ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR LUCIANO RIZZATTI
E APROVADA PELA
COMISSÃO JULGADORA EM 17/01/2005
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise dinâmica numérica e experimental de uma viga trincada

Autor: **Luciano Rizzatti**
Orientador: **José Maria Campos dos Santos**

01/99

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise dinâmica, numérica e experimental de uma viga trincada

Autor: **Luciano Rizzatti**
Orientador: **José Maria Campos dos Santos**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005.
S.P. – Brasil.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE BC
Nº CHAMADA T/UNICAMP
R528a
V ____ EX ____
TOMBO BC/ 63612
PROC. 16.P.00086-05
C [ ] D [X]
PREÇO 11,00
DATA 12/05/05
Nº CPD
bib-id 349175

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

R528a

Rizzatti, Luciano
Análise dinâmica, numérica e experimental de uma viga trincada / Luciano Rizzatti. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: José Maria Campos dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos dos elementos finitos. 2. Mecânica da fratura. 3. Plasticidade. 4. Deformações (Mecânica). I. Santos, José Maria Campos dos. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Experimental and numeric dynamic analysis of cracked beam.
Palavras-chave em Inglês: Finite element method, Fracture mechanics, Plasticity, Strain (Mecanics)
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos
Titulação: Mestrado
Banca examinadora: Renato Pavanello e Sergio Francine Muller de Almeida
Data da defesa: 17/01/2005

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADEMICO

Análise dinâmica numérica e experimental de uma viga trincada

Autor: **Luciano Rizzatti**
Orientador: **José Maria Campos dos Santos**

Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos, Presidente
Instituição DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Renato Pavanello
Instituição DMC/FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Sergio Francino Muller de Almeida
Instituição ITA/CTA

Campinas, 17 de janeiro de 2005.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha esposa Silene e às minhas filhas Júlia e Lívia.

Agradecimentos

Expresso meus agradecimentos:

A Deus, por tudo.

Ao meu orientador Prof. José Maria Campos dos Santos, que me mostrou os caminhos a serem seguidos com muita dedicação.

Aos meus pais Nivaldo e Alice, pelo apoio em todos os momentos da minha vida.

Aos meus colegas de trabalho Sergio Eustachio e Gustavo Longhi de Carvalho, pela compreensão e apoio neste trabalho.

Acredito no sucesso através do trabalho

Resumo

RIZZATTI, Luciano, *Análise dinâmica, numérica e experimental de uma viga trincada*,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 70 p. Dissertação (Mestrado).

Neste trabalho apresenta-se um elemento finito contendo uma trinca na região central, o qual permite simular o comportamento dinâmico para qualquer comprimento de trinca. O elemento simula o comportamento de uma viga de seção retangular sujeita a esforços de flexão e axiais com três graus de liberdade por nó e incorpora os efeitos de cisalhamento e zona plástica na ponta da trinca. O modelo foi implementado em ambiente MATLAB e os resultados de simulações numéricas são comparados com os valores disponíveis na literatura. Os valores numéricos são comparados também com os das análises modais experimentais realizados com vigas de seção retangular contendo diferentes comprimentos de trinca. Os resultados obtidos mostram uma boa concordância entre os modelos numéricos e experimentais, revelando que o modelo desenvolvido pode contribuir para a previsão de falha estrutural devido à existência de trincas.

Palavras Chave

- viga trincada, elementos finitos, zona plástica, mecânica de fratura.

Abstract

RIZZATTI, Luciano, *Experimental and numeric dynamic analysis of cracked beam,*: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 70 p. Dissertação (Mestrado)

This investigation describes a beam finite element with crack in central region, for the numerical analysis of the dynamic behavior for any crack length. The element simulates the dynamic behavior of a rectangular section beam with three degree of freedom per node and includes the shear effects and plastic zone at crack tip. The model was implemented in MATLAB environment and it was validated comparing the numerical simulations with results available in the literature. The simulated results are also compared with an experiment performed with rectangular section beams containing different crack length. A modal experimental analysis was performed and it was obtained the experimental modal data, which was compared with values from numeric simulation. The results obtained shown a good agreement between the numeric and experimental model results, which contributes to progress of structural failure prediction due the presence of cracks.

Key Words

Cracked beam, finite element, plastic zone, fracture mechanics

Índice

Lista de Figuras X

Lista de Tabelas XII

Nomenclatura XIII

1 Abordagem do Problema 1

2 Fundamentos Teóricos 8

3 Resultados Numéricos 32

4 Análise Modal Experimental 45

5 Conclusões e Trabalhos Futuros 66

Referências Bibliográficas 68

Lista de Figuras

1.1	Artigos sobre dinâmica de estruturas trincadas (Dimarogonas (1996))	3
2.1	Modos básicos de deslocamentos das superfícies da trinca (TADA, PARIS & IRWIN, (2000))	9
2.2	Sistema de coordenadas na ponta da trinca (TADA, PARIS & IRWIN, (2000))	9
2.3	Ilustração do estiramento de uma trinca de (a) para (b) (TADA, PARIS & IRWIN, (2000))	14
2.4	Modelo esquemático do elemento implementado	18
2.5	Zona plástica ao redor da ponta da trinca	23
3.1	Modelo proposto por Qian, Gu & Jiang (1990)	33
3.2	Geometria da viga engasta e malha proposta	33
3.3	Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.2	35
3.4	Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.4	36
3.5	Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.6	37
3.6	Variação da 2ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.55	37
3.7	Variação da 3ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v =0.3	38
3.8	Variação da 3ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v =0.7	39
3.9	Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.2	40
3.10	Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.4	40
3.11	Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.6	41
3.12	Variação da 1ª freqüência natural em função do número de elementos.	43
3.13	Variação da 2ª freqüência natural em função do número de elementos.	43
3.14	Variação da 3ª freqüência natural em função do número de elementos.	44
4.1	Dimensões da amostra utilizada	45
4.2	Nucleação e propagação da trinca por fadiga	46
4.3	Amostras de vigas trincadas obtidas	47
4.4	(a) Vista geral contendo todas amostras com as respectivas trincas (b) Detalhe para viga contendo trinca de 24mm	48
4.5	Pontos de excitação e resposta	49
4.6	Vista geral da montagem do experimento	50
4.7	Malha considerando a trinca no elemento central (nº12)	51
4.8	Gráfico comparativo para primeira freqüência natural	52
4.9	Gráfico comparativo para segunda freqüência natural	53

4.10 Gráfico comparativo para terceira freqüência natural 53
4.11 Gráfico comparativo para quarta freqüência natural 54
4.12 Primeiro modo - (a) Numérico f1=967,3 Hz;
(b) Experimental f1= 962,1 Hz. 56
4.13 Segundo modo - (a) Numérico f2=2576,8 Hz;
(b) Experimental f2= 2594,8 Hz 57
4.14 Terceiro modo - (a) Numérico f3=4830,5 Hz;
(b) Experimental f3= 4850,6 Hz 57
4.15 (a) Quinto modo numérico f5=7584,1 Hz;
(b) Quarto modo experimental f4= 5949,1 Hz. 58
4.16 Gráfico comparativo para primeira freqüência natural 59
4.17 Gráfico comparativo para segunda freqüência natural 60
4.18 Gráfico comparativo para terceira freqüência natural 61
4.19 Gráfico comparativo para quarta freqüência natural 62

Lista de Tabelas

4.1	Equipamentos utilizados	50
4.2	Resultados	55
4.3	Valores das freqüências considerando a relação $\sigma/\sigma_{yp} = 0,2$	63
4.4	Valores das freqüências considerando a relação $\sigma/\sigma_{yp} = 0,4$	63
4.5	Valores das freqüências considerando a relação $\sigma/\sigma_{yp} = 0,6$	64
4.6	Valores das freqüências considerando a relação $\sigma/\sigma_{yp} = 0,8$	64

Nomenclatura

Letras Latinas

A	área da seção transversal da viga
a	comprimento da trinca
B	espessura da viga
$\mathbf{C}$	matriz de flexibilidade do elemento contendo trinca
$\mathbf{C_0}$	matriz de flexibilidade do elemento isento de trinca
$\mathbf{C_c}$	matriz de flexibilidade local devido à trinca
c_{ij}	coeficientes da matriz de flexibilidade local devido à trinca para as cargas i e j
d_p	diâmetro da zona plástica
E	módulo de elasticidade
F	carga axial
fti	freqüência natural do modo i para a respectiva relação a/H
fni	freqüência natural para o modo i
f_1, f_2, f_3	funções de correção para os fatores intensidade de tensão $K_I(F)$, $K_I(M)$ e $K_{II}(Q)$
f_i	freqüência natural para o modo i
G	módulo elasticidade transversal
H	altura da viga
I	momento de inércia da seção transversal da viga
$\mathcal{G}(a)$	taxa de energia de deformação liberada
$\mathcal{G}_i(a)$	taxa de energia de deformação liberada para o modo i
$\mathbf{K_c}$	matriz de rigidez do elemento contendo trinca
K_{ij}	fator intensidade de tensão para o modo i e carga j
L	comprimento do elemento
M	momento fletor
P_i	carga na direção *i-ésima*
Q	carga cisalhante
r_p	raio da zona plástica
$\mathbf{T}$	matriz tranformação
u_1, u_2	graus de liberdade para os nós 1 e 2
u_i	deslocamento adicional na direção *i-ésima*
U_T	energia total de deformação
v_1, v_2	graus de liberdade para os nós 1 e 2

x,y	coordenadas do sistema cartesiano
z	dimensão relativa à posição da trinca

Letras Gregas

κ	fator numérico dependente da forma da secção transversal
ν	coeficiente de Poisson
θ	ângulo entre a ponta da trinca e um ponto qualquer sobre o limite da zona plástica
θ_1,θ_2	graus de liberdade de rotação para os nós 1 e 2
σ_y	tensão na direção y
σ_{yp}	limite de escoamento do material

Abreviações

BAE	Biblioteca da área de engenharia (Unicamp)
FRF	função de resposta em freqüência
GDL	graus de liberdade
MEF	método dos elementos finitos
MEFLAB	software de elementos finitos desenvolvido pela Unicamp

Capítulo 1

Abordagem do Problema

1.1 Introdução

Predizer o momento de uma falha em um componente mecânico é o grande desafio nas áreas de projeto, manutenção e segurança. Nos últimos anos vários trabalhos foram realizados para desenvolver método de inspeção baseado em vibração da estrutura, que permita identificar e monitorar trincas a partir de mudanças na freqüência natural, modos de vibração e também na amplitude das respostas forçadas. Métodos que permitam monitorar uma estrutura em serviço têm grande interesse por questões comerciais, como aviões, usinas (nucleares, hidrelétricas) e grandes equipamentos de produção em geral.

O ponto fundamental deste trabalho reside no fato de um componente mecânico ou uma estrutura diminuir a rigidez original mediante o surgimento de uma trinca, este efeito provocará alterações no seu comportamento dinâmico.

Neste estudo foi utilizado o método dos elementos finitos (MEF) para simular a mudança do comportamento dinâmico de uma viga contendo uma trinca. Para isto, foi desenvolvido um elemento finito que simula a perda da rigidez em função das propriedades da trinca. Um elemento do tipo viga foi implementado, o qual, alem da flexão, considera os efeitos do cisalhamento, do comprimento da trinca e da zona plástica na ponta da trinca. Os resultados das análises através do método dos elementos finitos são comparados com aqueles obtidos por Qian,

Gu & Jiang (1990). Também, um conjunto de testes modais experimentais foi realizado a fim de validar o modelo do MEF.

1.2 Objetivo do trabalho

Estudar, implementar e analisar um elemento finito de viga de seção retangular contendo uma trinca no meio do elemento, com 3 graus de liberdade por nó, incluindo efeitos de cisalhamento e plasticidade na ponta da trinca.

Validar o modelo do MEF através de testes modais experimentais, usando análise modal experimental.

1.3 Motivação

A crise do petróleo na década de 70 levou a redução do emprego de usinas termoelétricas na geração de energia. Nos Estados Unidos, na década de 60 o tamanho do equipamento gerador de energia era normalizado para uma vida estimada de 30 anos, e na década de 90, considerada a terceira década de serviço, inúmeras falhas devido ao mecanismo de fadiga em alto ciclo seriam esperadas, fato que motivou no início dos anos 70 o desenvolvimento de métodos para detectar e monitorar trincas. Dimarogonas (1996) em dois relatórios internos da General Eletric Co., desenvolveu a teoria de vibração de eixos contendo trincas.

Nos últimos 15 anos, mais de 500 artigos foram publicados sobre estudos realizados na área da dinâmica de estruturas trincadas, pois além da área de energia a industria aeronáutica tem mostrado grande interesse nesse assunto. Inspeção em tempo real permite aumentar a disponibilidade dos equipamentos proporcionando melhor planejamento das manutenções. A simulação numérica contribui com melhor conhecimento sobre a integridade estrutural, que implica no aumento da confiabilidade de um item ou equipamento.

Associando-se os conhecimentos da dinâmica e de propagação de trincas por fadiga (mecânica de fratura) também é possível identificar alterações nas respostas dinâmicas que estão associadas ao comprimento da trinca, informação essencial para se determinar os limites de utilização ou intervalos de manutenção. A figura 1.1 apresenta evolução de trabalhos publicados nos últimos anos:

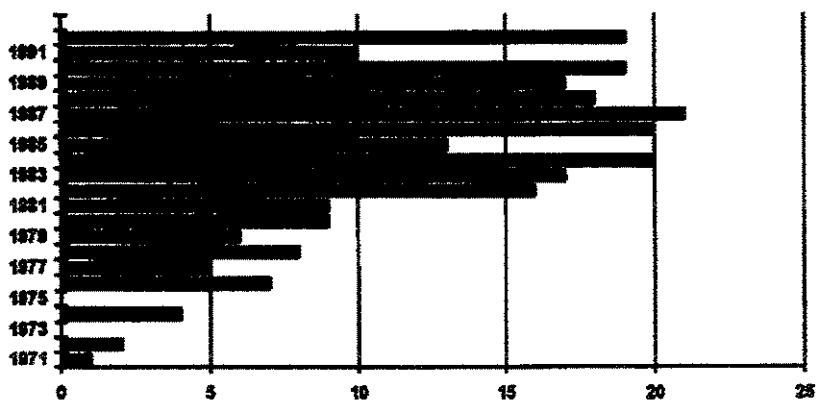


Figura 1.1 – Artigos sobre dinâmica de estruturas trincadas (DIMAROGONAS (1996))

1.4 Revisão Bibliográfica

As publicações analisadas e discutidas a seguir foram levantadas na base de referências da Biblioteca da Área de Engenharia (BAE/Unicamp) utilizando a base Probe disponível na época da pesquisa.

Kirmsher (1944) apud Dimarogonas (1996) realizou os primeiros estudos para avaliar as características vibracionais de uma viga com rasgo, que foi considerado uma descontinuidade local responsável pela a perda da rigidez do componente estrutural. O efeito do rasgo ou entalhe foi simulado através da redução de área (ou momento de inércia).

Dimarogonas & Papadopoulos (1983) publicaram artigo implementando elemento contendo trinca, considerando apenas um modo de abertura da trinca sujeito a carregamento de

flexão baseado no fator intensidade de tensão. Três anos depois Dimaragonas & Papadopoulos (1986) estenderam esta teoria considerada no elemento contendo a trinca, os três modos de abertura da trinca devido aos possíveis carregamentos (tração, flexão e torção), que permitiu verificar o efeito do acoplamento entre as vibrações longitudinais e de flexão. A formulação do elemento utilizando os fatores de intensidade de tensão foi a mais utilizada para implementação de elementos de barra contendo trinca.

Com objetivo de implementar um modelo de elementos finitos Gounaris & Dimarogonas (1988) desenvolveram um elemento de viga prismático contendo trinca, que foi utilizado para avaliar a resposta dinâmica de uma viga em balanço. O acoplamento entre vibrações longitudinais e de flexão foram estudados novamente por Papadopoulos & Dimarogonas (1988), que utilizaram a matriz de flexibilidade local para expressar o efeito da trinca sujeita a carregamentos axiais e momentos de flexão. O elemento contendo trinca e com dois graus de liberdade permitiu verificar o acoplamento entre os movimentos longitudinal e transversal.

Qian, Gu & Jiang (1990) desenvolveram uma matriz de rigidez de elemento finito de viga de seção retangular contendo trinca, a qual foi derivada da integração de fatores de intensidade de tensão. Considerando o modelo de uma viga em balanço, foram determinadas as freqüências naturais através da equação de movimento variando-se o comprimento e a posição da trinca, que foram apresentados em gráficos juntamente com valores experimentais. Neste artigo é proposto também um método para identificação da posição da trinca através das medições dos primeiros autovetores. Em 1992 Sekhar & Prabhu (1992) utilizam-se desta teoria para estudar e simular flutuações de tensões em eixos de rotores contendo trincas.

Chondros, Dimarogonas & Yao (1996) utilizaram aproximação variacional para o problema de vigas trincadas através da teoria de vibração para viga Bernoulli-Euler trincada. Chondros, Dimarogonas & Yao (1998) apresentaram resultados analíticos comparados com experimentais para a variação das freqüências naturais.

Os principais estudos realizados entre os anos de 1971 e 1992 são apresentados e discutidos por Dimarogonas (1996), que destaca as principais teorias utilizadas em dinâmica de estruturas trincadas: seção reduzida equivalente, flexibilidade local da mecânica de fratura e viga contínua trincada.

Sekhar & Balaji Prasad (1997) estudaram o efeito de uma trinca inclinada em relação ao eixo de rotação de um rotor de seção circular; eles desenvolveram um elemento específico para simulação da variação das freqüências naturais incluindo o efeito do mecanismo de abertura da trinca.

Os modelos citados apresentam pequena variação nos resultados em função das configurações da malha de elementos finitos, ou nas propriedades mecânicas dos materiais utilizados.

Kisa, Brandon & Topcu (1998) propuseram uma teoria baseada na aproximação por subestrutura, que dado um sistema global não linear contendo uma descontinuidade local é separada em dois subsistemas lineares, modelados por elemento finitos tipo viga de Timoshenko com dois nós e três graus de liberdade cada, que incorporam os efeitos do cisalhamento, sendo o efeito da trinca expressa por um elemento de comprimento e massa zero. Neste artigo os resultados das simulações pelo método de elementos finitos para uma viga em balanço mostraram boa correlação, quando comparado com resultados experimentais disponíveis na literatura.

Um método experimental para detecção de trincas foi proposto por Tomasel, Larrondo & Laura (1999). Foi desenvolvido experimento utilizando-se uma viga engastada contendo uma descontinuidade representada por entalhe feito através de serra. A viga foi engastada numa extremidade e uma excitação foi aplicada na extremidade oposta. Juntamente foi acoplado um sistema de medição a laser com o propósito de determinar as freqüências naturais através da análise modal experimental. Neste caso também foi desenvolvida teoria para simular o

comportamento de uma viga contendo uma trinca e os resultados experimentais foram comparados com os teóricos apresentando uma boa correlação até um comprimento de trinca igual a 80 % da altura da seção transversal da viga.

Em 2000 Krawczuk, Zak & Ostachowicz (2000) desenvolvem um elemento finito baseado na mecânica de fratura elasto-plástica considerando o raio da zona plástica na ponta da trinca. O modelo contém dois graus de liberdade por nó. Várias simulações foram mostradas com objetivo de identificar a influência do comprimento da trinca e tamanho da zona plástica na variação das freqüências naturais relativas. Vale destacar neste artigo que o autor deixa claro através de exemplos que embora a matriz de massa do elemento contendo trinca tenha forma diferente da convencional, os resultados mostram que não há influência significativa da matriz de massa sobre as freqüências naturais.

A rigidez de contato foi introduzida por Kisa, Brandon & Topcu (2000) no modelo de viga para expressar o efeito de abertura e fechamento da trinca. A base da teoria utilizada é a modelagem por subestrutura (Kisa, Brandon & Topcu (1998)) e os resultados apresentados no artigo foram discutidos e comparados com os disponíveis na literatura.

Chondros, Dimarogonas & Yao (2001) publicaram artigo utilizando a teoria de vibração para uma viga contínua trincada (Bernoulli-Euler) para predizer a mudança da vibração transversal de uma viga contendo uma trinca. Neste artigo foi considerado o efeito da "abertura da trinca" para o desenvolvimento da teoria e comparado com resultados experimentais de uma viga de alumínio contendo trincas nucleadas por fadiga. Este método tem sido utilizado para avaliação das baixas freqüências naturais de vibração lateral para vigas contendo uma trinca. Neste artigo estão disponíveis resultados experimentais para vigas de alumínio com trincas de fadiga usadas para comparação com resultados analíticos.

Krawczuk, Palacz & Ostachowicz (2003) apresentam um novo elemento finito espectral para viga trincada tipo Timoshenko, que é adequado para análises modal e propagação de ondas

elásticas. No artigo é apresentada a mudança dos parâmetros modais de uma viga em função da configuração da trinca, que inclui tamanho e localização. Foram apresentados exemplos numéricos com objetivo de mostrar a influência da configuração da trinca e como resultado destas análises, o modelo mostrou boa precisão quanto a localização da trinca

O elemento finito implementado neste trabalho agrega a contribuição dos trabalhos de Dimaragonas & Papadopoulos (1986) e Krawczuk, Zak & Ostachowicz (2000), tendo três graus de liberdade por nó, uma trinca na região central e o elemento leva em conta os efeitos dos carregamentos de tração, flexão e cisalhamento, pois considera os modos tipo I e II de abertura da trinca. O modelo implementado acrescenta o efeito do cisalhamento quando comparado aos demais encontrados na literatura. Outro diferencial é a implementação do efeito da zona plástica para um elemento considerando carregamentos de flexão e axial para o modo I de abertura da trinca.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

O princípio básico do comportamento de uma estrutura contendo uma trinca é a mudança da rigidez, que varia em função das características da trinca, tais como, tamanho, modo de abertura e orientação. Perda de rigidez ou aumento de flexibilidade implica em alteração nos deslocamentos previstos numa viga saudável.

2.1 Campo de tensões na ponta da trinca

A superfície de uma trinca tem grande influencia na distribuição das tensões próximas e ao redor da ponta da trinca, ou seja, de acordo com o princípio de St. Venant o campo de tensão é influenciado apenas na região. Variações geométricas distantes da trinca e forças de excitação afetam apenas a intensidade do campo de tensão local.

O campo de tensão próximo à ponta da trinca pode ser dividido em três tipos básicos, cada um associando um modo local de deformações conforme ilustrado na figura 2.1. O modo de abertura, Modo I, está associado com os deslocamentos locais no qual as superfícies da trinca movem-se se separando uma da outra (simétrica com respeito aos planos *x-y* e *x-z*). O modo de escorregamento, Modo II, é caracterizado pelos deslocamentos no qual as superfícies da trincas escorregam uma sobre a outra perpendicular à direção da ponta da trinca (simétrico com respeito ao plano *x-y* e assimétrico ao plano *x-z*). No modo III, modo de rasgamento, as superfícies da trinca escorregam em relação à outra paralela a ponta da trinca (assimétrico com respeito aos

planos *x-y* e *x-z)*. A superposição destes três modos é suficiente para descrever a maioria de casos tridimensionais de deformação na ponta da trinca e seus respectivos campos de tensões (TADA, PARIS & IRWIN, (2000)).

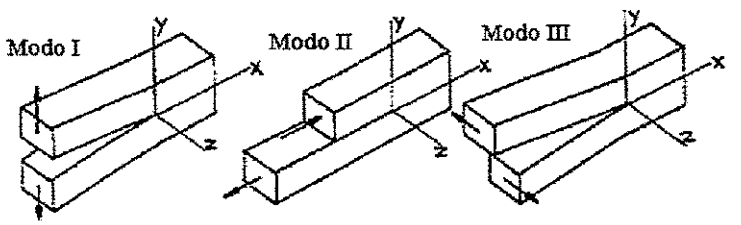


Figura 2.1 – Modos básicos de deslocamentos das superfícies da trinca (TADA, PARIS & IRWIN, (2000)).

O enfoque mais direto para se determinar as tensões e os campos de deslocamentos para os Modos I e II é analisa-los como problemas de deformação plana bidimensional da teoria da elasticidade, os quais são subdivididos como simétrica e assimétrica, respectivamente, com respeito ao plano da trinca. Modo III pode ser considerado como um problema de cisalhamento puro ou torção bidimensional. A figura 2.2 ilustra a notação dos campos de tensão na trinca:

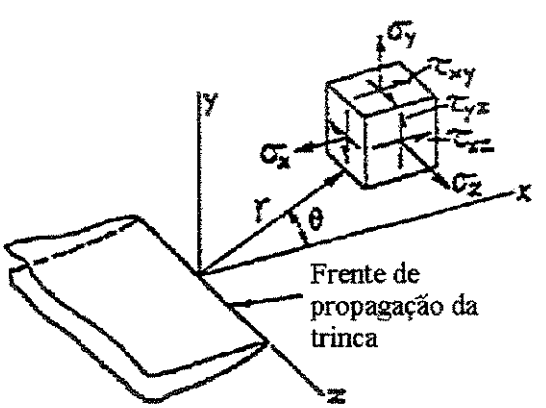


Figura 2.2 – Sistema de coordenadas na ponta da trinca (TADA, PARIS & IRWIN, (2000)).

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

De acordo com as notações mencionadas na figura 2.2 podem-se obter as expressões para as distribuições de tensões na região próxima à trinca e os deslocamentos para cada modo, expressos pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3 (TADA, PARIS & IRWIN, (2000)), que são válidas para material homogêneo e regime linear elástico:

Modo I

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2}\left[1 - sen\frac{\theta}{2} sen\frac{3\theta}{2}\right] + \sigma_{xo} + O\left(r^{1/2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2}\left[1 + sen\frac{\theta}{2} sen\frac{3\theta}{2}\right] + O\left(r^{1/2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\left[cos\frac{\theta}{2} sen\frac{\theta}{2} sen\frac{3\theta}{2}\right]$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \qquad (2.1)$$

$$u = \frac{K_I}{G}\left[\frac{r}{(2\pi)}\right]^{\frac{1}{2}} cos\frac{\theta}{2}\left[1 - 2\nu + sen^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$v = \frac{K_I}{G}\left[\frac{r}{(2\pi)}\right]^{\frac{1}{2}} sen\frac{\theta}{2}\left[2 - 2\nu - cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$w = 0$$

Modo II

$$\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} sen\frac{\theta}{2}\left[2 + cos\frac{\theta}{2} cos\frac{3\theta}{2}\right] + \sigma_{xo} + O\left(r^{1/2}\right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} sen\frac{\theta}{2} cos\frac{\theta}{2} cos\frac{3\theta}{2} + O\left(r^{1/2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2}\left[1 - sen\frac{\theta}{2} sen\frac{3\theta}{2}\right] + O\left(r^{1/2}\right)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y),\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \qquad (2.2)$$

$$u = \frac{K_{II}}{G}\left[\frac{r}{(2\pi)}\right]^{\frac{1}{2}} sen\frac{\theta}{2}\left[2 - 2\nu + cos^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$v = \frac{K_{II}}{G}\left[\frac{r}{(2\pi)}\right]^{\frac{1}{2}} cos\frac{\theta}{2}\left[-1 + 2\nu + sen^2\frac{\theta}{2}\right]$$

$$w = 0$$

Modo III

$$\tau_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} sen\frac{\theta}{2} + \tau_{xzo} + O\left(r^{1/2}\right)$$

$$\tau_{xz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} cos\frac{\theta}{2} + O\left(r^{1/2}\right) \qquad (2.3)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy}$$

$$w = \frac{K_{III}}{G}\left[\frac{2r}{\pi}\right]^{\frac{1}{2}} sen\frac{\theta}{2}$$

$$u = v = 0$$

As equações 2.1 e 2.2 estão escritas considerando estado plano de deformação, porém podem ser alteradas facilmente para estado plano de tensão considerando σ_z=0 e trocando o coeficiente de Poisson ν por $\nu/(1+\nu)$.

Nas equações 2.1, 2.2 e 2.3, os termos de alta ordem tais como as tensões uniformes paralelas à trinca, σ_{x0}, e τ_{xz0}, e os termos da ordem de raiz quadrada de r, $O(r^{1/2})$, são como indicados. Contudo, normalmente estes termos são omitidos desde que r se torne pequeno, quando comparado com as dimensões planares (no plano x-y) significativos para a análise de tensões, estes termos de alta ordem se tornam desprezíveis quando comparados com os termos $1/\sqrt{r}$, portanto os termos $1/\sqrt{r}$ são os campos de tensão linear elástico na ponta da trinca. Nas equações de deslocamento, G é o módulo de cisalhamento do material.

Os parâmetros K_I, K_{II}, e K_{III} apresentados nas equações 2.1, 2.2 e 2.3 são chamados fatores de intensidade de tensão na ponta da trinca correspondentes aos três modos (figura 2.1). Os fatores de intensidade de tensão dependem da configuração do componente trincado e da maneira que as cargas são aplicadas (ver equações 2.4 e 2.5), não dependendo das coordenadas r e θ, que representam a resistência do campo de tensões na vizinhança da ponta da trinca (equações 2.1 a 2.3).

$$K=f(\sigma,a) \tag{2.4}$$

onde a é o comprimento da trinca e de maneira aproximada, desconsiderando a função de correção relativa a configuração da trinca, temos:

$$K \cong \sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.5}$$

Fisicamente, K_I, K_{II}, e K_{III} podem ser considerados como a intensidade de carga transmitida através da região da ponta da trinca causada pela existência de uma trinca no corpo em questão.

Assim, uma dada combinação de valores de K_I, K_{II}, e K_{III} representa um campo de tensão na ponta da trinca único para um escoamento em pequena escala.

2.2 Taxa de energia de deformação liberada na propagação da trinca

Análise da taxa de energia de uma falha precede historicamente o estudo do campo de tensões na ponta da trinca. Basicamente este método utiliza a análise do balanço de energia na propagação da trinca.

A energia elástica total disponível por unidade de aumento da área superficial da trinca (um lado da superfície da trinca) é chamada de G para o caso linear elástico (Tada, Paris & Irwin

(2000)). Fisicamente $\mathcal{G}$ pode ser visto como a energia disponibilizada na ponta da trinca para o processo de propagação como resultado do trabalho dos deslocamentos das forças e/ou reduções na energia de deformação em um corpo sofrendo uma unidade de aumento na área trincada. Logo, chamaremos $\mathcal{G}$ como taxa de energia de deformação liberada (alguns autores denominam "função densidade de energia de deformação").

Deste modo tem-se para condição linear elástica (Tada, Paris & Irwin (2000)):

$$\mathcal{G} = \frac{\partial U_T(P_i, A)}{\partial A} \tag{2.6}$$

$$\mathcal{G} = -\frac{\partial U_T(\Delta_i, A)}{\partial A} \tag{2.7}$$

Na equação 2.6 U_T é a energia total de deformação de um corpo trincado com área da trinca. U_T pode ser expresso em função de A, cargas P_i, e Δ_i para equação 2.7 são deslocamentos devido às cargas.

2.3 Relação entre $\mathcal{G}$ e K

Neste item veremos a relação entre a taxa de energia de deformação liberada $\mathcal{G}$ e o fator de intensidade de tensão K, que pode ser deduzido a partir de um corpo com uma trinca colocada em condição de sistema isolado.

Em um corpo contendo trinca em condição de sistema isolado, e considerando-se que a ponta da trinca é elasticamente fechada em uma distância α de (a) para (b), conforme mostrado na figura 2.3:

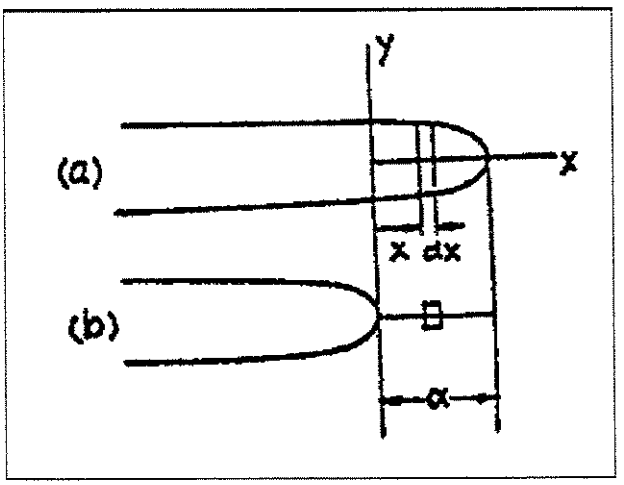


Figura 2.3 – Ilustração do estiramento de uma trinca de (a) para (b)
(TADA, PARIS & IRWIN, (2000))

O trabalho realizado no fechamento elástico será todo realizado sob forma de aumento energia total de deformação. Portanto:

$$\mathcal{G} = \underbrace{-\frac{\Delta U_T}{\Delta A}}_{\substack{Sistema \\ Isolado}} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\sigma_y v}{2} + \frac{\tau_{yx} u}{2} + \frac{\tau_{yz} w}{2} \right) dx \tag{2.8}$$

Onde σ_y, τ_{yx}, τ_{yz} e u, v e w são as tensões e os deslocamentos da superfície da trinca, respectivamente, ocorrendo sobre a região da superfície da trinca estirada. Com o limite $\alpha \to 0$, as tensões e as deformações pode ser obtidas através da equações 2.1, 2.2 e 2.3 que se aplicam ao campo na ponta da trinca. As tensões na equação 2.8 podem ser obtidas considerando $r=x$, $\theta=0$, e para os deslocamentos também mencionados na equação 2.8 assume-se $r=\alpha-x$, e $\theta=\pi$, portanto temos:

$$\mathcal{G} = \frac{1-\nu}{2G} K_I^2 + \frac{1-\nu}{2G} K_{II}^2 + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \tag{2.9}$$

Vale ressaltar que cada termo na equação 2.9 é proveniente da equação 2.8 sem interação entre os Modos I, II e III. Da relação entre o módulo de elasticidade e o módulo de elasticidade transversal:

$$E = 2(1+\nu)G \tag{2.10}$$

E considerando as variações para o módulo de elasticidade

$$E' = E \text{ (estado plano de tensão)} \tag{2.11}$$

$$E' = E/(1-\nu^2) \quad \text{(estado plano de deformação)} \tag{2.12}$$

A taxa total de energia $\mathcal{G}$, pode no geral ser dividida para cada modo:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_I + \mathcal{G}_{II} + \mathcal{G}_{III} \tag{2.13}$$

Onde temos para a taxa de energia para cada modo:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_I &= \frac{K_I^2}{E'} \\ \mathcal{G}_{II} &= \frac{K_{II}^2}{E'} \\ \mathcal{G}_{III} &= \frac{K_{III}^2}{2E'} = \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Na maioria das aplicações, um simples corpo trincado está sujeito a vários carregamentos. Devido aos valores de K_{ij} (sendo i, o modo da trinca e j o carregamento) serem fatores incluindo linearmente a carga nas tensões lineares elástica, a superposição se aplica. O que é possível afirmar que os K_i para todos carregamentos aplicados simultaneamente é a soma algébrica dos K_{ij} para cada modo i de abertura da trinca. Contudo, devido aos diferentes campos de tensão ocorrerem para cada modo, a soma deve ocorrer separadamente:

$$K_I = K_{I1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + K_{I6} = \sum_{n=1}^{6} K_{Ii}$$

$$K_{II} = K_{II1} + \ldots\ldots\ldots + K_{II6} = \sum_{n=1}^{6} K_{IIi} \tag{2.15}$$

$$K_{III} = K_{III1} + \ldots\ldots\ldots + K_{III6} = \sum_{n=1}^{6} K_{IIIi}$$

Substituindo a equação 2.14 em 2.15 temos as equações para as taxas de energia para cada modo:

$$\mathcal{G}_I = \left[\mathcal{G}_{I1}^{1/2} + \ldots\ldots\ldots + \mathcal{G}_{I6}^{1/2}\right]^2$$

$$\mathcal{G}_{II} = \left[\mathcal{G}_{III}^{1/2} + \ldots\ldots\ldots + \mathcal{G}_{II6}^{1/2}\right]^2 \tag{2.16}$$

$$\mathcal{G}_{III} = \left[\mathcal{G}_{III1}^{1/2} + \ldots\ldots + \mathcal{G}_{III6}^{1/2}\right]^2$$

Logo podemos expressar a equação da taxa total de energia liberada em função dos fatores de intensidade de tensão considerando os respectivos modos e cargas aplicadas:

$$\mathcal{G} = \frac{1}{E'}\left[\left(\sum_{n=1}^{6} K_{Ii}\right)^2 + \left[\sum_{n=1}^{6} K_{IIi}\right]^2 + (1+\nu)\left(\sum_{n=1}^{6} K_{IIIi}\right)^2\right] \tag{2.17}$$

2.4 Deslocamentos adicionais devido a trinca

Nos itens 2.2 e 2.3 foi mostrado $\mathcal{G}$ como sendo a variação da energia total de deformação liberada, U_T, com respeito ao aumento da área trincada, e carregado com forças constantes:

$$\mathcal{G} = \left.\frac{\partial U_T}{\partial A}\right|_{\substack{forças \\ constantes}} \tag{2.18}$$

Do teorema de Castigliano, é possível calcular os deslocamentos conforme sugerido por Paris (1957) apud (TADA, PARIS & IRWIN (2000)). O teorema de Castigliano estabelece que o deslocamento de uma carga P_i pode ser expresso por:

$$u_i = \frac{\partial U_T}{\partial P_i} \tag{2.19}$$

A energia total de deformação pode ser considerada como a soma da energia devido ao carregamento de forças no corpo isento de trinca mais a energia de deformação considerando a trinca, sob carregamento constante:

$$U_T = U_{\substack{sem \\ trinca}} + \int_0^A \frac{\partial U_T}{\partial A} dA \tag{2.20}$$

Aplicando o teorema de Castigliano e utilizando a equação 2.18, o deslocamento pode ser expresso como:

$$u_i = \underbrace{\frac{\partial U_T}{\partial P_i}}_{\substack{deslocamento \\ total}} = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial P_i}}_{\substack{deslocamento \\ do\ corpo\ isento \\ de\ trinca}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial P_i}\int_A \mathcal{G}\, dA}_{\substack{deslocamento \\ adicional \\ devido\ a\ trinca}} \tag{2.21}$$

Logo temos a expressão para o deslocamento adicional na direção *i-ésima* devido à trinca como:

$$u_i = \frac{\partial}{\partial P_i}\int_A \mathcal{G}\, dA \tag{2.22}$$

Este conceito pode ser estendido para mais cinco carregamentos podendo ser expressa através de coeficientes de flexibilidade. A flexibilidade local devido à trinca por unidade de comprimento (DIMAROGONAS, (1996)):

$$c_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial P_i} \tag{2.23}$$

Substituindo a equação 2.22 em 2.23 tem-se:

$$c_{ij} = \frac{\partial}{\partial P_i}\left(\frac{\partial}{\partial P_j}\int_A \mathcal{G} dA\right) \tag{2.24}$$

2.5 Matriz flexibilidade do Elemento Finito Trincado

A matriz de rigidez a ser desenvolvida aplica-se a um elemento específico para viga de seção retangular contendo uma trinca na região central. O novo elemento contém três graus de liberdade por nó, e inclui os efeitos de flexão, do cisalhamento e da zona plástica na ponta da trinca. Na figura 2.4 é mostrada representação gráfica do elemento contendo a geometria da viga, carregamentos, o tamanho e posição da trinca.

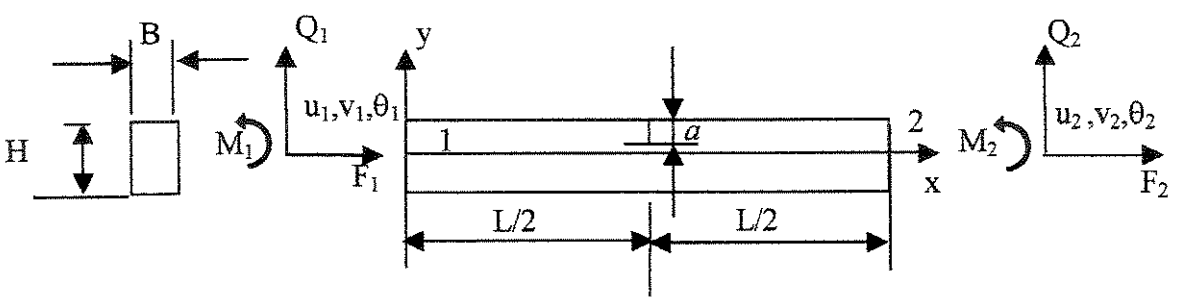


Figura 2.4 – Modelo esquemático do elemento implementado

De acordo com a equação 2.17, a taxa de energia de deformação liberada pode ser expressa em função dos fatores intensidades de tensão. Considerando na viga a ser implementada, os efeitos da trinca sujeitos aos Modos I e II, tem-se:

$$\mathcal{G} = \frac{1-\nu^2}{E}\left\{\left(K_I(F) + K_I(M)\right)^2 + K_{II}^2(Q)\right\} \tag{2.25}$$

Onde os fatores intensidades de tensão $K_I(F)$ e $K_I(M)$ expressam o efeito da abertura da trinca devido aos carregamentos longitudinais *(F)* e de flexão *(M)* respectivamente, e K_{II} o efeito de escorregamento de planos da trinca devido ao carregamento transversal *(Q)*.

Da equação 2.5, que apresenta na sua forma geral o fator de intensidade de tensão, tem-se as expressões para os fatores de intensidade de tensão para os modos da trinca:

$$K_I(F) = \frac{F}{BH}\sqrt{\pi a}\, f_1\left(\frac{a}{H}\right) \tag{2.26}$$

$$K_I(M) = \frac{6M}{BH^2}\sqrt{\pi a}\, f_2\left(\frac{a}{H}\right) \tag{2.27}$$

$$K_{II}(Q) = \frac{\kappa Q}{BH}\sqrt{\pi a}\, f_3\left(\frac{a}{H}\right) \tag{2.28}$$

onde o coeficiente κ é um fator numérico dependente da forma da secção transversal derivada da teoria da viga Timoshenko, e as funções adimensionais f_1, f_2 e f_3 são chamadas de funções de correção, que são equações empíricas utilizadas para estimar o fator de intensidade de tensão para os respectivos modos e carregamentos (TADA, PARIS & IRWIN (2000)), e são expressos como:

$$f_1\left(\frac{a}{H}\right) = \sqrt{\frac{2H}{\pi a}\tan\left(\frac{\pi a}{2H}\right)}\,\frac{\left[0{,}752 + 2{,}02\left(\frac{a}{H}\right) + 0{,}37\left(1 - sen\left(\frac{\pi a}{2H}\right)\right)^3\right]}{\cos\left(\frac{\pi a}{2H}\right)} \tag{2.29}$$

$$f_2\left(\frac{a}{H}\right)=\sqrt{\frac{2H}{\pi a}tan\left(\frac{\pi a}{2H}\right)}\frac{\left[0{,}923+0{,}199\left(1-sen\left(\frac{\pi a}{2H}\right)\right)^4\right]}{cos\left(\frac{\pi a}{2H}\right)} \tag{2.30}$$

$$f_3\left(\frac{a}{H}\right)=\frac{\left[1{,}122-0{,}561\left(\frac{a}{H}\right)+0{,}085\left(\frac{a}{H}\right)^2+0{,}180\left(\frac{a}{H}\right)^3\right]}{\sqrt{1-\frac{a}{H}}} \tag{2.31}$$

Para determinação dos coeficientes da matriz de flexibilidade local devido à trinca para o modelo considerado, substitui-se a equação 2.25 na equação 2.23 obtendo-se:

$$c_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial Pj}=\frac{\partial^2}{\partial P_i \partial P_j}\int_A\left[\frac{1-\nu^2}{E}\left\{(K_I(F)+K_I(M))^2+K_{II}^2(Q)\right\}\right]dA \tag{2.32}$$

onde $i, j = 1,...,3 \quad P_1=F, \quad P_2=Q \quad P_3=M$

Da equação 2.32 pode-se obter os coeficientes de flexibilidade na forma matricial para um nó, que será dada por $\mathbf{C_c}$, e cada coeficiente da matriz c_{ij} será determinado através dos carregamentos i e j que contribuem para os modos de fratura. Na matriz $\mathbf{C_c}$ é possível observar que coeficientes com $i = j$ expressam o efeito da flexibilidade local devido a trinca para um determinado carregamento e nos coeficientes com $i \neq j$ tem-se o acoplamento entre diferentes carregamentos. Logo a matriz de flexibilidade local para um nó é dada por:

$$C_c=\begin{bmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & c_{22} & 0 \\ c_{31} & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Para o nó isento de trinca com três GDL's será utilizada a matriz de flexibilidade considerando efeito do cisalhamento, que chamaremos de $\mathbf{C_0}$.

$$C_0 = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}\frac{L^3\left(4+\frac{12\kappa EI}{GAL^2}\right)}{EI} & \frac{1}{2}\frac{L^2}{EI} \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{L^2}{EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

Conforme apresentado por Sekhar & Balaji Prasad (1997) a matriz de flexibilidade total para a seção contendo trinca é igual a soma da matriz de flexibilidade da seção isenta de trinca ($\mathbf{C_0}$, equação 2.34) com a matriz de flexibilidade local devido à trinca ($\mathbf{C_c}$, equação 2.33). Na equação 2.34 o coeficiente κ é um fator numérico dependente da forma da secção transversal e G é o módulo de cisalhamento, portanto a expressão matricial **C**, é dada por:

$$\mathbf{C}=\mathbf{C_0}+\mathbf{C_c} \tag{2.35}$$

Para um elemento com dois nós e três graus de liberdade (GDL) para cada nó, a matriz de rigidez do elemento contendo trinca será obtida através da multiplicação matricial entre matriz transformação, a inversa da matriz de flexibilidade total para seção contendo trinca e a transposta da matriz de transformação, ou seja:

$$[\mathbf{K_c}]=[\mathbf{T}][\mathbf{C}]^{-1}[\mathbf{T}]^{\mathbf{T}} \tag{2.36}$$

onde **T** é a matriz transformação é dada por:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -L & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

2.6 Flexibilidade local elasto-plástica de uma viga trincada

Neste item será apresentado como foi implementado o efeito da zona plástica na região próxima à trinca. De acordo com a mecânica de fratura elasto-plástica (Hertzberg (1976)), a região da plasticidade é desenvolvida perto da ponta da trinca sempre que as tensões excederem o limite de escoamento do material.

Na expressão do fator de intensidade de tensão (equação 2.5) é realizada uma correção com objetivo de considerar o grau de plasticidade na ponta da trinca. Esta correção é uma simples aproximação para estimar a extensão da zona plástica para o estado plano de tensão, onde a componente de tensão σ_y é utilizada nas expressões do campo de tensão na ponta da trinca para o Modo I (equação 2.1). Substituindo $\theta=0°$ na expressão 2.1 (ver figura 2.2) obtém-se na direção perpendicular ao plano de abertura da trinca, como:

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tag{2.38}$$

De acordo com a figura 2.5 é possível ver a distribuição das tensões elásticas e na fronteira elasto-plástica $\sigma_y = \sigma_{yp}$, onde σ_{yp} é o limite de escoamento do material. Assim, a expressão para tensão de escoamento ficará:

$$\sigma_{yp} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \tag{2.39}$$

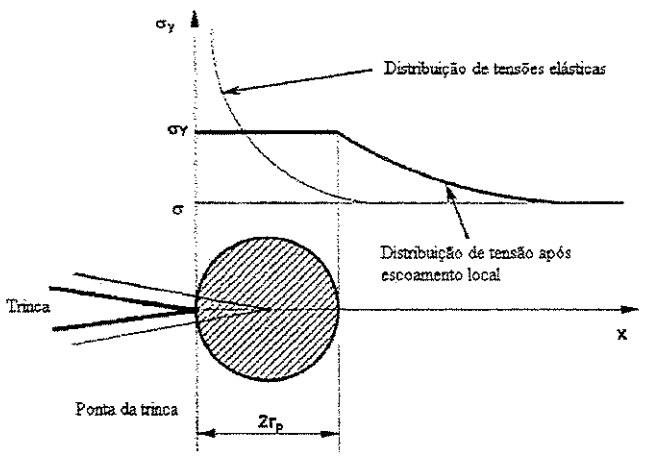


Figura 2.5 – Zona plástica ao redor da ponta da trinca

Logo o raio da zona plástica será obtido a partir da equação 2.39 fazendo $r=r_p$.

$$\frac{d_p}{2} \approx r_p \approx \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{yp}}\right)^2 \quad \text{(estado plano de tensão)} \qquad (2.40)$$

Conforme mencionado por Hertzberg (1976), o diâmetro da zona plástica é um pouco maior que o apresentado na equação 2.40 devido a redistribuição de carga ao redor da zona plástica, porém será utilizada esta relação como premissa para determinação do raio da zona plástica r_p.

Para uma estimativa do raio da zona plástica sob estado plano de deformação, assume-se um aumento efetivo do limite de escoamento por um fator aproximadamente de $\sqrt{3}$ (Collins, (1981)) devido à restrição do plano de deformações elásticas, portanto a expressão para o raio da zona plástica ficará:

$$\frac{d_p}{2} \approx r_p \approx \frac{1}{6\pi}\left(\frac{K_I}{\sigma_{yp}}\right)^2 \quad \text{(estado plano de deformação)} \qquad (2.41)$$

No modelo do elemento finito implementado, será considerado estado plano de deformação, pois os modelos numéricos e experimentais foram executados utilizando-se de amostras com espessura significativa para apresentar restrições plásticas e condições favoráveis ao estado plano de deformação na ponta da trinca. Portanto, para adequação do efeito do raio da zona plástica, tem-se K_I, que é o fator de intensidade de tensão para o modo I, σ tensão elástica fora da zona plástica, σ_{yp} o limite de escoamento do material e d_p denota o diâmetro ao redor da ponta de trinca.

Considerando a expressão original para o fator de intensidade de tensão, tem-se:

$$K_I = f_i \sigma \sqrt{\pi a} \tag{2.42}$$

Levando em conta o raio da zona plástica a equação 2.42 terá um incremento no comprimento da trinca devido ao raio da zona plástico, logo a equação para o fator de intensidade de tensão considerando a zona plástica é dado por:

$$K_{IP} = f_i \sigma \sqrt{\pi (a + r_p)} \tag{2.43}$$

Sendo f_i as funções de correção para os carregamentos possíveis no Modo I da trinca e substituindo *rp* (2.41)na relação 2.43:

$$K_{IP} = f_i \sigma \sqrt{\pi \left(a + \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_{yp}} \right)^2 \right)} \tag{2.44}$$

Substituindo a expressão de K_I em 2.44

$$K_{IP} = f_i \sigma \sqrt{\pi \left(a + \frac{1}{6\pi} \left(\frac{f_i \sigma \sqrt{\pi a}}{\sigma_{YP}} \right)^2 \right)} \tag{2.45}$$

Elevando ao quadrado o termo $\frac{f_i \sigma \sqrt{\pi a}}{\sigma_{YP}}$:

$$K_{IP} = f_i \sigma \sqrt{\pi \left(a + \frac{1}{6\pi} \frac{f_i^2 \sigma^2 \pi a}{\sigma_{yp}^2} \right)} \tag{2.46}$$

Agrupando os termos dentro do radical:

$$K_{IP} = f_i \sigma \sqrt{\pi a \left(1 + \frac{1}{6} \frac{f_i^2 \sigma^2}{\sigma_{yp}^2} \right)} \tag{2.47}$$

E colocando em evidência o produto πa:

$$K_{IP} = \underbrace{f_i \sigma \sqrt{\pi a}}_{K_I} \sqrt{1 + \frac{1}{6} f_i^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}} \right)^2} \tag{2.48}$$

Temos a equação do fator de intensidade de tensão considerando o efeito da zona plástica:

$$K_{IP} = K_I \sqrt{1 + \frac{1}{6} f_i^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}} \right)^2} \tag{2.49}$$

Considerando o efeito do raio da zona plástica para os fatores de intensidade de tensão no modo I e substituindo as equações 2.26 e 2.27 em 2.49, tem-se as equações para $K_{IP}(F)$ (equação 2.50) e $K_{IP}(M)$ (equação 2.51):

$$K_{IP}(F)=\frac{F}{BH}\sqrt{\pi a}f_1\sqrt{1+\frac{1}{6}f_1^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2} \tag{2.50}$$

$$K_{IP}(M)=\frac{6M}{BH^2}\sqrt{\pi a}f_2\sqrt{1+\frac{1}{6}f_2^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2} \tag{2.51}$$

2.7 Expansão dos coeficientes da matriz de flexibilidade de viga trincada

Expandindo a equação 2.32, obtém-se a equação geral para os coeficientes de flexibilidade:

$$c_{ij}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial P_i\partial P_j}\int_A\left\{K_I{}^2(F)+2K_I(F)K_I(M)+K_I{}^2(M)+K_{II}{}^2(Q)\right\}dA \tag{2.52}$$

Substituindo na equação 2.52, os valores dos fatores intensidade de tensão determinados nas equações 2.50, 2.51 e 2.28, obtém-se:

$$c_{ij}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial P_i\partial P_j}\int_A\left(\frac{F}{BH}\sqrt{\pi a}f_1\sqrt{1+\frac{1}{6}f_1^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right)^2+2\left(\frac{F}{BH}\sqrt{\pi a}f_1\sqrt{1+\frac{1}{6}f_1^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right)\left(\frac{6M}{BH^2}\sqrt{\pi a}f_2\sqrt{1+\frac{1}{6}f_2^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{6M}{BH^2}\sqrt{\pi a}f_2\sqrt{1+\frac{1}{6}f_2^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{\kappa Q}{BH}\sqrt{\pi a}f_3\right)^2\Big\}dA \tag{2.53}$$

Da equação geral dos coeficientes 2.53, tem se o termo relativo à carga de flexão F:

$$c_{11}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial F\partial F}\int_A\left\{\frac{F^2}{B^2H^2}\pi a f_1^{\,2}\left(1+\frac{1}{6}f_1^{\,2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right)\right\}dA \tag{2.54}$$

Colocando em evidência valores constantes em relação à dA:

$$c_{11}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial F\partial F}\frac{F^2\pi}{B^2H^2}\int_A\left\{f_1^{\,2}a\left(1+\frac{1}{6}f_1^{\,2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right)\right\}dA \tag{2.55}$$

Aplicando a operação distributiva:

$$c_{11}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial F\partial F}\frac{F^2\pi}{B^2H^2}\int_A\left\{f_1^{\,2}a+\frac{1}{6}f_1^{\,4}a\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right\}dA \tag{2.56}$$

Derivando duas vezes em relação a F, tem a equação para o coeficiente c_{11}:

$$c_{11}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{2\pi}{B^2H^2}\int_A\left\{f_1^{\,2}a+\frac{1}{6}f_1^{\,4}a\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right\}dA \tag{2.57}$$

Da equação geral dos coeficientes 2.53, tem se o termo relativo à carga de flexão M:

$$c_{33}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial M\partial M}\int_A\left\{\left(\frac{6M}{BH^2}\sqrt{\pi a}f_2\sqrt{1+\frac{1}{6}f_2^{\,2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right)^2\right\}dA \tag{2.58}$$

Elevando ao quadrado o termo $\frac{6M}{BH^2}\sqrt{\pi a}f_2\sqrt{1+\frac{1}{6}f_2{}^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}$:

$$c_{33}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial M\partial M}\int_A\left\{\frac{36M^2}{B^2H^4}\pi a f_2{}^2\left(1+\frac{1}{6}f_2{}^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right)\right\}dA \tag{2.59}$$

Colocando em evidência valores constantes em relação à dA:

$$c_{33}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial M\partial M}\frac{36M^2\pi}{B^2H^4}\int_A\left\{f_2{}^2a\left(1+\frac{1}{6}f_2{}^2\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right)\right\}dA \tag{2.60}$$

Aplicando a distributiva:

$$c_{33}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial M\partial M}\frac{36M^2\pi}{B^2H^4}\int_A\left\{f_2{}^2a+\frac{1}{6}f_2{}^4a\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right\}dA \tag{2.61}$$

Derivando duas vezes em relação a M tem-se a equação para o coeficiente c_{33}:

$$c_{33}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{72\pi}{B^2H^4}\int_A\left\{f_2{}^2a+\frac{1}{6}f_2{}^4a\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right\}dA \tag{2.62}$$

Da equação geral dos coeficientes 2.53, tem se o termo relativo à carga de flexão Q:

$$c_{22}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial Q\partial Q}\int_A\left\{\frac{\kappa Q}{BH}\sqrt{\pi a}f_3\right\}^2 dA \tag{2.63}$$

Elevando ao quadrado o termo $\frac{\kappa Q}{BH}\sqrt{\pi a}f_3$:

$$c_{22}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial Q\partial Q}\int_A\left\{\frac{\kappa^2 Q^2}{B^2H^2}\pi a f_3^{\,2}\right\}dA \tag{2.64}$$

Colocando em evidência valores constantes em relação à dA:

$$c_{22}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial Q\partial Q}\frac{\kappa^2 Q^2}{B^2H^2}\pi\int_A a f_3^{\,2}dA \tag{2.65}$$

Derivando duas vezes em relação a Q tem-se a equação para o coeficiente c_{22}:

$$c_{22}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{2\pi\kappa^2}{B^2H^2}\int_A a f_3^{\,2}dA \tag{2.66}$$

Da equação geral dos coeficientes 2.53, tem se os termos relativos à F e M:

$$c_{13}=\frac{1-\nu^2}{E'}\frac{\partial^2}{\partial F\partial M}\int_A\left\{2\left(\frac{F}{BH}\sqrt{\pi a}f_1\sqrt{1+\frac{1}{6}f_1^{\,2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right)\left(\frac{6M}{BH^2}\sqrt{\pi a}f_2\sqrt{1+\frac{1}{6}f_2^{\,2}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right)\right\}dA \tag{2.67}$$

Multiplicando os termos em evidência na integral de área:

$$c_{13}=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{\partial^2}{\partial F\partial M}\int_A\left\{\frac{12FM\pi a}{B^2H^3}\sqrt{f_1^{\,2}+\frac{1}{6}f_1^{\,4}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\sqrt{f_2^{\,2}+\frac{1}{6}f_2^{\,4}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right\}dA \tag{2.68}$$

Colocando os termos em evidência e derivando em relação à F e M:

$$c_{13}=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{12\pi a}{B^2H^3}\int_A\left\{\sqrt{f_1^{\,2}+\frac{1}{6}f_1^{\,4}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\sqrt{f_2^{\,2}+\frac{1}{6}f_2^{\,4}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2}\right\}dA \tag{2.69}$$

Aplicando a distributiva tem-se a equação para o coeficiente c_{33}:

$$c_{13}=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{12\pi}{B^2H^3}\int_A\left\{a\sqrt{f_1^{\,2}f_2^{\,2}+\frac{1}{6}f_1^{\,2}f_2^{\,4}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2+\frac{1}{6}f_2^{\,2}f_1^{\,4}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2+\frac{1}{36}f_2^{\,4}f_1^{\,4}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^4}\right\}dA \tag{2.70}$$

Considerando a mudança de variável:

$$\int_A f_i^{\,2}(\bar{a})adA=BH^2\int_0^{\bar{a}_k} f_i^{\,2}(\bar{a})\bar{a}d\bar{a} \qquad \text{onde } \bar{a}=\frac{a}{H} \text{ e } \overline{a_k}=\frac{a_K}{H} \tag{2.71}$$

Temos as equações 2.72, 2.73, 2.74 e 2.75 para os coeficientes em função de $\bar{a}$:

$$c_{11}=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{2\pi}{B}\int_0^{\bar{a}_k}\left[f_1^{\,2}(\bar{a})\bar{a}+\frac{1}{6}f_1^{\,4}(\bar{a})\bar{a}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right]d\bar{a} \tag{2.72}$$

$$c_{22}=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{2\pi\kappa^2}{B}\int_A^{\bar{a}_k} f_3^{\,2}(\bar{a})\bar{a}d\bar{a} \tag{2.73}$$

$$c_{33} = \frac{1-\nu^2}{E'}\frac{72\pi}{BH^2}\int_0^{\bar{a}_k}\left[f_2^{\,2}(\bar{a})\bar{a} + \frac{1}{6} f_2^{\,4}(\bar{a})\bar{a}\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2\right] d\bar{a} \tag{2.74}$$

$$c_{13} = \frac{1-\nu^2}{E'}\frac{12\pi}{B\,H}\int_0^{\bar{a}_k}\left\{\bar{a}\sqrt{f_1^{\,2}(\bar{a})f_2^{\,2}(\bar{a}) + \frac{1}{6} f_1^{\,2}(\bar{a})f_2^{\,4}(\bar{a})\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2 + \frac{1}{6} f_2^{\,2}(\bar{a})f_1^{\,4}(\bar{a})\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^2 + \frac{1}{36} f_2^{\,4}(\bar{a})f_1^{\,4}(\bar{a})\left(\frac{\sigma}{\sigma_{yp}}\right)^4}\right\} d\bar{a} \tag{2.75}$$

Os coeficientes de flexibilidade determinados na equação 2.75 foram obtidos através da integração numérica dos termos envolvendo as funções de correção. Para valores de $a_k = 0$ o algoritmo do elemento zera os termos a serem integrados para evitar qualquer tipo de singularidade. Na integração numérica é utilizada a função do software MATLAB *quadl*, que utiliza a técnica da quadratura adaptativa de Lobatto. Esta função de integração numérica do MATLAB tenta aproximar a integral da função em questão dos limites de integração dentro de um erro de 1.e-6 usando funções de recorrência de alta ordem.

Capítulo 3

Resultados Numéricos

3.1 Introdução

Neste capitulo serão apresentados os resultados provenientes da simulação numérica. O elemento finito trincado foi implementado no programa MEFLAB, que foi desenvolvido no Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP (PAVANELLO, 1995) usando linguagem de programação MatLab (HANSELMAN & LITTLEFIELD,1999), com o propósito de realizar simulações numéricas utilizando o método dos elementos finitos.

Em uma primeira etapa de validação do elemento implementado, os resultados numéricos obtidos através da análise de elementos finitos foram comparados com os valores encontrados na literatura.

Devido a semelhança dos modelos, escolheu-se o artigo Qian, Gu & Jiang (1990), pois neste artigo compara-se resultados numéricos obtidos através do método dos elementos finitos com experimentais. Além do comportamento dinâmico da viga para diferentes comprimentos de trinca no artigo de Qian, são apresentados resultados para várias posições da trinca ao longo da extensão de uma viga de seção retangular. Os resultados foram obtidos através de configurações de malha que representassem uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra.

3.2 Resultados numéricos

O modelo de Qian consiste de um elemento finito de comprimento L sujeito à flexão com dois graus de liberdade por nó e não inclui os efeitos do cisalhamento e nem o efeito da zona plástica na ponta da trinca. A figura 3.1 mostra um diagrama esquemático do elemento em questão:

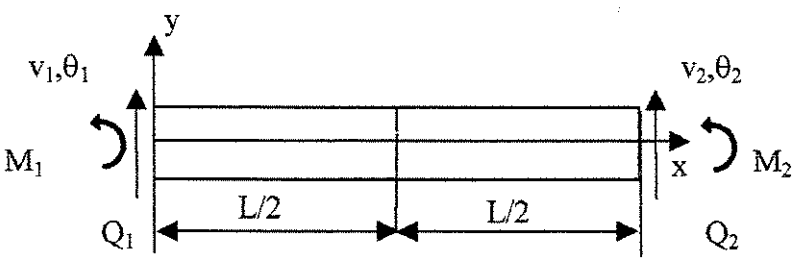


Figura 3.1 – Modelo proposto por Qian, Gu & Jiang (1990)

A figura 3.2 mostra a configuração de malha utilizada, a qual é composta de cinco elementos e seis nós. As restrições são aplicadas para simular uma viga engastada-livre (u_0=0, v_0=0 e θ_0=0), sendo z a posição da trinca em relação à extremidade engastada, L_v o comprimento da viga, H altura da seção transversal, B a largura, a comprimento da trinca, e z/L_v a posição relativa.

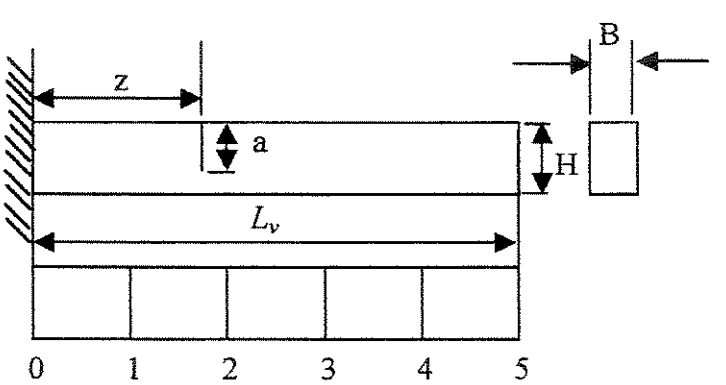


Figura 3.2 – Geometria da viga engasta e malha proposta

Do artigo de Qian têm-se os seguintes parâmetros dimensionais da viga:

- Comprimento L_v=200mm;
- Altura H=7,8mm;
- Base B=1mm;

Para o material foi assumido o aço, com as seguintes propriedades:

- Módulo de elasticidade E=210Gpa;
- Coeficiente de Poisson v=0,28;
- Densidade ρ=7860 kg/m^3;

A partir dos parâmetros descritos configurou-se o modelo implementado com as mesmas condições do modelo de Qian, onde foi possível observar a redução da freqüência natural para a viga trincada (relativa à viga intacta) em função do aumento do comprimento da trinca. Os gráficos das figuras 3.3 a 3.8 são resultados de simulações para as variações da freqüência natural relativa em função do comprimento relativo da trinca para condições disponíveis no artigo, que considera os valores do modelo numérico e experimental reportados por Qian. A freqüência relativa será dada por *fti/fni*, onde *fti* é a freqüência natural do modo *i* encontrada para a respectiva relação *a/H* (comprimento relativo da trinca) e *fni* a freqüência natural para o modo *i* considerando a viga isenta de trinca:

No gráfico apresentado na figura 3.3 tem-se a variação da primeira freqüência natural para uma viga contendo uma trinca localizada a uma distância da extremidade engastada igual a 20% do comprimento total da viga. Observa-se a diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca, ou seja, a freqüência natural obtida para a viga trincada diminui em relação à freqüência natural da viga isenta de trinca. Neste gráfico é possível verificar que o modelo implementado tem comportamento similar ao de Qian, porém valores divergentes são apresentados para comprimentos relativos da trinca superiores à 0,2. Este resultado mostra que o modelo implementado apresenta maior rigidez quando comparado ao de Qian.

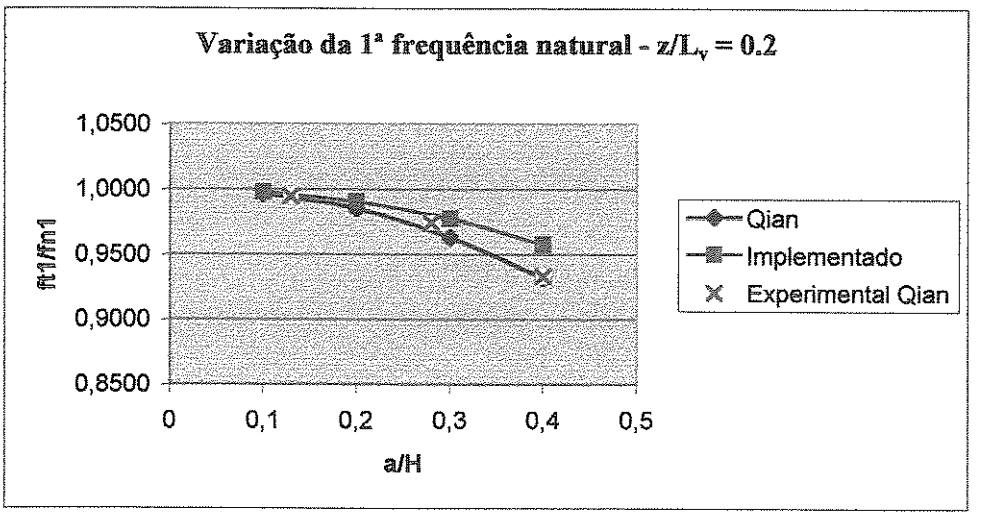


Figura 3.3 – Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.2

Para o gráfico apresentado na figura 3.4 tem-se a variação da primeira freqüência natural para uma viga contendo uma trinca localizada a uma distância da extremidade engastada igual a 40% do comprimento total da viga. Observa-se a diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Neste gráfico, também é possível verificar que o modelo implementado tem comportamento análogo ao de Qian e similar ao gráfico apresentado na figura 3.3. Este resultado mostra que o modelo implementado apresenta maior rigidez quando comparado ao de Qian.

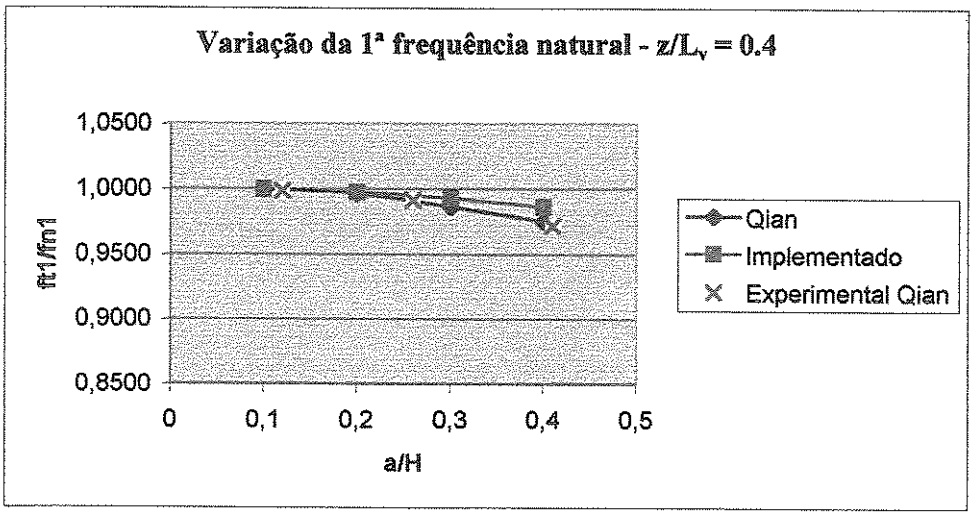


Figura 3.4 – Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.4

O gráfico apresentado na figura 3.5 mostra a variação da primeira freqüência natural para uma viga contendo uma trinca localizada a uma distância da extremidade engastada igual a 60% do comprimento total da viga. Observa-se a diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Neste gráfico, também é possível verificar que o modelo implementado tem comportamento similar aos reportados por Qian, e para comprimentos relativos da trinca superiores a 0,3 é possível observar divergência entre as curvas de variação de freqüência. Do mesmo modo que as figuras anteriores, este resultado mostra que o modelo implementado apresenta maior rigidez quando comparado aos de Qian.

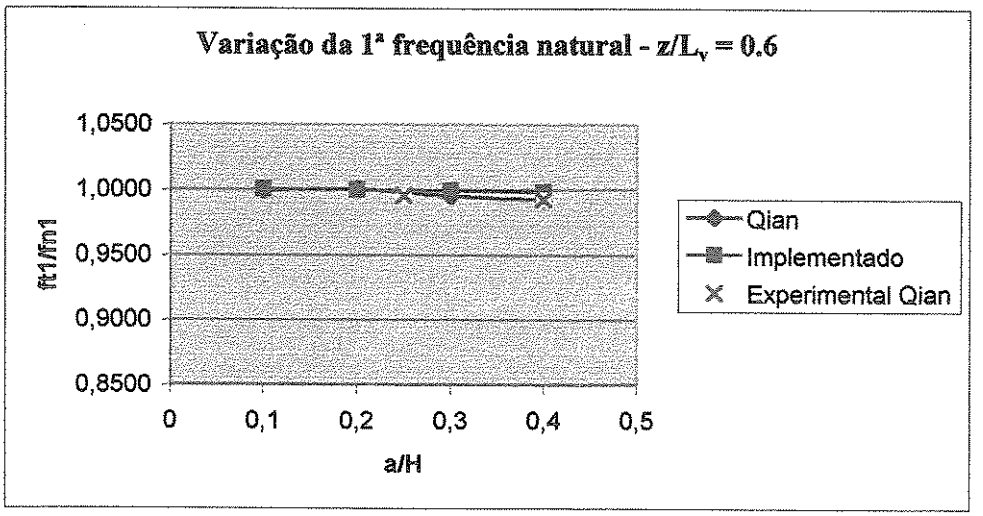


Figura 3.5 – Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.6

O gráfico apresentado na figura 3.6 mostra a variação da segunda freqüência natural para uma viga contendo uma trinca localizada a uma distância da extremidade engastada igual a 55% do comprimento total da viga. Observa-se uma acentuada diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Diferente do que ocorre para primeira freqüência, tem-se para este caso uma boa concordância entre o modelo implementado e os reportados por Qian, mostrando que os modelos apresentam rigidezes equivalentes.

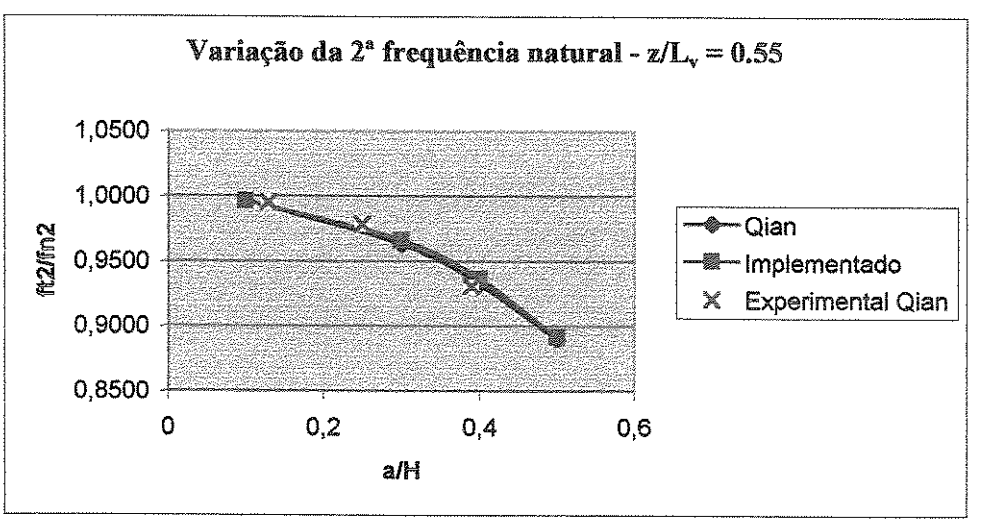


Figura 3.6 – Variação da 2ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.55

O gráfico apresentado na figura 3.7 mostra a variação da terceira freqüência natural para uma viga contendo uma trinca localizada a uma distância da extremidade engastada igual a 30% do comprimento total da viga. Do mesmo modo que o gráfico anterior, observa-se a diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Diferente do que ocorre para primeira freqüência, tem-se para este caso uma boa concordância entre o modelo implementado e os de Qian, mostrando que os modelos apresentam rigidezes equivalentes.

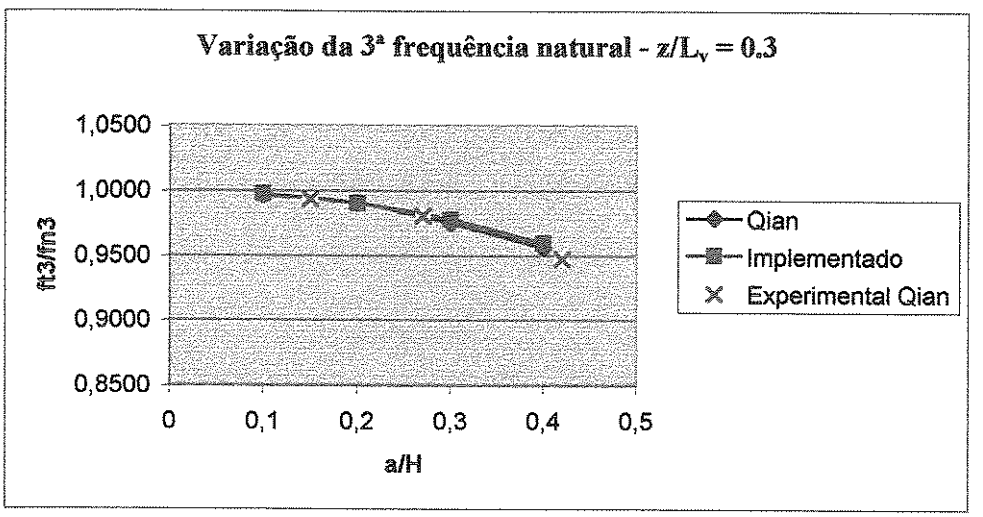


Figura 3.7 – Variação da 3ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v =0.3

O gráfico apresentado na figura 3.8 mostra a variação da terceira freqüência natural para uma viga contendo uma trinca localizada a uma distância da extremidade engastada igual a 70% do comprimento total da viga. Observa-se uma diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Diferente do que ocorre para os casos anteriores, o modelo implementado apresenta uma boa concordância apenas com os resultados experimentais.

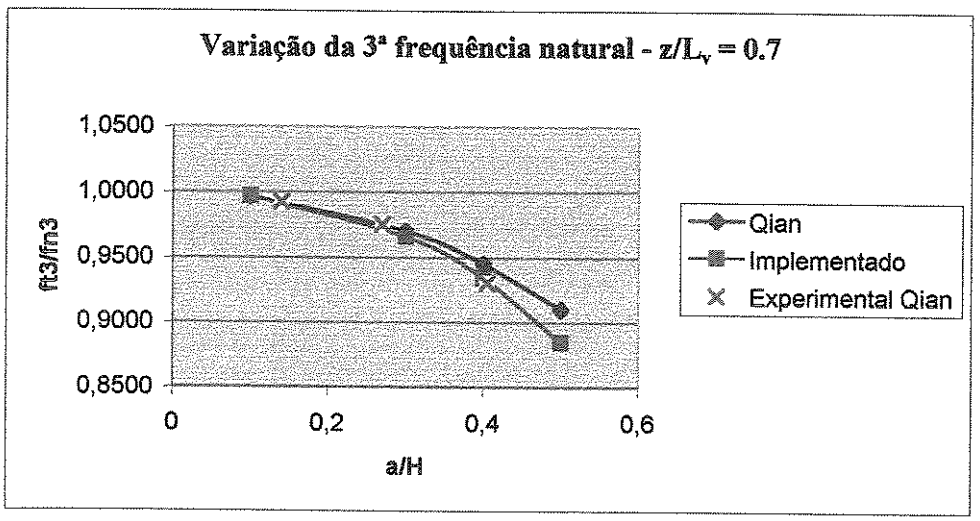


Figura 3.8 – Variação da 3ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v =0.7

De modo geral, observa-se que os valores para a primeira freqüência natural apresentaram divergência para as relações de a/H superiores a 0,2. Observou-se que para a primeira freqüência natural o modelo implementado apresentou resultados divergentes em relação aos modelos de Qian,

Após uma análise mais profunda do modelo de Qian, para a primeira freqüência natural verificamos que a distância da posição da trinca em relação à extremidade da viga (z) era múltipla da distância da trinca em relação à extremidade do elemento (L), ou seja, ao elaborar-se a malha utilizando-se elementos de mesmo tamanho, a posição da trinca iria coincidir com a posição de um nó no modelo de Qian. Este fato obrigou a elaboração de uma malha com elementos de diferentes tamanhos para garantir que a posição da trinca (z/L_v) coincidisse com a posição na região central de um elemento, o que não acontecia para os casos das 2ª e 3ª freqüências naturais.

Interpretamos, portanto, que as malhas apresentadas por Qian foram elaboradas com elementos de mesmo comprimento e que a posição da trinca era simulada através da implementação do elemento trincado sempre à esquerda da posição mencionada. Então

procedemos as simulações adicionais para os casos citados anteriormente utilizando-se desta correção e comparamos novamente apenas para os casos da primeira freqüência:

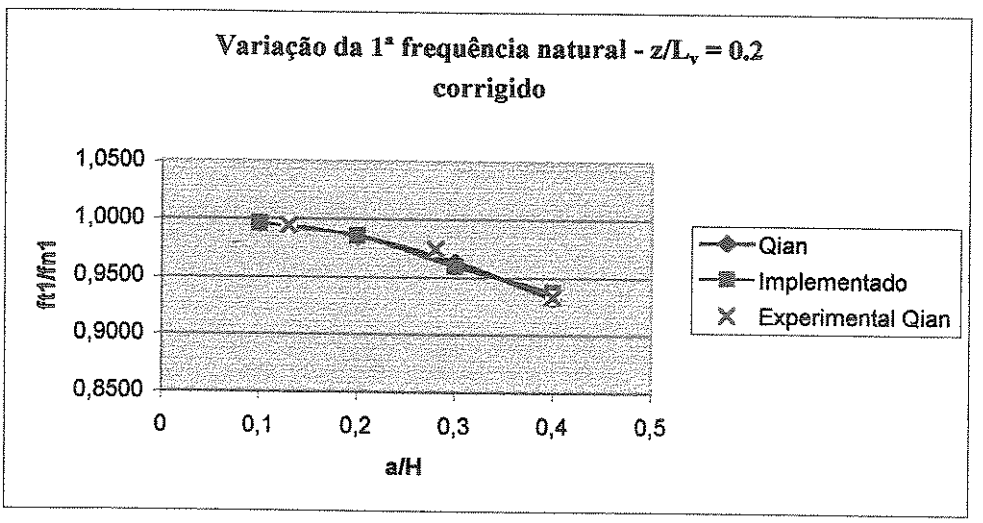


Figura 3.9 – Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.2

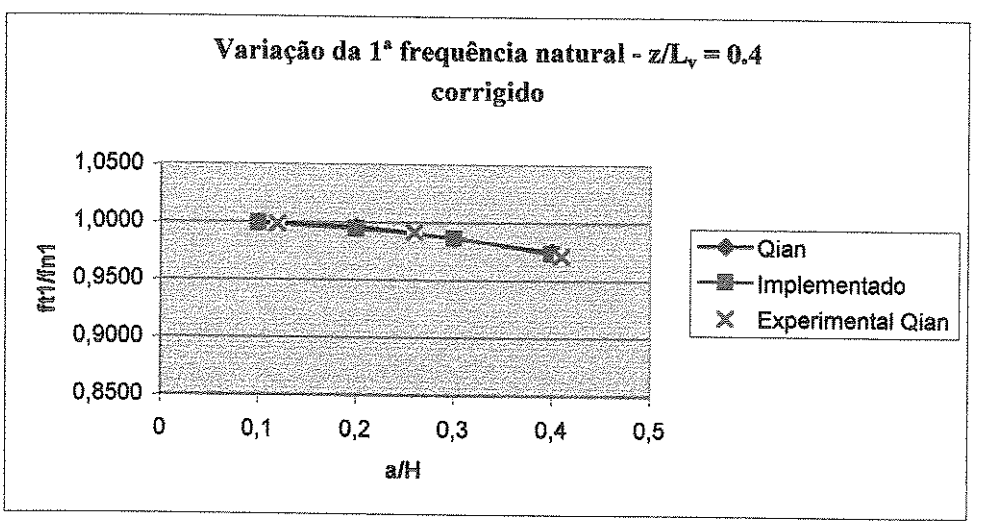


Figura 3.10 – Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.4

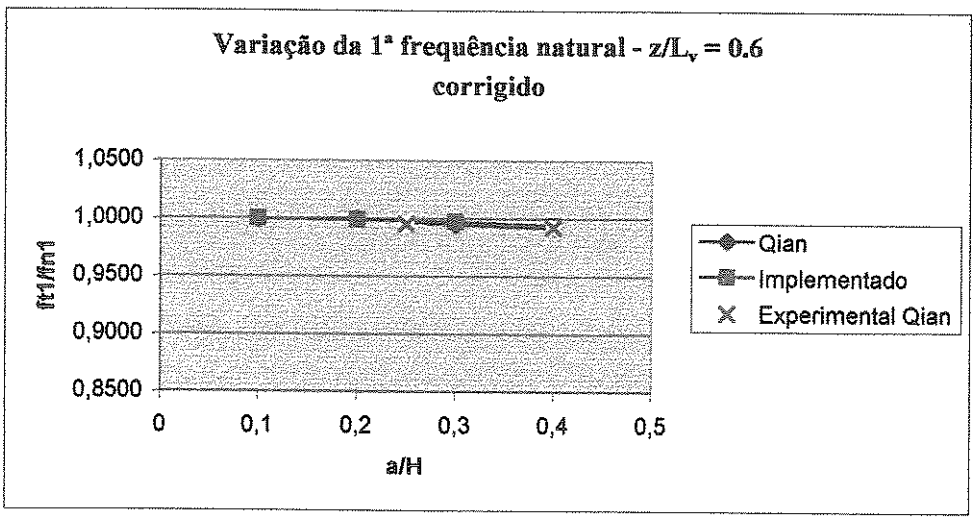


Figura 3.11 – Variação da 1ª freqüência natural em função de a/H e posição z/L_v=0.6

Nas figuras 3.9, 3.10 e 3.11 verifica-se que a divergência mostrada inicialmente (figuras 3.4, 3.6 e 3.7) diminuiu significativamente tendendo a resultados aparentemente coincidentes, este fato mostra que a diferença no comportamento dos modelos está associada à configuração da malha.

Observa-se que a curva de variação da primeira freqüência natural está associada à posição da trinca, ou seja, quanto mais próximo a trinca estiver da extremidade engasta mais acentuada será a queda da freqüência relativa em função do comprimento da trinca. Este fato ocorre devido ao modo de vibrar da viga para a primeira freqüência que submete a trinca a maiores aberturas na região próxima ao engastamento.

Para as posições da segunda e terceira freqüência os resultados reportados por Qian coincidiram com os do modelo implementado.

Desta forma foi possível desenvolver o modelo implementado que tivesse comportamento dinâmico equivalente ao simulado por Qian.

3.3 Análise de Convergência

Com objetivo de avaliar o efeito do número de elementos de uma malha de elementos finitos para uma viga, foi realizada uma análise de convergência. Nesta análise foram elaboradas malhas de elementos finitos com diferentes números de elementos representando uma mesma viga de seção retangular. Para todos os casos utilizou-se do elemento implementado na região central da viga. Foi realizada análise modal numérica para as malhas na condição livre-livre.

Foram utilizados os seguintes parâmetros dimensionais para a viga:

- Comprimento L_v=200mm;
- Altura H=7,8mm;
- Base B=1mm;

E para o material foi assumido o aço, com as seguintes propriedades:

- Módulo de elasticidade E=210Gpa;
- Coeficiente de Poisson ν=0,28;
- Densidade ρ=7860 kg/m^3;

A partir destes parâmetros foram elaboradas as malhas com 1 elemento, 3, 9, 19 e 39 elementos considerando comprimento de trinca a/H = 0,2 e 0,5. Os resultados numéricos são apresentados nas figuras 3.12, 3.13 e 3.14:

Na figura 3.12 temos o efeito do número de elementos utilizados na malha para a primeira freqüência natural considerando comprimentos de trincas diferentes. É possível verificar que a partir de nove elementos os resultados convergem apresentando uma variação de 0,1% em relação ao modelo com 39 elementos.

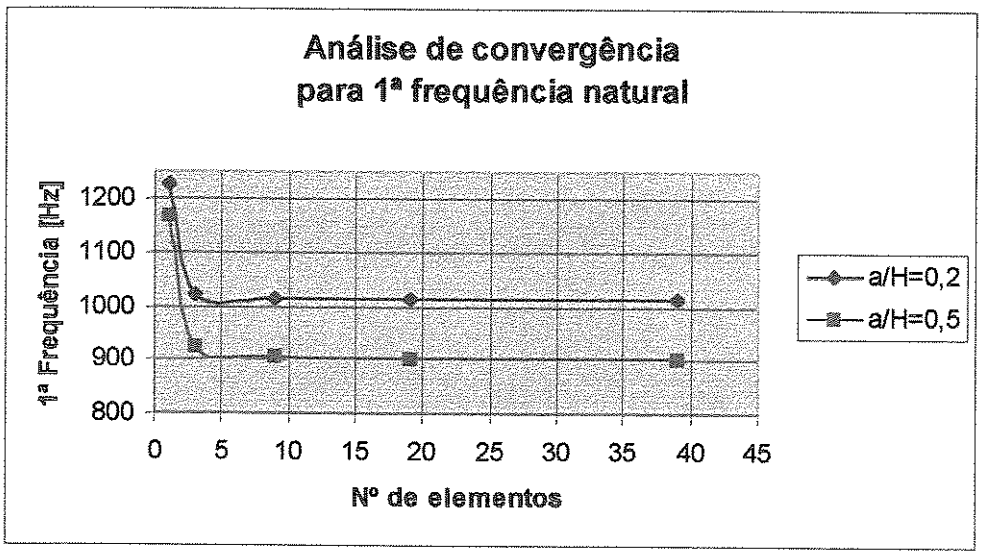


Figura 3.12 – Variação da 1ª freqüência natural em função do número de elementos.

A figura 3.13 apresenta o efeito do número de elementos para a segunda freqüência natural. Neste caso tem-se uma faixa de instabilidade entre três e nove elementos, e a partir de 19 elementos, os resultados convergem com variação de 0,7% em relação ao modelo com 39 elementos.

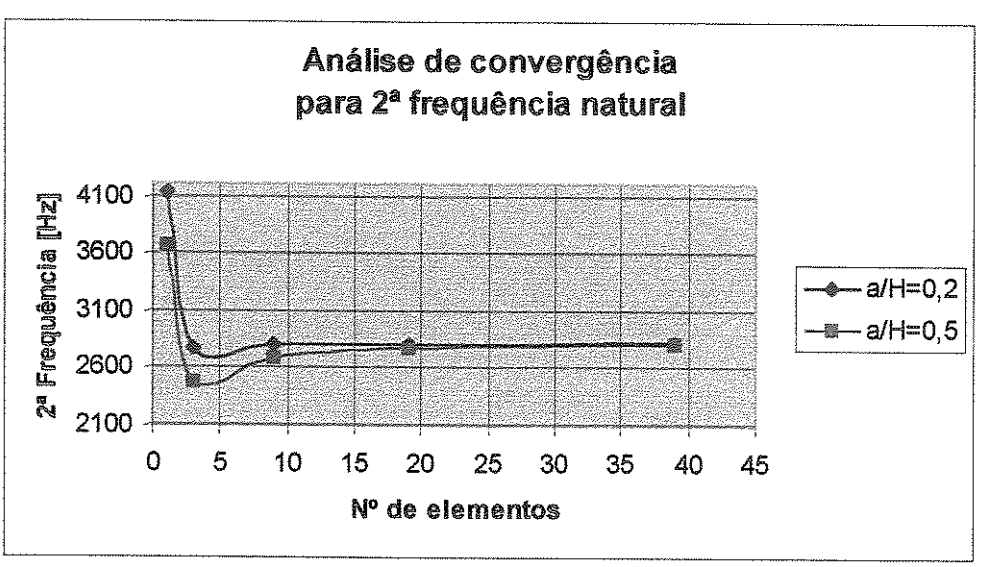


Figura 3.13 – Variação da 2ª freqüência natural em função do número de elementos.

Na figura 3.14 é possível verificar a convergência dos resultados para terceira freqüência a partir de cinco elementos e tem-se uma variação de 1,4% entre os valores do modelo com nove elementos e 39 elementos.

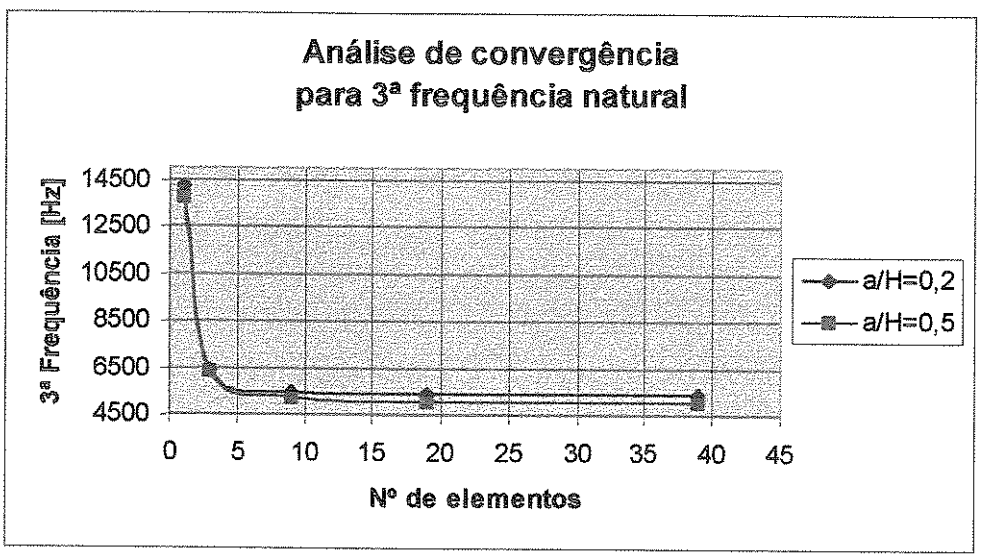


Figura 3.14 – Variação da 3ª freqüência natural em função do número de elementos.

De um modo geral foi possível identificar uma boa convergência dos resultados a partir da utilização de nove elementos no modelo para as três primeiras freqüências naturais. Também foi verificado que a partir de nove elementos existe a convergência do efeito do comprimento da trinca.

Capítulo 4

Análise Modal Experimental

Com objetivo de se validar os resultados da simulação numérica do elemento implementado, foi realizada uma análise modal experimental de quatro barras com diferentes comprimentos de trinca e uma barra isenta de trinca sujeita a uma a condição de contorno livre-livre.

4.1 Confecção das amostras

Foram confeccionas cinco amostras em aço SAE 1018 de seção retangular com altura H = 30mm, largura B = 15mm e comprimento L =400mm, incluindo entalhe central em "V" com profundidade de 1mm. Foi utilizado o entalhe de 1mm a fim de minimizar a influência deste sobre a rigidez da amostra. Outra característica deste entalhe é de nuclear a trinca de forma padronizada e de se obter o estado de tensão semelhante à de uma superfície livre contendo uma trinca. Nos primeiros trabalhos realizados o efeito da trinca era obtido através de uma seção transversal serrada. As dimensões utilizadas são ilustradas na figura 4.1:

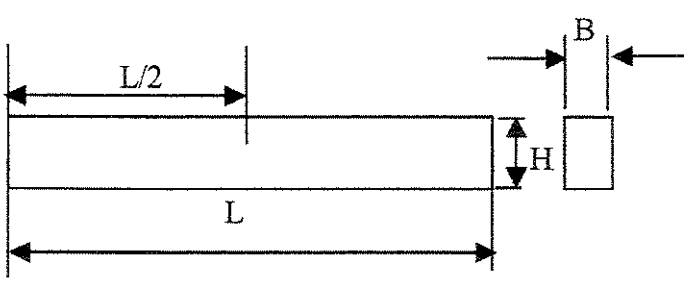


Figura 4.1 – Dimensões da amostra utilizada

As amostras foram submetidas a carregamento dinâmico utilizando equipamento para teste de fadiga MTS (Material Test System) e software de controle (Software TestStar II Versão 4.0D) pertencente ao Laboratório de Propriedades Mecânicas do Departamento de Engenharia de Materiais (DEMA/FEM/UNICAMP). Para se nuclear as trincas foram necessários se determinar um ciclo de tensões dinâmicas que excedessem o limite de resistência à fadiga do material. Estas tensões foram estimadas utilizando conceito de resistência de materiais para uma viga bi-apoiada conforme mostrada na figura 4.2. Uma vez nucleadas as trincas, estas foram monitoradas visualmente durante o ensaio até atingirem os comprimentos médios pré-determinados, ou seja, a igual a 6, 12, 18 e 24 mm (figura 4.3), onde uma das amostras foi mantida isenta de trinca para ser utilizada como referencial.

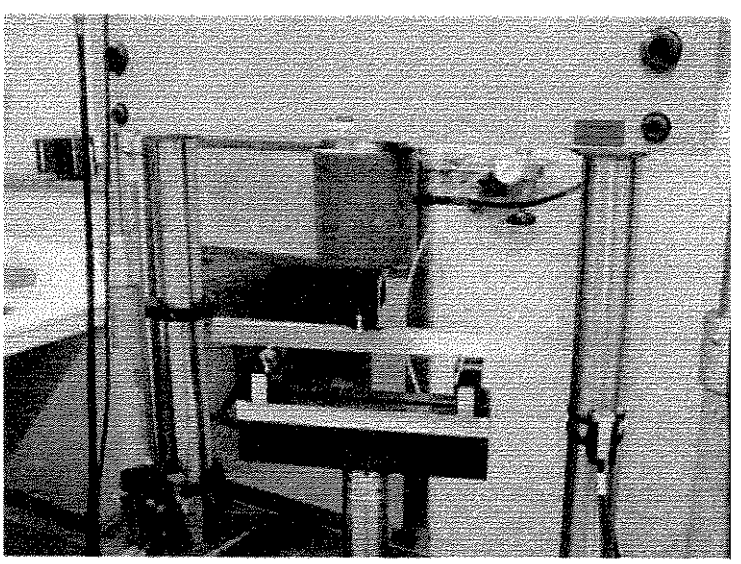


Figura 4.2 – Nucleação e propagação da trinca por fadiga

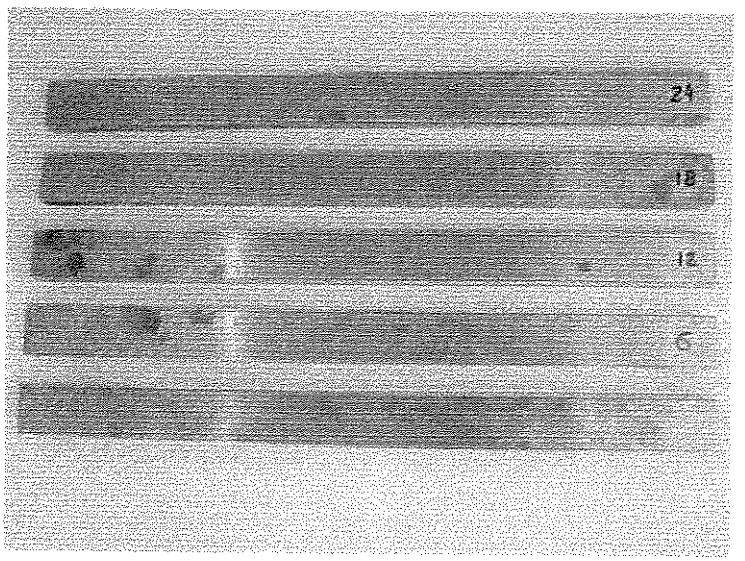
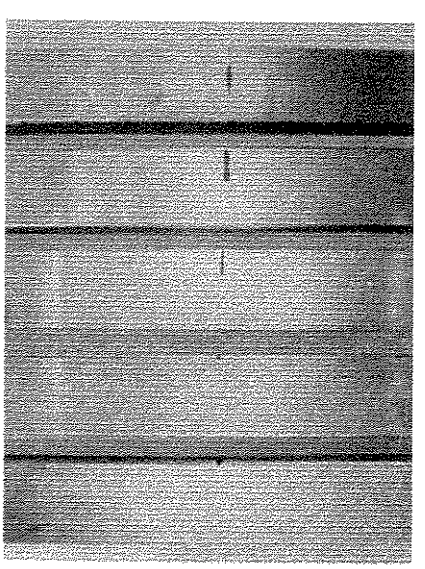
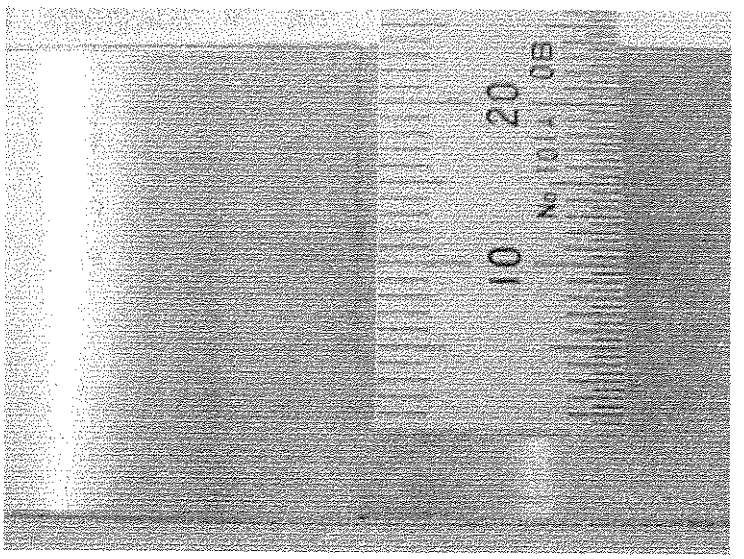


Figura 4.3 Amostras de vigas trincadas obtidas

As trincas foram identificadas através do método de inspeção por líquido penetrantes, que permitiu monitorar a propagação das trincas e atingir os comprimentos médios pré-determinados. A figura 4.4 mostra as trincas identificadas:



(a)



(b)

Figura 4.4 – (a) Vista geral contendo todas amostras com as respectivas trincas
(b) Detalhe para viga contendo trinca de 24mm

4.2 Teste Modal

O estudo experimental de vibração estrutural contribui para melhor compreensão e controle de vários fenômenos associados à vibração encontrados na prática. Os principais objetivos da análise modal experimental (EWINS, 1984) são identificar as freqüências naturais; fatores de amortecimento e as formas dos modos de uma estrutura a partir de dados experimentais;

No caso deste trabalho, a análise modal experimental foi utilizada para identificar as freqüências e as formas dos modos experimentais para as cinco vigas contendo diferentes comprimentos de trinca, as quais serão utilizadas para descrever a influência do tamanho da trinca na flexibilidade da viga.

O primeiro passo é a obtenção das funções de resposta em freqüência (FRF). Neste caso utilizou-se um único ponto de excitação e 21 pontos de resposta, em seguida estes dados são processados e os parâmetros modais identificados. Na execução da análise modal experimental a

principal tarefa é encontrar um conjunto de parâmetros modais que melhor represente as FRF's medidas.

Foi realizada uma análise modal experimental no domínio do tempo. Este método é indicado para estruturas cujas FRF's exibem modos bem definidos e apresentem baixo fator de amortecimento.

4.3 Execução do experimento

O experimento foi realizado adquirindo se os sinais de resposta das vigas mediante a excitação senoidal, com freqüência variável de 100 Hz a 10.000Hz. O ponto de excitação está mostrado na figura 4.5, e as medições foram realizadas em 22 pontos incluindo o ponto de excitação utilizando-se de um sensor de velocidade laser.

As FRF's foram adquiridas através do software CADA-X 3.5.e/LMS, que permitiu o processamento do sinal e identificação das freqüências naturais através do aplicativo de análise modal.

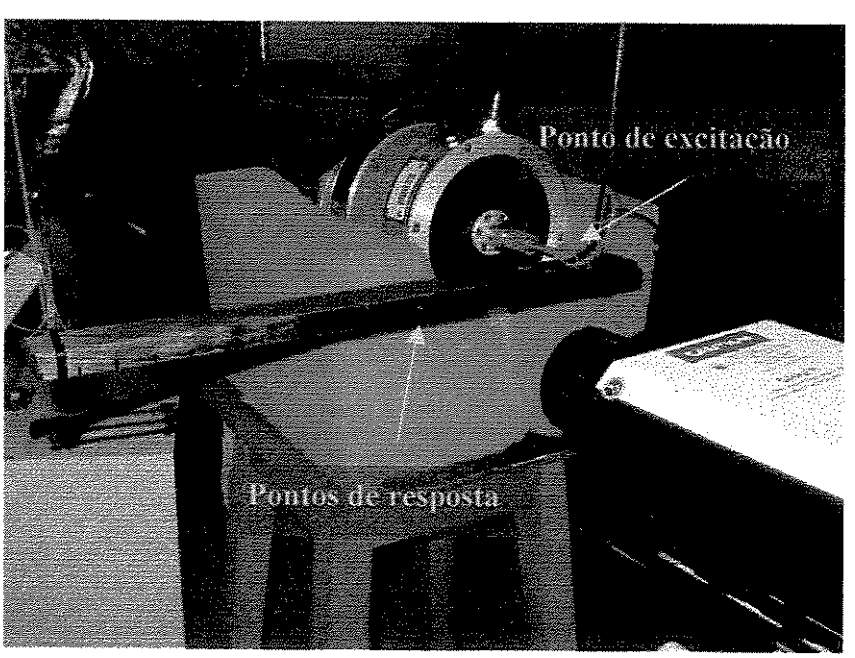


Figura 4.5 – Pontos de excitação e resposta

Na figura 4.6 é mostrada a configuração do sistema de aquisição de dados do Laboratório de Vibrações do Departamento de Mecânica Computacional (DMC/FEM/Unicamp), que foi utilizado na análise modal experimental. O sistema de aquisição é composto pelos equipamentos descritos na tabela 4.1:

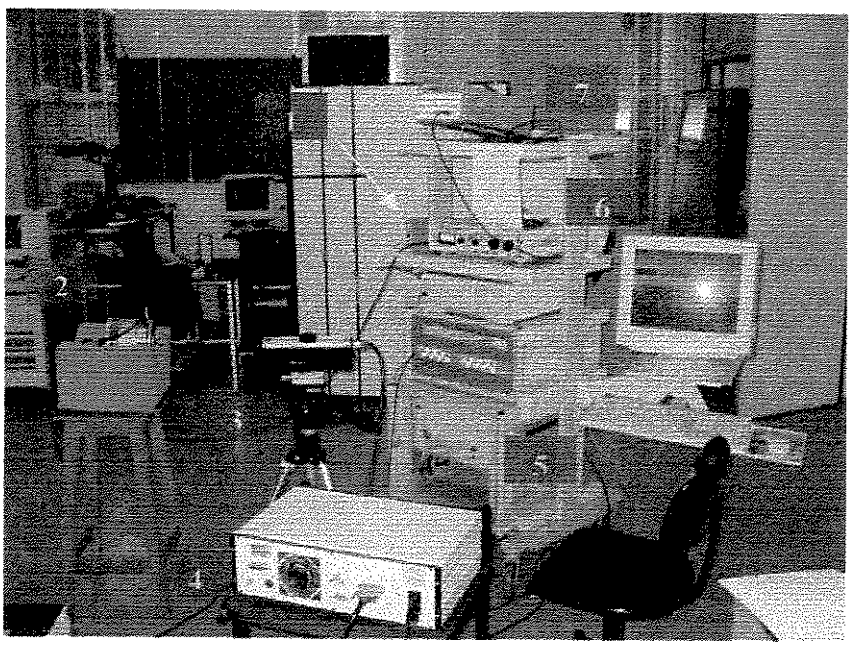


Figura 4.6– Vista geral da montagem do experimento

Tabela 4.1 – Equipamentos utilizados

Item	Equipamento
1	ICP PWR Supply model 482A05
2	Shaker Gearing & Watson LDT
3	Laser Polytec OFV 303 Sensor Head
4	Polytec OFV 3001 s Vibrometer Controller
5	Hewlett Packard E1421B Mainframe
6	GW Power amplifier
7	Hewlett Packard 3314A function generator
8	PC Computer Pentium III

4.4 Comparação dos resultados dos modelos numérico e experimental

Usando o modelo computacional implementado, foi resolvido o problema para viga livre-livre, identificando-se as freqüências naturais e as respectivas formas dos modos. Nos modelos foram utilizados os seguintes parâmetros:

- Módulo de elasticidade E=206Gpa;
- Coeficiente de Poisson ν=0,28;
- Densidade ρ=7850 kg/m^3
- Dimensões: comprimento L=400mm, altura H=30mm e base B=15mm;

A malha foi elaborada preservando a localização dos pontos de medição, porém para incluir o efeito da trinca foi adicionado na posição central o elemento trincado (n° 12) implementado (figura 4.7).

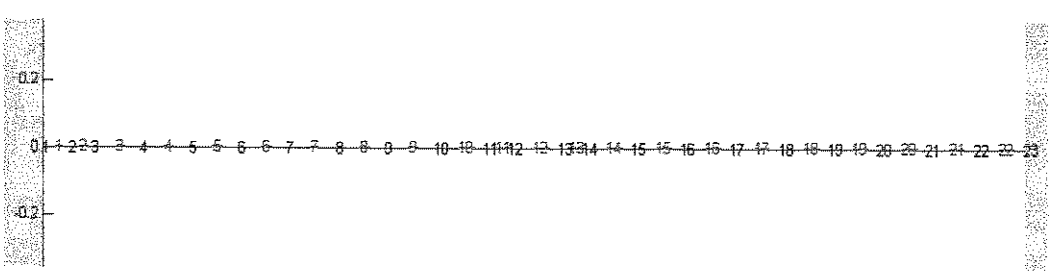


Figura 4.7 – Malha considerando a trinca no elemento central (n°12)

Foram elaboradas quatro malhas de elementos finitos considerando a trinca no elemento central com objetivo de representar as condições utilizadas no experimento. Em cada uma das malhas o elemento trincado considerava o comprimento de trinca correspondente às amostras submetidas ao teste modal, ou seja, o comprimento de trinca no elemento central igual a 6, 12, 18 e 24 mm respectivamente. Foi elaborada uma malha com elemento convencional para representar a parte da viga isenta de trinca.

4.5 Resultados obtidos

Do mesmo modo que o capítulo anterior, as comparações entre os valores experimentais e numéricos serão mostradas através de gráficos que expressam a variação da freqüência relativa em função do comprimento relativo da trinca. A freqüência relativa será dada por *fti/fni*, onde *fti* é a freqüência natural do modo *i* encontrada para a respectiva relação *a/H* (comprimento relativo da trinca) e *fni* a freqüência natural para o modo *i* considerando a viga isenta de trinca

O gráfico apresentado na figura 4.8 mostra a variação da primeira freqüência natural. Tanto para o modelo implementado, quanto para o modelo experimental, observa-se uma acentuada diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Tem-se para este caso pouca divergência entre os resultados numéricos e experimentais.

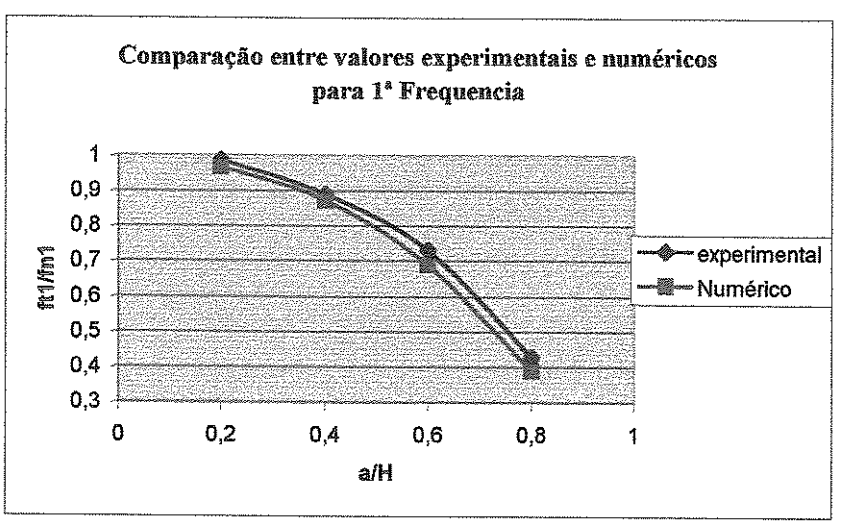


Figura 4.8 – Gráfico comparativo para primeira freqüência natural

O gráfico apresentado na figura 4.9 mostra a variação da segunda freqüência natural. Em ambos os casos observam-se que a freqüência relativa fica praticamente constante em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Tem-se para este caso (figura 4.9) uma boa concordância entre o modelo implementado e os resultados obtidos do modelo experimental.

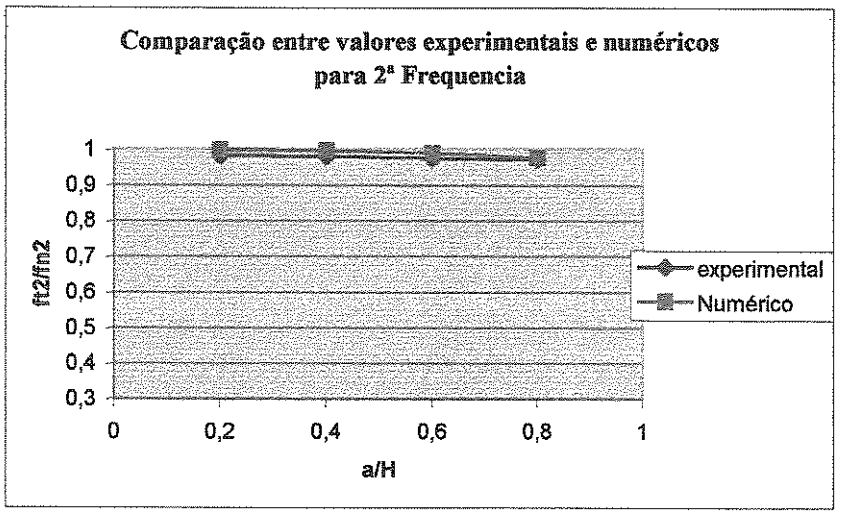


Figura 4.9 – Gráfico comparativo para segunda freqüência natural

O gráfico apresentado na figura 4.10 mostra a variação da terceira freqüência natural. Em ambos os casos observam-se uma acentuada diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Neste caso as curvas são praticamente coincidentes mostrando uma concordância entre o modelo implementado e os resultados obtidos do modelo experimental.

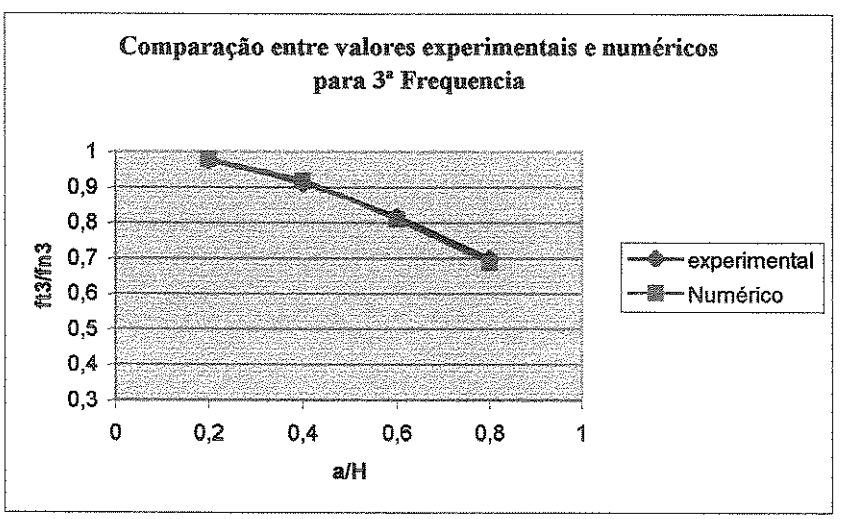


Figura 4.10 – Gráfico comparativo para terceira freqüência natural

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

O gráfico apresentado na figura 4.11 mostra a variação da quarta freqüência natural. Em ambos os casos observam-se uma acentuada diminuição da freqüência relativa em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Porém neste caso observa-se uma significativa divergência entre os resultados do modelo implementado e o modelo experimental. A divergência entre os valores tem pequena evolução com o aumento do comprimento de trinca.

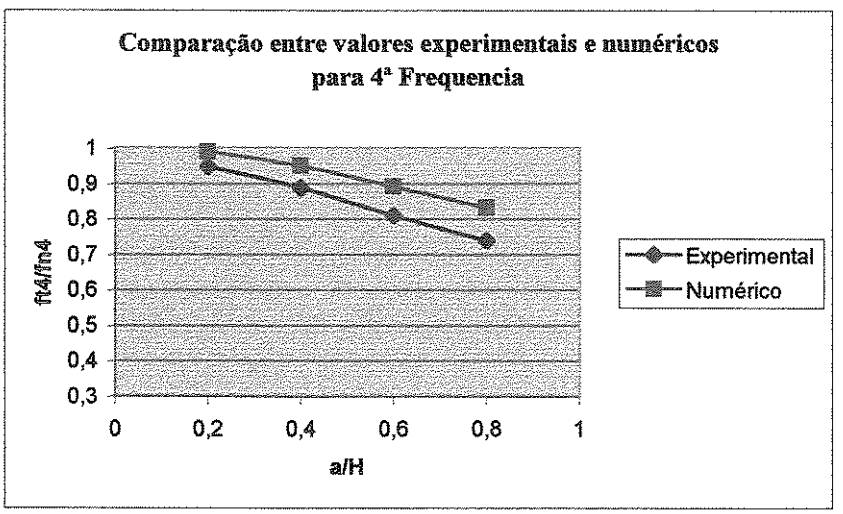


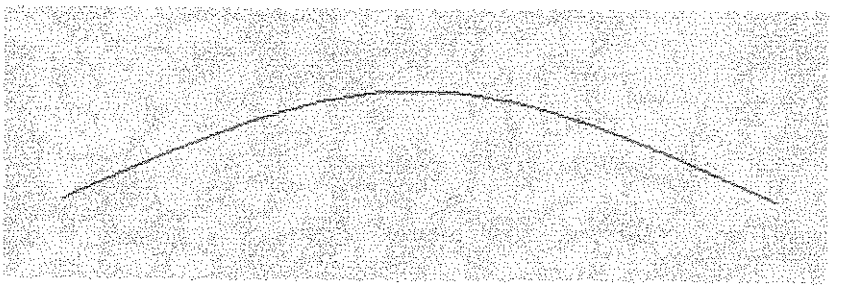
Figura 4.11 – Gráfico comparativo para quarta freqüência natural

Na tabela 4.2 são mostrados os resultados dos modelos experimental e numérico para as quatro primeiras freqüências naturais e diferentes comprimentos de trinca na viga considerada. Tem-se nesta tabela os valores para os erros relativos associados para cada configuração de trinca utilizada.

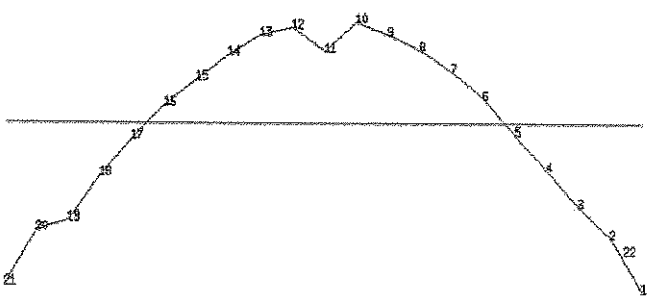
Tabela 4.2– Resultados

Freq	Intacto[%]			a=6mm[%]			a=12mm[%]			a=18mm[%]			a=24mm[%]		
[Hz]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]
1	962,1	967,3	0,5	949,4	935,3	1,5	856,6	843,1	1,6	702,5	666,1	5,2	410,2	375,6	8,4
2	2594,8	2576,8	0,7	2548,8	2573,7	1,0	2544,7	2564,5	0,8	2527,1	2546,4	0,8	2520,1	2511,3	0,3
3	4850,6	4830,5	0,4	4724,8	4723,9	0,0	4414,6	4421,1	0,1	3955,3	3903,4	1,3	3382,8	3314,9	2,0
4	5949,1	6405,4	7,7	5639,5	6329,4	12,2	5278,0	6078,0	15,2	4815,5	5705,6	18,5	4398,1	5319,0	20,9

As figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15 mostram a comparação entre as formas dos modos obtidas para os modelos numérico e experimental, considerando a viga isenta de trinca:

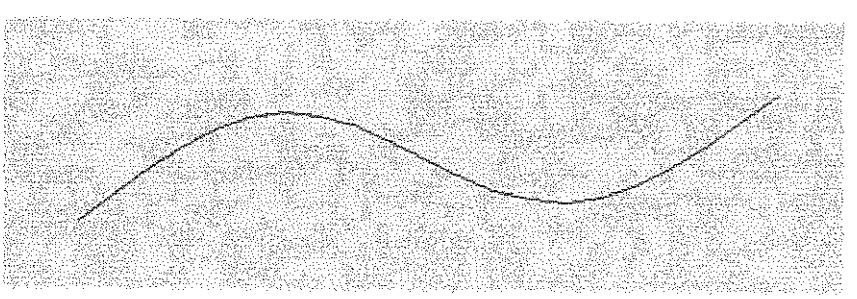


(a)

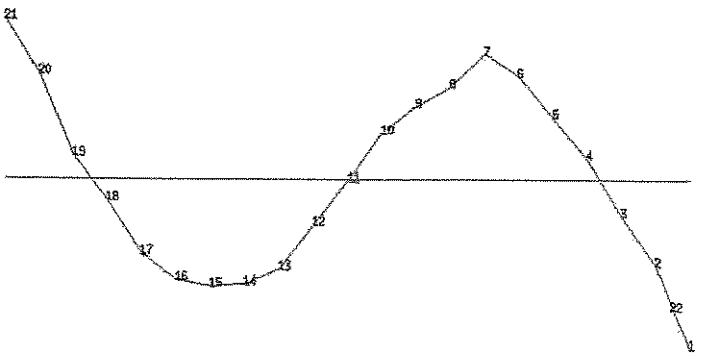


(b)

Figura 4.12 – Primeiro modo - (a) Numérico f1=967,3 Hz; (b) Experimental f1= 962,1 Hz.

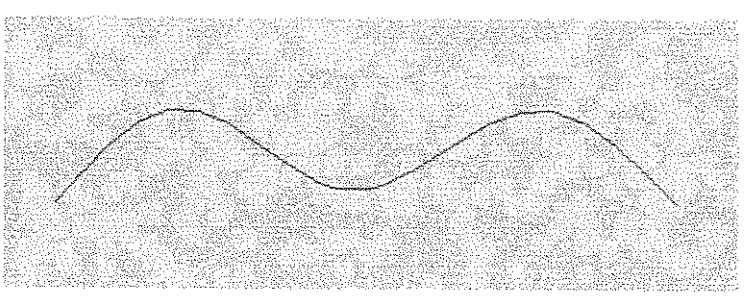


(a)

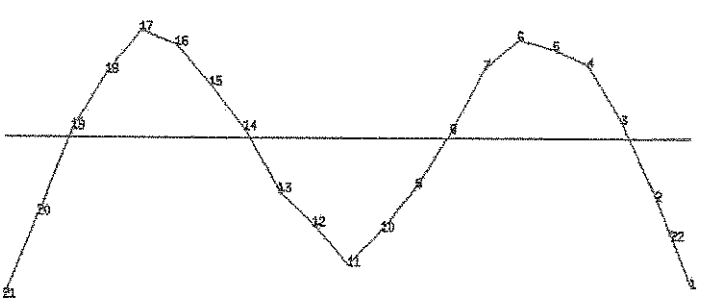


(b)

Figura 4.13 – Segundo modo - (a) Numérico f2=2576,8 Hz; (b) Experimental f2= 2594,8 Hz.

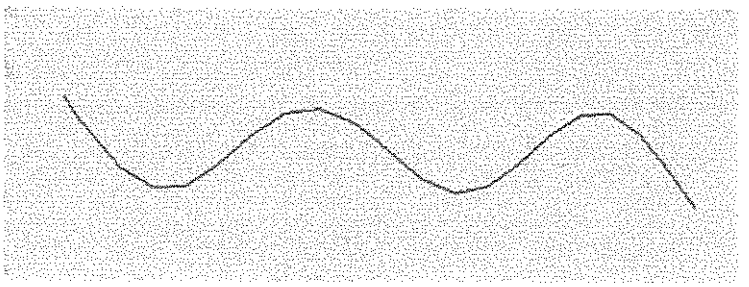


(a)

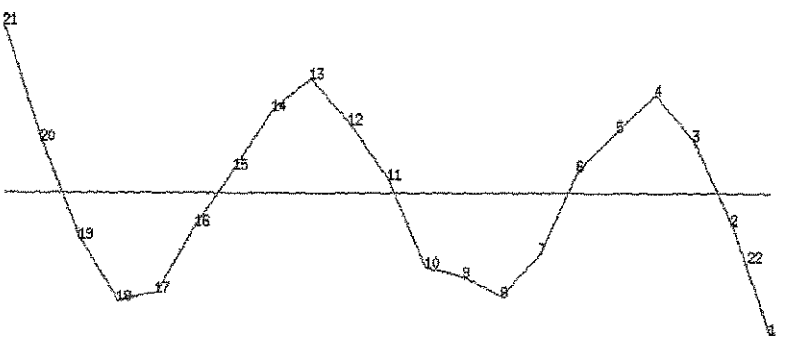


(b)

Figura 4.14 – Terceiro modo - (a) Numérico f3=4830,5 Hz; (b) Experimental f3= 4850,6 Hz.



(a)



(b)

Figura 4.15– (a) Quinto modo numérico f5=7584,1 Hz;
(b) Quarto modo experimental f4= 5949,1 Hz.

4.6 Comparação dos resultados dos modelos numérico e experimental incluindo o efeito da zona plástica

Neste item iremos abordar a simulação numérica considerando o efeito do raio da zona plástica na ponta da trinca. O elemento utilizado terá em sua matriz de rigidez coeficientes desenvolvidos a partir da teoria apresentada no Capítulo 2.

Nos modelos numéricos com efeito da zona plástica na ponta da trinca serão utilizados diferentes relações de σ/σ_{yp} onde σ é a tensão resultante do carregamento utilizado e σ_{yp} é o limite de escoamento do material. Os resultados serão comparados graficamente com os mesmos

carregamento dinâmico. As figuras 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19 mostram os valores obtidos para as relações σ/σ_{yp} = 0,2; 0,4; 0,6 e 0,8 e as freqüências relativas serão dadas por *fti/fni*, onde *fti* é a freqüência natural do modo *i* encontrada para a respectiva relação *a/H* (comprimento relativo da trinca) e *fni* a freqüência natural para o modo *i* considerando a viga isenta de trinca

O gráfico apresentado na figura 4.16 mostra a variação da primeira freqüência natural para valores experimentais e valores numéricos para diferentes tamanhos da zona plástica na ponta da trinca. Para todas as condições a trinca é localizada na região central de uma viga na condição livre-livre. Observa-se uma acentuada diminuição das freqüências relativas em função do aumento do comprimento relativo da trinca para todas as condições, embora as curvas não sejam coincidentes. Nesta figura nota-se também, que as divergências encontradas entre as curvas aumentam com o tamanho da trinca.

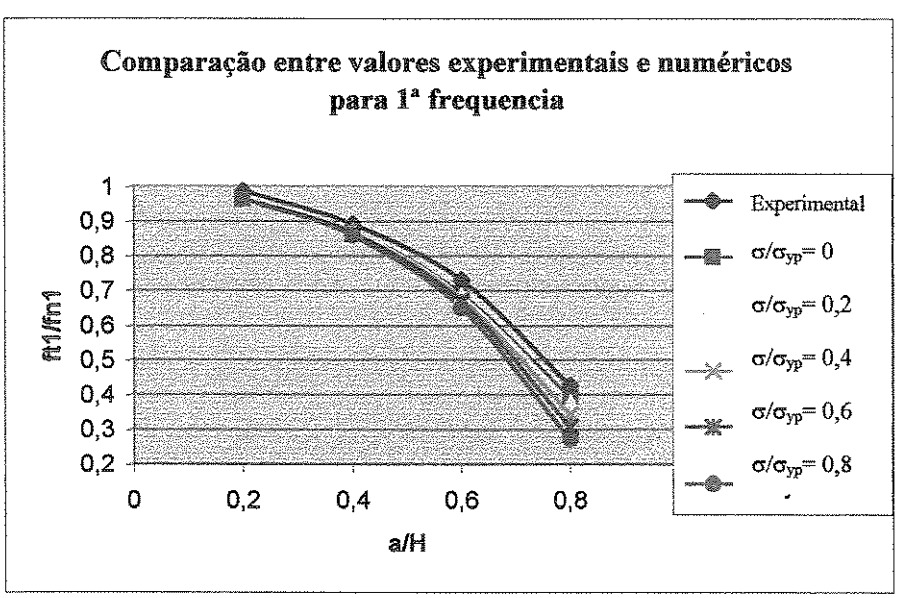


Figura 4.16 – Gráfico comparativo para primeira freqüência natural

O gráfico apresentado na figura 4.17 mostra a variação da segunda freqüência natural para valores experimentais e valores numéricos para diferentes tamanhos da zona plástica na ponta da trinca. Observa-se tanto para valores experimentais como para valores numéricos considerando σ/σ_{yp} =0, que as freqüências naturais são praticamente constantes em relação ao comprimento de trinca. Porém para as relações de σ/σ_{yp} =0,6 e 0,8 as freqüências relativas tem uma acentuada diminuição em função do aumento do comprimento relativo da trinca para valores de *a/H* superiores a 0,6.

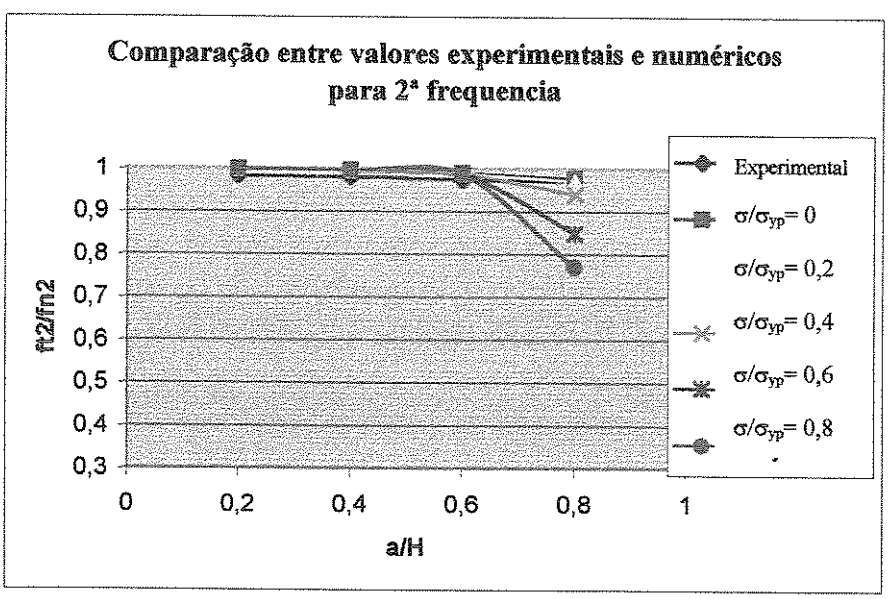


Figura 4.17 – Gráfico comparativo para segunda freqüência natural

O gráfico apresentado na figura 4.18 mostra a variação da terceira freqüência natural para valores experimentais e valores numéricos para diferentes tamanhos da zona plástica na ponta da trinca. Observa-se uma acentuada diminuição das freqüências relativas em função do aumento do comprimento relativo da trinca para todas as condições, embora as curvas não sejam coincidentes. Na figura 4.18 nota-se também que as divergências encontradas entre as curvas aumentam com o tamanho da trinca.

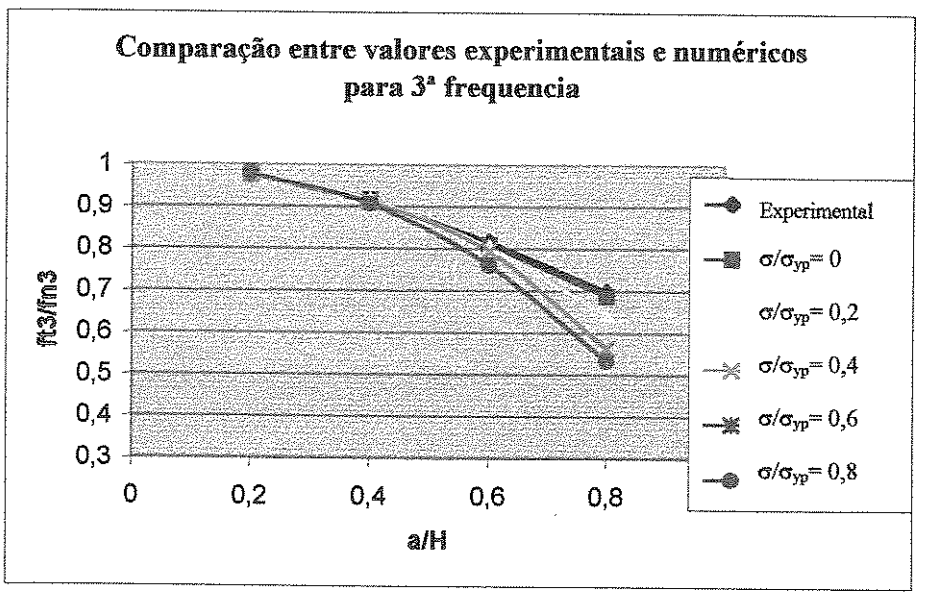


Figura 4.18 – Gráfico comparativo para terceira freqüência natural

No gráfico apresentado na figura 4.19, tem-se para as relações de tensão uma acentuada diminuição das freqüências relativas em função do aumento do comprimento relativo da trinca. Neste caso destaca-se a divergência entre os valores numéricos e experimentais para condição isenta do efeito da zona plástica.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

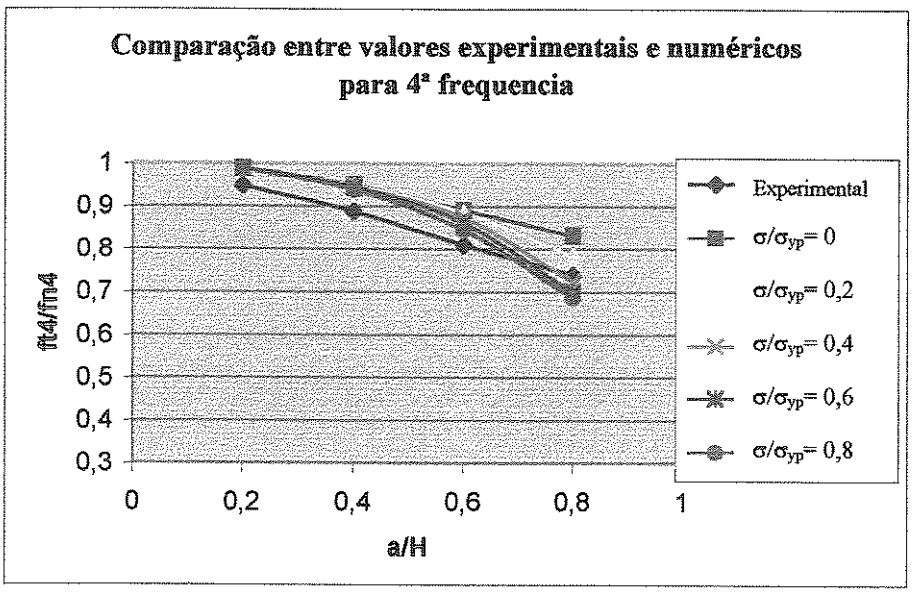


Figura 4.19 – Gráfico comparativo para quarta freqüência natural

Nas tabelas 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6 são mostrados os valores numéricos obtidos para as relações σ/σ_{yp} = 0,2; 0,4; 0,6 e 0,8, sendo comparadas com o modelo experimental . Nestas tabelas também são apresentados os erros relativos:

Tabela 4.3– Valores das freqüências considerando a relação $\sigma/\sigma_{yp} = 0,2$

Freq	Intacto[%]			a=6mm[%]			a=12mm[%]			a=18mm[%]			a=24mm[%]		
[Hz]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]
1	962,1	967,3	0,5	949,4	935,1	1,5	856,6	842,3	1,7	702,5	663,4	5,6	410,2	363,7	11,3
2	2594,8	2576,8	0,7	2548,8	2573,7	1,0	2544,7	2564,4	0,8	2527,1	2546,1	0,8	2520,1	2500,8	0,8
3	4850,6	4830,5	0,4	4724,8	4723,1	0,0	4414,6	4417,9	0,1	3955,3	3887,3	1,7	3382,8	3114,0	7,9
4	5949,1	6405,4	7,7	5639,5	6328,7	12,2	5278,0	6073,2	15,1	4815,5	5679,8	17,9	4398,1	5026,8	14,3

Tabela 4.4– Valores das freqüências considerando a relação $\sigma/\sigma_{yp} = 0,4$

Freq	Intacto[%]			a=6mm[%]			a=12mm[%]			a=18mm[%]			a=24mm[%]		
[Hz]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]
1	962,1	967,3	0,5	949,4	934,5	1,6	856,6	839,7	2,0	702,5	655,8	6,7	410,2	333,7	18,6
2	2594,8	2576,8	0,7	2548,8	2573,6	1,0	2544,7	2564,2	0,8	2527,1	2545,1	0,7	2520,1	2427,4	3,7
3	4850,6	4830,5	0,4	4724,8	4720,9	0,1	4414,6	4408,5	0,1	3955,3	3840,4	2,9	3382,8	2725,9	19,4
4	5949,1	6405,4	7,7	5639,5	6326,5	12,2	5278,0	6059,1	14,8	4815,5	5609,1	16,5	4398,1	4641,1	5,5

Tabela 4.5– Valores das freqüências considerando a relação σ/σ_{yp} = 0,6

Freq	Intacto[%]			a=6mm[%]			a=12mm[%]			a=18mm[%]			a=24mm[%]		
[Hz]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]
1	962,1	967,3	0,5	949,4	933,4	1,7	856,6	835,6	2,5	702,5	643,5	8,4	410,2	296,6	27,7
2	2594,8	2576,8	0,7	2548,8	2573,5	1,0	2544,7	2563,9	0,8	2527,1	2543,5	0,6	2520,1	2187,4	13,2
3	4850,6	4830,5	0,4	4724,8	4717,2	0,2	4414,6	4392,8	0,5	3955,3	3766,7	4,8	3382,8	2592,6	23,4
4	5949,1	6405,4	7,7	5639,5	6322,9	12,1	5278,0	6036,7	14,4	4815,5	5510,7	14,4	4398,1	4470,4	1,6

Tabela 4.6– Valores das freqüências considerando a relação σ/σ_{yp} = 0,8

Freq	Intacto[%]			a=6mm[%]			a=12mm[%]			a=18mm[%]			a=24mm[%]		
[Hz]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]	Exp [Hz]	Num [Hz].	Erro [%]
1	962,1	967,3	0,5	949,4	931,8	1,9	856,6	829,9	3,1	702,5	627,4	10,7	410,2	260,4	36,5
2	2594,8	2576,8	0,7	2548,8	2573,4	1,0	2544,7	2563,4	0,7	2527,1	2541,3	0,6	2520,1	1979,4	21,5
3	4850,6	4830,5	0,4	4724,8	4712,1	0,3	4414,6	4371,3	1,0	3955,3	3673,1	7,1	3382,8	2569,8	24,0
4	5949,1	6405,4	7,7	5639,5	6318,0	12,0	5278,0	6007,1	13,8	4815,5	5404,4	12,2	4398,1	4393,5	0,1

4.7 Discussão dos resultados

A realização da análise modal mostrou boa correlação entre os resultados experimentais e os encontrados através de simulação para as três primeiras freqüências. Conforme mostrado na figura 4.15, o modo associado à quarta freqüência na análise experimental corresponde ao quinto modo referente à quinta freqüência na análise numérica, este fato ocorre devido à análise numérica considerar os modos associados em todas as direções e na análise modal experimental a identificação dos modos foi realizada a partir de medições em uma única direção, ou seja, para uma melhor identificação do quarto modo na análise experimental seria necessário realizar medições nas demais direções.

No caso das simulações envolvendo a zona plástica na ponta da trinca, verificou-se que o elemento apresenta uma tendência esperada de redução da freqüência natural com o aumento da relação σ/σ_{yp} em todos os casos. Com exceção da segunda freqüência (figura 4.17) que apresentou um efeito mais acentuado na relação $\sigma/\sigma_{yp} = 0.8$.

Na comparação dos valores experimentais com os da zona plástica, verificou-se que no experimento não foi constatada qualquer influência da zona plástica, pois a curva numérica que mais se aproximou da experimental, foi a isenta de zona plástica. O fato do experimento não evidenciar o efeito da plasticidade na ponta da trinca se deve às pequenas deformações geradas pela força de excitação durante o experimento da análise modal.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Um elemento finito de viga trincada incluindo efeito de flexão e cisalhamento com 3 graus de liberdade por nó foi implementado em linguagem Matlab dentro do programa Meflab.

O comportamento simulado do modelo implementado mostrou boa concordância com os valores apresentados na literatura por Qian. Foi difícil a comparação com outros modelos da literatura devido às diferentes características da formulação destes modelos.

Numa análise modal experimental foi realizada em 5 amostras de vigas de aço de mesma dimensão, sendo uma sem trinca e 4 com diferentes comprimentos de trinca. Os resultados experimentais foram comparados com os simulados, onde o modelo apresentou boa concordância com os valores experimentais para as três primeiras freqüências naturais. Para a quarta freqüência verificou-se diferenças entre os valores, este fato está associado à imprecisão na identificação modal da quarta freqüência natural no processo de análise modal experimental.

Outro ponto importante é que tanto no experimento quanto no modelo observa-se que a curva da freqüência natural em função do comprimento da trinca está associada ao modo e à posição da trinca na viga, pois para o caso em que a trinca está localizada no centro da viga, percebe-se redução da freqüência natural mais acentuada no primeiro e terceiro modo por apresentarem pontos de inflexão nas proximidades da trinca. Constatou-se que nestas freqüências, os erros entre valores experimentais e numéricos aumentavam em função do

comprimento da trinca, já para a segunda freqüência onde a posição da trinca coincidia com o ponto de inflexão se manteve praticamente inalterada, o valor do erro se manteve estável.

No caso das simulações envolvendo a zona plástica na ponta da trinca, verificou-se que o elemento apresenta uma tendência esperada de redução da freqüência natural com o aumento da relação σ/σ_{yp} em todos os casos.

O estudo se mostrou bastante completo, pois foi possível elaborar comparações com valores da literatura e valores experimentais customizados para esta teoria, que permitiu estudar o modelo de maneira planejada utilizando-se de referencial confiável comprovando-se assim a precisão do modelo.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Explorar a influência da zona plástica na ponta da trinca com experimento mais adequado.
- Desenvolvimento de um novo elemento para vigas com seção transversal qualquer;
- Utilização do elemento implementado em métodos de localização de falhas em estruturas;

Referências Bibliográficas

Chondros, T. G.; Dimaragonas A. D.; Yao J. A consistent cracked bar vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 200(3), p. 303-313, august 1996.

Chondros, T. G.; Dimaragonas A. D.; Yao J. A continuous cracked beam vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, v. 215, p. 17-34, Feb. 1998.

Chondros, T. G.; Dimaragonas A. D.; Yao J. Vibration of a beam with a breathing crack. *Journal of Sound and Vibration*, v. 239, p. 57-67, 2001

Collins, Jack A. Failure of materials in mechanical design. 1st. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 1981, 629 p.

Dimarogonas, A. D.; Papadopoulos, C. A. Vibration of cracked shafts in bending. *Journal of sound and vibration*, v. 91, p. 583-593, Jan. 1983.

Dimaragonas, Andrew D. Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 55, p. 831-857, 1996.

Ewins, D. J. Modal Testing: Theory and Practice. 1st. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 1984, 269 p

Gounaris, G.; Dimaragonas A. A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis. *Computer & Structures*, v. 28, p. 309-313, 1988.

Hanselman, D.; Littlefield, B. Matlab 5 Versão do estudante - Guia do usuário. São Paulo: Makron Books, 1999, 413 p.

Hertzberg, Richard. Deformation and fracture mechanics of engineering materials. 1st. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 1976, 605 p.

Kisa, M.; Brandon, J.; Topcu, M. Free vibration of cracked beams by a combination of finite elements and component mode synthesis methods. *Computers & Structures*, v. 67, p. 215-223, Jan. 1998.

Kisa, M.; Brandon, J. The effects of closure of cracks on the dynamics of a cracked cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, v. 238, p. 1-18, Mar. 2000.

Krawczuk, M., Zak, A.; Ostachowicz W. Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 34, p. 61-73, 2000.

Krawczuk, M., Palacz, M.; Ostachowicz, W. The dynamic analysis of a cracked Timoshenko beam by the spectral element method. *Journal of Sound and Vibration*, v. 264, p. 1139-1153, 2003.

Papadopoulos, C. A.; Dimarogonas, A. D. Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack. *Journal of sound and vibration*, v. 117, p. 81-93, Jun. 1986.

Papadopoulos C. A.; Dimarogonas A. coupled longitudinal and bending vibrations of a cracked shaft. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, v. 110/1, January 1988.

Pavanello, R., Programa MEFLAB, Unicamp, 1995.

Qian, G. L.; Gu, S. N.; Jiang, J. S. The dynamic behavior and crack detection of a beam with a crack. *Journal of Sound and Vibration*, v. 138, p. 233-243, 1990.

Sekhar, A. S.; Balaji Prasad P. Dynamic analysis of a rotor system considering a slant crack in the shaft. *Journal of Sound and Vibration*, v. 208, p. 457-474, Jul. 1997.

Sekhar, A. S.;Prabhu, B.S. Vibration and stress fluctuation in cracked shafts. *Journal of Sound and Vibration*, v. 169, p. 655-667, Jul. 1994.

Tada, H.; Paris, P.C.; Irwin, G.R. The stress analysis of cracks handbook. 3rd. ed. New York: The American Society of Mechanical Engineers, 2000, 681p.

Tomasel, F. G.; Larrondo, H. A. Detection of cracks in cantilever beams: experimental set-up using optical techniques and theoretical modelling. *Journal of Sound and Vibration*, v. 228, p. 1195-1204, Jun. 1999.