^1 M_1(\xi) d\xi + \int_0^1 M_2(\xi) d\xi + \int_0^1 M_3(\xi) d\xi + \int_0^1 M_4(\xi) d\xi \right) .$$

Para um exemplo numérico, a B-spline da Figura (3.3), num sistema de coordenadas global, pode ser redefinida no mesmo sistema de coordenadas como na Figura (3.5).



**Figura (3.5): Spline cúbica definida, numericamente, segundo um sistema de coordenadas global.**

O sub-domínio da Figura (3.4) será utilizado na interpolação, segundo um sistema de coordenadas local, como apresentado na Figura (3.6).



**Figura (3.6): Sub-domínio utilizado para a interpolação.**

Os trechos polinomiais de uma spline cúbica utilizados para o cálculo da área sob a B-spline da Figura (3.5), segundo um sistema de coordenadas global, são:

$$\begin{aligned}
 N_1(x) &= \frac{1}{256}x^3 ; \\
 N_2(x) &= -\frac{3}{256}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + 1 ; \\
 N_3(x) &= \frac{3}{256}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{4}x - 11 ; \text{ e} \\
 N_4(x) &= -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - 3x + 16 .
 \end{aligned}$$

Uma outra interpolação responsável pelo cálculo da mesma área sob a B-spline da Figura (3.5) utiliza os trechos polinomiais de quatro B-splines que, definidos segundo um sistema de coordenadas local, são posicionados no interior do mesmo sub-intervalo, de forma a constituir uma spline cúbica completa no interior deste. Esses quatro trechos polinomiais são:

$$\begin{aligned}
 M_1(\xi) &= \frac{1}{4}\xi^3 ; \\
 M_2(\xi) &= -\frac{3}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} ; \\
 M_3(\xi) &= \frac{3}{4}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + 1 ; \text{ e} \\
 M_4(\xi) &= -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} .
 \end{aligned}$$

Então, a área, segundo o sistema de coordenadas global apresentado, é calculada por:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^4 \frac{1}{256}x^3 dx + \int_4^8 \left( -\frac{3}{256}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x + 1 \right) dx + \\
 &+ \int_8^{12} \left( \frac{3}{256}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{15}{4}x - 11 \right) dx + \int_{12}^{16} \left( -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{16}x^2 - 3x + 16 \right) dx
 \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{11}{4} + \frac{11}{4} + \frac{1}{4} = \frac{24}{4} \Rightarrow A = 6 .$$

E, a área, segundo o sistema de coordenadas local proposto, é calculada por:

$$A = \frac{16}{4} \left[ \int_0^1 \frac{1}{4} \xi^3 d\xi + \int_0^1 \left( -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \right) d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^1 \left( \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 \right) d\xi + \int_0^1 \left( -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \right) d\xi \right] \\ A = \frac{16}{4} \left[ \frac{1}{16} + \frac{11}{16} + \frac{11}{16} + \frac{1}{16} \right] = \frac{16}{4} \frac{24}{16} \Rightarrow A = 6 .$$

Como era de se esperar, o resultado obtido para o cálculo da área, em ambos os sistemas de coordenadas (global e local), é o mesmo. Uma vez que nada se perde em termos de precisão na escolha de um ou outro sistema de coordenadas, a opção pelo sistema de coordenadas mais conveniente a ser adotado deve ser feita com base em outros parâmetros, como por exemplo a praticidade, a facilidade ou a velocidade que essa escolha proporcionará numa determinada situação de cálculo.

### 3.6 INTERPOLAÇÃO DE FUNÇÕES UTILIZANDO-SE B-SPLINES

Interpolar uma função qualquer  $f(x)$  por B-splines é fazer com que algumas ordenadas escolhidas dessa  $f(x)$ , dentro de um certo intervalo compreendido entre  $x_{inicial}$  e  $x_{final}$  ( $x_{inicial} \leq x \leq x_{final}$ ), sejam aproximadamente iguais às ordenadas de uma  $g(x)$  definida como

$$g(x) = \sum c_i N_i(x),$$

ou seja,

$$f(x) \cong g(x) = \sum c_i N_i(x);$$

onde:

$f(x)$  = função a ser interpolada;

$g(x)$  = função interpoladora composta por splines cúbicas que tiveram seu topo posicionado sobre cada um dos nós “i” do intervalo;

$c_i$  = coeficientes das splines cúbicas, vinculados a cada um dos nós “ $i$ ” do intervalo, responsáveis pelo balanceamento ou pelo “peso” dos polinômios interpoladores que regulam a precisão da interpolação; e

$N_i(x)$  = trechos polinomiais componentes de uma spline cúbica completa, os quais formam a base do espaço vetorial responsável pela “qualidade” da interpolação (através do posicionamento do topo desses polinômios cúbicos sobre cada um dos nós “ $i$ ” do intervalo, caracteriza-se a vinculação de tais trechos polinomiais a cada um desses nós “ $i$ ”).

Tem-se, como exemplo, o objetivo de uma interpolação por B-splines da função  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ ,

cujas primeira derivada é  $f'(x) = -\frac{4x^3}{(1+x^4)^2}$ , no intervalo  $(0 \leq x \leq 6)$ , utilizando-se três sub-

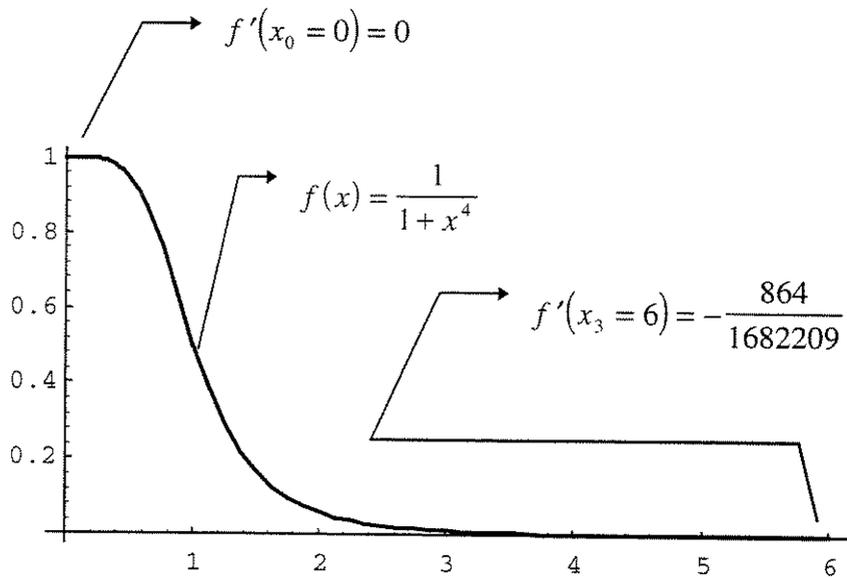
intervalos cujos limites são  $(x_0 = 0 ; x_1 = 2 ; x_2 = 4 ; x_3 = 6)$ , nos quais o valor da função que se deseja interpolar é:

$$f(x_0 = 0) = 1 ; f(x_1 = 2) = \frac{1}{17} ; f(x_2 = 4) = \frac{1}{257} ; f(x_3 = 6) = \frac{1}{1297} .$$

A primeira derivada da função objeto da interpolação nos extremos do intervalo considerado, como mostrado na Figura (3.7), é:

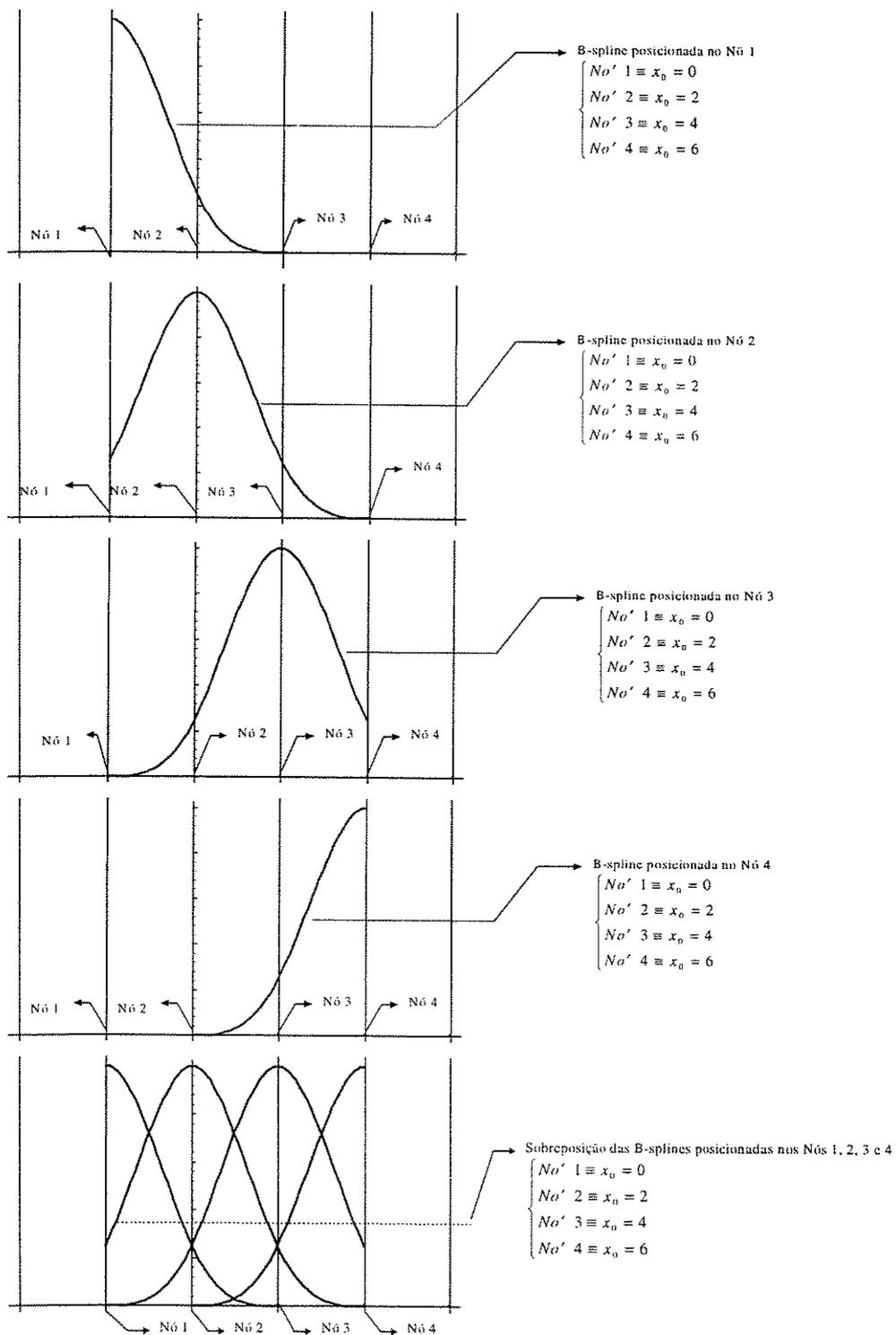
$$f'(x_0 = 0) = 0 ; e$$

$$f'(x_3 = 6) = -\frac{864}{1682209} .$$



**Figura (3.7): Gráfico da função a ser interpolada.**

Uma interpolação no domínio completo pode ser feita, como mostrado na Figura (3.8), através da colocação de uma B-spline em cada nó (posicionamento do topo da B-spline em cada nó) situado nos extremos de cada sub-intervalo (por nó entenda-se o ponto limite de cada sub-intervalo).



**Figura (3.8):** Posicionamento de uma B-spline em cada nó da discretização.

Nota-se que, através da seqüência mostrada na Figura (3.8), somente o sub-intervalo central contém os quatro trechos de uma spline cúbica completa, o primeiro e o terceiro sub-intervalo contém apenas três trechos da B-spline. Uma possibilidade para a inclusão do quarto trecho desta polinomial por partes nesses dois sub-intervalos é através da criação de dois nós auxiliares, um imediatamente anterior ao primeiro e outro imediatamente posterior ao último do domínio completo, sobre os quais serão posicionadas duas outras splines cúbicas. Esta seqüência de posicionamentos está mostrada na Figura (3.9).

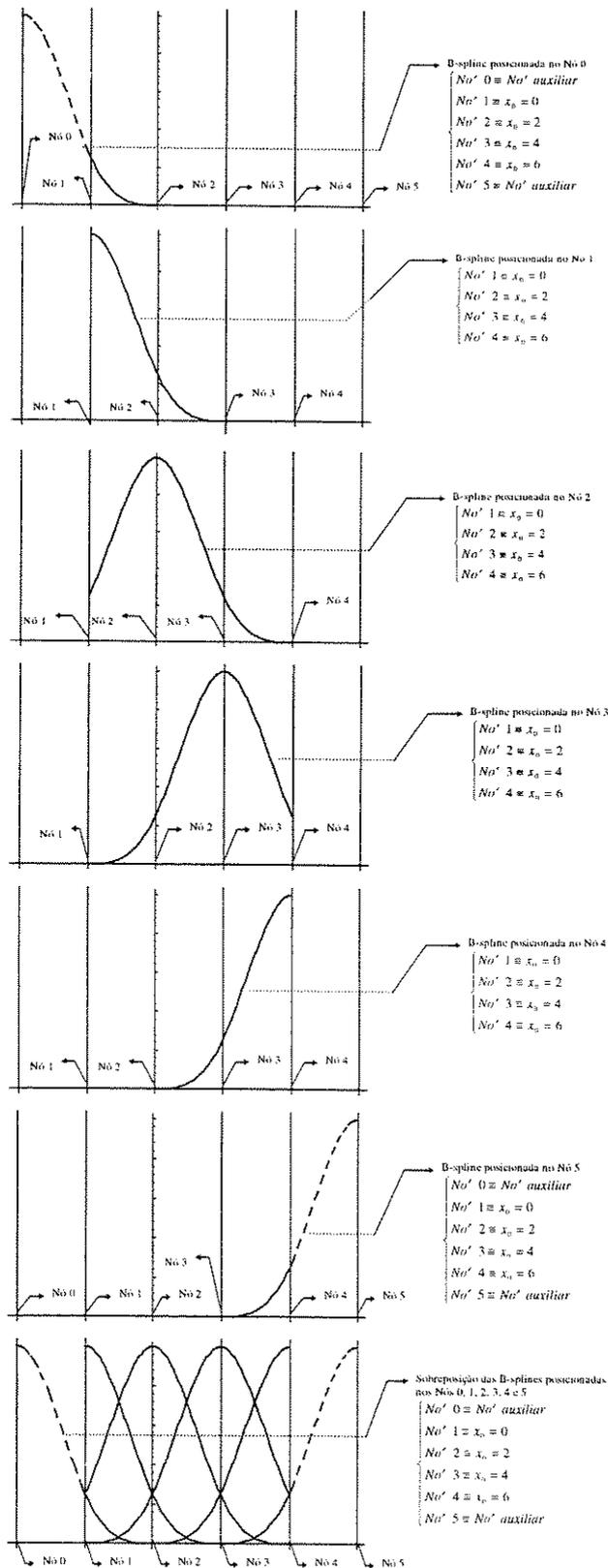


Figura (3.9): Posicionamento dos 4 trechos de uma B-spline nos 3 sub-intervalos, através da criação de 2 nós auxiliares.

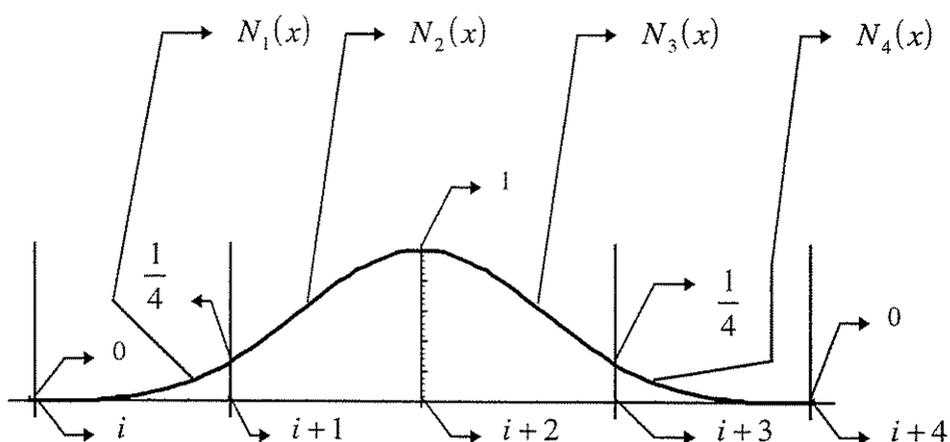
A última seqüência da Figura (3.9) mostra os quatro trechos da polinomial cúbica por partes no interior de cada um dos três sub-intervalos, segundo os quais o domínio completo foi subdividido. Através das seqüências dessa Figura, não se tem dúvida da necessidade do posicionamento do topo de mais duas B-splines, sobre os dois nós auxiliares, como forma de possibilitar a inclusão do quarto trecho polinomial da função nos dois sub-intervalos de extremidade.

O objetivo ao procurar-se posicionar os quatro trechos de uma spline cúbica, que é uma polinomial por partes, no interior do mesmo sub-intervalo é a substituição da interpolação no domínio completo (intervalo completo) por uma interpolação em cada sub-domínio (a interpolação por sub-intervalos exige a existência dos quatro trechos da B-spline no interior destes, pois, conforme Luenberger (1969), a geração do espaço completo que contém todas as possíveis soluções para o problema em questão só é garantida mediante a presença, em cada sub-domínio segundo os quais o domínio completo foi subdividido, de todos os polinômios interpoladores, ou seja, dos quatro trechos da spline cúbica).

No intervalo considerado ( $0 \leq x \leq 6$ ), o tamanho dos sub-intervalos é igual a 2. Para a execução da interpolação não há necessidade de ser empregada uma spline cúbica de “tamanho” 2, ou seja, uma spline cúbica tal que seus quatro trechos possuam tamanho 2 (por uma B-spline de “tamanho” 2 entenda-se uma B-spline idêntica à da Figura (3.3) com abscissas  $x_i ; x_{i+2} ; x_{i+4} ; x_{i+6}$  e  $x_{i+8}$ ); a interpolação pode se desenvolver, por exemplo, através do emprego de uma B-spline cujos trechos possuam tamanho 1 (uma B-spline de tamanho 1 está representada na Figura (3.10)).

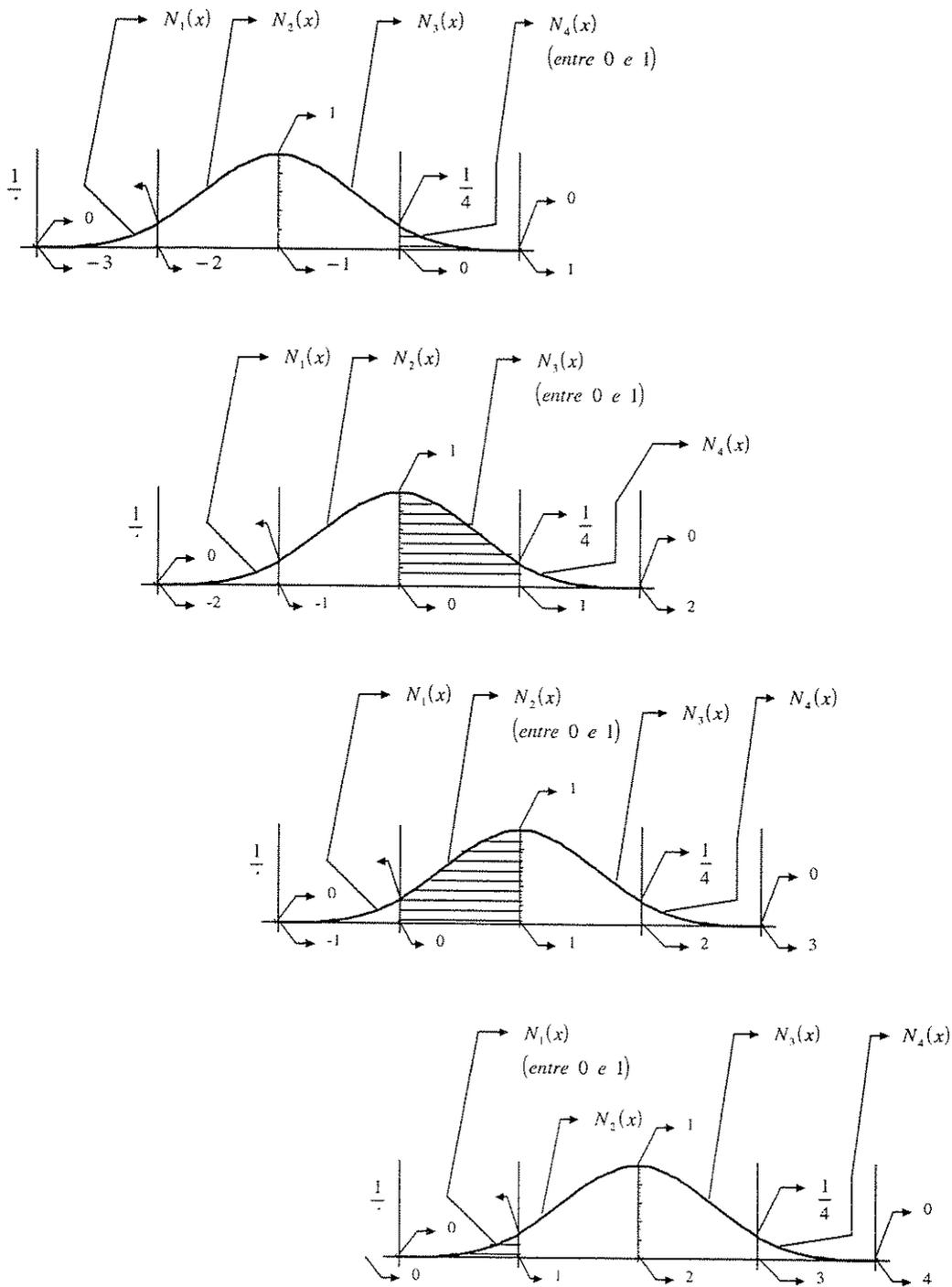
E, ainda, como a interpolação desenvolver-se-á através dos sub-domínios, os limites dos trechos dessa B-spline de tamanho 1 não necessitam estar seqüencialmente numerados como os da B-spline mostrada na Figura (3.10).

Essa não necessidade da numeração seqüencial dos trechos reflete a própria essência da interpolação por sub-intervalos, ou seja, o objetivo é posicionar os quatro trechos diferentes de quatro B-splines no interior do mesmo sub-intervalo constituindo, dessa forma, uma polinomial cúbica por partes completa no interior desse sub-intervalo (através da discussão apresentada no item 3.5, referente à transformação de coordenadas, tem-se a possibilidade de trabalhar com os quatro trechos dessa polinomial cúbica dentro do mesmo sub-intervalo limitado, por exemplo, de 0 a 1).



*Figura (3.10): B-spline com os limites de cada trecho numerados seqüencialmente.*

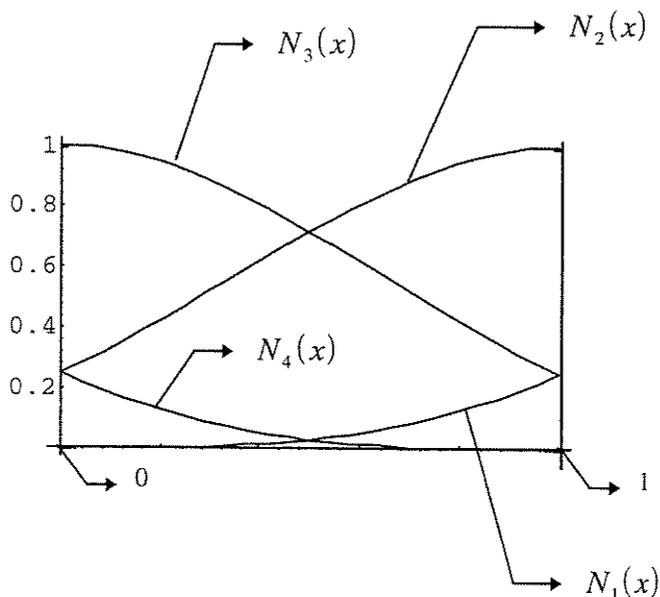
Segundo a seqüência mostrada na Figura (3.11), um simples deslocamento do topo da spline cúbica de tamanho 1 é suficiente para que os quatro trechos desta polinomial cúbica por partes estejam compreendidos entre 0 e 1, e assim o sub-intervalo, no interior do qual esses quatro trechos vierem a ser posicionados, está apto a “participar” de uma interpolação que se desenvolva por sub-domínios.



**Figura (3.11):** Deslocamento da spline cúbica de tamanho 1, de modo a garantir a presença de seus 4 trechos entre 0 e 1.

A seqüência mostrada na Figura (3.11) impõe “0” e “1” como limites aos quatro trechos polinomiais componentes de uma B-spline completa.

Os quatro trechos componentes dessa polinomial cúbica por partes completa, responsáveis por uma interpolação através de sub-domínios, estão graficamente posicionados no interior do mesmo sub-intervalo na Figura (3.12).

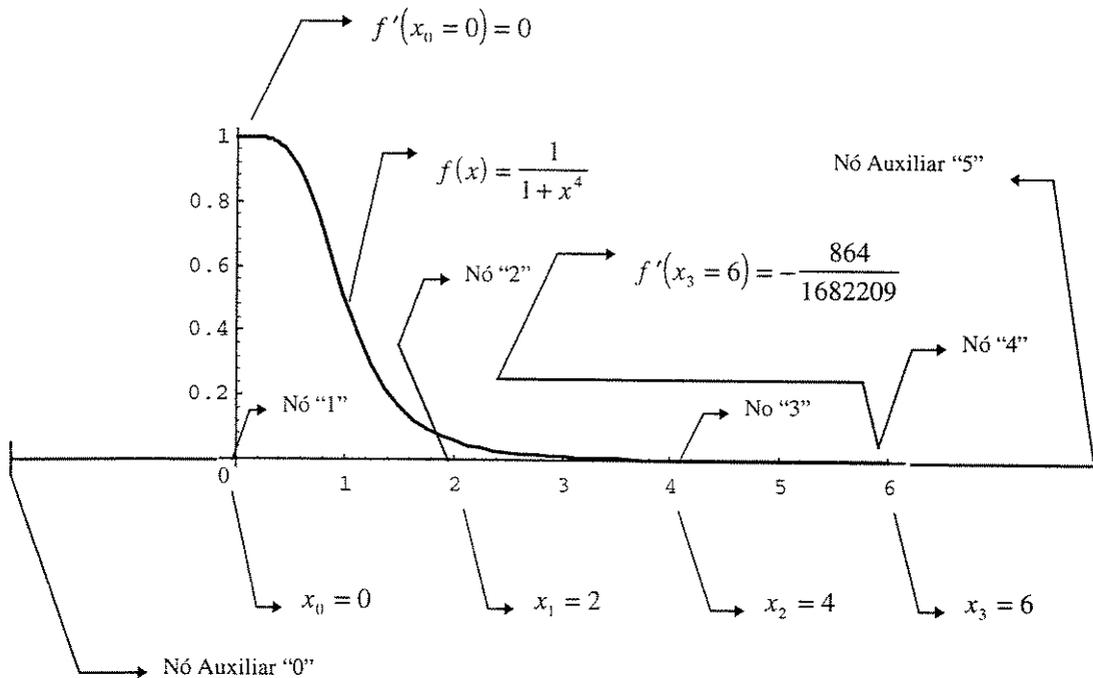


**Figura (3.12):** Os quatro trechos de uma B-spline posicionados entre 0 e 1.

Portanto, além da possibilidade de uma interpolação por sub-intervalos, mediante o conceito de nó auxiliar que concede a inclusão do quarto trecho de uma spline cúbica nos sub-intervalos extremos do domínio, é possível contar com a presença de uma spline cúbica completa, com seus quatro trechos definidos entre “0” e “1”, em todos os sub-intervalos desse domínio completo.

Os limites “0” e “1”, desses sub-intervalos responsáveis por essa interpolação através de sub-domínios, são definidos segundo um sistema de coordenadas local, conforme o procedimento de transformação de coordenadas discutido na seção 3.5.

Voltando ao exemplo, a Figura (3.13) tem por objetivo completar a Figura (3.7), a qual representa o gráfico da função a ser interpolada, através da colocação dos nós sobre os quais serão posicionadas as splines (inclusive os nós auxiliares).



**Figura (3.13): Complemento do gráfico da função a ser interpolada através da colocação dos nós, sobre os quais serão posicionadas as Splines.**

Não obstante, utilizando-se a letra “f” para representar a função a ser interpolada, pode-se acrescentar que,

$$\begin{cases} f(\text{No}' 1) = f(x = x_0 = 0) = 1 ; \\ f(\text{No}' 2) = f(x = x_1 = 2) = \frac{1}{17} ; \\ f(\text{No}' 3) = f(x = x_2 = 4) = \frac{1}{257} ; e \\ f(\text{No}' 4) = f(x = x_3 = 6) = \frac{1}{1297} . \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} f'(\text{No}' 1) = f'(x = x_0 = 0) = 0 ; e \\ f'(\text{No}' 4) = f'(x = x_3 = 6) = -\frac{864}{1682209} . \end{cases}$$

Escrevendo a interpolação no domínio completo como uma superposição das interpolações através dos sub-intervalos (lembrando-se que a letra “g” representa a função interpoladora composta por splines cúbicas), tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x=0) = g(x=0) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=0) \Rightarrow g(x=0) = c_0 N_0(x=0) + c_1 N_1(x=0) \\ \quad \quad \quad + c_2 N_2(x=0) + c_3 N_3(x=0) + c_4 N_4(x=0) \\ \quad \quad \quad + c_5 N_5(x=0) = f(x=0) = 1 \\ f(x=2) = g(x=2) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=2) \Rightarrow g(x=2) = c_0 N_0(x=2) + c_1 N_1(x=2) \\ \quad \quad \quad + c_2 N_2(x=2) + c_3 N_3(x=2) + c_4 N_4(x=2) \\ \quad \quad \quad + c_5 N_5(x=2) = f(x=2) = \frac{1}{17} \\ f(x=4) = g(x=4) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=4) \Rightarrow g(x=4) = c_0 N_0(x=4) + c_1 N_1(x=4) \\ \quad \quad \quad + c_2 N_2(x=4) + c_3 N_3(x=4) + c_4 N_4(x=4) \\ \quad \quad \quad + c_5 N_5(x=4) = f(x=4) = \frac{1}{257} \\ f(x=6) = g(x=6) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=6) \Rightarrow g(x=6) = c_0 N_0(x=6) + c_1 N_1(x=6) \\ \quad \quad \quad + c_2 N_2(x=6) + c_3 N_3(x=6) + c_4 N_4(x=6) \\ \quad \quad \quad + c_5 N_5(x=6) = f(x=6) = \frac{1}{1297} \end{array} \right.$$

Utilizando somente os valores das ordenadas das funções B-spline nos limites dos sub-intervalos obtém-se um sistema com apenas quatro equações. Nesse sistema, o número de incógnitas ( $c_5$ ) é igual a seis ( $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$ ), essas incógnitas são os respectivos coeficientes das splines vinculados a cada um dos nós sobre os quais o topo dessas funções foi posicionado (a seqüência mostrada na Figura (3.9) evidencia esses posicionamentos sobre os nós). Para a resolução de tal sistema linear são necessárias mais duas equações envolvendo a derivada primeira das funções B-spline nos limites extremos do domínio completo, ou seja, a derivada primeira no limite inferior do primeiro sub-intervalo e no limite superior do último (terceiro) sub-intervalo.

Como a interpolação por sub-intervalos exige uma transformação de coordenadas segundo um sistema de referência global para um sistema de referência local, dentro do exemplo de interpolação que está sendo desenvolvido há a necessidade da utilização da equação (3.57), a qual foi deduzida com o objetivo de efetuar tal transformação,

$$\xi = \frac{k}{l} \cdot x - \frac{k}{l} \cdot x_1 ;$$

onde:

$\xi$  = sistema de coordenadas local, segundo o qual os quatro trechos de uma spline cúbica serão posicionados a fim de que seja possível a interpolação por sub-domínios, definidos com limites locais variando de 0 a 1;

$x$  = sistema de coordenadas global, segundo o qual o domínio (intervalo) completo foi subdividido em sub-domínios, definidos com limites globais variando de  $x_1$  a  $x_2$

$$\left( \text{com } x_2 = x_1 + \frac{l}{k} \right);$$

$l$  = comprimento do domínio completo;

$k$  = nº de sub-domínios, segundo os quais o domínio completo foi subdividido; e

$x_1$  = limite inicial global do sub-domínio.

Substituídos os dados do exemplo em desenvolvimento, (3.57) torna-se

$$\xi = \frac{3}{6} x - \frac{3}{6} x_1 . \quad (3.58)$$

E,

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} .$$

Na interpolação por sub-domínios, os coeficientes dos quatro trechos polinomiais componentes de uma spline cúbica completa, que graficamente são apresentados na Figura (3.6) no interior do mesmo sub-intervalo, são determinados conforme as expressões (3.10) a (3.25) do item 3.4.1, originando os seguintes polinômios dentro desse sub-intervalo limitado por “0” e “1”:

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 ;$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} ;$$

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 ;$$

$$M_4(\xi) = -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} .$$

Uma observação torna-se oportuna em relação à nomenclatura utilizada para a definição das funções B-spline:

-) para funções B-spline definidas segundo um sistema de coordenadas global (no domínio completo), utiliza-se a letra “*N*” para a nomeação das funções; e

-) para as mesmas funções B-spline definidas segundo um sistema de coordenadas local (nos sub-intervalos), utiliza-se a letra “*M*” para a nomeação das funções.

Para a composição das duas equações que envolvem a derivada primeira das funções B-spline, nos limites extremos do domínio completo, também é necessário trabalhar-se segundo um sistema de coordenadas local (pois a interpolação se desenvolve através de sub-intervalos). Então, a derivada primeira dessas funções polinomiais por partes, segundo um sistema de coordenadas global, torna-se:

$$\frac{dN(x)}{dx} = \frac{dM(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \Rightarrow \frac{dN(x)}{dx} = \frac{dM(\xi)}{d\xi} \frac{1}{2} .$$

A seguir, apresenta-se a derivada primeira, em relação a um sistema de coordenadas local, das quatro funções correspondentes aos quatro trechos polinomiais de uma spline cúbica completa, nos extremos do sub-intervalo limitado por “0” e “1”:

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \frac{dM_1(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \\ \frac{dM_1(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{dM_2(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{3}{4} \\ \frac{dM_2(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{dM_3(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = 0 \\ \frac{dM_3(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \frac{dM_4(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -\frac{3}{4} \\ \frac{dM_4(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = 0 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

Ao sistema gerado pela interpolação por splines cúbicas,  $g(x) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x)$ , da função

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4}$$

devem ser incluídas duas outras equações obtidas através da imposição da derivada primeira nos limites extremos do domínio completo.

Ou seja, à interpolação

$$f(x) = g(x) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x)$$

são acrescentadas duas outras equações,

$$\frac{d f(x=0)}{dx} = \frac{d g(x=0)}{dx} = \sum_{i=0}^5 c_i \frac{d N_i(x=0)}{dx} \quad e$$

$$\frac{d f(x=6)}{dx} = \frac{d g(x=6)}{dx} = \sum_{i=0}^5 c_i \frac{d N_i(x=6)}{dx} ,$$

geradas pela imposição da derivada primeira nos limites do domínio completo.

Na seqüência é apresentado o desenvolvimento dessas duas equações que, além de satisfazer as condições de contorno para spline com extremidade engastada (conforme item 3.3.1), tem por objetivo a obtenção do mesmo número de equações, (6), quantas são as incógnitas envolvidas, ou quantos são os coeficientes das polinomiais por partes envolvidos, nessa interpolação que se desenvolve por sub-intervalos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d f(x=0)}{dx} = \frac{d g(x=0)}{dx} = \sum_{i=0}^5 c_i \frac{d N_i(x=0)}{dx} \Rightarrow \frac{d g(x=0)}{dx} = c_0 \frac{dN_0(x=0)}{dx} \\ \quad + c_1 \frac{dN_1(x=0)}{dx} + c_2 \frac{dN_2(x=0)}{dx} + c_3 \frac{dN_3(x=0)}{dx} \\ \quad + c_4 \frac{dN_4(x=0)}{dx} + c_5 \frac{dN_5(x=0)}{dx} = \frac{d f(x=0)}{dx} = 0 \\ \frac{d f(x=6)}{dx} = \frac{d g(x=6)}{dx} = \sum_{i=0}^5 c_i \frac{d N_i(x=6)}{dx} \Rightarrow \frac{d g(x=6)}{dx} = c_0 \frac{dN_0(x=6)}{dx} \\ \quad + c_1 \frac{dN_1(x=6)}{dx} + c_2 \frac{dN_2(x=6)}{dx} + c_3 \frac{dN_3(x=6)}{dx} \\ \quad + c_4 \frac{dN_4(x=6)}{dx} + c_5 \frac{dN_5(x=6)}{dx} = \frac{d f(x=6)}{dx} = -\frac{864}{1682209} \end{array} \right.$$

E o sistema linear, seis equações a seis incógnitas, completa-se:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d f(x=0)}{dx} &= \frac{d g(x=0)}{dx} = \sum_{i=0}^5 c_i \frac{d N_i(x=0)}{dx} \Rightarrow \frac{d g(x=0)}{dx} = c_0 \frac{d N_0(x=0)}{dx} \\
&\quad + c_1 \frac{d N_1(x=0)}{dx} + c_2 \frac{d N_2(x=0)}{dx} + c_3 \frac{d N_3(x=0)}{dx} \\
&\quad + c_4 \frac{d N_4(x=0)}{dx} + c_5 \frac{d N_5(x=0)}{dx} = \frac{d f(x=0)}{dx} = 0 \\
f(x=0) &= g(x=0) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=0) \Rightarrow g(x=0) = c_0 N_0(x=0) + c_1 N_1(x=0) \\
&\quad + c_2 N_2(x=0) + c_3 N_3(x=0) + c_4 N_4(x=0) \\
&\quad + c_5 N_5(x=0) = f(x=0) = 1 \\
f(x=2) &= g(x=2) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=2) \Rightarrow g(x=2) = c_0 N_0(x=2) + c_1 N_1(x=2) \\
&\quad + c_2 N_2(x=2) + c_3 N_3(x=2) + c_4 N_4(x=2) \\
&\quad + c_5 N_5(x=2) = f(x=2) = \frac{1}{17} \\
f(x=4) &= g(x=4) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=4) \Rightarrow g(x=4) = c_0 N_0(x=4) + c_1 N_1(x=4) \\
&\quad + c_2 N_2(x=4) + c_3 N_3(x=4) + c_4 N_4(x=4) \\
&\quad + c_5 N_5(x=4) = f(x=4) = \frac{1}{257} \\
f(x=6) &= g(x=6) = \sum_{i=0}^5 c_i N_i(x=6) \Rightarrow g(x=6) = c_0 N_0(x=6) + c_1 N_1(x=6) \\
&\quad + c_2 N_2(x=6) + c_3 N_3(x=6) + c_4 N_4(x=6) \\
&\quad + c_5 N_5(x=6) = f(x=6) = \frac{1}{1297} \\
\frac{d f(x=6)}{dx} &= \frac{d g(x=6)}{dx} = \sum_{i=0}^5 c_i \frac{d N_i(x=6)}{dx} \Rightarrow \frac{d g(x=6)}{dx} = c_0 \frac{d N_0(x=6)}{dx} \\
&\quad + c_1 \frac{d N_1(x=6)}{dx} + c_2 \frac{d N_2(x=6)}{dx} + c_3 \frac{d N_3(x=6)}{dx} \\
&\quad + c_4 \frac{d N_4(x=6)}{dx} + c_5 \frac{d N_5(x=6)}{dx} = \frac{d f(x=6)}{dx} = -\frac{864}{1682209}
\end{aligned} \right\}$$

Com a substituição dos valores das ordenadas das B-splines nos nós e de suas primeiras derivadas nos extremos do domínio completo, o sistema torna-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 \left( -\frac{3}{8} \right) + c_1 (0) + c_2 \left( \frac{3}{8} \right) + c_3 (0) + c_4 (0) + c_5 (0) = 0 \\ c_0 \left( \frac{1}{4} \right) + c_1 (1) + c_2 \left( \frac{1}{4} \right) + c_3 (0) + c_4 (0) + c_5 (0) = 1 \\ c_0 (0) + c_1 \left( \frac{1}{4} \right) + c_2 (1) + c_3 \left( \frac{1}{4} \right) + c_4 (0) + c_5 (0) = \frac{1}{17} \\ c_0 (0) + c_1 (0) + c_2 \left( \frac{1}{4} \right) + c_3 (1) + c_4 \left( \frac{1}{4} \right) + c_5 (0) = \frac{1}{257} \\ c_0 (0) + c_1 (0) + c_2 (0) + c_3 \left( \frac{1}{4} \right) + c_4 (1) + c_5 \left( \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{1297} \\ c_0 (0) + c_1 (0) + c_2 (0) + c_3 \left( -\frac{3}{8} \right) + c_4 (0) + c_5 \left( \frac{3}{8} \right) = -\frac{864}{1682209} \end{array} \right.$$

Ou, em forma de equação matricial:

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{17} \\ \frac{1}{257} \\ \frac{1}{1297} \\ -\frac{864}{1682209} \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

A solução de (3.59) é apresentada como:

$$\begin{Bmatrix} c_0 = -0,239193 \\ c_1 = 1,1196 \\ c_2 = -0,239193 \\ c_3 = 0,0724697 \\ c_4 = -0,0351214 \\ c_5 = 0,0711 \end{Bmatrix}$$

Obtidas as incógnitas  $(c_5)$ , que são os respectivos coeficientes das splines  $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$  vinculados a cada um dos nós sobre os quais o topo dessas funções foi posicionado, a obtenção dos polinômios interpoladores para cada sub-intervalo se dá mediante a multiplicação, seguida da somatória, dos coeficientes pelos respectivos polinômios diferentes de zero no trecho, tal como mostrado a seguir:

$$f(x) = g(x) = \sum c_i N_i(x) \quad (x_{inicial} \leq x \leq x_{final}),$$

onde

$f(x)$  = função a ser interpolada;

$g(x)$  = função interpoladora composta por splines cúbicas, segundo um sistema de coordenadas global;

$x_{inicial}$  = abscissa inicial do domínio completo; e

$x_{final}$  = abscissa final do domínio completo.

Para uma interpolação desenvolvida através de sub-intervalos com limites, segundo um sistema de coordenadas local, variando de “0” a “1”, a função interpoladora torna-se:

$$g(\xi) = \sum_{i=0}^5 c_i M_i(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

Obtida a função interpoladora segundo um sistema de coordenadas local, tem-se a necessidade de transformar esta função, segundo um sistema de coordenadas global, para que seja possível uma comparação entre os resultados que se obtém através da utilização desta, para as ordenadas das abscissas dos nós posicionados nos limites dos sub-intervalos, e os resultados obtidos com a função objeto da interpolação. Essa transformação pode ocorrer com a utilização da equação (3.58),

$$\xi = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x_1,$$

onde

$\xi$  = sistema de coordenadas local;

$x$  = sistema de coordenadas global; e

$x_1$  = limite inicial global do sub-domínio.

Para o primeiro sub-intervalo,  $[local \Rightarrow (0 \leq \xi \leq 1); global \Rightarrow (0 \leq x \leq 2)]$ , apresenta-se a função interpoladora obtida segundo um sistema de coordenadas local e segundo um sistema de coordenadas global, respectivamente,  $g(\xi)$  e  $g(x)$ ; para esse mesmo sub-intervalo é feita uma comparação entre os resultados obtidos através de  $g(x)$  e os obtidos através da função que foi interpolada  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ :

$$\begin{cases}
 g_1(\xi) = (-0,239193) \left( -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} \right) + \\
 + (1,1196) \left( \frac{3}{4}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + 1 \right) + (-0,239193) \left( -\frac{3}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} \right) + \\
 + (0,0724697) \left( \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\
 g_1(\xi) = 1,097010425 \xi^3 - 2,0381895 \xi^2 + 1,00000035 \\
 \left\{ \xi = \frac{1}{2}x - 0 \right. \\
 \left. g_1(x) = 0,137126303 x^3 - 0,509547375 x^2 + 1,00000035 \right.
 \end{cases}$$

**Tabela (3.1): Comparação entre os resultados obtidos para o primeiro sub-intervalo.**

	Função Interpoladora $g(x)$	Função Interpolada $f(x)$	$ \% \text{ erro} $
x=0	1,00000035	1,0	00,00035
X=1	0,627582428	0,5	20,33
X=2	0,058824424	0,058823529	00,00152

Para o segundo sub-intervalo,  $[local \Rightarrow (0 \leq \xi \leq 1); global \Rightarrow (2 \leq x \leq 4)]$ , apresenta-se a função interpoladora obtida segundo um sistema de coordenadas local e segundo um sistema de coordenadas global, respectivamente,  $g(\xi)$  e  $g(x)$ ; para esse mesmo sub-intervalo é feita uma

comparação entre os resultados obtidos através de  $g(x)$  e os obtidos através da função que foi

interpolada  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_2(\xi) = (1,1196) \left( -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} \right) + \\ + (-0,239193) \left( \frac{3}{4}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + 1 \right) + (0,0724697) \left( -\frac{3}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} \right) + \\ + (-0,0351214) \left( \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\ g_2(\xi) = -0,522427375 \xi^3 + 1,252841775 \xi^2 - 0,785347725 \xi + 0,058824425 \\ \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2}x - 1 \\ \end{array} \right. \\ g_2(x) = -0,065303422 x^3 + 0,705030975 x^2 - 2,429156701 x + 2,6194413 \end{array} \right.$$

**Tabela (3.2): Comparação entre os resultados obtidos para o segundo sub-intervalo.**

	Função Interpoladora $g(x)$	Função Interpolada $f(x)$	$ \% \text{ erro} $
x=2	0,058824422	0,058823529	0,001518
x=3	-0,085942422	0,012195122	114,19
x=4	0,003891088	0,003891051	0,00095

Para o terceiro sub-intervalo,  $[local \Rightarrow (0 \leq \xi \leq 1) ; global \Rightarrow (4 \leq x \leq 6)]$ , apresenta-se a função interpoladora obtida segundo um sistema de coordenadas local e segundo um sistema de coordenadas global, respectivamente,  $g(\xi)$  e  $g(x)$ ; para esse mesmo sub-intervalo é feita uma comparação entre os resultados obtidos através de  $g(x)$  e os obtidos através da função que foi

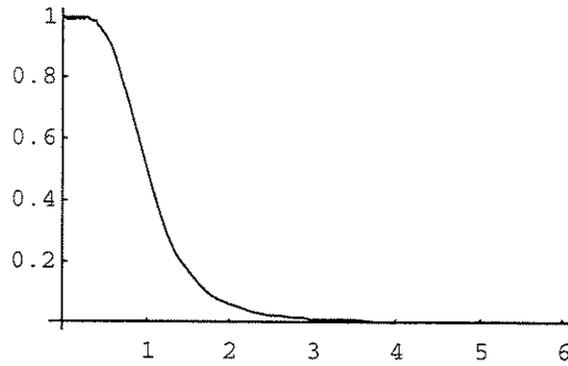
interpolada  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
g_3(\xi) &= (-0,239193) \left( -\frac{1}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} \right) + \\
&+ (0,0724697) \left( \frac{3}{4}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + 1 \right) + (-0,0351214) \left( -\frac{3}{4}\xi^3 + \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4} \right) + \\
&+ (0,0711) \left( \frac{1}{4}\xi^3 \right) \\
g_3(\xi) &= 0,158266575 \xi^3 - 0,31444035 \xi^2 + 0,1530537 \xi + 0,0038911 \\
\left\{ \begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}x - 2
\end{aligned} \right. \\
g_3(x) &= 0,019783322 x^3 - 0,316009951 x^2 + 1,655007 \xi - 2,8261103
\end{aligned} \right.$$

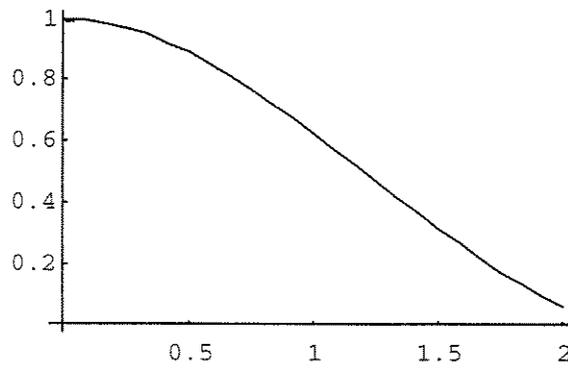
**Tabela (3.3): Comparação entre os resultados obtidos para o terceiro sub-intervalo.**

	Função Interpoladora $g(x)$	Função Interpolada $f(x)$	$ \% \text{ erro} $
X=4	0,003891092	0,003891051	0,001054
X=5	0,021591175	0,001597444	92,60
X=6	0,000771012	0,000771010	0,00026

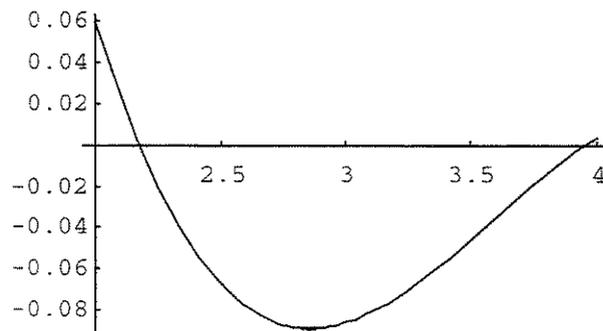
A função que foi interpolada  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ , dentro do domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ), está plotada na Figura (3.14). A função interpoladora  $g(x)$ , composta pelos quatro trechos polinomiais de uma spline cúbica completa, está apresentada graficamente nas Figuras (3.15) a (3.17), respectivamente dentro dos três sub-intervalos, ( $0 \leq x \leq 2$ ), ( $2 \leq x \leq 4$ ) e ( $4 \leq x \leq 6$ ), segundo os quais o domínio completo foi subdividido. Na Figura (3.18) estão unidas as três funções interpoladoras por sub-intervalos, ( $g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$ ), no mesmo gráfico. E na Figura (3.19) são apresentadas a função interpolada  $f(x)$  e a função interpoladora  $g(x)$  dentro do domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ).



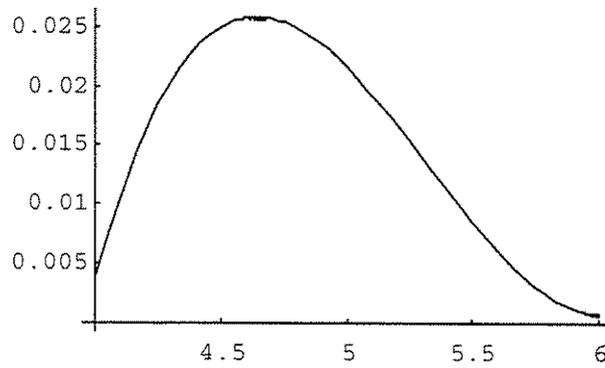
**Figura (3.14):** Função interpolada  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ , no domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ).



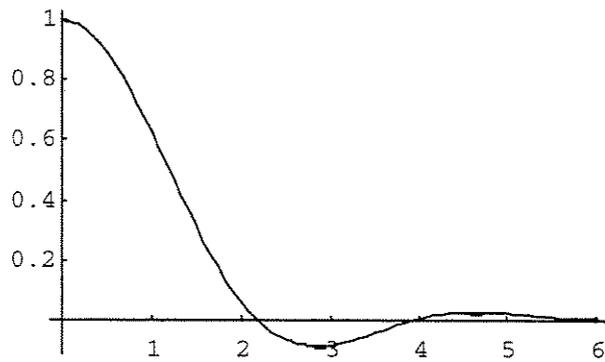
**Figura (3.15):** Função interpoladora  $g_1(x)$  para o primeiro sub-intervalo ( $0 \leq x \leq 2$ )



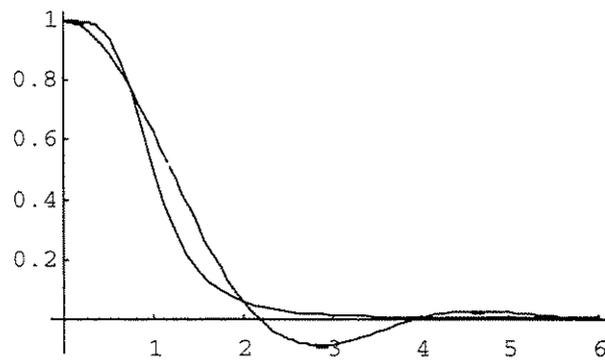
**Figura (3.16):** Função interpoladora  $g_2(x)$  para o segundo sub-intervalo ( $2 \leq x \leq 4$ ).



*Figura (3.17): Função interpoladora  $g_3(x)$  para o terceiro sub-intervalo ( $4 \leq x \leq 6$ ).*



*Figura (3.18): Função interpoladora completa constituída pela união de  $(g_1(x) + g_2(x) + g_3(x))$ , no domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ).*



*Figura (3.19): Plotagem da função interpolada  $f(x)$  juntamente com a função interpoladora completa  $g(x)$ , no domínio completo ( $0 \leq x \leq 6$ ).*

Através das comparações numéricas realizadas em cada sub-intervalo, conforme Tabela (3.1), Tabela (3.2) e Tabela (3.3), e através da Figura (3.19), onde é feita a plotagem conjunta das funções  $f(x)$  e  $g(x)$ , pode-se concluir que a interpolação de uma função de quarto grau através de splines cúbicas apresentou uma precisão muito boa junto aos nós posicionados nos limites dos sub-intervalos, segundo os quais o domínio completo foi subdividido.

E junto às abscissas intermediárias a esses nós, a interpolação realizada por sub-intervalos e com a inclusão de dois nós auxiliares apresentou uma acentuada perda de precisão. Tal comportamento era absolutamente esperado, uma vez que se está interpolando uma função de quarto grau por uma função de terceiro grau.

A possibilidade de uma maior precisão nesses pontos intermediários aos limites dos sub-intervalos está vinculada a um aumento do número de sub-intervalos que, dessa forma, conduz a um aumento do número de abscissas, coincidentes com os limites desses sub-intervalos, cujas ordenadas são efetivamente aproximadas pelas splines cúbicas interpoladoras.

Nas abscissas intermediárias aos limites desses novos sub-intervalos redefinidos em maior número, a tendência em termos percentuais também é de melhora da precisão, ou seja, a tendência é de uma diminuição da defasagem entre as curvas  $f(x)$ , interpolada, e  $g(x)$ , interpoladora, nesses pontos intermediários.

A interpolação, desenvolvida através de splines cúbicas, dos valores das ordenadas da função  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$  nos nós posicionados nos limites dos sub-intervalos, segundo os quais o domínio completo foi subdividido, utilizou a seguinte aproximação

$$f(x) = g(x) = \sum c_i N_i(x).$$

Essa interpolação, através de sub-intervalos no interior dos quais foram posicionados os quatro trechos de uma spline cúbica completa, envolveu também, nos limites do domínio completo, a derivada primeira da função interpoladora,  $g'(x)$ , para aproximar a derivada primeira da função a ser interpolada,  $f'(x)$ ,

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} = \sum c_i \frac{d N_i(x)}{dx}.$$

I. J. Shoenberg apud Kreyszig (1993) sugere uma seqüência de procedimentos, apresentada a seguir, para realizar essa interpolação através dos mesmos sub-intervalos. Essa seqüência de procedimentos tem por objetivo definir para cada um dos sub-intervalos, segundo os quais o domínio completo foi subdividido, um polinômio interpolador constituído por splines cúbicas e definido a

partir dos valores das ordenadas, nos limites dos sub-intervalos, e das primeiras derivadas, nos limites do domínio completo, da função a ser interpolada.

É interessante acrescentar que o objetivo da interpolação já apresentada também foi o de definir, para cada um dos sub-intervalos, um polinômio interpolador constituído por splines cúbicas que foi o responsável pela aproximação dos valores das ordenadas de  $f(x)$ , nos limites dos sub-intervalos, e das primeiras derivadas dessa função nos limites do domínio completo.

Os dados referentes à interpolação de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4},$$

no intervalo  $(0 \leq x \leq 6)$ , podem ser reorganizados como:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = f(0) = 1 ; f_1 = f(2) = \frac{1}{17} ; f_2 = f(4) = \frac{1}{257} ; f_3 = f(6) = \frac{1}{1297} ; \\ k_0 = f'(0) = 0 ; k_3 = f'(6) = -\frac{864}{1682209} ; \\ n = \text{numero de sub-intervalos} = 3 ; e \\ h = \text{tamanho dos sub-intervalos} = 2 . \end{array} \right.$$

Conforme I. J. Schoenberg apud Kreyszig (1993), através de

$$k_{j-1} + 4 k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h} (f_{j+1} - f_{j-1}) ; \quad j = 1, \dots, n-1 ; \quad (3.60)$$

constituí-se o seguinte sistema de equações responsável pela aproximação da derivada primeira da função a ser interpolada nos nós internos do domínio completo (por nós internos do domínio completo entenda-se todos os nós desse domínio com exceção dos dois de extremidade):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 + 4 k_1 + k_2 = \frac{3}{2} (f_2 - f_0) = \frac{3}{2} \left( -\frac{256}{257} \right) = -\frac{768}{514} \\ k_1 + 4 k_2 + k_3 = \frac{3}{2} (f_3 - f_1) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1297} - \frac{1}{17} \right) = -\frac{3840}{44098} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4 k_1 + k_2 = -\frac{768}{514} \\ k_1 + 4 k_2 = -\frac{3840}{44098} + \frac{864}{1682209} \end{array} \right.$$

Colocando  $k_0$  e  $k_3$  juntamente com a solução desse sistema linear, obtém-se:

$$\{k_0 = 0 ; k_1 = -0,392673 ; k_2 = 0,0765268 \text{ e } k_3 = -0,00051361 ;$$

onde  $k_0$  e  $k_3$  são a derivada primeira, nos nós de extremidade do domínio completo, da função a ser interpolada; e  $k_1$  e  $k_2$  são uma aproximação da derivada primeira dessa função a ser interpolada nos nós internos do domínio completo.

Os coeficientes das splines, conforme I. J. Schoenberg apud Kreyszig (1993), são obtidos através de:

$$a_{j0} = f_j ; \quad (3.61)$$

$$a_{j1} = k_j ; \quad (3.62)$$

$$a_{j2} = \frac{3}{h^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{h} (k_{j+1} + 2 k_j) ; \quad (3.63)$$

$$a_{j3} = \frac{2}{h^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h^2} (k_{j+1} + k_j) ; \quad (3.64)$$

com  $j$  variando de "0" a "n-1", ou seja,  $j = 0, \dots, n-1$ .

No intervalo  $(x_j \leq x \leq x_{j+1} = x_j + h)$ , com  $j = 0, \dots, n-1$ , a spline é dada pela seguinte polinomial cúbica interpoladora, conforme I. J. Schoenberg apud Kreyszig (1993):

$$p_j(x) = a_{j0} + a_{j1} (x - x_j) + a_{j2} (x - x_j)^2 + a_{j3} (x - x_j)^3 . \quad (3.65)$$

A seguir são apresentados, por sub-intervalos, os coeficientes da B-spline e a polinomial cúbica interpoladora por ela constituída.

Para o primeiro sub-intervalo [*global*  $\Rightarrow (0 \leq x \leq 2)$ ]:

$$\begin{cases} a_{00} = 1 ; \\ a_{01} = 0 ; \\ a_{02} = -0,509545853 ; e \\ a_{03} = 0,137125868 . \\ \therefore p_0(x) = 1 - 0,509545853 x^2 + 0,137125868 x^3 \end{cases}$$

Para o segundo sub-intervalo [*global*  $\Rightarrow (2 \leq x \leq 4)$ ]:

$$\begin{cases} a_{10} = \frac{1}{17} ; \\ a_{11} = -0,392673 ; \\ a_{12} = 0,313210241 ; e \\ a_{13} = -0,06530343 . \\ \therefore p_1(x) = 2,619437933 - 2,429155124 x + 0,705030821 x^2 - 0,06530343 x^3 \end{cases}$$

Para o terceiro sub-intervalo [*global*  $\Rightarrow (4 \leq x \leq 6)$ ]:

$$\begin{cases} a_{20} = \frac{1}{257} ; \\ a_{21} = 0,0765268 ; \\ a_{22} = -0,078610025 ; e \\ a_{23} = 0,019783308 . \\ \therefore p_2(x) = -2,826108261 + 1,655005784 x - 0,316009721 x^2 + 0,019783308 x^3 \end{cases}$$

Com o estabelecimento de um sistema de coordenadas local e através de sub-intervalos, no interior dos quais foram posicionados os quatro trechos de uma spline cúbica completa, foi feita uma interpolação que, além de considerar os valores das ordenadas de  $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$  nos nós posicionados

nos limites desses sub-intervalos, levou em conta também a derivada primeira dessa função nos nós posicionados nos limites do domínio completo. Nessa interpolação, que contou também com a inclusão de dois nós auxiliares posicionados fora dos limites do domínio completo, essas duas considerações ocorreram, respectivamente, através de

$$f(x) = g(x) = \sum c_i N_i(x) ; e$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} = \sum c_i \frac{d N_i(x)}{dx} .$$

Para cada um dos três sub-intervalos,  $(0 \leq x \leq 2)$ ,  $(2 \leq x \leq 4)$  e  $(4 \leq x \leq 6)$ , segundo os quais o domínio completo  $(0 \leq x \leq 6)$  foi subdividido, a interpolação desenvolvida apresentou como resultado funções interpoladoras, por sub-intervalos, idênticas às obtidas conforme a seqüência de procedimentos proposta por I. J. Schoenberg apud Kreyszig (1993).

Comparando-se ambos os resultados obtidos para os polinômios interpoladores constituídos por splines cúbicas, pode-se organizar o seguinte resumo comparativo por sub-intervalos:

-) polinômio interpolador para o primeiro sub-intervalo  $(0 \leq x \leq 2)$ :

$$g_1(x) = 0,137126303 x^3 - 0,509547375 x^2 + 1,00000035 \quad (\text{obtido através da interpolação apresentada inicialmente});$$

$$p_0(x) = 0,137125868 x^3 - 0,509545853 x^2 + 1 \quad (\text{obtido através do procedimento de Schoenberg});$$

-) polinômio interpolador para o segundo sub-intervalo  $(2 \leq x \leq 4)$ :

$$g_2(x) = -0,065303422 x^3 + 0,705030975 x^2 - 2,429156701 x + 2,6194413 \quad (\text{obtido através da interpolação apresentada inicialmente});$$

$$p_1(x) = -0,06530343 x^3 + 0,705030821 x^2 - 2,429155124 x + 2,619437933 \quad (\text{obtido através do procedimento de Schoenberg});$$

-) polinômio interpolador para o terceiro sub-intervalo ( $4 \leq x \leq 6$ ):

$g_3(x) = 0,019783322 x^3 - 0,316009951 x^2 + 1,655007 x - 2,8261103$  (obtido através da interpolação apresentada inicialmente);

$p_2(x) = 0,019783308 x^3 - 0,316009721 x^2 + 1,655005784 x - 2,826108261$  (obtido através do procedimento de Schoenberg);

É interessante acrescentar que, enquanto a interpolação apresentada inicialmente “nomeia” o primeiro polinômio interpolador com o índice “1”, a interpolação proposta por I. J. Schoenberg apud Kreyszig (1993) “nomeia” a primeira polinomial cúbica com o índice “0”, e a partir deste os índices polinomiais seguem uma ordem crescente referindo-se aos sub-intervalos subseqüentes.

A obtenção dos mesmos polinômios interpoladores ocorre em função das metodologias serem as mesmas ou, ainda, o desenvolvimento apresentado por I. J. Schoenberg em (1946), que constitui a publicação original citada por Kreyszig em (1993), foi empregado através da interpolação que utiliza

$$f(x) = g(x) = \sum c_i N_i(x) ; e$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} = \sum c_i \frac{d N_i(x)}{dx} .$$

Uma comprovação desse mesmo emprego de metodologia justifica a obtenção dos mesmos resultados. Essa comprovação será feita, a seguir, através da apresentação de um desenvolvimento, a partir das equações que regem a interpolação apresentada inicialmente

$$f(x) = g(x) = \sum c_i N_i(x) ; e$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} = \sum c_i \frac{d N_i(x)}{dx} ,$$

capaz de conduzir às expressões (3.60) e (3.65) propostas por I. J. Schoenberg apud Kreyszig (1993); ou seja, a partir das equações básicas segundo as quais toda a interpolação apresentada inicialmente se fundamenta, obtém-se as duas expressões principais responsáveis pela interpolação proposta por Schoenberg, respectivamente, dadas por (3.60) e (3.65):

$$k_{j-1} + 4 k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h} (f_{j+1} - f_{j-1}); \quad j = 1, \dots, n-1,$$

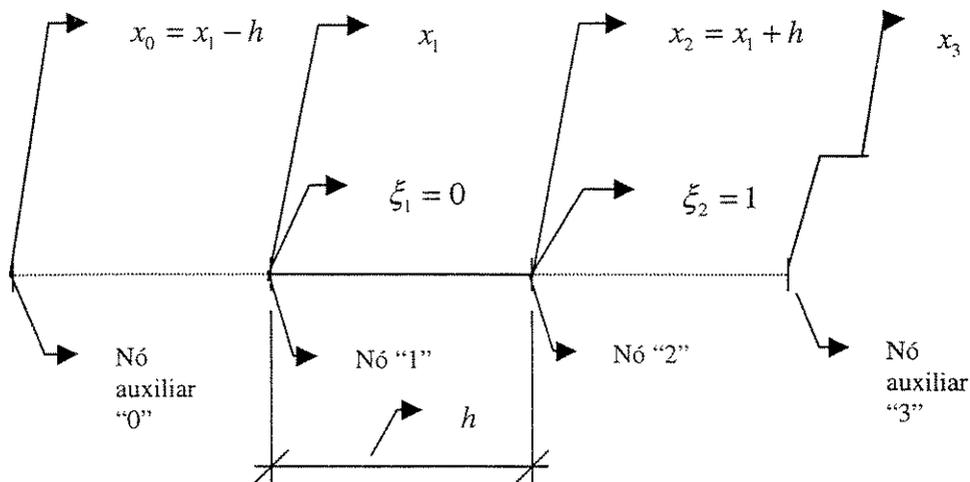
e

$$p_j(x) = f_j + k_j (x - x_j) + \left[ \frac{3}{h^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{h} (k_{j+1} + 2 k_j) \right] (x - x_j)^2 + \left[ \frac{2}{h^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h^2} (k_{j+1} + k_j) \right] (x - x_j)^3$$

no intervalo  $(x_j \leq x \leq x_{j+1} = x_j + h)$ , com  $j = 0, \dots, n-1$  (sendo  $n =$  número de sub-intervalos).

Admita-se um domínio completo de tamanho  $l = h$  subdividido em um único sub-intervalo limitado pelos nós “1” e “2”, sendo que imediatamente anterior ao nó “1” encontra-se posicionado o nó auxiliar “0” e imediatamente posterior ao nó “2” encontra-se posicionado o nó auxiliar “3”, conforme a Figura (3.20).

Num sistema de coordenadas local, o nó “1” possui abscissa  $\xi_1 = 0$  e o nó “2”  $\xi_2 = 1$ . Num sistema de coordenadas global, o nó “1” possui abscissa  $x_1$ , o nó “2” possui abscissa  $x_2 = x_1 + h$ , o nó auxiliar “0” possui abscissa  $x_0 = x_1 - h$  e o nó “3” possui abscissa  $x_3$ , conforme apresentado na Figura (3.20).



**Figura (3.20): Domínio completo subdividido em um único sub-intervalo.**

Posicionando-se o topo de uma B-spline sobre o nó auxiliar “0”, o quarto trecho polinomial dessa B-spline encontra-se limitado pelos nós “1” e “2”, ou seja, o quarto trecho polinomial dessa B-spline está posicionado sobre o domínio completo de tamanho  $l = h$  (conforme várias exposições gráficas apresentadas nesse capítulo, por exemplo as seqüências das Figuras (3.8) e (3.9)). Então, diz-se que a função interpoladora vinculada ao nó auxiliar “0” é o quarto trecho polinomial de uma B-spline definido segundo um sistema de coordenadas local variando de “0” a “1”, conforme já exposto nesse mesmo capítulo, como:

$$M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} .$$

Posicionando-se o topo de uma B-spline sobre o nó “1”, que é o primeiro nó do domínio completo, o terceiro trecho polinomial dessa B-spline encontra-se limitado pelos nós “1” e “2”, ou seja, o terceiro trecho polinomial dessa B-spline está posicionado sobre o domínio completo de tamanho  $l = h$  (conforme várias exposições gráficas apresentadas nesse capítulo, por exemplo as seqüências das Figuras (3.8) e (3.9)). Então, diz-se que a função interpoladora vinculada ao nó “1” é o terceiro trecho polinomial de uma B-spline definido segundo um sistema de coordenadas local variando de “0” a “1”, conforme já exposto nesse mesmo capítulo, como:

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 .$$

Posicionando-se o topo de uma B-spline sobre o nó “2”, que é o segundo e último nó do domínio completo, o segundo trecho polinomial dessa B-spline encontra-se limitado pelos nós “1” e “2”, ou seja, o segundo trecho polinomial dessa B-spline está posicionado sobre o domínio completo de tamanho  $l = h$  (conforme várias exposições gráficas apresentadas nesse capítulo, por exemplo as seqüências das Figuras (3.8) e (3.9)). Então, diz-se que a função interpoladora vinculada ao nó “2” é o segundo trecho polinomial de uma B-spline definido segundo um sistema de coordenadas local variando de “0” a “1”, conforme já exposto nesse mesmo capítulo, como:

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} .$$

Posicionando-se o topo de uma B-spline sobre o nó auxiliar “3”, o primeiro trecho polinomial dessa B-spline encontra-se limitado pelos nós “1” e “2”, ou seja, o quarto trecho polinomial dessa B-spline está posicionado sobre o domínio completo de tamanho  $l = h$  (conforme várias exposições gráficas apresentadas nesse capítulo, por exemplo as seqüências das Figuras (3.8) e (3.9)). Então, diz-se que a função interpoladora vinculada ao nó auxiliar “3” é o primeiro trecho polinomial de uma B-spline definido segundo um sistema de coordenadas local variando de “0” a “1”, conforme já exposto nesse mesmo capítulo, como:

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 .$$

No desenvolvimento de interpolação que está sendo apresentado, a presença dos quatro trechos polinomiais que compõem uma spline cúbica completa, no interior do domínio completo, está sendo assegurada em função da criação de dois nós auxiliares.

A função interpoladora  $u(\xi)$ , segundo um sistema de coordenadas local, é definida como:

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^3 c_i M_{3-i+1}(\xi)$$

ou

$$\begin{aligned} u(\xi) &= c_0 M_4(\xi) + c_1 M_3(\xi) + c_2 M_2(\xi) + c_3 M_1(\xi) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad u(\xi) &= c_0 \left( -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \right) + c_1 \left( \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 \right) \\ &\quad + c_2 \left( -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \right) + c_3 \left( \frac{1}{4} \xi^3 \right) \end{aligned}$$

Conforme (3.57):

$$\begin{cases} \xi = \frac{k}{l} x - \frac{k}{l} x_1 & \begin{cases} k = 1 \\ l = h \\ x_1 = x_j \end{cases} \\ \xi = \frac{1}{h} x - \frac{1}{h} x_j = \frac{1}{h} (x - x_j) & \Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{h} (x - x_j) \end{cases}$$

Então, com a definição de  $\xi = t(x)$ , a função interpoladora composta pelos quatro trechos polinomiais de uma spline cúbica completa  $u(\xi)$ , definida segundo um sistema de coordenadas local, pode também ser definida segundo um sistema de coordenadas global, transformando-se em

$$g(x) = \sum_{i=0}^3 c_i N_{3-i+1}(x) ,$$

onde os  $c_i$  são os coeficientes, vinculados a cada um dos quatro nós da discretização (inclusive aos auxiliares), responsáveis pelo ajuste, propriamente dito, de cada um dos quatro trechos polinomiais da B-spline. Pode-se ainda escrever

$$\frac{d g(x)}{dx} = \sum_{i=0}^3 c_i \frac{d N_{3-i+1}(x)}{dx} .$$

Como  $M_1(\xi)$ , segundo um sistema de coordenadas local, equivale a uma  $N_1(x)$ , segundo um sistema de coordenadas global, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1(\xi) \equiv N_1(x) ; \quad M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 ; \quad \xi = \frac{1}{h} (x - x_j) ; \\ N_1(x) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^3 = \frac{1}{4} \frac{1}{h^3} (x - x_j)^3 \Rightarrow N_1(x) = \frac{1}{4 h^3} (x - x_j)^3 \\ \frac{d N_1(x)}{dx} = \frac{d M_1(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{4} 3 \xi^2 \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{4} 3 \xi^2 \frac{1}{h} = \frac{3}{4 h} \xi^2 = \\ = \frac{3}{4 h} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^2 = \frac{3}{4h} \left[ \frac{1}{h^2} (x - x_j)^2 \right] \Rightarrow \frac{d N_1(x)}{dx} = \frac{3}{4 h^3} (x - x_j)^2 \end{array} \right.$$

Como  $M_2(\xi)$ , segundo um sistema de coordenadas local, equivale a uma  $N_2(x)$ , segundo um sistema de coordenadas global, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l}
M_2(\xi) \equiv N_2(x); \quad M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4}; \quad \xi = \frac{1}{h} (x - x_j) \\
N_2(x) = -\frac{3}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^3 + \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^2 + \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right] + \frac{1}{4} = \\
= -\frac{3}{4} \frac{1}{h^3} (x - x_j)^3 + \frac{3}{4} \frac{1}{h^2} (x - x_j)^2 + \frac{3}{4} \frac{1}{h} (x - x_j) + \frac{1}{4} \Rightarrow \\
\Rightarrow N_2(x) = -\frac{3}{4 h^3} (x - x_j)^3 + \frac{3}{4 h^2} (x - x_j)^2 + \frac{3}{4 h} (x - x_j) + \frac{1}{4} \\
\frac{d N_2(x)}{dx} = \frac{d M_2(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \left( -\frac{9}{4} \xi^2 + \frac{6}{4} \xi + \frac{3}{4} \right) \frac{d\xi}{dx} = \\
= \left\{ -\frac{9}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^2 + \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right] + \frac{3}{4} \right\} \frac{1}{h} = \\
= \left[ -\frac{9}{4 h^2} (x - x_j)^2 + \frac{3}{2 h} (x - x_j) + \frac{3}{4} \right] \frac{1}{h} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d N_2(x)}{dx} = -\frac{9}{4 h^3} (x - x_j)^2 + \frac{3}{2 h^2} (x - x_j) + \frac{3}{4 h}
\end{array} \right.$$

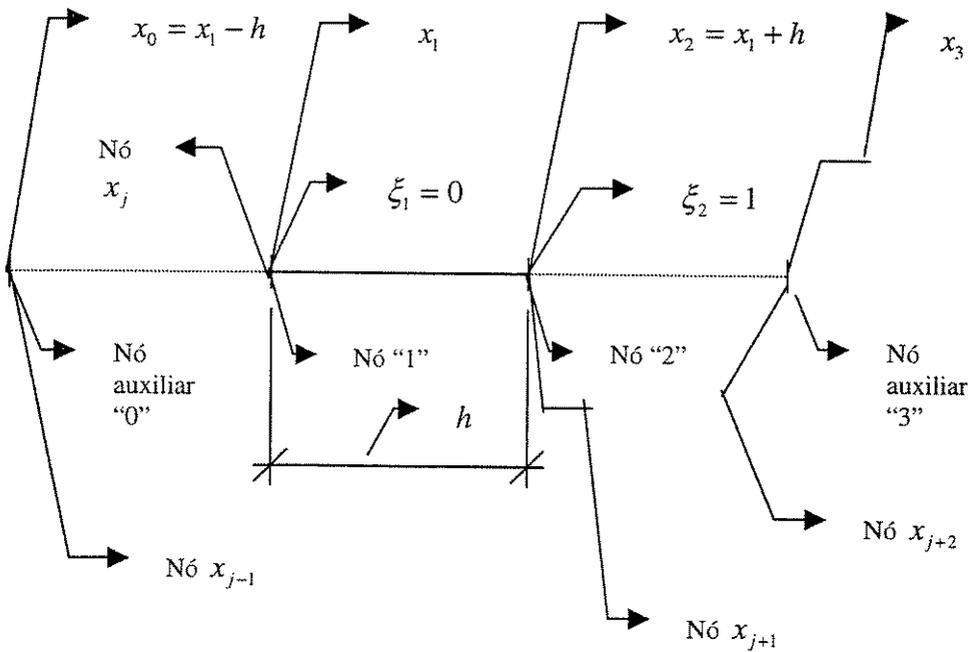
Como  $M_3(\xi)$ , segundo um sistema de coordenadas local, equivale a uma  $N_3(x)$ , segundo um sistema de coordenadas global, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l}
M_3(\xi) \equiv N_3(x); \quad M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1; \quad \xi = \frac{1}{h} (x - x_j); \\
N_3(x) = \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^3 - \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^2 + 1 \Rightarrow \\
\Rightarrow N_3(x) = \frac{3}{4 h^3} (x - x_j)^3 - \frac{3}{2 h^2} (x - x_j)^2 + 1 \\
\frac{d N_3(x)}{dx} = \frac{d M_3(\xi)}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \left( \frac{9}{4} \xi^2 - \frac{6}{2} \xi \right) \frac{d\xi}{dx} = \\
= \left\{ \frac{9}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^2 - 3 \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right] \right\} \frac{1}{h} \Rightarrow \\
\Rightarrow \frac{d N_3(x)}{dx} = \frac{9}{4 h^3} (x - x_j)^2 - \frac{3}{h^2} (x - x_j)
\end{array} \right.$$

Como  $M_4(\xi)$ , segundo um sistema de coordenadas local, equivale a uma  $N_4(x)$ , segundo um sistema de coordenadas global, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_4(\xi) \equiv N_4(x); \quad M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4}; \quad \xi = \frac{1}{h} (x - x_j); \\ N_4(x) = -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^3 + \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^2 - \frac{3}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right] + \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow N_4(x) = -\frac{1}{4 h^3} (x - x_j)^3 + \frac{3}{4 h^2} (x - x_j)^2 - \frac{3}{4 h} (x - x_j) + \frac{1}{4} \\ \frac{d N_4(x)}{dx} = \frac{d M_4(\xi)}{d \xi} \frac{d \xi}{dx} = \left( -\frac{3}{4} \xi^2 + \frac{6}{4} \xi - \frac{3}{4} \right) \frac{d \xi}{dx} = \\ \left\{ -\frac{3}{4} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right]^2 + \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{h} (x - x_j) \right] - \frac{3}{4} \right\} \frac{1}{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d N_4(x)}{dx} = -\frac{3}{4 h^3} (x - x_j)^2 + \frac{3}{2 h^2} (x - x_j) - \frac{3}{4 h} \end{array} \right.$$

No desenvolvimento de interpolação que está sendo apresentado, ao domínio completo limitado pelos nós "1" e "2" foram acrescentados ainda os nós auxiliares "0" e "3". Num âmbito mais genérico, o nó "1" pode ser nomeado por " $x_j$ ", o nó "2" por " $x_{j+1}$ ", o nó "0" por " $x_{j-1}$ " e o nó "3" por " $x_{j+2}$ ", conforme a Figura (3.21).



**Figura (3.21): Redefinição genérica para os nós da discretização adotada.**

Devido à vinculação das funções interpoladoras aos nós sobre os quais o topo destas foi posicionado,  $N_4(x)$  passará a ser nomeada  $N_0(x)$ ,  $N_3(x)$  passará a ser nomeada  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  continuará a ser nomeada  $N_2(x)$ , e  $N_1(x)$  passará a ser nomeada  $N_3(x)$ .

Admita-se que a função interpoladora  $g(x)$ , segundo um sistema de coordenadas global, está sendo utilizada para interpolar uma certa  $f(x)$ , e nesta interpolação serão utilizados os valores dessa  $f(x)$  nos extremos do domínio completo, assim como os valores da derivada primeira dessa  $f(x)$  nesses mesmos extremos desse domínio completo.

Colocadas tais hipóteses, a partir de

$$f(x) = g(x) = \sum_{i=0}^3 c_i N_i(x) \quad \text{e}$$

$$\frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} = \sum_{i=0}^3 c_i \frac{d N_i(x)}{dx}$$

o seguinte sistema pode ser montado:

$$\left\{ \begin{aligned} f(x=x_j) &= c_0 N_0(x=x_j) + c_1 N_1(x=x_j) + c_2 N_2(x=x_j) + c_3 N_3(x=x_j) \\ f(x=x_{j+1}) &= c_0 N_0(x=x_{j+1}) + c_1 N_1(x=x_{j+1}) + c_2 N_2(x=x_{j+1}) + c_3 N_3(x=x_{j+1}) \\ \frac{d f(x=x_j)}{dx} &= c_0 \frac{d N_0(x=x_j)}{dx} + c_1 \frac{d N_1(x=x_j)}{dx} + c_2 \frac{d N_2(x=x_j)}{dx} \\ &\quad + c_3 \frac{d N_3(x=x_j)}{dx} \\ \frac{d f(x=x_{j+1})}{dx} &= c_0 \frac{d N_0(x=x_{j+1})}{dx} + c_1 \frac{d N_1(x=x_{j+1})}{dx} + c_2 \frac{d N_2(x=x_{j+1})}{dx} \\ &\quad + c_3 \frac{d N_3(x=x_{j+1})}{dx} \end{aligned} \right.$$

Com as substituições das ordenadas das funções interpoladoras componentes da  $g(x)$  e de suas primeiras derivadas nos extremos do domínio completo, o sistema anterior torna-se

$$\left\{ \begin{aligned} f(x=x_j) &= c_0 \frac{1}{4} + c_1 \cdot 1 + c_2 \frac{1}{4} + c_3 \cdot 0 \\ f(x=x_{j+1}) &= c_0 \cdot 0 + c_1 \frac{1}{4} + c_2 \cdot 1 + c_3 \frac{1}{4} \\ \frac{d f(x=x_j)}{dx} &= c_0 \left( -\frac{3}{4h} \right) + c_1 \cdot 0 + c_2 \frac{3}{4h} + c_3 \cdot 0 \\ \frac{d f(x=x_{j+1})}{dx} &= c_0 \cdot 0 + c_1 \left( -\frac{3}{4h} \right) + c_2 \cdot 0 + c_3 \frac{3}{4h} \end{aligned} \right.$$

A  $f(x)$  e sua primeira derivada nos extremos do domínio completo podem ser renomeadas como segue:

$$\begin{aligned} f(x=x_j) &= f_j ; \\ f(x=x_{j+1}) &= f_{j+1} ; \\ \frac{d f(x=x_j)}{dx} &= \frac{d f_j}{dx} = k_j ; e \\ \frac{d f(x=x_{j+1})}{dx} &= \frac{d f_{j+1}}{dx} = k_{j+1} . \end{aligned}$$

Então, o sistema montado com o objetivo de interpolar a  $f(x)$  através de sua ordenada e de sua primeira derivada nos extremos do domínio completo torna-se

$$\begin{cases} f_j = c_0 \frac{1}{4} + c_1 \cdot 1 + c_2 \frac{1}{4} + c_3 \cdot 0 \\ f_{j+1} = c_0 \cdot 0 + c_1 \frac{1}{4} + c_2 \cdot 1 + c_3 \frac{1}{4} \\ k_j = c_0 \left( -\frac{3}{4h} \right) + c_1 \cdot 0 + c_2 \frac{3}{4h} + c_3 \cdot 0 \\ k_{j+1} = c_0 \cdot 0 + c_1 \left( -\frac{3}{4h} \right) + c_2 \cdot 0 + c_3 \frac{3}{4h} \end{cases}$$

A solução deste sistema, a qual determina os coeficientes das B-splines vinculados aos dois nós posicionados nos limites do domínio completo e aos dois nós auxiliares, é apresentada a seguir

$$c_0 = -\frac{2}{3} f_j + \frac{4}{3} f_{j+1} - \frac{14}{9} h k_j - \frac{4}{9} h k_{j+1} ;$$

$$c_1 = -\frac{2}{3} f_{j+1} + \frac{4}{3} f_j + \frac{4}{9} h k_j + \frac{2}{9} h k_{j+1} ;$$

$$c_2 = \frac{4}{3} f_{j+1} - \frac{2}{3} f_j - \frac{2}{9} h k_j - \frac{4}{9} h k_{j+1} ; e$$

$$c_3 = -\frac{2}{3} f_{j+1} + \frac{4}{3} f_j + \frac{4}{9} h k_j + \frac{14}{9} h k_{j+1} .$$

Determinados os coeficientes das splines cúbicas, a função a ser interpolada  $f(x)$  através da função interpoladora  $g(x)$ , composta por splines, é escrita como

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &= c_0 N_0(x) + c_1 N_1(x) + c_2 N_2(x) + c_3 N_3(x) = \\ &= \left\{ \left( -\frac{2}{3} f_j + \frac{4}{3} f_{j+1} - \frac{14}{9} h k_j - \frac{4}{9} h k_{j+1} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{1}{4 h^3} (x-x_j)^3 + \frac{3}{4 h^2} (x-x_j)^2 - \frac{3}{4 h} (x-x_j) + \frac{1}{4} \right] + \\
& + \left\{ \left( -\frac{2}{3} f_{j+1} + \frac{4}{3} f_j + \frac{4}{9} h k_j + \frac{2}{9} h k_{j+1} \right) \right. \\
& \quad \left. \left[ \frac{3}{4 h^3} (x-x_j)^3 - \frac{3}{2 h^2} (x-x_j)^2 + 1 \right] \right\} + \\
& + \left\{ \left( \frac{4}{3} f_{j+1} - \frac{2}{3} f_j - \frac{2}{9} h k_j - \frac{4}{9} h k_{j+1} \right) \right. \\
& \quad \left. \left[ -\frac{3}{4 h^3} (x-x_j)^3 + \frac{3}{4 h^2} (x-x_j)^2 + \frac{3}{4 h} (x-x_j) + \frac{1}{4} \right] \right\} + \\
& + \left\{ \left( -\frac{2}{3} f_{j+1} + \frac{4}{3} f_j + \frac{4}{9} h k_j + \frac{14}{9} h k_{j+1} \right) \left[ \frac{1}{4 h^3} (x-x_j)^3 \right] \right\}
\end{aligned}$$

Efetando-se os produtos seguido das adições aí indicados, tem-se como resultado da interpolação de  $f(x)$ , através da função interpoladora  $g(x)$  composta por splines, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
f(x) = g(x) &= c_0 N_0(x) + c_1 N_1(x) + c_2 N_2(x) + c_3 N_3(x) = \\
&= f_j + k_j (x-x_j) + \left[ \frac{3}{h^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{h} (k_{j+1} + 2 k_j) \right] (x-x_j)^2 \\
&\quad + \left[ \frac{2}{h^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h^2} (k_{j+1} + k_j) \right] (x-x_j)^3
\end{aligned}$$

a qual é idêntica à expressão (3.65) proposta por Schoenberg.

Derivando-se duas vezes esta expressão em relação à coordenada global “x”, obtém-se, respectivamente,

$$g'(x) = k_j + \left[ \frac{3}{h^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{h} (k_{j+1} + 2k_j) \right] 2(x - x_j) +$$

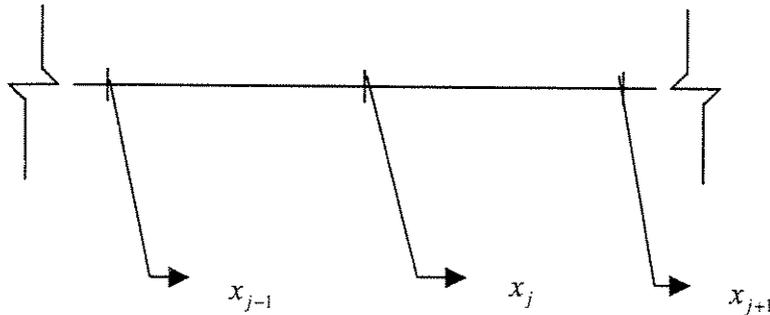
$$+ \left[ \frac{2}{h^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h^2} (k_{j+1} + k_j) \right] 3(x - x_j)^2$$

e

$$g''(x) = \left[ \frac{3}{h^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{1}{h} (k_{j+1} + 2k_j) \right] 2 +$$

$$+ \left[ \frac{2}{h^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{1}{h^2} (k_{j+1} + k_j) \right] 6(x - x_j)$$

Admita-se, conforme a Figura (3.22), dois sub-intervalos consecutivos de uma discretização genérica composta por vários sub-intervalos.



**Figura (3.22):** Dois sub-intervalos consecutivos de uma discretização genérica.

No limite comum dos dois sub-intervalos da Figura (3.22) sobre o qual o nó “ $x_j$ ” foi posicionado, a derivada segunda da função interpoladora,  $g(x)$ , escrita segundo os parâmetros do sub-intervalo direito,  $(x_j \leq x \leq x_{j+1})$ , tem que ser igual à derivada segunda da função interpoladora,  $g(x)$ , escrita segundo os parâmetros apresentados pelo sub-intervalo esquerdo,  $(x_{j-1} \leq x \leq x_j)$ , ou seja, a derivada segunda tem que ser contínua no limite dos dois sub-intervalos.

A derivada segunda de  $g(x)$  escrita segundo os parâmetros apresentados pelo sub-intervalo direito  $(x_j \leq x \leq x_{j+1})$  é:

$$g''(x)_{(x_j \leq x \leq x_{j+1})} = \left[ \frac{6}{h^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{2}{h} (k_{j+1} + 2 k_j) \right] + \\ + \left[ \frac{12}{h^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{6}{h^2} (k_{j+1} + k_j) \right] (x - x_j)$$

A derivada segunda de  $g(x)$  escrita segundo os parâmetros apresentados pelo sub-intervalo esquerdo  $(x_{j-1} \leq x \leq x_j)$  é:

$$g''(x)_{(x_{j-1} \leq x \leq x_j)} = \left[ \frac{6}{h^2} (f_j - f_{j-1}) - \frac{2}{h} (k_j + 2 k_{j-1}) \right] + \\ + \left[ \frac{12}{h^3} (f_{j-1} - f_j) + \frac{6}{h^2} (k_j + k_{j-1}) \right] (x - x_{j-1})$$

Igualando-se estas duas derivadas segunda, no ponto  $x = x_j$ , tem-se:

$$g''(x = x_j)_{(x_j \leq x \leq x_{j+1})} = g''(x = x_j)_{(x_{j-1} \leq x \leq x_j)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \left[ \frac{6}{h^2} (f_{j+1} - f_j) - \frac{2}{h} (k_{j+1} + 2 k_j) \right] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{12}{h^3} (f_j - f_{j+1}) + \frac{6}{h^2} (k_{j+1} + k_j) \right] (x_j - x_j) \right\} = \\ = \left\{ \left[ \frac{6}{h^2} (f_j - f_{j-1}) - \frac{2}{h} (k_j + 2 k_{j-1}) \right] + \right. \\ \left. + \left[ \frac{12}{h^3} (f_{j-1} - f_j) + \frac{6}{h^2} (k_j + k_{j-1}) \right] (x_j - x_{j-1}) \right\}$$

Desta igualdade resulta

$$k_{j-1} + 4 k_j + k_{j+1} = \frac{3}{h} (f_{j+1} - f_{j-1}),$$

a qual é idêntica à (3.60), ou seja, idêntica à outra expressão responsável pela interpolação proposta por Schoenberg.

Neste capítulo, além da apresentação de vários dos fundamentos básicos sobre splines, foi desenvolvido um exemplo de interpolação, cujos resultados obtidos para os polinômios interpoladores apresentaram-se idênticos aos resultados obtidos através dos procedimentos propostos por I. J. Schoenberg apud Kreyszig (1993).

Na seqüência, o fato desses resultados apresentarem-se idênticos foi justificado através da obtenção das duas expressões básicas responsáveis pelo método proposto por Schoenberg, a partir das equações fundamentais que regeram toda a interpolação apresentada inicialmente.

# **4 UTILIZAÇÃO DE B-SPLINES COMO FUNÇÕES DE FORMA, EM ELEMENTOS FINITOS, PARA RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS - BARRAS E VIGAS**

## **4.1 INTRODUÇÃO**

Além de, inicialmente, abordar o ajuste de funções através da utilização de funções de forma, o presente capítulo trata das aproximações por resíduos ponderados, do método de Galerkin e da aproximação de soluções de equações diferenciais referentes a problemas unidimensionais.

Inicialmente, a técnica de resíduos ponderados será formulada para funções interpoladoras quaisquer  $N_m(x)$ . Mais tarde será feita uma particularização para funções spline.

Apresenta-se, também, a metodologia empregada na transformação de coordenadas da interpolação por spline em coordenadas físicas. Através de uma série de exemplos, detalha-se as aplicações do método na resolução de problemas envolvendo estruturas em forma de barras e vigas.

## **4.2 AJUSTE DE FUNÇÕES UTILIZANDO-SE FUNÇÕES DE FORMA**

Segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), suponha-se a aproximação de uma dada função  $\phi$  em uma região  $\Omega$  limitada por uma curva fechada  $\Gamma$ . Em problemas envolvendo ajuste de funções requer-se encontrar a solução reproduzindo, tanto quanto possível, seus valores no domínio e em suas extremidades do contorno. Por isso procurar-se-á, inicialmente, a construção de aproximações satisfazendo aos valores prescritos de  $\phi$  na curva do contorno  $\Gamma$ . Se qualquer função  $\psi$  pode ser

determinada de forma a assumir os mesmos valores de  $\phi$  em  $\Gamma$ , isto é,  $\psi|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma}$  e se um conjunto de funções-teste independentes  $\{N_m; m = 1, 2, 3, \dots\}$  for introduzido tal que  $N_m|_{\Gamma} = 0$  para todo  $m$ , então todos os pontos em  $\Omega$  podem ser aproximados em  $\phi$  por

$$\phi = \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (4.1)$$

onde  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) são alguns parâmetros computados de modo a obter-se um bom “ajuste”. Funções-teste desse tipo são, freqüentemente, referenciadas como *funções de forma* ou *funções de base* (ocasionalmente, far-se-á uso dessa nomenclatura alternativa).

Conforme Zienkiewicz e Morgan (1983), a maneira através da qual  $\psi$  e as funções de forma são definidas resulta, automaticamente, que essa aproximação tem como propriedade  $\hat{\phi}|_{\Gamma} = \phi|_{\Gamma}$ , sejam quais forem os valores dos parâmetros  $a_m$ . Escolher-se-á o conjunto de funções de forma de modo a resultar que a melhoria na aproximação ocorre com o aumento do número  $M$  das funções de forma utilizadas. Uma condição óbvia para essa convergência da aproximação é que, o conjunto de funções de forma seja tal que a combinação  $\psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m$  possa representar, adequadamente, qualquer função  $\phi$ , satisfazendo  $\phi|_{\Gamma} = \psi|_{\Gamma}$ , quando  $M \rightarrow \infty$ . Esta é a chamada “*exigência de completitude*” (conforme Luenberger (1969), ao se escolher uma base que cumpra a exigência de completitude, automaticamente, garante-se a convergência das soluções geradas através do emprego dessa base).

Uma aproximação alternativa, segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), pode ser a divisão da região  $\Omega$  em um número de *sub-domínios* não-sobrepostos ou *elementos*  $\Omega^e$ , e então construir a aproximação  $\hat{\phi}$  *por partes* sobre cada sub-domínio. As funções de forma utilizadas no processo de aproximação podem, também, ser definidas por partes através do uso de expressões diferentes nos vários sub-domínios  $\Omega^e$ , através dos quais desenvolve-se o domínio total. De tal forma que

$$\sum_{e=1}^E \Omega^e = \Omega, \quad \sum_{e=1}^E \Gamma^e = \Gamma \quad (4.2)$$

Nesta,  $E$  denota o número total de subdivisões da região e  $\Gamma^e$  denota esta porção do contorno de  $\Omega^e$  que situa-se em  $\Gamma$ .

Se os sub-domínios são de uma forma relativamente simples e se a definição das funções de forma sobre esses sub-domínios pode ser feita de maneira repetitiva, segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), é possível tratar-se com agrupamento de regiões de formas complexas com ampla facilidade (esta é a idéia essencial do método dos elementos finitos).

A definição por partes das funções de forma, ou das funções-teste, significa que ocorrerão descontinuidades na função de aproximação ou em suas derivadas. A permissibilidade ou não de tais descontinuidades governa a escolha da formulação utilizada, segundo Zienkiewicz e Morgan (1983).

Se as funções de forma forem definidas por partes, pode ser vantajoso fixar a estas uma “base” compacta (ou um suporte compacto), fazendo com que seu valor não seja zero somente no domínio do elemento em questão. Tal prática fará com que as equações matriciais finais tenham a forma de banda, conforme Zienkiewicz e Morgan (1983).

Para o caso unidimensional, nos limites de cada sub-domínio são posicionados dois nós, um inicial e outro final de cada elemento. A função  $\hat{\phi}(x)$  pode ser escrita na forma padrão da equação (4.1), por exemplo, pela associação a cada nó  $m$  de uma função de forma global, descontínua, por partes  $N_m$ , onde  $N_m$  é definida para ter valor unitário no nó e zero em todos os outros nós. Pode-se, segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), escrever

$$\phi \approx \hat{\phi} = \sum_{m=1}^{M_n-1} \phi_m N_m \quad \text{em } \Omega \quad (4.3)$$

onde  $a_m = \phi_m$ , com  $\phi_m$  sendo o valor da função  $\phi$  no nó  $m$ .

Em (4.3) a função arbitrária  $\psi$  da equação (4.1) foi omitida, e assim essa aproximação não será, em geral, igual ao valor da função  $\phi$  nos nós de extremidade da região. Contudo, as condições de contorno podem ser incluídas na formulação de aproximação.

Em (4.3), ainda segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), a definição de  $N_m$  pode ser dada de forma diferente, ou seja,  $N_m$  não precisa, necessariamente, ser definida como tendo valor unitário (pode ser outro valor) no elemento  $m$  e zero em todos os outros, além do que  $\phi_m = a_m$  não necessita ser o valor da função  $\phi$  no nó  $m$ ,  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) pode continuar sendo alguns parâmetros (constantes) computados de modo a obter-se um bom “ajuste”, como em (4.1). Portanto,

$$\phi = \hat{\phi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (4.4)$$

### 4.3 APROXIMAÇÕES POR RESÍDUOS PONDERADOS

Buscar-se-á o desenvolvimento de um método geral para determinação das constantes em aproximações da forma da equação (4.4). Inicia-se com a introdução do erro, ou *resíduo*,  $R_\Omega$  da aproximação, definindo-o, conforme Zienkiewicz e Morgan (1983), como

$$R_\Omega = \phi - \hat{\phi} \quad (4.5)$$

sendo  $R_\Omega$  uma função da posição em  $\Omega$ . Para reduzir, sobre o domínio completo  $\Omega$ , esse resíduo pede-se que a integral do erro sobre  $\Omega$ , ponderada por diferentes funções, seja zero, isto é,

$$\int_{\Omega} W_l (\phi - \hat{\phi}) d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = 0 ; \quad l = 1, 2, \dots, M \quad (4.6)$$

Sendo que  $\{W_l ; l = 1, 2, 3, \dots\}$  é um conjunto de *funções de ponderação* independentes. A exigência de convergência geral que  $\hat{\phi} \rightarrow \phi$  quando  $M \rightarrow \infty$  pode ser moldada dentro de uma forma alternativa, segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), através do requisito da equação (4.6) ser satisfeito para todo  $l$  quando  $M \rightarrow \infty$  (isso é verdadeiro somente se  $R_\Omega \rightarrow 0$  em todos os pontos do domínio).

Substituindo-se  $\hat{\phi}$  na equação (4.6) pela equação (4.4), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_l \left( \phi - \sum_{m=1}^M a_m N_m \right) d\Omega &= \int_{\Omega} W_l \phi d\Omega - \int_{\Omega} W_l \sum_{m=1}^M a_m N_m d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} W_l \phi d\Omega &= \int_{\Omega} W_l \sum_{m=1}^M a_m N_m d\Omega \Rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega = \int_{\Omega} W_l \phi d\Omega \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ou ainda, de forma compacta

$$K_{lm} a_m = f_l$$

onde

$$a_m = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_M]^T \quad (4.8a)$$

e

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l N_m d\Omega, \quad 1 \leq l, m \leq M \quad (4.8b)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} W_l \phi d\Omega, \quad 1 \leq l \leq M \quad (4.8c)$$

Uma vez dada a função  $\phi$  para ser aproximada, resolve-se a equação (4.7) com a intenção de obter-se os coeficientes na aproximação (4.4), ou seja obter-se  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) após a escolha conveniente dos conjuntos de funções de ponderação e funções de forma. Várias formas de conjuntos de funções de ponderação  $\{W_l; l = 1, 2, 3, \dots\}$ , cada uma conduzindo a um diferente método de aproximação por resíduos ponderados, podem ser utilizadas na prática, conforme Zienkiewicz e Morgan (1983)

#### **4.4 O MÉTODO DE GALERKIN**

No método de Galerkin que é um método popular dentro do método de resíduos ponderados, segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), escolhe-se as funções de forma como sendo iguais às próprias funções de ponderação, isto é

$$W_l = N_l \quad (4.9)$$

Assim, a matriz  $K_{lm}$  e o vetor  $f_l$  da equação (4.7) têm elementos típicos

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\Omega} N_l N_m dx \\ f_l &= \int_{\Omega} N_l \phi dx \end{aligned} \quad (4.10)$$

sendo que, uma das vantagens do método é que a matriz  $K_{lm}$  é simétrica.

#### **4.5 APROXIMAÇÃO DE SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

Considere-se uma equação diferencial do tipo

$$A(\phi) = \wp \phi + p = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.11)$$

na qual  $\wp$  é um operador diferencial linear apropriado e  $p$  é independente de  $\phi$ .

Para a aproximação da função desejada  $\phi$ , conforme Zienkiewicz e Morgan (1983), necessita-se que  $\hat{\phi}$  satisfaça, aproximadamente, a equação diferencial (4.11). A substituição de  $\hat{\phi}$ , conforme (4.4), nesta equação conduz a um residual  $R_\Omega$  que pode ser escrito como

$$R_\Omega \equiv A(\hat{\phi}) \equiv \wp \hat{\phi} + p \equiv \wp \left( \sum_{m=1}^M a_m N_m \right) + p \equiv \sum_{m=1}^M a_m \wp N_m + p \quad (4.12)$$

Aplicando-se o procedimento de aproximações por resíduos ponderados, no qual  $R_\Omega \approx 0$  em todos os pontos de  $\Omega$  garante  $\hat{\phi} \approx \phi$ , e escolhendo-se um conjunto de funções de ponderação  $\{W_l ; l = 1, 2, 3, \dots\}$ , segundo Zienkiewicz e Morgan (1983), é necessário que

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l \left[ \left( \sum_{m=1}^M a_m \wp N_m \right) + p \right] d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} W_l \sum_{m=1}^M a_m \wp N_m d\Omega + \int_{\Omega} W_l p d\Omega = 0 \quad (4.14)$$

Ainda conforme Zienkiewicz e Morgan (1983), com a aplicação do método de Galerkin, no qual  $W_l = N_l$ , (4.14) resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} N_l \sum_{m=1}^M a_m \wp N_m d\Omega &= - \int_{\Omega} N_l p d\Omega \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \int_{\Omega} N_l \wp N_m d\Omega &= - \int_{\Omega} N_l p d\Omega \end{aligned} \quad (4.15)$$

ou seja,

$$K_{lm} a_m = f_l \quad (4.16)$$

com

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\Omega} N_l \delta \rho N_m d\Omega & 1 \leq l, m \leq M \\ f_l &= - \int_{\Omega} N_l p d\Omega & 1 \leq l \leq M \end{aligned} \quad (4.17)$$

Através da resolução da equação matricial (4.16) permite-se a determinação do vetor  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) composto das constantes responsáveis por se obter um bom ajuste das funções de forma, ou também chamadas funções de aproximação, proporcionando que  $\hat{\phi} \approx \phi$ , segundo Zienkiewicz e Morgan (1983).

#### **4.6 APROXIMAÇÃO POR “RESÍDUOS PONDERADOS - MÉTODO DE GALERKIN” DA SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS REFERENTES A PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS**

Nesta seção serão tratados problemas de aproximação, por Resíduos Ponderados – Método de Galerkin, visando a solução de equações diferenciais que governam o comportamento de estruturas em forma de barras e vigas. Para tais estruturas unidimensionais serão deduzidos a matriz de rigidez e o vetor de carga envolvendo uma preparação para aplicação de funções interpoladoras quaisquer, incluindo B-splines.

##### **4.6.1 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE BARRA**

Na seqüência serão deduzidos, aplicando-se Resíduos ponderados – Método de Galerkin, a matriz de rigidez e o vetor de carga para estruturas em forma de barra. Será apresentada também uma solução analítica para a equação diferencial da barra.

Seja, conforme Timoshenko e Goodier (1975), a equação diferencial da estrutura em forma de barra

$$A \cdot E \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -p(x) ; \text{ onde:}$$

$A$  = área da seção transversal;

$E$  = módulo de elasticidade de Young (longitudinal);

$w$  = deslocamento longitudinal; e

$p(x)$  = carregamento axial distribuído ao longo da barra.

Ressalta-se, conforme Piskunov (1969), que o sinal negativo de  $p(x)$  ocorre em função de ser admitido, previamente, que o sentido desse carregamento axial distribuído coincide com a orientação positiva dada ao eixo  $x$  da barra (sob tais condições, o deslocamento máximo da estrutura é um ponto de máximo da função, e esse ponto de máximo ocorre somente se a derivada segunda dessa função for menor que zero).

Conforme já exposto neste capítulo, através da aproximação  $w \equiv \sum_{m=1}^M a_m N_m$  tem-se:

$$A \cdot E \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{m=1}^M a_m N_m \right) = -p(x).$$

Multiplicando-se ambos os lados por  $N_l dx$  e integrando-se de  $0$  a  $L$ , resulta

$$\sum_{m=1}^M a_m A E \int_0^L N_l \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx = - \int_0^L p(x) N_l dx.$$

A integral do lado esquerdo pode ser resolvida por partes, ou seja, chamando-se

$$\left\{ \begin{array}{l} u = N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{dN_l}{dx} \rightarrow du = \frac{dN_l}{dx} dx \\ dv = \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \rightarrow \int dv = \int \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \rightarrow v = \frac{dN_m}{dx} \end{array} \right. ,$$

tem-se

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^M a_m A E \left[ \left( N_l \frac{dN_m}{dx} \right)_0^L - \int_0^L \frac{dN_m}{dx} \frac{dN_l}{dx} dx \right] = - \int_0^L p(x) N_l dx \rightarrow \\
& \rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left[ \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_0^L - A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right] = - \int_0^L p(x) N_l dx \rightarrow \\
& \rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left( A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) = \int_0^L p(x) N_l dx + \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_0^L.
\end{aligned}$$

Sendo que

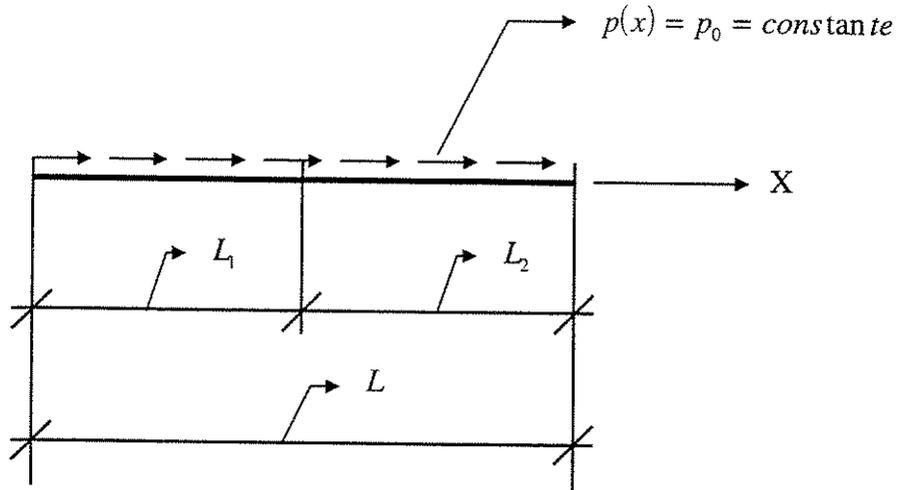
$$\begin{cases} \left( A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) = K_{lm}; & e \\ \int_0^L p(x) N_l dx + \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_0^L = f_l \end{cases}, \text{ onde}$$

$\int_0^L p(x) N_l dx$  refere-se à carga axial distribuída ao longo da barra (condições de contorno homogêneas), e

$$\sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_0^L$$

refere-se ao valor do esforço normal nos nós da discretização da barra.

Por exemplo, conforme a Figura (4.1), admita-se uma barra isenta de vinculação em ambas as extremidades com uma discretização através de dois elementos, sendo solicitada por uma carga axial constante uniformemente distribuída ao longo de sua extensão longitudinal  $p(x) = p_0 = \text{constante}$ .



**Figura (4.1): Barra discretizada por dois elementos, sem vinculação, solicitada por uma carga axial uniformemente distribuída.**

Para o problema envolvido pela estrutura apresentada, de uma forma mais geral, na Figura (4.1), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^M a_m \left( A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) &= p_0 \int_0^L N_l dx + \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_0^{L_1} + \\
 &+ \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_{L_1}^{L_2} \rightarrow \\
 \rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left( A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) &= p_0 \int_0^L N_l dx + \\
 &+ \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_{L_1} - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_0 + \\
 &+ \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_{L_2} - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_{L_1} \rightarrow \\
 \rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left( A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) &= p_0 \int_0^L N_l dx + \\
 &+ \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_L - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right)_0
 \end{aligned}$$

Uma solução analítica para a equação diferencial da barra pode ser obtida integrando-se duas vezes esta equação. Admita-se, ainda,  $p(x) = p_0 = \text{constante}$ :

$$\begin{cases} A E \int \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -p_0 \int dx \rightarrow A E \frac{dw}{dx} = -p_0 x + c_1 \\ A E \int \frac{dw}{dx} dx = -p_0 \int x dx + c_1 \int dx \rightarrow A E w(x) = -p_0 \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \end{cases}$$

(sendo que  $c_1$  e  $c_2$  são constantes que dependem das condições de contorno).

Tendo-se por objetivo a determinação das constantes de integração “ $c_1$ ” e “ $c_2$ ”, transforme-se o problema apresentado de uma forma mais geral na Figura (4.1) em um problema mais específico, como por exemplo no problema envolvido pela estrutura apresentada na Figura (4.2), cujas condições de contorno são expostas como:

$$\begin{cases} w(0) = 0 ; \\ A E \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = F ; e \\ p_0 = 0 . \end{cases}$$

Sob tais condições de contorno, tem-se  $\begin{cases} c_2 = 0 ; e \\ A E \frac{dw}{dx} = c_1 = F . \end{cases}$

Portanto:  $\begin{cases} \frac{dw(x)}{dx} = \frac{F}{A E} ; e \\ w(x) = \frac{1}{A E} F x . \end{cases}$

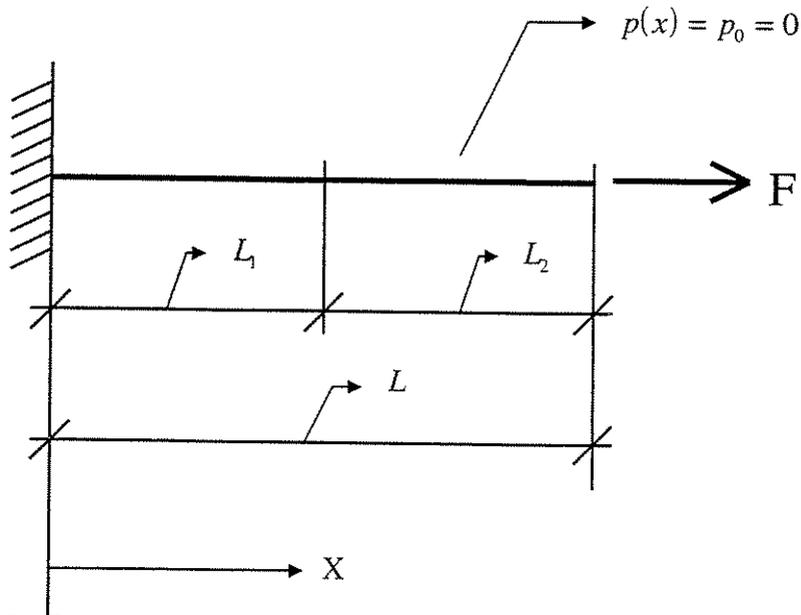


Figura (4.2): Barra tracionada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga axial concentrada na extremidade livre.

Então, como  $w$  foi aproximado por  $\sum_{m=1}^M a_m N_m$ , resulta que

$$\sum_{m=1}^M a_m \left( N_l A E \frac{dN_m}{dx} \right) = N_l A E \sum_{m=1}^M a_m \frac{dN_m}{dx} = N_l A E \frac{dw}{dx} = N_l F ; e$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \left( A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) = (N_l F)_L - (N_l F)_0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{m=1}^M \left( A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) a_m = (N_l F)_L - (N_l F)_0$$

$$\text{onde: } \begin{cases} A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx = K_{lm} ; e \\ (N_l F)_L - (N_l F)_0 = f_l . \end{cases} \quad (4.18)$$

Cabe observar que  $(N_l F)_L = N_l(x=L) F_{x=L}$  refere-se ao valor do esforço normal no nó final da discretização da barra, e  $(N_l F)_0 = N_l(x=0) F_{x=0}$  refere-se ao valor do esforço normal no nó inicial da discretização da barra.

Nesta seção, a partir da colocação do problema sob a forma mais geral como apresentado na Figura (4.1), foi dada uma solução analítica para a equação diferencial da barra, após a transformação desse problema segundo um caso mais específico, como o apresentado na Figura (4.2).

Nesta seção foi feita também uma aproximação, por Resíduos Ponderados – Método de Galerkin, da equação diferencial que governa o comportamento de estruturas em forma de barra, segundo o mesmo problema específico apresentado na Figura (4.2). Essa aproximação, onde foi deduzida a matriz de rigidez e o vetor de carga da barra, envolveu uma preparação para aplicação de funções interpoladoras quaisquer, inclusive B-splines.

#### **4.6.2 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE VIGA**

Na seqüência serão deduzidos, aplicando-se Resíduos Ponderados – Método de Galerkin, a matriz de rigidez e o vetor de carga para estrutura em forma de viga. Será dada também uma solução analítica para a equação diferencial da viga.

Seja, conforme Feodosiev (1988), a equação diferencial da estrutura em forma de viga

$$E \cdot J \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x);$$

onde:

$E$  = módulo de elasticidade de Young (longitudinal);

$J$  = momento de inércia da seção transversal em relação a seus eixos centroidais;

$w$  = deslocamento transversal; e

$q(x)$  = carregamento transversal distribuído ao longo da extensão longitudinal da viga.

Ressalta-se, conforme Piskunov (1969), que o sinal positivo de  $q(x)$  ocorre em função de ser admitido, previamente, que o sentido desse carregamento distribuído, transversal ao eixo longitudinal da viga, não coincide com a orientação positiva dada ao eixo  $y$  da viga (sob tais condições, o

deslocamento máximo da estrutura é um ponto de mínimo da função, e esse ponto de mínimo ocorre somente se a derivada segunda dessa função for maior que zero).

Aplicando-se a técnica de Resíduos Ponderados, conforme já exposto neste capítulo, através da aproximação

$$w = \sum_{m=1}^M a_m N_m$$

tem-se:

$$E \cdot J \frac{d^4}{dx^4} \left( \sum_{m=1}^M a_m N_m \right) = q(x).$$

Multiplicando-se ambos os lados por  $N_l dx$  e integrando-se de 0 a L, resulta

$$\sum_{m=1}^M a_m E J \int_0^L N_l \frac{d^4 N_m}{dx^4} dx = \int_0^L q(x) N_l dx.$$

A integral do lado esquerdo pode ser resolvida por partes, ou seja, chamando-se

$$\begin{cases} u = N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{dN_l}{dx} \rightarrow du = \frac{dN_l}{dx} dx \\ dv = \frac{d^4 N_m}{dx^4} dx \rightarrow \int dv = \int \frac{d^4 N_m}{dx^4} dx \rightarrow v = \frac{d^3 N_m}{dx^3} \end{cases}$$

tem-se

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M a_m E J \left[ \left( N_l \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_0^L - \int_0^L \frac{d^3 N_m}{dx^3} \frac{dN_l}{dx} dx \right] = \int_0^L q(x) N_l dx \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left[ \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_0^L - E J \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{d^3 N_m}{dx^3} dx \right] = \int_0^L q(x) N_l dx \end{aligned}$$

Novamente, a integral do lado esquerdo pode ser resolvida por partes, ou seja, chamando-se

$$\begin{cases} u = \frac{dN_l}{dx} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{d^2N_l}{dx^2} \rightarrow du = \frac{d^2N_l}{dx^2} dx \\ dv = \frac{d^3N_m}{dx^3} dx \rightarrow \int dv = \int \frac{d^3N_m}{dx^3} dx \rightarrow v = \frac{d^2N_m}{dx^2} \end{cases},$$

tem-se

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M a_m \left\{ \left( N_l E J \frac{d^3N_m}{dx^3} \right)_0^L - E J \left[ \left( \frac{dN_l}{dx} \frac{d^2N_m}{dx^2} \right)_0^L - \int_0^L \frac{d^2N_m}{dx^2} \frac{d^2N_l}{dx^2} dx \right] \right\} = \\ & \qquad \qquad \qquad = \int_0^L q(x) N_l dx \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left[ \left( N_l E J \frac{d^3N_m}{dx^3} \right)_0^L - \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2N_m}{dx^2} \right)_0^L + E J \int_0^L \frac{d^2N_l}{dx^2} \frac{d^2N_m}{dx^2} dx \right] = \\ & \qquad \qquad \qquad = \int_0^L q(x) N_l dx \rightarrow \\ & \rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left( E J \int_0^L \frac{d^2N_l}{dx^2} \frac{d^2N_m}{dx^2} dx \right) = \int_0^L q(x) N_l dx - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3N_m}{dx^3} \right)_0^L + \\ & \qquad \qquad \qquad + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2N_m}{dx^2} \right)_0^L \end{aligned}$$

Sendo que

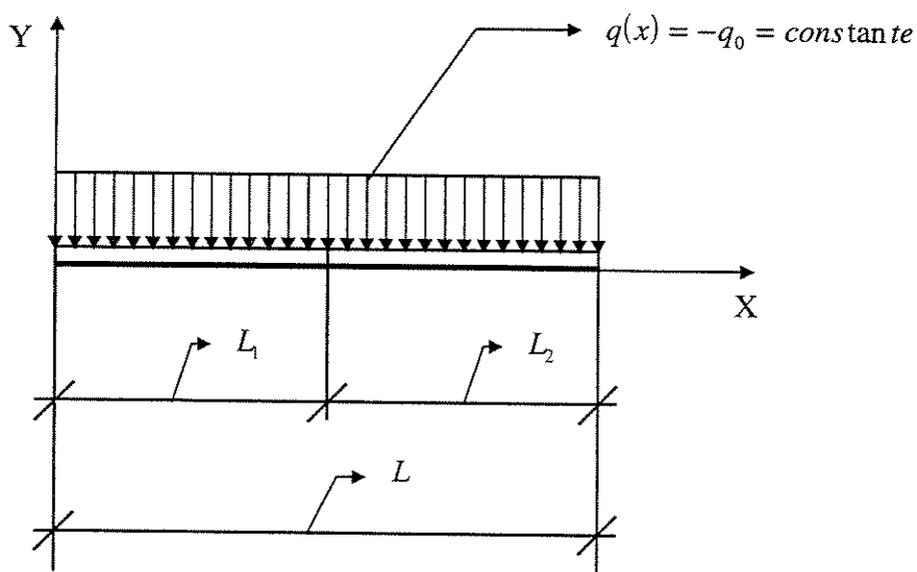
$$\begin{cases} \left( E J \int_0^L \frac{d^2N_l}{dx^2} \frac{d^2N_m}{dx^2} dx \right) = K_{lm}; e \\ \int_0^L q(x) N_l dx - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3N_m}{dx^3} \right)_0^L + \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2N_m}{dx^2} \right)_0^L = f_l \end{cases}, \text{ onde}$$

$\int_0^L q(x) N_l dx$  refere-se à carga, transversal ao eixo longitudinal da estrutura, distribuída ao longo da viga (condições de contorno homogêneas),

$\sum_{m=1}^M a_m \left( N_l \ E \ J \ \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_0^L$  refere-se ao valor do esforço cortante nos nós da discretização da viga, e

$\sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} \ E \ J \ \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_0^L$  refere-se ao valor do momento fletor nos nós da discretização da viga.

Por exemplo, conforme a Figura (4.3), admita-se uma viga isenta de vinculação em ambas as extremidades com uma discretização através de dois elementos, sendo solicitada por uma carga constante,  $q(x) = -q_0 = \text{constante}$ , transversal ao seu eixo longitudinal, uniformemente distribuída ao longo de sua extensão longitudinal.



**Figura (4.3): Viga discretizada por dois elementos, sem vinculação, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.**

Para o problema envolvido pela estrutura apresentada, de uma forma mais geral, na Figura (4.3), tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^M a_m \left( E J \int_0^L \frac{d^2 N_l}{dx^2} \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \right) &= -q_0 \int_0^L N_l dx - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_0^{L_1} - \\
&\quad - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_{L_1}^{L_2} + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_0^{L_1} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_{L_1}^{L_2} \rightarrow \\
\rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left( E J \int_0^L \frac{d^2 N_l}{dx^2} \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \right) &= -q_0 \int_0^L N_l dx - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_{L_1} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_0 - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_{L_2} + \\
&\quad + \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_{L_1} + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_{L_1} - \\
&\quad - \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_0 + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_{L_2} - \\
&\quad - \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_{L_1} \rightarrow \\
\rightarrow \sum_{m=1}^M a_m \left( E J \int_0^L \frac{d^2 N_l}{dx^2} \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \right) &= -q_0 \int_0^L N_l dx + \\
&\quad + \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_0 - \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right)_L + \\
&\quad + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_L - \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right)_0
\end{aligned}$$

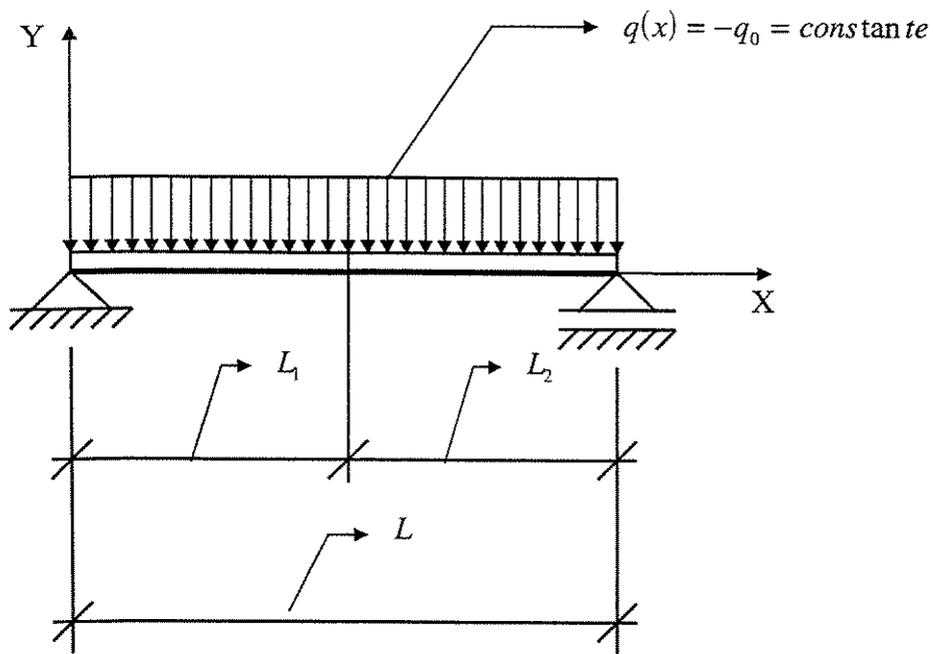
Uma solução analítica para a equação diferencial da viga pode ser obtida integrando-se quatro vezes esta equação diferencial. Admita-se, ainda,  $q(x) = -q_0 = \text{constante}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
E J \int \frac{d^4 w}{dx^4} dx = -q_0 \int dx \rightarrow E J \frac{d^3 w}{dx^3} = -q_0 x + c_1 \\
E J \int \frac{d^3 w}{dx^3} dx = -q_0 \int x dx + c_1 \int dx \rightarrow E J \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_0 \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \\
E J \int \frac{d^2 w}{dx^2} dx = -\frac{q_0}{2} \int x^2 dx + c_1 \int x dx + c_2 \int dx \rightarrow \\
\qquad \qquad \qquad \rightarrow E J \frac{dw}{dx} = -\frac{q_0}{2} \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \\
E J \int \frac{dw}{dx} dx = -\frac{q_0}{6} \int x^3 dx + \frac{c_1}{2} \int x^2 dx + c_2 \int x dx + c_3 \int dx \rightarrow \\
\qquad \qquad \qquad E J w(x) = -\frac{q_0}{24} x^4 + \frac{c_1}{6} x^3 + \frac{c_2}{2} x^2 + c_3 x + c_4
\end{array} \right.$$

(sendo que  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  e  $c_4$  são constantes que dependem das condições de contorno).

Tendo-se por objetivo a determinação das constantes de integração “ $c_1$ ”, “ $c_2$ ”, “ $c_3$ ” e “ $c_4$ ”, transforme-se o problema apresentado de uma forma mais geral na Figura (4.3) em um problema mais específico, como por exemplo no problema envolvido pela estrutura apresentada na Figura (4.4), cujas condições de contorno são expostas como:

$$\left\{ \begin{array}{l}
w(0) = w(L) = 0 ; \quad e \\
E J \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=0} = E J \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0
\end{array} \right.$$



**Figura (4.4):** Viga bi-apoiada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.

Sob tais condições, tem-se

$$\begin{cases} c_4 = 0 ; \\ c_3 = -\frac{q_0 L^3}{24} ; \\ c_2 = 0 ; \\ c_1 = \frac{q_0 L}{2} \end{cases}$$

$$\text{Portanto: } \begin{cases} \frac{d^3 w(x)}{dx^3} = \frac{1}{E J} \left( -q_0 x + \frac{q_0 L}{2} \right); \\ \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{E J} \left( -q_0 \frac{x^2}{2} + \frac{q_0 L}{2} x \right); \\ \frac{d w(x)}{dx} = \frac{1}{E J} \left( -q_0 \frac{x^3}{6} + \frac{q_0 L}{4} x^2 - \frac{q_0 L^3}{24} \right); e \\ w(x) = \frac{1}{E J} \left( -q_0 \frac{x^4}{24} + \frac{q_0 L}{12} x^3 - \frac{q_0 L^3}{24} x \right). \end{cases}$$

Então, como  $w$  foi aproximado por  $\sum_{m=1}^M a_m N_m$ , resulta que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M a_m \left( N_l E J \frac{d^3 N_m}{dx^3} \right) &= N_l E J \sum_{m=1}^M a_m \frac{d^3 N_m}{dx^3} = N_l E J \frac{d^3 w}{dx^3} = \\ &= N_l \left( -q_0 x + \frac{q_0 L}{2} \right) = N_l v(x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right) &= \frac{dN_l}{dx} E J \sum_{m=1}^M a_m \frac{d^2 N_m}{dx^2} = \frac{dN_l}{dx} E J \frac{d^2 w}{dx^2} = \\ &= \frac{dN_l}{dx} \left( -\frac{q_0}{2} x^2 + \frac{q_0 L}{2} x \right) = \frac{dN_l}{dx} m(x); e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M a_m \left( E J \int_0^L \frac{d^2 N_l}{dx^2} \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \right) &= -q_0 \int_0^L N_l dx + \\ &+ (N_l v)_0 - (N_l v)_L + \\ &+ \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_L - \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sum_{m=1}^M \left( E J \int_0^L \frac{d^2 N_l}{dx^2} \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \right) a_m = -q_0 \int_0^L N_l dx +$$

$$+ (N_l v)_0 - (N_l v)_L +$$

$$+ \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_L - \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_0$$

$$\text{onde: } \begin{cases} E J \int_0^L \frac{d^2 N_l}{dx^2} \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx = K_{lm} ; e \\ -q_0 \int_0^L N_l dx + (N_l v)_0 - (N_l v)_L + \\ \quad + \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_L - \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_0 = f_l \end{cases} \quad (4.19)$$

Cabe observar que  $-q_0 \int_0^L N_l dx$  refere-se à carga constante, transversal ao eixo longitudinal da

estrutura, uniformemente distribuída ao longo da extensão longitudinal desta,

$(N_l v)_0 = N_l(x=0) v_{x=0}$  refere-se ao valor do esforço cortante no nó inicial da discretização da viga,

$(N_l v)_L = N_l(x=L) v_{x=L}$  refere-se ao valor do esforço cortante no nó final da discretização da viga,

$\left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_L = \frac{dN_l(x=L)}{dx} m_{x=L}$  refere-se ao valor do momento fletor no nó final da discretização

da viga, e  $\left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_0 = \frac{dN_l(x=0)}{dx} m_{x=0}$  refere-se ao valor do momento fletor no nó inicial da

discretização da viga.

Como  $w$  foi aproximado por  $\sum_{m=1}^M a_m N_m$ , as recuperações do momento fletor “ $m$ ” e do esforço

cortante “ $v$ ”, para uma eventual plotagem ao longo de toda a extensão da estrutura em forma de viga, podem ser obtidas, respectivamente, através de

$$m(x) = E J \sum_{m=1}^M a_m \frac{d^2 N_m(x)}{dx^2} ; e$$

$$v(x) = E J \sum_{m=1}^M a_m \frac{d^3 N_m(x)}{dx^3} .$$

Nesta seção, a partir da colocação do problema sob a forma mais geral como apresentado na Figura (4.3), foi dada uma solução analítica para a equação diferencial da viga, após a transformação desse problema segundo um caso mais específico, como o apresentado na Figura (4.4).

Nesta seção foi feita também uma aproximação, por Resíduos Ponderados – Método de Galerkin, da equação diferencial que governa o comportamento de estruturas em forma de viga, segundo o mesmo problema específico apresentado na Figura (4.4). Essa aproximação, onde foi deduzida a matriz de rigidez e o vetor de carga da viga, envolveu uma preparação para aplicação de funções interpoladoras quaisquer, inclusive B-splines.

#### ***4.7 TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DA SPLINE EM COORDENADAS FÍSICAS***

O início da transformação de coordenadas da spline em coordenadas físicas ocorrerá a partir de uma aproximação dos deslocamentos e rotações apresentados por estruturas em forma de viga. Nesse tipo de estrutura será estudada a possibilidade de associação de mais um grau de liberdade para os nós de extremidade da discretização (como já discutido no capítulo 3, a possibilidade de associação de mais um grau de liberdade implica na criação de nós auxiliares, os quais permitem a inclusão do quarto trecho polinomial de uma B-spline nos elementos de extremidade da discretização).

Através do desenvolvimento de uma metodologia capaz de eliminar a necessidade de modificações nas splines próximas ao contorno da discretização, tornar-se-á possível a montagem de uma única matriz de rigidez independente das condições de contorno da estrutura.

A transformação de coordenadas da interpolação por spline em coordenadas físicas se dará através da equação matricial que envolve essa matriz única de rigidez física, independente das condições de contorno regidas pela vinculação e pelo carregamento apresentados pela estrutura, relacionada com o vetor de carga físico, dessa estrutura, através do vetor composto pelos

deslocamentos nodais e pelas rotações nas extremidades da discretização, para o caso de vigas, ou através do vetor composto somente pelos deslocamentos nodais, para o caso de barras.

#### **4.7.1 RECONSTITUIÇÃO DE GRANDEZAS FÍSICAS, REFERENTES AOS GRAUS DE LIBERDADE NODAIS DA ESTRUTURA, ATRAVÉS DE PONDERAÇÃO ENVOLVENDO OS COEFICIENTES DAS SPLINES**

Nesta seção, objetivando-se a resolução de  $K_{lm} a_m = f_l$ , serão escolhidas splines cúbicas para assumir as posições de  $N_m$  e  $N_l$  nessa equação matricial. Sob tais escolhas, será possível a obtenção dos coeficientes  $a_m$ , ou seja, será possível a resolução do sistema interpolado por splines.

A partir da resolução deste sistema, o início do processo de transformação de coordenadas da spline em coordenadas físicas será mostrado através da aproximação feita para os deslocamentos e rotações nodais apresentados por estruturas em forma de viga. Tal aproximação envolverá o “ajuste” que os coeficientes das splines cúbicas proporcionarão à estas polinomiais por partes.

Conforme apresentado em 4.6.1 e 4.6.2, com a dedução da matriz de rigidez e do vetor de carga para estruturas unidimensionais em forma de barra e de viga, a resolução da equação matricial (4.16),  $K_{lm} a_m = f_l$ , somente é possível mediante a escolha das funções de ponderação  $N_m$  e  $N_l$ . Uma vez executada essa escolha, pode-se determinar o vetor  $a_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) composto das constantes responsáveis pela obtenção do ajuste adequado que proporciona  $\hat{\phi} \approx \phi$ .

Escolhendo-se splines, conforme apresentado no capítulo 3, para assumir as posições de  $N_m$  e  $N_l$  na matriz de rigidez e no vetor de carga das estruturas anteriormente propostas, a resolução de (4.16), responsável pela obtenção dos coeficientes  $\{a_m\}$  que funcionarão como ponderadores ou ajustadores das funções, implica na determinação dos coeficientes  $\{c_m^S\}$  dessas splines, ou seja,  $\{a_m\} = \{c_m^S\}$  (o superescrito “S” refere-se à spline ou ao sistema interpolado por splines cúbicas).

Assim, pode-se escrever (4.16) como

$$[K_{lm}^S] \{c_m^S\} = \{f_l^S\} \quad (4.20)$$

onde,

$[K_{lm}^S]$  = matriz de rigidez do sistema interpolado por splines;

$\{c_m^S\}$  = vetor dos coeficientes das splines; e

$\{f_l^S\}$  = vetor de carga do sistema interpolado por splines.

A ponderação necessária para a reconstituição dos deslocamentos nodais apresentados por estruturas unidimensionais, além de envolver o coeficiente do próprio nó para o qual se busca o deslocamento, envolve também o coeficiente dos dois nós adjacentes a este, ou seja, o coeficiente do nó imediatamente anterior e o do nó imediatamente posterior.

A recuperação das funções é feita através de expressões do tipo  $w(x) = \sum c_m^S N_m(x)$ . Nesta expressão, os coeficientes  $c_m^S$  das splines cúbicas, vinculados a cada um dos nós da estrutura, e todas as funções splines  $N_m(x)$ , com seus respectivos topos posicionados em todos os nós da estrutura discretizada, devem participar compondo o produto responsável pela aproximação de  $w(x)$ , porém, para o caso unidimensional somente as B-splines e os coeficientes destas vinculados a três dos nós da discretização geram valores diferentes de zero para compor tal produto (tal vinculação refere-se ao nó anterior e ao posterior, além daquele para o qual se busca o deslocamento nodal).

Tomando-se por base a exposição da Figura (4.5), a busca, ou a recuperação, do deslocamento nodal em "C" envolve, além da função spline e seu coeficiente vinculados a esse nó "C", as funções splines e seus respectivos coeficientes vinculados aos nós "B" e "D", pois qualquer outra função spline posicionada em qualquer outro nó da discretização possui ordenada zero em "C".

Então:

$$\begin{aligned} w(x = \text{abscissa do nó "C"}) &= \sum_{m=B}^D c_m^S N_m(x = \text{abscissa do nó "C"}) = \\ &= c_A^S N_A(x = \text{abscissa do nó "C"}) + c_B^S N_B(x = \text{abscissa do nó "C"}) + \\ & c_C^S N_C(x = \text{abscissa do nó "C"}) + c_D^S N_D(x = \text{abscissa do nó "C"}) + \\ & c_E^S N_E(x = \text{abscissa do nó "C"}) \end{aligned}$$

onde:

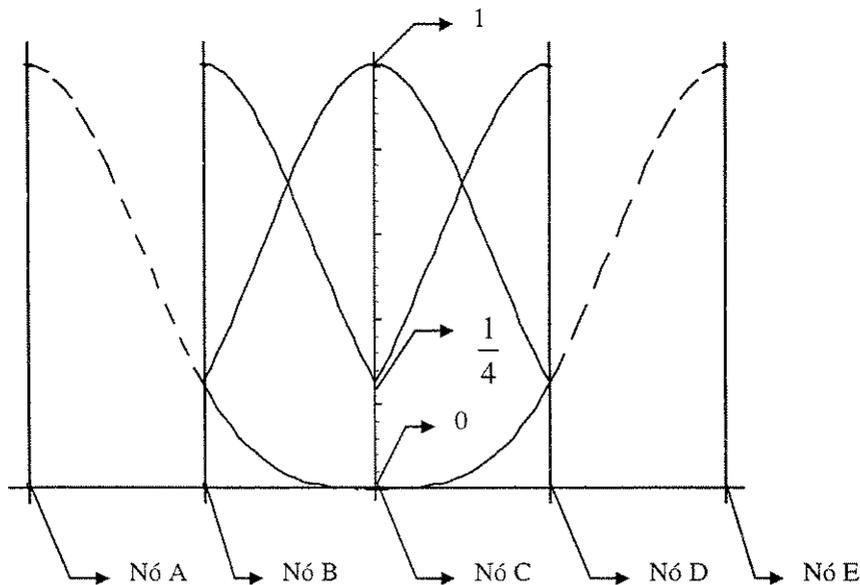
$$w(x = \text{abscissa do nó "C"}) = \text{deslocamento nodal apresentado pelo nó "C"};$$

$c_m^S$  = coeficiente do nó "m", sobre o qual o topo da spline cúbica está posicionado (o superescrito "S" refere-se à spline, indicando que o coeficiente foi obtido através da interpolação por splines cúbicas);

$N_m(x = \text{abscissa do nó "C"})$  = valor da ordenada da função spline, na abscissa do nó "C", cujo topo foi posicionado no nó "m".

Portanto:

$$\begin{aligned}
 w(x = \text{abscissa do nó "C"}) &= \sum_{m=B}^D c_m^S N_m(x = \text{abscissa do nó "C"}) = \\
 &= c_A^S 0 + c_B^S \frac{1}{4} + c_C^S 1 + c_D^S \frac{1}{4} + c_E^S 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow w(x = \text{abscissa do nó "C"}) &= \sum_{m=B}^D c_m^S N_m(x = \text{abscissa do nó "C"}) = \\
 &= c_B^S \frac{1}{4} + c_C^S 1 + c_D^S \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$



**Figura (4.5):** Determinação da influência dos coeficientes dos nós adjacentes ao Nó C em função da ordenada das B-splines neste nó C.

Através da Figura(4.5), tem-se graficamente explicitado que somente as splines com seu topo posicionado sobre os dois nós imediatamente adjacentes ao Nó “C” (splines nos Nós “B” e “D”) são as que possuem ordenada diferente de zero em “C”. As ordenadas das demais splines com seu topo posicionado sobre os outros nós da discretização são iguais a zero em “C”, e não exercem, dessa forma, influência alguma em termos de ponderação para a reconstituição do deslocamento nodal em “C”.

De forma mais compacta ressalta-se que, para estruturas unidimensionais, os coeficientes das splines que participarão na ponderação para a reconstituição do deslocamento apresentado pelo nó “i” são três:  $c_{i-1}$ ,  $c_i$  e  $c_{i+1}$ .

O emprego de splines como funções de aproximação e como funções de ponderação em engenharia estrutural pode objetivar a aproximação do deslocamento nodal apresentado pela estrutura, assim como a aproximação de quaisquer outras grandezas nodais vinculadas aos graus de liberdade da estrutura, como por exemplo a rotação de vigas, a qual envolve a primeira derivada das splines e o coeficiente dos nós sobre os quais o topo dessas polinomiais por partes está posicionado (efetivamente, influenciarão na ponderação somente as primeiras derivadas diferentes de zero naquele nó para o qual se busca a rotação).

Equacionando-se a ponderação, ou a recuperação, para o deslocamento e rotação de uma estrutura em forma de viga; tem-se

$$w_j = w(x = x_j) = w(x_j) = \sum_{m=\text{primeiro}}^{\text{último}} \sum_{\text{no}'} c_m^S N_m(x = x_j) = \sum_{m=\text{primeiro}}^{\text{último}} \sum_{\text{no}'} c_m^S N_m(x_j) \quad (4.21)$$

$$\theta_j = \theta(x = x_j) = \frac{dw_j}{dx} = \sum_{m=\text{primeiro}}^{\text{último}} \sum_{\text{no}'} c_m^S \frac{dN_m(x = x_j)}{dx} = \sum_{m=\text{primeiro}}^{\text{último}} \sum_{\text{no}'} c_m^S \frac{dN_m(x_j)}{dx} \quad (4.22)$$

onde,

$w_j(x)$  = deslocamento apresentado pelo nó  $j$ ;

$c_m^S$  = coeficiente do nó  $m$ , sobre o qual o topo da spline está posicionado (o superescrito “S” refere-se à spline, indicando que o coeficiente foi obtido através da interpolação por splines cúbicas);

$N_m(x = x_j)$  = valor da ordenada da função spline, cujo topo foi posicionado sobre o nó  $m$ , na abscissa do nó  $(x = x_j)$  (em termos contínuos,  $N_m(x = x_j)$  é a própria curva

da função spline, cujo topo foi posicionado sobre o nó  $m$ , ao longo de todo o trecho até atingir a abscissa do nó ( $x = x_j$ ));

$\theta_j$  = rotação apresentada pelo nó  $j$ ; e

$\frac{dN_m(x = x_j)}{dx}$  = valor da primeira derivada da função spline, cujo topo foi posicionado sobre o

nó  $m$ , na abscissa do nó ( $x = x_j$ ) (em termos contínuos,  $\frac{dN_m(x = x_j)}{dx}$  é a própria curva da primeira derivada da função spline, cujo topo foi posicionado sobre o nó  $m$ , ao longo de todo o trecho até atingir a abscissa do nó ( $x = x_j$ )).

Exemplificando para o caso de vigas, as equações que possibilitam as ponderações, conforme (4.21) e (4.22) através dos coeficientes das splines determinados em (4.20), responsáveis pela reconstituição das grandezas físicas (deslocamento e rotação), referentes aos graus de liberdade nodais da estrutura, são:

$$\begin{cases} w(x) = \sum c_m^s N_m(x) , e \\ \theta(x) = \sum c_m^s \frac{dN_m(x)}{dx} \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} w(x_1) = c_0 N_0(x_1) + c_1 N_1(x_1) + c_2 N_2(x_1) + \dots + c_n N_n(x_1) + c_{n+1} N_{n+1}(x_1) \\ \theta(x_1) = c_0 \frac{dN_0}{dx}(x_1) + c_1 \frac{dN_1}{dx}(x_1) + c_2 \frac{dN_2}{dx}(x_1) + \dots + c_n \frac{dN_n}{dx}(x_1) + c_{n+1} \frac{dN_{n+1}}{dx}(x_1) \\ w(x_2) = c_0 N_0(x_2) + c_1 N_1(x_2) + c_2 N_2(x_2) + \dots + c_n N_n(x_2) + c_{n+1} N_{n+1}(x_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w(x_n) = c_0 N_0(x_n) + c_1 N_1(x_n) + c_2 N_2(x_n) + \dots + c_n N_n(x_n) + c_{n+1} N_{n+1}(x_n) \\ \theta(x_n) = c_0 \frac{dN_0}{dx}(x_n) + c_1 \frac{dN_1}{dx}(x_n) + c_2 \frac{dN_2}{dx}(x_n) + \dots + c_n \frac{dN_n}{dx}(x_n) + c_{n+1} \frac{dN_{n+1}}{dx}(x_n) \end{cases}$$

Matricialmente, tais equações podem ser dispostas como segue,

$$\begin{bmatrix} N_0(x_1) & N_1(x_1) & N_2(x_1) & \dots & N_n(x_1) & N_{n+1}(x_1) \\ \frac{dN_0}{dx}(x_1) & \frac{dN_1}{dx}(x_1) & \frac{dN_2}{dx}(x_1) & \dots & \frac{dN_n}{dx}(x_1) & \frac{dN_{n+1}}{dx}(x_1) \\ N_0(x_2) & N_1(x_2) & N_2(x_2) & \dots & N_n(x_2) & N_{n+1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ N_0(x_n) & N_1(x_n) & N_2(x_n) & \dots & N_n(x_n) & N_{n+1}(x_n) \\ \frac{dN_0}{dx}(x_n) & \frac{dN_1}{dx}(x_n) & \frac{dN_2}{dx}(x_n) & \dots & \frac{dN_n}{dx}(x_n) & \frac{dN_{n+1}}{dx}(x_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w(x_1) \\ \theta(x_1) \\ w(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ w(x_n) \\ \theta(x_n) \end{Bmatrix}$$

ou, compactamente,

$$[K_c] \{c_m^s\} = \{w_c\} \quad (4.23)$$

onde

$[K_c]$  = matriz de transformação composta pelos valores das ordenadas das funções splines e suas respectivas primeiras derivadas nos nós da discretização;

$\{c_m^s\}$  = vetor dos coeficientes das splines (já definido anteriormente); e

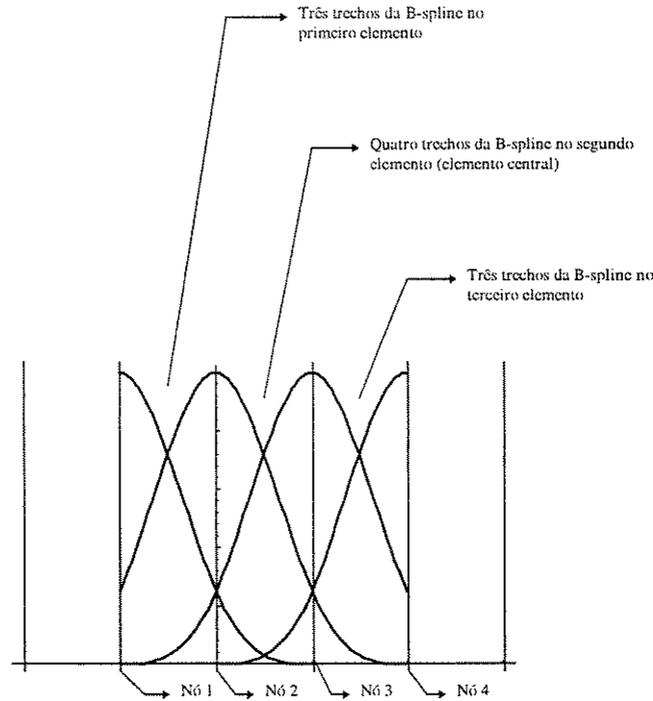
$\{w_c\}$  = vetor composto pelos deslocamentos e rotações (para vigas) nos nós da discretização.

Dessa forma, a partir de um exemplo envolvendo uma estrutura unidimensional (viga), foram expostos os passos iniciais responsáveis pela transformação de coordenadas da spline em coordenadas físicas.

#### **4.7.2 A POSSIBILIDADE DE ASSOCIAÇÃO DE MAIS UM GRAU DE LIBERDADE, PARA OS NÓS DE EXTREMIDADE DA DISCRETIZAÇÃO, EM FUNÇÃO DO NÓ AUXILIAR**

Como foi exposto no capítulo 3, para um modelo estrutural unidimensional, interpolado por spline e discretizado através de três elementos, a colocação de splines com o topo posicionado sobre cada um dos quatro nós dessa discretização não é suficiente para garantir a presença dos quatro

trechos, os quais compõem uma spline cúbica completa, no interior dos três elementos do modelo. Somente o segundo elemento, o elemento central, possui os quatro trechos. O primeiro e o terceiro elemento possuem apenas três trechos, tal como mostrado na Figura (4.6).



**Figura (4.6): Posicionamento dos trechos de uma B-spline nos elementos de um modelo estrutural unidimensional interpolado por spline.**

Essa discretização de estrutura unidimensional com o respectivo posicionamento das B-splines faz com que (4.23) assumam a forma

$$[K_c] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

onde

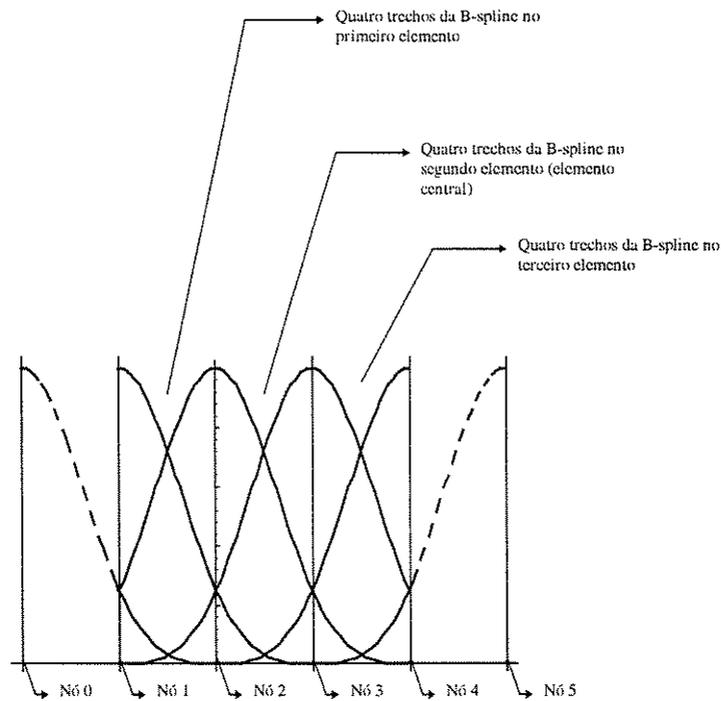
$[K_c]$  = matriz de transformação composta pelos valores das ordenadas das funções splines nos nós da discretização;

$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix}$  = vetor dos coeficientes das splines associados a cada um dos nós da discretização; e

$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix}$  = vetor composto pelos deslocamentos da estrutura nos nós da discretização.

Em função, também, do que já foi colocado no capítulo 3, e com a finalidade de posicionar os quatro trechos de uma spline cúbica no interior do mesmo sub-intervalo, ou elemento, deve-se substituir a interpolação no domínio completo (intervalo completo) por uma interpolação em cada sub-intervalo (a interpolação por sub-intervalos exige a existência dos quatro trechos da B-spline no interior destes, pois a geração do espaço completo que contém todas as possíveis soluções para o problema em questão só é garantida mediante a presença, em cada sub-domínio, de todos os polinômios interpoladores, ou seja, dos quatro trechos de uma spline cúbica completa).

Como a inclusão do quarto trecho de uma B-spline no primeiro e no terceiro elemento da discretização exige a criação de dois novos nós auxiliares, um imediatamente anterior ao primeiro e outro imediatamente posterior ao último, tem-se a necessidade de associação de dois novos coeficientes,  $c_0$  e  $c_5$ , às duas novas splines cujos respectivos topos estão posicionados sobre esses dois novos nós auxiliares, conforme exposto graficamente na Figura (4.7).



**Figura (4.7): Posicionamento dos trechos de uma B-spline nos elementos de um modelo estrutural unidimensional interpolado por spline, admitindo-se dois novos nós auxiliares à discretização.**

Estes dois novos coeficientes,  $c_0$  e  $c_5$ , farão com que o vetor dos coeficientes das splines associados a cada um dos nós da discretização,  $\{c_m^s\}$  em (4.24), aumente mais duas novas linhas. Este aumento impõem um aumento envolvendo duas novas linhas e duas novas colunas à matriz  $[K_c]$ , em função da necessidade de manter-se esta matriz quadrada.

O aumento dessas duas novas linhas no vetor  $\{c_m^s\}$ , em função da inclusão dos coeficientes  $c_0$  e  $c_5$ , também impõem um aumento de duas novas linhas ao vetor  $\{w_c\}$ , permitindo um aumento de duas novas variáveis físicas envolvidas pela aproximação em questão, as quais podem ser uma rotação  $\theta$  para o primeiro nó da discretização e outra para o último,  $\theta_1$  e  $\theta_4$ .

Então (4.24) torna-se

$$[K_c] \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

onde

$[K_c]$  = matriz de transformação composta pelos valores das ordenadas das funções splines nos nós da discretização e pelos valores de suas primeiras derivadas nos nós de extremidade;

$\begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{Bmatrix}$  = vetor dos coeficientes das splines associados a cada um dos nós da discretização,

inclusive aos dois novos nós auxiliares; e

$\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$  = vetor composto pelos deslocamentos da estrutura nos nós da discretização e por suas

rotações nos nós de extremidade.

Assim, a partir da inclusão de dois novos nós auxiliares, os quais permitem o posicionamento de todos os quatro trechos de uma spline cúbica completa em todos os elementos da discretização, torna-se possível a associação de dois novos graus de liberdade à estrutura, ou seja, de duas rotações, uma para o primeiro nó e outra para o último da discretização. Isto cria condições para que os coeficientes  $c_m^S$  sejam associados às condições de contorno físicas do problema, quais sejam no caso da viga  $w_1, \theta_1, w_4$  e  $\theta_4$ .

Ressalta-se que essa transformação permitirá a formulação do problema em termos das coordenadas físicas envolvidas e a inclusão das condições de contorno reais, em lugar de se trabalhar com os coeficientes das splines  $c_m^S$  como incógnitas.

É problemática a inclusão das condições de contorno em termos das funções interpoladoras, ou seja, através de  $N_m(x)$  que, explicitamente, exige modificações nas splines posicionadas próximas aos nós onde incidem as condições de contorno reais, as quais fisicamente influenciam o comportamento estrutural.

### ***4.7.3 A METODOLOGIA ENVOLVENDO A TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS (COEFICIENTES) DA INTERPOLAÇÃO POR SPLINE EM COORDENADAS FÍSICAS***

#### ***4.7.3.1 INTRODUÇÃO***

As condições de contorno podem ser impostas na própria função spline que interpola o primeiro e o último trecho da discretização. Como exemplo, tais imposições podem acontecer forçando-se a função a assumir a ordenada zero no primeiro nó da discretização (para estruturas simplesmente apoiadas) ou como um outro exemplo, além de forçar-se a função a assumir a ordenada zero no primeiro nó da discretização, forçar-se também, neste ponto, a primeira derivada dessa função spline a assumir o valor zero (para estruturas engastadas).

A imposição das condições de contorno através de modificações nas splines que interpolam os trechos extremos da discretização, além de exigir uma matriz de rigidez para cada diferente vinculação da estrutura, exige trabalhosas modificações nos produtos entre splines próximas ao limite dessa discretização. Isto implica na alteração do próprio polinômio utilizado junto às bordas da estrutura, em relação aos utilizados em nós mais internos.

Neste procedimento de imposição das condições de contorno está implícita a necessidade de computação da influência dos polinômios modificados em todos os produtos que envolvam suas participações.

Um método que tem por objetivo eliminar por completo as “não conformes” necessidades procedimentais relativas às modificações nas splines próximas ao contorno, além de conferir uma substancial simplificação no todo do processo utilizado em engenharia estrutural, fará com que uma

única matriz de rigidez possa ser utilizada na análise da estrutura, independente das condições de contorno, ou seja, independente da vinculação e carregamento.

A busca por uma outra metodologia de cálculo, matematicamente mais genérica, compreende uma abordagem mais pormenorizada das equações matriciais envolvidas no processo de análise da estrutura por spline, seguida por uma reorganização mais efetiva, em termos algébricos, dessas equações.

#### 4.7.3.2 A METODOLOGIA PROPRIAMENTE DITA

A equação que relaciona, através do vetor dos coeficientes das splines  $\{c_m^S\}$ , a matriz de rigidez  $[K_{lm}^S]$  e o vetor de carga  $\{f_l^S\}$  gerados pela interpolação por spline é dada por (4.20), ou seja,

$$[K_{lm}^S] \{c_m^S\} = \{f_l^S\}$$

A equação que relaciona, também através do vetor dos coeficientes das splines  $\{c_m^S\}$ , a matriz de transformação  $[K_c]$  e o vetor composto pelos deslocamentos nodais e as rotações nas extremidades da discretização  $\{w_c\}$  (deslocamentos + rotações nas extremidades para o caso de vigas e somente deslocamentos para o caso de barras) é dada por (4.23), ou seja,

$$[K_c] \{c_m^S\} = \{w_c\}$$

De (4.23), tem-se

$$\{c_m^S\} = [K_c]^{-1} \{w_c\} \quad (4.26)$$

Com a substituição de (4.26) em (4.20), tem-se

$$[K_{lm}^S] [K_c]^{-1} \{w_c\} = \{f_l^S\} \quad (4.27)$$

Conforme Faddeeva (1959), ao ter-se

$$\{a\} = [T]\{b\} \quad e \quad [K]\{a\} = \{r\} ,$$

com a substituição da primeira na segunda, resultando

$$[K] [T]\{b\} = \{r\} ;$$

sabe-se que a única matriz que ao pré-multiplicar o produto matricial  $[K] [T]$  origina uma matriz simétrica cuja transposta é igual a ela própria é a matriz  $[T]^T$ , ou seja,

$$[T]^T [K] [T] = [A] = [A]^T .$$

Essa matriz  $[A]$  conserva a propriedade de ser regida pela sua diagonal principal (a garantia dessa propriedade, cuja influência releva-se positivamente durante a execução dos cálculos matriciais envolvidos pelo método dos elementos finitos, é assegurada, justamente, pelo fato de  $[A] = [A]^T$ ).

Então

$$[T]^T [K] [T]\{b\} = [T]^T \{r\} .$$

Em (4.27),  $[K_c]^{-1}$  pode assumir o papel da matriz  $[T]$ , acima mencionada. Então

$$[K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1} \{w_c\} = [K_c]^{-T} \{f_l^S\} \quad (4.28)$$

Assim, a partir das equações matriciais (4.20) e (4.23) é possível obter-se uma “transformação” envolvendo a relação da matriz de rigidez do sistema interpolado por spline  $[K_{lm}^S]$ , pré-multiplicada por  $[K_c]^{-T}$  e pós-multiplicada por  $[K_c]^{-1}$ , com o vetor de carga do mesmo sistema interpolado por spline, pré-multiplicado por  $[K_c]^{-T}$ , através do vetor dos deslocamentos nodais e das rotações dos nós de extremidade da discretização (para vigas)  $\{w_c\}$  (para barras tal vetor é composto somente pelos deslocamentos nodais).

Em (4.28), através do vetor  $\{w_c\}$ , que descreve o próprio comportamento físico (deslocável) por meio do qual a estrutura responde ao ser solicitada, relaciona-se uma matriz de rigidez,

$[K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1}$ , com um vetor de carga,  $[K_c]^{-T} \{f_l^S\}$ , sendo que ambos foram intrinsecamente gerados e caracterizados a partir do sistema interpolado por spline.

Essa matriz de rigidez e esse vetor de carga relacionados pela própria essência física da estrutura, a qual armazena os graus de liberdade nodais que traduzem a capacidade estrutural de resposta às solicitações, constituem um sistema capaz da transformação de coordenadas da interpolação por spline em coordenadas físicas.

Assim, pode-se nomear

$$[K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1} = [K_{físico}] = \text{matriz de rigidez física da estrutura, e}$$

$$[K_c]^{-T} \{f_l^S\} = \{f_{físico}\} = \text{vetor de carga físico da estrutura.}$$

E a transformação de coordenadas da interpolação por spline em coordenadas físicas pode ser escrita como

$$[K_{físico}] \{w_c\} = \{f_{físico}\} \quad (4.29)$$

No lado direito da equação matricial (4.29), a qual reproduz matematicamente o fenômeno físico que ocorre no elemento estrutural interpolado por spline, está posicionado o vetor de carga físico da estrutura  $\{f_{físico}\}$  que tem origem no vetor de carga do sistema interpolado por splines  $\{f_l^S\}$ , o qual para o caso de estruturas em forma de barra, solicitada por uma carga axial concentrada F em uma das extremidades, conforme (4.18), é dado por

$$\{f_l^S\} = (N_l F)_L - (N_l F)_0 ;$$

e para o caso de estruturas em forma de viga, solicitada por uma carga uniformemente distribuída transversal ao seu eixo longitudinal, conforme (4.19), é dado por

$$\{f_l^S\} = -q_0 \int_0^L N_l dx + \sum_{m=1}^M a_m (N_l v)_0 - \sum_{m=1}^M a_m (N_l v)_L + \\ + \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_L - \sum_{m=1}^M a_m \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_0$$

A partir da matriz de rigidez e do vetor de carga do sistema interpolado por splines, onde utilizou-se dois nós auxiliares para que fosse possível a inclusão do quarto trecho polinomial de uma B-spline nos elementos de extremidade da discretização, baseou-se todo o desenvolvimento responsável pela transformação de coordenadas da interpolação por splines em coordenadas físicas. A metodologia envolvida nesse desenvolvimento proporcionou a associação de mais dois graus de liberdade físicos à estrutura em função da criação desses dois nós auxiliares.

## **4.8 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DO MÉTODO ÀS ESTRUTURAS UNIDIMENSIONAIS - BARRAS E VIGAS**

### **4.8.1 INTRODUÇÃO**

Tendo-se como meta a implementação de um procedimento responsável pela constituição de uma única matriz de rigidez para elementos estruturais interpolados por spline, independente dos vínculos em suas bordas, procurou-se, em primeira instância, um desenvolvimento com condições de gerar a matriz de rigidez e o vetor de carga para estruturas unidimensionais, as quais constituem-se em elementos estruturais mais simples quando comparados, por exemplo, com estruturas em forma de placas elásticas finas, caracterizadas intrinsecamente pelo enfoque bidimensional.

Nesta seção serão expostos e analisados, através da metodologia desenvolvida e preparada para a utilização de B-splines como funções de forma em elementos finitos, doze exemplos de estruturas unidimensionais, das quais onze são estruturas em forma de viga e uma em forma de barra.

O exemplo de barra analisado refere-se a uma barra engastada em uma das extremidades e livre na outra, discretizada por dois elementos e submetida a uma carga concentrada na extremidade livre.

Na seqüência serão analisados três exemplos de vigas biapoiadas, discretizadas por dois, quatro e oito elementos, submetidas a uma carga transversal uniformemente distribuída ao longo de sua extensão longitudinal.

Três exemplos de vigas biengastadas serão estudados a seguir, estas estruturas, discretizadas por dois, quatro e oito elementos, serão submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal.

Outros três exemplos de vigas discretizadas por dois, quatro e oito elementos serão analisadas. Tais estruturas, engastadas em uma das extremidades e apoiadas na outra, estarão submetidas a uma carga transversal uniformemente distribuída ao longo de sua extensão longitudinal.

Um outro exemplo de viga biapoiada, discretizada por dois elementos, será analisada. Esta estrutura submeter-se-á a um momento puro concentrado em uma das extremidades.

O último exemplo de viga a ser analisado referir-se-á a uma estrutura em balanço, ou seja, a uma viga engastada em uma das extremidades e livre na outra. Esta estrutura, discretizada por dois elementos, estará submetida a uma carga concentrada na extremidade livre.

#### ***4.8.2 ESTRUTURA EM FORMA DE BARRA TRACIONADA DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS***

Nesta seção será analisado o elemento estrutural barra. Será estudado o comportamento de uma barra em balanço, ou seja, o comportamento de uma barra engastada em uma das extremidades e livre na outra. Conforme a Figura (4.8), esta estrutura, submetida a uma carga concentrada em sua extremidade livre, apresenta-se discretizada por dois elementos.

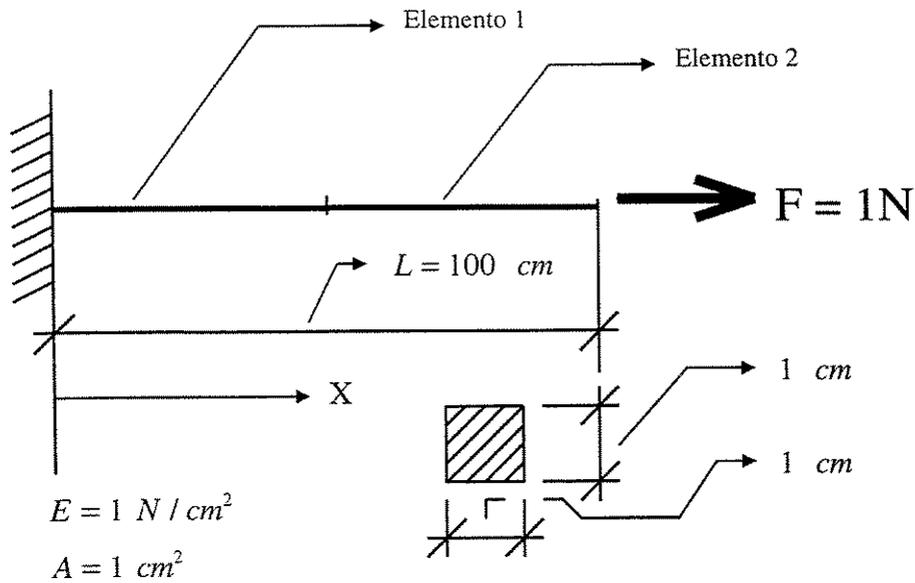
O estudo do comportamento dessa barra envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos axiais e das deformações apresentadas pela estrutura exposta na Figura (4.8), onde:

$A$  = área da seção transversal;

$E$  = módulo de elasticidade de Young (longitudinal);

$w$  = translação; e

$p(x)$  = carregamento axial distribuído, através do qual a estrutura está sendo solicitada.



**Figura (4.8): Barra tracionada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga axial concentrada,  $F = 1N$ , na extremidade livre.**

Conforme o ítem 4.6.1, a equação diferencial característica do elemento estrutural “Barra” é:

$$A \cdot E \cdot \frac{d^2w}{dx^2} = -p(x) \quad (4.30)$$

Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 ; \quad e \\ AE \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} &= F . \end{aligned} \quad (4.31)$$

Segundo as deduções apresentadas em 4.6.1, as soluções analíticas para os deslocamentos e deformações da barra são, respectivamente

$$w(x) = \frac{F}{AE}x \quad (4.32)$$

$$AE \frac{dw(x)}{dx} = F \quad (4.33)$$

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ ; e

-) área da seção transversal:  $A = 1 \text{ cm}^2$ .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 1 \text{ N / cm}^2$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) engastada (extremidade esquerda)  $\rightarrow w(0) = 0$ ; e

-) força axial concentrada aplicada na extremidade direita  $\rightarrow AE \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} = F = 1 \text{ N}$ .

A solução da equação diferencial da barra (4.30), mediante a imposição das condições de contorno (4.31), será aproximada com o auxílio de uma discretização envolvendo dois elementos. Nesta aproximação serão utilizadas splines cúbicas como funções de forma, as quais atuarão diretamente nas interpolações, sendo responsáveis pela constituição da matriz de rigidez e do vetor de carga do sistema interpolado por splines.

Segundo o procedimento de interpolação por spline descrito no capítulo 3, as funções, definidas no intervalo de 0 a 1 e que são componentes dos quatro trechos de uma spline cúbica completa, que serão utilizadas como funções de aproximação e como funções de ponderação, no procedimento por elementos finitos cuja metodologia foi exposta em 4.7.3, são definidas segundo um sistema de coordenadas local como:

$$M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} ; \quad (4.34)$$

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 ; \quad (4.35)$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} ; \quad (4.36)$$

e

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 . \quad (4.37)$$

Através de resíduos ponderados - método de Galerkin, a matriz de rigidez  $K_{lm}^S$  e o vetor de carga  $f_l^S$  da estrutura interpolada por splines cúbicas (como deduzido em 4.6.1) são expressos, respectivamente, por

$$[K_{lm}^S] = A E \int_0^L \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \quad (4.38)$$

e

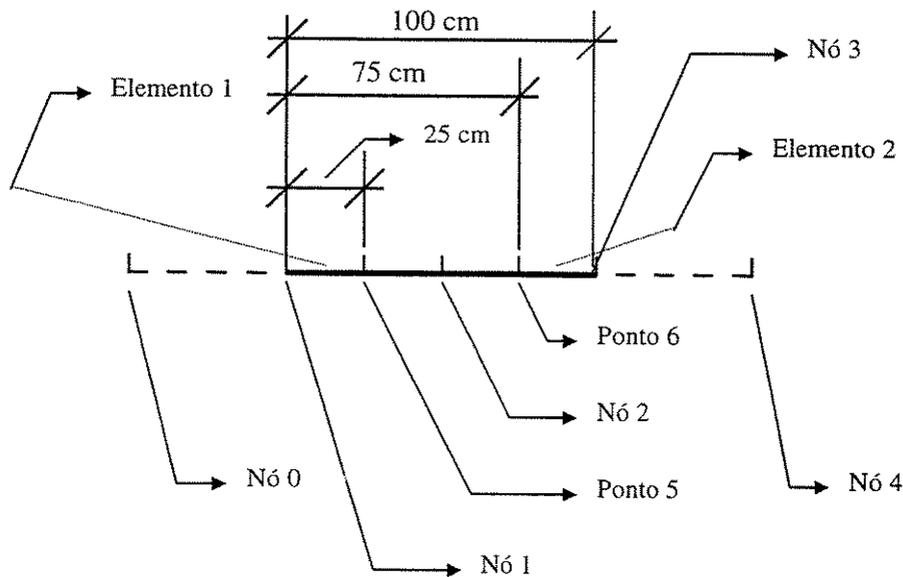
$$\{f_l^S\} = (N_l F)_L - (N_l F)_0 \quad (4.39)$$

Como as splines cúbicas utilizadas como funções de aproximação e funções de ponderação possuem tamanho 1, por serem definidas no intervalo de 0 a 1, e os limites globais de integração variam

-) para a primeira metade da barra: de 0 a  $\frac{L}{2}$ ; e

-) para a segunda metade da barra: de  $\frac{L}{2}$  a  $L$ ;

ou seja, globalmente, necessita-se de funções spline de tamanho  $\frac{1}{2}$ , torna-se necessário, para que seja possível a integração segundo funções definidas localmente, a transformação de coordenadas globais para locais (Jacobiano), conforme a transformação de coordenadas exposta no capítulo 3.



**Figura (4.9): Colocação dos nós e dos pontos intermediários (5 e 6) dos dois elementos da discretização da barra.**

Se a barra foi discretizada por 2 elementos, conforme a Figura (4.9), o domínio completo possui 3 nós (1, 2 e 3). Estes 3 nós somados aos 2 auxiliares (0 e 4) perfazem um total de 5 nós.

Se o total dos nós dessa discretização é igual a 5, a matriz de rigidez do sistema interpolado por splines será uma matriz 5 X 5 (conforme 4.7.2, necessidade da matriz ser quadrada). O princípio que rege a montagem dessa matriz pode ser descrito, tendo-se a Figura (4.9) por base, como exposto a seguir:

-) colocando-se o topo de uma B-spline sobre o nó auxiliar “0”, responsável pela definição da linha “0” dessa matriz, e colocando-se o topo de uma outra B-spline sobre este mesmo nó auxiliar “0”, responsável pela definição da coluna “0” dessa linha, analisa-se a sobreposição de trechos polinomiais dessas duas B-splines que ocorrerá dentro do domínio completo, ou seja, dentro dos elementos “1” e “2”;

-) a sobreposição de dois trechos das B-splines determina quais dois trechos polinomiais que assumirão as posições de  $N_l$  e  $N_m$  na matriz de rigidez definida em (4.38), se o índice “ $l$ ” refere-se à linha da matriz de rigidez e o índice “ $m$ ” à coluna dessa linha, as funções  $N_0(x)$  e  $N_0(x)$  assumirão,

respectivamente, as posições  $N_l(x)$  e  $N_m(x)$  em (4.38) com o objetivo de gerar as contribuições para a linha “0” – coluna “0” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines;

-) como cada um dos trechos polinomiais de uma B-spline se posiciona em um único elemento da discretização, conforme já discutido no capítulo 3, pode haver mais de uma sobreposição de dois trechos polinomiais dentro do domínio completo, e as contribuições originadas através de cada uma dessas sobreposições de dois trechos terão que ser somadas para compor a contribuição total a ser endereçada àquela coluna, definida pelo nó sobre o qual houve o posicionamento do topo de uma das B-splines, daquela linha, definida pelo nó sobre o qual houve o posicionamento do topo da outra B-spline, da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines;

-) como o elemento “1” possui limites entre “0” e “ $\frac{1}{2}$ ”, em coordenadas globais, e limites entre “0” e “1”, em coordenadas locais, se faz necessário uma transformação de coordenadas conforme (3.57), que estabelece a seguinte relação entre a coordenada local “ $\xi$ ” e a coordenada global “ $x$ ”:

$$\xi = \frac{2}{1} x - \frac{2}{1} 0 \Rightarrow \xi = \frac{2}{1} x,$$

assim,

$$x = \frac{1}{2} \xi,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\xi} &= \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow dx &= \frac{1}{2} d\xi. \end{aligned} \quad (4.40)$$

-) de maneira análoga são geradas todas as demais sobreposições de dois trechos polinomiais responsáveis pela definição de quais funções assumirão as posições de  $N_l$  e  $N_m$ , na matriz de rigidez definida em (4.38), com o objetivo de participar das operações que determinarão as contribuições numéricas a serem encaminhadas para o “endereço” correto” dentro dessa matriz;

-) para o elemento “2”, conforme (3.57), tem-se:

$$\xi = \frac{2}{1} x - \frac{2}{1} \frac{1}{2} \Rightarrow \xi = \frac{2}{1} x - 1,$$

assim,

$$x = \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2},$$

e

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = \frac{1}{2} d\xi \text{ (idêntico à (4.40))};$$

-) como a matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, definida por (4.38), envolve um operador matemático aplicado às funções de forma  $N_l$  e  $N_m$ , e como a integração se dará segundo um sistema de coordenadas locais  $\xi$ , a aplicação do operador matemático se dará da seguinte forma:

$$\frac{d N_l}{dx} = \frac{d M_l}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \text{ e}$$

$$\frac{d N_m}{dx} = \frac{d M_m}{d\xi} \frac{d\xi}{dx},$$

conforme (3.57),  $\xi = \frac{2}{1} x$  para o elemento “1” e  $\xi = \frac{2}{1} x - 1$  para o elemento “2”,

então, como  $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{1}$  para ambos os elementos, tem-se:

$$\frac{d N_l}{dx} = \frac{d M_l}{d\xi} \frac{2}{1} \text{ e} \tag{4.41}$$

$$\frac{d N_m}{dx} = \frac{d M_m}{d\xi} \frac{2}{1}. \tag{4.42}$$

Conforme a Figura (4.9), intermediário aos nós “1” e “2” foi posicionado o ponto “5” e intermediário aos nós “2” e “3” foi posicionado o ponto “6”. A necessidade do posicionamento destes dois pontos se deu em função da montagem da matriz de transformação  $[K_c]$ , composta pelos valores das ordenadas das funções splines nas abscissas dos nós da discretização, que exige a associação de 5 variáveis físicas ao problema da barra.

Se a matriz de rigidez do sistema interpolado por splines é uma matriz 5 X 5 existem 5 coeficientes envolvidos na interpolação. Se existem 5 coeficientes envolvidos na interpolação, a matriz de transformação  $[K_c]$  também é uma matriz quadrada 5 X 5 e têm que existir 5 variáveis físicas que deverão ser associadas ao problema (conforme item 4.7.3.2), de forma a constituir o vetor  $\{w_c\}$  que passará a ser composto pelos deslocamentos nodais e pelos deslocamentos apresentados pelos pontos “5” e “6”.

Somente com os 3 nós além dos 2 auxiliares, posicionados nos limites dos elementos segundo os quais o domínio completo foi discretizado, tem-se a possibilidade de associação de 3 variáveis físicas, quais sejam  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$ , que são os respectivos deslocamentos apresentados por esses 3 nós.

Com a inclusão dos pontos “5” e “6”, torna-se possível a associação de mais dois deslocamentos físicos, os quais ocorrerão nesses pontos intermediários aos nós, ao problema da barra que está sendo objeto da interpolação por splines.

Através da associação ao problema das 5 variáveis físicas constituídas pelos deslocamentos apresentados pelos nós “1”, “2” e “3” e os apresentados pelos pontos “5” e “6” ( $w_1$ ,  $w_5$ ,  $w_2$ ,  $w_6$  e  $w_3$ ), a equação (4.23) torna-se para a barra:

$$[K_c]_{5 \times 5} \{c_m^s\}_{5 \times 1} = \{w_c\}_{5 \times 1} \Rightarrow [K_c] \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_5 \\ w_2 \\ w_6 \\ w_3 \end{Bmatrix}.$$

De acordo com (4.38), as contribuições, segundo integração local, para cada uma das vinte e cinco posições da matriz de rigidez global da estrutura interpolada por splines cúbicas (conforme exposto em 4.7.2 sobre a criação dos nós auxiliares, conforme a associação, já descrita neste capítulo, do topo da spline com o nó em que esse topo está posicionado, e segundo o procedimento de interpolação por spline descrito no capítulo 3) são apresentadas, com a inclusão das funções splines utilizadas e vinculadas ao nó cujo topo dessas foi posicionado, como:

$$\text{-) primeiro elemento: } M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \text{ vincula-se ao nó 0} \Rightarrow M_4(\xi) \equiv N_0(x);$$

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 \text{ vincula-se ao nó 1} \Rightarrow M_3(\xi) \equiv N_1(x);$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \text{ vincula-se ao nó } 2$$

$$\Rightarrow M_2(\xi) \equiv N_2(x); e$$

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 \text{ vincula-se ao nó } 3 \Rightarrow M_1(\xi) \equiv N_3(x).$$

-) segundo elemento:  $M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4}$  vincula-se ao nó 1  $\Rightarrow M_4(\xi) \equiv N_1(x)$ ;

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 \text{ vincula-se ao nó } 2 \Rightarrow M_3(\xi) \equiv N_2(x);$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \text{ vincula-se ao nó } 3$$

$$\Rightarrow M_2(\xi) \equiv N_3(x); e$$

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 \text{ vincula-se ao nó } 4 \Rightarrow M_1(\xi) \equiv N_4(x).$$

-) as contribuições:

$$K_{00}^S = K_{001}^S + K_{002}^S = K_{001}^S + 0 = K_{001}^S$$

onde:  $K_{001}^S$  é a contribuição, para a linha “0” – coluna “0” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, gerada através da sobreposição de dois trechos polinomiais ocorrida no elemento “1” da discretização da Figura (4.9); e

$K_{002}^S$  é a contribuição, para a linha “0” – coluna “0” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, gerada através da sobreposição de dois trechos polinomiais ocorrida no elemento “2” da discretização da Figura (4.9) (no caso da linha “0” – coluna “0” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, a sobreposição de dois trechos polinomiais ocorre exclusivamente no elemento “1”, portanto, somente a contribuição gerada nesse elemento será enviada para totalizar as contribuições da linha “0” – coluna “0” dessa matriz);

$$K_{00}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_0}{dx} \frac{dN_0}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{00}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{9}{40}$$

sendo que: o primeiro termo da integral,  $\frac{dM_4}{d\xi}$ , está multiplicado por  $\frac{2}{1}$  em função de (4.41);

o terceiro termo da integral,  $\frac{dM_4}{d\xi}$ , está multiplicado por  $\frac{2}{1}$  em função de (4.42); e

“ $\frac{1}{2} d\xi$ ” ocorre em função de (4.40).

$$K_{01}^S = K_{011}^S + K_{012}^S = K_{011}^S + 0 = K_{011}^S$$

$$K_{01}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_0}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{01}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{21}{80}$$

$$K_{02}^S = K_{021}^S + K_{022}^S = K_{021}^S + 0 = K_{021}^S$$

$$K_{02}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_0}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{02}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{9}{20} \right)$$

$$K_{03}^S = K_{031}^S + K_{032}^S = K_{031}^S + 0 = K_{031}^S$$

$$K_{03}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_0}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{03}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{3}{80} \right)$$

$$K_{04}^S = K_{041}^S + K_{042}^S = 0 + 0 = 0$$

$$K_{10}^S = K_{101}^S + K_{102}^S = K_{101}^S + 0 = K_{101}^S$$

$$K_{10}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_0}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{10}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{21}{80}$$

$$K_{11}^S = K_{111}^S + K_{112}^S$$

$$K_{11}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx =$$

$$= A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{11}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi +$$

$$+ A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{3}{2}$$

$$K_{12}^S = K_{121}^S + K_{122}^S$$

$$K_{12}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx =$$

$$= A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{12}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi +$$

$$+ A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{33}{40} \right)$$

$$K_{13}^S = K_{131}^S + K_{132}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{13}^S &= A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx = \\
&= A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{13}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{9}{10} \right)
\end{aligned}$$

$$K_{14}^S = K_{141}^S + K_{142}^S = 0 + K_{142}^S = K_{142}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{14}^S &= A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_4}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{14}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{3}{80} \right)
\end{aligned}$$

$$K_{20}^S = K_{201}^S + K_{202}^S = K_{201}^S + 0 = K_{201}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{20}^S &= A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_0}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{20}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{9}{20} \right)
\end{aligned}$$

$$K_{21}^S = K_{211}^S + K_{212}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{21}^S &= A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = \\
&= A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_{21}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &+ A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{33}{40} \right) \end{aligned}$$

$$K_{22}^S = K_{221}^S + K_{222}^S$$

$$\begin{aligned} K_{22}^S &= A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \\ &= A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{22}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &+ A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{51}{20} \end{aligned}$$

$$K_{23}^S = K_{231}^S + K_{232}^S$$

$$\begin{aligned} K_{23}^S &= A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx = \\ &= A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{23}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &+ A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{33}{40} \right) \end{aligned}$$

$$K_{24}^S = K_{241}^S + K_{242}^S = 0 + K_{242}^S = K_{242}^S$$

$$K_{24}^S = A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_4}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{24}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{9}{20} \right)$$

$$K_{30}^S = K_{301}^S + K_{302}^S = K_{301}^S + 0 = K_{301}^S$$

$$K_{30}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_0}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{30}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{3}{80} \right)$$

$$K_{31}^S = K_{311}^S + K_{312}^S$$

$$K_{31}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx =$$

$$= A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{31}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi +$$

$$+ A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{9}{10} \right)$$

$$K_{32}^S = K_{321}^S + K_{322}^S$$

$$K_{32}^S = A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx =$$

$$= A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_{32}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &+ A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{33}{40} \right) \end{aligned}$$

$$K_{33}^S = K_{331}^S + K_{332}^S$$

$$\begin{aligned} K_{33}^S &= A E \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx + A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx = \\ &= A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi + A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{33}^S &= A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &+ A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$K_{34}^S = K_{341}^S + K_{342}^S = 0 + K_{342}^S = K_{342}^S$$

$$K_{34}^S = A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_4}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{34}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{21}{80}$$

$$K_{40}^S = K_{401}^S + K_{402}^S = 0 + 0 = 0$$

$$K_{41}^S = K_{411}^S + K_{412}^S = 0 + K_{412}^S = K_{412}^S$$

$$K_{41}^S = A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_4}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{41}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_4}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{3}{80} \right)$$

$$K_{42}^S = K_{421}^S + K_{422}^S = 0 + K_{422}^S = K_{422}^S$$

$$K_{42}^S = A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_4}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{42}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_3}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \left( -\frac{9}{20} \right)$$

$$K_{43}^S = K_{431}^S + K_{432}^S = 0 + K_{432}^S = K_{432}^S$$

$$K_{43}^S = A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_4}{dx} \frac{dN_3}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{43}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_2}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{21}{80}$$

$$K_{44}^S = K_{441}^S + K_{442}^S = 0 + K_{442}^S = K_{442}^S$$

$$K_{44}^S = A E \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{dN_4}{dx} \frac{dN_4}{dx} dx = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{44}^S = A E \int_0^1 \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{dM_1}{d\xi} \frac{2}{1} \frac{1}{2} d\xi = A E \frac{9}{40}$$

Agrupando-se as contribuições na matriz  $K_{lm}^S$ , tem-se

$$[k_{lm}^S] = \begin{bmatrix} \frac{9}{40} & \frac{21}{80} & -\frac{9}{20} & -\frac{3}{80} & 0 \\ \frac{21}{80} & \frac{3}{9} & -\frac{33}{51} & -\frac{9}{33} & -\frac{3}{9} \\ \frac{9}{20} & -\frac{33}{40} & \frac{20}{20} & -\frac{40}{40} & -\frac{20}{20} \\ \frac{3}{80} & \frac{9}{10} & \frac{33}{40} & \frac{3}{21} & \frac{21}{80} \\ 0 & -\frac{3}{80} & -\frac{9}{20} & \frac{21}{80} & \frac{9}{40} \end{bmatrix}$$

Esquemáticamente, pode-se agrupar as contribuições para cada coluna de cada linha, da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines  $K_{lm}^S$ , em função do elemento em que ocorreu a sobreposição, dos dois trechos polinomiais das B-splines, responsável pela origem da contribuição numérica a ser endereçada.

No agrupamento matricial esquemático a seguir,

- (1)  $\Rightarrow$  sobreposição de dois trechos polinomiais ocorrida no elemento “1” da discretização apresentada na Figura (4.9), em função do posicionamento de duas B-splines: uma responsável pela definição da linha e outra responsável pela definição da coluna da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines  $K_{lm}^S$  ;
- [2]  $\Rightarrow$  sobreposição de dois trechos polinomiais ocorrida no elemento “2” da discretização apresentada na Figura (4.9), em função do posicionamento de duas B-splines: uma responsável pela definição da linha e outra responsável pela definição da coluna da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines  $K_{lm}^S$  :

$$[K_{lm}^S] \equiv \begin{bmatrix} (1) & (1) & (1) & (1) & 0 \\ (1) & (1)+[2] & (1)+[2] & (1)+[2] & [2] \\ (1) & (1)+[2] & (1)+[2] & (1)+[2] & [2] \\ (1) & (1)+[2] & (1)+[2] & (1)+[2] & [2] \\ 0 & [2] & [2] & [2] & [2] \end{bmatrix}$$

Fica evidente através desse agrupamento esquemático da origem das contribuições numéricas, responsáveis pela montagem da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, que a matriz elementar gerada, através da sobreposição de dois trechos polinomiais de splines cúbicas, no elemento “1” é uma matriz 4 X 4 posicionada, na matriz de rigidez global da estrutura, a partir da posição “0” – “0”, ou seja, a partir da coluna “0” da linha “0”. Através desse mesmo agrupamento, fica evidenciado também que a matriz elementar gerada, através da sobreposição de dois trechos polinomiais de splines cúbicas, no elemento “2” é uma matriz 4 X 4 posicionada, na matriz de rigidez global da estrutura, a partir da posição “1” – “1”, ou seja, a partir da coluna “1” da linha “1”.

A regra para a montagem da matriz de rigidez global, do sistema interpolado por splines cúbicas, de uma estrutura discretizada por vários elementos pode ser deduzida a partir dessa montagem bastante simples. Se houvesse um terceiro elemento na discretização, a matriz elementar deste também seria uma matriz 4 X 4, a ser posicionada a partir da coluna “2” da linha “2” da matriz de rigidez

global da estrutura. E assim, sucessivamente de modo a caracterizar a formação de uma matriz de banda “sete”, quantos forem os elementos através dos quais o domínio completo foi subdividido, as matrizes elementares destes seriam posicionadas e as contribuições elementares sempre sendo somadas às existentes nas colunas das linhas abrangidas em função de cada um desses posicionamentos matriciais elementares.

O vetor de carga da estrutura interpolada por splines cúbicas  $\{f_l^s\}$ , segundo (4.39), é dado por

$$\{f_l^s\} = (N_l F)_L - (N_l F)_0 = [N_l(x=L) F_{x=L}] - [N_l(x=0) F_{x=0}], \text{ ou}$$

$$\{f_l^s\} = \begin{Bmatrix} 0.F_3 \\ 0.F_3 \\ \frac{1}{4}.F_3 \\ 1.F_3 \\ \frac{1}{4}.F_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}.F_1 \\ 1.F_1 \\ \frac{1}{4}.F_1 \\ 0.F_1 \\ 0.F_1 \end{Bmatrix}.$$

E, a equação matricial  $[K_{lm}^s] \{c_m^s\} = \{f_l^s\}$ , conforme (4.20), do sistema interpolado por spline

torna-se

$$\begin{bmatrix} 9 & 21 & -9 & -3 & 0 \\ 40 & 80 & -20 & -80 & 3 \\ 21 & 3 & -33 & -9 & -3 \\ 80 & 2 & -40 & -10 & -80 \\ 9 & 33 & 51 & 33 & 9 \\ -20 & -40 & 20 & -40 & 20 \\ 3 & 9 & -33 & 3 & 21 \\ -80 & -10 & -40 & 2 & -80 \\ 0 & -3 & -9 & 21 & 9 \\ 0 & -80 & -20 & 80 & 40 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.F_3 \\ 0.F_3 \\ \frac{1}{4}.F_3 \\ 1.F_3 \\ \frac{1}{4}.F_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}.F_1 \\ 1.F_1 \\ \frac{1}{4}.F_1 \\ 0.F_1 \\ 0.F_1 \end{Bmatrix}.$$

Conforme já exposto em 4.7.1,

$$w_1 = w(x = x_1 = 0) = c_0 \frac{1}{4} + c_1 \cdot 1 + c_2 \frac{1}{4} + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 0$$

$$w_5 = w(x = x_5 = 25) = c_0 \frac{1}{32} + c_1 \frac{23}{32} + c_2 \frac{23}{32} + c_3 \frac{1}{32} + c_4 \cdot 0$$

$$w_2 = w(x = x_2 = 50) = c_0 \cdot 0 + c_1 \frac{1}{4} + c_2 \cdot 1 + c_3 \frac{1}{4} + c_4 \cdot 0$$

$$w_6 = w(x = x_6 = 75) = c_0 \cdot 0 + c_1 \frac{1}{32} + c_2 \frac{23}{32} + c_3 \frac{23}{32} + c_4 \frac{1}{32}$$

$$w_3 = w(x = x_3 = 100) = c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \frac{1}{4} + c_3 \cdot 1 + c_4 \frac{1}{4}$$

faz com que a equação matricial  $[K_c] \{c_m^s\} = \{w_c\}$ , conforme (4.23), torne-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{23}{32} & \frac{23}{32} & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{23}{32} & \frac{23}{32} & \frac{1}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_5 \\ w_2 \\ w_6 \\ w_3 \end{Bmatrix};$$

onde,

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{23}{32} & \frac{23}{32} & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{23}{32} & \frac{23}{32} & \frac{1}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

e

$$\{w_c\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_5 \\ w_2 \\ w_6 \\ w_3 \end{Bmatrix}.$$

Através do que foi exposto em 4.7.3.2 a respeito da metodologia utilizada, chegou-se, conforme (4.28), a

$$[K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1} \{w_c\} = [K_c]^{-T} \{f_l^S\};$$

onde,

$$[K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1} = [K_{físico}] \text{ e}$$

$$[K_c]^{-T} \{f_l^S\} = \{f_{físico}\}.$$

Dessas operações matriciais responsáveis, respectivamente, pela transformação de  $[K_{lm}^S]$  e  $\{f_l^S\}$  em  $[K_{físico}]$  e  $\{f_{físico}\}$  resultaram

$$[K_{físico}] = \begin{bmatrix} \frac{223}{45} & -\frac{284}{45} & \frac{28}{15} & -\frac{28}{45} & \frac{1}{9} \\ \frac{284}{45} & \frac{128}{9} & \frac{152}{15} & \frac{128}{45} & -\frac{28}{45} \\ -\frac{45}{28} & \frac{9}{152} & -\frac{15}{248} & \frac{45}{152} & \frac{45}{28} \\ \frac{15}{28} & -\frac{15}{128} & \frac{15}{152} & -\frac{15}{128} & \frac{15}{284} \\ -\frac{45}{1} & \frac{45}{28} & -\frac{15}{28} & \frac{9}{284} & -\frac{45}{223} \\ \frac{1}{9} & -\frac{45}{45} & \frac{28}{15} & -\frac{284}{45} & \frac{223}{45} \end{bmatrix}$$

e

$$\{f_{físico}\} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}.$$

Conforme (4.29),

$$[K_{f\u00edsico}] \{w_c\} = \{f_{f\u00edsico}\},$$

e, com a imposi\u00e7\u00e3o das condi\u00e7\u00f5es de contorno, conforme (4.31),

$$\begin{cases} w(0) = 0; & e \\ A E \frac{dw}{dx} \Big|_{x=L} = F = F_3 = 1 \end{cases}$$

pode-se colocar, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \frac{223}{45} & -\frac{284}{45} & \frac{28}{15} & -\frac{28}{45} & \frac{1}{9} \\ \frac{284}{128} & \frac{128}{152} & \frac{15}{248} & \frac{45}{152} & -\frac{28}{45} \\ -\frac{45}{28} & \frac{9}{152} & \frac{15}{248} & \frac{45}{152} & \frac{45}{28} \\ \frac{15}{28} & -\frac{15}{128} & \frac{15}{152} & -\frac{15}{128} & \frac{15}{284} \\ -\frac{45}{28} & \frac{45}{128} & -\frac{15}{152} & \frac{9}{128} & -\frac{45}{284} \\ \frac{1}{9} & -\frac{28}{45} & \frac{28}{15} & -\frac{284}{45} & \frac{223}{45} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ w_5 \\ w_2 \\ w_6 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_3 = 1 \end{Bmatrix};$$

obtendo-se como solu\u00e7\u00e3o

$$\begin{cases} w_5 = \frac{1}{4} \\ w_2 = \frac{1}{2} \\ w_6 = \frac{3}{4} \\ w_3 = 1 \end{cases}$$

e

$$\{F_1 = 1\}.$$

Atrav\u00e9s de (4.23),

$$[K_c] \{c_m^s\} = \{w_c\},$$

pode-se recuperar os coeficientes das splines cúbicas, vinculadas a cada um dos nós da discretização através do posicionamento do topo de cada uma delas nesses respectivos nós, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{32} & \frac{23}{32} & \frac{23}{32} & \frac{1}{32} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{32} & \frac{23}{32} & \frac{23}{32} & \frac{1}{32} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ w_5 = \frac{1}{4} \\ w_2 = \frac{1}{2} \\ w_6 = \frac{3}{4} \\ w_3 = 1 \end{Bmatrix}.$$

Vetorialmente, a solução para os coeficientes das splines pode ser apresentada como

$$\{c_i^s\} = \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Numericamente, os resultados analíticos são comparados com os obtidos através da interpolação por splines nas Tabelas (4.1) e (4.2).

De posse dos coeficientes das splines, com os respectivos topos posicionados em cada um dos nós da discretização, torna-se possível a plotagem dos resultados obtidos para o elemento estrutural “Barra”, como apresentado a seguir nas Figuras (4.10) e (4.11).

A função deslocamento, dentro dos limites compreendidos pelo elemento “1” da Figura (4.9)

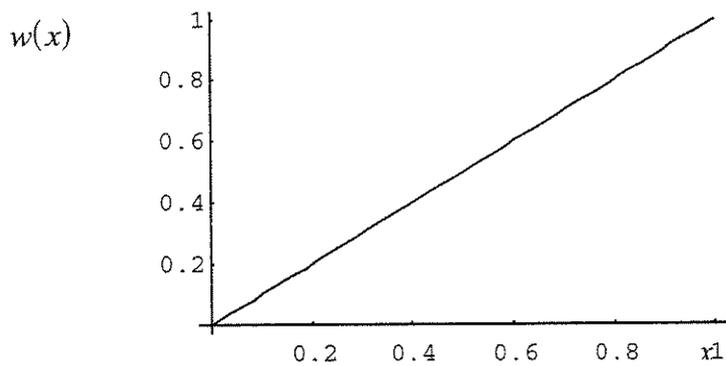
$\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ , para a estrutura em forma de barra analisada é escrita como:

$$w(x) = \sum_{m=0}^4 c_m^s N_m(x) = c_0^s N_0(x) + c_1^s N_1(x) + c_2^s N_2(x) + c_3^s N_3(x) + c_4^s N_4(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(x) &= -\frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right) + \frac{1}{4} \right] \\ &+ 0 \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{2}{1} x \right)^2 + 1 \right] + \frac{1}{3} \left[ -\frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right) + \frac{1}{4} \right] \\ &\quad + \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 \right] + 1 \cdot 0 \end{aligned}$$

A função deslocamento, dentro dos limites compreendidos pelo elemento "2" da Figura (4.9)  $\left( \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right)$ , para a estrutura em forma de barra analisada é escrita como:

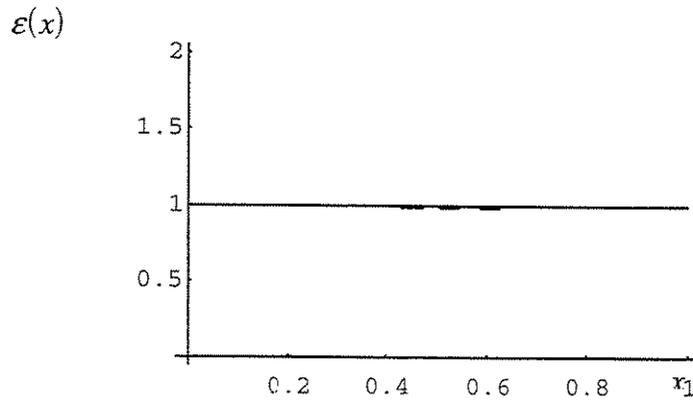
$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{m=0}^4 c_m^S N_m(x) = c_0^S N_0(x) + c_1^S N_1(x) + c_2^S N_2(x) + c_3^S N_3(x) + c_4^S N_4(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow w(x) &= -\frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right) + \frac{1}{4} \right] \\ &+ \frac{1}{3} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^2 + 1 \right] \\ &+ \frac{2}{3} \left[ -\frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right) + \frac{1}{4} \right] \\ &\quad + 1 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 \right] \end{aligned}$$



**Figura (4.10):** Translações  $w$  da barra tracionada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.1):** Translações  $w$  da barra tracionada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

$x$ [m]	Resultado Analítico ( $w$ )	Resultado Obtido ( $w$ )	$ \%$ de erro
0	0	0	0
0,125	0,125	0,125	0
0,25	0,25	0,25	0
0,375	0,375	0,375	0
0,5	0,5	0,5	0
0,625	0,625	0,625	0
0,75	0,75	0,75	0
0,875	0,875	0,875	0
1	1	1	0



**Figura (4.11):** Deformações  $\varepsilon$  da barra tracionada, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.2):** Deformações  $\varepsilon$  da barra tracionada, discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

x [m]	Resultado Analítico ( $\varepsilon$ )	Resultado Obtido ( $\varepsilon$ )	\% de erro
0	1	1	0
0,125	1	1	0
0,25	1	1	0
0,375	1	1	0
0,5	1	1	0
0,625	1	1	0
0,75	1	1	0
0,875	1	1	0
1	1	1	0

Como pode ser observado através da Figura (4.10), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para os deslocamentos axiais da barra e os obtidos analiticamente, e através da Figura (4.11), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para as deformações da barra e os obtidos analiticamente, obteve-se resultados idênticos aos analíticos através das interpolações por splines cúbicas. A comprovação numérica pode ser feita através das Tabelas (4.1) e (4.2).

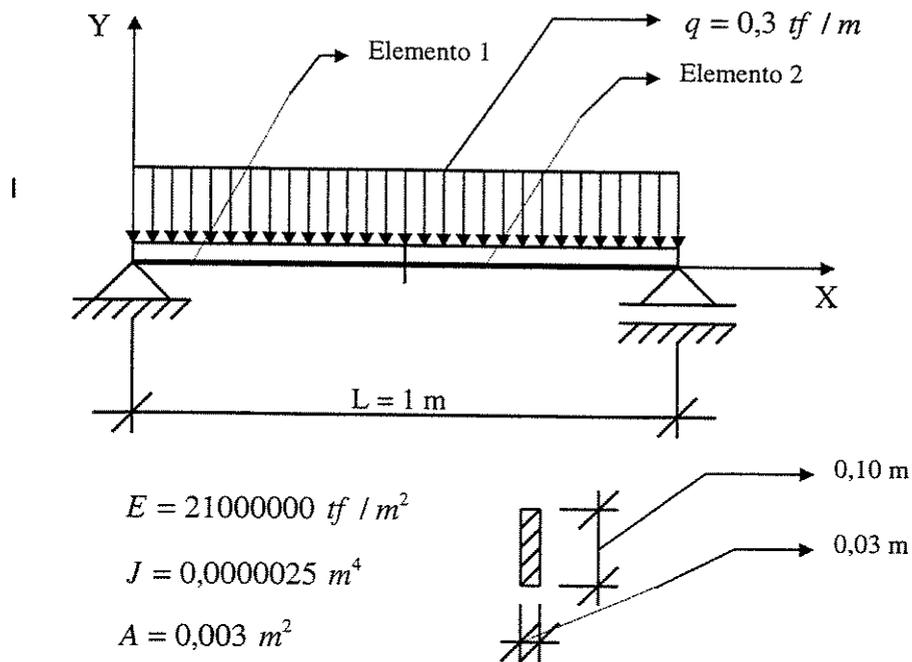
A obtenção de tais resultados era absolutamente esperada, uma vez que a solução analítica para os deslocamentos axiais da barra, conforme (4.32), é dada por um polinômio de grau “1”, e a aproximação foi feita por uma polinomial por partes de grau “3”, ou seja, foi feita uma aproximação cúbica. A solução analítica para as deformações apresentadas pela barra, conforme (4.33), é dada por uma constante, e a aproximação foi feita por um polinômio de grau “2”, ou seja, foi feita uma aproximação quadrática.

Portanto, em ambos os casos, para os deslocamentos axiais e para as deformações da barra engastada (barra em balanço), a solução obtida é a própria solução analítica.

### ***4.8.3 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS***

A partir desta seção, até o final do capítulo, será analisado o elemento estrutural Viga. Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga biapoiada. Conforme a Figura (4.12), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por dois elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.12).



**Figura (4.12): Viga biapoada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.**

Conforme o item 4.6.2, a equação diferencial característica do elemento estrutural “Viga” é:

$$E \cdot J \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) \quad (4.43)$$

onde:

$E$  = módulo de elasticidade de Young (longitudinal);

$J$  = momento de inércia da seção transversal em relação a seus eixos centroidais;

$w$  = deslocamento transversal; e

$q(x)$  = carregamento distribuído, através do qual a estrutura está sendo solicitada.

Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$\begin{aligned}w(0) &= 0 ; \\M_z(0) &= 0 ; \\w(L) &= 0 ; \quad e \\M_z(L) &= 0 .\end{aligned}\tag{4.44}$$

Segundo as deduções apresentadas em 4.6.2, a solução analítica para os deslocamentos da viga é

$$w(x) = \frac{q x}{24 E J} (L^3 - 2 L x^2 + x^3)\tag{4.45}$$

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

- ) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;
- ) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e
- ) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

- ) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf / m}^2$  ..

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

- ) apoiada (extremidade esquerda) - apoiada (extremidade direita).

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

- )  $q = 0,3 \text{ tf / m}$  (carga uniformemente distribuída).

A solução da equação diferencial da viga (4.43), mediante a imposição das condições de contorno (4.44), será aproximada com o auxílio de uma discretização envolvendo dois elementos. Nesta aproximação serão utilizadas splines cúbicas como funções de forma, as quais atuarão diretamente nas interpolações, sendo responsáveis pela constituição da matriz de rigidez e do vetor de carga do sistema interpolado por splines.

Segundo o procedimento de interpolação por spline descrito no capítulo 3 e através da metodologia exposta em 4.7.3, as mesmas funções de forma, componentes dos quatro trechos de uma spline cúbica completa e definidas no intervalo de 0 a 1, que foram utilizadas para a análise da barra,

dentro do método dos elementos finitos, foram também utilizadas para a análise da viga. Conforme (4.34), (4.35), (4.36) e (4.37), tais funções de aproximação e de ponderação apresentam-se, respectivamente, como:

$$M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} ;$$

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 ;$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} ;$$

e

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 .$$

Através de resíduos ponderados - método de Galerkin, a matriz de rigidez  $K_{lm}^S$  e o vetor de carga  $f_l^S$  da estrutura interpolada por splines cúbicas (como deduzido em 4.6.2) são expressos, respectivamente, por

$$[K_{lm}^S] = E J \int_0^L \frac{d^2 N_l}{dx^2} \frac{d^2 N_m}{dx^2} dx \quad (4.46)$$

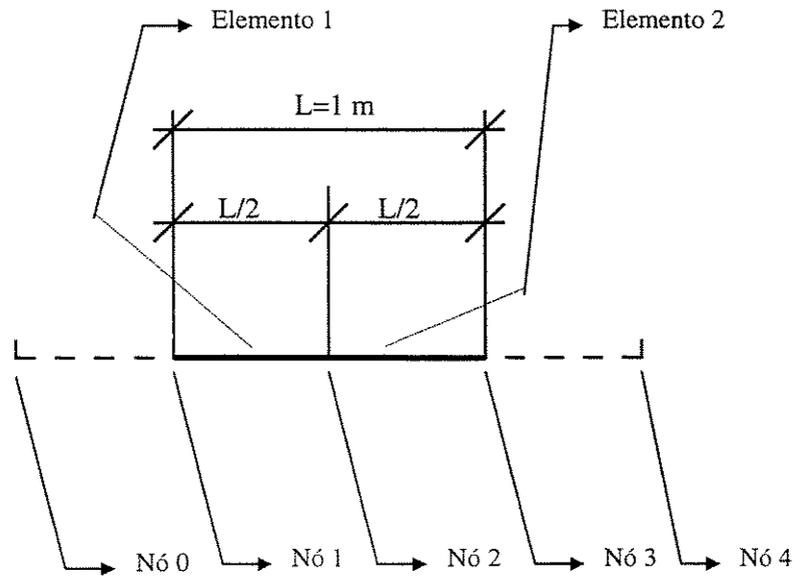
$$\begin{aligned} \{f_l^S\} = & -q_0 \int_0^L N_l dx + (N_l v)_0 - (N_l v)_L + \\ & + \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_L - \left( \frac{dN_l}{dx} m \right)_0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como as splines cúbicas utilizadas como funções de aproximação e funções de ponderação possuem tamanho 1, por serem definidas no intervalo de 0 a 1, e os limites globais de integração variam

-) para a primeira metade da viga: de 0 a  $\frac{L}{2}$  ; e

-) para a segunda metade da viga: de  $\frac{L}{2}$  a L ;

ou seja, globalmente, necessita-se de funções spline de tamanho  $\frac{1}{2}$ , torna-se necessário, para que seja possível a integração segundo funções definidas localmente, a transformação de coordenadas globais para locais (Jacobiano), conforme a transformação de coordenadas exposta no item anterior, 4.8.2, referente à estruturas em forma de barras, transformação essa que foi totalmente embasada pelos fundamentos expostos no capítulo 3.



*Figura (4.13): Colocação dos nós dos dois elementos da discretização da viga.*

Tudo o que foi descrito para o caso da barra em termos das sobreposições dos dois trechos polinomiais das B-splines é absolutamente válido para o caso da viga, pois tal procedimento aplica-se a toda estrutura unidimensional.

As mesmas transformações de coordenadas globais para locais, empregadas no exemplo da barra, são aqui aplicáveis. Ambas as estruturas encontram-se discretizadas por dois elementos, então, (4.40), definido como

$$dx = \frac{1}{2} d\xi ,$$

será aqui também aplicado para ambos os elementos da discretização.

Como o operador matemático da matriz de rigidez, do sistema interpolado por splines, da viga é diferente do operador matemático presente na matriz de rigidez da barra, (4.41) e (4.42) terão que ser redefinidos para estruturas em forma de viga.

Em função da integral responsável pela definição da matriz de rigidez da viga, conforme (4.46), ser efetuada segundo um sistema de coordenadas locais  $\xi$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_l}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d N_l}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d N_l}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d N_l}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) \frac{d\xi}{dx} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2 N_l}{dx^2} = \frac{d^2 N_l}{d\xi^2} \frac{d\xi}{dx} \frac{d\xi}{dx} \Rightarrow \frac{d^2 N_l}{dx^2} = \frac{d^2 N_l}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \end{aligned}$$

Para o elemento "1" da Figura (4.13), como no caso da barra, tem-se

$$\xi = \frac{2}{1} x - \frac{2}{1} 0 \Rightarrow \xi = \frac{2}{1} x,$$

então:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{1} x.$$

Para o elemento "2" da Figura (4.13), como no caso da barra, tem-se

$$\xi = \frac{2}{1} x - \frac{2}{1} \frac{1}{2} \Rightarrow \xi = \frac{2}{1} x - 1,$$

então:

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{1} x.$$

Se para ambos os elementos que compõem a discretização da viga apresentada na Figura (4.13) é válida a relação

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{1} x,$$

tem-se:

$$\frac{d^2 N_l}{dx^2} = \frac{d^2 N_l}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \Rightarrow \frac{d^2 N_l}{dx^2} = \frac{d^2 N_l}{d\xi^2} \frac{4}{1}. \quad (4.48)$$

De forma análoga, obtém-se:

$$\frac{d^2 N_m}{dx^2} = \frac{d^2 N_m}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \Rightarrow \frac{d^2 N_m}{dx^2} = \frac{d^2 N_m}{d\xi^2} \frac{4}{1}. \quad (4.49)$$

De acordo com (4.46), as contribuições, segundo integração local, para cada uma das vinte e cinco posições da matriz de rigidez global da estrutura interpolada por splines cúbicas (conforme exposto em 4.7.2 sobre a criação dos nós auxiliares, conforme a associação, já descrita neste capítulo, do topo da spline com o nó em que esse topo está posicionado, e segundo o procedimento de interpolação por spline descrito no capítulo 3) são apresentadas, com a inclusão das funções splines utilizadas e vinculadas ao nó cujo topo dessas foi posicionado, como:

$$\text{-) primeiro elemento: } M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \text{ vincula-se ao nó } 0 \Rightarrow M_4(\xi) \equiv N_0(x);$$

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 \text{ vincula-se ao nó } 1 \Rightarrow M_3(\xi) \equiv N_1(x);$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \text{ vincula-se ao nó } 2$$

$$\Rightarrow M_2(\xi) \equiv N_2(x); \text{ e}$$

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 \text{ vincula-se ao nó } 3 \Rightarrow M_1(\xi) \equiv N_3(x).$$

$$\text{-) segundo elemento: } M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \text{ vincula-se ao nó } 1 \Rightarrow M_4(\xi) \equiv N_1(x);$$

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 \text{ vincula-se ao nó } 2 \Rightarrow M_3(\xi) \equiv N_2(x);$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} \text{ vincula-se ao nó } 3$$

$$\Rightarrow M_2(\xi) \equiv N_3(x); \text{ e}$$

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 \text{ vincula-se ao nó 4} \Rightarrow M_1(\xi) \equiv N_4(x).$$

-) as contribuições:

$$K_{00}^S = K_{001}^S + K_{002}^S = K_{001}^S + 0 = K_{001}^S$$

onde:

$K_{001}^S$  é a contribuição, para a linha “0” – coluna “0” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, gerada através da sobreposição de dois trechos polinomiais ocorrida no elemento “1” da discretização da Figura (4.13); e

$K_{002}^S$  é a contribuição, para a linha “0” – coluna “0” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, gerada através da sobreposição de dois trechos polinomiais ocorrida no elemento “2” da discretização da Figura (4.13) (no caso da linha “0” – coluna “0” da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, a sobreposição de dois trechos polinomiais ocorre exclusivamente no elemento “1”, portanto, somente a contribuição gerada nesse elemento será enviada para totalizar as contribuições da linha “0” – coluna “0” dessa matriz);

$$\begin{aligned} K_{00}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_0}{dx^2} \frac{d^2 N_0}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ &\Rightarrow K_{00}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 315 \end{aligned}$$

sendo que: o primeiro termo da integral,  $\frac{d^2 M_4}{d\xi^2}$ , está multiplicado por  $\frac{4}{1}$  em função de (4.48);

o terceiro termo da integral,  $\frac{d^2 M_4}{d\xi^2}$ , está multiplicado por  $\frac{4}{1}$  em função de (4.49); e

“ $\frac{1}{2} d\xi$ ” ocorre em função de (4.40), como no caso da barra.

$$K_{01}^S = K_{011}^S + K_{012}^S = K_{011}^S + 0 = K_{011}^S$$

$$K_{01}^S = E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_0}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{01}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -472,5$$

$$K_{02}^S = K_{021}^S + K_{022}^S = K_{021}^S + 0 = K_{021}^S$$

$$K_{02}^S = E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_0}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{02}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 0$$

$$K_{03}^S = K_{031}^S + K_{032}^S = K_{031}^S + 0 = K_{031}^S$$

$$K_{03}^S = E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_0}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{03}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 157,5$$

$$K_{04}^S = K_{041}^S + K_{042}^S = 0 + 0 = 0$$

$$K_{10}^S = K_{101}^S + K_{102}^S = K_{101}^S + 0 = K_{101}^S$$

$$K_{10}^S = E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_0}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{10}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -472,5$$

$$K_{11}^S = K_{111}^S + K_{112}^S$$

$$\begin{aligned} K_{11}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx = \\ &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{11}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 1260 \end{aligned}$$

$$K_{12}^S = K_{121}^S + K_{122}^S$$

$$\begin{aligned} K_{12}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx = \\ &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{12}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -945 \end{aligned}$$

$$K_{13}^S = K_{131}^S + K_{132}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{13}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx = \\
&= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow K_{13}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 0
\end{aligned}$$

$$K_{14}^S = K_{141}^S + K_{142}^S = 0 + K_{142}^S = K_{142}^S$$

$$K_{14}^S = E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_1}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{14}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 157,5$$

$$K_{20}^S = K_{201}^S + K_{202}^S = K_{201}^S + 0 = K_{201}^S$$

$$K_{20}^S = E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_0}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{20}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 0$$

$$K_{21}^S = K_{211}^S + K_{212}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{21}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx = \\
&= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{21}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -945
\end{aligned}$$

$$K_{22}^S = K_{221}^S + K_{222}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{22}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx = \\
&= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{22}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 1890
\end{aligned}$$

$$K_{23}^S = K_{231}^S + K_{232}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{23}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx = \\
&= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{23}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -945
\end{aligned}$$

$$K_{24}^S = K_{241}^S + K_{242}^S = 0 + K_{242}^S = K_{242}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{24}^S &= E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_2}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{24}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 0
\end{aligned}$$

$$K_{30}^S = K_{301}^S + K_{302}^S = K_{301}^S + 0 = K_{301}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{30}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_0}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{30}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 157,5
\end{aligned}$$

$$K_{31}^S = K_{311}^S + K_{312}^S$$

$$\begin{aligned} K_{31}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx = \\ &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{31}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 0 \end{aligned}$$

$$K_{32}^S = K_{321}^S + K_{322}^S$$

$$\begin{aligned} K_{32}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx = \\ &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\ \Rightarrow K_{32}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\ &\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -945 \end{aligned}$$

$$K_{33}^S = K_{331}^S + K_{332}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{33}^S &= E J \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx + E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx = \\
&= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{33}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi + \\
&\quad + E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 1260
\end{aligned}$$

$$K_{34}^S = K_{341}^S + K_{342}^S = 0 + K_{342}^S = K_{342}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{34}^S &= E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_3}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{34}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -472,5
\end{aligned}$$

$$K_{40}^S = K_{401}^S + K_{402}^S = 0 + 0 = 0$$

$$K_{41}^S = K_{411}^S + K_{412}^S = 0 + K_{412}^S = K_{412}^S$$

$$\begin{aligned}
K_{41}^S &= E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_1}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow \\
\Rightarrow K_{41}^S &= E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_4}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 157,5
\end{aligned}$$

$$K_{42}^S = K_{421}^S + K_{422}^S = 0 + K_{422}^S = K_{422}^S$$

$$K_{42}^S = E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_2}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{42}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_3}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 0$$

$$K_{43}^S = K_{431}^S + K_{432}^S = 0 + K_{432}^S = K_{432}^S$$

$$K_{43}^S = E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_3}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{43}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_2}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = -472,5$$

$$K_{44}^S = K_{441}^S + K_{442}^S = 0 + K_{442}^S = K_{442}^S$$

$$K_{44}^S = E J \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{d^2 N_4}{dx^2} \frac{d^2 N_4}{dx^2} dx = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \left( \frac{d\xi}{dx} \right)^2 \frac{1}{2} d\xi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K_{44}^S = E J \int_0^1 \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{d^2 M_1}{d\xi^2} \frac{4}{1} \frac{1}{2} d\xi = 315$$

Agrupando-se as contribuições na matriz  $K_{lm}^S$ , tem-se

$$[K_{lm}^S] = \begin{bmatrix} 315 & -472,5 & 0 & 157,5 & 0 \\ -472,5 & 1260 & -945 & 0 & 157,5 \\ 0 & -945 & 1890 & -945 & 0 \\ 157,5 & 0 & -945 & 1260 & -472,5 \\ 0 & 157,5 & 0 & -472,5 & 315 \end{bmatrix}$$

A mesma regra de montagem para a matriz de rigidez global do sistema interpolado por splines,  $[K_{lm}^S]$ , discutida na seção anterior para o problema da barra, pode aqui ser repetida, ou seja, a

montagem dessa matriz a partir das matrizes elementares é absolutamente idêntica à discutida no estudo da barra. Portanto, a representação esquemática das contribuições elementares, na matriz de rigidez global, é aqui repetida:

$$[K_{im}^s] \equiv \begin{bmatrix} (1) & (1) & (1) & (1) & 0 \\ (1) & (1)+[2] & (1)+[2] & (1)+[2] & [2] \\ (1) & (1)+[2] & (1)+[2] & (1)+[2] & [2] \\ (1) & (1)+[2] & (1)+[2] & (1)+[2] & [2] \\ 0 & [2] & [2] & [2] & [2] \end{bmatrix}$$

O vetor de carga da estrutura interpolada por splines cúbicas  $\{f_i^s\}$ , segundo (4.47), é dado por

$$\{f_i^s\} = \begin{Bmatrix} -0,009375 \\ -0,1125 \\ -0,20625 \\ -0,1125 \\ -0,009375 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{4}F_1 \\ 1F_1 \\ \frac{1}{4}F \\ 0F_1 \\ 0F_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0F_3 \\ 0F_3 \\ \frac{1}{4}F_3 \\ 1F_3 \\ \frac{1}{4}F_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0m_3 \\ 0m_3 \\ -\frac{3}{2}m_3 \\ 0m_3 \\ \frac{3}{2}m_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2}m_1 \\ 0m_1 \\ \frac{3}{2}m_1 \\ 0m_1 \\ 0m_1 \end{Bmatrix};$$

sendo que a primeira parcela do lado direito, referente à carga uniformemente distribuída sobre a viga, é composta, conforme (4.44), por

$$-q \int_0^L N_i dx.$$

Utilizando-se as mesmas funções polinomiais componentes dos quatro trechos de uma spline cúbica completa, todas definidas no intervalo de 0 a 1, que foram empregadas na constituição da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, conforme (4.34), (4.35), (4.36) e (4.37), respectivamente,

$$M_4(\xi) = -\frac{1}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 - \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4};$$

$$M_3(\xi) = \frac{3}{4} \xi^3 - \frac{3}{2} \xi^2 + 1 ;$$

$$M_2(\xi) = -\frac{3}{4} \xi^3 + \frac{3}{4} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi + \frac{1}{4} ;$$

e

$$M_1(\xi) = \frac{1}{4} \xi^3 ;$$

pode-se obter a parcela, do vetor de carga do sistema interpolado por splines, referente ao carregamento uniformemente distribuído sobre a viga através das seguintes integrais:

$$-0,3 \int_0^1 N_{4,x} \frac{1}{2} dx = -0,009375 ,$$

$$-0,3 \int_0^1 (N_{3,x} + N_{4,x}) \frac{1}{2} dx = -0,1125 ,$$

$$-0,3 \int_0^1 (N_{2,x} + N_{3,x}) \frac{1}{2} dx = -0,20625 ,$$

$$-0,3 \int_0^1 (N_{1,x} + N_{2,x}) \frac{1}{2} dx = -0,1125 ,$$

e

$$-0,3 \int_0^1 N_{1,x} \frac{1}{2} dx = -0,009375 ,$$

E, a equação matricial  $[K_{im}^S] \{c_m^S\} = \{f_i^S\}$ , conforme (4.20), do sistema interpolado por spline torna-se

$$\begin{bmatrix} 315 & -472,5 & 0 & 157,5 & 0 \\ -472,5 & 1260 & -945 & 0 & 157,5 \\ 0 & -945 & 1890 & -945 & 0 \\ 157,5 & 0 & -945 & 1260 & -472,5 \\ 0 & 157,5 & 0 & -472,5 & 315 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,009375 \\ -0,1125 \\ -0,20625 \\ -0,1125 \\ -0,009375 \end{Bmatrix} + \\
+ \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \cdot F_1 \\ \frac{1}{4} \cdot F_1 \\ \frac{1}{4} \cdot F_1 \\ 0 \cdot F_1 \\ 0 \cdot F_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \cdot F_3 \\ 0 \cdot F_3 \\ \frac{1}{4} \cdot F_3 \\ 1 \cdot F_3 \\ \frac{1}{4} \cdot F_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \cdot m_3 \\ 0 \cdot m_3 \\ -\frac{3}{2} m_3 \\ 0 \cdot m_3 \\ \frac{3}{2} m_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2} m_1 \\ 0 \cdot m_1 \\ \frac{3}{2} m_1 \\ 0 \cdot m_1 \\ 0 \cdot m_1 \end{Bmatrix} .$$

Conforme já exposto em 4.7.1,

$$w_1 = w(x = x_1 = 0) = c_0 \frac{1}{4} + c_1 \cdot 1 + c_2 \frac{1}{4} + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 0$$

$$\theta_1 = \theta(x = x_1 = 0) = c_0 \left( -\frac{3}{2} \right) + c_1 \cdot 0 + c_2 \frac{3}{2} + c_3 \cdot 0 + c_4 \cdot 0$$

$$w_2 = w(x = x_2 = 0,5) = c_0 \cdot 0 + c_1 \frac{1}{4} + c_2 \cdot 1 + c_3 \frac{1}{4} + c_4 \cdot 0$$

$$w_3 = w(x = x_3 = 1) = c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \frac{1}{4} + c_3 \cdot 1 + c_4 \frac{1}{4}$$

$$\theta_3 = \theta(x = x_3 = 1) = c_0 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \left( -\frac{3}{2} \right) + c_3 \cdot 0 + c_4 \frac{3}{2}$$

faz com que a equação matricial  $[K_c] \{c_m^s\} = \{w_c\}$ , conforme (4.23), torne-se

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix};$$

onde,

$$[K_c] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

e

$$\{w_c\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}.$$

Através do que foi exposto em 4.7.3.2 a respeito da metodologia utilizada, chegou-se, conforme (4.28), a

$$[K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1} \{w_c\} = [K_c]^{-T} \{f_l^S\};$$

onde,

$$[K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1} = [K_{fisico}] \text{ e}$$

$$[K_c]^{-T} \{f_l^S\} = \{f_{fisico}\}.$$

Dessas operações matriciais responsáveis, respectivamente, pela transformação de  $[K_{lm}^S]$  e  $\{f_l^S\}$  em  $[K_{fisico}]$  e  $\{f_{fisico}\}$  resultaram

$$[K_{fisico}] = \begin{bmatrix} 3150 & 945 & -5040 & 1890 & -315 \\ 945 & 367,5 & -1260 & 315 & -52,5 \\ -5040 & -1260 & 10080 & -5040 & 1260 \\ 1890 & 315 & -5040 & 3150 & -945 \\ -315 & -52,5 & 1260 & -945 & 367,5 \end{bmatrix}$$

e

$$\{f_{fisico}\} = \begin{bmatrix} -0,075 \\ -0,00625 \\ -0,15 \\ -0,075 \\ 0,00625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ -F_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 \\ 0 \\ 0 \\ m_3 \end{bmatrix}.$$

Conforme (4.29),

$$[K_{fisico}] \{w_c\} = \{f_{fisico}\},$$

e, com a imposição das condições de contorno, conforme (4.44),

$$\begin{cases} w(0) = 0, \\ M_z(0) = 0, \\ w(L) = 0, \\ e \\ M_z(L) = 0; \end{cases}$$

pode-se colocar, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} 3150 & 945 & -5040 & 1890 & -315 \\ 945 & 367,5 & -1260 & 315 & -52,5 \\ -5040 & -1260 & 10080 & -5040 & 1260 \\ 1890 & 315 & -5040 & 3150 & -945 \\ -315 & -52,5 & 1260 & -945 & 367,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ w_3 = 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,075 \\ -0,00625 \\ -0,15 \\ -0,075 \\ 0,00625 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ -F_3 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_1 = 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_3 = 0 \end{Bmatrix} ;$$

obtendo-se como solução

$$\begin{cases} \theta_1 = -0,000238095 \\ w_2 = -0,0000744048 \\ \theta_3 = 0,000238095 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} F_1 = 0,150000492 \\ F_3 = -0,150000492 \end{cases}$$

Através de (4.23),

$$[K_c] \{c_m^s\} = \{w_c\},$$

pode-se recuperar os coeficientes das splines cúbicas, vinculadas a cada um dos nós da discretização através do posicionamento do topo de cada uma delas nesses respectivos nós, ou seja,

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 = 0 \\ \theta_1 = -0,000238095 \\ w_2 = -0,0000744048 \\ w_3 = 0 \\ \theta_3 = 0,000238095 \end{Bmatrix}.$$

Vetorialmente, a solução para os coeficientes das splines pode ser apresentada como

$$\{c_i^S\} = \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,0000859786 \\ -3,3068 \cdot 10^{-6} \\ -0,0000727514 \\ -3,3068 \cdot 10^{-6} \\ 0,0000859786 \end{Bmatrix}.$$

Numericamente, os resultados analíticos são comparados com os obtidos através da interpolação por splines nas Tabelas (4.3), (4.4), (4.5) e (4.6).

De posse dos coeficientes das splines, com os respectivos topos posicionados em cada um dos nós da discretização, torna-se possível a plotagem dos resultados obtidos para o elemento estrutural “Viga”, como apresentado a seguir nas Figuras (4.14), (4.15), (4.16) e (4.17).

A função deslocamento, dentro dos limites compreendidos pelo elemento “1” da Figura (4.13)

$\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ , para a estrutura em forma de viga analisada é escrita como:

$$w(x) = \sum_{m=0}^4 c_m^S N_m(x) = c_0^S N_0(x) + c_1^S N_1(x) + c_2^S N_2(x) + c_3^S N_3(x) + c_4^S N_4(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow w(x) = & 0,0000859786 \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right) + \frac{1}{4} \right] \\ & + (-3,3068 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{2}{1} x \right)^2 + 1 \right] + \\ & + (-0,0000727514) \left[ -\frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x \right) + \frac{1}{4} \right] \\ & + (-3,3068 \cdot 10^{-6}) \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x \right)^3 \right] + 0,0000859786 \cdot 0 \end{aligned}$$

A função deslocamento, dentro dos limites compreendidos pelo elemento “2” da Figura (4.13)

$\left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right)$ , para a estrutura em forma de viga analisada é escrita como:

$$w(x) = \sum_{m=0}^4 c_m^S N_m(x) = c_0^S N_0(x) + c_1^S N_1(x) + c_2^S N_2(x) + c_3^S N_3(x) + c_4^S N_4(x) \Rightarrow$$

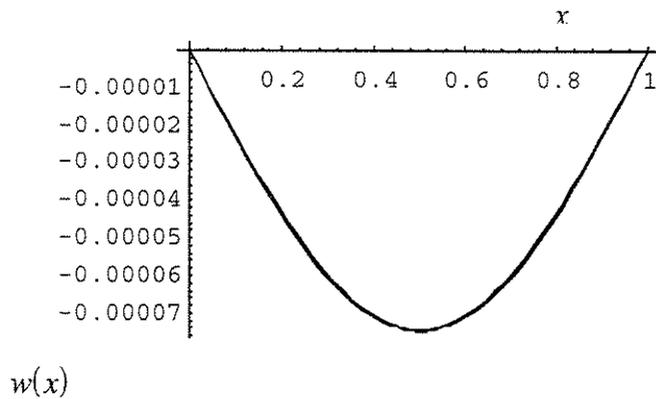
$$\Rightarrow w(x) = 0,0000859786 \cdot 0 +$$

$$+ (-3,3068 \cdot 10^{-6}) \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right) + \frac{1}{4} \right] +$$

$$+ (-0,0000727514) \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^2 + 1 \right] +$$

$$+ (-3,3068 \cdot 10^{-6}) \left[ -\frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right) + \frac{1}{4} \right]$$

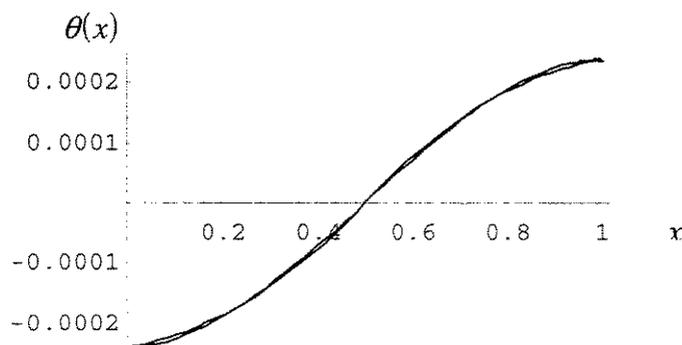
$$+ 0,0000859786 \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{2}{1} x - 1 \right)^3 \right]$$



**Figura (4.14):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Popov (1978)).

**Tabela (4.3):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

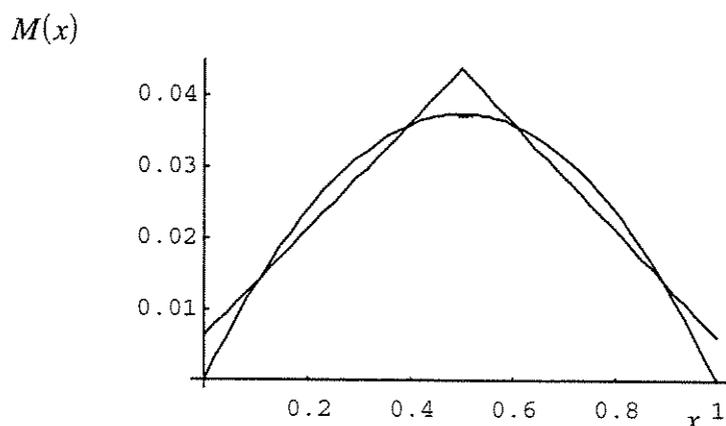
x [m]	Resultado Analítico (w)	Resultado Obtido (w)	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,00002889	-0,0000283668	1,81101
0,25	-0,0000530134	-0,0000520833	1,75446
0,375	-0,0000688825	-0,0000683594	0,759409
0,5	-0,0000744048	-0,0000744048	0



**Figura (4.15):** Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.4):** Rotações  $\theta$  da viga biapoada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

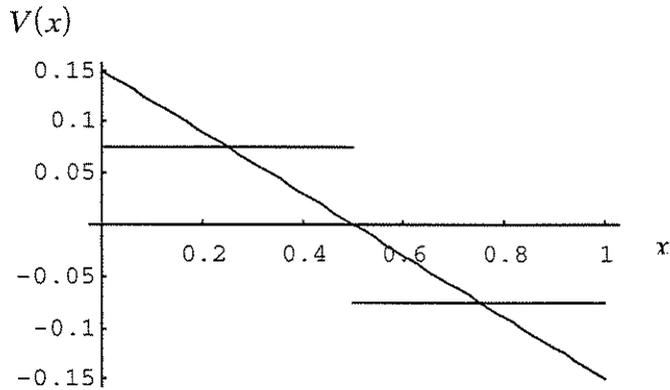
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	-0,000238095	-0,000238095	0
0,125	-0,000217634	-0,000212054	2,56394
0,25	-0,00016369	-0,000163691	0,000610907
0,375	-0,0000874256	-0,0000930061	6,00014
0,5	0	0	0



**Figura (4.16):** Momentos Fletores  $M$  da viga biapoada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.5):** Momentos Fletores  $M$  da viga biapoada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	0	0,00624985	
0,125	0,0164062	0,0156249	4,76222
0,25	0,028125	0,025	11,1111
0,375	0,0351562	0,034375	2,22208
0,5	0,0375	0,0437501	14,2859



**Figura (4.17): Esforços cortantes  $V$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.6): Esforços cortantes  $V$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

$x$ [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,15	0,0750005	49,9997
0,125	0,1125	0,0750005	33,3329
0,25	0,075	0,0750005	0,000666662
0,375	0,0375	0,0750005	50,0003
0,5	0	0,0750005	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga biapoiada, a qual conforme (4.45) é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por dois elementos.

Conforme a Figura (4.14), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.3), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados relativamente aceitáveis, apesar da aproximação ter sido feita por polinômios de grau 3, enquanto a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.15), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.4), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se uma elevação da porcentagem de erro em relação à porcentagem de erro apresentada pela comparação dos deslocamentos transversais.

Conforme a Figura (4.16), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.5), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados nada aceitáveis.

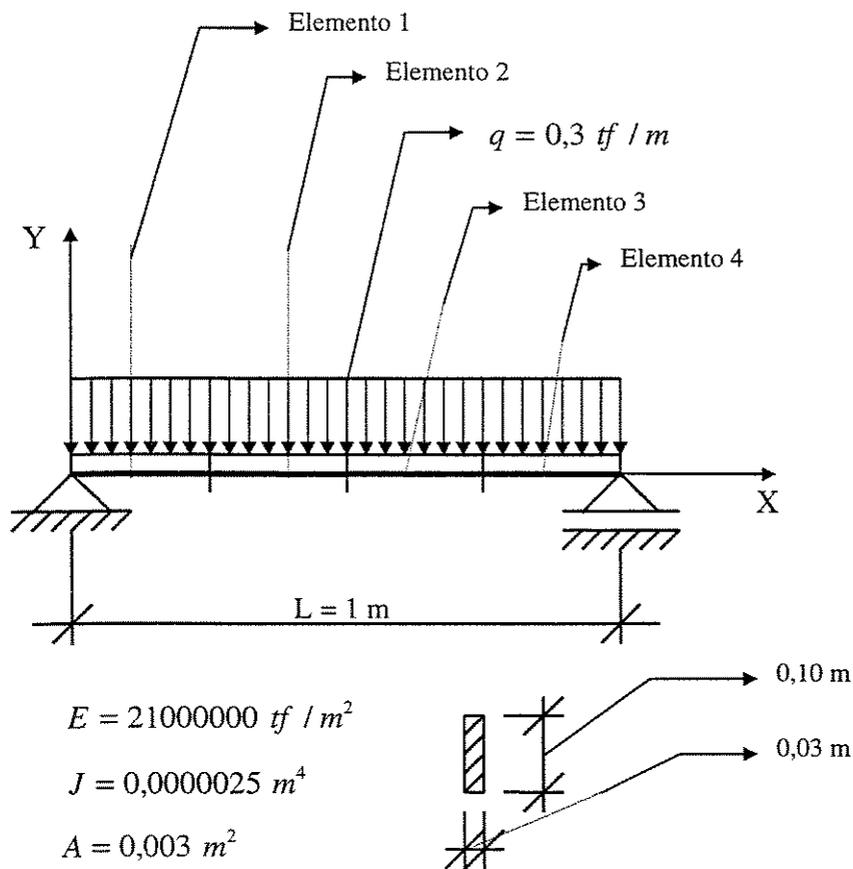
Conforme a Figura (4.17), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.6), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a não possibilidade de comparação entre os resultados analíticos e os obtidos através de uma interpolação cúbica, pois, se a interpolação é cúbica, a derivada terceira desta é uma constante, e a derivada terceira da solução analítica dada por um polinômio de grau 4 é um polinômio de grau 1.

Portanto, na próxima seção, mantendo-se a interpolação por splines cúbicas será buscada uma melhor aproximação, através de uma discretização mais refinada por um maior número de elementos, para os momentos fletores da viga. Conseqüentemente, uma melhor aproximação para os deslocamentos transversais e para as rotações será também obtida.

#### ***4.8.4 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR QUATRO ELEMENTOS***

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga biapoiada. Conforme a Figura (4.18), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por quatro elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.18).



**Figura (4.18): Viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.**

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

- ) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;
- ) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e
- ) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

- ) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$  .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

- ) apoiada (extremidade esquerda) - apoiada (extremidade direita).

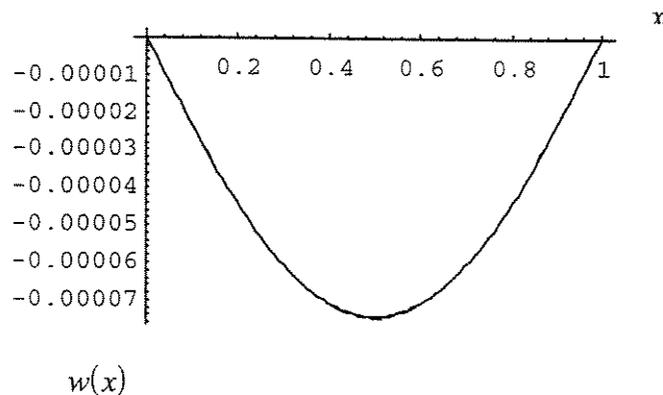
Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$-)\left\{\begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ M_z(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \text{ e} \\ M_z(L) = 0 . \end{array}\right.$$

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf / m}$  (carga uniformemente distribuída).

Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:

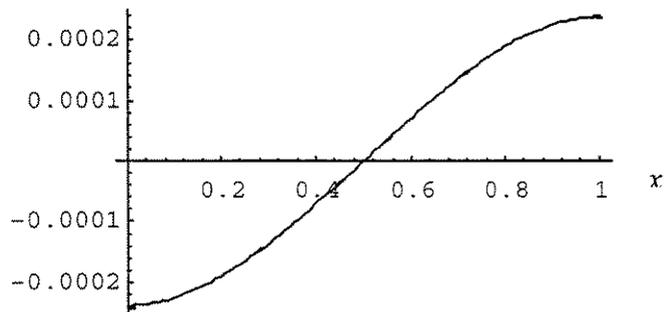


**Figura (4.19):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.7):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

x [m]	Resultado Analítico (w)	Resultado Obtido (w)	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,00002889	-0,000028832	0,200762
0,25	-0,0000530134	-0,0000530136	0,000377262
0,375	-0,0000688825	-0,0000688247	0,083911
0,5	-0,0000744048	-0,000074405	0,000268799

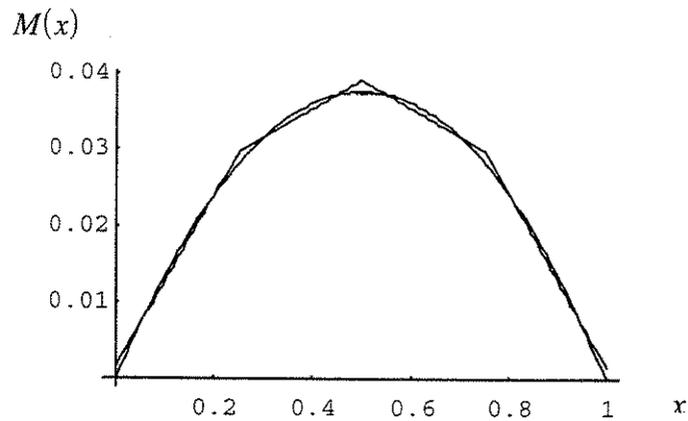
$\theta(x)$



**Figura (4.20):** Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.8):** Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

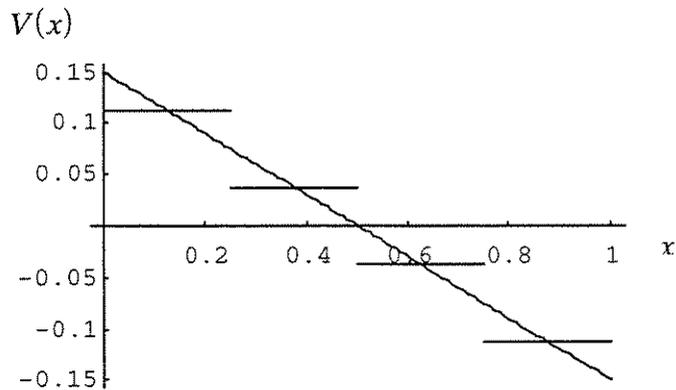
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	-0,000238095	-0,000238096	0,000419999
0,125	-0,000217634	-0,000217635	0,000459485
0,25	-0,00016369	-0,000163691	0,000610907
0,375	-0,0000874256	-0,0000874254	0,000228766
0,5	0	0	0



**Figura (4.21): Momentos Fletores  $M$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.9): Momentos Fletores  $M$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	0	0,00156229	
0,125	0,0164062	0,0156251	4,761
0,25	0,028125	0,0296879	5,26443
0,375	0,0351562	0,0343751	2,2218
0,5	0,0375	0,0390623	3,99951



**Figura (4.22): Esforços Cortantes  $V$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.10): Esforços Cortantes  $V$  da viga biapoiada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,15	0,112503	24,998
0,125	0,1125	0,112503	0,0026666
0,25 -	0,075	0,112503	33,3351
0,25 +	0,075	0,0374974	50,0035
0,375	0,0375	0,0374974	0,00693333
0,5	0	0,0374974	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga biapoiada, a qual conforme (4.45) é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por quatro elementos.

Conforme a Figura (4.19), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.7), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica), apesar da aproximação continuar sendo feita por polinômios de grau 3, enquanto a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.20), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.8), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica).

Conforme a Figura (4.21), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.9), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de uma sensível melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica). Portanto, o objetivo principal dessa nova discretização através de quatro elementos foi totalmente atingido.

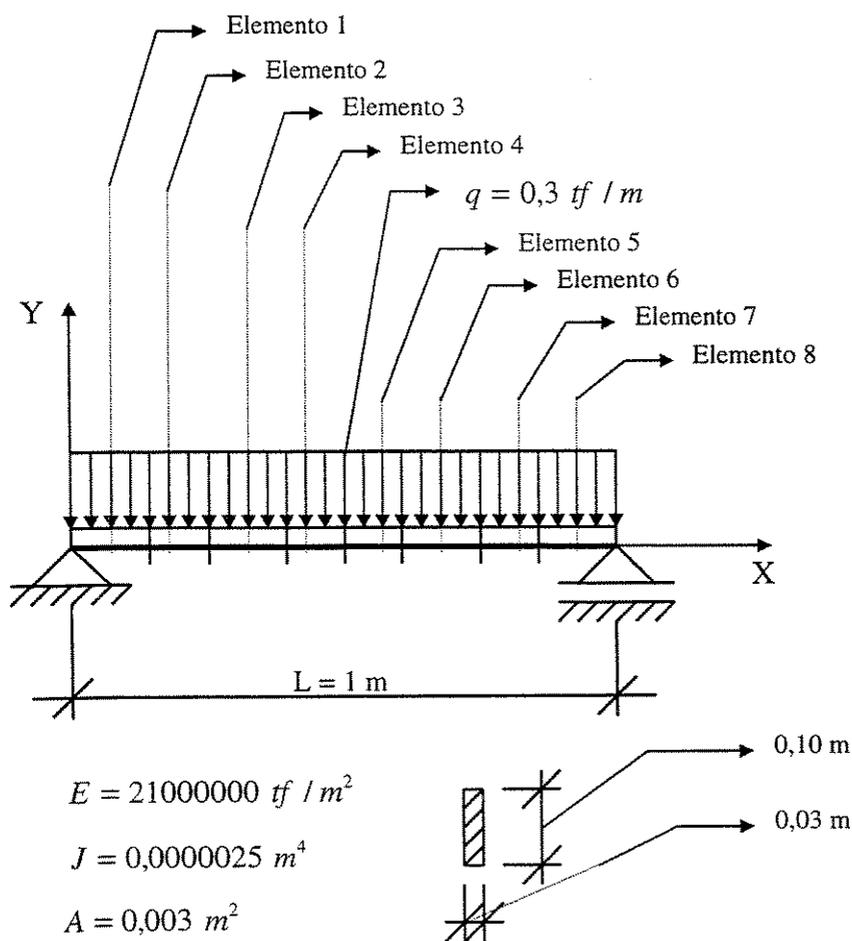
Conforme a Figura (4.22), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.10), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a continuidade da defasagem dos resultados obtidos quando comparados com a solução analítica.

Na próxima seção, mantendo-se a interpolação por splines cúbicas será buscada ainda uma melhor aproximação, através de uma discretização mais refinada por um maior número de elementos, para os momentos fletores da viga. Conseqüentemente, uma melhor aproximação para os deslocamentos transversais e para as rotações será também obtida.

#### ***4.8.5 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR OITO ELEMENTOS***

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga biapoiada. Conforme a Figura (4.23), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por oito elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.23).



**Figura (4.23): Viga biapoada, discretizada por oito elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.**

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

- ) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;
- ) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e

-) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$ .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf / m}^2$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) apoiada (extremidade esquerda) - apoiada (extremidade direita).

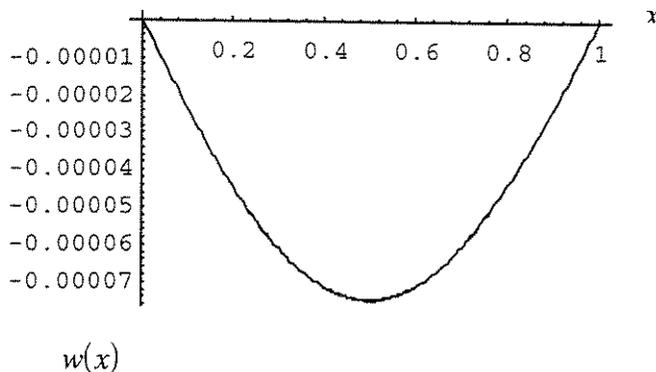
Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$-)\left\{\begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ M_z(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \text{ e} \\ M_z(L) = 0 . \end{array}\right.$$

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf / m}$  (carga uniformemente distribuída).

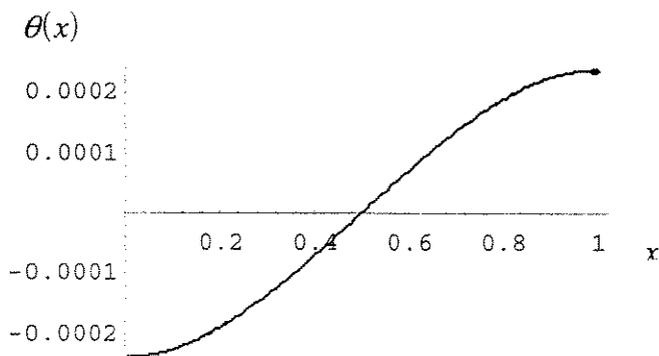
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.24):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.11): Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

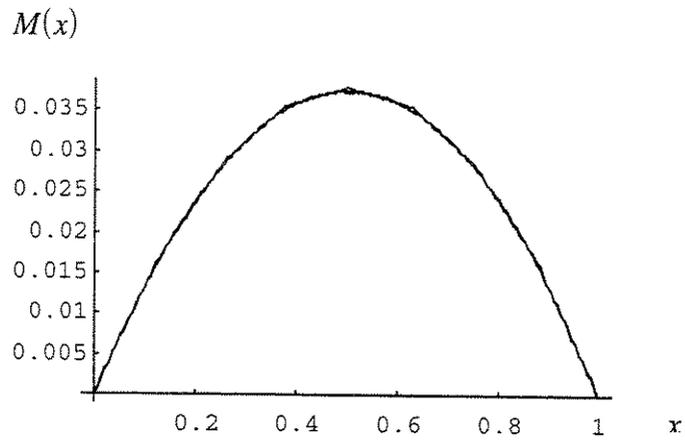
x [m]	Resultado Analítico ( $w$ )	Resultado Obtido ( $w$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,00002889	-0,0000289106	0,0712541
0,25	-0,0000530134	-0,0000530506	0,0701217
0,375	-0,0000688825	-0,0000689304	0,0694904
0,5	-0,0000744048	-0,0000744563	0,0691681



**Figura (4.25): Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparadas com a solução analítica.**

**Tabela (4.12): Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.**

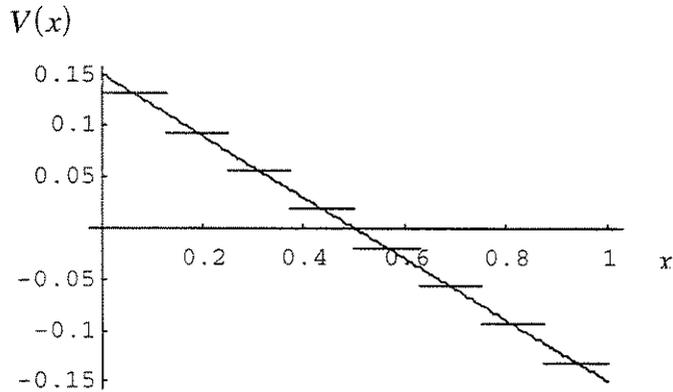
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	-0,000238095	-0,000238267	0,0721879
0,125	-0,000217634	-0,000217787	0,0702521
0,25	-0,00016369	-0,000163801	0,0677652
0,375	-0,0000874256	-0,0000874842	0,06698
0,5	0	0	0



*Figura (4.26): Momentos Fletores  $M$  da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.*

*Tabela (4.13): Momentos Fletores  $M$  da viga biapoiada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.*

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	0	0,000391595	
0,125	0,0164062	0,0168122	2,41491
0,25	0,028125	0,0285355	1,43856
0,375	0,0351562	0,0355708	1,16556
0,5	0,0375	0,0379159	1,0969



**Figura (4.27): Esforços Cortantes  $V$  da viga biapoada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.14): Esforços Cortantes  $V$  da viga biapoada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,15	0,131365	12,4233
0,125 -	0,1125	0,131365	14,3608
0,125+	0,1125	0,0937863	16,6344
0,25 -	0,075	0,0937863	20,031
0,25 +	0,075	0,0562827	24,9564
0,375 -	0,0375	0,0562827	33,3721
0,375+	0,0375	0,0187609	49,9709
0,5 -	0	0,0187609	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga biapoada, a qual conforme (4.45) é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por oito elementos.

Conforme a Figura (4.24), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.11), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica), apesar da aproximação continuar sendo feita por polinômios de grau 3, enquanto a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.25), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.12), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica).

Conforme a Figura (4.26), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.13), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de uma sensível melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica). Portanto, o objetivo principal dessa nova discretização através de oito elementos foi totalmente atingido.

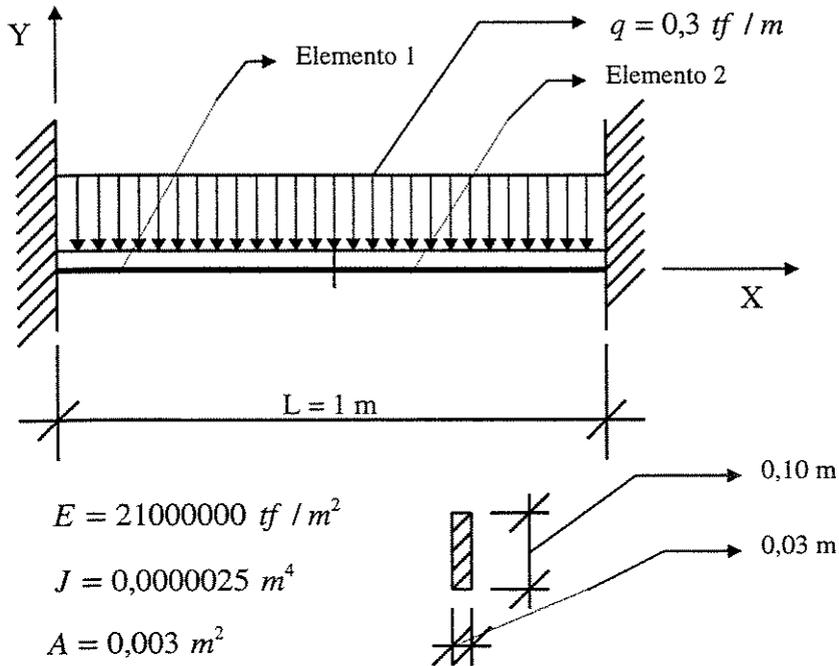
Conforme a Figura (4.27), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.14), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a continuidade da defasagem dos resultados obtidos quando comparados com a solução analítica.

#### ***4.8.6 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIENGASTADA DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS***

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga biengastada. Conforme a Figura (4.28), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por dois elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais,

das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.28).



**Figura (4.28): Viga biengastada, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.**

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

- ) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;
- ) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e
- ) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

- ) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$  .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

- ) engastada (extremidade esquerda) - engastada (extremidade direita).

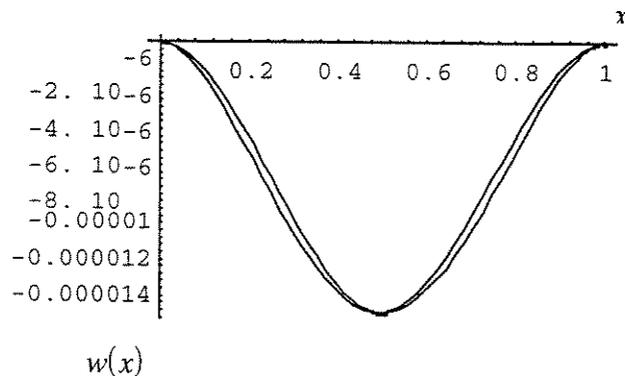
Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$-)\left\{\begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ \theta(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \text{ e} \\ \theta(L) = 0 . \end{array}\right.$$

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf / m}$  (carga uniformemente distribuída).

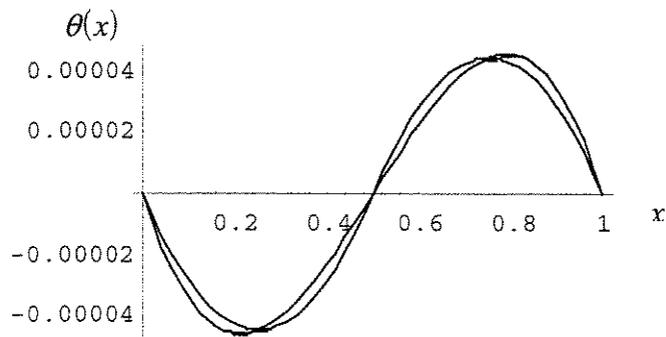
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.29):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (solução analítica obtida através de integração da equação diferencial e imposição das condições de contorno).

**Tabela (4.15): Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

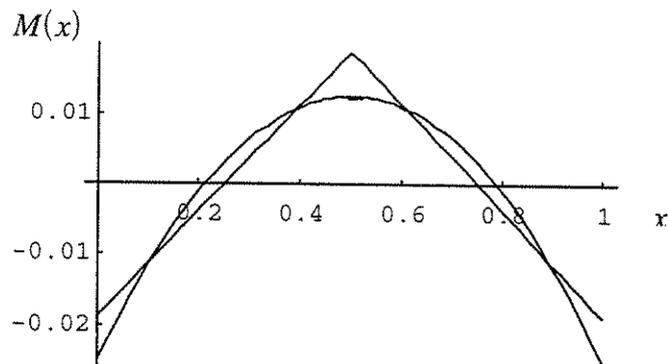
x [m]	Resultado Analítico ( $w$ )	Resultado Obtido ( $w$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	$-2,84831 \cdot 10^{-6}$	$-2,32513 \cdot 10^{-6}$	18,3681
0,25	$-8,37054 \cdot 10^{-6}$	$-7,44047 \cdot 10^{-6}$	11,1112
0,375	-0,000013079	-0,0000125558	4,00031
0,5	-0,000014881	-0,000014881	0



**Figura (4.30): Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica.**

**Tabela (4.16): Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.**

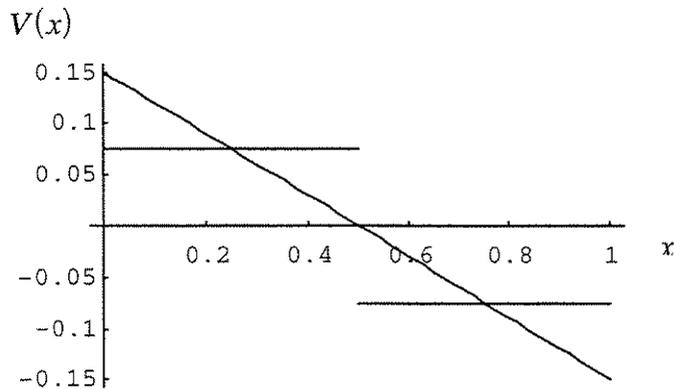
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,0000390625	-0,0000334822	14,2856
0,25	-0,0000446429	-0,000044643	0,000223999
0,375	-0,0000279018	-0,0000334822	16,6668
0,5	0	0	0



**Figura (4.31): Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.17): Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	-0,025	-0,01875	25
0,125	-0,00859375	-0,00937502	8,33353
0,25	0,003125	0	
0,375	0,0101563	0,00937502	7,69257
0,5	0,0125	0,01875	33,3333



**Figura (4.32):** Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.18):** Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

$x$ [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,15	0,0750002	49,9999
0,125	0,1125	0,0750002	33,3332
0,25	0,075	0,0750002	0,000266666
0,375	0,0375	0,0750002	50,0001
0,5	0	0,0750002	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga biengastada (obtida pela integração da equação diferencial e mediante a imposição das condições de contorno),

$$w(x) = -\frac{q}{24 E J} x^4 + \frac{q L}{12 E J} x^3 - \frac{q L^2}{24 E J} x^2,$$

a qual é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por dois elementos.

Conforme a Figura (4.29), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.15), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados um tanto quanto defasados, se bem que a aproximação foi feita por polinômios de grau 3, enquanto que a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.30), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.16), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma acentuada defasagem comparativa dos resultados.

Conforme a Figura (4.31), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.17), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de uma defasagem comparativa de resultados maior ainda em relação à apresentada pela comparação dos deslocamentos transversais e à apresentada pela comparação das rotações, ou seja, uma defasagem nada aceitável.

Conforme a Figura (4.32), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.18), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, evidencia-se a não possibilidade de comparação entre os resultados analíticos e os obtidos através de uma interpolação cúbica, pois, se a interpolação é cúbica, a derivada terceira desta é uma constante, e a derivada terceira da solução analítica dada por um polinômio de grau 4 é um polinômio de grau 1.

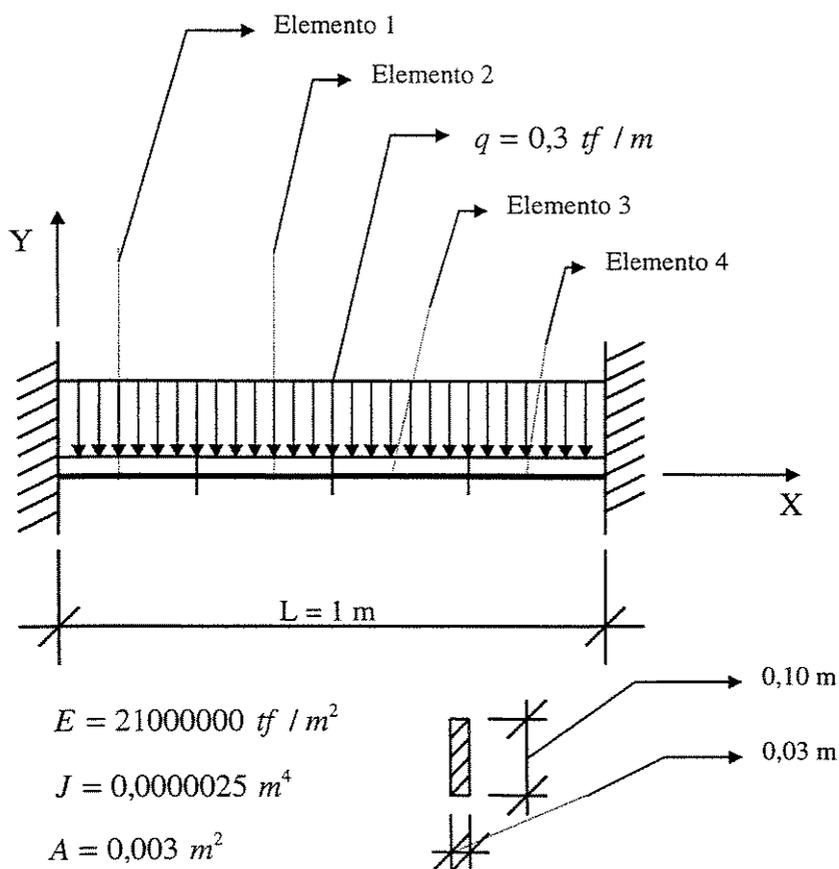
Portanto, na próxima seção, mantendo-se a interpolação por splines cúbicas será buscada uma melhor aproximação, através de uma discretização mais refinada por um maior número de elementos, para os deslocamentos transversais, para as rotações e para os momentos fletores da viga biengastada.

#### ***4.8.7 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIENGASTADA DISCRETIZADA POR QUATRO ELEMENTOS***

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga biengastada. Conforme a Figura (4.33), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por quatro elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais,

das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.33).



**Figura (4.33): Viga biengastada, discretizada por quatro elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.**

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

- ) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;
- ) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e
- ) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf} / m^2$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) engastada (extremidade esquerda) - engastada (extremidade direita).

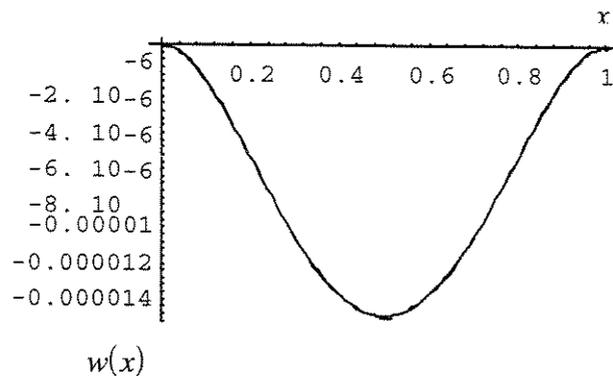
Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$-)\left\{\begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ \theta(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \\ \theta(L) = 0 . \end{array}\right.$$

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf} / m$  (carga uniformemente distribuída).

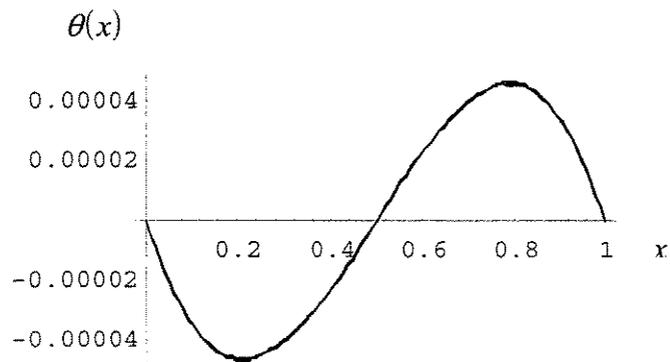
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.34):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.19):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

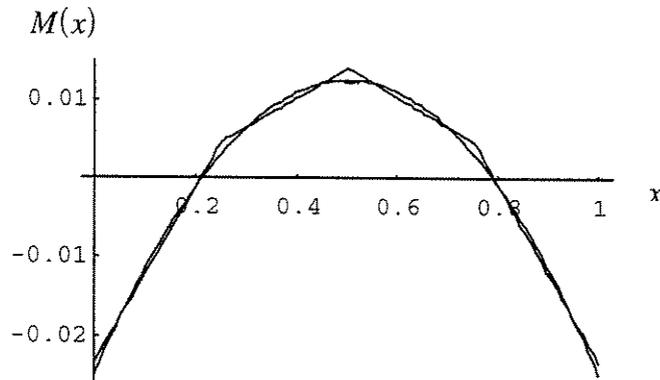
x [m]	Resultado Analítico (w)	Resultado Obtido (w)	% de erro
0	0	0	0
0,125	$-2,84831 \cdot 10^{-6}$	$-2,79018 \cdot 10^{-6}$	2,04086
0,25	$-8,37054 \cdot 10^{-6}$	$-8,37056 \cdot 10^{-6}$	0,000238933
0,375	-0,000013079	-0,0000130209	0,444224
0,5	-0,000014881	-0,000014881	0



**Figura (4.35):** Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.20):** Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

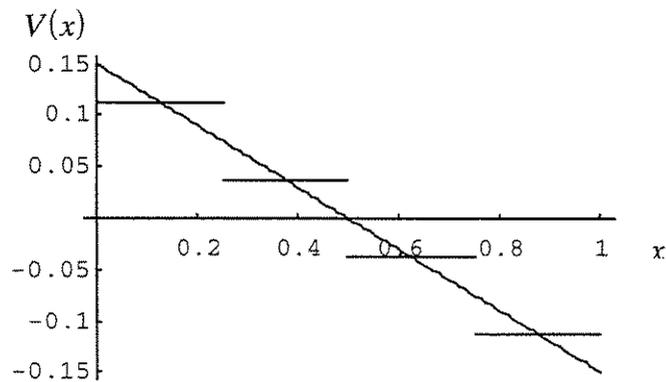
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,0000390625	-0,0000390626	0,000255999
0,25	-0,0000446429	-0,000044643	0,000223999
0,375	-0,0000279018	-0,0000279019	0,000358399
0,5	0	0	0



**Figura (4.36):** Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.21):** Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	-0,025	-0,0234376	6,2496
0,125	-0,00859375	-0,00937504	8,33372
0,25	0,003125	0,00468749	33,3332
0,375	0,0101563	0,00937504	7,69237
0,5	0,0125	0,0140626	11,1117



**Figura (4.37): Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.22): Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,15	0,1125	25
0,125	0,1125	0,1125	0
0,25 -	0,075	0,1125	33,3333
0,25 +	0,075	0,0375004	49,9995
0,375	0,0375	0,0375004	0,00106666
0,5 -	0	0,0375004	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga biengastada (obtida pela integração da equação diferencial e mediante a imposição das condições de contorno),

$$w(x) = -\frac{q}{24 E J} x^4 + \frac{q L}{12 E J} x^3 - \frac{q L^2}{24 E J} x^2,$$

a qual é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por quatro elementos.

Conforme a Figura (4.34), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.19), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se uma acentuada melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica), apesar da aproximação continuar sendo feita por polinômios de grau 3, enquanto a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.35), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.20), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma acentuada melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica).

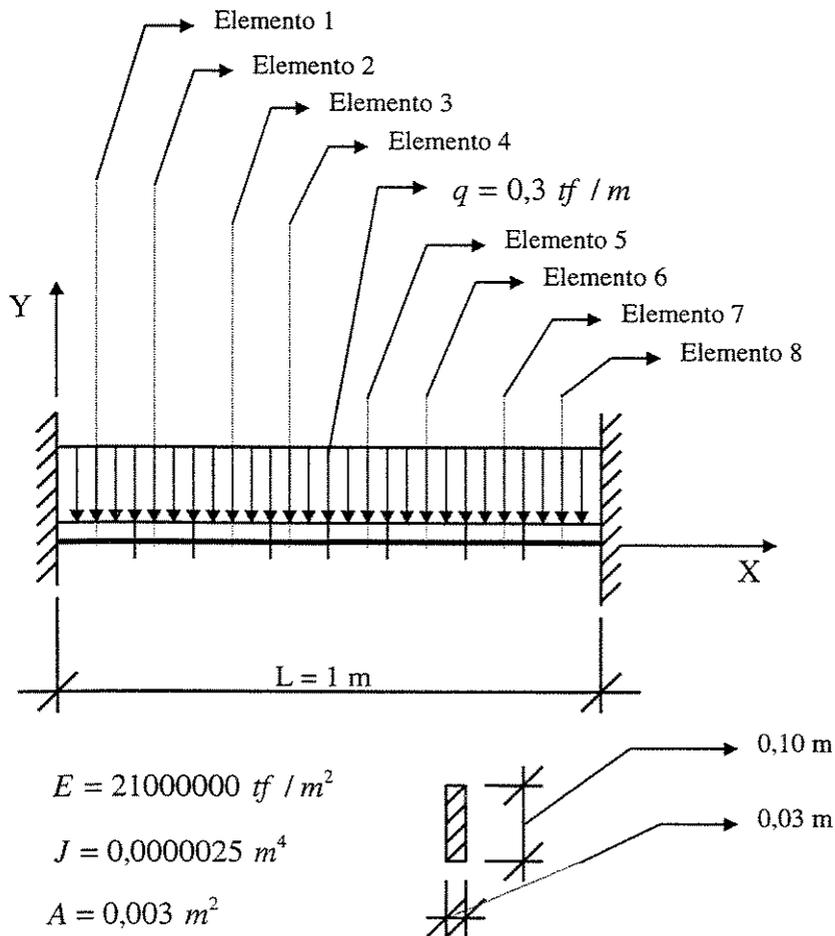
Conforme a Figura (4.36), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.21), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de uma sensível melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica). Portanto, apesar dos resultados obtidos ainda se apresentarem fora de um padrão aceitável quando comparados com a solução analítica, o objetivo principal dessa nova discretização através de quatro elementos foi totalmente atingido.

Conforme a Figura (4.37), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.22), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a continuidade da defasagem dos resultados obtidos quando comparados com a solução analítica. Na próxima seção, mantendo-se a interpolação por splines cúbicas será buscada uma melhor aproximação, através de uma discretização mais refinada por um maior número de elementos, para os momentos fletores da viga.

#### 4.8.8 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIENGASTADA DISCRETIZADA POR OITO ELEMENTOS

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga biengastada. Conforme a Figura (4.38), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por oito elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.38).



**Figura (4.38): Viga biengastada, discretizada por oito elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.**

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;

-) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e

-) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf / m}^2$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) engastada (extremidade esquerda) - engastada (extremidade direita).

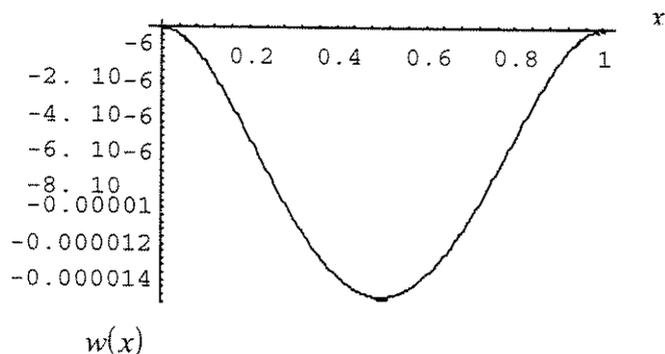
Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ \theta(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \\ \theta(L) = 0 . \end{array} \right\} \text{ e}$$

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf / m}$  (carga uniformemente distribuída).

Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.39):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.

Tabela (4.23): Deslocamentos transversais  $w$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

x [m]	Resultado Analítico ( $w$ )	Resultado Obtido ( $w$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	$-2,84831 \cdot 10^{-6}$	$-2,84857 \cdot 10^{-6}$	0,00912739
0,25	$-8,37054 \cdot 10^{-6}$	$-8,37126 \cdot 10^{-6}$	0,00860086
0,375	-0,000013079	-0,0000130801	0,00840972
0,5	-0,000014881	-0,0000148822	0,00806332

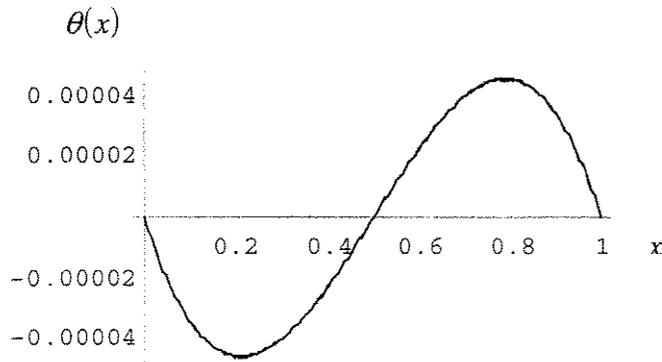
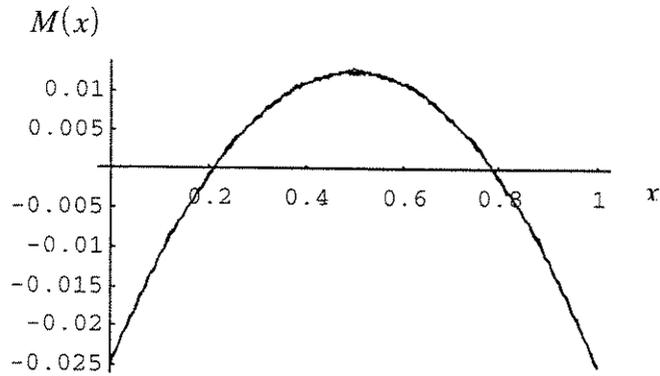


Figura (4.40): Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparadas com a solução analítica.

Tabela (4.24): Rotações  $\theta$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

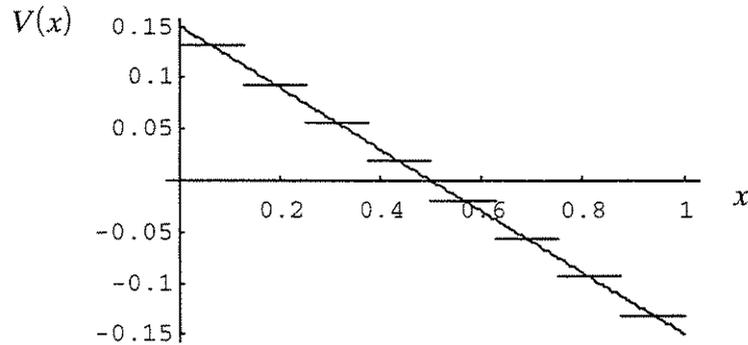
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,0000390625	-0,0000390659	0,00870324
0,25	-0,0000446429	-0,0000446467	0,00851127
0,375	-0,0000279018	-0,0000279042	0,00860086
0,5	0	0	0



**Figura (4.41): Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.25): Momentos Fletores  $M$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	-0,025	-0,0246119	1,5524
0,125	-0,00859375	-0,00820349	4,54121
0,25	0,003125	0,0035156	11,1105
0,375	0,0101563	0,0105481	3,71441
0,5	0,0125	0,0128914	3,03613



**Figura (4.42): Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.26): Esforços Cortantes  $V$  da viga biengastada, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,15	0,131267	12,4887
0,125 -	0,1125	0,131267	14,2968
0,125+	0,1125	0,0937527	16,6643
0,25 -	0,075	0,0937527	20,0023
0,25 +	0,075	0,0562601	24,9865
0,375 -	0,0375	0,0562601	33,3453
0,375+	0,0375	0,0187464	50,0096
0,5 -	0	0,0187464	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga biengastada (obtida pela integração da equação diferencial e mediante a imposição das condições de contorno),

$$w(x) = -\frac{q}{24 E J} x^4 + \frac{q L}{12 E J} x^3 - \frac{q L^2}{24 E J} x^2,$$

a qual é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por oito elementos.

Conforme a Figura (4.39), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.23), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica), apesar da aproximação continuar sendo feita por polinômios de grau 3, enquanto a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.40), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.24), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica).

Conforme a Figura (4.41), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.25), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de uma sensível melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica). Portanto, mesmo esses resultados obtidos por essa discretização através de oito elementos permanecendo como inaceitáveis diante da comparação feita com os resultados analíticos, o objetivo principal dessa nova discretização através de oito elementos foi totalmente atingido, ou seja, através de um aumento do número de elementos que compõem a discretização, observa-se que os resultados obtidos para os momentos fletores convergem para a solução analítica apresentada pela viga biengastada.

Conforme a Figura (4.42), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.26), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a continuidade da defasagem dos resultados obtidos quando comparados com a solução analítica.

#### 4.8.9 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA ENGASTE-APOIO DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga engaste-apoio. Conforme a Figura (4.43), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por dois elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.43).

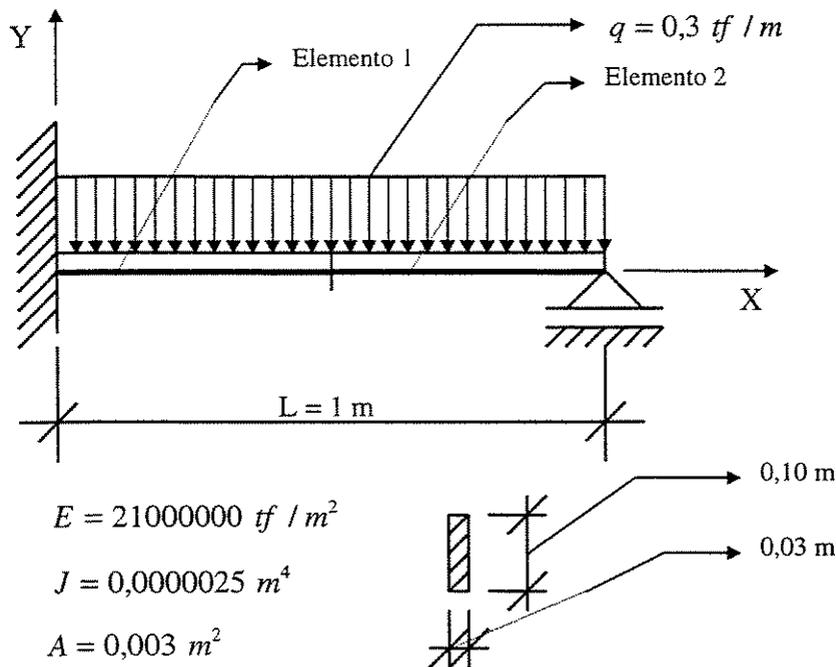


Figura (4.43): Viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;

-) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e

-) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$ .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) engastada (extremidade esquerda) - apoiada (extremidade direita).

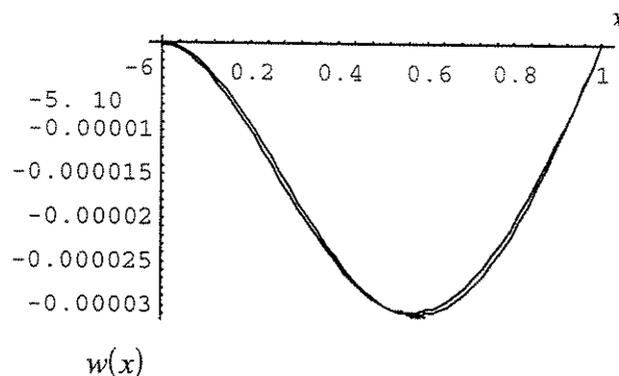
O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf} / \text{m}$  (carga uniformemente distribuída).

Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$\left. \begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ \theta(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \\ m(L) = 0 . \end{array} \right\} \text{-)}$$

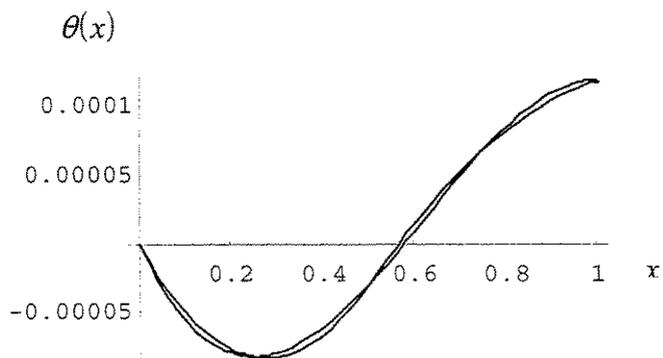
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.44):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga engaste-apoiado, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (solução analítica obtida através de integração da equação diferencial e imposição das condições de contorno).

**Tabela (4.27):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

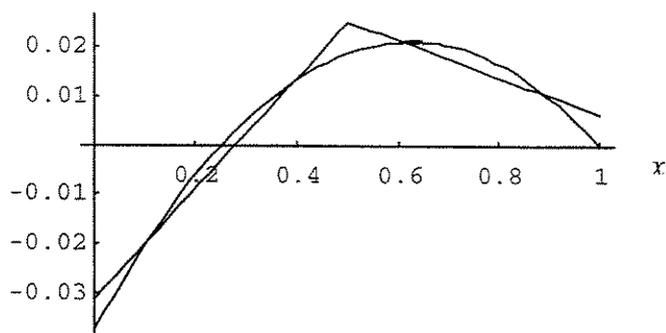
x [m]	Resultado Analítico (w)	Resultado Obtido (w)	% de erro
0	0	0	0
0,125	$-4,47591 \cdot 10^{-6}$	$-3,95276 \cdot 10^{-6}$	11,6881
0,25	-0,0000139509	-0,0000130208	6,66695
0,375	-0,0000235421	-0,000023019	2,22198
0,5	-0,0000297619	-0,0000297619	0
0,625	-0,0000305176	-0,0000299945	1,71409
0,75	-0,0000251116	-0,0000241816	3,70347
0,875	-0,0000142415	-0,0000137184	3,67307
1	0	0	0



**Figura (4.45):** Rotações  $\theta$  da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.28):** Rotações  $\theta$  da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

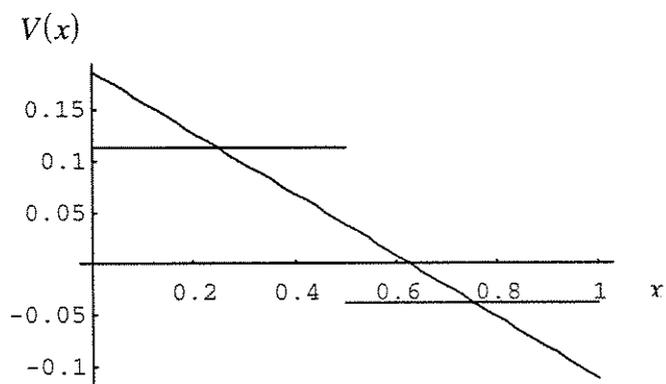
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,000063244	-0,0000576637	8,82345
0,25	-0,0000818452	-0,0000818453	0,000122182
0,375	-0,0000669643	-0,0000725447	7,69236
0,5	-0,0000297619	-0,000029762	0,000335999
0,625	0,0000186012	0,0000241814	23,0764
0,75	0,0000669643	0,0000669643	0
0,875	0,000104167	0,0000985865	5,35726
1	0,000119048	0,000119048	0



**Figura (4.46):** Momentos Fletores  $M$  da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.29): Momentos Fletores  $M$  da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	-0,0375	-0,03125	16,6667
0,125	-0,0164062	-0,0171875	4,54575
0,25	0	-0,00312501	
0,375	0,0117187	0,0109375	6,66627
0,5	0,01875	0,025	25
0,625	0,0210937	0,0203125	3,70348
0,75	0,01875	0,0156251	16,6661
0,875	0,0117187	0,0109376	6,66542
1	0	0,00625014	



**Figura (4.47): Esforços Cortantes  $V$  da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.30): Esforços Cortantes V da viga engaste-apoio, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,1875	0,1125	40
0,125	0,15	0,1125	25
0,25	0,1125	0,1125	0
0,375	0,075	0,1125	33,3333
0,5 -	0,0375	0,1125	66,6667
0,5 +	0,0375	-0,0374997	199,999
0,625	0	-0,0374997	
0,75	-0,0375	-0,0374997	0,0008
0,875	-0,075	-0,0374997	50,0004
1	-0,1125	-0,0374997	66,6669

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga engaste-apoio (obtida pela integração da equação diferencial e mediante a imposição das condições de contorno),

$$w(x) = -\frac{q}{24 E J} x^4 + \frac{5 q L}{48 E J} x^3 - \frac{q L^2}{16 E J} x^2,$$

a qual é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por dois elementos.

Conforme a Figura (4.44), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.27), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados um tanto quanto defasados, se bem que a aproximação foi feita por polinômios de grau 3, enquanto que a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.45), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.28), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma acentuada defasagem comparativa dos resultados.

Conforme a Figura (4.46), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.29), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados bastante defasados em relação aos obtidos analiticamente.

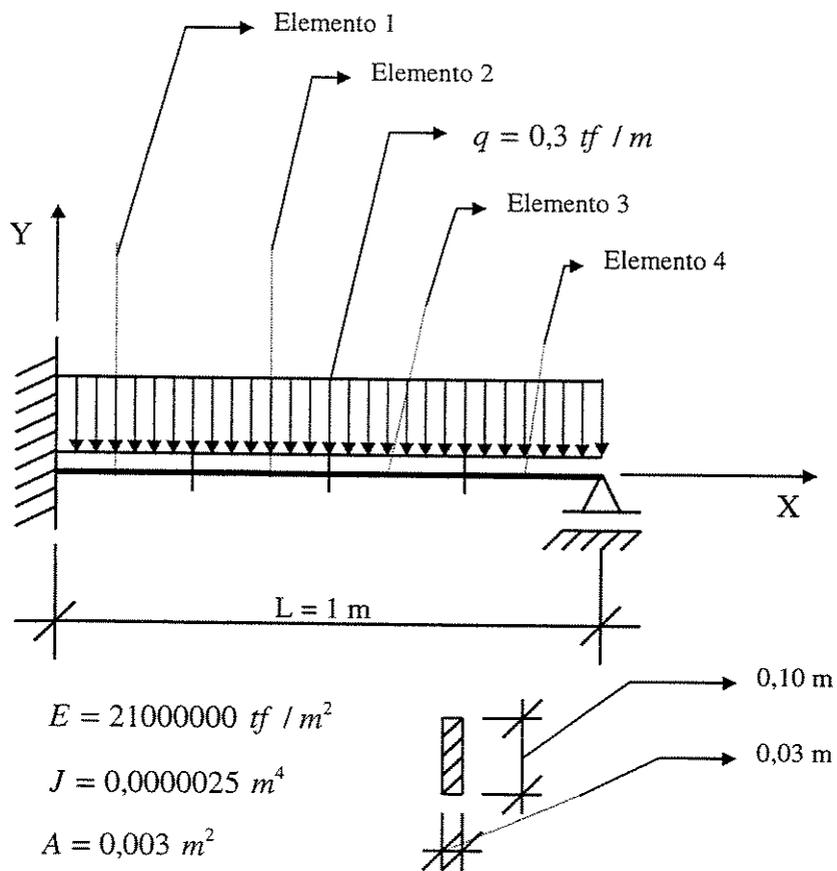
Conforme a Figura (4.47), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.30), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, evidencia-se a não possibilidade de comparação entre os resultados analíticos e os obtidos através de uma interpolação cúbica, pois, se a interpolação é cúbica, a derivada terceira desta é uma constante, e a derivada terceira da solução analítica dada por um polinômio de grau 4 é um polinômio de grau 1.

Portanto, na próxima seção, mantendo-se a interpolação por splines cúbicas será buscada uma melhor aproximação, através de uma discretização mais refinada por um maior número de elementos, para os deslocamentos transversais, para as rotações e para os momentos fletores da viga engaste-apoio.

#### ***4.8.10 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA ENGASTE-APOIO DISCRETIZADA POR QUATRO ELEMENTOS***

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga engaste-apoio. Conforme a Figura (4.48), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por quatro elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.48).



**Figura (4.48):** *Viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

- ) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;
- ) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ;.e
- ) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

- ) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$  .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

- ) engastada (extremidade esquerda) - apoiada (extremidade direita).

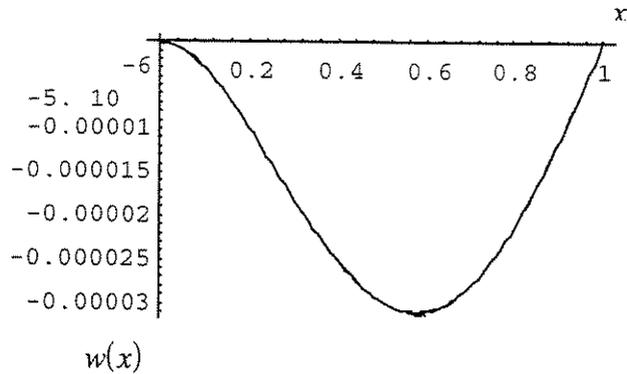
O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf} / m$  (carga uniformemente distribuída).

Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$-)\left\{\begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ \theta(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \quad e \\ m(L) = 0 . \end{array}\right.$$

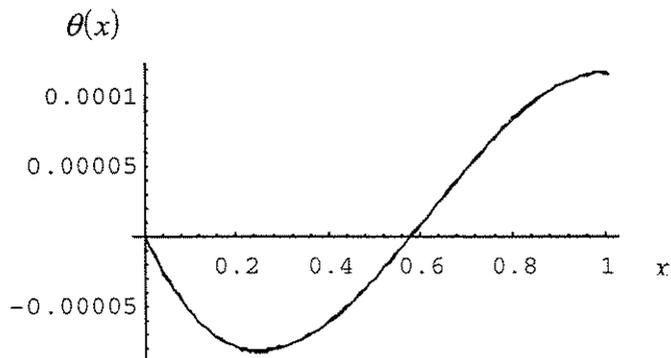
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.49):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.31):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

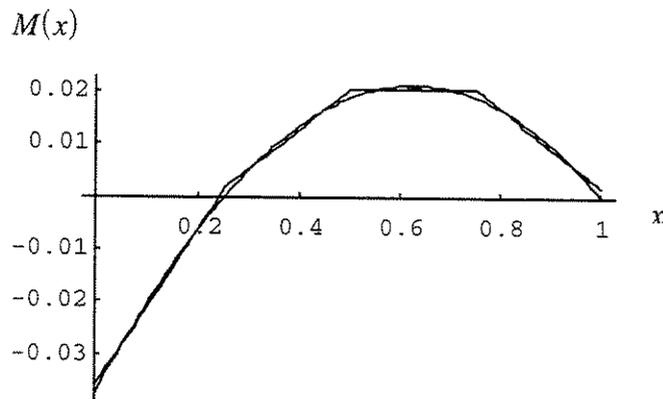
x [m]	Resultado Analítico (w)	Resultado Obtido (w)	% de erro
0	0	0	0
0,125	$-4,47591 \cdot 10^{-6}$	$-4,41778 \cdot 10^{-6}$	1,29873
0,25	-0,0000139509	-0,0000139509	0
0,375	-0,0000235421	-0,0000234841	0,246367
0,5	-0,0000297619	-0,0000297620	0,000335999
0,625	-0,0000305176	-0,0000304596	0,190054
0,75	-0,0000251116	-0,0000251117	0,000398221
0,875	-0,0000142415	-0,0000141835	0,40726
1	0	0	0



**Figura (4.50):** Rotações  $\theta$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.32):** Rotações  $\theta$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

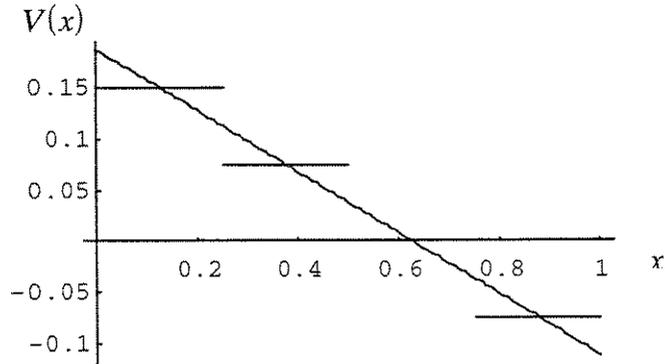
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,000063244	-0,000063244	0
0,25	-0,0000818452	-0,0000818455	0,000366544
0,375	-0,0000669643	-0,0000669647	0,00059733
0,5	-0,0000297619	-0,0000297622	0,00100799
0,625	0,0000186012	0,0000186012	0
0,75	0,0000669643	0,0000669646	0,000447998
0,875	0,000104167	0,000104167	0
1	0,000119048	0,000119048	0



**Figura (4.51): Momentos Fletores  $M$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.33): Momentos Fletores  $M$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	-0,0375	-0,0359374	4,16693
0,125	-0,0164062	-0,0171876	4,5463
0,25	0	0,00156234	
0,375	0,0117187	0,0109375	6,66627
0,5	0,01875	0,0203126	7,69276
0,625	0,0210937	0,0203126	3,703
0,75	0,01875	0,0203126	7,69276
0,875	0,0117187	0,0109375	6,66627
1	0	0,00156246	



**Figura (4.52): Esforços Cortantes  $V$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.34): Esforços Cortantes  $V$  da viga engaste-apoio, discretizada por quatro elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,1875	0,149999	20,0005
0,125	0,15	0,149999	0,000666667
0,25 -	0,1125	0,149999	24,9995
0,25 +	0,1125	0,0750012	33,3323
0,375	0,075	0,0750012	0,00159997
0,5 -	0,0375	0,0750012	50,0008
0,5 +	0,0375	$-7,56 \cdot 10^{-8}$	100
0,625	0	$-7,56 \cdot 10^{-8}$	
0,75 -	-0,0375	$-7,56 \cdot 10^{-8}$	99,9998
0,75 +	-0,0375	-0,0750006	50,0004
0,875	-0,075	-0,0750006	0,000799994
1	-0,1125	-0,0750006	33,3328

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga engaste-apoio (obtida pela integração da equação diferencial e mediante a imposição das condições de contorno),

$$w(x) = -\frac{q}{24 E J} x^4 + \frac{5 q L}{48 E J} x^3 - \frac{q L^2}{16 E J} x^2,$$

a qual é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por quatro elementos.

Conforme a Figura (4.49), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.31), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se uma acentuada melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica), apesar da aproximação continuar sendo feita por polinômios de grau 3, enquanto a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.50), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.32), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma acentuada melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica).

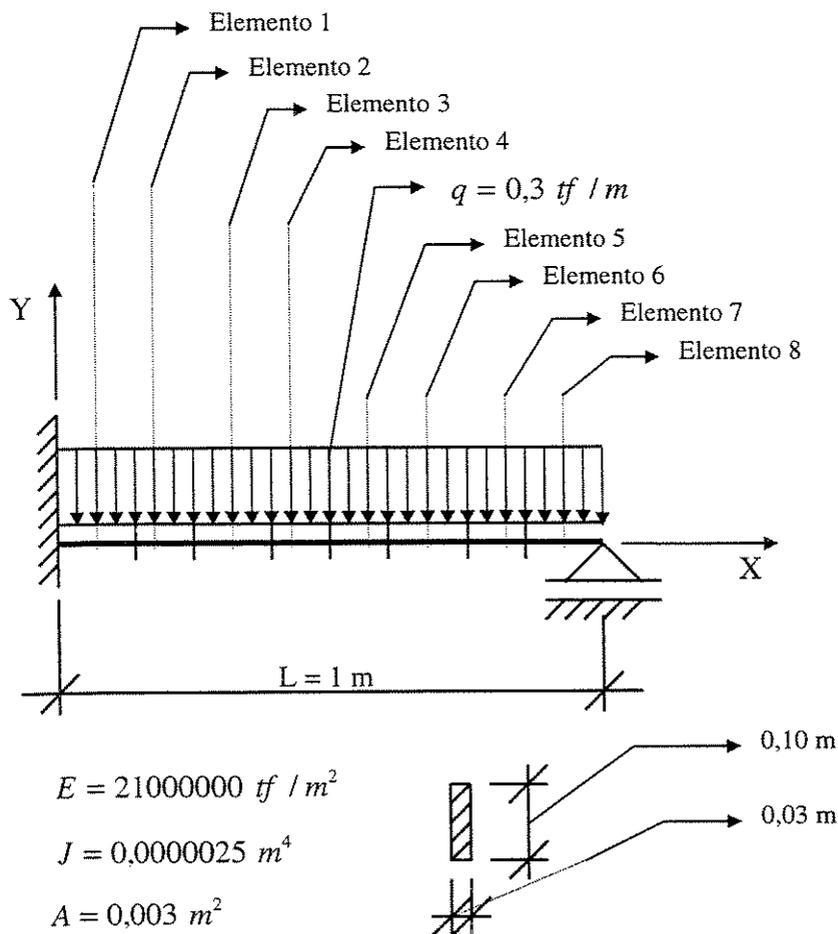
Conforme a Figura (4.51), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.33), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de uma sensível melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos (sendo ambos comparados com a solução analítica). Portanto, apesar dos resultados obtidos ainda se apresentarem fora de um padrão aceitável quando comparados com a solução analítica, o objetivo principal dessa nova discretização através de quatro elementos foi totalmente atingido.

Conforme a Figura (4.52), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.34), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a continuidade da defasagem dos resultados obtidos quando comparados com a solução analítica. Na próxima seção, mantendo-se a interpolação por splines cúbicas será buscada uma melhor aproximação, através de uma discretização mais refinada por um maior número de elementos, para os momentos fletores da viga.

### 4.8.11 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA ENGASTE-APOIO DISCRETIZADA POR OITO ELEMENTOS

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga engaste-apoio. Conforme a Figura (4.53), essa estrutura submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído ao longo de seu eixo longitudinal, apresenta-se discretizada por oito elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.53).



*Figura (4.53): Viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, solicitada por uma carga uniformemente distribuída.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;

-) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; .e

-) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf / m}^2$  .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) engastada (extremidade esquerda) - apoiada (extremidade direita).

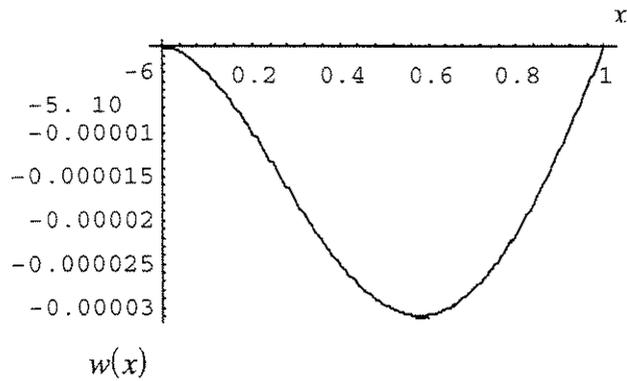
O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q = 0,3 \text{ tf / m}$  (carga uniformemente distribuída).

Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$-)\left\{\begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ \theta(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \text{ e} \\ m(L) = 0 . \end{array}\right.$$

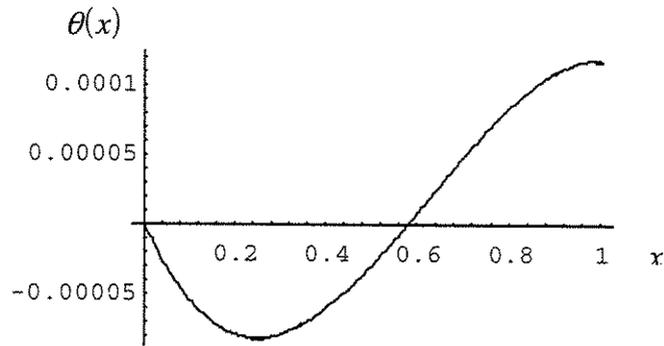
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.54):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.35):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

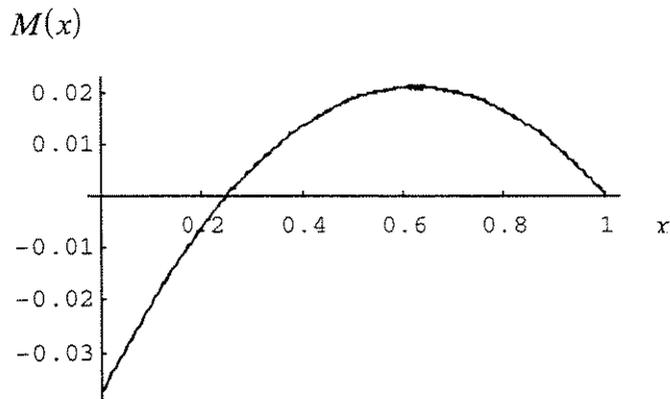
$x$ [m]	Resultado Analítico ( $w$ )	Resultado Obtido ( $w$ )	$ \%$ de erro
0	0	0	0
0,125	$-4,47591 \cdot 10^{-6}$	$-4,47697 \cdot 10^{-6}$	0,0236767
0,25	-0,0000139509	-0,0000139542	0,0236488
0,375	-0,0000235421	-0,0000235479	0,0246306
0,5	-0,0000297619	-0,0000297695	0,0255295
0,625	-0,0000305176	-0,0000305258	0,0268625
0,75	-0,0000251116	-0,0000251187	0,0282658
0,875	-0,0000142415	-0,0000142457	0,0294826
1	0	0	0



**Figura (4.55):** Rotações  $\theta$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.36):** Rotações  $\theta$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

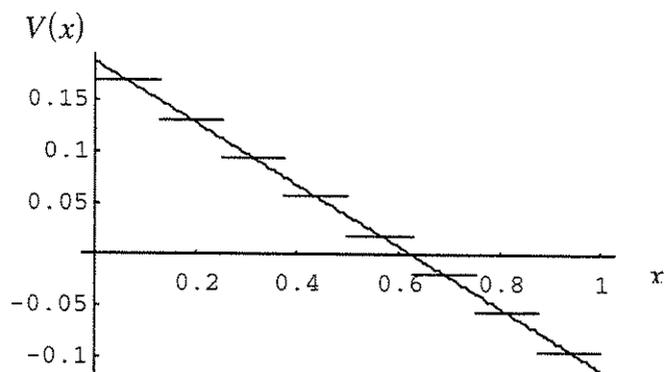
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,000063244	-0,0000632589	0,023554
0,25	-0,0000818452	-0,0000818651	0,0243083
0,375	-0,0000669643	-0,0000669823	0,0268728
0,5	-0,0000297619	-0,0000297726	0,0359391
0,625	0,0000186012	0,0000186024	0,00645078
0,75	0,0000669643	0,0000669809	0,0247832
0,875	0,000104167	0,000104196	0,0278322
1	0,000119048	0,000119084	0,0302308



**Figura (4.56): Momentos Fletores  $M$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.37): Momentos Fletores  $M$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	-0,0375	-0,0371183	1,01787
0,125	-0,0164062	-0,0160192	2,35886
0,25	0	0,000389945	
0,375	0,0117187	0,0121117	3,2448
0,5	0,01875	0,0191444	2,06013
0,625	0,0210937	0,0214906	1,84685
0,75	0,01875	0,0191474	2,07548
0,875	0,0117187	0,0121134	3,25838
1	0	0,000392433	



**Figura (4.57): Esforços Cortantes  $V$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.38): Esforços Cortantes  $V$  da viga engaste-apoio, discretizada por oito elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,1875	0,168793	9,97707
0,125 -	0,15	0,168793	11,1338
0,125+	0,15	0,131273	12,4847
0,25 -	0,1125	0,131273	14,3007
0,25 +	0,1125	0,0937738	16,6455
0,375 -	0,075	0,0937738	20,0203
0,375+	0,075	0,0562621	24,9839
0,5 -	0,0375	0,0562621	33,3477
0,5 +	0,0375	0,018769	49,9493
0,625 -	0	0,018769	
0,625+	0	0,0187452	
0,75 -	-0,0375	-0,0187452	50,0128
0,75 +	-0,0375	-0,0562725	33,36
0,875 -	-0,075	-0,0562725	24,97
0,875+	-0,075	-0,0937674	20,0148
1	-0,1125	-0,0937674	16,6512

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela viga engaste-apoio (obtida pela integração da equação diferencial e mediante a imposição das condições de contorno),

$$w(x) = -\frac{q}{24 E J} x^4 + \frac{5 q L}{48 E J} x^3 - \frac{q L^2}{16 E J} x^2,$$

a qual é uma equação de grau 4, foi aproximada através de uma interpolação por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a extensão longitudinal da viga foi discretizado por oito elementos.

Conforme a Figura (4.54), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.35), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica), apesar da aproximação continuar sendo feita por polinômios de grau 3, enquanto a solução analítica é dada por um polinômio de grau 4.

Conforme a Figura (4.55), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.36), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também uma melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica).

Conforme a Figura (4.56), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.37), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de uma sensível melhoria nos resultados obtidos em relação aos obtidos por uma discretização através de dois elementos e em relação aos obtidos por uma discretização através de quatro elementos (sendo todos comparados com a solução analítica). Portanto, esses resultados obtidos por essa discretização através de oito elementos aproximam-se relativamente bem dos resultados analíticos, e assim, o objetivo principal dessa nova discretização através de oito elementos foi totalmente atingido, ou seja, através de um aumento do número de elementos que compõem a discretização, observa-se que os resultados obtidos para os momentos fletores convergem para a solução analítica apresentada pela viga engaste-apoio.

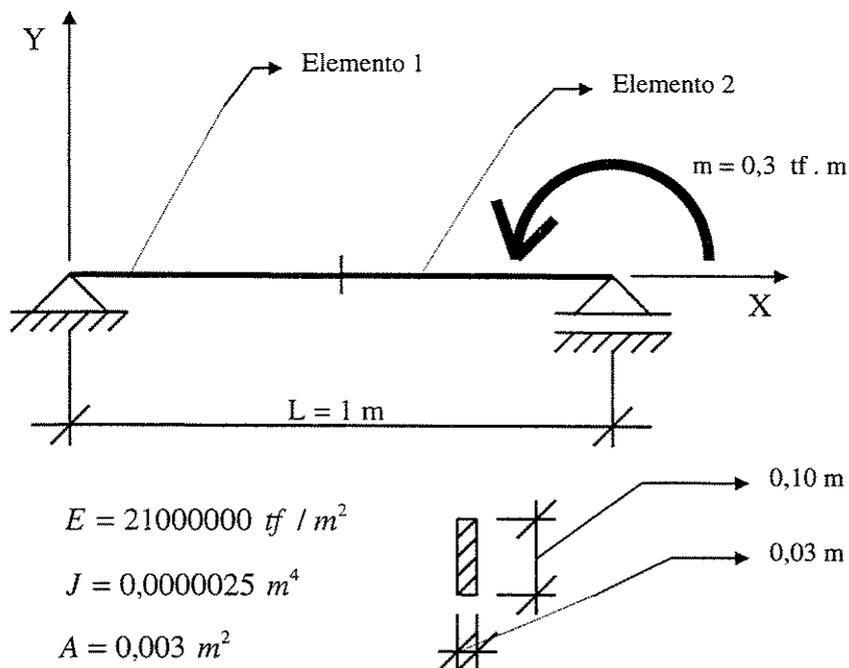
Conforme a Figura (4.57), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da viga e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (4.38), a qual apresenta

uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a continuidade da defasagem dos resultados obtidos quando comparados com a solução analítica.

#### 4.8.12 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA BIAPOIADA DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga biapoiada. Conforme a Figura (4.58), essa estrutura submetida a um momento puro aplicado na extremidade direita, apresenta-se discretizada por dois elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.58).



**Figura (4.58):** Viga biapoiada, discretizada por dois elementos, solicitada por um momento puro na extremidade direita.

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;

-) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e

-) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 21000000 \text{ tf / m}^2$  .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) apoiada (extremidade esquerda) - apoiada (extremidade direita).

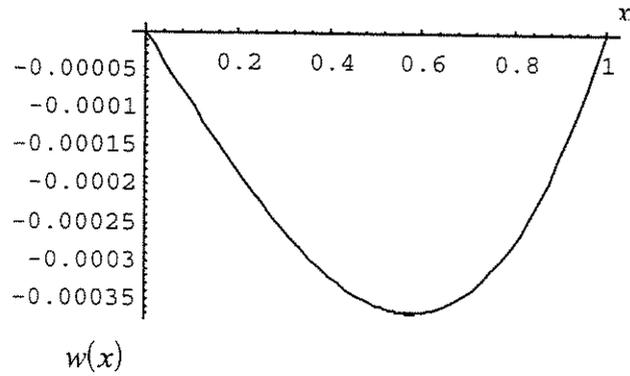
O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $m = 0,3 \text{ tf} \cdot \text{m}$  (momento concentrado na extremidade direita).

Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ m(0) = 0 ; \\ w(L) = 0 ; \quad e \\ m(L) = 0,3 . \end{array} \right.$$

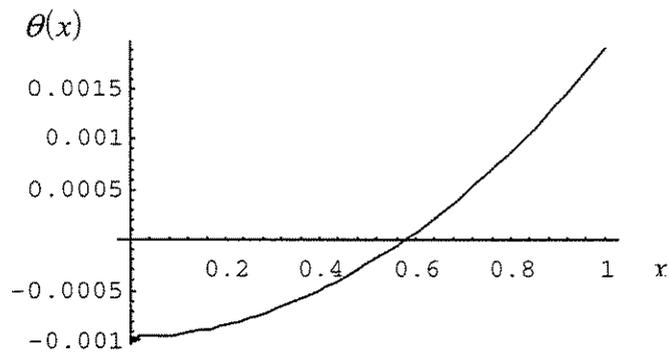
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.59):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Popov (1978)).

**Tabela (4.39):** Deslocamentos transversais  $w$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica

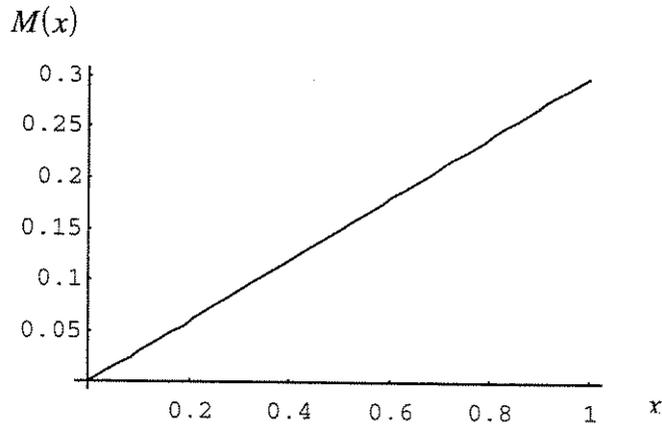
$x$ [m]	Resultado Analítico ( $w$ )	Resultado Obtido ( $w$ )	$ \%$ de erro
0	0	0	0
0,125	-0,000117187	-0,000117188	0,00085333
0,25	-0,000223214	-0,000223215	0,000447999
0,375	-0,00030692	-0,00030692	0
0,5	-0,000357143	-0,000357143	0
0,625	-0,000362723	-0,000362724	0,000275692
0,75	-0,0003125	-0,0003125	0
0,875	-0,000195312	-0,000195313	0,000511999
1	0	0	0



**Figura (4.60):** Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.40):** Rotações  $\theta$  da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

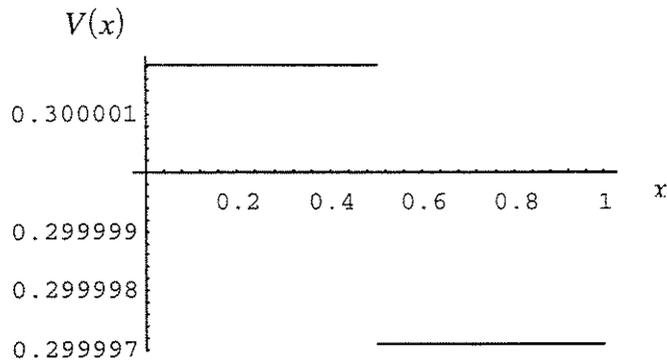
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	-0,000952381	-0,000952381	0
0,125	-0,000907738	-0,000907739	0,000110164
0,25	-0,00077381	-0,000773811	0,000129231
0,375	-0,000550595	-0,000550596	0,000181621
0,5	-0,000238095	-0,000238095	0
0,625	0,00016369	0,000163691	0,000610907
0,75	0,000654762	0,000654763	0,000152727
0,875	0,00123512	0,00123512	0
1	0,00190476	0,00190476	0



**Figura (4.61):** Momentos Fletores  $M$  da viga biapoçada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.41):** Momentos Fletores  $M$  da viga biapoçada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	0	$-4,025 \cdot 10^{-7}$	
0,125	0,0375	0,0374998	0,000533333
0,25	0,075	0,0750001	0,000133333
0,375	0,1125	0,1125	0
0,5	0,15	0,150001	0,000666662
0,625	0,1875	0,1875	0
0,75	0,225	0,225	0
0,875	0,2625	0,262499	0,000380952
1	0,3	0,299999	0,000333333



**Figura (4.62): Esforços Cortantes  $V$  da viga biapoada, discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.42): Esforços Cortantes  $V$  da viga biapoada, discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,3	0,300002	0,000666662
0,125	0,3	0,300002	0,000666662
0,25	0,3	0,300002	0,000666662
0,375	0,3	0,300002	0,000666662
0,5 -	0,3	0,300002	0,000666662
0,5 +	0,3	0,299997	0,001
0,625	0,3	0,299997	0,001
0,75	0,3	0,299997	0,001
0,875	0,3	0,299997	0,001
1	0,3	0,299997	0,001

Como pode ser observado através da Figura (4.59), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga biapoiada e os obtidos analiticamente, através da Figura (4.60), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para as rotações dessa viga e os obtidos analiticamente, através da Figura (4.61), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para os momentos fletores dessa viga e os obtidos analiticamente, e através da Figura (4.62), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para as esforços cortantes dessa viga e os obtidos analiticamente, obteve-se resultados idênticos aos analíticos através das interpolações por splines cúbicas. A comprovação numérica desses excelentes resultados pode ser feita através das Tabelas (4.39), (4.40), (4.41) e (4.42), respectivamente.

A obtenção de tais resultados era absolutamente esperada, uma vez que a solução analítica para os deslocamentos transversais da viga, conforme Popov (1978)

$$w(x) = -\frac{M x}{6 E J L} (L^2 - x^2),$$

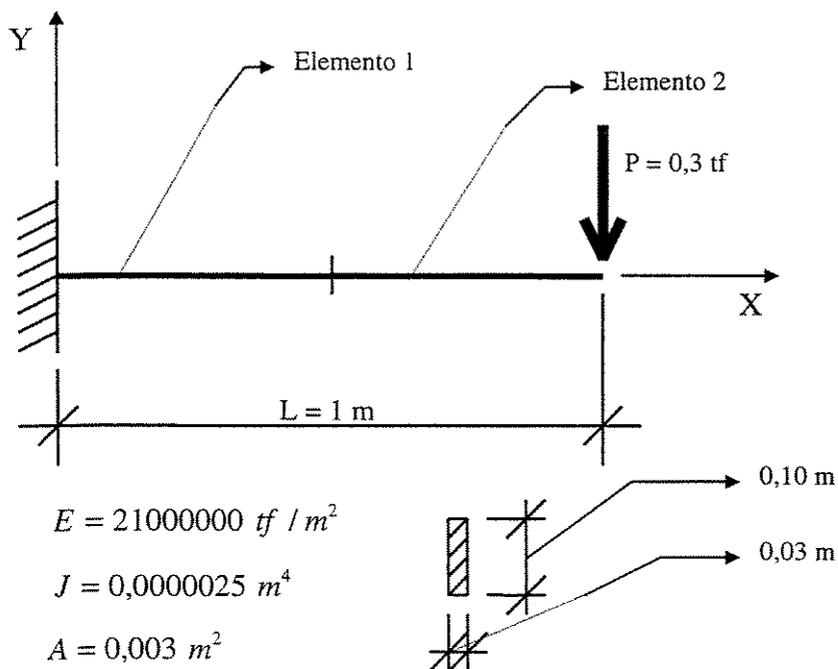
é dada por um polinômio de grau “3”, e a aproximação foi feita por uma polinomial por partes de grau “3”, ou seja, para uma solução cúbica foi feita uma aproximação também cúbica por funções que apresentam além de robustez, continuidade até sua segunda derivada (conforme várias discussões do capítulo 3). Portanto, para todas as grandezas, para os deslocamentos transversais, para as rotações, para os momentos fletores e para os esforços cortantes da viga biapoiada, discretizada por dois elementos, submetida a um momento puro em sua extremidade direita, a solução obtida é a própria solução analítica.

#### **4.8.13 ESTRUTURA EM FORMA DE VIGA EM BALANÇO DISCRETIZADA POR DOIS ELEMENTOS**

Na presente seção será estudado o comportamento de uma viga engastada (viga em balanço). Conforme a Figura (4.63), essa estrutura submetida a uma carga concentrada em sua extremidade livre (extremidade direita), apresenta-se discretizada por dois elementos.

O estudo do comportamento dessa viga envolverá uma interpolação por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos transversais,

das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta na Figura (4.63).



**Figura (4.63): Viga em balanço, discretizada por dois elementos, solicitada por uma carga concentrada na extremidade livre.**

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

- ) comprimento do vão:  $L = 1 \text{ m}$  ;
- ) área da seção transversal:  $A = 0,003 \text{ m}^2$  ; e
- ) momento de inércia à flexão:  $J = 0,0000025 \text{ m}^4$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

- ) módulo de elasticidade longitudinal:  $E = 210000000 \text{ tf / m}^2$  .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

- ) engastada (extremidade esquerda) - livre (extremidade direita).

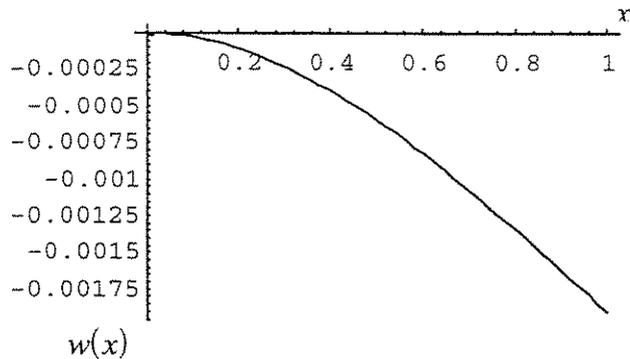
O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

- )  $P = 0,3 \text{ tf}$  (carga concentrada na extremidade direita).

Como condições de contorno, conforme os vínculos aos quais a estrutura está submetida, tem-se

$$-)\left\{\begin{array}{l} w(0) = 0 ; \\ \theta(0) = 0 ; \\ m(L) = 0 ; e \\ F(L) = 0,3 . \end{array}\right.$$

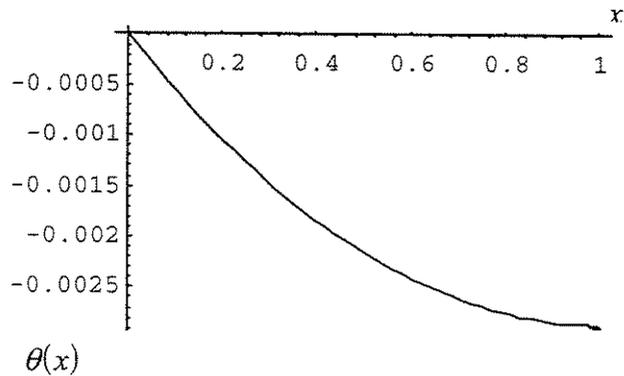
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (4.64):** Deslocamentos transversais  $w$  para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Popov (1978)).

**Tabela (4.43):** Deslocamentos transversais  $w$  para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

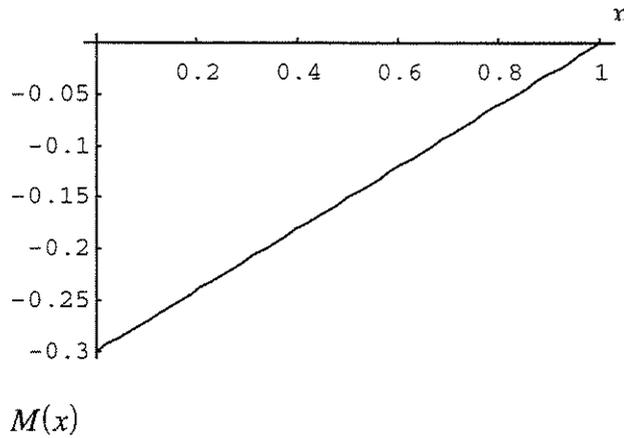
x [m]	Resultado Analítico (w)	Resultado Obtido (w)	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,0000427827	-0,0000427833	0,00140242
0,25	-0,00016369	-0,000163691	0,000610907
0,375	-0,000351562	-0,000351563	0,000284444
0,5	-0,000595238	-0,000595239	0,000168
0,625	-0,000883557	-0,000883557	0
0,75	-0,00120536	-0,00120536	0
0,875	-0,00154948	-0,00154948	0
1	-0,00190476	-0,00190476	0



**Figura (4.65):** Rotações  $\theta$  para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (4.44):** Rotações  $\theta$  para a viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

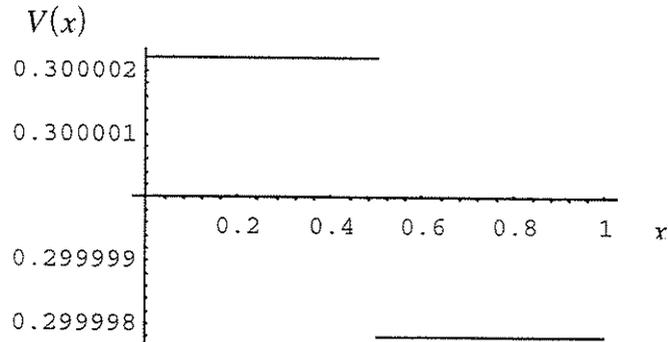
x [m]	Resultado Analítico ( $\theta$ )	Resultado Obtido ( $\theta$ )	% de erro
0	0	0	0
0,125	-0,000669643	-0,000669643	0
0,25	-0,00125	-0,00125	0
0,375	-0,00174107	-0,00174107	0
0,5	-0,00214286	-0,00214285	0,000466666
0,625	-0,00245536	-0,00245535	0,000407272
0,75	-0,00267857	-0,00267857	0
0,875	-0,0028125	-0,0028125	0
1	-0,00285714	-0,00285714	0



**Figura (4.66):** Momentos Fletores  $M$  da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (4.45):** Momentos Fletores  $M$  da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

x [m]	Resultado Analítico (M)	Resultado Obtido (M)	% de erro
0	-0,3	-0,3	0
0,125	-0,2625	-0,2625	0
0,25	-0,225	-0,225	0
0,375	-0,1875	-0,187499	0,000533333
0,5	-0,15	-0,149999	0,000666667
0,625	-0,1125	-0,112499	0,000888889
0,75	-0,075	-0,0749998	0,000266667
0,875	-0,0375	-0,0375	0
1	0	$-3,15 \cdot 10^{-7}$	



**Figura (4.67): Esforços Cortantes  $V$  da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (4.46): Esforços Cortantes  $V$  da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

x [m]	Resultado Analítico (V)	Resultado Obtido (V)	% de erro
0	0,3	0,300002	0,000666662
0,125	0,3	0,300002	0,000666662
0,25	0,3	0,300002	0,000666662
0,375	0,3	0,300002	0,000666662
0,5 -	0,3	0,300002	0,000666662
0,5 +	0,3	0,299998	0,000666667
0,625	0,3	0,299998	0,000666667
0,75	0,3	0,299998	0,000666667
0,875	0,3	0,299998	0,000666667
1	0,3	0,299998	0,000666667

Como pode ser observado através da Figura (4.64), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para os deslocamentos transversais da viga engastada (viga em balanço) e os obtidos analiticamente, através da Figura (4.65), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para as rotações dessa viga e os obtidos analiticamente, através da Figura (4.66), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para os momentos fletores dessa viga e os obtidos analiticamente, e através da Figura (4.67), onde é feita a comparação gráfica entre os resultados obtidos para as esforços cortantes dessa viga e os obtidos analiticamente, obteve-se resultados idênticos aos analíticos através das interpolações por splines cúbicas. A comprovação numérica desses excelentes resultados pode ser feita através das Tabelas (4.43), (4.44), (4.45) e (4.46), respectivamente.

A obtenção de tais resultados era absolutamente esperada, uma vez que a solução analítica para os deslocamentos transversais da viga, conforme Popov (1978)

$$w(x) = \frac{P}{6 E J} \left[ 2 L^3 - 3 L^2 (L - x) + (L - x)^3 \right],$$

é dada por um polinômio de grau “3”, e a aproximação foi feita por uma polinomial por partes de grau “3”, ou seja, para uma solução cúbica foi feita uma aproximação também cúbica por funções que apresentam além de robustez, continuidade até sua segunda derivada (conforme várias discussões do capítulo 3). Portanto, para todas as grandezas, para os deslocamentos transversais, para as rotações, para os momentos fletores e para os esforços cortantes da viga engastada (viga em balanço), discretizada por dois elementos, submetida a uma carga concentrada em sua extremidade livre (extremidade direita), a solução obtida é a própria solução analítica.

# ***5 UTILIZAÇÃO DE B-SPLINES COMO FUNÇÕES DE FORMA, EM ELEMENTOS FINITOS, PARA RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS BI-DIMENSIONAIS: PLACAS ELÁSTICAS FINAS***

## ***5.1 INTRODUÇÃO***

No presente capítulo é apresentado um estudo sobre o emprego de splines cúbicas, como funções de forma dentro do método dos elementos finitos, para análise de placas elásticas finas, ou seja, para placas cuja relação  $\frac{t}{a} < 0,05$  (sendo “*t*” a espessura e “*a*” sua dimensão característica, ou sua largura, ou, ainda, sua menor dimensão).

Todo o desenvolvimento até aqui focado, abordando estruturas unidimensionais, teve por objetivo preparar a utilização do método para o seu emprego em estruturas bidimensionais.

A abordagem bidimensional visando a aproximação, por splines cúbicas, do campo de deslocamentos de estruturas em forma de placas elásticas finas pode ser feita através de uma certa “repetição” do procedimento unidimensional, empregado para barras e vigas, em ambas as direções da placa.

Segundo Szilard (1974), da teoria de flexão de placas planas, pode-se extrair que o comportamento de tais estruturas assemelha-se muito ao das vigas retas, principalmente em termos das cargas transversais suportadas pela ação de flexão. O material das placas a serem estudadas é assumido como homogêneo e linearmente elástico.

As tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são admitidas variando linearmente com “*z*” e associadas com os momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ . A tensão cisalhante  $\tau_{xy}$  também varia linearmente com “*z*” e é

associada com o momento volvente  $M_{xy}$ . A tensão normal  $\sigma_z$  é considerada negligenciável em comparação com  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ . Tensões cisalhantes transversais  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  variam quadraticamente com “z”.

A carga transversal “q” inclui carga de superfície e forças de corpo, ambas na direção “z”. A menos que contrária e antecipadamente seja estabelecido, “flexão de placa” significa que as cargas externas não têm componentes paralelas ao plano “x-y” dessa placa e que  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$  em sua superfície média, ou seja, em  $z=0$ .

Excetuando-se a tensão  $\tau_{xy}$ , os padrões de tensão expostos e admitidos são uma extensão direta da teoria de viga unidimensional à teoria bidimensional.

## **5.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE PLACA NO SISTEMA CARTESIANO DE COORDENADAS (ENFOQUE CLÁSSICO-ANALÍTICO)**

### **5.2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS**

Segundo Szilard (1974), a forma de uma placa é adequadamente definida pela descrição da geometria de sua superfície média, a qual corta ao meio a espessura dessa placa em cada ponto. A teoria das pequenas deflexões de placa, geralmente atribuída a Kirchhoff e Love (incluem-se contribuições de Bernoulli, Navier, Poisson, Saint-Venant e Lagrange), é baseada nas seguintes suposições:

1. O material da placa é elástico, homogêneo e isotrópico.
2. A placa é inicialmente plana.
3. A espessura da placa é pequena comparada às suas outras dimensões. A menor dimensão lateral da placa é pelo menos dez vezes maior que sua espessura.
4. As deflexões são pequenas comparadas com a espessura da placa. O intervalo compreendido entre um décimo e um quinto da espessura é considerado como o limite, em relação a uma máxima deflexão, para a teoria das pequenas deflexões. Essa limitação pode também ser estabelecida em termos do comprimento dos vãos, isto é, a deflexão máxima é menos que 1/50 do menor comprimento de vão.
5. As inclinações da superfície média defletida são pequenas comparadas com a unidade.

6. As deformações são tais que linhas retas, inicialmente normais à superfície média, permanecem linhas retas e normais à superfície média (no modelo de Kirchhoff, deformações devido ao cisalhamento transversal serão negligenciadas).
7. A deflexão da placa é produzida pelo deslocamento dos pontos da superfície média normal ao seu plano inicial.
8. As tensões normais à superfície média são negligenciáveis.
9. No caso de placas com resistência à flexão, uma suposição simplificante adicional pode ser acrescentada: as deformações na superfície média produzidas por forças no plano podem, usualmente, ser negligenciadas em comparação com as deformações devido à flexão (teoria inextensional de placa).

Para placas retangulares é mais conveniente o uso do sistema cartesiano de coordenadas. As forças internas e externas e os componentes da deflexão (“*u*”, “*v*” e “*w*”) são considerados positivos quando apontarem para o sentido positivo dos eixos coordenados (“*X*”, “*Y*” e “*Z*”). Na prática geral de engenharia, momentos positivos produzem tração nas fibras localizadas na parte inferior da estrutura. Conforme Szilard (1974) Essa convenção de sinal é mantida para placas.

### 5.2.2 EQUILÍBRIO DO ELEMENTO DE PLACA

Assumindo que a placa é solicitada somente por forças perpendiculares ao seu plano, podem ser utilizadas três equações de equilíbrio:

$$\Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0, \quad e \quad \Sigma P_z = 0. \quad (5.1)$$

Segundo Szilard (1974), o comportamento da placa, em muitos aspectos, é análogo ao de uma estrutura, composta por vigamentos bidimensionais, em forma de grelha. Assim, a carga externa  $P_z$  é transmitida pelas forças cisalhantes transversais  $Q_x$  e  $Q_y$  e pelos momentos fletores  $M_x$  e  $M_y$ . O desvio significativo, em relação às ações nas vigas de uma grelha bidimensional, é a presença dos momentos volventes  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$ . Na teoria de placas trata-se com forças internas e momentos por unidade de comprimento da superfície média: para distinguir essas forças das resultantes anteriormente mencionadas introduz-se as notações  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $m_{xy}$  e  $m_{yx}$ .

Com base na Figura (5.1), onde aparecem as forças internas e externas em um elemento da superfície média da placa, e através do procedimento exposto a seguir, inicia-se a dedução da equação diferencial de equilíbrio da placa:

1. Escolhe-se um sistema de coordenadas conveniente e extrai-se um elemento infinitesimal de placa.
2. Coloca-se todas as forças internas e externas atuantes no elemento.
3. Transmite-se forças internas positivas com incrementos  $(q_x + \dots, q_y + \dots, \text{etc.})$ .
4. Transmite-se forças internas negativas.
5. Expressa-se os incrementos por uma série de Taylor truncada na forma

$$q_x + dq_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx, \quad m_y + dm_y = m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy, \quad \text{etc.} \quad (5.2)$$

6. Expressa-se o equilíbrio das forças internas e externas atuantes no elemento.

A soma de todos os momentos e de todas as forças em relação a um eixo paralelo a um dos lados da superfície média da placa resulta:

$$\begin{aligned} \left( m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - m_x dy + \left( m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - m_{yx} dx \\ - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} - q_x dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Após simplificações envolvendo a negligência de termos contendo  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) (dx)^2 dy$ , os quais

são pequenas quantidades de alta ordem, (5.3) torna-se

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy dx - q_x dx dy = 0, \quad (5.4)$$

e, após a divisão por  $dx dy$ , obtém-se

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = q_x. \quad (5.5)$$

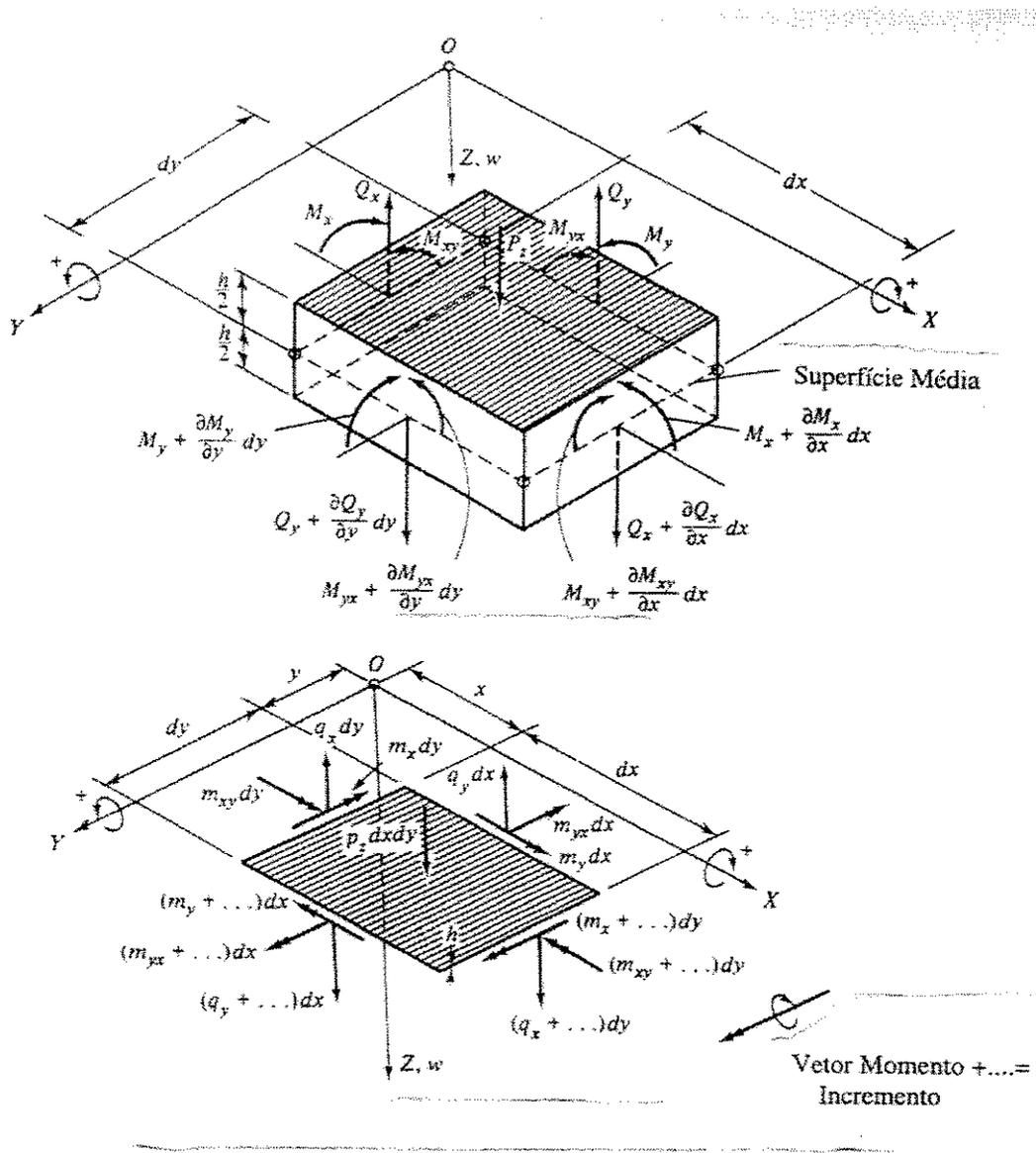


Figura (5.1): Forças Internas e Externas no elemento da superfície média da placa.

De forma similar, a soma dos momentos em relação ao outro eixo paralelo ao outro lado da superfície média da placa resulta

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \quad (5.6)$$

A soma de todas as forças na direção perpendicular ao plano da superfície média da placa conduz à equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dx dy + p_z dx dy = 0, \quad (5.7)$$

que após a divisão por  $dx dy$ , resulta

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -p_z. \quad (5.8)$$

Substituindo-se as equações (5.5) e (5.6) na equação (5.8) e observando-se que  $m_{xy} = m_{yx}$ , obtém-se

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y). \quad (5.9)$$

Os momentos fletores e volventes na equação (5.9) dependem das deformações, e as deformações são funções das componentes do deslocamento (“ $u$ ”, “ $v$ ” e “ $w$ ”); segundo Szilard (1974), as relações entre os momentos internos e as componentes do deslocamento serão buscadas nos próximos passos.

### 5.2.3 *RELAÇÕES ENTRE TENSÃO, DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO*

A suposição que o material é elástico permite o uso da Lei de Hooke bidimensional,

$$\sigma_x = E \varepsilon_x + \nu \sigma_y \quad (5.10a)$$

e

$$\sigma_y = E \varepsilon_y + \nu \sigma_x, \quad (5.10b)$$

(onde  $E$  e  $\nu$ , respectivamente, são o módulo de elasticidade ou módulo de Young e o coeficiente de Poisson),

que descreve a tensão e deformação em um elemento de placa. Substituindo-se (5.10b) em (5.10a) obtém-se

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y). \quad (5.11)$$

De forma similar

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x). \quad (5.12)$$

Os momentos volventes  $m_{xy}$  e  $m_{yx}$  produzem no plano tensões cisalhantes  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$ , cuja relação com a deformação de cisalhamento  $\gamma$  é dada por

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \tau_{yx}. \quad (5.13)$$

Considerando-se a geometria da placa defletida para expressar as deformações em termos dos coeficientes de deslocamento, e comparando-se uma seção antes e depois da deflexão, expressa-se o ângulo de rotação por

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad e \quad \vartheta + \dots = \vartheta + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} dx, \quad (5.14)$$

respectivamente.

Pode-se escrever

$$\varepsilon_x = \frac{\left[ dx + z \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx \right] - dx}{dx} = z \frac{\partial \vartheta}{\partial x}. \quad (5.15)$$

Substituindo-se esta expressão na primeira das equações (5.14), obtém-se

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (5.16)$$

De maneira similar,  $\varepsilon_y$ , a deformação devido às tensões normais na outra direção paralela ao plano da superfície média, é dada por

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (5.17)$$

A distorção angular  $\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma''$  é obtida com o auxílio de

$$\gamma' = \frac{\partial v}{\partial x} \quad e \quad \gamma'' = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (5.18)$$

mas de (5.4)

$$u = z \vartheta = -z \frac{\partial w}{\partial x};$$

similarmente,

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (5.19)$$

conseqüentemente,

$$\gamma_{xy} = \gamma' + \gamma'' = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.20)$$

As mudanças de curvatura da superfície média defletida são definidas por

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad e \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (5.21)$$

onde  $\chi$ , conforme Szilard (1974), representa a deformada (arqueamento) da placa.

#### 5.2.4 FORÇAS INTERNAS EXPRESSADAS EM TERMOS DE “w”

As componentes de tensão  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  produzem momentos fletores no elemento de placa de modo similar ao que ocorre na teoria elementar de viga. Assim, por integração dos componentes normais de tensão, os momentos fletores atuantes no elemento de placa são obtidos por:

$$m_x = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \sigma_x z dz \quad e \quad m_y = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \sigma_y z dz. \quad (5.22)$$

Similarmente, os momentos volventes produzidos por tensões de cisalhamento  $\tau = \tau_{xy} = \tau_{yx}$  podem ser calculados a partir de

$$m_{xy} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{xy} z dz \quad e \quad m_{yx} = \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau_{yx} z dz. \quad (5.23)$$

mas  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$ , e por isso  $m_{xy} = m_{yx}$ .

Ao substituir-se as equações (5.16) e (5.17) em (5.11) e (5.12), as tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são expressadas em termos da deflexão lateral  $w$ . Assim pode-se escrever

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5.24)$$

e

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (5.25)$$

A integração das equações (5.22), após substituição das expressões acima para  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , resulta

$$\begin{aligned} m_x &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D (\kappa_x + \nu\kappa_y) \end{aligned} \quad (5.26)$$

e

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D (\kappa_y + \nu\kappa_x), \quad (5.27)$$

onde

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.28)$$

representa a flexão ou rigidez à flexão da placa. De maneira similar, a expressão do momento volvente em termos das deflexões laterais é obtida:

$$\begin{aligned} m_{xy} = m_{yx} &= \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \tau z dz = -2G \int_{-(h/2)}^{+(h/2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz \\ &= - (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = D (1-\nu) \chi. \end{aligned} \quad (5.29)$$

A substituição das equações (5.26), (5.27) e (5.29) na equação (5.9) conduz à **equação diferencial governante** da placa solicitada por cargas transversais (conforme Szilard (1974), esta equação foi obtida em 1811 por Lagrange; sendo também chamada equação de Lagrange):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_z(x, y)}{D} \quad (5.30)$$

ou utilizando o operador Laplaciano bidimensional, pode-se escrever:

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = p_z. \quad (5.31)$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial não-homogênea de quarta ordem do tipo elíptica com coeficientes constantes, freqüentemente chamada de equação biarmônica não-homogênea.

Do mesmo modo pode-se expressar também as forças cisalhantes transversais em termos das deflexões laterais. A substituição das equações (5.26), (5.27) e (5.29) nas equações (5.5) e (5.6) resulta

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \quad (5.32a)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (5.32b)$$

O problema da placa é considerado resolvido se for conseguida uma expressão para a superfície da placa defletida  $w(x, y)$ , satisfazendo simultaneamente a equação diferencial de equilíbrio (5.30) e as condições de contorno. Conseqüentemente, estabelece-se que a solução dos problemas de placa é um caso específico de um problema de valor de contorno da física matemática.

Menciona-se que ocasionalmente, uma condição de contorno simplesmente apoiada é um desses casos especiais, pode ser vantajosa a introdução da **soma-momento** na seguinte forma:

$$M = \frac{1}{1 + \nu} (m_x + m_y) = -D \nabla^2 w. \quad (5.33)$$

O lado direito desta equação é obtido de (5.26) e (5.27). A introdução desta soma-momento permite dividir a equação diferencial governante de quarta ordem em duas equações diferenciais de segunda ordem, ou seja,

$$\nabla^2 \mathbf{M} = - p_z \quad (5.34a)$$

e

$$\nabla^2 w = \mathbf{M} \left( -\frac{1}{D} \right). \quad (5.34b)$$

É interessante notar-se que as equações (5.34a) e (5.34b) têm forma similar à equação diferencial de membrana.

Pode-se fazer um resumo de todos os passos necessários para a obtenção da equação diferencial de placa elástica:

1. Expressa-se o equilíbrio das forças internas e externas atuantes no elemento de placa.
2. Relaciona-se deformações e tensões pela Lei de Hooke.
3. O uso de certas relações geométricas, obtidas da forma da superfície defletida, torna possível expressar-se deformações em termos das componentes de deslocamento.
4. Expressa-se as forças internas em termos das tensões e deformações e, finalmente, em termos das componentes de deslocamento.

Problemas de placa, tal como problemas de tensão, bi e tridimensionais, da elasticidade são internamente indeterminados estaticamente; isto é, as três equações de equilíbrio (5.5), (5.6) e (5.8) contém cinco incógnitas, ou seja, três momentos e duas forças cisalhantes. Para que uma solução seja possível é necessário a utilização de equações adicionais da elasticidade. Assim se procedendo, conforme Szilard (1974), é possível a obtenção da equação diferencial governante da placa carregada perpendicularmente ao seu plano (5.30) contendo somente uma incógnita ( $w$ ).

### 5.3 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE PLACAS ORTOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS

Nesta seção serão deduzidos, através da aplicação de resíduos ponderados, a matriz de rigidez e o vetor de carga para estruturas em forma de placas ortotrópicas elásticas finas. Tanto a matriz de rigidez como o vetor de carga obtidos serão particularizados para estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas.

Conforme (5.9), a equação em termos dos momentos atuantes na placa é

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x, y).$$

Substituindo-se nesta as expressões dos momentos fletores e do momento volvente para placas ortotrópicas, conforme Szilard (1974),

$$m_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$m_y = -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

onde, também conforme Szilard (1974), a rigidez à flexão na direção “x”, a rigidez à flexão na direção “y” e a rigidez à torção são dadas, respectivamente, por

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)} ;$$

$$D_y = \frac{E_y t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)} ; e$$

$$D_t = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\nu_x \nu_y} \right) \sqrt{D_x D_y} = \frac{1}{2} (1 - \nu_{xy}) D_{xy}.$$

Sendo que para uma placa ortotrópica de espessura uniforme,  $D_t = G_{xy} \frac{t^3}{12}$ , com o módulo cisalhante dado por

$$G_{xy} \approx \frac{\sqrt{E_x E_y}}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})} \approx \frac{E}{2(1 + \sqrt{\nu_x \nu_y})};$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ -2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = -p_z(x, y) \rightarrow \\ -D_x \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 2(2D_t) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D_y \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu_x \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) = \\ = -p_z(x, y) \rightarrow \\ -D_x \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 2D_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 2D_t \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} - D_y \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu_x \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) = \\ = -p_z(x, y) \end{aligned}$$

Multiplicando-se ambos os lados por  $(-N_t dx dy)$  e integrando-se de 0 a  $L_x$  e de 0 a  $L_y$ ;

tem-se,

$$\begin{aligned}
& D_x \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + v_y \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) N_l dx dy + 2D_t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} N_l dx dy + \\
& + 2D_t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} N_l dx dy + D_y \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + v_x \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) N_l dx dy = \\
& = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy
\end{aligned}$$

Aproximando-se "w" por "N<sub>m</sub>"; tem-se,

$$\begin{aligned}
& D_x \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} + v_y \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \right) N_l dx dy + 2D_t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} N_l dx dy + \\
& + 2D_t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} N_l dx dy + D_y \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} + v_x \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \right) N_l dx dy = \\
& = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& D_x \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} N_l dx dy + D_x \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} v_y \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} N_l dx dy + 2D_t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} N_l dx dy + \\
& + 2D_t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} N_l dx dy + D_y \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} N_l dx dy + \\
& + D_y \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} v_x \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} N_l dx dy = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy
\end{aligned}$$

Resolvendo cada integral dupla por partes, ou seja, integrando-se duas vezes por partes cada uma das seis integrais duplas do lado esquerdo,

(A primeira integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} N_l \, dx \, dy = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3}
 \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_y} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \right) dy = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \, dx \right) dy = \\
 & = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(A segunda integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} v_y \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} N_l \, dx \, dy = v_y \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v_y \int_0^{L_y} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \right) dy = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & = v_y \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - v_y \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v_y \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - v_y \int_0^{L_y} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \, dx \right) dy = \\
 & = \int_0^{L_y} N_l v_y \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} v_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} v_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.$$

(A terceira integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} 2D_t \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} N_l \, dx \, dy = 2D_t \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = 2D_t \int_0^{L_y} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \right) dy = \\
 & = 2D_t \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - 2D_t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right. \\
 & = 2D_t \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_y} dy - 2D_t \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dy \right) dx = \\
 & = \int_0^{L_y} N_l 2D_t \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} 2D_t \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.$$

(A quarta integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} 2D_t \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} N_l \, dx \, dy = 2D_t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = 2D_t \int_0^{L_x} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \right) dx = \\
 & = 2D_t \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - 2D_t \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right. \\
 & = 2D_t \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - 2D_t \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dx \right) dy = \\
 & = \int_0^{L_x} N_l 2D_t \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} 2D_t \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.$$

(A quinta integral dupla):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} N_l \, dx \, dy = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned} u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \\ dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_x} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \right) dx = \\
 & \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \\ dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} \, dx - \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \right) dx = \\
 & = \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} \, dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} \, dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

(A sexta integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} v_x \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} N_l \, dx \, dy = v_x \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v_x \int_0^{L_x} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \right) dx = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & = v_x \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx - v_x \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v_x \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx - v_x \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \right) dx = \\
 & = \int_0^{L_x} N_l v_x \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} v_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} v_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
& D_x \left( \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx dy \right) + \\
& + D_x \left( \int_0^{L_y} N_l v_y \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} v_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} v_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} dx dy \right) + \\
& + \int_0^{L_y} N_l 2D_t \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} 2D_t \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} dx dy + \\
& + \int_0^{L_x} N_l 2D_t \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dy + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} 2D_t \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} dx dy + \\
& + D_y \left( \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} dx dy \right) + \\
& + D_y \left( \int_0^{L_x} N_l v_x \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} v_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} v_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx dy \right) = \\
& = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy.
\end{aligned}$$

Agrupando-se, convenientemente, as parcelas compostas pelas integrais e as parcelas compostas pelas integrais duplas do lado esquerdo,

$$\left\{ \begin{aligned}
 & D_x \left( \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy \right) + D_x \left( \int_0^{L_y} N_l v_y \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy \right) + \int_0^{L_y} N_l 2D_t \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy = \\
 & = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + v_y D_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) \Big|_0^{L_x} dy \\
 & \left\{ q_x = - \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_y D_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & \left. = \int_0^{L_y} N_l (-q_x) \Big|_0^{L_x} dy = - \int_0^{L_y} N_l q_x \Big|_0^{L_x} dy = -N_l Q_x \Big|_0^{L_x} \right.
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & D_x \left( - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} v_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy \right) = \\
 & = -D_x \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + v_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) \Big|_0^{L_x} dy = \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \left[ -D_x \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + v_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) \right] \Big|_0^{L_x} dy \\
 & \left\{ m_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\
 & \left. = \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} m_x \Big|_0^{L_x} dy = \frac{\partial N_l}{\partial x} M_x \Big|_0^{L_x} \right.
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_x} dy = \\
& = \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \left( -2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right) \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \left( -2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right) \Big|_0^{L_x} dy \\
& \left\{ \begin{aligned}
& m_{xy} = -2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
& = \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} m_{xy} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} m_{xy} \Big|_0^{L_x} dy = \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xy} \Big|_0^{L_y} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xy} \Big|_0^{L_x} \\
& \left\{ \begin{aligned}
& \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xy} \Big|_0^{L_y} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xy0} = 0 \\
& \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xy} \Big|_0^{L_x} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xy0} = 0
\end{aligned} \right. \\
& = 0
\end{aligned} \right.
\end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
& D_y \left( \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} dx \right) + D_y \left( \int_0^{L_x} N_l v_x \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx \right) + \int_0^{L_x} N_l 2D_t \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx = \\
& = \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + v_x D_y \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + 2D_t \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right) \Big|_0^{L_y} dx \\
& \left\{ \begin{aligned}
& q_y = - \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_x D_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
& = \int_0^{L_x} N_l (-q_y) \Big|_0^{L_y} dx = - \int_0^{L_x} N_l q_y \Big|_0^{L_y} dx = -N_l Q_y \Big|_0^{L_y}
\end{aligned} \right.
\end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left( D_y \left( - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} v_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx \right) = \right. \\
& = -D_y \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + v_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right) \Big|_0^{L_y} dx = \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \left[ -D_y \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + v_x \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_0^{L_y} dx \\
& \left\{ m_x = -D_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& = \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} m_y \Big|_0^{L_y} dx = \frac{\partial N_l}{\partial y} M_y \Big|_0^{L_y}
\end{aligned}$$

obtém-se,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ D_x \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + v_y D_x \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + 4G_{xy} \frac{t^3}{12} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} + \right. \\
& \quad \left. + D_y \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + v_x D_y \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right] dx dy = \\
& = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy + N_l Q_x \Big|_0^{L_x} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_x \Big|_0^{L_x} + \\
& \quad + N_l Q_y \Big|_0^{L_y} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_y \Big|_0^{L_y} \rightarrow \\
& \rightarrow D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \left( D_x \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + v_x D_y \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( v_y D_x \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\
& \quad \left. + G_{xy} \frac{t^3}{3} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = ; \\
& = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy + N_l Q_{xL_x} - N_l Q_{x0} + \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{x0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xL_x} + \\
& \quad + N_l Q_{yL_y} - N_l Q_{y0} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{y0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{yL_y}
\end{aligned}$$

$$\text{onde: } \left\{ \begin{array}{l} D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \left( D_x \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + v_x D_y \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( v_y D_x \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + G_{xy} \frac{t^3}{3} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = K_{lm} ; e \\ \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy + N_l Q_{xL_x} - N_l Q_{x0} + \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{x0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xL_x} + \\ + N_l Q_{yL_y} - N_l Q_{y0} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{y0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{yL_y} = f_l \end{array} \right. \quad (5.35)$$

Portanto, em (5.35) estão expostas as expressões obtidas para a matriz de rigidez,  $K_{lm}$ , e para o vetor de carga,  $f_l$ , de estruturas em forma de placas ortotrópicas elásticas finas.

As expressões para a matriz de rigidez,  $K_{lm}$ , e para o vetor de carga,  $f_l$ , obtidas em (5.35) podem ser particularizadas para estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas. Essa particularização pode ser iniciada a partir das considerações de que, para o caso isotrópico,  $E_x = E_y = E$  e  $\nu_x = \nu_y = \nu$ .

Tais considerações conduzem às seguintes conclusões:

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)} = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)} = D ; \\
D_y = \frac{E_y t^3}{12 (1 - \nu_x \nu_y)} = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)} = D ; e \\
G_{xy} = \frac{12 D_l}{t^3} = \frac{12 \left[ \frac{1}{2} (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y} \right]}{t^3} = \frac{12 \left[ \frac{1}{2} (1 - \nu) D \right]}{t^3} = \frac{6(1 - \nu) D}{t^3} .$$

E estas conclusões conduzem às seguintes expressões para a matriz de rigidez,  $K_{lm}$ , e para o vetor de carga,  $f_l$ , de estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas, sendo que a expressão do vetor de carga,  $f_l$ , não sofreu alterações em relação à apresentada em (5.35):

$$\left\{ \begin{aligned}
& D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = K_{lm} ; e \\
& \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x,y) N_l dx dy + N_l Q_{xL_x} - N_l Q_{x0} + \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{x0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xL_x} + \\
& \qquad \qquad \qquad + N_l Q_{yL_y} - N_l Q_{y0} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{y0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{yL_y} = f_l
\end{aligned} \right. \quad (5.36)$$

As expressões obtidas em (5.36), para o caso isotrópico, como uma particularização das expressões obtidas em (5.35), para o caso ortotrópico, podem ser determinadas pelo mesmo procedimento, que aplica o método dos resíduos ponderados, através do qual as expressões (5.35) foram obtidas. E, esse mesmo procedimento está descrito a seguir na seção 5.4.

#### **5.4 DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E DO VETOR DE CARGA PARA ESTRUTURAS EM FORMA DE PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS**

Nesta seção, através da aplicação de resíduos ponderados, serão deduzidas as expressões para a matriz de rigidez,  $K_{lm}$ , e para o vetor de carga,  $f_l$ , de estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas.

Conforme (5.9), a equação em termos dos momentos atuantes na placa é

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p_z(x,y).$$

Substituindo-se nesta, conforme Szilard (1974), as expressões dos momentos fletores e do momento volvente, conforme (5.26), (5.27) e (5.29), respectivamente,

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right);$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$m_{xy} = m_{yx} = - (1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

onde, conforme (5.28) dado por Szilard (1974),

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)};$$

tem-se,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\ & \quad + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] = -p_z(x, y) \rightarrow \\ & -D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) - 2(1-\nu) D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right) = \\ & \quad = -p_z(x, y) \rightarrow \\ & -D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right] = \\ & \quad = -p_z(x, y) \end{aligned}$$

Multiplicando-se ambos os lados por  $(-N_l dx dy)$  e integrando-se de 0 a  $L_x$  e de 0 a  $L_y$ ;

tem-se,

$$\begin{aligned} D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} & \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \right. \\ & \left. + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} \right] N_l dx dy = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy \end{aligned}$$

Aproximando-se "w" por " $N_m$ "; tem-se,

$$D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \right] N_l dx dy = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy$$

Resolvendo cada parcela da integração dupla por partes, ou seja, integrando-se duas vezes por partes cada uma das seis parcelas da integral dupla,

(A primeira integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} N_l dx dy = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} dx dy \\
& \left\{ \begin{aligned}
u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial x} dx \\
dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^4} dx \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3}
\end{aligned} \right. \\
& = \int_0^{L_y} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \frac{\partial N_l}{\partial x} dx \right) dy = \\
& \left\{ \begin{aligned}
& = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} dx dy \\
& \left\{ \begin{aligned}
u &= \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} dx \\
dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} dx \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}
\end{aligned} \right. \\
& = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} dx \right) dy = \\
& = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx dy
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

(A segunda integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} v \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} N_l \, dx \, dy = v \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v \int_0^{L_y} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \right) dy = \\
 & = v \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - v \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - v \int_0^{L_y} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \, dx \right) dy = \\
 & = \int_0^{L_y} N_l v \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} v \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} v \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.$$

(A terceira integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (1-\nu) \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} N_l \, dx \, dy = (1-\nu) \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial x^2 \partial y^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = (1-\nu) \int_0^{L_y} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial N_l}{\partial x} \, dx \right) dy = \\
 & = (1-\nu) \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - (1-\nu) \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial x} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right. \\
 & = (1-\nu) \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_y} dy - (1-\nu) \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dy \right) dx = \\
 & = \int_0^{L_x} N_l (1-\nu) \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_y} dy - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.$$

(A quarta integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (1-\nu) \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} N_l \, dx \, dy = (1-\nu) \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = (1-\nu) \int_0^{L_x} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \right) dx = \\
 & = (1-\nu) \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - (1-\nu) \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dx \, dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dx \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dx \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dx \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right. \\
 & = (1-\nu) \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - (1-\nu) \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \, dx \right) dy = \\
 & = \int_0^{L_x} N_l (1-\nu) \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.$$

(A quinta integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} N_l \, dx \, dy = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^4} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3}
 \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_x} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \right) dx = \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & = \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \right) dx = \\
 & = \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

(A sexta integral dupla):

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} v \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} N_l \, dx \, dy = v \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= N_l \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow du = \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^4 N_m}{\partial y^2 \partial x^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v \int_0^{L_x} \left( N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \frac{\partial N_l}{\partial y} \, dy \right) dx = \\
 & = v \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx - v \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dy \, dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial N_l}{\partial y} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \rightarrow du = \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \\
 dv &= \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dy \rightarrow \int dv = \int \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \, dy \rightarrow v = \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2}
 \end{aligned} \right. \\
 & = v \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx - v \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} - \int_0^{L_y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \, dy \right) dx = \\
 & = \int_0^{L_x} N_l v \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} v \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} \, dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} v \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \, dx \, dy
 \end{aligned} \right.$$

tem-se,

$$\begin{aligned}
& D \left( \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx dy + \right. \\
& + \int_0^{L_y} N_l \nu \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} dx dy + \\
& + \int_0^{L_y} N_l (1-\nu) \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} dx dy + \\
& + \int_0^{L_x} N_l (1-\nu) \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dy + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} dx dy + \\
& + \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} dx dy + \\
& \left. + \int_0^{L_x} N_l \nu \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} dx dy \right) = \\
& = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy.
\end{aligned}$$

Agrupando-se, convenientemente, as parcelas compostas pelas integrais e as parcelas compostas pelas integrais duplas do lado direito,

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial x^3} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} N_l \nu \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} N_l (1-\nu) \frac{\partial^3 N_m}{\partial x \partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy = \\
 & = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial}{\partial y} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] \Big|_0^{L_x} dy \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 m_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \rightarrow -\frac{m_x}{D} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 m_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \rightarrow -\frac{m_{xy}}{D} = (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{m_x}{D} \right) \Big|_0^{L_x} dy + \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{m_{xy}}{D} \right) \Big|_0^{L_x} dy = \\
 & = -\frac{1}{D} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial m_x}{\partial x} \Big|_0^{L_x} dy - \frac{1}{D} \int_0^{L_y} N_l \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Big|_0^{L_x} dy = -\frac{1}{D} \int_0^{L_y} N_l q_x \Big|_0^{L_x} dy
 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial^3 N_m}{\partial y^3} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} N_l \nu \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} N_l (1-\nu) \frac{\partial^3 N_m}{\partial y \partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx = \\
 & \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right) \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y \partial x} \right] \Big|_0^{L_y} dx \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 m_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \rightarrow -\frac{m_y}{D} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 m_{xy} &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \rightarrow -\frac{m_{xy}}{D} = (1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \right. \\
 & = \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{m_y}{D} \right) \Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{m_{xy}}{D} \right) \Big|_0^{L_y} dx = \\
 & = -\frac{1}{D} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial m_y}{\partial y} \Big|_0^{L_y} dx - \frac{1}{D} \int_0^{L_x} N_l \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \Big|_0^{L_y} dx = -\frac{1}{D} \int_0^{L_x} N_l q_y \Big|_0^{L_y} dx
 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left[ - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_y} dx = \right. \\
& = - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \left( - \frac{m_{xy}}{D} \right) \Big|_0^{L_y} dx = \\
& = - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} \left( - \frac{m_x}{D} \right) \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} \left( - \frac{m_{xy}}{D} \right) \Big|_0^{L_y} dx = \\
& = \frac{1}{D} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} m_x \Big|_0^{L_x} dy + \frac{1}{D} \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} m_{xy} \Big|_0^{L_y} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} (1-\nu) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \Big|_0^{L_x} dy = \right. \\
& = - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right) \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \left( - \frac{m_{xy}}{D} \right) \Big|_0^{L_x} dy = \\
& = - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} \left( - \frac{m_y}{D} \right) \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} \left( - \frac{m_{xy}}{D} \right) \Big|_0^{L_x} dy = \\
& = \frac{1}{D} \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} m_y \Big|_0^{L_y} dx + \frac{1}{D} \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial y} m_{xy} \Big|_0^{L_x} dy
\end{aligned}$$

$$\left\{ \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} + (1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} \right] dx dy = \right. \\ \left. = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy \right.$$

obtém-se,

$$D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = \\ = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy + \int_0^{L_y} N_l q_x \Big|_0^{L_x} dy - \int_0^{L_y} \frac{\partial N_l}{\partial x} m_x \Big|_0^{L_x} dy + \\ + \int_0^{L_x} N_l q_y \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} m_y \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial x} m_{xy} \Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \frac{\partial N_l}{\partial y} m_{xy} \Big|_0^{L_y} dy \rightarrow \\ \rightarrow D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = \\ = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy + N_l Q_x \Big|_0^{L_x} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_x \Big|_0^{L_x} + \\ + N_l Q_y \Big|_0^{L_y} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_y \Big|_0^{L_y} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xy} \Big|_0^{L_y} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xy} \Big|_0^{L_x} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} \rightarrow D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} & \left[ \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = \\ = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} & p_z(x, y) N_l dx dy + N_l Q_{xL_x} - N_l Q_{x0} + \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{x0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xL_x} + \\ & + N_l Q_{yL_y} - N_l Q_{y0} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{y0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{yL_y} + \\ & + \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xy0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xyL_x} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xy0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xyL_x} \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xy0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xyL_x} &= 0, \\ e \\ \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xy0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{xyL_x} &= 0; \end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{aligned} D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} & \left[ \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = \\ = \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} & p_z(x, y) N_l dx dy + N_l Q_{xL_x} - N_l Q_{x0} + \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{x0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xL_x} + \\ & + N_l Q_{yL_y} - N_l Q_{y0} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{y0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{yL_y} \end{aligned} ;$$

$$\text{onde } \left\{ \begin{array}{l} D \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \left[ \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \nu \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial^2 N_l}{\partial x^2} \nu + \frac{\partial^2 N_l}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 N_l}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 N_m}{\partial x \partial y} \right] dx dy = K_{lm} ; e \\ \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(x, y) N_l dx dy + N_l Q_{xL_x} - N_l Q_{x0} + \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{x0} - \frac{\partial N_l}{\partial x} M_{xL_x} + \\ + N_l Q_{yL_y} - N_l Q_{y0} + \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{y0} - \frac{\partial N_l}{\partial y} M_{yL_y} = f_l \end{array} \right. \quad (5.36a)$$

As expressões obtidas em (5.36a) são idênticas às obtidas em (5.36), ou seja, a matriz de rigidez,  $K_{lm}$ , e o vetor de carga,  $f_l$ , para estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas, podem ser obtidos através da aplicação direta do método dos resíduos ponderados ou através de uma particularização das expressões obtidas para a matriz de rigidez,  $K_{lm}$ , e para o vetor de carga,  $f_l$ , referentes ao caso ortotrópico.

Nas expressões (5.36) ou nas expressões (5.36a) basta a inclusão das funções de forma para que seja possível a constituição da matriz de rigidez e do vetor de carga do sistema interpolado por splines.

## **5.5 A METODOLOGIA BIDIMENSIONAL EMPREGADA, UTILIZANDO-SE SPLINES NA APROXIMAÇÃO DO COMPORTAMENTO DE PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS SOLICITADAS À FLEXÃO**

### **5.5.1 INTRODUÇÃO**

Nesta seção, além da apresentação do desenvolvimento completo da metodologia utilizada na composição da matriz de rigidez e do vetor de carga do sistema interpolado por splines, define-se a matriz responsável pela transformação de coordenadas a partir do sistema interpolado por splines, em coordenadas físicas. Toda metodologia e definições apresentadas têm por objetivo, através de uma aproximação “suave” e precisa do campo de deslocamentos e das grandezas que deste derivam, analisar o comportamento de estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas solicitadas à flexão.

### **5.5.2 A METODOLOGIA UTILIZADA NA COMPOSIÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO SISTEMA INTERPOLADO POR SPLINES**

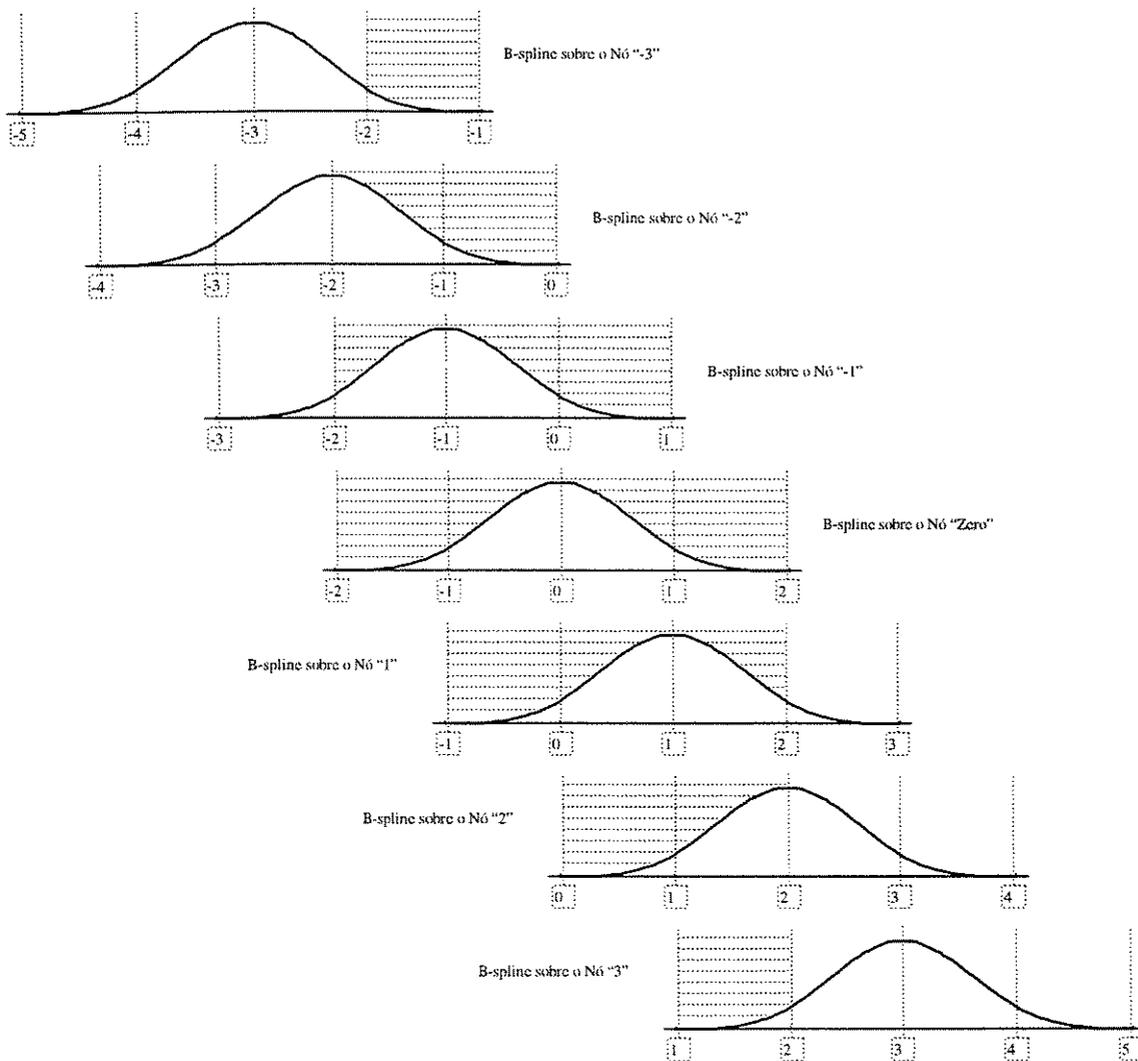
O posicionamento das splines sobre os nós das discretizações das estruturas unidimensionais, analisadas no capítulo 4, pode ser resumido da seguinte forma:-

- a) posicionam-se quatro trechos diferentes de quatro splines cúbicas no interior do mesmo elemento da discretização;
- b) vincula-se cada um desses quatro trechos, a um nó diferente, em função do posicionamento do topo da spline que contém o trecho;
- c) ao considerar o primeiro e o último elemento da discretização, como já exposto, utiliza-se o nó auxiliar para a vinculação de um dos trechos do elemento de extremidade;
- d) após as vinculações, escolhe-se um nó responsável pela definição da linha da matriz de rigidez, objeto das contribuições;
- e) esse nó referente à essa linha juntamente com os outros três nós, vinculados aos três outros trechos das splines, definem as quatro colunas, objeto das contribuições, dessa linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines;
- f) como cada trecho é definido por um polinômio, a consideração da superposição de dois trechos define quais polinômios participarão do produto para compor a função interpoladora que, após ser submetida aos operadores matemáticos da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, originará os valores a serem enviados aos diferentes “endereços” (linha-coluna) da matriz de rigidez;
- g) além de serem responsáveis pela definição das colunas de uma determinada linha da matriz de rigidez, todos os quatro trechos, representados pelos quatro polinômios das splines e vinculados aos quatro nós relativos ao elemento em questão, são utilizados para a definição de uma linha na matriz de rigidez do sistema interpolado por splines.

Os procedimentos até aqui expostos, referentes ao posicionamento dos trechos polinomiais das splines, visando a constituição da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines podem ser substituídos, geometricamente, por uma outra forma de posicionamento dessas funções responsáveis pela interpolação. Esse posicionamento equivalente pode ser descrito da seguinte forma:

- a) posiciona-se uma spline cúbica completa, com seus quatro trechos polinomiais, sobre um determinado nó da discretização, responsável pela definição de uma determinada linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, de tal forma que cada um de seus trechos se localize em um elemento diferente dessa discretização;

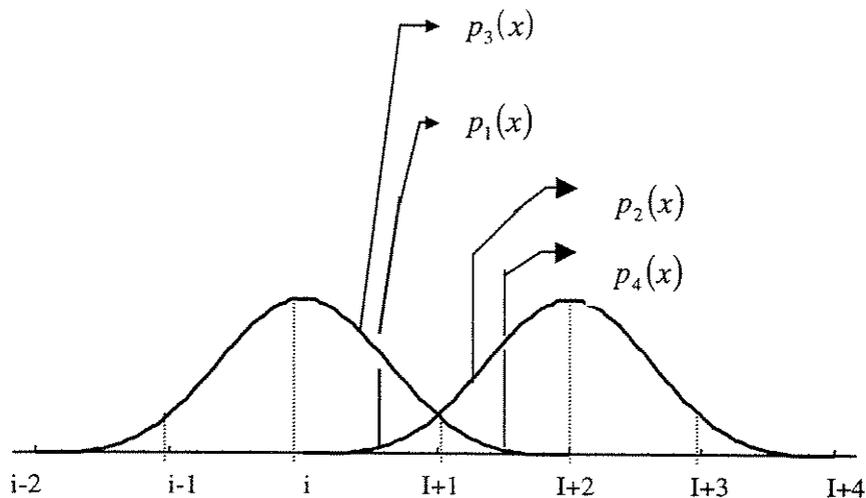
- b) posicionam-se sobre outros nós da discretização, também com cada um de seus quatro trechos polinomiais localizados em um elemento diferente da discretização, tantas outras splines cúbicas completas quantas forem as sobreposições de seus trechos com os trechos da spline cúbica posicionada sobre o nó responsável pela definição da linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines;
- c) conforme a Figura (5.2), sabe-se que após o posicionamento de uma spline cúbica completa sobre um determinado nó “ $i$ ” da discretização, e após a definição desse nó como o responsável por uma determinada linha da matriz de rigidez, as splines posicionadas sobre os nós “ $i-3$ ”, “ $i-2$ ”, “ $i-1$ ”, “ $i$ ”, “ $i+1$ ”, “ $i+2$ ” e “ $i+3$ ” possuirão trechos em sobreposição nos trechos da spline que define a linha da matriz de rigidez;



**Figura (5.2): Interferência (Sobreposição) das B-splines adjacentes, definindo a área de influência para uma B-spline posicionada sobre o Nó Central "Zero".**

- d) tais sobreposições definem as contribuições a serem endereçadas às diversas colunas dessa linha da matriz de rigidez;
- e) como já exposto, a sobreposição dos trechos implica na definição de quais polinômios participarão do produto de funções capaz de originar o polinômio interpolador que se submeterá aos operadores matemáticos da matriz de rigidez, do sistema interpolado por splines, para gerar a contribuição numérica a ser endereçada à linha-coluna definida em função do posicionamento das splines que contêm os trechos polinomiais em sobreposição;
- f) graficamente, uma sobreposição genérica dos trechos de splines cúbicas pode ser representada segundo a Figura (5.3); nesta figura o nó "i" é o responsável pela definição da linha da matriz de

rigidez e o nó “i+2” define a coluna dessa matriz do sistema interpolado por splines; também através da Figura (5.3), define-se que a primeira contribuição para a linha “i” - coluna “i+2”, da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, será gerada através da aplicação dos operadores matemáticos dessa matriz à função originada pelo produto dos polinômios  $p_1 \times p_3$ , e a segunda contribuição, para essa mesma posição da matriz (a ser somada com a primeira), será gerada através da aplicação dos mesmos operadores matemáticos à função originada pelo produto dos polinômios  $p_2 \times p_4$ ;



**Figura (5.3): Sobreposição dos trechos de uma spline cúbica posicionada sobre o nó “i” com os trechos de uma spline cúbica posicionada sobre o nó “i+2”.**

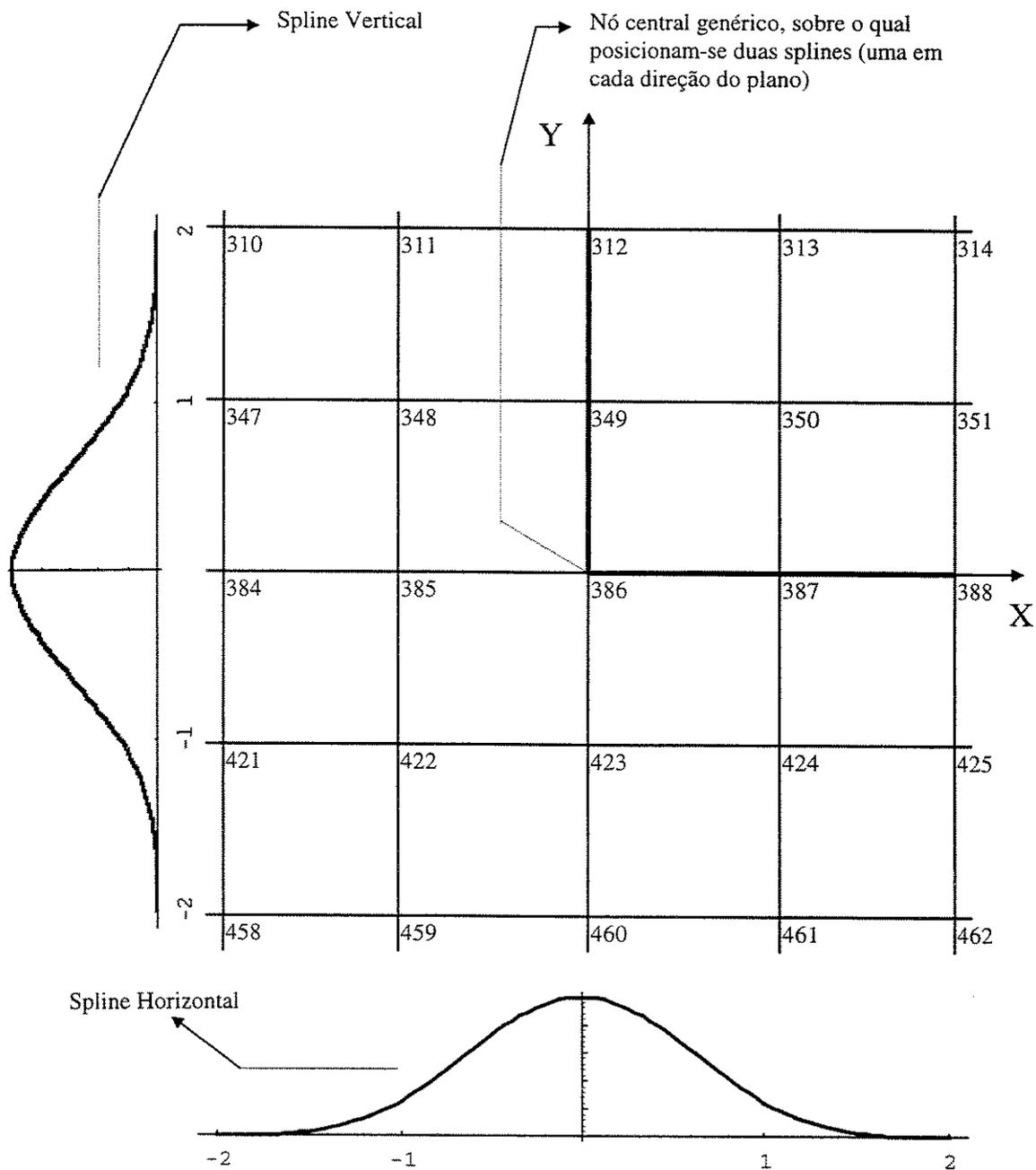
É interessante acrescentar que, tanto no procedimento que foi adotado para a resolução de estruturas unidimensionais como neste procedimento alternativo, inclui-se o conceito da inserção de nós auxiliares vinculados aos elementos de extremidade da discretização, cuja justificativa foi bastante discutida no capítulo 4.

A razão da apresentação desse procedimento alternativo para o estudo de estruturas unidimensionais é que o mesmo pode ser adotado para a análise do comportamento de placas isotrópicas elásticas finas, desde que se cumpram alguns “ajustes” capazes de viabilizar o emprego dessa abordagem alternativa unidimensional, ora apresentada, à estruturas tipicamente caracterizadas pelo aspecto bidimensional.

Analogamente ao que foi exposto em termos unidimensionais, a análise bidimensional a ser desenvolvida no estudo de placas pode ser iniciada através do posicionamento de uma spline cúbica bidimensional sobre um determinado nó, de uma discretização também bidimensional, ou seja, através do posicionamento de duas splines cúbicas unidimensionais, uma em cada direção do plano, sobre um determinado nó responsável pela definição de uma certa linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines.

Através da figura (5.4) e dos pontos básicos discutidos no capítulo 4, entenda-se por posicionar uma spline sobre um nó como sendo posicionar seu topo sobre esse nó.

Esse posicionamento de duas B-splines unidimensionais sobre um nó que define uma linha na matriz de rigidez, conforme a figura (5.4), deve ser tal que, cada trecho polinomial da função, em ambas as direções do plano, localiza-se em um único elemento da discretização.



**Figura (5.4): Disposição da função B-spline em duas dimensões de uma discretização genérica.**

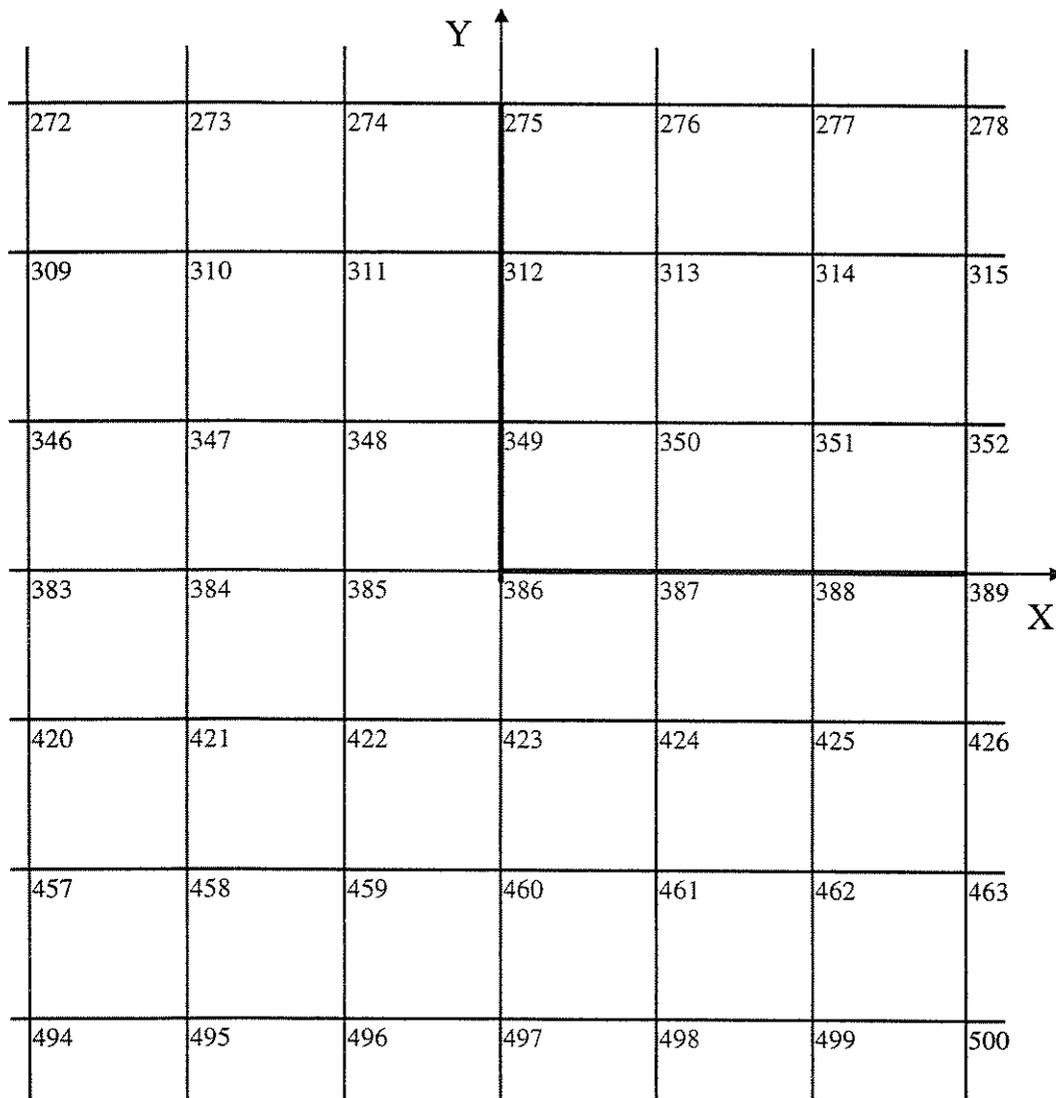
Seguindo-se o mesmo raciocínio apresentado no procedimento unidimensional alternativo, dispõem-se sobre os nós adjacentes ao nó responsável pela definição de uma linha na matriz de

rigidez, do sistema interpolado por splines, tantas outras B-splines bidimensionais quantas forem as sobreposições de seus trechos com os trechos polinomiais resultantes do posicionamento bidimensional apresentado na figura (5.4).

Em outras palavras, posiciona-se uma B-spline bidimensional sobre um nó que define uma linha na matriz de rigidez, as definições das colunas dessa linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines serão dadas em função da existência de sobreposição de trechos gerada pelo posicionamento de B-splines bidimensionais, sempre com cada um de seus trechos polinomiais em “x” e “y” sobre um único elemento, nos outros nós da discretização.

As contribuições numéricas endereçadas a uma coluna de uma certa linha da matriz de rigidez são obtidas após a função resultante do produto polinomial, originado pelas sobreposições, submeter-se aos operadores matemáticos constantes na matriz de rigidez do sistema interpolado por splines.

Conforme apresentado na Figura ( 5.5), ao se referenciar um nó como responsável pela definição de uma linha na matriz de rigidez, automaticamente referencia-se este, os três nós anteriores e os três posteriores a esse, em ambas as direções do plano, como responsáveis pelas definições das colunas dessa linha da matriz de rigidez, pois as splines bidimensionais posicionadas sobre todos esses nós, através dos quais definem-se as colunas dessa linha, geram sobreposições aos trechos polinomiais da B-spline bidimensional posicionada no nó que definiu a linha, e, justamente, essas sobreposições definem o produto de funções através do qual os valores numéricos serão obtidos e endereçados à cada uma destas colunas dessa linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines.



*Figura (5.5): Área de Influência Bidimensional para uma B-spline “colocada” sobre o nó “386” (nó genérico de uma discretização genérica).*

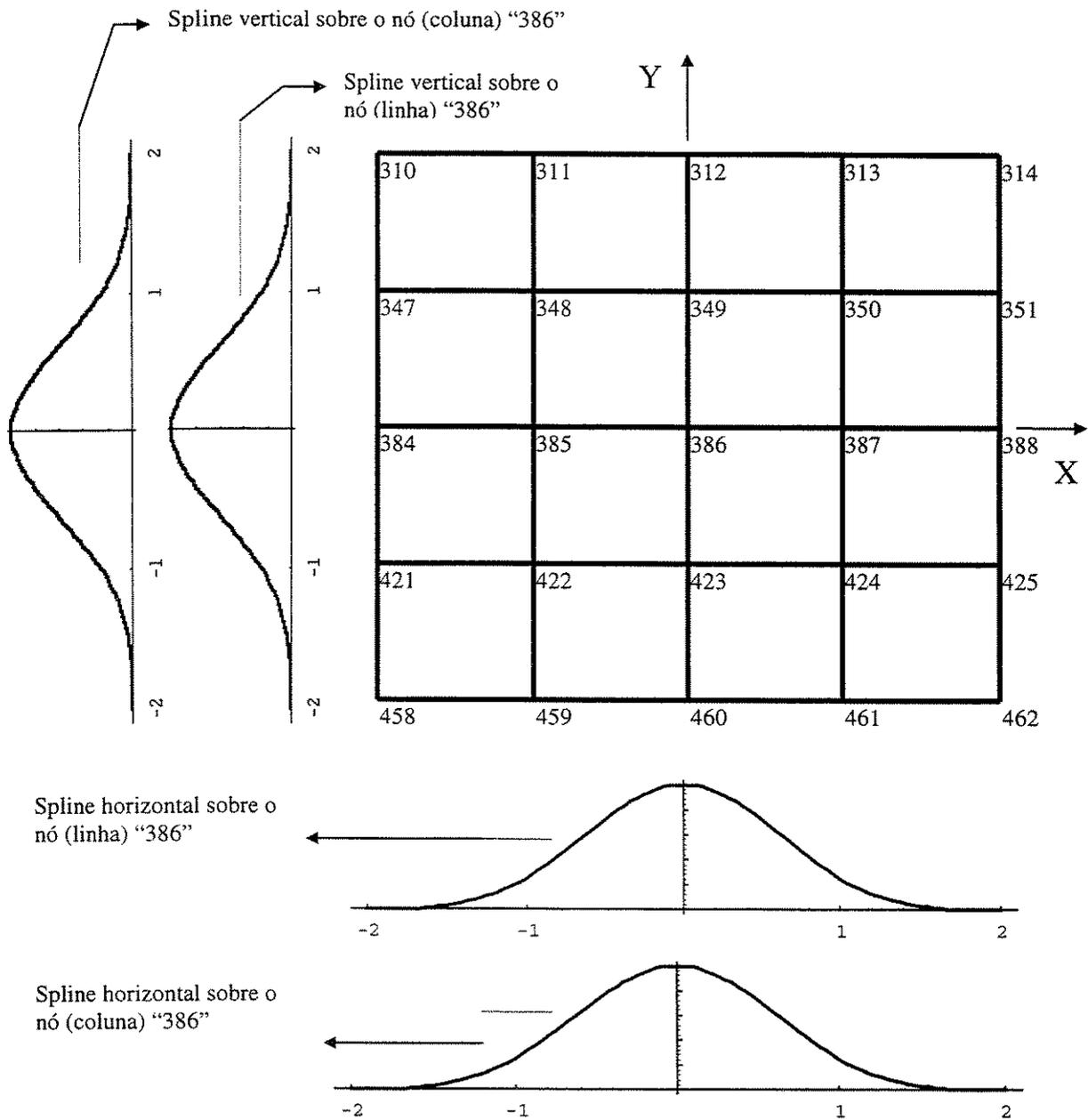
O número de colunas, objeto das contribuições, de uma determinada linha da matriz de rigidez definida, em função do posicionamento de uma B-spline bidimensional, sobre um nó central da discretização difere do número de colunas de uma linha dessa matriz definida, pelo posicionamento de uma B-spline bidimensional, sobre um nó periférico da discretização. Essa diferença no número de

colunas dessas linhas se deve à diferença existente entre a área de influência dos nós centrais e a área de influência dos nós periféricos da discretização, onde incluem-se os nós auxiliares.

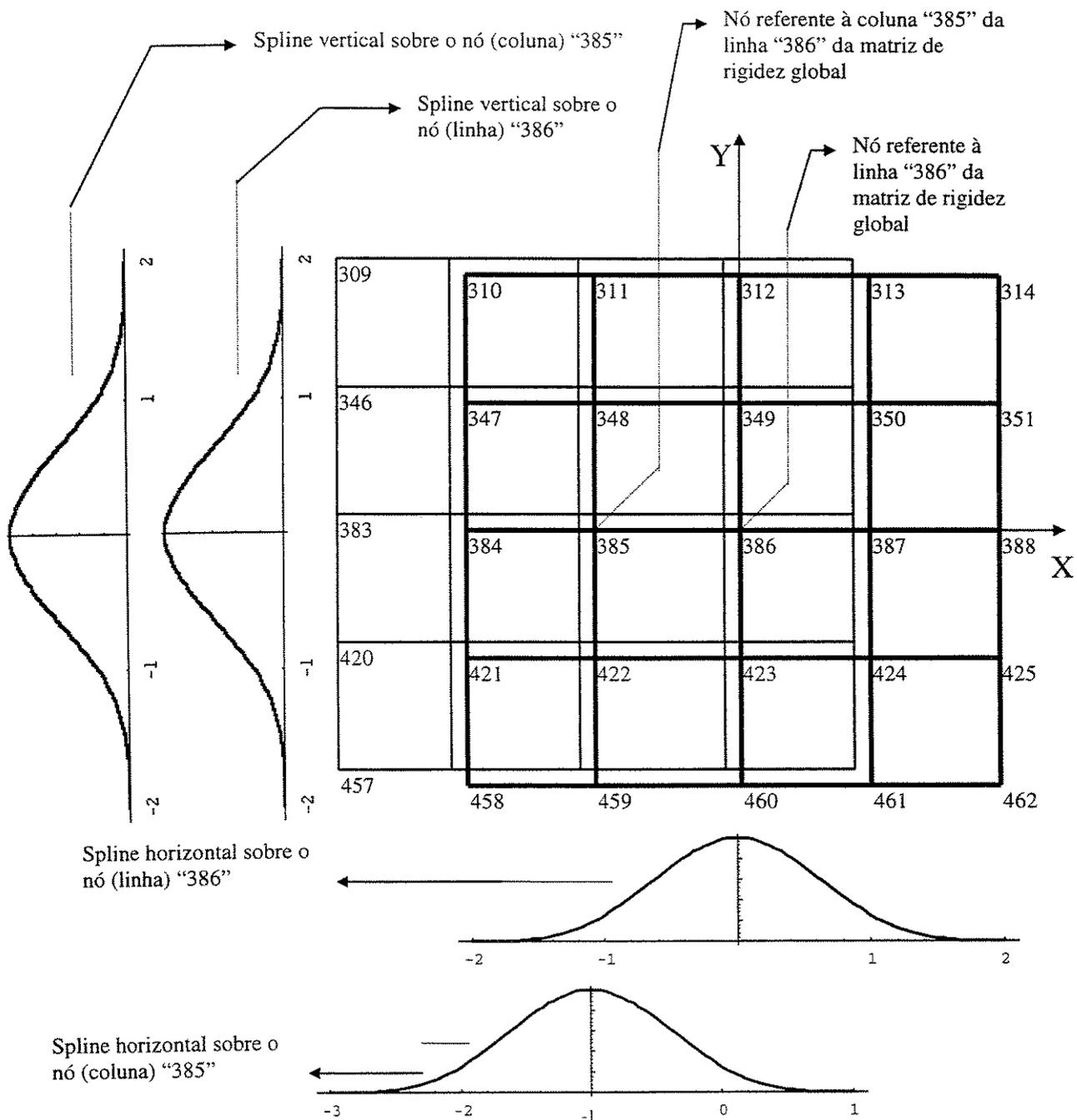
As contribuições para as colunas de uma linha da matriz de rigidez definida por um nó central da discretização dispõem-se em sete blocos compostos por sete colunas consecutivas, separadas por blocos formados por colunas consecutivas preenchidas por zeros, sendo que o número dessas colunas consecutivas preenchidas por zeros varia de acordo com a discretização adotada.

Assim, as quarenta e nove contribuições são endereçadas às quarenta e nove colunas dessa linha da matriz de rigidez, definida a partir da colocação de uma B-spline bidimensional sobre um nó central da discretização.

A colocação geométrica das splines bidimensionais sobre o nó que define a linha e sobre os nós que definem as colunas dessa linha, objeto das contribuições, pode ser exemplificada através das figuras (5.6) e (5.7).



*Figura (5.6): Contribuições para a linha "386" - coluna "386" da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines (discretização genérica).*



**Figura (5.7): Contribuições para a linha "386" - coluna "385" da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines (discretização genérica).**

Por meio das Figuras (5.6) e (5.7) pode ser notado que os limites da B-spline bidimensional colocada sobre o nó “386”, nó responsável pela definição da linha da matriz de rigidez, permanecem fixos até que sobre todos os nós da área de influência apresentada na Figura (5.5) sejam posicionadas B-splines bidimensionais, e a partir de cada um desses posicionamentos, responsáveis pela definição de uma coluna nessa linha da matriz de rigidez, sejam geradas intersecções de áreas provenientes das sobreposições dos trechos polinomiais das splines, em ambas as direções do plano, posicionadas em dois nós, uma no nó que define a linha e outra no nó que define a coluna dessa linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines.

Assim como o lado do elemento finito na direção “x” vincula-se a um trecho polinomial da spline posicionada na direção “x”, o lado do mesmo elemento finito na direção “y” vincula-se a um trecho polinomial da spline posicionada na direção “y”. Então, para uma B-spline bidimensional posicionada sobre um nó que define uma linha da matriz de rigidez, o produto entre os trechos polinomiais das duas splines unidimensionais que compõem essa spline bidimensional origina a própria função de forma  $N_l(x, y)$  que figura na matriz de rigidez do sistema interpolado por splines. Analogamente, para uma B-spline bidimensional posicionada sobre um nó responsável pela definição de uma coluna nessa linha da matriz de rigidez, o produto entre os trechos polinomiais das duas splines unidimensionais que compõem essa spline bidimensional origina a outra função de forma  $N_m(x, y)$ , que também figura na matriz de rigidez do sistema interpolado por splines.

Obtidas essas funções de forma,  $N_l(x, y)$  e  $N_m(x, y)$ , a partir do produto entre trechos polinomiais de splines unidimensionais, posicionadas nas direções “x” e “y”, que compõem splines bidimensionais colocadas sobre nós que definem a linha e a coluna dessa linha da matriz de rigidez, e definidas geometricamente as intersecções de áreas a partir do posicionamento das duas B-splines bidimensionais, uma sobre o nó que define a linha e outra sobre o nó que define a coluna dessa linha da matriz da rigidez, o cálculo do valor numérico da contribuição, propriamente dita, para esta coluna dessa linha da matriz de rigidez, do sistema interpolado por splines, restringe-se somente à aplicação dos operadores matemáticos, constantes nessa matriz, às funções de forma  $N_l(x, y)$  e  $N_m(x, y)$ .

Graficamente, esta exposição pode ser sintetizada através da Figura (5.8), na qual os trechos polinomiais das splines representados por “p” relacionam-se à B-spline bidimensional posicionada sobre o nó que define a linha da matriz de rigidez, e os trechos polinomiais das splines representados por “q” relacionam-se à B-spline bidimensional posicionada sobre o nó responsável pela definição da coluna dessa linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines.

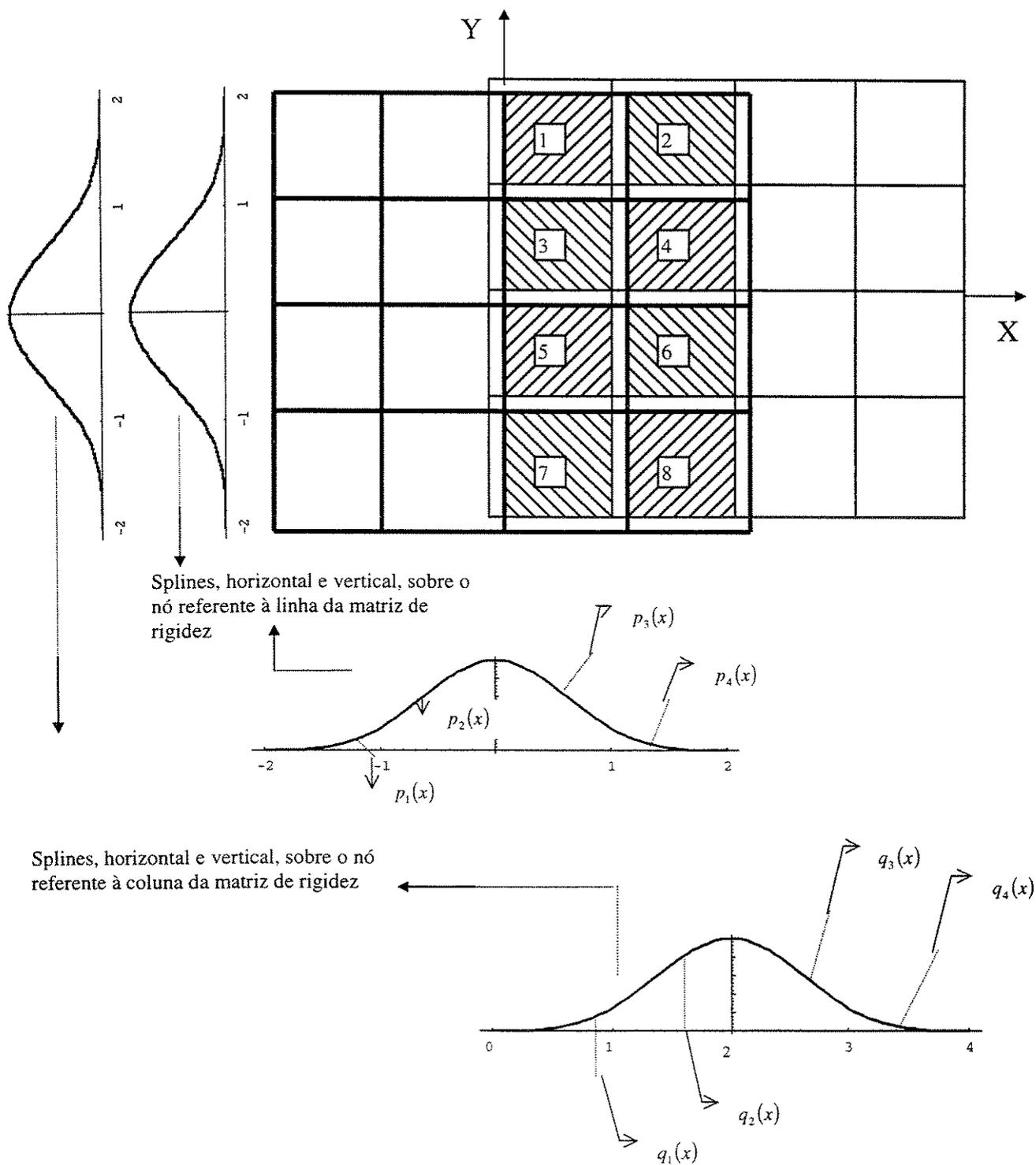


Figura (5.8): Procedimento genérico para obtenção das funções de duas variáveis.

Com base na interseção de áreas apresentada na Figura (5.8), a multiplicação das funções de “x” pelas funções de “y”, originando funções de duas variáveis ( $N_l(x, y)$  e  $N_m(x, y)$ ) que figuram na matriz de rigidez do sistema interpolado por splines da estrutura em forma de placa pode ser apresentada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{-) para o elemento "1": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_3(x) \cdot p_4(y) \\ N_m(x, y) = q_1(x) \cdot q_4(y) \end{cases} ; \\
 \text{-) para o elemento "2": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_4(x) \cdot p_4(y) \\ N_m(x, y) = q_2(x) \cdot q_4(y) \end{cases} ; \\
 \text{-) para o elemento "3": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_3(x) \cdot p_3(y) \\ N_m(x, y) = q_1(x) \cdot q_3(y) \end{cases} ; \\
 \text{-) para o elemento "4": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_4(x) \cdot p_3(y) \\ N_m(x, y) = q_2(x) \cdot q_3(y) \end{cases} ; \\
 \text{-) para o elemento "5": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_3(x) \cdot p_2(y) \\ N_m(x, y) = q_1(x) \cdot q_2(y) \end{cases} ; \\
 \text{-) para o elemento "6": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_4(x) \cdot p_2(y) \\ N_m(x, y) = q_2(x) \cdot q_2(y) \end{cases} ; \\
 \text{-) para o elemento "7": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_3(x) \cdot p_1(y) \\ N_m(x, y) = q_1(x) \cdot q_1(y) \end{cases} ; e \\
 \text{-) para o elemento "8": } & \begin{cases} N_l(x, y) = p_4(x) \cdot p_1(y) \\ N_m(x, y) = q_2(x) \cdot q_1(y) \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Os polinômios indicados por “p” e “q” que figuram nesses produtos, cuja definição apresenta-se vinculada ao posicionamento local do topo das splines que os contém, foram apresentados no capítulo 3 para todos os intervalos envolvidos pela área de influência da Figura (5.5).

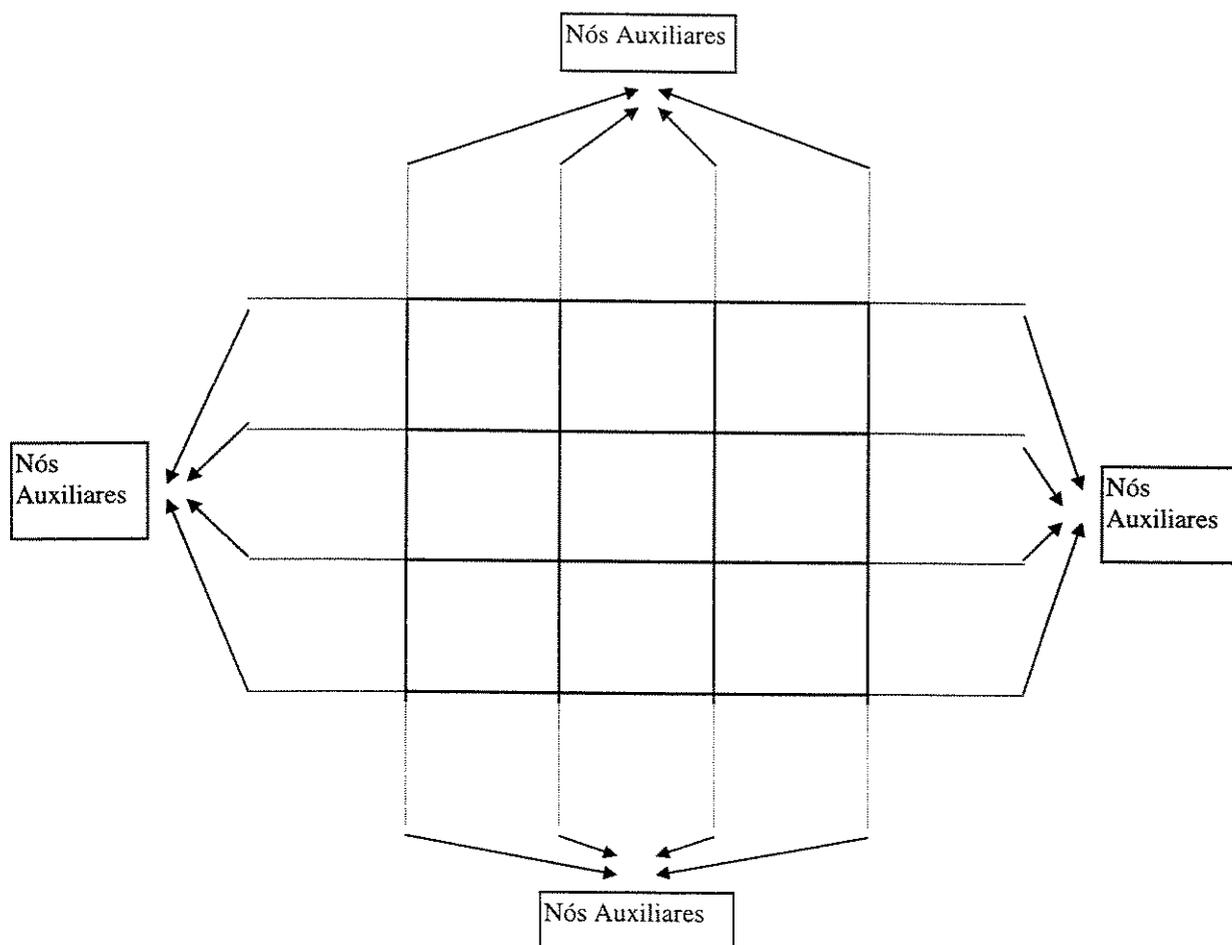
Para cada um dos oito elementos aplica-se os operadores matemáticos da matriz de rigidez, do sistema interpolado por splines, às funções  $N_l(x, y)$  e  $N_m(x, y)$  originadas a partir do produto polinomial indicado.

A soma das contribuições dos oito elementos resulta na contribuição final que será endereçada a uma certa coluna de uma determinada linha da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, sendo que a definição dessa linha e dessa coluna teve como base o posicionamento do topo das B-splines bidimensionais apresentadas na Figura (5.8).

O mesmo conceito de nó auxiliar que foi utilizado no capítulo 4, referente à abordagem de estruturas unidimensionais, pode ser empregado na análise de estruturas bidimensionais.

Ao longo dos limites bidimensionais da estrutura podem ser posicionados nós auxiliares em ambas as direções do plano, os quais além de proporcionar a inclusão do quarto trecho polinomial de uma spline cúbica no primeiro elemento da discretização (em ambas as direções do plano), permitem a associação de mais um grau de liberdade ao primeiro nó efetivamente pertencente à discretização, ou seja, a associação de duas rotações para os nós de canto, e a associação de uma rotação para os nós periféricos não posicionados nos cantos da discretização.

Através da Figura (5.9) constata-se a possibilidade de extensão do conceito unidimensional, que envolve a inclusão de nós auxiliares, às estruturas definidas geometricamente por uma discretização bidimensional.



*Figura (5.9): Inclusão de Nós Auxiliares em uma discretização bidimensional.*

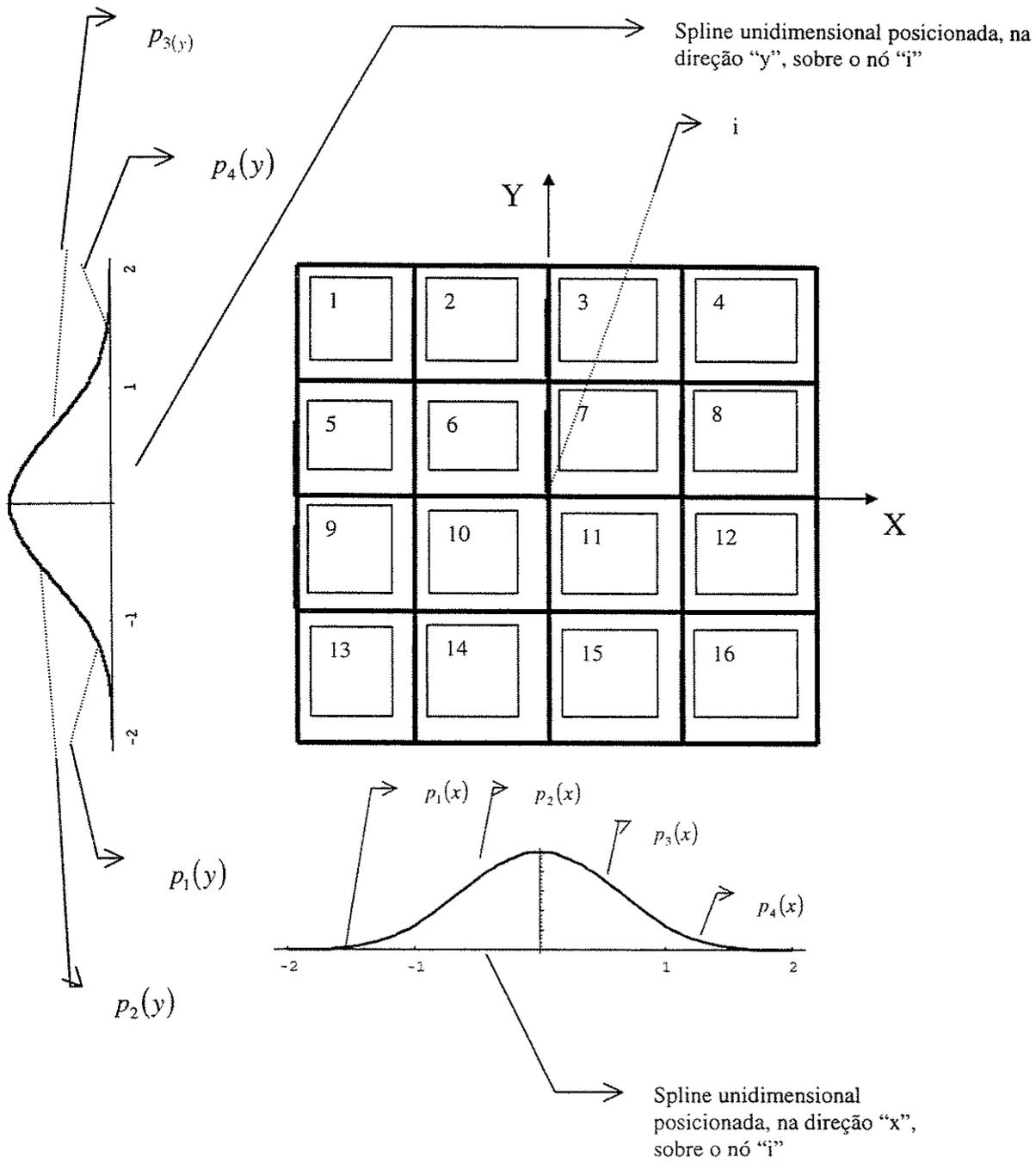
### **5.5.3 A METODOLOGIA UTILIZADA NA COMPOSIÇÃO DO VETOR DE CARGA DO SISTEMA INTERPOLADO POR SPLINES**

De posse da metodologia responsável pela definição e montagem da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, torna-se mais simples a definição e montagem do vetor de carga do sistema interpolado por splines. Além dos próprios elementos participantes, os operadores matemáticos constantes na expressão que define o vetor de carga do sistema interpolado por splines de estruturas em forma de placas são mais simples e em menor número, quando comparados aos da matriz de rigidez.

O posicionamento geométrico das splines visando contribuir para a composição desse vetor se resume na necessidade de geração da função de forma  $N_l(x, y)$ , a partir do produto de funções obtido em função do posicionamento de uma B-spline bidimensional sobre um determinado nó, responsável pela definição de uma certa linha no vetor de carga do sistema interpolado por splines de estruturas em forma de placas elásticas, isotrópicas finas.

Como a colocação das splines unidimensionais em cada direção do plano, sobre um certo nó, se dá em função de cada um de seus trechos polinomiais, em “x” ou em “y”, estarem posicionados em um único elemento da discretização bidimensional, a geração da função de forma  $N_l(x, y)$ , que figura no vetor de carga, ocorre através da multiplicação dos trechos polinomiais da spline posicionada na direção “x” pelos trechos polinomiais da spline posicionada na direção “y”, ambas sobre o mesmo nó, de modo que os trechos polinomiais em “x” e em “y”, a serem multiplicados um pelo outro, posicionam-se sobre os lados do mesmo elemento bidimensional.

A Figura (5.10) apresenta graficamente a definição necessária para o produto de funções responsável por gerar a função de forma  $N_l(x, y)$  do vetor de carga do sistema interpolado por splines.



**Figura (5.10):** Posicionamento de uma spline bidimensional sobre o nó "i" visando a geração da função de forma  $N_i(x, y)$  do vetor de carga .

Cada uma das dezesseis funções de forma geradas em cada um dos dezesseis elementos da Figura (5.10), a partir do produto de funções de uma variável, pode ser apresentada da seguinte forma:

- ) para o elemento “1”:  $N_i(x, y) = p_1(x) \cdot p_4(y)$  ;
- ) para o elemento “2”:  $N_i(x, y) = p_2(x) \cdot p_4(y)$  ;
- ) para o elemento “3”:  $N_i(x, y) = p_3(x) \cdot p_4(y)$  ;
- ) para o elemento “4”:  $N_i(x, y) = p_4(x) \cdot p_4(y)$  ;
- ) para o elemento “5”:  $N_i(x, y) = p_1(x) \cdot p_3(y)$  ;
- ) para o elemento “6”:  $N_i(x, y) = p_2(x) \cdot p_3(y)$  ;
- ) para o elemento “7”:  $N_i(x, y) = p_3(x) \cdot p_3(y)$  ;
- ) para o elemento “8”:  $N_i(x, y) = p_4(x) \cdot p_3(y)$  ;
- ) para o elemento “9”:  $N_i(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y)$  ;
- ) para o elemento “10”:  $N_i(x, y) = p_2(x) \cdot p_2(y)$  ;
- ) para o elemento “11”:  $N_i(x, y) = p_3(x) \cdot p_2(y)$  ;
- ) para o elemento “12”:  $N_i(x, y) = p_4(x) \cdot p_2(y)$  ;
- ) para o elemento “13”:  $N_i(x, y) = p_1(x) \cdot p_1(y)$  ;
- ) para o elemento “14”:  $N_i(x, y) = p_2(x) \cdot p_1(y)$  ;
- ) para o elemento “15”:  $N_i(x, y) = p_3(x) \cdot p_1(y)$  ; e
- ) para o elemento “16”:  $N_i(x, y) = p_4(x) \cdot p_1(y)$  .

Esses polinômios “p” possuem os mesmos coeficientes já determinados a partir das resoluções dos sistemas definidos no capítulo 3, em “x” e em “y”, uma vez que ambas as splines unidimensionais posicionadas sobre o nó “i” foram definidas localmente com o “zero” centrado em seu topo.

Determinadas cada uma dessas dezesseis funções de forma  $N_i(x, y)$ , as mesmas são submetidas aos operadores matemáticos constantes no vetor de carga do sistema interpolado por splines, e com a soma desses dezesseis valores numéricos obtidos totaliza-se o valor da contribuição a ser enviada à linha “i” desse valor de carga.

Mantendo-se o mesmo raciocínio e procedimento apresentados na descrição da metodologia envolvida na definição e montagem da matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, acrescenta-se que o número de elementos que irá contribuir para a somatória destinada a uma certa linha do vetor de carga, definida por um nó periférico da discretização, é menor em relação ao número de elementos que contribui para a somatória endereçada a uma linha do vetor de carga, definida através do posicionamento de uma B-spline bidimensional sobre um nó central da discretização.

Fisicamente, tal diferença se evidencia em função da própria diferença de abrangência da área de uma B-spline bidimensional sobre um nó periférico da discretização, B-spline esta que é incompleta, em relação à abrangência da área de uma B-spline bidimensional posicionada sobre um nó central dessa discretização, B-spline esta que é completamente definida em função do posicionamento de seus quatro trechos polinomiais nas duas direções do plano.

Nessa montagem do vetor de carga, o conceito de nós auxiliares vinculados aos elementos de extremidade da discretização continua tendo a mesma aplicabilidade apresentada na metodologia que definiu a matriz de rigidez do sistema interpolado por splines, ou seja, as mesmas justificativas para sua utilização, respaldadas na exploração completa do embasamento matemático-teórico que sustenta o método em si, são mantidas.

#### ***5.5.4 A METODOLOGIA UTILIZADA NA MONTAGEM E DEFINIÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO EMPREGADA NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS EM FORMA DE PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS***

De acordo com a seqüência de procedimentos exposta nos ítems 5.5.2 e 5.5.3, todos os subsídios necessários à montagem da matriz de rigidez e do vetor de carga, ambos referentes ao sistema interpolado por splines, são apresentados com o objetivo de preparar toda a metodologia a ser empregada para viabilizar a automação do processo como um todo.

Conforme Schultz (1973), uma regressão por elementos finitos, a nível unidimensional, pode ser iniciada com  $\{B_i(x)\}_{i=1}^n$  denotando  $n$  funções de base linearmente independentes no espaço vetorial  $PC^{0,2}(I)$ , num certo intervalo  $(I)$ , com um vetor  $f \in PC^{0,2}(I)$ . O problema variacional de mínimos quadrados da verificação de  $\beta^* \in \mathfrak{R}^n$  deve ser considerado, de forma que

$$\phi(\beta^*) = \inf_{\beta \in \mathfrak{R}^n} \phi(\beta) \equiv \inf_{\beta \in \mathfrak{R}^n} \left\| f - \sum_{i=1}^n \beta_i B_i \right\|_2^2. \quad (5.37)$$

A função

$$\phi(\beta) = \|f\|_2^2 - 2 \left( f, \sum_{i=1}^n \beta_i B_i \right)_2 + \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i B_i \right\|_2^2$$

é quadrática em  $\beta \in \mathfrak{R}^n$ , e portanto  $\beta^*$  é a solução de (5.37) se e somente se

$$D_i \phi(\beta^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (5.38)$$

e a matriz  $J[\beta^*] \equiv [D_i D_j \phi(\beta^*)]$  é positiva definida. Executando-se a diferenciação em (5.38), obtém-se o sistema linear

$$A\beta^* = k, \quad (5.39)$$

onde  $A \equiv [a_{ij}]$ ,  $a_{ij} \equiv (B_i, B_j)_2$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $k \equiv [k_i]$ , e  $k_i \equiv (f, B_i)_2$ ,  $1 \leq i \leq n$ , ou seja, dentro do estudo de estruturas unidimensionais como barras e vigas, a matriz  $A$  é a matriz de rigidez e o vetor  $k$  é o vetor de carga, ambos relativos ao sistema interpolado por splines pois, a geração desses se dá a partir de um conjunto de  $n$  funções de base linearmente independentes,  $\{B_i(x)\}_{i=1}^n$ , composto por splines.

Além disso,

$$J[\beta] = 2A, \quad \text{para todo } \beta \in \mathfrak{R}^n. \quad (5.40)$$

Através de (5.39) e (5.40), conclui-se que o problema variacional dos mínimos quadrados envolvendo a verificação de  $\beta^*$  satisfazendo (5.37) tem uma solução única,

$$\sum_{i=1}^N \beta_i^* B_i(x),$$

onde o  $\beta^*$  é a solução de um sistema linear simétrico positivo-definido. O vetor  $\beta^*$  é o vetor formado pelos coeficientes das  $n$  funções splines de base linearmente independentes  $\{B_i(x)\}_{i=1}^n$ .

Se  $S \equiv \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i B_i(x) \mid \beta \in \mathfrak{R}^n \right\}$ , pode-se denotar a solução única dada por (5.39) por

$P_S f \equiv \sum_{i=1}^n \beta_i^* B_i(x)$ . onde conforme Goffman e Pedrick apud Schultz (1973),  $P_S f$  é a projeção

ortogonal de  $f$  em  $S$  com relação ao produto interno  $L^2$ .

Dentro da análise do comportamento de estruturas unidimensionais como barras e vigas,  $S$  representa o espaço completo formado pelo conjunto de todas as possíveis soluções a serem obtidas para os deslocamentos e para as rotações nodais de tais estruturas.

Nessa mesma análise de barras e vigas,  $P_S f$  contém a projeção ortogonal dos vetores deslocamentos e dos vetores rotações nodais dentro do espaço completo  $S$ , responsável pela geração de todas as possíveis soluções para o campo de deslocamentos e para o campo de rotações dessas estruturas unidimensionais.

Então, a projeção ortogonal desses vetores  $f_i$ , nesse espaço completo,  $S$ , é igual à somatória do produto envolvendo os coeficientes das funções splines,  $\beta_i^*$ , e as próprias funções splines,  $B_i(x)$ , responsáveis pela constituição da base linearmente independente capaz de gerar esse espaço  $S$ , ou seja,

$$P_S f \equiv \sum_{i=1}^n \beta_i^* B_i(x). \quad (5.41)$$

A equação (5.41) já foi utilizada no capítulo 4, sendo definida como as equações

$$w_j = w(x_j) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x = x_j)$$

e

$$\theta_j = \frac{dw_j}{dx} = \frac{dw(x_j)}{dx} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{dN_i(x=x_j)}{dx},$$

respectivamente, (4.21) e (4.22), cuja disposição matricial foi definida, compactamente, em (4.23) como

$$[K_c] \{c_i^S\} = \{w_c\},$$

onde

$\{w_c\}$  = vetor composto pelos deslocamentos e rotações nodais, para vigas, e somente pelos deslocamentos nos nós da discretização de barras =  $P_s f$  ;

$\{c_i^S\}$  = vetor dos coeficientes das funções splines =  $\beta_i^*$  ; e

$[K_c]$  = matriz de transformação composta pelos valores das próprias funções splines e suas respectivas primeiras derivadas nos nós da discretização =  $B_i(x)$  .

A definição e montagem da matriz de transformação empregada na análise de estruturas bidimensionais, como placas isotrópicas elásticas finas, pode ser feita de forma análoga à que foi desenvolvida para o estudo de estruturas unidimensionais.

Segundo Schultz (1973), uma regressão por elementos finitos, visando o tratamento de problemas bidimensionais, pode ser iniciada através de  $\{B_i(x,y)\}_{i=1}^n$  denotando  $n$  funções de base linearmente independentes no espaço vetorial  $PC^{0,2}(U)$ , num certo intervalo bidimensional ( $U$ ), com um vetor  $f \in PC^{0,2}(U)$ . O problema variacional de mínimos quadrados da verificação de  $\beta^* \in \mathfrak{R}^n$  deve ser considerado, de forma que

$$\phi(\beta^*) = \inf_{\beta \in \mathfrak{R}^n} \phi(\beta) \equiv \inf_{\beta \in \mathfrak{R}^n} \int_0^1 \int_0^1 \left[ f(x,y) - \sum_{i=1}^n \beta_i B_i(x,y) \right]^2 dx dy. \quad (5.42)$$

Utilizando-se, essencialmente, a mesma análise feita para problemas unidimensionais, pode-se provar o seguinte resultado de caracterização:

O problema variacional de mínimos quadrados da verificação  $\beta^*$  satisfazendo (5.42) tem uma única solução,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^* B_i(x, y),$$

onde os coeficientes  $\beta^*$  são a solução do sistema linear simétrico positivo definido

$$A\beta^* = k, \quad (5.43)$$

onde

$$A \equiv [a_{ij}] \equiv \left[ \int_0^1 \int_0^1 B_i(x, y) B_j(x, y) dx dy \right]$$

e

$$k \equiv [k_i] \equiv \left[ \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) B_i(x, y) dx dy \right].$$

A matriz A e o vetor k podem ser definidos, dentro de um estudo abordando estruturas bidimensionais como placas, como a matriz de rigidez e o vetor de carga, respectivamente, ambos com relação ao sistema interpolado por splines, pois a geração desses é feita a partir de um conjunto de  $n$  funções splines de base linearmente independentes,  $\{B_i(x, y)\}_{i=1}^n$ . O vetor  $\beta^*$  é o vetor composto pelos coeficientes dessas  $n$  funções splines de base linearmente independentes.

Se  $S \equiv \left\{ \sum_{i=1}^n \beta_i B_i(x, y) \mid \beta \in \mathfrak{R}^n \right\}$ , então a única solução dada por (5.43) é denotada por

$P_S f \equiv \sum_{i=1}^n \beta_i^* B_i(x, y)$ , onde, conforme Goffman e Pedrick apud Schultz (1973),  $P_S f$  é a projeção

ortogonal de  $f$  em  $S$  com relação ao produto interno  $L^2$  sobre o quadrado  $U$ .

Dentro da análise do comportamento de estruturas bidimensionais como placas elásticas isotrópicas finas, analogamente ao estudo unidimensional,  $S$  representa o espaço completo formado pelo conjunto de todas as possíveis soluções a serem obtidas para os deslocamentos e para as rotações nodais de tais estruturas.

Nessa mesma análise de placas,  $P_S f$  contém a projeção ortogonal dos vetores deslocamentos e dos vetores rotações nodais dentro do espaço completo  $S$ , responsável pela geração de todas as possíveis soluções para o campo de deslocamentos e para o campo de rotações dessas estruturas bidimensionais.

Então, a projeção ortogonal desses vetores,  $f_i$ , nesse espaço completo,  $S$ , é igual à somatória do produto envolvendo os coeficientes das funções splines,  $\beta_i^*$ , e as próprias funções splines,  $B_i(x, y)$ , responsáveis pela constituição da base linearmente independente capaz de gerar esse espaço  $S$ , ou seja,

$$P_S f \equiv \sum_{i=1}^n \beta_i^* B_i(x, y). \quad (5.44)$$

Analogamente à análise unidimensional, (5.44) pode ser descrita, dentro do estudo de estruturas em forma de placas (com  $w_{ji}$  = deslocamento apresentado pelo nó de coordenadas  $x_j$  e  $y_i$ ; e  $\theta_{ji_x}$  = rotação em "x" apresentada pelo nó de coordenadas  $x_j$  e  $y_i$ ), como

$$w_{jk} = w(x_j, y_k) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x = x_j, y = y_k) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(x = x_j) N_i(y = y_k)$$

e

$$\theta_{jk_x} = \frac{\partial w_{jk}}{\partial x} = \frac{\partial w(x_j, y_k)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial N_i(x = x_j, y = y_k)}{\partial x}$$

Ou, compacta e matricialmente, como:

$$[K_c] \{c_i^s\} = \{w_c\},$$

onde:

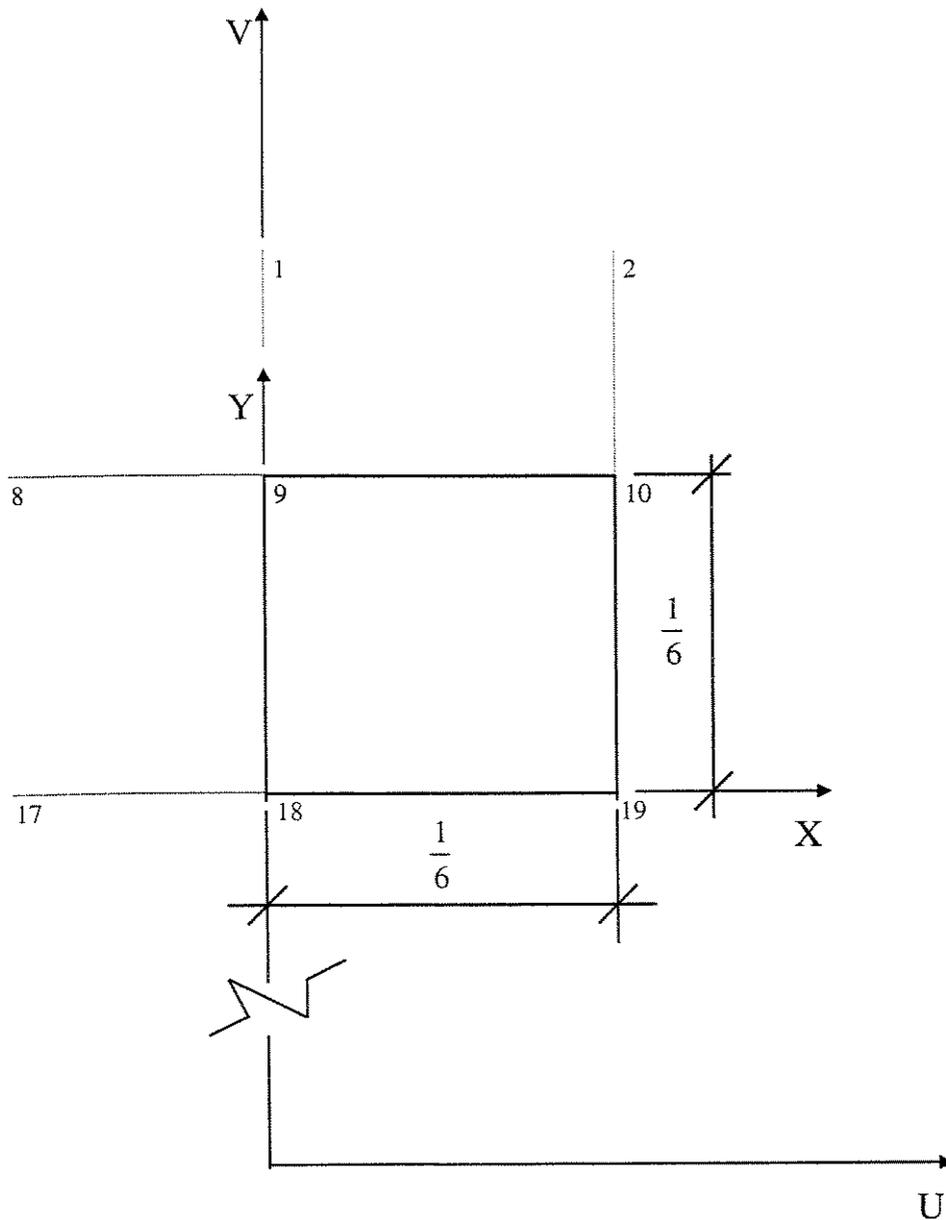
$\{w_c\}$  = vetor composto pelos deslocamentos e rotações nos nós da discretização da placa =  $P_s f$  ;

$\{c_i^s\}$  = vetor composto pelos coeficientes das funções splines =  $\beta_i^*$  ; e

$[K_c]$  = matriz de transformação composta pelos valores das próprias funções splines e suas respectivas primeiras derivadas nos nós da discretização =  $B_i(x, y)$ .

Essa matriz de transformação,  $[K_c]$ , composta pelas ordenadas nodais das funções splines e pelas primeiras derivadas dessas nos nós de extremidade da discretização, executa a transformação de coordenadas a partir do sistema interpolado por splines em coordenadas físicas, conforme já exposto no capítulo 4.

Como exemplo, para a definição de uma matriz de transformação bidimensional,  $[K_c]$ , composta pelos valores das funções splines nos nós da discretização e pelos valores de suas primeiras derivadas nos nós de extremidade, adote-se um elemento de canto da discretização genérica apresentada na Figura (5.11):



*Figura (5.11): Esquema auxiliar para a definição da matriz de transformação  $[K_c]$ .*

O nó “9” é um nó de canto de uma discretização genérica; os eixos “ $u$ ” e “ $v$ ” são responsáveis pela definição das coordenadas globais, respectivamente, nas direções horizontal e vertical; e os eixos “ $x$ ” e “ $y$ ” são responsáveis pela definição das coordenadas locais, respectivamente, nas direções horizontal e vertical da discretização bidimensional genérica.

A expressão para o deslocamento do nó “9” que contribuirá para a composição de  $[K_c]$  torna-se

$$\begin{aligned}
 w_9 &= c_1 N_1(u)|_9 N_1(v)|_9 + c_2 N_2(u)|_9 N_2(v)|_9 + c_8 N_8(u)|_9 N_8(v)|_9 + \\
 &\quad + c_9 N_9(u)|_9 N_9(v)|_9 + c_{10} N_{10}(u)|_9 N_{10}(v)|_9 + c_{17} N_{17}(u)|_9 N_{17}(v)|_9 + \\
 &\quad + c_{18} N_{18}(u)|_9 N_{18}(v)|_9 + c_{19} N_{19}(u)|_9 N_{19}(v)|_9 \\
 w_9 &= c_1 \frac{1}{4} + c_2 \frac{1}{16} + c_8 \frac{1}{4} + c_9 1 + c_{10} \frac{1}{4} + c_{17} \frac{1}{16} + c_{18} \frac{1}{4} + c_{19} \frac{1}{16}.
 \end{aligned}$$

A expressão para a rotação do nó “9” na direção “v” que contribuirá para a composição de  $[K_c]$  torna-se

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_9}{\partial v} &= c_1 N_1(u)|_9 \frac{dN_1(v)}{dv}|_9 + c_2 N_2(u)|_9 \frac{dN_2(v)}{dv}|_9 + c_8 N_8(u)|_9 \frac{dN_8(v)}{dv}|_9 + \\
 &\quad + c_9 N_9(u)|_9 \frac{dN_9(v)}{dv}|_9 + c_{10} N_{10}(u)|_9 \frac{dN_{10}(v)}{dv}|_9 + c_{17} N_{17}(u)|_9 \frac{dN_{17}(v)}{dv}|_9 + \\
 &\quad + c_{18} N_{18}(u)|_9 \frac{dN_{18}(v)}{dv}|_9 + c_{19} N_{19}(u)|_9 \frac{dN_{19}(v)}{dv}|_9
 \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial N}{\partial v} = \frac{\partial N}{\partial y} \frac{1}{h}$ , tem-se

$$\frac{\partial w_9}{\partial v} = c_1 \frac{9}{2} + c_2 \frac{9}{8} + c_8 0 + c_9 0 + c_{10} 0 + c_{17} \left(-\frac{9}{8}\right) + c_{18} \left(-\frac{9}{2}\right) + c_{19} \left(-\frac{9}{8}\right).$$

A expressão para a rotação do nó “9” na direção “u” que contribuirá para a composição de  $[K_c]$  torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_9}{\partial u} = & c_1 N_1(v)|_9 \frac{dN_1(u)}{du}|_9 + c_2 N_2(v)|_9 \frac{dN_2(u)}{du}|_9 + c_8 N_8(v)|_9 \frac{dN_8(u)}{du}|_9 + \\ & + c_9 N_9(v)|_9 \frac{dN_9(u)}{du}|_9 + c_{10} N_{10}(v)|_9 \frac{dN_{10}(u)}{du}|_9 + c_{17} N_{17}(v)|_9 \frac{dN_{17}(u)}{du}|_9 + \\ & + c_{18} N_{18}(v)|_9 \frac{dN_{18}(u)}{du}|_9 + c_{19} N_{19}(v)|_9 \frac{dN_{19}(u)}{du}|_9 \end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial x} \frac{1}{h}$ , tem-se

$$\frac{\partial w_9}{\partial u} = c_1 0 + c_2 \frac{9}{8} + c_8 \left(-\frac{9}{2}\right) + c_9 0 + c_{10} \frac{9}{2} + c_{17} \left(-\frac{9}{8}\right) + c_{18} 0 + c_{19} \frac{9}{8}.$$

Através de procedimento análogo, pode-se determinar as expressões para os deslocamentos de todos os nós da discretização, assim como as expressões para as rotações de todos os nós de extremidade e, então, compor a matriz de transformação  $[K_c]$  da estrutura bidimensional de placa.

Uma vez constituídos a matriz de rigidez e o vetor de carga do sistema interpolado por splines e a matriz de transformação da estrutura, conforme exposto no capítulo 4,

$$\begin{aligned} [K_{lm}^S] \{c_i^S\} &= \{f_i^S\}, \\ [K_c] \{c_i^S\} &= \{w_c\}, \end{aligned}$$

torna-se possível a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de carga físicos da estrutura,

$$\begin{aligned} [K_c]^{-T} [K_{lm}^S] [K_c]^{-1} &= [K_{físico}] = \text{matriz de rigidez física da estrutura, e} \\ [K_c]^{-T} \{f_i^S\} &= \{f_{físico}\} = \text{vetor de carga físico da estrutura.} \end{aligned}$$

E, conforme (4.29), a transformação de coordenadas da interpolação por spline em coordenadas físicas pode ser escrita como

$$\left[ K_{físico} \right] \{ w_c \} = \{ f_{físico} \}.$$

A partir da determinação do vetor  $\{ w_c \}$  é possível obter-se o vetor  $\{ c_i^s \}$  que contém os coeficientes das splines, os quais são responsáveis pela reconstituição de quaisquer grandezas referentes à estrutura (por exemplo grandezas relacionadas com a primeira, segunda ou terceira derivadas das funções de forma).

Não obstante ressalta-se que o método utilizado permite, conforme (5.36) ou (5,36a), a recuperação dos esforços cortantes e dos momentos fletores nos nós de extremidade da discretização da estrutura em forma de placa isotrópica elástica fina.

## ***5.6 EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DO MÉTODO ÀS ESTRUTURAS BIDIMENSIONAIS - PLACAS ISOTRÓPICAS ELÁSTICAS FINAS***

### ***5.6.1 INTRODUÇÃO***

A resolução dos exemplos apresentados nesta seção utiliza um procedimento que, inicialmente, segundo o que foi exposto no capítulo 4, foi desenvolvido para ser empregado no estudo de estruturas unidimensionais. Nesse capítulo 5, esse procedimento responsável pela constituição de uma única matriz de rigidez para elementos estruturais interpolados por spline, independente dos vínculos em suas bordas, foi ampliado e desenvolvido para ser aplicado no estudo do comportamento de estruturas bidimensionais.

Portanto, a partir do procedimento que envolve a geração da matriz de rigidez e do vetor de carga para estruturas unidimensionais e a partir do que já foi exposto nesse capítulo 5, tem-se a possibilidade de geração da matriz de rigidez e do vetor de carga, ambos referentes ao sistema interpolado por splines, de estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas, as quais constituem-se em elementos estruturais mais complexos quando comparados com estruturas unidimensionais.

Nesta seção serão expostos e analisados, através da metodologia desenvolvida e preparada para a utilização de B-splines como funções de forma em elementos finitos, sete exemplos de estruturas bidimensionais em forma de placas isotrópicas elásticas finas.

O primeiro exemplo de estrutura bidimensional tratará de uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

Através do segundo exemplo, será analisada uma placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

O terceiro exemplo envolverá uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.

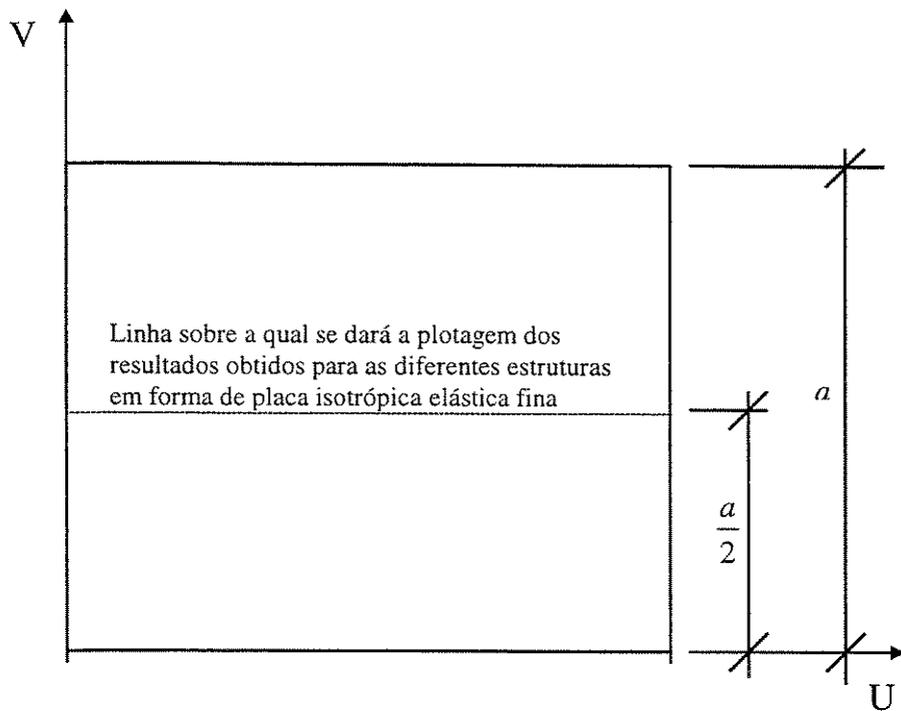
No quarto exemplo, será estudado o comportamento de uma placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.

O quinto exemplo de estrutura bidimensional tratará de uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga distribuída senoidal.

Por meio do sexto exemplo, será analisado o comportamento de uma placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

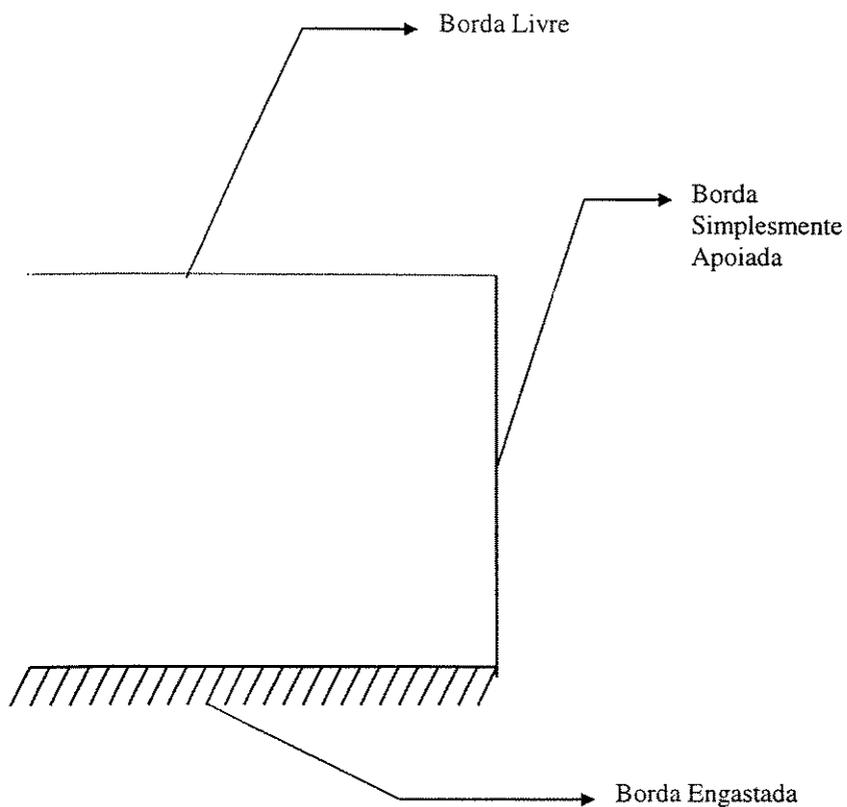
Uma estrutura em forma de placa com reentrância parcialmente engastada e parcialmente com seus bordos livres, discretizada por três elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída será analisada no sétimo exemplo.

Todos os resultados obtidos para essa série de exemplos envolvendo a análise de estruturas em forma de placas isotrópicas elásticas finas serão expostos mediante comparação com a solução analítica, ou com soluções numéricas aproximadas, ou, ainda, mediante comparação com os resultados obtidos através do Programa ANSYS. Todas as comparações de resultados através de gráficos serão feitas tomando-se por base uma linha intermediária passando pela cota  $\nu = \frac{a}{2} = 0,5$ , tal como mostrado na Figura (5.12).



**Figura (5.12):** *Determinação da posição sobre a qual se dará a plotagem comparada dos resultados obtidos para os deslocamentos, rotações, momentos fletores e esforços cortantes das diferentes placas a serem analisadas.*

Será adotada a convenção indicada na Figura (5.13) para a vinculação dos bordos das estruturas em forma de placa a serem analisadas.



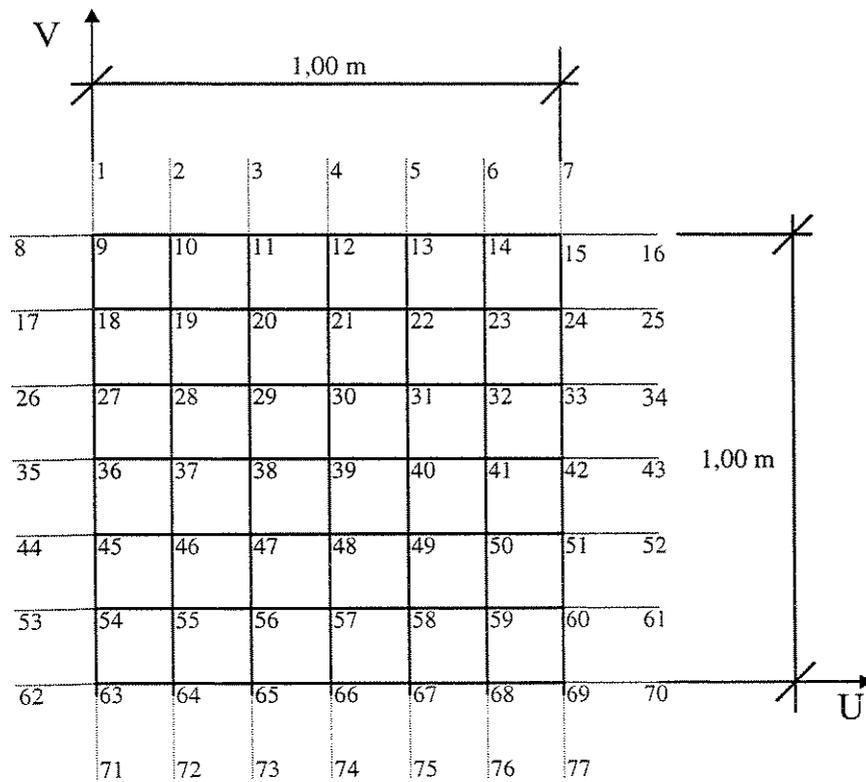
*Figura (5.13): Convenção para a vinculação das bordas das estruturas em forma de placa a serem analisadas.*

### ***5.6.2 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TODO O SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA***

Conforme mostrado na Figura (5.14) e segundo a representação em perspectiva apresentada na Figura (5.15), nesta seção será analisado o comportamento de uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

O estudo do comportamento dessa placa envolverá uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta nas Figuras (5.14) e (5.15).

Segundo a Figura (5.14), os nós auxiliares utilizados na discretização da estrutura são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 25, 26, 34, 35, 43, 44, 52, 53, 61, 62, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, e 77.



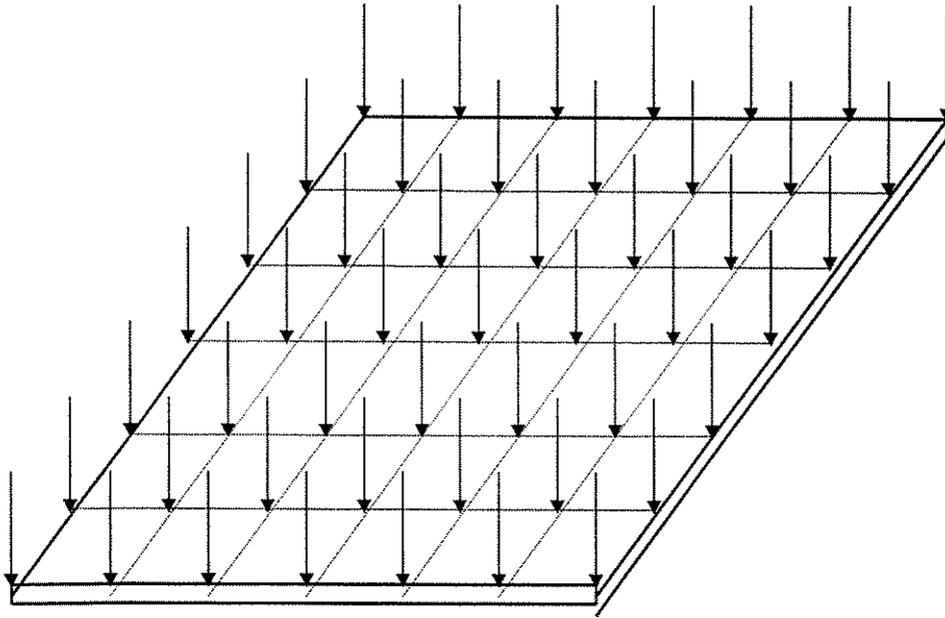
$$E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$$

**Figura (5.14):** Placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.



**Figura (5.15):** *Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento dos vãos:  $L_u = L_v = 1 \text{ m}$  ; e

-) espessura:  $t = 0,005 \text{ m}$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade:  $E = 21000000 \text{ tf / m}^2$  ; e

-) coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$  .

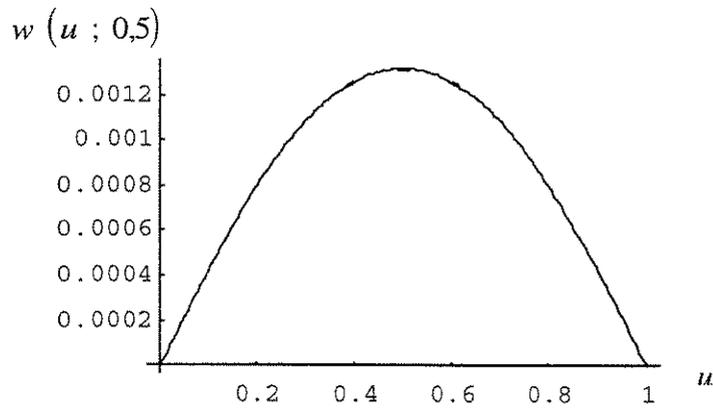
A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) simplesmente apoiada em todo seu contorno.

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q_0 = 0,078 \text{ tf / m}^2$  (carga uniformemente distribuída).

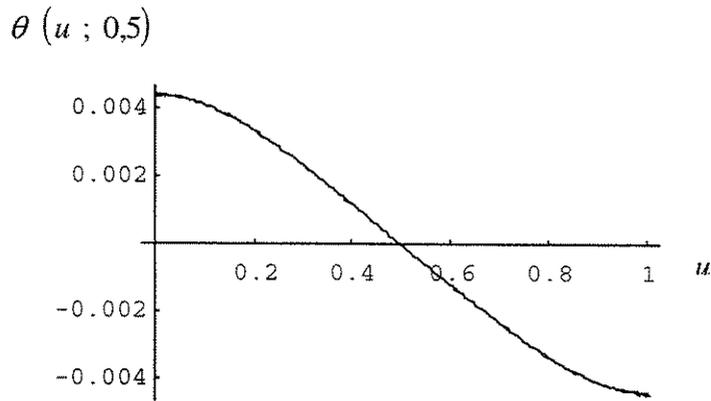
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (5.16):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959)).

**Tabela (5.1):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

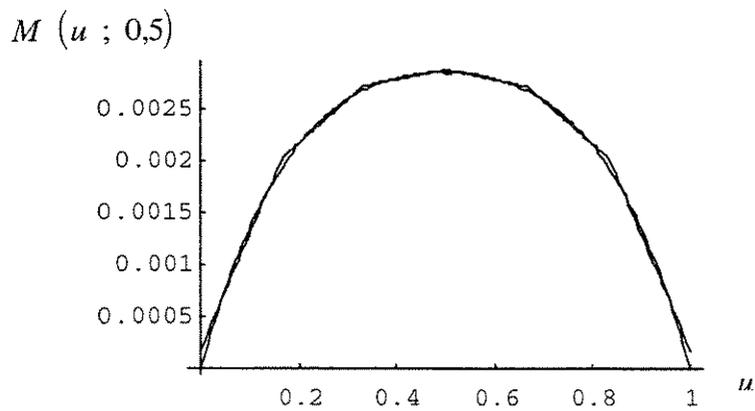
$p/\nu=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $w$ [m]	Resultados Obtidos $w$ [m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	0	0
$\frac{1}{6}$	0,000683968	0,000683499	0,0685705
$\frac{1}{3}$	0,00115378	0,00115356	0,0190678
$\frac{1}{2}$	0,00131856	0,00131783	0,0553634



**Figura (5.17):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (5.2):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

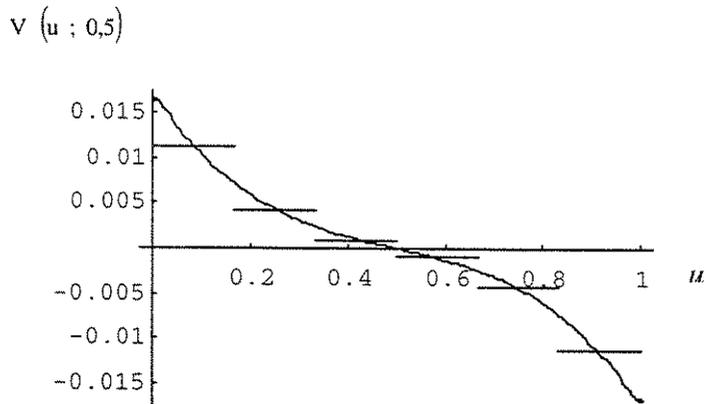
$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $\theta$ [rd]	Resultados Obtidos $\theta$ [rd]	$ \% \text{ Erro} $
0	0,00437429	0,00437794	0,0833725
$\frac{1}{6}$	0,00360555	0,00360844	0,08009
$\frac{1}{3}$	0,00195184	0,00195238	0,0276586
$\frac{1}{2}$	0	0	0



**Figura (5.18):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (5.3):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $M$ [tf.m/m]	Resultados Obtidos $M$ [tf.m/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	0,000176942	
$\frac{1}{6}$	0,00194537	0,00204277	4,76804
$\frac{1}{3}$	0,00269253	0,00273433	1,52871
$\frac{1}{2}$	0,00287257	0,00289753	0,861423



**Figura (5.19): Esforços Cortantes V da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (5.4): Esforços Cortantes V da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos V [tf/m]	Resultados Obtidos V [tf/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0,0163163	0,011195	31,3876
$\frac{1^-}{6}$	0,00717567	0,011195	35,9029
$\frac{1^+}{6}$	0,00717567	0,0041494	42,174
$\frac{1^-}{3}$	0,00241238	0,0041494	41,862
$\frac{1^+}{3}$	0,00241238	0,000979165	59,4108
$\frac{1^-}{2}$	0	0,000979165	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, submetida a uma carga uniformemente distribuída, que conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) é dada por

$$w = \frac{16 q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right)}{m n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

onde,  $m = 1, 3, 5, \dots$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$  e  $D = \frac{E t^3}{12 (1-\nu^2)}$  e

$q_0$  = carga uniformemente distribuída,  $a$  = comprimento da placa, e,  $b$  = largura da placa,

foi aproximada através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a superfície quadrada ocupada pelas extensões da placa foi discretizado por 6 X 6 elementos.

Conforme a Figura (5.16), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.1), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados comparados bastante precisos, ou seja, através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas obteve-se, em relação à solução analítica, baixíssimas porcentagens de erro.

Conforme a Figura (5.17), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.2), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também a obtenção de resultados comparados bastante precisos, ou seja, também sob a utilização da derivada primeira das polinomiais por partes bidimensionais de grau 3, a interpolação efetuada proporcionou a obtenção de resultados comparados extremamente precisos.

Conforme a Figura (5.18), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.3), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados menos precisos quando comparados aos obtidos para os deslocamentos e rotações da placa (sendo todos sempre

comparados com a solução analítica), ou seja, sob o envolvimento da derivada segunda das splines cúbicas bidimensionais, a interpolação gerou resultados comparados com porcentagens de erro maiores em relação às obtidas para os deslocamentos e rotações.

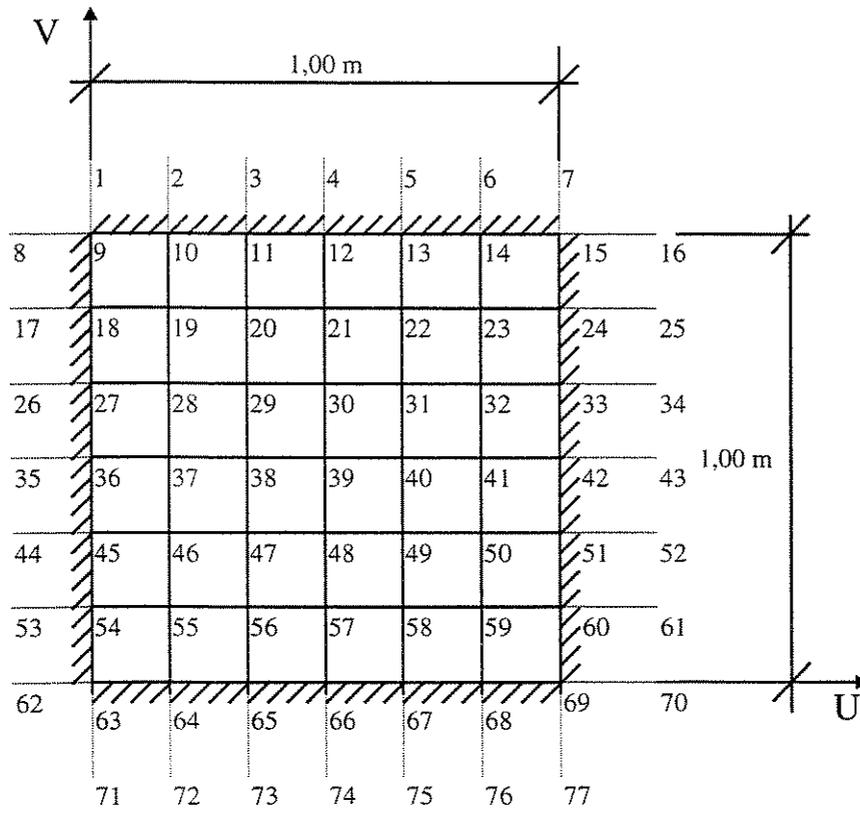
Conforme a Figura (5.19), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.4), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a não possibilidade de comparação entre os resultados analíticos e os obtidos através de uma interpolação cúbica bidimensional por splines, pois, se a interpolação é cúbica, a derivada terceira desta é uma constante, e a derivada terceira da solução analítica é completamente diferente de uma constante.

### ***5.6.3 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA ENGASTADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA***

Conforme mostrado na Figura (5.20) e segundo a representação em perspectiva apresentada na Figura (5.21), nesta seção será analisado o comportamento de uma placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

O estudo do comportamento dessa placa envolverá uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta nas Figuras (5.20) e (5.21).

Segundo a Figura (5.20), os nós auxiliares utilizados na discretização da estrutura são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 25, 26, 34, 35, 43, 44, 52, 53, 61, 62, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, e 77.



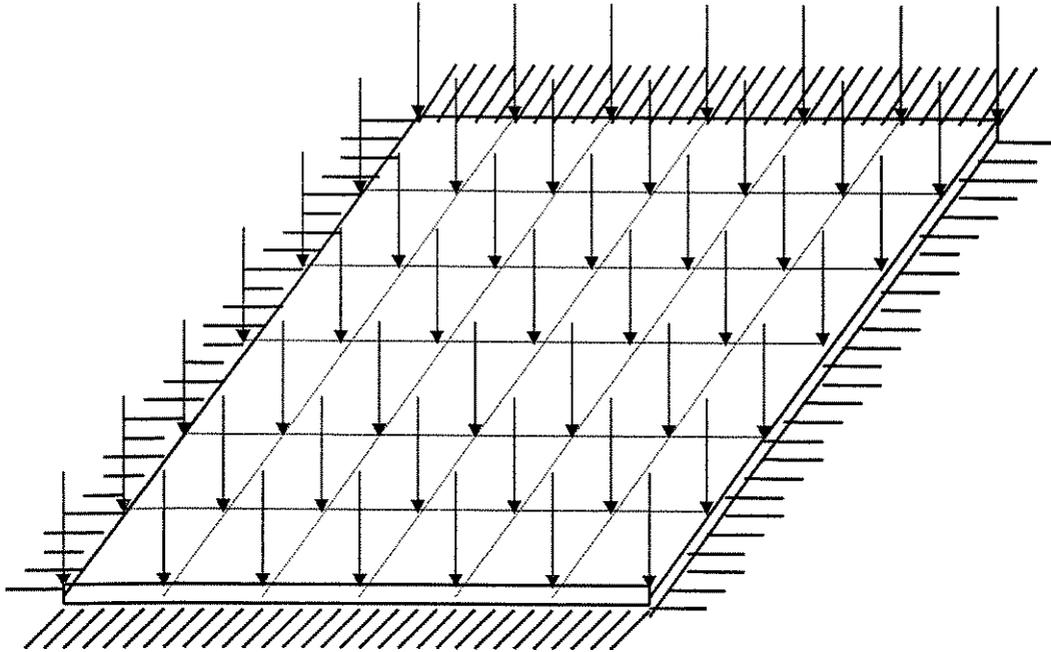
$$E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$$

**Figura (5.20):** Placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.



**Figura (5.21):** *Perspectiva da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento dos vãos:  $L_u = L_v = 1 \text{ m}$  ; e

-) espessura:  $t = 0,005 \text{ m}$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade:  $E = 21000000 \text{ tf / m}^2$  ; e

-) coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$  .

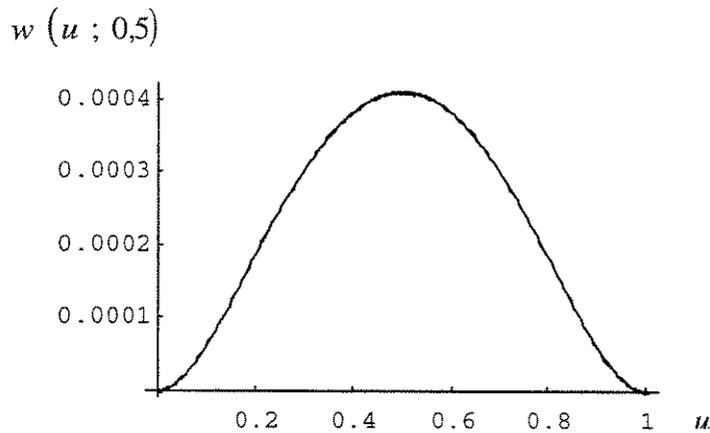
A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) engastada em todo seu contorno.

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q_0 = 0,078 \text{ tf / m}^2$  (carga uniformemente distribuída).

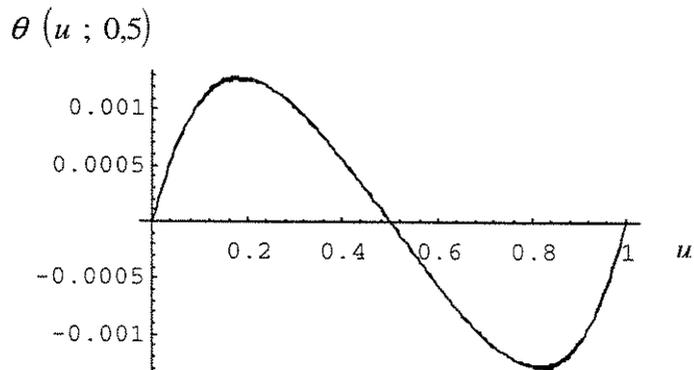
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (5.22):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com uma solução aproximada (soluções aproximadas compostas a partir de um procedimento sugerido por Szilard (1974)).

**Tabela (5.5):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada.

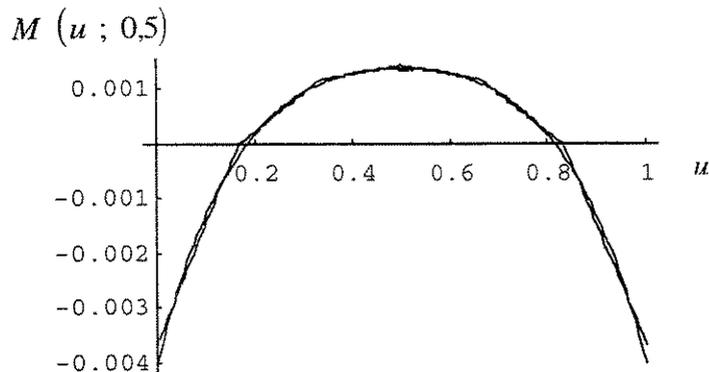
$p/\nu=0,5$ $u$ [m]	Resultados Numéricos $w$ [m]	Resultados Obtidos $w$ [m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	0	0
$\frac{1}{6}$	0,000140956	0,000141479	0,369666
$\frac{1}{3}$	0,000332407	0,000333639	0,369261
$\frac{1}{2}$	0,000408848	0,000410364	0,369428



**Figura (5.23):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com uma solução aproximada.

**Tabela (5.6):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas numericamente com uma solução aproximada.

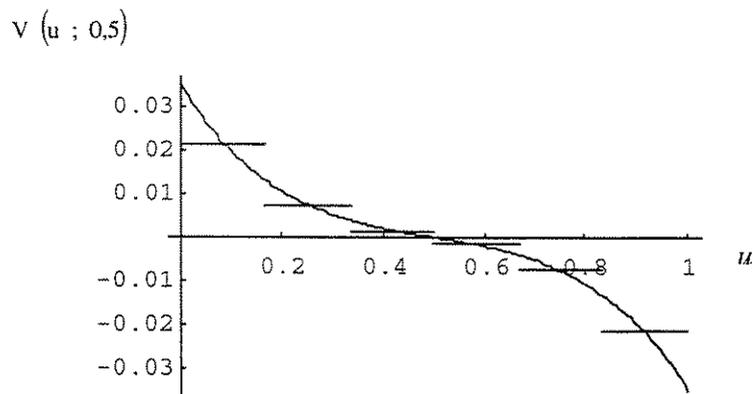
p/ v=0,5 u [m]	Resultados		Resultados Obtidos $\theta$ [rd]	% Erro
	Numéricos $\theta$	[rd]		
0	0		0	0
$\frac{1}{6}$	0,00126288		0,00127881	1,24569
$\frac{1}{3}$	0,000884552		0,000890279	0,643281
$\frac{1}{2}$	0		0	0



**Figura (5.24):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com uma solução aproximada.

**Tabela (5.7):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada.

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Numéricos $M$ [tf.m/m]	Resultados Obtidos $M$ [tf.m/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	-0,0040069	-0,00365716	8,72844
$\frac{1}{6}$	-0,000241544	-0,0000317029	86,8749
$\frac{1}{3}$	0,00107793	0,00115246	6,46704
$\frac{1}{2}$	0,0013659	0,00141567	3,51565



**Figura (5.25): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com uma solução aproximada.**

**Tabela (5.8): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada.**

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Numéricos $V$ [tf / m]	Resultados Obtidos $V$ [tf / m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0,0354095	0,0217528	38,5679
$\frac{1^-}{6}$	0,0132023	0,0217528	39,3076
$\frac{1^+}{6}$	0,0132023	0,00710496	46,1839
$\frac{1^-}{3}$	0,00393143	0,00710496	44,6664
$\frac{1^+}{3}$	0,00393143	0,00157926	59,8299
$\frac{1^-}{2}$	0,00000279391	0,00157926	99,8231

Através das plotagens apresentadas nas Figuras (5.22), (5.23), (5.24) e (5.25), referindo-se, respectivamente, aos deslocamentos, às rotações, aos momentos fletores e aos esforços cortantes apresentados pela placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída, efetuou-se uma comparação gráfica entre os resultados obtidos por meio de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas com os obtidos através de um método aproximado sugerido por Szilard (1974). A comparação numérica entre todos esses resultados está exposta através das Tabelas (5.5), (5.6), (5.7) e (5.8), as quais, respectivamente, referem-se aos deslocamentos, às rotações, aos momentos fletores e aos esforços cortantes apresentados pela placa.

Não obstante, deve-se lembrar que a análise dessas plotagens e dessas tabelas permite uma comparação entre os resultados obtidos através de um método numérico aproximado, onde foram empregadas splines cúbicas como funções de forma, e os obtidos por meio de um outro método também aproximado.

Somente é possível a comparação de alguns dos resultados obtidos com os obtidos através de métodos qualificados como analíticos. Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) apresentam como resultados analíticos para o tipo de estrutura analisado, submetida às condições expostas nessa seção, os dados contidos nas Tabelas (5.9) e (5.10).

**Tabela (5.9): Deslocamento  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparado numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).**

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultado Analítico $w$ [m]	Resultado Obtido $w$ [m]	$ \% \text{ Erro} $
$\frac{1}{2}$	0,000408845	0,000410364	0,370207910

**Tabela (5.10): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).**

$p/\nu=0,5$ u [m]	Resultados Analíticos M [tf . m/m]	Resultados Obtidos M [tf . m/m]	% Erro
0	-0,0040014	-0,00365716	8,602989
$\frac{1}{2}$	0,0018018	0,00141567	21,43024

Conforme a Tabela (5.9), o resultado obtido para o deslocamento central da placa apresenta-se bastante preciso em relação à solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). E, conforme a Tabela (5.10), o momento fletor obtido para o centro do bordo engastado e o momento fletor obtido para o ponto central da placa quadrada apresentam-se pouco precisos em relação aos valores analíticos dados por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), sendo que a maior porcentagem de erro foi obtida em função da comparação que envolveu o momento fletor no centro da placa.

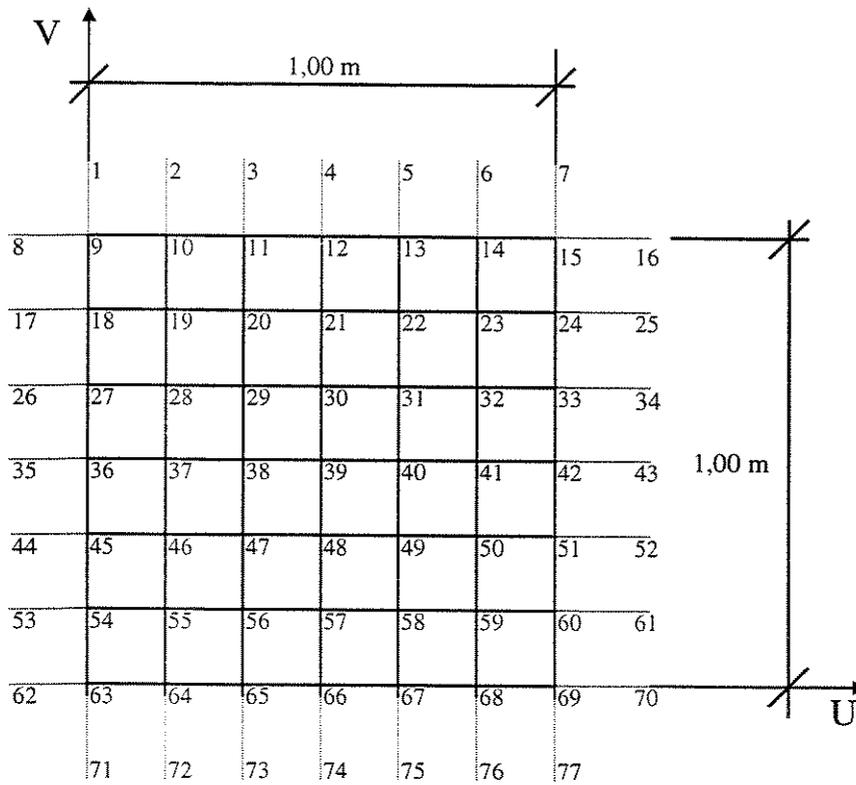
Portanto, também para o caso da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída, o resultado obtido, pela interpolação bidimensional por splines cúbicas, para o deslocamento central foi bastante preciso em relação à solução analítica, porém os resultados obtidos através dessa interpolação, que envolveram a derivada segunda dessas polinomiais cúbicas por partes, apresentaram uma certa defasagem nos valores em relação à solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

#### ***5.6.4 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA CONCENTRADA CENTRAL***

Conforme mostrado na Figura (5.26) e segundo a representação em perspectiva apresentada na Figura (5.27), nesta seção será analisado o comportamento de uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.

O estudo do comportamento dessa placa envolverá uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta nas Figuras (5.26) e (5.27).

Segundo a Figura (5.26), os nós auxiliares utilizados na discretização da estrutura são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 25, 26, 34, 35, 43, 44, 52, 53, 61, 62, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, e 77.



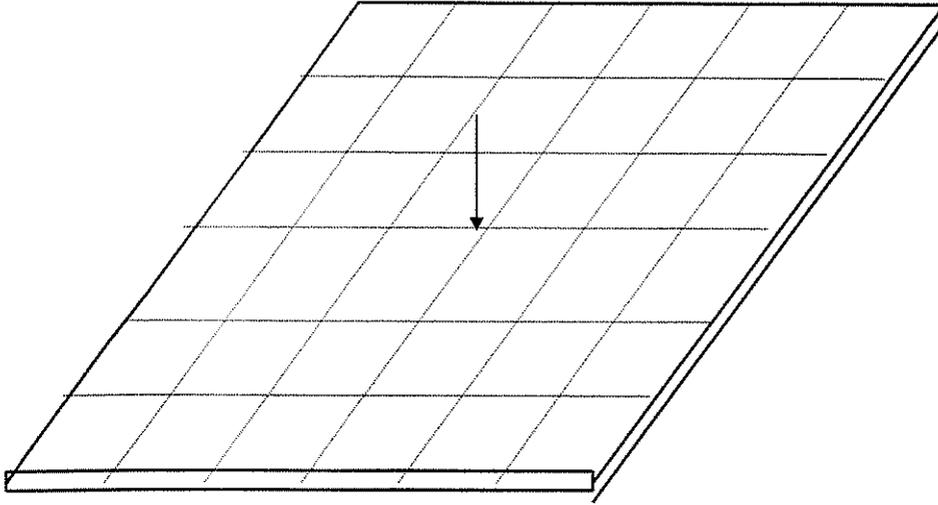
$$E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$P = 0,06 \text{ tf}$$

**Figura (5.26):** Placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.



**Figura (5.27):** *Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento dos vãos:  $L_u = L_v = 1 \text{ m}$ ; e

-) espessura:  $t = 0,005 \text{ m}$ .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$ ; e

-) coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) simplesmente apoiada em todo seu contorno.

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $P = 0,06 \text{ tf}$  (carga concentrada central).

Em relação ao carregamento concentrado através do qual a estrutura se submete, se faz necessário uma análise da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u, v) N_l du dv$  do vetor de carga do sistema interpolado por spline,  $\{f_l^S\}$ .

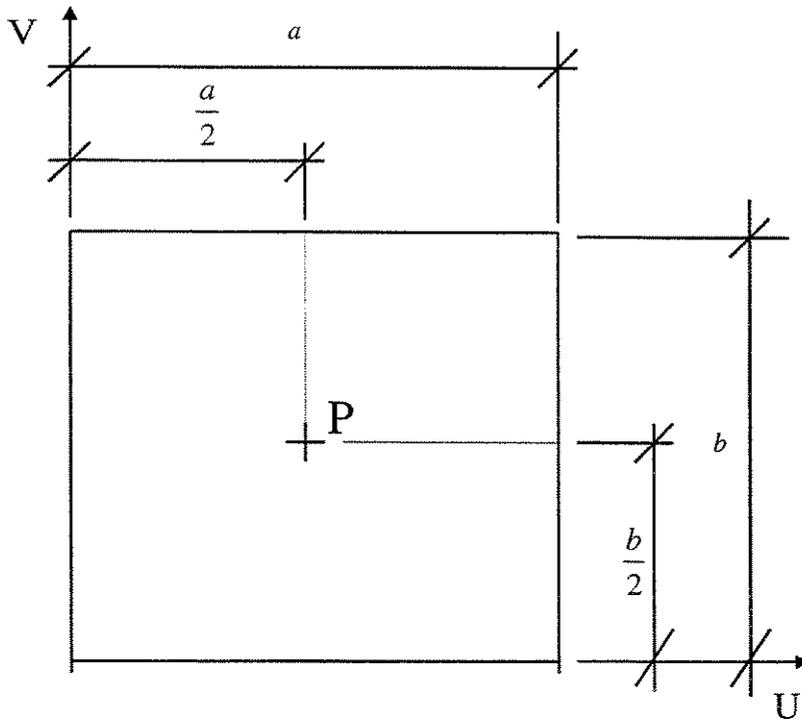
Em função da estrutura estar submetida a uma carga concentrada central “**P**”, segundo Edwards e Penney (1993), tem-se:

$$\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u, v) N_l du dv = \int_0^{L_v} \int_0^{L_u} P \delta(u, v) N_l du dv = P \int_0^{L_v} \int_0^{L_u} \delta(u, v) N(u) N(v) du dv ,$$

onde  $\delta(u, v)$  = Função Delta de Dirac.

Conforme a Figura (5.28), para “**P**” aplicado no centro da placa, tem-se:

$$P \int_0^{L_v} \int_0^{L_u} \delta(u, v) N(u) N(v) du dv = P \int_0^{L_v} \int_0^{\frac{L_u}{2}} \delta_{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}}(u, v) N(u) N(v) du dv = P N\left(\frac{a}{2}\right) N\left(\frac{b}{2}\right)$$



**Figura (5.28):** Aplicação da carga concentrada “P” na posição  $u = \frac{a}{2}$  e  $v = \frac{b}{2}$  (ponto central) da placa simplesmente apoiada.

Portanto,

$$\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u, v) N_l du dv = P N\left(\frac{a}{2}\right) N\left(\frac{b}{2}\right).$$

Então, para a aplicação de uma carga concentrada “P” na posição  $u = \frac{a}{2}$  e  $v = \frac{b}{2}$ , da placa, é necessário o posicionamento do topo de uma B-spline bidimensional sobre todos os nós da discretização, ou seja, é necessário o posicionamento do topo de duas B-splines unidimensionais, uma na direção “u” e outra na direção “v”, sobre todos os nós da discretização. Da B-spline unidimensional, segundo a direção “u”, cujo topo foi posicionado em um certo nó da discretização, toma-se a ordenada no nó onde está sendo aplicada a carga concentrada “P”. Da outra B-spline

unidimensional, segundo a direção “v”, cujo topo foi posicionado nesse mesmo nó em que o topo da spline cúbica unidimensional da direção “u” foi posicionado, toma-se a ordenada nesse nó onde está sendo aplicada a carga concentrada “P”. Efetua-se o produto entre os valores apresentados por essas duas ordenadas, no nó onde está sendo aplicada a carga concentrada “P”. Esse resultado deve ser multiplicado pelo valor da própria carga concentrada “P”, para constituir o valor final da contribuição a ser endereçada para a linha do vetor de carga, do sistema interpolado por splines, definida em função da vinculação ao nó sobre o qual se deu o posicionamento inicial das duas B-splines unidimensionais.

O produto envolvendo o valor dessas duas ordenadas, no nó onde está sendo aplicada a carga concentrada “P”, e o próprio valor da carga concentrada “P” deve ser repetido para o posicionamento das B-splines bidimensionais em todos os nós da discretização, de forma a definir as contribuições para todas as linhas do vetor de carga do sistema interpolado por splines cúbicas.

Evidentemente, que nem todos esses produtos vão gerar contribuições diferentes de zero para as linhas do vetor de carga do sistema interpolado por splines. As contribuições diferentes de zero, conforme a Figura (5.29), para uma carga concentrada “P”, aplicada no nó central “i”, são geradas da seguinte forma:

-) Contribuição para a linha “i” da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor de carga do sistema

interpolado por spline,  $\{f_i^S\} : P_i = P \cdot 1 \cdot 1 = P$ ,

onde,

o primeiro “1” é o valor, no nó “i”, da ordenada da spline horizontal colocada no nó “i”; e o segundo “1” é o valor, no nó “i”, da ordenada da spline vertical colocada no nó “i”;

-) Contribuição para a linha “i-1” da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor de carga do sistema

interpolado por spline,  $\{f_i^S\} : P_{i-1} = P \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = P \cdot \frac{1}{4}$ ,

onde,

o " $\frac{1}{4}$ " é o valor, no nó " $i$ ", da ordenada da spline horizontal colocada no nó " $i-1$ "; e " $1$ " é o valor, no nó " $i$ ", da ordenada da spline vertical colocada no nó " $i-1$ ";

-) Contribuição para a linha " $i+1$ " da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor de carga do sistema

$$\text{interpolado por spline, } \{f_i^S\}: P_{i+1} = P \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = P \cdot \frac{1}{4};$$

-) Contribuição para a linha " $i - n^\circ$  de nós na horizontal" da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor

$$\text{de carga do sistema interpolado por spline, } \{f_i^S\}: P_{i-\text{numero de nos na horizontal}} = P \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = P \cdot \frac{1}{4};$$

-) Contribuição para a linha " $i - n^\circ$  de nós na horizontal - 1" da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor de carga do sistema interpolado por spline,

$$\{f_i^S\}: P_{i-\text{numero de nos na horizontal}-1} = P \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P \cdot \frac{1}{16};$$

-) Contribuição para a linha " $i - n^\circ$  de nós na horizontal + 1" da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor de carga do sistema interpolado por spline,

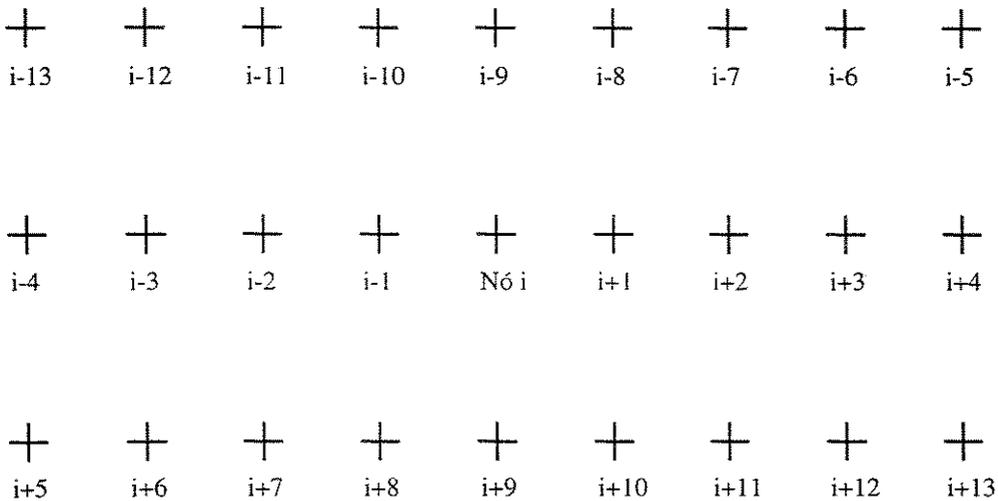
$$\{f_i^S\}: P_{i-\text{numero de nos na horizontal}+1} = P \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P \cdot \frac{1}{16};$$

-) Contribuição para a linha " $i + n^\circ$  de nós na horizontal" da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor

$$\text{de carga do sistema interpolado por spline, } \{f_i^S\}: P_{i+\text{numero de nos na horizontal}} = P \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = P \cdot \frac{1}{4};$$

-) Contribuição para a linha “ $i + n^o$  de nós na horizontal - 1” da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_l du dv$  do vetor de carga do sistema interpolado por spline,  $\{f_l^S\}$ :  $P_{i+\text{numero de nos na horizontal}-1} = P \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P \cdot \frac{1}{16}$ ; e

-) Contribuição para a linha “ $i + n^o$  de nós na horizontal + 1” da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_l du dv$  do vetor de carga do sistema interpolado por spline,  $\{f_l^S\}$ :  $P_{i+\text{numero de nos na horizontal}+1} = P \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P \cdot \frac{1}{16}$ .



**Figura (5.29): Nós genéricos de uma discretização também genérica.**

Portanto, para uma carga concentrada aplicada no nó central da placa somente essas nove linhas do vetor de carga do sistema interpolado por spline,  $\{f_l^S\}$ , receberão contribuições diferentes de zero

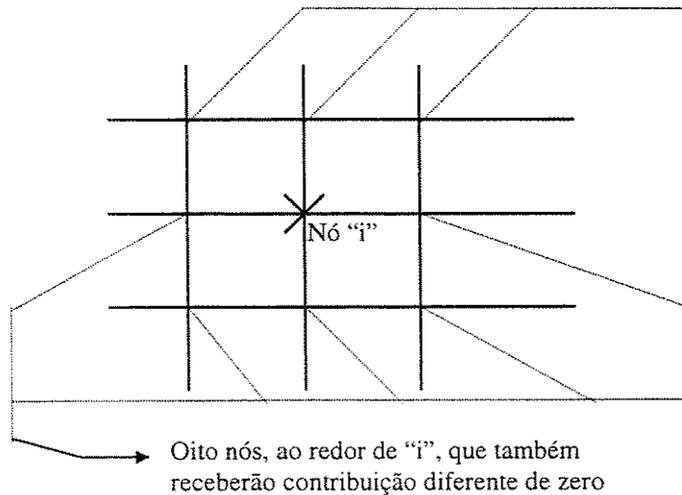
referentes à parcela  $\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(u,v) N_i du dv$  desse vetor; pois os demais produtos de funções

$N(u) N(v)$ , no nó central "i" de coordenadas  $\frac{a}{2}$  e  $\frac{b}{2}$ , são iguais a zero.

Em termos de uma generalização conforme a Figura (5.30), pode-se afirmar que para uma carga concentrada em um nó "i" genérico não pertencente ao limite de uma discretização bidimensional, as linhas do vetor de carga do sistema interpolado por spline,  $\{f_i^S\}$ , que receberão contribuições

diferentes de zero, referentes à parcela  $\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(u,v) N_i du dv$  desse vetor, são as linhas vinculadas

aos oito nós ao "redor" desse nó "i", e a linha vinculada ao próprio nó "i", sobre o qual a carga concentrada foi posicionada, a qual receberá a maior contribuição.

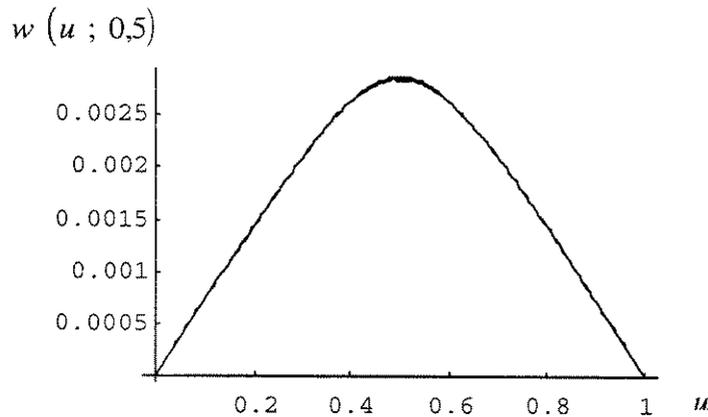


**Figura (5.30): Nós responsáveis pela geração das contribuições diferentes de zero, referentes à**

**parcela  $\int_0^{L_y} \int_0^{L_x} p_z(u,v) N_i du dv$ , para as linhas do vetor de carga do sistema interpolado por spline,**

**$\{f_i^S\}$ , em função de uma carga concentrada aplicada no nó "i".**

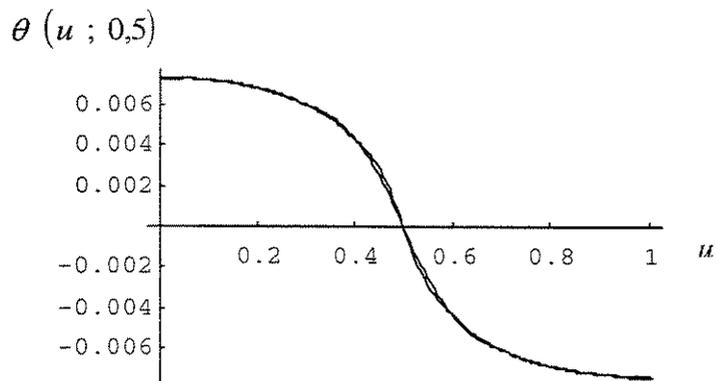
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (5.31):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959)).

**Tabela (5.11):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

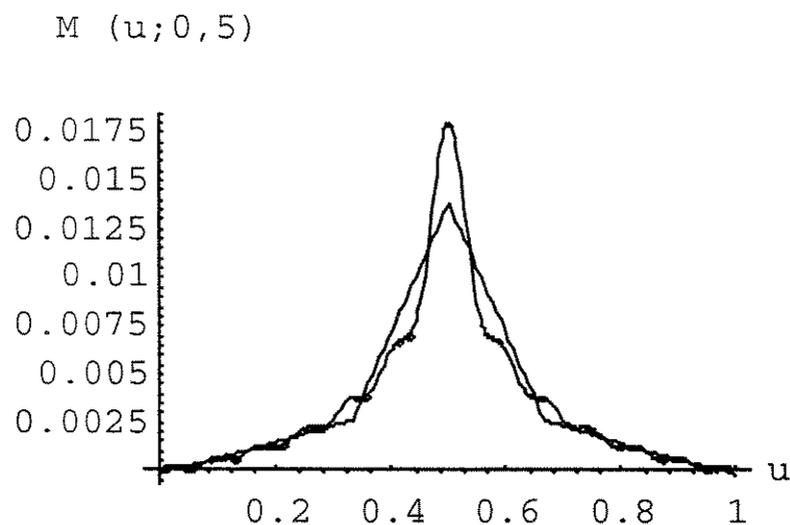
$p/\nu=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $w$ [m]	Resultados Obtidos $w$ [m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	0	0
$\frac{1}{6}$	0,00121109	0,00121334	0,185439
$\frac{1}{3}$	0,00229663	0,00229129	0,232515
$\frac{1}{2}$	0,00285117	0,00287574	0,854389



**Figura (5.32):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (5.12):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

$p/\nu=0,5$ u [m]	Resultados Analíticos $\theta$ [rd]	Resultados Obtidos $\theta$ [rd]	$ \% \text{ Erro} $
0	0,00736942	0,00737575	0,0858218
$\frac{1}{6}$	0,00706196	0,00703644	0,361373
$\frac{1}{3}$	0,00563433	0,0057217	1,52699
$\frac{1}{2}$	0	0	0



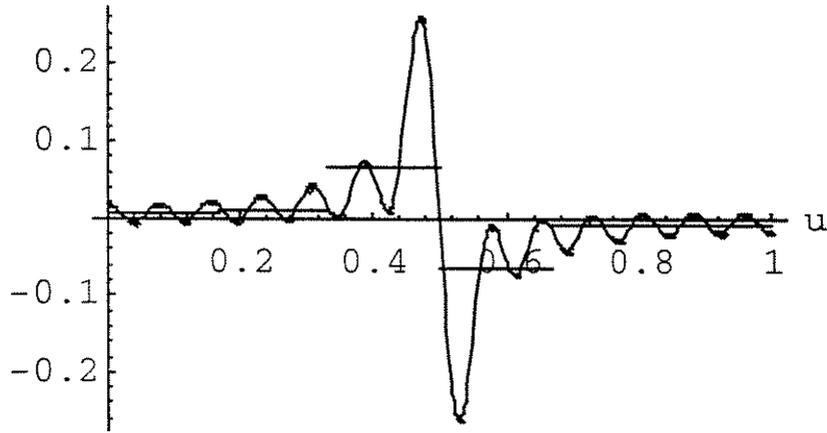
**Figura (5.33):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica.

$u$

**Tabela (5.13):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $M$ [tf.m/m]	Resultados Obtidos $M$ [tf.m/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	-0,000150509	
$\frac{1}{6}$	0,0010046	0,0011293	11,0422
$\frac{1}{3}$	0,00378285	0,0026632	29,5981
$\frac{1}{2}$	0,0180479	0,0138419	23,3047

$$Q(u; 0,5)$$



**Figura (5.34): Esforços Cortantes  $Q$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica.**

ii

**Tabela (5.14): Esforços Cortantes  $Q$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

$p/\nu=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $Q$ [tf / m]	Resultados Obtidos $Q$ [tf / m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0,0173571	0,00767884	55,7597
$\frac{1^-}{6}$	0,0156679	0,00767884	50,99
$\frac{1^+}{6}$	0,0156679	0,00920343	41,2593
$\frac{1^-}{3}$	0,0121315	0,00920343	24,1361
$\frac{1^+}{3}$	0,0121315	0,067072	81,9127
$\frac{1^-}{2}$	0	0,067072	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, submetida a uma carga concentrada central, que conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) é dada por

$$w = \frac{4 P}{\pi^4 a b D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{m \pi \xi}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi \eta}{b}\right)}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi y}{b}\right)$$

onde “ $\xi$ ” e “ $\eta$ ” são as coordenadas do ponto de aplicação da carga concentrada “ $P$ ”, e “ $a$ ” = comprimento da placa, e, “ $b$ ” = largura da placa,

foi aproximada através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a superfície quadrada ocupada pelas extensões da placa foi discretizado por 6 X 6 elementos.

Conforme a Figura (5.31), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.11), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados comparados bastante precisos, ou seja, através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas obteve-se, em relação à solução analítica, baixíssimas porcentagens de erro.

Conforme a Figura (5.32), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.12), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também a obtenção de resultados comparados bastante precisos, ou seja, também sob a utilização da derivada primeira das polinomiais por partes bidimensionais de grau 3, a interpolação efetuada proporcionou a obtenção de resultados comparados bastante precisos, porém com porcentagens de erro maiores em relação às obtidas para os deslocamentos.

Conforme a Figura (5.33), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.13), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados menos precisos quando comparados aos obtidos para os deslocamentos e rotações da placa (sendo todos sempre comparados com a solução analítica), ou seja, sob o envolvimento da derivada segunda das

splines cúbicas bidimensionais, a interpolação gerou resultados comparados com porcentagens de erro maiores em relação às obtidas para os deslocamentos e rotações.

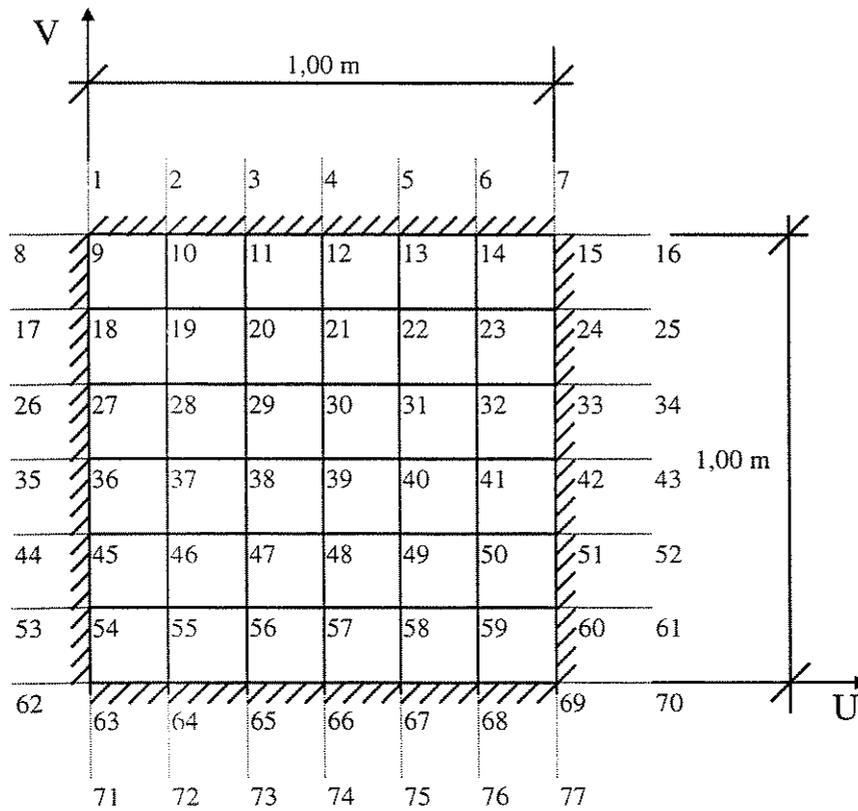
Conforme a Figura (5.34), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.14), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a não possibilidade de comparação entre os resultados analíticos e os obtidos através de uma interpolação cúbica bidimensional por splines, pois, se a interpolação é cúbica, a derivada terceira desta é uma constante, e a derivada terceira da solução analítica é completamente diferente de uma constante.

### ***5.6.5 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA ENGASTADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA CONCENTRADA CENTRAL***

Conforme mostrado na Figura (5.35) e segundo a representação em perspectiva apresentada na Figura (5.36), nesta seção será analisado o comportamento de uma placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.

O estudo do comportamento dessa placa envolverá uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta nas Figuras (5.35) e (5.36).

Segundo a Figura (5.35), os nós auxiliares utilizados na discretização da estrutura são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 25, 26, 34, 35, 43, 44, 52, 53, 61, 62, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, e 77.



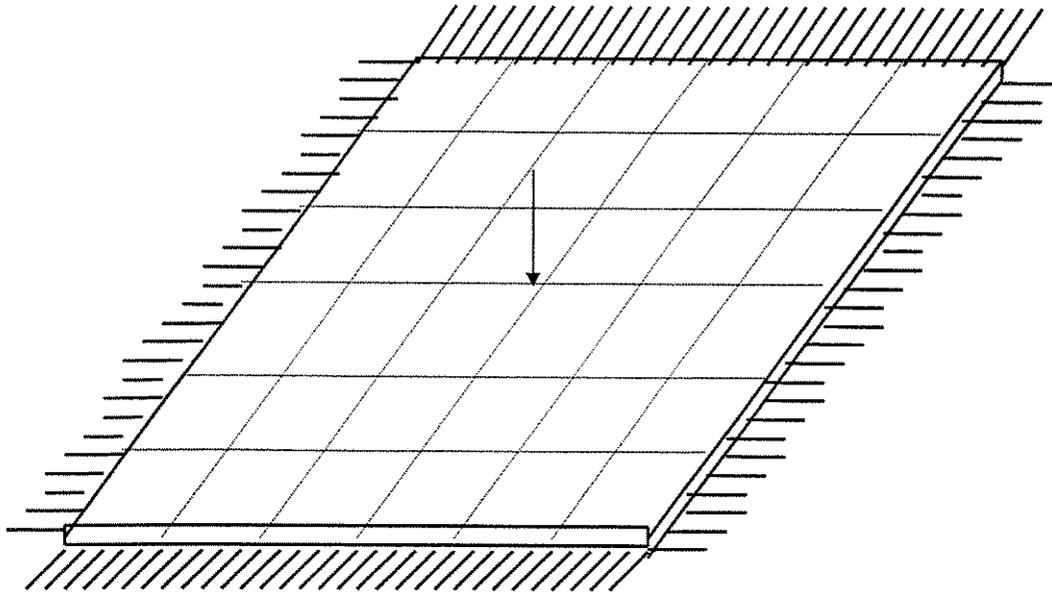
$$E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$P = 0,06 \text{ tf}$$

**Figura (5.35):** Placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.



**Figura (5.36):** *Perspectiva da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento dos vãos:  $L_u = L_v = 1 \text{ m}$ ; e

-) espessura:  $t = 0,005 \text{ m}$ .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$ ; e

-) coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$ .

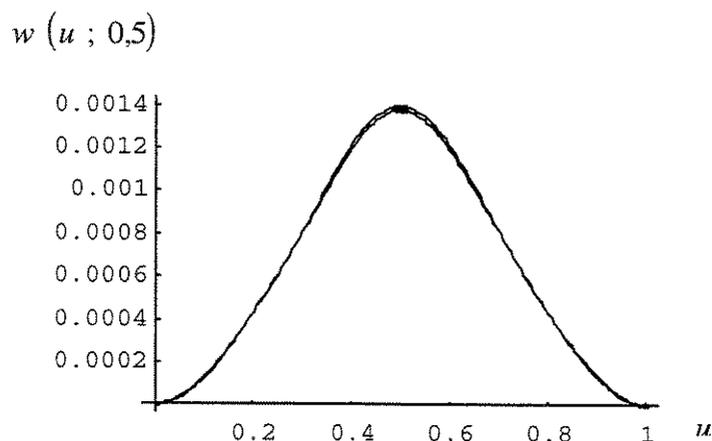
A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) engastada em todo seu contorno.

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $P = 0,06 \text{ tf}$  (carga concentrada central).

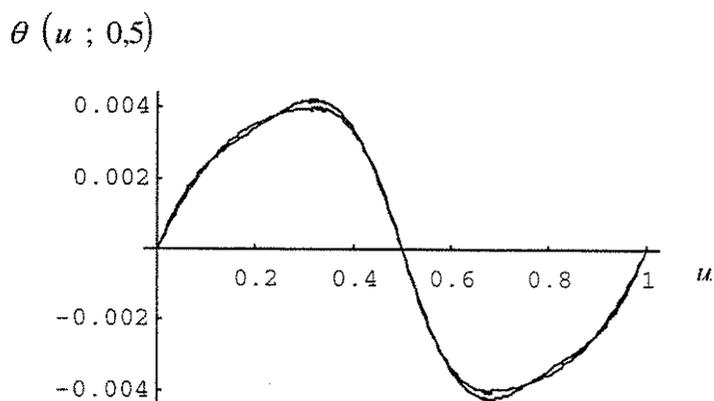
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (5.37):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com uma solução aproximada (soluções aproximadas compostas a partir de um procedimento sugerido por Szilard (1974)).

**Tabela (5.15):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada.

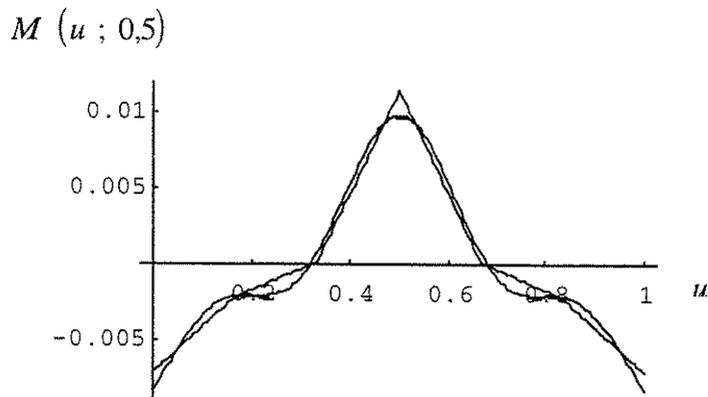
$p/\nu=0,5$ $u$ [m]	Resultados Numéricos $w$ [m]	Resultados Obtidos $w$ [m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	0	0
$\frac{1}{6}$	0,000321577	0,000317934	1,13285
$\frac{1}{3}$	0,000952453	0,00094166	1,13318
$\frac{1}{2}$	0,00139776	0,00138192	1,13324



**Figura (5.38):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com uma solução aproximada.

**Tabela (5.16):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas numericamente com uma solução aproximada.

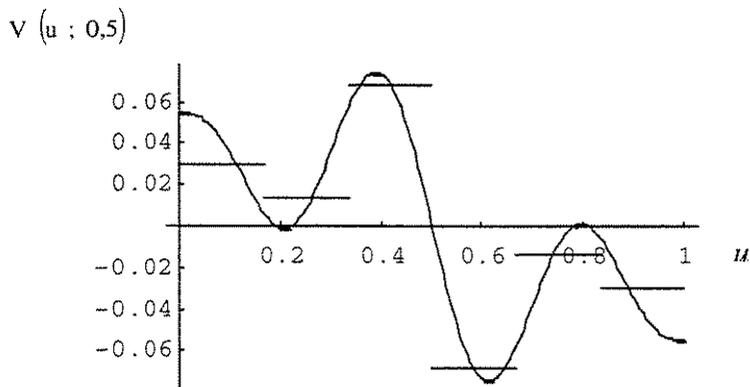
p/ v=0,5 u [m]	Resultados Numéricos $\theta$ [rd]	Resultados Obtidos $\theta$ [rd]	% Erro
0	0	0	0
$\frac{1}{6}$	0,003113	0,00324319	4,01426
$\frac{1}{3}$	0,00419298	0,00397714	5,14765
$\frac{1}{2}$	0	0	0



**Figura (5.39):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com uma solução aproximada.

**Tabela (5.17):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada.

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Numéricos $M$ [tf.m/m]	Resultados Obtidos $M$ [tf.m/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	-0,00833043	-0,00715277	14,1368
$\frac{1}{6}$	-0,00214642	-0,00220258	2,54974
$\frac{1}{3}$	0,000671058	0,0000854011	87,2737
$\frac{1}{2}$	0,00973046	0,0113871	14,5484



**Figura (5.40): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com uma solução aproximada.**

**Tabela (5.18): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com uma solução aproximada.**

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Numéricos $V$ [tf/m]	Resultados Obtidos $V$ [tf/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0,0545426	0,0297012	45,545
$\frac{1^-}{6}$	0,0055964	0,0297012	81,1577
$\frac{1^+}{6}$	0,0055964	0,0137279	59,2334
$\frac{1^-}{3}$	0,0576616	0,0137279	76,1923
$\frac{1^+}{3}$	0,0576616	0,0678103	14,9663
$\frac{1^-}{2}$	$2,26649 \cdot 10^{-6}$	0,0678103	99,9967

Através das plotagens apresentadas nas Figuras (5.37), (5.38), (5.39) e (5.40), referindo-se, respectivamente, aos deslocamentos, às rotações, aos momentos fletores e aos esforços cortantes apresentados pela placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga concentrada central, efetuou-se uma comparação gráfica entre os resultados obtidos por meio de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas com os obtidos através de um método aproximado sugerido por Szilard (1974). A comparação numérica entre todos esses resultados está exposta através das Tabelas (5.15), (5.16), (5.17) e (5.18), as quais, respectivamente, referem-se aos deslocamentos, às rotações, aos momentos fletores e aos esforços cortantes apresentados pela placa.

Não obstante, deve-se lembrar que a análise dessas plotagens e dessas tabelas permite uma comparação entre os resultados obtidos através de um método numérico aproximado, onde foram empregadas splines cúbicas como funções de forma, e os obtidos por meio de um outro método também aproximado.

Somente é possível a comparação de alguns dos resultados obtidos com os obtidos através de métodos qualificados como analíticos. Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) apresentam como resultados analíticos para o tipo de estrutura analisado, submetida às condições expostas nessa seção, os dados contidos nas Tabelas (5.19) e (5.20).

***Tabela (5.19): Deslocamento  $w$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparado numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).***

$p/\nu=0,5$ u [m]	Resultado Analítico w [m]	Resultado Obtido w [m]	$ \% \text{ Erro} $
$\frac{1}{2}$	0,00139776	0,00138192	1,13324

**Tabela (5.20): Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).**

$p/\nu=0,5$ u [m]	Resultados Analíticos M [tf . m/m]	Resultados Obtidos M [tf . m/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	-0,007542	-0,00715277	5,16083
$\frac{1}{2}$	0,0148319	0,0113871	23,2256

Conforme a Tabela (5.19), o resultado obtido para o deslocamento central da placa apresenta uma baixa porcentagem de erro em relação à solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959). E, conforme a Tabela (5.20), o momento fletor obtido para o centro do bordo engastado e o momento fletor obtido para o ponto central da placa quadrada apresentam-se pouco precisos em relação aos valores analíticos dados por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), sendo que a maior porcentagem de erro foi obtida em função da comparação que envolveu o momento fletor no centro da placa.

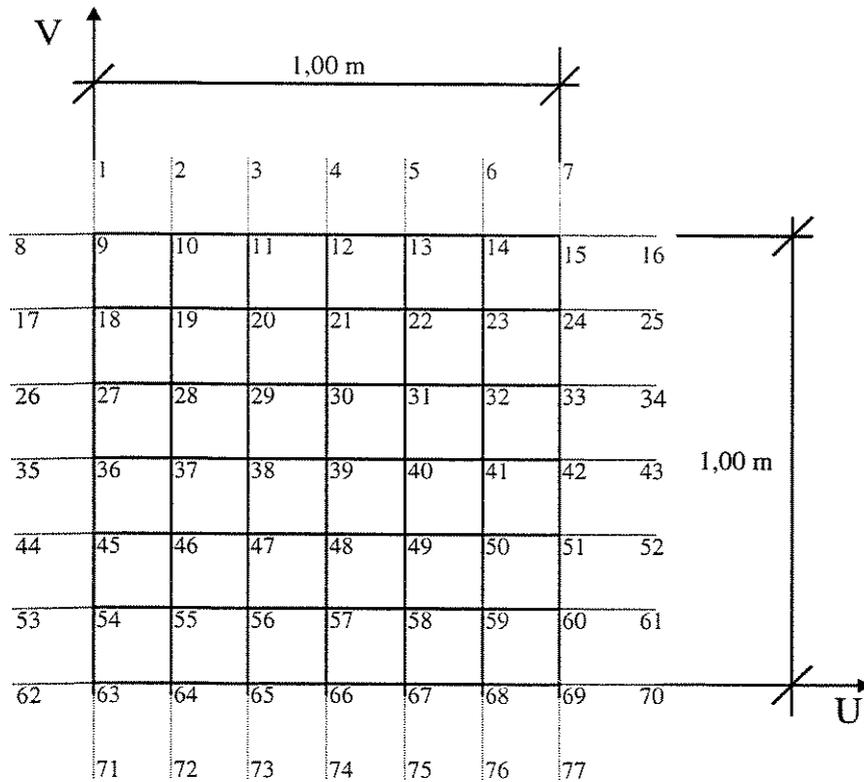
Portanto, também para o caso da placa quadrada engastada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, submetida a uma carga concentrada central, o resultado obtido, pela interpolação bidimensional por splines cúbicas, para o deslocamento central apresentou uma boa precisão em relação à solução analítica, porém os resultados obtidos através dessa interpolação, que envolveram a derivada segunda dessas polinomiais cúbicas por partes, apresentaram uma certa defasagem nos valores em relação à solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

### ***5.6.6 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TODO SEU CONTORNO, SUBMETIDA A UMA CARGA DISTRIBUÍDA SENOIDAL***

Conforme mostrado na Figura (5.41) e segundo a representação em perspectiva apresentada na Figura (5.42), nesta seção será analisado o comportamento de uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga distribuída segundo um perfil senoidal.

O estudo do comportamento dessa placa envolverá uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta nas Figuras (5.41) e (5.42).

Segundo a Figura (5.41), os nós auxiliares utilizados na discretização da estrutura são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 25, 26, 34, 35, 43, 44, 52, 53, 61, 62, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, e 77.



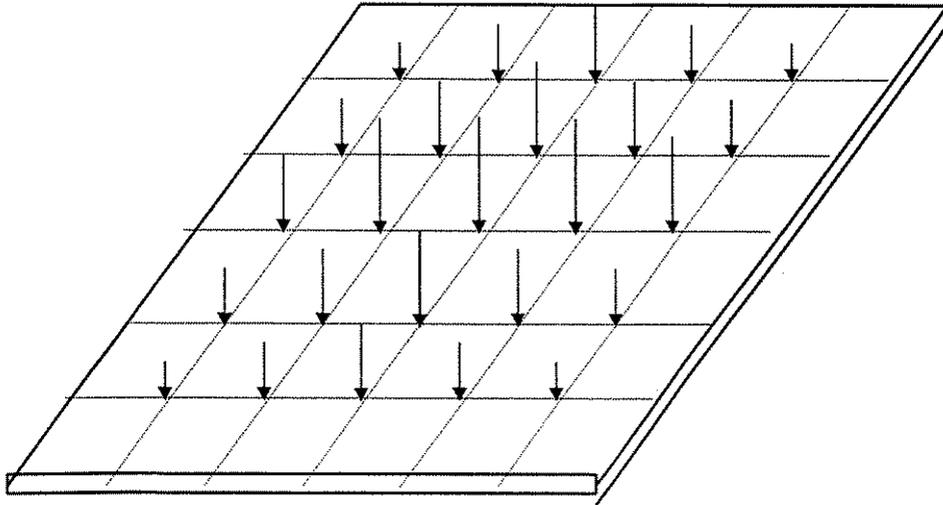
$$E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$$

**Figura (5.41):** Placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga distribuída segundo um perfil senoidal..



**Figura (5.42):** *Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga distribuída segundo um perfil senoidal.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento dos vãos:  $L_u = L_v = 1 \text{ m}$ ; e

-) espessura:  $t = 0,005 \text{ m}$ .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$ ; e

-) coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) simplesmente apoiada em todo seu contorno.

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$  (intensidade da carga no centro da placa).

Para uma distribuição de carga segundo um perfil senoidal, conforme Timoshenko e

Woinowsky-Krieger (1959), essa carga na parcela referente a  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i \, du \, dv$ , do vetor de

carga do sistema interpolado por spline,  $\{f_i^S\}$ , é dada por

$$p_z(u, v) = q_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi v}{b}\right),$$

onde:

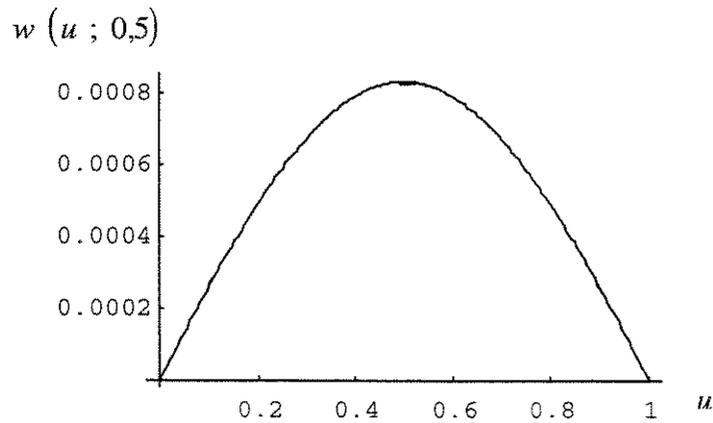
$q_0$  = valor da carga distribuída no centro da placa;

$a$  = comprimento da placa;

$b$  = largura da placa; e

“ $u$ ” e “ $v$ ” são as coordenadas globais de cada nó (para as integrações ocorrerem no intervalo de “0” a “1”, como no capítulo 4, há a necessidade da transformação dessas coordenadas segundo um sistema de referência local).

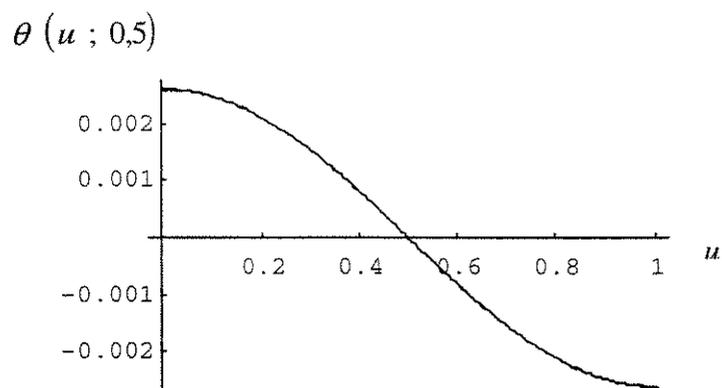
Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:



**Figura (5.43):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica (soluções analíticas conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959)).

**Tabela (5.21):** Deslocamentos  $w$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

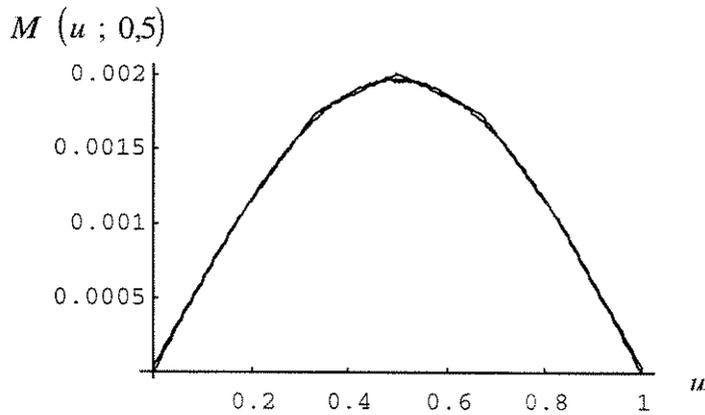
$p/\nu=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $w$ [m]	Resultados Obtidos $w$ [m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	0	0
$\frac{1}{6}$	0,000416388	0,000416497	0,0261707
$\frac{1}{3}$	0,000721206	0,000721351	0,0201012
$\frac{1}{2}$	0,000832776	0,000832891	0,0138073



**Figura (5.44):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas com a solução analítica.

**Tabela (5.22):** Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por 6 X 6 elementos, comparadas numericamente com a solução analítica.

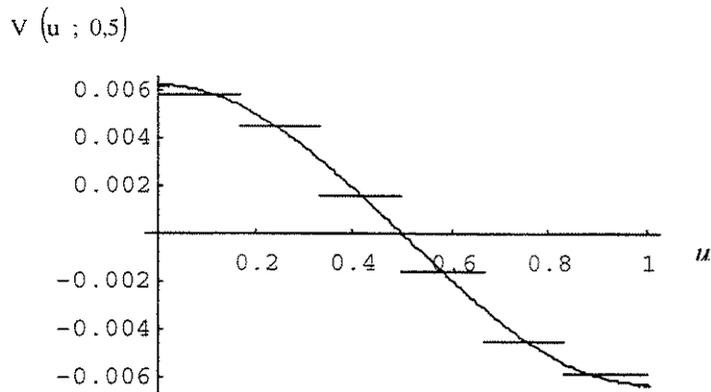
p/ v=0,5 u [m]	Resultados Analíticos $\theta$ [rd]	Resultados Obtidos $\theta$ [rd]	% Erro
0	0,00261624	0,00262239	0,234519
$\frac{1}{6}$	0,00226573	0,00226351	0,0979817
$\frac{1}{3}$	0,00130812	0,0013079	0,016818
$\frac{1}{2}$	0	0	0



**Figura (5.45):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica.

**Tabela (5.23):** Momentos Fletores  $M$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $M$ [tf.m/m]	Resultados Obtidos $M$ [tf.m/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0	0,0000327229	
$\frac{1}{6}$	0,000987882	0,00100251	1,45914
$\frac{1}{3}$	0,00171106	0,00175405	2,4509
$\frac{1}{2}$	0,00197576	0,00201874	2,12905



**Figura (5.46): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados com a solução analítica.**

**Tabela (5.24): Esforços Cortantes  $V$  da placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução analítica.**

$p/v=0,5$ $u$ [m]	Resultados Analíticos $V$ [tf/m]	Resultados Obtidos $V$ [tf/m]	$ \% \text{ Erro} $
0	0,00620704	0,00581875	6,25564
$\frac{1}{6}^-$	0,00537546	0,00581875	7,6183
$\frac{1}{6}^+$	0,00537546	0,00450923	16,1145
$\frac{1}{3}^-$	0,00310352	0,00450923	31,1741
$\frac{1}{3}^+$	0,00310352	0,00158815	48,8275
$\frac{1}{2}^-$	0	0,00158815	

Nesta seção, a equação dos deslocamentos apresentados pela placa quadrada simplesmente apoiada em todo o seu contorno, submetida a uma carga distribuída segundo um perfil senoidal, que conforme Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) é dada por

$$w = \frac{q_0}{\pi^4 D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi y}{b} \right),$$

onde  $q_0$  representa a intensidade da carga no centro da placa., “ $a$ ” = comprimento da placa, e, “ $b$ ” = largura da placa,

foi aproximada através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a superfície quadrada ocupada pelas extensões da placa foi discretizado por 6 X 6 elementos.

Conforme a Figura (5.43), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os deslocamentos da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.21), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados comparados bastante precisos, ou seja, através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas obteve-se, em relação à solução analítica, baixíssimas porcentagens de erro.

Conforme a Figura (5.44), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para as rotações da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.22), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se também a obtenção de resultados comparados bastante precisos, ou seja, também sob a utilização da derivada primeira das polinomiais por partes bidimensionais de grau 3, a interpolação efetuada proporcionou a obtenção de resultados comparados extremamente precisos.

Conforme a Figura (5.45), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os momentos fletores da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.23), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, observa-se a obtenção de resultados com uma precisão razoável quando comparados aos obtidos analiticamente; em relação às comparações entre os deslocamentos e as rotações obtidos para essa estrutura com os obtidos analiticamente, a comparação envolvendo os resultados referentes aos momentos fletores dessa placa apresenta-se menos precisa, ou seja, com uma maior porcentagem de erro. Porém, em relação aos resultados comparados obtidos em função dos momentos fletores presentes nas outras estruturas em forma de placa já estudadas, essa

atual interpolação por splines cúbicas bidimensionais, sob o envolvimento da derivada segunda dessas polinomiais por partes de grau 3, apresentou a menor porcentagem de erro em relação à solução analítica.

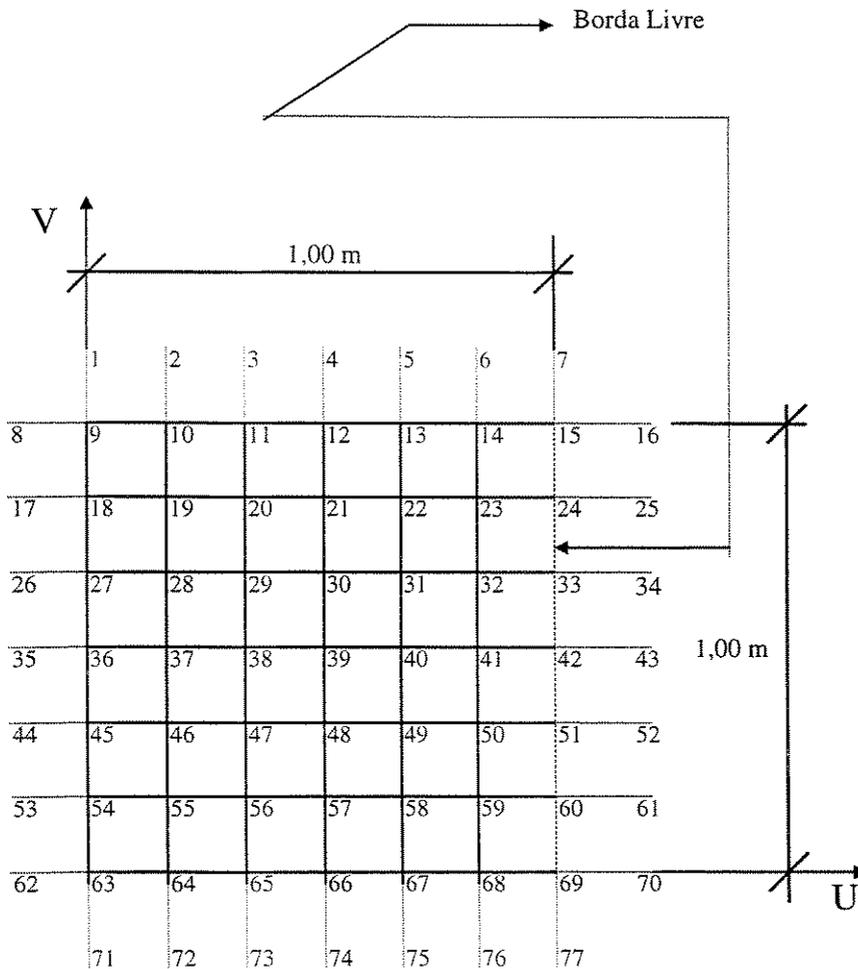
Conforme a Figura (5.46), a qual apresenta uma comparação gráfica dos resultados obtidos para os esforços cortantes da placa e os obtidos analiticamente, e conforme a Tabela (5.24), a qual apresenta uma comparação numérica entre esses valores, confirma-se a não possibilidade de comparação entre os resultados analíticos e os obtidos através de uma interpolação cúbica bidimensional por splines, pois, se a interpolação é cúbica, a derivada terceira desta é uma constante, e a derivada terceira da solução analítica é completamente diferente de uma constante.

### ***5.6.7 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA SIMPLEMENTE APOIADA EM TRÊS BORDAS E LIVRE NA QUARTA BORDA, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA***

Conforme mostrado na Figura (5.47) e segundo a representação em perspectiva apresentada na Figura (5.48), nesta seção será analisado o comportamento de uma placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

O estudo do comportamento dessa placa envolverá uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos, das rotações e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta nas Figuras (5.47) e (5.48).

Segundo a Figura (5.47), os nós auxiliares utilizados na discretização da estrutura são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 17, 25, 26, 34, 35, 43, 44, 52, 53, 61, 62, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, e 77.



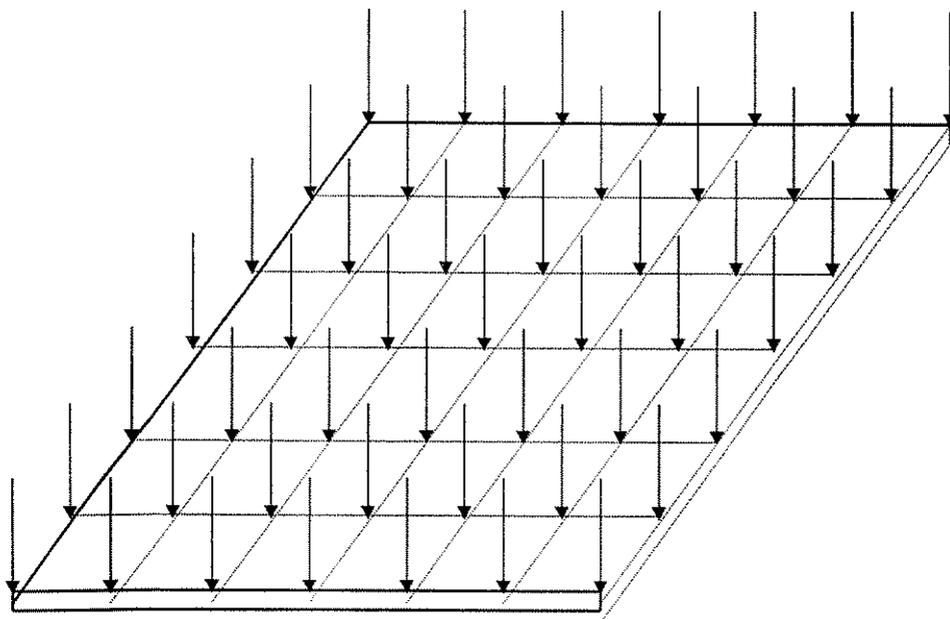
$$E = 210000000 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$$

**Figura (5.47):** Placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.



**Figura (5.48):** *Perspectiva da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.*

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento dos vãos:  $L_u = L_v = 1 \text{ m}$ ; e

-) espessura:  $t = 0,005 \text{ m}$ .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$ ; e

-) coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$ .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-) simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda.

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$  (carga uniformemente distribuída).

Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:

**Tabela (5.25): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização 6 X 6.**

Rotações $\theta$ e Deslocamentos $w$ referentes a cada nó	Resultados Obtidos [w] = m [ $\theta$ ] = rd	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
$\theta_9^v$	-0,00015521	-0,000080709	48,0001
$\theta_9^u$	0,000141474	0,000052866	62,6320
$\theta_{10}^v$	-0,00339576	-0,0033937	0,0607
$\theta_{11}^v$	-0,00616077	-0,0061824	0,3499
$\theta_{12}^v$	-0,00828558	-0,0083176	0,3850
$\theta_{13}^v$	-0,0100024	-0,009961	0,4139
$\theta_{14}^v$	-0,0113896	-0,011407	0,1525
$\theta_{15}^v$	-0,012744	-0,013076	2,5390
$\theta_{15}^u$	0,000311104	0,00015026	51,7010
$\theta_{18}^u$	0,00332445	0,0033153	0,2752
$w_{19}$	0,000528797	0,00053414	1,0003
$w_{20}$	0,000967964	0,00097623	0,8467
$w_{21}$	0,00130814	0,0013155	0,5595
$w_{22}$	0,00157315	0,0015764	0,2062
$w_{23}$	0,00181075	0,0018036	0,3949
$w_{24}$	0,00210133	0,002071	1,4434
$\theta_{24}^u$	0,00222218	0,0019293	13,1799
$\theta_{27}^u$	0,00555765	0,0055809	0,4166
$w_{28}$	0,000894398	0,00090314	0,9680

$w_{29}$	0,00164802	0,0016611	0,7874
$w_{30}$	0,00223449	0,0022466	0,5390
$w_{31}$	0,00269387	0,0026975	0,1346
$w_{32}$	0,00310621	0,0030913	0,4800
$w_{33}$	0,00360314	0,0035524	1,4082
$\theta_{33}^u$	0,00355644	0,0033229	6,5667
$\theta_{36}^u$	0,00636618	0,0063776	0,1791
$w_{37}$	0,00102368	0,0010332	0,9214
$w_{38}$	0,0018896	0,0019043	0,7719
$w_{39}$	0,00256573	0,0025791	0,5184
$w_{40}$	0,00309554	0,0030995	0,1278
$w_{41}$	0,00357278	0,0035542	0,5200
$w_{42}$	0,00414843	0,0040859	1,5073
$\theta_{42}^u$	0,00422656	0,003823	9,5482
$\theta_{45}^u$	0,00555765	0,0055809	0,4166
$w_{46}$	0,000894397	0,00090314	0,9680
$w_{47}$	0,00164801	0,0016611	0,7874
$w_{48}$	0,00223448	0,0022466	0,5390
$w_{49}$	0,00269387	0,0026975	0,1346
$w_{50}$	0,00310621	0,0030913	0,4800
$w_{51}$	0,00360314	0,0035524	1,4082
$\theta_{51}^u$	0,00355644	0,0033229	6,5667
$\theta_{54}^u$	0,00332445	0,0033153	0,2752
$w_{55}$	0,000528796	0,00053414	1,0003
$w_{56}$	0,000967961	0,00097623	0,8467
$w_{57}$	0,00130814	0,0013155	0,5595

$w_{58}$	0,00157314	0,0015764	0,2062
$w_{59}$	0,00181074	0,0018036	0,3949
$w_{60}$	0,00210133	0,002071	1,4434
$\theta_{60}^u$	0,00222218	0,0019293	13,1799
$\theta_{63}^v$	0,00015521	0,000080709	48,0001
$\theta_{63}^u$	0,000141476	0,000052866	62,6320
$\theta_{64}^v$	0,00339576	0,0033937	0,0607
$\theta_{65}^v$	0,00616075	0,0061824	0,3499
$\theta_{66}^v$	0,00828556	0,0083176	0,3850
$\theta_{67}^v$	0,0100024	0,009961	0,4139
$\theta_{68}^v$	0,0113896	0,011407	0,1525
$\theta_{69}^v$	0,012744	0,013076	2,5390
$\theta_{69}^u$	0,000311105	0,00015026	51,7010

**Tabela (5.26): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização 12 X 12.**

Rotações $\theta$ e Deslocamentos $w$ referentes a cada nó	Resultados Obtidos [w] = m [ $\theta$ ] = rd	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	$ \% \text{ Erro} $
$\theta_9^v$	-0,00015521	-0,000011511	92,5836
$\theta_9^u$	0,000141474	0,0000080091	94,3388
$\theta_{10}^v$	-0,00339576	-0,003387	0,2580
$\theta_{11}^v$	-0,00616077	-0,0061747	0,2256
$\theta_{12}^v$	-0,00828558	-0,0083215	0,4317
$\theta_{13}^v$	-0,0100024	-0,0099928	0,0960

$\theta_{14}^v$	-0,0113896	-0,01149	0,8738
$\theta_{15}^v$	-0,012744	-0,013307	4,2309
$\theta_{15}^u$	0,000311104	0,000053576	82,7787
$\theta_{18}^u$	0,00332445	0,0033094	0,4527
$w_{19}$	0,000528797	0,0005304	0,3022
$w_{20}$	0,000967964	0,00097168	0,3824
$w_{21}$	0,00130814	0,0013126	0,3398
$w_{22}$	0,00157315	0,0015783	0,3263
$w_{23}$	0,00181075	0,0018161	0,2946
$w_{24}$	0,00210133	0,0021032	0,0048
$\theta_{24}^u$	0,00222218	0,0021024	5,3902
$\theta_{27}^u$	0,00555765	0,0055766	0,3398
$w_{28}$	0,000894398	0,00089791	0,3911
$w_{29}$	0,00164802	0,0016541	0,3676
$w_{30}$	0,00223449	0,0022423	0,3483
$w_{31}$	0,00269387	0,0027019	0,2972
$w_{32}$	0,00310621	0,0031134	0,2309
$w_{33}$	0,00360314	0,003607	0,1070
$\theta_{33}^u$	0,00355644	0,003582	0,7136
$\theta_{36}^u$	0,00636618	0,0063736	0,1164
$w_{37}$	0,00102368	0,0010276	0,3815
$w_{38}$	0,0018896	0,0018966	0,3691
$w_{39}$	0,00256573	0,0025745	0,3406
$w_{40}$	0,00309554	0,0031049	0,3015
$w_{41}$	0,00357278	0,0035798	0,1961
$w_{42}$	0,00414843	0,0041479	0,0128

$\theta_{42}^{\mu}$	0,00422656	0,0041091	2,7791
$\theta_{45}^{\mu}$	0,00555765	0,0055766	0,3398
$w_{46}$	0,000894397	0,00089791	0,3911
$w_{47}$	0,00164801	0,0016541	0,3676
$w_{48}$	0,00223448	0,0022423	0,3483
$w_{49}$	0,00269387	0,0027019	0,2972
$w_{50}$	0,00310621	0,0031134	0,2309
$w_{51}$	0,00360314	0,003607	0,1070
$\theta_{51}^{\mu}$	0,00355644	0,003582	0,7136
$\theta_{54}^{\mu}$	0,00332445	0,0033094	0,4527
$w_{55}$	0,000528796	0,0005304	0,3022
$w_{56}$	0,000967961	0,00097168	0,3824
$w_{57}$	0,00130814	0,0013126	0,3398
$w_{58}$	0,00157314	0,0015783	0,3263
$w_{59}$	0,00181074	0,0018161	0,2946
$w_{60}$	0,00210133	0,0021032	0,0048
$\theta_{60}^{\mu}$	0,00222218	0,0021024	5,3902
$\theta_{63}^{\nu}$	0,00015521	0,000011511	92,5836
$\theta_{63}^{\mu}$	0,000141476	0,0000080091	94,3388
$\theta_{64}^{\nu}$	0,00339576	0,003387	0,2580
$\theta_{65}^{\nu}$	0,00616075	0,0061747	0,2256
$\theta_{66}^{\nu}$	0,00828556	0,0083215	0,4317
$\theta_{67}^{\nu}$	0,0100024	0,0099928	0,0960
$\theta_{68}^{\nu}$	0,0113896	0,01149	0,8738
$\theta_{69}^{\nu}$	0,012744	0,013307	4,2309
$\theta_{69}^{\mu}$	0,000311105	0,000053576	82,7787

**Tabela (5.27): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização 24 X 24.**

Rotações $\theta$ e Deslocamentos $w$ referentes a cada nó	Resultados Obtidos [ $w$ ] = m [ $\theta$ ] = rd	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
$\theta_9^v$	-0,00015521	-0,0000016159	98,9589
$\theta_9^u$	0,000141474	0,0000011774	99,1678
$\theta_{10}^v$	-0,00339576	-0,0033852	0,3110
$\theta_{11}^v$	-0,00616077	-0,0061735	0,2062
$\theta_{12}^v$	-0,00828558	-0,0083235	0,4556
$\theta_{13}^v$	-0,0100024	-0,010003	0,0060
$\theta_{14}^v$	-0,0113896	-0,011515	1,0890
$\theta_{15}^v$	-0,012744	-0,013369	4,6750
$\theta_{15}^u$	0,000311104	0,000015694	94,9554
$\theta_{18}^u$	0,00332445	0,0033087	0,4738
$w_{19}$	0,000528797	0,00052955	0,1422
$w_{20}$	0,000967964	0,00097065	0,2767
$w_{21}$	0,00130814	0,0013121	0,3018
$w_{22}$	0,00157315	0,0015791	0,3768
$w_{23}$	0,00181075	0,0018197	0,4918
$w_{24}$	0,00210133	0,0021124	0,5241
$\theta_{24}^u$	0,00222218	0,0021508	3,2122
$\theta_{27}^u$	0,00555765	0,0055761	0,3309
$w_{28}$	0,000894398	0,00089669	0,2556
$w_{29}$	0,00164802	0,0016525	0,2711

$w_{30}$	0,00223449	0,0022415	0,3127
$w_{31}$	0,00269387	0,0027035	0,3562
$w_{32}$	0,00310621	0,0031196	0,4292
$w_{33}$	0,00360314	0,0036219	0,5180
$\theta_{33}^{\mu}$	0,00355644	0,0036512	2,5953
$\theta_{36}^{\mu}$	0,00636618	0,0063731	0,1086
$w_{37}$	0,00102368	0,0010263	0,2553
$w_{38}$	0,0018896	0,0018949	0,2797
$w_{39}$	0,00256573	0,0025737	0,3097
$w_{40}$	0,00309554	0,0031067	0,3592
$w_{41}$	0,00357278	0,003587	0,3964
$w_{42}$	0,00414843	0,0041647	0,3907
$\theta_{42}^{\mu}$	0,00422656	0,0041838	1,0117
$\theta_{45}^{\mu}$	0,00555765	0,0055761	0,3309
$w_{46}$	0,000894397	0,00089669	0,2556
$w_{47}$	0,00164801	0,0016525	0,2711
$w_{48}$	0,00223448	0,0022415	0,3127
$w_{49}$	0,00269387	0,0027035	0,3562
$w_{50}$	0,00310621	0,0031196	0,4292
$w_{51}$	0,00360314	0,0036219	0,5180
$\theta_{51}^{\mu}$	0,00355644	0,0036512	2,5953
$\theta_{54}^{\mu}$	0,00332445	0,0033087	0,4738
$w_{55}$	0,000528796	0,00052955	0,1422
$w_{56}$	0,000967961	0,00097065	0,2767
$w_{57}$	0,00130814	0,0013121	0,3018
$w_{58}$	0,00157314	0,0015791	0,3768

$w_{59}$	0,00181074	0,0018197	0,4918
$w_{60}$	0,00210133	0,0021124	0,5241
$\theta_{60}^u$	0,00222218	0,0021508	3,2122
$\theta_{63}^v$	0,00015521	0,0000016159	98,9589
$\theta_{63}^u$	0,000141476	0,0000011774	99,1678
$\theta_{64}^v$	0,00339576	0,0033852	0,3110
$\theta_{65}^v$	0,00616075	0,0061735	0,2062
$\theta_{66}^v$	0,00828556	0,0083235	0,4556
$\theta_{67}^v$	0,0100024	0,010003	0,0060
$\theta_{68}^v$	0,0113896	0,011515	1,0890
$\theta_{69}^v$	0,012744	0,013369	4,6750
$\theta_{69}^u$	0,000311105	0,000015694	94,9554

**Tabela (5.28): Esforços Cortantes V nos apoios da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização 6 X 6.**

Cortantes Q nos apoios	Resultados Obtidos [V] = tf/m	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
$V_9$	0,00602366	0,0061506	2,0639
$V_{10}$	-0,00390493	-0,0039383	0,8473
$V_{11}$	-0,00508759	-0,0051691	1,5769
$V_{12}$	-0,00569589	-0,0056419	0,9479
$V_{13}$	-0,00538522	-0,0057461	6,2804
$V_{14}$	-0,00526518	-0,004497	14,5898
$V_{15}$	-0,00638991	-0,0067214	4,9319
$V_{18}$	-0,00430459	-0,0043740	1,5869

V <sub>27</sub>	-0,00589014	-0,0058823	0,1331
V <sub>36</sub>	-0,00627303	-0,0063609	1,3814
V <sub>45</sub>	-0,00589034	-0,0058823	0,1331
V <sub>54</sub>	-0,00430458	-0,0043740	1,5869
V <sub>63</sub>	0,00602359	0,0061506	2,0639
V <sub>64</sub>	-0,00390482	-0,0039383	0,8473
V <sub>65</sub>	-0,00508767	-0,0051691	1,5769
V <sub>66</sub>	-0,00569662	-0,0056419	0,9479
V <sub>67</sub>	-0,00538407	-0,0057461	6,2804
V <sub>68</sub>	-0,00526406	-0,004497	14,5898
V <sub>69</sub>	-0,00639009	-0,0067214	4,9319

**Tabela (5.29): Esforços Cortantes V nos apoios da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização 12 X 12.**

Cortantes Q nos apoios	Resultados Obtidos [V] = tf/m	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
V <sub>9</sub>	0,00602366	0,0068816	12,4672
V <sub>10</sub>	-0,00390493	-0,0019115	51,0491
V <sub>11</sub>	-0,00508759	-0,0025706	49,4731
V <sub>12</sub>	-0,00569589	-0,0028088	50,6872
V <sub>13</sub>	-0,00538522	-0,0027844	48,2955
V <sub>14</sub>	-0,00526518	-0,0025729	51,1337
V <sub>15</sub>	-0,00638991	-0,0057659	9,7656
V <sub>18</sub>	-0,00430459	-0,0021306	50,5040
V <sub>27</sub>	-0,00589014	-0,0029329	50,2066
V <sub>36</sub>	-0,00627303	-0,0031702	49,4630
V <sub>45</sub>	-0,00589034	-0,0029329	50,2066

$V_{54}$	-0,00430458	-0,0021306	50,5040
$V_{63}$	0,00602359	0,0068816	12,4672
$V_{64}$	-0,00390482	-0,0019115	51,0491
$V_{65}$	-0,00508767	-0,0025706	49,4731
$V_{66}$	-0,00569662	-0,0028088	50,6872
$V_{67}$	-0,00538407	-0,0027844	48,2955
$V_{68}$	-0,00526406	-0,0025729	51,1337
$V_{69}$	-0,00639009	-0,0057659	9,7656

**Tabela (5.30): Esforços Cortantes  $V$  nos apoios da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por  $6 \times 6$  elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização  $24 \times 24$ .**

Cortantes $Q$ nos apoios	Resultados Obtidos [V] = tf/m	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	$ \% \text{ Erro} $
$V_9$	0,00602366	0,0070956	15,1071
$V_{10}$	-0,00390493	-0,00095420	75,5642
$V_{11}$	-0,00508759	-0,0012835	74,7719
$V_{12}$	-0,00569589	-0,0014019	75,3875
$V_{13}$	-0,00538522	-0,0013869	74,2462
$V_{14}$	-0,00526518	-0,0012424	76,4035
$V_{15}$	-0,00638991	-0,0052476	17,8768
$V_{18}$	-0,00430459	-0,0010639	75,2845
$V_{27}$	-0,00589014	-0,0014652	75,1245
$V_{36}$	-0,00627303	-0,001584	74,7490
$V_{45}$	-0,00589034	-0,0014652	75,1245
$V_{54}$	-0,00430458	-0,0010639	75,2845
$V_{63}$	0,00602359	0,0070956	15,1071
$V_{64}$	-0,00390482	-0,00095420	75,5642

$V_{65}$	-0,00508767	-0,0012835	74,7719
$V_{66}$	-0,00569662	-0,0014019	75,3875
$V_{67}$	-0,00538407	-0,0013869	74,2462
$V_{68}$	-0,00526406	-0,0012424	76,4035
$V_{69}$	-0,00639009	-0,0052476	17,8768

**Tabela (5.31):** Coeficientes  $C$  das splines cúbicas utilizadas na interpolação da placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por  $6 \times 6$  elementos.

Coeficientes $c$ das splines	Resultados Obtidos
$c_1$	0,0000311231
$c_2$	-0,000273187
$c_3$	-0,000467419
$c_4$	-0,000612989
$c_5$	-0,000772467
$c_6$	-0,000779545
$c_7$	-0,00115476
$c_8$	0,0000354166
$c_9$	$6,63311 \cdot 10^{-7}$
$c_{10}$	$1,78653 \cdot 10^{-6}$
$c_{11}$	$2,1 \cdot 10^{-6}$
$c_{12}$	$-1,32046 \cdot 10^{-6}$
$c_{13}$	$7,86225 \cdot 10^{-6}$
$c_{14}$	-0,0000116838
$c_{15}$	0,0000305538
$c_{16}$	-0,000243241

$c_{17}$	-0,00027703
$c_{18}$	$2,46683 \cdot 10^{-6}$
$c_{19}$	0,000256432
$c_{20}$	0,000461212
$c_{21}$	0,000619108
$c_{22}$	0,000735474
$c_{23}$	0,000847617
$c_{24}$	0,000952741
$c_{25}$	0,00127084
$c_{26}$	-0,000426642
$c_{27}$	$3,75798 \cdot 10^{-7}$
$c_{28}$	0,000428205
$c_{29}$	0,000780016
$c_{30}$	0,00104874
$c_{31}$	0,00125812
$c_{32}$	0,00143625
$c_{33}$	0,00166247
$c_{34}$	0,0019502
$c_{35}$	-0,000498814
$c_{36}$	$2,20317 \cdot 10^{-6}$
$c_{37}$	0,000488469
$c_{38}$	0,000892037
$c_{39}$	0,00120329
$c_{40}$	0,00144119
$c_{41}$	0,00165537
$c_{42}$	0,00189564
$c_{43}$	0,00233763

$C_{44}$	-0,000426641
$C_{45}$	$3,75153 \cdot 10^{-7}$
$C_{46}$	0,000428206
$C_{47}$	0,000780009
$C_{48}$	0,00104873
$C_{49}$	0,00125813
$C_{50}$	0,00143625
$C_{51}$	0,00166246
$C_{52}$	0,0019502
$C_{53}$	-0,00027703
$C_{54}$	$2,46703 \cdot 10^{-6}$
$C_{55}$	0,000256432
$C_{56}$	0,00046121
$C_{57}$	0,000619115
$C_{58}$	0,000735463
$C_{59}$	0,000847606
$C_{60}$	0,000952747
$C_{61}$	0,00127083
$C_{62}$	0,0000354162
$C_{63}$	$6,63295 \cdot 10^{-7}$
$C_{64}$	$1,787 \cdot 10^{-6}$
$C_{65}$	$2,09998 \cdot 10^{-6}$
$C_{66}$	$-1,32476 \cdot 10^{-6}$
$C_{67}$	$7,86819 \cdot 10^{-6}$
$C_{68}$	-0,0000116786
$C_{69}$	0,0000305518
$C_{70}$	-0,000243238

$c_{71}$	0,0000311235
$c_{72}$	-0,000273189
$c_{73}$	-0,000467417
$c_{74}$	-0,000612978
$c_{75}$	-0,000772479
$c_{76}$	-0,000779555
$c_{77}$	-0,00115476

Nesta seção, o campo de deslocamentos apresentados pela placa quadrada simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, submetida a uma carga uniformemente distribuída, foi aproximado através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a superfície quadrada ocupada pelas extensões da placa foi discretizado por 6 X 6 elementos.

Conforme a Tabela (5.25), a qual apresenta uma comparação numérica dos resultados obtidos para os deslocamentos da placa e suas rotações nos apoios com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização de 6 X 6 elementos, observa-se a obtenção de resultados comparados bastante precisos para os deslocamentos, ou seja, através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas obteve-se, em relação à solução do ANSYS, baixíssimas porcentagens de erro. Para as rotações dos apoios, apesar da ótima precisão apresentada pela maioria dos nós, em relação à solução obtida através do ANSYS, os resultados comparados obtidos para as rotações de canto e para as rotações no bordo livre da placa apresentaram grande defasagem.

Conforme a Tabela (5.26), a qual apresenta uma comparação numérica dos resultados obtidos para os deslocamentos da placa e suas rotações nos apoios com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização de 12 X 12 elementos, e conforme a Tabela (5.27), a qual apresenta uma comparação numérica dos resultados obtidos para os deslocamentos da placa e suas rotações nos apoios com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização de 24 X 24 elementos, observa-se a obtenção de resultados similares aos expostos e brevemente comentados no parágrafo anterior.

Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) apresentam uma solução analítica para o deslocamento central da borda livre da placa que está sendo estudada nesta seção. Na tabela (5.32),

tem-se uma comparação numérica desse resultado analítico com o obtido através da interpolação bidimensional por splines cúbicas.

**Tabela (5.32): Deslocamento central  $w$  da borda livre da placa simplesmente apoiada em três de suas bordas e livre na quarta borda, discretizada por 6 X 6 elementos, comparado numericamente com a solução analítica dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).**

Deslocamento $w$ no centro do bordo livre da placa (no nó 42)	Resultado Analítico $w$ [m]	Resultado Obtido $w$ [m]	$ \% \text{ Erro} $
$w_{42}$	0,004172813	0,00414843	0,5843

Conforme a Tabela (5.28), a qual apresenta uma comparação numérica dos resultados obtidos para os esforços cortantes nos apoios da placa com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização de 6 X 6 elementos, e conforme a Tabela (5.29), a qual apresenta uma comparação numérica dos resultados obtidos para os esforços cortantes nos apoios da placa com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização de 12 X 12 elementos, e, ainda, conforme a Tabela (5.30), a qual apresenta uma comparação numérica dos resultados obtidos para os esforços cortantes nos apoios da placa com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização de 24 X 24 elementos, observa-se a não possibilidade de comparação entre os resultados obtidos através do programa ANSYS e os obtidos através de uma interpolação cúbica bidimensional por splines.

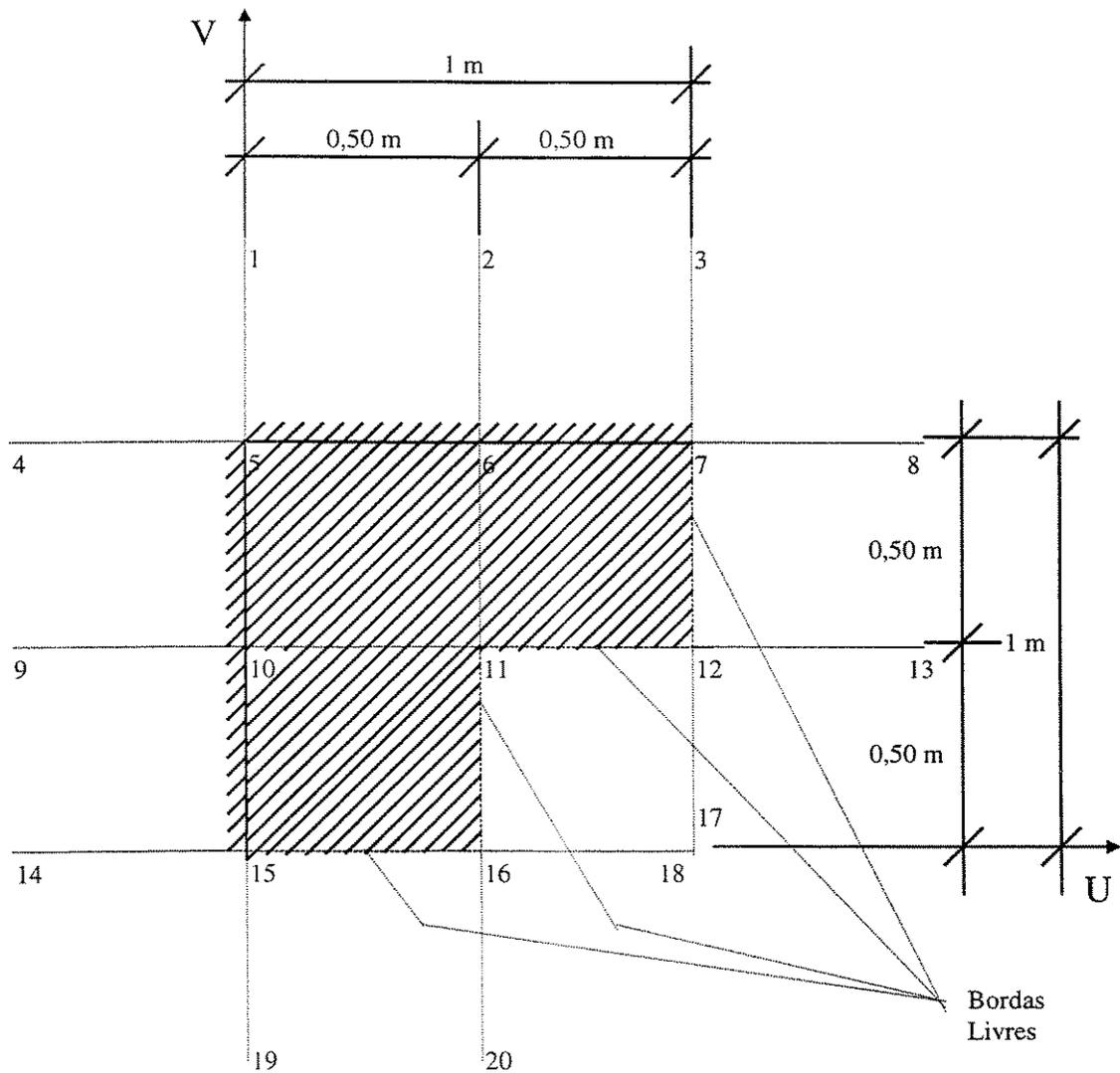
Através da Tabela (5.31), são apresentados os coeficientes das splines cúbicas utilizadas na interpolação bidimensional da placa quadrada simplesmente apoiada em três de seus bordos e livre no quarto bordo, discretizada por 6 X 6 elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. Nessa tabela, os coeficientes das B-splines acham-se vinculados a cada um dos nós da discretização, inclusive aos auxiliares.

### ***5.6.8 ESTRUTURA EM FORMA DE PLACA COM REENTRÂNCIA, SUBMETIDA A UMA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDA***

Conforme mostrado na Figura (5.49) e segundo a representação em perspectiva apresentada na Figura (5.50), nesta seção será analisado o comportamento de uma placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.

O estudo do comportamento dessa placa envolverá uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, sendo que estas polinomiais por partes serão responsáveis pela aproximação dos deslocamentos, das rotações, dos momentos fletores e dos esforços cortantes apresentados pela estrutura exposta nas Figuras (5.49) e (5.50).

Segundo a Figura (5.49), os nós auxiliares utilizados na discretização da estrutura são: 1, 2, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 17, 18, 19, e 20.



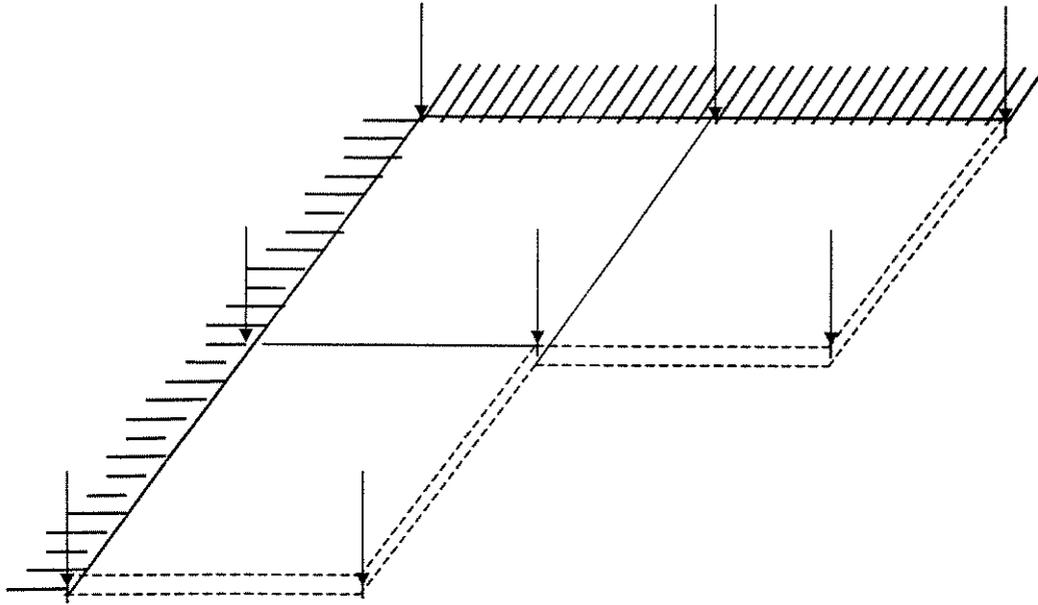
$$E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$$

$$t = 0,005 \text{ m}$$

$$\nu = 0,3$$

$$q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$$

**Figura (5.49):** Placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.



**Figura (5.50): Perspectiva da placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída.**

Como condições geométricas da estrutura, tem-se:

-) comprimento dos dois bordos engastados:  $L_u = L_v = 1 \text{ m}$  ;

-) comprimento dos quatro bordos livres:  $L = 0,50 \text{ m}$  ; e

-) espessura:  $t = 0,005 \text{ m}$  .

Como característica do material da estrutura, tem-se:

-) módulo de elasticidade:  $E = 21000000 \text{ tf} / \text{m}^2$  ; e

-) coeficiente de Poisson:  $\nu = 0,3$  .

A estrutura apresenta-se em termos de vinculação como:

-)engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais.

O carregamento sob o qual a estrutura está submetida é:

-)  $q_0 = 0,078 \text{ tf} / \text{m}^2$  (carga uniformemente distribuída).

Assim como o estudo de estruturas em forma de placa apresentando furo em sua geometria, a análise de placas com reentrâncias, através da metodologia exposta com o emprego de B-splines e de nós auxiliares externos à discretização, exige um tratamento especial, até aqui não abordado, no tocante à sobreposição desses nós auxiliares que ocorre junto a furos e a reentrâncias de tais estruturas.

Esse tratamento especial aplica-se em termos da montagem da matriz de rigidez  $[K_{lm}^S]$  e da parcela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_l du dv$  do vetor de carga,  $\{f_l^S\}$ , do sistema interpolado por spline, e, também, em termos da montagem da matriz de transformação  $[K_c]$ , a qual contém o valor das ordenadas e das primeiras derivadas das B-splines, respectivamente, nos nós e nos nós de extremidade da discretização.

Para a discretização adotada onde ocorre a sobreposição dos nós auxiliares “17” e “18”, a montagem da matriz  $[K_{lm}^S]$  se dá de forma idêntica à das outras placas estudadas, ou seja, a metodologia envolvendo a sobreposição de áreas se repete normalmente com uma única ressalva: todas as contribuições para cada uma das colunas da linha “17” dessa matriz serão as mesmas, idênticamente em valor absoluto e sinal, destinadas à cada uma das colunas de sua linha “18” (é evidente que, em função da simetria da matriz, as colunas “17” e “18” também possuirão os mesmos valores).

Em termos da parcela constituída pela  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_l du dv$ , do vetor de carga,  $\{f_l^S\}$ , do sistema interpolado por spline, o procedimento até então aplicado se repete por completo, sendo que a linha “17” desse vetor montado a partir de  $\int_0^{L_v} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_l du dv$  é idêntica, em valor absoluto e sinal, à sua linha “18”.

Para a montagem da matriz  $[K_c]$ , a atenção especial tem que ser dispensada no tocante à constituição dos deslocamentos e rotações que envolvam a participação dos nós auxiliares sobrepostos.

Para a discretização adotada pode-se assumir que todas as ponderações, responsáveis pelas constituições dos deslocamentos e rotações na matriz  $[K_c]$ , envolvendo os nós auxiliares sobrepostos “17” e “18” serão feitas tomando-se *uma spline vertical posicionada sobre o nó “17” e uma spline*

*horizontal posicionada sobre o nó “18”*. Isso se traduz, efetivamente, em termos da montagem de

$[K_c]$  como:

-) ponderações necessárias para a constituição do deslocamento do nó “11”:

$$w_{11} = c_5 N_5(u)|_{11} N_5(v)|_{11} + c_6 N_6(u)|_{11} N_6(v)|_{11} + c_7 N_7(u)|_{11} N_7(v)|_{11} + \\ + c_{10} N_{10}(u)|_{11} N_{10}(v)|_{11} + c_{11} N_{11}(u)|_{11} N_{11}(v)|_{11} + c_{12} N_{12}(u)|_{11} N_{12}(v)|_{11} + \\ + c_{15} N_{15}(u)|_{11} N_{15}(v)|_{11} + c_{16} N_{16}(u)|_{11} N_{16}(v)|_{11} + c_{17} N_{17}(v)|_{11} + c_{18} N_{18}(u)|_{11} ;$$

-) ponderações necessárias para a constituição do deslocamento do nó “12”:

$$w_{12} = c_6 N_6(u)|_{12} N_6(v)|_{12} + c_7 N_7(u)|_{12} N_7(v)|_{12} + c_8 N_8(u)|_{12} N_8(v)|_{12} + \\ + c_{11} N_{11}(u)|_{12} N_{11}(v)|_{12} + c_{12} N_{12}(u)|_{12} N_{12}(v)|_{12} + c_{13} N_{13}(u)|_{12} N_{13}(v)|_{12} + \\ + c_{16} N_{16}(u)|_{12} N_{16}(v)|_{12} + c_{17} N_{17}(v)|_{12} + c_{18} N_{18}(u)|_{12} ;$$

-) ponderações necessárias para a constituição da rotação do nó “12” na direção “v” (o nó auxiliar “18” não participa):

$$\theta_{12}^v = c_6 N_6(u)|_{12} \frac{dN_6(v)}{dv} \Big|_{12} + c_7 N_7(u)|_{12} \frac{dN_7(v)}{dv} \Big|_{12} + c_8 N_8(u)|_{12} \frac{dN_8(v)}{dv} \Big|_{12} + \\ + c_{11} N_{11}(u)|_{12} \frac{dN_{11}(v)}{dv} \Big|_{12} + c_{12} N_{12}(u)|_{12} \frac{dN_{12}(v)}{dv} \Big|_{12} + c_{13} N_{13}(u)|_{12} \frac{dN_{13}(v)}{dv} \Big|_{12} + \\ + c_{16} N_{16}(u)|_{12} \frac{dN_{16}(v)}{dv} \Big|_{12} + c_{17} \frac{dN_{17}(v)}{dv} \Big|_{12} ;$$

-) ponderações necessárias para a constituição da rotação do nó “12” na direção “u” (o nó auxiliar “17” não participa):

$$\begin{aligned} \theta_{12}^u = & c_6 N_6(v) \Big|_{12} \frac{dN_6(u)}{du} \Big|_{12} + c_7 N_7(v) \Big|_{12} \frac{dN_7(u)}{du} \Big|_{12} + c_8 N_8(v) \Big|_{12} \frac{dN_8(u)}{du} \Big|_{12} + \\ & + c_{11} N_{11}(v) \Big|_{12} \frac{dN_{11}(u)}{du} \Big|_{12} + c_{12} N_{12}(v) \Big|_{12} \frac{dN_{12}(u)}{du} \Big|_{12} + c_{13} N_{13}(v) \Big|_{12} \frac{dN_{13}(u)}{du} \Big|_{12} + \\ & + c_{16} N_{16}(v) \Big|_{12} \frac{dN_{16}(u)}{du} \Big|_{12} + c_{18} \frac{dN_{18}(u)}{du} \Big|_{12} ; \end{aligned}$$

-) ponderações necessárias para a constituição do deslocamento do nó “16”:

$$\begin{aligned} w_{16} = & c_{10} N_{10}(u) \Big|_{16} N_{10}(v) \Big|_{16} + c_{11} N_{11}(u) \Big|_{16} N_{11}(v) \Big|_{16} + c_{12} N_{12}(u) \Big|_{16} N_{12}(v) \Big|_{16} + \\ & + c_{15} N_{15}(u) \Big|_{16} N_{15}(v) \Big|_{16} + c_{16} N_{16}(u) \Big|_{16} N_{16}(v) \Big|_{16} + c_{17} N_{17}(v) \Big|_{16} + \\ & + c_{18} N_{18}(u) \Big|_{16} + c_{19} N_{19}(u) \Big|_{16} N_{19}(v) \Big|_{16} + c_{20} N_{20}(u) \Big|_{16} N_{20}(v) \Big|_{16} ; \end{aligned}$$

-) ponderações necessárias para a constituição da rotação do nó “16” na direção “v” (o nó auxiliar “18” não participa):

$$\begin{aligned} \theta_{16}^v = & c_{10} N_{10}(u) \Big|_{16} \frac{dN_{10}(v)}{dv} \Big|_{16} + c_{11} N_{11}(u) \Big|_{16} \frac{dN_{11}(v)}{dv} \Big|_{16} + c_{12} N_{12}(u) \Big|_{16} \frac{dN_{12}(v)}{dv} \Big|_{16} + \\ & + c_{15} N_{15}(u) \Big|_{16} \frac{dN_{15}(v)}{dv} \Big|_{16} + c_{16} N_{16}(u) \Big|_{16} \frac{dN_{16}(v)}{dv} \Big|_{16} + c_{17} \frac{dN_{17}(v)}{dv} \Big|_{16} + \\ & + c_{19} N_{19}(u) \Big|_{16} \frac{dN_{19}(v)}{dv} \Big|_{16} + c_{20} N_{20}(u) \Big|_{16} \frac{dN_{20}(v)}{dv} \Big|_{16} ; \end{aligned}$$

-) ponderações necessárias para a constituição da rotação do nó “16” na direção “u” (o nó auxiliar “17” não participa):

$$\begin{aligned} \theta_{16}^u = & c_{10} N_{10}(v) \Big|_{16} \frac{dN_{10}(u)}{du} \Big|_{16} + c_{11} N_{11}(v) \Big|_{16} \frac{dN_{11}(u)}{du} \Big|_{16} + c_{12} N_{12}(v) \Big|_{16} \frac{dN_{12}(u)}{du} \Big|_{16} + \\ & + c_{15} N_{15}(v) \Big|_{16} \frac{dN_{15}(u)}{du} \Big|_{16} + c_{16} N_{16}(v) \Big|_{16} \frac{dN_{16}(u)}{du} \Big|_{16} + c_{18} \frac{dN_{18}(u)}{du} \Big|_{16} + \\ & + c_{19} N_{19}(v) \Big|_{16} \frac{dN_{19}(u)}{du} \Big|_{16} + c_{20} N_{20}(v) \Big|_{16} \frac{dN_{20}(u)}{du} \Big|_{16} . \end{aligned}$$

As demais ponderações, responsáveis pelas constituições dos deslocamentos e rotações que compõem a matriz de transformação  $[K_c]$ , que não envolvem a participação dos nós auxiliares sobrepostos devem ocorrer nos mesmos padrões segundo as análises de placas já apresentadas.

Em discretizações bidimensionais figurando a sobreposição de nós auxiliares, por exemplo em placas com furos ou com reentrâncias, uma vez definida a matriz de transformação  $[K_c]$ , a matriz

$[K_{im}^S]$  e a parcela  $\int_0^{L_y} \int_0^{L_u} p_z(u,v) N_i du dv$  do vetor de carga,  $\{f_i^S\}$ , do sistema interpolado por spline, segue-se o mesmo procedimento com base na álgebra das matrizes, conforme apresentado no capítulo 4, para a obtenção da matriz  $[K_{físico}]$  e do vetor  $\{f_{físico}\}$ .

Segue-se com a apresentação do conjunto de resultados obtidos:

**Tabela (5.33): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo também três elementos.**

Deslocamentos $w$ e Rotações $\theta$ referentes a cada nó	Resultados Obtidos $[w] = m$ $[\theta] = rd$	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	$ \% \text{ Erro} $
$w_{11}$	0,00213891	0,0015535	27,3695
$w_{12}$	0,00351263	0,0021887	37,6906
$\theta_{12}^v$	-0,00410766	-0,0055336	25,7688
$\theta_{12}^u$	-0,0012116	-0,00069723	42,4538
$w_{16}$	0,00351263	0,0021887	37,6906
$\theta_{16}^v$	0,0012116	0,00069723	42,4538
$\theta_{16}^u$	0,00410766	0,0055336	25,7688

**Tabela (5.34): Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa com reentrância engastada nas ssas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo doze elementos.**

Deslocamentos $w$ e Rotações $\theta$ referentes a cada nó	Resultados Obtidos $[w] = m$ $[\theta] = rd$	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	$ \% \text{ Erro} $
$w_{11}$	0,00213891	0,0014828	30,6750
$w_{12}$	0,00351263	0,0022297	36,5233
$\theta_{12}^v$	-0,00410766	-0,0059023	30,4058
$\theta_{12}^u$	-0,0012116	-0,00032674	73,0324
$w_{16}$	0,00351263	0,0022297	36,5233

$\theta_{16}^v$	0,0012116	0,00032674	73,0324
$\theta_{16}^u$	0,00410766	0,0059023	30,4058

**Tabela (5.35):** Deslocamentos  $w$  e Rotações  $\theta$  da placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo quarenta e oito elementos.

Deslocamentos $w$ e Rotações $\theta$ referentes a cada nó	Resultados Obtidos [ $w$ ] = m [ $\theta$ ] = rd	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
$w_{11}$	0,00213891	0,0014666	31,4324
$w_{12}$	0,00351263	0,0022448	36,0935
$\theta_{12}^v$	-0,00410766	-0,0058525	29,8136
$\theta_{12}^u$	-0,0012116	-0,00053688	55,6883
$w_{16}$	0,00351263	0,0022448	36,0935
$\theta_{16}^v$	0,0012116	0,00053688	55,6883
$\theta_{16}^u$	0,00410766	0,0058525	29,8136

**Tabela (5.36):** Esforços Cortantes  $V$  e Momentos Fletores  $M$  da placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo também três elementos.

Cortantes $V$ e Momentos $M$ nos apoios	Resultados Obtidos [ $V$ ] = tf / m [ $M$ ] = tf.m / m	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
$V_3$	-0,00181591	-0,0039780	54,3512
$M_3^v$	0,00023005	0,00053971	57,3753

$M_5^u$	-0,00023005	-0,00053971	57,3753
$V_6$	-0,0175083	-0,017243	1,5153
$M_6^v$	0,00373381	0,0033746	9,6205
$V_7$	-0,0100628	-0,010018	0,4452
$M_7^v$	0,00210859	0,0021032	0,2556
$M_7^u$	0,00122144	0,00070905	41,9497
$V_{10}$	-0,0175083	-0,017243	1,5153
$M_{10}^u$	-0,00373381	-0,0033746	9,6205
$V_{15}$	-0,0100628	-0,010018	0,4452
$M_{15}^v$	-0,00122144	-0,00070905	41,9497
$M_{15}^u$	-0,00210859	-0,0021032	0,2556

**Tabela (5.37): Esforços Cortantes V e Momentos Fletores M da placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo doze elementos.**

Cortantes V e Momentos M nos apoios	Resultados Obtidos [Q]= tf / m [M]= tf.m / m	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
$V_5$	-0,00181591	-0,00025076	86,1909
$M_5^v$	0,00023005	0,000063264	72,4999
$M_5^u$	-0,00023005	-0,000063264	72,4999
$V_6$	-0,0175083	-0,0091813	47,5603
$M_6^v$	0,00373381	0,0016931	54,6549
$V_7$	-0,0100628	-0,0047309	52,9862
$M_7^v$	0,00210859	0,0010961	48,0174
$M_7^u$	0,00122144	0,00024666	79,8058

$V_{10}$	-0,0175083	-0,0091813	47,5603
$M_{10}^u$	-0,00373381	-0,0016931	54,6549
$V_{15}$	-0,0100628	-0,0047309	52,9862
$M_{15}^v$	-0,00122144	-0,00024666	79,8058
$M_{15}^u$	-0,00210859	-0,0010961	48,0174

**Tabela (5.38): Esforços Cortantes V e Momentos Fletores M da placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, discretizada por três elementos, comparados numericamente com a solução obtida através do Programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo quarenta e oito elementos.**

Cortantes V e Momentos M nos apoios	Resultados Obtidos [V]= tf / m [M]= tf.m/m	Resultados Obtidos com o Programa ANSYS	% Erro
$V_5$	-0,00181591	-0,00020537	88,6905
$M_5^v$	0,00023005	0,0000043974	98,0885
$M_5^u$	-0,00023005	-0,0000043974	98,0885
$V_6$	-0,0175083	-0,0046580	73,3955
$M_6^v$	0,00373381	0,00084973	77,2423
$V_7$	-0,0100628	-0,0015521	84,5759
$M_7^v$	0,00210859	0,00052651	75,0302
$M_7^u$	0,00122144	0,00013454	88,9851
$V_{10}$	-0,0175083	-0,0046580	73,3955
$M_{10}^u$	-0,00373381	-0,00084973	77,2423
$V_{15}$	-0,0100628	-0,0015521	84,5759
$M_{15}^v$	-0,00122144	-0,00013454	88,9851
$M_{15}^u$	-0,00210859	-0,00052651	75,0302

**Tabela (5.39): Coeficientes  $C$  das splines cúbicas utilizadas na interpolação da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos.**

Coeficientes $c$ das splines	Resultados Obtidos
$c_1$	-0,000231836
$c_2$	0,000927346
$c_3$	0,00129232
$c_4$	-0,000231836
$c_5$	0,000179849
$c_6$	-0,000487561
$c_7$	-0,00061454
$c_8$	-0,000102596
$c_9$	0,000927346
$c_{10}$	-0,000487561
$c_{11}$	0,0010229
$c_{12}$	0,00116584
$c_{13}$	0,000410382
$c_{14}$	0,00129232
$c_{15}$	-0,00061454
$c_{16}$	0,00116584
$c_{17}$	0,0016849
$c_{18}$	0,0016849
$c_{19}$	-0,000102596
$c_{20}$	0,000410382

Nesta seção, através de uma discretização envolvendo um número muito pequeno de elementos, somente três, foi feita uma aproximação do campo de deslocamentos apresentados pela placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, submetida a uma carga uniformemente distribuída. Essa aproximação desenvolveu-se através de uma interpolação bidimensional por splines cúbicas, as quais são polinomiais por partes de grau 3, sendo que o domínio completo abrangendo a superfície compreendida pelas extensões da placa, como já mencionado, foi discretizado por três elementos.

Apesar das comparações feitas através das Tabelas (5.33), (5.34) e (5.35), as quais apresentam uma comparação numérica dos resultados obtidos para os deslocamentos e rotações nas bordas livres da placa com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo, respectivamente, três, doze e quarenta e oito elementos, e apesar das comparações contidas nas Tabelas (5.36), (5.37) e (5.38), as quais apresentam uma comparação numérica dos resultados obtidos para os esforços cortantes e momentos fletores nos apoios da placa com os obtidos através do programa ANSYS, por meio de uma discretização envolvendo, respectivamente, três, doze e quarenta e oito elementos; o objetivo desse estudo envolvendo uma placa com reentrância engastada nas suas duas maiores bordas e livre nas demais, submetida a uma carga uniformemente distribuída, foi o de apresentar todos os subsídios necessários à composição de uma metodologia, que utiliza splines cúbicas bidimensionais, capaz de aproximar o campo de deslocamentos de placas com reentrâncias e com furos.

Através da Tabela (5.39), são apresentados os coeficientes das splines cúbicas utilizadas na interpolação bidimensional da placa com reentrância engastada nos seus dois maiores bordos e livre nos demais, discretizada por três elementos, submetida a uma carga uniformemente distribuída. Nessa tabela, os coeficientes das B-splines acham-se vinculados a cada um dos nós da discretização, inclusive aos auxiliares.

É interessante acrescentar que no estudo feito envolvendo estruturas em forma de placas com reentrâncias, o qual pode ser estendido e aplicado a placas com furos, foram mantidos e utilizados todos os conceitos básicos da teoria de splines apresentada no capítulo 3, assim como a mesma metodologia bidimensional que veio sendo empregada, a partir do estudo unidimensional desenvolvido no capítulo 4, na análise das outras estruturas em forma de placa desse capítulo 5.

Ressalta-se que a abordagem de placas com reentrâncias e com furos requer um procedimento específico, e este foi desenvolvido e apresentado nesta seção, em termos da sobreposição de nós auxiliares.

## ***6 COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES***

No presente trabalho apresentou-se através de B-Splines a aproximação da solução das equações diferenciais que governam deslocamentos e esforços generalizados em elementos estruturais de barras, vigas e placas finas. A formulação de elementos para placas finas ortotrópicas também é apresentada.

O sistema interpolado por B-splines, o qual foi responsável pela aproximação do campo de deslocamentos das estruturas analisadas, garantiu a geração de resultados a partir do conceito de robustez e suavidade, proporcionado pela continuidade  $C_1$  apresentada por essas funções cúbicas.

De posse dos resultados expostos no capítulo 4 e no capítulo 5, os quais tratam respectivamente de estruturas unidimensionais, em forma de barras e vigas, e estruturas bidimensionais, em forma de placas isotrópicas elásticas finas, pode-se concluir que, para aproximação do campo de deslocamentos de tais estruturas, o emprego de B-splines como funções de forma, no método dos elementos finitos, apresentou elevada precisão e uma rápida convergência não só para os deslocamentos estruturais, os quais foram diretamente aproximados pela formulação utilizada, como também para as grandezas derivadas destes, como as rotações e os momentos fletores.

Na formulação utilizada, o emprego de nós auxiliares, a inclusão do quarto trecho polinomial de uma spline cúbica nos elementos de extremidade veio a garantir a completitude do espaço de aproximação. Estes nós auxiliares proporcionaram mais um grau de liberdade aos nós posicionados junto ao contorno da discretização. Este grau de liberdade adicional permite através de uma operação matricial a transformação das incógnitas do problema, de coeficientes das B-Splines para grandezas físicas, viabilizando a inclusão das condições de contorno físicas na formulação. Este procedimento é um avanço em relação às formulações reportadas na literatura, onde um “ajuste” nas B-Splines próximas ao contorno é realizado.

Além de apresentar bastante eficiência dentro da formulação empregada, a utilização de uma única matriz de rigidez gerada a partir do sistema interpolado por splines cúbicas, independente das condições de vínculos sob as quais foi submetida a estrutura analisada em forma de viga ou de

placa, demonstrou-se bastante prática e simples, principalmente quando se pensa em termos de uma sistematização de todos os procedimentos desenvolvidos.

Juntamente com um estudo, a partir de um sistema interpolado por splines cúbicas, envolvendo a aproximação do campo de deslocamentos de placas isotrópicas elásticas finas com geometria retangular e submetidas a diferentes condições de vínculos e carregamentos, apresentou-se um procedimento responsável pela aproximação do campo de deslocamentos de placas com reentrâncias. Essa análise de placas com reentrâncias, onde ocorre a sobreposição de nós auxiliares sobre os quais foram posicionados os topos de splines cúbicas, pode ser estendida a placas com furos possibilitando, dessa forma, a abordagem de placas com geometria irregular.

Para que se possa realmente abordar placas com qualquer tipo de geometria, onde existam recortes irregulares, por exemplo, há a necessidade do desenvolvimento do elemento triangular por splines.

Uma forma de aproximação da geometria triangular pode ser feita através de um mapeamento capaz de “levar” as regiões de um triângulo às regiões de um retângulo. E nesse retângulo, o procedimento exposto no presente trabalho pode ser empregado na resolução dessa “placa retangular aproximada”.

Em termos de sugestões para uma possível continuidade do presente trabalho, pode-se ressaltar, além do desenvolvimento do elemento triangular por spline e da programação dos procedimentos aqui expostos, a introdução de massa ao elemento para análise dinâmica, o que viabilizaria determinação das grandezas modais das estruturas.

**UNICAMP**  
**BIBLIOTECA CENTRAL**  
**SEÇÃO CIRCULANTE**

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APPA, K. Finite-surface spline. Journal of Aircraft, v. 26, n. 5, p. 495-496, May 1989.
- BATHE, Klaus-Jürgen. Finite element procedures. New Jersey: Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, 1996. 1037p.
- BELLUZZI, O. Ciencia de la construccion. Vol III, Madrid: Aguilar, 1970. 691p.
- BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1997. 532p.
- CHEUNG, M. S., LI, W. Analysis of haunched, continuous bridges by spline finite strips. Computers and structures, v. 36, n. 2, p. 297-300, 1990.
- CHEUNG, Y. K., KONG, J. Linear elastic stability analysis of shear-deformable plates using a modified spline finite strip method. Computers and Structures, v. 47, n. 2, p. 189-192, Apr. 17, 1993a.
- CHEUNG, Y. K., KONG, J. Approximate three-dimensional analysis of rectangular thick laminated plates: bending, vibration and buckling. Computers and Structures, v. 47, n. 2, p. 193-199, Apr. 17, 1993b.
- COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E. Concepts and applications of finite element analysis. 3. ed. Singapore: John Wiley & Sons, INC. 1989. 630p.
- DAWE, D. J., WANG, S. Spline finite strip postbuckling analysis of thin rectangular laminated plates. Engineering Systems Design and Analysis, PD-Vol.73, v. 1, p. 43-53, ASME 1996.
- DIEGUES, J. P. P. Métodos numéricos computacionais para a engenharia. Vol. I. Rio de Janeiro: Editora Interciência Ltda, 1992. 301 p.

- DIEGUES, J. P. P. Métodos numéricos computacionais para a engenharia. Vol. II. Rio de Janeiro: Âmbito Cultural Edições Ltda, 1994. 348 p.
- EDWARDS Jr., C. H., PENNEY, D. E. Equações diferenciais elementares com problemas de contorno. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1993. 643p.
- FADDEEVA, V. N. Computational methods of linear algebra. New York: Dower Publications, INC, 1959. 254p.
- FAN, S. C., LUAH, M. H. New spline finite element for plate bending. Journal of Engineering Mechanics, v. 118, n. 6, p. 1065-1082, Jun. 1992.
- FAN, S. C., LUAH, M. H. A nine-node spline element for free vibration analysis of general plates. Journal of sound and vibration, v. 165, n. 1, p. 85-100, Jul. 22 1993.
- FEODOSIEV, V. I. Resistencia de materiales. 3. ed. Moscu: MIR, 1988. 583p.
- FLÜGGE, Wilhelm. Tensor analysis and continuum mechanics. New York: Springer-Verlag, 1972. 207p.
- GANAPATHI, M., PATEL, B. P., SARAVANAN, J., TOURATIER, M. Shear flexible curved spline beam element for static analysis. Finite Elements in Analysis and Design, 32, p. 181-202, 1999.
- GARDNER, L. R. T., GARDNER, G. A., DAG, I. Hermite infinite elements and graded quadratic b-spline finite elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 36, n. 19, p. 3317-3332, Oct. 15 1993.
- GERE, J. M., WEAVER, JR. W. Análise de estruturas reticuladas. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1981. 443p.
- GRIGOLYUK, E. I., TOLKACHEV, V. M. Contact problems in the theory of plates and shells. Moscow: MIR, 1987. 423p.

- GRIGORENKO, Y., BERENOV, M. N. Solution of problems of the statics of shallow shells and plates with hinged and rigidly-fastened opposing edges. Soviet Applied Mechanics (English Translation of Prikladnaya Mekhanika), v. 26, n. 1, p. 25-32, Jul. 1990.
- GUPTA, A., KIUSALAAS, J., SARAPH, M. Cubic b-spline for finite element analysis of axisymmetric shells. Computers and Structures, v. 38, n. 4, p. 463-468, 1991.
- GUTKOWSKI, R. M., CHEN, C. J., PUCKETT, J. A. Plate bending analysis by unequally spaced splines. Thin-Walled Structures, v. 11, n. 5, p. 409-430, 1991.
- IARVE, E. V. Spline variational three dimensional stress analysis of laminated composite plates with open holes. International Journal of Solids and Structures, v. 33, n. 14, p. 2095-2118, Jun. 1996.
- KAGAN, P., FISCHER, A., BAR-YOSEPH, P. Z. New b-spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 41, n. 3, p. 435-458, Feb. 15 1998.
- KALMANOK, A. S. Manual para calculo de placas. Montevideo: Editora Inter Ciencia, 1961. 285p.
- KREYSZIG, E. Advanced engineering mathematics. 17. ed. Singapore: John Wiley & Sons, INC. 1993. 1399p.
- LANGENDONCK, Telemaco van Curso de mecânica das estruturas - tensões. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1956. 286p.
- LANGENDONCK, Telemaco van. Charneiras plásticas em lajes de edifícios. São Paulo: Associação Brasileira de Cimento Portland, 1966. 81p.
- LEIPHOLZ, Horst. Einführung in die elastizitätstheorie. Karlsruhe: G. Braun, 1968. 312p.

- LEUNG, A. Y. T., AU, F. T. K. Spline finite elements for beam and plate. Computers and Structures, v. 37, n. 5, p. 717-729, 1990.
- LIANG, Q. Applications of B-spline interpolation to finite element analysis. Proceedings of the 1989 ASME International Computers in Engineering Conference and Exposition – New York – USA, 1989, p. 297-301.
- LODHA, S. K., SHEEHAN, B., PANG, A. T., WITTENBRINK, C. M. Visualizing Geometric Uncertainty of surface interpolants. Proceedings of the 1996 Graphics Interface Conference – Toronto – Canada, 1996, p. 238-245.
- LOVE, A. E. H. A treatise on the mathematical theory of elasticity. 4. ed. New York: Dover Publications, 1944. 643p.
- LUAH, M. H., FAN, S. C. General free vibration analysis of shells of revolution using the spline finite element method. Computers and Structures, v. 33, n. 5, p. 1153-1162, 1989.
- LUAH, M. H., FAN, S. C. Analysis of complicated plates by a nine-node spline plate element. Computers and Structures, v. 45, n. 2, p. 243-252, Oct. 3 1992.
- LUENBERGER, David G. Optimization by vector space methods. New York: John Wiley & Sons, INC. 1969. 326p.
- LUO, Z., WANG, R. Rational shape functions for  $c^1$ - interpolation on quadrilaterals. Computers & Mathematics with Applications, v. 32, n. 9, p. 55-66, Nov. 1996.
- MADASAMY, C. M., KALYANARAMAN, V. Analysis of plated structures with rectangular cutouts and internal supports using the spline finite strip method. Computers and Structures, v. 52, n. 2, p. 277-286, Jul. 17 1994.

- MAEKAWA, T., CHALFANT, J. Design and tessellation of b-spline developable surfaces. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, v. 120, n. 3, p. 453-461, Sep. 1998.
- MARSDEN, J. E., HUGHES, T. J. R. Mathematical foundations of elasticity. New Jersey: Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, 1983. 556p.
- McGUIRE, Willian. Steel structures. New Jersey: Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, 1968. 1112p.
- MIROLIUBOV, I. et al. Problemas de resistência dos materiais. 2. ed. Moscou: MIR, 1983. 502p.
- MIZUSAWA, T. Application of the spline element method to analyze vibration of annular sector plates. Journal of sound and vibration, v. 149, n. 3, p. 461-470, Sep. 22 1991.
- MIZUSAWA, T. Application of the spline element method to analyse the bending of skew plates. Computers and Structures, v. 53, n. 2, p. 439-448, Oct. 17 1994.
- MOREIRA, D. F. Análise matricial das estruturas. Rio de Janeiro: Editora da Universidade de São Paulo, 1977. 390p.
- NÜRNBERGER, Günther. Approximation by spline functions. New York: Springer-Verlag, 1989. 243p.
- PATEL, B. P., GANAPATHI, M., SARAVANAN, J. Shear flexible field-consistent curved spline beam element for vibration analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, p. 387-407, 1999.
- PENG-CHENG, S., HONG-BO, K. Multivariable spline element analysis for plate bending problems. Computers and Structures, v. 40, n. 6, p. 1343-1349, 1991.

- PENG-CHENG, S., JIAN-GUO, W. A semianalytical method for static analysis of shallow shells. Computers and Structures, v. 31, n. 5, p. 825-831, 1989.
- PENG-CHENG, S., PEIXIANG, H. Bending analysis of rectangular moderately thick plates using spline finite element method. Computers and Structures, v. 54, n. 6, p. 1023-1029, Mar. 17 1995.
- PERSIANO, R. M. Bases da modelagem geométrica. Campinas: Biblioteca do IMECC-UNICAMP, 1996. 141p.
- PISKUNOV, N. Cálculo diferencial e integral. Moscou: MIR, 1969 tomo II. 448p.
- PISSARENKO, G. S., IAKOVLEV, A. P., MATVEIEV, V. V. Prontuário de resistência de materiais. Moscou: MIR, 1985. 682p.
- POPOV, E. P. Introdução à mecânica dos sólidos. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1978. 534p.
- QIN, H., TERZOPOULOS, D. Dynamic manipulation of triangular b-splines. Symposium on Solid Modeling and Applications - Proceedings 1995. ACM, New York, p. 351-360, 1995.
- SCHOENBERG, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quarterly of Applied Mathematics, Volume IV, n. 1, April 1946.
- SCHOENBERG, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. Quarterly of Applied Mathematics, Volume IV, n. 2, July 1946.
- SCHRAMM, U., PILKEY, W. D. Structural shape optimization for the torsion problem using direct integration and B-splines. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 107, p. 251-268, 1993.

- SCHULTZ, M. H. Spline Analysis. New Jersey: Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, 1973. 156p.
- SZILARD, Rudolph. Theory and analysis of plates: classical and numerical methods. New Jersey: Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs, 1974. 724p.
- TAN, D., DAWE, D. J. General spline finite strip analysis for buckling and vibration of prismatic composite laminated plate and shell structures. Composites, Part B 29B, p. 377-389, 1998.
- TIMOSHENKO, S. P., Strength of Materials. 3. ed. New York: D. Van Nostrand Company, 1958. 572p.
- TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M. Theory of elastic stability. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1961. 541p.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. Teoría de la elasticidad. 2. ed. Bilbao: Ediciones Urmo, 1975. 549p.
- TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells. 2. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959. 580p.
- TIMOSHENKO, S. P., YOUNG, D. H. Theory of structures. 2. ed. Singapore: McGraw-Hill Book Company, 1965. 629p.
- VERMEULEN, A. H., HEPPLER, G. R. Predicting and avoiding shear locking in beam vibration problems using the B-spline field approximation method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 158, p. 311-327, 1998.
- WANG, Q., LI, W. Y. Spline finite member element method for buckling of thin-walled members with any cross sections in pure bending. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 136, n. 3-4, p. 259-271, Sep. 25 1996.

YE, J. Large deflection of imperfect plates by iterative be-fe method. Journal of Engineering Mechanics, v. 120, n. 3, p. 431-444, Mar. 1994.

ZAGOTTIS, Décio. Introdução à teoria das placas e das cascas. São Paulo: 142p. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1973.

ZAGOTTIS, Décio. Fundamentos da teoria das estruturas (capítulo 5:cálculo tensorial). São Paulo: 23p. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1984.

ZAGOTTIS, Décio. Introdução à teoria das estruturas (capítulos 25 a 36: elasticidade - elementos finitos). São Paulo: 350p. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1986.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. The finite element method. London: McGraw-Hill Book Company, 1994. v.1. 648p.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. The finite element method. London: McGraw-Hill Book Company, 1991. v.2. 807p.

ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K. Finite elements and approximation. Singapore: John Wiley & Sons, 1983. 328p.