

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL DA
TESE DEFENDIDA POR ALESSANDRO TEIXEIRA NETO
e APROVADA PELA COMISSÃO JULGADORA
COMISSÃO JULGADORA: EM 01 de JUNHO de 2001

Fernando Iguti

ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

O Método dos Domínios Pontuais e Aplicações

Autor : Alessandro Teixeira Neto

Orientador: Fernando Iguti

54/01

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

200207643

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

O Método dos Domínios Pontuais e Aplicações

Autor : Alessandro Teixeira Neto

Orientador: Fernando Iguti

Curso: Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2001

S.P. - Brasil

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T1 UNICAMP
	T235m
V.º	Ex
T.º	47897
PREC	16-8 37102
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PRECº	RB 11.00
DATA	15-02-02
N.º CPD	

CM00163824-4

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

T235m Teixeira Neto, Alessandro
 O método dos domínios pontuais e aplicações /
 Alessandro Teixeira Neto. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientador: Fernando Iguti.
 Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas,
 Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Métodos computacionais. 2. Mecânica dos meios
 contínuos. 3. Equações diferenciais. 4. Métodos de
 simulação. I. Iguti, Fernando. II. Universidade Estadual
 de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III.
 Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

O Método dos Domínios Pontuais e Aplicações

Autor : **Alessandro Teixeira Neto**

Orientador: **Fernando Iguti**

Fernando Iguti

Prof. Dr. Fernando Iguti, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP

R. Pavanello

Prof. Dr. Renato Pavanello
DMC/FEM/UNICAMP

Philippe Remy Bernard Devloo

Prof. Dr. Philippe Remy Bernard Devloo
DES/FEC/UNICAMP

P. Rizzi

Prof. Dr. Paulo Rizzi
IEAE/ITA

Wilson Sérgio Venturini

Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini
SET/EESC/USP

Campinas, 1 de junho de 2001

Agradecimentos

Agradeço, acima de tudo, à Deus, pela Sua inspiração e proteção.

Agradeço a minha esposa Ana, pelo seu amor e compreensão.

Agradeço aos meus pais, Dilson e Nanci, e ao meu irmão Érico, pelo incentivo em todos os momentos.

Agradeço ao meu orientador Fernando Iguti, pelas lições de vida, paciência e amizade.

Agradeço a todos os professores e colegas do DMC, pela colaboração e companheirismo.

Este trabalho não seria possível sem a ajuda de Vocês !

Mais coisas sobre nós mesmos nos ensina a terra que todos os livros.

Por que nos oferece resistência.

*Ao se medir com um obstáculo o homem aprende a se conhecer;
para superá-lo, entretanto, ele precisa de ferramenta.*

Uma plaina, uma charrua.

*O camponês, em sua labuta, vai arrancando lentamente alguns segredos à natureza;
e a verdade que ele obtém é universal.*

Assim o avião, ferramenta das linhas aéreas, envolve o homem em todos os velhos problemas.

*Trago sempre nos olhos a imagem de minha primeira noite de vôo, na Argentina
– uma noite escura onde apenas cintilavam, como estrelas, pequenas luzes perdidas na planície.*

Cada uma dessas luzes marcava, no oceano da escuridão, o milagre de uma consciência.

Sob aquele teto alguém lia, ou meditava, ou fazia confidências.

*Naquela outra casa alguém sondava o espaço ou se consumia em cálculos sobre a nebulosa de
Andrômeda.*

Mais além seria, talvez, a hora do amor.

De longe em longe brilhavam esses fogos no campo, como que pedindo sustento.

Até os mais discretos: o do poeta, o do professor, o do carpinteiro.

*Mas entre essas estrelas vivas, tantas janelas fechadas,
tantas estrelas extintas, tantos homens adormecidos ...*

É preciso a gente tentar se reunir.

*É preciso a gente fazer um esforço para se comunicar com algumas dessas luzes que brilham,
de longe em longe, ao longo da planura.*

Saint-Exupery

RESUMO

TEIXEIRA NETO, Alessandro, *O Método dos Domínios Pontuais e Aplicações*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 275p. Tese (Doutorado)

Neste trabalho apresenta-se o Método dos Domínios Pontuais (MDP). Trata-se de um operador algébrico baseado em campos de interpolação com continuidade das derivadas de alta ordem para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias ou parciais. Neste trabalho são discutidos os aspectos mais relevantes do método proposto tais como: motivação, metodologia sistemática para o desenvolvimento das funções MDP, discretização independente da malha e da equação diferencial do problema, melhoria da solução com exigência de maior regularidade das funções, análise de erros, estimador de erros e tratamento de descontinuidades físicas em problemas. As equações diferenciais referentes aos comportamentos de estruturas reticuladas (barras e vigas) são empregadas para testar a potencialidade do método, assim como levantar as características numéricas de estabilidade, convergência e precisão do operador, sendo os resultados comparados com aqueles obtidos pelo método dos elementos finitos. Alguns problemas de valores de contorno envolvendo a equação bidimensional de Poisson são analisados. Um problema padrão é proposto e são comparadas as soluções obtidas, através de sistemas lineares da mesma ordem, empregando-se o método dos domínios pontuais e o método da dupla reciprocidade. O MDP também é usado para a solução de problemas clássicos de torção na teoria da elasticidade. Os casos de seções transversais triangular, retangular e retangular trincada são estudados e comparados com resultados conhecidos da literatura. Exploram-se as possibilidades da introdução de descontinuidades físicas em diferentes níveis da aproximação MDP – função ou derivadas – na análise transiente de carga móvel atuante

em uma viga. A versão bidimensional do método dos domínios pontuais é empregada. Considera-se uma das dimensões ao longo do comprimento da viga, enquanto a outra é associada à evolução no tempo, e o carregamento móvel é tratado como uma descontinuidade na derivada terceira do deslocamento. Comparam-se os resultados MDP com a solução analítica do problema, e com a solução numérica obtida a partir da discretização espacial empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite e um esquema de Newmark com aceleração constante para a integração do sistema das equações de movimento ao longo do tempo. Demonstra-se a potencialidade do método proposto para o tratamento de sistemas lineares de equações através das resoluções numéricas das equações diferenciais de equilíbrio referentes aos comportamentos de corpos elásticos, homogêneos e isotrópicos; assumindo-se as hipóteses de estado plano de tensões. Dois problemas de equilíbrio, para os quais as soluções analíticas são conhecidas, são analisados empregando-se o MDP. Um terceiro problema é modelado utilizando-se o MDP e o método dos elementos finitos, possibilitando algumas considerações sobre a convergência do esquema numérico proposto. Fundamentada pelas diversas aplicações exploradas neste trabalho, observa-se a concordância do método dos domínios pontuais com relação as atuais tendências dos métodos computacionais para as soluções de problemas complexos em mecânica aplicada, colocando-o como um esquema numérico potencialmente competitivo.

Palavras Chave

– mecânica computacional, equações diferenciais, aproximações de alta ordem

ABSTRACT

TEIXEIRA NETO, Alessandro, *O Método dos Domínios Pontuais e Aplicações*, Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 275p. Tese (Doutorado)

The Point Domain Method (PDM) is presented in this work. It consists in an algebraic operator based on interpolation fields with continuity of the high order derivatives to the numerical solution of ordinary or partial differential equations. The most relevant aspects of the proposed method are discussed: motivation, systematic methodology for development of the PDM functions, meshless discretization and independence of the differential equation, improving solutions through enforcing more regularity to the functions, error estimator, and dealing with physical discontinuities in problems. The differential equations referred to the behaviour of reticulate structures (bars and beams) are employed in testing the method potentiality, as well to trace its numerical characters of stability, convergence and precision of the operator, being the results compared with those obtained through finite element method. Some boundary valued problems concerning two-dimensional Poisson equation are analysed. A test problem is proposed and the obtained results from point domain method and dual reciprocity method are compared, considering the same order of the linear systems. The PDM is also used for solution of classical problems in the elasticity theory. The cases of triangular, rectangular and cracked rectangular cross sections are studied and compared with known results from the literature. The possibilities in introducing physical discontinuities in different levels of PDM approximation – function or its derivatives – are exploited on the transient analysis of moving loads acting on a beam. The two-dimensional version of the point domain method is employed. It is considered one of the dimensions along the beam length, while

the other one is related with time evolution, and the moving load is treated as a discontinuity on the third derivative of the displacement. The PDM results are compared with analytical solution of the problem and with numerical results obtained by spatial discretization on Hermite finite elements and a constant acceleration Newmark scheme for integration of the system of movement equations along the time. The potentiality of the proposed method in dealing with systems of linear equations are demonstrated through numerical solutions of equilibrium differential equations referred to the behaviour of elastic, homogeneous and isotropic bodies; assuming plane stress hypothesis. Two equilibrium problems, from which analytical solutions are known, are analysed using PDM. A third problem is modelled through the PDM and the finite element method, enabling some considerations about the convergence of the proposed numerical scheme. Based on the several applications presented in this work, it can be observed the agreement with nowadays tendencies for computational methods in applied mechanics, which demonstrates the efficiency of the point domain method.

Key Words

– computational mechanics, differential equations, high order approximations

SIMBOLOGIA

Letras Latinas

A área da seção transversal de uma viga [m^2]

A constante arbitrária

B constante arbitrária

c constante arbitrária

C constante arbitrária

d representa o elemento diferencial total de um parâmetro

d dimensão genérica do espaço

D diâmetro [m]

D referente ao número de dimensões do espaço

$[D]$ matriz de elasticidade

e função erro, definida como a diferença entre a função exata e a função de aproximação

E norma do erro entre soluções aproximada e de referência

E módulo de elasticidade longitudinal [N/m^2]

f função arbitrária

$\{f\}$ vetor dos esforços MEF, apresenta as componentes das forças e dos momentos aplicados à viga

F força [N]

g aceleração da gravidade [m/s^2]

G módulo de elasticidade transversal [N/m^2]

G matriz de elementos de contorno relacionada à derivada normal da função de interesse

H matriz de elementos de contorno relacionada à função de interesse

i identificação genérica da posição de um domínio pontual na dimensão espacial x

i número imaginário, $i^2 = -1$

I momento de inércia de área da seção transversal de uma viga [m^4]
 j identificação genérica da posição de um domínio pontual na dimensão espacial y
 j identificação genérica de um instante de tempo
 $[K]$ matriz de rigidez MEF
 l comprimento de um elemento de viga [m]
 (l, m, n) cossenos diretores do vetor normal externo de um ponto genérico da superfície de um corpo
 L comprimento [m]
 L operador diferencial linear
 \mathcal{L} operador diferencial
 m massa [Kg]
 M ordem da derivada da função genérica u que é linearmente aproximada por partes
 M momento [$N\ m$]
 M número de divisões do domínio da função na dimensão espacial y
 $[M]$ matriz de massa MEF
 n vetor normal externo ao contorno
 N número de divisões do domínio da função na dimensão espacial x
 N número de elementos finitos considerados na discretização espacial de viga
 O ordem de convergência de uma solução numérica
 P carregamento [N]
 q ordem de uma equação diferencial genérica
 q derivada normal de uma função avaliada ao longo do contorno
 q carregamento distribuído [N/m^2]
 Q matriz MDR associada às derivadas normais das soluções particulares
 r distância do ponto de aplicação de uma fonte concentrada com relação à qualquer outro ponto considerado

t dimensão do tempo
 t forças de superfície por unidade de área [N/m^2]
 T intervalo de tempo de análise [s]
 u função genérica
 (u, v, w) componentes de deslocamento respectivamente ao longo dos eixos (X, Y, Z)
 U matriz MDR associada às soluções particulares
 $\{U\}$ vetor dos deslocamentos MEF, apresenta as componentes do deslocamento transversal e da rotação de viga
 v velocidade [m/s]
 w coeficientes da quadratura de Gauss
 x dimensão do espaço
 X dimensão do espaço
 y dimensão do espaço
 Y dimensão do espaço
 z dimensão do espaço
 Z dimensão do espaço

Letras Gregas

α ângulo com relação à dimensão espacial X que descreve a disposição de elemento bidimensional de pórtico [rad]
 γ distorções
 Γ contorno do problema
 δ função delta de Dirac
 ∂ representa o elemento diferencial parcial de um parâmetro
 Δ identifica a variação de um parâmetro

ϵ deformações
 ϵ erro máximo dos deslocamentos da solução MDP com relação à solução MEF
 θ rotação [*rad*]
 κ ordem do sistema linear de equações MDP
 λ autovalores do sistema
 ν coeficiente de Poisson
 ξ valor intermediário arbitrário de um intervalo
 (ξ, η) coordenadas da quadratura de Gauss
 ρ densidade [*Kg/m³*]
 σ tensão normal [*N/m²*]
 τ tensão de cisalhamento [*N/m²*]
 ϕ carregamento senoidal distribuído [*N/m²*]
 χ força de corpo [*N/m³*]
 ψ variável de função transcendental cujas raízes estão associadas aos modos naturais de vibração de uma viga
 ω frequências naturais de vibração do sistema [*rad/s*]
 Ω domínio do problema
 ∇^2 operador laplaciano

Superescritos

est referente a um valor estimado
ex referente à solução exata
 (m) ordem de derivação de uma função 1D
op referente ao operador diferencial
p grau do polinômio que representa a sensibilidade do erro de aproximação com relação a

variação do espaçamento entre domínios pontuais
(p, q) ordens de derivação parcial de uma função 2D
– posição infinitesimal anterior
+ posição infinitesimal posterior
* identifica uma função de ponderação ou solução fundamental
 \wedge identifica uma solução particular
 \wedge identifica um parâmetro conhecido
– referente ao sistema referencial global
. derivação com relação ao tempo
.. dupla derivação com relação ao tempo

Subscritos

a, b identificam pontos do domínio 1D do problema onde são definidas condições iniciais, de contorno ou descontinuidades
 ap referente à aproximação
 i identificação genérica da posição de um domínio pontual na dimensão espacial x
 i índice associado a um modo natural de vibração
 j identificação genérica da posição de um domínio pontual na dimensão espacial y
 k índice arbitrário
 max referente ao valor máximo
 M ordem da derivada da função genérica u que é linearmente aproximada por partes
 P identifica a posição instantânea de carregamento móvel
 t relativo à torção de seção transversal
 x relativo à dimensão espacial x
 y relativo à dimensão espacial y

z relativo à dimensão espacial z

Abreviaturas

EFG element free Galerkin method

FPM finite point method

MDP método dos domínios pontuais

MDR método da dupla reciprocidade

MEF método dos elementos finitos

RKPM reproducing kernel particle method

SAN esquema semi-analítico numérico

SPH smooth particle hydrodynamics method

TG esquema Taylor-Galerkin

Conteúdo

1	Introdução	2
2	Método dos Domínios Pontuais	14
2.1	Desenvolvimento das funções MDP 1D	19
2.2	Modelagem da equação diferencial	25
2.3	Melhorando a solução MDP	35
2.4	Análise de erros	46
2.5	Estimador de erros	51
2.6	Tratamento de descontinuidades	61
2.7	Desenvolvimento das funções MDP 2D	71
2.7.1	Aproximações MDP lineares em $u^{(4,4)}(x, y)$	72
2.7.2	Análise MDP de problemas	86

2.7.3	Pós-processamento dos dados	88
2.8	Construção de funções genéricas MDP.	89
3	Aplicações em Estruturas Reticuladas	91
3.1	Vibrações longitudinais de barra livre-livre	95
3.2	Vibrações longitudinais de barra fixo-livre	111
3.3	Vibrações transversais de viga livre-livre	123
3.4	Vibrações transversais de viga fixo-livre	137
3.5	Análise estática de estrutura de pórtico	149
4	Aplicações 2D Envolvendo a Equação de Poisson	161
4.1	Método da dupla reciprocidade	163
4.1.1	Forma integral de contorno da equação de Laplace	163
4.1.2	Solução fundamental	165
4.1.3	Método dos elementos de contorno para a equação de Laplace	166
4.1.4	Método da dupla reciprocidade para a equação de Poisson	169
4.2	Soluções MDR e MDP de um problema padrão	176
4.2.1	O problema padrão	176

4.2.2	Solução MDR	178
4.2.3	Solução MDP	181
4.2.4	Comparação dos resultados	187
4.3	Problemas de torção	188
5	Análise Transiente de Carga Móvel Atuante em Viga	196
5.1	Modelagem MEF.	199
5.2	Modelagem MDP.	203
5.3	Apresentação e discussão dos resultados.	209
6	Análise de Problemas em Elasticidade Plana	223
6.1	Introdução à teoria da elasticidade	226
6.2	Modelagem MDP	243
6.3	Apresentação e discussão dos resultados	249
7	Conclusões e Perspectivas	268
	Bibliografia	272

Lista de Figuras

2.1	Evolução da função unidimensional genérica $u(\bar{x})$	20
2.2	Disposição dos domínios pontuais no espaço unidimensional.	26
2.3	Resolução numérica do problema.	29
2.4	Domínios pontuais \bar{x}_i e pontos de aproximação y_j	31
2.5	Resolução numérica do problema modificado.	33
2.6	Erros das aproximações MDP, $M = 2$	39
2.7	Erros das aproximações MDP, $M = 3$	41
2.8	Erros das aproximações MDP, $M = 4$	43
2.9	Erros E_M , $E_M^{(1)}$ e $E_M^{(2)}$ das aproximações MDP, ($M = 2, 3, 4$).	45
2.10	Estimador de erros das soluções MDP.	53
2.11	Função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, $(N + 1) = 3$	57
2.12	Função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, $(N + 1) = 9$	58

2.13	Função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, $(N + 1) = 33$	59
2.14	Solução MDP do problema com descontinuidade, $(N + 1) = 8$	67
2.15	Solução MDP do problema com descontinuidade, $(N + 1) = 11$	68
2.16	Solução MDP do problema com descontinuidade, $(N + 1) = 101$	69
2.17	Região discretizada em domínios pontuais.	73
2.18	Referencial local entre domínios pontuais vizinhos.	75
2.19	Pontos de aproximação em Ω	87
3.1	Representação de barra livre de vínculos nas extremidades.	95
3.2	Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 2$, $(N + 1) = 9$	100
3.3	Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 3$, $(N + 1) = 9$	101
3.4	Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 4$, $(N + 1) = 9$	103
3.5	Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 5$, $(N + 1) = 9$	104
3.6	Representação de barra vinculada em uma das extremidades.	111
3.7	Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 2$, $(N + 1) = 10$	114
3.8	Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 3$, $(N + 1) = 10$	115
3.9	Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 4$, $(N + 1) = 10$	116
3.10	Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 5$, $(N + 1) = 10$	117

3.11	Representação de viga livre de vínculos nas extremidades.	123
3.12	Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 4$, $(N + 1) = 9$	127
3.13	Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 5$, $(N + 1) = 9$	128
3.14	Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 6$, $(N + 1) = 9$	130
3.15	Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 7$, $(N + 1) = 9$	131
3.16	Representação de viga vinculada em uma das extremidades.	137
3.17	Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 4$, $(N + 1) = 10$	140
3.18	Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 5$, $(N + 1) = 10$	141
3.19	Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 6$, $(N + 1) = 10$	142
3.20	Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 7$, $(N + 1) = 10$	144
3.21	Geometria e esforços atuantes em pórtico 2D.	149
3.22	Estrutura de pórtico 2D.	155
3.23	Geometria inicial – problema 1.	156
3.24	Geometria deformada – problema 1.	157
3.25	Geometria inicial – problema 2.	158
3.26	Geometria deformada – problema 2.	159
4.1	Domínio arbitrário.	164

4.2	Elementos de contorno.	167
4.3	Nós internos e de contorno.	170
4.4	Domínio do problema teste.	177
4.5	Discretização MDR do problema teste.	178
4.6	Valores u MDR nos nós do contorno externo.	179
4.7	Valores q MDR nos nós do contorno interno.	180
4.8	Região discretizada em domínios pontuais.	181
4.9	Pontos de aproximação em Ω	182
4.10	Solução $u(x, y)$ MDP da região discretizada.	183
4.11	Solução $u(x, y)$ exata da região discretizada.	184
4.12	Distribuição $e = u_{\text{MDP}} - u_{\text{exata}}$ do erro absoluto.	184
4.13	Aproximações MDP de $u(x, y)$ e de suas derivadas.	185
4.14	Valores u MDP nos pontos do contorno externo.	186
4.15	Valores q MDP nos pontos do contorno interno.	187
4.16	Solução MDP para seção transversal triangular.	192
4.17	Solução MDP para seção transversal retangular.	193
4.18	Solução MDP para seção retangular trincada.	195

5.1	Viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel.	197
5.2	Viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel.	211
5.3	Deslocamento MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	215
5.4	Deslocamento MEF, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	215
5.5	Deslocamento exato, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	216
5.6	Erro MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	216
5.7	Erro MEF, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	217
5.8	Rotação MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	217
5.9	Momento fletor MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	218
5.10	Força cortante MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$	218
5.11	Deslocamento MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	219
5.12	Deslocamento MEF, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	219
5.13	Deslocamento exato, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	220
5.14	Erro MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	220
5.15	Erro MEF, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	221
5.16	Rotação MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	221
5.17	Momento fletor MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	222

5.18	Força cortante MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$	222
6.1	Problema 1 - Flexão de viga com carregamento na extremidade.	237
6.2	Problema 2 - Flexão de viga uniformemente carregada.	240
6.3	Problema 1 - Flexão de viga com carregamento na extremidade.	250
6.4	Problema 1 - Nuvem de pontos de aproximação.	251
6.5	Problema 1 - Tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} MDP.	252
6.6	Problema 1 - Legendas das tensões MDP [Kgf/mm ²].	253
6.7	Problema 1 - Estrutura deformada, soluções exata e MDP.	254
6.8	Problema 2 - Flexão de viga uniformemente carregada.	255
6.9	Problema 2 - Nuvem de pontos de aproximação.	256
6.10	Problema 2 - Tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} MDP.	257
6.11	Problema 2 - Legendas das tensões MDP [Kgf/mm ²].	258
6.12	Problema 2 - Estrutura deformada, soluções exata e MDP.	259
6.13	Problema 3 - Flexão de viga com carregamento senoidal.	260
6.14	Problema 3 - Distribuição da tensão σ_1 MEF.	262
6.15	Problema 3 - Distribuição da tensão σ_2 MEF.	262
6.16	Problema 3 - Distribuição da tensão τ_{max} MEF.	263

6.17	Problema 3 - Estrutura deformada MEF.	263
6.18	Problema 3 - Nuvem de pontos de aproximação.	264
6.19	Problema 3 - Tensões σ_1 , σ_2 e τ_{\max} MDP.	265
6.20	Problema 3 - Legendas das tensões MDP [Kgf/mm ²].	265
6.21	Problema 3 - Estrutura deformada, soluções exata e MDP.	266

Lista de Tabelas

2.1	Erros das aproximações do problema.	29
2.2	Erros das aproximações do problema modificado.	34
2.3	Erros das aproximações MDP, $M = 2$	38
2.4	Erros das aproximações MDP, $M = 3$	40
2.5	Erros das aproximações MDP, $M = 4$	42
2.6	Ordens de convergência p das soluções MDP, ($M = 2, 3, 4$).	44
2.7	Ordens de convergência p obtidas da análise dos erros, ($M = 2, 3, 4$).	50
2.8	Erros exatos E_2 e estimados E_2^{est} das soluções MDP, $M = 2$	60
2.9	Valores $\Delta u_2^{(1)}$ e erros E_2^{OP} das soluções MDP, $M = 2$	69
3.1	Frequências naturais ω_i da modelagem da barra livre-livre [rad/s].	107
3.2	Frequências naturais ω_i da modelagem da barra livre-livre [rad/s].	108
3.3	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra livre-livre.	109

3.4	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra livre-livre.	110
3.5	Frequências naturais ω_i da modelagem da barra fixo-livre [rad/s].	119
3.6	Frequências naturais ω_i da modelagem da barra fixo-livre [rad/s].	120
3.7	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra fixo-livre.	121
3.8	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra fixo-livre.	122
3.9	Frequências naturais ω_i da modelagem da viga livre-livre [rad/s].	133
3.10	Frequências naturais ω_i da modelagem da viga livre-livre [rad/s].	134
3.11	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga livre-livre.	135
3.12	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga livre-livre.	136
3.13	Frequências naturais ω_i da modelagem da viga fixo-livre [rad/s].	145
3.14	Frequências naturais ω_i da modelagem da viga fixo-livre [rad/s].	146
3.15	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga fixo-livre.	147
3.16	Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga fixo-livre.	148
3.17	Resultados MDP da análise de estrutura de pórtico – problema 1.	157
3.18	Resultados MDP da análise de estrutura de pórtico – problema 2.	159
4.1	Soluções MDR e MDP do problema teste.	188
4.2	Valores do torque adimensional para seções retangulares.	194

5.1	Velocidades e Tempos das Análises.	211
5.2	Erros absolutos máximos das análises MEF e MDP [mm].	214
5.3	Erros absolutos médios das análises MEF e MDP [mm].	214
6.1	Problema 1 - Tensões máxima e mínima limite.	253
6.2	Problema 2 - Tensões máxima e mínima limite.	258
6.3	Problema 3 - Resultados MEF e MDP.	267

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho apresenta o Método dos Domínios Pontuais (MDP). Trata-se de um operador algébrico baseado em campos de interpolação com continuidade das derivadas de alta ordem para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias ou parciais.

No método dos domínios pontuais considera-se inicialmente uma derivada de ordem elevada da função, capaz de reconstruir todos os termos da equação diferencial do problema por integração. Uma aproximação linear por partes desta derivada de alta ordem é construída empregando-se variáveis associadas aos domínios pontuais. Os domínios pontuais constituem os pontos de referência do espaço-tempo de dimensão genérica onde é analisado o fenômeno físico. As funções MDP caracterizam as aproximações das derivadas de ordem mais baixa e da própria função, que são obtidas por processos sucessivos de integração exata da aproximação da derivada de alta ordem. Assim, as constantes que surgem naturalmente das etapas de integração e os valores da derivada de alta ordem nos domínios pontuais constituem as variáveis do problema. Convém observar que estas aproximações são construídas independentemente da equação diferencial e dos contornos

exatos do domínio do problema. O método da colocação é empregado para a modelagem da equação diferencial em uma nuvem de pontos arbitrariamente disposta de forma a representar o domínio do problema. O processo construtivo das funções MDP permite que a condição de contorno e a equação diferencial sejam satisfeitas simultaneamente nos pontos tomados sobre o contorno do domínio do problema. Assim é possível o tratamento das condições de contorno em domínios irregulares e a condensação local dos pontos, possibilitando soluções mais apuradas em regiões de grandes variações do gradiente. E as funções MDP são empregadas diretamente no pós-processamento dos dados, produzindo resultados suaves tanto da função quanto de suas derivadas.

O desenvolvimento de tecnologias é um fenômeno em constante evolução e disso resulta a necessidade de observação das atuais tendências. Estas tendências estão sujeitas às variações fomentadas pela motivação dos pesquisadores em superar novos desafios e também pelo desenvolvimento de tecnologias afins, que podem abrir novas perspectivas para a abordagem dos problemas. A breve revisão apresentada a seguir têm como objetivo apresentar algumas destas tendências atuais na pesquisa de métodos computacionais em mecânica aplicada.

Uma família de métodos Taylor-Galerkin (TG) de alta ordem é apresentada por Safjan & Oden em [22] para a análise de sistemas lineares hiperbólicos. As aproximações de sistemas desta natureza envolvem a discretização de variáveis temporais e espaciais. Assume-se que a aproximação final é obtida empregando-se diferenças finitas nas variáveis temporais e elementos finitos nas variáveis espaciais. Assim, duas abordagens são possíveis. No clássico método das linhas, uma aproximação nas variáveis espaciais converte o problema original de valores iniciais e de contorno num sistema ordinário de equações diferenciais, que então é discretizado no tempo empregando-se algum dos esquemas tradicionais de integração. Os esquemas TG pertencem a uma diferente classe de

métodos, conhecidos como métodos de discretização no tempo, que consistem nas mesmas etapas realizadas em ordem reversa. Assim, pela discretização inicial no tempo, o problema original de valores iniciais e de contorno é convertido numa sequência de problemas de valores de contorno, discretizados então empregando-se elementos finitos hp . Os esquemas TG apresentam resultados apurados e altas taxas de convergência e, para alguns dos esquemas, existe a possibilidade de estimar-se diretamente o erro da discretização temporal.

O estudo das propriedades da equação de Burgers é de grande importância devido à aplicação desta equação na teoria de aproximação do fluxo de uma onda de choque movendo-se num fluido viscoso. Esta é uma das poucas equações diferenciais parciais não-lineares que foram resolvidas analiticamente para condições iniciais arbitrárias. Apesar disso, a solução numérica da equação de Burgers é difícil para pequenos valores do coeficiente de viscosidade, que representam frentes de onda bastante acentuadas. Nestes casos os métodos numéricos geralmente produzem resultados que incluem grandes oscilações que não têm relação com o fenômeno físico. O trabalho de Ali et al [1] apresenta um novo elemento finito construído para a solução da equação de Burgers empregando-se B -splines cúbicas com método da colocação na discretização espacial e um esquema Crank-Nicolson para a aproximação no tempo. Convém observar-se que o uso de elementos construídos a partir de B -splines cúbicas possibilita uma solução global na qual não só a função é contínua, mas também a primeira e a segunda derivadas espaciais. Este elemento finito apresenta resultados tão apurados quanto aqueles obtidos empregando-se elementos finitos tradicionais com malha móvel, mesmo para pequenos valores do coeficiente de viscosidade.

As leis de conservação física representam uma coleção de requisitos de conservação de fluxo no espaço-tempo. Matematicamente estas leis são apresentadas na forma de um conjunto de equações integrais. A forma diferencial destas leis é obtida a partir da

forma integral assumindo-se que a solução física é suave. Este requisito de suavidade da solução física é difícil de ser realizado numa região de mudança rápida de comportamento empregando-se uma aproximação numérica que faz uso de um número limitado de variáveis discretas. Esta dificuldade mostra-se ainda mais acentuada na presença de descontinuidades, como por exemplo ondas de choque. Assim, a modelagem de um fenômeno físico com regiões de gradientes elevados empregando-se um método numérico projetado para obter a solução numérica da forma diferencial do problema sem a garantia da conservação de fluxo mostra-se bastante problemática. Entre os métodos tradicionais, diferenças finitas, elementos finitos e métodos espectrais foram projetados para resolver a forma diferencial das leis de conservação. Convém observar que o conjunto de equações integrais usualmente resolvido num esquema de elementos finitos é equivalente a forma diferencial das leis de conservação assumindo-se certas condições de suavidade. Entretanto, estas equações integrais são geralmente distintas daquelas que representam as leis de conservação. O método dos volumes finitos é o único método tradicional projetado para garantir a conservação do fluxo. Um esquema de volumes finitos pode garantir a condição de fluxo espacialmente ou em ambas as discretizações, espacial e temporal [15].

O interessante trabalho de Chang [5] apresenta uma nova possibilidade para a resolução numérica de problemas envolvendo as equações de Euler e de Navier-Stokes. Trata-se do método dos elementos de conservação e de solução no espaço-tempo. A resolução de um problema empregando-se esta metodologia apresenta duas etapas. Inicialmente são definidos os elementos de solução, que são subdomínios do espaço-tempo. A forma diferencial das equações de conservação é aproximada em termos de algumas funções com certa regularidade definidas nestes elementos de solução. Na etapa seguinte o domínio espaço-temporal é dividido em elementos de conservação. É então exigida a conservação do fluxo sobre toda a região dada pela união dos elementos de conservação. Convém observar que geralmente os elementos de solução e os elementos de conservação

são distintos. Assim, a solução numérica satisfaz a forma diferencial das leis de conservação uniformemente nos elementos de solução e ainda a forma integral das mesmas sobre toda região do espaço-tempo que une os elementos de conservação. Isto possibilita resultados apurados em simulações numéricas de problemas envolvendo choques e regiões com gradientes elevados. Chang ainda indica a simplicidade e a generalidade como outros aspectos favoráveis do método.

Para a solução de problemas elípticos de valores de contorno complexos, tais como aqueles envolvendo múltiplas singularidades e múltiplas interfaces, diferentes métodos numéricos podem ser adotados simultaneamente. E por isso, combinações de diferentes métodos vêm sendo propostas. O trabalho de Li [12] apresenta seis combinações do método de Ritz-Galerkin com o método das diferenças finitas. Nestas combinações, as estratégias de acoplamento dos diferentes métodos têm importância fundamental na garantia de taxas ótimas de convergência da solução numérica obtida. Nas combinações dos métodos apresentadas em [12], foram alcançadas taxas ótimas de convergência da solução e ainda taxas de super-convergência para as derivadas. Experimentos numéricos realizados para o problema de Motz confirmaram os resultados.

O método dos elementos finitos mostra-se mais atraente quando comparado com a versão clássica do método das diferenças finitas em virtude de diversos aspectos favoráveis, principalmente no tratamento das condições de contorno em domínios irregulares e na condensação local de nós, possibilitando soluções mais apuradas em regiões de grandes variações do gradiente. Entretanto, empregando-se uma malha arbitrária irregular de pontos nodais, o método das diferenças finitas pode superar as dificuldades apresentadas em sua versão clássica preservando, ao mesmo tempo, suas características básicas. O trabalho de Liszka & Orkisz [13] apresentou no ano de 1980 o método das diferenças finitas em malhas arbitrárias e aplicações em problemas como a torsão de barras, elasticidade

plana, deflexão de membranas e placas, escoamento de fluidos e distribuição de temperaturas. Para a aproximação em malhas irregulares a expansão em séries de Taylor ou a interpolação polinomial (Lagrange) podem ser empregadas. São selecionados oito nós na vizinhança do nó central do esquema, formando a chamada estrela de nós. Relacionados pela expansão em séries de Taylor, formam um sistema sobre-determinado de equações lineares, conduzindo a um conjunto de cinco equações com cinco incógnitas, obtido pela minimização de uma norma.

O interessante trabalho [2] também segue na linha do método das diferenças finitas em malhas arbitrárias. Arad et al apresentam um algoritmo numérico para a obtenção de soluções de alta ordem de problemas de equilíbrio. A idéia é baseada na diferenciação da equação diferencial que governa o problema e também das equações das condições de contorno. Estas novas equações possibilitam a redução do número de variáveis do problema, garantindo a alta ordem da solução. O método proposto foi testado em dois problemas de elasticidade e as soluções numéricas obtidas foram idênticas às respectivas soluções analíticas dos problemas. O método mostra-se bastante favorável para a resolução de problemas de equilíbrio onde os contornos geométricos são curvos e as condições de contorno ao longo dos mesmos variam acentuadamente. Isto por que no método proposto tanto as condições de contorno quanto as suas derivadas são aproximadas. Os autores apontam como desvantagens do método a sua difícil implementação, uma vez que é requerido um grande volume inicial de cálculos analíticos nas sucessivas diferenciações das equações.

Alguns problemas complexos em mecânica aplicada vêm sendo abordados atualmente empregando-se recentes desenvolvimentos nos métodos computacionais. Entre estes problemas que têm ocupado os pesquisadores pode-se citar aqueles envolvendo fraturas elastostática e elastodinâmica, hiperelasticidade e elastoplasticidade, propagação de in-

terfáces entre sólidos e líquidos, escoamento de fluidos compressíveis e convecção-difusão. Entretanto, o método dos elementos finitos, o mais difundido dos esquemas numéricos, não é muito adequado ao tratamento destes tipos de problemas. Tal limitação decorre da natureza altamente estruturada das aproximações de elementos finitos baseada na forte dependência de uma malha, Belytschko et al [4]. Convém ressaltar que são inquestionáveis as vantagens do processamento numérico de problemas empregando-se o método dos elementos finitos e, provavelmente, o motivo de sua grande popularidade. Considerando-se os recentes avanços na geração de malhas pode-se afirmar que, uma vez provida a capacidade computacional necessária, mesmo os problemas mais complexos, como a resolução tridimensional da equação de Navier-Stokes do escoamento de fluidos, podem ser devidamente analisados empregando-se o método dos elementos finitos. Entretanto as etapas de pré e pós-processamento dos dados, em muitos casos, têm apresentado alto custo computacional, consumindo muito mais tempo que a própria solução numérica, Onate et al [19]. No caso de descontinuidades móveis, a estratégia mais viável para o tratamento empregando-se métodos baseados em malhas é o remalhamento a cada passo de tempo de modo que as linhas da malha permaneçam sempre coincidindo com as descontinuidades durante a evolução do problema. Isto introduz inúmeras dificuldades tais como a necessidade do projeto de malhas entre os estágios sucessivos do problema, levando a degradação da acuracidade da aproximação e complexidade do programa computacional, além do grande número de remalhamentos, Belytschko et al [4].

Para superar estas dificuldades têm sido desenvolvida recentemente uma nova família de métodos computacionais para o tratamento de problemas complexos em ciência e engenharia. Os chamados métodos *meshless* são caracterizados por sua natureza menos estruturada que não apresenta uma dependência aos conceitos tradicionais de malha, típicos dos métodos de elementos finitos e de volumes finitos. Apesar de muitos desses métodos não serem verdadeiramente sem-malha, uma vez que ainda apresentam certa dependência

a alguns conjuntos de pontos de quadratura estruturados de alguma forma, os métodos *meshless* apresentam certas propriedades matemáticas e computacionais que favorecem a resolução de uma ampla classe de problemas de difícil abordagem pelos métodos tradicionais, Duarte & Oden [8]. Assim, geralmente é possível a análise de descontinuidades móveis sem a necessidade de remalhamento, uma vez que a aproximação destes métodos é construída inteiramente em termos dos nós.

Apesar do crescente interesse que os métodos *meshless* têm exercido sobre os pesquisadores nos dias de hoje, o ponto de partida para o desenvolvimento de tais esquemas numéricos ocorreu a aproximadamente vinte anos atrás quando o *smooth particle hydrodynamics method* (SPH) começou a ser empregado na modelagem de fenômenos astrofísicos sem contornos tais como a explosão de estrelas e o movimento de nuvens de poeira. Os trabalhos de diferenças finitas em malhas irregulares, como o de Liszca & Orkisz [13] (discutido neste texto), também são considerados pioneiros em métodos *meshless*, [19]. Novos esquemas foram desenvolvidos recentemente com o aumento do interesse dos pesquisadores de elementos finitos por métodos *meshless*. Entre estes novos esquemas numéricos estão: *element-free Galerkin method* (EFG) [14], *reproducing kernel particle methods* (RKPM) [6], *finite point method* (FPM) [19] e *hp cloud method* [8]. Duarte & Oden e Babuska & Melenk em trabalhos distintos reconheceram que SPH, EFG e FPM são métodos baseados em mínimos quadrados móveis. O RKPM com um núcleo discreto que é consistente apresenta-se também um método baseado em mínimos quadrados móveis. Além disso, os métodos baseados em mínimos quadrados móveis e o RKPM são todas variações de um conceito mais amplo, a partição da unidade, que caracteriza o *hp cloud method*. Segundo Belytschko et al [4], mesmo os trabalhos mais recentes de diferenças finitas em malhas irregulares apresentados por Liszca e seus colaboradores assemelham-se muito com mínimos quadrados móveis e partições da unidade.

As funções de ponderação são características comuns dos métodos *meshless*. Uma função de ponderação é definida por ter suporte compacto, isto é, o sub-domínio na qual ela é não-nula é relativamente pequeno em relação ao restante do domínio do problema. Cada sub-domínio é associado a um nó e o suporte é geralmente chamado de domínio de influência do respectivo nó. Em problemas bidimensionais os sub-domínios mais usados têm o formato de discos ou retângulos. Eles são arranjados de forma a ocupar todo o domínio do problema. Assim, apesar dos nós apresentarem-se em posições geométricamente distintas, os domínios de influência dos mesmos ocupam regiões comuns do espaço físico e geralmente, os nós próximos dos contornos apresentam domínios de influência que ultrapassam o domínio do problema. Outra característica comum é a elevada regularidade das funções de ponderação, possibilitando a representação exata de polinômios de alto grau. Este aspecto reflete-se no pós-processamento dos dados, conduzindo a resultados suaves.

Entretanto, alguns aspectos dos métodos *meshless* precisam ser melhorados e muitos pesquisadores vêm trabalhando neste sentido. Uma das maiores dificuldades na implementação destes métodos é a aplicação das condições de contorno essenciais ou de Dirichlet. Isto ocorre devido ao caráter não interpolatório da aproximação, ou seja, a aproximação não passa através dos valores dos parâmetros nodais. Para contornar este problema, a saída mais comum é a aproximação empregando-se multiplicadores de Lagrange. Entretanto, alguns autores sugerem o acoplamento com elementos finitos na região do contorno. Na modelagem da equação diferencial pelo método de Galerkin o domínio é geralmente subdividido em zonas de integração que são definidas independentemente dos nós. Os pontos da quadratura de Gauss são definidos dentro de cada zona de integração e cada ponto de integração pode ser coberto pelos suportes de várias funções de ponderação, Chen et al [6]. Autores como Onate et al [19], consideram ser vantajoso o emprego do método da colocação na modelagem da equação diferencial. Outra questão que têm sido discutida é a aproximação de descontinuidades na função e nas derivadas. Tais procedi-

mentos ainda exigem um tratamento matemático cuidadoso, contribuindo para a elevação do custo computacional.

A síntese de algumas tendências atuais de métodos computacionais em mecânica aplicada pode ser apresentada pelos seguintes tópicos: Aproximações de alta ordem, uma vez que estas possibilitam soluções que são mais condizentes com as leis de conservação física. Isto tanto para os esquemas espaciais quanto para os esquemas temporais. Esquemas espaço-temporais. Facilidade de aplicação das condições de contorno e da introdução de descontinuidades em diferentes níveis da aproximação (função ou derivadas). Esquemas numéricos menos estruturados, favorecendo as etapas de pré e pós-processamento da solução. E generalidade.

A motivação para o estudo do Método dos Domínios Pontuais (MDP), que é apresentado neste trabalho, é o enquadramento do mesmo em vários aspectos destas tendências, colocando-o como um esquema numérico potencialmente competitivo com os atuais métodos computacionais.

Inicialmente são discutidos os aspectos mais relevantes do método proposto tais como: motivação, metodologia sistemática para o desenvolvimento das funções MDP, discretização independente da malha e da equação diferencial do problema, melhoria da solução com exigência de maior regularidade das funções, análise de erros, estimador de erros e tratamento de descontinuidades físicas em problemas. Todos estes aspectos são abordados do ponto de vista unidimensional embora o método apresente potencialidade para a aplicação em problemas definidos sobre domínios de dimensões genéricas. A seguir, apresenta-se o desenvolvimento de funções MDP bidimensionais de alta ordem. São introduzidos exemplos numéricos a medida que são apresentados os novos conceitos, tendo como intuito facilitar a compreensão das idéias e ilustrar a aplicação efetiva das mesmas.

A versão unidimensional do método dos domínios pontuais é aplicada às equações diferenciais referentes aos comportamentos estático e dinâmico de estruturas reticuladas – barras e vigas. Discretizações grosseiras e refinadas, além de funções MDP considerando-se diferentes níveis de continuidade, são testadas extensivamente de forma a levantar-se as características numéricas de estabilidade, convergência e precisão do operador.

Alguns problemas de valores de contorno envolvendo a equação bidimensional de Poisson são analisados. Um problema padrão é proposto e são comparadas as soluções obtidas, através de sistemas lineares da mesma ordem, empregando-se o método dos domínios pontuais e o método da dupla reciprocidade. O MDP também é usado para a solução de problemas clássicos de torção na teoria da elasticidade. Os casos de seções transversais triangular, retangular e retangular trincada são estudados e comparados com resultados conhecidos da literatura.

Exploram-se as possibilidades da introdução de descontinuidades físicas em diferentes níveis da aproximação MDP – função ou derivadas – na análise transiente de carga móvel atuante em uma viga. A versão bidimensional do método dos domínios pontuais é empregada. Considera-se uma das dimensões ao longo do comprimento da viga, enquanto a outra é associada à evolução no tempo, e o carregamento móvel é tratado como uma descontinuidade na derivada terceira do deslocamento. Comparam-se os resultados MDP com a solução analítica do problema, e com a solução numérica obtida a partir da discretização espacial empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite e um esquema de Newmark com aceleração constante para a integração do sistema das equações de movimento ao longo do tempo.

Demonstra-se a potencialidade do método proposto para o tratamento de sistemas lineares de equações através das resoluções numéricas das equações diferenciais de equilíbrio referentes aos comportamentos de corpos elásticos, homogêneos e isotrópicos; assumindo-

se as hipóteses de estado plano de tensões. Dois problemas de equilíbrio, para os quais as soluções analíticas são conhecidas, são analisados empregando-se o MDP. Um terceiro problema é modelado utilizando-se o MDP e o método dos elementos finitos, possibilitando algumas considerações sobre a convergência do esquema numérico proposto.

Finalmente, são apresentadas as conclusões e as perspectivas futuras, fundamentadas pelas diversas aplicações exploradas neste trabalho.

Capítulo 2

Método dos Domínios Pontuais

Este capítulo apresenta o Método dos Domínios Pontuais (MDP). Trata-se de um operador algébrico baseado em campos de interpolação com continuidade das derivadas de alta ordem para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias ou parciais.

O método dos domínios pontuais têm sido desenvolvido buscando explorar-se ao máximo o conceito de generalidade. Na prática isto significa a flexibilidade para o tratamento de uma larga faixa de problemas, a facilidade de aplicação das condições de contorno e/ou iniciais, e a possibilidade da introdução de descontinuidades em diferentes níveis da aproximação – função ou derivadas –, conduzindo às soluções suaves da aproximação e de suas derivadas.

Para atender a este conceito de generalidade, o MDP apresenta funções fracamente estruturadas, e portanto bastante distintas daquelas empregadas nos esquemas numéricos tradicionais. Enquanto observa-se a natureza altamente estruturada das aproximações de elementos finitos e de elementos de contorno, baseadas na forte dependência da ma-

lha de discretização, o método dos domínios pontuais caracteriza-se por simples funções polinomiais construídas por partes.

Os aspectos mais relevantes do método proposto – metodologia sistemática para o desenvolvimento das funções MDP, discretização independente da malha e da equação diferencial do problema, melhoria da solução com exigência de maior regularidade das funções, análise de erros, estimador de erros e tratamento de descontinuidades físicas em problemas – são abordados do ponto de vista unidimensional, embora o método apresente potencialidade para a aplicação em problemas definidos sobre domínios de dimensões genéricas. Apresenta-se ainda o desenvolvimento de funções MDP bidimensionais de alta ordem. São introduzidos exemplos numéricos a medida que são apresentados os novos conceitos, tendo como intuito facilitar a compreensão das idéias e ilustrar a aplicação efetiva das mesmas. Todos estes tópicos são abordados neste capítulo, que encontra-se organizado em oito seções, conforme descrito a seguir.

Desenvolvimento das funções MDP 1D. Esta seção apresenta a teoria MDP 1D e exemplos. Para a aproximação de uma função 1D genérica empregando-se o MDP são tomados inicialmente pontos de referência do espaço unidimensional. Estes pontos de referência são denominados domínios pontuais. Fazendo-se um paralelo com o tratamento de problemas definidos sobre domínios arbitrários, pode-se afirmar que os domínios pontuais constituem os pontos de referência do espaço-tempo de dimensão genérica onde é analisado o fenômeno físico. O desenvolvimento das funções MDP dá-se a partir da aproximação linear por partes de uma derivada de alta ordem, capaz de reconstruir todos termos da equação diferencial do problema por integração. Esta aproximação é construída empregando-se variáveis associadas aos domínios pontuais. As aproximações das derivadas de ordem mais baixa e da própria função são obtidas por processos sucessivos de integração exata da aproximação linear por partes da derivada de alta ordem. Sendo

assim, é possível avaliar-se qualquer uma dessas aproximações em uma posição genérica do intervalo de discretização.

Modelagem da equação diferencial. Esta seção apresenta as etapas para a solução de problemas 1D e exemplos. O método da colocação é empregado para a modelagem das equações, diferencial e do contorno em uma nuvem de pontos de forma a representar convenientemente o domínio do problema. Isto significa que as equações, diferencial e do contorno, são impostas localmente em pontos arbitrários do domínio, que podem ou não coincidir com os domínios pontuais. A ordem das aproximações MDP a serem empregadas deve ser maior ou igual aquela da equação diferencial que governa o problema. Existe um número mínimo de equações, obtidas por colocação, necessário para a construção de um sistema linearmente independente, de forma a possibilitar o cálculo das variáveis do problema. Uma vez resolvido o sistema de equações, os dados são pós-processados empregando-se as próprias aproximações MDP, conduzindo a resultados com continuidade até a derivada de alta ordem que é linearmente aproximada por partes.

Melhorando a solução MDP. Nesta seção explora-se as possibilidades da resolução numérica de problemas 1D dando ênfase aos aspectos relacionados ao número de domínios pontuais e à ordem das aproximações MDP utilizadas. Para tanto, um problema padrão é introduzido e as soluções MDP são obtidas para diferentes combinações destes parâmetros, permitindo considerações sobre o comportamento numérico das soluções. São realizados estudos de convergência 1D a partir dos resultados deste problema padrão.

Análise de erros. Esta seção ocupa-se dos estudos teóricos de convergência e comparações com os resultados numéricos obtidos na seção anterior. Desenvolve-se a análise teórica de erros MDP, válida para problemas unidimensionais genéricos. Apresenta-se a equação que relaciona o erro da solução MDP aos parâmetros do espaçamento médio entre os domínios pontuais, a ordem da aproximação MDP que é linearmente aproximada por

partes e a ordem da equação diferencial que descreve o problema 1D.

Estimador de erros. Esta seção apresenta uma introdução teórica genérica e aplicações em um problema padrão. Apresentação dos conceitos e da metodologia para a estimativa numérica dos erros das soluções MDP 1D a posteriori. Aplicações em um problema padrão cuja solução analítica é conhecida. Comparam-se os erros exatos obtidos da análise MDP do problema padrão àqueles obtidos através da estimativa numérica, de forma a ratificar a eficiência da técnica proposta.

Tratamento de descontinuidades. Esta seção ocupa-se da introdução da metodologia, aplicação em um problema 1D com descontinuidade na derivada primeira e discussão dos resultados. O desenvolvimento construtivo das funções do método dos domínios pontuais permite a introdução de descontinuidades físicas em qualquer um dos níveis de aproximação – função ou derivadas – e numa posição arbitrária do domínio do problema. É conveniente ressaltar que no tratamento MDP das descontinuidades não existe a necessidade de que as posições das mesmas coincidam com os domínios pontuais.

Desenvolvimento das funções MDP 2D. Esta seção apresenta a teoria MDP 2D e etapas para a solução de problemas. Uma área retangular do espaço bidimensional é inicialmente representada pela discretização em domínios pontuais. Os domínios pontuais constituem os pontos de referência desta região do espaço bidimensional. De acordo com esta metodologia, as variáveis de discretização estão associadas aos domínios pontuais, e daí o nome do método. A maior parte das variáveis representa uma derivada de alta ordem que é linearmente aproximada por partes entre os domínios pontuais vizinhos. E as demais variáveis representam os valores das derivadas de ordem mais baixa e da própria função em alguns domínios pontuais estrategicamente posicionados. Todas as aproximações MDP das derivadas de ordem mais baixa e da própria função de interesse são obtidas através de procedimentos sucessivos de integração exata da aproximação MDP linear por partes

da derivada de alta ordem. Devido ao seu procedimento construtivo, qualquer uma das aproximações MDP – da função ou de suas derivadas – pode ser avaliada através de uma combinação linear de valores associados aos domínios pontuais. Estes valores são denominados variáveis MDP.

A solução desejada de um problema é obtida através de uma nuvem de pontos de aproximação tomada de forma a representar-se convenientemente o domínio do mesmo. A equação diferencial do problema é aplicada nos pontos de aproximação interiores ao domínio. E as condições de contorno e/ou iniciais são aplicadas nos pontos de aproximação localizados na fronteira. Para que isto seja possível, é utilizada a colocação por pontos, resultando em uma equação para cada um dos pontos de aproximação, sendo estas funções lineares das variáveis MDP. O sistema de equações resultante é então resolvido empregando-se um esquema de mínimos quadrados. Uma vez conhecidos os valores das variáveis MDP, as próprias funções MDP são utilizadas no pós-processamento dos dados, produzindo resultados suaves. É possível assim avaliar-se as aproximações da função ou de suas derivadas parciais em qualquer posição da área retangular de discretização. Observa-se que, à princípio, a função e o seu domínio são genéricos, de modo que qualquer problema bidimensional descrito por equações diferenciais pode ser analisado segundo esta abordagem.

Construção de funções genéricas MDP. Linhas gerais para o desenvolvimento de funções do método dos domínios pontuais considerando-se o número de dimensões do espaço, partições do domínio e aproximações com regularidades genéricas. Equação do número de variáveis MDP resultantes em função destes parâmetros.

Convém mencionar-se que todas as implementações computacionais MDP apresentadas neste trabalho foram desenvolvidas em ambiente Matlab, que trata-se de um produto MathWorks, Inc.

2.1 Desenvolvimento das funções MDP 1D

Considere-se inicialmente a figura 2.1 onde é representada a evolução da função unidimensional genérica $u(\bar{x})$ no intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$. Para a aproximação da função genérica $u(\bar{x})$ empregando-se o método dos domínios pontuais são tomados inicialmente pontos de referência do espaço unidimensional no intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$. Estes pontos de referência \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), são denominados domínios pontuais. Fazendo-se um paralelo com o tratamento de problemas definidos sobre domínios arbitrários, pode-se afirmar que os domínios pontuais constituem os pontos de referência do espaço-tempo de dimensão genérica onde é analisado o fenômeno físico. O intervalo genérico Δx_i ($i = 1, 2, \dots, N$) definido entre os domínios pontuais vizinhos $i - 1$ e i é dado pela equação 2.1. E o valor $u(\bar{x}_i)$ da função de interesse avaliada no domínio pontual \bar{x}_i é indicado simplificadaamente por $u(i)$, ($i = 0, 1, \dots, N$).

$$\Delta x_i = \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

Um sistema local de coordenadas é representado na figura 2.1 possibilitando o estudo do comportamento da função $u(\bar{x})$ no intervalo Δx_i definido entre domínios pontuais vizinhos. A abscissa deste sistema referencial é dada pelo eixo x enquanto na ordenada observa-se a evolução da função $u(\bar{x})$ ao longo deste mesmo eixo. Assim, as coordenadas x e \bar{x} encontram-se relacionadas pela equação 2.2 de translação.

$$x = \bar{x} - \bar{x}_{i-1} \quad (2.2)$$

Sendo este sistema local de coordenadas destinado ao estudo do comportamento da

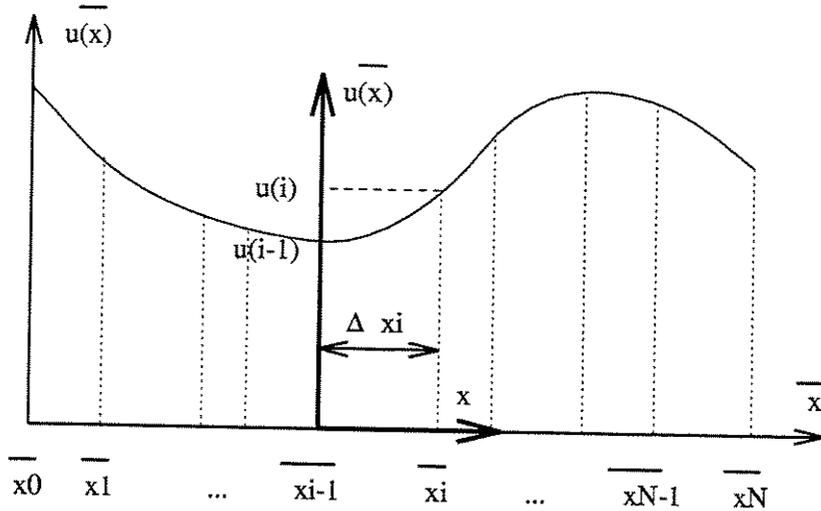


Figura 2.1: Evolução da função unidimensional genérica $u(\bar{x})$.

função $u(\bar{x})$ no intervalo $[x_{i-1}^-, \bar{x}_i]$, os valores possíveis de x encontram-se restritos aqueles que satisfazem a inequação 2.3.

$$0 \leq x \leq \Delta x_i \quad (2.3)$$

O desenvolvimento das funções MDP dá-se a partir da aproximação linear por partes de uma derivada de alta ordem M , capaz de reconstruir todos os termos da equação diferencial do problema por integração. Esta aproximação é construída empregando-se variáveis associadas aos domínios pontuais. A derivada de ordem m da função $u(\bar{x})$, com m pertencente aos números naturais, é apresentada na sua forma compacta 2.4. E o valor $u^{(m)}(\bar{x}_i)$ da derivada avaliada no domínio pontual \bar{x}_i é indicado simplifcadamente por $u^{(m)}(i)$, ($i = 0, 1, \dots, N$).

$$u^{(m)}(\bar{x}) \equiv \frac{d^m u}{d \bar{x}^m}(\bar{x}) \quad (2.4)$$

As aproximações MDP são identificadas pela notação $u_M^{(m)}(\bar{x})$, onde $(m = 0, \dots, M)$ e o subscrito M indica a ordem da derivada da função $u(\bar{x})$ que é linearmente aproximada por partes. Para a aproximação linear da derivada de ordem M da função entre os domínios pontuais genéricos x_{i-1} e x_i , $(i = 1, 2, \dots, N)$, é empregada a equação 2.5.

$$u_M^{(M)}(\bar{x}) = u_M^{(M)}(i-1) \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right) + u_M^{(M)}(i) \frac{x}{\Delta x_i} \quad (2.5)$$

As aproximações das derivadas de ordem mais baixa e da própria função, entre os domínios pontuais genéricos x_{i-1} e x_i , $(i = 1, 2, \dots, N)$, são obtidas por processos sucessivos de integração exata da equação 2.5. Assim, empregando-se a equação 2.5, uma aproximação linear por partes desenvolvida a partir da derivada de quarta ordem da função de interesse $u(\bar{x})$ é apresentada pela expressão 2.6.

$$u_4^{(4)}(\bar{x}) = u_4^{(4)}(i-1) \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right) + u_4^{(4)}(i) \frac{x}{\Delta x_i} \quad (2.6)$$

A aproximação da derivada $u_4^{(3)}(\bar{x})$, apresentada pela equação 2.7, é construída a partir da integração exata da equação 2.6.

$$u_4^{(3)}(\bar{x}) = u_4^{(4)}(i-1) \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x_i}\right) + u_4^{(4)}(i) \frac{x^2}{2\Delta x_i} + u_4^{(3)}(i-1) \quad (2.7)$$

A aproximação da derivada $u_4^{(2)}(\bar{x})$, apresentada pela equação 2.8, é construída a partir da integração exata da equação 2.7.

$$u_4^{(2)}(\bar{x}) = u_4^{(4)}(i-1) \left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{x}^3}{6\Delta x_i} \right) + u_4^{(4)}(i) \frac{\bar{x}^3}{6\Delta x_i} + u_4^{(3)}(i-1)x + u_4^{(2)}(i-1) \quad (2.8)$$

A aproximação da derivada $u_4^{(1)}(\bar{x})$, apresentada pela equação 2.9, é construída a partir da integração exata da equação 2.8.

$$\begin{aligned} u_4^{(1)}(\bar{x}) = & u_4^{(4)}(i-1) \left(\frac{\bar{x}^3}{6} - \frac{\bar{x}^4}{24\Delta x_i} \right) + u_4^{(4)}(i) \frac{\bar{x}^4}{24\Delta x_i} + u_4^{(3)}(i-1) \frac{\bar{x}^2}{2} + \\ & + u_4^{(2)}(i-1)x + u_4^{(1)}(i-1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

E finalmente, a aproximação da função de interesse $u_4(\bar{x})$, apresentada pela equação 2.10, é construída a partir da integração exata da equação 2.9.

$$\begin{aligned} u_4(\bar{x}) = & u_4^{(4)}(i-1) \left(\frac{\bar{x}^4}{24} - \frac{\bar{x}^5}{120\Delta x_i} \right) + u_4^{(4)}(i) \frac{\bar{x}^5}{120\Delta x_i} + u_4^{(3)}(i-1) \frac{\bar{x}^3}{6} + \\ & + u_4^{(2)}(i-1) \frac{\bar{x}^2}{2} + u_4^{(1)}(i-1)x + u_4(i-1) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Convém observar que as expressões 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 possibilitam a aproximação da função de interesse e de suas derivadas entre os domínios pontuais genéricos x_{i-1} e x_i , ($i = 1, 2, \dots, N$). Devido ao processo construtivo destas aproximações, a partir de integrações sucessivas da equação 2.5; $u_4^{(3)}(i-1)$, $u_4^{(2)}(i-1)$, $u_4^{(1)}(i-1)$ e $u_4(i-1)$ surgem como constantes de integração. Entretanto, as aproximações 2.7, 2.8, 2.9 e 2.10 podem ser reescritas adotando-se $x = \Delta x_i$, como é mostrado nas equações 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14. Esta nova apresentação das equações, denominada funções MDP, permite a eliminação de grande parte das constantes de integração, uma vez que os valores são associados diretamente aos domínios pontuais.

$$u_4^{(3)}(i) = \frac{\Delta x_i}{2} [u_4^{(4)}(i-1) + u_4^{(4)}(i)] + u_4^{(3)}(i-1) \quad (2.11)$$

$$u_4^{(2)}(i) = \frac{\Delta x_i^2}{6} [2u_4^{(4)}(i-1) + u_4^{(4)}(i)] + \Delta x_i u_4^{(3)}(i-1) + u_4^{(2)}(i-1) \quad (2.12)$$

$$u_4^{(1)}(i) = \frac{\Delta x_i^3}{24} [3u_4^{(4)}(i-1) + u_4^{(4)}(i)] + \frac{\Delta x_i^2}{2} u_4^{(3)}(i-1) + \Delta x_i u_4^{(2)}(i-1) + u_4^{(1)}(i-1) \quad (2.13)$$

$$u_4(i) = \frac{\Delta x_i^4}{120} [4u_4^{(4)}(i-1) + u_4^{(4)}(i)] + \frac{\Delta x_i^3}{6} u_4^{(3)}(i-1) + \frac{\Delta x_i^2}{2} u_4^{(2)}(i-1) + \Delta x_i u_4^{(1)}(i-1) + u_4(i-1) \quad (2.14)$$

As funções MDP permitem avaliar $u_4^{(3)}(i)$, $u_4^{(2)}(i)$, $u_4^{(1)}(i)$ e $u_4(i)$ nos domínios pontuais i , ($i = 1, 2, \dots, N$), de modo que as constantes de integração remanescentes são dadas por $u_4^{(3)}(0)$, $u_4^{(2)}(0)$, $u_4^{(1)}(0)$ e $u_4(0)$. Assim, qualquer avaliação das aproximações 2.6, 2.7, 2.8, 2.9 ou 2.10 numa posição genérica do intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ pode ser descrita em função das variáveis $u_4(0)$, $u_4^{(1)}(0)$, $u_4^{(2)}(0)$, $u_4^{(3)}(0)$ e $u_4^{(4)}(i)$, ($i = 0, 1, \dots, N$).

Aproximações MDP da forma $u_2^{(m)}(\bar{x})$, lineares por partes na derivada de segunda ordem, podem ser obtidas empregando-se a equação 2.5 seguida de duas integrações sucessivas, resultando nas expressões 2.15, 2.16 e 2.17. Estas equações possibilitam a aproximação da função de interesse e de suas derivadas entre os domínios pontuais genéricos x_{i-1} e x_i , ($i = 1, 2, \dots, N$).

$$u_2^{(2)}(\bar{x}) = u_2^{(2)}(i-1) \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right) + u_2^{(2)}(i) \frac{x}{\Delta x_i} \quad (2.15)$$

$$u_2^{(1)}(\bar{x}) = u_2^{(2)}(i-1) \left(x - \frac{x^2}{2\Delta x_i}\right) + u_2^{(2)}(i) \frac{x^2}{2\Delta x_i} + u_2^{(1)}(i-1) \quad (2.16)$$

$$u_2(\bar{x}) = u_2^{(2)}(i-1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6\Delta x_i}\right) + u_2^{(2)}(i) \frac{x^3}{6\Delta x_i} + u_2^{(1)}(i-1)x + u_2(i-1) \quad (2.17)$$

Funções MDP da forma $u_2^{(m)}(i)$ podem ser obtidas adotando-se $x = \Delta x_i$ nas expressões 2.16 e 2.17, resultando nas equações 2.18 e 2.19. Assim, qualquer avaliação das aproximações 2.15, 2.16 ou 2.17 numa posição genérica do intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ pode ser descrita em função das variáveis $u_2(0)$, $u_2^{(1)}(0)$ e $u_2^{(2)}(i)$, $(i = 0, 1, \dots, N)$.

$$u_2^{(1)}(i) = \frac{\Delta x_i}{2} [u_2^{(2)}(i-1) + u_2^{(2)}(i)] + u_2^{(1)}(i-1) \quad (2.18)$$

$$u_2(i) = \frac{\Delta x_i^2}{6} [2u_2^{(2)}(i-1) + u_2^{(2)}(i)] + \Delta x_i u_2^{(1)}(i-1) + u_2(i-1) \quad (2.19)$$

Outras funções MDP, desenvolvidas a partir de derivadas de ordem M linearmente aproximadas por partes, podem ser obtidas adotando-se o mesmo procedimento construtivo. Convém observar que tais aproximações independem da equação diferencial e dos contornos exatos do domínio do problema.

2.2 Modelagem da equação diferencial

Considere-se o problema de valores de contorno descrito pela expressão 2.20.

$$\begin{aligned}u^{(2)}(\bar{x}) - u^{(1)}(\bar{x}) - 2u(\bar{x}) &= \bar{x} & \bar{x} \in [0, 1] \\u(\bar{x}) &= 0.5 & \bar{x} = 0 \\u^{(1)}(\bar{x}) &= 1.5 \exp(2) + 0.5 \exp(-1) - 0.5 & \bar{x} = 1\end{aligned}\tag{2.20}$$

Este problema, cuja solução analítica é dada pela equação 2.21, é resolvido numericamente empregando-se o método dos domínios pontuais.

$$u(\bar{x}) = 0.75 \exp(2\bar{x}) - 0.5 \exp(-\bar{x}) - 0.5\bar{x} + 0.25\tag{2.21}$$

A figura 2.2 apresenta a disposição de cinco domínios pontuais no espaço unidimensional onde é analisado o problema. Observa-se que neste caso específico os domínios pontuais encontram-se igualmente espaçados, ou seja, $\Delta x_i = 0.25$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Entretanto, nada impede outras disposições distintas, tanto no aspecto do número ($N + 1$) de domínios pontuais, quanto no posicionamento geométrico dos mesmos.

A ordem M das aproximações MDP a serem empregadas deve ser maior ou igual aquela da equação diferencial que governa o problema. Assim, as aproximações MDP lineares por partes na derivada de quarta ordem ou as aproximações da forma $u_2^{(m)}(\bar{x})$, desenvolvidas na seção anterior, podem ser adotadas para o tratamento do problema. Para esta solução, as aproximações MDP lineares por partes na derivada de segunda ordem são utilizadas.

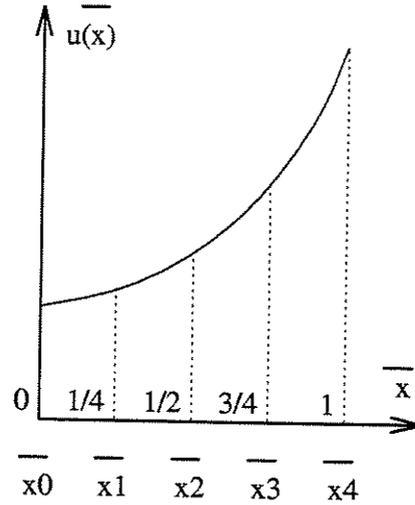


Figura 2.2: Disposição dos domínios pontuais no espaço unidimensional.

O primeiro passo para a solução de um problema empregando-se o MDP é a avaliação das aproximações da função e das derivadas, nos domínios pontuais, a partir das variáveis de discretização. Para tanto, as funções MDP 2.18 e 2.19 são empregadas. Variando-se o índice i dos domínios pontuais em um *loop*, ($i = 1, 2, 3, 4$), são construídos, simultaneamente, os sistemas matriciais 2.22 e 2.23.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2^{(1)}(0) \\ u_2^{(1)}(1) \\ u_2^{(1)}(2) \\ u_2^{(1)}(3) \\ u_2^{(1)}(4) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccc} \circ & \times & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \times & \times & \times & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \times & \times & \times & \times & \circ & \circ \\ \circ & \times & \times & \times & \times & \times & \circ \\ \circ & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} u_2(0) \\ u_2^{(1)}(0) \\ u_2^{(2)}(0) \\ u_2^{(2)}(1) \\ u_2^{(2)}(2) \\ u_2^{(2)}(3) \\ u_2^{(2)}(4) \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

O sistema matricial 2.22 relaciona as aproximações da primeira derivada $u_2^{(1)}(i)$, nos

domínios pontuais ($i = 0, 1, \dots, 4$), com as variáveis de discretização do problema, através de uma matriz de coeficientes. Os \times apresentados nesta matriz de coeficientes indicam as posições não nulas da mesma.

$$\begin{Bmatrix} u_2(0) \\ u_2(1) \\ u_2(2) \\ u_2(3) \\ u_2(4) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \times & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \times & \times & \times & \times & \circ & \circ & \circ \\ \times & \times & \times & \times & \times & \circ & \circ \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \circ \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2(0) \\ u_2^{(1)}(0) \\ u_2^{(2)}(0) \\ u_2^{(2)}(1) \\ u_2^{(2)}(2) \\ u_2^{(2)}(3) \\ u_2^{(2)}(4) \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

O sistema matricial 2.23 relaciona os valores da aproximação $u_2(i)$ da função, nos domínios pontuais ($i = 0, 1, \dots, 4$), com as variáveis de discretização do problema, através de uma matriz de coeficientes. Os \times apresentados nesta matriz de coeficientes indicam as posições não nulas da mesma. Convém observar que a dimensão das matrizes de coeficientes, em problemas unidimensionais, têm a forma $(N + 1) \times (N + M + 1)$. Na resolução deste problema é adotado $M = 2$ e $N = 4$, o que resulta na dimensão 5×7 das matrizes dos coeficientes.

Para a modelagem da equação diferencial, o método da colocação é empregado. Isto significa que as equações diferencial e dos contornos são impostas localmente em pontos arbitrários do domínio. As aproximações da forma $u_2^{(m)}(\bar{x})$, descritas pelas equações 2.15, 2.16 e 2.17, juntamente com as funções MDP, apresentadas na forma dos sistemas matriciais 2.22 e 2.23, possibilitam a aproximação das equações diferencial e dos contornos numa posição genérica do intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_4]$.

São necessárias pelo menos $(N + M + 1)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema linearmente independente, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. No caso de problemas que conduzam a sistemas lineares mal condicionados, um número maior do que $(N + M + 1)$ equações pode ser tomado, e neste caso a solução é obtida pelo método dos mínimos quadrados.

O problema 2.20 apresentado neste trabalho é modelado por colocação das equações diferencial e dos contornos nos próprios domínios pontuais. Este procedimento é conveniente uma vez que as aproximações da função e da primeira derivada já encontram-se desenvolvidas, respectivamente, nos sistemas matriciais 2.23 e 2.22. A equação diferencial é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , $(i = 0, 1, \dots, 4)$. A condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_0 e a condição de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_4 . É obtido assim um sistema linear com sete equações e sete incógnitas, possibilitando o cálculo dos valores $u_2(0)$, $u_2^{(1)}(0)$ e $u_2^{(2)}(i)$, $(i = 0, 1, \dots, 4)$.

Os dados são pós-processados empregando-se as próprias aproximações MDP, apresentadas nas equações 2.15, 2.16 e 2.17, conduzindo a resultados com continuidade até na derivada de segunda ordem. Na figura 2.3, em cima e a esquerda, é apresentada a estrutura da matriz 7×7 do sistema linear final, montado para a resolução numérica do problema. Na mesma figura, em cima e a direita, são apresentadas as curvas da aproximação $u_2(\bar{x})$, em linha cheia, e da solução analítica 2.21, em linha tracejada. Os valores das aproximações nos domínios pontuais são indicados por \star . Na figura 2.3, em baixo e a esquerda, são apresentadas as curvas da aproximação $u_2^{(1)}(\bar{x})$ da primeira derivada e do resultado analítico $u^{(1)}(\bar{x})$, respectivamente, em linhas cheia e tracejada. O gráfico da figura 2.3 da posição inferior direita apresenta as curvas das segundas derivadas, seguindo o mesmo padrão.

Os erros $E_2^{(m)}$, $(m = 0, 1, 2)$, das aproximações da função e de suas derivadas são

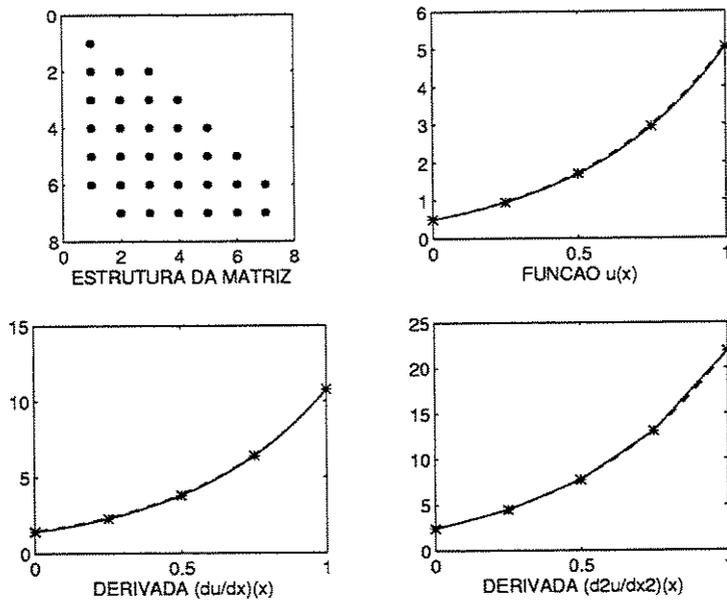


Figura 2.3: Resolução numérica do problema.

calculados segundo a equação 2.24. Os valores obtidos são apresentados na tabela 2.1.

$$E_2^{(m)} = \int_0^1 |u_2^{(m)}(\bar{x}) - u^{(m)}(\bar{x})| d\bar{x} \quad (2.24)$$

Considere-se o problema de valores de contorno descrito pela expressão 2.25. Observe-se que este problema modificado é bastante semelhante ao problema de valores de contorno apresentado pela equação 2.20. Na verdade, o domínio $[0.1, 0.9]$ do problema modificado

Tabela 2.1: Erros das aproximações do problema.

E_2	$E_2^{(1)}$	$E_2^{(2)}$
0.0343	0.0590	0.1070

2.25 é ligeiramente inferior que aquele do problema original 2.20, $[0, 1]$, o que torna os pontos de contorno distintos. Entretanto, a solução analítica do problema 2.25 é idêntica à solução do problema original, dada pela equação 2.21.

$$\begin{aligned}
 u^{(2)}(\bar{x}) - u^{(1)}(\bar{x}) - 2u(\bar{x}) &= \bar{x} & \bar{x} \in [0.1, 0.9] \\
 u(\bar{x}) &= 0.75 \exp(0.2) - 0.5 \exp(-0.1) + 0.2 & \bar{x} = 0.1 \\
 u^{(1)}(\bar{x}) &= 1.5 \exp(1.8) + 0.5 \exp(-0.9) - 0.5 & \bar{x} = 0.9
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

O problema modificado 2.25 é apresentado com o intuito de ilustrar a possibilidade de modelagem da equação diferencial, através do método da colocação, em uma nuvem de pontos arbitrariamente disposta de forma a representar o domínio do problema. Em problemas unidimensionais, esta facilidade de aplicação do método dos domínios pontuais é de pouca importância, uma vez que a equação diferencial pode ser modelada diretamente a partir dos domínios pontuais. Porém, fazendo-se um paralelo com a análise de problemas definidos em uma dimensão genérica, é justamente esta possibilidade que permite o tratamento das condições de contorno definidas sobre domínios irregulares. Além disso, a modelagem da equação diferencial em uma nuvem de pontos de disposição arbitrária, permite ainda a condensação local dos pontos de aproximação, possibilitando a obtenção de soluções mais apuradas em regiões de grandes variações do gradiente.

Para a resolução numérica do problema 2.25, a mesma disposição dos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, 4$), do problema original é empregada. Isto possibilita a utilização das mesmas funções MDP, descritas pelas expressões 2.22 e 2.23, já estruturadas na forma de sistemas matriciais. As respectivas posições dos domínios pontuais \bar{x}_i no espaço unidimensional são apresentadas pela equação 2.26.

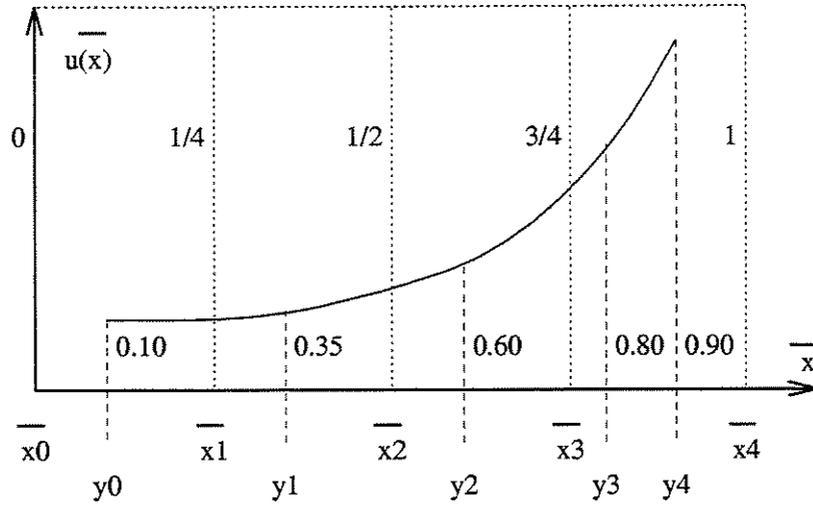


Figura 2.4: Domínios pontuais \bar{x}_i e pontos de aproximação y_j .

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.25 \\ 0.50 \\ 0.75 \\ 1.00 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Para a modelagem da equação diferencial do problema modificado, uma nuvem de pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, 4$), é definida na expressão 2.27. A figura 2.4 ilustra a disposição dos domínios pontuais \bar{x}_i e dos pontos de aproximação y_j escolhidos para a resolução numérica do problema 2.25. Observa-se que os pontos de aproximação são condensados nas proximidades do limite superior do domínio do problema, onde observa-se uma maior variação do comportamento da solução.

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.10 \\ 0.35 \\ 0.60 \\ 0.80 \\ 0.90 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

As aproximações da forma $u_2^{(m)}(\bar{x})$, descritas pelas equações 2.15, 2.16 e 2.17, juntamente com as funções MDP, apresentadas na forma dos sistemas matriciais 2.22 e 2.23, possibilitam a aproximação das equações diferencial e dos contornos numa posição genérica do intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_4]$. A equação diferencial do problema 2.25 é modelada por colocação nos pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, 4$). A condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no ponto de aproximação y_0 e a condição de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no ponto de aproximação y_4 . É obtido assim um sistema linear com sete equações e sete incógnitas, possibilitando o cálculo dos valores $u_2(0)$, $u_2^{(1)}(0)$ e $u_2^{(2)}(i)$, ($i = 0, 1, \dots, 4$), associados aos domínios pontuais.

Os dados são pós-processados empregando-se as próprias aproximações MDP, apresentadas nas equações 2.15, 2.16 e 2.17, conduzindo a resultados com continuidade até na derivada de segunda ordem. Na figura 2.5, em cima e a esquerda, é apresentada a estrutura da matriz 7×7 do sistema linear final, montado para a resolução numérica do problema modificado. Na mesma figura, em cima e a direita, são apresentadas as curvas da aproximação $u_2(\bar{x})$, em linha cheia, e da solução analítica 2.21, em linha tracejada. Os valores das aproximações são indicados por \star nos domínios pontuais e por \circ nos pontos de aproximação. Na figura 2.5, em baixo e a esquerda, são apresentadas as curvas da aproximação $u_2^{(1)}(\bar{x})$ da primeira derivada e do resultado analítico $u^{(1)}(\bar{x})$, respectivamente, em linhas cheia e tracejada. O gráfico da figura 2.5 da posição inferior direita apresenta

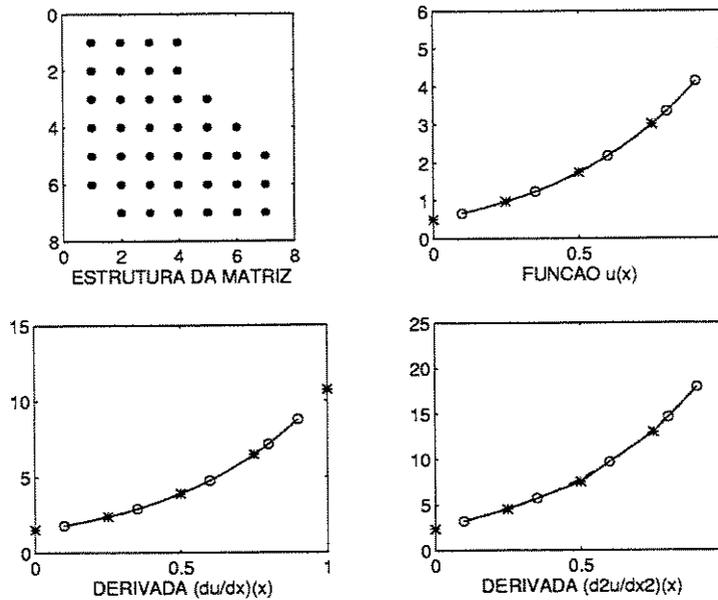


Figura 2.5: Resolução numérica do problema modificado.

as curvas das segundas derivadas, seguindo o mesmo padrão.

Os erros $E_2^{(m)}$, ($m = 0, 1, 2$), das aproximações da função e de suas derivadas são calculados segundo a equação 2.28. Os valores obtidos são apresentados na tabela 2.2. O fator $\frac{1}{0.8}$ que torna a expressão 2.28 distinta da equação 2.24 permite a correção da norma do erro em virtude da diminuição do tamanho do domínio no problema modificado. Tal correção possibilita a comparação direta dos valores dos erros das aproximações da função e das derivadas, obtidos pela resolução numérica dos problemas original 2.20 e modificado 2.25.

$$E_2^{(m)} = \frac{\int_{0.1}^{0.9} |u_2^{(m)}(\bar{x}) - u^{(m)}(\bar{x})| d\bar{x}}{0.8} \quad (2.28)$$

Observa-se que as estruturas das matrizes das figuras 2.3 e 2.5, respectivamente, do

Tabela 2.2: Erros das aproximações do problema modificado.

E_2	$E_2^{(1)}$	$E_2^{(2)}$
0.0072	0.0134	0.0718

problema original 2.20 e do problema modificado 2.25, são distintas. Isto ocorre pois os pontos de aproximação tomados para a modelagem do problema original coincidem com os domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, 4$). Entretanto, no caso da resolução numérica do problema modificado, a nuvem dos pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, 4$), é distinta destes mesmos domínios pontuais. Comparando-se as tabelas dos erros 2.1 e 2.2, observa-se que o problema modificado apresenta uma solução numérica mais próxima da solução analítica 2.21 de ambos os problemas. Dois aspectos contribuem para a melhoria da qualidade das aproximações do problema 2.25 com relação às aproximações obtidas a partir da resolução do problema 2.20. Como mostra a expressão 2.27, os pontos de aproximação y_j , utilizados para a modelagem do problema modificado, são condensados nas proximidades do limite superior do domínio do problema, onde o gradiente da solução é mais acentuado. Além disso, o espaçamento médio entre os pontos de aproximação da solução do problema original é de $\Delta y_{\text{médio}} = \Delta x_i = 0.25$, enquanto no caso da solução do problema modificado este valor é dado por $\Delta y_{\text{médio}} = 0.20$, contribuindo para a obtenção de resultados mais apurados.

2.3 Melhorando a solução MDP

Como foi visto nas seções anteriores, são inúmeras as possibilidades da resolução numérica dos problemas envolvendo equações diferenciais empregando-se o método dos domínios pontuais. Os domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), podem apresentar-se arbitrariamente dispostos no espaço unidimensional onde é analisado o problema. As funções MDP podem ser desenvolvidas a partir da aproximação linear por partes da derivada de ordem M genérica, onde a única exigência é que esta derivada de alta ordem M seja capaz de reconstruir todos os termos da equação diferencial do problema por integração. E a nuvem dos pontos de aproximação, que permite a modelagem da equação diferencial pelo método da colocação, também pode apresentar-se arbitrariamente disposta de forma a representar o domínio do problema.

Esta seção explora algumas destas possibilidades da resolução numérica dos problemas, dando ênfase aos aspectos do número de domínios pontuais ($N + 1$) e da ordem M das aproximações MDP utilizadas. Para tanto, um problema padrão é introduzido e as soluções MDP são obtidas para diferentes combinações dos parâmetros N e M , permitindo considerações sobre o comportamento numérico das soluções.

Considere-se o problema de valores de contorno descrito pela expressão 2.29.

$$\begin{aligned} u^{(2)}(\bar{x}) - u^{(1)}(\bar{x}) - 2u(\bar{x}) &= \bar{x} & \bar{x} &\in [0, 1] \\ u(\bar{x}) &= 0.5 & \bar{x} &= 0 \\ u^{(1)}(\bar{x}) &= 1.5 \exp(2) + 0.5 \exp(-1) - 0.5 & \bar{x} &= 1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Este problema padrão, cuja solução analítica é dada pela equação 2.30, é resolvido numericamente empregando-se o método dos domínios pontuais.

$$u(\bar{x}) = 0.75 \exp(2\bar{x}) - 0.5 \exp(-\bar{x}) - 0.5\bar{x} + 0.25 \quad (2.30)$$

Para possibilitar a comparação dos resultados, são tomados domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), igualmente espaçados sobre o domínio $[0, 1]$ do problema padrão nas diversas soluções MDP. Assim, os intervalos Δx_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), definidos entre os domínios pontuais vizinhos $i - 1$ e i , são todos iguais a Δx , como apresentado na equação 2.31.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.31)$$

O número das variáveis do problema $u_M(0)$, $u_M^{(1)}(0), \dots, u_M^{(M-1)}(0)$ e $u_M^{(M)}(i)$, ($i = 0, 1, \dots, N$), esta relacionado diretamente com os valores dos parâmetros N e M da solução MDP e é dado por $(N + M + 1)$. Portanto, são necessárias $(N + M + 1)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema linearmente independente, possibilitando o cálculo das variáveis. (No caso de problemas que conduzam a sistemas lineares mal condicionados, um número maior do que $(N + M + 1)$ equações pode ser tomado, e neste caso a solução é obtida pelo método dos mínimos quadrados). Assim, a matriz do sistema linear final apresenta a dimensão $(N + M + 1) \times (N + M + 1)$.

Os pontos de aproximação, para a modelagem da equação diferencial do problema 2.29 por colocação, são considerados coincidentes com os domínios pontuais. Este procedimento é conveniente uma vez que as aproximações da função e das derivadas, nos domínios pontuais, são avaliadas diretamente na montagem das funções MDP, apresentadas na forma de sistemas matriciais. Excepcionalmente são tomados pontos de aproximação distintos dos domínios pontuais quando o número de equações resultantes da modelagem

das equações diferencial e dos contornos resultar num número inferior às $(N + M + 1)$ equações, necessárias para o cálculo das variáveis do problema. Nestes eventuais pontos de aproximação, distintos dos domínios pontuais, são empregadas as aproximações MDP da forma $u_M^{(m)}(\bar{x})$, $(m = 0, \dots, M)$, que possibilitam a colocação da equação diferencial do problema numa posição genérica do intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$.

Os erros $E_M^{(m)}$, $(m = 0, \dots, M)$, das aproximações da função e de suas derivadas são calculados segundo a equação 2.32. Isto é possível uma vez que a solução analítica do problema padrão é dada pela equação 2.30.

$$E_M^{(m)} = \int_0^1 |u_M^{(m)}(\bar{x}) - u^{(m)}(\bar{x})| d\bar{x} \quad (2.32)$$

As aproximações MDP $M = 2$, lineares por partes na derivada de segunda ordem, são empregadas para a resolução numérica do problema 2.29. A equação diferencial é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , $(i = 0, 1, \dots, N)$. A condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_0 e a condição de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_N . São obtidas assim $(N + 3)$ equações para a construção do sistema linear final, possibilitando o cálculo das variáveis do problema.

A tabela 2.3 apresenta na primeira coluna os diferentes valores Δx do espaçamento entre os domínios pontuais empregados nas diversas soluções do problema padrão. A segunda coluna apresenta o número de domínios pontuais $(N + 1)$ de cada uma das soluções. A terceira coluna está associada ao número de variáveis de cada solução e às respectivas dimensões da matriz do sistema linear final. Convém lembrar que a dimensão da matriz do sistema linear final é dada por $(N + M + 1) \times (N + M + 1)$. As demais colunas da tabela 2.3 apresentam os valores dos erros $E_2^{(m)}$, $(m = 0, 1, 2)$, das aproximações MDP da função e das derivadas, calculados segundo a equação 2.32.

Tabela 2.3: Erros das aproximações MDP, $M = 2$.

Δx	$(N + 1)$	$(N + M + 1)$	E_2	$E_2^{(1)}$	$E_2^{(2)}$
1/2	3	5	1.3891E-1	2.2873E-1	4.3245E-1
1/4	5	7	3.4329E-2	5.9012E-2	1.0705E-1
1/8	9	11	8.5571E-3	1.4889E-2	2.6701E-2
1/16	17	19	2.1380E-3	3.7329E-3	6.6746E-3
1/32	33	35	5.3446E-4	9.3413E-4	1.6687E-3
1/64	65	67	1.3362E-4	2.3362E-4	4.1718E-4
1/128	129	131	3.3405E-5	5.8414E-5	1.0430E-4
1/256	257	259	8.3514E-6	1.4605E-5	2.6075E-5

A ordem de convergência $p = O_M^{(m)}(\Delta x^p)$ de uma solução numérica representa a sensibilidade do erro $E_M^{(m)}$ da aproximação $u_M^{(m)}(\bar{x})$ com relação a variação do espaçamento Δx , sendo um importante indicador do comportamento da aproximação. A expressão 2.33 representa esta relação de sensibilidade do erro $E_M^{(m)}$ com o Δx , onde C_M^m é uma constante associada a aproximação.

$$E_M^{(m)} = C_M^{(m)} \Delta x^p \quad \implies \quad O_M^{(m)}(\Delta x^p) = p \quad (2.33)$$

A ordem de convergência $p = O_M^{(m)}(\Delta x^p)$ de uma aproximação pode ser obtida a partir do gráfico dos erros $E_M^{(m)}$ em função dos espaçamentos Δx das soluções. Uma vez colocados os valores em escalas logarítmicas, a potência p é dada pela tangente da reta imaginária que une os dados das diversas soluções.

A figura 2.6 apresenta os erros $E_2^{(m)}$, ($m = 0, 1, 2$), das aproximações MDP em função

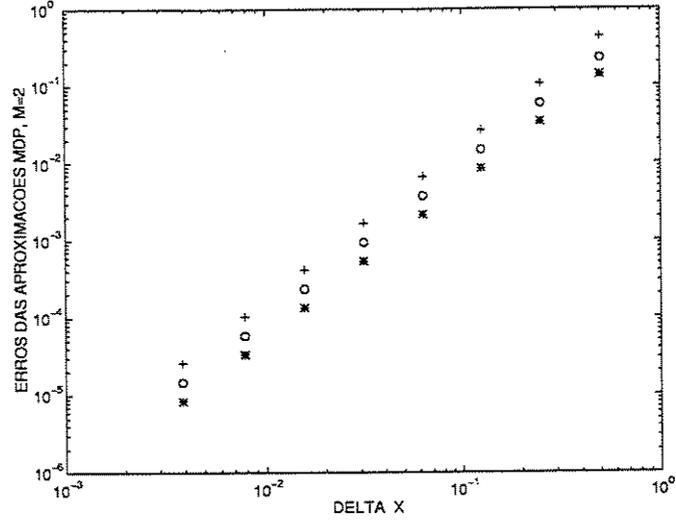


Figura 2.6: Erros das aproximações MDP, $M = 2$.

dos diferentes valores Δx das soluções, representados em escala $\log \times \log$. Os dados são os mesmos da tabela 2.3. Os erros E_2 das aproximações da função são indicados por $*$. Os erros $E_2^{(1)}$ das aproximações da primeira derivada são indicados por o . E os erros $E_2^{(2)}$ das aproximações da segunda derivada são indicados por $+$. Observa-se a convergência quadrática $p = 2$ dos erros das aproximações com relação ao espaçamento Δx nos três casos.

As aproximações MDP $M = 3$, lineares por partes na derivada de terceira ordem, são empregadas para a resolução numérica do problema 2.29. A equação diferencial é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$) e também no ponto de aproximação $y_{N+2} = 1 - \frac{\Delta x}{2}$, distinto dos domínios pontuais. A condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_0 e a condição de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_N . São obtidas assim $(N+4)$ equações para a construção do sistema linear final, possibilitando o cálculo das variáveis do problema.

Tabela 2.4: Erros das aproximações MDP, $M = 3$.

Δx	$(N + 1)$	$(N + M + 1)$	E_3	$E_3^{(1)}$	$E_3^{(2)}$	$E_3^{(3)}$
1/2	3	6	7.5933E-3	1.3257E-2	7.9308E-2	8.1107E-1
1/4	5	8	5.2872E-4	9.7829E-4	9.0949E-3	1.8156E-1
1/8	9	12	3.6590E-5	6.9476E-5	9.2650E-4	4.1171E-2
1/16	17	20	2.4315E-6	4.7173E-6	1.0320E-4	9.8845E-3
1/32	33	36	1.5698E-7	3.0834E-7	1.2383E-5	2.4379E-3
1/64	65	68	9.9744E-9	1.9720E-8	1.5295E-6	6.0710E-4
1/128	129	132	6.2861E-10	1.2470E-9	1.9067E-7	1.5160E-4
1/256	257	260	3.9453E-11	7.8391E-11	2.3824E-8	3.7886E-5

A tabela 2.4 apresenta na primeira coluna os diferentes valores Δx do espaçamento entre os domínios pontuais empregados nas diversas soluções do problema padrão. A segunda coluna apresenta o número de domínios pontuais $(N + 1)$ de cada uma das soluções. A terceira coluna está associada ao número de variáveis de cada solução e às respectivas dimensões da matriz do sistema linear final. Convém lembrar que a dimensão da matriz do sistema linear final é dada por $(N + M + 1) \times (N + M + 1)$. As demais colunas da tabela 2.4 apresentam os valores dos erros $E_3^{(m)}$, ($m = 0, 1, 2, 3$), das aproximações MDP da função e das derivadas, calculados segundo a equação 2.32.

A figura 2.7 apresenta os erros $E_3^{(m)}$, ($m = 0, 1, 2, 3$), das aproximações MDP em função dos diferentes valores Δx das soluções, representados em escala $\log \times \log$. Os dados são os mesmos da tabela 2.4. Os erros E_3 das aproximações da função são indicados por \star . Os erros $E_3^{(1)}$ das aproximações da primeira derivada são indicados por \circ . Os erros $E_3^{(2)}$ das aproximações da segunda derivada são indicados por $+$. E os erros $E_3^{(3)}$ das

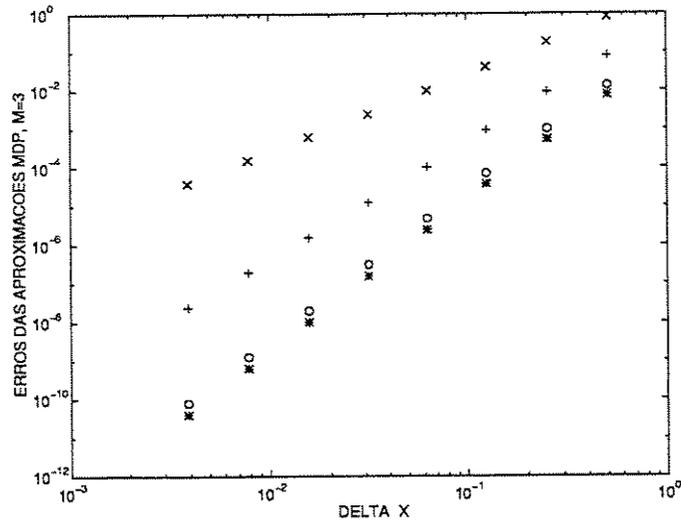


Figura 2.7: Erros das aproximações MDP, $M = 3$.

aproximações da terceira derivada são indicados por \times . Observa-se a convergência de quarta ordem $p = 4$ dos erros das aproximações da função e da primeira derivada com relação ao espaçamento Δx . Os erros da aproximação da segunda derivada apresentam convergência de terceira ordem $p = 3$. E a ordem de convergência quadrática $p = 2$ é observada no comportamento dos erros da aproximação da terceira derivada.

As aproximações MDP $M = 4$, lineares por partes na derivada de quarta ordem, são empregadas para a resolução numérica do problema 2.29. A equação diferencial é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$) e também nos pontos de aproximação $y_{N+2} = \frac{\Delta x}{2}$ e $y_{N+3} = 1 - \frac{\Delta x}{2}$, distintos dos domínios pontuais. A condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_0 e a condição de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_N . São obtidas assim $(N + 5)$ equações para a construção do sistema linear final, possibilitando o cálculo das variáveis do problema.

A tabela 2.5 apresenta na primeira coluna os diferentes valores Δx do espaçamento

Tabela 2.5: Erros das aproximações MDP, $M = 4$.

Δx	$(N + 1)$	$(N + M + 1)$	E_4	$E_4^{(1)}$	$E_4^{(2)}$	$E_4^{(3)}$	$E_4^{(4)}$
1/2	3	7	4.4635E-4	1.0835E-3	5.6686E-3	8.3863E-2	1.5249E+0
1/4	5	9	6.4218E-5	1.3073E-4	5.7375E-4	1.1464E-2	3.4210E-1
1/8	9	13	6.4521E-6	1.0722E-5	3.6818E-5	1.4948E-3	8.1366E-2
1/16	17	21	4.8107E-7	7.9658E-7	2.2697E-6	1.9062E-4	1.9811E-2
1/32	33	37	3.2519E-8	5.4934E-8	1.3944E-7	2.4048E-5	4.8867E-3
1/64	65	69	2.1091E-9	3.6174E-9	8.6081E-9	3.0190E-6	1.2132E-3
1/128	129	133	1.3422E-10	2.3224E-10	5.3418E-10	3.7813E-7	3.0220E-4
1/256	257	261	8.4630E-12	1.4716E-11	3.3259E-11	4.7310E-8	7.5415E-5

entre os domínios pontuais empregados nas diversas soluções do problema padrão. A segunda coluna apresenta o número de domínios pontuais $(N + 1)$ de cada uma das soluções. A terceira coluna está associada ao número de variáveis de cada solução e às respectivas dimensões da matriz do sistema linear final. Convém lembrar que a dimensão da matriz do sistema linear final é dada por $(N + M + 1) \times (N + M + 1)$. As demais colunas da tabela 2.5 apresentam os valores dos erros $E_4^{(m)}$, $(m = 0, 1, \dots, 4)$, das aproximações MDP da função e das derivadas, calculados segundo a equação 2.32.

A figura 2.8 apresenta os erros $E_4^{(m)}$, $(m = 0, 1, \dots, 4)$, das aproximações MDP em função dos diferentes valores Δx das soluções, representados em escala $\log \times \log$. Os dados são os mesmos da tabela 2.5. Os erros E_4 das aproximações da função são indicados por \star . Os erros $E_4^{(1)}$ das aproximações da primeira derivada são indicados por \circ . Os erros $E_4^{(2)}$ das aproximações da segunda derivada são indicados por $+$. Os erros $E_4^{(3)}$ das aproximações da terceira derivada são indicados por \times . E os erros $E_4^{(4)}$ das aproximações da quarta derivada são indicados por \oplus . Observa-se a convergência de quarta ordem $p = 4$ dos erros das aproximações da função e das derivadas primeira e segunda com relação ao

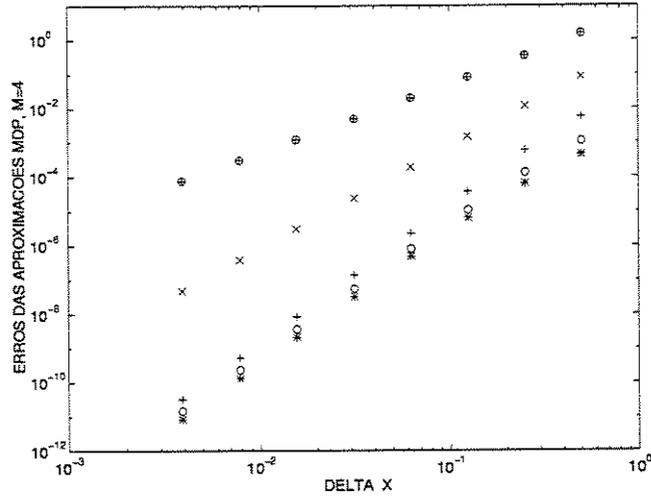


Figura 2.8: Erros das aproximações MDP, $M = 4$.

espaçamento Δx . Os erros da aproximação da terceira derivada apresentam convergência de terceira ordem $p = 3$. E a ordem de convergência quadrática $p = 2$ é observada no comportamento dos erros da aproximação da quarta derivada.

Comparando-se diretamente os dados das tabelas 2.3, 2.4 e 2.5, para um mesmo Δx , observa-se que os valores dos erros das aproximações diminuem a medida que a ordem M das aproximações MDP é aumentada. Assim, as aproximações MDP $M = 4$, lineares por partes na derivada de quarta ordem, apresentam os resultados mais apurados, enquanto as aproximações MDP $M = 2$ apresentam os resultados mais grosseiros, para as soluções do problema 2.29 empregando-se o mesmo número $(N + 1)$ de domínios pontuais. As aproximações MDP $M = 3$, lineares por partes na derivada de terceira ordem, apresentam resultados intermediários. Observa-se ainda que as dimensões das matrizes dos sistemas lineares finais sofrem de uma variação mínima com o aumento da ordem M das aproximações MDP. Assim, as aproximações MDP $M = 2$ conduzem a dimensão $(N + 3) \times (N + 3)$ da matriz, as aproximações MDP $M = 3$ conduzem a di-

Tabela 2.6: Ordens de convergência p das soluções MDP, ($M = 2, 3, 4$).

M	$O_M(\Delta x^p)$	$O_M^{(1)}(\Delta x^p)$	$O_M^{(2)}(\Delta x^p)$	$O_M^{(3)}(\Delta x^p)$	$O_M^{(4)}(\Delta x^p)$
2	2	2	2	–	–
3	4	4	3	2	–
4	4	4	4	3	2

mensão $(N + 4) \times (N + 4)$ da matriz, enquanto as aproximações MDP $M = 4$ conduzem a dimensão $(N + 5) \times (N + 5)$ da matriz do sistema linear final.

A tabela 2.6 apresenta as ordens de convergência $p = O_M^{(m)}(\Delta x^p)$, ($m = 0, 1, \dots, 4$), dos erros das aproximações MDP, ($M = 2, 3, 4$). Comparando-se o comportamento numérico das soluções do ponto de vista das ordens de convergência, observa-se também resultados mais favoráveis obtidos a partir das aproximações MDP $M = 4$. Isto ocorre pois os erros das aproximações, neste caso, decrescem rapidamente com a diminuição do espaçamento Δx . As aproximações MDP $M = 3$, lineares por partes na derivada de terceira ordem, também apresentam um comportamento numérico satisfatório. Enquanto os dados da tabela 2.6 apontam para um decréscimo quadrático dos erros das aproximações MDP $M = 2$ com a diminuição do espaçamento Δx .

A figura 2.9 apresenta os erros $E_M^{(m)}$, ($m = 0, 1, 2$), das aproximações MDP, ($M = 2, 3, 4$), em função dos diferentes valores Δx das soluções, representados em escala $\log \times \log$. Os dados são os mesmos das tabelas 2.3, 2.4 e 2.5. Os erros $E_4^{(m)}$ das aproximações MDP $M = 4$ da função e de suas derivadas primeira e segunda são indicados por \star . Os erros $E_3^{(m)}$ das aproximações MDP $M = 3$ da função e de suas derivadas primeira e segunda são indicados por \circ . E os erros $E_2^{(m)}$ das aproximações MDP $M = 2$ da função e de suas derivadas são indicados por $+$. A figura 2.9 apresenta para as aproximações MDP

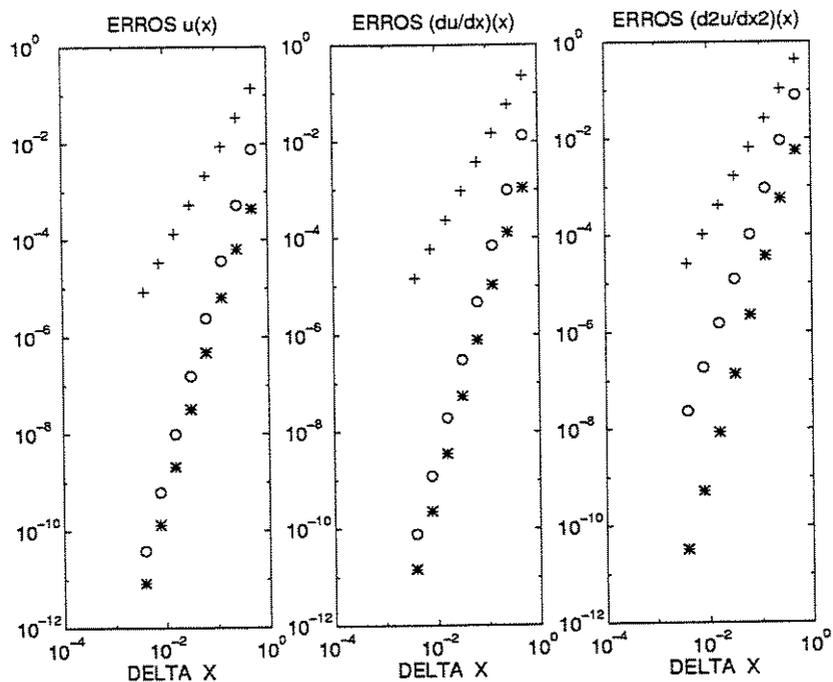


Figura 2.9: Erros E_M , $E_M^{(1)}$ e $E_M^{(2)}$ das aproximações MDP, ($M = 2, 3, 4$).

$M = 4$ os menores valores dos erros e as mais elevadas ordens de convergência. As aproximações MDP $M = 3$ apresentam resultados intermediários, enquanto as aproximações MDP $M = 2$ conduzem às soluções numéricas mais grosseiras.

Soluções numéricas melhoradas podem ser obtidas com a exigência de maior regularidade das funções, ou seja, empregando-se aproximações MDP de alta ordem M . É conveniente ressaltar que tais aproximações são obtidas com o aumento mínimo da dimensão $(N + M + 1) \times (N + M + 1)$ do sistema linear final, possibilitando soluções significativamente mais apuradas. E as aproximações MDP são empregadas diretamente no pós-processamento dos dados, produzindo resultados suaves tanto da função $u_M(\bar{x})$ quanto de suas derivadas $u_M^m(\bar{x})$, ($m = 1, \dots, M$).

2.4 Análise de erros

Considere-se um problema unidimensional genérico, envolvendo uma equação diferencial de ordem q e as respectivas condições iniciais ou de contorno, definido sobre o domínio $\bar{x} \in [\bar{x}_0, \bar{x}_0 + L]$. A equação diferencial do problema é apresentada na expressão 2.34, onde $f_k(\bar{x})$, ($k = 0, 1, \dots, q + 1$), representam funções contínuas arbitrárias, conhecidas, definidas no mesmo intervalo do espaço unidimensional.

$$f_{q+1}(\bar{x})u^{(q)}(\bar{x}) + f_q(\bar{x})u^{(q-1)}(\bar{x}) + \dots + f_2(\bar{x})u^{(1)}(\bar{x}) + f_1(\bar{x})u(\bar{x}) + f_0(\bar{x}) = 0 \quad (2.34)$$

$N + 1$ domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), são dispostos sobre o domínio unidimensional de comprimento L igualmente espaçados, ou seja, os intervalos Δx_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), definidos entre os domínios pontuais vizinhos $i - 1$ e i , são todos iguais a Δx , como apresentado na equação 2.35.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{L}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.35)$$

As aproximações MDP lineares por partes na derivada de ordem M podem ser empregadas para a resolução numérica do problema genérico, uma vez observada a inequação 2.36, que representa a exigência de aproximações MDP de ordem maior ou igual àquela da equação diferencial 2.34 que governa o problema.

$$M \geq q \quad (2.36)$$

A aproximação MDP de ordem M da derivada de ordem q , $u_M^{(q)}(\bar{x})$, permite representar exatamente polinômios de grau $M - q + 1$. A expressão 2.37 apresenta a aproximação MDP $u_M^{(q)}(\bar{x})$ escrita na forma de um polinômio de grau $M - q + 1$, onde os coeficientes do polinômio são indicados por a_k , ($k = 0, 1, \dots, M - q + 1$).

$$u_M^{(q)}(\bar{x}) = \sum_{k=0}^{M-q+1} a_k \bar{x}^k \quad (2.37)$$

Seja $u^{(q)}(\bar{x})$ a derivada de ordem q da solução exata do problema genérico. A expansão da derivada $u^{(q)}(\bar{x})$ em série de Taylor a partir do domínio puntual $i - 1$ resulta na expressão 2.38.

$$u^{(q)}(x_{i-1}^- + x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^{(q+k)}(x_{i-1}^-) x^k}{k!} \quad (2.38)$$

A expressão 2.38 pode ser desenvolvida como apresentado nas equações 2.39 e 2.40.

$$u^{(q)}(x_{i-1}^- + x) = \sum_{k=0}^{M-q+1} \frac{u^{(q+k)}(x_{i-1}^-) x^k}{k!} + \sum_{k=M-q+2}^{\infty} \frac{u^{(q+k)}(x_{i-1}^-) x^k}{k!} \quad (2.39)$$

$$u^{(q)}(x_{i-1}^- + x) = \sum_{k=0}^{M-q+1} \frac{u^{(q+k)}(x_{i-1}^-) x^k}{k!} + \frac{u^{(M+2)}(x_{i-1}^- + \xi) x^{M-q+2}}{(M - q + 2)!} \quad 0 \leq \xi \leq x \quad (2.40)$$

A equação 2.37 da aproximação MDP da derivada $u_M^{(q)}(\bar{x})$ pode então ser reescrita, representando os coeficientes do polinômio por $a_k = \frac{u^{(q+k)}(x_{i-1}^-)}{k!}$, ($k = 0, 1, \dots, M - q + 1$), como é apresentado na expressão 2.41.

$$u_M^{(q)}(x_{i-1}^- + x) = \sum_{k=0}^{M-q+1} \frac{u^{(q+k)}(x_{i-1}^-)}{k!} x^k \quad (2.41)$$

O erro $E_{M_i}^{(q)}$, acumulado entre os domínios pontuais $i-1$ e i , é obtido subtraindo-se a equação 2.41 da expressão 2.40 e fazendo $x = \Delta x$, conforme mostrado em 2.42.

$$E_{M_i}^{(q)} = \frac{u^{(M+2)}(x_{i-1}^- + \xi) \Delta x^{M-q+2}}{(M-q+2)!} \quad 0 \leq \xi \leq \Delta x \quad (2.42)$$

Assim, o erro total $E_M^{(q)}$ da aproximação MDP da derivada de ordem q , acumulado em todo o domínio do problema genérico, é dado pela equação 2.43.

$$E_M^{(q)} = \sum_{i=1}^N E_{M_i}^{(q)} \quad (2.43)$$

Aplicando a equação 2.42 na expressão 2.43, para o cálculo do erro total $E_M^{(q)}$, e extraíndo da equação 2.35 a relação $N = \frac{L}{\Delta x}$, obtém-se o resultado final 2.44.

$$E_M^{(q)} = \frac{L u^{(M+2)}(\bar{\xi}) \Delta x^{M-q+1}}{(M-q+2)!} \quad \bar{x}_0 \leq \bar{\xi} \leq \bar{x}_0 + L \quad (2.44)$$

A expressão 2.44 do erro $E_M^{(q)}$ pode ser apresentada no seu formato reduzido 2.45, onde $C_M^{(q)}$ é uma constante associada a aproximação MDP da derivada de ordem q .

$$E_M^{(q)} = C_M^{(q)} \Delta x^{M-q+1} \quad (2.45)$$

Neste caso, a constante $C_M^{(q)}$ é dada pela equação 2.46.

$$C_M^{(q)} = \frac{L u^{(M+2)}(\bar{\xi})}{(M - q + 2)!} \quad \bar{x}_0 \leq \bar{\xi} \leq \bar{x}_0 + L \quad (2.46)$$

Um resultado conservativo é obtido considerando que os erros $E_M^{(m)}$ das aproximações MDP das derivadas de ordens $m > q$, superiores a q , são descritos pela expressão 2.47. Este resultado está fundamentado na metodologia construtiva do método dos domínios pontuais, uma vez que as aproximações $u_M^{(m)}(\bar{x})$ com $m > q$ são dadas pela derivação da equação 2.41 da aproximação MDP da derivada de ordem q , $u_M^{(q)}(\bar{x})$.

$$E_M^{(m)} = C_M^{(m)} \Delta x^{M-m+1} \quad m > q \quad (2.47)$$

Por outro lado, aproximações $u_M^{(m)}(\bar{x})$ com $m < q$ são construídas por integração exata da equação 2.41 da aproximação MDP da derivada de ordem q , $u_M^{(q)}(\bar{x})$. Como o erro da aproximação $u_M^{(q)}(\bar{x})$ também é integrado no domínio do problema genérico, observa-se que a expressão 2.48, válida para os erros das aproximações $u_M^{(m)}(\bar{x})$ com $m \leq q$, é distinta da equação 2.47.

$$E_M^{(m)} = C_M^{(m)} \Delta x^{M-q+1} \quad m \leq q \quad (2.48)$$

Assim, os resultados obtidos para os erros $E_M^{(m)}$, ($m = 0, 1, \dots, M$), das aproximações MDP da função e das derivadas para o problema genérico estão sintetizados na equação 2.49. Observa-se que $C_M^{(m)}$ é uma constante associada a aproximação MDP da derivada de ordem m , ($m = 0, 1, \dots, M$).

Tabela 2.7: Ordens de convergência p obtidas da análise dos erros, ($M = 2, 3, 4$).

M	$O_M(\Delta x^p)$	$O_M^{(1)}(\Delta x^p)$	$O_M^{(2)}(\Delta x^p)$	$O_M^{(3)}(\Delta x^p)$	$O_M^{(4)}(\Delta x^p)$
2	1	1	1	–	–
3	2	2	2	1	–
4	3	3	3	2	1

$$E_M^{(m)} = C_M^{(m)} \Delta x^{M-k+1} \quad k = \begin{cases} m & m > q \\ q & m \leq q \end{cases} \quad (2.49)$$

A ordem de convergência $p = O_M^{(m)}(\Delta x^p)$ de uma solução numérica representa a sensibilidade do erro $E_M^{(m)}$ da aproximação $u_M^{(m)}(\bar{x})$ com relação a variação do espaçamento Δx , sendo um importante indicador do comportamento da aproximação. A tabela 2.7 apresenta as ordens de convergência $p = O_M^{(m)}(\Delta x^p)$, ($m = 0, 1, \dots, 4$), dos erros das aproximações MDP de ordens M , ($M = 2, 3, 4$), obtidas segundo a expressão 2.49 para um problema genérico com $q = 2$.

A tabela 2.6 apresenta as ordens de convergência $p = O_M^{(m)}(\Delta x^p)$ obtidas das resoluções numéricas MDP do problema padrão 2.29, onde $q = 2$. Observa-se que os valores das ordens de convergência das aproximações MDP, obtidos a partir da equação 2.49 da análise de erros, e apresentados na tabela 2.7, são conservativos quando comparados com aqueles efetivamente alcançados nas resoluções numéricas do problema padrão, apresentados na tabela 2.6. É conveniente ressaltar que as ordens de convergência obtidas a partir da análise de erros representam os piores resultados possíveis e, eventualmente, as resoluções numéricas efetivas podem conduzir a ordens de convergência ainda mais elevadas.

2.5 Estimador de erros

Considere-se um problema unidimensional genérico, envolvendo uma equação diferencial linear de segunda ordem, $q = 2$, e as respectivas condições iniciais ou de contorno, definido sobre o domínio $\bar{x} \in [\bar{x}_0, \bar{x}_0 + L]$. A expressão 2.50 representa este problema genérico, onde $\mathcal{L}(\cdot)$, $\mathcal{L}_a(\cdot)$ e $\mathcal{L}_b(\cdot)$ são os operadores diferenciais que atuam sobre a função de interesse $u(\bar{x})$. $f(\bar{x})$ representa uma função contínua, arbitrária e conhecida, definida no mesmo intervalo do espaço unidimensional. Os valores a e b das condições iniciais ou de contorno também são dados do problema. E os pontos \bar{x}_a e \bar{x}_b pertencem ao intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_0 + L]$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u(\bar{x})) &= f(\bar{x}) & \bar{x} &\in [\bar{x}_0, \bar{x}_0 + L] \\ \mathcal{L}_a(u(\bar{x})) &= a & \bar{x} &= \bar{x}_a \\ \mathcal{L}_b(u(\bar{x})) &= b & \bar{x} &= \bar{x}_b\end{aligned}\tag{2.50}$$

Na resolução numérica do problema genérico 2.50 empregando-se o método dos domínios pontuais é comum tomar-se os pontos de aproximação, para a modelagem da equação diferencial por colocação, coincidentes com os domínios pontuais. Este procedimento é conveniente uma vez que as aproximações da função e das derivadas, nos domínios pontuais, são avaliadas diretamente na montagem das funções MDP, apresentadas na forma de sistemas matriciais. Assim, na solução do problema genérico 2.50 a equação diferencial $\mathcal{L}(u(\bar{x})) = f(\bar{x})$ é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), e as condições iniciais ou de contorno $\mathcal{L}_a(u(\bar{x})) = a$ e $\mathcal{L}_b(u(\bar{x})) = b$ são impostas, respectivamente, nos pontos \bar{x}_a e \bar{x}_b .

A figura 2.10(a) apresenta as soluções $u(\bar{x})$ exata e $u_M(\bar{x})$ aproximada do problema genérico 2.50. A função $e(\bar{x})$ do erro da solução é definida sobre o mesmo domínio do

problema, $\bar{x} \in [\bar{x}_0, \bar{x}_0 + L]$, e é dada pela diferença entre a função $u(\bar{x})$, que não é conhecida, e a aproximação da função $u_M(\bar{x})$, obtida pela resolução numérica do problema. A função $e(\bar{x})$ do erro é apresentada na equação 2.51 e, como a solução exata do problema $u(\bar{x})$ não é conhecida, não é possível avaliar-se diretamente $e(\bar{x})$, sendo esta apenas uma definição conceitual.

$$e(\bar{x}) = u(\bar{x}) - u_M(\bar{x}) \quad (2.51)$$

A equação 2.51 pode ser reescrita de forma a definir a solução exata $u(\bar{x})$ a partir das funções $u_M(\bar{x})$ da aproximação e $e(\bar{x})$ do erro da solução, como é apresentado na expressão 2.52.

$$u(\bar{x}) = u_M(\bar{x}) + e(\bar{x}) \quad (2.52)$$

Substituindo-se a equação 2.52 nos operadores diferenciais do problema genérico 2.50 é obtido um novo problema 2.53 associado à função $e(\bar{x})$ do erro da solução. Observa-se que as condições iniciais ou de contorno, em $\mathcal{L}_a(e(\bar{x}))$ e $\mathcal{L}_b(e(\bar{x}))$, do problema associado ao erro são nulas, uma vez que na solução MDP do problema genérico, as respectivas condições iniciais ou de contorno, em $\mathcal{L}_a(u(\bar{x}))$ e $\mathcal{L}_b(u(\bar{x}))$, são satisfeitas por colocação.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e(\bar{x})) &= f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_M(\bar{x})) & \bar{x} &\in [\bar{x}_0, \bar{x}_0 + L] \\ \mathcal{L}_a(e(\bar{x})) &= a - \mathcal{L}_a(u_M(\bar{x})) = 0 & \bar{x} &= \bar{x}_a \\ \mathcal{L}_b(e(\bar{x})) &= b - \mathcal{L}_b(u_M(\bar{x})) = 0 & \bar{x} &= \bar{x}_b \end{aligned} \quad (2.53)$$

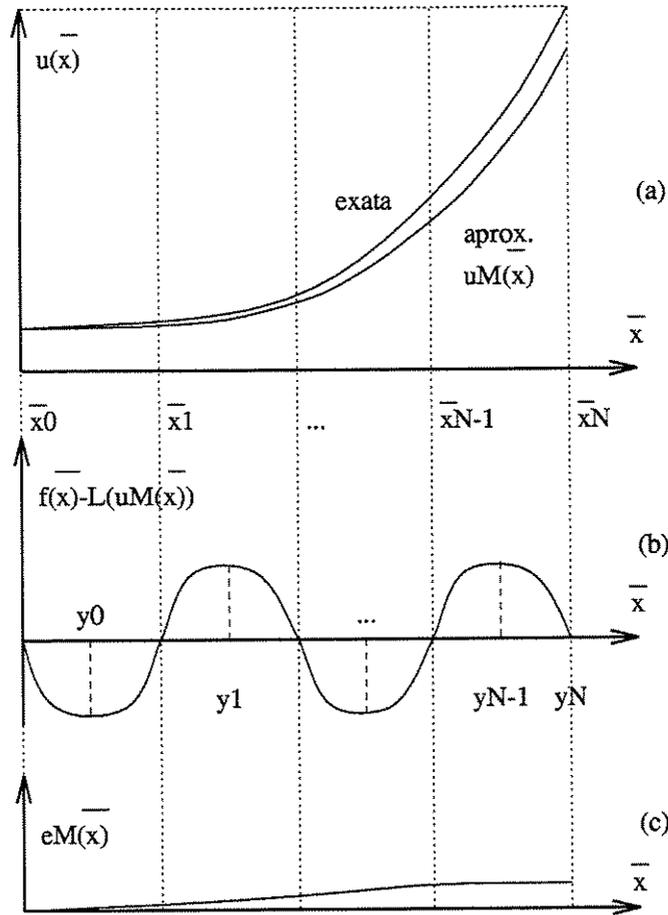


Figura 2.10: Estimador de erros das soluções MDP.

A figura 2.10(b) apresenta uma representação gráfica do termo fonte $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_M(\bar{x}))$ do problema 2.53 associado à função $e(\bar{x})$ do erro da solução. Observa-se que os valores $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_M(\bar{x}))$ são nulos nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), devido a modelagem da equação diferencial $\mathcal{L}(u(\bar{x})) = f(\bar{x})$ por colocação empregando-se os pontos de aproximação coincidentes com os domínios pontuais na solução MDP do problema genérico 2.50.

É possível estimar-se a função $e(\bar{x})$ do erro da solução através da resolução numérica

do problema associado 2.53 empregando-se o método dos domínios pontuais. Para a estimativa do erro $e(\bar{x})$ são utilizadas as mesmas funções MDP desenvolvidas para a solução do problema original 2.50, apresentadas na forma de sistemas matriciais. Basta, portanto, que sejam tomados alguns pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, N$), distintos dos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), para a modelagem da equação diferencial do problema associado 2.53, como é mostrado na figura 2.10(b). Assim, na solução do problema associado ao erro $e(\bar{x})$, a equação diferencial $\mathcal{L}(e(\bar{x})) = f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_M(\bar{x}))$ é satisfeita nos pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, N$), e as condições iniciais ou de contorno $\mathcal{L}_a(e(\bar{x})) = 0$ e $\mathcal{L}_b(e(\bar{x})) = 0$ são impostas, respectivamente, nos pontos \bar{x}_a e \bar{x}_b .

Como resultado da resolução numérica do problema associado 2.53 são obtidas as aproximações $e_M^{(m)}(x)$, ($m = 0, 1, \dots, M$), da função erro e de suas derivadas. A figura 2.10(c) apresenta a representação gráfica do erro estimado $e_M(x)$ da solução MDP do problema genérico. É conveniente ressaltar que todas estas aproximações $e_M^{(m)}(x)$, ($m = 0, 1, \dots, M$), são obtidas empregando-se as mesmas funções MDP desenvolvidas para a solução do problema 2.50.

O problema de valores de contorno descrito pela expressão 2.54 é apresentado com o intuito de ilustrar a aplicação efetiva do estimador de erros.

$$\begin{aligned}
 u^{(2)}(\bar{x}) - u^{(1)}(\bar{x}) - 2u(\bar{x}) &= \bar{x} & \bar{x} \in [0, 1] \\
 u(\bar{x}) &= 0.5 & \bar{x} = 0 \\
 u^{(1)}(\bar{x}) &= 1.5 \exp(2) + 0.5 \exp(-1) - 0.5 & \bar{x} = 1
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Este problema padrão, cuja solução analítica é dada pela equação 2.55, é resolvido numericamente empregando-se o método dos domínios pontuais. São obtidas soluções numéricas do problema 2.54 para diferentes valores ($N + 1$) do número de domínios pon-

tuais, possibilitando considerações sobre o comportamento numérico da função $e_M(\bar{x})$ do erro estimado. Como a solução analítica 2.55 do problema padrão é conhecida, a função $e(\bar{x})$ do erro da solução pode ser calculada, empregando-se a equação 2.51, e comparada com a função $e_M(\bar{x})$ do erro estimado.

$$u(\bar{x}) = 0.75 \exp(2\bar{x}) - 0.5 \exp(-\bar{x}) - 0.5\bar{x} + 0.25 \quad (2.55)$$

Para possibilitar a comparação dos resultados, são tomados domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), igualmente espaçados sobre o domínio $[0, 1]$ do problema padrão nas diversas soluções MDP. Assim, os intervalos Δx_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), definidos entre os domínios pontuais vizinhos $i - 1$ e i , são todos iguais a Δx , como apresentado na equação 2.56.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.56)$$

As aproximações MDP $M = 2$, lineares por partes na derivada de segunda ordem, são empregadas para a resolução numérica do problema padrão. A equação diferencial é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). A condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_0 e a condição de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_N . São obtidas assim $(N + 3)$ equações para a construção do sistema linear final, possibilitando o cálculo das variáveis do problema.

Aplicando-se os mesmos operadores diferenciais do problema 2.54 na expressão 2.53 é obtido o problema associado à função $e(\bar{x})$ do erro da solução. Este problema associado é apresentado na expressão 2.57.

$$\begin{aligned}
e^{(2)}(\bar{x}) - e^{(1)}(\bar{x}) - 2e(\bar{x}) &= \bar{x} - u_2^{(2)}(\bar{x}) + u_2^{(1)}(\bar{x}) + 2u_2(\bar{x}) & \bar{x} \in [0, 1] \\
e(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 0 \\
e^{(1)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 1
\end{aligned} \tag{2.57}$$

São tomados os pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, N$), descritos pela equação 2.58, para a modelagem da equação diferencial do problema associado. A figura 2.10(b) apresenta a disposição dos pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, N$), no espaço unidimensional onde é analisado o problema 2.57.

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2}(\bar{x}_0 + \bar{x}_1) \\ \frac{1}{2}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ \vdots \\ \frac{1}{2}(\bar{x}_{N-1} + \bar{x}_N) \\ \bar{x}_N \end{array} \right\} \tag{2.58}
\end{aligned}$$

As mesmas aproximações MDP $M = 2$, lineares por partes na derivada de segunda ordem, empregadas na resolução numérica do problema 2.54, são utilizadas para a estimativa do erro. A equação diferencial do problema 2.57 é satisfeita nos pontos de aproximação y_j , ($j = 0, 1, \dots, N$). A condição de contorno em $e(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_0 e a condição de contorno na derivada $e^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no domínio pontual \bar{x}_N . São obtidas assim $(N + 3)$ equações para a construção do sistema linear final, possibilitando o cálculo das variáveis do problema associado. Como resultado da resolução numérica do problema 2.57 são obtidas as aproximações $e_2^{(m)}(x)$, ($m = 0, 1, 2$), da função erro e de suas derivadas.

A figura 2.11 apresenta, em cima e à esquerda, a solução analítica 2.55 do problema

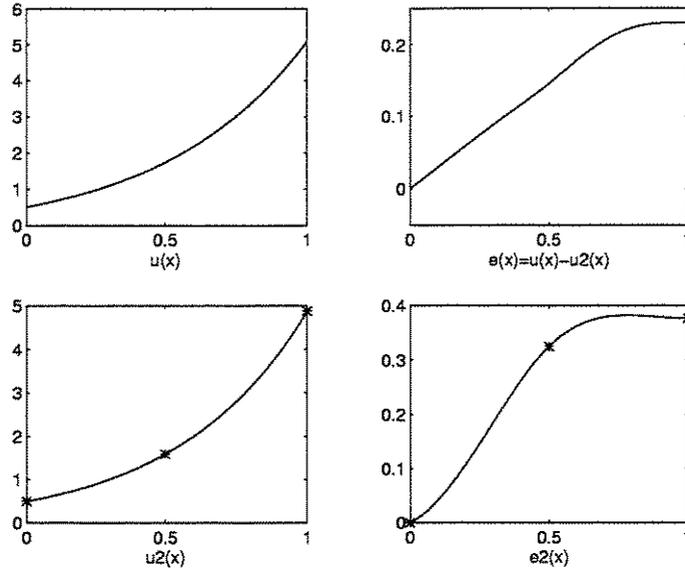


Figura 2.11: Função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, $(N + 1) = 3$.

padrão. Na mesma figura, em baixo e à esquerda, é apresentada a aproximação MDP $u_2(\bar{x})$ obtida da resolução numérica do problema 2.54 empregando-se três domínios pontuais, $(N + 1) = 3$. Em cima e à direita é apresentada a função $e(\bar{x})$ do erro, calculada segundo a expressão 2.51. E na figura 2.11, em baixo e à direita, é apresentada a função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, obtida da resolução numérica do problema 2.57. Observa-se que a função $e_2(\bar{x})$ realmente representa uma estimativa do erro da solução $u_2(\bar{x})$, apresentando valores conservativos, ou seja, ligeiramente superiores àqueles da função $e(\bar{x})$.

A figura 2.12 apresenta, em cima e à esquerda, a solução analítica 2.55 do problema padrão. Na mesma figura, em baixo e à esquerda, é apresentada a aproximação MDP $u_2(\bar{x})$ obtida da resolução numérica do problema 2.54 empregando-se nove domínios pontuais, $(N + 1) = 9$. Em cima e à direita é apresentada a função $e(\bar{x})$ do erro, calculada segundo a expressão 2.51. E na figura 2.12, em baixo e à direita, é apresentada a função $e_2(\bar{x})$

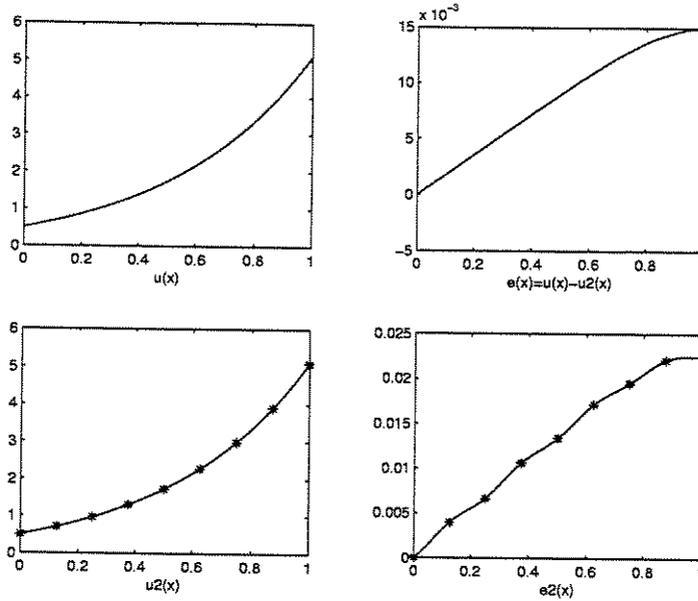


Figura 2.12: Função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, $(N + 1) = 9$.

do erro aproximado da solução MDP, obtida da resolução numérica do problema 2.57. Observa-se que a função $e_2(\bar{x})$ realmente representa uma estimativa do erro da solução $u_2(\bar{x})$, apresentando valores conservativos, ou seja, ligeiramente superiores àqueles da função $e(\bar{x})$.

A figura 2.13 apresenta, em cima e à esquerda, a solução analítica 2.55 do problema padrão. Na mesma figura, em baixo e à esquerda, é apresentada a aproximação MDP $u_2(\bar{x})$ obtida da resolução numérica do problema 2.54 empregando-se trinta e três domínios pontuais, $(N + 1) = 33$. Em cima e à direita é apresentada a função $e(\bar{x})$ do erro, calculada segundo a expressão 2.51. E na figura 2.13, em baixo e à direita, é apresentada a função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, obtida da resolução numérica do problema 2.57. Observa-se que a função $e_2(\bar{x})$ realmente representa uma estimativa do erro da solução $u_2(\bar{x})$, apresentando valores conservativos, ou seja, ligeiramente superiores àqueles da função $e(\bar{x})$.

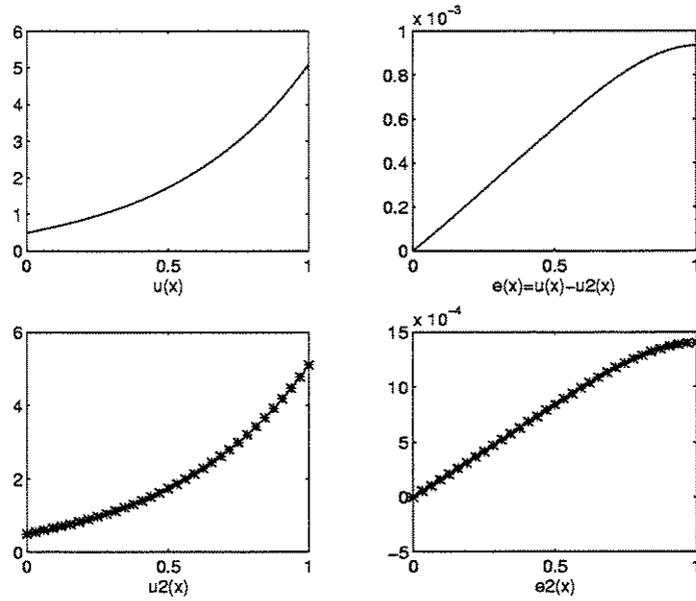


Figura 2.13: Função $e_2(\bar{x})$ do erro aproximado da solução MDP, $(N + 1) = 33$.

Os erros exatos E_2 para as diversas soluções MDP $M = 2$, lineares por partes na derivada de segunda ordem, do problema padrão são calculados segundo a equação 2.59.

$$E_2 = \int_0^1 |u_2(\bar{x}) - u(\bar{x})| d\bar{x} \quad (2.59)$$

Enquanto os erros estimados E_2^{est} das soluções MDP $M = 2$ do problema padrão são calculados segundo a equação 2.60.

$$E_2^{\text{est}} = \int_0^1 |e_2(\bar{x})| d\bar{x} \quad (2.60)$$

A tabela 2.8 apresenta na primeira coluna os diferentes valores Δx do espaçamento entre os domínios pontuais empregados nas diversas soluções do problema padrão. A

Tabela 2.8: Erros exatos E_2 e estimados E_2^{est} das soluções MDP, $M = 2$.

Δx	$(N + 1)$	E_2	E_2^{est}
1/2	3	1.3891E-1	2.6055E-1
1/4	5	3.4329E-2	5.5651E-2
1/8	9	8.5571E-3	1.3115E-2
1/16	17	2.1380E-3	3.2248E-3
1/32	33	5.3446E-4	8.0280E-4
1/64	65	1.3362E-4	2.0050E-4
1/128	129	3.3405E-5	5.0112E-5
1/256	257	8.3514E-6	1.2527E-5

segunda coluna apresenta o número de domínios pontuais $(N + 1)$ de cada uma das soluções. A terceira e a quarta colunas apresentam, respectivamente, os valores dos erros exatos E_2 e dos erros estimados E_2^{est} das diversas soluções, possibilitando a comparação dos resultados.

Observa-se que os valores dos erros estimados E_2^{est} são sempre conservativos, ou seja, ligeiramente superiores que os valores dos erros exatos E_2 . Observa-se também que os erros estimados E_2^{est} apresentam a mesma ordem de convergência quadrática, $p = 2$, dos erros exatos E_2 das soluções. Este resultado é esperado, uma vez que as aproximações MDP $M = 2$ são empregadas tanto na solução do problema padrão quanto na estimativa do erro. É conveniente ressaltar que as aproximações $e_M^{(m)}(\bar{x})$, $(m = 1, 2, \dots, M)$, das derivadas do erro da solução também são resultados fornecidos pelo estimador de erros MDP.

2.6 Tratamento de descontinuidades

O desenvolvimento construtivo das funções do método dos domínios pontuais permite a introdução de descontinuidades em qualquer um dos níveis de aproximação — função ou derivadas $u_M^{(m)}(\bar{x})$, ($m = 0, 1, \dots, M$) — e numa posição \bar{x}_a arbitrária do domínio do problema. Uma descontinuidade é caracterizada por um salto $\Delta u_M^{(m)}$ que ocorre na aproximação genérica $u_M^{(m)}(\bar{x})$, ($m = 0, 1, \dots, M$), em uma dada posição \bar{x}_a do espaço unidimensional onde é analisado o problema. A expressão 2.61 caracteriza uma descontinuidade.

$$u_M^{(m)}(\bar{x}) = \begin{cases} u_M^{(m)}(\bar{x}) & \bar{x} < \bar{x}_a \\ u_M^{(m)}(\bar{x}) + \Delta u_M^{(m)} & \bar{x} \geq \bar{x}_a \end{cases} \quad (2.61)$$

Para o tratamento de descontinuidades nas aproximações MDP é empregada a função $\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle$ que é definida na expressão 2.62.

$$\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle = \begin{cases} 0 & \bar{x} < \bar{x}_a \\ (\bar{x} - \bar{x}_a) & \bar{x} \geq \bar{x}_a \end{cases} \quad (2.62)$$

Observa-se que a função $\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle$ elevada a potência zero é dada pela equação 2.63.

$$\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^0 = \begin{cases} 0 & \bar{x} < \bar{x}_a \\ 1 & \bar{x} \geq \bar{x}_a \end{cases} \quad (2.63)$$

A função $\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^0$ pode ser integrada n vezes, sendo o resultado desta operação integral dado pela expressão 2.64.

$$\int^n \langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^0 dx^n = \frac{\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^n}{n!} \quad (2.64)$$

Assim, a introdução da descontinuidade $\Delta u_M^{(m)}$ na aproximação MDP genérica $u_M^{(m)}(\bar{x})$, ($m = 0, 1, \dots, M$), em uma dada posição \bar{x}_a arbitrária do domínio do problema é descrita pela expressão 2.65.

$$u_M^{(m)}(\bar{x}) = u_M^{(m)}(\bar{x}) + \Delta u_M^{(m)} \langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^0 \quad (2.65)$$

Observa-se que, com a introdução da descontinuidade, o valor $\Delta u_M^{(m)}$ do salto da aproximação $u_M^{(m)}(\bar{x})$ representa uma nova variável do problema. Portanto, cada descontinuidade introduzida nas aproximações MDP implica numa variável a mais no sistema linear final e, conseqüentemente, exige uma equação extra para a resolução numérica do problema.

Como exemplo, considere-se as aproximações MDP $u_6^{(m)}(\bar{x})$, ($m = 0, 1, \dots, 6$). A descontinuidade $\Delta u_6^{(3)}$ é introduzida na aproximação $u_6^{(3)}(\bar{x})$ na posição \bar{x}_a do espaço unidimensional onde é analisado o problema. Observa-se que, neste caso, as aproximações MDP $u_6^{(m)}(\bar{x})$, ($m = 4, 5, 6$), permanecem inalteradas. A aproximação $u_6^{(3)}(\bar{x})$, onde é introduzida a descontinuidade, passa a ser descrita pela expressão 2.66.

$$u_6^{(3)}(\bar{x}) = u_6^{(3)}(\bar{x}) + \Delta u_6^{(3)} \langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^0 \quad (2.66)$$

No desenvolvimento construtivo das funções do método dos domínios pontuais as aproximações das derivadas de ordem mais baixa e da própria função são construídas por integração exata da aproximação linear por partes da derivada de alta ordem M . Assim, basta integrar sucessivas vezes a aproximação $u_6^{(3)}(\bar{x})$, apresentada na equação 2.66, para a obtenção das aproximações $u_6^{(m)}(\bar{x})$, ($m = 0, 1, 2$), das derivadas de ordem mais baixa e da própria função. Os resultados são apresentados nas expressões 2.67, 2.68 e 2.69.

$$u_6^{(2)}(\bar{x}) = u_6^{(1)}(\bar{x}) + \Delta u_6^{(3)} \langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle \quad (2.67)$$

$$u_6^{(1)}(\bar{x}) = u_6^{(0)}(\bar{x}) + \Delta u_6^{(3)} \frac{\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^2}{2} \quad (2.68)$$

$$u_6(\bar{x}) = u_6^{(0)}(\bar{x}) + \Delta u_6^{(3)} \frac{\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle^3}{6} \quad (2.69)$$

Aplicando-se a equação 2.62 da definição da função $\langle \bar{x} - \bar{x}_a \rangle$ na expressão 2.69, a aproximação da função $u_6(\bar{x})$ pode então ser reescrita como apresentado na equação 2.70.

$$u_6(\bar{x}) = \begin{cases} u_6(\bar{x}) & \bar{x} < \bar{x}_a \\ u_6(\bar{x}) + \Delta u_6^{(3)} \frac{(\bar{x} - \bar{x}_a)^3}{6} & \bar{x} \geq \bar{x}_a \end{cases} \quad (2.70)$$

Observa-se que, neste caso, o valor $\Delta u_6^{(3)}$ da descontinuidade surge nas aproximações MDP $u_6^{(m)}(\bar{x})$, ($m = 0, 1, \dots, 3$), representando uma nova variável do problema.

Considere-se o problema de valores de contorno com descontinuidade, descrito pela expressão 2.71. Este problema, definido no domínio $\bar{x} \in [0, 1]$, apresenta a descontinuidade da primeira derivada $u^{(1)}(\bar{x})$, no ponto $\bar{x}_a = 0.7$, onde a mesma troca de sinal.

$$\begin{aligned}
u^{(2)}(\bar{x}) - u^{(1)}(\bar{x}) - 2u(\bar{x}) &= \bar{x} & \bar{x} \in [0, 0.7) \\
u^{(2)}(\bar{x}) + u^{(1)}(\bar{x}) - 2u(\bar{x}) &= \bar{x} & \bar{x} \in [0.7, 1] \\
u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 0 \\
u^{(1)}(\bar{x}^+) &= -u^{(1)}(\bar{x}^-) & \bar{x} = 0.7 \\
u(\bar{x}) &= 5 & \bar{x} = 1
\end{aligned} \tag{2.71}$$

O método dos domínios pontuais é empregado para a resolução numérica do problema 2.71 no intuito de ilustrar-se o tratamento efetivo da descontinuidade. As aproximações MDP $M = 2$, lineares por partes na derivada de segunda ordem, são empregadas para a resolução numérica do problema com descontinuidade.

São tomados domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), igualmente espaçados sobre o domínio $[0, 1]$ do problema 2.71 nas diversas soluções MDP. Assim, os intervalos Δx_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), definidos entre os domínios pontuais vizinhos $i - 1$ e i , são todos iguais a Δx , como apresentado na equação 2.72.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \tag{2.72}$$

Como a descontinuidade ocorre na primeira derivada, a aproximação $u_2^{(2)}(\bar{x})$ da segunda derivada permanece inalterada. As aproximações MDP $u_2^{(1)}(\bar{x})$ da primeira derivada e $u_2(\bar{x})$ da função, considerando-se a descontinuidade no ponto $\bar{x}_a = 0.7$, são apresentadas, respectivamente, nas expressões 2.73 e 2.74.

$$u_2^{(1)}(\bar{x}) = u_2^{(1)}(\bar{x}) + \Delta u_2^{(1)} < \bar{x} - 0.7 >^0 \quad (2.73)$$

$$u_2(\bar{x}) = u_2(\bar{x}) + \Delta u_2^{(1)} < \bar{x} - 0.7 > \quad (2.74)$$

As variáveis para a resolução numérica do problema 2.71 empregando-se as aproximações MDP $M = 2$, lineares por partes na derivada de segunda ordem, são $\Delta u_2^{(1)}$, $u_2(0)$, $u_2^{(1)}(0)$ e $u_2^{(2)}(i)$, ($i = 0, 1, \dots, N$). São necessárias, portanto, $(N + 4)$ equações obtidas por colocação para o cálculo das variáveis do problema com descontinuidade.

As equações diferenciais do problema 2.71 são satisfeitas nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), respeitando-se os intervalos em que cada uma delas é válida. As condições de contorno em $u(\bar{x})$ são impostas, respectivamente, nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . E a condição de contorno na primeira derivada $u_2^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no ponto de aproximação $\bar{x}_a = 0.7$ empregando-se a equação 2.75. São obtidas assim $(N + 4)$ equações para a construção do sistema linear final, possibilitando o cálculo das variáveis do problema com descontinuidade.

$$\Delta u_2^{(1)} = -2 u_2^{(1)}(\bar{x}_a^-) \quad (2.75)$$

As equações diferenciais do problema 2.71 podem ser escritas no formato reduzido $\mathcal{L}(u(\bar{x})) = f(\bar{x})$, com $\bar{x} \in [0, 1]$, onde $f(\bar{x}) = \bar{x}$ e o operador diferencial linear $\mathcal{L}(\cdot)$ é apresentado na equação 2.76.

$$\mathcal{L}(\cdot) = \begin{cases} \frac{d^2 \cdot}{d\bar{x}^2} - \frac{d \cdot}{d\bar{x}} - 2 \cdot & \bar{x} < 0.7 \\ \frac{d^2 \cdot}{d\bar{x}^2} + \frac{d \cdot}{d\bar{x}} - 2 \cdot & \bar{x} \geq 0.7 \end{cases} \quad (2.76)$$

Os erros do operador diferencial E_2^{OP} são calculados para as diversas resoluções numéricas do problema com descontinuidade empregando-se a expressão 2.77. Observa-se que os valores da função $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))$ são nulos nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), devido a modelagem das equações diferenciais $\mathcal{L}(u(\bar{x})) = f(\bar{x})$ por colocação, tomando-se os pontos de aproximação coincidentes com os domínios pontuais nas diversas soluções MDP do problema 2.71.

$$E_2^{\text{OP}} = \int_0^1 |f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))| d\bar{x} \quad (2.77)$$

A figura 2.14 apresenta a resolução numérica do problema 2.71 empregando-se oito domínios pontuais. O gráfico apresentado em cima e à esquerda representa a aproximação $u_2(\bar{x})$ da função. O gráfico apresentado em cima e à direita representa a aproximação $u_2^{(1)}(\bar{x})$ da primeira derivada. E o gráfico apresentado em baixo e à esquerda representa a aproximação $u_2^{(2)}(\bar{x})$ da segunda derivada. Observa-se que o salto $\Delta u_2^{(1)}$ da primeira derivada, que ocorre na posição $\bar{x}_a = 0.7$, é bem caracterizado. A função $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))$, que está relacionada ao erro do operador diferencial E_2^{OP} através da expressão 2.77, é apresentada na figura 2.14 em baixo e à direita. Observa-se que os valores da função $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))$ são nulos nos oito domínios pontuais empregados para a solução do problema com descontinuidade.

A figura 2.15 apresenta a resolução numérica do problema 2.71 empregando-se onze domínios pontuais. O gráfico apresentado em cima e à esquerda representa a aproximação

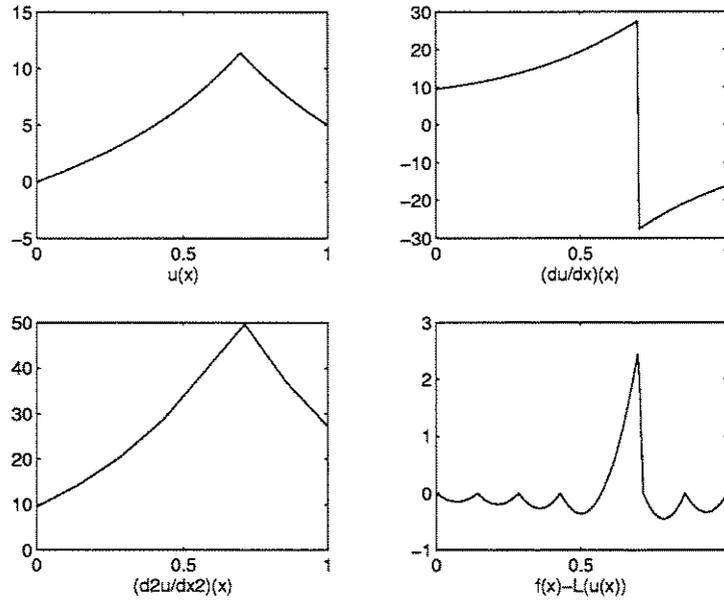


Figura 2.14: Solução MDP do problema com descontinuidade, $(N + 1) = 8$.

$u_2(\bar{x})$ da função. O gráfico apresentado em cima e à direita representa a aproximação $u_2^{(1)}(\bar{x})$ da primeira derivada. E o gráfico apresentado em baixo e à esquerda representa a aproximação $u_2^{(2)}(\bar{x})$ da segunda derivada. Observa-se que a descontinuidade $\Delta u_2^{(1)}$ da primeira derivada, que ocorre na posição $\bar{x}_a = 0.7$, é bem caracterizada. A função $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))$, que está relacionada ao erro do operador diferencial E_2^{op} através da expressão 2.77, é apresentada na figura 2.15 em baixo e à direita. Observa-se que os valores da função $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))$ são nulos nos onze domínios pontuais empregados para a solução do problema com descontinuidade.

A figura 2.16 apresenta a resolução numérica do problema 2.71 empregando-se cento e um domínios pontuais. O gráfico apresentado em cima e à esquerda representa a aproximação $u_2(\bar{x})$ da função. O gráfico apresentado em cima e à direita representa a aproximação $u_2^{(1)}(\bar{x})$ da primeira derivada. E o gráfico apresentado em baixo e à esquerda representa a aproximação $u_2^{(2)}(\bar{x})$ da segunda derivada. Observa-se que o salto $\Delta u_2^{(1)}$

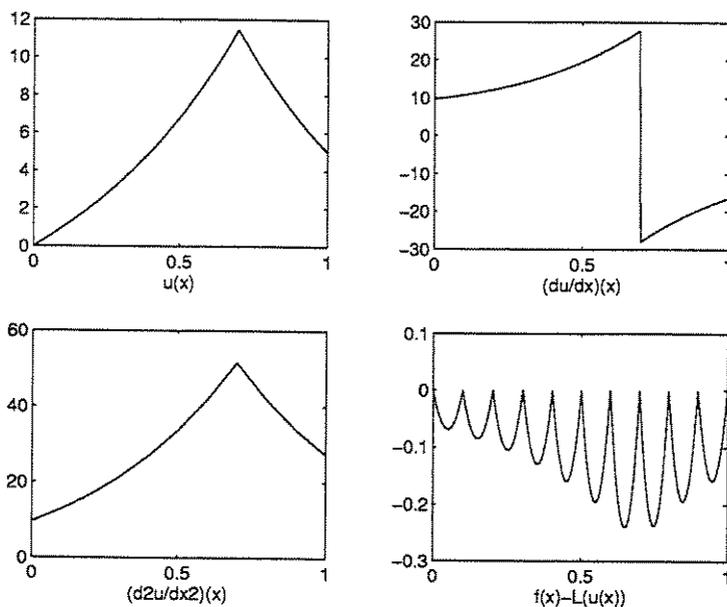


Figura 2.15: Solução MDP do problema com descontinuidade, $(N + 1) = 11$.

da primeira derivada, que ocorre na posição $\bar{x}_a = 0.7$, é bem caracterizado. A função $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))$, que está relacionada ao erro do operador diferencial E_2^{OP} através da expressão 2.77, é apresentada na figura 2.16 em baixo e à direita. Observa-se que os valores da função $f(\bar{x}) - \mathcal{L}(u_2(\bar{x}))$ são nulos nos cento e um domínios pontuais empregados para a solução do problema com descontinuidade.

A tabela 2.9 apresenta na primeira coluna os diferentes valores Δx do espaçamento entre os domínios pontuais empregados nas diversas soluções do problema 2.71. A segunda coluna apresenta o número de domínios pontuais $(N + 1)$ de cada uma das soluções. A terceira coluna apresenta os valores numéricos obtidos para a descontinuidade $\Delta u_2^{(1)}$ da primeira derivada, que ocorre na posição $\bar{x}_a = 0.7$. E a quarta coluna apresenta os erros E_2^{OP} do operador diferencial 2.76 do problema com descontinuidade, calculados segundo a expressão 2.77.

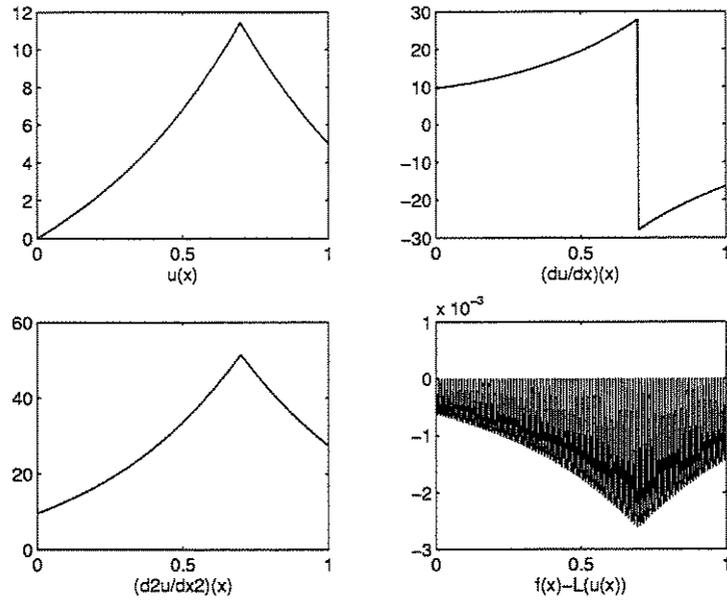


Figura 2.16: Solução MDP do problema com descontinuidade, $(N + 1) = 101$.

Observa-se que os valores $\Delta u_2^{(1)}$ do salto da primeira derivada são razoáveis mesmo

Tabela 2.9: Valores $\Delta u_2^{(1)}$ e erros E_2^{OP} das soluções MDP, $M = 2$.

Δx	$(N + 1)$	$\Delta u_2^{(1)}$	E_2^{OP}
1/2	3	-54.8232	5.4359E+0
1/4	5	-53.6625	1.2172E+0
1/8	9	-55.3358	4.9099E-1
1/16	17	-55.9347	9.9652E-2
1/32	33	-55.8064	3.4168E-2
1/64	65	-55.7882	6.6039E-3
1/128	129	-55.7969	2.1909E-3
1/256	257	-55.7994	4.1933E-4

para as soluções MDP $M = 2$ mais grosseiras, empregando-se poucos domínios pontuais. A medida que são analisados os resultados das resoluções numéricas mais refinadas, observa-se que os erros E_2^{op} do operador diferencial diminuem e os valores $\Delta u_2^{(1)}$ da descontinuidade da primeira derivada são ainda mais coerentes.

É conveniente ressaltar que no tratamento MDP das descontinuidades não existe a necessidade de que as mesmas coincidam com os domínios pontuais, podendo ainda ser introduzidas em qualquer um dos níveis da aproximação. Ou seja, as descontinuidades podem ocorrer tanto na função quanto em qualquer uma das derivadas, numa posição arbitrária do domínio do problema.

2.7 Desenvolvimento das funções MDP 2D

Apresenta-se nesta seção o desenvolvimento de funções MDP bidimensionais de alta ordem. O método dos domínios pontuais consiste em um operador algébrico baseado em campos de interpolação com continuidade das derivadas de alta ordem para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias ou parciais.

O esquema numérico é construído de forma a explorar-se ao máximo o conceito de generalidade. Em termos práticos, isto significa a flexibilidade para o tratamento de uma larga faixa de problemas, a facilidade de aplicação das condições de contorno e/ou iniciais, a possibilidade da introdução de descontinuidades em diferentes níveis da aproximação (função ou derivadas) e a obtenção de resultados suaves tanto da função quanto de suas derivadas.

Para atender a este conceito de generalidade o MDP apresenta aproximações fracamente estruturadas e, portanto, bastante distintas daquelas empregadas nos esquemas numéricos tradicionais. Assim, enquanto no método dos elementos finitos, no método dos volumes finitos ou no método dos elementos de contorno observa-se a natureza altamente estruturada das aproximações, baseada na forte dependência da malha de discretização, o método dos domínios pontuais caracteriza-se por simples aproximações polinomiais construídas por partes.

Esta seção está organizada em três sub-seções de forma a introduzir-se convenientemente o esquema numérico proposto. Inicialmente apresenta-se as aproximações bidimensionais MDP, linearmente aproximadas por partes em $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}(x, y)$ entre os domínios pontuais vizinhos. A seguir trata-se da discretização de problemas para a análise segundo o método dos domínios pontuais. E a última sub-seção é dedicada à etapa de

pós-processamento dos dados, de forma a obter-se soluções com continuidade mesmo para as derivadas de alta ordem.

2.7.1 Aproximações MDP lineares em $u^{(4,4)}(x, y)$

Esta sub-seção apresenta as aproximações MDP desenvolvidas para representar-se a função bidimensional $u(x, y)$ e suas derivadas parciais. Observa-se que a princípio, a função e também o domínio são genéricos, de forma que qualquer problema bidimensional envolvendo equações diferenciais pode ser analisado empregando-se esta abordagem.

A figura 2.17 apresenta uma região retangular do espaço-tempo bidimensional discretizada em $(N + 1) \times (M + 1)$ domínios pontuais. A região é dita espaço-temporal devido a igualdade de tratamento para os problemas de valores de contorno e de condição inicial, que é característica do MDP. Assim, as direções x e y da figura 2.17 podem tanto representar duas dimensões espaciais bem como uma delas pode representar a evolução no tempo.

Os $(N + 1) \times (M + 1)$ domínios pontuais são os pontos de referência deste espaço-tempo bidimensional, localizados nas posições (x_i, y_j) , $(i = 0, \dots, N)$, $(j = 0, \dots, M)$. E para a análise de um problema empregando-se o MDP basta que o domínio Ω do mesmo esteja contido na região retangular discretizada, como mostrado na figura 2.17. Observa-se portanto que as aproximações MDP comportam-se como uma tela que possibilita a visualização da solução de qualquer problema interior à mesma.

Segundo esta abordagem, as variáveis do problema discretizado estão fortemente associadas aos domínios pontuais, e daí o nome do método: método dos domínios pontuais. A maioria das variáveis representa os valores de uma derivada de alta ordem, que é linear-

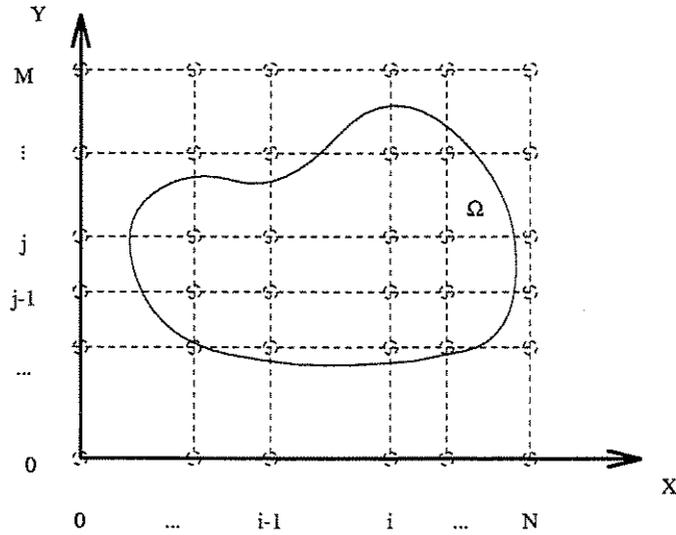


Figura 2.17: Região discretizada em domínios pontuais.

mente aproximada por partes entre os domínios pontuais. Além disso, as demais variáveis representam as derivadas de ordem mais baixa, e a própria função de interesse, em alguns domínios pontuais estrategicamente posicionados. Assim é possível uma representação extremamente apurada da função de interesse $u(x, y)$, graças à elevada continuidade, que é característica da aproximação MDP final. (Nesse ponto é interessante observar que descontinuidades podem ser facilmente incorporadas à função ou a qualquer uma de suas derivadas, na posição desejada).

Como as variáveis da aproximação MDP representam sempre derivadas da função de interesse $\frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial y^q}(x_i, y_j)$ nos domínios pontuais $(i = 0, \dots, N)$, $(j = 0, \dots, M)$, é conveniente introduzir-se uma notação simplificada para a representação das mesmas, como apresentado na equação 2.78.

$$u^{(p,q)}(i, j) \equiv \frac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p \partial y^q}(x_i, y_j) \quad (2.78)$$

Neste trabalho as aproximações bidimensionais MDP são construídas a partir da derivada parcial $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}(x, y)$ que é linearmente aproximada por partes entre os domínios pontuais. E as aproximações MDP de todas as derivadas parciais de ordem mais baixa e da própria função de interesse $u(x, y)$ são obtidas por processos sucessivos de integração exata da derivada parcial de alta ordem $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}(x, y)$. Assim, na equação 2.78, as ordens de derivação (p, q) podem assumir os valores possíveis da combinação de $(p = 4, \dots, 0)$ e $(q = 4, \dots, 0)$.

Observa-se que nada impede que outras aproximações MDP sejam construídas partindo-se de uma derivada de alta ordem distinta. Entretanto, deve-se ter sempre em mente as etapas para a construção das aproximações MDP. São estas: Escolha da derivada de alta ordem (esta pode ser inclusive unidimensional, tridimensional ou n-dimensional, dependendo do problema que será abordado). Aproximação linear por partes da derivada de alta ordem entre os domínios pontuais vizinhos. Processos sucessivos de integração exata da aproximação da derivada de alta ordem para a construção das aproximações das derivadas de ordens mais baixa e da função de interesse.

A figura 2.18 apresenta o sistema referencial local convenientemente adotado para o desenvolvimento das aproximações MDP entre os domínios pontuais vizinhos (x_{i-1}, y_{j-i}) , (x_{i-1}, y_j) , (x_i, y_{j-i}) e (x_i, y_j) . As aproximações são válidas no intervalo (x, y) onde $0 \leq x \leq \Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e $0 \leq y \leq \Delta y_j$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$. Permitindo-se que os índices i e j variem dentro das possibilidades $(i = 1, \dots, N)$ e $(j = 1, \dots, M)$, é possível então a aproximação de qualquer ponto (x, y) contido na região discretizada, apresentada na figura 2.17.

A equação 2.79 representa a aproximação MDP linear por partes da derivada de alta ordem $\frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4}(x, y)$. Esta aproximação é válida em todo o intervalo (x, y) definido entre domínios pontuais vizinhos $0 \leq x \leq \Delta x_i$, $0 \leq y \leq \Delta y_j$. Observa-se que os valores das

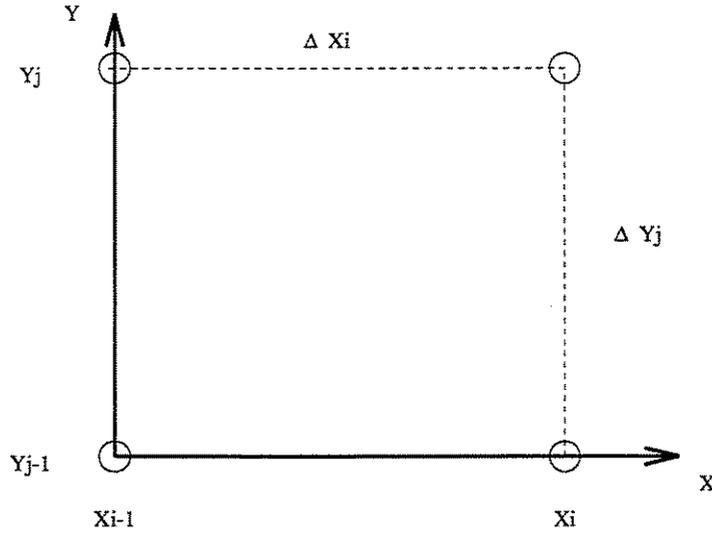


Figura 2.18: Referencial local entre domínios pontuais vizinhos.

derivadas nos domínios pontuais são descritas segundo a notação simplificada introduzida pela equação 2.78.

$$\begin{aligned}
 u^{(4,4)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right) \left(1 - \frac{y}{\Delta y_i}\right) + u^{(4,4)}(i-1, j) \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right) \left(\frac{y}{\Delta y_i}\right) + \\
 & + u^{(4,4)}(i, j-1) \left(\frac{x}{\Delta x_i}\right) \left(1 - \frac{y}{\Delta y_i}\right) + u^{(4,4)}(i, j) \left(\frac{x}{\Delta x_i}\right) \left(\frac{y}{\Delta y_i}\right)
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Todas as aproximações MDP das derivadas de ordem mais baixa e da própria função de interesse $u(x, y)$ são então obtidas por processos sucessivos de integração exata da equação 2.79. Para simplificar a apresentação das aproximações MDP, é conveniente representar-se os polinômios que surgem dos processos de integração num formato reduzido, uma vez que os mesmos repetem-se em varias das aproximações. Estes formatos reduzidos dos polinômios são definidos nas expressões 2.80 à 2.91.

$$x_1 \equiv x \qquad x_2 \equiv \frac{x^2}{2} \qquad x_3 \equiv \frac{x^3}{6} \tag{2.80}$$

$$x_{a1} \equiv \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right) \quad x_{b1} \equiv \left(\frac{x}{\Delta x_i}\right) \quad (2.81)$$

$$x_{a2} \equiv \left(x - \frac{x^2}{2 \Delta x_i}\right) \quad x_{b2} \equiv \left(\frac{x^2}{2 \Delta x_i}\right) \quad (2.82)$$

$$x_{a3} \equiv \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6 \Delta x_i}\right) \quad x_{b3} \equiv \left(\frac{x^3}{6 \Delta x_i}\right) \quad (2.83)$$

$$x_{a4} \equiv \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24 \Delta x_i}\right) \quad x_{b4} \equiv \left(\frac{x^4}{24 \Delta x_i}\right) \quad (2.84)$$

$$x_{a5} \equiv \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120 \Delta x_i}\right) \quad x_{b5} \equiv \left(\frac{x^5}{120 \Delta x_i}\right) \quad (2.85)$$

$$y_1 \equiv y \quad y_2 \equiv \frac{y^2}{2} \quad y_3 \equiv \frac{y^3}{6} \quad (2.86)$$

$$y_{a1} \equiv \left(1 - \frac{y}{\Delta y_i}\right) \quad y_{b1} \equiv \left(\frac{y}{\Delta y_i}\right) \quad (2.87)$$

$$y_{a2} \equiv \left(y - \frac{y^2}{2 \Delta y_i}\right) \quad y_{b2} \equiv \left(\frac{y^2}{2 \Delta y_i}\right) \quad (2.88)$$

$$y_{a3} \equiv \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6 \Delta y_i} \right) \quad y_{b3} \equiv \left(\frac{y^3}{6 \Delta y_i} \right) \quad (2.89)$$

$$y_{a4} \equiv \left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^4}{24 \Delta y_i} \right) \quad y_{b4} \equiv \left(\frac{y^4}{24 \Delta y_i} \right) \quad (2.90)$$

$$y_{a5} \equiv \left(\frac{y^4}{24} - \frac{y^5}{120 \Delta y_i} \right) \quad y_{b5} \equiv \left(\frac{y^5}{120 \Delta y_i} \right) \quad (2.91)$$

As equações 2.92 à 2.116 representam as aproximações MDP lineares por partes em $u^{(4,4)}(x, y)$. Observa-se que a expressão 2.92 é idêntica a equação 2.79, onde os polinômios são descritos nos respectivos formatos reduzidos. Estas aproximações MDP permitem aproximar todas as derivadas $u^{(p,q)}(x, y)$, ($p = 4, \dots, 0$), ($q = 4, \dots, 0$), e a própria função de interesse no intervalo compreendido entre os domínios pontuais vizinhos $0 \leq x \leq \Delta x_i$, $0 \leq y \leq \Delta y_j$.

$$u^{(4,4)}(x, y) = u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a1} y_{a1} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a1} y_{b1} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b1} y_{a1} + u^{(4,4)}(i, j) x_{b1} y_{b1} \quad (2.92)$$

$$u^{(4,3)}(x, y) = u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a1} y_{a2} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a1} y_{b2} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b1} y_{a2} + u^{(4,4)}(i, j) x_{b1} y_{b2} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a1} + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b1} \quad (2.93)$$

$$u^{(4,2)}(x, y) = u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a1} y_{a3} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a1} y_{b3} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b1} y_{a3} + u^{(4,4)}(i, j) x_{b1} y_{b3} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a1} y_1 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b1} y_1 + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a1} + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b1} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned}
u^{(4,1)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a1} y_{a4} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a1} y_{b4} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b1} y_{a4} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b1} y_{b4} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a1} y_2 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b1} y_2 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a1} y_1 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b1} y_1 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a1} + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b1}
\end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned}
u^{(4,0)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a1} y_{a5} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a1} y_{b5} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b1} y_{a5} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b1} y_{b5} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a1} y_3 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b1} y_3 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a1} y_2 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b1} y_2 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a1} y_1 + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b1} y_1 + u^{(4,0)}(i-1, j-1) x_{a1} + u^{(4,0)}(i, j-1) x_{b1}
\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3,4)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a2} y_{a1} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a2} y_{b1} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b2} y_{a1} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b2} y_{b1} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) y_{a1} + u^{(3,4)}(i-1, j) y_{b1}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,4)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a3} y_{a1} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a3} y_{b1} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b3} y_{a1} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b3} y_{b1} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a1} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_1 y_{b1} + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) y_{a1} + u^{(2,4)}(i-1, j) y_{b1}
\end{aligned} \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1,4)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a4} y_{a1} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a4} y_{b1} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b4} y_{a1} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b4} y_{b1} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a1} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_2 y_{b1} + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a1} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_1 y_{b1} + u^{(1,4)}(i-1, j-1) y_{a1} + \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j) y_{b1}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,4)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a5} y_{a1} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a5} y_{b1} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b5} y_{a1} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b5} y_{b1} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_3 y_{a1} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_3 y_{b1} + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a1} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_2 y_{b1} + u^{(1,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a1} + \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j) x_1 y_{b1} + u^{(0,4)}(i-1, j-1) y_{a1} + u^{(0,4)}(i-1, j) y_{b1}
\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3,3)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a2} y_{a2} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a2} y_{b2} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b2} y_{a2} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b2} y_{b2} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a2} + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b2} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) y_{a2} + u^{(3,4)}(i-1, j) y_{b2} + u^{(3,3)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,3)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a3} y_{a2} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a3} y_{b2} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b3} y_{a2} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b3} y_{b2} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a3} + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b3} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a2} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_1 y_{b2} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) y_{a2} + u^{(2,4)}(i-1, j) y_{b2} + u^{(2,3)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1,3)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a4} y_{a2} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a4} y_{b2} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b4} y_{a2} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b4} y_{b2} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a4} + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b4} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a2} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_2 y_{b2} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_2 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a2} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_1 y_{b2} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j-1) y_{a2} + u^{(1,4)}(i-1, j) y_{b2} + u^{(1,3)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,3)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a5} y_{a2} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a5} y_{b2} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b5} y_{a2} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b5} y_{b2} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a5} + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b5} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_3 y_{a2} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_3 y_{b2} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_3 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a2} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_2 y_{b2} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_2 + \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a2} + u^{(1,4)}(i-1, j) x_1 y_{b2} + u^{(1,3)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(0,4)}(i-1, j-1) y_{a2} + u^{(0,4)}(i-1, j) y_{b2} + u^{(0,3)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3,2)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a2} y_{a3} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a2} y_{b3} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b2} y_{a3} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b2} y_{b3} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a2} y_1 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b2} y_1 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a2} + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b2} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) y_{a3} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j) y_{b3} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(3,2)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,2)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a3} y_{a3} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a3} y_{b3} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b3} y_{a3} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b3} y_{b3} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a3} y_1 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b3} y_1 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a3} + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b3} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a3} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j) x_1 y_{b3} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) y_{a3} + u^{(2,4)}(i-1, j) y_{b3} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) y_1 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1,2)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a4} y_{a3} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a4} y_{b3} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b4} y_{a3} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b4} y_{b3} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a4} y_1 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b4} y_1 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a4} + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b4} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a3} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j) x_2 y_{b3} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_2 y_1 + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_2 + (2.107) \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a3} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_1 y_{b3} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) x_1 + u^{(1,4)}(i-1, j-1) y_{a3} + u^{(1,4)}(i-1, j) y_{b3} + \\
& + u^{(1,3)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(1,2)}(i-1, j-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,2)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a5} y_{a3} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a5} y_{b3} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b5} y_{a3} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b5} y_{b3} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a5} y_1 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b5} y_1 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a5} + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b5} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_3 y_{a3} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j) x_3 y_{b3} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_3 y_1 + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_3 + (2.108) \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a3} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_2 y_{b3} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_2 y_1 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) x_2 + u^{(1,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a3} + u^{(1,4)}(i-1, j) x_1 y_{b3} + \\
& + u^{(1,3)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + u^{(1,2)}(i-1, j-1) x_1 + u^{(0,4)}(i-1, j-1) y_{a3} + \\
& + u^{(0,4)}(i-1, j) y_{b3} + u^{(0,3)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(0,2)}(i-1, j-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3,1)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a2} y_{a4} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a2} y_{b4} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b2} y_{a4} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b2} y_{b4} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a2} y_2 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b2} y_2 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a2} y_1 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b2} y_1 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a2} + (2.109) \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b2} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) y_{a4} + u^{(3,4)}(i-1, j) y_{b4} + \\
& + u^{(3,3)}(i-1, j-1) y_2 + u^{(3,2)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(3,1)}(i-1, j-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,1)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a3} y_{a4} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a3} y_{b4} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b3} y_{a4} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b3} y_{b4} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a3} y_2 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b3} y_2 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a3} y_1 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b3} y_1 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a3} + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b3} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a4} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_1 y_{b4} + \quad (2.110) \\
& + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_1 y_2 + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + u^{(3,1)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) y_{a4} + u^{(2,4)}(i-1, j) y_{b4} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) y_2 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(2,1)}(i-1, j-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1,1)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a4} y_{a4} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a4} y_{b4} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b4} y_{a4} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b4} y_{b4} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a4} y_2 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b4} y_2 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a4} y_1 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b4} y_1 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a4} + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b4} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a4} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_2 y_{b4} + \\
& + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_2 y_2 + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_2 y_1 + u^{(3,1)}(i-1, j-1) x_2 \quad (2.111) \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a4} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_1 y_{b4} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_1 y_2 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + u^{(2,1)}(i-1, j-1) x_1 + u^{(1,4)}(i-1, j-1) y_{a4} \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j) y_{b4} + u^{(1,3)}(i-1, j-1) y_2 + u^{(1,2)}(i-1, j-1) y_1 + \\
& + u^{(1,1)}(i-1, j-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u^{(0,1)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a5} y_{a4} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a5} y_{b4} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b5} y_{a4} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b5} y_{b4} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a5} y_2 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b5} y_2 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a5} y_1 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b5} y_1 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a5} + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b5} + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_3 y_{a4} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_3 y_{b4} + \\
& + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_3 y_2 + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_3 y_1 + u^{(3,1)}(i-1, j-1) x_3 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a4} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_2 y_{b4} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_2 y_2 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) x_2 y_1 + u^{(2,1)}(i-1, j-1) x_2 + u^{(1,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a4} \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j) x_1 y_{b4} + u^{(1,3)}(i-1, j-1) x_1 y_2 + u^{(1,2)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + \\
& + u^{(1,1)}(i-1, j-1) x_1 + u^{(0,4)}(i-1, j-1) y_{a4} + u^{(0,4)}(i-1, j) y_{b4} + \\
& + u^{(0,3)}(i-1, j-1) y_2 + u^{(0,2)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(0,1)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}
u^{(3,0)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a2} y_{a5} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a2} y_{b5} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b2} y_{a5} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b2} y_{b5} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a2} y_3 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b2} y_3 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a2} y_2 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b2} y_2 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a2} y_1 + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b2} y_1 + u^{(4,0)}(i-1, j-1) x_{a2} + u^{(4,0)}(i, j-1) x_{b2} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) y_{a5} + u^{(3,4)}(i-1, j) y_{b5} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) y_3 + \\
& + u^{(3,2)}(i-1, j-1) y_2 + u^{(3,1)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(3,0)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.113}$$

$$\begin{aligned}
u^{(2,0)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a3} y_{a5} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a3} y_{b5} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b3} y_{a5} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b3} y_{b5} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a3} y_3 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b3} y_3 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a3} y_2 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b3} y_2 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a3} y_1 + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b3} y_1 + u^{(4,0)}(i-1, j-1) x_{a3} + u^{(4,0)}(i, j-1) x_{b3} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a5} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_1 y_{b5} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_1 y_3 + \\
& + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_1 y_2 + u^{(3,1)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + u^{(3,0)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) y_{a5} + u^{(2,4)}(i-1, j) y_{b5} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) y_3 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) y_2 + u^{(2,1)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(2,0)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.114}$$

$$\begin{aligned}
u^{(1,0)}(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a4} y_{a5} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a4} y_{b5} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b4} y_{a5} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b4} y_{b5} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a4} y_3 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b4} y_3 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a4} y_2 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b4} y_2 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a4} y_1 + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b4} y_1 + u^{(4,0)}(i-1, j-1) x_{a4} + u^{(4,0)}(i, j-1) x_{b4} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a5} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_2 y_{b5} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_2 y_3 + \\
& + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_2 y_2 + u^{(3,1)}(i-1, j-1) x_2 y_1 + u^{(3,0)}(i-1, j-1) x_2 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a5} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_1 y_{b5} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_1 y_3 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) x_1 y_2 + u^{(2,1)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + u^{(2,0)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j-1) y_{a5} + u^{(1,4)}(i-1, j) y_{b5} + u^{(1,3)}(i-1, j-1) y_3 + \\
& + u^{(1,2)}(i-1, j-1) y_2 + u^{(1,1)}(i-1, j-1) y_1 + u^{(1,0)}(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}
u(x, y) = & u^{(4,4)}(i-1, j-1) x_{a5} y_{a5} + u^{(4,4)}(i-1, j) x_{a5} y_{b5} + u^{(4,4)}(i, j-1) x_{b5} y_{a5} + \\
& + u^{(4,4)}(i, j) x_{b5} y_{b5} + u^{(4,3)}(i-1, j-1) x_{a5} y_3 + u^{(4,3)}(i, j-1) x_{b5} y_3 + \\
& + u^{(4,2)}(i-1, j-1) x_{a5} y_2 + u^{(4,2)}(i, j-1) x_{b5} y_2 + u^{(4,1)}(i-1, j-1) x_{a5} y_1 + \\
& + u^{(4,1)}(i, j-1) x_{b5} y_1 + u^{(4,0)}(i-1, j-1) x_{a5} + u^{(4,0)}(i, j-1) x_{b5} + \\
& + u^{(3,4)}(i-1, j-1) x_3 y_{a5} + u^{(3,4)}(i-1, j) x_3 y_{b5} + u^{(3,3)}(i-1, j-1) x_3 y_3 + \\
& + u^{(3,2)}(i-1, j-1) x_3 y_2 + u^{(3,1)}(i-1, j-1) x_3 y_1 + u^{(3,0)}(i-1, j-1) x_3 + \\
& + u^{(2,4)}(i-1, j-1) x_2 y_{a5} + u^{(2,4)}(i-1, j) x_2 y_{b5} + u^{(2,3)}(i-1, j-1) x_2 y_3 + \\
& + u^{(2,2)}(i-1, j-1) x_2 y_2 + u^{(2,1)}(i-1, j-1) x_2 y_1 + u^{(2,0)}(i-1, j-1) x_2 + \\
& + u^{(1,4)}(i-1, j-1) x_1 y_{a5} + u^{(1,4)}(i-1, j) x_1 y_{b5} + u^{(1,3)}(i-1, j-1) x_1 y_3 + \\
& + u^{(1,2)}(i-1, j-1) x_1 y_2 + u^{(1,1)}(i-1, j-1) x_1 y_1 + u^{(1,0)}(i-1, j-1) x_1 + \\
& + u^{(0,4)}(i-1, j-1) y_{a5} + u^{(0,4)}(i-1, j) y_{b5} + u^{(0,3)}(i-1, j-1) y_3 + \\
& + u^{(0,2)}(i-1, j-1) y_2 + u^{(0,1)}(i-1, j-1) y_1 + u(i-1, j-1)
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Permitindo-se que os índices i e j das equações 2.92 à 2.116 variem dentro das possibilidades ($i = 1, \dots, N$) e ($j = 1, \dots, M$), é possível representar-se todas as derivadas $u^{(p,q)}(x, y)$, ($p = 4, \dots, 0$), ($q = 4, \dots, 0$), e a própria função de interesse em qualquer posição (x, y) contida na região discretizada, como apresentada na figura 2.17.

Observa-se que qualquer aproximação MDP da função $u(x, y)$ ou de suas derivadas pode ser descrita em função dos valores $u(0, 0)$, $u^{(1,0)}(0, 0)$, $u^{(2,0)}(0, 0)$, $u^{(3,0)}(0, 0)$, $u^{(0,1)}(0, 0)$, $u^{(1,1)}(0, 0)$, $u^{(2,1)}(0, 0)$, $u^{(3,1)}(0, 0)$, $u^{(0,2)}(0, 0)$, $u^{(1,2)}(0, 0)$, $u^{(2,2)}(0, 0)$, $u^{(3,2)}(0, 0)$, $u^{(0,3)}(0, 0)$, $u^{(1,3)}(0, 0)$, $u^{(2,3)}(0, 0)$, $u^{(3,3)}(0, 0)$, $u^{(0,4)}(0, j)$, $u^{(1,4)}(0, j)$, $u^{(2,4)}(0, j)$, $u^{(3,4)}(0, j)$, $u^{(4,0)}(i, 0)$, $u^{(4,1)}(i, 0)$, $u^{(4,2)}(i, 0)$, $u^{(4,3)}(i, 0)$ e $u^{(4,4)}(i, j)$, ($i = 0, \dots, N$), ($j = 0, \dots, M$). Têm-se então $(N + 5)(M + 5)$ valores, tomados sempre nos domínios pontuais. Estes $(N + 5)(M + 5)$ valores são denominados variáveis MDP.

2.7.2 Análise MDP de problemas

Para a análise de um problema empregando-se o MDP basta que o domínio Ω do mesmo esteja contido na região retangular espaço-temporal discretizada em domínios pontuais, como mostrado na figura 2.17. A região é dita espaço-temporal devido a igualdade de tratamento para os problemas de valores de contorno e de condição inicial, que é característica do MDP. Assim, as direções x e y da figura 2.17 podem tanto representar duas dimensões espaciais bem como uma delas pode representar a evolução no tempo. Observe-se que a princípio, a função e também o domínio são genéricos, de forma que qualquer problema bidimensional envolvendo equações diferenciais pode ser analisado empregando-se esta abordagem. E portanto, as aproximações MDP comportam-se como uma tela que possibilita a visualização da solução de qualquer problema interior à mesma.

Para que as aproximações MDP venham a possibilitar uma boa representação da solução desejada são empregados os pontos de aproximação. Os pontos de aproximação caracterizam o meio através do qual a informação contida no problema é transmitida às variáveis MDP. A figura 2.19 apresenta pontos de aproximação para a solução de um problema definido no domínio Ω .

A equação diferencial do problema é imposta nos pontos de aproximação interiores ao domínio Ω empregando-se as aproximações MDP. E as condições de contorno e/ou iniciais são impostas nos pontos de aproximação posicionados nos contornos e/ou no instante inicial de análise. Para tanto, o método da colocação é empregado, resultando em uma equação para cada um dos pontos de aproximação utilizados, em função das variáveis MDP.

A flexibilidade para a escolha dos pontos de aproximação, de forma a representar-se o domínio do problema, é total. Considerando-se que o domínio Ω está contido na região

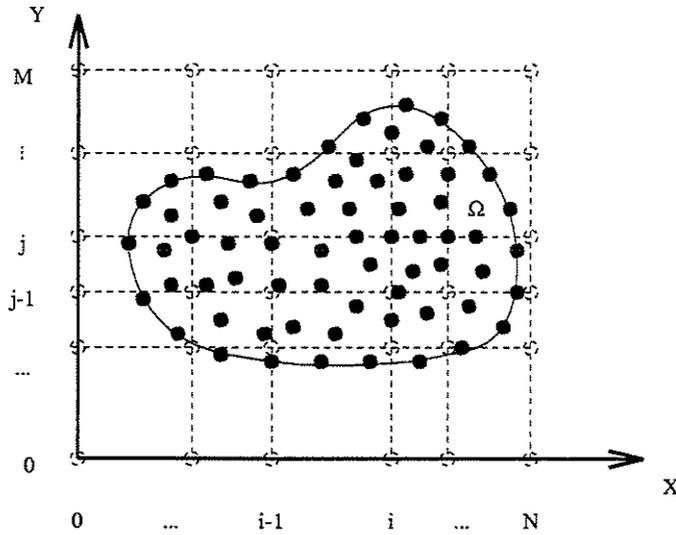


Figura 2.19: Pontos de aproximação em Ω .

discretizada em domínios pontuais, e que as aproximações MDP permitem representar qualquer posição (x, y) da mesma, é possível então a definição de infinitos pontos de aproximação para a caracterização do problema.

São necessárias pelo menos $(N + 5)(M + 5)$ equações obtidas através do método da colocação para o cálculo dos valores $u(0, 0)$, $u^{(1,0)}(0, 0)$, $u^{(2,0)}(0, 0)$, $u^{(3,0)}(0, 0)$, $u^{(0,1)}(0, 0)$, $u^{(1,1)}(0, 0)$, $u^{(2,1)}(0, 0)$, $u^{(3,1)}(0, 0)$, $u^{(0,2)}(0, 0)$, $u^{(1,2)}(0, 0)$, $u^{(2,2)}(0, 0)$, $u^{(3,2)}(0, 0)$, $u^{(0,3)}(0, 0)$, $u^{(1,3)}(0, 0)$, $u^{(2,3)}(0, 0)$, $u^{(3,3)}(0, 0)$, $u^{(0,4)}(0, j)$, $u^{(1,4)}(0, j)$, $u^{(2,4)}(0, j)$, $u^{(3,4)}(0, j)$, $u^{(4,0)}(i, 0)$, $u^{(4,1)}(i, 0)$, $u^{(4,2)}(i, 0)$, $u^{(4,3)}(i, 0)$ e $u^{(4,4)}(i, j)$, $(i = 0, \dots, N)$, $(j = 0, \dots, M)$ das variáveis MDP.

Observa-se que a quantidade e a disposição dos pontos de aproximação empregados é determinante para que a informação sobre o problema seja convenientemente transmitida às variáveis MDP, conduzindo à uma solução apurada. Apesar das aproximações MDP possibilitarem uma representação bastante realística da solução, análises empregando-se

pontos de aproximação parcialmente localizados no domínio ou um número reduzido dos mesmos fatalmente produzem resultados grosseiros. E por isso recomenda-se um número superior a $(N+5)(M+5)$ pontos de aproximação e uma distribuição uniforme dos mesmos no interior, contornos e/ou instante inicial do domínio espaço-temporal do problema.

Para a obtenção dos $(N+5)(M+5)$ valores das variáveis MDP, o sistema de equações resultante pode ser então resolvido empregando-se o método dos mínimos quadrados ou qualquer outra abordagem mais elegante.

2.7.3 Pós-processamento dos dados

Uma vez obtidos os valores $u(0,0)$, $u^{(1,0)}(0,0)$, $u^{(2,0)}(0,0)$, $u^{(3,0)}(0,0)$, $u^{(0,1)}(0,0)$, $u^{(1,1)}(0,0)$, $u^{(2,1)}(0,0)$, $u^{(3,1)}(0,0)$, $u^{(0,2)}(0,0)$, $u^{(1,2)}(0,0)$, $u^{(2,2)}(0,0)$, $u^{(3,2)}(0,0)$, $u^{(0,3)}(0,0)$, $u^{(1,3)}(0,0)$, $u^{(2,3)}(0,0)$, $u^{(3,3)}(0,0)$, $u^{(0,4)}(0,j)$, $u^{(1,4)}(0,j)$, $u^{(2,4)}(0,j)$, $u^{(3,4)}(0,j)$, $u^{(4,0)}(i,0)$, $u^{(4,1)}(i,0)$, $u^{(4,2)}(i,0)$, $u^{(4,3)}(i,0)$ e $u^{(4,4)}(i,j)$, ($i = 0, \dots, N$), ($j = 0, \dots, M$) das variáveis MDP, as próprias aproximações MDP, apresentadas nas equações 2.92 à 2.116, são empregadas no pós-processamento dos dados, produzindo resultados suaves. Estas possibilitam representar-se todas as derivadas $u^{(p,q)}(x,y)$, ($p = 4, \dots, 0$), ($q = 4, \dots, 0$), e a própria função de interesse $u(x,y)$ em qualquer posição $(x,y) \in \Omega$ do domínio do problema.

2.8 Construção de funções genéricas MDP.

Esta seção apresenta linhas gerais para o desenvolvimento de funções do método dos domínios pontuais considerando-se o número de dimensões do espaço, partições do domínio e aproximações com regularidades genéricas. E também, a equação do número de variáveis MDP resultantes em função destes parâmetros.

Seja D o número de dimensões do espaço de aproximação e d uma dimensão genérica do mesmo, tal que $d = 1, 2, \dots, D$. E seja N_d o número de partições do domínio na dimensão d .

Considere um domínio do espaço-tempo D -dimensional. São estabelecidos pontos de referência definidos a partir de N_d partições do domínio em uma dada dimensão específica d . A este conjunto de $\prod_{d=1}^D (N_d + 1)$ pontos de referência denomina-se domínios pontuais.

Seja m_d a ordem de derivação genérica da função na dimensão d . E seja M_d a ordem de derivação da função na dimensão d que é linearmente aproximada por partes.

Desenvolve-se polinômios representando a aproximação linear por partes de uma derivada de alta ordem $(M_1, M_2, \dots, M_d, \dots, M_D)$ da função definida entre domínios pontuais vizinhos. A seguir são realizados procedimentos sucessivos de integração exata destes polinômios, introduzindo-se as respectivas constantes que surgem naturalmente dos processos de integração. Resultam então as expressões que permitem avaliar qualquer uma das derivadas parciais $(m_1, m_2, \dots, m_d, \dots, m_D)$ e a própria função do método dos domínios pontuais; onde $m_1 = 0, 1, 2, \dots, M_1$, $m_2 = 0, 1, 2, \dots, M_2$, ... e $m_D = 0, 1, 2, \dots, M_D$.

Estas funções genéricas do método dos domínios pontuais permitem aproximar um

determinado campo suave definido sobre este domínio do espaço-tempo D-dimensional a partir de $\prod_{d=1}^D (N_d + M_d + 1)$ variáveis, denominadas variáveis MDP.

É possível assim simular a evolução de um dado fenômeno físico sujeito às condições de contorno definidas num domínio genérico do espaço-tempo D-dimensional. Para isso, utiliza-se da técnica de colocação por pontos das equações matemáticas que descrevem o fenômeno físico.

O número de pontos de colocação deve ser maior ou igual ao número de variáveis MDP. E caso formem-se mais equações que variáveis, utiliza-se o método de mínimos quadrados para a minimização do resíduo global.

Capítulo 3

Aplicações em Estruturas Reticuladas

Neste capítulo a versão unidimensional do MDP é aplicada às equações diferenciais referentes aos comportamentos estático e dinâmico de estruturas reticuladas – barras e vigas. Discretizações grosseiras e refinadas, além de funções MDP considerando-se diferentes níveis de continuidade, são testadas extensivamente de forma a levantar-se as características numéricas de estabilidade, convergência e precisão do operador.

Nas aplicações MDP na dinâmica de barras e de vigas demonstrou-se que é possível a melhoria da solução com a exigência de maior regularidade das funções. As aproximações MDP de alta ordem apresentam um aumento mínimo no número de variáveis, e trabalhando-se convenientemente com as condições de contorno, obtém-se a mesma ordem do sistema de equações final para as diversas soluções. Em ambos os casos, foram alcançados resultados mais apurados que o MEF.

Apresenta-se ainda a análise estática MDP de uma estrutura de pórticos, onde é descrito o tratamento para a transformação entre sistemas referenciais de coordenadas. E para este problema foram obtidos resultados idênticos ao MEF.

Todos estes tópicos são desenvolvidos neste capítulo, que encontra-se organizado em cinco seções, conforme descrito a seguir.

Vibrações longitudinais de barra livre-livre. Descrição da equação diferencial que descreve o movimento da barra. Esta equação de movimento, juntamente com as respectivas condições de contorno, caracteriza o problema de autovalores e autofunções associado. Apresentação das soluções analíticas do problema. Modelagem do problema por aproximações MDP com regularidades crescentes e pelo método de Galerkin empregando-se elementos finitos lineares. Observa-se os mesmos resultados numéricos das frequências normalizadas, para as diferentes discretizações, empregando-se os esquemas MDP, com funções lineares por partes na derivada de segunda ordem, e MEF. Os resultados numéricos aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas de ordem mais elevadas. É conveniente ressaltar que as aproximações MDP de alta ordem são obtidas com um aumento mínimo da ordem do sistema linear final, conduzindo a resultados efetivamente mais apurados. E por isso, mostram-se mais atraentes do ponto de vista do esforço computacional.

Vibrações longitudinais de barra fixo-livre. Descrição da equação diferencial que descreve o movimento da barra. Esta equação de movimento, juntamente com as respectivas condições de contorno, caracteriza o problema de autovalores e autofunções associado. Apresentação das soluções analíticas do problema. Modelagem do problema por aproximações MDP com regularidades crescentes e pelo mtodo de Galerkin empregando-se elementos finitos lineares. Observa-se os mesmos resultados numéricos das frequências normalizadas, para as diferentes discretizações, empregando-se os esquemas MDP, com

funções lineares por partes na derivada de segunda ordem, e MEF. Os resultados numéricos aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas de ordem mais elevadas.

Vibrações transversais de viga livre-livre. Apresentação da equação diferencial que descreve o movimento da viga. Esta equação de movimento, juntamente com as respectivas condições de contorno, caracteriza o problema de autovalores e autofunções associado. Descrição das soluções exatas do problema, que são dadas pelas raízes de uma equação transcendental. Modelagem do problema por aproximações MDP com regularidades crescentes e empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite. Observa-se que os resultados numéricos das frequências normalizadas, para as diferentes discretizações, empregando-se os esquemas MDP, com funções lineares por partes nas derivadas de ordens mais baixas, representam melhor as frequências mais altas, enquanto os resultados MEF representam melhor as frequências mais baixas. Os resultados numéricos aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas de ordem mais elevadas. É conveniente ressaltar que as aproximações MDP de alta ordem são obtidas com um aumento mínimo da ordem do sistema linear final, conduzindo a resultados efetivamente mais apurados. E por isso, mostram-se mais atraentes do ponto de vista do esforço computacional.

Vibrações transversais de viga fixo-livre. Apresentação da equação diferencial que descreve o movimento da viga. Esta equação de movimento, juntamente com as respectivas condições de contorno, caracteriza o problema de autovalores e autofunções associado. Descrição das soluções exatas do problema, que são dadas pelas raízes de uma equação transcendental. Modelagem do problema por aproximações MDP com regularidades crescentes e empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite. Comparando-se diretamente as soluções do problema obtidas segundo o MDP, com aproximações lineares por partes

na derivada de quarta ordem, com as soluções obtidas empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite, observa-se que os resultados MDP representam melhor as frequências mais altas de vibração da viga fixo-livre, enquanto os resultados MEF representam melhor as frequências mais baixas. Os resultados numéricos aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas ordens mais elevadas, representando melhor uma faixa mais ampla do espectro de frequências do que o MEF.

Análise estática de estrutura de pórtico. A solução deste problema têm como intuito principal ilustrar a aplicação MDP em estruturas onde existe a necessidade da transformação do sistema referencial de coordenadas. O pórtico é constituído por elementos estruturais que integram as características físicas de barra e de viga. Os efeitos de barra são introduzidos através da aproximação MDP linear por partes na segunda derivada, enquanto o comportamento de viga é modelado empregando-se a aproximação MDP linear por partes na derivada de quarta ordem. São introduzidas as devidas operações matriciais, necessárias para a consideração das disposições angulares dos diversos elementos de pórtico. Um problema padrão é analisado utilizando-se o MDP e são obtidos resultados idênticos àqueles encontrados a partir da solução empregando-se o método de Galerkin – elementos finitos lineares de Lagrange para o comportamento de barra e elementos finitos cúbicos de Hermite para os efeitos de viga.

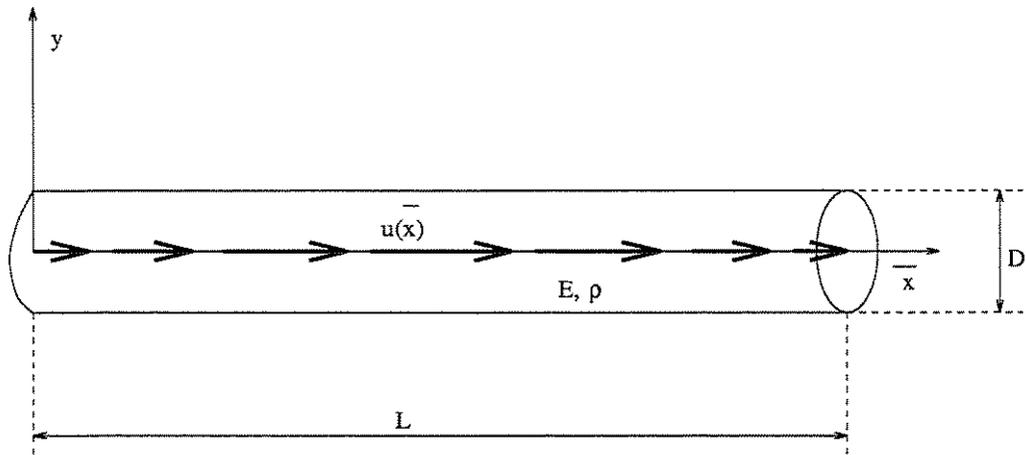


Figura 3.1: Representação de barra livre de vínculos nas extremidades.

3.1 Vibrações longitudinais de barra livre-livre

A barra é um elemento estrutural mecânico, dimensionalmente caracterizado pelo comprimento L muito maior que o diâmetro D , $L \gg D$, sujeito aos carregamentos axiais. A modelagem dinâmica de uma barra fornece os autovetores e os autovalores do sistema, que têm o significado físico dos modos e das frequências naturais de vibração, respectivamente. O comportamento dinâmico de uma barra, ou seja, os modos e as frequências naturais de vibração, depende das condições de vínculo e das propriedades do material da mesma. A figura 3.1 apresenta a representação de uma barra livre de vínculos nas extremidades. A barra livre-livre, que é analisada nesta seção, não está vinculada a nenhum outro elemento estrutural mecânico, de forma que os esforços nas extremidades são nulos. Esta informação é introduzida nas condições de contorno em $u^{(1)}(\bar{x})$ do modelo matemático, caracterizando o sistema.

A expressão 3.1 representa o modelo matemático da dinâmica de uma barra livre de vínculos nas extremidades. A função $u(\bar{x})$ caracteriza o deslocamento da barra na direção

axial, dado em função da posição \bar{x} , definido ao longo do comprimento $\bar{x} \in [0, L]$ da mesma. O módulo de elasticidade do material da barra é dado em $[\text{N}/\text{m}^2]$ e representado por E . A densidade do material da barra é dado em $[\text{Kg}/\text{m}^3]$ e representado por ρ . E na expressão 3.1, λ_i representa os autovalores do sistema, Przemieniecki [21].

$$\begin{aligned} E u^{(2)}(\bar{x}) + \rho \lambda_i u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &\in [0, L] \\ u^{(1)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\ u^{(1)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L \end{aligned} \quad (3.1)$$

Resolvendo-se o problema de autovalores e autovetores apresentado em 3.1, os valores obtidos de λ_i são sempre números reais negativos. A raiz quadrada de um autovalor λ_i , representada por um número imaginário, é apresentada na equação 3.2.

$$\sqrt{\lambda_i} = \omega_i i \quad (3.2)$$

Na expressão 3.2, ω_i é a frequência natural de vibração do sistema, que é dada em $[\text{rad}/\text{s}]$. O respectivo autovetor do sistema, que é a configuração $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, L]$, que satisfaz a equação diferencial da expressão 3.1, representa o modo de vibração associado à frequência natural ω_i .

O Método dos Domínios Puntuais é empregado para a resolução numérica do problema de autovalores e autovetores 3.1 que representa o comportamento dinâmico de uma barra livre de vínculos nas extremidades. O comprimento da barra é $L = 1 \text{ m}$. O módulo de elasticidade E e a densidade ρ do material da barra são tomados de forma a respeitar a equação 3.3.

$$\frac{E}{\rho} = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \quad (3.3)$$

Neste caso, os valores exatos das frequências naturais ω_i de vibração da barra livre-livre são apresentados na expressão 3.4. Observa-se que o índice i está associado ao modo natural de vibração da barra, ou seja, $i = 1$ representa o primeiro modo natural de vibração, $i = 2$ representa o segundo modo e assim por diante.

$$\omega_i = i \pi \text{ rad/s} \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (3.4)$$

As aproximações MDP, ($M=2,3,4,5$), respectivamente, lineares por partes nas derivadas de segunda, terceira, quarta e quinta ordens são empregadas para a resolução numérica do problema 3.1. E o método de Galerkin, empregando-se elementos finitos lineares de Lagrange, também é utilizado para a modelagem dinâmica da barra livre-livre.

Para possibilitar a comparação dos resultados, são tomados domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), igualmente espaçados sobre o domínio $[0, 1]$ do problema 3.1 nas diversas soluções MDP. Assim, os intervalos Δx_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), definidos entre os domínios pontuais vizinhos $i - 1$ e i , são todos iguais a Δx , como apresentado na equação 3.5.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.5)$$

O desenvolvimento das funções MDP dá-se a partir da aproximação linear por partes de uma derivada de alta ordem M , capaz de reconstruir todos os termos da equação

diferencial do problema por integração. As aproximações MDP são identificadas pela notação $u_M^{(m)}(\bar{x})$, onde $(m = 0, \dots, M)$ e o subscrito M indica a ordem da derivada da função $u(\bar{x})$ que é linearmente aproximada por partes. Para a aproximação linear da derivada de ordem M da função entre os domínios pontuais genéricos x_{i-1} e x_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), é empregada a equação 3.6.

$$u_M^{(M)}(\bar{x}) = u_M^{(M)}(i-1) \left(1 - \frac{x}{\Delta x_i}\right) + u_M^{(M)}(i) \frac{x}{\Delta x_i} \quad (3.6)$$

As aproximações das derivadas de ordem mais baixa e da própria função, entre os domínios pontuais genéricos x_{i-1} e x_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), são obtidas por processos sucessivos de integração exata da equação 3.6. As aproximações MDP podem ser reescritas adotando-se $x = \Delta x$. Esta nova apresentação das equações, denominada funções MDP, permite a eliminação de grande parte das constantes de integração, uma vez que os valores são associados diretamente aos domínios pontuais.

As funções MDP permitem avaliar $u_M^{(M-1)}(i)$, $u_M^{(M-2)}(i)$, \dots , $u_M(i)$ nos domínios pontuais i , ($i = 1, 2, \dots, N$), de modo que as constantes de integração remanescentes são dadas por $u_M^{(M-1)}(0)$, $u_M^{(M-2)}(0)$, \dots , $u_M(0)$. Assim, qualquer avaliação das aproximações MDP numa posição genérica do intervalo $[\bar{x}_0, \bar{x}_N]$ pode ser descrita em função das variáveis $u_M(0)$, $u_M^{(1)}(0)$, \dots , $u_M^{(M-1)}(0)$ e $u_M^{(M)}(i)$, ($i = 0, 1, \dots, N$). Observa-se, portanto, que é $(N + M + 1)$ o número das variáveis do problema.

Para a modelagem do sistema dos autovalores e dos autovetores 3.1, que representa o comportamento dinâmico da barra livre-livre, o método da colocação é empregado. Isto significa que as equações diferencial e dos contornos são impostas localmente em pontos arbitrários do domínio. Os pontos de aproximação, para a modelagem da equação diferencial do problema 3.1 por colocação, são considerados coincidentes com os domínios

puntuais. Este procedimento é conveniente uma vez que as aproximações da função e das derivadas, nos domínios puntuais, são avaliadas diretamente na montagem das funções MDP, apresentadas na forma de sistemas matriciais.

Observa-se que são necessárias $(N + M + 1)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. No caso das soluções MDP $M = 2$, a equação diferencial do problema 3.1 é satisfeita nos domínios puntuais \bar{x}_i , $(i = 0, 1, \dots, N)$, e as condições de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios puntuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . É possível então o cálculo de $(N + 1)$ autovetores e autovalores do sistema da barra livre-livre, incluindo o modo de corpo rígido, cuja frequência natural ω_0 é nula.

A figura 3.2 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.1 do comportamento dinâmico da barra livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 2$ e nove domínios puntuais. Os autovetores $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, 1]$, do sistema têm o significado físico dos modos naturais de vibração da barra livre-livre, ou seja, as configurações do deslocamento axial da barra que satisfazem a equação diferencial 3.1 para cada uma das frequências naturais ω_i , $(i = 0, 1, \dots, 8)$. Os autovetores $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, 1]$, são normalizados de forma que o deslocamento máximo de cada modo apresente o valor unitário. Apesar de ocorrerem na direção axial, os deslocamentos $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, 1]$, são representados no eixo y dos gráficos, facilitando a visualização. Os gráficos da figura 3.2 estão ordenados da esquerda para a direita, seguindo da linha de cima para a de baixo. O primeiro gráfico apresenta o modo de corpo rígido e os seguintes representam, respectivamente, o primeiro modo natural de vibração, o segundo modo, o terceiro modo e assim por diante, indo até o oitavo modo natural de vibração da barra livre-livre.

As soluções MDP $M = 3$ necessitam de $(N + 4)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto,

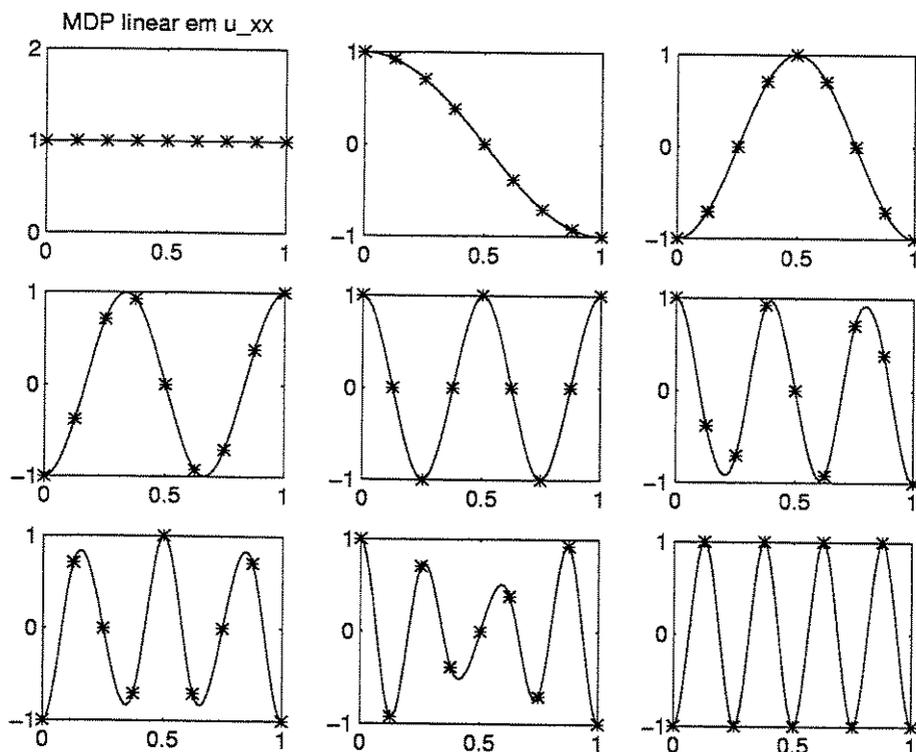


Figura 3.2: Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 2$, $(N + 1) = 9$.

a condição de contorno auxiliar, apresentada na equação 3.7, também é empregada para a montagem do sistema.

$$u^{(3)}(\bar{x}) = 0 \quad \bar{x} = 0 \quad (3.7)$$

A equação diferencial do problema 3.1 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N , e a condição de contorno na derivada $u^{(3)}(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_0 . É possível então o cálculo de $(N + 1)$ autovetores e autovalores do sistema da barra livre-livre, incluindo o modo de corpo rígido.

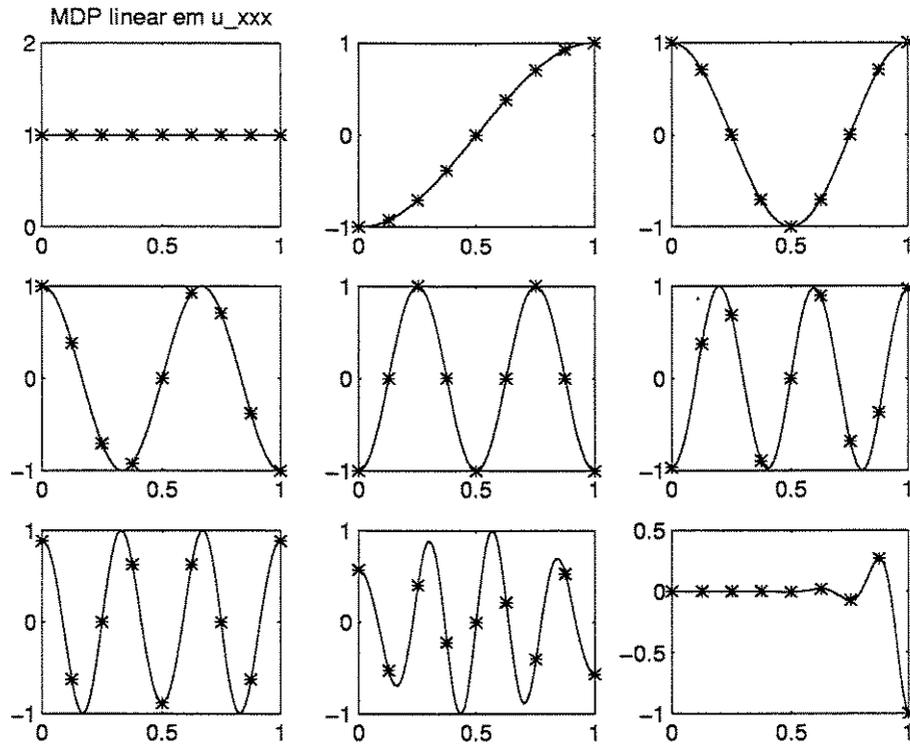


Figura 3.3: Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 3$, $(N + 1) = 9$.

A figura 3.3 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.1 do comportamento dinâmico da barra livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 3$ e nove domínios pontuais. Os gráficos da figura 3.3 apresentam a mesma organização estabelecida na descrição da figura 3.2.

As soluções MDP $M = 4$ necessitam de $(N + 5)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.8, também são empregadas para a montagem do sistema neste caso.

$$\begin{aligned}
u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\
u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L
\end{aligned} \tag{3.8}$$

A equação diferencial do problema 3.1 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N , e as condições de contorno na derivada $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas nestes mesmos domínios pontuais. É possível então o cálculo de $(N+1)$ autovetores e autovalores do sistema da barra livre-livre, incluindo o modo de corpo rígido, cuja frequência natural ω_0 é nula.

A figura 3.4 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.1 do comportamento dinâmico da barra livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 4$ e nove domínios pontuais. Os gráficos da figura 3.4 apresentam a mesma organização estabelecida na descrição da figura 3.2.

As soluções MDP $M = 5$ necessitam de $(N + 6)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.9, também são empregadas para a montagem do sistema.

$$\begin{aligned}
u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\
u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L \\
u^{(5)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0
\end{aligned} \tag{3.9}$$

A equação diferencial do problema 3.1 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios

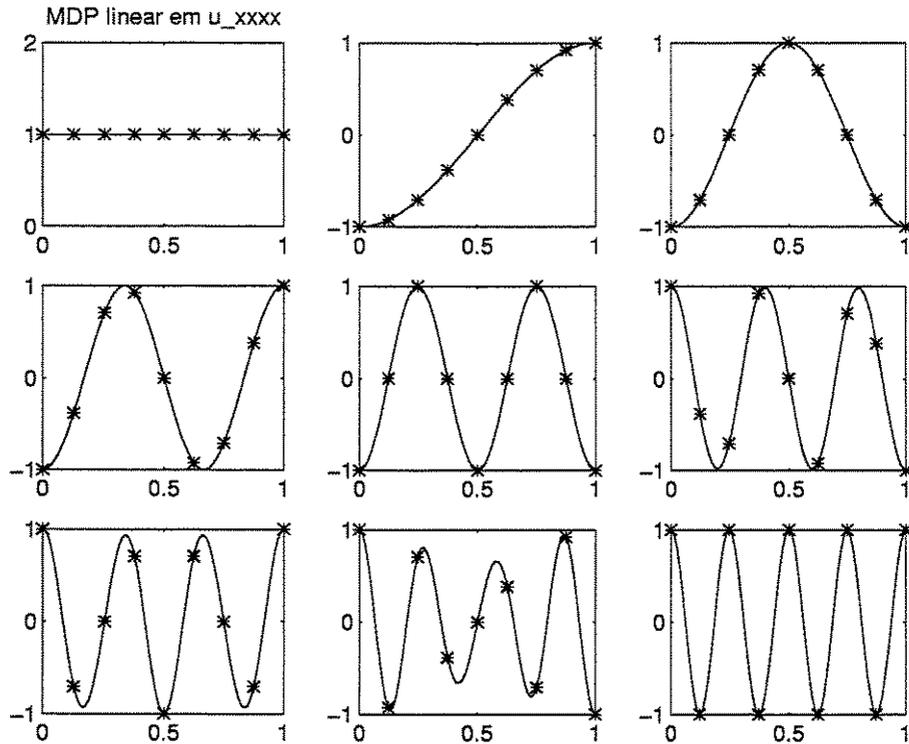


Figura 3.4: Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 4$, $(N + 1) = 9$.

puntuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N , as condições de contorno na derivada $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas nestes mesmos domínios puntuais e a condição de contorno na derivada $u^{(5)}(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_0 . É possível então o cálculo de $(N + 1)$ autovetores e autovalores do sistema da barra livre-livre, incluindo o modo de corpo rígido.

A figura 3.5 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.1 do comportamento dinâmico da barra livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 5$ e nove domínios puntuais. Os gráficos da figura 3.5 apresentam a mesma organização estabelecida na descrição da figura 3.2.

As soluções do problema 3.1 também são obtidas segundo o método de Galerkin, empregando-se elementos finitos lineares de Lagrange. Neste caso os valores $u(\bar{x}_i)$, $(i =$

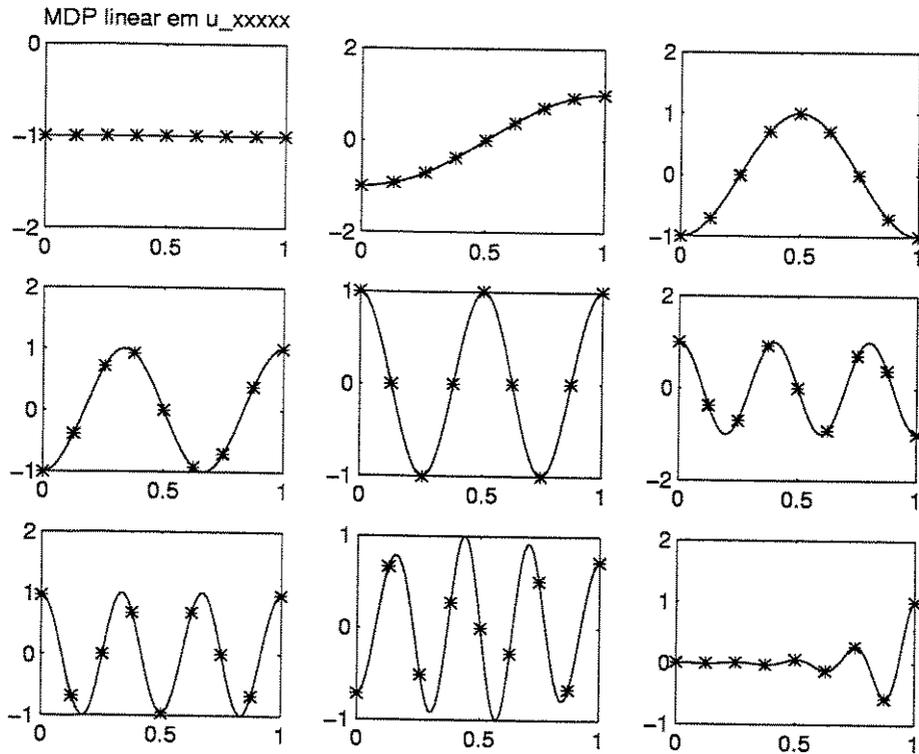


Figura 3.5: Modos de vibração MDP da barra livre-livre $M = 5$, $(N + 1) = 9$.

$0, 1, \dots, N$), dos deslocamentos nodais representam as variáveis do problema. O sistema linear final apresenta $(N + 1)$ equações, possibilitando o cálculo de $(N + 1)$ autovetores e autovalores do sistema da barra livre-livre, incluindo o modo de corpo rígido, cuja frequência natural ω_0 é nula.

As tabelas 3.1 e 3.2 apresentam as frequências naturais ω_i de vibração da barra livre de vínculos nas extremidades obtidas das resoluções numéricas do problema 3.1. As frequências naturais ω_i são calculadas a partir dos autovalores λ_i do sistema, empregando-se a equação 3.2, e são dadas em [rad/s]. As soluções foram obtidas utilizando-se de dois à onze domínios pontuais, $((N + 1) = 2, 3, \dots, 11)$, e as frequências naturais resultantes das diferentes soluções do problema 3.1 são separadas por linhas horizontais. A pri-

meira coluna das tabelas 3.1 e 3.2 identifica o modo de vibração i que está associado à respectiva frequência natural. Na segunda coluna são apresentados os valores exatos das frequências naturais de vibração da barra livre-livre, calculados segundo a expressão 3.4. As frequências naturais ω_i obtidas das resoluções numéricas MDP são apresentadas na terceira, na quarta, na quinta e na sexta colunas das tabelas 3.1 e 3.2 empregando-se, respectivamente, as aproximações lineares por partes nas derivadas de ordens M , ($M = 2, 3, 4, 5$). E finalmente, na sétima coluna das tabelas 3.1 e 3.2 são apresentadas as frequências naturais obtidas das resoluções numéricas do problema 3.1 empregando-se o método de Galerkin com elementos finitos lineares de Lagrange.

As tabelas 3.3 e 3.4 apresentam os erros percentuais das frequências naturais ω_i de vibração da barra livre-livre obtidas das resoluções numéricas do problema 3.1. A equação 3.10 é utilizada para o cálculo dos erros percentuais empregando-se os mesmos resultados apresentados nas tabelas 3.1 e 3.2, onde ω_i^{ex} representa o valor exato da frequência natural e ω_i^{num} representa o valor obtido através da resolução numérica para a respectiva frequência natural.

$$\text{erro} = \frac{100}{\omega_i^{\text{ex}}} (\omega_i^{\text{num}} - \omega_i^{\text{ex}}) \quad (3.10)$$

A apresentação dos erros nas tabelas 3.3 e 3.4 segue o mesmo padrão utilizado para a apresentação dos resultados das tabelas 3.1 e 3.2. Os erros percentuais das frequências naturais ω_i obtidos das resoluções numéricas MDP são apresentados na segunda, na terceira, na quarta e na quinta colunas das tabelas 3.3 e 3.4 representando, respectivamente, as aproximações lineares por partes nas derivadas de ordens M , ($M = 2, 3, 4, 5$). Na sexta coluna das tabelas 3.3 e 3.4 são apresentados os erros percentuais das frequências naturais obtidos das resoluções numéricas do problema 3.1 empregando-se o método de Galerkin

com elementos finitos lineares de Lagrange.

Observa-se que as frequências naturais ω_i de vibração da barra livre-livre obtidas das resoluções numéricas do problema 3.1 empregando-se o Método dos Domínios Puntuais com aproximações lineares por partes nas derivadas de segunda ordem apresentam os mesmos valores das resoluções do problema utilizando-se o método de Galerkin com elementos finitos lineares de Lagrange. Entretanto, estes valores obtidos para as frequências naturais ω_i representam os resultados mais grosseiros, como verifica-se nas tabelas 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4. Os resultados numéricos das frequências naturais ω_i de vibração da barra livre de vínculos nas extremidades aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas de ordens M mais elevadas, ($M = 3, 4, 5$). É conveniente ressaltar que as aproximações MDP de alta ordem são obtidas com aumento mínimo no tamanho do sistema linear final, conduzindo à resultados efetivamente mais apurados. E por isso, mostram-se mais atraentes do ponto de vista do esforço computacional.

Tabela 3.1: Frequências naturais ω_i da modelagem da barra livre-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 2$	Soluções MDP $M = 3$	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MEF
ω_1	3.1415927	3.4641016	3.4641016	3.1622777	3.1622777	3.4641016
ω_1	3.1415927	3.4641016	3.0983867	3.1622777	3.1362502	3.4641016
ω_2	6.2831853	6.9282032	6.9282032	6.3245553	6.3245553	6.9282032
ω_1	3.1415927	3.2863353	3.1333978	3.1448545	3.1411956	3.2863353
ω_2	6.2831853	7.3484692	6.0000000	6.4450339	6.2105900	7.3484692
ω_3	9.4247780	10.392305	10.392305	9.4868330	9.4868330	10.392305
ω_1	3.1415927	3.2228314	3.1390431	3.1425349	3.1415263	3.2228314
ω_2	6.2831853	6.9282032	6.1967734	6.3245553	6.2725005	6.9282032
ω_3	9.4247780	11.258606	8.7378768	9.8310278	9.1844408	11.258606
ω_4	12.566371	13.856406	13.856406	12.649111	12.649111	13.856406
ω_1	3.1415927	3.1934918	3.1405569	3.1419618	3.1415758	3.1934918
ω_2	6.2831853	6.6998603	6.2486652	6.2979169	6.2806645	6.6998603
ω_3	9.4247780	10.775778	9.1495838	9.5724893	9.3711173	10.775778
ω_4	12.566371	15.094341	11.379522	13.248627	12.074420	15.094341
ω_5	15.707963	17.320508	17.320508	15.811388	15.811388	17.320508
ω_1	3.1415927	3.1775917	3.1410954	3.1417664	3.1415871	3.1775917
ω_2	6.2831853	6.5726707	6.2667956	6.2897090	6.2823911	6.5726707
ω_3	9.4247780	10.392305	9.2951600	9.4868330	9.4087507	10.392305
ω_4	12.566371	14.696938	12.000000	12.890068	12.421180	14.696938
ω_5	15.707963	18.853153	13.964222	16.656145	14.904982	18.853153
ω_6	18.849556	20.784610	20.784610	18.973666	18.973666	20.784610
ω_1	3.1415927	3.1680206	3.1413250	3.1416850	3.1415905	3.1680206
ω_2	6.2831853	6.4956460	6.2744271	6.2865199	6.2828821	6.4956460
ω_3	9.4247780	10.141334	9.3560583	9.4550560	9.4188915	10.141334
ω_4	12.566371	14.219999	12.266408	12.722406	12.514714	14.219999
ω_5	15.707963	18.621246	14.768945	16.260128	15.419197	18.621246
ω_6	18.849556	22.550500	16.513364	20.038106	17.694469	22.550500
ω_7	21.991149	24.248711	24.248711	22.135944	22.135944	24.248711

Tabela 3.2: Frequências naturais ω_i da modelagem da barra livre-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 2$	Soluções MDP $M = 3$	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MEF
ω_1	3.1415927	3.1618160	3.1414361	3.1416463	3.1415917	3.1618160
ω_2	6.2831853	6.4456627	6.2780861	6.2850697	6.2830526	6.4456627
ω_3	9.4247780	9.9743914	9.3850190	9.4412931	9.4222714	9.9743914
ω_4	12.566371	13.856406	12.393547	12.649111	12.545001	13.856406
ω_5	15.707963	18.118802	15.165166	16.006889	15.590380	18.118802
ω_6	18.849556	22.517213	17.475754	19.662056	18.368882	22.517213
ω_7	21.991149	26.201376	19.039084	23.391700	20.455154	26.201376
ω_8	25.132741	27.712813	27.712813	25.298221	25.298221	27.712813
ω_1	3.1415927	3.1575657	3.1414950	3.1416259	3.1415922	3.1575657
ω_2	6.2831853	6.4114349	6.2800170	6.2843319	6.2831210	6.4114349
ω_3	9.4247780	9.8590060	9.4001934	9.4345635	9.4235867	9.8590060
ω_4	12.566371	13.592709	12.459975	12.614107	12.556446	13.592709
ω_5	15.707963	17.672373	15.374203	15.878472	15.654424	17.672373
ω_6	18.849556	22.045408	18.000000	19.335102	18.631770	22.045408
ω_7	21.991149	26.373586	20.135425	23.078563	21.276565	26.373586
ω_8	25.132741	29.817326	21.548653	26.718995	23.195149	29.817326
ω_9	28.274334	31.176915	31.176915	28.460499	28.460499	31.176915
ω_1	3.1415927	3.1545274	3.1415287	3.1416144	3.1415924	3.1545274
ω_2	6.2831853	6.3869836	6.2811138	6.2839237	6.2831516	6.3869836
ω_3	9.4247780	9.7762719	9.4087631	9.4309540	9.4241619	9.7762719
ω_4	12.566371	13.399721	12.497330	12.595834	12.561329	13.399721
ω_5	15.707963	17.320508	15.491933	15.811388	15.681251	17.320508
ω_6	18.849556	21.551557	18.299168	19.144979	18.742235	21.551557
ω_7	21.991149	25.972941	20.780605	22.698374	21.638248	25.972941
ω_8	25.132741	30.188683	22.759043	26.497254	24.148840	30.188683
ω_9	28.274334	33.406771	24.046656	30.023480	25.919902	33.406771
ω_{10}	31.415927	34.641016	34.641016	31.622777	31.622777	34.641016

Tabela 3.3: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra livre-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 2$	Erros MDP $M = 3$	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MEF
ω_1	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_2	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	4.6073030	-0.2608501	0.1038281	-0.0126394	4.6073030
ω_2	16.954520	-4.5070341	2.5758998	-1.1553897	16.954520
ω_3	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	2.5859085	-0.0811560	0.0299913	-0.0021117	2.5859085
ω_2	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_3	19.457523	-7.2882481	4.3104451	-2.5500568	19.457523
ω_4	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	1.6520018	-0.0329692	0.0117517	-0.0005372	1.6520018
ω_2	6.6315887	-0.5494053	0.2344610	-0.0401199	6.6315887
ω_3	14.334560	-2.9199005	1.5672658	-0.5693570	14.334560
ω_4	20.116953	-9.4446451	5.4292233	-3.9148173	20.116953
ω_5	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	1.1458838	-0.0158269	0.0055292	-0.0001770	1.1458838
ω_2	4.6073030	-0.2608501	0.1038281	-0.0126394	4.6073030
ω_3	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_4	16.954520	-4.5070341	2.5758998	-1.1553897	16.954520
ω_5	20.022899	-11.101001	6.0363094	-5.1119368	20.022899
ω_6	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	0.8412291	-0.0085191	0.0029399	-0.0000695	0.8412291
ω_2	3.3814166	-0.1393909	0.0530718	-0.0048250	3.3814166
ω_3	7.6028960	-0.7291380	0.3212601	-0.0624572	7.6028960
ω_4	13.159158	-2.3870237	1.2416864	-0.4110675	13.159158
ω_5	18.546532	-5.9779760	3.5151878	-1.8383439	18.546532
ω_6	19.634117	-12.393883	6.3054516	-6.1279287	19.634117
ω_7	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779

Tabela 3.4: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra livre-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 2$	Erros MDP $M = 3$	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MEF
ω_1	0.6437303	-0.0049846	0.0017064	-0.0000310	0.6437303
ω_2	2.5859085	-0.0811560	0.0299913	-0.0021117	2.5859085
ω_3	5.8315797	-0.4218555	0.1752310	-0.0265951	5.8315797
ω_4	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_5	15.347875	-3.4555558	1.9030201	-0.7485602	15.347875
ω_6	19.457523	-7.2882481	4.3104451	-2.5500568	19.457523
ω_7	19.145101	-13.423878	6.3687031	-6.9846051	19.145101
ω_8	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	0.5084392	-0.0031079	0.0010581	-0.0000152	0.5084392
ω_2	2.0411564	-0.0504245	0.0182488	-0.0010236	2.0411564
ω_3	4.6073030	-0.2608501	0.1038281	-0.0126394	4.6073030
ω_4	8.1673374	-0.8466671	0.3798735	-0.0789771	8.1673374
ω_5	12.505823	-2.1247845	1.0854946	-0.3408418	12.505823
ω_6	16.954520	-4.5070341	2.5758998	-1.1553897	16.954520
ω_7	19.928189	-8.4385026	4.9447816	-3.2494159	19.928189
ω_8	18.639372	-14.260633	6.3115013	-7.7094330	18.639372
ω_9	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779
ω_1	0.4117251	-0.0020373	0.0006908	-0.0000081	0.4117251
ω_2	1.6520018	-0.0329692	0.0117517	-0.0005372	1.6520018
ω_3	3.7294664	-0.1699233	0.0655300	-0.0065371	3.7294664
ω_4	6.6315887	-0.5494053	0.2344610	-0.0401199	6.6315887
ω_5	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_6	14.334560	-2.9199005	1.5672658	-0.5693570	14.334560
ω_7	18.106343	-5.5046863	3.2159541	-1.6047379	18.106343
ω_8	20.116953	-9.4446451	5.4292233	-3.9148173	20.116953
ω_9	18.152285	-14.952352	6.1863400	-8.3270997	18.152285
ω_{10}	10.265779	10.265779	0.6584242	0.6584242	10.265779

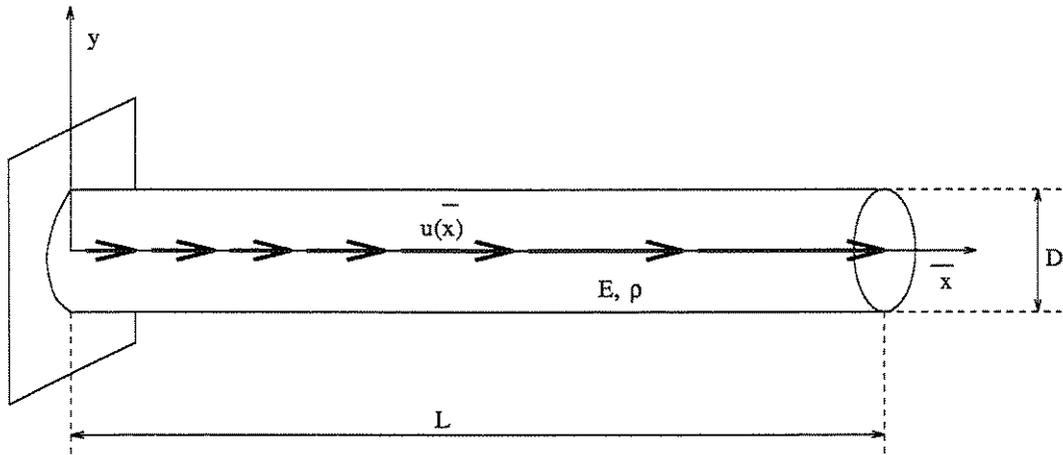


Figura 3.6: Representação de barra vinculada em uma das extremidades.

3.2 Vibrações longitudinais de barra fixo-livre

Esta seção apresenta a modelagem MDP de barra fixo-livre. Trata-se do mesmo problema descrito na seção anterior, apenas com uma condição de contorno distinta. E portanto, o procedimento de modelagem, a apresentação das figuras e das tabelas segue o mesmo padrão estabelecido.

A barra fixo-livre, que é analisada nesta seção, está impedida de deformar-se na extremidade vinculada e o esforço na extremidade livre de vínculo é nulo. Estas informações são introduzidas, respectivamente, nas condições de contorno em $u(\bar{x})$ e $u^{(1)}(\bar{x})$ do modelo matemático, caracterizando o sistema.

A expressão 3.11 representa o modelo matemático da dinâmica de uma barra vinculada em uma das extremidades, Przemieniecki [21].

$$\begin{aligned}
E u^{(2)}(\bar{x}) + \rho \lambda_i u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} \in [0, L] \\
u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 0 \\
u^{(1)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = L
\end{aligned} \tag{3.11}$$

O Método dos Domínios Puntuais é empregado para a resolução numérica do problema de autovalores e autovetores 3.11 que representa o comportamento dinâmico de uma barra vinculada em uma das extremidades. O comprimento da barra é $L = 1$ m. O módulo de elasticidade E e a densidade ρ do material da barra são tomados de forma a respeitar a equação 3.12.

$$\frac{E}{\rho} = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \tag{3.12}$$

Neste caso, os valores exatos das frequências naturais ω_i de vibração da barra fixo-livre são apresentados na expressão 3.13. Observa-se que o índice i está associado ao modo natural de vibração da barra, ou seja, $i = 1$ representa o primeiro modo natural de vibração, $i = 2$ representa o segundo modo e assim por diante.

$$\omega_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \pi \text{ rad/s} \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \tag{3.13}$$

As aproximações MDP, ($M=2,3,4,5$), respectivamente, lineares por partes nas derivadas de segunda, terceira, quarta e quinta ordens são empregadas para a resolução numérica do problema 3.11. E o método de Galerkin, empregando-se elementos finitos lineares de Lagrange, também é utilizado para a modelagem dinâmica da barra fixo-livre.

Observa-se que são necessárias $(N + M + 1)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. No caso das soluções MDP $M = 2$, a equação diferencial do problema 3.11 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), a condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_0 e a condição de contorno na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_N . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da barra fixo-livre.

A figura 3.7 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.11 do comportamento dinâmico da barra fixo-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 2$ e dez domínios pontuais. Os gráficos da figura 3.7 estão ordenados da esquerda para a direita, seguindo da linha de cima para a de baixo. O primeiro gráfico apresenta o primeiro modo natural de vibração, e os gráficos seguintes representam, respectivamente, o segundo modo, o terceiro modo e assim por diante, indo até o nono modo natural de vibração da barra fixo-livre.

As soluções MDP $M = 3$ necessitam de $(N + 4)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, a condição de contorno auxiliar, apresentada na equação 3.14, também é empregada para a montagem do sistema.

$$u^{(3)}(\bar{x}) = 0 \quad \bar{x} = L \quad (3.14)$$

A equação diferencial do problema 3.11 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). A condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_0 e as condições de contorno nas derivadas $u^{(1)}(\bar{x})$ e $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_N . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da barra fixo-

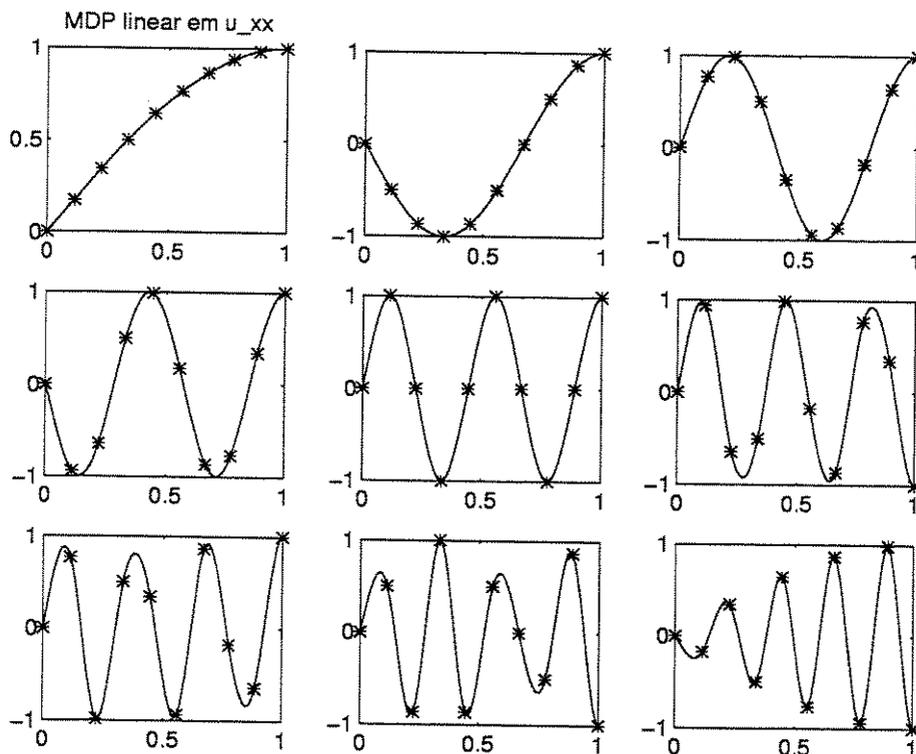


Figura 3.7: Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 2$, $(N + 1) = 10$.

livre.

A figura 3.8 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.11 do comportamento dinâmico da barra fixo-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 3$ e dez domínios puntuais.

As soluções MDP $M = 4$ necessitam de $(N + 5)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.15, também são empregadas para a montagem do sistema neste caso.

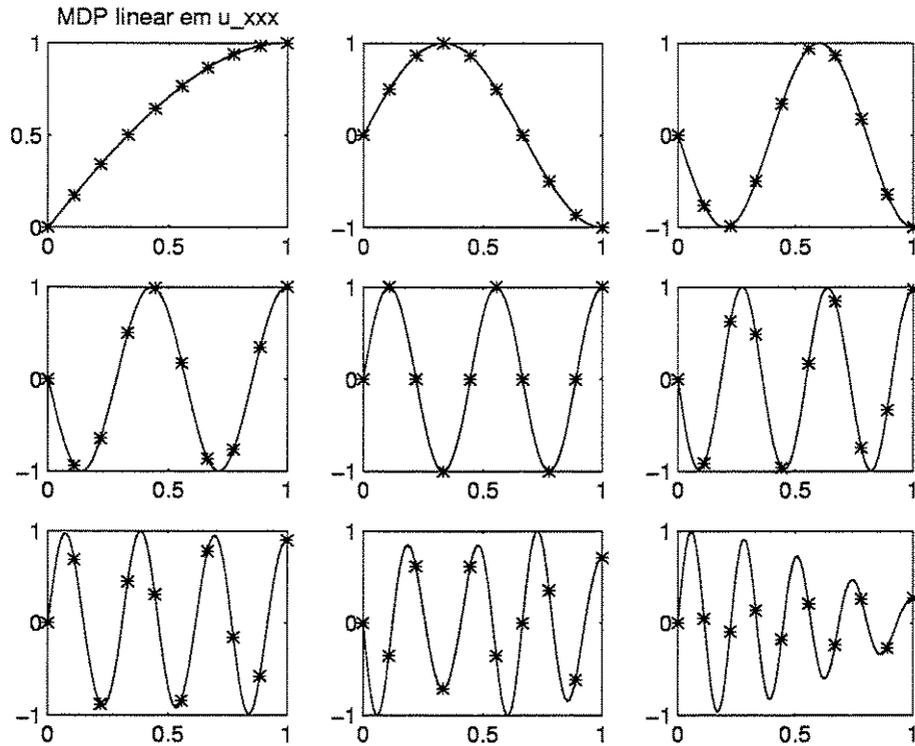


Figura 3.8: Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 3$, $(N + 1) = 10$.

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L \\
 u^{(4)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

A equação diferencial do problema 3.11 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno em $u(\bar{x})$ e na derivada $u^{(4)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_0 . E as condições de contorno nas derivadas $u^{(1)}(\bar{x})$ e $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_N . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da barra fixo-livre.

A figura 3.9 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.11 do comportamento dinâmico da barra fixo-livre empregando-se as aproximações MDP

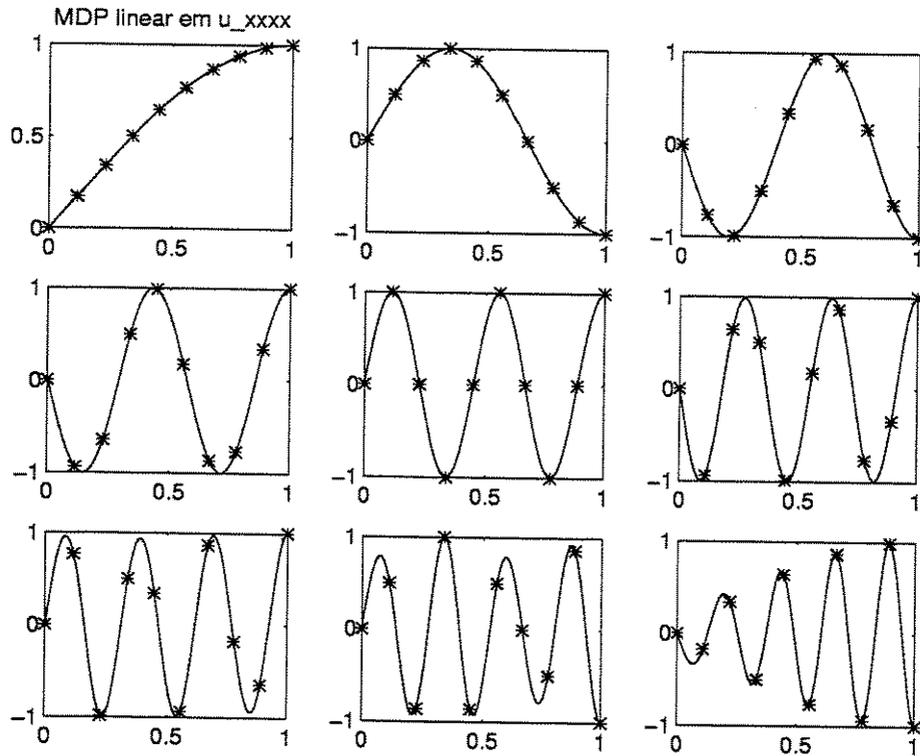


Figura 3.9: Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 4$, $(N + 1) = 10$.

$M = 4$ e dez domínios pontuais.

As soluções MDP $M = 5$ necessitam de $(N + 6)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.16, também são empregadas para a montagem do sistema.

$$\begin{aligned}
 u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L \\
 u^{(4)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\
 u^{(5)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

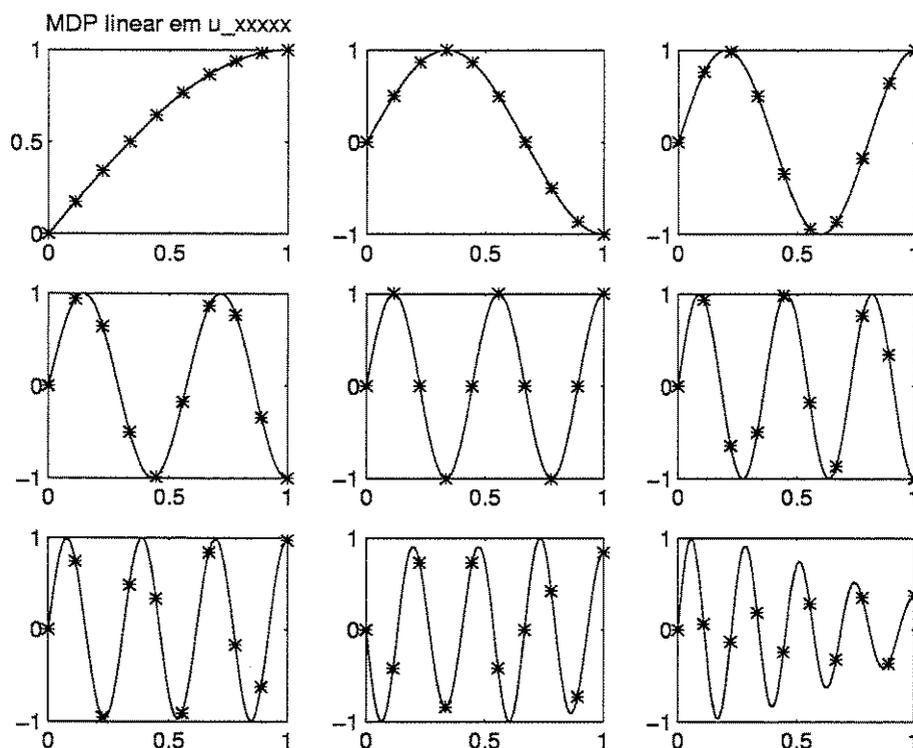


Figura 3.10: Modos de vibração MDP da barra fixo-livre $M = 5$, $(N + 1) = 10$.

A equação diferencial do problema 3.11 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno em $u(\bar{x})$ e na derivada $u^{(4)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_0 . E as condições de contorno nas derivadas $u^{(1)}(\bar{x})$, $u^{(3)}(\bar{x})$ e $u^{(5)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_N . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da barra fixo-livre.

A figura 3.10 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.11 do comportamento dinâmico da barra fixo-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 5$ e dez domínios pontuais.

As soluções do problema 3.11 também são obtidas segundo o método de Galerkin, empregando-se elementos finitos lineares de Lagrange. Neste caso os valores $u(\bar{x}_i)$, ($i =$

$0, 1, \dots, N$), dos deslocamentos nodais representam as variáveis do problema. E a condição de contorno em $u(\bar{x})$ é imposta no nó \bar{x}_0 . O sistema linear final apresenta $(N+1)$ equações, possibilitando o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da barra fixo-livre.

As tabelas 3.5 e 3.6 apresentam as frequências naturais ω_i de vibração da barra vinculada em uma das extremidades obtidas das resoluções numéricas do problema 3.11.

As tabelas 3.7 e 3.8 apresentam os erros percentuais das frequências naturais ω_i de vibração da barra fixo-livre obtidas das resoluções numéricas do problema 3.11.

Observa-se que as frequências naturais ω_i de vibração da barra fixo-livre obtidas das resoluções numéricas do problema 3.11 empregando-se o Método dos Domínios Puntuais com aproximações lineares por partes nas derivadas de segunda ordem apresentam os mesmos valores das resoluções do problema utilizando-se o método de Galerkin com elementos finitos lineares de Lagrange. Entretanto, estes valores obtidos para as frequências naturais ω_i representam os resultados mais grosseiros, como verifica-se nas tabelas 3.5, 3.6, 3.7 e 3.8. Os resultados numéricos das frequências naturais ω_i de vibração da barra vinculada em uma das extremidades aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas de ordens M mais elevadas, ($M = 3, 4, 5$). É conveniente ressaltar que as aproximações MDP de alta ordem são obtidas com aumento mínimo no tamanho do sistema linear final, conduzindo à resultados efetivamente mais apurados. E por isso, mostram-se mais atraentes do ponto de vista do esforço computacional.

Tabela 3.5: Frequências naturais ω_i da modelagem da barra fixo-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 2$	Soluções MDP $M = 3$	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MEF
ω_1	1.5707963	1.7320508	1.5491933	1.5811388	1.5681251	1.7320508
ω_1	1.5707963	1.6114157	1.5695215	1.5712674	1.5707632	1.6114157
ω_2	4.7123890	5.6293031	4.3689384	4.9155139	4.5922204	5.6293031
ω_1	1.5707963	1.5887958	1.5705477	1.5708832	1.5707935	1.5887958
ω_2	4.7123890	5.1961524	4.6475800	4.7434165	4.7043754	5.1961524
ω_3	7.8539816	9.4265764	6.9821110	8.3280723	7.4524911	9.4265764
ω_1	1.5707963	1.5809080	1.5707180	1.5708231	1.5707958	1.5809080
ω_2	4.7123890	4.9871957	4.6925095	4.7206465	4.7111357	4.9871957
ω_3	7.8539816	9.0594009	7.5825829	8.0034445	7.7951899	9.0594009
ω_4	10.995574	13.100688	9.5195418	11.695850	10.227577	13.100688
ω_1	1.5707963	1.5772637	1.5707643	1.5708072	1.5707962	1.5772637
ω_2	4.7123890	4.8881359	4.7043815	4.7154770	4.7120809	4.8881359
ω_3	7.8539816	8.6602540	7.7459667	7.9056942	7.8406256	8.6602540
ω_4	10.995574	12.986471	10.390302	11.349187	10.819124	12.986471
ω_5	14.137167	16.703386	12.023328	15.011740	12.959951	16.703386
ω_1	1.5707963	1.5752859	1.5707809	1.5708015	1.5707963	1.5752859
ω_2	4.7123890	4.8342470	4.7085646	4.7138023	4.7122895	4.8342470
ω_3	7.8539816	8.4187629	7.8029691	7.8761581	7.8498889	8.4187629
ω_4	10.995574	12.496448	10.709773	11.146230	10.943714	12.496448
ω_5	14.137167	16.887909	13.106815	14.746542	13.776661	16.887909
ω_6	17.278760	20.264439	14.509535	18.288924	15.668774	20.264439
ω_1	1.5707963	1.5740941	1.5707880	1.5707991	1.5707963	1.5740941
ω_2	4.7123890	4.8018025	4.7103371	4.7131274	4.7123504	4.8018025
ω_3	7.8539816	8.2694489	7.8268373	7.8650483	7.8524483	8.2694489
ω_4	10.995574	12.124356	10.844353	11.067972	10.976876	12.124356
ω_5	14.137167	16.406602	13.588520	14.444475	14.009288	16.406602
ω_6	17.278760	20.737352	15.760138	18.163770	16.678210	20.737352
ω_7	20.420352	23.799733	16.985466	21.539004	18.363431	23.799733

Tabela 3.6: Frequências naturais ω_i da modelagem da barra fixo-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 2$	Soluções MDP $M = 3$	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MEF
ω_1	1.5707963	1.5733208	1.5707915	1.5707980	1.5707963	1.5733208
ω_2	4.7123890	4.7807801	4.7111910	4.7128126	4.7123719	4.7807801
ω_3	7.8539816	8.1719043	7.8382274	7.8601279	7.8533192	8.1719043
ω_4	10.995574	11.866236	10.908314	11.034415	10.987730	11.866236
ω_5	14.137167	15.945504	13.820965	14.299994	14.084836	15.945504
ω_6	17.278760	20.335844	16.395226	17.791222	17.033156	20.335844
ω_7	20.420352	24.532707	18.369147	21.580107	19.535238	24.532707
ω_8	23.561945	27.318162	19.454887	24.770012	21.048961	27.318162
ω_1	1.5707963	1.5727908	1.5707933	1.5707973	1.5707963	1.5727908
ω_2	4.7123890	4.7663875	4.7116432	4.7126495	4.7123806	4.7663875
ω_3	7.8539816	8.1049485	7.8442159	7.8576743	7.8536635	8.1049485
ω_4	10.995574	11.685011	10.941747	11.018268	10.991889	11.685011
ω_5	14.137167	15.588457	13.942740	14.230249	14.113126	15.588457
ω_6	17.278760	19.833896	16.734543	17.574295	17.167518	19.833896
ω_7	20.420352	24.254087	19.143418	21.173231	20.016019	24.254087
ω_8	23.561945	28.279729	20.946333	24.984217	22.357473	28.279729
ω_9	26.703538	30.825009	21.919931	27.987308	23.728289	30.825009
ω_1	1.5707963	1.5724117	1.5707943	1.5707970	1.5707963	1.5724117
ω_2	4.7123890	4.7561040	4.7119006	4.7125581	4.7123846	4.7561040
ω_3	7.8539816	8.0570784	7.8476077	7.8563371	7.8538158	8.0570784
ω_4	10.995574	11.554184	10.960580	11.009738	10.993685	11.554184
ω_5	14.137167	15.320287	14.011198	14.194048	14.125067	15.320287
ω_6	17.278760	19.400229	16.926554	17.457545	17.223666	19.400229
ω_7	20.420352	23.754743	19.590983	20.887866	20.221385	23.754743
ω_8	23.561945	28.146516	21.844692	24.577570	22.961102	28.146516
ω_9	26.703538	31.985831	23.500084	28.370924	25.152514	31.985831
ω_{10}	29.845130	34.323586	24.381894	31.194502	26.403217	34.323586

Tabela 3.7: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra fixo-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 2$	Erros MDP $M = 3$	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MEF
ω_1	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_1	2.5859085	-0.0811560	0.0299913	-0.0021117	2.5859096
ω_2	19.457523	-7.2882481	4.3104451	-2.5500568	19.457522
ω_1	1.1458838	-0.0158269	0.0055292	-0.0001770	1.1458821
ω_2	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_3	20.022899	-11.101001	6.0363094	-5.1119368	20.022898
ω_1	0.6437303	-0.0049846	0.0017064	-0.0000310	0.6437291
ω_2	5.8315797	-0.4218555	0.1752310	-0.0265951	5.8315797
ω_3	15.347875	-3.4555558	1.9030201	-0.7485602	1.5347875
ω_4	19.145101	-13.423878	6.3687031	-6.9846051	19.145100
ω_1	0.4117251	-0.0020373	0.0006908	-0.0000081	0.4117258
ω_2	3.7294664	-0.1699233	0.0655300	-0.0065371	3.7294655
ω_3	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265779
ω_4	18.106343	-5.5046863	3.2159541	-1.6047379	18.106346
ω_5	18.152285	-14.952352	6.1863400	-8.3270997	18.152287
ω_1	0.2858182	-0.0009813	0.0003310	-0.0000027	0.2858151
ω_2	2.5859085	-0.0811560	0.0299913	-0.0021117	2.5859075
ω_3	7.1910190	-0.6495121	0.2823591	-0.0521099	7.1910184
ω_4	13.649795	-2.5992405	1.3701469	-0.4716478	13.649798
ω_5	19.457523	-7.2882481	4.3104451	-2.5500568	19.457520
ω_6	17.279480	-16.026755	5.8462759	-9.3177162	17.279478
ω_1	0.2099430	-0.0005293	0.0001780	-0.0000011	0.2099428
ω_2	1.8974146	-0.0435423	0.0156703	-0.0008191	1.8974138
ω_3	5.2898929	-0.3456122	0.1409057	-0.0195235	5.2898935
ω_4	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265782
ω_5	16.052967	-3.8808849	2.1737580	-0.9045600	16.052969
ω_6	20.016438	-8.7889507	5.1219585	-3.4756519	20.016439
ω_7	16.549082	-16.820898	5.4781200	-10.072900	16.549082

Tabela 3.8: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da barra fixo-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 2$	Erros MDP $M = 3$	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MEF
ω_1	0.1607146	-0.0003101	0.0001041	-0.0000005	0.1607130
ω_2	1.4513050	-0.0254220	0.0089901	-0.0003623	1.4513046
ω_3	4.0479170	-0.2005892	0.0782572	-0.0084345	4.0479171
ω_4	7.9182942	-0.7935941	0.3532354	-0.0713371	7.9182923
ω_5	12.791365	-2.2366727	1.1517686	-0.3701686	12.791368
ω_6	17.692733	-5.1134107	2.9658531	-1.4214188	17.692731
ω_7	20.138509	-10.044908	5.6794074	-4.3344688	20.138510
ω_8	15.941878	-17.430896	5.1271942	-10.665433	15.941880
ω_1	0.1269718	-0.0001935	0.0000649	-0.0000002	0.1269721
ω_2	1.1458838	-0.0158269	0.0055292	-0.0001770	1.1458842
ω_3	3.1954097	-0.1243414	0.0470162	-0.0040511	3.1954094
ω_4	6.2701280	-0.4895354	0.2063940	-0.0335179	6.2701292
ω_5	10.265779	-1.3752890	0.6584242	-0.1700543	10.265777
ω_6	14.787729	-3.1496299	1.7103944	-0.6438065	14.787731
ω_7	18.774089	-6.2532442	3.6869051	-1.9800527	18.774087
ω_8	20.022899	-11.101001	6.0363094	-5.1119368	20.022898
ω_9	15.434178	-17.913756	4.8074909	-11.141776	15.434178
ω_1	0.1028398	-0.0001270	0.0000425	-0.0000001	0.1028379
ω_2	0.9276611	-0.0103632	0.0035888	-0.0000934	0.9276615
ω_3	2.5859085	-0.0811560	0.0299913	-0.0021117	2.5859083
ω_4	5.0803158	-0.3182584	0.1288088	-0.0171849	5.0803141
ω_5	8.3688639	-0.8910445	0.4023534	-0.0855880	8.3688625
ω_6	12.277901	-2.0383743	1.0347095	-0.3188509	12.277903
ω_7	16.328761	-4.0614813	2.2894496	-0.9743559	16.328762
ω_8	19.457523	-7.2882481	4.3104451	-2.5500568	19.457524
ω_9	19.781251	-11.996365	6.2440655	-5.8083068	19.781250
ω_{10}	15.005649	-18.305285	4.5212464	-11.532578	15.005650

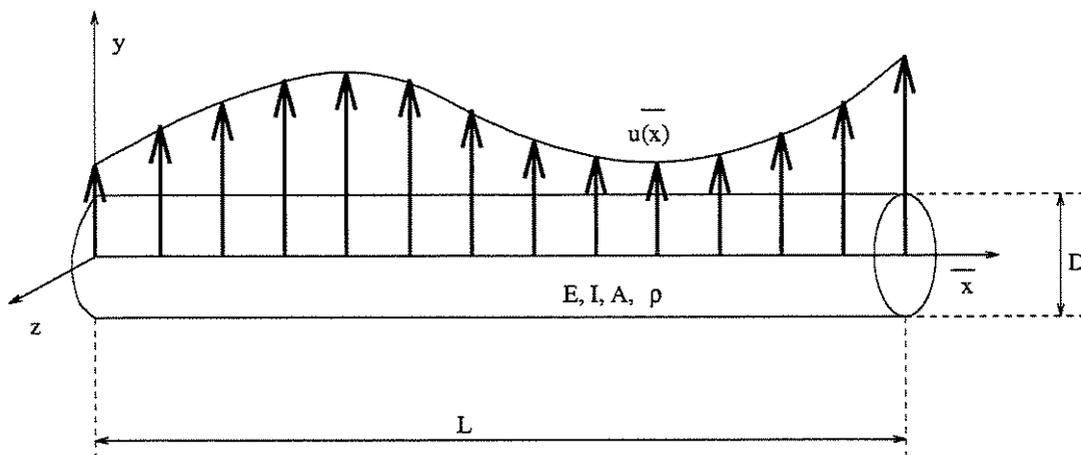


Figura 3.11: Representação de viga livre de vínculos nas extremidades.

3.3 Vibrações transversais de viga livre-livre

A viga é um elemento estrutural mecânico, dimensionalmente caracterizado pelo comprimento L muito maior que o diâmetro D , $L \gg D$, sujeito aos carregamentos nas direções y ou z perpendiculares ao eixo da viga. A modelagem dinâmica de uma viga fornece os autovetores e os autovalores do sistema, que têm o significado físico dos modos e das frequências naturais de vibração, respectivamente. O comportamento dinâmico de uma viga, ou seja, os modos e as frequências naturais de vibração, depende das condições de vínculo e das propriedades do material da mesma. A figura 3.11 apresenta a representação de uma viga livre de vínculos nas extremidades. A viga livre-livre, que é analisada nesta seção, não está vinculada a nenhum outro elemento estrutural mecânico, de forma que os momentos fletores e os esforços cortantes nas extremidades são nulos. Estas informações são introduzidas nas condições de contorno em $u^{(2)}(\bar{x})$ e $u^{(3)}(\bar{x})$ do modelo matemático, caracterizando o sistema.

A expressão 3.17 representa o modelo matemático da dinâmica de uma viga livre

de vínculos nas extremidades. A função $u(\bar{x})$ caracteriza a deflexão da viga na direção y perpendicular ao eixo, dada em função da posição \bar{x} , definida ao longo do comprimento $\bar{x} \in [0, L]$ da mesma. O módulo de elasticidade do material da viga é dado em $[\text{N}/\text{m}^2]$ e representado por E . O momento de inércia de área da seção transversal da viga é dado em $[\text{m}^4]$ e representado por I . A densidade do material da viga é dada em $[\text{Kg}/\text{m}^3]$ e representada por ρ . A área da seção transversal da viga é dada em $[\text{m}^2]$ e representada por A . E na expressão 3.17, λ_i representa os autovalores do sistema, Przemieniecki [21].

$$\begin{aligned}
 EI u^{(4)}(\bar{x}) + \rho A \lambda_i u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} \in [0, L] \\
 u^{(2)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 0 \\
 u^{(2)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = L \\
 u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 0 \\
 u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = L
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Resolvendo-se o problema de autovalores e autovetores apresentado em 3.17, os valores obtidos de λ_i são sempre números reais negativos. A raiz quadrada de um autovalor λ_i , representada por um número imaginário, é apresentada na equação 3.18.

$$\sqrt{\lambda_i} = \omega_i i \tag{3.18}$$

Na expressão 3.18, ω_i é a frequência natural de vibração do sistema, que é dada em $[\text{rad}/\text{s}]$. O respectivo autovetor do sistema, que é a configuração $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, L]$, que satisfaz a equação diferencial da expressão 3.17, representa o modo de vibração associado à frequência natural ω_i .

O Método dos Domínios Puntuais é empregado para a resolução numérica do pro-

blema de autovalores e autovetores 3.17 que representa o comportamento dinâmico de uma viga livre de vínculos nas extremidades. O comprimento da viga é $L = 1$ m. O módulo de elasticidade E , o momento de inércia de área da seção transversal I , a densidade ρ e a área da seção transversal A da viga são tomados de forma a respeitar a equação 3.19.

$$\frac{EI}{\rho A} = 1 \frac{\text{m}^4}{\text{s}^2} \quad (3.19)$$

Neste caso, os valores exatos das frequências naturais ω_i de vibração da viga livre-livre são dados pelos quadrados das raízes ψ_i , ($i = 1, 2, \dots, \infty$), da função $f(\psi)$, definida em 3.20, como é apresentado na equação 3.21. Observa-se que o índice i está associado ao modo natural de vibração da viga, ou seja, $i = 1$ representa o primeiro modo natural de vibração, $i = 2$ representa o segundo modo e assim por diante.

$$f(\psi) = \cos(\psi) \cosh(\psi) - 1 \quad (3.20)$$

$$\omega_i = \psi_i^2 \text{ rad/s} \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (3.21)$$

As aproximações MDP, ($M=4,5,6,7$), respectivamente, lineares por partes nas derivadas de quarta, quinta, sexta e sétima ordens são empregadas para a resolução numérica do problema 3.17. E o método de Galerkin, empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite, também é utilizado para a modelagem dinâmica da viga livre-livre.

Para possibilitar a comparação dos resultados, são tomados domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$), igualmente espaçados sobre o domínio $[0, 1]$ do problema 3.17 nas diver-

sas soluções MDP. Assim, os intervalos Δx_i , ($i = 1, 2, \dots, N$), definidos entre os domínios pontuais vizinhos $i - 1$ e i , são todos iguais a Δx , como apresentado na equação 3.22.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{1}{N} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (3.22)$$

Observa-se que são necessárias $(N + M + 1)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. No caso das soluções MDP $M = 4$, a equação diferencial do problema 3.17 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno na derivada $u^{(2)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . E as condições de contorno na derivada $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas nestes mesmos domínios pontuais. É possível então o cálculo de $(N + 1)$ autovetores e autovalores do sistema da viga livre-livre, incluindo os dois modos de corpo rígido, cujas frequências naturais são nulas.

A figura 3.12 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.17 do comportamento dinâmico da viga livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 4$ e nove domínios pontuais. Os autovetores $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, 1]$, do sistema têm o significado físico dos modos naturais de vibração da viga livre-livre, ou seja, as configurações da deflexão na direção perpendicular ao eixo da viga que satisfazem a equação diferencial 3.17 para cada uma das frequências naturais ω_i , ($i = 0, 1, \dots, 7$). Os autovetores $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, 1]$, são normalizados de forma que a deflexão máxima de cada modo apresente o valor unitário. As deflexões $u(\bar{x})$, $\bar{x} \in [0, 1]$, são representadas no eixo y dos gráficos. Os gráficos da figura 3.12 estão ordenados da esquerda para a direita, seguindo da linha de cima para a de baixo. Os dois primeiros gráficos apresentam os dois modos de corpo rígido e os seguintes representam, respectivamente, o primeiro modo natural de vibração, o segundo modo, o terceiro modo e assim por diante, indo até o sétimo modo natural de

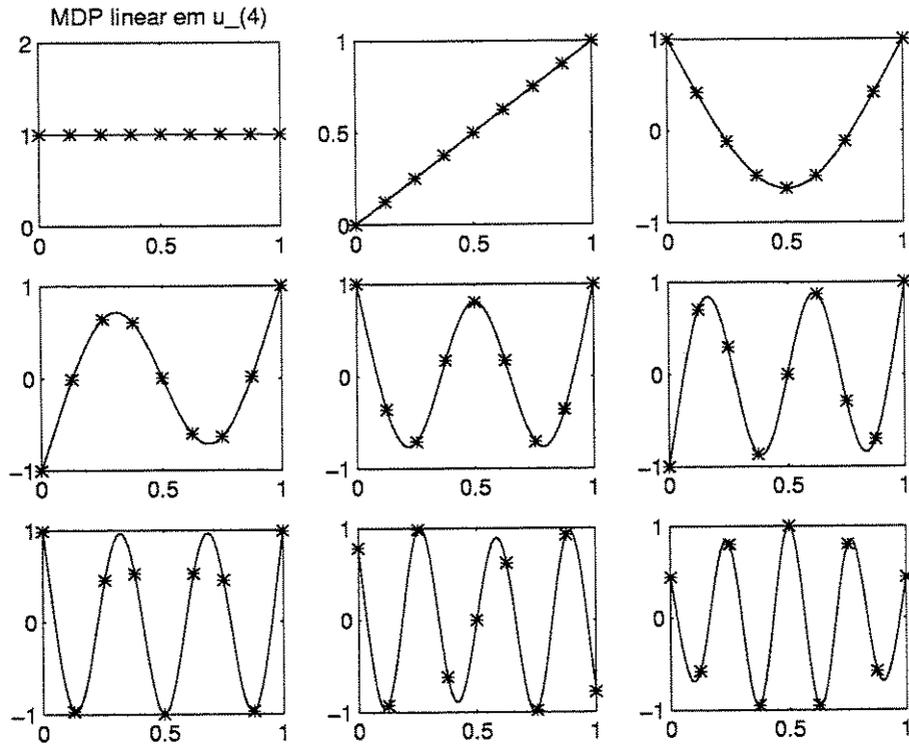


Figura 3.12: Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 4$, $(N + 1) = 9$.

vibração da viga livre-livre.

As soluções MDP $M = 5$ necessitam de $(N + 6)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, a condição de contorno auxiliar, apresentada na equação 3.23, também é empregada para a montagem do sistema.

$$u^{(5)}(\bar{x}) = -u^{(1)}(\bar{x}) \quad \bar{x} = 0 \tag{3.23}$$

A equação diferencial do problema 3.17 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno na derivada $u^{(2)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios

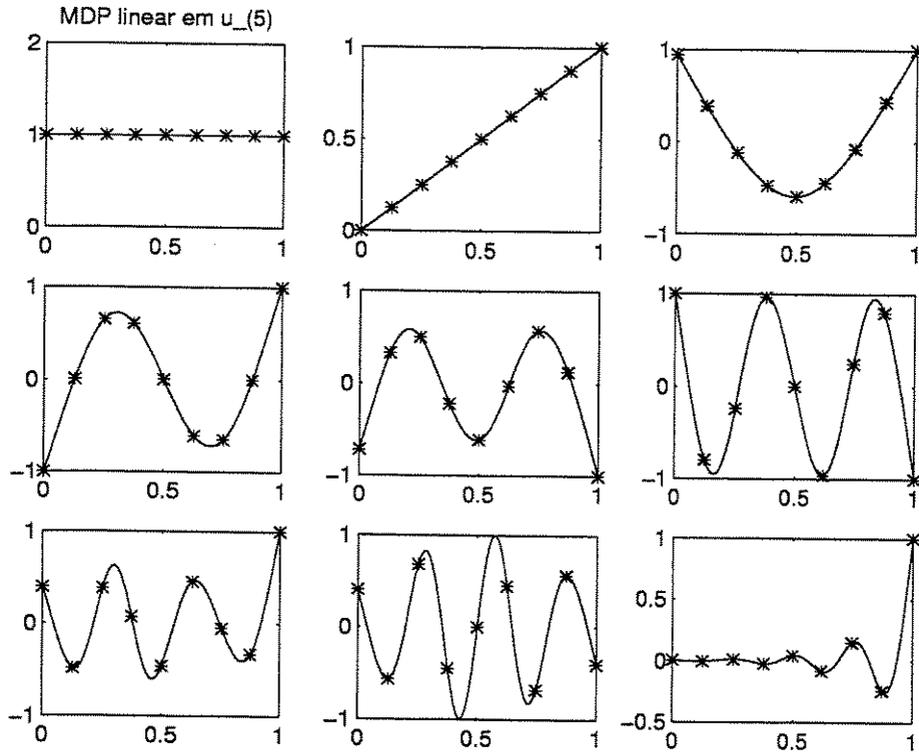


Figura 3.13: Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 5$, $(N + 1) = 9$.

puntuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . As condições de contorno na derivada $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas nestes mesmos domínios puntuais. E a condição de contorno na derivada $u^{(5)}(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_0 . É possível então o cálculo de $(N + 1)$ autovetores e autovalores do sistema da viga livre-livre, incluindo os dois modos de corpo rígido.

A figura 3.13 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.17 do comportamento dinâmico da viga livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 5$ e nove domínios puntuais. Os gráficos da figura 3.13 apresentam a mesma organização estabelecida na descrição da figura 3.12.

As soluções MDP $M = 6$ necessitam de $(N + 7)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema.

Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.24, também são empregadas para a montagem do sistema neste caso.

$$\begin{aligned} u^{(6)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\ u^{(6)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L \end{aligned} \tag{3.24}$$

A equação diferencial do problema 3.17 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno na derivada $u^{(2)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . As condições de contorno na derivada $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . E as condições de contorno na derivada $u^{(6)}(\bar{x})$ são impostas nestes mesmos domínios pontuais. É possível então o cálculo de $(N+1)$ autovetores e autovalores do sistema da viga livre-livre, incluindo os dois modos de corpo rígido, cujas frequências naturais são nulas.

A figura 3.14 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.17 do comportamento dinâmico da viga livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 6$ e nove domínios pontuais. Os gráficos da figura 3.14 apresentam a mesma organização estabelecida na descrição da figura 3.12.

As soluções MDP $M = 7$ necessitam de $(N + 8)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.25, também são empregadas para a montagem do sistema.

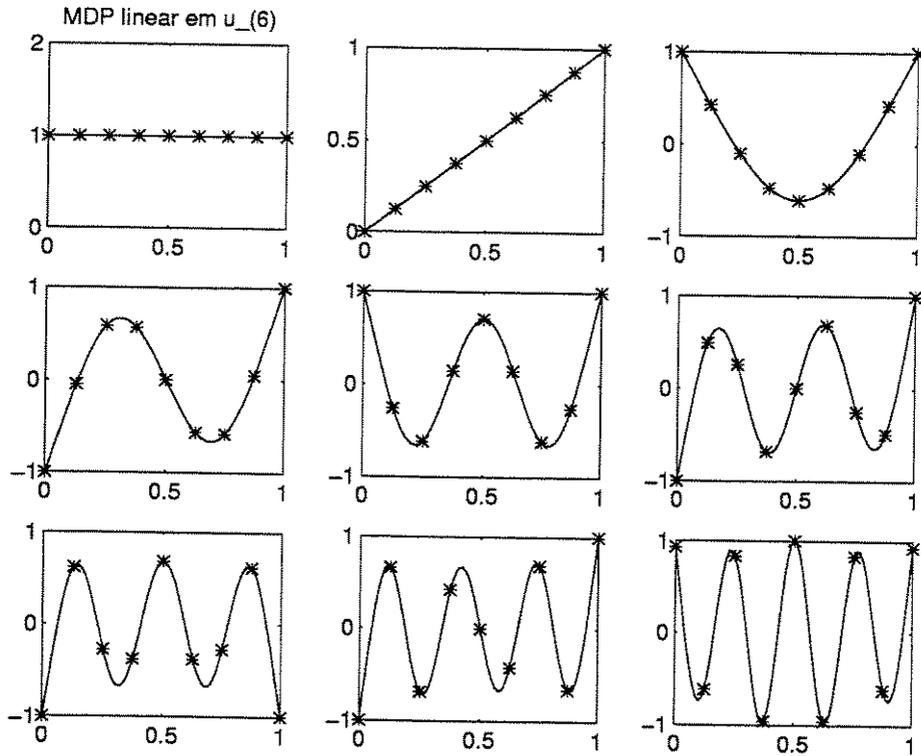


Figura 3.14: Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 6$, $(N + 1) = 9$.

$$\begin{aligned}
 u^{(6)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\
 u^{(6)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L \\
 u^{(7)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.25}$$

A equação diferencial do problema 3.17 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno na derivada $u^{(2)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . As condições de contorno na derivada $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas nestes mesmos domínios pontuais. As condições de contorno na derivada $u^{(6)}(\bar{x})$ são impostas nos domínios pontuais \bar{x}_0 e \bar{x}_N . E a condição de contorno na derivada $u^{(7)}(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_0 . É possível então o cálculo de $(N + 1)$ autovetores e autovalores

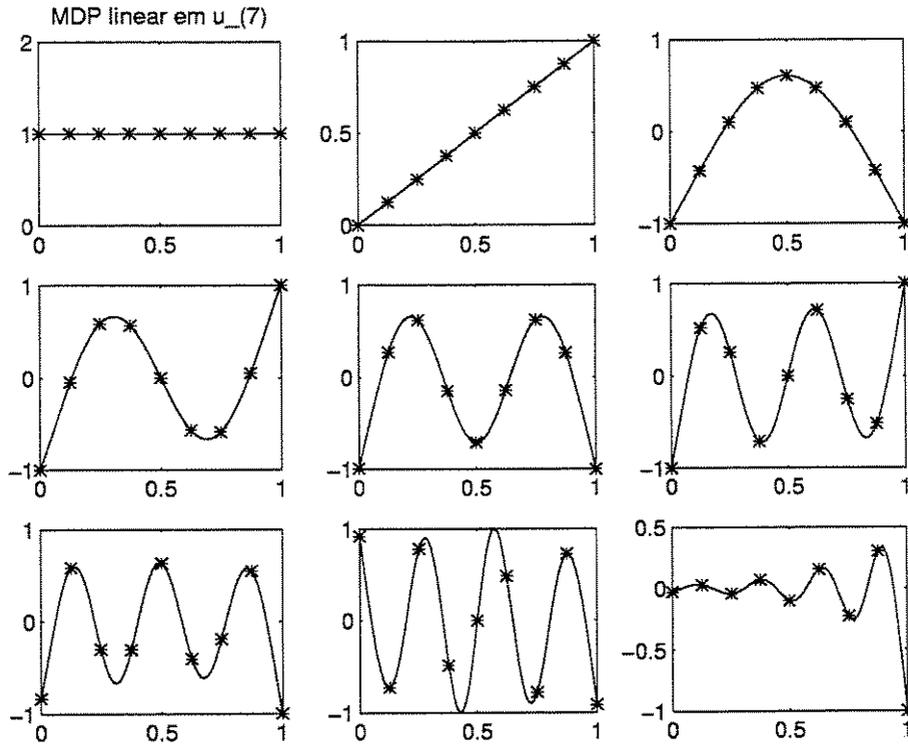


Figura 3.15: Modos de vibração MDP da viga livre-livre $M = 7$, $(N + 1) = 9$.

do sistema da viga livre-livre, incluindo os dois modos de corpo rígido.

A figura 3.15 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.17 do comportamento dinâmico da viga livre-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 7$ e nove domínios pontuais. Os gráficos da figura 3.15 apresentam a mesma organização estabelecida na descrição da figura 3.12.

As soluções do problema 3.17 também são obtidas segundo o método de Galerkin, empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite. Neste caso os valores $u(\bar{x}_i)$ e $u^{(1)}(\bar{x}_i)$, ($i = 0, 1, \dots, N$), respectivamente, das deflexões e das rotações nodais representam as variáveis do problema. O sistema linear final apresenta $2(N + 1)$ equações, possibilitando o cálculo de $2(N + 1)$ autovetores e autovalores do sistema da viga livre-livre, incluindo

os dois modos de corpo rígido, cujas frequências naturais são nulas.

A ordem do sistema linear final e, conseqüentemente, o número dos autovetores e dos autovalores obtidos da solução, são os parâmetros para a comparação dos resultados dos esquemas numéricos. Como as soluções empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite apresentam duas variáveis por nó, o espaçamento utilizado entre os nós nas soluções MEF é o dobro do espaçamento Δx utilizado entre os domínios puntuais nas soluções MDP. Assim, os tamanhos dos sistemas lineares finais MEF e MDP são compatíveis e têm-se o mesmo número de autovetores e de autovalores obtidos das soluções, possibilitando a comparação dos resultados.

As tabelas 3.9 e 3.10 apresentam as frequências naturais ω_i de vibração da viga livre de vínculos nas extremidades obtidas das resoluções numéricas do problema 3.17. As frequências naturais ω_i são calculadas a partir dos autovalores λ_i do sistema, empregando-se a equação 3.18, e são dadas em [rad/s]. As soluções foram obtidas utilizando-se três, cinco, sete, nove e onze domínios puntuais, $((N + 1) = 3, 5, 7, 9, 11)$, e as frequências naturais resultantes das diferentes soluções do problema 3.17 são separadas por linhas horizontais. A primeira coluna das tabelas 3.9 e 3.10 identifica o modo de vibração i que está associado à respectiva frequência natural. Na segunda coluna são apresentados os valores exatos das frequências naturais de vibração da viga livre-livre, calculados segundo as expressões 3.20 e 3.21. As frequências naturais ω_i obtidas das resoluções numéricas MDP são apresentadas na terceira, na quarta, na quinta e na sexta colunas das tabelas 3.9 e 3.10 empregando-se, respectivamente, as aproximações lineares por partes nas derivadas de ordens M , $(M = 4, 5, 6, 7)$. E finalmente, na sétima coluna das tabelas 3.9 e 3.10 são apresentadas as frequências naturais obtidas das resoluções numéricas do problema 3.17 empregando-se o método de Galerkin com elementos finitos cúbicos de Hermite.

As tabelas 3.11 e 3.12 apresentam os erros percentuais das frequências naturais ω_i

Tabela 3.9: Frequências naturais ω_i da modelagem da viga livre-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MDP $M = 6$	Soluções MDP $M = 7$	Soluções MEF
ω_1	22.373285	23.456101	18.967038	22.675012	22.149932	26.832816
ω_2	61.672823	67.854333	61.672346	62.059010	61.513355	91.651514
ω_1	22.373285	22.816683	21.049375	22.407161	22.363443	22.423246
ω_2	61.672823	66.201148	60.997167	62.317885	61.603743	70.177534
ω_3	120.90339	138.04390	100.41284	124.77710	115.42425	175.47991
ω_4	199.85945	227.67766	188.58206	203.57660	193.15870	280.34820
ω_1	22.373285	22.603898	21.682121	22.380895	22.372000	22.434828
ω_2	61.672823	64.067028	61.484116	61.826473	61.665189	61.992270
ω_3	120.90339	130.98808	111.13199	122.05865	120.24957	135.97347
ω_4	199.85945	227.85723	192.55745	204.98159	198.24945	244.07582
ω_5	298.55554	353.80480	243.04378	312.39383	275.72406	472.61787
ω_6	416.99079	480.08886	376.94484	428.53940	391.44877	581.38951
ω_1	22.373285	22.513692	21.951074	22.375776	22.373003	22.397611
ω_2	61.672823	63.129968	61.601707	61.723786	61.671307	62.056842
ω_3	120.90339	127.08518	115.16947	121.29022	120.76774	121.86035
ω_4	199.85945	217.67621	197.26857	201.66565	199.56646	223.29126
ω_5	298.55554	339.07721	270.00523	304.81003	294.01570	349.62289
ω_6	416.99079	493.05123	389.14789	433.75035	408.50107	542.23803
ω_7	555.16525	668.58065	442.80555	586.83667	499.43634	902.96290
ω_8	713.07892	823.24313	626.21861	736.28030	654.56923	996.92235

de vibração da viga livre-livre obtidas das resoluções numéricas do problema 3.17. A equação 3.26 é utilizada para o cálculo dos erros percentuais empregando-se os mesmos resultados apresentados nas tabelas 3.9 e 3.10, onde ω_i^{ex} representa o valor exato da frequência natural e ω_i^{num} representa o valor obtido através da resolução numérica para a respectiva frequência natural.

Tabela 3.10: Frequências naturais ω_i da modelagem da viga livre-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MDP $M = 6$	Soluções MDP $M = 7$	Soluções MEF
ω_1	22.373285	22.467555	22.089227	22.374310	22.373201	22.384146
ω_2	61.672823	62.649875	61.640469	61.693911	61.672396	61.869318
ω_3	120.90339	125.04562	117.12442	121.06323	120.86400	122.06929
ω_4	199.85945	211.83849	198.71131	200.60260	199.78207	201.85109
ω_5	298.55554	326.27315	281.15002	301.15565	297.31920	332.17147
ω_6	416.99079	472.04095	405.38788	424.48902	414.90215	478.21029
ω_7	555.16525	651.62800	493.69768	573.55677	539.92376	682.10812
ω_8	713.07892	861.20213	644.82312	750.62747	687.96207	964.49832
ω_9	890.73180	1079.4338	697.48878	947.93442	784.89963	1455.4978
ω_{10}	1088.1239	1256.0116	936.74589	1125.9300	982.15346	1529.2979

$$\text{erro} = \frac{100}{\omega_i^{\text{ex}}} (\omega_i^{\text{num}} - \omega_i^{\text{ex}}) \quad (3.26)$$

A apresentação dos erros nas tabelas 3.11 e 3.12 segue o mesmo padrão utilizado para a apresentação dos resultados das tabelas 3.9 e 3.10. Os erros percentuais das frequências naturais ω_i obtidos das resoluções numéricas MDP são apresentados na segunda, na terceira, na quarta e na quinta colunas das tabelas 3.11 e 3.12 representando, respectivamente, as aproximações lineares por partes nas derivadas de ordens M , ($M = 4, 5, 6, 7$). Na sexta coluna das tabelas 3.11 e 3.12 são apresentados os erros percentuais das frequências naturais obtidos das resoluções numéricas do problema 3.17 empregando-se o método de Galerkin com elementos finitos cúbicos de Hermite.

Comparando-se diretamente as soluções do problema 3.17 obtidas segundo o Método dos Domínios Puntuais empregando-se as aproximações lineares por partes nas derivadas

Tabela 3.11: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga livre-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MDP $M = 6$	Erros MDP $M = 7$	Erros MEF
ω_1	4.8397705	-15.224620	1.3486021	-0.9983061	19.932390
ω_2	10.023070	-0.0007732	0.6261873	-0.2585701	48.609241
ω_1	1.9818175	-5.9173707	0.1514121	-0.0439917	0.2233045
ω_2	7.3424975	-1.0955495	1.0459430	-0.1120102	13.790047
ω_3	14.177029	-16.947875	3.2039666	-4.5318310	45.140602
ω_4	13.918888	-5.6426599	1.8598806	-3.3527284	40.272678
ω_1	1.0307487	-3.0892394	0.0340134	-0.0057461	0.2750716
ω_2	3.8821068	-0.3059807	0.2491380	-0.0123781	0.5179707
ω_3	8.3411107	-8.0819931	0.9555210	-0.5407821	12.464562
ω_4	14.008738	-3.6535669	2.5628744	-0.8055665	22.123734
ω_5	18.505524	-18.593445	4.6350825	-7.6473112	58.301493
ω_6	15.131768	-9.6035563	2.7695142	-6.1253183	39.425026
ω_1	0.6275632	-1.8871251	0.0111328	-0.0012642	0.1087259
ω_2	2.3627022	-0.1153112	0.0826354	-0.0024583	0.6226716
ω_3	5.1129955	-4.7425638	0.3199447	-0.1121951	0.7915066
ω_4	8.9146466	-1.2963524	0.9037373	-0.1465986	11.724145
ω_5	13.572574	-9.5628122	2.0949196	-1.5205996	17.104809
ω_6	18.240318	-6.6771000	4.0191686	-2.0359484	30.035974
ω_7	20.429125	-20.238964	5.7048631	-10.038257	62.647591
ω_8	15.449091	-12.181023	3.2536903	-8.2052196	39.805332

de ordens M mais baixas, ($M = 4, 5$), com as soluções obtidas utilizando-se elementos finitos cúbicos de Hermite, observa-se que os resultados MDP representam melhor as frequências mais altas ω_i de vibração da viga livre-livre, enquanto os resultados MEF representam melhor as frequências mais baixas. Entretanto, estes valores obtidos para as frequências naturais ω_i representam os resultados mais grosseiros, como verifica-se nas

Tabela 3.12: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga livre-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MDP $M = 6$	Erros MDP $M = 7$	Erros MEF
ω_1	0.4213501	-1.2696321	0.0045775	-0.0003781	0.0485425
ω_2	1.5842505	-0.0524600	0.0341938	-0.0006916	0.3186090
ω_3	3.4260682	-3.1256116	0.1322039	-0.0325814	0.9643222
ω_4	5.9937329	-0.5744749	0.3718391	-0.0387161	0.9965213
ω_5	9.2839052	-5.8299103	0.8708972	-0.4141060	11.259525
ω_6	13.201769	-2.7825321	1.7981779	-0.5008838	14.681261
ω_7	17.375503	-11.071940	3.3128006	-2.7453973	22.865781
ω_8	20.772345	-9.5719839	5.2656937	-3.5223092	35.258286
ω_9	21.185052	-21.694860	6.4219802	-11.881485	63.404720
ω_{10}	15.429099	-13.911835	3.4744289	-9.7388199	40.544466

tabelas 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12. Os resultados numéricos das frequências naturais ω_i de vibração da viga livre de vínculos nas extremidades aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas de ordens M mais elevadas, ($M = 6, 7$). É conveniente ressaltar que as aproximações MDP de alta ordem são obtidas com aumento mínimo no tamanho do sistema linear final, conduzindo à resultados efetivamente mais apurados. E por isso, mostram-se mais atraentes do ponto de vista do esforço computacional.

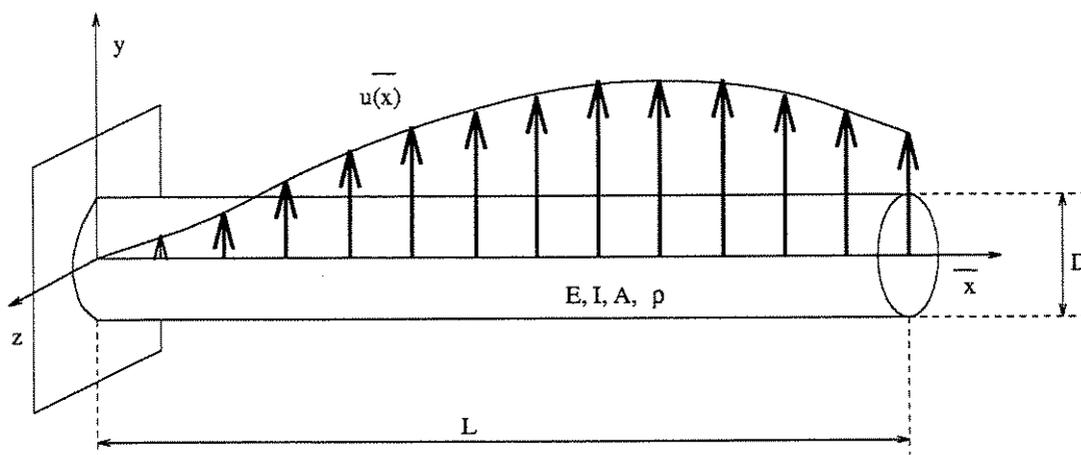


Figura 3.16: Representação de viga vinculada em uma das extremidades.

3.4 Vibrações transversais de viga fixo-livre

Esta seção apresenta a modelagem MDP de viga fixo-livre. Trata-se do mesmo problema descrito na seção anterior, apenas com uma condição de contorno distinta. E portanto, o procedimento de modelagem, a apresentação das figuras e das tabelas segue o mesmo padrão estabelecido.

A figura 3.16 apresenta a representação de uma viga vinculada em uma das extremidades. A viga fixo-livre, que é analisada nesta seção, está impedida de defletir-se e de rotacionar-se na extremidade vinculada, enquanto o momento fletor e o esforço cortante são nulos na extremidade livre de vínculo. Estas informações são introduzidas nas condições de contorno em $u(\bar{x})$, $u^{(1)}(\bar{x})$, $u^{(2)}(\bar{x})$ e $u^{(3)}(\bar{x})$ do modelo matemático, caracterizando o sistema.

A expressão 3.27 representa o modelo matemático da dinâmica de uma viga vinculada em uma das extremidades, Przemieniecki [21].

$$\begin{aligned}
EI u^{(4)}(\bar{x}) + \rho A \lambda_i u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} \in [0, L] \\
u(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 0 \\
u^{(1)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = 0 \\
u^{(2)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = L \\
u^{(3)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} = L
\end{aligned} \tag{3.27}$$

O Método dos Domínios Puntuais é empregado para a resolução numérica do problema de autovalores e autovetores 3.27 que representa o comportamento dinâmico de uma viga vinculada em uma das extremidades. O comprimento da viga é $L = 1$ m. O módulo de elasticidade E , o momento de inércia de área da seção transversal I , a densidade ρ e a área da seção transversal A da viga são tomados de forma a respeitar a equação 3.28.

$$\frac{EI}{\rho A} = 1 \frac{\text{m}^4}{\text{s}^2} \tag{3.28}$$

Neste caso, os valores exatos das frequências naturais ω_i de vibração da viga fixo-livre são dados pelos quadrados das raízes ψ_i , ($i = 1, 2, \dots, \infty$), da função $f(\psi)$, definida em 3.29, como é apresentado na equação 3.30. Observa-se que o índice i está associado ao modo natural de vibração da viga, ou seja, $i = 1$ representa o primeiro modo natural de vibração, $i = 2$ representa o segundo modo e assim por diante.

$$f(\psi) = \cos(\psi) \cosh(\psi) + 1 \tag{3.29}$$

$$\omega_i = \psi_i^2 \text{ rad/s} \quad (i = 1, 2, \dots, \infty) \quad (3.30)$$

As aproximações MDP, ($M=4,5,6,7$), respectivamente, lineares por partes nas derivadas de quarta, quinta, sexta e sétima ordens são empregadas para a resolução numérica do problema 3.27. E o método de Galerkin, empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite, também é utilizado para a modelagem dinâmica da viga fixo-livre.

Observa-se que são necessárias $(N + M + 1)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. No caso das soluções MDP $M = 4$, a equação diferencial do problema 3.27 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno em $u(\bar{x})$ e na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_0 . E as condições de contorno nas derivadas $u^{(2)}(\bar{x})$ e $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_N . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da viga fixo-livre.

A figura 3.17 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.27 do comportamento dinâmico da viga fixo-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 4$ e dez domínios pontuais. Os gráficos da figura 3.17 estão ordenados da esquerda para a direita, seguindo da linha de cima para a de baixo. O primeiro gráfico apresenta o primeiro modo natural de vibração, e os gráficos seguintes representam, respectivamente, o segundo modo, o terceiro modo e assim por diante, indo até o nono modo natural de vibração da viga fixo-livre.

As soluções MDP $M = 5$ necessitam de $(N + 6)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, a condição de contorno auxiliar, apresentada na equação 3.31, também é empregada para a montagem do sistema.

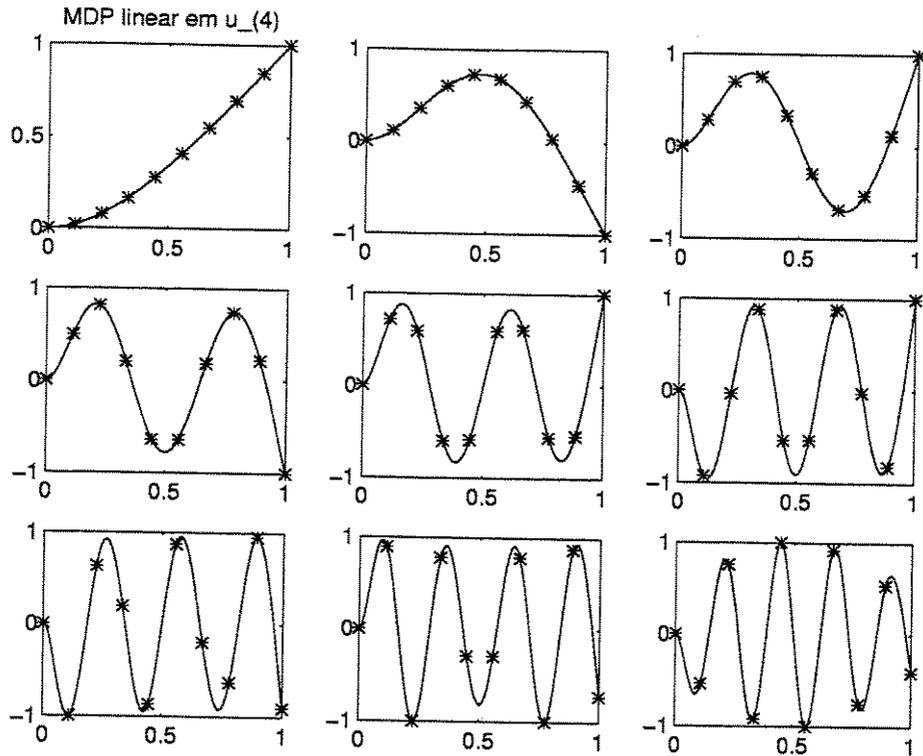


Figura 3.17: Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 4$, $(N + 1) = 10$.

$$u^{(5)}(\bar{x}) = 0 \quad \bar{x} = 0 \tag{3.31}$$

A equação diferencial do problema 3.27 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno em $u(\bar{x})$ e na derivada $u^{(1)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_0 . As condições de contorno nas derivadas $u^{(2)}(\bar{x})$ e $u^{(3)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_N . E a condição de contorno na derivada $u^{(5)}(\bar{x})$ é imposta no domínio puntual \bar{x}_0 . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da viga fixo-livre.

A figura 3.18 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema

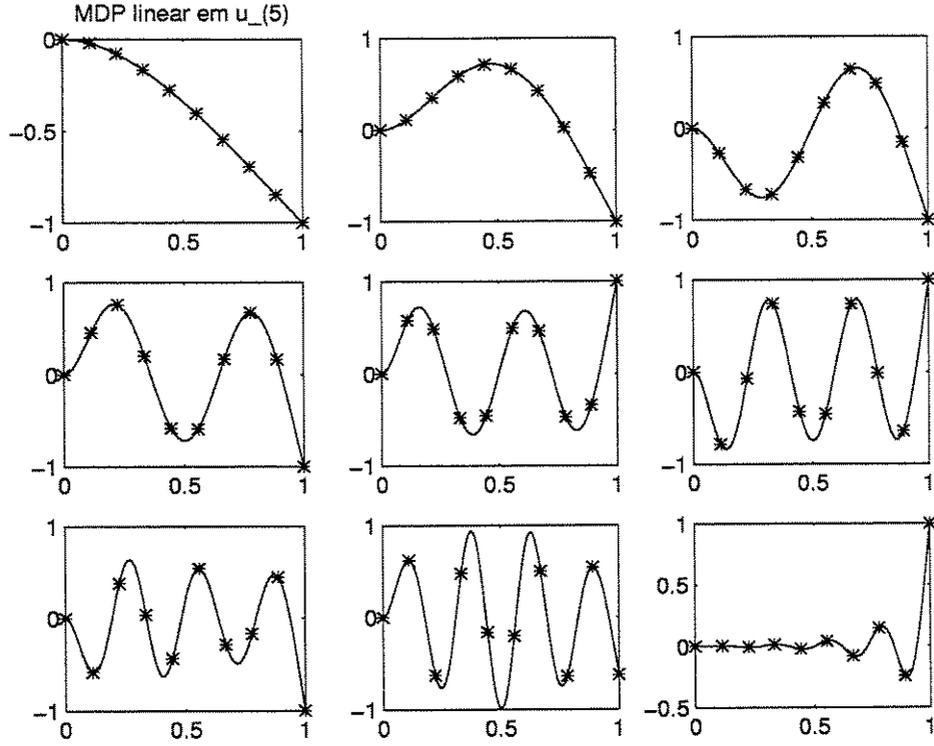


Figura 3.18: Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 5$, $(N + 1) = 10$.

3.27 do comportamento dinâmico da viga fixo-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 5$ e dez domínios pontuais.

As soluções MDP $M = 6$ necessitam de $(N + 7)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema. Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.32, também são empregadas para a montagem do sistema neste caso.

$$\begin{aligned}
 u^{(5)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\
 u^{(6)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

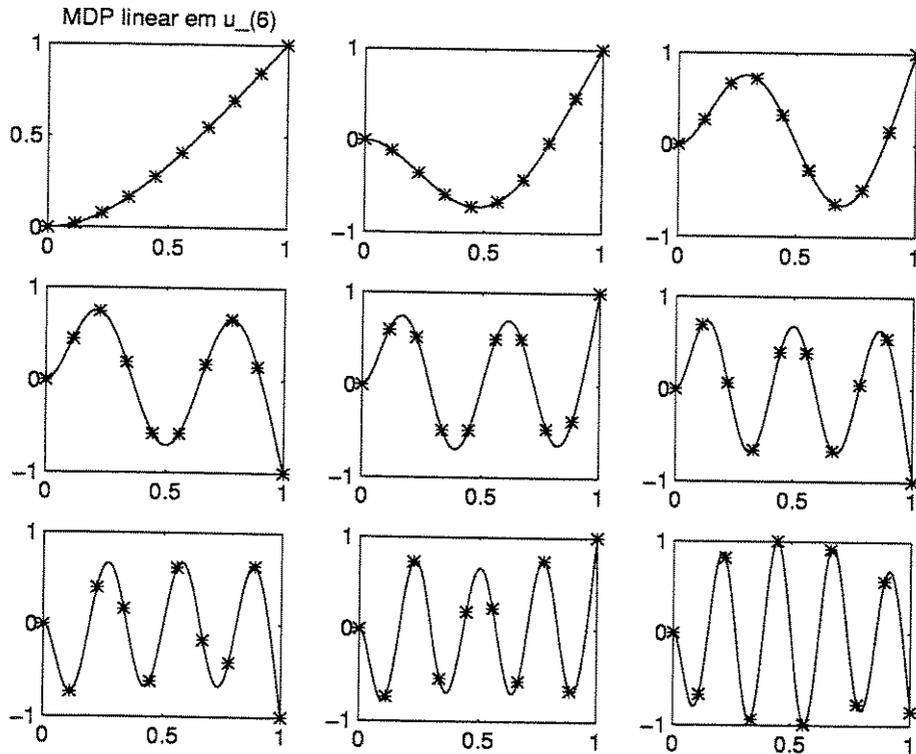


Figura 3.19: Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 6$, $(N + 1) = 10$.

A equação diferencial do problema 3.27 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno em $u(\bar{x})$ e nas derivadas $u^{(1)}(\bar{x})$ e $u^{(5)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_0 . E as condições de contorno nas derivadas $u^{(2)}(\bar{x})$, $u^{(3)}(\bar{x})$ e $u^{(6)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_N . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da viga fixo-livre.

A figura 3.19 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.27 do comportamento dinâmico da viga fixo-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 6$ e dez domínios pontuais.

As soluções MDP $M = 7$ necessitam de $(N + 8)$ equações obtidas por colocação para a construção de um sistema, possibilitando o cálculo das variáveis do problema.

Portanto, as condições de contorno auxiliares, apresentadas na expressão 3.33, também são empregadas para a montagem do sistema.

$$\begin{aligned}
 u^{(5)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= 0 \\
 u^{(6)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L \\
 u^{(7)}(\bar{x}) &= 0 & \bar{x} &= L
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

A equação diferencial do problema 3.27 é satisfeita nos domínios pontuais \bar{x}_i , ($i = 0, 1, \dots, N$). As condições de contorno em $u(\bar{x})$ e nas derivadas $u^{(1)}(\bar{x})$ e $u^{(5)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_0 . E as condições de contorno nas derivadas $u^{(2)}(\bar{x})$, $u^{(3)}(\bar{x})$, $u^{(6)}(\bar{x})$ e $u^{(7)}(\bar{x})$ são impostas no domínio puntual \bar{x}_N . É possível então o cálculo de N autovetores e autovalores do sistema da viga fixo-livre.

A figura 3.20 apresenta os autovetores obtidos da resolução numérica do problema 3.27 do comportamento dinâmico da viga fixo-livre empregando-se as aproximações MDP $M = 7$ e dez domínios pontuais.

As tabelas 3.13 e 3.14 apresentam as frequências naturais ω_i de vibração da viga vinculada em uma das extremidades obtidas das resoluções numéricas do problema 3.27.

As tabelas 3.15 e 3.16 apresentam os erros percentuais das frequências naturais ω_i de vibração da viga fixo-livre obtidas das resoluções numéricas do problema 3.27.

Comparando-se diretamente as soluções do problema 3.27 obtidas segundo o Método dos Domínios Puntuais empregando-se as aproximações lineares por partes na derivada de ordem $M = 4$, com as soluções obtidas utilizando-se elementos finitos cúbicos de Hermite, observa-se que os resultados MDP representam melhor as frequências mais altas ω_i de vibração da viga fixo-livre, enquanto os resultados MEF representam melhor as

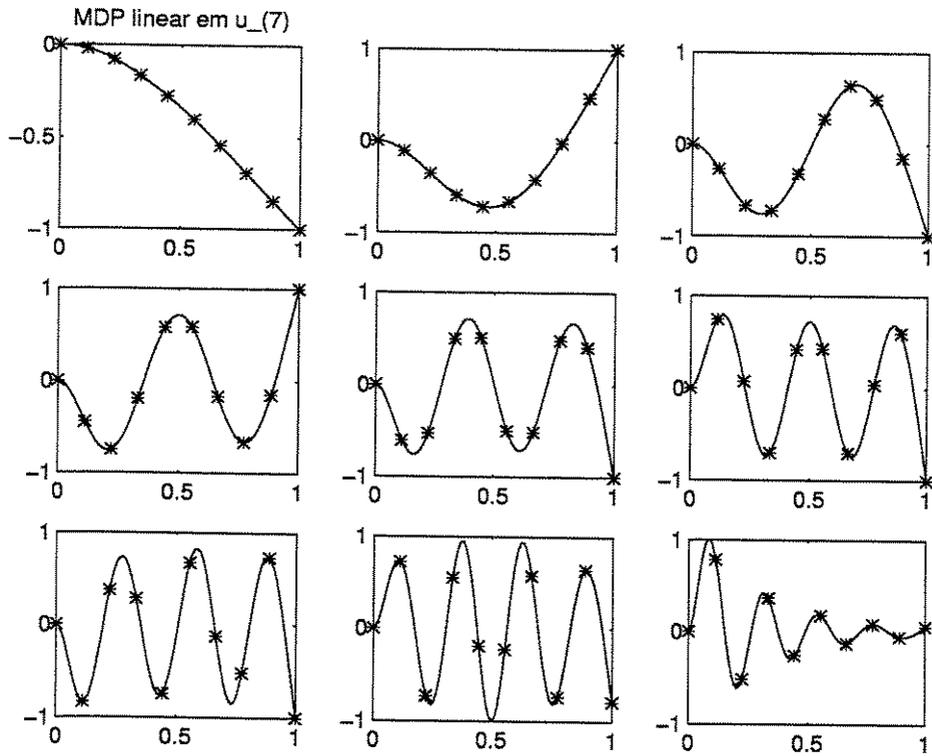


Figura 3.20: Modos de vibração MDP da viga fixo-livre $M = 7$, $(N + 1) = 10$.

frequências mais baixas. Entretanto, estes valores obtidos para as frequências naturais ω_i representam os resultados mais grosseiros, como verifica-se nas tabelas 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16. Os resultados numéricos das frequências naturais ω_i de vibração da viga vinculada em uma das extremidades aproximam-se cada vez mais dos valores exatos a medida que são utilizadas as aproximações MDP lineares por partes nas derivadas de ordens M mais elevadas, ($M = 5, 6, 7$). É conveniente ressaltar que as aproximações MDP de alta ordem são obtidas com aumento mínimo no tamanho do sistema linear final, conduzindo a resultados efetivamente mais apurados. E por isso, mostram-se mais atraentes do ponto de vista do esforço computacional.

Tabela 3.13: Frequências naturais ω_i da modelagem da viga fixo-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MDP $M = 6$	Soluções MDP $M = 7$	Soluções MEF
ω_1	3.5160153	3.4808976	3.4954301	3.5219758	3.5146846	3.5327315
ω_2	22.034492	23.287805	23.348748	22.279046	21.525659	34.806893
ω_1	3.5160153	3.5079588	3.5147352	3.5162826	3.5159960	3.5177150
ω_2	22.034492	22.755227	22.065772	22.094623	22.016812	22.221474
ω_3	61.697214	68.103281	57.565740	62.970373	60.307799	75.157083
ω_4	120.90192	136.04734	118.23052	123.54515	115.32109	218.13802
ω_1	3.5160153	3.5124847	3.5157627	3.5160591	3.5160136	3.5163716
ω_2	22.034492	22.367174	22.041395	22.044814	22.032855	22.106859
ω_3	61.697214	64.916953	60.943942	61.932409	61.603835	62.465982
ω_4	120.90192	134.21436	119.04989	122.82779	120.03617	140.67105
ω_5	199.85953	233.35832	175.21373	208.12446	188.35738	264.74331
ω_6	298.55553	342.44427	275.67406	307.82087	277.01486	527.79616
ω_1	3.5160153	3.5140388	3.5159354	3.5160276	3.5160150	3.5161303
ω_2	22.034492	22.223383	22.036776	22.037449	22.034195	22.060166
ω_3	61.697214	63.532851	61.466801	61.763681	61.682405	62.174893
ω_4	120.90192	128.70064	120.41643	121.43998	120.74775	122.65764
ω_5	199.85953	222.13094	192.74552	202.56012	198.23926	228.13740
ω_6	298.55553	347.47314	284.87776	308.28643	293.03840	366.38961
ω_7	416.99079	499.00899	349.22594	440.43481	381.02626	580.84913
ω_8	555.16525	640.40750	494.19499	574.94309	503.22316	953.05104

Tabela 3.14: Frequências naturais ω_i da modelagem da viga fixo-livre [rad/s].

Frequências Naturais	Valores Exatos	Soluções MDP $M = 4$	Soluções MDP $M = 5$	Soluções MDP $M = 6$	Soluções MDP $M = 7$	Soluções MEF
ω_1	3.5160153	3.5147531	3.5159826	3.5160199	3.5160152	3.5160628
ω_2	22.034492	22.155836	22.035448	22.035620	22.034413	22.045506
ω_3	61.697214	62.875549	61.604304	61.722368	61.693540	61.918841
ω_4	120.90192	125.91440	120.72228	121.10097	120.86165	122.31969
ω_5	199.85953	214.34543	197.11912	200.83632	199.49811	203.02025
ω_6	298.55553	331.91864	293.77767	302.17193	297.19996	337.27272
ω_7	416.99079	482.20236	391.26942	427.88497	409.09935	493.26369
ω_8	555.16525	664.39140	512.05504	581.75355	537.12404	715.34120
ω_9	713.07892	862.16029	577.51510	759.87027	635.95370	1016.1961
ω_{10}	890.73180	1028.4754	773.90916	924.08535	792.89242	1494.8782
ω_1	3.5160153	3.5151398	3.5159995	3.5160174	3.5160152	3.5160383
ω_2	22.034492	22.118918	22.034958	22.035008	22.034465	22.039932
ω_3	61.697214	62.516262	61.652784	61.708665	61.696021	61.810105
ω_4	120.90192	124.38183	120.82035	120.99125	120.88846	121.68097
ω_5	199.85953	209.91930	198.58339	200.28843	199.74946	202.86324
ω_6	298.55553	321.86798	296.46052	300.10966	298.12052	303.53165
ω_7	416.99079	463.59803	405.42546	421.66656	414.75590	468.02256
ω_8	555.16525	638.41346	537.10261	567.36961	549.69587	642.84930
ω_9	713.07892	847.30541	651.42437	740.92500	690.47410	878.45360
ω_{10}	890.73180	1083.1582	796.00101	944.35635	848.56321	1188.2314
ω_{11}	1088.1239	1320.1336	859.23215	1165.4087	951.99897	1562.7348
ω_{12}	1305.2552	1505.7800	1115.1333	1354.5776	1145.8146	2154.7955

Tabela 3.15: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga fixo-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MDP $M = 6$	Erros MDP $M = 7$	Erros MEF
ω_1	-0.9987923	-0.5854691	0.1695240	-0.0378445	0.4754311
ω_2	5.6879610	5.9645404	1.1098726	-2.3092567	57.965492
ω_1	-0.2291364	-0.0364068	0.0076026	-0.0005474	0.0483426
ω_2	3.2709418	0.1419597	0.2728958	-0.0802352	0.8485897
ω_3	10.383072	-6.6963705	2.0635590	-2.2519911	21.816007
ω_4	12.527035	-2.2095575	2.1862615	-4.6159914	80.425610
ω_1	-0.1004139	-0.0071820	0.0012479	-0.0000471	0.0101345
ω_2	1.5098274	0.0313308	0.0468455	-0.0074285	0.3284280
ω_3	5.2186124	-1.2209180	0.3812082	-0.1513515	1.2460329
ω_4	11.010947	-1.5318379	1.5929205	-0.7160756	16.351382
ω_5	16.761168	-12.331559	4.1353674	-5.7551188	32.464691
ω_6	14.700361	-7.6640582	3.1033889	-7.2149643	76.783246
ω_1	-0.0562134	-0.0022713	0.0003516	-0.0000083	0.0032716
ω_2	0.8572546	0.0103679	0.0134202	-0.0013451	0.1165193
ω_3	2.9752348	-0.3734585	0.1077311	-0.0240037	0.7742304
ω_4	6.4504516	-0.4015507	0.4450410	-0.1275143	1.4521887
ω_5	11.143530	-3.5595050	1.3512452	-0.8107021	14.148872
ω_6	16.384760	-4.5813145	3.2593279	-1.8479426	22.720758
ω_7	19.669068	-16.250922	5.6221916	-8.6247762	39.295435
ω_8	15.354393	-10.982362	3.5625137	-9.3561498	71.669795

Tabela 3.16: Erros percentuais das frequências naturais ω_i da viga fixo-livre.

Frequências Naturais	Erros MDP $M = 4$	Erros MDP $M = 5$	Erros MDP $M = 6$	Erros MDP $M = 7$	Erros MEF
ω_1	-0.0358980	-0.0009301	0.0001330	-0.0000022	0.0013519
ω_2	0.5507036	0.0043396	0.0051203	-0.0003554	0.0499872
ω_3	1.9098671	-0.1505912	0.0407687	-0.0059552	0.3592165
ω_4	4.1459131	-0.1485811	0.1646386	-0.0333051	1.1726646
ω_5	7.2480430	-1.3711677	0.4887403	-0.1808350	1.5814707
ω_6	11.174843	-1.6003267	1.2112984	-0.4540426	12.968170
ω_7	15.638614	-6.1683290	2.6125726	-1.8924732	18.291268
ω_8	19.674530	-7.7652929	4.7892589	-3.2497012	28.851941
ω_9	20.906714	-19.011054	6.5618755	-10.815805	42.508224
ω_{10}	15.464090	-13.115355	3.7445110	-10.984157	67.825849
ω_1	-0.0248997	-0.0004485	0.0000605	-0.0000007	0.0006550
ω_2	0.3831577	0.0021180	0.0023418	-0.0001195	0.0246905
ω_3	1.3275283	-0.0720143	0.0185600	-0.0019351	0.1829752
ω_4	2.8782925	-0.0674650	0.0738856	-0.0111338	0.6443686
ω_5	5.0334202	-0.6385210	0.2146011	-0.0550748	1.5029105
ω_6	7.8084130	-0.7017172	0.5205500	-0.1457069	1.6667315
ω_7	11.177044	-2.7735197	1.1213140	-0.5359550	12.238106
ω_8	14.995213	-3.2535609	2.1983305	-0.9851809	15.794226
ω_9	18.823511	-8.6462446	3.9050488	-3.1700309	23.191638
ω_{10}	21.603183	-10.635164	6.0202810	-4.7341508	33.399459
ω_{11}	21.321999	-21.035448	7.1025790	-12.510057	43.617360
ω_{12}	15.362883	-14.565880	3.7787582	-12.215279	65.086148

3.5 Análise estática de estrutura de pórtico

O pórtico é constituído por elementos estruturais que integram as características físicas de barra e de viga. A figura 3.21 descreve esquematicamente a geometria e os esforços atuantes em um pórtico bidimensional. Um elemento de pórtico é representado pela estrutura reticulada definida entre os domínios pontuais $i - 1$ e i .

Na figura 3.21 X e Y representam os eixos do sistema referencial global no qual o pórtico é definido. Um sistema referencial local é definido ao longo do comprimento do elemento de pórtico e seus eixos são indicados na figura 3.21 por x e y . Dessa forma, α representa o ângulo com relação à dimensão espacial X que descreve a disposição do elemento de pórtico bidimensional. As forças axiais, as forças cortantes e os momentos fletores atuantes nas extremidades do pórtico são identificados na figura 3.21 respectivamente por F_x , F_y e M_z .

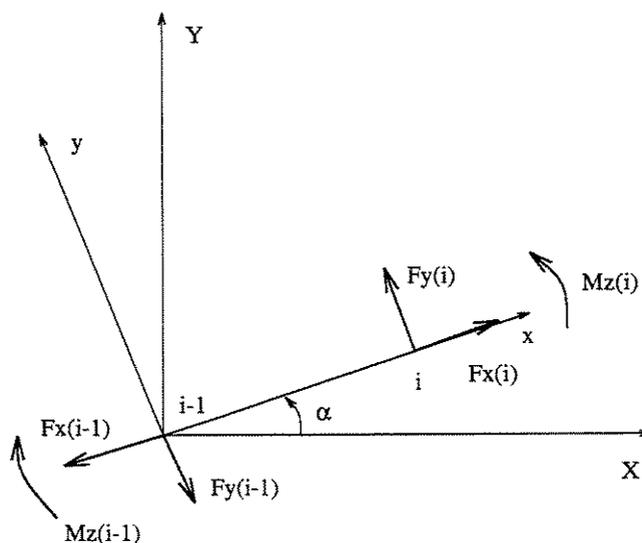


Figura 3.21: Geometria e esforços atuantes em pórtico 2D.

Para a modelagem do comportamento físico do pórtico, os efeitos de barra são introduzidos através da aproximação MDP linear por partes na segunda derivada, enquanto os efeitos de viga são introduzidos através da aproximação MDP linear por partes na derivada de quarta ordem. Considera-se a ausência de carregamentos distribuídos axial e cortante. Neste caso, as variáveis MDP associadas a um pórtico são $u_2(i-1)$, $u_2^{(1)}(i-1)$, $v_4(i-1)$, $v_4^{(1)}(i-1)$, $v_4^{(2)}(i-1)$ e $v_4^{(3)}(i-1)$. Observa-se que estas aproximações MDP são definidas ao longo do eixo x do sistema referencial local, entre os domínios pontuais $i-1$ e i . E portanto são válidas no intervalo $0 \leq x \leq L$, onde L é o comprimento do elemento de pórtico, dado por $L = x_i - x_{i-1}$.

A geometria deformada do pórtico é então descrita pelas equações 3.34, 3.35 e 3.36; onde $u_2(x)$ representa o deslocamento axial do pórtico, $v_4(x)$ identifica o seu deslocamento transversal e $v_4^{(1)}(x)$ caracteriza a rotação em torno do eixo z do sistema referencial local.

$$u_2(x) = x u_2^{(1)}(i-1) + u_2(i-1) \quad (3.34)$$

$$v_4(x) = \frac{x^3}{6} v_4^{(3)}(i-1) + \frac{x^2}{2} v_4^{(2)}(i-1) + x v_4^{(1)}(i-1) + v_4(i-1) \quad (3.35)$$

$$v_4^{(1)}(x) = \frac{x^2}{2} v_4^{(3)}(i-1) + x v_4^{(2)}(i-1) + v_4^{(1)}(i-1) \quad (3.36)$$

As forças axiais, as forças cortantes e os momentos fletores atuantes ao longo do pórtico, para $0 < x \leq L$, são dadas pelas equações 3.37, 3.38 e 3.39. Nestas equações, E representa o módulo de elasticidade do material, A representa a área da seção transversal e I representa o momento de inércia de área da seção transversal do pórtico.

$$F_x(x) = E A u_2^{(1)}(i - 1) \quad (3.37)$$

$$F_y(x) = E I v_4^{(3)}(i - 1) \quad (3.38)$$

$$M_z(x) = E I (x v_4^{(3)}(i - 1) + v_4^{(2)}(i - 1)) \quad (3.39)$$

Os esforços axial e cortante, e o momento fletor, avaliados no domínio pontual $i - 1$, asseguram o equilíbrio estático do pórtico e são apresentados, nas equações 3.40, 3.41 e 3.42.

$$F_x(i - 1) = -E A u_2^{(1)}(i - 1) \quad (3.40)$$

$$F_y(i - 1) = -E I v_4^{(3)}(i - 1) \quad (3.41)$$

$$M_z(i - 1) = -E I v_4^{(2)}(i - 1) \quad (3.42)$$

As equações 3.34, 3.35 e 3.36 podem ser avaliadas nos domínios pontuais e descritas em função das variáveis MDP, como apresentado no sistema matricial 3.43.

$$\begin{Bmatrix} u_2(i-1) \\ v_4(i-1) \\ v_4^{(1)}(i-1) \\ u_2(i) \\ v_4(i) \\ v_4^{(1)}(i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & L^3/6 & L^2/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & L^2/2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2(i-1) \\ v_4(i-1) \\ v_4^{(1)}(i-1) \\ u_2^{(1)}(i-1) \\ v_4^{(3)}(i-1) \\ v_4^{(2)}(i-1) \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

E as equações 3.37 à 3.42 podem ser avaliadas nos domínios pontuais e descritas em função das variáveis MDP, como apresentado no sistema matricial 3.44.

$$\begin{Bmatrix} F_x(i-1) \\ F_y(i-1) \\ M_z(i-1) \\ F_x(i) \\ F_y(i) \\ M_z(i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EI \\ 0 & 0 & 0 & EA & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EIL & EI \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2(i-1) \\ v_4(i-1) \\ v_4^{(1)}(i-1) \\ u_2^{(1)}(i-1) \\ v_4^{(3)}(i-1) \\ v_4^{(2)}(i-1) \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Entretanto, na análise estática de uma estrutura de pórtico bidimensional, é interessante que as equações que descrevem o comportamento físico do mesmo estejam descritas no sistema referencial global (X, Y) , de forma a possibilitar o devido acoplamento das equações. As equações 3.45 e 3.46 descrevem as transformações, respectivamente, dos deslocamentos e dos esforços atuantes num elemento pórtico, entre os sistemas referenciais global (X, Y) e local (x, y) .

$$\begin{Bmatrix} u_2(x) \\ v_4(x) \\ v_4^{(1)}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(x) \\ V_4(x) \\ V_4^{(1)}(x) \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\begin{Bmatrix} F_x(x) \\ F_y(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_X(x) \\ F_Y(x) \\ M_Z(x) \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

Aplicando-se as transformações entre sistemas referenciais 3.45 e 3.46 às equações 3.43 e 3.44, resultam os sistemas matriciais 3.47 e 3.48, que representam os deslocamentos e os esforços atuantes num elemento de pórtico bidimensional, descritos no sistema referencial global.

$$\begin{Bmatrix} U_2(i-1) \\ V_4(i-1) \\ V_4^{(1)}(i-1) \\ U_2(i) \\ V_4(i) \\ V_4^{(1)}(i) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin(\alpha) & L \cos(\alpha) & -\frac{L^3}{6} \sin(\alpha) & -\frac{L^2}{2} \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & L \cos(\alpha) & L \sin(\alpha) & \frac{L^3}{6} \cos(\alpha) & \frac{L^2}{2} \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & L^2/2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2(i-1) \\ V_4(i-1) \\ V_4^{(1)}(i-1) \\ u_2^{(1)}(i-1) \\ v_4^{(3)}(i-1) \\ v_4^{(2)}(i-1) \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_X(i-1) \\ F_Y(i-1) \\ M_Z(i-1) \\ F_X(i) \\ F_Y(i) \\ M_Z(i) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & -E A \cos(\alpha) & E I \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E A \sin(\alpha) & -E I \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -E I \\ 0 & 0 & 0 & E A \cos(\alpha) & -E I \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E A \sin(\alpha) & E I \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E I L & E I \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} U_2(i-1) \\ V_4(i-1) \\ V_4^{(1)}(i-1) \\ u_2^{(1)}(i-1) \\ v_4^{(3)}(i-1) \\ v_4^{(2)}(i-1) \end{array} \right\} \quad (3.48)$$

Observa-se que as variáveis MDP, associadas a um pórtico bidimensional descrito no sistema referencial global, são $U_2(i-1)$, $u_2^{(1)}(i-1)$, $V_4(i-1)$, $V_4^{(1)}(i-1)$, $v_4^{(2)}(i-1)$ e $v_4^{(3)}(i-1)$. Assim, a análise estática MDP de uma estrutura bidimensional composta de N elementos de pórtico, resulta em $3(N+1)$ variáveis MDP. São estas: $U_2(0)$, $u_2^{(1)}(i-1)$, $V_4(0)$, $V_4^{(1)}(0)$, $v_4^{(2)}(i-1)$ e $v_4^{(3)}(i-1)$, onde $i = 1, 2, \dots, N$.

Nas extremidades dos elementos de pórtico que conectam-se, vale o princípio da superposição aplicado às equações dos esforços e dos momentos 3.48, e ainda a igualdade das equações dos deslocamentos e das rotações 3.47. É possível assim obter-se um sistema linearmente independente em função das variáveis MDP, de forma a caracterizar-se o comportamento de estrutura bidimensional de pórtico.

A figura 3.22 apresenta uma estrutura composta de sete elementos de pórtico bidimensionais. Observa-se que esta estrutura composta de $N = 7$ elementos de pórtico 2D implica na discretização em $3(N+1) = 24$ variáveis MDP.

As equações dos esforços e dos momentos atuantes são desenvolvidas para as extremidades dos elementos de pórtico – respectivamente os domínios pontuais $i = 0, 1, 2, 3, 4$ – empregando-se as relações descritas no sistema matricial 3.48. Nas extremidades dos elementos que conectam-se, vale o princípio da superposição aplicado às equações dos

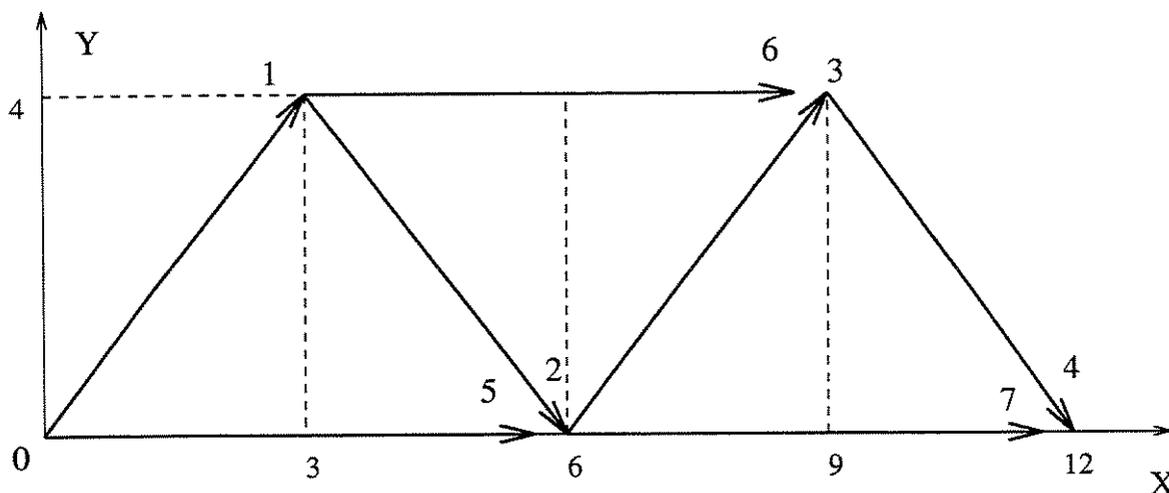


Figura 3.22: Estrutura de pórtico 2D.

esforços e dos momentos 3.48. Assim, observa-se por exemplo, que os esforços, axial e cortante, e o momento fletor atuante no domínio pontual $i = 2$ da figura 3.22 recebem contribuições dos elementos $N = 2, 3, 5, 7$ que conectam-se ao mesmo. Procedendo-se dessa forma para as extremidades dos elementos de pórtico – respectivamente os domínios pontuais $i = 0, 1, 2, 3, 4$ – resultam quinze equações referentes ao equilíbrio da estrutura.

As equações de compatibilidade dos deslocamentos e das rotações nas extremidades dos elementos de pórtico, empregando-se as relações descritas no sistema matricial 3.47 também devem ser consideradas. No exemplo da figura 3.22, deve-se garantir a igualdade dos deslocamentos ao longo dos eixos X e Y e das rotações em torno do eixo Z , respectivamente entre os domínios pontuais $i = 2$ e $i = 5$; $i = 3$ e $i = 6$; e $i = 4$ e $i = 7$. Procedendo-se dessa forma resultam nove equações referentes à compatibilidade dos deslocamentos e das rotações nas extremidades dos elementos.

Observa-se que as quinze equações de equilíbrio da estrutura e as nove equações de compatibilidade dos deslocamentos e das rotações caracterizam um sistema linearmente

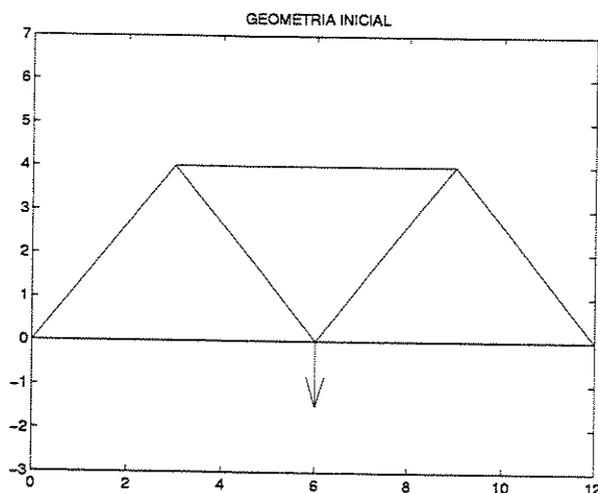


Figura 3.23: Geometria inicial – problema 1.

independente em função das $3(N+1) = 24$ variáveis MDP. Uma vez resolvido este sistema, é possível obter-se informações com relação à geometria deformada e aos esforços internos atuantes em qualquer posição desejada da estrutura de pórtico, empregando-se as equações 3.34 à 3.42 e os valores obtidos das variáveis MDP.

A figura 3.23 apresenta a geometria inicial de uma estrutura composta de sete elementos de pórtico bidimensionais. As escalas dos eixos X e Y do sistema referencial global são dadas em metros $[m]$. Considera-se o módulo de elasticidade do material $E = 2.1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}$, as áreas das seções transversais $A = 0.02 \times 0.04 m^2$ e os momentos de inércia de área das seções transversais $I = \frac{0.02 \times 0.04^3}{12} m^4$. É aplicado um carregamento $F_Y(2) = -1.0 \times 10^6 N$, conforme esquematizado na figura 3.23.

Este primeiro problema da análise estática de uma estrutura de pórtico é resolvido empregando-se o método dos domínios pontuais. A solução obtida para a geometria deformada é apresentada na figura 3.24, em escala ampliada. A tabela 3.17 apresenta os deslocamentos ao longo dos eixos X e Y ; as rotações em torno do eixo Z ; as forças reativas

Tabela 3.17: Resultados MDP da análise de estrutura de pórtico – problema 1.

i	$U_2(i)$ [m]	$V_4(i)$ [m]	$V_4^{(1)}(i)$ [rad]	$F_X(i)$ [N]	$F_Y(i)$ [N]	$M_Z(i)$ [Nm]
0	0.0000	0.0000	-0.0111	3.750E5	5.000E5	0.0000
1	0.0134	-0.0333	-0.0053	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	-0.0666	0.0000	0.0000	-1.000E6	0.0000
3	-0.0134	-0.0333	0.0053	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0111	-3.750E5	5.000E5	0.0000

F_X e F_Y ; e os momentos reativos M_Z avaliados nas extremidades dos pórticos – respectivamente os domínios pontuais $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Observa-se que estes resultados MDP são idênticos aqueles obtidos a partir da solução empregando-se o método de Galerkin com elementos finitos lineares de Lagrange para a representação do comportamento físico de barra e elementos cúbicos de Hermite para a consideração dos efeitos de viga atuantes na estrutura.

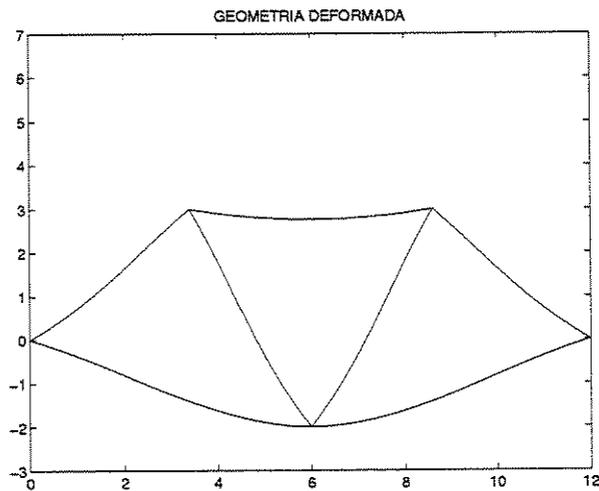


Figura 3.24: Geometria deformada – problema 1.

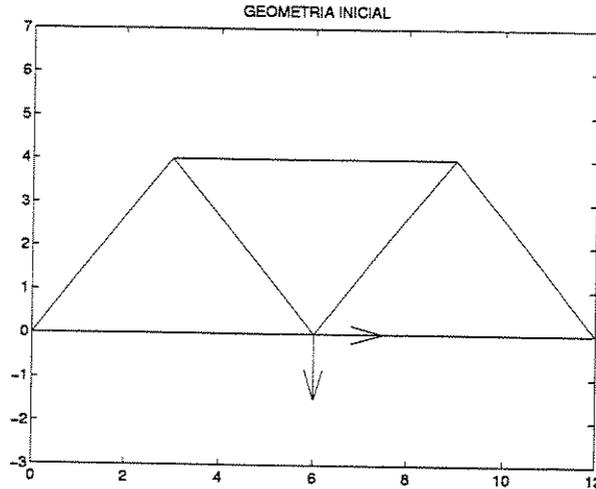


Figura 3.25: Geometria inicial – problema 2.

A figura 3.25 apresenta a geometria inicial de uma estrutura composta de sete elementos de pórtico bidimensionais. As escalas dos eixos X e Y do sistema referencial global são dadas em metros $[m]$. Considera-se o módulo de elasticidade do material $E = 2.1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}$, as áreas das seções transversais $A = 0.02 \times 0.04 m^2$ e os momentos de inércia de área das seções transversais $I = \frac{0.02 \times 0.04^3}{12} m^4$. É aplicado um carregamento descrito pelas componentes $F_X(2) = 8.0 \times 10^5 N$ e $F_Y(2) = -8.0 \times 10^5 N$, conforme esquematizado na figura 3.25.

Este segundo problema da análise estática de uma estrutura de pórtico é resolvido empregando-se o método dos domínios pontuais. A solução obtida para a geometria deformada é apresentada na figura 3.26, em escala ampliada. A tabela 3.18 apresenta os deslocamentos ao longo dos eixos X e Y ; as rotações em torno do eixo Z ; as forças reativas F_X e F_Y ; e os momentos reativos M_Z avaliados nas extremidades dos pórticos – respectivamente os domínios pontuais $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Observa-se que estes resultados MDP são idênticos aqueles obtidos a partir da solução empregando-se o método de Galerkin com elementos finitos lineares de Lagrange para a representação do comportamento físico de

Tabela 3.18: Resultados MDP da análise de estrutura de pórtico – problema 2.

i	$U_2(i)$ [m]	$V_4(i)$ [m]	$V_4^{(1)}(i)$ [rad]	$F_X(i)$ [N]	$F_Y(i)$ [N]	$M_Z(i)$ [Nm]
0	0.0000	0.0000	-0.0110	-1.000E5	4.000E5	0.0000
1	0.0179	-0.0320	-0.0035	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0143	-0.0533	0.0017	8.000E5	-8.000E5	0.0000
3	-0.0036	-0.0213	0.0050	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0069	-7.000E5	4.000E5	0.0000

barra e elementos cúbicos de Hermite para a consideração dos efeitos de viga atuantes na estrutura.

A apresentação desta seção têm como intuito principal demonstrar-se como é possível a análise de problemas MDP 1D onde existe a necessidade da transformação entre sistemas referenciais de coordenadas. Pode-se tratar problemas empregando-se aproximações MDP

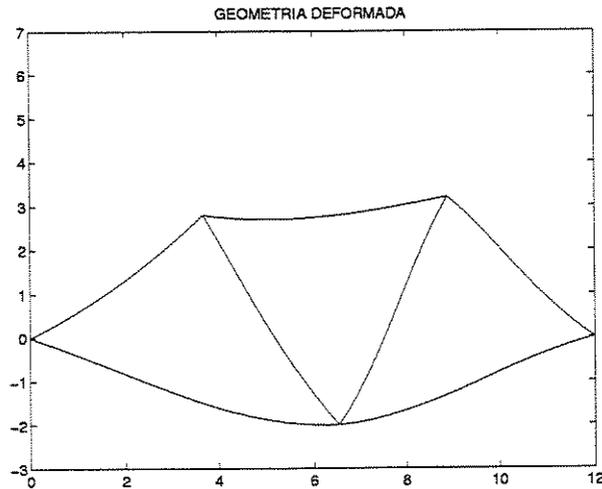


Figura 3.26: Geometria deformada – problema 2.

lineares por partes numa derivada de alta ordem M genérica e realizar as transformações entre sistemas referenciais de coordenadas, de forma a representar-se convenientemente o fenômeno físico desejado.

Capítulo 4

Aplicações 2D Envolvendo a Equação de Poisson

Alguns problemas de valores de contorno envolvendo a equação bidimensional de Poisson são analisados. Um problema padrão é proposto e são comparadas as soluções obtidas, através de sistemas lineares da mesma ordem, empregando-se o método dos domínios pontuais e o método da dupla reciprocidade. O MDP também é usado para a solução de problemas clássicos de torção na teoria da elasticidade. Os casos de seções transversais triangular, retangular e retangular trincada são estudados e comparados com resultados conhecidos da literatura.

Todos estes tópicos são desenvolvidos neste capítulo, que encontra-se organizado em três seções, conforme descrito a seguir.

Método da dupla reciprocidade. Esta seção apresenta o Método da Dupla Reciprocidade (MDR). O método é introduzido gradualmente de forma a facilitar a compreensão. A

forma integral de contorno da equação de Laplace, geralmente empregada como o ponto de partida da formulação do método dos elementos de contorno, é inicialmente apresentada. A seguir estende-se à discussão de outros conceitos, respectivamente, solução fundamental e o método dos elementos de contorno para a equação de Laplace. E finalmente, trata-se do desenvolvimento matemático do MDR para a equação de Poisson.

Soluções MDR e MDP de um problema padrão. Nesta seção é avaliada a performance dos esquemas numéricos MDR e MDP. Introduce-se inicialmente um problema 2D envolvendo a equação de Poisson, e a sua respectiva solução analítica. Tomando-se discretizações equivalentes, do ponto de vista da ordem do sistema linear final de equações resultante, são obtidas as soluções para o problema padrão segundo o método da dupla reciprocidade e o método dos domínios pontuais. As soluções aproximadas MDR e MDP, avaliadas para os contornos do problema, são então medidas com relação à solução analítica deste problema padrão. Observa-se que o método dos domínios pontuais apresentou a solução mais apurada para este caso de estudo.

Problemas de torção. Problemas de torção constituem problemas de valores de contorno na teoria da elasticidade que descrevem o comportamento da função de tensão de acordo com dada geometria da seção transversal de um elemento. A equação de Poisson, onde o termo fonte está relacionado ao módulo de elasticidade transversal do material e ao ângulo de rotação por unidade de comprimento, caracteriza a equação diferencial do problema. A função de tensão é nula em todo o contorno da seção transversal, e esta é a condição de contorno de torção. As tensões de cisalhamento estão relacionadas às derivadas parciais de primeira ordem da função de tensão. E o torque é outro resultado importante obtido dos problemas de torção.

Empregou-se o MDP para a resolução numérica do problema de torção de uma seção transversal triangular equilátera. A função de tensão MDP obtida neste caso foi

coincidente à solução analítica do problema. Calculou-se os torques adimensionais MDP para seções transversais retangulares de diferentes valores da razão entre os comprimentos dos lados. Os resultados MDP foram comparados aos valores exatos dos torques adimensionais e às soluções obtidas a partir de um esquema Semi-Analítico/Numérico (SAN), mostrando concordância dos dados. (Os esquemas SAN caracterizam-se por combinarem valores simbólicos e numéricos na aproximação, tendo aplicações especialmente em problemas de otimização). E a solução MDP para uma seção retangular trincada mostrou-se qualitativamente correta.

4.1 Método da dupla reciprocidade

Apresenta-se nesta seção o Método da Dupla Reciprocidade (MDR), adaptado de Partridge, P. W., Brebbia, C. A., & Wrobel, L. C. [20]. O método é introduzido gradualmente de forma a facilitar a compreensão. A forma integral de contorno da equação de Laplace, geralmente empregada como o ponto de partida da formulação do método dos elementos de contorno, é inicialmente apresentada. Estende-se, a seguir, à discussão de outros conceitos, respectivamente, solução fundamental e o método dos elementos de contorno para a equação de Laplace. E finalmente, trata-se do desenvolvimento matemático do método da dupla reciprocidade para a equação de Poisson.

4.1.1 Forma integral de contorno da equação de Laplace

Considere que busca-se a solução da equação 4.1 de Laplace em um domínio arbitrário bi ou tridimensional, como apresentado na figura 4.1.

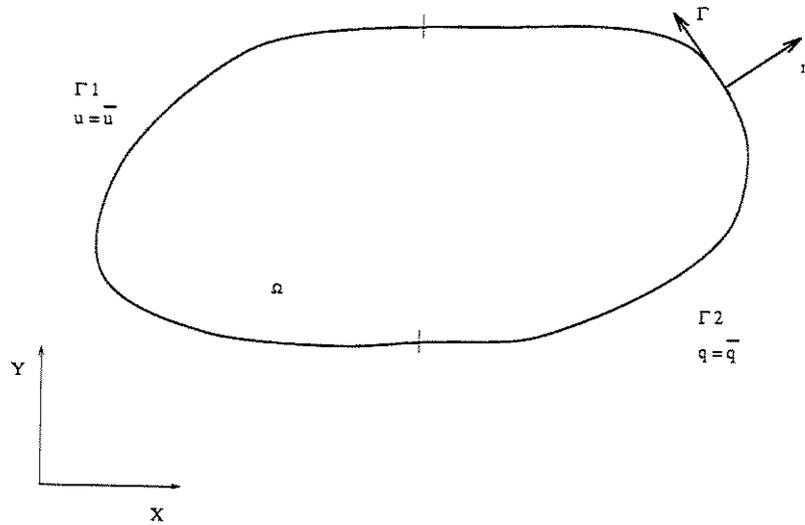


Figura 4.1: Domínio arbitrário.

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.1)$$

São conhecidas as condições de contorno essenciais $u = \bar{u}$ no contorno Γ_1 e as condições de contorno naturais $q = \partial u / \partial n = \bar{q}$ no contorno Γ_2 de forma que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Observe que n é o vetor normal externo ao contorno e as barras sobre u e q representam os valores conhecidos.

Para este caso, a equação integral de contorno inicialmente requerida pelo método pode ser facilmente deduzida partindo-se de considerações de resíduos ponderados, do teorema da reciprocidade de Betti ou da segunda identidade de Green. A equação integral de contorno, apresentada pela expressão 4.2, é escrita genericamente para o ponto i que pode ser interno ou externo ao domínio, ou ainda pertencer ao contorno do mesmo. Para os três casos descritos, é observada apenas a variação do coeficiente c_i .

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (4.2)$$

Esta forma integral de contorno da equação de Laplace é geralmente empregada como o ponto de partida da formulação do método dos elementos de contorno. É interessante observar que estas são integrais no sentido de Cauchy.

A princípio, os erros introduzidos na equação integral de contorno 4.2, devido às aproximações de u e de q , podem ser minimizados pelo processo de ortogonalização com respeito às funções de ponderação u^* e de sua derivada normal ao longo do contorno $q^* = \partial u^* / \partial n$. Daí a importância da escolha de funções de ponderação u^* convenientes e, especialmente, a solução fundamental.

4.1.2 Solução fundamental

A solução fundamental u^* representa o campo gerado por uma fonte concentrada, de valor unitário, agindo no ponto i . O efeito desta fonte é propagado de i para o infinito sem nenhuma consideração das condições de contorno. Por causa disso, u^* satisfaz a equação de Poisson apresentada na expressão 4.3, onde δ_i representa uma função delta de Dirac, que vai para infinito no ponto $x = x_i$ e é zero em todos os demais pontos.

$$\nabla^2 u^* + \delta_i = 0 \quad (4.3)$$

Para um meio isotrópico tridimensional a solução fundamental da equação 4.3 é dada pela expressão 4.4, enquanto para um meio isotrópico bidimensional é descrita pela

equação 4.5. Em ambos os casos, r representa a distância do ponto i de aplicação da fonte concentrada com relação a qualquer outro ponto que esteja sendo considerado.

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (4.4)$$

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.5)$$

4.1.3 Método dos elementos de contorno para a equação de Laplace

Apresenta-se o procedimento através do qual a equação 4.2 é discretizada de forma a obter-se um sistema linear de equações possibilitando que os valores de contorno sejam calculados. Assume-se, por simplicidade, que o domínio é bidimensional e seu contorno é dividido em N segmentos ou elementos, como apresentado na figura 4.2.

São chamados de nós os pontos onde as variáveis são consideradas. Para o caso dos elementos constantes, que são empregados neste trabalho, os nós são posicionados no centro de cada um dos elementos. Entretanto, é possível a utilização de uma grande variedade de elementos distintos, como por exemplo os elementos quadráticos, que representam as funções u e q aproximando-as por equações do segundo grau no interior de cada elemento, e assim por diante. No caso do elemento constante, como o próprio nome diz, os valores das funções u e q são considerados invariantes em todo o elemento.

Uma vez que o contorno apresenta-se dividido em N elementos, a equação 4.2 pode ser discretizada para um dado ponto i , como mostrado na expressão 4.6, antes da aplicação das condições de contorno. Observa-se que no caso dos elementos constantes os valores

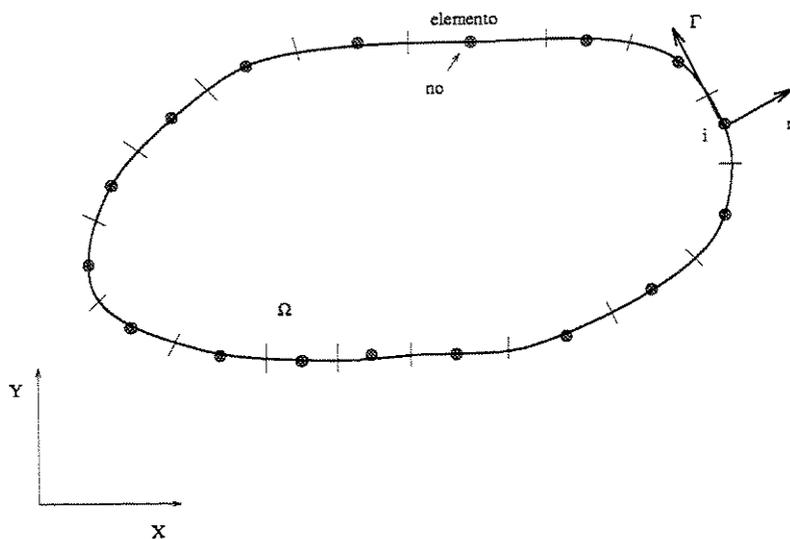


Figura 4.2: Elementos de contorno.

das funções u e q são sempre suaves nos nós, uma vez que os mesmos encontram-se posicionados nos pontos médios dos elementos. E por esse motivo, para o caso dos elementos constantes, o coeficiente c_i da equação 4.2 é sempre igual a $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad (4.6)$$

Os valores de u e q podem então ser extraídos da integral, como apresentado na equação 4.7. Eles são chamados de u_j e q_j para o elemento j .

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N u_j \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N q_j \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (4.7)$$

Observa-se que existem agora dois tipos de integral a serem avaliadas ao longo do elemento, como mostra a expressão 4.8. Estas integrais relacionam o nó i , onde a solução

fundamental é aplicada, a todos os demais nós j . Devido a isso, seus valores resultantes são geralmente chamados de coeficientes de influência e são denotados por \bar{H}_{ij} e G_{ij} .

$$\bar{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (4.8)$$

Assim, para um ponto particular i , a equação 4.7 pode ser reescrita como mostrado em 4.9.

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N \bar{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.9)$$

Definindo-se $H_{ij} = \bar{H}_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, de forma que o valor $\frac{1}{2}$ é somado à \bar{H}_{ij} quando $i = j$; a equação 4.9 pode ser rerepresentada como em 4.10.

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.10)$$

Fazendo-se agora a posição do ponto i variar de 1 até N , isto é, aplicando-se a solução fundamental em cada um dos nós da discretização, é obtido um sistema de equações resultante da utilização sucessiva da equação 4.10. Este conjunto de equações pode ser apresentado na forma matricial 4.11, onde H e G são matrizes de dimensão $N \times N$ e u e q são vetores de dimensão $N \times 1$.

$$H u = G q \quad (4.11)$$

É interessante observar que, devido às condições de contorno, N_1 valores de u e N_2 valores de q são conhecidos em Γ_1 e Γ_2 respectivamente ($N_1 + N_2 = N$). Assim, têm-se apenas N incógnitas no sistema de equações 4.11. Para que estas condições de contorno sejam aplicadas é necessário que o sistema de equações 4.11 seja rearranjado através da mudança conveniente das colunas das matrizes H e G de um lado para outro. Colocando-se todas as incógnitas do lado esquerdo do sistema é possível reescrevê-lo como apresentado em 4.12, onde x é o vetor dos valores desconhecidos do contorno (em termos de u e q) e b é obtido pela multiplicação das colunas correspondentes das matrizes H e G pelos valores conhecidos de u e q .

$$Ax = b \quad (4.12)$$

4.1.4 Método da dupla reciprocidade para a equação de Poisson

Apresenta-se o Método da Dupla Reciprocidade (MDR) para o tratamento da equação 4.13 de Poisson, onde $b = b(x, y)$, ou seja, b é uma função conhecida da posição.

$$\nabla^2 u = b \quad (4.13)$$

A solução da equação 4.13 pode ser expressa como a soma de uma solução homogênea, associada à equação de Laplace, e uma solução particular \hat{u} tal que $\nabla^2 \hat{u} = b$. Entretanto, geralmente é difícil encontrar uma solução \hat{u} satisfatória, principalmente no caso de problemas não-lineares ou transientes.

O MDR propõe o uso de uma série de soluções particulares \hat{u}_j ao invés de uma única

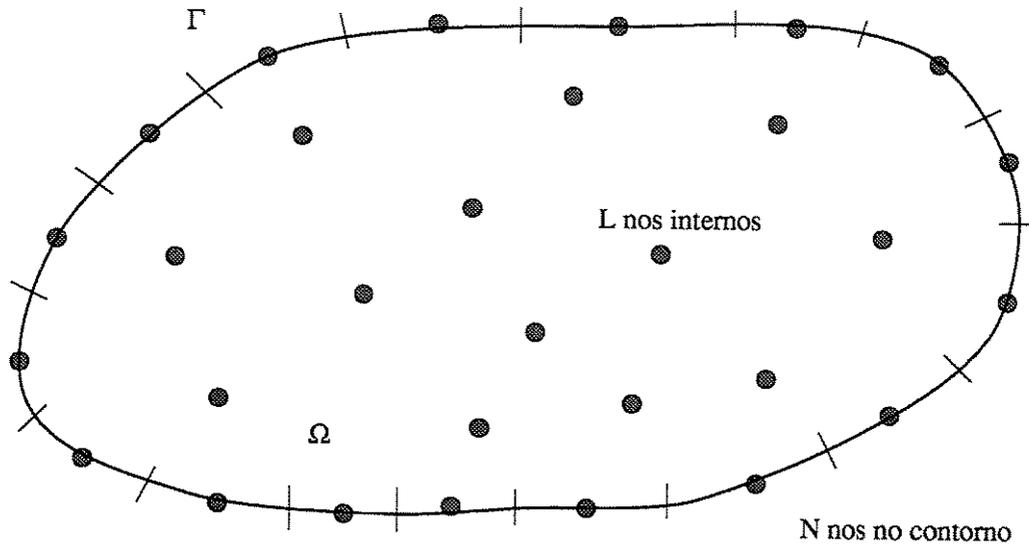


Figura 4.3: Nós internos e de contorno.

solução particular \hat{u} . O número de soluções particulares \hat{u}_j empregadas é igual ao número total de nós do problema. Assim, considerando-se N nós no contorno e L nós internos, têm-se então $N + L$ valores de \hat{u}_j , como mostrado na figura 4.3.

A aproximação apresentada na equação 4.14 é então proposta, onde α_j é um conjunto de coeficientes, à princípio desconhecido, e f_j são funções de aproximação.

$$b \approx \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (4.14)$$

As soluções particulares \hat{u}_j estão relacionadas às funções de aproximação f_j através da equação 4.15.

$$\nabla^2 \hat{u}_j = f_j \quad (4.15)$$

As funções de aproximação f_j da expressão 4.14 podem ser comparadas às funções de interpolação ϕ_i , das expansões da forma $u = \sum \phi_i u_i$, que são empregadas no próprio método dos elementos de contorno e na análise utilizando-se elementos finitos. E, analogamente, a equação 4.14 é exata nos pontos nodais. A expansão 4.14 é válida em todo o domínio do problema e pode ser associada ao caso de um grande superelemento.

A equação 4.16 é obtida aplicando-se a expressão 4.15 em 4.14.

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (4.16)$$

A expressão 4.16 pode ser substituída na equação original de Poisson 4.13, de forma a fornecer a relação 4.17. Observa-se que o termo fonte b da equação de Poisson é então representado por um somatório de produtos dos coeficientes α_j e do Laplaciano operando sobre as soluções particulares \hat{u}_j .

$$\nabla^2 u = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (\nabla^2 \hat{u}_j) \quad (4.17)$$

A equação 4.17 pode ser multiplicada pela solução fundamental e integrada sobre o domínio, produzindo a expressão 4.18.

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \int_{\Omega} (\nabla^2 \hat{u}_j) u^* d\Omega \quad (4.18)$$

Integrando-se por partes os termos do Laplaciano na equação 4.18 é obtida a expressão 4.19, válida para um ponto fonte i arbitrário. Observa-se que a expressão 4.19 apresenta integrais definidas apenas sobre o contorno do problema.

$$c_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \int_{\Gamma} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{q}_j u^* d\Gamma \right) \quad (4.19)$$

O termo \hat{q}_j na equação 4.19 é definido como $\hat{q}_j = \partial \hat{u}_j / \partial n$, onde n é o vetor normal unitário externo ao contorno Γ . O mesmo pode ser expandido como mostrado na equação 4.20.

$$\hat{q}_j = \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (4.20)$$

O mesmo resultado, apresentado na expressão 4.19, pode ser obtido empregando-se a segunda identidade de Green ou o princípio da reciprocidade. É esta a operação que dá nome ao método. Uma vez que o princípio da reciprocidade é aplicado aos dois lados da expressão 4.18, de forma que todos os termos sejam avaliados no contorno do problema, têm-se então o método da dupla reciprocidade.

O próximo passo consiste em escrever a equação 4.19 na forma discretizada, considerando-se o somatório sobre os elementos de contorno substituindo as integrais. Este procedimento fornece a equação 4.21, válida para o ponto fonte i arbitrário.

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} u q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} q u^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \hat{u}_j q^* d\Gamma - \sum_{k=1}^N \int_{\Gamma_k} \hat{q}_j u^* d\Gamma \right) \quad (4.21)$$

As mesmas matrizes H e G definidas na seção anterior podem ser utilizadas em ambos os lados da equação 4.21. Este procedimento, apresentado na expressão 4.22, introduz uma aproximação na avaliação dos termos do lado direito da equação. Entretanto, o erro

observado devido a esta aproximação é pequeno e a eficiência do método é melhorada consideravelmente.

$$c_i u_i + \sum_{k=1}^N H_{ik} u_k - \sum_{k=1}^N G_{ik} q_k = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j \left(c_i \hat{u}_{ij} + \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{u}_{kj} - \sum_{k=1}^N G_{ik} \hat{q}_{kj} \right) \quad (4.22)$$

O índice k é usado para os nós do contorno que são os pontos de campo. Após a aplicação da fonte em todos os nós do contorno usando uma técnica de colocação, a equação 4.22 pode ser expressa na forma matricial 4.23.

$$H u - G q = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j (H \hat{u}_j - G \hat{q}_j) \quad (4.23)$$

Observa-se que na equação 4.23 os termos c_i já foram incorporados à diagonal principal da matriz H . Se cada um dos vetores \hat{u}_j e \hat{q}_j é considerado, respectivamente, uma coluna das matrizes \hat{U} e \hat{Q} , então a equação 4.23 pode ser reescrita como apresentado em 4.24. A equação 4.24 é a base para a aplicação do MDR e envolve a discretização apenas do contorno.

$$H u - G q = (H \hat{U} - G \hat{Q}) \alpha \quad (4.24)$$

O vetor α da equação 4.24 é considerado agora. A equação 4.14 é rerepresentada em 4.25.

$$b = \sum_{j=1}^{N+L} \alpha_j f_j \quad (4.25)$$

Tomando-se o valor de b em $(N + L)$ pontos distintos, um conjunto de equações pode ser obtido a partir da equação 4.25. O mesmo pode ser descrito na forma matricial, como apresentado na expressão 4.26, onde cada coluna de F consiste de um vetor contendo os valores da função f_j em cada um dos $(N + L)$ pontos de colocação do MDR.

$$b = F \alpha \quad (4.26)$$

Como foi visto no início desta seção, b é um vetor conhecido, dado em função das posições dos pontos MDR. Assim, a equação 4.26 pode ser invertida, de forma a fornecer α , como apresentado na expressão 4.27.

$$\alpha = F^{-1} b \quad (4.27)$$

O vetor d , apresentado na equação 4.28, pode ser obtido diretamente pela multiplicação de matrizes e vetores conhecidos.

$$d = (H \hat{U} - G \hat{Q}) \alpha \quad (4.28)$$

E o lado direito da equação 4.24 pode ser substituído pelo vetor d , como apresentado na expressão 4.29.

$$H u - G q = d \quad (4.29)$$

Aplicando-se as condições de contorno como explicado na seção anterior (N valores de u e q são conhecidos em Γ), a equação 4.29 pode ser reescrita como apresentado na expressão 4.30, onde o vetor x contém N valores de contorno em u e q desconhecidos.

$$A x = b \quad (4.30)$$

Um último ponto a ser tratado diz respeito às funções de aproximação f . A solução particular \hat{u} , sua derivada normal \hat{q} e a função de aproximação f correspondente, usadas no MDR, não são limitadas pela formulação, exceto pelo fato de que a matriz F resultante, apresentada na equação 4.26 deve ser não singular.

Neste trabalho a função de aproximação escolhida é apresentada na equação 4.31. Esta função de aproximação f é conhecida por produzir excelentes resultados em um grande número de problemas de engenharia.

$$f = 1 + r \quad (4.31)$$

E observa-se que para a função de aproximação 4.31, a solução particular \hat{u} e sua derivada normal \hat{q} são dadas, respectivamente, pelas expressões 4.32 e 4.33.

$$\hat{u} = \frac{r^2}{4} + \frac{r^3}{9} \quad (4.32)$$

$$\hat{q} = \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \right) \left(\frac{r}{2} + \frac{r^2}{3} \right) \quad (4.33)$$

4.2 Soluções MDR e MDP de um problema padrão

Nesta seção é avaliada a performance dos esquemas numéricos MDR e MDP. Um problema teste, proposto nesta seção, serve de parâmetro para as comparações. Tomando-se discretizações equivalentes (empregando-se aproximadamente o mesmo número de variáveis em cada um dos esquemas), são obtidas soluções para o problema padrão segundo o Método da Dupla Reciprocidade (MDR) e o Método dos Domínios Pontuais (MDP). As soluções aproximadas MDR e MDP, encontradas para os contornos Γ_i , ($i = 1, 2, 3$), são então comparadas com a solução exata do problema teste.

Esta seção encontra-se dividida em quatro sub-seções. Na primeira delas o problema teste é convenientemente introduzido. A segunda sub-seção apresenta a solução MDR do mesmo, empregando-se uma discretização com 52 variáveis. A sub-seção seguinte apresenta a solução MDP equivalente, onde o problema é discretizado em 49 variáveis. E a quarta e última sub-seção trata da comparação e da discussão dos resultados.

4.2.1 O problema padrão

Para motivar a apresentação do trabalho, é introduzido o problema teste dado pela expressão 4.34, representando a equação de Poisson, definido sobre o domínio bidimensional da figura 4.4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4 \cos(x^2 + y^2) - 4(x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2) \quad (4.34)$$

O problema teste está ainda sujeito às condições de contorno essenciais (em Γ_1) e naturais (em Γ_2 e Γ_3) descritas pela expressão 4.35.

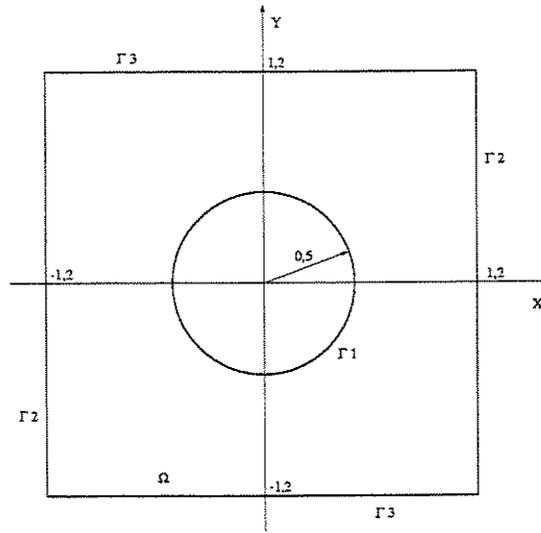


Figura 4.4: Domínio do problema teste.

$$\begin{aligned}
 u &= \sin(0.25) & (x, y) \in \Gamma_1 \\
 \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x \cos(x^2 + y^2) & (x, y) \in \Gamma_2 \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= 2y \cos(x^2 + y^2) & (x, y) \in \Gamma_3
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

É interessante observar que a solução exata do problema teste, assim como foi introduzido acima, é dado pela equação 4.36.

$$u(x, y) = \sin(x^2 + y^2) \tag{4.36}$$

Este problema serve como parâmetro para o estudo da performance dos esquemas numéricos apresentados neste capítulo.

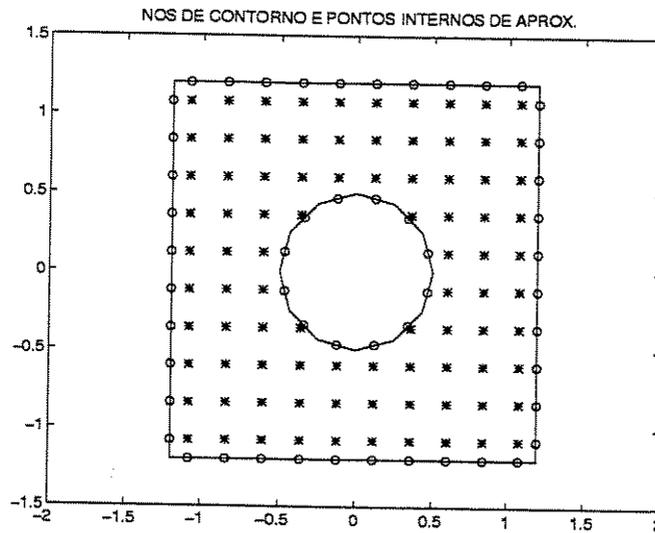


Figura 4.5: Discretização MDR do problema teste.

4.2.2 Solução MDR

A figura 4.5 apresenta a discretização adotada para a solução do problema teste empregando-se o método da dupla reciprocidade, cuja formulação matemática foi introduzida na primeira seção deste capítulo. São empregados $N = 52$ elementos de contorno constantes, cujos nós são representados por o na figura 4.5. O contorno externo do domínio do problema teste apresenta 40 elementos de contorno de mesmo comprimento, ordenados a partir da aresta de posição $(-1.2, -1.2)$ e seguindo no sentido anti-horário. Por sua vez, o contorno interno do domínio apresenta 12 elementos de contorno de mesmo comprimento, ordenados a partir da posição $(0, -\frac{1}{2})$ e seguindo no sentido horário.

Para a representação conveniente do termo fonte da equação 4.34 são empregadas $(N + L) = 140$ funções f_j de aproximação, sendo $N = 52$ delas definidas sobre os nós de contorno e as $L = 88$ demais definidas sobre os nós internos. Os $L = 88$ nós internos são representados na figura 4.5 por $*$.

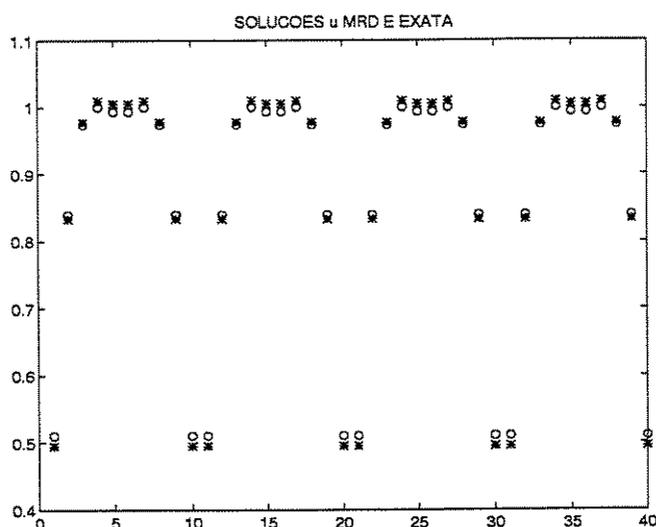


Figura 4.6: Valores u MDR nos nós do contorno externo.

A equação 4.35 do problema teste fornece condições de contorno naturais para o contorno externo do domínio e condições de contorno essenciais para o contorno interno do mesmo. Assim, os valores de u nos 40 nós do contorno externo e os valores de q nos 12 nós do contorno interno constituem as variáveis do problema teste discretizado segundo o MDR. E portanto, o sistema linear final é de ordem 52.

A figura 4.6 apresenta os valores obtidos de u da solução MDR para os nós do contorno externo, que são indicados por $*$. A figura 4.6 apresenta ainda os valores exatos de u , obtidos a partir da equação 4.36, para estes mesmos nós do contorno. As soluções nodais MDR em u apresentam o erro máximo percentual de 2.9388% e um erro médio percentual de 1.2510%.

A figura 4.7 apresenta os valores obtidos de q da solução MDR para os nós do contorno interno, que são indicados por $*$. A figura 4.7 apresenta ainda os valores exatos de q , obtidos a partir da equação 4.36, para estes mesmos nós do contorno. As soluções

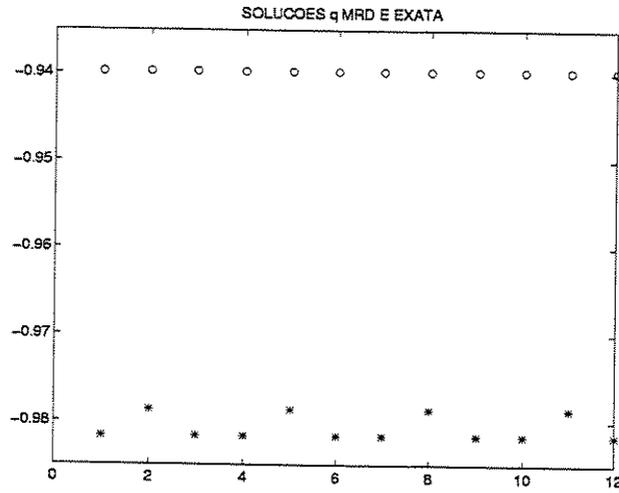


Figura 4.7: Valores q MDR nos nós do contorno interno.

nodais MDR em q apresentam o erro máximo percentual de 4.4595% e um erro médio percentual de 4.3519%.

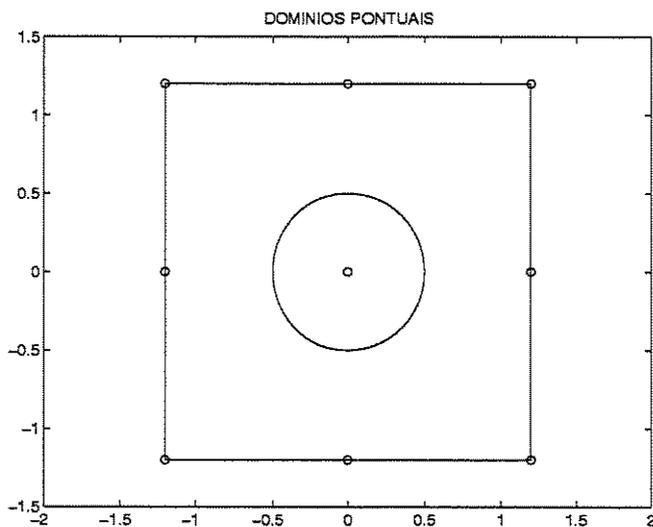


Figura 4.8: Região discretizada em domínios pontuais.

4.2.3 Solução MDP

O capítulo 2 deste trabalho descreve detalhadamente o Método dos Domínios Pontuais (MDP). Outras referências para a modelagem de problemas de valores de contorno envolvendo equações diferenciais parciais 2D empregando-se o MDP são Neto & Iguti [17] e Neto, Iguti, Nogueira & Mesquita [18].

A solução do problema teste segundo o método dos domínios pontuais utiliza as aproximações MDP lineares em $u^{(4,4)}(x, y)$, cuja formulação matemática foi apresentada na sétima seção do capítulo 2. A figura 4.8 apresenta a região retangular do espaço bidimensional discretizada em $(N + 1) \times (M + 1) = 9$ domínios pontuais. E para este caso têm-se $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta y_1 = \Delta y_2 = 0.6$. Esta discretização MDP ($N = M = 2$) implica em $(N + 5)(M + 5) = 49$ variáveis MDP. E portanto, o sistema linear final é de ordem 49.

A figura 4.9 apresenta 140 pontos de aproximação MDP tomados para a representação do domínio Ω do problema teste. Observa-se que os pontos de aproximação

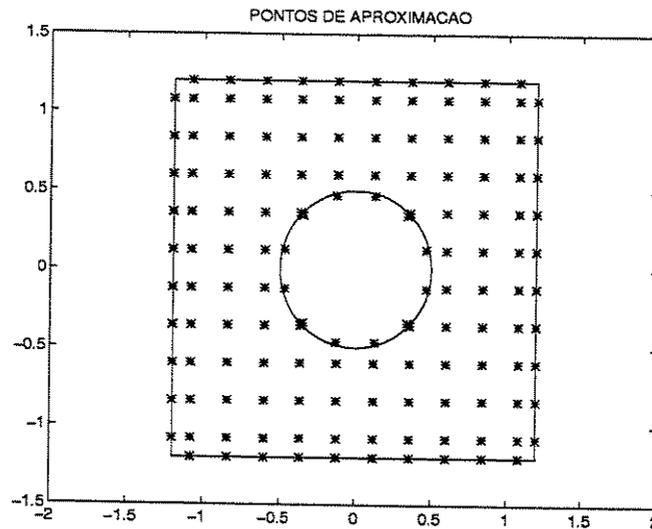


Figura 4.9: Pontos de aproximação em Ω .

MDP são coincidentes com os nós da discretização MRD, apresentados na figura 4.5. Garante-se assim que a mesma informação sobre o problema alimenta cada um dos esquemas numéricos.

A equação diferencial 4.34 do problema é imposta nos 88 pontos de aproximação interiores ao domínio Ω , empregando-se as aproximações MDP. As condições de contorno naturais e essenciais do problema teste são apresentadas na equação 4.35. As condições de contorno naturais são impostas nos 40 pontos de aproximação do contorno externo do domínio Ω , e as condições de contorno essenciais são impostas nos 12 pontos de aproximação do contorno interno do mesmo, empregando-se sempre as aproximações MDP. Para tanto, o método da colocação é utilizado, resultando em uma equação para cada um dos pontos de aproximação empregados, dadas em função das 49 variáveis MDP.

Para a obtenção dos $(N + 5)(M + 5) = 49$ valores das variáveis MDP, o sistema de equações resultante é então resolvido empregando-se o método dos mínimos quadrados. As

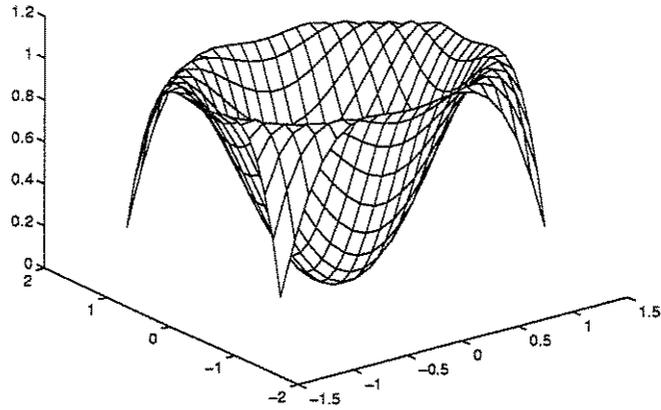


Figura 4.10: Solução $u(x, y)$ MDP da região discretizada.

próprias aproximações MDP lineares em $u^{(4,4)}(x, y)$ são utilizadas no pós-processamento dos dados, produzindo resultados suaves tanto da função $u(x, y)$ quanto de suas derivadas.

A figura 4.10 apresenta solução $u(x, y)$ MDP obtida para toda a região retangular discretizada. E a figura 4.11 apresenta a solução $u(x, y)$ exata, dada pela equação 4.36, para esta mesma região.

A figura 4.12 apresenta a distribuição do erro absoluto, entre as soluções $u(x, y)$ MDP e exata, para toda a região retangular discretizada em domínios pontuais. O erro absoluto $e = u_{\text{MDP}} - u_{\text{exata}}$ máximo, em módulo, é de 0.0131. E o erro absoluto médio, em módulo, é de 0.0034 para toda a região discretizada.

A figura 4.13 apresenta as aproximações MDP de $u(x, y)$ e de suas derivadas, obtidas da solução do problema teste. São apresentados nove gráficos que, observados da esquerda para a direita, seguindo da linha de cima para a de baixo, representam respectivamente as aproximações MDP de $u(x, y)$, $u^{(1,0)}(x, y)$, $u^{(2,0)}(x, y)$, $u^{(0,1)}(x, y)$, $u^{(1,1)}(x, y)$, $u^{(2,1)}(x, y)$,

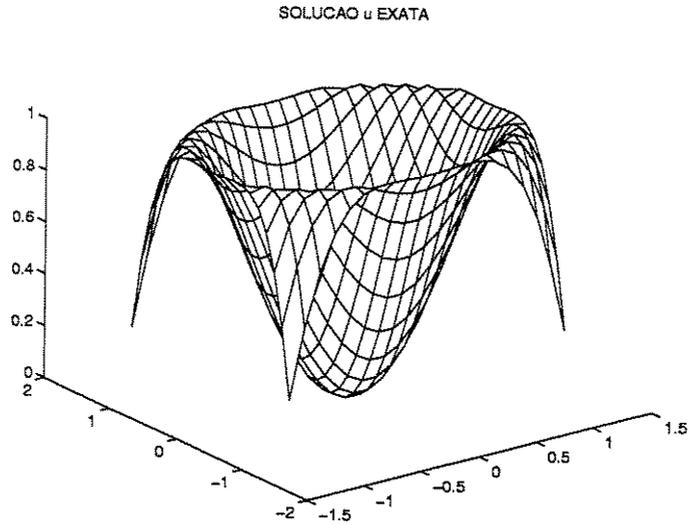


Figura 4.11: Solução $u(x, y)$ exata da região discretizada.

$u^{(0,2)}(x, y)$, $u^{(1,2)}(x, y)$ e $u^{(2,2)}(x, y)$.

Para possibilitar a avaliação da performance dos esquemas numéricos apresentados

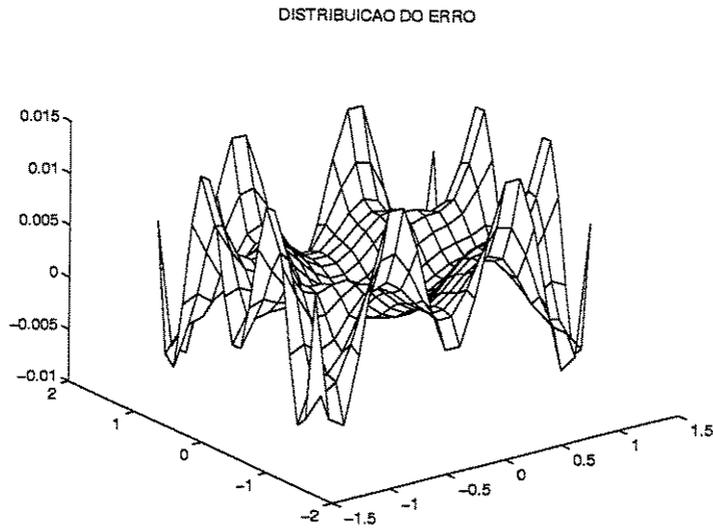


Figura 4.12: Distribuição $e = u_{\text{MDP}} - u_{\text{exata}}$ do erro absoluto.

APROXIMACOES u MDP E SUAS DERIVADAS

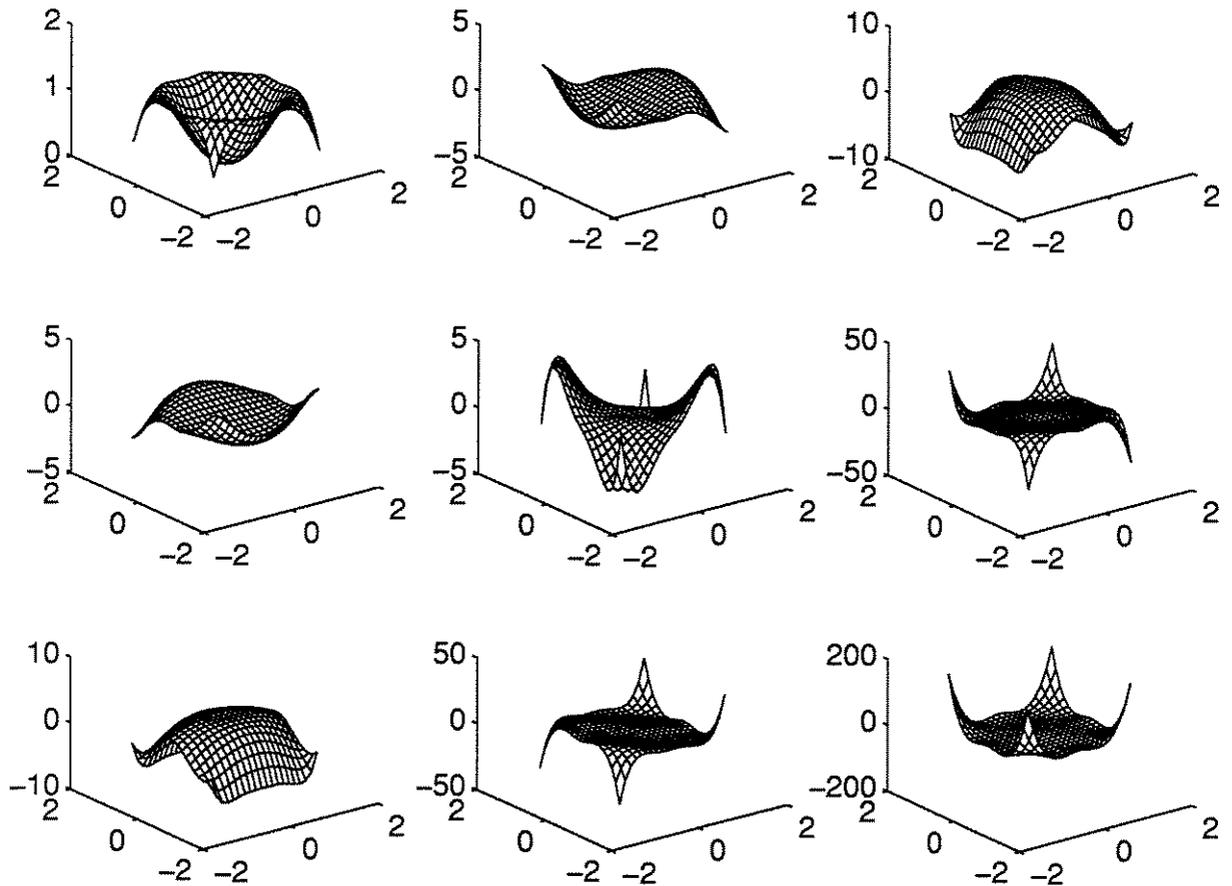


Figura 4.13: Aproximações MDP de $u(x,y)$ e de suas derivadas.

neste trabalho, as soluções u MDP são tomadas nos 40 pontos de aproximação do contorno externo do domínio Ω . E as soluções q MDP são tomadas nos 12 pontos de aproximação do contorno interno do domínio Ω do problema teste. Observa-se que as posições destes 52 pontos de aproximação coincidem com as posições dos nós dos elementos de contorno MDR. E portanto, estes valores de u e q podem ser comparados diretamente com os valores obtidos da solução MDR do problema teste.

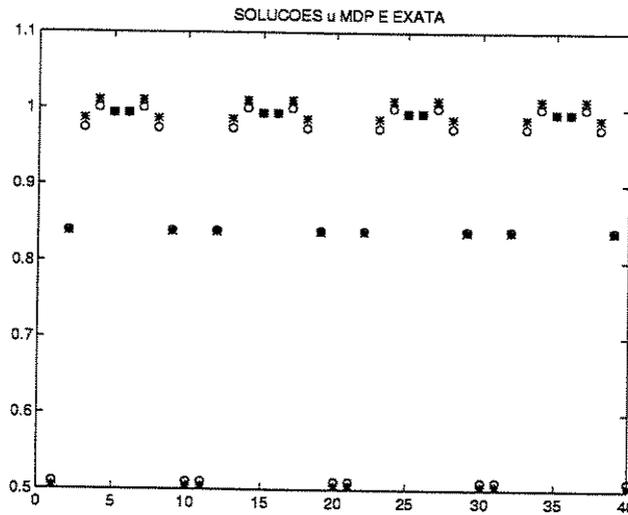


Figura 4.14: Valores u MDP nos pontos do contorno externo.

A figura 4.14 apresenta os valores obtidos de u da solução MDP para os pontos de aproximação do contorno externo, que são indicados por $*$. A figura 4.14 apresenta ainda os valores exatos de u , obtidos a partir da equação 4.36, para estes mesmos pontos de aproximação. As soluções nodais MDP em u apresentam o erro percentual máximo de 1.2613% e um erro percentual médio de 0.6960%.

A figura 4.15 apresenta os valores obtidos de q da solução MDP para os pontos de aproximação do contorno interno, que são indicados por $*$. A figura 4.15 apresenta ainda os valores exatos de q , obtidos a partir da equação 4.36, para estes mesmos pontos de aproximação. As soluções nodais MDP em q apresentam o erro percentual máximo de 1.4297% e um erro percentual médio de 1.0175%.

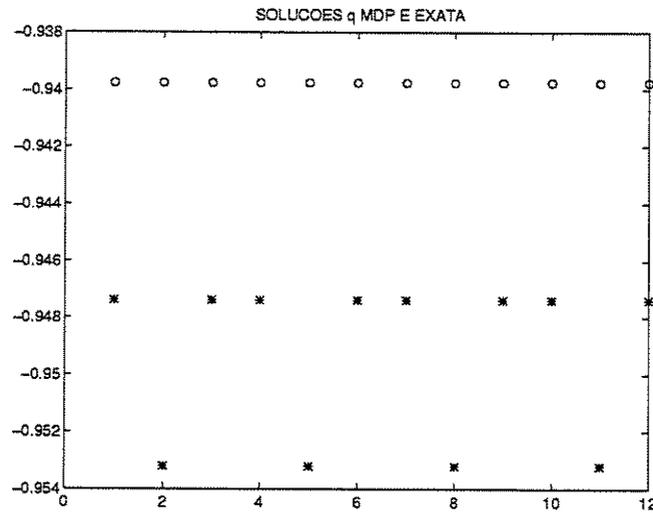


Figura 4.15: Valores q MDP nos pontos do contorno interno.

4.2.4 Comparação dos resultados

Nesta sub-seção avalia-se a performance dos esquemas numéricos MDR e MDP, apresentados neste capítulo. Para tanto, foi tomado o cuidado de garantir-se que a mesma informação sobre o problema teste alimenta cada um dos esquemas numéricos. Os 40 pontos de avaliação dos resultados em u e os 12 pontos de avaliação dos resultados em q também são coincidentes para as soluções MDR e MDP, obtidas do problema teste. É possível assim uma análise criteriosa da performance dos esquemas numéricos, uma vez que a única distinção entre as soluções reside na forma como é realizado o processamento da informação, que é o que efetivamente caracteriza um método numérico.

A tabela 4.1 apresenta a comparação dos resultados das soluções MDR e MDP do problema teste. Observa-se que a solução MDR é obtida empregando-se uma discretização do problema teste em 52 variáveis, enquanto a solução MDP é obtida segundo uma discretização em 49 variáveis.

Tabela 4.1: Soluções MDR e MDP do problema teste.

Esquema numérico	MDR	MDP
Ordem do sistema	52	49
Erro u médio	1.2510%	0.6960%
Erro u máximo	2.9388%	1.2613%
Erro q médio	4.3519%	1.0175%
Erro q máximo	4.4595%	1.4297%

4.3 Problemas de torção

Problemas de torção constituem problemas de valores de contorno na teoria da elasticidade que descrevem o comportamento da função de tensão $u(x, y)$ de acordo com dada geometria da seção transversal de um elemento.

A equação de Poisson 4.37, onde o termo fonte está relacionado ao módulo de elasticidade transversal do material G e ao ângulo de rotação por unidade de comprimento θ , caracteriza a equação diferencial do problema, válida para todo o domínio Ω da seção transversal do elemento.

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -2G\theta \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.37)$$

A função de tensão $u(x, y)$ é nula em todo o contorno Γ da seção transversal, e esta é a condição de contorno de torção 4.38.

$$u(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Gamma \quad (4.38)$$

As tensões de cisalhamento $\tau_{xz}(x, y)$ e $\tau_{yz}(x, y)$ estão relacionadas às derivadas parciais de primeira ordem da função de tensão $u(x, y)$. As equações 4.39 e 4.40 descrevem estas relações.

$$\tau_{xz}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad (4.39)$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \quad (4.40)$$

O torque M_t , apresentado na expressão 4.41, é outro resultado importante obtido dos problemas de torção.

$$M_t = 2 \int \int_{\Omega} u(x, y) d\Omega \quad (4.41)$$

Considere-se uma seção triangular equilátera genérica, definida no plano (x, y) , de tal forma que os vértices da mesma estão localizados, respectivamente, nas posições $(0, \frac{a}{3}\sqrt{3})$, $(a, 0)$ e $(a, \frac{2a}{3}\sqrt{3})$. (Observa-se que a altura deste triângulo é dada por a e o comprimento de seus lados é de $\frac{2a}{3}\sqrt{3}$). A solução analítica do problema de torção aplicado a esta seção transversal de um elemento é apresentada na equação 4.42, Timoshenko & Goodier [26]. As expressões 4.43 e 4.44 relacionam o sistema referencial (X, Y) , a partir

do qual a solução analítica do problema é fornecida, com aquele (x, y) , no qual define-se a seção transversal triangular equilátera. E a equação 4.45 descreve o momento devido à torção M_t atuante nesta seção transversal.

$$u(X, Y) = G\theta \frac{a + 3X}{54a} (4a^2 - 12aX + 9X^2 - 27Y^2) \quad (4.42)$$

$$X = \frac{2a}{3} - x \quad (4.43)$$

$$Y = y - \frac{a}{3}\sqrt{3} \quad (4.44)$$

$$M_t = G\theta \frac{a^4}{45}\sqrt{3} \quad (4.45)$$

Empregou-se o método dos domínios pontuais para a resolução numérica do problema de torção de uma seção transversal triangular equilátera. Para tanto, utilizou-se da metodologia apresentada na sétima seção do capítulo 2 e, por simplicidade, assumiu-se para este problema que $G\theta = 1$.

A figura 4.16 ilustra o procedimento MDP para a obtenção da função de tensão $u(x, y)$ para uma seção transversal triangular equilátera. O canto superior esquerdo da figura apresenta a discretização de área em nove domínios pontuais – indicados por o. Este procedimento conduz a um sistema linear de ordem 49. O canto superior direito da

figura 4.16 apresenta os pontos de aproximação para a colocação da equação diferencial 4.37 do problema – indicados por \star – e os pontos de aproximação para a colocação da condição de contorno 4.38 – indicados por \circ . O canto inferior esquerdo da figura apresenta a função de tensão $u(x, y)$ MDP obtida, enquanto o canto inferior direito mostra as curvas de nível desta mesma função. A função de tensão $u(x, y)$ MDP é coincidente com a solução analítica deste problema de torção, apresentada em 4.42.

A figura 4.17 é análoga à figura 4.16 e ilustra o procedimento MDP para a obtenção da função de tensão $u(x, y)$ para uma seção transversal retangular. Para a solução deste problema assumiu-se $G\theta = 1$ e o retângulo, que caracteriza a seção transversal do elemento sujeito à torção, apresenta o comprimento da base $a = 1$ e altura $b = 2.5$.

Para o cálculo do torque M_t é necessário realizar-se a integração da função de tenso $u(x, y)$ sobre a área Ω da seção transversal retangular, conforme definido na equação 4.41.

O procedimento padrão para a integração numérica de uma função arbitrária unidimensional $f(\xi)$ no intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$, empregando-se a quadratura de Gauss, é apresentado na expressão 4.46. As coordenadas ξ_i e os seus respectivos coeficientes de ponderação w_i da quadratura de Gauss, onde $i = 1, 2, 3$, são definidos na equação 4.47. Este procedimento assegura a solução exata para funções polinomiais $f(\xi)$ do quinto grau.

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^3 w_i f(\xi_i) \quad (4.46)$$

$$\xi = \left\{ \begin{array}{c} -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ 0 \\ \sqrt{\frac{3}{5}} \end{array} \right\} \quad w = \left\{ \begin{array}{c} \frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{5}{9} \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

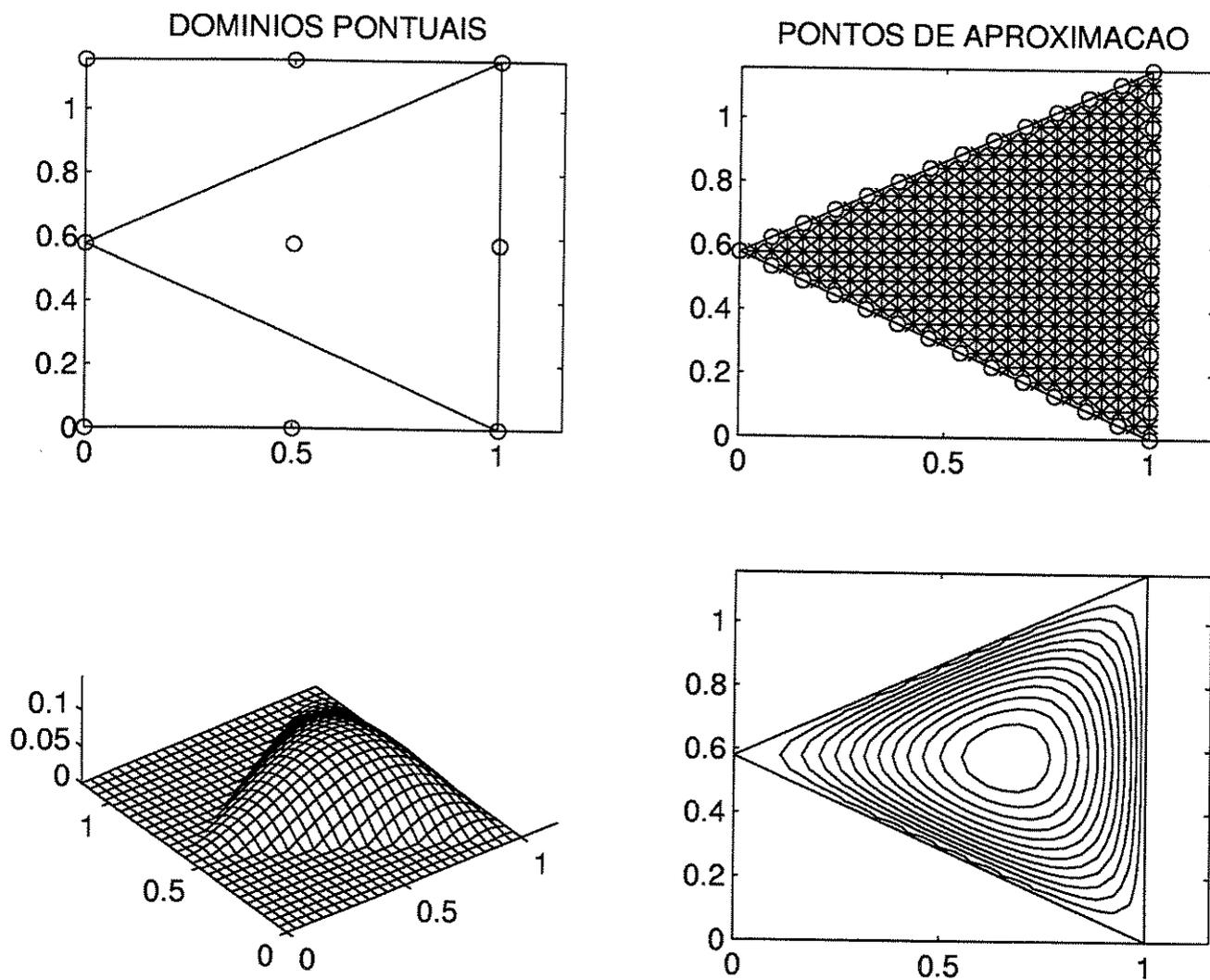


Figura 4.16: Solução MDP para seção transversal triangular.

Assim, para o cálculo do torque M_t , a integração numérica bidimensional da função de tensão $u(x, y)$ MDP é realizada – de acordo com a expressão 4.48 – independentemente para as quatro regiões delimitadas por domínios pontuais vizinhos, conforme ilustradas no canto superior esquerdo da figura 4.17. Observa-se que para tanto, deve-se trabalhar convenientemente com as transformações entre os sistemas referenciais (ξ, η) , das coor-

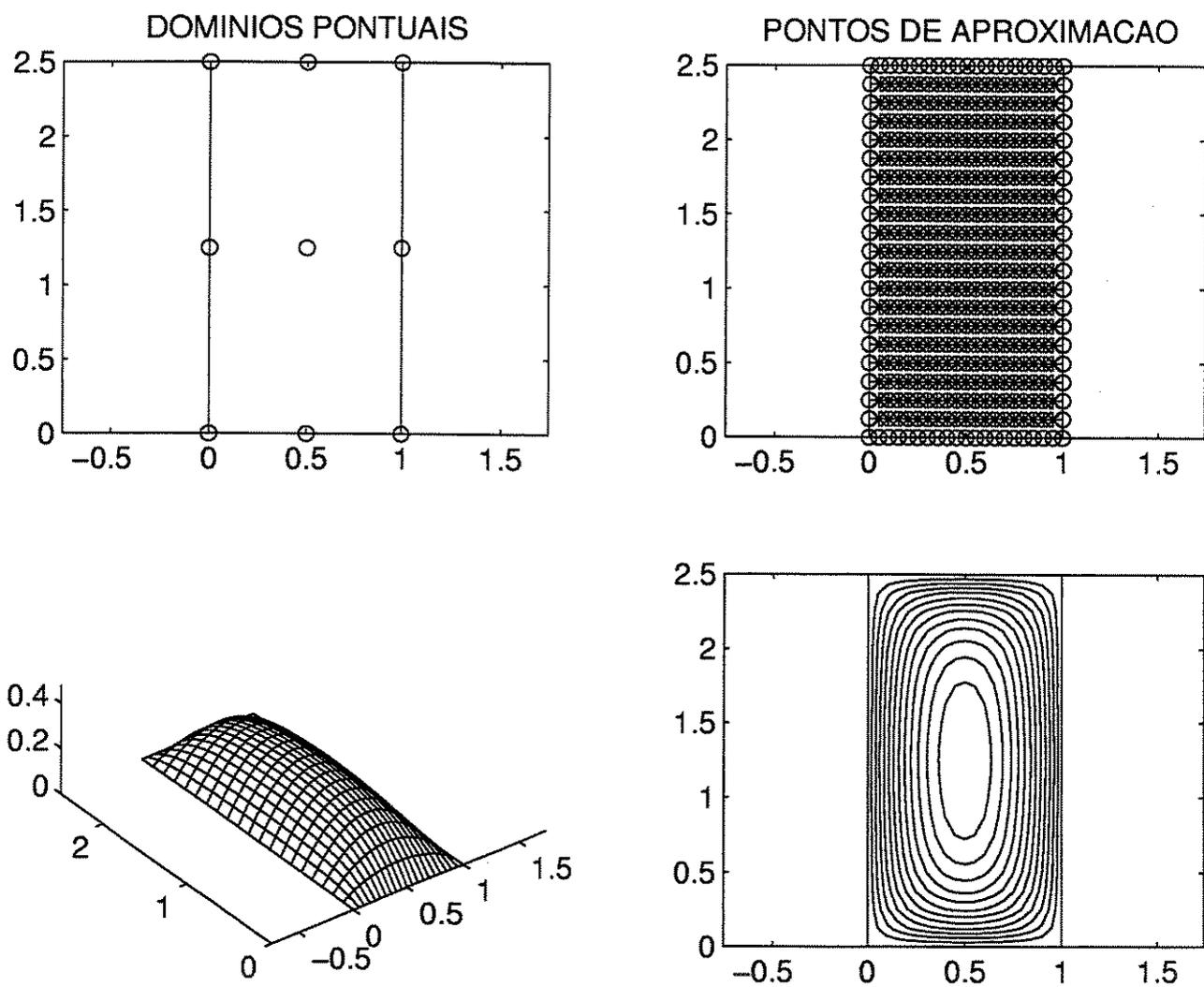


Figura 4.17: Solução MDP para seção transversal retangular.

denadas de quadratura de Gauss, e (x, y) , onde define-se o problema de torção da seção transversal retangular.

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} u(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_i w_j u(\xi_i, \eta_j) \tag{4.48}$$

Tabela 4.2: Valores do torque adimensional para seções retangulares.

$\frac{b}{a}$	1.0	2.5	5.0	10.0
SAN	2.2489	9.9716	23.2891	49.7479
MDP	2.2490	9.9706	23.2517	49.4372
exatos	2.2496	9.96	23.28	49.92

São obtidos resultados numéricos do torque adimensional $\frac{M_t}{G\theta a^4}$ para diferentes valores da razão $\frac{b}{a}$ dos comprimentos dos lados da seção transversal. Estas soluções MDP são apresentadas na tabela 4.2, juntamente com os valores exatos do torque, extraídos de Timoshenko & Goodier [26], e de resultados SAN, obtidos por Ioakimidis [10]. Os esquemas Semi-Analíticos/Numéricos (SAN) caracterizam-se por combinarem valores simbólicos e numéricos na aproximação, tendo aplicações especialmente em problemas de otimização. Observa-se a boa concordância das soluções MDP com os demais resultados apresentados na tabela 4.2.

A figura 4.18 ilustra o procedimento MDP para a obtenção da função de tensão $u(x, y)$ para uma seção transversal retangular trincada. O canto superior esquerdo da figura apresenta a discretização de área em quarenta e nove domínios pontuais – indicados por \circ . Este procedimento conduz a um sistema linear de ordem 121. O canto superior direito da figura 4.18 apresenta os pontos de aproximação para a colocação da equação diferencial 4.37 do problema – indicados por \star – e os pontos de aproximação para a colocação da condição de contorno 4.38 – indicados por \circ . O canto inferior esquerdo da figura apresenta a função de tensão $u(x, y)$ MDP obtida, enquanto o canto inferior direito mostra as curvas de nível desta mesma função. Esta solução MDP para o problema da torção de um elemento com seção transversal retangular trincada mostra-se

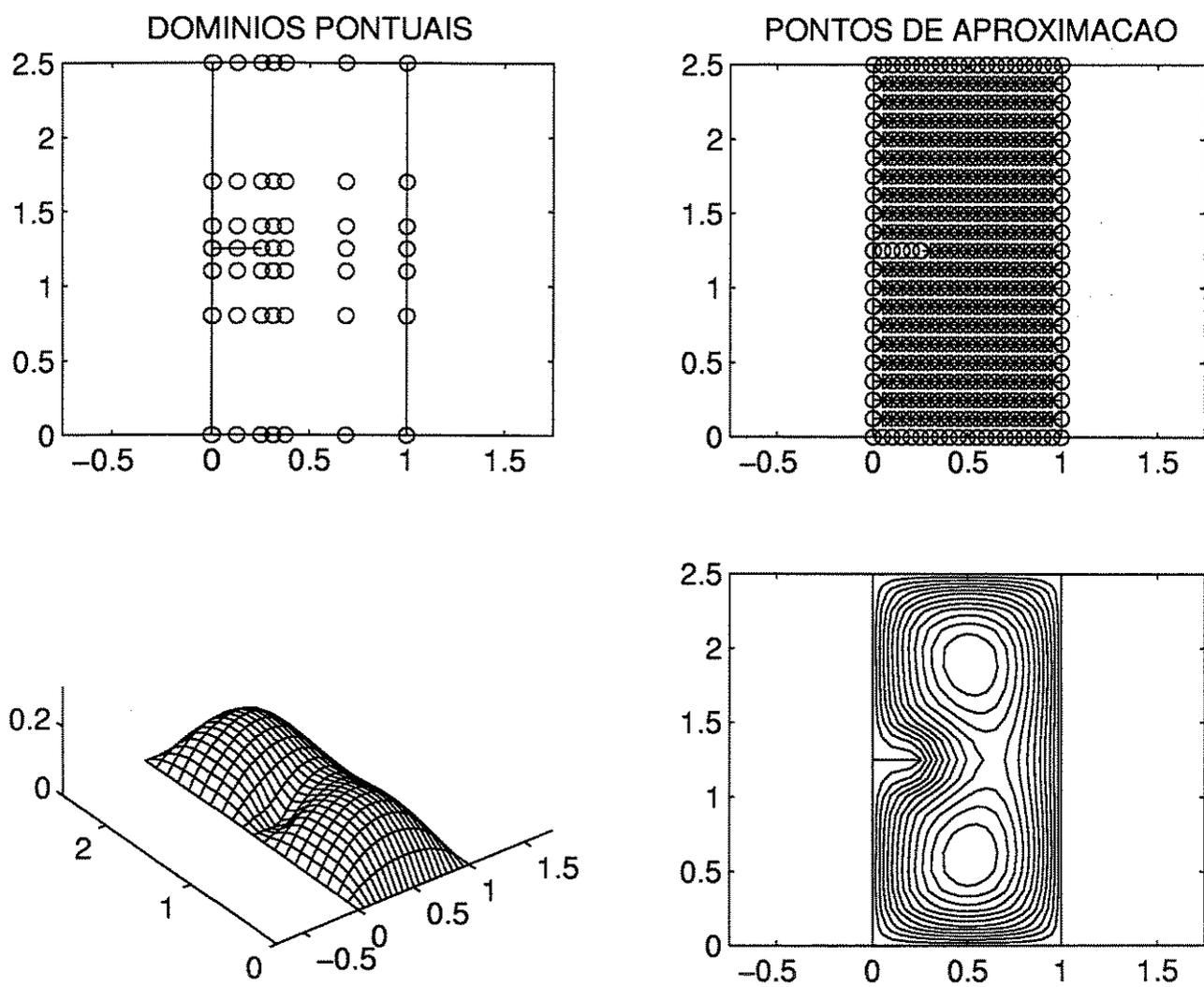


Figura 4.18: Solução MDP para seção retangular trincada.

qualitativamente correta, embora não tenha sido comparada com resultados da literatura.

Capítulo 5

Análise Transiente de Carga Móvel Atuante em Viga

Este capítulo têm como objetivo explorar as potencialidades do método proposto na solução de problemas em mecânica do contínuo. Mais especificamente procura-se estudar aqui a possibilidade da introdução de descontinuidades físicas em diferentes níveis das aproximações MDP – da função ou de suas derivadas parciais.

É sabido que um carregamento móvel atuante sobre uma ponte produz maiores deflexões e tensões que o mesmo carregamento aplicado estaticamente. Este efeito das cargas móveis sobre pontes é de grande importância prática e deve ser considerado no projeto das mesmas. Neste trabalho apresenta-se a modelagem de uma viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel empregando-se o método dos domínios pontuais. E o método dos elementos finitos também é empregado para a modelagem da viga.

O problema escolhido para a análise, a modelagem dinâmica de viga bi-apoiada

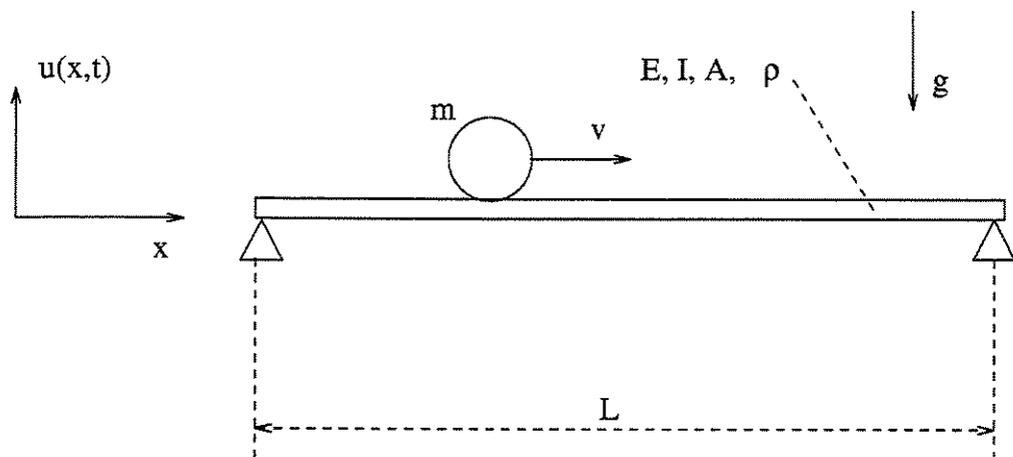


Figura 5.1: Viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel.

sujeita a carregamento móvel, foi amplamente estudado por pesquisadores desde meados do século XIX, como Willis [27] e Stokes [24], até o final da década de sessenta do século passado, tendo culminado com trabalhos como os de Steele [23] e de Tang & Yen [25]. A vantagem de tratar-se de um problema clássico e que possui solução analítica reside na possibilidade de avaliar-se efetivamente a performance do esquema numérico empregado na solução. A figura 5.2 apresenta o desenho esquemático de uma viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel.

Apesar se ambas as soluções numéricas – MDP e MEF – serem medidas com relação à solução analítica do problema em estudo, não cabe neste trabalho uma comparação direta entre os esquemas numéricos. Convém observar-se que tais abordagens, adotadas na análise transiente de carga móvel atuante em uma viga, são completamente distintas. E a motivação na apresentação da modelagem MEF está justamente no desejo de expor estas diferentes possibilidades de abordagem de um mesmo problema.

Este capítulo encontra-se organizado em três seções, conforme descrito a seguir.

Modelagem MEF. O método dos elementos finitos é empregado para a modelagem da viga. Neste caso a discretização espacial dá-se a partir do elemento finito cúbico de Hermite e um esquema de Newmark com aceleração constante é considerado para a integração do sistema das equações de movimento ao longo do tempo. Na solução MEF do problema é imposta uma relação específica entre as discretizações espacial e temporal de forma a garantir-se que a posição da carga móvel sempre coincida com um nó do modelo, facilitando a análise.

Modelagem MDP. A versão bidimensional do método dos domínios pontuais é empregada na análise transiente de carga móvel atuante em uma viga. Sendo assim, considera-se uma das dimensões ao longo do comprimento da mesma – espaço – enquanto a outra está associada a evolução no tempo. O carregamento móvel é tratado como uma descontinuidade na derivada terceira do deslocamento, que está diretamente associada à força cortante atuante na viga. Tal abordagem mostra-se bastante conveniente uma vez que o MDP permite a introdução de descontinuidades físicas em posições intermediárias aos pontos de discretização, possibilitando a obtenção de uma solução apurada mesmo para a modelagem da viga utilizando-se um número reduzido de variáveis.

Apresentação e discussão dos resultados. Observa-se que os modelos MEF e MDP apresentam níveis de erro compatíveis, apesar das abordagens serem bastante distintas. Os erros das soluções MEF acentuam-se a medida que são computados os incrementos de tempo, enquanto que os erros MDP apresentam-se melhor distribuídos ao longo do tempo. A introdução de descontinuidades em posições intermediárias aos pontos de discretização MDP mostra-se bastante eficiente, viabilizando a análise transiente da carga móvel atuante em viga.

5.1 Modelagem MEF.

A referência para a modelagem da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel empregando-se o método dos elementos finitos é Dhatt & Touzot [7]. A equação de movimento da viga, discretizada empregando-se o elemento finito cúbico de Hermite, é descrita pela expressão 5.1. Nesta equação E representa o módulo de elasticidade do material, I representa o momento de inércia de área da seção transversal, ρ representa a densidade do material, A representa a área da seção transversal e l representa o comprimento de um elemento da viga.

$$\frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{i-1} \\ \ddot{\theta}_{i-1} \\ \ddot{u}_i \\ \ddot{\theta}_i \end{Bmatrix} + \frac{E I}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{i-1} \\ \theta_{i-1} \\ u_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ M \\ F \\ M \end{Bmatrix}$$

O deslocamento transversal da viga é indicado por u e a sua rotação é representada por θ . Os dois pontos sobrescritos sobre os símbolos u e θ indicam a dupla derivação com relação ao tempo. Assim, \ddot{u} e $\ddot{\theta}$ descrevem respectivamente a aceleração transversal da viga e a sua aceleração angular. Os subscritos $i - 1$ e i identificam os nós que limitam o elemento de viga. E finalmente, os símbolos F e M representam as forças e os momentos nodais atuantes.

A viga é discretizada em elementos finitos e, como o sistema de equações 5.1 é linear, o princípio da superposição é empregado para a consideração das contribuições nodais destes elementos. Desta forma é construído o sistema global das equações de movimento, apresentado em 5.2.

$$[M]\{\ddot{U}\} + [K]\{U\} = \{f\} \quad (5.2)$$

Na equação acima $[M]$ e $[K]$ representam respectivamente as matrizes de massa e de rigidez da viga, obtidas a partir da superposição das contribuições nodais dos elementos. Estas matrizes são tridiagonais simétricas. O vetor $\{\ddot{U}\}$ é o vetor das acelerações, que apresenta as componentes \ddot{u} e $\ddot{\theta}$, respectivamente da aceleração transversal da viga e da sua aceleração angular, para cada um dos nós do modelo. O vetor $\{U\}$ é o vetor dos deslocamentos, que apresenta as componentes u e θ , respectivamente do deslocamento transversal da viga e da sua rotação, para cada um dos nós do modelo. E o vetor $\{f\}$ é o vetor dos esforços, que apresenta as componentes F e M das forças e dos momentos nodais atuantes.

Observa-se que, a princípio, a ordem do sistema é $2N + 2$, onde N é o número de elementos finitos considerados na discretização espacial da viga. Entretanto, como a viga encontra-se bi-apoiada, é necessário considerar-se as condições de contorno expressas pela equação 5.3.

$$u_0 = u_N = 0 \qquad \ddot{u}_0 = \ddot{u}_N = 0 \quad (5.3)$$

Para a consideração das condições de contorno 5.3, as linhas e colunas 1 e $2N + 1$ das matrizes $[M]$ e $[K]$ são excluídas. Assim, a ordem final do sistema global das equações de movimento da viga é $2N$, onde N é o número de elementos finitos considerados na discretização espacial da mesma.

Um esquema de Newmark, apresentado nas equações 5.4 e 5.5, é utilizado para a integração do sistema global das equações de movimento da viga no domínio do tempo. Os

subscritos $j - 1$ e j representam instantes de tempo distintos, separados pelo intervalo de discretização Δt . Escrito dessa forma, o método é incondicionalmente estável e assume-se uma aceleração constante igual ao seu valor médio no intervalo de discretização.

$$\{\dot{U}\}_j = \{\dot{U}\}_{j-1} + \frac{\Delta t}{2}(\{\ddot{U}\}_{j-1} + \{\ddot{U}\}_j) \quad (5.4)$$

$$\{U\}_j = \{U\}_{j-1} + \Delta t \{\dot{U}\}_{j-1} + \frac{\Delta t^2}{4}(\{\ddot{U}\}_{j-1} + \{\ddot{U}\}_j) \quad (5.5)$$

O sistema das equações movimento da viga bi-apoiada, avaliado no instante de tempo j , pode ser descrito como apresentado na equação 5.6. Aplicando-se as expressões 5.4 e 5.5 em 5.6, obtêm-se a equação 5.7, que possibilita o cálculo do vetor das acelerações $\{\ddot{U}\}$ no instante de tempo j . Os vetores $\{\dot{U}\}_j$ e $\{U\}_j$ são calculados na sequência, empregando-se as próprias expressões 5.4 e 5.5; e por isso o esquema é dito implícito.

$$[M]\{\ddot{U}\}_j + [K]\{U\}_j = \{f\}_j \quad (5.6)$$

$$([M] + \frac{\Delta t^2}{4}[K])\{\ddot{U}\}_j = \{f\}_j - [K](\{U\}_{j-1} + \Delta t \{\dot{U}\}_{j-1} + \frac{\Delta t^2}{4}\{\ddot{U}\}_{j-1}) \quad (5.7)$$

A condição inicial, considerada para a integração no tempo, é apresentada na equação 5.8.

$$\{\ddot{U}\}_0 = \{0\} \quad \{\dot{U}\}_0 = \{0\} \quad (5.8)$$

Finalmente, uma relação específica entre as discretizações espacial e temporal é adotada de forma a garantir-se que a posição da carga móvel sempre coincida com um nó do modelo, facilitando a análise. A discretização espacial dá-se a partir de elementos de viga de comprimento $l = \frac{L}{N}$, onde L é o comprimento total da viga e $N = 120$ é o número de elementos finitos considerado. Assim, o intervalo de discretização temporal é dado por $\Delta t = \frac{l}{v}$, onde v representa a velocidade constante do carregamento móvel. Dessa forma, a massa m do carregamento móvel é considerada na posição correspondente da diagonal principal da matriz de massa da viga $[M]$. E a força $-m g$, onde g é aceleração da gravidade no meio, pode ser aplicada diretamente no vetor dos esforços nodais atuantes $\{f\}_j$.

5.2 Modelagem MDP.

O método dos domínios pontuais têm sido desenvolvido buscando explorar-se ao máximo o conceito de generalidade. Na prática isto significa a flexibilidade para o tratamento de uma larga faixa de problemas, a facilidade de aplicação das condições de contorno e a possibilidade da introdução de descontinuidades em diferentes níveis da aproximação (função ou derivadas), conduzindo à soluções suaves para a aproximação e suas derivadas.

Para atender a este conceito de generalidade, o MDP apresenta funções fracamente estruturadas, e portanto distintas daquelas empregadas nos esquemas numéricos tradicionais. Enquanto observa-se a natureza altamente estruturada das aproximações de elementos finitos e de elementos de contorno, baseadas na forte dependência da malha de discretização, o método dos domínios pontuais caracteriza-se por simples funções polinomiais construídas por partes.

A aplicação MDP na modelagem da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel é apresentada nesta seção. O capítulo 2 deste trabalho descreve detalhadamente o Método dos Domínios Pontuais (MDP). Outras referências para a modelagem de problemas de valores de contorno envolvendo equações diferenciais parciais 2D empregando-se o MDP são Neto & Iguti [17] e Neto, Iguti, Nogueira & Mesquita [18].

A solução do problema da modelagem de viga bi-apoiada segundo o método dos domínios pontuais utiliza as aproximações MDP lineares em $u^{(4,4)}(x, y)$, cuja formulação matemática foi apresentada na sétima seção do capítulo 2.

O método dos domínios pontuais permite a introdução de descontinuidades físicas em qualquer um dos níveis da aproximação (função ou suas derivadas) e numa posição

arbitrária do domínio do problema. A aplicação deste conceito na modelagem da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel é a grande motivação deste capítulo, e no caso deste problema específico, o carregamento móvel, denotado por P , é responsável por uma descontinuidade física na derivada $u^{(3,0)}(x, t)$ que está linearmente associada à força cortante atuante na viga.

Inicialmente é interessante observar-se que nesta aplicação MDP o espaço bidimensional, onde define-se o domínio do problema, é descrito por uma dimensão espacial x e uma dimensão temporal t . E isto não altera em nada o procedimento construtivo das funções bidimensionais MDP, apresentado anteriormente, bastando assumir-se que $u^{(4,4)}(x, y) = u^{(4,4)}(x, t)$ e assim sucessivamente.

A força cortante $F(x, t)$ é dada pela equação 5.9, onde E representa o módulo de elasticidade do material e I representa o momento de inércia de área da seção transversal da viga.

$$F(x, t) = EI u^{(3,0)}(x, t) \quad (5.9)$$

A expressão 5.10 caracteriza a derivada terceira do deslocamento transversal da viga com relação a x , onde x_P representa a posição instantânea do carregamento móvel. Na equação 5.10 observa-se que a derivada $u^{(3,0)}(x, t)$ apresenta uma descontinuidade física devida ao carregamento móvel atuante.

$$u^{(3,0)}(x, t) = \begin{cases} u^{(3,0)}(x, t) & x < x_P \\ u^{(3,0)}(x, t) + \frac{P}{EI} & x \geq x_P \end{cases} \quad (5.10)$$

A posição instantânea x_P é igual a vt , onde v representa a velocidade constante do carregamento móvel P , que por sua vez é definido na expressão 5.11. Nesta equação, m representa a massa do carregamento móvel e g representa a aceleração da gravidade no meio.

$$P = m(u^{(0,2)}(x_P, t) - g) \quad (5.11)$$

Para o tratamento de descontinuidades nas aproximações MDP é conveniente introduzir-se a função $\langle x - x_P \rangle$, descrita pela expressão 5.12.

$$\langle x - x_P \rangle = \begin{cases} 0 & x < x_P \\ (x - x_P) & x \geq x_P \end{cases} \quad (5.12)$$

Observa-se que a função $\langle x - x_P \rangle$ elevada a potência zero é dada pela equação 5.13.

$$\langle x - x_P \rangle^0 = \begin{cases} 0 & x < x_P \\ 1 & x \geq x_P \end{cases} \quad (5.13)$$

A função $\langle x - x_P \rangle^0$ pode ser integrada n vezes, sendo o resultado desta operação integral dado pela expressão 5.14.

$$\int^n \langle x - x_P \rangle^0 dx^n = \frac{\langle x - x_P \rangle^n}{n!} \quad (5.14)$$

Assim, a introdução da descontinuidade $\frac{P}{EI}$ na aproximação MDP da derivada $u^{(3,0)}(x, t)$, em uma dada posição arbitrária x_P do domínio do problema, é descrita pela equação 5.15. Observa-se que esta equação pode ser generalizada para a introdução de descontinuidades em qualquer um dos níveis da aproximação MDP (função ou suas derivadas), uma vez que a mesma viabiliza o procedimento construtivo MDP, baseado em operações múltiplas de integração.

$$u^{(3,0)}(x, t) = u^{(3,0)}(x, t) + \frac{P}{EI} \langle x - x_P \rangle^0 \quad (5.15)$$

Uma vez introduzida a descontinuidade na aproximação $u^{(3,0)}(x, t)$, as demais aproximações MDP, de ordem mais baixa, passam a ser representadas pelas equações 5.16, 5.17 e 5.18; obtidas de acordo com a expressão 5.14.

$$u^{(2,0)}(x, t) = u^{(2,0)}(x, t) + \frac{P}{EI} \langle x - x_P \rangle \quad (5.16)$$

$$u^{(1,0)}(x, t) = u^{(1,0)}(x, t) + \frac{P}{EI} \frac{\langle x - x_P \rangle^2}{2} \quad (5.17)$$

$$u(x, t) = u(x, t) + \frac{P}{EI} \frac{\langle x - x_P \rangle^3}{6} \quad (5.18)$$

A equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico da viga é representada diretamente, empregando-se as aproximações MDP, como apresentado na expressão

5.19. Nesta equação, ρ representa a densidade do material e A representa a área da seção transversal da viga.

$$E I u^{(4,0)}(x, t) + \rho A u^{(0,2)}(x, t) - \rho I u^{(2,2)}(x, t) = -\rho A g \quad (5.19)$$

A condição inicial para a modelagem da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel é descrita pela equação 5.20.

$$E I u^{(4,0)}(x, 0) = -\rho A g \quad (5.20)$$

As condições de contorno do problema são aplicadas nas extremidades da viga - $x = 0$ e $x = L$ - e de acordo com as equações 5.16 e 5.18, resultam nas expressões 5.21, 5.22, 5.23 e 5.24.

$$u^{(2,0)}(0, t) + \frac{P}{E I} \langle 0 - x_P \rangle = 0 \quad (5.21)$$

$$u^{(2,0)}(L, t) + \frac{P}{E I} \langle L - x_P \rangle = 0 \quad (5.22)$$

$$u(0, t) + \frac{P}{E I} \frac{\langle 0 - x_P \rangle^3}{6} = 0 \quad (5.23)$$

$$u(L, t) + \frac{P}{EI} \frac{\langle L - x_P \rangle^3}{6} = 0 \quad (5.24)$$

É possível desenvolver estas expressões das condições de contorno, considerando-se a equação 5.11 e lembrando-se que $x_P = vt$, de forma a representá-las respectivamente através das equações 5.25, 5.26, 5.27 e 5.28.

$$u^{(2,0)}(0, t) = 0 \quad (5.25)$$

$$u^{(2,0)}(L, t) + \frac{m}{EI} (L - vt) u^{(0,2)}(vt, t) = \frac{mg}{EI} (L - vt) \quad (5.26)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (5.27)$$

$$u(L, t) + \frac{m}{EI} \frac{(L - vt)^3}{6} u^{(0,2)}(vt, t) = \frac{mg}{EI} \frac{(L - vt)^3}{6} \quad (5.28)$$

Neste trabalho, a área retangular do espaço-tempo bidimensional é discretizada empregando-se 36 domínios pontuais. Na direção x , os domínios pontuais são igualmente espaçados de $\Delta x = \frac{L}{5}$, onde L representa o comprimento total da viga. E na direção t , os domínios pontuais são igualmente espaçados de $\Delta t = \frac{T}{5}$, onde T representa o tempo total de análise. Esta discretização MDP resulta num sistema linear final de ordem 100×100 .

A solução desejada do problema é obtida através de uma nuvem de 625 pontos de aproximação tomada de forma a representar-se convenientemente o domínio do mesmo. Estes pontos de aproximação são igualmente espaçados nas direções x e t , respectivamente de $\Delta x_{ap} = \frac{L}{24}$ e $\Delta t_{ap} = \frac{T}{24}$. A equação diferencial do problema é aplicada nos pontos de aproximação interiores ao domínio Ω . E as condições inicial e de contorno são aplicadas nos pontos de aproximação localizados nas respectivas posições da fronteira.

Um sistema de equações lineares das variáveis MDP é obtido da colocação por pontos. Este sistema de equações é então resolvido empregando-se um esquema de mínimos quadrados. Uma vez conhecidos os valores das variáveis MDP, as próprias funções MDP são utilizadas no pós-processamento dos dados. É possível assim avaliar-se as aproximações de $u(x, t)$ e de suas derivadas até $u^{(4,4)}(x, t)$ em qualquer posição da área retangular de discretização.

5.3 Apresentação e discussão dos resultados.

Este capítulo trata da apresentação e da discussão dos resultados obtidos das modelagens MDP e MEF do problema da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel. O problema escolhido para a análise, a modelagem dinâmica de viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel, foi amplamente estudado por pesquisadores desde meados do século XIX, como Willis [27] e Stokes [24], até o final da década de sessenta do século passado, tendo culminado com trabalhos como os de Steele [23] e de Tang & Yen [25]. A vantagem de tratar-se de um problema clássico e que possui solução analítica reside na possibilidade de avaliar-se efetivamente as performances dos esquemas numéricos empregados na solução.

A versão bidimensional do método dos domínios pontuais é empregada na modela-

gem do problema. Sendo assim, considera-se uma das dimensões ao longo do comprimento da viga (espaço) enquanto a outra está associada à evolução no tempo. O carregamento móvel é tratado como uma descontinuidade na derivada terceira do deslocamento, que está diretamente associada à força cortante atuante na viga. Tal abordagem mostra-se bastante conveniente uma vez que o MDP permite a introdução de descontinuidades em posições intermediárias aos pontos de discretização, possibilitando a obtenção de uma solução apurada mesmo para a modelagem da viga utilizando-se um número reduzido de variáveis. De acordo com a metodologia descrita na segunda seção deste capítulo, a modelagem MDP do problema resulta num sistema linear final de ordem $100, 100 \times 100$.

O método dos elementos finitos também é empregado para a modelagem da viga. Neste caso a discretização espacial dá-se a partir do elemento finito cúbico de Hermite e um esquema de Newmark com aceleração constante é considerado para a integração do sistema das equações de movimento ao longo do tempo. Na solução MEF do problema é imposta uma relação específica entre as discretizações espacial e temporal de forma a garantir-se que a posição da carga móvel sempre coincida com um nó do modelo, facilitando a análise. De acordo com a metodologia descrita na primeira seção deste capítulo, a modelagem MEF do problema resulta em sistemas lineares de ordem 240 que devem ser resolvidos ao longo de 120 incrementos no tempo, $120 \times (240 \times 240)$.

Apesar de ambas as soluções numéricas – MDP e MEF – serem medidas com relação à solução analítica do problema em estudo, não cabe neste trabalho uma comparação direta entre os esquemas numéricos. Convém observar-se que tais abordagens, adotadas para a modelagem dinâmica da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel, são completamente distintas. E a motivação na apresentação da modelagem MEF está justamente no desejo de expor estas diferentes possibilidades de abordagem de um mesmo problema.

A figura 5.2 apresenta o desenho esquemático de uma viga bi-apoiada sujeita a

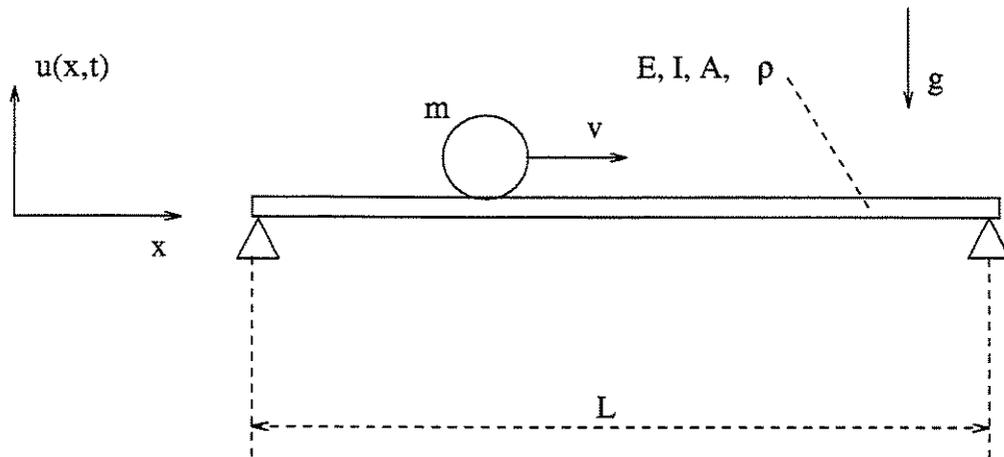


Figura 5.2: Viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel.

carregamento móvel. Os valores que descrevem a geometria e as propriedades físicas consideradas neste estudo são apresentados a seguir. O comprimento da viga L é de 6 m. A área da seção transversal da viga A é $0.06 \times 0.03 \text{ m}^2$. O momento de inércia de área da seção transversal da viga I é $\frac{0.06 \times 0.03^3}{12} \text{ m}^4$. O módulo de elasticidade E adotado para o material da viga é de $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. A densidade do material ρ é 7800 Kg/m^3 . A massa m considerada para o carregamento móvel é 20 Kg. E a aceleração da gravidade no meio é 9.81 m/s^2 . Três pares de valores para a velocidade constante do carregamento móvel v e o tempo de análise T são estudados neste trabalho. Estes dados são apresentados na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Velocidades e Tempos das Análises.

Modelo	v	T
1	0.75 m/s	8 s
2	3 m/s	2 s
3	12 m/s	0.5 s

A equação diferencial 5.29 descreve o movimento da viga. A função $u(x, t)$ representa o deslocamento transversal da viga, que é definida ao longo do comprimento da mesma, considerando-se a variável espacial x , e da evolução no tempo, através da variável temporal t . Na equação 5.29, E representa o módulo de elasticidade do material, I representa o momento de inércia de área da seção transversal, ρ representa a densidade do material, A representa a área da seção transversal e g representa a aceleração da gravidade.

$$E I \frac{d^4 u}{dx^4}(x, t) + \rho A \frac{d^2 u}{dt^2}(x, t) - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2}(x, t) = -\rho A g \quad (5.29)$$

A equação de movimento da viga está sujeita às condições de contorno, apresentadas na equação 5.30, e à condição inicial, descrita pela equação 5.31. Observa-se que na equação 5.30 o termo L representa o comprimento da viga.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \frac{d^2 u}{dx^2}(0, t) = \frac{d^2 u}{dx^2}(L, t) = 0 \quad (5.30)$$

$$E I \frac{d^4 u}{dx^4}(x, 0) = -\rho A g \quad (5.31)$$

As derivadas do deslocamento transversal da viga $u(x, t)$ com relação à x têm o significado físico associado à geometria deformada e aos esforços atuantes na estrutura. A derivada primeira $\frac{du}{dx}(x, t)$ representa a rotação ao longo da viga $\theta(x, t)$. As derivadas segunda e terceira estão linearmente relacionadas às distribuições do momento fletor $M(x, t)$ e da força cortante $F(x, t)$ respectivamente. Estas relações são apresentadas na equação 5.32.

$$M(x, t) = E I \frac{d^2 u}{d x^2}(x, t) \qquad F(x, t) = E I \frac{d^3 u}{d x^3}(x, t) \qquad (5.32)$$

A expressão analítica que descreve a dinâmica da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel é apresentada nas equações ??, ?? e ??. Os símbolos m e v representam respectivamente a massa e a velocidade constante do carregamento móvel.

$$u(x, t) = -\frac{2 m g L^3}{\rho A \pi^2} s_1(x, t) + \frac{2 m g L^4 v}{(E I \rho A)^{1/2} \pi^3} s_2(x, t) \qquad (5.33)$$

$$s_1(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{i \pi x}{L}\right)}{i^2 \left(\frac{E I i^2 \pi^2}{\rho A} - v^2 L^2\right)} \sin\left(\frac{i \pi v t}{L}\right) \qquad (5.34)$$

$$s_2(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{i \pi x}{L}\right)}{i^3 \left(\frac{E I i^2 \pi^2}{\rho A} - v^2 L^2\right)} \sin\left(\frac{i^2 \pi^2 (E I)^{1/2} t}{L^2 (\rho A)^{1/2}}\right) \qquad (5.35)$$

As demais figuras desta seção apresentam resultados gráficos do deslocamento transversal, da rotação, do momento fletor e da força cortante atuantes na viga para os dois primeiros pares de valores da velocidade constante do carregamento móvel v e do tempo de análise T . As tabelas 5.2 e 5.3 apresentam respectivamente os erros absolutos máximos e médios, em milímetros, dos deslocamentos transversais obtidos dos modelos MEF e MDP com relação à solução analítica do problema.

Observa-se que os modelos MEF e MDP apresentam níveis de erro compatíveis, apesar das abordagens serem bastante distintas. Os erros das soluções MEF acentuam-se a medida que são computados os incrementos de tempo, enquanto que os erros MDP

Tabela 5.2: Erros absolutos máximos das análises MEF e MDP [mm].

Modelo	0.75 m/s	3 m/s	12 m/s
MEF	1.9722	6.8817	14.6668
MDP	1.0256	4.6450	23.8739

apresentam-se mais distribuídos ao longo do tempo (veja os resultados gráficos das análises). A introdução de descontinuidades em posições intermediárias aos pontos de discretização MDP mostra-se bastante eficiente, viabilizando a modelagem da viga bi-apoiada sujeita a carregamento móvel.

Tabela 5.3: Erros absolutos médios das análises MEF e MDP [mm].

Modelo	0.75 m/s	3 m/s	12 m/s
MEF	0.4402	1.5620	2.3978
MDP	0.3699	1.5617	9.3436

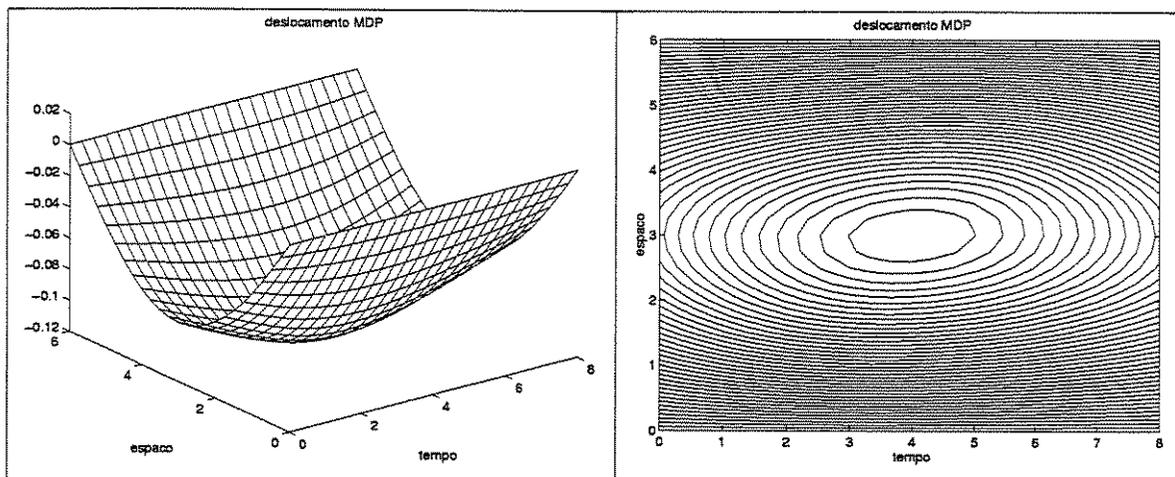


Figura 5.3: Deslocamento MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

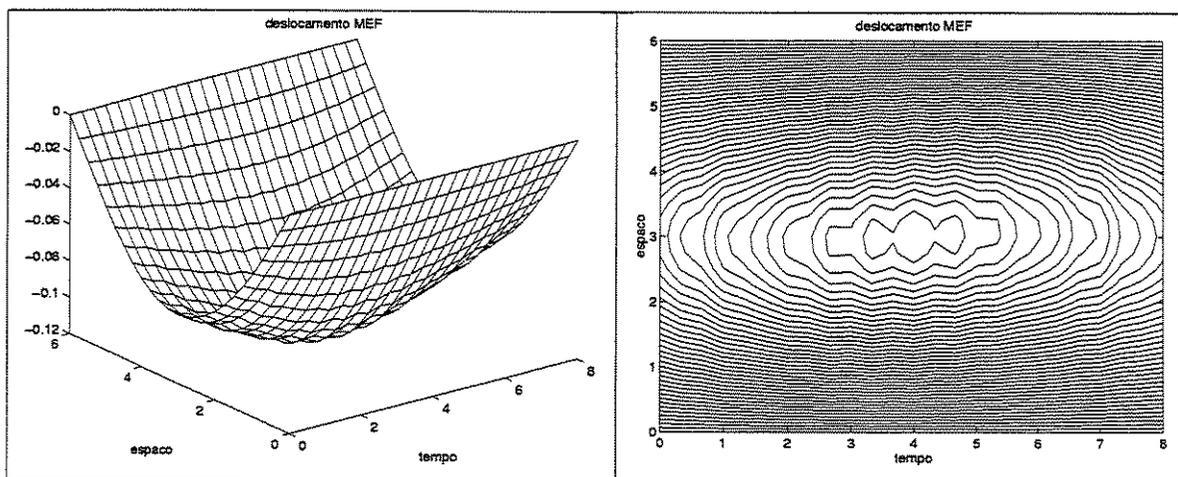


Figura 5.4: Deslocamento MEF, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

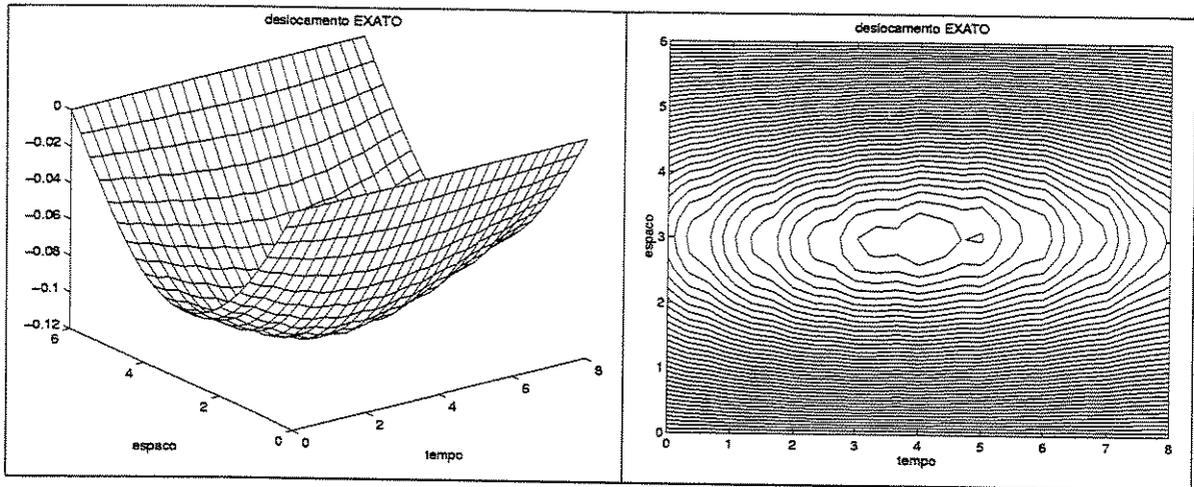


Figura 5.5: Deslocamento exato, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

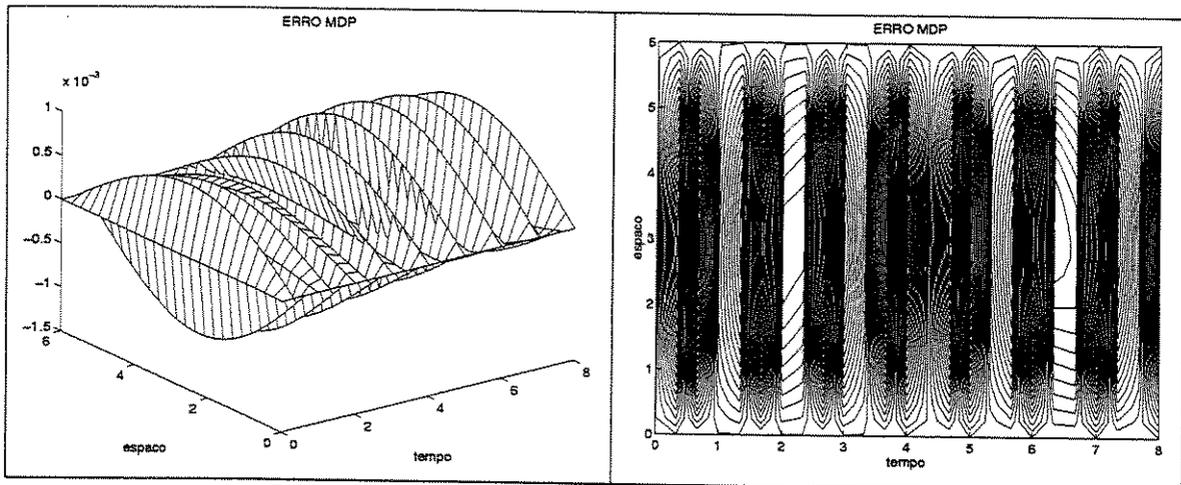


Figura 5.6: Erro MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

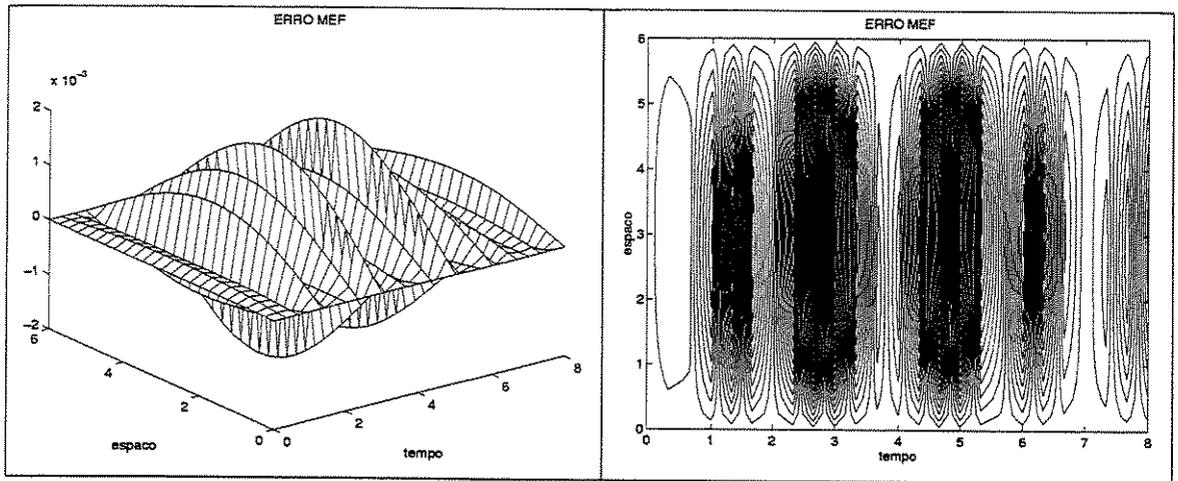


Figura 5.7: Erro MEF, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

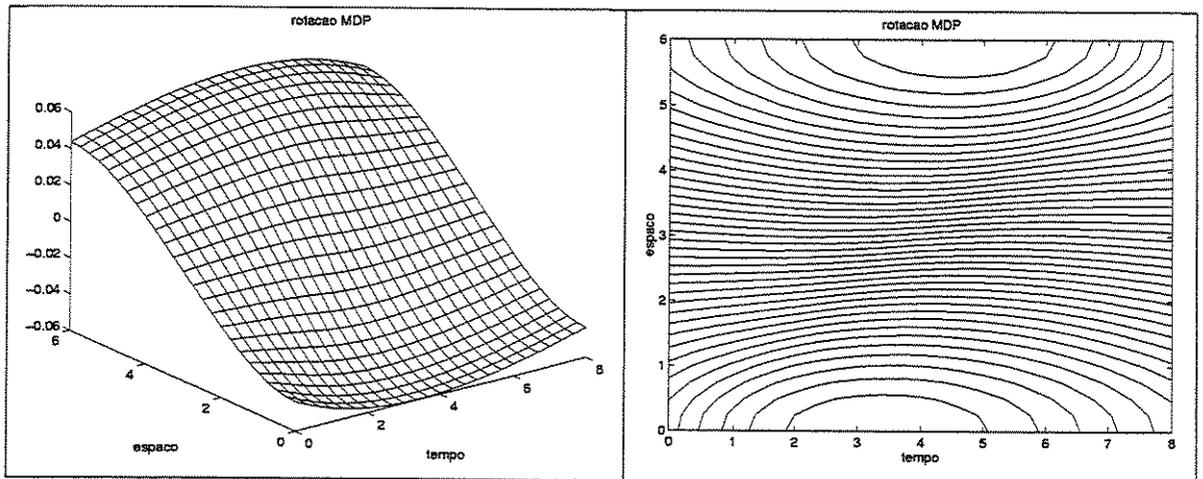


Figura 5.8: Rotação MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

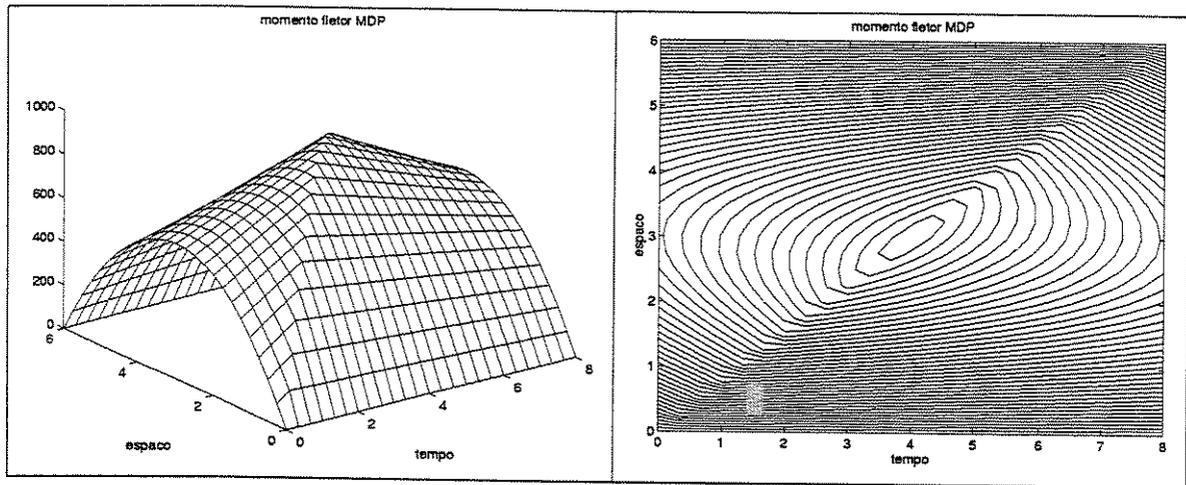


Figura 5.9: Momento fletor MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

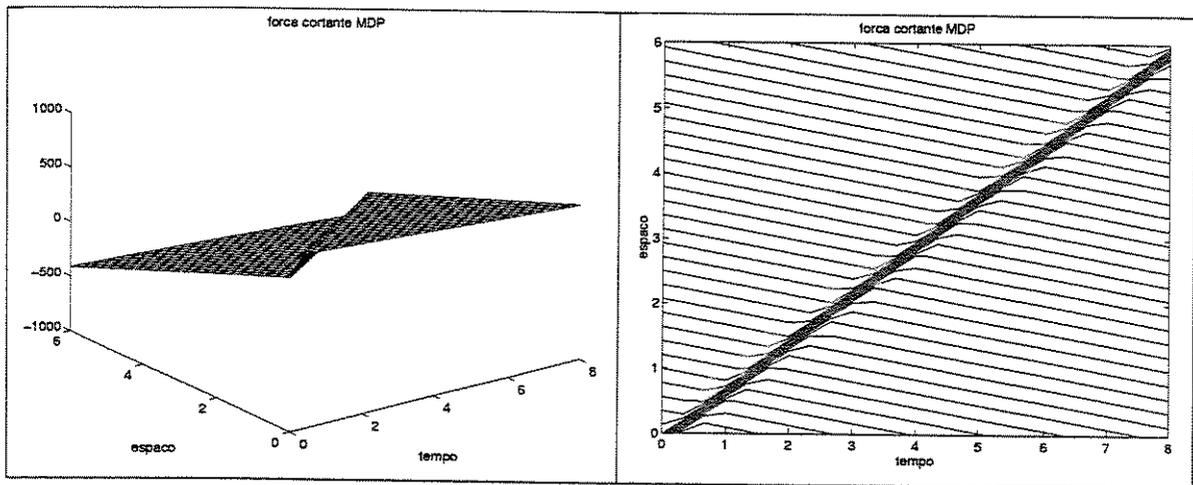


Figura 5.10: Força cortante MDP, $v = 0.75\text{m/s}$, $T = 8\text{s}$

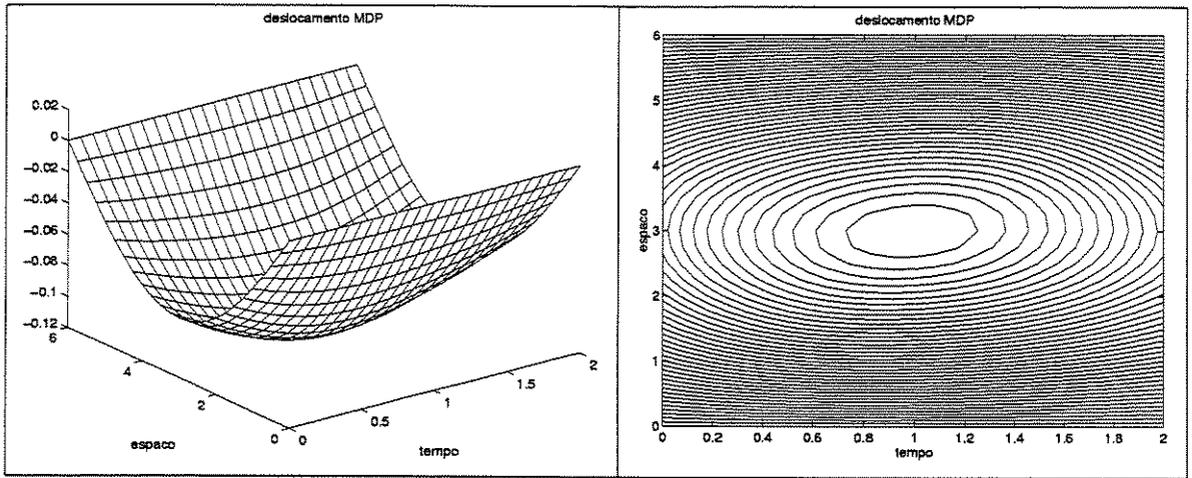


Figura 5.11: Deslocamento MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

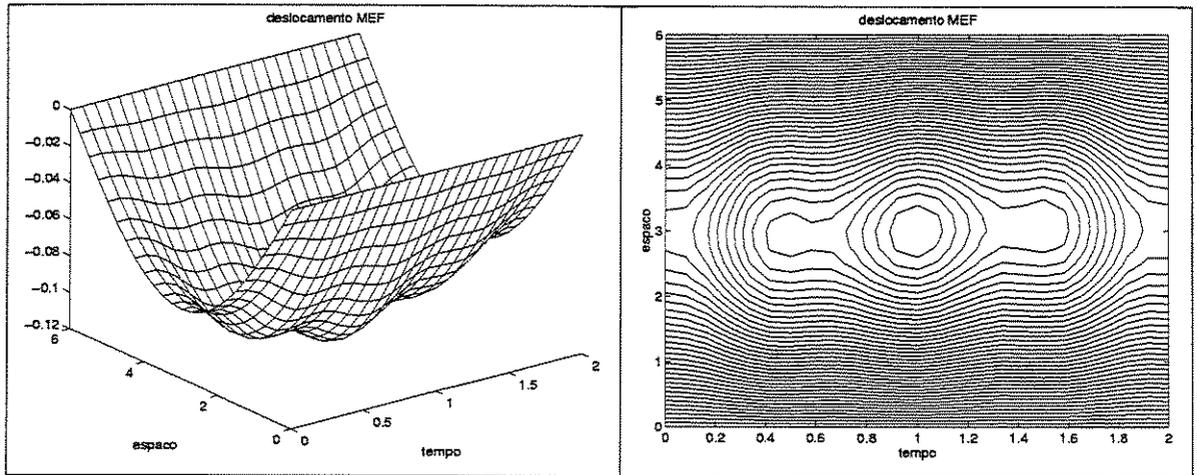


Figura 5.12: Deslocamento MEF, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

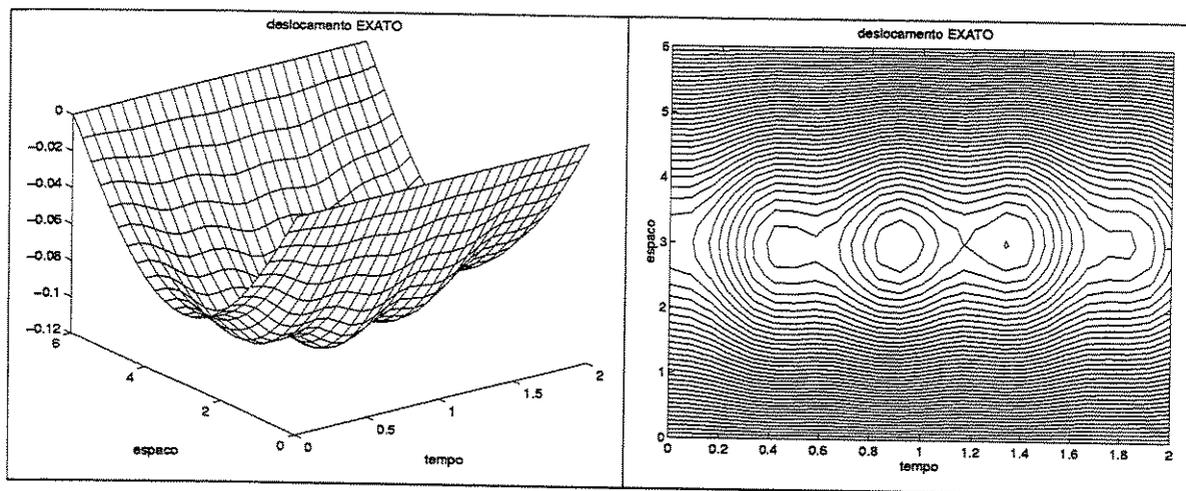


Figura 5.13: Deslocamento exato, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

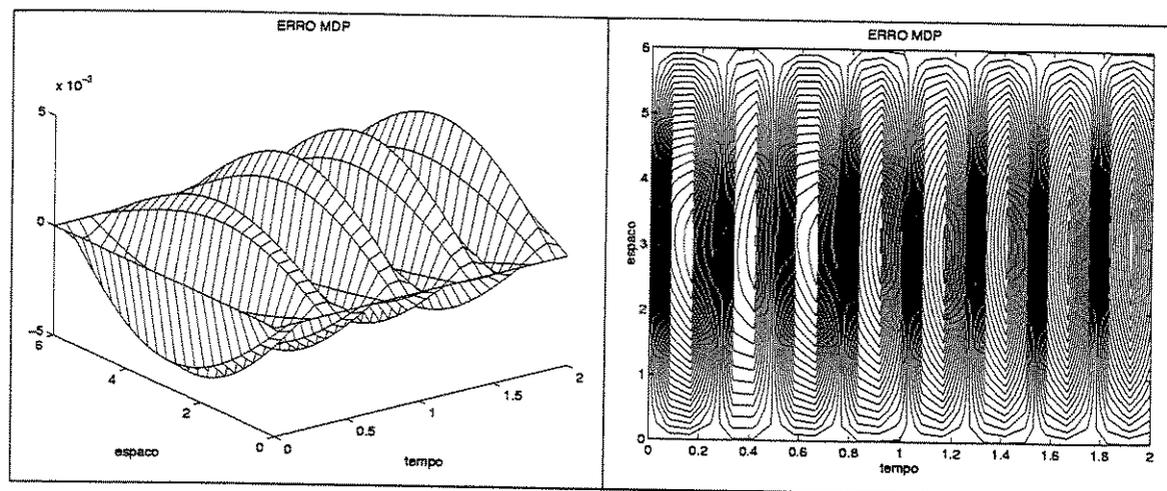


Figura 5.14: Erro MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

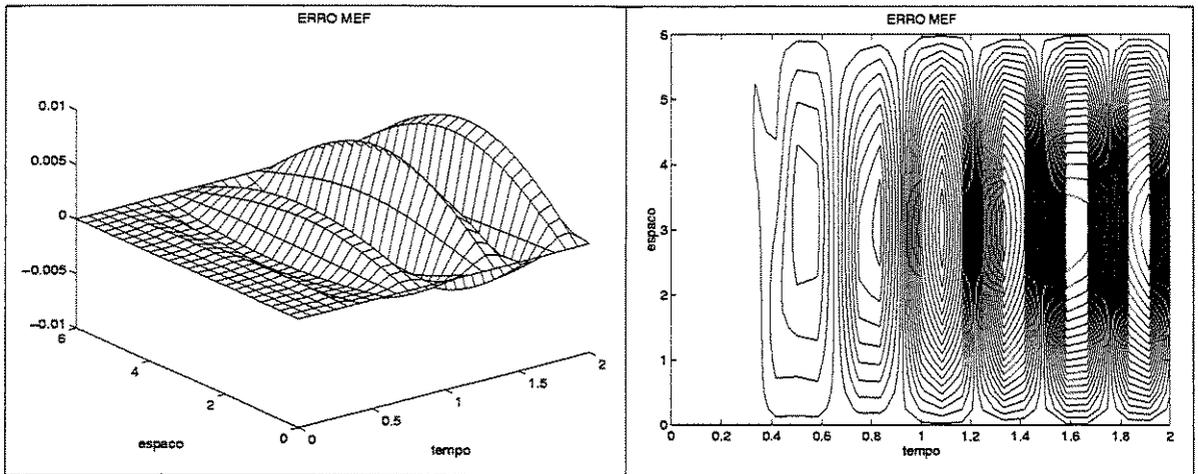


Figura 5.15: Erro MEF, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

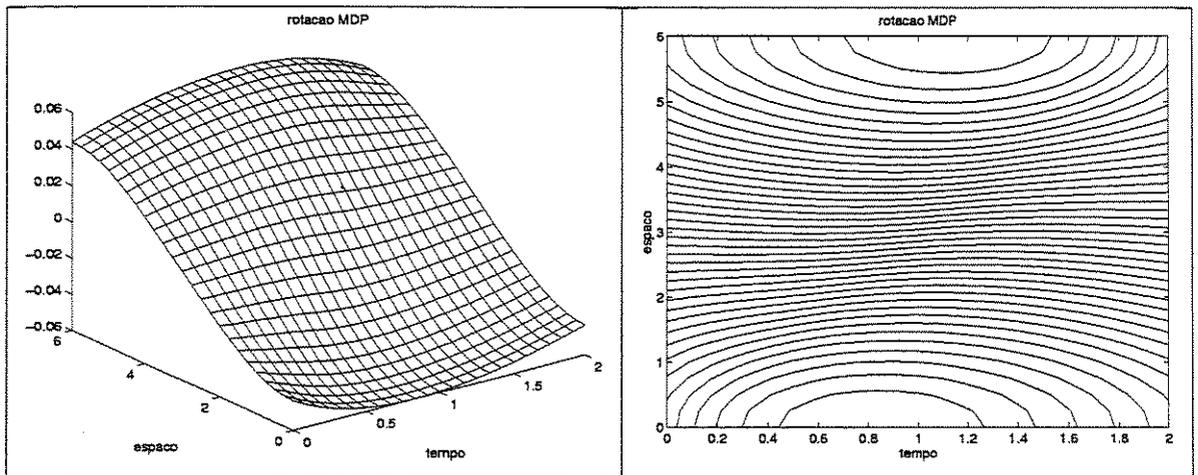


Figura 5.16: Rotação MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

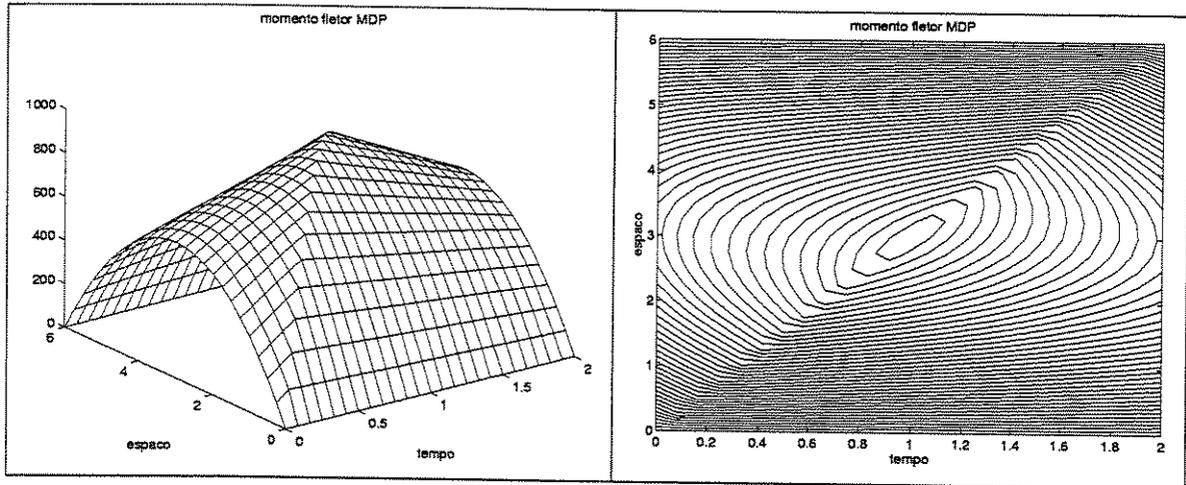


Figura 5.17: Momento fletor MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

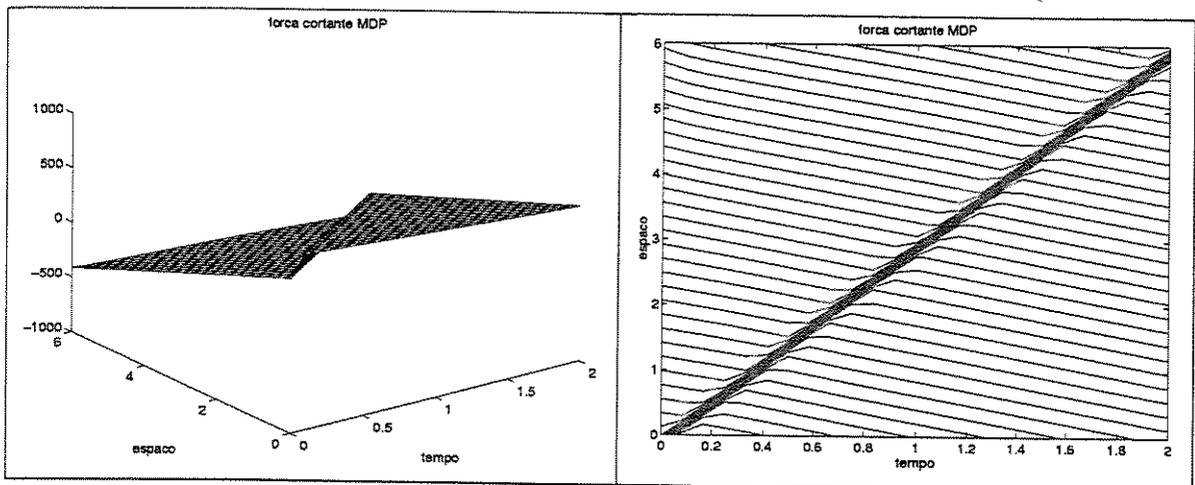


Figura 5.18: Força cortante MDP, $v = 3\text{m/s}$, $T = 2\text{s}$

Capítulo 6

Análise de Problemas em Elasticidade Plana

O escopo deste capítulo é demonstrar-se a potencialidade do método proposto na solução de sistemas lineares de equações diferenciais.

As equações diferenciais de equilíbrio referentes aos comportamentos de corpos elásticos homogêneos isotrópicos têm grande importância no dimensionamento de componentes mecânicos. Estas possibilitam estimar-se as solicitações estruturais de tais componentes através das análises dos campos de tensões e de deformações, resultantes da aplicação dos carregamentos e das restrições devidas.

Neste trabalho a versão bidimensional do método dos domínios pontuais é empregada na solução de problemas em elasticidade plana. As aplicações 2D, assumindo-se as hipóteses de estado plano de tensões e de estado plano de deformações, permitem estudar-se, respectivamente, os comportamentos de chapas finas carregadas paralelamente

à superfície e de corpos prismáticos carregados por forças perpendiculares à direção longitudinal.

Dois problemas de equilíbrio, para os quais as soluções analíticas são conhecidas, são analisados empregando-se o MDP. Um terceiro problema é modelado utilizando-se o MDP e o método dos elementos finitos, possibilitando algumas considerações sobre a convergência do esquema numérico proposto.

Este capítulo encontra-se organizado em três seções, conforme descrito a seguir.

Introdução à teoria da elasticidade. Esta seção apresenta resumidamente a teoria da elasticidade, válida para as análises de equilíbrio de corpos elásticos, homogêneos e isotrópicos. Introduce-se inicialmente o estado geral de deformação ao qual está sujeito um elemento diferencial do corpo. Expressam-se as componentes de tensão em função das componentes de deformação, através da matriz de elasticidade linear. Apresentam-se as equações diferenciais de equilíbrio. Descrevem-se os significados físicos das condições de contorno naturais e essenciais do problema. Introduce-se as equações que constituem as relações matemáticas que asseguram a compatibilidade das deformações elásticas do corpo. Hipóteses simplificadoras de estado plano de tensões e de estado plano de deformações. Definições da tensão máxima principal, da tensão mínima principal e da tensão máxima de cisalhamento atuantes em um ponto. E o princípio de Saint-Venant.

A seguir são apresentadas as soluções analíticas de dois problemas de equilíbrio em elasticidade plana, que posteriormente são empregadas na validação das análises numéricas empregando-se o MDP. O problema cujas soluções são apresentadas consideram como hipótese simplificadora o estado plano de tensões (entretanto demonstra-se como é possível obter-se as respectivas soluções analíticas para o caso de adotar-se as hipóteses de estado plano de deformações). Descrição do problema da flexão de uma viga

com carregamento na extremidade. E do problema da flexão de uma viga uniformemente carregada.

Modelagem MDP. Esta seção apresenta resumidamente as etapas para a construção das aproximações MDP 2D e análise de problemas. Aproximação linear por partes de uma derivada parcial de alta ordem entre os domínios pontuais vizinhos. Processos sucessivos de integração exata da aproximação da derivada de alta ordem para a construção das aproximações das derivadas de ordens mais baixa e da função de interesse. Definição de uma nuvem de pontos de aproximação de forma a representar-se convenientemente o domínio do problema. Construção de um sistema de equações a partir da colocação da equação diferencial e das condições de contorno avaliadas nos pontos de aproximação. Cálculo das variáveis MDP pelo método dos mínimos quadrados. Pós-processamento dos dados, produzindo resultados com regularidade de alta ordem.

Aspectos da modelagem MDP 2D aplicada ao sistema das equações diferenciais de equilíbrio referentes aos comportamentos de corpos elásticos, homogêneos e isotrópicos; assumindo-se as hipóteses de estado plano de tensão ou de estado plano de deformações.

Apresentação e discussão dos resultados. Nesta seção apresenta-se três casos de estudo. Dois problemas de equilíbrio, para os quais as soluções analíticas são conhecidas, são analisados empregando-se o MDP. O primeiro problema representa a flexão de uma viga com carregamento na extremidade, enquanto o segundo representa a flexão de uma viga uniformemente carregada. Resultados idênticos às soluções analíticas foram obtidos a partir das resoluções numéricas MDP destes dois primeiros casos de estudo. Estes resultados são justificados pelo fato de que as funções MDP representam campos de aproximação com continuidade de alta ordem e as soluções analíticas de tais problemas são representadas por funções polinomiais.

O terceiro problema representa a flexão de uma viga sujeita a um carregamento senoidal. Para a solução MEF do mesmo, o software comercial MSC/NASTRAN é empregado. Como na solução do problema segundo o método dos elementos finitos utilizou-se uma discretização bastante refinada, os resultados obtidos segundo esta abordagem são assumidos como parâmetros para o estudo da convergência das soluções MDP. Na resolução numérica deste terceiro problema, que efetivamente exige do esquema numérico proposto, observou-se uma convergência ligeiramente mais acentuada que seria aquela inversamente proporcional ao número de variáveis MDP. E os resultados numéricos MDP mostraram boa concordância com a solução MEF do problema, mesmo considerando-se discretizações com um número reduzido de domínios pontuais.

6.1 Introdução à teoria da elasticidade

Esta seção apresenta resumidamente a teoria da elasticidade, válida para as análises de equilíbrio de corpos elásticos homogêneos isotrópicos. Os conceitos descritos a seguir têm como referências Timoshenko e Goodier [26] e Arad et al [2].

Introduz-se inicialmente o estado geral de deformação ao qual está sujeito um elemento diferencial do corpo. O estado geral de deformação, associado a um ponto genérico do corpo, pode ser definido a partir de suas seis componentes — as deformações ϵ_{xx} , ϵ_{yy} e ϵ_{zz} ; e as distorções γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz} . A equação 6.1, ou em seu formato reduzido $\{\epsilon\} = [L]\{u\}$, relaciona o vetor $\{\epsilon\}$ das componentes pontuais de deformação, ao vetor $\{u\}$ das componentes pontuais de deslocamento, através do operador diferencial linear $[L]$. Na expressão 6.1; u , v e w representam, respectivamente, as componentes de deslocamento ao longo dos eixos X , Y e Z do sistema referencial espacial tridimensional onde define-se o corpo.

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

A equação 2.2, denominada lei de Hooke, relaciona as componentes de deformação e de distorção às componentes de tensão — tensões normais σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{zz} ; e tensões tangenciais τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} — atuantes em cada ponto do corpo. A matriz da expressão 6.2, que possibilita a transformação das componentes, depende das propriedades do material que constitui o corpo. E representa o módulo de elasticidade longitudinal e ν representa o coeficiente de Poisson do material. (Observa-se que o módulo de elasticidade transversal G é definido pela equação $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$).

$$\left\{ \begin{array}{c} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \frac{1}{E} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

É possível expressar-se as componentes de tensão em função das componentes de deformação. A equação 6.3, ou em seu formato reduzido $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$, relaciona o vetor $\{\sigma\}$ das componentes pontuais de tensão, ao vetor $\{\epsilon\}$ das componentes pontuais de deformação, através da matriz de elasticidade $[D]$.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

As equações diferenciais de equilíbrio são válidas para todo o domínio Ω do corpo e apresentadas nas expressões 6.4, 6.5 e 6.6. Estas relacionam as derivadas parciais das componentes de tensão e a força de corpo χ . Em geral, o peso próprio é a única força de corpo atuante. E neste caso, considerando-se a aceleração da gravidade g agindo na direção do eixo Z e em sentido contrário ao mesmo, resulta nas seguintes componentes da força de corpo: $\chi_x = 0$, $\chi_y = 0$ e $\chi_z = -\rho g$; onde ρ representa a densidade do material.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \chi_x = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \chi_y = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \chi_z = 0 \quad (6.6)$$

De forma a determinar-se os campos de tensão e de deformação atuantes em um corpo, através das equações diferenciais de equilíbrio, devem ser conhecidas as condições

de contorno para a superfície externa Γ do mesmo. Existem dois tipos de condições de contorno distintas que são aplicadas à superfície externa do corpo em regiões que não se sobrepõem; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

As condições de contorno naturais, representadas pelas equações 6.7, 6.8 e 6.9 são aplicadas à superfície Γ_1 , onde as forças de superfície por unidade de área \hat{t}_x , \hat{t}_y e \hat{t}_z são conhecidas. Nas expressões abaixo, (l, m, n) identificam os cossenos diretores do vetor normal externo de um ponto genérico da superfície Γ_1 .

$$l\sigma_{xx} + m\tau_{xy} + n\tau_{xz} = \hat{t}_x \quad (6.7)$$

$$l\tau_{xy} + m\sigma_{yy} + n\tau_{yz} = \hat{t}_y \quad (6.8)$$

$$l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_{zz} = \hat{t}_z \quad (6.9)$$

E as condições de contorno essenciais, representadas pelas equações 6.10, 6.11 e 6.12 são aplicadas à superfície Γ_2 , onde os deslocamentos \hat{u} , \hat{v} e \hat{w} são conhecidos. Observa-se que u , v e w representam, respectivamente, as componentes de deslocamento ao longo dos eixos X , Y e Z do sistema referencial espacial tridimensional onde define-se o corpo.

$$u = \hat{u} \quad (6.10)$$

$$v = \hat{v} \quad (6.11)$$

$$w = \hat{w} \quad (6.12)$$

De forma a conhecer-se o estado de tensões em um corpo deve-se buscar uma solução que satisfaça as equações diferenciais de equilíbrio e as condições de contorno. Entretanto o problema é estaticamente indeterminado, pois têm-se apenas três equações diferenciais 6.4, 6.5 e 6.6 envolvendo as seis componentes de tensão σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} . Sendo assim, para a unicidade da solução, deve-se considerar também as equações de compatibilidade, que são representadas pelas expressões 6.13, 6.14 e 6.15. Tais equações constituem relações matemáticas que asseguram a compatibilidade das deformações elásticas do corpo.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (6.15)$$

Dependendo da geometria do corpo e das suas condições de contorno é possível tratar-se o problema de equilíbrio, partindo-se da teoria geral de elasticidade para estruturas tridimensionais, e assumir-se algumas hipóteses simplificadoras. Neste trabalho

apresenta-se uma metodologia para a análise de problemas em elasticidade plana. E descreve-se a seguir, quais são os tipos de problemas que encaixam-se neste contexto e as suas respectivas hipóteses simplificadoras.

Denomina-se estado plano de tensões as simplificações do problema de equilíbrio de corpos para as quais assume-se as hipóteses descritas pela equação 6.16. Estas simplificações cabem para as análises bidimensionais de chapas finas carregadas ao longo do contorno e paralelamente à sua superfície.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{-\nu}{E}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

E denomina-se estado plano de deformações as simplificações do problema de equilíbrio de corpos para as quais assume-se as hipóteses descritas pela equação 6.17. Tais simplificações referem-se as análises bidimensionais de um longo cilindro ou de corpos prismáticos. Consideram-se as seções extremas do corpo fixas à planos rígidos. E o carregamento é caracterizado por forças perpendiculares à direção longitudinal e que não variam ao longo da mesma.

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{zz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.17)$$

Partindo-se da teoria geral de elasticidade para estruturas tridimensionais — expressões 6.4, 6.5 e 6.6 — e assumindo-se as hipóteses de estado plano de tensão ou de estado plano de deformação, são obtidas as equações diferenciais bidimensionais de equilíbrio 6.18 e 6.19, válidas para todo o domínio Ω do corpo.

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \chi_x = 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \chi_y = 0 \quad (6.19)$$

Considerando-se as simplificações de elasticidade plana, e partindo-se das expressões 6.13, 6.14 e 6.15, observa-se que para a unicidade da solução deve-se satisfazer a equação de compatibilidade 6.20, que relaciona as deformações elásticas do campo.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (6.20)$$

As condições de contorno para os problemas em elasticidade plana devem ser definidas ao longo do contorno Γ do corpo, em regiões que não se sobrepõem; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Partindo-se das expressões 6.7, 6.8 e 6.9, define-se as equações 6.21 e 6.22 das condições de contorno naturais para os problemas planos. As mesmas são aplicadas ao contorno Γ_1 , onde as forças de superfície por unidade de área \hat{t}_x e \hat{t}_y são conhecidas. Nas expressões abaixo, (l, m) identificam os cossenos diretores do vetor normal externo de um ponto genérico do contorno Γ_1 .

$$l \sigma_{xx} + m \tau_{xy} = \hat{t}_x \quad (6.21)$$

$$l \tau_{xy} + m \sigma_{yy} = \hat{t}_y \quad (6.22)$$

E analogamente, partindo-se das equações 6.10, 6.11 e 6.12, são obtidas as condições de contorno essenciais bidimensionais. As mesmas são descritas pelas expressões 6.23 e 6.24, e aplicáveis ao contorno Γ_2 onde os deslocamentos \hat{u} e \hat{v} são conhecidos. Observa-se que u e v representam, respectivamente, as componentes de deslocamento ao longo dos eixos X e Y do sistema referencial plano onde define-se o corpo.

$$u = \hat{u} \quad (6.23)$$

$$v = \hat{v} \quad (6.24)$$

As equações 6.25, 6.26 e 6.27, que descrevem o estado de tensões em um ponto genérico, são obtidas a partir das expressões 6.3 e 6.1, assumindo-se as hipóteses simplificadoras de estado plano de tensão ou de estado plano de deformação. Convém observar-se que para o estado plano de deformações, a tensão normal na direção Z é não nula e dada por $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

$$\sigma_{xx} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.25)$$

$$\sigma_{yy} = B \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.26)$$

$$\tau_{xy} = C \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (6.27)$$

Nas expressões 6.25, 6.26 e 6.27; os símbolos A , B e C representam constantes que dependem da hipótese simplificadora adotada. Para o caso de problemas em elasticidade plana considerando-se o estado plano de tensões, as constantes são aquelas descritas pelas equações 6.28, 6.29 e 6.30.

$$A = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (6.28)$$

$$B = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (6.29)$$

$$C = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.30)$$

Para o caso de análises bidimensionais empregando-se o estado plano de deformações, as constantes são aquelas apresentadas nas equações 6.31, 6.32 e 6.33. Observa-se que em todas estas expressões, E representa o módulo de elasticidade longitudinal, ν representa o coeficiente de Poisson do material e o módulo de elasticidade transversal é definido pela equação $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

$$A = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (6.31)$$

$$B = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (6.32)$$

$$C = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.33)$$

Uma outra forma de descrever-se o estado de tensões em problemas bidimensionais de equilíbrio é através das tensões máxima principal σ_1 , mínima principal σ_2 e da tensão máxima de cisalhamento τ_{\max} . Tais componentes do estado de tensões são definidas nas expressões 6.34, 6.35 e 6.36.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.34)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.35)$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (6.36)$$

Convém introduzir-se o princípio de Saint-Venant, que é de grande aplicação prática: Se as forças externas de uma pequena porção da superfície de um corpo elástico são substituídas por outro sistema de forças estaticamente equivalente, então esta redistribuição de carregamentos provoca alterações substanciais no estado de tensões apenas localmente, mas têm efeito desprezível sobre as tensões em pontos distantes com relação às dimensões lineares da superfície nas quais ocorre a alteração das forças.

A seguir são apresentadas as soluções analíticas de dois problemas de equilíbrio em elasticidade plana, que posteriormente serão empregadas para a validação das análises numéricas empregando-se o método dos domínios pontuais (MDP). Os problemas cujas soluções são apresentadas aqui consideram como hipótese simplificadora o estado plano de tensões.

Para o caso de forças de corpo χ constantes, as distribuições de tensões ao longo do corpo são idênticas para o estado plano de tensões ou para o estado plano de deformações. Entretanto as deformações do corpo, e conseqüentemente os deslocamentos, são distintos. Porém, a partir das soluções analíticas para o estado plano de tensões, é simples obter-se as equações equivalentes para o estado plano de deformações, bastando para isso substituir-se E por $\frac{E}{1-\nu^2}$ e ν por $\frac{\nu}{1-\nu}$. Observa-se que estas substituições mantêm $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ inalterado.

O primeiro problema, esquematizado na figura 6.1, representa a flexão de uma viga com carregamento na extremidade. Considere-se uma viga de comprimento l , base

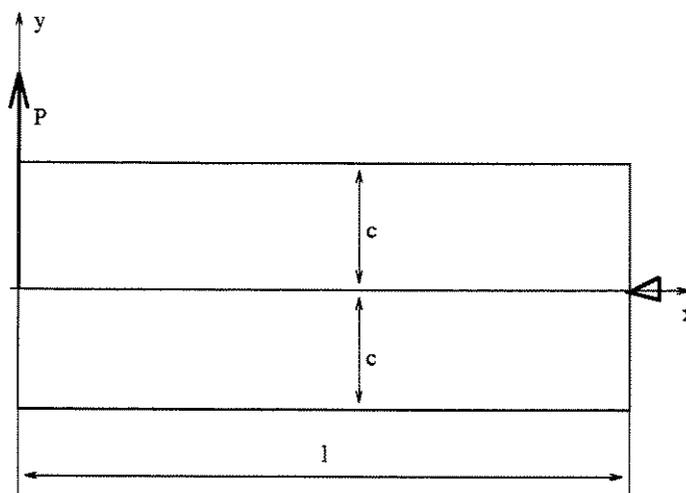


Figura 6.1: Problema 1 - Flexão de viga com carregamento na extremidade.

unitária e altura $2c$; onde $l, c \gg 1$. Define-se o eixo X na direção do comprimento da viga, iniciando-se na extremidade livre da mesma e posicionado na metade da sua altura. O carregamento P é aplicado numa extremidade da viga, ao longo do eixo Y , sendo a outra extremidade fixa em um ponto. Observa-se que o momento de inércia de área da viga I é dado por $I = \frac{2}{3}c^3$.

Nessa situação, considerando-se o estado plano de tensões, as equações diferenciais bidimensionais de equilíbrio 6.18 e 6.19, e a equação de compatibilidade 6.20, são válidas para todo o domínio Ω da viga. As expressões 6.37, 6.38 e 6.39 representam as condições de contorno naturais do problema, enquanto a equação 6.40 descreve as suas condições de contorno essenciais.

$$\sigma_{yy}(x, c) = 0 \quad \tau_{xy}(x, c) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (6.37)$$

$$\sigma_{xx}(0, y) = 0 \quad \tau_{xy}(0, y) = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad -c \leq y \leq c \quad (6.38)$$

$$\sigma_{xx}(l, y) = -\frac{Pl y}{I} \quad \tau_{xy}(l, y) = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad -c \leq y \leq c \quad (6.39)$$

$$u(l, 0) = 0 \quad v(l, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(l, 0) = 0 \quad (6.40)$$

O problema de equilíbrio da flexão de uma viga com carregamento na extremidade, conforme descrito acima, possui solução analítica, que é apresentada a seguir. As componentes de tensão são descritas pelas equações 6.41, 6.42 e 6.43.

$$\sigma_{xx} = -\frac{P x y}{I} \quad (6.41)$$

$$\sigma_{yy} = 0 \quad (6.42)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad (6.43)$$

As componentes de deformação são representadas pelas expressões 6.44, 6.45 e 6.46.

$$\epsilon_{xx} = -\frac{Pxy}{EI} \quad (6.44)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\nu Pxy}{EI} \quad (6.45)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{P}{2GI}(c^2 - y^2) \quad (6.46)$$

E finalmente, as componentes de deslocamento são apresentadas nas equações 6.47 e 6.48.

$$u = -\frac{Px^2y}{2EI} - \frac{\nu Py^3}{6EI} + \frac{Py^3}{6GI} + \frac{Pl^2y}{2EI} \quad (6.47)$$

$$v = \frac{\nu Pxy^2}{2EI} + \frac{Px^3}{6EI} + \frac{Pl^3}{3EI} - \frac{Pl^2x}{2EI} + \frac{Pc^2}{2GI}(l-x) \quad (6.48)$$

O segundo problema, esquematizado na figura 6.2, representa a flexão de uma viga uniformemente carregada. Considere-se uma viga de comprimento $2l$, base unitária e altura $2c$; onde $l, c \gg 1$. Define-se o eixo X na direção do comprimento da viga, iniciando-se na metade do comprimento da mesma e posicionado na metade da sua altura. O carregamento distribuído q é aplicado paralelamente ao eixo Y , ao longo do segmento $(-c, x)$, onde $-l \leq x \leq l$. Observa-se que o momento de inércia de área da viga I é dado por $I = \frac{2}{3}c^3$.

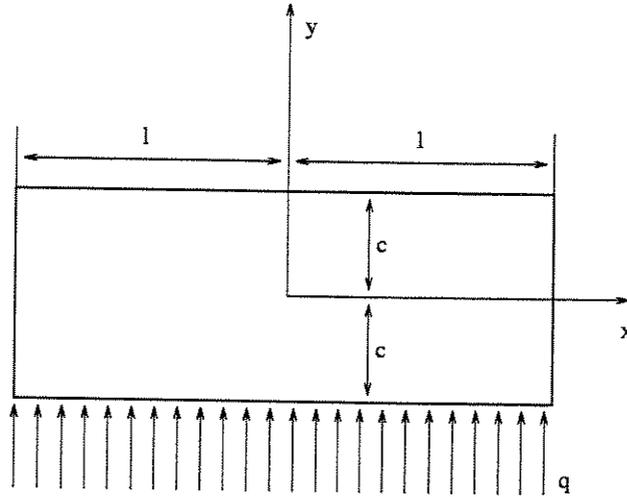


Figura 6.2: Problema 2 - Flexão de viga uniformemente carregada.

Nessa situação, considerando-se o estado plano de tensões, as equações diferenciais bidimensionais de equilíbrio 6.18 e 6.19, e a equação de compatibilidade 6.20, são válidas para todo o domínio Ω da viga. As expressões 6.49, 6.50 e 6.51 representam as condições de contorno naturais do problema, enquanto a equação 6.52 descreve as suas condições de contorno essenciais.

$$\sigma_{yy}(x, c) = 0 \quad \tau_{xy}(x, c) = 0 \quad -l \leq x \leq l \quad (6.49)$$

$$\sigma_{yy}(x, -c) = -q \quad \tau_{xy}(x, -c) = 0 \quad -l \leq x \leq l \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{q}{2I} \left[(l^2 - x^2)y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right] & \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{qx}{2I}(c^2 - y^2) \\ x &= -l, +l & -c &\leq y \leq c \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$u(0,0) = 0 \quad v(-l,0) = 0 \quad v(l,0) = 0 \quad (6.52)$$

O problema de equilíbrio da flexão de uma viga uniformemente carregada, conforme descrito acima, possui solução analítica, que é apresentada a seguir. As componentes de tensão são descritas pelas equações 6.53, 6.54 e 6.55.

$$\sigma_{xx} = \frac{q}{2I} \left[(l^2 - x^2)y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right] \quad (6.53)$$

$$\sigma_{yy} = -\frac{q}{2I} \left(\frac{y^3}{3} - c^2y + \frac{2}{3}c^3 \right) \quad (6.54)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{q}{2I} x(c^2 - y^2) \quad (6.55)$$

E as componentes de deslocamento são representadas pelas expressões 6.56 e 6.57.

$$u = \frac{q}{2EI} \left[(l^2x - \frac{x^3}{3})y + x(\frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y) + \nu x(\frac{y^3}{3} - c^2y + \frac{2}{3}c^3) \right] \quad (6.56)$$

$$v = -\frac{q}{2EI} \left\{ \frac{y^4}{12} - \frac{c^2y^2}{2} + \frac{2}{3}c^3y - \frac{x^4}{12} + \frac{l^2x^2}{2} - \frac{c^2x^2}{5} + (1 + \frac{\nu}{2})c^2x^2 + \nu[(l^2 - x^2)\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{c^2y^2}{5}] \right\} + \frac{5ql^4}{24EI} \left[1 + \frac{12c^2}{5l^2}(\frac{4}{5} + \frac{\nu}{2}) \right] \quad (6.57)$$

Nas análises de problemas de equilíbrio de corpos elásticos com geometrias e condições de contorno complexas, que inviabilizam a obtenção de soluções analíticas, os métodos computacionais são empregados. Entre os esquemas numéricos mais difundidos pode-se citar o método dos elementos finitos, o método das diferenças finitas e o método dos elementos de contorno. Algumas referências para a solução MEF de problemas na teoria da elasticidade são Bathe [3], Zienkiewicz [28] e Hughes [9]. E neste trabalho a versão bidimensional do método dos domínios pontuais é empregada na solução de problemas em elasticidade plana.

6.2 Modelagem MDP

A aplicação MDP para a análise de problemas em elasticidade plana é apresentada nesta seção. O capítulo 2 deste trabalho descreve detalhadamente o Método dos Domínios Pontuais (MDP). Outras referências para a modelagem de problemas de valores de contorno envolvendo equações diferenciais parciais 2D empregando-se o MDP são Neto & Iguti [17] e Neto, Iguti, Nogueira & Mesquita [18].

Na análise de problemas bidimensionais de equilíbrio de corpos elásticos utiliza-se as aproximações MDP lineares em $u^{(4,4)}(x, y)$, cuja formulação matemática foi apresentada na sétima seção do capítulo 2. E considera-se duas funções, $u(x, y)$ e $v(x, y)$, representando-se os deslocamentos pontuais do corpo, respectivamente ao longo das direções X e Y . Ambas as funções MDP $u(x, y)$ e $v(x, y)$ têm o formato descrito pela equação 2.116.

Sendo assim, qualquer uma das aproximações MDP, de $u(x, y)$ ou de suas derivadas, pode ser descrita em função dos valores $u(0, 0)$, $u^{(1,0)}(0, 0)$, $u^{(2,0)}(0, 0)$, $u^{(3,0)}(0, 0)$, $u^{(0,1)}(0, 0)$, $u^{(1,1)}(0, 0)$, $u^{(2,1)}(0, 0)$, $u^{(3,1)}(0, 0)$, $u^{(0,2)}(0, 0)$, $u^{(1,2)}(0, 0)$, $u^{(2,2)}(0, 0)$, $u^{(3,2)}(0, 0)$, $u^{(0,3)}(0, 0)$, $u^{(1,3)}(0, 0)$, $u^{(2,3)}(0, 0)$, $u^{(3,3)}(0, 0)$, $u^{(0,4)}(0, j)$, $u^{(1,4)}(0, j)$, $u^{(2,4)}(0, j)$, $u^{(3,4)}(0, j)$, $u^{(4,0)}(i, 0)$, $u^{(4,1)}(i, 0)$, $u^{(4,2)}(i, 0)$, $u^{(4,3)}(i, 0)$ e $u^{(4,4)}(i, j)$, ($i = 0, \dots, N$), ($j = 0, \dots, M$). E qualquer uma das aproximações MDP, de $v(x, y)$ ou de suas derivadas, pode ser descrita em função dos valores $v(0, 0)$, $v^{(1,0)}(0, 0)$, $v^{(2,0)}(0, 0)$, $v^{(3,0)}(0, 0)$, $v^{(0,1)}(0, 0)$, $v^{(1,1)}(0, 0)$, $v^{(2,1)}(0, 0)$, $v^{(3,1)}(0, 0)$, $v^{(0,2)}(0, 0)$, $v^{(1,2)}(0, 0)$, $v^{(2,2)}(0, 0)$, $v^{(3,2)}(0, 0)$, $v^{(0,3)}(0, 0)$, $v^{(1,3)}(0, 0)$, $v^{(2,3)}(0, 0)$, $v^{(3,3)}(0, 0)$, $v^{(0,4)}(0, j)$, $v^{(1,4)}(0, j)$, $v^{(2,4)}(0, j)$, $v^{(3,4)}(0, j)$, $v^{(4,0)}(i, 0)$, $v^{(4,1)}(i, 0)$, $v^{(4,2)}(i, 0)$, $v^{(4,3)}(i, 0)$ e $v^{(4,4)}(i, j)$, ($i = 0, \dots, N$), ($j = 0, \dots, M$). Resultam então $2(N + 5)(M + 5)$ variáveis MDP, necessárias para o tratamento de problemas em elasticidade plana.

As equações diferenciais de equilíbrio, descritas pelas expressões 6.58 e 6.59, são válidas para todo o domínio Ω do corpo. Nestas expressões; A , B e C representam constantes dependentes das propriedades do material e da hipótese simplificadora adotada — estado plano de tensões ou estado plano de deformações.

$$A u^{(2,0)}(x, y) + (B + C) v^{(1,1)}(x, y) + C u^{(0,2)}(x, y) = 0 \quad (6.58)$$

$$A v^{(0,2)}(x, y) + (B + C) u^{(1,1)}(x, y) + C v^{(2,0)}(x, y) = 0 \quad (6.59)$$

Para o caso de problemas em elasticidade plana considerando-se o estado plano de tensões, as constantes são aquelas descritas pelas equações 6.60, 6.61 e 6.62.

$$A = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (6.60)$$

$$B = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \quad (6.61)$$

$$C = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (6.62)$$

Para o caso de análises bidimensionais empregando-se o estado plano de deformações, as constantes são aquelas apresentadas nas equações 6.63, 6.64 e 6.65. Observa-se que em

todas estas expressões, E representa o módulo de elasticidade longitudinal, ν representa o coeficiente de Poisson do material e o módulo de elasticidade transversal é definido pela equação $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

$$A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.63)$$

$$B = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.64)$$

$$C = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.65)$$

As condições de contorno para os problemas planos de equilíbrio devem ser definidas ao longo do contorno Γ do corpo, em regiões que não se sobrepõe; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

As condições de contorno naturais 6.66 e 6.67 são definidas no contorno Γ_1 , onde as forças de superfície por unidade de área $\hat{t}_x(x, y)$ e $\hat{t}_y(x, y)$ são conhecidas. Nas expressões abaixo, (l, m) identificam os cossenos diretores do vetor normal externo de um ponto genérico do contorno Γ_1 .

$$l(Au^{(1,0)}(x, y) + Bv^{(0,1)}(x, y)) + mC(u^{(0,1)}(x, y) + v^{(1,0)}(x, y)) = \hat{t}_x(x, y) \quad (6.66)$$

$$lC(u^{(0,1)}(x, y) + v^{(1,0)}(x, y)) + m(Bu^{(1,0)}(x, y) + Av^{(0,1)}(x, y)) = \hat{t}_y(x, y) \quad (6.67)$$

E as condições de contorno essenciais 6.68 e 6.69 são definidas ao longo do contorno Γ_2 onde os deslocamentos $\hat{u}(x, y)$ e $\hat{v}(x, y)$ são conhecidos.

$$u(x, y) = \hat{u}(x, y) \quad (6.68)$$

$$v(x, y) = \hat{v}(x, y) \quad (6.69)$$

Para a análise MDP de problemas em elasticidade plana, uma nuvem de pontos de aproximação é tomada de forma a representar-se convenientemente o domínio do mesmo. As equações diferenciais do problema, 6.58 e 6.59, são aplicadas nos pontos de aproximação interiores ao domínio Ω . E as condições de contorno naturais, 6.66 e 6.67, ou as condições de contorno essenciais, 6.68 e 6.69, são aplicadas nos pontos de aproximação localizados na fronteira Γ do corpo. Para que isto seja possível, é utilizada a colocação por pontos, resultando em uma equação para cada um dos pontos de aproximação, sendo estas funções lineares das variáveis MDP.

Observa-se que os coeficientes das equações MDP lineares resultantes da colocação das condições de contorno essenciais geralmente apresentam uma ordem de grandeza bastante inferior com relação às equações originárias da aplicação das equações diferenciais ou das condições de contorno naturais de um problema em elasticidade plana. Sendo assim, sugere-se multiplicar ambos os lados de tais equações, resultantes da colocação dos pontos da fronteira sujeitos às condições de contorno essenciais, pela constante $\frac{E}{100}$, de forma a evitar-se o possível mal condicionamento do sistema MDP final.

São necessárias pelo menos $2(N + 5)(M + 5)$ equações, obtidas a partir da colocação

por pontos, para o cálculo dos valores das variáveis MDP. O sistema de equações resultante é então resolvido empregando-se um esquema de mínimos quadrados. Observa-se que a equação de compatibilidade, que relaciona as deformações elásticas do campo, são naturalmente satisfeitas na análise MDP de problemas bidimensionais de equilíbrio, o que assegura a unicidade da solução.

Uma vez conhecidos os valores das variáveis MDP, as próprias funções do método dos domínios pontuais são utilizadas no pós-processamento, produzindo resultados suaves. É possível assim avaliar-se as aproximações de $u(x, y)$ ou de $v(x, y)$ e de suas derivadas até $u^{(4,4)}(x, y)$ ou $v^{(4,4)}(x, y)$, em qualquer posição da área original de discretização. As componentes pontuais do estado de tensões $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$ e $\tau_{xy}(x, y)$ são obtidas, respectivamente, a partir as equações 6.70, 6.71 e 6.72. Convém observar-se que para os problemas onde considera-se a hipótese simplificadora de estado plano de deformações, a tensão normal na direção Z é não nula e dada por $\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$.

$$\sigma_{xx}(x, y) = A u^{(1,0)}(x, y) + B v^{(0,1)}(x, y) \quad (6.70)$$

$$\sigma_{yy}(x, y) = B u^{(1,0)}(x, y) + A v^{(0,1)}(x, y) \quad (6.71)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = C(u^{(0,1)}(x, y) + v^{(1,0)}(x, y)) \quad (6.72)$$

E as componentes pontuais do estado de deformações do corpo $\epsilon_{xx}(x, y)$, $\epsilon_{yy}(x, y)$ e $\gamma_{xy}(x, y)$ são calculadas, respectivamente, empregando-se as equações 6.73, 6.74 e 6.75.

$$\epsilon_{xx}(x, y) = u^{(1,0)}(x, y) \quad (6.73)$$

$$\epsilon_{yy}(x, y) = v^{(0,1)}(x, y) \quad (6.74)$$

$$\gamma_{xy}(x, y) = u^{(0,1)}(x, y) + v^{(1,0)}(x, y) \quad (6.75)$$

6.3 Apresentação e discussão dos resultados

Nesta seção a versão bidimensional do método dos domínios pontuais é empregada na solução de problemas em elasticidade plana. Dois problemas de equilíbrio, para os quais a solução analítica é conhecida, são analisados empregando-se o MDP. Um terceiro problema é modelado utilizando-se o MDP e o método dos elementos finitos, possibilitando algumas considerações sobre a convergência do esquema numérico proposto.

O primeiro problema, esquematizado na figura 6.3, representa a flexão de uma viga com carregamento na extremidade. Considere-se uma viga de comprimento $l = 60\text{mm}$, base unitária e altura $2c = 20\text{mm}$. Defina-se o eixo X na direção do comprimento da viga, iniciando-se na extremidade livre da mesma e posicionado na metade da sua altura. O carregamento $P = 80\text{Kgf}$ é aplicado numa extremidade da viga, ao longo do eixo Y , sendo a outra extremidade fixa em um ponto. Neste problema considera-se o módulo de elasticidade $E = 21000\text{Kgf/mm}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ como propriedades do material. E observa-se que o momento de inércia de área da viga I é dado por $I = \frac{2}{3}c^3$.

Nessa situação, considerando-se o estado plano de tensões, as equações diferenciais bidimensionais de equilíbrio são válidas para todo o domínio Ω da viga. As expressões 6.76, 6.77 e 6.78 representam as condições de contorno naturais do problema, enquanto a equação 6.79 descreve as suas condições de contorno essenciais.

$$\sigma_{yy}(x, \pm c) = 0 \quad \tau_{xy}(x, \pm c) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (6.76)$$

$$\sigma_{xx}(0, y) = 0 \quad \tau_{xy}(0, y) = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad -c \leq y \leq c \quad (6.77)$$

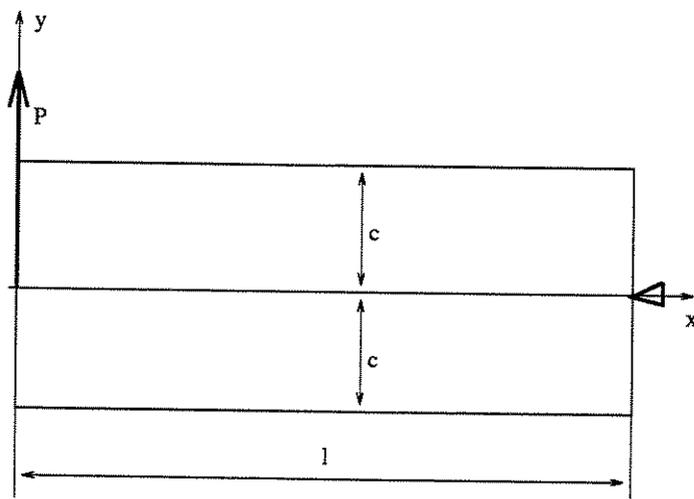


Figura 6.3: Problema 1 - Flexão de viga com carregamento na extremidade.

$$\sigma_{xx}(l, y) = -\frac{Pl y}{I} \quad \tau_{xy}(l, y) = -\frac{P}{2I}(c^2 - y^2) \quad -c \leq y \leq c \quad (6.78)$$

$$u(l, 0) = 0 \quad v(l, 0) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial y}(l, 0) = 0 \quad (6.79)$$

Para a análise MDP do problema, inicialmente é tomada uma área retangular discretizada empregando-se nove domínios pontuais, conforme apresentado no canto superior direito da figura 6.5. Consideram-se os domínios pontuais igualmente espaçados na direção X de $\Delta x = 30\text{mm}$ e na direção Y de $\Delta y = 10\text{mm}$. Observa-se que os números de divisões do domínio nas direções X e Y são representados, respectivamente, por $N = 2$ e $M = 2$. E isto caracteriza $2(N + 5)(M + 5) = 98$ variáveis MDP para a representação dos campos de deslocamento $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

Uma nuvem de 341 pontos de aproximação é tomada de forma a representar-se

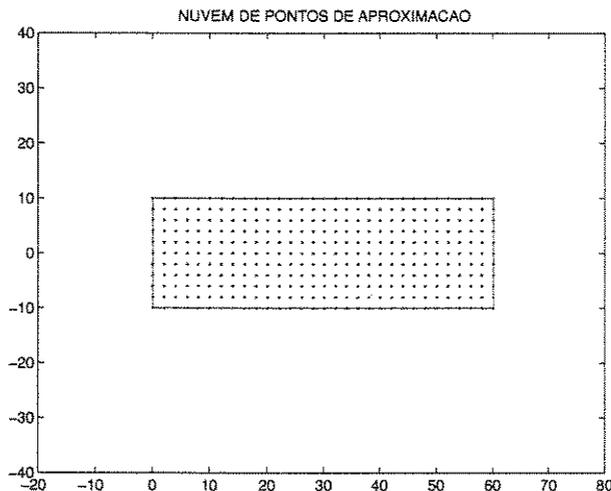


Figura 6.4: Problema 1 - Nuvem de pontos de aproximação.

convenientemente o domínio da viga, conforme apresentado na figura 6.4. Para a caracterização do problema utiliza-se a colocação por pontos. As equações diferenciais do problema são aplicadas nos pontos de aproximação interiores ao domínio Ω , conduzindo a 522 equações lineares em função das variáveis MDP. E as condições de contorno 6.76, 6.77, 6.78 e 6.79 são aplicadas nos pontos de aproximação localizados na fronteira Γ da viga, conduzindo a 165 equações lineares em função das variáveis MDP.

Para o cálculo dos valores das 98 variáveis MDP, o sistema de 687 equações resultantes é resolvido empregando-se um esquema de mínimos quadrados. Observa-se que a equação de compatibilidade, que relaciona as deformações elásticas do campo, são naturalmente satisfeitas na análise MDP de problemas bidimensionais de equilíbrio, o que assegura a unicidade da solução.

Uma vez conhecidos os valores das variáveis MDP, as próprias funções do método dos domínios pontuais são utilizadas no pós-processamento, produzindo resultados suaves. É possível assim avaliar-se as aproximações de $u(x, y)$ ou de $v(x, y)$ e de suas derivadas

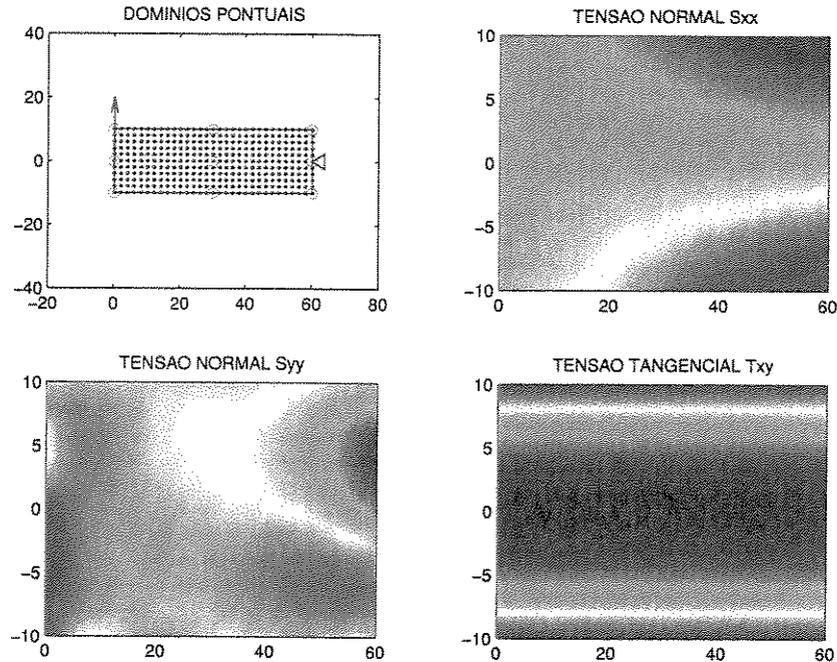


Figura 6.5: Problema 1 - Tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} MDP.

até $u^{(4,4)}(x, y)$ ou $v^{(4,4)}(x, y)$.

A figura 6.5 apresenta a discretização do problema em domínios pontuais e os mapas de cores das distribuições das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} atuantes ao longo da viga, resultantes da solução numérica MDP. A figura 6.6 apresenta as legendas relacionando as cores aos níveis das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} , fornecidas em [Kgf/mm²].

A tabela 6.1 apresenta os valores extremos das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} , obtidas a partir da análise MDP da viga assumindo-se a hipótese de estado plano de tensões.

O problema de equilíbrio da flexão de uma viga com carregamento na extremidade, conforme descrito acima, possui solução analítica, que é apresentada a seguir. As componentes de tensão são descritas pelas equações 6.41, 6.42 e 6.43. E as componentes de

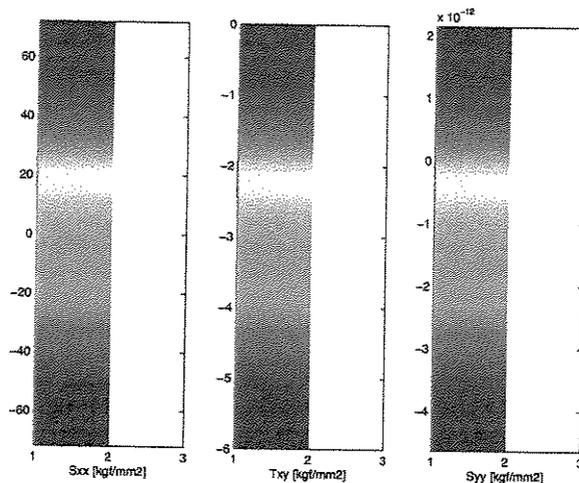


Figura 6.6: Problema 1 - Legendas das tensões MDP [Kgf/mm²].

deslocamento são apresentadas nas equações 6.47 e 6.48.

O deslocamento máximo absoluto da viga, obtido da solução numérica MDP, é de 0.4679 mm. A figura 6.7 apresenta os resultados analítico e MDP da estrutura deformada, em escala ampliada. Observa-se a concordância dos mesmos.

De fato, o resultado da análise numérica MDP deste problema de equilíbrio da flexão de uma viga com carregamento na extremidade é idêntico aquele fornecido pela solução analítica, exceto pelo erro de precisão computacional. O erro máximo em deslocamento da solução MDP com relação à exata é de 2.7756E-16 mm.

Tabela 6.1: Problema 1 - Tensões máxima e mínima limite.

tensão	σ_{xx}	τ_{xy}	σ_{yy}
máxima	72.0 Kgf/mm ²	0.00 Kgf/mm ²	0.00 Kgf/mm ²
mínima	-72.0 Kgf/mm ²	-6.00 Kgf/mm ²	0.00 Kgf/mm ²

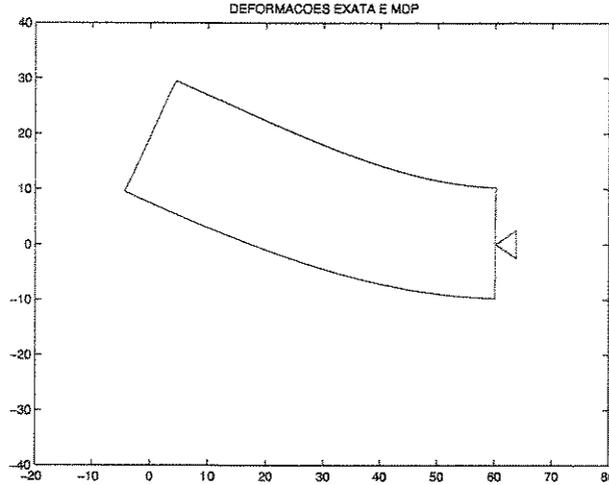


Figura 6.7: Problema 1 - Estrutura deformada, soluções exata e MDP.

O segundo problema, esquematizado na figura 6.9, representa a flexão de uma viga uniformemente carregada. Considere-se uma viga de comprimento $2l = 60\text{mm}$, base unitária e altura $2c = 20\text{mm}$. Define-se o eixo X na direção do comprimento da viga, iniciando-se na metade do comprimento da mesma e posicionado na metade da sua altura. O carregamento distribuído $q = 10\text{Kgf/mm}^2$ é aplicado paralelamente ao eixo Y , ao longo do segmento $(x, -c)$, onde $-l \leq x \leq l$. Neste problema considera-se o módulo de elasticidade $E = 21000\text{Kgf/mm}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ como propriedades do material. E observa-se que o momento de inércia de área da viga I é dado por $I = \frac{2}{3}c^3$.

Nessa situação, considerando-se o estado plano de tensões, as equações diferenciais bidimensionais de equilíbrio são válidas para todo o domínio Ω da viga. As expressões 6.80, 6.81 e 6.82 representam as condições de contorno naturais do problema, enquanto a equação 6.83 descreve as suas condições de contorno essenciais.

$$\sigma_{yy}(x, c) = 0 \quad \tau_{xy}(x, c) = 0 \quad -l \leq x \leq l \quad (6.80)$$

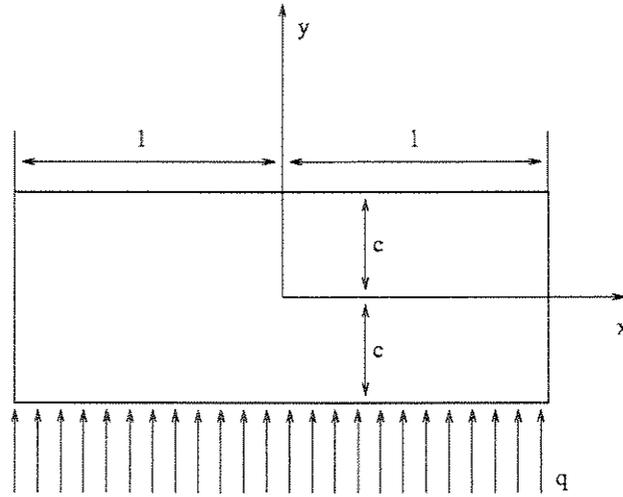


Figura 6.8: Problema 2 - Flexão de viga uniformemente carregada.

$$\sigma_{yy}(x, -c) = -q \quad \tau_{xy}(x, -c) = 0 \quad -l \leq x \leq l \quad (6.81)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(x, y) &= \frac{q}{2I} \left[(l^2 - x^2)y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}c^2y \right] & \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{qx}{2I}(c^2 - y^2) \\ x &= -l, +l & -c \leq y \leq c \end{aligned} \quad (6.82)$$

$$u(0, 0) = 0 \quad v(-l, 0) = 0 \quad v(l, 0) = 0 \quad (6.83)$$

Para a análise MDP do problema, inicialmente é tomada uma área retangular discretizada empregando-se nove domínios pontuais, conforme apresentado no canto superior direito da figura 6.10. Consideram-se os domínios pontuais igualmente espaçados na direção X de $\Delta x = 30\text{mm}$ e na direção Y de $\Delta y = 10\text{mm}$. Observa-se que os números de divisões do domínio nas direções X e Y são representados, respectivamente, por $N = 2$

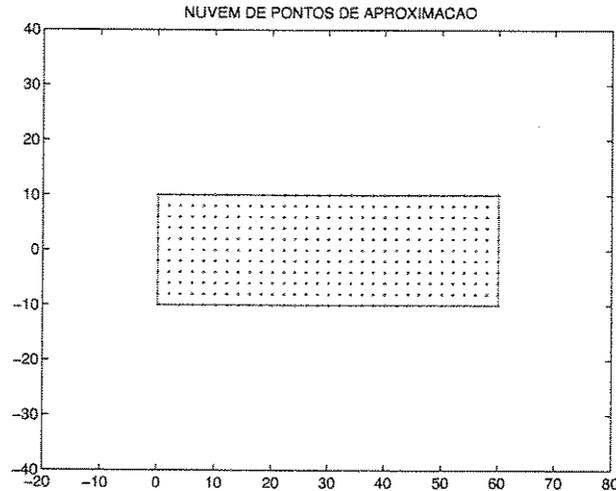


Figura 6.9: Problema 2 - Nuvem de pontos de aproximação.

e $M = 2$. E isto caracteriza $2(N + 5)(M + 5) = 98$ variáveis MDP para a representação dos campos de deslocamento $u(x, y)$ e $v(x, y)$.

Uma nuvem de 341 pontos de aproximação é tomada de forma a representar-se convenientemente o domínio da viga, conforme apresentado na figura 6.9. Para a caracterização do problema utiliza-se a colocação por pontos. As equações diferenciais do problema são aplicadas nos pontos de aproximação interiores ao domínio Ω , conduzindo a 520 equações lineares em função das variáveis MDP. E as condições de contorno 6.80, 6.81, 6.82 e 6.83 são aplicadas nos pontos de aproximação localizados na fronteira Γ da viga, conduzindo a 159 equações lineares em função das variáveis MDP.

Para o cálculo dos valores das 98 variáveis MDP, o sistema de 679 equações resultantes é resolvido empregando-se um esquema de mínimos quadrados. Observa-se que a equação de compatibilidade, que relaciona as deformações elásticas do campo, são naturalmente satisfeitas na análise MDP de problemas bidimensionais de equilíbrio, o que assegura a unicidade da solução.

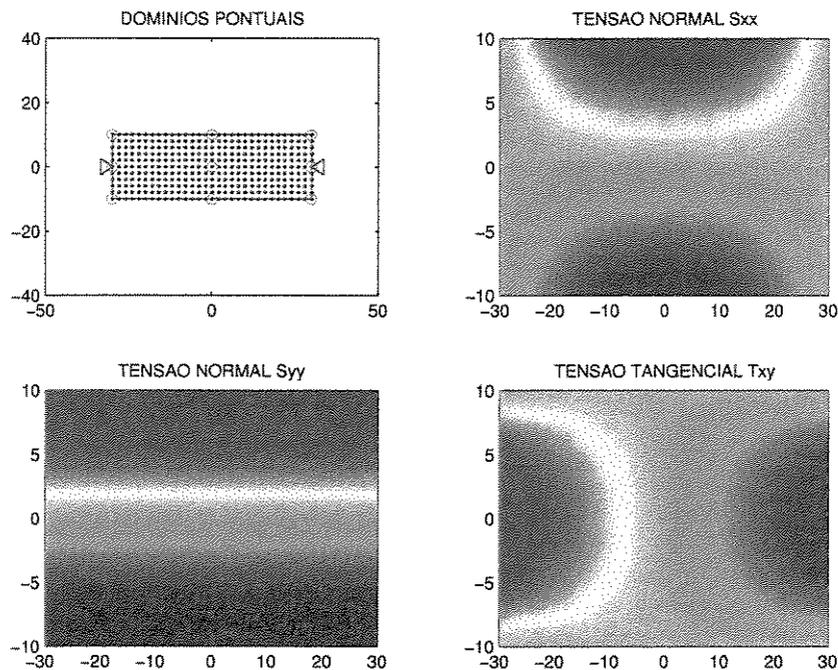


Figura 6.10: Problema 2 - Tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} MDP.

Uma vez conhecidos os valores das variáveis MDP, as próprias funções do método dos domínios pontuais são utilizadas no pós-processamento, produzindo resultados suaves. É possível assim avaliar-se as aproximações de $u(x, y)$ ou de $v(x, y)$ e de suas derivadas até $u^{(4,4)}(x, y)$ ou $v^{(4,4)}(x, y)$.

A figura 6.10 apresenta a discretização do problema em domínios pontuais e os mapas de cores das distribuições das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} atuantes ao longo da viga, resultantes da solução numérica MDP. A figura 6.11 apresenta as legendas relacionando as cores aos níveis das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} , fornecidas em $[\text{Kgf}/\text{mm}^2]$.

A tabela 6.2 apresenta os valores extremos das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} , obtidas a partir da análise MDP da viga assumindo-se a hipótese de estado plano de tensões.

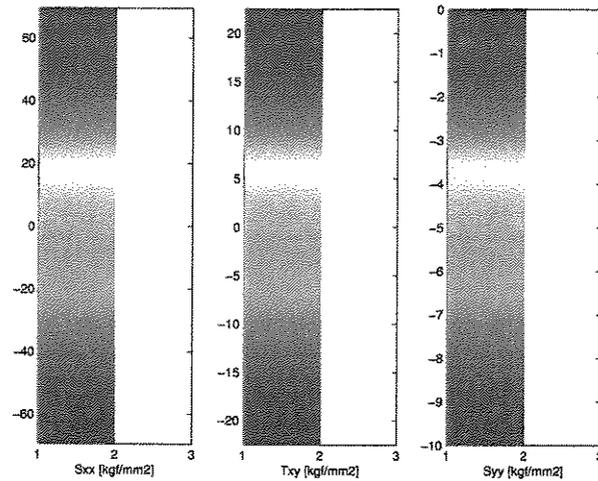


Figura 6.11: Problema 2 - Legendas das tensões MDP [Kgf/mm²].

O problema de equilíbrio da flexão de uma viga uniformemente carregada, conforme descrito acima, possui solução analítica, que é apresentada a seguir. As componentes de tensão são descritas pelas equações 6.53, 6.54 e 6.55. E as componentes de deslocamento são representadas pelas expressões 6.56 e 6.57.

O deslocamento máximo absoluto da viga, obtido da solução numérica MDP, é de 0.1531 mm. A figura 6.12 apresenta os resultados analítico e MDP da estrutura deformada, em escala ampliada. Observa-se a concordância dos mesmos.

De fato, o resultado da análise numérica MDP deste problema de equilíbrio de uma

Tabela 6.2: Problema 2 - Tensões máxima e mínima limite.

tensão	σ_{xx}	τ_{xy}	σ_{yy}
máxima	69.5 Kgf/mm ²	22.5 Kgf/mm ²	0.00 Kgf/mm ²
mínima	-69.5 Kgf/mm ²	-22.5 Kgf/mm ²	-10.0 Kgf/mm ²

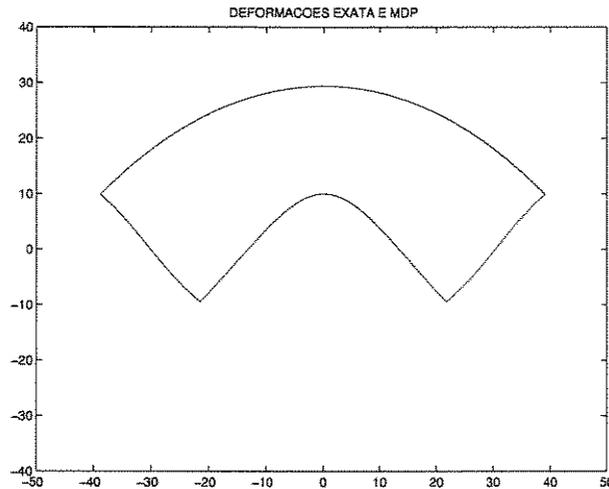


Figura 6.12: Problema 2 - Estrutura deformada, soluções exata e MDP.

viga uniformemente carregada é idêntico aquele fornecido pela solução analítica, exceto pelo erro de precisão computacional. O erro máximo em deslocamento da solução MDP com relação à exata é de $6.5678E-16$ mm.

Os métodos computacionais são utilizados especialmente nas análises de problemas de equilíbrio de corpos elásticos com geometrias e/ou condições de contorno complexas, que inviabilizam ou dificultam a obtenção direta de soluções analíticas. O terceiro problema é modelado utilizando-se o MDP e o método dos elementos finitos, possibilitando algumas considerações sobre a convergência do esquema numérico proposto.

A figura 6.13 apresenta a discretização MEF do terceiro problema, que representa a flexão de uma viga sujeita a um carregamento senoidal. Considera-se uma viga de comprimento $l = 60\text{mm}$, base unitária e altura $c = 20\text{mm}$. Assume-se a hipótese de estado plano de tensões. Define-se o eixo X na direção do comprimento da viga e o eixo Y perpendicularmente ao mesmo, na direção da altura da viga. Neste problema considera-se o módulo de elasticidade $E = 21000\text{Kg}/\text{mm}^2$ e o coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ como

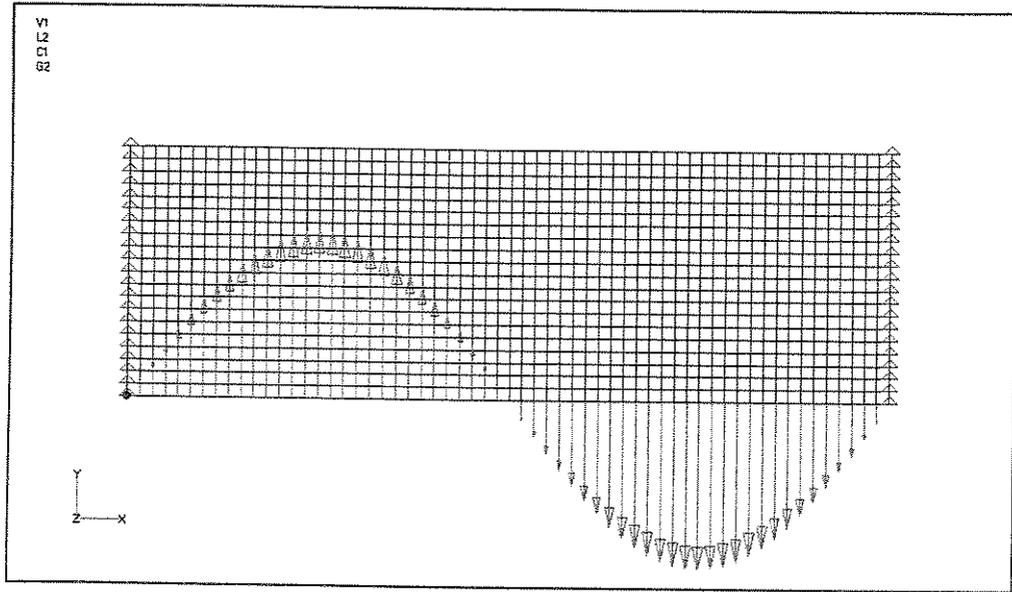


Figura 6.13: Problema 3 - Flexão de viga com carregamento senoidal.

propriedades do material.

O carregamento senoidal $\phi(x)$ ao qual a viga esta sujeita é definido pela equação 6.84. O mesmo é aplicado paralelamente ao eixo Y e ao longo do segmento $(x, 0)$, onde $0 \leq x \leq l$. Na equação 6.84, a constante q é dada por $q = 40\text{Kgf/mm}^2$.

$$\phi(x) = q \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \quad (6.84)$$

As condições de contorno naturais deste terceiro problema são apresentadas nas equações 6.85 e 6.86. E as condições de contorno essenciais são apresentadas na equação 6.87.

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -\phi(x) \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (6.85)$$

$$\sigma_{yy}(x, c) = 0 \quad \tau_{xy}(x, c) = 0 \quad 0 \leq x \leq l \quad (6.86)$$

$$u(x, y) = 0 \quad v(x, y) = 0 \quad x = 0, l \quad 0 \leq y \leq c \quad (6.87)$$

Para a solução MEF do problema, o software comercial MSC/NASTRAN é empregado, Lahey et al [11]. São utilizados 1200 elementos finitos retangulares do tipo CQUAD4 e 1281 nós. As restrições aos deslocamentos, representadas pela equação 6.87, e o carregamento senoidal $\phi(x)$, representado pela equação 6.84, são aplicados aos nós respectivos, conforme esquematizado na figura 6.13. Isto conduz a um sistema linear de equações de ordem 3759.

A figura 6.14 apresenta a distribuição da tensão máxima principal σ_1 obtida da análise MEF do problema da flexão da viga sujeita a um carregamento senoidal. A figura 6.15 apresenta a distribuição da tensão mínima principal σ_2 , a figura 6.16 apresenta a distribuição da tensão máxima de cisalhamento τ_{\max} e a figura 6.17 apresenta a viga deformada, em escala ampliada. O deslocamento MEF máximo da viga é de 0.04906mm.

As análises MDP deste terceiro problema são realizadas a partir da área retangular discretizada em 4, 9, 16 e 25 domínios pontuais. Consideram-se os domínios pontuais igualmente espaçados na direção X de $\Delta x = \frac{60}{N}$ mm e na direção Y de $\Delta y = \frac{20}{M}$ mm em todas as quatro soluções. Observa-se que os números de divisões do domínio nas direções X e Y são representados, respectivamente, por $(N = 1, M = 1)$, $(N = 2, M = 2)$, $(N = 3, M = 3)$ e $(N = 4, M = 4)$. E isto caracteriza $2(N+5)(M+5)$ variáveis MDP para a representação dos campos de deslocamento $u(x, y)$ e $v(x, y)$; ou seja, respectivamente 72, 98, 128 e 162 variáveis MDP para cada uma das soluções.

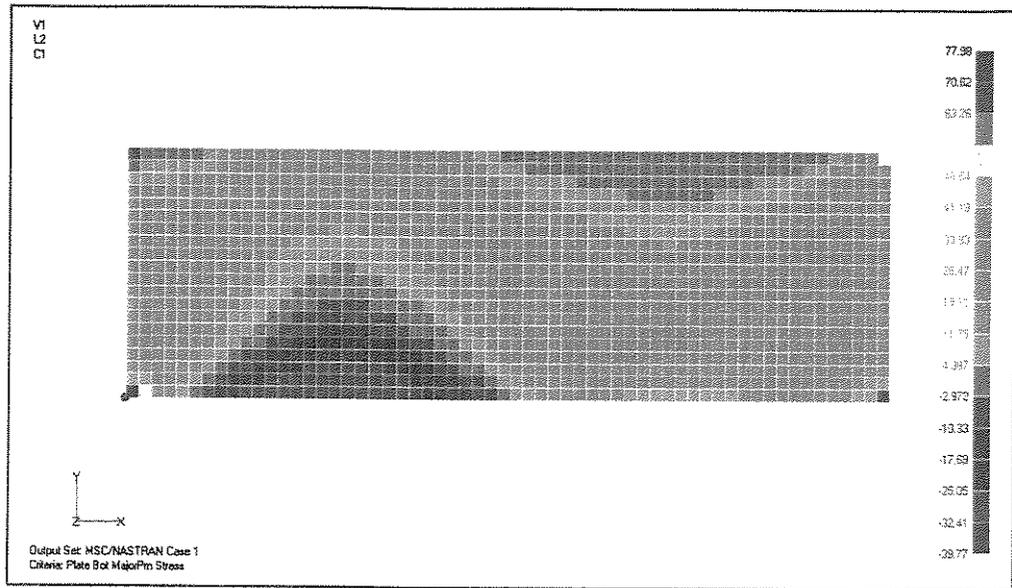


Figura 6.14: Problema 3 - Distribuição da tensão σ_1 MEF.

Uma mesma nuvem de 425 pontos de aproximação, conforme apresentada na figura 6.18, é tomada de forma a representar-se convenientemente o domínio da viga em todas as quatro soluções MDP. Para a caracterização do problema utiliza-se a colocação por pontos. As equações diferenciais de equilíbrio, considerando-se a hipótese de estado plano

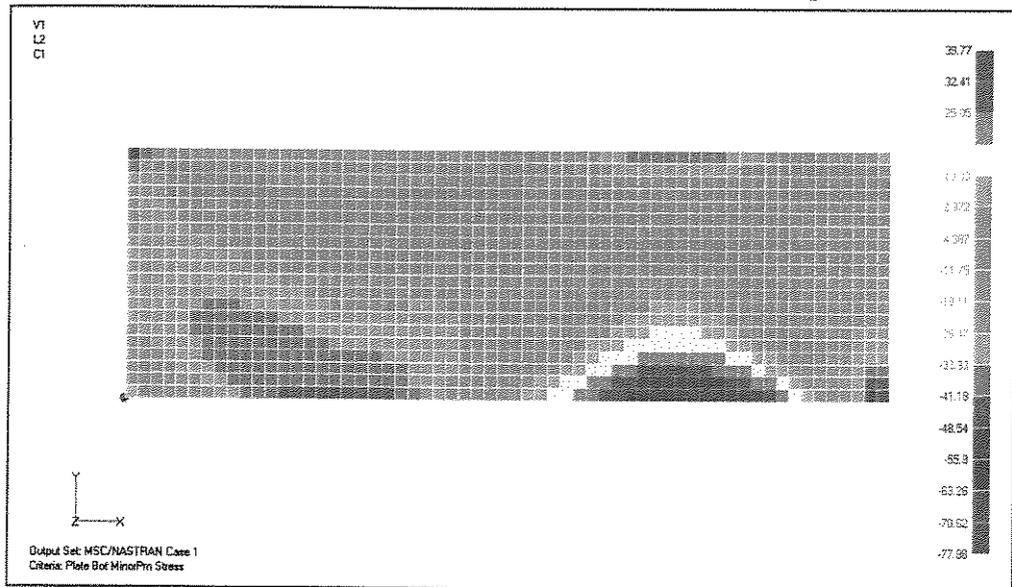


Figura 6.15: Problema 3 - Distribuição da tensão σ_2 MEF.

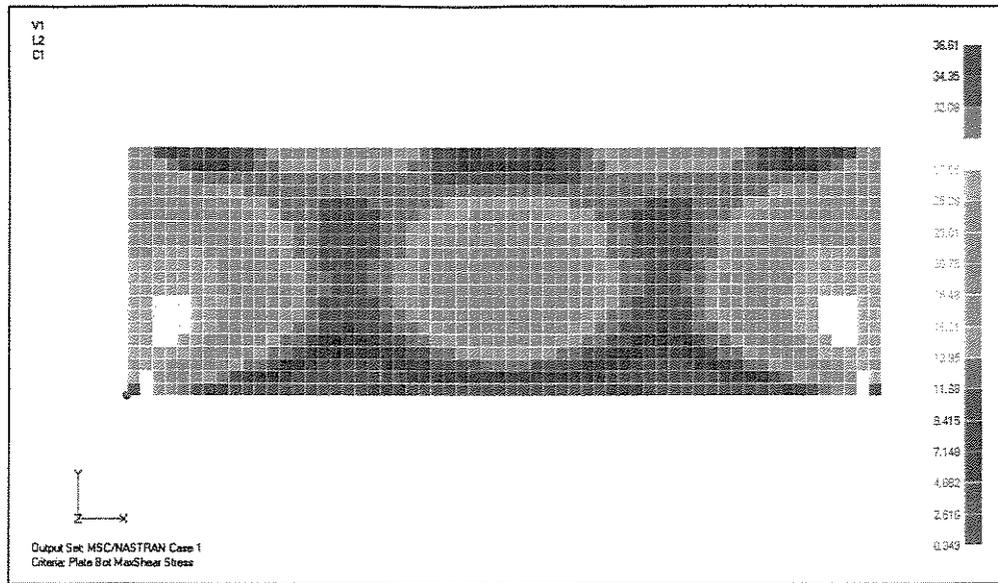


Figura 6.16: Problema 3 - Distribuição da tensão τ_{\max} MEF.

de tensões, são aplicadas nos pontos de aproximação interiores ao domínio Ω , conduzindo a 522 equações lineares em função das variáveis MDP. E as condições de contorno 6.85, 6.86 e 6.87 são aplicadas nos pontos de aproximação localizados na fronteira Γ da viga, conduzindo a 328 equações lineares em função das variáveis MDP.

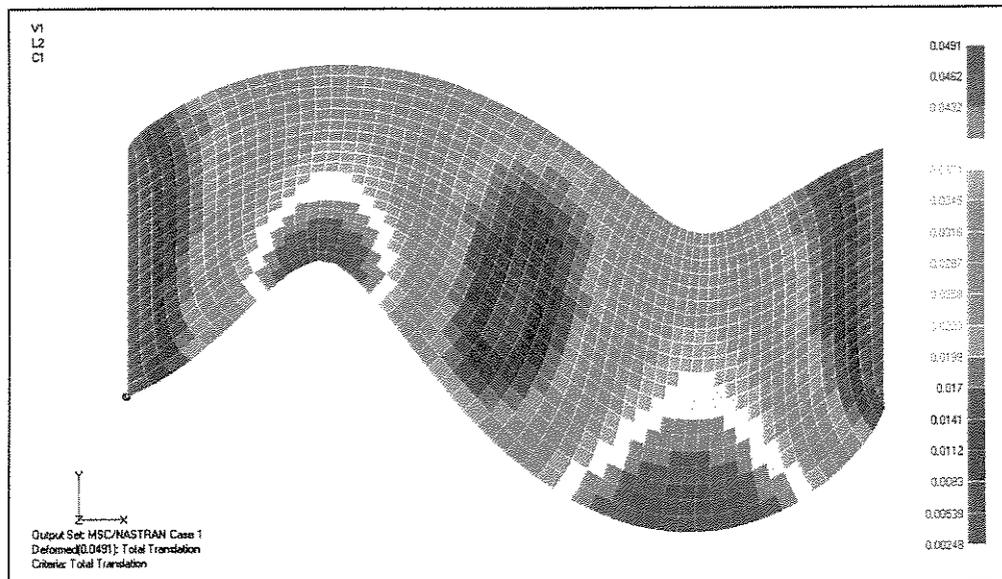


Figura 6.17: Problema 3 - Estrutura deformada MEF.

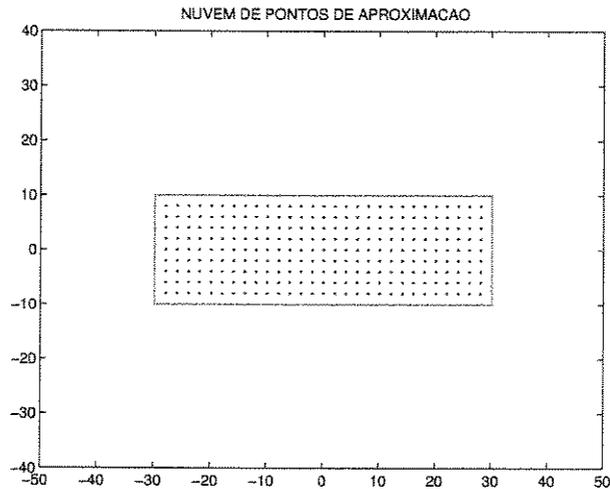


Figura 6.18: Problema 3 - Nuvem de pontos de aproximação.

Para o cálculo dos valores das $2(N + 5)(M + 5)$ variáveis MDP, o sistema de 850 equações resultantes é resolvido empregando-se um esquema de mínimos quadrados. Observa-se que a equação de compatibilidade, que relaciona as deformações elásticas do campo, são naturalmente satisfeitas na análise MDP de problemas bidimensionais de equilíbrio, o que assegura a unicidade da solução.

Uma vez conhecidos os valores das variáveis MDP, as próprias funções do método dos domínios pontuais são utilizadas no pós-processamento, produzindo resultados suaves. É possível assim avaliar-se as aproximações de $u(x, y)$ ou de $v(x, y)$ e de suas derivadas até $u^{(4,4)}(x, y)$ ou $v^{(4,4)}(x, y)$.

A figura 6.19 apresenta a discretização do problema em 25 domínios pontuais e os mapas de cores das distribuições das tensões σ_1 , σ_2 e τ_{\max} atuantes ao longo da viga, resultantes da solução numérica MDP mais refinada ($N = 4, M = 4$). A figura 6.20 apresenta as legendas relacionando as cores aos níveis das tensões σ_1 , σ_2 e τ_{\max} , fornecidas em $[\text{Kgf}/\text{mm}^2]$.

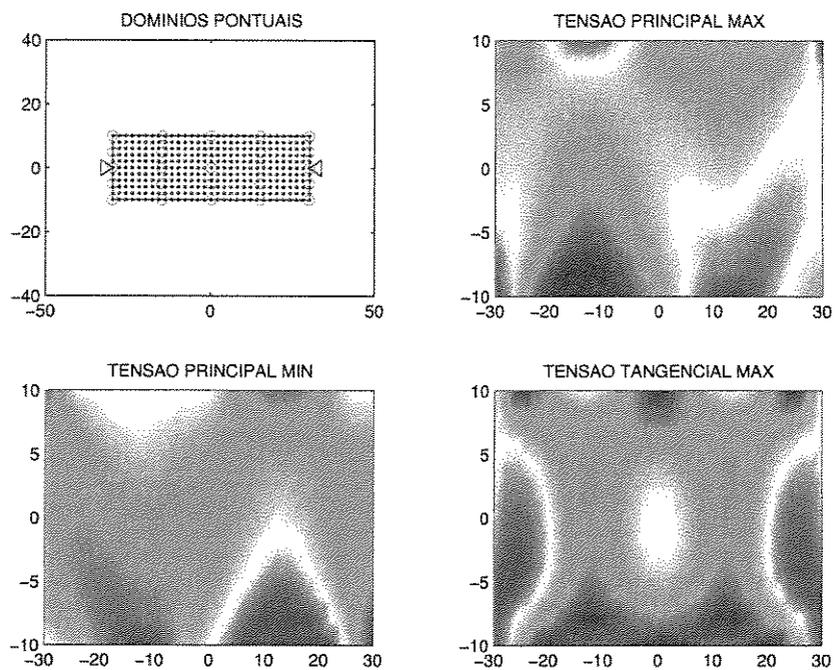


Figura 6.19: Problema 3 - Tensões σ_1 , σ_2 e τ_{\max} MDP.

A figura 6.21 apresenta os resultados MEF e MDP ($N = 4, M = 4$) da estrutura

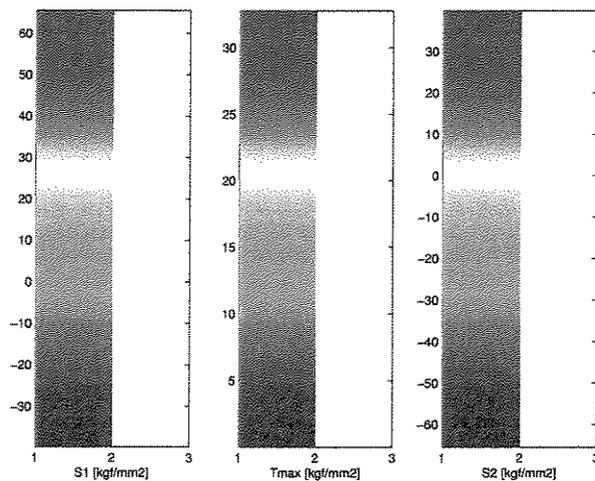


Figura 6.20: Problema 3 - Legendas das tensões MDP [Kgf/mm²].

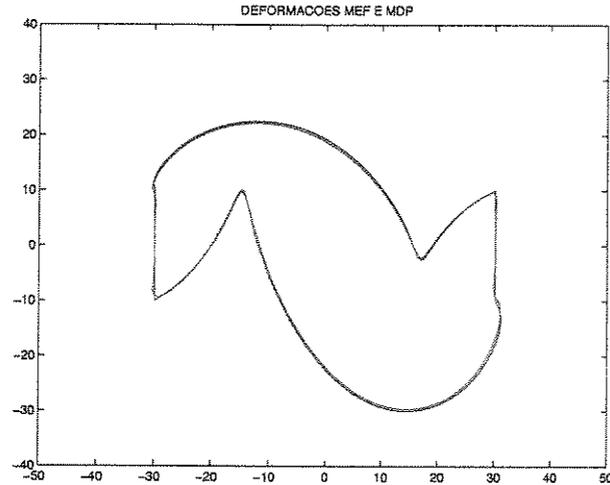


Figura 6.21: Problema 3 - Estrutura deformada, soluções exata e MDP.

deformada, em escala ampliada. O deslocamento MDP ($N = 4, M = 4$) máximo da viga é de 0.04830mm. E o erro máximo da solução MDP ($N = 4, M = 4$) com relação à solução MEF do problema é de 0.0021mm.

A Tabela 6.3 apresenta os resultados MEF e MDP das análises do problema da viga sujeita a um carregamento senoidal. Como na solução do problema segundo o método dos elementos finitos utilizou-se uma discretização bastante refinada — dado este que é verificado pela ordem do sistema de equações resultante —, os resultados MEF são assumidos como parâmetros para o estudo da convergência das soluções MDP.

Com base na análise dos dados da Tabela 6.3; denominando-se ε o erro máximo dos deslocamentos da solução MDP com relação à solução MEF e κ a ordem do sistema linear de equações MDP; observa-se que para este problema de equilíbrio em elasticidade plana vale a equação de convergência 6.88.

Tabela 6.3: Problema 3 - Resultados MEF e MDP.

método numérico	ordem do sistema	deslocamento máximo [mm]	erro máx. desloc. MEF	σ_1 [$\frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2}$] min / max	σ_2 [$\frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2}$] min / max	τ_{max} [$\frac{\text{Kgf}}{\text{mm}^2}$] min / max
MEF	3759	0.04906	-	-39.77 / 77.98	-77.98 / 39.77	0.35 / 36.61
MDP $N, M = 1$	72	0.04421	0.0055	-39.94 / 45.05	-45.05 / 39.94	0.05 / 31.73
MDP $N, M = 2$	98	0.04720	0.0042	-39.90 / 50.79	-50.79 / 39.90	0.00 / 29.56
MDP $N, M = 3$	128	0.04838	0.0029	-39.79 / 60.44	-60.44 / 39.79	0.05 / 30.53
MDP $N, M = 4$	162	0.04830	0.0021	-39.78 / 65.51	-65.51 / 39.78	0.00 / 32.76

$$\varepsilon = 0.9689\kappa^{-1.1998} \quad (6.88)$$

Neste capítulo apresentou-se a versão bidimensional do método dos domínios pontuais e aplicações na solução de problemas em elasticidade plana. Resultados idênticos à solução analítica foram obtidos a partir da resolução numérica MDP dos dois primeiros casos de estudo. Estes resultados são justificados pelo fato de que as funções MDP representam campos de aproximação com continuidade de alta ordem e as soluções analíticas de tais problemas são representadas por funções polinomiais. Na resolução numérica do terceiro problema, que efetivamente exige do esquema numérico proposto, observou-se uma convergência um pouco mais acentuada que seria aquela inversamente proporcional ao número de variáveis MDP. E os resultados numéricos MDP mostraram boa concordância com a solução MEF do problema, mesmo considerando-se discretizações com um número reduzido de domínios pontuais.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho apresentou-se o método dos domínios pontuais. Trata-se de um operador algébrico baseado em campos de interpolação com continuidade das derivadas de alta ordem para a resolução numérica de equações diferenciais ordinárias ou parciais.

No Capítulo 1 procurou-se delinear o contexto no qual se insere a contribuição dada neste trabalho e respectiva motivação. Apresentou-se uma breve revisão bibliográfica e sintetizou-se algumas tendências atuais dos métodos computacionais em mecânica aplicada: Aproximações de alta ordem, uma vez que estas possibilitam soluções que são mais condizentes com as leis de conservação física. Isto tanto para os esquemas espaciais quanto para os esquemas temporais. Esquemas espaço-temporais. Facilidade de aplicação das condições de contorno e da introdução de descontinuidades em diferentes níveis da aproximação (função ou derivadas). Esquemas numéricos menos estruturados, favorecendo as etapas de pré e pós-processamento da solução. E generalidade.

A seguir – Capítulo 2 – discutiu-se os aspectos mais relevantes do método pro-

posto: metodologia sistemática para o desenvolvimento das funções MDP, discretização independente da malha e da equação diferencial do problema, melhoria da solução com exigência de maior regularidade das funções, análise de erros, estimador de erros e tratamento de descontinuidades físicas em problemas. Todos estes aspectos foram abordados do ponto de vista unidimensional e exemplos numéricos foram introduzidos, na medida da apresentação dos novos conceitos, tendo como intuito facilitar a compreensão das idéias e ilustrar a aplicação efetiva das mesmas. Apresentou-se o desenvolvimento de funções MDP bidimensionais de alta ordem. E ainda linhas gerais para a construção de funções do método dos domínios pontuais considerando-se o número de dimensões do espaço, partições do domínio e aproximações com regularidades genéricas.

No Capítulo 3 a versão unidimensional do MDP foi aplicada às equações diferenciais referentes aos comportamentos estático e dinâmico de estruturas reticuladas – barras e vigas. Discretizações grosseiras e refinadas, além de funções MDP considerando-se diferentes níveis de continuidade, foram testadas extensivamente de forma a levantar-se as características numéricas de estabilidade, convergência e precisão do operador. As aplicações MDP na dinâmica de barras e de vigas demonstraram que é possível a melhoria da solução com a exigência de maior regularidade das funções. As aproximações MDP de alta ordem apresentaram um aumento mínimo no número de variáveis, e trabalhando-se convenientemente com as condições de contorno, obteve-se a mesma ordem do sistema de equações final para as diversas soluções. Em ambos os casos, foram alcançados resultados mais apurados que o MEF. Apresentou-se ainda a análise estática MDP de uma estrutura de pórticos, onde foi descrito o tratamento para a transformação entre sistemas referenciais de coordenadas. E para este problema resultados idênticos ao MEF foram obtidos.

Tratou-se, no Capítulo 4, de aplicações 2D do método dos domínios pontuais envolvendo a equação de Poisson. Foram obtidas soluções equivalentes de um problema padrão,

baseadas na mesma ordem dos sistemas lineares, empregando-se o MDP e o método da dupla reciprocidade, tendo o primeiro conduzido a um resultado mais próximo da solução exata do problema. O MDP também foi empregado na solução de problemas de torção na teoria da elasticidade, considerando-se diferentes geometrias das seções transversais. Na resolução numérica do problema de torção de seção transversal triangular equilátero obteve-se uma função de tensão coincidente à solução analítica. Calculou-se os torques adimensionais MDP para seções transversais retangulares de diferentes valores da razão entre os comprimentos dos lados, e os resultados obtidos mostraram concordância com os valores da literatura. E a solução MDP para uma seção retangular trincada mostrou-se qualitativamente correta.

No Capítulo 5 explorou-se as possibilidades da introdução de descontinuidades físicas em diferentes níveis da aproximação – função ou derivadas – na análise transiente de carga móvel atuante em viga. A versão bidimensional do método dos domínios pontuais foi empregada. Considerou-se uma das dimensões ao longo do comprimento da viga, enquanto a outra foi associada à evolução no tempo, e o carregamento móvel foi tratado como uma descontinuidade na derivada terceira do deslocamento. Comparou-se os resultados MDP com a solução analítica do problema, e com a solução numérica obtida a partir da discretização espacial empregando-se elementos finitos cúbicos de Hermite e um esquema de Newmark com aceleração constante para a integração do sistema das equações de movimento ao longo do tempo. Observou-se que os modelos MEF e MDP apresentaram níveis de erro compatíveis, apesar das abordagens serem bastante distintas.

O Capítulo 6 foi dedicado à análise de problemas em elasticidade plana, onde demonstrou-se a potencialidade do método dos domínios pontuais na resolução dos sistemas lineares das equações diferenciais de equilíbrio. Tanto a análise do problema da flexão de uma viga com carregamento na extremidade quanto aquela da flexão de uma

viga uniformemente carregada conduziram a resultados idênticos às respectivas soluções analíticas. Obteve-se a solução do problema da flexão de uma viga sujeita a um carregamento senoidal empregando-se uma malha bem refinada de elementos finitos e a mesma foi assumida como parâmetro para o estudo da convergência das soluções MDP. Na resolução numérica deste terceiro problema, que efetivamente exige do esquema numérico proposto, observou-se uma convergência ligeiramente mais acentuada que seria aquela inversamente proporcional ao número de variáveis MDP. E os resultados numéricos MDP mostraram boa concordância com a solução MEF do problema, mesmo considerando-se discretizações com um número reduzido de domínios pontuais.

Fundamentado pela teoria desenvolvida e suas diversas aplicações, que foram detalhadamente descritas, pode-se afirmar que existe o alinhamento com as atuais tendências dos métodos computacionais. O método dos domínios pontuais, apresentado neste trabalho, realmente constitui uma ferramenta para a análise de uma larga faixa de problemas em mecânica aplicada.

Entretanto, deve-se salientar que muito ainda há de ser feito em pesquisa e desenvolvimento no sentido de que esta tecnologia amadureça à sua aplicação em engenharia. E as necessidades de desenvolvimento mais urgentes, correlatas ao tema descrito, consistem nos seguintes tópicos: Estratégias da disposição dos domínios pontuais e da escolha da regularidade das funções para a melhor performance da solução. Estudos para a otimização do número e do respectivo adensamento da nuvem dos pontos de aproximação do domínio. Implementação automática para a construção de funções do método dos domínios pontuais considerando-se o número de dimensões do espaço, partições do domínio e aproximações com regularidades genéricas. E técnica eficiente para a solução do sistema de equações algébricas resultante, que apresenta estrutura de esparsidade específica.

Bibliografia

- [1] ALI, A. H. A., GARDNER, G. A., & GARDNER, L. R. T., A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 100, pp. 325-337, 1992.
- [2] ARAD, M., SEGEV, R., & BEN-DOR, G., Improved Finite Difference Method for Equilibrium Problems Based on Differentiation of the Partial Differential Equations and the Boundary Conditions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, pp. 1831-1853, 1995.
- [3] BATHE, K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, *Prentice-Hall*, 1982.
- [4] BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M., & KRYSL, P., Meshless Methods: An overview and recent developments, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 3-47, 1996.
- [5] CHANG, S. C., The Method of Space-Time Conservation Element and Solution Element — A New Approach for Solvin the Navier-Stokes and Euler Equations, *Journal of Computational Physics*, vol. 119, pp. 295-324, 1995.
- [6] CHEN, J. S., PAN, C., WU, C. T., & LIU, W. K., Reproducing Kernel Particle

- Methods for large deformation analysis of non-linear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 195-227, 1996.
- [7] DHATT, G. & TOUZOT, G., The Finite Element Method Displayed, *John Wiley & Sons*, 1985.
- [8] DUARTE, C. A., & ODEN, J. T., An h - p adaptive method using clouds, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 237-262, 1996.
- [9] HUGHES, T. J. R., The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Analysis, *Prentice-Hall*, 1987.
- [10] IOAKIMIDIS, N. I., Application of Mathematica to the Direct Solution of Torsion Problems by the Energy Method, *Computers & Structures*, vol. 43, n. 4, pp. 803-807, 1992.
- [11] LAHEY, R. S., MILLER, M. P. & REYMOND, M., MSC/NASTRAN Version 68 Reference Manual, *The MacNeal-Schwendler Corporation*, 1994.
- [12] LI, Z. C., Combinations of the Ritz-Galerkin and Finite Difference Methods, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 39, pp. 1839-1857, 1996.
- [13] LISZCA, T., & ORKISZ, J., The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its Application in Applied Mechanics, *Computers & Structures*, vol. 11, pp. 83-95, 1980.
- [14] LU, Y. Y., BELYTSCHKO, T., & GU, L., A new implementation of the element free Galerkin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 113, pp. 397-414, 1994.

- [15] MORTON, K. W., & SULI, E., Finite Volume Methods and their Analysis, *IMA Journal of Numerical Analysis*, vol. 11, pp. 241-260, 1991.
- [16] NARDINI, D. & BREBBIA, C. A., A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements, in *Boundary Element Methods in Engineering*, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York, 1982.
- [17] NETO, A. T. & IGUTI, F., Método dos Domínios Pontuais (MDP), *Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica Norte e Nordeste*, Vol. 2, pp. 96-103, Fortaleza, 1998.
- [18] NETO, A. T., IGUTI, F., NOGUEIRA, A. C. & MESQUITA, E., O Método dos Domínios Pontuais e Aplicações em Problemas Bidimensionais, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Águas de Lindóia, 1999.
- [19] ONATE, E., IDELSOHN, S., ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., & SACCO, C., A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pp. 315-346, 1996.
- [20] PARTRIDGE, P. W., BREBBIA, C. A., & WROBEL, L. C., The Dual Reciprocity Boundary Element Method, *Computational Mechanics Publications*, 1992.
- [21] PRZEMIENIECKI, J. S., Theory of Matrix Structural Analysis, *McGraw-Hill Book Company*, 1968.
- [22] SAFJAN, A. & ODEN, J. T., High-Order Taylor-Galerkin Methods for Linear Hyperbolic Systems, *Journal of Computational Physics*, vol. 120, pp. 206-230, 1995.
- [23] STEELE, C. R., Non Linear Effects in the Problem of the Beam on a Foundation with a Moving Load, *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 3, pp. 565-585,

1967.

- [24] STOKES, G. G., Discussions of a Differential Equation Related to the Breaking of Railway Bridges, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 8, Part 5, pp. 707-735, 1867.
- [25] TANG, S. C. & YEN, D. H. Y., A Note on the Nonlinear Response of an Elastic Beam on a Foundation to a Moving Load, *International Journal of Solids & Structures*, Vol. 6, pp. 1451-1461, 1970.
- [26] TIMOSHENKO, S. & GOODIER, J. N., Theory of Elasticity, *McGrall-Hill Book Company*, second edition, 1951.
- [27] WILLIS, R., Appendix to the Report of the Commissioners Appointed to Inquire into the Application of Iron to Railway Structures, *H. M. Stationery Office*, London, 1849.
- [28] ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Element Method in Engineering Science, *McGraw-Hill Book Company*, 1980.