



Fábio Nonato de Paula

Modelo Dinâmico para Mancais de Elementos Rolantes Radiais de Esferas Considerando os Efeitos da Lubrificação Elastohidrodinâmica

54/2013

**CAMPINAS
2013**



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

Fábio Nonato de Paula

Modelo Dinâmico para Mancais de Elementos Rolantes Radiais de Esferas Considerando os Efeitos da Lubrificação Elastohidrodinâmica

Orientador: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projetos Mecânicos.

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO
FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO(A) ALUNO(A)
.....*Fábio Nonato de Paula*.....
....., E ORIENTADA PELO(A)
PROF(A). DR(A).....*Katia Lucchesi Cavalca*
.....*Dedini*.....
Katia Lucchesi Cavalca
ASSINATURA DO(A) ORIENTADOR(A)

**CAMPINAS
2013**

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

N73m Nonato, Fabio, 1985-
Modelo dinâmico para mancais de elementos rolantes radiais de esferas considerando os efeitos da lubrificação elastohidrodinâmica / Fábio Nonato de Paula. – Campinas, SP : [s.n.], 2013.

Orientador: Katia Lucchesi Cavalca Dedini.
NonTese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Tribologia. 2. Mecânica de contato. 3. Lubrificação. 4. Amortecimento (Mecânica). 5. Rolamento de esferas. I. Cavalca, Katia Lucchesi, 1963-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Dynamic model for radial deep groove ball bearings considering the effects of the elastohydrodynamic lubrication

Palavras-chave em inglês:

Tribology

Mechanical contact

Lubrication

Ball bearing

Damping (Mechanics)

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutor em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Katia Lucchesi Cavalca Dedini [Orientador]

Hans Ingo Weber

Robson Pederiva

Fernando Alves Rochinha

Domingos Alves Rade

Data de defesa: 29-07-2013

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE PROJETO MECÂNICO

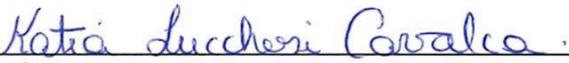
TESE DE DOUTORADO

**Modelo Dinâmico para Mancais de Elementos
Rolantes Radiais de Esferas Considerando os
Efeitos da Lubrificação Elastohidrodinâmica**

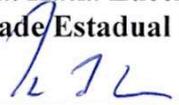
Autor: Fábio Nonato de Paula

Orientador: Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini

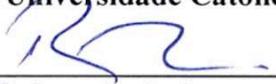
A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini, Presidente
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM



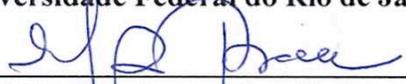
Prof. Dr. Hans Ingo Weber
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RIO/DEM



Prof. Dr. Robson Pederiva
Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/FEM



Prof. Dr. Fernando Alves Rochinha
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ/COPPE



Prof. Dr. Domingos Alves Rade
Universidade Federal de Uberlândia – UFU/FEMEC

Campinas, 29 de Julho de 2013

Dedico este trabalho a minha esposa Camila.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha querida esposa, Camila, que soube me guiar por todas as atribuições, esteve sempre presente, acreditou em mim e aceitou participar desta jornada comigo, dia-a-dia. Agradeço também aos meus pais e à minha irmã por acompanharem, com interesse, toda esta minha caminhada e me apoiarem durante ela.

Gostaria de agradecer também aos colegas de laboratório que diretamente contribuíram à este trabalho: Gregory, Ricardo, Felipe, Thiago, Leonardo, Letícia, Gustavo, Helio, pelas longas discussões, técnicas ou não, pelo apoio moral, pelos desafios, pelas risadas e por fazerem do meu tempo junto ao grupo valer a pena. Aos demais colegas, muito obrigado pelas inúmeras risadas e companheirismo.

Também agradeço aos professores Robson e Pablo pelas sugestões e conselhos ao trabalho. Aos colegas da Oficina Mecânica do DPM, Maurício, Mauro e Ferreira, muito obrigado pela indispensável ajuda na montagem experimental. À Schaeffler Brasil Ltda. pelo suporte e a PRPG pelo financiamento na fase final do projeto.

Por fim, este trabalho não seria possível sem a orientação, dedicação, paciência e conhecimento de minha orientadora, Profa. Katia, sem quem não conseguiria chegar aonde estamos hoje. Muito obrigado pelos desafios e por acreditar.

Douglas Adams, *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*

Resumo

A representação dinâmica dos contatos mecânicos em modelos computacionais de mancais de elementos rolantes baseia-se comumente no clássico modelo de Hertz para o contato seco, mesmo sendo a presença de um meio lubrificante imperativa para evitar o desgaste prematuro destes componentes. Desta maneira, os efeitos dinâmicos da presença de um filme fluídico nas interfaces de contato são desconsiderados, quando tais mancais são lubrificados por óleo. Com o intuito de introduzir tais efeitos em um modelo de mancal de elementos rolantes de esferas, este trabalho propõe um método baseado na aproximação dinâmica das características de cada contato lubrificado por vínculos de rigidez não linear e amortecimento viscoso. Estes vínculos dinâmicos são caracterizados a partir da resposta dinâmica da simulação completa do contato elastohidrodinâmico (EHD) elíptico, através da implementação de um integrador temporal que utiliza o método de diferenças finitas em múltiplos níveis para solução da parcela hidrodinâmica do problema. Posteriormente, aplica-se a aproximação do contato EHD por vínculos não lineares a um modelo do mancal radial de esferas, de dois graus de liberdade, com o intuito de analisar vibrações transversais no mancal, em modelos computacionais de máquinas rotativas. A comparação entre os resultados obtidos pelo modelo proposto e os valores obtidos pelo equacionamento completo por diferenças finitas mostrou ser adequada a representação do comportamento estacionário e dinâmico do contato. Observa-se a presença do enrijecimento do mancal devido à presença do filme EHD, quando analisando a resposta do mancal linearizado, efeito observável anteriormente apenas em investigações experimentais. Por fim, a integração temporal de um modelo de elementos finitos de um rotor apoiado por mancais lubrificados representou adequadamente o comportamento em frequência de uma montagem experimental de rotor. Conclui-se, portanto, que o modelo não linear proposto para o mancal de elementos rolantes radiais de esfera, sob influência da lubrificação EHD, é promissor para descrever o comportamento destes componentes quando em aplicação.

Palavras chaves: lubrificação elastohidrodinâmica, contato mecânico, rigidez, amortecimento, rolamento de esferas.

Abstract

The dynamic representation of mechanical contacts in computational models of rolling element bearings is commonly based on the classic Hertz's model for the dry contact, even though the presence of a lubricant medium being essential to avoid premature wear of such components. Thus, the dynamic effects of the fluid film on the contacting interfaces are overlooked when such bearings are under oil lubrication. With the intent of introducing such effects in a radial deep groove ball bearing model, this work proposes a method based on the dynamic approximation of each lubricated contact by dynamic links of non-linear stiffness and viscous damping. Such dynamic links are characterized from the response of a complete dynamic simulation of the elastohydrodynamic (EHD) elliptic contact, through an implementation of a numerical integrator, which uses the multi-level finite difference method for the solution of the hydrodynamic portion of the problem. Afterwards, the approximation of each contact by dynamic links is applied to a complete rolling element bearing model, with two degrees of freedom, with the intent of analyzing transverse vibrations on the bearings applied to rotating machinery computational models. The comparison between the results attained through the proposed model and the values simulated using the complete finite difference model showed an adequate representation of the stationary and dynamic behaviors of the contact. When evaluating the linearized bearing model, the presence of fluid stiffening is observed, which was previously only observed through experimental investigations. Lastly, the time integration of a finite element model of a rotor supported by lubricated bearings portrayed the frequency content of an experimental set-up of the rotor adequately. It is concluded that the proposed nonlinear model for the deep groove ball bearing, under the influence of the EHD lubrication, is promising to describe the behavior of such components when on application.

Keywords: elastohydrodynamic lubrication, mechanical contact, stiffness, damping, ball bearing.

Lista de Ilustrações

Figura 1.1 – Representação das áreas de contato para uma esfera carregada de um mancal de elementos rolantes;	5
Figura 1.2 – Esquema de seção do mancal de elementos rolantes com contatos caracterizados como vínculos dinâmicos de rigidez e amortecimento;	7
Figura 3.1 – Representação das coordenadas locais no contato (x, y, z) e domínio Γ analisado;	20
Figura 3.2 – Representação esquemática do sistema 1 grau de liberdade do contato elemento pista.....	22
Figura 3.3 – Aproximação entre os corpos como uma função dos parâmetros adimensionais M e L, para o contato circular de acordo com o ajuste proposto por Wijnant (1998).	32
Figura 3.4 – Bancada experimental para análise de contatos EHD (Wijnant, 1998).	33
Figura 3.5 – Interferogramas experimentais obtidos para $0.0 < t < 4$ ms (Wijnant, 1998).	36
Figura 3.6 – Pseudo-interferogramas simulados para $0.0 < t < 4$ ms (Nonato e Cavalca, 2010a).	36
Figura 3.7 – Polinômios ajustados para força em contato EHD genérico com $M = 200$, $L = 10$ e $\kappa = 0,5$, excitado com frequências adimensionais de $\pi(- \cdot -)$, $2\pi(- \cdot -)$ e $4\pi(-)$; (Nonato e Cavalca, 2010a).	38
Figura 3.8 – Representação esquemática da transformação de coordenadas para linearização do problema EHD (Nonato, 2012a).	38
Figura 3.9 – Resposta de força linear no contato EHD para os casos listados na Tabela 3.6, em comparação a resposta no contato seco para o anel externo de um rolamento radial de esferas do tipo 6006.	42
Figura 3.10 – Comparação entre a força de contato EHD ajustada para o mancal de esferas 6006, a 1200 rpm, e os pontos de equilíbrio simulados pelo algoritmo EHD para a variação de carga observada na Tabela 3.6.	43

Figura 3.11 – Comparação entre a força de contato EHD ajustada para o mancal de esferas 6006, a 1200 rpm, e os pontos de equilíbrio simulados pelo algoritmo EHD desconsiderando o termo de força constante $\Delta FEHD$	44
Figura 3.12 – Força no contato EHD do anel interno de um mancal de rolamentos tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura, para velocidades de 600 rpm a 1200 rpm.	46
Figura 3.13 – Comportamento histerético do amortecimento no contato EHD e a aproximação linear proposta.	51
Figura 3.14 – Resposta forçada harmônica de deslocamento simulado e ajustado para os contatos EHD com maior e menor carga radial de um mancal tipo 6006 sob 100 N de carga radial pura e 1200 rpm de velocidade no anel interno.	53
Figura 3.15 – Resposta transiente de deslocamento simulado e ajustado para o contato EHD no anel interno de um mancal tipo 6006 sob 39,7 N de carga e 1200 rpm de velocidade no anel interno.	54
Figura 3.16 – Resposta transiente de deslocamento simulado e ajustado para o contato EHD utilizado para validação do algoritmo Multi-Níveis.	55
Figura 4.1 – Representação de um mancal radial de esferas e a aproximação de 2 GDL, $(\delta x, \delta y)$, para o movimento planar do anel interno com anel externo fixo.	56
Figura 4.2 – Aproximação para o modelo equivalente de forças no contato entre anel interno e externo para a posição de um elemento, a) modelo linear considerando o elemento e b) modelo de rigidez não linear EHD sem elemento rolante.	57
Figura 4.3 – Representação do carregamento do j -ésimo elemento em um modelo geral de mancal de elementos rolantes 2 GDL.	59
Figura 4.4 – Posição simétrica dos elementos em um mancal radial de esferas de acordo com a direção do carregamento.	63
Figura 4.5 – Variação do deslocamento obtido devido a um carregamento puramente radial em um mancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado como função da velocidade do anel interno.	63

Figura 4.6 – Variação periódica dos coeficientes lineares de rigidez para um mancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado, para um deslocamento de 2 μm no equilíbrio, em função da velocidade de rotação do anel interno.....	65
Figura 4.7 – Variação periódica dos coeficientes lineares de rigidez para um amancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado, para uma força constante de 40 N, em função da velocidade de rotação do anel interno.	66
Figura 4.8 – Variação do coeficiente linearizado de amortecimento com a velocidade de rotação do mancal para um amancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado.	69
Figura 5.1 – Modelo de 4 GDL para o rotor laval apoiado em mancais flexíveis. ...	71
Figura 5.2 – Órbitas para os mancais do rotor laval quando considerando os casos do contato seco e lubrificado, para velocidades de 900 rpm a 2400 rpm, em metros.	72
Figura 5.3 – Resposta em frequência para a aceleração combinada das direções vertical e horizontal nos mancais para uma velocidade de 2100 rpm.	74
Figura 5.4 – Sinal de aceleração para a direção vertical nos mancais a uma velocidade de 2100 rpm.....	75
Figura 5.5 – Resposta em frequência para a aceleração das direções vertical e horizontal nos mancais de um rotor balanceado, para uma velocidade de 2100 rpm.....	76
Figura 5.6 – Variação do deslocamento vertical do anel interno de um mancal de elementos rolantes lubrificado aplicado a um rotor laval idealmente balanceado quando sob 100 N de carga radial.....	77
Figura 6.1 – Montagem do pedestal de suporte do mancal de rolamentos.	80
Figura 6.2 – Montagem completa da bancada de rotor.....	81
Figura 6.3 – Representação do rotor discretizado por 26 elementos de viga e numeração dos nós observados.	85
Figura 6.4 – Sinais experimentais de deslocamento do eixo, aceleração do pedestal e força no tempo para a direção vertical do Mancal 2 , com o rotor operando a 40 Hz.....	86
Figura 6.5 – Sinais experimentais de deslocamento do pedestal no tempo para as direções vertical e horizontal do Mancal 2 , com o rotor operando a 40 Hz. ...	87

Figura 6.6 – Sinais de aceleração do pedestal nas direções vertical e horizontal no domínio da frequência para o Mancal 2 , com o rotor operando a 40 Hz.....	88
Figura 6.7 – Órbita média obtida para o Mancal 2 , com o rotor operando a 1 Hz sem carga, para um periodo de 2 s.	89
Figura 6.8 – Comparação entre órbitas experimentais (esquerda) e simuladas (direita) para o Mancal 2 , com rotor operando entre 20 rps e 40 rps com carga constante de 67 N.....	91
Figura 6.9 – Espectro em frequência na direção vertical para o Mancal 2 , com o rotor operando a 40 Hz.	92
Figura 6.10 – Espectro em frequência na direção vertical para o Mancal 2 , com o rotor operando a 30 Hz.	92
Figura 6.11 – Comparação entre órbitas experimentais (esquerda) e simuladas (direita) para o Mancal 2 , com rotor operando entre 20 Hz e 40 Hz com carga constante de 67 N.....	94
Figura A.1 – Aproximação geométrica para dois corpos esféricos em contato.....	106
Figura B.1 – Sinais de entrada (força) e saída (deslocamento) para a excitação tipo <i>chirp</i> com o rotor em operação a 40 Hz.....	111
Figura B.2 – Resposta em frequência para o rotor em operação a 40 rps, observada para o deslocamento vertical do Mancal 2.	112
Figura B.3 – Resposta em frequência para o rotor em operação a 40 Hz, observada para a aceleração do pedestal vertical do Mancal 2.	112
Figura B.4 – Primeiro e segundo modos próprios da montagem dos pedestais de suporte, observados em 63.9 Hz e 142.8 Hz.	113
Figura B.5 – Resposta em frequência experimental obtida para o pedestal de suporte (Tuckmantel, 2011).	114
Figura B.6 – Resposta em frequência simulada, observada para a deslocamento vertical do Mancal 2.....	115
Figura B.7 – Resposta ao desbalanceamento utilizando-se o modelo de mancais linearizados no software Rotortest.	116
Figura B.8 – Representação do primeiro modo do rotor com mancais de rolamento linearizados.	117

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Parâmetros de caracterização do contato EHD. (Nonato, 2009).....	24
Tabela 3.2 – Comparação dos valores de espessura mínima de filme encontrados por Hamrock (1976), para o contato $W^* = 0,1106 \times 10^{-6}$, $U^* = 0,168 \times 10^{-11}$ e $G^* = 4522$;	31
Tabela 3.3 – Comparação dos valores de espessura central de filme encontrados por Hamrock (1976), para o contato $W^* = 0,1106 \times 10^{-6}$, $U^* = 0,168 \times 10^{-11}$ e $G^* = 4522$;	32
Tabela 3.4 – Parâmetros dimensionais para o contato experimental da Figura 3.4;	34
Tabela 3.5 – Valores de rigidez linear do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6201, sob 15 N de carga radial pura. (Nonato, 2009);	40
Tabela 3.6 – Valores de rigidez linear do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura.....	41
Tabela 3.7 – Coeficientes de rigidez não linear do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura, para velocidades de 600 rpm a 2400 rpm.....	45
Tabela 3.8 – Coeficientes lineares de amortecimento do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura, para velocidades de 600 rpm a 2400 rpm.....	50
Tabela 3.9 – Coeficientes lineares de amortecimento do contato EHD independentes da carga para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, para velocidades de 600 rpm a 2400 rpm.....	52
Tabela 6.1 – Parâmetros do mancal radial de esferas 6006.....	79

Lista de Simbolos e Siglas

a	Semieixo Menor da Elipse de Contato	m
a_f	Amplitude de Excitação	N
b	Semieixo Menor da Elipse de Contato	m
C	Amortecimento no Contato	$N.s/m$
\mathbf{C}	Matriz de Amortecimento do Sistema Rotativo por EF	
C_i	Amortecimento no Contato do Anel Interno	$N.s/m$
\mathbf{C}_{lin}	Matriz de Amortecimento Linearizada	
C_o	Amortecimento no Contato do Anel Externo	$N.s/m$
C_T	Amortecimento Equivalente entre Anéis	$N.s/m$
C_{xx}, C_{yy}	Coefficientes Diretos de Amortecimento Linearizados	$N.s/m$
C_{xy}, C_{yx}	Coefficientes Cruzados de Amortecimento Linearizados	$N.s/m$
d_s	Amortecimento Externo ao Rotor Laval	$N.s/m$
D_w	Diâmetro do Elemento Rolante	m
d_M	Diâmetro Primitivo do Rolamento	m
E	Modulo de Elasticidade	N/m^2
E'	Modulo de Elasticidade Reduzido	m^2/N
ε	Integral Elíptica de Segunda Ordem	
\mathbf{F}_b	Vetor de Força Geradas pelo Mancal	
\mathbf{F}_r	Força Radial Aplicada ao Mancal	
f_d	Força Dinâmica no Contato	N
f_0	Carga Estática	N
F_x	Força Vertical no Mancal	N
F_y	Força Horizontal no Mancal	N
ΔF_{EHD}	Constante de Carga no Contato Lubrificado	N
ΔF_T	Constante de Carga Equivalente	N
\mathbf{G}	Matriz Giroscópica do Sistema Rotativo por EF	

G^*	Parâmetro Adimensional de Material	
$g(h_0)$	Constante de Força	N
$g(H_0)$	Constante de Força Adimensional	
h	Espessura de Filme	m
H	Espessura Adimensional de Filme	
h_c	Espessura Central de Filme	m
H_c	Espessura Central de Filme Adimensional	
h_{min}	Espessura Mínima de Filme	m
H_{min}	Espessura Mínima de Filme Adimensional	
h_0	Aproximação entre os Corpos	m
H_0	Aproximação Adimensional entre os Corpos	
\mathcal{K}	Integral Elíptica de Primeira Ordem	
\mathbf{K}	Matriz de Rigidez do Sistema Rotativo por EF	
K_{EHD}	Rigidez do Contato Lubrificado	N/m^n
\mathbf{K}_{lin}	Matriz de Rigidez Linearizada	
K_H	Rigidez do Contato Seco / Rigidez de Hertz	$N/m^{1.5}$
K_i	Coefficientes do Polinômio de Rigidez ($i = 1,2,3$)	
k_s	Rigidez Equivalente do Rotor Laval	N/m
K_T	Rigidez Equivalente do Contato Lubrificado entre Anéis	N/m^n
K_{xx}, K_{yy}	Coefficientes Diretos de Rigidez Linearizados	N/m
K_{xy}, K_{yx}	Coefficientes Cruzados de Rigidez Linearizados	N/m
L	Parâmetro Adimensional de Lubrificante Moes	
m	Massa do Elemento em Contato	kg
M	Parâmetro Adimensional de Carga Moes	
\mathbf{M}	Matriz de Massa do Sistema Rotativo por EF	
m_s	Massa Concentrada do Rotor Laval	kg
n	Exponente Não Linear de Rigidez no Contato	
p	Pressão	N/m^2

p_h	Pressão de Hertz	N/m^2
P	Pressão Adimensional	
P_d	Folga Diametral	m
q	Coordenadas Generalizadas do Modelo de EF	
R^2	Coefficiente de Determinação do Ajuste	
R_x	Somatória de Curvaturas	m^{-1}
R_x	Somatória de Curvaturas em x	m^{-1}
R_y	Somatória de Curvaturas em y	m^{-1}
S	Constante Geométrica do Contato	
t	Tempo	s
T	Tempo Adimensional	
u	Variável Principal do Sistema Dinâmico	
u_s	Soma de Velocidades Superficiais	m^{-1}
U^*	Parâmetro Adimensional de Velocidade	
w	Deformação Pontual	m
W^*	Parâmetro Adimensional de Carga	
x	Dimensão Através do Contato	m
X	Coordenada Adimensional Através do Contato	
y	Dimensão Transversal ao Contato	m
Y	Coordenada Adimensional Transversal ao Contato	
\tilde{x}, \tilde{y}	Coordenadas de Integração na Área de Contato	m
\tilde{X}, \tilde{Y}	Coordenadas de Integração Adimensionais	
Z	Número de Elementos no Mancal	
α	Índice Pressão-Viscosidade	m
Γ	Domínio do Contato	
δ	Deslocamento no Contato Seco	m
δ_i	Deslocamento no Contato do Anel Interno	m

δ_o	Deslocamento no Contato do Anel Externo	<i>m</i>
δ_T	Deslocamento Total entre Anéis	<i>m</i>
δ_x	Deslocamento Vertical do Anel Interno	<i>m</i>
δ_y	Deslocamento Horizontal do Anel Interno	<i>m</i>
δ_{ψ_j}	Deslocamento Total na Posição ψ_j	<i>m</i>
η	Viscosidade	<i>N.s/m²</i>
η_o	Viscosidade a Pressão Ambiente	<i>N.s/m²</i>
$\bar{\eta}$	Viscosidade Adimensional	<i>N.s/m²</i>
κ	Razão Elíptica do Contato	
$\bar{\lambda}$	Parâmetro Adimensional da Equação de Reynolds	
ν	Coefficiente de Poisson	
ρ	Densidade	<i>g/m³</i>
ρ_o	Densidade a Pressão Ambiente	<i>g/m³</i>
$\bar{\rho}$	Densidade Adimensional	<i>g/m³</i>
ψ_j	Posição Angular do Elemento <i>j</i>	<i>rad</i>
ψ_j	Posição de Referência do Porta-Elementos	<i>rad</i>
ω_e	Frequência de Excitação	<i>rad/s</i>
ω_c	Velocidade Angular do Porta-Elementos	<i>rad/s</i>
Ω_e	Frequência Adimensional de Excitação	
Ω_n	Frequência Adimensional Natural	
BPFO	Frequência de Passagem de Elemento pelo Anel Externo	
DAE	Equações Diferenciais-Algébricas	
EHD	Elastohidrodinâmica	
EF	Elementos Finitos	
RMS	Valor Quadrático Médio	
RMSD	Desvio RMS	
<i>n</i> RMSD	Desvio RMS Normalizado	
<i>cv</i> (RMSD)	Coefficiente de Variação do Desvio RMS	

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	8
3	MODELO DINÂMICO PARA O CONTATO LUBRIFICADO	18
3.1	Modelo Elastohidrodinâmico para o Contato Pontual	19
3.2	Solução Numérica para o Modelo EHD.....	23
3.3	Aproximação das Características Dinâmicas do Filme.....	27
3.4	Validação do Algoritmo Multi-Níveis	29
3.5	Formulação Geral da Rigidez Equivalente.....	37
3.6	Aproximação para o Amortecimento Linear Viscoso.....	47
3.7	Verificação do modelo Dinâmico Completo do Contato EHD.....	52
4	MODELO DINÂMICO PARA O MANCAL COMPLETO LUBRIFICADO	56
4.1	Modelo das Forças Restitutivas para um Mancal Lubrificado.....	57
4.2	Modelo das Forças Dissipativas para um Mancal Lubrificado.....	60
4.3	Modelo Dinâmico 2 GDL para um Mancal Radial Lubrificado	61
4.4	Resultados para o Modelo do Mancal Radial Lubrificado.....	62
5	ESTUDO DE CASO	70
5.1	Rotor Laval Apoiado por Mancais Radiais de Esferas Lubrificadas	70
6	ANÁLISE EXPERIMENTAL DE UM ROTOR APOIADO EM ROLAMENTOS LUBRIFICADOS	78
6.1	Montagem da Bancada de Testes	78
6.2	Procedimento Experimental	82
6.3	Modelo Computacional do Rotor	83
6.4	Resultados do Monitoramento de Órbitas.....	85
7	CONCLUSÕES.....	95
7.1	Sugestões para Futuros Trabalhos.....	98
	REFERÊNCIAS	100
	APÊNDICE A - MODELO DE CONTATO DE HERTZ	106
	APÊNDICE B - ANÁLISE EXPERIMENTAL DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO ROTOR.....	110

1 INTRODUÇÃO

Uma das principais ferramentas de um engenheiro projetista moderno são os modelos computacionais que, da maneira mais fiel possível, possam replicar o comportamento dos sistemas mecânicos antes mesmo de se produzir fisicamente algum protótipo. Nestes casos, são necessários modelos que entreguem resultados coerentes e confiáveis. Para muitas das áreas das ciências mecânicas, este conceito já está bem consolidado nas técnicas de projeto, porém, por mais precisos que sejam os modelos modernos, ainda há um grande caminho à frente antes da criação de bancada de testes completamente virtual, eximindo o projeto de uma fase de testes físicos antes de sua produção para o mercado.

Tratando-se, principalmente, de comportamentos dinâmicos de sistemas mecânicos, o desafio de reproduzir corretamente cada aspecto do conjunto cresce no âmbito da análise em questão. Muitas vezes é suficiente que o sistema seja representado apenas por alguns de seus componentes e que os resultados esperados estejam dentro de uma variação pequena, limitando-se a um comportamento linear, o que tende a ser computacionalmente menos custoso.

Entretanto, é da natureza de sistemas mais complexos possuírem comportamento não linear, uma vez que a interface entre seus vários componentes se torna um ponto chave da análise. É através destas interfaces que toda vibração e os carregamentos serão transferidos entre os subcomponentes, sendo que, comumente, estas interações se traduzem em atrito, impactos e forças de contato, fenômenos primordialmente não lineares da mecânica dos sólidos.

Mesmo para montagens que têm uma construção simples, como um eixo apoiado sobre mancais, a presença dessas interfaces não lineares aumenta a complexidade do modelo. Dinamicamente, o comportamento vibracional do eixo será delimitado não somente por sua rigidez e amortecimento estruturais, mas também pela flexibilidade dos próprios mancais. Desta

forma, é necessário caracterizar o eixo quanto ao seu comportamento dinâmico e também os mancais para os níveis de carga e rotação a que estarão sujeitos em tal aplicação.

Com o aumento gradual da abrangência destas simulações, o modelo computacional de tais interfaces se torna primordial para que as estruturas adjacentes à montagem eixo-mancais encerrem as corretas condições de contorno, enquanto sendo avaliadas quanto ao seu comportamento vibracional.

Torna-se bastante simples, então, identificar problemas aplicados de engenharia onde tais características têm grande importância. No campo da dinâmica de rotores, aplicada a grandes estruturas, como compressores centrífugos ou turbinas a vapor com rotores de massa entre centenas e milhares de quilogramas, é imperativo que estejam bem definidas as características de seus suportes, uma vez que uma falha catastrófica relacionada à vibração, nestes casos, pode ser extremamente custosa e deve ser evitada desde a fase do dimensionamento do sistema.

Sistemas de menor porte também podem sofrer por efeitos vibracionais indesejados devido ao comportamento de seus componentes, como é o caso de turbocompressores automotivos de algumas centenas de gramas. Os regimes de altas velocidades, alinhados a efeitos autoexcitantes intrínsecos a máquinas rotativas, podem tornar a operação do conjunto crítica em certas velocidades dentro dos limites de operação.

Não somente na fase de desenvolvimento destes sistemas podem ser aplicadas as ferramentas computacionais mais robustas. Uma vez que englobem uma gama maior de efeitos advindos da própria operação dos sistemas mecânicos, a utilização destes modelos para monitoramento e predição de falhas é direta.

Um caso bastante característico da utilização de modelos de dinâmica de rotores para predição de falhas ocorre para eixos engrenados. Neste caso, a própria interface de engrenamento traz ao modelo características peculiares de interação não linear devido a suas condições de

contato mecânico e lubrificação. Uma vez dispendo de um modelo confiável do sistema, seu comportamento virtual deve reproduzir a presença de uma falha virtual e, assim, ilustrar a resposta do sistema antes de a falha real produzir efeitos indesejados e muitas vezes irreparáveis.

Nestes casos, fica clara a importância de um modelo robusto para os subcomponentes da montagem dos rotores, principalmente de seus mancais, que são as ligações mecânicas entre rotor e fundação. Porém, dentro da gama existente de mancais de suporte para máquinas rotativas, ainda existem lacunas na modelagem de alguns dos mais clássicos designs, como é o caso dos mancais de elementos rolantes.

O mancal de elementos rolantes com seu design clássico, porém não trivial, tem grande aplicação em sistemas onde uma maior capacidade de carga é crucial mesmo sob baixas velocidades. Suas variadas construções internas propiciam uma ampla gama de aplicações, entretanto seus modelos computacionais ainda são muitas vezes baseados em aproximações restritivas, como a inexistência de um filme de fluido lubrificante entre suas partes móveis.

A presença de um meio lubrificante é primordial para o bom funcionamento destes componentes, que tendem a um rápido desgaste e diminuição de vida útil se operando em condição de contato metal-metal. Como relatado em Dowson e Higginson (1977), esta condição, presente também no contato entre dentes de engrenagem, foi a motivadora dos primeiros estudos do contato lubrificado entre corpos não conformes.

Muitas das falhas nestes componentes estão relacionadas exatamente aos fenômenos causados pelo aumento do cisalhamento superficial quando operando sem lubrificante. Sob tais condições, existe um aumento dos níveis de tensão subsuperficial e, conseqüentemente, o mecanismo de falha é acelerado. Tanto pela ótica do trabalho clássico de Lundberg e Palmgren (1947), baseado nas tensões de cisalhamento ortogonais que possuem uma característica alternada, ou pela aproximação mais moderna, considerando o critério de von Mises para o campo de tensões abaixo do contato e o carregamento cicloestacionário dos mancais de

elementos rolantes, como descrito em Harris (2006), o mancal de elementos rolantes possui como modo clássico de falha a fadiga de contato que se inicia a uma certa profundidade da superfície e tende a remover pequenas porções de material, criando deslocamento que pode levar a falha iminente e não reparável do mancal.

Porém, antes de atingir um estado crítico, onde o mancal tem seu funcionamento interrompido, estes componentes produzem alguns sinais que podem ser interpretados como início da fase de operação crítica. Em estágio inicial, o deslocamento é denominado *pitting*, onde apenas pequenas porções de material se desprendem gerando descontinuidades nas pistas. Quando o elemento rola sobre estas depressões é gerado um impulso. Devido, então, às características cíclicas dos rolamentos, sua resposta vibracional se altera. Portanto, conhecer a resposta dinâmica do mancal dentro do sistema se torna uma importante maneira de prevenir falhas catastróficas do sistema.

Como os pontos de contato lubrificados são parte crucial do caminho pelo qual as forças são transmitidas entre anéis interno e externo, quando caracterizando estes elementos de máquina quanto a suas características vibracionais, o correto modelamento das interfaces em contato é essencial.

A base da grande maioria dos modelos para contato existentes data do século XIX, com a contribuição de Hertz (1881), em seu trabalho sobre o contato entre corpos sólidos elásticos. Segundo Hertz, para corpos em contato deve existir uma deformação superficial dentro da zona elástica do material de forma a gerar uma área plana suficiente para distribuir a força aplicada e assim equilibrar o sistema. Esta deformação normal à área de contato deve gerar, para a macrogeometria dos corpos, uma aproximação entre os mesmos que pode ser entendida como uma relação força-deslocamento de um sistema de 1 grau de liberdade.

Em um mancal de elementos rolantes composto por Z elementos, podem haver, portanto, até $2 \times Z$ contatos entre elementos e pistas, formando um conjunto de sistemas 1 GDL. Estes

contatos se tornam os elementos de ligação entre eixo e fundação e transmitem toda vibração entre estes componentes. Desta forma, estes contatos proveem a ligação flexível ao mancal, habilitando o modelamento dinâmico do sistema completo. A Figura 1.1 mostra uma secção de um mancal de esferas, com a representação das áreas de contato para um elemento, criando assim um conjunto com 2 graus de liberdade, caracterizados pelos deslocamentos do anel interno e do elemento rolante em relação ao anel externo.

Entretanto, a presença do filme de óleo nas interfaces dos contatos deve por si só alterar o equilíbrio dinâmico do sistema, uma vez que o filme de óleo, que previne do contato metal-metal, deve também agir como um elemento de transmissão da força. A presença de tal filme de óleo só é viável a partir do surgimento de uma área de contato, como previa Hertz para o caso seco, pois devido à geometria não conforme dos corpos a sustentação puramente hidrodinâmica geraria espessuras de filme extremamente finas, não condizentes com o real acabamento superficial dos corpos.

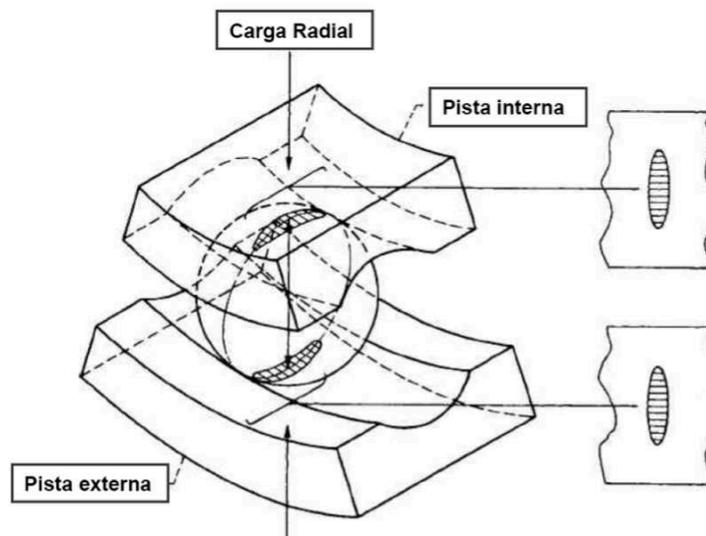


Figura 1.1 – Representação das áreas de contato para uma esfera carregada de um mancal de elementos rolantes;

Assim, incorpora-se ao sistema de contato os dois efeitos, a parcela elástica devida à deformação dos corpos e a parcela hidrodinâmica devida à presença de um escoamento entre as superfícies de contato. Tal mecanismo de lubrificação é conhecido como elastohidrodinâmico, ou EHD.

Alguns dos modelos computacionais mais atuais para mancais de elementos rolantes tentam emular o comportamento EHD através de aproximações do comportamento observado de contatos lubrificados ou ainda através de modelos implícitos que dependem da caracterização de cada contato. Porém, um modelo consolidado que descreva explicitamente o comportamento dinâmico não só do contato lubrificado, mas também de um mancal completo, ainda não está disponível.

Partindo-se, então, de uma análise transiente de cada contato lubrificado em um mancal de elementos rolantes é possível criar uma aproximação para o comportamento dinâmico destes, caracterizando-os quanto sua rigidez e amortecimento, a fim de criar os vínculos dinâmicos entre anéis e elementos, para a seção do mancal na Figura 1.2. Uma vez definido o conjunto de contatos EHD que representa o sistema do mancal, este se torna um elemento de suporte passível de transmitir vibrações e cria-se um modelo onde os efeitos do fluido lubrificante sobre a dinâmica do sistema não são mais desprezados.

Neste trabalho será apresentada uma revisão da bibliografia referente a representação de mancais de elementos rolantes por modelos de equilíbrio dinâmico, assim como as referências essenciais para o modelamento do contato EHD lubrificado no Capítulo 2. O Capítulo 3 descreve brevemente o conceito do modelo de diferenças finitas em múltiplos níveis utilizado para solução completa do contato EHD e também apresenta a formulação do contato EHD como um sistema dinâmico equivalente, possibilitando o equacionamento de um modelo para o mancal. O Capítulo 4 apresenta a construção de um modelo de mancal de elementos rolantes de esferas lubrificado e o estudo dos impactos da formulação EHD dinâmica equivalente em sua resposta. Um modelo de parâmetros concentrados para um rotor Laval é utilizado como base para um estudo de caso no

Capítulo 5, onde se busca observar os efeitos do filme lubrificante na resposta de um sistema simples. Posteriormente, o modelo de mancal lubrificado é aplicado à um sistema rotor-mancal através de um modelo de elementos finitos do eixo e é validado por uma montagem experimental, como mostrado no Capítulo 6.

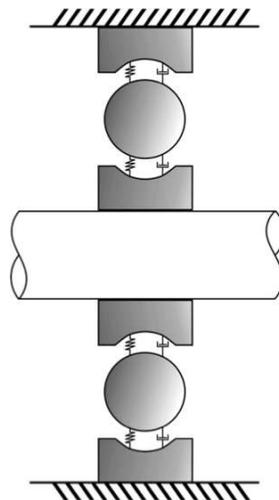


Figura 1.2 – Esquema de seção do mancal de elementos rolantes com contatos caracterizados como vínculos dinâmicos de rigidez e amortecimento;

2 REVISÃO BILIOGRÁFICA

O primeiro passo em direção a um modelo dinâmico para mancais de elementos rolantes foi dado em 1881 por Heinrich Hertz em seu clássico trabalho *Über die Berührung fester elastischer Körper*, onde define os fundamentos para a análise do contato elástico entre corpos indeformáveis. É deste trabalho que surge a mais característica forma de se aproximar um contato mecânico a um sistema dinâmico, através do clássico modelo de rigidez não linear do contato, dado pela equação 2.1:

$$f = K_H \delta^n \quad 2.1$$

Neste formato, a expressão indica que a força gerada em um contato seco entre dois sólidos não conformes deve ser proporcional à n -ésima potência do deslocamento δ , sendo $n = 3/2$ para o contato pontual. A constante de proporcionalidade K_H é denominada rigidez não linear do contato seco e será definida oportunamente. Fica bastante claro, então, que para o contato seco entre dois sólidos, o comportamento geral da força é não linear.

Uma vez de posse desta aproximação, a distribuição de carga dentro de um mancal de elementos rolantes foi descrita em Lundberg e Palmgren (1947) para algumas geometrias específicas, com o intuito de caracterizar os carregamentos cíclicos aos quais estão sujeitas as pistas e, assim, poder equacionar a capacidade de carga dinâmica do rolamento a partir das capacidades de carga de cada pista.

De maneira geral, o modelo utilizado, mesmo que simplista, traz uma primeira aproximação para a relação entre os deslocamentos radial e axial do anel interno em relação ao externo e a força restitutiva gerada pelo mancal. Tanto a distribuição de carga encontrada quanto a posição de equilíbrio do anel carregado respeitam uma condição estática de carregamento, sem qualquer efeito dinâmico dos corpos rolantes em movimento.

Tal aproximação ainda é válida e muito usada como uma primeira aproximação no cálculo de vida de um mancal, pois resulta de maneira rápida em uma distribuição interna de carregamento. Porém, para que se pudesse caracterizar realmente o mancal de elementos rolantes como um vínculo dinâmico entre o eixo e estrutura de suporte, uma análise mais criteriosa do equilíbrio interno do mancal sob um carregamento generalizado deveria ser feita. Tais considerações foram aplicadas por Jones (1960), em um trabalho que propõe um modelo geral para mancais de esferas ou rolos restritos elasticamente, sujeitos a condições arbitrárias de carga e velocidade. Para cada elemento rolante é calculado o equilíbrio dinâmico, levando em consideração efeito da resultante centrífuga e momento giroscópico, assim como as deformações elásticas dos eixos e da estrutura de suporte.

Jones (1960) também se baseia, entretanto, no modelo proposto inicialmente por Hertz para as forças de contato no cálculo das resultantes entre elementos e pistas. Desta forma, o modelo de Jones (1960) cresce em complexidade com cada hipótese assumida. Para cada elemento em um mancal de contato angular devem-se definir as deflexões no contato entre pista interna e externa, assim como os novos ângulos de contato do elemento. Desta posição de equilíbrio é possível definir as equações de equilíbrio de forças e momentos, de acordo com o carregamento aplicado. O processo se torna iterativo em relação ao equilíbrio do anel interno em relação ao externo e indica-se a utilização de um método numérico de busca tipo Newton-Raphson para obtenção da solução final.

Este novo modelo também tinha o intuito de melhor representar o carregamento interno dos mancais, em condição de aplicação, a fim de aperfeiçoar o cálculo de vida baseado no trabalho de Lundberg e Palmgren (1947). Entretanto, ainda não ficam explícitas as relações de força e deslocamento para tais mancais como vínculos dinâmicos, pois o intuito ainda estava em determinar o carregamento interno destes componentes e estimar sua vida para uma dada condição de carregamento.

No mesmo período, Shimizu e Tamura (1966, 1967), sugerem uma aproximação para as forças restitutivas de um mancal, baseando-se em um modelo não linear para os cinco graus de liberdade de um mancal de rolamento, sendo dois radiais, um axial e dois rotacionais. O sexto grau de liberdade representa a rotação do mancal em torno de seu próprio eixo e não deve ser restringido, pois define o funcionamento do componente.

O modelo de Shimizu e Tamura (1966, 1967) parte das características do contato hertziano entre elemento e pista, derivando a rigidez do mancal, dado um deslocamento do anel interno. Como indicado no trabalho, o modelo se aplica a uma condição estática dos mancais e, considerando o poder computacional da época para solução de problemas dinâmicos não lineares, muitas simplificações foram propostas a fim de poderem analisar os resultados em sistemas simples. Como também apontado por Jones (1960), o problema inverso de um mancal sob carregamento generalizado ainda se mostrava muito custoso.

Uma representação direta da rigidez de um mancal de elementos rolantes, considerando um equacionamento muito similar ao de Jones (1960), foi apresentada em uma série de trabalhos por Lim e Singh (1990a, 1990b, 1991, 1992), porém indicando explicitamente os termos de uma matriz linear de rigidez para cada grau de liberdade restrito do mancal, como indicado em Lim (1994). Desta maneira, se torna direta a utilização do modelo em sistemas mais complexos, uma vez que relaciona os deslocamentos do ponto central do anel interno, em relação ao externo, à força restitutiva provida pelos contatos entre elementos e pistas, através da matriz linear de rigidez.

A linearização do modelo de mancal de rolamentos, apesar de muito usual para outros tipos de mancais durante a análise de sistemas rotativos, falha ao representar certas características inerentes a este tipo de sistema. Devido à sua construção, mancais de elementos rolantes possuem um comportamento cicloestacionário de sua rigidez, uma vez que a cada rotação do anel interno, o grupo de elementos guiados pelo porta-elementos, ou gaiola, completa um número de rotações múltiplo da velocidade do anel interno, fazendo com que um certo número de elementos passem

pela zona carregada, gerando uma variação quasi-harmônica da capacidade dos elementos de gerar uma força restitutiva.

Os modelos mencionados previamente possuem uma dependência direta da posição dos elementos ao redor do eixo de rotação do mancal, dada pela posição angular da gaiola. Portanto, estes trabalhos devem ser entendidos como o equilíbrio dinâmico do sistema ao entorno de uma posição da gaiola e suas conseqüentes linearizações. Para que o modelo contemple a variação temporal das características dinâmicas destes mancais é necessário introduzir a cinemática do porta-elementos ao equacionamento do sistema.

Uma aproximação para os efeitos da movimentação da gaiola sobre o comportamento vibracional de mancais de elementos rolantes está presente em Harsha (2004, 2006a, 2006b). Sendo a velocidade angular da gaiola uma função da velocidade do anel interno, Harsha (2004) investiga a estabilidade de rotores apoiados em mancais de elementos rolantes de esferas, dadas algumas características de construção e variações de forma de pista, como ondulações circunferenciais. Em Harsha (2006a e 2006b) o foco está sobre as respostas não lineares dos sistemas de rotores em alta velocidade, também considerando características intrínsecas aos mancais de rolamento. Toda a modelagem de Harsha se dá por meio de equações de energia, diferentemente da mecânica newtoniana aplicada em Jones (1960) ou Lim e Singh (1990), e se limita à movimentação planar do anel interno, representando, portanto, um modelo de dois graus de liberdade para o mancal.

Estudos sobre o efeito da posição dos elementos sobre a variação temporal das características dinâmicas de mancais de elementos rolantes não eram novos. Em Fukata (1985), a equação de movimento de um mancal completo é apresentada, sendo os termos da força restitutiva do mancal apresentados como uma função da frequência de passagem das esferas, que por sua vez é uma função da velocidade do porta-elementos. Sunnersjo (1978), por outro lado, busca identificar diretamente a influência da posição dos elementos na flexibilidade do mancal. Como explicitado pelo próprio autor, o número de elementos carregados varia com a posição da

gaiola, gerando uma variação periódica na rigidez total do sistema que, por consequência, gera vibrações.

Mesmo atualmente, o estudo das variações das características dinâmicas de mancais de elementos rolantes tem sua importância. Como apresentado por A. Liew (2002), boa parte das não linearidades destes mancais advêm do contato hertziano e das folgas entre elementos e pistas, o que pode resultar em movimentos caóticos. Nesse trabalho, a modelagem de mancais de rolamentos é estendida para inclusão do efeito da resultante centrífuga e das folgas em uma abordagem não-linear de cinco graus de liberdade. Foram estudados os efeitos de pré-carga e do desbalanceamento de um sistema de rotor simples, quando apoiado por rolamentos de contato angular.

Entretanto, A. Liew(2002) deixa claro que o modelo para a rigidez do contato utilizado é o de Hertz e que os efeitos do filme EHD são representados por um amortecimento constante arbitrário sobre os graus de liberdade do mancal. H. V. Liew (2005) ampliou o trabalho de Lim e Singh (1990a) para incluir os efeitos de variação temporal da rigidez do mancal. O novo modelo estendido continua a gerar matrizes lineares de rigidez, porém cada elemento da matriz tem uma variação específica no tempo em função da posição do porta elementos. Os efeitos do modelo linear variante no tempo foram investigados sobre um rotor com engrenagens, também com a presença de um amortecimento arbitrário.

Estes modelos para mancais de elementos rolantes são usualmente empregados na modelagem de falhas em sistemas rotativos. Sawalhi (2008) aplica uma aproximação similar a de A. Liew (2002) em simulações no domínio do tempo de rotores engrenados, entretanto Sawalhi (2008) inclui ao modelo clássico de falhas por fadiga de contato os efeitos cicloestacionários do mancal. Para tanto, foi necessário incluir um grau de incerteza na posição angular dos elementos rolantes, limitado pela folga existente entre estes e as paredes das janelas do porta-elementos. Os efeitos do lubrificante foram também incluídos nesse modelo através de um coeficiente de

amortecimento arbitrário e também inclui-se uma pré-carga no mancal para representar o comportamento de enrijecimento do filme de óleo.

Apesar de grande ser o número de modelos dinâmicos propostos para mancais de elementos rolantes, todos possuem como característica comum a necessidade de se representar o contato entre elementos e pistas como um vínculo dinâmico. Entretanto os esforços para a correta inclusão dos efeitos do filme de lubrificante ainda estão longe de serem finalizados e usualmente o modelo de contato não lubrificado de Hertz é utilizado. Modelos para o comportamento dinâmico do contato EHD estão disponíveis desde a metade do século XX, porém devido à complexidade atrelada à simulação completa do filme, como demonstrado em Nonato (2009), a aplicação direta destes a modelos completos de mancais de elementos rolantes apresenta um alto grau de complexidade.

A contribuição primordial para fundamentação dos modelos para contato EHD modernos mais usuais foi dada por Hamrock (1976) em seu trabalho sobre lubrificação elastohidrodinâmica para contatos pontuais. Neste trabalho, fica claro que a estruturação dos métodos para solução de cada caso de contato deve passar pela solução simultânea da equação de Reynolds para o filme de óleo entre as superfícies de contato através do método das diferenças finitas e da integral de deformação elástica no contato, mostrando-se uma tarefa computacional intensa.

Em meados da década de 1980 novos métodos computacionais surgiram para diminuir o custo computacional do problema. Lubrecht *et al* (1986) aplica o método de multi-níveis para a solução da equação de Reynolds, tornando-se a base do modelo de Venner (1991), descrito em Venner e Lubrecht (2000), que incorpora um método específico para integração da equação da deformação elástica em multi-níveis, o esquema *Multi-Level-Multi-Integration* ou MLMI.

Estas duas contribuições foram de suma importância para o posterior desenvolvimento de algoritmos para análise de contatos EHD transientes. A introdução de múltiplos níveis de malha para solução das diferenças finitas propiciou um aumento da taxa de convergência do algoritmo,

uma vez que problemas solucionáveis apenas em malhas extremamente finas puderam ser tratados por partes, sendo que a redução de erros em certas faixas de frequência ocorrem em uma malha de tamanho correspondente. Da mesma forma, o MLMI trata a integral dupla da deformação apenas nas malhas menos discretizadas, interpolando seus resultados para malhas mais refinadas, o que reduz muito o tempo de integração, como investigado em Nonato (2009).

Com estas premissas, torna-se viável a avaliação de casos dinâmicos de contatos. Venner (1994) mostra o efeito de distúrbios geométricos no filme de óleo, garantindo a modelagem de descontinuidades geométricas ou inclusões em mancais de elementos rolantes. Em (Venner, 1996) os efeitos de superfícies com ondulações são investigados, sendo o passo primordial para o entendimento de superfícies estruturadas ou com padrões aleatórios que representem a rugosidade dos componentes. Assim, grande parte dos esforços na simulação do contato EHD dinâmico se deu para avaliar a parcela tribológica do problema.

Usando também como base o modelo proposto por Venner (1991), Wijnant (1998) apresenta uma implementação completa do equacionamento dinâmico EHD, tanto para análises transientes quanto para excitações harmônicas, propiciando um aumento da abrangência nas análises computacionais de contatos lubrificados. Os efeitos da dinâmica normal ao contato são quantificados, neste trabalho, quanto à influência sobre a espessura de filme e, principalmente, sobre o comportamento da aproximação entre corpos. Em contraste com o trabalho de Sarangi (2004), onde a rigidez do filme de óleo é definida pela derivada da força no contato em relação à espessura central de filme, Wijnant (1998) sugere que a variável de aproximação entre os corpos é mais representativa quanto à dinâmica do contato do que a espessura central do filme.

Como a aproximação entre os corpos é uma grandeza escalar do contato e é constante para todo o domínio investigado, seu comportamento temporal pode ser aproximado por uma expressão em função da variação temporal da força de contato. Desta forma, Wijnant (1998) introduz a primeira aproximação do contato lubrificado por um vínculo dinâmico de rigidez e amortecimento. Em Wijnat e Wensing (1999), este modelo é expandido para introdução em um

mancal completo. Apesar da aproximação linear para o amortecimento ser diretamente aplicável ao modelo de contato, a expressão de deslocamento em função da força obtida por Wijnant (1998) tem caráter implícito e necessita de um método de busca de raízes para que se avalie a força gerada no contato devido ao deslocamento dos elementos. A linearização da expressão, no entanto, pode gerar uma aproximação mais direta para pequenas variações ao entorno do equilíbrio.

Em (Goodyer, 2001) são propostas algumas melhorias para estratégia de solução do algoritmo transiente. Como principal contribuição, foi apresentado um método para controle do passo de tempo do integrador, podendo assim o integrador trabalhar com passo variável ao invés de passo fixo como proposto por Wijnant (1998). Alguns casos especiais para superfícies estruturadas foram apresentados por Goodyer (2001), assim como o caso para reversão de velocidade, diretamente aplicável a componentes em movimento oscilatório. Entretanto o foco de Goodyer (2001) estava em prover um algoritmo mais robusto para solução do problema e não diretamente caracterizar a dinâmica do filme.

Baseado no modelo apresentado em (Wijnant, 1998), Nonato e Cavalca (2010a) propõem uma formulação não linear explícita para relação força deslocamento do contato EHD pontual, possibilitando uma tratativa mais direta do problema dinâmico do contato. Neste trabalho, uma formulação polinomial cúbica para a rigidez no contato e o já proposto modelo de amortecimento viscoso para o filme são utilizados para validar a resposta dos contatos pontuais, mostrando-se eficazes para descrever seu comportamento. Desta maneira, o modelo proposto se adéqua à tratativa dinâmica do mancal, uma vez que o cálculo da força de reação em cada esfera se torna direto dado o deslocamento.

O estudo da hipótese de rigidez linear do contato lubrificado também foi investigado por Nonato e Cavalca (2012a). O estudo indica que no entorno da posição de equilíbrio, o contato EHD pontual possui uma região claramente linear de comportamento, entretanto sua formulação leva à utilização de uma constante de força gerada pelo contato, que representa um deslocamento

da curva de força da origem. Conclui-se, portanto, que o modelo é claramente não linear em um referencial global, ou seja, para uma variação grande do equilíbrio.

Outras aproximações para a dinâmica do filme também foram propostas, como em Wiegert (2013), onde o comportamento do filme EHD é tratado em partes. Com o intuito de prover um modelo simples para força no contato, Wiegert (2013) propõe que este seja interpretado como uma combinação em série de um elemento de rigidez hidrodinâmico e um elemento de rigidez estrutural, governado pelo comportamento do contato hertziano. Desta maneira, a aproximação entre os corpos é a somatória de uma deflexão do contato seco e da espessura de filme hidrodinâmica. Esta aproximação se mostrou suficiente somente para o caso de contato linear fora da denominada zona de transição, ou seja, onde o comportamento do filme é dominado predominantemente pelo contato seco ou pela lubrificação hidrodinâmica.

Wang (2013) propõe uma aproximação linear ao contato, também baseada na resposta dinâmica do contato EHD completo, assim como Nonato e Cavalca (2012a). Entretanto, o ajuste dos parâmetros dinâmicos do filme se dá partindo da comparação da resposta simulada ao comportamento de um oscilador simples de 1 grau de liberdade. A priori, os resultados de rigidez são condizentes com os apresentados por Wijnant (1998). Porém, o amortecimento obtido pelo método do decaimento logarítmico, como apresentado por Wang (2013), é prejudicado pelo comportamento não linear do filme, obrigando-o a aproximar o decaimento pela média dos decaimentos para certo período de sua resposta transiente. Assim, os resultados de amortecimento apresentados não são contínuos e divergem muito dos obtidos por Wijnant(1998) e por Nonato e Cavalca (2012b).

Fica claro, portanto, que uma forma final para representação da dinâmica de contatos elastohidrodinâmicos através de um modelo matemático ainda não está definida. Os modelos até hoje propostos são uma simplificação do real comportamento não linear, ou muitas vezes focam-se a um âmbito restrito de simulação numérica, sendo especializados para análise do contato em

si e não para aplicação em sistemas mecânicos mais complexos, que contenham tais contatos, como o caso do mancal de elementos rolantes.

Este trabalho tem como objetivo propor um método para inclusão dos efeitos do filme EHD em um modelo de mancal de elementos rolantes de esferas, baseado na aproximação dinâmica das características do contato lubrificado por vínculos não lineares de rigidez e amortecimento viscoso. Propõe-se construir um modelo completo de mancal lubrificado, aplicado a um sistema de rotor simples, a fim de validar o modelo proposto de contato através da observação experimental do comportamento do rotor em bancada, quando apoiado por mancais radiais de esferas.

Para tanto, inicia-se o estudo com a caracterização dinâmica de um único contato EHD elíptico, de forma a prover um modelo aproximado para a dinâmica vertical do contato, diminuindo assim o custo computacional da avaliação completa do filme EHD para obtenção de sua resposta vibracional. Posteriormente, utiliza-se tal aproximação do contato para criar um modelo de dois graus de liberdade de um mancal radial de esferas, incluindo, desta forma, a dinâmica vertical do filme EHD no equilíbrio do mancal, como delineado nos próximos capítulos.

3 MODELO DINÂMICO PARA O CONTATO LUBRIFICADO

A investigação do comportamento dinâmico normal ao contato lubrificado nem sempre foi o foco das atenções dos tribologistas durante o estudo da resposta temporal de filmes EHD. Grande parte dos esforços foi direcionada para simulação da interação entre descontinuidades nas superfícies de contato e o filme de lubrificante ou problemas de velocidades de escoamento variantes, como no caso de reversão de movimento. Tais tópicos foram extensamente investigados e estão documentados em Goodyer (2001).

Entretanto, para que seja analisado o comportamento de um contato lubrificado quanto às suas características vibracionais, é necessário alternar o foco local do problema, normalmente voltado a análises das variações de pressão e espessura de filme devidas a fatores externos, e buscar a melhor representação da resposta vibracional dos corpos em contato. Desta maneira, apesar do foco do modelo dinâmico não se alterar, deve-se quantificar o deslocamento entre os corpos em contato.

O primeiro passo em direção a caracterizar dinamicamente um contato EHD é definir um modelo para filme elastohidrodinâmico no contato, contemplando efeitos transientes e harmônicos, a fim de obter como resultado a variação temporal dos parâmetros do contato. Neste trabalho, a implementação do método Multi-Níveis para solução de diferenças finitas feita em Nonato (2009) será utilizada. Baseado na metodologia para análise dinâmica de filmes EHD apresentada em Wijnant (1998), o modelo será brevemente apresentado e discutido nas próximas seções.

3.1 Modelo Elastohidrodinâmico para o Contato Pontual

Como descrito em Nonato (2009), a principal proposta do modelo de lubrificação Elastohidrodinâmico é incorporar as deformações elásticas dos corpos não conformes ao equacionamento do filme hidrodinâmico de lubrificante criado na interface do contato. Desta maneira, torna-se imperativa, a solução da integral de deformação, levando em conta as hipóteses básicas do modelo hertziano: as deformações se mantêm dentro do limite elástico do material e as dimensões da área de contato gerada devem ser muito menores que as dimensões dos corpos, possibilitando a aproximação da geometria do problema por dois corpos semi-infinitos.

Usando como base estas hipóteses, a deformação de cada ponto dentro de um domínio de contato Γ , representado esquematicamente na Figura 3.1, é dada pela integral na equação 3.1, descrita em (Wijnant, 1998):

$$w(x, y) = \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Gamma} \frac{p(\tilde{x}, \tilde{y}, t)}{\sqrt{(y-\tilde{y})^2 + (x-\tilde{x})^2}} d\tilde{x}d\tilde{y} \quad 3.1$$

Sendo $p(x, y)$ a pressão gerada no contato e E' o módulo de elasticidade reduzido, descrito para o contato Hertziano. O modelo de Hertz para o contato pontual está descrito no Apêndice A. Adiciona-se à equação 3.1 a parcela geométrica do problema, de forma a resultar em uma expressão para o campo de espessuras no contato. Neste caso, a mesma aproximação para a geometria dos corpos não conformes utilizada no modelo de Hertz é empregada. Conhecendo, então, as curvaturas dos corpos, R_x e R_y , o sistema é aproximado pelo contato de um elipsoide contra um plano, resultando na expressão da equação 3.2.

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Gamma} \frac{p(\tilde{x}, \tilde{y}, t)}{\sqrt{(y-\tilde{y})^2 + (x-\tilde{x})^2}} d\tilde{x}d\tilde{y} \quad 3.2$$

O termo $h_0(t)$, sendo constante por todo o domínio, representa o deslocamento de corpo rígido do elipsoide contra o plano definido pelas coordenadas (x, y) . Apesar de alguns modelos utilizarem o valor de espessura central do filme de lubrificante, $h_c = h_{(x=0,y=0)}$, como variável principal do equacionamento dinâmico do contato, fica bastante claro que o valor de $h_0(t)$ é muito mais representativo do deslocamento de um corpo contra outro, pois descreve exatamente quanto um ponto não deformado de um dos corpos se aproxima ou distancia de um ponto também não deformado do segundo corpo, na direção z normal a área de contato.

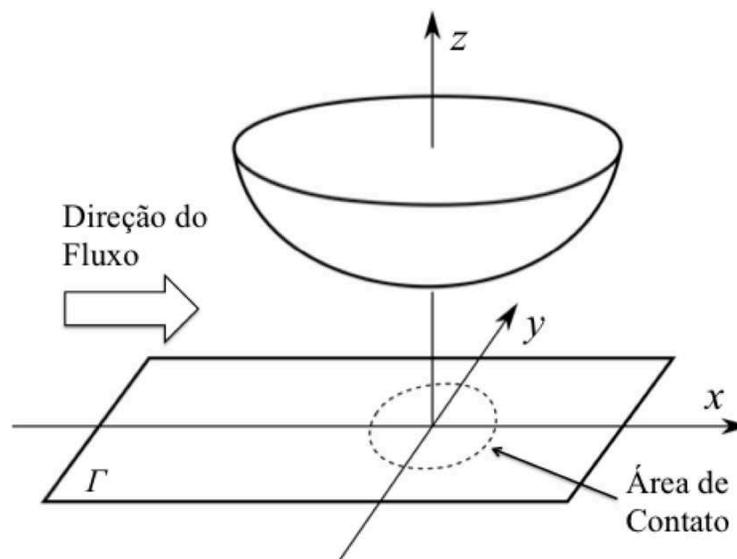


Figura 3.1 –Representação das coordenadas locais no contato (x, y, z) e domínio Γ analisado;

Uma vez definido o efeito da deformação elástica sobre a espessura do filme de lubrificante pela equação 3.2, é necessário definir o efeito do fluxo de lubrificante pelo contato. Assim como para o equacionamento de filmes hidrodinâmicos, lança-se mão da equação de Reynolds para modelar o escoamento de fluidos entre as superfícies. Uma vez que as condições impostas ao contato garantem que as hipóteses usadas para a derivação da equação de Reynolds sejam verdadeiras, sua aplicação a este tipo de contato pode ser feita diretamente (Nonato, 2009). Portanto, para o escoamento unidirecional de um filme fino sem efeitos de escorregamento a equação de Reynolds pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = u_s \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \quad 3.3$$

Para o domínio escolhido a direção x alinha-se com a direção da velocidade do fluxo, indicada pela direção da soma das velocidades superficiais, u_s , e y é ortogonal ao fluxo. O campo de espessura do filme $h(x, y)$ alinha-se com a direção z através do filme, porém uma vez que seus valores são muito menores que as dimensões do contato, considera-se que não deve haver variação das propriedades do filme nesta direção. Assim, tanto o campo de viscosidade $\eta(x, y)$ quanto de densidade $\rho(x, y)$ do fluido podem ser definidos como uma função do campo de pressão no contato $p(x, y)$.

No caso do contato entre corpos de geometria não conforme, devido às altas pressões geradas, as clássicas hipóteses do equacionamento hidrodinâmico para fluido isoviscoso e incompressível não são válidas. Assim, para que o comportamento piezo-viscoso e compressível do fluido seja levado em consideração, a relação de Roelands entre viscosidade e pressão, como descrita em Larson (2000), e a relação de Dowson e Higginson (1977) para o aumento da densidade devido à pressão são utilizadas (Nonato, 2009).

Uma vez definido o modelo para o filme de lubrificante, o equilíbrio do contato deve ser garantido através o balanço de forças na interface. Desta forma, a carga aplicada deve ser igual à integral da pressão no fluido dentro do domínio Γ , como indicado pela equação 3.4. O domínio Γ deve ser escolhido de forma a garantir que as condições de contorno definidas em suas fronteiras não interfiram nos resultados dentro malha analisada. Comumente, as fronteiras do domínio são escolhidas como aproximadamente duas vezes o tamanho do semieixo da elipse de contato na direção transversal e até quatro vezes na direção longitudinal, como indicado em Nonato (2009). Solucionando simultaneamente estas equações no passo inicial, isto é, para $t = 0$, obtém-se o equilíbrio estático do contato.

$$f_0 = \iint_{\Gamma} p(x, y) dx dy \quad 3.4$$

O resultado do equilíbrio estático é, então, utilizado como condição inicial para a solução do equacionamento dinâmico do contato EHD. Para tanto, define-se uma equação de movimento do sistema, considerando a massa suspensa de um dos corpos em contato, normalmente o elemento rolante no caso de mancais de rolamentos, e um carregamento variante no tempo, comumente considerado harmônico, tendo sua amplitude aproximada pela variação de carga dentro do mancal e a frequência definida pela passagem do elemento pela zona de carga. A equação 3.5 representa a forma completa da equação de movimento para o sistema do contato EHD como descrito em Nonato (2009).

$$m \frac{d^2 h_0}{dt^2} + \iint_{\Gamma} p(x, y, t) dx dy = f_0 + a_f \sin(\omega_e t) \quad 3.5$$

Fica claro que o modelo transiente proposto por Wijnant (1998) para o contato EHD representa um sistema de 1 grau de liberdade, onde os elementos de força restitutiva e dissipativa são equacionados pela força gerada no filme de lubrificante, indicada na equação 3.5 pela integral da pressão no domínio analisado. Uma representação esquemática do sistema é mostrada na Figura 3.2.

Com a integração no tempo da equação 3.5, a variação temporal da aproximação entre os corpos h_0 é obtida. O valor de h_0 representa exatamente o grau de liberdade do elemento no sistema da Figura 3.2 e equivale ao deslocamento δ no contato seco para modelos que aproximam a força restitutiva pelo modelo clássico de Hertz.

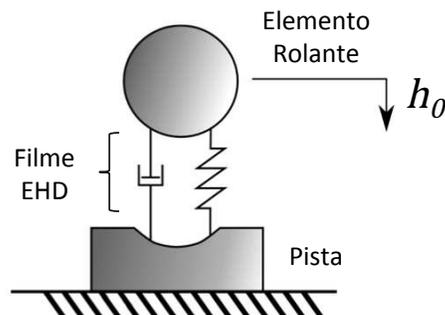


Figura 3.2 – Representação esquemática do sistema 1 grau de liberdade do contato elemento pista.

3.2 Solução Numérica para o Modelo EHD

O modelo como apresentado na Seção 3.1 não possui uma tratativa direta ou um solução fechada, demandando assim uma aproximação numérica para obtenção dos resultados do sistema de equações. Assim como apresentado em (Nonato, 2009), para simplificar a formulação do contato EHD, o equacionamento pode ser adimensionalizado, reduzindo o número de parâmetros independentes que descrevem o problema.

Assim como em (Wijnant, 1998), oito parâmetros são utilizados para a caracterização do problema EHD. Estes parâmetros estão listados na Tabela 3.1. Desta forma, tanto a viscosidade quanto a densidade do fluido são diretamente adimensionalizadas pelos respectivos valores à pressão ambiente. A espessura de filme h é adimensionalizada pela aproximação entre os corpos para o caso de contato seco, que é uma função dos parâmetros da Tabela 3.1, assim como a pressão máxima no contato seco, ou pressão de Hertz, p_h , que adimensionaliza a pressão do filme lubrificante p .

As coordenadas que definem as direções no domínio do contato são adimensionalizadas pelo comprimento dos semi-eixos da elipse de contato, que se sobrepõe aos eixos de coordenadas do domínio. Para o contato elíptico no mancal de elementos rolantes radial, o semi-eixo menor, a , alinha-se com a direção de translação circunferencial, x , do elemento e, conseqüentemente, o semi-eixo maior, b , se alinha com a direção ortogonal, y . Desta maneira, as variáveis em sua forma adimensional se tornam:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho_0} & H &= \frac{h}{\delta} & X &= \frac{x}{a} \\ \bar{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0} & P &= \frac{p}{p_h} & Y &= \frac{y}{b} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tabela 3.1 – Parâmetros de caracterização do contato EHD. (Nonato, 2009)

Parâmetros	
u_s	Soma de velocidades superficiais
ρ_0	Densidade a pressão ambiente
η_0	Viscosidade a pressão ambiente
α	Índice pressão-viscosidade.
R_x	Razão de curvatura longitudinal
R_y	Razão de curvatura transversal
E'	Módulo de elasticidade reduzido
f_0	Carga aplicada

Substituindo os parâmetros adimensionais no equacionamento da Seção 3.1, obtém-se a seguinte expressão para a espessura adimensional de filme:

$$H(X, Y, T) = H_0(T) + SX^2 + (1 - S)Y^2 + \frac{1}{\mathcal{K}\pi} \iint_{\Gamma} \frac{P(\tilde{X}, \tilde{Y}, T)}{\sqrt{(Y-\tilde{Y})^2 + \kappa^2(X-\tilde{X})^2}} d\tilde{X}d\tilde{Y} \quad 3.7$$

A variável de tempo adimensional $T = tu_s/(2a)$, equivale ao período de passagem de uma partícula de lubrificante pelo comprimento total da área de contato. A constante geométrica $S = (\mathcal{E} - \kappa^2\mathcal{K})/(\mathcal{K} - \kappa^2\mathcal{K})$ é uma função da razão de elíptica do contato, κ , e das integrais elípticas de primeira e segunda ordem, \mathcal{K} e \mathcal{E} , como definido para o contato de Hertz no Apêndice A.

O termo $H_0(T)$ está definido como a aproximação entre os corpos, portanto, como indicado na Figura 3.2, o deslocamento do elemento suspenso no contato é positivo na direção do outro corpo, neste caso a pista. No domínio adimensional, esta escolha de referência facilita a interpretação dos valores assumidos pela variável. Quando $H_0 = 0$ os corpos estão tangentes um ao outro caso não exista deformação no contato; para $H_0 = 1$ o valor da aproximação dos corpos

na condição lubrificada é igual à aproximação para o contato no caso seco e para $0 < H_0 < 1$, o elemento se encontra elevado da posição de contato seco.

A equação de Reynolds no domínio adimensional torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \bar{\lambda}} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\bar{\rho} H^3}{\bar{\eta} \bar{\lambda}} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial X} - \frac{\partial(\bar{\rho} H)}{\partial T} = 0, \quad 3.8$$

onde:

$$\bar{\lambda} = \frac{6u_s \eta_0 (2R)^2}{a^3 p_h} \left(\frac{\varepsilon}{\mathcal{K}} \right)^2 \quad 3.9$$

é um grupo adimensional invariante para cada caso do contato.

Entretanto, para definir cada problema de contato EHD dois novos grupos adimensionais são introduzidos, o parâmetro de carga M e o parâmetro de lubrificante L , baseados no trabalho de Moes (1992) para definir o menor número de parâmetros independentes. Estes parâmetros estão listados na equação 3.10, que juntamente com a razão elíptica do contato definem um contato lubrificado. A partir destes é possível obter o parâmetro $\bar{\lambda}$ e os parâmetros para o equacionamento das propriedades reológicas do filme no domínio adimensional, como indicado em (Nonato, 2009).

$$M = \frac{f_0}{E' R_x^2} \left(\frac{\eta_0 u_s}{E' R_x} \right)^{-\frac{3}{4}} \quad 3.10.a$$

$$L = \alpha E' \left(\frac{\eta_0 u_s}{E' R_x} \right)^{\frac{1}{4}} \quad 3.10.b$$

Como apresentado em (Venner e Lubrecht, 2000), a variação dos parâmetros adimensionais de Moes (1998) representa diferentes regimes do contato EHD. O aumento do valor de M para um dado contato, partindo de algumas dezenas para alguns milhares, representa

uma transição de um regime predominantemente rígido para um regime elástico. Já o parâmetro L representa a condição de fluxo isoviscozo quando assume o valor zero. Para valores altos de L o fluxo é predominantemente piezo-viscoso. Venner e Lubrecht (2000) indicam valores altos do parâmetro de carga para $M > 500$, enquanto que valores de $L > 20$ são considerados extremos e podem levar a instabilidade numérica.

Uma vez de posse do equacionamento completo definido no domínio adimensional, o método de diferenças finitas em multi-níveis é aplicado para obtenção dos campos de pressão e espessuras no contato, como inicialmente aplicado por Venner e Lubrecht (2000). Devido à extensão da derivação completa do modelo EHD em multi-níveis, a reprodução do mesmo não será feita neste trabalho, porém pode ser encontrada nos Capítulos 3 e 4 de (Nonato, 2009). O algoritmo descrito em (Nonato, 2009) aplica as condições de contorno $P = 0$ para as bordas do domínio Γ e a condição de cavitação $P \geq 0$ para todo o domínio. A condição inicial para o processo iterativo de relaxação do modelo de diferenças finitas utiliza os valores da pressão para o caso de contato seco equivalente e o resultado da espessura adimensional obtido pela equação 3.7, com $|H_0| < 1$ como dado de entrada.

A integração da equação de movimento no domínio adimensional é feita utilizando um integrador tipo Newmark- β , sendo que a variável principal do problema, $H_0(T)$, é utilizada para garantir o equilíbrio dinâmico do filme de lubrificante em cada passo da integração. Durante o passo seu valor é atualizado pela diferença entre a força aplicada e a gerada no filme de lubrificante, utilizando o processo direto de relaxação descrito por Nonato (2009). Desta maneira, é possível obter o comportamento vibracional do contato EHD no tempo.

3.3 Aproximação das Características Dinâmicas do Filme

Como inicialmente proposto por Wijnant (1998), a resposta harmônica de um contato EHD pode ser aproximada por um conjunto mola-amortecedor e, para isso, uma relação entre força, deslocamento e velocidade do contato EHD deve ser definida. Até recentemente este trabalho era o mais criterioso quanto à caracterização dinâmica de um contato EHD, disponível na literatura. Entretanto, o modelo proposto por Wijnant (1998) tem uma natureza implícita para a força restitutiva no contato, sendo que a aproximação entre os corpos foi proposta como uma função não linear dos parâmetros adimensionais de carga e lubrificante, o que pode tornar a tratativa do problema menos trivial.

Wijnant (1998) faz um ajuste dos valores de aproximação entre os corpos obtidos para vários casos de equilíbrio estático a uma função potência de M e L , como mostrado nas equações 3.11. Estas expressões são válidas para o caso de contatos circulares, ou $\kappa = 1$. Para o caso de contatos elípticos presentes em mancais de elementos rolantes de esferas, as expressões devem ser atualizadas como indicado em (Wijnant, 1998).

$$H_0 = 1 - q(L)M^{p(L)} \quad 3.11.a$$

$$q(L) = ((4 - 0,2L)^7 + (3,5 - 0,1L)^7)^{1/7} \quad 3.11.b$$

$$p(L) = -(0,6 + 0,6(L + 3)^{-1/2}) \quad 3.11.c$$

Como M é uma função da carga aplicada ao contato, torna-se consideravelmente simples resolver o problema explícito da obtenção do deslocamento no contato para um dado carregamento. Entretanto, sendo necessário obter a força para um dado deslocamento no contato, o problema se torna implícito e demanda uma onerosa manipulação numérica. Wijnant (1998) propõe que a linearização do equacionamento resulta em uma tratativa mais simples do problema, sendo necessária apenas a diferenciação da expressão 3.11.a em função da aproximação adimensional entre os corpos.

A linearização direta do problema deve ser vista com cautela quando o intuito é a utilização do modelo em sistemas mais complexos. Estudos feitos por Nonato e Cavalca (2010a) e Nonato e Cavalca (2012a) mostram que a região de validade do modelo linear é muito limitada e pode ser insuficiente para representar a variação de carga entre os contatos, comumente encontrada em um mancal de elementos rolantes, caso o intuito seja representar tais contatos.

Para a obtenção de um amortecimento equivalente para o filme de lubrificante no contato Wijnant (1998) utiliza um método de certa complexidade, uma vez que não foi obtida uma relação explícita para a rigidez. Baseado no fato de que para um sistema mecânico com amortecimento viscoso, um gráfico da força por deslocamento do sistema gera um laço histerético devido à dissipação de energia, Wijnant (1998) avalia o amortecimento no contato observando a área contida no laço.

Apesar de esta metodologia ser bem conhecida, sua aplicação é um pouco mais complexa do que o ajuste de formulações explícitas de rigidez e amortecimento, uma vez que o método depende da manipulação do gráfico de força por deslocamento para obter a área e assim avaliar o amortecimento que é proporcional a esta área. Ainda, para o caso de sistema com baixa dissipação de energia, ou seja, baixo coeficiente de amortecimento ou baixas velocidades, a área observada se torna muito pequena e a aproximação do valor da constante de amortecimento equivalente é comprometida.

Entretanto, como demonstrado em Nonato e Cavalca (2010a), as características dinâmicas de rigidez e amortecimento de um contato, sob a influência de um filme EHD, podem ser representadas por um conjunto de amortecedor linear e uma mola não linear polinomial cúbica, como descrito na equação 3.12:

$$f_d(T) = K_3 u^3 + K_2 u^2 + K_1 u + C \dot{u} \quad 3.12$$

Neste caso, a variável $u = H_0$ para simplificar a notação. As constantes $K_{i=1,2,3}$ são os coeficientes do polinômio de rigidez e não contêm um significado físico direto e C é a constante de amortecimento viscoso. Como descrito em Nonato (2009), para obtenção destes valores, deve-se resolver o modelo temporal do contato EHD e, posteriormente, ajustar os coeficientes através de um método como o dos mínimos quadrados. O procedimento de ajuste correlaciona os resultados de posição e velocidade no tempo, simulados para o contato EHD, u e \dot{u} , à integral da pressão gerada no filme de lubrificante no domínio do contato Γ , para cada passo de tempo T . Assim o valor da força de contato dinâmica é obtido através da equação 3.13, para o domínio adimensional.

$$f_d(T) = \iint_{\Gamma} P(X, Y, T) dXdY \quad 3.13$$

Da perspectiva de simulação de um sistema complexo, contendo o modelo aproximado do contato EHD como proposto por Nonato e Cavalca (2010a), a formulação explícita apresentada na equação 3.12 propicia uma montagem direta da equação de movimento, considerando o grau de liberdade do contato, e sua solução tende a ser mais simples. Esta formulação explícita, portanto, possui algumas vantagens quando comparada ao modelo previamente proposto. É importante notar que a equação 3.12 é inteiramente avaliada no domínio adimensional e descreve o comportamento não linear do contato analisado, desta forma a generalidade do modelo é mantida, podendo os coeficientes ser aplicados a qualquer contato com parâmetros adimensionais de carga e lubrificante similares.

3.4 Validação do Algoritmo Multi-Níveis

Como a aproximação das características dinâmicas do contato EHD baseia-se nos resultados simulados, utilizando um modelo computacional baseado em um algoritmo Multi-Níveis, é necessário, primeiramente, garantir a validade destes resultados. Uma maneira direta de

se verificar e validar tal modelo é compará-lo aos resultados de implementações e experimentos presentes na bibliografia, como proposto em Nonato (2010b).

As primeiras investigações do contato EHD pontual, utilizando o método das diferenças finitas para solução da equação de Reynolds, foram apresentadas por Hamrock (1976), estabelecendo uma base para desenvolvimentos posteriores como os de Venner (1991) e Wijnant (1998). Desta maneira, a comparação direta entre os resultados destes modelos e os obtidos pelo modelo implementado por Nonato (2009) deve indicar quão representativas são as análises executadas por este algoritmo, em relação aos modelos disponíveis para análise de contatos EHD.

Os resultados disponíveis em Hamrock (1976) são descritos para grupos adimensionais diferentes dos aqui apresentados. Utilizam-se três parâmetros, como também propostos em Dowson e Higginson (1977), para carga, velocidade e material, denominados W^* , U^* e G^* respectivamente. A relação destes parâmetros com os parâmetros de Moes (1992) pode ser escrita como nas equações 3.14.

$$M = W^*(2U^*)^{-\frac{3}{4}} \quad 3.14.a$$

$$L = G^*(2U^*)^{\frac{1}{4}} \quad 3.14.b$$

Para casos de contatos elípticos, valores de espessura central e de espessura mínima de filme, obtidos por Hamrock (1976), foram também reproduzidos por Chittenden (1985), sendo o caso geral de contato com $W^* = 0,1106 \times 10^{-6}$, $U^* = 0,168 \times 10^{-11}$ e $G^* = 4522$. Os efeitos da razão elíptica do contato foram observados para quatro valores discretos, representando um contato puramente circular até um contato elíptico de largura oito vezes maior que o comprimento, assim como listados na Tabela 3.2.

Os valores de espessuras obtidos por Hamrock (1976) e Chittenden (1985), H_{min}^* , estão reproduzidos na Tabela 3.2, assim como os valores obtidos pelo modelo Multi-Níveis, proposto em (Nonato, 2009), sendo a maior variação obtida da ordem de 2,0 %.

Tabela 3.2 – Comparação dos valores de espessura mínima de filme encontrados por Hamrock (1976), para o contato $W^* = 0,1106 \times 10^{-6}$, $U^* = 0,168 \times 10^{-11}$ e $G^* = 4522$;

Razão Elíptica	H_{min}	H_{min}^*	$ (H_{min} - H_{min}^*)/H_{min}^* $
$\kappa = 1,000$	0,217	0,212	2,13 %
$\kappa = 0,500$	0,335	0,331	1,15 %
$\kappa = 0,333$	0,386	0,384	0,41 %
$\kappa = 0,125$	0,441	0,444	0,90 %

A mesma comparação pode ser feita para as espessuras centrais do filme de óleo. A Tabela 3.3 lista a comparação das espessuras encontradas. Neste caso, a variação foi maior, atingindo 15,0 %, entretanto a mesma influência da variação do razão elíptica foi encontrada. Como o valor da espessura central do filme lubrificante é dependente da viscosidade em altas pressões geradas no centro do contato, os valores obtidos podem variar. A malha utilizada por Hamrock (1976) possui apenas 67 por 16 nós para representar o contato, enquanto que no modelo Multi-Níveis, a malha mais fina possui 513 por 513 pontos, de forma a aumentar a precisão.

No entanto, na simulação dinâmica do contato EHD a variável principal do sistema é a aproximação entre os corpos, H_0 , sendo assim, deve-se buscar maior precisão em sua representação. Sendo o modelo de Wijnant (1998) a referência base para o desenvolvimento do algoritmo de Nonato (2009), é possível comparar diretamente os resultados da aproximação entre os corpos por ambos os algoritmos.

Neste caso, utiliza-se a expressão da equação 3.11 para obtenção das linhas do gráfico da Figura 3.3, para a variação do parâmetro de carga de $M = 2$ até 1000 e para os valores discretos do parâmetro de lubrificante $L = 0, 15$ e 20. O gráfico também apresenta valores discretos de aproximação entre os corpos obtidos utilizando o algoritmo de Nonato (2009).

Tabela 3.3 – Comparação dos valores de espessura central de filme encontrados por Hamrock (1976), para o contato $W^* = 0,1106 \times 10^{-6}$, $U^* = 0,168 \times 10^{-11}$ e $G^* = 4522$;

Razão Elíptica	H_c	H_c^*	$ (H_c - H_c^*)/H_c^* $
$\kappa = 1,000$	0,366	0,432	15,30 %
$\kappa = 0,500$	0,447	0,466	4,14 %
$\kappa = 0,333$	0,484	0,494	2,01 %
$\kappa = 0,125$	0,528	0,547	3,40%

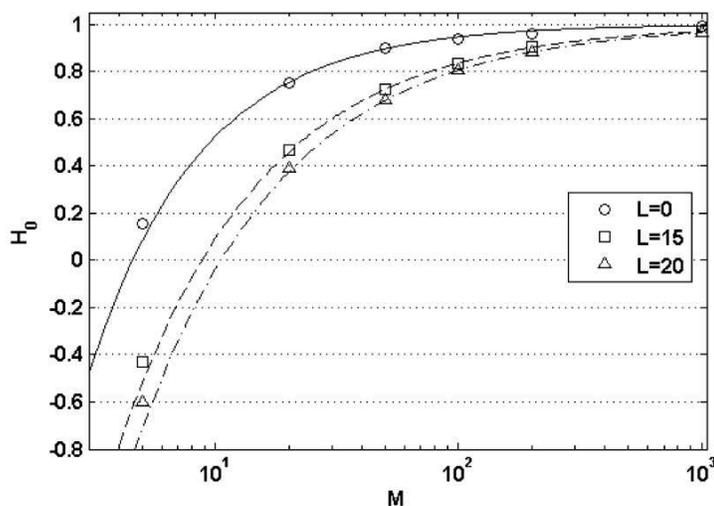


Figura 3.3 – Aproximação entre os corpos como uma função dos parâmetros adimensionais M e L , para o contato circular de acordo com o ajuste proposto por Wijnant (1998).

Para valores do parâmetro de carga acima de $M = 20$, dentre os casos simulados, a variação entre os dois algoritmos não ultrapassa 4,0 %. O mesmo comportamento assintótico em relação ao resultado de contato seco com o aumento da carga pode ser observado, ou seja, $H_0 \rightarrow 1,0$ para $M \rightarrow \infty$. Já para os valores onde os efeitos da carga se tornam menos importantes, ocorrem variações maiores entre os modelos. Entretanto, deve-se considerar que a aproximação proposta pela equação 3.11 é um ajuste aos reais valores calculados pelo algoritmo de Wijnant (1998) e, portanto, também não correspondem exatamente ao calculado.

Uma vez observada a correlação entre os resultados simulados utilizando o modelo de Nonato (2009) e as principais referências para modelos numéricos de contato lubrificado, deve-se garantir também sua correlação a valores de espessura de filme obtidos experimentalmente. Para tanto, lança-se mão de resultados experimentais publicados, obtidos através da utilização de viscosímetros ópticos, uma vez que tal aparato não era disponível para a pesquisa, como descrito em Nonato e Cavalca (2010a).

Wijnant (1998) apresenta resultados para um experimento do contato EHD entre esfera e plano, utilizado para validar seus resultados. Uma representação esquemática da montagem descrita por Wijnant (1998) está presente na Figura 3.4. Nesta montagem experimental, uma fonte luminosa ilumina a fenda gerada no contato pela presença do lubrificante entre a esfera o disco e as franjas geradas pela interferência dos comprimentos de onda são refletidas pela camada de cromo adicionada ao disco plano, sendo captadas pelo microscópio montado logo acima do contato. O princípio descrito foi introduzido por Foord (1969) à análise de filmes lubrificantes. Denominado interferometria óptica, este método possibilita a verificação experimental da espessura e forma do filme de lubrificante em contatos EHD.

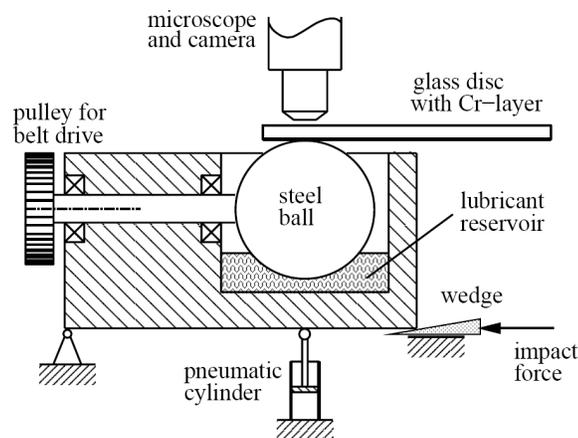


Figura 3.4 – Bancada experimental para análise de contatos EHD (Wijnant, 1998).

A primeira condição analisada é para o contato em condição estacionária. A construção da bancada da Figura 3.4 provê um contato EHD onde $M = 58,7$, $L = 4,62$ e $\kappa = 1,0$, os dados necessários para obtenção dos parâmetros adimensionais estão listados na Tabela 3.4.

Os valores de espessura mínima e central do filme de óleo medidas pelos interferogramas são $h_{min}^* = 0,15 \mu m$ e $h_c^* = 0,34 \mu m$. Utilizando a solução numérica implementada por Nonato (2009) os valores obtidos para estas espessuras foram $h_{min} = 0,187 \mu m$ e $h_c = 0,329 \mu m$. Desta maneira, o valor de espessura central de filme difere apenas 3 % do obtido experimentalmente, enquanto a variação da espessura mínima é de aproximadamente 20 %. É possível comparar também estes valores aos obtidos por Wijnant (1998), $h_{Wmin} = 0,18 \mu m$ e $h_{Wc} = 0,32 \mu m$, o que indica uma coerência expressiva entre as duas implementações do método de diferenças finitas em Multi-Níveis para a solução do problema EHD.

Tabela 3.4 – Parâmetros dimensionais para o contato experimental da Figura 3.4;

Parâmetro	Valor	Dimensão
R	$12,5 \times 10^{-3}$	m
E'	$1,17 \times 10^{11}$	Pa
η_0	$92,0 \times 10^{-3}$	Pa.s
α	$1,8 \times 10^{-8}$	Pa ⁻¹
u_s	0,74	m/s
f_0	45	N

Também é possível observar o comportamento dinâmico do contato no tempo, aplicando uma condição inicial de carga ao sistema e monitorando o transiente. Para tanto, uma rampa de carga é introduzida ao sistema, através de um impacto à montagem do dispositivo de cunha da Figura 3.4. Para simular tal situação, um incremento linear de carga é introduzido ao lado direito da equação 3.5, em substituição ao termo harmônico, para um tempo total de $T_f = 1,69$ unidades adimensionais de tempo. A carga final obtida no sistema é de $f_f = 165 N$, como descrito em (Nonato, 2010a).

Da mesma forma que em Wijnant (1998), utiliza-se uma aproximação para massa equivalente no contato, uma vez que todo o conjunto se move. Entretanto, observa-se apenas o comportamento vibracional entre esfera e disco. Observando os comprimentos de onda através do contato, é possível deduzir uma frequência adimensional do contato e, consecutivamente, uma massa equivalente de 1,43 kg no contato, maior que a massa real da esfera de 0,51 kg (Wijnant, 1998).

Os interferogramas experimentais disponíveis em (Wijnant, 1998), para a montagem experimental descrita, são mostrados na Figura 3.5, representando intervalos igualmente espaçados até 4 ms, partindo-se do equilíbrio estacionário em $t = 0$ s. Os pseudo-interferogramas simulados utilizando o algoritmo de Nonato (2009) para o sistema de contato do experimento estão presentes na Figura 3.6. Para a obtenção dos pseudo-interferogramas é aplicada a expressão cossenoidal proposta em (Venner e Lubrecht, 2000) aos perfis de espessura, de forma a gerar mapas de elevação similares as franjas de interferometria obtidas no experimento.

É possível observar que não só a forma do filme como também as modulações causadas pela vibração no contato visíveis nos interferogramas experimentais estão reproduzidas nos pseudo-interferogramas simulados. Não é possível obter uma comparação quantitativa das espessuras transientes para esta forma de experimento, uma vez que a referência da ordem das franjas de interferência se perde com a introdução do impacto, como apontado por Wijnant (1998). No entanto, qualitativamente os resultados são coerentes.

Uma vez demonstrada satisfatória a representação dinâmica das características do filme lubrificante no contato EHD, através das simulações pelo algoritmo Multi-Níveis de Nonato (2009), pode-se utilizar estes resultados para aproximar um modelo dinâmico vertical às respostas do contato, com o intuito de simplificar a tratativa dos efeitos do filme em simulações dinâmicas de mancais de rolamento considerando os contatos EHD.

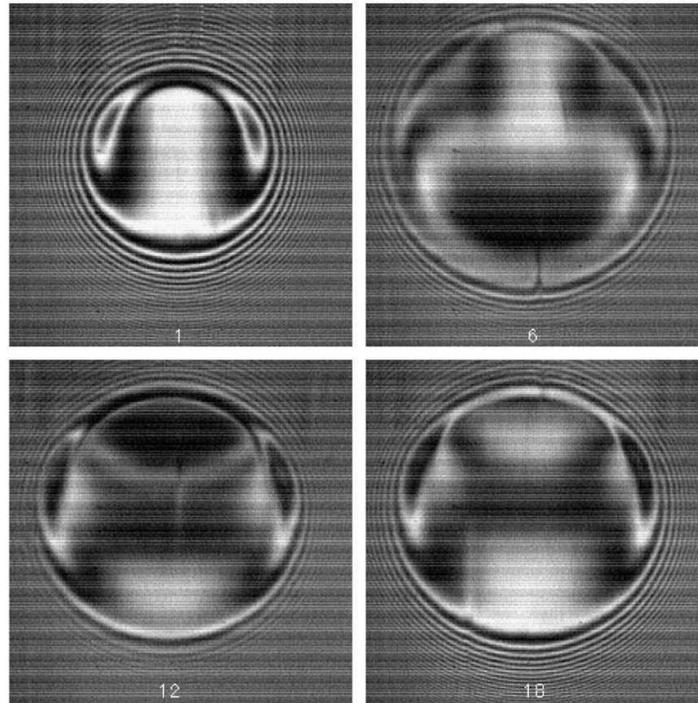


Figura 3.5 – Interferogramas experimentais obtidos para $0.0 < t < 4 \text{ ms}$ (Wijnant, 1998).

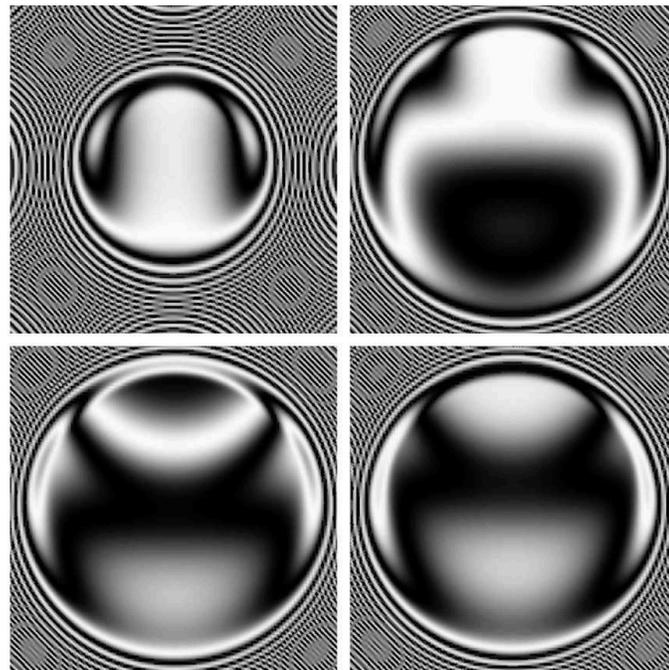


Figura 3.6 – Pseudo-interferogramas simulados para $0.0 < t < 4 \text{ ms}$ (Nonato e Cavalca, 2010a).

3.5 Formulação Geral da Rigidez Equivalente

A formulação prevista pela equação 3.12 pode resultar em vários polinômios diferentes para um mesmo sistema de contato, pois o procedimento de ajuste por mínimos quadrados deve resultar em um grupo de coeficientes $K_{i=1,2,3}$ que melhor aproxima o conjunto de dados simulados pelo algoritmo de Nonato (2009), sendo que este pode variar em número de pontos ou amplitude de deslocamento observada. Como mostrado para os casos observados em Nonato e Cavalca (2010a), todos os polinômios possuem resposta similar no entorno dos valores simulados.

Como pode ser observado na Figura 3.7, para o caso do contato onde $M = 200$, $L = 10$ e $\kappa = 0,5$, o ajuste prevê três polinômios com características bastante diferentes quando o contato é excitado com diferentes frequências. Entretanto, ao redor do equilíbrio, ou seja, para $H_0 \approx 0,9$, as três curvas de força no contato retornam o mesmo resultado. Não somente os valores dos polinômios coincidem, mas também o comportamento pode ser considerado aproximadamente linear. Baseado neste comportamento, Nonato e Cavalca (2012a) propõem uma nova abordagem para o equacionamento linear do contato EHD no entorno de sua posição de equilíbrio.

A formulação proposta define uma rigidez linear K_1 e uma constante de força $g(H_0)$, devida a uma transformação de coordenadas do domínio global (H_0, f_d) para o domínio arbitrário local (x', f') , no equilíbrio do contato. Uma representação gráfica desta transformada é mostrada na Figura 3.8. Neste caso, pode-se observar que a linha de tendência linear tracejada aproxima coerentemente os valores da força adimensional f_d no entorno do equilíbrio estático, desviando-se do comportamento polinomial cúbico previsto anteriormente fora desta região. É possível notar também que a reta proposta não cruza a origem do sistema global.

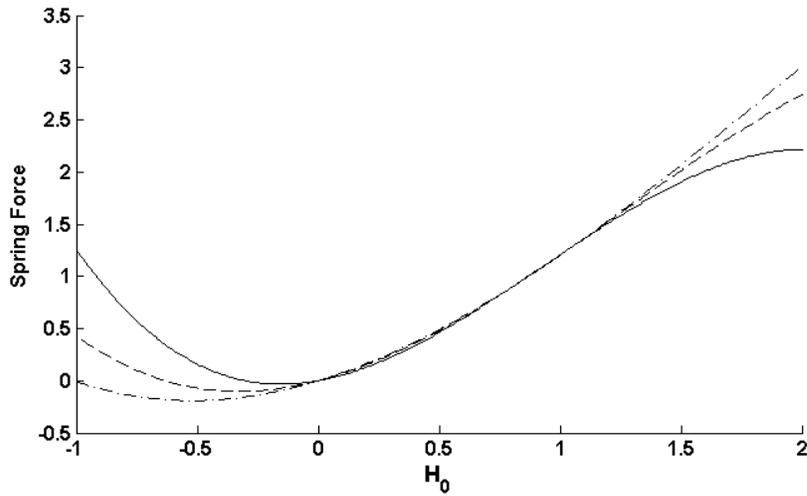


Figura 3.7 – Polinômios ajustados para força em contato EHD genérico com $M = 200$, $L = 10$ e $\kappa = 0,5$, excitado com frequências adimensionais de $\pi(- \cdot -)$, $2\pi(- -)$ e $4\pi(-)$; (Nonato e Cavalca, 2010a).

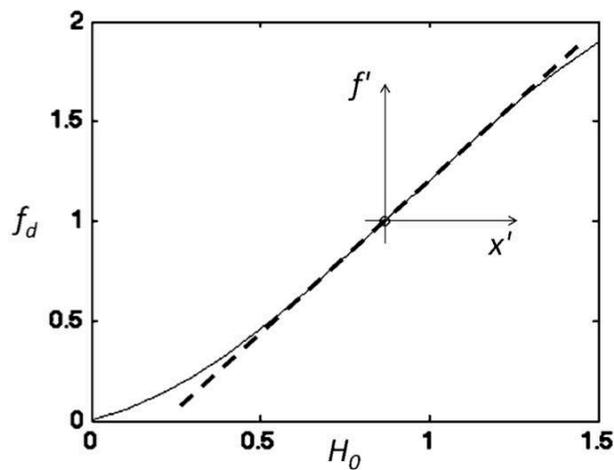


Figura 3.8 – Representação esquemática da transformação de coordenadas para linearização do problema EHD (Nonato, 2012a).

A forma final da linearização do contato é apresentada na equação 3.15. Neste caso, H_0 representa a aproximação entre os corpos para o equilíbrio estático e u representa o deslocamento

no referencial global. A constante $g(H_0)$ nesta formulação pode ser usada como medida de quão próximo da origem do sistema global está o equilíbrio estático.

$$f_d = K_1 u + (1,0 - K_1 H_0) = K_1 u + g(H_0) \quad 3.15$$

Com o aumento da carga estática, o valor da rigidez linearizada do contato EHD tende a aumentar, da mesma maneira que para o contato seco. Neste caso, o valor do termo $g(H_0)$ tende a crescer negativamente com o aumento da força, indicando um afastamento do equilíbrio do ponto (0,0).

A formulação proposta para a linearização do contato pela equação 3.15 é feita sobre o domínio adimensional. Nesta forma, a interpretação dos valores de rigidez encontrados é mais complexa, devido à natureza não física dos resultados. Tratando o valor da rigidez no domínio dimensional, a expressão obtida indica que seu valor é escalonado pela razão da força pelo deslocamento global no caso de contato seco, como indica a equação 3.16.

$$k_1 = K_1 \frac{2Rf}{a^2} \left(\frac{\varepsilon}{\mathcal{K}} \right) = K_1 \frac{f}{\delta} \quad 3.16$$

No caso de uma carga suficientemente pequena, $f \rightarrow df$, resultando em um deslocamento pequeno no contato seco $d\delta$, a rigidez adimensional pode ser interpretada como um fator amplificador da rigidez linearizada do contato seco. Contudo, para efeito prático, a importância do termo $g(H_0)$ aumenta com o aumento da força, e esta simples observação deixa de ser válida.

A investigação feita por Nonato e Cavalca (2012a) para o caso de uma mancal de elementos rolantes radial de esferas, tipo 6201 de acordo com DIN 625-1 (2011), resultou nos valores de rigidez linearizada como descritos na Tabela 3.5. A condição de carregamento de cada contato no anel interno do rolamento com 22 mm de diâmetro primitivo foi obtida para uma carga de 15 N radial pura e determinadas velocidades do anel interno, para uma configuração onde o anel externo está fixo.

Tabela 3.5 – Valores de rigidez linear do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6201, sob 15 N de carga radial pura. (Nonato, 2009);

Velocidade rpm	Carga N	<i>M</i> -	<i>L</i> -	<i>K₁</i> -	<i>k₁</i> 10⁷ N/m	<i>g(H₀)</i> -	<i>g(h₀)</i> N
600	9,346	821,45	7,38	1,446	2,38	-0,319	-2,989
600	4,610	404,42	7,38	1,426	1,86	-0,202	-0,931
1200	9,346	488,44	8,77	1,432	2,36	-0,226	-2,121
1200	4,610	240,47	8,77	1,403	1,82	-0,050	-0,234
1800	9,346	360,36	9,71	1,422	2,34	-0,152	-1,420
1800	4,610	177,41	9,71	1,390	1,81	0,065	0,300
2400	9,346	290,43	10,43	1,413	2,33	-0,086	-0,809
2400	4,610	143,00	10,43	1,374	1,79	0,167	0,770

Uma vez definida uma metodologia para linearização do contato em (Nonato e Cavalca, 2012a), esta pode ser reaplicada a mancais maiores, por exemplo, o mancal radial de esferas do tipo 6006, com 42,5 mm de diâmetro primitivo e 11 elementos. Os valores de rigidez linear para uma carga radial pura de 100 N aplicada a este mancal estão listados na Tabela 3.6.

Os valores para a rigidez adimensional encontrados se mantiveram próximos ao caso da Tabela 3.5, tendo um valor médio de 1,42. A presença de valores positivos do termo $g(H_0)$, como anteriormente, indica que o contato EHD deve produzir força não nula para deslocamento nulo. É importante notar que cada grupo de três linhas da Tabela 3.6 representa três elementos carregados para cada velocidade de rotação do anel interno e uma única carga radial de 100 N no rolamento. Neste caso, o porta elementos se encontra em uma posição fixa, simétrica em relação à carga, sendo que o elemento com maior força aplicada se encontra diretamente sob a linha de ação desta força e outros quatro elementos encontram-se simetricamente distribuídos ao redor, também enxergando a distribuição de carga. Cada par em posição simétrica observa a mesma força radial.

Uma comparação dos valores de rigidez linear no domínio adimensional pode levar a uma falsa interpretação dos resultados entre os casos de velocidades diferentes. Então, o gráfico da Figura 3.9 mostra as aproximações lineares de força para cada caso de contato, representadas pelas linhas tracejadas. Também é mostrado, em linha sólida, o caso equivalente para o contato seco dentro da mesma variação de carga. Neste caso a rigidez do contato seco é $K_{Hertz} = 28,03 \times 10^9 \text{ N/m}^{3/2}$, para os contatos no anel interno.

Tabela 3.6 – Valores de rigidez linear do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura.

Velocidade rpm	Carga N	M -	L -	K_1 -	k_1 10^7 N/m	$g(H_0)$ -	$g(h_0)$ N
600	39,728	1421,17	8,19	1,454	4,58	-0,352	-14,003
600	30,654	1096,57	8,19	1,449	4,19	-0,326	-9,980
600	10,637	380,51	8,19	1,422	2,89	-0,148	-1,578
1200	39,728	845,03	9,74	1,448	4,56	-0,286	-11,362
1200	30,654	652,02	9,74	1,441	4,16	-0,245	-7,501
1200	10,637	226,25	9,74	1,396	2,83	0,026	0,272
1800	39,728	623,46	10,77	1,440	4,53	-0,228	-9,067
1800	30,654	481,06	10,77	1,431	4,13	-0,176	-5,385
1800	10,637	166,93	10,77	1,380	2,80	0,159	1,694
2400	39,728	502,46	11,58	1,433	4,51	-0,178	-7,063
2400	30,654	387,70	11,58	1,423	4,11	-0,116	-3,546
2400	10,637	134,53	11,58	1,361	2,76	0,276	2,937

Para o deslocamento observado, a força gerada no contato EHD esteve sempre acima do valor previsto para o contato seco, como esperado para um contato com a adição do efeito hidrodinâmico na interface. Este efeito se traduz em uma força de certa magnitude resultar em menor deslocamento em lubrificação EHD quando comparado ao contato seco. Além disso, o comportamento geral do conjunto de curvas para cada velocidade do anel interno assemelha-se muito ao comportamento do contato seco. Deve-se levar em consideração que para cada conjunto de curvas de uma definida velocidade, a única variável alterada é a carga radial no equilíbrio.

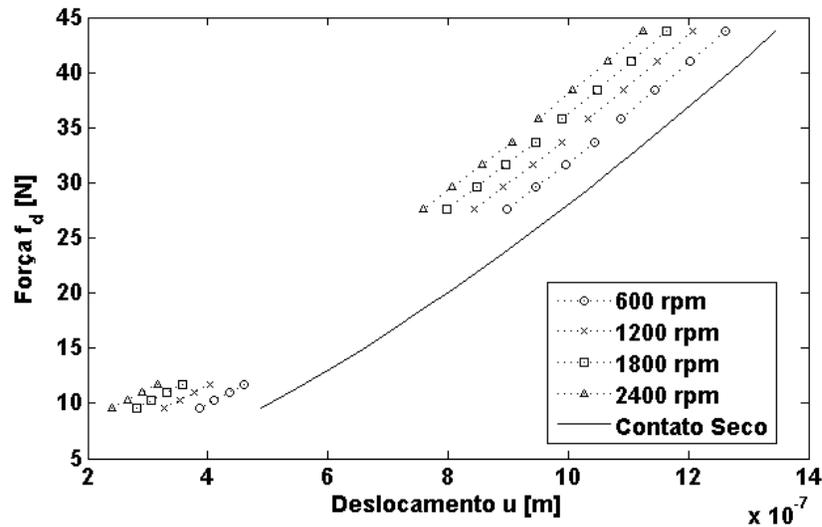


Figura 3.9 – Resposta de força linear no contato EHD para os casos listados na Tabela 3.6, em comparação a resposta no contato seco para o anel externo de um rolamento radial de esferas do tipo 6006.

Com base nesta observação, pode-se concluir que para cada caso de velocidade do anel interno, a formulação da rigidez no contato lubrificado pode ser aproximada por uma expressão não linear sobre uma variação maior de carga. Neste caso, o ajuste deve-se dar sobre toda a variação de força na zona de carga do rolamento. Assim, assume-se que a rigidez do contato EHD é independente da carga aplicada, aumentando a generalidade da aproximação.

Como a rigidez no contato seco é normalmente aproximada pela expressão $K_H u^{3/2}$ para o contato pontual, como mostra o Apêndice A, a maneira mais geral de se representar uma formulação similar para o caso do contato lubrificado é proposta na equação 3.17:

$$f_d = K_{EHD} u^n + \Delta F_{EHD} \quad 3.17$$

A aproximação proposta pela equação 3.17 baseia-se no fato de que qualquer variação da carga no contato EHD atua apenas sobre o parâmetro adimensional de carga M e não sobre o parâmetro adimensional de lubrificante L . Desta maneira, para o caso de mancais de elementos

rolantes, dado que a geometria interna, o lubrificante e a velocidade sejam fixos, o comportamento da força restitutiva no contato deve ser aproximado independentemente da carga aplicada a uma das pistas especificamente.

Cada ponto de equilíbrio simulado para os contatos do mancal 6006, para uma velocidade de rotação de 1200 *rpm*, está mostrado graficamente na Figura 3.10 para o domínio dimensional. Baseado então na formulação proposta pela equação 3.17, ao invés de linearizar a resposta de força por partes em função da variação do carregamento, os resultados de aproximação no contato para o caso lubrificado podem ser ajustados por um método não linear de ajuste de curvas. Nesta investigação, foi utilizada uma implementação comercial do método de otimização multidimensional não linear de Nelder-Mead para ajustar os coeficientes K_{EHD} , n e ΔF_{EHD} . Entretanto, outros métodos podem ser utilizados sem a perda da precisão básica do ajuste.

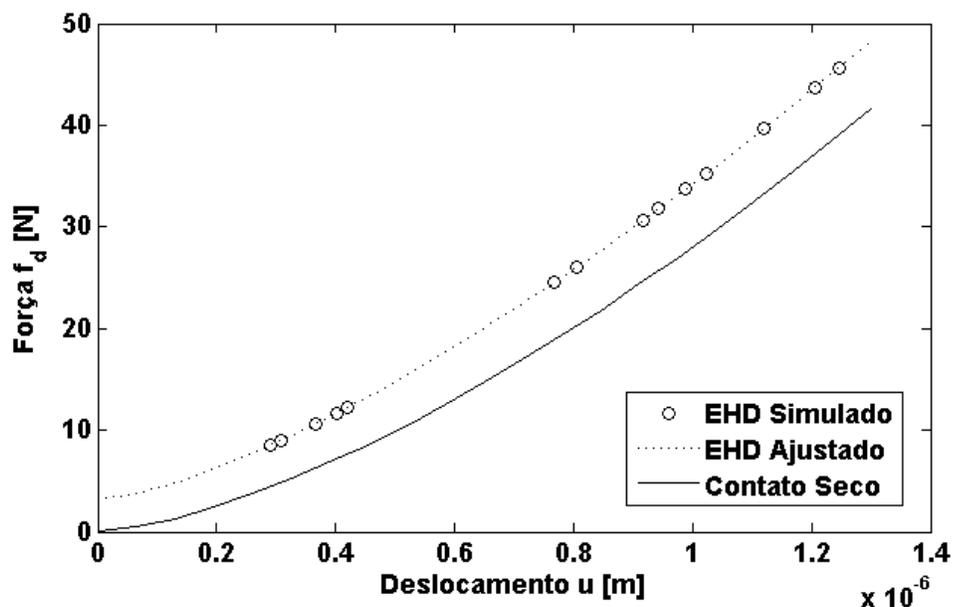


Figura 3.10 – Comparação entre a força de contato EHD ajustada para o mancal de esferas 6006, a 1200 *rpm*, e os pontos de equilíbrio simulados pelo algoritmo EHD para a variação de carga observada na Tabela 3.6.

A curva obtida possui uma boa correlação com resultados simulados para a condição de equilíbrio estático, isto é, para $t = 0$ s. Para o caso da Figura 3.10, os coeficientes da expressão não linear obtidos foram $K_{EHD} = 1,00 \times 10^{10}$ N/mⁿ, $n = 1,42$ e $\Delta F_{EHD} = 3,16$ N. A média absoluta das diferenças ponto a ponto entre os resultados simulado e ajustado é $\Delta f_d = 0,044$ %. O desvio RMS para o ajuste é $\text{RMSD}(f_d) = 0,015$, que normalizado pela amplitude de variação total da força resulta em $n\text{RMSD}(f_d) = 0,00039$ com um coeficiente de variação $cv(\text{RMSD}) = 0,00055$.

Se o termo de força constante ΔF_{EHD} fosse removido do equacionamento, de forma a forçar a condição de força nula para deslocamento zero no contato EHD, os valores do ajuste seriam $K_{EHD} = 5,59 \times 10^8$ N/mⁿ, $n = 1,20$. Entretanto a precisão do ajuste diminui, sendo $\text{RMSD}(f_d) = 0,43$, $n\text{RMSD}(f_d) = 0,011$ e $cv(\text{RMSD}) = 0,016$. Pode ser observado, na Figura 3.11, que a curva ajustada não possui a mesma tendência que os pontos simulados de equilíbrio.

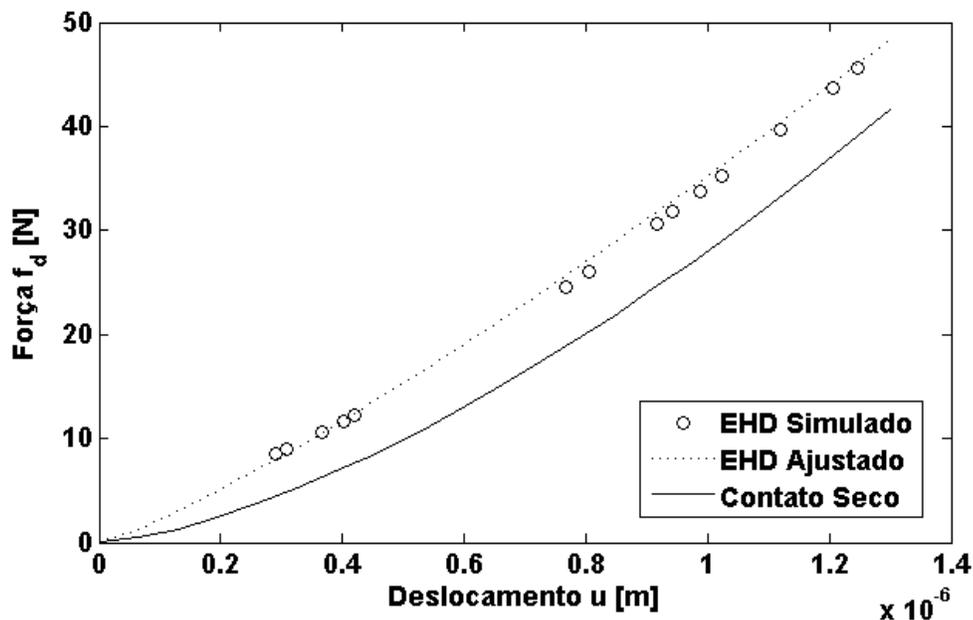


Figura 3.11 – Comparação entre a força de contato EHD ajustada para o mancal de esferas 6006, a 1200 rpm, e os pontos de equilíbrio simulados pelo algoritmo EHD desconsiderando o termo de força constante ΔF_{EHD} .

Este comportamento suporta a hipótese de que deve haver uma força positiva no deslocamento zero, como primeiramente observado em (Nonato e Cavalca, 2012a). Fisicamente, o filme hidrodinâmico no contato deve criar um efeito de sustentação suficiente para manter os corpos separados em uma condição de carga zero. Portanto, uma força deve ser aplicada ao sistema para que o elemento se mantenha na condição de deslocamento zero, quando sob condições EHD.

Se o procedimento for aplicado no âmbito de velocidades investigadas para o caso da linearização do contato, obtêm-se os coeficientes da formulação não linear da equação 3.17 listados na Tabela 3.7. A caracterização da rigidez do contato EHD, neste caso, se deu para uma carga radial pura de 100 N aplicada ao rolamento, resultando em aproximadamente 40 N de carga máxima nos elementos. Para facilitar a avaliação da precisão do ajuste, a Tabela 3.7 também lista os valores de $1 - R^2$, onde R^2 é o coeficiente de determinação do ajuste.

Tabela 3.7 – Coeficientes de rigidez não linear do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura, para velocidades de 600 rpm a 2400 rpm.

Velocidade rpm	Carga N	K_{EHD} $\times 10^8$ N/mⁿ	n	ΔF_{EHD} N	$1 - R^2$
600	100	153,8	1,452	2,073	$3,39 \times 10^{-07}$
1200	100	100,0	1,418	3,155	$1,39 \times 10^{-06}$
1800	100	68,3	1,388	4,023	$3,28 \times 10^{-06}$
2400	100	48,2	1,360	4,781	$6,10 \times 10^{-06}$

Os valores de deslocamento negativos obtidos para os casos de cargas muito baixas foram desconsiderados no ajuste, sendo assim, o modelo é válido apenas para $u > 0$. Os valores obtidos para o coeficiente de determinação do ajuste indicam uma boa coerência entre o modelo ajustado e os valores obtidos pelo algoritmo EHD multi-níveis.

Observando os valores encontrados dos coeficientes do modelo não linear, algumas tendências são observáveis. Com o aumento da velocidade, os valores de K_{EHD} e n tendem a diminuir e existe um aumento claro no valor do termo constante de força ΔF_{EHD} , indicando um aumento na importância do efeito de sustentação hidrodinâmico no equilíbrio do contato. Para melhor visualização do efeito da variação da velocidade na resposta de força no contato EHD a Figura 3.12 apresenta as curvas de força no contato EHD do anel interno do rolamento 6006 para velocidades de 600 *rpm* a 1200 *rpm*.

No caso investigado, fica claro o efeito de enrijecimento do contato devido à presença do filme EHD. Como observado anteriormente, para toda variação de deslocamentos investigada, a força no contato EHD é maior que a prevista pelo modelo seco. Fica clara também uma dependência da força resultante com velocidade do mancal, com uma transição suave entre as curvas observadas.

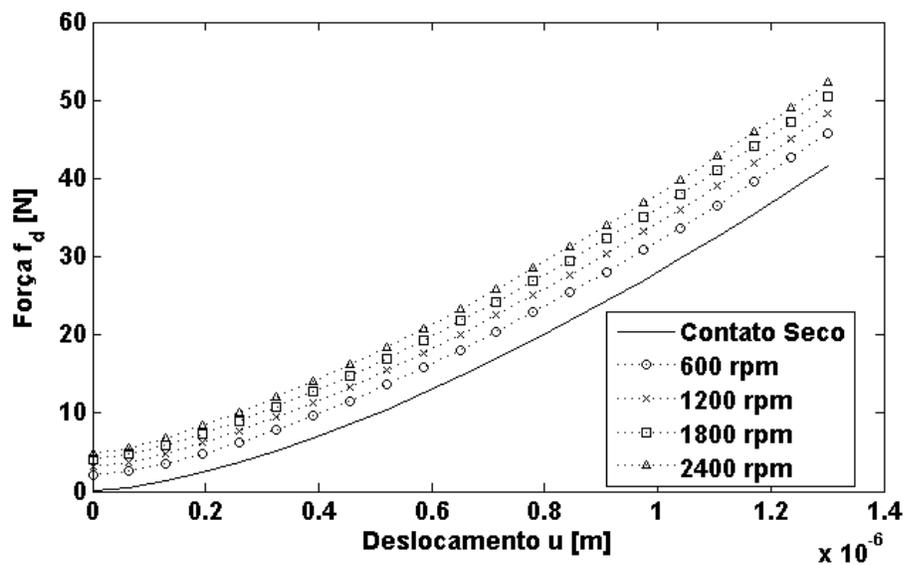


Figura 3.12 – Força no contato EHD do anel interno de um mancal de rolamentos tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura, para velocidades de 600 *rpm* a 1200 *rpm*.

3.6 Aproximação para o Amortecimento Linear Viscoso

Uma vez definida uma formulação explícita para a rigidez do contato EHD, a forma mais simples para obtenção de um amortecimento equivalente do filme é ajustar a resposta de deslocamento e velocidade no tempo, do contato dinâmico EHD, ao modelo de rigidez linear, somado a uma parcela de amortecimento linear, como descrito na equação 3.18.

$$f_d(t) = K_{EHD}u(t)^n + \Delta F_{EHD} + C\dot{u}(t) \quad 3.18$$

Da mesma maneira que em (Wijnant, 1998), a resposta temporal do contato escolhida para o ajuste do amortecimento foi a resposta a uma excitação harmônica do sistema. Utiliza-se esta aproximação levando em conta que a frequência natural equivalente do contato EHD deve ser muito maior que a frequência de excitação. Para o caso de um mancal de elementos rolantes sob um carga radial pura, a frequência de excitação efetiva de um contato pode ser entendida como a frequência de rotação do porta-elementos. Para cada rotação do-porta elementos um dado elemento é carregado de zero à máxima carga e novamente a zero, caracterizando uma condição cicloestacionária de carga. Assim, a frequência de excitação é a frequência com qual o elemento passa pela zona de carga, para o caso de carga radial pura no mancal radial de esferas.

A frequência adimensional do contato EHD é definida por Wijnant (1998) como $\Omega_n^2 = 4f_0 a^2 / (m u_s^2 \delta)$, dependente da massa do elemento m . A frequência adimensional de excitação pode ser obtida por $\Omega_e = 2a\omega_e / u_s$. A razão entre estas frequências resulta em $\Omega_n / \Omega_e = \sqrt{f / (m\delta\omega_e^2)}$. Desta forma, a equação completa de movimento para o contato EHD pode ser escrita no domínio adimensional como:

$$\frac{1}{\Omega_n^2} \frac{d^2 H_0}{dT^2} + \frac{3}{2\pi} \iint_{\Gamma} P(X, Y, T) dXdY = 1 + A_h \sin(\Omega_e T) \quad 3.19$$

Considerando o contato do anel interno para o elemento mais carregado do rolamento 6006, como na Tabela 3.6, a razão entre as frequências é $\Omega_n/\Omega_e = 5,71 \times 10^3$, então o termo $1/\Omega_n^2$ da equação 3.19 deve assumir um valor muito pequeno comparado com a dimensão temporal da frequência Ω_e , isto é, a porção transiente da resposta vai ser muito curta, comparada com um período da frequência de excitação. Sobre esta premissa, a resposta dinâmica da força no contato EHD deve ser ajustada, já no domínio dimensional, como indicado pela equação 3.20

$$\iint_{\Gamma} p(x, y, t) dx dy = f_0 + a_h \sin(\omega t) \approx K_{EHD} u^n + \Delta F_{EHD} + C \dot{u} \quad 3.20$$

Da mesma forma que para o caso do ajuste da rigidez não linear do contato, um método de otimização deve ser empregado para ajustar os valores de K_{EHD} , n , ΔF_{EHD} e C . Neste caso, uma vez que o valor dos coeficientes da rigidez não linear já é conhecido, o ajuste pode se dar apenas sobre a porção correspondente à força dissipativa, simplificando bastante o procedimento. Para este caso, porém, deve-se garantir que a correta excitação adimensional esteja sendo utilizada para simulação do contato EHD. Uma vez que a frequência adimensional Ω_e é dependente da velocidade u_s e do comprimento da área de contato a , valores que devem variar de contato para contato simulado. Esta observação foi inicialmente feita por Nonato e Cavalca (2012b).

Para garantir que a análise de cada caso de contato dentro da variação da zona de carga no mancal seja feita sob a mesma frequência dimensional de excitação, o valor adimensional deve ser corrigido pela variação dos comprimentos das áreas de contato. Um dos contatos analisados é tomado como referência, neste caso o mais carregado, para definir uma frequência padrão da qual serão aproximadas as frequências para os outros casos e a simulação se dá para uma frequência adimensional mais próxima à frequência natural do contato para que o efeito do amortecimento sobre a amplitude das vibrações seja mais representativo.

Os resultados deste ajuste, primeiramente apresentados por Nonato e Cavalca (2012b), tem uma boa concordância com os resultados do ajuste proposto por Wijnant (1998), para as

frequências equivalentes. Wijnant (1998) propõe que deve haver uma independência entre amortecimento e frequência de excitação, entretanto os estudos de Nonato e Cavalca (2012b) mostraram um claro decréscimo exponencial do amortecimento com o aumento da frequência adimensional de excitação. A observação desta tendência pode resultar da melhora no método de ajuste, que mantém a precisão mesmo para casos de contato com menor dissipação de energia.

No geral, ambos os métodos predizem valores próximos de amortecimento, entretanto o método de Wijnant (1998) é aplicável a apenas um único contato. Quando se deve definir o amortecimento para o mancal completo, o ajuste do amortecimento deve ser feito sobre um conjunto de contatos que representa a variação do carregamento na zona de carga. Assim, utilizando a aproximação proposta pela equação 3.20, os dados simulados de força, velocidade e deslocamento para vários contatos podem ser utilizados.

Mais uma vez utilizando o mancal 6006 como exemplo, para o caso de 1200 rpm de velocidade do anel interno, primeiramente aplica-se o método para cada contato separadamente. Os valores de coeficientes de amortecimento C , a medida de precisão do ajuste $1 - R^2$ e o amortecimento equivalente utilizando a aproximação de Wijnant (1998) estão listados na Tabela 3.8.

A comparação dos valores de amortecimento obtidos pelos dois métodos citados anteriormente não é direta. O modelo de Wijnant (1998) é válido apenas para valores discretos de razão elíptica, κ . Desta maneira os valores apresentados na Tabela 3.8 não correspondem estritamente aos contatos apresentados para o caso do mancal real, mas sim para uma aproximação dos mesmos. Assim, os valores não devem coincidir, mas sim apresentar a mesma tendência geral e ordem de grandeza, uma vez que os valores de $C_{Wijnant}$ equivalem a um contato com os mesmos parâmetros adimensionais, M e L , mas razão elíptica maior. Wijnant (1998) não disponibiliza uma formulação para a variação contínua da razão elíptica, mas propõe a interpolação do amortecimento obtido para certos valores de κ .

Tabela 3.8 – Coeficientes lineares de amortecimento do contato EHD para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, sob 100 N de carga radial pura, para velocidades de 600 rpm a 2400 rpm.

Velocidade rpm	Carga N	<i>M</i> -	<i>L</i> -	<i>C</i> N s/m	$1 - R^2$	<i>C_{Wijnant}</i> N s/m
600	39,728	1421,17	8,19	30,026	0,321	38,395
600	30,654	1096,57	8,19	31,423	0,281	39,629
600	10,637	380,51	8,19	37,800	0,313	45,090
1200	39,728	845,03	9,74	21,341	0,322	27,767
1200	30,654	652,02	9,74	22,210	0,271	28,687
1200	10,637	226,25	9,74	25,985	0,314	32,769
1800	39,728	623,46	10,77	17,356	0,323	22,929
1800	30,654	481,06	10,77	17,987	0,264	23,704
1800	10,637	166,93	10,77	20,618	0,316	27,148
2400	39,728	502,46	11,58	14,931	0,325	19,998
2400	30,654	387,70	11,58	15,416	0,260	20,684
2400	10,637	134,53	11,58	17,385	0,319	23,738

Apesar de a tendência geral e a magnitude dos coeficientes obtidos para o caso do mancal 6006 serem próximas e indicarem uma boa coerência entre os dois métodos, a medida de precisão do ajuste para a porção dissipativa do problema, como apresentado na Tabela 3.8, não indica uma boa aproximação para o comportamento do filme. Este efeito, entretanto, se relaciona muito mais ao comportamento não linear do amortecimento do que com a falta de precisão do ajuste.

Se um gráfico for montado com a resposta da força de amortecimento no filme EHD em função da velocidade no contato, obtém-se um laço histerético, e não um comportamento aproximadamente linear. Então, a hipótese de amortecimento viscoso é apenas uma simplificação do real comportamento dissipativo do contato. Para maiores velocidades é esperado que o laço se alongue, tendendo mais a um comportamento quasi-linear. A Figura 3.13 mostra o

comportamento histerético do amortecimento no contato EHD e a aproximação linear proposta por Nonato (2012b) e Wijnant (1998).

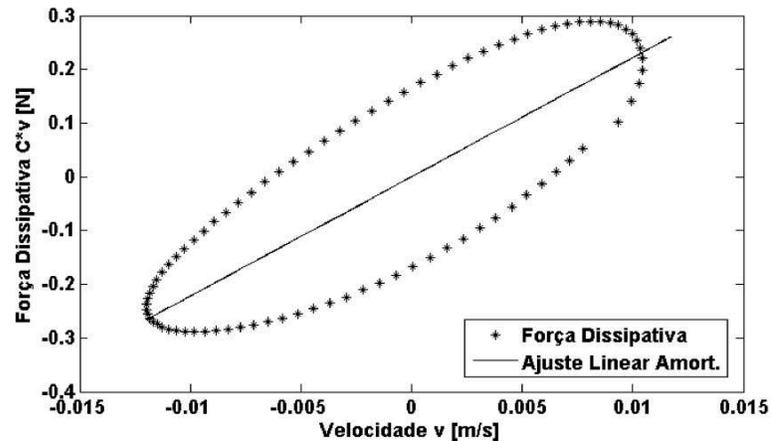


Figura 3.13 – Comportamento histerético do amortecimento no contato EHD e a aproximação linear proposta.

Como o modelo linear do amortecimento deve apenas se aproximar do real comportamento do contato EHD, é razoável utilizar uma aproximação geral para todos os contatos dentro da zona de carga. Desta maneira, um amortecimento viscoso independente da carga é obtido para os contatos do mancal, da mesma maneira que para o ajuste da rigidez não linear. Então, baseado nesta hipótese, um amortecimento equivalente deve ser encontrado para cada velocidade do anel interno.

A Tabela 3.9 lista estes valores de amortecimento para cada caso de velocidade, assim como a medida de precisão do ajuste $1 - R^2$. Um comportamento parcialmente histerético do amortecimento no contato EHD é esperado, devido a parcela estrutural do problema do contato mecânico.

Tabela 3.9 – Coeficientes lineares de amortecimento do contato EHD independentes da carga para o anel interno de um rolamento radial de esferas tipo 6006, para velocidades de 600 rpm a 2400 rpm.

Velocidade rpm	C N s/m	$1 - R^2$
600	31.602	0.307
1200	22.289	0.303
1800	18.027	0.301
2400	15.438	0.300

3.7 Verificação do modelo Dinâmico Completo do Contato EHD

Uma maneira de verificar a precisão e aplicabilidade do modelo não linear de rigidez e amortecimento viscoso proposto pela equação 3.18 é replicando a resposta do caso de excitação harmônica do contato, através da integração temporal do sistema não linear ajustado. Para tanto, dois contatos foram escolhidos como referência para a verificação, os casos de maior e menor carga para uma rotação de 1200 rpm. Ambos os casos foram simulados pelo algoritmo apresentado em Nonato (2009) para o caso de excitações harmônicas e o resultado comparado com a integração temporal da equação 3.18, usando os coeficientes listados na Tabela 3.7 e na Tabela 3.9.

A Figura 3.14 mostra a comparação gráfica dos resultados simulados e ajustados pelo modelo proposto para os casos dos contatos EHD de referência escolhidos. Os coeficientes de determinação para os ajustes, R^2 , resultam em $R^2 = 0,997$ para o caso de maior carga e $R^2 = 0,987$ para o de menor carga. Tais valores indicam uma precisão relativamente alta considerando a abrangência do modelo.

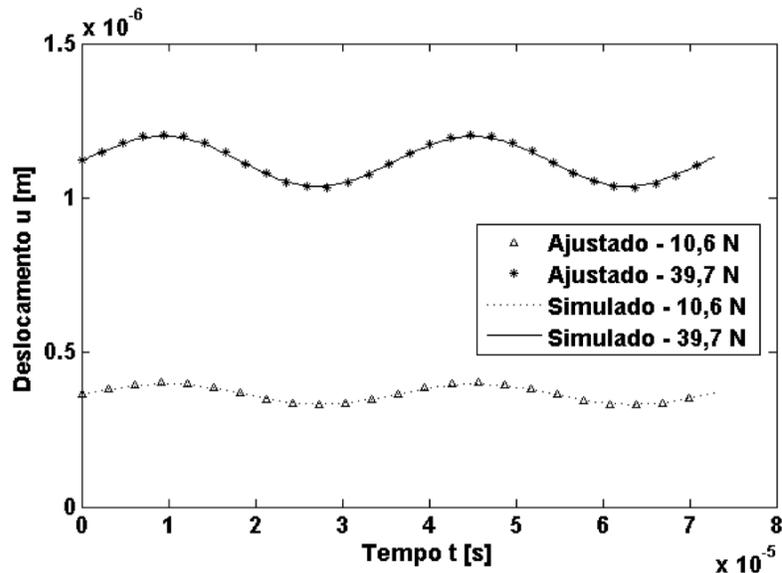


Figura 3.14 – Resposta forçada harmônica de deslocamento simulado e ajustado para os contatos EHD com maior e menor carga radial de uma mancal tipo 6006 sob 100 N de carga radial pura e 1200 rpm de velocidade no anel interno.

Uma segunda forma de verificar a capacidade do modelo proposto em representar o correto comportamento do contato EHD é utilizar esta aproximação para representar a resposta transiente do contato. Para isso, a equação de movimento completa deve ser utilizada para simular a resposta do filme de lubrificante, como apresentada na equação 3.19, considerando o efeito do termo de inércia $1/\Omega_n^2$. Entretanto, a parcela de excitação harmônica é removida, possibilitando a avaliação apenas da porção transiente. A comparação gráfica deste caso é apresentada pelo gráfico da Figura 3.15. O coeficiente de determinação, neste caso, foi encontrado $R^2 = 0,990$.

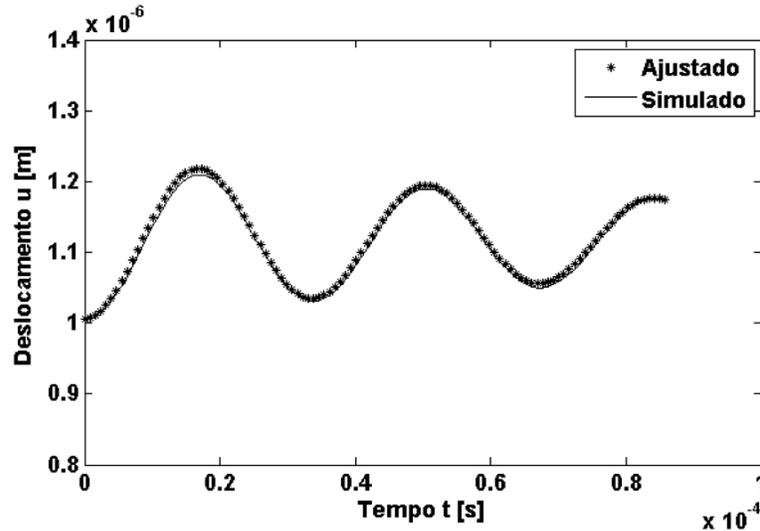


Figura 3.15 – Resposta transiente de deslocamento simulado e ajustado para o contato EHD no anel interno de uma mancal tipo 6006 sob 39,7 N de carga e 1200 rpm de velocidade no anel interno.

Sendo o modelo proposto capaz de replicar os comportamentos simulados para os casos de contato EHD no mancal 6006, este deve também aproximar o comportamento do contato real utilizado para validação do modelo na Seção 3.4. A forma transiente do problema de validação, apresentada na Figura 3.6, pode ser representada por um oscilador amortecido simples de 1 grau de liberdade, com uma massa suspensa de 1,43 kg, sob um carregamento em rampa como descrito na seção 3.4.

O ajuste feito sobre a resposta de força no contato para este caso gera o conjunto de coeficientes $K_{EHD} = 8,788 \times 10^9 \text{ N/m}^n$, $n = 1,468$, $\Delta F_{EHD} = 7,23 \text{ N}$ e $C = 291,6 \text{ N.s/m}$. Usando estes parâmetros o coeficiente de determinação obtido para o ajuste da força foi de $R^2 = 0,999$. Integrando-se a equação de movimento deste sistema simples pode-se obter tanto a resposta de deslocamento, quanto de velocidade no contato. A aproximação entre os valores integrados do modelo ajustado e os valores de deslocamentos simulados pelo algoritmo Multi-Níveis resulta em um coeficiente de determinação $R^2 = 0,998$. Uma comparação gráfica é feita na Figura 3.16.

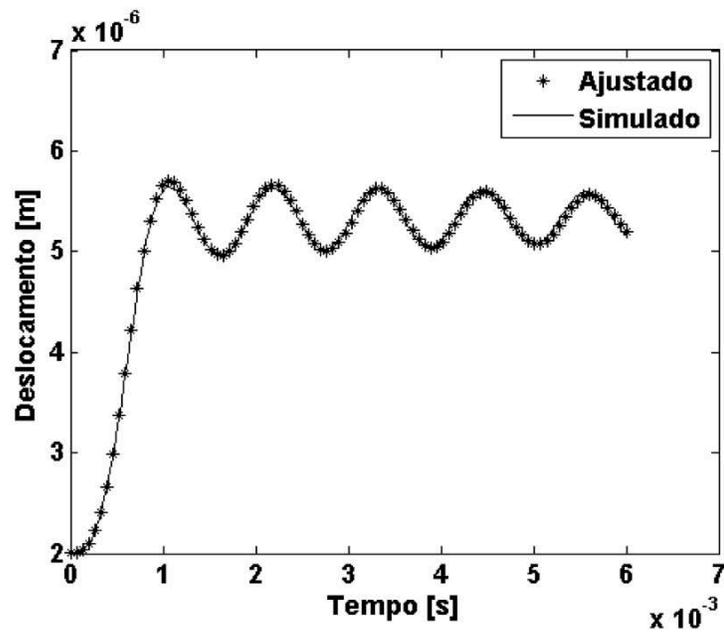


Figura 3.16 – Resposta transitente de deslocamento simulado e ajustado para o contato EHD utilizado para validação do algoritmo Multi-Níveis.

4 MODELO DINÂMICO PARA O MANCAL COMPLETO LUBRIFICADO

Uma vez definida uma formulação explícita para o comportamento dinâmico de um contato EHD pontual, o modelo dinâmico para um mancal de elementos rolantes radial de esfera sob condição de lubrificação elastohidrodinâmica pode ser resolvido. Para tanto, o problema deve ser dividido em partes. Inicialmente, o clássico modelo dinâmico de 2 graus de liberdade (2 GDL) para mancais radiais de esfera, como usado por H.V.Liew (2005) e Sawalhi (2008) foi escolhido como base para o desenvolvimento.

O modelo planar de mancais de elementos rolantes tem sua principal aplicação em modelos de vibrações laterais em sistemas rotativos, pois incorpora as duas translações laterais do anel interno em relação ao anel externo fixo. Uma representação do modelo do mancal é mostrada na Figura 4.1. Para análises mais complexas, incluindo a análise de vibrações axiais este modelo deve ser expandido para 5 GDL. O modelo de mancais de esferas de 5 GDL inclui o deslocamento axial e as inclinações do anel interno ao modelo 2GDL. Esta expansão pode ser inferida desta derivação para 2 GDL e baseada no desenvolvimento de Lim (1990), devido à similaridade entre a formulação para o contato seco e o lubrificado.

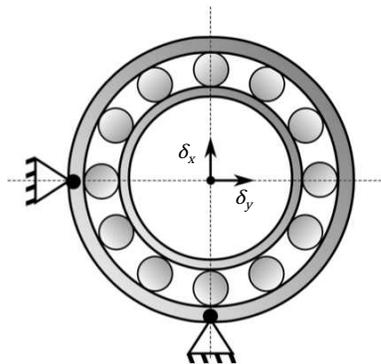


Figura 4.1 – Representação de um mancal radial de esferas e a aproximação de 2 GDL, (δ_x, δ_y) , para o movimento planar do anel interno com anel externo fixo.

4.1 Modelo das Forças Restitutivas para um Mancal Lubrificado

De posse da relação explícita não linear da rigidez no contato EHD, o comportamento da força restitutiva no contato de cada pista pode ser descrito como na equação 4.1:

$$F_{i,o} = K_{EHD\ i,o} \delta_{i,o}^{n_{i,o}} + \Delta F_{EHD\ i,o} \quad 4.1$$

Neste caso, os índices i e o representam a pista interna e externa, respectivamente. Assim, o deslocamento no contato é dado por $\delta_{i,o}$ e um conjunto de coeficientes $K_{EHD\ i,o}$, $n_{i,o}$ e $\Delta F_{EHD\ i,o}$ deve existir para cada pista. Seguindo a hipótese mais comum de um elemento de massa desprezível, o grau de liberdade do elemento pode ser desconsiderado para derivação do modelo, como esquematicamente mostrado na Figura 4.2. Assim, o deslocamento total entre as pistas interna e externa para o mancal radial de esferas na posição do elemento será dado pela soma dos deslocamentos em cada contato.

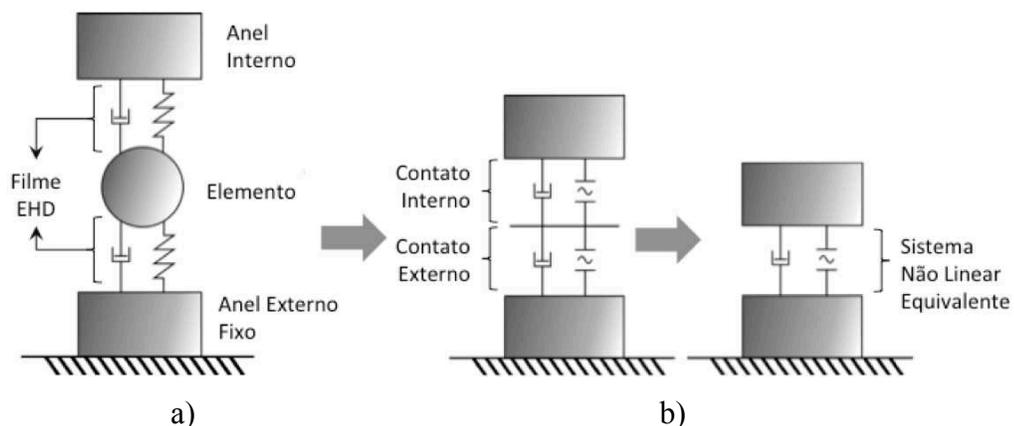


Figura 4.2 – Aproximação para o modelo equivalente de forças no contato entre anel interno e externo para a posição de um elemento, a) modelo linear considerando o elemento e b) modelo de rigidez não linear EHD sem elemento rolante.

$$\delta_T = \delta_i + \delta_o = \left(\frac{F_i - \Delta F_{EHDi}}{K_{EHDi}} \right)^{1/n_i} + \left(\frac{F_o - \Delta F_{EHD_o}}{K_{EHD_o}} \right)^{1/n_o} \quad 4.2$$

É possível considerar que o comportamento geral do deslocamento total entre as pistas, δ_T , deve estar muito próximo do comportamento de cada contato. Então, a força restitutiva atuante sobre as pistas na posição do elemento rolante também tem um comportamento não linear de forma potencial e pode ser ajustada ao deslocamento total como na equação 4.3.

$$\delta_T \cong \left(\frac{F_T - \Delta F_T}{K_T} \right)^{1/n_T} \quad 4.3$$

Deste modo, a força restitutiva em cada elemento, dependendo de sua posição angular ψ_j em torno do eixo de rotação do mancal pode ser calculada através da expressão na equação 4.4. Neste caso, o índice j se refere à j -ésima posição dentro do conjunto de elementos, como representado na Figura 4.3.

$$F_{\psi_j} = K_T \delta_{\psi_j}^{n_T} + \Delta F_T \quad 4.4$$

Considerando, então, os anéis do mancal rígidos, o deslocamento em cada posição ψ_j pode ser facilmente obtido em função do deslocamento global do centro do anel interno, δ_x e δ_y , nos dois graus de liberdade do modelo, como na equação 4.5.

$$\delta_{\psi_j} = \delta_x \cos(\psi_j) + \delta_y \sin(\psi_j) - P_d/2 \quad 4.5$$

Os deslocamentos δ_x e δ_y correspondem aos os graus de liberdade do mancal analisado e são medidas em relação ao anel externo fixo. P_d é a folga diametral do rolamento. Dado um deslocamento ao anel interno, é possível então conhecer a força resultante no mancal, uma vez que a força sobre cada elemento é conhecida. Para tanto, basta equacionar o equilíbrio estático

em ambas as direções, x e y , garantindo que a somatória de forças, ΣF_x and ΣF_y , seja zero para os dois casos. Assim, o sistema não linear de equações para o equilíbrio do mancal deve ser:

$$\begin{aligned} \Sigma_{j=1}^Z (K_T \delta_{\psi_j}^{n_T} + \Delta F_T) \cos(\psi_j) &= F_r \cos(\theta) \\ \Sigma_{j=1}^Z (K_T \delta_{\psi_j}^{n_T} + \Delta F_T) \sin(\psi_j) &= F_r \sin(\theta) \end{aligned} \quad 4.6$$

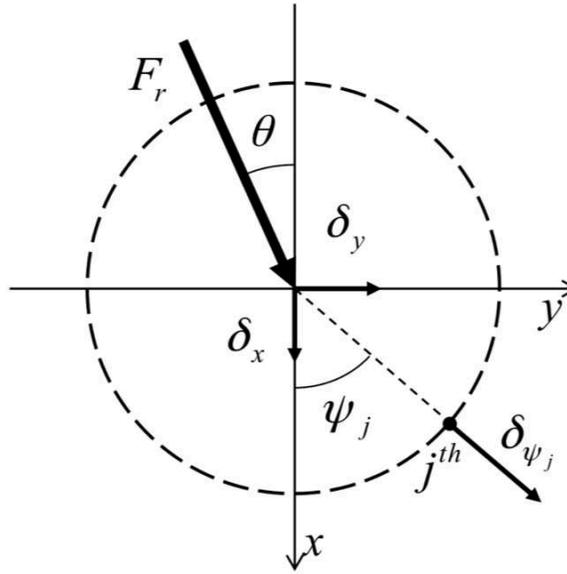


Figura 4.3 – Representação do carregamento do j -ésimo elemento em um modelo geral de mancal de elementos rolantes 2 GDL.

Substituindo os valores de deslocamento da equação 4.5 no sistema de equações 4.6 e isolando as forças restitutivas para cada grau de liberdade, a resposta de força no mancal, dado um deslocamento ao anel interno, pode ser escrita como na equação 4.7.

$$\begin{aligned} F_x &= \Sigma_{j=1}^Z (K_T (\delta_x \cos(\psi_j) + \delta_y \sin(\psi_j) - P_d/2)^{n_T} \cos(\psi_j)) + \Delta F_T \Sigma_{j=1}^Z \cos(\psi_j) \\ F_y &= \Sigma_{j=1}^Z (K_T (\delta_x \cos(\psi_j) + \delta_y \sin(\psi_j) - P_d/2)^{n_T} \sin(\psi_j)) + \Delta F_T \Sigma_{j=1}^Z \sin(\psi_j) \end{aligned} \quad 4.7$$

4.2 Modelo das Forças Dissipativas para um Mancal Lubrificado

Um modelo para porção dissipativa da resposta dinâmica do mancal de elementos rolantes, devida ao amortecimento equivalente nos pontos de contato de cada elemento, pode ser obtido de maneira similar ao equacionamento não linear de rigidez. Neste caso, deve-se obter o valor da velocidade equivalente no contato, isto é, a velocidade radial do ponto no anel interno na posição do elemento. Para tanto, é suficiente derivar a expressão de deslocamento δ_{ψ_j} no tempo, obtendo-se:

$$\dot{\delta}_{\psi_j} = \dot{\delta}_x \cos(\psi_j) - \delta_x \sin(\psi_j)\dot{\psi}_j + \dot{\delta}_y \sin(\psi_j) + \delta_y \cos(\psi_j)\dot{\psi}_j \quad 4.8$$

Não é esperado que ocorram grandes variações da folga radial no tempo, desta forma $dP_d/dt = 0$. Ainda, a posição angular dos elementos é uma função direta da velocidade angular do porta elementos, ω_c . Sendo assim, é possível definir a expressão para a posição angular de um elemento rolante como sendo:

$$\psi_j = \psi_0 + \omega_c t + 2\pi/Z (j - 1) \quad 4.9$$

A posição angular do primeiro elemento, ou elemento de referência, é dada pelo termo constante ψ_0 , que representa a fase do porta elementos. Dada a equação 4.9, a velocidade angular do j -ésimo elemento, $\dot{\psi}_j$, será a velocidade do porta elementos. O amortecimento equivalente no contato é facilmente encontrado pela combinação em série de dois amortecedores, um para o contato interno e um para o contato externo, resultando em:

$$C_T = (1/C_i + 1/C_o)^{-1} \quad 4.10$$

Por fim, a força dissipativa do mancal devida ao amortecimento viscoso nos contatos é obtida de forma similar ao caso das forças restitutivas, através do balanço de forças nas duas

direções. Já introduzindo a expressão da velocidade do contato nas equações de balanço de força, obtêm-se as forças dissipativas como:

$$\begin{aligned} F_{\dot{x}} &= \sum_{j=1}^Z \left(C_T \left(\dot{\delta}_x \cos(\psi_j) + \dot{\delta}_y \sin(\psi_j) + \omega_c (\delta_y \cos(\psi_j) - \delta_x \sin(\psi_j)) \right) \cos(\psi_j) \right) \\ F_{\dot{y}} &= \sum_{j=1}^Z \left(C_T \left(\dot{\delta}_x \cos(\psi_j) + \dot{\delta}_y \sin(\psi_j) + \omega_c (\delta_y \cos(\psi_j) - \delta_x \sin(\psi_j)) \right) \sin(\psi_j) \right) \end{aligned} \quad 4.11$$

4.3 Modelo Dinâmico 2 GDL para um Mancal Radial Lubrificado

Estando definidas as duas porções do modelo dinâmico 2 GDL do mancal de elementos rolantes radial de esferas, a porção restitutiva e a porção dissipativa, através das equações 4.7 e 4.11, como uma função dos deslocamentos e velocidades do anel interno do mancal, $\mathbf{F}_b = f(\delta_x, \delta_y, \dot{\delta}_x, \dot{\delta}_y)$, o vetor de forças geradas no rolamento sob condição de lubrificação EHD pode ser escrito como:

$$\mathbf{F}_b = \begin{Bmatrix} F_x + F_{\dot{x}} \\ F_y + F_{\dot{y}} \end{Bmatrix} \quad 4.12$$

A equação 4.12 é válida apenas para deslocamentos positivos no contato, portanto, para $\delta_{\psi_j} < 0$ a força no contato EHD torna-se nula. É esperado, entretanto, que mesmo para pequenos deslocamentos negativos no contato exista uma força resultante, ou seja, para elementos que estejam elevados da posição tangencial pela sustentação hidrodinâmica gerada no contato. Porém, como a formulação da rigidez não linear do contato lubrificado derivada no capítulo anterior foi definida somente para $\delta_{\psi_j} > 0$, a mesma restrição se aplica neste caso. Esta aproximação pode levar a subestimação do efeito de pré-carga radial gerada pelo filme de óleo em situações de alta velocidade.

O vetor não linear de forças da equação 4.12 define a resposta do mancal variante no tempo e possui uma aplicação direta em problemas de sistemas rotativos avaliados no domínio temporal. Entretanto, para análises no domínio da frequência, baseado nas equações de movimento linearizadas, são necessárias algumas adaptações. Para obter-se uma matriz linear de rigidez do mancal em torno de uma posição de equilíbrio definida, é suficiente derivar o vetor \mathbf{F}_b nas duas direções, resultando nas matrizes da equação 4.13.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\text{lin}} &= \begin{bmatrix} \partial F_{bx} / \partial \delta_x & \partial F_{bx} / \partial \delta_y \\ \partial F_{by} / \partial \delta_x & \partial F_{by} / \partial \delta_y \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{\text{lin}} &= \begin{bmatrix} \partial F_{bx} / \partial \dot{\delta}_x & \partial F_{bx} / \partial \dot{\delta}_y \\ \partial F_{by} / \partial \dot{\delta}_x & \partial F_{by} / \partial \dot{\delta}_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 4.13$$

4.4 Resultados para o Modelo do Mancal Radial Lubrificado

O primeiro resultado diretamente observável da resposta do mancal é a variação de sua posição de equilíbrio devida a presença do filme de óleo. Para obter os novos valores de equilíbrio, um método de busca como Newton-Raphson pode ser utilizado para a diferença $\mathbf{F}_b - \mathbf{F}_r = 0$, de forma a obter os valores de deslocamento δ_x e δ_y , sendo que o mancal se encontra em equilíbrio estacionário, onde $\dot{\delta}_x = \dot{\delta}_y = 0$.

Como o vetor não linear de força no mancal é dependente da posição angular do porta elementos, para $t = 0$ esta posição angular é função apenas do número de elementos. Para a condição de posição simétrica do mancal ($\psi_0 = 0$), a carga radial equivalente aponta para o primeiro elemento, como esquematizado na Figura 4.4.

Resolvendo a diferença $\mathbf{F}_b - \mathbf{F}_r$ para o deslocamento em níveis diferentes de carga radial no mancal, o gráfico da Figura 4.5 é encontrado. O comportamento não linear é claramente

visível na resposta de força por deslocamento obtida. Com o aumento do nível de carga é visível a redução da variação do deslocamento entre as curvas de força constante, assim como para o caso do mancal seco, neste gráfico representado pelos valores em 0 rpm. Existe uma tendência de redução do deslocamento com o aumento da velocidade de rotação do anel interno, para todas as curvas de força constante.

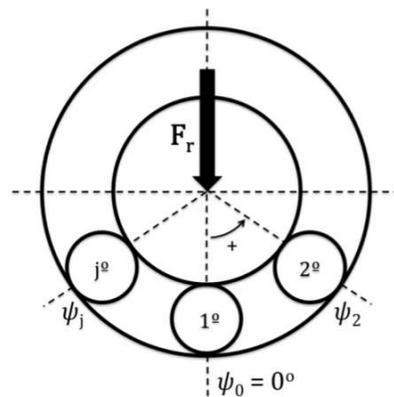


Figura 4.4 – Posição simétrica dos elementos em um mancal radial de esferas de acordo com a direção do carregamento.

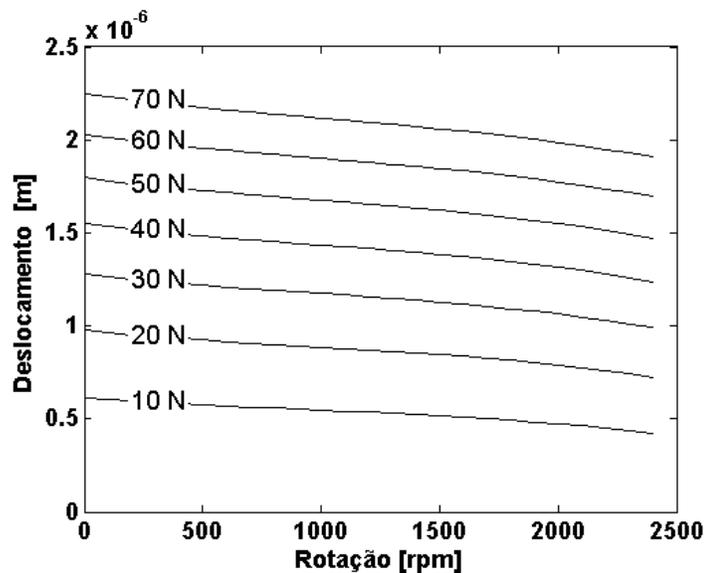


Figura 4.5 – Variação do deslocamento obtido devido a um carregamento puramente radial em um mancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado como função da velocidade do anel interno.

Outra maneira de se avaliar a diferença entre o comportamento do mancal seco e o lubrificado é comparar o valor da rigidez linearizada para um dado ponto de equilíbrio. Da mesma forma que em H.V.Liew (2005), a matriz linearizada de rigidez para o mancal de elementos rolantes deve apresentar um comportamento variante no tempo devido à rotação do porta elementos. A Figura 4.6 mostra a variação dos coeficientes da matriz linear de rigidez sobre um período de $2\pi/(Z \cdot \omega_c)$, ou seja, o período de carregamento de elemento para elemento. Como este período é dependente da velocidade, a rigidez é mostrada em função da posição angular $\psi/(2\pi/Z)$.

A natureza periódica dos coeficientes é claramente apresentada pelos gráficos da Figura 4.6. O coeficiente de rigidez direto K_{xx} e ambos os coeficientes cruzados K_{xy} e K_{yx} tem um comportamento senoidal distinto, entretanto a forma de seno retificado do coeficiente direto K_{yy} , como mostrado por H.V.Liew (2005), aparece um pouco alterado devido ao número ímpar de elementos.

O efeito esperado de aumento da rigidez também é visível. Para os casos analisados existe uma dependência direta entre os valores dos coeficientes lineares da matriz de rigidez e a velocidade do anel interno, variando de 0 Hz, ou contato seco, até 30 Hz. Neste caso, um deslocamento de 2 μm para baixo foi aplicado ao anel interno, resultando em uma força total no mancal de aproximadamente 60 N, para um rolamento tipo 6006 sem folga.

Em aplicação, porém, o mancal normalmente opera sob um carregamento prescrito, ao invés de uma posição de equilíbrio fixa, como observado na análise anterior. Desta forma, é interessante buscar a linearização do mancal não somente para uma posição fixa, mas também para um carregamento constante. Utilizando uma carga radial pura de 40 N e obtendo-se os valores de equilíbrio através do procedimento para obtenção do gráfico na Figura 4.5, os coeficientes da matriz de rigidez apresentam aproximadamente o mesmo comportamento que na

linearização ao redor do equilíbrio. A Figura 4.7 apresenta tais coeficientes para a mesma variação da posição angular da gaiola da Figura 4.6.

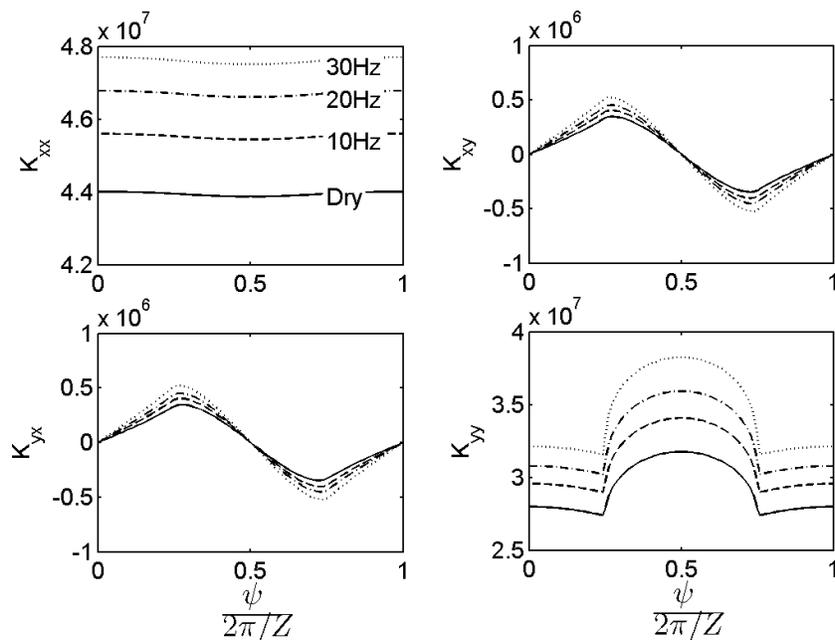


Figura 4.6 – Variação periódica dos coeficientes lineares de rigidez para um mancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado, para um deslocamento de $2 \mu\text{m}$ no equilíbrio, em função da velocidade de rotação do anel interno.

No caso do equilíbrio em torno de um carregamento constante, a alteração do coeficiente direto K_{xx} com o aumento da velocidade de rotação do anel interno é bem mais linear, enquanto o mesmo não ocorre para o coeficiente K_{yy} . Os coeficientes cruzados K_{xy} e K_{yx} apresentam uma variação muito próxima ao caso da linearização em torno do equilíbrio. Dado que esta linearização em torno de um carregamento fixo representa uma linearização para condição de operação, seus resultados podem ser comparados a valores observados para um mancal real em operação.

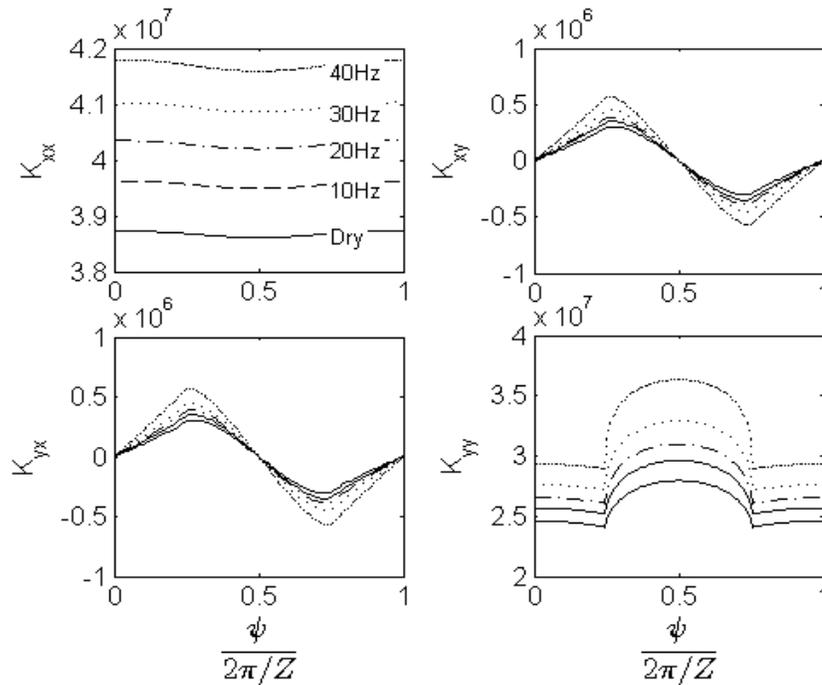


Figura 4.7 – Variação periódica dos coeficientes lineares de rigidez para um amancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado, para uma força constante de 40 N, em função da velocidade de rotação do anel interno.

Contudo, a determinação experimental das características dinâmicas de mancais de elementos rolantes mostra-se uma tarefa complexa. Ali e Garcia (2010) indicam que parâmetros construtivos como pré-cargas axiais e radiais, muito importantes para determinação do nível de carregamento ao qual o mancal está sujeito, não são controláveis uma vez que o sistema esteja montado. Existe também uma parcela contribuinte das interfaces de montagem do mancal, onde a existência de folgas no ajuste entre mancal e carcaça influencia o nível de amortecimento da montagem. Desta forma, a obtenção destes parâmetros depende muito de montagens experimentais dedicadas à análise de mancais, sendo os *designs* dependentes do tipo de rolamento e características a serem observadas. Alguns *designs* e conceitos conhecidos com o intuito de caracterização dinâmica de mancais são listados por Stone (1982), Kraus *et al.* (1987), Dietl *et al.* (2000) e Ali e Garcia (2010).

É possível, porém, observar algumas tendências comuns nos resultados experimentais obtidos entre as várias referências. A primeira verificação possível para os resultados de rigidez do mancal é a comparação entre as amplitudes simulada e experimental. Apesar de não ser possível realizar a comparação direta entre os resultados, a ordem de grandeza dos valores na literatura deve indicar quão próximo ao âmbito real está a variação obtida através da simulação. Em (Ali e Garcia, 2010), para um mancal de contato angular de esferas, com diâmetro interno de 30 mm, rodando entre 150 rpm e 1200 rpm, quando carregado com 500 N os valores obtidos de rigidez ficaram entre 2×10^7 N/m e 4×10^7 N/m, para um óleo lubrificante tipo ISO VG 32. Já para um mancal de menor tamanho, com 10 mm de diâmetro interno, Kraus *et al.* (1987) obteve valores de rigidez na ordem de 6×10^7 N/m a 10×10^7 N/m, para uma variação da pré-carga de 62 N a 377 N. Em ambos os casos a amplitude da rigidez experimental se mostrou próxima ao simulado.

As conclusões de Ali e Garcia (2010) para a influência da velocidade na rigidez obtida, que possui um claro aumento partindo de 750 rpm a 1200 rpm, apontam para uma distribuição desigual de carregamento devida ao aumento da importância da componente de força centrípeta no carregamento de cada elemento, e um possível aumento da pré-carga, devido ao aumento da diferença de temperatura entre os componentes do mancal. Entretanto, não foi apresentada nenhuma avaliação da distribuição de carregamento no rolamento que suporte a hipótese da componente centrífuga, ou ainda, informações sobre a influência do aumento da temperatura dos componentes de interface do mancal, que comumente levam a uma redução da pré-carga do ajuste.

O trabalho de Stone (1982), no entanto, compila resultados de três experimentos diferentes e indica que o aumento da velocidade leva ao aumento da rigidez, comportamento comum aos três casos. Neste caso, atribui-se tal aumento ao possível efeito de enrijecimento do filme de lubrificante e a redução da folga nas interfaces. As investigações do modelo linearizado aqui proposto, indicam que uma parcela do aumento da rigidez com a velocidade de rotação do anel interno deve-se ao aumento da importância efeito hidrodinâmico no contato. Porém, uma

conclusão final para qual dos efeitos listados é o mais importante no aumento da rigidez só pode ser obtida com a expansão do modelo não linear para a rigidez no contato considerando a presença do filme EHD para 5 graus de liberdade.

Para o caso do equilíbrio em condição de operação, pode-se observar também a influência da velocidade de rotação do anel interno no coeficiente linearizado de amortecimento do mancal. Para o caso observado, do mancal radial de esferas carregado radialmente, os coeficientes diretos da matriz de amortecimento linearizada resultam em um mesmo valor, isto é $C_{xx} = C_{yy}$, enquanto C_{xy} e C_{yx} são nulos. Desta forma, o amortecimento linearizado do mancal em operação pode ser entendido como um amortecimento radial e constante para o período $\psi/(2\pi/Z)$.

Na Figura 4.8 é possível observar o comportamento do amortecimento do mancal com a variação da velocidade de rotação do anel interno. Partindo de 600 rpm, o amortecimento linearizado tende a diminuir com o aumento da velocidade. O efeito da redução de amortecimento para apenas um contato já havia sido observado em Nonato (2012b), sendo atribuído principalmente ao fato de que em maiores velocidades o escoamento do fluido lubrificante pela área de contato torna-se dominado pelo termo de *Couette* da equação de Reynolds. Uma vez que a dissipação viscosa ocorre no fluxo induzido pela pressão, ou seja no fluxo dominado pelo termo de *Poiseuille*, o aumento da velocidade deve reduzir a capacidade do filme de dissipar energia.

Ali e Garcia (2010) também atribuem a este efeito a queda no amortecimento obtido experimentalmente para o mancal anteriormente citado. Kraus *et al.* (1987) também indica tal fenômeno como o possível causador da queda no amortecimento com o aumento da velocidade. Entretanto, seus estudos indicam que o aumento da temperatura no mancal pode possuir maior influência sobre o amortecimento, devido à queda da viscosidade e consequente diminuição da dissipação viscosa. É importante destacar que a ponderação entre a importância dos efeitos pode ser investigada utilizando o modelo linearizado aqui proposto, entretanto se faz necessária a correta caracterização do fluido lubrificante para a variação de temperatura desejada.

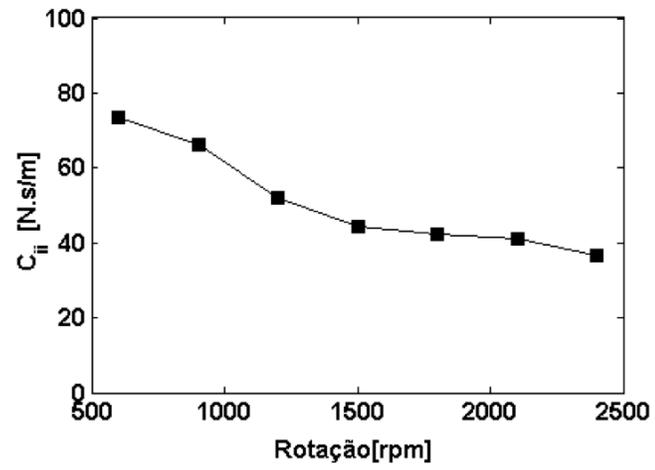


Figura 4.8 – Variação do coeficiente linearizado de amortecimento com a velocidade de rotação do mancal para um amancal radial de esferas tipo 6006 lubrificado.

5 ESTUDO DE CASO

O estudo do comportamento dinâmico do mancal e a derivação de um modelo que caracterize sua resposta têm como objetivo a aplicação em modelagens de sistemas, onde o mancal é apenas um dos componentes do conjunto. Portanto, de posse do modelo não linear de rigidez e amortecimento para o mancal completo, apresentado no Capítulo 4, torna-se possível estudar o comportamento de máquinas rotativas apoiadas sobre mancais de elementos rolantes radiais de esferas, considerando o efeito do meio lubrificante. Este modelo parte da simulação transiente completa do contato EHD e traz consigo, de uma maneira computacional menos onerosa, o comportamento dinâmico do filme de lubrificante para o equilíbrio do mancal e, por consequência, do sistema.

5.1. Rotor Laval Apoiado por Mancais Radiais de Esferas Lubrificadas

O modelo de rotor laval apoiado em mancais flexíveis, como apresentado em Kramer (1993), é uma maneira simples e direta para observar o comportamento do modelo de mancal proposto anteriormente. É considerado um eixo flexível com uma massa concentrada no centro e simetricamente posicionados em suas extremidades estão dois mancais idênticos. Nesta condição, é possível descrever o comportamento da massa concentrada pelos dois graus de liberdades, y_1 e y_2 , que estão acoplados aos graus de liberdade dos mancais, x_1 e x_2 , correspondentes aos deslocamentos δ_y e δ_x do anel interno, pela flexibilidade do eixo. Uma vez que a configuração do rotor é simétrica e os mancais idênticos, ambos podem ser representados pelos mesmos graus de liberdade, como representado na Figura 5.1.

Na configuração proposta, o modelo de Kramer (1993) pode ser descrito para apenas 4 graus de liberdade, simplificando bastante a tratativa do problema. Para o caso avaliado, a massa do rotor é de 1,4 kg e o comprimento total do eixo de 520 mm e 15 mm de diâmetro gera uma rigidez equivalente de $17,82 \times 10^4$ N/m. Nos graus de liberdade dos mancais atuam as forças restitutivas e dissipativas, caracterizadas anteriormente para o mancal 6006, para o intervalo de velocidades de 600 rpm a 2400 rpm.

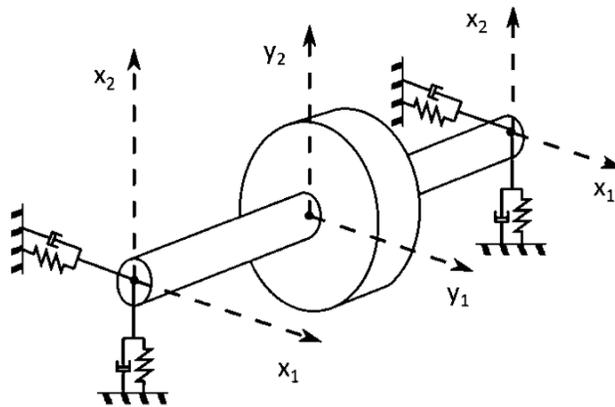


Figura 5.1 – Modelo de 4 GDL para o rotor laval apoiado em mancais flexíveis.

Para este modelo um sistema de equações algébrico-diferenciais (DAE) não lineares pode ser descrito, conforme equação 5.1. m_s , d_s e k_s definem respectivamente a massa, amortecimento externo e rigidez do rotor. O desbalanceamento residual do rotor é de $me = 1,4 \times 10^{-4}$ kg m.

$$\begin{aligned}
 m_s \ddot{y}_1 + d_s \dot{y}_1 + k_s (y_1 - x_1) &= me \Omega^2 \cos(\Omega t) \\
 m_s \ddot{y}_2 + d_s \dot{y}_2 + k_s (y_2 - x_2) &= me \Omega^2 \sin(\Omega t) \\
 k_s (y_1 - x_1) &= 2(F_y + F_{\dot{y}}) \\
 k_s (y_2 - x_2) &= 2(F_x + F_{\dot{x}})
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Para solucionar o sistema de equações proposto para o rotor pode-se utilizar uma implementação comercial de um integrador tipo Runge-Kutta com capacidade de solução para problemas tipo DAE. O resultado direto da integração do problema é o vetor de espaço de estados

contendo os deslocamentos e as velocidades do sistema nos 4 graus de liberdade, $\{x_1, x_2, y_1, y_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2\}$.

Comparando as órbitas dos mancais para os modelos de mancal seco e lubrificado, os efeitos do novo modelo se tornam bastante claros. A Figura 5.2 mostra a variação das órbitas nos rolamentos de suporte do rotor laval com o aumento de velocidade de 900 rpm a 2400 rpm, para os casos de contato seco e lubrificado.

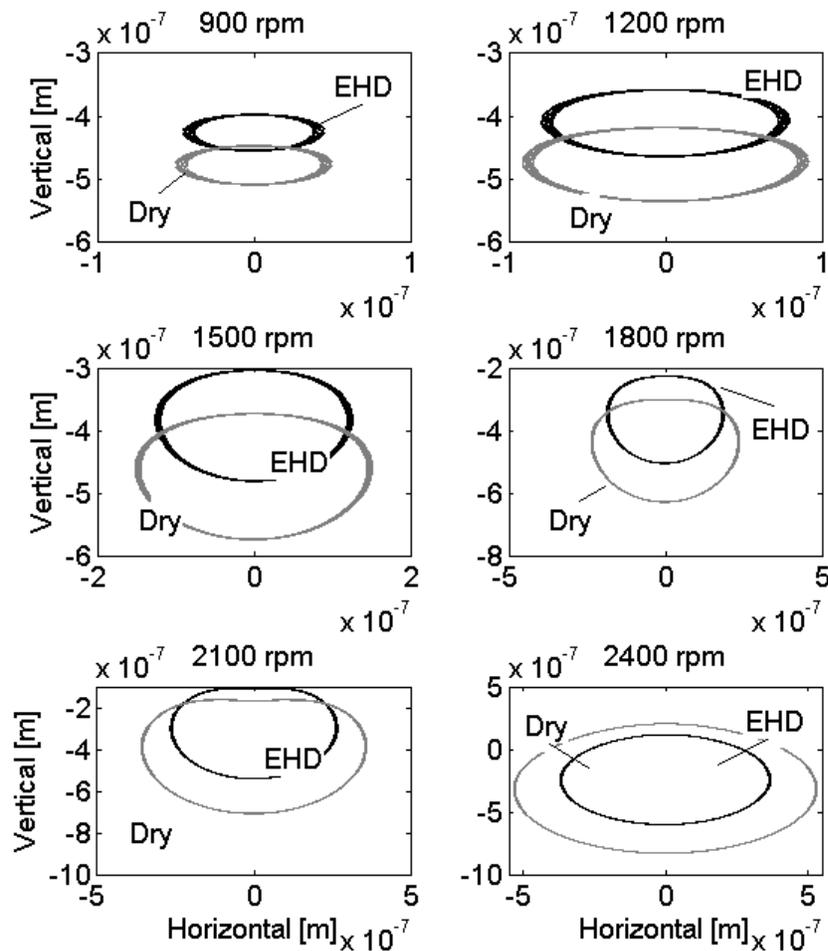


Figura 5.2 – Órbitas para os mancais do rotor laval quando considerando os casos do contato seco e lubrificado, para velocidades de 900 rpm a 2400 rpm, em metros.

As formas das órbitas obtidas para ambos os casos são similares, entretanto, as claras diferenças em amplitude indicam um mancal lubrificado mais amortecido. A diferença total de amplitude entre as órbitas é maior para os casos de maior velocidade. O centro das órbitas do mancal lubrificado está sempre acima das do mancal seco, sugerindo maior rigidez do mancal lubrificado. Observa-se, também, que com a maior contribuição de desbalanceamento os centro das órbitas ficam mais próximos, uma vez que a velocidade crítica do rotor se encontra em aproximadamente 3400 rpm.

Os mancais de elementos rolantes, como intrínsecos excitadores cicloestacionários, possuem uma série de frequências fundamentais geradas durante sua operação. A BPFO (*Ball Passing Frequency of the Outer Ring* – Frequência de Passagem do Elemento no anel Externo), como uma das frequências fundamentais geradas pelo comportamento cicloestacionário, representa a frequência com a qual um elemento passa por um ponto definido na pista externa. Desta forma, o valor do BPFO é dado pela velocidade relativa entre a pista externa e o porta elementos, que pode ser determinada cinematicamente, dadas as características geométricas do rolamento: D_w o diâmetro do elemento e d_M o diâmetro primitivo. Para o rolamento de esferas tipo 6006, rodando a 2100 rpm com o anel externo estacionário, a BPFO é obtida pela expressão na equação 5.2, resultando em 160.8 Hz.

$$BPFO = Z \frac{\pi n_i}{60} (1 - D_w/d_M) \quad 5.2$$

Analisando o conteúdo do sinal no domínio da frequência, para os graus de liberdade dos mancais quando a 2100 rpm, existe uma clara queda em amplitude das respostas nas harmônicas da rotação do eixo, como mostra a Figura 5.3. Tais harmônicas dominam a parte inferior do espectro até a região da 4ª harmônica do BPFO, em aproximadamente 643 Hz, apesar dos claros picos ao entorno da 2ª harmônica do BPFO em 322 Hz.

Entretanto, não é possível obter uma visualização clara da BPFO ou suas exatas harmônicas no espectro da Figura 5.3. Ainda sim, ao entorno da 2ª, 4ª e 6ª harmônicas do BPFO

existe um claro aumento na amplitude de resposta modulada pela velocidade do eixo de 35 Hz, o que indica a presença de tais harmônicas na resposta. Na verdade, o período entre picos do sinal temporal mostra a contribuição de ambas as frequências, como pode ser observado na Figura 5.4. O período de uma rotação do eixo a 2100 rpm é 28,6 ms e a segunda harmônica da BPFO é 3,1 ms.

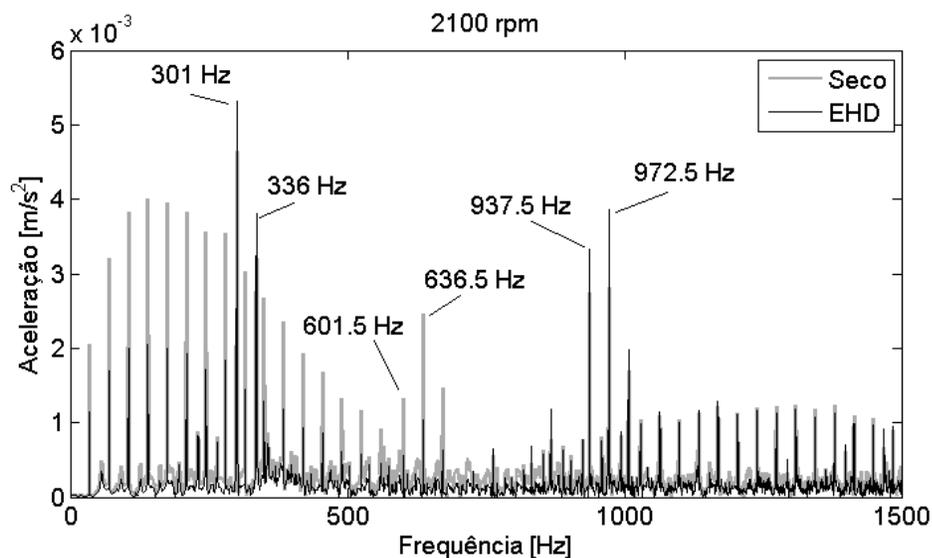


Figura 5.3 – Resposta em frequência para a aceleração combinada das direções vertical e horizontal nos mancais para uma velocidade de 2100 rpm.

Para frequências maiores que a 6ª harmônica do BPFO, 960 Hz, mais uma vez existe uma clara influência do desbalanceamento do rotor, visto que o espaçamento entre picos é exatamente a frequência de rotação do eixo. Devido a diminuição da importância do amortecimento nesta faixa de frequências, as amplitudes dos picos da resposta do mancal seco e lubrificado são próximas. Para a faixa de frequências entre a 4ª e a 6ª harmônica do BPFO não existe uma contribuição clara tanto de harmônicas síncronas ou frequências fundamentais do rolamento.

Comparando os sinais temporais de aceleração para os casos seco e lubrificado, o decréscimo de amplitude é claro, como visto na Figura 5.4. De fato, a amplitude máxima de

pico a pico para a aceleração no mancal lubrificado é aproximadamente $0,0485 \text{ m/s}^2$, enquanto que para o mancal seco o valor é $0,0616 \text{ m/s}^2$, uma queda de 21 %.

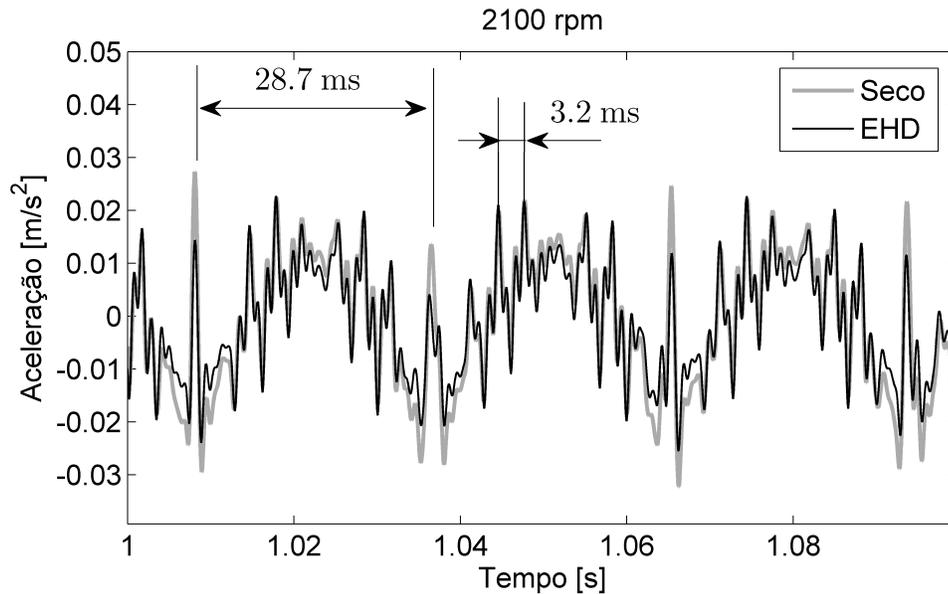


Figura 5.4 – Sinal de aceleração para a direção vertical nos mancais a uma velocidade de 2100 rpm.

Se o desbalanceamento residual for removido do modelo do sistema, os efeitos das frequências fundamentais do rolamento tornam-se mais evidentes, uma vez que a presença de uma carga peso apontando na direção $-y_2$ excita a BPFO, mesmo que nenhum modelo de falha seja incluído ao modelo do rolamento. A resposta em frequência para o rotor laval operando a 2100 rpm balanceado é mostrada na Figura 5.5.

De forma a induzir níveis maiores de excitação das frequências fundamentais, uma força constante de 100 N é introduzida ao sistema, no grau de liberdade da massa, alinhada ao peso do rotor. Similarmente ao observado para o rotor com o efeito do desbalanceamento, existem diferenças de amplitudes em harmônicas específicas da BPFO, quando comparados os casos seco e lubrificado. Isto pode indicar uma provável variação de resposta do sistema, uma vez que a

contribuição de cada modo excitado varia com a condição de lubrificação. Em adição, torna-se claro um pico na frequência natural do rotor, 57 Hz.

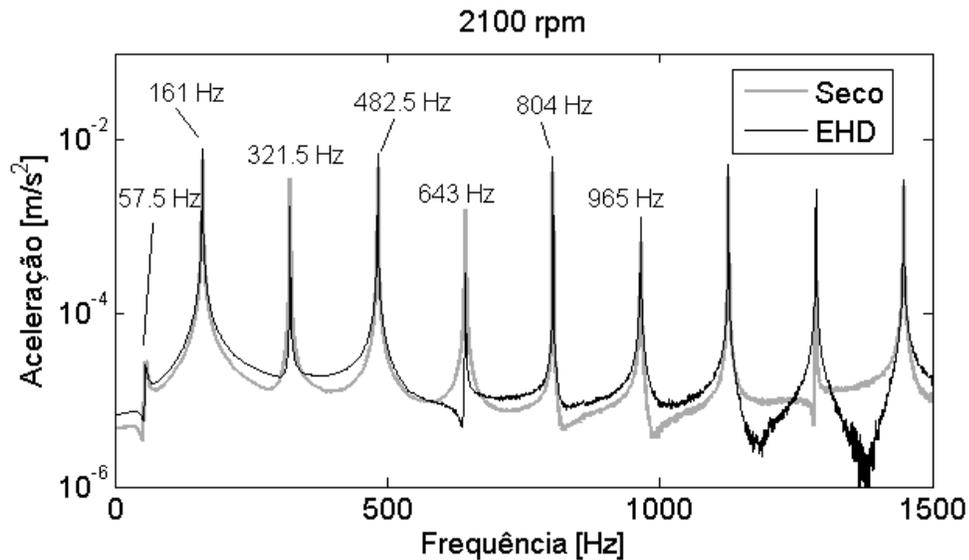


Figura 5.5 – Resposta em frequência para a aceleração das direções vertical e horizontal nos mancais de um rotor balanceado, para uma velocidade de 2100 rpm.

Não obstante, um dos principais efeitos do novo modelo de contato lubrificado sobre a resposta do mancal é a predição de uma alteração da posição de equilíbrio do rolamento com o aumento da velocidade de operação. Para o caso apresentado na Figura 5.5, a variação da posição vertical da órbita do rolamento em função da velocidade do rotor está mostrada no gráfico da Figura 5.6.

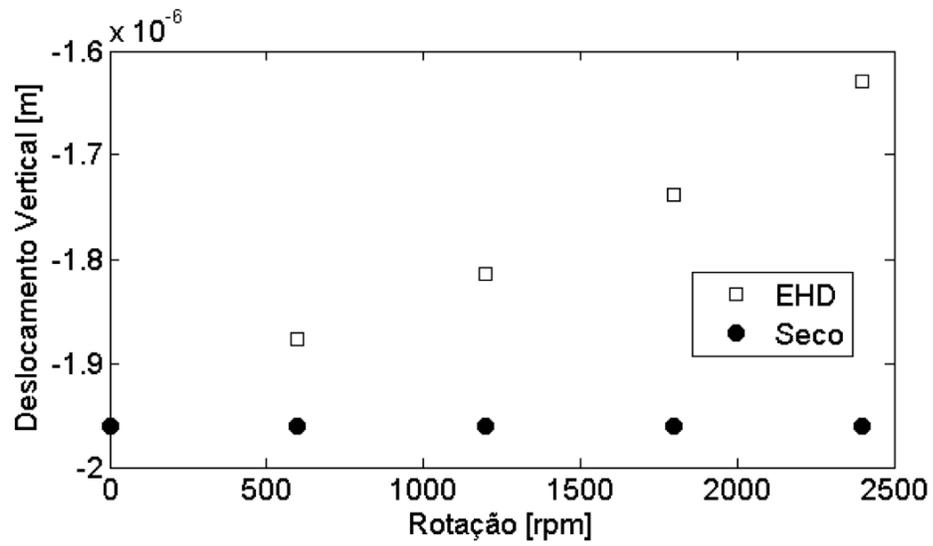


Figura 5.6 – Variação do deslocamento vertical do anel interno de um mancal de elementos rolantes lubrificado aplicado a um rotor laval idealmente balanceado quando sob 100 N de carga radial.

6 ANÁLISE EXPERIMENTAL DE UM ROTOR APOIADO EM ROLAMENTOS LUBRIFICADOS

A fim de verificar experimentalmente o comportamento do mancal de elementos rolantes, uma nova configuração da montagem experimental foi adotada, dentro das possibilidades e recursos atualmente disponíveis no laboratório, a qual permita um certo grau de isolamento dos efeitos do mancal da dinâmica do próprio sistema em uma condição observável de aplicação. Sabe-se que um banco de testes experimentais específicos para mancais de elementos rolantes envolve procedimentos e, por consequência, equipamentos específicos, os quais ainda são objetos de estudo, principalmente para experimentos que envolvam os estudos das influências do lubrificante na dinâmica destes mancais. Desta forma, propõe-se uma montagem de um rotor simples bi-apoiado, baseado no conceito construtivo de Dedini (1993), com a utilização de mancais radiais de esfera lubrificadas a óleo, implementado na bancada de testes de rotores do Laboratório de Máquinas Rotativas da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas. Esta montagem permite observar, mesmo que indiretamente, o comportamento do mancal em situação de aplicação. Desta forma, é feita uma verificação preliminar do modelo proposto para a inclusão dos efeitos do filme EHD ao mancal de elementos rolantes de esferas, comparando-se alguns dos resultados simulados e medidos, sem, contudo, a pretensão de uma validação experimental mais acurada da rigidez e amortecimento presentes no contato esfera-pista, neste momento.

6.1 Montagem da Bancada de Testes

Com base no conceito de bancada para análise de dinâmica de rotores apresentado em Dedini (1993), a implementação de alterações para a inclusão de mancais de elementos rolantes

passa pelo redimensionamento das caixas dos mancais para o ajuste dos mancais escolhidos. Neste experimento, utilizam-se mancais radiais de esferas comerciais tipo 6006, classe C2, com folga radial anterior à montagem entre 2 μm e 5 μm . O ajuste no diâmetro externo deve obedecer as especificações do fabricante, enquanto que no diâmetro interno uma bucha deve ser montada sobre a pista interna dos mancais, de forma a garantir uma pré-carga mínima radial ao rolamento. A montagem final do suporte do mancal está representada na Figura 6.1. As principais características do mancal estão listadas na Tabela 3.1.

Tabela 6.1 – Parâmetros do mancal radial de esferas 6006.

Parâmetro	Valor	Dimensão
Diâm. interno	30,0	mm
Diâm. Externo	55,0	mm
Largura	13,0	mm
Diâm. Primitivo	42,5	mm
Raio Transversal Interno	7,21	mm
Raio Transversal Externo	7,63	%
Diâm. do Elemento Rolante	7,0	mm
Nº de elementos	11	-

Para reduzir a influência da flexibilidade do eixo sobre a resposta do rotor, foi escolhido um eixo de 15 mm de diâmetro e 350 mm de comprimento entre mancais. Devido à impossibilidade física da montagem centralizada do atuador magnético entre os mancais, o qual é utilizado para adicionar carregamentos externos ao eixo, o mesmo foi posicionado a 190 mm do mancal 1, como mostrado na Figura 6.2. Na posição do atuador, é necessária a montagem de uma luva de material magnético, o que implica em um diâmetro do eixo de 40 mm ao longo do comprimento total do atuador.

A rotação do eixo é garantida por um motor de indução AC com rotor tipo gaiola, de velocidade variável, com 2,2 kW de potência. O motor está ligado ao eixo por um acoplamento

elastomérico flexível. A temperatura do óleo em cada mancal é monitorada por termopares tipo T, localizados na posição de saída do lubrificante das pistas.

As caixas dos mancais são apoiadas por uma montagem ortogonal de dois mecanismos de quatro barras, como descrito em Dedini (1993), de forma a desacoplar o suporte nas duas direções transversais ao eixo. Esta configuração possibilita a montagem de células de carga alinhadas com as direções horizontal e vertical, (Y, Z), para o sistema de coordenadas do rotor, descrito na Figura 6.2. Utilizam-se células de carga *Honeywell*, para forças trativas e compressivas de até 50 lbf.

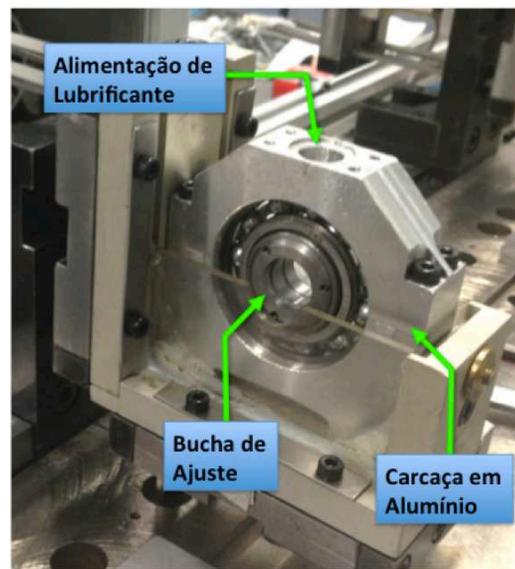


Figura 6.1 – Montagem do pedestal de suporte do mancal de rolamentos.

Monitoram-se também as acelerações da caixa do Mancal 2 através de dois acelerômetros *B&K 4384*, montados vertical e horizontalmente no pedestal. Para observar o comportamento dos deslocamentos nos mancais, dois sensores indutivos *Turck 1533003*, a 90° entre si, foram posicionados a 30 mm do centro geométrico axial do Mancal 2. De forma a realizar eventuais correções nos valores obtidos pelos sensores de deslocamento, foram adicionados mais dois acelerômetros ao suporte dos sensores, também nas direções (Y, Z) para o Mancal 2,

possibilitando a verificação do deslocamento do sensor em si, caso ocorra. Desta forma, o Mancal 2, mais próximo à luva do atuador magnético, encontra-se completamente monitorado, enquanto o Mancal 1 possui apenas sua órbita observada, uma vez que esse sofre maior influência do acoplamento com o motor; conseqüentemente, a escolha do Mancal 2 para o completo monitoramento deve-se ao fato de o Mancal 1 estar mais próximo ao acoplamento do eixo ao motor e, desta maneira, ser mais susceptível às anisotropias de carregamentos geradas pelo acoplamento.

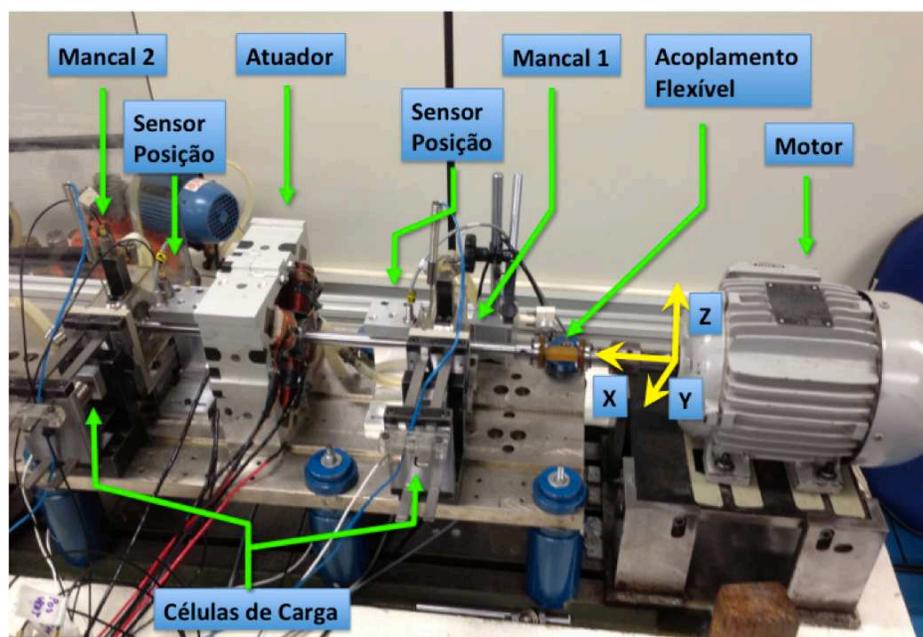


Figura 6.2 – Montagem completa da bancada de rotor.

Os sinais dos acelerômetros foram condicionados por amplificadores *B&K Nexus* e as células de carga através de condicionadores *SENSOTEC GM*. Os sensores indutivos de proximidade possuem condicionamento interno, porém seu sinal, assim como os sinais condicionados de força, passam por um eliminador DC e um filtro analógico passa-baixa com frequência de corte de 2 kHz, antes de serem enviados aos sistema de aquisição. Esta montagem corresponde ao sistema padrão de controle e monitoramento para a bancada.

A aquisição dos sinais é feita por uma placa de aquisição *National Instruments* PCI-6259, com 36 canais analógicos de entrada e quatro de saída, sendo estes últimos utilizados para o controle do atuador. A montagem do atuador magnético bidirecional, utilizada nos experimentos, é a mesma descrita em Mendes (2012), onde uma força eletromagnética pode ser introduzida, proporcional ao campo magnético gerado pelos 4 eletroímãs dispostos em um arranjo em X ao redor do eixo, excitando o rotor sem contato mecânico entre as partes.

6.2 Procedimento Experimental

Propõe-se, então, um experimento para a obtenção de dados experimentais de forma a validar o modelo do mancal de elemento rolantes sob a influência da lubrificação EHD. Realiza-se um teste de monitoramento das órbitas geradas pelo eixo no tempo, quando este é operado em velocidade constante e com uma carga prescrita. Nestas condições, busca-se definir não somente a resposta do rotor, mas também os limites de operação da bancada.

O fluxo constante de lubrificante, suprido por uma bomba a ambos os mancais deve garantir o acúmulo de óleo na metade inferior da pista do mancal, porém seu nível não deve exceder a altura igual ao raio médio de um elemento rolante, uma vez que a operação completamente imersa do rolamento pode gerar outros efeitos de amortecimento não contemplados pelo modelo. A temperatura do óleo lubrificante foi monitorada constantemente durante os testes, entretanto sua variação foi baixa estabilizando-se em aproximadamente 27 °C, em ambos os mancais, dentro da variação de velocidades de operação escolhidas. A temperatura do óleo no tanque encontra-se estável a 25 °C. Estes valores são utilizados para definir a viscosidade em pressão ambiente na caracterização do filme de óleo no mancal.

De forma a garantir uma operação estável dos mancais, sem grandes alterações de suas características durante os testes, um procedimento de *break-in* foi realizado, onde o rotor é

operado a uma velocidade de 40 Hz, ininterruptamente por 5 h, reduzindo a probabilidade de influências da variação da rugosidade original das pistas na resposta do rolamento.

6.3 Modelo Computacional do Rotor

A representatividade de um modelo de parâmetros concentrados para o rotor, como utilizado anteriormente para avaliar o comportamento do mancal de elementos rolantes, utilizando o equacionamento que inclui a influência da lubrificação EHD, é tão restrita quanto a capacidade de identificar os parâmetros em aplicação real. Desta forma, é mais indicado que se utilize um método mais completo na descrição do comportamento do rotor.

Para tanto, emprega-se um modelo de elementos finitos do eixo do rotor, caracterizando sua constituição mecânica e, assim, obtendo-se o modelo dinâmico do eixo. A implementação utilizada neste trabalho para a avaliação do rotor é descrita em (Mendes, 2011) e utiliza as matrizes apresentadas em (Nelson e McVaugh, 1976). A representação do eixo por elementos finitos resulta numa equação matricial para os graus de liberdade dos nós que discretizam a geometria do problema, conforme a equação 6.1.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{q}\} + ([\mathbf{C}] + \Omega[\mathbf{G}])\{\dot{q}\} + [\mathbf{K}]\{q\} = \{\mathbf{F}\}, \quad 6.1$$

onde $[\mathbf{M}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{G}]$, e $[\mathbf{K}]$ são respectivamente as matrizes de massa, de amortecimento, giroscópica e de rigidez do sistema rotativo. O vetor $\{\mathbf{F}\}$ contém as forças externas ao rotor, como a força de desbalanceamento, a força peso e forças externas aplicadas ao rotor. Ω representa a velocidade de rotação do sistema. O amortecimento estrutural do sistema é definido como proporcional à rigidez, neste caso $[\mathbf{C}] = 10^{-4} \cdot [\mathbf{K}]$. Devido a similaridade entre as montagens em (Mendes, 2011) e a aqui proposta, não foi necessário um novo processo de validação e atualização do modelo de elementos finitos para este trabalho.

O vetor $\{q\}$ das coordenadas generalizadas do problema contem os graus de liberdade de cada nó do sistema, sendo assim, uma seção deste vetor para o i -ésimo nó deve conter $\{q\}_i = \{y_i z_i \theta_i \gamma_i\}$. As grandezas (y_i, z_i) representam os graus de liberdade translacionais e (θ_i, γ_i) os graus de liberdade rotacionais em torno dos eixos (Y, Z) , respectivamente no i -ésimo nó.

O modelo não linear do mancal de elementos rolantes, com a influência da lubrificação EHD como proposto, deve ser introduzido na equação de movimento do sistema, descrita na equação 6.1. Para tanto, cada elemento do vetor de forças do mancal \mathbf{F}_b , como na equação 4.12, deve ser adicionado ao vetor de forças externas, nos nós do rotor que representam a posição dos mancais. Assim, os efeitos do mancal de elementos rolantes são introduzidos no modelo como forças externas, dependentes das condições de operação e dos deslocamentos e velocidades do nó no qual este encontra-se posicionado.

O modelo discretizado em elementos, para o rotor do experimento, está mostrado na Figura 6.3. Um total de 26 elementos de viga são utilizados para representar o rotor, sendo seus diâmetros externos definidos pelo diâmetro do eixo físico ou pela luva do atuador e buchas de montagem dos mancais. Os nós 5 e 25 representam o ponto de montagem dos mancais, enquanto os nós 8 e 22 localizam-se na posição de montagem dos sensores de deslocamento, para observação das órbitas. Portanto, todos os resultados a serem comparados com dados experimentais são avaliados nestes nós. O centro da luva do atuador magnético corresponde ao nó 16. Tantas as excitações externas, quanto o desbalanceamento residual do eixo são adicionados a este nó.

Uma vez que as forças de reação nos mancais são monitoradas experimentalmente pelas células de carga, é possível definir com boa precisão qual o nível de carregamento ao qual os mancais estão sujeitos. Equacionando o equilíbrio estático do eixo bi-apoiado, obtém-se o carregamento equivalente transversal, aplicado ao nó 16, que equivale às reações medidas. Partindo destes valores, equaciona-se também o equilíbrio dos momentos no nó 1, em torno dos

eixos (Y, Z) , de forma a obter o momento equivalente à ação do acoplamento flexível. Estas forças são posteriormente utilizadas como entradas no modelo de elementos finitos.

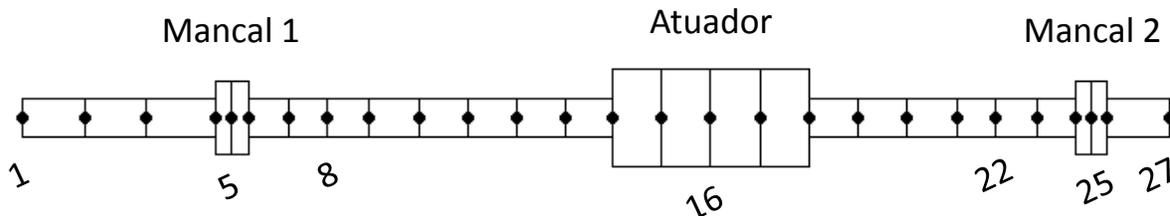


Figura 6.3 – Representação do rotor discretizado por 26 elementos de viga e numeração dos nós observados.

O modelo criado a partir da adição das forças não lineares dos mancais ao vetor de forças externas da equação de movimento do rotor deve ser resolvido no domínio do tempo, uma vez que é necessária a linearização do modelo de forças do mancal, para que se torne possível a solução do problema no domínio da frequência. Para obtenção dos resultados no domínio do tempo, emprega-se, da mesma maneira que anteriormente para o modelo de parâmetros concentrados, um integrador numérico tipo *Runge-Kutta*. Desta forma, as respostas obtidas experimentalmente podem ser comparadas diretamente com os resultados no tempo do modelo e o pós-processamento para o domínio da frequência pode ser feito igualmente para ambos os resultados.

6.4 Resultados do Monitoramento de Órbitas

Para uma carga vertical constante de 40 N aplicada ao Mancal 2, correspondendo a um carregamento total de 67,4 N fornecido pelo atuador, o rotor foi operado de 10 Hz a 50 Hz em

passos de 5 Hz, para a obtenção das órbitas dos mancais em velocidade constante. Cada teste resulta em uma janela de 2 s de dados, sendo formada pela média de 100 aquisições de 2 s de todos os canais observados. A Figura 6.4 traz um exemplo das medidas de deslocamento do eixo, aceleração do pedestal e força vertical no Mancal 2, para o rotor a 40 rps, em um intervalo de 1/4 s.

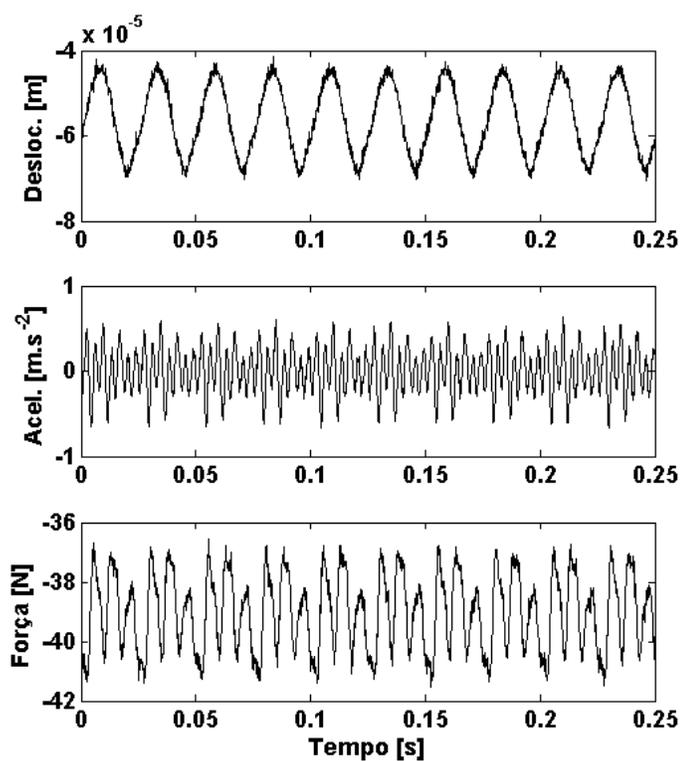


Figura 6.4 – Sinais experimentais de deslocamento do eixo, aceleração do pedestal e força no tempo para a direção vertical do Mancal 2 , com o rotor operando a 40 Hz.

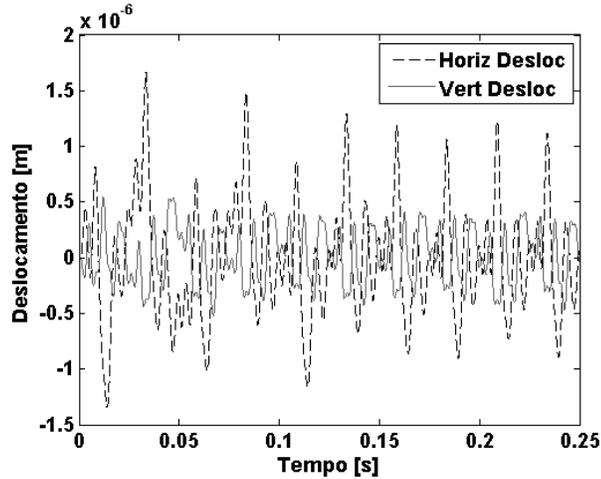


Figura 6.5 – Sinais experimentais de deslocamento do pedestal no tempo para as direções vertical e horizontal do Mancal 2 , com o rotor operando a 40 Hz.

Como previsto, alguma influência da dinâmica dos pedestais deve ser observada. Os sinais de aceleração quando integrados resultam no deslocamento das caixas dos mancais. Estes deslocamentos podem ser vistos no gráfico da Figura 6.5. O conteúdo em frequência dos sinais de aceleração pode ser visto na Figura 6.6. Além da presença clara das harmônicas da frequência de rotação em 40 Hz, aparecem 3 picos distintos em 182,5 Hz, 365 Hz e 547,5 Hz, correspondentes a 1^a, 2^a e 3^a harmônicas do BPFO do mancal, calculada em 183,8 Hz.

A existência de picos representativos das frequências fundamentais do rolamento é um indicador da correta operação do mesmo. Apesar de o carregamento radial estar consideravelmente abaixo da capacidade de carga do mancal, a pré-carga aplicada é suficiente para garantir que os elementos rolem e arrastem a gaiola como previsto cinematicamente.

O sinal de deslocamento, entretanto, apresenta uma clara dominância da frequência de rotação. Na Figura 6.4, o deslocamento obtido possui uma característica senoidal distinta, com período de 0,025 s, correspondendo à frequência de rotação em 40 Hz. Apesar do esperado efeito do desbalanceamento residual refletir em um comportamento similar ao da resposta observada, o

fato de esta resultar em uma amplitude de aproximadamente 30 μm na vizinhança do rolamento pré-carregado indica a presença de um empenamento do eixo.

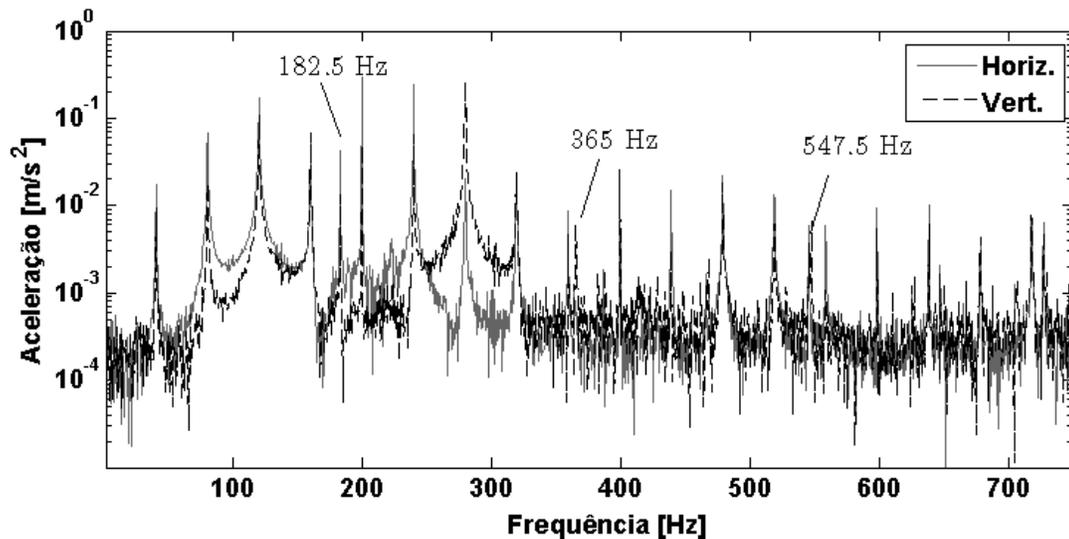


Figura 6.6 – Sinais de aceleração do pedestal nas direções vertical e horizontal no domínio da frequência para o Mancal 2, com o rotor operando a 40 Hz.

Para verificar a presença de um empenamento local, utilizam-se dois procedimentos de medida. Primeiramente, com um relógio comparador posicionado junto ao sensor de deslocamento, observa-se tanto a variação vertical quanto horizontal da posição do eixo, indicando um movimento orbital de 0,04 mm. Em seguida, com uma velocidade de 1 Hz e sem a aplicação de um carregamento, faz-se a média do sinal de deslocamento, aquisitado por 20 s, para dois períodos de rotação. A Figura 6.7 mostra a órbita obtida.

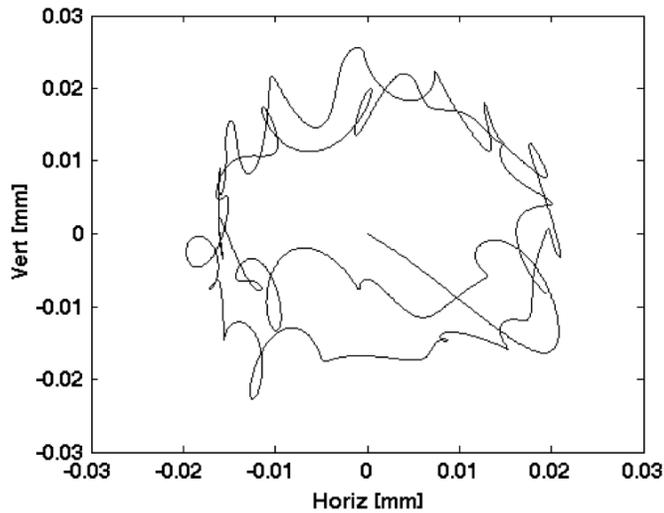


Figura 6.7 – Órbita média obtida para o Mancal 2 , com o rotor operando a 1 Hz sem carga, para um período de 2 s.

Na condição de operação da Figura 6.7 não são esperados efeitos do desbalanceamento ou dos mancais na resposta de deslocamento do eixo, portanto o resultado da órbita obtida corrobora a hipótese de um empenamento do eixo na posição do sensor do Mancal 2. A amplitude observada se encontra próxima da medida através do relógio comparador.

Apesar da presença do empenamento no eixo, a operação do rotor não se torna prejudicada, no entanto, devido ao fato de a órbita esperada para o mancal ser bem menor que a amplitude do empenamento, este pode vir a afetar a comparação dos resultados.

De forma a incluir os possíveis efeitos da vibração dos pedestais à dinâmica do eixo simulado, as variações das forças medidas nos mancais em torno da média, como apresentado na Figura 6.4, são interpoladas e adicionadas como carregamento externo ao eixo, de forma que as forças de reação do modelo não linear do rolamento, incluindo os efeitos do filme EHD, sejam similares às observadas na bancada, possibilitando assim uma comparação mais direta entre as respostas.

A primeira comparação a ser feita entre os resultados simulados e as medições deve ser entre as órbitas medidas e as simuladas para o nó 22. A Figura 6.8 mostra as órbitas obtidas para o mancal monitorado experimentalmente e o simulado. Fica evidente que, nos resultados experimentais, a importância do empenamento nas medidas das órbitas é muito grande. Enquanto para o caso simulado, observa-se um certo desdobramento das órbitas, isto é, a presença de componentes harmônicos da frequência de rotação importantes na resposta temporal, para o caso experimental a resposta é dominada pela frequência de rotação. É importante salientar que, apesar da presença do empenamento influenciar a comparação dos resultados, a operação do rotor não é comprometida devido à sua reduzida dimensão. Portanto, em aplicação real, esta condição pode ser aceitável.

As comparações apresentadas na Figura 6.8 são visivelmente inconclusivas, devido ao efeito predominante do empenamento do eixo, além do desbalanceamento residual inerente ao sistema rotativo. Assim sendo, para melhor comparar os resultados experimentais e simulados, é possível confrontar o conteúdo em frequência dos sinais de deslocamento. A Figura 6.9 apresenta comparação dos sinais de deslocamento vertical, simulado e experimental, no domínio da frequência, para rotação de 40 Hz. É clara a diferença em amplitudes em baixas frequências entre os sinais, apesar de ambos apresentarem as contribuições das harmônicas da velocidade de rotação.

A Figura 6.10 apresenta a mesma comparação para a velocidade de rotação de 30 rps. Neste caso, fica ainda mais evidente a adequada representação do comportamento da resposta do rotor para frequências acima da segunda harmônica da velocidade de rotação, porém o efeito do empenamento é, mesmo assim, observável em baixas frequências. Para esta velocidade é possível ainda verificar um pico em 137 Hz para ambas as respostas, correspondendo ao BPFO para o rolamento operando a 30 rps.

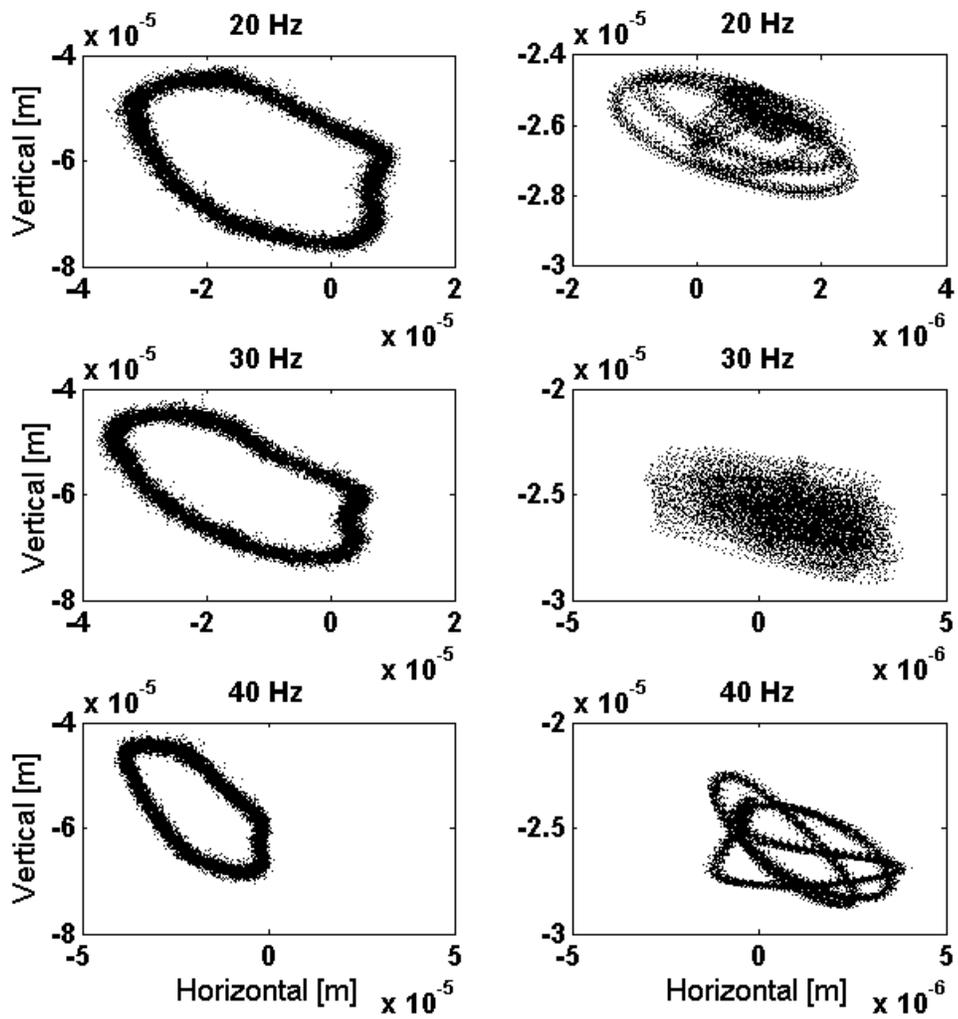


Figura 6.8 – Comparação entre órbitas experimentais (esquerda) e simuladas (direita) para o Mancal 2 , com rotor operando entre 20 rps e 40 rps com carga constante de 67 N.

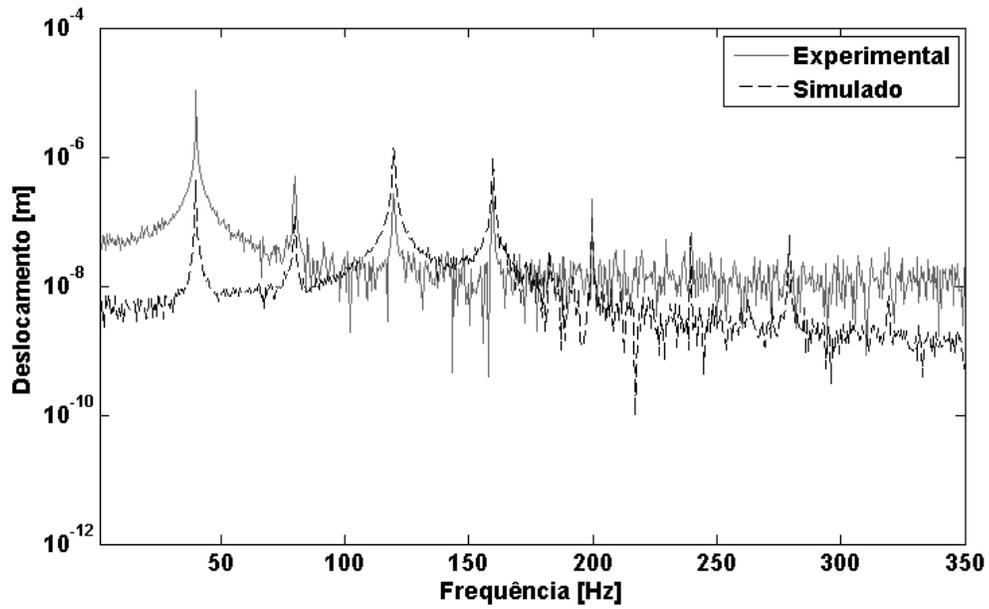


Figura 6.9 – Espectro em frequência na direção vertical para o Manca 2 , com o rotor operando a 40 Hz.

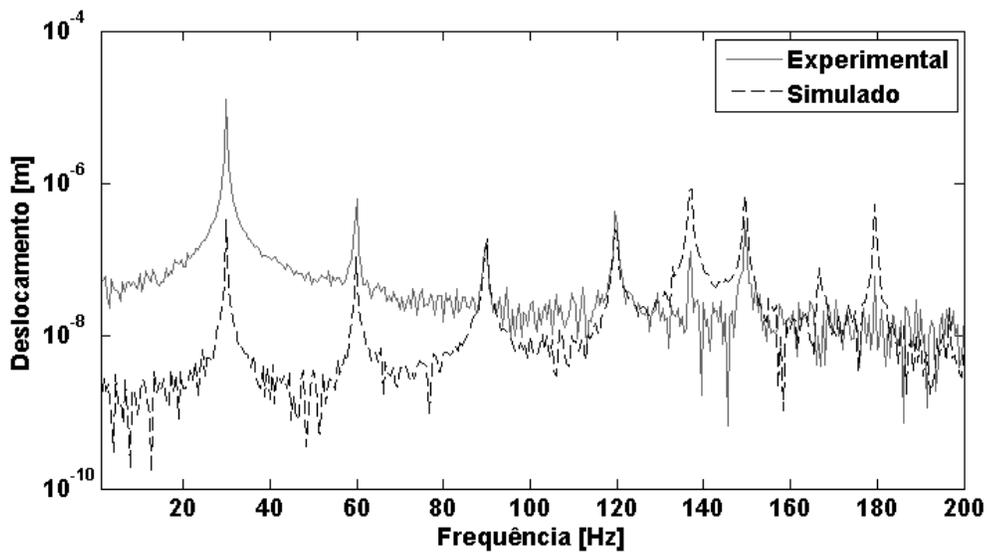


Figura 6.10 – Espectro em frequência na direção vertical para o Manca 2 , com o rotor operando a 30 Hz.

Uma maneira, portanto, de melhor comparar os resultados das órbitas é observando-as utilizando um filtro passa alta, com frequência de corte acima da frequência de rotação, para que se reduza a influência do empenamento. Na Figura 6.11 encontram-se as órbitas simuladas e experimentais, para os mesmos casos observados na Figura 6.8, porém tratadas com um filtro passa alta tipo *Butterworth* de nona ordem. As frequências de corte dependem da velocidade de rotação de cada caso e o mesmo filtro é aplicado aos resultados experimentais e simulados.

Após a utilização dos filtros, para minimizar o efeito do empenamento do eixo sobre a resposta do sistema, é possível observar que as órbitas obtidas pelo modelo de elementos finitos apresentam certa similaridade às órbitas medidas, principalmente para os casos de frequência de rotação em 30 Hz e 40 Hz. A amplitude das órbitas observadas são próximas as simuladas e o comportamento de desdobramento é coerente.

Um segundo método de investigação explorado busca entender a resposta em frequência do rotor, de forma a estimar os fatores de amortecimento relacionados a cada modo. Para tanto, utiliza-se o atuador magnético como fonte de excitação harmônica externa e observam-se as respostas tanto das órbitas, quanto da aceleração do pedestal de suporte do mancal. Define-se a direção vertical como preferencial para a aplicação da carga, desta forma, o sistema pode ser melhor aproximado por um modelo SISO, onde a entrada se caracteriza pela força aplicada pelo atuador e a saída pode ser definida como o deslocamento do eixo ou a aceleração vertical do pedestal.

Entretanto, devido à influência de fatores externos ao sistema composto pelo eixo e os mancais, não foi possível utilizar as respostas em frequência obtidas experimentalmente para verificação indireta do modelo de amortecimento proposto para os mancais. Os resultados desta investigação encontram-se no Apêndice B.

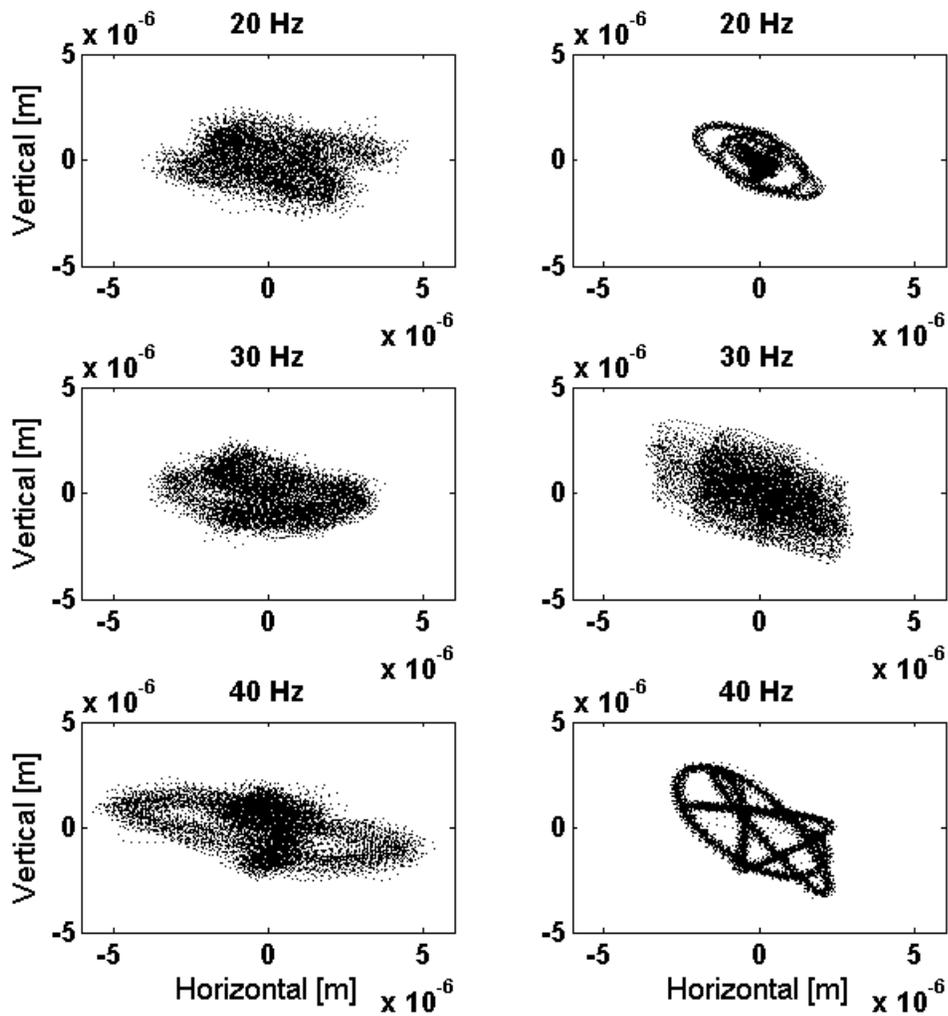


Figura 6.11 – Comparação entre órbitas experimentais (esquerda) e simuladas (direita) para o Mancal 2 , com rotor operando entre 20 Hz e 40 Hz com carga constante de 67 N.

7 CONCLUSÕES

Através deste trabalho, uma nova proposta para a inclusão dos efeitos do contato elastohidrodinâmico em mancais de elementos rolantes radiais de esferas é apresentada. Baseando-se na premissa principal de um comportamento não linear das forças restitutivas e de um comportamento linear viscoso do amortecimento no contato pontual lubrificado, presente nestes mancais, um modelo simples e abrangente foi introduzido, fundamentado na simulação dinâmica completa dos contatos EHD e resultando em um modelo de pouca complexidade para representar o mancal completo, tendo como foco principal a análise de sistemas rotativos.

O desenvolvimento do modelo para a dinâmica do contato tomou como base a implementação do algoritmo Multi-Níveis para análise transiente de contatos elastohidrodinâmicos proposta em Nonato (2009). Desta forma, a validade dos resultados deste algoritmo foi verificada pela comparação com dados experimentais e simulados presentes na literatura. A variação encontrada entre a espessura central de filme calculada e aquela determinada experimentalmente foi de 3 %, e de 20 % para a espessura mínima. Estes valores condizem com o grau de precisão de outras implementações do mesmo método de análise de contatos EHD.

Baseado nas investigações de Nonato e Cavalca (2012a) para a linearização do contato EHD, foi possível observar o comportamento geral dos contatos lubrificados em mancais de elementos rolantes de esfera. Torna-se claro o comportamento não linear das forças restitutivas nestes contatos, possibilitando a descrição destes através de uma relação de natureza potencial, independentemente da carga aplicada, para toda a variação de carga por elemento dentro do mancal.

Para os casos observados, os resultados de deslocamento previstos pelo modelo proposto se mostraram próximos aos valores simulados pelo equacionamento dinâmico EHD completo,

como apresentado em Nonato (2009). A medida do desvio pelo coeficiente de determinação do modelo ajustado para os valores simulados pelo modelo EHD completo foi encontrada da ordem de $1 - R^2 \approx 1 \times 10^{-6}$. Desta maneira, a forma proposta para o comportamento não linear mostra-se viável para representação direta do equilíbrio estacionário no contato. A aproximação viscosa do amortecimento, entretanto, revela-se menos precisa, uma vez que um comportamento histerético foi observado. Contudo, esta hipótese se mostrou válida para os casos dinâmicos simulados. Por fim, o ajuste da formulação final proposta apresentou um grau satisfatório de precisão quando comparadas tanto as respostas harmônicas forçadas, quanto as transientes no contato. Nestes casos, o coeficiente de determinação da comparação entre o modelo proposto, de rigidez não linear e amortecimento viscoso, e os resultados simulados pelo modelo EHD completo esteve entre $R^2 = 0,987$ e $R^2 = 0,997$. Comparou-se também o ajuste aos resultados da validação do contato circular, neste caso, o coeficiente de determinação chegou a $R^2 = 0,998$, para comparação entre o deslocamento previsto pelo modelo proposto e o obtido para a simulação do modelo completo EHD.

Sendo a forma proposta para aproximação dinâmica do contato EHD similar ao caso do contato Hertziano, o modelo proposto para o mancal completo é derivado diretamente da aproximação clássica em dois graus de liberdade para mancais com contato seco. Desta forma, sua aplicação a problemas já conhecidos é uma maneira direta de introduzir efeitos até então desconsiderados, como o enrijecimento devido ao filme lubrificante, em função da velocidade de operação, e o amortecimento equivalente por contato. Características estas observadas durante a análise e caracterização deste tipo de contato.

Algumas características do modelo completo de mancal lubrificado também puderam ser investigadas, o efeito de enrijecimento observado no contato simples reflete em um comportamento similar do mancal quando sob a ação de um deslocamento radial constante imposto. Definindo-se uma posição de trabalho para o mancal, a linearização da matriz de rigidez mostra claramente que deve existir um efeito da velocidade sobre a rigidez do mancal, uma vez considerado o filme de óleo.

A linearização das características dinâmicas do mancal para o modelo de 2 graus de liberdade resultou em valores de rigidez próximos aos encontradas em trabalhos experimentais presentes na literatura, em torno de 10^7 N/m. Não somente a amplitude, mas também o comportamento geral em relação a variações dos parâmetros de operação, como a velocidade, gerando o enrijecimento do mancal devido ao efeito de sustentação hidrodinâmico. Para o caso observado de linearização em condições de aplicação a variação da rigidez direta foi da ordem de 8 %.

Quando utilizado o modelo derivado do mancal de elementos rolantes lubrificado em um sistema rotativo simples, pode-se comparar os efeitos da inclusão da dinâmica normal do filme de óleo no equilíbrio do mancal. Inicialmente, os efeitos do filme EHD sobre o *locus* das órbitas dos mancais é observado, deixando claro, mais uma vez, os efeitos do enrijecimento, indicados pela diferença também em amplitude destas órbitas. Já no domínio da frequência, o amortecimento de algumas faixas de frequência é observável.

Uma comparação entre a posição de equilíbrio vertical do mancal, quando considerando os efeitos de lubrificação, e em condição seca, para a faixa de velocidades simulada, mostra que para um mancal com suficiente fluxo de lubrificante espera-se uma alteração no deslocamento do anel interno com o aumento da velocidade de rotação. No caso observado esta variação é da ordem de 15 %.

Por fim, a utilização da bancada experimental para a verificação do modelo proposto mostrou-se suficiente na observação da coerência entre as órbitas obtidas pela simulação de um rotor flexível por elementos finitos e sua correspondente montagem física. Para as órbitas medidas nas proximidades dos mancais na bancada, a comparação com o modelo computacional do rotor, que inclui o equacionamento não linear do mancal de elementos rolantes lubrificado aqui proposto, foi possível apenas para frequências acima daquela de rotação, uma vez que um empenamento residual do eixo foi identificado na posição de medição durante os testes.

Não obstante, a presença de tal empenamento não apresentou influência significativa na correta operação da máquina rotativa. Portanto, observando o conteúdo de frequência dos sinais de deslocamento vertical medidos e os resultados para o modelo de elementos finitos, fora da região de influência do empenamento, encontra-se uma concordância entre as respostas. Ainda, com a utilização de um filtro tipo passa-alta, os resultados das órbitas para três frequências de rotação distintas puderam ser comparados, indicando uma adequada representação das componentes de maior frequência pelo modelo. Não somente as amplitudes das órbitas são similares, quando ambos os resultados são processados pelo mesmo filtro, mas também o comportamento geral dos desdobramentos são semelhantes.

Com base nestas observações, conclui-se que o modelo não linear proposto para o mancal de elementos rolantes radial de esferas, sob influência da lubrificação elastohidrodinâmica, é promissor para descrever o comportamento destes componentes quando em aplicação. Todavia, a completa validação do modelo dinâmico equivalente do contato lubrificado, ou de sua aplicação a modelagem de mancais de elementos rolantes, ainda se encontra em aberto, uma vez que a observação experimental dos efeitos do lubrificante sobre a dinâmica normal do contato ainda caracteriza-se como fronteira do conhecimento, principalmente quando observados sob as condições de carregamento encontradas nestes mancais.

7.1 Sugestões para Futuros Trabalhos

A principal extensão do modelo aqui proposto é sua aplicação a um modelo de 5 graus de liberdade do mancal de rolamentos. Sua derivação não se distancia das deduções dos modelos hoje existentes na literatura, entretanto deve-se atentar para o fato de que o equilíbrio de cada esfera altera o ângulo de contato em relação as pistas internas e externa, efeito este que impacta sobre a caracterização do filme de lubrificante. Portanto, um estudo sobre as variações dos

parâmetros importantes para a descrição do contato lubrificado, em um mancal de elementos rolantes de contato angular, é o ponto de partida para derivação do modelo EHD 5 GDL.

Não somente o modelo 5 GDL é uma expansão do modelo aqui proposto, como também caracteriza uma maneira mais precisa de se representar o mancal de elementos rolantes de esferas em aplicação. Mesmo para os mancais radiais de esferas, a presença de carregamentos axiais, ou momentos, geram uma variação do ângulo de contato entre elementos e pista. Assim, mesmo que a aproximação de 2 GDL seja suficiente para a observação das principais características destes, o equilíbrio completo para todos os graus de liberdade só é possível com a devida expansão. Portanto, um caminho para melhor descrever o modelo computacional e aumentar a possibilidade de uma validação bem sucedida, mesmo que em uma bancada dedicada à caracterização de mancais, é através da introdução dos graus de liberdade axial e rotacionais ao modelo.

A avaliação de contatos não pontuais também é um passo importante seguindo a caracterização dos contatos EHD. O modelo aqui proposto é válido apenas para o contato elíptico, e, por consequência, ao caso especial de contato pontual, porém o mecanismo de lubrificação EHD também está presente em mancais de elementos de rolos. Existe, portanto, a possibilidade da verificação da aplicabilidade de um modelo similar neste caso, com o intuito final de, também, propor um novo modelo para o equilíbrio dinâmico de mancais de rolos.

Por fim, a aplicação imediata do modelo de mancal lubrificado construído neste trabalho é o estudo da influência do filme de fluido sobre o comportamento de um sistema rotor-mancais. Para investigação das vibrações laterais de um rotor apoiado por mancais de esferas lubrificadas o modelo 2 GDL é suficiente. Entretanto, sendo estes mancais suscetíveis a carregamentos axiais e de momento, a expansão para 5 GDL aprimora a representação da máquina rotativa real.

REFERÊNCIAS

ALI, N.J., GARCIA, J.M., Experimental studies on the dynamic characteristics of rolling element bearings, **Proc. IMechE Part J: J. Engineering Tribology**, v.224, p.659-666, 2010

CAVALCA, Katia Lucchesi, L'Interazione tra rotori e struttura portante: metodologie per la sua modellazione, 1993, Tese (Doutorado), Politecnico di Milano, Itália.

CAVALCA, K.L., CAVALCANTE, P.F., OKABE, E.P., An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system, **Mechanical System and Signal Processing**, v.19, n.1, p.157-174, 2005

CHITTENDEN, R.T., DOWSON, D., DUNN, J.F., TAYLOR, C.M., A Theoretical Analysis of Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Concentrated Contacts, Part I: Direction of Lubricant Entrainment Coincident with the Major Axis of the Hertzian Contact Ellipse, **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Science**, v.397, p.245-269, 1985.

CLOUD, Charles Hunter, Stability of Rotors Supported by Tilting Pad Journal Bearings, 2007, Tese (Doutorado), University of Virginia, EUA.

DEDINI, Franco Giuseppe, Identificazione dei cuscinetti e della fondazione di rotori: metodologie e risultati sperimentali, 1993, Tese (Doutorado), Politecnico di Milano, Itália.

DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG. **DIN 625-1:2011-04 (E)**: Rolling bearings – Radial deep groove ball bearings – Part 1: Single row. Berlin, 2011. 20p.

DIETL, P. WENSING, J., NIJEN, G.C., Rolling bearing damping for dynamic analysis of multi-body systems—experimental and theoretical results, **Proc. IMechE Part K: J. Multi-Body Dynamics**, v.214, p.33-43, 2000

DOWSON, D., HIGGINSON, G. R., Elasto-hydrodynamic Lubrication – SI Edition, London: Pergamon Press, 1^a ed.,1977.

FOORD, C.A., WEDEVEN, L.D., WESTLAKE, F.J., CAMERON, A., Optical Elastohydrodynamics, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, v.148, p.487-505, 1969.

FUKATA S., GAD E.H., KONDOU T., On the Radial Vibration of Ball Bearings. **Bulletin of JSME**, v.28, p.899–904, 1985.

GOODYER C.E., Adaptive Numerical Methods for Elastohydrodynamic Lubrication, 2001, Tese (Doutorado), University of Leeds, UK.

HAMROCK, BERNARD. J., Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts, 1976, Tese(Doutorado) University of Leeds, UK.

HARRIS, T.A., KOTZALAS, M. **Essential Concepts of Bearing Technology**, New York, CRC/Taylor&Francis, 5^a ed, 2006.

HARSHA S.P., Nonlinear dynamic analysis of a high-speed rotor supported by rolling element bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v.290, p.65–100, 2006a.

HARSHA S.P., Nonlinear dynamic response of a balanced rotor supported by rolling element bearings due to radial internal clearance effect. **Mechanism and Machine Theory**, v.41, p.688–706, 2006b.

HARSHA S.P., SANDEEP K., PRAKASH R., Non-linear dynamic behaviors of rolling element bearings due to surface waviness. **Journal of Sound and Vibration**, v.272, p.557–580, 2004.

HERTZ H., Über die Berührung fester elastischer Körper. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v.92, p.156–171, 1881.

JONES A.B., A General Theory for Elastically Constrained Ball and Radial Roller Bearings under Arbitrary Load and Speed Conditions. **J. Fluids Eng.**, v.82, n.2, p.309–320, 1960.

KRAMER E., **Dynamics of rotors and foundations**. New York: Springer-Verlag. , 1993, 381p.

KRAUS, J., BLECH, J.J., BRAUN,S.G., In Situ Determination of Rolling Bearing Stiffness and Damping by Modal Analysis, **J. Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**, v.109, p.235-240, 1987.

LARSSON, R., LARSSON, P. O., ERIKSSON, E., SJÖBERG, M., HÖGLUNG, E., Lubricant properties for input to hydrodynamic and elastohydrodynamic lubrication analyses, In:IMEchE 2000, **Proceedings Instn. Mech. Engrs.**, vol 214,(J), pp. 17-27, 2000.

LIEW A., FENG N., HAHN E.J., Transient Rotordynamic Modeling of Rolling Element Bearing Systems. **Journal of Engineering for Gas Turbines and Power**, v.124, p.984–991, 2002.

LIEW H.V., LIM T.C., Analysis of time-varying rolling element bearing characteristics. **Journal of Sound and Vibration**, v.283, p.1163–1179, 2005.

LIM T.C., SINGH R., Vibration Transmission Through Rolling Element Bearings, Part I: Bearing Stiffness Formulation. **Journal of Sound and Vibration**, v.139, p.179–199 1990a.

LIM T.C., SINGH R., Vibration Transmission Through Rolling Element Bearings, Part II: Systema Studies. **Journal of Sound and Vibration**, v.139, p.201–225, 1990b.

LIM T.C., SINGH R., Vibration Transmission Through Rolling Element Bearings, Part III: Geared Rotor System Studies. **Journal of Sound and Vibration**, v.151, p.31–54, 1991.

LIM T.C., SINGH R., Vibration Transmission Through Rolling Element Bearings, Part IV: Statistical Energy Analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v.153, p.37–50, 1992.

LIM T.C., SINGH R., Letters to the Editor - Vibration Transmission Through Rolling Element Bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v.169, p.547–553, 1994.

LUNDBERG G., PALMGREN A., Dynamic Capacity of Rolling Bearings. **Acta Polytechnica** v.1, n.3, 1947.

LUBRECHT AA, TEN NAPEL WE, BOSMA R. Multigrid, an alternative method for calculating film thickness and pressure profile in elastohydrodynamically lubricated line contacts. **J. Tribol-T ASME**, v.108 p.28-34, 1986.

MENDES, R., FERREIRA, L., CAVALCA, K., Analysis of a complete model of rotating machinery excited by magnetic actuator system. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers , Part C: Journal of Mechanical Engineering Science**, v.227, pp.48-64, 2012.

MOES H., Optimum similarity analysis with applications lubrication to elastohydrodynamic. **Wear**, v.159, p.57–66, 1992.

NELSON, H., A finite rotating shaft elemento using timoshenko beam theory. **Journal of Mechanical Design**, v.102, p.793-803, 1980.

NONATO, F., Modelo Dinâmico para o Contato em Mancais de Elementos Rolantes Sujeito à Lubrificação Elastohidrodinâmica, 2009, Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

NONATO F., CAVALCA K., On the non-linear dynamic behavior of elastohydrodynamic lubricated point contact. **Journal of Sound and Vibration**, v.329, p.4656–4671, 2010a.

NONATO, F., CAVALCA, K., "Transient Multi-Level Elastohydrodynamic Point Contact Algorithm Experimental Validation," **SAE Technical Paper**, n.2010-36-0088, 2010b

NONATO F., CAVALCA, K. Local Linear Approximation for the Stiffness Characteristics of Elastohydrodynamic Point Contact. In:10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, pp. 513-523, 2012a.

NONATO F., CAVALCA, K. Investigation on the Damping Characteristics of Elastohydrodynamic Lubricated Point Contacts under Dynamic Loading. In:10th International Conference on Vibrations in Rotating Machinery, **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, pp. 503-512, 2012b.

SARANGI M., MAJUMDAR B.C., SEKHAR A.S., Stiffness and damping characteristics of lubricated ball bearings considering the surface roughness effect. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers , Part J: Journal of Engineering Tribology**, v.218, p.529–538, 2004.

SAWALHI N., RANDALL R.B., Simulating gear and bearing interactions in the presence of faults Part I. The combined gear bearing dynamic model and the simulation of localised bearing faults. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v.22, p.1924–1951, 2008.

SHIMIZU H., TAMURA H., Vibration of Rotor Based on Ball Bearing (1st Report). **Bulletin of JSME**, v.9, p.524-532, 1966.

STONE,B.J., The State of the Art in the Measurement of the Stiffness and Damping of Rolling Element Bearings, **Annals of the CIRP**, v.31, n.2, p.529-538, 1982.

SUNNERSJO C.S., Varying compliance vibrations of rolling bearings. **Journal of Sound and Vibration**, v.58, p.363–373, 1978.

TAMURA H., SHIMIZU H., Vibration of Rotor Based on Ball Bearing (2nd Report). **Bulletin of JSME**, v.10, p.763-775, 1967.

TUCKMANTEL, Felipe W. da Silva, Integração de Sistemas Rotor-Mancais Hidrodinâmicos-Estrutura de Suporte para Resolução Numérica, 2010, Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TUCKMANTEL, F.W.S. ; CAVALCA, K.L. ; CASTRO, H. F. ; FELSCHER, P. ; MARKERT, R. . An analysis on the supporting structure representative model in rotating systems. **Springer Proceedings in Physics 139**, v.139, p.589-598, 2011.

VENNER C.H., LUBRECHT A.A., Multigrid techniques: a fast and efficient method for the numerical simulation of elasto-hydrodynamically lubricated point contact problems. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers , Part J: Journal of Engineering Tribology**, v.214, p.43–62, 2000.

VENNER C. H., **Multilevel Solution of the EHL Line and Point Contact Problems**, 1991, Tese (Doutorado), University of Twente, the Netherlands.

VENNER, C. H., LUBRECHT, A. A., Numerical Simulation of a Transverse Ridge in a Circular EHL Contact Under Rolling/Sliding, **ASME Journal of Tribology**, v.116, pp.751-761, 1994.

VENNER, C. H., LUBRECHT, A. A., Numerical Analysis of the Influence of Waviness on the Film Thickness of a Circular EHL Contact, **ASME Journal of Tribology**, v.118, p.153-161, 1996.

WANG, X., YAN, X., Dynamic Behaviors of the Elastohydrodynamic Lubricated Contact for Rolling Bearings, **ASME Journal of Tribology**, v.135, 2013.

WIEGERT, B., HETZLER, H., SEEMANN, W., A simplified elastohydrodynamic contact model capturing the nonlinear vibration behavior, **Tribology International**, v.59, p.79-89, 2013.

WIJNANT Y.H., **Contact Dynamics in the field of Elastohydrodynamic Lubrication**, 1998 Tese (Doutorado), University of Twente, the Netherlands.

WIJNANT, Y.H., WENSING, J.A., VANNIJEN, G.C., The Influence of Lubrication on the Dynamic Behaviour of Ball Bearings, **J. Sound and Vibration**, v.222, n.4, pp.579-596, 1999.

APÊNDICE A - MODELO DE CONTATO DE HERTZ

O modelo de contato seco de Hertz (1881) propõe que para dois corpos não conformes de geometria conhecida, quando pressionados um contra o outro, um área de contato plana deve se formar de forma a distribuir a força de contato, evitando valores de pressão de contato irrealis, uma vez que caso o contato se desse em apenas um ponto, de área nula, a pressão deveria ser infinita.

A geometria dos corpos em contato, segundo a teoria de Hertz, deve ser aproximada por elipsoides de curvatura conhecida em contato com um plano. Desta maneira, para cada corpo em contato, devem-se definir os respectivos raios de curvatura, possibilitando a caracterização do elipsoide, como esquematicamente representado pela Figura A.1, para dois corpos esféricos em contato.

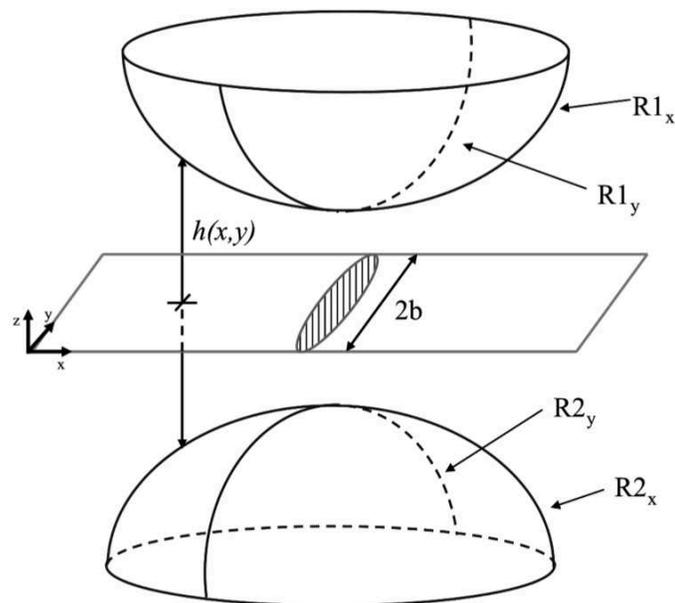


Figura A.1 – Aproximação geométrica para dois corpos esféricos em contato..

O elipsoide de contato é definido pelas curvaturas equivalentes entre os corpos, uma longitudinal ao contato, R_x , e uma transversal R_y . Estas curvaturas são aproximadas pelas expressões na equação A.1.

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R1_x} + \frac{1}{R2_x} \quad \text{A.1.a}$$

$$\frac{1}{R_y} = \frac{1}{R1_y} + \frac{1}{R2_y} \quad \text{A.1.b}$$

Desta forma, é possível descrever a distância entre os corpos como uma função da geometria do contato:

$$h(x, y) = \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} \quad \text{A.2}$$

As deformações geradas no contato devem se manter dentro do limite elástico do material, de forma a não surgirem amassamentos permanentes nos corpos. Hertz aproxima a área em um contato pontual, ou seja, quando existe uma curvatura conhecida em dois planos, por uma elipse e, como apresentado em Harris (2007), o valor do semieixo menor da elipse, em função da razão elíptica do contato, κ , pode ser calculado através da expressão na equação A.3.

$$a = \left(\frac{3f_0 R}{E'} \right)^{1/3} \left(\frac{2\kappa \mathcal{E}}{\pi} \right)^{1/3} \quad \text{A.3}$$

Nesta expressão f_0 é a força no contato e $R^{-1} = R_x^{-1} + R_y^{-1}$. E' é o módulo de elasticidade reduzido, obtido a partir do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson do material de cada corpo, como na equação A.4.

$$\frac{2}{E'} = \frac{1-v_1^2}{E_1} + \frac{1-v_2^2}{E_2} \quad \text{A.4}$$

O parâmetro \mathcal{E} representa a integral elíptica de segunda ordem. Deve-se definir também a integral elíptica de primeira ordem, \mathcal{K} , para a razão elíptica κ :

$$\mathcal{K} = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{1 - (1 - \kappa^2)^2 \sin^2 \varphi})^{-1} d\varphi \quad \text{A.5}$$

$$\mathcal{E} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - \kappa^2)^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad \text{A.6}$$

O semieixo maior da elipse é obtido apenas dividindo o valor de semieixo menor pela razão elíptica:

$$b = a/\kappa \quad \text{A.7}$$

É importante observar que a razão elíptica do contato é uma grandeza puramente geométrica, advinda da forma dos elipsoides em contato, como mostrado em Nonato (2009). Pode-se obter uma expressão para a razão elíptica do contato em função das integrais elípticas e das razões de curvatura:

$$\frac{R_x}{R_y} = \kappa^2 \frac{\mathcal{K} - \mathcal{E}}{\mathcal{E} - \kappa^2 \mathcal{K}} \quad \text{A.8}$$

Desta forma, basta aplicar um método de busca de raízes para obtenção do valor de razão elíptica, que garanta a igualdade na equação A.8, para caracterizar a forma da área de contato. Uma vez obtido κ , é direta a obtenção do valor dos semieixos da elipse.

A força no contato deve ser distribuída sobre toda a área gerada, de forma a equilibrar estaticamente o problema. O modelo de Hertz se baseia em uma distribuição parabólica de pressão no contato e o valor da pressão máxima no contato, ou pressão de Hertz, p_h , pode ser obtida como:

$$p_h = \frac{3f_0}{2\pi ab} \quad \text{A.9}$$

A deformação normal ao contato, que gera a área plana elíptica, é um fenômeno local, afetando somente a região do contato. Contando com a hipótese básica do modelo de Hertz de que as dimensões do contato são muito menores que as dimensões dos corpos, esta grandeza é uma medida da aproximação entre os corpos em contato e pode ser obtida segunda a equação A.10.

$$\delta = \frac{a^2}{2R} \left(\frac{\mathcal{K}}{\varepsilon} \right) = \left(\frac{f_0}{K_H} \right)^{2/3} \quad \text{A.10}$$

Da expressão A.10 é possível inferir uma relação direta entre força e deslocamento para o contato seco, na forma $f_0 = K_H \delta^{3/2}$, onde K_H é a rigidez não linear do contato seco dada por:

$$K_H = \frac{2}{3} E' \left(\frac{2R\pi^2\varepsilon}{(2\kappa)^2\mathcal{K}^3} \right)^{1/2} \quad \text{A.11}$$

APÊNDICE B - ANÁLISE EXPERIMENTAL DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DO ROTOR

Para a obtenção da resposta em frequência experimental do rotor, utiliza-se o atuador magnético como a fonte de excitação externa ao sistema e um dos sinais dos sensores como saída, podendo, assim, caracterizar um sistema mecânico SISO. Tanto o sinal de posição do monitoramento das órbitas, quanto o sinal de aceleração do pedestal podem ser utilizados neste caso.

Um sinal senoidal tipo *chirp* foi escolhido como excitação externa aplicada à bancada. Devido às limitações do próprio atuador, a maior frequência de excitação atingida é de 180 Hz. Desta maneira, faz-se uma varredura de 1 Hz à 180 Hz em 2 s e, nesta faixa, a primeira frequência de ressonância do rotor é atravessada, correspondente a seu primeiro modo. A primeira resposta em frequência observada é para saída do sinal de posição.

A Figura B.1 mostra os sinais de entrada e saída para o rotor operando a 40 Hz. O sinal de entrada (força), neste caso, não apresenta uma amplitude constante. Apesar desta condição não ideal, a coerência entre saída e entrada apresentou-se boa para o espectro percorrido. Observa-se, também, o cruzamento de ressonância no sinal de deslocamento. Contudo, o decaimento da força de excitação nas proximidades da região de ressonância indica que a capacidade do atuador pode estar comprometida frente à demanda inercial do sistema.

Para o sistema representado na Figura B.1, a resposta em frequência é observada na Figura B.2. O pico correspondente a frequência de ressonância relacionada a inversão de fase encontra-se a 129 Hz. A inversão de fase observada na mesma frequência indica a passagem por um modo natural da montagem.

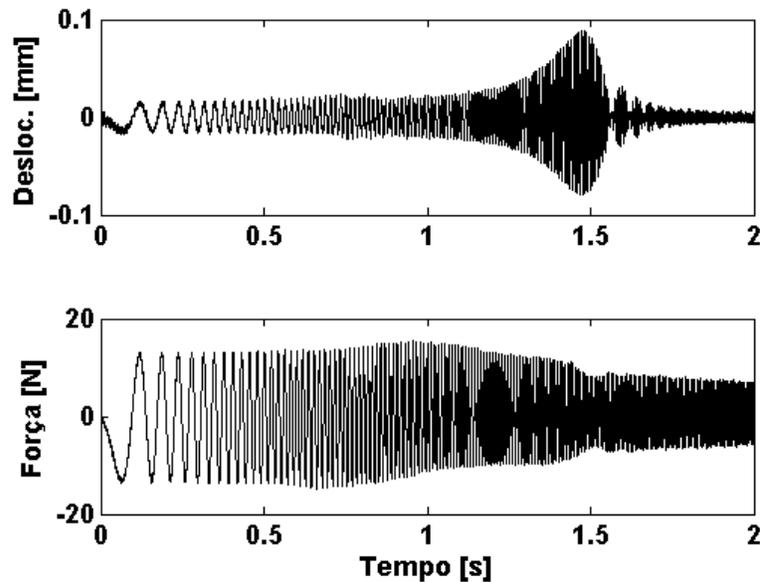


Figura B.1 – Sinais de entrada (força) e saída (deslocamento) para a excitação tipo *chirp* com o rotor em operação a 40 Hz.

Observando a resposta em frequência, utilizando agora a aceleração do pedestal como saída, evidencia-se uma antirressonância em 72 Hz, a qual pode estar associada a um modo estrutural dos suportes do mancal. A Figura B.3 apresenta a resposta em frequência para este caso. Analogamente à Figura B.2, visualiza-se também o pico a 129 Hz.

O surgimento de um efeito da fundação em 72 Hz decorre da presença da primeira frequência natural do pedestal de suporte dos mancais ao próxima a 70 Hz. Uma análise modal computacional, utilizando-se a ferramenta *Creo Simulate 2.0*, do conjunto montado do pedestal de suporte dos mancais indica as duas primeiras frequências naturais dentro do espectro analisado pelo *chirp*.

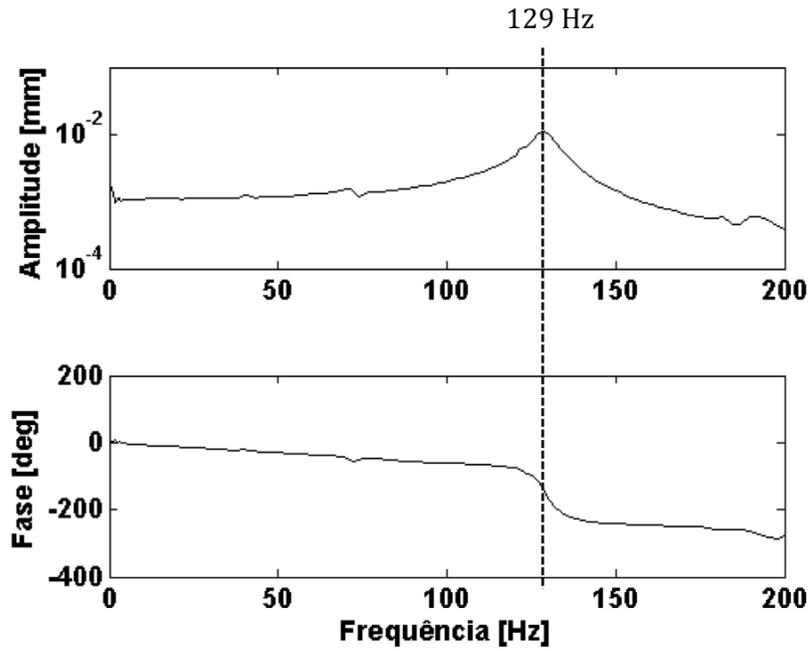


Figura B.2 – Resposta em frequência para o rotor em operação a 40 rps, observada para o deslocamento vertical do Mancal 2.

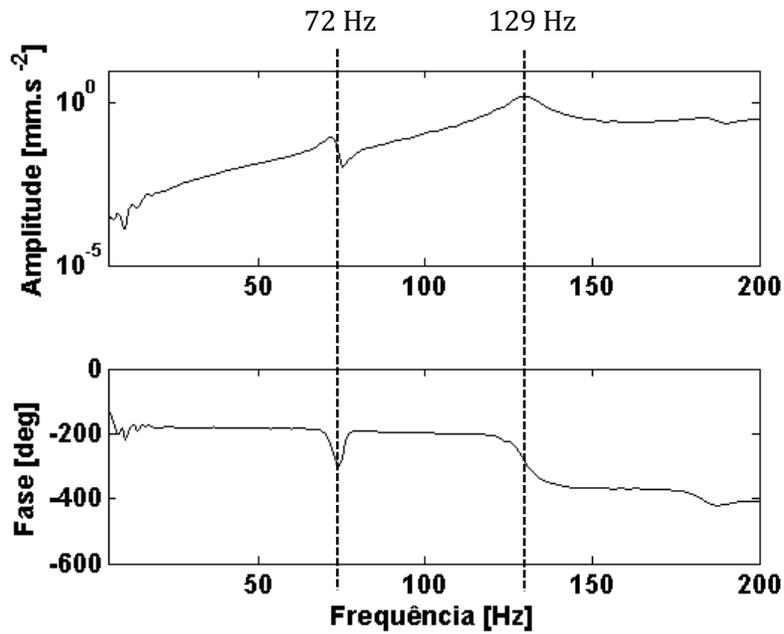


Figura B.3 – Resposta em frequência para o rotor em operação a 40 Hz, observada para a aceleração do pedestal vertical do Mancal 2.

A Figura B.4 mostra os dois primeiros modos obtidos por uma análise modal, através do modelo por elementos finitos da montagem do pedestal. Neste modelo, as interfaces entre componentes são consideradas fixas. Apesar das aproximações inerentes ao modelo de elementos finitos do pedestal, estes resultados são suficientes para indicar as regiões em que se encontram os efeitos dos primeiro e segundo modos do pedestal serão observados.

Em projeto precedente, financiado pela Fapesp (2008/J4647-4), foi realizada uma análise modal experimental dos pedestais para bancada semelhante, onde modos próprios específicos dos pedestais foram igualmente identificados. As frequências naturais e os parâmetros modais associados foram utilizados em Tuckmantel (2011). Observam-se nos gráficos de resposta em frequência deste experimento três frequências importantes: 68,5 Hz, 149,0 Hz e 223,0 Hz, de acordo com a Figura B.5.

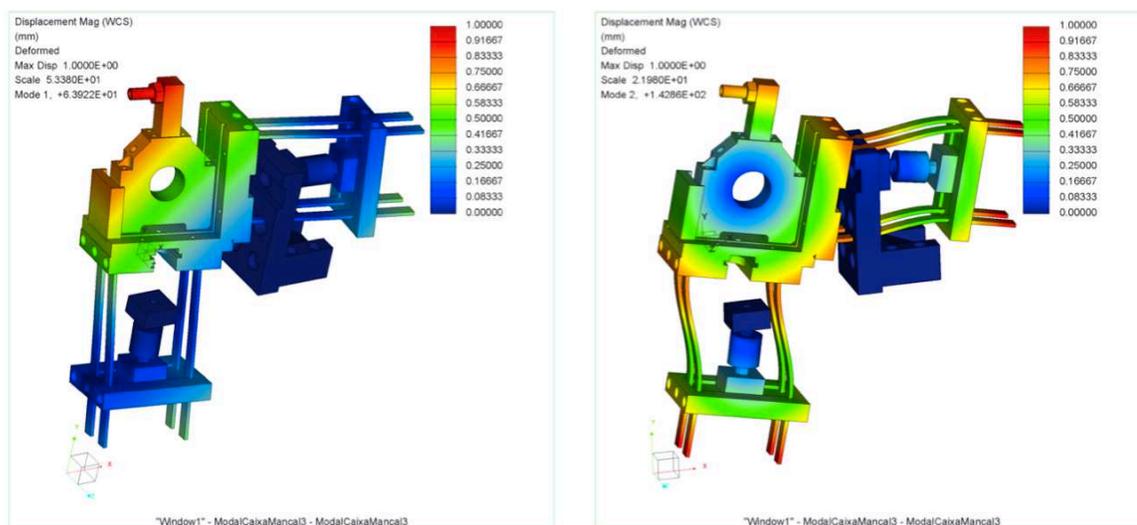


Figura B.4 – Primeiro e segundo modos próprios da montagem dos pedestais de suporte, observados em 63.9 Hz e 142.8 Hz.

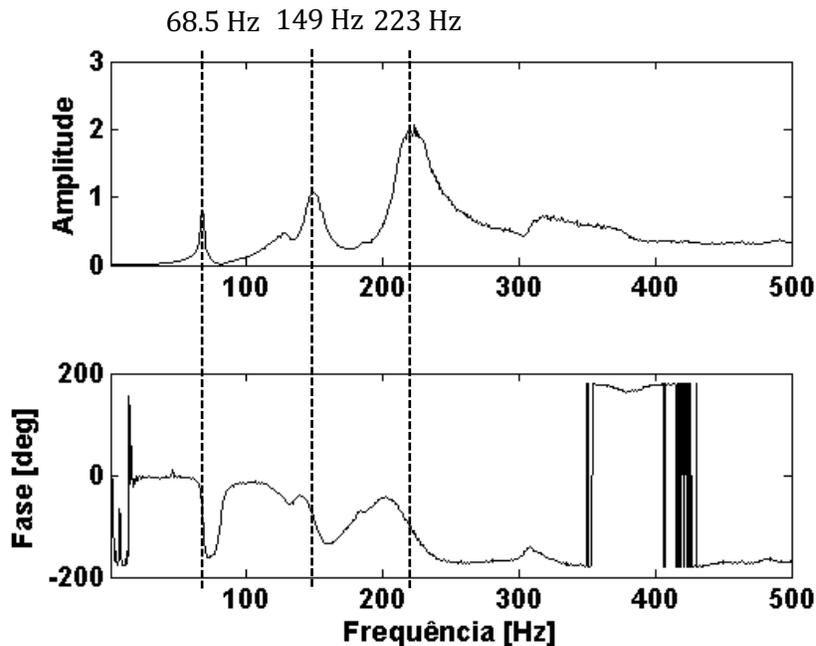


Figura B.5 – Resposta em frequência experimental obtida para o pedestal de suporte (Tuckmantel, 2011).

Utilizando a mesma excitação (*chirp*) como entrada para o modelo de elementos finitos, onde a força de entrada do modelo é interpolada a partir da força provida pelo atuador magnético durante o experimento, é possível obter a resposta em frequência para o grau de liberdade vertical do Mancal 2. O mesmo procedimento de pós-processamento deve ser utilizado para comparação das respostas em frequência do modelo computacional e dos resultados experimentais. A Figura B.6 mostra a resposta em frequência simulada para o modelo de elementos finitos.

Neste caso, o pico correspondente à primeira frequência de ressonância do sistema encontra-se em uma frequência de 167,5 Hz. Este resultado, à primeira vista, indica uma montagem experimental menos rígida que o modelo de elementos finitos utilizados nas simulações. A ausência da antirressonância a 72 Hz deve-se ao fato de que o modelo computacional proposto não leva em consideração efeitos da estrutura de suporte.

Com os dados obtidos na análise modal experimental previamente citada, é possível incluir a um modelo de rotor, com os mancais linearizados, os efeitos estruturais através do método das coordenadas mistas (Cavalca, 1993; Cavalca *et al*, 2005), como descrito em Tuckmantel (2010, 2011). Para tanto, utiliza-se o software Rotortest, desenvolvido pelo Laboratório de Máquinas Rotativas da Universidade de Campinas, para a obtenção da resposta ao desbalanceamento do sistema rotor-fundação, com os coeficientes linearizados do mancal de rolamentos sob condição EHD. Para o mesmo intervalo de frequências da análise precedente, observam-se picos correspondentes às frequências dos modos próprios dos pedestais, com participação expressiva na resposta do rotor. A Figura B.7 traz a representação desta resposta ao desbalanceamento.

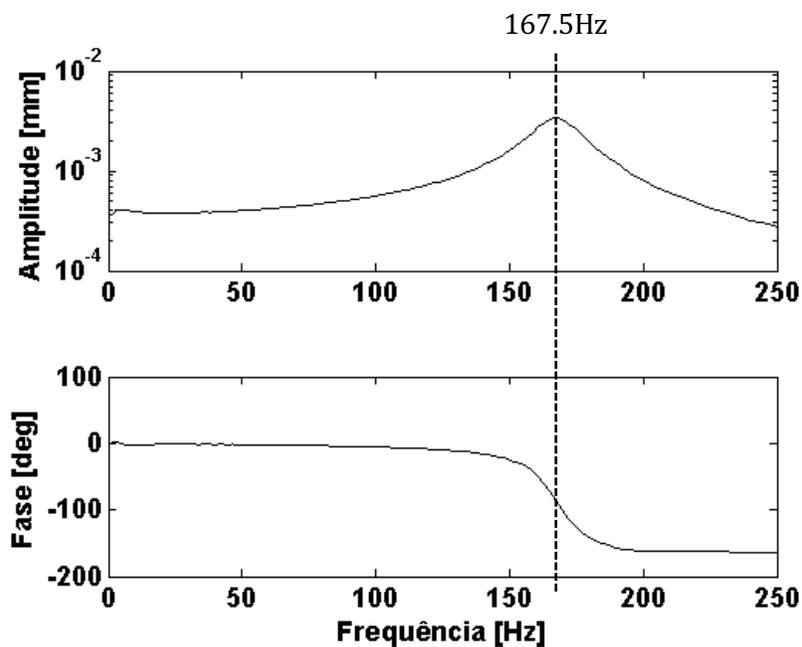


Figura B.6 – Resposta em frequência simulada, observada para a deslocamento vertical do Mancal 2.

Portanto, a utilização do atuador magnético para obtenção da resposta em frequência experimental da montagem apresenta bons resultados até o início do decaimento da força de excitação externa e, por sua vez, o modelo de elementos finitos com mancais não lineares

proposto falha em representar o comportamento completo do sistema, uma vez que a força harmônica proveniente do atuador excita os modos da fundação, ausentes no modelo de resposta temporal do sistema.

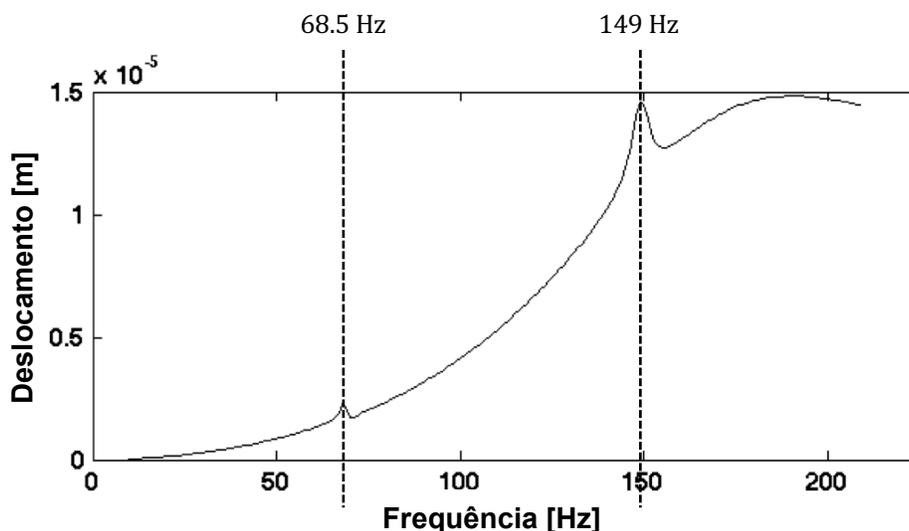


Figura B.7 – Resposta ao desbalanceamento utilizando-se o modelo de mancais linearizados no software Rotortest.

A utilização do modelo linearizado para a obtenção da resposta ao desbalanceamento não pode ser diretamente comparada ao modelo experimental, sem a execução de um completo ajuste de parâmetros para os componentes da montagem. Esta serve, porém, como uma referencia para a verificação da existência da contribuição dos modos de fundação, tanto na antirressonância quanto em frequências mais próximas a primeira frequência de ressonância do rotor. Estes efeitos impossibilitam atingir a meta de comparação dos fatores de amortecimento relacionados as frequências naturais do rotor, como verificação indireta do amortecimento dos mancais.

Por fim, com os valores de rigidez e amortecimento linearizados para o mancal de elementos rolantes, o modelo de elementos no domínio do tempo pode ser utilizado para obtenção dos modos de vibrar do rotor sem fundação, com a utilização dos coeficientes

linearizados dos mancais. Neste caso, o primeiro modo foi calculado em 163,3 Hz, sendo sua forma modal representada na Figura B.8.

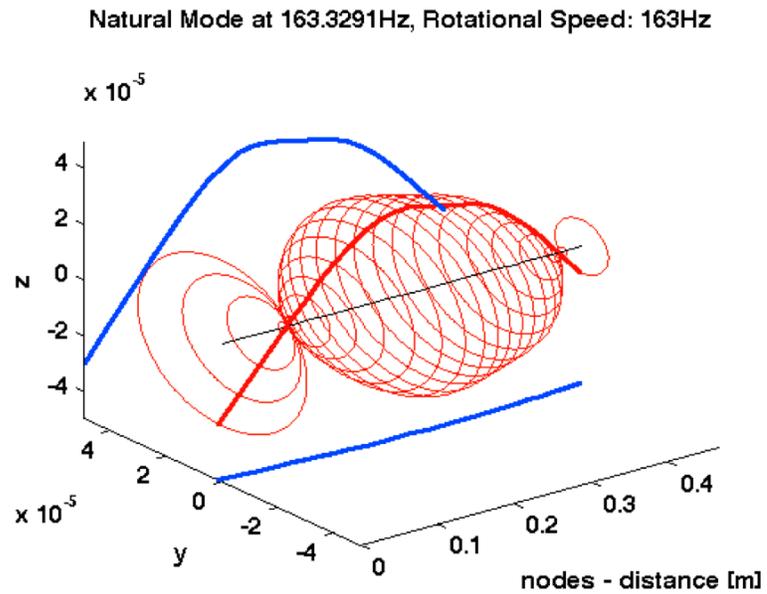


Figura B.8 – Representação do primeiro modo do rotor com mancais de rolamento linearizados.