UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise de Tensões Dinâmicas em Superfícies Planas a partir de Parâmetros Modais

Autor: Jakerson Ricardo Gevinski
Orientador: Robson Pederiva

17/2010

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

Análise de Tensões Dinâmicas em Superfícies Planas a partir de Parâmetros Modais

Autor: Jakerson Ricardo Gevinski
Orientador: Prof. Robson Pederiva

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculadade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2010
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA – BAE – UNICAMP

G337a	Gevinski, Jakerson Ricardo Análise de tensões dinâmicas em superfícies planas a partir de parâmetros modais / Jakerson Ricardo Gevinski. --Campinas, SP: [s.n.], 2010. Orientador: Robson Pederiva. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Deformações e tensões. 2. Análise modal. 3. Dinâmica estrutural. I. Pederiva, Robson. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Dynamic stresses analysis from modal parameters in flat surfaces
Palavras-chave em Inglês: Strain and stress, Modal analysis, Structural dynamics
Área de concentração: Mecânica dos sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Pablo Siqueira Meirelles, Domingos Alves Rade
Data da defesa: 19/02/2010
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise de Tensões Dinâmicas em Superfícies Planas a partir de Parâmetros Modais

Autor: Jakerson Ricardo Gevinski
Orientador: Prof. Robson Pederiva

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Robson Pederiva, Presidente
FEM - UNICAMP

Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles
FEM - UNICAMP

Prof. Dr. Domingos Alves Rade
FEMEC - UFU

Campinas, 19 de fevereiro de 2010

Dedicatória:

Dedico este trabalho a Deus e aos meus pais.

Agradecimentos

Não poderia deixar de agradecer às pessoas que, de certa forma, contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Em particular:

Ao amigo e orientador Prof. Dr. Robson Pederiva pela oportunidade, confiança, orientação, apoio e pela paciência, que contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

A empresa SKF pela iniciativa do trabalho, pela parceria, confiança e pelo financiamento da pesquisa concedido em forma de bolsa de estudos. Gostaria de agradecer à diretoria da SKF e à equipe da engenharia, em especial, Hilário Sinkoc, Silas Santana dos Santos e Robson de Abreu.

Ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, ao Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles e ao Prof. Dr. Domingos Rade, pelas sugestões e correções que contribuíram ao trabalho. Ao Prof. Dr. Milton Dias Junior e ao Prof. Dr. Éder Lima de Albuquerque pelos esclarecimentos prestados.

Aos técnicos do Departamento de Projeto Mecânico da FEM - Unicamp, que auxiliaram na realização dos experimentos.

A toda a minha família, pelo apoio incondicional e o incentivo. Aos meus pais, Valdir e Bernardete, por nunca terem medido esforços para que eu pudesse chegar aqui e ao meu irmão Jeferson pelo companheirismo, amizade, e apoio.

A Jocemara Carvalho pelo carinho, compreensão e apoio. Aos grandes amigos Alexandre e Jorge, pela amizade, companheirismo, apoio e pelas conversas agradáveis nas horas de mate e sobre os trabalhos.

Aos colegas do Laboratório de Vibrações e Controle da FEM, pela companhia, apoio, ajuda e amizade.

Aos professores e colegas das disciplinas realizadas, por toda a ajuda e amizade.

A maravilhosa disposição e harmonia do universo só pode ter tido origem segundo o plano de um Ser que tudo sabe e tudo pode. Isso fica sendo a minha última e mais elevada descoberta.
(Isaac Newton).

Resumo

GEVINSKI, Jakerson Ricardo, *Análise de Tensões Dinâmicas em Superfícies Planas a partir de Parâmetros Modais*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2010. 197p. Dissertação (Mestrado)

O interesse de maior produtividade e baixos custos de manutenção, associados ao desenvolvimento de produtos mais otimizados, fizeram aumentar a preocupação com as falhas por fadiga em equipamentos. Neste contexto, o monitoramento da tensão dinâmica em estruturas e máquinas sujeitas à vibração adquire cada vez mais importância. Com este intuito, diversos métodos para a estimativa de tensões e deformações dinâmicas que utilizam parâmetros vibracionais vêm sendo desenvolvidos. Por estes métodos, basicamente, estima-se a deformação dinâmica pela derivação espacial do deslocamento obtido pelas técnicas de análise modal. Neste trabalho, abordam-se os conceitos da teoria da elasticidade e da análise modal para a melhor compreensão dos métodos propostos na identificação de deformação a partir dos parâmetros modais. Estudam-se os conceitos da análise modal híbrida para prever o deslocamento de pontos da estrutura e os conceitos da matriz de transformação deslocamento – deformação. Com o objetivo de avaliar esses métodos, realizam-se simulações numéricas e um experimento. Este se constitui no estudo de uma viga de alumínio, onde determinam-se as deformações de flexão da mesma, a partir das acelerações medidas e utilizando o método de diferenças finitas. As simulações e experimentos apresentaram resultados relevantes e satisfatórios no campo da determinação da tensão e deformação dinâmicas em superfícies.

Palavras Chave: Deformações e tensões, Análise Modal, Dinâmica estrutural.

Abstract

GEVINSKI, Jakerson Ricardo, *Dynamic Stresses Analysis from Modal Parameters in Flat Surfaces*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2010. 197p. Dissertação (Mestrado)

The interest of greater productivity and low costs of maintenance, combined with the development of more optimized products, have raised concern about prevention of fatigue failure of equipments. In this context, the monitoring of the dynamic stress in structures and machines under vibration has become more important. With this purpose, several methods of estimation of dynamic stress and strain using vibrational parameters have been developed. Basically, results from modal analysis are transformed from the displacement space to the strain space by use spatial differential operator. The work addresses the concepts of the theory of elasticity and modal analysis for a better understanding of the proposed methods for the identification of strain from modal parameters. It studies the concepts of hybrid modal analysis to predict the displacement of structures' points and concepts of the transformation matrix displacement to strain. In order to evaluate these methods, numerical simulations and an experiment are realized. This constitutes the study of an aluminum beam which determines the bending strain from measured accelerations and using the finite difference schemes. The simulations and experiments showed satisfactory and relevant results in the field of determination of dynamic stresses and strains on surfaces.

Key Words: Strain and stress, Modal analysis, Structural dynamics.

Índice

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Nomenclatura

Letras Latinas

a	limite inferior do domínio, constante	
$\mathbf{a}$	vetor	
a_r	massa modal	
a_1, a_2 e a_3	coordenada de área no eixo x	
A	ponto	
A	área do elemento finito	[m^2]
A_t	área transversal	[m^2]
A_1, A_2, A_3 e A_4	constantes	
$A(x)$	função vetorial qualquer	
A(ω)	acelerância	
${}_r\overline{A}_{jk}$	constante modal	
$[A]$	matriz da equação de estado	
b	limite superior do domínio, largura	
$\mathbf{b}$	vetor	
b_1, b_2 e b_3	coordenada de área no eixo y	
b_r	rigidez modal	
B	ponto	
B_{ij}	tensão residual	
$B(x)$	função vetorial qualquer	
$[B]$	matriz da equação de estado	
$[\mathbf{B}]$	matriz das derivadas de funções de forma no MEF	

c	coeficiente de amortecimento viscoso	[Ns/m]
c_c	coeficiente crítico de amortecimento	[Ns/m]
c_m	coeficiente generalizado de Fourier de um vetor m	
c_n	coeficiente generalizado de Fourier de um vetor n	
c_r	coeficiente generalizado de Fourier do modo r	
c_1, c_2 e c_3	constantes	
C_{ijkl}	tensor de quarta ordem de propriedades elásticas	
$\{\tilde{c}\}$	vetor dos coeficientes generalizados de Fourier na freqüência	
$[C]$	matriz de amortecimento viscoso	
$[\overline{C}]$	matriz de amortecimento viscoso proporcional	
$C^3[a,b]$	domínio com 3 pontos conhecidos	
$C^5[a,b]$	domínio com 5 pontos conhecidos	
d	variação	
dA	variação de área	
d_0	diâmetro inicial	[m]
d_f	diâmetro final	[m]
df	discretização na freqüência	
dL	variação de comprimento	
ds_0	comprimento infinitesimal antes da deformação	
ds	comprimento infinitesimal depois da deformação	
dt	discretização no tempo	
dx, dy, dz	elementos infinitesimais	
dx_i	variação da posição inicial x_i	
$\mathbf{D}$	operador diferencial	
$[D]$	matriz de amortecimento histerético proporcional	
e	espessura	[m]
$\mathbf{e_n}$	vetor unitário na direção da normal **n**	
$\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3$	versores	
E	modulo de Elasticidade longitudinal	[GPa]
$\mathrm{E}_{trun}(f,h)$	erro de truncamento	

f	freqüência	[Hz]
$f_{máx}$	freqüência máxima	[Hz]
f_s	freqüência de amostragem	[Hz]
$f(t)$	força excitadora	
$f(x)$	função de x	
$f(x_k)$	função discreta	
$f'(x)$	primeira derivada de $f(x)$	
F	força aplicada	[N]
F_0	amplitude da força excitadora	[N]
F_i	forças externas	[N]
F_r	força modal	
$\tilde{F}_i$	forças externas no domínio da freqüência	
F_{ij}	função de resposta elástica	
F_v	força por unidade de volume	[N/m^3]
$F(\mathrm{s})$	transformada de Laplace da força excitadora	
$F(\omega)$	transformada de Fourier da força excitadora	
$\{f\}$	vetor de força generalizado	
$\{f(\omega)\}$	vetor de força modal	
$G_{ff}(\omega)$	densidade espectral de potência positiva da entrada	
$G_{xx}(\omega)$	densidade espectral de potência positiva da saída	
$G_{xf}(\omega), G_{fx}(\omega)$	densidade espectral de potência cruzada positiva	
h	distância	[m]
$h(t)$	função resposta ao impulso unitário	
H	amplitude da FRF	
H_{ref}	amplitude da FRF de referência	
$H(dB)$	amplitude da FRF em dB	
$H(\mathrm{s})$	função de transferência	
$H(\omega)$	função resposta em freqüência	
$H_1(\omega)$	estimador de FRF	
$H_2(\omega)$	estimador de FRF	

$[H]$	matriz de relação tensão – deformação	
$[H(\omega)]$	matriz de FRFs	
$\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$	vetores unitários mutuamente ortogonais	
I	inércia	[m^4]
I_1, I_2, I_3	invariantes do estado de tensão	
$[I]$	matriz identidade	
$[J]$	matriz compliace ou flexibilidade	
k	rigidez	[N/m]
k_r	rigidez modal	
$[K]$	matriz de rigidez	
L	comprimento	[m]
$L_{n,k}$	Interpolação de Lagrange	
m	massa	[kg]
m_r	massa modal	
M	número de modos	
M_s	momento resultante das forças de superfícies	
M_v	momento resultante das forças de volume	
$[M]$	matriz de massa	
$\mathbf{n}$	vetor normal ao plano de corte	
n_1, n_2, n_3	cossenos diretores	
n_x, n_y, n_z	cossenos diretores	
$n^{(1)}, n^{(2)}, n^{(3)}$	cossenos diretores correspondentes às tensões principais	
N	número de graus de liberdades	
$N(\xi, \eta)$	funções de forma do MEF	
O	ponto	
$\{ODS(t_0)\}$	modo operacional em um tempo específico	
$\{ODS(\omega_0)\}$	modo operacional em uma freqüência específica	
$\{p\}$	vetor de força nodal	
P	ponto	

$P(x)$	polinômio	
$\{q(t)\}$	função de transformação de coordenadas modais	
$\{\dot{q}(t)\}$	derivada primeira da função de transformação de coordenadas modais	
$\{\ddot{q}(t)\}$	derivada segunda da função de transformação de coordenadas modais	
Q	ponto	
$\overline{Q}_r$	coordenada modal generalizada	
r	modo	
$\mathbf{r}$	vetor posição	
R	resistência elétrica	[Ω]
R_s	força de superfície resultante	[N]
R_v	força de volume resultante	[N]
$R_{ff}(\varsigma)$	função de auto correlação do sinal de entrada	
$R_{xx}(\varsigma)$	função de auto correlação do sinal de saída	
$R_{xf}(\varsigma), R_{fx}(\varsigma)$	função de correlação cruzada entre os sinais	
s	escalar complexo	
s_r	auto vetor relacionado ao modo r	
S_a	sensibilidade à deformação	
S_g	fator ou constante de calibração *strain gage*	
$S_{jk}(\omega)$	função de resposta em freqüência de deformação	
$S_{ff}(\omega)$	densidade espectral de potência da entrada	
$S_{xx}(\omega)$	densidade espectral de potência da saída	
$S_{xf}(\omega), S_{fx}(\omega)$	densidade espectral de potência cruzada	
$S_M(x)$	Soma finita em M	
t	tempo	[s]
$\mathbf{t}$	vetor de tensão	
T	período de tempo	[s]
$[T]$	matriz de transformação	
u, v, w	componentes de deslocamento	

$\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$	componentes de deslocamento na freqüência	
u_i	deslocamento tridimensional	
$\tilde{u}(p, \omega)$	deslocamento de um ponto *p* na freqüência	
$\tilde{u}(o, \omega)$	deslocamento de um ponto *o* na freqüência	
$\{u\}$	vetor de deslocamento nodal	
$\{u(t)\}$	vetor de estado	
$\{\overline{u}\}$	solução da equação de estado	
$\{\tilde{u}\mathbf{e}_i\}$	vetor de deslocamento na direção i	
V	tensão elétrica	[V]
V_e	tensão elétrica de alimentação	[V]
V_s	tensão elétrica de saída	[V]
$V(x)$	função característica	
W	função de energia elástica de deformação	
x,y,z	eixos coordenados	
x_1, x_2, x_3	eixos coordenados	
x_1, x_2, x_3 e x_4	coordenadas dos nós 1,2,3 e 4 no eixo *x*	
x_0, x_1, x_2...	pontos	
$x(t)$	deslocamento	[m]
$\dot{x}(t)$	velocidade	[m/s]
$\ddot{x}(t)$	aceleração	[m/s^2]
$x_p(t)$	resposta temporal permanente	
$\{x(t)\}$	vetor de deslocamento	
$\{\dot{x}(t)\}$	vetor de velocidade	
$\{\ddot{x}(t)\}$	vetor de aceleração	
X	escalar complexo	
X(s)	transformada de Laplace do deslocamento	
$X(\omega)$	transformada de Fourier do deslocamento	
$\{x(\omega)\}$	vetor de deslocamento na freqüência	
y_1, y_2, y_3 e y_4	coordenadas dos nós 1,2,3 e 4 no eixo *y*	

Y(ω)	mobilidade

Letras Gregas

α	constante elástica
α_n	constante do erro médio quadrático
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	parâmetros nodais sem sentido físico
$\alpha(\omega)$	receptância
β	constante do amortecimento viscoso proporcional
$\gamma, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \dots$	componentes de deformação de cisalhamento
$\gamma^2(\omega)$	função de coerência
$\Gamma(t)$	função usada na separação de variáveis
$\mathbf{\delta}'$	vetor de deslocamento relativo
δ_{ij}	Delta de Kronecher
$\delta(t)$	função impulso Delta-Dirac
Δ	variação
ΔA	área infinitesimal
ΔV	volume infinitesimal
ε'_{ij}	tensor de deslocamento relativo
ε_{ij}	tensor de deformação
$\varepsilon, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$	componentes de deformação normal
$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23} \dots$	componentes de deformação de cisalhamento
ε_a	deformação axial ou longitudinal
ε_{med}	deformação específica medida
ε_{med_c}	deformação específica medida e corrigida
ε_{jr}	componente modal de deformação ponto *j* e modo *r*
ε_t	deformação transversal
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	componentes de deformação normal

$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz} \ldots$	componentes de deformação de cisalhamento	
$\varepsilon'_{11}, \varepsilon'_{22}, \varepsilon'_{12}, \ldots$	componentes do tensor de deslocamento relativo	
$\varepsilon(t)$	resposta temporal de deformação	
$\{\varepsilon\}$	vetor de deformação	
$\{\varepsilon_e\}$	vetor de deformação do elemento finito	
$[\varepsilon]$	matriz modal de deformação	
ς	incremento de tempo	
ζ	razão de amortecimento	
ζ_r	fator de amortecimento modal	
η	coordenada nodal referente ao eixo y	
η_r	fator de perda de amortecimento	
θ	ângulo	
ϑ	constante do amortecimento viscoso proporcional	
$\kappa_r^{\ 2}$	auto-valor complexo do amortecimento histerético	
λ	constante de Lamé	
$\overline{\lambda}$	raízes da solução da EDM de sistemas contínuos	
μ	constante de Lamé	
ν	coeficiente de Poisson	
ξ	transformação de coordenadas ,coordenada nodal	
$\xi(x)$	termo de erro	
ρ	densidade específica	[kg/m^3]
$\sigma, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	componentes de tensão normal	[MPa]
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	componentes de tensão normal	[MPa]
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3,$	tensões principais	[MPa]
$\sigma_{\max}$	tensão máxima	[MPa]
$\sigma_{\min}$	tensão mínima	[MPa]
σ_{ij}	tensor de tensão	

$\sigma_{p_{\max}}$	máxima tensão principal	[MPa]
$\sigma_{p_{\min}}$	mínima tensão principal	[MPa]
σ'	tensão equivalente de *von Mises*	[MPa]
σ_a	componente de amplitude de tensão	[MPa]
σ_m	componente média de tensão	[MPa]
σ'_a	tensão alternada de *von Mises*	[MPa]
σ'_m	tensão média de *von Mises*	[MPa]
$\tau, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23} \ldots$	componentes de tensão cisalhante	[MPa]
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \ldots$	componentes de tensão cisalhante	[MPa]
τ_1, τ_2, τ_3	tensões principais de cisalhamento	[MPa]
$\tau_{\max}$	máxima tensão de cisalhamento	[MPa]
υ	constante do amortecimento histerético	
φ	constante do amortecimento histerético	
$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	parâmetros nodais	
ϕ_{jr}	componente modal de deslocamento ponto *j* e modo *r*	
ϕ_{kr}	componente modal de deslocamento ponto *k* e modo *r*	
ϕ_{pr}	componente modal de deslocamento ponto *p* e modo *r*	
$\{\phi_r\}$	modo *r* próprio do sistema normalizado pela massa	
$\phi_k(x)$	conjunto de funções com *k*= 1, 2, 3... ou *m* e *n*	
$[\Phi]$	matriz dos modos normalizados pela massa	
$[\Phi \mathbf{e}_i]$	modos de deslocamento na direção i	
χ	parte real da raiz do polinômio característico	
ψ_{jr}	componente modal de deslocamento ponto *j* e modo *r*	
ψ_{kr}	componente modal de deslocamento ponto *k* e modo *r*	
$\{\psi_r\}$	modo *r* próprio do sistema	
$\{\psi_r'\}$	auto vetor complexo da equação de estado	
$[\Psi]$	matriz modal	

$[\Psi']$	matriz modal complexa do vetor de estado	
ω	freqüência angular excitadora	[rad/s]
ϖ	resistividade específica	[Ωm]
ω_d	freqüência natural angular amortecida	[rad/s]
ω_n	freqüência natural angular não amortecida	[rad/s]
$\mathrm{diag}\lfloor \omega_r^2 \rfloor$	matriz espectral diagonal	
Ω_{ij}	tensor de rotação	

Superescritos

-1	inversa da matriz
T	matriz transposta
+	matriz pseudo inversa
*	conjugado
'	transposição de coordenada
n	relativo ao plano *n*
1,2,3...	relativo aos planos 1,2,3...

Subscritos

a	axial
a,b,c,d	referente a 1,2,3 e 4
est	estimado
max	máximo valor
min	mínimo
res	residual ou erro de truncamento
rms	root mean square ou média quadrática
r	referente ao modo
t	transversal
0	inicial

Abreviaturas

SG	Strain Gages
det	Determinante
Amp	Amplitude
Quad	Quadratura
Resp	Resposta
Max	Máximo

Siglas

ACRF	Advanced Characteristic Response Function
AMO	Análise Modal Operacional
ARMA	Autoregressive Moving-Average method
CEFD	Complex Exponential Frequency Domain
CMIF	Complex Mode Indicator Function ou função indicadora de modo complexo
CRF	Characteristic Response Function
DSPI	Direct System Parameter Identification method
DST	Displacement to Strain Transformation ou matriz de Transformação Deslocamento – Deformação
EC	Exponencial Complexa
EDM	Equação Diferencial de Movimento
ERA	Eigensystem Realisation Algorithm
ERA-FD	Eigensystem Realisaton Algorithm no domínio da freqüência
FDPM	Frequency Domain Prony
FFT	Fast Fourier Transform ou transformada rápida de Fourier
FRF	Função Resposta em Freqüência
FRI	Função Resposta ao Impulso
GRFP	Global Rational Fraction Polynomial
GSH	Gaukroger-Skingle-Heron method
HMA	Hibrid Modal Analysis ou análise modal híbrida
HSA	Hybrid Strain Analysis ou Análise Modal Híbrida de deformação

IDT	Ibrahim Time Domain
ISSPA	Identification of Structural System Parameters method
LSCE	Least_Squares Complex Exponential
MDOF	Multiple Degree of Freedom ou múltiplos graus de liberdade
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEF	Método de Elementos Finitos
MIF	Mode Indicator Function ou função indicadora de modos
MMIF	Multivariate MIF ou MIF multivariante
MIMO	Multi Imput Multi Output ou múltiplas entradas múltiplas saídas
MISO	Multi Imput Single Output ou múltiplas entradas única saída
ODS	Operational Deflexion Shapes ou modo de deflexão operacional
PRCE	Polyreference Complex Exponential
PRFD	Polyreference Frequency Domain
RFP	Rational Fraction Polynomial
SDOF	Single Degree of Freedom ou único grau de liberdade
SFD	Simultaneous Frequency Domain method
SIMO	Single Imput Multi Output ou uma entrada múltiplas saídas
SISO	Single Imput Single Output ou uma entrada uma saída
SUM	Summation Function ou função soma
TFA	Transfer Function Analysers ou analisador de função de transferência
UE	Unidades de Engenharia

Capítulo 1

Introdução

O grande desenvolvimento industrial e a busca incessante de maior rentabilidade nos últimos anos têm criado a necessidade de aperfeiçoamentos nos processos produtivos e de manutenção. Neste aspecto, é indispensável que os órgãos responsáveis pela manutenção e produção das empresas busquem um perfeito equilíbrio entre maior produtividade e maior disponibilidade dos equipamentos associados a baixos custos.

Com o intuito de colaborar com o equilíbrio entre produtividade e disponibilidade, a manutenção influencia a disponibilidade através das técnicas de manutenção corretiva, preventiva e preditiva. A manutenção corretiva atua na correção do problema que pode ter ocasionado a parada do equipamento, sendo esta uma situação extrema. A manutenção preventiva consiste na inspeção programada de equipamentos em intervalos definidos, requerendo interrupção do funcionamento do mesmo e interferindo no processo produtivo. A manutenção preditiva monitora os equipamentos visando o diagnóstico precoce e o prognóstico de defeitos. A técnica de diagnóstico tem por objetivo identificar os defeitos e falhas que comprometem o funcionamento do equipamento e o prognóstico avalia a evolução e a conseqüência do defeito diagnosticado.

Existem diversas técnicas voltadas ao diagnóstico de falhas e o prognóstico. A determinação do tempo de vida ou o tempo até a falha do equipamento é feita, por exemplo, através da extrapolação de valores de vibração, temperatura e pressão, medidos no equipamento. A análise de vibração é utilizada mais comumente para a monitoração prognóstica das máquinas, sendo esta realizada no domínio do tempo, no domínio da freqüência, através de métodos estatísticos dentre outros.

Embora os valores de temperatura, vibração e pressão possam indicar o tempo até a falha do equipamento, pois os níveis de vibração ou temperatura podem aumentar devido ao surgimento de alguma falha na máquina, esses valores são extrapolados e comparados com valores aceitáveis para o tipo de equipamento. Esses sinais globais utilizados para a comparação podem não dar um alerta suficiente do dano iminente à máquina.

Neste sentido, este trabalho vem contribuir com a técnica de diagnóstico de falha de equipamentos através da análise de tensões dinâmicas a que partes ou pontos da estrutura estão submetidos, obtidas pela análise de vibração e parâmetros modais da estrutura.

O tensor de tensão dinâmica convencionalmente é obtido experimentalmente pela técnica de extensometria. Entretanto, quando é necessária a medição de deformação em muitos pontos da estrutura, esta técnica torna-se muito onerosa. Os transdutores utilizados na técnica de extensometria, por exemplo, *strain gages*, são caros, descartáveis e há a necessidade de limpeza da superfície analisada com a remoção da pintura e outros procedimentos padrões, o que pode exigir paradas dos equipamentos por longos períodos.

Desta forma, propõe-se neste trabalho a utilização dos parâmetros modais para estimar o tensor de tensão dinâmica. A análise do comportamento dinâmico de estruturas é realizada convencionalmente pela análise modal experimental ou operacional que utilizam transdutores de aceleração, velocidade e deslocamento. Estas técnicas consistem na determinação dos parâmetros modais da mesma, onde é possível a identificação dos modos de deflexão (deslocamento) de vibração que a mesma está submetida. Esses valores de deslocamentos são relacionados com a deformação através da derivação espacial e é possível estimar o tensor de deformação de um ponto na estrutura a partir de medidas de deslocamentos obtidos pela análise modal. As deformações são relacionadas com as tensões a partir das leis constitutivas do material.

O padrão das tensões dinâmicas verificado em equipamentos em operação, muitas vezes apresenta várias componentes em freqüência e as tensões mudam suas direções principais a cada modo de vibração. Desta maneira, a utilização da tensão média e alternada equivalente de *von Mises* pode ser utilizada para uma posterior avaliação e utilização de critérios de falhas.

Os métodos de determinação da deformação a partir de resultados modais são utilizados na vibroacústica e podem ser utilizados na análise estrutural dinâmica. Diversos métodos foram propostos nesta área. Bernasconi e Ewins (1989) fizeram uma abordagem, no domínio do tempo, da determinação do campo deformação – tensão. O tensor de deformação foi determinado a partir da derivação dos deslocamentos, mas o caso estudado restringe-se ao de amortecimento proporcional. Koss e Karczub (1995) propuseram um método que diz respeito à deformação na flexão. Na avaliação experimental realizada, foram utilizados apenas dois acelerômetros em uma viga Euler Bernoulli para a análise de deformação. Okubo e Yamaguchi (1995) previram a distribuição da deformação dinâmica sob condições de operação, usando a matriz de transformação deslocamento – deformação. Dovstam (1998) propôs o método da análise modal híbrida para complementar a análise modal convencional na determinação do deslocamento tridimensional da estrutura e com isso determinar o tensor de deformação. Em Karczub e Norton (1999) a flexão de uma viga Euler Bernoulli é novamente estudada no tempo, e a abordagem foi baseada no método de diferenças finitas, com derivada de segunda ordem do deslocamento transversal da viga, ou seja, analisando-se a curvatura da mesma. As medições foram feitas em pontos eqüidistantes e simetricamente distribuídos ao redor do ponto de análise e a deformação não pôde ser prevista nas descontinuidades. Lee e Kim (1999) estudaram a deformação normal e de cisalhamento em uma placa com um núcleo viscoelástico. As deformações foram calculadas usando o método de diferenças finitas sobre modelos obtidos analiticamente da vibração de flexão da placa em um suporte. Nesta análise foi assumido que as propriedades dos materiais da camada viscoelástica não são dependentes da freqüência. Sehlstedt (1999), através dos valores de deslocamentos obtidos da análise modal hibrida, fez a análise do tensor de deformação dinâmica em uma placa utilizando o método de diferenças finitas e os modos próprios de vibração obtidos pelo método de elementos finitos. Lee (2007) propôs um método para a estimativa das respostas de deformação a partir das medições de deslocamentos utilizando a matriz de transformação, obtida através da matriz modal de deslocamento e de deformação.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral estimar a tensão dinâmica em estruturas sujeitas a vibração a partir de parâmetros modais. Como objetivos específicos do trabalho, citam-se:

- Relacionar o deslocamento com a deformação em corpos contínuos através da teoria da elasticidade.

- Compreender a análise modal teórica e a técnica da análise modal experimental.

- Compreender os métodos utilizados para determinação da deformação a partir de parâmetros modais.

- Avaliar numericamente a deformação de flexão em uma viga Euler-Bernoulli submetida a uma carga dinâmica utilizando método de diferenças finitas.

- Comparar os resultados de deformação encontrados analiticamente e numericamente por diferenças finitas e método de elementos finitos em pontos específicos de uma superfície submetida a deslocamentos nodais conhecidos.

- Avaliar numericamente a distribuição de tensão dinâmica equivalente de *von Mises* em uma superfície utilizando o método de diferenças finitas na relação deslocamento-deformação.

- Avaliar experimentalmente a relação deslocamento – deformação utilizando extensometria e parâmetros modais em uma viga de alumínio engastada em uma das extremidades.

1.2 Apresentação do Trabalho

Este trabalho foi dividido em seis capítulos, onde são apresentadas as revisões bibliográficas, as metodologias abordadas, simulações e procedimentos experimentais realizados, resultados encontrados e a conclusão referente ao trabalho. A seguir, faz-se uma breve descrição do conteúdo de cada um desses capítulos:

Capítulo 2 – Apresenta uma revisão bibliográfica, onde abordam-se os conceitos da teoria da elasticidade, da análise dinâmica em estruturas e faz-se um breve histórico de utilização dos métodos aplicados para estimar a deformação dinâmica em estruturas utilizando parâmetros vibracionais.

Capítulo 3 – As formulações matemáticas da análise modal híbrida e da matriz de transformação deslocamento – deformação são mostradas neste Capítulo.

Capítulo 4 – Inclui os métodos numéricos utilizados na relação deslocamento – deformação, os aspectos teóricos na utilização do ANSYS® na análise modal e algumas simulações numéricas que utilizam método de diferenças finitas e elementos finitos na determinação da deformação e tensão a partir de valores de deslocamento.

Capítulo 5 – Contém os procedimentos experimentais realizados para avaliação experimental da deformação dinâmica em uma viga de alumínio. Os resultados e discussões referentes aos experimentos realizados também estão inclusos neste Capítulo.

Capítulo 6 – São apresentadas a conclusão e propostas para trabalhos futuros.

No início e fim de cada Capítulo, exceto no Capítulo 6, é feita uma introdução e resumo do Capítulo visando uma melhor compreensão do leitor. Este trabalho também contém um Anexo e quatro Apêndices. No Anexo I encontra-se o esquema de instalação da ponte de *Wheatstone* utilizada no experimento de determinação de deformação da viga. No Apêndice A, alguns aspectos sobre análise dinâmica de sistemas com um grau de liberdade são abordados. No Apêndice B apresentam-se as formulações matemáticas do método de diferenças finitas centrais. No Apêndice C apresentam-se as formulações do método de diferenças finitas *Backward* e *Forward*. No Apêndice D apresentam-se as formulações matemáticas dos elementos finitos isoparamétricos triangular e quadrilateral. No Apêndice E encontra-se o algoritmo para implementação computacional do MDF para análise de deformação em superfícies planas. No Apêndice F e G apresenta-se o algoritmo para a implementação computacional do MEF triangular e quadrilateral na análise de deformação em superfícies planas.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Nas últimas duas décadas foram desenvolvidos diversos métodos de avaliação de deformação dinâmica a partir de parâmetros modais, no domínio do tempo ou no domínio da freqüência. Estes métodos consistem na utilização da derivação numérica por diferenças finitas do deslocamento obtido pela análise modal experimental ou pela análise modal operacional. O deslocamento pode ainda ser previsto por aproximação no sentido de mínimos quadrados e utilizando os coeficientes generalizados da série de Fourier, que ponderam a participação de cada modo natural na resposta medida no domínio da freqüência. Desta forma, neste Capítulo serão abordados os conceitos relacionados com a teoria da elasticidade e a análise modal, visando a melhor compreensão dos métodos estudados e propostos para determinação da tensão dinâmica em superfícies planas a partir de parâmetros modais. Primeiramente, uma revisão sobre a teoria da elasticidade é feita no item 2.2, abordando conceitos de tensão, deformação, deslocamentos e suas relações. No item 2.3 apresentam-se as técnicas convencionais de extensometria utilizadas para medição da deformação. No item 2.4 é estudada a análise modal teórica, experimental e operacional. Finalmente no item 2.5, os métodos para a estimativa de deformação a partir de parâmetros modais são estudados, fazendo-se um breve histórico de suas utilizações.

2.2 Teoria da Elasticidade

A elasticidade estuda o comportamento de corpos materiais que se deformam ao serem submetidos à ação de esforços externos. Através da elasticidade é possível determinar as tensões, as deformações e também a relação entre elas para um sólido tridimensional. Embora, mesmo na região elástica, os materiais utilizados na engenharia apresentem algum grau de comportamento não linear, o comportamento dos materiais nesta região é aproximado pela elasticidade linear.

O conhecimento da teoria da elasticidade é utilizado no estudo de resistência dos materiais, na mecânica do contínuo e em outras áreas em que necessita-se conhecer as tensões ou deformações sofridas por um corpo submetido a algum tipo de esforço. Neste item será abordada a análise de tensão, deformação e as relações entre deslocamento e deformação para que possam ser utilizadas posteriormente na determinação ou estimativa das tensões dinâmicas a partir dos deslocamentos medidos ou estimados pela análise modal.

2.2.1 Vetor de Tensão

Para se determinar o vetor de tensão **t** em um ponto, pertencente a um corpo, é necessário analisar as forças que agem neste corpo. Segundo Timoshenko e Goodier (1980) há duas espécies de forças que podem atuar sobre os corpos, as *forças de superfície*, que são as forças distribuídas sobre a superfície do corpo, por exemplo, a pressão de um corpo sobre outro ou pressão hidrostática, e as *forças de volume*, distribuídas pelo volume do corpo, tais como gravitacionais, magnéticas, ou no caso de um corpo em movimento, as forças de inércia.

Conforme Chen e Saleeb (1994) as forças de volume, atuantes em um ponto fixo P, podem ser escritas como uma força resultante R_v e um momento resultante M_v em relação a esse ponto. Se o volume é considerado infinitesimal, ou seja, o limite $\Delta V \to 0$, tem-se as seguintes equações:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{R_v}{\Delta V} = F_v \tag{2.1}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{M_v}{\Delta V} = 0 \tag{2.2}$$

onde F_v representa a força por unidade de volume.

A Figura 2.1 ilustra o ponto P pertencente a um corpo contínuo e com volume infinitesimal.

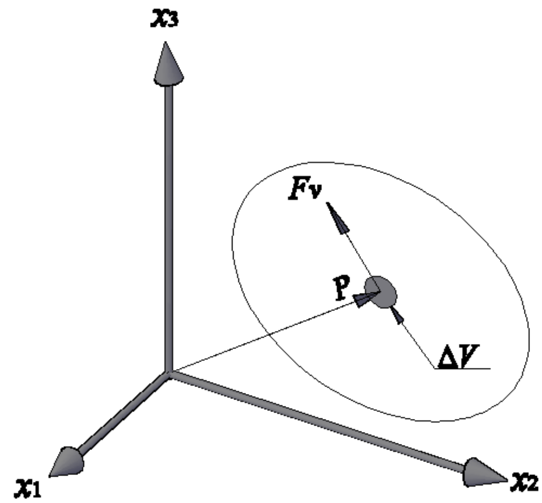


Figura 2.1 – Um volume infinitesimal ΔV contendo o ponto P

Para se conhecer a tensão que as forças exercem em um ponto interno do corpo é aplicado um corte imaginário no ponto P da Figura 2.1. O corte ocorre em um plano de normal **n** que passa pelo ponto. Desta forma, o volume ΔV apresentará na superfície de corte uma área infinitesimal ΔA. Nas superfícies de cortes atuam as forças de ação e reação do corpo seccionado. Essas forças de superfície podem ser escritas como uma força resultante R_s e um momento resultante M_s.

Considerando que $\Delta A \rightarrow 0$, o vetor de tensão $\mathbf{t}^n$ no ponto P associado ao plano de corte é dado por:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{R_s}{\Delta A} = \mathbf{t}^n \tag{2.3}$$

O momento resultante M_s desaparece pois:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{M_s}{\Delta A} = 0 \tag{2.4}$$

A Figura 2.2 ilustra as superfícies ΔA, obtidas após o seccionamento do volume ΔV e os vetores de tensão que surgem devido às reações.

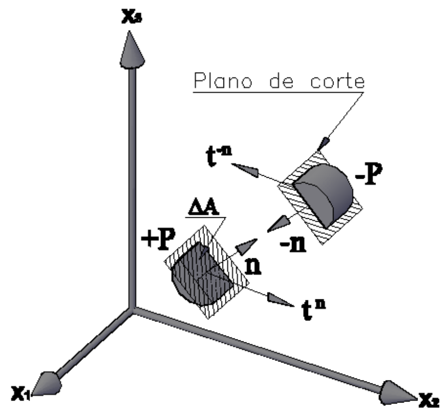


Figura 2.2 – Vetor de Tensão $\mathbf{t}^n$ no ponto *P* devido ao plano de corte.

Na Figura 2.3 é possível observar o vetor de tensão que age em um ponto interno *Q* de um corpo cilíndrico devido às forças externas aplicadas ao mesmo. No cilindro é adotado um plano de corte que passa pelo ponto *Q*.

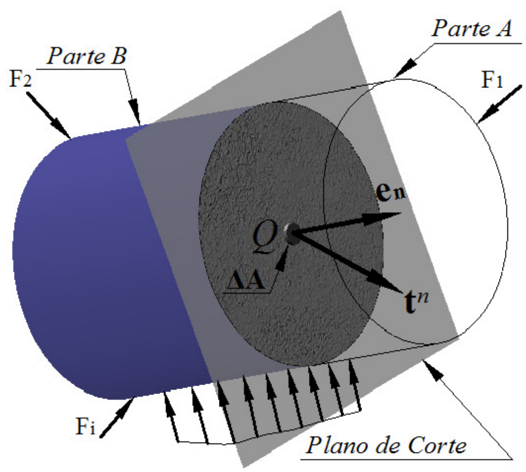


Figura 2.3 – Vetor de tensão em um ponto interno de um corpo livre contínuo

Na Figura 2.3, F_i são as forças externas aplicadas ao corpo, $\mathbf{e_n}$ é um vetor unitário normal ao plano de corte e $\mathbf{t}^n$ é o vetor de tensão no ponto *Q* relacionado com o plano de corte.

Segundo Chen e Saleeb (1994) o estado de tensão em um ponto *Q* é dado por todos os vetores de tensão que passam por aquele ponto. Entretanto, existem infinitos planos de tensão que passam pelo ponto *Q*. Se conhecermos os vetores de tensão em três planos ortogonais entre si, é possível por equilíbrio, conhecer o vetor de tensão em qualquer outro plano. Na Figura 2.4 estão ilustrados os três planos ortogonais que passam pelo ponto Q, afastados do mesmo para maior clareza, e os vetores de tensão.

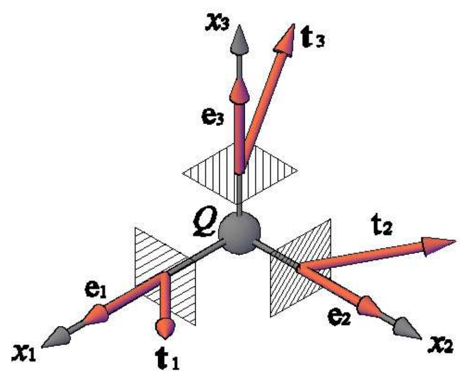


Figura 2.4 – Vetor de tensão em 3 planos ortogonais que passam pelo ponto *Q*.

O vetor de tensão referente a qualquer plano de normal **n**, pode ser dado pela seguinte equação:

$$\mathbf{t}^n = \mathbf{t}^1_{n1} + \mathbf{t}^2_{n2} + \mathbf{t}^3_{n3} \tag{2.5}$$

onde os cossenos diretores n_1, n_2 e n_3 são dados por:

$$\begin{aligned} n_1 &= \cos(\mathrm{e}_1, \mathbf{n}) \\ n_2 &= \cos(\mathrm{e}_2, \mathbf{n}) \\ n_3 &= \cos(\mathrm{e}_3, \mathbf{n}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

É importante notar que $\mathbf{t}^n$ não é necessariamente perpendicular ao plano de normal **n**. Na prática, os vetores de tensão $\mathbf{t}^n$ são decompostos em duas componentes, uma normal ao plano n, chamada de *Tensão Normal*, e outra paralela a este plano, chamada de *Tensão Cisalhante*.

Os vetores de tensão associado com as três coordenadas x_1, x_2 e x_3 também são decompostos em componentes relacionadas a essas três direções. Por exemplo, o vetor de tensão $\mathbf{t}^n$ relacionado com a coordenada x_1, tem três componentes de tensão, tensão normal σ_{11}, e tensões de cisalhamento σ_{12} e σ_{13} nas direções dos eixos coordenadas x_1, x_2 e x_3, respectivamente, como mostra a Figura 2.5.

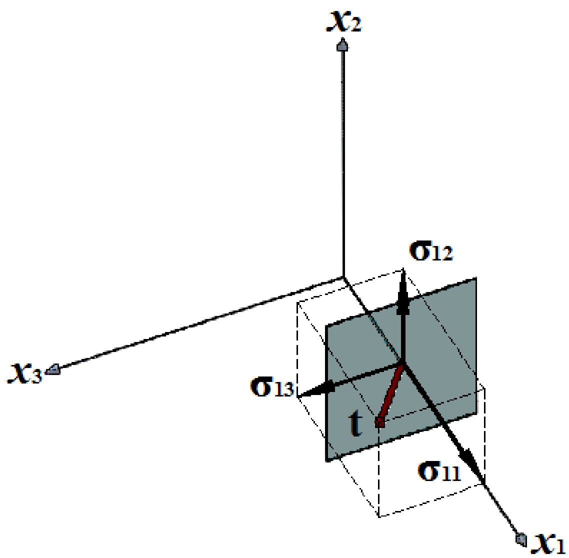


Figura 2.5 – Componentes de tensão devido a um vetor de tensão t.

A base vetorial do vetor de tensão é expressa pela Equação (2.7):

$$\mathbf{t}^1 = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{12}\mathbf{e}_2 + \sigma_{13}\mathbf{e}_3 \tag{2.7}$$

A Equação anterior pode ser escrita utilizando a notação indicial (Convenção da soma de *Einstein*) como:

$$\mathbf{t}^1 = \sigma_{1j}\mathbf{e}_j \tag{2.8}$$

Da mesma forma para os planos de coordenadas x_2 e x_3 têm-se:

$$\mathbf{t}^2 = \sigma_{2j}\mathbf{e}_j \tag{2.9}$$

$$\mathbf{t}^3 = \sigma_{3j}\mathbf{e}_j \tag{2.10}$$

As componentes de tensão dos três vetores de tensão $\mathbf{t}^1$, $\mathbf{t}^2$ e $\mathbf{t}^3$ podem ser representadas pelo *tensor de tensão* dado na Equação (2.11).

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

onde σ_{11}, σ_{22} e σ_{33} são as componentes normais de tensão e σ_{12}, σ_{21},... são as *componentes cisalhantes de tensão*.

Uma alternativa à notação indicial é chamada de *notação de von Karman*, em que o tensor de tensão é representado na seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

onde σ representa as componentes normais de tensão e τ representa as componentes de cisalhamento. Abaixo está escrito o tensor de tensão utilizando diferentes formas de notação.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{z} \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Para facilitar a visualização e ajudar no entendimento, costuma-se representar um ponto na forma de um cubo, onde cada face representa um plano. As tensões normais e de cisalhamento são representadas neste cubo conforme mostrado na Figura 2.6.

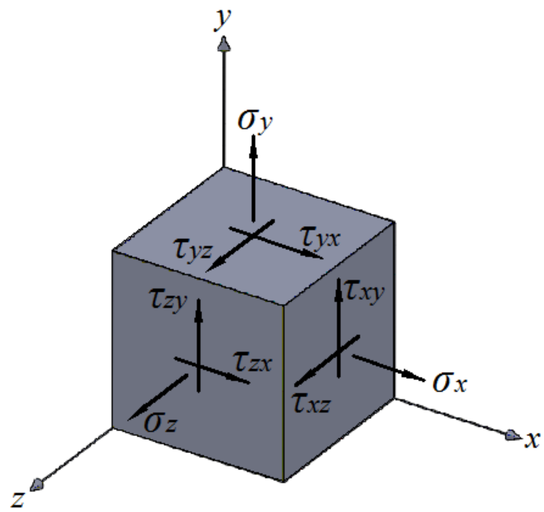


Figura 2.6 – Representação do estado tridimensional de tensão

Pela relação de equilíbrio dos momentos em torno dos eixos *x*, *y* e *z*, obtém-se a simetria das tensões cisalhantes, ou seja:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{2.14}$$

portanto, o tensor de tensão é um tensor simétrico, ou seja $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

2.2.2 Tensões e Direções Principais

Quando o vetor de tensão $\mathbf{t}^n$ associado ao plano *n* tem a mesma direção do vetor normal **n**, isto é, $\mathbf{t} = \sigma_n$ e $\tau_n = 0$, o plano é então chamado de *plano principal*, a direção normal **n** é chamada *direção principal* e a tensão normal é chamada de *tensão principal*. A Figura 2.7 mostra o vetor de tensão $\mathbf{t}^n$ com mesma direção da normal **n**, (CHEN 1994; SALEEB, 1994).

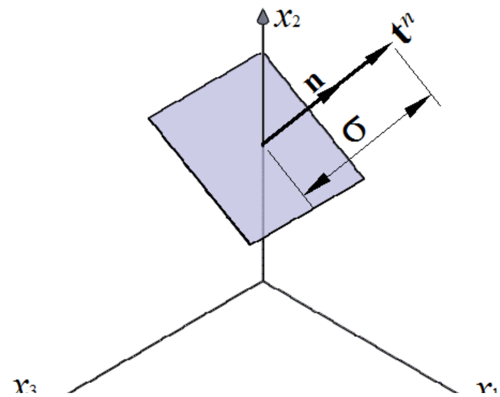


Figura 2.7 – Vetor de tensão coincidindo com a normal n

O vetor $\mathbf{t}_i^n$ pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{t}_i^n = \sigma_{ij} n_j = \sigma n_i \tag{2.15}$$

Expandindo a Equação acima tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= \sigma n_1 \\ \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 &= \sigma n_2 \\ \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3 &= \sigma n_3 \end{aligned} \tag{2.16}$$

As três Equações (2.16) na notação de *von Karman* são escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0 \\ \tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

As Equações (2.17) lineares e homogêneas em n_x, n_y e n_z admitirão soluções diferentes de zero somente se o seu determinante for nulo e então:

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.18}$$

A solução do determinante acima resulta no seguinte *polinômio característico*:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{2.19}$$

onde I_1 é somatória dos termos da diagonal principal de σ_{ij}, ou seja:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{2.20}$$

I_2 é a soma dos cofatores dos termos da diagonal de σ_{ij}, ou seja:

$$\begin{aligned} I_2 &= \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{2.21}$$

I_3 é o determinante de σ_{ij}, ou seja:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \tag{2.22}$$

Das propriedades de um polinômio de 3° (terceiro grau), têm-se:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde σ_1, σ_2 e σ_3 são as raízes do polinômio característico e também as *tensões principais* para o estado de tensão em um ponto. Como as raízes do polinômio são as mesmas tanto no sistema de referência *x*, *y* e *z* quanto no sistema de referência correspondentes as direções principais, tem-se que I_1, I_2 e I_3 são independentes do sistema de coordenadas e são conhecidos como *Invariantes do estado de tensão*.

Substituindo σ_1, σ_2 e σ_3 na Equação (2.16), respectivamente e por meio da relação,

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1, \tag{2.24}$$

podem-se determinar os três conjuntos de cossenos diretores, correspondentes às três direções principais, sendo:

$$
\begin{aligned}
n^{(1)} &= \begin{pmatrix} n_1^{(1)} & n_2^{(1)} & n_3^{(1)} \end{pmatrix} \quad \text{para } \sigma = \sigma_1 \\
n^{(2)} &= \begin{pmatrix} n_1^{(2)} & n_2^{(2)} & n_3^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{para } \sigma = \sigma_2 \\
n^{(3)} &= \begin{pmatrix} n_1^{(3)} & n_2^{(3)} & n_3^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{para } \sigma = \sigma_3
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Conhecendo-se as tensões principais, a tensão normal máxima de um estado de tensão é a *máxima tensão principal* e a mínima é a *menor tensão principal*. Para $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, as tensões normais, máxima e mínima, de um estado de tensão é dado pela Equação (2.26):

$$
\begin{aligned}
\sigma_{p_{\max}} &= \sigma_1 \\
\sigma_{p_{\min}} &= \sigma_3
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Nos planos onde as tensões de cisalhamento atingem seus valores estacionários, ou seja, valores máximos, mínimos ou ponto de inflexão, as mesmas são chamadas de *tensões de cisalhamento principais*. Para calculá-las, torna-se mais simples usar como o eixo de referência as direções principais. Estas direções principais são usadas para definir planos que fazem 45° em relação às mesmas. Nestes planos atuam as *tensões principais de cisalhamento* dadas por:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right| \\
\tau_2 &= \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_2\right| \\
\tau_3 &= \frac{1}{2}\left|\sigma_2 - \sigma_3\right|
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

É importante saber que os planos principais de cisalhamento não são necessariamente planos onde a tensão normal é nula. O maior valor de tensão principal de cisalhamento é chamado de *tensão de cisalhamento máxima* e é igual á:

$$
\tau_{\max} = \tau_1 = \frac{1}{2}\left|\sigma_1 - \sigma_3\right| \tag{2.28}
$$

2.2.3 *Tensões e Direções Principais no Plano*

Segundo Shigley, Mischke e Budynas (2005) as tensões σ e τ podem ser encontradas somando-se as forças causadas por todas as componentes de tensão, anteriormente conhecidas, e igualando-as a zero. A Equação (2.29) e (2.30) são chamadas de *equações de transformação de tensões planas* e são usadas para calcular σ e τ.

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \tag{2.29}$$

$$\tau = \frac{-\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \tag{2.30}$$

O elemento *dxdy* da Figura 2.8 pode ser utilizado para compreender as Equações acima. O elemento é cortado por um plano oblíquo, com normal **n**, com um ângulo arbitrário θ anti-horário, a partir do eixo x:

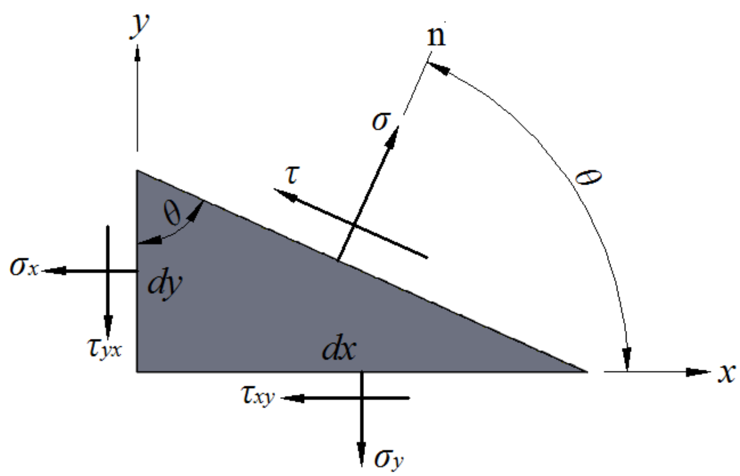


Figura 2.8 – Elemento *dxdy* cortado por um plano inclinado de normal n

Diferenciando a Equação (2.29) em relação ao ângulo θ e estabelecendo o resultado igual a zero, obtém-se:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{2.31}$$

A Equação (2.31) define dois valores particulares para o ângulo 2θ, um dos quais estabelece a máxima tensão principal σ_1 e o outro, a mínima tensão principal σ_2. As tensões principais podem ser obtidas substituindo o ângulo 2θ da Equação (2.31) na Equação (2.29), resultando:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2.32}$$

Os valores extremos de tensão de cisalhamento são encontrados a partir de:

$$\tau_1, \tau_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{2.33}$$

2.2.4 Estado Plano de Tensão

Pode-se obter uma boa noção da natureza da distribuição de tensões examinando um estado de tensões conhecido como estado bidimensional ou estado plano de tensões. O tensor de tensão de pontos de superfícies, em algumas situações, pode ser determinado considerando-se um estado bidimensional. Para estes casos, admite-se que duas faces paralelas do elemento infinitesimal da Figura 2.6 estão livres de tensão. Sendo essas faces perpendiculares ao eixo *z*, tem-se que:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \tag{2.34}$$

Ocorre naturalmente um estado plano de tensões em pontos situados na superfície externa de um corpo onde os componentes da força paralelos à direção *z* são iguais a zero. Ocorre também um estado plano de tensões em pontos no interior de placas finas onde a dimensão *z* do corpo é pequena, comparada com as dimensões da superfície, e os componentes da força paralelos a *z* são iguais a zero, (RILEY; STURGES; MORRIS, 2003). Segundo Beer, Johnston e Dewolf (2006) o estado plano de tensão ocorre em uma placa fina submetida a esforços atuando no plano médio da espessura da placa. Em superfícies livres de um elemento estrutural ou componente de máquina, isto é, em qualquer ponto da superfície daquele elemento ou componente que não esteja submetido a uma força externa, o estado de tensão é considerado plano.

O estado plano de tensão é especificado somente por σ_x, σ_y e τ_{xy}. Por conveniência, este estado de tensão é representado pelo esquema mostrado na Figura 2.9.

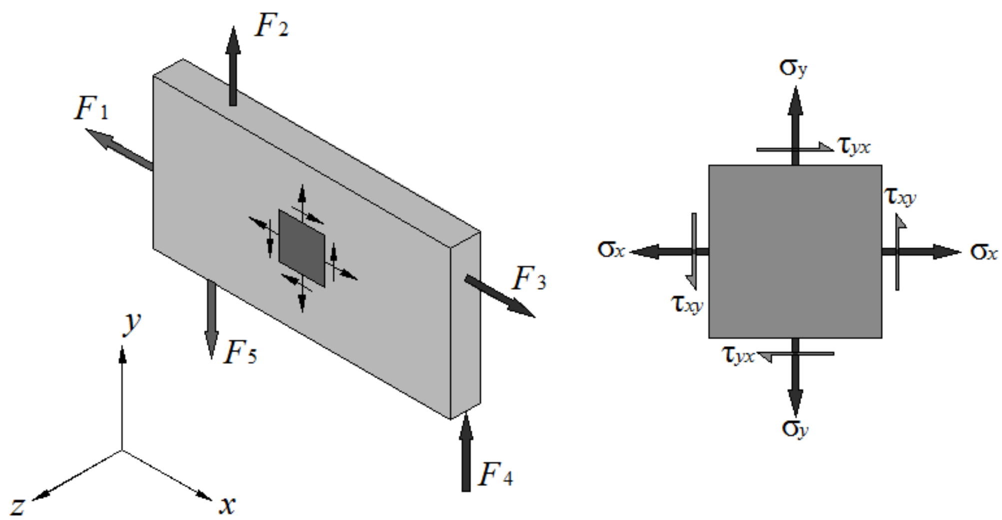


Figura 2.9 – Representação do estado plano de tensão

2.2.5 Análise de Deformação

Conforme Chen e Saleeb (1994) a ação de forças causa movimentos e deformações em um corpo. Quando a distância entre quaisquer pares de pontos de um corpo, depois da aplicação da força, permanece a mesma, diz-se que este corpo sofreu um movimento de corpo rígido, que pode ser de translação, rotação ou uma composição dos dois. Se houver variação da distância entre quaisquer pares de pontos do corpo, então diz-se que o corpo sofreu uma deformação e esta pode ser linear, angular ou uma composição das duas.

Os movimentos de corpo rígido podem ser grandes ou pequenos enquanto as deformações geralmente são pequenas, exceto quando materiais muito flexíveis ou estruturas especiais, por exemplo, vigas delgadas, estão envolvidas.

Para melhor compreensão da análise de movimento e deformação em um corpo, pode-se considerar dois pontos *A* e *B*, conforme mostra a Figura 2.10:

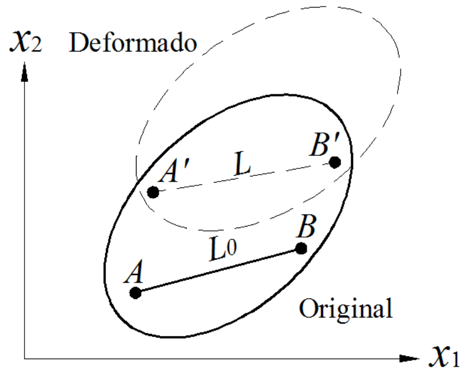


Figura 2.10 – Ilustração da deformação linear

Antes da aplicação da força a distância entre esses dois pontos é dada por L_0. Após a aplicação da força, o segmento de linha $\overline{AB}$ move-se para $\overline{A'B'}$. Considerando a distância AA' o deslocamento do ponto *A*, se $\overline{A'B'}$ é paralelo e igual à $\overline{AB}$, houve translação. Se $\overline{A'B'}$ não é paralelo à $\overline{AB}$, então o corpo sofreu translação e rotação. Se a distância *L* não for igual à L_0, então existe um deslocamento relativo de *B* em relação à *A* e o corpo sofreu deformação. A deformação pode ser considerada homogênea ao longo de $\overline{AB}$ e o deslocamento relativo $(L - L_0)$ pode ser considerado proporcional a L_0, sendo esta uma deformação linear ou normal.

A deformação cisalhante envolve a distorção do corpo. Considerando dois segmentos de linhas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, conforme ilustra a Figura 2.11, com ângulo entre eles definido por θ_0 antes da aplicação da força. Após aplicação da força, se θ não for igual a θ_0, o corpo sofreu deformação cisalhante. A variação angular $(\theta - \theta_0)$ é a *distorção* sofrida pelo corpo após a aplicação da força.

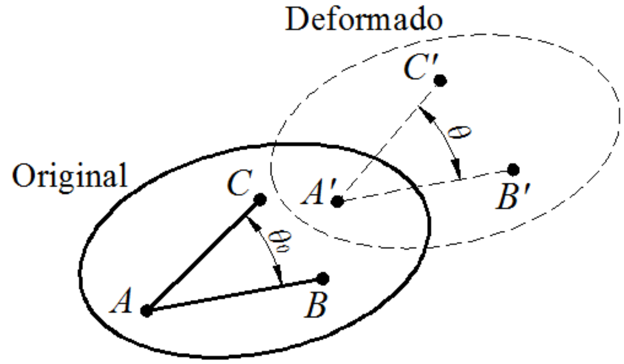


Figura 2.11 – Ilustração da deformação angular

Segundo Riley, Sturges e Morris (2003) a deformação é uma quantidade geométrica que depende do movimento relativo entre dois ou três pontos de um corpo qualquer e não está relacionada unicamente à força ou tensão. Portanto, precisa-se de uma medida quantitativa que exprima a intensidade da deformação, da mesma forma que a tensão exprime uma medida da intensidade de uma força interna (força por unidade de área). Assim sendo, a *Deformação Específica* (deformação por unidade de comprimento) é uma quantidade usada para medir a intensidade de uma deformação e é classificada como:

- A *Deformação Específica Normal*: é definida como a variação do comprimento de um segmento de linha entre dois pontos dividida pelo comprimento original, antes da deformação, deste segmento.

- A *Deformação Específica Cisalhante*: é definida como a distorção angular entre duas linhas as quais eram originalmente perpendiculares.

Da mesma forma que pode ser considerado um tensor de tensão, pode-se considerar um tensor de deformação com componentes de deformações normais e cisalhantes. Conforme Chen e Saleeb (1994) o estado de deformação em um ponto *P* é caracterizado pela variação do comprimento de todas as linhas (fibras do material) que passam por este ponto. No entanto, pode ser determinado se forem conhecidas as deformações lineares e angulares em 3 direções mutuamente perpendiculares.

A Figura 2.12 mostra um elemento infinitesimal $\overline{OP}$ com origem em O. Depois da deformação o elemento torna-se $\overline{O'P'}$, como mostra a Figura:

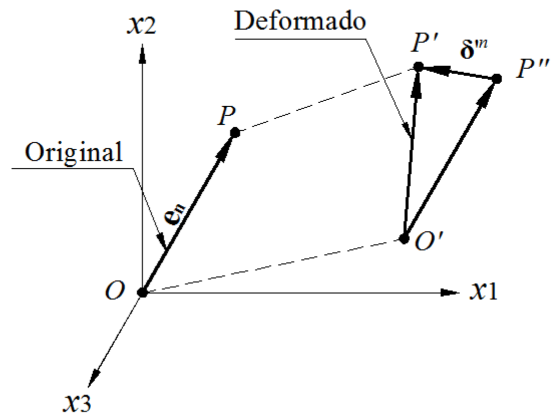


Figura 2.12 – Figura deslocamento relativo

O *vetor de deslocamento relativo* do ponto P em relação ao ponto O é definido por $\boldsymbol{\delta}'^{\mathbf{n}}$, onde $\overline{O'P''}$ é igual e paralelo à $\overline{OP}$. Considerando as fibras do material com comprimento unitário e coordenadas axiais x_1, x_2, e x_3, os correspondentes vetores de deslocamento relativo para estas fibras são dados por $\boldsymbol{\delta}'^1$, $\boldsymbol{\delta}'^2$ e $\boldsymbol{\delta}'^3$, respectivamente.

Para melhor entender a relação entre um vetor de deslocamento relativo $\boldsymbol{\delta}'^{\mathbf{n}}$ qualquer em uma direção do vetor unitário $\mathbf{e_n}$ e os vetores $\boldsymbol{\delta}'^1$, $\boldsymbol{\delta}'^2$ e $\boldsymbol{\delta}'^3$, é utilizada a representação no plano x_1-x_2 da Figura 2.13.

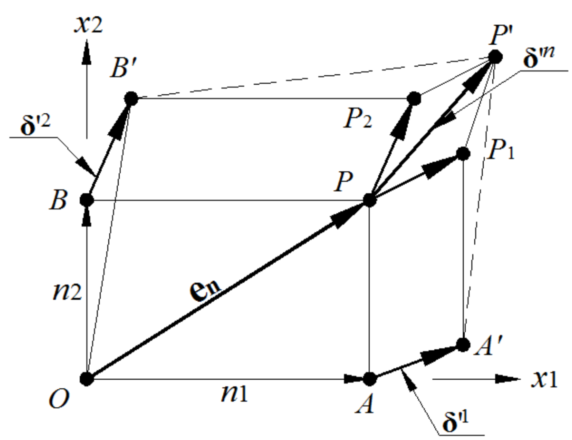


Figura 2.13 –Deslocamento relativo no plano

Pode-se observar na Figura 2.13 que as projeções nos eixos x_1 e x_2 de uma fibra $\mathbf{e_n}$ com comprimento unitário e origem em O são n_1 e n_2, (cossenos diretores), respectivamente. Desta forma tem-se:

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} \tag{2.35}$$

ou

$$\boldsymbol{\delta}' = \boldsymbol{\delta}'^1 n_1 + \boldsymbol{\delta}'^2 n_2 \tag{2.36}$$

Para o caso tridimensional, a equação acima torna-se:

$$\boldsymbol{\delta}' = \boldsymbol{\delta}'^1 n_1 + \boldsymbol{\delta}'^2 n_2 + \boldsymbol{\delta}'^3 n_3 \tag{2.37}$$

A Equação (2.37) é análoga a Equação (2.5), referente ao vetor de tensão. Entretanto, a deformação não é completamente definida simplesmente conhecendo-se os deslocamentos relativos tridimensionais. É necessário separar os movimentos de corpo rígido (translação ou rotação).

O vetor de deslocamento relativo associado com uma fibra $\boldsymbol{e_n}$ nas direções coordenadas x_1, x_2, e x_3 pode ser decomposto em componentes nas três coordenadas. Por exemplo, o vetor $\boldsymbol{\delta}'^1$, associado com a direção x_1 tem três componentes ε'_{11}, ε'_{12} e ε'_{13} nas direções das três coordenadas axiais x_1, x_2, e x_3, respectivamente. Deste modo, a Equação (2.37) pode ser escrita na forma de componentes como:

$$\boldsymbol{\delta}'^{\mathbf{n}}_i = \varepsilon'_{ji}\, n_j \tag{2.38}$$

Aonde ε'_{ij} é um tensor chamado de *tensor de deslocamento relativo* e define completamente o vetor de deslocamento relativo $\boldsymbol{\delta}'^{\mathbf{n}}$ da fibra. Em geral, este tensor é não simétrico. Usando os dois tipos de notação, indicial e de *von Karman*, o tensor pode ser escrito como:

$$\varepsilon'_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon'_{x} & \varepsilon'_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ \varepsilon'_{yx} & \varepsilon'_{y} & \varepsilon'_{yz} \\ \varepsilon'_{zx} & \varepsilon'_{zy} & \varepsilon'_{z} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Decompondo um tensor ε'_{ij} qualquer como a soma de um tensor simétrico e outro anti-simétrico, tem-se (CHEN; SALEEB, 1994):

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji}\right) \tag{2.40}$$

ou

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij} \tag{2.41}$$

onde:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'_{ji}\right) \quad \text{Simétrico} \tag{2.42}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'_{ji}\right) \quad \text{Anti-simétrico} \tag{2.43}$$

O tensor ε_{ij} (simétrico) é chamado de *tensor de deformação* e o tensor Ω_{ij} (anti-simétrico) é chamado *tensor de rotação*. O tensor ε_{ij} é suficiente para se caracterizar o estado de deformação.

Na notação de von Karman, as componentes cisalhantes do tensor de deformação são as chamadas deformações de cisalhamento de engenharia, representadas por γ e definidas como a variação total do ângulo entre duas fibras ortogonais no estado indeformado, desta forma tem-se:

$$\begin{aligned} \gamma_{yx} &= \gamma_{xy} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 2\varepsilon_{12} \\ \gamma_{zx} &= \gamma_{xz} = \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} \\ \gamma_{zy} &= \gamma_{yz} = \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} = 2\varepsilon_{23} \end{aligned} \tag{2.44}$$

Assim sendo, o tensor de deformação pode ser escrito em diferentes notações como:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{x} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{y} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{z} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

No tensor de deformação as componentes da diagonal principal, $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$ e ε_{33}, são as componentes de deformação normal e as demais componentes, $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \ldots,$ são as deformações cisalhantes.

2.2.6 Estado Plano de Deformação

Segundo Beer, Johnston e Dewolf (2006) o estado plano de deformação ocorre em situações nas quais as deformações dos materiais ocorrem em planos paralelos, e são as mesmas em cada um desses planos. Se o eixo z é escolhido como perpendicular aos planos nos quais ocorrem as deformações, tem-se que as deformações nesse plano são nulas. Uma situação assim ocorre em uma placa submetida a forças uniformemente distribuídas, ao longo de suas bordas, e impedida de se expandir ou contrair lateralmente por meio de suportes fixos, rígidos e planos, conforme Figura 2.14a. O estado plano de deformação ocorre também em uma barra de comprimento infinito com seus lados submetidos a forças uniformemente distribuídas, pois, em razão da simetria, os elementos localizados em um dado plano transversal não podem se mover para fora daquele plano. No caso real de uma barra longa submetida a forças transversais uniformemente distribuídas, existe um estado plano de deformação em qualquer seção transversal que não esteja localizada muito perto de qualquer uma das extremidades da barra. A Figura 2.14b representa esta situação.

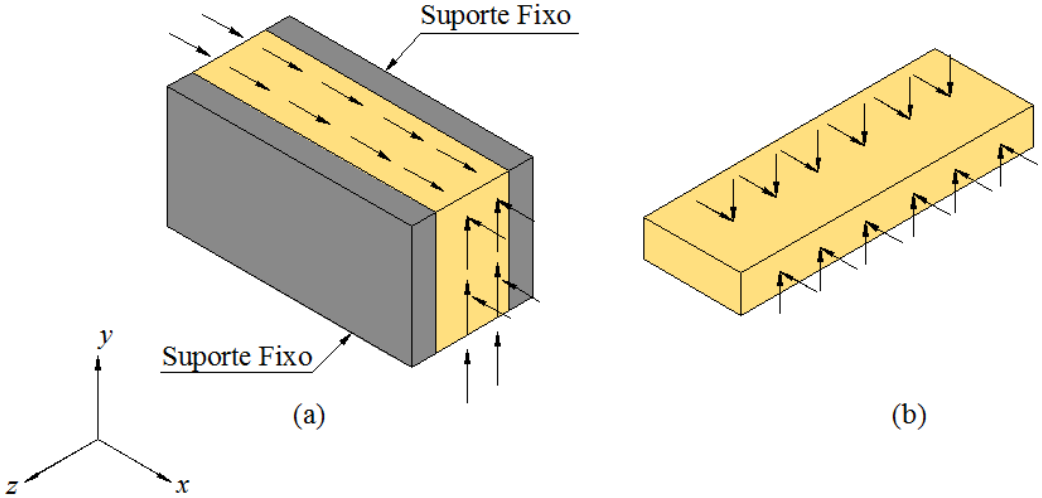


Figura 2.14 – (a) placa restringida e (b) barra em estado plano de deformação

Segundo Timoshenko e Goodier (1980) caso o carregamento não varie ao longo do comprimento e as condições forem as mesmas para todas as seções transversais, as componentes de deslocamentos *u* e *v* nas direções *x* e *y*, respectivamente, são independentes da componente de deslocamento *w* (direção *z*). Se o deslocamento longitudinal *w* for nulo, as deformações referente ao plano *z* serão nulas, como mostra a Equação (2.46):

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \tag{2.46}$$

O problema de estado plano de deformação, como o de estado plano de tensão, se reduz à identificação de σ_x e σ_y e τ_{xy} e a tensão normal σ_z pode ser encontrada em função de σ_x e σ_y por meio da *lei de Hooke*, utilizando-se da Equação (2.47):

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \tag{2.47}$$

sendo ν é o *coeficiente de Poisson*.

2.2.7 Relação entre Deslocamento e Deformação

A relação entre deslocamento e deformação pode ser determinada considerando a deformação de um cubo infinitesimal qualquer de um corpo submetido a forças, ilustrado na Figura 2.15. Considerando que o ponto P seja deslocado a uma distância u na direção x, v na direção y e w na direção z. Os outros cantos do cubo também sejam deslocados, entretanto, com magnitudes diferentes do ponto P, por exemplo, que o ponto Q seja deslocado em u', v' e w'.

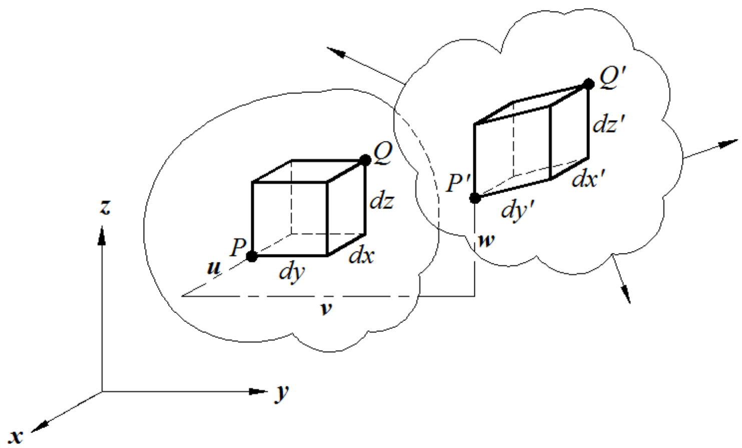


Figura 2.15 – Deformação de um cubo infinitesimal pertencente a um corpo

Segundo Dally e Riley (1978) o deslocamento associado ao ponto Q pode ser expresso em termos dos deslocamentos u, v e w referentes ao ponto P pela expansão em série de Taylor da seguinte forma:

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \cdots$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz + \cdots \tag{2.48}$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots$$

Os termos mostrados nas expressões acima são os únicos termos significativos, presumindo-se que o cubo, considerado na análise, é suficientemente pequeno, sendo que os termos de alta ordem, como (dx^2), (dy^2) e (dz^2), podem ser desconsiderados.

Devido a estas condições, os planos continuarão planos e as linhas retas continuarão retas no cubo deformado, como mostra a Figura 2.15.

A deformação normal pode ser expressa em termos dos deslocamentos dos pontos das extremidades dos segmentos. Por exemplo, considerando o segmento $\overline{PQ}$, originalmente paralelo ao eixo *x*, como mostra a Figura 2.16. Sendo *y* e *z* constantes ao longo de $\overline{PQ}$ e através da equação (2.48), o deslocamento do ponto *Q* em função de *u*, *v* e *w* é dado por:

$$
\begin{aligned}
u' &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\
v' &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \\
w' &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

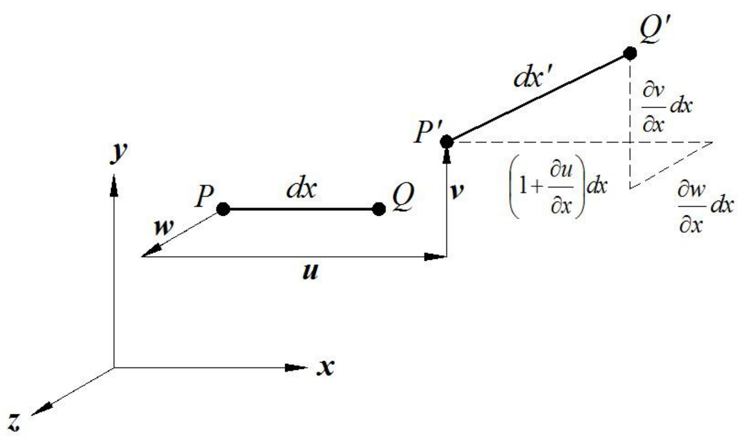


Figura 2.16 – Gradiente de deslocamento associado à deformação normal

Portanto, o aumento no comprimento do segmento $\overline{PQ}$ devido à deformação é $(\partial u/\partial x)$. Conseqüentemente, o alongamento unitário, deformação linear unitária ou deformação específica no ponto *P*, na direção *x*, é $(\partial u / \partial x)$. Da mesma forma, pode ser mostrado que os alongamentos unitários nas direções *y* e *z* são dados pelas derivadas $(\partial v / \partial y)$ e $(\partial w / \partial z)$.

Considerando a distorção do ângulo entre os elementos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, conforme pode ser observado na Figura 2.17, e os deslocamentos do ponto *P* nas direções *x* e *y* sendo *u* e *v* respectivamente, o deslocamento do ponto A na direção y e o do ponto B na direção x são $v + (\partial v / \partial x)dx$ e $u + (\partial u / \partial y)dy$. Devido a estes deslocamentos, a nova direção *P'A'* do elemento $\overline{PA}$ é inclinada pelo pequeno ângulo indicado na Figura 2.17, igual a $(\partial v / \partial x)$. Com isto, verifica-se que o ângulo inicialmente reto *APB* entre os dois elementos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ fica diminuído pelo ângulo $(\partial v / \partial x) + (\partial u / \partial y)$, que é a *deformação angular* ou *deformação por cisalhamento* entre os planos *yx* e *yz*.

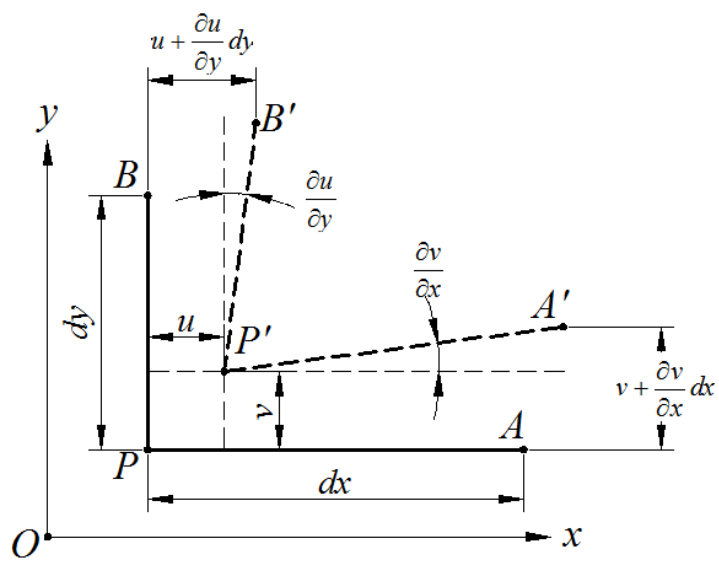


Figura 2.17 – Distorção angular entre os elementos *PA* e *PB*

Segundo Chen e Saleeb (1994), a análise da relação entre deslocamento e deformação é feita considerando dois pontos P e Q, conforme ilustra a Figura 2.18, com coordenadas x_i e $(x_i + dx_i)$ respectivamente, antes da deformação. O comprimento do elemento $\overrightarrow{PQ}$ antes da deformação é dado por ds_o. Depois da deformação os dois pontos são deslocados para os pontos *P'* e *Q'* com coordenadas ξ_i e $(\xi_i + d\xi_i)$, respectivamente. O comprimento do elemento $\overrightarrow{P'Q'}$ torna-se ds.

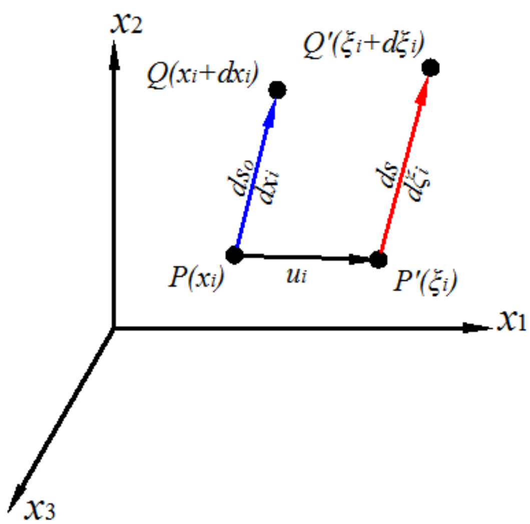


Figura 2.18 – Deformação de um elemento de linha

Alternativamente, exprimindo a diferença entre os quadrados das normas dos comprimentos antes e depois da deformação, obtém-se diretamente a deformação, ou seja, com os movimentos de translação e rotação eliminados. Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned} \|ds_0\|^2 &= dx_i dx_i \\ \|ds\|^2 &= d\xi_i d\xi_i \end{aligned} \tag{2.50}$$

Usando a descrição Lagrangeana, onde todas as quantidades são expressas nas coordenadas x_i, a coordenada ξ_i é representada por:

$$\xi_i = x_i + u_i \tag{2.51}$$

A variação do elemento $d\xi_i$ em função das variáveis infinitesimais x_1, x_2 e x_3 pode ser expressa por:

$$d\xi_i = (x_i + u_i),_j \, dx_j \tag{2.52}$$

o que resulta em:

$$d\xi_i = (\delta_{ij} + u_i,_j)dx_j \tag{2.53}$$

Sendo que:

$$\delta_{ij} = 1 \quad se\ i = j$$
$$\delta_{ij} = 0 \quad se\ i \neq j$$

Se $\|ds_0\|^2$ e $\|ds\|^2$ forem iguais o corpo sofreu apenas um movimento de corpo rígido e não sofreu deformação. Desta forma, a diferença $\|ds\|^2 - \|ds_0\|^2$ pode ser tomada como uma medida de deformação e dada por:

$$\|ds\|^2 - \|ds_0\|^2 = (\delta_{ij} + u_{i},_{j})dx_j(\delta_{ir} + u_{i},_{r})dx_r - dx_i dx_i \tag{2.54}$$

Resolvendo a equação acima e fazendo as contrações necessárias encontra-se a seguinte Equação:

$$\|ds\|^2 - \|ds_0\|^2 = (u_{i},_{j} + u_{j},_{i} + u_{r},_{i}\, u_{r},_{j})dx_i dx_j \tag{2.55}$$

A Equação (2.55) pode ser escrita como:

$$\|ds\|^2 - \|ds_0\|^2 = 2\varepsilon_{ij} dx_i dx_j \tag{2.56}$$

E assim, pode-se determinar o tensor de deformação como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{r,i}u_{r,j}\right) \tag{2.57}$$

O fator ½ foi inserido na definição acima para ser consistente com a interpretação física da deformação. Para pequenas deformações, os termos de segunda ordem podem ser desprezados, ou seja, a Equação (2.57) pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \tag{2.58}$$

Sendo u, v e w as componentes de deslocamento ao longo dos eixos x, y e z, respectivamente, o *Tensor de Deformação* pode ser expresso na forma matricial, por:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

O tensor da Equação (2.59) possibilita a transformação do deslocamento em deformação. No entanto as deformações, principalmente nas superfícies das peças, são determinadas através das técnicas de extensometria, tratadas posteriormente no item 2.3. Neste trabalho, busca-se a determinação do tensor de deformação e de tensão dinâmicos a partir de parâmetros modais, onde os deslocamentos são mais facilmente determinados. Desta forma, o tensor da Equação (2.59) torna-se muito importante. As relações entre deslocamentos dinâmicos, deformações dinâmicas e parâmetros modais serão tratadas nos métodos estudados no final deste Capítulo e no Capítulo 3.

2.2.8 Relação Tensão e Deformação

Existem algumas técnicas para determinação experimental da tensão em estruturas. Uma dessas técnicas, acustoelasticidade, por exemplo, baseia-se na variação da velocidade de propagação de ondas mecânicas relacionadas com a elasticidade. Entretanto, a tensão, convencionalmente, é determinada a partir das relações lineares entre a tensão e a deformação medida através da extensometria. Neste trabalho, a tensão será determinada a partir das leis constitutivas do material e o conhecimento do tensor de deformação. Desta forma, neste item tratar-se-á da relação tensão deformação.

Conforme Timoshenko e Goodier (1980) as relações lineares elásticas entre as componentes de tensão e as componentes de deformação são conhecidas geralmente como *lei de Hooke*, e se deve ao matemático inglês Robert Hooke.

Quase todos os materiais usados na engenharia possuem certo grau de propriedades elásticas. Se as forças externas que produzem deformação em um material não excederem certo limite, a deformação desaparece quando as forças cessam de atuar, e o corpo, dito elástico, retoma sua forma inicial completamente.

Conforme Chen e Saleeb (1994) um material sofre deformação quando é submetido a uma força e se o mesmo retorna à forma e tamanho original ao se cessar a força, ele é dito um *material elástico*. O comportamento elástico é reversível e independente da história do carregamento. O material definido desta forma é chamado *material elástico de Cauchy*. Para tais materiais, a tensão depende somente da deformação, ou seja, a tensão é uma função da deformação. As equações que relacionam tensões e deformações em um material são chamadas *equações constitutivas*. Esta equação é dada da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \tag{2.60}$$

onde F_{ij} é uma função de resposta elástica.

Pode ser mostrado que materiais elásticos de *Cauchy* podem gerar energia sob certas condições de carregamento e descarregamento cíclicos, o que contraria as leis da termodinâmica. Para assegurar que as leis da termodinâmica sejam sempre satisfeitas, a equação constitutiva é restrita a uma função de energia elástica de deformação *W*, de forma que:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{2.61}$$

Materiais com este comportamento são conhecidos como *materiais elásticos de Green*, (CHEN; SALEEB, 1994).

Para o estudo da relação de tensão – deformação nos materiais é necessário observar as propriedades de simetria da estrutura interna do material. A estrutura interna dos materiais podem ser simétrica ou não simétrica. Podem-se citar três tipos de materiais simétricos: material ortotrópico; material transversalmente isotrópico e material isotrópico. Materiais ortotrópicos são os que possuem as mesmas propriedades físicas nos três planos ortogonais de simetria quando os mesmos são rotacionados em qualquer um dos seus planos de simetria. Os materiais transversalmente isotrópicos exibem simetria elástica rotacional. Materiais isotrópicos apresentam mesmas propriedades elásticas em todas as direções. Quando os materiais não apresentam simetria, os mesmos são chamados de materiais anisotrópicos e as propriedades físicas desses materiais variam com a direção.

A relação entre tensão e deformação elástica linear isotrópica, objeto de estudo deste trabalho, pode ser analisada pelo caso mais geral da relação tensão – deformação linear para um material de Cauchy, dada por:

$$\sigma_{ij} = B_{ij} + C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.62}$$

Considerando um estado livre de tensão residual, ou seja, $B_{ij} = 0$, a Equação (2.62) reduz-se para:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.63}$$

A Equação (2.63) é conhecida como *lei de Hooke generalizada*.

Os tensores σ_{ij} e ε_{kl} são tensores de segunda ordem de tensão e de deformação, respectivamente, e C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem com 81 elementos. Os dois primeiros subscritos (*ij*) dos termos deste tensor correspondem aos subscritos (*ij*) dos componentes de tensão ou deformação. Os índices *i*, *j*, *k* e *l* variam de 1 a 3. O tensor C_{ijkl} relaciona cada um dos nove componentes do tensor de deformação a cada um dos nove componentes do tensor de tensão.

Devido à simetria de σ_{ij} e ε_{kl} tem-se que:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \tag{2.64}$$

Desta forma, o número de constantes independentes do tensor é reduzido para 36. Considerando que o material corresponda a um material elástico de *Green*, os quatros subscritos podem ser dados em pares, ou seja, $C_{(ij)(kl)}$, e a ordem dos pares podem ser intercaladas, $C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)}$, e o número de constantes elásticas é reduzido para 21. Se o material apresentar um plano de simetria elástica, o número é reduzido de 21 para 13. Se um segundo plano de simetria, ortogonal ao anterior, é considerado, a quantidade de constantes elástica reduz ainda mais. Na existência de dois planos simétricos, é possível que também exista um terceiro plano de simetria, neste caso, o material é ortotrópico e possui 9 constantes elásticas. Finalmente, para um material onde as propriedades elásticas não dependem da direção, ou seja, é isotróprico, somente duas constantes elásticas são necessárias para relação tensão deformação.

Para um material linear isotróprico, a forma mais geral do tensor C_{ijkl} é dada por:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \alpha(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.65}$$

onde μ, λ e α são constantes escalares. Para que o tensor de quarta ordem satisfaça as condições de simetria é necessário que $\alpha = 0$. Rearranjando a Equações (2.63) e (2.65) tem-se:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \tag{2.66}$$

Da equação acima, fica claro que para material linear isotrópicos há apenas duas constantes de materiais independes, λ e μ, conhecidas como *constantes de Lamé*. A deformação pode ser dada em função da tensão da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}\sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} \tag{2.67}$$

As Equações (2.66) e (2.67) são as formas gerais das leis constitutivas para um material elástico linear isotrópico. Uma importante conseqüência destas equações é que para um material isotrópico as direções principais de tensão e deformação coincidem.

Segundo Timoshenko e Goodier (1980) um paralelepípedo retângulo elementar com as faces paralelas aos eixos coordenados e submetidos à ação da tensão normal σ_x uniformemente distribuída sobre duas faces opostas, está sujeito, até o limite de proporcionalidade, ao seguinte alongamento unitário do elemento:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \tag{2.68}$$

onde *E* é o *modulo de elasticidade longitudinal* na tração, ou módulo de Young. Os materiais utilizados na engenharia estrutural possuem módulos de elasticidade muito grandes, em comparação com as tensões admissíveis.

O alongamento da Equação (2.68), na direção *x* é acompanhado por componentes laterais de deformação (contrações), dadas por:

$$\varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \tag{2.69}$$

Para muitos materiais o *coeficiente de Poisson* pode ser tomado igual a 0,25. Para o aço estrutural, é usualmente considerado igual a 0,3. Conhecidos os valores de tensão e de deformação experimentalmente, o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson são determinados pelas seguintes relações:

$$E = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \tag{2.70}$$

Pelas Equações (2.66) e (2.67) os parâmetros elásticos da Equação (2.70) podem ser reescritos como:

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{2.71}$$

As Equações (2.66) e (2.67), em função das propriedades elásticas da Equação (2.71), podem ser reescritas como:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.72}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{2.73}$$

Para utilização computacional das equações constitutivas, é conveniente representar a relação tensão deformação na forma matricial, para isso, considera-se o vetor de tensão como:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{12}\}^T \tag{2.74}$$

E o vetor de deformação como:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{12}\}^T \tag{2.75}$$

Desta forma, a Equação (2.72), na forma matricial, é expressa por:

$$\{\sigma\} = [H]\{\varepsilon\} \tag{2.76}$$

onde [*H*] é a matriz de rigidez expressa da seguinte forma (CHEN; SALEEB, 1994):

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-2\nu}{2}\right) \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

A Equação (2.73) na forma matricial é dada por:

$$\{\varepsilon\} = [J]\{\sigma\} \tag{2.78}$$

A matriz [*J*] de *Flexibilidade* ou *Compliace* é a inversa da matriz [*H*] e dada por:

$$[J] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

Para o caso do estado plano de tensão, as equações constitutivas são expressas matricialmente nas seguintes formas (CHEN; SALEEB, 1994):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.80}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.81}$$

Considerando o estado plano de deformação, as equações constitutivas são expressas matricialmente nas seguintes formas:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.82}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{(1+\nu)}{E} \begin{bmatrix} (1-\nu) & -\nu & 0 \\ -\nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.83}$$

2.2.9 Tensões Flutuantes de von Mises

Em muitas situações reais de análise de tensão, o carregamento pode ser uma combinação de cargas axiais, flexionais e torcionais, além da complicação introduzida pelo fato de um limite de resistência separado estar associado a cada modo de carregamento. Os fatores de concentração de tensão também precisam ser levados em conta, pois são diferentes para cada modo de carregamento (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005).

Para estas situações onde torna-se difícil a análise de cada forma de tensão separadamente, pode-se considerar a *tensão equivalente de von Mises*. Esta tensão equivalente é derivada da *Teoria da energia de cisalhamento* ou *Teoria da tensão de cisalhamento octaédrica* e baseia-se na energia de distorção. Os materiais dúcteis quando tensionados hidrostaticamente exibem resistência de escoamento muito acima dos valores fornecidos pelo ensaio de tração simples, pois passam por uma mudança de volume sem distorção. Encontrando a energia de deformação por unidade de um volume sujeita a tensões principais e devido a colaboração do Dr. von Mises (1883 -1953) a tensão de *von Mises* σ' é escrita conforme Equação (2.84) (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005):

$$\sigma' = \sqrt{\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}{2}\right]} \tag{2.84}$$

Para tensões planas, considerando σ_1 e σ_2 as duas tensões principais não nulas, a tensão de *von Mises* é:

$$\sigma' = \sqrt{(\sigma_1^2-\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)} \tag{2.85}$$

Utilizando as componentes de tensões obtidas do tensor tridimensional de tensões, a tensão de *von Mises* pode ser escrita como:

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left(\tau_{xy}^{\ 2}+\tau_{yz}^{\ 2}+\tau_{zx}^{\ 2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.86}$$

Para tensões planas,

$$\sigma' = \left[\sigma_x^{\ 2}-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^{\ 2}+3\tau_{xy}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.87}$$

No presente estudo, é abordada a análise de tensão dinâmica. As tensões dinâmicas apresentam variação da amplitude ao longo do tempo. Essas variações das amplitudes de tensões ao longo do tempo, ou seja, tensões flutuantes, podem assumir formas de ondas senoidais, devido à natureza de algumas máquinas rotativas, ou apresentar alguns padrões irregulares. A Figura 2.19 apresenta alguns sinais de tensão que podem ocorrer no tempo.

Conforme Shigley, Mischke e Budynas (2005) em padrões periódicos exibindo um único máximo e um único mínimo de tensão, a forma de onda não é importante, mas os picos sim.

Desta forma, a componente de amplitude de tensão σ_a e a componente média de tensão σ_m podem ser levadas em conta na caracterização do padrão de tensão. Estas componentes podem ser visualizadas na Figura 2.19 e são encontradas pelas seguintes relações:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$
$$\sigma_a = \left| \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \right| \tag{2.88}$$

onde, $\sigma_{\max}$ e $\sigma_{\min}$ são as tensões máximas e mínimas analisadas. Utilizando as componentes flutuantes de tensão, de amplitude e média das tensões principais, e substituindo nas Equações que definem a tensão de *von Mises*, dadas anteriormente, pode-se encontrar a *tensão alternada de von Mises* σ'_a e a *tensão média de von Mises* σ'_m. Esses valores de tensão podem ser usados em critérios de falhas específicos para determinação de vida em fadiga da máquina, por exemplo.

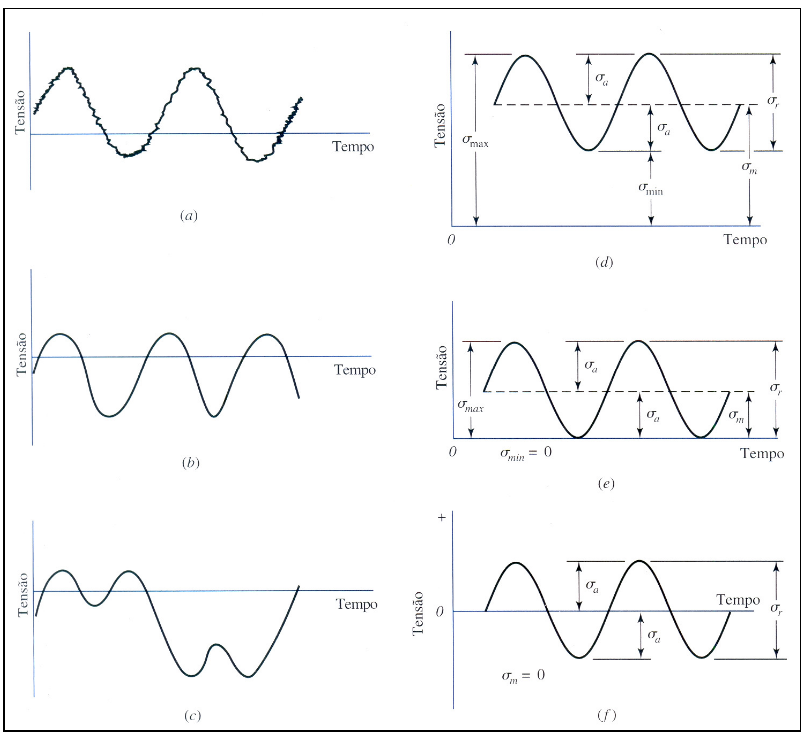


Figura 2.19 – (a) tensão flutuante com ruído; (b e c) tensão flutuante não senoidal; (d) tensão flutuante senoidal; (e) tensão repetida; (f) tensão senoidal completamente alternada (SHIGLEY; MISCHKE; BUDYNAS, 2005)

2.3 Técnicas Extensométricas

Neste trabalho, busca-se determinar o tensor de deformação de um ponto, principalmente de uma superfície, através do conhecimento dos deslocamentos medidos pelas técnicas da análise modal e a derivação espacial conforme o tensor da Equação (2.59). Entretanto, convencionalmente, o tensor de deformação é determinado através de técnicas de extensometria. Devido à utilização de uma dessas técnicas nos experimentos realizados e também pela sua possível utilização para a determinação dos modos de deformação, este item trata dos conceitos e alguns equipamentos utilizados para determinação experimental da deformação através da extensometria.

A extensometria pode ser dita como um conjunto de técnicas que permitem determinar o estado de deformação em torno de um ponto de um corpo, a partir do conhecimento das deformações nas várias direções desse ponto.

As deformações podem ser determinadas a partir de medições realizadas por extensômetros e esses valores de deformação medidos podem ser usados na análise e diagnóstico de problemas dinâmicos, monitoramento de condições operacionais, manutenção preditiva, análise de falha e também no ajuste de modelos finitos, para que estes sejam otimizados de forma a minimizar os erros de aproximação.

Entre as principais técnicas de medições extensométricas, podem se citar aquelas que usam os seguintes transdutores:

Extensômetro mecânico: Por meio de dispositivos mecânicos de alavanca e engrenagens ligados à estrutura se obtém uma ampliação dos deslocamentos relativos das extremidades da estrutura. Segundo Dally e Riley (1978) os extensômetros mecânicos são geralmente empregados na engenharia civil estrutural.

Extensômetro ópticos: A ampliação do deslocamento relativo da superfície da estrutura é conseguida por meios ópticos (espelhos e lentes). As análises de Franjas de Moiré, Holografia e Fotoelasticidade, são exemplos de técnias ópticas. Maiores detalhes destas técnicas podem ser vistos em Hetényi (1966) e Dally, Riley e Mcconnell (1993).

Extensômetros acústicos: A medição das deformações é realizada por auscultação do período de vibração de um fio de aço (corda vibrante) tensionado entre dois pontos ligados à base de medida.

Extensômetros elétricos de indução: São baseados na variação da impedância do circuito de um solenóide quando submetido a uma deformação.

Extensômetro semicondutores: O seu princípio de funcionamento é baseado no efeito piezoresistivo e é indicado para realizar medições de deformação muito pequenas, (IIZUKA, 2006).

Extensômetro capacitivo: Usados em condições de temperatura até 500° C.

Extensômetro Piezoelétrico: Similar aos transdutores que utilizam o quartzo como material ativo, os extensômetros piezoelétricos utilizam uma liga de bário e titânio para gerar uma mudança de potencial a qual é proporcional à deformação da estrutura analisada.

Camada Frágil: As camadas frágeis são utilizadas para localização das áreas de maior deformação em uma estrutura. Esta camada frágil é aplicada na superfície do corpo que após ser solicitado, faz aparecer finas fraturas na camada, cujas direções são perpendiculares às tensões principais (FIGUEIREDO e ALMEIDA, 2002).

Extensômetros elétricos (*Strain Gages*): Os extensômetros elétricos são dispositivos de medida que transformam pequenas variações nas dimensões de um corpo em variações equivalentes em suas resistências elétricas. Esses extensômetros estão baseados na variação da resistência elétrica de um condutor quando submetido a uma deformação. A técnica que utiliza os *strain gages* para a determinação do estado de deformação em um ponto da estrutura é denominada *extensometria elétrica* e será detalhada no item subseqüente.

2.3.1 Extensometria Elétrica

A extensometria elétrica é uma técnica de extensometria que consiste em medir a deformação através de extensômetros elétricos, *strain gages*. A deformação é convertida em uma quantidade elétrica (voltagem) e essa quantidade ao ser amplificada pode ser lida e analisada em um local remoto. É uma técnica não destrutiva e pode ser realizada em equipamentos em operação. Os *strain gages* são desenvolvidos com algumas características que contribuem para boa qualidade das medições de deformações, dentre as quais, destacam-se, (DALLY; RILEY; MCCONNELL, 1993):

- A variação do fator de calibração dos extensômetros para um determinado tempo e uma faixa de temperatura é desprezível.

- Oferecem alta precisão de medição, capazes de medir pequenas deformações, por exemplo, $\pm 1\mu\varepsilon$ com variação menor que 10%.

- São disponíveis em tamanhos relativamente pequenos, 0,2 mm, por exemplo, permitindo a medição de deformação em uma região pontual.

- Devido ao pequeno tamanho e peso, os *strain gages* apresentam baixa inércia e possuem boa resposta dinâmica.

- Os *strain gages* apresentam excelente linearidade na respostas de deformação.

- Podem ser utilizados em locais remotos.

Em 1856 Lord Kelvin verificou que fios metálicos energizados quando eram submetidos a uma deformação sofriam variações de suas resistências elétricas proporcionais à deformação sofrida. De acordo com Dally, Riley e Mcconnell (1993) o princípio físico descoberto por Lord Kelvin, pode ser modelado pela equação de resistência de um condutor. A resistência de um condutor uniforme metálico pode ser expressa como:

$$R = \frac{\varpi L}{A_t} \tag{2.89}$$

onde: R = Resistência elétrica do condutor;

ϖ = Resistividade específica do metal;

L = Comprimento;

A_t = área da seção transversal

A Figura 2.20 ilustra um segmento de um fio condutor sob tração.

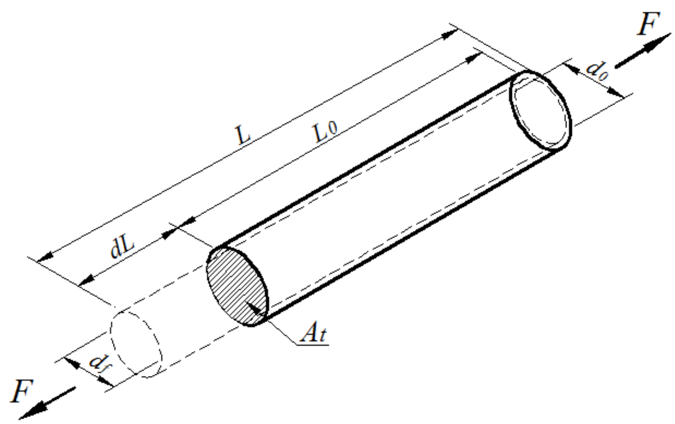


Figura 2.20 – Deformação em fio sob tração

Diferenciando a Equação (2.89) e dividindo-a pela resistência R tem-se:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\varpi}{\varpi} + \frac{dL}{L} - \frac{dA_t}{A_t} \qquad (2.90)$$

O termo dA_t refere-se a variação da seção transversal do condutor submetido a uma tração. Para o caso de tensão uniaxial, tem-se:

$$\varepsilon_a = \frac{dL}{L} \quad e \quad \varepsilon_t = -\nu \frac{dL}{L} \qquad (2.91)$$

onde: ε_a = Deformação específica axial do condutor;

ε_t = Deformação específica transversal do condutor;

Se o diâmetro do condutor antes da aplicação da tração é d_0, após a aplicação da tração o diâmetro do condutor será d_f definido por:

$$d_f = d_0\left(1 - \nu \frac{dL}{L}\right) \qquad (2.92)$$

O diferencial de área pode ser expresso em função da variação do diâmetro como:

$$\frac{dA}{A} = -2\nu\frac{dL}{L} + \nu^2\left(\frac{dL}{L}\right)^2 \approx -2\nu\frac{dL}{L} \tag{2.93}$$

Substituindo a Equação (2.93) na (2.90) e fazendo algumas simplificações tem-se:

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\varpi}{\varpi} + \frac{dL}{L}(1+2\nu) \tag{2.94}$$

A equação anterior pode ser escrita considerando os termos de deformação axial e transversal do condutor, como:

$$S_a = \frac{dR/R}{\varepsilon_a} = \frac{d\varpi/\varpi}{\varepsilon_a} + (1+2\nu) \tag{2.95}$$

A Equação (2.95) define a sensibilidade S_a à deformação do metal ou liga utilizada no condutor e é determinada experimentalmente. Pela Equação (2.95) percebe-se que o fator de sensibilidade à deformação do *strain gage* depende da variação de sua dimensão, dada por $(1+2\nu)$, e pela variação da resistividade específica do material, representada pelo termo $(d\varpi/\varpi)/\varepsilon_a$. A sensibilidade à deformação S_a varia entre 2 e 4 para diferentes ligas utilizadas na fabricação dos extensômetros.

Na Tabela 2.1 estão listadas algumas sensibilidades à deformação para ligas utilizadas na fabricação de *strain gages* (DALLY; RILEY; MCCONNELL, 1993).

Tabela 2.1 – Sensibilidade à deformação S_a para ligas usadas nos *strain gages*

Material	***Composição (%)***	S_a
Constantan	45 Ni, 55 Cu	2,1
Nichrome V	80 Ni, 20 Cr	2,1
Isoelastic	36 Ni, 8 Cr, 0,5 Mo, 55,5 Fe	3,6
Karma	74 Ni, 20 Cr, 3 Al, 3 Fe	2,0
Armour D	70 Fe, 20 Cr, 10 Al	2,0
Platinum-Tungsten	92 Pt, 8 W	4,0

Sendo a sensibilidade transversal do *strain gage* a menor possível, pode-se considerar que a variação da resistência do extensômetro será proporcional apenas a deformação específica ε longitudinal, definida por:

$$\frac{dR}{R} = S_g \varepsilon \qquad (2.96)$$

onde S_g é o fator do *strain gage* ou constante de calibração do extensômetro. Esse fator é um pouco menor que a sensibilidade à deformação da liga utilizada no extensômetro.

Tipos de Extensômetros Elétricos e Formas Construtivas

Quando os extensômetros elétricos *strain gages* foram inicialmente utilizados (1936-1950), eles eram formados por uma pequena grade gerada por um fio resistivo de pequeno diâmetro. Desde 1950, os *strain gages* estão sendo fabricados em filmes metálicos. Desta forma, a maioria dos extensômetros são do tipo "*metal-foil*". Esses extensômetros tipo lâmina são os mais usados e são confeccionados com técnicas de circuito impresso. O material resistivo (filme) possui alguns micra de espessura e está depositado num material eletricamente isolado, chamado base. O desenho final da parte resistiva (filme) é obtido através de um processo fotográfico. A Figura 2.21 ilustra o filme resistivo em uma base de um *strain gage*.

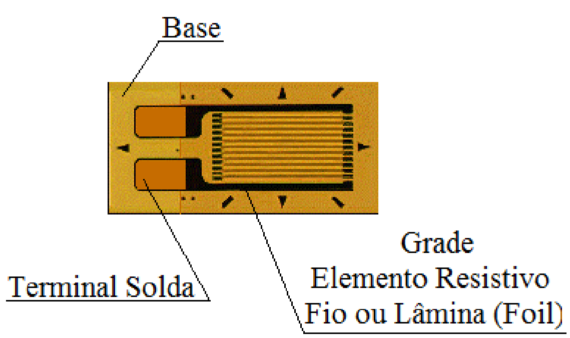


Figura 2.21 – Strain Gage "*metal foil*"

Com a aplicação do processo fotográfico na fabricação dos *strain gages*, grande variedade de tipos e tamanhos desses extensômetros estão disponíveis para utilização. Comercialmente, eles são encontrados em tamanhos que variam de 0,2 mm até 150 mm e possuem resistência de 120 Ω ou 350 Ω. Em algumas configurações, pode-se encontrar extensômetros com resistência de 500

Ω, 1000 Ω ou 5000 Ω. As ligas utilizadas para a fabricação das grades dos extensômetros são geralmente as listadas na Tabela 2.1.

O tamanho do *strain gage* é definido pelo seu comprimento ativo dado pelo comprimento da grade. A Figura 2.22 ilustra um *strain gage* uniaxial e suas respectivas dimensões de grade e de base e a direção da medição da deformação ε longitudinal.

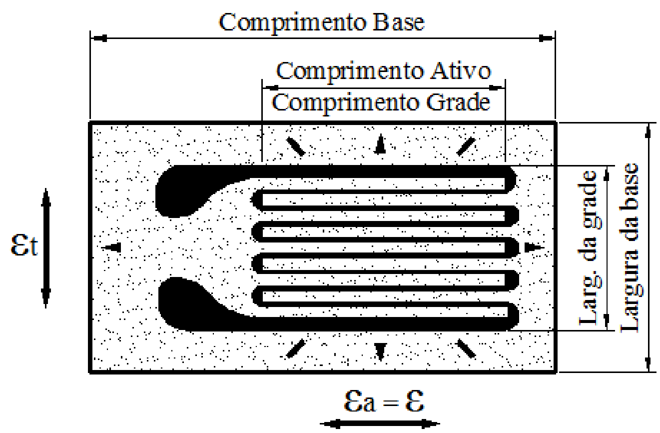


Figura 2.22 – Dimensões do Strain Gage e direção de medição de deformação ε

Como mencionado, o filme é depositado em uma base e esta é constituída de diversos tipos de materiais conforme o tipo de aplicação do extensômetro. Entre as principais funções da base dos extensômetros, pode-se citar que as mesmas possibilitam a colagem do *strain gage* na superfície de medição, são isolantes e servem de apoio para o manuseio da *strain gage*, já que, o filme metálico da grade dos extensômetro "*metal foil*" é muito frágil e passível de algumas distorções. A base pode ser de resina epóxi-fenólico, uma resina especial obtida pela modificação do fenol em epóxi. Os extensômetros que contém esse tipo de base são finos, flexíveis (resistentes à fadiga), fáceis de manusear e apresentam pouca variação do sinal de saída ao longo do tempo. A faixa de temperatura de operação varia entre -50° C á +180° C. Outro tipo de base utilizada nos extensômetros de filme resistivo são as bases poliamidas, que possuem resistência ao calor e são apropriados para medidas em ensaios de longa duração Mais detalhes sobre material de base e suas aplicações pode ser encontradas em Dally, Riley e Mcconnell (1993) e Andolfato, Camacho e Brito (2004).

Em relação à classificação dos *strain gages* quanto ao formato, eles podem ser uniaxial, biaxial ou com múltiplos eixos como a roseta. Os dois primeiros são utilizados quando as direções principais de deformação são conhecidas, sendo possível a determinação da deformação em uma ou duas direções, respectivamente. Quando as direções principais não são conhecidas, são utilizados os *strain gages* tipo roseta, que podem ser de 0°, 45° e 90° ou outra disposição. As direções principais são determinadas posteriormente à medição, utilizando o *círculo de Mohr*, ver detalhes em Timoshenko e Goodier (1980, p. 23-27) e Dally e Riley (1978, p. 318-327).

A Figura 2.23 ilustra algumas configurações de *strain gages* tipo "*metal foil*" utilizados nas medições de deformação.

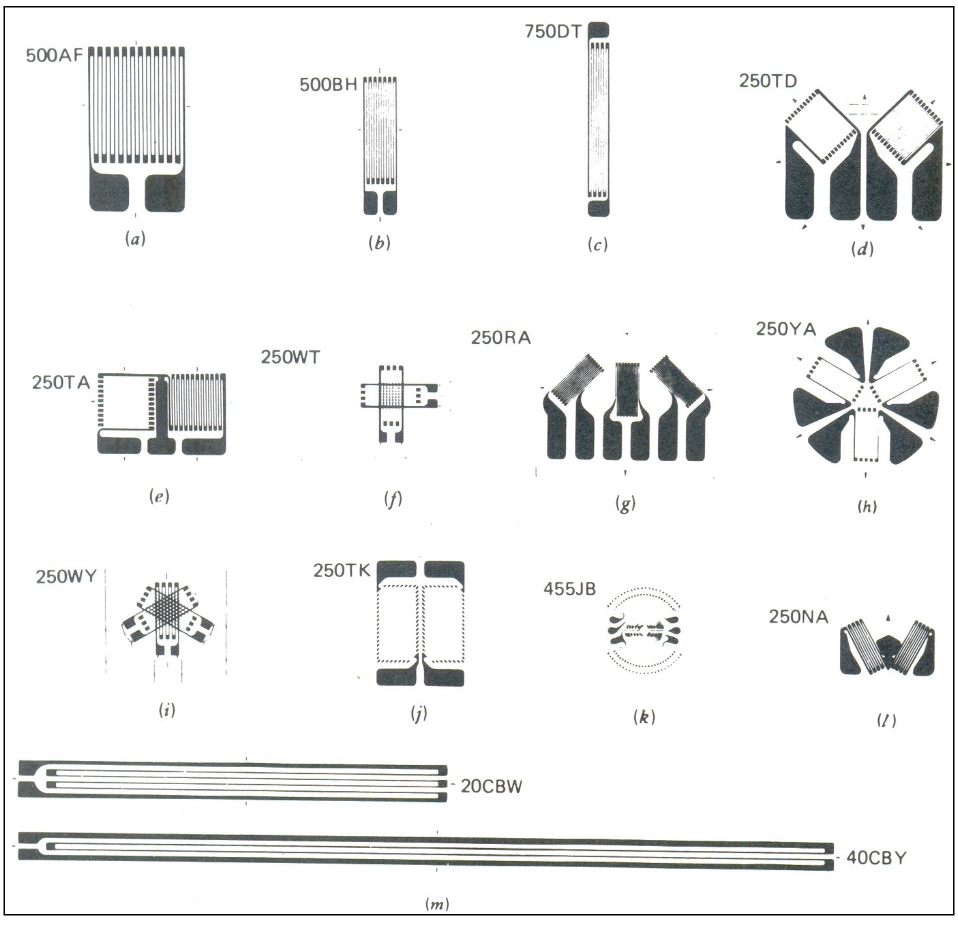


Figura 2.23 – Configurações de *strain gages* tipo metal foil (a,b,c) uniaxial;(d,e) roseta dupla; (f) roseta dupla sobreposta; (g,h) roseta tripla; (i) roseta tripa sobreposta; (j) medição torque; (k) *strain gage* tipo diafragma; (l) roseta dupla; (m) uniaxial para concreto, (DALLY; RILEY; MCCONNELL, 1993)

***Ponte de Wheatstone*:**

A ponte de Wheatstone é o circuito mais comumente usado para converter a variação de resistência $\Delta R / R$ do *strain gage* em uma voltagem V_s de saída. Os *strain gages* são inseridos em uma ponte de Wheatstone e quando há deformação, a ponte fica em desequilíbrio, gerando uma tensão elétrica proporcional ao desequilíbrio. A Figura 2.24 mostra o esquema típico da ponte de Wheastone:

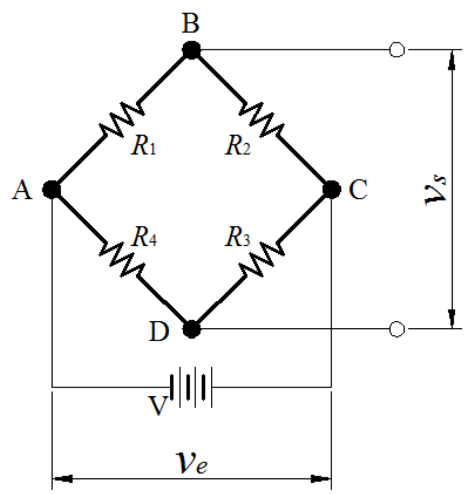


Figura 2.24 – Circuito da Ponte de Wheatstone

Segundo Dally e Riley (1978) a tensão que passa através da resistência R_1 da ponte de Wheastone da figura acima é dada por:

$$V_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_e \tag{2.97}$$

onde V_e é a tensão de alimentação da ponte.

Da mesma forma, a tensão que passa pela resistência R_4 é dada por:

$$V_{AD} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_e \tag{2.98}$$

A tensão V_s de saída ponte, será então:

$$V_s = V_{BD} = V_{AB} - V_{AD} \qquad (2.99)$$

Substituindo as Equações (2.97) e (2.98) na (2.99) e fazendo as simplificações necessárias, tem-se:

$$V_s = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} V_e \qquad (2.100)$$

Para que a ponte esteja balanceada, ou seja, a tensão de saída da ponte seja nula, todas as resistências da ponte devem ser iguais ou:

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \qquad (2.101)$$

Considerando a ponte inicialmente balanceada e caso as resistências R_1, R_2, R_3 e R_4 variarem em ΔR_1, ΔR_2, ΔR_3 e ΔR_4, respectivamente, a variação da tensão de saída ΔV_s é dada por:

$$\Delta V_s = V_e \frac{\begin{vmatrix} R_1 + \Delta R_1 & R_2 + \Delta R_2 \\ R_4 + \Delta R_4 & R_3 + \Delta R_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + \Delta R_1 + R_2 + \Delta R_2 & 0 \\ 0 & R_3 + \Delta R_3 + R_4 + \Delta R_4 \end{vmatrix}} \qquad (2.102)$$

Pela expansão dos determinantes da Equação acima, considerando que $R_1 R_3 = R_2 R_4$ e desprezando os termos de ordem superior é possível mostrar que:

$$\Delta V_s = V_e \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \qquad (2.103)$$

Considerando que $R_2 / R_1 = r$, a Equação (2.103) torna-se:

$$\Delta V_s = V_e \frac{r}{(1 + r)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \qquad (2.104)$$

A Equação (2.104) representa a equação básica da utilização da ponte de Wheatstone nas medidas de deformação. A saída ΔV_s é função linear das variações nas resistências. Esta linearidade resulta da simplificação dos termos de ordem superior. Esta simplificação tem pequeno efeito para pequenas variações nas resistências, ou seja, conforme Dally (1978), menor que 5%.

Sejam os extensômetros SG_a ,SG_b, SG_c, SG_d, os quatro resistores, R_1, R_2, R_3 e R_4 respectivamente, aplicados numa determinada peça e sendo $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$, conseqüentemente $r = 1$, e os quatro extensômetro possuírem o mesmo fator S_g, a saída ΔV_s será dada por:

$$\Delta V_s = \frac{1}{4} V_e S_g \left(\varepsilon_a - \varepsilon_b + \varepsilon_c - \varepsilon_d \right) \tag{2.105}$$

Na aplicação da extensometria, não necessariamente os quatros braços da ponte de Wheatstone são compostos por extensômetros. Segundo Dally, Riley e Mcconnell (1993) , Iizuka (2002) e Figueiredo Almeida (2002) quatro arranjos de circuito são utilizados nas medições de extensometria, os quais são:

- *Arranjo de ¼ ponte*: O extensômetro SG_a substitui a resistência R_1 do circuito da ponte de Wheatstone.

- *Arranjo de ½ ponte assimétrica*: Os extensômetros SG_a e SG_b substituem as resistências R_1 e R_2, respectivamente, do circuito da ponte de Wheatstone.

- *Arranjo de ½ ponte simétrica*: Os extensômetros SG_a e SG_c substituem as resistências R_1 e R_3, respectivamente, do circuito da ponte de Wheatstone.

- *Arranjo de ponto completa*: Os extensômetros substituem todas as resistências da ponte de Wheatstone.

Os arranjos acima são executados dependendo dos tipos de medições de deformação que se deseja realizar. Em alguns casos, os arranjos são usados para aumentar a sensibilidade de medição e ainda para compensação do efeito da variação da temperatura na deformação.

2.4 Análise de Vibração e Análise Modal

Os sistemas mecânicos possuem propriedades dinâmicas, massa, rigidez e amortecimento, distribuídos na estrutura e responsáveis pela inércia, rigidez elástica e dissipação de energia. Esses sistemas são passíveis de movimento relativo e repetitivo. Esses movimentos são estudados através da vibração (INMAN, 2001).

Segundo Maia e Silva (1997) o modelamento de um sistema mecânico é muito complexo e pode ser satisfatoriamente representado por elementos discretos que representem o sistema dinâmico.

A representação de um sistema mecânico em elementos discretos pode ser considerada como uma idealização do sistema. Se o sistema mecânico puder ser representado por apenas uma coordenada que consiga descrever sua posição geométrica a qualquer instante de tempo, o sistema pode ser dito como um sistema de um grau de liberdade (SDOF), ver Apêndice A. Geralmente, se N coordenadas forem necessárias para especificar a posição de um sistema mecânico, diz-se que o mesmo tem N graus de liberdade (MDOF). Por exemplo, um corpo rígido que se move livremente no espaço tem seis graus de liberdade, três de translação e três de rotação (HARTOG, 1972).

A análise modal faz parte do estudo de vibração e consiste em determinar os parâmetros modais da estrutura, as freqüências naturais, formas modais e os fatores de amortecimento modal. Estes parâmetros formam o modelo modal da estrutura e servem para caracterizar o comportamento dinâmico da mesma.

A análise modal pode ser feita analiticamente, numericamente e ou experimentalmente. A *análise modal analítica* ou *teórica* baseia-se na solução da equação do movimento que rege o sistema, formada pelas matrizes de massa $[M]$, rigidez $[K]$ e eventuais amortecimentos, por exemplo uma matriz $[C]$. A solução da equação diferencial de movimento resulta em um problema de autovalor e autovetor, que são as freqüências naturais e modos de vibrar, respectivamente. A *análise modal experimental* consiste em estimar os parâmetros modais experimentalmente através de procedimentos padrões desta técnica. Quando a análise modal é feita para verificação de um modo específico de vibração, em casos em que a força excitadora não é conhecida ou em máquinas em operação, a técnica é denominada *análise modal operacional*.

A *análise modal numérica* também consiste em extrair as freqüências naturais e as formas modais de um sistema a partir da solução da equação de movimento que caracteriza o mesmo, entretanto usam-se modelos numéricos para esta solução. A análise modal utilizando o método de elementos finitos é largamente empregada, no entanto, a estimativa de fatores de amortecimento modais não são previstos por esta análise. Desta forma, a análise modal experimental e numérica são usadas como ferramentas complementares, pois a análise modal experimental, por muitas vezes, é realizada para ajustar o modelo de elementos finitos de forma que este represente as condições reais da estrutura.

2.4.1 Sistemas com Múltiplos Graus de Liberdade

Em muitos casos, os sistemas mecânicos são discretizados em um número finito N de graus de liberdade e podem ser analisados a partir do estudo de sistemas mecânicos que apresentam múltiplos graus de liberdade.

O modelo matemático de sistemas com múltiplos graus de liberdade está relacionado com a teoria da análise modal. Para este estudo, a estrutura deve ser considerada um sistema linear que pode ser representado dinamicamente por uma equação diferencial de segunda ordem, apresente características invariantes no tempo e obedece ao *princípio de reciprocidade de Maxwell*, onde, segundo Maia e Silva (1997) a resposta em um ponto j devido à excitação em um ponto k da estrutura é a mesma que se a excitação ocorresse no ponto j e a resposta fosse medida no ponto k A Figura 2.25 ilustra um sistema com N graus de liberdade constituído de elementos de massa, rigidez e amortecimento.

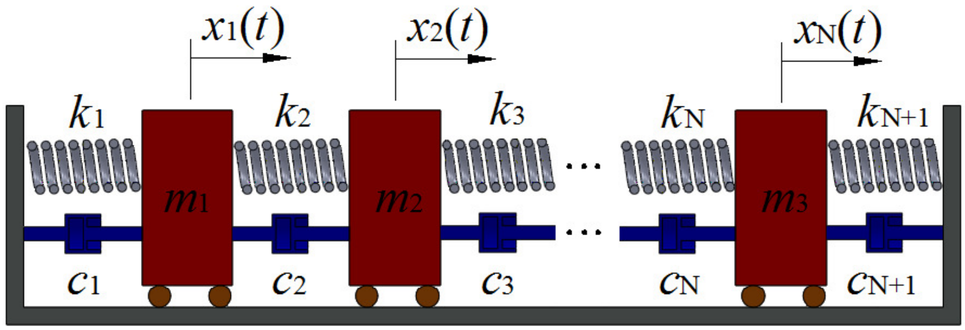


Figura 2.25 – Representação de um sistema com *n* graus de liberdade

O sistema da Figura acima pode ser representado na forma matricial como mostra a Equação (2.106):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[C]\{\dot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \tag{2.106}$$

onde [*M*], [*C*] e [*K*] são matrizes de dimensões $N \times N$ de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente e $\{\ddot{x}(t)\}$, $\{\dot{x}(t)\}$ e $\{x(t)\}$ são vetores de dimensão $N \times 1$ da aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente e $\{f(t)\}$ é o vetor $N \times 1$ da força externa excitadora.

Para obtenção dos modos próprios do sistema, freqüência natural modal e a compreensão da ortogonalidade ponderada dos vetores modais, pode-se considerar o sistema apresentado na Figura 2.25 conservativo e com vibração livre e assim a Equação (2.106) torna-se:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{0\}, \tag{2.107}$$

com as matrizes de massa e rigidez simétricas. O sistema de equações representado pela Equação anterior tem uma solução geral do tipo:

$$\{x(t)\}=\{\bar{x}\}e^{i\omega t} \tag{2.108}$$

sendo $\{\bar{x}\}$ um vetor $N \times 1$ de amplitudes independentes do tempo, real ou complexa.

Substituindo a solução proposta e sua derivada na Equação (2.108) obtém-se:

$$\left([M]\omega^2 + [K]\right)\{\bar{x}\}e^{i\omega t} = \{0\} \tag{2.109}$$

Para que a Equação (2.109) tenha outra solução além da trivial, ou seja, $\{\bar{x}\}$ não seja nulo, o determinante de $\left([M]\omega^2 + [K]\right)$ dever ser nulo, ou seja:

$$\left|[M]\omega^2 + [K]\right| = 0 \tag{2.110}$$

Para um sistema estável, a solução do determinante acima resulta em um polinômio característico com *N* possíveis soluções positivas e reais $\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_N^2$, que são os autovalores da Equação (2.107). Os valores $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ são as freqüências naturais não amortecidas do sistema.

Substituindo os autovalores na Equação abaixo:

$$\left([M]\omega_r^2 + [K]\right)\{\psi_r\} = \{0\} \tag{2.111}$$

obtém-se os autovetores associados $\{\psi_r\}$com $(r = 1,2,\ldots,N)$, que são os modos próprios do sistema. Esses vetores que contém *N* elementos reais (positivos ou negativos) representam os deslocamentos relativos de cada grau de liberdade associado à freqüência natural referente ao modo *r*. Desta forma, as freqüências naturais e modos próprios são os parâmetros modais do sistema.

A solução completa para um problema de vibração livre é expresso em duas matrizes $N \times N$ da seguinte forma:

$$diag\lfloor \omega_r^2 \rfloor = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \tag{2.112}$$

e

$$[\Psi] = [\{\psi_1\} \quad \{\psi_2\} \quad \cdots \quad \{\psi_N\}] \tag{2.113}$$

onde $\lfloor \omega_r^2 \rfloor$ é uma matriz diagonal denominada *matriz espectral* e $[\Psi]$ é a *matriz modal*, ambas constituem o modelo modal do sistema.

Os autovetotes $\{\psi_r\}$ formam uma base espacial e apresentam uma importante propriedade de ortogonalidade ponderada dos vetores modais definida por:

$$\{\psi_s\}^T [M] \{\psi_r\} = 0 \quad (r \neq s) \tag{2.114}$$

e

$$\{\psi_s\}^T [K] \{\psi_r\} = 0 \quad (r \neq s) \tag{2.115}$$

Quando $r = s$, ou seja, o mesmo modo, tem-se:

$$\omega_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [K] \{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\}} = \frac{k_r}{m_r} \tag{2.116}$$

sendo k_r e m_r a rigidez e massa modais ou generalizada do modo *r*.

Os vetores modais apresentam o deslocamento relativo entre os graus de liberdade, como se viu anteriormente, entretanto eles podem ser normalizados. Convencionalmente na análise modal os vetores modais são normalizados pela matriz de massa utilizando o valor da massa modal da seguinte forma:

$$\{\phi\}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \{\psi_r\} \tag{2.117}$$

onde $\{\phi_r\}$ representa o vetor modal normalizado pela massa. Substituindo os vetores modais $\{\psi\}$ na matriz modal pelos vetores modais normalizados pela massa $\{\phi\}$ na Equação (2.113), tem-se a matriz modal normalizada pela massa $[\Phi]$, onde as linhas desta matriz referem-se aos graus de liberdade do sistema e as colunas referem-se aos modos analisados.

Das propriedades da ortogonalidade ponderada dos vetores modais normalizados pela matriz de massa tem-se:

$$\begin{aligned} & [\Phi]^T[M][\Phi] = [I] \\ & [\Phi]^T[K][\Phi] = \lfloor \omega_r^2 \rfloor \end{aligned} \tag{2.118}$$

Transformação de Coordenadas

Na análise dinâmica de sistemas em coordenadas espaciais pode haver o acoplamento dinâmico, que ocorre quando a matriz de massa não é diagonal, ou o acoplamento estático, que ocorre quando a matriz de rigidez não é diagonal. Estes acoplamentos dificultam a obtenção do vetor de resposta temporal $\{x(t)\}$, desta forma, através das propriedades da matriz modal, tem-se a seguinte transformação de coordenadas para o desacoplamento do sistema:

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{q(t)\} \tag{2.119}$$

onde $\{q(t)\}$ são chamadas *coordenadas modais* ou *principais*.

A partir da transformação de coordenadas é possível estudar os sistemas com N graus de liberdades sujeitos a forças externas excitadoras e processos de dissipação de energia que atenuam as amplitudes de vibração é são responsáveis pelo acoplamento dos modos. Esses processos de dissipação podem ser avaliados pelos tipos de amortecimentos, como os mais clássicos, o amortecimento viscoso proporcional, amortecimento viscoso geral e o amortecimento histerético.

Sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento viscoso proporcional

Assumindo a Equação (2.106) e utilizando a transformação de coordenadas, pode se escrever, para análise de um sistema sujeito a vibração livre, ou seja, $\{f(t)\}=0$, a seguinte equação diferencial na forma matricial:

$$\{\ddot{q}(t)\}+[\overline{C}]\{\dot{q}(t)\}+\lfloor \omega_r^2 \rfloor\{q(t)\}=\{0\} \tag{2.120}$$

onde a matriz de amortecimento $[\overline{C}]$ é expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, matematicamente descrita como:

$$[\overline{C}]=\vartheta[K]+\beta[M] \tag{2.121}$$

sendo ϑ e β constantes.

Como todas as matrizes da Equação (2.120) são diagonais, e o conjunto de equações representa N sistemas amortecidos independentes, a solução de cada equação é análoga a solução de sistemas de um grau de liberdade, ver Apêndice A, e o *fator de amortecimento modal* é expresso da seguinte forma:

$$\zeta_r=\frac{\beta}{2\omega_r}+\frac{\vartheta\omega_r}{2} \quad r=1,2,\ldots,N \tag{2.122}$$

A receptância $\alpha_{jk}(\omega)$, relação entre o deslocamento harmônico e a força excitadora harmônica, (Apêndice A), de uma coordenada j em função de uma força harmônica de excitação aplicada na coordenada k do vetor de força modal $\{f\}$, conhecido o fator de amortecimento modal ζ_r e a freqüência de excitação ω, pode ser escrita como, (BERNASCONI; EWINS ,1989):

$$\alpha_{jk}(\omega)=\frac{\overline{X}_j}{F_k}=\sum_{r=1}^{N}\frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2-\omega^2+i2\zeta_r\omega_r\omega)} \tag{2.123}$$

__Sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento viscoso geral__

Na análise de sistemas com amortecimento viscoso, a matriz de amortecimento [C] não é diagonal, e mesmo utilizando a matriz modal do sistema conservativo associado e a transformação de coordenadas, o sistema estará acoplado. Para o desacoplamento do sistema, é sugerida a utilização da formulação de estado. Desta forma, define-se o vetor de estado da seguinte forma, (MAIA; SILVA, 1997):

$$u(t) = \begin{Bmatrix} \{x(t)\} \\ \{\dot{x}(t)\} \end{Bmatrix} \tag{2.124}$$

e substituindo o vetor de estado e sua primeira derivada na equação de movimento do sistema amortecido e vibração livre tem-se:

$$\begin{bmatrix} [C] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \{\dot{u}(t)\} + \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \{u(t)\} = \{0\} \tag{2.125}$$

ou simplificando, tem-se a seguinte equação de movimento na forma de estado:

$$[A]\{\dot{u}(t)\} + [B]\{u(t)\} = \{0\} \tag{2.126}$$

Propondo a solução do tipo:

$$\{u(t)\} = \begin{Bmatrix} \{\bar{x}\} \\ s\{\bar{x}\} \end{Bmatrix} e^{st} = \{\bar{u}\} e^{st} \tag{2.127}$$

O problema de autovalor pode ser escrito na forma:

$$[s[A] + [B]]\{\bar{u}\} = \{0\} \tag{2.128}$$

A solução do problema de autovalor e autovetor da Equação acima resultam em s_r e s_r^* que são os r-ésimos autovalores e $\{\psi_r'\}$ e $\{\psi'^*_r\}$, os autovetores complexos que apresentam as características de ortogonalidade como nos sistemas conservativos. Definindo a transformação de coordenada abaixo:

$$\{u(t)\} = [\Psi']\{q(t)\} \tag{2.129}$$

onde $[\Psi']$ é uma matriz modal complexa de dimensão $2N \times 2N$.

Substituindo a Equação (2.129) e sua derivada na equação diferencial de movimento na forma de estado (2.126), e pré-multiplicando o resultado por $[\Psi']^T$ tem-se:

$$\lfloor a_r \rfloor \{\dot{q}(t)\} + \lfloor b_r \rfloor \{q(t)\} = \{0\} \tag{2.130}$$

onde:

$$\begin{aligned} \lfloor a_r \rfloor &= [\Psi']^T [A][\Psi'] \\ \lfloor b_r \rfloor &= [\Psi']^T [B][\Psi'] \end{aligned} \tag{2.131}$$

Da Equação acima se obtém um conjunto de $2N$ equações não acopladas equivalentes a sistemas de um grau de liberdade, com cada solução do tipo:

$$q_r(t) = \overline{Q}_r e^{s_r t} \tag{2.132}$$

A resposta de vibração livre é calculada substituindo a equação de transformação de coordenada e a equação de estado transformada é:

$$\{u(t)\} = \sum_{r=1}^{2N} \{\psi_r\} \overline{Q}_r e^{s_r t} \tag{2.133}$$

sendo:

$$s_r = \frac{-b_r}{a_r} \quad r = 1,2 \ldots 2N \tag{2.134}$$

A receptância $\alpha_{jk}(\omega)$ de uma coordenada *j* em função de uma força harmônica de excitação aplicada na coordenada *k* do vetor de força modal {*f*}, sujeita a dissipação de energia por meio do amortecimento viscoso, pode ser escrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega)=\frac{\overline{X}_j}{F_k}=\sum_{r=1}^{2N}\frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{i\omega-s_r} \tag{2.135}$$

sendo:

$$\{\phi_r\}=\frac{1}{\sqrt{a_r}}\{\psi'_r\} \tag{2.136}$$

Quando os autovetores aparecem em pares complexos conjugados pode-se utilizar a seguinte Equação para a receptância:

$$\alpha_{jk}(\omega)=\frac{\overline{X}_j}{F_k}=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{i\omega-s_r}+\frac{\phi^*_{jr}\phi^*_{kr}}{i\omega-s^*_r}\right) \tag{2.137}$$

onde ϕ_{jr} é elemento da linha *j* da coluna *r* da matriz modal e ϕ_{kr} é o elemento da linha *k* da coluna *r* da matriz modal.

Sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento histerético

Segundo Maia e Silva (1997) considerando que uma estrutura está sujeita ao amortecimento histerético, a equação de movimento para um sistema de *N* graus de liberdade pode ser escrita como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+i[D]\{\dot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \tag{2.138}$$

onde [*D*] é uma matriz $N\times N$ de amortecimento histerético. Similarmente a matriz de amortecimento proporcional, a matriz [*D*] é escrita como:

$$[D]=\varphi[K]+\upsilon[M] \tag{2.139}$$

Propondo uma solução do tipo $\{x(t)\} = \{\bar{x}\}e^{i\kappa t}$ encontra-se um problema de autovalor complexo com *N* complexos autovalores $\kappa_r^{\,2}$ e *N* autovetores reais $\{\psi_r\}$. Os autovalores contêm a informação da freqüência natural do sistema e são escritos da seguinte forma:

$$\kappa_r^{\,2} = \omega_r^2 (1 + i\eta_r) \tag{2.140}$$

sendo η_r o fator de perda de amortecimento referente a cada modo definido por:

$$\eta_r = \varphi + \frac{\upsilon}{\omega_r^{\,2}} \tag{2.141}$$

A receptância $\alpha_{jk}(\omega)$ de uma coordenada *j* em função de uma força harmônica de excitação aplicada na coordenada *k* do vetor de força modal {*f*}, sujeita a dissipação de energia por meio do amortecimento histerético, pode ser escrita como:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)} \tag{2.142}$$

onde ψ_{jr} e ψ_{kr} são elementos da matriz modal $[\Psi]$. Para os modos normalizados pela massa tem-se:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)} \tag{2.143}$$

ou através da constante modal:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{\bar{X}_j}{F_k} = \sum_{r=1}^{N} \frac{{}_r\bar{A}_{jk}}{(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)} \tag{2.144}$$

onde ${}_r\bar{A}_{jk}$ é definida por:

$${}_r\bar{A}_{jk} = \left|\frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r}\right| = \left|\phi_{jr}\phi_{kr}\right| \tag{2.145}$$

2.4.2 Análise Dinâmica em Sistemas Contínuos

Os sistemas contínuos estudados na teoria da elasticidade apresentada anteriormente podem estar sujeitos a cargas dinâmicas. As cargas dinâmicas têm suas magnitudes, direções ou pontos de aplicação variantes com o tempo e causam na estrutura, por exemplo, deslocamentos e deformações dinâmicas. Segundo Craig (1981) a análise dinâmica estrutural difere da análise estática de estrutura devido à natureza da excitação variar com o tempo e aos problemas causados pela aceleração do sistema. Num problema de carga dinâmica, a estrutura estará sujeita a forças de inércia.

Segundo Rao (2008) nos sistemas contínuos também é possível se identificar massa, rigidez e amortecimento, entretanto estão distribuídos continuamente na estrutura e os infinitos graus de liberdade do sistema podem vibrar. Desta forma, os sistemas contínuos também são chamados *sistemas com infinitos graus de liberdade*.

Os sistemas discretos com número finito de graus de liberdade são governados por equações diferenciais ordinárias. Os sistemas contínuos são governados por equações diferenciais parciais que surgem da equação de equilíbrio da relação tensão-deformação e das leis de Newton.

Segundo Rao (2008) as equações diferenciais de movimento de sistemas contínuos são transcendentais e resultam em um número infinito de freqüências naturais e modos próprios de vibração. A solução destas equações é muitas vezes muito complicada e dependem de condições de contorno. Neste trabalho será abordada a solução da equação diferencial de movimento para o problema de vibração transversal de uma viga de Euler-Bernoulli, pois será utilizada posteriormente na simulação numérica e para comparação com resultados experimentais.

Segundo Craig (1981) e Rao (2008) a equação de movimento para vibração transversal livre de uma viga de Euler-Bernoulli é da pela Equação (2.146):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)\right]+\rho A_t(x)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(x,t)=0 \qquad (2.146)$$

onde:

I = inércia;

ρ = densidade específica;

A_t = área da seção transversal.

Para uma viga uniforme a Equação (2.146) reduz-se a:

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(x,t)+\rho A_t\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(x,t)=0 \tag{2.147}$$

A solução de vibração livre pode ser determinada usando o método de separação de variáveis como:

$$v(x,t)=V(x)\Gamma(t) \tag{2.148}$$

Substituindo a Equação (2.148) na Equação (2.146) e rearranjando os termos, tem-se:

$$\frac{EI}{\rho AV(x)}\frac{d^4V(x)}{dx^4}=-\frac{1}{\Gamma(t)}\frac{d^2\Gamma(t)}{dt^2}=a \tag{2.149}$$

onde a é uma constante positiva. A Equação (2.149) pode ser escrita como duas equações:

$$\frac{d^4V(x)}{dx^4}-\overline{\lambda}^4V(x)=0 \tag{2.150}$$

$$\frac{d^2\Gamma(t)}{dt^2}+a\Gamma(t)=0 \tag{2.151}$$

A solução da Equação (2.151) depende das condições iniciais de deslocamento transversal e velocidade. Considerando as condições iniciais nulas e para a solução da Equação (2.150) a seguinte equação:

$$V(x)=Ae^{sx} \tag{2.152}$$

onde A e s são constantes, e deduzindo a equação auxiliar como:

$$s^4 - \bar{\lambda}^4 = 0 \tag{2.153}$$

As raízes dessa equação são:

$$s_{1,2} = \pm\bar{\lambda} \quad s_{3,4} = \pm i\bar{\lambda} \tag{2.154}$$

Por conseqüência, a solução da Equação (2.150) torna-se:

$$V(x) = A_1 \sinh \bar{\lambda}x + A_2 \cosh \bar{\lambda}x + A_3 \sin \bar{\lambda}x + A_4 \cos \bar{\lambda}x \tag{2.155}$$

onde A_1, A_2, A_3 e A_4 são constantes. Essas constantes são determinadas pelas condições de contorno.

Impondo as condições de contorno do engaste de uma das extremidades da viga, conforme a Figura 2.26 e resolvendo a equação característica resultante, as r-ésimas freqüências naturais ω_r são determinadas pela Equação (2.156).

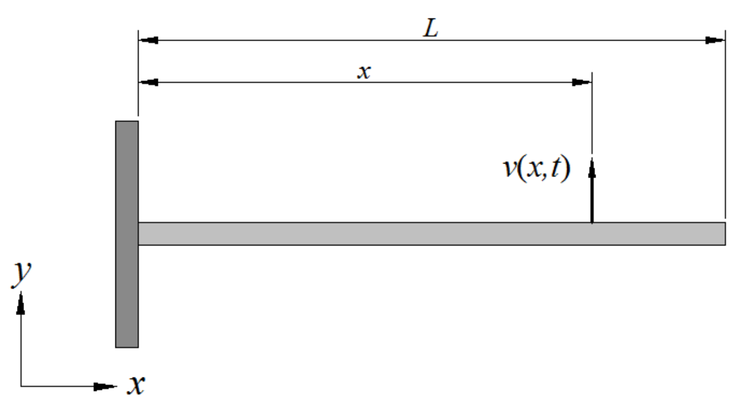


Figura 2.26 – Viga em balanço

$$\omega_r = \frac{(\bar{\lambda}_r L)^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A_t}} \tag{2.156}$$

onde L é comprimento da viga, I é o momento de inércia transversal e A_t é a área da seção transversal da viga.

As formas modais de vibração transversal da viga são determinadas pela Equação abaixo:

$$\psi_r(x) = \cos \bar{\lambda}_r x - \cosh \bar{\lambda}_r x + \frac{sen \bar{\lambda}_r L - senh \bar{\lambda}_r L}{\cos \bar{\lambda}_r L + \cosh \bar{\lambda}_r L}(sen \bar{\lambda}_r x - senh \bar{\lambda}_r x) \tag{2.157}$$

Os valores aproximados dos cinco primeiros $\bar{\lambda}_r L$ da viga em análise estão listados na Tabela 2.2 (HARRIS; CHARLES, 1976).

Tabela 2.2 – Valores aproximados $\bar{\lambda}_r L$ para viga em balanço

$\bar{\lambda}_1 L \cong 1{,}87510$
$\bar{\lambda}_2 L \cong 4{,}69409$
$\bar{\lambda}_3 L \cong 7{,}85475$
$\bar{\lambda}_4 L \cong 10{,}99541$
$\bar{\lambda}_5 L \cong 14{,}13716$

Como mencionado, a determinação dos parâmetros modais a partir da solução da equação diferencial que caracteriza o problema analisado, muitas vezes, torna-se muito complicada e são encontradas apenas soluções para problemas de vibração de viga e de placas com limitadas condições de contorno. Desta maneira, os parâmetros modais são identificados experimentalmente através da análise modal experimental e operacional. Os item subseqüentes tratam destas técnicas.

2.4.3 Análise Modal Experimental (*AME*)

A análise modal experimental consiste em estimar os parâmetros modais a partir de medições experimentais e modelos de estimação de parâmetros. Desta forma, a análise modal experimental segue uma rotina inversa da teórica, onde inicia-se pelo Modelo Resposta, passa-se pelo Modelo Modal e chega-se no Modelo Estrutural (EWINS, 1984).

A Figura 2.27 ilustra a rotina usada na análise modal experimental tendo em vista os modelos descritos anteriormente.

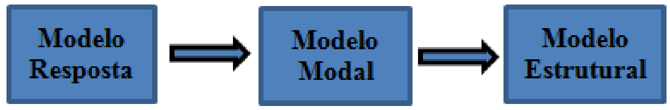


Figura 2.27 – Rotina da Análise Modal Experimental

A análise modal, como uma ferramenta de engenharia, foi aplicada pela primeira vez por volta de 1940 na pesquisa para melhorar o entendimento das falhas dinâmicas em aviões. A análise modal desenvolveu-se melhor nas últimas três décadas com a disponibilidade comercial dos *Fast Fourier Transform* (FFT) *spectrum analysers*, analisadores de espectro pela transformada rápida de Fourier, *Transfer Function Analysers* (TFA), analisador da função de transferência, placas de aquisição de sinais e mais baratos e poderosos processadores de sinais (MAIA; SILVA, 1997).

A análise modal experimental tem como objetivos (MAIA; SILVA, 1997)

- obter as freqüências naturais e os modos próprios da estrutura;
- obter informações sobre os fatores de amortecimento;
- obter um modelo dinâmico que possibilite ser usado em modificações estruturais quando necessárias;
- aprimorar o modelo dinâmico numérico, por exemplo Elementos Finitos, para que este possa representar de maneira confiável a realidade.

Segundo Maia e Silva (1997) os aparelhos utilizados na análise modal pertencem a três grupos:

- *mecanismos de excitação*: são os dispositivos necessários para excitar a estrutura. Dentre os quais pode-se citar, os shakers, excitadores que podem ser mecânico, eletromagnético ou hidráulico, e os martelos de impulsão.
- *mecanismos de sensoreamento*: conhecidos também como transdutores utilizados na medição da entrada e saída do sistema analisado. Os transdutores elétricos

transformam uma quantidade elétrica medida em uma quantidade física de força, aceleração ou velocidade, por exemplo. Os transdutores mais utilizados na análise modal são os piezoelétricos e podem ser utilizados para medir a força de excitação, como os transdutores de força ou medir a aceleração de pontos da estrutura como os acelerômetros.

- *sistemas de aquisição e processamento*: são os dispositivos e equipamentos utilizados na aquisição e processamento dos dados.

Além do mecanismo de aquisição, em alguns casos, é necessária a utilização de geradores de sinais, filtros, amplificadores e condicionadores de sinais.

As condições de contorno escolhidas para a análise modal experimental da estrutura analisada devem ser as que satisfaçam a condição real de operação ou que possibilite uma melhor adequação e ajuste a condição utilizada no modelo de elementos finitos, caso seja o objetivo da análise modal. Uma condição geralmente utilizada é a condição livre-livre, em que a estrutura pode ser suspensa por molas ou elásticos.

Cita-se no item 2.4.2 que as estruturas contínuas apresentam um número infinito de graus de liberdade e isto acarreta em um número infinito de modos de vibração. Como na análise modal teórica, na análise modal experimental a estrutura deve ser discretizada, onde cada grau de liberdade se refere a um ponto de excitação ou de resposta da estrutura. A discretização deve ser feita de tal forma, que o sistema possa ser observável, ou seja, dependendo do comprimento de onda analisado, a discretização deve ser mais refinada ou não, para que o número de informações medidas seja suficiente para gerar um modelo adequado da estrutura.

Devido ao infinito número de modos de vibração apresentado por uma estrutura real, é importante definir faixas de freqüências de análise que implicarão diretamente no processamento de sinais e no tipo de excitação que será submetida à estrutura. A excitação da estrutura pode ser feita através de impulso, excitação impulsiva, onde é utilizado um martelo de impacto apropriado. A excitação impulsiva é feita em diversos pontos da estrutura e a resposta e medida apenas em um ponto, por exemplo, desde que a estrutura respeite o princípio de reciprocidade de Maxwell, tratado no item 2.4.1. A excitação impulsiva é capaz de excitar uma faixa de freqüência da estrutura, pois analiticamente, a transformada de Fourier de um impulso unitário é um valor constante em todas as freqüências.

Outra forma de se excitar a estrutura é através de sinais aleatórios, por exemplo, o ruído branco. Esses sinais são gerados pelos geradores de sinais e transmitidos para a estrutura através de um shaker e um stinger, acoplamento mecânico entre o shaker e a estrutura. Neste caso, o ponto de excitação é fixo e as medidas das respostas são feitas nos demais pontos da estrutura. Existem outros tipos de sinais de excitação, como a varredura senoidal ou sinal transiente.

Os parâmetros modais são obtidos pela análise das Funções Respostas em Freqüência (FRF) ou Funções Respostas ao Impulso (FRI), (Apêndice A) estimados experimentalmente. Para que os parâmetros modais caracterizem realmente o comportamento dinâmico do sistema analisado, alguns cuidados devem ser tomados, dentre os quais, pode-se destacar os estimadores das funções respostas utilizados e o processamento adequado dos sinais medidos. No item subseqüente será abordado o processamento de sinais na estimação das FRFs.

Processamento de sinais e estimadores de FRFs

O processamento do sinal consiste de diversas técnicas utilizadas de acordo com o tipo de sinal analisado. Basicamente os sinais dinâmicos podem ser classificados conforme ilustrado na Figura 2.28:

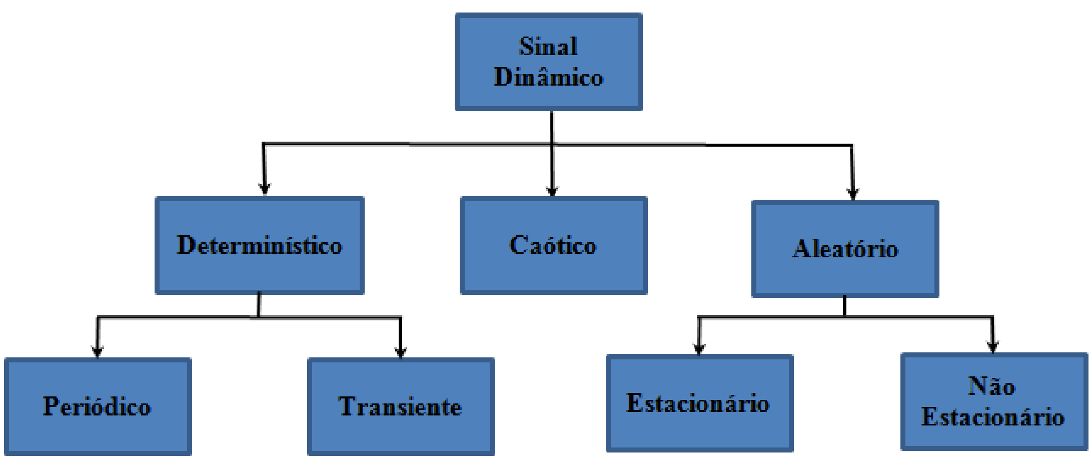


Figura 2.28 – Classificação dos sinais

Os sinais periódicos e transientes podem ser representados no domínio da freqüência pela serie de Fourier e pela transformada de Fourier respectivamente. Caso estes sinais forem discretos, a análise destes sinais na freqüência ocorre pela transformada discreta de Fourier.

Para análise dos sinais utilizando a transformada discreta de Fourier é necessário que se digitalize o sinal no tempo através da *amostragem* e *quantificação*. A amostragem é a digitalização do sinal no tempo e quantificação é a digitalização do sinal em relação a sua amplitude.

A observação de um sinal na freqüência pela transformada de Fourier ou sua respectiva visualização no tempo pela transformada inversa de Fourier pode conter erros ocasionados pelos fenômenos de *leakage* e *aliasing*.

O fenômeno de leakage é uma dispersão (vazamento) da energia associada à linha espectral da freqüência do sinal para as bandas de freqüência lateral na representação espectral, comprometendo a resolução de freqüência e precisão em amplitude. A transformada de Fourier periodiza o sinal no tempo, caso o sinal analisado não tenha um número inteiro de períodos, haverá descontinuidades na composição temporal deste sinal, pelo uso da transformada, ocasionando o fenômeno.

O fenômeno de leakage pode ser minimizado utilizando-se janelas de visualização. Na Tabela 2.3 estão relacionados alguns tipos de janelas utilizadas no processamento de alguns tipos de sinais (WICKRAMARACHI, 2003).

Tabela 2.3 – Tipos de Janelas e suas aplicações conforme o tipo do sinal

Janela	***Tipos de Sinais***
Retangular	Transientes
Hanning	Periódicos e Aleatórios
Flat Top	Para boa precisão em amplitude de sinais Periódicos
Exponencial	Impulsos (análise modal)

O fenômeno de aliasing ocorre, pois a digitalização do sinal no tempo produz a periodização do espectro do sinal. Para evitar este fenômeno, a freqüência de amostragem do sinal f_s deve ser pelo menos duas vezes maior que a freqüência máxima f_{max} do mesmo. Podem ser utilizados também, filtros passa-baixa para garantir que o sinal não contenha altas freqüências.

Os sinais de caráter estacionário, mas não periódicos e nem transitórios, por exemplo, os sinais aleatórios, não podem ser representados na freqüência apenas pela transformada de Fourier, pois não satisfazem a condição Dirichlet, ou seja:

$$\begin{aligned} & x(t) = x(t \pm nT) \quad n = 1,2,3,\ldots \\ & \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \end{aligned} \tag{2.158}$$

onde t = tempo e T = período de tempo.

Assim, é necessário estabelecer outros parâmetros que possam representar estes sinais no domínio da freqüência. Esses parâmetros são as funções de correlação e densidades espectrais (PROAKIS; MANOLAKIS, 1996).

Considerando um sistema linear submetido a um sinal de entrada $f(t)$ e com um sinal de saída $x(t)$, as funções de auto correlação e correlação cruzada entre esses dois sinais são dadas por (BENDAT; PIERSOL, 2000):

$$R_{ff}(\varsigma) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t+\varsigma) dt \quad \text{e} \quad R_{xx}(\varsigma) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t+\varsigma) dt, \tag{2.159}$$

$$R_{xf}(\varsigma) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) f(t+\varsigma) dt \quad \text{e} \quad R_{fx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) x(t+\varsigma) dt, \tag{2.160}$$

As funções de auto correlação e correlação cruzada dos sinais aleatórios estão baseadas nos conceitos estatísticos desses sinais considerados estacionários e ergódigos. Essas funções obedecem à condição Direchlet e podem ser representadas na freqüência pela transformada de Fourier, fornecendo a densidade espectral de potência e a densidade espectral cruzada, definidas por, (BENDAT; PIERSOL, 2000):

$$S_{ff}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{ff}(\varsigma)e^{-i\omega t}d\tau \quad \text{e} \quad S_{xx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{xx}(\varsigma)e^{-i\omega t}d\tau, \tag{2.161}$$

$$S_{xf}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{xf}(\varsigma)e^{-i\omega t}d\tau \quad \text{e} \quad S_{fx}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R_{fx}(\varsigma)e^{-i\omega t}d\tau \tag{2.162}$$

A representação das densidades espectrais das Equações (2.161) e (2.162) é dada nas freqüências positivas e negativas. Para $\omega \geq 0$, ou seja, freqüências positivas, as Equações (2.161) e (2.162) tornam-se:

$$\begin{aligned} G_{ff}(\omega) &= 2S_{ff}(\omega) \qquad G_{xx}(\omega) = 2S_{xx}(\omega) \\ G_{fx}(\omega) &= 2S_{fx}(\omega) \qquad G_{xf}(\omega) = 2S_{xf}(\omega) \end{aligned} \tag{2.163}$$

No estudo da análise modal teórica cita-se que as funções de resposta em freqüência são a razão entre a transformada de Fourier da resposta e a transformada de Fourier de uma força harmônica excitadora. Na análise modal experimental, os tipos de excitação utilizados para a análise não são necessariamente harmônicas e, além disso, há presença de ruído nas medições. Desta forma, as FRFs são estimadas a partir de estimadores. Os estimadores H_1 e H_2 são definidos da seguinte forma (EWINS, 1984):

$$H_1(\omega)=\frac{G_{fx}(\omega)}{G_{ff}(\omega)} \tag{2.164}$$

$$H_2(\omega)=\frac{G_{xx}(\omega)}{G_{xf}(\omega)} \tag{2.165}$$

E fácil provar que as densidades espectrais cruzadas não são afetadas pelos ruídos de medição, assim, nas situações em que o sinal de entrada está contaminado pelo ruído, pode ser utilizado o estimador H_2 para melhor aproximação da FRF. Nas situações em que o sinal de resposta está contaminado com ruído, anti-ressonância, pode ser utilizado o estimador H_1, (BENDAT; PIERSOL, 2000).

A relação entre os estimadores é dada pela função de coerência $\gamma^2(\omega)$:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)} \quad \text{sendo } 0 \leq \gamma^2(\omega) \leq 1 \tag{2.166}$$

A função de coerência é uma função real que pode ser interpretada como um coeficiente de correlação no domínio da freqüência que representa o quão bem a resposta está linearmente relacionada com a entrada no sistema analisado.

Estimação da ordem do modelo

Antes de qualquer discussão relativa à extração dos parâmetros modais, é fundamental que se tenha algum conhecimento da ordem do modelo, o número de modos que contribuem na resposta em uma determinada faixa de freqüência em estudo para um bom funcionamento dos algoritmos apresentados adiante. Funções indicadoras de aplicação prática extremamente difundida foram desenvolvidas ao longo dos anos para auxiliar a realização da análise modal experimental na detecção de parâmetros críticos a partir dos dados experimentais, notadamente a questão de raízes repetidas e possíveis raízes computacionais existentes durante o processo de ajuste de curvas.

Analisando inicialmente qualquer FRF medida de um sistema, pode-se dizer num primeiro instante que ela de fato contém a informação dos modos. Entretanto, tal procedimento é extremamente arriscado e pode levar a conclusões incorretas sobre a quantidade real de modos existentes, uma vez que nem todos podem estar ativos numa única FRF. Além disso, direções específicas do modo podem não ter sido contempladas durante a medição, e isso pode ser ainda mais significativo na FRF do ponto de excitação (*driving point*), onde todos os picos terão a mesma fase. Dessa maneira, modos muito próximos terão sua observação dificultada, sendo necessária a utilização de funções específicas de identificação tais como as listadas abaixo (AVITABILE, 2007):

- SUM: função soma (*Summation Function*);
- MIF: função indicadora de modos (*Mode Indicator Function*);
- MMIF: MIF multi-variante (*Multivariate MIF*);

- CMIF: função indicadora de modo complexo (*Complex Mode Indicator Function*);

- Diagrama de estabilização.

Identificação de parâmetros modais

O problema fundamental da estimação dos parâmetros modais consiste no ajuste (estimativa) de seus valores dentro de um modelo matemático, de maneira que os dados possam refletir o mais próximo possível as características do sistema real.

O ponto de partida é usualmente um conjunto de dados medidos que em sua maioria referem-se às Funções de Resposta em Freqüência ou às suas equivalentes no domínio do tempo, ou seja, as Funções de Resposta ao Impulso (FRIs). Esses conjuntos de dados são analisados através de alguns métodos onde é possível se identificar os parâmetros modais.

Esses métodos podem ser classificados de acordo com o tipo de sinal analisado, no tempo ou na freqüência e em uma categoria especial chamada *tuned sinusoidal methods*. Os métodos de identificação de parâmetros modais podem ser subdivididos em métodos diretos, baseados no modelo espacial da estrutura, e os métodos indiretos, baseados nos parâmetros modais ou modelo modal da estrutura, e também em relação ao número de referências, pontos de excitação e respostas, utilizadas simultaneamente na estimação dos parâmetros, sendo, (MAIA; SILVA, 1997):

- SISO (*Single-Imput-Single-Output*), refere-se a uma entrada e uma saída analisada.

- SIMO (*Single-Imput-Multi-Output*), refere-se a uma entrada e mais que uma saída analisada.

- MISO (*Multi-Imput-Single-Output*), refere-se a mais que uma entrada e uma saída analisada.

- MIMO (*Multi-Imput-Multi-Output*), refere-se a mais que uma entrada e mais que uma saída analisada.

A classificação dos métodos de identificação de parâmetros modais pode ser observada na Figura 2.29, (MAIA; SILVA, 1997, p. 188):

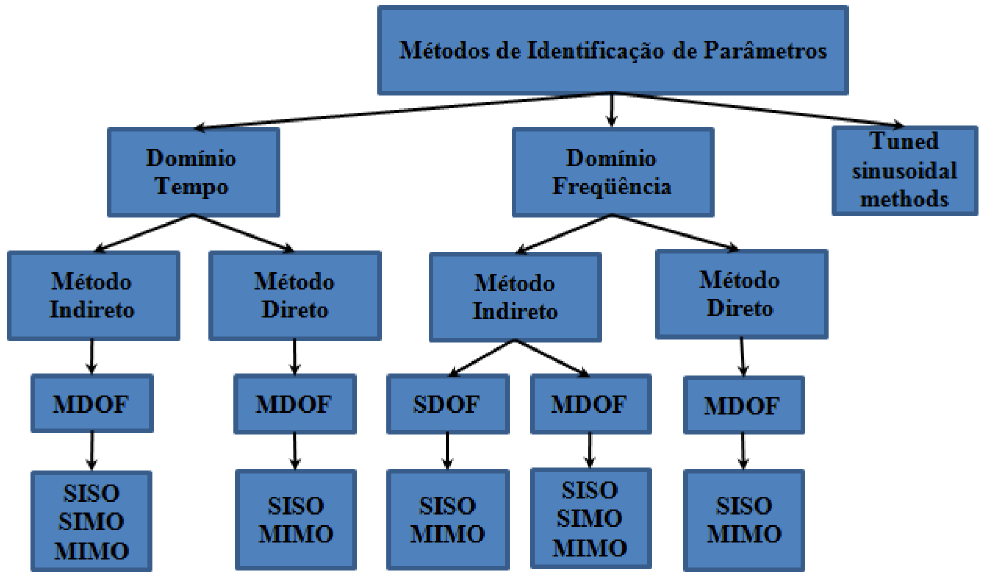


Figura 2.29 – Classificação dos métodos de análise modal

A classificação dos métodos no domínio do tempo segue o disposto na Figura 2.30, (MAIA; SILVA, 1997, p. 188):

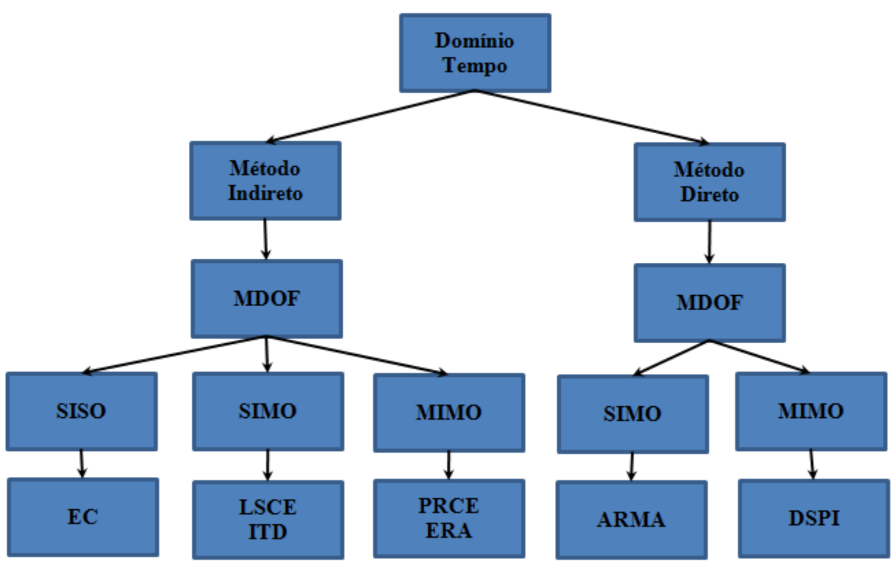


Figura 2.30 – Classificação dos métodos de análise modal no domínio do tempo

A classificação dos métodos no domínio da freqüência segue o disposto na Figura 2.31, (MAIA; SILVA, 1997, p. 218):

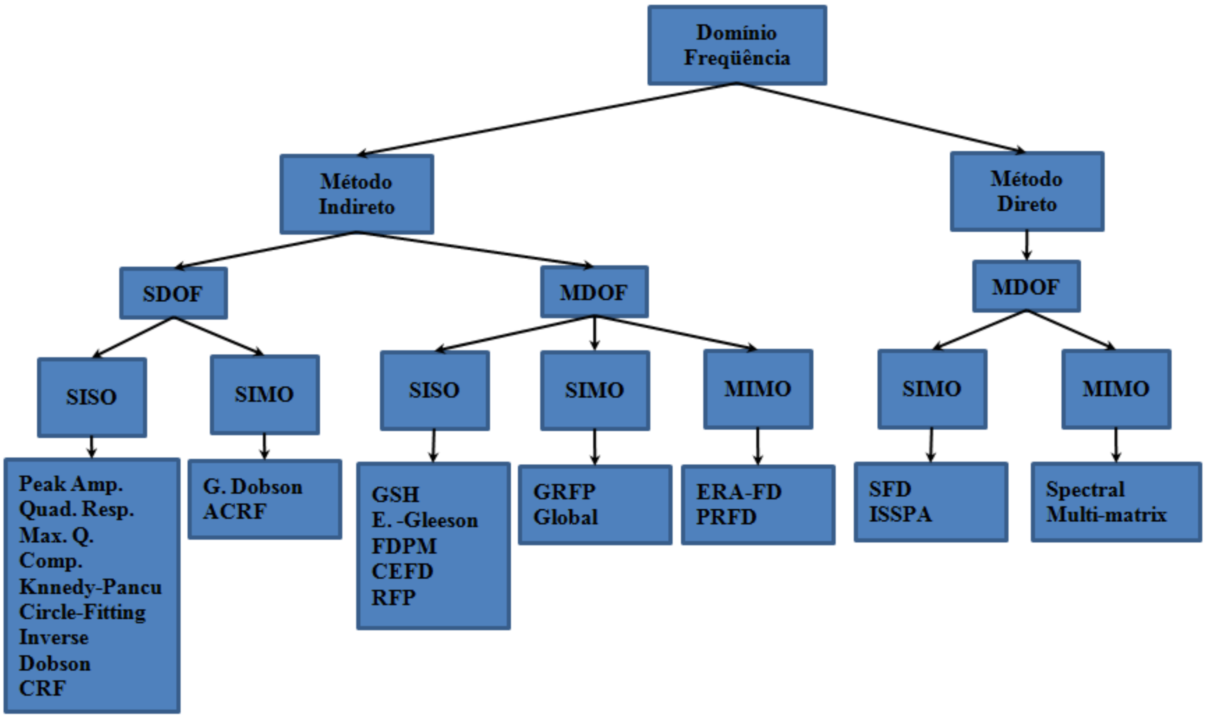


Figura 2.31 – Classificação dos métodos de análise modal no domínio da freqüência

Segundo Maia e Silva (1997) os métodos no domínio da freqüência são mais fáceis de serem implementados, entretanto podem apresentar problemas associados com a resolução em freqüência, leakage e altas densidades modais. Os métodos no domínio do tempo apresentam melhor qualidade dos valores encontrados quando a densidade modal é alta e os métodos no domínio da freqüência apresentam melhores resultados quando a faixa de freqüência é limitada e têm-se baixas densidades modais.

A abordagem mais completa desses métodos podem ser vista em (Maia e Silva, (1997) e Ewins, (1984)).

2.4.4 Análise Modal Operacional (*AMO*)

No item anterior, referente à análise modal experimental, cita-se que o comportamento dinâmico de estruturas pode ser avaliado a partir dos modos próprios ou formas modais, freqüências naturais e fatores de amortecimento, que são os parâmetros modais do sistema. Essas características são propriedades inerentes ao sistema e são independentes das condições externas a que o mesmo está submetido. Em casos práticos, máquinas e estruturas vibram devido às forças externas e internas aplicadas e, neste caso, as formas ou modos operacionais de vibração são identificados pela *Análise Modal Operacional* (AMO) ou *Operational deflexion Shapes* (ODS). Neste trabalho será utilizada a notação ODS para os modos operacionais do sistema.

Durante as avaliações das FRFs ou das FRIs na identificação dos parâmetros modais do sistema, é analisado o comportamento da estrutura a cada freqüência ou a cada instante de tempo. Sendo assim, são determinados os modos operacionais do mesmo. Desta forma, os modos operacionais contêm informações dos modos próprios.

Segundo Schwarz e Richardson (1999) o modo operacional é a forma com que a estrutura vibra em uma determinada freqüência sob forças de excitação. É qualquer movimento forçado de dois ou mais pontos da estrutura que ao serem especificados definem uma forma. Modos operacionais são definidos como a deflexão de uma estrutura devido à ação de forças de excitação e indicam o movimento relativo real entre dois ou mais graus de liberdade da estrutura em uma condição operacional.

Os modos operacionais dependem das propriedades físicas, geométricas, condições de contorno do sistema e também das forças e carregamentos aplicados na estrutura. Possuem unidades de deslocamento, velocidade ou aceleração dependendo do tipo de análise que fora realizada. O modo operacional, que pode ser compreendido também como uma forma de vibrar cuja freqüência da vibração não coincide necessariamente com uma das freqüências naturais do sistema, contém a contribuição de todos os modos. Percebe-se isso sabendo que os modos operacionais dependem diretamente da FRF e que cada elemento da matriz FRF é uma soma das curvas de ressonâncias modais.

Como na análise modal teórica, a AMO pode ser baseada em soluções analíticas de equações diferenciais de movimento de estruturas ou pode ser feita experimentalmente, baseada diretamente na análise de sinais. Alguns métodos da AMO não dependem do conhecimento da força excitadora, desta maneira, sendo muito empregada em situações práticas onde os equipamentos apresentam vibração cujas fontes muitas vezes não são conhecidas. A AMO pode ser usada em sistemas não lineares e não estacionários.

A AMO é realizada para se analisar as seguintes situações:

- O quanto a máquina está se movendo;
- Se existem fontes de ruído;
- Ações corretivas para reduzir os níveis de ruído e vibração.

ODS no Domínio do Tempo

A estimação dos modos operacionais no domínio do tempo analiticamente é diretamente relacionada com a solução da Equação (2.106). Após a solução da equação, obtém-se o vetor de resposta forçada $\{x(t)\}$, que representa a posição de todos os graus de liberdade em função do tempo. Para um determinado instante de tempo t_0, a resposta forçada será o modo operacional $\{ODS(t_0)\}$, no domínio do tempo.

Um ODS pode ser obtido a partir de respostas no domínio do tempo de sistemas sujeitos a diversos tipos de excitação, dentre elas, (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999):

- Aleatórias;
- Impusivas;
- Senoidais;
- Fontes de excitação do ambiente.

Em geral, um ODS é definido por amplitude e fase relativa entre os graus de liberdade. No ODS no domínio do tempo, a amplitude e fase são implicitamente assumidas ou seja, as respostas devem ser medidas simultaneamente, ou medidas de forma que a amplitude e fase relativa sejam corretamente garantidas. Em algumas situações, o comportamento de vibração da estrutura é repetitivo, e a aquisição pode ser feita em um canal por vez, desde que as aquisições ocorram no mesmo tempo do início da repetição. Para os sistemas estacionários, as densidades espectrais de potência dos sinais não se alteram com o tempo e a medição pode ser feita utilizando duas medidas simultâneas, sendo uma dessas, a medida de referência. Através de um analisador de FFT, pode-se verificar a densidade espectral de potência cruzada entre esses dois sinais, que irá conter a informação de fase relativa, e a amplitude pode ser visualizada pela densidade espectral de potência do ponto analisado. A resposta do ponto de referência deve ser medida juntamente com cada novo conjunto de resposta e fornecerá a informação da fase relativa entre todos os pontos, (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999).

ODS no Domínio da Freqüência

Teoricamente, a estimação dos modos operacionais no domínio da freqüência pode ser dada utilizando a definição da função de resposta em freqüência, de acordo com:

$$\{X(\omega)\} = [H(\omega)]\{F(\omega)\} \tag{2.167}$$

sendo $[H(\omega)]$ a matriz de FRFs, e$\{X(\omega)]\}$ o vetor de deslocamento no domínio da freqüência e $\{F(\omega)]\}$ o vetor da força excitadora no domínio da freqüência. Sendo ω_0 uma determinada freqüência, o modo operacional para esta freqüência é dito como:

$$\{ODS(\omega_0)\} = [H(\omega_0)]\{F(\omega_0)\} \tag{2.168}$$

Experimentalmente, os ODSs no domínio da freqüência podem ser obtidos de diversas formas, dependendo do tipo de dados e medições realizadas. Segundo Schwarz e Richardson (1999) os ODSs podem ser obtidos pelas:

- Função Resposta em Freqüência;
- Densidade Espectral de Potencia;
- Densidade Espectral Cruzada;

As técnicas que utilizam os conjuntos de respostas acima para estimar os ODSs estão descritas abaixo (SCHWARZ; RICHARDSON, 1999):

- *Densidade Espectral de Potência*: Para estimar os ODS pode ser utilizada a informação da amplitude obtida através das densidades espectrais de potencia dos sinais de cada ponto analisado. Os modos operacionais estimados através desta técnica não terão a informação de fase relativa entre os graus de liberdade analisados.

- *FRF*: Está técnica de estimação dos modos operacionais necessita de dois canais de medição simultânea e dos estimadores de FRFs. As FRFs possuem a informação de amplitude e fase de cada sinal analisado, entretanto as amplitudes são valores de aceleração, velocidade ou deslocamento ponderados pela força excitadora, e a fase medida é entre a resposta e a força excitadora. Algumas dificuldades de estimação das FRFs são encontradas na aplicação deste método, pois é necessário que todas as forças de excitação sejam conhecidas, o que pode ser impossível em algumas situações.

- *Transmissibilidade*: A transmissibilidade é uma técnica de estimação de ODS realizada quando as forças de excitação não são conhecidas. Utilizam-se dois canais de aquisição simultâneos, como se estimaria uma FRF, entretanto, a resposta é dividida por uma resposta de referência em vez de uma força excitadora. A fase também é preservada pela densidade espectral cruzada dos dois sinais medidos.

  O cálculo é feito pela razão complexa entre duas densidades espectrais. Sendo um sinal de resposta de um ponto *j* e um sinal de resposta de um ponto de referencia *p*, a transmissibilidade é definida por:

$$T_{jp}(\omega) = \frac{S_{j,p}(\omega)}{S_{p,p}(\omega)} \tag{2.169}$$

  Os picos amostrados pela transmissibilidade não correspondem, necessariamente, às condições de ressonância do sistema.

- *ODS FRF*: Como na transmissibilidade, a ODS FRF usa dois canais de aquisição para estimar os modos operacionais e pode ser utilizada quando a força excitadora não é conhecida.

Calculando a densidade espectral cruzada entre o sinal de resposta j e um sinal de referência p, o ODS(ω_0) será estimado por:

$$ODS(\omega_0)_{j,p} = \left|S_{j,j}\right| \angle S_{j,p} \tag{2.170}$$

Os picos na representação dos ODS podem estar associados a freqüências naturais do sistema, ao contrário da transmissibilidade.

Em algumas aplicações reais os sistemas podem ser não-estacionários, ou seja, as propriedades estatísticas dos sinais variam com o tempo. Desta forma outros algoritmos mais complexos e correções de cada conjunto de medição devem ser realizadas. Neste trabalho serão estudados sistemas com comportamento estacionário, por este motivo os métodos utilizados na estimação dos ODS para sistemas não estacionários não serão detalhados.

A análise modal operacional e a análise modal experimental, associadas às relações da teoria da elasticidade, possibilitaram o surgimento de novas técnicas de análise de deformação e tensão dinâmicas. No item subseqüente será feito um breve historio da aplicação dessas técnicas

2.5 Análise de Deformação Dinâmica a partir de Parâmetros Modais

Com o desenvolvimento das técnicas de análise modal e o conhecimento das relações entre deslocamentos e deformações da teoria da elasticidade surgiram diversos trabalhos e métodos propostos que utilizam os resultados da análise modal para prever ou estimar a deformação dinâmica nas estruturas. Estas relações são empregadas no estudo da vibroacústica e podem ser empregados na análise estrutural dinâmica.

Os métodos que foram propostos consistem basicamente na diferenciação espacial do deslocamento obtido pela análise modal e utilizam, na sua maioria, o método de diferenças finitas para a solução das equações diferenciais do problema de elasticidade. São utilizados para estimar a deformação em pontos de estruturas e podem ser:

- *no domínio do tempo*: são utilizadas a primeira ou a segunda derivada espacial do deslocamento;

- *no domínio da freqüência*: são utilizados os coeficientes generalizados de Fourier para estimar o deslocamento através da análise modal híbrida;

- *no domínio do tempo ou da freqüência*: no caso do método que utiliza a matriz de transformação deslocamento – deformação, sendo esta independente do tempo ou da freqüência.

Os métodos de análise de deformação e tensão a partir de parâmetros modais começaram a ser utilizados após o desenvolvimento das técnicas de análise modal. No trabalho publicado em 1989, Bernasconi e Ewins mostraram como *strain gages* e transdutores de deslocamentos podem ser usados para a determinação dos modos de deformação normalizados pela massa. As funções de resposta em freqüência de deformação e a receptância são encontradas similarmente. Assim, os valores de deformação no domínio do tempo podem ser encontrados através da superposição modal da mesma forma que é possível se encontrar a resposta temporal do deslocamento.

Bernasconi e Ewins (1989) realizaram dois experimentos para a verificação da aproximação dos valores de deformação obtidos por elementos finitos e através de medições. Um experimento foi realizado em uma viga simples e outro em uma chapa curvada. A deformação dinâmica foi obtida utilizando *strain gage*. As tensões principais foram determinadas através da solução do polinômio característico do tensor de tensão. Na análise modal utilizando *strain gage*, foi sugerida a utilização da excitação impulsiva com martelo de impulsão, onde o ponto de medição foi único (*strain gage* colado) e a excitação realizada em todos os outros pontos.

Segundo Bernasconi e Ewins (1989), em algumas situações, como o fator de sensibilidade do *strain gage* não é conhecido precisamente, a qualidade da identificação dos parâmetros modais através da análise modal utilizando estes sensores não será boa.

A função de resposta em freqüência da deformação S_{jk}, de um ponto j e excitação em um ponto k , pode ser obtida pela Equação abaixo:

$$S_{jk}(\omega) = \sum_r \frac{\varepsilon_{jr}\,\phi_{kr}}{\left(\omega_r^2 - \omega^2 + \mathrm{i}2\zeta_r\omega_r\omega\right)} \qquad (2.171)$$

onde ε_{jr} é o componente de deformação da linha *j* coluna *r* da matriz modal de deformação $[\boldsymbol{\varepsilon}]$, determinada por:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{D}[\Phi] \tag{2.172}$$

onde **D** é operador linear diferencial, obtido da relação deslocamento e deformação. Na determinação da deformação normal longitudinal de vigas sujeitas à flexão pela análise da curvatura da mesma, este operador se refere à derivada de segunda ordem.

Koss e Karczub (1995) desenvolveram um estudo da deformação dinâmica que ocorre em uma viga Euler-Bernoulli. Foi utilizada a solução da equação da onda de uma viga para calcular a função resposta em freqüência de diversos pontos da viga. A função resposta em freqüência da deformação da viga é obtida através da derivada espacial da equação da onda multiplicada pela distância entre a linha neutra e a superfície da viga. As funções de resposta em freqüência do deslocamento e de deformação calculadas foram comparadas com as FRFs encontradas experimentalmente. As FRFs de deslocamento foram estimadas utilizando dois acelerômetros e as FRFs de deformação foram estimadas em 13 pontos da viga através de *strain gages* colados na superfície da viga. Os valores medidos de aceleração foram transformados para deslocamento dividindo-os por $-\omega^2$. Os dados obtidos no domínio da freqüência puderam ser vistos no domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier. A aproximação dos resultados medidos e calculados foi boa, entretanto, este método baseia-se no cálculo analítico da equação da onda da viga e na sua derivação espacial e está limitado à análise de deformação uniaxial.

Okubo e Yamaguchi (1995) previram a distribuição dinâmica de deformação em uma placa e posteriormente em um garfo frontal de bicicleta sob condições de operação, utilizando a análise modal experimental e a matriz de transformação de deslocamento – deformação. Essa matriz, com denominação inglesa *Displacement-to-Strain-Transformation* (DST) está relacionada com a forma modal de deformação e deslocamentos da estrutura e é independente do tempo, da freqüência, possíveis mudanças de distribuição de massa e condições de contorno da estrutura.

A relação entre um vetor de deslocamento $\{u\}$ e um vetor de deformação $\{\varepsilon\}$ de uma estrutura mecânica, construídos por *N* pontos de medição de deslocamento e de deformação, respectivamente, pode ser expressa, no domínio do tempo ou na freqüência, através da matriz de transformação deslocamento – deformação $[T]$, como:

$$\{\varepsilon\} = [T]\{u\} \tag{2.173}$$

Com adequadas matrizes das formas modais de deformação $[\varepsilon]$ e de deslocamento $[\Phi]$, a matriz DST pode ser calculada por:

$$[T] = [\varepsilon][\Phi]^{-1} \tag{2.174}$$

O método proposto por Okubo e Yamaguchi (1995) pode ser aplicado, por exemplo, em uma estrutura mecânica complexa que consiste de muitos componentes. Neste caso, deverá ser aplicada a análise modal experimental para se obter as matrizes de forma modais de deslocamento e deformação da estrutura. As análises modais, de algumas peças de interesse, podem ser feitas, por exemplo, sob condições livre-livre separadamente, e depois de obtida a matriz de transformação de cada análise pela Equação (2.174), é possível prever a distribuição da deformação dinâmica dessas peças montadas na estrutura sob condição de operação, a partir dos deslocamentos obtidos da análise modal operacional e utilizando a Equação (2.173).

As formas modais de deslocamentos e de deformação podem ser obtidas através de estimação de parâmetros dos dados da análise modal experimental utilizando acelerômetros e *strain gages*, respectivamente. Os pontos e a direção de medição, por exemplo, direção principal de tensão, devem ser escolhidos adequadamente de acordo ao tipo de análise de tensão que se deseja obter. Pode ser escolhido um pequeno número de medições, entretanto devem ser realizadas simultaneamente.

As Equações abaixo mostram as dimensões das matrizes modais para aplicação em um caso geral:

$$[T]_{N_2 \times N_1} = [\varepsilon]_{N_2 \times N_1} [\Phi]_{N_1 \times N_1} \tag{2.175}$$

$$\{\varepsilon\}_{N_2 \times 1} = [T]_{N_2 \times N1} \{u\}_{N_1 \times 1} \tag{2.176}$$

onde N_1 é determinado pelo número de pontos e modos analisados na matriz modal de deslocamento e deve ser igual ao número de canais de aquisição disponíveis para a medição simultânea de deformação. N_2 é o número de dados de deformação e pode ser maior que N_1. A matriz de transformação será melhor detalhada no Capítulo 3.

Dovstam (1998) utiliza a análise modal na dinâmica estrutural. O vetor de deslocamento obtido pela *análise modal hibrida*, detalhada posteriormente no Capítulo 3, é diferenciado espacialmente, usando, por exemplo, diferenciação numérica, obtendo-se o tensor de deformação no domínio da freqüência de pontos da estrutura analisada. A análise de deformação dinâmica, baseada na análise modal hibrida, recebe a denominação inglesa *Hybrid Strain Analysis* (HSA).

Em Karczub e Norton (1999), a flexão de uma viga Euler-Bernoulli é novamente estudada e a abordagem é baseada no método de diferenças finitas, com a derivada de segunda ordem do deslocamento transversal da viga, ou seja, a curvatura da viga. Os pontos de medição são eqüidistantes e são simetricamente distribuídos ao redor do ponto de análise e a deformação não pôde ser prevista nas regiões de engastes ou descontinuidades, pois o método de diferenças finitas baseia-se no método de diferenças finitas centrais. Os resultados são expressos na forma de auto-espectros, espacial e no domínio do tempo. O principal objetivo do trabalho desenvolvido por Karczub e Norton é utilizar acelerômetros ao invés de *strain gages* para estimar a tensão de flexão dinâmica de vigas sujeitas a qualquer tipo de excitação. O método de diferenciação empregado considera o uso de três ou quatro pontos de medição simultâneos.

Lee e Kim (1999) estudaram a deformação normal e de cisalhamento em uma placa com um núcleo viscoelástico. As deformações são calculadas usando método de diferenças finitas sobre modelos obtidos analiticamente da vibração de flexão da placa. Também assumem que as propriedades dos materiais da camada visco elástica não são dependentes da freqüência.

Sehlstedt (1999) fez uma avaliação experimental da análise modal híbrida de deformação proposta por Dovstan (1998). Genericamente, o método proposto é aplicado em estruturas sujeitas à vibração, independente das propriedades do material que compõe as mesmas. Os possíveis amortecimentos, sejam referentes ao tipo de material utilizado, ou entre as junções e articulações das estruturas, não precisam ser conhecidos *a priori*. As propriedades elásticas estáticas do material e a distribuição de massa da estrutura não necessitam ser exatas para identificação dos modos próprios da estrutura, que constituem uma base de funções do espaço de Hilbert.

Segundo Sehlsted (1999) a verificação da deformação dinâmica em uma placa retangular com recorte, composta por dois materiais, uma placa de *PEXIGLAS*[1] colada em uma placa de alumínio, utilizando resultados da análise modal híbrida, foi a primeira realizada experimentalmente. As respostas em freqüência da velocidade, (mobilidade), foram medidas na direção perpendicular à superfície da placa em 75 diferentes pontos distribuídos aleatoriamente na superfície da chapa usando um vibrômetro a laser, e os valores de deformação foram medidos em dois pontos específicos da placa através de *strain gages*. Os valores de velocidade foram integrados no tempo para obter os valores de deslocamento, e após, diferenciados espacialmente utilizando o método de diferenças finitas. O número de modos utilizados para a superposição modal foi de 22 e foram obtidos através da simulação numérica em elementos finitos utilizando o programa ASKA.

O método mostrou-se eficiente pois as estimações das deformações corresponderam bem com as deformações medidas, entretanto não homogeneidades do material podem causar alguma distorção da aproximação dos valores de deformação próxima às regiões onde essas descontinuidades estão presentes.

Lee (2007) propôs a estimação das respostas de deformação através das medições de deslocamentos e utiliza a matriz de transformação de deslocamento – deformação. Lee também investigou os efeitos do ruído e o truncamento da matriz modal e a possibilidade de se obter o valor de deformação em pontos onde o deslocamento não fora medido. As matrizes da forma modal de deslocamento e de deformação foram encontradas analiticamente para o caso de uma viga de aço. Os dados de deslocamento e deformação foram simulados para uma força aleatória com variação de freqüência de 0 a 500 Hz. As respostas temporais foram obtidas pelo método da superposição modal, conforme proposto por Bernasconi e Ewins (1989). Segundo Lee (2007), o método pode ser aplicado no cálculo de deformação em pontos não medidos da estrutura, entretanto é bastante sensível ao ruído, prejudicando a precisão. O truncamento da matriz modal,

[1] *PLEXIGLAS®* é um material incolor transparente de características homogênea e monolítica, possui grande resistência a altas pressões.

com um número de modos dentro da faixa de freqüência analisada, não afeta o cálculo da deformação.

2.6 Resumo do Capítulo

Neste capítulo foram apresentados os conceitos de tensão, deformação, deslocamento e suas relações, técnicas de extensometria e também os conceitos da análise modal teórica, experimental e operacional. Estes conceitos serviram como base para o entendimento dos métodos propostos para a determinação da deformação a partir dos parâmetros modais apresentados. No próximo Capítulo, esses métodos, em particular, da matriz de transformação deslocamento – deformação e da análise modal híbrida serão abordados mais detalhadamente.

Capítulo 3

Análise Modal Híbrida e Matriz de Transformação DST

3.1 Introdução

A análise modal híbrida e o método da matriz de transformação deslocamento – deformação serão abordados neste Capítulo. A análise modal híbrida consiste em prever os deslocamentos dinâmicos, no domínio da freqüência, de uma estrutura sujeita a vibração a partir da aproximação no sentido de mínimos quadrados dos coeficientes generalizados da série de Fourier. Esta técnica utiliza informações obtidas da análise modal teórica, numérica e as respostas dinâmicas medidas através da análise modal experimental ou operacional. Por este motivo a denominação *híbrida* é utilizada. A análise modal híbrida é detalhada no item 3.2. A matriz de transformação deslocamento – deformação é uma matriz que pode ser utilizada para estimar a deformação em estruturas, no domínio da freqüência ou do tempo, a partir do conhecimento da matriz modal de deslocamento, de deformação e das respostas dinâmicas (deslocamentos) da estrutura. A matriz de transformação é detalhada no item 3.3.

3.2 Análise Modal Híbrida

Para obtenção do tensor de deformação de um ponto pertencente a uma estrutura mecânica e a determinação das direções dessas deformações a partir das relações de deslocamento e deformação é necessário conhecer o deslocamento em duas ou três direções específicas. Na análise de deformação pontual no estado plano é necessário apenas o conhecimento do deslocamento em duas direções, na análise de deformação tridimensional, é necessário o conhecimento do deslocamento tridimensional do ponto, ou seja, os deslocamentos u, v e w.

Na aplicação prática da análise modal experimental, geralmente, as medições de aceleração, velocidade ou até mesmo deslocamento são feitas em apenas uma direção, sendo que, em algumas situações não é possível medir o deslocamento bidimensional ou tridimensional de partes da estrutura devido às limitações dos equipamentos de medição, por exemplo, transdutores unidirecionais, limitações de espaço, ou o deslocamento em algumas direções é muito pequeno comparado com as características dimensionais da estrutura analisada. Outro problema presente em medições de vibração é a relação sinal-ruído, que pode ser muito baixa se o sinal medido for muito pequeno e, possivelmente, de mesmo nível que o ruído de medição.

Desta maneira, para se determinar o tensor de deformação no domínio da freqüência, utilizando a relação deslocamento - deformação e os dados da análise modal pode ser utilizada a *análise modal híbrida*, que é usada para complementar as informações obtidas da análise modal convencional. A partir da análise modal híbrida é possível estimar os deslocamentos em pontos ou direções não medidos da estrutura.

A análise modal híbrida foi proposta por Dovstan (1998). Esta técnica baseia-se na ortogonalidade dos modos próprios de um sistema e nas propriedades de convergência por mínimos quadrados da série generalizada de Fourier. A técnica, em inglês denominada *Hybrid Modal Analysis* (HMA), utiliza um conjunto de dados experimentais de respostas de vibração e uma boa aproximação numérica dos modos próprios tri-dimensionais. Os modos próprios são assumidos como modos naturais não amortecidos correspondentes à geometria, à massa distribuída e às propriedades elásticas do material da estrutura na freqüência zero.

Com os deslocamentos obtidos através das FRFs de deslocamento, receptância, ou medidos através da ODS, pode-se determinar o deslocamento espacial de pontos da estrutura não medidos através da HMA. Para uma análise modal híbrida bem sucedida, alguns requisitos são necessários:

- Conhecimento da geometria e condições de contorno do sistema.
- Boa aproximação dos modos próprios do sistema, baseado na distribuição real da massa da estrutura.
- Alta qualidade das medições de respostas, através de FRFs ou ODS.

É assumido que o material é isotérmico e sofre pequenas deformações, possui comportamento linear e o método é baseado nas propriedades elástica-estática, ou seja, na freqüência zero, do material.

Os itens subseqüentes tratam da convergência por mínimos quadrados da série generalizada de Fourier de uma função a partir de vetores ortogonais entre si, para melhor compreensão da utilização desta convergência na análise modal híbrida.

3.2.1 Funções Ortogonais

Segundo Spiegel (1974) dois vetores **a** e **b** dizem-se ortogonais (perpendiculares) se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ ou $A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3=0$, onde $\mathbf{a}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{b}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}$. Embora não seja óbvio do ponto de vista geométrico ou físico, essas idéias podem ser generalizadas de modo a incluir vetores de mais de três componentes. Em particular, pode-se adotar uma função *A(x)*, como um vetor com uma infinidade de componentes, por exemplo, um vetor de dimensões infinitas, especificando-se o valor de cada componente mediante consideração de um particular valor de *x* extraído de algum intervalo [*a,b*]. Em tal caso, é natural dizer que duas funções *A(x)* e *B(x)* são ortogonais em [*a,b*] se:

$$\int_a^b A(x)B(x)dx=0 \tag{3.1}$$

onde o membro esquerdo da Equação (3.1) chama-se produto escalar de *A(x) e B(x).*

Um vetor **a** é unitário ou normalizado se seu módulo é 1 (um), isto é, se $AA=A^2=1$. Generalizando, a função *A(x)* é normal ou normalizada em [*a,b*] se:

$$\int_a^b A^2(x)dx=1 \tag{3.2}$$

Do exposto é claro que pode-se considerar um conjunto de funçoes $\{\phi_k(x)\}$, $k=1,2,3,...$, com as propriedades:

$$\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \quad m \neq n \tag{3.3}$$

$$\int_a^b \{\phi_m(x)\}^2 dx = 1 \quad m = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.4}$$

Cada elemento do conjunto é ortogonal a todo outro membro do conjunto, e é também normalizado. Tal conjunto de funções é um *conjunto ortonormal* em [*a,b*].

3.2.2 Desenvolvimento de Funções em Séries Ortonormais

Da mesma forma que um vetor **r** tridimensional pode ser escrito por um conjunto de vetores unitários mutuamente ortogonais $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ sob a forma $\mathbf{r} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, segundo Spiegel (1974) há a possibilidade de desenvolver uma função *f(x)* em um conjunto de funções ortonormais, isto é:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad a \leq x \leq b \tag{3.5}$$

Tais séries, chamadas *séries ortonormais*, constituem generalizações das séries de Fourier. Admitindo que a série à direita da Equação (3.5) convirja para *f(x)*, pode-se multiplicar formalmente ambos os membros por $\phi_m(x)$ e integrá-los de *a* a *b*, obtendo:

$$c_m = \int_a^b f(x)\phi_m(x)dx \tag{3.6}$$

que são os *coeficientes generalizados de Fourier*. Tal como no caso das séries de Fourier, também deve-se investigar se a série à direita da Equação (3.5), com coeficientes da Equação (3.6), converge para *f(x)* (SPIEGEL, 1974).

3.2.3 Aproximação no Sentido dos Mínimos Quadrados

Sejam *f(x)* e *f'(x)* seccionalmente contínuas em [a,b], $\phi_m(x)$ com *m* = 1, 2, 3, ... *M*, ortonormais em [*a,b*]. Tem-se a soma finita:

$$S_M(x) = \sum_{m=1}^{M} \alpha_m \phi_m(x) \tag{3.7}$$

como uma aproximação de *f(x)*, onde os α_m são constantes até o momento desconhecidas. Então o *erro médio quadrático* desta aproximação é dado por:

$$\text{Erro} = \frac{\int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2 dx}{b-a} \tag{3.8}$$

E a raiz do erro médio quadrático é dada por:

$$\text{Erro}_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - S_M(x)]^2 dx} \tag{3.9}$$

Determinando-se as constantes α_m de modo que minimize a raiz do erro médio quadrático, Equação (3.9), o erro médio quadrático é mínimo quando os coeficientes são iguais aos coeficientes generalizados de Fourier, Equação (3.6), isto é, quando:

$$\alpha_m = c_n = \int_a^b f(x)\phi_m(x)dx \tag{3.10}$$

Costuma-se dizer que $S_M(x)$ com coeficientes c_n é uma *aproximação de f(x) no sentido dos mínimos quadrados*.

3.2.4 Deslocamentos através da Análise Modal Híbrida

Segundo Dovstan (1998) o deslocamento $\tilde{u}(p,\omega)$ de um ponto *p*, no domínio da freqüência, pode ser representado pela série generalizada de Fourier, conforme a Equação (3.11):

$$\tilde{u}(p,\omega) = \sum_{r=1}^{M} c_r(\tilde{u})\phi_{pr} + \tilde{u}_{res}(p,\omega) \tag{3.11}$$

onde $\tilde{u}_{res}(p,\omega)$ é o erro do truncamento da série.

Seja $\{\tilde{u}\mathbf{e}_i\}$ um vetor de deslocamento na direção i no domínio da freqüência, constituído por N respostas de deslocamento, ou seja:

$$\{\tilde{u}\mathbf{e}_i\} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_i(1,\omega) \\ \tilde{u}_i(2,\omega) \\ \vdots \\ \tilde{u}_i(N,\omega) \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

Seja a matriz modal de deslocamento $[\Phi]_{N\times M}$, que contenha a informação dos modos referentes à direção e pontos do vetor $\{\tilde{u}\mathbf{e}_i\}$, ou seja:

$$[\Phi\mathbf{e}_i] = \mathbf{e}_i \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1M} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NM} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Tem-se então que $\{\tilde{u}\mathbf{e}_i\}$ pode ser expresso por:

$$\{\tilde{u}\mathbf{e}_i\} = [\Phi\mathbf{e}_i]\{\tilde{c}\} + \{\tilde{u}_{res}\} \tag{3.14}$$

sendo $\{\tilde{c}\}$ o vetor dos coeficientes generalizados de Fourier que ponderam a participação de cada modo na resposta da estrutura e dado por:

$$\{\tilde{c}\} = \{\tilde{c}(\omega)\} = \{c_1(\tilde{u}) \quad c_2(\tilde{u}) \quad \ldots \quad c_M(\tilde{u})\}^T \tag{3.15}$$

O vetor residual $\{\tilde{U}_{res}\}$ é determinado por:

$$\{\tilde{u}_{res}\} = [\Phi_{res}]\{\tilde{c}_{res}\} \tag{3.16}$$

A matriz $[\Phi_{res}]$ e o vetor $\{\tilde{c}_{res}\}$ da Equação (3.16) são definidos com as Equações (3.14) e (3.15), mas referem-se a um grande número M de modos analisados, sendo definidos como $r = M+1, M+2, \ldots\infty$, possuem dimensão infinita, onde $[\Phi_{res}]$ é uma matriz real de dimensões N x ∞, enquanto $\{\tilde{c}_{res}\}$ é um vetor coluna complexo de dimensões (∞ x 1).

Dependendo do número de pontos N, o número de modos M analisados e o amortecimento apresentado pela estrutura, o $\{\tilde{u}_{res}\}$ da Equação (3.14) pode ser desprezado. Entretanto uma importante questão deve ser levada em consideração, qual deve ser o número de modos analisados para um número N de respostas medidas. O número em questão está relacionado à faixa de freqüência analisada e também com o comprimento de onda da vibração. Nas aplicações práticas, o número de modo M é escolhido de tal forma que a freqüência angular ω_M, referente a este modo seja maior que a freqüência angular máxima ω_{max} escolhida para o processamento do sinal. Considerando um deslocamento $\tilde{u}(\omega)$, a definição acima pode ser entendida como: $\omega < \omega_{\max} < \omega_M$.

Nos casos em que o número de pontos N analisado é igual o número de modo M, ou seja, $N = M$, e a matriz modal $[\Phi]$ é não singular, ou seja, que admite a sua inversa, os coeficientes modais c_r podem ser estimados pela equação abaixo:

$$\{\tilde{c}_{est}\} = [\Phi]^{-1}(\{\tilde{u}\} - \{\tilde{u}_{res}\}) \tag{3.17}$$

Quando o número de pontos N é igual ao número de modos M, não há um bom ajuste entre a curva do deslocamento estimado pelos coeficientes generalizados de Fourier e os deslocamentos reais apresentados pela estrutura. Para um melhor ajuste, o número de pontos N deve ser maior que o número de modos M, ou seja, $N > M$. Neste caso, pode-se usar a matriz pseudo inversa, definida na Equação abaixo:

$$[\Phi]^{-} = ([\Phi]^T[\Phi])^{-1}[\Phi]^T \tag{3.18}$$

Sendo $[\Phi]$ real e reescrevendo a Equação (3.17) para $N > M$ tem-se:

$$\{\tilde{c}_{est}\} = [\Phi]^{+}(\{\tilde{u}\} - \{\tilde{u}_{res}\}) \tag{3.19}$$

Finalmente, os deslocamentos não medidos em direções ou pontos específicos podem ser previstos segundo a Equação abaixo:

$$\tilde{u}_i(o,\omega) = [\phi_{o1} \quad \phi_{o2} \quad \dots \quad \phi_{oM}]\tilde{C}_{est}(\omega) + \tilde{u}_i(o,\omega)_{res} \tag{3.20}$$

Nas aplicações reais aonde os modos são desacoplados ou que o acoplamento pode ser desprezado a análise modal híbrida torna-se mais simples, entretanto, essas situações são poucas ou restritas. Em muitos casos, diferentes coeficientes modais $c_m(\tilde{u})$ e $c_n(\tilde{u})$ na expansão modal da Equação (3.14), não são independentes devido ao acoplamento dos modos. Para um material com características lineares este acoplamento é devido ao amortecimento. Desta forma, quando não é possível desprezar o acoplamento modal, é necessária uma avaliação do resíduo. Assumindo que as propriedades elásticas são as propriedades elásticas-estáticas do material para todo o corpo, o resíduo pode ser aproximado pela receptância definida pela seguinte Equação:

$$\tilde{u}_i(p,\omega)_{res} \approx \alpha_{pj} \approx \sum_{r=1}^{M} c_r(\tilde{u})\phi_{pr} + \sum_{r>M} \frac{\phi_{pr}\phi_{kr}}{\left[\omega_r^2(1+d_r(\omega)+s^2\right]} \tag{3.21}$$

Pela Equação (3.21) é obtida uma resposta de deslocamento considerando que a força $\tilde{F}_k$, aplicada no ponto *k*, é unitária. A função $d_r(\omega)$ é uma função complexa chamada de função de amortecimento modal.

Devido à propriedade de ortogonalidade dos modos, os termos residuais de $r > M$ da Equação (3.21) são, no sentido de mínimos quadrados, completamente independentes (DOVSTAN, 1998).

Considerando que a função de amortecimento modal d_m é o fator de perda de amortecimento η_r, definido na análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade e amortecimento histerético no item 2.4.1, a receptância medida pode ser dada pela soma da aproximação pelos coeficientes generalizados de Fourier dos *M* primeiros modos analisados com a receptância para amortecimento histerético definida pela Equação (2.142), analisada para um número maior de modos, ou seja:

$$\tilde{u}_i(p,\omega)_{res} \approx \alpha_{pj} \approx \sum_{r=1}^{M} c_r(\tilde{u})\phi_{pr} + \sum_{r=M+1}^{r_{\max}} \frac{\psi_{pr}\psi_{kr}}{m_r\left(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2\right)} \tag{3.22}$$

Em alguns casos a aproximação da receptância pela Equação (3.22) não será boa, assim o resíduo deverá ser aproximado por outras maneiras ou ser completamente desconsiderado.

Quando o resíduo é desconsiderado, um número maior de pontos e de modos deve ser analisado, para uma melhor aproximação dos resultados (DOVSTAN, 1998).

Os fatores de amortecimento podem ser extraídos experimentalmente pelos identificadores de parâmetros modais na análise modal para aproximação dos resíduos da expansão (3.22), entretanto as funções de amortecimento podem ser estimadas baseados nas funções respostas em freqüência e nas formas modais conforme Dalenbring (1999), ou segundo Dovstam (1997), a recepetância pode ser encontrada baseada nas funções de amortecimento de materiais isotrópicos e nas formas modais de deslocamento. Segundo Dovstam (1995) a formulação tridimensional das propriedades de amortecimento do material pode ser feita a partir da lei de Hooke no domínio da freqüência.

O campo de deslocamento, ou seja, o vetor de deslocamento de pontos, estimado pela análise modal híbrida, pode ser utilizado no tensor de deformação da Equação (2.59) para estimação da deformação dinâmica. Para derivação espacial dos deslocamentos são utilizados métodos numéricos, como o método de diferenças finitas e métodos de elementos finitos, tratados no Capítulo 4. Nestes métodos, o erro de aproximação está associado à distância entre os pontos analisados, ou seja, a discretização espacial. Assim sendo, a discretização deve ser pequena e está relacionada com o comprimento de onda. Quanto mais alta a freqüência de análise menor deve ser essa distância. Uma vez que a propagação de ondas em uma estrutura é regida por uma função de duas variáveis (espaço e tempo), a discretização estrutural da malha deve ser feita de forma adequada para garantir que um fenômeno semelhante ao aliasing na discretização do domínio do tempo não aconteça. Na realidade, pode-se pensar nesse problema como uma espécie de "aliasing espacial", no qual o espaçamento dos elementos não é suficiente para descrever o fenômeno ondulatório no espaço. Uma regra prática comumente usada é a de que devem existir, no mínimo, seis elementos por número de onda de maneira a discretizar a onda de forma adequada. Em aplicações práticas, o tamanho dos transdutores utilizados pode interferir na discretização. Em algumas situações, são utilizados nas medições vibrômetros a laser, capazes de medir a velocidade de vibração em pontos muito próximos.

3.3 Matriz de Transformação Deslocamento – Deformação (DST)

A matriz de transformação deslocamento – deformação (DST) utilizada por Okubo e Yamaguchi (1995) e Lee (2007) e de certa forma por Bernasconi e Ewins (1989), pode ser obtida analiticamente utilizando a transformação de coordenadas da análise modal definida pela Equação (2.119).

Segundo Lee (2007) a deformação em um ponto na estrutura, $\{\varepsilon(t)\}$, pode ser expressa pela diferenciação espacial da distribuição de deslocamento como:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon(t)\} &= \mathbf{D}([\Phi])\{q(t)\} \\ &= [\varepsilon]\{q(t)\}\end{aligned} \tag{3.23}$$

onde $\mathbf{D}$ representa o operador diferencial linear e $[\varepsilon]$ é a matriz modal de deformação cujas colunas representam as formas modais de deformação. Rearranjando a Equação (2.119), $\{q(t)\}$ é obtido a partir de:

$$\{q(t)\} = [\Phi]^{-1}\{x(t)\} \tag{3.24}$$

Substituindo a equação anterior na Equação (3.23), tem-se:

$$\{\varepsilon(t)\} = [\boldsymbol{\varepsilon}][\Phi]^{-1}\{x(t)\} \tag{3.25}$$

Usando a notação:

$$[T] = [\boldsymbol{\varepsilon}][\Phi]^{-1} \tag{3.26}$$

Obtém-se:

$$\{\varepsilon(t)\} = [T]\{x(t)\} \tag{3.27}$$

Na Equação anterior, $[T]$ representa a matriz de transformação usada para converter deslocamento em deformação. A Equação (3.27) pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1m} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

Quando o número de pontos medidos na estrutura é N e o número considerado de modos é M, o tamanho da matriz $[\Phi]$ torna-se $N \times M$. Se $N \neq M$, a matriz pseudo inversa $[\Phi]^+$, Equação (3.18), deve ser usada.

A Equação (3.26) mostra que a matriz de transformação é composta da matriz modal de deslocamento e a matriz modal de deformação da estrutura. Essas matrizes podem ser obtidas analiticamente, numericamente, por elementos finitos, por exemplo, ou experimentalmente, utilizando as técnicas mostradas na análise modal item 2.4. Assim sendo, a distribuição de deformação pode ser obtida através das medidas de deslocamento em estruturas que apresentem vibração utilizando a matriz de transformação.

3.4 Resumo do Capítulo

Neste Capítulo foram apresentadas a análise modal híbrida e a matriz de transformação deslocamento – deformação. A análise modal híbrida pode ser utilizada para estimar deslocamentos de estrutura sujeitas à vibração e associada à análise modal híbrida de deformação, ou seja, através da derivação espacial dos deslocamentos estimados, pode ser determinado o tensor de deformação da estrutura no domínio da freqüência. A matriz de transformação deslocamento – deformação também pode ser utilizada para estimar a deformação dinâmica de estruturas. Essa matriz é independente do tempo, da freqüência ou pequenas alterações na distribuição de massa da estrutura. Entretanto, é um método unidirecional, ou seja, a deformação pode ser estimada apenas em uma direção. Nesse caso, sua utilização restringe-se apenas às situações onde a direção principal de deformação é conhecida.

No próximo Capítulo serão apresentados os métodos e simulações numéricas para melhor compreensão da aplicação dos métodos estudados que relacionam a análise modal com a análise de tensão e deformação dinâmicas.

Capítulo 4

Simulações Numéricas

4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os aspectos teóricos dos métodos numéricos, de diferenças finitas e elementos finitos, e simulações numéricas realizadas para estimar ou determinar as deformações ou tensões em superfícies planas. No item 4.2 são apresentados os aspectos teóricos do Método de Diferenças Finitas (MDF) e Método de Elementos Finitos (MEF). Neste trabalho o MDF é utilizado para a derivação dos deslocamentos e determinação da deformação, e o MEF é utilizado tanto na determinação da deformação quanto na identificação dos modos naturais de vibração de uma viga de Euler-Bernoulli. A comparação entre a derivação analítica e utilizando o MDF é feita no item 4.3. No item 4.4 é realizada uma simulação numérica com o intuito de se verificar a relação entre a deflexão e a deformação de flexão em um viga. No item 4.5 a matriz de transformação deslocamento – deformação para uma viga Euler-Bernoulli é encontrada. Os modos de vibração transversais da viga e os modos de deformação são encontrados analiticamente e assim, a matriz de transformação é determinada. No item 4.6 um exemplo de aplicação da análise modal híbrida é realizado. Os deslocamentos longitudinais de pontos da viga estudada são estimados pela técnica, e então, derivados para se estimar a deformação de flexão. O valor de deformação estimado é comparado com o valor de deformação encontrado pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal da viga. No item 4.7 é simulada uma condição operacional de vibração em uma chapa de aço. Posteriormente é feita a análise de tensão dinâmica em um ponto da chapa utilizando o MDF. Finalmente no item 4.8 é realizada uma análise de distribuição de deformação em uma superfície plana utilizando os métodos de MDF e MEF, comparando-se os resultados.

4.2 Aspectos Teóricos do MDF e MEF

As análises propostas anteriormente na teoria da elasticidade e na análise dinâmica de estruturas são baseadas em soluções fechadas ou aproximadas que fazem parte dos métodos analíticos clássicos de soluções das equações diferenciais que governam o problema avaliado. Entretanto, estes métodos são difíceis de serem aplicados em problemas complexos, sendo aplicados em situações simples, por exemplo, na análise de vigas e de chapas. Desta forma, os modelos são simplificados e analisados por métodos numéricos.

Os métodos numéricos utilizados na solução de equações diferenciais são: o método de elementos finitos (MEF); método de diferenças finitas (MDF) e elementos de contorno. O método de elementos finitos utiliza elementos discretos para solução de equações diferenciais que governam problemas complexos. O método de diferenças finitas resolve as equações diferenciais a partir de equações algébricas e os elementos de contorno utilizam integrais no domínio do contorno na solução das equações diferenciais que governam o problema.

As informações de deslocamentos dinâmicos, obtidos através da análise modal em estruturas ou sistemas contínuos, são discretas, ou seja, os deslocamentos são avaliados em pontos específicos da estrutura. Desta forma é necessária a aplicação de métodos numéricos para a solução das equações diferenciais da relação deslocamento – deformação, podendo ser o método das diferenças finitas e o método de elementos finitos. Como citado anteriormente, os problemas dinâmicos são complexos e a identificação dos parâmetros modais das estruturas é feita, muitas vezes, utilizando-se métodos de elementos finitos. Nos itens subseqüentes esses métodos serão estudados.

4.2.1 Método de Diferenças Finitas

O método de diferenças finitas (MDF) é uma das várias técnicas utilizadas para a diferenciação de uma função discreta.

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $a \le x \le b$ e supondo que o intervalo $[a,b]$ contém o conjunto de n pontos $a, x_1, \ldots, x_i, \ldots x_{n-2}, b$, sendo que esses pontos são representados por uma malha, onde cada ponto refere-se a um nó e a distância entre esses nós, ou seja, $x_{i+1} - x_i$, é definida como h, a função $f(x)$ pode ser representada discretamente no intervalo como $f(x_i) = [f(a), f(x_1), \ldots, f(x_i), \ldots, f(x_{n-2}), f(b)]$. Sendo $f(x_k)$ uma função discreta, pode ser utilizado o método das diferenças finitas para aproximação da derivada desta função em pontos pertencentes ao intervalo. A Figura 4.1 ilustra uma função $f(x)$ discretizada no intervalo [a,b].

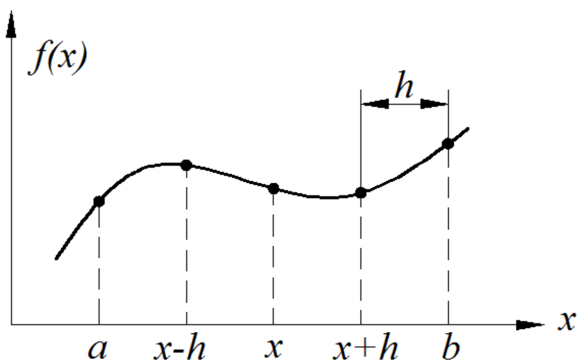


Figura 4.1 – Função $f(x)$ discretizada

A seleção dos pontos nodais depende da geometria do domínio e do grau de precisão desejado para a aproximação das derivadas da função $f(x)$. O grau de precisão está relacionado com o espaçamento e o número de nós utilizado no cálculo das diferenças finitas. Quanto menor o espaçamento e maior o número de pontos analisados, melhor será a aproximação das derivadas das funções pelo método numérico de diferenciação.

A Figura 4.2 ilustra uma malha unidimensional e uma malha bidimensional utilizada no cálculo das diferenças finitas:

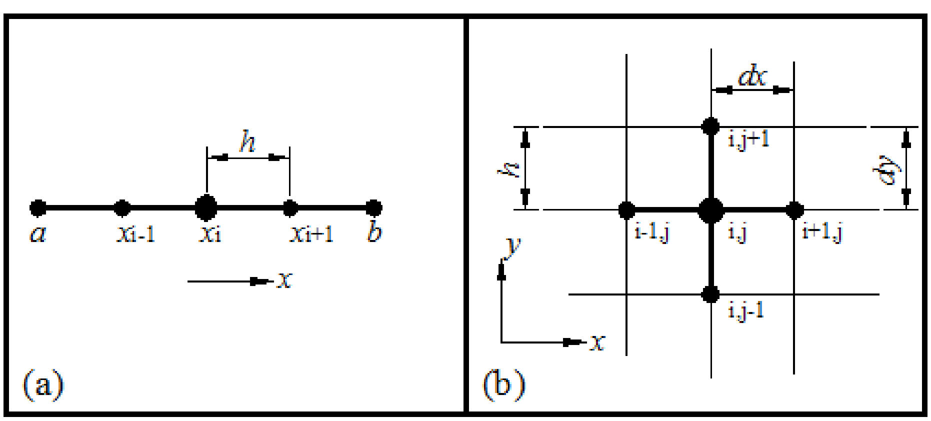


Figura 4.2 – (a) Malha unidimensional e (b) Malha bidimensional utilizadas no MDF

4.2.2 Método de Diferenças Finitas Centrais

Quando uma função $f(x)$ pode ser avaliada em pontos eqüidistantes, posicionados à direita e à esquerda de x, a aproximação da derivada da função $f(x)$ pode ser feita pelo método de diferenças finitas centrais (MATHEWS; FINK, 1999).

A Tabela 4.1 mostra as fórmulas de diferenças finitas centrais de ordem $O(h^2)$, para primeira à quarta derivada (MATHEWS; FINK, 1999).

Tabela 4.1 – Fórmulas de Diferenças-Centrais de ordem $O(h^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{f_2 - f_1 + 2f_{-1} - f_{-2}}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_2 - 4f_1 + 6f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{h^4}$$

A Tabela 4.2 mostra as fórmulas de diferenças finitas centrais de ordem $O(h^4)$, para primeira à quarta derivada, (MATHEWS; FINK, 1999).

Tabela 4.2 – Fórmulas de Diferenças-Centrais de ordem $O(h^4)$

$$f'(x_0) \approx \frac{-f_2 + 8f_1 - 8f_{-1} + f_{-2}}{12h}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1} - f_{-2}}{12h^2}$$

$$f^{(3)}(x_0) \approx \frac{-f_3 + 8f_2 - 13f_1 + 13f_{-1} - 8f_{-2} + f_{-3}}{8h^3}$$

$$f^{(4)}(x_0) \approx \frac{f_3 + 12f_2 - 39f_1 + 56f_0 - 39f_{-1} + 12f_{-2} - f_{-3}}{6h^4}$$

Conforme mostrado na literatura, o erro de truncamento na aproximação da derivada de uma função pelo método de diferenças finitas está associado à própria função e também à distância h utilizada entre os pontos de análise. Sendo a segunda derivada (n = 2) aproximada de uma função, o erro de truncamento relaciona-se com a terceira derivada, ou seja, derivada $n + 1$ da função. O termo de erro também pode ser determinado em função da distância h, quanto menor a distância h menor será o erro de truncamento e melhor será aproximação da derivada utilizando o MDF. O equacionamento do método de diferenças finitas centrais está melhor detalhado no Apêndice B.

4.2.3 Método de Diferenças Finitas Backward e Forward

Quando há a necessidade de se avaliar a derivada de uma função $f(x)$ em pontos anteriores ou posteriores a x, onde é conhecido o valor da função $f(x)$, o método de diferenças finitas centrais não pode ser usado e sim, os métodos de diferenças finitas *backward* e *forward*, (MATHEWS; FINK, 1999)

Pelo método de diferenças backward ou forward é possível calcular o tensor de deformação nos contornos das estruturas e interfaces entre materiais, onde descontinuidades das propriedades de materiais estão presentes, a partir do conhecimento do deslocamento dos pontos da malha, (SEHLSTEDT, 1999).

A Tabela 4.3 mostra as fórmulas de diferenças finitas forward e backward de ordem $O(h^2)$, para a primeira à segunda derivada (MATHEWS; FINK, 1999).

Tabela 4.3 – Fórmulas de Diferenças Forward e Backward de ordem $O(h^2)$

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h} \quad \textit{Forward}$$

$$f'(x_0) \approx \frac{3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}}{2h} \quad \textit{Backward}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_1 + 4f_2 - f_3}{h^2} \quad \textit{Forward}$$

$$f''(x_0) \approx \frac{2f_0 - 5f_{-1} + 4f_{-2} - f_{-3}}{h^2} \quad \textit{Backward}$$

Maiores detalhes sobre o equacionamento do método de diferenças finitas backward e forward encontram-se no apêndice C.

4.2.4 Método de Elementos Finitos

Segundo Zienkiewicz (1971) o *Método de Elementos Finitos* (MEF) foi originalmente introduzido por Turner, onde um corpo contínuo é analisado por um número finito de elementos interconectados através de nós. Segundo Azevedo (2003) a publicação mais antiga que utiliza a designação "elementos finitos" foi realizada por Ray Clough em 1960 com o título "*The Finite Element in Plane Stress Analysis*".

O método de elementos finitos é uma poderosa ferramenta físico-matemática usada na transferência de calor, no escoamento de fluidos, na análise ondas eletromagnéticas, na hidrodinâmica e na análise estática e dinâmica de estruturas.

Pelo método de elementos finitos, procedimento aproximado, são encontradas as soluções em diversas aplicações independente da forma, da estrutura e da condição de carregamento, dentro da precisão aceitável do problema de engenharia.

Neste caso, a solução aproximada simula a estrutura como uma montagem de elementos que possuem um comprimento finito e não diferencial. Assim, o sistema é subdividido em um número finito de partes ou elementos de suporte que é a estrutura inteira e modelada por um agregado de estruturas simples. Os pontos de conexão entre os elementos são chamados de nós do modelo. A idéia da discretização de um sistema contínuo considera a divisão da estrutura em partes separadas distintas, conectadas entre si nos pontos discretos. Essa divisão resulta em uma malha de elementos finitos que pode ser construída a partir de diversos elementos.

A escolha de qual elemento empregar para construção da malha depende do conhecimento das propriedades do elemento escolhido para a representação do problema, que é a característica fundamental do método (ALVES FILHO, 2002).

Os três tipos de elementos básicos utilizados no modelo de elementos finitos são o elemento de viga (unidimensional), elemento de placa (bidimensional) e o elemento sólido (tridimensional). A Figura 4.3 ilustra os três tipos básicos de elementos utilizados pelo MEF.

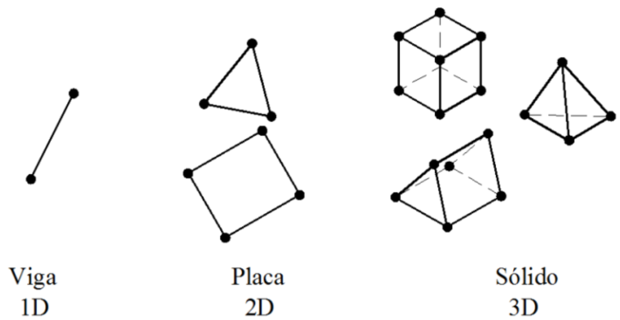


Figura 4.3 – Tipos de elementos utilizados pelo MEF

Segundo Azevedo (2003) a formulação do elemento finito baseia-se no método de deslocamento, modelos de equilíbrio ou métodos híbridos ou mistos.

Existem diversos programas comerciais que utilizam o método de elementos finitos, dentre eles, pode-se destacar o ANSYS®, NASTRAN® e o COSMOS®.

No presente trabalho será abordada a formulação do método de elementos finitos baseada no método de deslocamento para a relação de deslocamento e deformação na elasticidade plana, utilizando elementos de placa, e também os aspectos teóricos principais na utilização do modelo de elementos finitos na análise dinâmica utilizando o ANSYS® 11.0.

4.2.5 Método de Elementos Finitos na Elasticidade Plana

A malha que necessita ser criada para utilização do MDF na relação deslocamento deformação é uma malha uniforme e para utilização das diferenças finitas centrais, os pontos (nós) da malha devem ser igualmente espaçados e distribuídos uniformemente na malha. Em algumas situações reais, ou seja, na análise de deformação em superfícies planas que apresentam descontinuidades geométricas e fatores de concentração de tensão, como furos, rasgos, cantos, por exemplo, é necessária a "distorção" da malha utilizada para aplicação do método numérico na solução do problema de elasticidade. Assim, pode-se utilizar o método de elementos finitos na relação deslocamento-deformação em regiões que dificultam a aplicação do método de diferenças finitas.

Os elementos isoparamétricos utilizados como opção de malha à de diferenças finitas, serão o elemento triangular e o elemento quadrilateral com quatro nós. Maiores detalhes sobre estes elementos encontram-se no apêndice D. Estes elementos possibilitam uma boa aproximação dos valores de deformação a partir dos deslocamentos medidos em um número de pontos não muito maior que seria utilizado no MDF e ainda possibilita a análise de deformação com malhas distorcidas. A Figura 4.4 ilustra uma região de uma peça que pode ser avaliada com uma malha do MEF.

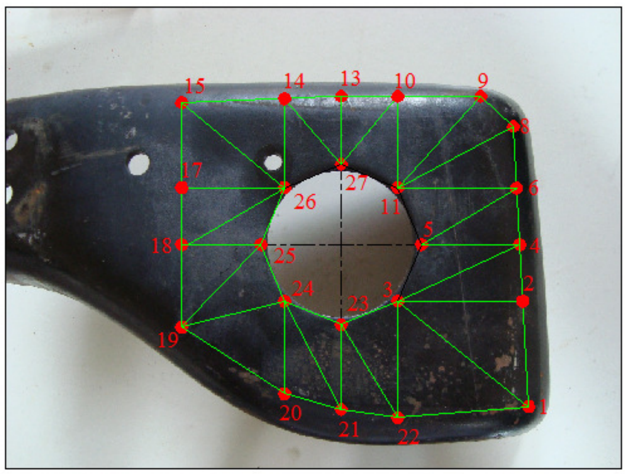


Figura 4.4 – Região de uma peça onde pode ser utilizada a malha de MEF

4.2.6 Método de Elementos Finitos na Análise Dinâmica

No item 3.2 referente à análise modal híbrida, cita-se a identificação dos modos próprios reais de vibração da estrutura analisada para serem utilizados na aproximação, pelos coeficientes generalizados de Fourier, das respostas de deslocamentos. Serão abordados neste trabalho alguns aspectos teóricos na utilização da ferramenta ANSYS.11.0® para análise modal utilizando método de elementos finitos.

Segundo Moaveni (1999) o ANSYS® começou a ser utilizado em 1971 e é um programa de elementos finitos. Através do ANSYS® é possível ser feitas análises de problemas estáticos, dinâmicos, transferência de calor, escoamento de fluído e análise eletromagnética é o programa é utilizado por muitos campos da engenharia, incluindo a aeroespacial, automotiva, eletrônica e nuclear.

Basicamente os passos a serem seguidos na análise por elementos finitos no ANSYS® consistem em *Pré-Processamento*, *Solução* e *Pós-Processamento*, onde cada um constitui de:

Pré-Processamento

- Define o tipo de elemento;
- Define as propriedades do elemento;
- Define as propriedades do material;
- Cria o modelo geométrico;
- Define a malha (discretização);
- Discretiza ou cria a malha;

Na etapa de Solução são definidos, o tipo de análise, as condições de contorno e as condições de carregamento da estrutura analisada. No Pós-Processamento é feita a análise de resultados através de gráficos e listas de resultados.

Através do MEF são criadas as matrizes de massa [M] e de rigidez [K] do modelo implementado. A partir disto, o problema pode ser analisado conforme citado na análise modal teórica de sistemas com múltiplos graus de liberdade conservativos no item 2.4.1. A extração dos autovetores (modos) pode ser feita utilizando os algoritmos de Block Lanzos, Subespaço, PCG Lanczos e redução.

4.3 Comparação entre a Derivação Analítica e Utilizando MDF

Considerando uma função $u(x)$ que determina o deslocamento de uma estrutura, dada por:

$$u(x) = x\sin(2\pi x) \quad (4.1)$$

A função acima avaliada no domínio $0 \le x \le 2\pi$ e discretizada com $dx = h = 0{,}1$ é mostrada na Figura 4.5.

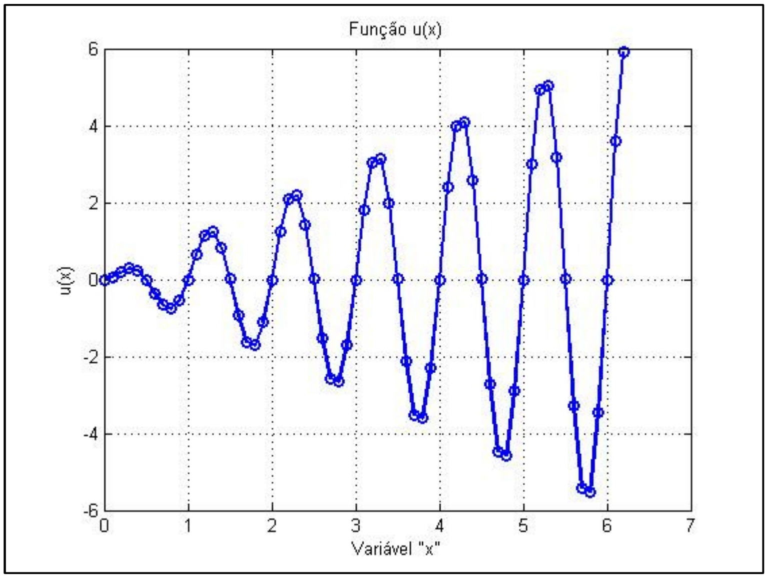


Figura 4.5 – Função u(x)=$x$sin(2πx) discretizada

Pela relação deslocamento-deformação, a primeira derivada em relação à variável x da função $u(x)$ da Equação (4.1) refere-se à deformação ε e dada analiticamente por:

$$u'(x) = \varepsilon = \sin(2\pi x) + 2\pi x \cos(2\pi x) \tag{4.2}$$

Utilizando para aproximação da derivada $u'(x) = f'(x)$ nos dois primeiros pontos, ou seja, x_0 e x_1, a fórmula de diferenças finitas forward e para os dois últimos pontos, ou seja, x_{n-1} e x_n, com n igual ao número total de pontos, a fórmula de diferenças finitas backward, definidas na Tabela 4.3 e para os pontos centrais utilizando a fórmula de diferenças finitas centrais para cinco pontos e ordem $O(h^4)$ definida na Tabela 4.2, pode-se comparar a aproximação da derivada da função $u(x)$ pelo uso do MDF com a obtida analiticamente conforme mostra a Figura 4.6.

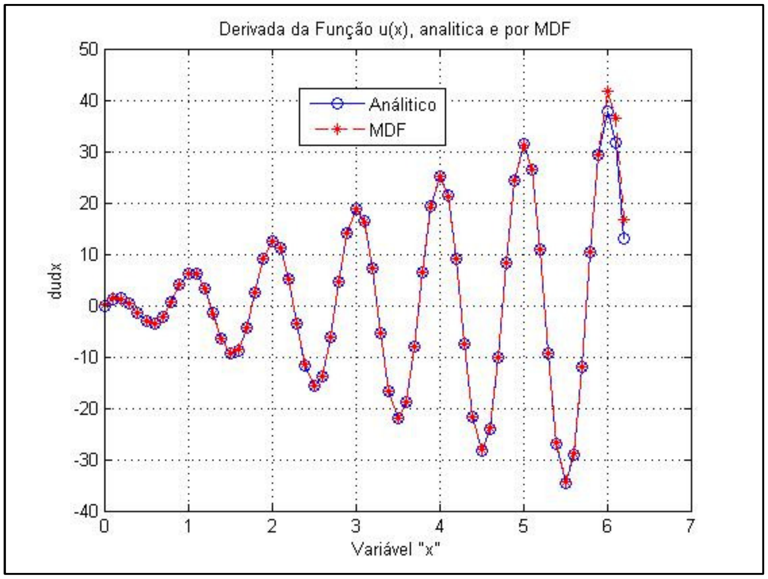


Figura 4.6 – Comparação entre a aproximação da derivada de u(x) analítica e por MDF

Pelo gráfico da Figura 4.6 é possível se observar que a derivada numérica da função $u(x)$ aproximou-se da derivada analítica da mesma. A aproximação é melhor na parte central do domínio avaliado, pois é usado o método de diferenças finitas centrais.

4.4 Relação entre a Deflexão e a Deformação de Flexão em uma Viga

Nesta seção é apresentada a relação entre o deslocamento transversal (deflexão) e a deformação longitudinal de uma viga engastada em uma das extremidades e com uma carga estática concentrada em outra.

Primeiramente, é resolvida a equação diferencial que governa o problema de deflexão estática da viga, escrevendo-se uma equação analítica para a deflexão em função da coordenada (x) da viga. A partir de uma malha de nós, discretiza-se a viga em 11 pontos. Nesses pontos é calculada a deformação através da equação analítica obtida e também por diferenças finitas.

Para uma viga em balanço, engastada em uma das extremidades e na outra uma carga concentrada F, como pode ser visto na Figura 4.7, pode ser encontrado o valor da deflexão y para qualquer ponto x da viga resolvendo a seguinte equação diferencial:

$$EI\frac{d^4y(x)}{dx^4} = w(x) \quad x \in [0, L] \tag{4.3}$$

onde:

$w(x)$: refere-se a uma carga distribuída sobre a viga;

E: Módulo de Elasticidade do material da viga;

y: deslocamento vertical da viga;

x: qualquer posição entre 0 e o comprimento L da viga;

I: Inércia da seção transversal da viga definida por:

$$I = \frac{be^3}{12} \tag{4.4}$$

onde b é a largura e e é a espessura da viga.

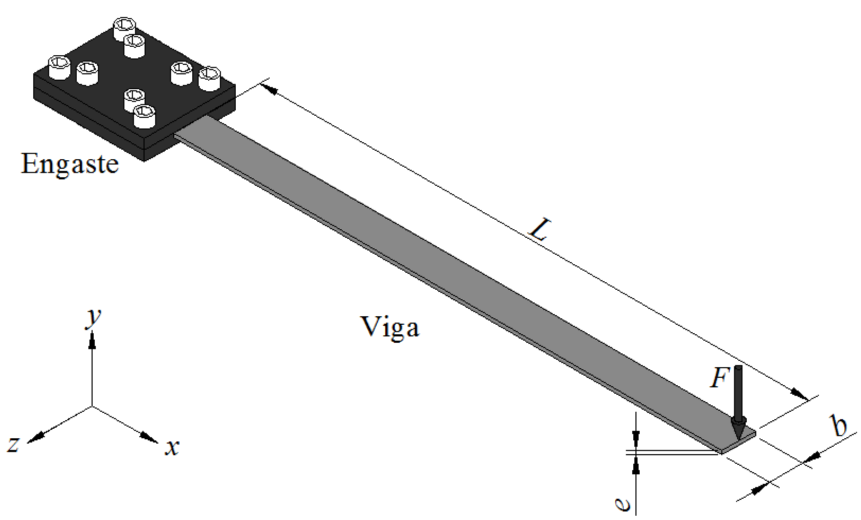


Figura 4.7 – Viga em balanço

Segundo Shigley, Mischke e Budynas (2005) a equação analítica $y(x)$ que determina a deflexão na direção y da viga em estudo em função da coordenada x é dada pela Equação abaixo:

$$y(x) = -\frac{Fx^2}{6EI}(x - 3L) \tag{4.5}$$

A deformação de flexão longitudinal, ou seja, na direção *x*, na superfície externa *xz* da viga é dada pela análise da curvatura da mesma, ou seja, a segunda derivada da função de deflexão relacionada com a distância entre a linha neutra á superfície da mesma. Sendo *y'* a distância da linha neutra da viga á superfície da mesma, a deformação ε_x é determinada por:

$$\varepsilon_x(x) = -y' \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \tag{4.6}$$

sendo:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{F(x - L)}{EI} \tag{4.7}$$

As dimensões, módulo de elasticidade e de carga aplicada na viga para serem utilizados no cálculo de deflexão e deformação estão listados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Dimensões, módulo de elasticidade e carga aplicada na viga

Variáveis	Valor
b	25,4 mm
e	3,05 mm
E	74 GPa
y'	1,525 mm
F	10 N

A deformação e a deflexão são avaliadas em 11 pontos da viga distribuídos uniformemente ao longo do comprimento *L* da mesma. Na Figura 4.8 é mostrada a viga discretizada e em quais pontos é usado o método de diferenças finitas forward, backward e centrais na aproximação da deformação longitudinal na superfície da viga.

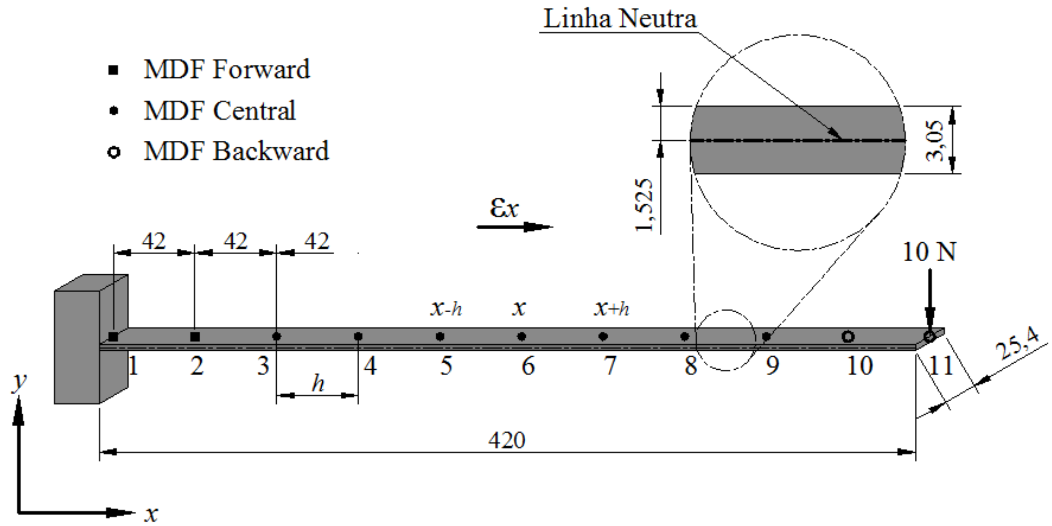


Figura 4.8 – Viga discretizada

Pela Equação (4.5) é determinada a deflexão $y(x)$ para cada ponto da malha criada na viga. O gráfico da Figura 4.9 mostra a deflexão, calculada analiticamente, que ocorre na viga analisada.

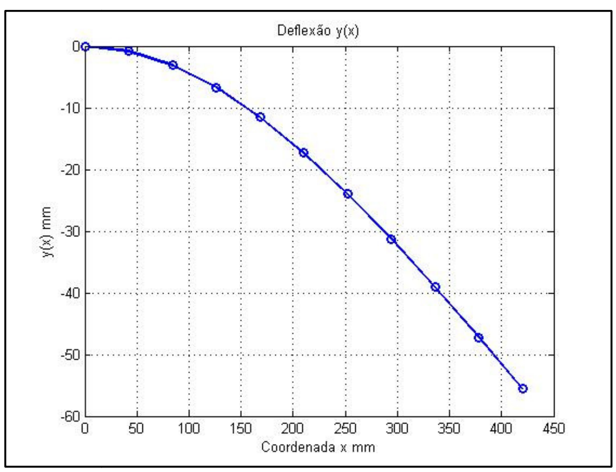


Figura 4.9 – Gráfico da deflexão da viga analisada

A deformação longitudinal analítica da viga em cada ponto da malha é calculada através da Equação (4.6). Os valores analíticos de deformação foram comparados com os valores encontrados através das fórmulas de diferenças finitas de segunda derivadas das Tabela 4.2 e Tabela 4.3, multiplicadas pela distância *y'*. Para a aproximação da deformação nos dois primeiros pontos é utilizado o método das diferenças finitas forward, para os dois últimos pontos é utilizado o método de diferenças finitas backward e para os pontos centrais é utilizado o método de diferenças finitas central de ordem $O(h^4)$. A Tabela 4.5 mostra a comparação entre os valores de deformação longitudinal da viga encontrados analiticamente e numericamente por diferenças finitas para cada ponto da malha, e também o pequeno erro obtido na comparação.

Tabela 4.5 – Comparação da deformação analítica e numérica da viga

nó	*x* (mm)	y(x) mm	ε_x Analítico	ε_x MDF	Erro 1.0e-016
1	0	0	0,0014	0,0014	0,020
2	42	-0,806	0,0013	0,0013	-0,041
3	84	-3,112	0,0012	0,0012	-0,020
4	126	-6,752	0,0010	0,0010	0,033
5	168	-11,559	0,0009	0,0009	-0,098
6	210	-17,366	0,0007	0,0007	0,068
7	252	-24,006	0,0006	0,0006	0,069
8	294	-31,314	0,0004	0,0004	0,018
9	336	-39,122	0,0003	0,0003	-0,135
10	378	-47,263	0,0001	0,0001	-0,233
11	420	-55,570	0	0,0000	0,480

4.5 Matriz de Transformação para uma Viga Euler-Bernoulli

Neste item será determinada analiticamente a matriz de transformação [T], tratada no item 3.3, para uma viga Euler-Bernoulli semelhante a da Figura 4.7, entretanto para um problema de vibração transversal livre e a viga será considerada um sistema conservativo com amortecimento nulo.

Considerando as dimensões e propriedades elásticas da Tabela 4.6 e pela Equação (2.156) é possível calcular as freqüências naturais da viga em análise. Os valores encontrados para as cinco primeiras freqüências naturais angulares são: ω_1 = 91,87; ω_2 = 575,77; ω_3 = 1612,17; ω_4 = 3159,21 e ω_5 = 91,87 rad/s. Como $f = (1/2\pi)\omega$, tem-se que as freqüências naturais são f_1 = 14,62; f_2 = 91,64; f_3 = 256,58; f_4 = 502,80 e f_5 = 831,17 Hz.

Tabela 4.6 – Dimensões e módulo de elasticidade para a viga em análise

Variáveis	Valor
b	25,4 mm
e	3,05 mm
y'	1,525 mm
E	74 GPa
L	0,420 m
A_t	$7{,}747.10^{-5}$ m^2
I	$6{,}005.10^{-11}$ m^4

Pela Equação (2.157) é possível se obter os modos de vibração transversal da viga em análise. Considerando os valores aproximados de $\overline{\lambda}_r L$ da Tabela 2.2 e a para os pontos mostrados na Figura 4.10, os cinco primeiros modos de deslocamento da viga estão indicados na Tabela 4.7.

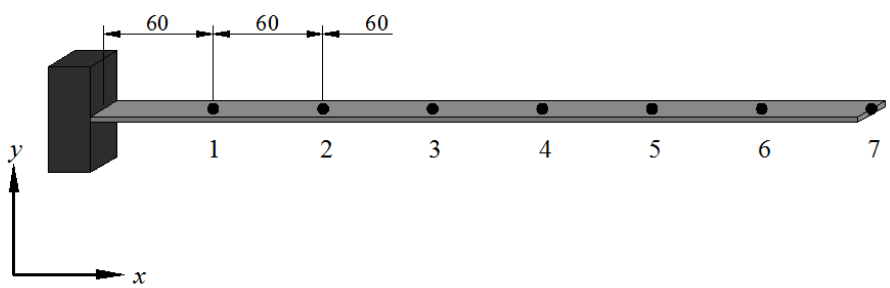


Figura 4.10 – Discretização da viga para matriz DST analítica

Tabela 4.7 – Modos de deslocamento da viga analisada

Ponto	1° Modo	2° Modo	3° Modo	4° Modo	5° Modo
1	-0,0671	-0,3475	-0,7932	-1,2078	-1,4676
2	-0,2495	-0,9928	-1,5144	-1,0428	0,1407
3	-0,5195	-1,4138	-0,7979	0,9929	1,1948
4	-0,8508	-1,2819	0,7064	1,0071	-1,2001
5	-1,2198	-0,5355	1,2951	-0,9572	-0,1760
6	-1,6071	0,6486	0,1399	-0,7922	1,2021
7	-2,0000	2,0000	-2,0000	2,0000	-2,0000

Sendo a densidade ρ = 2680 kg/m^3, a matriz modal de deslocamento $[\Phi]$ normalizado pela massa é encontrada multiplicando $1/\sqrt{\rho A_t L}$ pela matriz [Ψ] indicada na Tabela acima.

Pela Equação (3.23) é possível notar que a matriz modal de deformação é encontrada a partir da derivação da matriz modal de deslocamento segundo o operador diferencial **D**. Para o caso da viga em análise, a deformação longitudinal na superfície da viga pode ser determinada pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal da viga conforme Equação (4.6). Desta forma, derivando duas vezes a função da Equação (2.157) em relação à coordenada *x*, tem-se a seguinte Equação:

$$\{\ddot{\psi}(x)\}_r = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \bar{\lambda}_r^{\,2} \cos \bar{\lambda}_r x - \bar{\lambda}_r^{\,2} \cosh \bar{\lambda}_r x + \frac{sen\bar{\lambda}_r L - senh\bar{\lambda}_r L}{\cos \bar{\lambda}_r L + \cosh \bar{\lambda}_r L} (-\bar{\lambda}_r^{\,2} sen\bar{\lambda}_r x - \bar{\lambda}_r^{\,2} senh\bar{\lambda}_r x) \tag{4.8}$$

Então o modo *r* de deformação normalizado pela massa em função da coordenada *x* é dado por:

$$\{\varepsilon(x)\}_r = \frac{y'}{\sqrt{\rho A_t L}} \{\ddot{\psi}\}_r(x) \tag{4.9}$$

Os cinco primeiros modos de deflexão e deformação normalizados pela massa para a viga analisada podem ser visualizados nos gráficos da Figura 4.11.

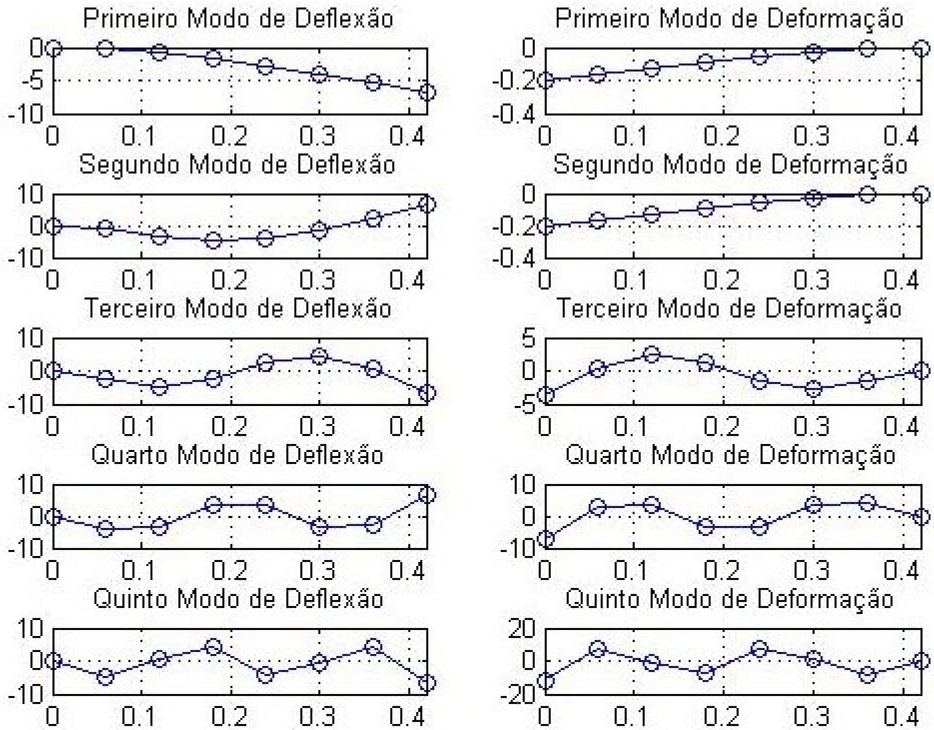


Figura 4.11 – Modos de deflexão e deformação de flexão da viga analisada

Na Figura 4.11 os modos de deflexão da viga são as formas com que a mesma vibra quando excitada em uma de suas freqüências naturais referentes a esses modos. Os modos de deformação não representam a forma com que a estrutura vibra, mas estão associados aos modos de deslocamento e indicam as regiões da estrutura de maior ou menor amplitude de deformação em cada modo de vibrar.

Através dos vetores modais $\{\varepsilon(x)\}_r$ analisados para os cinco primeiros modos, é encontrada a matriz modal de deformação $[\boldsymbol{\varepsilon}]$. Pela Equação (3.26), entretanto, utilizando a pseudo inversa, é determinada a matriz de transformação $[T]$, indicada abaixo.

$$
[T] = \begin{bmatrix}
-0{,}5432 & -0{,}0881 & 0{,}4744 & -0.1617 & -0{,}1617 & 0{,}2539 & -0{,}0976 \\
-0{,}2036 & -0{,}3098 & -0{,}0022 & 0{,}2329 & 0{,}0214 & -0{,}1312 & -0{,}0578 \\
0{,}5330 & 0{,}0050 & -0{,}5792 & 0{,}1731 & 0{,}2790 & -0{,}1916 & 0{,}0558 \\
-0{,}1688 & 0{,}2295 & 0{,}1787 & -0{,}5303 & -0{,}0814 & 0{,}4798 & -0{,}1718 \\
-0{,}1842 & 0{,}0083 & 0{,}2609 & -0{,}0427 & -0{,}2628 & -0{,}0706 & 0{,}1763 \\
0{,}2747 & -0{,}1194 & -0{,}1827 & 0{,}4530 & -0{,}0615 & -0{,}5577 & 0{,}3471 \\
0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000
\end{bmatrix} \tag{4.10}
$$

Na matriz de transformação [T] indicada na Equação (4.10) a última linha apresenta valores nulos, ou seja, iguais a zero. Esta linha refere-se ao grau de liberdade da extremidade livre da viga, ou seja, o nó número 7, conforme Figura 4.10. Neste nó, a deformação de flexão da viga é sempre nula, o que condiz com a informação observada na última linha da matriz. Com a informação dos deslocamentos, medidos ou estimados, dos pontos da superfície da viga e a matriz de transformação é possível se prever a deformação desses pontos utilizando a Equação (3.28).

4.6 Estimativa da Deformação de Flexão de uma Viga Utilizando a HMA

A análise dinâmica realizada em vigas, seja de deslocamento, velocidade ou aceleração, é geralmente feita na direção transversal (perpendicular) à superfície, através de transdutores de deslocamentos, vibrômetros a laser ou acelerômetros. Assim sendo, a deformação dinâmica de flexão pode ser prevista a partir da segunda derivada do deslocamento transversal, como visto nos itens anteriores. Entretanto, em outros tipos de estruturas, por exemplo, placas, ou estruturas sujeitas a modos de torção, a direção de deformação principal não é inicialmente conhecida e a estrutura não estará apenas submetida a esforços de flexão. Nestes casos, é necessária a determinação do tensor de deformação. Como mencionado no item 3.2, pelos métodos discutidos, o tensor de deformação somente pode ser determinado quando os deslocamentos bi ou tri dimensionais forem conhecidos. Considerando que muitas vezes esses deslocamentos não podem ser medidos, devido à limitação de equipamentos, espaço ou níveis de sinais de respostas muito baixos, a estimativa desses deslocamentos pode ser realizada utilizando-se a análise modal híbrida.

Neste item será mostrado um exemplo de aplicação da análise modal híbrida. Será feito a estimativa da deformação de flexão de um ponto superficial da viga estuda anteriormente no item 4.5, utilizando a primeira derivada dos deslocamentos na direção *x*, obtidos pela análise modal híbrida. A viga será considerada um sistema conservativo com amortecimento nulo. A deformação estimada pela análise modal híbrida será comparada com a deformação encontrada pela análise da curvatura da viga.

4.6.1 Análise Dinâmica da Viga Utilizando o MEF no ANSYS

Para a utilização da análise modal híbrida, como mencionado no item 3.2, é necessário o conhecimento dos modos de vibração da estrutura estudada. Os modos de vibração da viga foram obtidos a partir do modelo de elementos finitos utilizando o ANSYS® 11.0. Neste item serão descritas as etapas realizadas no programa para criação do modelo e obtenção dos modos de vibração da viga.

Pré-processamento:

- *Tipo de elemento*: O elemento utilizado para o modelo da viga foi o elemento SOLID186. Este elemento é um elemento sólido 3D de alta ordem. Possui 20 nós por elemento com 3 graus de liberdade em cada nó, sendo, a translação na direção *x*, *y* e *z*. A Figura 4.12 ilustra este elemento.

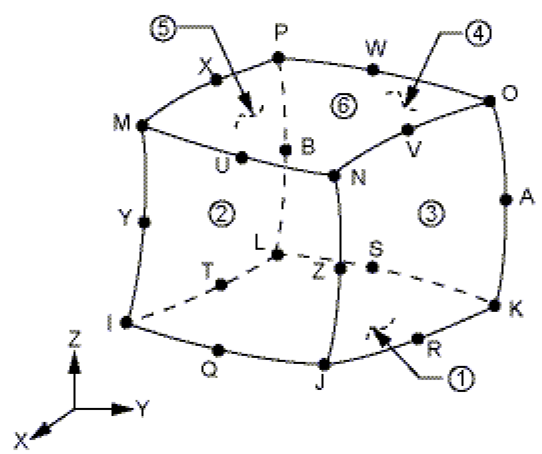


Figura 4.12 – Elemento sólido 3D utilizado no modelo da viga (ANSYS)

Este elemento foi escolhido, pois apresenta boa aproximação devido ao grande número de nós por elemento e também possibilita a identificação dos modos de deslocamentos tridimensionais, principal objetivo desta análise.

- *Propriedades do material*: As propriedades do material foram as mesmas utilizadas para a obtenção da matriz de transformação no item 4.5. Foi considerado que o material é linear elástico isotrópico, como módulo de elasticidade E = 74 GPa, razão de Poisson de $\nu = 0{,}33$ e a densidade $\rho = 2680$ kg/m^3.

- *Modelo geométrico:* O modelo geométrico foi criado com base nas dimensões da viga utilizada para a análise do item 4.5. Foi gerado um volume de comprimento 0,420m, largura 0,0254m e espessura 0,00305m.

- *Definição da malha:* O modelo gerado foi discretizado em uma malha com 56 elementos, sendo um elemento na espessura (direção y) e dois na largura (direção z) do modelo da viga. Cada elemento com dimensão de 15 mm de comprimento na direção x. A Figura 4.13 ilustra o modelo gerado no ANSYS.

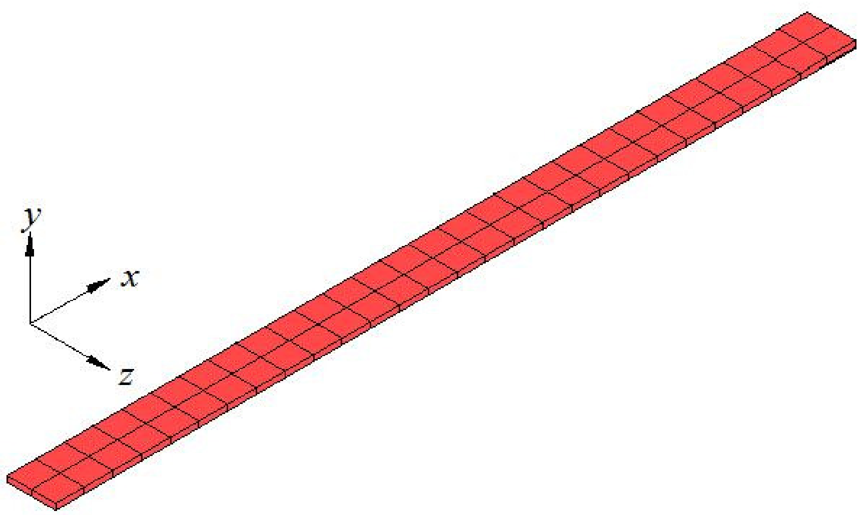


Figura 4.13 – Modelo da viga com a malha criada no ANSYS® 11.0

***Solução*:**

O tipo de análise definido nesta etapa foi a análise modal. Foi determinada a análise dos 10 primeiros modos de vibração da viga. O algoritmo escolhido para extração dos modos foi o Block Lanczos, e também foi selecionada a opção da obtenção de modos normalizados pela massa. Em uma das extremidades da viga foi atribuída a condição de contorno de deslocamento nulo nas três direções, *x*, *y* e *z*.

***Pós Processamento*:**

Os modos de vibração de deslocamentos de todos os pontos da viga na direção *x* e *y* foram extraídos e salvos para posteriormente serem utilizados no programa desenvolvido em MATLAB® 7.3.

No Apêndice H é possível se visualizar os 10 primeiros modos de deslocamento encontrados na simulação da viga.

Em relação aos modos encontrados na simulação, verifica-se que as freqüências naturais dos cinco primeiros modos de flexão, ou seja, o 1°, 2°,4°,6° e 8°, são aproximadamente as mesmas calculadas no item 4.5 para estes modos. No cálculo foram levados em consideração apenas os modos de flexão da viga e pelo método de elementos finitos é possível se verificar a existência de modos de torção e de flexão transversal na faixa de freqüência analisada. Os modos calculados no item 4.5 serão utilizados para obtenção da resposta dinâmica do sistema detalhada no item subseqüente.

4.6.2 Simulação do Deslocamento Transversal da Viga

O deslocamento, muitas vezes nas aplicações práticas, é obtido na direção perpendicular a superfície da estrutura analisada. Assim sendo, para a simulação da utilização da análise modal híbrida realizada, o deslocamento transversal da viga foi obtido por superposição modal em um programa implementado no MATLAB® 7.3.

Pela Equação (2.157), as informações contidas na Tabela 2.2 e na Tabela 4.6, e para 29 pontos da superfície da viga igualmente espaçados em 15mm, foi determinada a matriz modal $[\Psi]$ para os cinco primeiros modos de flexão da viga.

Considerando a viga um sistema mecânico discreto com 29 elementos de massa, a matriz de massa $[M]$ foi construída com a informação da massa de cada elemento distribuídos na diagonal principal da matriz. Desta forma, de acordo com a Equação (2.116), as massas modais m_r foram encontradas utilizando a Equação (4.11).

$$m_r = \{\psi_r\}^T [M] \{\psi_r\} \quad r = 1, 2,..,5 \tag{4.11}$$

onde $\{\psi_r\}$ é o vetor modal referente à coluna r da matriz modal $[\Psi]$.

As r-ésimas freqüências naturais ω_r foram determinadas a partir da Equação (2.156). Assim sendo, de acordo com a Equação (2.116), as rigidezes modais k_r foram encontradas utilizando a Equação (4.12).

$$k_r = \omega_r^2 m_r \tag{4.12}$$

Considerando que a viga foi submetida a uma força excitadora harmônica $F \sin(2\pi ft)$, com freqüência f = 70 Hz e F = 10 N, na extremidade livre da viga, a força modal F_r pôde ser encontrado a partir de:

$$F_r = \{\psi_r\}^T \{p\} \tag{4.13}$$

onde $\{p\}$ é um vetor de força nodal.

Os deslocamentos máximos no domínio do tempo dos pontos analisados ou os deslocamentos na freqüência de 70 Hz da viga na direção y, ou seja, $\tilde{v}$, foram determinados a partir da superposição modal pela Equação abaixo:

$$\tilde{v} = \max(w(t)) = \sum_{r=1}^{5} \{\psi_r\} \left(\frac{F_r}{k_r} \right) \left[\frac{1}{1 - (\omega/\omega_r)^2} \right] \tag{4.14}$$

sendo ω a freqüência da força excitadora igual a $2\pi f$.

O modo operacional de deflexão na freqüência de 70 Hz da viga pode ser visualizado no gráfico da Figura 4.14.

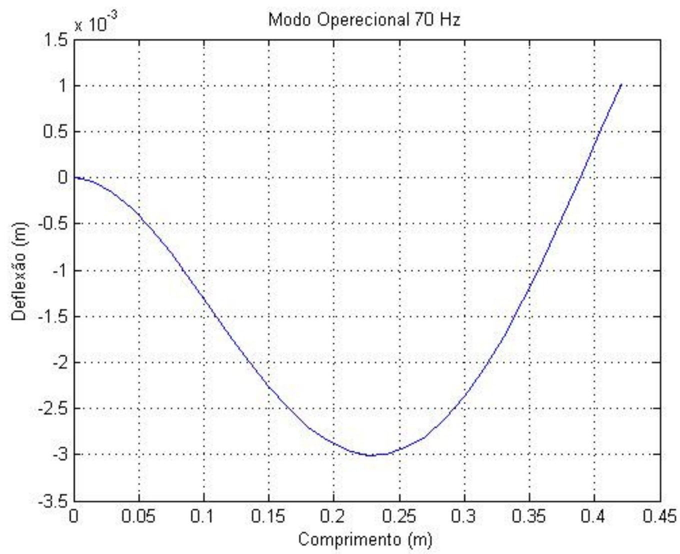


Figura 4.14 – Modo operacional de deflexão da viga na freqüência de 70 Hz

Os deslocamentos $\tilde{v}$ referentes ao modo operacional de deflexão da viga na freqüência de 70 Hz foram utilizados para estimar os coeficientes generalizados de Fourier para esta freqüência através da análise modal híbrida. O item subseqüente tratará desta aplicação.

4.6.3 Estimativa da Deformação em um Ponto da Viga Utilizando HMA

A estimativa da deformação em um ponto da viga utilizando a análise modal híbrida foi realizada a partir do conhecimento dos modos naturais ou próprios da viga, obtidos por elementos finitos (item 4.6.1), e os deslocamentos na direção *y* obtidos por superposição modal (item 4.6.2).

Os valores de deslocamentos da viga foram lidos em um programa desenvolvido em MATLAB® 7.3. Desses arquivos foram selecionadas apenas as informações da relação modal dos 29 pontos da superfície da viga, mesmos pontos utilizados na simulação do deslocamento no item anterior. As relações modais desses pontos foram agrupadas em matrizes modais. Os 10 modos próprios referentes aos 29 pontos selecionados e a direção *x* (longitudinal) foram condicionados em uma matriz modal $\left[\Phi\mathbf{e}_x\right]$ de dimensões 29×10, e os 10 modos próprios referentes aos 29 pontos e a direção *y* (transversal) foram condicionados em uma matriz modal $\left[\Phi\mathbf{e}_y\right]$.

Sendo $\{\tilde{u}_y\}_{29\times1}$ o vetor dos deslocamentos referentes à deflexão da viga, simulados no item anterior, e baseados nos conceitos da análise modal híbrida (item 3.2), os coeficientes generalizados de Fourier, para a freqüência de 70 Hz, foram estimados pela Equação (4.15).

$$\{\tilde{c}_{est}\}=\left[\Phi\mathbf{e}_y\right]^{-}\{\tilde{u}_y\} \tag{4.15}$$

Os coeficientes generalizados de Fourier estimados estão listados na Tabela 4.8.

Tabela 4.8 – Coeficientes generalizados de Fourier estimados para freqüência de 70 Hz

$\tilde{c}_1=-0{,}3403\ .10^{-3}$	$\tilde{c}_6=0{,}0076\ .10^{-3}$
$\tilde{c}_2=0{,}4574\ .10^{-3}$	$\tilde{c}_7=0{,}0000$
$\tilde{c}_3=0{,}0000$	$\tilde{c}_8=0{,}0015\ .10^{-3}$
$\tilde{c}_4=0{,}0228\ .10^{-3}$	$\tilde{c}_9=0{,}0004\ .10^{-3}$
$\tilde{c}_5=0{,}0000$	$\tilde{c}_{10}=0{,}0000$

Os coeficientes generalizados de Fourier $\tilde{c}_3,\tilde{c}_5,\tilde{c}_7,\tilde{c}_{10}$, estimados para o caso analisado na freqüência de 70 Hz, Tabela 4.8, apresentaram valores nulos. Estes coeficientes estão associados aos vetores modais de flexão na direção *x* da viga e aos modos de torção da mesma, (ver ilustração dos modos no Apêndice H). A freqüência de excitação de 70 Hz, adotada na simulação, está entre a freqüência do primeiro modo de flexão, 14 Hz, e a freqüência do segundo modo de flexão, 92 Hz. Os coeficientes $\tilde{c}_1$ e $\tilde{c}_2$, relacionados com o primeiro e segundo modo de vibração da viga, são maiores comparados com os outros coeficientes, mostrando que esses modos tem maior participação na resposta do sistema na freqüência de excitação utilizada.

A partir dos coeficientes generalizados de Fourier foi possível se prever os deslocamentos $\tilde{u}$ dos pontos da viga na direção x. O vetor $\{\tilde{u}_x\}$ desses deslocamentos foi encontrado através da Equação (4.16).

$$\{\tilde{u}_x\} = [\mathbf{\Phi e}_x]\{\tilde{c}_{est}\} \tag{4.16}$$

Foi escolhido um ponto de análise e os deslocamentos previstos foram derivados espacialmente para a estimativa da deformação neste ponto. A Figura 4.15 representa a viga em flexão e os deslocamentos $\tilde{u}$ na direção x, para posteriormente serem utilizados na fórmula de diferenças finitas e prever a deformação ε_x no ponto de análise da viga.

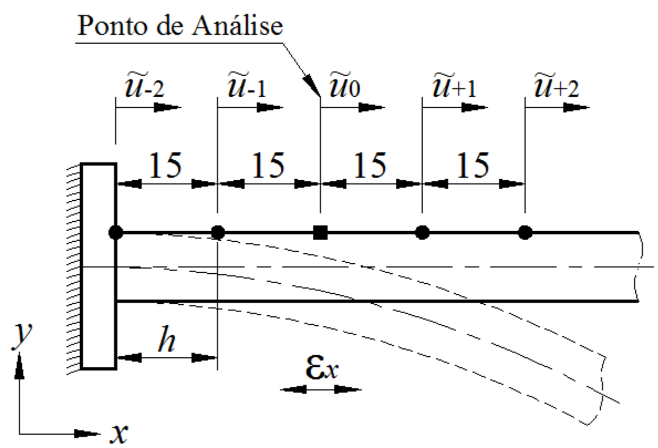


Figura 4.15 – Deslocamentos na direção *x* e o ponto de análise da viga

Os deslocamentos $\tilde{u}$, estimados pela análise modal híbrida e necessários para análise de deformação do ponto escolhido, estão indicados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9 – Deslocamentos na direção *x* obtidos por HMA

	Deslocamento mm
$\tilde{u}_{-2}$	0,0000
$\tilde{u}_{-1}$	0,0002
$\tilde{u}_{0}$	-0,0079
$\tilde{u}_{+1}$	-0,0147
$\tilde{u}_{+2}$	-0,0205

A deformação ε_x no ponto de análise foi estimada utilizando a fórmula de diferenças finitas centrais para primeira derivada e de ordem $O(h^4)$. Conforme a Tabela 4.2 e de acordo com a notação dos deslocamentos utilizados na Figura 4.15, a fórmula de diferenças finitas pode ser escrita como:

$$\varepsilon_x = \frac{-\tilde{u}_2 + 8\tilde{u}_1 - 8\tilde{u}_{-1} + \tilde{u}_{-2}}{12h} \tag{4.17}$$

O valor encontrado de ε_x pela Equação (4.17) foi comparado com o valor de deformação encontrado pela segunda derivada do deslocamento $\tilde{v}$ na direção *y*, perpendicular a direção de análise da deformação. A Figura 4.16 representa a viga em flexão e os deslocamentos $\tilde{v}$ na direção *y*, para posteriormente serem utilizados na fórmula de diferenças finitas e prever a deformação ε_x no ponto de análise da viga.

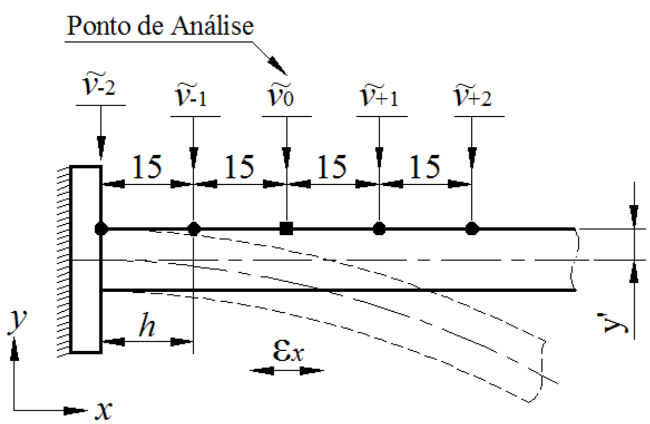


Figura 4.16 – Deslocamentos na direção *y* e o ponto de análise da viga

Os deslocamentos $\tilde{v}$, obtidos anteriormente pela superposição modal, entretanto, para os pontos ilustrados na Figura 4.16, estão listados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10 – Deslocamentos na direção *z* obtidos por superposição modal

Deslocamento mm	
$\tilde{v}_{-2}$	0,0000
$\tilde{v}_{-1}$	-0,0410
$\tilde{v}_{0}$	-0,1558
$\tilde{v}_{+1}$	-0,3325
$\tilde{v}_{+2}$	-0,5588

Conforme a Tabela 4.2 e de acordo com a notação dos deslocamentos utilizados na Figura 4.16, a fórmula de diferenças finitas da segunda derivada pode ser escrita como:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{dx^2} = \frac{-\tilde{v}_2 + 16\tilde{v}_1 - 30\tilde{v}_0 + 16\tilde{v}_{-1} + \tilde{v}_{-2}}{12h^2} \tag{4.18}$$

De acordo com a Equação (4.6), a deformação pode ser prevista multiplicando-se a segunda derivada, Equação (4.18), pela distância da linha neutra à superfície da viga, y' = 1,525mm.

Os valores de deformação estimados pela derivada de primeira e segunda ordem dos deslocamentos longitudinal e transversal estão listados na Tabela 4.11.

Tabela 4.11 – Deformação estimada pela primeira e segunda derivada

Deformação Estimada	
ε_x Primeira Derivada	$4{,}3993 \cdot 10^{-4}$
ε_x Segunda Derivada	$4{,}1895 \cdot 10^{-4}$
Relação Percentual	$\approx 1\%$

O valor da deformação estimada pela primeira derivada dos deslocamentos obtidos pela análise modal híbrida aproximou-se ao valor da derivada dos deslocamentos transversais obtidos pela superposição modal. Conforme o exposto no item 4.4, a deformação longitudinal ou de flexão de uma viga pode ser estimada pela segunda derivada do deslocamento transversal. Desta forma, pela comparação realizada na Tabela 4.11, é possível se verificar que a análise modal híbrida pôde ser utilizada para estimativa da deformação no ponto de análise da viga.

Na simulação realizada, os deslocamentos utilizados para estimação dos coeficientes generalizados de Fourier foram obtidos pela superposição modal dos cinco primeiros modos de flexão, encontrados pela solução da equação da onda da viga em análise. A viga foi considerada um sistema conservativo, ou seja, sistema não amortecido, para a superposição modal e simulação dos deslocamentos transversais. Essa consideração contribuiu para que os coeficientes generalizados de Fourier fossem independentes e os deslocamentos na direção x fossem aproximados por estes coeficientes. Nas situações práticas, conforme o exposto no item 3.2 referente à análise modal híbrida, pode haver problemas na estimação dos coeficientes. Os modos podem estar acoplados devido ao amortecimento da estrutura e as medições dos deslocamentos podem não representar de forma real o fenômeno estudado. Desta forma, as qualidades das medições e a aproximação dos modos pelo método de elementos finitos devem ser boas. O número de pontos avaliados deve ser muito maior que o número de modos para que haja uma boa aproximação no sentido de mínimos quadrados das funções pelos coeficientes generalizados e em alguns casos deve ser levado em conta o resíduo da Equação (3.22).

4.7 Análise de Tensão Dinâmica em uma Superfície Utilizando MDF

Uma estrutura em condições operacionais pode estar sujeita a diversos tipos de excitações. Uma conseqüência disto, é que os sinais medidos apresentarão diversas componentes de freqüência. Na análise de tensão de uma estrutura que apresente essas condições, além do sinal de tensão apresentar diversas componentes em freqüência, o estado de tensão de um ponto varia a cada modo de deformação da estrutura, alterando, assim, as amplitudes e direções das tensões principais. Sendo para um caso estacionário e para materiais dúcteis, os padrões dos sinais de tensão podem ser avaliados em termos das componentes alternada e média de *von Mises*. Desta forma, será simulada uma condição real onde uma chapa fina estará sujeita a excitações que originam sinais com duas componentes de freqüência.

Supondo que uma chapa fina de aço, com 350 mm de comprimento, 200 mm de largura e 2,70 mm de espessura, está sujeita a uma condição operacional que resulta no espectro e modos de deflexão representados na Figura 4.17:

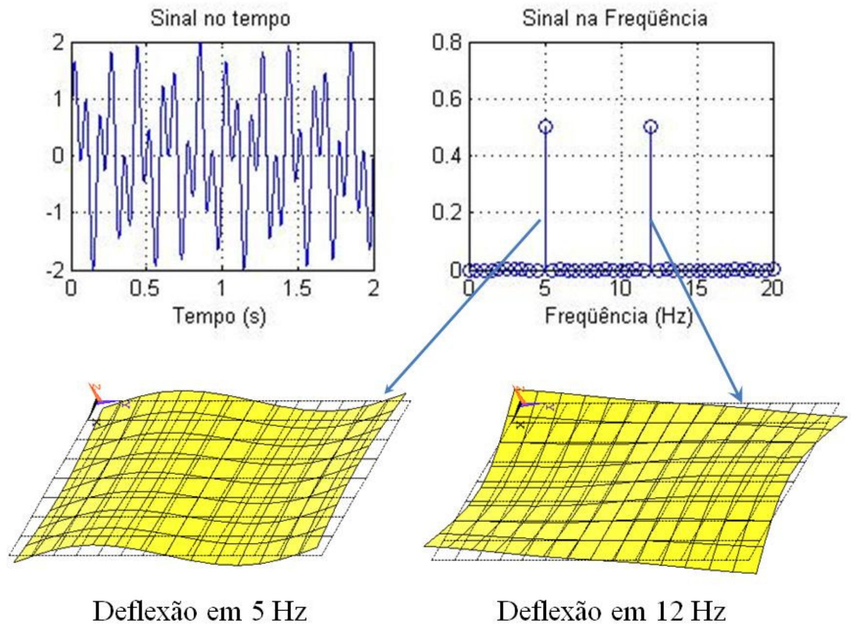


Figura 4.17 – Sinal no tempo, freqüências e modos operacionais de uma chapa

O ponto escolhido para análise do tensor de tensão é em uma região central e inferior da chapa. A Figura 4.18 ilustra a chapa analisada e também a malha de pontos necessária para análise de tensão utilizando o método de diferenças finitas.

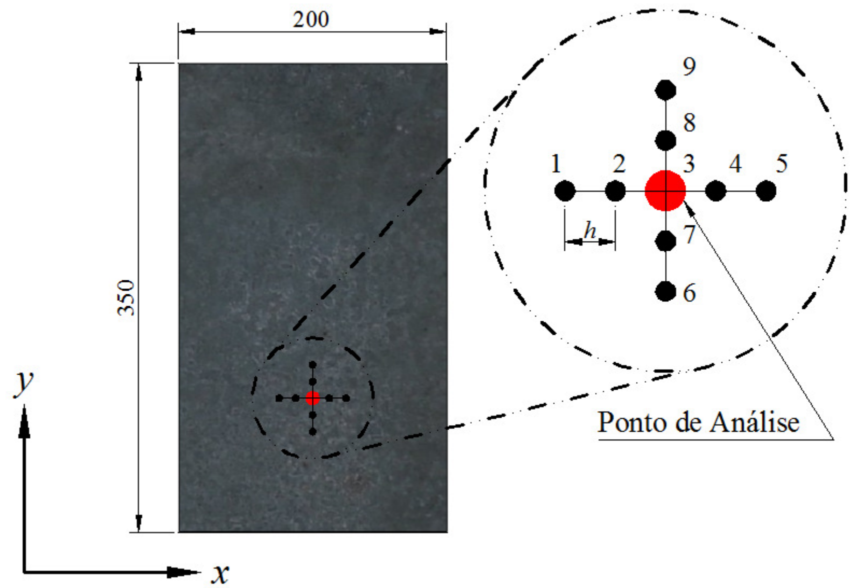


Figura 4.18 – Chapa e malha de MDF para análise de estado de tensão dinâmica

O estado de tensão será analisado no ponto (nó) três (3), este ponto será chamado ponto de análise.

Considerando que os deslocamentos u e v, na direção x e y, respectivamente, de cada ponto da malha de diferenças finitas possam ser expressos pelas Equações da Tabela 4.12 o estado bidimensional de deformação no ponto de análise é dado pelas derivadas dos deslocamentos obtidos dessas Equações. Utilizando a fórmula de diferenças finitas centrais para a primeira derivada e de ordem $O(h^4)$ da Tabela 4.2, as deformações normais ε_x e ε_y e a deformação cisalhante γ_{xy}, são dadas pelas Equações abaixo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &\approx \frac{-u_5 + 8u_5 - 8u_2 + u_1}{12h} \\
\varepsilon_y &\approx \frac{-v_9 + 8v_8 - 8v_7 + v_6}{12h} \\
\gamma_{xy} &\approx \left(\frac{-u_9 + 8u_8 - 8u_7 + u_6}{12h}\right) + \left(\frac{-v_5 + 8v_5 - 8v_2 + v_1}{12h}\right)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Tabela 4.12 – Equações para o deslocamento *u* e *v* de uma chapa

	$u_5 = 0{,}42387.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}19655.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$
$u_1 = -0{,}42387.10^{-4}\sin(2\pi f_1) + 0{,}19655.10^{-3}\sin(2\pi f_2)$	$v_5 = 0{,}80596.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}66722.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$
$v_1 = 0{,}80596.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}66722.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$	$u_6 = -0{,}72093.10^{-12}\sin(2\pi f_1) - 0{,}22978.10^{-11}\sin(2\pi f_2)$
$u_2 = -0{,}21392.10^{-4}\sin(2\pi f_1) + 0{,}10205.10^{-3}\sin(2\pi f_2)$	$v_6 = 0{,}27012.10^{-3}\sin(2\pi f_1) - 0{,}31667.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$
$v_2 = 0{,}84546.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}88608.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$	$u_7 = -0{,}62569.10^{-13}\sin(2\pi f_1) - 0{,}62569.10^{-12}\sin(2\pi f_2)$
$u_3 = -0{,}53156.10^{-12}\sin(2\pi f_1) - 0{,}10173.10^{-11}\sin(2\pi f_2)$	$v_7 = 0{,}18111.10^{-3}\sin(2\pi f_1) - 0{,}61139.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$
$v_3 = 0{,}85884.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}96084.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$	$u_8 = -0{,}44071.10^{-12}\sin(2\pi f_1) - 0{,}33943.10^{-12}\sin(2\pi f_2)$
$u_4 = 0{,}21392.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}19655.10^{-3}\sin(2\pi f_2)$	$v_8 = -0{,}95436.10^{-5}\sin(2\pi f_1) - 0{,}13349.10^{-3}\sin(2\pi f_2)$
$v_4 = 0{,}84546.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}88608.10^{-4}\sin(2\pi f_2)$	$u_9 = -0{,}35425.10^{-12}\sin(2\pi f_1) + 0{,}16010.10^{-10}2\sin(2\pi f_2)$
	$v_9 = -0{,}98814.10^{-4}\sin(2\pi f_1) - 0{,}17011.10^{-3}\sin(2\pi f_2)$

onde f_1 *e* f_2 são as freqüências de 5 e 12 Hz, respectivamente.

Como a espessura da chapa é pequena em relação à largura e comprimento da mesma, e considerando que a tensão é nula ao longo da espessura, tem-se um estado plano de tensão. Para o caso linear elástico isotrópico e com as componentes do vetor de deformação calculadas pela Equação (4.19) e utilizando a Equação (2.80), é possível determinar as tensões que a chapa está sujeita.

Sendo o módulo de elasticidade E=210 GPa e o coeficiente de Poisson ν=0,3, as componentes de tensão máxima e mínima, apresentadas em um tempo total de análise de 2 segundos, suficiente para verificação da periodicidade do sinal, podem ser visualizadas nos estados de tensão dados abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x\max} & \tau_{xy_{\max}} \\ \tau_{yx_{\max}} & \sigma_{y\max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 224{,}67 & 0{,}0005 \\ 0{,}0005 & 289{,}81 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x\min} & \tau_{xy_{\min}} \\ \tau_{yx_{\min}} & \sigma_{y\min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -224{,}67 & -0{,}0005 \\ -0{,}0005 & -289{,}81 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

O gráfico da Figura 4.19 exibe o padrão de tensão na direção y da chapa encontrado na simulação.

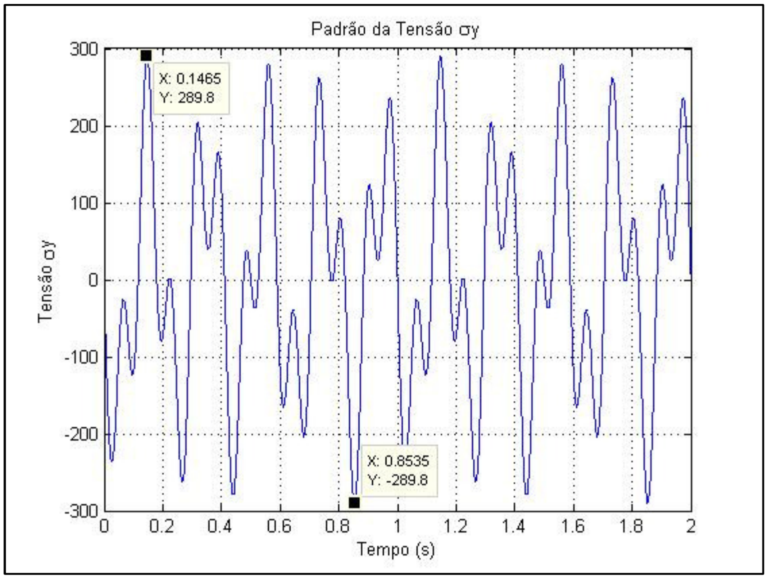


Figura 4.19 – Sinal no tempo da tensão σ_y simulada

Como pode ser observada no gráfico anterior, a tensão σ_y é completamente alternada, ou seja, apresenta média nula, isso acontece também para as tensões σ_x e γ_{xy}. Desta forma, são apenas avaliadas as componentes alternadas de tensão. Pela Equação (2.88) são encontradas as componentes de tensão alternada do estado de tensão dado abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_a} & \tau_{xy_a} \\ \tau_{yx_a} & \sigma_{ya} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 224{,}67 & 0{,}0005 \\ 0{,}0005 & 289{,}81 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

Pela equação (2.32) ou pelo exposto no item 2.2.2 são calculadas as tensões principais para o estado de tensão alternada acima. Os valores de tensões principais são: $\sigma_1 = 281{,}20$ MPa e $\sigma_2 = 224{,}67$ MPa. Nota-se que, para o caso estudado os valores de tensões principais são praticamente os mesmos que os valores das tensões normais em *y* e *x*, respectivamente. Utilizando a Equação (2.85) e para os valores de tensões principais encontrados, a tensão de *von Mises* alternada é igual á $\sigma'_a = 263{,}36$ MPa. Segundo Shigley, Mischke e Budynas (2005) este valor de tensão pode ser utilizado na formação de uma solução de Gerber ou ASME-elíptica na análise de fadiga. Os métodos de análise de fadiga não fazem parte do escopo deste trabalho.

4.8 Distribuição de Deformação em Superfícies Planas Utilizando MDF e MEF

A distribuição de deformação em superfícies planas pode ser obtida a partir da relação deslocamento e deformação e utilizando o método de diferenças finitas e o método de elementos finitos. Este item trata da implementação computacional e a comparação entre esses métodos para obtenção da deformação em uma superfície plana a partir dos valores de deslocamentos nodais. Será utilizado o programa MATLAB® versão 7.4.0.

4.8.1 Implementação Computacional do MDF

Para a implementação computacional do método de diferenças finitas na obtenção da distribuição de deformação em superfícies planas, é necessário que a superfície seja discretizada conforme a malha ilustrada na Figura 4.20. Na figura, também estão indicadas as regiões onde é utilizado o método de diferenças finitas centrais, backward ou forward.

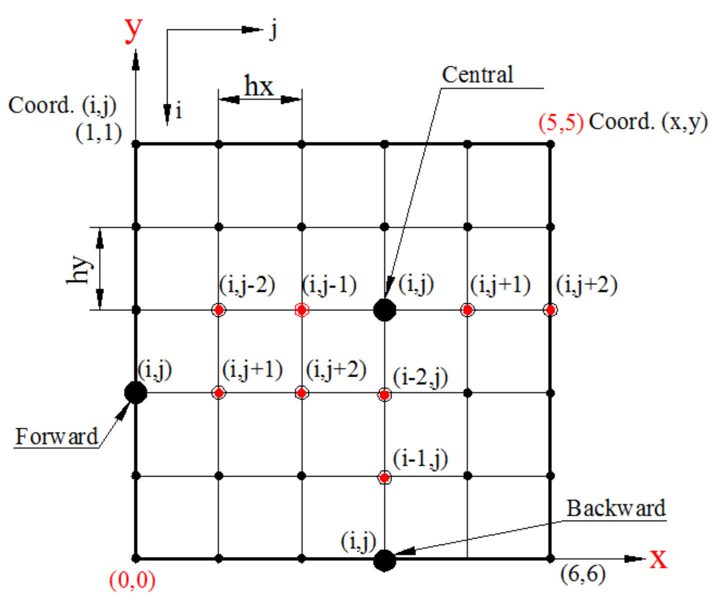


Figura 4.20 – Malha 2D para utilização do MDF

Sendo u e v os deslocamentos medidos na direção x e y, respectivamente, de cada nó da malha, n_c o número de colunas da malha e n_l o número de linhas da malha, a deformação nodal pode ser obtida a partir do algoritmo do Apêndice E.

4.8.2 Implementação Computacional do MEF Elemento Isoparamétrico Triangular

A deformação de um elemento (triângulo) ou ponto de uma superfície pode ser aproximada utilizando-se o elemento isoparamétrico triangular por elementos finitos e os deslocamentos nodais na direção *x* e *y* de cada nó da malha. A malha pode ser criada na superfície através de nós (pontos) dispostos aleatoriamente, entretanto, devem ser imaginariamente unidos de forma a formarem elementos triangulares. Os nós e os elementos devem ser numerados e a numeração dos nós em cada elemento deve seguir a mesma orientação adotada em todos os elementos. Com o conhecimento da malha, devem ser criadas as matrizes de coordenada nodal, que contém as coordenadas locais na direção *x* e *y* de cada nó (ponto) da malha e denominada matriz "*coord*", e a matriz de incidência denominada matriz "*inci*", que contém a informação dos elementos utilizados na malha e quais nós fazem parte de cada elemento.

A matriz de coordenada nodal na direção *x* e *y* para cada nó é criada da seguinte forma:

$$coord = [nó_{i,1} \quad coordx_{i,2} \quad coordy_{i,3}]_{i=1}^{nno}$$

onde *nno* é o número total de nós da malha.

A matriz incidência para o elemento triangular é criada da seguinte forma:

$$inci = [n_{i,1} \quad nó1_{i,2} \quad nó2_{i,3} \quad nó3_{i,4}]_{i=1}^{nel}$$

onde *nne* é o número total de elementos da malha.

Sendo *u* e *v* os deslocamentos medidos na direção *x* e *y*, respectivamente, de cada nó da malha, a deformação nodal e de cada elemento pode ser obtida a partir do algoritmo do Apêndice F.

4.8.3 Implementação Computacional do MEF Elemento Quadrilateral

A deformação de um elemento (quadrilateral) ou ponto de uma superfície pode ser aproximada utilizando-se o elemento isoparamétrico quadrilateral e os deslocamentos nodais na direção *x* e *y* de cada nó da malha. A malha pode ser criada na superfície através de nós (pontos) dispostos aleatoriamente, entretanto, devem ser imaginariamente unidos de forma a formarem elementos com quatro lados sendo que cada nó deve estar posicionado em cada canto do quadrilátero. Os nós e os elementos devem ser numerados e a numeração dos nós em cada elemento deve seguir a mesma orientação adotada em todos os elementos. Com o conhecimento da malha, devem ser criadas as matrizes de coordenada nodal, matriz "*coord*", e a matriz de incidência , matriz "*inci*". A matriz de coordenada nodal na direção *x* e *y* para cada nó utilizada na malha deve ser criada da seguinte forma:

$$coord = [nó_{i,1} \quad coordx_{i,2} \quad coordy_{i,3}]_{i=1}^{nno}$$

onde *nno* é o número total de nós da malha.

A matriz incidência para o elemento quadrilateral deve ser criada da seguinte forma:

$$inci = [n_{i,1} \quad nó1_{i,2} \quad nó2_{i,3} \quad nó3_{i,4} \quad nó4_{i,4}]_{i=1}^{nel}$$

onde *nne* é o número total de elementos da malha.

Sendo *u* e *v* os deslocamentos medidos na direção *x* e *y*, respectivamente, de cada nó da malha, a deformação nodal e de cada elemento pode ser obtida a partir do algoritmo do Apêndice G.

4.8.4 Comparação entre a Deformação obtida Analiticamente, por MDF e MEF

Para a comparação entre os valores de deformação de uma superfície plana obtidos analiticamente e pelos métodos numéricos a partir do conhecimento dos deslocamentos no plano desta superfície, é considerada uma superfície plana quadrada de dimensões 10 X 10 unidades de engenharia (UE), discretizada com elementos de tamanho 1 X 1 UE. A Figura 4.21 ilustra a malha gerada na superfície para utilização do método de diferenças finitas e método de elementos finitos na relação deslocamento-deformação.

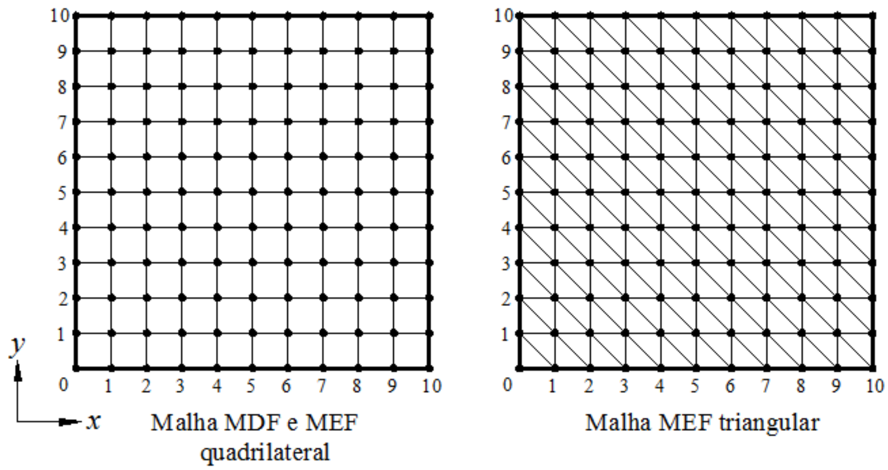


Figura 4.21 – Malha 2D para utilização do MDF e MEF

Sendo os deslocamentos nodais na direção x e y da chapa dados pelas Equações abaixo:

$$
\begin{aligned}
u(x, y) &= x^2 + y \\
v(x, y) &= x + y^2
\end{aligned}
\qquad (4.20)
$$

De acordo com o tensor da Equação (2.59), as deformações normais e de cisalhamento são dadas por:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 2y \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} = 2
\end{aligned}
\qquad (4.21)
$$

Escolhendo 4 pontos da malha, conforme Figura 4.22, é possível comparar a aproximação da deformação pelos métodos numéricos com a deformação analítica encontrada pela Equação (4.21). As Tabela 4.13, Tabela 4.14 e Tabela 4.15 mostram os resultados obtidos na simulação.

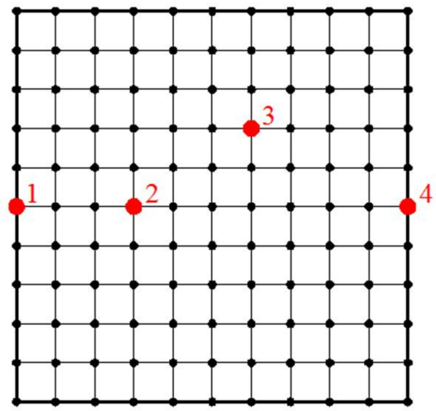


Figura 4.22 – Pontos escolhidos na malha

Tabela 4.13 – Comparação dos valores obtidos para ε_x

Deformação ε_x				
Nó	**Anal.**	**MDF**	**MEF (T)**	**MEF (Q)**
1	0,00	0,00	0,01	0,01
2	0,06	0,06	0,06	0,06
3	0,12	0,12	0,12	0,12
4	0,20	0,20	0,19	0,19

Tabela 4.14 – Comparação dos valores obtidos para ε_y

Deformação ε_y				
Nó	**Anal.**	**MDF**	**MEF (T)**	**MEF (Q)**
1	0,10	0,10	0,0967	0,10
2	0,10	0,10	0,1000	0,10
3	0,14	0,14	0,1400	0,14
4	0,10	0,10	0,1033	0,10

Tabela 4.15 – Comparação dos valores obtidos para γ_{xy}

Distorção γ_{xy}				
Nó	**Anal.**	**MDF**	**MEF (T)**	**MEF (Q)**
1	0,02	0,02	0,02	0,02
2	0,02	0,02	0,02	0,02
3	0,02	0,02	0,02	0,02
4	0,02	0,02	0,02	0,02

Pode-se observar nas tabelas apresentadas que os resultados obtidos pelos métodos numéricos apresentaram boa aproximação com os valores analíticos de deformação. Os valores encontrados pelo método de diferenças finitas foram iguais os valores encontrados analiticamente para todos os casos analisados e os valores encontrados pelos métodos de elementos finitos apresentaram uma pequena diferença em relação ao valor analítico nos pontos um (1) e quatro (4) dispostos nas extremidades da superfície analisada.

A pequena diferença encontrada nos valores de deformação obtidos numericamente e analiticamente está associado ao fato de que a deformação encontrada pelo MEF refere-se a um elemento finito, sendo que em um mesmo elemento a deformação será a mesma e não será pontual como é encontrada pelo MDF. Os nós que apresentam coordenadas *x* com valor nulo, ou seja, igual a zero, por exemplo, o nó um (1) indicado na Figura 4.22, apresentam deformação $\varepsilon_x = 0$, conforme é determinado na Equação (4.21) e indicado na Tabela 4.13 na solução analítica e MDF. Entretanto, as soluções encontradas pelo MEF apresentam valor de $\varepsilon_x = 0{,}01$, pois no cálculo utilizando o MEF, o elemento finito sofre a influência da deformação de todos os nós que compõe o mesmo. Em aplicações práticas, nas regiões de contorno ou de concentração de tensão pode ser utilizado o MDF e ou o MEF com malhas mais refinadas para melhorar a aproximação do valor de deformação.

4.9 Resumo do Capítulo

Nesse capítulo foram apresentados os métodos numéricos e realizadas algumas simulações numéricas para estimar ou determinar a deformação ou tensão em superfícies. Nos casos estudados, os métodos numéricos apresentaram bons resultados quando comparados entre si e também aos resultados analíticos. A análise modal híbrida foi aplicada a um sistema conservativo com modos desacoplados. Desta forma, a deformação estimada por este método aproximou-se a deformação determinada pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal. Simulou-se uma condição operacional de vibração e a tensão de *von Mises* alternada foi prevista em um ponto de uma chapa de aço. No próximo Capítulo será avaliada experimentalmente a deformação em uma viga de alumínio engastada em uma das extremidades. As etapas, procedimentos e os resultados serão apresentados.

Capítulo 5

Procedimentos e Resultados Experimentais

5.1 Introdução

Com o intuito de estimar experimentalmente a deformação utilizando medições de aceleração foi realizada uma avaliação experimental em uma viga de alumínio. Neste capítulo serão apresentados o material, geometria, propriedades, métodos, procedimentos experimentais utilizados e os resultados obtidos na estimativa da deformação de flexão na superfície da viga, através de medidas de aceleração com acelerômetros e de deformação específica com *strain gages*.

A análise foi feita em uma viga de alumínio engastada em uma das extremidades. O alumínio é muito utilizado em equipamentos e máquinas e, para o caso analisado, apresenta uma menor rigidez comparada com o aço. A flexibilidade apresentada pela viga de alumínio em relação a uma viga de aço, com mesma geometria, contribuiu para a condição de engaste proposta e para que não houvesse a necessidade de grandes amplitudes de excitação para um sinal de deformação mensurável. As deformações foram medidas e estimadas próximas à região de engaste. Este tipo de análise experimental foi escolhido, pois a análise de deformações em vigas apresenta soluções analíticas para posterior comparação dos resultados e é de fácil montagem. As deformações apresentaram valores consideráveis, mesmo com baixas amplitudes da força excitadora, o que contribuiu com a avaliação, pois pôde-se utilizar um excitador eletromagnético de pequeno porte.

Foram realizados dois tipos de experimento. O primeiro experimento foi realizado para estimar a FRF de deformação para identificar faixas de freqüências de maior amplitude de deformação e a verificação da relação sinal ruído. O segundo experimento foi realizado com o intuito de estimar a deformação de flexão da viga utilizando valores de aceleração medidos simultaneamente em quatro (4) pontos uniformemente espaçados em relação ao ponto de análise de deformação. O valor de deformação estimado foi comparado com o valor de deformação medido através de *strain gages*.

5.2 Etapas dos Procedimentos Experimentais

As etapas pertinentes à preparação, configuração para a execução dos experimentos, ressaltando as peculiaridades necessárias para a correta aquisição e posterior processamento dos dados, foram:

a. ***Escolha da viga.*** A primeira etapa do procedimento experimental foi a escolha da viga. Foi escolhido um perfil de alumínio delgado com bom acabamento superficial e boa qualidade dimensional.

b. ***Preparação e colagem dos strain gages.*** A região próxima ao engaste do perfil foi lixada, limpa e demarcada para posicionamento e colagem dos *strain gages* e acelerômetros.

c. ***Montagem do experimento.*** O engaste da viga foi feito a partir de dois blocos de alumínio com encaixe para o perfil e fixados através de parafusos. A excitação da viga foi feita na direção transversal à mesma e através de um excitador eletromagnético (shaker) em um ponto da viga distante do engaste. O shaker foi suspenso em uma estrutura metálica.

d. ***Instalação dos equipamentos de geração, condicionamento e aquisição dos sinais.*** Nesta etapa foram feitas as devidas conexões entre o gerador de sinal, amplificador e o shaker, e também as ligações entre os transdutores, condicionadores e a placa de aquisição.

e. ***Condicionamento do sinal.*** Os sinais foram condicionados em relação a cada sensibilidade dos transdutores e em relação ao fundo de escala de acordo com a amplitude do sinal medido para uma boa qualidade dos sinais.

f. ***Programas de aquisição.*** Os sinais foram adquiridos através da placa de aquisição e lidos através de um programa em MATLAB® 7.3.

g. ***Verificação dos sinais medidos.*** Em todos os casos, testes iniciais qualitativos dos sinais de aceleração foram realizados. Foi feita a verificação dos sinais medidos de deformação pelo *strain gage* através da comparação dos valores obtidos analiticamente e medido quando a viga foi submetida a uma carga estática conhecida.

h. ***Aquisição e tratamento dos sinais.*** Nesta etapa foram feitas as aquisições dos sinais em diversas freqüências de excitação.

5.3 Equipamentos Utilizados

De acordo com cada tipo de experimento foi necessária a utilização de equipamentos e montagens específicas. A Figura 5.1 ilustra o esquema de montagem para o primeiro experimento, realizado para estimar a função resposta em freqüência de deformação.

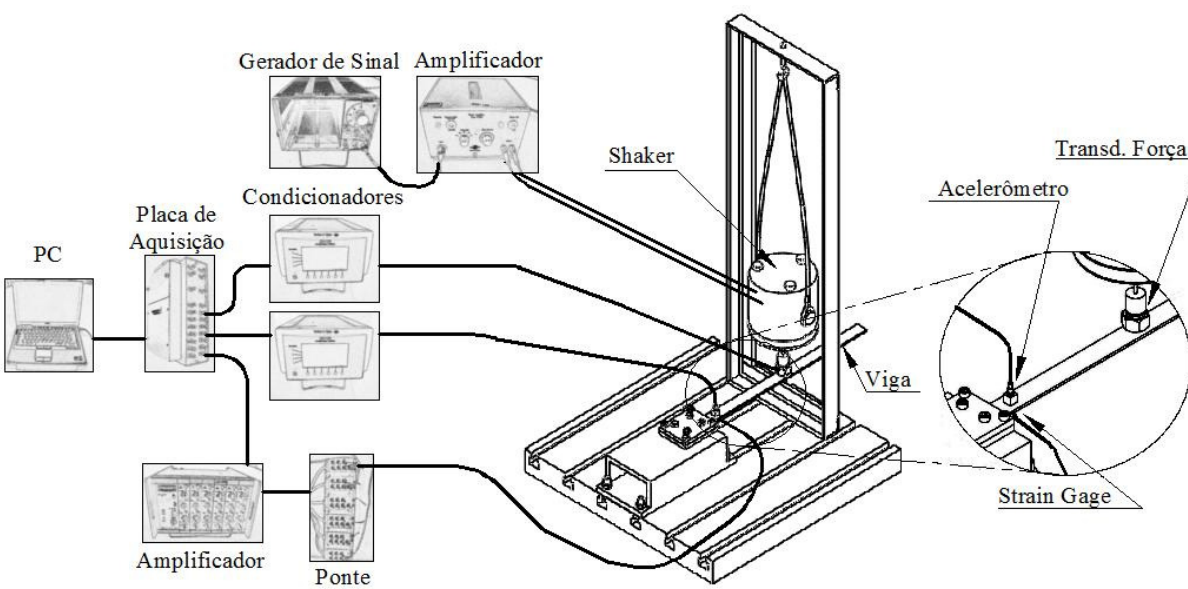


Figura 5.1 – Esquema montagem experimental primeiro experimento

A Figura 5.2 ilustra o esquema de montagem do segundo experimento realizado para prever a deformação de flexão da viga. A montagem é a semelhante que a realizada no primeiro experimento, entretanto não é necessária a medida da força de excitação e as acelerações são medidas em quatro pontos uniformemente distanciados.

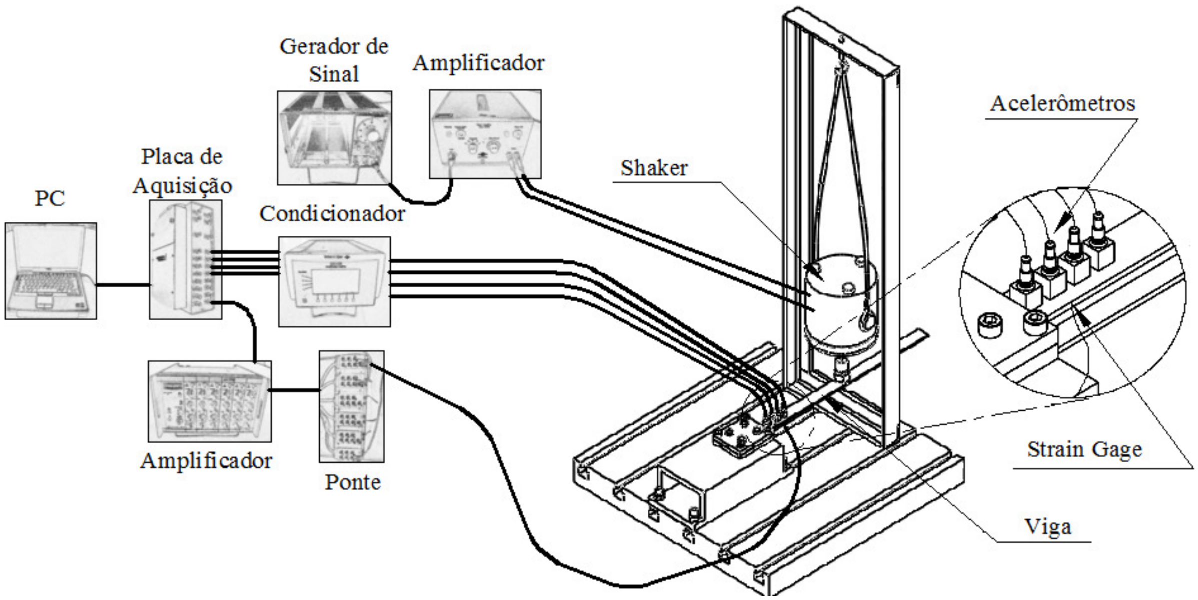


Figura 5.2 – Esquema montagem experimental segundo experimento

A descrição dos equipamentos, transdutores, e sistemas de aquisição utilizados nos experimentos estão descritas abaixo:

***Extensômetro elétrico* (*strain-gage*)**

As características do extensômetro elétrico (*strain-gage*) uniaxial utilizado para medir a deformação longitudinal na superfície da viga estão listadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Características do strain gage utilizado no experimento

Marca:	KYOWA®
Compensação de temperatura para:	Aço
Comprimento:	0,3 mm
Resistência elétrica:	119,8 ± 0,2 Ω
Fator do extensômetro Sg:	2,16 ± 0,1
Sensibilidade Transversal:	3,15 %

A Figura 5.3 mostra a foto do *strain gage* utilizado no experimento.

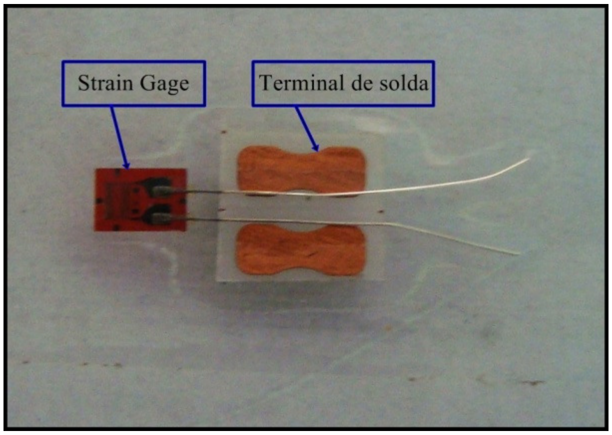


Figura 5.3 – Foto do *strain gage* utilizado no experimento

Acelerômetros

Os acelerômetros utilizados no experimento foram acelerômetros piezoelétricos Delta Tron® tipo 4508 da marca Brüel & Kjaer. O número de série e a sensibilidade de cada acelerômetro utilizado estão listados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Número de série e sensibilidade dos acelerômetros

Denominação	Número de série	Sensibilidade
Acelerômetro 2	2178731	10,06 mV/m/s^2
Acelerômetro 3	2178732	9,90 mV/m/s^2
Acelerômetro 4	2178733	10,07 mV/m/s^2
Acelerômetro 5	2178735	9,86 mV/m/s^2

A Figura 5.4 mostra a foto de um dos acelerômetros utilizado.

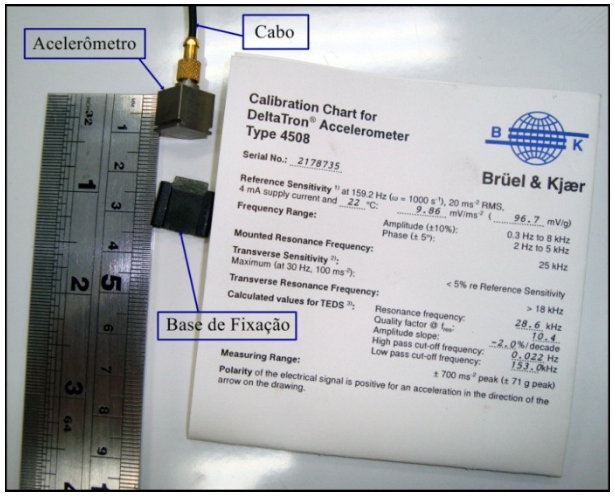


Figura 5.4 – Foto do acelerômetro utilizado no experimento

Transdutor de Força

O transdutor de Força utilizado foi da marca Brüel & Kjaer, tipo 8200 e sensibilidade de 3,84 pC/N.

Gerador de Sinal

Foi utilizado um gerador de função analógico para as excitações senoidais na viga. O gerador de sinal utilizado foi da marca TEKTRONIX® modelo TM 503. Neste gerador ainda podem se gerados sinais com ondas quadradas e triangulares. A banda de freqüência dos sinais gerados pode variar de 1 Hz a 3000 kHz.

Gerador de Sinal Aleatório

Foi utilizado um gerador de sinal aleatório para estimar as funções em freqüências de deformação e de aceleração. O gerador foi o Random – Noise Generator da General Radio Company, tipo 1381.

Amplificador de Potência

Para a amplificação de potência do sinal gerado foi utilizado um amplificador de potência da marca Brüel & Kjaer, modelo 2706.

Excitador eletromagnético e Stinger

A excitação foi transmitida à viga por um excitador eletromagnético e um stinger delgado. O shaker utilizado foi da marca Brüel & Kjaer, modelo 4809, com capacidade de carga dinâmica de 45 N, banda de freqüência de 10 Hz a 20 kHz e aceleração máxima de 736 m/s^2. A Figura 5.5 mostra a foto do shaker e stinger utilizado.

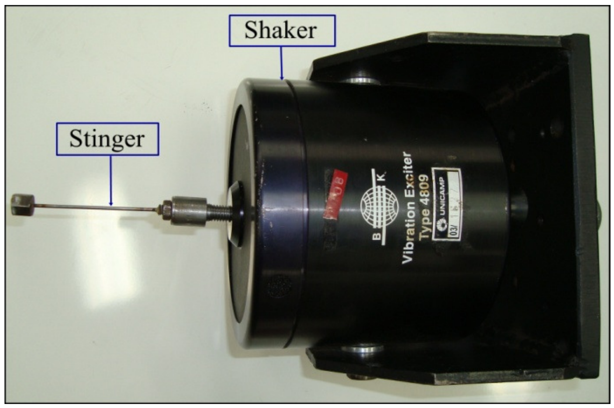


Figura 5.5 – Excitador eletromagnético utilizado

Condicionador do sinal dos acelerômetros

Foi utilizado o condicionador e amplificador de quatro canais NEXUS® da marca Brüel & Kjaer. Este condicionador é utilizado para acelerômetros DeltaTron®, transdutores de força e microfones. As sensibilidades dos transdutores utilizados e o fundo de escala da medição podem ser configurados no condicionador e as sensibilidades de saída podem ser as indicadas na Tabela 5.3, conforme a configuração desejada. É possível aplicar filtro passa-baixa no sinal adquirido com este equipamento. As freqüências de corte para o filtro passa-baixa também estão indicadas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Sensibilidade de saída e freqüências de corte do filtro passa-baixa do condicionador e amplificador NEXUS®

Sensibilidade de Saída	Filtro Passa-Baixa (kHz)
100 mV/ms^{-2}	0,1
316 mV/ms^{-2}	1
1 V/ ms^{-2}	3
3,16 V/ ms^{-2}	10
10 V/ ms^{-2}	22,4
31,6 V/ ms^{-2}	30
100 V/ ms^{-2}	100
316 V/ ms^{-2}	
1 kV/ ms^{-2}	
3,16 kV/ ms^{-2}	
10 kV/ ms^{-2}	
31,6 kV/ ms^{-2}	

Todos os filtros de corte possuem atenuação de 40db/década. A Figura 5.6 mostra a foto da vista frontal e traseira do condicionador utilizado.

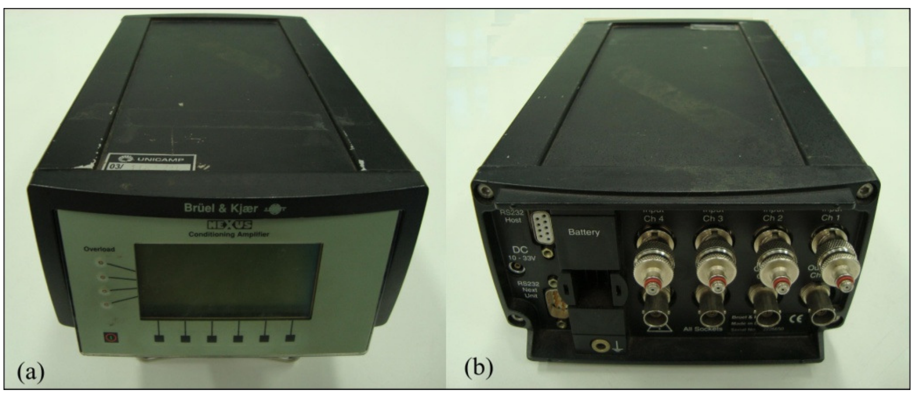


Figura 5.6 – (a) foto parte frontal, (b) foto parte traseira do condicionador

Sistema para medição de deformação com strain gage

Os Extensômetros foram conectados através de fios até a KYOWA® *Bridge Box DB-120*, acessório do sistema de aquisição. A Bridge Box *DB-P* é usada para compor a *Ponte de Wheastone* e conectar os *strain gage* com o amplificador. Esse modelo de ponte possui três resistores, que pelos quais é possível compor a ponte de *Wheastone* e é aplicável para um (1) *strain gage* (dois e três fios), dois (2) ou quatro (4) *strain gages*. O modelo da ponte deve ser compatível com a resistência dos extensômetros, por exemplo, 120Ω ou 350Ω. (KYOWA, 1987).

No caso do experimento, a ponte escolhida foi a que possui resistência compatível com a do *strain gage*.

No Anexo I estão os esquemas de soldagem dos fios na *Bridge Box* conforme a configuração desejada.

O amplificador do sinal de deformação medida, utilizado no experimento, foi o amplificador portátil de deformação dinâmica de seis canais simultâneos modelo KYOWA DPM-6H. A sensibilidade de saída do amplificador pode ser ajustada em 1V/100με, 1V/200με, 1V/500με, 1V/1000με ou 1V/2000με. Este equipamento apresenta filtro passa baixa com freqüências de corte de 10, 30, 100, 300 e 1000 Hz.

A ponte foi ligada ao amplificador através de um cabo com terminal da marca TAJIMI, 7 pinos. A Figura 5.7 mostra a foto da ponte e do condicionador utilizado no experimento.

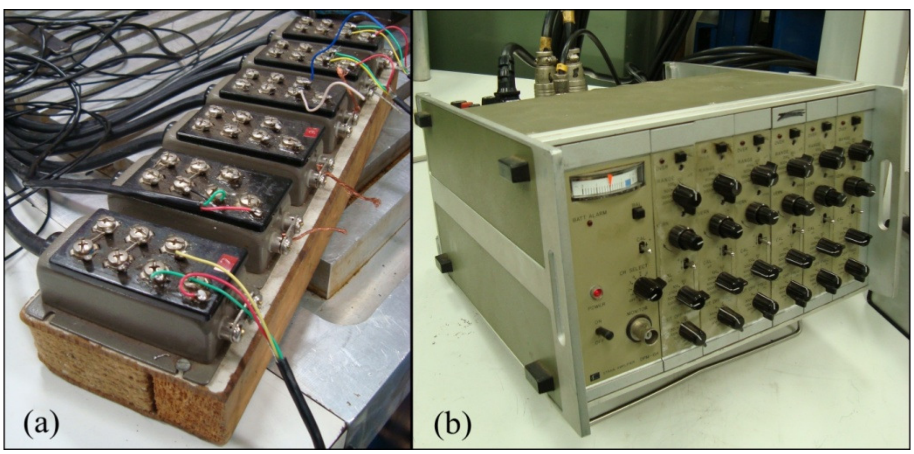


Figura 5.7 – (a) Foto da Bridge Box KYOWA®, (b) Condicionador KYOWA®

Placa de Aquisição

O conversor analógico digital utilizado no experimento foi a placa de aquisição NI USB-6251 da National Instruments. A placa possui 16 entradas analógicas com 16 bits de resolução, além de duas saídas analógicas e duas entradas e saídas digitais. A placa opera com freqüência de amostragem máxima de 1,25 MS/s.

5.4 Montagem e Fixação da Viga em Balanço

Para a obtenção da viga em balanço proposta para os experimentos foi utilizado um perfil de alumínio de 505 mm de comprimento, 25,4 mm de largura e 3,05 mm de espessura. O comprimento considerado para a viga em questão é de 420 mm, sendo os 85 mm restantes do comprimento do perfil destinado à região de engaste. A Figura 5.8 ilustra o perfil de alumínio utilizado no experimento indicando o comprimento da viga e a região de engaste.

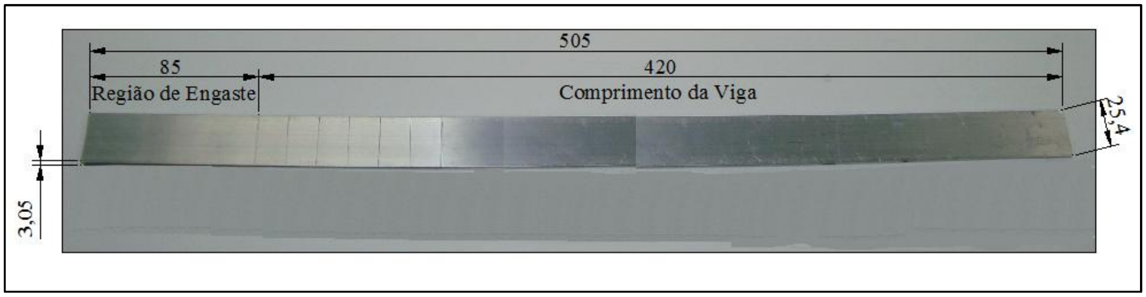


Figura 5.8 – Perfil de alumínio utilizado no experimento

O engaste da viga foi realizado utilizando-se dois blocos de alumínio usinados e unidos por parafusos. Um dos blocos possui um encaixe para a viga com mesma largura do perfil de alumínio e profundidade de 2,5 mm. Foram utilizados 8 parafusos Allen e porcas 7/16” para a fixação dos blocos e do perfil. A Figura 5.9 mostra a foto do conjunto do engaste utilizado no experimento.

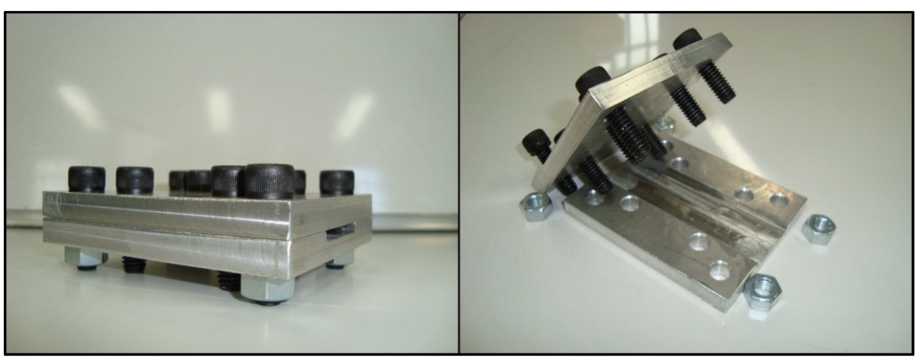


Figura 5.9 – Conjunto do engaste da viga

Antes do engaste do perfil de alumínio foi feita a preparação e colagem de dois (2) *strain gages* na superfície do mesmo. Este processo será detalhado no item 5.5. Após, o perfil de alumínio foi adequadamente posicionado e fixado no bloco de alumínio. O perfil fixado em uma das extremidades pelo bloco pôde então ser considerada uma viga em balanço. A viga foi fixada em um bloco rígido de aço fixo a uma bancada. Posteriormente foi feita a instalação do excitador eletromagnético e a conexão do mesmo com a viga através do stinger. O excitador foi instalado a 210 mm do engaste da viga.

5.5 Preparação e Colagem dos *strain gages* na Superfície do Perfil de Alumínio

A região onde os *strain gages* seriam colados foi lixada utilizando um rebolo *Scotch Brite*. Após, a posição dos *strain gages* foi identificada e marcada com um traço longitudinal no meio do perfil e por dois traços transversais feitos com uma lapiseira com grafite. Este procedimento ajuda para um correto posicionamento dos *strain gages* sem a necessidade de riscar a peça com traços profundos, pois podem influenciar nas medições e o grafite risca a peça muito superficialmente. A remoção de impurezas da região de colagem dos *strain gages* foi realizada através de repetitivos processos de limpeza utilizando algodões e Acetona P.A. de uso laboratorial. Os *strain gages* foram cuidadosamente manuseados com pinças e inicialmente foram colocados em uma placa de vidro, previamente limpa. Os terminais de solda foram posicionados próximos aos extensômetros. Os *strain gages* foram presos à superfície do perfil com a ajuda de uma fita adesiva. Os extensômetros foram posicionados de maneira que as marcas guias dos mesmos coincidissem com os traços guias feitos anteriormente na superfície do perfil. Usou-se uma lupa para melhor visualização dos traços. Após a certificação visual de que os extensômetros estavam corretamente posicionados em relação aos traços guias, foi adicionado o adesivo (cola) de cianoacrilato Loctite® 496 na superfície do perfil e com ajuda de um teflon, cada extensômetro foi pressionado com o dedo aproximadamente por dois minutos. Após o processo de cura e secagem do adesivo, foram soldados os fios dos extensômetros aos terminais de solda utilizando-se um soldador elétrico e fios de estanho. Foi adicionada uma proteção aos *strain gage* de PU 120. A Figura 5.10 mostra a foto do aparato utilizado para colagem dos extensômetros na viga.

Figura 5.10 – Aparato utiliza no colagem dos *strain gages*

Os extensômetros foram colados na superfície inferior da viga a 30 e 60 mm do engaste, orientados de forma a medir a deformação longitudinal (flexão) da mesma. A Figura 5.11 mostra os *strain gages* colados no perfil e suas posições em relação ao engaste da viga.

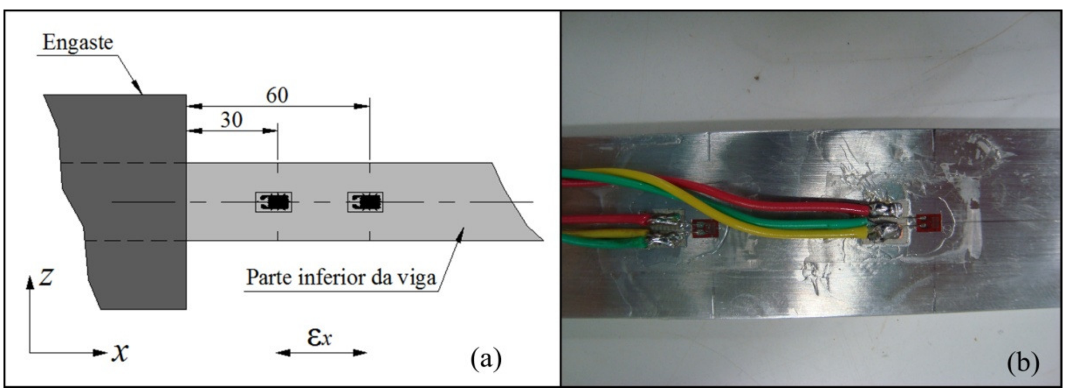


Figura 5.11 – (a) Ilustração da posição dos *strain gages*, (b) foto dos *strain gages* colados

Os fios dos extensômetros foram conectados à ponte segundo o esquema apresentado no Anexo I, para dois *strain gages* e três fios. A ponte foi ligada ao amplificador. Após a conexão dos *strain gages* com o amplificador, é necessário que este seja calibrado. O procedimento de "calibração" do sinal de saída do amplificador foi feita pressionado-se o botão "cal" do equipamento e verificando a amplitude do sinal de saída, que deve ser de 1 V. Para a calibração foi utilizado um voltímetro. Foi adicionada uma massa conhecida na extremidade livre da viga e através do cálculo analítico da Equação (4.6) pode-se verificar que os valores de deformação medidos estavam condizentes com o fenômeno estudado.

5.6 1° Experimento: Estimação de FRF

As estimações da FRF de deformação de flexão e de aceleração (acelerância) da viga foram realizadas com o objetivo de se analisar as faixas de freqüências de maior deformação de flexão e se identificar algumas freqüências de interesse. Essas freqüências foram usadas nas excitações harmônicas para a análise da deformação no domínio do tempo, realizadas no segundo experimento.

Para estimação das FRFs é necessário relacionar a força excitadora (entrada) com a resposta. Desta forma, a força excitadora (entrada) foi medida através do transdutor de força e as respostas de aceleração e de deformação foram medidas através de acelerômetro e *strain gage*, respectivamente. As FRFs foram estimadas utilizando os estimadores $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$, das Equações (2.164) e (2.165), implementados em um programa em MATLAB® 7.3.

Para a realização do experimento foi feita a montagem e a conexão de todos os equipamentos conforme o esquema ilustrado na Figura 5.1. A faixa de freqüência escolhida foi de 0 a 1000 Hz, pois, verificou-se no item 4.5, no cálculo das freqüências naturais para a viga em análise, que pelo menos cinco (5) modos de flexão da viga estão dentro desta faixa e o objetivo é comparar, posteriormente, alguns valores de deformação medidos com valores estimados, não sendo necessária uma faixa de freqüência maior para esta análise.

A sensibilidade do transdutor de força foi ajustada no condicionador NEXUS®. A freqüência de corte para o filtro passa baixa no condicionador foi configurada em 1000 Hz e a sensibilidade de saída em 316mV/ms^{-2}. No amplificador KYOWA® foi ajustado uma freqüência de corte para o filtro passa baixa de 1000 Hz e a sensibilidade de saída em 1000 mV/100με. As freqüências de corte dos filtros estão associadas à faixa de freqüência escolhida para análise.

Os dados referentes ao processamento de sinais utilizado no experimento estão listados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Dados do processamento de sinais para estimação da FRF

Descrição	
Freqüência de amostragem f_s	10000 Hz
Número de pontos	32768
Número de médias	10
Discretização no tempo *dt*	0,0001s
Discretização na freqüência *df*	0,3052 Hz

A freqüência de amostragem, número de pontos e número de médias foram determinados após diversas estimativas, analisando-se qualitativamente as FRFs estimadas e observando-se a coerência encontrada, buscando-se valores próximos a unidade. Desde que, a freqüência de amostragem fosse duas vezes maior que a freqüência máxima do sinal analisado, ou seja, maior que 2000 Hz, e que o número de pontos fosse potência de 2, ou seja, 2^N, para maior eficiência do algoritmo da FFT.

A viga analisada foi submetida a uma excitação aleatória, ruído branco, gerado pelo gerador de sinal aleatório. O ponto de excitação foi fixo a 210 mm do engaste e o ponto de resposta de deformação, o ponto onde o *strain gage* foi colado, a 30 mm do engaste da viga, (Figura 5.11), e o ponto de resposta de aceleração foi também em um ponto afastado 30 mm do engaste da viga, entretanto, na superfície oposta. As posições do ponto de excitação e de resposta podem ser vistas no esquema ilustrado na Figura 5.12.

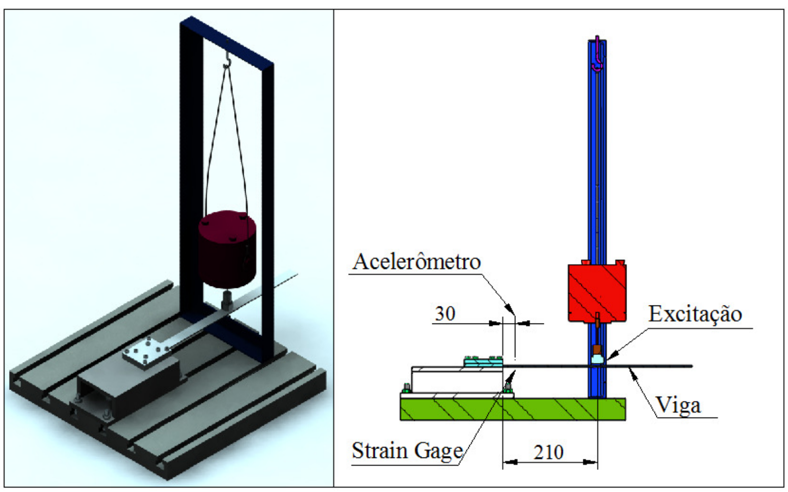


Figura 5.12 – Esquema ilustrativo montagem experimental para estimação de FRF

Os sinais foram adquiridos em um programa desenvolvido em MATLAB® 7.3. A FRF de deformação estimada pelos estimadores $H_1(\omega)$ e $H_2(\omega)$ e a função de coerência encontrada estão demonstradas no gráfico da Figura 5.13.

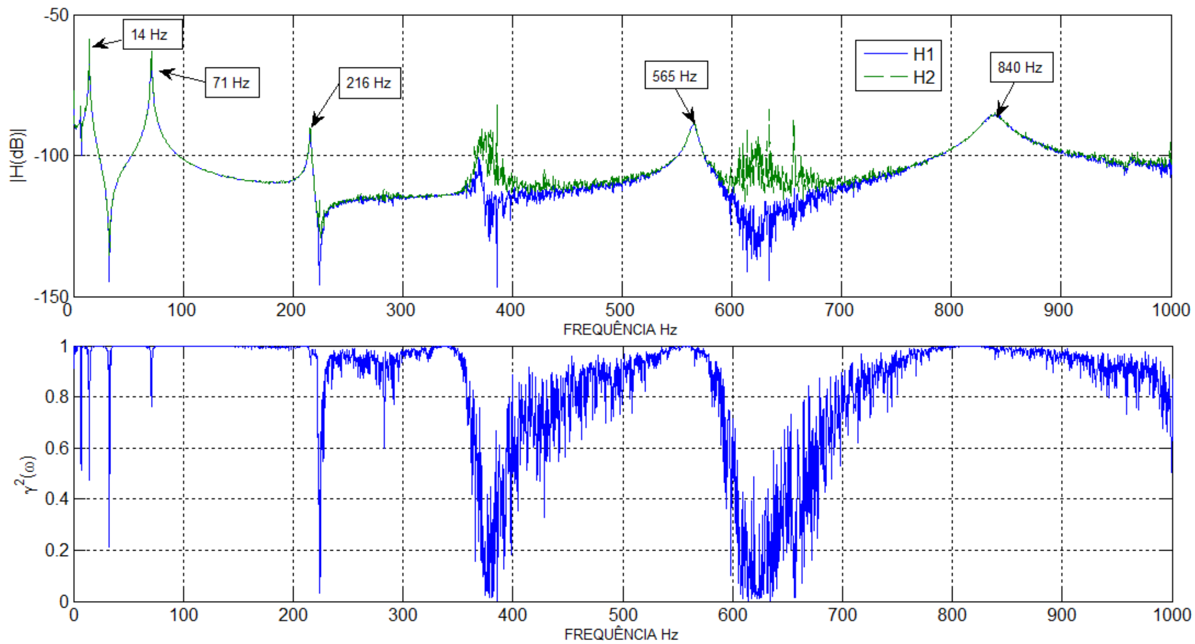


Figura 5.13 – FRF de deformação e função de coerência estimadas experimentalmente

Pode-se verificar na Figura 5.13 que tanto a FRF estimada quanto a função de coerência encontrada experimentalmente não são boas para freqüências maiores que 220 Hz. Nas ressonâncias e antiressonâncias a coerência geralmente apresenta valores diferentes da unidade, principalmente devido à baixa relação sinal-ruído da força excitadora, no caso da ressonância, e a baixa relação sinal-ruído da resposta, no caso da antirressonância. Para as altas freqüências, ou seja, maiores que 220 Hz, que não coincidem com as ressonâncias ou antirressoâncias, a coerência é ruim provavelmente pela pequena amplitude do sinal de resposta (deformação). Para altas freqüências, as deformações são pequenas, e em alguns casos, necessitam ser medidas com extensômetros semicondutores, como mencionado no item 2.3.

Estas observações influenciaram na escolha de faixas de freqüências de análise menores que 220 Hz e próximas às freqüências de 14 e 70 Hz, onde os valores de deformação são maiores e possíveis de serem medidos pelo *strain gage*, sem que haja a necessidade de grandes amplitudes da força excitadora.

Os picos da FRF podem estar associados às freqüências naturais da viga. As freqüências associadas aos picos da FRF de deformação podem ser comparadas com as respectivas freqüências na acelerância estimada para o mesmo ponto, entretanto, na superfície oposta da viga, no gráfico da Figura 5.14.

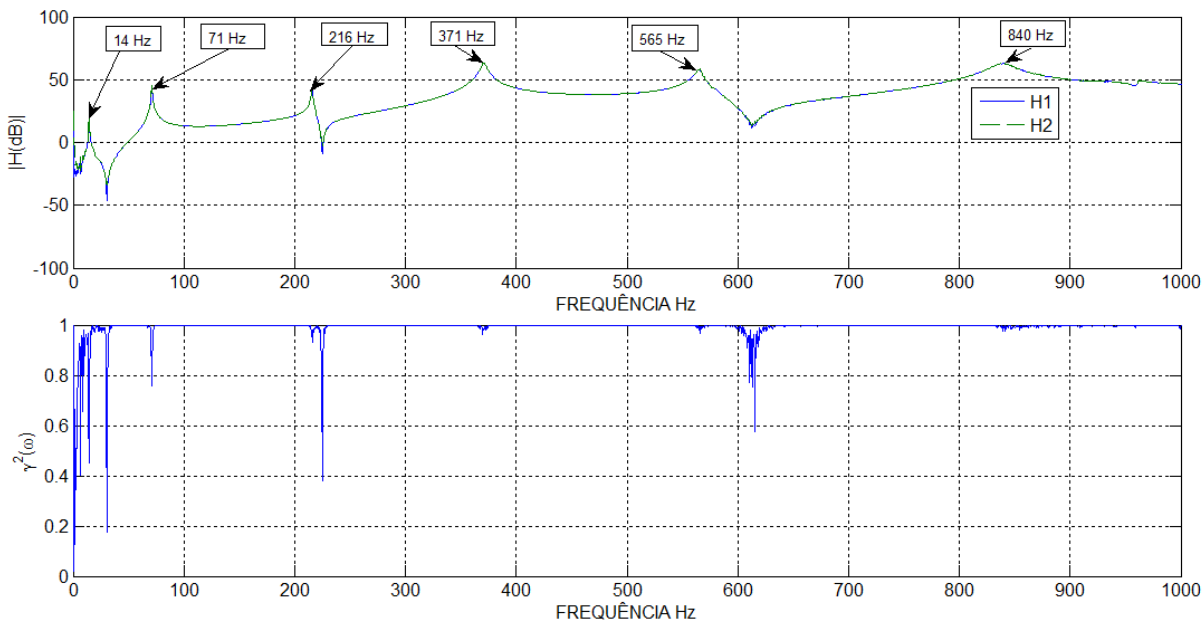


Figura 5.14 – Acelerância e função de coerência estimadas experimentalmente

A acelerância estimada apresenta melhor coerência para freqüências maiores que 220 Hz, quando comparada com a FRF de deformação da Figura 5.13. Entretanto, para freqüências menores que 20 Hz a coerência encontrada não é boa. Os acelerômetros apresentam baixa sensibilidade para baixas freqüências e também a limitação do equipamento de excitação para essas freqüências podem estar interferindo na estimação da FRF nessa faixa.

Percebe-se que os picos das FRFs de deformação e de aceleração coincidem. Entretanto, o pico próximo a 371 Hz na acelerância está melhor definido, mas de acordo com o cálculo das freqüências naturais da viga em análise, esta freqüência não está próxima a nenhum modo de flexão da viga.

Pela observação das FRFs de deformação e de aceleração foram escolhidas algumas freqüências para a análise de deformação de flexão estimada e medida no domínio do tempo. As freqüências escolhidas foram aproximadamente, 30, 40 e 70 Hz e foram utilizadas nas excitações harmônicas que a viga foi submetida no segundo experimento. No item subseqüente será detalhado este experimento.

5.7 2° Experimento: Análise Experimental da Deformação da Viga pelo MDF

A análise experimental da deformação da viga pelo MDF consiste em prever experimentalmente a deformação de flexão na superfície da viga utilizando dados medidos de aceleração na direção perpendicular à superfície da viga, direção y, e o método de diferenças finitas, em freqüências de excitações conhecidas. O ponto de análise, ou seja, o ponto onde foi prevista a deformação é um ponto distante 30 mm do engaste da viga na superfície oposta à dos *strain gages*.

A Equação (4.6) mostra que a deformação longitudinal ou de flexão de uma viga é determinada através da análise da curvatura da viga e pela derivada de segunda ordem do deslocamento transversal ou deflexão. Sendo esta deflexão obtida através das acelerações medidas no experimento e analogamente ao exposto no item 4.4 é possível estimar a deformação utilizando o método das diferenças finitas. A fórmula de diferenças finitas utilizada, para o experimento em questão, foi a fórmula de diferenças finitas central de ordem $O(h^4)$ da segunda derivada, conforme a Tabela 4.2. O uso desta fórmula implica no conhecimento de cinco valores da função a que se quer derivar, desta forma, foram colados 4 (quatro) acelerômetros na superfície superior da viga uniformemente espaçados com uma distância h de 15 mm entre eles. O quinto valor foi considerado nulo e se refere ao ponto um (1) ou o do engaste da viga. Esta simplificação foi necessária, pois o condicionador do sinal dos acelerômetros utilizado possui apenas quatro canais e optou-se pela medição simultânea das acelerações. A Figura 5.15 ilustra o posicionamento dos acelerômetros na viga e a denominação dos pontos.

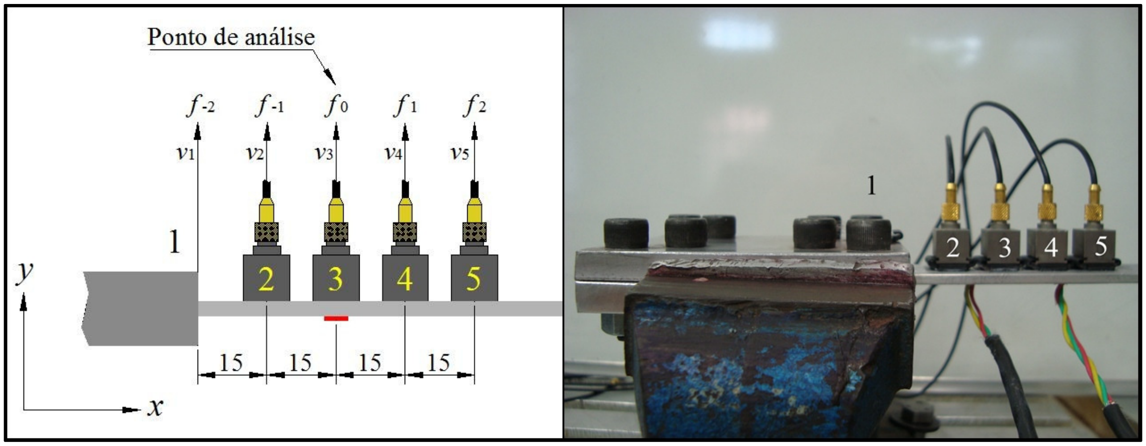


Figura 5.15 – Posicionamento dos acelerômetros na viga

As sensibilidades dos acelerômetros, conforme Tabela 5.2, foram ajustadas no condicionador NEXUS®. A freqüência de corte para o filtro passa baixa no condicionador foi configurada em 1000 Hz e a sensibilidade de saída em 316 mV/ms^{-2}. No amplificador KYOWA® foi ajustada uma freqüência de corte para o filtro passa baixa de 1000 Hz e a sensibilidade de saída em 1000 V/100με. A viga foi submetida a excitações harmônicas senoidais em diversas freqüências ajustadas no gerador de sinal. Os dados foram adquiridos utilizando um programa de aquisição desenvolvido no MATLAB® 7.3. O tempo de aquisição de cada sinal foi de 9 segundos e freqüência de amostragem *fs* = 2000 Hz.

A primeira aquisição foi realizada com a viga submetida a uma excitação harmônica senoidal com freqüência aproximadamente de 30,11 Hz. A freqüência dos sinais foi obtida a partir do algoritmo FFT do MATLAB®. Os sinais de acelerações obtidos dos quatro acelerômetros estão ilustrados nos gráficos da Figura 5.16.

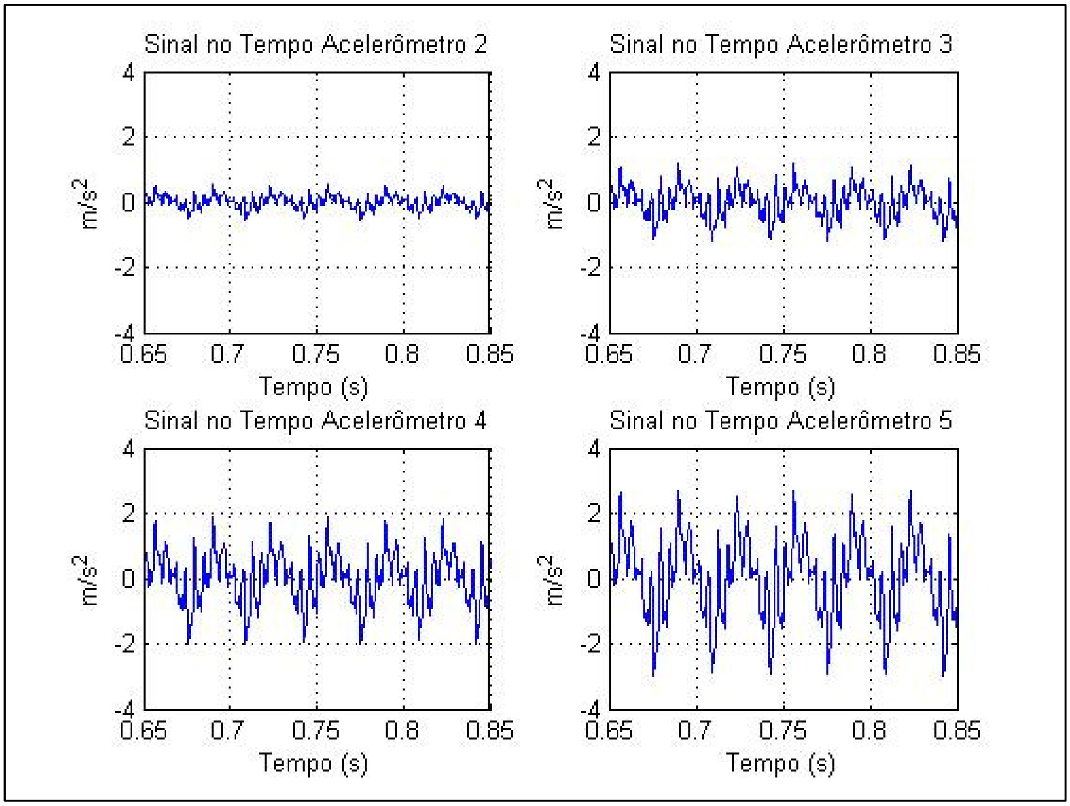


Figura 5.16 – Sinais de aceleração para a freqüência de 30,11 Hz

A segunda aquisição foi realizada com a viga submetida a uma excitação harmônica senoidal com freqüência aproximadamente de 44,11 Hz. Os sinais de acelerações obtidos dos quatro acelerômetros estão ilustrados nos gráficos da Figura 5.17.

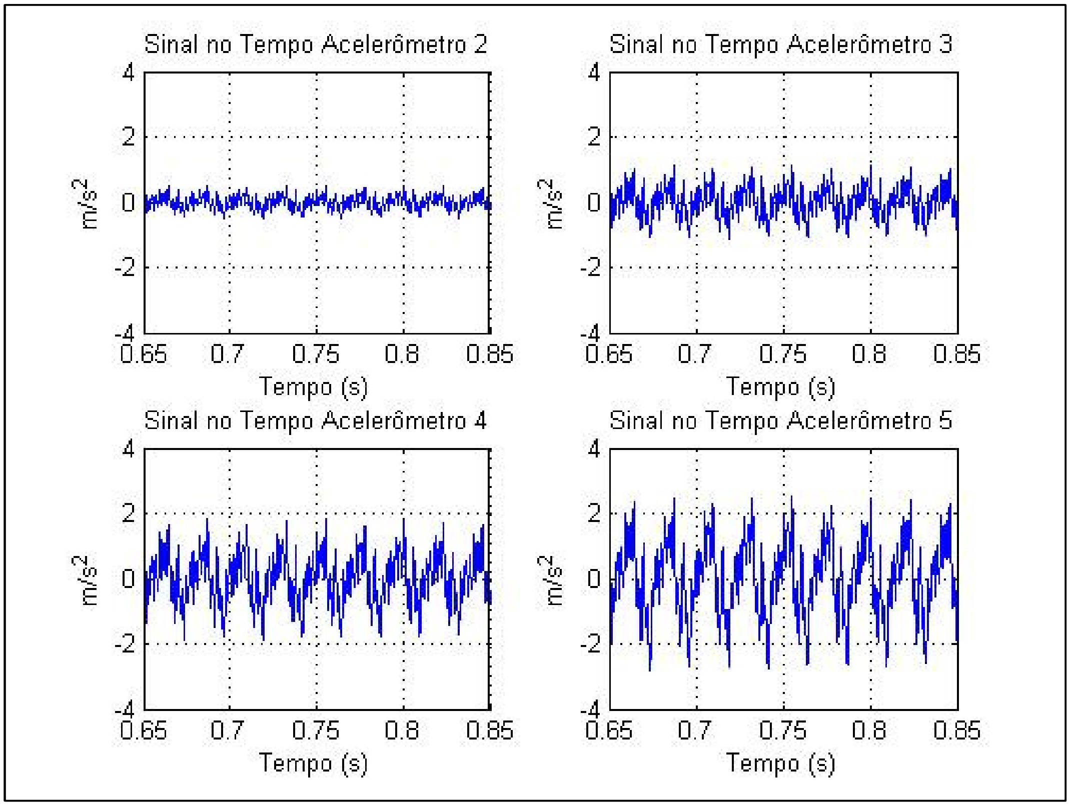


Figura 5.17 – Sinais de aceleração para a freqüência de 44,11 Hz

A terceira aquisição foi realizada com a viga submetida a uma excitação harmônica senoidal com freqüência aproximadamente de 73,22 Hz. Os sinais de acelerações obtidos dos quatro acelerômetros estão ilustrados nos gráficos da Figura 5.18.

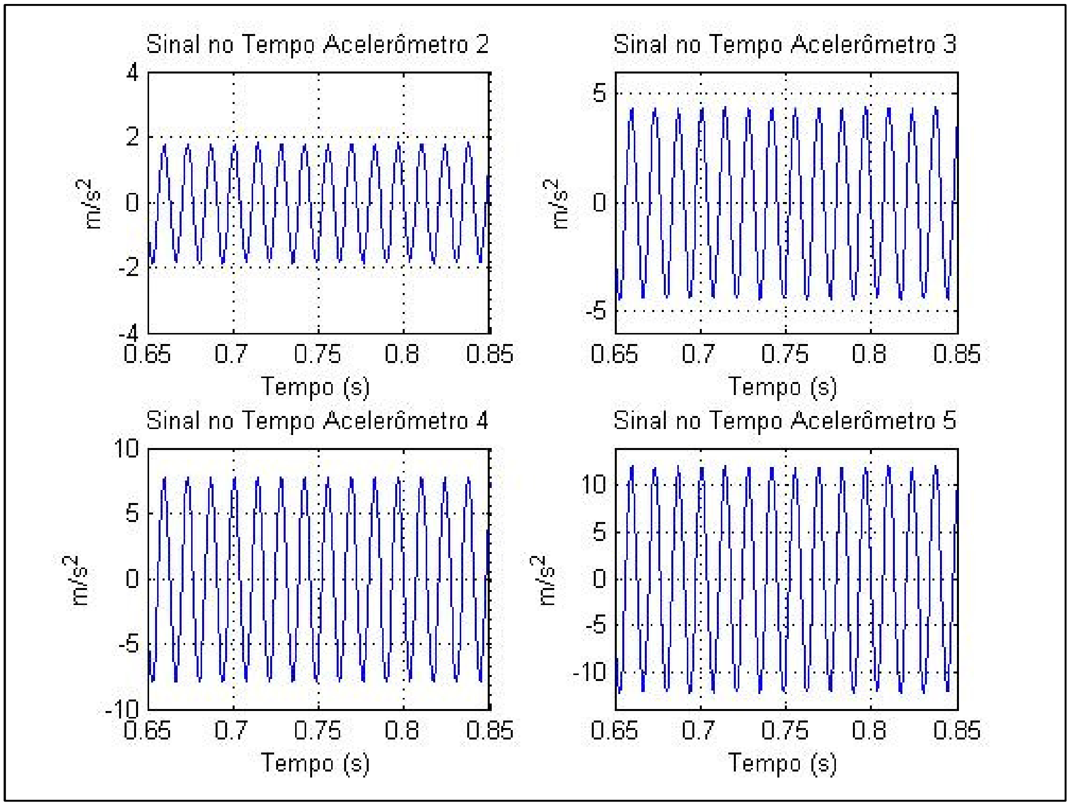


Figura 5.18 – Sinais de aceleração para a freqüência de 73,22 Hz

Os valores de acelerações foram transformados para valores de deslocamento dividindo-os pela constante $-(2\pi f)^2$, sendo f a freqüência principal de cada sinal analisado. Essa constante se refere ao termo $-\omega^2$ na relação entre receptância e acelerância da Tabela A.1.

Analogamente ao realizado no item 4.4, o deslocamento foi relacionado com a deformação específica através da derivada segunda da curvatura da viga e utilizando o método de diferenças finitas centrais. O deslocamento do ponto um (1) referente ao engaste foi considerado nulo, ou seja, igual a zero, e os outros deslocamentos, necessários para aplicação da fórmula de diferenças finitas da segunda derivada e ordem $O(h^4)$, foram determinados por:

$$\begin{aligned} v_2 &= f_{-1} = -aceleração2/\omega^2 \\ v_3 &= f_0 = -aceleração3/\omega^2 \\ v_4 &= f_1 = -aceleração4/\omega^2 \\ v_5 &= f_2 = -aceleração5/\omega^2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Pelas simplificações realizadas, a nova fórmula de diferenças finitas central para segunda derivada e ordem $O(h^4)$ utilizada no cálculo de deformação é dada por:

$$f''(v_3) = \frac{-f_2 + 16f_1 - 30f_0 + 16f_{-1}}{12h^2} \tag{5.2}$$

Considerando a distância h o passo entre os acelerômetros, distância entre o centro de um acelerômetro até o centro do próximo acelerômetro, sendo 0,015 m , conforme mostra a Figura 5.15, *y'* a metade da espessura do perfil sendo $1{,}525.10^{-3}$ m e utilizando a Equação abaixo:

$$\varepsilon(v_3) = y' f''(v_3) \tag{5.3}$$

A deformação longitudinal na superfície superior da viga pôde ser estimada utilizando valores de aceleração medidas através de acelerômetros.

Os valores de deformação medidos pelo *strain gage* no ponto de análise, entretanto na superfície inferior da viga, foram condicionados em relação à sensibilidade medida, 1000 mV/ 100με, e também levando em conta o fator de calibração do *strain gage* conforme Tabela 5.1, ou seja, $S_g = 2{,}16$. A seguinte Equação foi utilizada no condicionamento (KYOWA, 1987):

$$\varepsilon_{med\_c} = \frac{2{,}00}{S_g} \varepsilon_{med} \tag{5.4}$$

onde ε_{med_c} é a deformação medida e corrigida e ε_{med} a informação de deformação obtida diretamente do amplificador.

As comparações dos valores de deformação medidos pelo *strain gage* e estimados através dos valores obtidos pelos acelerômetros podem ser observadas nos gráficos das Figuras abaixo. Como a deformação foi estimada para a superfície superior da viga e foi medida na superfície inferior da mesma, considerou-se que a distribuição de deformação ao longo da espessura da viga seja nula na linha neutra e máxima na superfície. Entretanto, uma superfície estará em compressão enquanto outra estará em tração durante a flexão da viga. Para comparação dos resultados, foi invertida a fase da deformação medida multiplicando-a por -1.

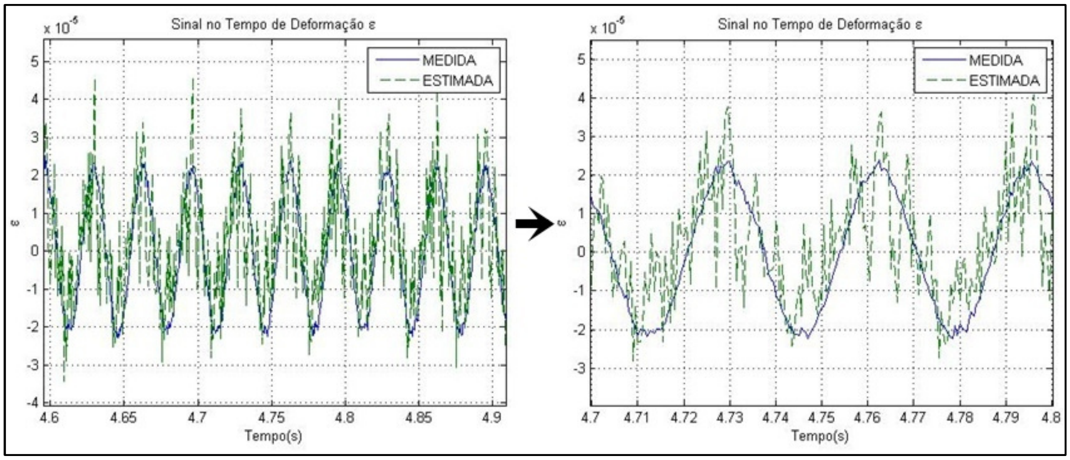


Figura 5.19 – Comparação entre a deformação medida e estimada para 30,11 Hz

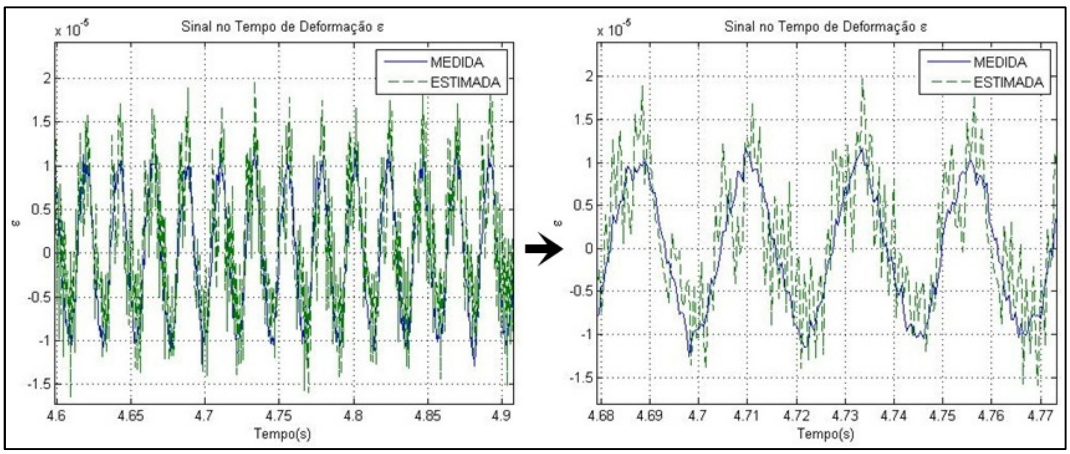


Figura 5.20 – Comparação entre a deformação medida e estimada para 40,11 Hz

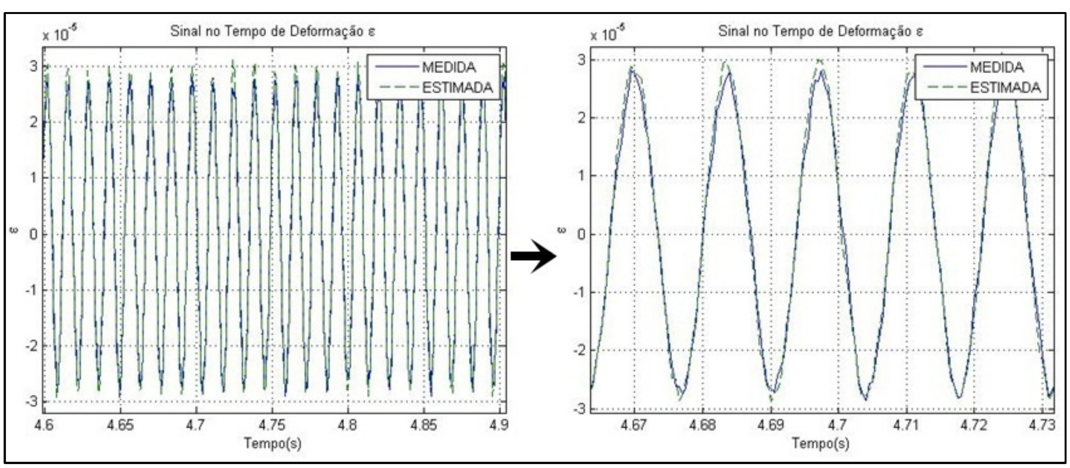


Figura 5.21 – Comparação entre a deformação medida e estimada para 73,22 Hz

Observando os sinais de aceleração medidos nas freqüências de 30,11 e 44,11 Hz, conforme mostra as Figura 5.16 e Figura 5.17, pode-se verificar que para baixos valores de freqüência, as amplitudes de aceleração são pequenas e o ruído de medição passa a prevalecer nos sinais medidos. Este ruído interferiu na estimativa dos valores de deformação para estas freqüências conforme é possível se observar na Figura 5.19 e na Figura 5.20. Entretanto, analisando os sinais em termos de amplitude e descartando alguns picos elevados de amplitudes no sinal de deformação estimada, verifica-se que há uma aproximação dos valores de deformação medida e estimada. Posteriormente serão mostradas as comparações realizadas aplicando-se filtro em freqüência nos sinais de aceleração.

Observando os sinais de acelerações medidos na freqüência de 73,22 Hz, Figura 5.18, pode-se verificar que o padrão da onda senoidal é melhor em comparação com os padrões observados nos sinais de 30,11 e 44,11 Hz. Conseqüentemente, os valores estimados de deformação para a freqüência de 73,22 Hz apresentam uma melhor aproximação ao valor medido, tanto em amplitude como no padrão da onda, conforme pode ser visto na Figura 5.21.

Desconsiderando o ruído apresentado em algumas medições, nota-se que os valores estimados de deformação apresentam um valor um pouco maior que o valor da deformação medida pelo *strain gage*. Diversas análises podem ser feitas a respeito dessa comparação. Levando-se em conta que os valores de deformação medidos pelo *strain gage* são os valores corretos de deformação, mesmo que possa haver algum problema na colagem, montagem ou o fator de calibração do extensômetro não seja o real, os valores de deformação estimados puderam ser influenciados pela variação da sensibilidade dos acelerômetros em baixas freqüências e pelo posicionamento incorreto dos acelerômetros na viga, ou seja, o alinhamento e a distância não uniforme. No entanto, a maior influência para obtenção de valores de deformação estimados maiores que os valores da deformação medidos, pode ser o fato da consideração do engaste perfeito, ou seja, o deslocamento nulo do ponto próximo ao engaste. Observou-se em medições de verificação, que o ponto próximo ao engaste apresenta um pequeno deslocamento e a informação deste deslocamento pode diminuir o valor da deformação estimado, pois na fórmula de diferenças finitas este valor deve ser subtraído aos valores dos outros pontos.

Inicialmente, numa primeira aproximação da deformação a partir de medidas de aceleração, os deslocamentos foram obtidos dividindo os sinais de aceleração por $-\omega^2$, considerando apenas a freqüência principal do sinal. Outras componentes de freqüências, portanto, encontradas principalmente nos sinais de aceleração de 30 e 44 Hz não foram levadas em consideração. Desta forma, os sinais de deslocamento obtidos pela divisão por uma única freqüência angular apresentaram pequenos erros. Para contornar este problema e minimizar os erros devido à integração (relação aceleração – deslocamento) utilizada, foi aplicado um filtro digital passa-banda nos sinais medidos de aceleração. O filtro digital passa-banda foi aplicado aos sinais de aceleração através de um programa desenvolvido em LabVIEW® 8.6.

Os sinais foram filtrados em diversas freqüências, e qualitativamente foram escolhidas algumas faixas. Os sinais de acelerações medidos na freqüência de 30,11 Hz foram filtrados na banda de freqüência de 5 a 100 Hz. Os sinais de acelerações medidos na freqüência de 40,11 Hz foram filtrados na banda de freqüência de 5 a 180 Hz. Nas Figura 5.22 e Figura 5.23 estão os gráficos dos sinais de aceleração filtrados digitalmente.

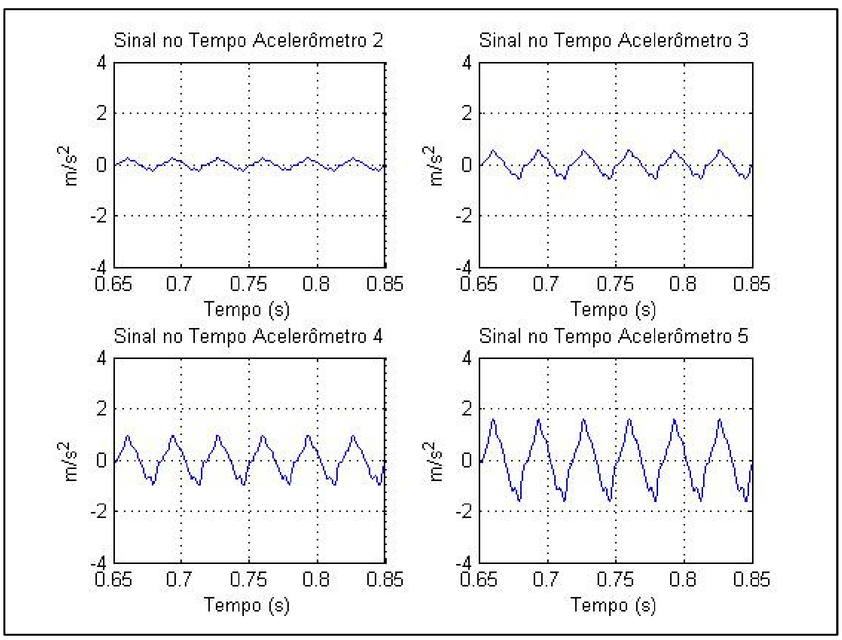


Figura 5.22 – Sinais de aceleração de 30,11 Hz filtrados digitalmente em 5 - 100 Hz

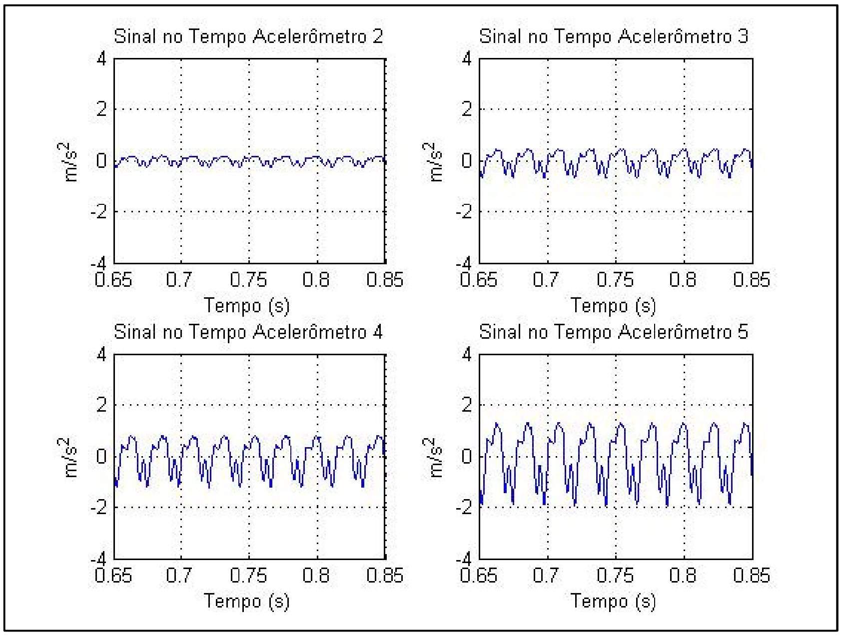


Figura 5.23 – Sinais de aceleração de 44,11 Hz filtrados digitalmente em 5 - 180 Hz

Embora os padrões de onda dos sinais filtrados não apresentem uma forma de onda esperada, ou seja, senoidal, os mesmos foram utilizados novamente na estimativa da deformação de flexão no ponto de análise. Analogamente ao realizado na comparação anterior, entretanto utilizando os sinais filtrados de aceleração, as deformações dinâmicas foram estimadas e comparadas com as deformações medidas. As comparações podem ser visualizadas nos gráficos das Figura 5.24 e Figura 5.25.

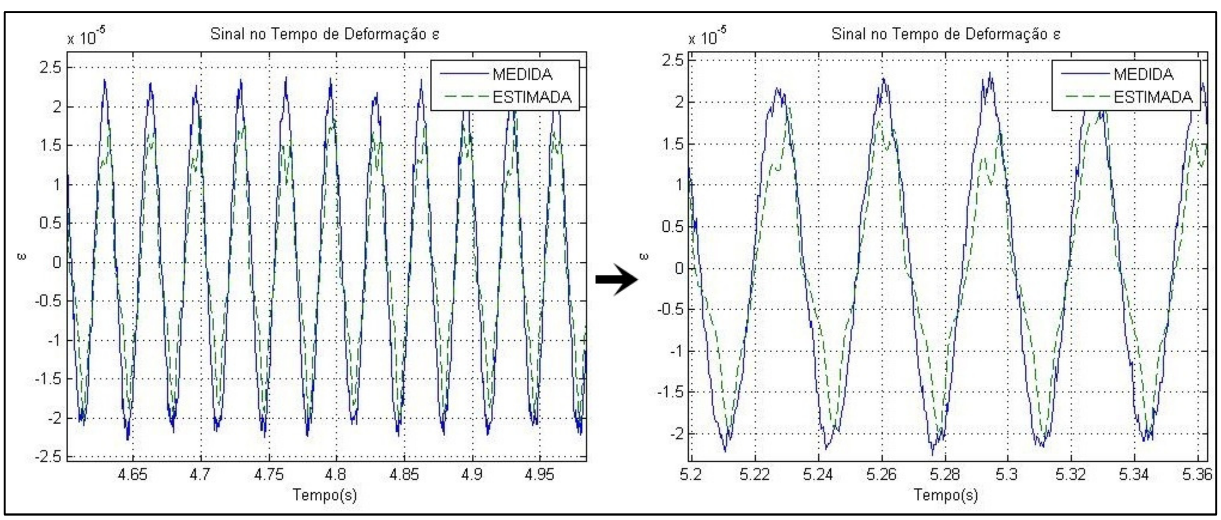


Figura 5.24 – Comparação entre a deformação medida e estimada para 33,11 Hz, filtrado

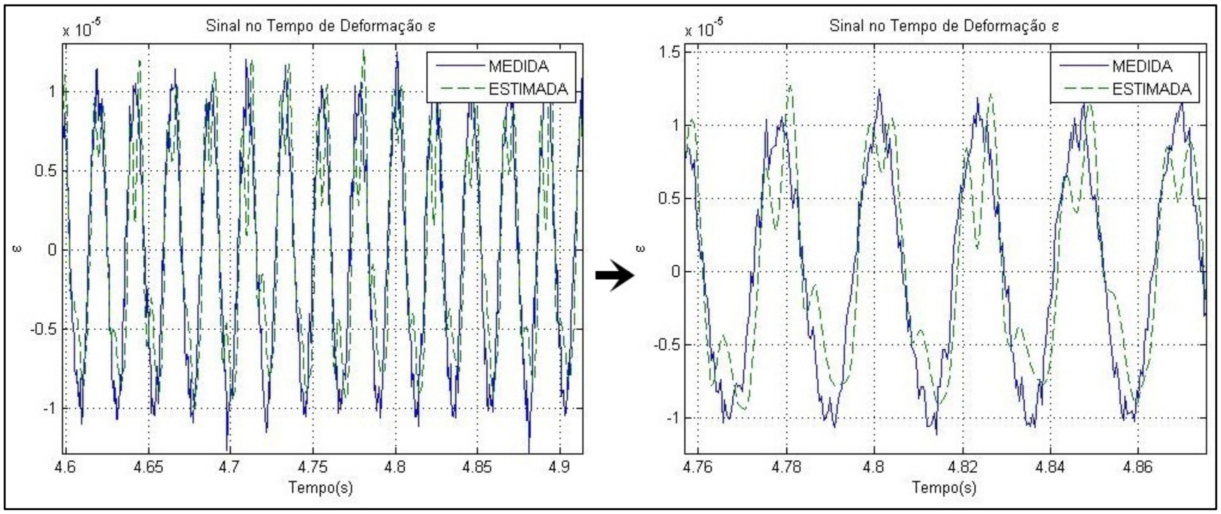


Figura 5.25 – Comparação entre a deformação medida e estimada para 44,11 Hz, filtrado

Nas Figura 5.24 e Figura 5.25 é possível se observar que a deformação estimada, utilizando os sinais filtrados de aceleração, aproximou-se à deformação medida pelo *strain gage*. Entretanto, os efeitos causados pelo filtro nos sinais foram uma atenuação nos picos de amplitude e uma pequena defasagem no sinal de deformação estimada, como pode ser visualizado nas Figuras. Nas aplicações práticas, muitas vezes, as características da excitação não são conhecidas como no caso do experimento, onde conheciam-se as freqüências da força excitadora. Nestes casos, a aplicação de filtros pode interferir de fato na amplitude de sinais, filtrando componentes de freqüências importantes do sinal. Nestas situações é necessária a utilização de integradores para a relação aceleração – deslocamento ou esta relação obtida da divisão pela freqüência deve levar em conta cada componente de freqüência do sinal.

Quanto à distância entre os acelerômetros, a qual implica no erro de aproximação no uso do método numérico na derivação espacial, para o caso analisado, pode ser considerada o suficiente para uma boa aproximação do valor de deformação. Os acelerômetros possuem tamanho de 10 mm, e caso houvesse a necessidade de uma melhor discretização, menor distância entre os pontos, outros transdutores deveriam ser utilizados. Para melhorar as características dos sinais de aceleração medidos em baixa freqüência, poderiam ser utilizados acelerômetros de maior sensibilidade para essas freqüências, no entanto, muitas vezes esses acelerômetros são maiores e poderiam interferir de modo considerável na discretização.

5.8 Resumo do Capítulo

Neste Capítulo foram apresentados os procedimentos realizados e resultados obtidos na análise experimental de deformação dinâmica de flexão em uma viga. Foram realizados dois experimentos. A estimação da função de resposta em freqüência de deformação e aceleração e também a estimativa da deformação em um ponto da viga através da derivada de segunda ordem do deslocamento transversal, obtido com medidas de aceleração. No último experimento a deformação estimada foi comparada com a deformação medida por *strain gage* em diversas freqüências de excitação, apresentando bons resultados.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Técnicas e métodos para determinação da deformação e a tensão dinâmica em superfícies planas a partir de parâmetros modais foram apresentados. Os métodos para determinação da deformação consistem basicamente na derivação espacial, através de métodos numéricos, dos deslocamentos dinâmicos medidos ou estimados. A tensão dinâmica pode ser encontrada pela lei de Hooke generalizada, considerando o tensor de deformação e o estudo em materiais elásticos.

Conforme os casos estudados, além das técnicas convencionais de medição de deformação, outros métodos para determinação da deformação dinâmica, de acordo com o tipo de análise, podem ser utilizados. Quando é conhecida a direção principal de deformação, a mesma pode ser estimada utilizando-se a matriz de transformação deslocamento – deformação. Essa matriz é composta pela matriz modal de deslocamento e a matriz modal de deformação. A matriz de transformação é independente do tempo ou da freqüência e pode ser aproximada pela escolha apropriada de pontos e formas modais da estrutura analisada. Neste trabalho, a matriz de transformação foi determinada analiticamente para uma viga Euler-Bernoulli, considerando apenas os cinco primeiros modos de flexão.

Em placas ou superfícies de estruturas sujeitas a vibração e em situações onde não sejam conhecidas as direções principais de tensão, é necessário a determinação do tensor de tensão, para posterior determinação das tensões principais. Em estruturas consideradas isotrópicas, as direções principais de tensão e deformação coincidem. Desta forma, as tensões principais podem ser obtidas pelas leis constitutivas e o tensor de deformação. O tensor de deformação pode ser determinado pela derivação espacial do campo de deslocamento deste ponto. Na análise de tensão dinâmica, estes deslocamentos podem ser medidos ou estimados pela análise modal híbrida. Esta técnica baseia-se na aproximação no sentido de mínimos quadrados dos coeficientes generalizados da série de Fourier e dos modos naturais da estrutura para prever os deslocamentos, no domínio da freqüência, não medidos. A comparação realizada entre a deformação estimada, utilizando a análise modal híbrida, e a deformação determinada pela derivada de segunda ordem dos deslocamentos transversais de pontos de uma viga Euler-Bernoulli, apresentou bom resultado. Entretanto, o caso avaliado foi considerado conservativo e o vetor de deslocamento, necessário para estimação dos coeficientes, foi determinado a partir da superposição modal. Neste caso, os coeficientes estimados são independentes devido aos modos serem desacoplados e elimina-se a possibilidade de haver erros associados à medição. Estas considerações permitem que os coeficientes estimados aproximem muito melhor o deslocamento longitudinal da viga e a deformação estimada pela derivada de primeira ordem destes deslocamentos seja aproximadamente a mesma encontrada pela derivada de segunda ordem dos deslocamentos transversais. Em situações reais, os modos são geralmente acoplados, devido ao amortecimento, e as medições dos deslocamentos podem conter erros e ruídos.

O tempo de vida a partir de critérios de falhas pode ser determinado utilizando-se a tensão equivalente de *von Mises*. Neste trabalho foi apresentada uma simulação de uma condição operacional onde foi determinada a tensão alternada de *von Mises*. Nesta análise utilizou-se a derivada de primeira ordem dos deslocamentos simulados para determinação do tensor de deformação e as leis constitutivas para relacionar a deformação com a tensão.

A análise de deformação dinâmica fortemente explorada neste trabalho foi a análise de deformação de flexão dinâmica em vigas e pode ser feita a partir do conhecimento dos deslocamentos transversais da mesma. Além da simulação numérica foram realizados experimentos para a análise da deformação em um ponto de uma viga de alumínio. No primeiro experimento foram estimadas a função de resposta em freqüência da deformação, através de *strain gage*, e a acelerância, através de acelerômetro. Este experimento foi realizado com intuito de se verificar a qualidade das respostas dos acelerômetros para baixas freqüências e a qualidade das respostas do *strain gage* para altas freqüências. A verificação foi feita a partir da análise qualitativa das FRFs e observação da função de coerência. A partir destas verificações escolheu-se algumas freqüências que foram utilizadas nas excitações harmônicas no segundo experimento.

O segundo experimento foi realizado para prever a deformação de flexão em um ponto da viga utilizando medições de acelerações em quatro pontos eqüidistantes do ponto de análise. As acelerações foram medidas na direção transversal à direção da deformação de flexão através de acelerômetros. A partir das acelerações se obteviveram os deslocamentos dos pontos. A deformação foi estimada através da derivada de segunda ordem destes deslocamentos relacionada com a distância da linha neutra da viga à superfície da mesma. Foi utilizado o método de diferenças finitas para a derivação espacial. A deformação estimada foi comparada com a deformação medida por um *strain gage* colado na região de análise. A viga foi excitada em diversas freqüências e pela comparação entre os sinais medidos e estimados de deformação no domínio do tempo, pode-se observar boa compatibilidade dos mesmos. Observou-se também que quanto melhor a qualidade dos sinais de aceleração medidos melhor foi a aproximação da deformação estimada com a medida.

Este trabalho abre uma gama muito grande de problemas que necessitam ser estudados futuramente. Dentre diversas questões que merecem aprofundamento, pode-se citar: a avaliação experimental da análise modal híbrida, com a estimativa dos coeficientes generalizados de Fourier; a avaliação da deformação a partir de parâmetros modais em regiões de concentração de tensão; a estimativa do tensor de deformação e de tensão em placas, estruturas mais complexas e em materiais com diversos tipos de amortecimento; a determinação experimental da matriz de transformação e sua posterior utilização na identificação da distribuição de deformação dinâmica em superfícies.

Referências Bibliográficas

ALVES FILHO, Avelino. *Elementos Finitos*: A base da Tecnologia CRE. São Paulo: Editora Érica Ltda, 2000.

ANDOLFATO, Rodrigo Piernas; CAMACHO, Jefferson Sidney; BRITO, Gilberto Antônio. *Extensometria Básica*, 2004. Disponível em: <http://www.nepae.feis.unesp.br/ Apostilas/Extensometria%20basica>. Acesso em: 05 nov. 2009.

ARRUDA, José Roberto de França; HUALLPA, Belisário Nina. *Análise Espectral de Sinais e Sistemas Mecânicos Lineares*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2006.

AVITABILE, Pete. *Modal Space – In Our Own Little Word*: What is the difference between all the mode indicator functions? What do they all do?. SEM Experimental Techniques. 2007. Disponível em: http://macl.caeds.eng.uml.edu/umlspace/Feb07.pdf. Acesso em: 05 nov. 2009.

AZEVEDO, Álvaro F. M.. Método dos Elementos Finitos. 1. ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003. Disponível em: < http://civil.fe.up.pt/pub/apoio/ ano5/aae/Livro_MEF_AA.htm >. Acesso em: 11 nov. 2009.

BEER, Ferdinand P.; JOHNSTON, E. Russell Jr; DEWOLF, John T.. *Resistência dos Materiais*. 4. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

BENDAT, Julius S; PIERSOL, Allan. *Randon data*: analysis and measurement procedures. 3. ed. New York: Wiley, 2000.

BERNASCONI, O.; EWINS, D. J.. Application of Strain Modal Testing to Real Structures. In: International Modal Analysis Conference, Las Vegas. *Proceedings*… Bethel: Society for Experimental Mechanics, 1989. v.2, p. 1453-1464.

BHATTI, M. Asghar. *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures*: with Mathematica and Matlab Computations. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, Douglas. *Análise Numérica*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. p. 148-155.

CHEN, Wai-fah; SALEEB, Atef F.. *Constitutive Equations for Engineering Material*: Elasticity and Modeling. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1994. 1 v.

CRAIG JUNIOR, Roy R.. *Structural Dynamics*: An Introduction to Computer Methods. Toronto: John Wiley & Sons, 1981.

DALENBRING, M. Damping function estimation based on measured vibration frequency responses and finite element displacement modes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 13, (4). p. 547-569. 1999.

DALLY, James W.; RILEY, William F.. *Experimental Stress Analysis*. 2. ed. New York: Mcgraw-Hill, 1978.

DALLY, James W.; RILEY, William F.; MCCONNELL, Kenneth G.. *Instrumentation for Engineering Measurements*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1993.

DOVSTAM, K.. Augmented Hooke's Law in frequency domain. A three dimensional, material damping formulation. *Journal Solids Structures*, v. 32, (19). p. 2835-2852. 1995.

DOVSTAM, K.. Receptance model based on isotropic damping functions and elastic displacement modes. *Journal Solids Structures*, v. 34, (21). p. 2733-2754. 1997.

DOVSTAM, K.. Real modes of vibration and hybrid modal analysis. *Computational Mechanics*. v. 21, p. 493-511. 1998.

EWINS, D. J.. *Modal Testing*: Theory and Practice. London: Research Studies Press, 1984.

FIGUEIREDO e ALMEIDA, Luiz Diamantino. *Análise de tensões e deformações em um corpo de prova "Compact Tension" experimentalmente por extensometria e teoricamente por MFEL*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2002. cap 2, p. 4-30.

HARRIS, Cyril M.; CREDE, Charles E.. *Shock and vibration handbook*. 2. ed. New York: Mcgraw-Hill, 1976.

HARTOG, J. P. Den. *Vibrações nos sistemas mecânicos*. São Paulo: Edgard Blücher, 1972.

HETÉNYI, M.. *Handbook of Experimental Stress Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1966.

IIZUKA, Eduardo Kenji. *Análise de tensões em Peneiras Vibratórias através de Modelagem Numérica Utilizando o Método dos Elementos Finitos e Experimentalmente por Extensometria*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2006. cap 4, p. 79-104.

INMAN, Daniel J.. *Engineering Vibration*. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

KARCZUB, D. G.; NORTON, M. P.. Finite differencing methods for the measurement of dynamic bending strain. *Journal of Sound and Vibration*, v. 226, (4). p. 675-700. 1999.

KOSS, L. L.; KARCZUB, D.. Euler beam bending wave solution predictions of dynamic strain using frequency response functions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 184, (2). p. 229-244. 1995.

KYOWA. *Operation Manual*: Portable Dynamic Strain Amplifiers DPM-6H/-8H. Tokyo: Kyowa Electronic Instruments co., LTD. 1987.

LEE, Byung-Chan; KIM, Kwang-Joon. Shear and normal strain effects of core layers in vibration of square sandwich plates under clamped boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, v. 228, (4). p. 845-856. 1999.

LEE, Gun-Myung. Prediction of strain responses from the measurements of displacement responses. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 21. p. 1143-1152. 2007.

MAIA, Nuno M. M.; SILVA, Júlio M. M.. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. New York: Research Studies Press, 1997.

MATHEWS, John H.; FINK, Kurtis D.. *Numerical Methods using Matlab*. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999. cap 6, p. 311-328.

MOAVENI, Saeed. *Finite Element Analysis*: Theory and Apllication with Ansys. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1999.

OKUBO, N.; YAMAUCHI, K.. Prediction of dynamics strain distribution under operating condition by use of modal analysis. In: International Modal Analysis Conference, Nashville. *Proceedings*… Bethel: Society for Experimental Mechanics, 1995. v.2, p. 91-95.

PAVANELLO, Renato. *Introdução ao método dos elementos finitos*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1997.

PROAKIS, John G.; MANOLAKIS, Dimitris G.. *Digital Signal Processing*: Principles, Algorithms, and Applications. 3. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

RAO, Singiresu. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RILEY, William F.;STURGES, Leroy D.; Morris, Don H.. *Mecânica dos Materiais*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

SCHWARZ, Brian J.; RICHARDSON, Mark H.. Introduction to operating deflection shapes. In: CSI Reliability Week, 1999. Orlando. *Anais*… Jamestown: Vibrant technology, 1999.

Disponível em: < http://www.vibetech.com/assets/papers/paper29.pdf >. Acesso em: 05 nov. 2009.

SEHLSTEDT, Niklas. *Hybrid strain analysis based on numerical differentiation* . Göteborg: Departament of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, 1999. Dissertação (Mestrado).

SEHLSTEDT, Niklas. Calculating the dynamic strain tensor field using modal analysis and numerical differentiation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 244, (3). p. 407-430. 2001.

SHIGLEY, Joseph E.; MISCHKE, Charles R.; BUDYNAS, Richard G.. *Projeto de Engenharia Mecânica*. 7. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005.

SPIEGEL, Murray R.. *Análise de Fourier*. São Paulo: Mcgraw Hill Ltda, 1974.

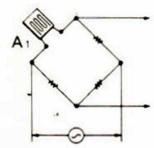
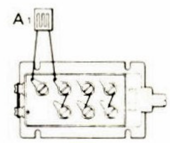
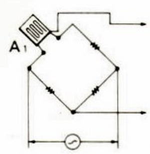
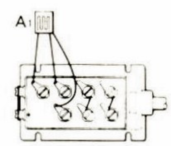
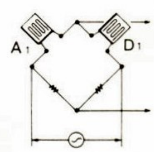
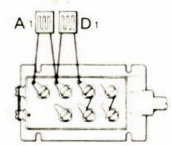
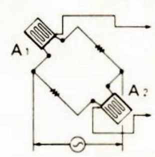
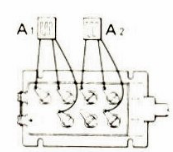
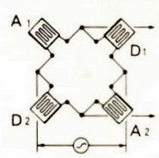
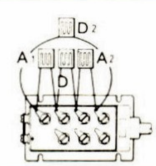
TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N.. *Teoria da Elasticidade*. 3. ed. Rio de Janeiro: Mcgraw-hill, 1980.

ZIENKIEWICS, O.C.. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: Mcgraw Hill, 1971.

WICKRAMARACHI, P.. Effects of Windowing on the Spectral Content of a Signal. *Sound & Vibration Magazine*. Bay Village. p. 10-11. 2003. Disponível em: < http://www.sandv.com/downloads/0301wick.pdf >. Acesso em: 18 nov. 2009.

Anexo I – Esquema de Instalação da Bridge Box (KYOWA, 1987)

■ **Wiring to the bridge box**

Measuring method	Bridge circuit	Wiring to bridge box
1-gage (2-wire)		
1-gage (3-wire)		
2-gage		
2-gage 3-wire, active-active		
4-gage		

Apêndice A – Análise de Vibração em SDOF

Um sistema de um grau de liberdade, como representado na Figura A.1, que apresenta massa *m*, constante de rigidez *k* e amortecimento viscoso *c*, é representado matematicamente pela equação diferencial de movimento (EDM) conforme a Equação (A.1).

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{A.1}$$

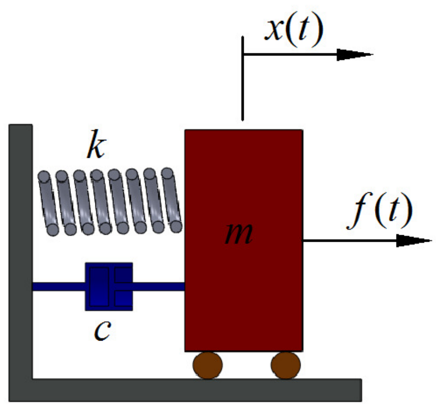


Figura A.1 – Sistema mecânico idealizado com um grau de liberdade

onde *f(t)* e *x(t)* são a força e o deslocamento dependentes do tempo, respectivamente. Para um problema de vibração livre, ou seja, o sistema homogêneo associado com $f(t) = 0$, a Equação (A.1) torna-se:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \tag{A.2}$$

Para Equação (A.2) é conveniente propor uma solução do tipo:

$$x(t) = Xe^{st} \tag{A.3}$$

sendo X e s escalares complexos. Substituindo a solução da equação diferencial na Equação (A.2), propondo a solução não trivial, ou seja, $X \neq 0$ e válida para todo instante de tempo $e^{st} \neq 0 \; \forall s, t$, o *polinômio característico* resultante é:

$$ms^2 + cs + k = 0 \tag{A.4}$$

Resolvendo o polinômio característico, obtêm-se duas raízes:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{A.5}$$

Analisando o radicando das duas raízes do polinômio característico, tem-se:

Se $(c/2m)^2 > k/m$, as forças de amortecimento prevalecem no sistema, e o mesmo é dito sistema super-amortecido.

Se $(c/2m)^2 < k/m$, as forças de inércia e rigidez prevalecem no sistema, e o mesmo é sub-amortecido.

Se $(c/2m)^2 = k/m$, o sistema é dito criticamente amortecido.

A partir das raízes do polinômio pode-se extrair o coeficiente crítico de amortecimento, c_c, parâmetro que define o limite entre um sistema sub-amortecido e super-amortecido, dado por:

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \tag{A.6}$$

onde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ é a freqüência natural não amortecida, e se refere à freqüência em que o sistema conservativo, sem amortecimento, tende a oscilar sem estar submetido a forças externas e sujeito às condições iniciais.

A razão de amortecimento ζ é definida por:

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \tag{A.7}$$

Quando o sistema é sub-amortecido, ou seja, $0 < \zeta < 1$, for submetido a condições iniciais, de deslocamento e velocidade, e não está submetido a forças externas, o mesmo tende a oscilar na freqüência natural amortecida, ω_d, sendo esta sempre menor que freqüência natural e definida por:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tag{A.8}$$

A resposta temporal dos sistemas submetido à vibração livre depende da razão de amortecimento e das condições iniciais impostas ao sistema.

Considerando que o sistema representado na Figura A.1 é excitado harmonicamente, ou seja, $f(t) = F_0 \cos(\omega t)$, sendo ω a freqüência angular da força excitadora, e as condições iniciais forem nulas, por exemplo, a resposta temporal permanente do sistema pode ser dada como:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}} \cos\left[\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)\right] \tag{A.9}$$

Pode-se perceber na equação (A.9) que a resposta estará em fase, ou seja, mesmo sentido, com a força excitadora para $\omega < \omega_n$. Quando a freqüência da força excitadora for igual à freqüência natural do sistema, ou seja, $\omega = \omega_n$, tem-se a *ressonância*, e a amplitude da resposta do sistema é somente ponderada pelo amortecimento. Quando $\omega > \omega_n$, a resposta estará em oposição de fase com a força excitadora. O fator de amortecimento é responsável por defasar a resposta em relação à força excitadora.

Função Resposta ao Impulso

Segundo Maia e Silva (1997) uma forma simples de representar uma função não periódica no domínio do tempo é através da função impulso δ-Dirac, como a Equação (A.10):

$$f(t) = \delta(t - \varsigma) \tag{A.10}$$

Esta função é zero para todos os valores de tempo, exceto para quando $t = \varsigma$, onde ao considerar o limite $\Delta t \rightarrow 0$, tem-se a seguinte Equação:

$$\lim_{\Delta t = 0} \int_{\varsigma}^{\varsigma + \Delta\varsigma} f(t)dt = 1 \tag{A.11}$$

Considerando um elemento de área unitária, conforme a Figura A.2, definida pela largura de Δt e altura $1/\Delta t = f$, a força f tende ao infinito quando Δt tende a zero, para que a área considerada seja igual à unidade.

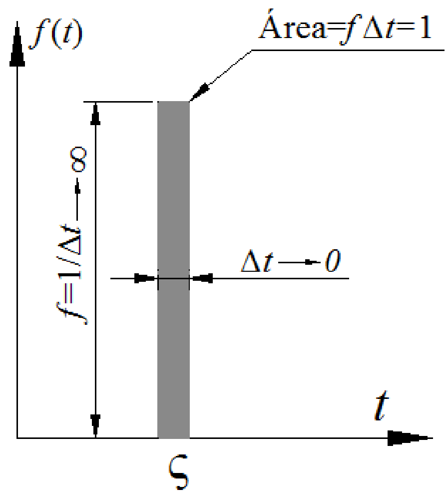


Figura A.2 – Ilustração da função Delta-Dirac

Caso o sistema de um grau de liberdade, representado na Figura A.1, estiver em repouso e nele for aplicada uma excitação impulsiva, obtém-se da definição de quantidade de movimento, a seguinte relação:

$$\lim_{\Delta t = 0} f\Delta t = 1 = m\dot{x}\big|_{t=\varsigma} \tag{A.12}$$

Conclui-se que, para a condição inicial de deslocamento igual a zero e a velocidade igual a 1/m, a resposta temporal do sistema considerado na Figura A.1 será dada por:

$$x(t) = h(t-\varsigma) = e^{-\zeta\omega_n(t-\varsigma)} \frac{1}{m\omega_d} \sin[\omega_d(t-\varsigma)] \quad \text{para } t > \varsigma \tag{A.13}$$

onde $h(t-\varsigma)$ é chamada de função resposta ao impulso unitário (FRI). Se a resposta de um sistema linear é uma função $h(t)$, pode-se obter a resposta a uma entrada $f(t)$ qualquer pela função impulso. A entrada $f(t)$ pode ser representada pela soma das funções impulso, ou superposição.

A resposta de um sistema linear, pelo princípio da superposição e para $\Delta\varsigma \to 0$, pode ser representado pela *integral de Duhmael*, dada por:

$$x(t) = \int_0^t f(\varsigma) h(t-\varsigma) d\varsigma \quad \text{para } t > \varsigma \tag{A.14}$$

Considerando que o sistema é causal, ou seja, $h(t) = 0$ para $t < 0$, os limites da integral da Equação (A.14) podem ser expandidos para $-\infty$ a $+\infty$, assim tem-se:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varsigma) h(t-\varsigma) d\varsigma \tag{A.15}$$

A Equação (A.15) expressa a convolução de $f(t)$ com $h(t)$ e pode ser escrita da seguinte forma:

$$x(t) = h(t) * f(t) \tag{A.16}$$

Onde $*$ denota o produto de convolução. Segundo Arruda e Huallpa (2006) a resposta de um sistema linear a uma excitação qualquer é a convolução do sinal de entrada com a função resposta ao impulso unitário.

A convolução entre duas funções no domínio do tempo é o produto dessas funções no domínio da freqüência. Pelas transformadas de Fourier do sinal de entrada $f(t)$ e a da função impulso unitário $h(t)$, a resposta no domínio da freqüência é dado por:

$$X(\omega) = H(\omega) F(\omega) \tag{A.17}$$

Desta forma, a transformada de Fourier da função impulso unitário $h(t)$ é a *função resposta em freqüência* $H(\omega)$ e a transformada inversa de Fourier de $H(\omega)$ resulta na $h(t)$.

Função Resposta em Freqüência

A Função Resposta em Freqüência $H(\omega)$ é a transformada de Fourier da resposta ao Delta-Dirac. A Equação (A.18) demonstra a transformada de Fourier da função impulso.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\omega t} dt \tag{A.18}$$

A Figura A.3 ilustra a relação entrada e saída de sistemas lineares, considerando as funções impulso e de resposta em freqüência.

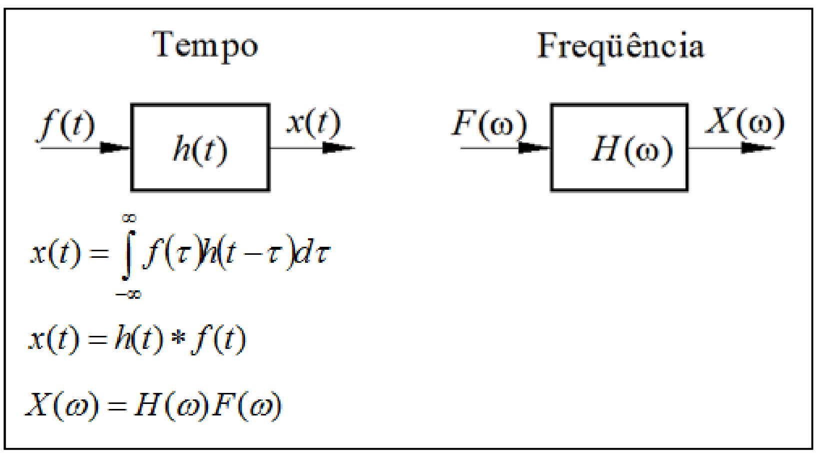


Figura A.3 – Representação da relação entrada e saída em sistemas lineares

As FRF_s são complexas e apresentam valores de amplitude e de fase entre a força excitadora e a resposta do sistema. Para o sistema linear de um grau de liberdade da Figura A.1 a FRF pode ser calculada pela Equação abaixo:

$$H(\omega) = \frac{1/k}{\omega_n{}^2 - \omega^2 + i2\zeta\omega\omega_n} \tag{A.19}$$

E em termos de amplitude e fase:

$$\left|H(\omega)\right| = \frac{1/k}{\sqrt{\left(\omega_n^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega\omega_n\right)^2}} \tag{A.20}$$

$$\angle H(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^{\ 2} - \omega^2}\right) \tag{A.21}$$

Segundo Maia e Silva (1997) a função resposta em freqüência é a representação da função de transferência $H(s)$ do sistema somente ao longo do eixo da freqüência. Sendo X(s) a transformada de Laplace da resposta de deslocamento e F(s) a transformada de Laplace da entrada de um sistema linear da Figura A.1, sujeito a condições iniciais nulas, a função de transferência é dada por:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \tag{A.22}$$

O denominador da Equação (A.22) é o polinômio característico visto anteriormente e suas raízes s_1 e s_2 pode ser escrita em uma parte real e outra imaginária conforme Equação abaixo:

$$s_{1,2} = \chi \pm i\omega_d \tag{A.23}$$

onde:

$$\chi = -\zeta\omega_n \tag{A.24}$$

Segundo Ewins (1984), a representação das FRF_s pode ser feita de diversas formas, a representação da parte real ou imaginária da função *versus* a freqüência, a representação da parte real *versus* imaginária da FRF pelo *gráfico de Nyquist*, ou através do *diagrama de Bode* com gráficos de amplitude e fase *versus* a freqüência separadamente. A amplitude no eixo vertical deste diagrama é geralmente mostrada em escala logarítmica utilizando a escala *dB* definida como:

$$H(dB) = 20\log_{10}\left(\frac{H}{H_{ref}}\right) \tag{A.25}$$

onde H_{ref} muitas vezes é tomado como a unidade.

As descrições consideradas anteriormente para a função respostas em freqüência estão associadas à relação entrada e saída de força e de deslocamento respectivamente. Entretanto, em algumas situações reais, as FRF_s são observadas a partir de medições de respostas de aceleração ou velocidade.

Segundo Ewins (1984) a função de resposta em freqüência de deslocamento, ou seja, a relação entre o deslocamento harmônico e a força harmônica excitadora, pode ser chamada de *receptância*, *compliace dinâmica*, *flexibilidade dinâmica* ou *admitância*, neste texto usar-se-á a primeira denominação. A função de resposta em freqüência da velocidade, ou seja, a relação entre a velocidade e a força excitadora, é denominada *mobilidade* e a função de resposta em freqüência da aceleração, ou seja, a relação entre a aceleração e a força excitadora, é denominada *acelerância*. A Tabela A.1 mostra as relações entre a receptância, mobilidade e acelerância.

Tabela A.1 – Relação entre Receptância, Mobilidade e Acelerância

$H(\omega)=$	$\alpha(\omega)=\dfrac{X(\omega)}{F(\omega)}=$	$\dfrac{deslocamento}{força}=$	Receptância
$H(\omega)=$	$\Upsilon(\omega)=\dfrac{i\omega X(\omega)}{F(\omega)}=$	$\dfrac{velocidade}{força}=$	Mobilidade
$H(\omega)=$	$A(\omega)=\dfrac{-\omega^2 X(\omega)}{F(\omega)}=$	$\dfrac{aceleração}{força}=$	Acelerância

Apêndice B – Método de Diferenças Finitas Centrais

Assumindo que $f(x) \in C^3[a,b]$, ou seja, conhecida em três pontos do domínio, e que $x-h,\ x,\ x+h \in [a,b]$, então:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + E_{trun}(f,h) \tag{B.1}$$

onde:

$$E_{trun}(f,h) = \frac{-h^2 f^{(3)}(c)}{6} = O(h^2) \tag{B.2}$$

O termo $E_{trun}(f,h)$ é chamado *erro de truncamento*.

A avaliação do erro é dada pela na série de *Taylor* de ordem 2 das funções $f(x+h)$ e $f(x-h)$, como:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(c_1)h^3}{3!} \tag{B.3}$$

e:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f^{(2)}(x)h^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(c_2)h^3}{3!} \tag{B.4}$$

Subtraindo a Equação (B.4) da Equação (B.5) tem-se:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{((f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2))h^3}{3!} \tag{B.5}$$

Sendo $f^{(3)}(x)$ contínua, o teorema do valor médio pode ser usado para definir um número *c* no intervalo [*a*,*b*] tal que:

$$\frac{f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)}{2} = f^{(3)}(c) \tag{B.6}$$

Substituindo a Equação (B.6) na Equação (B.5) e rearranjando os termos, tem-se:

$$f(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f^{(3)}(c)h^2}{6} \tag{B.7}$$

O primeiro termo do lado direito da Equação (B.7) refere-se à *fórmula da diferença central*, e o segundo termo é o erro de truncamento, (MATHEWS; FINK, 1999).

Assumindo agora que *f*(*x*) é uma função contínua e $\in C^5[a,b]$ conhecida em 5 pontos sendo: $x-2h,\ x-h,\ x, x+h,\ x+2h \in [a,b]$, então:

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h} + E_{trun}(f,h) \tag{B.8}$$

sendo:

$$E_{trun}(f,h) = \frac{h^4 f^{(5)}(c)}{30} = O(h^4) \tag{B.9}$$

Apêndice C – Método de Diferenças Finitas Backward e Forward

Segundo Burden e Faires (2003) uma função definida e que seja contínua em [a,b], pode ser aproximada por um polinômio $P(x)$ de acordo com o *teorema da aproximação de Weierstrass*. Assim sendo, os métodos de diferenças finitas backward e forward são baseados na interpolação lagrangeana.

Se existe n número de pontos distintos e $f(x)$ é uma função cujos valores são dados nesses pontos, então existe um único polinômio $P(x)$ de grau pelo menos $n-1$ no qual, (BURDEN; FAIRES, 2003):

$$f(x_k) = P(x_k) \quad \text{para cada } k = 0,1,\ldots,n-1 \tag{C.1}$$

O polinômio $P(x)$ é dado por:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{n,k}(x) \tag{C.2}$$

onde, para cada $k = 0,1,\ldots n-1$, tem-se:

$$\begin{aligned} L_{n,k}(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n-1} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} \end{aligned} \tag{C.3}$$

Se $x_0 \in (a,b)$, $f(x) \in C^2[a,b]$ e $x_1 = x_0 + h$ para qualquer $h \neq 0$ embora que suficientemente pequeno, o polinômio de Lagrange $P_{0,1}(x)$ de 1° grau para a função $f(x)$ determinado por x_0 e x_1 com o termo de erro é dado por:

$$f(x) = P_{0,1}(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''(\xi(x)) \tag{C.4}$$

Com o termo de erro $\xi(x)$ em $[a,b]$ e diferenciando a Equação (C.4) tem-se:

$$f'(x) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{C.5}$$

A equação acima é conhecida com *fórmula da diferença superior* para $h > 0$ e fórmula da diferença inferior se $h < 0$, (BURDEN; FAIRES, 2003).

Para obter fórmulas gerais de aproximação de derivadas, supõe-se que $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ sejam n diferentes pontos em $[a,b]$ e que $f(x) \in C^n[a,b]$, então:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k(x) + \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})}{n!} f^{(n)}(\xi(x)) \tag{C.6}$$

Diferenciando a equação acima e considerando que x seja um dos números x_j, a fórmula de n pontos para aproximar $f'(x_j)$ é dada por, (BURDEN; FAIRES, 2003):

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L'_k(x) + \frac{f^{(n)}(\xi(x_j))}{n!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} (x_j - x_k) \tag{C.7}$$

Geralmente são utilizados três ou cinco pontos para a avaliação da derivada de uma função através deste método. É possível se encontrar três fórmulas a partir da Equação (C.7), para cada derivada do polinômio de Lagrange, sejam para três, cinco ou mais pontos, substituída nesta equação e mudando algumas variáveis. As Equações obtidas para três pontos são:

$$f'(x_0) = \frac{\left[-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)\right]}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(c_0) \tag{C.8}$$

$$f'(x_0) = \frac{[-f(x_0 - h) + f(x_0 + h)]}{2h} + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(c_1) \tag{C.9}$$

$$f'(x_0) = \frac{[f(x_0 - 2h) - 4f(x_0 - h) + 3f(x_0)]}{2h} + \frac{h^2}{3} f^{(3)}(c_0) \tag{C.10}$$

A Equação (C.8) refere-se à fórmula de diferença Forward, a Equação (C.10) refere-se à fórmula de diferença Backward, e a Equação (C.9) é igual à Equação (B.7) e refere-se à fórmula de diferenças centrais.

Seja $O(h^2)$ o erro da Equação (C.9), ele será aproximadamente a metade daquele obtido nas diferenças forward e backward. Isso ocorre porque a diferença finita central utiliza dados em ambos os lados do ponto escolhido para análise da derivada da função, (BURDEN; FAIRES, 2003).

As diferenças finitas bacward e forward são úteis quando se trabalha próximo aos pontos extremos do intervalo analisado e podem ser utilizadas para quando os pontos não forem igualmente espaçados, desde que a diferença da distância h entre os pontos seja considerada no equacionamento realizado acima.

Segundo Sehlstedt (1999), sendo h_1 e h_2 as distâncias entre os pontos x_0 e x_1 e entre x_1 e x_2, respectivamente, e a função $f(x)$ o deslocamento dos pontos x_0, x_1 e x_2 com correspondentes valores u_0, u_1 e u_2, a primeira derivada pode ser aproximada por:

$$u'(x_0) = -u_0(x_0)\frac{2h_1 + h_2}{h_1(h_1 + h_2)} + u_1(x_1)\frac{h_1 + h_2}{h_1 h_2} - u_2(x_2)\frac{h_1}{h_2(h_1 + h_2)} \tag{C.11}$$

Apêndice D – MEF e Elementos Isoparamétricos

D.1 Elemento Isoparamétrico Triangular

Para a relação deslocamento – deformação bidimensional pode ser utilizada uma malha com elementos triangulares conforme mostra a Figura D.1. Os deslocamentos de cada nó são na direção x e y conforme indica a Figura.

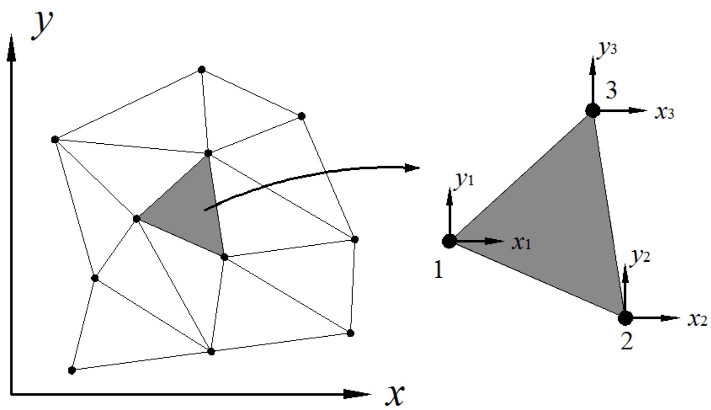


Figura D.1 – Malha com elemento triangular

A análise é feita isolando-se um elemento (triângulo) da malha, sendo que um elemento será constituído de 3 (três) nós com 2 (dois) graus de liberdade de translação em cada nó (*u* e *v*), totalizando 6 (seis) graus de liberdade em cada elemento. A numeração de cada nó é definida como 1,2 e 3 e deve se seguir a mesma orientação de numeração para todos os elementos.

Para elemento triangular, é necessário definir o sistema de coordenadas locais, com mostra a Figura D.2.

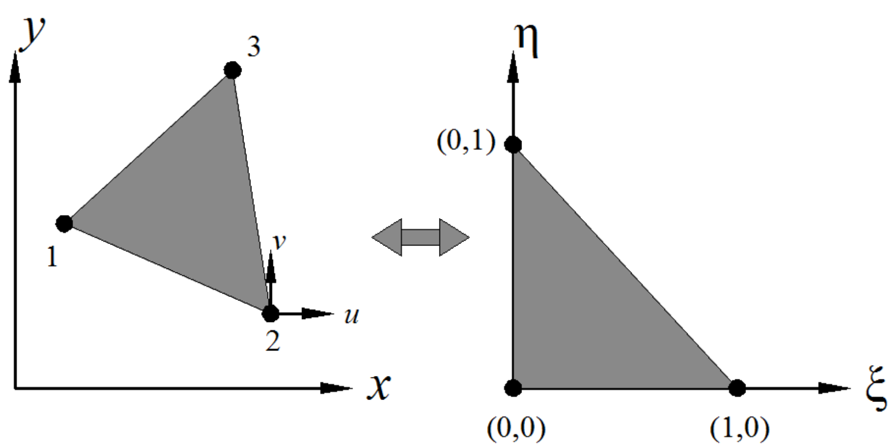


Figura D.2 – Transformação de coordenadas para o elemento triangular

Através das coordenadas dos três pontos de um triângulo pode-se encontrar as funções de forma para o elemento triangular. Considerando as coordenadas indicadas na Figura D.2 e utilizando o triângulo Pascal da Figura D.3 é possível a determinação das funções de forma do elemento.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & x & & y & & & & \\
 & & & x^2 & & xy & & y^2 & & & \\
 & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 & & \\
 & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 & \\
x^5 & & x^4y & & x^3y^2 & & x^2y^3 & & xy^4 & & y^5 \\
 & & & & & x^3y^3 & & & & &
\end{array}
$$

Figura D.3 – Triângulo de Pascal

$$
\varphi(\xi,\eta) = \{1 \quad \xi \quad \eta\} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \tag{D.1}
$$

Conhecendo o valor da coordenada em cada ponto e substituindo na Equação (D.1) é determinada a seguinte Equação:

$$
\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \tag{D.2}
$$

Pela inversa da matriz da Equação (D.2) são encontrados os valores de α_1, α_2 e α_3. Substituindo estes valores na Equação (D.1), tem-se:

$$
\varphi(\xi,\eta) = \{1 \quad \xi \quad \eta\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = [N_1(\xi,\eta) \quad N_2(\xi,\eta) \quad N_3(\xi,\eta)] \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} \tag{D.3}
$$

onde:

$$
\begin{aligned}
N_1(\xi,\eta) &= 1 - \xi - \eta \\
N_2(\xi,\eta) &= \xi \\
N_3(\xi,\eta) &= \eta
\end{aligned} \tag{D.4}
$$

As funções $N_1(\xi,\eta)$, $N_2(\xi,\eta)$ e $N_3(\xi,\eta)$ são as funções de forma do elemento finito e permitem encontrar os deslocamentos internos do elemento a partir dos deslocamentos de cada nó.

A relação de deslocamento-deformação, como vista no item 2.2.7, determina que a mesma é dada pela diferenciação espacial do deslocamento. Sendo o vetor de deslocamento nodal $\{u\}$ referente ao deslocamento *u* e *v* dos nós 1,2 e 3 de cada elemento, como:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{bmatrix}^T \tag{D.5}$$

O vetor de deformação $\{\varepsilon_e\}$ de cada elemento é dado por:

$$\{\varepsilon_e\} = [\mathbf{B}]\{u\} \tag{D.6}$$

sendo:

$$\{\varepsilon_e\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T \tag{D.7}$$

e a matriz [**B**] que contém as derivadas das funções de forma é dada por:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{D.8}$$

Segundo Pavanello (1997) e Bhatti (2006) a transformação de coordenadas para o elemento isoparamétrico é feita a partir das *coordenadas de área* do elemento triangular, pois nem sempre é trivial a inversão da matriz na transformação de coordenadas. A Figura D.4 mostra um elemento triangular com coordenadas definidas pela diferença entre as coordenadas nodais do elemento .

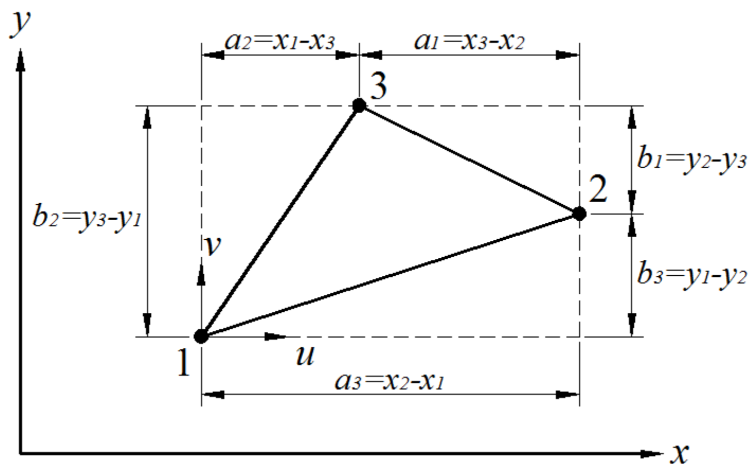


Figura D.4 – Elemento triangular com coordenadas de área

Onde:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x_3 - x_2 \\
b_1 &= y_2 - y_3 \\
a_2 &= x_1 - x_3 \\
b_2 &= y_3 - y_1 \\
a_3 &= x_2 - x_2 \\
b_3 &= y_1 - x_2
\end{aligned}
\tag{D.9}
$$

sendo x_1, x_2, x_3 e y_1, y_2, y_3, as coordenadas nodais dos nós 1,2 e 3 nos eixos x e y respectivamente.

Pela transformação de coordenada a matriz [**B**] pode ser reescrita como:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2\mathrm{A}} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

onde A é a área do triângulo definida por:

$$\mathrm{A} = \frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{2} \tag{D.11}$$

D.2 Elemento Isoparamétrico Quadrilateral 4 nós

Outro tipo de elemento sugerido para a relação deslocamento – deformação utilizando o MEF é o elemento quadrilateral 4 nós. Este elemento contém 4 nós nas extremidades do quadrilátero. Cada nó contém 2 graus de liberdade de translação (*u*, *v*) totalizando 8 graus de liberdade no elemento.

Para implementação computacional do elemento finito quadrilateral com quatro nós é vantajoso a substituição de variáveis *x* e *y*, (X), para ξ e η, (Ξ). A Figura D.5 ilustra a substituição de variável para um elemento quadrilateral.

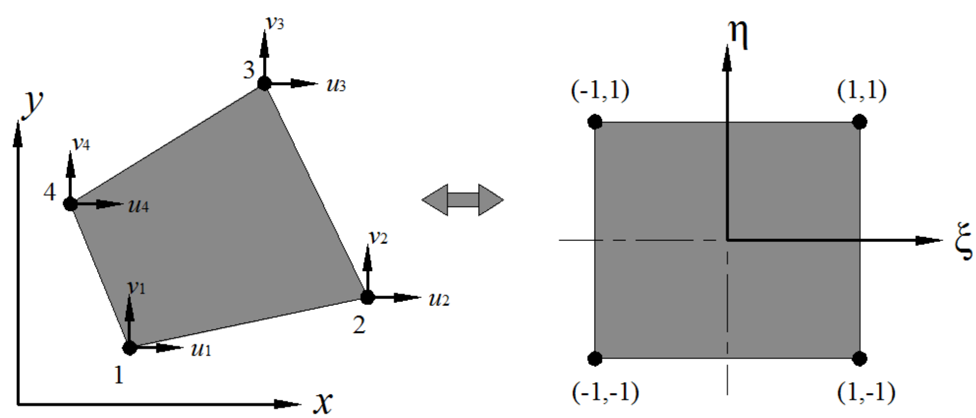


Figura D.5 – Substituição de Variável no elemento quadrilateral

Os valores das coordenadas nodais ξ e η para os quatro nós do elemento quadrilateral são as seguintes:

$$\Xi = \begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 \\ \xi_4 & \eta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \tag{D.12}$$

sendo Ξ a matriz de coordenadas nodais para o elemento quadrilateral de quatro nós.

A transformação das coordenadas do sistema de coordenadas nodais para o sistema de coordenada X é efetuada com uma interpolação semelhante à utilizada no elemento triangular.

Através do triangulo de Pascal (Figura D.3) e analogamente ao equacionamento realizado para o elemento triangular, encontram-se as 4 funções de forma para o elemento quadrilateral com 4 nós. As funções de forma para o elemento em análise estão demonstradas na Tabela D.1.

Tabela D.1 – Funções de forma para o elemento quadrilateral 4 nós

$N_1(\xi,\eta) = [(1-\xi)(1-\eta)]/4$
$N_2(\xi,\eta) = [(1+\xi)(1-\eta)]/4$
$N_3(\xi,\eta) = [(1+\xi)(1+\eta)]/4$
$N_4(\xi,\eta) = [(1-\xi)(1-\eta)]/4$

Sendo o vetor de deslocamento nodal $\{u\}$ referente ao deslocamento u e v dos nós 1,2 ,3 e 4 de cada elemento quadrilateral dado como:

$$\{u\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]^T \tag{D.13}$$

Pela Equação (D.6) o vetor de deformação do elemento quadrilateral $\{\varepsilon_e\}$ pode ser encontrado, entretanto a matriz [**B**] dever ser condicionada da seguinte forma:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{D.14}$$

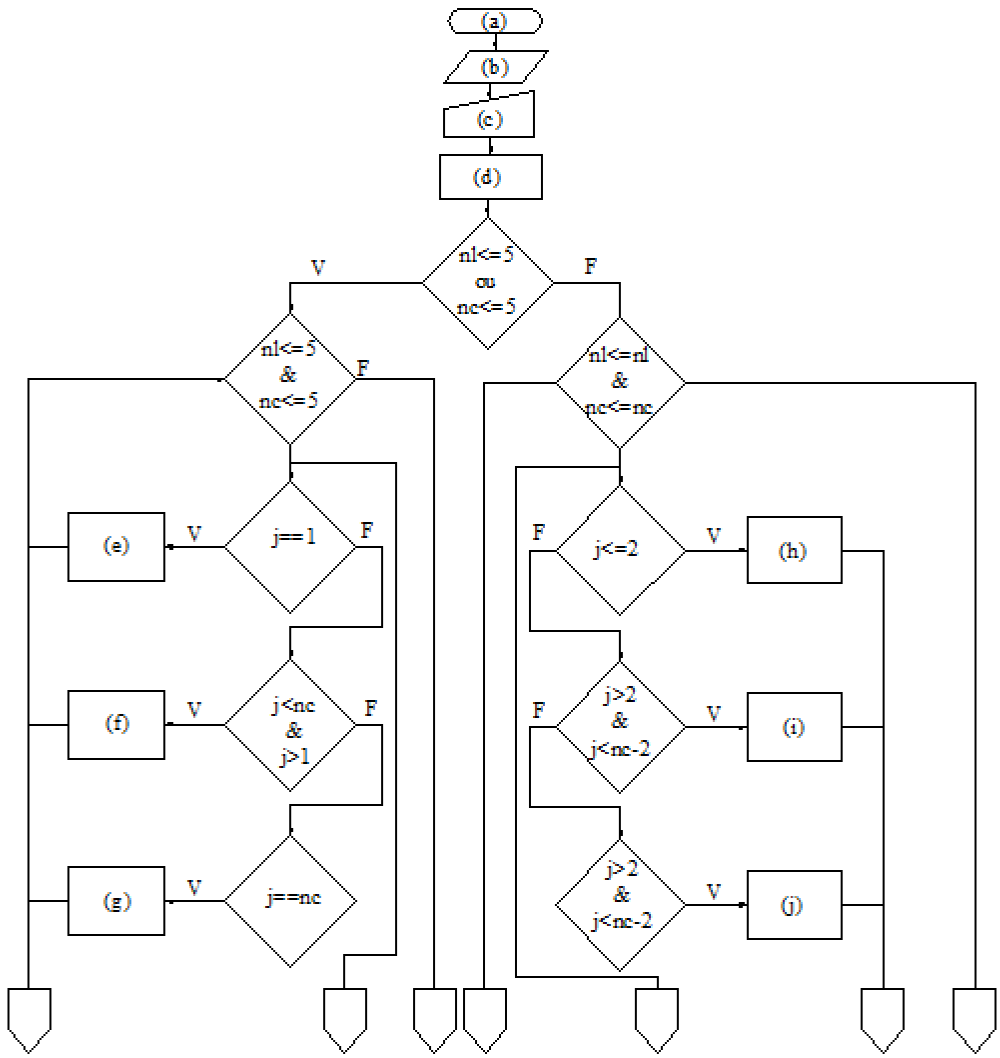
Para a determinação das derivadas $\partial N/\partial x$ e $\partial N/\partial y$ usa-se a regra da cadeia, definida por:

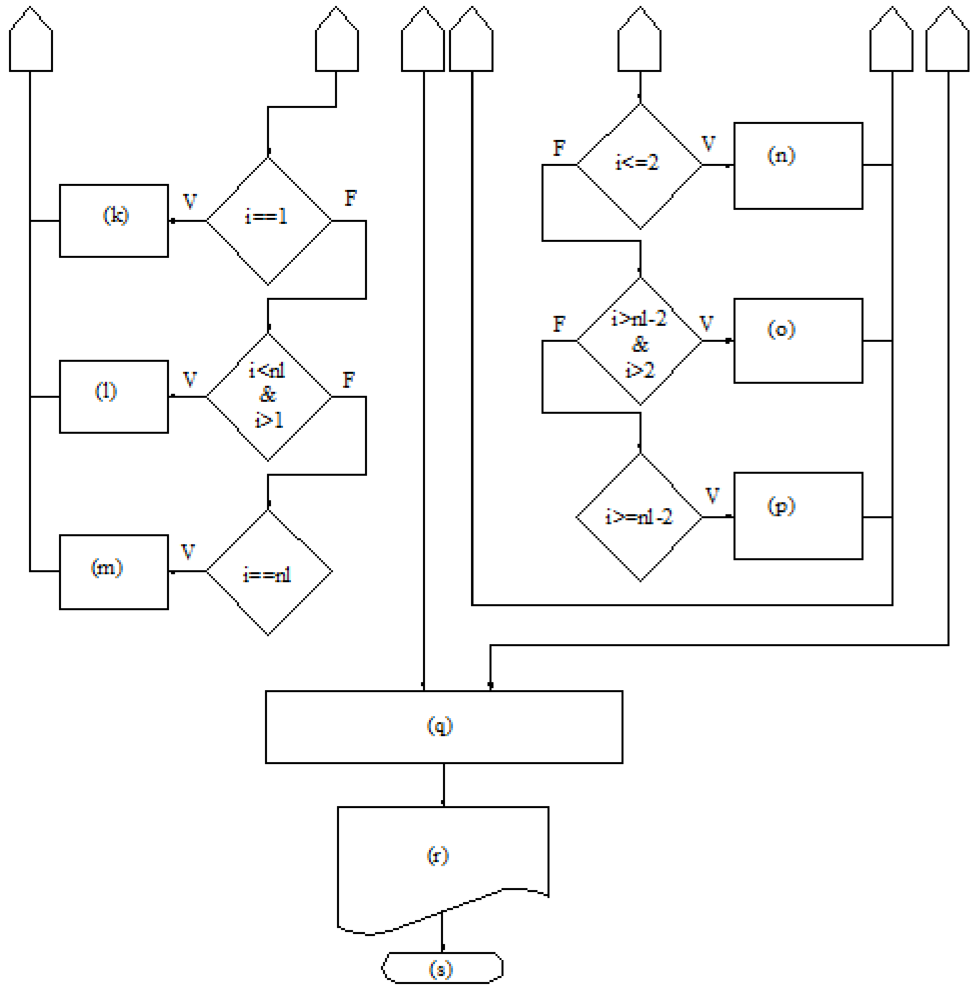
$$\frac{\partial N}{\partial \mathrm{X}} = \frac{\partial N}{\partial \Xi}[\bar{\mathbf{J}}]^{-1} \tag{D.15}$$

onde a matriz Jacobiana $[\bar{\mathbf{J}}]$ é definida por:

$$[\bar{\mathbf{J}}] = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{bmatrix}[\Xi] \tag{D.16}$$

Apêndice E – Algoritmo para implementação computacional do MDF





Legenda do algoritmo

(a) Ínicio

(b) Leia deslocamento (*Ux* e *Vy*)

(c) Dados da malha (hx, hy, nl, nc)

(d) Condicione os dados de deslc. em uma matriz

(e) DUxDX(i,j)=1/hx*(Ux(i,j+1)-Ux(i,j))
DVyDX(i,j)=1/hx*(Vy(i,j)-Vy(i,j-1))

(f) DUxDX(i,j)=1/(2*hx)*(Ux(i,j+1)-Ux(i,j-1))
DVyDX(i,j)=1/(2*hx)*(Vy(i,j+1)-Vy(i,j-1))

(g) DUxDX(i,j)=1/hx*(Ux(i,j)-Ux(i,j-1))
DVyDX(i,j)=1/hx*(Vy(i,j)-Vy(i,j-1))

(h) DUxDX(i,j)=(-3*Ux(i,j)+4*Ux(i,j+1)-Ux(i,j+2))/(2*hx)
DVyDX(i,j)=(-3*Vy(i,j)+4*Vy(i,j+1)-Vy(i,j+2))/(2*hx)

(i) DUxDX(i,j)=1/(12*hx)*(-Ux(i,j+2)+8*Ux(i,j+1)-8*Ux(i,j-1)+Ux(i,j-2))
DVyDX(i,j)=1/(12*hx)*(-Vy(i,j+2)+8*Vy(i,j+1)-8*Vy(i,j-1)+Vy(i,j-2))

(j) DUxDX(i,j)=(3*Ux(i,j)-4*Ux(i,j-1)+Ux(i,j-2))/(2*hx)
DVyDX(i,j)=(3*Vy(i,j)-4*Vy(i,j-1)+Vy(i,j-2))/(2*hx)

(k) DVyDY(i,j)=1/hy*(Vy(i+1,j)-Vy(i,j))
DUxDY(i,j)=1/hy*(Ux(i+1,j)-Ux(i,j))

(l) DVyDY(i,j)=1/(2*hy)*(Vy(i+1,j)-Vy(i-1,j))
DUxDY(i,j)=1/(2*hy)*(Ux(i+1,j)-Ux(i-1,j))

(m) DVyDY(i,j)=1/hy*(Vy(i,j)-Vy(i-1,j))
DUxDY(i,j)=1/hy*(Ux(i,j)-Ux(i-1,j))

(n) DVyDY(i,j)=(-3*Vy(i,j)+4*Vy(i+1,j)-Vy(i+2,j))/(2*hy)
DUxDY(i,j)=(-3*Ux(i,j)+4*Ux(i+1,j)-Ux(i+2,j))/(2*hy)

(o) DVyDY(i,j)=1/(12*hy)*(-Vy(i+2,j)+8*Vy(i+1,j)-8*Vy(i-1,j)+Vy(i-2,j))
DUxDY(i,j)=1/(12*hy)*(-Ux(i+2,j)+8*Ux(i+1,j)-8*Ux(i-1,j)+Ux(i-2,j))

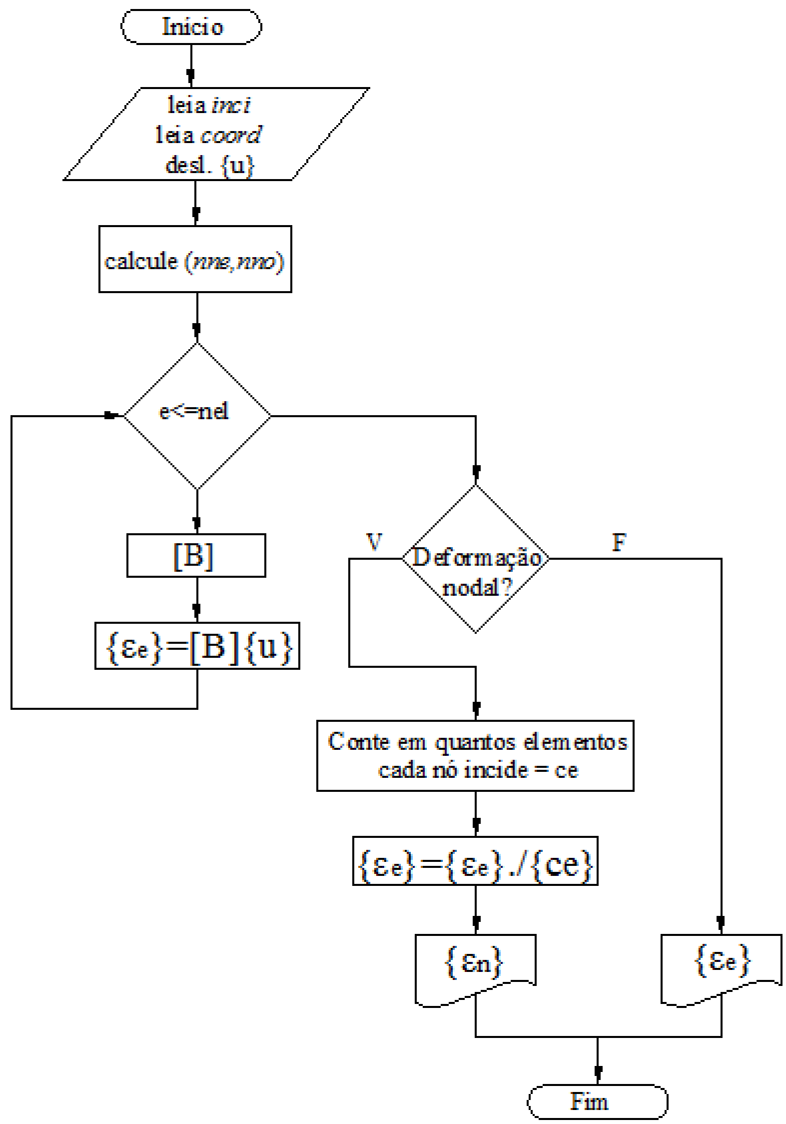
(p) DVyDY(i,j)=(3*Vy(i,j)-4*Vy(i-1,j)+Vy(i-2,j))/(2*hy)
DUxDY(i,j)=(3*Ux(i,j)-4*Ux(i-1,j)+Ux(i-2,j))/(2*hy)

(q) EPXY=0.5*DUxDY+DVyDX
GAMAXY=2*EPXY

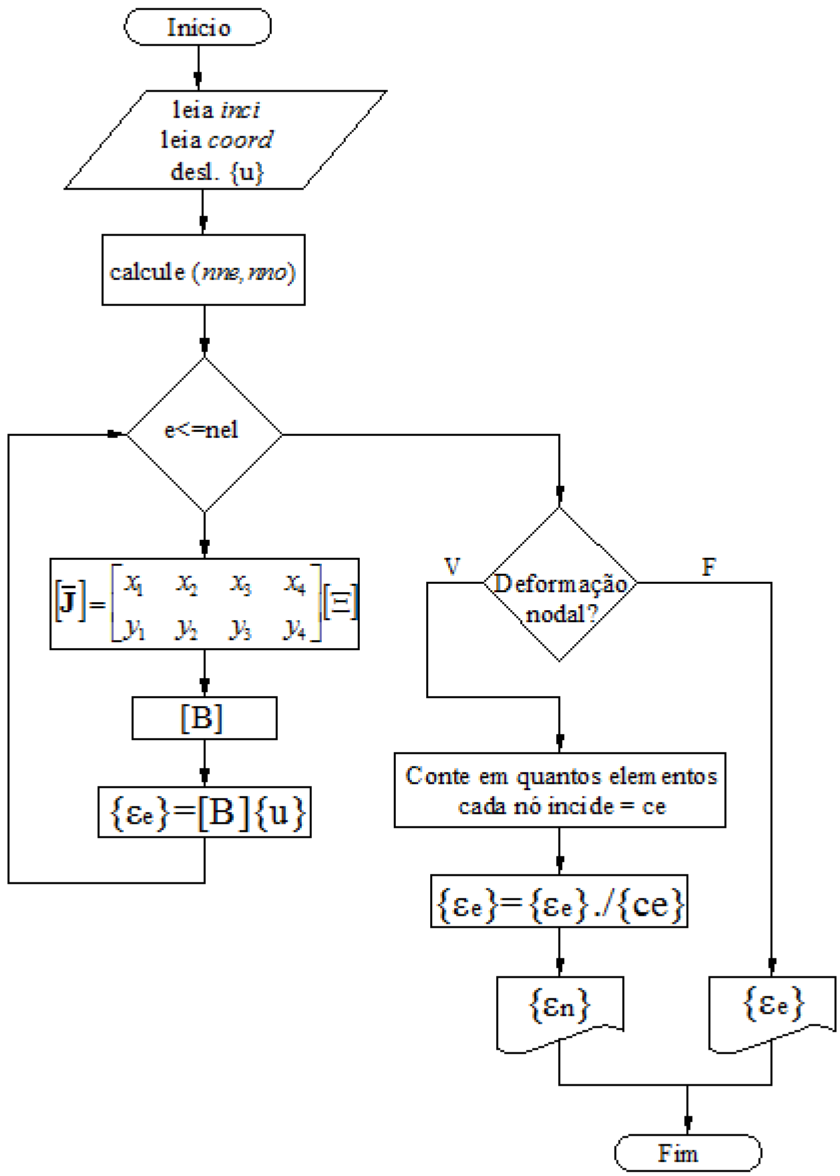
(r) EPX=DUDX
EPY=DVDY
GAMAXY

(s) Fim

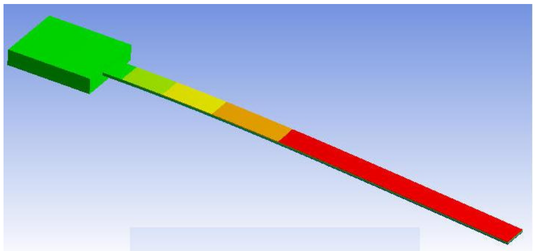
Apêndice F – Algoritmo do MEF elemento triangular



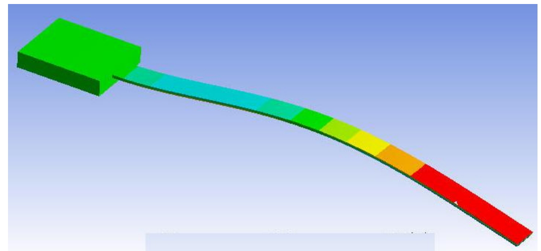
Apêndice G – Algoritmo do MEF elemento quadrilateral



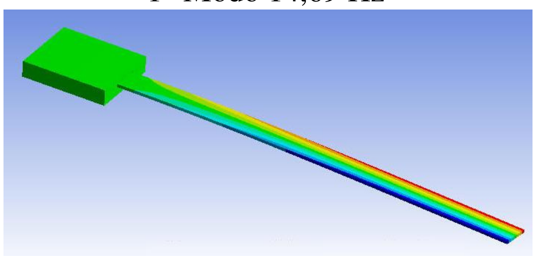
Apêndice H – Modos de vibração da viga



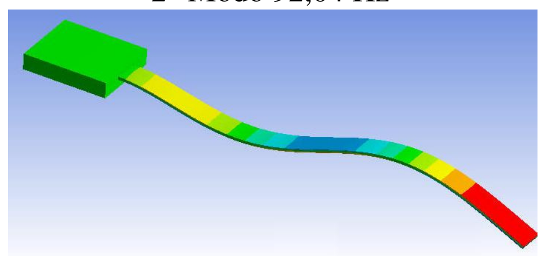
1° Modo 14,69 Hz



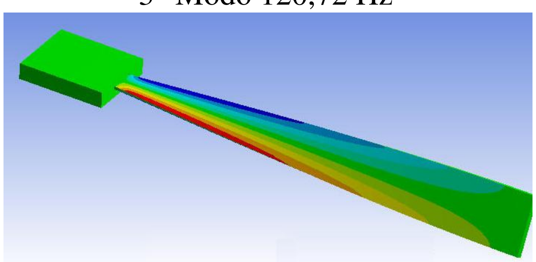
2° Modo 92,04 Hz



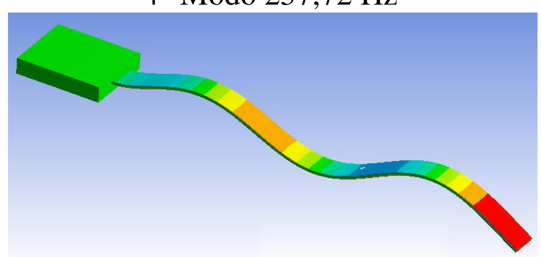
3° Modo 120,72 Hz



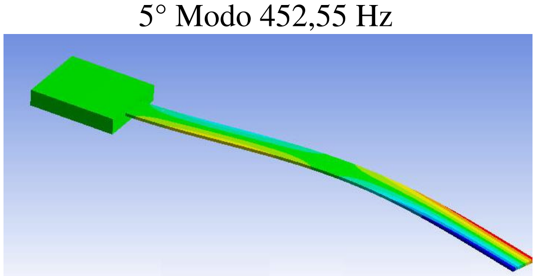
4° Modo 257,72 Hz



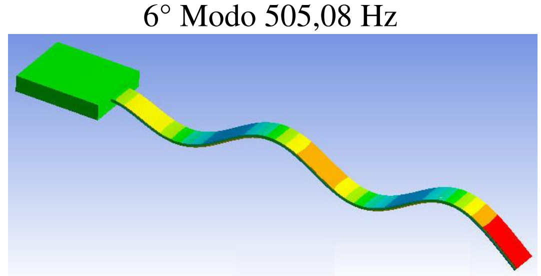
5° Modo 452,55 Hz



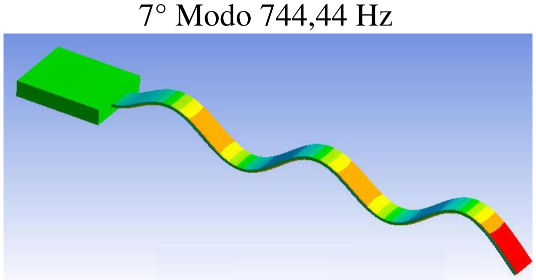
6° Modo 505,08 Hz



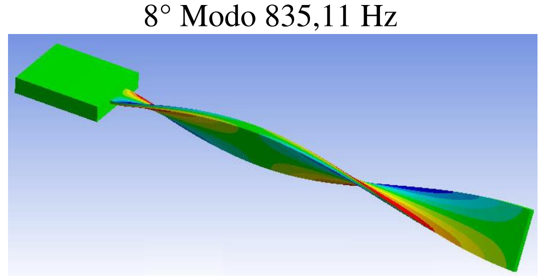
7° Modo 744,44 Hz



8° Modo 835,11 Hz



Modo 1247,9 Hz



10° Modo 1360,3 Hz