

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
DEFENDIDA POR Jean Cutrim Lopes
E APROVADA
PELA COMISSÃO JULGADORA EM 02,02,2005
Alberto Luiz Serpa.
ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Controle H_2/H_∞ de Estruturas Flexíveis através de Desigualdades Matriciais Lineares com Alocação de Pólos

Autor: Jean Cutrim Lopes
Orientador: Alberto Luiz Serpa

02/2005

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Controle H_2/H_∞ de Estruturas Flexíveis através de Desigualdades Matriciais Lineares com Alocação de Pólos

Autor: Jean Cutrim Lopes

Orientador: Alberto Luiz Serpa

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Projeto Mecânico e Mecânica dos Sólidos.

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2005
S.P. – Brasil.

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	L/UNICAMP L881c
V	EX
TOMBO BC/	63609
PROC.	16.P00086.05
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	02/05/05
Nº CPD	

lib-id 349170

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L881c Lopes, Jean Cutrim
 Controle H_2/H_∞ de estruturas flexíveis através de
 desigualdades matriciais lineares com alocação de pólos
 / Jean Cutrim Lopes. --Campinas, SP: [s.n.], 2005.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de
 Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistema de controle por realimentação. 2.
 Programação convexa. 3. Método dos elementos finitos.
 I. Serpa, Alberto Luiz. II. Universidade Estadual de
 Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
 Título.

Titulo em Inglês: H_2/H_∞ control of flexible structures through linear matrix inequalities
 with pole placement

Palavras-chave em Inglês: Feedback control systems, Convex programming e Finite
 element method.

Área de concentração: Projeto Mecânico e Mecânica dos Sólidos.

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora: Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega e Pedro Luis Dias
 Peres

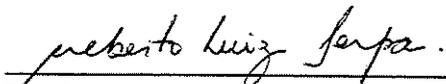
Data da defesa: 02/02/2005

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

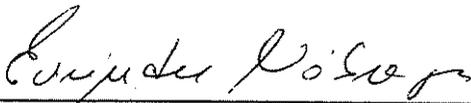
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Controle H_2/H_∞ de Estruturas Flexíveis através
de Desigualdades Matriciais Lineares com
Alocação de Pólos**

Autor: Jean Cutrim Lopes
Orientador: Alberto Luiz Serpa



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente
Unicamp-FEM



Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega
Unicamp-FEM



Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres
Unicamp-FEEC

Campinas, 02 de fevereiro de 2005.

Dedicatória:

Dedico este trabalho à minha querida esposa Dilma e a minha filha Isabela.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Aos meus pais pelo incentivo em todos os momentos da minha vida.

Ao meu orientador, que me mostrou os caminhos a serem seguidos.

A todos os professores e colegas do departamento, que ajudaram de forma direta e indireta na conclusão deste trabalho.

Resumo

LOPES, Jean Cutrim, *Controle H_2/H_∞ de Estruturas Flexíveis através de Desigualdades Matriciais Lineares com Alocação de Pólos*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 121 p. Dissertação (Mestrado)

O objetivo deste trabalho é aplicar o controle H_2/H_∞ usando desigualdades matriciais lineares com restrições de alocação de pólos em estruturas flexíveis. O problema de controle H_2/H_∞ é uma técnica usada para a obtenção de controladores com as propriedades do controle norma H_2 , que trás desempenho ótimo, e do controle norma H_∞ , que proporciona desempenho dinâmico robusto. As desigualdades matriciais lineares permitem que a obtenção do controlador seja formulada como um problema de otimização convexa e com restrições adicionais tais como as referentes à alocação de pólos. O problema de alocação de pólos é importante para ajustar o comportamento dinâmico da planta controlada no que se refere a especificações em termos da velocidade de resposta e do amortecimento, por exemplo. O modelo empregado para o estudo foi uma viga sujeita a distúrbios com o controlador atuando de forma não colocada. As matrizes de estado empregadas ao estudo de controle foram determinadas através das matrizes obtidas pelo método dos elementos finitos, considerando o modelo de viga de Euler-Bernoulli. Os resultados mostraram que o uso da alocação dos pólos melhora o desempenho do controlador H_2/H_∞ . Para a implementação computacional foi utilizado o aplicativo Matlab.

Palavras – Chave:

Controle robusto, Otimização H_2/H_∞ , Elementos Finitos, Alocação de Pólos, Desigualdades Matriciais Lineares.

Abstract

LOPES, Jean Cutrim, *H₂/H_∞ Control of Flexible Structures through Linear Matrix Inequalities with Pole Placement*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2005. 121 p. Master Thesis.

The objective of this work is to apply the H₂/H_∞ control technique using linear matrix inequalities and pole placement constraints to the flexible structures control problem. The H₂/H_∞ control is a technique to design a controller with mixed features of the H₂ and H_∞ control formulations, such as, optimal dynamical performance and robust performance. The Linear Matrix Inequalities allow to formulate the problem as a convex optimization problem, and additional constraints can be included such as the pole placement. The pole placement requirement comes from the necessity of adjusting the transient response of the plant and ensuring specific behavior in terms of speed and damping responses. The mathematical model used for this study is related to a flexible beam, with an applied disturbance and an actuator in different positions. The state-space matrices of the structure were obtained using the finite element method with the Euler-Bernoulli formulation of beams. The results show that the pole placement constraints can improve the performance of the controller H₂/H_∞. The Matlab was used for the computational implementation.

Key – Words:

Robust control, Optimization H₂/H_∞, Finite Elements, Pole Placement, Linear Matrix Inequalities.

Índice

Capítulo 1 - Introdução	6
1.1 O Problema de Controle de Estruturas Flexíveis	6
1.2 Revisão Bibliográfica	7
1.3 Objetivo deste Trabalho	13
Capítulo 2 - Formulação dos Problemas H_2 e H_∞.....	14
2.1 Introdução	14
2.2 Definição de sistemas com controladores robustos	14
2.3 Estabilidade de Lyapunov	15
2.4 LMIs	16
2.5 Normas H_2 e H_∞	17
Capítulo 3 - Otimização através da Norma H_∞.....	20
3.1 Modelo de Realimentação de Estado	20
3.2 Modelo de Realimentação de Saída	23
Capítulo 4 - Otimização através da Norma H_2.....	29
4.1 Modelo de Realimentação de Estado	30
4.2 Modelo de Realimentação de Saída	32
Capítulo 5 - Otimização através do Problema Misto H_2/H_∞.....	35
5.1 Realimentação de Estados	35
5.2 Realimentação de Saída	38
Capítulo 6 - LMIs para Alocação de Pólos	42
6.1 Definição de Regiões no Plano Complexo	42
6.2 LMIs como restrições de alocação de pólos	43
6.3 Aplicações para as regiões de controle	46
6.4 Intersecção de regiões de LMIs	49

Capítulo 7 - Aplicação das Regiões de LMIs para os Problemas de Otimização	51
7.1 Alocação de pólos para malha fechada com realimentação de estado	51
7.2 Alocação de pólos para malha fechada com realimentação de saída	53
Capítulo 8 - Determinação do Modelo da Estrutura	56
8.1 Modelo de Elementos Finitos	56
8.2 Modelo de Estados	61
Capítulo 9 - Resultados	66
9.1 Controle através da norma H_∞	71
9.2 Controle através da Norma H_2	75
9.3 Controle H_2/H_∞	80
Capítulo 10 - Conclusão	85
Apêndice A - Matrizes M, C e K	93
Apêndice B – Propriedades Fundamentais das LMIs.....	95
Apêndice C - Alocação de pólos – Aspectos Teóricos	97
Apêndice D – Programas	109

Lista de Figuras

Figura 3.1 - Sistema em malha fechada sujeito a distúrbios.	20
Figura 4.1 - Sistema em malha fechada	29
Figura 5.1 - Esquema para o controle misto H_∞/H_2	35
Figura 5.2 - Representação esquemática das regiões ótimas de H_∞/H_2	36
Figura 6.1 - Regiões de alocação de pólos.	43
Figura 6.2 - Semi-plano.	46
Figura 6.3 - Região cônica.	47
Figura 8.1 - Elemento de viga.	56
Figura 8.2 - Elemento de viga em relação a um referencial global.	59
Figura 8.3 - Exemplo genérico de uma planta com controlador sujeitos a distúrbios.	63
Figura 9.1 - Modelo discretizado para viga com os respectivos graus de liberdade.	66
Figura 9.2 - Distúrbio de Entrada.	68
Figura 9.3 - Controle H_∞ - Realimentação de estado – Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.	72
Figura 9.4 - Controle H_∞ - Realimentação de saída – Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.	72
Figura 9.5 - Controle H_∞ - Realimentação de estado – Esforço de controle com alocação.	73
Figura 9.6 - Controle H_∞ - Realimentação de saída – Esforço de controle com alocação.	73
Figura 9.7 - Controle H_2 - Realimentação de estado – Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.	76
Figura 9.8 - Controle H_2 - Realimentação de saída– Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.	76

Figura 9.9 - Controle H_2 - Realimentação de estados – Resposta ao impulso.	77
Figura 9.10 - Controle H_2 - Realimentação de saída – Resposta ao impulso.	77
Figura 9.11 - Controle H_2 : Realimentação de estado – Esforço do controlador	78
Figura 9.12 - Controle H_2 - Realimentação de saída – Esforço do controlador.	78
Figura 9.13 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de estado– Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.	81
Figura 9.14 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de saída– Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.	81
Figura 9.15 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de estados – Resposta ao impulso.	82
Figura 9.16 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de saída – Resposta ao impulso.	82
Figura 9.17 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de estado – Esforço do controlador	83
Figura 9.18 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de saída – Esforço do controlador.	83

Lista de Tabelas

Tabela 9.1 - Dados para definição da região para alocação de pólos.....	70
Tabela 9.2 - Comparação dos valores da norma H_∞ da planta controlada com a original.	71
Tabela 9.3 - Valores da norma H_2 da planta controlada e da planta original.	75
Tabela 9.4 - Valores da norma H_2 da planta controlada em comparação ao da planta original.	80
Tabela 9.5 - Valores de γ para a realização da otimização H_2 / H_∞	80
Tabela C.1 - Tipos de curvas e suas caracterizações quanto à alocação de pólos.	108

Capítulo 1 - Introdução

1.1 O Problema de Controle de Estruturas Flexíveis

O problema de controle de estruturas flexíveis apresenta algumas dificuldades relacionadas ao projeto do controlador. As estruturas flexíveis são contínuas e apresentam infinitos modos de vibração. O modelo matemático, obtido por elementos finitos ou mesmo identificado experimentalmente quando possível, é dinamicamente truncado gerando um modelo reduzido que apresenta incertezas. Estas incertezas afetam a posição dos pólos em malha fechada, provocando o fenômeno de "spillover", que consiste na excitação de modos não modelados, e que pode causar instabilidade.

Além disso, os controladores são geralmente não colocados, ou seja, o esforço de controle atua em um grau de liberdade diferente daquele que se deseja controlar, o que representa uma dificuldade adicional para o problema.

Os aspectos mencionados anteriormente requerem o emprego de técnicas de projeto de controladores mais sofisticadas, tais como os controladores projetados com base nas normas H_2 e H_∞ .

Uma das características do controlador H_2 é a atenuação da resposta impulsiva, ou seja, a redução da norma H_2 da função de transferência, que representa também uma atenuação da resposta em frequência em todo o seu espectro. O controlador H_∞ busca a redução do pico da resposta em frequência de maior amplitude. Tais características têm o papel de reduzir as chances

de que as incertezas dinâmicas presentes nos sistemas atuem de forma prejudicial à planta controlada.

O interesse nos controladores H_2 e H_∞ também está no fato de que sua obtenção pode ser feita através da solução de problemas de otimização. Além disso, estes problemas de otimização podem ser baseados no uso de Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs - do inglês Linear Matrix Inequalities), que é um tipo de formulação que proporciona uma flexibilidade na formulação de problemas diversos de otimização, e também possui algoritmos eficientes para a solução.

O emprego destas técnicas de controle permite ainda que restrições adicionais, tais como o estabelecimento de regiões para alocação de pólos sejam definidas.

Este trabalho investiga o emprego das técnicas de controle H_2 e H_∞ , da combinação destas através do controlador misto H_2/H_∞ , e do estabelecimento de restrições de alocação de pólos, todas formuladas segundo o ponto de vista das desigualdades matriciais lineares. Estas técnicas são então aplicadas ao problema de controle de uma estrutura flexível formada por uma viga engastada modelada por elementos finitos.

1.2 Revisão Bibliográfica

A modelagem de um sistema de controle envolve diversos aspectos, tais como: modelagem ou identificação do sistema, projeto, implementação do controlador e teste de validação do sistema de controle [Boyd, Barrat e Norman, 1990].

No projeto do controlador são necessárias especificações como: desempenho, robustez e lei de controle. Estas especificações têm o objetivo de determinar a estabilidade do sistema em malha fechada mesmo sujeita a sinais de controle limitados, de rejeição de distúrbios e de respostas particulares a distúrbios de referência e de comando. Dentro dos métodos modernos, os projetos são divididos em: sintéticos, analíticos e de otimização de parâmetros.

Nos métodos sintéticos [Ramos, 1998], o projeto do controlador leva em conta distúrbios que são adicionados em estruturas específicas que têm um comportamento físico conhecido. É o

caso do sistema tipo SISO (do inglês “Single Input – Single Output”) de baixa ordem. Neste, são usadas técnicas de lugar das raízes e diagramas de Nyquist, de Bode ou de Nichols.

Os métodos analíticos baseiam-se na solução analítica de um problema de projeto de controlador ótimo ou subótimo que satisfaça as especificações desejadas. Tais métodos utilizam matrizes ponderadoras de distúrbios e matrizes dinâmicas, ambas fictícias ao modelo de controle. Esta metodologia faz com que seja necessário traduzir os aspectos físicos do projeto nas matrizes mencionadas, o que nem sempre é uma tarefa trivial [Ramos, 1998].

No método de otimização de parâmetros trata-se de ajustar os valores de uma estrutura conhecida do controlador. É utilizado para sistemas mais complexos e de maior ordem. Os mais importantes baseiam-se na minimização de normas de funções matriciais de transferência nas quais se representa como uma relação de entradas, consideradas distúrbios, e saídas, que correspondem ao sinal de entrada para o controlador.

Dois tipos de métodos de otimização de parâmetros têm sido estudados extensivamente: a minimização das normas H_2 e H_∞ . O estudo da norma H_2 iniciou-se com o desenvolvimento da equação diferencial matricial de Riccati [Kalman e Bucy, 1961]. Logo em seguida, a teoria de filtros de Kalman foi publicada [Kalman, 1964]. Assim a combinação dos dois estudos citados tornou possível definir uma metodologia de controle para sistemas com vetor de realimentação de estados sob distúrbio, que pode ser considerado o tipo de ruído branco, média-zero ou gaussiano. Este método é conhecido como Quadratura Linear Gaussiana (do inglês LQG), que é também chamado de método norma H_2 [Wilson e Rubio, 1995]. Nesta técnica, um índice de performance quadrático é minimizado a fim de encontrar um controle ótimo associado, possibilitando um bom desempenho porque a minimização do quadrado da “energia associada” faz reduzir a norma H_2 da matriz função de transferência entre entrada do distúrbio e a saída de desempenho. Desta forma, o erro entre o vetor de estado e o vetor de controle é sempre assintoticamente estável [Kalman e Bucy, 1961]. A principal aplicação da norma H_2 é para sistemas estocásticos nos quais o desempenho do sistema não pode ser modelado satisfatoriamente de forma determinística, o que significa que os sinais de entrada e de saída devem ser tratados pela média no tempo.

Outra formulação importante é o método H_∞ para sistemas lineares incertos que surgiu ao longo dos anos 80 [Zames, 1981]. Um dos primeiros textos [Francis, 1986] relacionados a este

método foi publicado em 1986. O desenvolvimento do método H_∞ usando vetor de realimentação de estados foi publicado em [Petersen, 1987] e [Petersen, 1989]. Nestes dois trabalhos verifica-se que o controle H_∞ de sistemas incertos é obtido com o uso da equação matricial de Riccati.

O método H_∞ aplicado a sistemas de realimentação de saída foi apresentado por [Doyle et al, 1989], no qual dois tipos de equações de Riccati foram demonstradas e as condições de robustez do sistema foram definidas. Em [Bernstein e Haddad, 1989], mostrou-se que as resoluções das equações de Riccati apresentam menor complexidade do que se o problema fosse resolvido pelo método LQG.

O método H_∞ considera três tipos de distúrbio: erro do controlador, distúrbio do sistema e erro de saída (todos os três mencionados são considerados erros externos que entram no sistema).

A norma da função de transferência entre a saída do sistema e a entrada de distúrbio, denotada como T_{zw} , é minimizada com a condição de assegurar a estabilidade e garantir um controle robusto [Francis, 1986]. O valor mínimo da norma resulta em pólos de malha fechada colocados à esquerda do eixo imaginário, o que pode significar que o sistema possa ser robustamente estável. Uma desvantagem do método H_∞ é que a utilização do mínimo valor da norma pode sacrificar o desempenho do sistema. Diante desta limitação, pesquisas de sistemas de controle misto H_∞ e H_2 têm sido conduzidas com o objetivo de garantir a robustez sem prejudicar o desempenho. Vários dos mais importantes trabalhos neste assunto estão em [Zhou et al, 1994] e [Doyle et al, 1994]. Em [Zhou et al, 1994] é demonstrado que um sistema estocástico pode ser robustamente controlado pela norma combinada H_2/H_∞ mesmo que diferentes tipos de distúrbios estejam presentes. Já em [Doyle et al, 1994], mostrou-se que um sistema incerto pode ser satisfatoriamente controlado de forma ótima através do problema misto H_2/H_∞ .

A solução clássica do problema H_2/H_∞ é feita através da solução da equação de Riccati ou pela inequação de Lyapunov. Porém as condições de existência e os métodos de solução, não permitem uma flexibilidade na adição de restrições. Isto se deve pelo fato das equações de Riccati não necessariamente definirem um conjunto convexo [Boyd et al, 1994] e [Geromel, Peres e Bernussou, 1991]. Recentemente as inequações matriciais lineares vêm chamando atenção em pesquisas em engenharia de controle por seu melhor desempenho computacional. Deve-se isto à propriedade de convexidade a qual permite maior eficiência na otimização de

funções, mesmo com diferentes tipos de restrições [Boyd et al, 1994]. Na década de 90, o uso de LMIs para resolução de problemas de otimização começou a ser popularizado pelo advento de algoritmos eficientes de resolução de problemas convexos como o método dos pontos interiores, desenvolvido por [Nesterov e Nemirovskii, 1994].

A formulação por LMIs teve origem nos trabalhos de Lyapunov no final do século XIX que introduziu a inequação clássica que levou o seu nome. Na década de 40 do século XX, Lur'e e Postnikov foram os pioneiros em aplicar as inequações de Lyapunov para problemas de controle com a solução de problemas simples [Boyd et al, 1994b]. Após estes, na década de 60 ocorreu o surgimento de novas teorias, como a do Teorema do Ganho Pequeno, do critério de Kalman-Yakubovik-Popov e da técnica do controle ótimo quadrático. Estas teorias proporcionaram a solução de algumas famílias de LMIs e encorajaram os pesquisadores a procurarem métodos eficientes para solução dos problemas de controle ótimo. No final da década de 60, conseguiu-se relacionar a solução de classes de LMIs com a solução da equação de Riccati [Boyd et al, 1994b]. Na década de 80, Pyataniskii e Skorodinskii foram pioneiros em abordar os problemas de otimização de controle tratando-os como problemas convexos. Sua principal contribuição foi na solução das equações de Lyapunov pelo algoritmo do elipsóide. Mais tarde, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram o algoritmo dos pontos interiores que passou a ser a mais eficiente técnica de solução de LMIs até então [Boyd et al, 1994b]. Por sua propriedade de convexidade, as LMIs possuem grande importância na solução numérica de problemas de otimização devido à sua eficiência numérica [Boyd et al, 1994a].

Em paralelo ao desenvolvimento de controladores robustos e de desempenho eficientes, o estudo de controle procurou assegurar a colocação de pólos de sistemas de acordo com o interesse do projetista. Seus estudos foram iniciados por Kalman em 1969 que introduziu a noção das regiões polinomiais de primeira e de segunda ordem, exceto elipses e hipérbolas [Gutman, 1979b]. Na década de 70, houve bastantes avanços no problema de alocação de autovalores numa região qualquer com os trabalhos de [Anderson et al, 1974], [Gutman, 1979a] e [Gutman, 1979b]. O problema básico proposto era quais os critérios necessários para que uma dada matriz quadrada tivesse seus autovalores contidos em uma determinada região do plano complexo. Para responder à questão, duas classes de regiões do plano complexo foram desenvolvidas. Uma região definida foi uma classe de polinômios de uma variável de transformação desenvolvida por [Jury e Ahn,

1972] e a outra definida em uma classe de polinômios de duas variáveis abordadas, também, por [Jury e Ahn, 1972]. Esta última região mostrou-se promissora pelo fato de permitir a modelagem de regiões por expressões baseadas nas equações de Lyapunov [Gutman, 1979a]. Suas principais implicações foram fundamentadas em [Gutman e Jury, 1981] que postularam as condições necessárias e suficientes para que uma matriz complexa tenha seus autovalores dentro de uma região qualquer do plano complexo. O tratamento polinomial das regiões de alocação despertou o interesse em utilizar suas propriedades na aplicação de problemas de controladores ótimos.

A principal motivação para o estudo de alocação de pólos é que controladores H_∞ não apresentam bom comportamento transiente [Chilali e Gahinet, 1996] e a alocação de pólos favorece a melhoria das características transientes do sistema. O tratamento da norma H_2 com alocação de pólos foi desenvolvido a partir dos estudos, de meados da década de 80, sob o problema LQG, tendo [Furuta e Kim, 1987], [Haddad e Bernstein, 1992] e [Liu e Yedavalli, 1993] como os autores dos trabalhos mais importantes nesta área. [Bambang, Shimemura e Uchida, 1993] estenderam os resultados anteriores para o problema de norma H_2 abrindo o caminho para o tratamento de alocação de pólos em problemas de otimização norma H_2 com o enfoque para LMIs. Para o problema H_∞ , [Bambang, Shimemura e Uchida, 1993] foram, também, os primeiros a trabalhar a alocação de pólos utilizando o problema de otimização H_∞ para somente a realimentação de estados. Estes desenvolveram uma metodologia que estendeu a definição polinomial para os requisitos de convexidade necessários para problemas H_2 e/ou H_∞ via otimização por LMIs para o problema de realimentação de estados. Para a realimentação de saída somente foi tratado o problema H_∞ . A solução do problema H_2/H_∞ de alocação de pólos em realimentação de saída foi tratada mais tarde por [Sherer, Gahinet e Chilali, 1997].

Uma aplicação importante do problema H_2/H_∞ com alocação de pólos, está no controle de estruturas flexíveis. Uma estrutura flexível apresenta fatores que podem ser difíceis de serem modelados. Uma abordagem de controle robusto é atraente pelo fato de que no projeto do controlador, pode-se assumir que os fatores não previstos no modelo sejam dados como incertezas intrínsecas ao sistema [Zhou, Doyle e Glover, 1996].

Uma fonte de atenção no projeto de controladores para estruturas flexíveis são as incertezas. Nestes tipos de estruturas, as incertezas são decorrentes de aproximações para os

efeitos não modelados na montagem das matrizes do sistema. Particularmente, a correlação entre os dados experimentais de amortecimento com os dados teóricos é muitas vezes difícil, devido à complexidade deste fenômeno o que dificulta o modelamento matemático [Ewins, 1984]. Porém, o problema do amortecimento não pode ser ignorado, pois, afeta diretamente o comportamento dinâmico do sistema, o que significa que novas técnicas de controle devem ser encontradas para estes tipos de sistemas.

Em estruturas flexíveis, incertezas paramétricas são consideradas principalmente na formulação das matrizes de amortecimento. No estudo da dinâmica de estruturas, a aplicação do problema misto H_2/H_∞ tem-se tornado promissora porque a norma H_∞ garante a robustez na presença de distúrbios, ou seja, atenuação de picos de resposta. Já a norma H_2 procura atenuar a resposta ao distúrbio em todo espectro de frequência, mesmo sendo aleatório o distúrbio [Zhou, Doyle e Glover, 1996], [Zhou et al, 1994] e [Doyle et al, 1994].

1.3 Objetivo deste Trabalho

Este trabalho tem como objetivo o estudo da formulação de controle misto H_2/H_∞ com alocação de pólos e a respectiva solução usando desigualdades matriciais lineares (LMI), aplicados a problemas de controle de estruturas flexíveis formadas por elementos de vigas bidimensionais modeladas pelo método dos elementos finitos.

No âmbito de controle, o objetivo é estudar a questão da alocação de pólos para estruturas flexíveis. Com a formulação discretizada proveniente do método dos elementos finitos é desejado garantir que os efeitos das informações não modeladas sobre a dinâmica do sistema não influenciem a estabilidade do mesmo.

O projeto de controle consiste na obtenção de um controlador multiobjetivo ótimo que é obtido via otimização das normas H_2/H_∞ , no qual a robustez e desempenho são buscados e as características dinâmicas transientes melhoradas pela alocação adequada dos pólos do sistema de controle de malha fechada. As regiões para alocação de pólos ficarão restritas neste trabalho à região cônica e ao semiplano do plano complexo. A região cônica é empregada quando há o interesse em limitar o mínimo fator de amortecimento permitido para a planta controlada. A importância do semiplano tem por finalidade diminuir o tempo de resposta transiente, além de prevenir o fenômeno de cancelamento de pólos e zeros entre a planta e o controlador.

A estrutura considerada neste trabalho será uma viga bidimensional sem movimentos de corpos rígidos, engastada em uma das suas extremidades, evitando assim as dificuldades associadas aos pólos em zero. O modelo de discretização por elementos finitos adotará a viga baseada na Teoria de Euler-Bernoulli. Através dos resultados obtidos pela técnica dos elementos finitos, serão formuladas as matrizes de estado necessárias para a determinação do controlador. A metodologia de obtenção do controlador será apoiada na resolução de problemas de otimização via desigualdades matriciais lineares. O conceito de LMIs é um enfoque atual no estudo de controle de sistemas por suas características que permitem uma maior flexibilidade na formulação dos problemas e no emprego de algoritmos eficientes para a solução do problema de otimização associado.

Capítulo 2 - Formulação dos Problemas H_2 e H_∞

2.1 Introdução

Em muitos controladores é desejada a capacidade de rejeição de distúrbios ou estabilização robusta de sistemas. As normas H_2 e H_∞ são utilizadas de forma que a primeira procura reduzir a energia entre a entrada de distúrbios e a resposta do sistema, e a segunda a atenuação do pico de ressonância da mesma matriz de transferência de malha fechada. Uma combinação das duas normas tem como objetivo aumentar a tolerância a um distúrbio externo aleatório no qual os efeitos não previstos podem provocar a perda de estabilidade da planta controlada, além de melhorar o desempenho norma H_2 .

Uma das formas de tratamento matemático dos problemas de controle baseados nas normas H_2 e H_∞ é através de processos de otimização sob restrições do tipo LMIs que são formuladas usualmente de acordo com o critério de estabilidade de Lyapunov.

2.2 Definição de sistemas com controladores robustos

A maioria dos sistemas é de alguma forma não-linear ou possuem parâmetros incertos. Porém são procurados modelos que possam ser considerados lineares e precisos a fim de simplificar o tratamento matemático. Com o intuito de não perder informações essenciais oriundas da linearização, os parâmetros que apresentam não-linearidade ou difícil previsão de comportamento são rotulados como incertezas ao sistema em análise. De outra forma, em sistemas lineares a adoção de incertezas é desejada quando há o problema de determinar a exatidão do valor dos parâmetros. Assim, um sistema real pode ser modelado com a adição de incertezas caracterizando um erro aceitável. Outro fator, mais crítico em termos práticos para

estruturas flexíveis, é a presença de modos de vibração que não foram modelados. A existência deste problema está no fato de que em uma estrutura real há infinitos modos de vibração e num modelo discretizado há somente um número finito de modos. Porém, numa aplicação prática, a presença de modos não modelados pode contribuir para a falha do projeto do controlador que se baseou no modelo teórico. Para contornar esta dificuldade pode-se assumir que a presença dos modos não modelados seja dada na forma de uma incerteza.

2.3 Estabilidade de Lyapunov

Os trabalhos de Lyapunov foram desenvolvidos no final do Século XIX, porém sua importância no estudo de controle foi dada apenas nas últimas décadas do Século XX. Os trabalhos estabelecem uma relação de estabilidade muito útil para aplicação em LMIs.

Da formulação clássica de controle, um sistema é estável se um sistema da forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathfrak{R}^n \quad (2.1)$$

tem a seguinte propriedade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0} \quad (2.2)$$

o que significa também que os valores das partes reais dos autovalores de \mathbf{A} são negativos.

A teoria de Lyapunov diz que um sistema é estável se existe uma matriz simétrica $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ na qual as seguintes proposições são válidas:

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Derivando (2.3) e substituindo (2.1), o resultado de (2.4) é a inequação de estabilidade de Lyapunov:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (2.5)$$

A equação (2.5) é uma LMI. De (2.5) define-se uma matriz definida positiva \mathbf{Q} tal que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.6)$$

e (2.6) é chamada de Equação de Lyapunov com incógnita em \mathbf{P} .

2.4 LMIs

A formulação do problema sob o ponto de vista de LMIs caracteriza uma ferramenta importante para a resolução das desigualdades de Lyapunov, pois uma LMI é linear e permite explorar uma maior eficiência computacional do que restrições que envolvem termos não-lineares. No caso de termos não lineares, em muitas situações de interesse, é possível a conversão para uma LMI usando o complemento de Schur, o que será visto mais adiante. Resumidamente, uma LMI é definida como uma matriz $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ definida positiva, que é representada como:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i x_i > 0 \quad (2.7)$$

sendo que m é a dimensão do vetor de variáveis \mathbf{x} , e \mathbf{F}_i é uma função matricial em relação a \mathbf{x} , tal que $\mathbf{F}_i \in \mathfrak{R}^{m \times m}$. A inequação (2.7) significa que $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ é positivo-definida, ou seja, para $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, a expressão $\mathbf{z}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{z} > 0$ é válida para todo $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ [VanAntwerp e Braatz, 2000] e [Boyd et al, 1994].

A LMI $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$ é uma restrição convexa o que a torna numericamente eficiente sob o ponto de vista da otimização. A vantagem do uso de LMIs em problemas de controle está no fato da formulação por LMI poder ser aplicada a vários tipos de problemas, além de possibilitar a obtenção de soluções muito próximas das exatas com o uso de softwares eficientes de otimização convexa.

2.5 Normas H_2 e H_∞

Estas normas são consideradas muito úteis para a obtenção de controladores eficientes nos quesitos de desempenho e estabilidade.

A minimização da norma H_2 tem como função obter uma redução da energia de transferência provocada por algum distúrbio que acarretaria numa resposta imprópria por parte do controlador, prejudicando o desempenho do mesmo. Sua caracterização temporal se traduz na área da curva da resposta ao impulso.

A minimização da norma H_∞ tem o compromisso de assegurar a estabilidade ao sistema mesmo que haja algum evento externo imprevisto que provoque uma amplificação excessiva na resposta da planta.

As definições das normas H_2 e H_∞ como funções matemáticas serão abordadas a seguir.

- **Norma H_∞**

Seja $\mathbf{H}(s)$ uma matriz de função de transferência que é não singular na parte real positiva do plano complexo [Doyle et al, 1998]. A norma H_∞ de $\mathbf{H}(s)$ é definida como:

$$\|\mathbf{H}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathcal{R}} \{\sigma_{\max}[\mathbf{H}(j\omega)]\} \quad (2.8)$$

ou seja, a norma H_∞ de $\mathbf{H}(s)$ é o supremo do maior valor singular da função. Além disso, para SMF (sistemas de malha fechada) estáveis é necessário que $\|\mathbf{H}\|_\infty < \infty$, ou seja, a norma H_∞ é limitada superiormente [Zhou e Khargonekar, 1988] e [Doyle et al, 1989].

Se a norma H_∞ de um SMF é estável e limitada superiormente, há um número real que representa isto. O interesse desta definição é correlacionar esta norma a alguma relação algébrica que permita a análise da estabilidade. Neste caso, é útil correlacionar a norma H_∞ com uma importante equação de controle, a equação de Riccati. As condições para que a norma H_∞ se

relacione à equação de Riccati foram dadas por Zhou e Khargonekar no seguinte teorema, observando que $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ são as matrizes de estado de uma planta genérica dada por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (2.9)$$

Teorema 2.1 [Zhou e Khargonekar, 1988]

Sejam $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ matrizes de dimensões compatíveis. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) \mathbf{A} é uma matriz estável e $\left\| \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \right\|_{\infty} \leq \gamma$ com $\gamma > 0$

ii) $\gamma^2\mathbf{I} - \mathbf{D}^T\mathbf{D} > 0$ e existe uma matriz simétrica positivo-definida $\mathbf{X} > 0$ tal que:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + (\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{C}^T\mathbf{D})(\gamma^2\mathbf{I} - \mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}(\mathbf{B}^T\mathbf{X} + \mathbf{D}^T\mathbf{C}) + \mathbf{C}^T\mathbf{C} < 0 \quad (2.10)$$

Para maiores detalhes, como a prova do Teorema, veja [Zhou e Khargonekar, 1988]. O primeiro postulado do Teorema 2.1 confirma que há um limitante superior da norma H_{∞} da matriz função transferência quando a matriz \mathbf{A} é estável. O segundo postulado, garante que se há um γ real, tal que, $\gamma^2\mathbf{I} - \mathbf{D}^T\mathbf{D} > 0$, existirá uma matriz positivo-definida \mathbf{X} que será a solução da inequação de Riccati. Este último é uma importante relação que garantirá a existência de factibilidade para os problemas de otimização.

- **Norma H_2**

Seja $\mathbf{H}(s)$ uma matriz de função de transferência estritamente própria [Khargonekar e Rotea, 1991]. A norma H_2 de $\mathbf{H}(s)$ é definida como:

$$\|\mathbf{H}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Tr}(\mathbf{H}(j\omega)^* \mathbf{H}(j\omega)) d\omega \quad (2.11)$$

ou seja, a integral do traço do produto da matriz conjugada transposta de $\mathbf{H}(j\omega)$ por ela própria.

Seja $\mathbf{H}(s)$ dada por:

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (2.12)$$

Fazendo a transformada inversa de Laplace em (2.12) e aplicando o resultado na definição da norma H_2 no domínio do tempo, mostra-se que:

$$\left(L^{-1}\{\mathbf{H}(s)\}\right)^2 = \left(L^{-1}\{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\}\right)^2 = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B}\right) dt \quad (2.13)$$

$$\|\mathbf{H}(s)\|_2^2 = \text{Tr} \left\{ \int_0^{\infty} \left(\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B}\right) dt \right\} = \text{Tr} \left\{ \mathbf{B}^T \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt \mathbf{B} \right\} \quad (2.14)$$

Como \mathbf{A} é estável, existe uma matriz \mathbf{P}_0 dada por:

$$\mathbf{P}_0 = \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt \geq 0 \quad (2.15)$$

e, desta forma, tem-se:

$$\|\mathbf{H}(s)\|_2^2 = \text{Tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{B}) \quad (2.16)$$

sendo que \mathbf{P}_0 é solução da seguinte equação de Lyapunov [Geromel, 2001]:

$$\mathbf{A}'\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{C}' = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

Vale lembrar que (2.17) é válida somente para sistemas estritamente próprios, ou seja $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

Capítulo 3 - Otimização através da Norma H_∞

A Figura 3.1 mostra uma planta a ser controlada que está sujeita a distúrbios. Deste sistema serão projetados controladores com a informação obtida de parâmetros calculados na formulação de otimização norma H_∞ sob restrições de estabilidade, derivadas das inequações de Riccati. A otimização será dada em duas situações de modelamento: na realimentação de estados e na de saída.

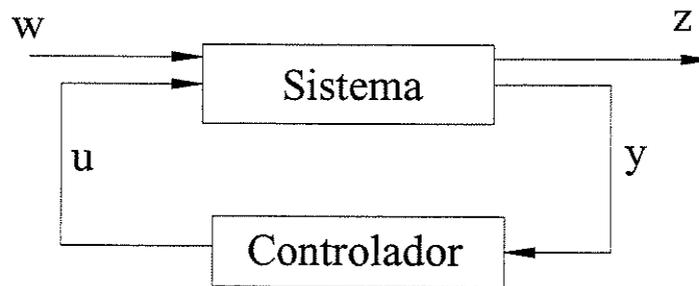


Figura 3.1 - Sistema em malha fechada sujeito a distúrbios.

3.1 Modelo de Realimentação de Estado

Considere a seguinte representação na forma de estados:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.1)$$

O problema de otimização é encontrar um controlador \mathbf{F} que garanta as condições de estabilidade ao SMF minimizando a norma H_∞ . Fazendo as substituições adequadas em (3.1), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} \\ \mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})\mathbf{x} \end{cases} \quad (3.2)$$

A função de transferência \mathbf{H}_{zw} de (3.2), é:

$$\mathbf{H}_{zw} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}))^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (3.3)$$

que representa a função de transferência entre a entrada exógena \mathbf{w} e a resposta \mathbf{z} da planta. O problema principal é encontrar uma solução factível para (3.3) utilizando a inequação de estabilidade de Riccati. Aplicando a representação de estado obtida em (3.2) na inequação de Riccati em (2.10), resulta em:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}) + \gamma^{-2} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})^T (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}) < 0 \quad (3.4)$$

No projeto de um controlador H_∞ , o próximo passo é obter um controlador capaz de assegurar a estabilidade que garanta a redução do maior valor singular da planta, satisfazendo (3.4). [Zhou e Khargonekar, 1988] definiram as condições a fim de obter um controlador ótimo.

Teorema 3.1 [Zhou e Khargonekar, 1988]:

Considerando que $\gamma > 0$ e $\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{D}_{22}^T \mathbf{D}_{22} > 0$, o sistema (3.1) satisfaz a equação de Riccati para um dado γ constante.

Por outro lado, se $\gamma > 0$ é tal que $\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{D}_{22}^T \mathbf{D}_{22} > 0$ e o sistema (3.1) satisfaz a equação de Riccati para γ constante, então a matriz \mathbf{F} do controlador satisfaz:

$$0 \leq \left\| (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}))^{-1} \mathbf{B}_1 \right\|_\infty < \gamma \quad (3.5)$$

O primeiro parágrafo deste Teorema reforça o item (i) do Teorema 2.1 do capítulo 2, e o segundo parágrafo afirma que assegurando $\gamma^2 \mathbf{I} - \mathbf{D}_{22}^T \mathbf{D}_{22} > 0$ para um dado γ , então a norma H_∞ da matriz função de transferência do sistema (3.1) é limitada superiormente por γ e inferiormente por 0. Assim a norma H_∞ de (3.3) precisa ser menor de γ para assegurar que (3.2) seja estável. Desta forma conclui-se que o problema de obter um controlador \mathbf{F} que assegure uma maior tolerância a distúrbios em (3.2) é formulado da seguinte maneira como um problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 & \min \gamma \\
 & \text{s.a.} \\
 & \begin{cases} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}) + \gamma^{-2} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})^T (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{21} \mathbf{F}) < 0 \\ \mathbf{P} > 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ou seja, minimizar γ sob a restrição da inequação de Riccati a fim de garantir a estabilidade.

Nota-se em (3.6), termos não lineares em $\gamma^{-2} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}$ e $(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})^T (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{21} \mathbf{F})$, o que não permite tratar (3.6) como um problema de LMI. Portanto, é necessário transformar este problema em um problema na forma de uma LMI. Com o uso adequado do complemento de Schur em (3.6) tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \min \mu \\
 & \text{s.a.} \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{Y} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\
 & \mathbf{X} > 0
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

sendo que $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{F}$ e μ são as variáveis de otimização, que uma vez determinadas por algoritmos de otimização, permitem a determinação do controlador ótimo e $\gamma_{\text{ótimo}}$ como:

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{ótimo}} &= \sqrt{\mu} \\ \mathbf{F}_{\text{ótimo}} &= \mathbf{YX}^{-1}\end{aligned}\tag{3.8}$$

3.2 Modelo de Realimentação de Saída

O modelo de realimentação de saída ou controlador dinâmico é empregado quando um sistema apresenta características segundo as quais os estados são difíceis de monitorar ou sua monitoração acarretaria numa pior relação custo-benefício para a implementação de um controlador.

A representação de estado de uma planta para a modelagem de um controlador dinâmico é dada abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases}\tag{3.9}$$

Para o modelo de controlador dinâmico que resulte em uma solução factível, para (3.9) é imposto que o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ seja controlável [Gahinet e Apkarian, 1994]. Esta condição é imposta em (3.9) a fim de que a planta possa ser controlada. Para a simplificação dos cálculos sem perda de generalidade é assumido que $\mathbf{D}_{11} = \mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ [Doyle et al, 1989].

O controlador dinâmico é representado a seguir [Khargonekar e Rotea, 1991]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c \end{cases}\tag{3.10}$$

O objetivo deste problema é determinar os valores de \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C}_c para que a planta (3.9) com o controlador (3.10) tenha características de desempenho que garantam robustez na presença de distúrbios. Desta forma, substituindo a equação (3.10) na equação (3.9) tem-se:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_1\mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21})\mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + (\mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c)\mathbf{x}_c \end{cases} \quad (3.11)$$

Pode-se escrever a equação (3.11), que representa o sistema de malha fechada [Khargonekar e Rotea, 1991], [Gahinet e Apkarian, 1994] na forma abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} = \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.12)$$

sendo que os termos $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ são descritos como:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{Bmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_c \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{C}} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c] \quad (3.13)$$

Nesta formulação, o controlador é de ordem completa, portanto é necessário assegurar que $\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{x}_c)$. De posse de (3.13), pode-se escrever a função de transferência de \mathbf{z} para \mathbf{w} da mesma forma que em (3.3). Desta forma:

$$\mathbf{H}_{zw} = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \quad (3.14)$$

Observando (3.14), uma pergunta que se faz é: as condições de formular um problema de otimização a fim de obter um controlador robusto com realimentação de estado podem ser aplicadas ao problema do controlador dinâmico? A resposta foi dada por [Doyle et al, 1989]. Estes desenvolveram um trabalho no qual a conclusão foi que as mesmas condições podem ser aplicadas ao problema do controlador com realimentação de saída. Eles concluíram que para o sistema (3.9) admitir um controlador estável é necessário que a norma função de transferência seja limitada, ou seja:

$$\|\mathbf{H}_{zw}\| = \left\| \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} \right\| = \gamma < \infty \quad (3.15)$$

Além disso, a norma do sistema deve assumir um ínfimo valor de γ para que exista um controlador ótimo que torne o sistema estável [Zhou e Khargonekar, 1988]. Portanto, o procedimento de minimizar o valor de γ sujeito a uma inequação de Riccati com o intuito de aumentar a robustez sem comprometer a estabilidade interna do sistema, é preservado para o modelo de realimentação de saída. O problema de síntese de um controlador submetido à norma H_∞ a partir de (3.15) é dado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \min \gamma \\ & \text{s.a.} \\ & \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} + \gamma^{-2} \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} < 0 \\ \tilde{\mathbf{P}} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Veja que (3.16) ainda não representa um problema de LMI devido a termos não-lineares na inequação. Desta forma é necessário fazer as devidas substituições a fim de tornar (3.16) um problema de otimização válido para solução como um problema convexo. [Chilali e Gahinet, 1996] mostraram uma metodologia de obter LMIs a partir de (3.16), e esta metodologia foi exemplificada em [Geromel, 2001] e será adotada neste trabalho. Admite-se $\tilde{\mathbf{P}}$ como uma matriz de incógnitas simétrica, e que é definida como:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.17)$$

com \mathbf{X} simétrica. E sua inversa é dada por:

$$\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{V} & \hat{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.18)$$

sendo \mathbf{Y} simétrica.

Considere a matriz de transformação abaixo:

$$\tilde{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

De posse de (3.19) e utilizando a transformação congruente em $\tilde{\mathbf{P}}$, são feitas as seguintes modificações:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}} > 0 &\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} > 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Levando em conta (3.13), a seguir serão dadas as seguintes transformações congruentes:

$$\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{T}} = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_1\mathbf{C}_c] \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{C}_c\mathbf{V} \quad \mathbf{C}_1] = [\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} \quad \mathbf{C}_1] \quad (3.21)$$

com $\mathbf{F} = \mathbf{C}_c\mathbf{V}$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} &= [\mathbf{B}_1^T \quad \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{B}_c^T] \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1^T \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{B}_c^T \mathbf{U}] \\ &= [\mathbf{B}_1^T \quad \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{L}^T] \end{aligned} \quad (3.22)$$

com: $\mathbf{L} = \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c$.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{V}^T \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{U}^T \\ \mathbf{U} & \hat{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{V} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} \\ \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_c\mathbf{V} & \mathbf{X}\mathbf{A} - \mathbf{U}^T \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} \\ \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_c\mathbf{V} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} \\ \mathbf{M} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

com $\mathbf{M} = \mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}^T \mathbf{A}_c\mathbf{V}$.

Aplicando o complemento de Schur na primeira inequação de (3.16), em termos de $\tilde{\mathbf{P}}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}^T & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.24)$$

Aplicando a transformação congruente de $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ em (3.24), ou seja,

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T & \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}^T & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{C}}^T & \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{T}} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}^T \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.25)$$

com $\mu = \gamma^2$. Substituindo os termos calculados em (3.20), (3.21), (3.22) e (3.23) em (3.25), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^T + \mathbf{F}^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T & \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{M} + \mathbf{A}^T & \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T \mathbf{L}^T & \mathbf{C}_1^T & \mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{L}^T & \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.26)$$

Através de (3.26), o problema de minimização da norma H_∞ pode ser representado na forma de otimização com restrições LMI como:

min γ

s.a.

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{YA}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T & \mathbf{YC}_1^T + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_{12}^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{M} + \mathbf{A}^T & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T & \mathbf{C}_1^T & \mathbf{XB}_1 + \mathbf{LD}_{21} \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1^T\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{L}^T & \mathbf{0} & -\mu\mathbf{I} \end{array} \right] < \mathbf{0}$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{array} \right] > \mathbf{0}$$

(3.27)

sendo que as incógnitas são: γ , \mathbf{L} , \mathbf{Y} , \mathbf{X} , \mathbf{F} e \mathbf{M} .

Uma vez determinadas as incógnitas, as matrizes do controlador são obtidas da seguinte forma:

- Primeiro, determina-se \mathbf{V} , considerando \mathbf{U}^T arbitrário e invertível:

$$\mathbf{XY} + \mathbf{U}^T\mathbf{V} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}^T\mathbf{V} = (\mathbf{I} - \mathbf{XY}) \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{U}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{XY})$$

- De posse de \mathbf{V} , as demais matrizes são calculadas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{C}_c\mathbf{V} \Rightarrow \mathbf{C}_c = \mathbf{FV}^{-1} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}^T\mathbf{B}_c \Rightarrow \mathbf{B}_c = (\mathbf{U}^T)^{-1}\mathbf{L} \quad (3.29)$$

- De $\mathbf{M} = \mathbf{XAY} + \mathbf{XB}_2\mathbf{F} + \mathbf{LC}_2\mathbf{Y} + \mathbf{U}^T\mathbf{A}_c\mathbf{V}$, \mathbf{A}_c é obtida:

$$\mathbf{A}_c = (\mathbf{U}^T)^{-1}(\mathbf{M} - \mathbf{XAY} - \mathbf{XB}_2\mathbf{F} - \mathbf{LC}_2\mathbf{Y})\mathbf{V}^{-1} \quad (3.30)$$

Logo, através da solução do problema de otimização dado por (3.27), obtém-se \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C}_c que caracterizam o controlador dinâmico procurado.

Vale salientar que [Geromel, 2001] menciona que \mathbf{U} não interfere no desempenho do sistema, portanto adota-se $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ a fim de simplificar os cálculos.

Capítulo 4 - Otimização através da Norma H_2

A Figura 4.1 mostra uma planta a ser controlada. Deste sistema serão projetados controladores com a informação obtida de parâmetros calculados na otimização da norma H_2 limitada a condições de estabilidade. O objetivo principal é projetar um controlador que garanta o melhor desempenho da planta controlada sob a resposta impulsiva. A otimização será dada em duas situações: na realimentação de estado e na realimentação de saída.

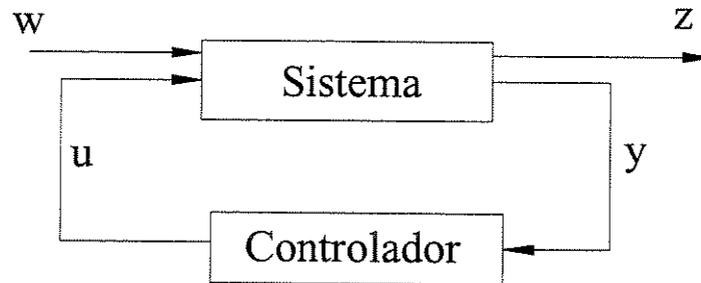


Figura 4.1 - Sistema em malha fechada

A fim de obter uma expressão válida para a utilização da norma H_2 para o projeto de controladores estáveis é necessário e suficiente a existência de uma matriz simétrica \mathbf{P} onde $\mathbf{P} \geq \mathbf{P}_0$ e \mathbf{P} seja a solução da inequação de Lyapunov (3.38) [Khargonekar e Rotea, 1991]. Assim, para $\mathbf{P} \geq \mathbf{P}_0$, a equação (3.38), torna-se:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}' \mathbf{C} < 0 \quad (4.1)$$

Esta expressão norteará o desenvolvimento dos controladores baseados no compromisso em desempenho pois a inequação de Lyapunov é a condição de estabilidade para o problema H_2 .

4.1 Modelo de Realimentação de Estado

Utilizando o modelo de estado adotado em (3.2) no Capítulo 3, que é:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{w} \\ \mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.2)$$

A matriz função de transferência de (4.2) é:

$$\mathbf{H}_{zw} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}))^{-1} \mathbf{B}_1 \quad (4.3)$$

A norma H_2 de \mathbf{H}_{zw} é calculada conforme a definição dada em (2.11). Aplicando a inequação de Lyapunov (2.17) para (4.2), resulta em:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}) + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})^T (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}) < 0 \quad (4.4)$$

Nota-se que (4.4) não é uma restrição convexa devido aos termos \mathbf{FP} e \mathbf{PF}^T . Porém, pré-multiplicando e pós-multiplicando a inequação de (4.4) por \mathbf{P}^{-1} , tem-se:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^T + \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})^T (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F})\mathbf{P}^{-1} < 0 \quad (4.5)$$

Definindo $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{Y} = \mathbf{FP}^{-1}$, onde $\mathbf{F} = \mathbf{YX}^{-1}$, tem-se:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{XA}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2^T + (\mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y})^T (\mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y}) < 0 \quad (4.6)$$

Aplicando o complemento de Schur em (4.6) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AX} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{XA}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2^T & (\mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y})^T \\ (\mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y}) & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.7)$$

Utilizando as conclusões dadas por [Doyle et al, 1989] e [Khargonekar e Rotea, 1991], a condição para a obtenção de um controlador ótimo via norma H_2 é obter o valor mínimo do traço da matriz função de transferência de (4.2), ou seja:

$$\min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2^2 = \min [\text{Tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})] \quad (4.8)$$

Para a função matricial (4.8), define-se uma matriz \mathbf{Z} tal que:

$$\mathbf{Z} > \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B} \quad (4.9)$$

Rearranjando (4.9) obtém-se:

$$\mathbf{Z} > \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \quad (4.10)$$

Aplicando o complemento de Schur, a inequação (4.10) assume a forma linear e convexa, portanto se tornando uma LMI. Assim:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \\ \mathbf{P} \mathbf{B}_1 & \mathbf{P} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.11)$$

De (4.9) pode-se concluir que minimizar $\text{Tr}(\mathbf{Z})$ significa minimizar $\text{Tr}(\mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1)$. Para a obtenção do problema de otimização da norma H_2 , é necessário garantir a estabilidade, dada por (4.7), e associando-a à condição para obtenção de um controlador ótimo, definido por (4.11), ou seja:

$$\min \|\mathbf{H}\|_2^2 = \min \text{Tr}(\mathbf{Z}) \quad (4.12)$$

s. a.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \end{cases}$$

com $\mathbf{F} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$.

4.2 Modelo de Realimentação de Saída

O problema de controle baseado na norma H_2 tem o objetivo de minimizar a norma H_2 , a fim de obter um melhor desempenho do sistema segundo a norma H_2 , mesmo sujeito a perturbações externas.

Considere o modelo dado em (3.9), o controlador em (3.10) e o mesmo tratamento de (3.11), (3.12), (3.13) e (3.14).

Como $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$, a inequação de Lyapunov associada à (3.14) é:

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} < 0 \quad (4.13)$$

A fim de linearizar (4.13) é aplicado o complemento de Schur, o que resulta em:

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} < -\tilde{\mathbf{C}}^T \tilde{\mathbf{C}} \xrightarrow{\text{Schur}} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

De forma análoga ao problema de realimentação de estado, [Khargonekar e Rotea, 1991] propõem que o problema de otimização norma H_2 seja definido como:

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{H}\|_2^2 &= \min Tr(\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}}) \\ \text{s.a.} & \\ \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \right. & \end{aligned} \quad (4.15)$$

Utilizando (4.10) e aplicando o complemento de Schur, a expressão (4.15) torna-se:

$$\min \|\mathbf{H}\|_2^2 = \min \text{Tr}(\mathbf{Z})$$

s.a.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Agora, considere a transformação congruente dada por $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$ sobre a primeira inequação de (4.16):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{P}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.17)$$

substituindo (3.20) e (3.22) em (4.17), e levando-se em conta as transformações congruentes, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{L}^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.18)$$

Aplicando novamente a transformação congruente de $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}$ sobre a segunda inequação de (4.17), surge:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{T}} + \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{T}}^T \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{T}} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.19)$$

Substituindo em (4.19) as definições dadas em (3.21) e (3.23), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T & \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{A}^T + \mathbf{M} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y}^T + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.20)$$

Portanto, a forma final do problema de otimização H_2 com realimentação de saída é dado a seguir:

$$\begin{cases} \min \|\mathbf{H}\|_2^2 = \min Tr(\mathbf{Z}) \\ \text{sujeito a} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1^T\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T\mathbf{L}^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{X}^T\mathbf{B}_1 + \mathbf{L}\mathbf{D}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T & \mathbf{Y}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{F}^T\mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{A}^T + \mathbf{M} & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y}^T + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

no qual as variáveis simétricas são: \mathbf{Z} , \mathbf{Y} e \mathbf{X} . E as variáveis \mathbf{L} , \mathbf{F} e \mathbf{M} são matrizes genéricas. As matrizes do controlador são calculadas da mesma forma que em (3.28), (3.29) e (3.30).

Capítulo 5 - Otimização através do Problema Misto H_2/H_∞

Um controlador ótimo H_∞ garante uma maior margem de tolerância às incertezas presentes na planta. O controlador ótimo H_2 faz assegurar a atenuação da resposta impulsiva no sistema. Uma combinação de otimização em que as duas estejam presentes é interessante já que faria existir um controlador capaz de tolerar distúrbios e com bom desempenho em termos da norma H_2 . Nesta seção, será visto o problema de minimização da norma H_2 sujeita à restrições da formulação H_∞ .

5.1 Realimentação de Estados

Na formulação do controle misto H_2/H_∞ procura-se minimizar a norma H_2 sujeita à restrição do controle H_∞ . Isto significa encontrar um controlador que reduza a atenuação da resposta impulsiva o máximo possível, e que ainda garanta uma margem rejeição aos distúrbios.

O esquema do modelo de controle misto é dado na Figura 5.1 seguir:

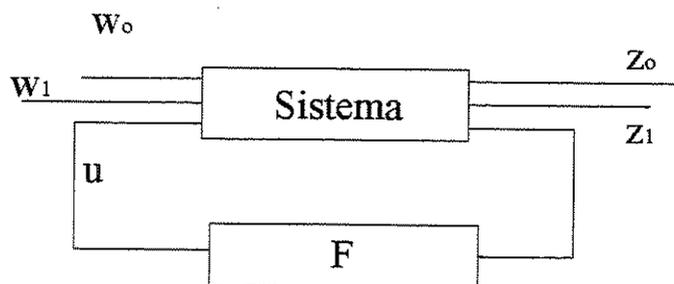


Figura 5.1 - Esquema para o controle misto H_∞/H_2 .

A Figura 5.1 mostra um sistema de duas entradas, denominadas de w_0 e w_1 . Sendo que w_0 está relacionada ao controlador H_∞ e que w_1 é relacionada ao controlador H_2 . As entradas z_0 e z_1 são as saídas de desempenho para os modelos H_∞ e H_2 , respectivamente. Matematicamente, o problema de controle misto é dado da seguinte forma [Khargonekar e Rotea, 1991]:

$$\min \left\{ \left\| \mathbf{H}_{z_1 w_1} \right\|_2^2 : \left\| \mathbf{H}_{z_0 w_0} \right\|_\infty < \gamma \right\} \quad (5.1)$$

O problema de otimização consiste na minimização do valor do traço da matriz função de transferência sob a condição de garantir um valor de γ que aumente a tolerância do sistema a incertezas. O problema pode ser apresentado de forma ilustrativa pela Figura 5.2 que contém um controlador ótimo para o sistema obtido na minimização do traço de \mathbf{Z} sob um valor de γ dado.

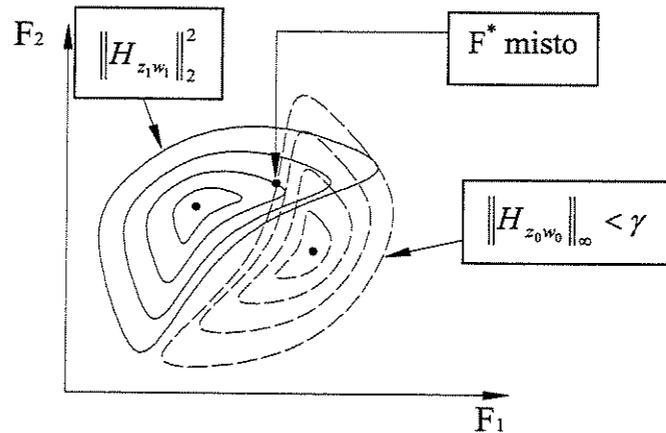


Figura 5.2 - Representação esquemática das regiões ótimas de H_∞/H_2 .

sendo F_1 e F_2 as matrizes dos controladores H_2 e H_∞ , respectivamente.

Considere o sistema linear representado na Figura 5.1. Sua equação de estado é definida a seguir [Khargonekar e Rotea, 1991], [Geromel, 2001]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_0\mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z}_0 = \mathbf{C}_0\mathbf{x} + \mathbf{D}_{02}\mathbf{u} \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} \end{cases} \quad (5.2)$$

Fechando a malha do sistema representado em (5.2) tem-se as funções de transferência $\mathbf{H}_{z_1 w_1}$ e $\mathbf{H}_{z_0 w_0}$ que são:

$$\mathbf{H}_{z_0 w_0} = (\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_{02}\mathbf{F})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}))^{-1}\mathbf{B}_0 \quad (5.3)$$

$$\mathbf{H}_{z_1 w_1} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F})(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}))^{-1}\mathbf{B}_1 \quad (5.4)$$

As matrizes função de transferência (5.3) e (5.4) permitem caracterizar um problema de otimização relacionado a (5.2) com o uso das normas H_2 e H_∞ respectivamente. Aplicando o conceito das normas H_∞ e H_2 , respectivamente, nas equações (5.3) e (5.4) e fazendo os procedimentos já mostrados neste trabalho nos Capítulos 4 e 5, surgem as formulações de otimização:

$$\begin{aligned} H_2 & \left\{ \begin{array}{l} \min Tr(\mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1) \\ \text{sujeito a} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F})^T \mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}) + (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F})^T (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F}) < 0 \\ \mathbf{P} > 0 \end{array} \right. \\ H_\infty & \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F})^T \mathbf{W} + \mathbf{W}(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}) + \gamma^{-2} \mathbf{W} \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T \mathbf{W} + (\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_{02}\mathbf{F})^T (\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_{02}\mathbf{F}) < 0 \\ \mathbf{W} > 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Condicionando que a igualdade $\mathbf{P} = \mathbf{W}$ seja aplicada, o problema (5.5) garantirá factibilidade e convexidade em sua solução [Khargonekar e Rotea, 1991]. Esta consideração permite que o problema seja resolvido com facilidade, porém transforma a solução em subótima. Substituindo $\mathbf{P} = \mathbf{W}$ e efetuando as seguintes substituições de variáveis:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{F}\mathbf{P}^{-1} &= \mathbf{Y} \\ \mu &= \gamma^{-2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

o problema (5.5) resulta em:

$$\begin{aligned}
& \min Tr(\mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{B}_1) \\
& \text{s.a.} \\
& \begin{cases} (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y})^T + (\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y}) + (\mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y})^T (\mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y}) < 0 \\ (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y})^T + \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mu \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^T + (\mathbf{C}_0 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{02} \mathbf{Y})^T (\mathbf{C}_0 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{02} \mathbf{Y}) < 0 \\ \mathbf{X} > 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Fazendo as devidas transformações via complemento de Schur em (5.7) e usando (4.10), o problema de H_2/H_∞ é obtido:

$$\begin{aligned}
& \min Tr(\mathbf{Z}) \\
& \text{sujeito a} \\
& \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{X}\mathbf{C}_1^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{Y} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{X}\mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{X}\mathbf{C}_0^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{D}_{02}^T & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C}_0 \mathbf{X} + \mathbf{D}_{02} \mathbf{Y} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_0^T & \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I} \end{bmatrix} < 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Uma vez obtida a solução de (5.8), o controlador ótimo é calculado pela fórmula $\mathbf{F} = \mathbf{Y}\mathbf{X}^{-1}$.

5.2 Realimentação de Saída

O problema misto de realimentação de saída tem como equações de estado da planta [Khargonekar e Rotea, 1991]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_0 \mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{u} \\ \mathbf{z}_0 = \mathbf{C}_0 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{02} \mathbf{u} \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{20} \mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}_1 \end{cases} \tag{5.9}$$

sendo que o subscrito “zero” representa o modelo H_∞ e o subscrito “um”, o problema H_2 . O controlador dinâmico é dado pela equação (3.10).

O problema de realimentação de saída assume duas entradas e duas saídas de desempenho. Assim a matriz função de transferência assume, para o caso H_∞ :

$$\mathbf{H}_{z_0 w_0} = \tilde{\mathbf{C}}_0 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_0 \quad (5.10)$$

e para a formulação H_2 :

$$\mathbf{H}_{z_1 w_1} = \tilde{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}}_1 \quad (5.11)$$

A partir de (5.10) e (5.11) o problema misto de realimentação de saída assume a seguinte formulação:

$$\min \|\mathbf{H}\|_2^2 = \min \text{Tr}(\tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{cc} \mathbf{Z} & \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}} \\ \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{P}} \end{array} \right] > 0 \\ \left[\begin{array}{cc} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{W}} + \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{A}} & \tilde{\mathbf{C}}^T & \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{B}} \\ \tilde{\mathbf{C}} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{W}}^T & \mathbf{0} & -\gamma^2 \mathbf{I} \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. \quad (5.12)$$

Da mesma forma tratada na seção 5.1, assume-se que $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{W}}$. Utilizando os mesmos argumentos e métodos mostrados nas seções 3.2 e 4.2 para a formulação de LMIs, o problema de otimização misto para realimentação de saída, derivado de (5.12), pode ser caracterizado como:

$$\min \|\mathbf{H}\|_2^2 = \min Tr(\mathbf{Z})$$

s.a.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{L}^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} & \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{array} \right] > 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{Y} \mathbf{A}^T + \mathbf{F}^T \mathbf{B}_2^T + \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T & \mathbf{Y} \mathbf{C}_1^T + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_{12}^T \\ \mathbf{A}^T + \mathbf{M} & \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T \mathbf{L}^T & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{C}_1 \mathbf{Y}^T + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{I} \end{array} \right] < 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} + \mathbf{Y} \mathbf{A}^T + \mathbf{F}^T \mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T & \mathbf{Y} \mathbf{C}_0^T + \mathbf{F}^T \mathbf{D}_{02}^T & \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{M} + \mathbf{A}^T & \mathbf{X} \mathbf{A} + \mathbf{L} \mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^T \mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T \mathbf{L}^T & \mathbf{C}_0^T & \mathbf{X} \mathbf{B}_0 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{20} \\ \mathbf{C}_0 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{02} \mathbf{F} & \mathbf{C}_0 & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_0^T & \mathbf{B}_0^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{20}^T \mathbf{L}^T & \mathbf{0} & -\mu \mathbf{I} \end{array} \right] < 0 \end{array} \right. \quad (5.13)$$

sendo \mathbf{Z} , \mathbf{Y} , \mathbf{X} variáveis matriciais simétricas e \mathbf{L} , \mathbf{F} e \mathbf{M} variáveis matriciais genéricas. Uma vez obtida a solução de (5.13) as matrizes dos controladores \mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c e \mathbf{C}_c são calculadas da mesma forma que em (3.28), (3.29) e (3.30).

Um comentário sobre a otimização de sistemas com realimentação de saída é que nestes problemas de minimização ocorre, com razoável freqüência, a obtenção de valores próximos da singularidade para a inversa de \mathbf{V} . Este fato está relacionado com a solução das matrizes incógnitas \mathbf{X} e \mathbf{Y} . Estas ocasionam um problema de mau condicionamento na equação $\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{Y}$ que é responsável por determinar \mathbf{V} para que este defina as matrizes dos controladores [Scherer, Gahinet e Chilali, 1997]. Os mesmos autores sugerem que para evitar o problema de mau condicionamento deve ser introduzido um escalar positivo t para iterações próximas ao valor ótimo, obtendo-se a nova LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & t\mathbf{I} \\ t\mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.14)$$

Para o problema de otimização H_∞ e para o problema H_2 a modificação é dada em :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{B}_1^T & \mathbf{B}_1^T \mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}^T \mathbf{L}^T \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{Y} & t\mathbf{I} \\ \mathbf{X}^T \mathbf{B}_1 + \mathbf{L} \mathbf{D}_{21} & t\mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0 \quad (5.15)$$

e, então, procura-se maximizar t . Tal procedimento faz maximizar o menor autovalor de \mathbf{XY} que reduz as chances de mau-condicionamento em $\mathbf{I} - \mathbf{XY}$. Uma dificuldade em aplicar esta técnica é que em pacotes comerciais como o MATLAB, o usuário não é capaz de interromper a otimização para a introdução da variável t para depois continuar a otimização. Portanto, uma alternativa é, por tentativa e erro, adotar valores positivos de t , iniciando de 1 e aumentando até obter um valor de $\mathbf{I} - \mathbf{XY}$ bem condicionado.

Para todos os modelos de obtenção de controladores mostrados anteriormente, deve-se observar que todos eles são válidos para controladores de ordem completa. Sua aplicação para modelos de controladores de ordem reduzida não é recomendada porque a utilização destas LMIs faz com que a caracterização do problema deixe de ser convexa. Para a solução deste problema seria necessário o estudo de restrições adicionais a fim de considerar a ordem do controlador [Fares, Apkarian e Noll, 2001]. Este estudo não foi abordado neste trabalho.

Capítulo 6 -LMIs para Alocação de Pólos

6.1 Definição de Regiões no Plano Complexo

É sabido que o comportamento transiente de um sistema linear é fortemente influenciado pela localização dos seus pólos. Muitos trabalhos procuram demonstrar técnicas de posicionar os autovalores de uma matriz de controle em uma dada região a fim de que o sistema assuma um determinado comportamento. Alguns parâmetros de interesse que podem ser manipulados numa planta controlada são: o amortecimento e a velocidade de resposta transiente. Portanto, o que se deseja é definir uma região no plano complexo onde os parâmetros de amortecimento e da velocidade de resposta podem ser descritas na forma de uma função. Costumeiramente tal função é definida como $S(\alpha, r, \theta)$.

A função dada é uma intersecção de três curvas que caracterizam um determinado comportamento transiente. Dado $z \in \mathbf{C}$, tal que $z = x + iy$, as três curvas são definidas pelos seguintes parâmetros:

- $x < -\alpha < 0$: representa fisicamente a constante de decaimento do sistema, que no plano complexo, corresponde a uma região à esquerda de uma reta vertical separadora. Sua importância está no fato de determinar a velocidade de resposta transiente da planta.
- $|x + iy| < r$: representa a região de alocação da frequência natural, que no plano complexo resulta em uma região circular. Para este trabalho esta região não será considerada.
- $x \tan(\theta) < -|y|$: representa o valor mínimo da constante de amortecimento, representado pela região cônica.

Graficamente a região S é representada na Figura 6.1:

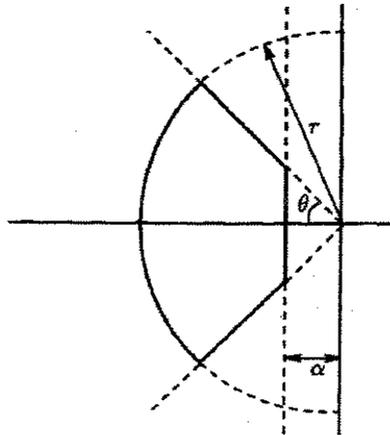


Figura 6.1 - Regiões de alocação de pólos.

6.2 LMIs como restrições de alocação de pólos

A utilização de LMIs no âmbito de controle se tornou bastante útil porque facilita a modelagem de vários problemas. Por sua característica convexa, um problema complexo envolvendo várias LMIs, pode ser resolvido com o uso de algoritmos eficientes. Regiões polinomiais englobam as LMIs, porém a representação matemática de regiões polinomiais em muitos casos é complexa. Além disso, uma região polinomial Ω , pode não ser convexa, o que inviabiliza uma caracterização por LMIs. Assim, torna-se necessário definir novos critérios para que uma região polinomial Ω , seja convexa. [Chilali e Gahinet, 1996] introduziram o conceito de regiões de LMIs que são uma subclasse das regiões polinomiais definidas por [Gutman, 1979a], porém com importantes vantagens na aplicação de controladores ótimos com restrição de alocação de pólos.

Definição 6.1 [Chilali e Gahinet, 1996]:

Uma dada região do plano complexo é chamada de Região LMI se existem matrizes simétricas $N \in \mathbf{R}^{n \times n}$ e $L \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tais que:

$$D = \{z \in \mathbf{C} : f_D(z) < 0\} \quad (6.1)$$

com:

$$f_D(z) := \mathbf{L} + \mathbf{N}z + \mathbf{N}^T \bar{z} \quad (6.2)$$

para $z \in \mathbb{C}^n$

Tais relações são utilizadas por [Chilali e Gahinet, 1996] para definir uma região determinada como LMI. O passo seguinte é estipular como os autovalores de uma matriz complexa \mathbf{A} pertençam a uma região definida por uma região LMI. Portanto, tem-se o seguinte Teorema:

Teorema 6.1 [Chilali e Gahinet, 1996]:

Uma matriz \mathbf{A} é estável numa região Ω se e somente se existir uma matriz simétrica \mathbf{W} tal que:

$$\begin{aligned} M_\Omega(\mathbf{A}, \mathbf{W}) &= \mathbf{L} \otimes \mathbf{W} + \mathbf{N} \otimes (\mathbf{A}\mathbf{W}) + \mathbf{N}^T \otimes (\mathbf{A}\mathbf{W})^T < 0 \\ \mathbf{W} &> 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Prova [Chilali e Gahinet, 1996]:

- **Suficiência:**

Seja λ um autovalor de \mathbf{A} e $z \in \mathbb{C}^n$ seu autovetor, portanto $z^* \mathbf{A} = \lambda z^*$. Pré multiplicando $M_\Omega(\mathbf{A}, \mathbf{W})$ por $\mathbf{I} \otimes z^*$ e pós multiplicando o resultado por $\mathbf{I} \otimes z$, ou seja:

$$(\mathbf{I} \otimes z^*) M_\Omega(\mathbf{A}, \mathbf{W}) (\mathbf{I} \otimes z)$$

e expandindo o resultado acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \otimes z^* \mathbf{W} z + \mathbf{N} \otimes z^* \mathbf{A} \mathbf{W} z + \mathbf{N}^T \otimes z^* (\mathbf{A} \mathbf{W})^T z &= \\ \mathbf{L} \otimes z^* \mathbf{W} z + \mathbf{N} \otimes \lambda z^* \mathbf{W} z + \mathbf{N}^T \otimes z^* \mathbf{W} \bar{\lambda} z &= (\mathbf{L} + \lambda \mathbf{N} + \bar{\lambda} \mathbf{N}^T) \otimes z^* \mathbf{W} z = f_D(\lambda) z^* \mathbf{W} z \end{aligned}$$

É imediato observar que se $M_\Omega(\mathbf{A}, \mathbf{W}) < 0$ e $\mathbf{W} > 0$ então $f_D(\lambda) < 0$, e pela definição 6.3, λ pertence à região D .

- **Necessidade:**

Suponha que $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ seja estável em D e $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Primeiro considere o caso onde $\mathbf{A} = \mathbf{\Xi} = \text{diag}(\lambda_i)$ com $\lambda_i \in D$. É verificado que:

$$M_D(\mathbf{\Xi}, \mathbf{I}) = \mathbf{U}^t \text{Diag}(f_D(\lambda_i)) \mathbf{U}$$

sendo que \mathbf{U} é uma matriz de permutação qualquer. Por conseqüência se $M_D(\mathbf{\Xi}, \mathbf{X}) < 0$, $\mathbf{X} := \mathbf{I}$.

Generalizando, seja $\mathbf{\Xi}$ uma matriz diagonal dos autovalores generalizados de \mathbf{A} (o que inclui os autovalores de multiplicidade maior que 1. Trabalhando com a forma canônica de Jordan, pode-se construir uma seqüência de matrizes invertíveis \mathbf{T}_k tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_k = \mathbf{\Delta}$ (por

exemplo, $\mathbf{T}_k = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a fim de obter $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$). Desde que $M_D(\mathbf{Y}, \mathbf{I})$ seja uma função contínua de \mathbf{Y} , então tem-se: $M_D(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \mathbf{I})$.

Então para k grande, $M_D(\mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_k, \mathbf{I}) < 0$. Portanto, definindo-se $\mathbf{T} := \mathbf{T}_k$ para k suficientemente grande e utilizando a identidade: $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \mathbf{D})$ em $M_D(\mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_k, \mathbf{I}) < 0$, tem-se:

$$(\mathbf{I} \otimes \mathbf{T}) M_D(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}, \mathbf{I}) (\mathbf{I} \otimes \mathbf{T}^T) = M_D(\mathbf{A}, \mathbf{T} \mathbf{T}^T)$$

Considerando que $M_D(\mathbf{T}_k^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_k, \mathbf{I}) < 0$, mostra-se que $M_D(\mathbf{A}, \mathbf{X}) < 0$ para $\mathbf{X} := \mathbf{T} \mathbf{T}^T > 0$.

O Teorema 6.1 é uma complementação das condições de alocação de pólos feitas por [Gutman e Jury, 1981], porque [Chilali e Gahinet, 1996] demonstraram critérios para que as inequações que caracterizam as regiões de alocação sejam convexas e internamente estáveis. Tais condições são essenciais para formulações de LMIs para problemas de otimização.

6.3 Aplicações para as regiões de controle

A caracterização de regiões de LMIs é um avanço importante na aplicação da alocação de pólos em problemas de controle robusto via otimização. Nesta seção serão apresentadas as LMIs características para as regiões do semiplano e cone, assegurando sua convexidade e linearidade. Estes são requisitos para os problemas de otimização via LMIs.

Considere uma inequação do tipo [Gutman e Jury, 1981]:

$$\sum_{p,q} c_{pq} \mathbf{A}^p \mathbf{W} \mathbf{A}^{*q} < 0 \quad (6.4)$$

A partir desta expressão serão desenvolvidas as LMIs características para a alocação de pólos.

- **Semi-plano**

Semi-plano é uma região representada pela Figura 6.2:

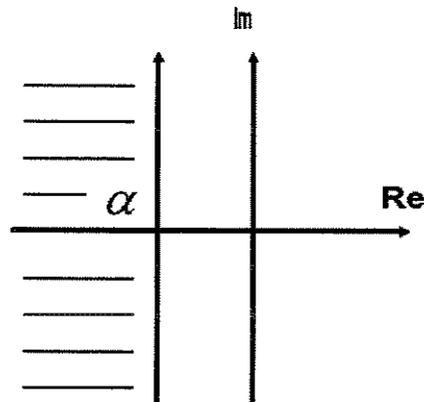


Figura 6.2 - Semi-plano.

sendo que a região de interesse é o espaço à esquerda da reta vertical que passa por α no eixo real. A constante α está diretamente relacionada à rapidez do sistema de alcançar o regime estacionário.

Uma aplicação de uma restrição do tipo semi-plano é reduzir o risco de haver cancelamento de pólos e zeros em uma otimização H_∞ . Tal tema foi abordado por [Gahinet, Apkarian, 1994].

Considerando para uma dada região, com $\alpha > 0$ e definida como $D\{(x, y): \alpha + x < 0\}$, os coeficientes c_{pq} de (6.4) são dados na Tabela C.1 do Apêndice C. Desta forma, tem-se: $c_{00} = \alpha, c_{10} = c_{01} = 1/2$. Aplicando o resultado em (6.4), tem-se:

$$\sum_{p,q} c_{pq} \mathbf{A}^p \mathbf{W} \mathbf{A}^{*q} = \alpha \mathbf{A}^0 \mathbf{W} \mathbf{A}^{*0} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^1 \mathbf{W} + \frac{1}{2} \mathbf{W} \mathbf{A}^{*1} = 2\alpha \mathbf{W} + \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^* < 0 \quad (6.5)$$

Caso a matriz \mathbf{A} seja real:

$$2\alpha \mathbf{W} + \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^* = 2\alpha \mathbf{W} + \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T < 0 \quad (6.6)$$

Observe que (6.6) satisfaz a Teorema 6.5, o que garante que os autovalores do sistema sejam estavelmente posicionados dentro da região $D\{(x, y): \alpha + x < 0\}$.

Um exemplo simples para a restrição de semiplano é a desigualdade de Lyapunov. Considerando $\mathbf{L}=\mathbf{0}$ (o que implica em $\alpha=0$) e $\mathbf{N}=\mathbf{I}$, a inequação (6.3) torna-se:

$$\mathbf{0} \otimes \mathbf{W} + \mathbf{I} \otimes (\mathbf{A} \mathbf{W}) + \mathbf{I}^T \otimes (\mathbf{A} \mathbf{W})^T = \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T < 0$$

- **Região cônica**

A região cônica é a região formada por duas retas simétricas ao eixo real, com ângulo de inclinação θ , conforme ilustrado na figura (6.3):

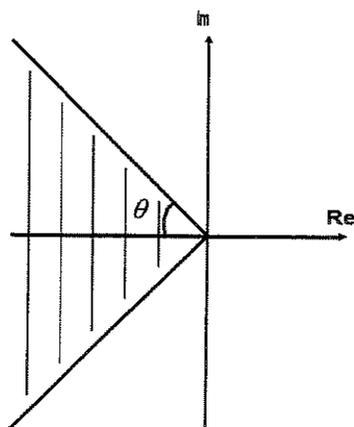


Figura 6.3 - Região cônica.

O ângulo θ está relacionado ao mínimo amortecimento permitido aos autovalores de uma dada matriz \mathbf{A} . Quanto menor o ângulo, maior o fator de amortecimento dos autovalores de \mathbf{A} .

Para a formulação da região cônica é apresentada uma linha de desenvolvimento teórico diferente das adotadas anteriormente. Tal linha é referente aos trabalhos anteriores ao de Gutman e Jury. Sua importância está no fato de evitar o projeto de sistemas pouco amortecidos.

Teorema 6.2 [Anderson et al, 1974]:

Dado um polinômio $P(s)$ de grau n com coeficientes reais, uma condição necessária e suficiente para que as raízes de $P(s)$ estejam alocadas numa região cônica, é que os autovalores da matriz:

$$\mathbf{A}_{L(2n \times 2n)} = \mathbf{A}_{(n \times n)} \otimes \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \\ -\text{cos}\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

tenham suas componentes reais negativas e que \mathbf{A} , real, seja uma matriz associada a $P(s)$ com $P(s) = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$.

Prova [Anderson, 1974]:

Se todos os autovalores de \mathbf{A} (que também são as raízes de $P(s)$) são λ_k , os autovalores de \mathbf{A}_L são (equação C.5 do Apêndice C): $\lambda_k(\text{sen}\theta \pm i\text{cos}\theta)$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

[Arzeler, Bernussou e Garcia, 1993] reforçam que é necessário definir uma matriz \mathbf{S} tal que:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \\ -\text{cos}\theta & \text{sen}\theta \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

que garanta uma estabilidade robusta na alocação de pólos a partir de uma matriz \mathbf{A} .

Aplicando o produto de Kroeneker de \mathbf{S} sobre \mathbf{A} e inserindo seu resultado na desigualdade de Lyapunov, tem-se:

$$(\mathbf{S} \otimes \mathbf{A})\mathbf{W} + \mathbf{W}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{A})^T < 0 \quad (6.9)$$

Expandindo os termos de (6.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} \otimes \mathbf{A})\mathbf{W} + \mathbf{W}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{A})^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \operatorname{sen} \theta & \mathbf{A} \operatorname{cos} \theta \\ -\mathbf{A} \operatorname{cos} \theta & \mathbf{A} \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} \mathbf{W} + \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \operatorname{sen} \theta & -\mathbf{A}^T \operatorname{cos} \theta \\ \mathbf{A}^T \operatorname{cos} \theta & \mathbf{A}^T \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{W} \operatorname{sen} \theta + \mathbf{W}\mathbf{A}^T \operatorname{cos} \theta & \mathbf{A}\mathbf{W} \operatorname{sen} \theta - \mathbf{W}\mathbf{A}^T \operatorname{cos} \theta \\ -\mathbf{A}\mathbf{W} \operatorname{cos} \theta + \mathbf{W}\mathbf{A}^T \operatorname{sen} \theta & \mathbf{A}\mathbf{W} \operatorname{cos} \theta + \mathbf{W}\mathbf{A}^T \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

o que resulta numa LMI, que é:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta (\mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T) & \operatorname{cos} \theta (\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}^T) \\ \operatorname{cos} \theta (\mathbf{W}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}\mathbf{W}) & \operatorname{sen} \theta (\mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (6.10)$$

Assim (6.10) é uma LMI característica para alocação de pólos de uma matriz \mathbf{A} dentro de um cone. Retornando ao Teorema 6.1, assumindo $\mathbf{L} = 0$ e $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta & \operatorname{cos} \theta \\ -\operatorname{cos} \theta & \operatorname{sen} \theta \end{bmatrix}$, a inequação (6.10) é idêntica a (6.3).

6.4 Intersecção de regiões de LMIs

Uma propriedade de concatenação de várias LMIs em uma única LMI foi demonstrada por [Boyd, et al, 1994]. [Chilali e Gahinet, 1996] ressaltam a importância de tal propriedade porque a intersecção de regiões convexas do plano complexo pode ser definida por várias LMIs o que permite a caracterização de regiões cujos domínios são descritos de forma matematicamente complexa. O Teorema 6.1 estabelece condições de estabilidade de alocação de pólos dentro de uma região LMI. Para que a estabilidade se estenda para regiões de formas mais complexas é necessário que cada região separada assuma sua estabilidade individual. Em termos matemáticos a intersecção de duas regiões é estabelecida por:

$$R_1 \cap R_2 \quad (6.11)$$

e para que seus pólos sejam estáveis em suas respectivas regiões, é necessário que:

$$M_{R_1}(\mathbf{A}, \mathbf{W}) < 0 \quad (6.12)$$

para a região R_1 , e :

$$M_{R_2}(\mathbf{A}, \mathbf{W}) < 0 \quad (6.13)$$

para a região R_2 . Observe que (6.12) e (6.13) devem ser satisfeitas ao mesmo tempo.

A condição para que os pólos de uma matriz \mathbf{A} sejam estáveis em (6.11) é:

$$M_{R_1 \cap R_2} = \text{Diag}\{M_{R_1}(\mathbf{A}, \mathbf{W}), M_{R_2}(\mathbf{A}, \mathbf{W})\} = \begin{bmatrix} M_{R_1}(\mathbf{A}, \mathbf{W}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_{R_2}(\mathbf{A}, \mathbf{W}) \end{bmatrix} < 0 \quad (6.14)$$

Generalizando (6.14) para várias regiões, resulta em:

$$M_{R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n} = \text{Diag}\{M_{R_1}(\mathbf{A}, \mathbf{W}), M_{R_1}(\mathbf{A}, \mathbf{W}), \dots, M_{R_n}(\mathbf{A}, \mathbf{W})\} < 0 \quad (6.15)$$

Esta propriedade permite agrupar diferentes LMIs a fim de caracterizar uma região complexa, o que não seria possível caso se utilizasse somente inequações polinomiais definidas por Guttman.

Capítulo 7 - Aplicação das Regiões de LMIs para os Problemas de Otimização

Para o desenvolvimento das LMIs características para alocação de pólos, as incógnitas referentes à solução das inequações serão igualadas às utilizadas na solução do problema de otimização sem a alocação. Tal procedimento assegura uma solução geral subótima. Por exemplo, a inequação (6.6) será incorporada ao problema (5.8) e será empregada a mesma variável $X=W$.

7.1 Alocação de pólos para malha fechada com realimentação de estado

Num sistema em malha fechada com realimentação de estados, o objetivo do controle com alocação de pólos é posicionar adequadamente os autovalores da matriz de estado do sistema de malha fechada. Seja A_{cl} a matriz de estados do sistema controlado definida como

$$A_{cl} = A + B_2 F \quad (7.1)$$

sendo que A e B_2 são matrizes da planta, e F é a matriz do controlador. O problema de alocação de pólos necessita que matriz A_{cl} tenha seus autovalores representados dentro de uma região especificada. As condições para cada região são apresentadas a seguir.

- **Semi-Plano**

Num sistema de malha fechada, (7.1) é relacionada com a seguinte LMI para alocação à esquerda do semiplano:

$$\mathbf{A}_{cl} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}_{cl}^T + 2\alpha \mathbf{W} < 0 \quad (7.2)$$

Substituindo (7.1) em (7.2) tem-se:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}) \mathbf{W} + \mathbf{W} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F})^T + 2\alpha \mathbf{W} = 2\alpha \mathbf{W} + \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T + \mathbf{W} \mathbf{F}^T \mathbf{B}_2^T < 0 \quad (7.3)$$

Desta forma a LMI (7.3) assume nos dois primeiros termos uma desigualdade matricial na forma de Lyapunov. Efetuando a seguinte mudança de variável [Chilali e Gahinet, 1996]:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F} \mathbf{W} \quad (7.4)$$

resulta em:

$$2\alpha \mathbf{W} + \mathbf{A} \mathbf{W} + \mathbf{B}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{W} \mathbf{A}^T + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_2^T < 0 \quad (7.5)$$

A LMI (7.5) caracteriza a condição para que os autovalores da matriz de estado do sistema de malha fechada estejam à esquerda da reta vertical posicionada em $(-\alpha, 0)$.

- **Região cônica**

Para a região cônica, utiliza-se a LMI (6.10):

$$\begin{bmatrix} \sin\theta (\mathbf{A}_{cl} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}_{cl}^T) & \cos\theta (\mathbf{A}_{cl} \mathbf{W} - \mathbf{W} \mathbf{A}_{cl}^T) \\ \cos\theta (\mathbf{W} \mathbf{A}_{cl}^T - \mathbf{A}_{cl} \mathbf{W}) & \sin\theta (\mathbf{A}_{cl} \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}_{cl}^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (7.6)$$

Substituindo \mathbf{A}_{cl} de (7.1) em (7.6) resulta em:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{AW} + \mathbf{B}_2\mathbf{FW} + \mathbf{WA}^T + \mathbf{WF}^T\mathbf{B}_2^T) & \cos\theta(\mathbf{AW} + \mathbf{B}_2\mathbf{FW} - \mathbf{WA}^T - \mathbf{WF}^T\mathbf{B}_2^T) \\ \cos\theta(\mathbf{WA}^T + \mathbf{WF}^T\mathbf{B}_2^T - \mathbf{AW} - \mathbf{B}_2\mathbf{FW}) & \sin\theta(\mathbf{AW} + \mathbf{B}_2\mathbf{FW} + \mathbf{WA}^T + \mathbf{WF}^T\mathbf{B}_2^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (7.7)$$

Em (7.7) fazendo a substituição $\mathbf{Y} = \mathbf{FW}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{AW} + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} + \mathbf{WA}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T) & \cos\theta(\mathbf{AW} + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} - \mathbf{WA}^T - \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T) \\ \cos\theta(\mathbf{WA}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T - \mathbf{AW} - \mathbf{B}_2\mathbf{Y}) & \sin\theta(\mathbf{AW} + \mathbf{B}_2\mathbf{Y} + \mathbf{WA}^T + \mathbf{Y}^T\mathbf{B}_2^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (7.8)$$

A LMI (7.8) caracteriza a condição para que os autovalores da matriz de estado do SMF estejam dentro de uma região cônica definida pelo ângulo θ , limitando-se o menor valor de amortecimento permitido ao sistema.

7.2 Alocação de pólos para malha fechada com realimentação de saída

Ao contrário da realimentação de estados, os métodos utilizados nas transformações das inequações iniciais em LMIs, não são adequados, pois as incógnitas envolvidas não são transformadas em LMIs por simples substituição de variável. Portanto, serão adotados outros procedimentos para que se obtenha LMIs que representem a formulação de realimentação de saída, como visto em [Chilali e Gahinet, 1996].

- **Semiplano**

Como (7.5) não representa exatamente a desigualdade de Lyapunov é necessário pré e pós multiplicar (7.5) por \mathbf{W}^{-1} , assim:

$$\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{WA}_{cl}^T + 2\alpha\mathbf{W})\mathbf{W}^{-1} < 0 \Rightarrow \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{W}^{-1} + 2\alpha\mathbf{W}^{-1} < 0 \quad (7.9)$$

Desta forma a LMI (7.9) assume nos dois primeiros termos uma desigualdade matricial na forma de Lyapunov. Efetuado a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{P} \quad (7.10)$$

Tem-se:

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} + 2\alpha\mathbf{P} < 0 \quad (7.11)$$

Aplicando a transformação congruente da matriz \mathbf{T} obtida em (3.19), na inequação (7.11), a LMI característica para a malha fechada é obtida:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T(\mathbf{P}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} + 2\alpha\mathbf{P})\mathbf{T} &= \mathbf{T}^T(\mathbf{P}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P})\mathbf{T} + 2\alpha\mathbf{T}^T\mathbf{P}\mathbf{T} = \\ &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T \\ \mathbf{M} + \mathbf{A}^T & \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{L}\mathbf{C}_2 + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T \end{bmatrix} + 2\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \right) < 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

A LMI (7.12) caracteriza a condição para que os autovalores da matriz de estado do sistema de malha fechada estejam à esquerda do plano separador.

- **Região cônica**

Para a região cônica, utiliza-se a LMI (6.10):

$$\begin{bmatrix} \cos\theta(\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T) & \sin\theta(\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T) \\ \sin\theta(\mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T - \mathbf{A}_{cl}\mathbf{W}) & \cos\theta(\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (7.13)$$

Efetuada a seguinte pós e pré-multiplicação em (7.13) tem-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta(\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T) & \sin\theta(\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T) \\ \sin\theta(\mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T - \mathbf{A}_{cl}\mathbf{W}) & \cos\theta(\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}_{cl}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \cos\theta(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{A}_{cl}^T) & \sin\theta(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} - \mathbf{A}_{cl}^T) \\ \sin\theta(\mathbf{A}_{cl}^T - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W}) & \cos\theta(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl}\mathbf{W} + \mathbf{A}_{cl}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \cos\theta(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{W}^{-1}) & \sin\theta(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl} - \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{W}^{-1}) \\ \sin\theta(\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{W}^{-1} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl}) & \cos\theta(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{W}^{-1}) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Em (7.14) fazendo a substituição $\mathbf{P} = \mathbf{W}^{-1}$, tem-se finalmente:

$$\begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}) & \cos\theta(\mathbf{PA}_{cl} - \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}) \\ \cos\theta(\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA}_{cl}) & \sin\theta(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}) \end{bmatrix} < 0 \quad (7.15)$$

Aplicando a transformação congruente de \mathbf{T} , de (3.19) em (7.15) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}) & \cos\theta(\mathbf{PA}_{cl} - \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}) \\ \cos\theta(\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA}_{cl}) & \sin\theta(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P})) & \cos\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{PA}_{cl} - \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P})) \\ \cos\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA}_{cl})) & \sin\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P})) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \sin\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P})\mathbf{T}) & \cos\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{PA}_{cl} - \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P})\mathbf{T}) \\ \cos\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P} - \mathbf{PA}_{cl})\mathbf{T}) & \sin\theta(\mathbf{T}^T(\mathbf{PA}_{cl} + \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{P})\mathbf{T}) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

A inequação (7.16) resulta na LMI abaixo:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2^T \\ \Phi_2 & \Phi_1 \end{bmatrix} < 0 \quad (7.17)$$

com:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sin\theta \begin{bmatrix} \mathbf{AY} + \mathbf{B}_2\mathbf{F} + \mathbf{YA}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{A} + \mathbf{M}^T \\ \mathbf{M} + \mathbf{A}^T & \mathbf{XA} + \mathbf{LC}_2 + \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T \end{bmatrix} \\ \Phi_2 &= \cos\theta \begin{bmatrix} \mathbf{YA}^T + \mathbf{F}^T\mathbf{B}_2^T - \mathbf{AY} - \mathbf{B}_2\mathbf{F} & \mathbf{A}^T - \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T - \mathbf{A} & \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^T\mathbf{L}^T - \mathbf{XA} - \mathbf{LC}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A LMI (7.17) caracteriza a condição para que os autovalores da matriz de estado do SMF estejam dentro de uma região cônica definida por θ , limitados pelo menor valor de amortecimento permitido ao sistema.

De posse das LMIs que caracterizam as regiões no plano complexo, [Chilali e Gahinet, 1996] mostram que o problema de otimização das normas H_2 e H_∞ com alocação de pólos é caracterizado pelo problema de otimização H_2 e H_∞ adicionando-se as restrições das LMIs de alocação. As variáveis de otimização \mathbf{M} , \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{F} das LMIs de alocação são as mesmas das utilizadas nos problemas H_2 e H_∞ sem alocação dos problemas (3.7), (3.27), (4.12) e (4.25).

Capítulo 8 - Determinação do Modelo da Estrutura

8.1 Modelo de Elementos Finitos

O objetivo deste capítulo é a modelagem da estrutura flexível usada para o estudo do problema de controle. O modelo discreto de viga ou modelo de elementos finitos será empregado ao estudo problema de controle. A Figura 8.1 apresenta a representação de uma viga modelada matematicamente com quatro graus de liberdade, dois graus de liberdade devidos aos deslocamentos verticais e dois devidos as rotações.

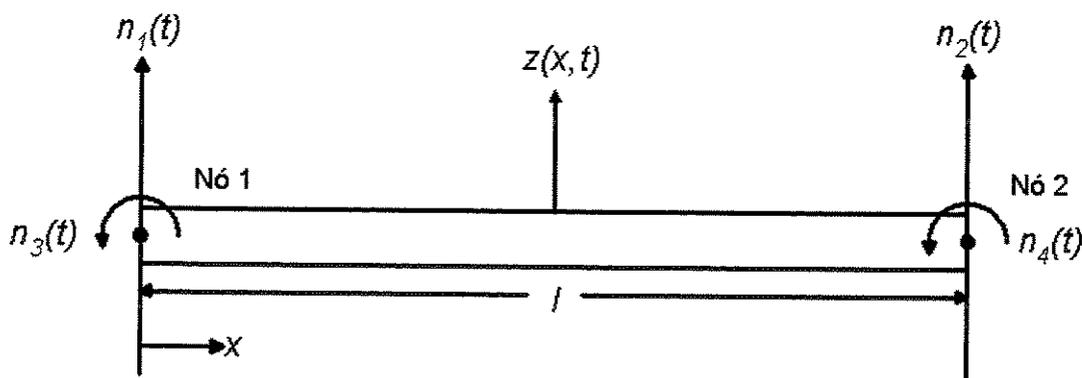


Figura 8.1 - Elemento de viga.

Os parâmetros físicos do elemento de viga são definidos como:

- A , como área da seção transversal em m^2 .
- E , como módulo de elasticidade em MPa .
- ρ , como massa específica do elemento em Kg/m^3 .
- I , como momento de inércia da seção em relação ao eixo x , em m^4 .

$z(x,t)$ é a variável de deslocamento vertical em função da posição e do tempo, e n_1, n_2, n_3 e n_4 são chamados de deslocamentos nodais que são somente função do tempo. A condição de equilíbrio é dada pela equação (8.1) [Inman, 1996]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (8.1)$$

Para valores constantes do produto EI , a equação (8.2) é válida:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 0 \quad (8.2)$$

Integrando (8.2) sucessivamente até a quarta ordem em relação a x , chega-se a (8.3):

$$z(x,t) = c_1(t)x^3 + c_2(t)x^2 + c_3(t)x + c_4(t) \quad (8.3)$$

Com as condições de contorno para (8.2) definidas e adotando l como o comprimento do elemento dado, tem-se:

$$z(0,t) = n_1(t), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,t) = n_2(t), \quad z(l,t) = n_3(t), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(l,t) = n_4(t) \quad (8.4)$$

Substituindo as condições de contorno de (8.4) em (8.3) e considerando $n_i(t) := n_i$, tem-se:

$$c_1(t) = \frac{1}{l^3} [2(n_1 - n_3) - l(n_2 + n_4)] \quad (8.5)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{l^2} [3(n_3 - n_1) - l(2n_2 + n_4)] \quad (8.6)$$

$$c_3(t) = n_2(t) \quad (8.7)$$

$$c_4(t) = n_1(t) \quad (8.8)$$

Substituindo (8.5), (8.6), (8.7) e (8.8) em (8.3), tem-se:

$$z(x,t) = \left[1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \right] n_1 + l \left[1 - 2\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] n_2 + \left[3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \right] n_3 + l \left[-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3} \right] n_4 \quad (8.9)$$

que é a função campo de deslocamento nodal da viga mostrada na Figura 8.1 em função dos deslocamentos nodais.

Para a obtenção das matrizes de rigidez e de massa é necessário assumir as seguintes funções [Inman, 1996]:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A [\dot{z}(x,t)]^2 dx = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^T \mathbf{M}_L \dot{\mathbf{z}} \quad (8.10)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left[\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \mathbf{K}_L \mathbf{z} \quad (8.11)$$

sendo que $T(t)$ é a energia cinética da viga, $V(t)$ a energia potencial do mesmo elemento e $\mathbf{z} = \{n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4\}^T$ o vetor de deslocamento nodal [Inman, 1996].

Após certa manipulação algébrica em (8.10) e (8.11), as matrizes de rigidez e de massa do elemento de viga, \mathbf{K}_L e \mathbf{M}_L , são obtidas [Inman, 1996]:

$$\mathbf{K}_L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

$$\mathbf{M}_L = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Para modelos nos quais estão previstos pequenos deslocamentos, os esforços axiais são independentes dos esforços de flexão [Kwon e Bang, 1997]. Assim (8.12) e (8.13) são expandidas a fim de inserir os dois graus de liberdade axiais da viga:

$$\mathbf{K}_L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2 & 0 & 0 & -Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -Al^2 & 0 & 0 & Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

$$\mathbf{M}_L = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (8.15)$$

As matrizes obtidas anteriormente são válidas para as coordenadas locais do elemento considerado, ou seja, independente da posição espacial do mesmo. Para tornar (8.14), (8.15) e (8.16) válidas para um referencial externo e assim permitir uma junção de vários elementos em posições espaciais distintas, é necessário que as equações locais sejam transformadas de acordo com um único sistema referencial global comum a todos. Pela Figura 8.2 é visualizada a relação entre o sistema local e o global de um elemento de seis graus de liberdade.

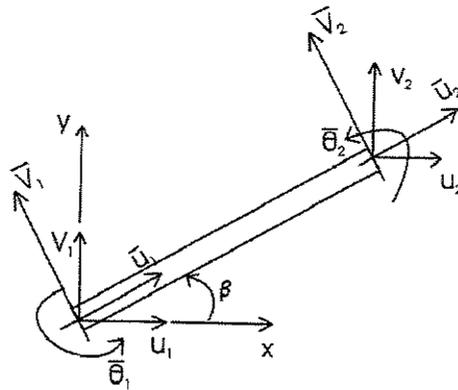


Figura 8.2 - Elemento de viga em relação a um referencial global.

Sejam as variáveis de deslocamento local $\mathbf{z}_L = [\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2]$ e as de deslocamento global $\mathbf{z} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]$. Para que as coordenadas globais sejam válidas para o sistema local de um elemento é necessário que:

$$\mathbf{z}_L = \mathbf{Tz}_G \quad (8.16)$$

sendo que a matriz \mathbf{T} é a matriz de transformação de coordenadas e é definida como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.17)$$

e β é o ângulo de referência entre o sistema local e o global para um modelo no qual há somente deslocamento vertical e flexão. A partir de (8.17), as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento são redefinidas no sistema de coordenadas global:

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_L \mathbf{T} \quad (8.18)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} \quad (8.19)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{T}^T \mathbf{C}_L \mathbf{T} \quad (8.20)$$

As matrizes apresentadas anteriormente são válidas para somente um elemento. Como a filosofia de formulação de elementos finitos é dividir um domínio em vários subdomínios de elementos simples, é necessário, para muitos problemas físicos, a utilização de vários elementos a fim de aproximar as soluções dadas em (8.19), (8.20) e (8.21) com a solução exata. A forma de unir os elementos a fim de representar um domínio necessita de uma técnica de montagem, conhecida na área de elementos finitos como “assembly”, que respeitando as ordens dos elementos na malha (como é chamado o domínio discretizado) geram uma única matriz de rigidez e de massa [Kwon e Bang, 1997]. Como a técnica de montagem é bem conhecida, sua teoria não será abordada em detalhes neste trabalho. Porém, é empregada para a obtenção das matrizes de estado do problema de controle.

Para sistemas mecânicos usuais a inércia e rigidez não são as únicas características físicas atuantes em uma estrutura. Existe uma terceira característica física que é o amortecimento e este é representado pela matriz \mathbf{C} . Neste trabalho, é adotado o modelo de amortecimento proporcional, que é definido como [Ewins, 1984]:

$$\mathbf{C} = \eta\mathbf{M} + \nu\mathbf{K} \quad (8.21)$$

onde η e ν são números reais positivos. Vale destacar que o uso do modelo de amortecimento proporcional é somente uma simplificação matemática e na prática pode estar longe de representar casos reais. A obtenção teórica de \mathbf{K} e de \mathbf{M} acarreta menores erros na modelagem, pois as propriedades de inércia e de rigidez são, na prática, próximas às propriedades usadas nos modelos teóricos. Apesar das limitações da modelagem teórica do amortecimento proporcional, (8.14), (8.15) e (8.16) são muitos úteis na fase inicial de projeto. No final do mesmo seria necessária a verificação dos modelos via métodos de identificação experimental [Ewins, 1984].

8.2 Modelo de Estados

A modelagem de estados é uma maneira usual de tratar um modelo matemático para o estudo em controle de sistemas. Assumindo a seguinte equação dinâmica de um corpo físico:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{f}_w\mathbf{w} + \mathbf{f}_u\mathbf{u} \quad (8.22)$$

na qual:

- \mathbf{u} é o vetor que representa o sinal de atuação do controlador na planta.
- \mathbf{w} é o vetor que representa o sinal de entradas exógenas.
- \mathbf{z} é o vetor que representa os deslocamentos dos graus de liberdade presentes no corpo físico.
- \mathbf{C} , \mathbf{M} e \mathbf{K} são as matrizes de amortecimento, massa e rigidez do sistema.
- \mathbf{f}_w e \mathbf{f}_u são os vetores dos sinais de entrada que correspondem ao valor numérico das forças atuantes em determinada posição da viga.

A equação mostrada por (8.22) não é usual para o estudo e formulação do problema de controle. Portanto, é usual (8.20) introduzir as seguintes substituições de variáveis:

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{z} \quad (8.23)$$

$$\mathbf{q}_2 = \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (8.24)$$

Isso significa que \mathbf{q}_1 é o vetor de deslocamentos nodais do corpo e \mathbf{q}_2 é o vetor das respectivas velocidades. Para o modelo de elementos finitos o significado físico de \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 estão atrelados ao modo de discretização dado ao modelo. Por exemplo, numa viga discretizada com dois elementos tendo como movimento o deslocamento vertical e a rotação, \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 são definidos como:

$$\mathbf{q}_1 = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2]; \quad \mathbf{q}_2 = \dot{\mathbf{q}}_1 = [\dot{v}_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{v}_2 \quad \dot{\theta}_2]$$

onde v_i é o deslocamento vertical aplicado ao nó i e θ_i é o ângulo de rotação correspondente ao nó i . O vetor \mathbf{q}_1 também é conhecido como vetor dos graus de liberdade do corpo físico.

Substituindo (8.23) e (8.24) em (8.22) obtém-se o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_w \mathbf{w} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_u \mathbf{u} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{q}_2 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{z} = \mathbf{q}_1 \end{cases} \quad (8.25)$$

As duas primeiras equações de (8.25) podem ser agrupadas a fim de dar a seguinte caracterização matricial:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_w \end{cases} \mathbf{w} + \begin{cases} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_u \end{cases} \mathbf{u} \quad (8.26)$$

E a última equação de (8.25) é expandida para:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{cases} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{cases} \quad (8.27)$$

Tendo em mão (8.26) e (8.27), o modelo de estado de (8.22) resulta em:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (8.28)$$

e os termos de (8.28) são definidos a seguir:

$$\bullet \mathbf{A} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{B}_1 := \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_w \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{B}_2 := \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_u \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \mathbf{C} := [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}].$$

$$\bullet \mathbf{x} := [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2]^T$$

A definição anterior dada a \mathbf{C} é genérica e muitas vezes pouco aplicada, porque em controle de sistemas reais, os sinais de saída externos são escolhidos através do maior interesse do projetista por causa da impossibilidade econômica em colocar sensores e atuadores em todos os locais da estrutura. Por exemplo, pode ser assumido que $\mathbf{C} := [0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]$, o que significa que a saída \mathbf{z} é o segundo grau de liberdade da planta.

No estudo do controle robusto o que se deseja é um controlador que atue no sinal de desempenho \mathbf{z} e que garanta estabilidade mesmo em situações em que sinais imprevistos entram na planta. Para isto é necessário expandir (8.28) a fim de caracterizar as entradas de distúrbios e ruídos. A Figura 8.3 mostra as entradas de uma planta com controlador sujeito a distúrbios externos.

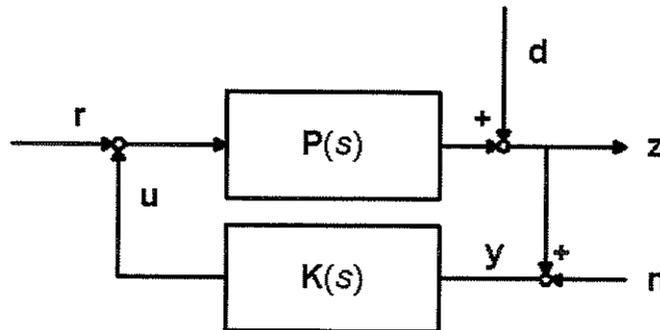


Figura 8.3 - Exemplo genérico de uma planta com controlador sujeitos a distúrbios.

Assume-se que as entradas exógenas da planta são definidas pelo um vetor w tal que:

$$w = [d \quad r \quad n]^T \quad (8.29)$$

sendo que d é o vetor de distúrbio na saída da planta. Outros aspectos não considerados na modelagem podem ser levados em conta através de uma incerteza ‘artificial’, como por exemplo, não linearidades que deixaram de ser modeladas ou incertezas dadas à aferição dos parâmetros físicos associados ao projeto, ou mesmo erros de truncamento acarretados na discretização finita do domínio através do método dos elementos finitos.

O vetor r é o sinal de referência de entrada, que costuma ser nulo para facilitar o estudo do comportamento da planta em função de um ruído de entrada. No caso do problema de atenuação de vibrações r é nulo do ponto de vista físico.

O vetor n é o ruído do sensor, que assume as limitações físicas e de modelagem das respostas do sensor.

Levando-se em conta que o sinal de referência r é considerado nulo, obtém-se:

$$w = [d \quad n]^T \quad (8.30)$$

Uma vez determinadas as entradas exógenas, é necessário que se definam suas influências sobre os sinais de controle e de desempenho. Neste caso, (8.28) fica redefinida como:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u; \\ z = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w + D_{22} u \end{cases} \quad (8.31)$$

sendo que:

- y é o sinal de saída da planta para o controlador.
- C_1 determina em quais graus de liberdade o sinal de desempenho é obtido.
- C_2 determina em quais graus de liberdade o sinal de medição é retirado.

Para C_1 e C_2 pode-se especificar elementos com valores diferentes de “um” para fins de obtenção de um controlador mais eficiente. A adoção de valores diferentes de “um” tem como objetivo a tentativa de obter controladores com desempenhos melhorados ou a obtenção de matrizes dos modelos de malha fechada matematicamente melhor condicionadas.

As matrizes D são definidas a seguir:

- $D_{11} = [0 \ 0]$ e $D_{22} = 0$. Estes são valores usualmente empregados, pois muitos autores, como [Doyle et al, 1989], que afirmam que tais considerações não fazem um sistema perder sua generalidade, além de evitar o excesso de complexidade para solução do problema ótimo.

- $D_{12} = [0 \ 1]^T$. Para a maioria dos sistemas mecânicos o sinal de desempenho pode ser constituído também pelo esforço de controle.

- $D_{21} = [0 \ 1]$. A adoção destes valores leva em consideração o fato de que o ruído de medição afeta somente o sinal do sensor na qual é direcionado para o controlador.

Da mesma forma que as matrizes de saída C_1 e C_2 , os vetores D_{12} e D_{21} podem ter elementos diferentes de “um” a fim de melhorar as características do controlador desejado.

Note que o sistema (8.31) representa o modelo de estados da planta com a definição do sinal de saída para o controlador y e o sinal de desempenho z .

Capítulo 9 - Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados das simulações do problema de controle de vibração de uma viga sem e com alocação de pólos. O objetivo é confrontar as diferenças entre os controladores H_2 e H_∞ puros com os mesmos tendo seus pólos alocados. Na primeira parte serão mostradas as simulações sem alocação de pólos e sua validação entre o valor da norma H_2 ou da norma H_∞ com os controles H_2 e H_∞ , respectivamente, das matrizes função de transferência dos sistemas obtidos. Na segunda parte, estarão os resultados dos problemas de otimização com alocação de pólos para uma região composta na união das regiões do semiplano e de um cone.

A simulação será dada a partir das matrizes de massa, rigidez e de amortecimento de uma estrutura modelada por elementos finitos baseados na teoria de Euler-Bernoulli. O modelo discretizado é dado pela Figura 9.2:

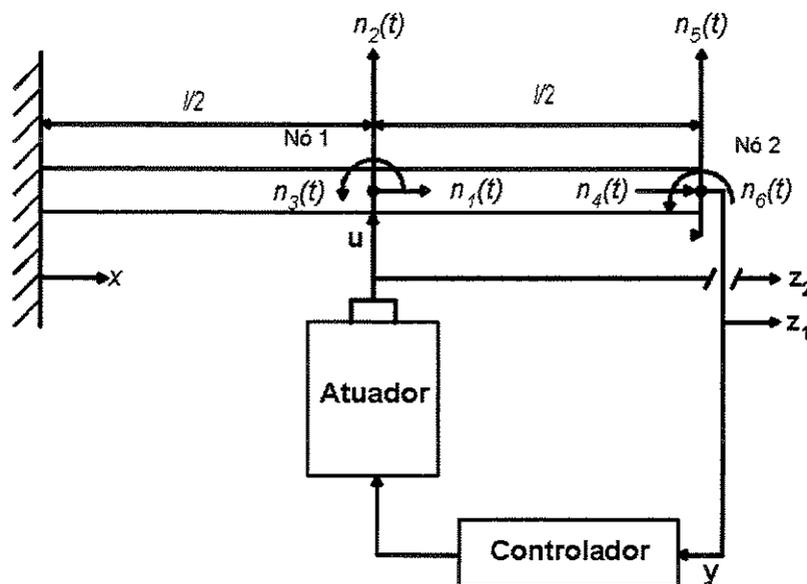


Figura 9.1 - Modelo discretizado para viga com os respectivos graus de liberdade.

A viga discretizada é dividida em dois elementos de comprimento $l/2$ com um total de três nós. O primeiro nó está engastado (extremidade da viga) e para fins práticos não foi numerado. Portanto, o segundo nó é definido como nó número um e o terceiro como nó número dois. Cada nó possui três movimentos: deslocamentos horizontal e vertical, e o ângulo de rotação. Assim os graus de liberdade da viga são definidos da seguinte forma:

- n_1 e n_4 são os deslocamentos horizontais presentes nos nós 1 e 2, respectivamente.
- n_2 e n_5 são os deslocamentos verticais presentes nos nós 1 e 2, respectivamente.
- n_3 e n_6 são os ângulos de rotação presentes nos nós 1 e 2, respectivamente.

A escolha de dois elementos é justificada pelo fato de ser a mínima representação onde se permite ter um esquema de controle não colocado, ou seja, atuação de controle em um grau de liberdade diferente daquele que se deseja controlar. Adotou-se este pequeno número de elementos finitos para reduzir o tempo computacional nos cálculos para obtenção dos controladores.

Neste modelo, a viga considerada é engastada em uma das extremidades. Seus parâmetros físicos são dados a seguir:

- $A = base \times altura = 0,032 \times 0,003 = 9,60 \times 10^{-5} m^2$.

- $E = 6,90 \times 10^{10} MPa$.

- $\rho = 2,7 \times 10^3 Kg / m^3$.

- $I = \frac{base \times altura^3}{12} = 7,12 \times 10^{-11} m^4$.

- $l = 1,1 m$

A saída para controle é dada no grau de liberdade n_5 , e a saída para desempenho é dada pelo mesmo grau de liberdade. O sinal de controle é aplicado no grau de liberdade n_2 . Assim o vetor \mathbf{f}_u é definido como:

$$\mathbf{f}_u^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

O sinal de distúrbio externo é um ruído branco, portanto aleatório. O sinal foi gerado pelo programa MatLab com a função “rand” com valor de pico de 0,1 N. Este ruído será aplicado no grau de liberdade n_5 para fins de estudo da resposta da planta controlada. A energia do ruído de entrada é obtida pela expressão:

$$E = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x(i)|^2 \quad (9.1)$$

onde $x(i)$ é o componente do sinal dada em um intervalo de tempo t .

Desta forma o valor da energia do distúrbio de entrada é $E = 24,0243$, para um sinal com intervalo de amostragem $t = 0,007$. A Figura 9.3 mostra o sinal de distúrbio utilizado.

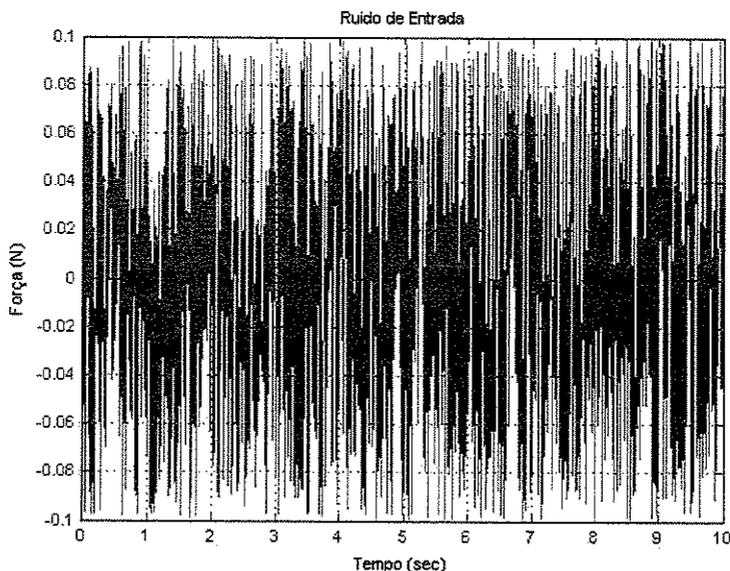


Figura 9.2 - Distúrbio de Entrada.

Com a definição do distúrbio de entrada, o vetor \mathbf{f}_w é definido como:

$$\mathbf{f}_w^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

As equações do problema que são reescritas a seguir:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases}$$

De posse da expressão anterior, tem-se para fins de simulação:

- As matrizes de entrada do sinal de distúrbio e de controle que são:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_w & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,8812 & 133,58 & 0 & 95,963 & 1112,3 \end{bmatrix}^T$$

Para que a matriz \mathbf{B}_1 tenha dimensões compatíveis com o vetor \mathbf{w} , adotou-se uma segunda coluna de zeros.

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_u \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 12,457 \ 48,233 \ 0 \ 8,8812 \ 198,59]^T$$

- As matrizes de saída de desempenho e de medição que são:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

O valor de “um” é adotado nas matrizes \mathbf{C}_1 e \mathbf{C}_2 pela preferência em comparar os controladores com e sem alocação de pólos. Sabe-se que a adoção de valores diferentes de “um” pode inclusive melhorar o desempenho do controlador. Este aspecto não foi investigado neste trabalho porque o objetivo é comparar o efeito da alocação de pólos em um controlador H_2/H_∞ .

- As matrizes \mathbf{D}_{11} , \mathbf{D}_{12} , \mathbf{D}_{21} e \mathbf{D}_{22} são:

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \mathbf{D}_{22} = 0$$

Para o controle misto foi necessário introduzir uma notação específica, já introduzida no Capítulo 6, afim de representar a entrada de distúrbios para controle H_∞ e H_2 de forma separada. Assim o subscrito “0” refere-se ao controlador norma H_∞ e o subscrito “1” ao controlador norma H_2 . Assim o modelo para o caso misto é reescrito:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_0\mathbf{w}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z}_0 = \mathbf{C}_0\mathbf{x} + \mathbf{D}_{00}\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{01}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{02}\mathbf{u} \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{10}\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{20}\mathbf{w}_0 + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}_1 + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u} \end{cases}$$

Com:

- $\mathbf{B}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 8,8812 \ 133,58 \ 0 \ 95,963 \ 1112,3]^T$
- $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_1$
- $\mathbf{D}_{00} = \mathbf{D}_{10} = [0 \ 0]^T$, $\mathbf{D}_{01} = \mathbf{D}_{11}$, $\mathbf{D}_{02} = \mathbf{D}_{12}$, $\mathbf{D}_{20} = \mathbf{D}_{22}$

Para o estudo de alocação dos pólos, a metodologia foi montar uma região definida com parâmetros de amortecimento e do semiplano conforme na Tabela 9.1.

Parâmetro	Valor
α (Semiplano)	-3
θ (Amortecimento)	10^{-2}

Tabela 9.1 - Dados para definição da região para alocação de pólos.

Com estas definições serão simulados os resultados de otimização H_2 , H_∞ e mista para realimentação de estados e de saída. Em primeiro, o grupo de simulação se dará aos modelos de realimentação de estado e depois para os modelos de realimentação de saída.

9.1 Controle através da norma H_∞

Nesta seção serão apresentados os resultados do controle via norma H_∞ conforme dado pelo problema de otimização (3.7) para realimentação de estados, e do problema de otimização (3.27) para realimentação de saída. Em cada caso de otimização, serão introduzidas as restrições de alocação de pólos. Os resultados têm como objetivo:

- Observar a redução da norma H_∞ ;
- Verificar se o esforço de controle é compatível fisicamente;
- Observar a capacidade de atenuação dos distúrbios.

Na Tabela 9.2 apresentam-se os valores da norma H_∞ obtidos no processo de otimização e sua comparação com o valor da norma H_∞ da matriz função de transferência H_{zw} . Na maioria dos casos há uma redução significativa nos valores da norma para a planta controlada, exceto para o caso de realimentação de saída com alocação de pólos.

	Valor da norma H_∞		
	Sem Controle	Controle com Realimentação	
		Estados	Saída
Sem Alocação	67,7295	2,9421	3,0702
Com Alocação	67,7295	2,9637	44,6473

Tabela 9.2 - Comparação dos valores da norma H_∞ da planta controlada com a original.

A Figura 9.3 apresenta a resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio aleatório para realimentação de estados, e a Figura 9.4, para realimentação de saída. Em ambas estão ilustradas as respostas do sistema sem alocação e com alocação de pólos. Nota-se que ocorreu uma boa rejeição ao distúrbio nos dois casos para alocação de pólos em comparação ao caso sem alocação. Na Figura 9.4, o que se nota é a influência dos requisitos de amortecimento provenientes da alocação de pólos da planta. Este fez com que a amplitude de resposta ao distúrbio diminuísse em relação à resposta do controlador sem alocação. Por outro lado, o emprego da restrição do semi-plano fez com que aumentasse a frequência de oscilação. Tal fato é observado pela diminuição dos intervalos entre os picos.

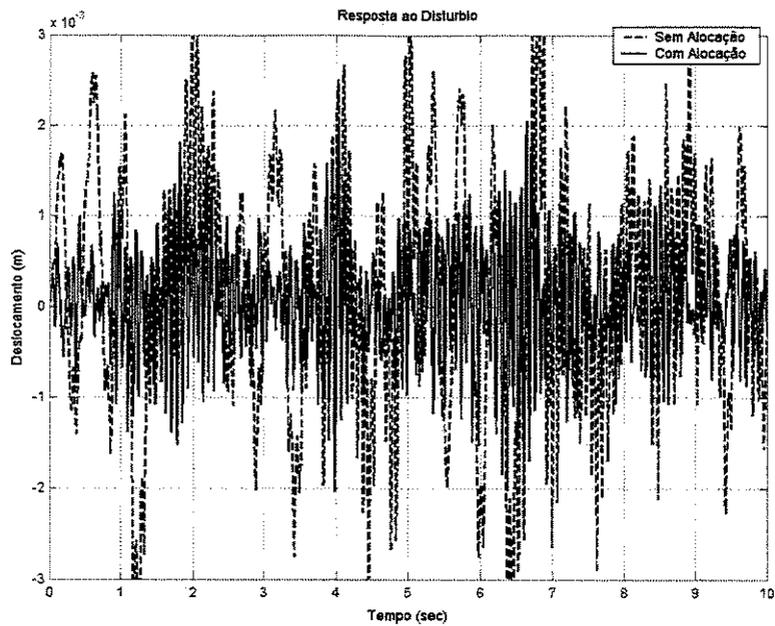


Figura 9.3 - Controle H_∞ - Realimentação de estado – Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.

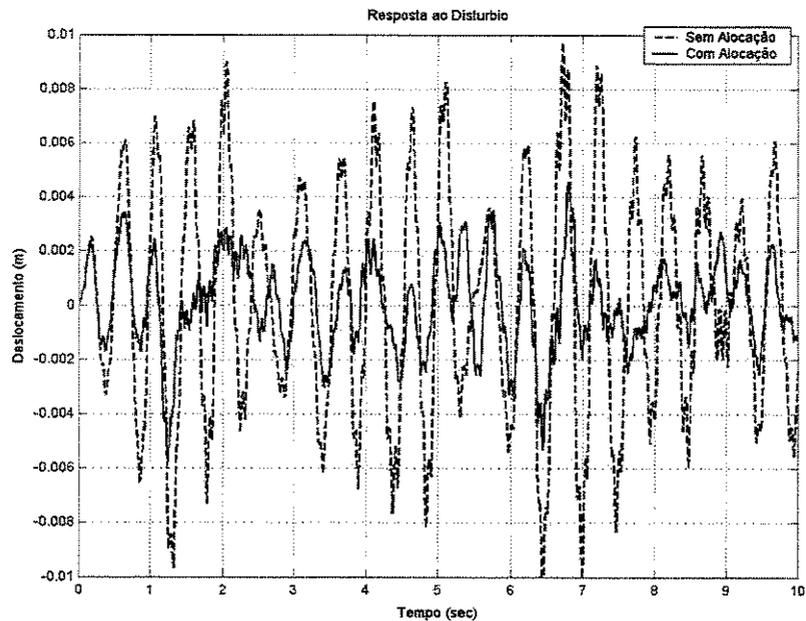


Figura 9.4 - Controle H_∞ - Realimentação de saída – Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.

As Figuras 9.5 e 9.6 apresentam o esforço de controle aplicado no grau de liberdade n_2 para atenuar a vibração da viga para realimentação de estados e para realimentação de saída. No caso de realimentação de estados, o controlador foi mais solicitado do que no caso de realimentação de saída.

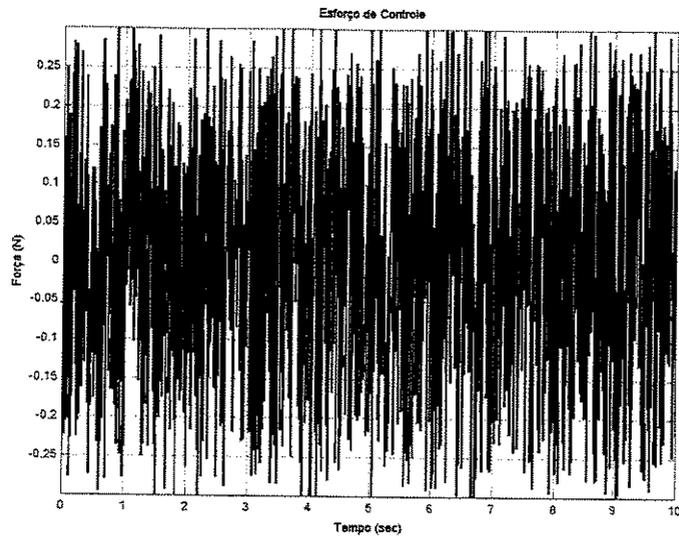


Figura 9.5 - Controle H_∞ - Realimentação de estado – Esforço de controle com alocação.

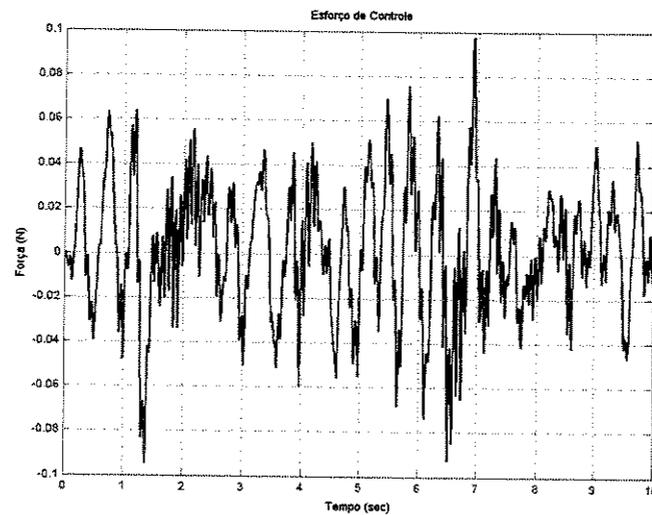


Figura 9.6 - Controle H_∞ - Realimentação de saída – Esforço de controle com alocação.

A seguir é mostrada a matriz F do controlador obtido para o caso de realimentação de estados com alocação.

$$[0 \quad -0,0338 \quad 0 \quad 0 \quad -0,0011 \quad 0,0005 \quad 0 \quad -1,3039 \quad -0,0739 \quad 0 \quad -1,4375 \quad 0,1205]$$

E em seguida são mostradas as matrizes do controlador dinâmico obtido para o caso de realimentação de saída com alocação.

- Matriz de estado **A_c**:

-0,0002	0	0	0,0001	0	0	-0,6321	0	0	1,1814	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0,0002	0,0031	0	0,0014	0,0169
0	0	0	0	0	0	0	0	0,0019	0	0,0002	0,0044
0,0001	0	0	-0,0001	0	0	0,5989	0	0	-0,2856	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0,0002	-0,0049	0	-0,0014	-0,0189
0	0	0	0	0	0	0	-0,0001	0,0015	0	0,0005	0,0068
0	0	0	0	0	0	-0,0002	0	0	0,0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0003
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,0002	0	0	-0,0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0,0001	-0,0002
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0001

A matriz de estado **A_c** deve ser multiplicada por 10^8 .

- Vetor **B_c**:

[0 0,6473 -0,5662 0 -2,3064 -0,4485 0 0,0001 0 0 -0,0040 0,0009]

O vetor **B_c** deve ser multiplicado por 10^3 .

- Vetor **C_c**:

[0 0,2284 -0,1271 0 -0,3189 -1,3905 0 30,5986 -12,2003 0 -37,0209 -173,4521]

Uma observação final é nos casos de realimentação de saída foi necessário adotar um valor de $t = 1,1$ a fim de evitar erros de mau-condicionamento ocorridos durante as simulações. Este assunto foi discutido na secção 5.2 onde foi empregada a LMI (5.15).

9.2 Controle através da Norma H_2

Nesta seção são apresentados os resultados dos controles através da formulação H_2 dados em (4.12) para realimentação de estados e em (4.25) para realimentação de saída, que tem como objetivo:

- Observar a redução da norma H_2 ;
- Verificar se o esforço de controle é compatível fisicamente;
- Observar a capacidade de atenuação dos distúrbios;
- Verificar a resposta ao impulso;

A Tabela 9.3 mostra os valores da norma H_2 da matriz função de transferência H_{zw} do sistema sem controle confrontados com os obtidos com controle sem alocação e com alocação de pólos. Nota-se que há uma piora do valor do traço para a situação com alocação de pólos em relação ao valor da planta sem controle.

	Valor da norma H_2		
	Sem Controle	Controle com Realimentação	
		Estados	Saída
Sem Alocação	6,1189	1,7717	2,0349
Com Alocação	6,1189	6,6117	111,45

Tabela 9.3 - Valores da norma H_2 da planta controlada e da planta original.

A Figura 9.7 apresenta a resposta do grau de liberdade n_5 a um distúrbio aleatório para realimentação de estados, e a Figura 9.8 para realimentação de saída. Em ambas estão ilustradas as respostas do sistema sem alocação e com alocação de pólos. Nota-se que ocorreu uma boa rejeição ao distúrbio nos dois casos para alocação de pólos em comparação ao caso sem alocação de pólos. As respostas do sistema na realimentação de estados e de saída são praticamente semelhantes.

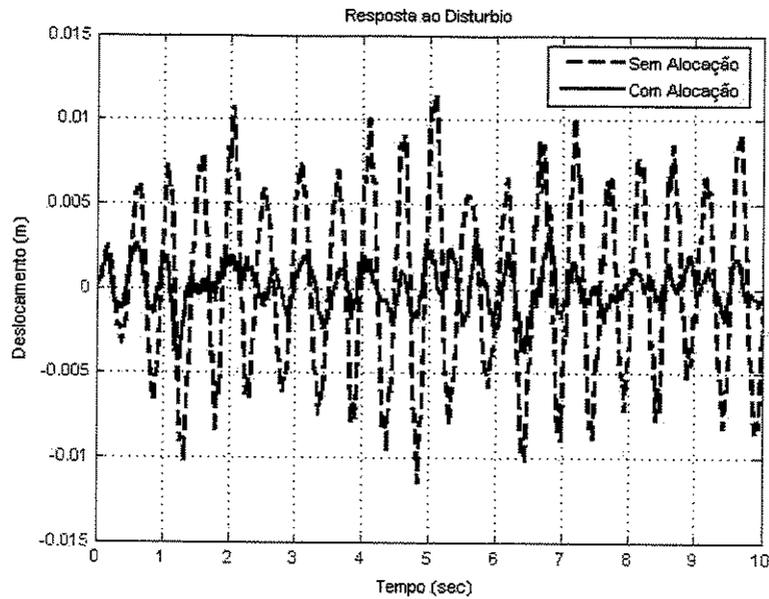


Figura 9.7 - Controle H_2 - Realimentação de estado – Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.

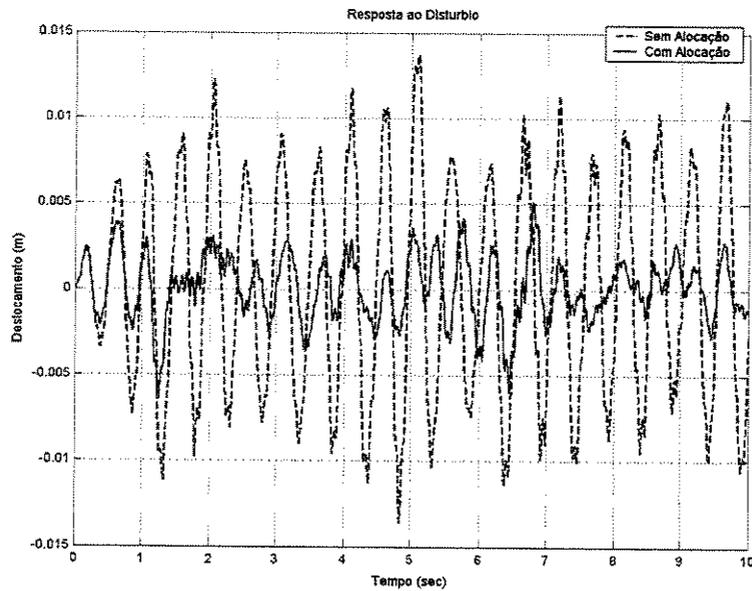


Figura 9.8 - Controle H_2 - Realimentação de saída – Resposta do grau de liberdade n_5 ao distúrbio.

A Figura 9.9 apresenta a resposta do grau de liberdade n_5 ao impulso aplicado no grau de liberdade n_5 para realimentação de estados, e a Figura 9.10 para realimentação de saída. Em ambas estão ilustradas as respostas do sistema sem alocação e com alocação de pólos. Nos dois casos, a alocação fez acelerar a estabilização da resposta impulsiva graças à adoção da restrição

do semi-plano. Para o caso com realimentação de estados, o pico da resposta para o caso com alocação de pólos foi menor se comparado ao caso com realimentação de saída com alocação.

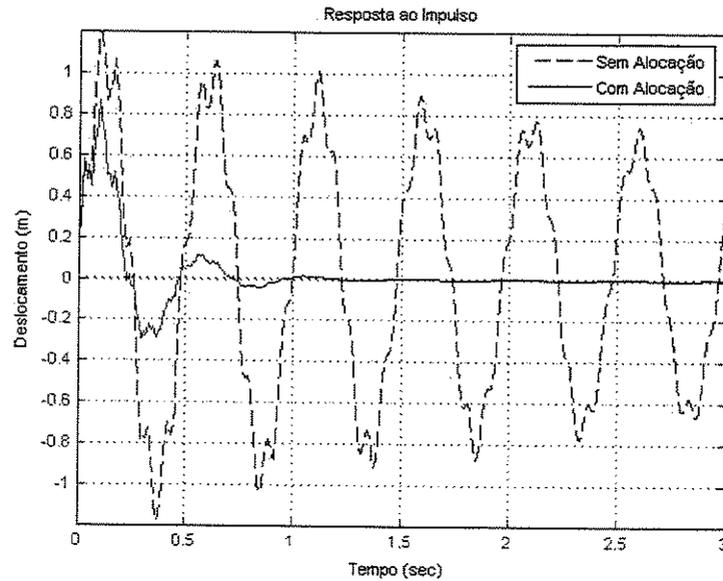


Figura 9.9 - Controle H_2 - Realimentação de estados – Resposta ao impulso.

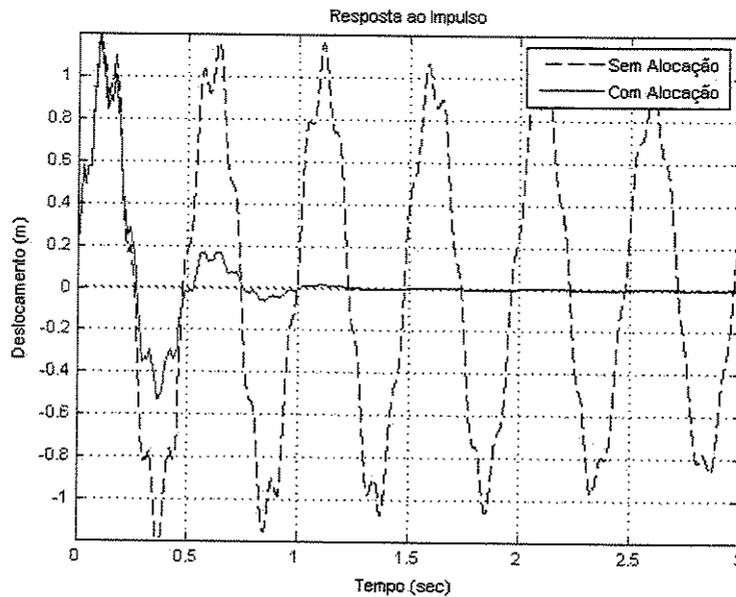


Figura 9.10 - Controle H_2 - Realimentação de saída – Resposta ao impulso.

As Figuras 9.11 e 9.12 apresentam as forças exercidas pelo controlador no grau de liberdade n_2 em resposta a um distúrbio aleatório aplicado em n_5 para realimentação de estados e para realimentação de saída. No caso com realimentação de estados, o controlador atuou dentro

da faixa de força factível, porém foi mais solicitado do que no controlador de realimentação de saída que também atuou numa faixa de força aceitável fisicamente.

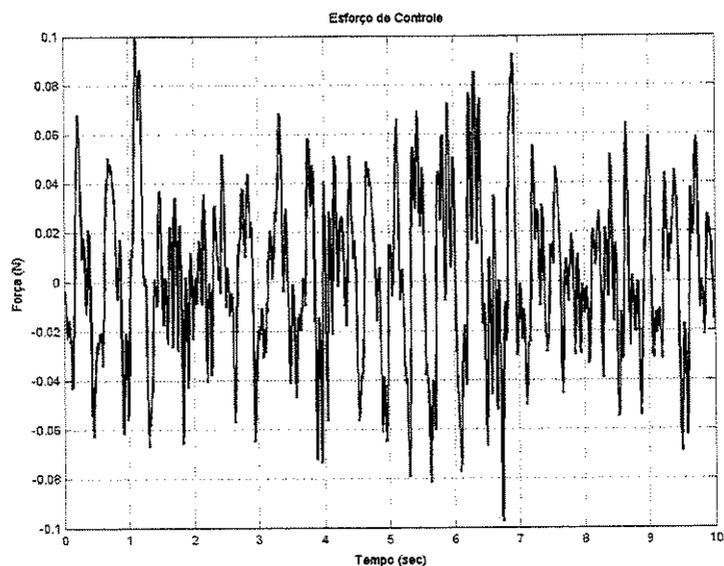


Figura 9.11 - Controle H_2 : Realimentação de estado – Esforço do controlador

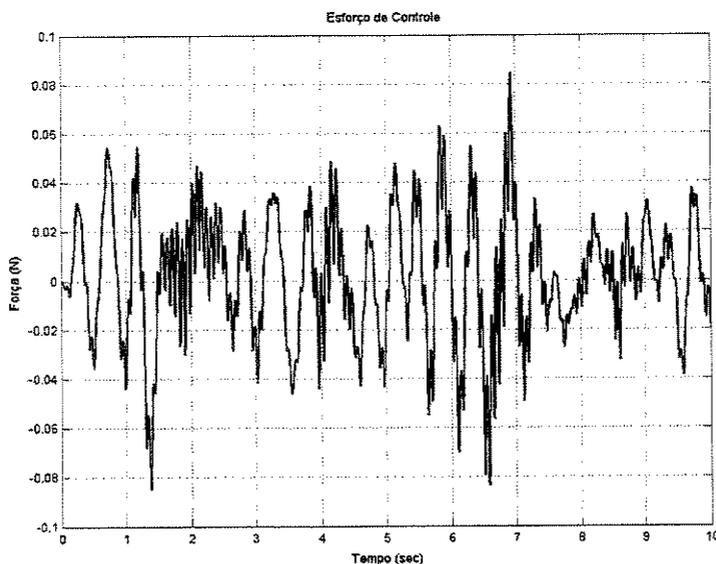


Figura 9.12 - Controle H_2 - Realimentação de saída – Esforço do controlador.

A seguir é mostrada a matriz F do controlador obtido para o caso de realimentação de estados com alocação de pólos.

$$[0 \quad -0,0114 \quad -0,0005 \quad 0 \quad -0,0098 \quad 0,0008 \quad 0 \quad -0,0554 \quad -0,0031 \quad 0 \quad -0,0594 \quad 0,0050]$$

A seguir são apresentadas as matrizes do controlador obtido para o caso de realimentação de saída com alocação de pólos.

- Matriz de estado **A_c**:

-0,0002	0	0	0,0001	0	0	-0,6262	0	0	1,1698	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0,0003	0,0030	0	0,0008	0,0143
0	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0019	0	0,0002	0,0043
0	0	0	-0,0001	0	0	0,5939	0	0	-0,2813	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0,0003	-0,0047	0	-0,0009	-0,0167
0	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0014	0	0,0003	0,0059
0	0	0	0	0	0	-0,0002	0	0	0,0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,0002	0	0	-0,0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0001
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A matriz de estado **A_c** deve ser multiplicada por 10^8 .

- Vetor **B_c**:

[0 3,7940 -0,1532 0 -2,6611 0,1384 0 0,0001 0,0004 0 0,0098 -0,0007]

O vetor **B_c** deve ser multiplicado por 10^3 .

- Vetor **C_c**:

[0 0,0944 0,11003 0 0,1107 0,1300 0 6,7741 9,1986 0 -8,5510 -84,4687]

9.3 Controle H_2/H_∞

Nesta seção serão apresentados os resultados do controle através da formulação H_2/H_∞ descrito pelo problema de otimização (5.8) para realimentação de estados e (5.14) para realimentação de saída, e com as restrições adicionais de alocação de pólos. Os resultados têm como objetivo, além dos anteriores, observar a redução conjunta da norma H_2 e da norma H_∞ se possível.

A Tabela 9.4 mostra os valores da norma H_2 da matriz função de transferência sem controle confrontados com os resultados obtidos na otimização sem alocação e com alocação de pólos.

	Valor da norma H_2		
	Sem Controle	Controle com Realimentação	
		Estados	Saída
Sem Alocação	6,1189	4,5717	7,1319
Com Alocação	6,1189	32,9668	157,8057

Tabela 9.4 - Valores da norma H_2 da planta controlada em comparação ao da planta original.

Para a solução do problema misto deve-se adotar um valor de γ a fim de iniciar a otimização. Neste trabalho, o valor de γ foi obtido através do valor da norma H_∞ da solução do problema norma H_∞ . Porém, neste caso é possível a obtenção de soluções infactíveis para valores de γ dados por esta metodologia. Para permitir a solução do problema o valor de γ foi aumentando sucessivamente de 5% do seu valor até a obtenção de uma solução factível. A Tabela 9.5 mostra os valores de γ utilizados para iniciar o processo de otimização.

	Valor de γ empregando na restrição $\ H_{z_0 w_0}\ _\infty < \gamma$	
	Controle com Realimentação	
	Estados	Saída
Sem Alocação	3,0857	3,0702
Com Alocação	3,1083	44,6473

Tabela 9.5 - Valores de γ para a realização da otimização H_2 / H_∞ .

A Figura 9.13 apresenta a resposta do grau de liberdade n_5 a um distúrbio aleatório para realimentação de estados, e a Figura 9.14 para realimentação de saída. Em ambas estão ilustradas

as respostas do sistema sem alocação e com alocação de pólos. Nota-se que ocorreu uma melhor rejeição ao distúrbio nos dois casos para alocação de pólos em comparação à simulação sem alocação. O desempenho da alocação para realimentação de estados foi, em geral, melhor se comparado à realimentação de saída, tanto sem como com alocação de pólos.

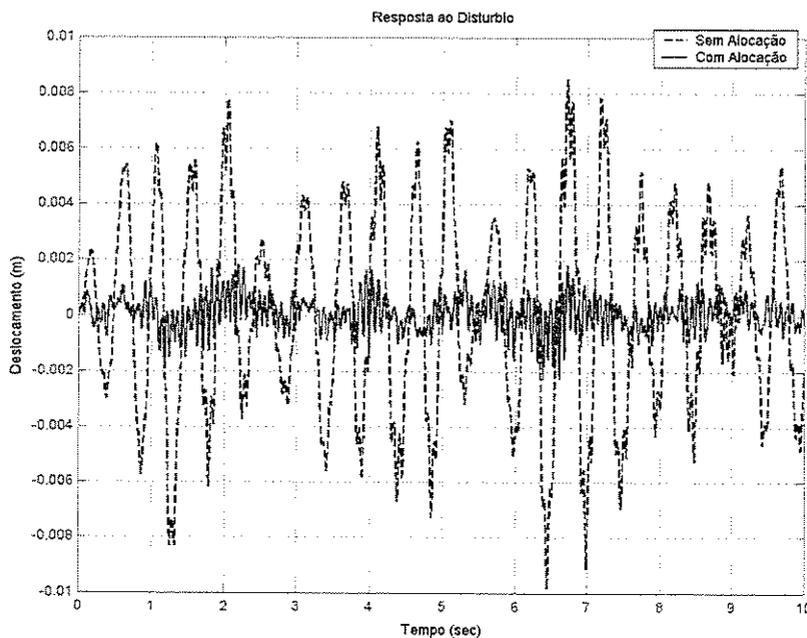


Figura 9.13 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de estado- Resposta do grau de liberdade n_3 ao distúrbio.

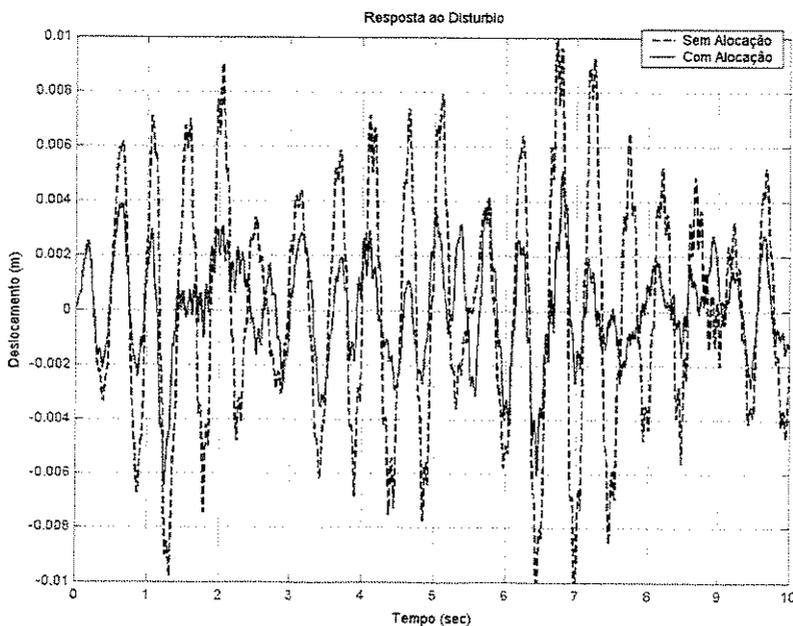


Figura 9.14 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de saída- Resposta do grau de liberdade n_3 ao distúrbio.

A Figura 9.15 apresenta a resposta do grau de liberdade n_5 ao impulso aplicado em n_2 para realimentação de estados, e a Figura 9.16 para realimentação de saída. Em ambas estão ilustradas as respostas do sistema sem alocação e com alocação de pólos. Em ambos os casos a alocação de pólos fez acelerar a estabilização da resposta impulsiva graças à adoção da restrição do semi-plano. Para o caso com realimentação de estados com alocação, o pico foi menor se comparado ao caso com realimentação de saída e o sistema oscilou de forma mais intensa.

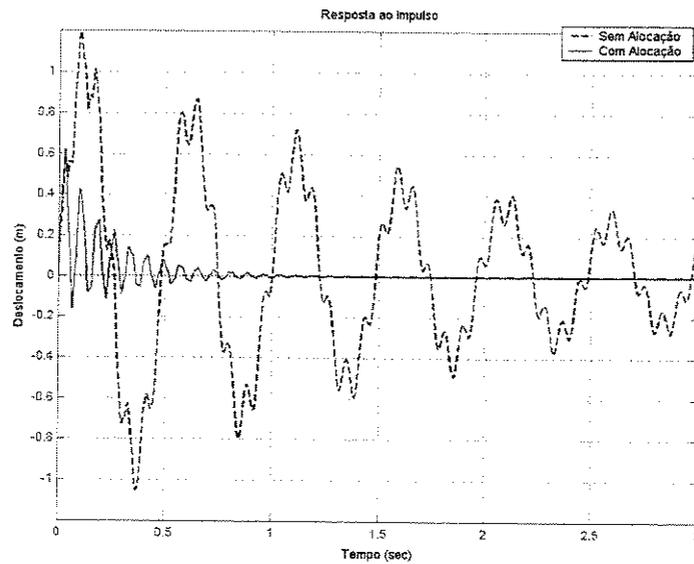


Figura 9.15 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de estados – Resposta ao impulso.

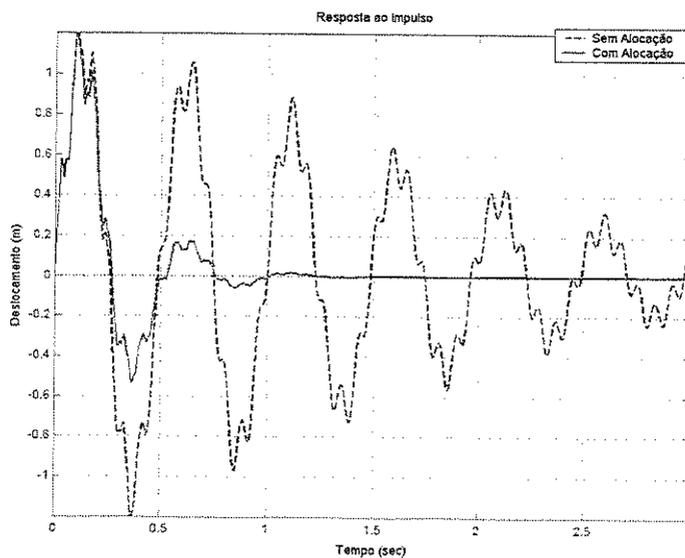


Figura 9.16 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de saída – Resposta ao impulso.

As Figuras 9.17 e 9.18 apresentam os esforços do controlador para atenuar a vibração ao distúrbio aleatório para realimentação de estados e para realimentação de saída. No caso com realimentação de estados, o controlador foi mais solicitado do que no controlador de realimentação de saída que também atuou numa faixa de força aceitável fisicamente.

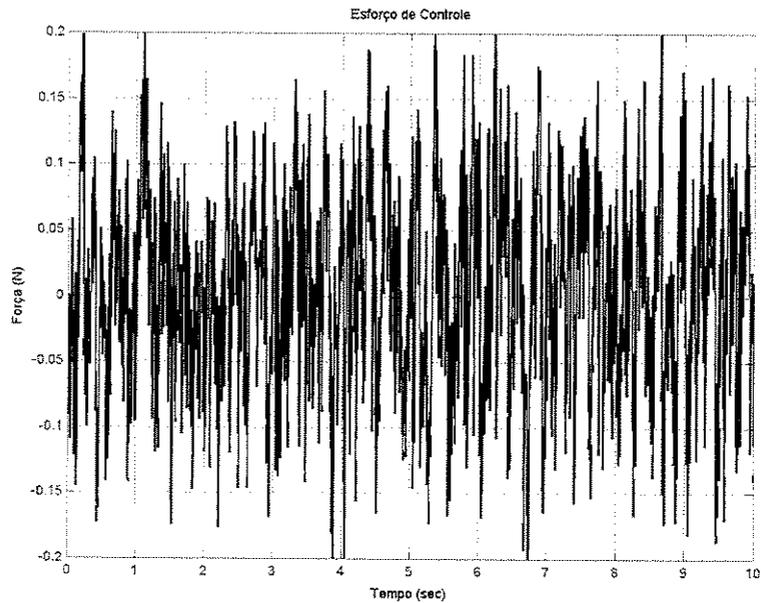


Figura 9.17 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de estado – Esforço do controlador

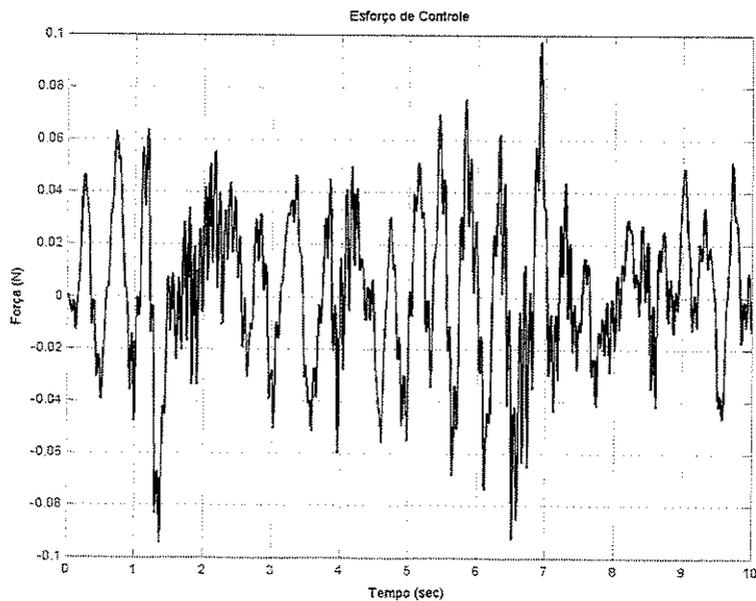


Figura 9.18 - Controle H_2/H_∞ - Realimentação de saída – Esforço do controlador.

A seguir é mostrado o vetor **F** do controlador obtido para o caso de realimentação de estados com alocação de pólos.

[0 -0,0128 -0,0005 0 -0,0092 0,0008 0 -0,1654 -0,0093 0 -0,1809 0,0152]

E em seguida são mostradas as matrizes do controlador obtido para o caso de realimentação de saída com alocação de pólos.

- Matriz de estado **A_c**:

[-0,0002	0	0	0,0001	0	0	-0,6262	0	0	1,1698	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0,0003	0,0030	0	0,0008	0,0143
0	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0019	0	0,0002	0,0043
0	0	0	-0,0001	0	0	0,5939	0	0	-0,2813	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-0,0003	-0,0047	0	-0,0009	-0,0167
0	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0014	0	0,0003	0,0059
0	0	0	0	0	0	-0,0002	0	0	0,0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0,0002	0	0	-0,0002	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0001
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

A matriz de estado **A_c** deve ser multiplicada por 10^8 .

- Vetor **B_c**:

[0 3,7940 -0,1532 0 -2,6611 0,1384 0 0,0001 0,0004 0 0,0098 -0,0007]

O vetor **B_c** deve ser multiplicado por 10^3 .

- Vetor **C_c**:

[0 0,0944 0,11003 0 0,1107 0,1300 0 6,7741 9,1986 0 -8,5510 -84,4687]

Capítulo 10 - Conclusão

O objetivo deste trabalho foi constatar as vantagens do emprego da alocação de pólos no desempenho dos controladores H_2 , H_∞ e o controlador misto para o problema de controle de vibrações de estruturas flexíveis. Controladores H_2 têm como função melhorar o desempenho dado pela norma H_2 do sistema. Já os controladores H_∞ tem a função de garantir a atenuação da resposta em frequência de pior caso. Com a combinação das duas formulações espera-se que o controlador H_2/H_∞ tenha capacidade de reduzir o pico de pior caso em frequência sem comprometer o desempenho da planta.

O emprego dos controladores norma H_2 , H_∞ e H_2/H_∞ com a alocação de pólos assegurou que as características transientes da resposta da planta fossem consideradas satisfatórias.

As soluções de controle foram feitas através de problemas de otimização com restrições matriciais lineares (LMIs). O emprego de LMIs trouxe a capacidade de formular as inequações de restrição com considerável generalidade do ponto de vista de otimização.

O problema de controle proposto foi aplicado ao problema de uma viga engastada em uma extremidade. As matrizes de estados foram obtidas a partir da discretização do modelo da viga pelo método dos elementos finitos.

A experiência em obter os controladores H_2 , H_∞ e H_2/H_∞ , trouxe as seguintes conclusões:

- Controladores H_∞ , como previsto para este tipo de formulação, são melhores indicados para redução do pior caso, ou seja, aumentar a capacidade do sistema em rejeitar

distúrbios. Considerando a resposta em frequência isto, significa reduzir o maior valor singular do sistema.

- Quanto à rejeição de distúrbio o controlador H_2 não se mostrou eficiente a ponto de justificar o seu uso isoladamente.
- Tanto para o desempenho do modelo de realimentação de estados quanto para o modelo realimentação de saída, as conclusões citadas anteriormente se mantêm. Na realimentação de saída o desempenho, em geral, foi pior se comparado ao correspondente em realimentação de estados.
- O melhor resultado em termos de atenuação de distúrbios e do desempenho dado pela norma H_2 , tanto para realimentação de saída como para realimentação de estados, foi conseguido com o controlador misto H_2/H_∞ . Neste caso, a minimização da norma H_2 da planta sujeita a um dado valor de γ , que está relacionado à robustez do sistema, se mostrou menos eficaz do que um controlador somente H_∞ . Porém, o esforço de controle não se mostrou muito alto em relação ao distúrbio de entrada se comparado ao controlador H_∞ . Além disso, a capacidade de rejeição de distúrbios foi bem melhor, em geral, à do controlador H_2 .

A alocação de pólos trouxe as seguintes conclusões:

- A determinação do valor do amortecimento mínimo influenciou de modo muito atuante no esforço do controlador. Quanto maior o valor da constante de amortecimento, maior foi o esforço exercido pelo controlador. A vantagem do uso da constante de amortecimento está no fato que a amplitude de resposta ao distúrbio se torna menor quando se aumenta a constante de amortecimento.
- A estipulação do valor da restrição do semi-plano mostrou-se útil para melhorar a resposta ao distúrbio. A utilização do controlador H_∞ com o semi-plano tornou-se mais eficiente no propósito de reduzir a resposta ao distúrbio do que o uso do controlador misto sem alocação de pólos.
- Alguns aspectos indesejados observados no controlador H_2 , como a baixa redução de distúrbio, foram corrigidos com a adoção de planos separadores que se mostraram muito eficientes para acelerar a resposta do controlador ao distúrbio.

- Os controladores H_∞ para o caso de realimentação de estados apresentaram um aumento da frequência de oscilação em relação ao controlador sem alocação de pólos. Isto pode ser observado pela diminuição do intervalo entre os picos das respostas obtidas. Porém, a capacidade de rejeição ao distúrbio se mostrou mais eficiente.

Uma observação final é que a técnica de otimização usada para encontrar os controladores ótimos, se mostrou demasiadamente intensiva no aspecto computacional. Uma utilização para sistemas mecânicos de vários graus de liberdade pode se mostrar computacionalmente proibitiva. A utilização de modelos de ordem reduzida pode amenizar o problema, mas o problema da eficiência computacional continuará a persistir. Portanto, deve-se procurar algoritmos mais eficientes adaptados ao trato de estruturas de vários graus de liberdade.

Para trabalhos futuros, será necessária a investigação de algoritmos mais eficientes com o intuito de economizar tempo computacional para a análise de estruturas de muitos graus de liberdade. Pode-se levar em conta aspectos numéricos de armazenamento e cálculos envolvendo as matrizes.

Além disso, será necessária a adoção de filtros a fim de ponderar a presença de ruídos de medição e dos distúrbios de entrada. Isso será importante quando o ruído de medição e os distúrbios possuírem faixas de frequência muito diferentes, o que geralmente ocorre em problemas práticos. A adoção de filtros de ponderação permite isolar regiões da resposta em frequência para a respectiva otimização.

Bibliografia

[Anderson et al, 1974]: Anderson, B.D.O., Bose, N.K., and Jury, E.I., A Simple Test for Zeros of a Complex Polynomial in a Sector, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.19, No.4, pp.437-438.

[Anderson e Moore, 1990]: Anderson, B.D.O., and Moore, J.B., *Optimal Control Linear Quadratic Methods*, Prentice-Hall, NJ, 1990, pp. 34-51.

[Arzeler, Bernussou e Garcia, 1993]: Arzeler, D., Bernussou, J. e Garcia, G., Pole Assignment of Linear Uncertain Systems in a Sector Via Lyapunov-Type Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.38, No.7, 1993, pp.1128-1132

[Bambang, Shimemura e Uchida, 1993]: Bambang, R, Shimemura, E. and Uchida, K., Mixed H_2/H_∞ Control with pole Placement: State-Feedback Case, *Proceedings of American Control Conference*, 1993, pp.2777-2779.

[Bernstein e Haddad, 1989]: Bertein, D.S., and Haddad, W. M., LQG with an H_∞ Bound: A Riccati Equation Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.34, No.3, 1989, pp.293-305

[Boyd, Barrat e Norman, 1990]: Boyd, S., Barratt, C., and Norman, S., Linear controller design: limits of performance via convex optimization. *Proc. IEEE*, 78(3): 529-574, 1990.

[Boyd et al, 1994a]: Boyd, S.P., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V., *Linear matrix inequalities in systems and control theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol.15, Philadelphia, 1994.

[Boyd et al, 1994b]: Boyd, S.P., Balakrishnan, V, Feron, e El Ghaoui, L., *History of Linear Matrix Inequalities in Control Theory*, Proceedings of American Control Conference, Baltimore, 1994.

[Brewer, 1978]: Brewer, J.W., Kronecker Products and Matrix Calculus in System Theory, *Circuits and Systems*, Vol.25, No.9, 1978, pp.772-781.

[Chilali e Gahinet, 1996]: Chilali, M. and Gahinet, P., H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.41, No.3, 1996, pp.358-367.

[Doyle et al, 1989]: Doyle, J.C., Glover, K., and Khargonekar, P.P. and Francis, B.A., State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.34, No.8, 1989, pp. 831-847.

[Doyle et al, 1994]: Doyle, J.C., Zhou, K., Glover, K., and Bodenheimer, B., Mixed H_2/H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.39, No.8, 1994, pp. 1575-1587.

[Ewins, 1984]: Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd., London, 1984.

[Fares, Apkarian e Noll, 2001]: Fares, B., Apkarian, P. and Noll, D., An Augmented Lagrangian Method for a Class of LMI-Constrained Problems in Robust Control Theory, *International Journal of Control*, Vol.74, No.4, 2001, pp.348-360.

[Francis, 1986]: Francis, B. A., *A Course in H_∞ Controlled Theory*, Springer-Verlag, New York, 1986, pp. 15-42.

[Furuta e Kim, 1987]: Furuta, K. and Kim, S.B., Pole Assignment in an Specified Disk, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. AC-32, 1987, pp.423-427.

[Geromel, 2001]: Geromel, J.C., Notas de Aulas do Curso IA360, FEEC/Unicamp, Campinas, 2001.

[Gahinet e Apkarian, 1994]: Gahinet, P. and Apkarian, P., A Linear Matrix Inequality Approach to H_∞ Synthesis, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol.4, 1994, pp.421-448.

[Geromel, Peres e Bernussou, 1991]: Geromel, J.C., Peres, P.L.D, and Bernussou, J., On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 29, 1991, pp. 381-402.

[Gutman, 1979a]: Gutman, S., Root Clustering of a Complex Matrix in an Algebraic Region, *Transactions on Automatic Control*, Vol.24, No.4, 1979, pp. 647-650.

[Gutman, 1979b]: Gutman, S., Root Clustering of a Real Matrix in an Algebraic Region, *International Journal of Control*, Vol.29, No.5, 1979, pp. 871-880.

[Gutman e Jury, 1981]: Gutman, S. and Jury, L.E.I., An General Theory for Matrix Root-Clustering in Sub regions of the Complex Plane, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.26, No.4, 1981, pp.853-863.

[Haddad e Bernstein, 1992] Haddad, W.M. and Bernstein, D.S., Controller Design with Regional Pole Constraints, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 37, No.1, 1992, pp.54-61.

[Howland, 1971]: Howland, J.L., Matrix Equations and the Separation of Matrix Eigenvalues, *Journal of Mathematics Analysis Applied*, Vol. 6, 1971, pp. 683-691.

[Inman, 1996] Inman, D.J., *Engineering Vibration*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.

[Jury e Ahn, 1972]: Jury, E.I. and Ahn, S.M., Symmetric and Inverse Matrices for The Root Clustering and Root Distribution of a Polynomial, *Journal of Franklin Institute*, Vol.293, 1972, pp.433-450.

[Kalman e Bucy, 1961]: Kalman, R.E., and Bucy, R.S., New results in the linear filtering and prediction theory, *Journal of Basic Engineering*, Vol.83, March 1961, pp.95-108.

[Kalman, 1964]: Kalman, R.E., When is a linear system optimal, *Journal of Basic Engineering*, Vol.86, March 1964, pp.1-10.

[Khargonekar e Rotea, 1991]: Khargonekar, P.P. and Rotea, M.A., Mixed H_2/H_∞ Control: Convex Optimization Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.36, No.7, 1991, pp. 824-836.

[Kreindler e Jameson, 1972]: Kreindler, E. and Jameson, A., Conditions of Nonnegativeness of Partitioned Matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.17, No.1, 1972, pp. 147-148.

[Kwon e Bang, 1997] Kwon, Y.W. and Bang, H., *Finite Element Method using Matlab*, CRC Press Ltd., 1997.

[Liu e Yedavalli, 1993]: Liu, Y. and Yedavalli, R.K., Linear Quadratic Control with Stability Degree Constraint, *Systems and Control Letters*, Vol.21, No., 1993, pp.181-187.

[Masubuchi, Ohara e Suda, 1994]: Masubuchi, I., Ohara, A. and Suda, N., LMI-Based Controller Synthesis: An Unified Formulation and Solution, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1994

[Nesterov e Nemirovskii, 1994]: Nesterov, Y. and Nemirovskii, A., *Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*, Vol. 13 in Series of Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1994

[Petersen, 1987]: Petersen, I.R., Disturbance attenuation and H_∞ optimization: a design method based on algebraic Riccati equation, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.32, No.5, 1987, pp.427-429.

[Petersen, 1989]: Petersen, I.R., Complete results for a class of state feedback disturbance attenuation problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.34, No.11, 1989, pp.1196-1199.

[Ramos, 1998]: Ramos, D.C.W., *Controle de Sistemas Dinâmicos através de Desigualdades Matriciais Lineares*, Tese de Mestrado, Unicamp, Campinas, 1998.

[Scherer, Gahinet e Chilali, 1997]: Scherer, C., Gahinet, P., Chilali, M., Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.42, No.7, 1997, pp.

[Slotine e Li, 1996]: Slotine, J.J., Li, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, NJ, 1996.

[VanAntwerp e Braatz, 2000]: VanAntwerp, J.G. and Braatz, R.D., A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities, *Journal of Process Control*, Vol.10, No.7, 2000, pp. 363-385.

[Wilson e Rubio, 1995]: Wilson, D.A., and Rubio, J.E., Computation of Generalized H_2 Optimal Controllers, *International Journal of Control*, Vol.61, No.5, 1995, pp. 999-1012.

[Yedavalli e Liu, 1995]: Yedavalli R.K. and Liu Y., H_∞ Control with Regional Pole Constrains, *Automatica*, Vol.31, No.4, 1995, pp.611-615.

[Zames, 1966] Zames, G., On Input-Output Stability of Time-Varying Nonlinear Feedback Systems I: Conditions Derived using Concepts of Loop Gain Conicity and Positivity, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.11, No.2, 1966, pp. 228-1966.

[Zames, 1981]: Zames, G., Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative, Seminorms, and Approximate Inverse, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol.26, No. 2, 1981, pp. 301-320.

[Zhou, Doyle e Glover, 1996]: Zhou, K., Doyle, J.C., Glover, K., *Robust and optimal control*, Prentice-Hall, NJ, 1996.

[Zhou e Khargonekar, 1988]: Zhou, K.and Khargonekar, P.P., An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization, *Systems and Control Letters*, Vol.11, 1988, pp. 85-91.

Apêndice A - Matrizes M, C e K

Como exemplo será adotada uma viga de seção retangular de alumínio, discretizada em 2 elementos. Portanto dados:

- $A = base \times altura = 0,032 \times 0,003 = 9,60 \times 10^{-5} m^2$.

- $E = 6,90 \times 10^{10} MPa$.

- $\rho = 2,7 \times 10^3 Kg / m^3$.

- $I = \frac{base \times altura^3}{12} = 7,12 \times 10^{-11} m^4$.

- $l = 1,1 m$

O vetor de coordenadas dos nós é:

$$vecoord = \{0,00 \quad 0,00 \quad 0,55 \quad 0,0 \quad 1,10 \quad 0,00\}^T$$

De posse destes dados e sabendo que não há deslocamento axial, as matrizes de rigidez e de massa são:

$$K = \begin{bmatrix} 2,4087e+007 & 0 & 0 & -1,2044e+007 & 0 & 0 \\ 0 & 7,1665e+002 & 0 & 0 & -3,5832e+002 & 9,8539e+001 \\ 0 & 0 & 7,2262e+001 & 0 & -9,8539e+001 & 1,8065e+001 \\ -1,2044e+007 & 0 & 0 & 1,2044e+007 & 0 & 0 \\ 0 & -3,5832e+002 & -9,8539e+001 & 0 & 3,5832e+002 & -9,8539e+001 \\ 0 & 9,8539e+001 & 1,8065e+001 & 0 & -9,8539e+001 & 3,6131e+001 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 9,5040e-002 & 0 & 0 & 2,3760e-002 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0590e-001 & 0 & 0 & 1,8329e-002 & -2,4269e-003 \\ 0 & 0 & 8,2142e-004 & 0 & 2,4269e-003 & -3,0803e-004 \\ 2,3760e-002 & 0 & 0 & 4,7520e-002 & 0 & 0 \\ 0 & 1,8329e-002 & 2,4269e-003 & 0 & 5,2951e-002 & -4,1071e-003 \\ 0 & -2,4269e-003 & -3,0803e-004 & 0 & -4,1071e-003 & 4,1071e-004 \end{bmatrix}$$

e a matriz de amortecimento proporcional \mathbf{C} é obtida adotando $\eta = 10^{-4}$ e $\nu = 10^{-4}$.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2,4087e+003 & 0 & 0 & -1,2044e+003 & 0 & 0 \\ 0 & 7,1675e-002 & 0 & 0 & -3,5830e-002 & 9,8536e-003 \\ 0 & 0 & 7,2263e-003 & 0 & -9,8536e-003 & 1,8065e-003 \\ -1,2044e+003 & 0 & 0 & 1,2044e+003 & 0 & 0 \\ 0 & -3,5830e-002 & -9,8536e-003 & 0 & 3,5838e-002 & -9,8543e-003 \\ 0 & 9,8536e-003 & 1,8065e-003 & 0 & -9,8543e-003 & 3,6131e-003 \end{bmatrix}$$

Apêndice B – Propriedades Fundamentais das LMIs

Uma propriedade importante das LMIs é que um conjunto de LMIs pode ser agrupado em uma única LMI. Portanto vem a seguinte definição:

Definição B.1: [Boyd, et al,1994]

Para $\mathbf{P}_i(\mathbf{x}) > 0$ tem-se:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \text{Diag}(\mathbf{P}_1(\mathbf{x}), \mathbf{P}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{P}_n(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.1})$$

Outra propriedade importante das LMIs é dada pelo Teorema a seguir.

Teorema B.1 [Boyd et al,1994]

Se existe uma matriz \mathbf{P} tal que $\mathbf{P} > 0$, então existe uma matriz \mathbf{T} invertível com

$$\mathbf{T}^T \mathbf{P} \mathbf{T} > 0 \quad (\text{B.2})$$

O Teorema B.1 é conhecido como Teorema da Transformação Congruente.

O complemento de Schur é uma importante propriedade no estudo das LMIs, porque sua aplicação permite converter uma classe de desigualdades matriciais não-lineares em desigualdades matriciais lineares (LMIs). Seja a desigualdade não-linear abaixo:

$$\mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^T > 0, \mathbf{Q} > 0 \quad (\text{B.3})$$

com \mathbf{Q} e \mathbf{R} simétricas. O complemento de Schur define que (B.3) possui uma forma equivalente matricial que é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{B.4})$$

Desta forma uma desigualdade matricial não linear é dividida em um sistema de submatrizes que, além de tornar (B.3) linear e convexa, dispensa o cálculo da inversa de \mathbf{R} . Isto possibilita a economia de tempo computacional e reduz erros de truncamento devido ao processamento numérico necessário para a inversão, contudo aumenta a ordem matricial. Para maiores detalhes sobre complemento de Schur veja [Kreindler e Jameson, 1972].

Apêndice C - Alocação de pólos – Aspectos Teóricos

Nesta seção, serão abordadas as condições suficientes e necessárias para a alocação dos autovalores de uma dada matriz dentro de uma região especificada. Na primeira parte será abordada a teoria no geral, para que depois sejam aplicadas as LMIs.

- **Produto de Kroeneker**

O produto de Kroeneker é uma importante ferramenta matemática para a análise das regiões na qual se deseja analisar sua alocação dos autovalores.

O produto de Kroeneker das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} é definido como:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \Delta [a_{ij} \mathbf{B}]_{ij}$$

ou seja,

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \Delta \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{B} & a_{12} \mathbf{B} & \dots & a_{1n} \mathbf{B} \\ a_{21} \mathbf{B} & a_{22} \mathbf{B} & \dots & a_{2n} \mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \mathbf{B} & a_{n2} \mathbf{B} & \dots & a_{nn} \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Este produto estabelece dentre outras relações [Brewer, 1978], as seguintes propriedades:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \quad (\text{C.1})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}) \quad (\text{C.2})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \quad (\text{C.3})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1} \quad (\text{C.4})$$

$$\text{eig}[\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}] = \text{eig}[\mathbf{A}] \text{eig}[\mathbf{B}] \quad (\text{C.5})$$

- **Teoria de Alocação de Pólos Generalizada**

Gutman e Jury foram os pioneiros em caracterizar as condições de alocação dos pólos de uma matriz complexa em uma região delimitada no campo complexo, através de equações polinomiais, cujo trabalho pode ser resumido a uma série de teorias e definições que serão explicitadas a seguir.

Definição C.1 [Gutman, 1979a].

Dado $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, λ um autovalor de \mathbf{A} , $y = \text{Im } \lambda$ e $x = \text{Re } \lambda$. Considere uma região não-simétrica do plano complexo como:

$$\Omega_v = \left\{ (x, y) : \sum_{f,g} \gamma_{fg} x^f y^g < 0 \right\} \quad (\text{C.6})$$

e sua região complementar:

$$\overline{\Omega}_v = \left\{ (x, y) : \sum_{f,g} \gamma_{fg} x^f y^g \leq 0 \right\} \quad (\text{C.7})$$

sendo que f e g são inteiros não negativos, $v = f + g$ é a ordem da região analisada e γ_{fg} são coeficientes reais. Por exemplo, para uma região do tipo 2 tem-se:

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y) : \gamma_{00} + \gamma_{01}y + \gamma_{02}y^2 + \gamma_{11}xy + \gamma_{10}x + \gamma_{20}x^2 < 0 \right\}$$

As variáveis x e y podem ser calculadas como:

$$x = \frac{1}{2}(\lambda + \bar{\lambda}); \quad y = -\frac{i}{2}(\lambda - \bar{\lambda}) \quad (\text{C.8})$$

sendo que $\bar{\lambda}$ é o conjugado complexo de λ . A partir de (C.8), é possível definir uma função complexa μ tal que:

$$\mu(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{f,g} \gamma_{fg} (-i)^g \left(\frac{1}{2}\right)^{f+g} (\lambda + \bar{\lambda})^f (\lambda - \bar{\lambda})^g \quad (\text{C.9})$$

Substituindo em (C.9), para dados $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, tem-se:

$$\mu(\alpha, \bar{\beta}) = \sum_{f,g} \gamma_{fg} (-i)^g \left(\frac{1}{2}\right)^{f+g} (\alpha + \bar{\beta})^f (\alpha - \bar{\beta})^g \quad (\text{C.10})$$

Esta definição fornece um caráter polinomial a uma região interior a uma dada curva. Porém, não dá subsídios para garantir que um determinado conjunto de números complexos pertençam a essa região. Isto é necessário para permitir que qualquer autovalor de uma matriz dada seja estável. Portanto, vem a seguinte definição.

Definição C.2 [Gutman, 1979b]:

Considera-se que uma região definida por (C.6) seja transformável como uma região onde qualquer número complexo pertencente a essa possa ser alocado à esquerda do eixo imaginário.

A região Ω_v é transformável se os autovalores $\alpha, \beta \in \Omega_v$, o que implica em

$$\text{Re}[\mu(\alpha, \bar{\beta})] < 0 \quad (\text{C.11})$$

A região $\bar{\Omega}_v$ é transformável se os autovalores $\alpha, \beta \in \bar{\Omega}_v$, o que implica em

$$\text{Re}[\mu(\alpha, \bar{\beta})] \leq 0 \quad (\text{C.12})$$

As definições anteriores asseguram que qualquer número complexo possa estar posicionado a esquerda do eixo imaginário. Porém, nada garante que uma dada região esteja posicionada totalmente à esquerda do eixo imaginário do plano complexo. Portanto sejam os seguintes lemas.

Lema C.1 [Gutman, 1979a]:

Ω_1 e $\overline{\Omega}_1$ são transformáveis.

Lema C.2 [Gutman, 1979a]:

Ω_2 e $\overline{\Omega}_2$ são transformáveis:

- Para famílias de regiões simétricas: se $\gamma_{01} + \gamma_{20} \geq 0$
- Para famílias de regiões não simétricas: se $\gamma_{02} + \gamma_{20} \geq 0$

Prova [Gutman, 1979a] (Lema C.2):

Solução através de programação não linear:

$$\begin{cases} \text{Max}[\text{Re}(\mu)] \\ \text{s.a : } \alpha, \beta \in \Omega_2 \end{cases}$$

com:

$$\Omega_2 = \{(x, y) : g(x, y) = \gamma_{00} + \gamma_{01}y + \gamma_{02}y^2 + \gamma_{11}xy + \gamma_{10}x + \gamma_{20}x^2 \leq -\varepsilon \leq 0\} \quad (\text{a})$$

Usando: $\alpha = x_1 + iy_1$ e $\beta = x_2 + iy_2$ em (C.10) obtém-se:

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mu(\alpha, \overline{\beta})] = & \\ & \gamma_{00} + \frac{1}{2}\gamma_{01}(y_1 + y_2) - \frac{1}{4}\gamma_{02}[(x_1^2 - x_2^2) - (y_1^2 + y_2^2)] + \frac{1}{2}\gamma_{11}(x_1y_1 + x_2y_2) \\ & + \frac{1}{2}\gamma_{10}(x_1 + x_2) + \gamma_{20}[(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2] \end{aligned} \quad (\text{b})$$

Definindo a função lagrangiana:

$$L = \text{Re } \mu - \varphi_1(\varepsilon + g(x_1, y_1)) - \varphi_2(\varepsilon + g(x_2, y_2)) \quad (\text{c})$$

e calculando o gradiente de (c) e impondo a condição de otimalidade, tem-se:

$$\nabla L = 0, \text{ de onde se obtém: } x_1 = x_2, y_1 = y_2 \text{ (o que implica em } \alpha = \beta), \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}.$$

O resultado anterior indica o ponto crítico (mínimo ou máximo) da função L . Para obter a informação se o ponto é de máximo, deve-se obter a hessiana de L , assim:

$$\nabla^2 L(x_1, y_1, \frac{1}{2}) = \nabla^2 L(x_2, y_2, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(\gamma_{20} + \gamma_{02}) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\gamma_{20} + \gamma_{02}) \mathbf{M} \quad (\text{d})$$

Como \mathbf{M} é semidefinida positiva segue que: $(\gamma_{20} + \gamma_{02}) \geq 0$ o que implica que $\nabla^2 L$ é positivo semidefinida. Esta é uma condição suficiente para o máximo global. Finalmente $\forall \alpha, \beta \in \Omega_2$ tem-se:

$$\text{Re}[\mu(\alpha, \bar{\beta})] \leq \text{Re}[\mu(\alpha, \bar{\alpha})] = \gamma_{00} + \gamma_{01}y_1 + \gamma_{02}y_1^2 + \gamma_{11}x_1y_1 + \gamma_{10}x_1 + \gamma_{20}x_1^2 \leq 0 \quad (\text{e})$$

A principal conclusão destes lemas é que regiões só são transformáveis, ou seja, podem alocar autovalores à esquerda do eixo imaginário, se alguns dos coeficientes que determinam geometricamente a curva estão adequadamente definidos.

Gutman e Jury generalizaram o estudo de alocação para regiões de ordem maior. Porém, neste trabalho só serão enfocadas as famílias das regiões Ω_1 e Ω_2 , pois são as mais comuns nas pesquisas na área de controle.

As condições para que autovalores sejam alocados de forma estável, foram definidas anteriormente. Agora é necessário estabelecer as condições para que os autovalores de uma determinada matriz complexa estejam posicionados dentro de uma determinada região. Observe que as definições anteriores são as condições para que um número complexo pertença a uma região, e que esta garanta que sua parte real seja negativa. Nada se falou ainda em colocar os autovalores de uma matriz em uma região específica. Os Teoremas a seguir irão determinar estas condições.

Teorema C.1 [Gutman, 1979a]:

Seja a seguinte equação polinomial complexa:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (\text{C.13})$$

e a seguinte função polinomial complexa:

$$P(\mu) = \mu^k + q_{k-1}\mu^{k-1} + \dots + q_0 = 0 \quad (\text{C.14})$$

que tem $k = n^2$ raízes do tipo $\mu(\lambda_i, \bar{\lambda}_j)$; $i, j = 1, 2, \dots, n$, sendo que $\mu(\alpha, \bar{\beta})$ é dado por (C.10) e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são as raízes de (C.14). Para que as raízes de (C.10) estejam alocadas na região Ω_v é necessário e suficiente que todos os coeficientes do polinômio real $P(\mu)P^*(\mu)$ sejam positivos. $P^*(\mu)$ significa polinômio conjugado de $P(\mu)$, resultante da substituição dos coeficientes de $P(\mu)$ por seus conjugados.

Prova: Veja [Gutman, 1979a].

Exemplo C.1: Análise de dois pares de números complexos em uma região circular de raio 2 centrada na origem.

Como a região circular é uma região de ordem 2, pela definição C.1, tem-se:

$$\begin{aligned} \mu(\alpha, \bar{\beta}) = & \gamma_{00} + \gamma_{10}(0,5)(\alpha + \bar{\beta}) + \gamma_{01}(-i)(0,5)(\alpha - \bar{\beta}) + \gamma_{11}(-i)(0,5)^2(\alpha + \bar{\beta})(\alpha - \bar{\beta}) + \\ & \gamma_{20}(0,5)^2(\alpha + \bar{\beta})^2 + \gamma_{02}(-i)^2(0,5)^2(\alpha - \bar{\beta})^2 \end{aligned} \quad (\text{a})$$

Sabendo que a equação característica de um círculo é:

$$\Omega_2 = \{(x, y): -2^2 + y^2 + x^2 < 0\} \quad (\text{b})$$

Comparando (b) com (a) tem-se:

$$\mu(\alpha, \bar{\beta}) = -4 + (0,5)^2(\alpha + \bar{\beta})^2 - (0,5)^2(\alpha - \bar{\beta})^2 \quad (\text{c})$$

que é a equação característica dos números pertencentes à região definida por (b).

• Dado um par $\alpha_1 = -2 - 2i$ e $\alpha_2 = -2 + 2i$ que não pertence ao interior de (b).

Empregando o par α_1 e α_2 em (c), obtém-se:

$$\mu(\alpha_1, \overline{\alpha_2}) = -4 - 8i, \mu(\alpha_2, \overline{\alpha_1}) = -4 + 8i, \mu(\alpha_1, \overline{\alpha_1}) = 4, \mu(\alpha_2, \overline{\alpha_2}) = 4$$

que são as raízes do polinômio:

$$P(\mu) = p^4 + 32p^2 - 512p + 1280 = 0 \quad (d)$$

Multiplicando (d) por seu conjugado, resulta em:

$$P(\mu)P^*(\mu) = p^8 + 64p^6 - 1024p^5 + 3584p^4 - 32768p^3 + 334064p^2 - 1310720p + 1638400 = 0 \quad (e)$$

O polinômio (e) revela que existem coeficientes negativos e como era sabido previamente que o par α_1 e α_2 não pertence ao interior do círculo, então o Teorema C.1 se confirma.

• Dado um par $\alpha_1 = -1 - i$ e $\alpha_2 = -1 + i$ que pertence ao interior de (b).

Empregando o par α_1 e α_2 em (c), obtém-se:

$$\mu(\alpha_1, \overline{\alpha_2}) = -4 + 2i, \mu(\alpha_2, \overline{\alpha_1}) = -4 - 2i, \mu(\alpha_1, \overline{\alpha_1}) = -2, \mu(\alpha_2, \overline{\alpha_2}) = -2$$

que são as raízes do polinômio:

$$P(\mu) = p^4 + 12p^3 + 56p^2 + 112p + 80 = 0 \quad (f)$$

Multiplicando (f) por seu conjugado, resulta em:

$$P(\mu)P^*(\mu) = p^8 + 24p^7 + 256p^6 + 1568p^5 + 5984p^4 + 14464p^3 + 21504p^2 + 19720p + 64000 = 0 \quad (g)$$

O polinômio (g) revela que só há coeficientes positivos, e como era sabido previamente o par α_1 e α_2 pertence ao interior do círculo, e o Teorema C.1 novamente se confirma.

Teorema C.2 [Gutman, 1979b]:

Seja $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ e λ_i seus autovalores. Os autovalores da matriz:

$$\Phi(\mathbf{A}; \mathbf{A}) = \sum_{p,q} c_{pq} \mathbf{A}^p \otimes \overline{\mathbf{A}}^q, \quad c_{pq} \in \mathbf{C} \quad (\text{C.15})$$

são os n^2 autovalores de:

$$\Phi(\lambda_i, \lambda_j) = \sum_{p,q} c_{pq} \lambda_i^p \overline{\lambda_j}^q \quad (\text{C.16})$$

Prova: Veja [Gutman, 1979b].

Exemplo C.2: Dada a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

que tem como autovalores, $\lambda_1 = -1 - i$ e $\lambda_2 = -1 + i$. Arbitrando valores para os coeficientes de (C.15), obtém-se, por exemplo:

$$c_{00} = c_{10} = c_{01} = c_{11} = c_{20} = c_{02} = 1$$

A expressão (C.16) expandida para ordem 2, é:

$$\Phi(\lambda_i, \lambda_j) = 1 + \lambda_i + \overline{\lambda_j} + \lambda_i \overline{\lambda_j} + \lambda_i^2 + \overline{\lambda_j}^2 \quad (\text{a})$$

Substituindo (a), pelos autovalores de \mathbf{A} resulta em:

$$\Phi(\lambda_1, \overline{\lambda_2}) = -1 + 4i, \quad \Phi(\lambda_2, \overline{\lambda_1}) = -1 - 4i, \quad \Phi(\lambda_1, \overline{\lambda_1}) = 1, \quad \Phi(\lambda_2, \overline{\lambda_2}) = 1 \quad (\text{b})$$

Por outro lado expandindo (C.15) em ordem 2, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{A}; \mathbf{A}) &= 1\mathbf{A}^0 \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-0} + 1\mathbf{A}^1 \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-0} + 1\mathbf{A}^0 \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-1} + 1\mathbf{A}^1 \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-1} + 1\mathbf{A}^2 \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-0} + 1\mathbf{A}^0 \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-2} \\
&= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{A}^1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-1} + \mathbf{A}^1 \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-1} + \mathbf{A}^2 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \overline{\mathbf{A}}^{-2}
\end{aligned} \tag{c}$$

Fazendo a substituição numérica de \mathbf{A} em (c), resulta em:

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & -5 & -3 \\ -5 & -5 & -3 & -3 \\ 25 & 15 & 15 & 9 \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 10 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -4 \\ 0 & -5 & -4 & -4 \\ 25 & 20 & 20 & 12 \end{bmatrix} = \Phi(\mathbf{A}; \mathbf{A})
\end{aligned}$$

Os autovalores do resultado anterior são $-1+4i, -1-4i, 1, 1$, o que é idêntico ao resultado de (b) aplicando-se o Teorema C.2 a matriz \mathbf{A} .

Os Teoremas C.1 e C.2 são importantes ferramentas para que o Teorema a seguir possa ser definido.

Teorema C.3 [Gutman e Jury, 1981]:

Seja $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, $\Phi(\mathbf{A}; \mathbf{A}) = \sum_{p,q} c_{pq} \mathbf{A}^p \otimes \overline{\mathbf{A}}^q$, sendo que c_{pq} é o coeficiente de $\alpha^p \beta^q$ dado pela equação polinomial $\mu(\alpha, \overline{\beta})$ em (C.10). Para que os autovalores de \mathbf{A} estejam contidos na região transformável Ω_v , uma condição necessária e suficiente é que o polinômio real $q(\mu)q^*(\mu)$, tendo $q(\mu) = \det|\mu\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{A}, \overline{\mathbf{A}})|$, tenha os coeficientes $\mu_i = 0, 1, \dots, 2n^2 - 1$ todos positivos.

Prova: Veja [Gutman e Jury, 1981].

Pela combinação dos Teoremas C.1 e C.2 de [Gutman, 1979a], os autores afirmam que o Teorema C.3 é demonstrado.

Observe que as raízes de $q(\mu) = \det|\mu\mathbf{I} - \Phi(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{A}})|$ são $\mu_{i,j} = \sum_{p,q} c_{pq} \lambda_i^p \bar{\lambda}_j^q$ definidas pelo Teorema C.2, e cujas as raízes são do polinômio $P(\mu) = \mu^k + q_{k-1}\mu^{k-1} + \dots + q_0 = 0$ definido pelo Teorema C.1, que relaciona o polinômio $P(\mu)$ à definição da região Ω_v .

O Teorema C.3 é uma definição genérica para alocação de pólos de matrizes em regiões definidas por polinômios. Os mesmos autores iniciaram o estudo da aplicação do Teorema C.3 para uma particularização em matrizes hermitianas.

Teorema C.4 [Gutman e Jury, 1981]:

Para que todos os autovalores de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ estejam em uma região Ω_v , é necessária para uma dada matriz positivo definida $\mathbf{Q} \in \mathbf{C}^{n \times n}$, a existência de única matriz positivo definida $\mathbf{W} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ que seja a solução da equação generalizada de Lyapunov:

$$\sum_{p,q} c_{pq} \mathbf{A}^p \mathbf{W} \mathbf{A}^{*q} = -\mathbf{Q} \quad (\text{C.17})$$

sendo que \mathbf{A}^* é o conjugado transposto de \mathbf{A} e c_{pq} o coeficiente de $\alpha^p \beta^q$ em $\mu(\alpha, \bar{\beta})$.

Prova: Veja [Gutman e Jury, 1981].

A fim de generalizar, [Gutman e Jury, 1981] afirmam que a necessidade de um único par $\{\mathbf{W}, \mathbf{Q}\}$ existente só é possível se os coeficientes de (C.17) respeitem o Teorema C.3.

Em (C.10) considera-se:

- $\bar{\mu}(\alpha, \bar{\beta}) = \mu(\bar{\beta}, \alpha)$
- $c_{pq} = \bar{c}_{qp}$

O fato de $c_{pq} = \bar{c}_{qp}$ faz implicar que a matriz \mathbf{Q} seja hermitiana, portanto é necessário que \mathbf{W} também seja solução assim como \mathbf{W}^* , ou seja a equação (C.17) só faz admitir como soluções matrizes hermitianas.

Partindo do Teorema C.3, [Gutman e Jury, 1981] definem a relação entre os valores de γ_{fg} correspondentes à região de alocação Ω_v e c_{pq} o coeficiente do polinômio característico onde suas raízes são os autovalores de \mathbf{A} . Ou seja,

$$\mu(\lambda_i, \bar{\lambda}_j) = \Phi(\lambda_i, \bar{\lambda}_j) \quad (\text{C.18})$$

Para uma região de classe 2 (círculos, hipérbolas, parábolas) o primeiro e o segundo termos de (C.18) ficam:

$$\begin{aligned} \mu(\lambda_i, \bar{\lambda}_j) &= \gamma_{00} + \gamma_{10}(0,5)(\lambda_i + \bar{\lambda}_j) + \gamma_{01}(-i)(0,5)(\lambda_i - \bar{\lambda}_j) + \gamma_{11}(-i)(0,5)^2(\lambda_i + \bar{\lambda}_j)(\lambda_i - \bar{\lambda}_j) + \\ &\gamma_{20}(0,5)^2(\lambda_i + \bar{\lambda}_j)^2 + \gamma_{02}(-i)^2(0,5)^2(\lambda_i - \bar{\lambda}_j)^2 = \\ &\gamma_{00} + 0,5(\gamma_{10} - i\gamma_{01})\lambda_i + 0,5(\gamma_{10} + i\gamma_{01})\bar{\lambda}_j + 0,5(\gamma_{20} + \gamma_{02})\lambda_i\bar{\lambda}_j + 0,25(\gamma_{20} - \gamma_{02} - i\gamma_{11})\lambda_i^2 + \\ &0,25(\gamma_{20} - \gamma_{02} + i\gamma_{11})\bar{\lambda}_j^2 \Rightarrow \\ \Phi(\lambda_i, \bar{\lambda}_j) &= c_{00} + c_{10}\lambda_i + c_{01}\bar{\lambda}_j + c_{11}\lambda_i\bar{\lambda}_j + c_{20}\lambda_i^2 + c_{02}\bar{\lambda}_j^2 \end{aligned}$$

Igualando as expressões acima são obtidas as relações entre γ_{fg} e c_{pq} . Assim, tem-se:

- $\gamma_{00} = c_{00}$
- $0,5(\gamma_{10} - i\gamma_{01}) = c_{10}$
- $0,5(\gamma_{10} + i\gamma_{01}) = c_{01}$
- $0,5(\gamma_{20} + \gamma_{02}) = c_{11}$
- $0,25(\gamma_{20} - \gamma_{02} - i\gamma_{11}) = c_{20}$
- $0,25(\gamma_{20} - \gamma_{02} + i\gamma_{11}) = c_{02}$

As famílias de regiões mais comuns para o estudo de alocação de pólos são as famílias de ordem 1 (Ω_1) e de ordem 2 (Ω_2). A família Ω_1 corresponde às regiões delimitadas por funções lineares que são a reta do plano separador e o cone. A família Ω_2 concentra regiões limitadas por funções explícitas quadráticas (como o par de retas limitadoras horizontais) e funções implícitas quadráticas (círculo, parábola, hipérbole e elipse). Neste Apêndice concentrar-se-á em toda

família Ω_1 e apenas no círculo, porque estas curvas pertencem à região $S(\alpha, r, \theta)$. A Tabela C.1 é um resumo dos resultados dados por [Gutman e Jury, 1981] na utilização do Teorema C.3.

Família de Regiões	Região	Definição Geométrica	c_{pq}
Ω_1	Reta separadora	$\gamma_{00} + \gamma_{01}x + \gamma_{10}y < 0$	$c_{00} = \gamma_{00}$ $c_{01} = c_{10} = \frac{1}{2}(\gamma_{10} - i\gamma_{01})$
Ω_2	Círculo	$\gamma_{00} + \gamma_{01}x + x^2 + y^2 < 0$	$c_{00} = \gamma_{00}$ $c_{01} = c_{10} = \frac{1}{2}\gamma_{10}$ $c_{11} = \frac{1}{2}(\gamma_{20} + \gamma_{01})$

Tabela C.1 - Tipos de curvas e suas caracterizações quanto à alocação de pólos.

Uma região importante que descreverá o amortecimento é formada por duas retas simétricas denominada como cone. Observe que a omissão da região cônica na Tabela C.1 é proposital. A caracterização de Gutman torna o modelamento dessa região mais difícil. Por isso, a região cônica será caracterizada por modelos matemáticos publicados anteriormente ao trabalho de Gutman e Jury, que são mais tratáveis no âmbito de LMIs.

Apêndice D – Programas

Os programas apresentados referem-se aos algoritmos de otimização utilizados para a obtenção das matrizes dos controladores.

- **Cabeçalho geral encontrado em todos os programas**

```
clc
close all
clear all

tau=1e-2;
theta=acos(tau);
raio=1e12;
alpha=3;

load U:\LMI\feimlms\sem\A
load U:\LMI\feimlms\sem\B0
load U:\LMI\feimlms\sem\C0

load U:\LMI\feimlms\sem\B1
load U:\LMI\feimlms\sem\C1

load U:\LMI\feimlms\sem\B2
load U:\LMI\feimlms\sem\C2

load U:\LMI\feimlms\sem\D00
load U:\LMI\feimlms\sem\D01
load U:\LMI\feimlms\sem\D02
load U:\LMI\feimlms\sem\D10
load U:\LMI\feimlms\sem\D11
load U:\LMI\feimlms\sem\D12

load U:\LMI\feimlms\sem\D20
load U:\LMI\feimlms\sem\D21
load U:\LMI\feimlms\sem\D22

[r r]=size(A);
r=r/2;
```

- **LMIs para alocação de pólos: Realimentação de Estados**

OBS 1: Nos algoritmos de otimização, estas LMIs estarão simbolizadas por (*).

OBS 2: Para controle misto o índice “3” dado em “lmiterm[3 x x x]” passa a ser “4”

```
%terceira LMI, negativo-definida: Semiplano
```

```
lmiterm([3 1 1 X],A,1,'s');
lmiterm([3 1 1 Y],B2,1,'s');
lmiterm([3 1 1 X],2*alpha,1);
```

```
%quarta LMI, negativo-definida:Circulo
```

```
lmiterm([3 2 2 X],0.5*raio,-1,'s');
lmiterm([3 3 3 X],0.5*raio,-1,'s');
lmiterm([3 3 2 X],1,A');
lmiterm([3 3 2 -Y],1,B2');
```

```
cs=cos(theta);
sn=sin(theta);
```

```
%quinta LMI, negativo-definida: Cone
```

```
lmiterm([3 4 4 X],A,sn,'s');
lmiterm([3 4 4 Y],B2,sn,'s');
lmiterm([3 5 4 X],A,-cs);
lmiterm([3 5 4 X],cs,A');
lmiterm([3 5 4 Y],B2,-cs);
lmiterm([3 5 4 -Y],cs,B2');
lmiterm([3 5 5 X],A,sn,'s');
lmiterm([3 5 5 Y],B2,sn,'s');
```

- **Controle H_2 com Alocação de Pólos – Realimentação de Estados**

```
I=eye(1);
```

```
[b1a b1b]=size(B1);
[c1a c1b]=size(C1);
```

```
%Definição do sistema LMI:
```

```
setlms({})
Z=lmvivar(1,[b1b 1]);
X=lmvivar(1,[r 1]);
Y=lmvivar(2,[1 r]);
```

```
%Primeira LMI, positivo-definida:
```

```
lmiterm([-1 1 1 Z],1,1);
lmiterm([-1 2 1 0],B1);
lmiterm([-1 2 2 X],1,1);
```

```
%Segunda LMI, negativo-definida:
```

```
lmiterm([2 1 1 X],A,1,'s');
lmiterm([2 1 1 Y],B2,1,'s');
lmiterm([2 2 1 X],C1,1);
lmiterm([2 2 1 Y],D12,1);
lmiterm([2 2 2 0],-eye(c1a));
```

(*) declaração das LMIs para alocação de pólos.

```
RE=getlmis;
```

%Solução do sistema:

```
nvd=decnbr(RE);  
c=zeros(nvd,1);  
c(1)=1;  
c(3)=1;  
[cotim,xotim]=mincx(RE,c,[1e-5 2000 1e10 50 0 ]);
```

```
Zotim=dec2mat(RE, xotim,Z);  
Xotim=dec2mat(RE, xotim,X);  
Yotim=dec2mat(RE, xotim,Y);  
disp('Valor ótimo do Traço de Z:');  
Trz=trace(Zotim)
```

%Definição do modelo de estados do Controlador:

```
F=Yotim*inv(Xotim);  
disp('Matrizes do Sistema Malha Fechada, incluído o Controlador  
H-infinito:');  
Ac=A+B2*F;  
Bc=B1;  
Cc=C1+D12*F;  
Dc=D11;
```

%Definição do controlador H2:

```
Trz=trace(Zotim);  
[Ac,Bc,Cc]=obalreal(Ac,Bc,Cc);  
consysrs=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);  
controlador=F;
```

```
save U:\LM\mfemllmis\com_aloc\RE-H2-Ta consysrs  
save U:\LM\mfemllmis\com_aloc\RE-H2-Tb controlador  
save U:\LM\mfemllmis\com_aloc\RE-H2-Tc Trz oc\RE-H2-Tc Trz
```

• Controle H_∞ com Alocação de Pólos – Realimentação de Estados

```
[b1a b1b]=size(B1);  
[c1a c1b]=size(C1);
```

%montagem da matriz do sistema

```
I=eye(1);
```

%Definição do sistema LMI:

```
setlmis({})
```

```
mi=lmivar(1,[1 1]);  
X=lmivar(1,[2*r 1]);  
Y=lmivar(2,[1 2*r]);
```

%Primeira LMI, negativo-definida:

```
lmiterm([1 1 1 X],A,1,'s');  
lmiterm([1 1 1 Y],B2,1,'s');  
lmiterm([1 3 1 0],B1);  
lmiterm([1 2 2 0],-eye(c1a));  
lmiterm([1 2 1 X],C1,1);  
lmiterm([1 2 1 Y],D12,1);  
lmiterm([1 3 2 0],D11);  
lmiterm([1 3 3 mi],0.5*1,-eye(b1b),'s');
```

%Segunda LMI, positivo-definida:

```
lmiterm([-2 1 1 X],1,1);
```

(*) declaração das LMIs para alocação de pólos.

```
RE=getlmis;
```

%Solução do sistema:

```
nvd=decnbr(RE);  
c=zeros(nvd,1);  
c(1)=1;  
[cotim,xotim]=mincx(RE,c,[1e-5 500 1e9 50 0 ]);
```

```
miotim=dec2mat(RE,xotim,mi);  
Xotim=dec2mat(RE,xotim,X);  
Yotim=dec2mat(RE,xotim,Y);  
disp('Valor ótimo de gamma, seguido do valor em dB:');  
gammaotim=sqrt(miotim);
```

%Definição do modelo de estados com o Controlador:

```
F=Yotim*inv(Xotim);  
disp('Matrizes do Sistema Malha Fechada, incluído o Controlador  
H-infinito:');  
Ac=A+B2*F;  
Bc=B1;  
Cc=C1+D12*F;  
Dc=D11;
```

```
[Ac,Bc,Cc]=obalreal(Ac,Bc,Cc);  
consysrs=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);  
controlador=F;
```

```
save U:\LM\mfemllmis\com_aloc\RE-Hinf-Ta consysrs  
save U:\LM\mfemllmis\com_aloc\RE-Hinf-Tb controlador  
save U:\LM\mfemllmis\com_aloc\RE-Hinf-Tc gammaotim
```

• Controle H_2/H_∞ com Alocação de Pólos – Realimentação de Estados

```
mi0=1.1*(2.963689357419612)^2;
```

```
[b0a b0b]=size(B0);  
[c0a c0b]=size(C0);  
[b1a b1b]=size(B1);  
[c1a c1b]=size(C1);
```

%Definição do sistema LMI:

```
setlmis({})
```

```
Z=lmivar(1,[b1b 1]);  
X=lmivar(1,[2*r 1]);  
Y=lmivar(2,[1 2*r]);
```

%Primeira LMI, positivo-definida:

```
lmiterm([-1 1 1 Z],1,1);  
lmiterm([-1 2 1 0],B1);  
lmiterm([-1 2 2 X],1,1);
```

%Segunda LMI, negativo-definida:

```
lmiterm([2 1 1 X],A,1,'s');  
lmiterm([2 1 1 Y],B2,1,'s');  
lmiterm([2 2 1 X],C1,1);  
lmiterm([2 2 1 Y],D12,1);  
lmiterm([2 2 2 0],-eye(c1a));
```

%Primeira LMI, negativo-definida:

```
lmiterm([3 1 1 X],A,1,'s');
lmiterm([3 1 1 Y],B2,1,'s');
lmiterm([3 2 1 X],C0,1);
lmiterm([3 2 1 Y],D02,1);
lmiterm([3 2 2 0],-eye(c0a));
lmiterm([3 3 1 0],B0');
lmiterm([3 3 3 0],-mi0*eye(b0b));
```

%Segunda LMI, positivo-definida:

(*) declaração das LMIs para alocação de pólos.

RE=getlmis;

%Solução do sistema:

```
nvd=decnbr(RE);
c=zeros(nvd,1);
c(1)=1;
c(3)=1;
[cotim,xotim]=mincx(RE,c,[1e-5 500 1e10 50 0]);
```

```
Zotim=dec2mat(RE,xotim,Z);
Xotim=dec2mat(RE,xotim,X);
Yotim=dec2mat(RE,xotim,Y);
```

%Definição do modelo de estados do Controlador:

F=Yotim*inv(Xotim);

```
Ac=A+B2*F;
Bc=[B0 B1];
Cc=[C0+D02*F ;C1+D12*F];
Dc=[D00 D01; D10 D11];
```

%Definição do controlador Misto:

```
Trz=trace(Zotim);
[Ac,Bc,Cc]=obalreal(Ac,Bc,Cc);
consysrs=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
controlador=F;
gammaotim=sqrt(mi0);
```

```
save U:\LMI\fe\lmis\com_aloc\RE-HinfH2-Ta consysrs
save U:\LMI\fe\lmis\com_aloc\RE-HinfH2-Tb controlador
save U:\LMI\fe\lmis\com_aloc\RE-HinfH2-Tc gammaotim
save U:\LMI\fe\lmis\com_aloc\RE-HinfH2-Td Trz
```

• (*) LMIs para alocação de pólos: Realimentação de Saída

OBS: Para controle misto o índice “3” passa a ser “4”

%terceira LMI, negativo-definida: Semiplano

```
lmiterm([3 1 1 Y],alpha,2);
lmiterm([3 1 1 Y],A,1,'s');
lmiterm([3 1 1 F],B2,1,'s');
lmiterm([3 2 1 M],1,1);
lmiterm([3 2 1 0],A');
lmiterm([3 2 1 0],2*alpha*eye(2*r));
```

```
lmiterm([3 2 2 X],alpha,2);
lmiterm([3 2 2 X],1,A,'s');
lmiterm([3 2 2 L],1,C2,'s');
```

%quarta LMI, negativo-definida:Circulo

```
lmiterm([3 3 3 Y],-raio,1);
lmiterm([3 4 3 0],-raio*eye(2*r));
lmiterm([3 4 4 X],-raio,1);
lmiterm([3 5 3 Y],1,A');
lmiterm([3 5 3 -F],1,B2');
lmiterm([3 6 3 0],A');
lmiterm([3 5 4 -M],1,1);
lmiterm([3 6 4 X],A',1);
lmiterm([3 6 4 -L],C2',1);
lmiterm([3 5 5 Y],-raio,1);
lmiterm([3 6 5 0],-raio*eye(2*r));
lmiterm([3 6 6 X],-raio,1);
```

cs=cos(theta);
sn=sin(theta);

% quinta LMI, negativo-definida: Cone

```
lmiterm([3 7 7 Y],.5*sn*A,1,'s');
lmiterm([3 7 7 Y],.5*sn,A',1,'s');
lmiterm([3 7 7 F],.5*sn*B2,1,'s');
lmiterm([3 7 7 -F],.5*sn,B2',1,'s');
```

```
lmiterm([3 8 7 M],sn,1);
lmiterm([3 8 7 0],sn*A');
```

```
lmiterm([3 8 8 X],.5*sn,A,'s');
lmiterm([3 8 8 X],.5*sn*A',1,'s');
lmiterm([3 8 8 L],.5*sn,C2,'s');
lmiterm([3 8 8 -L],.5*sn*C2',1,'s');
```

```
lmiterm([3 9 7 Y],cs*A,-1);
lmiterm([3 9 7 Y],cs,A');
lmiterm([3 9 7 F],cs*B2,-1);
lmiterm([3 9 7 -F],cs,B2');
```

```
lmiterm([3 9 8 -M],cs,1);
lmiterm([3 9 8 0],-cs*A');
```

```
lmiterm([3 9 9 Y],.5*sn*A,1,'s');
lmiterm([3 9 9 Y],.5*sn,A',1,'s');
lmiterm([3 9 9 F],.5*sn*B2,1,'s');
lmiterm([3 9 9 -F],.5*sn,B2',1,'s');
```

```
lmiterm([3 10 7 M],cs,-1);
lmiterm([3 10 7 0],cs*A');
```

```
lmiterm([3 10 8 X],cs,-A);
lmiterm([3 10 8 X],cs*A,1);
lmiterm([3 10 8 L],cs,-C2);
lmiterm([3 10 8 -L],cs*C2',1);
```

```
lmiterm([3 10 9 M],sn,1);
lmiterm([3 10 9 0],sn*A');
```

```
lmiterm([3 10 10 X],.5*sn,A,'s');
lmiterm([3 10 10 X],.5*sn*A',1,'s');
lmiterm([3 10 10 L],.5*sn,C2,'s');
lmiterm([3 10 10 -L],.5*sn*C2',1,'s');
```

• Controle H_2 com Alocação de Pólos – Realimentação de Saída

ts=1;

[b1a b1b]=size(B1);

```

[c1a c1b]=size(C1);

%Definição do sistema LMI:

setlmis({})

Z=lmivar(1,[b1b 1]);
X=lmivar(1,[2*r 1]);
Y=lmivar(1,[2*r 1]);
L=lmivar(2,[2*r 1]);
F=lmivar(2,[1 2*r]);
M=lmivar(2,[2*r 2*r]);

%Primeira LMI, positivo-definida:

lmiterm([-1 1 1 Z],1,1);
lmiterm([-1 2 1 0],B1);
lmiterm([-1 2 2 Y],1,1);
lmiterm([-1 3 1 -X],1,B1);
lmiterm([-1 3 1 L],1,D21);
lmiterm([-1 3 2 0],ts*eye(2*r));
lmiterm([-1 3 3 X],1,1);

%Segunda LMI, negativo-definida:

lmiterm([2 1 1 Y],A,1,'s');
lmiterm([2 1 1 F],B2,1,'s');

lmiterm([2 2 1 M],1,1);
lmiterm([2 2 1 0],A');

lmiterm([2 2 2 X],1,A,'s');
lmiterm([2 2 2 L],1,C2,'s');

lmiterm([2 3 1 -Y],C1,1);
lmiterm([2 3 1 F],D12,1);

lmiterm([2 3 2 0],C1);
lmiterm([2 3 3 0],-eye(c1a));

(*) declaração das LMIs para alocação de pólos.

RS=getlmis;

%Solução do sistema:

nvd=decnbr(RS);
c=zeros(nvd,1);
c(1)=1;
c(3)=1;

[cotim,xotim]=mincx(RS,c,[1e-3 1000 1e10 50 0]);

Zotim=dec2mat(RS,xotim,Z);
Xotim=dec2mat(RS,xotim,X);
Yotim=dec2mat(RS,xotim,Y);
Lotim=dec2mat(RS,xotim,L);
Fotim=dec2mat(RS,xotim,F);
Motim=dec2mat(RS,xotim,M);
disp('Valor ótimo do Traço de Z:');
Trz=trace(Zotim)

%Definição do modelo de estados do Controlador:

I=eye(2*r);
U=I; %Variavel U arbitrária!
V=inv(U)*(I-Xotim*Yotim);
disp('Matrizes do Controlador H2:');
Ac=inv(U)*(Motim-Xotim*A*Yotim-Xotim*B2*Fotim-
Lotim*C2*Yotim)*inv(V);

```

```

Bc=inv(U)*Lotim;
Cc=Fotim*inv(V);
Dc=0;

```

%Definição do controlador H2.:

```

disp('Modelo de Estados malha fechada:');
Acc=[A B2*Cc;Bc*C2 Ac];
Bcc=[B1;Bc*D21];
Ccc=[C1 D12*Cc];
Dcc=[0 0; 0 0];

```

```

[Acc,Bcc,Ccc]=obalreal(Acc,Bcc,Ccc);
consysrs=ss(Acc,Bcc,Ccc,Dcc);
controlador=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
Trz=trace(Zotim);
save U:\LM\Fem\lms\com_aloc\RS-H2-Ta consysrs
save U:\LM\Fem\lms\com_aloc\RS-H2-Tb controlador
save U:\LM\Fem\lms\com_aloc\RS-H2-Tc Trz

```

• Controle H_∞ com Alocação de Pólos – Realimentação de Saída

```
ts=1.1;
```

```
[b1a b1b]=size(B1);
[c1a c1b]=size(C1);
```

%Definição do sistema LMI:

```

setlmis({})

mi=lmivar(1,[1 1]);
X=lmivar(1,[2*r 1]);
Y=lmivar(1,[2*r 1]);
L=lmivar(2,[2*r 1]);
F=lmivar(2,[1 2*r]);
M=lmivar(2,[2*r 2*r]);

```

%Primeira LMI, negativo-definida:

```

lmiterm([1 1 1 Y],A,1,'s');
lmiterm([1 1 1 F],B2,1,'s');
lmiterm([1 2 1 M],1,1);
lmiterm([1 2 1 0],A');
lmiterm([1 2 2 X],1,A,'s');
lmiterm([1 2 2 L],1,C2,'s');
lmiterm([1 3 1 Y],C1,1);
lmiterm([1 3 1 F],D12,1);
lmiterm([1 3 2 0],C1);
lmiterm([1 3 3 0],-eye(c1a));
lmiterm([1 4 1 0],B1');
lmiterm([1 4 2 X],B1',1);
lmiterm([1 4 2 -L],D21',1);
lmiterm([1 4 4 mi],1,-eye(b1b));

```

%Segunda LMI, positivo-definida:

```

lmiterm([-2 1 1 Y],1,1);
lmiterm([-2 2 1 0],ts*eye(2*r));
lmiterm([-2 2 X],1,1);

```

(*) declaração das LMIs para alocação de pólos.

```
RS=getlmis;
```

%Solução do sistema:

```
nvd=decnbr(RS);
c=zeros(nvd,1);
```

```

c(1)=1;

[cotim,xotim]=mincx(RS,c,[1e-10 1000 1e10 50 0]);

miotim=dec2mat(RS,xotim,mi);
Xotim=dec2mat(RS,xotim,X);
Yotim=dec2mat(RS,xotim,Y);
Lotim=dec2mat(RS,xotim,L);
Fotim=dec2mat(RS,xotim,F);
Motim=dec2mat(RS,xotim,M);

%Definição do modelo de estados do Controlador:

I=eye(2*r);
U=I; %Variavel U arbitraria!
V=inv(U)*(I-Xotim*Yotim);

disp('Matrizes do Controlador Hinf:')
Ac=inv(U)*(Motim-Xotim*A*Yotim-Xotim*B2*Fotim-
Lotim*C2*Yotim)*inv(V);
Bc=inv(U)*Lotim;
Cc=Fotim*inv(V);
Dc=0;

%Definição do controlador H-inf.:

disp('Modelo de Estados malha fechada:')
Acc=[A B2*Cc;Bc*C2 Ac];
Bcc=[B1 ; Bc*D21];
Ccc=[C1 D12*Cc];
Dcc=[0 0;0 0];

[Acc,Bcc,Ccc]=obaireal(Acc,Bcc,Ccc);
consysrs=ss(Acc,Bcc,Ccc,Dcc);

controlador=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);
gammaotim=sqrt(miotim);

save U:\LM\fmllmis\com_aloc\RS-Hinf-Ta consysrs
save U:\LM\fmllmis\com_aloc\RS-Hinf-Tb controlador
save U:\LM\fmllmis\com_aloc\RS-Hinf-Tc gammaotim

```

• Controle H_2/H_∞ com Alocação de Pólos – Realimentação de Saída

```

ts=1;

mi0=(4.464729288978480e+001)^2;

[b0a b0b]=size(B0);
[c0a c0b]=size(C0);
[b1a b1b]=size(B1);
[c1a c1b]=size(C1);

%Definição o otimo pela criação do sistema em LMI:

setlmis([])

Z=lmivar(1,[b1b 1]);
X=lmivar(1,[2*r 1]);
Y=lmivar(1,[2*r 1]);
L=lmivar(2,[2*r 1]);
F=lmivar(2,[1 2*r]);
M=lmivar(2,[2*r 2*r]);

%Primeira LMI, positivo-definida:

lmiterm([-1 1 1 Z],1,1);
lmiterm([-1 2 1 0],B1);

lmiterm([-1 2 2 Y],1,1);
lmiterm([-1 3 1 -X],1,B1);
lmiterm([-1 3 1 L],1,D21);
lmiterm([-1 3 2 0],eye(2*r));
lmiterm([-1 3 3 X],1,1);

%Segunda LMI, negativo-definida:

lmiterm([2 1 1 Y],A,1,'s');
lmiterm([2 1 1 F],B2,1,'s');
lmiterm([2 2 1 M],1,1);
lmiterm([2 2 1 0],A');
lmiterm([2 2 2 X],1,A,'s');
lmiterm([2 2 2 L],1,C2,'s');
lmiterm([2 3 1 -Y],C1,1);
lmiterm([2 3 1 F],D12,1);
lmiterm([2 3 2 0],C1);
lmiterm([2 3 3 0],-eye(c1a));

%Terceira LMI, negativo-definida:

lmiterm([3 1 1 Y],A,1,'s');
lmiterm([3 1 1 F],B2,1,'s');

lmiterm([3 2 1 M],1,1);
lmiterm([3 2 1 0],A');

lmiterm([3 2 2 X],1,A,'s');
lmiterm([3 2 2 L],1,C2,'s');

lmiterm([3 3 1 -Y],C0,1);
lmiterm([3 3 1 F],D02,1);
lmiterm([3 3 2 0],C0);

lmiterm([3 3 3 0],-eye(c0a));

lmiterm([3 4 1 0],B0');
lmiterm([3 4 2 -L],D20,1);

lmiterm([3 4 2 X],B0',1);
lmiterm([3 4 4 0],-mi0*eye(b0b));

(*) declaração das LMIs para alocação de pólos.

RS=getlmis;

%Solução do sistema:

nvd=decnbr(RS);
c=zeros(nvd,1);
c(1)=1;
c(3)=1;
[cotim,xotim]=mincx(RS,c,[1e-5 1000 1e10 50 0]);

Zotim=dec2mat(RS,xotim,Z);
Xotim=dec2mat(RS,xotim,X);
Yotim=dec2mat(RS,xotim,Y);
Lotim=dec2mat(RS,xotim,L);
Fotim=dec2mat(RS,xotim,F);
Motim=dec2mat(RS,xotim,M);

%Definição do modelo de estados do Controlador:

I=eye(2*r);
U=I; %Variavel U arbitraria!
V=inv(U)*(I-Xotim*Yotim);

disp('Matrizes do Controlador Misto:')

```

```

Ac=inv(U)*(Motim-Xotim*A*Yotim-Xotim*B2*Fotim-
Lotim*C2*Yotim)*inv(V);
Bc=inv(U)*Lotim;
Cc=Fotim*inv(V);
Dc=[0 ];

```

```

%Definição do controlador Misto:

```

```

Acc=[A B2*Cc; Bc*C2 Ac];
Bcc=[B0 B1 ; Bc*D20 Bc*D21];
Ccc=[C0 D02*Cc; C1 D12*Cc];
Dcc=[D00 D01; D10 D11];

```

```

[Acc,Bcc,Ccc]=obalreal(Acc,Bcc,Ccc);
Trz=trace(Zotim);
consysrs=ss(Acc,Bcc,Ccc,Dcc);
gammaotim=sqrt(mi0);
controlador=ss(Ac,Bc,Cc,Dc);

```

```

save U:\LMI\feimlms\com_aloc\RS-HinfH2-Ta consysrs
save U:\LMI\feimlms\com_aloc\RS-HinfH2-Tb controlador
save U:\LMI\feimlms\com_aloc\RS-HinfH2-Tc gammaotim
save U:\LMI\feimlms\com_aloc\RS-HinfH2-Td Trz

```