

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**Implementação de uma Família de Elementos
Finitos de Casca para Problemas Dinâmicos
Transientes com Integração Explícita**

Autor:

Eng. Rodrigo Postal Pinheiro

Orientador:

Prof. Dr. Renato Pavanello

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

Implementação de uma Família de Elementos Finitos de Casca para Problemas Dinâmicos Transientes com Integração Explícita

Autor: Eng. Rodrigo Postal Pinheiro
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

Curso: Pós Graduação em Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de Mestrado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica/ Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Campinas, 2004
S.P. – Brasil

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	7/UNICAMP
	P655i
V	EX
TOMBO BCI	63483
PROC.	10-P-00086-05
C	☐ D ☒
PREÇO	11,00
DATA	05/05/05
Nº CPD	

BIB ID - 349142

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

P655i

Pinheiro, Rodrigo Postal

Implementação de uma família de elementos finitos de casca para problemas dinâmicos transientes com integração explícita / Rodrigo Postal Pinheiro. -- Campinas, SP: [s.n.], 2004.

Orientador: Renato Pavanello.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos dos elementos finitos. 2. Cascas (Engenharia). 3. Dinâmica. 4. Mecânica não-linear. I. Pavanello, Renato. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Titulo em Inglês: Implementation of a Shell finite elements family for transient dynamics with explicit integration.

Palavras-chave em Inglês: Finite element method, Shells (Engineering), Dynamics, Mechanics, nonlinear

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestrado

Banca examinadora: Paulo Sollero e Humberto Breves Coda

Data da defesa: 22/12/2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

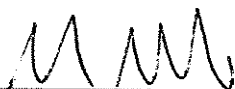
Dissertação de Mestrado

**Implementação de uma Família de Elementos
Finitos de Casca para Problemas Dinâmicos
Transientes com Integração Explícita**

Autor: Eng. Rodrigo Postal Pinheiro
Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello



Prof. Dr. Renato Pavanello
UNICAMP



Prof. Dr. Paulo Sollero
UNICAMP



Prof. Dr. Humberto Breves Coda
EESC - USP

Campinas, 22 de Dezembro de 2004

Dedicatória:

Dedico este trabalho ao meu amado filho e amigo Mateus.

Agradecimentos

Ao meu orientador, por todo o apoio e direcionamento.

À Gisele, pelo afeto e incentivo em todos os momentos.

*“Sonhe sempre...
Tudo que foi construído pelo homem,
começou com um sonho”*

Resumo

PINHEIRO, Rodrigo Postal, *Implementação de uma Família de Elementos Finitos de Casca para Problemas Dinâmicos Transientes com Integração Explícita*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 100 p. Dissertação de Mestrado.

Neste trabalho é apresentada uma implementação de uma família de elementos finitos de casca para problemas dinâmicos transientes com integração explícita. Para isto, são usados um algoritmo de integração do tempo baseado no método das diferenças centrais e duas formulações de elementos finitos de casca com integração reduzida uniforme e controle de modos espúrios de deformação por perturbação. Usa-se um referencial co-rotacional como auxílio à representação cinemática das cascas. São considerados problemas com não linearidades geométrica e de material. A implementação é feita de forma modular, num paradigma de programação estruturada, porém incorporando conceitos de orientação à objetos, de modo a proporcionar uma fácil adaptação a outras aplicações bem como facilidades de expansão e adição de novas funcionalidades.

Palavras Chave

- Elementos Finitos, Estruturas em Casca, Dinâmica, Mecânica Não-Linear.

Abstract

PINHEIRO, Rodrigo Postal, *Implementation of a Shell Finite Elements Family for Transient Dynamics with Explicit Integration*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2004. 100 p. Dissertação de Mestrado.

Within this work, an implementation of a shell finite element family for transient dynamics with explicit integration is presented. A computational implementation is created using a time integration algorithm based on the central difference method and two shell finite element formulations with uniform reduced integration and a perturbation based hourglass control. This implementation is made in a modular approach, under a structured programming paradigm, but using object oriented concepts, providing a core that can be adapted for other applications and expanded with new features

Keywords

- Finite Elements, Shell structures, Dynamics, Non-Linear Mechanics.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiii
1. Introdução	1
1.1. Objetivos	2
1.2. Revisão Histórica	3
1.3. Descrição da Dissertação	7
2. Modelo Mecânico	9
2.1. Medidas de Tensões	9
2.2. Medidas de Deformação	11
2.3. Descrição Co-Rotacional	12
2.3. Princípio das Potências Virtuais	16
3. Integração no Tempo	21
3.1. Solução Por Diferenças Centrais	22
3.2. Amortecimento	25
3.3. Estabilidade	26
3.4. Determinação do Δt Estável	28
4. Elementos Finitos de Casca	30
4.1. Teoria de Reissner-Mindlin Para Placas e Cascas	30
4.2. Elemento de Belytschko-Lin-Tsay (BLT)	33
4.2.1. Sistema de Coordenadas Co-Rotacional do Elemento BLT	33
4.2.2. Formulação Isoparamétrica	36
4.2.3. Cálculo das Forças Internas para o Elemento BLT	40
4.3. Elemento de Belytschko-Wong-Chiang (BWC)	44
4.3.1. Sistema de Coordenadas Co-Rotacional do Elemento BWC	44
4.3.2. Formulação Isoparamétrica aplicada ao Elemento BWC	45
4.3.3. Projeção do cisalhamento	52
4.4. Sub-Integração e Controle de Modos Espúrios	58
4.5. Remoção da Rotação no Plano	62
4.6. Equações Constitutivas	64

4.6.1. Elasticidade Linear Infinitesimal	64
4.6.2. Elasto-Plasticidade	66
4.7. Matriz de Massa	70
5. Implementação Computacional	74
6. Resultados Numéricos e Validação	86
7. Conclusões e Sugestões para Futuros Desenvolvimentos	109
Referências Bibliográficas	112

Lista de Figuras

2.1.1 - Corpo sob ação de uma força de superfície	10
4.2.1.1 - Sistema de coordenadas co-rotacional, elemento BLT	34
4.2.2.1 - Elemento quadrilateral de referência	37
4.3.1.1 - Sistema de coordenadas co-rotacional, elemento BWC	44
4.3.3.1 - Projeção do cisalhamento	54
4.3.3.2 - Seqüência de índices para projeção do cisalhamento	54
5.4.1 - Modos Espúrios de Deformação de Membrana	59
5.4.2 - Modos Espúrios de Deformação de Flexão	60
6.1.1 - Representação geométrica do problema 6.1	86
6.1.2 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, $r_M=0.0$	87
6.1.3 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, $r_M=0.001$	88
6.1.4 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, $r_M=0.01$	88
6.1.5 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, $r_M=0.15$	88
6.1.6 - Deslocamento vertical da linha neutra	89
6.1.7 - Deslocamento vertical da linha neutra, comparação BLT/BWC e QUAD4	90
6.2.1 - Representação geométrica do problema 6.2	91
6.2.2 - Deslocamento do ponto central, comparação para 1 ciclo	92
6.2.3 - Deslocamento do ponto central, comparação para 5 ciclos	93
6.2.4 - Configuração deformada do problema 6.2	93
6.3.1 - Representação geométrica do problema 6.3	94
6.3.2 - Deslocamento vertical do ponto médio	95
6.3.3 - Deslocamento vertical do ponto médio, comparativo entre vários elementos	96
6.3.4 - Configuração deformada para $t=1.5$ s, elemento BWC	96
6.4.1 - Casca hemisférica submetida a esforços concentrados	97

6.4.2 - Deslocamentos do ponto 1 na direção X	98
6.4.3 - Deslocamentos para uma força $F = \pm 1000$	99
6.5.1 - Cilindro submetido a carregamento radial concentrado	100
6.5.2 - Deslocamento radial do ponto de aplicação de carga, elementos BLT e BWC	101
6.5.3 - Deslocamento radial do ponto de aplicação de carga, comparação de resultados	102
6.6.1 - Viga helicoidal sob flexão, malha 12 x 2	103
6.6.2 - Deslocamentos na direção Y	104
6.6.3 - Configuração deformada do problema 6.6	105
6.7.1 - Seqüência de deformação, exemplo 6.7	107
6.7.2 - Tensões equivalentes	108

Lista de Tabelas

5.1.1 – Infraestrutura computacional	74
6.1.1 – Dados do problema 6.1	87
6.2.1 – Dados do problema 6.2	91
6.3.1 – Dados do problema 6.3	94
6.4.1 – Dados do problema 6.4	97
6.5.1 – Dados do problema 6.5	100
6.6.1 – Dados do problema 6.6	103
6.7.1 – Dados do problema 6.7	106

Capítulo 1

Introdução

Em problemas estruturais onde a frequência de excitação é menor de que a terça parte do mais baixo modo de vibração da estrutura, os efeitos de inércia podem ser desprezados e estes problemas podem ser classificados como estáticos ou quase-estáticos. Em problemas nos quais as frequências de excitação são mais elevadas, os efeitos de inércia passam a ter importância e estes problemas podem ser classificados como dinâmicos[10].

Os problemas dinâmicos podem ser divididos em duas categorias, problemas de dinâmica estrutural e problemas de propagação de ondas[10]. Os problemas de dinâmica estrutural geralmente se caracterizam por carregamentos harmônicos, aleatórios ou ergódicos, de média e longa duração, podendo ser analisados no domínio da frequência ou do tempo

Em problemas de propagação de ondas, o carregamento externo geralmente é exercido por impacto ou em forma de impulsos, de modo que a excitação normalmente possui um espectro rico em altas frequência. Este tipo de fenômeno, altamente transiente, caracteriza-se pela curta duração e o interesse da análise está usualmente voltado para o efeito que as ondas de choque e tensão causam na estrutura ao percorrê-la [10]. Várias metodologias tem sido empregadas para a análise de fenômenos de propagação de ondas, desde métodos analíticos, como os apresentados por Doyle [14], até métodos numéricos aproximados como o método dos elementos espectrais [13][14]. Para fenômenos de propagação de ondas envolvendo estruturas arbitrárias e complexas, sujeitas a não-linearidades e submetidas a carregamentos igualmente complexos e arbitrários, como, por exemplo, em colisões de veículos, conformação mecânica e balística, o método dos elementos finitos com integração dinâmica explícita tem sido largamente utilizado[3].

Neste trabalho, um algoritmo de integração dinâmica explícita, baseado no método das diferenças centrais, é empregado como o núcleo de um programa de simulação de estruturas em casca pelo método dos elementos finitos.

Este tipo de integrador explícito é encontrado em programas comerciais e de universidades muito empregados na indústria automobilística e aeroespacial, tais como LS-DYNA3D [18], ,PRONTO3D [34], PamCrash [6], MSC/Dytran [27], ABAQUS/Explicit [30], entre outros. Suas principais vantagens são a simplicidade, a flexibilidade e a eficiência computacional, conforme apresentado no capítulo 3. Sua principal desvantagem é o fato de ser condicionalmente estável, o que limita o tamanho do incremento de tempo usado em cada iteração e restringe sua aplicação em problemas dinâmicos de longa duração.

Estruturas modeladas por elementos finitos de casca podem ser encontradas em várias áreas da engenharia, tais como mecânica, automobilística, aeroespacial, civil e naval. Para a implementação neste trabalho, foram empregados duas formulações de elementos finitos de casca quadrilaterais, com interpolação isoparamétrica bi-linear, sistema de coordenadas co-rotacional, integração reduzida uniforme e controle de modos espúrios de deformação. Este tipo de elemento apresenta características que são muito importantes para os sistemas baseados em algoritmos dinâmicos explícitos. A integração reduzida uniforme faz com que o número de operações computacionais necessárias por elemento em cada incremento de tempo seja significativamente reduzido, visto que muito do custo computacional dos elementos está associado a avaliação de equações constitutivas nos pontos de integração[3]. A formulação co-rotacional permite que as equações da mecânica do contínuo sejam representadas de maneira objetiva, eliminando grande parte da complexidade associada a problemas com grandes deslocamentos e grandes deformações[7].

1.1. Objetivos

O presente trabalho tem por objetivo principal a avaliação das tecnologias atualmente disponíveis e a implementação de forma modular e expansível de uma família de elementos de casca e dos algoritmos fundamentais de um programa de elementos finitos destinado à simulação de problemas transientes não-lineares, com integração dinâmica explícita, na forma de um programa de código fonte aberto e de acesso livre.

Como objetivos secundários, mas que desempenham um papel fundamental nesta implementação, destacam-se o estudo da mecânica do contínuo para problemas baseados em

taxas de deformações e tensões, o estudo da descrição co-rotacional para problemas envolvendo grandes deslocamentos e grandes rotações, o estudo dos algoritmos de integração dinâmica e o estudo das formulações de elementos finitos de casca em problemas com seis graus de liberdade por nó.

A modularidade da implementação deve permitir que vários segmentos do sistema sejam planejados e codificados independentemente, de modo a propiciar flexibilidade e facilidade de expansão, simplificando a adição de novas funcionalidades, garantindo a longevidade do código.

1.2. Revisão Histórica

Para atingirem seu atual grau de aplicabilidade, os principais sistemas e programas de elementos finitos para dinâmica transiente não-linear, com integração explícita, têm experimentado um contínuo desenvolvimento, que já se estende por quase três décadas.

Em 1976, nos Estados Unidos, foi publicada por John Hallquist, do Lawrence Livermore National Laboratories, a primeira versão do DYNA3D [18]. Contando basicamente com formulações de elementos sólidos e de membrana, com interpolações lineares e parabólicas, e elementos lineares de cabo, esta versão do código trazia para uma abordagem dinâmica não-linear aquilo que era a prática estabelecida, na época, nas análises lineares estáticas por elementos finitos e nos códigos baseados em diferenças finitas.

Após os desenvolvimentos iniciais, vários aspectos práticos da implementação de sistemas de elementos finitos por algoritmos de integração explícita ficaram patentes.

Os elementos de ordem superior (quadrática), apesar de representarem os modos de baixa frequência com precisão adequada, apresentavam dois grandes inconvenientes. Um grande ruído de ordem numérica, em parte devido ao fato da utilização obrigatória de uma matriz de massa diagonal em códigos explícitos. Um custo computacional extremamente elevado, devido ao grande número de operações necessárias em cada elemento e pelo pequeno incremento de tempo requerido para assegurar a estabilidade do integrador explícito.

Mesmo para os elementos de baixa ordem (lineares), o uso da integração reduzida se fazia quase obrigatório para viabilizar os custos das análises. Porém nos elementos com integração reduzida uniforme, a ordem das restrições imposta pelas equações que definem a rigidez é menor

que o número de graus de liberdade subtraídos dos modos de corpo rígido. Com isso, dá-se o aparecimento de modos espúrios de deformação, também chamados de mecanismos, modos “ampulheta” ou modos de deformação com energia nula [35]. Estes modos, quando excitados, amplificam-se rapidamente, dominando a resposta e destruindo a qualidade da solução[18].

A busca por elementos sub-integrados com controle dos modos espúrios tornou-se uma necessidade para assegurar a performance e a qualidade dos resultados.

No início da década de 80, D. P. Flanagan e T. Belytschko [15] publicaram um procedimento para o tratamento e controle dos modos espúrios em elementos isoparamétricos sólidos bi e tridimensionais lineares. Baseados no trabalho de Hughes [21], sobre integração reduzida seletiva, eles desenvolveram elementos com integração reduzida uniforme e estabilização de modos espúrios para quadriláteros e hexaedros de geometria arbitrária. O fundamento do procedimento de estabilização está na perturbação do campo de deformações através da adição de deformações generalizadas que são ativadas pela ocorrência de modos de deformação sem energia, mas mantém-se ortogonais aos modos de corpo rígido. Sendo robusto, preciso e muito econômico, este elemento mostrou-se como uma alternativa aos elementos de ordem superior dos códigos explícitos. Um grande atrativo deste artigo é que ele traz o código fonte da implementação, em FORTRAN 77. Como inconveniente, esta formulação faz uso de coeficientes de penalização dos modos espúrios que empregam em sua determinação parâmetros “ad hoc”. Mesmo não influenciando grandemente a solução, estes parâmetros são arbitrários e afetam a rigidez, precisando ser adequadamente definidos.

Logo ao serem desenvolvidos, estes elementos foram prontamente incorporados aos principais códigos explícitos da época. John Hallquist fez sua implementação no DYNA3D[18]. Com a transferência do próprio Dennis Flanagan para os Sandia National Laboratories., eles foram incorporados ao programa PRONTO3D [34], um código dinâmico transiente não-linear, com integração explícita, desenvolvido naquela instituição.

O ganho de performance experimentado com a adoção dos elementos sub-integrados, na época, chegou a uma ordem de magnitude, possibilitando a solução de muitos problemas de engenharia em escala industrial.

Diferentemente dos elementos sólidos, os elementos de casca ainda precisavam de muito desenvolvimento para ser incorporados aos códigos explícitos e tornarem-se capazes de obter a performance e a qualidade necessárias para as aplicações dinâmicas não-lineares em engenharia.

Em 1981, foi publicado um elemento para análise tridimensional quase-estática de cascas, desenvolvido por Hughes e Liu [20]. Este elemento, chamado de HL, baseado no conceito de sólido degenerado de Ahmad, Irons e Zienkiewicz [1], apresenta em sua formulação recursos para o tratamento de grandes rotações, grandes deformações e é adequado para uma grande variedade de equações constitutivas não-lineares. Entre suas principais características pode-se ressaltar a integração reduzida seletiva generalizada para o caso não linear, um algoritmo incremental para o tratamento de grandes rotações nas equações constitutivas, para a manutenção da condição de nulidade da tensão normal de cascas, sistemas de coordenadas co-rotacionais nos pontos de integração, e um tratamento simples e efetivo para os graus de liberdade de rotações no plano, quando sob rotações finitas. Esta formulação e suas características são usadas em muitos elementos formulados posteriormente[36], e certamente constituem um marco no desenvolvimento de elementos finitos de casca não-lineares. Porém, a utilização da integração reduzida seletiva traz sempre um maior custo computacional do que a integração reduzida uniforme[21].

O elemento de T. Belytschko, J. I. Lin, C.S. Tsay [3], chamado de BLT, publicado em 1984, estendeu para as cascas a mesma abordagem feita para os elementos sólidos sub-integrados com controle de modos espúrios por perturbação desenvolvidos por Flanagan e Belytschko em [15]. Este elemento bi-linear de quatro nós, desenvolvido especificamente para uso com integração dinâmica explícita, baseia-se na teoria de Reissner-Mindlin [10] e traz como principais características o uso de uma formulação co-rotacional, a integração reduzida uniforme, um controle de modos espúrios que é ortogonal aos modos de corpo rígido, um suporte para relações constitutivas não-lineares e a capacidade para o tratamento de grandes deslocamentos, grandes deformações e grandes rotações. O uso de um sistema de coordenadas co-rotacional local, ao qual todas as equações ao nível do elemento são referenciadas, simplifica grandemente o tratamento de não-linearidades e da anisotropia. A adoção de equações constitutivas baseadas em taxas de deformação diminui o número de operações realizadas em cada incremento e permite a manipulação de um grande número de modelos de material, como descrito em [11][26][29]. No elemento de BLT, há o desacoplamento entre os graus de liberdade de membrana e de flexão, fazendo com que seus resultados sejam de relativamente baixa qualidade quando o elemento apresenta empenamento fora do plano, em configurações onde os quatro nós não são coplanares[6]. Em configurações distorcidas, ele também não passa no “patch-test” dinâmico

explícito[6]. Em termos de performance computacional, entretanto, este elemento tem se mostrado o mais eficiente dentre os elementos de casca bi-lineares, para aplicações transientes não lineares explícitas[17][18].

Somente após dez anos de desenvolvimento é que os elementos de casca chegaram aos principais códigos explícitos. Em 1985, John Hallquist [18], adicionou uma implementação do elemento de Hughes e Liu ao DYNA3D. Em 1986, o elemento BLT teve sua implementação adicionada aos programas PRONTO3D[34] e DYNA3D[18]. Na mesma época, a empresa francesa ESI, que desenvolve e comercializa o PAM-CRASH, contratou o Prof. Belytschko [7] como consultor, implementando em seu código muitos algoritmos por ele desenvolvidos.

Com o objetivo de eliminar as falhas do elemento BLT, mantendo ao máximo o mesmo nível de performance computacional, T. Belitschko, B. L. Wong e H.Y. Chiang [6], desenvolveram um elemento similar, chamado de BWC, publicado em 1992. Mantidas as mesmas características básicas do elemento de BLT, como a formulação co-rotacional e o controle de modos espúrios por perturbação, foram adicionadas duas características importantes. A interpolação da normal para todo o domínio, baseada na superfície bi-linear descrita pelos quatro nós do elemento, resultando no acoplamento entre flexão e membrana. O uso do conceito de projeção nodal do cisalhamento, desenvolvido independentemente por Hughes e Tesduyar [21], para seu elemento T1, e por McNeal [23] para seu elemento QUAD4. Esta projeção nodal do cisalhamento faz com que o elemento seja capaz de representar um estado de deformação de cisalhamento constante em configurações quadrilaterais arbitrárias. Estas modificações melhoram significativamente a qualidade dos resultados para configurações distorcidas e empenadas, adicionando um custo computacional de cerca de apenas 10%. Este elemento passa no “patch-test” e apresenta resultados muito bons em problemas onde o empenamento é relevante, equivalendo-se em qualidade ao elemento de Hughes e Liu [20], a um custo computacional muito menor. Mas, o acoplamento entre membrana e flexão, nesta formulação, funciona perfeitamente apenas com a utilização de 5 graus de liberdade por nó, isto é, a rotação no plano não está presente como grau de liberdade nem ao nível do elemento, nem ao nível global. O que, para aplicações gerais de engenharia é uma limitação severa.

T. Belytschko, I. Leviatan [8], 1994, desenvolveram um esquema de projeção sobre o campo de deslocamentos no elemento que assegura a invariância da potência interna quanto a rotações de corpo rígido e rotações no plano do elemento (“drilling freedom”). Esta projeção é

baseada em um procedimento que extrai os componentes de deformação pura, a partir de um campo de deslocamentos, corrigindo as formulações que apresentam modos de corpo rígido não-nulos, como o elemento de BWC[6].

Adicionado destas melhorias, o elemento de BWC[6] foi incorporado aos programas DYNA3D e PAM-CRASH e, juntamente com os elementos de HL[20] e BLT[3] constituem as principais opções para o modelamento de cascas nestes sistemas. Implementações similares podem ser encontradas nos programas ABAQUS/Explicit e MSC/DYTRAN[27].

Apesar dos elementos de BWC[6] e de HL[20] apresentarem resultados dramaticamente superiores aos do elemento BLT[3], na solução dos problemas simples de “benchmark”, comparações entre estes elementos em problemas reais de engenharia, de grande porte e envolvendo grandes complexidades, como a simulação de uma colisão frontal de automóveis [7] ou a estampagem profunda de um painel de chapa fina [17], mostram que estes elementos apresentam resultados muito semelhantes e, em alguns ocasiões, indistinguíveis. No caso da estampagem profunda[17], as diferenças verificadas em resultados como deformações e medidas de alimentação de chapa são inferiores a 1%, porém o custo computacional do elemento de HL[20], com integração seletiva reduzida, é cerca de 650% maior que o do elemento de BLT[3].

1.3. Descrição da Dissertação

Nesta dissertação é apresentada uma implementação de um sistema computacional contendo de duas formulações de elementos finitos de casca para problemas dinâmicos transientes com integração explícita.

O primeiro capítulo traz uma introdução e uma revisão histórica das principais tecnologias utilizadas nesta implementação.

O segundo capítulo traz uma descrição do modelo mecânico empregado, apresentando as medidas de tensões e as taxas de deformação utilizadas na implementação e mostrando a dedução da equação do movimento a partir do princípio das potências virtuais.

O terceiro capítulo apresenta um algoritmo de integração no tempo baseado no método das diferenças centrais, implementado a partir da equação do movimento apresentada no

primeiro capítulo. São abordadas as principais características deste algoritmo bem como sua estabilidade.

No quarto capítulo são apresentadas duas formulações de elementos finitos de casca. Primeiramente, as hipóteses de Mindlin-Reissner para cascas semi espessas são empregadas para a determinação das componentes do tensor taxa de deformação. Em seguida, a formulação do elemento de Belytschko-Lin-Tsay é apresentada. Inteiramente baseada no tensor taxa de deformação, uma metodologia isoparamétrica bi-linear com integração reduzida uniforme é empregada para a obtenção de expressões algébricas simples para o cálculo das forças internas nodais. A formulação do elemento de Belytschko-Wong-Chiang é apresentada na sequência. Derivado diretamente do elemento de Belytschko-Lin-Tsay, este elemento traz em sua formulação duas características adicionais, o tratamento das deformações de cisalhamento por um esquema de projeção e o acoplamento entre os termos de membrana e flexão. O controle de modos espúrios por um método de perturbação e um esquema de remoção do grau de liberdade de rotação no plano são apresentados no final deste capítulo.

O quinto capítulo traz uma descrição da implementação computacional realizada e apresenta os principais algoritmos utilizados, na forma de pseudo-código.

O sexto capítulo traz resultados numéricos obtidos com o sistema implementado em problemas clássicos de validação de elementos finitos de casca, juntamente com resultados comparativos obtidos com sistemas comerciais de elementos finitos.

O sétimo capítulo traz a conclusão e sugestões para próximos estudos e desenvolvimentos.

Capítulo 2

Modelo Mecânico

Neste capítulo são primeiramente apresentadas as medidas de tensão e deformação usadas neste trabalho, ressaltando suas características mais relevantes. Em seguida, o princípio das potências virtuais é empregado para a dedução da equação do movimento usada como núcleo para a integração do tempo.

2.1. Medidas de Tensões

Considera-se um corpo contínuo em uma configuração inicial, representado por um volume V_0 , sendo S_0 uma superfície de referência definida em V_0 , com sua normal representada por $\{\mathbf{n}_0\}$. Sobre Γ_0 atua uma força de superfície $\{\mathbf{f}\}$. Após experimentar uma deformação, o corpo contínuo assume sua configuração atual, passando a ocupar o espaço representado pelo volume V , a superfície de referência é agora representada por S , de normal $\{\mathbf{n}\}$, onde atua a força de superfície $\{\mathbf{f}\}$.

Seja $\{\mathbf{t}\}$ o vetor de trações sobre esta superfície (força por unidade de área) que equilibram a ação da força $\{\mathbf{f}\}$, de modo que

$$\{\mathbf{t}\} dS = d\{\mathbf{f}\} \quad (2.1)$$

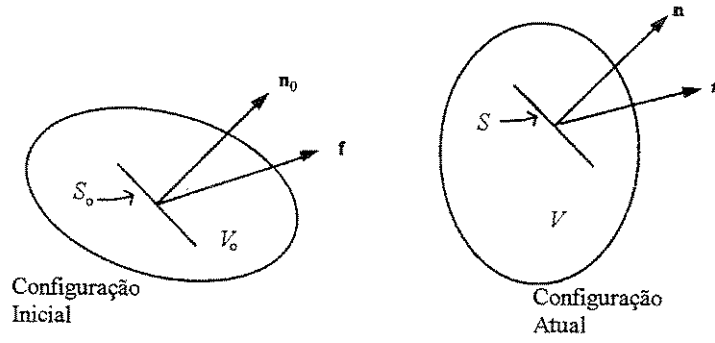


Figura 2.1.1. Corpo sob ação de uma força de superfície

Numa descrição Lagrangeana do movimento deste corpo, as tensões são definidas pela equação de Cauchy [25]:

$$\{\mathbf{n}\} \cdot [\boldsymbol{\sigma}] dS = \{\mathbf{t}\} dS \quad (2.2)$$

onde $[\boldsymbol{\sigma}]$ representa o tensor tensão de Cauchy, normalmente referenciado como a medida das tensões verdadeiras, pois está associado às forças que atuam na superfície de referência na configuração atual.

O tensor tensão de Cauchy pode ser expresso matricialmente da seguinte forma:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

com $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ e $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, evidenciando a sua simetria, ou seja:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [\boldsymbol{\sigma}]^T \quad (2.4)$$

Uma característica do tensor tensão de Cauchy que o torna uma medida de tensões bastante conveniente para o estudo da mecânica do contínuo é o fato de ele ser invariante por definição [25], isto é, quando o mesmo estado de tensões é observado em dois sistemas de

referência distintos, $\mathbf{O}$ e $\mathbf{O}'$, os tensores de tensão de Cauchy em cada sistema, $[\sigma]$ e $[\sigma']$, apresentam os mesmos autovalores e se transformam de um sistema para o outro de acordo com a regra do cálculo tensorial:

$$[\sigma'] = [\mathbf{T}]^T [\sigma] [\mathbf{T}] \quad (2.5)$$

onde $[\mathbf{T}]$ é matriz de transformação entre os sistemas e representa a orientação relativa entre ambos.

Neste trabalho, o tensor tensão de Cauchy será empregado em todas as medidas de tensões.

2.2. Medidas de Deformação

Considera-se um sistema cartesiano de referência, onde $\{\mathbf{x}\}$, de componentes x_i , representa o vetor posição de um ponto, $\{\mathbf{v}\}$, de componentes v_i , representa o vetor velocidade deste ponto, e $\{\mathbf{u}\}$, de componentes u_i , é o vetor de seus deslocamentos.

O tensor *gradiente de velocidade* $[\mathbf{L}]$, de componentes L_{ij} , representa os gradientes espaciais da velocidade de um ponto material [25][31], cujas componentes são dadas, em notação indicial, por:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.6)$$

O tensor $[\mathbf{L}]$ pode ser decomposto como a soma entre um tensor simétrico, $[\mathbf{D}]$, e um tensor anti-simétrico, $[\mathbf{W}]$, da seguinte forma

$$[\mathbf{L}] = [\mathbf{D}] + [\mathbf{W}] \quad (2.7)$$

com as seguintes componentes

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.8)$$

Na expressão (2.7), $[\mathbf{D}]$ é o tensor *taxa de deformação*, e suas componentes D_{ij} são dadas por

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

O tensor $[\mathbf{D}]$ apresenta algumas características relevantes. Ele representa uma medida *exata* da taxa de deformação espacial de um ponto material. É invariante com relação a translações e rotações de corpo rígido, transformando-se adequadamente pelas regras do cálculo tensorial:

$$[\mathbf{D}'] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{R}] \quad (2.10)$$

onde $[\mathbf{R}]$ é um tensor simétrico que expressa as rotações de um corpo rígido. Suas componentes, D_{ij} , são lineares em relação às componentes do vetor velocidade, v_i [25][31].

Na expressão (2.7), $[\mathbf{W}]$ é o *tensor vorticidade*, e suas componentes W_{ij} , são dadas por

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.11)$$

O tensor W é uma medida da taxa de rotação de um elemento de volume de um meio contínuo.

2.3. Descrição Co-Rotacional

Supõe-se um corpo material em sua configuração inicial, num instante de tempo t , conforme a seção 2.1. Após experimentar deslocamentos e deformações, este corpo passa a

ocupar a sua configuração atual, num instante de tempo $(t+1)$, conforme a figura 2.1.1.

A tensão em um ponto material deste corpo, na configuração inicial, era $[\sigma_o]$. Na configuração atual, o tensor taxa de deformação e o tensor vorticidade neste mesmo ponto são dados por $[\mathbf{D}]$ e $[\mathbf{W}]$, respectivamente.

Rotacionando-se o tensor tensão entre as configurações inicial e atual, tem-se que:

$$[\sigma_o^{t+1}] = [\mathbf{R}]^T [\sigma_o^t] [\mathbf{R}] \quad (2.12)$$

onde $[\mathbf{R}]$ é um tensor que representa adequadamente a rotação de corpo rígido que o material experimentou ao ir da configuração inicial para a atual.

Assumindo-se que o incremento de tensões causado pelas deformações experimentadas pelo corpo seja dado por

$$\Delta[\sigma] = [\mathbf{C}_M] \cdot [\mathbf{D}] \Delta t \quad (2.13)$$

onde $[\mathbf{C}_M]$ é um tensor que representa as propriedades constitutivas do material. Desta forma, o estado de tensões deste ponto material, na configuração atual pode ser dado por:

$$[\sigma^{t+1}] = [\sigma_o^{t+1}] + \Delta[\sigma] \quad (2.14)$$

Substituindo-se as equações (2.12) e (2.13) na equação (2.14), tem-se que

$$[\sigma^{t+1}] = [\mathbf{R}]^T [\sigma_o^t] [\mathbf{R}] + [\mathbf{C}_M] \cdot [\mathbf{D}] \Delta t \quad (2.15)$$

Conforme apresentado em [19], pode-se escrever que

$$[\mathbf{R}] \cong [\mathbf{I}] + [\mathbf{W}] \Delta t \quad (2.16)$$

onde $[\mathbf{I}]$ é a matriz identidade de terceira ordem e Δt é o intervalo de tempo decorrido entre os instantes t e $t+1$. Segundo [19], esta aproximação só é válida para pequenos intervalos de tempo.

Substituindo-se a equação (2.16) na equação (2.15), tem-se que

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{t+1} \right] = \left\{ \left[\mathbf{I} \right] + \left[\mathbf{W} \right]^T \Delta t \right\} \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \left\{ \left[\mathbf{I} \right] + \left[\mathbf{W} \right] \Delta t \right\} + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D} \right] \Delta t \quad (2.17)$$

Manipulando-se a expressão acima

$$\left[\boldsymbol{\sigma}^{t+1} \right] = \left\{ \left[\mathbf{I} \right] + \left[\mathbf{W} \right]^T \Delta t \right\} \left\{ \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \left[\mathbf{I} \right] + \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \cdot \left[\mathbf{W} \right] \Delta t \right\} + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D} \right] \Delta t \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{\sigma}^{t+1} \right] = & \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] + \left[\mathbf{W} \right]^T \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \Delta t + \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \cdot \left[\mathbf{W} \right] \Delta t + \\ & + \left[\mathbf{W} \right]^T \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \cdot \left[\mathbf{W} \right] \Delta t^2 + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D} \right] \Delta t \end{aligned} \quad (2.19)$$

Desprezando-se o termo em Δt^2 , por ser considerado muito pequeno, pode-se escrever que

$$\frac{\left[\boldsymbol{\sigma}^{t+1} \right] - \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right]}{\Delta t} = \left[\mathbf{W} \right]^T \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] + \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \cdot \left[\mathbf{W} \right] + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D} \right] \quad (2.20)$$

$$\frac{\Delta \left[\boldsymbol{\sigma} \right]}{\Delta t} = \left[\mathbf{W} \right]^T \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] + \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \cdot \left[\mathbf{W} \right] + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D} \right] \quad (2.21)$$

No limite para Δt tendendo a zero, tem-se

$$\frac{\partial \left[\boldsymbol{\sigma} \right]}{\partial t} = \left[\dot{\boldsymbol{\sigma}} \right] = \left[\mathbf{W} \right]^T \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] + \left[\boldsymbol{\sigma}_o^t \right] \cdot \left[\mathbf{W} \right] + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D} \right] \quad (2.22)$$

Fazendo-se

$$\Delta \left[\boldsymbol{\sigma} \right]^V = \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D} \right] \quad (2.23)$$

tem-se que

$$\Delta[\boldsymbol{\sigma}]^J = [\dot{\boldsymbol{\sigma}}] - [\mathbf{W}]^T [\boldsymbol{\sigma}_o'] - [\boldsymbol{\sigma}_o'] \cdot [\mathbf{W}] \quad (2.24)$$

A expressão (2.24) é chamada incremento de tensões de Jaumann, [12], e denota que ao comparar-se as taxas de tensões, medidas entre as configurações inicial e atual, é preciso considerar as rotações de corpo rígido experimentadas pelo corpo material, representadas pelo tensor vorticidade $[\mathbf{W}]$.

O incremento de Jaumann leva em conta todas as não-linearidades geométricas, representadas pelo tensor taxa de deformação e é válido para grandes deformações e grandes deslocamentos, desde que calculados em pequenos incrementos de tempo, conforme expresso em pela equação (2.16). O tensor vorticidade $[\mathbf{W}]$ representa exatamente as velocidades de rotação de um corpo material para grandes deslocamentos e grandes deformações, porém é limitado a pequenas distorções, ou deformações de cisalhamento menores que 0.4 [12]. Acima deste valor, as velocidades de rotação do corpo somente podem ser precisamente calculadas através da decomposição polar das derivadas materiais do campo de deslocamentos [12].

Supondo-se que um sistema de coordenadas $\mathbf{O}$ seja construído em um ponto $\{\mathbf{p}\}$ do corpo material na configuração inicial. Supondo-se que após uma rotação de corpo rígido, a partícula que um o ponto $\{\mathbf{p}\}$, na configuração inicial, agora ocupa um ponto $\{\mathbf{p}'\}$, na configuração atual, e que o sistema de coordenadas $\mathbf{O}$ experimentou exatamente a mesma rotação que o material e passou a assumir orientação $\mathbf{O}'$, na configuração atual.

Seja $[\mathbf{T}]$ a matriz de transformação entre os sistemas $\mathbf{O}$ e $\mathbf{O}'$, tal que $[\mathbf{T}]^{-1} = [\mathbf{T}]^T$. Deste modo, o tensor tensão $[\boldsymbol{\sigma}_o]$ medido em $\{\mathbf{p}\}$, expresso no sistema $\mathbf{O}$, pode ser transformado para o sistema $\mathbf{O}'$ da seguinte maneira

$$[\boldsymbol{\sigma}_o'] = [\mathbf{T}]^T [\boldsymbol{\sigma}_o] [\mathbf{T}] \quad (2.25)$$

Avaliando-se a equação (2.15) no sistema $\mathbf{O}$, tem-se que

$$[\boldsymbol{\sigma}^{t+1}] = [\mathbf{R}]^T [\boldsymbol{\sigma}_o'] [\mathbf{R}] + [\mathbf{C}_M] \cdot [\mathbf{D}'] \Delta t \quad (2.26)$$

Substituindo-se o inverso da equação (2.25) na equação (2.26)

$$\left[\boldsymbol{\sigma}'^{t+1} \right] = \left[\mathbf{R} \right]^T \left[\mathbf{T} \right] \left[\boldsymbol{\sigma}'_o \right] \left[\mathbf{T} \right]^T \left[\mathbf{R} \right] + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D}' \right] \Delta t \quad (2.27)$$

como $\left[\mathbf{T} \right] = \left[\mathbf{R} \right]$ se o sistema $\mathbf{O}$ rotaciona exatamente com o material, então

$$\left[\boldsymbol{\sigma}'^{t+1} \right] = \left[\boldsymbol{\sigma}'_o \right] + \left[\mathbf{C}_M \right] \cdot \left[\mathbf{D}' \right] \Delta t \quad (2.28)$$

A equação (2.28) denota que com o uso de um sistema co-rotacional, as tensões no instante $(t+1)$, expressas no sistema $\mathbf{O}'$ podem ser comparadas diretamente com as tensões no instante t , expressas no sistema $\mathbf{O}$. Sendo equivalente a expressão obtida para o incremento de Jaumann. Esta expressão simplifica sobremaneira o tratamento das não-linearidades geométricas.

2.3. Princípio das Potências Virtuais

Considera-se um volume arbitrário V que caracteriza um meio contínuo. Seja um campo de tensões definido em V , cujas componentes satisfazem a equação do movimento de Cauchy [25][31]:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho \ddot{x}_j \quad (2.29)$$

Considera-se também um campo arbitrário de velocidades, $\{\mathbf{v}\}$, definido em V , com componentes v_i , diferenciáveis em relação ao espaço, de forma que o tensor taxa de deformação pode ser expresso a partir deste campo de velocidades, da seguinte forma:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.30)$$

Fazendo-se o produto $\sigma_{ij}D_{ij}$ e integrando-se no volume V , levando-se em conta a simetria, tem-se

$$\int_V \sigma_{ij}D_{ij}dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dV \quad (2.31)$$

$$\int_V \sigma_{ij}D_{ij}dV = \int_V \left(\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dV \quad (2.32)$$

aplicando-se a regra da cadeia da derivação, obtém-se

$$\int_V \sigma_{ij}D_{ij}dV = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}v_j) - v_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \right\} dV \quad (2.33)$$

Substituindo-se a equação (2.29) na equação (2.33), tem-se que:

$$\int_V \sigma_{ij}D_{ij}dV = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}v_j) + \rho v_j b_j - \rho v_j \ddot{x}_j \right\} dV \quad (2.34)$$

$$\int_V \sigma_{ij}D_{ij}dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij}v_j) dV + \int_V (\rho v_j b_j - \rho v_j \ddot{x}_j) dV \quad (2.35)$$

aplicando-se o teorema da divergência sobre a primeira parcela à direita da equação, tem-se

$$\int_V \sigma_{ij}D_{ij}dV = \int_S \sigma_{ij}v_j n_i dS + \int_V (\rho v_j b_j - \rho v_j \ddot{x}_j) dV \quad (2.36)$$

onde S é a superfície de contorno de V . Fazendo-se $n_i \sigma_{ij} = \tau_j$ as componentes de força por unidade de área normais em S , resultantes do campo de tensões, pode-se escrever

$$\int_V \sigma_{ij} D_{ij} dV = \int_S v_j \tau_j dS + \int_V (\rho v_j b_j - \rho v_j \ddot{x}_j) dV \quad (2.37)$$

que é a equação do princípio das potências virtuais para o volume V , onde a taxa de trabalho realizado pelo campo de tensões σ_{ij} sobre o campo de velocidades v_i é igual a taxa de trabalho realizado pelas forças de inércia e pelas forças de superfície e de corpo associadas à σ_{ij} no mesmo campo [25][31].

Uma grande vantagem da formulação representada pela equação (2.37) é o fato de não incluir nenhuma hipótese restritiva quanto às deformações, aos deslocamentos e às rotações serem de caráter infinitesimal, assim este princípio pode ser usado para problemas com grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações [25].

Outro ponto importante a ser mencionado é o fato de nenhuma hipótese de conservação de energia estar presente neste princípio, sendo este aplicável mesmo em fenômenos onde a energia mecânica não é conservada, como por exemplo em problemas envolvendo deformações plásticas[25].

O princípio das potências virtuais, como expresso acima, pode ser usado para deduzir a equação do movimento para um problema dinâmico. Assumindo-se uma discretização com aproximação nodal para o campo de velocidades, tem-se:

$$v_j \cong \sum_{k=1}^m \phi_k v_j^k = \phi_k v_j^k \quad (2.38)$$

onde ϕ_k e v_j^k são as funções de forma e os valores nodais de velocidades, respectivamente, e m é a ordem da aproximação. Reescrevendo-se o tensor taxa de deformação

$$D_{ij} \cong \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi_k v_i^k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi_k v_j^k) \right\} \quad (2.39)$$

$$D_{ij} \cong \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j} v_i^k \right) + \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} v_j^k \right) \right\} \quad (2.40)$$

$$D_{ij} \cong \frac{1}{2} \left\{ \left(\phi_{k,j} v_i^k \right) + \left(\phi_{k,i} v_j^k \right) \right\} \quad (2.41)$$

e desta forma, o trabalho das forças externas pode ser re-escrito como se segue,

$$\int_V \sigma_{ij} D_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \left\{ \left(\phi_{k,j} v_i^k \right) + \left(\phi_{k,i} v_j^k \right) \right\} dV \quad (2.42)$$

e levando-se em conta a simetria, chega-se a:

$$\int_V \sigma_{ij} D_{ij} dV = \left(\int_V \phi_{k,i} \sigma_{ij} dV \right) v_j^k \quad (2.43)$$

Substituindo-se na equação do princípio das potências virtuais, equação (2.37), tem-se

$$\left(\int_V \phi_{k,i} \sigma_{ij} dV \right) v_j^k = \left\{ \int_S \phi_k \tau_j dS + \int_V (\rho \phi_k b_j - \rho \phi_k \ddot{x}_j) dV \right\} v_j^k \quad (2.44)$$

$$\int_V \phi_{k,i} \sigma_{ij} dV = \int_S \phi_k \tau_j dS + \int_V \rho \phi_k b_j dV - \int_V \rho \phi_k \ddot{x}_j dV \quad (2.45)$$

Assumindo-se a mesma discretização com aproximação nodal para as acelerações, pode-se escrever que

$$\ddot{x}_j \cong \sum_{n=1}^m \phi_n \ddot{x}_j^n = \phi_n \ddot{x}_j^n \quad (2.46)$$

o que conduz a seguinte expressão para o equilíbrio dinâmico,

$$\left(\int_V \rho \phi_k \phi_n dV \right) \ddot{x}_j^n = \int_S \phi_k \tau_j dS + \int_V \rho \phi_k \mathbf{b}_j dV - \int_V \phi_{k,i} \sigma_{ij} dV \quad (2.47)$$

ou em forma matricial,

$$\left[\int_V (\rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]) dV \right] \{\mathbf{a}\} = \int_S ([\mathbf{N}]^T \{\boldsymbol{\tau}\}) dS + \int_V (\rho [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\}) dV - \int_V ([\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}) dV \quad (2.48)$$

com $[\mathbf{N}]$ sendo a matriz das funções de interpolação ϕ_k , $[\mathbf{B}]$ as suas derivadas materiais, $\{\mathbf{a}\}$ o vetor de acelerações nodais $\ddot{x}_j^n$, $\{\boldsymbol{\tau}\}$ o vetor das forças de superfície, $\{\mathbf{b}\}$ o vetor das forças de corpo e $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ um vetor formado pelas componentes simétricas do tensor tensão, σ_{ij} . Ou ainda,

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} - \{\mathbf{F}_{\text{int}}\} \quad (2.49)$$

que é a equação do movimento na forma explícita [10], onde

$$[\mathbf{M}] = \int_V (\rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]) dV \quad (2.50)$$

$$\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} = \int_S ([\mathbf{N}]^T \boldsymbol{\tau}) dS + \int_V (\rho [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\}) dV \quad (2.51)$$

$$\{\mathbf{F}_{\text{int}}\} = \int_V ([\mathbf{B}]^T [\boldsymbol{\sigma}]) dV \quad (2.52)$$

Sendo $[\mathbf{M}]$ a matriz de massa, $\{\mathbf{F}_{\text{ext}}\}$ o vetor de forças externas e $\{\mathbf{F}_{\text{int}}\}$ o vetor de forças internas.

A solução da equação do movimento, equação (2.49) é obtida por um algoritmo de integração explícito, que será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 3

Integração no Tempo

A equação (2.49), reescrita abaixo, representa um sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} - \{\mathbf{F}_{\text{int}}\} \quad (3.1)$$

onde

$$\{\mathbf{a}\} = \{\ddot{\mathbf{x}}\} = \frac{\partial^2 \{\mathbf{x}\}}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

representa o vetor de acelerações.

Em princípio, uma solução para este sistema pode ser obtida empregando-se qualquer método numérico de resolução de sistemas de equações diferenciais [2]. Entretanto, dependendo das características da matriz de massa global, $[\mathbf{M}]$, e dos vetores de força interna, $[\mathbf{F}_{\text{int}}]$, e força externa, $[\mathbf{F}_{\text{ext}}]$, esta solução pode se tornar muito complexa e onerosa [2].

Uma possível abordagem é a integração direta do sistema, obtida através de uma discretização do intervalo de tempo de interesse

$$[t_0, t_N] = \bigcup_{n=0}^{n=N-1} [t_n, t_{n+1}] \quad (3.3)$$

solucionando-se o sistema em apenas alguns instantes, através de incrementos de tempo Δt_n , sendo

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \quad (3.4)$$

As acelerações, as velocidades e os deslocamentos, necessários para a determinação de $\{\mathbf{a}\}$, $\{\mathbf{F}_{int}\}$ e $\{\mathbf{F}_{ext}\}$, precisam ser obtidos ao longo de cada incremento de tempo. O método empregado para esta determinação é o que caracteriza a integração no tempo.

Muitos métodos têm sido empregados com sucesso, como descrito em [21] e [2], mas para grandes sistemas não-lineares com elevada característica transiente, como problemas envolvendo impacto ou explosões, onde a propagação da energia e os efeitos das ondas de tensão são as características de maior interesse, a integração explícita tem se apresentado como o procedimento recomendável [10][18].

3.1. Solução Por Diferenças Centrais

Através da discretização do tempo, o sistema de equações dado por (2.49) pode ser resolvido a partir de expressões de diferenças finitas. Muitos esquemas diferentes baseados em diferenças finitas têm sido elaborados, porém apenas aqueles que são realmente efetivos podem ser usados em problemas de elementos finitos de grande porte, principalmente devido ao custo computacional [2]. Dentre estes, os algoritmos baseados no método de Newmark estão entre os mais difundidos. Genericamente, estes algoritmos podem ser descritos da seguinte maneira, considerando-se um intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_{n+1} + \{\mathbf{F}_{int}\} &= \{\mathbf{F}_{ext}\} \\ \{\mathbf{v}\}_{n+1} &= \{\mathbf{v}\}_n + \Delta t \left[(1-\gamma)\{\mathbf{a}\}_n + \gamma\{\mathbf{a}\}_{n+1} \right] \\ \{\mathbf{d}\}_{n+1} &= \{\mathbf{d}\}_n + \Delta t \{\mathbf{v}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1-2\beta)\{\mathbf{a}\}_n + 2\beta\{\mathbf{a}\}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Onde β e γ são parâmetros que definem as características de estabilidade e acuidade do algoritmo. Um grande número de algoritmos existe correspondendo a diferentes escolhas destes parâmetros .

O método das diferenças centrais é um caso particular quando $\beta=0$ e $\gamma=1/2$, neste caso,

$$\begin{aligned}\{\mathbf{a}\}_{n+1} &= [\mathbf{M}]^{-1} (\{\mathbf{F}_{ext}\} - \{\mathbf{F}_{int}\}) \\ \{\mathbf{v}\}_{n+1} &= \{\mathbf{v}\}_n + \frac{\Delta t}{2} (\{\mathbf{a}\}_n + \{\mathbf{a}\}_{n+1}) \\ \{\mathbf{d}\}_{n+1} &= \{\mathbf{d}\}_n + \Delta t \{\mathbf{v}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (\{\mathbf{a}\}_n + \{\mathbf{a}\}_{n+1})\end{aligned}\quad (3.6)$$

O método das diferenças centrais é apresentado em [2][10][18][21] como a opção preferida para a integração explícita.

A terminologia diferenças centrais advém do fato deste algoritmo não ser usualmente implementado diretamente pelas equações acima, mas conforme segue:

Seja a velocidade calculada no meio do intervalo de tempo $[t_n, t_{n+1}]$

$$\{\mathbf{v}\}_{n+\frac{1}{2}} = \{\mathbf{v}\}_n + \frac{1}{2} \Delta t \{\mathbf{a}\}_n \quad (3.7)$$

analogamente, pode-se escrever

$$\{\mathbf{v}\}_{n-\frac{1}{2}} = \{\mathbf{v}\}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \{\mathbf{a}\}_{n-1} \quad (3.8)$$

subtraindo-se a equação (3.8) da equação (3.7), tem-se:

$$\{\mathbf{v}\}_{n+\frac{1}{2}} - \{\mathbf{v}\}_{n-\frac{1}{2}} = \{\mathbf{v}\}_n - \{\mathbf{v}\}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t (\{\mathbf{a}\}_n - \{\mathbf{a}\}_{n-1}) \quad (3.9)$$

A partir da equação (3.6), pode-se escrever que

$$\{\mathbf{v}\}_n - \{\mathbf{v}\}_{n-1} = +\frac{\Delta t}{2}(\{\mathbf{a}\}_{n-1} + \{\mathbf{a}\}_n) \quad (3.10)$$

substituindo-se a equação (3.10) na equação (3.9), tem-se que

$$\{\mathbf{v}\}_{n+\frac{1}{2}} - \{\mathbf{v}\}_{n-\frac{1}{2}} = \Delta t \{\mathbf{a}\}_n \quad (3.11)$$

Substituindo-se a equação (3.7) na segunda equação (3.6), tem-se, para os deslocamentos

$$\{\mathbf{d}\}_{n+1} = \{\mathbf{d}\}_n + \Delta t \{\mathbf{v}\}_{n+\frac{1}{2}} \quad (3.12)$$

Deste modo, tem-se uma integração temporal onde as acelerações e os deslocamentos são conhecidos ao fim de cada incremento de tempo Δt^n , e as velocidades conhecidas em instantes intermediários, $\Delta t^{n+1/2}$. Ou seja, as velocidades são determinadas no instante $\Delta t^{n+1/2}$ a partir do equilíbrio dinâmico no instante Δt^n . Por esta razão, este método de integração do tempo é classificado como explícito.

Para a obtenção das acelerações, a partir da equação (3.6), é necessária a inversão da matriz de massa $[\mathbf{M}]$, ou a resolução de um sistema linear a cada incremento de tempo. Isto faz com que as sucessivas avaliações da equação (3.6), a cada incremento de tempo, se tornem muito onerosas [10]. Porém, se a matriz de massa $[\mathbf{M}]$ for aproximada por uma matriz diagonal, sua inversão torna-se trivial e a resolução da equação (3.6) torna-se extremamente econômica, em termos computacionais. Todos os métodos de integração explícita do tempo fazem uso de matrizes de massa diagonais, por definição [10].

A adoção de matrizes de massa diagonais traz uma consequência muito relevante para o sistema mecânico representado pela equação (2.49): o sistema global de equações apresenta total desacoplamento entre seus graus de liberdade. A única parcela da equação (2.49) que carrega em sua definição algum tipo de acoplamento é o vetor de forças internas, $\{\mathbf{F}_{\text{int}}\}$. Durante o cálculo das forças internas, a avaliação das deformações no contínuo leva em conta os movimentos relativos entre os vários graus de liberdade, gerando o acoplamento.

3.2. Amortecimento

Adicionando-se um termo dissipativo na equação (2.29), tem-se que:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho \ddot{x}_j + c \dot{x}_j \quad (3.13)$$

onde c é uma constante característica do amortecimento viscoso do material do contínuo. Seguindo-se a abordagem da seção 2.4, tem-se que a equação do movimento, equação (2.48), pode ser re-escrita como:

$$\begin{aligned} & \left[\int_V (\rho [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]) dV \right] \cdot \{\mathbf{a}\} = \\ & = \int_S ([\mathbf{N}]^T \{\boldsymbol{\tau}\}) dS + \int_V (\rho [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{b}\}) dV - \int_V ([\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}) dV - \left[\int_V (c [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]) dV \right] \cdot \{\mathbf{v}\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ou, em forma matricial, usando-se as mesmas definições das equações (2.50), (2.51) e (2.52):

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} - \{\mathbf{F}_{\text{int}}\} - [\mathbf{C}] \{\mathbf{v}\} \quad (3.15)$$

onde

$$\left[\int_V (c [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}]) dV \right] \quad (3.16)$$

é a matriz de amortecimento.

Comparando-se as definições usadas para as matrizes $[\mathbf{M}]$ e $[\mathbf{C}]$, pode-se perceber a relação entre massa e amortecimento em concordância com a hipótese de Rayleigh:

$$[\mathbf{C}] = a_1 [\mathbf{M}] + a_2 [\mathbf{K}] \quad (3.17)$$

onde a_1 e a_2 são fatores arbitrários e $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez do sistema mecânico. Fazendo-se $a_2 = 0$, conforme apresentado em [18], e assim desprezando-se a contribuição da parcela de rigidez para o amortecimento, tem-se que

$$[\mathbf{C}] = a_1[\mathbf{M}] \quad (3.18)$$

ou

$$c = a_1 \rho \quad (3.19)$$

Deste modo, o amortecimento pode ser introduzido ao sistema como um termo dissipativo, proporcional ao campo de velocidades, e à uma fração da massa [18].

3.3. Estabilidade

O estudo da estabilidade dos métodos de integração dinâmica derivados da família de algoritmos de Newmark, como o método das diferenças centrais, é muito complexo, porém bastante conhecido [21]. Neste trabalho, serão usadas as definições e hipóteses de estabilidade conforme apresentadas em [10] e [21].

Para as equações de Newmark, re-escritas abaixo

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}]\{\mathbf{a}\}_{n+1} + \{\mathbf{F}_{int}\} &= \{\mathbf{F}_{ext}\} \\ \{\mathbf{v}\}_{n+1} &= \{\mathbf{v}\}_n + \Delta t \left[(1 - \gamma)\{\mathbf{a}\}_n + \gamma\{\mathbf{a}\}_{n+1} \right] \\ \{\mathbf{d}\}_{n+1} &= \{\mathbf{d}\}_n + \Delta t \{\mathbf{v}\}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[(1 - 2\beta)\{\mathbf{a}\}_n + 2\beta\{\mathbf{a}\}_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

tem-se duas condições de estabilidade, envolvendo as constantes β e γ [21]:

Para um sistema incondicionalmente estável, tem-se que:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (3.21)$$

Para um sistema condicionalmente estável, tem-se que:

$$\gamma \geq \frac{1}{2}, \quad \beta < \frac{\gamma}{2} \quad \text{e} \quad \omega^h \Delta t \leq \omega_{crit} \quad (3.22)$$

onde ω^h é a maior frequência natural do sistema, Δt é o maior incremento de tempo possível para garantir sua estabilidade e ω_{crit} é sua frequência de amostragem crítica, conforme definida em [21]:

$$\omega_{crit} = \frac{\xi(\gamma-1) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2 \left(\gamma - \frac{1}{2}\right)^2}}{\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)} \quad (3.23)$$

com

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{\omega^h} + a_2 \omega^h \right) \quad (3.24)$$

onde ξ é uma fração do amortecimento crítico para a frequência ω^h . E a_1 e a_2 são os coeficientes de amortecimento de Rayleigh, apresentados na equação (3.17).

Para o método das diferenças centrais tem-se que $\beta = 0$ e $\gamma = 1/2$, o que o classifica como um método condicionalmente estável, segundo a equação (3.22). Ainda mais, substituindo-se estes valores de γ e β na equação (3.23), tem-se que

$$\omega_{crit} = 2 \quad (3.25)$$

e desta forma

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega^h} \Rightarrow \Delta t \leq 2T_{\min} \quad (3.26)$$

onde $T_{\min} = 1/\omega^h$ é o menor período do sistema, associado ao seu modo de vibrar de mais alta ordem. A equação (3.25) e a inequação (3.26) expressam uma característica muito importante do método das diferenças centrais, ao denotar que maior incremento de tempo estável, e conseqüentemente a estabilidade do sistema, são independentes do amortecimento. Desta forma, a estabilidade é unicamente dependente da maior frequência natural do sistema.

3.4. Determinação do Δt Estável

Como no método das diferenças centrais o sistema global é desacoplado, sua maior frequência ω^h , associada ao seu mais alto modo de vibração, tem como limite superior a maior frequência encontrada dentre todos os elementos que o compõe, avaliando-se individualmente cada um em uma análise de corpo livre [10]. Porém, durante a integração dinâmica de sistema mecânico discretizado por uma malha de elementos finitos, a geometria destes pode variar significativamente, e desta forma, suas frequências naturais. Desta forma, a avaliação da maior frequência natural do sistema, ω^h , através da determinação de seus dos autovalores a cada iteração seria um procedimento muito dispendioso [10]. De modo a contornar este problema, foram desenvolvidas fórmulas algébricas para calcular aproximadamente a frequência crítica para vários tipos de elementos finitos, conforme apresentado em [10][18][21][27].

A partir da análise modal de um elemento finito de barra, uniforme e linear, com matriz massa diagonal, conforme apresentado em [10], pode-se determinar que sua maior frequência natural é:

$$\omega^h = \frac{2}{L_c} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.27)$$

onde E é o módulo de elasticidade, ρ é a densidade e L_c é o comprimento da barra

Para elementos de casca quadrilaterais bi-lineares, várias fórmulas podem ser encontradas na literatura [10][18][21][27]. Neste trabalho, o incremento de tempo estável para elementos de casca quadrilaterais bi-lineares é calculado conforme o apresentado em [18], onde a expressão (3.27) é usada diretamente, e o valor de L_c é definido como a menor distância entre os nós de um elemento, isto é:

$$L_c = \min(a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_2) \quad (3.28)$$

onde a_i são os comprimentos de suas arestas e d_i os comprimentos de suas diagonais.

Capítulo 4

Elementos Finitos de Casca

4.1. Teoria de Reissner-Mindlin Para Placas e Cascas

As teorias de placas e cascas podem ser vistas como uma simplificação natural de um contínuo tridimensional, quando uma das dimensões é feita muito menor que as outras. Esta simplificação é muito útil em aplicações práticas de engenharia [10] [21].

As hipóteses de Reissner-Mindlin podem ser dadas conforme se segue.

Para uma placa (ou casca plana) alinhada com um sistema cartesiano de referência, onde um ponto é definido por (x, y, z) , seu domínio é definido por:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \left[\frac{-t}{2}, \frac{t}{2} \right], (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2 \right\} \quad (4.1)$$

onde t é a espessura da placa e A a sua área.

A placa é considerada em estado plano de tensões, isto é, não há tensão na direção normal, ou:

$$\sigma_{zz} = 0 \quad (4.2)$$

Fibras inicialmente retas e paralelas permanecem retas após deformações, porém não necessariamente paralelas, podendo haver um cisalhamento transversal, ou

$$u_{\alpha}(x, y, z) = -z\theta_{\alpha}(x, y) \quad \alpha = x, y \quad (4.3)$$

onde θ_{α} define a rotação de uma fibra inicialmente normal ao plano médio da placa ($z=0$)

O deslocamento transversal w é constante ao longo da espessura, ou seja,

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (4.4)$$

Assim, de acordo com as hipóteses acima, os deslocamentos de um ponto qualquer no domínio podem ser escritos da seguinte maneira,

$$\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{u}^m\} - z \{\mathbf{e}_3\} \times \{\boldsymbol{\theta}\} \quad (4.5)$$

onde $\{\mathbf{u}^m\}$ são os deslocamentos do plano de referência ($z=0$), $\{\mathbf{e}_3\}$ é o vetor unitário normal ao plano de referência e $\{\boldsymbol{\theta}\}$ são as rotações.

Analogamente, as velocidades podem ser dadas por

$$\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}^m\} - z \{\mathbf{e}_3\} \times \{\boldsymbol{\omega}\} \quad (4.6)$$

onde $\{\boldsymbol{\omega}\} = \{\dot{\boldsymbol{\theta}}\}$ são as velocidades angulares.

A partir destas definições, as componentes do tensor *taxa de deformação* $[\mathbf{D}]$, para um ponto no domínio, são dadas por

$$D_{xx} = \frac{\partial v_x^m}{\partial x} + z \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \quad (4.7a)$$

$$D_{yy} = \frac{\partial v_y^m}{\partial y} - z \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \quad (4.7b)$$

$$2D_{xy} = \frac{\partial v_x^m}{\partial y} + \frac{\partial v_y^m}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} - \frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right) \quad (4.7c)$$

$$2D_{yz} = \frac{\partial v_z^m}{\partial y} - \omega_x \quad (4.7d)$$

$$2D_{xz} = \frac{\partial v_z^m}{\partial x} - \omega_y \quad (4.7e)$$

e D_{zz} , como dito anteriormente, será definido pelas equações constitutivas. Como por exemplo, para o caso linear elástico, onde D_{zz} pode ser escrito como

$$D_{zz} = -\frac{\nu}{(1-\nu)}(D_{xx} + D_{yy}) \quad (4.8)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson.

Deste modo, levando-se em conta a simetria, o tensor taxa de deformação pode ser escrito em forma de um vetor das sua cinco componentes independentes, conforme mostrado na seqüência,

$$\{\mathbf{D}\} = \begin{Bmatrix} D_{xx} \\ D_{yy} \\ D_{xy} \\ D_{yz} \\ D_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

Todas as deduções acima são válidas para uma casca curva, assumindo-se não mais um plano médio de referência, mas uma superfície média de referência, em relação à qual a normal em cada ponto pode ser calculada.

4.2. Elemento de Belytschko-Lin-Tsay (BLT)

Publicado em 1984, o elemento BLT é ainda hoje o mais usado em simulações de impacto envolvendo materiais de chapa fina, como colisões de veículos (“crashworthiness”) e estampagem profunda de metais, onde a integração explícita no tempo tem sido o expediente mais comum. Este sucesso deve-se principalmente ao seu baixo custo computacional.

Este elemento, desenvolvido para obter convergência e estabilidade com um mínimo de operações computacionais, possui duas características básicas.

Uso de um único sistema de coordenadas co-rotacional, referente ao qual todas as grandezas relacionadas ao elemento são calculadas, simplificando grandemente as equações da mecânica do contínuo.

Uso de integração reduzida uniforme, ou sub-integração, com todas as grandezas relacionadas a esforços no plano do elemento sendo avaliadas única e exclusivamente no centróide. Em aplicações típicas de engenharia, empregando-se a integração explícita, a determinações das forças internas precisa ser feita milhões de vezes durante uma simulação, tornando o uso da sub-integração amplamente difundido, chegando a ser imperativo ou mandatório em muitos casos.

A seguir são apresentadas as equações deste elemento, a começar pela definição do sistema de coordenadas co-rotacional, seguindo-se da descrição cinemática, da determinação do campo de deformações e do cálculo das forças internas.

4.2.1. Sistema de Coordenadas Co-Rotacional do Elemento BLT

Considera-se um elemento quadrilateral linear, cuja superfície média é definida por seus quatro vértices, conforme a figura 4.2.1.1. Pode-se definir um sistema local de coordenadas, baseado na geometria do elemento, a partir de um vetor normal, um vetor tangente e um terceiro vetor perpendicular a ambos.

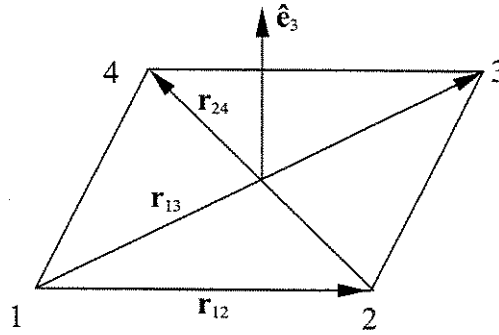


Figura 4.2.1.1 Sistema de coordenadas co-rotacional, elemento BLT

Sejam $\{\mathbf{r}_{13}\}$ e $\{\mathbf{r}_{24}\}$ os vetores formados pelas diagonais 1-3 e 2-4 respectivamente. Um vetor normal à superfície média do elemento pode ser aproximado por um vetor $\{\hat{\mathbf{e}}_3\}$, mutuamente ortogonal às suas diagonais $\{\mathbf{r}_{13}\}$ e $\{\mathbf{r}_{24}\}$, da seguinte maneira,

$$\{\hat{\mathbf{e}}_3\} = \frac{(\{\mathbf{r}_{13}\} \times \{\mathbf{r}_{24}\})}{\|\{\mathbf{r}_{13}\} \times \{\mathbf{r}_{24}\}\|} \quad (4.10)$$

Pode-se construir um vetor $\{\mathbf{r}_{12}\}$, formado pela aresta 1-2, que define uma tangente à superfície do elemento. Usar o vetor $\{\mathbf{r}_{12}\}$ como um dos eixos do sistema local traz facilidades óbvias na interpretação de resultados, já que para elementos de casca os valores de tensões e deformações são geralmente calculados neste sistema. Porém, $\{\mathbf{r}_{12}\}$ não é perpendicular a $\{\hat{\mathbf{e}}_3\}$. Para tanto, pode-se usar o vetor auxiliar $\{\mathbf{s}_1\}$, obtido subtraindo-se de $\{\mathbf{r}_{12}\}$ sua projeção em $\{\hat{\mathbf{e}}_3\}$, como se segue

$$\{\mathbf{s}_1\} = \{\mathbf{r}_{12}\} - (\{\mathbf{r}_{12}\} \cdot \{\hat{\mathbf{e}}_3\})\{\hat{\mathbf{e}}_3\} \quad (4.11)$$

assim, pode-se definir o vetor unitário $\{\hat{\mathbf{e}}_1\}$ como sendo

$$\{\hat{\mathbf{e}}_1\} = \frac{\{\mathbf{s}_1\}}{\|\{\mathbf{s}_1\}\|} \quad (4.12)$$

e desta forma, definir o vetor $\{\hat{\mathbf{e}}_2\}$ como sendo

$$\{\hat{\mathbf{e}}_2\} = \frac{\{\hat{\mathbf{e}}_3\} \times \{\hat{\mathbf{e}}_1\}}{\|\{\hat{\mathbf{e}}_3\} \times \{\hat{\mathbf{e}}_1\}\|} \quad (4.13)$$

Os vetores $\{\hat{\mathbf{e}}_1\}$, $\{\hat{\mathbf{e}}_2\}$ e $\{\hat{\mathbf{e}}_3\}$ formam um sistema cartesiano de coordenadas local ao elemento, definido instantaneamente a partir de sua geometria.

Por simplicidade, pode-se adotar que a origem do sistema de coordenadas local seja o nó 1. Em assim sendo, tem-se uma pequena economia computacional na determinação das derivadas das funções de forma, como será apresentado mais adiante.

O sistema de coordenadas local é usado para referenciar todas as operações realizadas no elemento e deve ser determinado a cada novo incremento de tempo. Para tanto, define-se a matriz de transformação local-global, $[\mathbf{R}]$, formada pelos vetores de base do sistema local, como se segue

$$[\mathbf{R}] = [\hat{\mathbf{e}}_1 \ \hat{\mathbf{e}}_2 \ \hat{\mathbf{e}}_3] \quad (4.14)$$

ou seja, as colunas da matriz $[\mathbf{R}]$ são os vetores de base do sistema local.

A transformação de um vetor expresso no sistema local para o sistema global é dada por

$$\{\mathbf{x}\} = [\mathbf{R}]\{\hat{\mathbf{x}}\} \quad (4.15a)$$

$$\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{R}]\{\hat{\mathbf{v}}\} \quad (4.15b)$$

onde $\{\mathbf{x}\}$ e $\{\mathbf{v}\}$ são, respectivamente, o vetor posição e o vetor velocidade de um ponto referenciado no sistema global, enquanto $\{\hat{\mathbf{x}}\}$ e $\{\hat{\mathbf{v}}\}$ são as mesmas quantidades vetoriais expressas no sistema local.

A transformação de um tensor expresso no sistema global para o sistema local é dada por

$$[\hat{\sigma}] = [\mathbf{R}]^T [\sigma] [\mathbf{R}] \quad (4.16)$$

onde $[\sigma]$ é o tensor tensão de Cauchy expresso no sistema global e $[\hat{\sigma}]$ é o mesmo tensor expresso no sistema local.

O sistema de coordenadas local, como definido acima, pode ser entendido como um sistema co-rotacional, no sentido de que ele rotaciona juntamente com o material do elemento [3]. Esta afirmação só é exata para um elemento plano, pois para elementos que apresentam empenamento, o vetor $\{\hat{\mathbf{e}}_3\}$ deixa de ser idêntico ao vetor normal ao material, no centro do elemento (local onde localizam-se os pontos de integração). Esta aproximação é bastante acurada para deformações de cisalhamento menores que 20% [3]. Outra maneira de determinar o sistema local co-rotacional, empregada no elemento BWC [6], contorna este problema.

4.2.2. Formulação Isoparamétrica

As funções de base utilizadas neste elemento são funções bi-lineares isoparamétricas, de forma que a geometria quadrilateral tridimensional do elemento é mapeada em um quadrado bi-unitário [21], pertencente a um espaço paramétrico bidimensional, conforme a figura 4.2.2.1.

Deste modo, as coordenadas de um ponto $\xi=(\xi,\eta)$ pertencente ao quadrado bi-unitário estão relacionadas às coordenadas de um ponto $\mathbf{x}=(x,y,z)$ pertencente ao domínio do elemento, conforme o seguinte mapeamento [21]

$$\mathbf{x}(\xi,\eta) = \sum_{a=1}^4 \mathbf{N}_a(\xi,\eta) \mathbf{x}_a = \mathbf{N}_a(\xi,\eta) \mathbf{x}_a \quad (4.17)$$

onde $\mathbf{x}_a$ são os vetores de coordenadas dos nós, e $\mathbf{N}_a$ são suas funções de forma, que podem ser sistematicamente determinadas a partir dos polinômios de Lagrange [21] e, para um elemento quadrilateral bi-linear, elas são dadas por

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_a)(1 + \eta\eta_a) \quad (4.18)$$

onde ξ_a e η_a são as coordenadas dos nós no espaço paramétrico, definidas conforme a Figura 4.2.2.1.

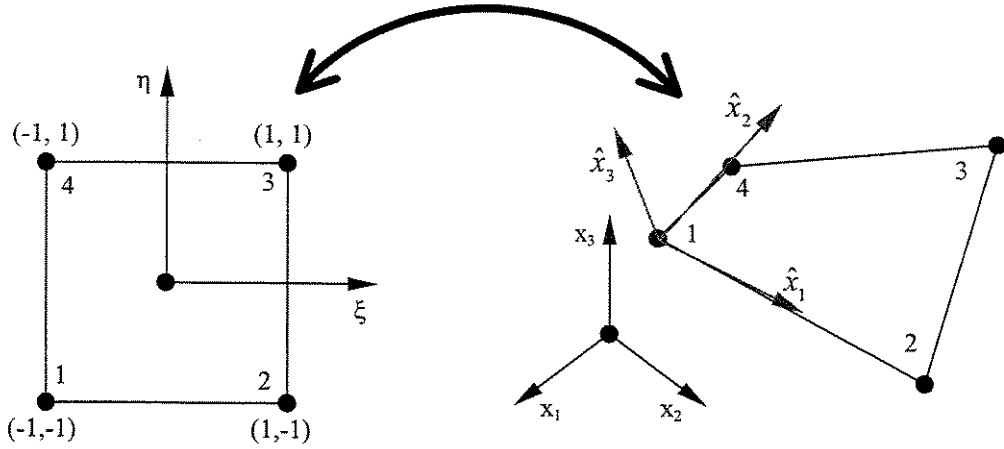


Figura 4.2.2.1 – Elemento quadrilateral de referência

Analogamente, as mesmas funções de forma podem ser usadas para interpolar as velocidades tangenciais, $\{v\}$, e angulares, $\{\omega\}$, para qualquer ponto no domínio do elemento, expressando assim seu caráter isoparamétrico [10][21]

$$v(\xi, \eta) = N_a(\xi, \eta)v_a \quad (4.19a)$$

$$\omega(\xi, \eta) = N_a(\xi, \eta)\omega_a \quad (4.19b)$$

onde v_a e ω_a são as velocidades tangenciais e angulares nodais, respectivamente.

Usando-se a teoria de Reissner-Mindlin e as definições acima, pode-se determinar as componentes do tensor *taxa de deformação* através da substituição da equação (4.6) e das equações (4.19) nas equações (4.7), obtendo-se

$$\hat{D}_{xx} = B_{xa} \hat{v}_{xa} + \hat{z} B_{xa} \hat{\omega}_{ya} \quad (4.20a)$$

$$\hat{D}_{yy} = B_{ya} \hat{v}_{ya} + \hat{z} B_{ya} \hat{\omega}_{xa} \quad (4.20b)$$

$$2\hat{D}_{xy} = B_{ya} \hat{v}_{xa} + B_{xa} \hat{v}_{ya} + \hat{z}(B_{ya} \hat{\omega}_{ya} - B_{xa} \hat{\omega}_{xa}) \quad (4.20c)$$

$$2\hat{D}_{yz} = B_{ya} \hat{v}_{za} - N_a \hat{\omega}_{xa} \quad (4.20d)$$

$$2\hat{D}_{xz} = B_{xa} \hat{v}_{za} + N_a \hat{\omega}_{ya} \quad (4.20e)$$

onde as grandezas assinaladas com circunflexo são determinadas no sistema de referência co-rotacional local e B_{ia} são as derivadas das funções de forma neste mesmo sistema:

$$B_{xa} = \frac{\partial N_a}{\partial \hat{x}} \quad (4.21a)$$

$$B_{ya} = \frac{\partial N_a}{\partial \hat{y}} \quad (4.21b)$$

As funções N_a são relacionadas às variáveis do espaço paramétrico ξ e η , aplicando-se a regra da cadeia da derivação, tem-se

$$\frac{\partial N_a}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} \quad (4.22a)$$

$$\frac{\partial N_a}{\partial \hat{y}} = \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}} \quad (4.22b)$$

escrevendo o sistema em forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \hat{y}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \xi}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

As derivadas contidas na matriz da equação (4.23) não são conhecidas, mas suas inversas podem ser determinadas a partir de (4.18) [21], assim,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \xi}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial \eta}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{y}}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{y}}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \eta} & -\frac{\partial \hat{x}}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial \hat{y}}{\partial \xi} & \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

onde j é o determinante do Jacobiano, dado por

$$j = \frac{\partial \hat{x}}{\partial \xi} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \eta} - \frac{\partial \hat{x}}{\partial \eta} \frac{\partial \hat{y}}{\partial \xi} \quad (4.25)$$

Para um elemento com um ponto de integração, localizado no centróide do elemento, onde $\xi = \eta = 0$, as funções de interpolação dadas por (4.18) são todas iguais e valem:

$$N_a(\xi, \eta) = \frac{1}{4} \quad (4.26)$$

substituindo-se as equações (4.18) em (4.25) e manipulando-se, tem-se que o determinante do Jacobiano no centróide vale:

$$j = \frac{1}{8} [(\hat{x}_4 - \hat{x}_2)(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) + (\hat{x}_3 - \hat{x}_1)(\hat{y}_4 - \hat{y}_2)] \quad (4.27)$$

que é equivalente a:

$$j = \frac{1}{4} A \quad (4.28)$$

onde A é a área do elemento, projetada em seu plano médio.

As derivadas das funções de interpolação são dadas pela substituição das equações (4.18), (4.24) e (4.25) nas equações (4.21), o que permite escrever:

$$B_{x1} = \frac{1}{2A}(\hat{y}_2 - \hat{y}_4) \quad (4.29a)$$

$$B_{12} = \frac{1}{2A}(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) \quad (4.29b)$$

$$B_{x3} = \frac{1}{2A}(\hat{y}_4 - \hat{y}_2) \quad (4.29c)$$

$$B_{x4} = \frac{1}{2A}(\hat{y}_1 - \hat{y}_3) \quad (4.29d)$$

$$B_{y1} = \frac{1}{2A}(\hat{x}_4 - \hat{x}_2) \quad (4.29e)$$

$$B_{y2} = \frac{1}{2A}(\hat{x}_1 - \hat{x}_3) \quad (4.29f)$$

$$B_{y3} = \frac{1}{2A}(\hat{x}_2 - \hat{x}_4) \quad (4.29g)$$

$$B_{y4} = \frac{1}{2A}(\hat{x}_3 - \hat{x}_1) \quad (4.29h)$$

ou em forma matricial,

$$B_{ia} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \hat{y}_2 - \hat{y}_4 & \hat{y}_3 - \hat{y}_1 & \hat{y}_4 - \hat{y}_2 & \hat{y}_1 - \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 - \hat{x}_2 & \hat{x}_1 - \hat{x}_3 & \hat{x}_2 - \hat{x}_4 & \hat{x}_3 - \hat{x}_1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

4.2.3. Cálculo das Forças Internas para o Elemento BLT

O princípio das potências virtuais, para um elemento, pode ser escrito como [3]

$$\delta \{ \hat{\mathbf{w}} \}_a^T \{ \hat{\mathbf{m}} \}_a + \delta \{ \hat{\mathbf{v}} \}_a^T \{ \hat{\mathbf{f}} \}_a = \int_V \delta \{ \mathbf{D} \}^T \{ \boldsymbol{\sigma} \} dV \quad (4.31)$$

onde

$$\delta\{\hat{\mathbf{v}}\}_a = \begin{Bmatrix} \delta\hat{v}_x \\ \delta\hat{v}_y \\ \delta\hat{v}_z \end{Bmatrix}, \delta\{\hat{\boldsymbol{\omega}}\}_a = \begin{Bmatrix} \delta\hat{\omega}_x \\ \delta\hat{\omega}_y \\ \delta\hat{\omega}_z \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

são as variações das velocidades lineares e velocidades angulares nodais, respectivamente, medidos no sistema local,

$$\{\hat{\mathbf{f}}\}_a = \begin{Bmatrix} \hat{f}_x \\ \hat{f}_y \\ \hat{f}_z \end{Bmatrix}, \{\hat{\mathbf{m}}\}_a = \begin{Bmatrix} \hat{m}_x \\ \hat{m}_y \\ \hat{m}_z \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

são respectivamente as forças e os momentos nodais, medidos no sistema local, $\{\mathbf{D}\}$ é um vetor formado pelas componentes do tensor *taxa de deformação* e $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ um vetor formado pelas componentes do tensor tensão, ambos igualmente avaliados no sistema local.

Os vetores das tensões e das taxas de deformação podem ser divididos da seguinte forma:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}' \\ \boldsymbol{\sigma}'' \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{D}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}' \\ \mathbf{D}'' \end{Bmatrix} \quad (4.34)$$

onde

$$\{\boldsymbol{\sigma}'\} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} \\ \hat{\sigma}_{yy} \\ \hat{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix}, \{\boldsymbol{\sigma}''\} = \begin{Bmatrix} \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{xz} \end{Bmatrix}, \{\mathbf{D}'\} = \begin{Bmatrix} \hat{D}_{xx} \\ \hat{D}_{yy} \\ 2\hat{D}_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{D}''\} = \begin{Bmatrix} 2\hat{D}_{yz} \\ 2\hat{D}_{xz} \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Reescrevendo-se a equação (4.31) e introduzindo-se o fator de cisalhamento, κ , para assegurar a condição de normalidade de Kirschhoff [3], tem-se

$$\delta\{\hat{\omega}\}_a^T\{\hat{\mathbf{m}}\}_a + \delta\{\hat{\mathbf{v}}\}_a^T\{\hat{\mathbf{f}}\}_a = \int_V \left(\delta\{\mathbf{D}'\}^T\{\boldsymbol{\sigma}'\} + \kappa\delta\{\mathbf{D}''\}^T\{\boldsymbol{\sigma}''\} \right) dV \quad (4.36)$$

expandido-se, termo a termo

$$\begin{aligned} \delta\hat{v}_{xa}\hat{f}_{xa} + \delta\hat{v}_{ya}\hat{f}_{ya} + \delta\hat{v}_{za}\hat{f}_{za} + \delta\hat{\omega}_{xa}\hat{m}_{xa} + \delta\hat{\omega}_{ya}\hat{m}_{ya} + \delta\hat{\omega}_{za}\hat{m}_{za} = \\ \int_V \left[\hat{D}_{xx}\hat{\sigma}_{xx} + \hat{D}_{yy}\hat{\sigma}_{yy} + 2\hat{D}_{xy}\hat{\sigma}_{xy} + \kappa \left(2\hat{D}_{yz}\hat{\sigma}_{yz} + 2\hat{D}_{xz}\hat{\sigma}_{xz} \right) \right] dV \end{aligned} \quad (4.37)$$

substituindo-se as equações (4.20) no segundo membro da equação (4.37), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta\hat{v}_{xa}\hat{f}_{xa} + \delta\hat{v}_{ya}\hat{f}_{ya} + \delta\hat{v}_{za}\hat{f}_{za} + \delta\hat{\omega}_{xa}\hat{m}_{xa} + \delta\hat{\omega}_{ya}\hat{m}_{ya} + \delta\hat{\omega}_{za}\hat{m}_{za} = \\ \int_V \left(B_{xa}\delta\hat{v}_{xa} + \hat{z}B_{xa}\delta\hat{\omega}_{ya} \right) \hat{\sigma}_{xx} dV + \int_V \left(B_{ya}\delta\hat{v}_{ya} - \hat{z}B_{ya}\delta\hat{\omega}_{xa} \right) \hat{\sigma}_{yy} dV + \\ \int_V \left(B_{ya}\delta\hat{v}_{xa} + B_{xa}\delta\hat{v}_{ya} + \hat{z}B_{ya}\delta\hat{\omega}_{ya} - \hat{z}B_{xa}\delta\hat{\omega}_{xa} \right) \hat{\sigma}_{xy} dV + \\ \int_V \left(B_{ya}\delta\hat{v}_{za} - N_a\delta\hat{\omega}_{xa} \right) \kappa\hat{\sigma}_{yz} dV + \int_V \left(B_{xa}\delta\hat{v}_{za} + N_a\delta\hat{\omega}_{ya} \right) \kappa\hat{\sigma}_{xz} dV \end{aligned} \quad (4.38)$$

Isolando-se as variações em (4.38) e levando-se em conta a sua natureza arbitrária, obtêm-se as forças nodais resultantes no elemento:

$$\hat{f}_{xa} = \int_V \left(B_{xa}\hat{\sigma}_{xx} + B_{ya}\hat{\sigma}_{xy} \right) dV \quad (4.39a)$$

$$\hat{f}_{ya} = \int_V \left(B_{ya}\hat{\sigma}_{yy} + B_{xa}\hat{\sigma}_{xy} \right) dV \quad (4.39b)$$

$$\hat{f}_{za} = \int_V \left(B_{xa}\hat{\sigma}_{xz} + B_{ya}\hat{\sigma}_{yz} \right) \kappa dV \quad (4.39c)$$

$$\hat{m}_{xa} = \int_V \left(-\hat{z}B_{ya}\hat{\sigma}_{yy} - \hat{z}B_{xa}\hat{\sigma}_{xy} - \kappa N_a\hat{\sigma}_{yz} \right) dV \quad (4.39d)$$

$$\hat{m}_{ya} = \int_V \left(\hat{z}B_{xa}\hat{\sigma}_{xx} + \hat{z}B_{ya}\hat{\sigma}_{xy} + \kappa N_a\hat{\sigma}_{xz} \right) dV \quad (4.39e)$$

$$\hat{m}_{za} = 0 \quad (4.39f)$$

As expressões (4.39a) a (4.39f) permitem avaliar as forças internas nodais resultantes para o elemento proposto por Belytschko-Lin-Tsay e são empregadas na formação do vetor de forças internas global, $\{\mathbf{F}_{\text{int}}\}$, usado na equação do movimento, equação (2.49).

4.3. Elemento de Belytschko-Wong-Chiang (BWC)

Apresentado em 1989 e posteriormente revisado e reapresentado em 1992, este elemento é uma evolução do elemento BLT, possuindo as mesmas características básicas, como o sistema co-rotacional e a integração reduzida uniforme, porém traz duas características adicionais muito relevantes. Sua formulação apresenta acoplamento entre os termos de membrana e flexão e possui um esquema elaborado de projeção das deformações de cisalhamento, similar ao encontrado em [23] e [21].

Com estes melhoramentos, o elemento BWC possui uma boa performance quando em configurações “empenadas” e apresenta um custo computacional similar ao elemento BLT.

4.3.1. Sistema de Coordenadas Co-Rotacional do Elemento BWC

Considere um elemento quadrilateral e quatro nós, definido conforme a figura abaixo.

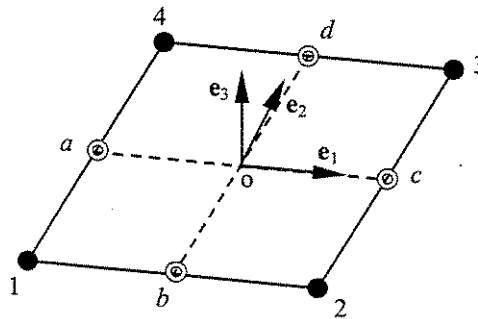


Figura 4.3.1.1 – Sistema de Coordenadas Co-Rotacional, elemento BWC

Os segmentos $\{ac\}$ e $\{bd\}$ são construídos a partir dos pontos médios das arestas. O versor normal $\{e_3\}$ é definido como

$$\{\mathbf{e}_3\} = \frac{\{ac\} \times \{bd\}}{\|\{ac\} \times \{bd\}\|} \quad (4.40)$$

O versor $\{\mathbf{e}_1\}$ é definido como sendo paralelo a $\{ac\}$

$$\{\mathbf{e}_1\} = \frac{\{ac\}}{\|\{ac\}\|} \quad (4.41)$$

Finalmente, o versor $\{\mathbf{e}_2\}$ é definido a partir de $\{\mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{e}_1\}$

$$\{\mathbf{e}_2\} = \{\mathbf{e}_3\} \times \{\mathbf{e}_1\} \quad (4.42)$$

Os segmentos $\{ac\}$ e $\{bd\}$ estão localizados exatamente sobre a superfície isoparamétrica bi-linear do elemento, precisamente sobre o mapeamento das linhas $\eta=0$ e $\xi=0$, respectivamente. Deste modo, $\{\mathbf{e}_3\}$ é exatamente a normal da superfície média do elemento, na origem do espaço paramétrico.

O sistema $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, como definido aqui difere ligeiramente do originalmente apresentado em [6], de modo que a direção de $\{\mathbf{e}_1\}$ de um elemento seja facilmente identificada como semelhante a orientação da aresta formada pelos nós 1 e 2, como no elemento BLT.

4.3.2. Formulação Isoparamétrica aplicada ao Elemento BWC

Para um ponto pertencente ao domínio do elemento, pode-se escrever que

$$\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x}^m\} + \zeta \{\mathbf{p}\} \quad (4.43)$$

onde $\{\mathbf{x}^m\}$ são as suas coordenadas na superfície de referência do elemento, $\{\mathbf{p}\}$ é o versor normal à superfície neste ponto e

$$\bar{\zeta} = \zeta \frac{h}{2}; \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (4.44)$$

denota sua posição ao longo de $\{\mathbf{p}\}$. Isto é, sua posição ao longo da espessura, h .

Analogamente, a velocidade de um ponto no domínio do elemento pode ser escrita como

$$\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}^m\} + \bar{\zeta} \{\dot{\mathbf{p}}\} \quad (4.45)$$

onde $\{\mathbf{v}\} = \{\dot{\mathbf{x}}\} = \frac{\partial \{\mathbf{x}\}}{\partial t}$ e $\{\dot{\mathbf{p}}\} = \frac{\partial \{\mathbf{p}\}}{\partial t}$ são as derivadas materiais, em relação ao tempo.

Interpolando-se a partir dos valores nodais, obtém-se

$$\{\mathbf{v}\} = N_a \{\mathbf{v}_a^m\} + \bar{\zeta} N_a \{\dot{\mathbf{p}}_a\} \quad (4.46)$$

onde N_a são as mesmas funções de interpolação bi-lineares apresentadas na equação (4.18).

As componentes do tensor *taxa de deformação*, apresentadas na equação (2.9) e reescritas abaixo, necessitam que as derivadas espaciais do campo de velocidades sejam calculadas.

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.47)$$

Aplicando-se a regra da cadeia para a diferenciação das funções de forma, tem-se que:

$$\begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \\ N_{a,\zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} & \hat{z}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} & \hat{y}_{,\eta} & \hat{z}_{,\eta} \\ \hat{x}_{,\zeta} & \hat{y}_{,\zeta} & \hat{z}_{,\zeta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\hat{x}} \\ N_{a,\hat{y}} \\ N_{a,\hat{z}} \end{Bmatrix} \quad (4.48)$$

Invertendo-se o sistema, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} N_{a,\hat{x}} \\ N_{a,\hat{y}} \\ N_{a,\hat{z}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \hat{y}_{,\eta} \hat{z}_{,\zeta} - \hat{y}_{,\zeta} \hat{z}_{,\eta} & -\hat{y}_{,\xi} \hat{z}_{,\zeta} + \hat{y}_{,\zeta} \hat{z}_{,\xi} & \hat{y}_{,\xi} \hat{z}_{,\eta} - \hat{y}_{,\eta} \hat{z}_{,\xi} \\ -\hat{x}_{,\eta} \hat{z}_{,\zeta} + \hat{x}_{,\zeta} \hat{z}_{,\eta} & \hat{x}_{,\xi} \hat{z}_{,\zeta} - \hat{x}_{,\zeta} \hat{z}_{,\xi} & -\hat{x}_{,\xi} \hat{z}_{,\eta} + \hat{x}_{,\eta} \hat{z}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} \hat{y}_{,\zeta} - \hat{x}_{,\zeta} \hat{y}_{,\eta} & -\hat{x}_{,\xi} \hat{y}_{,\zeta} + \hat{x}_{,\zeta} \hat{y}_{,\xi} & \hat{x}_{,\xi} \hat{y}_{,\eta} - \hat{x}_{,\eta} \hat{y}_{,\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \\ N_{a,\zeta} \end{Bmatrix} \quad (4.49)$$

onde o determinante do Jacobiano é dado por

$$J = (\hat{x}_{,\xi} \hat{y}_{,\eta} - \hat{x}_{,\eta} \hat{y}_{,\xi}) \hat{z}_{,\zeta} + (\hat{x}_{,\zeta} \hat{y}_{,\xi} - \hat{x}_{,\xi} \hat{y}_{,\zeta}) \hat{z}_{,\eta} + (\hat{x}_{,\eta} \hat{y}_{,\zeta} - \hat{x}_{,\zeta} \hat{y}_{,\eta}) \hat{z}_{,\xi} \quad (4.50)$$

Como $N_a = N_a(\xi, \eta)$, então $N_{a,\zeta} = 0$ e o sistema pode ser reescrito como

$$\begin{Bmatrix} N_{a,\hat{x}} \\ N_{a,\hat{y}} \\ N_{a,\hat{z}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \hat{y}_{,\eta} \hat{z}_{,\zeta} - \hat{y}_{,\zeta} \hat{z}_{,\eta} & -\hat{y}_{,\xi} \hat{z}_{,\zeta} + \hat{y}_{,\zeta} \hat{z}_{,\xi} \\ -\hat{x}_{,\eta} \hat{z}_{,\zeta} + \hat{x}_{,\zeta} \hat{z}_{,\eta} & \hat{x}_{,\xi} \hat{z}_{,\zeta} - \hat{x}_{,\zeta} \hat{z}_{,\xi} \\ \hat{x}_{,\eta} \hat{y}_{,\zeta} - \hat{x}_{,\zeta} \hat{y}_{,\eta} & -\hat{x}_{,\xi} \hat{y}_{,\zeta} + \hat{x}_{,\zeta} \hat{y}_{,\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

Para a teoria de Mindlin-Reissner, a componente $N_{a,\hat{z}}$ não é necessária, assim tem-se que

$$\begin{Bmatrix} N_{a,\hat{x}} \\ N_{a,\hat{y}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \hat{y}_{,\eta} \hat{z}_{,\zeta} - \hat{y}_{,\zeta} \hat{z}_{,\eta} & -\hat{y}_{,\xi} \hat{z}_{,\zeta} + \hat{y}_{,\zeta} \hat{z}_{,\xi} \\ -\hat{x}_{,\eta} \hat{z}_{,\zeta} + \hat{x}_{,\zeta} \hat{z}_{,\eta} & \hat{x}_{,\xi} \hat{z}_{,\zeta} - \hat{x}_{,\zeta} \hat{z}_{,\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.52)$$

Para o sistema de coordenadas local definido da seção anterior, os eixos $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$ aproximam-se bastante dos eixos ξ, η e ζ , no centróide do elemento. Desta forma, os produtos envolvendo $\hat{z}_{,\xi}$ ou $\hat{z}_{,\eta}$ com $\hat{x}_{,\zeta}$ ou $\hat{y}_{,\zeta}$ nas equações (4.50) e (4.52) são muito pequenos e podem ser desprezados e a equação (4.52) pode escrita como:

$$\begin{Bmatrix} N_{a,\hat{x}} \\ N_{a,\hat{y}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \hat{y}_{,\eta} & \hat{y}_{,\xi} \\ -\hat{x}_{,\eta} & \hat{x}_{,\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

e o determinante do Jacobiano definido pela equação (4.50) passa a ser

$$J = \left(\hat{x}_{,\xi} \hat{y}_{,\eta} - \hat{x}_{,\eta} \hat{y}_{,\xi} \right) \quad (4.54)$$

Note-se o cancelamento do termo $\hat{z}_{,\zeta}$ nas equações (4.53) e (4.54).

Substituindo-se a equação nas equações (4.53) e (4.54) tem-se que

$$\begin{Bmatrix} N_{a,\hat{x}} \\ N_{a,\hat{y}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \left(\begin{bmatrix} \hat{y}_{,\eta}^m & \hat{y}_{,\xi}^m \\ -\hat{x}_{,\eta}^m & \hat{x}_{,\xi}^m \end{bmatrix} + \bar{\zeta} \begin{bmatrix} p_{\hat{y},\eta} & -p_{\hat{y},\xi} \\ -p_{\hat{x},\eta} & p_{\hat{x},\xi} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

e o determinante do Jacobiano passa a ser dado por

$$J = \left[\left(\hat{x}_{,\xi}^m + \bar{\zeta} p_{\hat{x},\xi} \right) \left(\hat{y}_{,\eta}^m + \bar{\zeta} p_{\hat{y},\eta} \right) - \left(\hat{x}_{,\eta}^m + \bar{\zeta} p_{\hat{x},\eta} \right) \left(\hat{y}_{,\xi}^m + \bar{\zeta} p_{\hat{y},\xi} \right) \right] \quad (4.56)$$

Segundo o apresentado em [5] e [6], os termos dependentes de ζ na expressão do determinante do Jacobiano tem pouca influência na performance do elemento, podendo ser desprezados, e desta forma

$$J = \left(\hat{x}_{,\xi}^m \hat{y}_{,\eta}^m - \hat{x}_{,\eta}^m \hat{y}_{,\xi}^m \right) \quad (4.57)$$

que é idêntico ao determinante do Jacobiano do elemento BLT, dado pela equação (4.25).

As derivadas das funções de forma podem ser expressas da seguinte forma, a partir da equação (4.55)

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{1x} & B_{2x} & B_{3x} & B_{4x} \\ B_{1y} & B_{2y} & B_{3y} & B_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,\hat{x}} & N_{2,\hat{x}} & N_{3,\hat{x}} & N_{4,\hat{x}} \\ N_{1,\hat{y}} & N_{2,\hat{y}} & N_{3,\hat{y}} & N_{4,\hat{y}} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Levando-se em conta a equação (4.55), pode-se escrever as derivadas das funções de forma da seguinte maneira,

$$\begin{Bmatrix} B_{ax} \\ B_{ay} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_{ax}^o \\ B_{ay}^o \end{Bmatrix} + \bar{\zeta} \begin{Bmatrix} B_{ax}^c \\ B_{ay}^c \end{Bmatrix} \quad (4.59)$$

ou

$$\{\mathbf{B}_a\} = \{\mathbf{B}_a^o\} + \bar{\zeta} \{\mathbf{B}_a^c\} \quad (4.60)$$

onde

$$\{\mathbf{B}_a^o\} = \begin{Bmatrix} B_{ax}^o \\ B_{ay}^o \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \hat{y}_{,\eta}^m & \hat{y}_{,\xi}^m \\ -\hat{x}_{,\eta}^m & \hat{x}_{,\xi}^m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

e

$$\{\mathbf{B}_a^c\} = \begin{Bmatrix} B_{ax}^c \\ B_{ay}^c \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p_{\hat{y},\eta} & -p_{\hat{y},\xi} \\ -p_{\hat{x},\eta} & p_{\hat{x},\xi} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{a,\xi} \\ N_{a,\eta} \end{Bmatrix} \quad (4.62)$$

Usando-se as equações (4.46) e (4.59) para o cálculo das componentes do tensor taxa de deformação, tem-se que

$$D_{\hat{x}\hat{x}} = B_{a\hat{x}} v_{\hat{x}a} + \bar{\zeta} B_{ax} \dot{p}_{\hat{x}a} \quad (4.63)$$

$$D_{\hat{x}\hat{x}} = \left(B_{a\hat{x}}^o + \bar{\zeta} B_{a\hat{x}}^c \right) v_{\hat{x}a} + \bar{\zeta} \left(B_{a\hat{x}}^o + \bar{\zeta} B_{a\hat{x}}^c \right) \dot{p}_{\hat{x}a} \quad (4.64)$$

$$D_{\hat{x}\hat{x}} = B_{a\hat{x}}^o v_{\hat{x}a} + \bar{\zeta} \left(B_{a\hat{x}}^c v_{\hat{x}a} + B_{a\hat{x}}^o \dot{p}_{\hat{x}a} \right) + \bar{\zeta}^2 B_{a\hat{x}}^o \dot{p}_{\hat{x}a} \quad (4.65)$$

Desprezando-se o termo em $\bar{\zeta}^2$ por ser pequeno, pode-se escrever que

$$D_{\hat{x}\hat{x}} = B_{a\hat{x}}^o v_{\hat{x}a} + \bar{\zeta} \left(B_{a\hat{x}}^c v_{\hat{x}a} + B_{a\hat{x}}^o \dot{p}_{\hat{x}a} \right) \quad (4.66)$$

Analogamente,

$$D_{\hat{x}\hat{x}} = B_{a\hat{x}}^o v_{\hat{x}_a} + \bar{\zeta} \left(B_{a\hat{x}}^c v_{\hat{x}_a} + B_{a\hat{x}}^o \dot{p}_{\hat{x}_a} \right) \quad (4.67)$$

e

$$D_{\hat{x}\hat{y}} = B_{a\hat{x}}^o v_{\hat{x}_a} + B_{a\hat{y}}^o v_{\hat{y}_a} + \bar{\zeta} \left(B_{a\hat{x}}^c v_{\hat{y}_a} + B_{a\hat{y}}^c v_{\hat{x}_a} + B_{a\hat{x}}^o \dot{p}_{\hat{y}_a} + B_{a\hat{y}}^o \dot{p}_{\hat{x}_a} \right) \quad (4.68)$$

Para a obtenção das expressões (4.66), (4.67) e (4.68), é necessário determinar as derivadas espaciais do vetor $\{\mathbf{p}\}$, normal a superfície do elemento no centróide. Uma expressão para este vetor pode ser obtida a partir da equação da superfície média do elemento, definida pelo campo isoparamétrico bi-linear formado pelas funções de interpolação.

Conforme apresentado em [4], as expressões isoparamétricas podem ser manipuladas de modo a obter uma expressão para a superfície média do elemento definida em função das coordenadas locais do elemento, como se segue

$$\hat{z}^m = \sum_{a=1}^4 \left(\bar{s}_a + \hat{x} B_{a\hat{x}}^o + \hat{y} B_{a\hat{y}}^o + \xi \eta \gamma_a \right) \hat{z}_a \quad (4.69)$$

onde

$$\bar{s}_a = \frac{1}{4} \left[1 - B_{a\hat{x}}^o \left(\sum_{I=1}^4 \hat{x}_I \right) - B_{a\hat{y}}^o \left(\sum_{I=1}^4 \hat{y}_I \right) \right] \quad (4.70)$$

$$\gamma_a = \frac{1}{4} \left[h_a - B_{a\hat{x}}^o \left(\sum_{I=1}^4 h_I \hat{x}_I \right) - B_{a\hat{y}}^o \left(\sum_{I=1}^4 h_I \hat{y}_I \right) \right] \quad (4.71)$$

$$[h] = \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

O vetor normal $\{\mathbf{p}\}$ pode ser obtido através do cálculo do gradiente da superfície descrita pela equação (4.69):

$$\{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} -\hat{z}_{,\hat{x}}^m \\ -\hat{z}_{,\hat{y}}^m \\ 1 \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^4 \begin{Bmatrix} -\hat{z}_a B_{a\hat{x}}^o - \hat{z}_a (\xi\eta)_{,\hat{x}} \gamma_a \\ -\hat{z}_a B_{a\hat{y}}^o - \hat{z}_a (\xi\eta)_{,\hat{y}} \gamma_a \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.73)$$

Usando-se a equação (4.73), as derivadas de $\{\mathbf{p}\}$ presentes em (4.62) podem ser dadas por

$$p_{\hat{x},\xi} = -\hat{z}_{,\hat{x}\xi}^m = -z_\gamma \eta_{,\hat{x}} \quad (4.74a)$$

$$p_{\hat{x},\eta} = -\hat{z}_{,\hat{x}\eta}^m = -z_\gamma \xi_{,\hat{x}} \quad (4.74b)$$

$$p_{\hat{y},\xi} = -\hat{z}_{,\hat{y}\xi}^m = -z_\gamma \eta_{,\hat{y}} \quad (4.74c)$$

$$p_{\hat{y},\eta} = -\hat{z}_{,\hat{y}\eta}^m = -z_\gamma \xi_{,\hat{y}} \quad (4.74d)$$

Substituindo-se as equações (4.24), (4.25) e (4.74) na equação (4.62), tem-se que

$$\{\mathbf{B}_a^c\} = \begin{Bmatrix} B_{a\hat{x}}^c \\ B_{a\hat{y}}^c \end{Bmatrix} = \frac{z_\gamma}{16J^2} \begin{Bmatrix} \xi_a \hat{x}_{,\eta} + \eta_a \hat{x}_{,\xi} \\ \xi_a \hat{y}_{,\eta} + \eta_a \hat{y}_{,\xi} \end{Bmatrix} \quad (4.75)$$

substituindo-se as derivadas das funções de interpolação na equação (4.75):

$$\{\mathbf{B}_a^c\} = \frac{2z_\gamma}{A^2} \begin{bmatrix} \hat{x}_{13} & \hat{x}_{42} & \hat{x}_{31} & \hat{x}_{24} \\ \hat{y}_{13} & \hat{y}_{42} & \hat{y}_{31} & \hat{y}_{24} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Procedendo-se de maneira análoga para a equação (4.61), obtém-se que:

$$\{\mathbf{B}_a^o\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \hat{y}_{24} & \hat{y}_{31} & \hat{y}_{42} & \hat{y}_{13} \\ \hat{x}_{42} & \hat{x}_{13} & \hat{x}_{24} & \hat{x}_{31} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Usando-se as expressões (4.76) e (4.77) as equações (4.66), (4.67) e (4.68) podem ser escritas como

$$D_{\hat{x}\hat{x}}^m = \frac{1}{2A} (\hat{y}_{24} v_{\hat{x}13} + \hat{y}_{13} v_{\hat{x}42}) \quad (4.78)$$

$$D_{\hat{y}\hat{y}}^m = \frac{1}{2A} (\hat{x}_{42} v_{\hat{y}13} + \hat{x}_{13} v_{\hat{y}24}) \quad (4.79)$$

$$2D_{\hat{x}\hat{y}}^m = \frac{1}{2A} (\hat{x}_{42} v_{\hat{x}13} + \hat{x}_{13} v_{\hat{x}24} + \hat{y}_{24} v_{\hat{y}13} + \hat{y}_{31} v_{\hat{y}24}) \quad (4.80)$$

$$\kappa_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{\hat{y}_{24} \omega_{\hat{y}13} + \hat{y}_{13} \omega_{\hat{y}42}}{2A} + \frac{2z_\gamma (\hat{x}_{13} v_{\hat{x}13} + \hat{x}_{42} v_{\hat{x}24})}{A^2} \quad (4.81)$$

$$\kappa_{\hat{y}\hat{y}} = -\frac{\hat{x}_{24} \omega_{\hat{x}13} + \hat{x}_{13} \omega_{\hat{x}42}}{2A} + \frac{2z_\gamma (\hat{y}_{13} v_{\hat{y}13} + \hat{y}_{42} v_{\hat{y}24})}{A^2} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \kappa_{\hat{x}\hat{y}} = & \frac{\hat{x}_{42} \omega_{\hat{y}13} + \hat{x}_{13} \omega_{\hat{y}42} - \hat{y}_{24} \omega_{\hat{x}13} - \hat{y}_{31} \omega_{\hat{x}24}}{2A} + \\ & + \frac{2z_\gamma (\hat{x}_{13} v_{\hat{y}13} + \hat{x}_{42} v_{\hat{y}24} + \hat{y}_{13} v_{\hat{x}13} + \hat{y}_{42} v_{\hat{x}24})}{A^2} \end{aligned} \quad (4.83)$$

e

$$D_{\hat{x}\hat{x}} = D_{\hat{x}\hat{x}}^m + \bar{\zeta} \kappa_{\hat{x}\hat{x}} \quad (4.84)$$

$$D_{\hat{y}\hat{y}} = D_{\hat{y}\hat{y}}^m + \bar{\zeta} \kappa_{\hat{y}\hat{y}} \quad (4.85)$$

$$D_{\hat{x}\hat{y}} = D_{\hat{x}\hat{y}}^m + \bar{\zeta} \kappa_{\hat{x}\hat{y}} \quad (4.86)$$

Estas expressões permitem o cálculo das componentes $D_{\hat{x}\hat{x}}, D_{\hat{y}\hat{y}}$ e $D_{\hat{z}\hat{z}}$ do tensor taxa de deformação, referenciadas no sistema local do elemento. As demais componentes, relacionadas ao cisalhamento, são determinadas de acordo com o apresentado na seção seguinte

4.3.3. Projeção do cisalhamento

As taxas de deformação D_{yz} e D_{zx} são determinadas a partir de um esquema de projeção do

cisalhamento, semelhante ao apresentado em [21].

A figura 4.3.3.1 representa esquematicamente os vetores usados na definição da projeção do cisalhamento

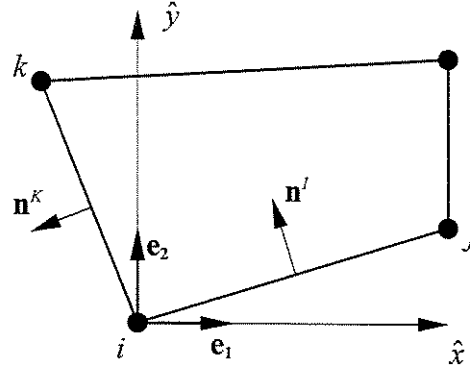
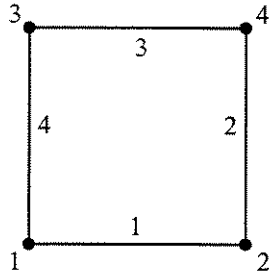


Figura 4.3.3.1 Projeção do cisalhamento



i	j	k
1	2	4
2	3	1
3	4	2
4	1	3

Figura 4.3.3.2. Sequência de índices para projeção do cisalhamento

O vetor tangente a aresta I , contido no plano médio do elemento, pode ser escrito como

$$\{\mathbf{t}^I\} = \frac{\{\hat{\mathbf{x}}_j\} - \{\hat{\mathbf{x}}_i\}}{\|\{\hat{\mathbf{x}}_j\} - \{\hat{\mathbf{x}}_i\}\|} = \frac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \begin{Bmatrix} (x_j - x_i) \\ (y_j - y_i) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.87)$$

denotando-se o comprimento, ou norma, da aresta I por

$$l_{ji} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad (4.88)$$

e definindo-se

$$\bar{x}_{ji} = \frac{\hat{x}_j - \hat{x}_i}{l_{ji}} \quad (4.89)$$

$$\bar{y}_{ji} = \frac{\hat{y}_j - \hat{y}_i}{l_{ji}} \quad (4.90)$$

o vetor tangente $\{\mathbf{t}^I\}$ pode ser escrito como

$$\{\mathbf{t}^I\} = \begin{Bmatrix} \bar{x}_{ji} \\ \bar{y}_{ji} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.91)$$

O vetor simultaneamente normal à aresta I e ao plano médio do elemento, denotado por $\{\mathbf{n}^I\}$, é obtido pelo produto vetorial entre a tangente $\{\mathbf{t}^I\}$ e a normal ao plano médio do elemento $\{\mathbf{e}_3\}$:

$$\{\mathbf{n}^I\} = \{\mathbf{e}_3\} \times \{\mathbf{t}^I\} = \begin{Bmatrix} -\bar{y}_{ji} \\ \bar{x}_{ji} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

Projetando as velocidades de rotação dos nós da aresta I sobre sua normal $\{\mathbf{n}^I\}$, pode-se escrever:

$$\omega_{ni}^I = \{\boldsymbol{\omega}_i\}^T \cdot \{\mathbf{n}^I\} \quad (4.93)$$

assim, para os dois nós da aresta I

$$\omega_{ni}^I = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{xi} & \hat{\omega}_{yi} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\bar{y}_{ji} \\ \bar{x}_{ji} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\hat{\omega}_{xi}\bar{y}_{ji} + \hat{\omega}_{yi}\bar{x}_{ji} \quad (4.94)$$

$$\omega_{nj}^I = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_{xj} & \hat{\omega}_{yj} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\bar{y}_{ji} \\ \bar{x}_{ji} \\ 0 \end{Bmatrix} = -\hat{\omega}_{xj}\bar{y}_{ji} + \hat{\omega}_{yj}\bar{x}_{ji} \quad (4.95)$$

As taxas de deformação de cisalhamento, no ponto médio da aresta I , projetadas sobre a normal $\{\mathbf{n}^I\}$, podem ser escritas como em [6]

$$\bar{\omega}_n^I = \frac{1}{2}(\omega_{ni}^I + \omega_{nj}^I) + \frac{1}{l_{ij}}(\hat{v}_{zj} - \hat{v}_{zi}) \quad (4.96)$$

Os valores nodais resultantes podem ser avaliados com base nas contribuições das arestas concorrentes em cada nó

$$\bar{\omega}_{\hat{x}_i} = \bar{\omega}_n^I \left(\left\{ \mathbf{n}^I \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_1 \right\} \right) + \bar{\omega}_n^K \left(\left\{ \mathbf{n}^K \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_1 \right\} \right) \quad (4.97)$$

$$\bar{\omega}_{\hat{y}_i} = \bar{\omega}_n^I \left(\left\{ \mathbf{n}^I \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_2 \right\} \right) + \bar{\omega}_n^K \left(\left\{ \mathbf{n}^K \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_2 \right\} \right) \quad (4.98)$$

Assim, as taxas de deformação de cisalhamento podem ser calculadas em qualquer ponto no domínio do elemento, através da interpolação dos valores nodais, usando as funções de forma

$$2D_{yz} = -N_a \bar{\omega}_{\hat{x}_a} \quad (4.99)$$

$$2D_{xz} = -N_a \bar{\omega}_{\hat{y}_a} \quad (4.100)$$

A partir das expressões (4.96), (4.97) e (4.98), pode-se determinar uma expressão mais simples para as equações (4.99) e (4.100), expressas apenas em função das coordenadas nodais.

Reescrevendo-se a expressão (4.96)

$$\bar{\omega}_n^I = \frac{1}{2} \left(-\hat{\omega}_{xi} \bar{y}_{ji} + \hat{\omega}_{yi} \bar{x}_{ji} - \hat{\omega}_{xj} \bar{y}_{ji} + \hat{\omega}_{yj} \bar{x}_{ji} \right) + \frac{1}{l_{ji}} \left(\hat{v}_{zj} - \hat{v}_{zi} \right) \quad (4.101)$$

usando-se as equações (4.89) e (4.90) e colocando-se em forma matricial, chega-se a:

$$\bar{\omega}_n^I = \frac{1}{2l_{ji}} \begin{bmatrix} -2 & -\hat{y}_{ji} & \hat{x}_{ji} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zi} \\ \hat{\omega}_{xi} \\ \hat{\omega}_{yi} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2l_{ji}} \begin{bmatrix} 2 & -\hat{y}_{ji} & \hat{x}_{ji} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zj} \\ \hat{\omega}_{xj} \\ \hat{\omega}_{yj} \end{Bmatrix} \quad (4.102)$$

Determinando os produto internos entre os vetores unitários das equações (4.97) e (4.98), simplifica-se as expressões como se segue:

$$\left\{ \mathbf{n}^I \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_1 \right\} = -\bar{y}_{ji}; \quad \left\{ \mathbf{n}^I \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_2 \right\} = \bar{x}_{ji} \quad (4.103a)$$

$$\left\{ \mathbf{n}^K \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_1 \right\} = -\bar{y}_{ik}; \quad \left\{ \mathbf{n}^K \right\}^T \cdot \left\{ \mathbf{e}_2 \right\} = \bar{x}_{ik} \quad (4.103b)$$

Substituindo-se as equações (4.102) e (4.103) na equação (4.97), determina-se a taxa de deformação de cisalhamento nodal da seguinte maneira,

$$\bar{\omega}_{zi} = -\bar{\omega}_n^I \bar{y}_{ji} - \bar{\omega}_n^K \bar{y}_{ik} \quad (4.104)$$

e que resulta em:

$$\bar{\omega}_{zi} = -\frac{\bar{y}_{ji}}{2l_{ji}} \begin{bmatrix} -2 & -\hat{y}_{ji} & \hat{x}_{ji} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zi} \\ \hat{\omega}_{xi} \\ \hat{\omega}_{yi} \end{Bmatrix} - \frac{\bar{y}_{ji}}{2l_{ji}} \begin{bmatrix} 2 & -\hat{y}_{ji} & \hat{x}_{ji} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zj} \\ \hat{\omega}_{xj} \\ \hat{\omega}_{yj} \end{Bmatrix} +$$

$$-\frac{\bar{y}_{ik}}{2l_{ik}} \begin{bmatrix} -2 & -\hat{y}_{ik} & \hat{x}_{ik} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zk} \\ \hat{\omega}_{xk} \\ \hat{\omega}_{yk} \end{Bmatrix} - \frac{\bar{y}_{ik}}{2l_{ik}} \begin{bmatrix} 2 & -\hat{y}_{ik} & \hat{x}_{ik} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zi} \\ \hat{\omega}_{xi} \\ \hat{\omega}_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4.105)$$

definindo-se as seguintes variáveis auxiliares,

$$\bar{\bar{x}}_{ji} = \frac{\bar{x}_{ji}}{l_{ji}} \quad \text{e} \quad \bar{\bar{y}}_{ji} = \frac{\bar{y}_{ji}}{l_{ji}} \quad (4.106)$$

e substituindo-se na equação (4.105), pode-se escrever os valores nodais das taxas de deformação de cisalhamento como se segue:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{xi} = & \frac{1}{2} \left[2(\bar{\bar{y}}_{ji} - \bar{\bar{y}}_{ik}) (\hat{y}_{ji} \bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{y}_{ik} \bar{\bar{y}}_{ik}) - (\hat{x}_{ji} \bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{x}_{ik} \bar{\bar{y}}_{ik}) \right] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zi} \\ \hat{\omega}_{xi} \\ \hat{\omega}_{yi} \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \left[-2\bar{\bar{y}}_{ji} \hat{y}_{ji} \bar{\bar{y}}_{ji} - \hat{x}_{ji} \bar{\bar{y}}_{ji} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zj} \\ \hat{\omega}_{xj} \\ \hat{\omega}_{yj} \end{Bmatrix} + \\ & + \frac{1}{2} \left[2\bar{\bar{y}}_{ik} \hat{y}_{ik} \bar{\bar{y}}_{ik} - \hat{x}_{ik} \bar{\bar{y}}_{ik} \right] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zk} \\ \hat{\omega}_{xk} \\ \hat{\omega}_{yk} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.107)$$

A partir da equação (4.107), percebe-se que cada nó i , recebe contribuições dos nós adjacentes, j e k . Fazendo-se o cômputo para todo o elemento, pode-se escrever a contribuição de cada nó:

$$\bar{\omega}_{xi} = \left[2(\bar{\bar{y}}_{ji} - \bar{\bar{y}}_{ik}) (\hat{y}_{ji} \bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{y}_{ik} \bar{\bar{y}}_{ik}) - (\hat{x}_{ji} \bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{x}_{ik} \bar{\bar{y}}_{ik}) \right] \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zi} \\ \hat{\omega}_{xi} \\ \hat{\omega}_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4.108)$$

Analogamente, para a outra direção

$$\overline{\omega}_{\hat{y}_i} = \begin{bmatrix} -2(\bar{\bar{x}}_{ji} - \bar{\bar{x}}_{ik}) & -(\hat{y}_{ji}\bar{\bar{x}}_{ji} + \hat{y}_{ik}\bar{\bar{x}}_{ik}) & (\hat{x}_{ji}\bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{x}_{ik}\bar{\bar{x}}_{ik}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zi} \\ \hat{\omega}_{xi} \\ \hat{\omega}_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4.109)$$

Desta forma, as equações (4.99) e (4.100), avaliadas no centro do elemento ($\xi = \eta = 0$), podem ser escritas como

$$\begin{Bmatrix} 2D_{xz} \\ 2D_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2(\bar{\bar{x}}_{ji} - \bar{\bar{x}}_{ik}) & (\hat{y}_{ji}\bar{\bar{x}}_{ji} + \hat{y}_{ik}\bar{\bar{x}}_{ik}) & -(\hat{x}_{ji}\bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{x}_{ik}\bar{\bar{x}}_{ik}) \\ -2(\bar{\bar{y}}_{ji} - \bar{\bar{y}}_{ik}) & -(\hat{y}_{ji}\bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{y}_{ik}\bar{\bar{y}}_{ik}) & (\hat{x}_{ji}\bar{\bar{y}}_{ji} + \hat{x}_{ik}\bar{\bar{y}}_{ik}) \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} \hat{v}_{zi} \\ \hat{\omega}_{xi} \\ \hat{\omega}_{yi} \end{Bmatrix} \quad (4.110)$$

onde para cada nó i , os índices j e k são dados pela figura 4.3.2.2.

Com isto, pode-se calcular todas as componentes do tensor taxa de deformação e proceder-se o cálculo das forças internas de maneira análoga ao empregado para o elemento BLT, na seção 4.2.3.

4.4. Sub-Integração e Controle de Modos Espúrios

A integração dinâmica explícita requer o uso de um incremento e tempo pequeno para a garantir a estabilidade, fazendo com que as operações nodais e as avaliações das equações constitutivas em cada ponto de integração nos elemento precisem ser executadas milhares, ou até milhões de vezes [16].

Para os códigos explícitos, a adoção da integração reduzida uniforme trouxe ganhos de performance computacional da ordem de uma dezena de vezes, tornando-se quase uma obrigatoriedade para assegurar uma performance aceitável em problemas de engenharia [18][16].

O grande inconveniente da integração reduzida uniforme, ou sub-integração, é o aparecimento de modos espúrios de deformação, isto é, modos de deformação com energia nula [21]. Nos elementos quadrilaterais lineares, os modos espúrios aparecem da incapacidade das derivadas das funções forma de representarem os termos bi-lineares de rigidez e de força interna, na integração no centróide ($\xi=\eta=0$) [21].

Sendo a matriz de rigidez de um elemento dada por

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\Omega \quad (4.111)$$

os modos espúrios podem ser determinados pela avaliação das suas características de rigidez, através do problema de autovalores

$$\det \left([\mathbf{K}_e] - \lambda [\mathbf{I}] \right) = 0 \quad (4.112)$$

Os elementos de casca BLT e BWC possuem cinco modos espúrios de deformação associados à membrana e flexão. Na figura 5.4.1 mostram-se os modos espúrios associados a deformações de membrana.

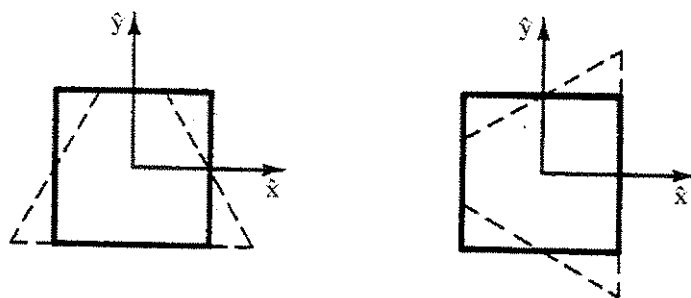


Figura 5.4.1. Modos Espúrios de Deformação de Membrana

Na figura 5.4.2 são apresentados de maneira esquemática os modos espúrios associados às deformações de flexão.

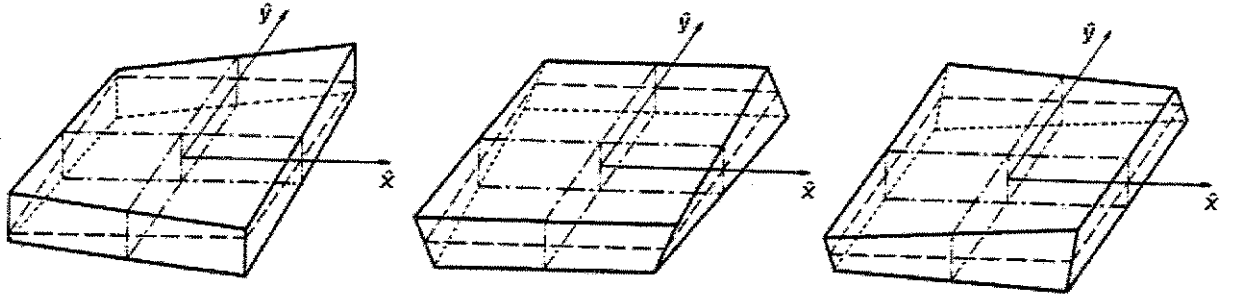


Figura 5.4.2. Modos Espúrios de Deformação de Flexão

Os modos espúrios são definidos, para um elemento de formato quadrado, de acordo com o seguinte vetor:

$$[h] = [+1, -1, +1, -1] \quad (4.113)$$

Para configurações quadrilaterais arbitrárias, o vetor de forma dos modos espúrios, ortogonal aos modos de corpo rígido, definido em [3], é dado, por

$$\gamma_I = h_I - (h_J \hat{x}_{\alpha J}) B_{\alpha I} \quad (4.114)$$

Associadas aos modos espúrios, pode-se definir taxas de deformação generalizadas $\dot{q}$, tais que

$$\begin{aligned} \dot{q}_\alpha^M &= \gamma_I \hat{v}_{\alpha I} \\ \dot{q}_\alpha^F &= \gamma_I \hat{\omega}_{\alpha I} \\ \dot{q}_z^F &= \gamma_I \hat{v}_{zI} \end{aligned} \quad (4.115)$$

com $\alpha = 1, 2$, significando as direções no plano do elemento $(\hat{x}, \hat{y})$ e $I=1, 4$, significando o somatório sobre os nós do elemento.

A partir das taxas de deformações generalizadas, são definidas as taxas de tensão generalizadas [3], tais que

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_\alpha^F &= C_1 \dot{q}_\alpha^F \\
\dot{Q}_3^F &= C_2 \dot{q}_3^F \\
\dot{Q}_\alpha^M &= C_3 \dot{q}_\alpha^M
\end{aligned} \tag{4.116}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{1}{192} r_\theta \Psi_e B_{\alpha I} B_{\alpha I} \\
C_2 &= \frac{1}{12} r_w (\kappa G h^3 A_e) B_{\alpha I} B_{\alpha I} \\
C_3 &= \frac{1}{8} r_M (E h A_e) B_{\alpha I} B_{\alpha I}
\end{aligned} \tag{4.117}$$

são coeficientes determinados a partir dos limite superiores de rigidez que uma casca de material hipo-elástico pode apresentar [3][15]. A constante Ψ_e é definida como:

$$\Psi_e = E h^3 A_e \tag{4.118}$$

para o elemento BLT , e como:

$$\Psi_e = 1 + \frac{2\kappa A_e}{3h^3} \tag{4.119}$$

para o elemento BWC.

Os coeficientes C_1 , C_2 e C_3 envolvem propriedades geométricas do elemento, como a área, A_e , e a espessura, h , parâmetros de material, como o módulo de elasticidade, E , o módulo de cisalhamento, G , e o coeficiente de cisalhamento, κ . Os parâmetros r_θ , r_w e r_M são constantes arbitrárias que controlam a intensidade da rigidez a ser introduzida pelas deformações generalizadas. Seus valores que em geral oscilam entre 0.01 e 0.05 [3]. A metodologia que leva a dedução destes dos termos pode ser encontrada em [15].

As tensões generalizadas são atualizadas a partir das taxas de tensão generalizadas, de maneira similar às tensões internas:

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n + \Delta t \dot{\mathbf{Q}} \quad (4.120)$$

onde Δt é o incremento de tempo, $\mathbf{Q}^{n+1}$ e $\mathbf{Q}^n$ são o novo vetor de tensões generalizadas e o vetor de tensões generalizadas no instante anterior, respectivamente. Desta forma, as tensões generalizadas devem ser armazenadas como variáveis em cada elemento.

A partir das tensões generalizadas, podem ser calculadas forças internas de estabilização da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{m}_{\alpha I}^H &= \gamma_I Q_{\alpha}^F \\ \hat{f}_{zI}^H &= \gamma_I Q_3^F \\ \hat{f}_{\alpha I}^H &= \gamma_I Q_{\alpha}^M \end{aligned} \quad (4.121)$$

As forças de estabilização são calculadas no sistema de coordenadas local e adicionadas ao vetor de forças internas nodais do elemento, estabilizando-o localmente. Com a adição das forças locais ao vetor de forças internas global, ocorre a estabilização do sistema.

4.5. Remoção da Rotação no Plano

As formulações de casca são geralmente baseadas em cinco graus de liberdade nodais mas os programas de elementos finitos gerais são normalmente implementados com seis graus de liberdade nodais.

Quando um elemento de casca com cinco graus de liberdade por nó é implementado diretamente em um sistema com seis graus de liberdade nodais, há o aparecimento de deformações espúrias, causadas pela incapacidade da formulação de representar as rotações θ_z , na superfície média do elemento.

Em [8] é apresentado um esquema de projeção que, a partir de um campo arbitrário de velocidades, remove as componentes ω_z das velocidades de rotações nodais, de cada elemento.

Considera-se um elemento quadrilateral linear, conforme a figura 4.3.3.1. Em cada nó do elemento, vetores normais podem ser determinados a partir do produto vetorial entre os vetores formados pelas arestas concorrentes a cada nó:

$$\{\hat{\mathbf{n}}_I\} = \frac{\{\hat{\mathbf{s}}_{IJ}\} \times \{\hat{\mathbf{s}}_{IK}\}}{\|\{\hat{\mathbf{s}}_{IJ}\} \times \{\hat{\mathbf{s}}_{IK}\}\|} \quad (4.122)$$

Sendo $\{\hat{\omega}_a\}$ o vetor das velocidades angulares nodais expressas no sistema local do elemento, as componentes ω_z das velocidades de rotação nodais podem ser removidas através da expressão:

$$\{\hat{\omega}_a\} = \{\hat{\omega}_a\} - (\{\hat{\omega}_a\} \cdot \{\hat{\mathbf{n}}_a\}) \cdot \{\hat{\mathbf{n}}_a\} \quad (4.123)$$

De modo a manter a potência interna invariante, a mesma projeção deve ser aplicada ao vetor dos momentos internos:

$$\{\hat{\mathbf{m}}_a\} = \{\hat{\mathbf{m}}_a\} - (\{\hat{\mathbf{m}}_a\} \cdot \{\hat{\mathbf{n}}_a\}) \cdot \{\hat{\mathbf{n}}_a\} \quad (4.124)$$

onde $\{\hat{\mathbf{m}}_a\}$ são os momentos calculados a partir do campo de velocidades angulares $\{\hat{\omega}_a\}$ e $\{\hat{\mathbf{m}}_a\}$ são os momentos nodais resultantes, a serem convertidos ao sistema global e adicionados adequadamente ao vetor de forças globais.

Esta metodologia foi adotada para a implementação de ambos os elementos estudados neste trabalho.

4.6. Equações Constitutivas

No presente trabalho, são utilizados dois tipos de modelos de material, elástico linear infinitesimal e elasto-plástico, de modo a permitir a implementação de um sistema computacional funcional e sua avaliação comparativa em relação a outros sistemas. Desta forma, serão apresentados apenas os conceitos básicos e as definições necessárias para esta implementação, sem entrar em detalhes sobre os modelos constitutivos estudados.

4.6.1. Elasticidade Linear Infinitesimal

Para um material elástico linear isotrópico, em condições isotérmicas, um incremento de tensões é determinado a partir de um incremento de deformações, de acordo com a lei de Hooke para o estado plano de tensões [11]:

$$\{\dot{\sigma}\} = [E]\{\dot{\varepsilon}\} \quad (4.125)$$

onde $\{\dot{\sigma}\}$ é um vetor formado com as derivadas temporais das componentes do tensor tensão de Cauchy:

$$\{\dot{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\sigma}_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.126)$$

$\{\varepsilon\}$ é um vetor formado com as derivadas temporais das componentes do tensor deformação infinitesimal [11]:

$$\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ 2\dot{\varepsilon}_{12} \\ 2\dot{\varepsilon}_{23} \\ 2\dot{\varepsilon}_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.127)$$

$[\mathbf{E}]$ é o tensor das propriedades constitutivas para o material elástico linear isotrópico:

$$[\mathbf{E}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & \\ \nu & 1 & & & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & & \\ & & & \frac{1-\nu}{2} & \\ & & & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

onde E é o módulo de elasticidade do material e ν é o seu coeficiente de Poisson.

Para pequenas deformações e pequenos deslocamentos, as derivadas temporais das componentes do tensor deformação infinitesimal podem ser aproximadas a partir das componentes do tensor taxa de deformação [25]:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \cong D_{ij} \quad (4.129)$$

Conseqüentemente, usando-se as equações (4.125) e (4.129), para um dado instante t e um pequeno incremento de tempo Δt , as tensões podem ser calculadas como:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^t = \{\boldsymbol{\sigma}\}^{t-1} + \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} \Delta t \quad (4.130)$$

4.6.2. Elasto-Plasticidade

Neste trabalho é empregado um modelo de plasticidade associativa, baseado no critério de escoamento de Von Mises, com encruamento isotrópico, conforme apresentado em [11] e [29]. Diferentemente dos algoritmos usados em problemas estáticos incrementais ou dinâmicos implícitos, nos métodos dinâmicos explícitos não há a necessidade de calcular-se iterativamente a matriz de rigidez tangente para um dado incremento de deformações, ao invés disso, apenas as tensões resultantes precisam ser calculadas. Neste trabalho, as tensões resultantes são calculadas pelo método do retorno radial, conforme apresentado em [11].

Para o estado plano de tensões, o critério de escoamento com encruamento isotrópico é dado pela seguinte equação:

$$f(\{\sigma\}) - \sigma_y(\varepsilon_p) = 0 \quad (4.131)$$

onde $f(\{\sigma\})$ é a função de escoamento e $\sigma_y(\varepsilon_p)$ é regra de encruamento que define a tensão de escoamento como uma função da deformação plástica equivalente, ε_p .

A função de escoamento para o critério de Von Mises é dada por:

$$f(\{\sigma\}) = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)} \quad (4.132)$$

onde σ_{ij} são as componentes do tensor tensão de Cauchy.

Para um encruamento isotrópico potencial, a tensão de escoamento pode ser calculada pela equação:

$$\sigma_y(\varepsilon_p) = K(\varepsilon_p)^n \quad (4.133)$$

onde o multiplicador K e expoente de encruamento n são constantes do material, que podem ser definidas a partir de um ensaio de tração uniaxial.

Em um dado instante de tempo, as tensões elásticas podem ser calculadas conforme a seção anterior, usando-se a equação (4.130)

$$\{\boldsymbol{\sigma}^*\}^t = \{\boldsymbol{\sigma}\}^{t-1} + \{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} \Delta t \quad (4.134)$$

Substituindo-se $\{\boldsymbol{\sigma}^*\}^t$ na equação (4.131) tem-se duas possibilidades.

A primeira possibilidade refere-se ao caso elástico, quando

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}^*\}^t) - \sigma_y(\epsilon_p) < 0 \quad (4.135)$$

isto é, o material ainda não atingiu o limite de escoamento e responde elasticamente, conforme o apresentado na seção anterior.

Na segunda possibilidade, quando

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \sigma_y(\epsilon_p) \geq 0 \quad (4.136)$$

o material atingiu o regime plástico e responde com um comportamento elasto-plástico.

Quando o regime plástico é atingido, pode-se dividir o tensor taxa de deformação em uma parcela elástica e outra plástica:

$$\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{D}_e\} + \{\mathbf{D}_p\} \quad (4.137)$$

Fazendo-se

$$\{\mathbf{D}_e\} = \{\mathbf{D}\} - \{\mathbf{D}_p\} \quad (4.138)$$

pode-se usar as equações (4.129), (4.125) e (4.138) para escrever:

$$\{\dot{\boldsymbol{\sigma}}\} = [\mathbf{E}]\{\mathbf{D}_e\} = [\mathbf{E}]\{\mathbf{D} - \mathbf{D}_p\} \quad (4.139)$$

Pela condição da normalidade [11], a parcela plástica da taxa de formação pode ser escrita como:

$$\{\mathbf{D}_p\} = \dot{\lambda} \{\mathbf{n}\} \quad (4.140)$$

onde o multiplicador plástico, $\dot{\lambda}$, é um parâmetro escalar a ser determinado e $\{\mathbf{n}\}$ é um vetor normal a superfície de escoamento definida pela equação (4.131). O vetor normal $\{\mathbf{n}\}$ pode ser definido como [29]:

$$\{\mathbf{n}\} = \frac{\partial f(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{\partial \{\boldsymbol{\sigma}\}} \quad (4.141)$$

Substituindo-se as equações (4.132) na equação (4.141) e resolvendo-se as derivadas parciais, tem-se que o cálculo explícito do vetor normal é dado por:

$$\{\mathbf{n}\} = \frac{1}{f(\{\boldsymbol{\sigma}\})} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & & \\ -1/2 & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.142)$$

De posse do vetor normal, pode-se retornar à equação da parcela plástica da taxa de deformação, equação (4.140), reescrevendo-a em função das tensões em cada ponto:

$$\{\mathbf{D}_p\} = \frac{\dot{\lambda}}{f(\{\boldsymbol{\sigma}\})} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & & \\ -1/2 & 1 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (4.143)$$

O cálculo do multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ envolve a solução de equações não-lineares e pode ser determinado de forma iterativa, como se segue.

A partir da equação (4.139), tem-se que:

$$\{\dot{\sigma}\} = [E]\{\dot{D}\} - [E]\{\dot{D}_p\} \quad (4.144)$$

Seguindo-se a mesma forma da equação (4.134), tem-se que as tensões resultantes, num dado instante de tempo, podem ser escritas como:

$$\{\sigma\}^t = \{\sigma\}^{t-1} + \{\dot{\sigma}\} \Delta t \quad (4.145)$$

Substituindo-se a equação (4.144) na equação (4.145), tem-se que

$$\{\sigma\}^t = \{\sigma\}^{t-1} + [E]\{\dot{D}\} \Delta t - [E]\{\dot{D}_p\} \Delta t \quad (4.146)$$

Usando-se a equação (4.134), obtém-se

$$\{\sigma\}^t = \{\sigma^*\}^t - [E]\{\dot{D}_p\} \Delta t \quad (4.147)$$

Substituindo-se a equação (4.143) na equação (4.147), tem-se que

$$\{\sigma\}^t = \{\sigma^*\}^t - \frac{\dot{\lambda} \Delta t}{f(\{\sigma\}^{t-1})} [E] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & \\ -1/2 & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \{\sigma\}^t \quad (4.148)$$

Isolando-se $\{\sigma\}^t$:

$$(4.149) \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{\dot{\lambda} \Delta t}{f(\{\boldsymbol{\sigma}\}^{t-1})} [\mathbf{E}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & & \\ -1/2 & 1 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \right\} \{\boldsymbol{\sigma}\}^t = \{\boldsymbol{\sigma}^*\}^t$$

Deve-se encontrar um valor para $\dot{\lambda}$ tal que a equação (4.149) seja satisfeita, respeitando simultaneamente a condição de que as tensões devem estar sobre a superfície de escoamento, ou seja

$$f(\boldsymbol{\sigma}^t) = \sigma_y(\boldsymbol{\varepsilon}_p^t) \quad (4.150)$$

Conforme apresentado em [11], $\Delta \varepsilon_p = \dot{\lambda} \Delta t$ é o incremento plástico equivalente, de modo que $\boldsymbol{\varepsilon}_p^t = \boldsymbol{\varepsilon}_p^{t-1} + \Delta \varepsilon_p$.

O multiplicador plástico pode ser obtido de maneira analítica, mas para esta implementação, usou-se um algoritmo iterativo baseado no método da secante.

4.7. Matriz de Massa

A matriz de massa global é composta pela contribuição de massa e inércia de cada elemento que compõe o sistema. A integração explícita do tempo torna essencial que esta matriz de massa seja diagonal, proporcionando o desacoplamento entre os graus de liberdade globais, evitando a necessidade de inversões de matrizes ou a resolução de sistemas de equações [21].

Conforme apresentado por Hughes [21], a matriz de massa diagonal de cada elemento é composta por termos relativos a translação e termos de inércia de rotação, associadas aos graus de

liberdade dos nós que compõem um elemento. Assim, a matriz de massa concentrada de um elemento no espaço é dada por:

$$[\mathbf{m}_e] = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

Os graus de liberdade de translação são expressos no sistema global e os termos da matriz de massa relativos a de translação, m_i , associados a cada um deles podem ser dados por:

$$m_x = m_y = m_z = m = \frac{1}{4} M_e \quad (4.152)$$

onde M_e é a massa do elemento e . Ou seja, o elemento tem sua massa igualmente distribuída para todos os nós. Assumindo-se que a densidade do material, ρ , é constante em todo o elemento, pode-se escrever

$$M_e = \rho V_e = \rho A_e h \quad (4.153)$$

onde V_e é o volume de elemento, A_e a sua área e h sua espessura.

Estando os termos que representam a inércia de translação do elemento expressos no sistema global, basta adicioná-los diretamente à matriz de massa diagonal global.

Os graus de liberdade de rotação necessitam um tratamento um pouco mais elaborado. As inércias de um elemento, I_{ij} , são calculadas em relação ao seu sistema de coordenadas local, da seguinte maneira:

$$I_{xx} = \int (\hat{y} - \hat{y}_i)^2 \rho A_e d\hat{x} d\hat{y}$$

$$I_{\hat{y}\hat{y}} = \int (\hat{x} - \hat{x}_i)^2 \rho A_e d\hat{x}d\hat{y} \quad (4.154)$$

$$I_{\hat{z}\hat{z}} = I_{\hat{x}\hat{x}} + I_{\hat{y}\hat{y}}$$

Uma forma simplificada de avaliar estes termos é mostrada em [18] e [21], onde sugere-se o cálculo dos termos de inércia de rotação, no referencial local, da seguinte maneira:

$$I_{\hat{x}\hat{x}} = I_{\hat{y}\hat{y}} = \max \left[\left(\frac{mt^2}{12} \right), \left(\frac{mA_e}{8} \right) \right] \quad (4.155)$$

deste modo, a sub-matriz de inércias de rotação associada a cada nó do elemento pode ser escrita, no sistema local, como

$$\left[\hat{\mathbf{I}}_a \right]^e = \begin{bmatrix} I_{\hat{x}\hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\hat{y}\hat{y}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\hat{z}\hat{z}} \end{bmatrix} \quad (4.156)$$

Para ser adicionada à matriz de massa global, a matriz inércia de rotação nodal precisa ser transformada para o sistema de coordenadas global. Usando-se a matriz de transformação local-global do elemento, $[\mathbf{R}^e]$, definida em (4.14), tem-se

$$\left[\mathbf{I}_a^e \right] = \left[\mathbf{R}^e \right] \left[\hat{\mathbf{I}}_a^e \right]^e \left[\mathbf{R}^e \right]^T \quad (4.157)$$

Quando da transformação para o sistema de coordenadas global, a matriz de inércia de rotação nodal deixa de ser diagonal caso os eixos do sistema de coordenadas do elemento não forem paralelos aos eixos do sistema global.

A matriz de inércia de rotação nodal resultante é obtida levando-se em conta a contribuição de todos os elementos conectados a um mesmo nó:

$$\left[\mathbf{I}_a \right] = \sum_e \left[\mathbf{I}_a^e \right] \quad (4.158)$$

A matriz de Inércia global é então formada a partir de todas as sub-matrizes nodais $[\mathbf{I}_a]$. De modo a assegurar que todas as matrizes de inércia de rotação nodais sejam diagonais, é conveniente representar os graus de liberdade de rotação nodais em um sistema de coordenadas nodal, alinhado com os eixos principais da matriz de inércia de rotação nodal $[\mathbf{I}_a]$.

Assim, para cada nó, é preciso determinar os autovalores, I_i , e os autovetores normalizados, $\{\mathbf{i}_i\}$, da matriz de inércia de rotação nodal, $[\mathbf{I}_a]$. Cada sistema de coordenadas nodal fica então definido como sendo a tríade formada pelos autovetores $\{\mathbf{i}_i\}$ e a matriz de inércia de rotação nodal passa a ser a matriz diagonal formada pelos autovalores, I_i :

$$\mathbf{I}_a = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (4.159)$$

A matriz de transformação nodal-global, $[\mathbf{R}_{ng}]$ é definida usando-se os autovetores $\{\mathbf{i}_i\}$ como colunas, de tal forma que:

$$[\mathbf{R}_{ng}] = [\mathbf{i}_1 \quad \mathbf{i}_2 \quad \mathbf{i}_3] \quad (4.160)$$

Para permitir condições de grandes deslocamentos e grandes rotações, os tensores de inércia nodais e conseqüentemente os sistemas de coordenadas nodais devem sempre acompanhar as rotações experimentadas pelos nó, sendo portanto necessário reorientá-los a cada incremento de tempo.

Nesta implementação, todos os graus de liberdade de translação são expressos no sistema global e todos os graus de liberdade de rotação são expressos nos sistemas nodais.

Capítulo 5

Implementação Computacional

Neste capítulo são apresentados a infraestrutura computacional e os principais algoritmos utilizados nesta implementação. Procura-se Detalhar todas as etapas do programa, de modo que este capítulo se constitua na documentação básica do sistema que será disponibilizado em domínio público.

5.1. Infraestrutura Computacional

Para esta implementação foi usada a infraestrutura descrita na tabela 5.1.1. Todos os programas desenvolvidos foram escritos em linguagem C-ANSI e todas as bibliotecas utilizadas são fornecidas em código fonte.

Item	Nome	Versão
Sistema Operacional	LINUX (http://www.linux.org)	2.4.2
Compilador C	gcc (http://gcc.gnu.org/)	3.4.0
Ambiente de Desenvolvimento	Kdevelop (http://www.kdevelop.org)	3.0
Manipulação Algébrica	Maxima (http://maxima.sourceforge.net)	5.9.0
Manipulação Numérica	Scilab (http://www.scilab.org)	3.0
Estrutura de Arquivos	HDF5 (http://hdf.ncsa.uiuc.edu/HDF5)	5-1.6.3
Biblioteca Científica (em C)	gsl (http://www.gnu.org)	1.5

Tabela 5.1.1. Infraestrutura computacional

5.2. Algoritmos

O algoritmo base do sistema apresenta-se dividido em três fases:

1. Inicialização
2. Integração no tempo
3. Finalização

Na fase de inicialização são efetuadas a verificação da linha de comando, a leitura do arquivo de entrada de dados, as alocações de memória e a configuração da base de dados do problema.

A fase de integração no tempo é o algoritmo mestre do programa, constando de um laço iterativo sobre o tempo de duração do fenômeno a ser analisado, durante o qual todas as computações do método dos elementos finitos são efetuadas.

Na fase de finalização, toda a liberação de memória, fechamento de arquivos e geração de relatórios são executados, de modo a garantir a terminação correta de todo o processamento.

Após apresentação dos algoritmos básicos que compõe as três fases do sistema, são apresentados os principais algoritmos específicos de solução do problema de elementos finitos.

5.2.1. Inicialização

O processo de inicialização do sistema é apresentado no diagrama 5.2.2.1

Diagrama 5.2.2.1 – Inicialização do Sistema	
1	Inicialização
1.1.	Verificação da linha de comando
1.2	Leitura do arquivo de entrada
i.	Verificação da sintaxe
ii.	Criação dos arquivos de saída

- iii. Leitura dos dados
- 1.3 Inicialização do banco de dados
 - i Materiais
 - ii Nós
 - iii Elementos
 - iv Condições de contorno
 - v Forças externas (nodais e nos elementos)
- 1.4 Determinação da matriz massa Global
- 1.5 Determinação do incremento de tempo estável, dt_e
- 1.6 Gravação do estado inicial do sistema

Ao final da etapa de inicialização, o banco de dados está formado e o processo de integração no tempo pode ser iniciado.

5.2.2. Integração no tempo

O algoritmo de integração no tempo utilizado nesta implementação é baseado no método das diferenças centrais e encontra-se descrito no diagrama 5.2.2.1,

Diagrama 5.2.2.1. Integração do tempo

- 2 Integração no tempo**
 - 2.1 Inicialização dos contadores
 - 2.2 Teste de finalização
 - Se finalizou, vai para 3.
 - Senão, vai para 2.3
 - 2.3 Inicialização do vetor de forças
 - 2.4 Aplicação das forças externas
 - i Forças externas nos nós

ii Forças externas nos elementos

- 2.5 Cálculo das forças internas
- 2.6 Determinação das forças resultantes
- 2.7 Cálculo das acelerações (G.L. ativos)
- 2.8 Aplicação das condições de contorno (G.L. restritos)
- 2.9 Gravação condicional dos resultados
- 2.10 Cálculo das velocidades
- 2.11 Cálculo dos deslocamentos
- 2.12 Atualização das coordenadas nodais
- 2.13 Atualização dos sistemas de coordenadas nodais
- 2.14 Determinação das energias no sistema
- 2.15 Incremento de tempo
- 2.16 Determinação do incremento de tempo estável, dt_e
- 2.17 Retorna para 2.2

5.2.3 Finalização.

O algoritmo de finalização está descrito no diagrama 5.2.3.1, abaixo:

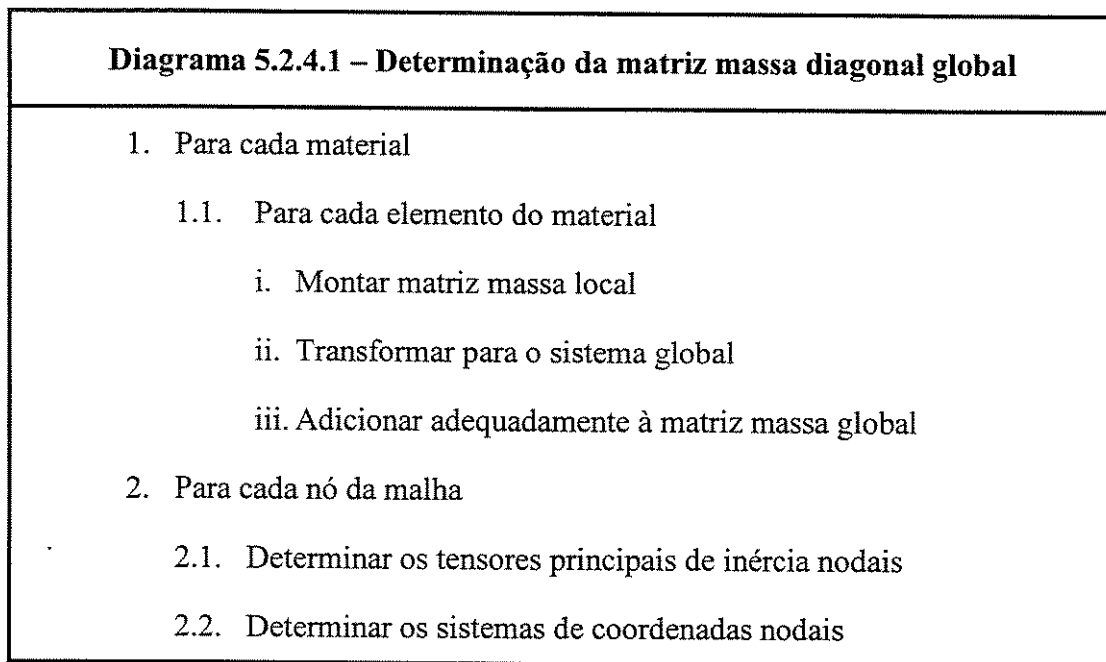
Diagrama 5.2.3.1 – Finalização

3 Finalização

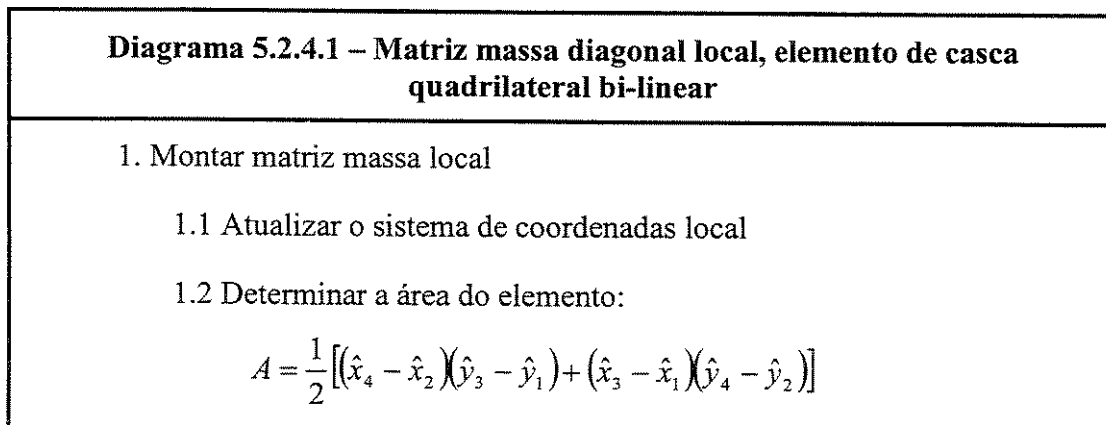
- 3.1 Atualização e gravação do relatório final
- 3.2 Fechamento dos arquivos abertos
- 3.3 Liberação da memória
- 3.4 FIM

5.2.4 Determinação da matriz massa global

A determinação da matriz massa diagonal global que é no item 1.4 da fase de inicialização, ver diagrama (5.2.2.1). O algoritmo de determinação da matriz de massa do sistema global é implementado segundo o apresentado no diagrama 5.2.4.1:



Para elementos quadrilaterais lineares, a matriz massa diagonal local pode ser determinada pelo algoritmo descrito no diagrama 5.2.4.1:



1.3 Determinar a massa do elemento: $m_e = A_e h_e \rho$

1.4 Determinar as inércias do elemento:

$$I_{xx} = I_{yy} = \text{MAX}\left(\frac{m_e A}{8}, \frac{m_e h^2}{12}\right)$$

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$$

1.5 Determinar as matrizes de massa nodais do elemento:

$$[\hat{\mathbf{m}}_e]_I = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}} & \\ & \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix}$$

onde

$$[\hat{\mathbf{m}}] = \begin{bmatrix} m_e & & \\ & m_e & \\ & & m_e \end{bmatrix}; [\hat{\mathbf{I}}] = \begin{bmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix}$$

2. Transformar para o sistema global:

$$[\hat{\mathbf{m}}_e]_I^G = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}} & \\ & \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{I}} \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

onde $[\mathbf{T}]$ é a matriz de transformação “global-local” do elemento.

3. Adicionar os termos adequadamente na matriz de massa diagonal global.

iii. Cálculo das forças internas

A determinação do vetor de forças internas global é realizada no item 2.5 do algoritmo de integração no tempo, diagrama 5.2.2.1.

Para os elementos de casca BLT e BWC, os algoritmos de cálculo das forças internas são implementados conforme os diagramas 5.2.5.1 e 5.2.5.2, respectivamente.

Diagrama 5.2.5.1 – Cálculo das forças internas para o elemento BLT

1. Atualizar o sistema de coordenadas

2. Transformar as coordenadas e velocidades para o sistema local:

$$\{\hat{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{T}] \{\mathbf{x}\}$$

$$\{\hat{\mathbf{v}}\} = [\mathbf{T}] \{\mathbf{v}\}$$

3. Calcular a área do elemento:

$$A = \frac{1}{2} [(\hat{x}_4 - \hat{x}_2)(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) + (\hat{x}_3 - \hat{x}_1)(\hat{y}_4 - \hat{y}_2)]$$

4. Calcular as derivadas das funções de forma no centróide do elemento:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \hat{y}_2 - \hat{y}_4 & \hat{y}_3 - \hat{y}_1 & \hat{y}_4 - \hat{y}_2 & \hat{y}_1 - \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 - \hat{x}_2 & \hat{x}_1 - \hat{x}_3 & \hat{x}_2 - \hat{x}_4 & \hat{x}_3 - \hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

5. Calcular as componentes do tensor taxa de deformação e as curvaturas no centróide do elemento:

$$d_{xx}^o = \frac{1}{2A} (y_{24} v_{x13} + y_{31} v_{x24})$$

$$d_{yy}^o = \frac{1}{2A} (x_{42} v_{y13} + x_{13} v_{y24})$$

$$2 d_{xy}^o = \frac{1}{2A} (x_{42} v_{x13} + x_{13} v_{x24} + y_{24} v_{y13} + y_{31} v_{y24})$$

$$2 d_{yz}^o = \frac{1}{2A} (x_{42} v_{z13} + x_{13} v_{z24}) - \frac{1}{4} (\hat{\omega}_{x1} + \hat{\omega}_{x2} + \hat{\omega}_{x3} + \hat{\omega}_{x4})$$

$$2 d_{zx}^o = \frac{1}{2A} (y_{24} v_{z13} + y_{31} v_{z24}) + \frac{1}{4} (\hat{\omega}_{y1} + \hat{\omega}_{y2} + \hat{\omega}_{y3} + \hat{\omega}_{y4})$$

$$k_{xx} = \frac{1}{2A} (y_{24} * \hat{\omega}_{y13} + y_{31} * \hat{\omega}_{y24})$$

$$k_{yy} = \frac{1}{2A} (x_{42} * \hat{\omega}_{x13} + x_{13} * \hat{\omega}_{x24})$$

$$k_{xy} = \frac{1}{2A} (x_{42} * \hat{\omega}_{y13} + x_{13} * \hat{\omega}_{y24} - y_{24} * \hat{\omega}_{x13} - y_{31} * \hat{\omega}_{x24})$$

6. Para cada ponto de integração ao longo da espessura:

i. Calcular as taxas de deformação:

$$d_{xx} = d_{xx}^o + \zeta \frac{h}{2} k_{xx}$$

$$d_{yy} = d_{yy}^o - \zeta \frac{h}{2} k_{yy}$$

$$d_{xy} = d_{xy}^o + \zeta \frac{h}{2} k_{xy}$$

ii. Calcular as tensões no centróide (usando uma lei constitutiva)

$$\{\hat{\sigma}\} = f(\{\mathbf{D}\}, [\mathbf{C}])$$

7. Calcular as forças resultantes no centróide do elemento:

$$f_{xx}^o = \int \sigma_{xx} dz$$

$$f_{yy}^o = \int \sigma_{yy} dz$$

$$f_{xy}^o = \int \sigma_{xy} dz$$

$$f_{yz}^o = \int \sigma_{yz} dz$$

$$f_{zx}^o = \int \sigma_{zx} dz$$

8. Calcular os momentos resultantes no centróide do elemento:

$$m_{xx}^o = \int \sigma_{xx} z dz$$

$$m_{yy}^o = \int \sigma_{yy} z dz$$

$$m_{xy}^o = \int \sigma_{xy} z dz$$

9. Calcular os vetores de forças internas nodais:

$$\hat{f}_x^i = A(\hat{f}_{xx}^o B_{1i} + \hat{f}_{xy}^o B_{2i})$$

$$\hat{f}_y^i = A(\hat{f}_{yy}^o B_{2i} + \hat{f}_{xy}^o B_{1i})$$

$$\hat{f}_z^i = \kappa A(\hat{f}_{zx}^o B_{1i} + \hat{f}_{yz}^o B_{2i})$$

$$\hat{m}_x^i = A\left(m_{yy}^o B_{2i} + m_{xy}^o B_{1i} - \frac{\kappa}{4} \hat{f}_{yz}^o\right)$$

$$\hat{m}_y^i = -A\left(m_{xx}^o B_{1i} + m_{xy}^o B_{2i} - \frac{\kappa}{4} \hat{f}_{zx}^o\right)$$

$$\hat{m}_z^i = 0$$

10. Calcular as forças nodais de estabilização $\{\hat{\mathbf{f}}_{hg}\}$

11. Adicionar as forças de estabilização às forças internas:

$$\{\hat{\mathbf{f}}\} \leftarrow \{\hat{\mathbf{f}}\} + \{\hat{\mathbf{f}}_{hg}\}$$

12. Transformar os vetores de forças internas nodais para o sistema global:

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{T}]^T \{\hat{\mathbf{f}}\}$$

13. Adicionar adequadamente os vetores de forças internas nodais ao vetor de forças internas global

Diagrama 5.2.5.2 – Cálculo das forças internas para o elemento BWC

1. Atualizar o sistema de coordenadas

2. Transformar as coordenadas e velocidades para o sistema local:

$$\{\hat{\mathbf{x}}\} = [\mathbf{T}] \{\mathbf{x}\}$$

$$\{\hat{\mathbf{v}}\} = [\mathbf{T}] \{\mathbf{v}\}$$

3. Calcular a área do elemento:

$$A = \frac{1}{2}[(\hat{x}_4 - \hat{x}_2)(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) + (\hat{x}_3 - \hat{x}_1)(\hat{y}_4 - \hat{y}_2)]$$

4. Calcular as derivadas das funções de forma no centróide do elemento:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \hat{y}_2 - \hat{y}_4 & \hat{y}_3 - \hat{y}_1 & \hat{y}_4 - \hat{y}_2 & \hat{y}_1 - \hat{y}_3 \\ \hat{x}_4 - \hat{x}_2 & \hat{x}_1 - \hat{x}_3 & \hat{x}_2 - \hat{x}_4 & \hat{x}_3 - \hat{x}_1 \end{bmatrix}$$

5. Calcular normais nodais
6. Remover as componentes ω_z dos campos de velocidades nodais
7. Calcular as componentes do tensor taxa de deformação e as curvaturas no centróide do elemento:

$$d_{xx}^o = \frac{1}{2A} (y_{24} v_{x13} + y_{31} v_{x24})$$

$$d_{yy}^o = \frac{1}{2A} (x_{42} v_{y13} + x_{13} v_{y24})$$

$$2d_{xy}^o = \frac{1}{2A} (x_{42} v_{x13} + x_{13} v_{x24} + y_{24} v_{y13} + y_{31} v_{y24})$$

$$2d_{yz}^o = \frac{1}{2A} (x_{42} v_{z13} + x_{13} v_{z24}) - \frac{1}{4} (\hat{\omega}_{x1} + \hat{\omega}_{x2} + \hat{\omega}_{x3} + \hat{\omega}_{x4})$$

$$2d_{zx}^o = \frac{1}{2A} (y_{24} v_{z13} + y_{31} v_{z24}) + \frac{1}{4} (\hat{\omega}_{y1} + \hat{\omega}_{y2} + \hat{\omega}_{y3} + \hat{\omega}_{y4})$$

$$\begin{aligned} 2d_{yz}^o = & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z1} (\bar{\bar{y}}_{21} - \bar{\bar{y}}_{14}) + \hat{\omega}_{x1} (\hat{y}_{21} \bar{\bar{y}}_{21} + \hat{y}_{14} \bar{\bar{y}}_{14}) - \hat{\omega}_{y1} (\hat{x}_{21} \bar{\bar{y}}_{21} + \hat{x}_{14} \bar{\bar{y}}_{14}) \right] + \\ & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z2} (\bar{\bar{y}}_{32} - \bar{\bar{y}}_{21}) + \hat{\omega}_{x2} (\hat{y}_{32} \bar{\bar{y}}_{32} + \hat{y}_{21} \bar{\bar{y}}_{21}) - \hat{\omega}_{y2} (\hat{x}_{32} \bar{\bar{y}}_{32} + \hat{x}_{21} \bar{\bar{y}}_{21}) \right] + \\ & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z3} (\bar{\bar{y}}_{43} - \bar{\bar{y}}_{32}) + \hat{\omega}_{x3} (\hat{y}_{43} \bar{\bar{y}}_{43} + \hat{y}_{32} \bar{\bar{y}}_{32}) - \hat{\omega}_{y3} (\hat{x}_{43} \bar{\bar{y}}_{43} + \hat{x}_{32} \bar{\bar{y}}_{32}) \right] + \\ & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z4} (\bar{\bar{y}}_{14} - \bar{\bar{y}}_{43}) + \hat{\omega}_{x4} (\hat{y}_{14} \bar{\bar{y}}_{14} + \hat{y}_{43} \bar{\bar{y}}_{43}) - \hat{\omega}_{y4} (\hat{x}_{14} \bar{\bar{y}}_{14} + \hat{x}_{43} \bar{\bar{y}}_{43}) \right] \\ 2d_{zx}^o = & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z1} (\bar{\bar{x}}_{21} - \bar{\bar{x}}_{14}) + \hat{\omega}_{x1} (\hat{x}_{21} \bar{\bar{y}}_{21} + \hat{x}_{14} \bar{\bar{y}}_{14}) - \hat{\omega}_{y1} (\hat{x}_{21} \bar{\bar{x}}_{21} + \hat{x}_{14} \bar{\bar{x}}_{14}) \right] + \\ & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z2} (\bar{\bar{x}}_{32} - \bar{\bar{x}}_{21}) + \hat{\omega}_{x2} (\hat{x}_{32} \bar{\bar{y}}_{32} + \hat{x}_{21} \bar{\bar{y}}_{21}) - \hat{\omega}_{y2} (\hat{x}_{32} \bar{\bar{x}}_{32} + \hat{x}_{21} \bar{\bar{x}}_{21}) \right] + \\ & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z3} (\bar{\bar{x}}_{43} - \bar{\bar{x}}_{32}) + \hat{\omega}_{x3} (\hat{x}_{43} \bar{\bar{y}}_{43} + \hat{x}_{32} \bar{\bar{y}}_{32}) - \hat{\omega}_{y3} (\hat{x}_{43} \bar{\bar{x}}_{43} + \hat{x}_{32} \bar{\bar{x}}_{32}) \right] + \\ & -\frac{1}{4} \left[2\hat{v}_{z4} (\bar{\bar{x}}_{14} - \bar{\bar{x}}_{43}) + \hat{\omega}_{x4} (\hat{x}_{14} \bar{\bar{y}}_{14} + \hat{x}_{43} \bar{\bar{y}}_{43}) - \hat{\omega}_{y4} (\hat{x}_{14} \bar{\bar{x}}_{14} + \hat{x}_{43} \bar{\bar{x}}_{43}) \right] \end{aligned}$$

$$k_{xx} = \frac{1}{2A} (\hat{y}_{24} \hat{\omega}_{y13} + \hat{y}_{31} \hat{\omega}_{y24}) + \frac{2z_\gamma}{A^2} (\hat{x}_{13} v_{x13} + \hat{x}_{42} v_{x24})$$

$$k_{yy} = -\frac{1}{2A} (\hat{x}_{42} \hat{\omega}_{x13} + \hat{x}_{13} \hat{\omega}_{x24}) + \frac{2z_\gamma}{A^2} (\hat{y}_{13} v_{y13} - \hat{y}_{24} v_{y24})$$

$$k_{xy} = \frac{1}{2A} (\hat{x}_{42} \hat{\omega}_{y13} + \hat{x}_{13} \hat{\omega}_{y24} - \hat{y}_{24} \hat{\omega}_{x13} - \hat{y}_{31} \hat{\omega}_{x24}) + \frac{2z_\gamma}{A^2} (\hat{x}_{13} v_{y13} + \hat{x}_{24} v_{y24} + \hat{y}_{13} v_{x13} - \hat{y}_{24} v_{x24})$$

8. Para cada ponto de integração ao longo da espessura:

i. Calcular as taxas de deformação:

$$d_{xx} = d_{xx}^o + \zeta \frac{h}{2} k_{xx}$$

$$d_{yy} = d_{yy}^o - \zeta \frac{h}{2} k_{yy}$$

$$d_{xy} = d_{xy}^o + \zeta \frac{h}{2} k_{xy}$$

iii. Calcular as tensões no centróide (usando uma lei constitutiva)

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = f(\{\mathbf{D}\}, \{\mathbf{C}\})$$

9. Calcular as forças resultantes no centróide do elemento:

$$f_{xx}^o = \int \sigma_{xx} dz$$

$$f_{yy}^o = \int \sigma_{yy} dz$$

$$f_{xy}^o = \int \sigma_{xy} dz$$

$$f_{yz}^o = \int \sigma_{yz} dz$$

$$f_{zx}^o = \int \sigma_{zx} dz$$

10. Calcular os momentos resultantes no centróide do elemento:

$$m_{xx}^o = \int \sigma_{xx} z dz$$

$$m_{yy}^o = \int \sigma_{yy} z dz$$

$$m_{xy}^o = \int \sigma_{xy} z dz$$

11. Calcular os vetores de forças internas nodais:

$$\hat{f}_x^i = A(\hat{f}_{xx}^o B_{1i} + \hat{f}_{xy}^o B_{2i})$$

$$\hat{f}_y^i = A(\hat{f}_{yy}^o B_{2i} + \hat{f}_{xy}^o B_{1i})$$

$$\hat{f}_z^i = \kappa A(\hat{f}_{zx}^o B_{1i} + \hat{f}_{yz}^o B_{2i})$$

$$\hat{m}_x^i = A\left(m_{yy}^o B_{2i} + m_{xy}^o B_{1i} - \frac{\kappa}{4} \hat{f}_{yz}^o\right)$$

$$\hat{m}_y^i = -A\left(m_{xx}^o B_{1i} + m_{xy}^o B_{2i} - \frac{\kappa}{4} \hat{f}_{zx}^o\right)$$

$$\hat{m}_z^i = 0$$

12. Calcular as forças nodais de estabilização $\{\hat{\mathbf{f}}_{\text{hg}}\}$

13. Adicionar as forças de estabilização às forças internas:

$$\{\hat{\mathbf{f}}\} \leftarrow \{\hat{\mathbf{f}}\} + \{\hat{\mathbf{f}}_{\text{hg}}\}$$

14. Transformar os vetores de forças internas nodais para o sistema global:

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{T}]^T \{\hat{\mathbf{f}}\}$$

15. Adicionar adequadamente os vetores de forças internas nodais ao vetor de forças internas global

CAPITULO 6

Resultados Numéricos e Validação

Neste capítulo são apresentados resultados obtidos com o sistema implementado pelo autor para vários problemas de validação encontrados na literatura [3][6][7][15][18], de modo a verificar a implementação e avaliar a performance dos elementos implementados. Resultados comparativos, obtidos com outros sistemas e outros tipos de elementos são também apresentados.

6.1. Viga simplesmente apoiada

Este exemplo, apresentado em [15], consiste em uma viga simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído ao longo de seu comprimento, demonstrando o comportamento dos elementos BLT e BWC em um problema onde a importância do controle de modos espúrios é grande, visto que estes são excitados diretamente pelo primeiro modo de deflexão da viga.

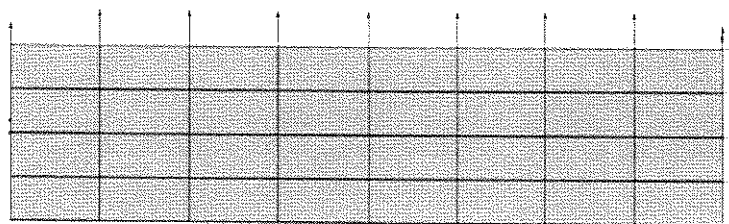


Figura 6.1.1 - Representação geométrica do problema 6.1.

Pela condição de simetria, apenas metade da viga é modelada, conforme apresentado na tabela a seguir:

Propriedade	Símbolo	Valor
Metade do comprimento	$C/2$	0.4
Largura	L	0.1
Espessura	h	0.0025
Módulo de elasticidade	E	1×10^9
Coefficiente de Poisson	ν	0.0
Carga distribuída	q	180

Tabela 6.1.1. Dados do problema

Neste exemplo, quando nenhum controle é empregado, os modos espúrios propagam-se rapidamente, dominando a solução, degradando os resultados e levando o problema à instabilidade e à divergência, conforme pode ser observado na figura 6.1.2 e em [15]. Aplicando-se o controle de modos espúrios, percebe-se que mesmo um pequeno valor para o parâmetro r_M já confere estabilidade ao problema, conforme pode ser observado na figura 6.1.3. À medida que o valor de r_M vai sendo aumentado, a existência de modos espúrios fica imperceptível, como mostrado nas figuras 6.1.4 e 6.1.5.

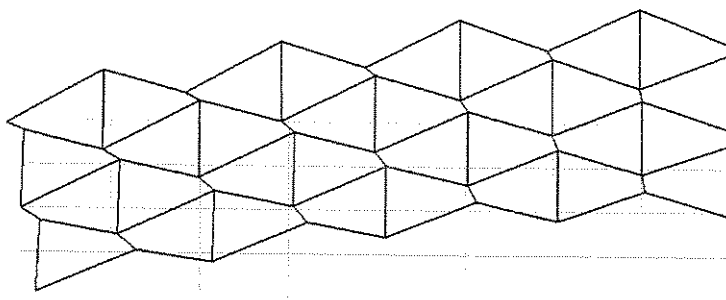


Figura. 6.1.2 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, sem controle de modos espúrios.

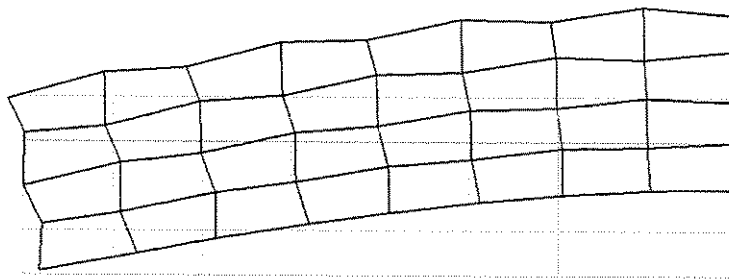


Figura. 6.1.3 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, usando o parâmetro de controle de modos espúrios $r_M = 0.001$.

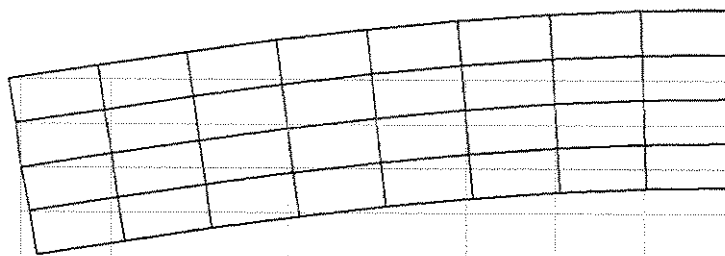


Figura. 6.1.4 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, usando o parâmetro de controle de modos espúrios $r_M = 0.01$.

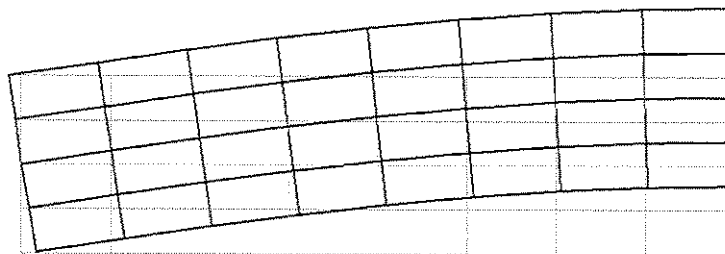


Figura. 6.1.5 - Configuração deformada, no instante $t=0.007$ s, usando o parâmetro de controle de modos espúrios $r_M = 0.125$.

Porém, para problemas com uma relação de rigidez alta, onde predomina a solução de membrana, um aumento exagerado na rigidez artificial para os modos espúrios afeta também a qualidade da solução, pois causa um enrijecimento indevido do sistema. Analogamente ao apresentado em [15], é verificada uma diminuição de 5.5% no período e de 13% na amplitude,

para um aumento de 10 vezes no parâmetro de controle dos modos espúrios, r_M , conforme pode ser observado na figura 6.1.6.

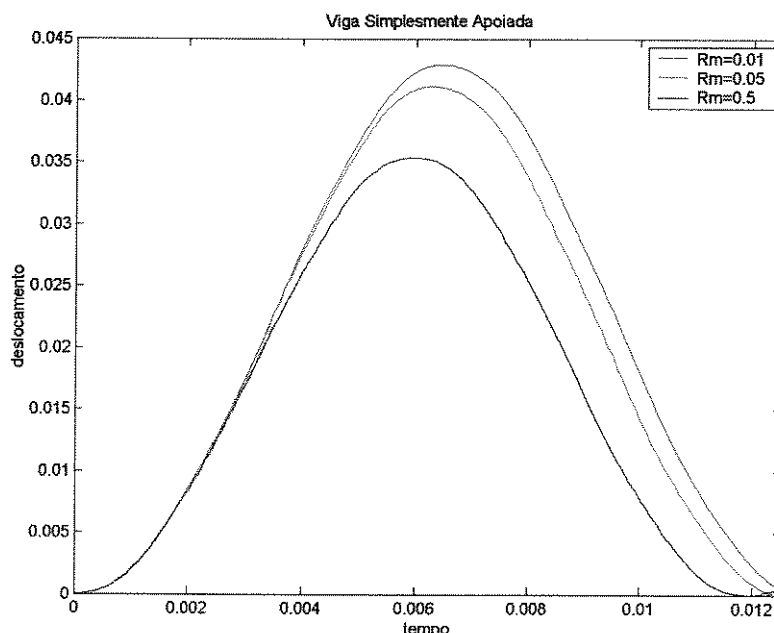


Figura. 6.1.6 – Deslocamento vertical da linha neutra, no plano de simetria, para diferentes valores de r_M .

A presença de modos espúrios na solução de um problema depende das suas condições de vinculação e dificulta a adoção de valores padronizados para os parâmetros de controle r_M , r_w e r_θ , dificultando também a determinação da acuidade dos elementos BLT e BWC. Uma comparação com o elemento QUAD4 [23], conforme implementado na versão 70.7.2 do programa MSC/NASTRAN, mostra que, uma vez feito o ajuste de r_M , ambos apresentam resultados bastante similares para o problema em questão, figura 6.1.7. Para esta comparação, usou-se de $r_M=0.125$, conforme indicado em [15] como sendo o valor ótimo para este caso. O coeficiente de Poisson usado foi $\nu=0.3$, de modo a permitir uma solução para pequenos deslocamentos pelo MSC/NASTRAN.

Note-se também que para o problema em questão, os elementos BLT e BWC apresentam resultados virtualmente idênticos.

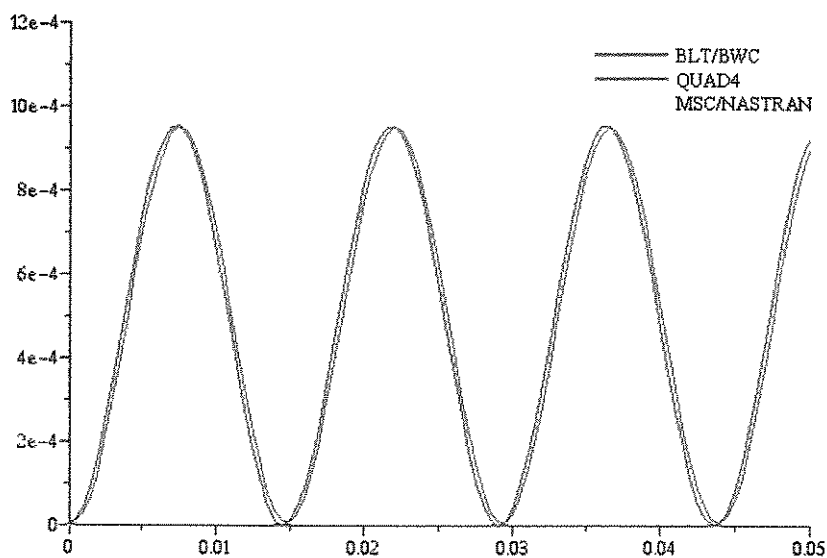


Figura. 6.1.7 – Deslocamento vertical da linha neutra, no plano de simetria, comparação entre os elementos BLT/BWC e o elemento QUAD4 (MSC/NASTRAN)

O sistema implementado reproduziu os resultados para este exemplo da maneira esperada, e a sensibilidade dos elementos BLT e BWC aos parâmetros de controle dos modos espúrios ficou evidenciada.

6.2. Placa Quadrada Simplesmente Apoiada em Todas as Arestas

O objetivo deste exemplo é demonstrar o comportamento dos elementos BLT e BWC sob flexão. O problema consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada pelas quatro arestas, sob a atuação de seu peso próprio.

Os dados do problema encontram-se na tabela 6.2.1 e a sua representação geométrica pode ser vista na figura abaixo:

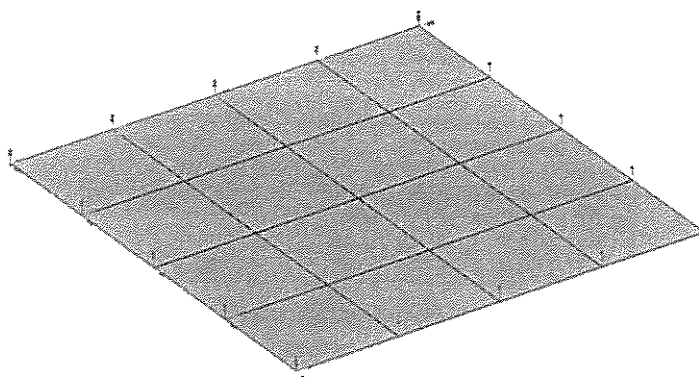


Figura. 6.2.1 – Representação geométrica do problema mostrando as condições de simetria e de apoio simples.

Propriedade	Símbolo	Valor
Comprimento da aresta	a	0.4
Espessura	h	0.0025
Densidade	ρ	1000
Módulo de Elasticidade	E	10^9
Coef. de Poisson	ν	0.0
gravidade	g	9.81

Tabela 6.2.1. Dados do problema

Os resultados para o deslocamento vertical do ponto central para o elemento BLT podem ser vistos no gráfico da figura 6.2.2. Comparativamente, os resultados obtidos com o elemento QUAD4 do MSC/NASTRAN são também apresentados, mostrando uma grande similaridade de comportamento, tanto na amplitude quanto no período.

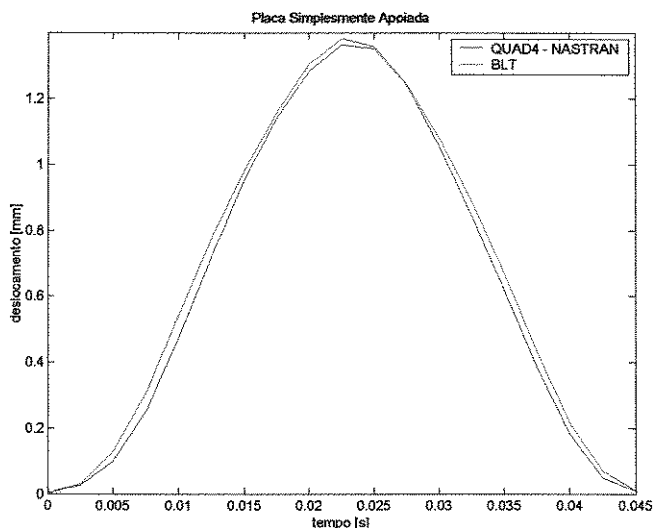


Figura. 6.2.2 – Deslocamento do ponto central, comparação entre BLT e QUAD4 (MSC/NASTRAN), para 1 ciclo

Para este problema, num regime de pequenas deformações, os elementos BWC e BLT apresentam resultados praticamente idênticos.

A figura 6.2.3 apresenta os resultados comparativos para os elementos BLT, BWC e QUAD4, para cinco ciclos de oscilação. As respostas de todos os elementos mantêm praticamente a mesma amplitude máxima e o mesmo período para várias oscilações.

Uma vista deformada da malha do problema com elementos BWC, para o instante de tempo $t = 0.032$ s é apresentada na figura 6.3.4. Um fator de ampliação de 300 vezes é aplicado para permitir uma visualização adequada dos resultados.

Neste exemplo, os parâmetros de controle dos modos espúrios usados são $r_\theta = 0.1$, $r_w = 0.1$ e $r_M = 0.1$.

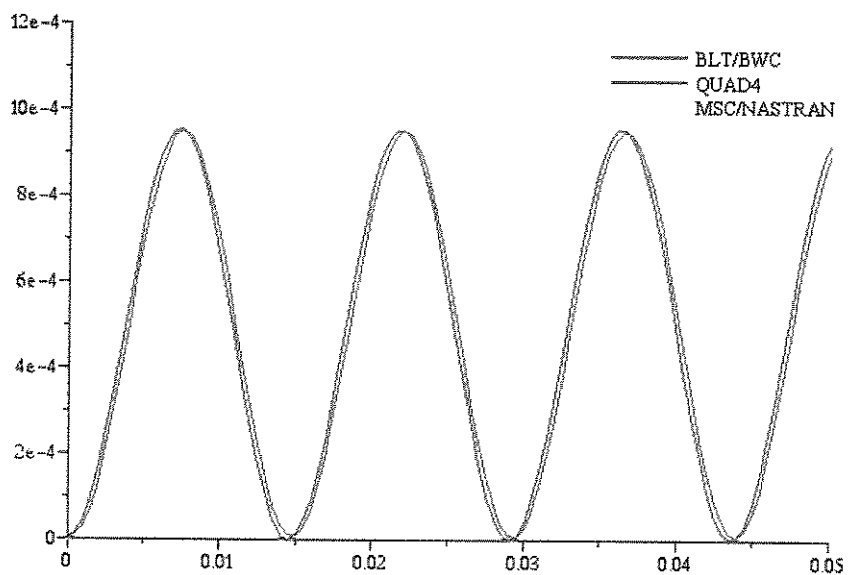


Figura. 6.2.3 – Deslocamento do ponto central, comparação entre os elementos BLT, BWC e QUAD4 (MSC/NASTRAN), para 4 ciclos.

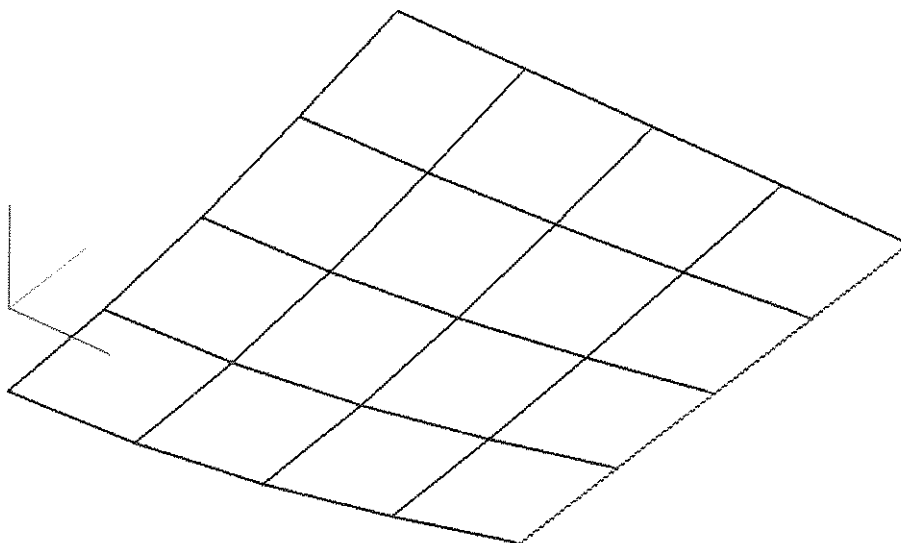


Figura. 6.2.4 – Configuração deformada, no instante $t = 0.032$ s. Deslocamentos ampliados 300 vezes.

6.3. Telhado de Scordelis-Lo

Neste problema clássico da literatura de cascas, uma casca cilíndrica, suportada em suas extremidades, está sob ação de seu peso próprio. A tabela 6.3.1 apresenta os dados do problema e a figura abaixo ilustra a malha empregada.

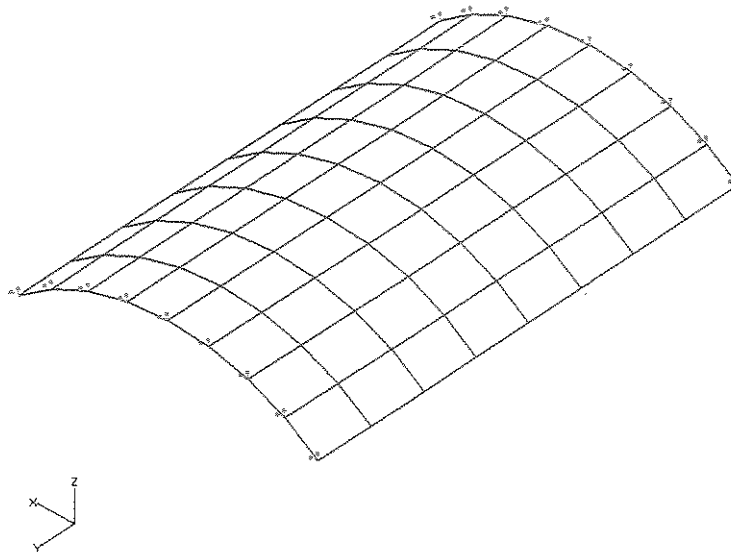


Figura. 6.3.1 – Representação geométrica do problema mostrando as condições de contorno.

Propriedade	Símbolo	Valor
Comprimento	C	50
Raio	R	25
Ângulo	θ	80°
Espessura	h	0.25
Densidade	ρ	2242
Módulo de Elasticidade	E	31×10^9
Coefficiente de Poisson	ν	0.15
Gravidade	g	9.81

Tabela 6.3.1. Dados do problema

O deslocamento vertical do ponto médio da aresta lateral obtidos com os elementos BLT e BWC é apresentado na figura 6.3.2.

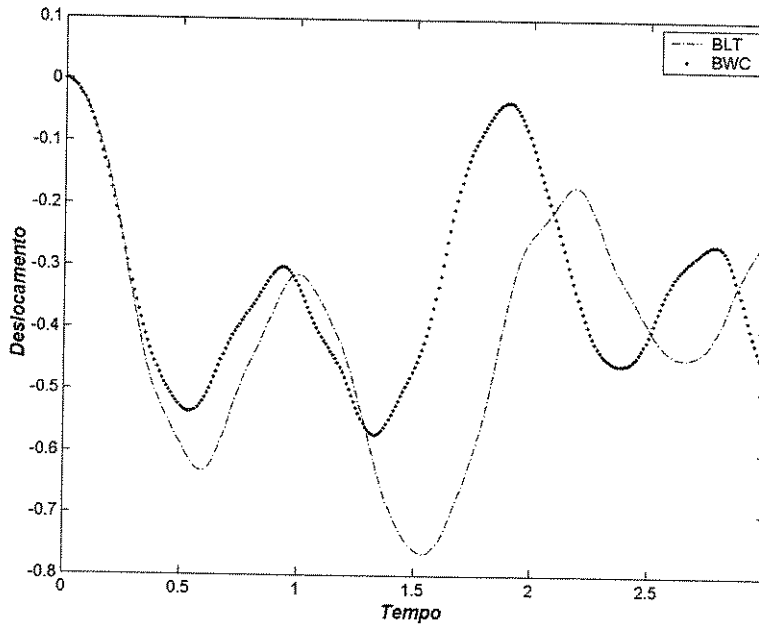


Figura. 6.3.2 – Deslocamento vertical do ponto médio da aresta lateral, elementos BLT e BWC.

Segundo o apresentado em [7], a resposta esperada para o problema é uma oscilação ao redor da solução estática com o dobro de amplitude. O elemento BLT conforme implementado neste sistema, responde de maneira muito flexível, apresentando uma amplitude quase três vezes maior que o esperado, nunca recuperando a configuração durante as oscilações, da mesma maneira como o apresentado em [7]. O elemento BWC, por sua vez, oscila ao redor da solução estática com amplitude correta, recuperando a configuração inicial em cada ciclo.

Uma comparação direta entre os elementos BLT e BWC desta implementação e os elementos BLT, BWC, Hughes-Liu [19], Belytschko-Leviathan [7] conforme implementados no programa LS-DYNA 960 pode ser vista na figura 6.3.3. Os elementos do LS-DYNA apresentam comportamentos muito similares entre si e bastante próximos do elemento BWC desta implementação. Surpreendentemente, a versão do elemento BLT conforme implementada no LS-DYNA apresenta resultados muito próximos aos outros elementos do programa, diferentemente do comportamento errático descrito em [7] e confirmado pela implementação feita neste trabalho. Neste exemplo os parâmetros de controle dos modos espúrios usados foram $r_\theta = r_w = r_M = 0.1$.

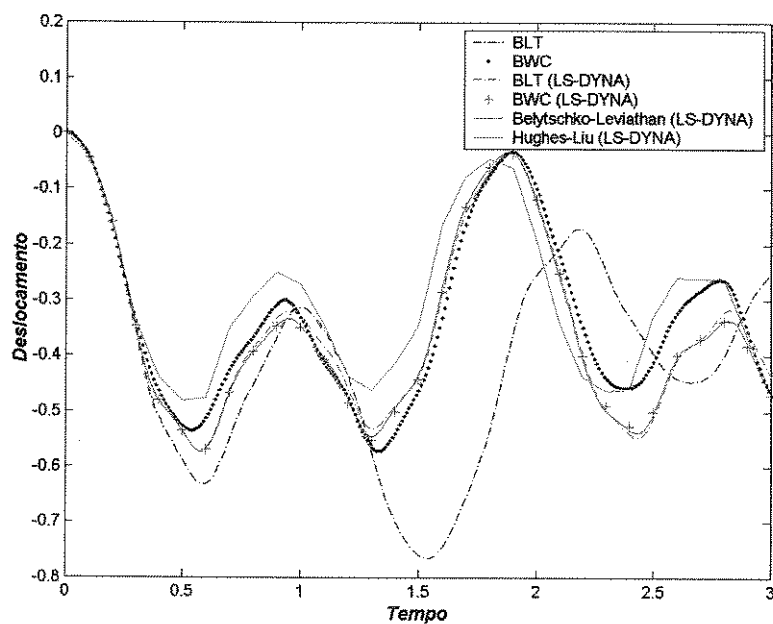


Figura. 6.3.3 – Deslocamento vertical do ponto médio da aresta lateral, comparativo entre vários elementos

A figura 6.3.4 mostra a configuração deformada do problema.

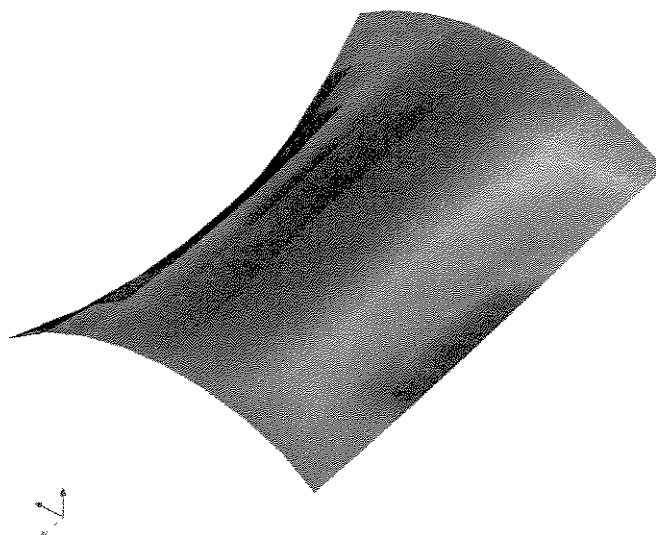


Figura. 6.3.4 – Configuração deformada para $t=1.5s$, elemento BWC.

6.4. Semi-Esfera Sob Cargas Concentradas

Este exemplo é derivado do problema proposto por MacNeal e Harder [24], onde uma estrutura hemisférica é submetida a esforços concentrados radiais, mas diferentemente do proposto em [24], onde a malha de um setor hemisférico apresenta apenas elementos planos, um hemisfério completo é usado, de modo que os elementos desta malha apresentam “empenamento”. Este fato tem grande influência na performance dos elementos.

A tabela 6.4.1 apresenta os dados do problema e a figura abaixo ilustra a geometria usada.

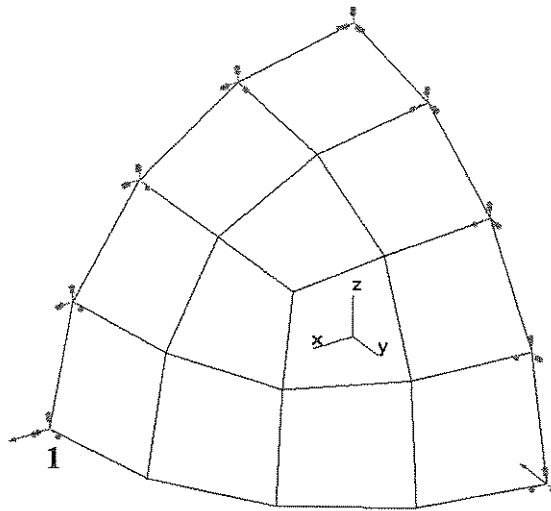


Figura. 6.4.1 – Casca hemisférica submetida a esforços concentrados. Devido à simetria, apenas um quarto da estrutura é modelado.

Propriedade	Símbolo	Valor
Raio da esfera	R	10
Espessura	h	0.04
Módulo de Elasticidade	E	68.3×10^9
Coefficiente de Poisson	ν	0.0
Carga Concentrada	F	± 1.0

Tabela 6.4.1. Dados do problema

Devido a simetria, apenas um quadrante da semi-esfera é modelado e a superfície inferior é livre.

O resultado esperado para este problema é uma oscilação senoidal ao redor da solução estática, com o dobro da amplitude.

O elemento BLT apresenta uma performance bastante baixa neste exemplo, principalmente devido à ausência de acoplamento entre os termos de membrana e flexão. Sua amplitude e seu período são exagerados e durante a oscilação, não recupera a configuração inicial.

O elemento BWC, por sua vez, apresenta resultados bastante bons, apresentando a amplitude e o período corretos, recuperando a configuração inicial a cada ciclo.

Os resultados obtidos com os elementos BWC, BLT e QUAD4 do MSC/NASTRAN podem ser observados na figura 6.5.2, onde a comparação entre os deslocamentos para o nó 1 na direção X é mostrada. Pode-se verificar que os elementos BWC e QUAD4 apresentam comportamentos muito similares para este problema. Os parâmetros de controle dos modos espúrios usados foram $r_\theta = r_w = r_M = 0.1$.

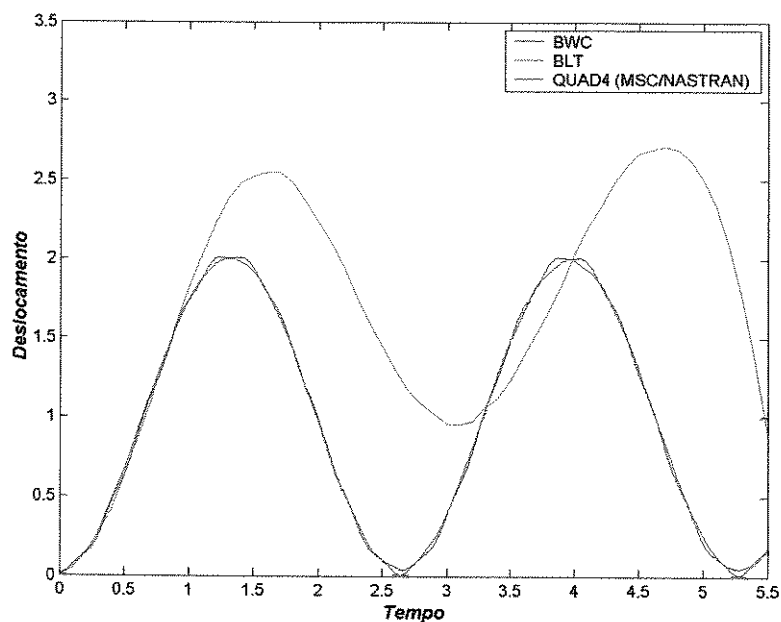


Figura. 6.4.2 – Deslocamentos do ponto 1 na direção X (Normalizados em relação à solução estática)

Apenas para ilustrar a aplicação direta das formulações do elemento BWC a problemas com grandes deslocamentos, a figura 6.5.3 mostra a configuração deformada de uma malha refinada (8x8x8) deste exemplo, quando submetida a uma força $F = \pm 1000$.

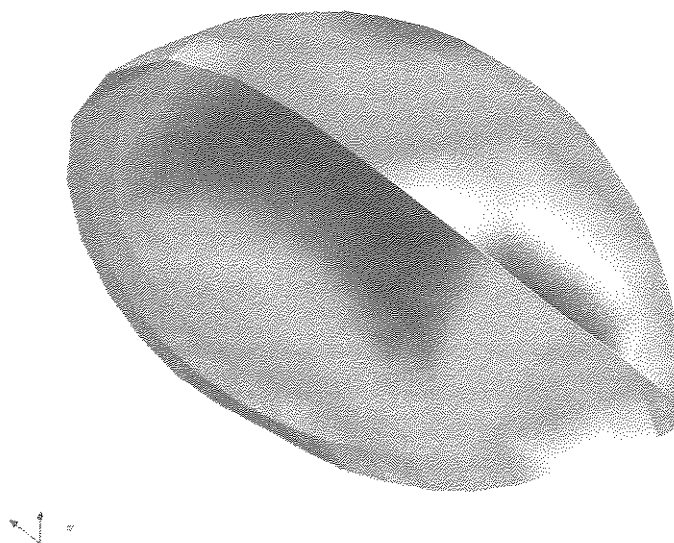


Figura. 6.4.3 – Deslocamentos para uma força $F = \pm 1000$.

6.5. Cilindro Sob Carregamento Radial Concentrado

Este exemplo, retirado de [5], consta de um corpo superfície cilíndrico, com extremidades axial e tangencialmente restritas, submetido a um par de forças radiais concentradas, aplicadas diametralmente opostas, no centro da superfície cilíndrica. Neste problema, os termos de cisalhamento apresentam um grande influência na solução, visto que os deslocamentos axiais das extremidades são permitidos, diminuindo a influência dos termos de membrana.

A figura 6.5.1 apresenta a malha usada para representar a geometria do problema. Devido à simetria apenas metade do cilindro é modelado. A tabela 6.6.1 apresenta os dados do problema

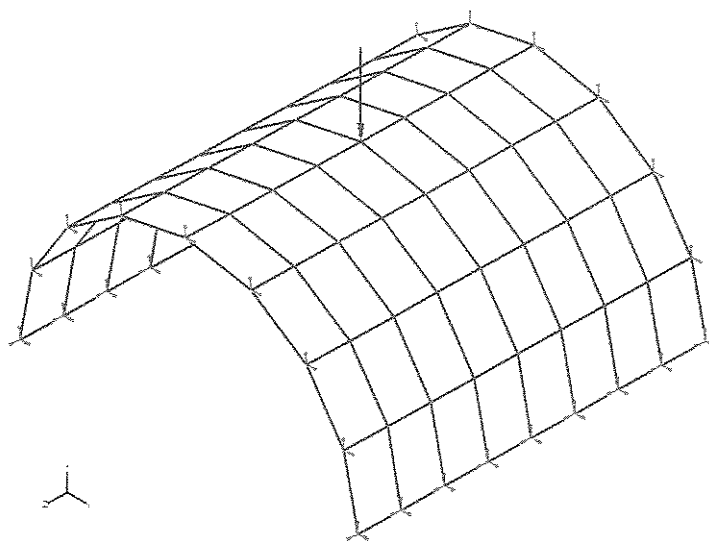


Figura 6.5.1 – Cilindro submetido a carregamento radial concentrado.

Propriedade	Símbolo	Valor
Raio do cilindro	R	300
Comprimento	C	600
Espessura	h	0.04
Módulo de Elasticidade	E	68.3×10^9
Coefficiente de Poisson	ν	0.0
Carga Concentrada	F	5000

Tabela 6.5.1 – Dados do problema 6.6.

Os resultados para o deslocamento radial do ponto de aplicação de carga, obtidos com os elementos BLT e BWC desta implementação podem ser visualizados na figura 6.5.2. Ambos os elementos apresentam resultados bastante equivalentes.

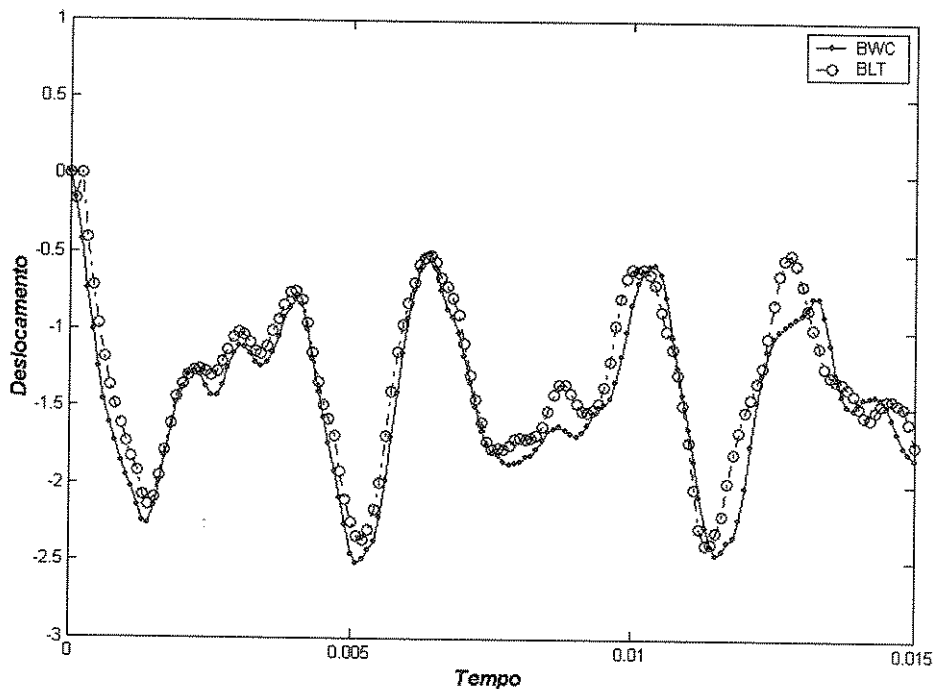


Figura 6.5.2 – Deslocamento radial do ponto de aplicação de carga, elementos BLT e BWC.

Uma comparação entre os resultados acima e os obtidos com os elementos BLT, BWC e Hughes-Liu do programa LS-DYNA 960 e QUAD4 do MSC/NASTAN é mostrada na figura 6.5.3. Há uma grande similaridade entre os valores obtidos pelos elementos BWC e BLT desta implementação e os obtidos com os mesmos elementos na implementação presente no LS-DYNA. Estes resultados apresentam amplitude máxima semelhante aos do elemento QUAD4 do MSC/NASTAN, porém este último apresenta um comportamento mais periódico. Os resultados obtidos com o elemento Hughes-Liu, na implementação presente no LS-DYNA, diferem dos demais, tanto em amplitude quanto em período. Neste exemplo, os parâmetros de controle dos modos espúrios usados foram $r_\theta = r_w = r_M = 0.1$.

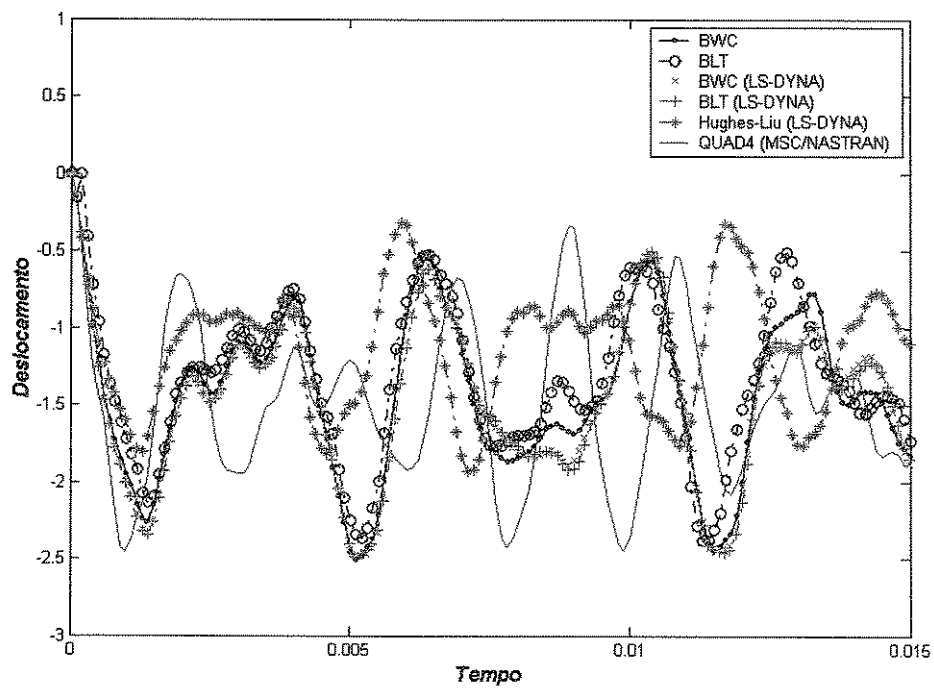


Figura 6.5.3 – Deslocamento radial do ponto de aplicação de carga, comparação de resultados

6.6. Viga Helicoidal Engastada sob Flexão

Este exemplo segue o que é apresentado por Belytschko em [6], e nos testes propostos por MacNeal e Harder [24], uma viga helicoidal, engastada, submetida a um força transversal concentrada na extremidade livre, conforme ilustrado na figura 6.6.1. Neste exemplo os elementos da extremidade livre estão primordialmente sob esforços de membrana, enquanto os elementos no engaste estão primordialmente sob esforços de flexão, requerendo um acoplamento entre ambos.

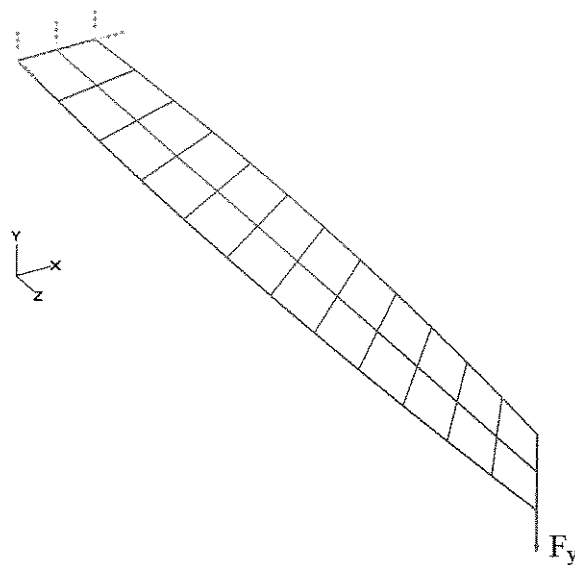


Figura. 6.6.1 – Viga helicoidal sob flexão, malha 12 x 2.

Propriedade	Símbolo	Valor
Comprimento	C	12
Largura	L	1.1
Espessura	h	0.32
Módulo de Elasticidade	E	2.9×10^7
Coef. de Poisson	ν	0.22
Carga Concentrada	F_y	-1.0

Tabela. 6.6.1 – Dados do problema.

O elemento BLT, pela ausência de acoplamento membrana-flexão em sua formulação, responde de maneira divergente, ao passo que o elemento BWC, por apresentar termos adicionais de acoplamento, responde corretamente. As respostas em deslocamentos de ambos os elementos podem ser vistas na figura 6.6.2. Os resultados obtidos com o elemento QUAD4 do MSC/NASTRAN são apresentados como comparação. Note-se que as respostas dos elementos BWC e QUAD4 são quase idênticas. Neste exemplo os parâmetros de controle dos modos espúrios usados foram $r_\theta = r_w = r_M = 0.1$.

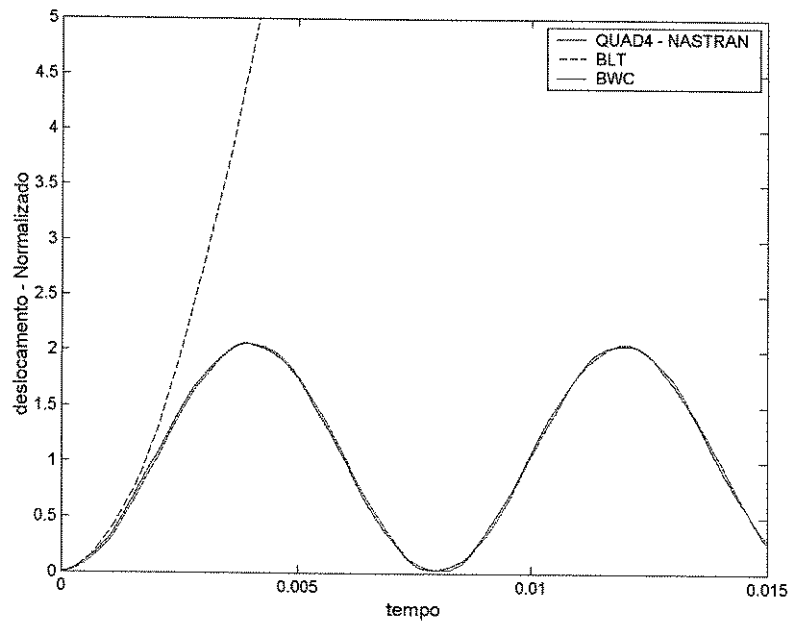


Figura. 6.6.2 – Deslocamentos na direção Y, normalizados em relação ao caso estático.

A figura 6.6.3 mostra a configuração deformada com elementos BWC, para um dado instante de tempo. Um fator de 20 vezes é usado para facilitar a visualização dos deslocamentos.

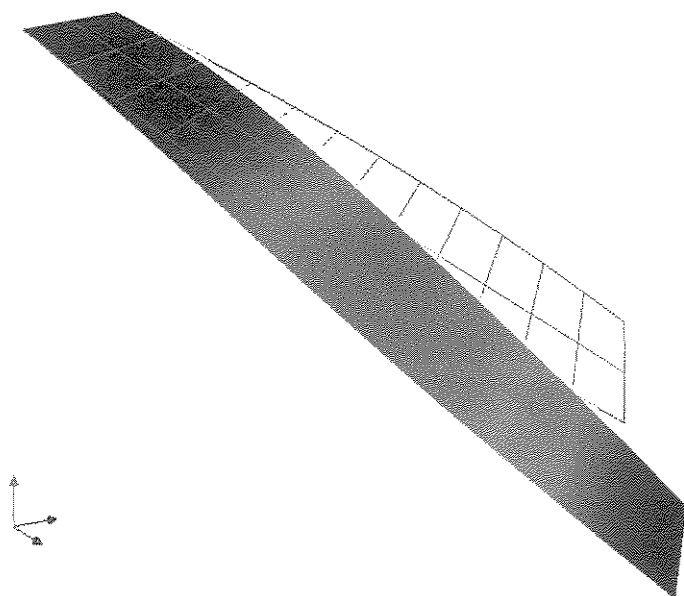


Figura. 6.6.3 – Configuração deformada – Elemento BWC, deslocamentos amplificados 20 vezes.

6.7. Junta Tubular sob Flexão

Este exemplo trata de uma junta de aço tubular, com união soldada, submetida a um deslocamento imposto em sua extremidade superior. E tem por objetivo demonstrar a aplicabilidade do sistema implementado a problemas reais de engenharia.

Este tipo de estrutura é comumente encontrado em carrocerias de ônibus e este tipo de ensaio é geralmente utilizado na determinação das características de colapso da junta.

As tabela abaixo apresenta os dados do problema.

Propriedade	Símbolo	Valor
Altura	A	1065
Largura	L	700
Seção transversal		
Base	b	50
Altura	a	70
Espessura	h	1.0
Módulo de Elasticidade	E	206800
Coefficiente de Poisson	ν	0.3
Fator de encruamento	K	520
Expoente de encruamento	n	520
Tensão de escoamento	σ_e	220
Densidade	ρ	7.8e-9
Velocidade prescrita	v	832.52

Tabela. 6.7.1 – Dados do problema.

Para este exemplo, foi empregado o elemento BLT e usados 7 pontos de integração ao longo da espessura para capturar a plastificação adequadamente.

A figura 6.7.1. apresenta uma sequência de configurações deformadas que a junta experimenta durante o ensaio. Percebe-se claramente a perda de rigidez devido à flambagem

localizada. A figura 6.7.2 apresenta a distribuição das tensões equivalentes, para a região de união entre os tubos.

Os parâmetros de controle dos modos espúrios usados foram $r_\theta = r_w = r_M = 0.1$.

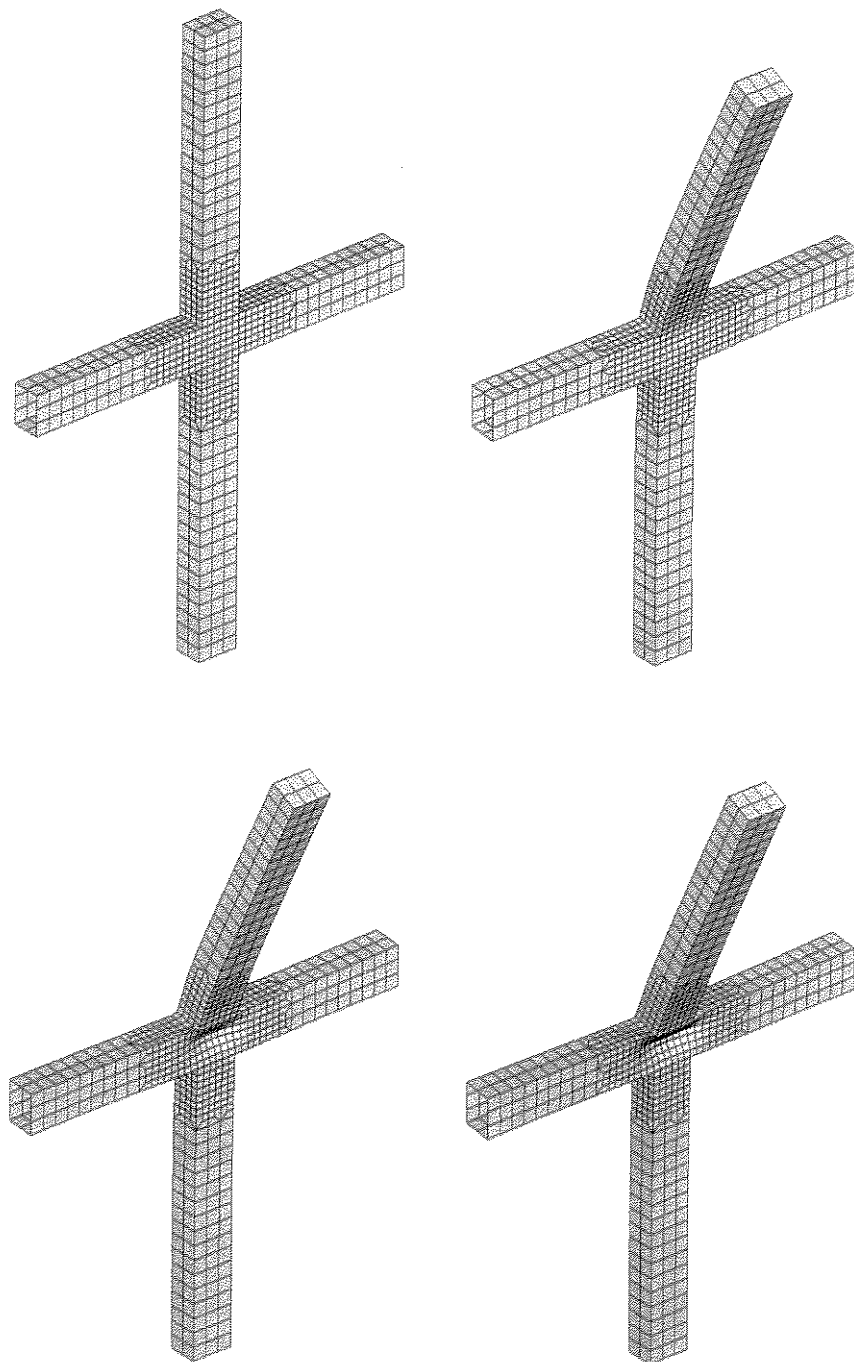


Figura 6.7.1 – Seqüência de deformação

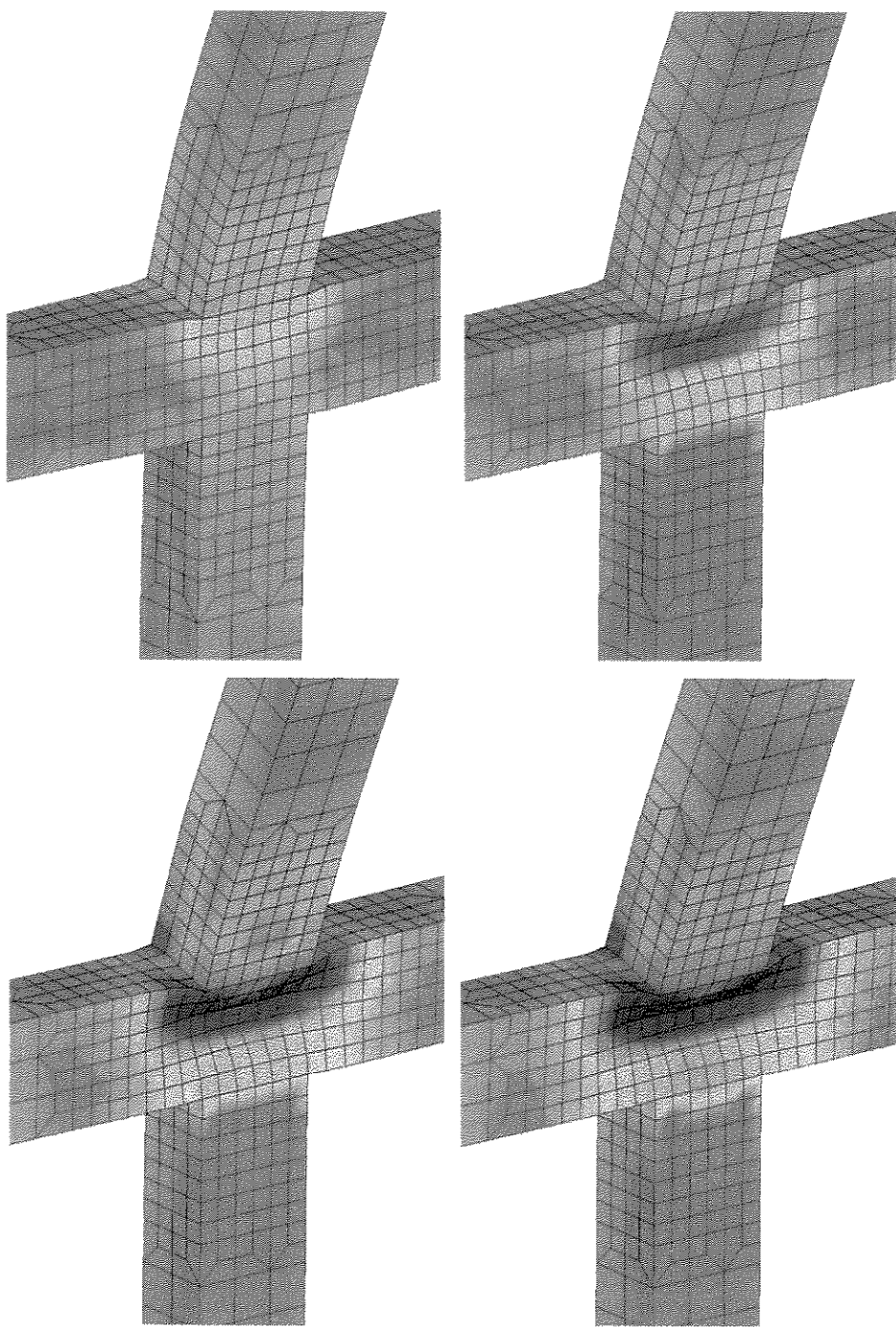


Figura 6.7.2 – Tensões equivalentes

O sistema implementado apresentou os resultados esperados para este exemplo, demonstrando sua aplicabilidade à problemas de engenharia similares.

CAPITULO 7

Conclusões e Sugestões para Futuros Desenvolvimentos

Neste capítulo são apresentadas as conclusões e sugestões para futuros desenvolvimentos relacionados ao sistema computacional implementado.

7.1 Conclusões

Um algoritmo de integração dinâmica baseado do método explícito das diferenças centrais foi implementado. Dotado de recursos para a determinação instantânea do incremento de tempo estável e tratamento dos graus de liberdade de rotação através de referenciais nodais, este algoritmo foi usado como núcleo computacional para a implementação de uma família de elementos de casca com integração reduzida uniforme.

A formulação completa de dois elementos finitos de casca adaptados para uma formulação explícita no tempo foram implementados. O primeiro foi o elemento de Belytschko, Lin e Tsay, denominado BLT, e o segundo, proposto por Belitschko, Wong e Chiang, chamado de BWC. Os dois elementos são baseados em uma formulação co-rotacional, adotam um controle de modos espúrios por perturbação e são aproximados por uma base polinomial bi-linear isoparamétrica sobre um elemento quadrilateral de quatro nós clássico. No elemento BWC, foram adicionadas duas características importantes. A interpolação da normal para todo o domínio, baseada na superfície bi-linear descrita pelos quatro nós do elemento, resultando no acoplamento entre flexão e membrana e o uso do conceito de projeção nodal do cisalhamento.

As principais etapas da formulação de cada elemento foram detalhadas e explicitadas no

texto, facilitando assim a reprodução dos resultados e o entendimento da implementação.

A implementação computacional dos elementos também foi concluída e validada de acordo com os resultados de testes publicados por outros autores e por testes efetuados em programas comerciais consolidados. Um conjunto de testes para elementos de casca foi identificado com base na literatura estudada. Este conjunto não contempla todos os testes de casca existentes na literatura mas abrange alguns dos testes mais importantes envolvendo soluções explícitas no tempo. Tal conjunto de testes poderá servir como auxílio no desenvolvimento de novos elementos de casca ou na proposição de modificações aos elementos existentes.

No que se refere aos resultados do teste dos elementos de casca trabalhando predominantemente em membrana, teste da viga em flexão, algumas conclusões podem ser obtidas. A primeira delas refere-se a influência dos modos espúrios. O método de controle implementado eficiente, todavia, deve-se verificar a sua influência deste na solução em função dos parâmetros numéricos escolhidos. Observa-se também, que a escolha dos parâmetros numéricos deve ser feita com base em experimentos numéricos, e é dependente do problema que está sendo analisado. Após o ajuste destes parâmetros numéricos, os dois elementos mostraram bom desempenho no teste de flexão de vigas.

Quanto aos testes de flexão de placas retangulares e cilíndricas, os elementos mostraram bom desempenho no geral. Para os casos onde o acoplamento entre flexão e membrana são importantes ou os elementos são distorcidos geometricamente (empenamento considerável), o elemento BLT mostrou resultados inferiores, e precisa ser utilizado com muita cautela.

Para todas as condições avaliadas, o elemento BWC tem um melhor desempenho, todavia, seu custo computacional é mais elevado.

Simulações envolvendo grandes deslocamentos e não linearidade física foram realizadas, mostrando que o método das diferenças centrais, associado a um sistema de coordenadas corotacional nos elementos e uma lei constitutiva escrita em termos de taxas de deformações pode ser aplicado com sucesso em casos práticos de simulação de sistemas mecânicos sujeitos a excitações dinâmicas transientes.

7.2 Sugestões para Futuros Desenvolvimentos

Fenômenos dinâmicos transientes de curta duração, aos quais a metodologia da integração explícita melhor se aplica, associados a excitações de impacto ou explosões, envolvendo contato entre corpos sólidos e interação fluido-estrutura são encontrados em muitos campos da engenharia. A adição de algoritmos de contato, tratamento de interfaces fluido-estrutura, formulações Lagrangeanas-Eulereanas arbitrárias (ALE) e de células de fluidos proporcionaria um aumento significativo da aplicabilidade do sistema. Problemas como os encontrados em segurança veicular e colisões de automóveis, impactos em acidentes aeronáuticos, conformação mecânica e máquinas de fluxo são alguns exemplos.

A adição de outros tipos elementos, como barras, vigas, sólidos, membranas, adequados à formulação explícita, bem como a inclusão de outros modelos constitutivos também contribuiriam para o aumento das possibilidades aplicação.

Algoritmos e estruturas de dados para refinamento adaptativo, muito empregados em problemas de conformação mecânica, constituem uma outra característica interessante a este tipo de sistema.

Com a evolução experimentada pela indústria da computação, equipamentos dotados multi-processamento são cada vez mais comuns nas indústrias e universidades, assim como o agrupamento de muitos computadores para a realização de processamento distribuído. Neste contexto, a adição de capacidades de processamento paralelo, compartilhado e distribuído, constitui também uma possibilidade de desenvolvimento a ser explorada.

A incorporação dos algoritmos apresentados neste trabalho aos programas atualmente existentes no Departamento de Mecânica Computacional pode também criar oportunidades para novos estudos.

O código fonte do sistema implementado será posto em domínio público através da *internet*, proporcionando que pessoas interessadas possam fazer uso e expandir o seu conteúdo livremente.

Referências Bibliográficas

1. Ahmad, S.; Irons, B. M.; Zienkiewicz, O. C. *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.2, p.419-451, 1970.
2. Bathe, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs:Prentice-Hall, 1982, 735p.
3. Belytschko, T.; Lin, J. I.; Tsay C. S. *Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.42, pp.225-251, 1984.
4. Belytschko, T.; Bachrach, W. E. *Efficient implementation of quadrilaterals with high coarse-mesh accuracy*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.54, pp279-301, 1986.
5. Belytschko, T.; Wong, B. L.; Stolarski, H. *Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.28, p.385-414, 1989.
6. Belytschko, T.; Wong, B. L.; Chiang, H. *Advances in one-point quadrature shell elements*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.96, pp93-107, 1992.
7. Belytschko, T.; Leviathan, I. *Physical stabilization of 4-node shell element with one point quadrature*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.113, pp321-350, 1994.
8. Belytschko, T.; Leviathan, I. *Projection schemes for one-point quadrature shell element*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.115, pp277-286, 1994.
9. Buechter, N.; Ramm, E. *Shell theory versus degeneration – A comparison in large rotation finite element*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.34, pp.39-59, 1992.

10. Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E. *Concepts and applications of finite element analysis*. New York: Wiley, 1989, 630p.
11. Chen, W. F.; Han, D. J. *Plasticity for structural engineers*. New York: Springer-Verlag, 1988, 620p.
12. Dienes, J. K. *On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies*. Acta Mechanica, v.32, pp.217-232, 1979.
13. Doyle, J. *A spectrally formulated finite element for flexural wave propagation in beams*. The International Journal Of Analytical And Experimental Modal Analysis, v.5, pp.99-107, 1990
14. Doyle, J. *Wave propagation in structures*. New York: Springer-Verlag, 2nd Edition, 1997.
15. Flanagan D. P.; Belytschko, T. *A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.17, pp.679-706, 1981.
16. Flanagan, D. P.; Taylor, L. M. *An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.62, pp.305-320, 1987.
17. Galbraith, P. C.; Hallquist, J. O. *Shell element formulations in LS-DYNA3D: their use in the modeling of sheet-metal forming*. Journal of Materials Processing Technology v.50, p.158-167, 1995.
18. Hallquist, J. O. *LS-DYNA3D Theoretical Manual*. Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 1998, 336p.
19. Hughes, T. J. R.; Winget, J. *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis*. International Journal for Numerical Methods In Engineering, v.15, pp.1862-1867, 1980.
20. Hughes, T. J. R.; Liu, W. K. *Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. Three-Dimensional shells*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.26, pp.331-362, 1981.
21. Hughes, T. J. R. *The finite element method*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987, 803p.
22. Liu, W. K.; Law, E. S.; Lam, D., Belytschko, T. *Resultant-stress degenerated-shell element*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.55, pp.259-300, 1986.

23. MacNeal, R. H. *A simple quadrilateral shell element*. Computers & Structures, v.8, pp.175-183, 1978.
24. MacNeal, R. H.; Harder, R. L. *A proposed standard set of problems to test finite element accuracy*. Finite Elements in Analysis and Design, v.11, pp.3-20, 1985.
25. Malvern, L. E. *Introduction To The Mechanics Of A Continuous Medium*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1969, 713p.
26. Marin, E. B.; McDowell, D. L. *A semi-implicit integration scheme for rate-dependent and rate-independent plasticity*. Computers & Structures, v.63, n.3, pp.579-600, 1997.
27. MSC.Software Corporation. *MSC.Dytran User's Manual*. Los Angeles. 1999.
28. Nagtegaal, J. P.; Rebelo, N. *On the development of a general purpose finite element program for analysis of forming process*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.25, pp.113-131, 1988.
29. Nguyen, Q. S. *On the plastic initial-boundary value problem and its numerical integration*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.11, pp.817-832, 1977.
30. Rebelo, N.; Nagtegaal, J. C.; Hibbit, H. D. *Finite element analysis of sheet metal forming process*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.30, pp.1739-1758, 1990.
31. Spencer, A. J. M. *Continuum Mechanics*. New York: Longman, 1980, 183p.
32. Stoughton, T. B. *Is the plastic potential equivalent to the yield function in metal forming?* General Motors Corporation, Research & Development Center, Report MD-34, Warren, 1997.
33. Stoughton, T. B. *Comparison of the effects of the dissociated and associated flow rules in sheet metal forming*. General Motors Corporation, Research & Development Center, Report ESL-12, Warren, 1999.
34. Taylor, L. M.; Flanagan, D. P. *PRONTO3D. A Three-Dimensional Transient Solid Dynamics Program*. Albuquerque: Sandia National Laboratories. 1989.
35. Vu-Quoc, L.; Mora, J. A. *A class of simple and efficient degenerated shell elements—Analysis of global spurious-mode filtering*. Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, v.74, pp117-175, 1989.
36. Yang, H. T. Y.; Saigal, S.; Masud, A.; Kapania, R. K. *A survey of recent shell finite elements*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, v.47, p.101-127, 2000.