ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA POR ROBSON GEREMIAS MACEDO E APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA EM 13/01/10

ORIENTADOR

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Análise de Propagação de Incertezas em Método de Estimação de Rigidez Estática por Dados Dinâmicos

Autor: **ROBSON GEREMIAS MACEDO**

Orientador: **PROF. Dr. JOSÉ ROBERTO DE FRANÇA ARRUDA**

19/10

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Análise de Propagação de Incertezas em Método de Estimação de Rigidez Estática por Dados Dinâmicos

Autor: **ROBSON GEREMIAS MACEDO**
Orientador: **PROF. Dr. JOSÉ ROBERTO DE FRANÇA ARRUDA**

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado acadêmico apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2010
S.P . – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA E ARQUITETURA - BAE - UNICAMP

Macedo, Robson Geremias
M151a Análise de propagação de incertezas em método de estimação de rigidez estática por dados dinâmicos / Robson Geremias Macedo. --Campinas, SP: [s.n.], 2010.

Orientador: José Roberto de França Arruda.
Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Análise modal. 2. Metodo de Monte Carlo. 3. Carrocerias. I. Arruda, José Roberto de França. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Título em Inglês: Uncertainties propagation analysis through static stiffness estimation method from dynamic data
Palavras-chave em Inglês: Modal analysis, Monte Carlo, Method, Bodies
Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico
Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica
Banca examinadora: Milton Dias Júnior, Domingos Alves Rade
Data da defesa: 13/01/2010
Programa de Pós Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Análise de Propagação de Incertezas em Método de Estimação de Rigidez Estática por Dados Dinâmicos

Autor: **ROBSON GEREMIAS MACEDO**
Orientador: **PROF. Dr. JOSÉ ROBERTO DE FRANÇA ARRUDA**

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. José Roberto de França Arruda - Presidente
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Prof. Dr. Milton Dias Junior
Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP

Prof. Dr. Domingos Alves Rade
Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Campinas, 13 de Janeiro de 2010.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Israel e Maria Flávia, por sempre terem me apoiado e incentivado a seguir em frente. Também dedico à minha noiva, Marcela, pela compreensão, incentivo e paciência ao longo destes últimos anos.

Agradecimentos

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas às quais presto minha homenagem:

Ao meu orientador Prof. Dr. José Roberto de França Arruda pela motivação, amizade e excelente orientação dada ao longo deste trabalho.

Aos amigos Silvio Cesar Barbosa e Carlos Alberto do Prado Guido pelos valiosos ensinamentos sobre avaliações estruturais em carrocerias.

Aos colegas do DMC, Dr. Khaled Ahmida e Adriano Fabro, pela ajuda com a programação do código de simulação numérica em MATLAB® e pelo suporte com a teoria de incertezas em dinâmica estrutural, respectivamente.

Ao Centro de Ensaios Estáticos da Engenharia do Produto da Volkswagen do Brasil por disponibilizar suas instalações e equipamentos para a realização dos ensaios experimentais de carregamento estático.

Ao Laboratório de Ruídos e Vibrações do Campo de Provas da Cruz Alta da General Motors do Brasil pela realização dos ensaios experimentais de análise modal.

Aos meus gestores, Andreas Kellner e Marcelo Bertocchi, pelo apoio e credibilidade dados a mim e por incentivarem o intercâmbio universidade-empresa.

O pessimista reclama do vento,
O otimista espera que ele mude,
O sábio ajusta as velas.
(John Maxwell)

Resumo

MACEDO, Robson Geremias, *Análise de Propagação de Incertezas em Método de Estimação de Rigidez Estática por Dados Dinâmicos*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2010, 126 p. Dissertação (Mestrado).

Este trabalho consiste no estudo de propagação de incertezas aleatórias através de método que permite estimar deflexões de carregamentos estáticos a partir de dados de avaliação dinâmica. Com este propósito, um modelo numérico foi desenvolvido para a realização de simulações de carregamentos estáticos cujas condições de contorno empregadas são similares às usualmente praticadas pela indústria automobilística em avaliações de rigidez de carrocerias. As freqüências naturais e os modos de vibrar também foram calculados pela resolução do problema de autovalor e autovetor das matrizes de massa e rigidez do modelo. Estes últimos dados foram então utilizados pelo método para estimar os mesmos coeficientes de rigidez obtidos da simulação de carregamento estático. Em seguida, incertezas aleatórias devidamente modeladas foram incorporadas aos parâmetros modais. Ferramentas de análise de propagação de incertezas, como Monte Carlo e propagação linear de covariância, foram aplicadas na verificação da incerteza da estimação feita pelo método quando seus parâmetros de entrada são incertos. Por último, ensaios experimentais de carregamento estático e análise modal experimental foram realizados para validação do método frente às incertezas associadas a estas medições. Resultados são apresentados e comentados.

Palavras chave:

- Análise modal, Rigidez, Incerteza, Monte Carlo, Ensaios Experimentais

Abstract

MACEDO, Robson Geremias, *Uncertainties Propagation Analysis Through Static Stiffness Estimation Method from Dynamic Data*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2010, 126 p. Dissertação (Mestrado).

This work aims the study of random uncertainties propagation through a method that provides estimation of static loading deflections from dynamic data evaluations. With this purpose, a numerical model was developed in order to simulate static loading with the same boundary conditions as those used in static stiffness evaluations adopted by automotive manufacturers. Natural frequencies and vibration mode-shapes were also calculated by solving the eigenvalue and eigenvector problem from mass and stiffness matrices of the model. Simulated dynamic data were applied in this method to estimate the stiffness rate as usually obtained from a static loading simulation. Properly modeled random uncertainties were then incorporated into the modal parameters. Analysis tools for uncertainty propagation, such as Monte Carlo and linear covariance propagation were used in order to evaluate the uncertainty of the estimations made by the method when the input parameters are uncertain. Finally, experimental static loading tests and experimental modal analysis were performed to validate the method against the uncertainties associated with these measurements. These results are presented and discussed.

Key Words:

- Modal Analysis, Stiffness, Uncertainty, Monte Carlo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Nomenclatura

Letras Romanas

A	Área da secção transversal
E	Módulo de elasticidade
F	Força de carregamento estático
I	Momento de inércia da secção transversal
K	Coeficiente de rigidez
L	Comprimento do pórtico
N	Número de graus de liberdade
W	Largura do pórtico
V	Flecha (deslocamento transversal)
d	Deslocamento
$\{x(t)\}$	Vetor de deslocamentos variantes com o tempo
$\{f(t)\}$	Vetor de forças variantes com o tempo
$\{X\}$	Vetor de amplitudes constantes de $\{x(t)\}$
$\{F\}$	Vetor de amplitudes constantes de $\{f(t)\}$
[M]	Matriz de massa concentrada
[K]	Matriz de rigidez concentrada
[I]	Matriz identidade

Letras Gregas

α	Receptância
ω	Freqüência angular
ψ	Modo de vibrar não-normalizado
ϕ	Modo de vibrar normalizado pela massa modal
ρ	Densidade de massa
ρ_{ij}	Coeficiente de correlação entre as variáveis i e j
θ	Ângulo de torção
μ	Média aritmética
σ	Desvio padrão

Abreviações

GDL	Grau de Liberdade
FDP	Função Densidade de Probabilidade
FRF	Função de Resposta em Freqüência
MAC	Critério de Confiança Modal (*Modal Assurance Criterion*)
MEF	Método dos Elementos Finitos
REEDD	Rigidez Estática Estimada por Dados Dinâmicos
LSCF	Exponenciais Complexas por Mínimos Quadrados no Domínio da Freqüência (*Least Squares Complex Frequency Domain*)
LSCE	Exponenciais Complexas por Mínimos Quadrados no Domínio do Tempo (*Least Squares Complex Exponential*)

Sobrescritos

r	referente ao r-ésimo modo

Subscritos

i, j, k	graus de liberdade
r	referente ao r-ésimo modo
t	referente à torção
f	referente à flexão

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nas últimas duas décadas, grande parte das montadoras de automóveis tem empregado esforços para melhoria dos projetos e construção de carrocerias de veículos. O crescimento da competição entre os fabricantes, fruto da globalização dos mercados, associado a requisitos cada vez mais severos de segurança, desempenho e consumo de combustível, têm movido o desenvolvimento das estruturas veiculares na atualidade. Características como otimização de massa, absorção de impactos e melhoria da rigidez vêm sendo fortemente perseguidas pelos principais grupos automobilísticos.

Contribuindo para este desenvolvimento destaca-se o surgimento de técnicas e ferramentas de simulação numérica que possibilitam análises detalhadas de cada componente da carroceria levando à sua otimização estrutural. Assim, nos dias de hoje, obtêm-se resultados de rigidez estrutural melhores do que os que se obtinham no passado sem o aumento (indesejado) de massa. Reforços são dimensionados e adicionados apenas nas regiões onde têm sua funcionalidade comprovada.

No entanto, embora a participação de ferramentas de simulação numérica em projetos de automóveis tenha aumentando consideravelmente nos últimos anos, propiciando redução nos custos de desenvolvimento e desempenho otimizado, tais ferramentas ainda não são capazes de predizer a variabilidade do processo de construção e montagem de carrocerias. Funcionam, portanto, em um ambiente ideal, não sujeito a variações inerentes ao processo de montagem. É neste contexto que a realização de ensaios físicos ainda se faz necessária no processo de desenvolvimento de veículos.

1.1 – Ensaios de carregamento estático

Ensaios de torção e flexão estáticas são realizados pela maioria das indústrias de veículos. Estes testes têm como propósito a medição dos coeficientes de rigidez à torção e à flexão de carrocerias e a confrontação com os requisitos de projeto. Em geral, esta rigidez é apresentada como uma constante que relaciona momento por ângulo de rotação (torção) ou força por deflexão (flexão).

Na execução destes ensaios são empregados dispositivos específicos, especialmente construídos para este propósito. Juntas articuladas, apoios, cantoneiras e mordentes são exemplos destes dispositivos. Atuadores hidráulicos, pneumáticos ou mesmo lastros são empregados na aplicação de carregamentos. Por fim, transdutores de força e de deslocamento são utilizados na medição das grandezas envolvidas no cálculo dos coeficientes de rigidez. A Figura 1 ilustra a montagem dos ensaios típicos de carregamento estático.

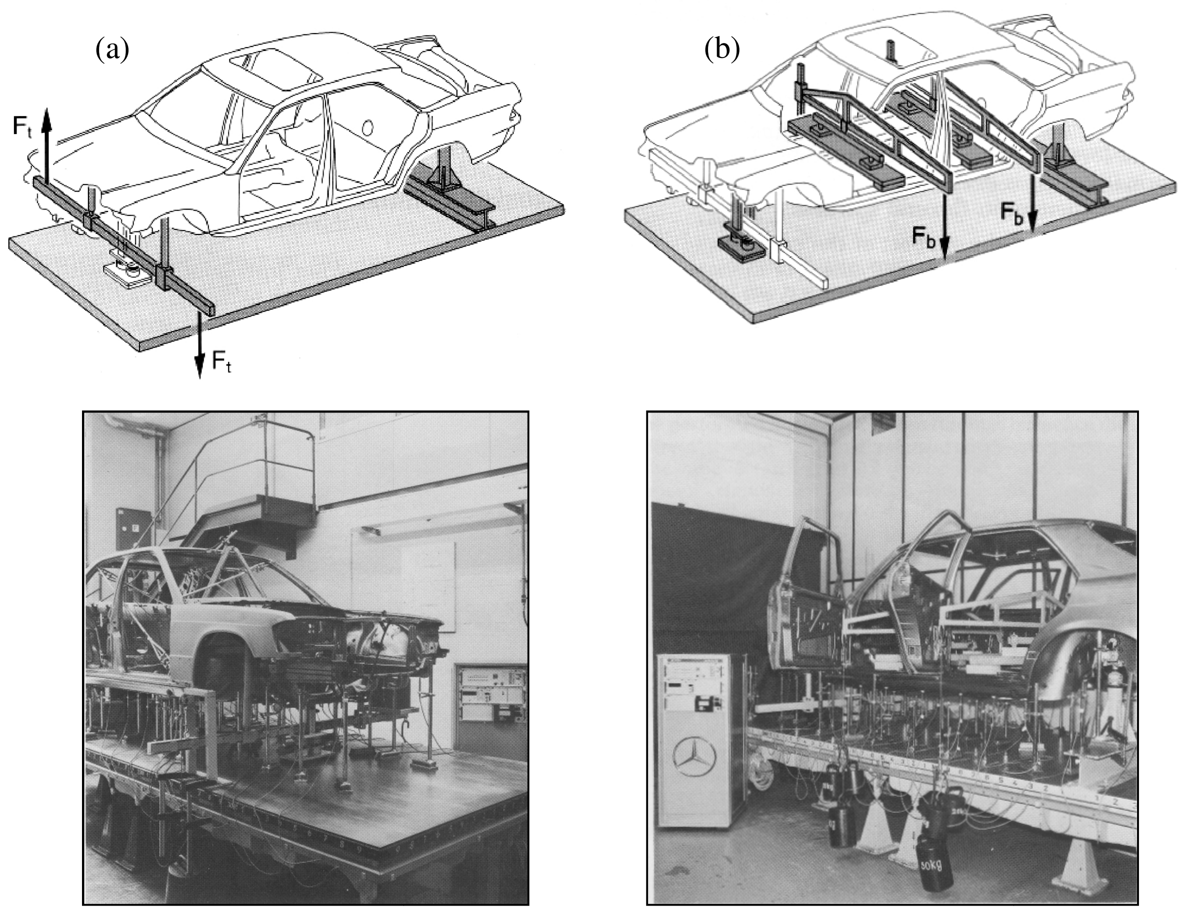

Figura 1– Ilustração de ensaios de rigidez estática em carroceria de veículo: torção (a) e flexão (b)

É interessante comentar que os procedimentos de teste de rigidez estática variam de fabricante para fabricante. Detalhes que afetam diretamente os resultados medidos, como região de carregamento, pontos de restrição, adição ou não de componentes estruturais (eixos, reforços parafusados), dentre outros, não são padronizados entre as marcas. Este fato tende a dificultar a comparação entre os parâmetros de rigidez das carrocerias dos veículos disponíveis no mercado. Além disso, a montagem necessária para a realização destes ensaios requer tempo de mão-de-obra excessivamente longo, pois, além da confecção de dispositivos apropriados, estes testes requerem cuidados com o alinhamento da carroceria, posicionamento dos transdutores de medição, etc.

As dificuldades mencionadas acima fizeram com que algumas montadoras abolissem este tipo de ensaio do seu programa de desenvolvimento de veículos. Isto não significa que a rigidez estática deixou de ser avaliada. Para tanto, passaram a utilizar os resultados de rigidez dinâmica na correlação do modelo de elementos finitos e, a partir deste, simular o carregamento estático. Mesmo assim, a confiabilidade destas simulações é discutível dada à idealização das condições de contorno empregadas.

1.2 – Ensaios de rigidez dinâmica

Avaliações de rigidez dinâmica são relativamente recentes no meio automobilístico. Herdadas da indústria aeroespacial, tais avaliações têm contribuído para melhoria dos níveis de dirigibilidade e conforto do veículo. O conhecimento das freqüências naturais e os modos de vibrar da estrutura veicular possibilita, por exemplo, o ajuste das propriedades da suspensão a fim de evitar o acoplamento harmônico desta com a carroceria. Outro exemplo de aplicação é quanto à sintonia entre estrutura e motor operando em marcha lenta que é potencialmente capaz de excitar os principais modos do veículo causando vibrações e desconforto ao dirigir.

A evolução em desempenho, conforto, dirigibilidade e segurança dos veículos atuais em comparação aos veículos do passado tem sido acompanhada pela melhoria da rigidez das estruturas veiculares. Esta evolução se reflete no aumento das freqüências naturais dos principais modos destas estruturas a cada nova geração do veículo (Figura 2). De fato, algumas montadoras têm procurado estabelecer objetivos desafiadores a cada nova geração. Para não ficarem para trás, os concorrentes têm feito o mesmo. É ainda interessante notar que enquanto os valores de rigidez mantêm esta tendência de aumento, os valores de massa encontram-se estabilizados, variando apenas entre veículos de diferentes categorias.

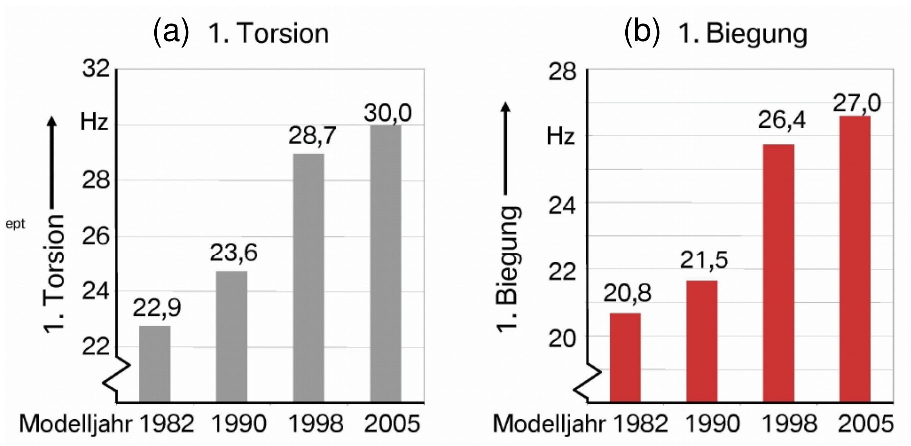

Figura 2 – Evolução das freqüências naturais das gerações da BMW Série 3[1]:
(a) – 1° modo de torção
(b) – 1º modo de flexão

Uma vez estabelecida como requisito de projeto de carrocerias da maioria dos fabricantes de automóveis, a rigidez dinâmica ganhou destaque na comparação entre os produtos de diferentes marcas. Comparações entre as freqüências dos modos de torção, flexão vertical e flexão lateral têm sido divulgadas nos principais congressos deste meio como o Euro Car Body Awards, promovido pela Automotive Circle International[2], por exemplo. Os motivos deste destaque são de fácil explicação: a realização de ensaios de análise modal (dos quais são obtidos os resultados de rigidez dinâmica) necessita de recursos mais simples de serem implementados e menos custosos; apresentam resultados mais robustos às variações de montagem e, portanto, melhor repetibilidade e reprodutibilidade. Como desvantagem cita-se apenas a necessidade de recursos computacionais mais sofisticados para o processamento de sinais e demais cálculos na fase de pós-teste. Porém, hoje em dia, a abundância destes recursos, disponíveis tanto em computadores como em sistema de aquisição, eliminou esta desvantagem.

A Figura 3 traz a ilustração de uma montagem típica de ensaio de análise modal em uma carroceria de veículo. Pode-se observar a estrutura suspensa por meio de elásticos e a atuação de

[1] Fonte: Euro Car Body Awards (2005)
[2] Automotive Circle International: http://www.automotive-circle.com

excitadores eletromagnéticos, responsáveis pela aplicação de excitação na estrutura. Acelerômetros espalhados ao longo da carroceria medem a resposta em cada região e ao final, modos de vibrar e freqüências naturais são estimados.

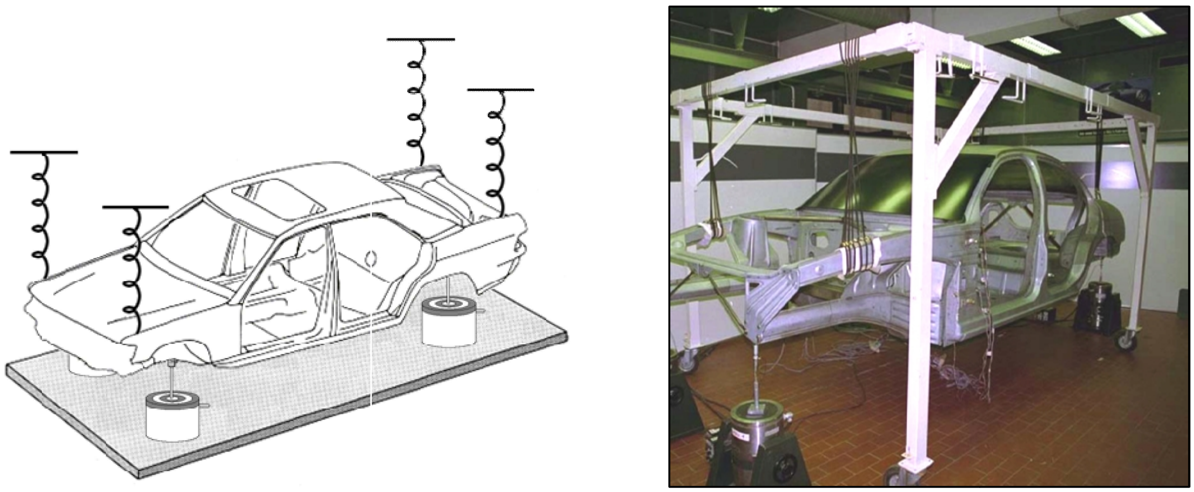

Figura 3 – Ilustração de ensaio de análise modal experimental

1.3 – Introdução ao método REEDD (Rigidez Estática Estimada por Dados Dinâmicos)

Como alternativa à realização de ensaios de rigidez estática, alguns fabricantes vêm empregando técnicas derivadas dos testes de rigidez dinâmica. Tais técnicas baseiam-se na síntese da receptância dinâmica (deslocamento/força) e na extrapolação desta para 0 Hz. De forma sucinta, este método relembra que a informação de rigidez estática está contida na rigidez dinâmica. De fato, a primeira é a segunda na freqüência de 0 Hz.

A função de reposta em freqüência (FRF) é a curva típica obtida a partir dos dados medidos durante o ensaio de análise modal experimental. Esta função relaciona as características medidas entre dois graus de liberdade quaisquer da estrutura em função da freqüência. Em geral, como acelerômetros são utilizados para medir as respostas e sensores de força são utilizados para medir as excitações de entrada, a inertância (aceleração/força) é a função resultante deste tipo de ensaio. Devido ao baixo desempenho da resposta de acelerômetros em baixas freqüências (menores que 2 Hz), as curvas de inertância apresentam baixa coerência nesta faixa de operação. Se os modos de corpo rígido forem ainda considerados, então as inertâncias terão baixa representatividade em freqüências próximas a 0 Hz. Por estes motivos, o método REEDD tem sua funcionalidade comprometida quando utilizado com inertâncias diretamente medidas.

A solução para este obstáculo vem na fase de pós-processamento do ensaio: o processo de síntese de inertâncias a partir do modelo modal estimado. Com a estimação dos parâmetros modais obtém-se o desacoplamento dos modos de vibrar da estrutura ensaiada. Este desacoplamento, associado aos parâmetros estimados, constituem o modelo modal. A partir deste modelo é possível sintetizar as inertâncias escolhendo somente os modos estruturais (eliminando-se, portanto, os modos de corpo rígido). A superposição de todas as curvas sintetizadas restaura a representação dinâmica da estrutura mesmo em torno das baixas freqüências. Obtêm-se assim curvas de inertância com boa representatividade em torno de 0 Hz. Estas curvas são então utilizadas para gerar as curvas de receptância (deslocamento/força). A manipulação das curvas de receptância e forças correspondentes constitui o princípio do método REEDD, cuja análise de propagação de incertezas é o objetivo deste trabalho.

1.4 – Incertezas em ensaios dinâmicos

Engenheiros de estruturas têm demonstrado crescente preocupação com os efeitos de incertezas em seus projetos. O fato de as propriedades de uma dada estrutura serem incertas implica a conseqüente incerteza de sua resposta dinâmica. Similarmente, na indústria, existe a inevitável variabilidade de manufatura: itens produzidos em massa nunca são idênticos. Por último, deve-se considerar que as propriedades de um dado sistema ou estrutura podem ainda variar com o tempo devido às condições ambientais, carregamento, etc (MACE, et al., 2005). Tais incertezas se propagam através do sistema e se refletem nas incertezas das repostas como FRFs, freqüências naturais e demais parâmetros modais.

Além da incerteza das propriedades da estrutura, qualquer medição experimental está sujeita a certo nível de dúvida quanto à confiança de seus resultados. O convívio com erros (ou desvios) de medição faz parte do dia-a-dia de engenheiros e técnicos de laboratório que utilizam de análise da dispersão para tratamento destes erros.

As fontes de erros inerentes a um ensaio dinâmico estão presentes por toda a cadeia de medição, a começar pela própria estrutura medida. Crandall e Mark (1967) tratam do problema da excitação aleatória de sistemas mecânicos lineares e não-lineares com um grau de liberdade e múltiplos graus de liberdade. Com relação ao processo de medição podem-se detectar fontes de incertezas na aplicação e medição de excitação (como ângulo variável de impacto do martelo e incerteza do transdutor de força), na medição das respostas (como fixação e localização dos acelerômetros), na coleta dos sinais pelo sistema de aquisição (como a resolução e o truncamento do conversor A-D), na extração dos parâmetros modais (uso de diferentes algoritmos e seleção destes parâmetros pelo operador), etc.

1.5 – Objetivo da dissertação

O objetivo deste trabalho é verificar a propagação de incertezas através do método REEDD utilizando-se de uma estrutura no formato de H duplo como objeto de estudo. Análises destas incertezas são realizadas tanto no ambiente de simulação numérica por MEF (Método dos Elementos Finitos) quanto no ambiente de ensaios experimentais. Além disto, a comparação dos coeficientes de rigidez estimados pelo método REEDD com os obtidos através de simulação e ensaios de carregamento estático, bem como a validação estatística do método REEDD para a estimação dos coeficientes de rigidez à torção e à flexão também são buscadas neste trabalho.

1.6 – Descrição do trabalho

Esta dissertação foi dividida em oito capítulos que procuram apresentar a motivação para o estudo aqui registrado, a base teórica que o suporta, a sua aplicação em simulação via MEF, as análises de propagação de incertezas, a sua utilização em ensaios experimentais e, finalmente, a análise dos resultados e as conclusões que se tiram deste trabalho.

Assim, no primeiro capítulo são introduzidos os conceitos básicos de avaliações de rigidez estática e rigidez dinâmica em carrocerias de veículos e as vantagens e desvantagens de cada um destes do ponto de vista da montagem experimental. Ainda neste capítulo é introduzido o método REEDD como alternativa à execução do teste estático.

No segundo capítulo é apresentada uma revisão da literatura que se refere ao método em estudo bem como à propagação de incertezas em ensaios dinâmicos.

O Capítulo 3 traz a base teórica de análise modal direcionada para a síntese da receptância estática. Neste mesmo capítulo é apresentado um estudo analítico de aplicação do método REEDD em uma viga de Euler-Bernoulli na condição engastada-livre.

No Capítulo 4 é introduzido o modelo de elemento finitos utilizado na validação numérica do método em estruturas de maior complexidade. Resultados de simulações de carregamento estático à torção e à flexão são mostrados e comparados com a estimativa fornecida pelo método REEDD.

Análises de experimentação numérica por Monte Carlo e de propagação de incertezas por método analítico são utilizadas na verificação da robustez do método quanto à variação dos parâmetros modais (freqüências naturais e modos de vibrar). Este assunto é tratado no Capítulo 5.

O Capítulo 6 traz as considerações e os resultados dos ensaios experimentais realizados. Ensaios de carregamento estático à torção e à flexão além de análise modal experimental têm suas montagens, execuções e análises comentadas. No final do capítulo, o método REEDD é utilizado, desta vez sobre dados de ensaios experimentais.

No Capitulo 7 são apresentados os resultados finais, referentes à utilização do método tanto na simulação numérica quanto nos ensaios experimentais. As abordagens de propagação de incertezas adotadas são também comparadas e comentadas.

Finalmente, no Capítulo 8, as conclusões do trabalho são listadas frente aos objetivos propostos. Algumas sugestões para trabalhos futuros são mencionadas.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

O estudo bibliográfico concentrou-se nos trabalhos já publicados relacionados à estimativa de rigidez estática por dados dinâmicos e no estudo de incertezas em ensaios dinâmicos.

Em se tratando de ensaios de rigidez estática, Kinds e Christoph (1986) publicam detalhes da metodologia de teste, equipamentos necessários e resultados típicos de ensaios deste tipo realizados em carrocerias de veículos. Além disto, é comentada a relação de cooperação existente entre as técnicas de simulação computacional e as medições obtidas em laboratório através de situações nas quais cada uma oferece alguma vantagem sobre a outra.

Embora fossem empregados na indústria automobilística há muito tempo, os procedimentos de determinação da rigidez estrutural não vinham apresentando novidades entre os fabricantes. Em geral, as variações observadas limitavam-se aos equipamentos utilizados, métodos de ensaio, pontos de ancoragem e interface com as técnicas de simulação numérica. Foi somente em 1998 que Rediers, et al. propuseram uma metodologia para obtenção das constantes de rigidez estática de uma estrutura a partir de ensaio de análise modal. Esta metodologia utiliza as curvas de rigidez dinâmica sintetizadas a 0 Hz para cálculo das deflexões nesta freqüência. A motivação dos autores baseia-se no vínculo entre os resultados de ensaios de carregamento estático e a qualidade das restrições aplicadas nestes tipos de ensaio. Os autores comentam sobre dificuldades de se obter consistência nos valores de rigidez estática divulgados pelos fabricantes e destacam a robustez dos resultados de ensaios dinâmicos (análise modal). Aplicam o método proposto em um chassi de pick-up e conseguem estimar as constantes de torção e flexão com desvio abaixo de 5% do valor medido.

Em 2003, Griffths, et al. (2003) analisam a contribuição individual de cada modo para a estimativa da constante de rigidez estática adotando a mesma metodologia do trabalho anterior. Os resultados encontrados pelos autores mostram que, para estruturas veiculares em geral, os primeiros modos de torção e flexão têm contribuição predominante na estimativa da rigidez à torção e à flexão, respectivamente. Como prova, aplicam a teoria apresentada em um chassi de pick-up e desvios abaixo de 2% são encontrados para estimativa do coeficiente de torção estática. Demonstram ainda que somente o primeiro modo de torção contribui com cerca de 90% da estimação do coeficiente de rigidez.

Já Macedo e Arruda (2007) exploram a mesma metodologia (REEDD) através da solução analítica dos modos de uma viga de Euler-Bernoulli na condição engastada-livre. Neste trabalho os autores demonstram a convergência da rigidez estimada pelo método em função do número de modos considerados. Conseguem obter boa aproximação para a flecha estática da extremidade da viga quando sujeita à condição de contorno descrita acima. Além disto, através de um modelo numérico, as convergências de resultados são comparadas com a viga na condição engastada-livre e livre-livre. Como conclusão, é mostrado que a convergência da estimação da flecha pelo método REEDD ocorre com menor número de modos na condição engastada-livre.

A investigação de incertezas em dinâmica estrutural tem sido explorada por diversos autores. Nesta investigação, a modelagem estatística destas incertezas constitui uma etapa crucial da análise (RITTO, et al., 2008). Havendo muitos dados disponíveis (e confiáveis) realizam-se testes de hipóteses para a construção de uma função de densidade de probabilidade aproximada. Esta função modela a incerteza das variáveis desejadas. Em não havendo tais dados, o Princípio da Máxima Entropia (KAPUR e KESAVAN, 1992) tem sido utilizado. A generalização deste princípio, além da discussão de outros tópicos relacionados, pode ser encontrada em Kesavan e Kapur (1989). Neste artigo os autores listam os postulados de maximização da entropia e examinam suas conseqüências. No que se refere à modelagem de incertezas em dinâmica estrutural, a informação relevante que se extrai deste trabalho é a determinação da função de densidade de probabilidade (FDP) de maior incerteza (entropia), dadas as condições de contorno. É demonstrado que quase todas as FDPs comumente encontradas são obtidas como sendo as distribuições de máxima entropia quando descritas por momentos estatísticos simples. Por esta análise, a distribuição gama é recomendada para a modelagem de incertezas de variáveis aleatórias existentes no domínio $\mathbb{R}^+$. Esta informação é bastante útil para a dinâmica estrutural na modelagem de incertezas de parâmetros associados à massa, rigidez e freqüência natural, por exemplo.

A modelagem de incertezas através do Princípio da Máxima Entropia é utilizada por Ritto, et al. (2008) na investigação da variabilidade de FRFs de um modelo de viga de Timoshenko sujeito a condições de contorno incertas. Duas estratégias são adotadas pelos autores nesta investigação: a paramétrica e a não-paramétrica. Na primeira, somente a incerteza de um dos parâmetros das condições de contorno é considerado. Já na segunda, considera-se toda a matriz de rigidez do modelo como incerta. Através de simulação por Monte Carlo, é mostrado que os limites de incerteza das FRFs na abordagem não-paramétrica incluem os limites da abordagem paramétrica para um mesmo nível de confiança. Isto significa que a dispersão da resposta é maior quando a incerteza é modelada com a abordagem não-paramétrica.

Hasselman e Chrostowski publicam em 1997 resultados de sua pesquisa cujo objetivo foi quantificar a precisão da predição dos modelos numéricos em dinâmica estrutural. Para isto, utilizam dados de análise modal experimental para modelar a variabilidade presente nos resultados deste tipo de ensaio. Estes dados foram coletados de sete carrocerias de um mesmo modelo de veículo. Variações médias de cerca de 1% das freqüências naturais são encontradas na quantificação da incerteza experimental. Com estes dados, os autores obtêm as FRFs médias dos sete veículos e as utilizam como referências para ajuste do modelo numérico (validação). As diferenças entre o modelo ajustado e cada uma das curvas medidas são então usadas para quantificar a incerteza do modelo. É mostrada ainda no artigo uma maneira de diferenciar a variabilidade experimental da variabilidade do produto.

No trabalho de Peeters, et al. (1999) a incerteza na estimação dos parâmetros modais em sistemas aleatórios é investigada. Para isto, são realizados ensaios com excitação por martelo de impacto em uma viga de concreto e a variabilidade dos parâmetros modais é obtida. Como estratégia para aumento do espaço amostral em sua análise, os autores adotam a seleção de pólos de modelos de ordens diferentes no diagrama de estabilização. Esta seleção é feita de modo aleatório para cada conjunto de dados adquiridos. Dessa forma, conseguem incorporar tanto a incerteza presente na medição quanto a incerteza do método de estimação dos parâmetros modais.

É interessante ressaltar a conclusão mencionada no trabalho: com as várias aquisições usualmente necessárias para adquirir todo o conjunto de FRFs, o espaço amostral utilizado na determinação da média e desvio padrão das freqüências naturais e fatores de amortecimento modais é maior do que aquele utilizado na determinação dos modos de vibrar. De fato, é possível se estimar, ainda que não muito precisamente, freqüências naturais e fatores de amortecimento com a FRF de apenas um grau de liberdade. Já para os modos, são necessárias as FRFs do conjunto de graus de liberdade considerados na análise.

A propagação de incertezas através do método REEDD é investigada por Macedo e Arruda (2009) na estimação da rigidez estática à torção de uma estrutura modelada via MEF. Inicialmente, simulações numéricas de carregamento estático e análise modal são realizadas para a determinação do coeficiente de rigidez e parâmetros modais, respectivamente. Sobre estes parâmetros (que constituem as variáveis de entrada do método REEDD) são incorporadas incertezas modeladas segundo o Princípio da Máxima Entropia. A variabilidade dos coeficientes de rigidez torcional estimados a partir destas variáveis incertas é então analisada por ferramentas de propagação de erros tais como Monte Carlo e aproximação analítica de primeira ordem. Com estas duas abordagens, os autores demonstram que não há amplificação das incertezas presentes na entrada do método e que, portanto, a incerteza associada à estimação dos coeficientes de rigidez possui a mesma ordem de grandeza da incerteza inerente aos parâmetros modais.

Capítulo 3

Formulação da Equação de Receptância Estática

Nos últimos anos, o número de trabalhos que demonstram o uso de dados de testes dinâmicos para estimação da rigidez estrutural estática vem aumentando (REDIERS, et al., 1998; GRIFFTHS, et al., 2003; MACEDO e ARRUDA, 2007, 2009). Em geral, tais trabalhos foram desenvolvidos por engenheiros que atuam em projetos de componentes estruturais na indústria automotiva e que perceberam a oportunidade de estimar o resultado de um teste estático a partir de um teste dinâmico. Com esta finalidade, metodologias foram desenvolvidas baseadas na síntese das receptâncias dinâmicas a partir do modelo modal e utilização destas receptâncias na freqüência de 0 Hz. A manipulação destas receptâncias, nos graus de liberdade de interesse, possibilita o cálculo das deflexões estáticas assim como as obtidas em um ensaio de carregamento estático.

A formulação teórica que embasa este método, bem como sua aplicação em um exemplo analítico são apresentadas neste capítulo.

3.1 - Formulação Teórica

A base teórica da análise modal para sistemas de múltiplos graus de liberdade em diversas condições de amortecimento é bem conhecida (EWINS, 1984). A formulação teórica de um sistema linear de parâmetros concentrados invariantes no tempo com N graus de liberdade e não-amortecido será desenvolvida nesta seção visando à obtenção da equação da receptância dinâmica. A equação de movimento de um sistema deste tipo, representada na sua forma matricial, é dada por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\} \tag{3.1}$$

onde:

- $[M]$ - matriz de massas (N×N)
- $[K]$ - matriz rigidez (N×N)
- $\{x(t)\}$ - vetor de deslocamento variante com o tempo (N×1)
- $\{f(t)\}$ - vetor de forças variante com o tempo (N×1)

Considerando inicialmente a solução das equações homogêneas de (3.1), ou seja:

$$\{f(t)\}=\{0\} \tag{3.2}$$

tem-se a solução harmônica, na forma:

$$\{x(t)\}=\{X\}e^{i\omega t} \tag{3.3}$$

onde $\{X\}$ é o vetor N×1 que representa as amplitudes constantes do vetor $\{x(t)\}$. Derivando a equação (3.3) em função do tempo, tem-se:

$$\{\ddot{x}(t)\}=-\omega^2\{X\}e^{i\omega t} \tag{3.4}$$

Substituindo as equações (3.3) e (3.4) na equação de movimento, (3.1) fica-se com:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}e^{i\omega t}=\{0\} \tag{3.5}$$

cuja solução não-trivial só existe quando:

$$\det\left\|[K]-\omega^2[M]\right\|=0 \tag{3.6}$$

As raízes da equação (3.6) constituem os autovalores do sistema e fornecem N valores de ω^2 correspondentes ao quadrado das freqüências naturais angulares não-amortecidas. A substituição de cada uma destas raízes ω_r na equação (3.5) resultará em um conjunto de valores relativos de $\{X\}$, ou seja, o seu autovetor $\{\psi\}_r$, que representa a forma modal correspondente àquela freqüência natural. A solução completa, com todas as raízes e todos os autovetores é representada por duas matrizes quadradas que constituem o modelo modal:

- $\left[\omega_r^2\right]$ - matriz diagonal N×N com o quadrado da freqüência natural de cada modo, *r*.
- $\left[\Psi\right]$ - matriz N×N com as formas de vibrar, ou modos, com colunas $\{\psi\}_r$.

Observa-se que, embora a matriz com os autovalores seja única, os elementos da matriz dos autovetores podem assumir valores arbitrários (EWINS, 1984). Dentre os muitos processos existentes de normalização dos modos, a normalização pela massa modal possui as seguintes propriedades:

$$[\Phi]^T [M][\Phi] = [I] \tag{3.7}$$

$$[\Phi]^T [K][\Phi] = \left[\omega_r^2\right] \tag{3.8}$$

onde:

- $[\Phi]$ - matriz N×N com as formas modais normalizadas pela massa modal
- $[I]$ - matriz identidade N×N

E a relação entre as matrizes dos modos normalizados pela massa e dos modos representados de forma arbitrária é dada por:

$$[\Phi] = [\Psi]\left[m_r^{-1/2}\right] \tag{3.9}$$

onde $[m_r]$ é a matriz diagonal N×N de massa modal obtida da propriedade de ortogonalidade dos autovetores (Apêndice A). De acordo com esta propriedade, tem-se que:

$$[\Psi]^T [M][\Psi] = [m_r] \tag{3.10}$$

$$[\Psi]^T [K][\Psi] = [k_r] \tag{3.11}$$

sendo $[k_r]$ a matriz diagonal N×N de rigidez modal.

A matriz de rigidez modal, $\left[k_r\right]$, relaciona-se com a matriz de massa modal, $\left[m_r\right]$, através da equação:

$$\left[k_r\right]=\left[m_r\right]\left[\omega_r^2\right] \tag{3.12}$$

Considerando agora este mesmo sistema de N graus de liberdade excitado por um conjunto de forças senoidais de mesma freqüência, ω, mas com amplitudes e fases diferentes:

$$\left\{f\left(t\right)\right\}=\left\{F\right\}e^{i\omega t} \tag{3.13}$$

assume-se a solução também senoidal:

$$\left\{x\left(t\right)\right\}=\left\{X\right\}e^{i\omega t} \tag{3.14}$$

onde {F} e {X} são vetores N×1 de amplitudes complexas de $\left\{f\left(t\right)\right\}$ e $\left\{x\left(t\right)\right\}$, respectivamente.

Substituindo as equações (3.13) e (3.14) na equação de movimento, (3.1), tem-se:

$$\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)\left\{X\right\}e^{i\omega t}=\left\{F\right\}e^{i\omega t} \tag{3.15}$$

a qual, ao ser rearranjada fica:

$$\left\{X\right\}=\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)^{-1}\left\{F\right\} \tag{3.16}$$

O termo $\left(\left[K\right]-\omega^2\left[M\right]\right)^{-1}$ da equação (3.16) é a matriz N×N que relaciona a amplitude dos deslocamentos dos pontos do sistema quando sujeitos ao vetor de forças (3.13) em função da freqüência. Esta matriz, denominada matriz de receptância dinâmica, é representada por $\left[\alpha\left(\omega\right)\right]$:

$$\left\{X\right\}=\left[\alpha\left(\omega\right)\right]\left\{F\right\} \tag{3.17}$$

cujo elemento $\alpha_{jk}\left(\omega\right)$ é definido por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} \tag{3.18}$$

Substituindo (3.17) em (3.16) e fazendo um pequeno rearranjo, tem-se:

$$\left([K] - \omega^2 [M]\right) = \left[\alpha(\omega)\right]^{-1} \tag{3.19}$$

Pré-multiplicando os dois lados da equação (3.19) por $[\Phi]^T$ e pós-multiplicando por $[\Phi]$ fica-se com:

$$[\Phi]^T \left([K] - \omega^2 [M]\right)[\Phi] = [\Phi]^T \left[\alpha(\omega)\right]^{-1} [\Phi] \tag{3.20}$$

a qual, a partir das propriedades representadas por (3.7) e (3.8), permite chegar a:

$$\left[\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)\right] = [\Phi]^T \left[\alpha(\omega)\right]^{-1} [\Phi] \tag{3.21}$$

e :

$$\left[\alpha(\omega)\right] = [\Phi]\left[\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)\right]^{-1} [\Phi]^T \tag{3.22}$$

Os elementos da matriz de receptância são obtidos a partir da equação (3.22) e permitem computar qualquer função de resposta em freqüência (FRF) entre dois graus de liberdade do sistema, *j* e *k*:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r\left(\omega_r^2 - \omega^2\right)} \tag{3.23}$$

A equação (3.23) constitui a base da síntese modal, tanto no tratamento numérico como no experimental. No campo da simulação numérica as variáveis do lado direito da equação (3.23) são conhecidas e a receptância dinâmica é calculada a partir destas. Já na análise modal experimental, a receptância dinâmica é conhecida e os parâmetros modais são estimados por métodos apropriados (EWINS, 1984).

A equação (3.23), quando calculada para a $\omega=0$, também define a receptância estática:

$$\alpha_{jk}(0)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{\omega_r^2}=\sum_{r=1}^{N}\frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r\omega_r^2} \tag{3.24}$$

A partir da definição de receptância, equação (3.17), o deslocamento do ponto *j* para uma força estática aplicada no ponto *k* é dado por:

$$X_j=F_k\alpha_{jk}(0)=F_k\sum_{r=1}^{N}\frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r\left(\omega_r^2\right)} \tag{3.25}$$

Se esforços estão sendo aplicados simultaneamente em Z pontos do sistema, então o deslocamento do ponto *j* passa a considerar a contribuição de cada uma dessas forças ponderadas pela receptância entre os pontos:

$$X_j=\sum_{k=1}^{Z}F_k\alpha_{jk}(0)=\sum_{r=1}^{N}\sum_{k=1}^{Z}F_k\frac{\psi_{jr}\psi_{kr}}{m_r\left(\omega_r^2\right)} \tag{3.26}$$

A equação (3.26) constitui a base do método REEDD. Com ela, é possível estimar os deslocamentos elásticos de um determinado grau de liberdade quando forças estáticas atuam na estrutura. Exemplo de sua aplicação é ilustrado na seção seguinte.

3.2 – Exemplo analítico em uma viga de Euler-Bernoulli

Nesta seção é apresentado um exemplo de aplicação do método em uma viga de Euler-Bernoulli com uma extremidade livre e a outra extremidade engastada. Inicialmente, a equação da flecha estática é desenvolvida para a extremidade livre da viga em função de suas propriedades e dimensões utilizando-se da teoria de resistência dos materiais. Posteriormente, através dos parâmetros modais, a equação da receptância dinâmica é determinada e calculada em 0 Hz também para a extremidade livre da viga. Por último, mostra-se que, como esperado, resultados equivalentes são obtidos das duas maneiras.

3.2.1 – Flecha estática

Da teoria de resistência dos materiais tem-se que uma viga prismática, quando submetida à flexão pura, se flexiona na forma de uma curva (BEER e JOHNSTON JR., 1989, 1982). No regime elástico, como tanto o momento fletor como a curvatura variam de secção para secção, a curvatura da superfície neutra pode ser expressa por:

$$\frac{1}{p} = \frac{M(x)}{EI} \tag{3.27}$$

onde M é o momento fletor, x é a coordenada medida na direção longitudinal, E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção transversal em relação à linha neutra e $1/p$ é a curvatura da superfície neutra.

A curvatura de uma curva plana $V = V(x)$ é dada por:

$$\frac{1}{p} = \frac{\dfrac{d^2V}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \tag{3.28}$$

onde $V(x)$ é a função que a curva representa.

Assumindo pequenos deslocamentos da linha elástica de uma viga, a rotação ${dV}/{dx}$ é muito pequena, de modo que seu quadrado pode ser desprezado e a equação (3.28) pode ser simplificada por:

$$\frac{1}{p} = \frac{d^2V}{dx^2} \tag{3.29}$$

Combinando as equações (3.27) e (3.29) chega-se à equação que rege o comportamento da linha elástica:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \tag{3.30}$$

Seja uma viga de Euler-Bernoulli engastada-livre de comprimento *L,* como mostrado na Figura 4, com E e I constantes ao longo do seu comprimento x e submetida à força constante, F, aplicada na sua extremidade livre. Assumindo $V(x)$ como sendo a flecha, ou seja, o deslocamento transversal da viga ao longo de *x,* o momento fletor no ponto de coordenada (medida em relação à extremidade engastada) é dado por:

$$M\left(x\right)=F(L-x) \tag{3.31}$$

cuja substituição na equação (3.30) resulta em:

$$EI\,\frac{d^2V}{dx^2}=F\left(L-x\right) \tag{3.32}$$

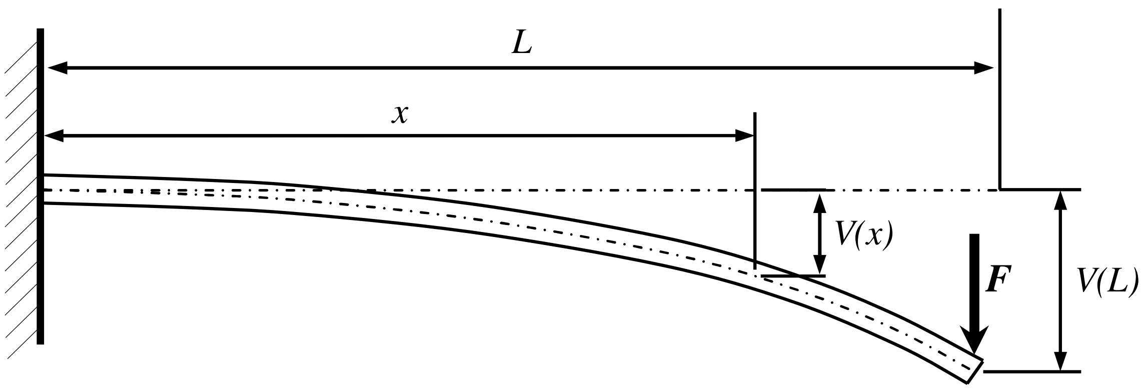

Figura 4 – Viga engastada-livre de Euler-Bernoulli sujeita a carregamento estático na extremidade livre

Integrando a equação (3.32), obtém-se:

$$EI\,\frac{dV}{dx}=F\left(Lx-\frac{1}{2}x^2\right)+C_1 \tag{3.33}$$

Como na extremidade engastada $x=0$ e $dV/dx=0$ tem-se que $C_1=0$.

Integrando agora a equação (3.33), com $C_1=0$, tem-se:

$$EIV\left(x\right)=F\left(\frac{1}{2}Lx^2-\frac{1}{6}x^3\right)+C_2 \tag{3.34}$$

Novamente, na extremidade engastada, $x=0$ e $V=0$ tem-se que $C_2=0$.

Dessa forma, a flecha estática, $V\left(x\right)$, calculada para a extremidade livre da viga ($x=L$) fica:

$$V(L)=\frac{F}{EI}\left(\frac{1}{2}L^3-\frac{1}{6}L^3\right)=\frac{F}{EI}\left(\frac{3L^3-L^3}{6}\right)=\frac{FL^3}{3EI} \tag{3.35}$$

E a receptância estática neste ponto resulta em:

$$\frac{V(L)}{F}=\frac{1}{3}\frac{L^3}{EI} \tag{3.36}$$

3.2.2 – Receptância dinâmica

Seja uma viga de Euler-Bernoulli engastada-livre de comprimento L como mostrado na Figura 4. A equação característica para vibrações transversais no caso livre (sem carregamento) é dada por (CRAIG JR., 1981)

$$\left(EIv''\right)''+\rho A\ddot{v}=0 \tag{3.37}$$

onde:

- ρ é a densidade de massa
- A é a área da seção transversal
- $v=v(x,t)$ é a flecha na direção transversal

a qual, ao assumir-se solução harmônica, $v(x,t)=V(x)e^{i\omega t}$,torna-se:

$$\left(EIV''\right)''-\rho A\omega^2 V=0 \tag{3.38}$$

A equação (3.38) pode ainda ser simplificada considerando-se uma viga de características uniformes (E, I, A e ρ constantes):

$$\frac{d^4V}{dx^4}-\lambda^4 V=0 \tag{3.39}$$

onde:

$$\lambda^4=\frac{\rho A\omega^2}{EI} \tag{3.40}$$

A solução geral da equação (3.39) pode ser escrita na forma:

$$V(x) = C_1 \operatorname{senh}(\lambda x) + C_2 \cosh(\lambda x) + C_3 \operatorname{sen}(\lambda x) + C_4 \cos(\lambda x) \qquad (3.41)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes a determinar a partir das condições de contorno (CRAIG JR., 1981).

Aplicando as condições de contorno na equação (3.41) obtém-se um sistema de equações cuja solução é não trivial somente nos casos em que:

$$\cos(\lambda L)\cosh(\lambda L) + 1 = 0 \qquad (3.42)$$

As raízes da equação (3.42) são os autovalores λ_r multiplicados pelo comprimento da viga, L. Estas raízes não podem ser obtidas de forma analítica a partir de expressões simples (equação transcendental) e são calculadas por métodos numéricos. Chang e Craig (1969) publicaram em seu trabalho valores tabelados das raízes das equações características para várias condições de contorno da viga (livre-livre, engastada-livre e engastada-engastada). Os autores apresentaram uma nova proposta que corrigia as raízes conhecidas do quinto modo em diante. A Tabela 1 lista as raízes λL da equação (3.42) para os dez primeiros modos de uma viga engastada-livre.

Tabela 1 – Raízes de uma viga engastada-livre para os 10 primeiros modos

Modo r	**Raízes da equação (3.42)** $\lambda_r L$
1	1,875104068712E+00
2	4,694091132974E+00
3	7,854757438238E+00
4	1,099554073488E+01
5	1,413716839105E+01
6	1,727875953209E+01
7	2,042035225510E+01
8	2,356194490181E+01
9	2,670353755552E+01
10	2,984513020910E+01

Conhecidas as raízes $\lambda_r L$, pode-se determinar as freqüências naturais de cada modo a partir da equação (3.40) e a forma modal que é dada por:

$$V_r(x) = C\left\{\cosh(\lambda_r x) - \cos(\lambda_r x) - k_r\left[\operatorname{senh}(\lambda_r x) - \operatorname{sen}(\lambda_r x)\right]\right\} \qquad (3.43)$$

onde C é uma constante arbitrária e:

$$k_r = \frac{\cosh(\lambda_r L) + \cos(\lambda_r L)}{\operatorname{senh}(\lambda_r L) + \operatorname{sen}(\lambda_r L)} \qquad (3.44)$$

A Figura 5 ilustra as formas modais dos dez primeiros modos obtidos da equação (3.43). Nesta figura as amplitudes dos modos possuem valores arbitrários e não estão normalizadas.

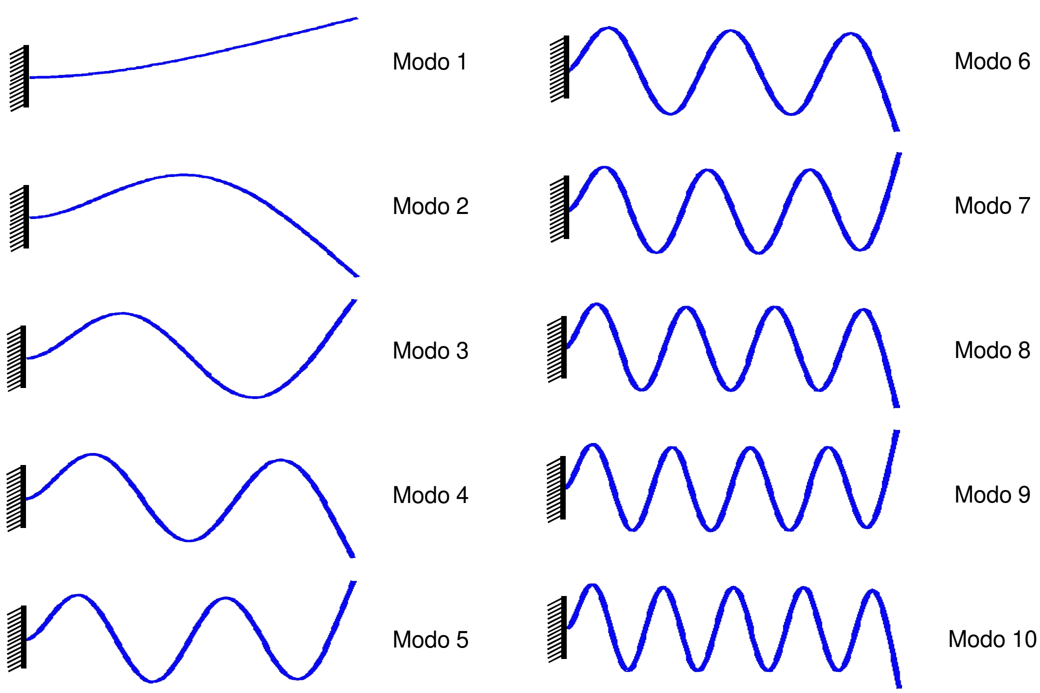

Figura 5 – Forma modal dos dez primeiros modos da viga engastada-livre

A massa modal m_r do modo r é definida pela integral:

$$m_r = \rho A \int_0^L V_r^2(x)\, dx \qquad (3.45)$$

A receptância do modo *r,* calculada entre dois pontos da viga, x_1 e x_2, é dada por (3.23):

$$\alpha_{x_1x_2}^{r}(\omega)=\alpha(\omega,r,x_1,x_2)=\frac{V_r(x_1)V_r(x_2)}{m_r\left(\omega_r^2-\omega^2\right)} \tag{3.46}$$

A superposição modal é obtida da Eq. (3.46) ao somarem-se as contribuições dos N modos:

$$\alpha_{x_1x_2}(\omega)=\alpha(\omega,x_1,x_2)=\sum_{r=1}^{N}\frac{V_r(x_1)V_r(x_2)}{m_r\left(\omega_r^2-\omega^2\right)} \tag{3.47}$$

Assim como na equação (3.24), fazendo-se $\omega=0$ e $x_1=x_2=L$ obtém-se a receptância estática da extremidade da viga que relaciona força e deslocamento neste ponto.

$$\alpha_{LL}(0)=\alpha(0,L,L)=\sum_{r=1}^{N}\frac{V_r^2(L)}{m_r\omega_r^2} \tag{3.48}$$

A Tabela 2 apresenta os valores de freqüências naturais, equação (3.40), das formas modais, equação (3.43), das massas modais, equação (3.45), das receptâncias estáticas de cada modo para a extremidade da viga, equação (3.46) com $\omega=0$, e a soma destas receptâncias, equação (3.48), para os dez primeiros modos.

Tabela 2 – Resultados dos parâmetros modais para solução analítica da viga engastada-livre

Modo r	**Freqüência natural**[1] ω_r	**Forma modal**[2] $V_r(L)$	**Massa modal**[3] m_r	**Receptância estática para cada modo**[4] $\alpha(0,r,L,L)$	**Somatório das receptânicas**[4] $\sum_{n=1}^{r}\alpha_n(0,n,L,L)$
1	3,5160	2,0	0,96037	3,235627e-01	0,3235627
2	22,0347	-2,0	0,96128	8,238785e-03	0,3318015
3	61,6972	2,0	0,96209	1,050821e-03	0,3328523
4	120,9019	-2,0	0,96293	2,736488e-04	0,3331260
5	199,8595	2,0	0,96377	1,001406e-04	0,3332261
6	298,5555	-2,0	0,96461	4,487554e-05	0,3332710
7	416,9908	2,0	0,96545	2,300420e-05	0,3332940
8	555,1652	-2,0	0,96629	1,297823e-05	0,3333070
9	713,0789	2,0	0,96712	7,866559e-06	0,3333148
10	890,7318	-2,0	0,96796	5,041573e-06	0,3333199

[1] normalizada por $\frac{1}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)^{1/2}$; [2] para $C=1$; [3] normalizado por ρAL; [4] normalizado por $\left(\frac{L^3}{EI}\right)$

Da Tabela 2 observa-se que o somatório das receptâncias normalizadas por L^3/EI converge para a fração encontrada na equação (3.36), ou seja 1/3, quando esta é expressa também na forma normalizada. Também pode ser observado que cada modo contribui com fatores diferentes para o somatório. Este fator de contribuição do modo *r*, R^r, pode ser expresso como a razão entre a receptância estática deste modo e o valor teórico da flecha:

$$R^r = \frac{\alpha_{LL}^r(0)}{\alpha_{est\ teorico}} = \frac{\dfrac{V_r^2(L)}{m_r(\omega_r^2)}}{V(L)} \tag{3.49}$$

Capítulo 4

Avaliação do Método REEDD por Simulação Numérica

A formulação básica para estimação da rigidez estática por dados dinâmicos foi desenvolvida e apresentada no capítulo 3. Esta formulação será aplicada neste capítulo em uma estrutura similar à de um chassi de veículo modelada pelo método dos elementos finitos (MEF).

Inicialmente, as deflexões estáticas para a torção e flexão serão obtidas por meio da introdução de forças e restrições apropriadas, reproduzindo ensaios estáticos de bancada. Em seguida, simulação numérica de análise modal é realizada para determinação das freqüências naturais e modos de vibrar. Estes parâmetros modais são então utilizados na síntese das receptâncias na freqüência de 0 Hz (receptâncias estáticas) e estimação das constantes de rigidez estáticas à torção e à flexão através da manipulação destas receptâncias.

4.1 – Modelagem de estrutura em forma de H duplo

Como objeto de pesquisa, escolheu-se um pórtico em formato de H duplo, cuja ilustração e dimensões são mostradas na Figura 6(a). A forma desta estrutura assemelha-se à de um chassi utilizado em pick-ups e caminhões, Figura 6(b). Sua geometria possibilita a obtenção das constantes de torção e flexão estáticas além de uma série de modos de vibrar. Sobre os pontos indicados por A, B, C,... e H serão introduzidos carregamentos e restrições dependendo do ensaio simulado.

Dimensões e demais características da estrutura:

- Largura W= 0,416 m

- Comprimento L= 1,0 m
- Área da secção transversal : 2,56 x 10^{-4} m^2
- Densidade ρ =7850 kg/m^3

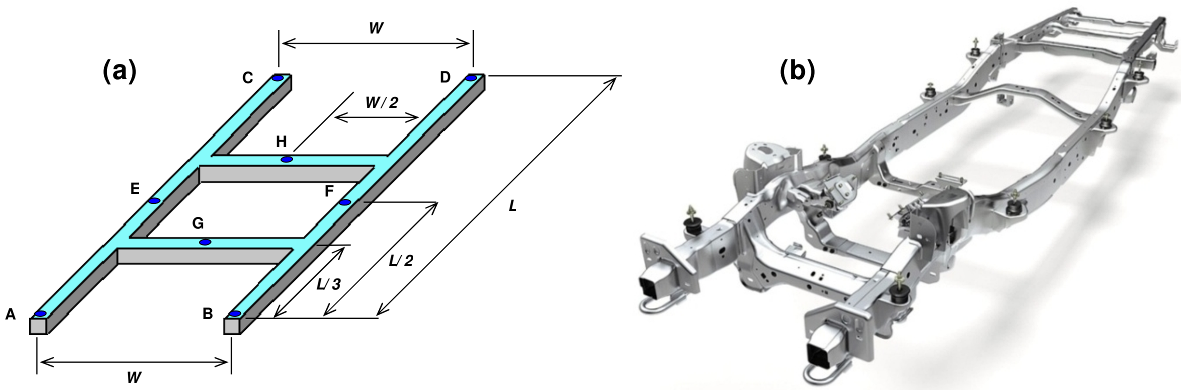

Figura 6 – Estruturas: (a) pórtico H duplo – objeto de estudo
(b) chassi típico de pick-ups e caminhões

4.1.1 – Elemento de viga espacial

As matrizes de massa e rigidez de um elemento de viga tridimensional podem ser obtidas a partir da combinação das matrizes dos elementos bidimensionais de viga geradas pelo cálculo das deflexões axiais, transversais e torcionais destes elementos (CRAIG JR., 1981).

A Figura 7 mostra o sistema de coordenadas local para deslocamentos e rotações de um elemento de viga tridimensional. O eixo x situa-se ao longo da linha longitudinal do elemento enquanto os eixos y e z são os eixos principais de inércia secção transversal.

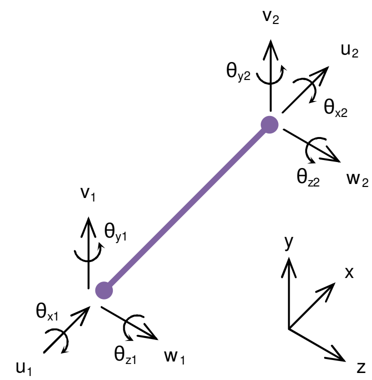

Figura 7 – Notação para elemento de viga espacial

Craig Jr. (1981) mostra que os coeficientes de massa e rigidez associados aos deslocamentos u_1 e u_2 são obtidos das matrizes de massa e rigidez do elemento submetido a esforços axiais; já aqueles associados a w_1, θ_{y1}, w_2 e θ_{y2} são baseados nas equações de esforços transversais no plano xz enquanto v_1, θ_{z1}, v_2 e θ_{z2} ao plano xy. Por último, os coeficientes associados a θ_{x1} e θ_{x2} são obtidos das equações de torção do elemento. O Apêndice B traz as matrizes de massa e rigidez para cada um destes casos, bem como a combinação destas para a composição das matrizes do elemento de viga espacial.

Os elementos de viga espacial foram utilizados para a criação de um modelo da estrutura ilustrada pela Figura 6(a). Este modelo foi implementado através do software MATLAB®. Ao todo, 64 elementos foram utilizados totalizando 64 nós e 384 graus de liberdade (GDLs). Com este modelo 384 modos de vibrar podem ser determinados. A Figura 8 traz a ilustração dos nós e dos elementos deste modelo.

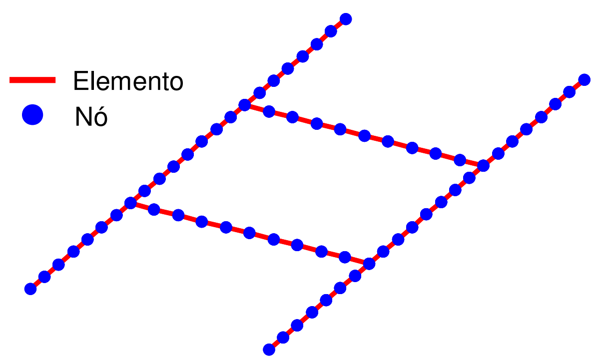

Figura 8 – Elementos e nós do modelo de elementos finitos

4.2 – Simulação de ensaios estáticos

4.2.1 – Torção estática

Para a simulação de um ensaio de torção estática, considere-se a estrutura da Figura 6(a) apoiada nos pontos E, F, G e H. Pares conjugados de forças F_t são aplicados nos pontos A, B, C e D como ilustrado pela Figura 9. Estas condições de contorno representam um ensaio típico de torção estática em carroceria de veículo no qual as longarinas longitudinais são solicitadas pelo par conjugado e as barras transversais são torcidas em torno do seu eixo longitudinal. Na estrutura em formato de H duplo, as longarinas são representadas pelos segmentos que unem os pontos A e C e B e D passando por E e F, respectivamente e as barras transversais, pelos segmentos que interceptam os pontos G e H. De acordo com esta configuração, são estas barras transversais as responsáveis pelo aparecimento das forças restauradoras que se opõem ao movimento de torção em torno de seus eixos longitudinais. Tal configuração foi assim definida para que os segmentos AC e BD não sofressem torção em torno de seus eixos.

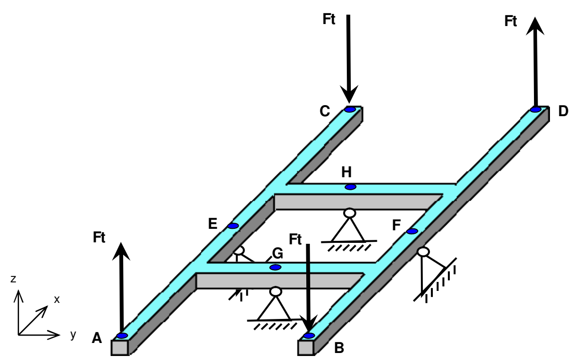

Figura 9 – Forças e restrições em um ensaio de torção típico

Nesta configuração, os ângulos de rotação entre as retas imaginárias que interceptam as extremidades AB e as extremidades CD são dados respectivamente por:

$$\theta_{AB} = arctg\left(\frac{d_A - d_B}{W}\right)$$
$$\theta_{CD} = arctg\left(\frac{d_D - d_C}{W}\right) \tag{4.1}$$

onde d_A, d_B, d_C *e* d_D são as deflexões nos pontos A, B, C e D, respectivamente.

O ângulo de torção total é então calculado pela soma de θ_{AB} e θ_{CD}:

$$\theta_{TOTAL} = \theta_{AB} + \theta_{CD} \tag{4.2}$$

Deseja-se saber a relação entre o momento aplicado e o ângulo de torção medido. Sendo assim, a constante de rigidez torcional, K_t ,fica:

$$K_t = \frac{momento}{\hat{a}ngulo} = \frac{F_t W}{\theta_{TOTAL}} \tag{4.3}$$

A simulação realizada com a introdução de $F_t = 1$ N forneceu as deflexões ilustradas pela Figura 10. Nesta figura, podem-se visualizar os deslocamentos sofridos pelos diversos pontos da estrutura ao ser carregada pelo conjunto de forças e condições de contorno descritas anteriormente. Nota-se que os pontos de apoios (E, F, G e H) mantiveram-se com deslocamentos nulos enquanto que as maiores deflexões foram verificadas nos pontos sob carregamento (A, B, C e D).

A Tabela 3 traz os valores necessários para o cálculo do coeficiente de rigidez torcional, K_t, a partir das equações descritas acima.

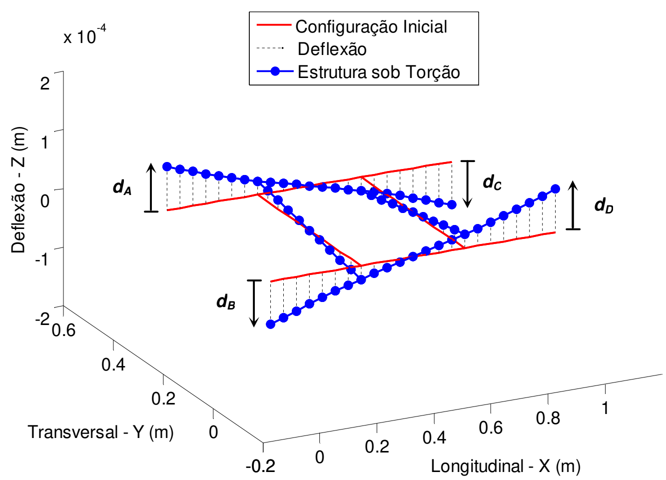

Figura 10 – Deflexões obtidas na simulação da torção estática

Tabela 3 – Resultados obtidos na simulação da torção estática

Deslocamento/ Rotação	Valores	Unidade
d_A	7,388E-05	m
d_B	-7,388E-05	
d_C	-7,388E-05	
d_D	7,388E-05	
θ_{AB}	3,552E-04	rad
θ_{CD}	3,552E-04	
θ_{TOTAL}	7,104E-04	
K_t	**585,590**	**Nm/rad**

4.2.2 – Flexão estática

Na simulação de um ensaio de flexão estática típico, a estrutura em estudo deve ser apoiada sobre os pontos A, B, C e D, sendo que nos pontos A e B são permitidas translações longitudinais. Um par de forças de igual amplitude F_f é então aplicado sobre pontos E e F orientadas na mesma direção e sentido (no caso, -z). A Figura 11 ilustra as condições de contorno aqui descritas.

Neste caso, a constante de rigidez à flexão é definida como a razão entre as forças aplicadas e a média das deformações máximas (usualmente, verificadas nos mesmos pontos de carregamento). Assim, para a configuração da Figura 11, o coeficiente de rigidez à flexão é dado por:

$$K_f = \frac{F_f + F_f}{\frac{(d_E + d_F)}{2}} \tag{4.4}$$

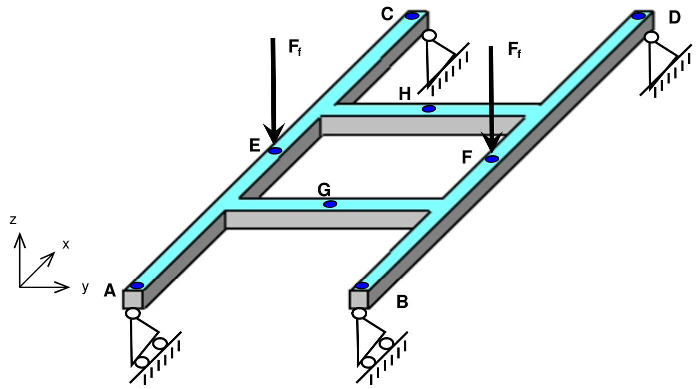

Figura 11 – Forças e condições de contorno em um ensaio de flexão estática

No caso experimental, onde as restrições nos pontos A, B, C e D não são ideais, os deslocamentos verificados no centro da estrutura (pontos E e F) devem ser corrigidos. Esta correção é explicada no Capítulo 6 que trata dos ensaios experimentais realizados. Por enquanto, basta mostrar que no caso da configuração da Figura 11 a correção é dada por:

$$\begin{aligned} d_{Ecor} &= d_E - \left(\frac{d_A + d_C}{2}\right) \\ d_{Fcor} &= d_F - \left(\frac{d_B + d_D}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

E a equação (4.4) torna-se:

$$K_f = \frac{2F_f}{d_{fcor}} \tag{4.6}$$

com:

$$d_{fcor} = \frac{(d_{Ecor} + d_{Fcor})}{2} \tag{4.7}$$

A Figura 12 ilustra as deflexões estáticas obtidas por simulação com carregamento $F_f = 1$ N. Aqui também se verificam os maiores deslocamentos nos pontos de carregamento (E e F) com os pontos de apoio (A, B, C e D) permanecendo com deslocamentos nulos. Neste caso, a força restauradora surge da resistência a deflexões transversais (flecha) das barras longitudinais da estrutura. A Tabela 4 lista as deflexões utilizadas no cálculo do coeficiente de rigidez à flexão, K_f.

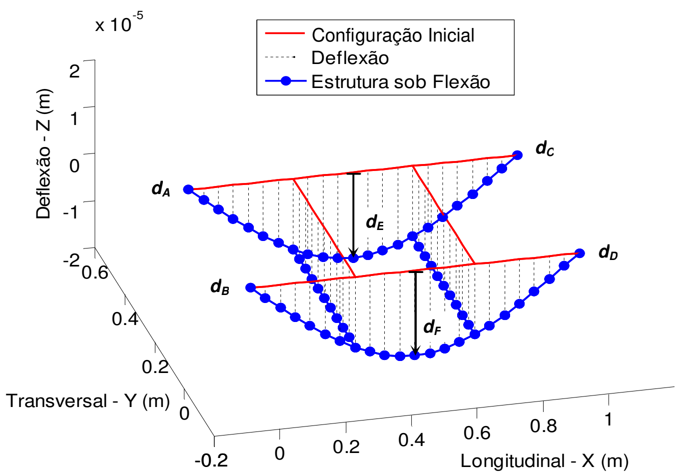

Figura 12 – Deflexões obtidas da simulação da flexão estática

Tabela 4 – Resultados obtidos da simulação da flexão estática

Deslocamento	Valores	Unidade
d_A	0	
d_B	0	
d_C	0	
d_D	0	m
d_E	-1.817E-05	
d_F	-1.817E-05	
d_{fcor}	-1,817E-05	
K_f	**5,505E+04**	**N/m**

4.3 – Simulação de ensaios dinâmicos (Análise Modal)

Como apresentado no Capítulo 3, a análise modal consiste na determinação das freqüências naturais e dos modos de vibrar de uma estrutura. No caso teórico, deseja-se desacoplar as equações de movimento do sistema, através de uma transformação apropriada, que permita a solução independente das equações do movimento (EWINS, 1984). A resposta em freqüência do sistema pode ser definida pela soma das respostas modais considerando-se o grau de participação de cada uma delas no movimento da estrutura.

No ambiente de simulação numérica, as freqüências naturais e os modos de vibrar são determinados através da resolução do problema de autovalor a partir das matrizes de rigidez e de massa. As equações (3.5) e (3.6) demonstram a solução deste problema. A Figura 13 ilustra os 14 primeiros modos estruturais na direção transversal (eixo z). Os modos de corpo rígido não serão tratados neste trabalho por não apresentarem contribuição ao método REEDD (não há informação de rigidez estrutural presente nestes modos e a contribuição, conforme equação (3.24), apresenta singularidade no caso de freqüência nula). As freqüências naturais destes modos também são indicadas nesta mesma figura.

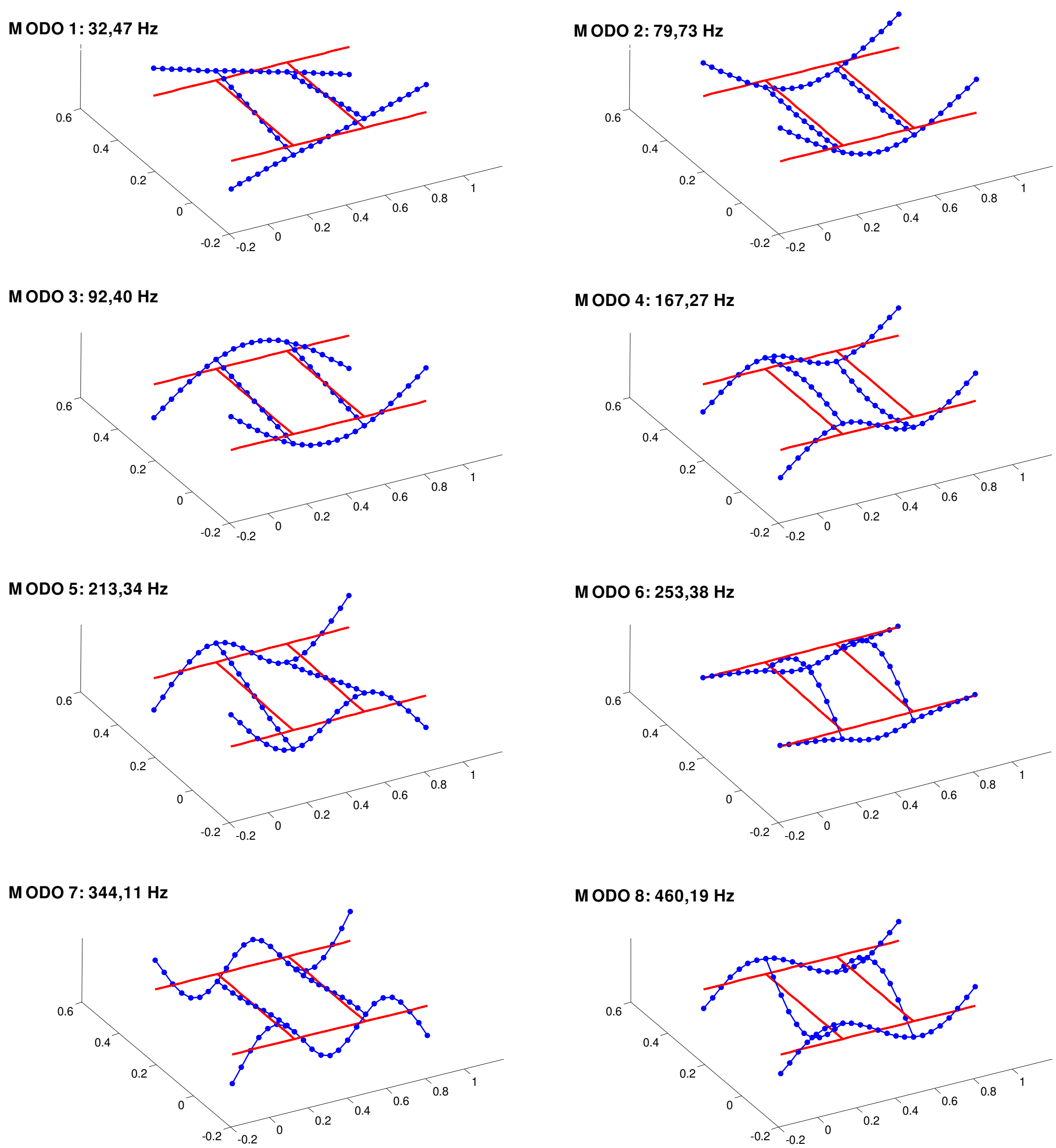

Figura 13 – Modos de vibrar e freqüências naturais obtidos por simulação numérica

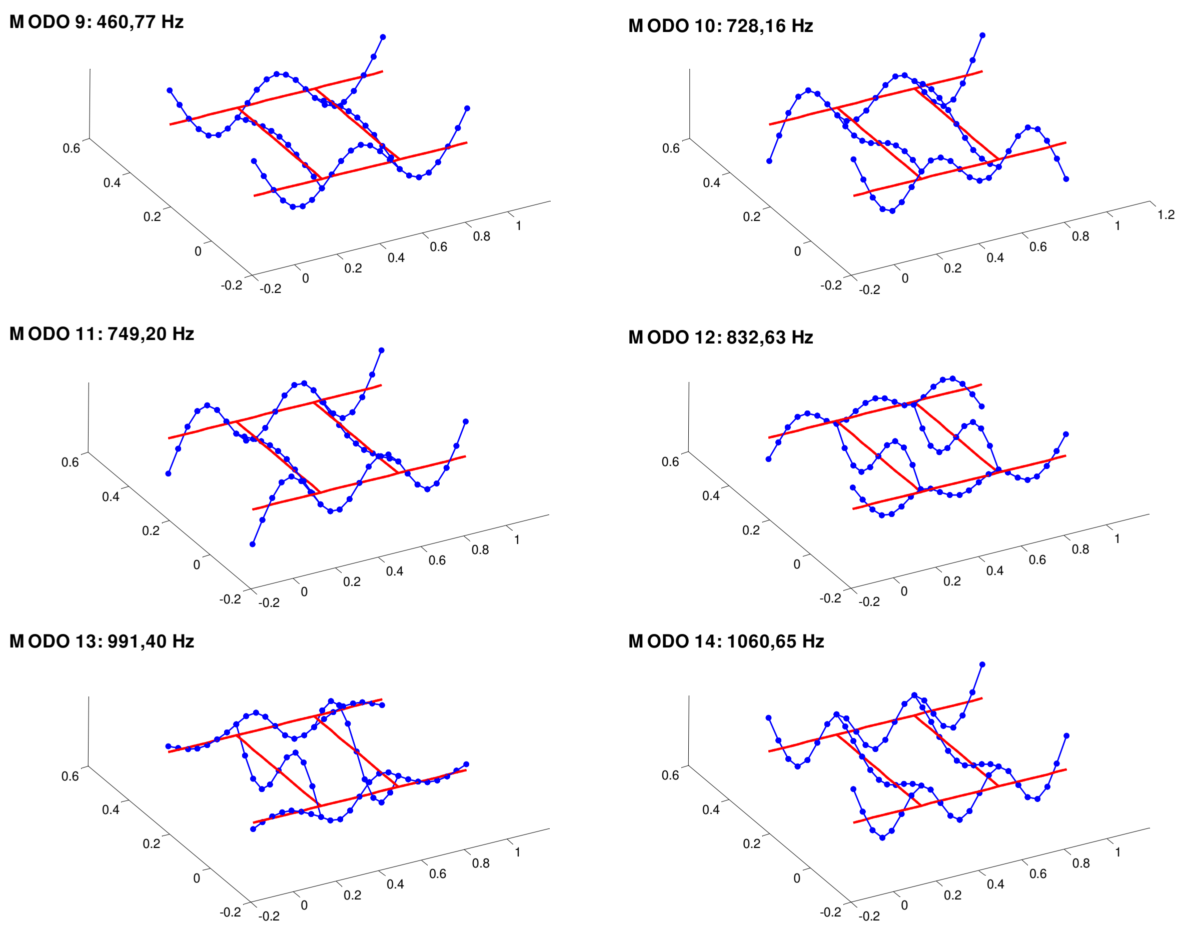

Figura 13 (continuação) – Modos de vibrar e freqüências naturais obtidos por simulação numérica

4.4 – Descrição do método REEDD

O método utilizado na estimação da rigidez estática a partir dos dados da rigidez dinâmica foi criado com o propósito de aproveitar a informação contida em curvas de resposta em freqüência extrapoladas para 0 Hz. Como já mencionado, a rigidez estrutural (estática e dinâmica), constitui requisito de projeto de carrocerias dos fabricantes de automóveis. E ambos requisitos são avaliados tanto no ambiente numérico quanto no experimental, dependendo da fase do projeto em desenvolvimento. O emprego adequado do método REEDD possibilitaria economia de recursos nestes dois ambientes: computacional e laboratorial.

O primeiro, embora considerado menos custoso e de fácil repetição, ainda assim onera consideravelmente o projeto. Basta lembrar que a maioria dos fabricantes multinacionais instalados no Brasil executa suas simulações nos computadores de alto desempenho (*mainframes*) de suas matrizes seguindo uma cadência pré-agendada. Se algum erro é detectado no modelo somente durante a execução da simulação, esta tarefa é interrompida e retorna para o final da "fila" após o modelo ser reparado. Tempo precioso é perdido neste ciclo. Dado este fato, passa a ser interessante a obtenção da maior quantidade de informação possível em uma mesma simulação. Neste ponto, o método REEDD oferece alternativas, dado que estima as constantes de rigidez estáticas utilizando os parâmetros encontrados em uma simulação de rigidez dinâmica (análise modal).

Nesta seção serão apresentados os passos do método REEDD e sua utilização em ambiente de simulação numérica.

4.4.1 – Etapas de aplicação do método REEDD

Em linhas gerais, o método REEDD pode ser descrito pelos passos a seguir (REDIERS, et al., 1998):

1. Cálculo do conjunto de "forças equivalentes": composto pelas forças de ação e reação do modelo que representam o comportamento estrutural estático desejado (torção ou flexão).
2. Síntese da matriz de receptância estática a partir do modelo modal.
3. Elaboração das equações de deflexão.
4. Cálculo do coeficiente de rigidez estática.

Nas subseções seguintes o método será aplicado na estimação da rigidez de torção e flexão da estrutura da Figura 6(a).

4.4.2 – Torção

1) Cálculo do conjunto de "forças equivalentes": considerem-se as condições de contorno representadas na Figura 9. O conjunto de forças de ação, F_t, aplicadas nos pontos das extremidades (A, B, C e d) e as de reação dos apoios (E, F, G e H), F_R, provoca rotação ao longo do eixo longitudinal do pórtico. Como conseqüência, deflexões das extremidades da estrutura são

observadas (Figura 10). Aplicando-se este mesmo conjunto de forças nesta mesma estrutura em condição livre de restrições, consegue-se representar o teste de torção através das condições de contorno ilustradas pela Figura 14.

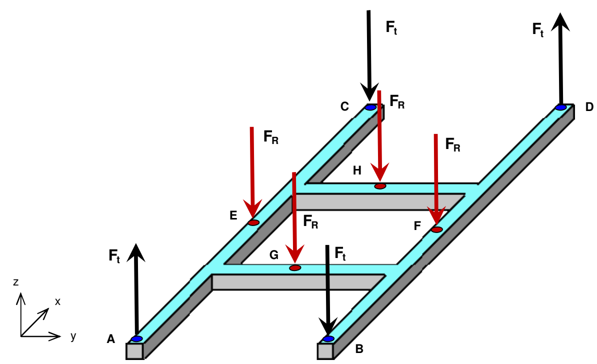

Figura 14 – Aplicação das forças de reação dos apoios na simulação do ensaio de torção

Estando a estrutura em equilíbrio, tem-se que:

$$\begin{aligned} &\sum F_Z = 0 \\ &2F_t - 2F_t - 4F_R = 0 \\ &F_R = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para o equilíbrio dos momentos, chega-se ao mesmo resultado:

$$\begin{aligned} &\sum M_{y=0} = 0 \\ &W(F_t - F_t + F_R) + \frac{W}{2}\left(F_R + F_R\right) = 0 \\ &2WF_R = 0 \\ &F_R = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

2) <u>Síntese da receptância estática:</u> como apresentado na equação (3.24) a receptância estática é dada pela somatória das receptâncias dinâmicas calculadas em 0 Hz. A partir das freqüências naturais e os modos de vibrar obtidos por simulação na seção 4.3, sintetiza-se a receptância estática entre os pontos de interesse. A representação destes valores para os pontos A, B, C... H pode ser colocada na forma matricial. A Tabela 5 apresenta esta matriz sintetizada a partir da superposição dos 14 modos ilustrados na Figura 13.

Tabela 5 – Matriz de receptância estática (m/N)

α	A	B	C	D	E	F	G	H
A	2,692E-05	-1,659E-05	-1,161E-05	1,875E-05	-3,406E-06	-2,731E-07	-1,424E-06	-5,773E-07
B	-1,659E-05	2,692E-05	1,875E-05	-1,161E-05	-2,731E-07	-3,406E-06	-1,424E-06	-5,773E-07
C	-1,161E-05	1,875E-05	2,692E-05	-1,659E-05	-3,406E-06	-2,731E-07	-5,773E-07	-1,424E-06
D	1,875E-05	-1,161E-05	-1,659E-05	2,692E-05	-2,731E-07	-3,406E-06	-5,773E-07	-1,424E-06
E	-3,406E-06	-2,731E-07	-3,406E-06	-2,731E-07	1,972E-06	8,772E-08	2,867E-07	2,867E-07
F	-2,731E-07	-3,406E-06	-2,731E-07	-3,406E-06	8,772E-08	1,972E-06	2,867E-07	2,867E-07
G	-1,424E-06	-1,424E-06	-5,773E-07	-5,773E-07	2,867E-07	2,867E-07	1,203E-06	6,056E-08
H	-5,773E-07	-5,773E-07	-1,424E-06	-1,424E-06	2,867E-07	2,867E-07	6,056E-08	1,203E-06

3) Elaboração das equações de deflexão: a deflexão de um ponto da estrutura é determinada pela contribuição das forças atuantes (reais ou "equivalentes") ponderadas pelas receptâncias entre este ponto e os pontos de aplicação das forças. Assim, para o caso da configuração da Figura 14, tem-se que:

$$\begin{aligned}
d_A &= \left(\alpha_{AA}+\alpha_{AD}\right)F_t-\left(\alpha_{AB}+\alpha_{AC}\right)F_t-\left(\alpha_{AE}+\alpha_{AF}+\alpha_{AG}+\alpha_{AH}\right)F_R\\
d_B &= \left(\alpha_{BA}+\alpha_{BD}\right)F_t-\left(\alpha_{BB}+\alpha_{BC}\right)F_t-\left(\alpha_{BE}+\alpha_{BF}+\alpha_{BG}+\alpha_{BH}\right)F_R\\
d_C &= \left(\alpha_{CA}+\alpha_{CD}\right)F_t-\left(\alpha_{CB}+\alpha_{CC}\right)F_t-\left(\alpha_{CE}+\alpha_{CF}+\alpha_{CG}+\alpha_{CH}\right)F_R\\
d_D &= \left(\alpha_{DA}+\alpha_{DD}\right)F_t-\left(\alpha_{DB}+\alpha_{DC}\right)F_t-\left(\alpha_{DE}+\alpha_{DF}+\alpha_{DG}+\alpha_{DH}\right)F_R
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Substituindo as forças calculadas no passo 1 e as receptâncias calculadas no passo 2 fica-se com:

$$\begin{aligned}
d_A &= \left(2{,}692+1{,}875\right)\times10^{-5}-\left(-1{,}659+1{,}161\right)\times10^{-5} = \ \ 7{,}387\times10^{-5}\ m\\
d_B &= \left(1{,}659-1{,}161\right)\times10^{-5}-\left(2{,}692+1{,}875\right)\times10^{-5} = -7{,}387\times10^{-5}\ m\\
d_C &= \left(-1{,}161-1{,}659\right)\times10^{-5}-\left(1{,}875+2{,}692\right)\times10^{-5} = -7{,}387\times10^{-5}\ m\\
d_D &= \left(1{,}875+2{,}692\right)\times10^{-5}-\left(-1{,}161-1{,}659\right)\times10^{-5} = 7{,}387\times10^{-5}\ m
\end{aligned} \tag{4.11}$$

4) Cálculo do coeficiente de rigidez estática: substituindo-se as deflexões estimadas no passo 3 nas equações de (4.1) a (4.3) obtém-se o coeficiente de rigidez à torção. A Tabela 6 lista os valores encontrados.

Tabela 6 – Resultados da torção estática estimada pelo método REEDD

Deslocamento/ Rotação	**Valores**	**Unidade**
d_A	7,387E-05	m
d_B	-7,387E-05	
d_C	-7,387E-05	
d_D	7,387E-05	
θ_{AB}	3,551E-04	rad
θ_{CD}	3,551E-04	
θ_{TOTAL}	7,103E-04	
$\boldsymbol{Kt_{REEDD}}$	**585,691**	**Nm/rad**

4.4.3 – Flexão

1) <u>Cálculo do conjunto de "forças equivalentes":</u> considere agora as condições de contorno representadas na Figura 11. Neste caso, as forças de ação F_f, aplicadas no centro das barras longitudinais da estrutura, e as de reação dos apoios F_R, nas extremidades, causam deflexões no centro da estrutura como mostrado na Figura 12. Estas forças representam o efeito do ensaio de flexão estática quando aplicadas em uma estrutura livre de restrições (Figura 15). Assumindo-se a estrutura em equilíbrio tem-se que:

$$\begin{aligned} &\sum F_Z = 0 \\ &4F_R - 2F_f = 0 \\ &F_R = \frac{F_f}{2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} &\sum M_{y=0} = 0 \\ &W(F_f - 2F_R) = 0 \\ &F_R = \frac{F_f}{2} \end{aligned} \tag{4.13}$$

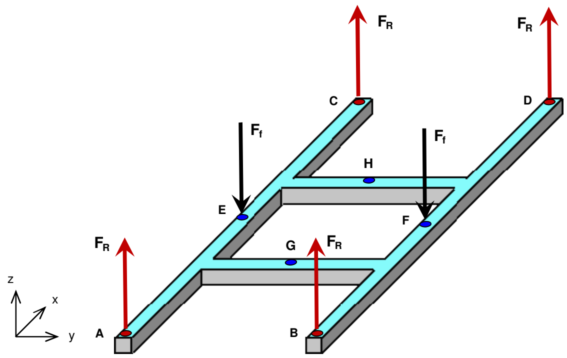

Figura 15 – Aplicação das forças de reação dos apoios na simulação do ensaio de flexão

2) Síntese da receptância estática: como esta síntese está relacionada com os dados da simulação de ensaios dinâmicos, aqui se aplica a matriz da Tabela 5.

3) Equações de deflexão: neste caso:

$$
\begin{aligned}
d_A &= (\alpha_{AA} + \alpha_{AB} + \alpha_{AC} + \alpha_{AD}) F_R - (\alpha_{AE} + \alpha_{AF}) F_f \\
d_B &= (\alpha_{BA} + \alpha_{BB} + \alpha_{BC} + \alpha_{BD}) F_R - (\alpha_{BE} + \alpha_{BF}) F_f \\
d_C &= (\alpha_{CA} + \alpha_{CB} + \alpha_{CC} + \alpha_{CD}) F_R - (\alpha_{CE} + \alpha_{CF}) F_f \\
d_D &= (\alpha_{DA} + \alpha_{DB} + \alpha_{DC} + \alpha_{DD}) F_R - (\alpha_{DE} + \alpha_{DF}) F_f \\
d_E &= (\alpha_{EA} + \alpha_{EB} + \alpha_{EC} + \alpha_{ED}) F_R - (\alpha_{EE} + \alpha_{EF}) F_f \\
d_F &= (\alpha_{FA} + \alpha_{FB} + \alpha_{FC} + \alpha_{FD}) F_R - (\alpha_{FE} + \alpha_{FF}) F_f
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Substituindo-se as forças calculadas no passo 1, as receptâncias calculadas no passo 2 e relembrando que F_f =1N (e portanto F_R=1/2N), fica-se com:

$$
\begin{aligned}
d_A &= (2{,}692 - 1{,}659 - 1{,}161 + 1{,}875) \times 10^{-5} \times \tfrac{1}{2} - (-34{,}06 - 2{,}731) \times 10^{-7} = -1{,}242 \times 10^{-5}\ m \\
d_B &= (-1{,}659 + 2{,}692 + 1{,}875 - 1{,}161) \times 10^{-5} \times \tfrac{1}{2} - (-2{,}731 - 34{,}06) \times 10^{-7} = -1{,}242 \times 10^{-5}\ m \\
d_C &= (-1{,}161 + 1{,}875 + 2{,}692 - 1{,}659) \times 10^{-5} \times \tfrac{1}{2} - (-34{,}06 - 2{,}731) \times 10^{-7} = -1{,}242 \times 10^{-5}\ m \\
d_D &= (1{,}875 - 1{,}161 - 1{,}659 + 2{,}692) \times 10^{-5} \times \tfrac{1}{2} - (-2{,}731 - 34{,}06) \times 10^{-7} = -1{,}242 \times 10^{-5}\ m \\
d_E &= (-34{,}06 - 2{,}731 - 34{,}06 - 2{,}731) \times 10^{-7} \times \tfrac{1}{2} - (1{,}972 \times 10^{-6} + 8{,}772 \times 10^{-8}) = 5{,}739 \times 10^{-6}\ m \\
d_F &= (-2{,}731 - 34{,}06 - 2{,}731 - 34{,}06) \times 10^{-7} \times \tfrac{1}{2} - (8{,}772 \times 10^{-8} + 1{,}972 \times 10^{-6}) = 5{,}739 \times 10^{-6}\ m
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

4) <u>Cálculo do coeficiente de rigidez estática</u>: substituindo as deflexões estimadas no passo 3 nas equações de (4.5) a (4.7), obtém-se o coeficiente de rigidez à flexão. A Tabela 7 lista os valores encontrados.

Tabela 7 – Resultados da simulação de ensaio de flexão estática

Deslocamento	Valores	Unidade
d_A	1,242E-05	
d_B	1,242E-05	
d_C	1,242E-05	
d_D	1,242E-05	m
d_E	-5,739E-06	
d_F	-5,739E-06	
d_{fcor}	-5,739e-06	
$\boldsymbol{Kf_{REEDD}}$	**5,507E+04**	**N/m**

A comparação de resultados entre as simulações de carregamento estático e as estimações do método REEDD é tratada em detalhes no Capítulo 7, Seção 7.1.

4.4.4 – Fatores de contribuição modal

O fator de contribuição modal foi introduzido brevemente no final do Capítulo 3. A equação (3.49) define este fator como a razão entre a receptância estática de cada modo e a receptância estática teórica. Esta definição é válida no caso da viga engastada-livre ilustrada no capítulo 3 na qual força foi introduzida e deflexão calculada no mesmo ponto (extremidade livre da viga).

No caso de uma estrutura mais complexa, como o pórtico H duplo, os fatores de contribuição modal são calculados considerando as deflexões relativas entre os pontos necessários para a estimação das constantes de rigidez.

Assim, para a torção, o fator de cada modo *r* é dado por:

$$R_t^r = \frac{\theta_{TOTAL}^r}{\sum_{r=1}^{N} \theta_{TOTAL}} \tag{4.16}$$

Enquanto que para a flexão:

$$R_f^r = \frac{d_f^r}{\sum_{r=1}^{N} d_f} \tag{4.17}$$

A Figura 16 traz a representação gráfica dos fatores de contribuição modal para a torção (a) e para a flexão (b). Pode ser observado destes gráficos a predominância da contribuição dos primeiros modos de torção e flexão para a estimação das constantes de rigidez estática à torção e à flexão, respectivamente. Os modos 5 e 10 também adicionam uma pequena parcela para a torção enquanto que os modos 6 e 14 o fazem para a flexão.

O conhecimento dos modos que realmente contribuem para a estimação das constantes de rigidez pelo método REEDD possibilita a simplificação do modelo modal e demais cálculos envolvendo os modos de vibrar. Por este motivo, a partir deste ponto, somente os modos 1, 5 e 10 serão considerados para qualquer análise referente à estimação do coeficiente de torção estática e os modos 2, 6 e 14 no que se refere à estimação do coeficiente de flexão estática. O estudo de propagação de incertezas através do método REEDD que é apresentado no capítulo seguinte já traz esta consideração.

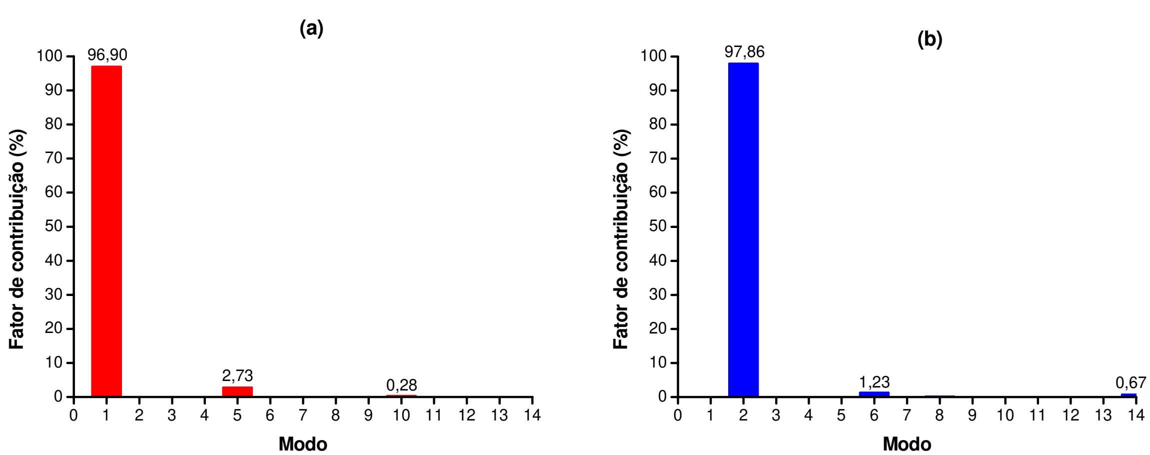

Figura 16 – Fator de contribuição dos modos: (a) – torção; (b) – flexão

Capítulo 5

Propagação de Incertezas Através do método REEDD

Neste capítulo, incertezas são introduzidas nas variáveis de entrada do método REEDD e a propagação destas é analisada pelo método de Monte Carlo e pelo método linear de covariâncias. O modelo numérico elaborado no capítulo anterior é utilizado para esta finalidade. Pretende-se com isto determinar a sensibilidade do método quanto às variações das freqüências naturais e modos de vibrar.

5.1 – Incertezas em dinâmica estrutural

Segundo Haldar e Mahadevan (2000), a maioria dos fenômenos físicos contém certo grau de incerteza, o que significa que estes fenômenos não podem ser preditos com exatidão. Nestes casos, medidas repetidas destes fenômenos produzem múltiplos resultados. Dentre estes, alguns são mais freqüentes que os outros e sua ocorrência é estudada estatisticamente. Assim, para viabilizar este estudo no ambiente experimental, várias medições precisariam ser realizadas. Dependendo da aplicação, esta série de medições torna-se economicamente inviável. Neste contexto, passa a ser interessante a modelagem de incertezas inerentes ao sistema em estudo para inferir a incerteza do resultado buscado.

O estudo de incertezas associadas à mecânica começa com o trabalho de oscilações aleatórias de Einstein (1905) sobre o Movimento Browniano. Este estudo se popularizou quando mais estudiosos passaram a perceber que ambientes mecânicos são estocásticos e o tratamento deste problema passou a ser acessível a engenheiros não pesquisadores através do seminário de Crandall em 1958. Esta história é contada por Paez (2006). O estudo clássico de vibrações aleatórias considera somente a excitação como aleatória. O tratamento deste problema em sistemas mecânicos lineares e não-lineares com um ou múltiplos graus de liberdade pode ser encontrado em Crandall e Mark (1963). Mais recentemente, Lutes e Sarkani (1997) e Lin (2002) descrevem os últimos avanços no estudo de vibrações aleatórias. Dependendo da aplicação do problema a resolver, pode ser importante considerar também os parâmetros do sistema como incertos. Surgem, então, duas possíveis abordagens para modelagem de incertezas em dinâmica estrutural: a paramétrica e a não-paramétrica. Na primeira, os parâmetros escalares do sistema são modelados como variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conhecidas, ou ainda como campos aleatórios, quando há distribuição espacial de variabilidade. Esta abordagem vem sendo freqüentemente tratada ou através de métodos de Monte Carlo (RUBINSTEIN e KROESE, 2008) ou através do Método Estocástico de Elementos Finitos (HALDAR e MAHADEVAN, 2000; GHANEM e SPANOS, 1991). Na segunda estratégia, as matrizes do sistema é que são modeladas como variáveis aleatórias. Assim, enquanto a estratégia de modelagem paramétrica é indicada para modelagem de incertezas nas propriedades do sistema (densidade, módulo de elasticidade, geometria, etc) a estratégia não-paramétrica é indicada para casos em que o modelo numérico apresenta incerteza associada em relação à estrutura física. Trabalhos recentes têm surgido com propostas de geração de matrizes aleatórias na abordagem não-paramétrica. Os trabalhos de Adhikari e Langley (2001) e Soize (2000, 2005) constituem boas referências nesta área.

No presente trabalho deseja-se avaliar a propagação de incertezas aleatórias através do método REEDD. Estas incertezas são inerentes aos parâmetros modais que, como já mostrado no Capítulo 1, constituem as variáveis de entrada do método. Assim, as incertezas normalmente encontradas nos resultados de ensaios experimentais de análise modal são modeladas neste trabalho e a propagação destas é analisada com uma abordagem heurística. Modelagens paramétricas e não-paramétricas estão fora do escopo deste estudo. Tais abordagens foram citadas nas linhas anteriores apenas para situar o presente trabalho no contexto atual do estudo de incertezas em dinâmica estrutural.

Métodos de experimentação numérica por Monte Carlo e propagação linear de covariâncias (que utiliza aproximações lineares por série de Taylor) têm sido utilizados como ferramentas de análise de propagação de incertezas (HASSELMAN, 2001). Tais ferramentas são aplicadas nesta seção para investigação desta propagação através do método REEDD.

5.2 – Análise de propagação de incertezas pelo método de Monte Carlo

A técnica de experimentação numérica de Monte Carlo tem tido grande aplicação em dinâmica estrutural como ferramenta de avaliação de propagação de incertezas. Informações sobre o uso desta técnica podem ser verificadas em Rubinstein (1981) e exemplos recentes de sua utilização são dados por D'Ambrogio e Fregolent (2007) e Hasselman (2001). Basicamente, esta técnica consiste na introdução de N amostras da variável aleatória na entrada de um dado sistema para gerar N amostras aleatórias da variável de saída. As variáveis de entrada são modeladas por uma dada função de distribuição de probabilidade previamente estabelecida. A solução determinística do sistema através das variáveis de entrada, ou realizações, fornecerá a representação da variabilidade da resposta deste sistema. Momentos estatísticos da ordem desejada podem então ser calculados através das N respostas (HALDAR e MAHADEVAN, 2000).

A técnica de Monte Carlo possui vantagens sobre aproximações lineares de primeira ou segunda ordem já que as expressões analíticas que modelam o problema não precisam ser conhecidas a priori. Como principal desvantagem, esta técnica necessita de recursos computacionais para simulação das realizações.

A aplicação de Monte Carlo pode ser resumida nos seis passos a seguir (HALDAR e MAHADEVAN, 2000):

1. Definição do problema em termos de todas as suas variáveis aleatórias.
2. Quantificação das características probabilísticas das variáveis aleatórias de entrada em termos de parâmetros estatísticos.
3. Geração dos valores dessas variáveis envolvidas no problema, respeitando sua distribuição de probabilidade.
4. Experimentação numérica, ou seja, avaliação determinística do problema para cada realização.
5. Extração de informação estatística da resposta das N realizações
6. Determinação da exatidão e eficiência da simulação.

Aplicação de Monte Carlo:

<u>Passo1 – Definição do problema:</u>

O método REEDD constitui o problema ou o sistema no qual se deseja avaliar a propagação de incertezas. Como mostrado no Capítulo 3, as variáveis de entrada deste método são os parâmetros modais, modos de vibrar, ϕ_r , e freqüências naturais angulares, ω_r.

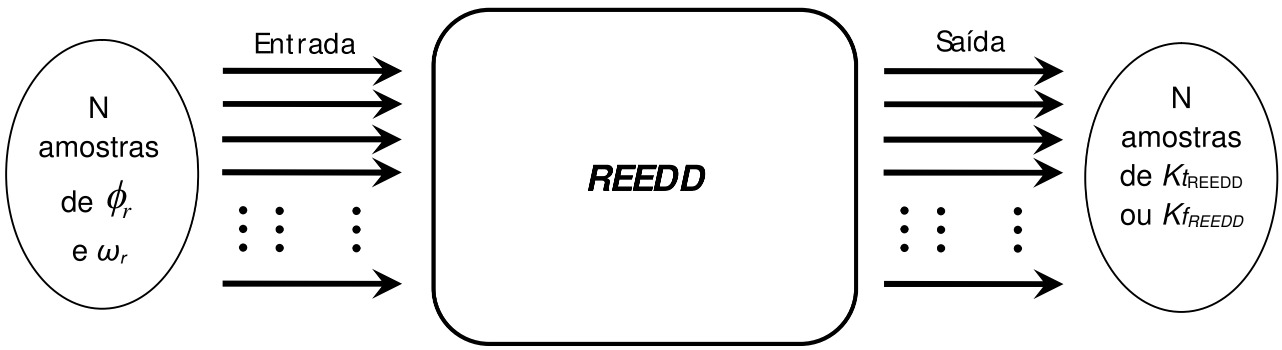

Figura 17 – Definição do problema em termos das variáveis aleatórias

A Figura 17 ilustra como se dá a experimentação numérica para o método REEDD: geração de N amostras de ϕ_r e ω_r como variáveis de entrada do problema segundo as funções de densidade de probabilidade que modelam as incertezas destas variáveis; estimação das N amostras das constantes de rigidez à torção, Kt_{REEDD}, e à flexão, Kf_{REEDD}, através do método REEDD; tratamento estatístico das N amostras de saída e conclusões.

<u>Passo 2 – Quantificação das variáveis aleatórias:</u>

Esta etapa consiste na modelagem das incertezas associadas às variáveis de entrada do problema (Figura 17). De modo geral, para esta modelagem, podem-se usar testes de hipóteses, como o chi-quadrado, para encontrar uma função densidade de probabilidade adequada. Também é possível aplicar o Princípio da Entropia Máxima para construir uma função densidade de probabilidade (FDP) aproximada, caso não haja dados suficientes ou confiáveis (KAPUR e KESAVAN, 1992). Segundo este princípio: “*De todas as distribuições de probabilidade consistentes com as restrições impostas, escolhe-se aquela que maximiza a incerteza (entropia)*”.

As incertezas encontradas na literatura são adotadas neste trabalho. De modo geral, são associadas à análise modal experimental incertezas de 1% para estimação das freqüências naturais e 5% para estimação de cada componente, ϕ_i^r, dos modos de vibrar (PEETERS, et al., 1999; HASSELMAN e CHROSTOWSKI, 1997). Estas incertezas serão adotadas como equivalentes a seis desvios padrão, considerando, portanto, um intervalo de confiança de 99,7% (Figura 18).

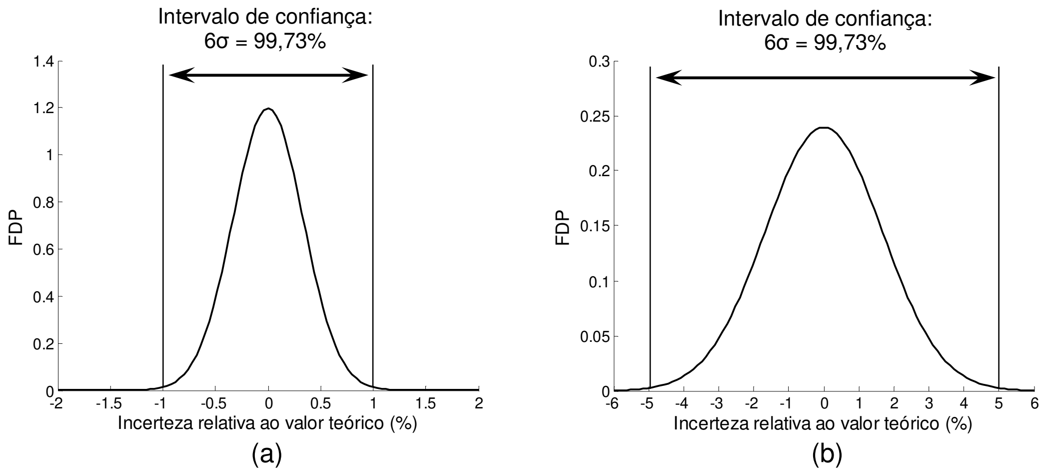

Figura 18 – FDPs das incertezas presentes nas freqüências naturais (a) e modos de vibrar (b)

Assim, tem-se que:

- freqüência natural: $\pm 3\sigma_\omega = \pm 1\% \quad \Rightarrow \quad \pm\sigma_\omega = \pm 0{,}333\%$ (5.1)
- modo de vibrar: $\pm 3\sigma_\phi = \pm 5\% \quad \Rightarrow \quad \pm\sigma_\phi = \pm 1{,}667\%$ (5.2)

Quase todas as distribuições de probabilidade comumente encontradas, discretas ou contínuas, podem ser obtidas como distribuições de máxima entropia quando descritas por momentos estatísticos simples (KAPUR e KESAVAN, 1992). Para distribuições existentes no intervalo (-∞, ∞) com média μ e desvio-padrão σ conhecidos, a distribuição normal é aquela que apresenta a máxima entropia. Já para distribuições no intervalo (0, ∞) e com médias aritmética e geométrica conhecidas, a entropia é maximizada quando a distribuição gama é utilizada. Seguindo este princípio, as FDPs indicadas para modelar as incertezas dos modos de vibrar e freqüências naturais são:

- <u>Freqüência natural</u>: distribuição gama.

$$FDP(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x),\ x \in \mathbb{R}^{+} \tag{5.3}$$

com:

$$\alpha = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \rightarrow \textit{parâmetro de forma} \tag{5.4}$$

$$\beta = \frac{\sigma^2}{\mu} \rightarrow \textit{parâmetro de escala} \tag{5.5}$$

- <u>Modo de vibrar</u>: distribuição Normal.

$$FDP(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\ x \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

Devido às restrições, a distribuição gama é a mais indicada na modelagem de incertezas das freqüências naturais. No entanto, os parâmetros de forma e escala calculados para os 6 principais modos forneceram FDPs muito próximas às de uma distribuição Normal. A Figura 19 apresenta os gráficos de ambas distribuições para os 6 modos de interesse (3 primeiros modos de torção e 3 primeiros modos de flexão). Observa-se dos gráficos que as curvas se sobrepõem umas às outras indicando que não há diferença relevante.

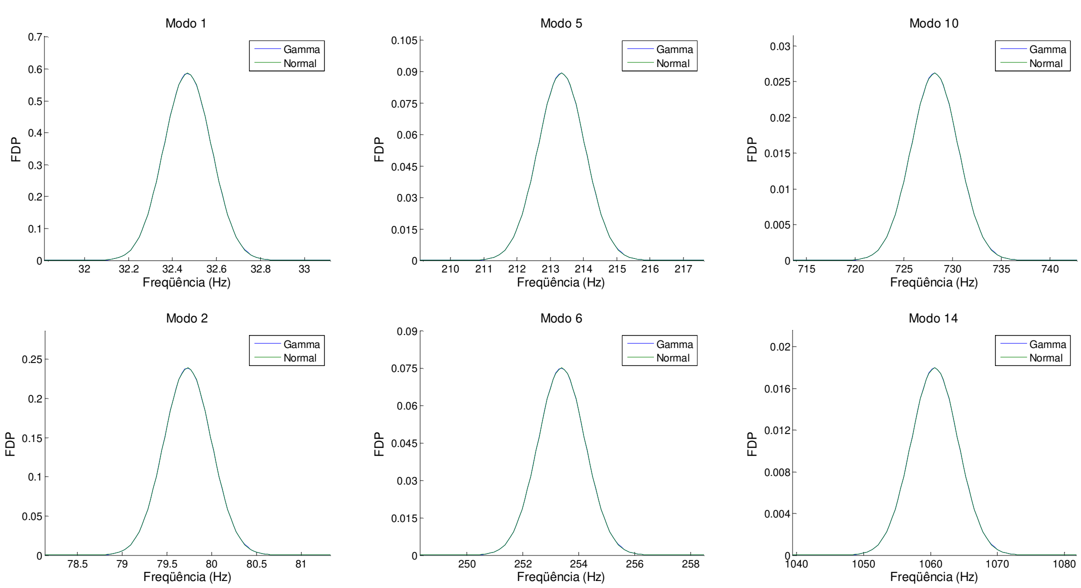

Figura 19 – Comparação FDPs distribuição Normal e gama para as freqüências naturais

De fato, tais diferenças, quando existem, são da ordem de 1/1000 do pico da curva, como observado na escala do gráfico da Figura 20, que traz como exemplo a diferença de modelagem de incertezas da freqüência natural do 1º modo. Por este motivo, as incertezas inerentes às freqüências naturais serão modeladas aqui pela distribuição Normal.

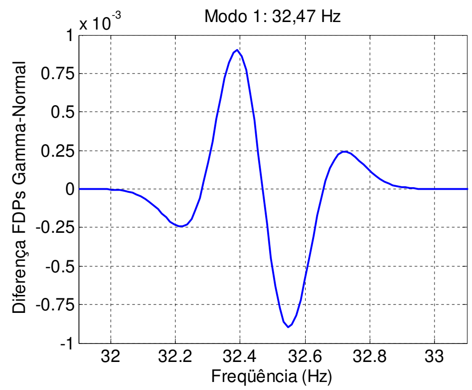

Figura 20 – Diferença entre distribuição Normal e gama
para a freqüência natural do 1º modo de torção

<u>Passo 3 – Geração das variáveis aleatórias:</u>

O propósito desta etapa é prover as amostras aleatórias geradas de modo a respeitar as FDPs descritas no passo 2. Duas estratégias são geralmente adotadas para modelar as incertezas em dinâmica estrutural: a paramétrica e a não-paramétrica. Na primeira, os parâmetros escalares são modelados como variáveis aleatórias. Na segunda, as matrizes do sistema é que são modeladas como variáveis aleatórias. A abordagem não-paramétrica é capaz de levar em consideração as incertezas do modelo já que, em algumas realizações das matrizes aleatórias, pode ocorrer acoplamento dos modos do sistema justamente por considerar as matrizes deste sistema como aleatórias (o mesmo não ocorre na estratégia paramétrica). Como conseqüência, o espaço amostral resultante da modelagem não-paramétrica é mais amplo do que o da paramétrica (RITTO, et al., 2007). Porém, como a abordagem proposta neste trabalho não considera incertezas do modelo numérico, nenhuma das duas estratégias é utilizada. As incertezas são adicionadas heuristicamente aos parâmetros modais (freqüências naturais e modos de vibrar) obtidos de um modelo numérico nominal.

Capaz de gerar números aleatórios com distribuição Normal (ou Gaussiana), de média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2=1$, a função `randn` do MATLAB® foi utilizada para este propósito. Os valores gerados por esta função foram ponderados para a obtenção de FDPs com os intervalos de confiança definidos no passo anterior, tanto para as freqüências naturais quanto para os modos de vibrar. Um total de 1000 amostras foram geradas para cada um dos parâmetros modais. Os histogramas dessas amostras e as FDPs ajustadas são mostrados na Figura 21 e Figura 22 para os 6 principais modos (torção e flexão).

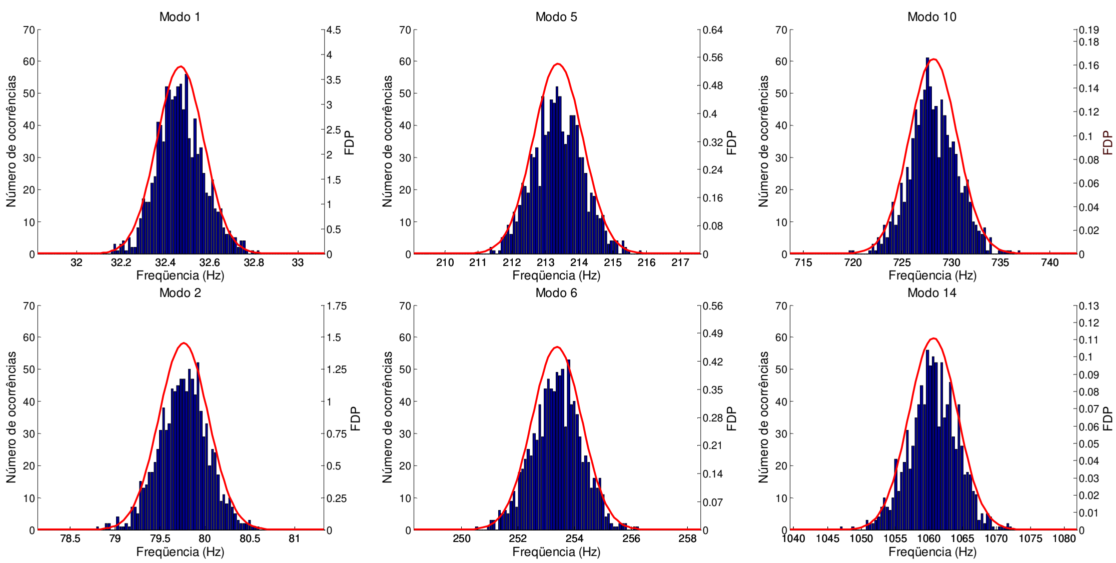

Figura 21 – Histogramas e FDPs das amostras de freqüências naturais do modelo

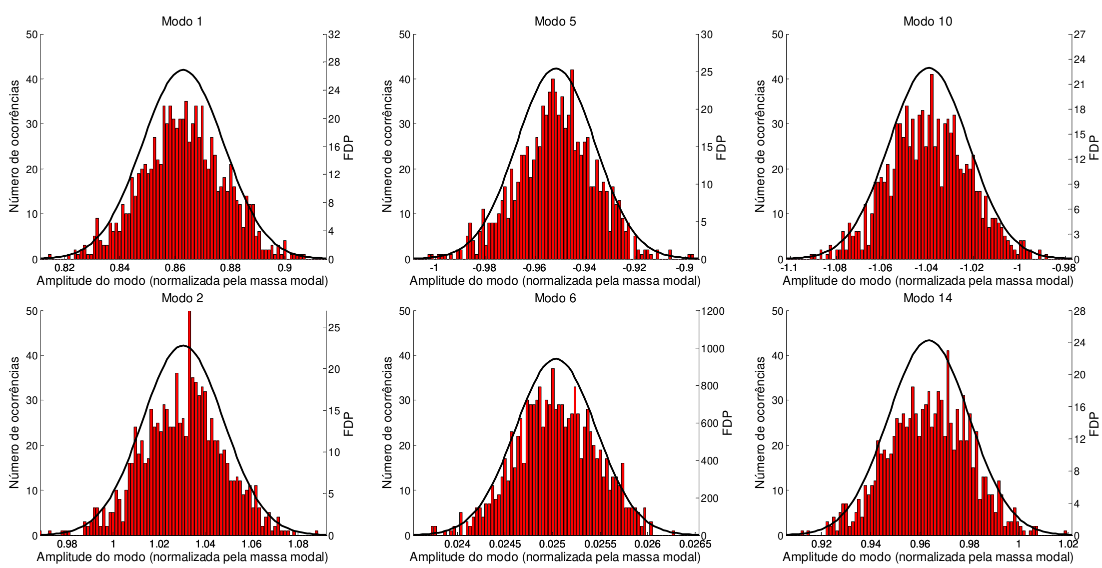

Figura 22 – Histogramas e FDPs das amostras dos modos de vibrar da extremidade A do modelo

Passo 4 – Experimentação numérica:

Esta é a principal etapa da técnica de Monte Carlo na qual as N amostras de entrada do passo 3 são submetidas ao problema ou sistema propriamente dito. As N saídas produzidas são então utilizadas para extração das informações estatísticas relevantes (passo 5).

Optou-se em realizar a simulação numérica em 3 cenários distintos:

- **Cenário A**: incerteza presente somente nas freqüências naturais, ω_r.
- **Cenário B:** incerteza presente somente nos modos de vibrar, ϕ_r.
- **Cenário C**: incerteza presente nas freqüências naturais e modos de vibrar, ω_r e ϕ_r, respectivamente.

A propagação de incertezas nestes 3 cenários é interessante do ponto de vista de avaliação da sensibilidade do método REEDD. Ao se isolar cada uma das variáveis aleatórias de entrada pode-se verificar o efeito da incerteza inerente a esta variável na estimação das constantes de rigidez à torção ou à flexão. Identifica-se, portanto, qual das variáveis de entrada, ω_r ou ϕ_r, mais afeta a incerteza da saída de modo isolado. Com esta informação, ações de prevenção podem ser tomadas para minimizar as incertezas da variável identificada.

A Figura 23 ilustra a variabilidade das amostras de freqüências naturais e modos de vibrar aplicadas como entrada do problema em cada cenário e considerando as 1000 realizações (somente os três primeiros modos de torção são ilustrados). Visualmente verifica-se no gráfico do Cenário A a presença de incertezas somente nas freqüências naturais. No Cenário B, têm-se incertezas presentes somente nos modos de vibrar. Por também serem proporcionais à amplitude do modo, aqui também são verificados desvios maiores nas regiões da estrutura com maior amplitude de oscilação (caso das extremidades da estrutura para o modo 1). O Cenário C resulta de uma combinação dos Cenários A e B e representa a situação encontrada em ensaios experimentais de dinâmica estrutural.

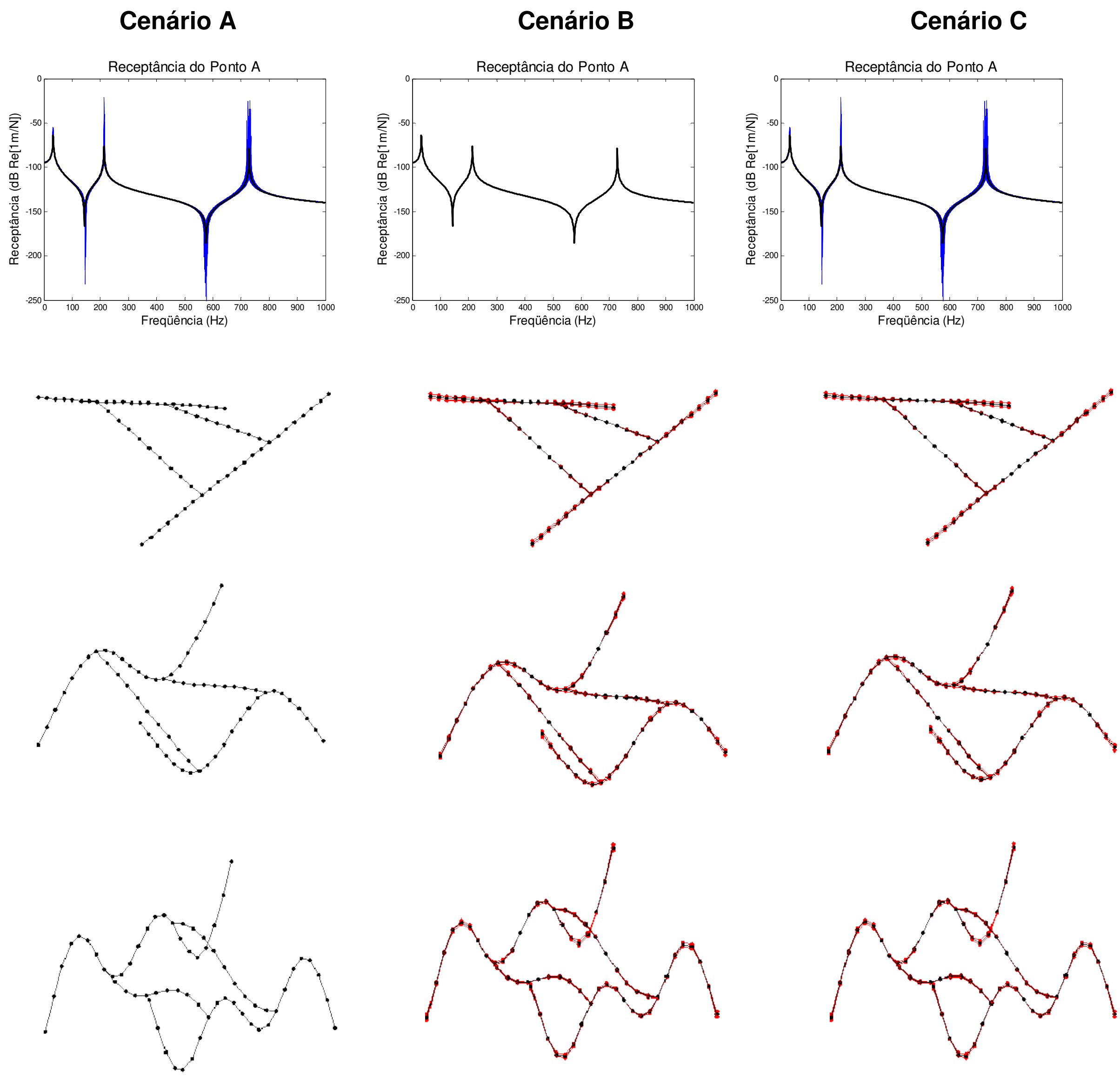

Figura 23 – Variabilidade de receptâncias e modos para os três cenários, A, B e C

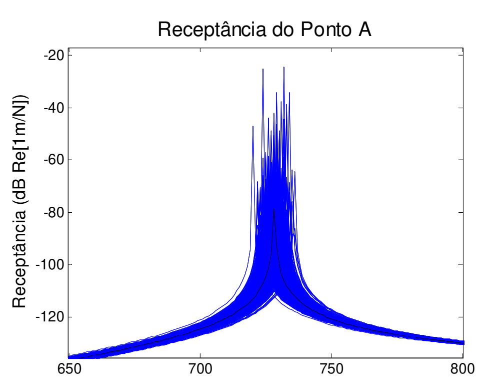

Figura 24 – Detalhe da dispersão das curvas de receptância em torno do modo 10

Passo 5 – Extração de informação estatística:

Nesta etapa, as N soluções determinísticas são tratadas por alguma ferramenta estatística de forma a se obter a caracterização desejada. A FDP ajustada para as N amostras dos coeficientes de rigidez estimados pelo método REEDD é utilizada nesta caracterização. Novamente, como este coeficiente não pode assumir valores negativos, ele deve ser modelado por uma distribuição gama (neste caso foi verificado que as diferenças entre a distribuição gama e Normal são significativas). A Figura 25 ilustra como exemplo as FDPs da freqüência natural do primeiro modo de torção (32,47 Hz), amplitude da forma modal do ponto A e a constante de rigidez torcional estimada (Kt_{REEDD}). Os gráficos dispostos na mesma coluna encontram-se na mesma escala.

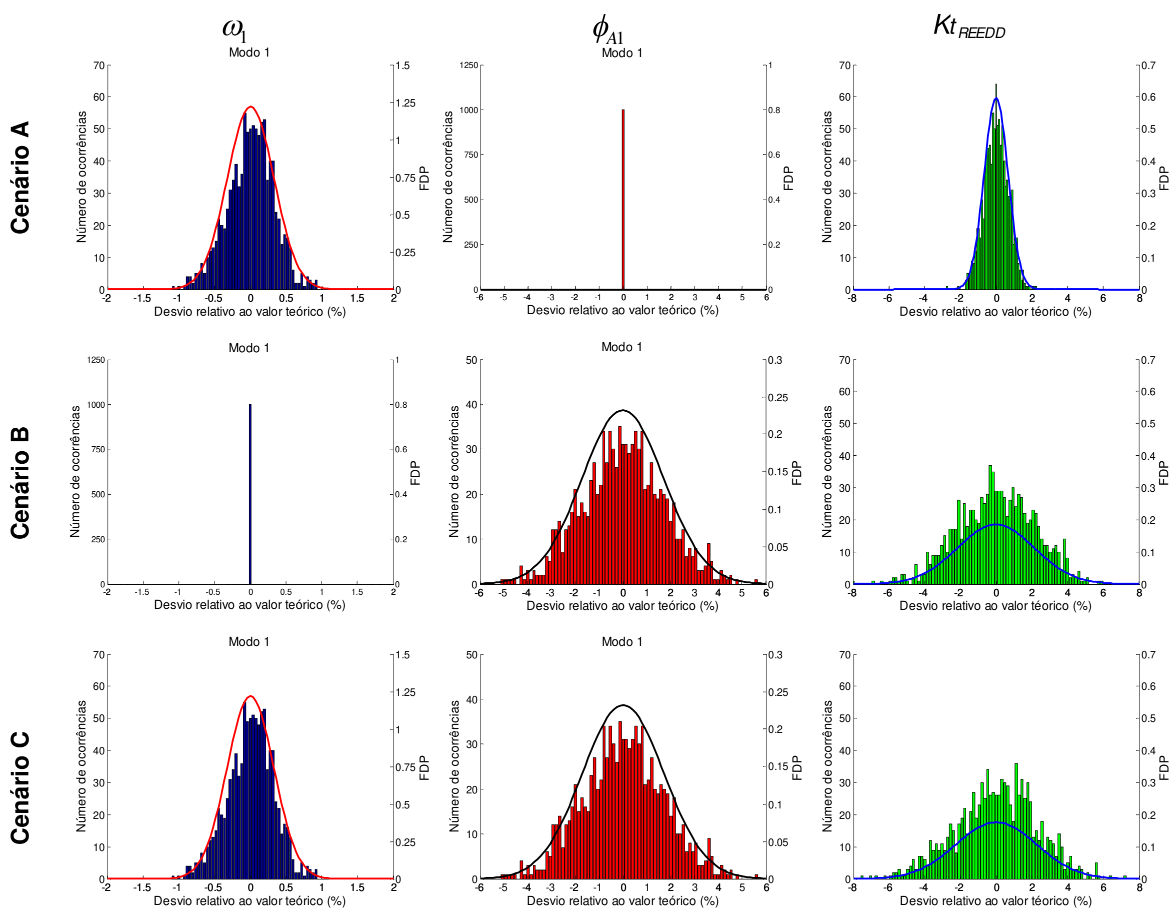

Figura 25 – Histogramas e FDPs das entradas e saída para cada cenário

A Tabela 8 traz as incertezas presentes na estimação do coeficiente de torção estática para os três cenários. Já a Tabela 9 mostra os mesmos resultados para o caso da flexão.

A relação entre a incerteza da variável de saída e da incerteza das variáveis de entrada é utilizada como meio de avaliação da propagação de incertezas através do método. Assim, da análise dos resultados da Tabela 8 conclui-se que o método REEDD, ao estimar o coeficiente de rigidez torcional:

- em média, dobra a incerteza presente nas freqüências naturais (cenário A).
- mantém as incertezas dos modos de vibrar (cenário B).
- associa uma incerteza máxima de ±5,74% com 99,7% de intervalo de confiança (cenário C), ou seja, não há amplificação propriamente.

Tabela 8 – Desvios da experimentação numérica realizada para estimação do coeficiente de rigidez à torção

Cenário	*Modo*	*Desvio padrão das variáveis de entrada*		*Desvio padrão da variável de saída*	*Incerteza da variável de saída no intervalo de confiança de 99,7%*
		σ_ω (%)	σ_ϕ (%)	σ_{Kt} (%)	$\pm 3\sigma_{Kt}$ (%)
A	1	0,341	0	0,674	± 2,022
	5	0,321	0		
	10	0,341	0		
B	1	0	1,663	1,804	± 5,412
	5	0	1,683		
	10	0	1,689		
C	1	0,333	1,657	1,912	± 5,736
	5	0,328	1,672		
	10	0,328	1,650		

Tabela 9 – Desvios da experimentação numérica realizada para estimação do coeficiente de rigidez à flexão

Cenário	*Modo*	*Desvio padrão das variáveis de entrada*		*Desvio padrão da variável de saída*	*Incerteza da variável de saída no intervalo de confiança de 99,7%*
		σ_ω (%)	σ_ϕ (%)	σ_{Kf} (%)	$\pm 3\sigma_{Kf}$ (%)
A	2	0,327	0	0,652	± 1,956
	6	0,333	0		
	14	0,336	0		
B	2	0	1,671	1,398	± 4,194
	6	0	1,676		
	14	0	1,742		
C	2	0,332	1,695	1,516	± 4,548
	6	0,353	1,666		
	14	0,333	1,622		

Já da Tabela 9 é possível verificar que o método REEDD:

- em média, também dobra a incerteza das freqüências naturais (cenário A).
- atenua as incertezas dos modos de vibrar (cenário B).
- associa uma incerteza máxima de ±4,55% com 99,7% de intervalo de confiança (cenário C), ou seja, o desvio do valor estimado é menor do que a combinação dos desvios de entrada.

Passo 6 – Convergência do método de Monte Carlo:

A convergência do método de Monte Carlo é avaliada comparando-se o desvio encontrado com as N realizações com aquele definido como aceitável. Caso a convergência da resposta não seja alcançada com as N realizações, mais N realizações são realizadas.

A definição de desvio empregada nesta avaliação é dada pela equação abaixo:

$$Desvio(\%) = \frac{\bar{K}_N - K_{REEDD}}{K_{REEDD}} \times 100 < 1\% \qquad (5.7)$$

A Figura 26 mostra este desvio para os três cenários em função do número de realizações.

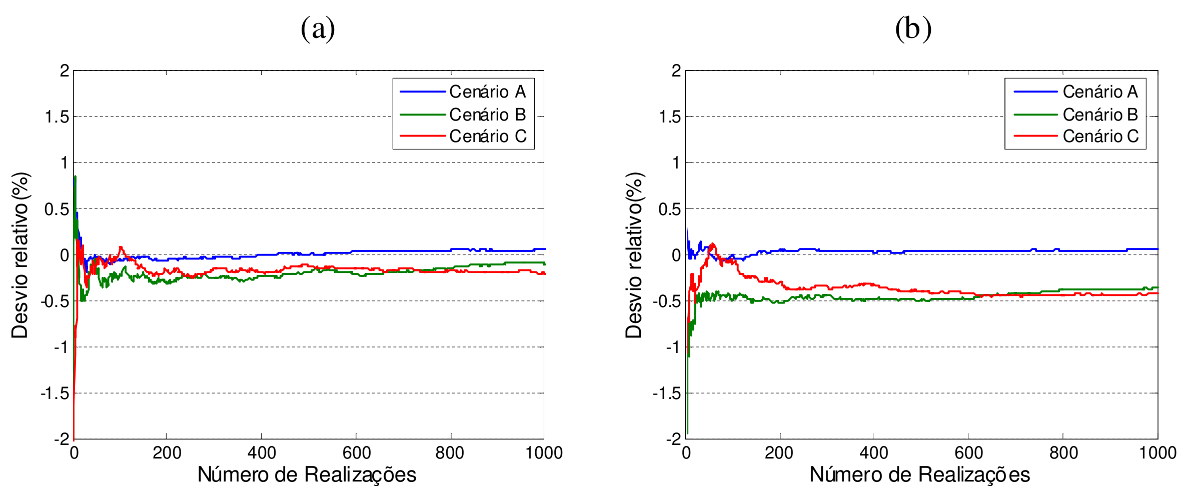

Figura 26 – Desvio médio 1000 realizações: torção (a) e flexão (b)

Dos gráficos, verifica-se que:

(a) Torção:

- Cenário A: média do desvio é praticamente nula (menor que 0,05%).
- Cenário B: média do desvio é cerca de -0,1%
- Cenário C: média do desvio é cerca de -0,2%

(b) Flexão:

- Cenário A: média do desvio é praticamente nula (menor que 0,05%).
- Cenário B: média do desvio é cerca de -0,4%.
- Cenário C: média do desvio é cerca de -0,5%

A simulação do Cenário B demonstrou mudança de tendência na faixa entre 600 a 800 realizações para a estimação de ambas os coeficientes de rigidez. A estabilidade das curvas pôde ser confirmada através da geração de mais 1000 realizações como mostrado na Figura 27.

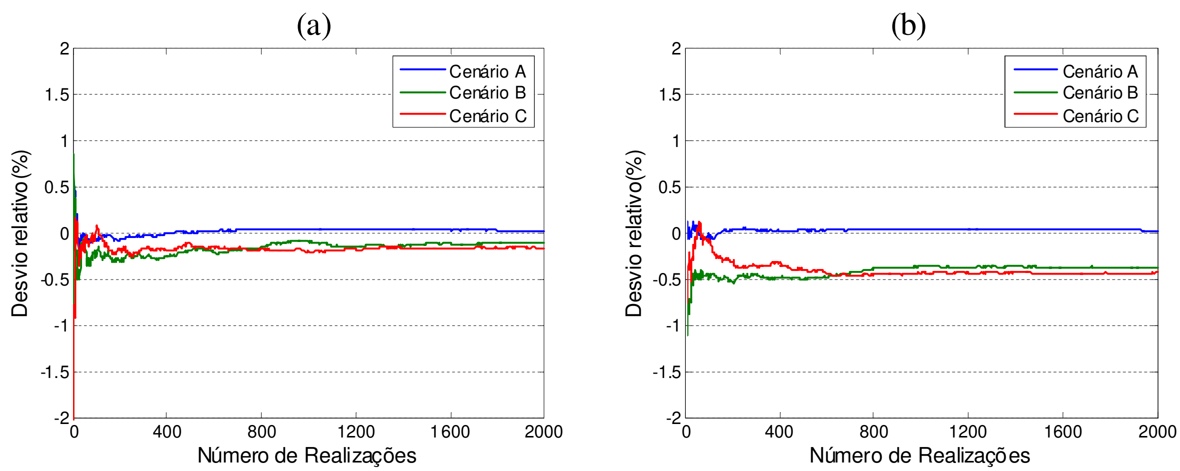

Figura 27 – Desvio médio 2000 realizações: torção (a) e flexão (b)

5.3 – Análise de propagação linear de covariâncias

O cálculo da receptância estática, equação (3.24), tem como variáveis de entrada os modos de vibrar e freqüências naturais. Na seção anterior foram geradas amostras aleatórias destes parâmetros para realização de experimentação numérica pelo método de Monte Carlo. Como produto desta experimentação, pôde-se modelar a incerteza das variáveis de saída (coeficientes de rigidez estática) e avaliar a propagação de incertezas através do método REEDD.

Pretende-se agora aplicar a mesma modelagem de incertezas na verificação da propagação destas utilizando expansão em série de Taylor de primeira ordem. Este método de propagação também é conhecido como propagação linear de covariância e, segundo Hasselman e Chrostowski (1997), somente é válido para aquelas regiões da FRF afastadas dos pólos e zeros. Assim, como o método REEDD utiliza curvas de receptância na freqüência de 0 Hz, o emprego da propagação linear de covariâncias é válido neste caso. Como vantagem sobre Monte Carlo, este método não necessita das numerosas realizações para estimação das incertezas. No entanto, os valores encontrados são aproximações lineares de funções não necessariamente lineares. O objetivo aqui é então verificar se esta aproximação fornece resultados aceitáveis para a modelagem das incertezas dos coeficientes de rigidez estimados pelo método REEDD.

Para isto, considere-se a função:

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right) \tag{5.8}$$

onde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias de entrada com médias $\left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right)$ e desvios padrão $\left(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\right)$ conhecidos.

Expandindo-se Y em série de Taylor de primeira ordem em torno dos valores médios, tem-se que:

$$Y \approx f\left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right) + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial X_i}\left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right)\right]\left(X_i - \mu_i\right) \tag{5.9}$$

Para simplificação dos cálculos, pode-se escrever a equação (5.9) na forma:

$$Y \approx a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i\left(X_i - \mu_i\right) \tag{5.10}$$

sendo:

$$\begin{aligned} a_0 &= f\left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right) \\ a_1 &= \frac{\partial f}{\partial X_i}\left(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\right) \end{aligned} \tag{5.11}$$

A aproximação de Y por série de Taylor de primeira ordem estabelece uma relação linear entre as múltiplas entradas e a saída. Tal relação também se verifica entre a distribuição das variáveis de entrada e a variável de saída. Isto significa que se as distribuições das múltiplas entradas forem do tipo normal ou Gaussiana, a distribuição de Y também será deste tipo (ARRAS, 1998). Neste caso, a média e o desvio padrão de Y são dados por:

$$\begin{aligned}
\mu_Y = E[Y] &= E\left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu_i)\right] \\
&= E[a_0] + \sum_{i=1}^{n} E[a_i X_i] - E[a_i \mu_i] \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] - a_i E[\mu_i] \\
&= a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i - a_i \mu_i \\
&= a_0 \\
\mu_Y &= f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_Y^2 = E\left[(Y - \mu_Y)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu_i)\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mu_i) \sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - \mu_j)\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 (X_i - \mu_i)^2 + \sum_{i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j (X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 E\left[(X_i - \mu_i)^2\right] + \sum_{i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j E\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \sigma_{ij} \\
\sigma_Y^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial X_j}\right) \sigma_{ij}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

onde σ_{ij} representa a covariância entre as variáveis X_i e X_j que é dada por:

$$\sigma_{ij} = \operatorname{cov}\left(X_i, X_j\right) = E\left[\left(X_i - \mu_i\right)\left(X_j - \mu_j\right)\right] \tag{5.14}$$

O primeiro termo da equação (5.13) representa a aproximação da variância de *Y* para as variáveis independentes ou não-correlacionadas. Havendo correlação ou dependência entre as variáveis, o segundo termo da equação deve também ser considerado. A equação (5.14) pode ainda ser organizada na forma matricial utilizando do operador gradiente:

$$\nabla_X = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X_1} & \dfrac{\partial}{\partial X_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial X_n} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

e o Jacobiano de *Y*, definido por:

$$\begin{aligned} J_Y &= \nabla_X Y \\ &= \nabla_X f\left(X\right) \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X_1} & \dfrac{\partial}{\partial X_2} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial X_n} \end{bmatrix} f\left(X\right) \\ J_Y &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial X_1} & \dfrac{\partial f}{\partial X_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial X_n} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.16}$$

A matriz de covariância que contém todas as variâncias e covariâncias das variáveis de entrada $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constitui uma matriz simétrica definida por:

$$C_X = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{5.17}$$

Finamente, combinando o Jacobiano com a matriz de covariâncias, chega-se a:

$$\sigma_Y^2 = J_Y C_X J_Y^T \tag{5.18}$$

A equação (5.18) mostra que a aproximação da variância da função *Y* depende, dentre outros fatores, da matriz de covariâncias das variáveis de entrada X_i. Os elementos desta matriz são facilmente determinados pela equação (5.14) quando se dispõe de amostras destas entradas. No entanto, no método de propagação de incertezas aqui investigado assume-se que estas amostras não são conhecidas ou que não estão disponíveis. Trabalha-se apenas com os valores de média, desvio padrão e as funções determinísticas que relacionam estas variáveis. Se as variáveis de entrada X_i são assumidas como sendo independentes então as covariâncias são nulas e a variância de Y pode ser determinada analiticamente. Havendo dependência, a solução analítica para a covariância é não trivial (BOHRNSTEDT e GOLDBERGER, 1969) e neste caso alguma estratégia deve ser adotada para a aproximação das incertezas.

A covariância entre duas variáveis X_i e X_j também pode ser expressa através do desvio padrão destas variáveis e coeficiente de correlação entre elas:

$$\sigma_{ij} = \text{cov}\left(X_i, X_j\right) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{5.19}$$

Este coeficiente por sua vez é definido como:

$$\rho_{ij} = \frac{E\left(X_i X_j\right) - E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)}{\sqrt{E\left(X_i^2\right) - E^2\left(X_i\right)}\sqrt{E\left(X_j^2\right) - E^2\left(X_j\right)}} \tag{5.20}$$

O coeficiente de correlação mede, em uma escala de -1 a 1, a linearidade entre duas variáveis. Um coeficiente igual a 1 indica que estas variáveis estão relacionadas por uma função linear contida no primeiro e terceiro quadrantes do plano XY. Se o coeficiente for igual a -1 esta função linear está compreendida no segundo e quarto quadrantes. Já um coeficiente igual a 0 significa que não há relação linear entre as variáveis envolvidas. Qualquer valor maior que -1, menor que 1 e diferente de 0 indica que existe uma relação entre as variáveis, mas que esta não é perfeitamente linear.

Da mesma forma que a covariância, o cálculo do coeficiente de correlação requer amostras das variáveis de entrada. Como no estudo analítico não se dispõe dessas amostras o coeficiente de correlação será inferido a partir do conhecimento dos modos de vibrar e freqüências naturais. Assim, serão adotados valores de -1 e 1 quando as variáveis envolvidas possuírem algum grau de dependência e será adotado 0 quando forem independentes. Estas atribuições ocorrerão de acordo com a correlação esperada entre as variáveis presentes na função determinística. Espera-se com esta estratégia investigar uma forma alternativa de análise de incertezas do método REED sem a necessidade de geração de amostras aleatórias como requerido por Monte Carlo.

Utilizando a equação (5.18) foram calculados os desvios padrão da receptância estática entre os pontos de interesse para os principais modos da torção e flexão. Os mesmo três cenários (A, B e C) anteriormente avaliados por Monte Carlo foram também investigados. A Tabela 10 traz os resultados para os três primeiros modos de torção.

Tabela 10 – Desvios padrão da receptância estática para os três principais modos de torção

Modo 1					Modo 5					Modo 10				
Cenário A														
σα	A	C	B	D	σα	A	C	B	D	σα	A	C	B	D
A	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	A	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	A	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
C	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	C	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	C	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
B	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	B	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	B	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
D	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	D	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	D	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
Cenário B														
σα	A	C	B	D	σα	A	C	B	D	σα	A	C	B	D
A	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	A	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	A	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%
C	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	C	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	C	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%
B	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	B	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	B	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%
D	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	D	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	D	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%
Cenário C														
σα	A	C	B	D	σα	A	C	B	D	σα	A	C	B	D
A	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	A	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	A	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%
C	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	C	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	C	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%
B	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	B	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	B	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%
D	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	D	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	D	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%

As diferenças verificadas na Tabela 10 para os cenários B e C entre os desvios da receptância entre pontos são conseqüências dos coeficientes de correlação adotados entre os modos nestes pontos. Assim, no cenário B, o desvio encontrado para a receptância entre os pontos A e D, por exemplo, vale 3,33% dado que o segundo termo da equação (5.13) se soma ao primeiro termo. Esta adição ocorre devido ao coeficiente de correlação unitário adotado entre a forma modal nos pontos A e D. No entanto, entre os pontos A e C, por exemplo, o segundo termo da equação (5.13) se subtrai do primeiro dado que o coeficiente inferido é -1. Cabe ressaltar que faz sentido inferir uma correlação unitária positiva entre os pontos A e D para os modos de torção. A Figura 13 mostra que para os modos 1, 5 e 10 os deslocamentos sofridos por estes dois pontos encontram-se em fase. Já para os pontos A e C estes deslocamentos estão defasados de 180° e por isto considera-se que o coeficiente de correlação seja -1. Neste caso, com os componentes do modo sendo considerados correlacionados nestes pontos, mas, opostos em fase, a equação (5.13) mostra que a parte não correlacionada (primeiro termo) é anulada pela parte correlacionada do desvio (segundo termo). É por este motivo que os desvios de algumas células do cenário B da Tabela 10 são nulos. Isto não ocorre para os cenários A e C devido à contribuição da incerteza das freqüências naturais. Enquanto no cenário A a freqüência representa a única variável incerta e o desvio é maximizado para todos os pontos (diferentemente do modo de vibrar, a amplitude da freqüência natural não varia entre o pontos da estrutura), no cenário C sua incerteza é sempre somada à incerteza dos modos pelo primeiro termo da equação (5.13) (como modo e freqüência não são correlacionados, o segundo termo é anulado pelo coeficiente de correlação).

A mesma metodologia foi empregada para os modos de flexão variando somente o coeficiente de correlação inferido entre os pontos. Os desvios das receptâncias para este caso são mostrados na Tabela 11.

Tabela 11 – Desvios padrão da receptância estática para os três principais modos de flexão

Modo 2							Modo 6							Modo 14						
Cenário A																				
σα	A	E	C	B	F	D	σα	A	E	C	B	F	D	σα	A	E	C	B	F	D
A	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	A	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	A	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
E	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	E	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	E	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
C	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	C	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	C	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
B	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	B	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	B	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
F	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	F	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	F	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
D	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	D	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	D	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%	0,67%
Cenário B																				
σα	A	E	C	B	F	D	σα	A	E	C	B	F	D	σα	A	E	C	B	F	D
A	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	A	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	A	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%
E	0,00%	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	0,00%	E	0,00%	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	0,00%	E	0,00%	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	0,00%
C	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	C	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	C	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%
B	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	B	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	B	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%
F	0,00%	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	0,00%	F	0,00%	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	0,00%	F	0,00%	3,33%	0,00%	0,00%	3,33%	0,00%
D	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	D	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%	D	3,33%	0,00%	3,33%	3,33%	0,00%	3,33%
Cenario C																				
σα	A	E	C	B	F	D	σα	A	E	C	B	F	D	σα	A	E	C	B	F	D
A	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	A	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	A	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%
E	0,67%	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	0,67%	E	0,67%	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	0,67%	E	0,67%	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	0,67%
C	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	C	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	C	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%
B	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	B	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	B	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%
F	0,67%	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	0,67%	F	0,67%	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	0,67%	F	0,67%	3,40%	0,67%	0,67%	3,40%	0,67%
D	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	D	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%	D	3,40%	0,67%	3,40%	3,40%	0,67%	3,40%

A continuidade do cálculo de propagação das incertezas seguiu a mesma linha, utilizando a equação (5.18) para determinação dos desvios da saída, Y, em função das variáveis de entrada, X, e dos coeficientes de correlação inferidos. Assim, as variáveis de saída de uma etapa constituíam as variáveis de entrada da etapa seguinte que utilizava uma nova função Y. Este fluxo é indicado na Figura 28.

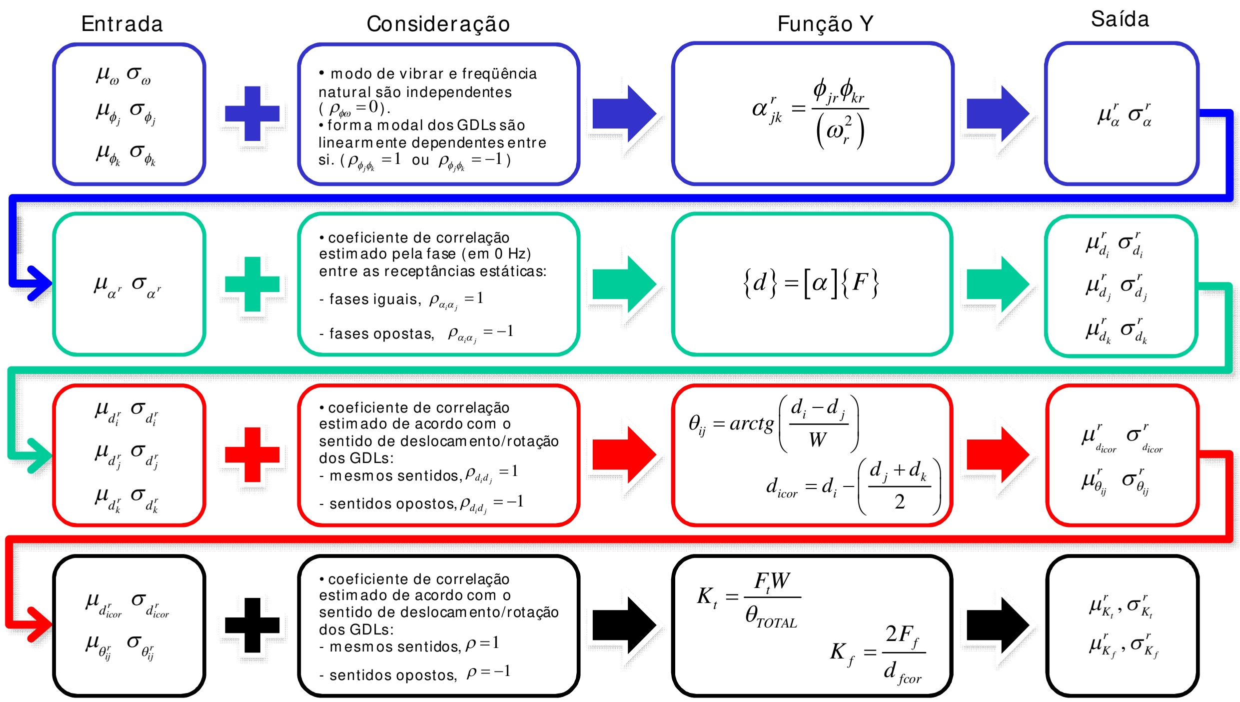

Figura 28 – Etapas do cálculo de incertezas pela propagação linear de covariâncias

Dessa forma, como indicado na Figura 28, as seguintes etapas foram seguidas:

- Desvios das deflexões:
  - Função *Y:* equação (4.10) – torção.
    equação (4.14) – flexão.
  - Variáveis de entrada (*X*): receptâncias estáticas entre os pontos (Tabela 10 e Tabela 11).
  - Saída (*Y*): Tabela 12.

- Desvios das constantes de rigidez:
  - Função *Y:* equação (4.3) – torção.
    equação (4.6) – flexão.
  - Variáveis de entrada (*X*): deflexões dos pontos (Tabela 12).
  - Saída (*Y*): Tabela 13

Tabela 12 – Desvios padrão das deflexões: (a) torção; (b) flexão

σ	Modo 1	Modo 5	Modo 10
Cenário A			
d_A	0,67%	0,67%	0,67%
d_B	0,67%	0,67%	0,67%
d_C	0,67%	0,67%	0,67%
d_D	0,67%	0,67%	0,67%
Cenário B			
d_A	1,67%	1,67%	1,67%
d_B	1,67%	1,67%	1,67%
d_C	1,67%	1,67%	1,67%
d_D	1,67%	1,67%	1,67%
Cenário C			
d_A	2,03%	2,03%	2,03%
d_B	2,03%	2,03%	2,03%
d_C	2,03%	2,03%	2,03%
d_D	2,03%	2,03%	2,03%

(a)

σ	Modo 2	Modo 6	Modo 14
Cenário A			
d_A	0,64%	0,54%	0,62%
d_B	0,64%	0,54%	0,62%
d_C	0,64%	0,54%	0,62%
d_D	0,64%	0,54%	0,62%
d_E	0,64%	0,54%	0,62%
d_F	0,64%	0,54%	0,62%
Cenário B			
d_A	2,30%	0,16%	1,95%
d_B	2,30%	0,16%	1,95%
d_C	2,30%	0,16%	1,95%
d_D	2,30%	0,16%	1,95%
d_E	0,82%	2,51%	1,09%
d_F	0,82%	2,51%	1,09%
Cenário C			
d_A	2,52%	0,67%	2,23%
d_B	2,52%	0,67%	2,23%
d_C	2,52%	0,67%	2,23%
d_D	2,52%	0,67%	2,23%
d_E	1,33%	2,60%	1,54%
d_F	1,33%	2,60%	1,54%

(b)

No cálculo dos desvios da constante de rigidez torcional (Tabela 13), a função arco tangente foi substituída pela sua representação em série de Taylor para simplificação da derivada parcial $\partial f / \partial X$ utilizada na equação (5.13). Esta representação é dada por:

$$arctg\left(z\right) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-1\right)^n z^{2n+1}}{2n+1}; \quad \left|z\right| \leq 1 \quad z \neq i, -i \qquad (5.21)$$

Dado que os deslocamentos obtidos pela simulação foram relativamente baixos, devido às forças unitárias aplicadas, a soma dos termos para $n \geq 1$ da equação (5.21) pode ser desprezada por não contribuir significativamente para a aproximação. Assim, fica-se somente com:

$$arctg\left(z\right) \approx z \qquad (5.22)$$

E, como conseqüência, a distribuição dos desvios relativos da função $arctg\left(z\right)$ permanece como sendo a mesma da variável z.

Tabela 13 – Desvios padrão das constantes de rigidez à torção e à flexão

Torção			
σ_{Kt}	**Modo 1**	**Modo 5**	**Modo 10**
Cenário A	0,67%	0,67%	0,67%
Cenário B	1,67%	1,67%	1,67%
Cenário C	2,03%	2,03%	2,03%
Flexão			
σ_{Kf}	**Modo 2**	**Modo 6**	**Modo 14**
Cenário A	0,63%	0,54%	0,62%
Cenário B	1,84%	2,40%	1,59%
Cenário C	2,14%	2,51%	1,93%

Por fim, a Tabela 14 e a Tabela 15 trazem os desvios das constantes de rigidez à torção e à flexão, respectivamente, estimados pelo método de propagação linear de covariâncias.

Tabela 14 – Desvios da propagação linear de covariâncias realizada para estimação do coeficiente de rigidez à torção

Cenário	*Modo*	*Desvio padrão das variáveis de entrada*		*Desvio padrão da variável de saída*	*Incerteza da variável de saída no intervalo de confiança de 99,7%*
		σ_{ω} (%)	*σ_{ϕ} (%)*	*σ_{Kt} (%)*	*$\pm 3\sigma_{Kt}$ (%)*
	1	0,333	0		
A	5	0,333	0	0,647	± 1,941
	10	0,333	0		
	1	0	1,667		
B	5	0	1,667	1,617	± 4,851
	10	0	1,667		
	1	0,333	1,667		
C	5	0,333	1,667	1,973	± 5,919
	10	0,333	1,667		

Tabela 15 – Desvios da propagação linear de covariâncias realizada para estimação do coeficiente de rigidez à flexão

Cenário	*Modo*	*Desvio padrão das variáveis de entrada*		*Desvio padrão da variável de saída*	*Incerteza da variável de saída no intervalo de confiança de 99,7%*
		$\sigma\omega$ (%)	$\sigma\phi$ (%)	σ_{Kt} (%)	$\pm 3\sigma_{Kf}$ (%)
A	2	0,333	0	0,624	± 1,872
	6	0,333	0		
	14	0,333	0		
B	2	0	1,667	1,804	± 5,412
	6	0	1,667		
	14	0	1,667		
C	2	0,333	1,667	2,111	± 6,332
	6	0,333	1,667		
	14	0,333	1,667		

A comparação de resultados entre os dois métodos de propagação de incertezas é tratada em detalhes no Capítulo 7.

Capítulo 6

Análise Experimental

No capítulo 4 foi apresentado o método de determinação da rigidez estática através de dados dinâmicos. A aplicação do método em um modelo de elementos finitos também foi discutida naquele capítulo. Simulações de ensaios estáticos (torção e flexão) e ensaios dinâmicos (análise modal) foram realizadas para demonstração do método REEDD. Já no capítulo anterior, análises de propagação de incertezas foram apresentadas com o propósito de verificação da sensibilidade do método quanto aos erros presentes em ensaios dinâmicos.

A utilização do método REEDD é de fato vantajosa no ambiente experimental. A estimação das constantes de rigidez que ele fornece tornaria desnecessária a realização de ensaios experimentas de carregamentos estáticos. Neste capítulo serão apresentados os ensaios de carregamento estático de torção e flexão realizados em estrutura similar ao modelo do capítulo 4 e o ensaio de análise modal experimental realizado nesta mesma estrutura. Finalmente o método REEDD é aplicado e os coeficientes de rigidez estática estimados são comparados com os medidos.

6.1 – Ensaios experimentais de carregamento estático

Em geral, ensaios experimentais de carregamento estático são realizados na indústria automobilística com o propósito de medição da deformação, elástica ou plástica, de uma estrutura quando submetida a algum tipo de carregamento. Naqueles ensaios onde apenas deformação elástica é observada, busca-se determinar o coeficiente de rigidez elástica. Este coeficiente consiste na razão entre a força aplicada e o deslocamento sofrido e é denominado estático já que força e deformação são invariantes com o tempo. No caso de medição de deformações plásticas, procura-se obter a deformação residual de uma estrutura após ser submetida a um dado carregamento. A interação entre porta e carroceria é um exemplo de aplicação deste tipo de medição: deformações plásticas poderiam impedir o correto fechamento da porta após esta ou a carroceria ser solicitada.

Durante a montagem de um ensaio estático, dispositivos próprios são utilizados para restringir os graus de liberdade desejados, fixar a estrutura ensaiada e ainda aplicar o carregamento prescrito. Assim, cantoneiras, juntas esféricas, suportes e cabos são itens essenciais para a montagem e realização destes tipos de ensaio. Além disto, uma bancada de testes ou uma plataforma de aço fixada ao chão é necessária para a ancoragem desta montagem.

Os carregamentos estáticos são aplicados através de atuadores hidráulicos ou pneumáticos, esticadores e compressores mecânicos ou mesmo através de lastro. A medição destes esforços normalmente é feita por transdutores de força baseados em extensômetros elétricos (*strain-gages*). Já para a medição das deformações, são utilizados relógios comparadores ou transdutores de deslocamento resistivos ou indutivos (KINDS e CHRISTOPH, 1986). Finalmente, um sistema de aquisição de sinais adquire e armazena os sinais das grandezas envolvidas.

6.1.1 – Torção estática

O ensaio de torção estática tem por objetivo a determinação da constante de rigidez torcional, expressa em Nm/rad. Para que se obtenha esta constante, deve-se submeter a estrutura à um par conjugado de forças de modo a torcê-la em torno do seu eixo longitudinal. As deflexões da estrutura, causadas pela aplicação do momento, são então medidas para o cálculo dos ângulos de torção. Finalmente, a razão momento-ângulo pode ser calculada e a constante de rigidez determinada.

A Figura 29 ilustra o esquema de montagem de um ensaio de torção estática em carroceria de veículo. Nesta montagem, a carroceria é apoiada na região do eixo traseiro nos pontos de fixação das molas. Na dianteira, um dispositivo é utilizado para aplicação do momento de torção na carroceria, também através dos pontos de apoio das molas. Quando a carroceria é submetida ao par conjugado, as deflexões verticais são medidas ao longo de ambas as laterais (soleiras e longarinas). Os transdutores que medem estas deflexões são agrupados aos pares, formando associações entre os lados esquerdo e direito. As deflexões nos pontos de apoio do eixo traseiro e aplicação do conjugado no eixo dianteiro são também medidas. Com a distância entre os pares (associações) e as deflexões destes consegue-se calcular o ângulo de torção de cada par (associação) para o momento aplicado. Tendo-se o ângulo de torção em função do momento aplicado, estima-se a constante de rigidez torcional. Este ensaio tem como principal propósito a determinação da constante de torção entre o eixo dianteiro e traseiro.

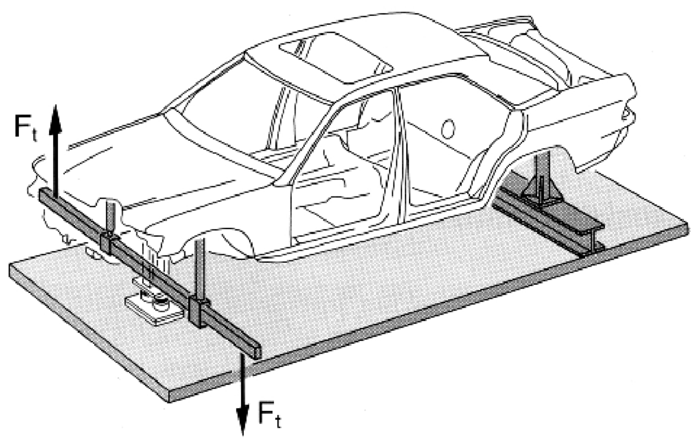

Figura 29 – Esquema de ensaio de torção de uma carroceria de veículo

A estrutura do tipo H duplo modelada no Capítulo 4 foi construída a partir de barras de aço de secção quadrada com as mesmas dimensões descritas na Figura 6. Este mesmo pórtico será utilizado aqui como representação simplificada de uma estrutura veicular. Com relação ao modelo, a diferença existente está na união das quatro barras que formam o pórtico: suas juntas não são ideais (contínuas), mas soldadas. Esta construção diminui consideravelmente as chances de se obter resultados próximos aos calculados pelo modelo de elementos finitos. Porém, como neste estudo não há a pretensão de correlação de modelo e sim de avaliação do método REEDD nos ambientes de simulação numérica e de ensaios experimentais, entende-se que esta diferença de construção e modelagem não invalida os resultados e conclusões obtidas.

Para o ensaio de torção estática do pórtico foi utilizada montagem baseada no esquema da Figura 29. As duas extremidades traseiras foram apoiadas por pinos longitudinais fixados às cantoneiras. Estes pinos permitiam as rotações das extremidades ao mesmo tempo em que restringiam suas translações. Esta montagem equivale aos apoios utilizados na região do eixo traseiro da carroceria. As duas extremidades dianteiras foram acopladas ao dispositivo de torção também através de pinos. O dispositivo de torção consistia de uma alavanca cujo eixo de rotação se alinhava ao eixo longitudinal da estrutura. A barra de aço que constituía a alavanca propriamente dita possuía rigidez superior à da estrutura ensaiada. A Figura 30 traz uma foto da montagem descrita nas linhas acima e Figura 31 mostra o detalhamento da fixação empregada.

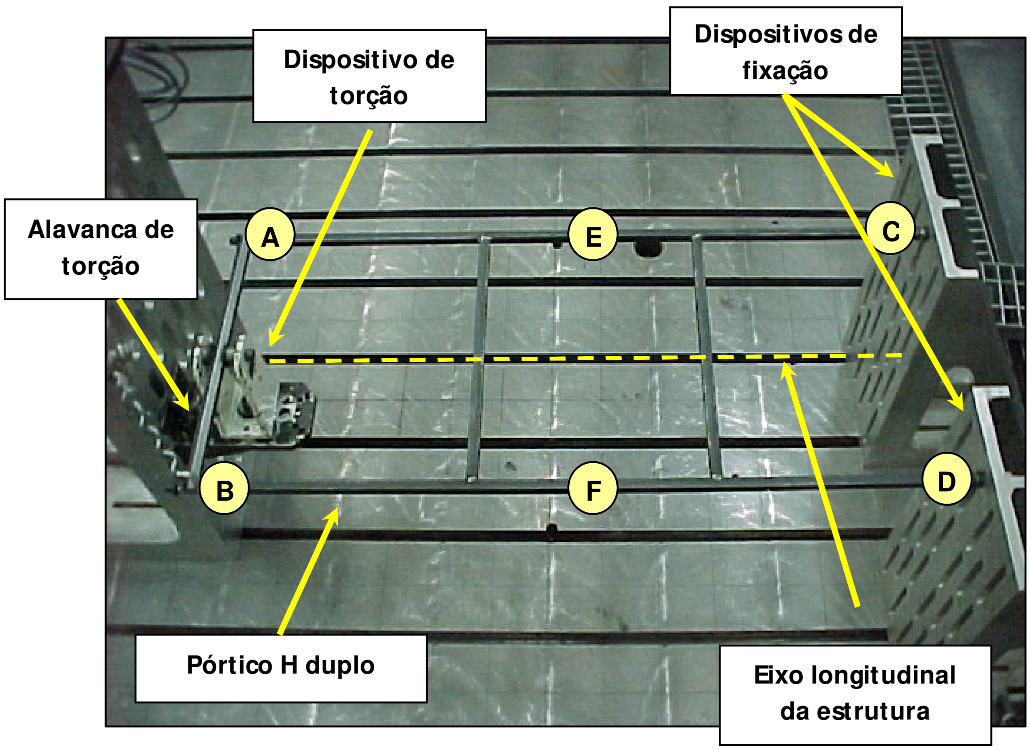

Figura 30 – Montagem do ensaio de torção em estrutura do tipo H duplo

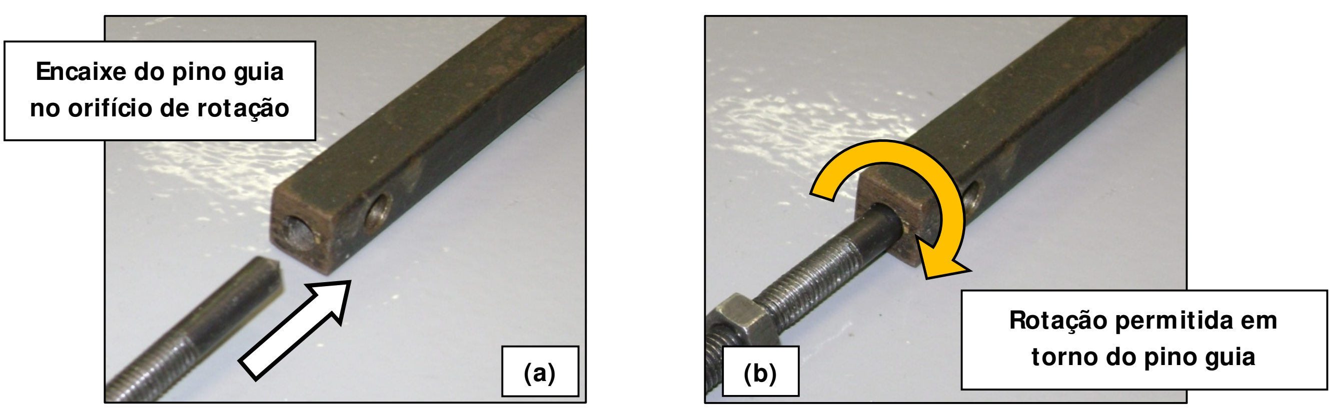

Figura 31 – Detalhe da montagem da fixação empregada nas extremidades A, B, C e D (a) permitindo a rotação e restringindo as translações verticais e laterais (b)

O momento foi aplicado por meio de força vertical atuante em uma das extremidades da alavanca de torção. Uma corrente de elos de aço ligada a esta extremidade e a uma catraca presa ao teto permitia o controle da intensidade do esforço. Este, por sua vez, foi monitorado através de uma célula de carga instalada entre a corrente e a catraca. Seis transdutores de deslocamento distribuídos aos pares mediam as deflexões da estrutura quando esta se encontrava sob carregamento. As quatro extremidades e a região central foram os pontos escolhidos para monitorar estas deflexões que estão indicadas pelas letras A a D, na Figura 30. Já a Figura 32 ilustra a montagem dos transdutores de deslocamento e a aplicação de esforços em um dos lados da barra de torção.

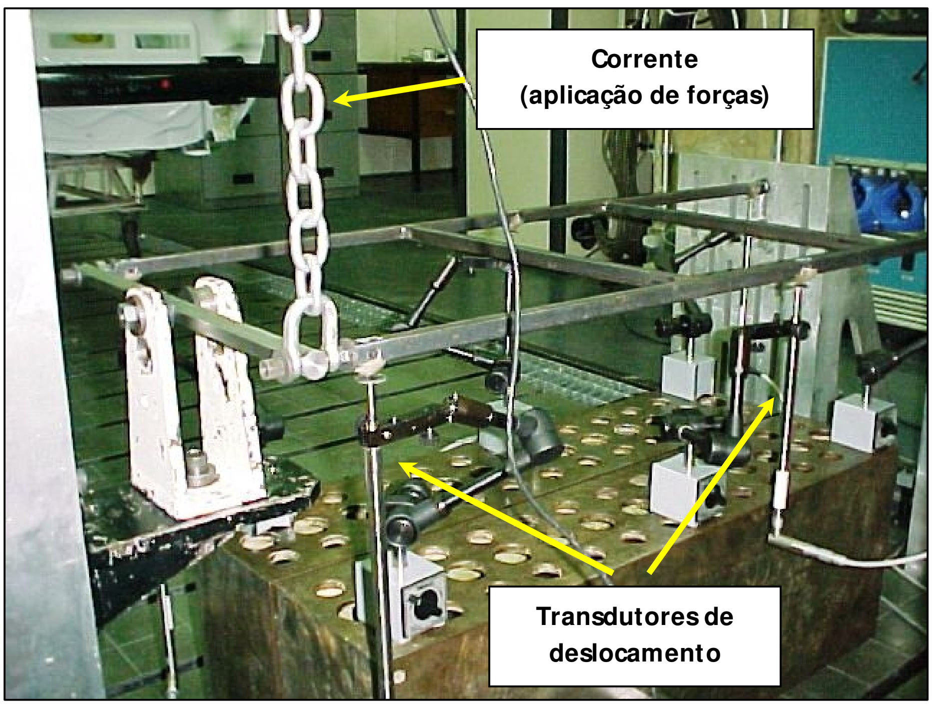

Figura 32 – Medição de deflexões e aplicação de esforços

Os seguintes equipamentos foram utilizados na medição deste ensaio:

- Transdutores de deslocamento HBM WA T 50 mm e 100 mm
- Célula de carga HBM U2B 2kN
- Sistema de aquisição HBM Spider 8 (8 canais de 16 bits)

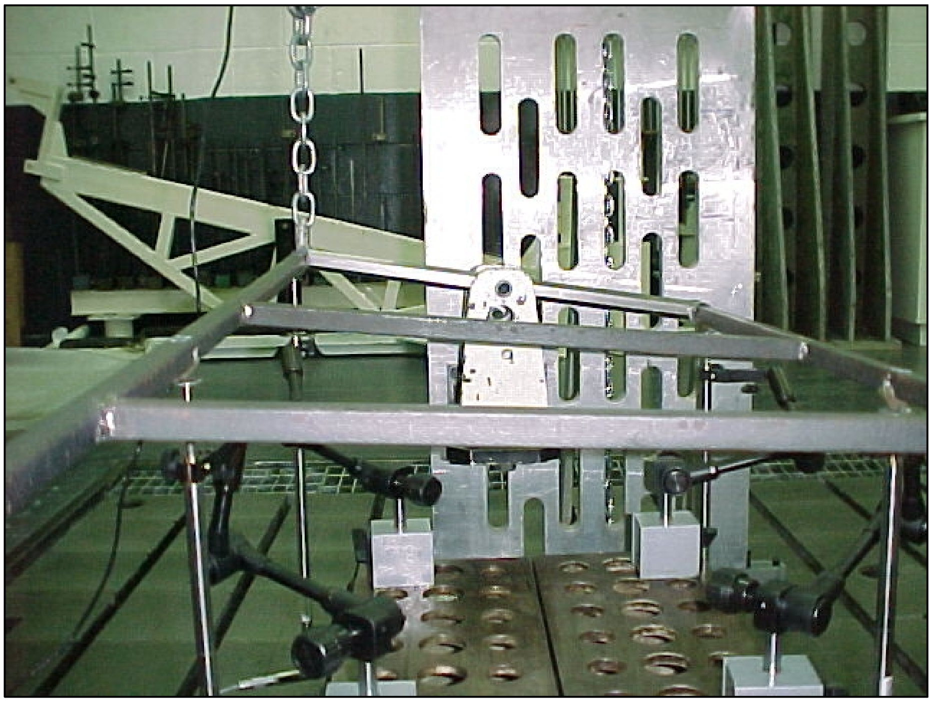

Figura 33 – Estrutura sob carregamento (torção)

Sob carregamento (Figura 33), registrou-se a força aplicada na extremidade da alavanca de torção e as deflexões nos seis pontos do pórtico. A amplitude da força teve início em 50 N e chegou a 350 N com etapas de 50 N. As curvas de deslocamentos em função da força aplicada medidas durante a aplicação do carregamento eram monitoradas para que as deformações da estrutura se mantivessem no regime elástico. Além disto, como a força atuante era sempre orientada na vertical, grandes deslocamentos na região do dispositivo de torção fariam com que componentes tangenciais à alavanca atuassem. Estas componentes, embora medidas pela célula de carga, não contribuiriam para o momento de torção da estrutura. Assim, o limite para aplicação das forças foi escolhido tal que o ângulo de torção do pórtico não ultrapassasse cinco graus.

Seis solicitações foram realizadas o todo, sendo três no sentido horário e três no sentido anti-horário. Os valores de força e deslocamento medidos nas solicitações são mostrados na Tabela 16. Nesta tabela, valores negativos indicam deslocamento vertical para cima. Ainda nesta tabela, são mostrados os coeficientes de correlação, equação (5.20), entre as forças aplicadas e as deflexões medidas. Estes coeficientes são úteis aqui na verificação do regime de deformação elástico: valores próximos de -1 ou 1 indicam que força e deslocamento seguiram comportamento linear ou elástico (caso dos deslocamentos nos pontos A, B, E e F). Valores abaixo disto indicam que tal comportamento não foi observado (caso dos deslocamentos dos pontos C e D). Particularmente para os pontos C e D, tal verificação possui duas possíveis explicações: a primeira refere-se aos apoios não ideais que estes pontos estavam submetidos e a segunda trata-se da sensibilidade dos sensores utilizados que, associada à resolução do conversor analógico-digital (A/D) do sistema de aquisição, podem não ter oferecido precisão adequada o suficiente para medir os baixos valores de deslocamentos observados nestes pontos.

Tabela 16 – Valores medidos de força e deslocamento para cada solicitação

Sentido Horário							**Sentido Anti-horário**						
Força (N)	**d_D (mm)**	**d_C (mm)**	**d_F (mm)**	**d_E (mm)**	**d_B (mm)**	**d_A (mm)**	**Força (N)**	**d_D (mm)**	**d_C (mm)**	**d_F (mm)**	**d_E (mm)**	**d_B (mm)**	**d_A (mm)**
Solicitação 1							**Solicitação 2**						
49,8	-0,11	0,04	-1,52	1,29	-2,93	2,67	**50,1**	0,00	-0,18	1,35	-1,56	2,78	-2,96
100,4	-0,23	0,09	-3,16	2,72	-6,16	5,61	**100,0**	0,03	-0,23	2,75	-3,15	5,63	-6,10
150,0	-0,24	0,13	-4,53	4,06	-9,00	8,38	**150,4**	0,06	-0,25	4,03	-4,53	8,22	-8,85
200,3	-0,25	0,15	-5,98	5,46	-11,98	11,27	**199,9**	0,06	-0,28	5,45	-6,07	11,13	-11,94
249,9	-0,26	0,17	-7,28	6,72	-14,69	13,90	**249,5**	0,05	-0,29	6,70	-7,47	13,67	-14,76
300,2	-0,29	0,19	-8,53	7,95	-17,40	16,54	**300,0**	0,04	-0,30	7,98	-8,88	16,31	-17,64
349,9	-0,31	0,22	-9,68	9,06	-19,91	18,93	**350,5**	0,04	-0,32	9,41	-10,37	19,17	-20,79
Coef.de correlação	-0,8862	0,9862	-0,9987	0,9993	-0,9994	0,9996	**Coef.de correlação**	0,4386	-0,9627	0,9999	-0,9999	0,9999	-0,9999
Solicitação 3							**Solicitação 4**						
50,0	-0,19	0,05	-1,64	1,39	-3,10	2,84	**50,1**	0,04	-0,20	1,46	-1,68	2,98	-3,24
100,0	-0,30	0,10	-3,20	2,74	-6,15	5,63	**100,0**	0,10	-0,23	2,84	-3,31	5,74	-6,50
150,0	-0,31	0,14	-4,61	4,11	-9,01	8,45	**150,0**	0,11	-0,26	4,19	-4,79	8,50	-9,39
200,0	-0,32	0,17	-6,12	5,55	-12,09	11,43	**200,0**	0,10	-0,28	5,57	-6,37	11,32	-12,56
250,3	-0,33	0,18	-7,42	6,82	-14,82	14,08	**250,3**	0,09	-0,30	6,93	-7,85	14,09	-15,50
300,1	-0,36	0,21	-8,65	8,04	-17,47	16,66	**300,1**	0,08	-0,31	8,15	-9,11	16,60	-18,08
349,7	-0,38	0,23	-9,78	9,14	-19,96	19,01	**349,7**	0,08	-0,31	9,46	-10,44	19,28	-20,83
Coef.de correlação	-0,8855	0,9750	-0,9986	0,9992	-0,9994	0,9995	**Coef.de correlação**	0,2560	-0,9656	0,9998	-0,9992	0,9999	-0,9994
Soicitação 5							**Solicitação 6**						
50,1	-0,14	0,05	-1,60	1,38	-3,07	2,77	**50,0**	0,09	-0,19	1,54	-1,78	3,07	-3,43
100,0	-0,25	0,09	-3,14	2,69	-6,11	5,50	**100,0**	0,16	-0,23	2,93	-3,44	5,85	-6,75
150,0	-0,26	0,14	-4,55	4,06	-9,01	8,32	**150,0**	0,16	-0,25	4,20	-4,85	8,47	-9,51
200,1	-0,27	0,16	-5,94	5,38	-11,88	11,07	**200,1**	0,15	-0,27	5,59	-6,44	11,31	-12,69
249,9	-0,27	0,18	-7,27	6,65	-14,62	13,71	**249,9**	0,14	-0,29	6,91	-7,87	14,02	-15,53
300,0	-0,31	0,20	-8,51	7,88	-17,30	16,32	**300,0**	0,13	-0,30	8,25	-9,24	16,74	-18,35
350,1	-0,33	0,22	-9,69	9,06	-19,90	18,84	**350,1**	0,13	-0,30	9,44	-10,45	19,19	-20,85
Coef.de correlação	-0,8952	0,9785	-0,9991	0,9997	-0,9996	0,9998	**Coef.de correlação**	0,1251	-0,9582	0,9998	-0,9991	0,9999	-0,9994

Calculando a média das deflexões medidas em cada solicitação, os ângulos de torção em cada associação e finalmente corrigindo a força medida por este ângulo de torção (tomando-se, portanto, somente a componente que efetivamente gera o momento de torção na montagem) obtiveram-se os números mostrados na Tabela 17 e o gráfico que relaciona momento e ângulo de torção entre as associações A-B e C-D, (Figura 34). A abscissa deste gráfico representa os ângulos médios de rotação relativa e a ordenada, os momentos aplicados. Colocado desta forma, o gráfico fica semelhante ao utilizado nas análises de rigidez torcional de carrocerias de veículos e seu coeficiente angular, obtido por regressão linear, é a denominada constante de rigidez torcional, expressa em Nm/rad. As barras de erro mostradas no gráfico referem-se ao desvio padrão da rotação relativa entre as seis solicitações e, portanto, estão dispostas na horizontal. A constante obtida deste ensaio foi de **764,4 Nm/rad.**

Tabela 17 – Deflexões das associações e ângulos de rotação

Momento (Nm)	Média das diferenças entre as associações (mm)			Ângulo médio de rotação das associações (rad)			Rotação relativa θ_{AB}-θ_{CD} (rad)		Momento corrigido (Nm)
	dC-dD	dE-dF	dA-dB	θ_{CD}	θ_{EF}	θ_{AB}	Média	Desvio Padrão	
Sentido horário									
10,40	0,19	2,94	5,79	0,0005	0,0071	0,0139	0,0135	3,221E-04	10,40
20,84	0,35	5,88	11,72	0,0008	0,0141	0,0282	0,0273	2,186E-04	20,83
31,20	0,41	8,64	17,39	0,0010	0,0208	0,0418	0,0408	1,093E-04	31,17
41,63	0,44	11,48	23,24	0,0011	0,0276	0,0558	0,0547	6,350E-04	41,56
52,01	0,46	14,05	28,61	0,0011	0,0338	0,0687	0,0675	5,901E-04	51,88
62,42	0,52	16,53	33,90	0,0012	0,0397	0,0813	0,0801	5,649E-04	62,22
72,78	0,56	18,80	38,85	0,0014	0,0452	0,0931	0,0918	2,063E-04	72,46
Sentido anti-horário									
-10,40	-0,23	-3,12	-6,15	-0,0006	-0,0075	-0,0148	-0,0142	8,010E-04	-10,40
-20,84	-0,33	-6,14	-12,19	-0,0008	-0,0148	-0,0293	-0,0285	9,017E-04	-20,82
-31,20	-0,36	-8,86	-17,64	-0,0009	-0,0213	-0,0424	-0,0415	1,114E-03	-31,14
-41,63	-0,38	-11,84	-23,65	-0,0009	-0,0284	-0,0568	-0,0559	1,124E-03	-41,50
-52,01	-0,38	-14,58	-29,19	-0,0009	-0,0350	-0,0701	-0,0691	1,491E-03	-51,76
-62,42	-0,39	-17,20	-34,57	-0,0009	-0,0413	-0,0829	-0,0820	1,268E-03	-62,00
-72,78	-0,39	-19,86	-40,04	-0,0009	-0,0477	-0,0959	-0,0950	1,592E-04	-72,13

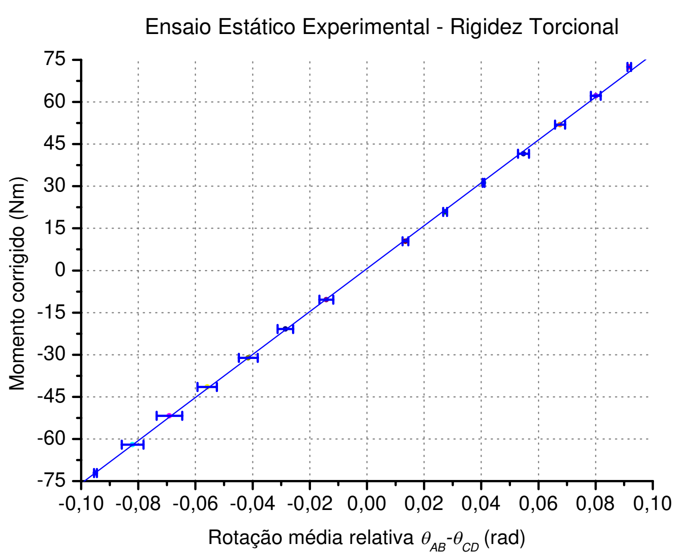

Figura 34 – Rigidez Torcional entre associações A-B e C-D

6.1.2 – Flexão estática

As forças peso dos ocupantes ou de uma carga útil qualquer atuam na estrutura do veículo solicitando-a na direção vertical. Estas solicitações provocam a flexão das estruturas longitudinais (longarinas e soleiras) e do assoalho do veículo. Dependendo da deflexão e da rigidez da estrutura podem ocorrer interferências entre as partes do veículo e, por conseqüência, obstrução das portas e tampas, por exemplo. Com o objetivo de monitorar a rigidez à flexão e prever problemas como estes, avaliações de carregamento estático no habitáculo do veículo e verificação das deformações ocorridas são realizadas durante o desenvolvimento de uma estrutura veicular.

A rigidez à flexão é determinada pela razão entre a força aplicada e o deslocamento relativo máximo observado. Para isto, apóia-se a carroceria do veículo na região dos eixos dianteiro e traseiro e posicionam-se transdutores de deslocamento ao longo das soleiras e longarinas. Esforços são então aplicados através de alavancas que se encarregam de distribuir a solicitação na região dos ocupantes, dianteiros e traseiros (Figura 35). O controle destes esforços pode ser realizado tanto por meio de lastro ou de atuadores acoplados a uma célula de carga. Sob carregamento, as deflexões verticais da estrutura são medidas e, após tratamento dos dados, o coeficiente de rigidez à flexão é determinado.

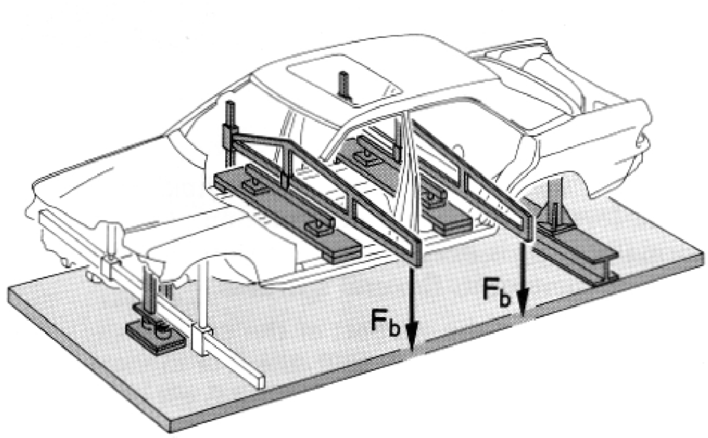

Figura 35 – Esquema de ensaio de flexão de uma carroceria de veículo

Assim como na torção, a estrutura do tipo H duplo foi submetida ao ensaio de flexão estática, cuja montagem é baseada no esquema da Figura 35. Os mesmos pivôs utilizados no ensaio de torção para permitir a rotação longitudinal foram utilizados nesta montagem para restringir a translação vertical e permitir a rotação lateral. Além disto, um par de rolamentos foi acoplado às extremidades traseiras para que a translação longitudinal ocorresse quando a estrutura fosse solicitada. A Figura 36 apresenta a montagem realizada enquanto a Figura 37 ilustra os detalhes dos dispositivos empregados nas condições de contorno do ensaio.

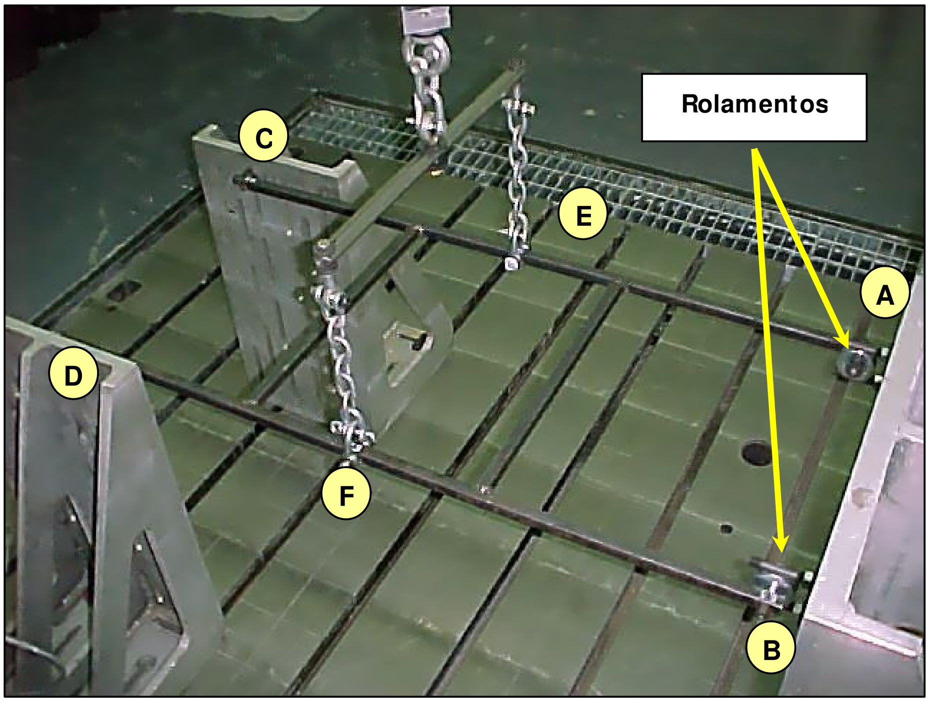

Figura 36 – Montagem do ensaio de flexão em estrutura do tipo H duplo

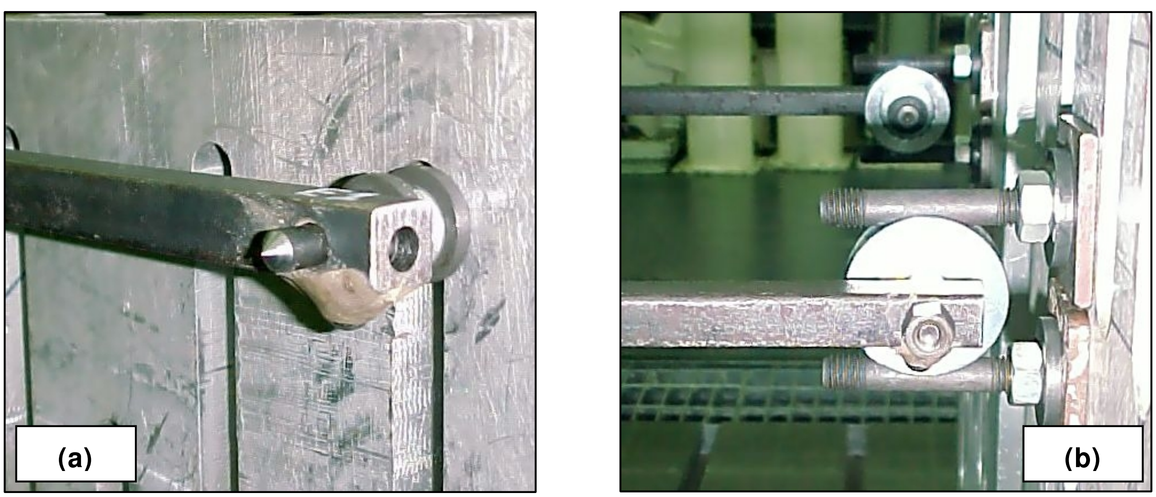

Figura 37 – Detalhes dos apoios das extremidades: (a) pino de rotação nos pontos A e B; (b) rolamentos nos pontos C e D

A mesma barra utilizada como dispositivo de torção no ensaio anterior foi empregada na aplicação do carregamento no ensaio de flexão Suas extremidades foram presas ao centro de cada um dos lados da estrutura (pontos E e F) através de correntes. Os esforços foram aplicados verticalmente com orientação para cima e medidos através da célula de carga acoplada ao centro da barra de flexão. As correntes presas nas laterais da barra encarregavam-se de distribuir o carregamento nos pontos E e F. As deflexões dos seis pontos indicados na Figura 36 foram medidas com seis transdutores de deslocamento. Mesmo nos pontos de apoio (A, B, C e D), optou-se por se instalar o equipamento de medição para eventuais correções das deformações medidas no centro da estrutura.

A solicitação da estrutura (Figura 38) ocorreu em etapas de 100N entre a faixa de 0 a 1000N. Vale lembrar aqui que os valores medidos pela célula correspondem à soma dos esforços aplicados nos pontos E e F e que são assumidos como sendo iguais devido à geometria da barra de flexão. Assim como na torção, deflexões e força foram monitoradas durante o carregamento para que a estrutura mantivesse o comportamento elástico.

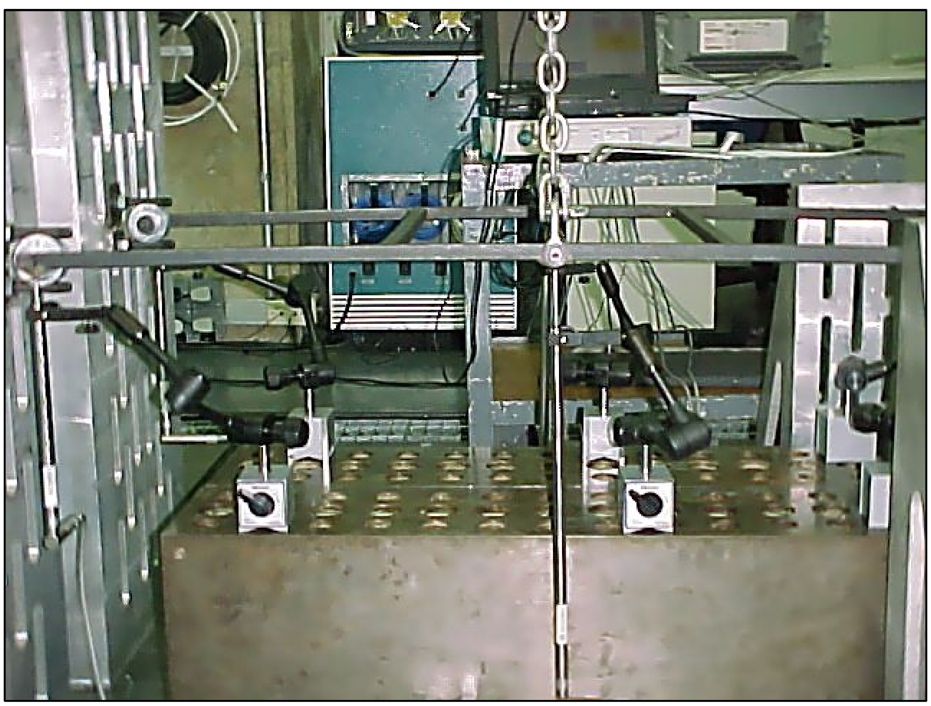

Figura 38 – Estrutura sob carregamento (flexão)

Três solicitações foram realizadas, sempre na direção vertical. Somente por maior praticidade, deslocamentos e força são considerados positivos quando orientados para cima. Resultados são mostrados na Tabela 18. Observa-se desta tabela os pequenos deslocamentos medidos nos pontos de apoio (A, B, C e D) conseqüentes da vinculação não ideal dos dispositivos empregados (a presença de folgas é um exemplo de vinculação não ideal). Por este motivo, os deslocamentos medidos no centro da estrutura (d_E e d_F) devem ser corrigidos pela reta que intercepta os deslocamentos sofridos pelos pontos A e C e B e D. Consegue-se, assim, a deflexão relativa nos pontos de aplicação das forças. A Figura 39 ilustra esta correção.

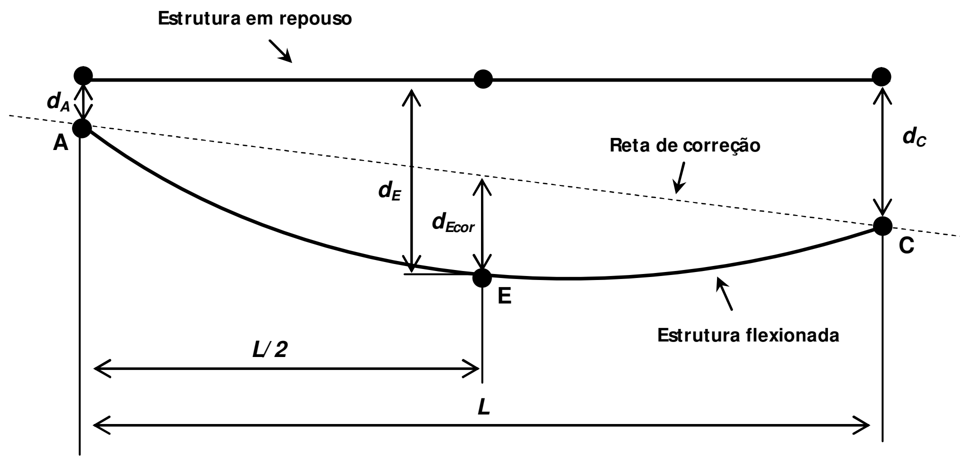

Figura 39 – Correção da deflexão para engastes não ideais

Assim, a deflexão corrigida do ponto E, d_{Ecor}, é expressa por:

$$d_{Ecor} = d_E - \left(\frac{d_A + d_C}{2} \right) \tag{6.1}$$

Aplicando-se o mesmo raciocínio para a deflexão do ponto F:

$$d_{Fcor} = d_F - \left(\frac{d_B + d_D}{2} \right) \tag{6.2}$$

E a equação (4.4) torna-se:

$$K_{fcor} = \frac{2F_f}{d_{fcor}} \tag{6.3}$$

com:

$$d_{fcor} = \frac{(d_{Ecor} + d_{Fcor})}{2} \tag{6.4}$$

Tabela 18 – Deflexões do ensaio de flexão

Força F_f (N)	Deflexões (mm)								
	d_D	d_C	d_F	d_E	d_B	d_A	d_{Fcor}	d_{Ecor}	Média (d_{Fcor},d_{Ecor})
Solicitação 1									
102,2	0,01	0,00	0,96	1,00	0,01	0,01	0,95	0,99	0,97
200,1	0,01	0,01	1,94	1,99	0,02	0,03	1,92	1,98	1,95
300,4	0,01	0,02	2,93	2,98	0,02	0,04	2,91	2,95	2,93
400,2	0,01	0,03	3,91	3,99	0,04	0,05	3,89	3,95	3,92
499,5	0,00	0,03	4,93	4,98	0,08	0,08	4,89	4,92	4,90
600,1	0,01	0,05	5,96	6,00	0,11	0,12	5,90	5,92	5,91
700,5	0,00	0,05	6,94	6,99	0,11	0,12	6,88	6,91	6,89
800,7	0,00	0,05	7,93	8,00	0,11	0,12	7,87	7,91	7,89
900,2	0,00	0,06	8,94	9,00	0,13	0,14	8,88	8,90	8,89
1000,0	0,01	0,06	9,95	10,04	0,14	0,17	9,87	9,93	9,90
Coef.de correlação	-0,4975	0,9690	1,0000	1,0000	0,9671	0,9831	1,0000	1,0000	1,0000
Solicitação 2									
100,3	0,01	0,01	0,94	1,00	0,01	0,00	0,93	1,00	0,96
200,2	0,01	0,01	1,92	2,01	0,03	0,01	1,91	2,00	1,95
300,8	0,01	0,02	2,93	3,04	0,03	0,03	2,91	3,02	2,96
400,6	0,01	0,02	3,91	4,05	0,05	0,04	3,88	4,02	3,95
499,5	0,01	0,03	4,91	4,99	0,06	0,05	4,87	4,95	4,91
600,1	0,01	0,03	5,93	6,07	0,07	0,07	5,89	6,01	5,95
700,0	0,01	0,04	6,90	7,00	0,08	0,09	6,85	6,94	6,90
800,3	0,00	0,04	7,91	8,01	0,10	0,11	7,86	7,93	7,90
900,1	0,00	0,05	8,94	9,06	0,12	0,13	8,88	8,97	8,92
1000,1	0,00	0,06	9,95	10,07	0,13	0,15	9,89	9,96	9,92
Coef.de correlação	-0,9172	0,9917	1,0000	1,0000	0,9950	0,9948	1,0000	1,0000	1,0000
Solicitação 3									
100,0	0,01	0,00	0,94	0,99	0,01	0,01	0,93	0,98	0,95
200,1	0,01	0,00	1,94	1,97	0,03	0,02	1,92	1,95	1,94
300,0	0,01	0,01	2,92	3,03	0,04	0,04	2,90	3,01	2,95
400,0	0,01	0,02	3,95	3,97	0,04	0,05	3,92	3,94	3,93
500,2	0,01	0,02	4,92	5,00	0,04	0,07	4,90	4,96	4,93
600,5	0,01	0,03	5,92	6,04	0,07	0,09	5,88	5,98	5,93
700,8	0,00	0,03	6,94	6,99	0,08	0,11	6,90	6,92	6,91
800,2	0,00	0,04	7,94	7,99	0,10	0,12	7,88	7,91	7,90
900,1	0,00	0,05	8,95	9,04	0,12	0,14	8,89	8,94	8,91
1000,1	0,00	0,05	9,94	10,03	0,14	0,16	9,87	9,92	9,90
Coef.de correlação	-0,7832	0,9907	1,0000	1,0000	0,9777	0,9982	1,0000	1,0000	1,0000

Por fim, a média dos valores corrigidos é calculada. Aqui também foi aplicado o coeficiente de correlação entre força e deslocamento para avaliar a linearidade dos valores medidos. Verificou-se correlação unitária para os deslocamentos corrigidos indicando que as solicitações foram aplicadas no regime de deformação elástica da estrutura. A média e o desvio padrão dos deslocamentos corrigidos das três solicitações são mostrados na Tabela 19 e a Figura 40 traz o gráfico destes resultados. A constante angular da reta obtida por regressão linear fornece a relação entre força e deslocamento da associação E-F, ou seja sua rigidez à flexão. A constante obtida neste ensaio foi de **100,6 N/mm**.

Tabela 19 – Média e desvio padrão dos deslocamentos corrigidos

Força (N)	d_f (m)	
	Média	Desvio Padrão
100,8	0,96	9,135E-03
200,1	1,94	7,592E-03
300,4	2,96	1,406E-02
400,2	3,94	1,577E-02
499,8	4,92	1,104E-02
600,2	5,94	2,044E-02
700,4	6,90	7,538E-03
800,4	7,90	1,628E-03
900,1	8,92	1,852E-02
1000,1	9,91	1,529E-02
Coef.de correlação	1,0000	-

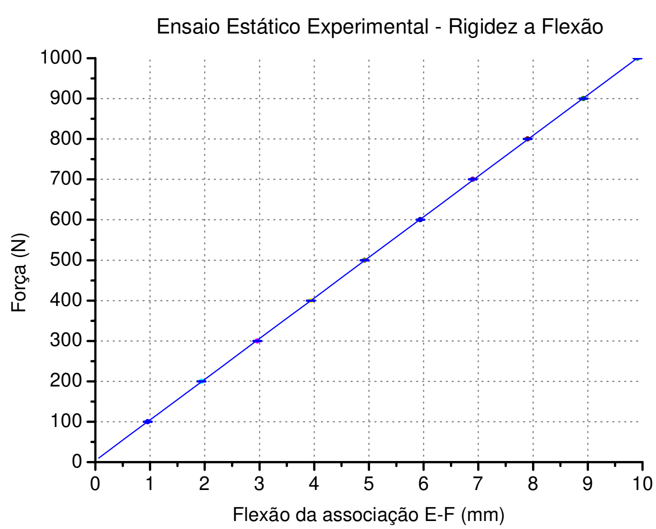

Figura 40 – Rigidez a flexão da associação E-F

6.2 – Análise modal experimental

A rigidez dinâmica tem sido utilizada como parâmetro estrutural dos projetos de carrocerias dos grandes fabricantes de automóveis. Esta rigidez é indiretamente avaliada através das freqüências naturais dos principais modos de torção e flexão destas estruturas. Para aqueles que acompanharam de perto projetos e ensaios de carrocerias nos últimos 20 anos, é fácil constatar o aumento dos valores das freqüências naturais dos principais modos desta estrutura. As razões para este aumento foram comentadas no Capítulo 1.

Nesta seção são apresentados detalhes de ensaios de análise modal em carrocerias de veículos bem como a descrição do ensaio realizado na estrutura em estudo (H duplo) e seus resultados.

6.2.1 – A análise modal no desenvolvimento de carrocerias

A dirigibilidade que um veículo de passageiros oferece é fortemente dependente das propriedades mecânicas de sua estrutura. As oscilações provocadas pelas irregularidades das pistas são transmitidas para os pneus, rodas, eixos, suspensão e coxins para, finalmente, chegarem à carroceria e desta para os bancos dos passageiros. O movimento de rotação do motor também constitui uma segunda fonte de oscilações que são transmitidas ao veículo através dos coxins. Assim, o veículo inteiro representa um sistema oscilatório no qual os componentes individuais devem ser harmonizados para oferecer dirigibilidade e conforto satisfatórios. Neste sistema, o projeto da estrutura veicular contribui significativamente para a prevenção destas oscilações e, conseqüentemente, melhoria da dirigibilidade (KINDS e CHRISTOPH, 1986).

Os parâmetros modais têm sido utilizados no desenvolvimento de projetos de carrocerias como critérios de avaliação da rigidez dinâmica destas estruturas. O conhecimento dos modos de vibrar e freqüências naturais permitem aos engenheiros harmonizar os parâmetros de suspensão, coxins, vibração e acústica do veículo tornando-o mais confortável, seguro e silencioso. Em geral, busca-se desenvolver carrocerias com elevadas freqüências naturais de maneira a se desacoplar os modos destas estruturas com os dos demais componentes, garantindo assim um veículo agradável de dirigir.

Carrocerias cada vez mais rígidas são buscadas nos novos projetos de veículos. No entanto, em paralelo, estruturas mais leves são desejadas para melhoria do desempenho e economia de combustível. As ferramentas e técnicas de simulação surgidas nos últimos anos têm possibilitado aos engenheiros melhorar o balanço rigidez/massa destes projetos. Este balanço é conseguido através da otimização estrutural que consiste na adição de reforços nas regiões onde sua eficiência é maximizada. Durante este processo de otimização, várias simulações baseadas em técnicas de MEF são executadas para o ajuste e correção do projeto. Após várias iterações, quando o projeto finalmente atinge os objetivos de massa e rigidez desejados, os protótipos são construídos.

Neste processo de desenvolvimento e ajuste, o ensaio de análise modal experimental tem por finalidade confirmar os resultados encontrados por modelagem via MEF, fornecer dados para correlação e ajuste deste modelo (se necessário) e avaliar algo que não pode ser verificado por simulação: o processo de construção. Discrepâncias de resultados entre o projeto e o protótipo ainda são capturadas somente por testes físicos. Irregularidades nos pontos de solda, encaixe dos componentes e outras deficiências de montagem são alguns exemplos de variabilidade no processo de construção da estrutura veicular.

A Figura 41 ilustra uma montagem típica de ensaio de análise modal experimental. Nesta montagem, a carroceria é suspensa por molas ou elásticos ficando em condição livre (1). Acelerômetros (2), fixados por cola, cera ou bases magnéticas, recolhem as respostas de aceleração nos diversos pontos espalhados pela carroceria. Excitadores eletromagnéticos (*shakers*) (3) introduzem a excitação adequada, gerada pelo sistema de controle e aquisição (7) e amplificada pelo amplificador de potência (6). A excitação, ou entrada, é medida por transdutores de força dinâmicos (4), montados entre os *shakers* e a estrutura. Condicionadores de sinais (5) alimentam os transdutores e condicionam os sinais de leitura para serem adquiridos pelo sistema de aquisição. Por fim, um computador (8) com a programação adequada armazena os dados do teste e auxilia o operador na determinação dos parâmetros modais a partir das FRFs medidas (EWINS, 1984).

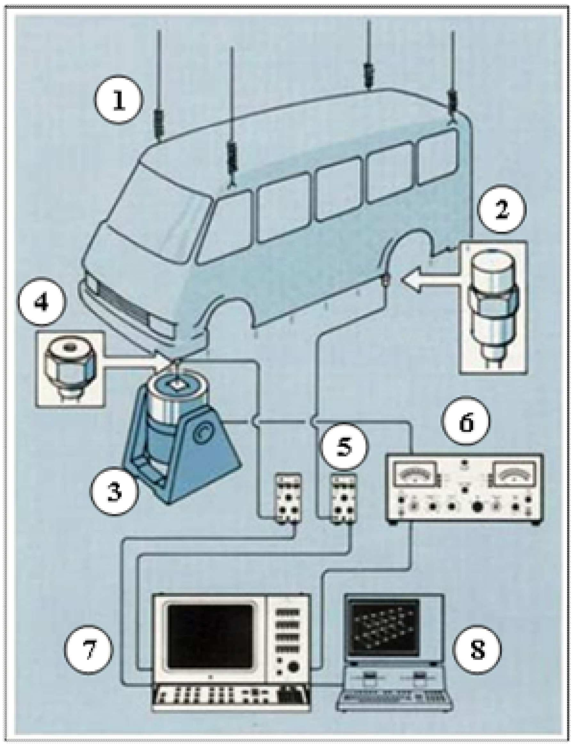

Figura 41 – Esquema de ensaio de análise modal em carroceria de veículo

6.2.2 – Análise modal experimental da estrutura em formato de H duplo

Os seguintes equipamentos e software foram utilizados na execução do ensaio:

- Acelerômetros PCB 352A24 (Range: ±50g, 8kHz)
- Martelo[3] de impacto com transdutor de força: PCB GK086C04 (Range: 1k lbf)
- Sistema de aquisição de sinais: LMS SCADAS III SC-305
- Software de pré e pós-processamento: LMS Test.Lab

Primeiramente, a estrutura em formato de H duplo teve sua geometria discretizada por 28 pontos ou graus de liberdade (GDL) distribuídos de maneira a favorecer a observação dos principais modos de torção e flexão (os resultados de simulação do Capítulo 4 ajudaram nesta distribuição). As coordenadas destes pontos foram então transferidas para o software LMS

[3] A utilização de martelo de impacto também constitui uma forma de excitação alternativa. Esta opção foi empregada no ensaio de análise modal experimental do presente trabalho.

Test.Lab para criação de sua geometria (Figura 42.b). Em seguida, a estrutura foi suportada por elásticos em duas de suas extremidades, como mostrado pela Figura 42(a).

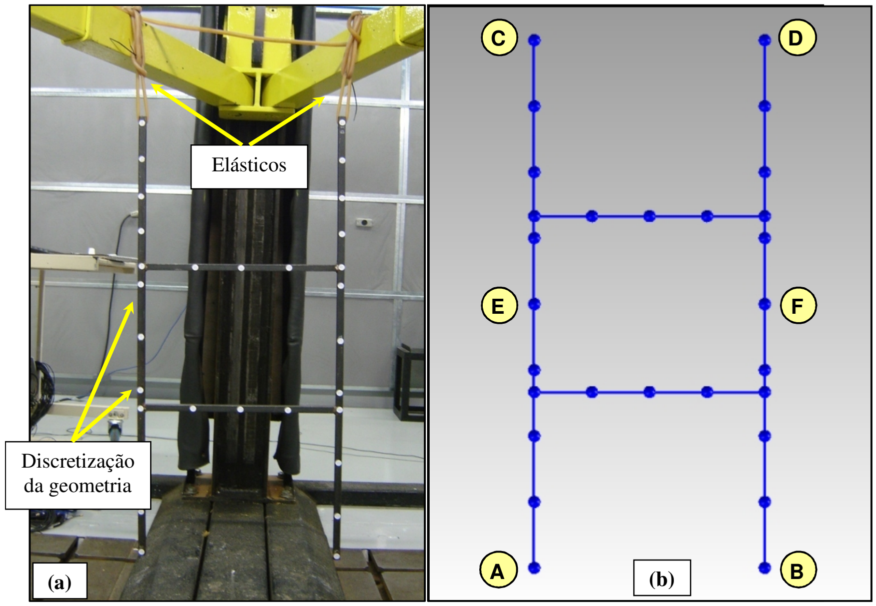

Figura 42 – Montagem do teste (a) e construção da geometria (b)

Foi utilizada a estratégia conhecida como SIMO (*Single Input, Multiple Output*), na qual se escolhe um determinado grau de liberdade (GDL) para introdução da excitação e adquirem-se as respostas através de acelerômetros. O conhecimento prévio dos modos de vibrar obtidos anteriormente através da simulação numérica auxiliou na escolha do ponto de excitação. O ponto A da estrutura foi escolhido para tal finalidade (Figura 43). Como há um número limitado de acelerômetros (neste caso, somente 5 acelerômetros foram utilizados) várias etapas são necessárias para aquisição de uma coluna inteira da matriz de FRFs. Entre cada etapa os acelerômetros são reposicionados. A resposta do ponto de excitação (*driving-point*) também deve ser medida para a posterior síntese das FRFs não medidas e obtenção da matriz completa (EWINS, 1984).

O seguinte setup foi configurado para aquisição dos canais:

- Freqüência máxima............................ 1024 Hz
- Resolução em freqüência................... 0,5 Hz
- Janela do canal de entrada.................. Force
- Janela do canal de resposta.................. Exponencial

- Média de aquisições por etapa............ 20

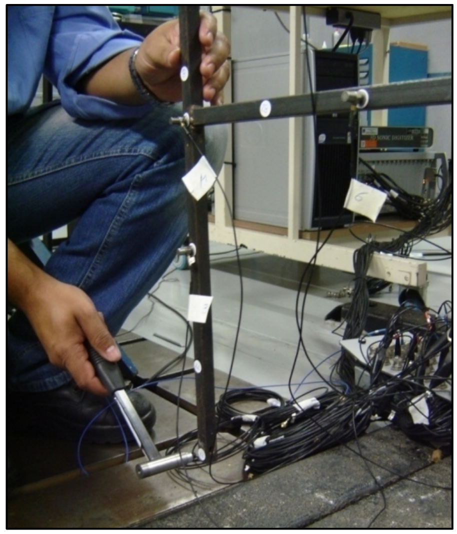

Figura 43 – Excitação por martelo de impacto

As inertâncias medidas e a função coerência dos 28 GDLs são mostradas na Figura 44. Em geral, as curvas obtidas trazem os picos de ressonância bem evidentes mostrando o baixo coeficiente de amortecimento da estrutura testada. A coerência observada nestes picos é boa (maior que 0,85) na maioria dos sinais e principalmente nos GDLs 01, 02, 03, 04, 05 e 06 que representam os pontos C, D, A, B, E e F e cujos parâmetros modais serão aplicados no método REEDD. Para a curva do GDL 03 (ponto A), cabe observar o comportamento exibido: esta curva traz, como esperado, as ressonâncias intercaladas pelas anti-ressonâncias, característica esta exibida em FRFs de *driving-points* (EWINS, 1984). Ainda na análise desta curva, notam-se baixos valores de coerência nas freqüências de anti-ressonância, conforme é previsto pela literatura (EWINS, 1984).

Do conjunto de inertâncias medidas são determinadas as freqüências naturais (autovalores), formas modais (autovetores) e fator de amortecimento modal através de rotinas de ajuste de curvas. Diferentes algoritmos podem ser usados para extração destes parâmetros modais, dependendo do tipo de sistema. Para sistemas com modos bem separados, pode se utilizar o método “peak picking”, que utiliza a componente imaginária da função de resposta como coordenada modal, ou o método “circle fit” que aproxima um círculo aos dados impressos no plano de Argand, que têm como coordenadas as partes real e imaginária da função de resposta, (EWINS, 1984). No caso da estrutura ensaiada, são apropriados os métodos denominados múltiplos graus de liberdade, capazes de identificar freqüências naturais e modos muito próximos. Os métodos mais comuns são o dos mínimos quadrados na freqüência, que minimiza as diferenças entre as respostas em freqüência medidas e a função encontrada, que é soma da contribuição individual de cada modo e o método da exponencial complexa, que faz uma aproximação das funções de resposta ao impulso unitário no domínio do tempo. No programa de análise de dados utilizado, estavam disponíveis dois métodos de extração dos parâmetros modais, um no domínio da freqüência (*LSCF-Least Squares Complex Frequency Domain*) e outro no domínio do tempo (*LSCE-Least Squares Complex Exponential*). O método que apresentou melhor estabilidade na extração dos parâmetros modais foi o LSCF (LAU, et al., 2007).

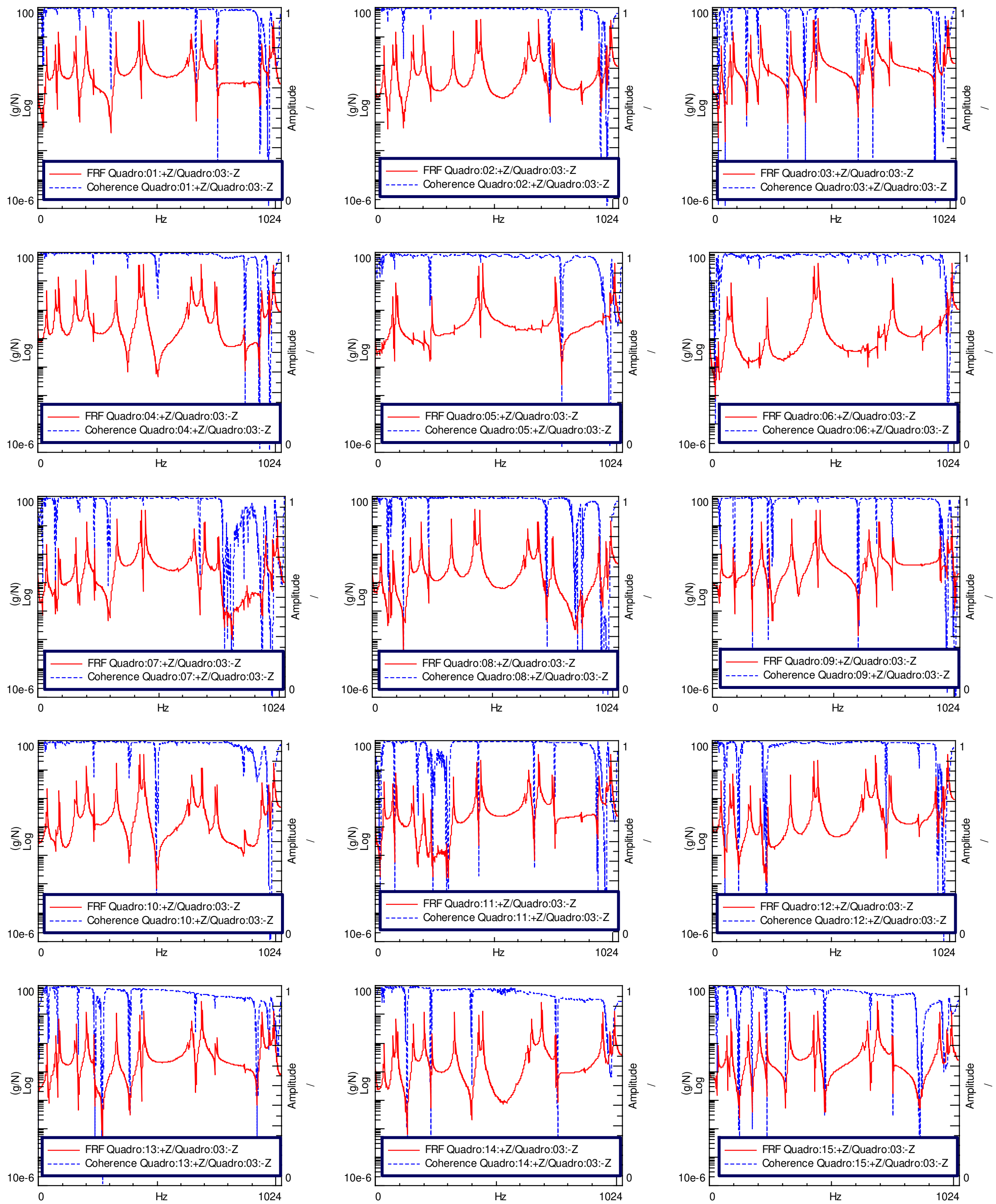

Figura 44 – Curvas de inertância e coerência medidas no ensaio

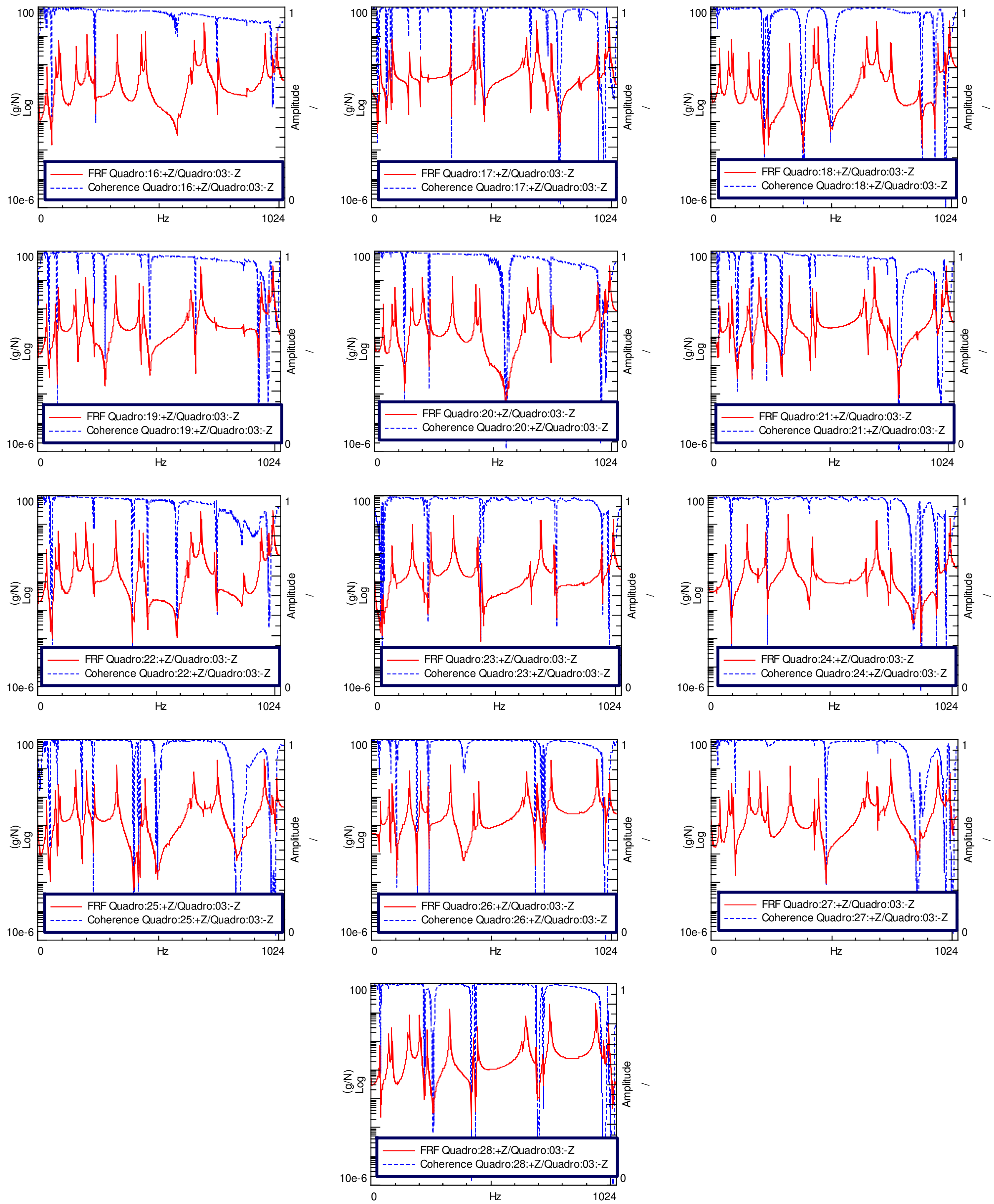

Figura 44 (continuação) – Curvas de inertância e coerência medidas no ensaio

Uma indicação importante da confiabilidade na medição das freqüências naturais é a coincidência de picos de ressonância das FRFs. Estes picos são realçados ao somar-se todas as curvas disponíveis. A comparação gráfica dos picos deste somatório com os picos das demais curvas pode ser bastante útil: problemas como ausência de modos ou deslocamento de picos de ressonâncias devido à adição de massa local pelo transdutor são facilmente detectados por este método. O gráfico da Figura 45 mostra o somatório das curvas em negrito e as demais FRFs em outras cores. Comparando-se as curvas verifica-se que todas as ressonâncias da estrutura presentes na faixa de freqüência avaliada aparecem no somatório.

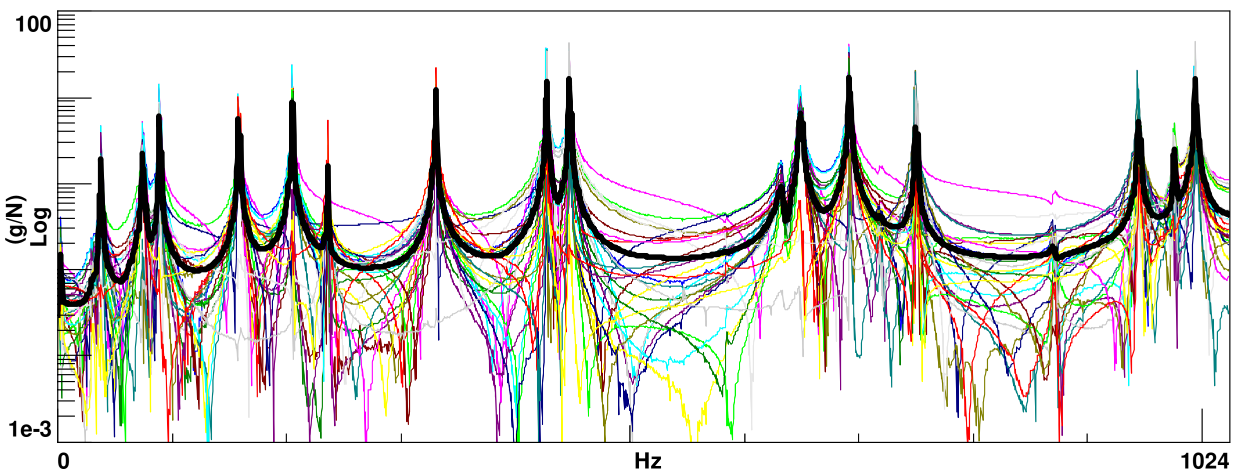

Figura 45 – Comparação entre as FRFs medidas e seu somatório (curva em negrito)

A importância da representatividade deste somatório, ou "FRF total", vem do fato de que a técnica utilizada na seleção entre os parâmetros modais estimados é baseada no diagrama de estabilização. A ordem do modelo dinâmico, ou número de modos, não é conhecida a priori. Para cada ordem de modelo com *n* modos, *n* valores de freqüência natural e amortecimento são determinados. Então, aumenta-se a ordem do modelo, e checa-se a consistência das freqüências e amortecimento estimados dos modelos de diferentes ordens. A idéia é que se os valores de freqüência e amortecimento forem mantidos para modelos de diferentes ordens, então eles constituem parâmetros de modos reais do sistema físico. Caso contrário, trata-se de modos computacionais. Para cada vez que se aumenta um modo na solução, verifica-se a variação destes parâmetros.

Na Figura 46 é mostrado o diagrama de estabilização para extração dos modos. A letra "s" no diagrama representa estabilidade de freqüência, amortecimento e autovetores. A letra "f" representa estabilidade apenas na freqüência, a letra "d' freqüência e amortecimento, a letra "v" freqüência e autovetores. No caso da letra "o", representa um novo pólo encontrado. Desta forma, o modo é mais bem estimado quando for estável em cada um dos três parâmetros modais. Isto é representado por uma sucessão de "s" na Figura 46. No lado direito desta figura é mostrado o eixo da ordem dos modelos utilizados no cálculo dos parâmetros modais. Como somente um GDL (ponto A) foi utilizado na excitação e a identificação dos 14 primeiros modos é desejada, devem ser adotados modelos de ordem igual ou superior a 28. Este critério é descrito pela equação:

$$pN_i \geq 2N \tag{6.5}$$

onde p é a ordem do modelo, N_i constitui o número de GDLs de referência (utilizados na excitação) e N representa o número de modos buscados.

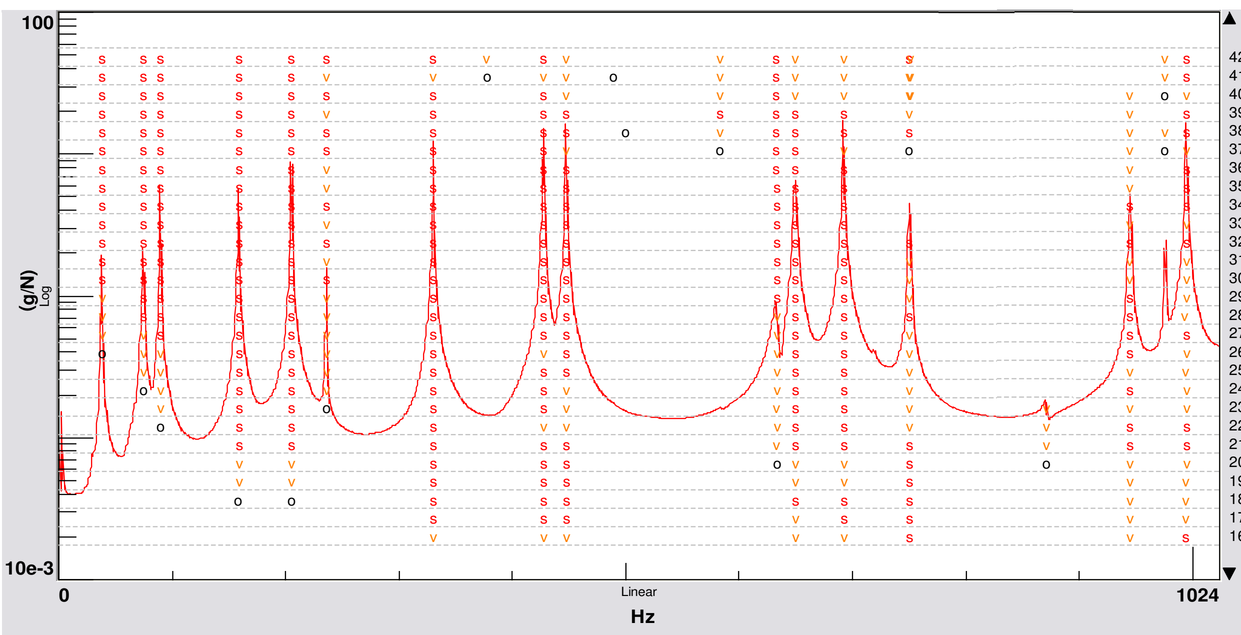

Figura 46 – Diagrama de estabilização

A validação dos resultados foi feita através da visualização dos modos, verificação da ortogonalidade e síntese das FRFs a partir dos parâmetros estimados. A Figura 47 mostra as formas modais dos 14 primeiros modos encontrados bem como suas freqüências naturais. Embora a correlação com o modelo de elementos finitos não fosse objetivo deste estudo, verificou-se que tanto as formas modais quanto as freqüências naturais obtidas do ensaio estão muito próximas daquelas encontradas na simulação descrita no capítulo 4. De fato, quando se compara os resultados mostrados na Figura 47 com os resultados mostrados na Figura 13, observa-se que os mesmos modos aparecem na mesma seqüência com pequenas diferenças em suas freqüências naturais. Mesmo com tais disparidades, estes resultados são considerados satisfatórios, dadas as diferenças entre a estrutura real e a estrutura idealmente modelada.

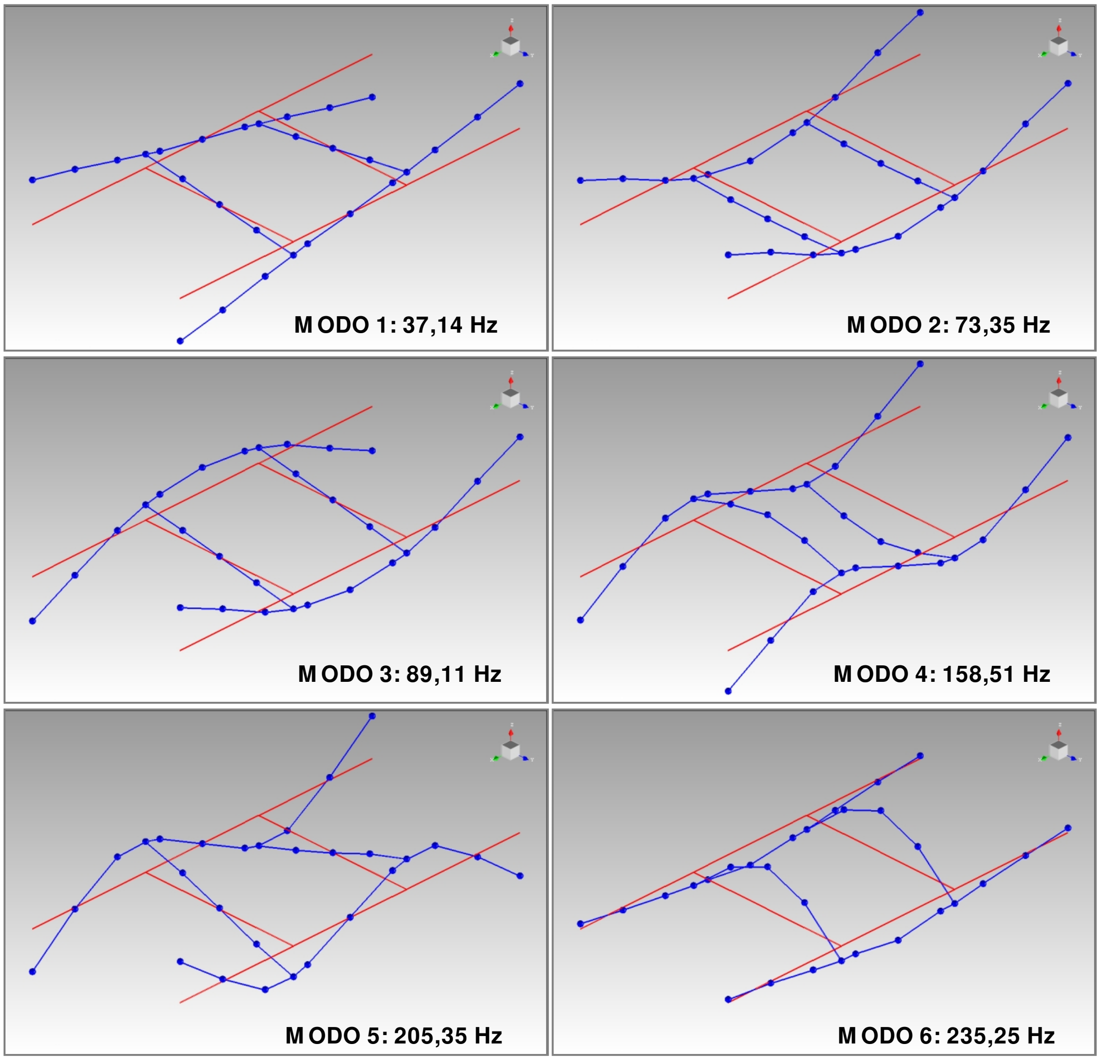

Figura 47 – Formas modais obtidas do ensaio de análise modal experimental

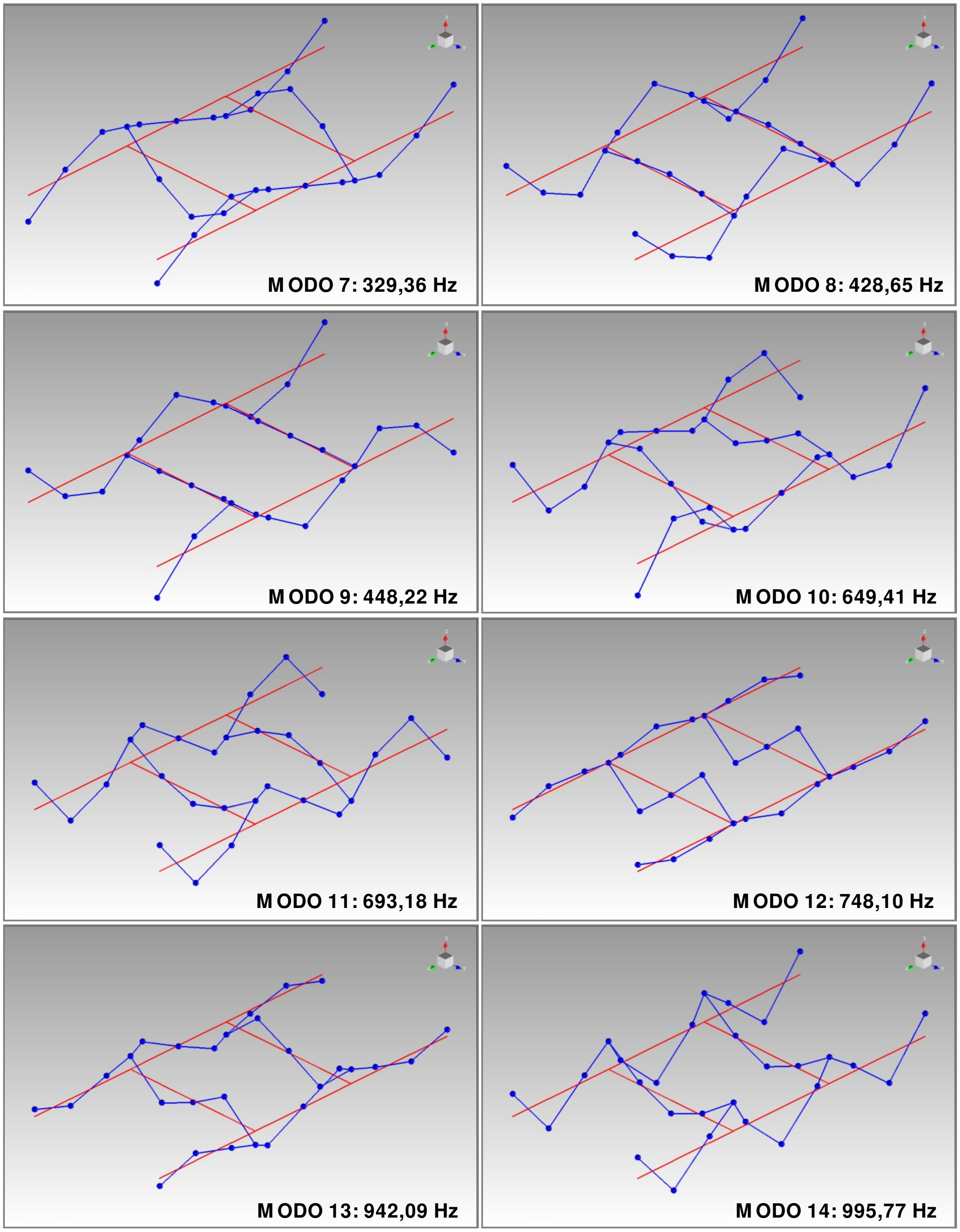

Figura 47 (continuação) – Formas modais obtidas do ensaio de análise modal experimental

A verificação da ortogonalidade dos modos foi realizada através da matriz de MAC (*Modal Assurance Criterion*). Cada elemento desta matriz, denominado fator de MAC, é definido como uma constante escalar do grau de linearidade entre dois vetores modais. Sua definição matemática é dada por (EWINS, 1984):

$$MAC(X,Y)=\frac{\left|\sum_{j=1}^{N}(\phi_X)_j(\phi_Y)_j^*\right|^2}{\left(\sum_{j=1}^{N}(\phi_X)_j(\phi_X)_j^*\right)\left(\sum_{j=1}^{N}(\phi_Y)_j(\phi_Y)_j^*\right)} \tag{6.6}$$

onde X e Y são os modos sob análise e j é o j-ésimo GDL da estrutura.

O fator de MAC assume valores entre 0 (para modos ortogonais) e 1 (para modos colineares). Desta maneira, se os vetores modais sob avaliação exibem uma relação linear entre si, ou uma correlação, o fator de MAC se aproxima da unidade; caso contrário, o fator é menor que 1. Cabe ressaltar que, diferentemente do cálculo da ortogonalidade, o critério de segurança modal, ou MAC, é normalizado pela amplitude dos vetores, permitindo assim a expressão deste resultado numa escala percentual (ALLEMANG, 2003).

A matriz de MAC tem larga aplicação na correlação entre resultados de testes físicos e simulações numéricas, possibilitando a quantificação desta correlação para os modos encontrados. Quando empregada em uma mesma análise, a matriz (denominada auto-MAC) quantifica a correlação entre os modos, avaliando a ortogonalidade destes e identificando possíveis casos de subamostragem (*aliasing*) espacial. A Tabela 20 traz a auto-MAC dos 14 modos estimados.

Tabela 20 – Auto MAC (%)

Modo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	100	0	0	0	6	0	0	0	1	8	0	0	1	1
2	0	100	0	0	1	1	0	6	0	1	0	0	1	7
3	0	0	100	1	0	0	0	0	8	0	1	1	0	0
4	0	0	1	100	0	0	4	0	1	0	5	1	0	1
5	6	1	0	0	100	1	0	1	0	10	0	0	7	2
6	0	1	0	0	1	100	0	0	0	0	0	0	2	3
7	0	0	0	4	0	0	100	0	2	0	2	2	0	1
8	0	6	0	0	1	0	0	100	0	3	0	0	1	9
9	1	0	8	1	0	0	2	0	100	0	3	3	0	0
10	8	1	0	0	10	0	0	3	0	100	0	0	1	7
11	0	0	1	5	0	0	2	0	3	0	100	1	0	0
12	0	0	1	1	0	0	2	0	3	0	1	100	0	0
13	1	1	0	0	7	2	0	1	0	1	0	0	100	1
14	1	7	0	1	2	3	1	9	0	7	0	0	1	100

Em geral, é aceito pela literatura que valores maiores que 90% identificam modos correlacionados enquanto que valores abaixo de 5%, modos não correlacionados (EWINS, 1984). Verifica-se da Tabela 20 que a maioria dos modos encontrados são ortogonais entre si (valores abaixo de 5% da tabela), que a correlação ocorre somente entre os modos idênticos (diagonal principal) e que em alguns casos verifica-se uma indefinição, indicando uma possível subamostragem espacial para a correta diferenciação destes modos.

O último passo para validação dos resultados do teste consiste na síntese das FRFs. Neste processo, os parâmetros modais extraídos anteriormente são utilizados no cálculo de uma nova FRF, dita FRF sintetizada. A comparação entre a FRF sintetizada e a FRF medida possibilita a visualização e a avaliação da precisão do modelo modal extraído, e conseqüentemente, de todos os parâmetros modais estimados. Geralmente esta avaliação é feita quando o modelo modal é estimado para uma aplicação quantitativa (caso do método REEDD). Para esta finalidade, ele deve ser suficientemente preciso e prover uma representação adequada da estrutura. Além disto, durante o teste foi medida somente uma linha completa da matriz de FRFs (excitação por impulso). Com esta única linha e o processo de síntese modal é possível sintetizar as FRFs não-medidas com base no teorema de reciprocidade desde que todos os modos presentes na faixa de interesse tenham sido excitados (EWINS, 1984).

A Figura 48 mostra a comparação entre as FRFs medidas e sintetizadas para os seis GDLs cujas curvas serão aplicadas no método REEDD. Na faixa de 0 a 1024 Hz observa-se dos gráficos bom ajuste da FRF sintetizada em torno das freqüências naturais. Em alguns casos, como nos GDLs 02 e 04 nota-se um pequeno desvio da FRF sintetizada em torno das freqüências de anti-ressonância. Este desvio deve-se, em parte, ao estimador de FRF utilizado na análise, do tipo H_1, que se ajusta precisamente nos pontos de pico da curva (ressonância) em detrimento dos pontos de vale (anti-ressonância). Tal desvio é tolerado para aplicação no método REEDD dado que anti-ressonâncias não trazem informação relevante, como será discutido a seguir.

Cabe introduzir aqui o conceito do termo residual: de modo geral, durante o teste, a FRF medida é limitada por alguma faixa de freqüência de interesse dependendo da capacidade do sistema de aquisição, da resolução em freqüência desejada ou da faixa de análise de interesse. Esta faixa pode não incluir alguns dos modos em baixa freqüência e certamente não incluirá alguns dos modos de alta freqüência. No entanto, os efeitos residuais destes modos na faixa de interesse estarão presentes na medição e conseqüentemente afetarão a precisão na síntese da FRF. Assim, a comparação entre a curva medida e a sintetizada é quase sempre decepcionante (EWINS, 1984), visto que a contribuição dos modos fora da faixa e presente na curva medida não é considerada na curva sintetizada. Como solução para o truncamento modal deve-se incluir na análise os termos residuais, inferiores e superiores, que aproximam a curva sintetizada da curva medida. Estes termos foram incluídos na síntese das FRFs mostradas na Figura 48.

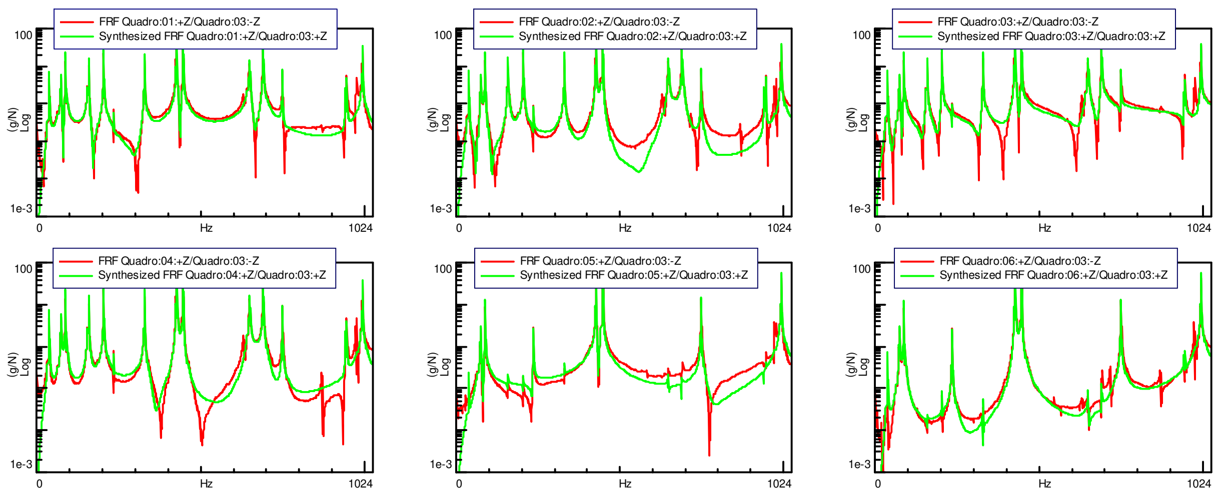

Figura 48 – Comparação entre FRF medida e FRF sintetizada

6.3 – Aplicação do método REEDD

Assim como no Capítulo 4, nesta seção o método REEDD é utilizado para a estimação das constantes de rigidez estática a partir dos resultados da análise modal experimental. Relembrando os quatro passos do método:

1. Cálculo do conjunto de forças equivalentes dos GDL da estrutura que representam o comportamento estrutural estático desejado (torção ou flexão).
2. Síntese da receptância estática apropriada do modelo modal.
3. Elaboração das equações que descrevem as deflexões dos GDLs em função das forças equivalentes atuantes nestes GDLs ponderadas pela receptância estática.
4. Determinação da rigidez estática considerando as deflexões estimados no passo anterior

A aplicação destes passos no ensaio experimental dar-se-á nas linhas a seguir:

1. <u>Cálculo do conjunto de forças equivalentes:</u>

A Figura 49 traz o esquema dos ensaios estáticos de torção e flexão realizados na estrutura em estudo. Nesta figura, os vetores em preto representam as forças aplicadas (e medidas durante o ensaio estático) e os vetores em vermelho (sobre os apoios), as reações dos apoios (as quais deseja-se calcular). Ainda na Figura 49(a) a barra utilizada para aplicação do momento de torção e para distribuir os esforços de flexão é representada. A inclusão desta barra no esquema facilita o cálculo das forças equivalentes.

Primeiramente serão calculadas as forças equivalentes para o ensaio de torção. No ensaio realizado, a força F_t introduzida em apenas uma das extremidades da barra de torção para facilitar o controle do momento aplicado. O momento equivalente é obtido quando um par conjugado de forças de amplitude F_t /2 é aplicado, conforme mostrado na Figura 49a. A partir desta configuração pode-se calcular as forças de reação dos apoios C e D.

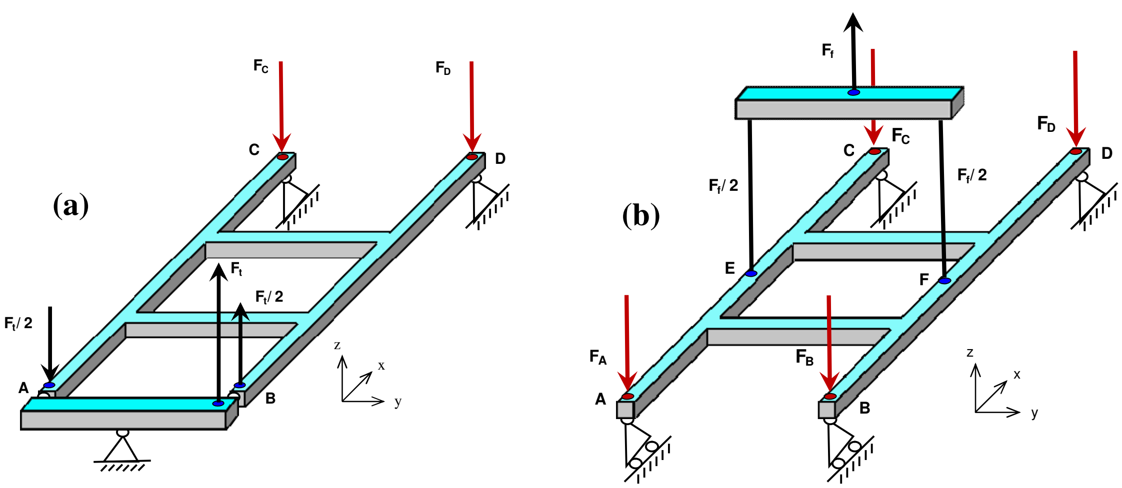

Figura 49 – Esquema do ensaio estático experimental:
(a) – torção
(b) – flexão

Assumindo-se condição de equilíbrio estático:

$$\begin{aligned}
&\sum \vec{F}_z = 0 \\
&\vec{F}_{z_A} + \vec{F}_{z_B} + \vec{F}_{z_C} + \vec{F}_{z_D} = 0 \\
&-\frac{F_t}{2} + \frac{F_t}{2} - F_C - F_D = 0 \\
&F_C = -F_D
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Para o momento em torno do eixo de apoio da barra:

$$\begin{aligned}
&\sum \vec{M}_{y=W/2} = 0 \\
&\vec{M}_{Ay=W/2} + \vec{M}_{By=W/2} + \vec{M}_{Cy=W/2} + \vec{M}_{Dy=W/2} = 0 \\
&\left(-\frac{F_t}{2}\frac{W}{2}\right) + \left(-\frac{F_t}{2}\frac{W}{2}\right) + \left(-F_C\frac{W}{2}\right) + \left(F_D\frac{W}{2}\right) = 0 \\
&-F_C + F_D = F_t
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Substituindo-se (6.7) em (6.8), tem-se que:

$$\begin{aligned}
&-(-F_D) + F_D = F_t \\
&2F_D = F_t \\
&F_D = \frac{F_t}{2}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

E, portanto: $F_C = -{F_t}/{2}$ (o sinal negativo indica que a força F_C tem sentido oposto ao mostrado na Figura 49(a).

No ensaio de flexão a força F_f foi aplicada no centro da barra, cujas extremidades estavam conectadas aos pontos E e F. Esta configuração também possibilitou melhor controle das forças e distribuição dos esforços e equivale à aplicação de $F_f/2$ sobre cada um dos pontos E e F. Assumindo-se simetria das forças, as reações dos apoios A, B, C e D podem ser calculadas a partir das equações a seguir.

$$simetria \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_A = \vec{F}_B \\ \vec{F}_C = \vec{F}_D \\ \vec{F}_E = \vec{F}_F \end{cases} \tag{6.10}$$

Na condição estática:

$$\begin{aligned}
&\sum \vec{F}_z = 0 \\
&\quad \vec{F}_A + \vec{F}_C + \vec{F}_E = 0 \\
&\quad -F_A - F_C + \frac{F_f}{2} = 0 \\
&\quad F_A + F_C = \frac{F_f}{2}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
&\sum \vec{M}_{x=L/2} = 0 \\
&\quad \vec{M}_{Ax=L/2} + \vec{M}_{Cx=L/2} + \vec{M}_{Ex=L/2} = 0 \\
&\quad F_A \frac{L}{2} - F_C \frac{L}{2} + 0 = 0 \\
&\quad F_A = F_C
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Substituindo (6.12) em (6.11) fica-se com:

$$\begin{aligned}
&F_C + F_C = \frac{F_f}{2} \\
&F_C = \frac{F_f}{4}
\end{aligned} \tag{6.13}$$

E a partir de (6.10) e (6.12) determinam-se as demais forças de reação.

Por fim, a Tabela 21 traz o resumo das forças equivalentes presentes nos ensaios de torção e flexão estáticas. A convenção de sinais desta tabela segue a orientação do eixo Z da Figura 49.

Tabela 21 – Resumo das forças equivalentes dos ensaios de torção e flexão

Força Equivalente	***Torção (força aplicada: F_t)***	***Flexão (força aplicada: F_f)***
$\boldsymbol{F_A}$	$-F_t/2$	$-F_f/4$
$\boldsymbol{F_B}$	$F_t/2$	$-F_f/4$
$\boldsymbol{F_C}$	$F_t/2$	$-F_f/4$
$\boldsymbol{F_D}$	$-F_t/2$	$-F_f/4$
$\boldsymbol{F_E}$	0	$F_f/2$
$\boldsymbol{F_F}$	0	$F_f/2$

2. Síntese da receptância estática apropriada do modelo modal:

A equação (3.24) do capítulo 3 estabelece a receptância estática entre dois pontos quaisquer (*j* e *k*) em função dos modos de vibrar, massas modais e freqüências naturais. Embora fosse possível calcular a receptância segundo esta equação a partir dos parâmetros modais, a maioria dos programas comerciais de pós-processamento possui recursos de manipulação e síntese de curvas. Utilizando-se destes recursos e do teorema da reciprocidade entre as FRFs, as curvas de receptância foram sintetizadas entre os seis GDLs A, B, C, D, E e F e os valores (reais) na origem (freqüência nula) foram utilizados. Este processo foi dividido em três configurações diferentes:

a) Síntese das curvas individuais dos 3 modos de torção (modos 1, 5 e 10).
b) Síntese das curvas individuais dos 3 modos de flexão (modos 2, 6 e 14).
c) Síntese da curva para todos os modos estimados entre 0 e 1024Hz.

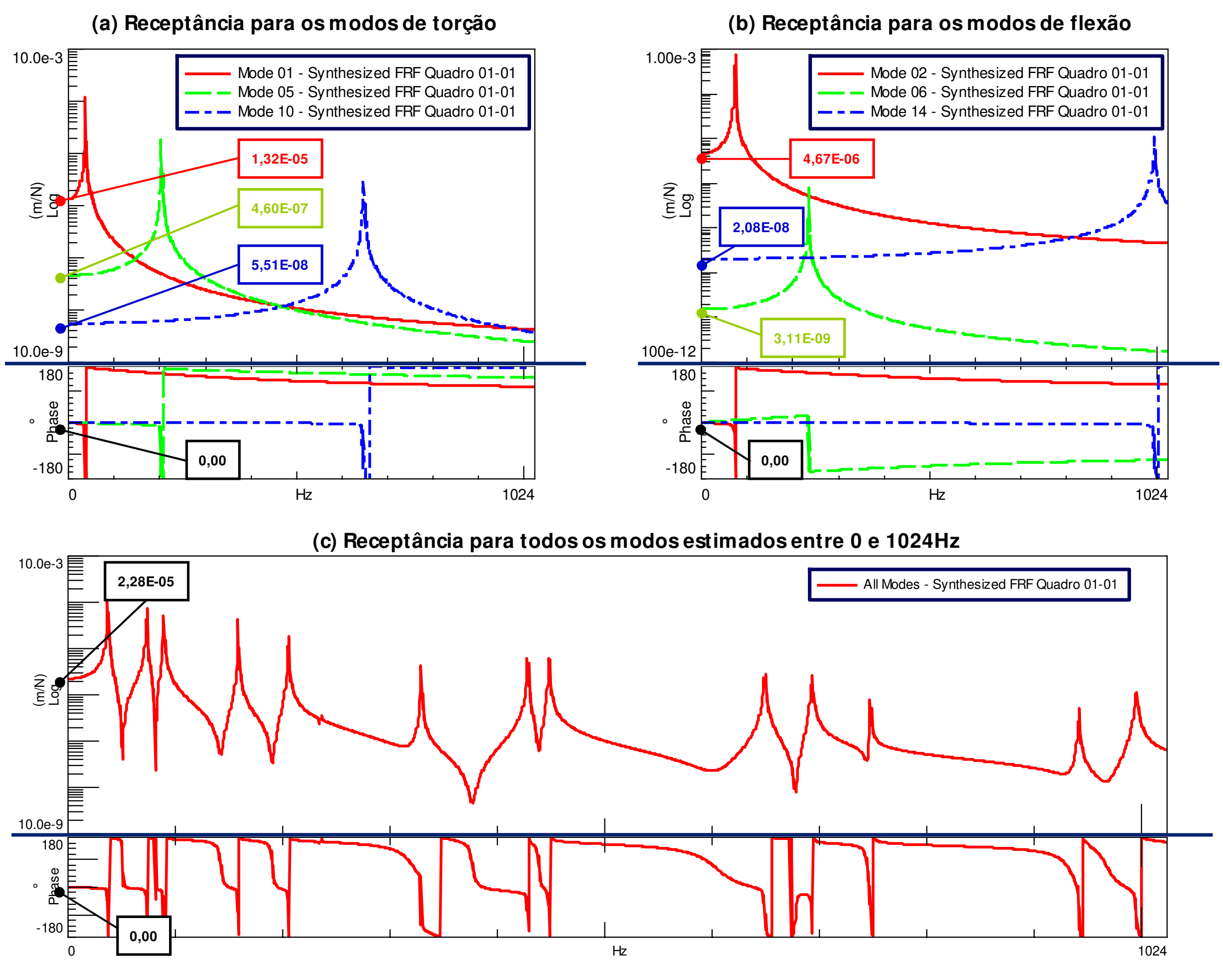

Figura 50 – Curvas de receptância sintetizadas para o ponto A

A Figura 50 ilustra as curvas de receptância sintetizadas no ponto A para as três situações acima. Elas representam a resposta em freqüência da deflexão vertical do ponto A quando uma força harmônica de amplitude 1 N é aplicada neste mesmo ponto, nesta mesma direção. Seguindo o mesmo procedimento, todas as combinações de 36 curvas de receptância que relacionam deslocamento e força dos 6 pontos de interesse foram sintetizadas. A receptância estática é finalmente obtida tomando-se as amplitudes destas curvas na freqüência de 0 Hz. Estes valores estão indicados na Figura 50 para o ponto A.

Como o método REEDD requer somente os valores de receptância a 0Hz é interessante a elaboração de matrizes que relacionem estes valores entre os diversos pontos. Estas matrizes foram construídas para as três situações descritas anteriormente e estão representadas nas Tabelas 22 a 24 a seguir.

Tabela 22 – Matrizes de receptância estática dos 3 principais modos de torção (m/N)

Modo1: 37,14Hz						
α	A	B	C	D	E	F
A	1,32E-05	-1,27E-05	-1,27E-05	1,36E-05	1,83E-07	3,60E-08
B	-1,27E-05	1,22E-05	1,22E-05	-1,31E-05	-1,76E-07	-3,50E-08
C	-1,27E-05	1,22E-05	1,22E-05	-1,31E-05	-1,78E-07	-3,69E-08
D	1,36E-05	-1,31E-05	-1,31E-05	1,40E-05	1,88E-07	3,66E-08
E	1,83E-07	-1,76E-07	-1,78E-07	1,88E-07	2,34E-09	3,01E-10
F	3,60E-08	-3,50E-08	-3,69E-08	3,66E-08	3,01E-10	9,94E-11

Modo5: 205,35Hz						
α	A	B	C	D	E	F
A	4,60E-07	-3,97E-07	-4,13E-07	4,85E-07	-3,75E-09	-1,32E-09
B	-3,97E-07	3,43E-07	3,56E-07	-4,19E-07	3,25E-09	1,14E-09
C	-4,13E-07	3,56E-07	3,69E-07	-4,35E-07	3,39E-09	1,19E-09
D	4,85E-07	-4,19E-07	-4,35E-07	5,11E-09	-3,96E-09	-1,39E-09
E	-3,75E-09	3,25E-09	3,39E-09	-3,96E-09	2,75E-11	1,02E-11
F	-1,32E-09	1,14E-09	1,19E-09	-1,39E-09	1,02E-11	3,67E-12

Modo10: 649,41Hz						
α	A	B	C	D	E	F
A	5,51E-08	-3,34E-08	-3,84E-08	6,02E-08	7,03E-10	-1,23E-10
B	-3,34E-08	2,03E-08	2,33E-08	-3,65E-08	-4,19E-10	7,12E-11
C	-3,84E-08	2,33E-08	2,68E-08	-4,20E-08	-4,92E-10	8,65E-11
D	6,02E-08	-3,65E-08	-4,20E-08	6,57E-08	7,61E-10	-1,31E-10
E	7,03E-10	-4,19E-10	-4,92E-10	7,61E-10	-1,22E-11	8,36E-12
F	-1,23E-10	7,12E-11	8,65E-11	-1,31E-10	8,36E-12	4,38E-12

Somatório dos 3 modos de torção						
α	A	B	C	D	E	F
A	1,38E-05	-1,31E-05	-1,32E-05	1,41E-05	1,80E-07	3,46E-08
B	-1,31E-05	1,26E-05	1,26E-05	-1,36E-05	-1,73E-07	-3,38E-08
C	-1,32E-05	1,26E-05	1,26E-05	-1,36E-05	-1,75E-07	-3,56E-08
D	1,41E-05	-1,36E-05	-1,36E-05	1,41E-05	1,85E-07	3,51E-08
E	1,80E-07	-1,73E-07	-1,75E-07	1,85E-07	2,36E-09	3,20E-10
F	3,46E-08	-3,38E-08	-3,56E-08	3,51E-08	3,20E-10	1,07E-10

Tabela 23 – Matrizes de receptância estática dos 3 principais modos de flexão (m/N)

Modo2: 73,35Hz						
α	A	B	C	D	E	F
A	4,67E-06	4,25E-06	4,26E-06	4,92E-06	-2,07E-06	-2,03E-06
B	4,25E-06	3,88E-06	3,88E-06	4,48E-06	-1,88E-06	-1,84E-06
C	4,26E-06	3,88E-06	3,88E-06	4,49E-06	-1,90E-06	-1,86E-06
D	4,92E-06	4,48E-06	4,49E-06	5,18E-06	-2,18E-06	-2,14E-06
E	-2,07E-06	-1,88E-06	-1,90E-06	-2,18E-06	8,15E-07	7,94E-07
F	-2,03E-06	-1,84E-06	-1,86E-06	-2,14E-06	7,94E-07	7,73E-07

Modo6: 235,25Hz						
α	A	B	C	D	E	F
A	3,11E-09	3,79E-09	4,46E-09	2,21E-09	-1,15E-08	-1,24E-08
B	3,79E-09	4,54E-09	5,58E-09	2,68E-09	-1,41E-08	-1,52E-08
C	4,46E-09	5,58E-09	6,08E-09	3,21E-09	-1,65E-08	-1,76E-08
D	2,21E-09	2,68E-09	3,21E-09	1,57E-09	-8,22E-09	-8,82E-09
E	-1,15E-08	-1,41E-08	-1,65E-08	-8,22E-09	4,29E-08	4,60E-08
F	-1,24E-08	-1,52E-08	-1,76E-08	-8,82E-09	4,60E-08	4,93E-08

Modo14: 995,77Hz						
α	A	B	C	D	E	F
A	2,08E-08	1,28E-08	1,42E-08	2,45E-08	-1,73E-08	-1,76E-08
B	1,28E-08	7,85E-09	8,76E-09	1,50E-08	-1,06E-08	-1,08E-08
C	1,42E-08	8,76E-09	9,75E-09	1,68E-08	-1,18E-08	-1,20E-08
D	2,45E-08	1,50E-08	1,68E-08	2,88E-08	-2,03E-08	-2,06E-08
E	-1,73E-08	-1,06E-08	-1,18E-08	-2,03E-08	1,42E-08	1,44E-08
F	-1,76E-08	-1,08E-08	-1,20E-08	-2,06E-08	1,44E-08	1,46E-08

Somatório dos 3 modos de flexão						
α	A	B	C	D	E	F
A	4,69E-06	4,27E-06	4,28E-06	4,95E-06	-2,10E-06	-2,06E-06
B	4,27E-06	3,89E-06	3,89E-06	4,50E-06	-1,90E-06	-1,87E-06
C	4,28E-06	3,89E-06	3,90E-06	4,51E-06	-1,93E-06	-1,89E-06
D	4,95E-06	4,50E-06	4,51E-06	5,21E-06	-2,21E-06	-2,17E-06
E	-2,10E-06	-1,90E-06	-1,93E-06	-2,21E-06	8,72E-07	8,54E-07
F	-2,06E-06	-1,87E-06	-1,89E-06	-2,17E-06	8,54E-07	8,37E-07

Tabela 24– Matriz de receptância estática do somatório de todos os modos estimados entre 0 e 1024 Hz

Receptância estática (m/N) *Somatório de todos os modos*						
α	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A	2,28E-05	-1,11E-05	-6,43E-06	1,51E-05	-3,31E-06	-3,69E-07
B	-1,11E-05	1,99E-05	1,32E-05	-6,63E-06	-6,77E-07	-3,23E-06
C	-6,43E-06	1,32E-05	1,99E-05	-1,14E-05	-3,50E-06	-3,50E-07
D	1,51E-05	-6,63E-06	-1,14E-05	2,43E-05	-3,64E-07	-3,65E-06
E	-3,31E-06	-6,77E-07	-3,50E-06	-3,64E-07	1,79E-06	7,39E-08
F	-3,69E-07	-3,23E-06	-3,50E-07	-3,65E-06	7,39E-08	1,83E-06

Cabe observar que as amplitudes a 0 Hz indicadas na Figura 50 são encontradas nas Tabelas 22, 23 e 24 nas células α_{AA}. Também é importante mencionar a representação da fase na elaboração das matrizes. Como a 0 Hz o valor sintetizado será sempre real, tem-se que:

- fase de 0° é representada por valores positivos.
- fase de +180° ou -180° é representada por valores negativos.

3. <u>Elaboração das equações de deflexão:</u>

No Capítulo 4 mostrou-se que a deflexão de um ponto da estrutura é resultante da ponderação de todas as forças aplicadas pelas respectivas receptâncias estáticas. Na forma matricial esta relação fica:

$$\{d\}=[\alpha]\{F\}\Rightarrow\begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \\ d_C \\ d_D \\ d_E \\ d_F \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha_{AA} & \alpha_{AB} & \alpha_{AC} & \alpha_{AD} & \alpha_{AE} & \alpha_{AF} \\ \alpha_{BA} & \alpha_{BB} & \alpha_{BC} & \alpha_{BD} & \alpha_{BE} & \alpha_{BF} \\ \alpha_{CA} & \alpha_{CB} & \alpha_{CC} & \alpha_{CD} & \alpha_{CE} & \alpha_{CF} \\ \alpha_{DA} & \alpha_{DB} & \alpha_{DC} & \alpha_{DD} & \alpha_{DE} & \alpha_{DF} \\ \alpha_{EA} & \alpha_{EB} & \alpha_{EC} & \alpha_{ED} & \alpha_{EE} & \alpha_{EF} \\ \alpha_{FA} & \alpha_{FB} & \alpha_{FC} & \alpha_{FD} & \alpha_{FE} & \alpha_{FF} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \\ F_E \\ F_F \end{Bmatrix} \qquad (6.14)$$

A matriz quadrada $[\alpha]$ mostrada em (6.14) representa as receptâncias estáticas calculadas quando todos os modos são considerados (Tabela 24). É possível ainda estimar as deflexões quando apenas a receptância do modo *r* é considerada (Tabela 22 e Tabela 23):

$$\{d\}^r = [\alpha]^r \{F\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} d^r_A \\ d^r_B \\ d^r_C \\ d^r_D \\ d^r_E \\ d^r_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^r_{AA} & \alpha^r_{AB} & \alpha^r_{AC} & \alpha^r_{AD} & \alpha^r_{AE} & \alpha^r_{AF} \\ \alpha^r_{BA} & \alpha^r_{BB} & \alpha^r_{BC} & \alpha^r_{BD} & \alpha^r_{BE} & \alpha^r_{BF} \\ \alpha^r_{CA} & \alpha^r_{CB} & \alpha^r_{CC} & \alpha^r_{CD} & \alpha^r_{CE} & \alpha^r_{CF} \\ \alpha^r_{DA} & \alpha^r_{DB} & \alpha^r_{DC} & \alpha^r_{DD} & \alpha^r_{DE} & \alpha^r_{DF} \\ \alpha^r_{EA} & \alpha^r_{EB} & \alpha^r_{EC} & \alpha^r_{ED} & \alpha^r_{EE} & \alpha^r_{EF} \\ \alpha^r_{FA} & \alpha^r_{FB} & \alpha^r_{FC} & \alpha^r_{FD} & \alpha^r_{FE} & \alpha^r_{FF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \\ F_D \\ F_E \\ F_F \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Neste caso, as contribuições individuais de cada modo para a estimação das constantes de rigidez pode ser calculada como mostrado na equação (3.49).

Cabe observar que a relação descrita em (6.14) independe do tipo de ensaio estático cujas deflexões se deseja estimar. Está representada, portanto, em sua forma geral. De fato, o comportamento estrutural é determinado pela atuação das forças equivalentes ao ensaio.

Assim, para a torção tem-se o seguinte vetor de forças (Tabela 21):

$$\{F\}^T = \left\{ -\frac{F_t}{2} \quad \frac{F_t}{2} \quad \frac{F_t}{2} \quad -\frac{F_t}{2} \quad 0 \quad 0 \right\} \qquad (6.16)$$

Enquanto que para a flexão:

$$\{F\}^T = \left\{ \frac{-F_f}{4} \quad \frac{-F_f}{4} \quad \frac{-F_f}{4} \quad \frac{-F_f}{4} \quad \frac{F_f}{2} \quad \frac{F_f}{2} \right\} \qquad (6.17)$$

Para simplicidade dos cálculos foi assumido $F_t = F_f = 1N$. Neste caso, as deflexões de cada ponto da estrutura com a contribuição de todos os modos são determinadas a partir das equações (6.14) e (6.16) para a torção e (6.14) e (6.17) para a flexão. Estes resultados são mostrados na última coluna da Tabela 25 e Tabela 26. Como exercício, estas duas tabelas trazem ainda as deflexões calculadas para cada um dos 3 principais modos de torção e os 3 principais de flexão. Estes dados permitem uma avaliação da contribuição de cada um destes modos para a estimativa da deflexão total. Por exemplo, tomando-se a deflexão do ponto A calculada somente pela contribuição do primeiro modo de torção: $2{,}610\text{x}10^{-5}$ m. Tirando-se a razão desta deflexão e àquela obtida pelo somatório de todos os modos ($2{,}772\text{x}10^{-5}$ m), conclui-se que somente a contribuição do primeiro modo de torção resulta em 94,16% da deflexão total deste ponto estimada pelo método REEDD. Este mesmo exercício pode ser estendido aos demais pontos e modos e sua contribuição, avaliada.

Tabela 25 – Deflexões estimadas para o ensaio de torção estática quando $F_t = 1N$

Ponto	Deflexões (m)				
	Modo1: 37,6Hz	Modo5: 205,2Hz	Modo10: 649,4Hz	Somatório dos 3 modos de torção	Somatório de todos os modos
d_A	2,610E-05	8,775E-07	9,355E-08	2,707E-05	2,772E-05
d_B	-2,510E-05	-7,575E-07	-5,675E-08	-2,591E-05	-2,542E-05
d_C	-2,510E-05	-7,865E-07	-6,525E-08	-2,595E-05	-2,547E-05
d_D	2,690E-05	6,721E-07	1,022E-07	2,767E-05	2,872E-05
d_E	3,625E-07	-7,175E-09	1,188E-09	3,565E-07	2,515E-07
d_F	7,225E-08	-2,520E-09	-2,059E-10	6,952E-08	-2,195E-07

Tabela 26 – Deflexões estimadas para o ensaio de flexão estática quando $F_f = 1N$

Ponto	Deflexões (m)				
	Modo2: 74,3Hz	Modo6: 235,7 Hz	Modo14: 995,8Hz	Somatório dos 3 modos de flexão	Somatório de todos os modos
d_A	-6,575E-06	-1,534E-08	-3,553E-08	-6,626E-06	-6,932E-06
d_B	-5,983E-06	-1,880E-08	-2,180E-08	-6,023E-06	-5,796E-06
d_C	-6,008E-06	-2,188E-08	-2,428E-08	-6,054E-06	-5,743E-06
d_D	-6,928E-06	-1,094E-08	-4,173E-08	-6,980E-06	-7,350E-06
d_E	2,812E-06	5,703E-08	2,930E-08	2,898E-06	2,895E-06
d_F	2,751E-06	6,116E-08	2,975E-08	2,842E-06	2,852E-06

4. Estimação dos coeficientes de rigidez estática:

A equação (4.1) utiliza a função arco tangente para cálculo do ângulo de rotação entre dois pontos dados suas deflexões verticais e distância. A não-linearidade da função arco tangente obriga que a constante de rigidez torcional seja estimada por regressão linear dos pares momento-ângulo gerados a partir das forças F_t e as deflexões estimadas por (6.14). Assim, escolhem-se valores para F_t, calculam-se as deflexões conforme (6.14) e finalmente os ângulos de rotação por (4.1). Os resultados destas etapas são ilustrados na Tabela 27. Para efeito de comparação com o ensaio estático experimental, escolheram-se os mesmos valores de força aplicados naquele ensaio. A partir destas forças estimaram-se as deflexões nos pontos A, B, C e D e em seguida, os ângulos de rotação das associações destes pontos. Por fim, de posse dos ângulos de rotação relativa e dos momentos, estimou-se a constante torcional por regressão linear. A constante obtida segundo este procedimento foi de **807,04 Nm/rad**.

Tabela 27 – Resultados de ajuste da constante torcional pelo método REEDD

Força	Momento	Deflexões				Diferença das associações		Ângulo de rotação das associações		Rotação relativa	Constante torcional (ajustada por regressão linear)
		d_A	d_B	d_C	d_D	d_A-d_B	d_C-d_D	θ_{AB}	θ_{CD}	θ_{AB}-θ_{CD}	Kt_{REEDD}
(N)	(Nm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(rad)	(rad)	(rad)	(Nm/rad)
-350	-72,79	-9,70	8,90	8,91	-10,05	-18,60	18,96	-0,045	0,046	-0,090	
-300	-62,45	-8,31	7,62	7,64	-8,61	-15,94	16,25	-0,038	0,039	-0,077	
-250	-51,98	-6,93	6,35	6,37	-7,18	-13,28	13,55	-0,032	0,033	-0,064	
-200	-41,67	-5,54	5,08	5,09	-5,74	-10,63	10,84	-0,026	0,026	-0,052	
-150	-31,20	-4,16	3,81	3,82	-4,31	-7,97	8,13	-0,019	0,020	-0,039	
-100	-20,89	-2,77	2,54	2,55	-2,87	-5,31	5,42	-0,013	0,013	-0,026	
50	-10,40	-1,39	1,27	1,27	-1,44	-2,66	2,71	-0,006	0,007	-0,013	
50	10,40	1,39	-1,27	-1,27	1,44	2,66	-2,71	0,006	-0,007	0,013	807,04
100	20,89	2,77	-2,54	-2,55	2,87	5,31	-5,42	0,013	-0,013	0,026	
150	31,20	4,16	-3,81	-3,82	4,31	7,97	-8,13	0,019	-0,020	0,039	
200	41,67	5,54	-5,08	-5,09	5,74	10,63	-10,84	0,026	-0,026	0,052	
250	51,98	6,93	-6,35	-6,37	7,18	13,28	-13,55	0,032	-0,033	0,064	
300	62,45	8,31	-7,62	-7,64	8,61	15,94	-16,25	0,038	-0,039	0,077	
350	72,79	9,70	-8,90	-8,91	10,05	18,60	-18,96	0,045	-0,046	0,090	

No caso da estimação da constante de flexão, as deflexões são representadas em função da força de entrada F_f para que sejam anuladas por esta durante o cálculo da rigidez. Das equações (6.1) e (6.2) e da última coluna da Tabela 26 têm-se que:

$$\begin{aligned} d_{Ecor} &= \left[d_E - \left(\frac{d_A + d_C}{2} \right) \right] F_f = \left[2,895\times10^{-6} - \left(\frac{-6,932\times10^{-6} - 5,743\times10^{-6}}{2} \right) \right] F_f = 9,232\times10^{-6} F_f \\ d_{Fcor} &= \left[d_F - \left(\frac{d_B + d_D}{2} \right) \right] F_f = \left[2,852\times10^{-6} - \left(\frac{-5,796\times10^{-6} - 7,350\times10^{-6}}{2} \right) \right] F_f = 9,424\times10^{-6} F_f \end{aligned} \quad (6.18)$$

as quais são utilizadas na determinação da constante de rigidez segundo as equações (6.3) e (6.4):

$$K_{f_{REEDD}} = \frac{F_f}{\dfrac{\left(d_{Ecor} + d_{Fcor} \right)}{2}} = \frac{\cancel{F_f}}{\dfrac{\left(9,232\times10^{-6} + 9,424\times10^{-6} \right) \cancel{F_f}}{2}} = \frac{1}{\dfrac{9,328\times10^{-6}}{2}} = 107,20\ N/mm \quad (6.19)$$

Assim, a constante de rigidez à flexão estimada pelo método REEDD foi de **107,20 N/mm**.

Capítulo 7

Resultados

Neste capítulo são discutidos os principais resultados obtidos com foco nas propostas iniciais do trabalho. Assim, na simulação por elementos finitos, os coeficientes de rigidez estática calculados por carregamento são comparados aos mesmos coeficientes estimados pelo método REEDD. Diferenças são comentadas e justificadas através do truncamento modal. As incertezas calculadas pelo método de Monte Carlo e por propagação linear de covariâncias são apresentadas e suas diferenças são comentadas. Quanto à análise experimental, os coeficientes de rigidez estática estimados pelo método REEDD também são comparados aos obtidos pelo ensaio de carregamento estático. Esta comparação é comentada do ponto de vista estatístico.

7.1 – Análise dos resultados obtidos por simulação numérica

No Capítulo 4 foi apresentada a modelagem de uma estrutura em formato de H duplo como representação simplificada de um chassi de pick-up e objeto deste estudo. Com este modelo, simulações de carregamento estático de torção e flexão da estrutura foram realizadas e os coeficientes de rigidez estática, determinados. Em seguida, as freqüências naturais e os modos de vibrar foram calculados pela resolução do problema de autovalores. O método REEDD foi finalmente aplicado e os coeficientes de rigidez à torção e à flexão puderam ser estimados. A Tabela 28 apresenta os coeficientes de rigidez obtidos por estes dois meios.

Comparando-se os resultados, são verificadas diferenças de +0,02% na estimação do coeficiente de rigidez à torção pelo método REEDD e +0,04% na estimação do coeficiente de rigidez à flexão. As diferenças observadas têm relação com a ordem do modelo utilizado e, por conseqüência, com o número de modos possíveis de observação. Modelos com maior número de nós e elementos permitem a identificação de maior quantidade de modos do que aqueles cuja malha é menos refinada. Isto é relevante para a convergência da estimação do coeficiente de rigidez já que cada modo possui certa contribuição para esta estimação (passo 3 do método REEDD).

Tabela 28 – Comparação resultados de simulação numérica (REEDD vs. carregamento estático)

Ensaio Simulado	***Coeficiente de Rigidez***		
	Carregamento Estático	***REEDD***	***Diferença (%)***
Torção (Nm/rad)	585,590	585,691	+0,02
Flexão (N/mm)	55,05	55,07	+0,04

No Capítulo 4 foram mostrados os fatores de contribuição dos 3 primeiros modos de torção e dos 3 primeiros de flexão para a estimação das constantes de rigidez (Figura 16). Observou-se que somente com aqueles 6 primeiros modos foi possível estimar o coeficiente de rigidez à torção e a flexão com 99,91% e 99,76% de convergência, respectivamente. A diminuição deste desvio será observada se a contribuição de todos os modos for considerada. Dessa forma, a convergência do método depende da contribuição dos modos disponíveis: quanto maior o número destes modos, maior será a convergência do método REEDD e menor será a diferença em relação à simulação por carregamento estático.

A Figura 51 mostra a contribuição individual dos demais modos (foi utilizada a escala logarítmica para visualização dos modos de baixa contribuição). Ao somar-se a contribuição de todos estes ainda permanece o resíduo mostrado na última coluna da Tabela 28. De fato, para que haja maior convergência do coeficiente estimado, mais modos precisam ser considerados e para isto mais elementos devem ser adicionados ao modelo. A diferença encontrada, portanto, tem sua causa no truncamento modal do modelo.

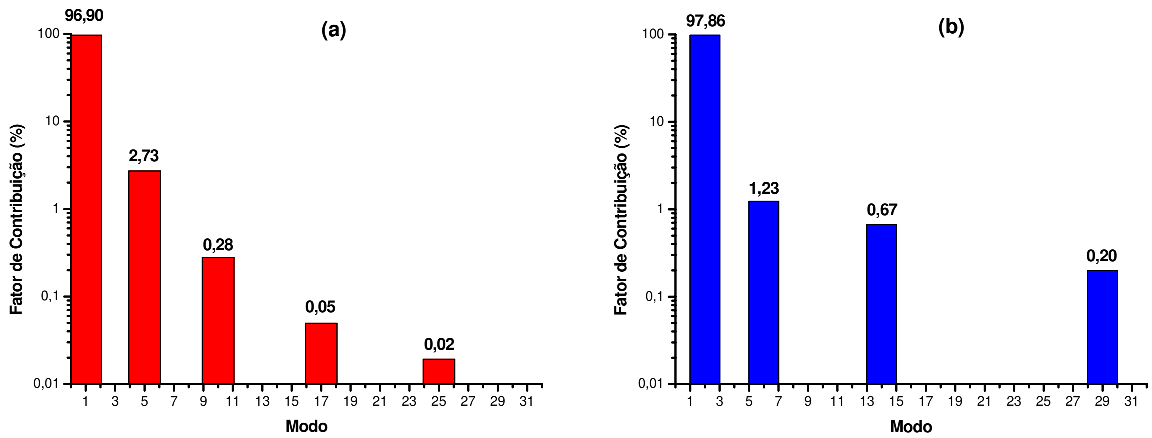

Figura 51 – Fator de contribuição dos demais modos: (a) - torção; (b) - flexão

7.2 – Análise dos métodos de propagação de incertezas

A propagação de incertezas através do método REEDD foi avaliada no capítulo 5 por experimentação numérica de Monte Carlo e propagação linear de covariâncias. No primeiro caso foram geradas N amostras aleatórias das variáveis de entrada modeladas pelas FDPs apropriadas e a incerteza da saída foi estimada através da propagação dessas N amostras pelas equações determinísticas do método REEDD. No segundo caso, a incerteza da variável de saída foi calculada por aproximação linear das funções determinísticas do método REEDD quando suas variáveis de entrada estão sujeitas a perturbações (incertezas). Como as variáveis envolvidas neste cálculo podem apresentar algum grau de dependência entre si e os coeficientes de correlação não podem ser determinados analiticamente, optou-se pela estratégia de inferir tais coeficientes como sendo -1, 0 e 1 baseando-se unicamente na relação esperada entre as variáveis de cada etapa do método REEDD. As incertezas obtidas por estes dois métodos de propagação são mostradas na Tabela 29.

Por não necessitar de aproximações lineares das funções determinísticas e nem que os coeficientes de correlação sejam inferidos, a propagação por Monte Carlo deve ser considerada a que melhor representa a incerteza da estimação do coeficiente de rigidez estática pelo método REEDD. O segundo método foi empregado neste trabalho com o propósito de avaliação da aproximação propiciada por ele quando as N amostras de modos e freqüências naturais não estão disponíveis ou são custosas de se gerar (no caso de ensaios experimentais, por exemplo) e, portanto, o emprego de Monte Carlo não é possível. Assim, comparando-se os números listados na Tabela 29 observa-se que o emprego da propagação linear de covariâncias resultou em uma boa aproximação para a incerteza do coeficiente de rigidez torcional nos três cenários estudados. Apenas no cenário B verificou-se uma diferença maior entre a aproximação linear e o método de Monte Carlo que nos outros dois cenários. O mesmo não se pode dizer da aproximação da incerteza do coeficiente de rigidez à flexão: o método de propagação linear de covariâncias superestimou a incerteza para os cenários B e C, embora tenha demonstrado boa aproximação para o cenário A.

Na prática, tanto freqüência natural como modo de vibrar estão simultaneamente sujeitos a incertezas. Por este motivo, o cenário C deve ser investigado mais a fundo: observa-se que, tanto para a torção quanto para a flexão, a incerteza é maior quando obtida por propagação linear de covariâncias do que quando gerada por Monte Carlo. No ambiente experimental esta conclusão é positiva e bem vinda pois demonstrou que a utilização do método de propagação linear de covariâncias (considerando-se os coeficientes de correlação esperados) superestimou a incerteza real para este caso.

Tabela 29 – Incertezas dos coeficientes de rigidez estática obtidas por Monte Carlo e propagação linear de covariâncias

	Cenário	**Incerteza (%) com 99,7% de confiança**	
		Monte Carlo	**Propagação Linear de Covariâncias**
Torção	**A**	± 2,022	± 1,941
	B	± 5,412	± 4,851
	C	± 5,736	± 5,919
Flexão	**A**	± 1,956	± 1,872
	B	± 4,194	± 5,412
	C	± 4,548	± 6,332

7.3 – Análise dos resultados experimentais

O estudo experimental foi mostrado no Capítulo 6. As descrições e análises dos ensaios de torção e flexão estáticas, além do ensaio de análise modal foram apresentadas. Na última seção daquele capítulo, o método REEDD foi aplicado sobre os dados experimentais e os coeficientes de rigidez à torção e à flexão foram estimados. A comparação entre estes coeficientes e os obtidos por ensaio estático experimental é mostrado na Tabela 30. Em termos percentuais, diferenças de +5,57% e +6,56% foram observadas para os coeficientes de rigidez à torção e à flexão, respectivamente, estimados pelo método REEDD.

Tabela 30 – Comparação resultados de ensaio experimental
(REEDD vs. carregamento estático)

Ensaio	**Coeficiente de Rigidez**		
	Carregamento Estático	**REEDD**	**Diferença (%)**
Torção (Nm/rad)	764,4	807,0	+5,57
Flexão (N/mm)	100,6	107,2	+6,56

Alguns autores têm encontrado diferenças menores quando aplicaram o método REEDD em estruturas veiculares mais rígidas que a utilizada neste trabalho: Rediers, et al. (1998) puderam estimar a constante torcional por cerca de 4% acima da obtida por carregamento estático em um chassi de pick-up. No caso da flexão, a constante estimada foi 4,55% inferior ao valor medido. Já Griffths, et al. (2003), utilizando uma estrutura similar, encontraram diferença de apenas -1,86% para a constante torcional (os autores não mencionam a flexão em seu trabalho).

A experimentação numérica realizada no Capítulo 5 para o modelo de elementos finitos determinou as incertezas associadas aos coeficientes de rigidez estimados pelo método REEDD quando seus parâmetros de entrada estão sujeitos a incertezas. Obteve-se, dessa forma, a propagação de erros através do método. Foi assumido aqui que as incertezas da análise modal experimental são da mesma ordem que as utilizadas na simulação numérica. A Figura 52(a) traz o gráfico com a reta que relaciona ângulo de rotação por momento (o coeficiente angular desta reta é o coeficiente de rigidez torcional estimada pelo método REEDD e mostrado na Tabela 30). Os valores de momento mostrados nos pontos do gráfico são os mesmos utilizados na realização do ensaio experimental de torção estática. Este gráfico é a representação dos dados da Tabela 27. Na Figura 52(b) são mostradas as barras de incertezas, modeladas segundo a experimentação numérica mostrada no capítulo 5. Estas barras determinam, com 99,7% de confiança, os valores dos ângulos de rotação estatisticamente possíveis quando estes são estimados pelo método REEDD. Assume-se aqui que as freqüências naturais e modos de vibrar determinados pelo ensaio de análise modal experimental estão sujeitos às mesmas incertezas modeladas no capítulo 5. Adicionando a este gráfico a curva obtida do ensaio experimental de torção estática, obtém-se a Figura 52(c). Os desvios padrão das seis solicitações do ensaio de torção estática foram mostrados no capítulo 6 pela Tabela 17. Ao se considerar a variabilidade presente nos resultados do ensaio de torção estática para uma confiabilidade de 99,7%, tem-se também que os valores medidos no ensaio experimental possuem incerteza associada. A Figura 52(d) mostra as barras de incertezas em torno dos pontos medidos do ensaio de carregamento estático.

A intersecção das barras de erros das duas curvas da Figura 52(d) sugere que a curva gerada a partir do coeficiente de rigidez torcional estimado pelo método REEDD é estatisticamente representativa de uma medição obtida por carregamento torcional estático. Assim, a estimação do coeficiente de rigidez torcional fornecida pelo método REEDD é estatisticamente tão confiável quanto qualquer outro valor gerado a partir de um ensaio experimental estático.

A mesma análise foi empregada com o coeficiente de rigidez à flexão. A Figura 53 mostra a curva gerada pelo ensaio de carregamento estático e a curva obtida através do método REEDD. Observa-se, neste caso, que as intersecções das barras de erros ocorrem somente em alguns pontos. De fato, a diferença mostrada na Tabela 30 para o coeficiente de flexão é maior que a incerteza obtida por Monte Carlo para um nível de confiança de 99,7%. Por este motivo, constata-se que a estimação obtida pelo método REEDD não é estatisticamente representativa do ensaio de flexão estática realizado na estrutura em estudo. Esta diferença pode ser explicada por dois fatores principais. Um deles refere-se à montagem do ensaio de flexão estática, principalmente à qualidade da vinculação aplicada e a distribuição das forças de carregamento. O outro é a qualidade dos modos estimados, especialmente o segundo modo de flexão, cujo ponto de excitação ficou muito próximo de um nó do modo 6 e prejudicou a medição correta das amplitudes deste modo.

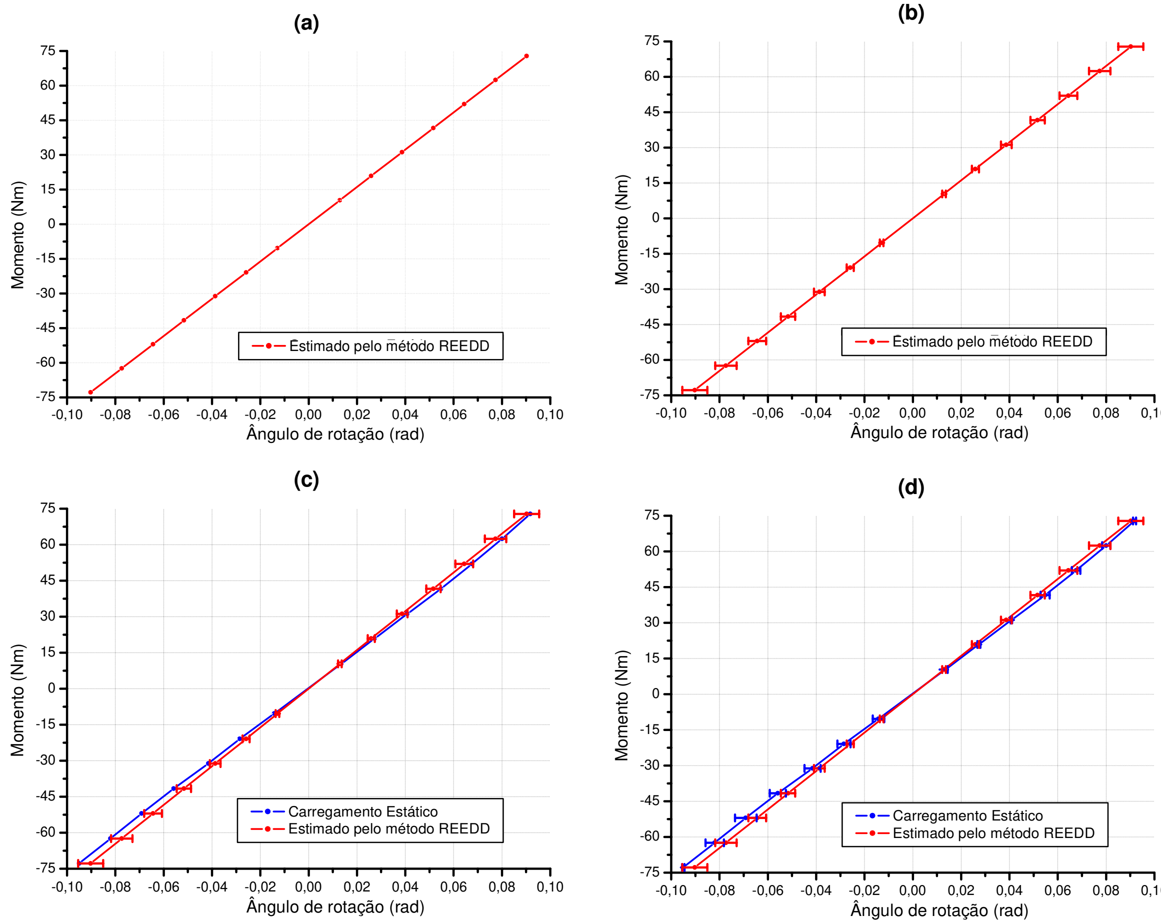

Figura 52 – Curvas de rigidez à torção

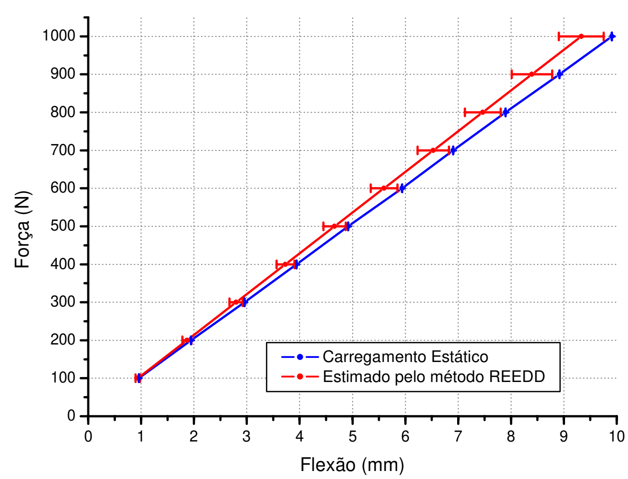

Figura 53 – Curvas de rigidez à flexão

Capítulo 8

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

As conclusões tiradas do trabalho e sugestões para próximos estudos são apresentadas neste capítulo. De modo geral, as conclusões finais se concentram na confiabilidade dos resultados estimados pelo método REEDD frente às incertezas inerentes aos parâmetros modais. Quanto às perspectivas futuras, são listadas propostas de estudos que aperfeiçoariam e complementariam a gama de aplicabilidade do método REEDD.

8.1 – Conclusões

A principal conclusão deste trabalho é que o método REEDD não amplifica as incertezas das variáveis de entrada. Os coeficientes de rigidez estimados pelo método têm incerteza igual ou inferior à combinação das incertezas destes parâmetros modais. Assim, uma vez conhecidas as incertezas presentes nos resultados de ensaio de análise modal experimental, sabe-se que a incerteza da estimação feita pelo método REEDD encontrar-se-á na mesma ordem de grandeza.

A segunda conclusão é uma conseqüência da primeira: dado que não há amplificação de incertezas e que a variabilidade dos coeficientes de rigidez estimados é da mesma ordem que a dos parâmetros modais, o método REEDD constitui uma boa alternativa para economia de recursos computacionais e, principalmente, laboratoriais visto que somente uma avaliação de rigidez se faz necessária, a dinâmica. No entanto, cabe ressaltar que o comportamento estrutural estimado pelo método descrito neste trabalho refere-se exclusivamente ao regime de deformação elástica.

Sendo menos sujeito à variabilidade das condições de contorno que um ensaio de carregamento estático e, portanto, tendo seu resultado final menos afetado por estas condições, os coeficientes de rigidez estática estimados pelo método REEDD poderiam ser adotados para uniformizar a comparação (*benchmarking*) de rigidez estrutural de carrocerias entre os diversos fabricantes. Isto permitiria que o desempenho destas estruturas fosse observado segundo a mesma métrica sem que os fabricantes precisassem abolir os seus procedimentos históricos de carregamento estático (e junto, suas experiências e referências) caso ainda optassem por não adotar os resultados do método REEDD como objetivo de projeto.

É válido comentar a sensibilidade do método REEDD quanto ao número de modos necessários. Como mostrado no Capítulo 4 e discutido no Capítulo 7, cada modo de vibrar exerce uma determinada contribuição na estimação dos coeficientes de rigidez. Esta característica tanto pode representar um problema de aproximação inaceitável quanto pode evitar desperdício de recursos, sejam eles computacionais ou laboratoriais. O primeiro caso ocorre quando o número de elementos da malha do modelo numérico ou a banda de freqüência de excitação de um ensaio são tecnicamente limitados e a tolerância da aproximação é pequena. Neste cenário, existe um risco de que o número de modos extraídos (ou por simulação numérica ou por ensaio experimental) não seja suficiente para estimar os coeficientes de rigidez estática com o nível de precisão requerido. Por outro lado, para tolerâncias maiores, estimativas aceitáveis podem ser obtidas com modelos de malhas de baixa resolução ou ensaios realizados em bandas de baixa freqüência.

Com relação aos métodos de propagação de incertezas empregados, verificou-se uma boa aproximação da incerteza do coeficiente de rigidez à torção calculada pelo método de propagação linear de covariâncias. Este fato demonstra que a metodologia proposta de inferir os coeficientes de correlação no cálculo das covariâncias funcionou para este caso. Já para a incerteza do coeficiente de rigidez à flexão, a aproximação propiciada pelo emprego do mesmo método apresenta uma diferença significativa com relação à incerteza obtida por Monte Carlo. Tal diferença demonstra que a correlação entre as diversas variáveis utilizadas nem sempre é perfeitamente linear como foi considerado e que, ao ser inferido linearidade entre elas, a incerteza tende a ser maior do que a real.

8.2 – Sugestões para trabalhos futuros

A análise de incertezas em ensaios de rigidez estática é sugerida dentre os possíveis trabalhos futuros. Esta análise em conjunto aos resultados do presente trabalho forneceria números para melhor definição da faixa de intersecção de incertezas associadas à determinação dos coeficientes de rigidez estáticas via método REEDD e via ensaio experimental estático.

Na literatura, existem estudos focados na obtenção de FRFs angulares em ensaios experimentais (LOFRANO, 2003). A utilização destes estudos no método REEDD ampliaria a gama de aplicações deste método podendo-se estimar resultados de ensaios de carregamento momento x ângulo. Um exemplo de aplicação seria a estimação do coeficiente de rigidez à torção do eixo de uma turbina.

Por fim, sugere-se a aplicação e o estudo do método REEDD em carrocerias de veículos propriamente. A literatura já conta com alguns poucos trabalhos relacionados a chassi de pick-ups ou caminhões. O estudo em uma estrutura veicular monobloco complementaria os resultados disponíveis atualmente.

Bibliografia

ADHIKARI, S.; LANGLEY, R. S. **On the Nature of Random System Matrices in Structural Dynamics**. 141st Meeting of the Acoustical Society of America. Chicago, Illinois, USA: [s.n.]. 2001.

AHMIDA, K. M. **Análise Dinâmica de Pórticos em Médias e Altas Frequências**. UNICAMP. Campinas, p. 270. 2001.

ALLEMANG, R. J. The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse. **Sound and Vibration**, Cincinnati, Ohio, p. 14-21, August 2003.

ARRAS, K. O. **An Introduction to Error Propagation: Derivation, Meaning, and Examples of Equation cy = fx cx fx**. [S.l.]. 1998.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. **Resistência dos materiais**. São Paulo: McGraw-Hill, 1989, 1982.

BOHRNSTEDT, G. W.; GOLDBERGER, A. S. On the Exact Covariance of Products of Random Variables. **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 64, n. No. 328, 1969. 1439-1442.

CHANG, T.; CRAIG, R. R. J. Normal Modes of Uniform Beams. **J. Eng.Mech. Div.**, 1969. 1027-1031.

CRAIG JR., R. R. **Structurual Dynamics - An Introduction to Computer Methods**. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc., 1981.

CRANDALL, S. H.; MARK, W. D. **Random Vibration in Mechanical Systems**. [S.l.]: Academic Press, Inc., 1963.

D´AMBROGIO, W.; FREGOLENT, A. Effect of Uncertainties on Substructure Coupling: Modelling and Reduction Strategies. **Mechanical Systems and Signal Processing Nº 21**, 2007. 3123-3145.

EINSTEIN, A. On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat. **Annalen der Physik, 17**, 1905. 549–560.

EWINS, D. J. **Modal Testing:** Theory and Practice. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 1984.

GHANEM, R.; SPANOS, P. **Stochastic Finite Elements:** A Spectral Approach. [S.l.]: Dover Publications, 1991.

GRIFFTHS, D. et al. **A Techinique for Relating Vehicle Structural Modes to Stiffness as Determined in Static Determinate Tests**. Noise & Vibration Conference and Exhibition - SAE. [S.l.]: [s.n.]. 2003.

HALDAR, A.; MAHADEVAN, S. **Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design**. [S.l.]: John Wiley & Sons Inc, 2000.

HASSELMAN, T. Quantification of Uncertainty in Structural Dynamic Models. **Journal of Aerospace Engineering**, 2001. 158-165.

HASSELMAN, T. K.; CHROSTOWSKI, J. D. **Effects of product and experimental variability on model verification of automobile structures**. Proceeding of the 15th IMAC Conf., Society for Experimental Mechanics, Inc. Orlando, Florida: [s.n.]. 1997. p. 612-620.

JAYNES, E. **Information theory and statistical mechanics**. [S.l.]: Phys.Rev., 106(4):1620–630, 1957a.

JAYNES, E. **Information theory and statistical mechanics ii**. [S.l.]: Phys. Rev., 108:171–190, 1957b.

KAPUR, J. N.; KESAVAN, H. K. **Entropy Optimization Principles with Applications**. [S.l.]: Academic Press, Inc., USA, 1992.

KESAVAN, H. K.; KAPUR, J. N. The Generalized Maximum Entropy Principle. **IEEE TRANSACTIONS ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS**, 19, September/October 1989. 1042 - 1052.

KINDS, E.; CHRISTOPH, B. **Determining torsional and flexural stiffnes in car bodies**. RAM Vol. 2 No. 2. [S.l.]: [s.n.]. 1986. p. 29-32.

LAU, J. et al. **Automatic modal analysis:** reality or myth? Porceedings of IMAC 25. Orlando, FL: [s.n.]. 2007.

LIN, Y. K. **Probabilistic Theory of Structural Dynamics**. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc., 1967.

LIN, Y. K. Some recent advances in the theory of random vibration. **Naturwissenschaften, 89**, p. 187-200, 2002.

LMS, I. **Experimental Modal Analysis – “The works” training manual**. [S.l.]. 3rd edition.

LOFRANO, M. Técnicas de estimativas de FRFs angulares em análise modal experimental com aplicações a estruturas do tipo viga. **Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo**, São Carlos, 2003. 152.

LUTES, L. D.; SARKANI, S. **Stochastic Analysis of Structural and Mechanical Vibrations**. Upper Saddle River, New Jersey, USA: Prentice-Hall, Inc., 1997.

MACE, B. R.; WORDEN, K.; MANSON, G. Preface of Uncertainty in Structural Dynamics. **Journal of Sound and Vibration Ed. 288**, 2005. 423-429.

MACEDO, R. G.; ARRUDA, J. R. D. F. **Obtaining Static Structural Stiffness from Modal Tests**. Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problema of Mechanics - DINAME. Ilhabela, Brazil: [s.n.]. 2007.

MACEDO, R. G.; ARRUDA, J. R. D. F. **Investigating the Uncertainty Propagation in Static Structural Stiffness Estimation from Dynamic Tests**. Proceedings of the XIII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME. Angra dos Reis, Brazil: [s.n.]. 2009.

NUNES, A. **Análise Modal Teórica e Experimental de cavidades com absorção sonora (Dissertação de Mestrado)**. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas: [s.n.]. 2001.

PAEZ, T. L. The history of random vibrations through 1958. **Mechanical Systems and Signal Processing, 89**, p. 187-200, 2006.

PEETERS, B.; DE ROECK, G.; ANDERSEN, P. **Stochastic System Identification:** Uncertainty of the Estimated Modal Parameters. Proceedings of the 17th IMAC. [S.l.]: [s.n.]. 1999. p. 231-237.

REDIERS, B.; YANG, B.; JUNEJA, V. Static and Dynamic Stiffness: One Test, Both Results. **Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC**, 1998. 30-35.

RITTO, T. G.; SAMPAIO, R.; CATALDO, E. Timoshenko Beam with Uncertainty on the Boundary Conditions. **J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng., Vol. XXX**, Outubro-Dezembro 2008. 295-303.

RITTO, T.; CATALDO, E.; SAMPAIO, R. Parametric and nonparametric strategies to model uncertainties in structural dynamics: a two dof example, Porto, Portugal, 2007.

RUBINSTEIN, R. Y.; KROESE, D. P. **Simulation and the Monte Carlo Method**. [S.l.]: John Wiley and Sons, 2008.

SOIZE, C. A nonparametric model of random uncertanties for reduced matrix models in structural dynamics. **Probabilistic Engineering Mechanics, 15**, 2000. 277-294.

SOIZE, C. A Comprehensive Overview of Non-parametric Probabilistic Approach of Model Uncertainties for Predictive Models in Structural Dynamics. **J. Sound and Vibration**, 2005.

Apêndice A

Ortogonalidade dos modos

A prova das propriedades de ortogonalidade dos modos é apresentada nas linhas abaixo. Dada a equação do movimento expressa como na equação (3.5):

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{X\}e^{i\omega t}=\{0\} \tag{A.1}$$

Substituindo-se $\{X\}e^{i\omega t}$ por um modo em particular $\{\Psi\}_r$ (uma das possíveis soluções), fica-se com:

$$\left([K]-\omega_r^2[M]\right)\{\Psi\}_r=\{0\} \tag{A.2}$$

Pré-multiplicando por um autovetor diferente e transposto:

$$\{\Psi\}_s^T\left([K]-\omega^2[M]\right)\{\Psi\}_r=0 \tag{A.3}$$

Assim como $\{\Psi\}_r$, $\{\Psi\}_s$ também uma solução da equação (A.1) e portanto:

$$\left([K]-\omega_s^2[M]\right)\{\Psi\}_s=\{0\} \tag{A.4}$$

a qual pode ser transposta e pós-multiplicada por $\{\Psi\}_r$, ficando:

$$\{\Psi\}_s^T\left([K]^T-\omega^2[M]^T\right)\{\Psi\}_r=0 \tag{A.5}$$

Porém, dado que [M] e [K] são simétricas, elas são idênticas às suas transpostas e as equações (A.3) e (A.5) podem ser combinadas ficando:

$$\left(\omega_r^2 - \omega_s^2\right)\{\Psi\}_s^T [M]\{\Psi\}_r = 0 \tag{A.6}$$

a qual somente pode ser satisfeita se (assumindo-se $\omega_r \neq \omega_s$)[4]:

$$\{\Psi\}_s^T [M]\{\Psi\}_r = 0 \qquad com \quad r \neq s \tag{A.7}$$

Junto com as equações (A.1) e (A.5) isto significa também que:

$$\{\Psi\}_s^T [K]\{\Psi\}_r = 0 \qquad com \quad r \neq s \tag{A.8}$$

Para os casos em que $r=s$ as equações (A.7) e (A.8) não se aplicam, mas está claro de (A.3) que:

$$\left(\{\Psi\}_r^T [K]\{\Psi\}_r\right) = \omega^2 \left(\{\Psi\}_r^T [M]\{\Psi\}_r\right) \tag{A.9}$$

E finalmente:

$$\begin{aligned} \{\Psi\}_r^T [M]\{\Psi\}_r &= m_r \\ \{\Psi\}_r^T [K]\{\Psi\}_r &= k_r \end{aligned} \tag{A.10}$$

com

$$\omega_r^2 = \frac{k_r}{m_r} \tag{A.11}$$

[4] Pode-se mostrar (CRAIG, 1981) que mesmo que os autovalores tenham multiplicidade geométrica ($\omega_r=\omega_s$) é possível encontrar uma base ortogonal de autovalores para as matrizes K e M dadas as suas propriedades (M positiva definida simétrica e K positiva semi-definida simétrica).

Apêndice B

Sobre as Matrizes do Elemento de Viga Espacial

B.1 – Movimento Axial

Dado um elemento uniforme de comprimento L, densidade de massa ρ, módulo de elasticidade E e área da secção transversal A (Figura 54), Craig (1981) demonstra que as matrizes de massa e rigidez desse elemento quando solicitado na direção axial são dadas pelas equações (B.1) e (B.2).

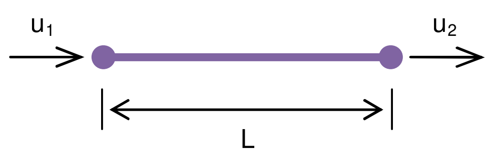

Figura 54 – Elemento de viga uniforme sob deformação axial

$$k_A = \left(\frac{AE}{L}\right)\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.1}$$

$$m_A = \left(\frac{\rho AL}{6}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

B.2 – Movimento Transversal

Considerando este mesmo elemento, com as mesmas características acrescentadas do momento de inércia I, os coeficientes de massa e rigidez associados aos deslocamentos w_1, v_1, w_2

e v_2 e às rotações θ_{y1}, θ_{y2}, θ_{z1} e θ_{z2} são baseados nas equações de esforços transversais no plano xz e xy (Figura 55). Tais coeficientes são dados pelas equações (B.3) e (B.4).

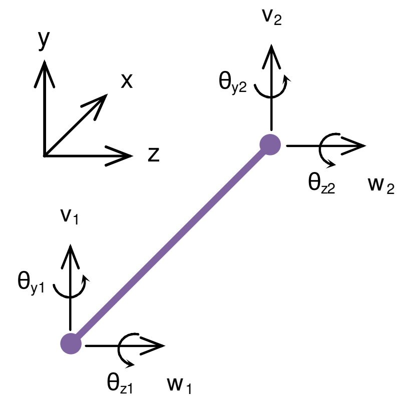

Figura 55 – Elemento de viga uniforme sob deformação transversal

$$k_T = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

$$m_T = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{B.4}$$

B.3 – Movimento Torcional

A Figura 56 mostra as coordenadas locais de um elemento de viga uniforme sob solicitação torcional.

Figura 56 – Elemento de viga uniforme sob deformação torcional

Considere I_p como sendo o momento de inércia da seção transversal em torno do eixo axial do elemento e GJ como sendo a rigidez torcional. Neste caso, as matrizes de rigidez e massa do elemento ficam:

$$k_\theta = \frac{JG}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

$$m_\theta = \frac{\rho I_p L}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.6}$$

B.4 – Elemento de viga tridimensional

Os graus de liberdade mostrados nos elementos das seções anteriores podem ser agrupados para formar um único elemento com 12 graus de liberdade (Figura 57).

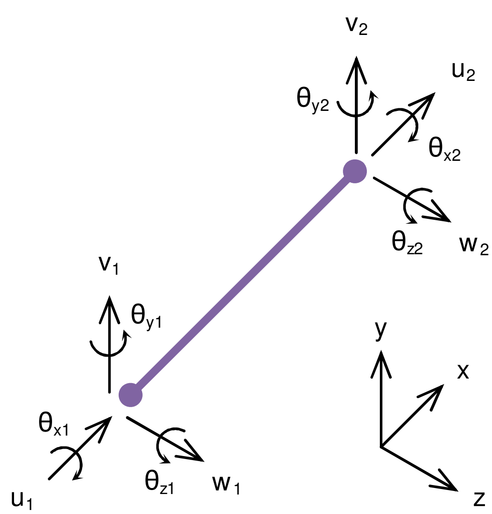

Figura 57 – Elemento de viga uniforme tridimensional

As matrizes de rigidez e massa deste elemento são dadas pelas equações (B.7) e (B.8) respectivamente. Os momentos de inércia desta secção são representados por I_y e I_z e I_p é o momento de inércia polar sobre o eixo x.

As demais propriedades são representadas por:

- L – comprimento do elemento

- A – área da secção transversal
- ρ – densidade de massa
- E – módulo de elasticidade
- G – rigidez torcional
- I – momento de inércia relativo ao eixo transversal do elemento (x, y ou z)
- I_p – momento de inércia relativo ao eixo axial do elemento.

$$[k]=\begin{bmatrix}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2}\\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0\\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L}\\
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2}\\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{GI_p}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_p}{L} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0\\
0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
\end{bmatrix} \quad \text{(B.7)}$$

$$
[m] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13L \\
0 & 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13L & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{140 I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70 I_p}{A} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & -13L & 0 & -3L^2 & 0 \\
0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & 0 & 13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 \\
70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22L \\
0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22L & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{70 I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140 I_p}{A} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & 0 \\
0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2
\end{bmatrix} \quad \text{(B.8)}
$$

B.5 – Transformação para sistema de coordenadas globais

Esta transformação é bem conhecida e pode ser encontrada em muitos livros-texto. O texto abaixo tem por base o resumo contido na tese de Ahmida (2001).

Em estruturas 3D os seis deslocamentos nodais e o vetor de força nodal são definidos como:

$$
\begin{aligned}
\{u\} &= \{u \quad v \quad w \quad \phi_x \quad \phi_y \quad \phi_z\}^T \\
\{F\} &= \{F_x \quad F_y \quad F_z \quad M_x \quad M_y \quad M_z\}^T
\end{aligned} \quad \text{(B.9)}
$$

onde o vetor de deslocamentos consiste de três translações e três rotações nas três direções locais (x,y,z) em cada nó e o vetor de força é formado também pelas três forças axiais e três momentos nas três direções locais (x,y,z) aplicados em cada nó.

Para um membro de dois nós qualquer o vetor de deslocamentos e o vetor de forças aplicadas definidos para cada nó são relacionados via a seguinte matriz local de rigidez dinâmica:

$$\begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} & k_{ac} & k_{ad} \\ k_{ba} & k_{bb} & k_{bc} & k_{bd} \\ k_{ca} & k_{cb} & k_{cc} & k_{cd} \\ k_{da} & k_{db} & k_{dc} & k_{dd} \end{bmatrix} \{u\} = \{F\} \tag{B.10}$$

onde cada termo k da matriz de rigidez é uma sub-matriz (3x3).

A matriz de rigidez do membro (12x12) é dada normalmente no referencial da coordenada local (x,y,z) que deve ser transformada para o referencial global (X,Y,Z). Esta transformação de coordenadas é feita através da matriz de transformação de coordenadas definida como:

$$[T] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \tag{B.11}$$

onde as translações e as rotações e o vetor de força são transformados via as seguintes relações:

$$\{\hat{u}\} = [T]\{u\} \tag{B.12}$$

$$\{\hat{F}\} = [T]\{F\} \tag{B.13}$$

A matriz de transformação para transformar um sistema de coordenadas cartesianas é definida por:

$$[R] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \dfrac{-C_x C_y \cos(\alpha) - C_z \sin(\alpha)}{D} & D\cos(\alpha) & \dfrac{-C_y C_z \cos(\alpha) - C_x \sin(\alpha)}{D} \\ \dfrac{C_x C_y \sin(\alpha) - C_z \cos(\alpha)}{D} & D\sin(\alpha) & \dfrac{C_y C_z \sin(\alpha) + C_x \cos(\alpha)}{D} \end{bmatrix} \tag{B.14}$$

onde $D = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$ e C_x, C_y e C_z são os cossenos diretores que o membro faz com os eixos globais X, Y, e Z, respectivamente, e α é o ângulo que especifica a rotação em torno do eixo principal. Assim, a relação dos deslocamentos e forças no sistema global de coordenadas pode ser colocada na forma:

$$\left[\hat{k}\right]\{\hat{u}\} = \left\{\hat{F}\right\} \tag{B.15}$$

com:

$$\left[\hat{k}\right] = [T]^T [k][T] \tag{B.16}$$

onde $\left[\hat{k}\right]$ é a matriz de rigidez referenciada nas coordenadas globais X,Y, Z.

De forma análoga,

$$[\hat{m}] = [T]^T [m][T] \tag{B.17}$$

onde $[\hat{m}]$ é a matriz de massa referenciada nas coordenadas globais X,Y, Z.