

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA DE CAMPINAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE MATERIAIS

MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DO PROCESSO  
DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO DE AÇOS

MARIA CLARA FILIPPINI IERARDI

*Maria Clara Filippini Ierardi*

Trabalho apresentado à comissão  
de Pós-Graduação da Faculdade  
de Engenharia de Campinas, como  
parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Doutora  
em Engenharia Mecânica

42/89

*Este exemplar corresponde  
à redação final da tese  
defendida por Maria Clara  
Filippini Ierardi e  
aprovada pela Comissão*

*Julgadora em 03/9/89* CAMPINAS

- 1989 -

*Luciano J. Garcia*

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA  
DEPARTAMENTO DE MATERIAIS

Tese de : Doutorado

Título da Tese : Modelagem Matemática e Simulação do  
Processo de Lingotamento Contínuo de  
Aços

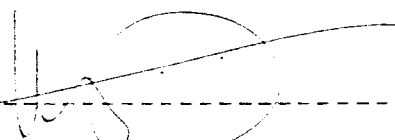
Autora : Maria Clara Filippini Ierardi

Orientador : Amauri Garcia

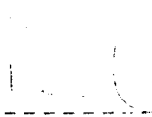
Aprovada por :



-----  
Prof. Dr. Amauri Garcia



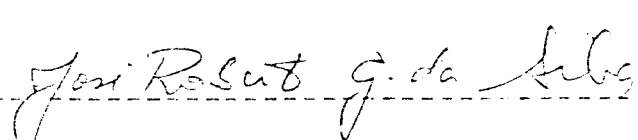
-----  
Prof. Dr. Mauricio Prates de Campos Filho



-----  
Prof. Dr. Paulo Roberto Mei



-----  
Prof. Dr. Odmar Simões Pires



-----  
Prof. Dr. José Roberto Gonçalves da Silva

Campinas, 3 de outubro de 1989

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Amauri Garcia pela orientação, amizade e incentivos manifestados no decorrer deste trabalho.

Ao Professor Mauricio Prates pelo apoio através do Núcleo de Automação Industrial.

Aos amigos Mário Ynoue, Pêrsio de Carvalho Sobrinho e Antonio Adel dos Santos que enriqueceram este trabalho com dados práticos e discussões, resultantes de suas vivências na indústria siderúrgica.

A Loraine Mondine pelo suporte na área computacional, muito importante no início deste trabalho.

Aos colegas Sérgio Button por várias colaborações e Rubens Caram Jr. pelas discussões, a Rita Helena Buso Jacon e Laerte Struziatto pela colaboração na parte experimental, a Aurélio Pires Neto pelos desenhos executados e Alex Trevisan pela montagem.

E a todas as pessoas que direta ou indiretamente participaram do desenvolvimento deste trabalho.

# MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO DE AÇOS

## RESUMO

Um método numérico de diferenças finitas bidimensional que permite prever o comportamento térmico durante a solidificação de ligas no processo de lingotamento contínuo é proposto no presente trabalho.

Primeiramente é feita uma análise das principais partes de um sistema de lingotamento contínuo, relacionando as mais importantes para efeito das trocas térmicas que ocorrem durante o processo. Em seguida é feita uma breve discussão dos métodos matemáticos disponíveis e suas limitações.

Mostra-se como o método de diferenças finitas é desenvolvido e como é aplicado na previsão do comportamento térmico dos metais lingotados continuamente. Faz-se também uma análise das características físicas e das condições de contorno que devem ser obedecidas, além dos critérios metalúrgicos que devem ser impostos para que o produto obtido tenha boa qualidade metalúrgica. Para comprovar a confiabilidade do modelo, são feitas comparações com resultados práticos próprios e da literatura e previsões teóricas de outros métodos de cálculo.

Para evidenciar a utilidade do modelo no processo de lingotamento contínuo, o mesmo é aplicado a diferentes situações, tais como : cálculo do avanço das isothermas solidus e liquidus e perfil da temperatura da superfície da placa em condições operacionais reais de um equipamento de lingotamento contínuo; otimização das condições de lingotamento em função de diferentes



velocidades de produção e simulação de condições críticas de lingotamento para projeto de equipamentos de lingotamento contínuo. Mostra-se como o modelo pode ser utilizado no cálculo de parâmetros da estrutura de solidificação como os espaçamentos dendríticos primário e secundário.

Faz-se também a proposição de um método que, apoiado em cálculos do modelo e no levantamento experimental de curvas de resfriamento, permite a determinação de coeficientes de transmissão de calor no resfriamento secundário, em função do tipo de chuveiro e pressão de água.

Finalmente mostra-se, através de fluxogramas aplicativos, como o modelo pode ser utilizado na otimização de sistemas de lingotamento contínuo e no controles da linhas de produção, utilização cada vez mais procurada nos dias de hoje em face da competitividade existente e das facilidades computacionais cada vez mais disponíveis.

# MATHEMATICAL MODELLING AND SIMULATION OF THE CONTINUOUS CASTING OF STEEL

## ABSTRACT

A two-dimensional finite-difference model, which permits the prediction of the thermal behaviour during solidification of alloys by continuous casting, is proposed.

Firstly, an analysis of the main components of the continuous casting equipment is made, specially those responsible for the heat exchange along the process. The mathematical approaches to the problem existing in the literature, as well as their range of application, are discussed.

The development of the numerical model is presented in detail, including the way of using the model in the calculation of thermal behaviour. Physical and boundary conditions imposed and metallurgical criteria are carefully analysed taking into account the final quality. The reliability of the model is demonstrated by the good agreement with experimental data produced in laboratory and from the literature, and with theoretical predictions furnished by other mathematical approaches.

To emphasize the importance of the model for the continuous casting process, the following different applications are made: calculation of the displacement of the solidus and liquidus isotherms and surface temperature profile for real operation conditions during continuous casting of slabs; optimization of operation conditions as function of casting speed; simulation of critical operation conditions to be used in the design of

continuous casting equipments. The way the model can be used to calculate solidification structure parameters like primary and secondary dendritic spacings is also demonstrated.

A method of determination of heat transfer coefficients during secondary cooling, as function of spray configuration and water pressure is proposed. The method is based on model calculations and experimental thermal profiles.

Finally a series of flow charts show how the model can be used in the optimization and control of the continuous casting of steel.

## ÍNDICE

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Considerações Gerais.....	1
1.2 - Objetivos do Presente Trabalho.....	5
CAPÍTULO 2 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM SISTEMA DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	8
2.1 - Sistemas Típicos de Lingotamento Contínuo.....	8
2.2 - Resfriamento Primário.....	10
2.2.1 - Condução Térmica.....	14
2.2.2 - Convecção Térmica.....	16
2.2.3 - Transferência Newtoniana.....	17
2.3 - Resfriamento Secundário.....	30
2.4 - Radiação e convecção.....	34
CAPÍTULO 3 - MODELAGEM MATEMÁTICA DA SOLIDIFICAÇÃO NO LINGOTAMENTO CONTÍNUO.....	40
3.1 - Modelos Matemáticos.....	40
3.2 - Desenvolvimento do Modelo - Método de Diferenças Finitas.....	61
3.2.1 - Modelo Unidimensional.....	62
3.2.2 - Tratamento de Interfaces.....	67
3.2.3 - Desenvolvimento Bidimensional.....	71
CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E CONDIÇÕES DE CONTOURNO.....	78
4.1 - Liberação do Calor Latente na Solidificação.....	79
4.1.1 - Liberação Linear de H no Intervalo de Solidificação ( $T_L - T_S$ ).....	80

4.1.2 - Regra da Alavanca.....	81
4.1.3 - Equação de Scheil.....	81
4.1.4 - Modelo de Brody e Flemings..	82
4.1.5 - Modelo de Clyne e Kurz.....	84
4.1.6 - Análise Conclusiva.....	85
4.2 - Propriedades Termofísicas de Cada Fase.....	88
4.2.1 - Calor Latente de Solidifi- cação.....	88
4.2.2 - Condutividade Térmica de cada Fase.....	89
4.2.3 - Calor Específico de cada Fase.....	90
4.2.4 - Densidade de Cada Fase.....	91
4.2.5 - Avaliação das Propriedades Termofísicas no Lingotamento de Aços.....	92
4.3 - Superaquecimento e Convecção no Aço Líquido.....	94
4.4 - Efeito Terminal.....	104
4.5 - Abordagem do Coeficiente de Transfe- rência de Calor.....	106
4.5.1 - Ao Longo do Molde.....	106
4.5.2 - No Resfriamento Secundário..	126
CAPÍTULO 5 - ANÁLISE EXPERIMENTAL.....	135
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	141
CAPÍTULO 7 - APLICAÇÃO DO MODELO NA SIMULAÇÃO DE SITUAÇÕES TÍPICAS DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO DO AÇO.....	168
7.1 - Projeto de um Sistema de Lingotamento Contínuo.....	172

7.2 - Proposição de um Método de Determinação dos Coeficientes de Transmissão de Calor na Região de Chuveiros.....	178
7.3 - Aplicação do Modelo à Condições Industriais de Lingotamento Contínuo.....	184
7.4 - Esquema de Condições ótimas de Operação.	192
7.5 - Levantamento de Curvas de Referência para Operação.....	195
CAPÍTULO 8 - CONCLUSÕES.....	200
LINHAS DE PESQUISA DECORRENTES DESTE TRABALHO.....	202
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	204
APÊNDICE 1 - EQUAÇÕES DESENVOLVIDAS.....	222
APÊNDICE 2 - SIMBOLOGIA UTILIZADA.....	236
APÊNDICE 3 - PROPRIEDADES DOS MATERIAIS UTILIZADOS.....	239

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### 1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

Uma das mais antigas referências a processos de lingotamento contínuo é uma patente de 1840, outorgada a George Sellers, que desenvolveu uma máquina para lingotamento contínuo de tubos. Existem referências que o processo já existia e Sellers apenas o aprimorou. Em 1846, Henry Bessemer patenteou um processo para produzir continuamente placas de aço e ferro e em 1890 desenvolveu projetos industriais de lingotamento contínuo de aços. No entanto, apesar do lingotamento contínuo ter aparecido antes do século 20, só em 1930, na Alemanha, é que foi introduzida a produção comercial de tarugos de latão lingotados continuamente. [1]

Sigfried Junghans, um ativo inventor de tecnologia de lingotamento, projetou diversos aprimoramentos do processo, em particular a introdução de um molde oscilante para evitar a adesão do metal solidificado ao molde. Outros desenvolvimentos incluíram a lubrificação do molde na forma de óleo e, mais recentemente, pós de escória com baixo ponto de fusão e, com o objetivo de compensar a contração de solidificação, melhorar a transferência de calor e, conseqüentemente, diminuir as rupturas da casca sólida, incorporou-se uma certa conicidade ao molde. [1]

Imediatamente após a II Guerra Mundial, o desenvolvimento das instalações de lingotamento contínuo do aço tomou um grande impulso e atualmente está entrando em uma nova era de

desenvolvimento, não somente com relação ao aumento das aplicações nos processos de produção, mas também pela sua própria evolução como processo e sua interação com outros processos de manufatura do aço.<sup>[2]</sup>

O propósito do lingotamento contínuo é transformar o lingotamento convencional em uma forma onde o produto é conduzido diretamente à laminação final. O uso desse processo resulta em melhorias no rendimento, nas condições de superfície e na qualidade interna do produto quando comparado com materiais lingotados pelo método convencional<sup>[3]</sup>. Na Figura 1.1 é apresentada uma representação comparativa das etapas do lingotamento estático e contínuo.

A produção de lingotes de aço através dos processos de lingotamento contínuo tem apresentado uma aceleração na curva de crescimento. Atualmente mais de 50 % do aço produzido no mundo é lingotado continuamente. Na Tabela 1.1 mostra-se a produção nacional de aços e a porcentagem produzida através de lingotamento contínuo. Na Tabela 1.2 apresenta-se essa porcentagem relativa aos mais importantes produtores mundiais de aço.

A qualidade e a produtividade obtidas em sistemas de lingotamento contínuo de aços dependem principalmente do conjunto de ajustes<sup>[4]</sup> escolhido para o resfriamento secundário, isto é, da velocidade de lingotamento e do fluxo de água dos chuveiros de refrigeração nas diferentes zonas de resfriamento, que devem atender critérios metalúrgicos pré-estabelecidos.

Cada vez que se definem, para um sistema de lingotamento, a liga, a velocidade e o programa de fluxos de água para as diferentes zonas de refrigeração, está-se associando ao mesmo uma história térmica durante a solidificação que pode ser prevista



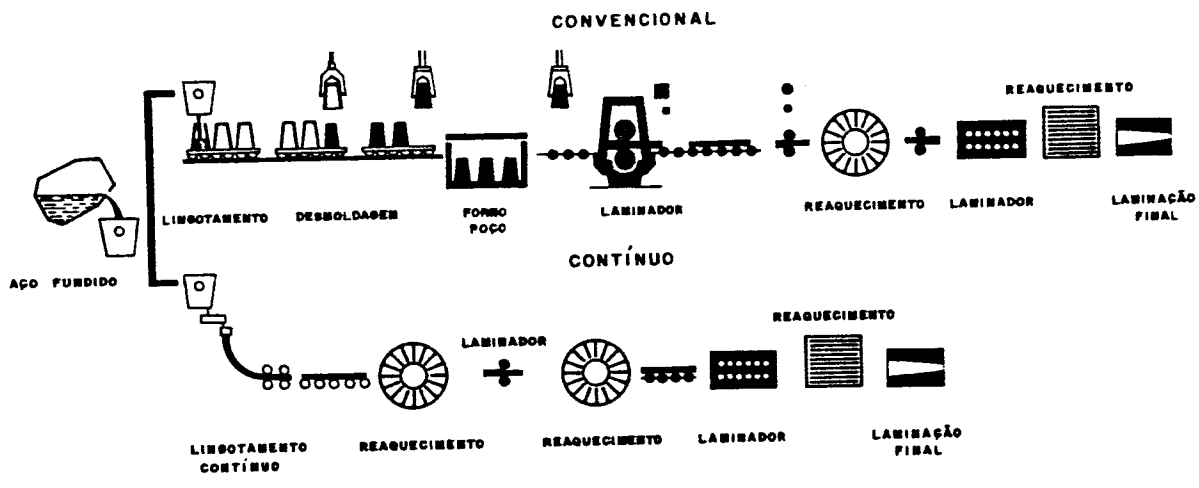


Figura 1.1 - Representação esquemática comparativa das etapas do lingotamento estático e contínuo de metais.

TABELA 1.1 - PRODUÇÃO NACIONAL

	86	87	88	JAN/JUN 89
AOO BRUTO *	21233	22231	24700	12316
LING. CONTÍNUO *	9782	10121	12160	6405
% CONTÍNUO	46	46	49	52

\* em mil toneladas

TABELA 1.2 - PORCENTAGEM DE PRODUTOS LINGOTADOS CONTINUAMENTE  
POR ALGUNS PRODUTORES DE AÇO EM 1988

RUSSIA	16,1
EUA	60,9
JAPÃO	93
ITÁLIA	93,9
FRANÇA	94
INGLATERRA	70,5

Fontes : Instituto Brasileiro de Siderurgia  
Associação Brasileira de Metais

combinando-se um método numérico com as equações de fluxo de calor, simulando-se dessa forma condições de operação<sup>[4]</sup>. Uma moderna indústria deve dispor necessariamente de modelos matemáticos para dar suporte às atividades de projeto, otimização dos processos de fabricação e maximização das características do produto final.

Com a evolução dos sistemas computacionais nas grandes indústrias pode-se combinar a utilização de modelos matemáticos com sensores e controladores,<sup>[5]</sup> tornando os processos "inteligentes". Em especial, pode-se otimizar a produção em sistemas de lingotamento contínuo, fazendo-se correções "on line" em sistemas com sensores e controladores adequados em pontos estratégicos, conforme exemplifica a Figura 1.2. Tais sensores fornecem o tempo todo, dados característicos da corrida em andamento e, acoplado-se os mesmos a sistemas computacionais adaptados ao modelo matemático,<sup>[6]</sup> pode-se fazer a correção dos parâmetros introduzidos inicialmente.<sup>[7-15]</sup>

## 1.2 - OBJETIVOS DO PRESENTE TRABALHO

Tendo em vista a importância da análise do comportamento térmico da solidificação em sistemas de lingotamento contínuo de aços, estabeleceu-se os seguintes objetivos fundamentais do presente trabalho :

- a) Revisão crítica e atualizada da literatura no que diz respeito aos sistemas de lingotamento contínuo, à critérios metalúrgicos e às limitações de operação inerentes ao processo.

- b) Desenvolvimento e verificação experimental de um modelo matemático de diferenças finitas que descreva o comportamento térmico durante a solidificação de ligas metálicas em geral, e de aços em particular.
- c) Avaliação do modelo matemático através de sua aplicação a sistemas de lingotamento contínuo de aços em função da velocidade de lingotamento e das vazões de água utilizada nos chuveiros de resfriamento e confrontação das previsões teóricas com resultados da literatura.
- d) Aplicação do modelo no projeto de sistemas de lingotamento contínuo de aços, na simulação de condições industriais específicas, e na otimização de condições globais de operação.
- e) Aplicação do modelo na simulação de um conjunto de situações de operação que permitam o levantamento de estratégias de controle do processo.
- f) Aplicação do modelo no cálculo de parâmetros característicos da estrutura dendrítica dos aços, em função das condições de lingotamento.
- g) Proposição de um método experimental para determinação do coeficiente de transmissão de calor na região de resfriamento secundário, em função do tipo de chuveiro e fluxo de água.

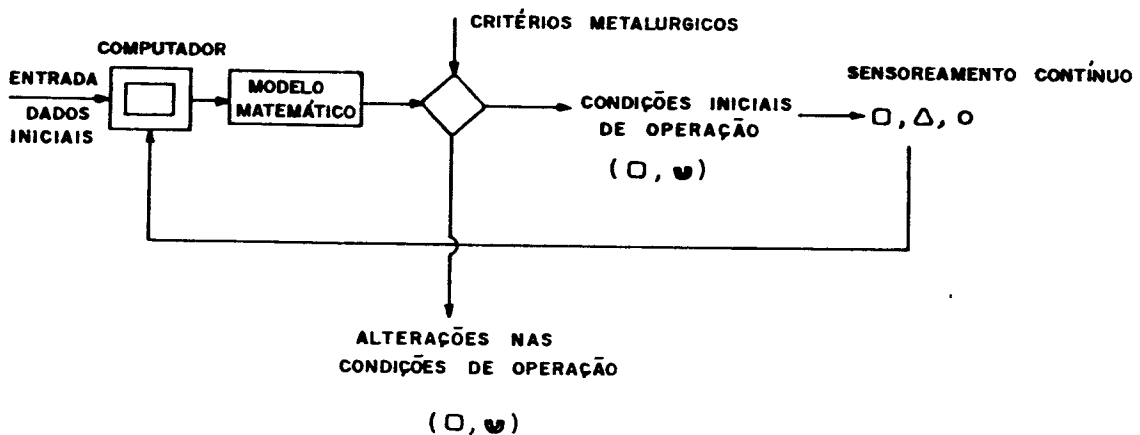
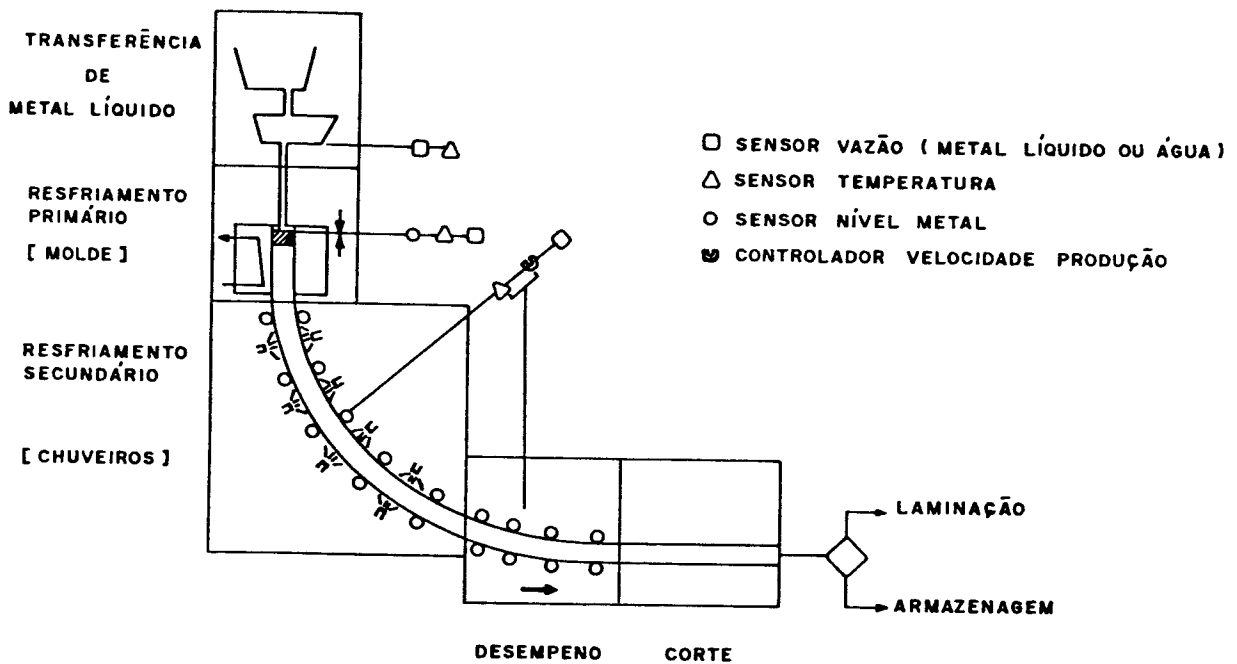


FIGURA 1.2 - Representação esquemática de um equipamento de lingotamento contínuo de aço, com sensores e controladores distribuídos. Os sinais emitidos continuamente alimentam o modelo matemático que se incumbe de fornecer correções nas condições de operação.

## CAPÍTULO 2

### TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM UM SISTEMA DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO

#### 2.1 - SISTEMAS TÍPICOS DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO

Um sistema típico de lingotamento contínuo, conforme pode ser visto na Figura 2.1a, consiste essencialmente das seguintes partes<sup>[1,2]</sup>:

- distribuidor : onde o metal líquido é vazado e a partir do qual os injetores alimentam o molde. A altura da coluna de metal líquido, juntamente com outros parâmetros vai influir na velocidade de lingotamento. Um distribuidor pode alimentar vários moldes.
- injetores : alimentam o molde a partir do distribuidor e o seu diâmetro depende do fluxo de líquido necessário para a velocidade de lingotamento requerida. O diâmetro do injetor pode ser estimado através do Teorema de Bernoulli:

$$Q = c \cdot a \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot l} \quad (2.1)$$

onde :

Q é o fluxo de líquido

a é a área do jato do injetor

l é a altura da coluna de metal líquido no distribuidor

c é o coeficiente de contração e assume-se igual a 0,62 para orifícios circulares

Para um molde de área A e uma velocidade de produção exigida u, o diâmetro do injetor necessário é :

$$d = \frac{\text{cte. } A \cdot u}{\sqrt[4]{1}} \quad (2.2)$$

O Teorema de Bernouilli ignora a tensão superficial e a viscosidade e, portanto, este valor precisa ser corrigido para levar-se em conta estas propriedades .

- molde ou resfriamento primário : a função principal do molde é suportar a coluna de metal líquido até que se forme uma casca sólida com resistência mecânica suficiente para suportar a pressão metalostática e as tensões de extração.
- resfriamento secundário ou zona de chuveiros : nesta etapa a temperatura é controlada para evitar-se tensões térmicas que podem ocasionar defeitos, trincas e até ruptura. É definida uma temperatura mínima, abaixo da qual a temperatura superficial não pode cair e o sistema de chuveiros é projetado para cumprir este requisito através de um coeficiente de transmissão de calor adequado. O material deve estar completamente solidificado antes da região de desempenho.
- radiação livre

Além dessas partes principais existem os controladores de nível do metal no distribuidor e no molde, controlador do vazamento, roletes extratores, roletes endireitadores e estação de corte. A Figura 2.1b apresenta uma vista de um sistema

de corte. A Figura 2.1b apresenta uma vista de um sistema completo de lingotamento contínuo.

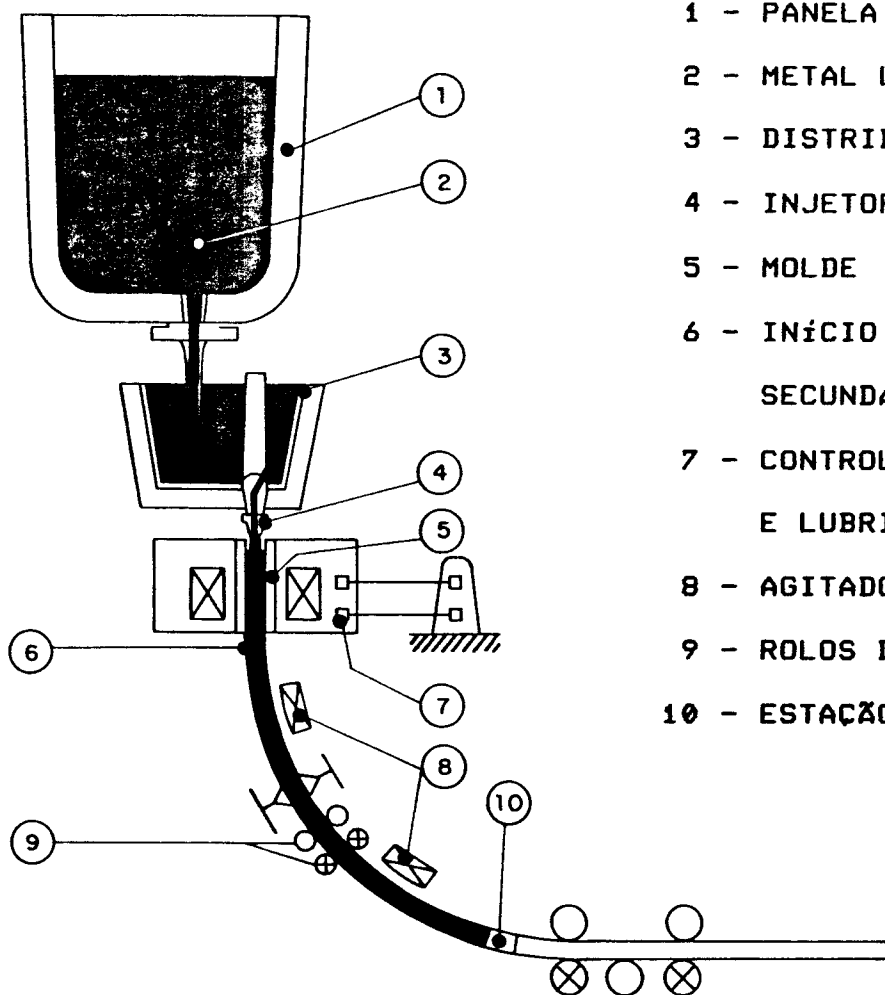
Quanto à forma, os sistemas de lingotamento contínuo evoluíram de verticais para curvos, inclinados e horizontais. Na Figura 2.2a pode-se observar uma representação esquemática das várias formas, destacando-se as alturas ocupadas pelas mesmas. A Figura 2.2b mostra quatro projetos básicos de sistemas de lingotamento contínuo para produção de placas com indicação da altura da instalação e o correspondente comprimento metalúrgico (comprimento metalúrgico é o comprimento onde se completa a solidificação no sistema em questão)<sup>[13]</sup>. Os sistemas verticais foram superados pelas outras formas, uma vez que os mesmos apresentam o inconveniente de instalações industriais muito altas <sup>[17]</sup>.

Do ponto de vista de transferência de calor e, portanto da modelagem matemática da solidificação, as partes mais importantes são: molde, resfriamento secundário e radiação livre. Tais etapas, juntamente com os modos de transferência de calor atuantes, serão detalhadas a seguir<sup>[18-20]</sup>.

## 2.2 - RESFRIAMENTO PRIMÁRIO

Esta etapa do lingotamento contínuo é caracterizada pela utilização de um molde refrigerado a água que deve preencher duas importantes funções: suportar a casca de metal sólido durante os instantes iniciais do processo e permitir a retirada de calor do metal pelo fluido de refrigeração. A taxa de transporte de calor deve ser tal que proporcione, na saída do molde, uma camada solidificada com espessura suficiente para suportar o metal líquido e as tensões de extração do lingote a fim de impedir a





- 1 - PANELA
- 2 - METAL LíQUIDO
- 3 - DISTRIBUIDOR
- 4 - INJETOR
- 5 - MOLDE
- 6 - INÍCIO DO RESFRIAMENTO SECUNDÁRIO
- 7 - CONTROLADOR DA OSCILAÇÃO E LUBRIFICAÇÃO DO MOLDE
- 8 - AGITADOR ELETROMAGNÉTICO
- 9 - ROLOS DE EXTRAÇÃO
- 10 - ESTAÇÃO DE CORTE

FIGURA 2.1a - Representação esquemática de um sistema de lingotamento contínuo.

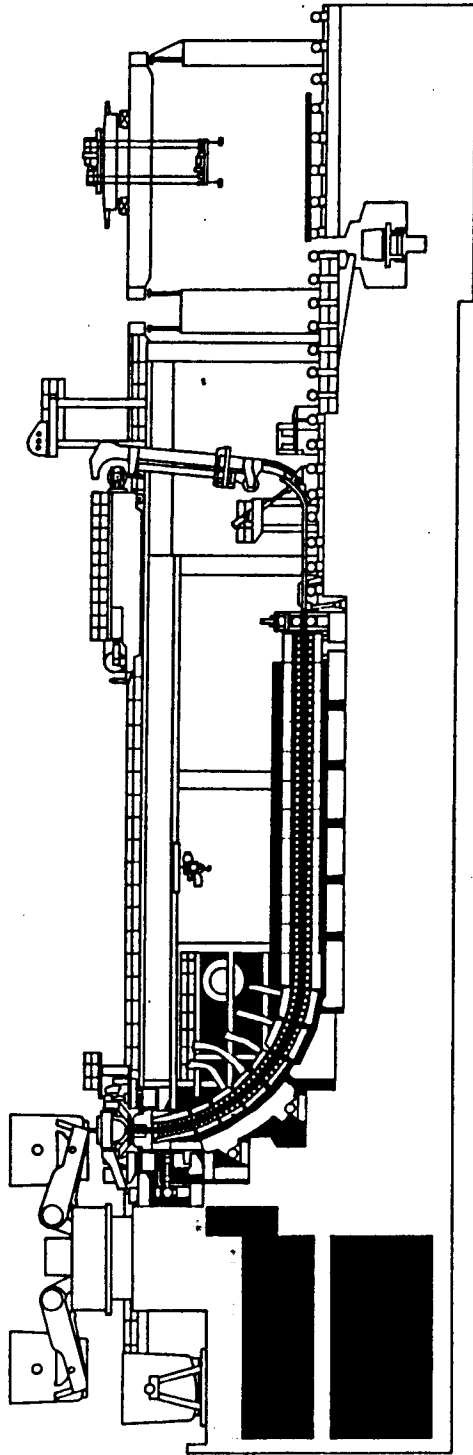


FIGURA 2.1b - Projeto global de um equipamento de lingotamento  
contínuo de aços

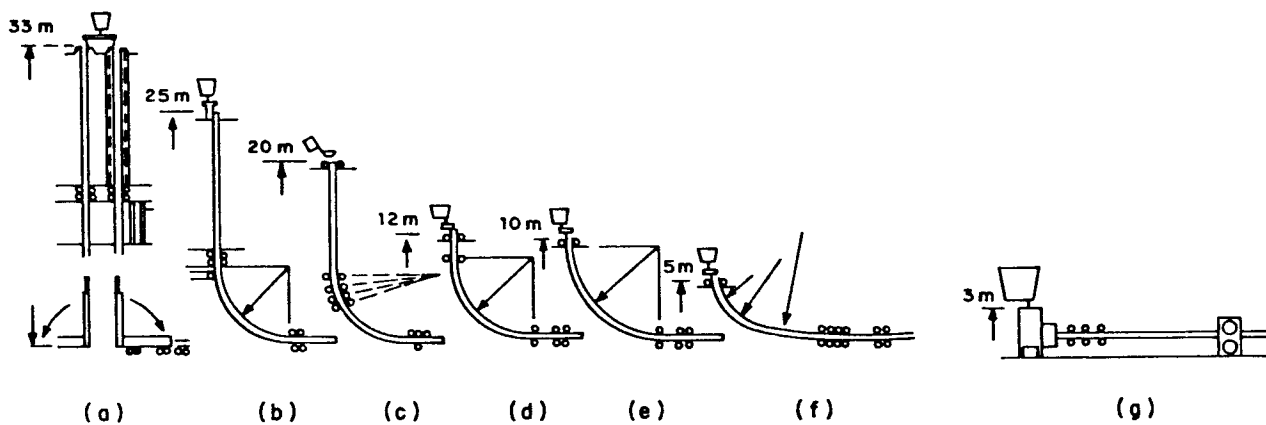


Figura 2.2a - Representação das várias formas de sistemas de lingotamento contínuo e as alturas correspondentes<sup>13</sup>.

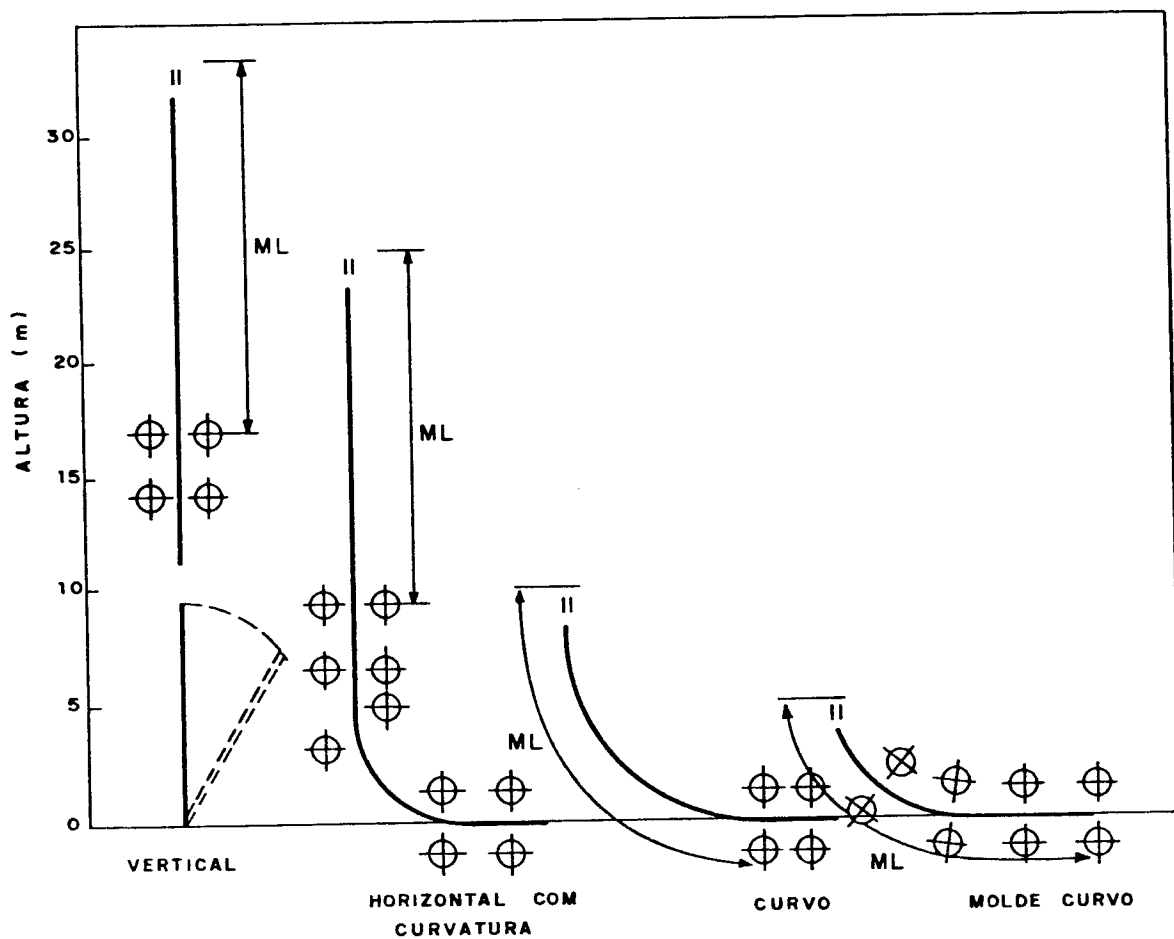


Figura 2.2b - Representação de quatro projetos básicos de sistemas de lingotamento contínuo destacando-se a altura e o correspondente comprimento metalúrgico.

ruptura da casca sólida na saída do molde e, conseqüentemente, a interrupção do processo de lingotamento<sup>[24, 25]</sup>.

Para uma revisão global da transferência de calor na etapa de resfriamento primário, onde as fontes de troca térmica são constituídas pelo metal líquido, metal sólido, molde, fluido de refrigeração, lubrificante e gap de ar, deve-se analisar a influência relativa de cada meio. A representação esquemática dos meios atuantes pode ser vista na Figura 2.3. A distribuição de temperaturas nos diferentes meios, para um instante qualquer do processo de resfriamento no molde, juntamente com a indicação dos modos de transferência de calor atuantes, está representada na Figura 2.4.

### 2.2.1 - CONDUÇÃO TÉRMICA

A condução térmica na camada de metal solidificado pode ser considerada aproximadamente unidimensional, a uma direção perpendicular à face do molde, excetuando-se os casos de lingotamento de metais de condutividades térmicas relativamente elevadas como o alumínio e o cobre e taxas de extração relativamente baixas<sup>[25, 24]</sup>.

Com o transcorrer do processo, a influência da condução térmica na camada sólida sobre o fluxo global de calor é cada vez maior, pois a camada de metal que vai se formando ao longo do molde constitui uma barreira crescente à remoção do calor latente de solidificação.

Através das paredes do molde e do metal líquido, a condução representa uma parcela menos significativa do fluxo de calor. Em metais líquidos, a convecção térmica, natural ou forçada, por si só elimina gradientes térmicos, que de qualquer forma nunca se

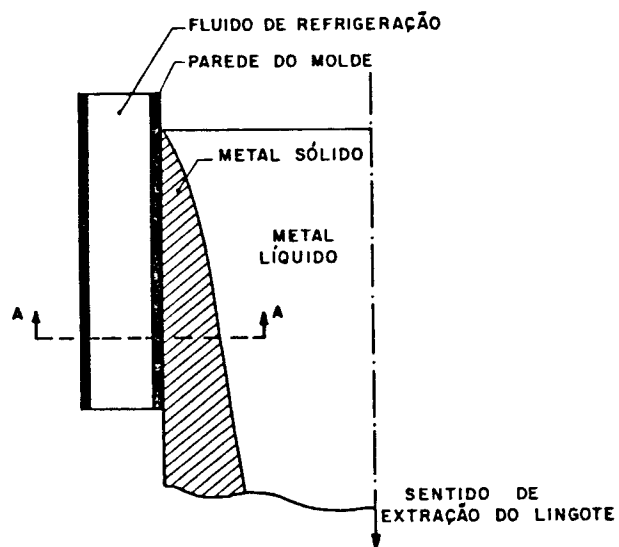


FIGURA 2.3 - Meios de trocas térmicas atuantes.

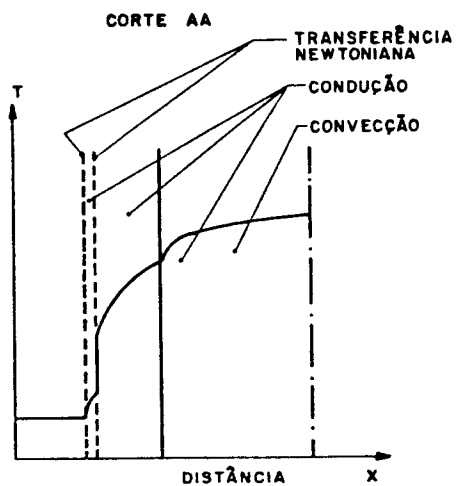


FIGURA 2.4 - Distribuição de temperaturas nos diferentes meios com a respectiva indicação do modo de transferência de calor atuante.

apresentam elevados, tendo em vista os baixos valores de superaquecimentos normalmente utilizados.

As paredes do molde, devido às espessuras normalmente empregadas, não chegam a constituir uma resistência térmica significativa, principalmente no caso de moldes constituídos de cobre eletrolítico ou de ligas de cobre, como é o caso da maioria dos moldes utilizados em sistemas de lingotamento contínuo [27, 28].

### 2.2.2 - CONVECÇÃO TÉRMICA

As correntes de vazamento induzem movimentos de convecção no metal líquido que asseguram a homogeneização da temperatura e a transferência de calor do líquido ao sólido, com a conseqüente remoção do superaquecimento. No caso particular do aço, as velocidades de circulação do aço líquido foram estimadas através de modelos hidráulicos, sendo da ordem de 3 m/s nas proximidades da frente de solidificação, suficiente para provocar um coeficiente de troca térmica apreciável entre o aço líquido e o aço sólido [29].

Para uma altura determinada de metal sólido, assumindo-se uma velocidade constante para a circulação do aço líquido e, considerando-se o sólido como uma placa de grandes dimensões, o coeficiente de troca térmica entre o metal e o líquido pode ser estimado através da seguinte relação [29]:

$$h_c = \frac{2}{3} c_1 d_1 w \left( \frac{\mu c_1}{k_1} \right)^{-1/2} \left( \frac{L w d_1}{\mu} \right)^{-1/2} \quad (2.3)$$

onde :

$h_c$  = coeficiente de troca de calor por convecção entre o

metal líquido e o metal sólido

$d_1$  = densidade do líquido

$c_1$  = calor específico do líquido

$k_1$  = condutibilidade térmica do líquido

$\mu$  = viscosidade

$w$  = velocidade de circulação do líquido

$L$  = altura do molde ao longo do qual a troca térmica se efetua.

No caso do aço, utilizando-se a equação 2.3, chega-se a um valor de  $h_c$  da ordem de  $1 \times 10^{-4}$  W/m<sup>2</sup>K e, tomando-se como referência um valor de 30 K de superaquecimento, pode-se estimar que o fluxo de calor devido à convecção térmica representa apenas cerca de aproximadamente 6 % do fluxo global de calor ao longo de uma secção transversal do molde. Esta influência no conjunto global do fluxo de calor, juntamente com o grau de incerteza na estimativa dos valores dos coeficientes de troca térmica por convecção, fazem com que, na maioria das análises do processo de lingotamento contínuo, sob o ponto de vista de transferência de calor, a convecção térmica no metal líquido seja desprezada.

### 2.2.3 - TRANSFERÊNCIA NEWTONIANA<sup>[20, 26-35]</sup>

Na etapa de resfriamento primário, conforme pode ser observado na Figura 2.5, a transferência de calor newtoniana pode ser caracterizada por 4 resistências térmicas :

- a resistência térmica na interface metal/molde
- a resistência térmica da parede do molde
- a resistência da interface molde/fluido de refrigeração
- a resistência térmica do gap de ar formado

A transferência newtoniana do sistema metal/molde é controlada pela resistência térmica da parede do molde e da interface metal/molde pois as resistências da parede do molde e da interface molde/fluido de refrigeração são normalmente muito pequenas quando comparadas com a resistência térmica metal/molde.

Admite-se que a região de contato entre metal e molde possa ser dividida em três seções, conforme esquema da Figura 2.6 :

- do menisco até o ponto onde começa a se formar a casca de metal sólido. Nesta região o metal líquido se encontra separado do molde por uma camada de óleo ou escória.
- a região na qual a camada solidificada já adquiriu resistência suficiente para afastar-se do molde através da contração volumétrica, caracterizada entretanto por um contato intermitente, dadas as características da superfície do lingote.
- a região onde existe uma separação física bem definida entre o metal e o molde e a transferência de calor ocorre por radiação através do filme de gás formado (gap) entre o metal e o molde.

A transferência Newtoniana global entre a superfície do lingote/placa até a água de refrigeração pode ser calculada em função da soma das resistências térmicas envolvidas. Equacionando tem-se:

$$R_w = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \quad (2.4)$$



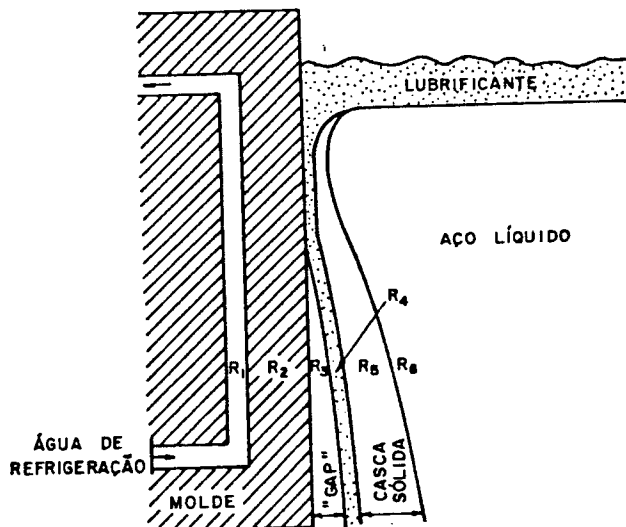


FIGURA 2.5 - Resistências térmicas do sistema aço/molde

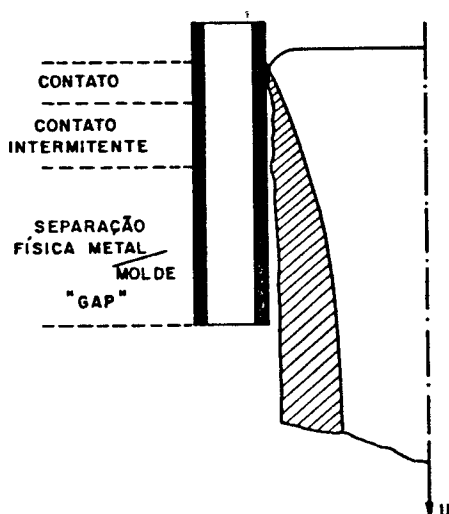


FIGURA 2.6 - Representação da divisão da região de contato metal/molde.

onde :

$R_1$  = resistência térmica entre a água de refrigeração e a superfície da placa de cobre(molde)

$$R_1 = \frac{1}{h_1} \quad (2.5)$$

e  $h_1$  pode ser calculado pela expressão <sup>[11]</sup>:

$$\frac{h_1 l}{k_A} = 0.023 (Re)^{0.8} (Pr)^{0.4} \quad (2.6)$$

ou ainda:

$$h_1 = \frac{k_A}{l} 0.023 \left( \frac{d_A w l}{\eta_A} \right)^{0.8} \left( \frac{c_A \eta_A}{k_A} \right)^{0.4} \quad (2.7)$$

onde:

$k_A$  = condutividade térmica da água

$d_A$  = densidade da água

$c_A$  = calor específico da água

$\eta_A$  = viscosidade da água

$w$  = velocidade

$l$  = largura ou diâmetro do canal de refrigeração

Assumindo-se uma velocidade do fluido da ordem da 10 m/s, o que é um valor típico,  $l = 5$  mm e utilizando-se as relações acima, o valor de  $h_1$  seria da ordem de 34 kW/m<sup>2</sup>K ( 0,8 cal/cm<sup>2</sup>Cs) <sup>[11]</sup>.

$R_m$  = resistência térmica da parede do molde de cobre

O molde de cobre não é usualmente refrigerado ao longo de toda a sua superfície, mas sim, através de canais de refrigeração. Nestas condições, este efeito deveria ser levado em consideração na quantificação de  $R_m$ . Entretanto, é consenso que esta consideração não deve afetar significativamente o valor desta resistência térmica, que pode ser calculada por:

$$R_m = \frac{\delta_m}{k_m} \quad (2.8)$$

onde:

$\delta_m$  = espessura do molde

$k_m$  = condutividade térmica do molde

$R_g$  = resistência térmica devido à formação de um espaço de separação (gap) entre a superfície do lingote/molde e a superfície do molde

Os modos de transferência de calor atuantes no gap são condução, convecção e radiação. Como este espaço de separação é pequeno, a convecção pode ser desprezada frente à magnitude dos outros modos de transferência de calor.

$$R_g = \frac{1}{h_k + h_r} \quad (2.9)$$

sendo:

$$h_k = \frac{\delta_g}{k_m} \quad (2.10)$$

e

$$h_r = \sigma \epsilon (T_1 + T_m) (T_1^2 + T_m^2) \quad (2.11)$$

onde:

$\delta_g$  = espessura do gap

$k_m$  = condutividade térmica do meio que preenche o gap

$\sigma$  = constante de Stefan-Boltzman =  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$

$\epsilon$  = emissividade = 0,8 para o aço

$T_1$  = temperatura da superfície do lingote [ K ]

$T_m$  = temperatura da superfície interna do molde [ K ]

Existem duas grandes dificuldades que impedem uma avaliação precisa desta resistência térmica. A primeira refere-se à identificação de uma função que permita representar com confiabilidade a evolução do gap ao longo do molde. A segunda é relativa ao lubrificante que se utiliza entre o lingote e o molde que, sob temperaturas elevadas que se verificam no gap, sofre decomposição, fazendo com que o gap seja preenchido por gases, cujas características físicas são desconhecidas, o que impede uma quantificação precisa de  $h_r$ .

Além das duas dificuldades intrínsecas mencionadas, existem outras decorrentes do funcionamento do equipamento de lingotamento contínuo. Com a contínua utilização ocorre desgaste na forma diferenciada da superfície interna do molde que provoca uma alteração progressiva na espessura do gap, praticamente impossível de ser medida. Pode ocorrer também o desalinhamento dos roletes extratores mais próximos do molde.

$R_4$  = resistência da camada de lubrificante

$$R_4 = \frac{\delta_l}{k_l} \quad (2.12)$$

onde:

$\delta_1$  = espessura da camada

$k_1$  = condutividade térmica do lubrificante

Neste caso, a única forma de estimar-se  $\delta_1$ , consiste em usar uma média baseada no consumo do lubrificante.

A Figura 2.7 apresenta uma comparação das magnitudes das 4 resistências mencionadas, onde se nota que a resistência realmente significativa é a imposta pelo gap. A Figura 2.8 mostra como evolui o gap ao longo do molde durante o lingotamento contínuo de uma placa de aço e a influência da velocidade de produção. Na Figura 2.9 pode-se notar que as resistências  $R_1$  e  $R_2$  pouco contribuem com a resistência global, quando comparadas com a soma das resistências mais significativas ( $R_3 + R_4$ ).

Considerando-se molde de cobre, usualmente utilizado em sistemas de lingotamento contínuo de aço, admitindo-se 10 mm de espessura de parede e considerando-se que a região de separação física seja preenchida com ar (condutibilidade térmica  $5,0 \cdot 10^{-2}$  W/m<sup>2</sup>K a 773 K), pode-se estabelecer relações que permitam o cálculo da condutância térmica global metal/fluido de refrigeração em função da espessura do gap formado. A partir de dados realizados por Irving [27], podem-se estabelecer as seguintes relações aproximadas:

$$h_m = 60.27 e^{-0.001e} \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad 10^{-2} \text{ m} < e < 10^{-1} \text{ m} \quad (2.13)$$

$$h_m = 3.69 e^{-0.001e} \text{ W/m}^2 \text{ K} \quad e < 10^{-2} \text{ m} \quad (2.14)$$

(nas relações acima admitiu-se que o calor entre o metal e o molde é transmitido apenas por condução no gás). A Figura 2.10

apresenta valores típicos de  $h_m$  para diferentes materiais de molde.

Para que se tenha uma idéia quantitativa da influência de cada modo de transferência de calor isoladamente, sobre o fluxo de calor no molde, pode-se analisar um caso específico de lingotamento contínuo de aço, conforme os resultados apresentados na Tabela 2.1 [27].

Comparando-se os valores apresentados na Tabela 2.1, nota-se que a principal resistência ao transporte de calor está localizada junto à interface metal/molde, e que a condução térmica na camada de aço solidificado é somente o segundo mecanismo de transferência de calor a limitar o avanço da frente de solidificação na etapa de resfriamento primário.

Os valores quantitativos que foram apresentados evidenciam a importância de se conhecer o coeficiente de transmissão de calor metal/fluido de refrigeração. Tal coeficiente se constitui um importante parâmetro de projeto uma vez que é um indicador da quantidade de calor extraído através do molde e, conseqüentemente um indicador da espessura do metal sólido na base do molde. Neste parâmetro pode ser sintetizado o efeito de fatores como : material do molde, velocidade de extração do lingote, velocidade do fluido de refrigeração e lubrificação do molde. Fatores tais como o estado superficial e o alinhamento dos roletes extratores podem afetar sensivelmente este coeficiente.

TABELA 2.1

MODO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR	PARTE DO SISTEMA METAL/MOLDE	PORCENTAGEM DA RESISTÊNCIA TÉRMICA TOTAL DO SISTEMA METAL/MOLDE
CONDUÇÃO	MOLDE DE COBRE	5
	AÇO SÓLIDO	33
CONVECCÃO	AÇO LÍQUIDO/ AÇO SÓLIDO	10 MÁX
	AÇO SÓLIDO/ MOLDE DE COBRE	50
TRANSFERÊNCIA NEWTONIANA	MOLDE DE COBRE/ ÁGUA DE REFRIGERAÇÃO	2

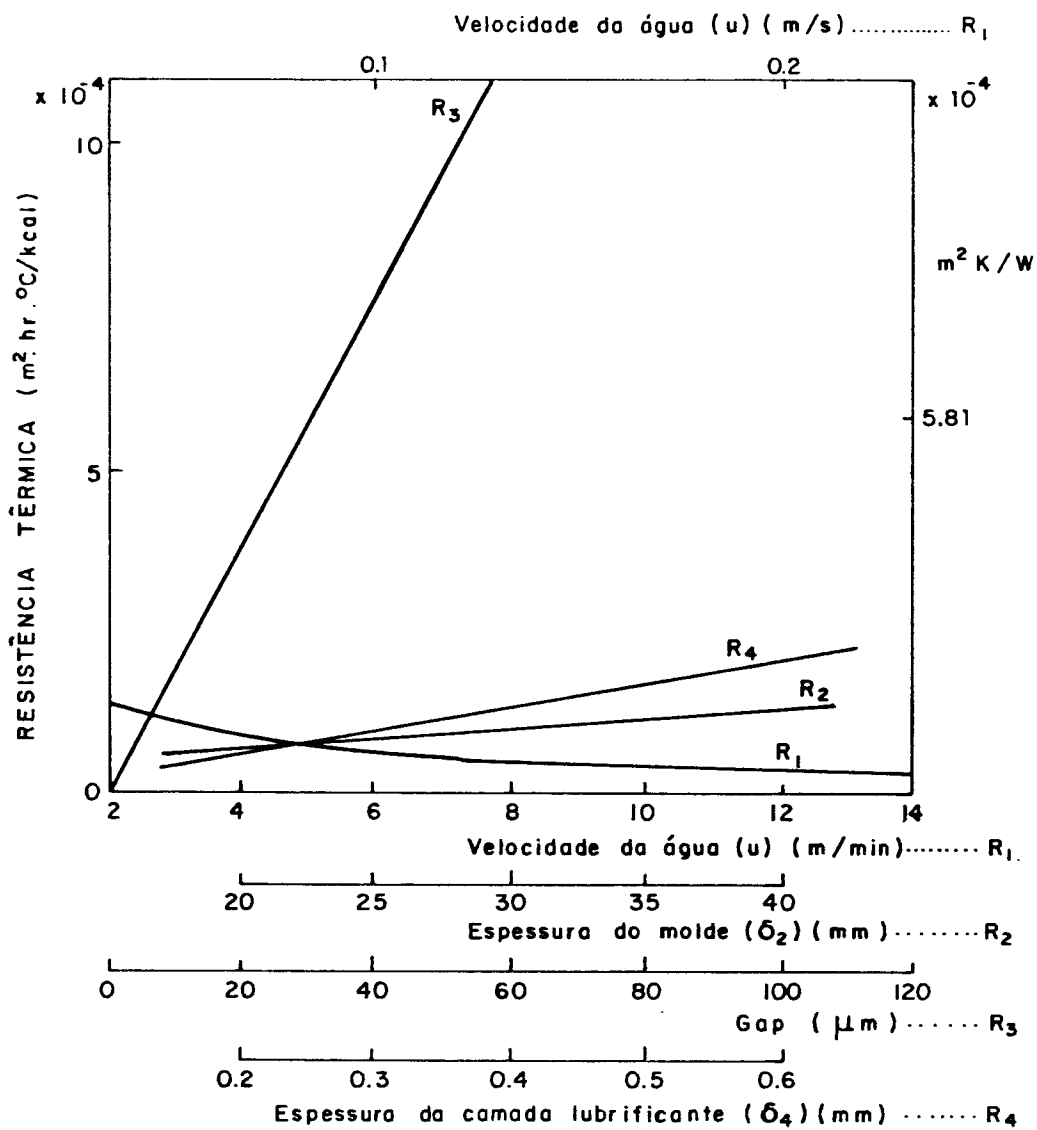
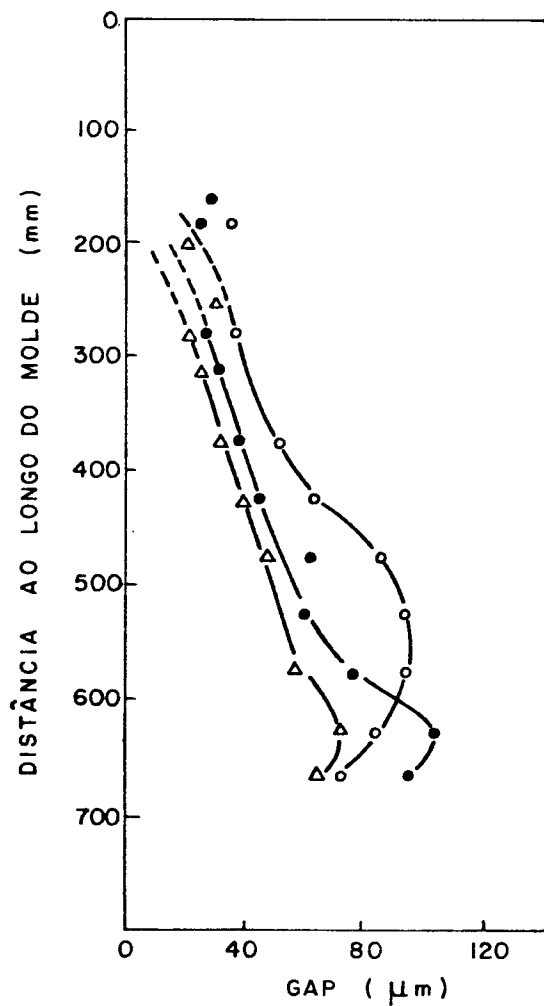


FIGURA 2.7 - Comparação das magnitudes das 4 resistências que compõem a resistência Newtoniana





VELOCIDADE  
DE PRODUÇÃO : Δ..... 0.74 m/min, ●..... 0.65 m/min,  
○..... 0.48 m/min

FIGURA 2.8 - Influência da velocidade de produção na formação do gap ao longo do molde

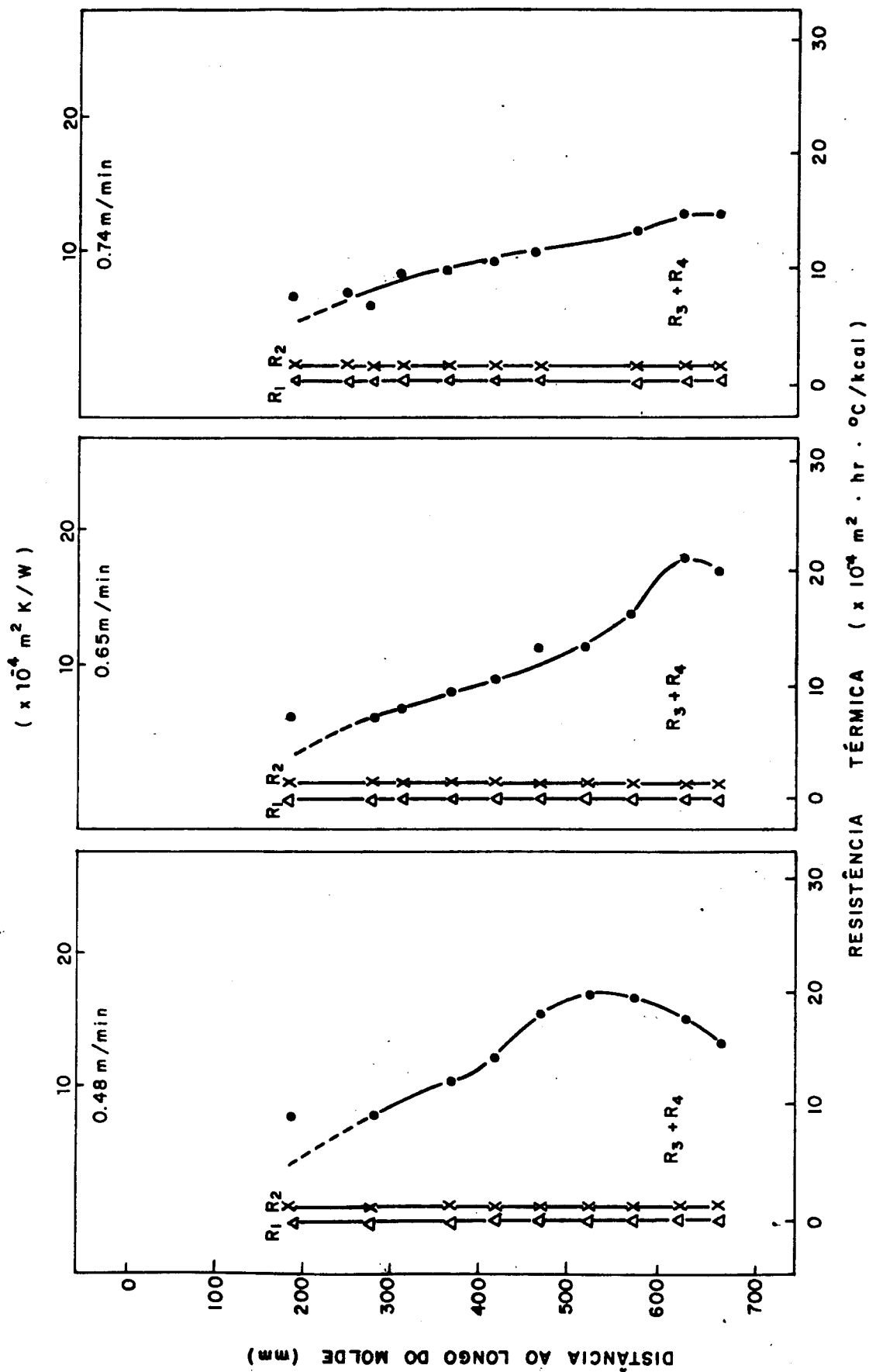


FIGURA 2.9 - Comparação ao longo do molde das resistências que compõem a resistência Newtoniana

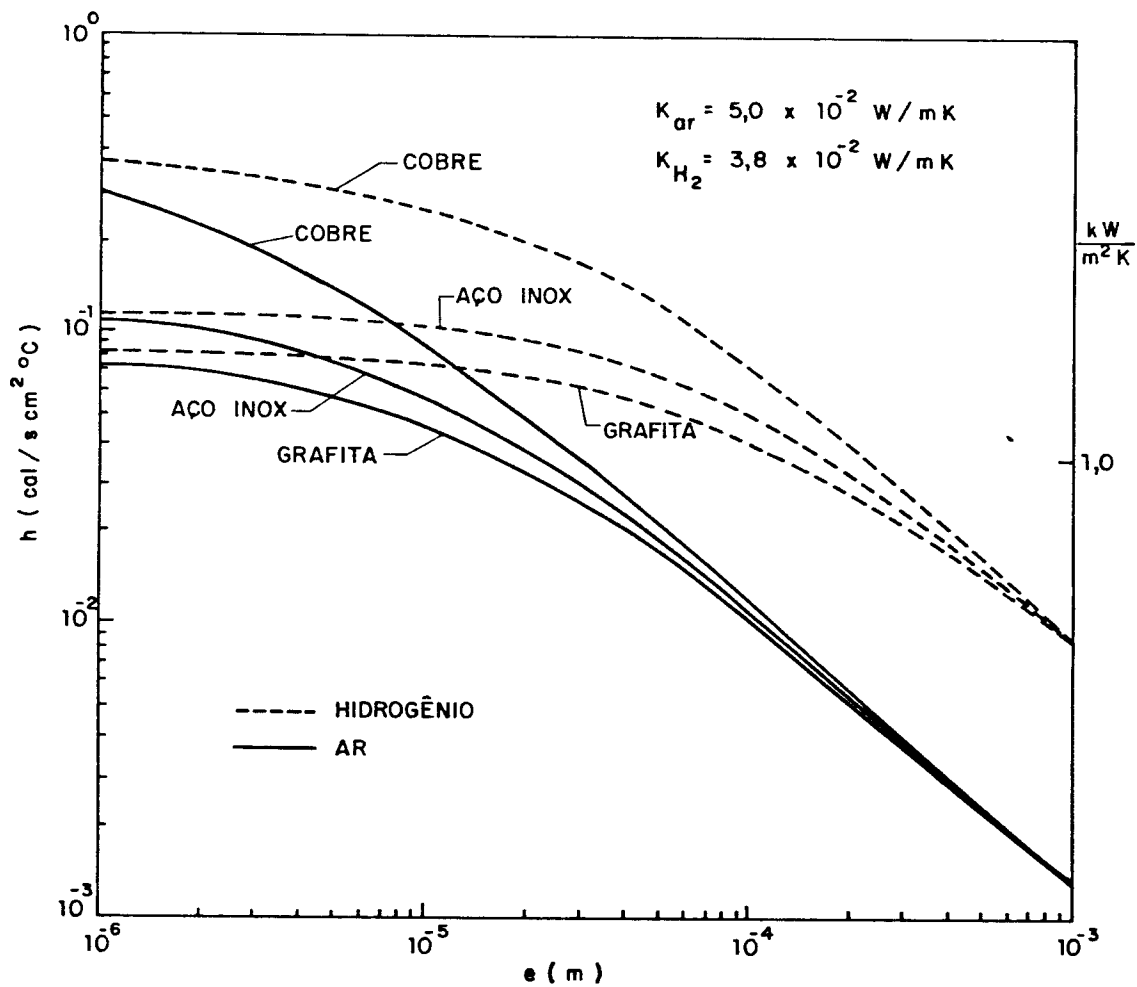


FIGURA 2.10 - Variação da condutância térmica global metal/fluido de refrigeração ( $h_g$ ) em função da espessura do "gap" ( $e$ ) para três diferentes tipos de molde

- cobre (  $X_m = 0,1 \text{ mm}$  e  $k_m = 377 \text{ W/mK}$  )
- aço inoxidável (  $X_m = 0,03 \text{ mm}$  e  $K_m = 18,4 \text{ W/mK}$  )
- grafita (  $X_m = 0,3 \text{ mm}$  e  $k_m = 125,6 \text{ W/mK}$  )

## 2.3 - RESFRIAMENTO SECUNDÁRIO

O resfriamento secundário ou região de chuveiros apresenta duas vantagens em relação ao resfriamento primário :

- conhece-se mais a respeito das relações entre as taxas de extração de calor e parâmetros relativos aos chuveiros de resfriamento.
- sob o ponto de vista de controle de extração de calor, o sistema de resfriamento por "sprays" é muito mais flexível que o molde.

O projeto de um sistema de resfriamento por chuveiros , em função de parâmetros operacionais pré determinados, envolve a determinação de condições térmicas adequadas para o referido sistema de resfriamento.

Os critérios utilizados para a determinação das condições térmicas são : minimização do aparecimento de trincas no lingote e manutenção de uma velocidade de solidificação relativamente elevadas. Tais critérios relacionam-se diretamente com o controle da temperatura da superfície do lingote .

Em especial, no caso do aço, o sistema deve atuar de forma a minimizar o reaquecimento da superfície do lingote após a saída do molde e, ao mesmo tempo, deve proporcionar uma temperatura mínima na superfície do lingote que não provoque alterações estruturais (a temperatura da superfície do lingote sendo mais baixa, acarretaria uma maior velocidade de solidificação mas, ao mesmo tempo, alterações estruturais devido ao polimorfismo do ferro provocam alterações volumétricas diferenciais que podem ocasionar o aparecimento de trincas ). Fixadas as condições, pode-se lançar mão de modelos matemáticos, os quais, a partir dos coeficientes de transmissão de calor exigidos para que as

condições fixadas sejam alcançadas, nos fornecem valores relativos aos fluxos de água necessários e, portanto, a característica dos chuveiros de resfriamento.

A caracterização precisa dos coeficientes de transmissão de calor nesta etapa de resfriamento secundário implica em uma avaliação da contribuição de cada modo de transferência de calor atuante. A Figura 2.11 apresenta os modos de transferência de calor presentes entre dois roletes extratores consecutivos, quais sejam : por contato direto entre o lingote/placa e o rolete extrator ( essencialmente condução térmica ), radiação e convecção nas regiões afetadas diretamente pelo impacto do jato de água do chuveiro de resfriamento e calefação devido ao acúmulo de água entre o rolete e o lingote/placa.

Alguns autores chegam a quantificar a participação de cada modo de transferência de calor no fluxo total extraído. Alberny<sup>[27]</sup> sugere os seguintes valores :

radiação/convecção	25 %
condução térmica	17 %
impacto do chuveiro	33 %
calefação	25 % .

A temperatura da superfície do lingote e a vazão de água dos chuveiros diminui gradativamente do primeiro ao último conjunto de chuveiros e, portanto, os percentuais sugeridos acima referem-se a valores médios ao longo das diferentes zonas de resfriamento.

A Figura 2.12 apresenta resultados experimentais obtidos durante o lingotamento contínuo de uma placa de aço na última zona de resfriamento por chuveiros<sup>[28]</sup>. Nota-se a variação da temperatura da superfície como reflexo da atuação dos diferentes mecanismos de troca térmica já mencionados .

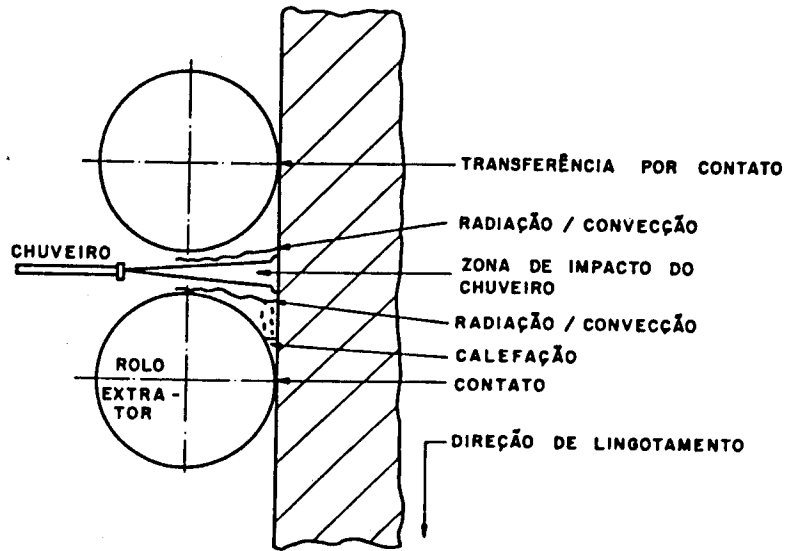


FIGURA 2.11 - Mecanismos de transfêrencia de calor atuantes na zona de resfriamento direto

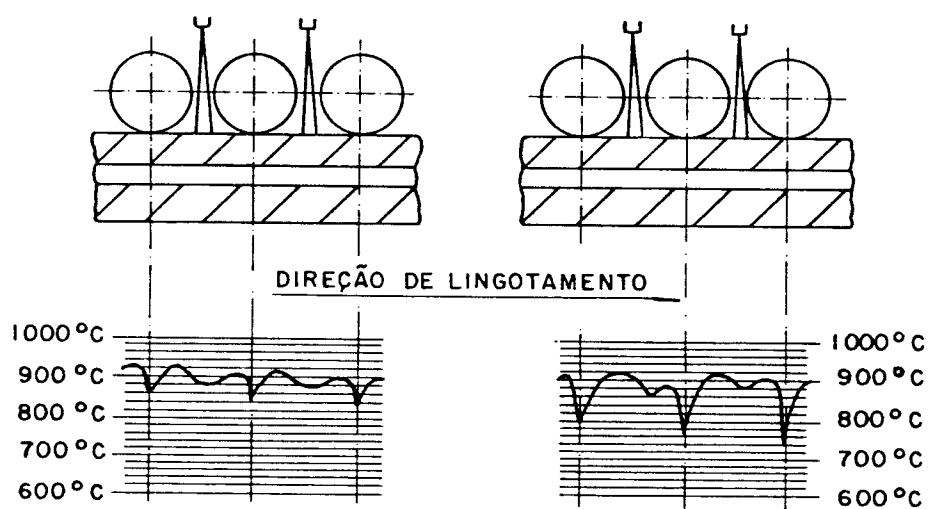


FIGURA 2.12 - Resultados experimentais da temperatura superficial da placa de aço na última zona de resfriamento por chuveiros.

Representa-se a eficiência do resfriamento em cada zona de chuveiros por um único valor do coeficiente de transferência de calor  $h$  pois, na análise da evolução da solidificação, seria extremamente complexo avaliar cada modo de transferência de calor isoladamente.

A modelagem matemática da solidificação utiliza valores de  $h$  para avaliar o comportamento térmico do lingote/placa durante o lingotamento. Para isso, valores de fluxo de água, tipo de chuveiro, distância do chuveiro ao lingote precisam ser traduzidos em termos de coeficientes de transferência de calor. A Figura 2.13 ilustra esse tipo de correlação obtida experimentalmente por Mizikar<sup>[29]</sup> para um determinado tipo de chuveiro.

Para que se tenha um elevado grau de flexibilidade na escolha do tipo mais adequado de chuveiro em função do coeficiente de transmissão de calor necessário, seria interessante, em termos de projeto, que se dispusesse desse tipo de correlação para diversos tipos de chuveiro e condições de resfriamento. Infelizmente até hoje, estas informações inexistem sistematizadas na literatura especializada. Uma maneira experimental de determinar tais valores será relatada mais adiante.

## 2.4 - RADIAÇÃO E CONVECÇÃO

Ao sair da etapa de resfriamento secundário, o lingote pode passar ainda por uma etapa onde é resfriado livremente por radiação e convecção antes de atingir o ponto onde é cortado. Nessa etapa predomina a componente de radiação, podendo eventualmente ser desprezado o efeito da convecção térmica, bem



como a condução devido ao contato com os roletes extratores. Em termos da radiação simplesmente, a condição de contorno para o resfriamento da superfície do lingote muda de uma temperatura controlada, como na etapa de resfriamento secundário, para a conhecida relação de Stefan-Boltzman<sup>[10]</sup> :

$$q_r = \sigma \epsilon (T_1^4 - T_0^4) \quad (2.15)$$

onde :

$\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzman =  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}^4$

$\epsilon$  é a emissividade ( 0,8 para o aço )

$T_1$  é a temperatura da superfície do lingote

$T_0$  é a temperatura ambiente

Esta condição de contorno é utilizada por grande parte dos métodos numéricos que analisam a solidificação nesta etapa do processo de lingotamento contínuo.

Para a aplicação dos modelos matemáticos na análise da solidificação nesta etapa, podemos também utilizar a condição de contorno baseada na transferência Newtoniana de calor na interface metal/meio ambiente. Os coeficientes de transmissão de calor devido à radiação e à convecção podem ser calculados através das seguintes expressões :

#### Radiação

$$h_r = \sigma \epsilon (T_1 + T_0) (T_1^2 + T_0^2) \quad (2.16)$$

#### Convecção

O coeficiente de transmissão de calor por convecção ( $h_c$ ) é normalmente incorporado ao número de Nusselt (Nu) , que se

números de Grashof (Gr) e Prandtl (Pr). Assim sendo, tem-se<sup>[41]</sup> :

$$Gr = \frac{g \gamma d^3 X^3 (T_1 - T_0)}{\eta^2} \quad (2.17)$$

$$Pr = \frac{\eta c}{k} \quad (2.18)$$

$$Nu = K C (Gr Pr)^n \quad (2.19)$$

$$h_c = Nu \frac{k}{X} \quad (2.20)$$

onde :

X = dimensão característica que se refere à distância coberta pelo fluido ao passar pela superfície

C e n = constantes experimentais dependentes da geometria do lingote

K = fator corretivo

$\gamma$  = coeficiente de expansão térmica volumétrica =  $1/T_0$  para gases ( $K^{-1}$ )

$\eta$  = viscosidade do fluido ( $kg/m^s$ )

g = aceleração da gravidade ( $9,81 m/s^2$ )

Dependendo do tipo de sistema de lingotamento contínuo, a etapa de resfriamento por radiação e convecção livres pode se dar com o lingote na posição vertical ou na posição horizontal. Como os coeficientes K, C e n dependem não só do formato, mas também da posição do lingote, conseqüentemente o coeficiente de transmissão de calor por convecção também será dependente da posição do mesmo. A Figura 2.14 apresenta o esquema de duas placas nas posições vertical e horizontal com os respectivos valores dos coeficientes K, C e n para condições de fluxos laminar e turbulen-

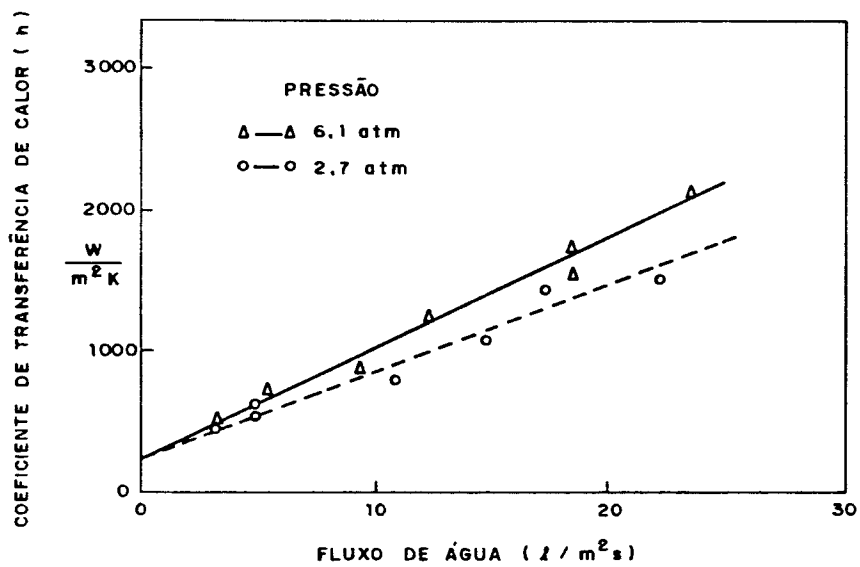


FIGURA 2.13 - Valores de h medidos por Mizikar em função do fluxo de água dos chuveiros ( chuveiro 1/4 GG 10 ).

C	n	K	CONDIÇÕES OPERACIONAIS
PLACA VERTICAL			
0,8	1/4	$\frac{1}{[1+(1+\frac{1}{Pr})^2]^{-1/4}}$	FLUXO LAMINAR
0,0246	2/5	$[\frac{Pr^{1/4}}{(1+0,49Pr^{2/3})}]^{2/5}$	FLUXO TURBULENTO
PLACA HORIZONTAL			
0,54	1/4	1	FLUXO LAMINAR
0,14	1/3	1	FLUXO TURBULENTO
FLUXO LAMINAR		$10^4 < Gr.Pr < 10^9$	
FLUXO TURBULENTO		$Gr.Pr > 10^9$	

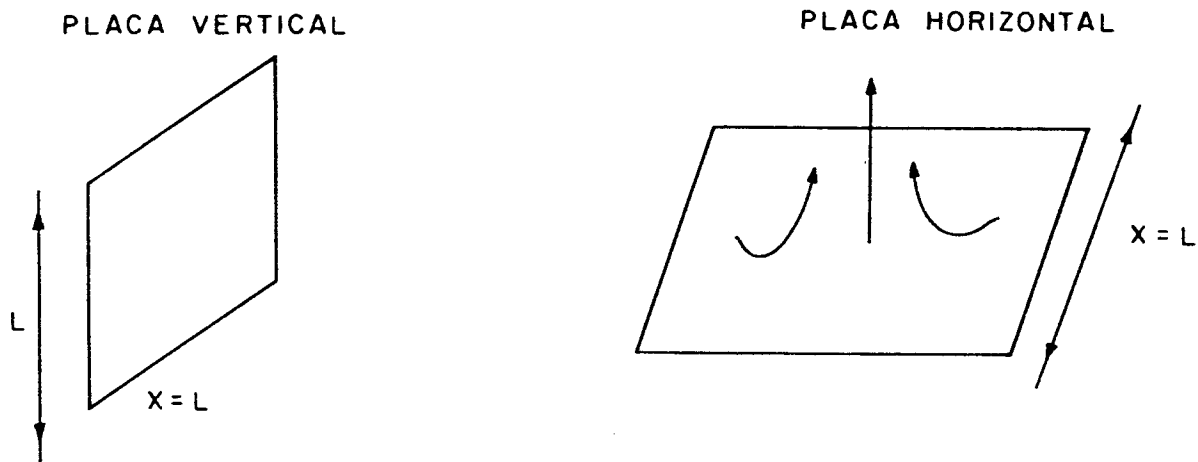


FIGURA 2.14 - Elementos para o cálculo do coeficiente convectivo durante o lingotamento contínuo.

to. Assim sendo, pode-se definir um coeficiente global de transferência de calor que sintetize os efeitos da radiação e convecção :

$$h_m = h_c + h_r \quad (2.21)$$

Para efeito da análise do processo de solidificação nesta etapa de resfriamento, o valor global  $h_m$  pode ser usado nos cálculos como um valor médio ao longo da superfície do lingote.

## CAPÍTULO 3

### MODELAGEM MATEMÁTICA DA SOLIDIFICAÇÃO NO LINGOTAMENTO CONTÍNUO

#### 3.1 MODELOS MATEMÁTICOS

A modelagem matemática da solidificação é uma importante ferramenta para o fornecimento de dados de projeto e controle para o lingotamento contínuo.

Uma série de modelos matemáticos tem sido formulados e a maioria baseia-se em duas hipóteses fundamentais :

- 1 - operação do equipamento em regime estacionário
- 2 - condução de calor desprezível na direção de extração do lingote.

A segunda hipótese se cumpre principalmente porque as velocidades de produção são normalmente altas, provocando a existência de gradientes de temperatura na direção normal à face do molde, maiores do que em qualquer outra direção.

O tratamento formal do problema de transferência de calor durante o processo de solidificação apresenta complexidade considerável, causada pela contínua geração de calor latente na frente de solidificação e pelas condições de contorno não lineares, às quais a equação de fluxo está submetida. Problemas reais de fundição e lingotamento apresentam ainda uma complicação extra, que consiste na superimposição de condução térmica no metal e no molde e transferência Newtoniana entre o metal e o molde<sup>[1][2]</sup>.

A análise do processo de solidificação sob o ponto de vista de transferência de calor tem como objetivos a determinação da lei de avanço de isothermas características com o tempo e a determinação do perfil de temperaturas do sistema metal/molde durante o processo<sup>[20, 27, 31, 42]</sup>.

As técnicas matemáticas utilizadas na abordagem do problema de transferência de calor na solidificação podem ser caracterizadas pelas hipóteses simplificadoras assumidas e pelo tipo de abordagem ou ferramenta utilizada na tentativa de achar-se uma solução para o problema, podendo ser classificadas em :

- Analíticas exatas
- Analíticas aproximadas
- Métodos Numéricos
- Métodos Gráficos
- Métodos Analógicos
- Equações experimentais

A escolha do tipo de método matemático e de seu grau de complexidade depende principalmente da extensão da análise, do tipo de resultado pretendido e da precisão destes resultados em relação às reais condições de solidificação.

A adequação do método ao problema, a versatilidade de aplicação, tempo de computação, etc, são pontos relevantes na escolha da ferramenta mais adequada. Entretanto, dispor de uma ferramenta precisa e abrangente não é suficiente : a precisão dos resultados finais depende, na maioria dos casos, muito mais de condições de contorno bem estabelecidas do que da ferramenta matemática escolhida.

A análise que segue restringe-se aos métodos analíticos pela sua capacidade de generalização e aos métodos numéricos pela

flexibilidade, precisão e disponibilidade atual de recursos computacionais

### Analíticos exatos

Vamos adotar, no desenvolvimento dos métodos analíticos, como sendo  $S$  a posição da interface sólido/líquido,  $\Delta t$  o tempo para solidificar a camada  $S$ ,  $T$  as temperaturas do sistema,  $L$  a constante de solidificação e  $k$ ,  $c$  e  $d$ , respectivamente a condutividade térmica, o calor específico e a densidade do meio em questão. Vamos assumir também que quando nos referimos a posições no molde temos posições negativas, isto é,  $x < 0$ , para posicionar a interface metal/molde  $x = 0$  e posições  $x > 0$  referem-se ao metal.

As hipóteses simplificadoras assumidas na análise da solidificação através dos métodos analíticos, reduzem o fenômeno a um problema de condução não estacionária e unidirecional de calor, aplicando-se assim as equações matemáticas de fluxo de calor não estacionário<sup>[14,15]</sup> e, portanto, considerando-se um elemento infinitesimal do sistema metal/molde, a equação de condução de calor no sólido é dada por:

$$\nabla k \nabla T = d \frac{(c_p T)}{\Delta t} \quad (3.1)$$

Para resolver a equação (3.1) cada método de solução incorpora simplificações. No caso de soluções analíticas exatas não são incorporadas aproximações de caráter matemático, embora um certo número de hipóteses físicas tenham que ser adotadas para permitir a solução do problema<sup>[14]</sup>. De acordo com a hipótese assumida para a resistência térmica metal/molde, as soluções



analíticas são divididas em contato térmico perfeito, ou seja, resistência térmica metal/molde nula, e contato térmico imperfeito, onde a resistência térmica metal/molde é considerada finita.

No caso de contato térmico perfeito, o modelo clássico mais geral deve-se a Schwarz<sup>[11, 14]</sup>, podendo-se mostrar facilmente que se reduz à equação proposta por Stefan para moldes refrigerados e mais adequadas para lingotamento contínuo.

Schwarz considerou soluções para a equação geral de fluxo de calor do tipo :

$$T(x,t) = A + B \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \quad (3.2)$$

onde A e B são constantes de integração e erf é a função erro.

As constantes de integração são determinadas através das seguintes condições de contorno :

para  $t = 0$

$$x < 0 \quad \rightarrow \quad T_m = T_0 \quad (3.3)$$

$$x > 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = T_2 \quad (3.4)$$

para  $t > 0$

$$x \rightarrow - \quad \rightarrow \quad T_m = T_0 \quad (3.5)$$

$$x \rightarrow + \quad \rightarrow \quad T_1 = T_2 \quad (3.6)$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad T_m = T_w = T_1 = \text{constante} \quad (3.7)$$

$$x = S \quad \rightarrow \quad T_e = T_1 = T_f = \text{constante} \quad (3.8)$$

A Figura 3.1 apresenta um esquema que reflete a distribuição de temperaturas em função das condições de contorno estabelecidas. Chega-se às seguintes equações :

para  $x < 0$ , portanto, molde :

$$T_m(x,t) = T_0 + \frac{(T_f - T_0)}{1 + \operatorname{erf}(\Phi) / M} \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_m t}}\right) \right] \quad (3.9)$$

para  $x = 0$ , portanto interface metal/molde :

$$T_1 = \text{constante} = T_0 + \frac{(T_f - T_0)}{1 + \text{erf}(\Phi)/M} \quad (3.10)$$

para  $0 < x < S$ , portanto, metal solidificado :

$$T_B(x,t) = T_0 + \frac{(T_f - T_0)}{M + \text{erf}(\Phi)} \left[ M + \text{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_S t}}\right) \right] \quad (3.11)$$

para  $x > S$ , portanto metal líquido :

$$T_1(x,t) = T_\infty - \frac{(T_\infty - T_f)}{\text{erfc}(n\Phi)} \text{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right) \quad (3.12)$$

para a cinética de solidificação :

$$S = 2 \sqrt{a_S t} \quad (3.13)$$

ou

$$S = \text{constante} \sqrt{t} \quad (3.14)$$

o que significa que a frente de solidificação avança em função da raiz quadrada do tempo.

A constante de solidificação  $\Phi$  é determinada através do método de tentativa e erro pela seguinte equação:

$$\frac{\exp(-\Phi^2)}{M + \text{erf}(\Phi)} - m \frac{(T_\infty - T_f) \exp(-n^2 \Phi^2)}{(T_f - T_0) \text{erfc}(n\Phi)} - \sqrt{\pi} H^* \Phi = 0 \quad (3.15)$$

A Figura 3.2a apresenta um esquema da distribuição de temperatura no sistema metal/molde dada pelas equações acima.

Stefan fez as seguintes considerações :

- a ) difusividade do molde infinita, portanto molde refrigerado ( $M = 0$ ), o que a torna adequada para o lingotamento contínuo
- b ) ausência de superaquecimento no metal líquido [44, 47]

Com estas simplificações a espessura solidificada continua a relacionar-se com o tempo de solidificação conforme equação 3.13 e a equação 3.15 simplifica-se bastante, reduzindo-se à :

$$\Phi \exp(\Phi^2) \operatorname{erf}(\Phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} H^*} \quad (3.16)$$

Esta equação é na realidade uma particularização da solução de Lyubov [44, 47] para moldes refrigerados. O perfil de temperaturas do sistema metal/molde fica dado pelas seguintes relações :

para  $x < 0$ , isto é, no molde e na interface metal/molde :

$$T_m = T_1 = T_0 = \text{constante} \quad (3.17)$$

para  $0 < x < S$ , isto é, no metal solidificado :

$$T_s(x,t) = T_0 + \frac{(T_f - T_0)}{\operatorname{erf}(\Phi)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_s t}}\right) \quad (3.18)$$

para  $x > S$ , isto é, no metal líquido :

$$T_1 = T_2 = T_f = \text{constante} \quad (3.19)$$

A Figura 3.2b mostra o esquema da distribuição de temperaturas no sistema metal/molde durante a solidificação de acordo com a solução de Stefan.

A condição de resistência térmica nula adotada para a interface metal/molde, considerando contato térmico perfeito, é uma solução física bastante irrealista na maioria das situações

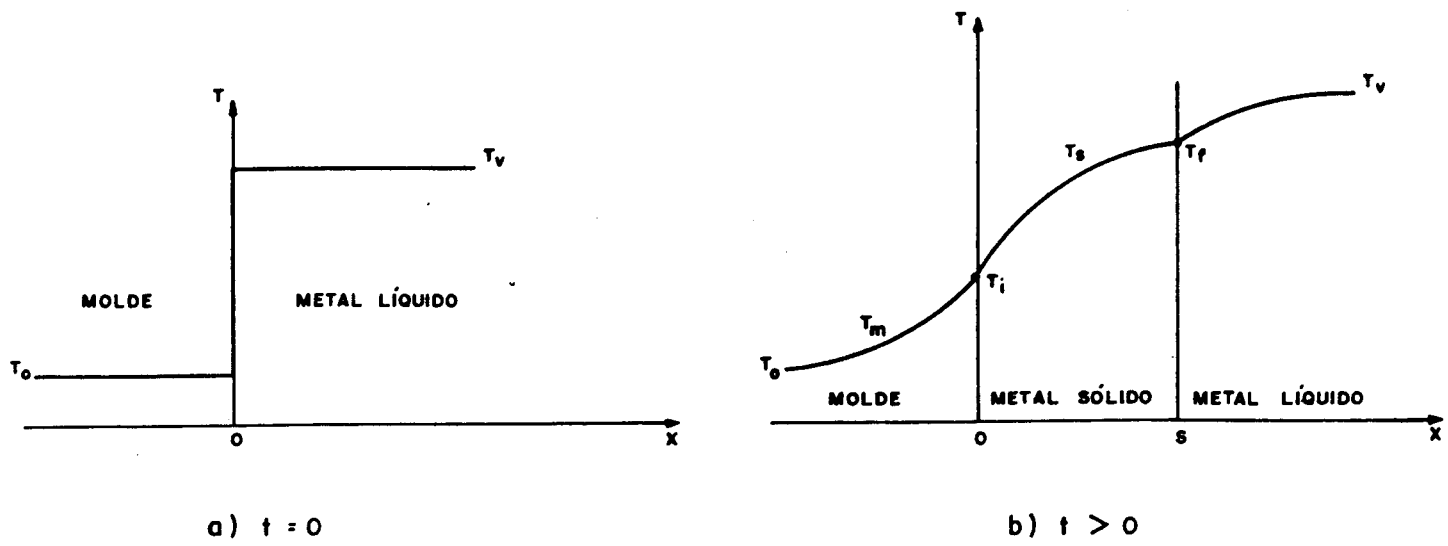


FIGURA 3.1 - Distribuição de temperaturas no sistema metal/molde

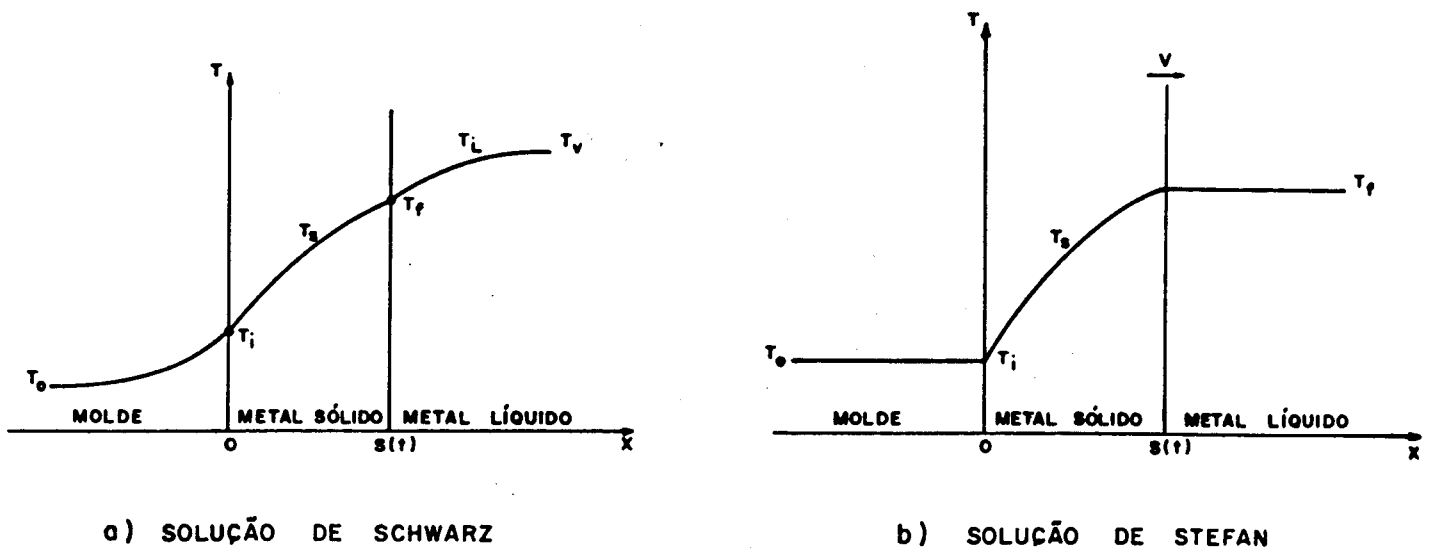


FIGURA 3.2 - Esquema de distribuição de temperaturas no sistema metal/molde de acordo com Schwarz e Stefan.

de fundição e lingotamento. Como exemplo de solução analítica exata que assume a resistência metal/molde finita, pode-se citar a solução de Garcia e Prates<sup>[44-50]</sup>, cuja hipótese fundamental é considerar a resistência metal/molde equivalente a camadas virtuais de material sólido, as quais, para efeito de cálculo do fluxo de calor, ficam incorporadas ao sistema físico real, permitindo que o comportamento térmico do sistema metal/molde possa ser completamente descrito pela equação de Fourier<sup>[44]</sup>.

A Figura 3.3 apresenta o sistema metal/molde real representado em termos de coordenadas temperatura - distância (T,x) e o correspondente sistema virtual (T,x') em um instante qualquer do processo de solidificação em um molde refrigerado.

Garcia e Prates aplicaram a equação de Fourier para condução térmica em regime não estacionário no sistema virtual, considerando primeiramente metais puros e depois ligas metálicas.

No caso de metais puros foram obtidas as seguintes equações :

para a cinética de solidificação

$$t = \frac{1}{4a_{es}\phi^2} S^2 + \frac{c_s d_s}{\pi^{1/2} \phi \exp(\phi^2) [M + \text{erf}(\phi)]} S \quad (3.20)$$

que pode ser colocada na seguinte forma :

$$t = \alpha S^2 + \beta S \quad (3.21)$$

onde:

$$\alpha = \frac{1}{4a_{es}\phi^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{c_s d_s}{\pi^{1/2} \phi \exp(\phi^2) [M + \text{erf}(\phi)]} \quad (3.22)$$

Uma representação gráfica esquemática da equação 3.20 pode ser vista na Figura 3.4.

para o perfil de temperaturas no metal sólido

$$T_{\text{es}} = T_{\infty} + \frac{(T_f - T_{\infty})}{M + \text{erf}(\Phi)} \left[ M + \text{erf}\left(\Phi \frac{2\alpha x + \beta}{2\alpha S + \beta}\right) \right] \quad (3.23)$$

para a temperatura na interface metal/molde

$$T_1 = T_{\infty} + \frac{(T_f - T_{\infty})}{M + \text{erf}(\Phi)} \left[ M + \text{erf}\left(\Phi \frac{\beta}{2\alpha S + \beta}\right) \right] \quad (3.24)$$

A constante de solidificação também é determinada através da equação 3.15.

Para o caso de ligas binárias, o calor latente é levado em consideração através de um ajuste no calor específico dentro da faixa de solidificação ( $c_{\text{L}} = c_{\text{S}} + H/T$ ) e as propriedades físicas dos materiais são invariantes dentro da mesma fase. A representação esquemática do sistema virtual com a presença da zona pastosa pode ser vista nas Figuras 3.5.

São aplicáveis as seguintes condições de contorno ao sistema virtual :

$$x' = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = T_{\infty} = \text{constante} \quad (3.25)$$

$$x' = S'_{\text{es}} \quad \rightarrow \quad T_1 = T_{\text{es}} = \text{constante} \quad (3.26)$$

$$x' = S'_{\text{es}} \quad \rightarrow \quad T_{\text{L}} = T_{\text{es}} = \text{constante} \quad (3.27)$$

$$x' = S'_{\text{L}} \quad \rightarrow \quad T_{\text{L}} = T_{\text{L}} = \text{constante} \quad (3.28)$$

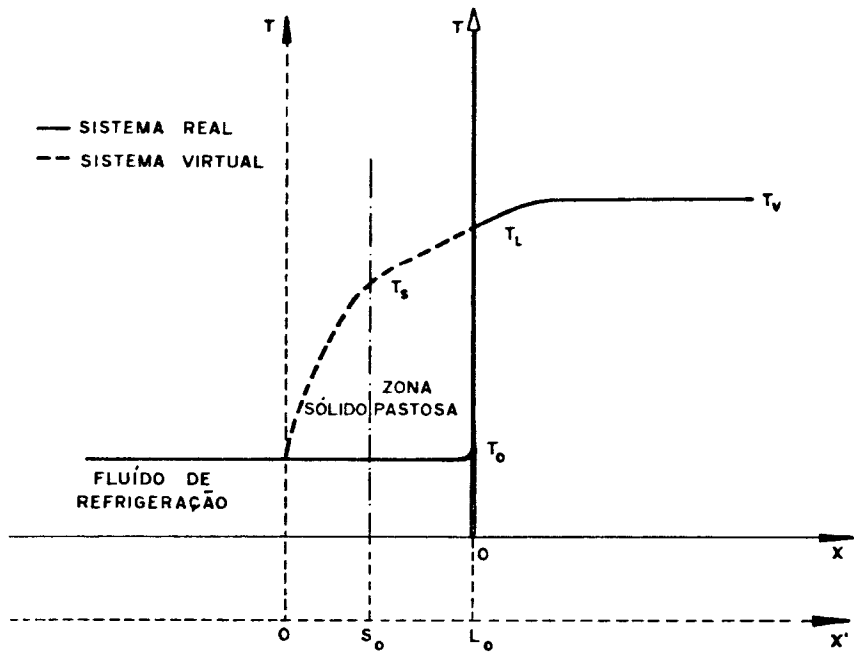
$$x' = S'_{\text{L}} \quad \rightarrow \quad T_{\text{S}} = T_{\text{L}} = \text{constante} \quad (3.29)$$

$$x' = + \quad \rightarrow \quad T_{\text{S}} = T_{\infty} = \text{constante} \quad (3.30)$$

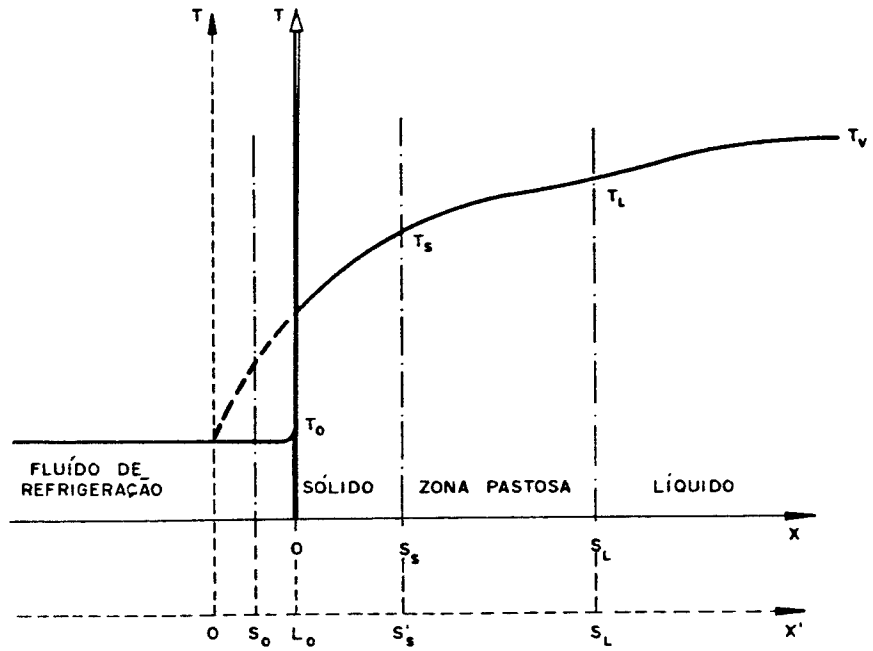
As equações obtidas para o caso de ligas binárias são as seguintes :

para a cinética de solidificação





a)  $t = 0$



b)  $t > 0$

FIGURA 3.5 - Perfil térmico nos sistemas real e virtual durante o processo de solidificação de ligas em molde refrigerado.



$$t = \frac{S_B^2}{4 a_1 \Phi_1^2} + \frac{L_0 S_B}{2 a_1 \Phi_1^2} + \frac{(L_0^2 - S_0^2)}{4 a_1 \Phi_1^2} \quad (3.31)$$

ou de forma mais simplificada

$$t = \alpha_B S_B^2 + \beta_B S_B + \delta \quad (3.32)$$

para o perfil térmico

no metal sólido

$$T_1 = T_0 + \frac{(T_B - T_0)}{\text{erf}(\Phi_1)} \text{erf}\left(\Phi_1 \frac{x + L_0}{S_B + L_0}\right) \quad (3.33)$$

Em especial, a temperatura da superfície do lingote é dada por :

$$T_1 = T_0 + \frac{(T_B - T_0)}{\text{erf}(\Phi_1)} \text{erf}\left(\Phi_1 \frac{L_0}{S_B + L_0}\right) \quad (3.34)$$

na zona pastosa ( " mushy zona ")

$$T_2 = T_L - \frac{(T_L - T_B)}{\text{erf}(\Phi_B) - \text{erf}(n\Phi_1)} [\text{erf}(\Phi_B) - \text{erf}\left(\Phi_B \frac{x + L_0}{S_L + L_0}\right)] \quad (3.35)$$

no metal líquido

$$T_3 = T_U - \frac{(T_U - T_L)}{1 - \text{erf}(m\Phi_B)} [1 - \text{erf}(m\Phi_B \frac{x + L_0}{S_L + L_0})] \quad (3.36)$$

constantes de solidificação  $\Phi_1$  e  $\Phi_B$ .

As constantes de solidificação são determinadas por combinação de duas equações que devem ser resolvidas simultaneamente por iteração. As duas equações são dadas a seguir:

$$\frac{(T_L - T_S)}{\text{erf}(\Phi_E) - \text{erf}(n\Phi_1)} = \frac{k_1 \exp(n^2 \Phi_1^2) (T_S - T_0)}{k_E n \text{erf}(\Phi_1)} \quad (3.37)$$

e

$$\frac{(T_L - T_S)}{\text{erf}(\Phi_E) - \text{erf}(n\Phi_1)} = \frac{k_E m \exp[(1 - m^2) \Phi_E^2] (T_S - T_L)}{k_E (1 - \text{erf}(m\Phi_E))} \quad (3.38)$$

A forma mais simples de determinar as constantes de solidificação consiste em atribuir valores arbitrários de  $\Phi_1$  na equação 3.37 e determinar uma série de valores de  $\Phi_E$ , e em seguida utilizar o mesmo procedimento de forma inversa com relação à equação 3.38. Colocando-se os valores obtidos de  $\Phi_1$  e  $\Phi_E$  um em função do outro na forma gráfica, obtém-se um ponto comum, correspondente à solução das equações.

espessuras virtuais

$$S_e = \frac{2k_1 \Phi_1 (T_S - T_0)}{\text{erf}(\Phi_1) \exp(\Phi_1^2) (T_L - T_0) h} \quad (3.39)$$

$$L_e = \frac{S_e^2}{n \Phi_1} \quad (3.40)$$

A aplicação do modelo acima ao caso de lingotamento contínuo de metais é feita considerando-se desprezível o fluxo de calor na direção axial do lingote<sup>2,3,4</sup> e as equações representativas da cinética de deslocamento das isoterms "solidus" e "liquidus" são colocadas em função de parâmetros do sistema de lingotamento contínuo, como distância abaixo do menisco ( $Z$ ) e velocidade de produção ( $u$ ), ou seja:

"solidus"

$$Z = u (\alpha_E S_E^2 + \beta_E S_E + \delta) \quad (3.41)$$

"liquidus"

$$Z = u (\alpha_1 S_1^{\alpha} + \beta_1 S_1) \quad (3.42)$$

### Analíticos Aproximados

As soluções analíticas aproximadas apresentam como principal característica a imposição de uma expressão matemática para representar o perfil térmico da camada de metal sólido para então derivar-se uma expressão para a cinética de solidificação. Assume hipóteses de fluxo de calor unidirecional, metal e molde considerados semi-infinitos e propriedades físicas do metal e do molde constantes durante a solidificação, que são também hipóteses simplificadoras dos métodos analíticos aproximados,

Outra hipótese simplificadora admite o molde como um absorvedor perfeito, ou seja, apresenta uma difusividade muitíssimo maior que a do metal e, portanto, limitam a aplicação dos métodos aos casos de moldes perfeitamente refrigerados<sup>[52]</sup>

As hipóteses características dos métodos analíticos aproximados assemelham-se bastante das condições verificadas em determinados casos de lingotamento contínuo, o que lhes confere um aspecto de aplicação tecnológica bastante importante<sup>[53, 44]</sup>.

O desenvolvimento das soluções analíticas aproximadas é baseado em balanços de fluxo de calor na espessura solidificada em um instante qualquer do processo de solidificação, associando-se ao sistema metal/molde um sistema de coordenadas conforme mostra o esquema da Figura 3.6. As condições de contorno no início do processo são as mesmas adotadas para os métodos analíticos exatos ( equações 3.3 a 3.8 ).

Considerando-se os seguintes balanços térmicos na espessura solidificada em um instante  $t > 0$  :

na interface metal/molde (  $x = 0$  )

$$q_0 = -k_m \left( \frac{\partial T_m}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (3.43)$$

na interface sólido/líquido (  $x = S$  )

$$q_m = -k_m \left( \frac{\partial T_m}{\partial x} \right)_{x=S} + H \frac{dS}{dt} \quad (3.44)$$

Na espessura solidificada pode-se aplicar a equação de Fourier para fluxo não estacionário de calor :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha_m \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (3.45)$$

Integrando a equação 3.45 em relação a  $x$  :

$$\int_0^S \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx = \frac{k_m}{c_m d_m} \int_0^S \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx \quad (3.46)$$

Introduzindo os resultados dos balanços térmicos expressos pelas equações 3.43 e 3.44 na equação acima resulta em :

$$\int_0^S \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) dx = \frac{H}{c_m} \frac{dS}{dt} + \frac{q_0 - q_m}{c_m d_m} \quad (3.47)$$

e aplicando-se a fórmula integral de Leibnitz<sup>2.14.2</sup> ao primeiro membro da equação 3.47 chega-se à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_0^S T_m dx \right) = \frac{q_0 - q_m}{c_m d_m} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( T_f + H/c_m \right)$$

Esta última equação é a base do desenvolvimento das soluções analíticas aproximadas, as quais irão depender das hipóteses assumidas em relação ao perfil de temperaturas no metal sólido ( $T_m$ ) e na determinação dos fluxos de calor  $q_0$  e  $q_S$ .

Admite-se que o fluxo de calor na interface metal/molde é controlado por um coeficiente de transmissão de calor de valor finito e constante durante o processo de solidificação [44, 47]. Assim sendo o fluxo na interface metal/molde é determinado por :

$$q_0 = h_1 (T_1 - T_0) \quad (3.49)$$

Os diferentes autores que desenvolveram soluções analíticas aproximadas adotaram funções polinomiais de até terceira ordem para descrever o perfil térmico do metal solidificado durante o processo de solidificação. Tais funções obedecem às seguintes condições de contorno :

$$\text{para } x = 0 \quad T_m = T_1 \quad (3.50)$$

$$\text{para } x = S \quad T_m = T_f \quad (3.51)$$

Como exemplo de método analítico aproximado, pode-se destacar o método de Hills [28] que, para estabelecer sua solução, adotou uma função quadrática para descrever o perfil térmico do metal durante a solidificação dada por :

$$T_m = T_1 - \frac{q_0 S}{k_m} \left(\frac{x}{S}\right) + \left(T_f - T_1 + \frac{q_0 S}{k_m}\right) \left(\frac{x}{S}\right)^2 \quad (3.52)$$

A Figura 3.7 apresenta, em forma adimensional, a variação da camada solidificada e da temperatura superficial em função do

tempo, para o lingotamento contínuo do aço, de acordo com as previsões teóricas do modelo de Hills.

A maioria das soluções analíticas aproximadas necessita de facilidades computacionais para chegar-se à solução final, portanto, podem ser classificadas de semi analíticas.

### Métodos Numéricos

Os métodos numéricos têm a sua utilização na determinação do comportamento térmico dos sistemas metal/molde aumentado consideravelmente nos últimos anos devido à maior capacidade de memória e à necessidade cada vez maior de soluções rápidas e precisas, com reflexos na economia e aumento de produção [29-32, 51, 52-55]. Tais métodos permitem uma maior aproximação das condições reais de solidificação, podendo considerar :

- resistência metal/molde finita e variável
- geometria e dimensões do sistema metal/molde
- variação das propriedades termofísicas durante o processo, dentre outros aspectos.

Os métodos numéricos mais utilizados são : Método de Diferenças Finitas ( MDF ) e Método de Elementos Finitos ( MEF ) [37-42]. O método clássico de diferenças finitas aproxima a equação geral de fluxo de calor a pontos nodais distribuídos na forma de rede quadrangular/retangular e as diferentes soluções encontradas na literatura consistem essencialmente de derivações mais sofisticadas do método básico de Dusinberre [29]. Recentemente alguns autores têm-se preocupado na adoção de redes de formato mais flexíveis para propiciar uma melhor aproximação no caso de peças de geometrias irregulares.

Os Métodos de Diferenças Finitas dividem-se em explícitos (MDFE) e implícitos (MDFI). Os métodos explícitos, para calcular a nova temperatura de um ponto em um tempo  $t$ , necessitam da temperatura dos pontos vizinhos no instante  $t-1$  e os implícitos necessitam também da temperatura no tempo  $t$  dos pontos vizinhos.

Os Métodos de Elementos Finitos utilizam técnicas de álgebra matricial para cálculos de fluxo de calor e temperatura e os elementos têm formato que permitem melhor adequação à geometria em análise. Para problemas bidimensionais é comum impor-se uma rede de elementos triangulares ao formato da peça que se pretende abordar, o que permite uma melhor definição do seu contorno. São utilizadas técnicas de álgebra matricial para o cálculo do fluxo de calor e da temperatura dos elementos da rede.

Os MEF são particularmente vantajosos para geometrias complexas. Para geometrias mais regulares o tempo de computação destes métodos são maiores do que os apresentados pelos MDF, o que torna estes últimos métodos mais interessantes para abordar o lingotamento contínuo de tarugos ou placas de aço.

No quadro 3.1 é apresentado um resumo comparativo dos principais métodos.

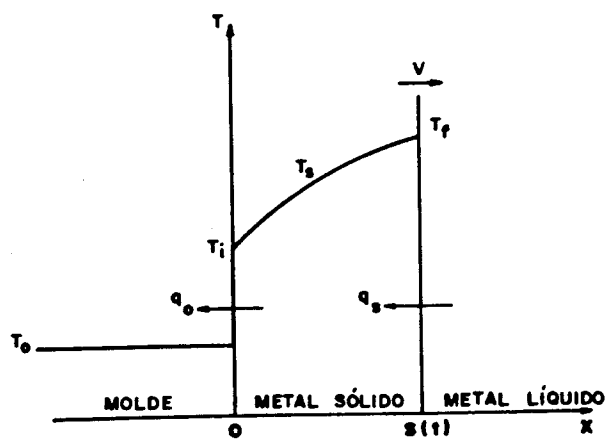


FIGURA 3.6 - Representação esquemática do sistema metal/molde refrigerado, evidenciando o fluxo de calor nas interfaces metal/molde e sólido líquido.



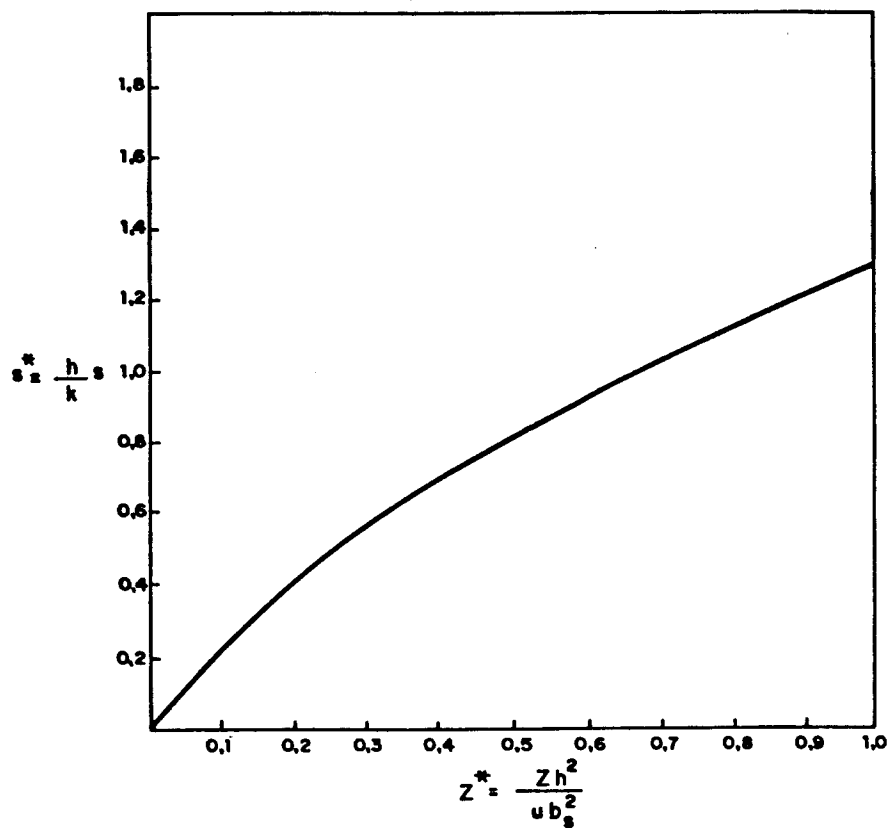
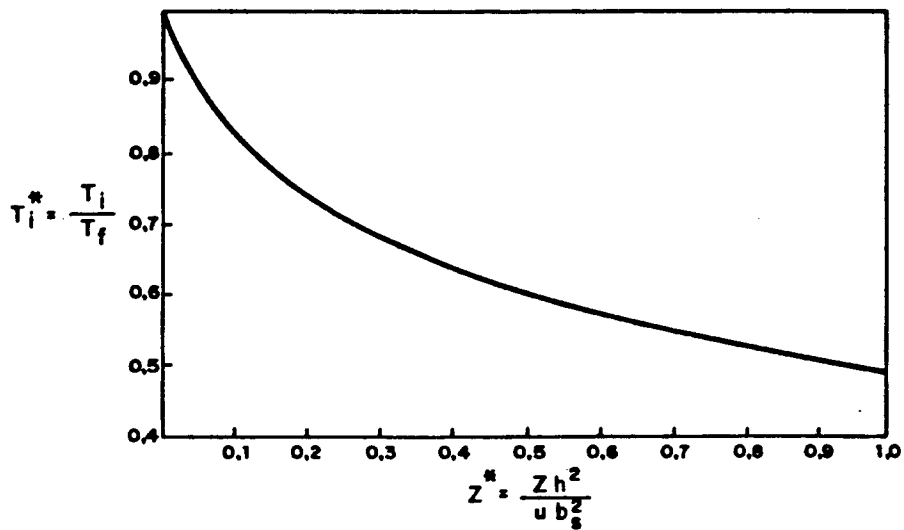


FIGURA 3.7 - Variação da espessura solidificada em função do tempo na forma adimensional, segundo a solução de Hills.

QUADRO 3.1

MÉTODOS DISPONÍVEIS, APLICAÇÕES E NECESSIDADES DE FERRAMENTAL DE CÁLCULO

MÉTODO	CAMPO DE APLICAÇÕES PRINCIPAIS	FERRAMENTAL DE CÁLCULO
ANALÍTICO	- CÁLCULO DE TEMPOS DE DESMOLDAGEM	
	- EVOLUÇÃO DA SOLIDIFICAÇÃO NO LINGOTAMENTO CONTÍNUO ATÉ 2ª OU 3ª ZONA DE CHUVEIROS	CALCULADORA CIENTÍFICA DE BOLSO
	- ESTIMATIVA DE MODO GERAL	
SEMI-ANALÍTICO	- RESTRITO A LINGOTAMENTO CONTÍNUO, PRINCIPALMENTE ETAPA DE SOLIDIFICAÇÃO NO MOLDE	AS PRINCIPAIS ABORDAGENS PRECISAS DE COMPUTADOR DE GRANDE PORTE (INTEGRAÇÃO NUMÉRICA)
	- QUALQUER CÁLCULO RELATIVO AO COMPORTAMENTO DA SOLIDIFICAÇÃO, DEVENDO-SE EVITAR A ANÁLISE DE GEOMETRIAS COMPLEXAS	MICROCOMPUTADOR COMPUTADOR DE GRANDE PORTE, DEPENDENDO DA ANÁLISE
ELEMENTOS FINITOS	- QUALQUER CÁLCULO RELATIVO AO COMPORTAMENTO DA SOLIDIFICAÇÃO	COMPUTADOR DE GRANDE PORTE

A escolha do método mais adequado para cada situação depende da precisão necessária, custo envolvido, repetibilidade das operações de cálculo, confiabilidade, etc.



As equações algébricas serão obtidas fazendo-se balanços térmicos em cada nó, para intervalos de tempo  $\Delta t$  suficientemente pequenos de forma que:

- no cálculo da variação de temperatura de um ponto de referência durante o intervalo, somente a temperatura local e a temperatura dos pontos adjacentes devem ser consideradas
- as temperaturas obtidas no início do intervalo podem ser usadas durante o intervalo
- a variação da quantidade de calor de cada elemento pode ser calculada a partir da temperatura do ponto de referência, localizado dentro do elemento.

### 3.2.1 - MODELO UNIDIMENSIONAL

Inicialmente vamos considerar um sistema homogêneo dividido em elementos de comprimento, largura e altura  $\Delta x$ , com fluxo de calor unidimensional paralelo ao mesmo, conforme Figura 3.9. O balanço térmico para um ponto  $i$  do sistema pode ser representado como :

$$\begin{array}{l}
 \text{-----} \\
 \text{-----} \\
 \text{fluxo líquido de todos} \\
 \text{os elementos vizinhos} \\
 \text{no elemento } i, \text{ durante} \\
 \text{ } \Delta t
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \text{-----} \\
 \text{-----} \\
 \text{aumento na} \\
 \text{energia do material} \\
 \text{associado ao nó } i
 \end{array}$$

ou algebricamente :

$$q_{i+1} + q_{i-1} = C_i \cdot \Delta T \quad (3.53)$$

onde  $C_i$  é a capacidade calorífica do elemento  $i$  e é dada por :

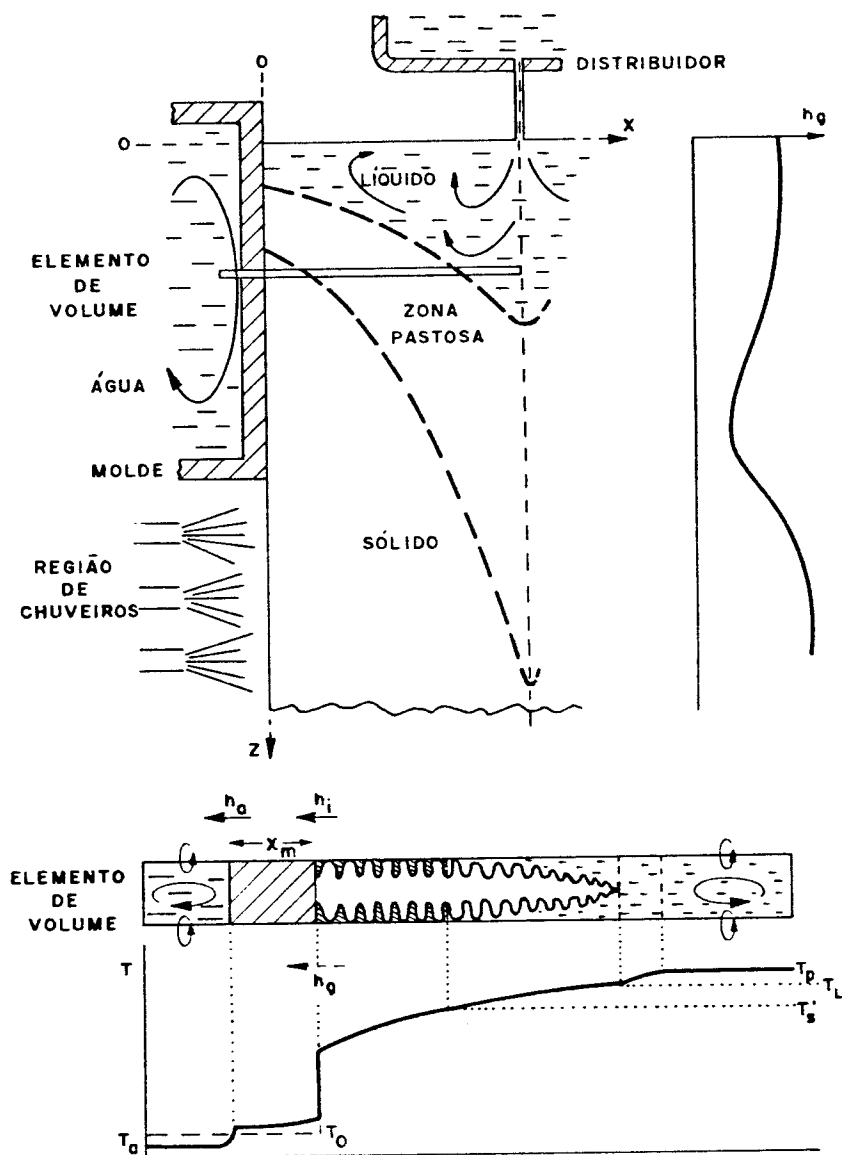


FIGURA 3.8 - Representação esquemática do corte longitudinal do sistema de lingotamento contínuo, com elemento de volume e respectivo perfil térmico.

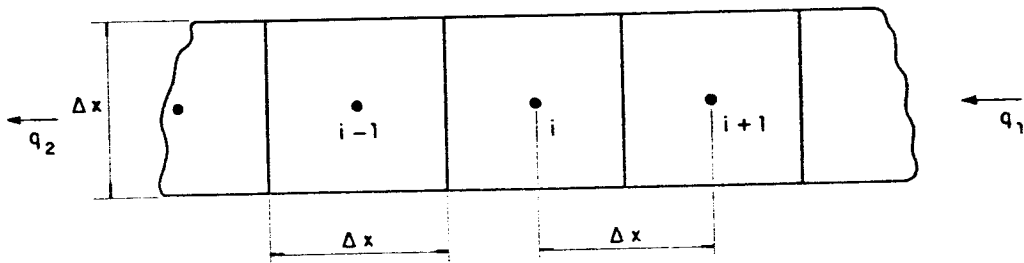
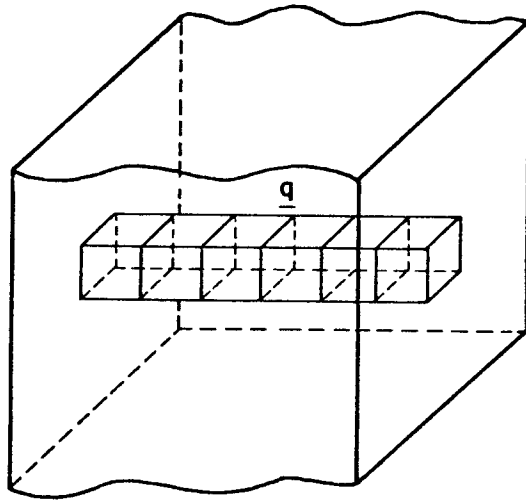


FIGURA 3.9 - Elemento de referência utilizado para o desenvolvimento unidimensional do método numérico.

$$C_1 = \frac{c_1 \cdot d_1 \cdot V_1}{\Delta t} \quad (3.54)$$

Assumindo-se que em um instante qualquer as temperaturas dos elementos são  $T_{i-1}$ ,  $T_i$ ,  $T_{i+1}$  e que, depois de um intervalo de tempo  $t$ , sejam  $T'_{i-1}$ ,  $T'_i$ , etc., o balanço térmico pode ser escrito como :

$$k_{i-1} \Delta x (T_{i-1} - T_i) t + k_{i+1} \Delta x (T_{i+1} - T_i) t = c_1 d_1 \Delta x (T'_i - T_i) \quad (3.55)$$

Para um meio homogêneo :

$$k_{i-1} = k_i = k_{i+1} \quad (3.56)$$

portanto, substituindo-se na equação anterior e simplificando-se  $x$ , tem-se :

$$(T_{i-1} - T_i) + (T_{i+1} - T_i) = \frac{c_1 \cdot d_1 \cdot \Delta x^E}{k_i \cdot \Delta t} (T'_i - T_i) \quad (3.57)$$

Define-se um módulo adimensional:

$$M' = \frac{c_1 \cdot d_1 \cdot \Delta x^E}{k_i \cdot \Delta t} = \frac{\Delta x^E}{a_i \cdot \Delta t} \quad (3.58)$$

onde  $a$  é a difusividade e é dada por :

$$a = \frac{k}{c \cdot d} \quad (3.59)$$

Substituindo-se na equação 3.57 :

$$(T_{i-1} - T_i) + (T_{i+1} - T_i) = M' (T'_i - T_i) \quad (3.60)$$

$$T'_i = \frac{T_{i-1} + T_{i+1} + (M' - 2) T_i}{M'} \quad (3.61)$$

$$= \frac{1}{M'} T_{i-1} + \left( \frac{M' - 2}{M'} \right) T_i + \frac{1}{M'} T_{i+1} \quad (3.62)$$

ou

$$T'_i = F_{i-1} \cdot T_{i-1} + F_i \cdot T_i + F_{i+1} \cdot T_{i+1} \quad (3.63)$$

Cada fator  $F$  é denominado fator peso e pode-se verificar que:

- a soma dos  $F$  para qualquer ponto é igual à unidade
- todo  $F$  é positivo ou zero, uma vez que  $M'$  não deve ser menor que 2.

A equação 3.62 representa a base do método de diferenças finitas no sistema unidimensional.

Nota-se que, se  $M'$  for menor que 2, a temperatura do elemento 1 terá um valor negativo no seu valor futuro, o que corresponde a dizer que quanto mais quente estiver o elemento inicialmente, mais frio ficará no final do intervalo  $\Delta t$ , o que não é consistente com o 2º princípio da termodinâmica. Dessa forma, pode-se estabelecer:

$$M' > 2 \quad (3.64)$$

Para um meio homogêneo, sem consideração das interfaces, estudos mostraram que existe uma influência sensível na precisão dos resultados, conforme se adotam diferentes valores de  $M'$ . Utilizando-se  $M' = 2$ , os valores flutuam muito em torno dos valores reais. A utilização de  $M' = 3$  melhora bastante os resultados, com exceção do primeiro e terceiro pontos do processo de cálculo, causando, no entanto, um aumento de 50% do número de passos, sem entretanto aumentar sensivelmente a precisão do cálculo, exceto para o primeiro e terceiro ponto, quando comparado com a utilização de  $M' = 3$ .

Portanto, é sempre conveniente a otimização de  $M'$  em função da precisão e do número de iterações ocorrentes do  $\Delta t$  resultante.



### 3.2.2 - TRATAMENTO DE INTERFACES

Analisando-se o elemento de volume extraído de um sistema de lingotamento contínuo ( Figura 3.8 ), em determinado instante, uma vez que o meio não é homogêneo, observa-se a presença de várias interfaces:

- interface molde/metal (líquido, sólido ou pastoso)
- interface sólido/pastoso
- interface pastoso/líquido
- interface com refrigerante.

Cada uma das interfaces observadas apresenta uma resistência térmica característica que deve ser desenvolvida e substituída na equação básica (equação 3.62 ).

#### INTERFACE METAL/MOLDE REFRIGERADO

No caso interface metal/molde refrigerado , tem-se as seguintes condições de contorno:

- a temperatura do ponto i-1 é igual à temperatura do refrigerante, ou seja,  $T_{i-1} = T_r$
- o elemento na interface tem metade do volume dos elementos internos, uma vez que escolheu-se posicionar a interface sobre o ponto nodal, conforme esquema da Figura 3.11 e, portanto :

$$C_1 = \frac{c_1 \cdot d_1 \cdot V_1/2}{\Delta t} = \frac{c_1 \cdot d_1 \cdot V_1}{2 \cdot \Delta t} \quad (3.65)$$

e

$$R_{1r} = \frac{1}{h_{1r} \cdot \Delta x^2} \quad (3.66)$$

Substituindo-se na equação 3.67, o balanço térmico para o ponto na interface fica:

$$h_{1r} \Delta x^e (T_r - T_1) + k_{1+1} \Delta x (T_{1+1} - T_1) = \frac{c_1 \cdot d_1 \Delta x^e}{2 \cdot \Delta t} (T'_1 - T_1) \quad (3.68)$$

Definindo-se um módulo de superfície

$$N' = \frac{h_{1r} \cdot \Delta x}{k_1} \quad (3.69)$$

e introduzindo na equação acima, tem-se :

$$N' (T_{1r} - T_1) + (T_{1+1} - T_1) = \frac{M'}{2} (T'_1 - T_1) \quad (3.70)$$

e

$$T'_1 = \frac{2 N'}{M'} T_r + \left(1 - \frac{2 N'}{M'}\right) T_1 + \frac{2}{M'} T_{1+1} \quad (3.71)$$

É conveniente observar que o módulo  $M'$  é próprio para meios homogêneos. No caso do meio do elemento  $i+1$  ser diferente do elemento  $i$ , deve ser desenvolvido um módulo próprio, como será visto mais adiante.

## INTERFACE PASTOSO LÍQUIDO

Vamos adotar a interface entre os meios conforme esquema da Figura 3.11. No caso esquematizado a capacidade calorífica é relativa ao líquido e a resistência térmica é relativa aos meios pastoso e líquido em contato. Dessa maneira tem-se:

$$R_{m1} = \frac{x/2}{k_P \Delta x^e} + \frac{x/2}{k_L \Delta x^e} = \frac{k_P + k_L}{2k_P \cdot k_L \cdot \Delta x} \quad (3.72)$$

Portanto obtém-se :

para o ponto  $i$  à esquerda da interface, portanto meio pastoso, deve ser levado em consideração o calor latente liberado, cuja formulação será objeto do capítulo 4, item 1.

para o ponto  $i$  à direita da interface, portanto no líquido

$$T'_i = \frac{X_{LP}}{M'_1} T_{i-1} + \left(1 - \frac{X_{LP} + 1}{M'_1}\right) T_i + \frac{1}{M'_1} T_{i+1} \quad (3.73)$$

sendo :

$$X_{LP} = \frac{2 \cdot k_F}{k_F + k_L} \quad (3.74)$$

Fazendo-se uma análise do processo de solidificação, notam-se várias situações de interfaces mistas em contato, que podem variar com o tempo. Através de uma avaliação do processo e da liga a ser utilizada e por analogia com os desenvolvimentos anteriores, podem-se desenvolver as equações necessárias para o sistema em questão.

#### PONTOS NA SUPERFÍCIE ISOLADA

A superfície isolada pode ser considerada de duas maneiras:

- colocando-se a mesma sobre o ponto nodal. Dessa maneira o elemento da interface tem metade do volume dos elementos da rede e o desenvolvimento das equações é análogo ao desenvolvimento para as situações anteriores, lembrando que o fluxo de calor do elemento  $i+1$  é considerado nulo.

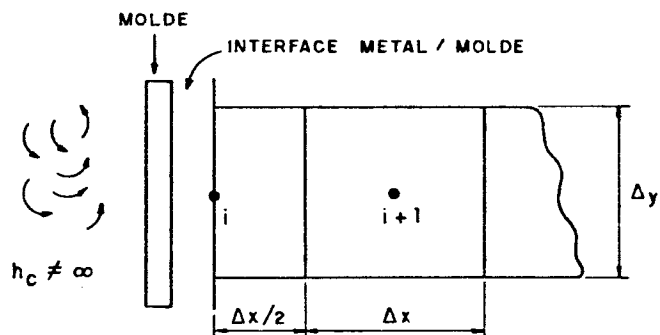


FIGURA 3.10- Representação esquemática do elemento de referência para o caso de molde refrigerado.

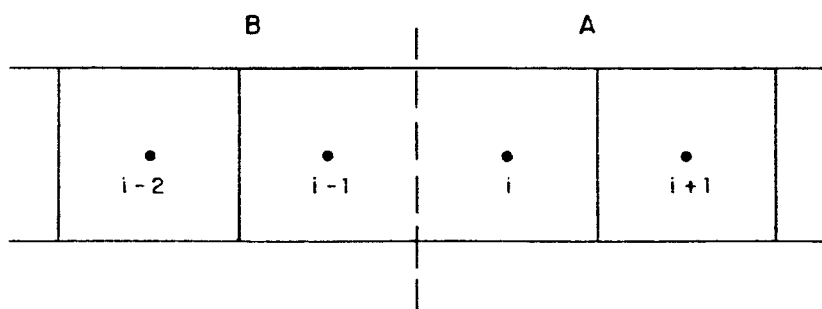


FIGURA 3.11 - Representação das interfaces pastosa/líquida com posicionamento de interface entre os elementos.

- a superfície isolada esta colocada entre o ponto i e o ponto i+1. Como o sistema é simétrico, a temperatura do ponto i+1 é igual a temperatura do ponto i-1 ou do ponto i, dependendo do número de elementos ser par ou ímpar e, nesse caso não é necessário o desenvolvimento de equações próprias para a superfície isolada.

### 3.2.3. - DESENVOLVIMENTO BIDIMENSIONAL

No caso bidimensional, cada nó é circundado por 4 nos vizinhos, conforme esquema da Figura 3.12. O fluxo total de calor ao nó i é dado pela soma dos fluxos de cada nó. Assim sendo, tem-se:

$$q_{i-1,j} = \frac{1}{R_{i-1,j} + R_{i,j}} (T_{i-1,j} - T_{i,j}) = K_{i-1,j} (T_{i-1,j} - T_{i,j}) \quad (3.75)$$

$$q_{i,j-1} = \frac{1}{R_{i,j-1} + R_{i,j}} (T_{i,j-1} - T_{i,j}) = K_{i,j-1} (T_{i,j-1} - T_{i,j}) \quad (3.76)$$

$$q_{i+1,j} = \frac{1}{R_{i+1,j} + R_{i,j}} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) = K_{i+1,j} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) \quad (3.77)$$

$$q_{i,j+1} = \frac{1}{R_{i,j+1} + R_{i,j}} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) = K_{i,j+1} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) \quad (3.78)$$

Como o fluxo líquido de calor de todos os nós em direção ao nó i,j durante um tempo t é igual ao aumento na energia interna do material associado ao nó i,j, tem-se:

$$U_{i,j} d_{i,j} c_{i,j} \frac{(T'_{i,j} - T_{i,j})}{t} = K_{i-1,j} T_{i-1,j} + K_{i,j-1} T_{i,j-1} + K_{i+1,j} T_{i+1,j} + K_{i,j+1} T_{i,j+1} - (K_{i-1,j} + K_{i,j-1} + K_{i+1,j} + K_{i,j+1}) T_i \quad (3.79)$$

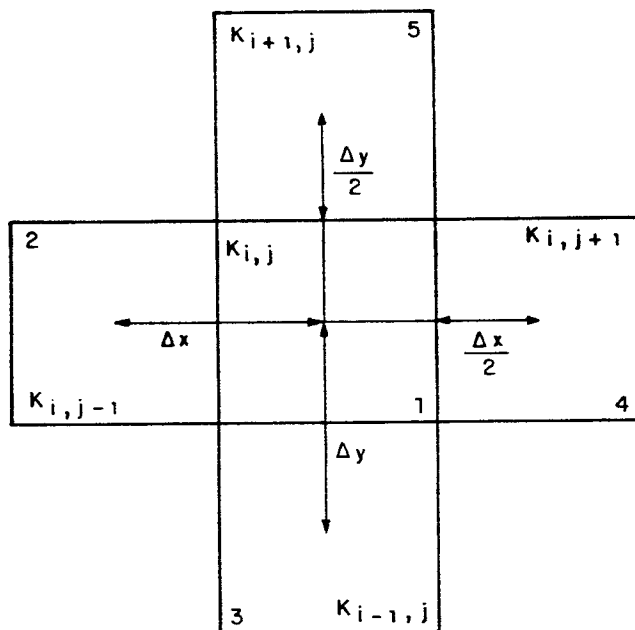
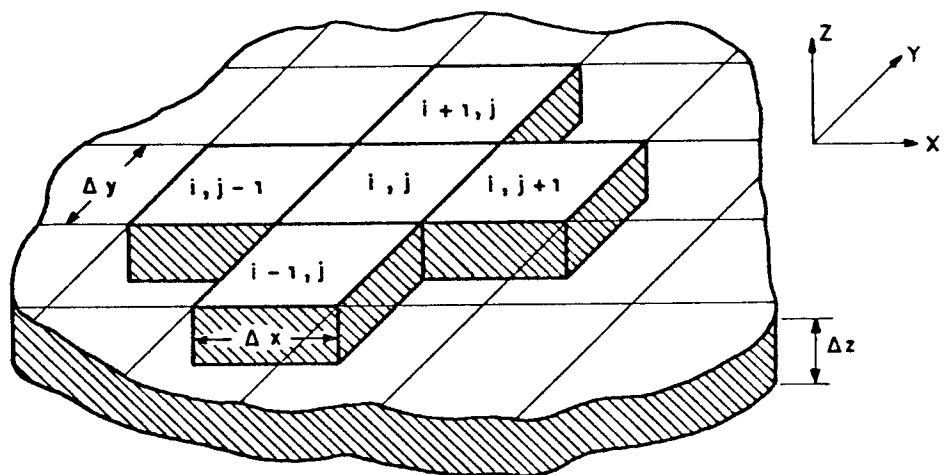


FIGURA 3.12 - Elemento de referência utilizado para o desenvolvimento bidimensional do método numérico.

Para facilidade de desenvolvimento, ao elemento central  $i, j$  vamos associar o índice 1, ao elemento à esquerda  $i, j-1$  o índice 2, ao elemento  $i-1, j$  o índice 3, ao elemento  $i, j+1$  o índice 4 e ao elemento  $i+1, j$  o índice 5. A representação da padronização adotada encontra-se na Figura 3.13. Assim sendo a equação acima pode ser escrita na seguinte forma :

$$V_i d_i c_i \frac{(T'_i - T_i)}{t} = \sum_e^{n+1} K_k T_k + \sum_e^{n+1} K_k T_i \quad (3.80)$$

sendo  $n$  o número de nós em comunicação com o nó  $i$ .

Rearranjando a equação acima tem-se a equação bidimensional explícita:

$$T'_i = T_i \left( 1 - \sum_e^{n+1} \frac{K_e}{C_i} \right) + \sum_e^{n+1} \frac{K_k}{C_i} T_k \quad (3.81)$$

#### APLICAÇÃO PARA UMA DIMENSÃO - MEIO HOMOGENEO

No caso unidimensional ,cada elemento esta em contato com outros dois elementos, portanto  $n = 2$  e, aplicando-se a equação acima ,tem-se:

$$T'_i = \left[ 1 - \frac{1}{C_i} (K_e + K_a) \right] T_i + \frac{K_e}{C_i} T_e + \frac{K_a}{C_i} T_a \quad (3.82)$$

o que é compatível com a equação básica desenvolvida para uma dimensão.

#### TRATAMENTO DE INTERFACES NO MODELO BIDIMENSIONAL

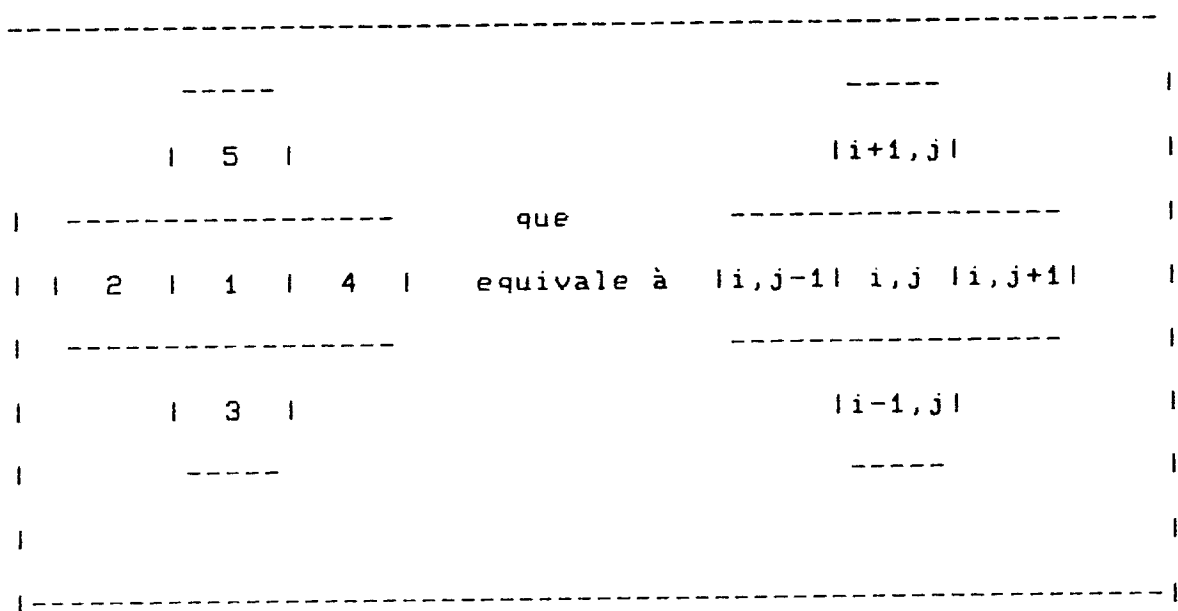
As interfaces encontradas para aplicação do modelo, são decorrentes do próprio sistema ,como por exemplo as interfaces

metal/refrigerante ou são decorrentes do processo de solidificação, como as interfaces entre os meios: sólido, pastoso e líquido.

No desenvolvimento do modelo foi visto que cada nó está circundado por quatro nós vizinhos e a ocorrência das interfaces vai obedecer um lei lógica de formação, que depende da direção de extração de calor e, portanto da direção de avanço da frente de solidificação. Desta maneira, tem-se várias possibilidades de ocorrência das interfaces.

Os elementos pastosos têm as suas propriedades variando com a variação da fração sólida e portanto comportam-se como interfaces heterogêneas.

De acordo com a padronização, se tivermos em determinado instante os pontos central e superior pastosos, indicaremos as condutividades térmicas por  $k_1$  e  $k_0$  respectivamente.



| Figura 3.13 - Representação do padrão adotado para rela- |  
 | cionar as propriedades dos pontos |

-----



Vamos analisar o caso de um ponto pastoso circundado por dois pontos líquidos e dois pastosos, conforme esquema da Figura 3.14. A resistência entre o ponto pastoso e o ponto líquido, conforme já desenvolvida para uma dimensão é dada por :

$$R_{1,4} = R_{1,5} = \frac{k_3 + k_4}{2 \cdot k_3 \cdot k_4 \cdot \Delta x} \quad (3.83)$$

onde 1 relaciona-se com o meio pastoso e os índices 4 e 5 relacionam-se com o meio líquido.

Para a relação K/C tem-se:

$$\frac{K_4}{C_3} = \frac{2 \cdot k_4}{(k_3 + k_4)} \cdot \frac{1}{K'_3} \quad (3.84)$$

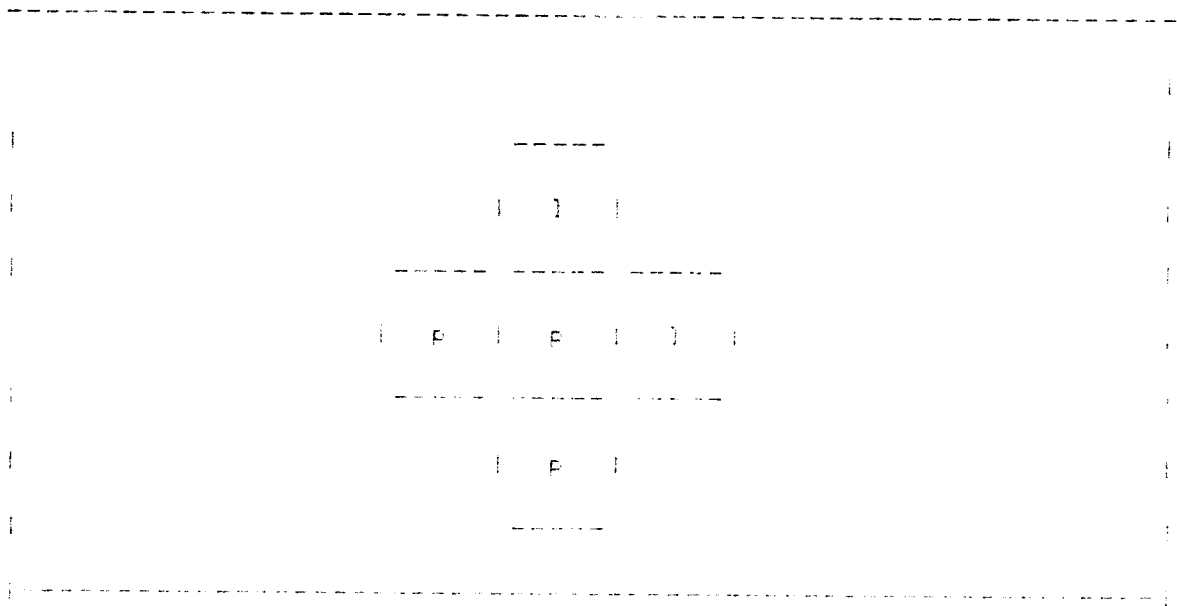


FIGURA 3.14 - Representação esquemática mostrando o elemento central pastoso circundado por dois elementos líquidos e dois elementos pastosos.

Como os elementos pastosos comportam-se como meios heterogêneos, as resistências são desenvolvidas de maneira análoga e temos portanto um caso de 3 resistências heterogeneas.

Desenvolvidas as resistências, faz-se a soma dos fluxos e chega-se à equação procurada. No caso de elementos pastosos, deve-se considerar a parcela referente ao calor latente liberado durante a mudança de fase e que será considerado no capítulo 4, item 1.

Por analogia desenvolve-se equações para todas as situações presentes no sistema.

As equações desenvolvidas nesse trabalho, encontram-se no Apêndice 1.

## DESENVOLVIMENTO DO PROGRAMA

Uma vez desenvolvidas as equações, desenvolveu-se o programa, cujo fluxograma pode ser visto na Figura 3.15.

Para dados de entrada necessita-se das propriedades da liga, tamanho do molde, critérios de controle da temperatura da superfície do lingote, temperaturas inicial, coeficientes de transmissão de calor nas várias etapas de resfriamento, velocidade de extração do lingote e parâmetros decorrentes do método de diferenças finitas desenvolvido.

O programa pode nos fornecer as velocidades de avanço das interfaces sólidas e líquidas o perfil térmico em qualquer instante e em qualquer posição e o tamanho das zonas de resfriamento, ou no caso de dimensões pré - determinadas, fornece as condições de resfriamento necessárias ao atendimento dos critérios de controle do processo.

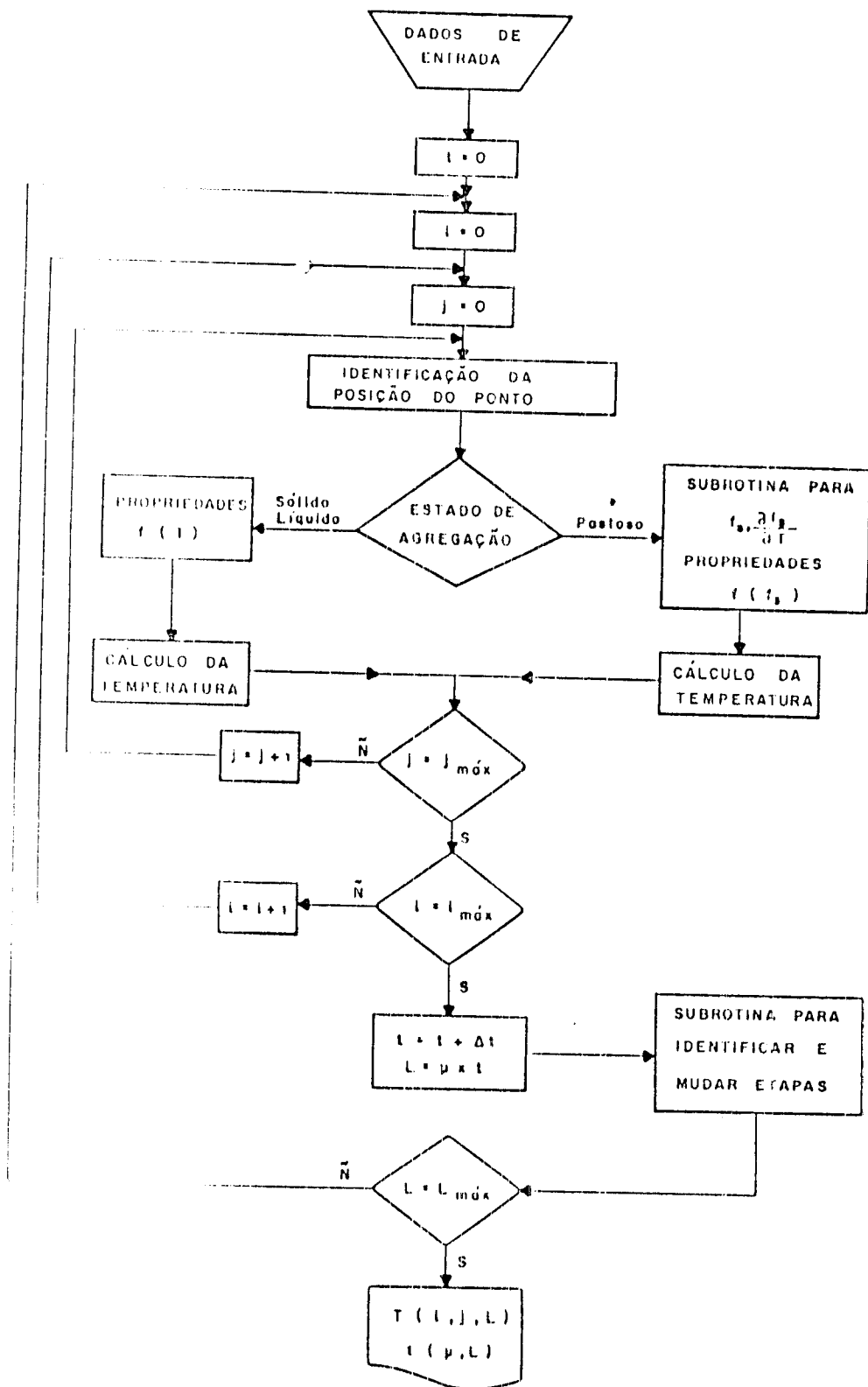


Figura 3.15 - Fluxograma do programa de aplicação do método desenvolvido.

## CAPÍTULO 4

### ANÁLISE DAS CARACTERÍSTICAS FÍSICAS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Os modelos matemáticos normalmente são desenvolvidos considerando-se somente os modos de trocas térmicas presentes no sistema metal/molde. Não são levadas em consideração condições decorrentes das características físicas do sistema ou do processo de solidificação de metais e ligas.

A precisão dos resultados finais depende muito das condições de contorno estabelecidas e, no caso da solidificação do aço no processo de lingotamento contínuo, podem-se destacar alguns pontos que merecem uma análise mais criteriosa :

- liberação do calor latente
- propriedades termofísicas de cada fase
- superaquecimento
- efeito terminal
- abordagem dos coeficientes de transferência de calor no molde e no resfriamento secundário.

É importante ressaltar que, para que os modelos possam retratar de forma confiável a solidificação do aço no lingotamento contínuo, é preciso que as condições de transferência de calor no molde e na etapa de resfriamento por chuveiros sejam muito bem caracterizadas. Estas condições são traduzidas por coeficientes de transferência de calor, que se constituirão em dados essenciais.

#### 4.1 - LIBERAÇÃO DO CALOR LATENTE NA SOLIDIFICAÇÃO

A forma de liberação do calor latente (H) e conseqüentemente a natureza da redistribuição do soluto que ocorre durante a solidificação é extremamente importante devido a seus efeitos determinantes sobre as características do resfriamento e a estrutura do metal sólido.

No caso de metais puros utiliza-se o procedimento normal que consiste na absorção ou liberação de todo o calor latente na medida em que a temperatura do metal líquido atinge a temperatura de fusão ou solidificação. No caso de ligas, a liberação do calor latente tem início quando, durante o resfriamento, o metal líquido atinge a temperatura liquidus ( $T_L$ ) e termina quando é alcançada a temperatura solidus ( $T_S$ ), estando conseqüentemente diretamente ligada à evolução da fração sólida ( $f_s$ ) no intervalo de solidificação. Sendo um processo de fusão teríamos uma absorção de calor no mesmo intervalo e o equacionamento é o mesmo com inversão de sinais.

Incluindo-se o calor liberado no balanço térmico para um nó de uma rede utilizada para o desenvolvimento de diferenças finitas, a equação 3.91 fica:

$$\rho \Delta x \Delta y \Delta z \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} \right) = C_p \rho \Delta x \Delta y \Delta z \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \Delta x \Delta y \Delta z H \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (4.1)$$

onde

$$\alpha = - \frac{H}{\rho} \frac{\partial f_s}{\partial t} \quad (4.2)$$

sendo  $f_s$  a fração sólida.

Desenvolvendo-se de maneira análoga como foi feito no capítulo 3.2.6 para duas dimensões chega-se à:

$$T'_{i,j} = \frac{1}{F_H} ( - 2 F_{i,j} T_{i,j} + F_{i,j-1} T_{i,j-1} + F_{i-1,j} T_{i-1,j} + F_{i,j+1} T_{i,j+1} + F_{i+1,j} T_{i+1,j} ) + T_{i,j} \quad (4.3)$$

sendo :

$$F_H = 1 + \frac{H}{c_{i,j}} \frac{f_E}{T} \quad (4.4)$$

Para o cálculo da fração sólida existem várias abordagens que foram desenvolvidas, levando-se em consideração: tipo da liga, sistema metal/molde e eventuais condições de resfriamento. As várias abordagens serão detalhadas a seguir.

#### 4.1.1 - LIBERAÇÃO LINEAR DE H NO INTERVALO DE SOLIDIFICAÇÃO (TL-TS)

$$f_E (T) = \frac{T_L - T}{T_L - T_E} \quad (4.5)$$

ou ainda nesse caso, pode-se alterar artificialmente o valor do calor específico da região constituída de líquido e sólido através da expressão :

$$c_2 = c_3 + \frac{H}{T_L - T_E} \quad (4.6)$$

onde os índices 2 e 3 correspondem respectivamente às regiões de existência de sólido e líquido.

#### 4.1.2 - REGRA DA ALAVANCA

Quando se considera que o sistema está em equilíbrio termodinâmico, ou seja, que a composição química permanece uniforme dentro de cada fase, o comportamento da solidificação pode ser descrito pela clássica regra da alavanca.

Considerando-se as linhas solidus e liquidus como linhas retas, a composição do sólido junto à fronteira sólido/líquido ( $C_E$ ) pode ser descrita por :

$$C_E = \frac{k' C_0}{f_E (k' - 1) + 1} \quad (4.7)$$

onde :

$C_0$  - composição nominal da liga

$k'$  - coeficiente de redistribuição do soluto

Através de modificações da equação acima,  $f_E$  pode ser expressa em função das temperaturas do sistema :

$$f_E = \left( \frac{1}{1 - k'} \right) \left( \frac{T_L - T}{T_F - T} \right) \quad (4.8)$$

onde  $T_F$  representa a temperatura de fusão do elemento base.

#### 4.1.3 - EQUAÇÃO DE SCHEIL

As condições de solidificação verificadas na prática não conduzem a situações de equilíbrio termodinâmico em todo o sistema metálico. Para situações em que a difusão do soluto no sólido pode ser desprezada e que a ação da convecção no metal líquido assegura completa mistura do soluto, o tratamento

clássico de Scheil permite calcular a concentração do sólido na fronteira sólido/líquido através da relação :

$$C_s = k' C_0 (1 - f_s)^{k'-1} \quad (4.9)$$

ou ainda em função das temperaturas do sistema :

$$f_s = 1 - \left( \frac{T_f - T}{T_f - T_L} \right)^{1/(k'-1)} \quad (4.10)$$

Esta abordagem conduz a resultados bastante próximos de situações práticas que conduzem a solidificação dendrítica. Entretanto, a hipótese de ausência de difusão no sólido formado faz com que esta abordagem seja utilizada com mais precisão em casos de solução sólida substitucional. Deve-se esperar que a maioria das situações práticas de solidificação ocorram na faixa compreendida entre abordagens da regra da alavanca e da equação de Scheil, sendo o fator determinante de posição entre estes dois casos limites exatamente a intensidade da difusão no estado sólido.

#### 4.1.4 - MODELO DE BRODY E FLEMINGS

A hipótese de ausência de difusão de soluto no estado sólido é certamente uma restrição muito forte quando são abordados casos com solução sólida intersticial. Nesses casos, devido à elevada mobilidade atômica do soluto intersticial, é preciso que sejam também quantificadas as modificações no perfil de concentração de soluto em cada instante, levando-se em conta também o sentido de migração de soluto em direção ao sólido formado (difusão de retorno). Brody e Flemings propuseram duas soluções que levam em



consideração a difusão no estado sólido, representadas pelas seguintes expressões :

- crescimento constante da ramificação dendrítica na direção perpendicular à direção de deslocamento da interface sólido/líquido

$$C_s = k' C_e \left( 1 - \frac{f_s}{1 + k'} \right)^{(k'-1)} \quad (4.11)$$

e em termos das temperaturas do sistema :

$$f_s = (1 + \alpha k') \left[ 1 - \left( \frac{T_f - T}{T_f - T_L} \right)^{1/(k'-1)} \right] \quad (4.12)$$

- crescimento parabólico da ramificação dendrítica na direção perpendicular à direção de deslocamento da interface sólido/líquido

$$C_s = k' C_e \left[ 1 - (1 - 2\alpha k') f_s \right]^{(k'-1)/(1 - \alpha k')} \quad (4.13)$$

e em termos das temperaturas do sistema :

$$f_s = \left( \frac{1}{1 - 2\alpha k'} \right) \left[ 1 - \left( \frac{T_f - T}{T_f - T_L} \right)^{(1 - \alpha k')/(k'-1)} \right] \quad (4.14)$$

sendo :

$$\alpha = \frac{4 D_s t_{0L}}{\lambda^2} \quad (4.15)$$

onde :

$D_s$  = difusividade do soluto no sólido

$t_{SL}$  = tempo local de solidificação.

$\lambda$  = espaçamento dendrítico

sendo que para o caso de aços a difusividade do carbono no sólido pode ser estimada pela expressão :

$$D_s = 10^7 \exp \left( - \frac{16300}{T} \right) \quad (4.16)$$

onde T pode ser tomado como uma temperatura média no intervalo de solidificação, embora esta simplificação possa ser desnecessária em tratamentos numéricos.

Quando se tratar de crescimento dendrítico, as expressões de Brody e Flemings representadas pelas equações 4.14 a 4.16 são mais precisas.

#### 4.1.5 - MODELO DE CLYNE E KURZ

A observação de que o modelo de Brody e Flemings conduz a resultados precisos somente em uma faixa de valores de  $\alpha$ , apresentando resultados que contrariam as condições de solidificação à medida que os valores de  $\alpha$  se tornam elevados, levou a uma modificação no modelo de Brody e Flemings que pudesse quantificar o efeito da difusão de retorno em toda a faixa de valores de  $\alpha$  ( $0 \rightarrow \infty$ ).

Esta modificação proposta por Clyne e Kurz conduziu às seguintes expressões :

$$C_s = k' C_0 [1 - (1 - 2 \Omega k' f_s)^{k'-1} / (1 - \Omega k')] \quad (4.17)$$

ou em termos das temperaturas do sistema :

$$f_s = \left( \frac{1}{1 - 2\Omega k'} \right) \left[ 1 - \left( \frac{T_s - T_L}{T_s - T_L} \right) \right]^{(1 - \Omega k') / (k' - 1)} \quad (4.18)$$

onde

$$\Omega = \alpha \left[ 1 - \exp\left(-\frac{1}{\alpha}\right) \right] - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha}\right) \quad (4.19)$$

#### 4.1.6 - ANÁLISE CONCLUSIVA

A melhor maneira de avaliar qual das abordagens mencionadas seria a mais conveniente para ser adotada na modelagem numérica da solidificação de aços, seria utilizar abordagens entre os casos limites de valores de  $\alpha$ , quais sejam :

$\alpha = 0$             Equação de Scheil

$\alpha = \infty$           Regra da Alavanca

Para facilitar a visualização comparativa entre os resultados das diferentes abordagens, é interessante adotar um aço com intervalo de solidificação grande, por exemplo com 1 % de carbono.

O carbono é um soluto intersticial de elevada mobilidade atômica (altos valores de  $D_s$ ), o que implica em valores altos para  $\alpha$  geralmente pouco acima de 5 para condições de solidificação observadas na prática de lingotamento. Nessas condições, a utilização do modelo de Brody e Flemings não é indicada já que para este valor o modelo apresenta uma divergência muito grande das condições reais de solidificação. Nesse caso, por exemplo, o modelo prevê no final do intervalo de

solidificação, temperaturas bem acima da temperatura sólida ( $T_0$ ), o que constitui uma condição física completamente fora da realidade. Para analisar a região intermediária de valores de  $\alpha$  (entre 0 e  $\infty$ ), a única possibilidade no caso do aço constituir-se na abordagem de Clyne e Kurz.

A Figura 4.1 mostra, para o caso do aço com 1 %C a evolução da fração sólida ao longo do intervalo de solidificação para vários valores de  $\alpha$ , inclusive os limites representados pela equação de Scheil e a regra da alavanca. As curvas mostradas na Figura 4.1 permitem que se conclua:

- A equação de Scheil, por não considerar a difusão de retorno no sólido, prevê o final da solidificação ( $f_s=1$ ) a temperaturas muito abaixo da temperatura de transformação  $T_0$ , implicando em valores conflitantes com as condições reais de solidificação.
- O modelo de Clyne e Kurz, além de se constituir no melhor elaborado dentre todos no que diz respeito às hipóteses adotadas na formulação, cobre toda a faixa de valores de  $\alpha$ , sendo o mais adequado para abordar a formação da fração sólida para qualquer condição de solidificação. Entretanto, para o caso de aços onde os valores de  $\alpha$  são de modo geral maiores do que 0, as previsões do modelo de Clyne e Kurz se aproximam muito da condição de equilíbrio termodinâmico, ou seja, da abordagem da regra da alavanca. Nessas condições, devido às maiores facilidades de manipulação e simplificação desta última abordagem recomendarse, para casos de solidificação de aços, determinar-se a formação da fração sólida no intervalo de solidificação através da abordagem da Regra da Alavanca.

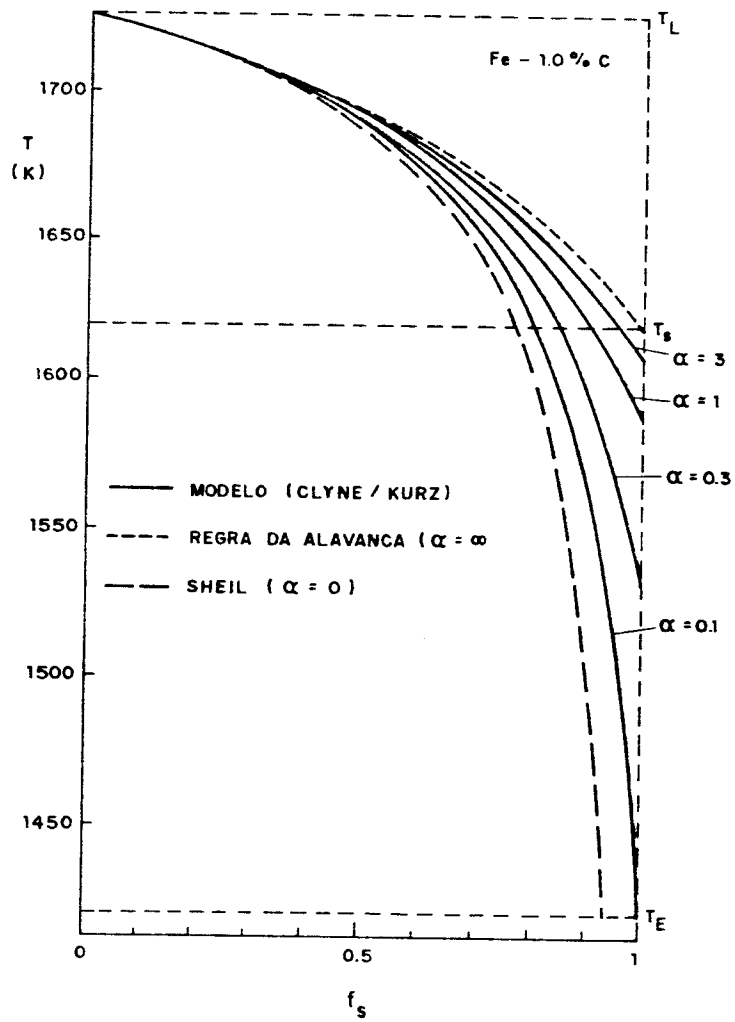


FIGURA 4.1 - Variação da fração sólida ( $f_s$ ) com a temperatura

## 4.2 - PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS DE CADA FASE<sup>[14, 32, 93-95]</sup>

A precisão do perfil de resultados que se obtém na análise da solidificação dos metais através de modelos matemáticos, depende fortemente da exatidão das propriedades termofísicas do metal analisado.

A literatura especializada pertinente apresenta uma elevada quantidade de informações no que diz respeito a propriedades de metais puros, sendo entretanto bastante mais restritas quando a abordagem trata de ligas de diferentes concentrações de soluto. Em função desta carência de informações, é inevitável que na solidificação de ligas metálicas, cada caso seja analisado separadamente em função das informações disponíveis.

As propriedades termofísicas que constituem dados essenciais para a análise matemática acima mencionada são as seguintes :

- Calor latente de solidificação ( H )
- Condutividade Térmica de cada fase ( k )
- Calor Específico de cada fase ( c )
- Densidade de cada fase ( d )

### 4.2.1 - CALOR LATENTE DE SOLIDIFICAÇÃO

Para a grande maioria das ligas metálicas, somente estão disponíveis informações relativas ao calor latente dos metais envolvidos na formação da mesma. Nesses casos, é preciso considerar cada diagrama de equilíbrio de fases em separado e fazer-se uma estimativa do calor latente global em função da quantidade relativa das fases presentes na concentração nominal da liga em questão. No caso particular de aços, esta dificuldade

é contornada tendo em vista que dentro do campo de definição de aços ( máximo de 2 % de carbono em peso ) a baixa concentração de carbono não chega a alterar de forma significativa o valor do calor latente do metal base. O valor de H pode ser assumido constante, restando de fundamental a análise da forma com que é liberado este calor dentro do intervalo de solidificação, o que foi abordado no item 4.2.

#### 4.2.2 - CONDUTIVIDADE TÉRMICA DE CADA FASE

É importante considerar que esta propriedade pode variar bastante com a temperatura e, principalmente, para cada estado de agregação. No caso de transformações alotrópicas ( alterações do reticulado cristalino em determinadas temperaturas ) esta propriedade pode também variar.

Tratando-se de uma liga e sendo conhecidas as condutividades térmicas dos metais que constituem a liga, é necessário recorrer ao diagrama de fases para que possa ser feita uma estimativa dessa propriedade para cada concentração de soluto. De modo geral pode-se escrever :

- sólido

$$k_1 = k(T) \quad ; \quad T < T_B \quad (4.20)$$

- intervalo de solidificação

$$k_2 = k_1(T) f_B + k_3(T) f_L \quad ; \quad T_B < T < T_L \quad (4.21)$$

Neste caso o valor local da condutividade térmica vai depender da abordagem adotada para a evolução da fracção sólida  $f_s$  no intervalo  $(T_L - T_S)$

- líquido

$$k_s = k(T) \quad ; \quad T < T_L \quad (4.22)$$

O meio líquido, na prática do lingotamento, está sujeito à presença de correntes de convecção, naturais ou forçadas, que modificam as condições de fluxo de calor. Em algumas abordagens costuma-se modificar  $k_s$  para levar em consideração o efeito destas correntes. Este assunto será abordado posteriormente quando for analisado o superaquecimento do metal líquido

#### 4.2.3 - CALOR ESPECÍFICO DE CADA FASE

Praticamente a mesma análise que foi feita para a condutividade térmica pode ser estendida ao calor específico. Esta propriedade pode variar significativamente com a temperatura, estado de agregação e, quando for o caso, com as transformações alotrópicas.

De modo semelhante pode-se escrever :

- sólido

$$c_s = c(T) \quad ; \quad T < T_S \quad (4.23)$$

- intervalo de solidificação



$$c_p = c_s(T) f_s + c_l(T) f_l \quad ; \quad T_s < T < T_L \quad (4.24)$$

Algumas abordagens teóricas, com o intuito de facilitar o tratamento da liberação do calor latente no intervalo de solidificação, modificam artificialmente o calor específico dentro do intervalo de solidificação introduzindo o calor latente através de :

$$c_p = c_s + \frac{H}{(T_L - T_s)} \quad (4.25)$$

O efeito de frenagem da solidificação, imposta pela liberação de calor latente, fica embutido no calor específico. Esta simplificação só se justifica em casos particulares. Quando se trata de analisar globalmente um processo de lingotamento através de modelos numéricos, esta simplificação representada pela equação 4.25 não deve ser utilizada.

- líquido

$$c_p = c(T) \quad ; \quad T > T_L \quad (4.26)$$

Neste caso, o efeito das correntes convectivas só encontra reflexos em uma menor variação de temperaturas no líquido. (tendência à homogeneização)

#### 4.2.4 - DENSIDADE DE CADA FASE

Esta propriedade também varia com os mesmos fatores citados anteriormente para condutividade térmica e calor específico, embora de forma menos significativa. Entre os diferentes estados

de agregação sua variação pode até ser significativa. Entretanto, adotar sua variação com a temperatura dentro de cada meio, ao invés de um valor constante, não conduz necessariamente a resultados mais precisos quando o processo de solidificação é modelado matematicamente. Da mesma forma, pode-se escrever :

- sólido

$$d_s = d(T) \quad T < T_E \quad (4.27)$$

- intervalo de solidificação

$$d_E = d_s(T)f_E + d_L(T)f_L \quad T_E < T < T_L \quad (4.28)$$

- líquido

$$d_L = d(T) \quad T > T_L \quad (4.29)$$

#### 4.2.5 - AVALIAÇÃO DAS PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS NO LINGOTAMENTO DE AÇOS

A determinação de parâmetros importantes para o planejamento e o controle de operações de lingotamento de aços, através de modelos matemáticos, depende de se abordar de forma mais precisa possível as características que constituem dados essenciais, como as propriedades termofísicas. Estas propriedades, além de variarem com a temperatura conforme já mencionado, têm outro agravante de variação constituído pelo polimorfismo do elemento base que constitui a liga ( Ferro ).

A literatura especializada apresenta informações sobre estas propriedades, de forma incompleta e dispersa. É conveniente que a abordagem a respeito das propriedades termofísicas seja centrada em faixas estreitas de composições químicas de aços ou mesmo caso a caso. Nestas condições, para cada faixa de temperatura que se pretenda analisar, é possível estabelecer simplificações que não comprometam os resultados finais a serem determinados pelas ferramentas matemáticas de controle.

Uma concentração bastante típica para operações de lingotamento (convencional ou contínuo de placas) pode ser utilizada como exemplo de análise. Trata-se do aço 1010 (0,1 % de carbono em peso), que apresenta as propriedades calor específico e condutividade térmica variando com a temperatura, conforme mostram as Figuras 4.2a e 4.2b.

Pode-se observar que o calor específico sofre bruscas variações quando ocorrem modificações na alotropia do Ferro (Fe - Fe), enquanto que a condutividade térmica aparentemente sofre esta influência revertendo sua tendência de queda no aquecimento, embora de forma menos sensível e pouco além do ponto de transformação. As características dos pontos de transformação podem ser observadas no diagrama Ferro-Carbono, apresentado na Figura 4.3. A densidade no caso do aço, não sofre variações quantitativas que mereçam atenção ou que modifiquem os resultados da presente análise.

No caso do lingotamento contínuo de placas, o controle da temperatura da superfície implica que, para a composição química em questão, a análise deva se limitar a temperaturas acima de 860 C, o que pode ser deduzido da Figura 4.3.

A literatura mostra um exemplo desta análise, para a composição química em questão, onde os autores variaram calor

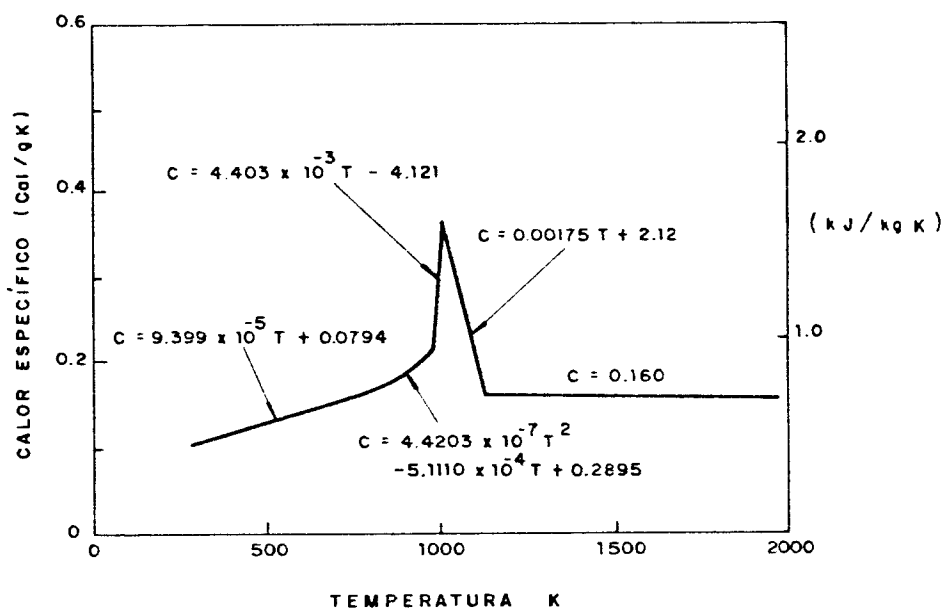
específico e condutividade térmica com a temperatura, admitindo frente plana de solidificação e utilizando um modelo matemático com transferência de calor bidimensional para o cálculo da temperatura da superfície do lingote e da evolução da casca sólida<sup>[32,33]</sup>. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.4a e 4.4b e mostram que os cálculos obtidos não apresentam diferença sensível quando as propriedades termofísicas são consideradas constantes ou variáveis com a temperatura.

Pelo que foi exposto, pode-se recomendar a adoção de propriedades termofísicas constantes com a temperatura dentro de cada estado de agregação, evitando-se assim tempos de computação desnecessários quando o controle é exercido na faixa de temperaturas mencionadas. Entretanto, se alguma condição operacional exigir algum tipo de controle de temperaturas abaixo de 860 °C, é preciso que se considere a variação brusca do calor específico no resfriamento e mesmo a variação da condutividade térmica. Nestas condições, é preciso contar com um mecanismo que possa avaliar o resfriamento do lingote/placa abaixo das temperaturas estritamente de controle do processo de lingotamento contínuo.

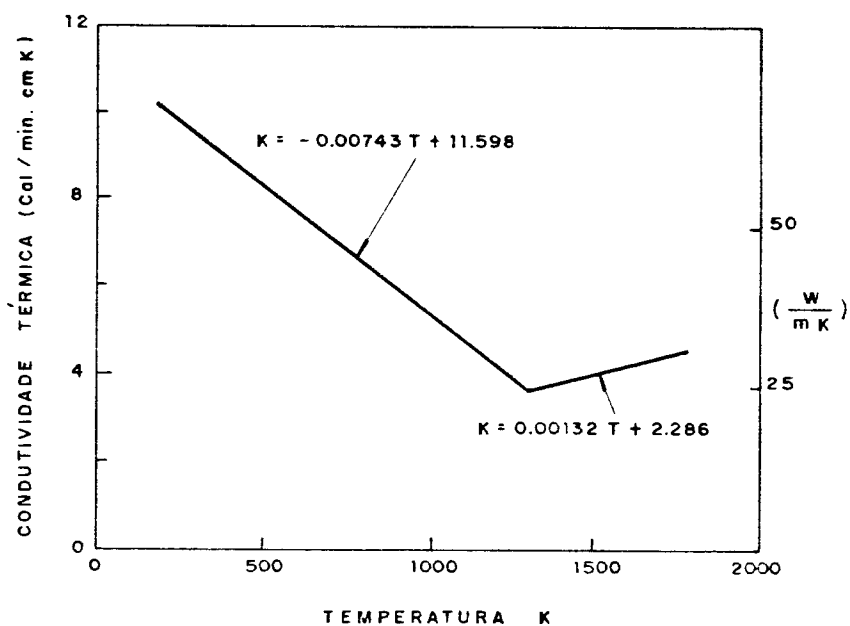
#### 4.3 - SUPERAQUECIMENTO E CONVECÇÃO NO AÇO LÍQUIDO

[32,35,45,61,84,96-100]

A importância de se representar quantitativamente o efeito da convecção térmica no metal líquido depende do que se pretende avaliar no processo de lingotamento contínuo. A utilização de agitação eletromagnética como forma de melhorar a qualidade interna do lingote/placa de aço obriga a quantificação deste efeito já que, como reflexo imediato das melhores condições de



a ) calor específico



b ) condutividade térmica

FIGURA 4.2 - Variação de propriedades termofísicas com a temperatura para o aço 1010

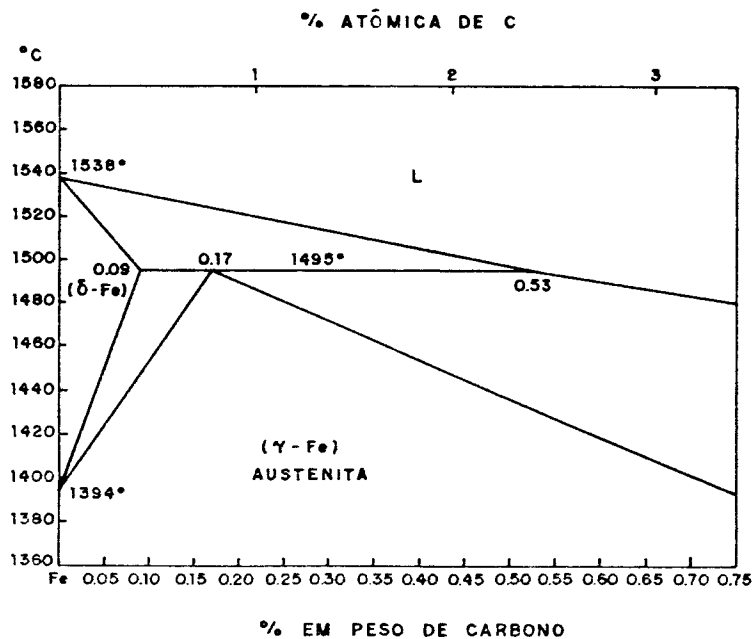
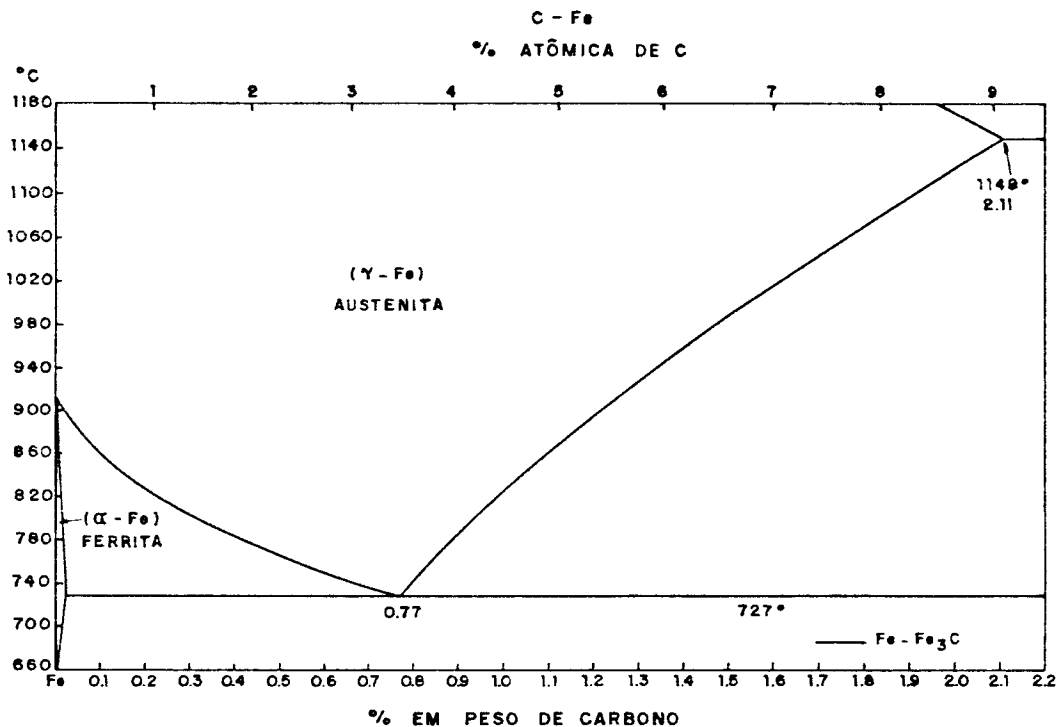
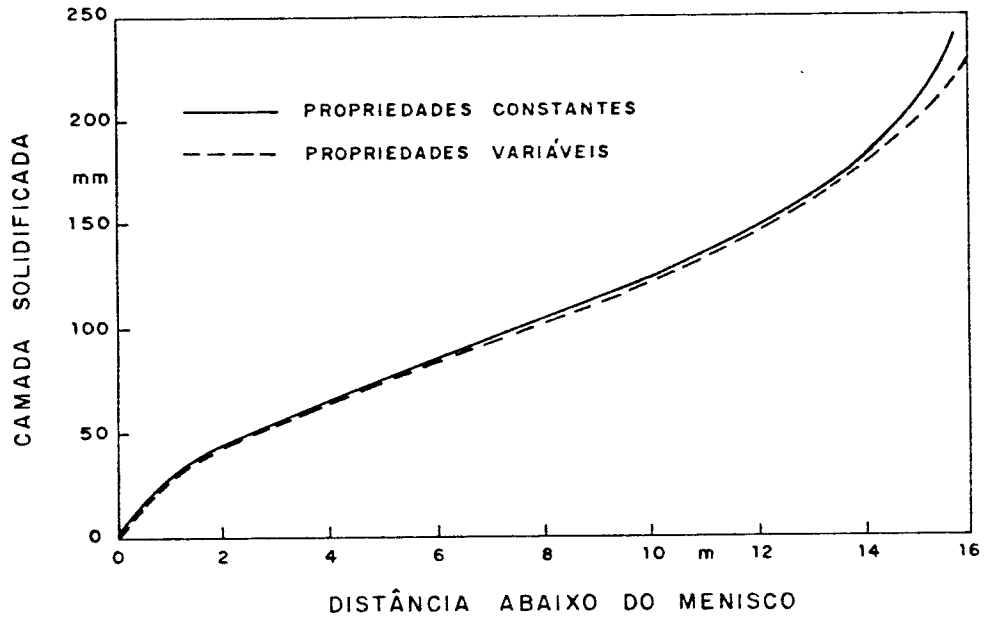
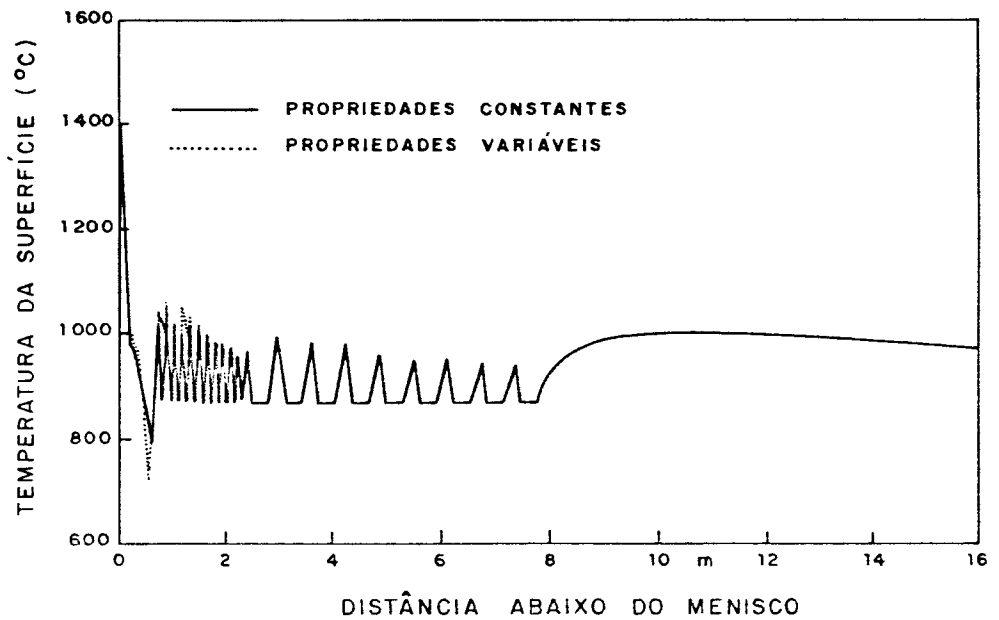


FIGURA 4.3 - Diagrama de Equilíbrio Fe - Fe<sub>3</sub>C



a ) evolução da camada de aço solidificada



b ) evolução da temperatura superficial

FIGURA 4.4 - Efeito da variação das propriedades termofísicas com a temperatura

troca térmica no líquido, a profundidade do poço de metal líquido é reduzida. A avaliação da convecção natural merece entretanto, uma análise caso a caso.

A equação de fluxo de calor, na forma unidimensional, que incorpora este efeito, pode ser expressa por :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{cd} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{H}{c} \frac{\partial f_m}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (4.30)$$

onde  $u_x$  é a velocidade convectiva local.

O fluxo de metal líquido ocorre tanto no volume contendo exclusivamente líquido quanto na zona pastosa. Entretanto, nesta última região a contribuição do efeito convectivo no fluxo global de calor pode ser desprezado, embora o transporte de massa envolva uma redistribuição apreciável de soluto, podendo conduzir à macrosegregação.

A necessidade de representar o efeito convectivo, sob o ponto de fluxo global de calor, fica restrita ao volume de líquido. A literatura apresenta vários trabalhos relativos à quantificação do fluxo convectivo em relação ao fluxo global de calor [14, 17, 18].

O superaquecimento do metal líquido no molde depende essencialmente das condições em que o aço é vazado e mantido dentro do distribuidor, além da forma com que é vazado dentro do molde.

Como os valores de superaquecimento estão diretamente relacionados com consumo de energia, é evidente que a tendência é fazer com que estes valores sejam mínimos e apenas suficientes para o desenvolvimento operacional do processo (ou seja, a temperatura do aço líquido deve ser suficiente para impedir



solidificação fora do molde, evitando bloqueio das válvulas de descarga do distribuidor, sem entretanto ser excessiva ).

A Figura 4.5 apresenta resultados experimentais obtidos no lingotamento contínuo do aço e que correlacionam o superaquecimento no distribuidor com o superaquecimento no molde.<sup>[33]</sup> Por estes dados, verifica-se um valor máximo de cerca de 20 °C de superaquecimento no molde, para cerca de 50 °C de superaquecimento no distribuidor.

A turbulência do vazamento para o molde é a principal fonte de eliminação do superaquecimento. Pode-se dizer que a faixa de 10 a 20 °C de superaquecimento no molde são valores bastante correntes na prática do lingotamento contínuo do aço. Como não são valores elevados, deve-se esperar que a contribuição da convecção no metal líquido ao fluxo global de calor deva também ser pequena.

Para saber-se se o efeito do superaquecimento deve ser quantificado na modelagem do processo, é preciso verificar sua influência sobre a espessura da camada solidificada e sobre a temperatura da superfície do lingote na saída do molde ( já que são dados fundamentais para o controle).

Perkins e Irving<sup>[32]</sup> verificaram em unidades industriais de lingotamento contínuo de aço e com o apoio de um modelo matemático da solidificação, que cada 10 °C de superaquecimento acrescenta 20 segundos no tempo total de solidificação, não havendo mudança na espessura solidificada que pudesse ser detectada. Verificaram também que, para cada grau de superaquecimento acima de 1550 °C, havia como reflexo imediato um aumento de 0,5 °C na temperatura superficial na saída do molde. Singh e Blazek<sup>[34]</sup>, em um trabalho experimental, obtiveram resultados bastante próximos aos mencionados anteriormente. Para

superaquecimento da ordem de 30 °C, foi observado um aumento de 100 °C da temperatura superficial na saída do molde.

Outra influência que se observa em relação ao fluxo convectivo refere-se à sua dependência do intervalo de solidificação do aço, ou seja, depende indiretamente da concentração de carbono do aço. A Figura 4.6 apresenta exemplos deste tipo de dependência correlacionando valores calculados da velocidade da corrente convectiva em função do intervalo de solidificação do aço e da distância a partir do menisco<sup>[94]</sup>.

A situação típica de lingotamento contínuo de placas (dadas as concentrações de carbono comumente utilizadas) deve-se situar próximo à curva de  $T = 25$  °C, ou seja, aquela referente ao menor perfil de velocidades de correntes convectivas. Este fato, somado aos baixos valores de superaquecimento já mencionados, deverá acarretar uma componente de fluxo convectivo de baixo valor quando comparada ao fluxo global de calor.

Existem outras abordagens que permitem agregar a componente convectiva de forma indireta, desconsiderando o último termo da equação 4.30. Uma dessas abordagens, incorpora o valor do superaquecimento ao valor do calor latente da seguinte forma<sup>[45]</sup>:

$$H_{\text{eff}} = H + c_{\text{a}}(T_{\text{V}} - T_{\text{L}}) \quad (4.31)$$

onde :

$H_{\text{eff}}$  = calor latente efetivo

$H$  = calor latente da liga

$T_{\text{V}} - T_{\text{L}}$  = superaquecimento

$c_{\text{a}}$  = calor específico do líquido

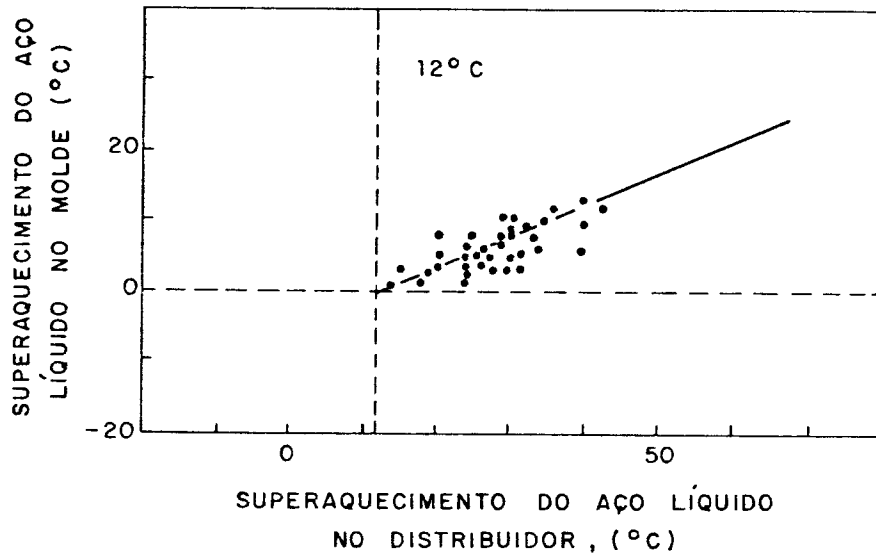


FIGURA 4.5 - Correlação entre superaquecimento do aço líquido no distribuidor e superaquecimento no molde.

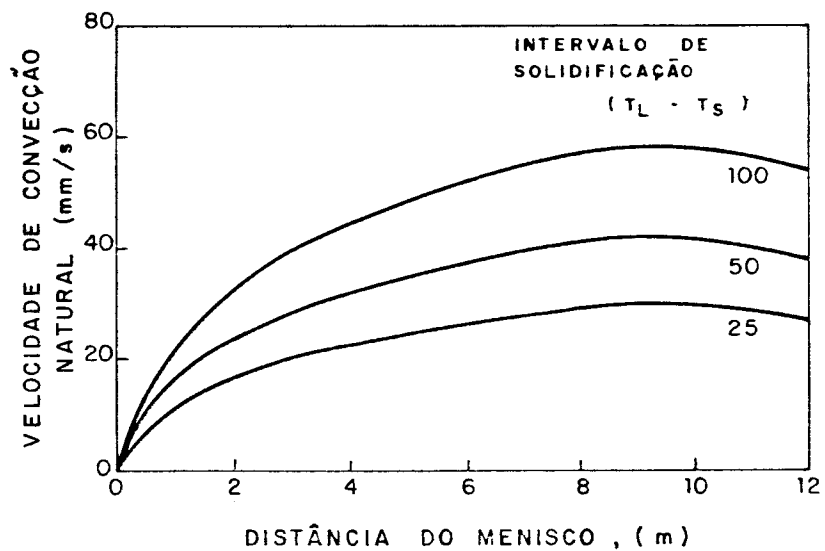


FIGURA 4.6 - Velocidade da convecção natural no lingotamento contínuo do aço.

Esta alteração do valor do calor latente permite introduzir uma quantidade extra ao valor original de H, que termina por introduzir um efeito de frenagem ao processo de solidificação ( embora como já mencionado, este efeito deve ser quantitativamente pequeno ).

Outra maneira de levar-se em consideração indiretamente o efeito do superaquecimento ( e conseqüentemente o efeito convectivo ) consiste em alterar-se artificialmente a condutividade térmica do líquido, através da seguinte expressão<sup>[104, 100]</sup> :

$$k_{\text{ef}} = k_{\text{a}}( 1 + 6f_L^2 ) \quad (4.32)$$

sendo

$k_{\text{ef}}$  = condutividade térmica efetiva

A equação 4.32 permite considerar o efeito convectivo também dentro da zona pastosa, com  $k_{\text{ef}}$  modificando-se ponto a ponto através da evolução de  $f_L$ . No meio líquido (  $f_L = 1$  ) o valor da condutividade térmica seria representada por um valor sete vezes maior que aquele da condutividade térmica do aço líquido.

Na modelagem matemática da solidificação, objetivando o controle do processo de lingotamento contínuo, o importante é traduzir o comportamento térmico do lingote/placa de forma mais próxima possível das condições de operação.

Conforme já analisado, os valores de superaquecimento utilizados na prática do lingotamento, não devem produzir efeitos quantitativos de maior significancia no cômputo global do fluxo de calor.

As incertezas inerentes ao comportamento convectivo real no lingotamento contínuo, conduzindo à necessidade de adoção às vezes de modelos hidrodinâmicos para analisar este comportamento, aliadas aos valores de características, como por exemplo, difusividade de solutos nos cálculos envolvidos na quantificação da convecção<sup>[97]</sup>, acabam por definir um quadro físico que envolve uma solução de razoável grau de complexidade.

Se o objetivo fundamental fosse o cálculo da redistribuição do soluto, conduzindo a cálculos de macrosegregação e, conseqüentemente da abordagem de quantidade de macro e microestrutura do lingote/placa, embora complexo, o problema teria que ser abordado.

Como se trata de abordar somente os diferentes componentes do fluxo de calor, e como a componente convectiva pouco contribui à resultante de fluxo, não há necessidade da abordagem completa do efeito convectivo. Para não deixar de levar-se em consideração este efeito, pode-se considerá-lo indiretamente através das equações 4.30 ou 4.31.

A mais conveniente deve ser a equação 4.31, já que distribui o efeito dentro de duas regiões de diferentes estados de agregação, quais sejam, as zonas líquida e pastosa, embora dada a grandeza dos valores consequentes que decorrem do efeito convectivo ( evolução da casca sólida e temperaturas superficiais ), a equação 4.30 passa também a ser uma boa opção, caso haja outra conveniência em utilizá-la ( por exemplo, tempo de computação ).

#### 4.4 EFEITO TERMINAL

Na prática de lingotamento, um importante efeito resultante decorre das dimensões finitas do lingote/placa.

À medida em que as linhas fronteiras da transformação ( liquidus e solidus ) se aproximam da linha central do lingote, o comportamento regular que caracteriza a solidificação até então é perturbado em função da diminuição progressiva da quantidade de calor a ser retirada tanto do metal líquido quanto pela liberação de calor latente na zona pastosa. Como consequência as curvas representativas das isothermas liquidus e solidus sofrem efeitos de aceleração em seus deslocamentos.

A Figura 4.7 mostra um exemplo de simulação da solidificação, comparando as previsões de um modelo que considera o efeito terminal ( diferenças finitas ) e um modelo que não considera as dimensões finitas do lingote ( modelos analíticos ou semi analíticos )<sup>[44]</sup>. Nota-se que não considerar o efeito terminal implica em um prolongamento das condições de resfriamento impostas na etapa secundária, quando na realidade o processo de solidificação já terminou em decorrência da aceleração das isothermas.

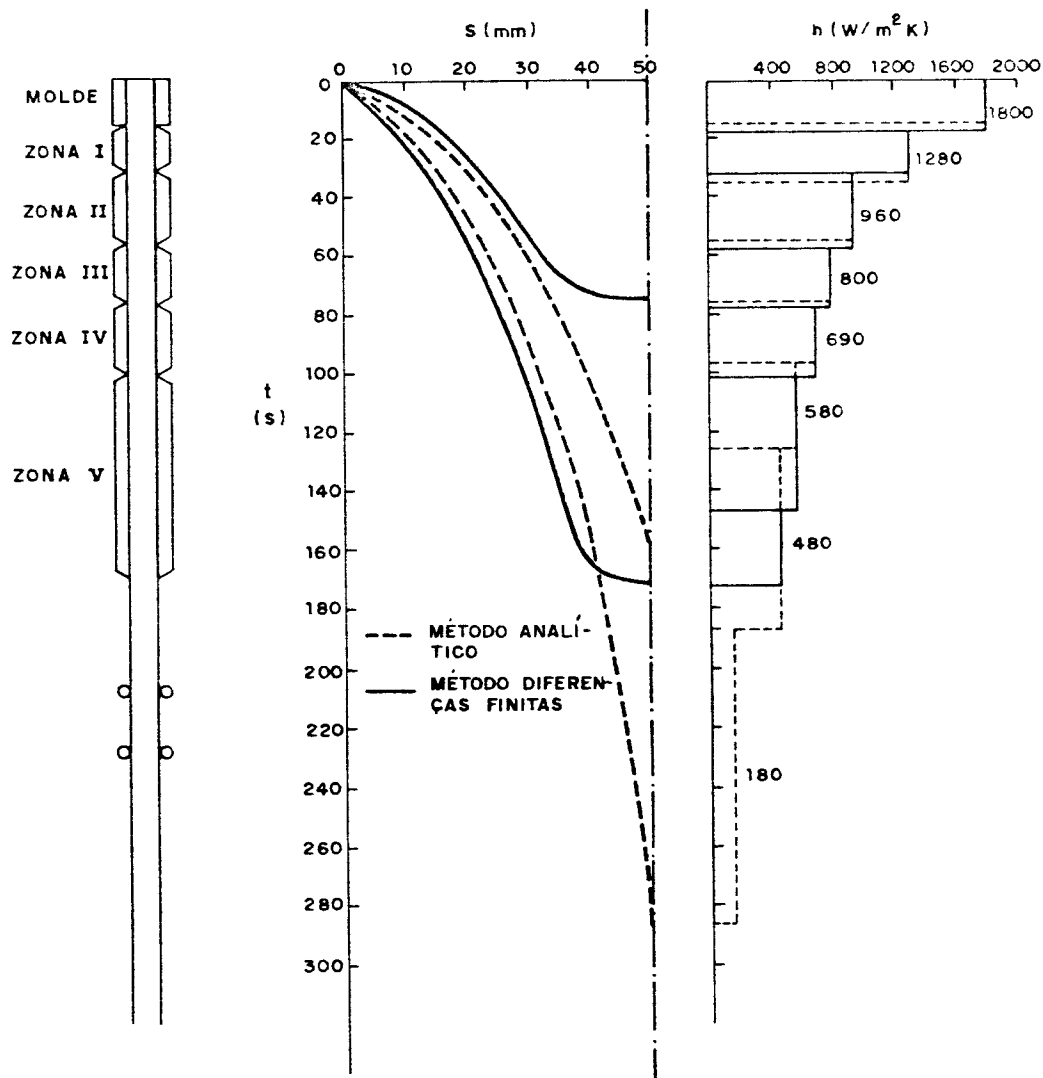


FIGURA 4.7 - Evolução do processo de solidificação de um lingote de aço de baixo carbono nas diferentes etapas de resfriamento.

## 4.5 - ABORDAGEM DO COEFICIENTE DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

### 4.5.1 - AO LONGO DO MOLDE <sup>[33, 52, 54, 101-103]</sup>

Os valores de  $h_0$  ao longo do molde podem ser avaliados em função de medidas experimentais de temperatura do sistema aço/lingoteira e das condições de refrigeração impostas. O fluxo de calor que chega até o fluido de refrigeração ( $q$ ), pode ser determinado por :

$$q = \frac{m c_A (T_E - T_F)}{A} \quad (4.33)$$

onde :

$m$  = fluxo da água de refrigeração

$c_A$  = calor específico da água

$T_E$  = temperatura inicial da água ( na entrada do circuito de refrigeração )

$T_F$  = temperatura final da água ( na saída do circuito de refrigeração )

$A$  = área efetiva de troca térmica

Por outro lado, o fluxo de calor  $q$  pode também ser expresso em função de  $h_0$ , na forma dada pela seguinte equação:

$$q = - h_0 ( T_s - T_m ) \quad (4.34)$$

sendo :

$T_m$  = temperatura média da água



Combinado-se as equações 4.33 e 4.34, tem-se :

$$h_G = \frac{m c_A (T_f - T_e)}{A (T_1 - T_A)} \quad (4.35)$$

A determinação de  $h_G$  no molde em cada instante do processo de lingotamento contínuo, ou para cada posição no molde, depende do conhecimento de  $T_B$ ,  $T_E$ ,  $T_1$ ,  $T_A$ , além evidentemente de medidas do fluxo de água que alimenta o sistema de refrigeração do molde.

As medidas de  $T_B$ ,  $T_E$  e a aferição de  $T_A$  não apresentam dificuldades de organização experimental. Por outro lado, a determinação de  $T_1$  ao longo do molde depende do posicionamento correto do termopar junto à superfície do lingote, o que para o lingotamento estático não é crítico, mas que para o lingotamento contínuo torna praticamente impossível uma leitura contínua de valores de  $T_1$  ao longo do molde, já que o termopar, além da dificuldade de posicionamento deve se movimentar com o lingote de acordo com a velocidade de produção. Isto inviabiliza em condições práticas este tipo de medida experimental.

O apoio experimental nas avaliações dos coeficientes globais de transferência ( $h_G$ ) tem sido utilizado com a complementação de modelos matemáticos que permitam a determinação final de  $h_G$ . Um dos exemplos usuais deste tipo de análise refere-se à utilização do modelo de Hills<sup>[58]</sup> (semi-analítico), o qual, mediante a posição no molde, permite que o valor de  $h_G$  possa ser calculado. A equação representativa desta abordagem é a seguinte:

$$Q^* = \frac{q}{(z^* u c_{es} d_B k_B)^{1/4} T_B} \quad (4.36)$$

onde :

$Q^*$  = quantidade de calor (adimensional) por unidade de perímetro do molde desde o início do processo até uma posição  $z$  no molde

$z$  = posição no molde abaixo do menisco

$u$  = velocidade da produção

$$z^* = \frac{h_G z}{d_G c_G k_G u} \quad (4.37)$$

Através da equação 4.36 podem-se obter valores de  $h_G$  em função da posição no molde ( $z$ ) utilizando-se para tanto a Figura 4.8 que decorre do modelo de Hills conjuntamente com a equação 4.35 que determina  $q$  através de medidas experimentais de  $T_E$  e  $T_F$ . A literatura apresenta uma série de avaliações experimentais de  $h_G$  através deste tipo de abordagem, que determina entretanto um valor médio de  $h_G$  ao longo do molde.

O arranjo experimental ideal seria aquele que permitisse dividir o molde em vários circuitos de refrigeração independentes, de modo a avaliar separadamente um valor de  $h_G$  para cada circuito, o que possibilitaria o levantamento da variação de  $h_G$  ao longo do molde.

Em função das inerentes dificuldades de conciliação da produção e de medidas experimentais complexas, têm-se determinado apenas valores médios de  $h_G$  em equipamentos industriais de lingotamento contínuo.

Um exemplo de trabalho abrangente nesse aspecto refere-se ao levantamento executado por Lait et al.<sup>[33]</sup> em várias instalações industriais de lingotamento contínuo de aço de diferentes usinas siderúrgicas e cujo resultado é apresentado na Figura 4.9. A partir desses resultados os autores chegaram a uma expressão que correlaciona o coeficiente global ( $h_G$ ) com o tempo de permanên-

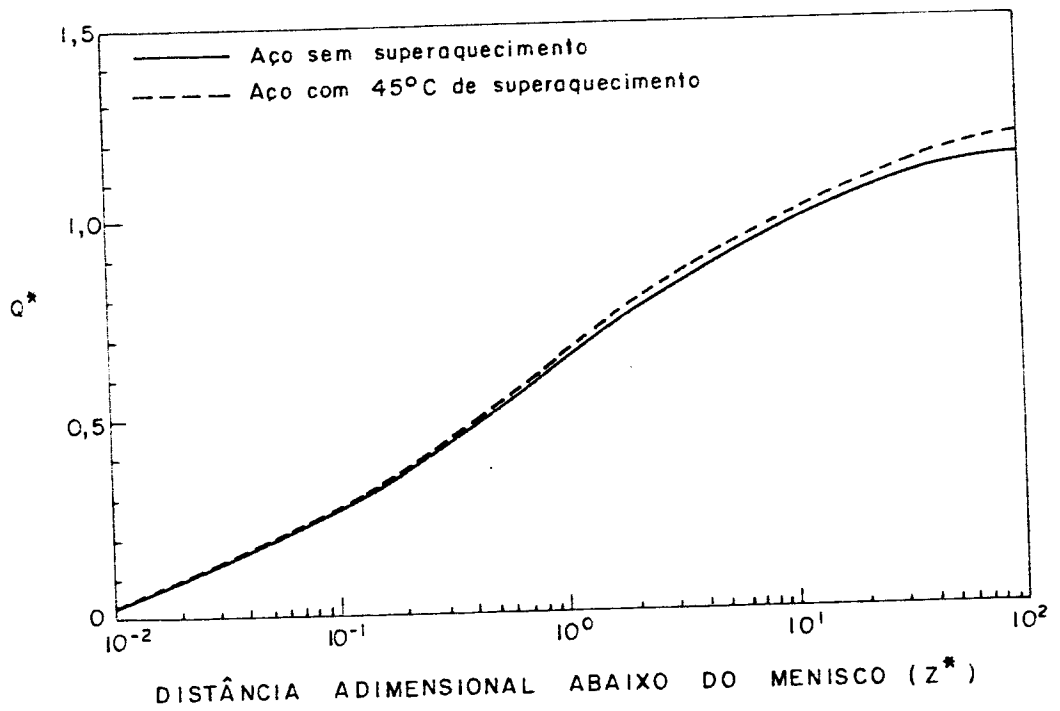


FIGURA 4.8 - Calor adimensional removido em função da posição adimensional no molde.

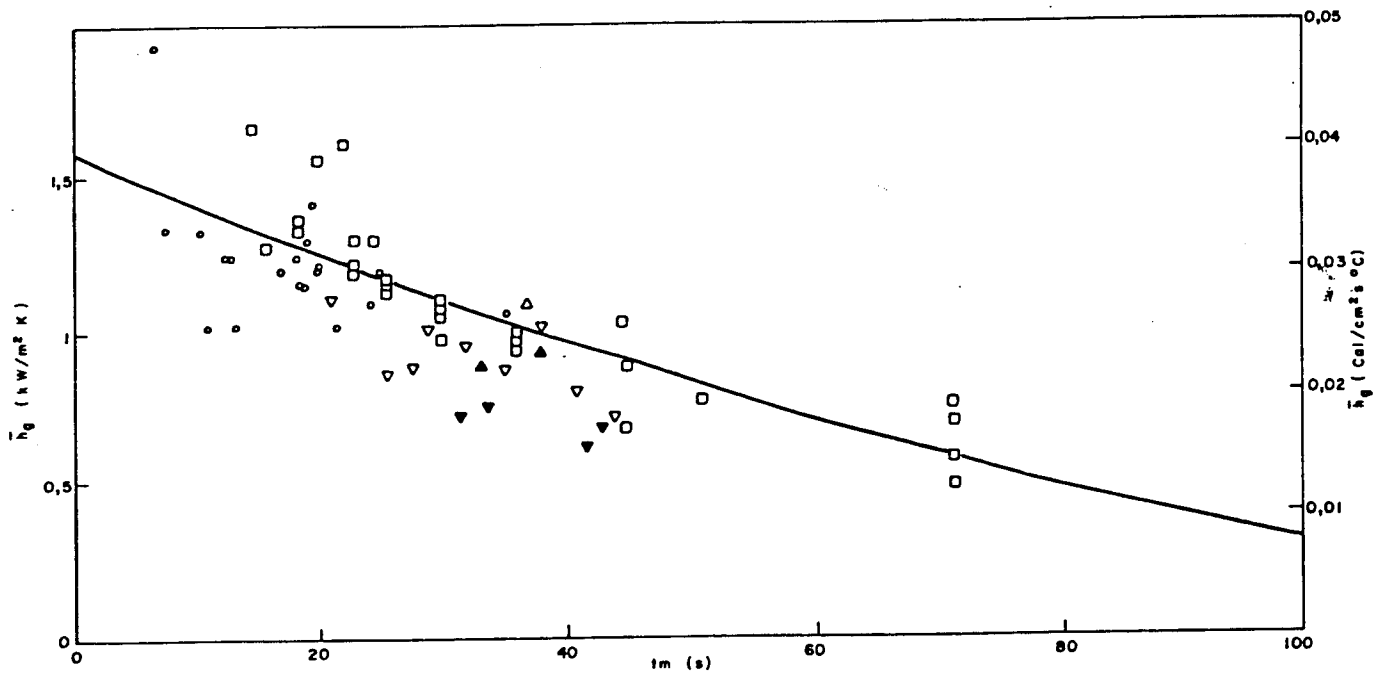


FIGURA 4.9 - Variação do coeficiente global médio de transferência de calor no molde em função do tempo de permanência do lingote no molde (os pontos de diferentes notações referem-se a distintas industrias).

cia do lingote no molde ( $t_m$ ), dada por:

$$\bar{h}_G = 1,696 - 0,0162 t_m \quad (4.38)$$

onde :

$$h_G = [ \text{kW/m}^2 \text{ K} ]$$

$$t_m = [ \text{s} ]$$

Embora a equação 4.38 não forneça informações no que se refere à real variação de  $h_G$  no molde, é importante na estimativa de valores médios do coeficiente global de transferência de calor em função da velocidade de produção.

A mesma equipe que desenvolveu a equação anterior, em outro trabalho utilizou uma abordagem semelhante à adotada por Hills para derivar a expressão 4.37 e chegou a uma relação entre  $h_G$  e  $q$  dada por<sup>[55]</sup> :

$$h_G = 1,551 \left[ \frac{L}{u c d k} \right]^{0,141} \left[ \frac{q}{T_{\text{so1}}} \right]^{1,699} \quad (4.39)$$

onde:

$$h_G = [ \text{kcal/m}^2 \text{ s } ^\circ \text{C} ]$$

$$L = \text{comprimento útil do molde [m]}$$

$$T_{\text{so1}} = \text{temperatura solidus [ } ^\circ \text{C]}]$$

$$u = \text{velocidade de produção [m/s]}$$

$$c = \text{calor específico [kcal/kg } ^\circ \text{C]}]$$

$$k = \text{condutividade térmica [kcal/m } ^\circ \text{C s]}]$$

$$d = \text{densidade [kg/m}^3 \text{]}]$$

A Figura 4.10 apresenta outros resultados relativos à determinação do fluxo médio de calor ( $q$ ) no molde, obtidos por diversos investigadores e para diferentes condições de lingotamento contínuo no aço<sup>[54]</sup>. Estes resultados podem também ser utilizados para determinar valores de  $h_0$ , utilizando-se para tanto as equações 4.38 ou 4.39.

Na modelagem matemática do lingotamento contínuo, a tendência inicial foi a de utilizar um valor médio do coeficiente global de transferência de calor no molde ( $h_0$ ), principalmente devido à falta de conhecimento de sua real variação.

Diferentes fatores podem influenciar esta variação sendo dois deles bastante importantes, quais sejam: a velocidade de produção ( $u$ ) e a concentração de carbono no aço. No primeiro caso, a variação de  $h$  é tanto maior quanto mais alta a velocidade de produção. Tal efeito pode ser notado com ajuda da Figura 4.11, juntamente com uma proposta quantitativa de variação de  $h_0$  no molde de conformidade com a variação de  $q$ <sup>[100]</sup>.

No aspecto da composição química do aço, pode ser observado com o auxílio da Figura 4.12 que o fluxo médio de calor no molde apresenta seu ponto mínimo para 0,10 % de carbono em peso, mantendo-se essencialmente constante para composições acima de 0,25 % C.

Conseqüentemente, a utilização de modelos matemáticos para analisar a solidificação do aço no molde será tanto mais confiável na medida em que as influências acima mencionadas possam estar contidas nos valores de  $h_0$ .

Algumas investigações apresentadas na literatura incorporam alguns tipos de variação de  $h_0$  ao longo do molde. Hills propôs que  $h_0$  variasse linearmente, na forma mostrada abaixo, incorporando esse refinamento nos seus cálculos :

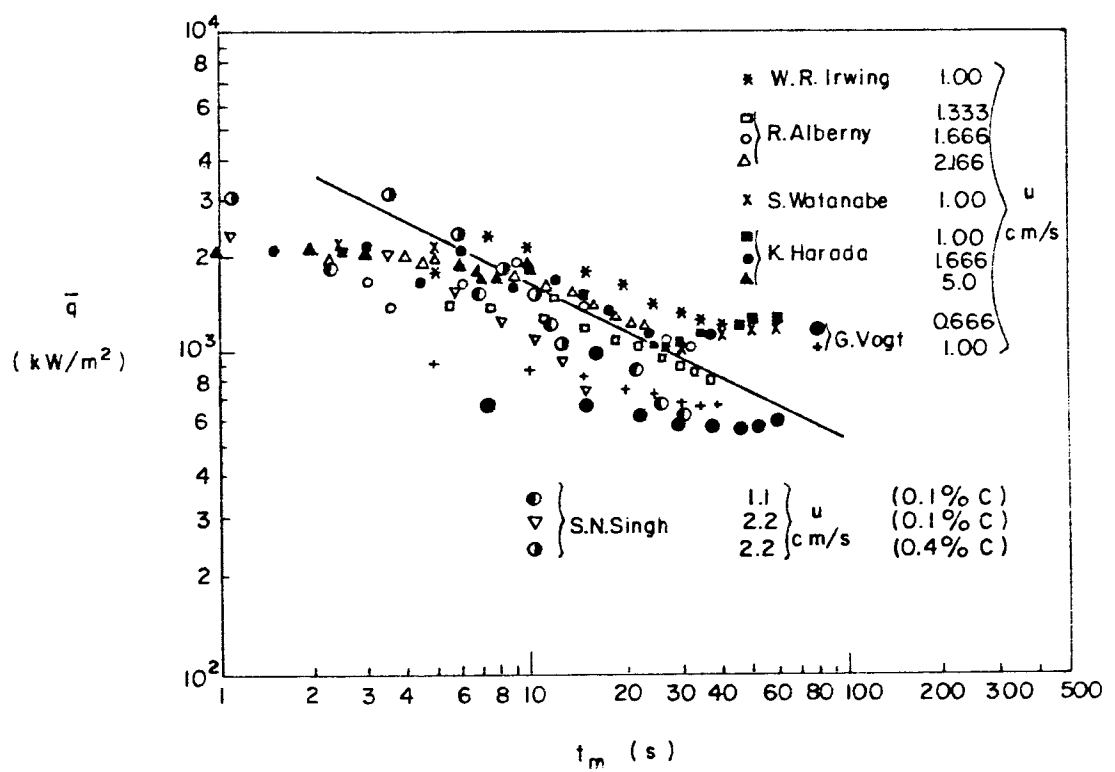


FIGURA 4.10 - Fluxo de calor médio no molde no molde de lingotamento contínuo em função do tempo de residência para diferentes condições operacionais.

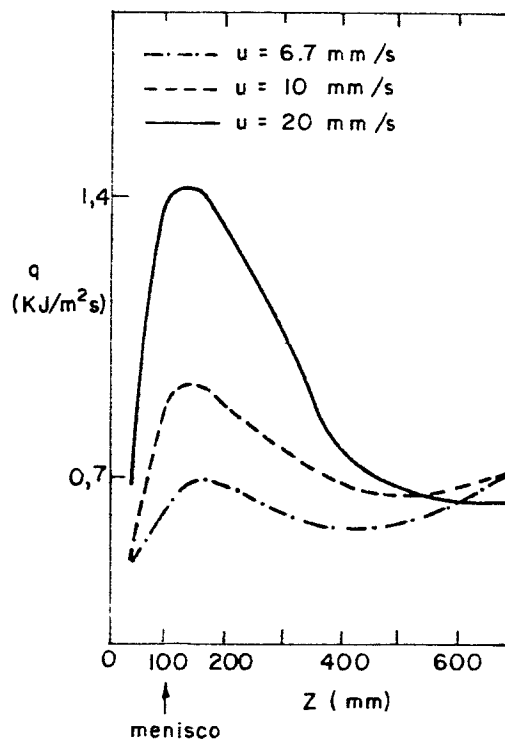


FIGURA 4.11 - Variação do fluxo de calor ao longo de molde em função da velocidade de produção.



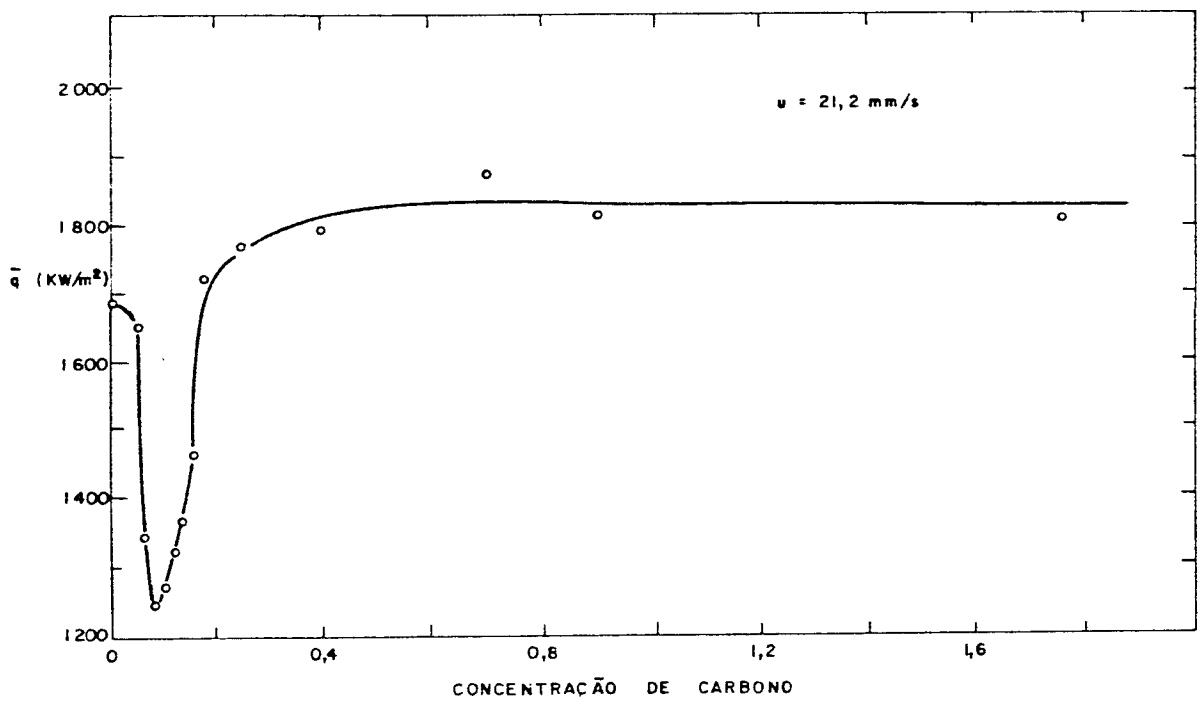


FIGURA 4.12 - Variação do fluxo médio de calor no molde em função da concentração de carbono no aço.

$$h_G = h_0 ( 1 - nz ) \quad (4.40)$$

onde :

$h_0$  = valor de  $h_G$  na altura do menisco.

Perkins e Irving<sup>[20]</sup> desenvolveram três zonas de variação de  $h_G$  no molde. Até pouco abaixo do menisco, assumiram um alto valor para  $h_G$  em função do bom contato térmico metal/molde. Na região inferior do molde, onde a separação física entre metal e molde é razoável, conseqüentemente prevalecendo a radiação, assumiram baixo valor para  $h_G$ , e adotaram finalmente uma variação linear entre estes dois valores na região intermediária. A Figura 4.13 mostra o reflexo desta abordagem sobre a evolução da temperatura superficial do lingote ao longo do processo, comparada com a situação em que se adota  $h_G$  constante. A variação entre os dois perfis de temperatura é bastante significativa até o final da primeira zona de resfriamento secundário ( a 2,4 m do menisco ). Como este perfil de temperaturas é essencial para o controle do resfriamento secundário desde a saída do molde, é fundamental adotar uma simulação para a variação de  $h_G$  e introduzi-la no modelo de cálculo.

Para a introdução da variação de  $h_G$  nos métodos analíticos sugere-se dividir o molde em um certo número de elementos, a partir do menisco, cada um deles submetido a um valor de  $h$  invariável, como exemplifica a representação esquemática da Figura 4.14a para o caso de uma variação linear de  $h$  onde pode-se observar que do início do processo até uma posição  $z_1$  no molde ocorre a solidificação de uma camada  $S_1$  de metal sob a ação de um coeficiente de transmissão de calor  $h_1$ .

Da posição  $z_1$  até a posição  $z_2$  no molde, teremos a solidificação de uma camada  $S$  sob a ação de um coeficiente  $h_1$ , embora já exista uma camada  $S_1$  que foi solidificada no regime anterior de  $h$ . Para passar-se da posição  $z_{i-1}$  a  $z_i$ , sendo a velocidade de extração do lingote constante ( $u$ ) será necessário um intervalo de tempo  $t$  dado por:

$$t = \frac{1}{u} (z_i - z_{i-1}) = \frac{\Delta z}{u} \quad (4.41)$$

Para calcularmos a camada solidificada  $S$  neste intervalo  $t$  é preciso definir uma nova variável definida como "tempo equivalente" ( $t_{e1}$ ) dada por

$$t_{e1} = t'_{i-1} + \Delta t \quad (4.42)$$

onde:

$i$  varia de 1 até  $n$ , sendo  $n$  o número de divisões ao longo do molde

$t'_{i-1}$  é o tempo necessário para solidificar a camada  $S_{i-1}$  caso tivesse solidificado na região do molde correspondente ao coeficiente global  $h_{i-1}$ .

O  $t_{e1}$  vai corresponder a espessura  $S_1$  realmente solidificada no tempo  $t_{i-1} + \Delta t$ , levando-se em consideração a variação de  $h$ .

A continuidade do procedimento até  $i = n$  permite a obtenção do perfil de solidificação no molde e o perfil de temperatura pode ser obtido através do mesmo procedimento. A Figura 4.13 apresenta um esquema da aplicação, permitindo uma melhor visualização.

A adequação do tratamento de  $h$  variável ao método proposto no presente trabalho é feita através da utilização de uma subrotina, o pouco altera o tempo de computação empregado

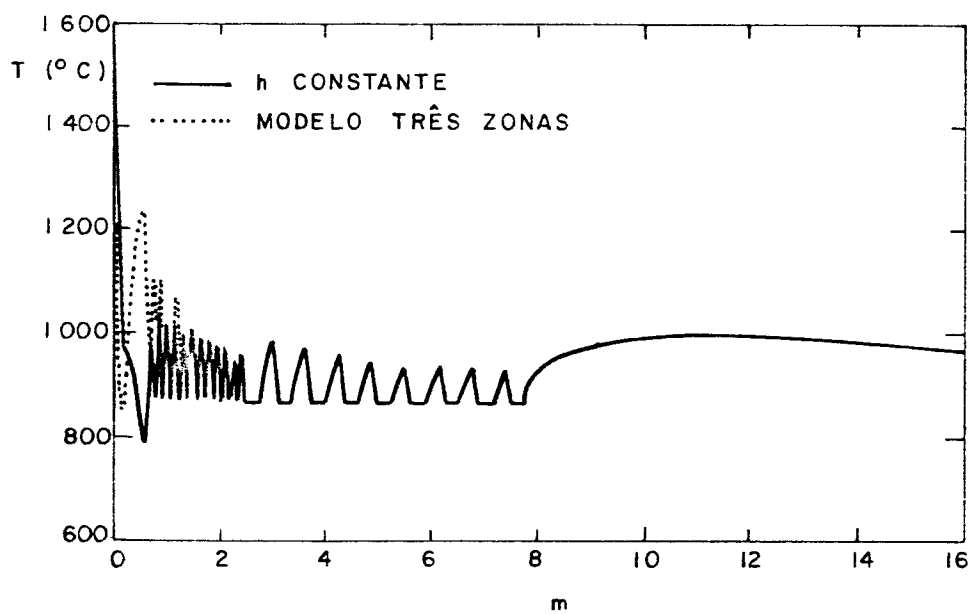


FIGURA 4.13 - Perfil de temperaturas superficiais do lingote ao longo do processo, de acordo com diferentes abordagens para o valor de  $h_0$ .

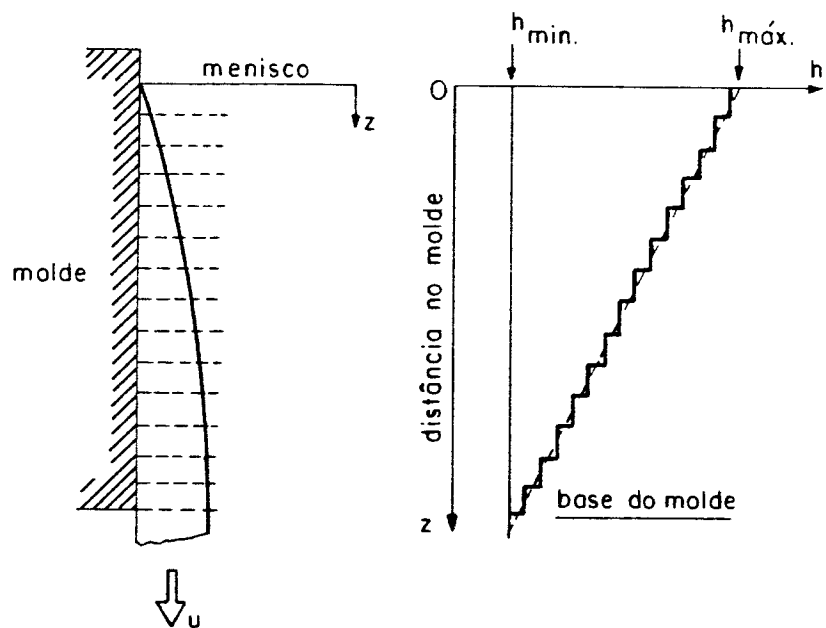


FIGURA 4.14 - Proposta de divisão do molde em elementos para o tratamento de  $h$  variável.

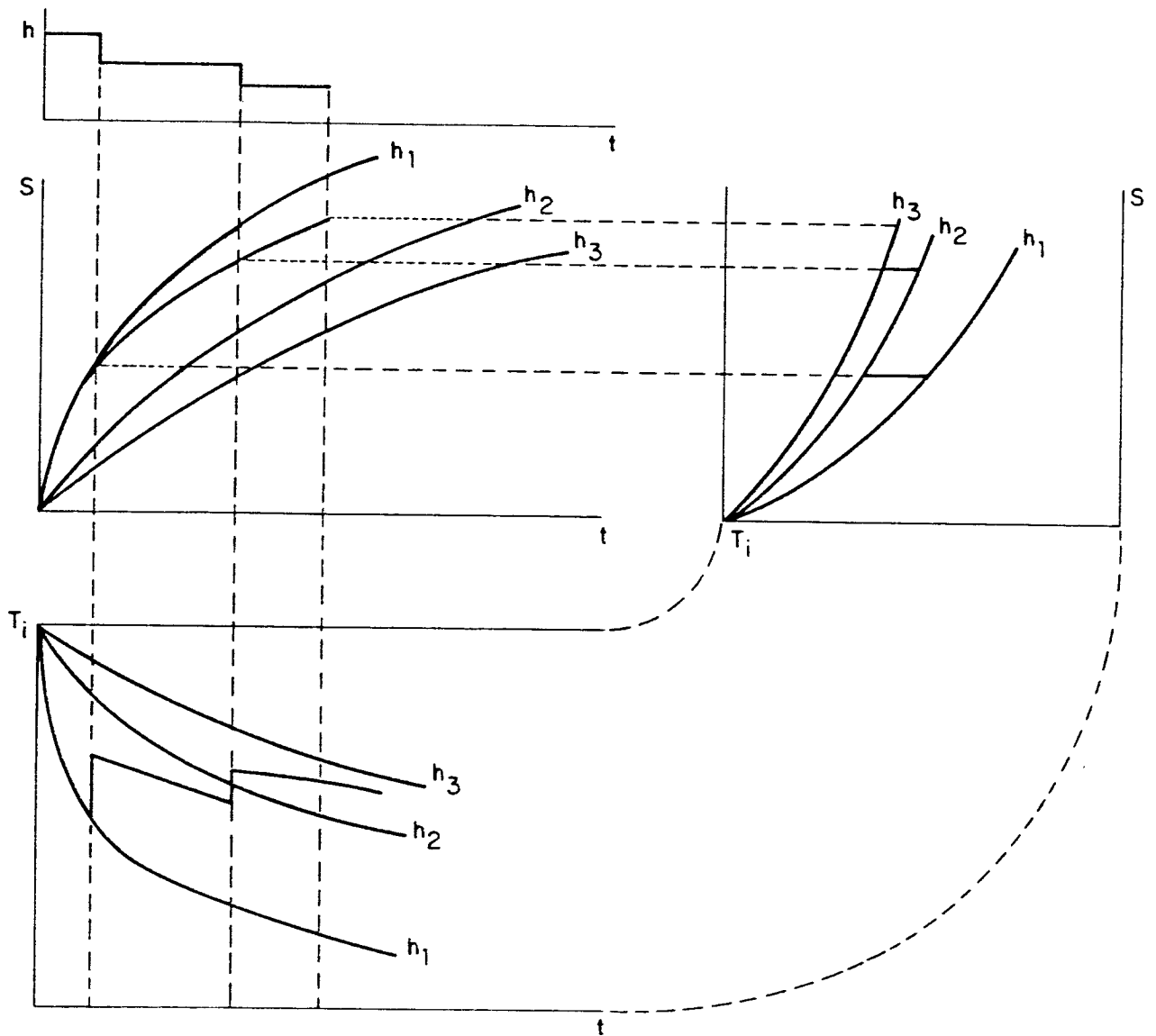


FIGURA 4.15 - Representação gráfica resultante da incorporação ao método desenvolvido do tratamento de  $h$  variável no molde durante o processo de solidificação.

para a resolução do problema.

Pode-se, a nível de exemplo, adotar para a variação de  $h$  no molde, a divisão em  $n$  regiões, conforme a seguinte equação :

$$h_e L_e = \frac{h_o}{2} [L_1 + E h_o] \quad (4.43)$$

onde  $E$  é uma fração do valor máximo  $h_o$ .

Extraído-se da Figura 4.15, uma proporção para  $L_1$  baseada na alteração do fluxo e para  $n=3$ , tem-se:

$$h_e L_e = h_o L_1 + \frac{3}{4} h_o L_2 + \frac{1}{2} h_o L_3 \quad (4.44)$$

que para moldes convencionais com  $L_e = 600$  mm, que resulta em :

$$h_e = 16 h_o / 11 \quad (4.45)$$

A Figura 4.17 apresenta comparações entre três diferentes abordagens utilizadas no cálculo da camada solidificada no molde de lingotamento contínuo. Pode-se notar que a diferença entre variar ou manter constante  $h_e$  ao longo do molde praticamente não produz efeito no cálculo da camada sólida na saída do molde. A mesma observação foi feita por Perkins e Irving.

Nota-se também na Figura 4.17b que a utilização de diferentes modelos não verificou grandes diferenças no que se refere ao cálculo do perfil solidificado no molde.

Quanto à temperatura superficial a situação é bastante diversa, já que as condições de contorno influem de forma mais imediata nesta variável. A Figura 4.18 mostra uma comparação no

cálculo do perfil de temperatura superficial do lingote até a saída do molde. Independente da precisão de cada modelo, todos os resultados são unânimes na constatação de que a variação de  $h_0$  ao longo do molde deve ser simulada, para que a temperatura superficial calculada na saída do molde constitua informação correta para um melhor planejamento e controle do resfriamento secundário.

A aplicação de modelos matemáticos para determinar o comportamento térmico da solidificação do aço no molde do lingotamento contínuo exige uma condição de contorno que possa expressar o mais realisticamente possível o fluxo de calor no molde, de tal forma que os resultados obtidos na saída deste possam servir de parâmetros confiáveis no planejamento e controle do resfriamento secundário.

É evidente que a medida experimental de  $h_0$  ao longo do molde, para cada concentração de carbono na faixa crítica (até 0,2 % C) e para cada condição operacional, é a providência mais interessante. Isso, no entanto, nem sempre é compatível com as condições de lingotamento em uma indústria siderúrgica, o que implica na necessidade da adoção de uma das condições de contorno já expressas anteriormente ( capítulo 2 ) que já foram experimentalmente analisadas, ou de tomar-se como referência alguma medida experimental já realizada para uma operação semelhante. Neste último caso, uma vez que os valores medidos são valores médios ao longo do molde, é essencial a simulação da variação de  $q$  ou  $h_0$ . Entretanto, qualquer que seja a condição de contorno adotada, é necessário ter sempre ressaltada a forte influência da velocidade de produção e da concentração de carbono na faixa cuja variação do fluxo de calor no molde é mais significativa.



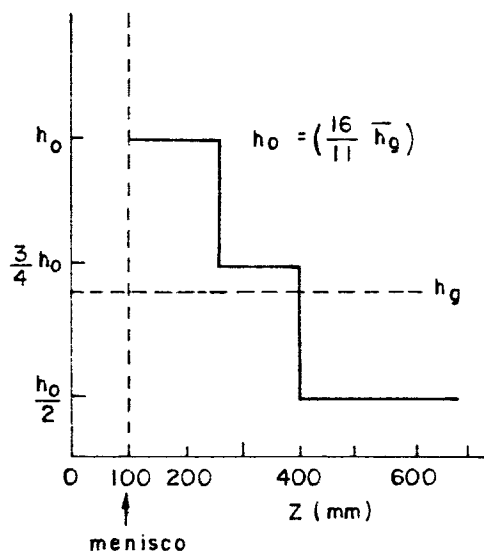


FIGURA 4.16 - Esquema da proposta para variação de  $h_0$  resultante da variação do fluxo no molde. (Figura 4.11)

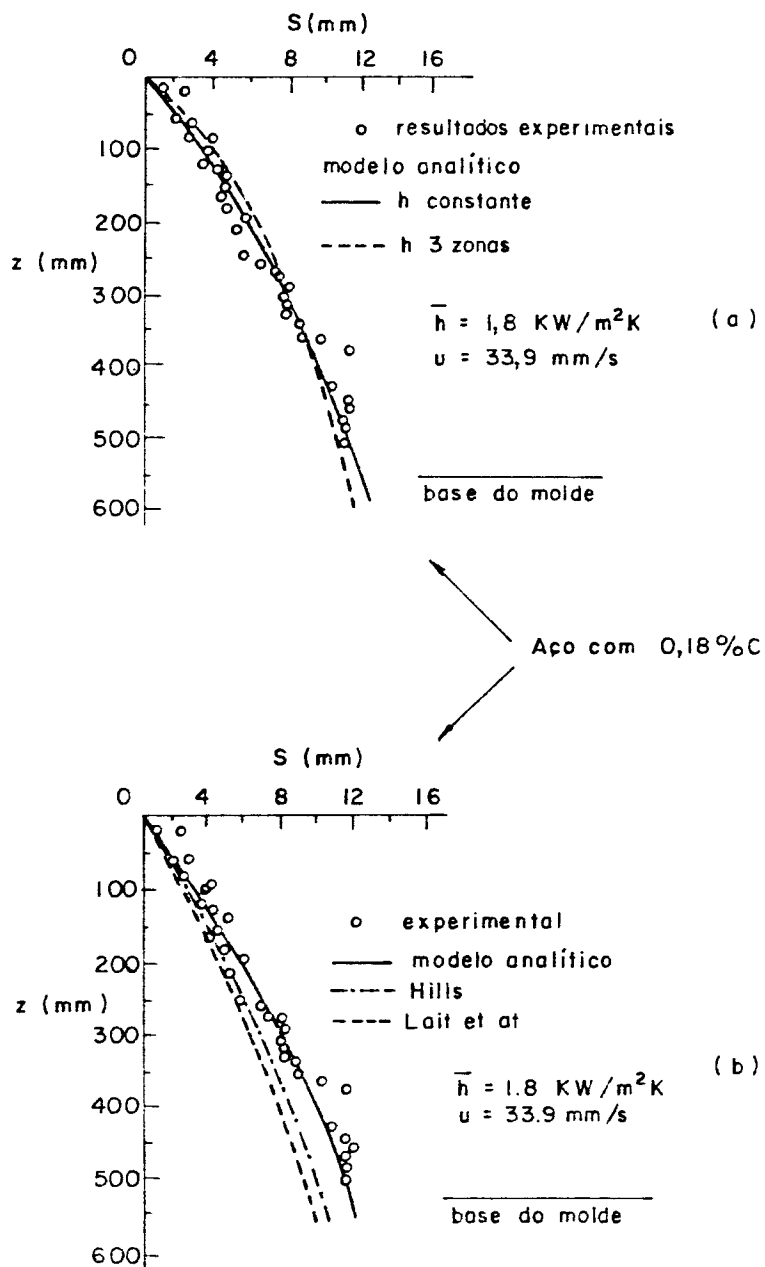


FIGURA 4.17 - Comparação entre resultados experimentais e modelos matemáticos aplicados ao cálculo do perfil de solidificação no molde

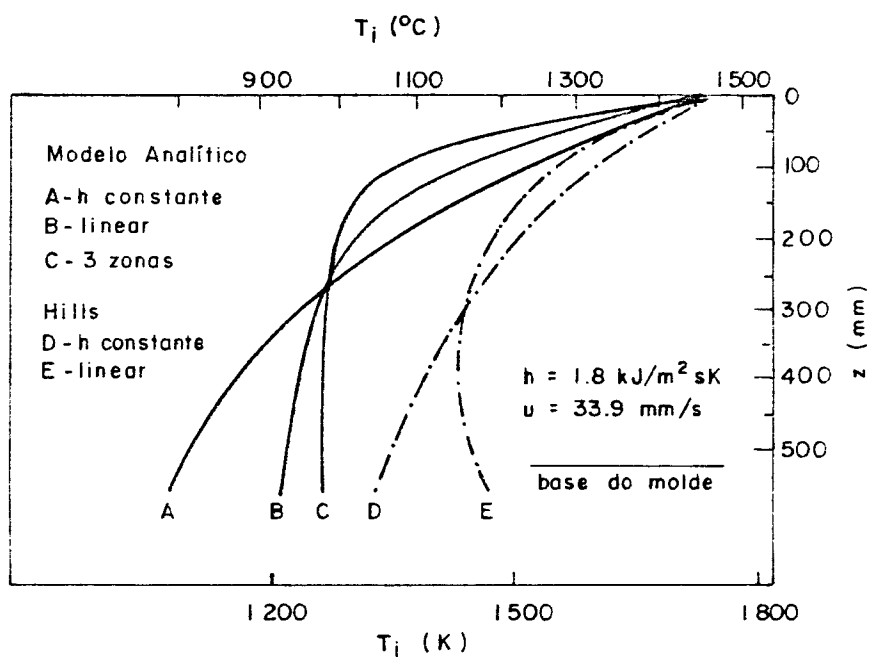


FIGURA 4.18 - Comparação entre modelos matemáticos na previsão da temperatura da superfície de lingote de aço de baixo carbono.

#### 4.5.2 - NO RESFRIAMENTO SECUNDÁRIO

Na literatura podem ser encontrados vários artigos onde seus autores desenvolvem equações para representar o comportamento do coeficiente de transmissão de calor na região de chuveiros<sup>[194-195]</sup>.

Um trabalho que merece destaque é o de Muller e Jeschar<sup>[194]</sup>, no qual estes autores realizaram medidas experimentais de  $h$  para o aço, relacionando este parâmetro com a vazão e velocidade da água.

A Figura 4.19 mostra valores do coeficiente de transferência de calor relacionados com a vazão obtidos para seis velocidades diferentes de água. Tais resultados experimentais permitiram estabelecer uma expressão matemática correlacionando os parâmetros analisados :

$$h = (C_1 V_w + C_2) Q + C_3 V_w \quad (4.46)$$

onde :

$h$  = coeficiente de transmissão de calor ( $W/m^2 K$ )

$C_1$  = constante experimental = 0,688

$V_w$  = velocidade da água (m/s)

$C_2$  = constante experimental = 107

$Q$  = fluxo de água ( $l/m^2 s$ )

$C_3$  = constante experimental = 10

As Figuras 4.20 e 4.21 apresentam mais um conjunto de valores de  $h$ , estabelecidos experimentalmente. Estes valores são obtidos através da correlação de fluxo de água e temperaturas de superfície do lingote/placa na entrada e saída da zona de resfriamento e que são usados como condições de contorno em

modelos de transferência de calor para se estabelecer os valores dos coeficientes de transmissão de calor. A Figura 4.20 refere-se ao lingotamento contínuo de tarugos e a Figura 4.21 ao de placas<sup>[107]</sup>.

Uma outra relação experimental apresentada pela literatura especializada que tem sido utilizada por diferentes autores na determinação de valores de  $h$  é a relação desenvolvida por Nozaki e outros<sup>[99, 100, 109]</sup> e representada por :

$$h = 0,333 W^{0,55} \quad (\text{kW/m}^2\text{K}) \quad (4.47)$$

onde :

$$W = \text{fluxo de água} \quad (\text{kg/m}^2\text{s})$$

O expoente de  $W$  mostra que a eficiência da troca térmica com o aumento do fluxo de água tem uma tendência de saturação, após o que qualquer aumento no fluxo de água não conduz a aumento de  $h$  e portanto, torna-se importante a determinação de valores de fluxos ótimos de fluxos água, evitando-se consumos desnecessários.

A Figura 4.22 mostra influência do fluxo de água local no coeficiente local de transferência de calor e a Figura 4.23 mostra a influência do fluxo médio de água das zonas no coeficiente global de transferência de calor (efeito combinado de chuveiros e rolos), resultante do trabalho de vários autores<sup>[110, 111]</sup>.

A partir das curvas os diversos autores propuseram equações para descrever o comportamento do coeficiente de transmissão de calor em função do fluxo de água. Algumas das equações propostas, além das duas já citadas, encontram-se na Tabela 4.1.

É evidente que quanto maior a precisão nos valores de  $h$ , maior a confiabilidade no estabelecimento de uma estratégia óti-

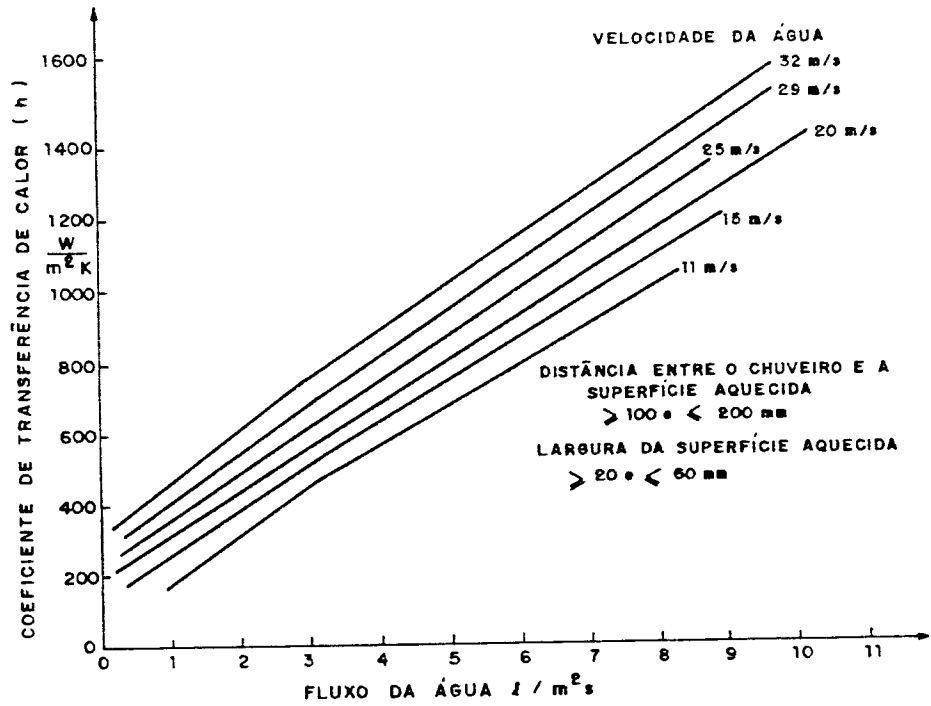
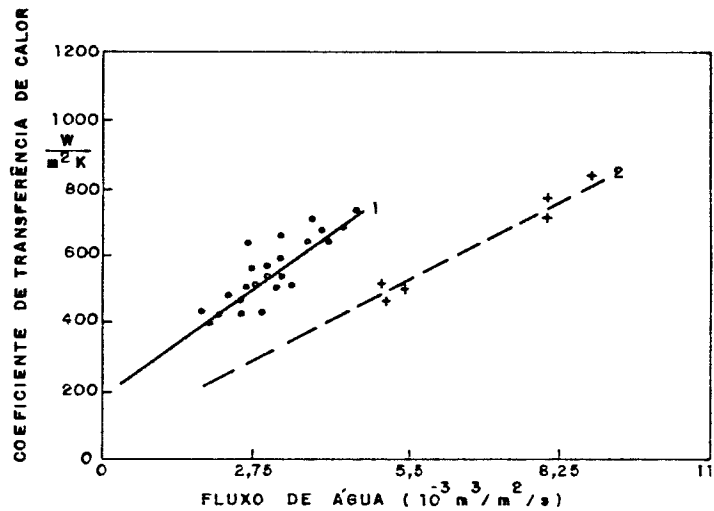


FIGURA 4.19 - Valores experimentais de h em função do fluxo e da velocidade da água, de acordo com medidas realizadas por Muller e Jeschar [104].



1. Lingotes de secção quadrada 120x120 m<sup>2</sup>

2. Lingotes redondos  $\phi = 120$  mm

FIGURA 4.20 - Coeficientes de transferência de calor em função do fluxo de água dos chuveiros de resfriamento

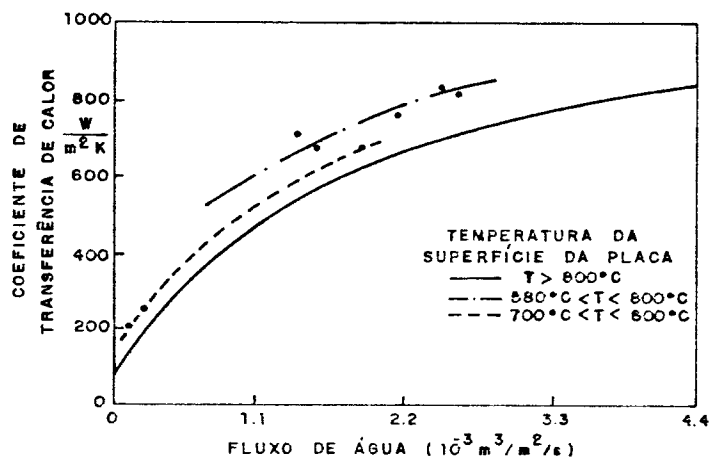
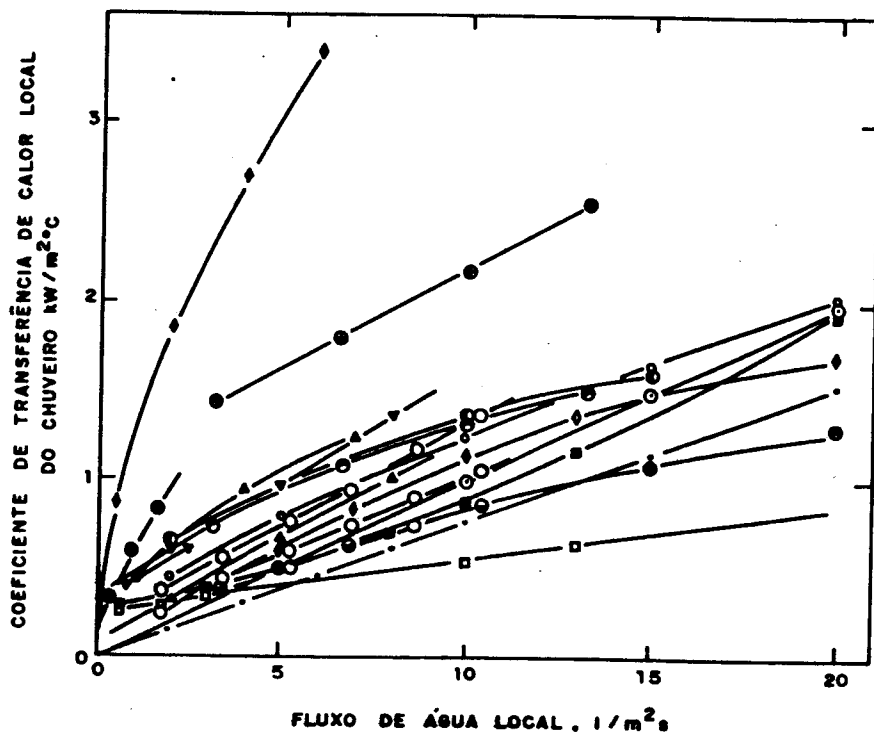


FIGURA 4.21 - Coeficientes de transferência de calor em função do fluxo de água dos chuveiros de resfriamento.

Resultados obtidos no lingotamento de placas de aço



- Alberny e outros
- ↓ Shimada e Mitsutsuka,  $T_w = 25\text{ °C}$
- Mizikar, 276 kPa
- Mizikar, 620 kPa
- ▲ Muller e Jeschar, velocidade 11 m/s
- ▼ Muller e Jeschar, velocidade 32 l/s
- Hoogendorn, 900 °C
- Hoogendorn, 700 °C
- Sasaki e outros,  $T_s = 900\text{ °C}$
- ▲ Bolle e Moreau, chuveiro para baixo
- ▼ Bolle e Moreau, chuveiro para cima
- ◇ Etienne e Mairy, chuveiro cônico, 900 °C
- ⊗ Etienne e Mairy, chuveiro plano, 900 °C
- Kojima e outros, 900 °C
- ⊙ Kojima e outros, 700 °C
- Ishiguro e outros
- Akimenko e outros

FIGURA 4.22 - Influência do fluxo de água no coeficiente local de transferência de calor<sup>[111]</sup>



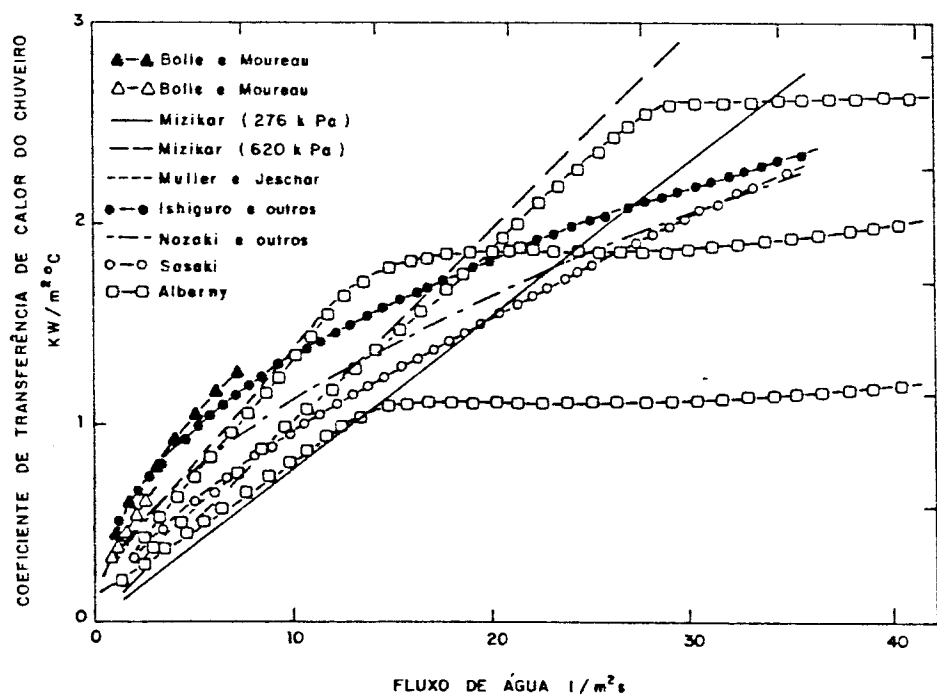


FIGURA 4.23 - Influência do fluxo de água médio da zona no coeficiente global de transferência de calor. (efeito combinado de chuveiros e rolos)

TABELA 4.1 - ESTUDOS DE EXTRAÇÃO DE CALOR DOS CHUVEIROS

AUTOR	MÉTODO	RELAÇÃO OBTIDA	COMENTÁRIOS
MITSUTSUKA	placa plana e horizontal de aço carbono refrigerada de ambos os lados T inicial da placa = 930 °C T <sub>amb</sub> = 38 °C	$h = W^n (1 - bT_w)$ 0.65 < n < 0.75 para W > 0.08 l/m <sup>2</sup> s 0.005 < b < 0.008 W = 10-10.3 l/m <sup>2</sup> s	h decresce com aumento T <sub>w</sub> Para grandes W Leidenfrost temp. é 500 °C
SHIMADA e MITSUTSUKA	como acima	$h = 1.57W^{0.55} (1 - 0.0075T_w)$	
MIZIKAR	placa de aço inox vertical refrigerada de um lado. T ini da placa 1090°C Chuveiro cônico, pressão=69-620 kPa, distância 102-305mm	$h = 0.0776 W$ (até 276 kPa) $h = 0.1 W$ (até 620 kPa) 0 < W < 20.3 l/m <sup>2</sup> s	Radiação excluída de h em ambas equações h decresce levemente com aumento de T <sub>w</sub> . Leidenfrost temp. é 550 °C
ISHIGURO e outros	usou a equação de Mitsutsuka	$h = 0.581W^{0.45} (1 - 0.0075T_w)$	
BOLLE e MOUREAU	placa horizontal de aço inox(309S) aquecida eletri/, refrigerada de um lado, de cima ou baixo. T <sub>w</sub> = 600 - 1100 °C.	$h = 0.423 W^{0.554}$ 1 < W < 7 l/m <sup>2</sup> s 627 < T <sub>w</sub> < 927 °C $h = 0.360 W^{0.554}$ 0.8 < W < 2.5 l/m <sup>2</sup> s 727 < T <sub>w</sub> < 1027	chuveiros para baixo-radiação excluída chuveiros para cima -radiação excluída
SASAKI e outros	placa de aço inox vertical refrigerada de ambos os lados. Chuveiros cónicos e planos Temp. inicial= 700 - 1200 °C Pressão = 196 - 490 kPa, fluxo de água = 1.67- 41.67 l/m <sup>2</sup> s Distância do chuveiro=100-500 mm	$h = 708 W^{0.75} T_w^{-1.0} + 0.116$ 700 < T <sub>w</sub> < 1200 °C	h decresce levemente com aumento de T <sub>w</sub> . Efeito do tipo e posição dos chuveiros e da pressão água desprezíveis

Unidades : h = kW/m<sup>2</sup>°C e W = l/m<sup>2</sup>s

mizada para o controle do resfriamento secundário. Neste particular, é extremamente importante contar com plataformas de levantamento de dados (de valores de  $h$ ) nas próprias usinas siderúrgicas. Será proposto em capítulo posterior um método de determinação deste importante parâmetro.

A Figura 4.24 mostra um exemplo da aplicação de um modelo matemático para ajustar as condições de lingotamento de uma placa de aço a critérios de temperaturas máxima e mínima da superfície ao longo do resfriamento secundário<sup>[10]</sup>. Neste caso, uma vez levantados os valores de  $h$  de cada zona de resfriamento, o modelo permite estabelecer a faixa de velocidades de produção que obedeça a critérios de resfriamento adotados ou ainda alterar valores de  $h$  (através do fluxo de água) para que o perfil térmico se encaixe dentro de valores do critério de controle.

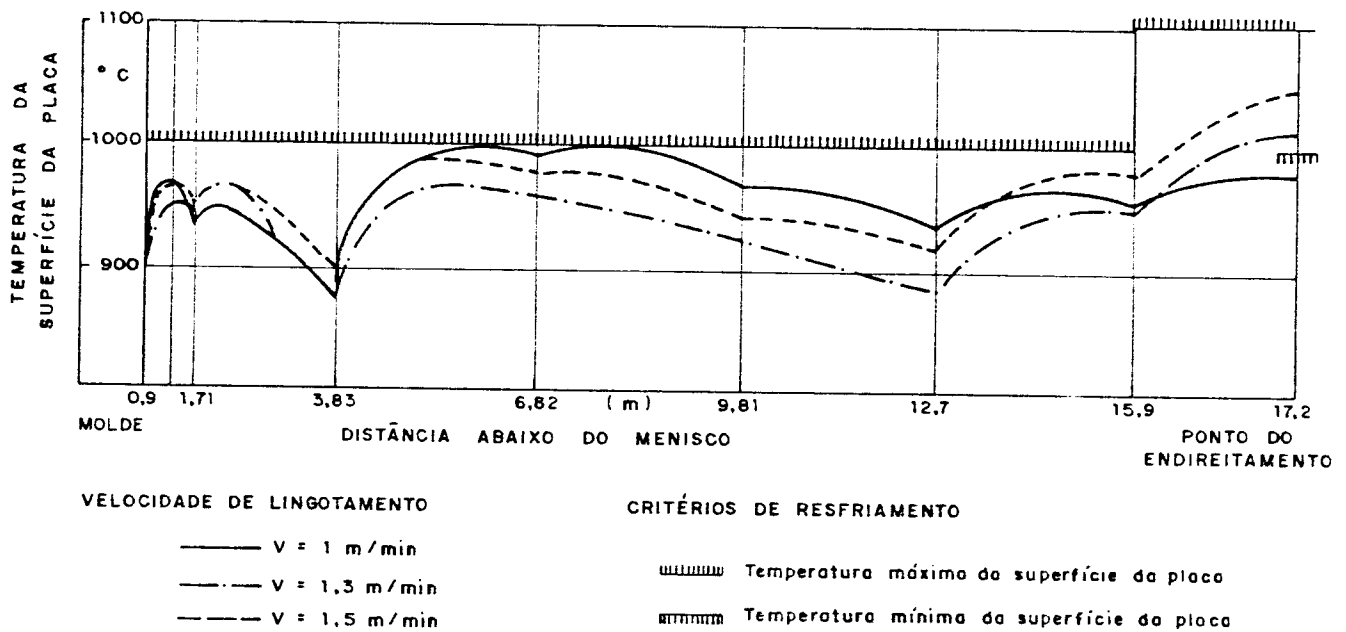


FIGURA 4.24 - Cálculo da variação do perfil de temperaturas de superfície de uma placa de aço ao longo do processo de lingotamento contínuo [102].

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE EXPERIMENTAL

Uma vez desenvolvido o modelo matemático de diferenças finitas, é necessária uma avaliação da eficiência do mesmo através de comparações das previsões teóricas com resultados experimentais próprios e da literatura. As comparações relativas a situações de lingotamento contínuo de aços serão feitas com resultados da literatura para diferentes condições de lingotamento contínuo.

Para o levantamento de resultados experimentais próprios, optou-se por um programa de experiências, com ligas de alumínio, desenvolvido em um dispositivo de solidificação unidirecional refrigerado a água, a exemplo de moldes de lingotamento contínuo. A utilização deste dispositivo permite um controle bastante estreito das condições operacionais, tais como:

- superaquecimento utilizado
- uniformidade na temperatura do metal líquido
- minimização de convecção no metal líquido
- manutenção de um coeficiente de transferência de calor metal/molde ( $h$ ) essencialmente constante.

Esses últimos dois fatores decorrem da realização da solidificação unidirecional na forma vertical ascendente. Desta forma, com todas as condições de controle garantidas, os resultados experimentais que se obtém podem ser correlacionados com segurança com as condições de solidificação, tornando o confronto teórico/experimental muitíssimo menos dependente de fatores experimentais adversos, o que faz com que as previsões

teóricas sejam intrinsecamente dependentes das condições do desenvolvimento matemático e das condições de contorno.

## DISPOSITIVO DE SOLIDIFICAÇÃO

Na Figura 5.1 pode ser visto um esquema do dispositivo de solidificação unidirecional utilizado para a simulação experimental.

As paredes laterais do mesmo são constituídas de um forno elétrico tubular, com as resistências elétricas de fio Kanthal A-1 distribuídas em duas zonas com potência de 100 watts cada e controladas independentemente através de chaves automáticas para controle de temperatura. Tal distribuição tem dois objetivos :

- 1 - manter o metal líquido homogeneizado a uma temperatura constante e aproximadamente 5 °C acima do ponto de fusão o que representa um superaquecimento desprezível, porém necessário para manter todo o metal no estado líquido antes do início da simulação;
- 2 - tornar desprezíveis as trocas laterais de calor durante o processo de solidificação.

Para conter o metal foi adaptado no centro do forno um tubo de aço inoxidável de 54 mm de diâmetro, cujas paredes internas são revestidas com uma pintura isolante à base de alumina, que tem a finalidade de facilitar a retirada posterior do lingote, evitar microsoldagens e dificultar trocas laterais de calor.

Na parte inferior do tubo, para exercer a função de um

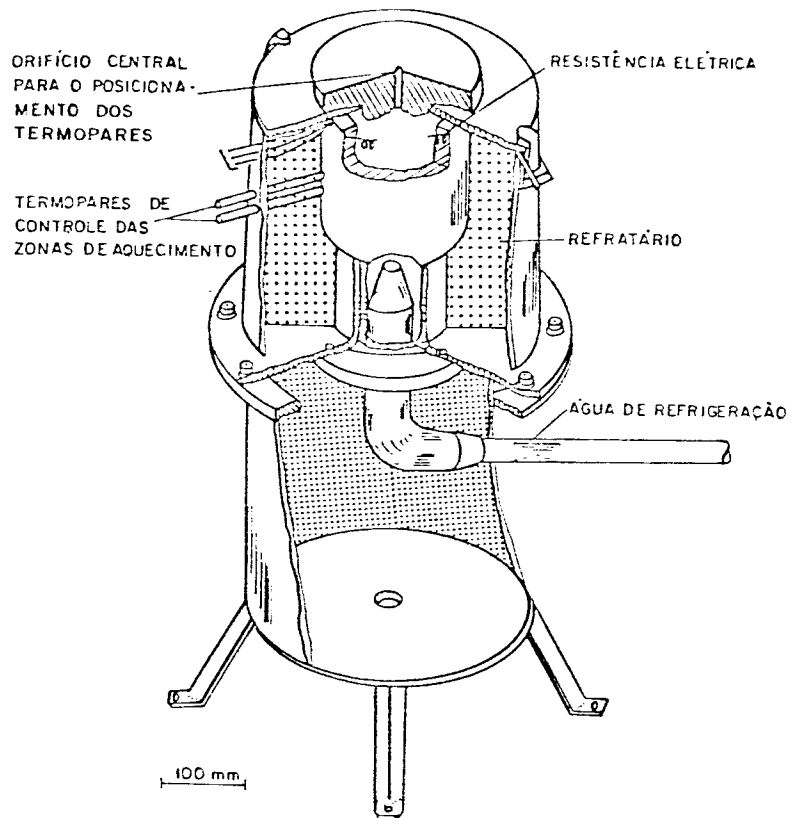


FIGURA 3.1 - Vista em perspectiva do dispositivo de solidificação unidirecional utilizado na análise experimental.

molde foi fixada, sob pressão, uma placa circular de aço ABNT 1020, com 2,5 mm de espessura. A refrigeração do molde foi feita através de um jato de água que incidia diretamente no molde pela parte inferior do dispositivo.

O controle do avanço da frente de solidificação e a evolução do perfil de temperaturas foi feito através de uma bateria de termopares chromel-alumel de 1,2 mm de diâmetro, montada em um dispositivo que mantinha os mesmos centrados e posicionados no meio do tubo contendo o metal, em alturas previamente estabelecidas. Os termopares foram protegidos por uma camada de grafite dissolvido em álcool para proteção e facilidade de remoção no final da experiência.

Para registrar-se as temperaturas, os termopares foram acoplados a um registrador de temperaturas multicanal, marca Phillips, tipo PM 9831.

## LIGAS UTILIZADAS E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

As experiências no dispositivo de solidificação unidirecional, com vistas à verificação do modelo desenvolvido, foram realizadas com ligas Al - 4,5 %Cu e Al - 15 %Cu e, em ambos os casos utilizaram-se moldes revestidos com alumina e polidos, com o objetivo de variar-se as condições de transferência de calor. (diferentes coeficientes de transferência de calor). Quanto ao superaquecimento, foram de 5 °C e 100 °C. A escolha dessas ligas de alumínio para o desenvolvimento experimental deveu-se, principalmente, a dois fatores:

- a) Na avaliação experimental de um modelo matemático de solidificação, a confiabilidade deste modelo deve ser verificada com ligas cuja resposta térmica às condições de soli-



dificação impostas seja rápida. Nessas situações, as previsões teóricas do modelo devem acompanhar essa resposta e não mascará-la como pode ocorrer com outras ligas metálicas. Foi prática comum na literatura a aplicação de modelos matemáticos para previsão da solidificação do aço, somente no molde do lingotamento contínuo, com resultados satisfatórios. Entretanto, a continuidade de sua aplicação para as etapas posteriores de solidificação conduzia a desvios inaceitáveis<sup>[14]</sup>. Isto decorre de uma má avaliação teórico/experimental inicial do modelo.

b) É importante avaliar o desempenho do modelo teórico com condições extremas de intervalo de solidificação. A escolha recaiu em uma liga de intervalo extensivo de solidificação (Al4.5%Cu) e em outra de menor intervalo de solidificação (Al15%Cu). Alguns modelos comportam-se bem na previsão teórica da solidificação com ligas de pequeno intervalo liquidus/solidus mas, à medida que este intervalo aumenta, a problemática da evolução da fração sólida interfere, podendo provocar desvios sensíveis dos resultados experimentais.

As ligas foram fundidas em um forno tipo mufla, de 14 Kw de potência. Tomou-se o cuidado de fundir e refundir a mistura para garantir a homogeneização do Cu. Uma vez fundida, a liga era vazada no tubo de aço no interior do dispositivo de solidificação, aquecida até a atingir o superaquecimento estipulado, ao mesmo tempo em que era agitada para garantir a homogeneização da temperatura. A bateria de termopares era adaptada, o registrador gráfico acionado e, no instante em que se

observava que a temperatura estava homogênea e dentro do especificado, o resfriamento era acionado.

A solidificação foi acompanhada através do registrador de temperaturas devidamente acoplado à bateria de termopares

## CAPÍTULO 6

### RESULTADOS E DISCUSSÕES

A análise da eficiência do modelo desenvolvido foi feita confrontando-se os resultados obtidos com resultados experimentais próprios, resultados experimentais da literatura e previsões de outros modelos.

Os resultados experimentais próprios foram obtidos usando-se o dispositivo de solidificação unidirecional (Fig. 5.1), que gerou as curvas térmicas a partir das quais podem-se levantar as curvas de evolução das isothermas solidus e liquidus e também as curvas de evolução da temperatura de um ponto pré determinado.

Obtidas as curvas experimentais para as diversas situações, o passo seguinte foi o acionamento do modelo, aplicando-o às condições do experimento. Esta etapa dependia da definição do coeficiente de transmissão de calor ( $h$ ) resultante, o que foi feito utilizando-se a abordagem proposta por Garcia, A<sup>1983</sup>.

Avaliados os coeficientes de transmissão de calor (apresentados nas Figuras de resultados), o programa resultante do modelo desenvolvido foi acessado através de terminais ligados diretamente ao sistema computacional da Unicamp (atualmente Vax), as condições experimentais foram inseridas e os resultados obtidos. (As constantes dos materiais utilizados encontram-se no Apêndice 3)

A Figura 6.1 apresenta a comparação dos resultados obtidos através da utilização do método proposto com os resultados experimentais para uma liga Al 4,5 %Cu, lingotada com 5 °C de superaquecimento. É apresentada a evolução das isothermas solidus e

liquidus e, como pode ser observado na Figura, os resultados fornecidos pelo método são concordantes com os obtidos experimentalmente na simulação da solidificação unidirecional. Pode-se observar, pelas curvas obtidas com a utilização do método, a influência do efeito terminal, caracterizada por uma aceleração da solidificação nos instantes finais, isto é, uma diminuição no tempo local de solidificação, o que será discutido mais adiante. Algumas considerações sobre o efeito terminal já foram feitas no capítulo 4.

As Figuras 6.2 e 6.3 repetem a comparação anterior para o caso de ligas Al-4,5 % Cu, 100 °C de superaquecimento e Al-15 % Cu, 5 °C de superaquecimento, respectivamente. Nesses casos também pode-se observar que os resultados obtidos com a utilização do método desenvolvido são coerentes com os resultados experimentais.

As Figuras 6.4 e 6.5 mostram a evolução da temperatura para um ponto a 0,5 cm da superfície para uma liga Al-4,5 % Cu, lingotada com 5 e 100 °C de superaquecimento, respectivamente e os resultados obtidos com a utilização do método mostram-se coerentes com os resultados experimentais.

A comparação com resultados da literatura pode ser vista na Figura 6.6 e foi feita para uma liga Al-15 % Cu, 5 °C de superaquecimento e  $h = 1,8 \text{ kW/m}^2\text{K}$ . É feita uma comparação com resultados experimentais e um método apresentado na literatura [1993]. Os resultados experimentais foram obtidos com a utilização de dipstick e pode-se notar que as previsões do modelo proposto apresentam boa concordância com os resultados experimentais, tendo em vista a esperada penetração do dipstick dentro da zona pastosa. Em relação aos outros métodos apresentados, o método desenvolvido no presente trabalho é o mais coerente com os resul-

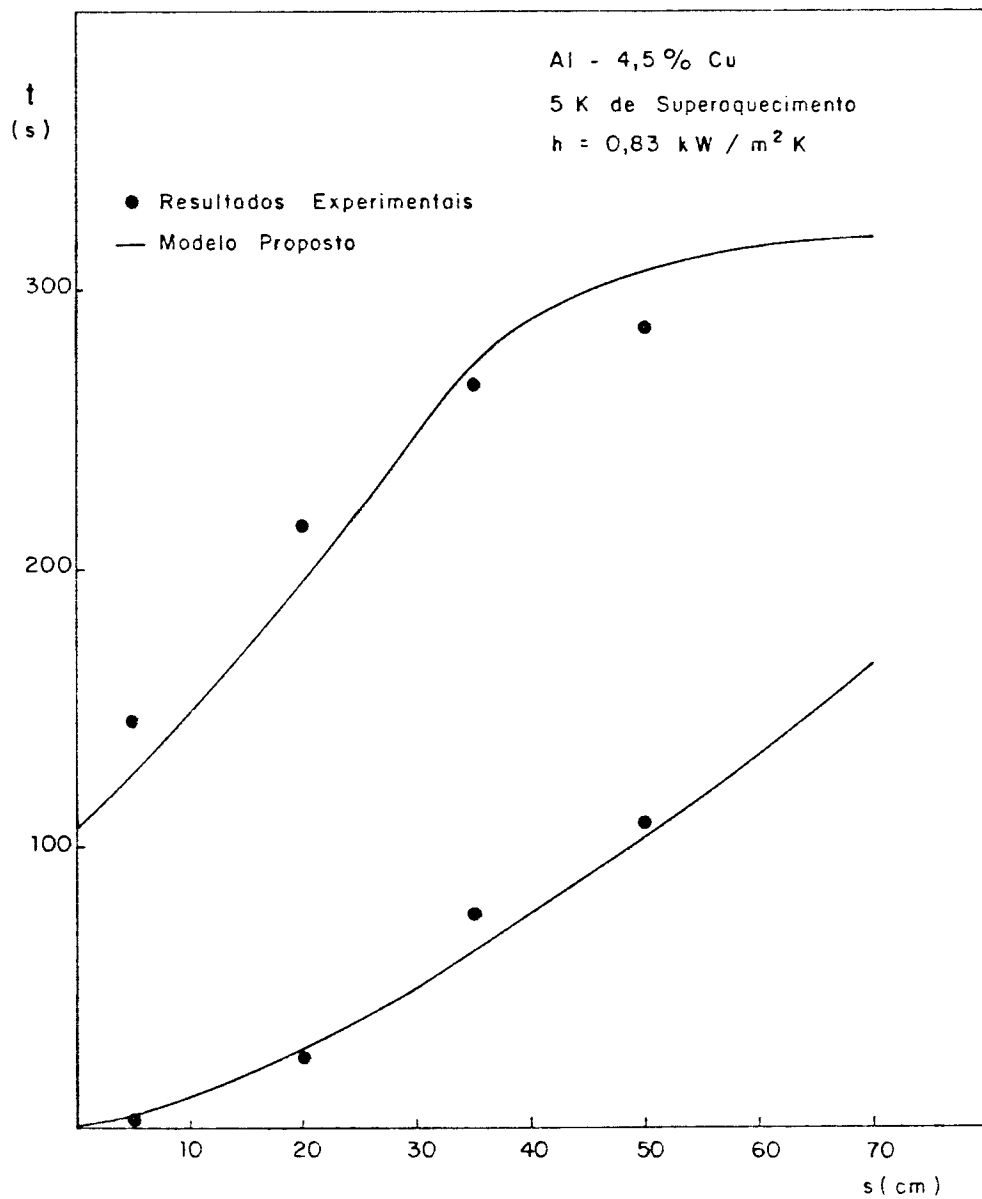


FIGURA 6.1 - Comparação com resultados experimentais da evolução das isothermas solidus e liquidus calculada pelo modelo proposto.

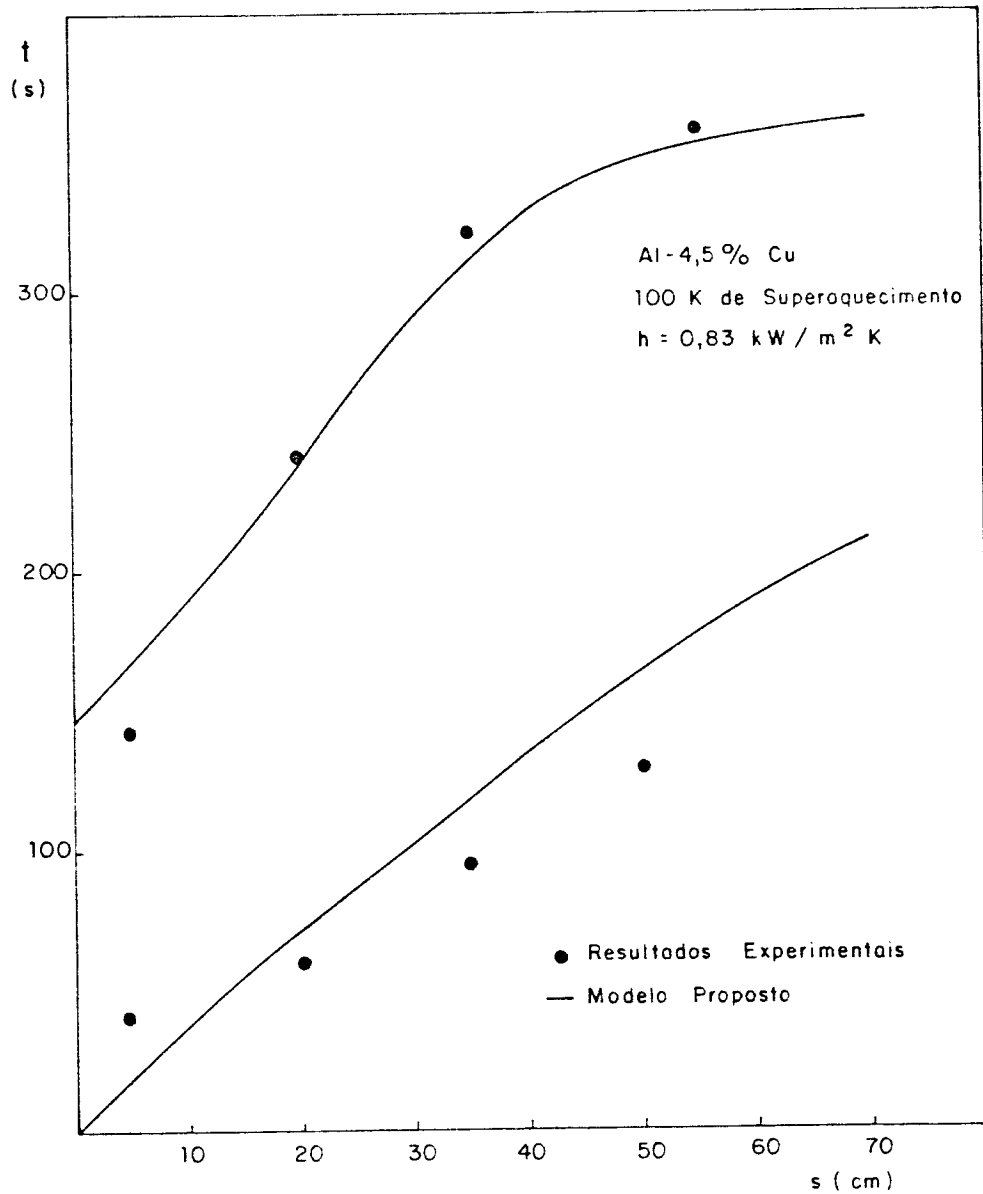


FIGURA 6.2 - Comparação com resultados experimentais da evolução das isotermas solidus e liquidus calculada pelo modelo proposto.

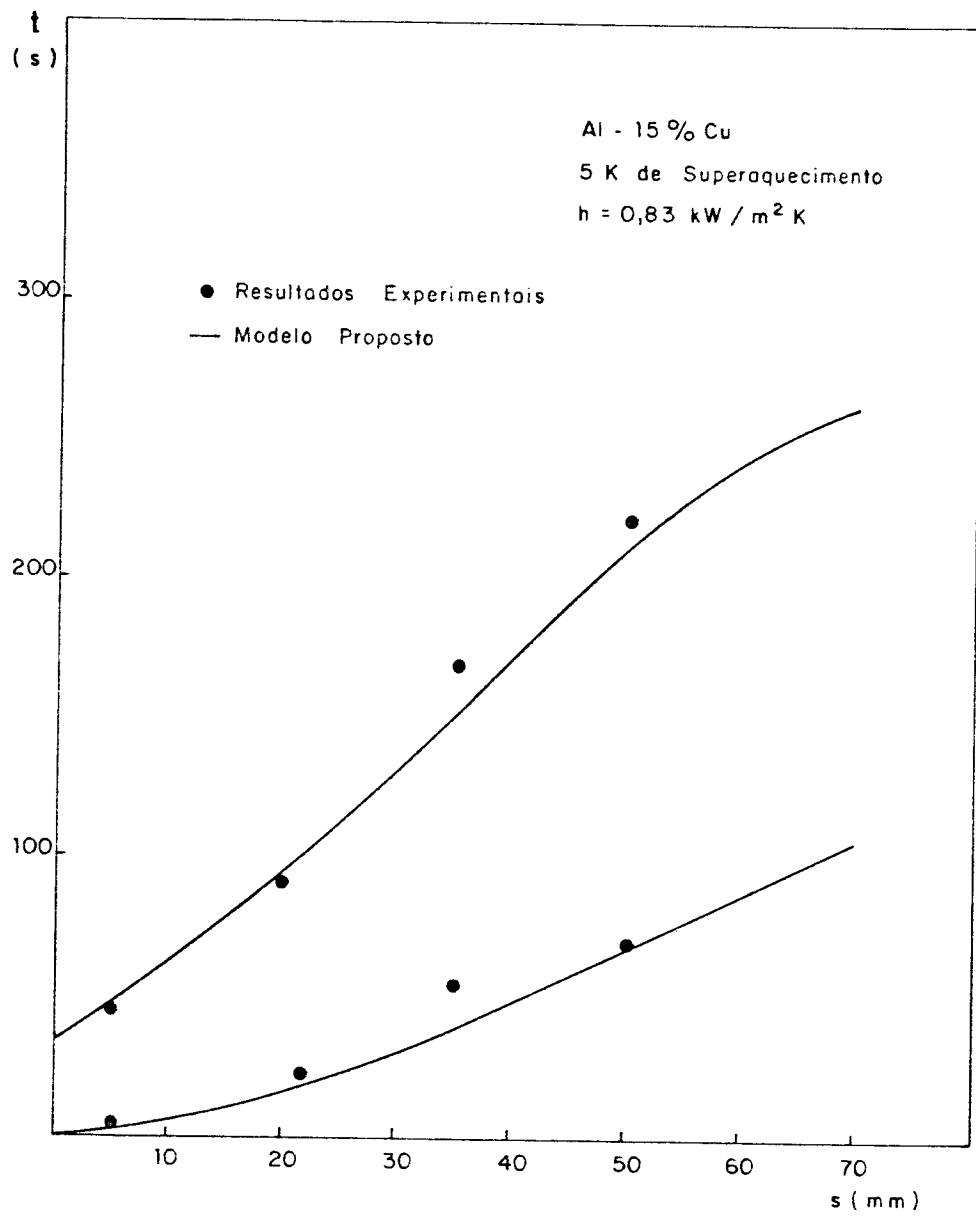


FIGURA 6.3 - Comparação com resultados experimentais da evolução das isothermas solidus e liquidus calculada pelo modelo proposto.

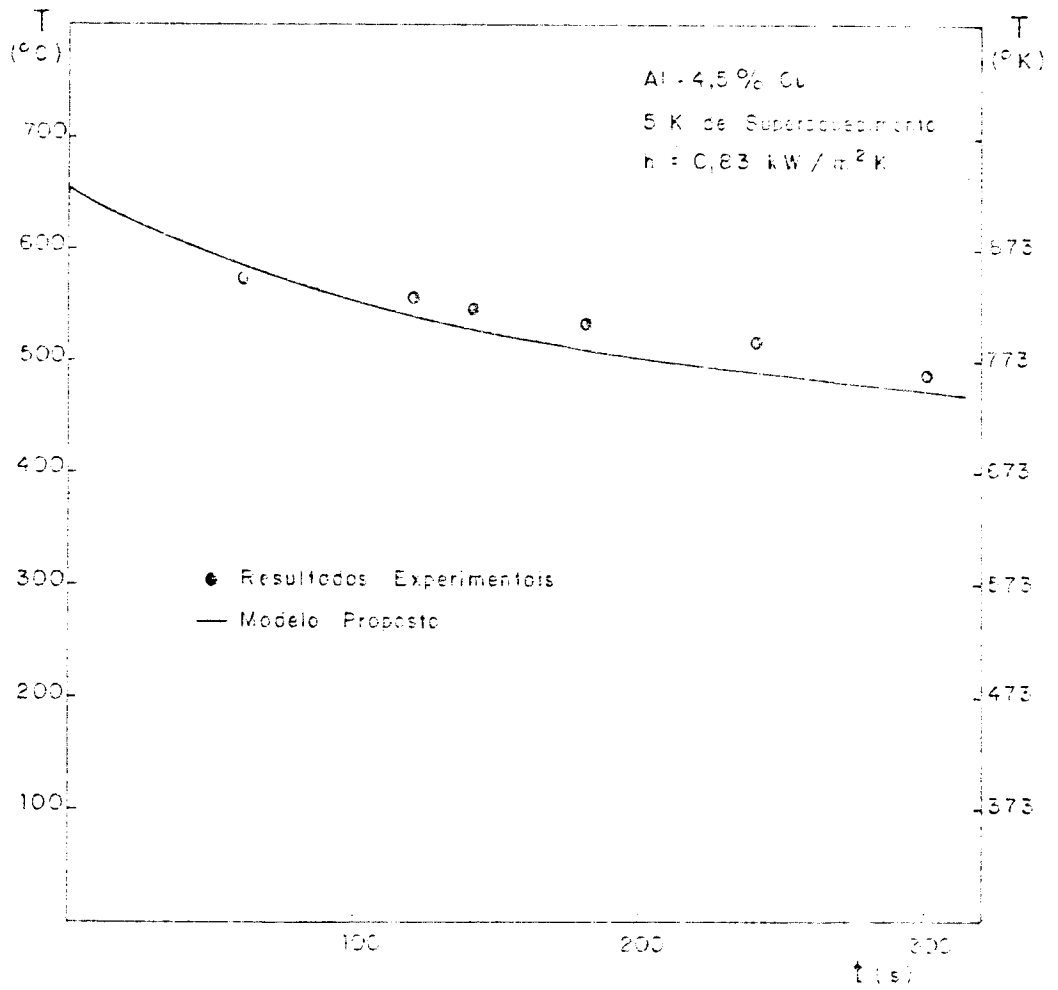


FIGURA 6.4 - Comparação com resultados experimentais da evolução da temperatura para um ponto situado a 0,3 mm da superfície.



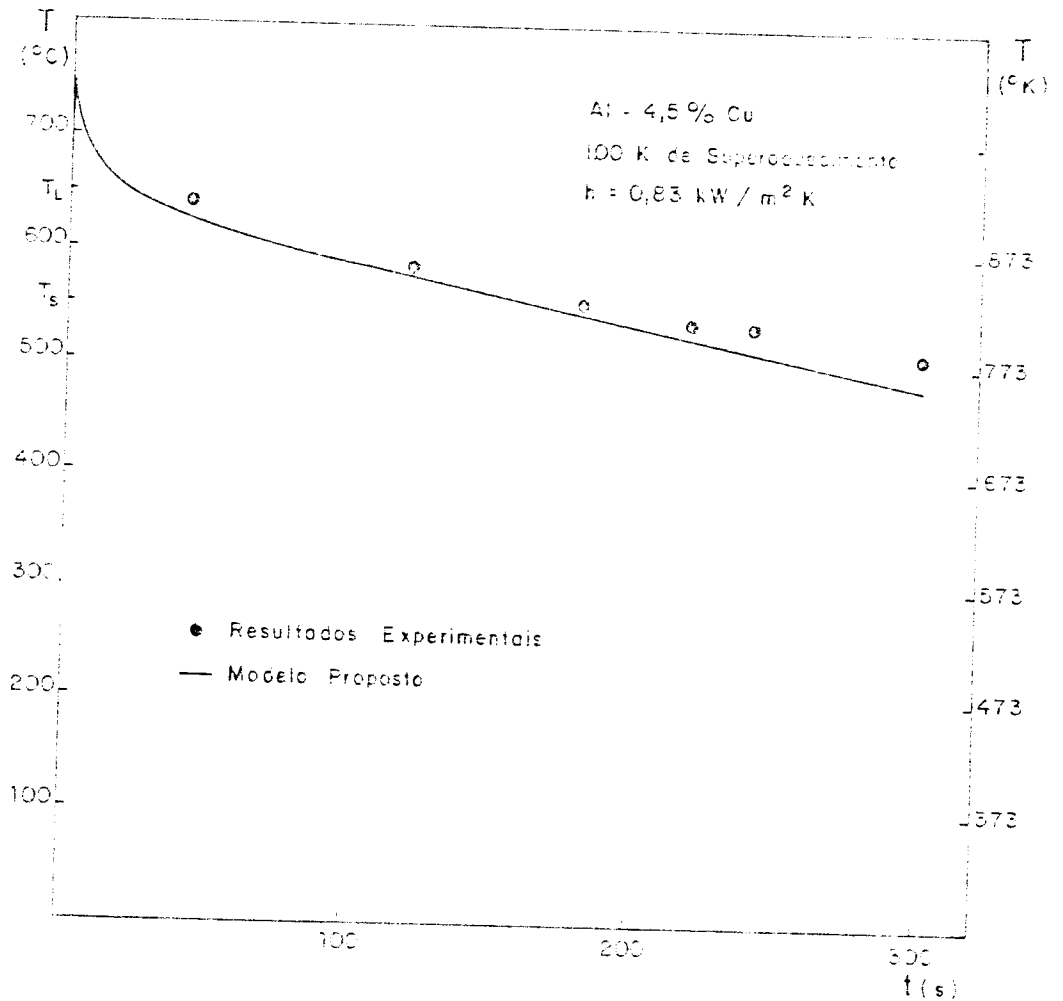


FIGURA 6.5 - Comparação com resultados experimentais da evolução da temperatura para um ponto situado a 50  $\mu\text{m}$  da superfície.

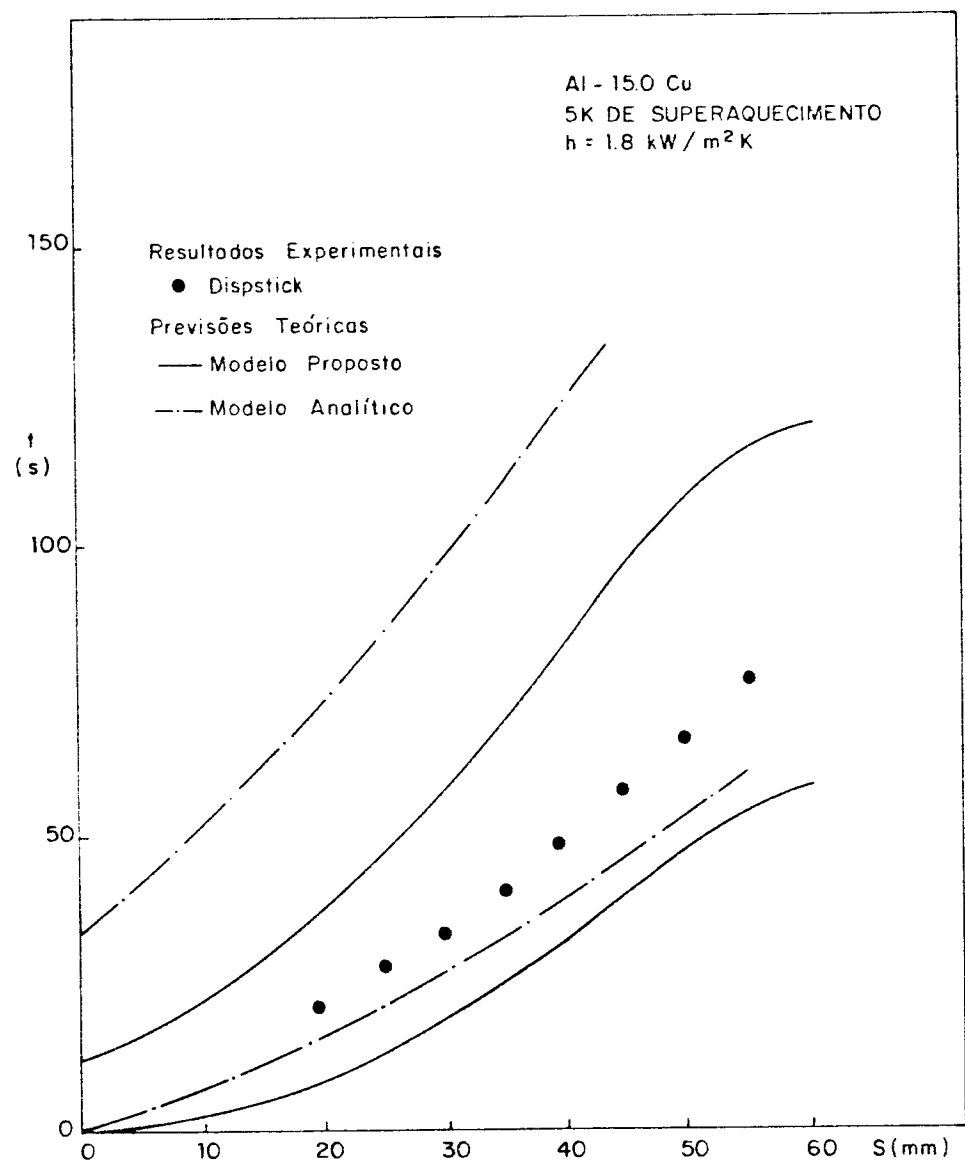


FIGURA 6.6 - Comparação da evolução das isothermas solidus e liquidus com resultados experimentais e teórico da literatura.

tados experimentais.

A influência do superaquecimento foi analisada para a liga Al-4,5 %Cu, utilizando-se o método desenvolvido e superaquecimentos de 5 e 100 °C. Os resultados são apresentados na Figura 6.7 e, como era esperado, superaquecimentos maiores acarretam maiores tempos de solidificação.

Na Figura 6.8 está representada a influência do coeficiente de transmissão de calor. Utilizou-se a liga Al-4,5 % Cu, superaquecimento de 5 °C e os coeficientes de transmissão de calor de 418, 920 e 2700 W/m<sup>2</sup>K. Quanto maior o valor de h, maior a eficiência do resfriamento portanto, mais rápida a solidificação, o que é facilmente visível analisando-se a Figura 6.8 onde também está bem caracterizada a influência sobre o efeito terminal.

Quanto ao efeito da formulação adotada para o cálculo da liberação do calor latente, conforme discutido no capítulo 4.2, item 1, é feita uma comparação entre a equação de Scheil e a regra da Alavanca. Os resultados obtidos com o uso das duas formulações pode ser visto na Figura 6.9, onde se pode observar a diferença entre as duas abordagens. Sabendo-se que a regra da alavanca é inadequada para as ligas de alumínio, pode-se avaliar os erros que são acarretados quando não é usada a formulação apropriada, não só para esta situação como para qualquer outra relativa a lingotamento.

A comparação dos resultados obtidos com a utilização do modelo e com resultados experimentais no molde de um sistema de lingotamento contínuo é feita nas Figuras 6.10a e 6.10b para uma liga com composição 0,35 % C e um aço inoxidável tipo 304, respectivamente. Os pontos experimentais apresentados nas Figuras representam o perfil de solidificação obtido através da injeção

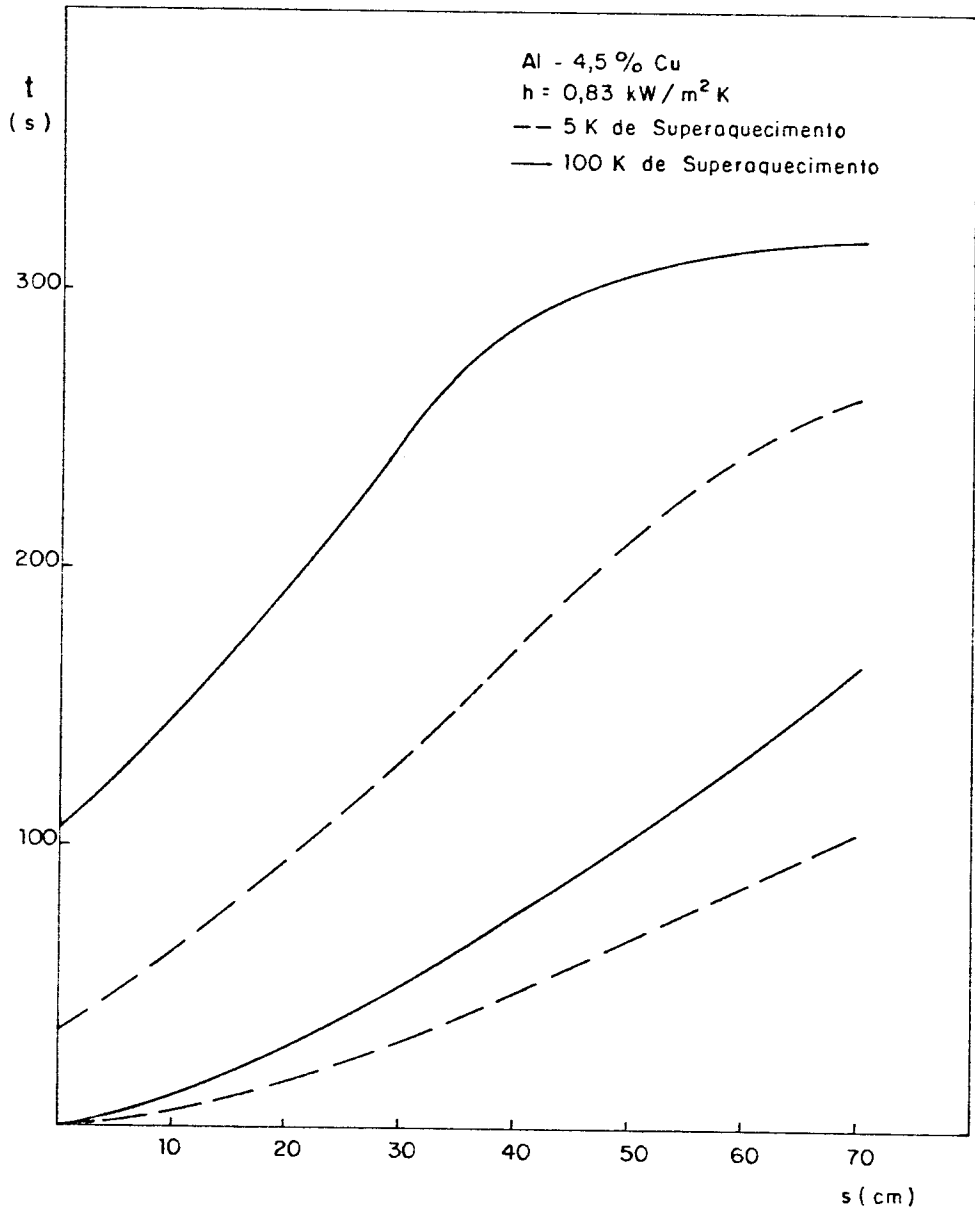


FIGURA 6.7 - Análise da influência do superaquecimento utilizando-se o modelo proposto.

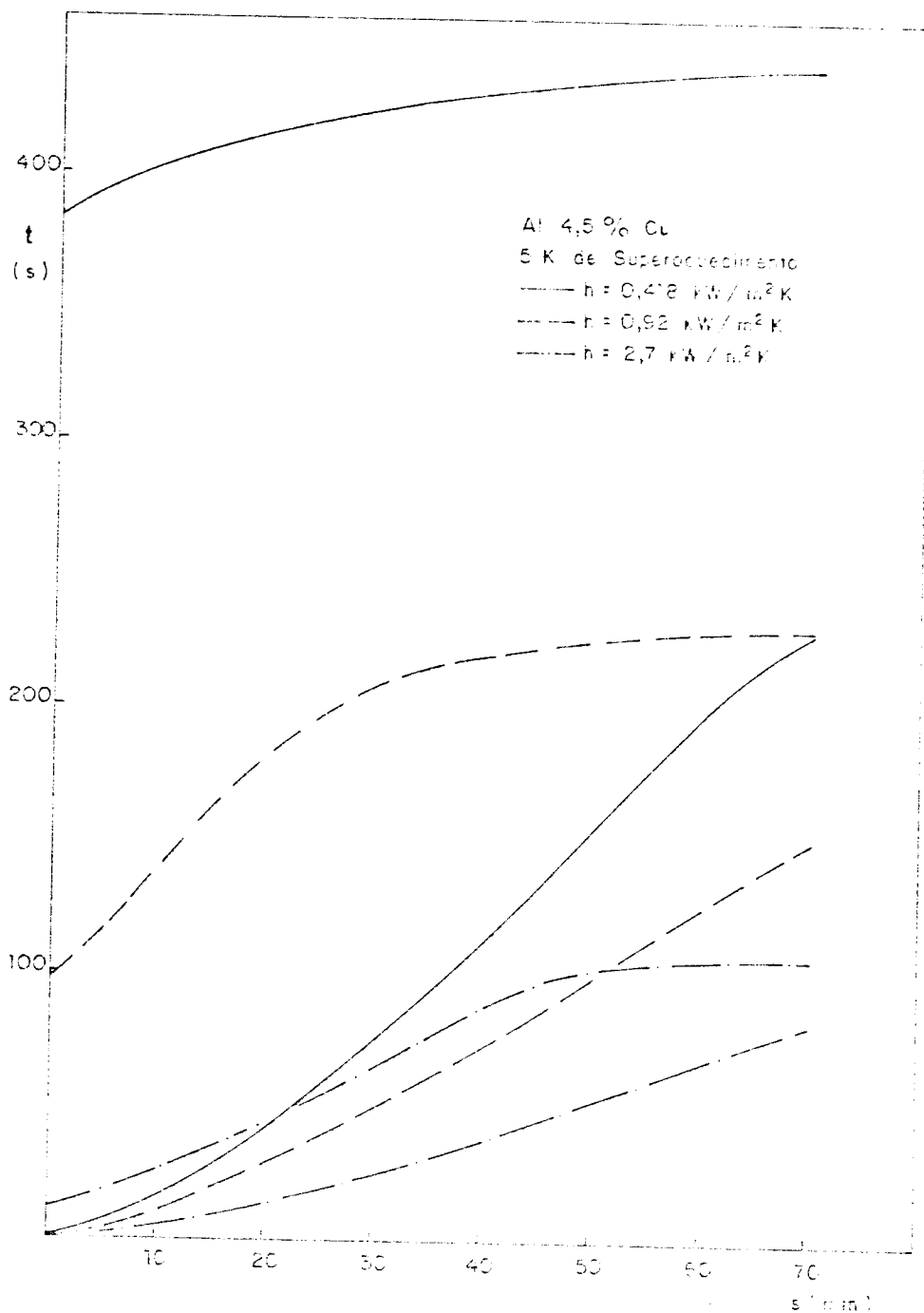


FIGURA 6.8 - Análise da influência da variação do coeficiente de transmissão de calor utilizando-se o modelo proposto.

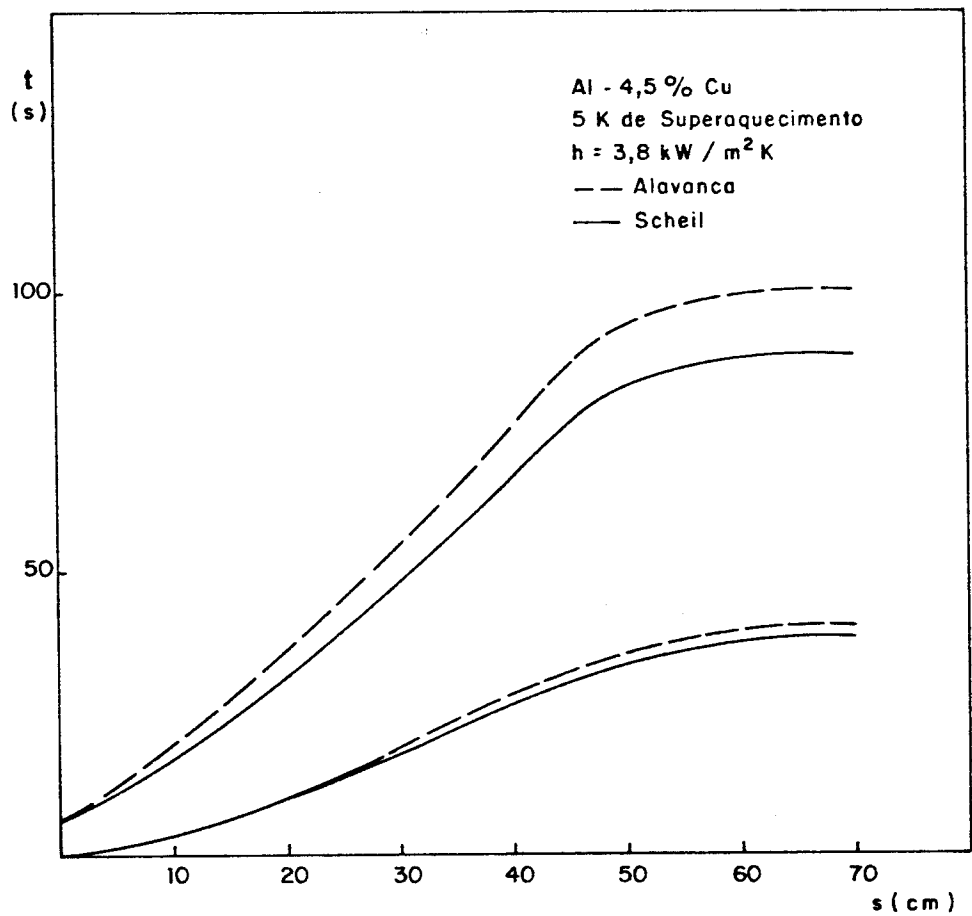
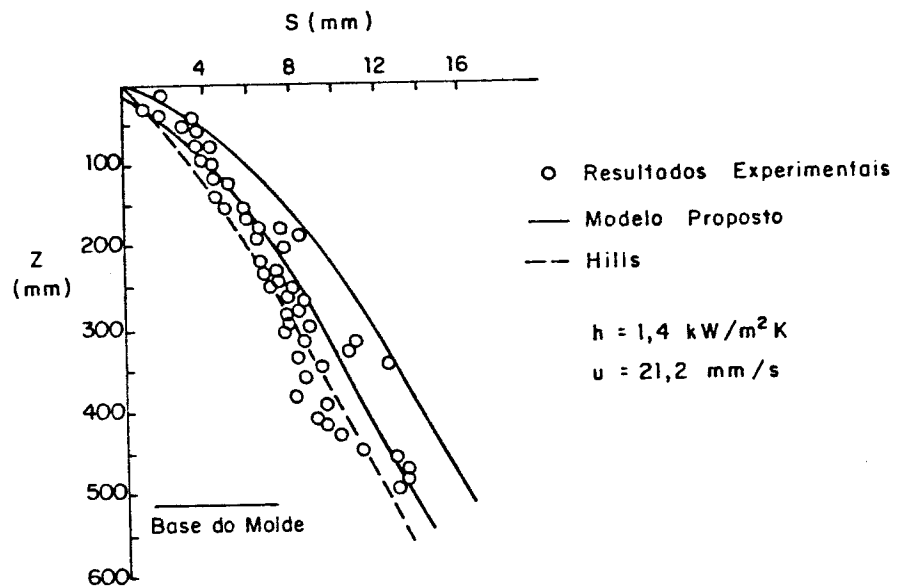
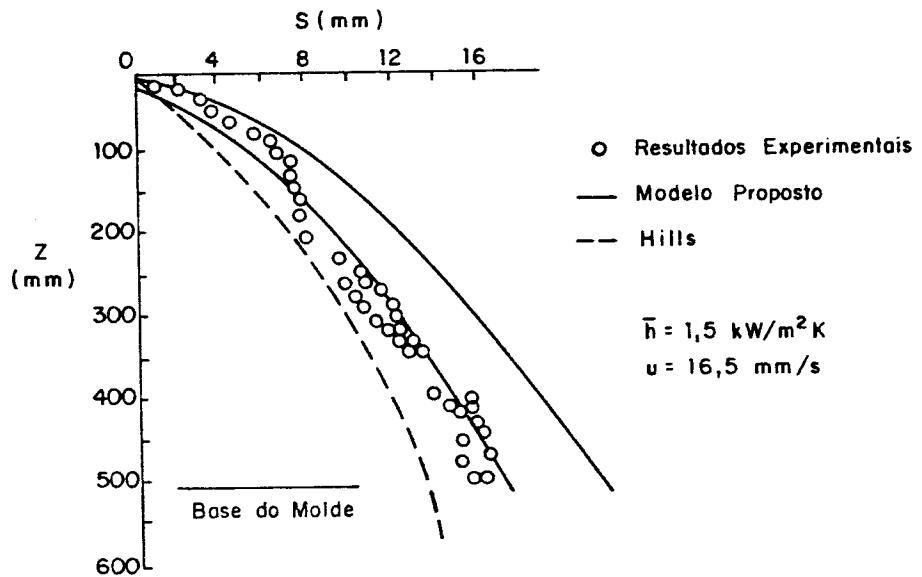


FIGURA 6.9 - Análise da influência da abordagem adotada para o cálculo da fração sólida na evolução da frente de solidificação. Resultados obtidos com a utilização do modelo proposto.



Aço 0,35 % Carbono



Aço Inoxidável Tipo 304

FIGURA 6.10 - Perfil de solidificação no molde do lingotamento contínuo obtido com o modelo proposto, comparado com o modelo analítico de Hills e resultados experimentais.

de traçadores radioativos no poço de metal líquido<sup>[12, 13]</sup>.

Os traçadores radiativos difundem-se com maior ou menor grau no interior da zona pastosa, dependendo de uma série de fatores, tais como: intensidade de correntes convectivas entre os ramos dendríticos, evolução da fração sólida dentro da zona pastosa e espaçamentos interdendríticos. Os dois últimos fatores são dependentes da composição química do aço e, portanto deve-se esperar uma diferença razoável no grau de difusão dos traçadores com a variação da concentração de carbono do aço.

Outro fator que influencia a posição desses traçadores é a diminuição do fluxo de calor na interface metal/molde devido à formação de ondulações periódicas na superfície do lingote, o que não ocorre em aços de alto carbono, onde se deve esperar um perfil de solidificação mais regular.

O perfil delineado pelos traçadores deve representar um perfil abaixo da isoterma "liquidus" e, em condições extremamente favoráveis de movimentação atômica, posições próximas da isoterma "solidus".

Analisando-se as Figuras 6.10a e 6.10b, observa-se que as previsões do modelo apresentam boa concordância com os resultados experimentais, uma vez que a maioria dos pontos experimentais encontra-se dentro dos limites fixados pelas isotermas "solidus" e "liquidus". As previsões do modelo de Hills apresentam menor confiabilidade para os aços de intervalo de solidificação maior, uma vez que admite frente plana de solidificação a uma posição intermediária entre "solidus" e "liquidus". Para evitarem-se comprometimentos, torna-se necessária a utilização de modelos que permitam o acompanhamento das duas isotermas ao mesmo tempo, ao invés de se assumir simplesmente frente plana de solidificação.



Outra comparação do modelo desenvolvido com resultados obtidos em molde de lingotamento contínuo é feita para um aço com 0.62 % C, conforme resultados mostrados na Figura 6.11, onde os resultados experimentais do perfil de solidificação foram obtidos em unidade industrial por ruptura da casca sólida na saída do molde ("breakout")<sup>[147]</sup>. Pode-se observar novamente que os resultados obtidos com o modelo são bastante compatíveis com os resultados experimentais.

A Figura 6.12 apresenta duas configurações de um projeto de sistema de lingotamento contínuo de aço onde o requisito essencial é a limitação da temperatura superficial a um mínimo de 870 °C. Uma configuração é dada por um modelo analítico e outra é dada pelo modelo numérico proposto. Na Figura 6.12a é apresentada a evolução das linhas solidus e liquidus e na 6.12b é apresentada a da temperatura superficial.

Analisando-se os resultados, nota-se claramente o efeito terminal quando se utiliza o modelo proposto. Quanto aos resultados apresentados pelo modelo analítico, uma vez que o mesmo não prevê o efeito terminal, o poço de metal líquido é muito profundo. Observa-se uma coerência com o modelo proposto até a segunda região de chuveiros e, portanto, a utilização de métodos analíticos para projetos de sistemas de lingotamento contínuo, por não preverem o efeito terminal, podem resultar em sistemas superdimensionados.

Da observação da Figura 6.1 sobre a influência do efeito terminal no tempo local de solidificação ( $t_{e1}$ ), foi levantada a curva apresentada na Figura 6.13 que relaciona o  $t_{e1}$  com a posição da frente de solidificação no lingote. Verifica-se na Figura 6.13 um aumento de  $t_{e1}$  até determinado estágio do avanço

da frente de solidificação, passando por um máximo e, depois, uma diminuição, o que é compatível com o comportamento esperado para a evolução do tempo local de solidificação em presença de efeito terminal (aceleração da solidificação).

O tempo local de solidificação é um parâmetro importante, pois através de modelos desenvolvidos, ele é relacionado com o espaçamento dendrítico primário e secundário, esquematizados na Figura 6.14 ( $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente).

A literatura <sup>[10,11]</sup> apresenta uma série de modelos de crescimento dendrítico, na sua maioria de caráter experimental. Entre os modelos teóricos pode-se citar o de Hunt para espaçamentos dendríticos primários e o de Feurer para espaçamentos dendríticos secundários<sup>[12]</sup>, cujas formulações são apresentadas a seguir:

#### Modelo de Hunt

$$\lambda_1 = 2.38 \left( \theta D_L \Delta T k' \right)^{1/4} G_L^{-1/4} V_L^{-1/4} \quad (6.1)$$

onde:

- $\theta$  = coeficiente de Gibbs Thomson =  $\sigma_{SL}/T_f$
- $D_L$  = difusividade atômica
- $k'$  = coeficiente de distribuição de soluto
- $G_L$  = gradiente térmico junto à linha líquida
- $V_L$  = velocidade de deslocamento da linha líquida
- $\Delta T$  = diferença de temperatura sólido/líquido
- $T_f$  = temperatura de fusão do metal líquido
- $\sigma_{SL}$  = tensão superficial sólido/líquido

## Modelo de Fourier

$$\lambda_M = 4,36 (M t_{BL})^{1/2} \quad (6.2)$$

onde M é dado por

$$M = \frac{2 \sigma_{BL} D_L T_L \ln (C_E/C_0)}{H (1-k) m' (C_E - C_0)} \quad (6.3)$$

onde :

$m'$  = inclinação da linha líquida

$C_E$  = concentração eutética

$C_0$  = concentração inicial

A Figura 6.15 ilustra a aplicação da equação de Fourier para o exemplo da Figura 6.13, resultante da aplicação do modelo desenvolvido. Os valores dos parâmetros necessários para a aplicação da equação acima para o Al-4,5 %Cu, utilizado para o exemplo, encontram-se listados no Apêndice 3.

Pela observação das equações teóricas acima, vê-se que a dependência dos parâmetros estruturais ( $\lambda_L$  e  $\lambda_S$ ) em relação aos parâmetros térmicos que ocorre na solidificação, está localizada nas características das fronteiras de solidificação (linhas líquida e sólida), tais como  $\sigma_L$ ,  $M_L$  e  $t_{BL}$ .

A formulação de Fourier é desenvolvida para sistemas unidimensionais com ocorrência de transição eutética, e sua aplicação torna-se mais interessante quando que se pretende fazer a análise de estrutura formada durante a solidificação de ligas que não formam

O modelo de Hunt exige assumir alguns dados de estrutura disponíveis na literatura, principalmente para a aplicação a

de composições de aços. Isto, inevitavelmente, acaba conduzindo à adoção de valores aproximados ou a utilização de equações específicas para cada composição.

Como exemplo de aplicação desse tipo de abordagem para uma situação típica de lingotamento contínuo, utilizou-se o caso de lingots de aço com 0,62 % C, já que a literatura<sup>[10]</sup> apresenta resultados experimentais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  para essa composição química. Para o cálculo teórico da evolução de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , utilizou-se as equações obtidas por Jacobi et al<sup>[11]</sup> para essa composição de aço, dadas por

$$\lambda_1 = 35,6 t_{E1}^{*0,18} \quad (6.4)$$

$$\lambda_2 = 15,8 t_{E1}^{*0,18} \quad (6.5)$$

sendo  $\lambda$  em [ $\mu\text{m}$ ] e  $t_{E1}$  [s].

Fez-se o acoplamento com as equações de Jacobi, dos resultados de caráter térmico obtidos através do modelo numérico de solidificação desenvolvido. A Figura 6.16 apresenta a comparação de tais resultados de cálculo com os resultados experimentais para solidificação ocorrida no molde do lingotamento contínuo e verificamos que a concordância obtida é bastante boa para ambos os casos analisados.

Em vista de que foi possível obter, através do cálculo, as dependências dos critérios durante todo o processo de solidificação nos pontos característicos de lingotamento contínuo, conforme está o exemplo da Figura 6.17.

Isto demonstra a possibilidade de aplicação do modelo proposto na "programação" da estrutura dendrítica, permitindo

levantar características operacionais que resultem em produtos com a qualidade desejada, economizando matéria prima e evitando-se o superdimensionamento.

O caminho inverso desta abordagem permite, a partir de medidas experimentais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , determinar valores de  $h$  correspondentes, de forma análoga ao método proposto por Caram, REISBERG para lingotamento estático. A grande vantagem desta técnica de avaliação de  $h$  consiste na determinação de valores ao longo de todo equipamento de lingotamento contínuo. No molde, por exemplo, permite obter a variação real de  $h$  que ocorre ponto a ponto.

A utilização do modelo com valores de  $h$  determinados por esta abordagem se traduz em uma previsão mais precisa da evolução da solidificação, permitindo uma atuação mais eficiente sobre as condições de operação. É necessário ressaltar, entretanto, que os valores de  $h$  assim obtidos podem ser utilizados de forma precisa até o ponto em que o desgaste da parede interna do molde imponha uma nova situação de troca térmica entre lingote e molde.

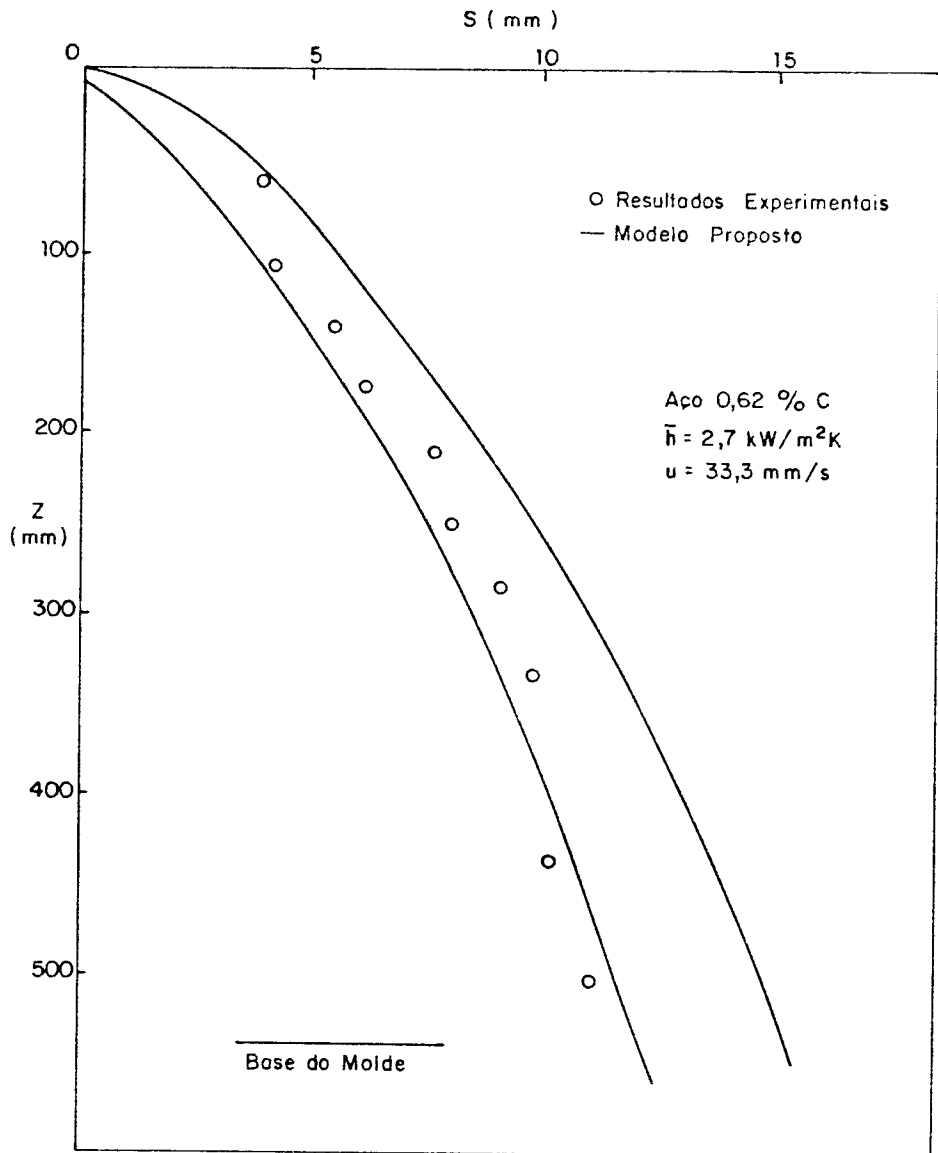


FIGURA 6.11 - Perfil de solidificação no molde de lingotamento contínuo obtido com o modelo proposto e comparado com resultados experimentais.

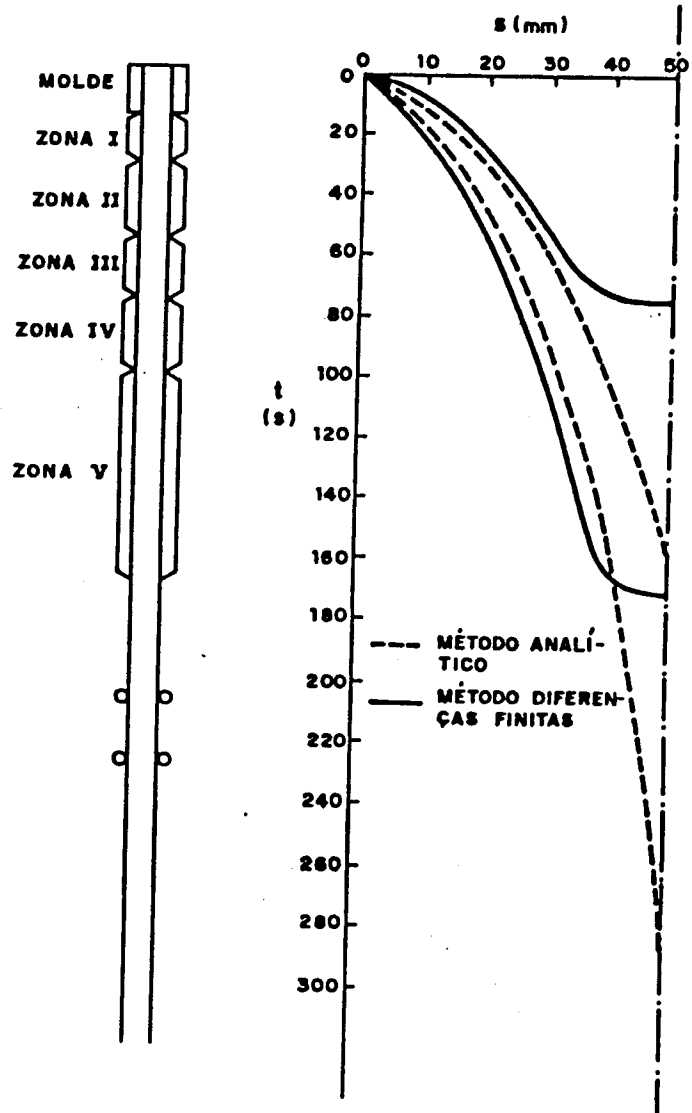


FIGURA 6.12a - Comparação da previsão do tamanho do sistema de lingotamento contínuo e respectivo do perfil térmico.

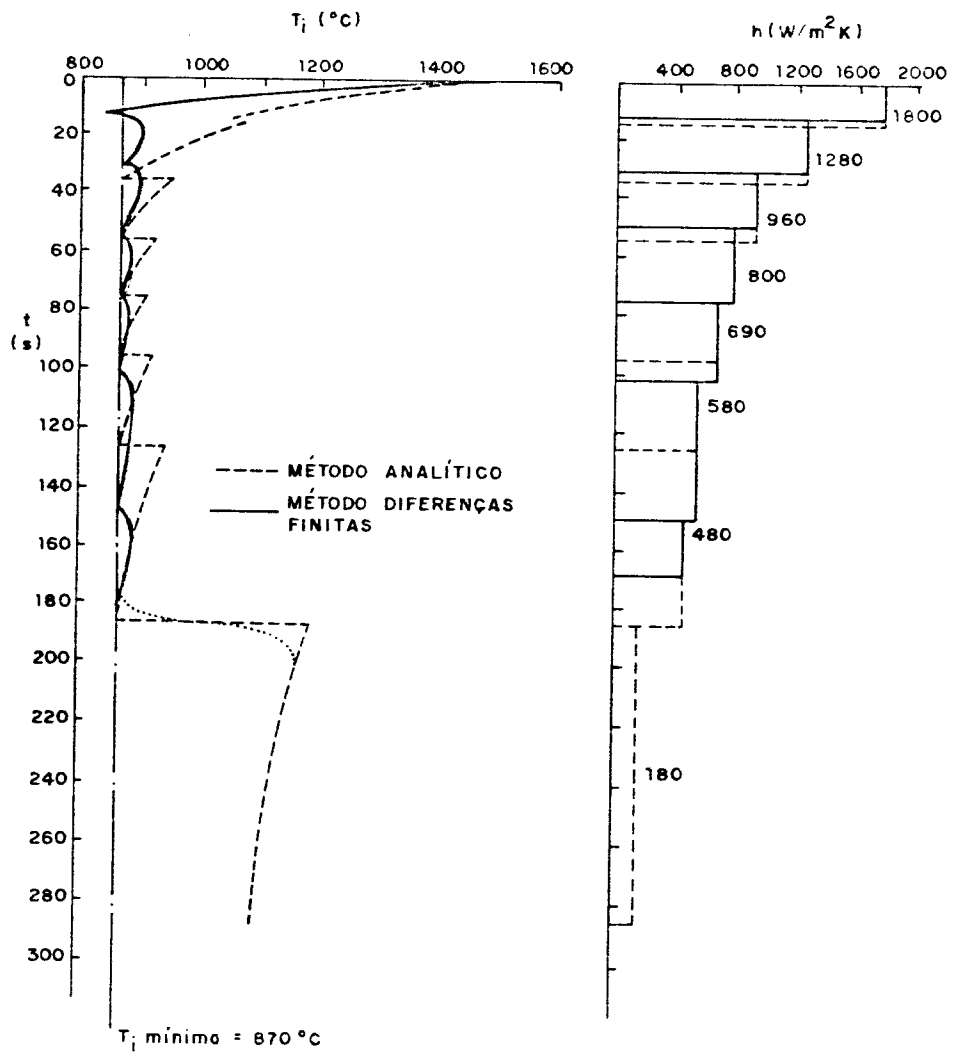


FIGURA 6.12b - Comparação da previsão da evolução da temperatura superficial.



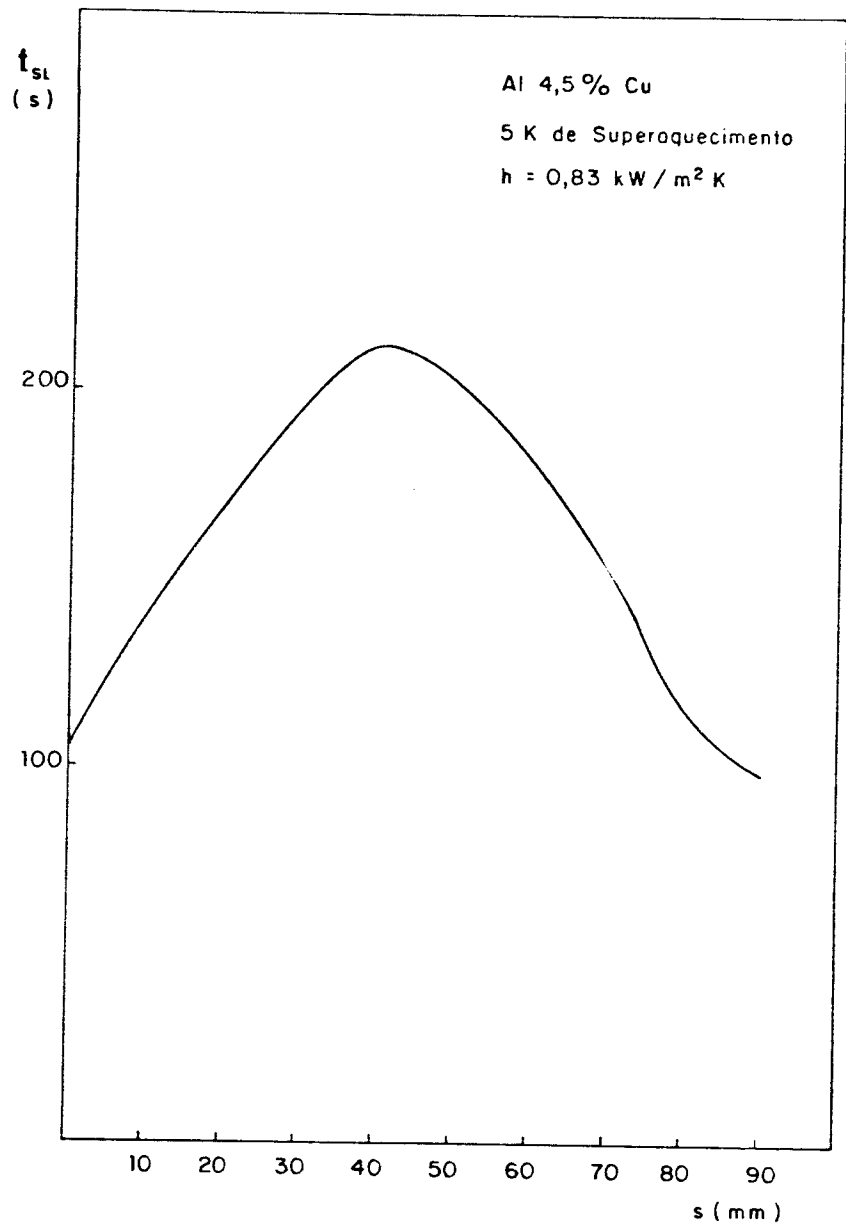


FIGURA 6.13 - Influência do efeito terminal sobre o tempo local de solidificação.

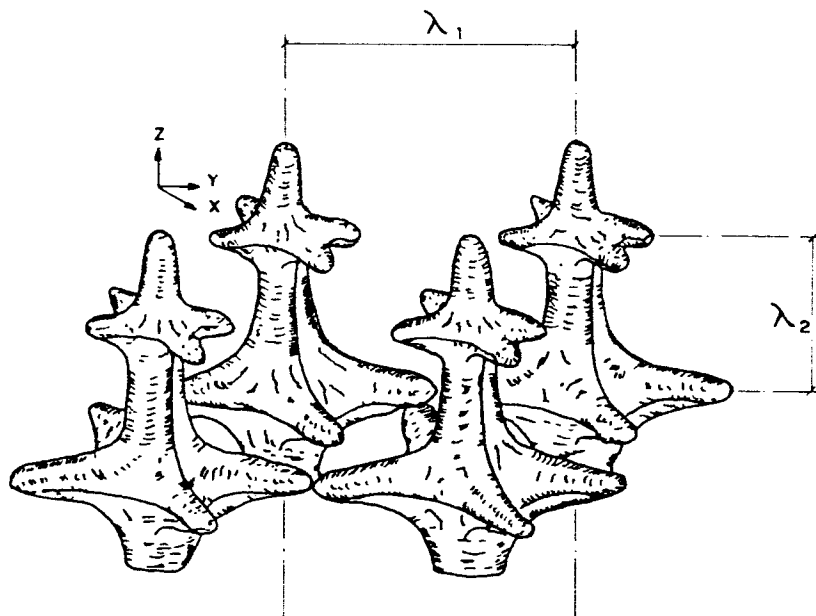


FIGURA 6.14 - Representação dos espaçamentos interdendríticos primário e secundário.

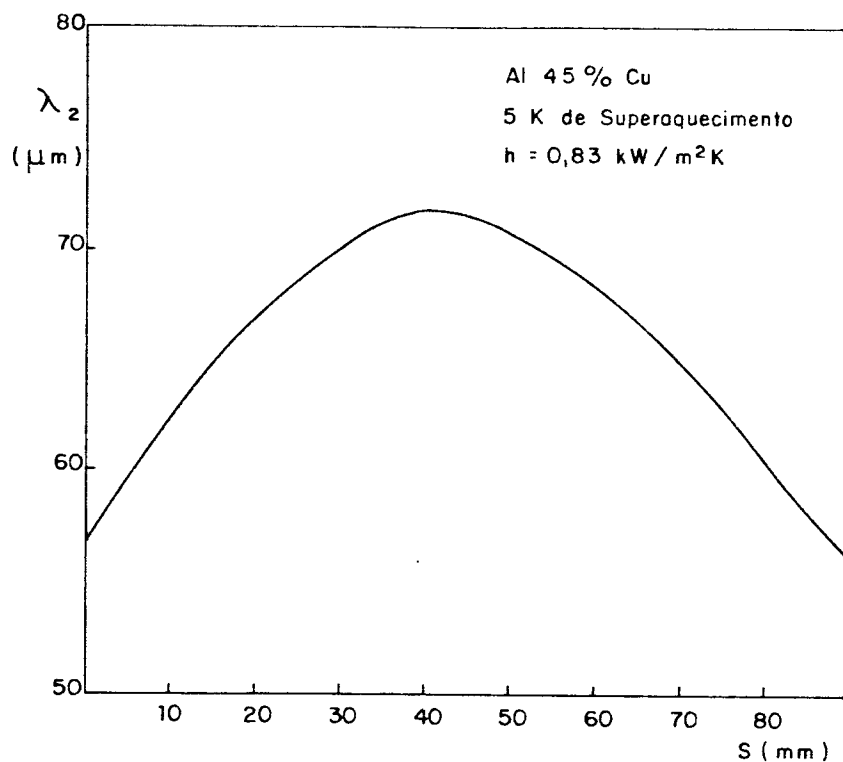


FIGURA 6.15 - Espaçamentos interdendríticos secundários calculados utilizando-se o modelo de Feurer e parâmetros resultantes da aplicação do modelo.

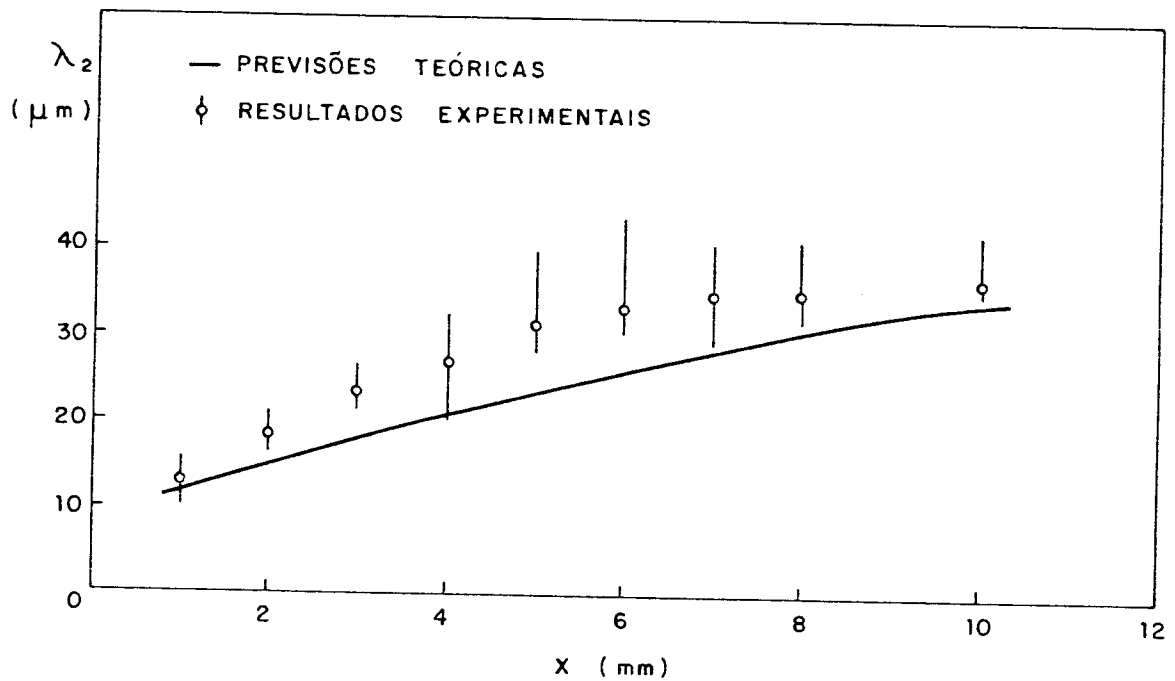
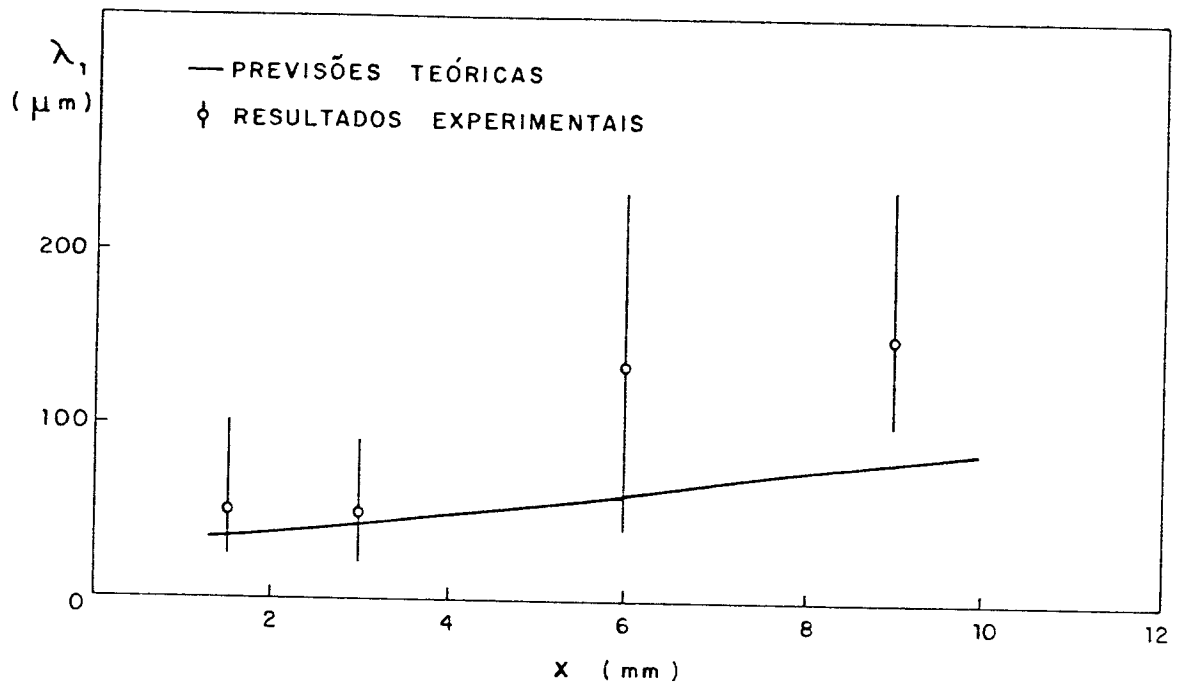


FIGURA 6.16 - Comparação de resultados obtidos com a utilização do modelo acoplados à equação de Jacobi e resultados experimentais para a evolução dos espaçamentos interdendríticos primários e secundários.

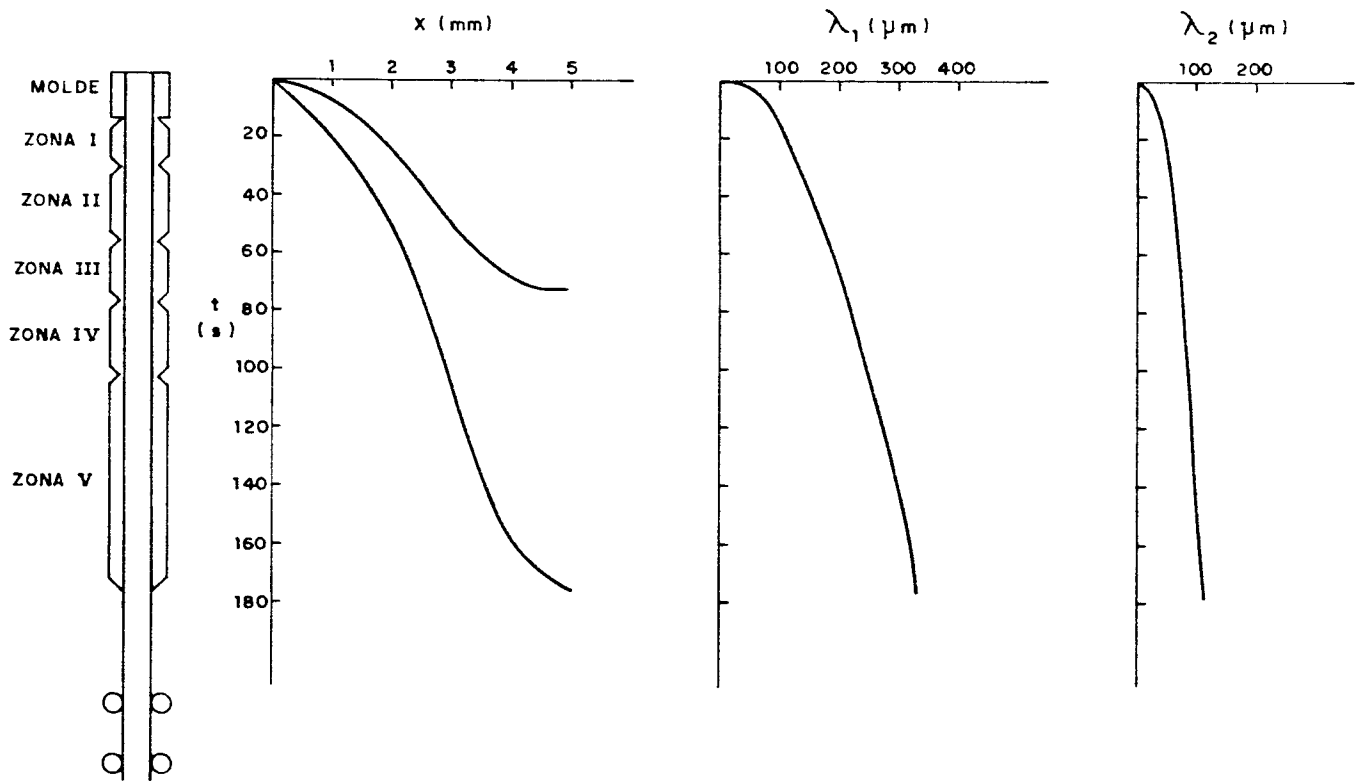


FIGURA 6.17 - Espaçamentos interdendríticos calculados para a solidificação em um sistema de lingotamento contínuo.

## CAPÍTULO 7

### APLICAÇÃO DO MODELO NA SIMULAÇÃO DE SITUAÇÕES TÍPICAS DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO DO AÇO

Nas indústrias siderúrgicas que contam com sistemas de lingotamento contínuo, o objetivo final é um produto livre de trincas superficiais e internas, ausência de linha central de segregação e taxa mínima de incidência de ruptura da casca sólida na saída do molde (break-out). As exigências metalúrgicas impõem as características de resfriamento durante o lingotamento contínuo.

Os seguintes critérios foram estabelecidos a fim de garantir o cumprimento das exigências metalúrgicas<sup>[107]</sup>:

#### a - limitação da profundidade do poço de metal líquido

A profundidade do poço de metal líquido deve ser limitada para impedir a formação de trincas internas e para minimizar o risco de formação de linha central de segregação. A baixa ductilidade do aço a temperaturas próximas à temperatura solidus impõe que a solidificação deva estar completa antes do ponto de máxima deformação na placa, ou seja, na região de endireitamento horizontal no caso de máquinas curvas. Isso não ocorrendo, as regiões de solidificação sob ação de tensões de tração geram núcleos formadores de trincas.

## b - minimização de trincas transversais

Os aços geralmente utilizados na produção de placas apresentam uma diminuição acentuada da ductilidade à medida que a temperatura diminui em direção à temperatura de transformação alotrópica  $\gamma \rightarrow \alpha$ . Na região de endireitamento do lingote devido às elevadas condições de deformação, devem-se evitar temperaturas na faixa de baixa ductilidade.

A Figura 7.1 apresenta um exemplo de curva de ductilidade a quente para um determinado aço. Esta curva mostra a redução de área de uma amostra como função da temperatura de teste.

A região de ductilidade inferior para placas de aço é normalmente localizada entre 700 e 750 °C, que é a temperatura onde a transformação  $\gamma \rightarrow \alpha$  inicia. O limite superior da região de baixa ductilidade corresponde à transição entre fratura transgranular e intergranular. Dependendo do tipo de aço e, especialmente, do conteúdo de nitrogênio e nióbio, o limite superior pode variar entre 900 e 1100 °C.

Além disso, a convivência de transformações  $\gamma \rightarrow \alpha$ ,  $\delta \rightarrow \alpha$ ,  $L \rightarrow \delta$  na mesma seção transversal implica em uma alteração volúmetrica diferencial, subdelendo regiões de máxima ductilidade a tensões de tração e compressão simultâneas, o que provoca a nucleação de trincas.

Técnicas de fabricação industriais construídas que visa prevenir trincas transversais antes do corte de placas de aço, são estratégias de resfriamento podem ser implementadas. A primeira é definir a taxa de resfriamento de aço a ser controlada para o ponto de corte, que normalmente maior que o limite superior da região de baixa ductilidade. A segunda, que é difícil, é o "resfriamento de baixa temperatura" consiste em manter a tempera-

COMPOSIÇÃO QUÍMICA ( $10^{-3}\%$ )

C	Mn	S	P	Si	N	Al	Nb
162	1390	9	21	325	6	55	26

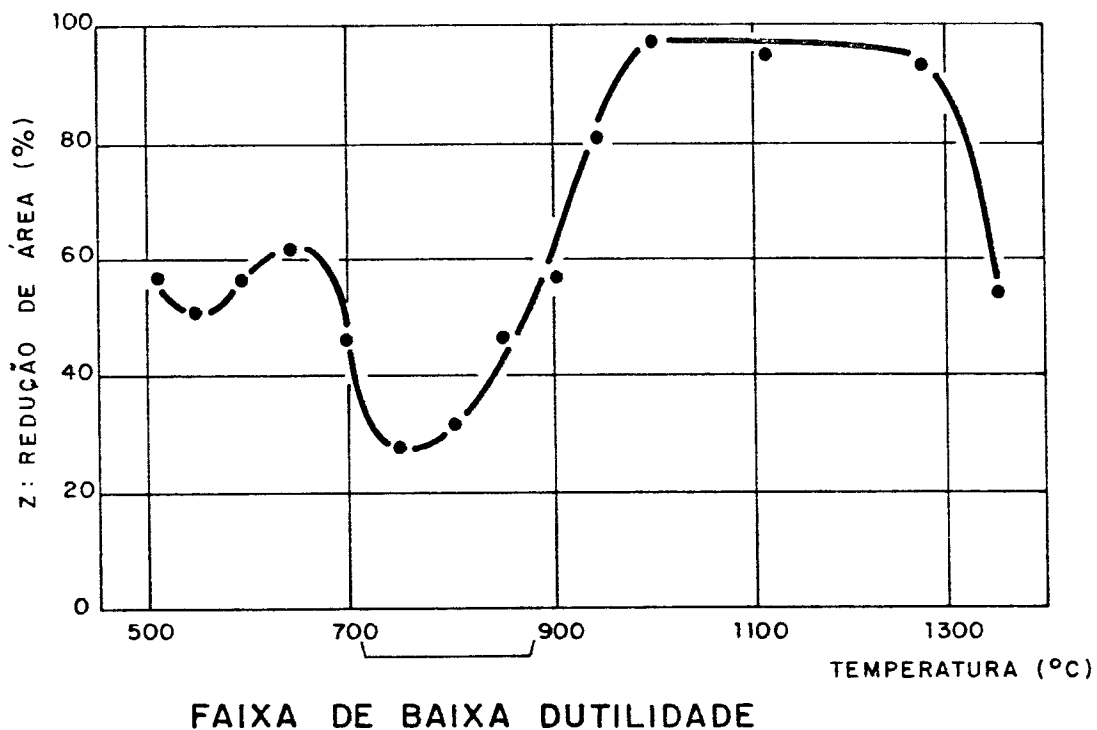


FIGURA 7.1 - Curva de ductilidade para o aço da composição acima.



tura menor que o limite inferior da região de baixa utilidade

#### c - resquecimento da superfície

Na ausência de eficiência de refrigeração, a superfície da lingotela sai de um conjunto de chuveiros para ser resquecida e o resquecimento da superfície. Este resquecimento dá origem ao surgimento de tensões de tração na superfície (alteração da coesistência de sólido e líquido), sendo que estas tensões dão origem a distorções proporcionais ao interior de resquecimento  $10^{-3}$  e podem atingir valores superiores à tensão de ruptura da região de solidificação.

De acordo com a literatura, os valores máximos de resquecimento recomendados encontram-se em torno de 100 °C/m para estruturas colunas e de até 200 °C/m para estruturas laminares (obtidas por agitação eletromagnética do metal líquido) (10).

#### c - resfriamento da superfície

Entre de um determinado conjunto de chuveiros, a eficiência de resfriamento térmico deve ser controlada para evitar o resquecimento por um lado e o efeito de "deslizamento" de sólidos formados no trincas por outro. Considerando-se a eficiência de resfriamento de nove chuveiros, a velocidade de resquecimento é dada por:

A literatura apresenta um valor máximo de

para a velocidade de resquecimento, sendo que a velocidade máxima é dada por:

## e - abaulamento da placa

No lingotamento de placas, uma vez fixadas as posições dos rolos que a sustentam, só a temperatura pode ser utilizada no controle do abaulamento. Não se pode atingir a flecha máxima permissível e as tensões de tração que solicitam a região de solidificação no contato com os rolos extratores não devem situar-se em níveis que conduzam a fratura. De acordo com a literatura, a temperatura superficial máxima recomendada ao longo da máquina de lingotamento contínuo é da ordem de 1100 °C [107].

Portanto, as aplicações do modelo tornam-se complexas, uma vez que devem compatibilizar todo o espectro de exigências mencionadas nos itens de (a) até (e), além de outras exigências impostas pelas limitações do sistema, conforme descrito no capítulo 2.

A seguir são apresentadas algumas das várias aplicações possíveis do modelo desenvolvido.

### 7-1 PROJETO DE UM SISTEMA DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO

Uma aplicação bastante útil do modelo desenvolvido consiste em sua utilização para projetos de sistemas de lingotamento contínuo.

Adote-se, a nível de exemplo, um projeto que objetive a produção de placas de aço de baixo carbono com as características apresentadas na Tabela 7.1.

TABELA 7.1

Características dimensionais e dados de entrada

Dimensões da placa 0.260 X 1.90 m

h no molde 1800 W/m<sup>2</sup> °C

Tratamento de h Variável conforme item 4.

Casca Crítica  
Saída Molde > 18 mm

Velocidade de  
Produção 0,9 m/min

Chuveiros Lei de Vazão<sup>1983</sup>  
 $h = 0.33W^{0.55}$

CÁLCULO DO COMPRIMENTO ÚTIL DO MOLDE

O sistema a ser projetado deve admitir velocidades variáveis de lingotamento, mas o projeto do molde deve ser baseado em uma velocidade alta, pois deve assegurar a obtenção da espessura solidificada dentro dos critérios estabelecidos para a casca crítica, uma vez que, com velocidades máximas, têm-se espessuras

mínimas. Obtendo-se espessuras aceitáveis com velocidades máximas, o critério da espessura crítica fica assegurado para velocidades menores.

O comprimento útil do molde para o sistema a ser projetado pode ser avaliado utilizando-se o modelo desenvolvido, obtendo-se a casca solidificada em função de comprimentos iniciais do molde e determinadas velocidades de produção. Com a velocidade de 0,9 m/min e para um molde com 600 mm, a casca solidificada é de 1,9 mm, aceitável para suportar a pressão metalostática no início do sistema secundário, para as dimensões da placa em questão. (vide Tabela 7.1)

O dimensionamento do molde, utilizando-se o modelo desenvolvido, já incorpora o tratamento do coeficiente de transmissão de calor variável no molde, conforme desenvolvido no capítulo 4, item 5.1.

## CÁLCULO DO SECUNDÁRIO

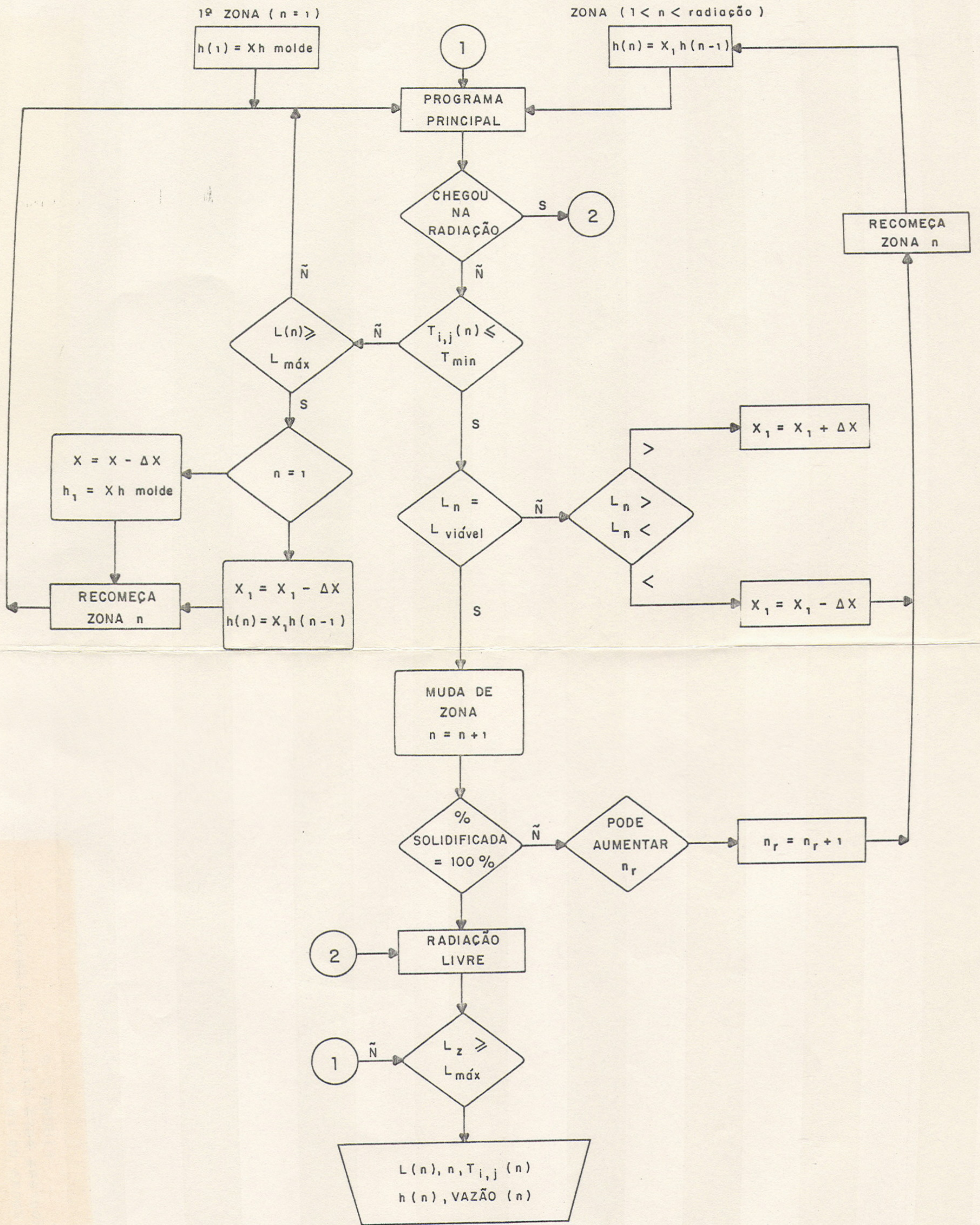
A exigência inicial do projeto, para evitarem-se trincas decorrentes de tensões térmicas e problemas consequentes das transformações alotrópicas do ferro, foi manter ao longo do resfriamento secundário uma temperatura mínima de 870 °C. As vazões de água utilizadas nos chuveiros de resfriamento devem assegurar solidificação total no início da zona de radiação livre. Pode-se iniciar o processo de cálculo com coeficiente de transmissão de calor ligeiramente inferior ao do molde. A sequência de cálculo das dimensões de cada zona de resfriamento e seus respectivos coeficientes obedece ao fluxograma da Figura 7.2, cuja sequência de etapas é a seguinte :

- 1 - identificação do número da zona para efeito do cálculo do coeficiente de transmissão equivalente.
- 2 - ir para programa principal para cálculo da distribuição de temperaturas e tamanho das zonas.
- 3 - identificação da zona - se for radiação, livre ir para zona de radiação livre.
- 4 - testar se temperatura da superfície é menor que a temperatura mínima:
  - 4 - 1 - temperatura maior que temperatura mínima - testar se o comprimento da zona ultrapassa um determinado limite, e ultrapassando, deve ser aumentada a eficiência de refrigeração e recomeçado o cálculo para a zona n.
  - 4 - 2 - temperatura é menor que a temperatura mínima - continua sequência de cálculo.
- 5 - testar comprimento resultante para zona n
  - 5 - 1 - o comprimento não é viável - ajustar coeficiente de transmissão e recomeçar zona n.
  - 5 - 2 - o comprimento é viável - continua.
- 6 - testar se já é zona de radiação livre.
  - 6 - 1 - não chegou na radiação livre - começar zona n+1
  - 6 - 2 - é zona de radiação livre - continuar
- 7 - testar se % solidificada é igual a 100 % na região de desempenho
  - 7 - 1 - não é - se puder aumentar uma região, proceder o aumento e, se não for possível, alterar h(1) e recomeçar.
- 8 - zona de radiação livre - controlar comprimento máximo
- 9 - saída de resultados : número de zonas, perfil de temperaturas, coeficientes de transmissão resultantes e vazões .

O comprimento total do sistema, incluindo a radiação livre, foi estipulado no máximo em 25 m.

O resultado obtido pode ser visto na Figura 7.3 e na Tabela 7.2.







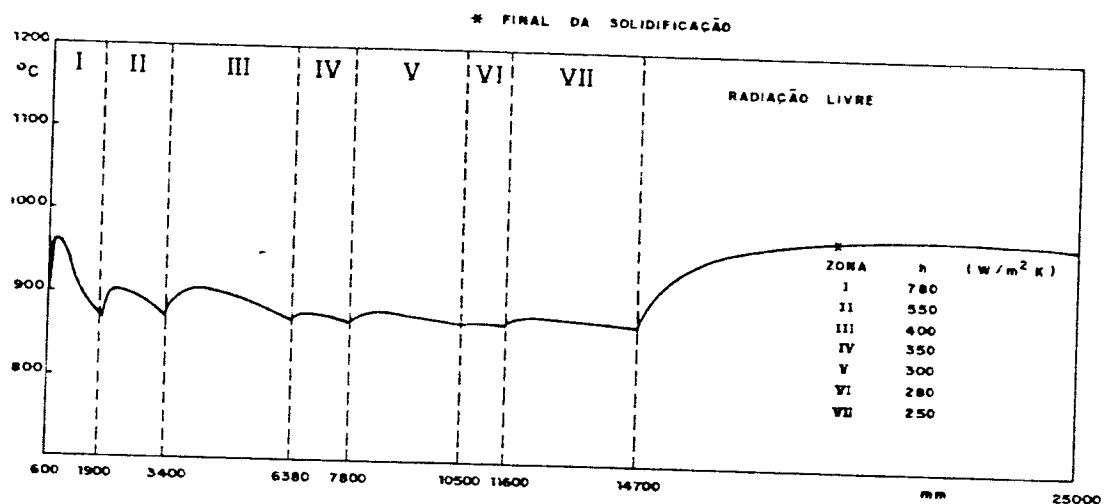


FIGURA 7.3 - Perfil térmico resultante no sistema projetado com a utilização do modelo desenvolvido.

TABELA 7.2

ESPESSURA SOLIDIFICADA NA SAÍDA DO MOLDE = 19 mm		
TEMPERATURA SUPERFICIAL NA SAÍDA DO MOLDE = 893 °C		
Nº zona	tamanho mm	coeficiente de transmissão de calor (h) W/m <sup>2</sup> K
1	1300	780
2	1500	550
3	2980	400
4	1420	350
5	2700	300
6	1100	280
7	3100	250
radiação livre =		10300
comprimento total do secundário =		24400 mm
ponto onde a solidificação foi completada =		14100 mm

## 7.2 - PROPOSIÇÃO DE UM MÉTODO DE DETERMINAÇÃO DOS COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO DE CALOR NA REGIÃO DE CHUVEIROS

Uma das grandes dificuldades nos processos industriais de lingotamento contínuo é avaliar o coeficiente de transmissão de calor na região de chuveiros, resultante das vazões e pressões de água utilizadas nos chuveiros de resfriamento.

O modelo desenvolvido pode ser utilizado para a determinação dos coeficientes de transmissão de calor resultantes de vazões e pressões fazendo-se o confronto de previsões teóricas do perfil térmico obtido com o modelo desenvolvido e o perfil térmico de resultados obtidos experimentalmente.

Para obterem-se resultados experimentais, pode-se usar uma amostra cilíndrica isolada termicamente na superfície curva, para provocar o transporte unidimensional de calor com termopares posicionados ao longo do eixo. A amostra deve ser aquecida até



determinada temperatura e, depois, uma de suas superfícies planas deve ser submetida ao resfriamento através de um chuveiro com condições de fluxo, pressão de água, ângulo e posição dos determinados, registrando-se a distribuição de temperaturas. Para a execução do procedimento exposto acima deve ser montada uma plataforma de levantamento de dados, conforme está esquematizado nas Figuras 7.4 e 7.5.

As funções das unidades esquematizadas na Figura 7.4 são as seguintes:

1. CONJUNTO HIDRÁULICO : Deve reproduzir as condições hidráulicas (vazão e pressão da água) existentes no equipamento de lingotamento contínuo para cada conjunto de chuveiros isoladamente.
2. CONJUNTO HIDRÁULICO DA FONTE DE INDUÇÃO : Atua no sentido de refrigerar a fonte de indução.
3. FONTE DE INDUÇÃO : Deve ter potência suficiente para aquecer a amostra de aço (de 100 a 150 mm de diâmetro ) à temperatura de até 1300 ° C.
4. CONJUNTO DE CHUVEIROS : devem ser os mesmos utilizados no equipamento de lingotamento contínuo em cada etapa de resfriamento secundário. Esta unidade pode ser deslocada tanto na vertical quanto na horizontal.
5. CONJUNTO DE AMOSTRAGEM : A espira de indução deve aquecer a amostra até a temperatura de referência. O refratário deve impedir perdas laterais de calor significativas. Os termopares colocados no eixo central da amostra devem monitorar o resfriamento a partir do instante de acionamento do chuveiro.
6. REGISTRADOR GRÁFICO DE TEMPERATURAS : Deve mapear a história térmica do resfriamento para posterior confrontação com resultados obtidos pelo modelo desenvolvido.

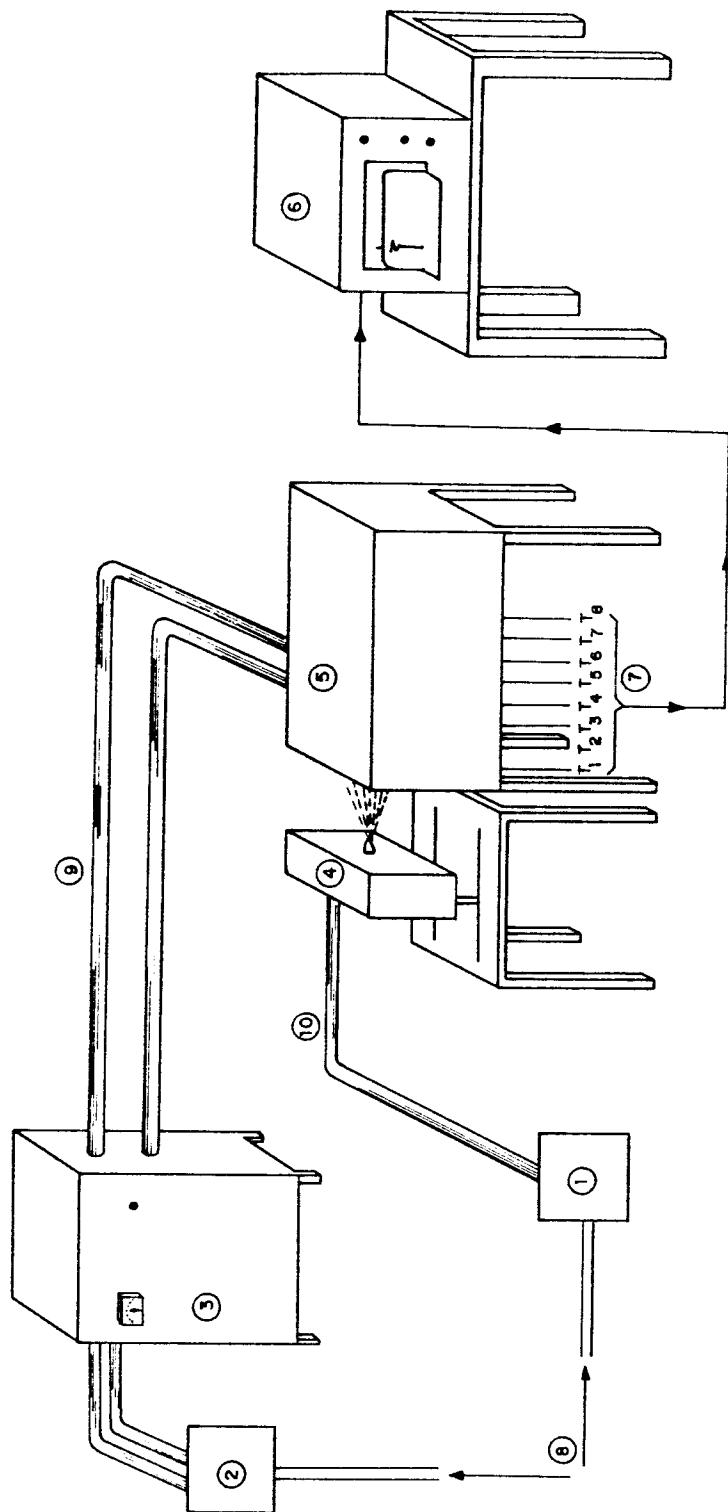
7. BATERIA DE TERMOPARES : O conjunto de termopares do tipo Pt-PtRh deve registrar a variação de temperaturas no eixo central da amostra.

A caracterização da eficiência térmica do conjunto de chuveiros de resfriamento deve ser feita através de um coeficiente de transferência de calor (h), que depende :

- da distância da unidade 4 à 5,
- da vazão e pressão do circuito hidráulico,
- da posição vertical da unidade 4 em relação ao eixo central da amostra.

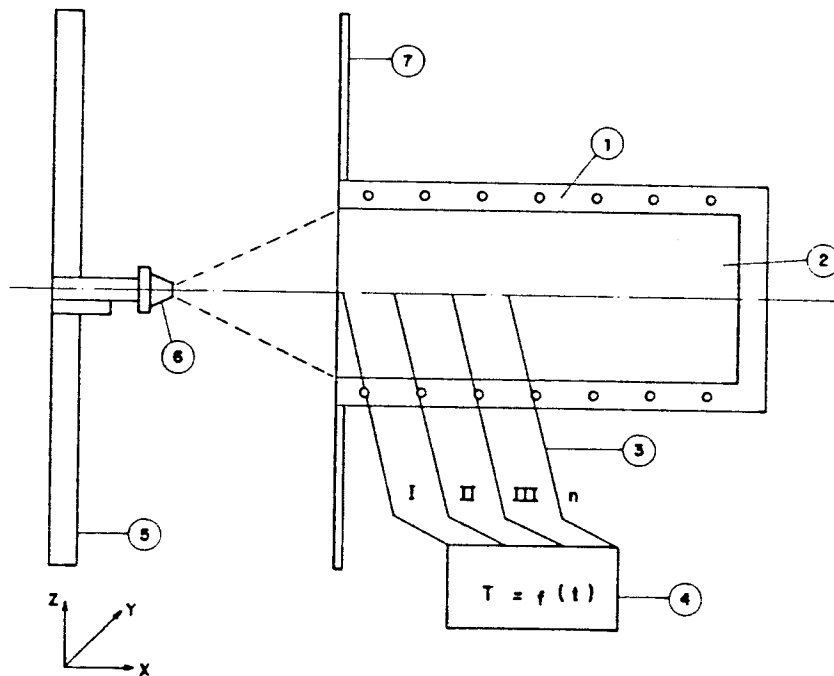
Obtido o perfil de temperaturas, faz-se um confronto do mesmo com resultados obtidos através da utilização do modelo desenvolvido, utilizando-se valores do coeficiente de transmissão de calor parametrizados, e determina-se o valor do mesmo para a condição utilizada.

Um fluxograma do procedimento que deve ser seguido para determinar-se o coeficiente de transmissão de calor , conforme foi proposto, pode ser visto na Figura 7.6.



- |   |  |
|---|--|
| 1 - CONJUNTO HIDRÁULICO DO CHUVEIRO ("SPRAY") | 6 - REGISTRADOR GRÁFICO DE TEMPERATURA |
| 2 - CONJUNTO HIDRÁULICO DA FONTE DE INDUÇÃO   | 7 - BATERIA DE TERMOPARES              |
| 3 - FONTE DE INDUÇÃO                          | 8 - TOMADA DE ÁGUA                     |
| 4 - CONJUNTO DO CHUVEIRO                      | 9 - ALIMENTAÇÃO ELÉTRICA - ÁGUA        |
| 5 - CONJUNTO DE AMOSTRAGEM                    | 10 - ALIMENTAÇÃO ÁGUA                  |

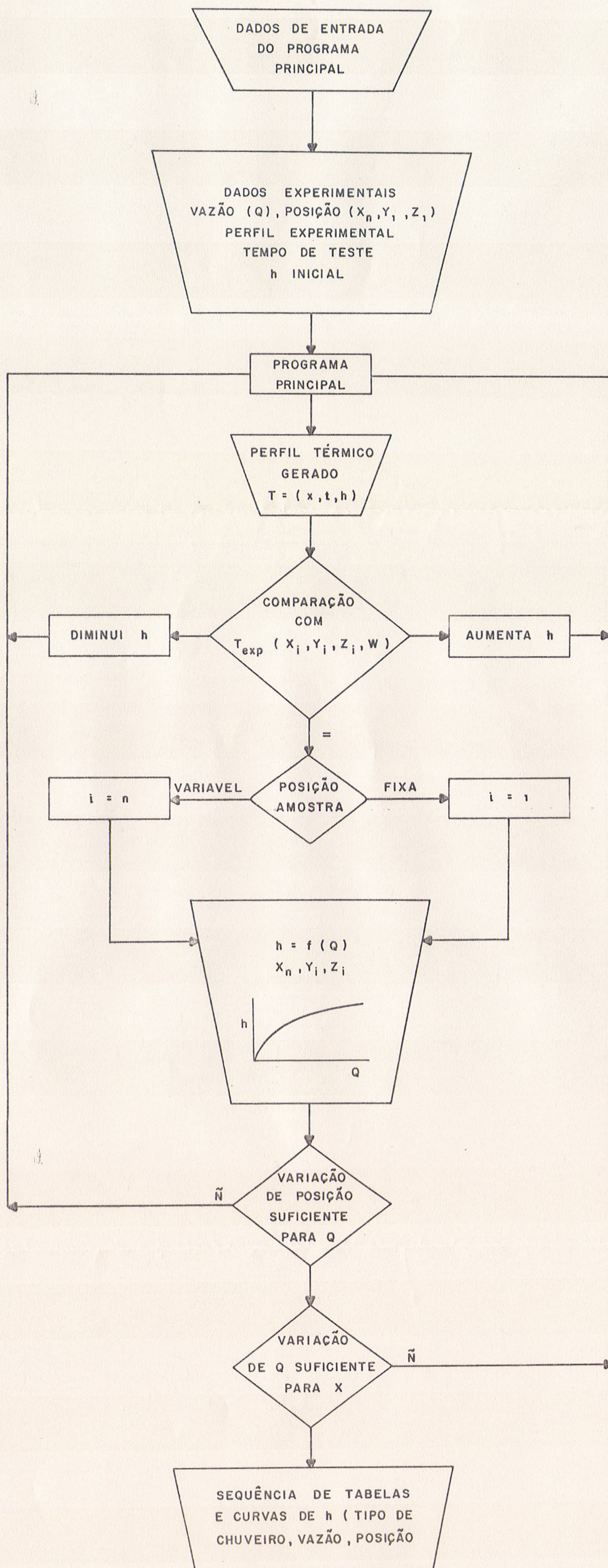
FIGURA 7.4 - Plataforma de levantamento de dados para determinação experimental de coeficientes de transmissão de calor.



- 1- AQUECIMENTO INDUTIVO
- 2- BARRA DE AÇO
- 3- TERMOPARES
- 4- REGISTRADOR GRÁFICO DE TEMPERATURA
- 5- AJUSTE DE POSICIONAMENTO EM RELAÇÃO À FACE DE RESFRIAMENTO E EIXO CENTRAL DE MEDIDAS
- 6- CHUVEIRO
- 7- SUPORTE DA AMOSTRA

FIGURA 7.5 - Detalhe da plataforma da Figura 7.4.







### 7.3 - APLICAÇÃO DO MODELO À CONDIÇÕES INDUSTRIAIS DE LINGOTAMENTO CONTÍNUO

Nas grandes usinas siderúrgicas, a utilização de modelos como o desenvolvido neste trabalho é muito importante, tanto para a previsão do perfil térmico sob condições de vazões e velocidades já existentes, quanto para otimização das velocidades de produção e vazões de água ou para a previsão do perfil em alguma situação em que se queira alterar dimensões das placas ou composições de ligas.

Na análise que se segue, foram levantadas as características dimensionais e de operação de um equipamento de lingotamento contínuo de placas de uma grande siderúrgica nacional, e cujos dados referenciais são apresentados na Tabela 7.3. O coeficiente de transmissão de calor, a partir das vazões, foi calculado utilizando-se a equação 4.47.

A aplicação do modelo a essas condições, possibilitou uma análise crítica da evolução da solidificação durante o processo de lingotamento contínuo, bem como uma avaliação da evolução da temperatura superficial ao longo das regiões de resfriamento e sua confrontação com determinados critérios metalúrgicos.

Para tanto, assumiu-se um coeficiente médio de transmissão de calor no molde igual a  $1,5 \text{ KW/m}^2\text{s}$  e o modelo desenvolvido adota a proposta de divisão do molde em três regiões de  $h$ , conforme capítulo 4, item 5.1.

Teremos então :

$$h_1 = 1.46 * h_m$$

$$h_2 = 3/4 * h_1$$

$$h_3 = h_1/2$$

TABELA 7.3

comprimento útil do molde : 0.610 m

região de chuveiros

número de zonas de resfriamento : 5

zona	comprimento mm	vazão inf. l/m <sup>2</sup> s	vazão sup.	h W/m <sup>2</sup> °C	
1A	825	400	400	945	945
1B	895	350	350	878	878
2	3042	64	64	346	346
3	3028	40	16	267	163
4	3027	16	12	163	142
5	3079	12	8	140	110

comprimento total do sistema : 29000 mm

velocidade de produção : 0,9 m/min

dimensões da placa : 210 mm x 1770 mm

material : aço 1010

e o correspondente comprimento de cada região de h :

$$L_1 = 150 \text{ mm}$$

$$L_2 = 150 \text{ mm}$$

$$L_3 = 310 \text{ mm}$$

sendo  $L_1 + L_2 + L_3 =$  comprimento total do molde.

Na região de radiação, o coeficiente de transmissão de calor obedece ao que já foi comentado no capítulo 2, item 4.

As condições foram inseridas no modelo e o resultado traduzido na forma de curvas pode ser visto nas Figuras 7.7a e 7.7b. Na Figura 7.7a está representado o perfil térmico na superfície em todo o sistema e na Figura 7.7b estão representadas as linhas liquidus e solidus, mostrando conseqüentemente a evolução de solidificação.

Observando-se os resultados apresentados, nota-se uma acentuada queda de temperatura no fim da primeira região de chuveiros, seguida de contínua elevação até a zona de radiação livre, apresentando ainda, na última região de chuveiros, efeito inferior à radiação livre. Para a velocidade utilizada, a solidificação completa-se na última região de chuveiros, antes do início da radiação livre.

Uma proposta para otimizar o funcionamento do sistema para essa aplicação, poderia consistir na diminuição da vazão do primeiro conjunto de chuveiros e na eliminação da última região, aumentado um pouco o comprimento da penúltima região para assegurar a solidificação antes da região de desempenho. O resultado obtido com as modificações sugeridas pode ser observado na Figura 7.8 onde pode ser notado um perfil térmico dentro dos critérios metalúrgicos estabelecidos e mais regular durante o processo e, comparando-se as vazões utilizadas, chega-se a uma economia de água de 28 l/min, o que significa 40320 l/24 horas



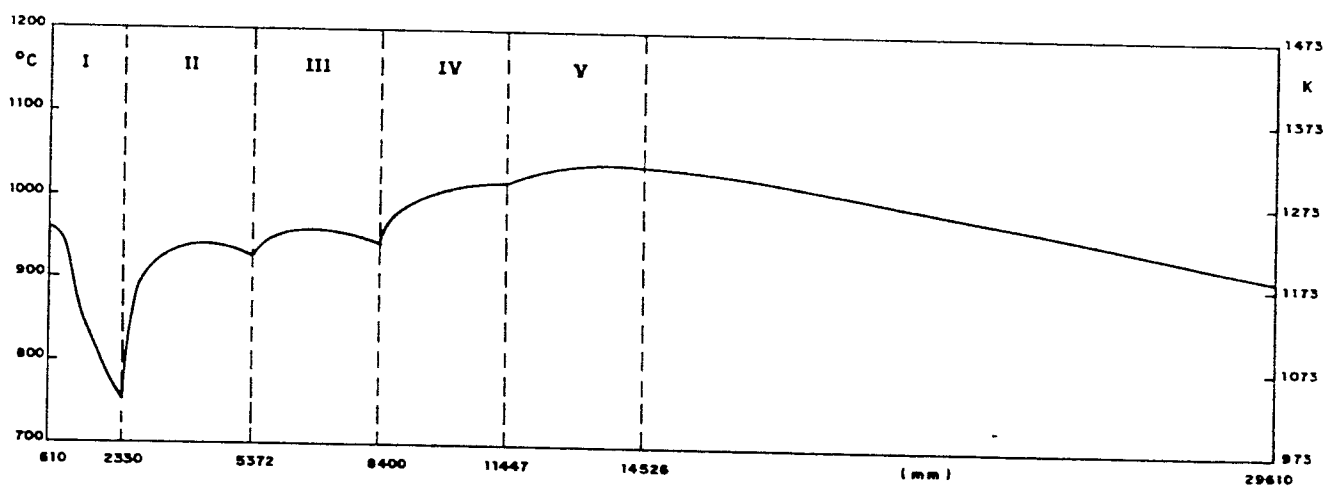


FIGURA 7.7a - Perfil térmico da superfície obtido com o modelo desenvolvido para as condições de operação de uma unidade industrial.

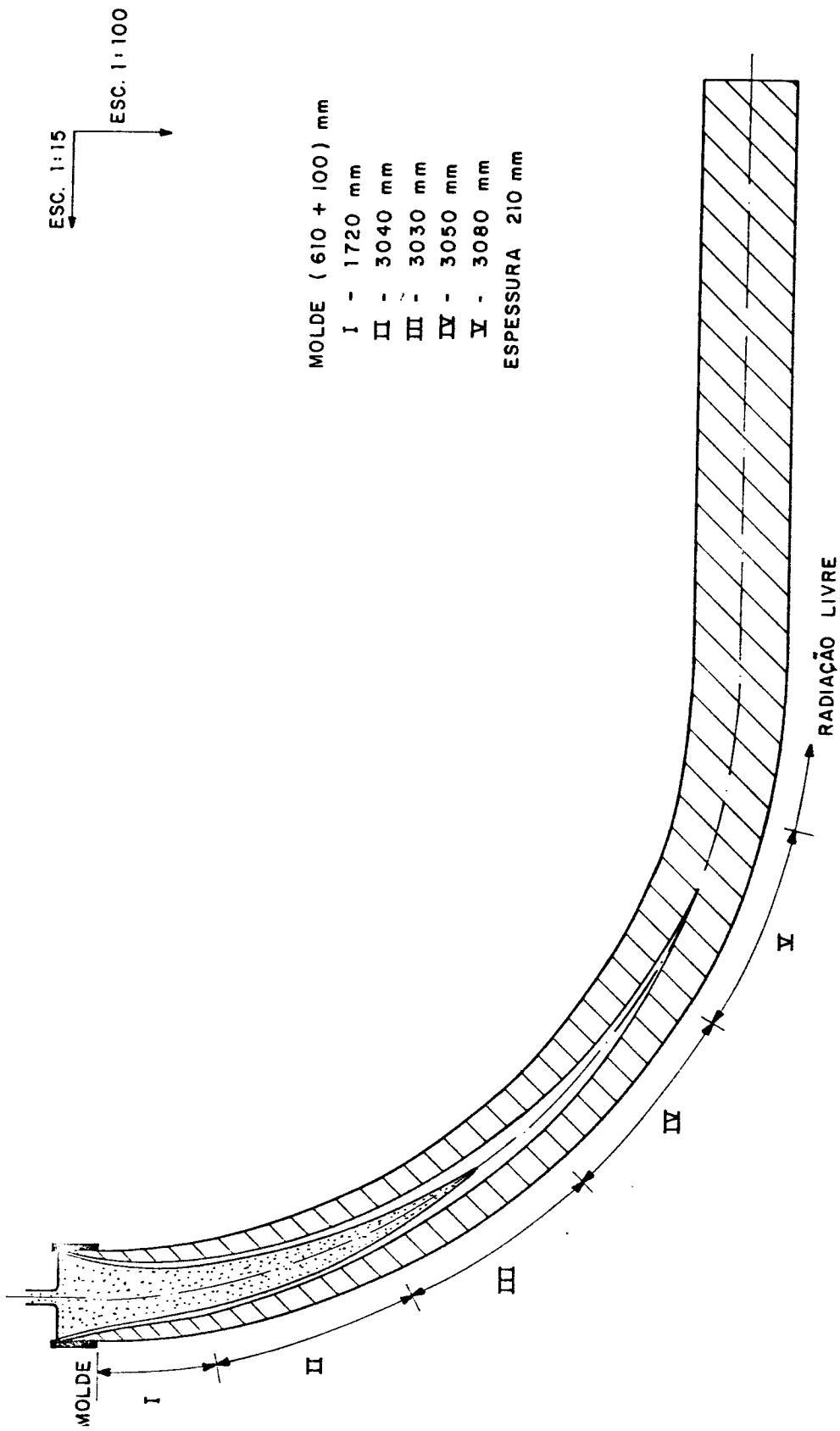


FIGURA 7.7b - Evolução da solidificação obtida com a utilização do modelo para uma unidade industrial.

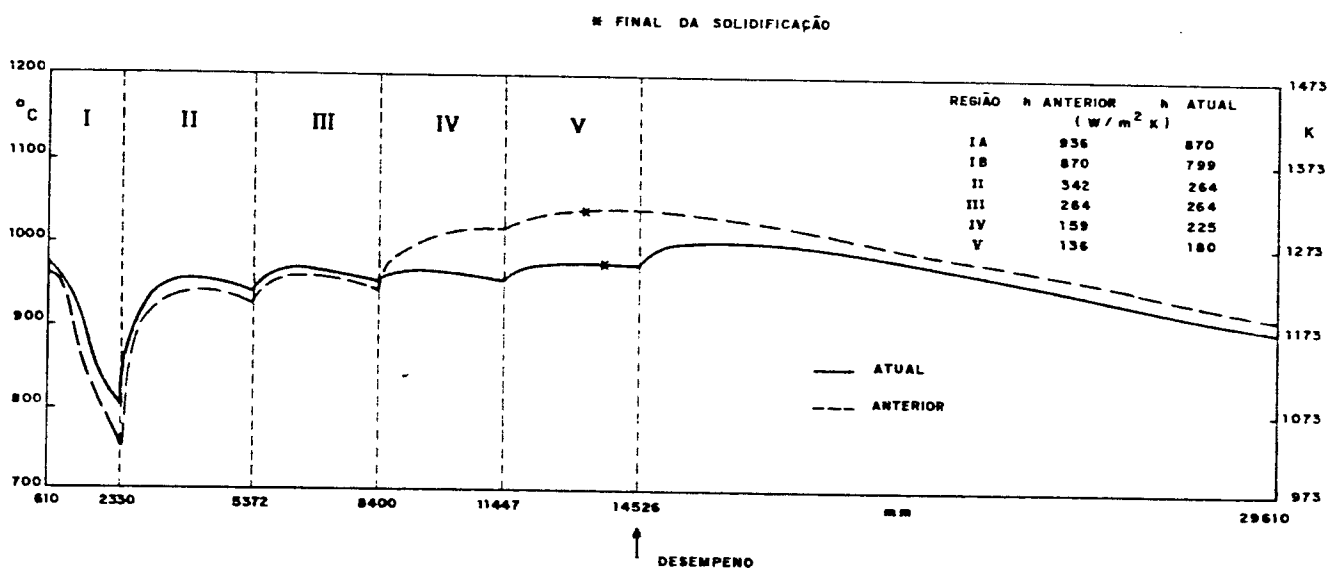


FIGURA 7.8 - Perfil térmico resultante das modificações sugeridas para otimização do resfriamento na unidade industrial

Pode-se também, a nível de exemplo, investigar a imposição de determinadas condições para as variações máximas da temperatura da superfície. Adote-se que as temperaturas máximas e mínimas não devam variar mais que 200 °C dentro da região de chuveiros e que a temperatura mínima não deva ser inferior a 800 °C, portanto a temperatura máxima não deve ser superior a 1000 °C. Nestas condições, o modelo foi aplicado, utilizando-se velocidades de lingotamento variáveis e mantendo-se as outras condições fixas.

As velocidades utilizadas foram : 0,9 m/min, 1,2 m/min e 1,5 m/min e as curvas das temperaturas superficiais resultantes podem ser vistas na Figura 7.9. A espessura na saída do molde e a porcentagem solidificada no início da zona de radiação livre, para cada velocidade são apresentadas na Tabela 7.4.

Observando-se os resultados, pode-se notar que, utilizando-se a velocidade de 1,2 m/min, obtém-se o resultado mais próximo do desejado quanto ao critério de temperaturas máximas e mínimas. Entretanto, nessa velocidade e com o comprimento de molde utilizado, a casca crítica está abaixo do limite mínimo permitido e a porcentagem solidificada na região de desempenho também está fora do recomendado de acordo com os critérios metalúrgicos adotados.

TABELA 7.4

VELOCIDADE (M/MIN)	ESPESSURA SOLIDIFICADA NA SAÍDA DO MOLDE MM	PORCENTAGEM SOLIDIFICADA NO INÍCIO DA RADIAÇÃO LIVRE %
0,9	1,9	100
1,2	1,5	81
1,5	1,3	71

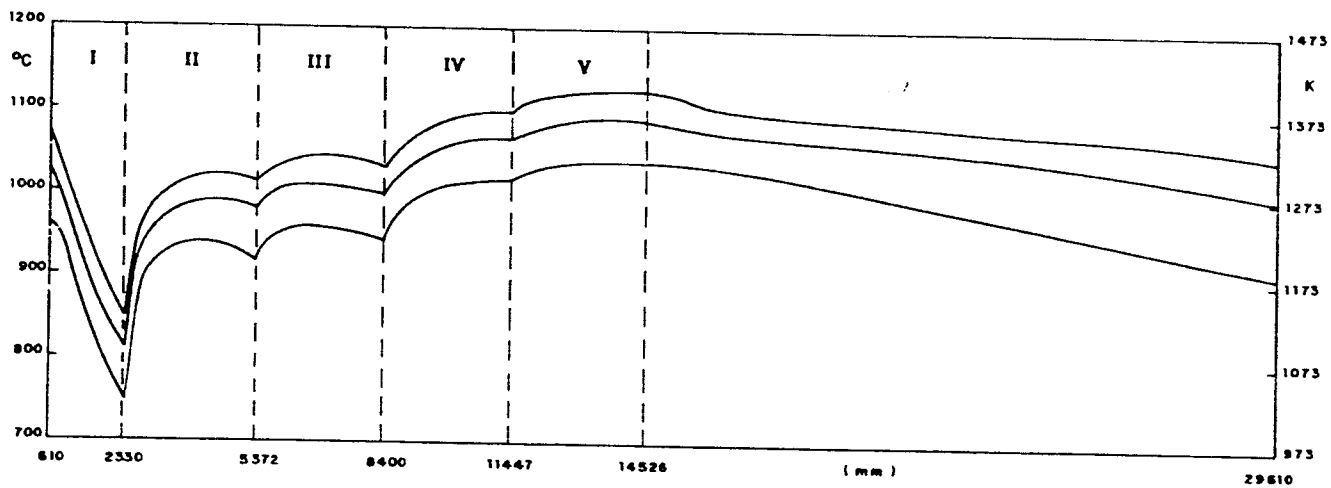


FIGURA 7.9 - Perfil térmico na superfície obtido com a aplicação do modelo desenvolvido para várias velocidades de lingotamento.

O modelo pode ainda ser aplicado, de forma semelhante aos exemplos já mostrados, na análise de qualquer situação de operação do equipamento.

#### 7.4 - ESQUEMA DE CONDIÇÕES ÓTIMAS DE OPERAÇÃO

##### PROJETO ÓTIMO

Neste item o objetivo é fazer um esquema de aplicação do modelo desenvolvido para o controle das vazões dos chuveiros em função da evolução da frente de solidificação e do perfil térmico, acoplados com tamanhos proporcionais e possíveis de regiões de resfriamento, fornecendo dessa maneira uma variação quase que pontual de h. O fluxograma dessa aplicação encontra-se na Figura 7.10.

Os dados de entrada são divididos em parâmetros e variáveis. Como variáveis podemos citar :

- propriedades termofísicas do metal utilizado
- forma de liberação do calor latente assumida de acordo com o metal utilizado

Os parâmetros são divididos em parâmetros referentes ao método e parâmetros referentes ao sistema de lingotamento.

Como parâmetros referentes ao método temos :

- escolha das dimensões da malha utilizada
- escolha do tempo entre cada iteração, para o molde e para o secundário.

e referentes ao sistema de lingotamento temos:

- superaquecimento utilizado
- velocidade de lingotamento
- dimensões do sistema

- coeficientes de transmissão de calor no molde
- vazões de água e coeficientes resultantes de acordo com a fórmula adotada no secundário
- dimensões máximas e mínimas para efeito de projeto e otimização, definidas de acordo com possibilidades de viabilização do projeto.
- limites máximos e mínimos de vazões de chuveiros possíveis

Os dados são inseridos no programa principal que fornece a evolução da temperatura para todos os pontos do lingote, para cada  $t$  e para cada posição em relação ao sistema de lingotamento contínuo.

O programa deve avaliar cada resultado, comparando com os critérios adotados para comprimento máximo e mínimo e temperatura mínima da superfície e alterar conforme necessário os coeficientes de transmissão de calor, calculando o número de tentativas para  $h$ , ou alterar conjuntamente a velocidade ou recomeçar a partir de outros dados.

O fluxograma apresentado na Figura 7.10 segue as seguintes etapas:

- 1 - saída do programa principal onde é gerado um perfil térmico para um determinado tempo e uma determinada posição.
- 2 - identifica se o perfil térmico é referente ao molde ou ao secundário - sendo molde, continua sequência de cálculos para o molde e, atingindo o limite do molde, compara a casca solidificada obtida e, sendo inferior ao limite permitido, vai tentar as correções possíveis.
- 3 - identifica se é secundário ou radiação livre - sendo radiação livre, vai para zona de radiação livre sendo secundário, testa se já foi atingida a temperatura mínima para a superfície.
- 4 - quando a temperatura mínima não foi atingida, testa se o comprimento da zona ultrapassou um comprimento máximo permitido, o que significa que o coeficiente de transmissão de calor é inadequado - corrige o  $h$  e reco-

meça a zona n.

5 - verifica se, tendo acabado de mudar de zona, a temperatura ainda não está sendo influenciada pela nova vazão dos chuveiros - caso esteja dentro da faixa permitida para região de influência do chuveiro anterior, continua os cálculos com o programa principal sem proceder à mudança de zona e, portanto, sem alterar novamente a vazão dos chuveiros.

6 - se a temperatura mínima foi atingida e deve ser mudada a região, antes deve ser testado o comprimento obtido para a zona - sendo considerado inviável, passa para uma subrotina de ajuste do coeficiente de transmissão de calor, e conseqüentemente das vazões dos chuveiros.

7 - compara o comprimento total obtido com um comprimento máximo permitido - se ultrapassado, fornece todos os resultados obtidos até o instante atual e rearranja os dados de entrada.

8 - incremento do número de zonas

9 - se a porcentagem sólida foi atingida, identifica qual vai ser o n equivalente à última zona e à zona de radiação livre.

10 - se já passou pela última zona, verifica se a porcentagem solidificada é igual a 100 % - sendo, passa para a radiação livre e, não sendo 100 % , fornece os resultados obtidos até o presente instante e rearranja os dados de entrada.

11 - na zona de radiação livre, interrompe os cálculos quando atingiu um comprimento total e fornece todos os resultados.

12 - obtendo o sistema projetado, pode ser feita uma otimização do projeto com a imposição dos critérios metalúrgicos que é objeto do próximo item.

## SISTEMA REAL OTIMIZADO

Outra possibilidade de aplicação do modelo refere-se à análise de um sistema real, compatibilizando todas as condições de contorno apresentadas com os critérios metalúrgicos requeridos para que o produto final preencha os requisitos de qualidade necessários para sua utilização final. O fluxograma de aplicação resultante encontra-se na Figura 7.11.



Sendo um sistema real, as dimensões já estão definidas e necessita-se alcançar os critérios metalúrgicos adotados. Para o preenchimento destes critérios, calcula-se a necessária sequência de coeficientes de transmissão de calor, traduzidos em forma de vazão e dependentes das velocidades de lingotamento adotadas ou assumidas, conforme o requerido para a otimização.

## VARIAÇÃO CONTÍNUA DAS VAZÕES DOS CHUVEIROS

A partir dos dois fluxogramas anteriores, (Figuras 7.10 e 7.11), pode-se fazer uma otimização ponto a ponto da etapa de resfriamento secundário sem limite dos tamanhos de zona e, dessa maneira, fornecer uma variação contínua dos coeficientes de transmissão de calor. A única limitação é o comprimento mínimo de atuação de cada tipo de chuveiro. Esse tipo de procedimento exige controle "on line" do processo.

### 7.5 - LEVANTAMENTO DE CURVAS DE REFERÊNCIA PARA OPERAÇÃO

O modelo desenvolvido também pode ser utilizado para a confecção de curvas de referência para operação.

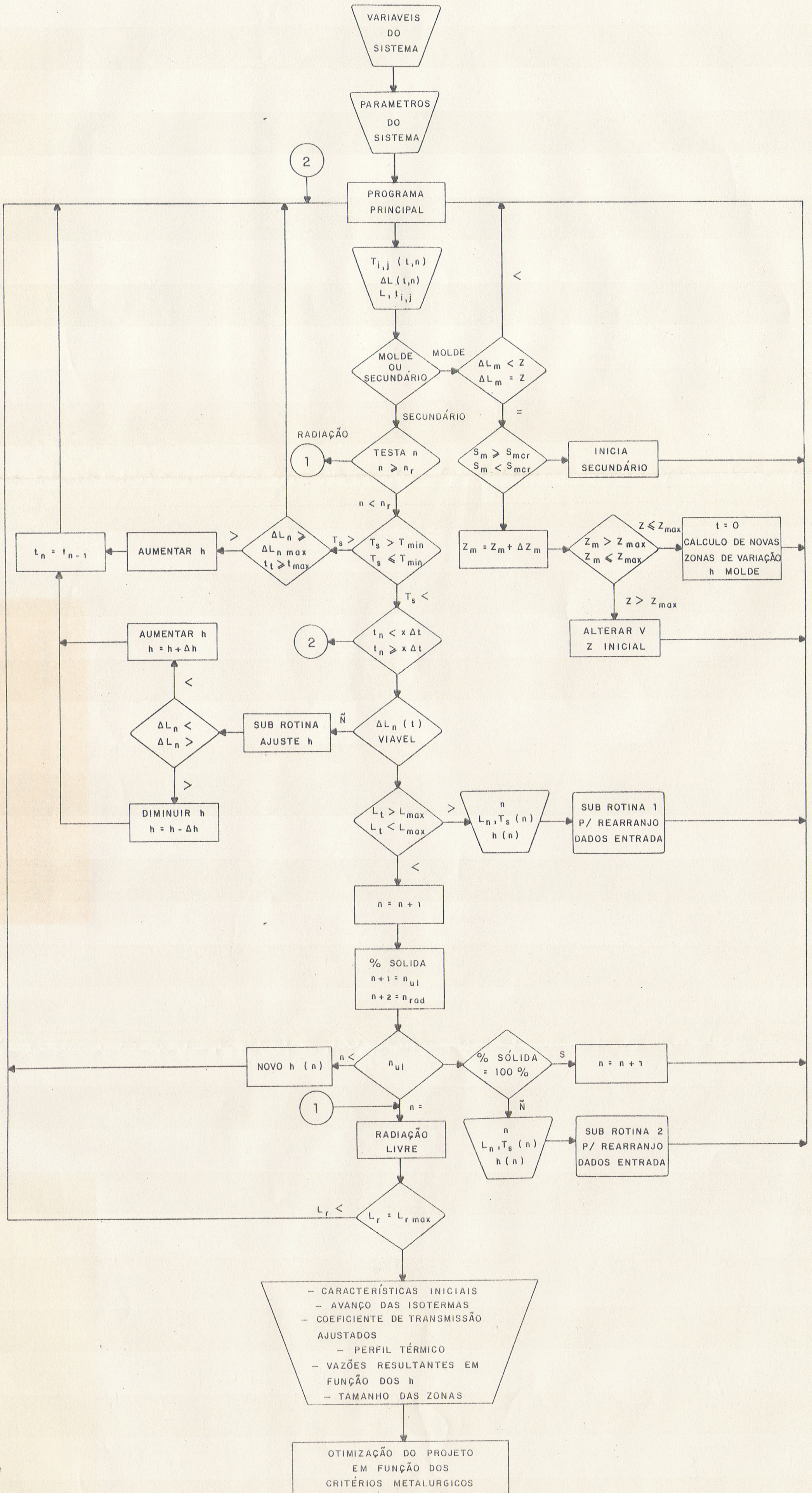
Em condições operacionais, frequentemente ocorrem situações que exigem alterações da velocidade de produção. Nesse sentido é oportuno dispor de curvas de referência para operação que relacionem a velocidade de produção com a casca sólida na saída do molde, prevenindo dessa maneira a incidência de break out e/ou o surgimento de perfis térmicos críticos ao longo das zonas de resfriamento.

Além disso, ao alterar-se a velocidade de lingotamento, é bom lembrar que todas as condições de temperatura no secundário ficam

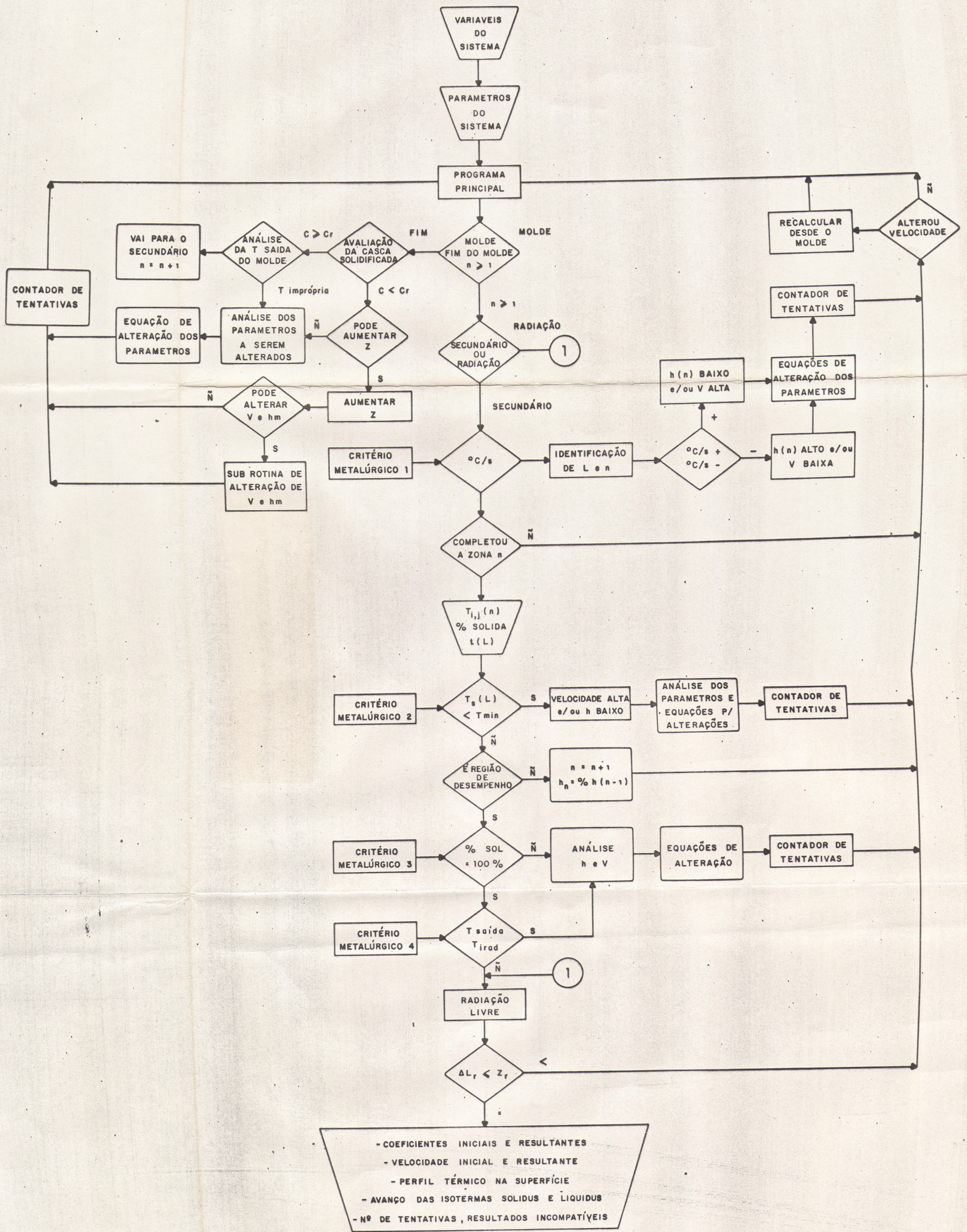
alteradas, sendo conveniente também elaborar curvas de referência para operação que permitam verificar se os gradientes de temperatura resultantes estão dentro dos impostos pelas exigências metalúrgicas.

Como exemplo, são apresentadas curvas de variação da espessura solidificada e temperaturas na saída do molde para placas de aço 1010 e tamanho de molde 650 mm, variando-se apenas as velocidade de lingotamento. Os resultados obtidos podem ser vistos nas Figuras 7.12a e 7.12b.



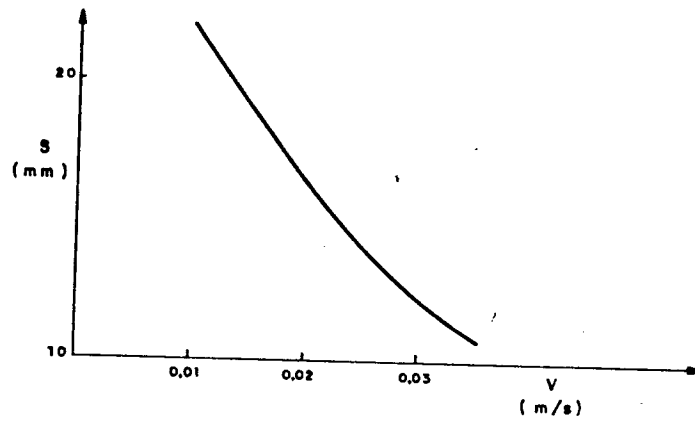




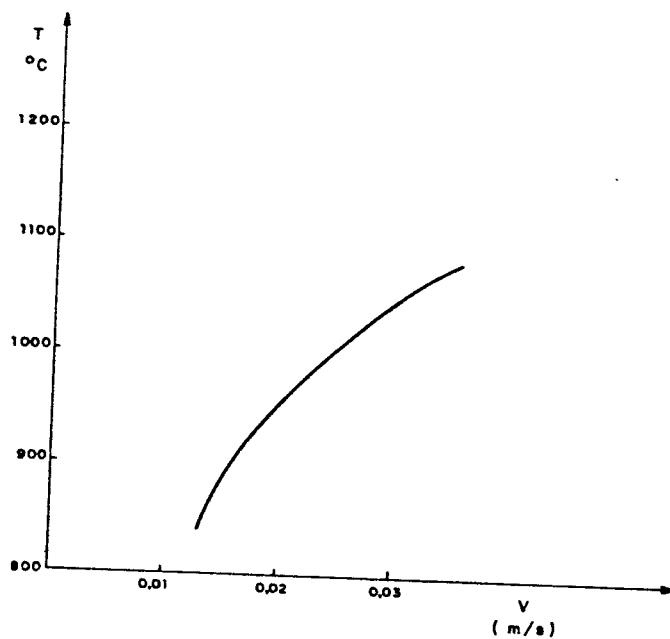


- COEFICIENTES INICIAIS E RESULTANTES
- VELOCIDADE INICIAL E RESULTANTE
- PERFIL TÉRMICO NA SUPERFÍCIE
- AVANÇO DAS ISOTERMAS SOLIDUS E LIQUIDUS
- Nº DE TENTATIVAS, RESULTADOS INCOMPATÍVEIS





a) espessura solidificada



b) temperatura da superfície

FIGURA 7.12 - Variação da espessura solidificada e da temperatura na saída do molde em função de várias velocidades de lingotamento.

## CAPÍTULO 8

### CONCLUSÕES

Os resultados obtidos, decorrentes do desenvolvimento de um modelo de diferenças finitas e de sua aplicação à solidificação do aço em sistemas de lingotamento contínuo, permitem que sejam extraídas as seguintes conclusões :

- 8.1 - O confronto das expectativas teóricas do modelo desenvolvido com resultados experimentais próprios e extraídos da literatura demonstrou sua confiabilidade na previsão do comportamento térmico durante a solidificação de lingotes/placas. A comparação com outros modelos de diferentes abordagens existentes na literatura reforçou ainda mais a eficiência do modelo como ferramenta matemática de grande aplicabilidade na análise do processo de lingotamento contínuo.
- 8.2 - O modelo mostrou-se essencial no desenvolvimento de projetos preliminares ao projeto mecânico de equipamentos de lingotamento contínuo de aços. Sua aplicação a condições de lingotamento que obedecem a estreitos critérios metalúrgicos permite simular as condições limites de operação do equipamento e, conseqüentemente fornecer elementos fundamentais para a fixação das características e faixa de operação que o projeto mecânico deverá cumprir.
- 8.3 - O modelo foi utilizado na simulação de condições de opera-

ção de um equipamento de lingotamento contínuo de placas de uma grande siderúrgica nacional. Esta aplicação demonstrou seu potencial na otimização das condições de lingotamento através das correlações e ajustes de velocidades de produção, perfis de temperatura superficial, condições de refrigeração dentro da zona da etapa secundária, sempre dentro dos critérios metalúrgicos exigidos pela qualidade do produto.

- 8.4 - A utilização do modelo desenvolvido, juntamente com modelos que descrevem o crescimento dendrítico durante a solidificação, permitiu o cálculo de parâmetros da estrutura dendrítica do aço ao longo do processo de lingotamento contínuo e em função das condições locais de resfriamento. O confronto teórico-experimental demonstrou a confiabilidade deste método de cálculo da estrutura dendrítica.
- 8.5 - Os coeficientes de transferência de calor que traduzem a eficiência do resfriamento dentro da etapa secundária, podem ser determinados experimentalmente em função do tipo de chuveiro, fluxo e pressão da água, distância do injetor ou chuveiro da superfície do aço. Para isto, propôs-se a montagem de uma plataforma de levantamento de dados experimentais que opera com o confronto de perfis experimentais e calculados pelo modelo desenvolvido para, em condições de superposição, determinar os valores dos coeficientes de transferência de calor.
- 8.6 - As simulações de diferentes condições de lingotamento, obtidas através da aplicação do modelo, demonstraram seu poten-

cial como ferramenta para o controle do processo de lingotamento contínuo do aço, tanto em condições de controle direto e instantâneo ( on-line ) como para controle indireto ( off- line ).

#### **LINHAS DE PESQUISA DECORRENTES DESTE TRABALHO**

Dos resultados, discussões e conclusões decorrentes do desenvolvimento do presente trabalho, pode-se propor as seguintes linhas de pesquisa :

- a) Utilização do modelo numérico acoplado à plataforma de levantamento de coeficientes de transmissão de calor na região de chuveiros para determinar correlações entre fluxos de chuveiro x tipo x coeficientes de transmissão de calor.
- b) Aplicação do modelo numérico na simulação de condições críticas de operação e estabelecimento de estratégias de controle da etapa de resfriamento secundário do lingotamento contínuo de aços.
- c) Aplicação do modelo desenvolvido na região de chuveiros para correlacionar conjunto sequencial de fluxos de água com perfis térmicos ou perfil térmico desejado em função das condições de operação ( principalmente velocidades de produção )
- e) Aplicação do modelo para análise de fenômenos de macro e



micro segregação no lingotamento contínuo de ligas metálicas.

- f) Extensão do modelo para abordagem tridimensional do fluxo de calor permitindo análise da problemática da solidificação no menisco e sua correlação com a qualidade da superfície de lingotes.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Metals Handbook, Casting, ASM International, Ninth Edition, v. 15, 1988.
2. SYMPSON, B. L. - History of the Metals Casting Industry, American Foundrymen's Society, 1969.
3. MEHRABIAN, R. and WADLEY, H. - Needs for Process Control in Advanced Processing of Materials, Journal of Metals, v. 37, p. 51-57, fevereiro, 1985.
4. HENZEL, J. G. and KEVERIAN, J. - The Theory and Application of a Digital Computer in Prediction Solidification Patterns, Journal of Metals, v. 17, p. 561, 1965
5. ROGGERG, R. - Testing and Application of a Computer Program for Simulation Process of a Continuously Cast Strand, Scandinavian Journal of Metallurgy, v. 12, p. 13, 1983.
6. HO, K and PEHLKE, R. D. - Comparison of Finite Element and General Finite Difference Methods for Transient Heat Flow, Materials Science and Technology, v. 3, p. 466, June 1987.
7. SARJANT, R. J. et al. - Internal Temperature Distribution in the Cooling and Reheating of Steel Ingots, Journal of the Iron and Steel Institute, p. 428, August 1984.

- 8 . SVENSSON, I. L. and LUNDBACK - Computer Simulation of the Solidification of Castings, E-MRS - Strasbourg, p. 57, June 1986.
9. OLIVEIRA, C. A. D. and MAGALHÃES, A. P. B. - Finite Element Simulation of the Thermal Evolution of a Metallic Mould During Successive Castings of Ductile Iron , E-MRS - Strasbourg, p. 75, June 1986.
10. LOUVO, A., KARHUNEN, O. and RENKONEN, A. - Solidification Simulation of Casting, E-MRS - Strasbourg, p. 83, June 1986.
11. WOLF, W. - Solidification Control in Continuous Casting of Steel, Third International Conference, Solidification Processing 1987, Ranmoor House, Sheffield, U. K. , p. 182, September, 1987 .
12. ETIENNE, A and OTS, J. M. - Automatic Control of Secondary Cooling in a Slab Caster, The Metallurgical Society of AIME, pp. 532, 1982.
13. WOLF, M. W. - A Review of Published Work on Solidification Control of Steel in Continuous Casting Moulds by Heat Flux Measurement , Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan, v. 20, p. 718, 1980.
14. DAVIS, K and MAGNY, J. G. - Computer-Aided Riser Calculation to Steel Casting, AFS Transactions, v. 174, p. 73, 1984.
15. SMILEY, L. E. - Solidification Modelling on a PC, Foundrymen's Approach, Modern Casting, v. 77, p. 32, 1987.

16. DAVIES, V. L. - Modelling Solidification Processes and Computer Aided Design of Casting, Perspectives in Metallurgical Development, The Metals Society, p. 101, 1984.
- 17 , TOOTHILL, D. , Horizontal Continuous Casting of Steel Billets, The Metallurgical Society of AIME, p. 544, 1982.
18. BRIMACOMBE, J. K. and WEIBERG, F. - Continuous Casting of Steel/ Part 2 , Journal of the Iron and Steel Institute, p. 25, janeiro 1973.
19. KURZ, W. and FISHER, D. I. - Fundamentals of Solidification, Trans. Tech. Publications, Switzerland, 1984.
20. A Guide to the Solidification of Steels - Jernkontoret, Stockholm, 1977.
- 21 , ETIENNE, A. and MAIRY, B. - Heat Transfer in Continuously Cast Strands - C.R.M, No. 55 , november 1979.
22. KAWAKAMI, K et al. - Fundamental Research on Solidification Involved in Continuous casting of Steel, Nippon Kokan Technical Report, v. 36, p. 26, 1982.
23. GARCIA, A. - Transferência de Calor e Solidificação no Lingotamento Contínuo , Tese de Livre Docência apresentada à Universidade Estadual de Campinas, 1981.



24. WOLF, M. W. - Investigation into Relationship between Heat Flux and Shell Growth in Continuous Casting Moulds, Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan, v. 20, p 710, 1980.
25. HILLS, A. W. D. - Simplified Theoretical Treatment for the Transfer of Heat in Continuous Casting Machine Moulds , Journal of the Iron and Steel Institute, p. 18, janeiro, 1985
26. JIN, I. and SUTHERLAND, J. G. - Thermal Analysis of Solidification of Aluminium Alloys During Continuous Casting , Proceeding of the Continuous Casting Symposium, 102<sup>nd</sup> AIME Annual Meeting , p. 796, 1973.
27. ALBERNY, R. - Heat Transfer and Solidification in Continuous Casting, Casting and Solidification of Steels, IPC Science and Technology Press Ltda., v. 51, p. 277, 1977
28. MARTI, H. and BARBÉ, J. - Moulds - Key Element in Continuous Casting, Iron and Steel International, v. 51, p. 167, 1978.
29. MC ADAMS, W. H. - Transmission de Calor, 3<sup>o</sup> ed. México, Mc Graw-Hill Book, Co., INC., USA, 1972.
30. YNOUE, T. et al. - Heat Transfer in the Continuous Casting Mold, Nippon Steel Technical, Report n<sup>o</sup> 12 , p. 86, december 1978.
31. OETERS, F. et al. - Heat Transfer in Ingot Pouring, Information Symposium Casting and Solidification of Steel,

Luxembourg, Science and Technology Press Ltda, Guildford, v.1, p. 127, 1977 .

32. PERKINS, A. and IRVING, W. R. - Two Dimensional Heat Transfer Model for Continuous Casting of Steel, Mathematical Process Models in Iron and Steelmaking, The Metals Society, p. 187, 1973.

33. LAIT, J. E. et al.- Mathematical Modelling of Heat Flow in the Continuous Casting of Steel, Ironmaking and Steelmaking, nº 2, p. 90, 1974.

34. SINGH, S. N. and BLAZEK, K. E. - Heat Transfer and Skin Formation in a Continuous Casting Mould as a Function of Steel Carbon Content, Journal of Metals, p. 17, outubro 1974.

35. SINGH, S. N. and BLAZEK, K. E. - Heat Transfer Profiles in Continuous Casting Mold as a Function of Various Casting Parameters, Proc. AIME Open Hearth Conference, p. 264, 1976.

36. ALBERNY, R. et al. - La Lingoterie de Couléé Continue de Brames et Son Bilan Thermique, Revue de Metalurgie, p. 545, julho/agosto, 1976.

37. IRVING, W. R. - Heat Transfer in Continuous Casting of Moulds , Journal of The Iron and Steel Institute, v.205, p. 271, 1967.

38. WIESINGER, H. A., SCHWAHA, K. L. and KRIEGNER, O. - Mathematical Analyses of the Solidification Process in High-Speed

- Continuous Casting at Various Cooling Conditions, Continuous Casting of Steel, Iron and Steel Society of AIME, p. 86, 1981.
39. MIZIKAR, E. A. - Spray Cooling Investigation For Continuous Casting of Billets and Blooms, Iron and Steel Engineer, p. 53, junho 1970.
40. WELTY, J. R. - Engineering Heat Transfer, John Wiley & Sons, New York, 1978
41. WONG, H. Y. - Heat Transfer for Engineers, Longman Inc., Ny, 1977.
42. SCIAMA, G. - Transmission de Chaleur et Solidification, Fonderie, v. 218, p. 138, 1964.
43. MASSEY, I. D. and SHERIDAN, A. T. - Theoretical Predictions of Earliest Rolling Time and Solidification Times of Ingots, Journal of The Iron and Steel Institute, p. 391, May 1971.
44. RUDDLE, R. W. - The Solidification of Casting, 2<sup>o</sup> ed., London, The Institute of Metals, 1957.
45. GEIGER, G. H. and PDIRIER, D. R., - Transport Phenomena in Metallurgy, Addison-Wesley, p. 220, 1973.
46. GARCIA, A. - Desenvolvimento e Verificação Experimental de um Modelo Matemático para Análise da Solidificação Unidirecional de Metais, Tese de Doutorado apresentada à Universidade Estadual de Campinas, 1978.

47. PRATES, M. - Influência de La capacidade de Extracion Calorica del Sistema Metal/Molde sobre el Proceso de Solidification, tese de Doutorado, Universidade Nacional der Sur, Argentina, 1971.
48. GARCIA, A. and PRATES, M. - The Application of a Mathematical Model to Analyse Ingot Thermal Behavior During Continuous Casting, Proceedings of the 4th IFAC Symposium Helsinki, p. 273, Finland, 22-25 August, 1983.
49. PRATES, M. e PIRES, D. - A Resistência Térmica da Interface Metal/Molde e sua Importância na Solidificação de Lingotes, Metalurgia da ABM, v. 29, p.157, 1973.
50. GARCIA, A. ,CLYNE, T. W. and PRATES, M. - Mathematical Models for the Unidirectional Solidification of Metals :II.Massive Molds, Metallurgical Transactions B, v. 10B, março 1979, pp
51. GARCIA, A. and PRATES, M. - Mathematical Model for the Unidirectional Solidification of Metals : I. Cooled Molds, Metallurgical Transactions B, v. 9B, p. 449, september 1978.
52. HILLS, A. W. D.- A Generalized Integral-Profile Method for the Analyses of Unidirectional Heat Flow During Solidification, Trans. Met. Soc. AIME, v. 245, p. 1471, 1969
53. PATANKAR, S. - Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc Graw-Hill, Co., New York, 1980.



54. FORSYTHE, G. E. - Finite Difference Methods for Partial Differential Equations, John Willey, 1960.
55. BRIMACOMBE, J. K. et al. - Application of Mathematical Models to Predict Pool Profiles in Continuously Cast Steels, Mathematical Process Models in Iron and Steelmaking, The Metals Society, p. 174, 1973.
56. BAMBERGER, M. and PRINZ, B.- Mathematical Modeling of the Temperature Field in Continuous Casting, Z. Metallkde, v. 77, p. 234, 1986.
57. HO, K. and PEHLKE, R. D. - Modeling of Steel Solidification Using the General Finite Difference Method, Proc. of the fifth International Iron and Steel Congress, The Iron and Steel Society of AIME, april 1983.
58. CLYNE, T. W. - Numerical Modelling of Directional Solidification of Metallic Alloys, Metal Science, v. 16, p. 441, september, 1982.
59. THOMAS, B. G. and SAMARASEKERA, I. V. and BRIMACOMBE, J. K. - Comparison of Numerical Modelling Techniques for Complex, Two-Dimensional, Transient Heat-Conduction Problems, Metallurgical Transactions, v. 15B, p. 307, 1984.
60. SAMARASEKERA, I. V. and BRIMACOMBE, J. K. - The Thermal Field in Continuous Casting Moulds, Canadian Metallurgical Quarterly, v. 18, p. 251, 1979.

61. IERARDI, M. C., CARAN, R. e GARCIA, A. - Modelamento Matemático da Solidificação no Processo de Lingotamento Contínuo, Metalurgia - ABM, v. 42, p. 521, 1986.
62. HIZIKAR, E. A. - Mathematical Heat Transfer Model for Solidification of Continuously Cast Steel Slabs, Transactions of The Metallurgical Society of AIME, v. 239, p. 1747, november 1967.
63. ADENIS, D. P. J. and COATS, K.H. and RAGONE, D. V.- An Analysis of the Direct-Chill-Casting Process by Numerical Methods , Journal of The Institute of Metals, v. 91, p. 395, 1963.
64. HANSEN, P. N. - Modelling of Solidification Processes in Casting Using FDM - Techniques , E-MRS - Strasbourg , v. 1, p. 27, june 1986.
65. KRAUSS, H. G. - Finite-Element Model and Feasibility Study of Thin Strip Continuous Casting of Steel, Numerical Heat Transfer, v. 10, p. 63, 1986.
66. TAN, S. T. and YUEN, M. F. - Integrating Solid Modelling with Finite-Element Analysis, Computer-Aided Engineering Journal, p. 133. august 1986.
67. MIYAZAWA, K. and MUCHI, I. - Mathematical Model for Determining Solidification Profiles of Slab in the Vertical Type and Circular Arc Type Continuous Machines, Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan, v. 15, p. 37, 1975.

- 68 . BAMBERGERR, M. et al. - Mathematical Model for the Solidification of High-Carbon Steel in Continuous Casting, Iron and Steel International, p. 43, february 1977.
- 69 . KURZ, W. and TRIVEDI, R. - Recent Advances in Modelling of Solidification Processing, Third International Conference, Solidification Processing, Ranmoor House, Sheffield, U. K., 1987.
70. ABIS, S. - Numerical Simulation of Solidification in an Aluminum Casting, Metallurgical Transactions B, v. 17b, p. 209, march 1986.
71. SCHWERDTFEGER, K. - Use of Models in Investigation of Solidification Problems, Information Symposium Casting and Solidification of Steel, Luxembourg, IPC Science and Technology Press Ltd, Guildford, vol 1, 1977
72. NISHIDA, Y. et al. - Numerical Analysis of Solidification of Cast Iron in Metals Moulds , The British Foundryman, v. 70, p. 304, october 1977.
73. LAI, K. Y. M. et al. - Mathematical Modeling of Flows in Large Tundish Systems in Steelmaking, Metallurgical Transactions B, v. 17b, p. 449, september 1986.
74. LEWIS, R. W. et al. - Application of the Finite Element Method in the Study of Ingot Casting, Solidification Technology in the Foundry and Casthouse, p. 40, september 1980.

75. KRIVANEK, R. A. and HOBLEY, C. S. - A computer Model for the Solidification of Cast Iron Chill Tests, AFS Transactions, v. 85, p.311, 1984.
76. FUJIMURA, T. and BRIMAKOMBE, J. K. - Mathematical Analysis of Solidification Behaviour of Multicomponent Alloys, Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan, v. 26, p. 532, 1986.
77. OHNAKA, I. et al. - Computer Simulation of Casting, Third International Conference, Solidification Processing 1987, Ranmoor House, Sheffield, U. K., p. 268, 1987.
78. DUSINBERRE, G. M. et al. - Numerical Analysis of Heat Flow, Mc Graw Hill, N. Y., 1949.
79. SCHNIEWIND, J. - Solution of the Solidification Problem of a One-Dimensional Medium by a New Numerical Method, Journal of The Iron and Steel Institute, p. 594, July 1963.
80. GARCIA, A. - Mathematical Heat Transfer Model for The Analysis of Solidification of Binary Alloys, Multi-Phase Flow and Heat Transfer III. Part B : Applications, edited by T. N. Veziroglu and A. E. Bergles, Elsevier Science Publishers B. V. Amsterdam, 1984.
81. KAESTLE, G., JACOBI, H. and WUNNBERG, K. - Heat Flow and Solidification Rate in Strand Casting of Slabs, Proc. AIME Steelmaking Conf., p. 251, 1982.



82. BERGHEAU, J. M. et GALAUP, C. - Influence Du Maillage en E. F. Sur La Cinétique de Solidification D'une Pièce Moulée, E-MRS-Strasbourg, p. 39, June 1986.
83. CLYNE, T.W. et al.- The Use of Empirical, Analytical and Numerical Models to Describe Solidification of Steel During Continuous Casting, Journal of Metals, p. 34, February 1982.
84. DAVIES, G. J. et al. - Heat Transfer Models and Their Application to Continuous Casting, Perspectives in Metallurgical Development, The Metals Society, p. 123, 1984
85. CLYNE, T.W. and KURZ, W. - Solute Redistribution During Solidification with Rapid Solid State Diffusion, Metallurgical Transactions, volume 12A, p. 965, 1981.
86. BRODY, H. and FLEMINGS, M. C. - Solute Redistribution in dendritic Solidification Transactions, Metallurgical Society of AIME, volume 236, p. 615, 1966.
87. CLYNE, T. W. et al. - Modelling of Casting and Welding Process, The Metallurgical Society of AIME, p. 93, November 1980
89. KOUMF, V. et al. - Growth of the Solid-Liquid Region During One Dimensional Solidification of Binary Alloys, Part I, Transactions of the Metallurgical Society of AIME, volume 239, p. 1305, September 1967.

90. BOWER, T. et al. - Measurement of Solute Redistribution in Dendritic Solidification, Transactions of the Metallurgical Society of AIME, v. 236, p. 624, maio 1966.
91. RAMAKRISHNA, P. and SASTRI, V.M.K. - Efficient Numerical Method for Two-Dimensional Phase Change Problems, International Journal Heat Mass Transfer, v. 27, p. 2077, 1984.
92. GARCIA, A. and CLYNE, T. W. - Assessment of a New Model for Heat Flow During Unidirectional Solidification of Metals, Int. J. Heat Mass Transfer, v. 23, p. 773, 1980.
93. C. J. SMITHELLS (edit.) - Metals Reference Book; Butterworths, London, 1976.
94. GOLDSMITH, A. et al. - Handbook of Thermophysical Properties of Solid Materials, v. I and II, The MacMillan Co, N. Y. , 1961.
95. BISRA - Physical Constants of Some Commercial Steels at Elevated Temperatures, Butterworths, 1955.
96. FUJII, H. et al. Fundamental Phenomena of Continuous Casting, Nippon Steel Technical Report, n° 13, p. 48, 1979.
97. CLYNE, T. W. - The Use of Heat Flow Modeling to Explore Solidification Phenomena, Metallurgical Transactions, v. 13B, p. 471, 1982.

98. SEZEKELY, J. and STANEK, V. - On Heat Transfer and Liquid Mixing in the Continuous Casting of Steel, Metallurgical Transactions, v. 1, p. 119, 1970.
99. NEMOTO, H., Development of Continuous Casting Operation, Transactions of the Iron and Steel Institute of Japan, v. 16, p. 51, 1976.
100. DAVIES, G. J. and SHIN, Y. K. - Solidification on Cracking of Continuous Casting Steels, Solidification Technology in the Foundry and Casthouse, Metals Society, London, p. 517, 1983.
101. CLYNE, T. W. and GARCIA, A. - Application of a New Mathematical Heat Transfer Model in Static and Continuous Casting of Steel, Continuous Casting of Small Cross Sections, The Metallurgical Society of AIME, p. 17, 1982.
102. TILLMAN, E. S. and BERRY, J. T. - A Study of the Influence of Thermal Contact Resistance on the Solidification Rate of Long Freezing Range Alloys, AFS Cast-Metal Research, 1971
103. ABDEL-WAHED, R. M. and HIFNI, M. A. - Measuring Thermal Diffusivity of Metals and Heat Transfer Coefficient by the Use of a Moving Heat Source, Heat and Mass Transfer During Crystalization, p. 483.
104. JACOBI, H. - Heat Transfer Between Ingots and Mould During Casting of Iron under Vacuum and Various Gas Atmospheres, Proceedings of the 5<sup>th</sup> International Conference on Vacuum, Metalurgy and Electroslag Remelting Processes, p. 23, 1976.

105. BIRAT, J. P. et al. - Influence of convective Heat Transfer on Solidification in Mould During Continuous Casting of Steel, Solidification Technology in the Foundry and Casthouse, Metals Society, London, p.536, 1983.
106. MULLER, H. and JESCHAR, R. - étude du Transfer de la Chaleur dans une Zone de Refroidissement Secondaire Simulée en Coulée Continue, Archiv Eisenhutten, v. 44, p. 589, 1973.
107. LARRECQ, M. et al. - Optimization of Casting and Cooling Conditions on Steel Continuous Casters, in Application of Mathematical and Physical Model in the Iron and Steel Industry, Iron and Steel Society of AIME, p. 273, 1982.
108. BOLLE, L. and MOUREAU, J. C. - Experimental Study of Heat Transfer by Spray Cooling, Heat Transfer and Mass Transfer in Metallurgical Systems, p. 527, 1979
109. NOZAKI, T. and MATSUNO, J. and MURATA, K. - A Secondary Cooling for Preventing Surface Cracks of Continuous Casting Slab, Transactions of the Iron and Steel Institute, v. 18, p. 330, 1978.
110. AGARWAL, P. K. - Case Study of Spray Design for a Continuous Billet Caster, Continuous Casting : Heat Flow, Solidification and Crack Formation, v.2, p. 105, 1984.
111. BRIMACOMBE, J. K. et al. - Spray Cooling in the Continuous Casting of Steel, Steelmaking Proceedings, NOH-BOS Conference, ISS-AIME, Washington, v 63, p. 235, 1980.



112. MITSUTSUKA, M. et al. - Development of Air-Atomizing Mist Nozzel and Mist Cooling System for Continuous Casting - Transactions International Steel Institute of Japan, v. 25, p. 1244, 1985.
113. CHOI, K. J. and YAO, S. C. - Mechanisms of Film Boiling Heat Transfer of Normally Impacting Spray, International Journal of Heat and Mass Transfer. , v.30, No. 2, p 311, 1987.
114. HOOGENDOORN ,C. J. and HOND, R. - Leidenfrost Temperature and Heat-Transfer Coefficients for Water Sprays Impinging on a Hot Surface : 5 th Int. Heat Transfer Conf., v. 4, p 135, 1974.
115. JACOBI, H et al.- Heat Transfer in Cyclic Secondary Cooling During Solidification of Steel, Ironmaking and Steelmaking, v. 11 ,No 3, p. 132, 1984.
116. CRUZ, J. C. - Heat Flow Simulation During Solidification of Complex Shaped Pieces, E-MRS - Strasbourg, p. 65, june 1986.
117. GRANDFIELD, J. F. and BAKER, P. - Variation of Heat Tranfer Rates in Direct Chill Water Spray of Aluminium Continuous Casting , Third International Conference, Solildification Processing , Ranmoor House, Sheffield, U. K, p. 268, 1987.
118. READAL, G. L. - Controlling a Continuous casting Operation, Automation in the Iron and Steel Industry, AIME, p. 157, 1977.

119. BAMBERG, M. and PRINZ, B. - Determination of Heat Transfer Coefficients During Water Cooling of Metals, Material Science and Technology, v. 2, p. 410, april 1986.
120. KAIJIANG, C. - Study of Heat Transfer by Spray Cooling, (Acta Metallurgical Sin. (China), 1985 21 (6) B297-302)
121. HIBBINS, S. G. - Characterization of Heat Transfer in the Secondary Cooling System of a Continuous Slab Caster, p. 139,
122. REINERS, U. et al. - A Measuring Method for Quick Determination of Local Heat Transfer Coefficients in Spray Water Cooling within the Range of Stable Film Boiling, Steel Research, v. 56, p.239, 1985.
123. CHOI, K. J. and YAO, S. C. - Mechanisms of Film Boiling Heat Transfer of Normally Impacting Spray, International Journal Heat Mass Transfer, v. 30, n° 2, p. 311, 1987.
124. MITSUTSUKA, M. et al. - Development of An Atomizing Mist Nozzles and Mist Cooling System for Continuous Casting, Transactions International of the Iron and Steel Institute of Japan, v. 25, p. 1244, 1985.
125. EVTEEV et al. - Cooling of Continuous Cast Steel, part I, Developing a Spray Cooling Systems for Slabs in a Curved Mould Continuous Casting Machine (STAL:1983 (12)21-22,38-39)

126. JACOBI, H. and PITSCH, W. - Investigation of the Crystallization Sequence During Solidification of Low Alloy Steels, Archiv Eisenhüttenwes, v. 46, p. 417, 1975.
127. WOLF, M. W. - Tese de Doutorado, Departamento de Materiais, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Suíça, 1978.
128. KOUMP, V. ET et al. - Experimental Study of Solidification of Aluminium-Copper, Transactions of the Metallurgical Society of AIME, p. 1569, v. 242, 1968.
129. CARAM, R. - Modelagem Matemática, Simulação e Otimização do Processo de Solidificação, Tese de Doutorado à Universidade Estadual de Campinas, 1989.
130. METALS HANDBOOK, American Society for Metals, OHIO, v. 8, 1973.
131. WAHBURN, E. W. - International Critical Tables, v. 5, McGraw-Hill Co., New York, 1972.
132. HANSEN, M. - Constitution of Binary Alloys, Ed. McGraw-Hill Co., New York, 1958.

## APÊNDICE 1

### EQUAÇÕES DESENVOLVIDAS

As equações derivadas do desenvolvimento do MDFE vão depender da posição e do estado térmico do ponto.

Quanto à posição, o ponto pode estar localizado nas quinas, na superfície isolada, na interface metal/refrigerante e no meio do metal, tanto nas direções X e Y.

Quanto ao estado térmico, têm-se várias combinações físicas possíveis de ocorrência dos estados sólido, pastoso e líquido.

As equações desenvolvidas para todos os casos estão relacionadas a seguir.

#### a - MEIO DO METAL

Considerando-se o quadrante inferior esquerdo do elemento de referência, têm-se as seguintes possibilidades de ocorrência dos estados sólido, pastoso e líquido :

L	L	L	L	L
L L L	L L L	P L L	P L L	P P L
L	P	L	P	P
L	L	P	P	P
P P P	P P P	P P L	P P P	P P P
P	P	P	P	S



P	P	P	S	S
S P P	S S P	S S S	S S P	S S S
S	S	S	S	S
P	L	L	L	L
S P L	P P P	S P P	S P P	S P P
P	S	S	S	P

As equações desenvolvidas para os casos relacionados, são as seguintes :

a.1 - todos os pontos líquidos

$$K_{1,j} \rightarrow 1,j-1 = K_{1,j} \rightarrow 1-1,j = K_{1,j} \rightarrow 1,j+1 = K_{1,j} \rightarrow 1+1,j = k_{1,j} x^2 \quad (A.1)$$

$$C_{1,j} = \frac{d c V}{t} \quad (A.2)$$

$$\frac{K_{1,j}}{C_{1,j}} = \frac{a_{1,j} t}{x} = \frac{1}{M_{1,j}} \quad (A.3)$$

$$T'_{1,j} = \left[ 1 - \frac{4}{M_L} \right] T_{1,j} + \frac{1}{M_L} T_{1,j-1} + \frac{1}{M_L} T_{1-1,j} + \frac{1}{M_L} T_{1,j+1} + \frac{1}{M_L} T_{1-1,j} \quad (A.4)$$

a.2 - ponto i,j-1 pastoso e os outros líquidos

$$\frac{K_{1,j} \rightarrow 1,j-1}{C_{1,j}} = \frac{2k_{PE}}{(k_{PE} + k_L) M_L} \frac{1}{M_L} = \frac{X_E}{M_L} \quad (A.5)$$

e as outras relações K/C são análogas às já desenvolvidas para os meios homogêneos, portanto :

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(3 + X_{PB})}{M_L} \right] T_{i,j} + \frac{X_{PB}}{M_L} T_{i,j-1} + \frac{1}{M_L} T_{i-1,j} + \frac{1}{M_L} T_{i,j+1} + \frac{1}{M_L} T_{i-1,j} \quad (A.6)$$

a.3 - ponto i-1,j pastoso e os outros líquidos

Temos com no caso anterior uma interface com meio diferente e as outras interfaces com meio homogêneo e a equação para a temperatura fica :

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(3 + X_{PB})}{M_L} \right] T_{i,j} + \frac{1}{M_L} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_L} T_{i-1,j} + \frac{1}{M_L} T_{i,j+1} + \frac{1}{M_L} T_{i-1,j} \quad (A.7)$$

a.4 - elementos i,j-1 e i-1,j pastoso e os outros líquidos

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(2 + X_{LE} + X_{PB})}{M_L} \right] T_{i,j} + \frac{X_{LE}}{M_L} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_L} T_{i-1,j} + \frac{1}{M_L} T_{i,j+1} + \frac{1}{M_L} T_{i-1,j} \quad (A.8)$$

a.5 - todos pastosos

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left( \left[ - \frac{(X_E + X_{PB} + X_{PA} + X_{PB})}{M_r} \right] T_{i,j} + \frac{X_E}{M_r} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_r} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_r} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_r} T_{i-1,j} \right) \quad (A.9)$$

a.6 - elemento i+1,j e i,j+1 líquidos e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{X_{PE} + X_{PB} + 2X_L}{M_P} \right) T_{i,j} + \frac{X_{PE}}{M_P} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_P} T_{i,j+1} + \frac{X_L}{M_P} T_{i-1,j} \right] \quad (A.10)$$

a.7 - elemento i+1,j líquido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{X_{PE} + X_{PB} + X_{PA} + X_{PB}}{M_P} \right) T_{i,j} + \frac{X_{PE}}{M_P} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_P} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} \right] \quad (A.11)$$

a.8 - elemento i,j+1 líquidos e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{X_{PE} + X_{PB} + X_{PA} + X_{PB}}{M_P} \right) T_{i,j} + \frac{X_{PE}}{M_P} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_P} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} \right] \quad (A.12)$$

a.9 - elemento i,j-1 sólido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{X_{PE} + X_{PB} + X_{PA} + X_{PB}}{M_P} \right) T_{i,j} + \frac{X_{PE}}{M_P} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_P} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} \right] \quad (A.13)$$

a.10 - elemento i-1,j sólido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{X_{PE} + X_{PB} + X_{PA} + X_{PB}}{M_P} \right) T_{i,j} + \frac{X_{PE}}{M_P} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_P} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} \right] \quad (A.14)$$

a.11 - elementos i,j-1 e i-1,j sólidos e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left( \left[ 1 - \frac{(2X_{PB} + X_{PA} + X_{PB})}{M_P} \right] T_{i,j} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_P} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{i-1,j} \right) \quad (A.15)$$

a.12 - elementos i,j+1 e i+1,j pastoso e o restante sólido

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(2 + X_{PA} + X_{PB})}{M_E} \right] T_{i,j} + \frac{1}{M_E} T_{i,j-1} + \frac{1}{M_E} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_E} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_E} T_{i-1,j} \quad (A.16)$$

a.13 - elemento i,j+1 pastoso e o restante sólido

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(3 + X_{PA})}{M_E} \right] T_{i,j} + \frac{1}{M_E} T_{i,j-1} + \frac{1}{M_E} T_{i-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_E} T_{i,j+1} + \frac{1}{M_E} T_{i-1,j} \quad (A.17)$$

a.14 - elemento i+1,j pastoso e o restante sólido

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(3 + X_{PB})}{M_E} \right] T_{i,j} + \frac{1}{M_E} T_{i,j-1} + \frac{1}{M_E} T_{i-1,j} + \frac{1}{M_E} T_{i,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_E} T_{i-1,j} \quad (A.18)$$

a.15 - Todos os elementos sólidos

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(4)}{M_E} \right] T_{i,j} + \frac{1}{M_E} T_{i,j-1} + \frac{1}{M_E} T_{i-1,j} + \frac{1}{M_E} T_{i,j+1} + \frac{1}{M_E} T_{i-1,j} \quad (A.19)$$

a.16 - elemento i,j-1 sólido, i,j+1 líquido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{X_{SE} + X_{PE} + X_{LE} + X_{PE}}{M_F} \right) T_{i,j} + \frac{X_{SE}}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{X_{LE}}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{i-1,j} \right] \quad (A.20)$$

a.17 - elemento i-1,j sólido, i+1,j líquido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{X_{PE} + X_{SE} + X_{PE} + X_{LE}}{M_F} \right) T_{i,j} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_{SE}}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{LE}}{M_F} T_{i-1,j} \right] \quad (A.21)$$

a.18 - i,j-1 e i-1,j sólidos, i+1,j líquido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{2X_{SE} + X_{LE} + X_{PE}}{M_F} \right) T_{i,j} + \frac{X_{SE}}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_{SE}}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{X_{LE}}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{i-1,j} \right] \quad (A.22)$$

a.19 - elementos i,j-1 e i-1,j sólidos, i,j pastoso e o restante líquido

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{2X_{SE} + 2X_{LE}}{M_F} \right) T_{i,j} + \frac{X_{SE}}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_{SE}}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{X_{LE}}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{LE}}{M_F} T_{i-1,j} \right] \quad (A.23)$$

a.20 - elemento i,j-1 sólido, i+1,j líquido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(X_{SE} + X_{PE} + X_{PE} + X_{LE})}{M_F} \right] T_{i,j} + \frac{X_{SE}}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{LE}}{M_F} T_{i-1,j} \quad (A.24)$$

b. INTERFACE COM REFRIGERANTE



No caso de interfaces com refrigerante, tem-se a presença do coeficiente de transmissão de calor resultante e, como característica do posicionamento adotado para os pontos, a área de passagem do fluxo e o volume dos elementos.

Para o desenvolvimento das equações, necessita-se também do estado térmico dos pontos e seus vizinhos. Dessa maneira, fazem-se as possíveis combinações entre os estados sólido, pastoso e líquido, avaliam-se as resistências térmicas existentes e desenvolvem-se as equações.

b1) DIREÇÃO Y - Todos os elementos  $i, j-1$  são interfaces com refrigerante

As várias situações encontradas entre os elementos, são as seguintes :

L	L	L	L	P
R L L	R L L	R P L	R P P	R P L
L	P	P	P	P
P	P	P	P	P
R P P	R P P	R S P	R S S	R S S
P	S	S	S	S
S	L	L	P	S
R S S	R P P	R P L	R P L	R S L
S	S	S	S	S

P	L	L	L	S
R S L	R S P	R S L	R S S	R S L
S	S	S	S	S

b1-1) todos os elementos líquidos

$$T'_{x,j} = \left[ 1 - \frac{(4 + N)}{M_L} \right] T_{x,j} + \frac{N}{M_L} T_{x,j-1} + \frac{1}{M_L} T_{x-1,j} + \frac{2}{M_L} T_{x,j+1} + \frac{1}{M_L} T_{x+1,j} \quad (A.25)$$

b1-2) elemento i-1, j pastoso e o restante líquido

$$T'_{x,j} = \left[ 1 - \frac{(3 + N + X_{rps})}{M_L} \right] T_{x,j} + \frac{N}{M_L} T_{x,j-1} + \frac{X_{rps}}{M_L} T_{x-1,j} + \frac{2}{M_L} T_{x,j+1} + \frac{1}{M_L} T_{x+1,j} \quad (A.26)$$

b1-3) elemento i, j e i-1, j pastoso e o restante líquido

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{N + X_{rps} + 3X_{L4}}{M_r} \right) T_{x,j} + \frac{N}{M_r} T_{x,j-1} + \frac{X_{rps}}{M_r} T_{x-1,j} + \frac{2X_L}{M_r} T_{x,j+1} + \frac{X_L}{M_r} T_{x+1,j} \right] \quad (A.27)$$

b1-4) elemento i+1, j líquido e o restante pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{N + X_{rps} + 2X_L + X_{rps}}{M_r} \right) T_{x,j} + \frac{N}{M_r} T_{x,j-1} + \frac{X_{rps}}{M_r} T_{x-1,j} + \frac{2X_L}{M_r} T_{x,j+1} + \frac{X_{rps}}{M_r} T_{x+1,j} \right] \quad (A.28)$$

b1-5) elemento i, j+1 líquido e o restante pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{N + X_{rps} + 2X_{rps} + X_L}{M_r} \right) T_{x,j} + \frac{N}{M_r} T_{x,j-1} + \frac{X_{rps}}{M_r} T_{x-1,j} + \frac{2X_L}{M_r} T_{x,j+1} + \frac{X_{rps}}{M_r} T_{x+1,j} \right]$$

$$+ \frac{X_{PB}}{M_P} T_{x-1,j} + \frac{2X_{PA}}{M_P} T_{x,j+1} + \frac{X_L}{M_P} T_{x+1,j} \quad (A.29)$$

b1-6) todos os elementos pastosos

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( - \frac{(N + X_{PB} + 2X_{PA} + X_{PB})}{M_P} \right) T_{x,j} + \frac{N}{M_P} T_{x,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{x-1,j} + \frac{2X_{PA}}{M_P} T_{x,j+1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{x+1,j} \right] \quad (A.30)$$

b1-7) elemento i-1, j sólido e o resto pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( - \frac{(N + X_{PB} + 2X_{PA} + X_{SB})}{M_P} \right) T_{x,j} + \frac{N}{M_P} T_{x,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_P} T_{x-1,j} + \frac{2X_{PA}}{M_P} T_{x,j+1} + \frac{X_{SB}}{M_P} T_{x+1,j} \right] \quad (A.31)$$

b1-8) elemento i, j e i-1, j sólido e o restante pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( - \frac{(N + X_{PB} + 2X_{PA} + 1)}{M_B} \right) T_{x,j} + \frac{N}{M_B} T_{x,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_B} T_{x-1,j} + \frac{2X_{PA}}{M_B} T_{x,j+1} + \frac{1}{M_B} T_{x+1,j} \right] \quad (A.32)$$

b1-9) elemento i+1, j pastoso e o restante sólido

$$T'_{x,j} = \left[ 1 - \frac{(N + X_{PB} + 3)}{M_B} \right] T_{x,j} + \frac{N}{M_B} T_{x,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_B} T_{x-1,j} + \frac{2}{M_B} T_{x,j+1} + \frac{1}{M_B} T_{x+1,j} \quad (A.33)$$

b1-10) elemento i, j+1 pastoso e o restante sólido

$$T'_{x,j} = \left[ 1 - \frac{(N + 2X_{PA} + 2)}{M_B} \right] T_{x,j} + \frac{N}{M_B} T_{x,j-1} +$$

$$+ \frac{1}{M_B} T_{i-1,j} + \frac{2X_{PA}}{M_B} T_{i,j+1} + \frac{1}{M_B} T_{i+1,j} \quad (\text{A.34})$$

b1-11) todos os elementos sólidos

$$T'_{i,j} = \left[ 1 - \frac{(N+3)}{M_B} \right] T_{i,j} + \frac{N}{M_B} T_{i,j-1} + \frac{1}{M_B} T_{i-1,j} + \frac{2}{M_B} T_{i,j+1} + \frac{1}{M_B} T_{i+1,j} \quad (\text{A.35})$$

b1-12) elemento i-1, j sólido, i+1, j líquido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{N + X_{L3} + 2X_{PA} + X_{BB}}{M_F} \right) T_{i,j} + \frac{N}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_{L3}}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{2X_{PA}}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{BB}}{M_F} T_{i+1,j} \right] \quad (\text{A.36})$$

b1-13) elemento i, j pastoso, i-1, j sólido e o resto líquido

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{N + 3X_L + X_{BB}}{M_F} \right) T_{i,j} + \frac{N}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_L}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{2X_L}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{BB}}{M_F} T_{i+1,j} \right] \quad (\text{A.37})$$

b1-14) elemento i-1, j sólido, i, j+1 líquido e o restante pastoso

$$T'_{i,j} = T_{i,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \left( \frac{N + X_{PB} + 2X_L + X_{BB}}{M_F} \right) T_{i,j} + \frac{N}{M_F} T_{i,j-1} + \frac{X_{PB}}{M_F} T_{i-1,j} + \frac{2X_L}{M_F} T_{i,j+1} + \frac{X_{BB}}{M_F} T_{i+1,j} \right] \quad (\text{A.38})$$

b2) Direção X - todos os elementos i-1, j são interface com refrigerante

As várias situações encontradas entre os elementos, com as respectivas equações, são as seguintes:

L	L	L	L	L
L L L	L L L	P L L	P L L	P P L
R	R	R	R	R
P	P	P	P	P
P P P	S P P	S S P	S S S	S S P
R	R	R	R	R
S	S	L	L	
S S S	S P L	S P L	S P P	
R	R	R	R	

b2-1) todos líquidos

$$T'_{x,j} = \left[ 1 - \frac{(4 + N)}{M_L} \right] T_{x,j} + \frac{1}{M_L} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_L} T_{x-1,j} + \frac{1}{M_L} T_{x,j+1} + \frac{2}{M_L} T_{x+1,j} \quad (A.39)$$

b2-2) elemento i,j-1 pastoso e o restante líquido

$$T'_{x,j} = \left[ 1 - \frac{(3 + N + X_{p2})}{M_L} \right] T_{x,j} + \frac{X_{p2}}{M_L} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_L} T_{x-1,j} + \frac{1}{M_L} T_{x,j+1} + \frac{2}{M_L} T_{x+1,j} \quad (A.40)$$

b2-3) elemento i,j e i,j-1 pastosos e o restante líquido

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left[ \frac{(X_{p2} + N + 3X_L)}{M_F} \right] T_{x,j} + \frac{X_{p2}}{M_F} T_{x,j-1} +$$



$$+ \frac{N}{M_F} T_{x-1,j} + \frac{X_L}{M_F} T_{x,j+1} + \frac{2X_L}{M_F} T_{x+1,j} \quad (\text{A.41})$$

b2-4) elemento  $i+1, j$  líquido e o restante pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left( \left[ - \frac{(X_{PE} + N + X_{PA} + 2X_L)}{M_F} \right] T_{x,j} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_F} T_{x-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_F} T_{x,j+1} + \frac{2X_L}{M_F} T_{x+1,j} \right) \quad (\text{A.42})$$

b2-5) elemento  $i, j+1$  líquido e o restante pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left( \left[ - \frac{(X_{PE} + N + X_L + 2X_{PB})}{M_F} \right] T_{x,j} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_F} T_{x-1,j} + \frac{X_L}{M_F} T_{x,j+1} + \frac{2X_{PB}}{M_F} T_{x+1,j} \right) \quad (\text{A.43})$$

b2-6) todos pastosos

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left( \left[ - \frac{(X_{PE} + N + X_{PA} + 2X_{PB})}{M_F} \right] T_{x,j} + \frac{X_{PE}}{M_F} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_F} T_{x-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_F} T_{x,j+1} + \frac{2X_{PB}}{M_F} T_{x+1,j} \right) \quad (\text{A.44})$$

b2-7) elemento  $i, j-1$  sólido e o resto pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left( \left[ - \frac{(X_B + N + X_{PA} + 2X_{PB})}{M_F} \right] T_{x,j} + \frac{X_B}{M_F} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_F} T_{x-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_F} T_{x,j+1} + \frac{2X_{PB}}{M_F} T_{x+1,j} \right) \quad (\text{A.45})$$

b2-8) elementos  $i, j$  e  $i, j-1$  sólidos e o resto pastoso

$$T'_{x,j} = \left[1 - \frac{(1 + N + X_{PA} + 2X_{PB})}{M_B}\right] T_{x,j} + \frac{1}{M_B} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_B} T_{x-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_B} T_{x,j+1} + \frac{2X_{PB}}{M_B} T_{x+1,j} \quad (\text{A.46})$$

b2-9) elemento i+1, j pastoso e o resto sólido

$$T'_{x,j} = \left[1 - \frac{(2 + N + 2X_{PB})}{M_B}\right] T_{x,j} + \frac{1}{M_B} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_B} T_{x-1,j} + \frac{1}{M_B} T_{x,j+1} + \frac{2X_{PB}}{M_B} T_{x+1,j} \quad (\text{A.47})$$

b2-10) elemento i, j+1 pastoso e o resto sólido

$$T'_{x,j} = \left[1 - \frac{(3 + N + X_{PA})}{M_B}\right] T_{x,j} + \frac{1}{M_B} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_B} T_{x-1,j} + \frac{X_{PA}}{M_B} T_{x,j+1} + \frac{2}{M_B} T_{x+1,j} \quad (\text{A.48})$$

b2-11) todos sólidos

$$T'_{x,j} = \left[1 - \frac{(4 + N)}{M_B}\right] T_{x,j} + \frac{1}{M_B} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_B} T_{x-1,j} + \frac{1}{M_B} T_{x,j+1} + \frac{2}{M_B} T_{x+1,j} \quad (\text{A.49})$$

b2-12) elemento i, j-1 sólido, i, j+1 líquido e o resto pastoso

$$T'_{x,j} = T_{x,j} + \frac{1}{M_F} \left[ \left[1 - \frac{(X_B + N + X_L + 2X_{PB})}{M_F}\right] T_{x,j} + \frac{X_B}{M_F} T_{x,j-1} + \frac{N}{M_F} T_{x-1,j} + \frac{X_L}{M_F} T_{x,j+1} + \frac{2X_{PB}}{M_F} T_{x+1,j} \right] \quad (\text{A.50})$$

b2-13) elemento i,j-1 sólido, i,j pastoso e o resto líquido

$$\begin{aligned}
 T'_{x,j} = & T_{x,j} + \frac{(X_B + N + 3X_L)}{M_p} \left[ \left( 1 - \frac{X_B}{M_p} \right) T_{x,j} + \frac{X_B}{M_p} T_{x,j-1} + \right. \\
 & \left. + \frac{N}{M_p} T_{x-1,j} + \frac{X_L}{M_p} T_{x,j+1} + \frac{2X_L}{M_p} T_{x+1,j} \right] \quad (A.51)
 \end{aligned}$$

b2-14) elemento i,j-1 sólido, i-1,j líquido e o resto pastoso

$$\begin{aligned}
 T'_{x,j} = & T_{x,j} + \frac{1}{F_H} \left( 1 - \frac{(X_B + N + X_{p4} + 2X_L)}{M_p} \right) T_{x,j} + \frac{X_B}{M_p} T_{x,j-1} + \\
 & \left( \frac{N}{M_p} T_{x-1,j} + \frac{X_{p4}}{M_p} T_{x,j+1} + \frac{2X_L}{M_p} T_{x+1,j} \right) \quad (A.52)
 \end{aligned}$$

No caso de elementos muito pequenos e resfriamento muito rápido, podem ocorrer situações onde tem-se interfaces entre meio sólido e líquido em contato diretamente e, portanto, outras combinações de situações, cujas equações podem ser desenvolvidas.

## APÊNDICE 2

### SIMBOLOGIA UTILIZADA

#### PARÂMETROS DIMENSIONAIS

- a - difusividade térmica -  $K/cd$  ( $m^2/s$ )
- A - área de troca térmica ( $m^2$ )
- b - difusividade de calor =  $kcd$  ( $J/m^2s^{1/2}K$ )
- c - calor específico ( $J/kg K$ )
- C - capacidade calorífica ( $J/kg$ )
- d - densidade ( $kg/m^3$ )
- D - difusividade atômica ( $m^2/s$ )
- $F_H$  - parcela relativa ao calor latente liberado  
( $1+H F_0/c_0 T$ )
- G - gradiente térmico ( $K/m$ )
- h - coeficiente de transmissão de calor ( $W/m^2 K$ )
- H - calor latente de fusão ( $J/kg$ )
- K - condutividade térmica ( $W/mK$ )
- m - inclinação da linha liquidus ou solidus ( $K/\% \text{ peso}$ )
- q' - fluxo de calor ( $W/m^2$ )
- R - resistência térmica ( $K/W$ )
- t - tempo (s)
- T - temperatura (K)
- u - velocidade de lingotamento ( $mm/s$ )
- V - velocidade de solidificação ( $m/s$ ) ou volume de metal  
( $m^3$ )
- X - dimensão principal coberta por um fluido (m)
- $\beta$  - variação volumétrica durante a solidificação ( $\% \text{ volume}$ )

- $\gamma$  - coeficiente de expansão térmica -  $T^{-1}$  para gases  
( $K^{-1}$ )
- $\delta$  - espessura da camada de difusão (m)
- $\Delta t$  - incremento de tempo (s)
- $\Delta T$  - diferença de temperatura (K)
- $S$  - espessura solidificada (mm)
- $\Delta x$  - incremento de distância na direção x (m)
- $\Delta y$  - incremento de distância na direção y (m)
- $z$  - incremento de distância na direção z (m)
- $\lambda$  - espaçamento interdendrítico ( m)
- $\eta$  - viscosidade de um fluido (kg/ms)
- $\sigma$  - constante de Stefan-Boltzmann -  $5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$  ou  
tensão superficial entre dois meios

#### PARÂMETROS ADIMENSIONAIS

- $k$  - coeficiente de distribuição de soluto ( $c_B/c_L$ )
- $d$  - parâmetro de Brody-Flemings
- $\partial$  - derivada parcial
- $\epsilon$  - emissividade
- $\Omega$  - parâmetro de Clyne-Kurz
- $M$  - constante metal/molde =  $b_1/b_m$  ou módulo do método de  
diferenças finitas =  $x^R/a \ t$
- $n$  - constante do metal =  $(a_1/a_m)^{1/R}$
- $N$  - constante metal/molde =  $(a_1/a_m)^{1/R}$  ou módulo de  
superfície do método numérico =  $h_1 \ x/K$

#### SUB-ÍNDICES

- $a$  - água



- c - convecção ou crítica
- e - refere-se à :
  - temperatura e concentração - eutético
  - coeficiente de distribuição de soluto - efetivo
- f - fusão
- g - global
- i - interface ou superfície
- i,j - posição na rede (coluna/linha)
- L - líquido ou liquidus
- m - molde
- o - refere-se à :
  - temperatura - ambiente
  - composição - inicial
- P - zona pastosa
- r - radiação
- S - sólido ou solidus
- v - vazamento
- 1 - refere-se à :
  - primário no caso de espaçamentos dendríticos
  - sólido ou solidus no caso de ligas
  - i,j no caso de posicionamento de pontos
- 2 - refere-se à :
  - secundário no caso de espaçamentos dendríticos
  - líquido ou liquidus no caso de ligas
  - posição i,j-1 no caso de posicionamento de pontos
- 3 - refere-se à : pastoso
  - pastoso no caso de ligas
  - posição i-1,j no caso de posicionamento de pontos

APÊNDICE 3

PROPRIEDADES TERMOFÍSICAS DOS MATERIAIS UTILIZADOS

	AOO 0,1XC	AOO 0,62XC	AL 4,5XCU	AL 15XCU
H (J/kg)	260x10 <sup>3</sup>	260x10 <sup>3</sup>	384x10 <sup>3</sup>	360x10 <sup>3</sup>
k <sub>s</sub> k <sub>m</sub> (W/mK)	29,3 25,4	29,3 25,4	180 100	130 84
c <sub>s</sub> c <sub>m</sub> (J/kg K)	670 679	670 679	880 920	837 837
d <sub>s</sub> d <sub>m</sub> (kg/m <sup>3</sup> )	7,4x10 <sup>3</sup> 7,0x10 <sup>3</sup>	7,4x10 <sup>3</sup> 7,0x10 <sup>3</sup>	2,75x10 <sup>3</sup> 2,65x10 <sup>3</sup>	3,0x10 <sup>3</sup> 2,9x10 <sup>3</sup>
T <sub>e</sub> (K)	1768	1693	821	821
T <sub>L</sub> (K)	1803	1765	920	888
REF. 130,131,132				