

200206837

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE A REDAÇÃO FINAL D
TESE DEFENDIDA POR ANTONIO CARLOS DA
COSTA TELLES E APROVADA PEL
COMISSÃO JULGADORA EM 16.03.2001
Eurípedes Nóbrega
ORIENTADOR

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**Desenvolvimento de um Sistema
de Controle Adaptativo LMS
Visando Implementação Analógica**

Autor: **Antonio Carlos da Costa Telles**

Orientador **Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega**

Co-orientador: **José Roberto de França Arruda**

28/2001

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Desenvolvimento de um Sistema
de Controle Adaptativo LMS
Visando Implementação Analógica**

Autor: **Antonio Carlos da Costa Telles**

Orientador: **Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega**

Co-orientador: **José Roberto de França Arruda**

Curso: Engenharia Mecânica

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Dissertação de mestrado apresentada à Comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Campinas, 2001

S.P. – Brasil

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	T238d
V.	
TOMOU	47698
PROC.	837/02
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PRECOS	R\$ 11,00
DATA	07/02/02
N.º CPD	

CM00163687-1

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

T238d

Telles, Antonio Carlos da Costa

Desenvolvimento de um sistema de controle adaptativo LMS visando implementação analógica / Antonio Carlos da Costa Telles. --Campinas, SP: [s.n.], 2001.

Orientadores: Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega, José Roberto de França Arruda.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Sistemas de controle ajustável. 2. Circuitos eletrônicos. 3. Vibração. I. Nóbrega, Eurípedes Guilherme de Oliveira. II. Arruda, José Roberto de França. III. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. IV. Título.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

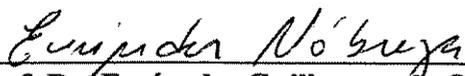
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Desenvolvimento de um Sistema
de Controle Adaptativo LMS
Visando Implementação Analógica**

Autor: **Antonio Carlos da Costa Telles**

Orientador **Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega**

Co-orientador: **José Roberto de França Arruda**



**Prof. Dr. Eurípedes Guilherme de Oliveira Nóbrega - Presidente
Universidade Estadual de Campinas**



**Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury
Universidade de São Paulo**



**Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles
Universidade Estadual de Campinas**

Campinas, 16 de março de 2001

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha filha, Rafaela.

Agradecimentos

Este trabalho não seria concluído sem a importante participação de algumas pessoas a quem gostaria de prestar meu reconhecimento:

A meus pais, pela oportunidade de prover minha formação acadêmica, privilégio que poucos têm,

Aos colegas da pós-graduação, que sempre se mostraram solícitos na resolução de todos os problemas que se acercaram deste trabalho, em especial Lázaro Valentim Donadon, Belisario Nina Huallpa, Marco Antonio Arcos Camargo e Marco Antonio de Oliveira Alves Júnior.

*“...porque o Senhor é quem dá a sabedoria,
e de sua boca é que procedem a Ciência e prudência.”*

Provérbios, 2:6

Índice

Capítulo 1: Controle Adaptativo e Controle Convencional	1
1.1 Introdução	1
1.2 Motivação do trabalho	5
1.3 Descrição do trabalho	6
Capítulo 2: Sistemas Adaptativos	9
2.1 Introdução	9
2.2 Sistemas adaptativos	10
2.3 O filtro transversal adaptativo	11
2.4 A função desempenho	12
2.5 O erro estacionário no processo de identificação adaptativo	14
2.6 O algoritmo LMS	20
2.7 Adaptação do filtro transversal para o caso contínuo	28
Capítulo 3: Sistemas Adaptativos em <i>Hardware</i>	37
3.1 Introdução	37
3.2 Implementação do algoritmo LMS em <i>hardware</i>	38
3.3 Uma proposta de filtro transversal adaptativo com componentes discretos	44
Capítulo 4: Controle Adaptativo Utilizando o Algoritmo LMS	48
4.1 Introdução	48
4.2 Controle por modelamento adaptativo	49
4.3 Controle adaptativo inverso	51
4.4 Controle adaptativo <i>feedforward</i>	55
4.5 Controle adaptativo <i>feedforward</i> com modelo de referência	58
4.6 Fatores de projeto do sistema de controle	60

Capítulo 5: Resultados Simulados e Experimentais	63
5.1 Introdução	63
5.2 Identificação da planta a ser controlada	63
5.3 Simulação do controle de vibração da viga flexível	67
5.4 Experimento de controle da viga flexível	76
5.5 Simulação do controlador em tempo contínuo	84
Capítulo 6: Conclusões e Futuros Trabalhos	96
6.1 Análise dos resultados	96
6.2 Futuros trabalhos	99
Referências Bibliográficas	103
Apêndice A: Análise Modal Experimental Usando o Algoritmo de Realização de Auto-Sistemas (ERA)	109
A.1 Introdução	109
A.2 Teoria de sistemas lineares	110
A.3 Análise modal experimental	115

Resumo

TELLES, Antonio Carlos da Costa – *Desenvolvimento de um Sistema de Controle Adaptativo LMS Visando Implementação Analógica*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001, 127 p. Dissertação (Mestrado)

As vantagens inerentes do controle adaptativo tais como flexibilidade e otimização estão hoje restritas a aplicações onde esquemas tradicionais não apresentam o desempenho esperado. Tal situação se deve principalmente ao alto custo dos sistemas adaptativos, que normalmente se apoiam em técnicas de processamento digital de sinais. Contudo sistemas adaptativos em *hardware* de baixo custo vem sendo propostos para a área de comunicações há vários anos. Este trabalho investiga a viabilidade do desenvolvimento de um sistema de controle em *hardware* com a aplicação dos sistemas adaptativos anteriormente citados. O esquema proposto é uma variação do controle *feedforward* LMS, amplamente utilizado no controle de vibração e ruído. Este esquema é modificado com a introdução de um modelo a ser seguido pelo controlador, o que lhe atribui maior flexibilidade de desempenho. O esquema é avaliado através do controle de vibração de uma viga flexível por meio de simulações e experimentos. O esquema, originalmente apresentado para controle em tempo discreto, é modificado para que o processamento seja feito totalmente em tempo contínuo. Este novo esquema é avaliado por meio de simulações, novamente através do controle da viga flexível. Os resultados mostram que o sistema proposto pode ser uma opção viável aos esquemas tradicionais de controle, alargando o espectro de aplicações do controle adaptativo LMS pela apresentação de uma solução em *hardware* de baixo custo.

Palavras-chave:

Controle adaptativo, algoritmo LMS, *hardware*

Abstract

TELLES, Antonio Carlos da Costa – *Development of a LMS Adaptive Control Aiming a Hardware Implementation*, Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2001, 127 p. Dissertação (Mestrado)

The inherent advantages of adaptive control such as flexibility and optimization are nowadays restricted to the areas where other conventional schemes do not reach the specified performance. Such situation is due mainly to the high cost of these systems, which are normally based on Digital Signal Processing techniques. However low cost adaptive hardware solutions have been proposed to the communications area for a long time. This work investigates the feasibility of the development of a LMS adaptive control hardware, with the application of the adaptive systems solutions already mentioned. The proposed system is a variation of the LMS feedforward control, which has broad application in noise and vibration control. This scheme is modified with the introduction of a model to be followed by the controller which introduces more flexibility to its performance. The system performance is evaluated in the control of a flexible beam vibration, through simulations and experiments. The original scheme, developed to discrete time control, is then modified to continuous time processing. Simulations of this new scheme are developed again in the control of the flexible beam. The results show that the proposed system can be an option to more conventional control schemes, broadening the field of applications of LMS adaptive control by means the presentation of a low cost hardware implementation.

Keywords

Adaptive control, LMS algorithm, Hardware

Lista de Figuras

2.1	Sistema adaptativo em malha fechada	11
2.2	Filtro transversal adaptativo	12
2.3	Filtro transversal adaptativo com algoritmo LMS	34
2.4	Filtro transversal adaptativo com detalhe do algoritmo LMS em tempo discreto	35
2.5	Modificação da Figura 2.4 para processamento totalmente em tempo contínuo	36
3.1	Filtro adaptativo em <i>hardware</i>	44
3.2	Célula adaptativa em tempo discreto	46
3.3	Célula adaptativa em tempo contínuo	46
3.4	Circuito de varredura de chaveamento	47
4.1	Controle por modelamento direto	49
4.2	Modelamento adaptativo inverso	53
4.3	Controle adaptativo inverso	54
4.4	Controle <i>feedforward</i>	55
4.5	Controle <i>feedforward</i> com introdução do efeito do caminho secundário	56
4.6	Controle <i>feedforward</i> utilizando algoritmo FXLMS	58
4.7	Controle <i>feedforward</i> com modelo de referência	59
5.1	Viga engastada com transdutores piezoelétricos	64
5.2	Esquema para levantamento das funções de resposta em frequência	64
5.3	FRF da resposta da planta com relação à entrada de perturbação	67
5.4	FRF da resposta da planta com relação à entrada de controle	68
5.5	Diagrama em blocos do controlador em SIMULINK	68
5.6	FRF da resposta da planta (simulada) com e sem a atuação do controle	70
5.7	Resposta simulada da planta para uma senóide de 10 Hz	71
5.8	Resposta simulada da planta para uma senóide de 20 Hz	72

5.9	Resposta simulada da planta para uma senóide de 50 Hz	73
5.10	Resposta simulada da planta para uma senóide de 100 Hz	74
5.11	Resposta simulada da planta para onda quadrada com <i>duty cycle</i> de 5 % e frequência de 1 Hz	75
5.12	Diagrama em blocos do controlador para interface com o sistema dSPACE	76
5.13	FRF da viga com e sem a atuação do controle	78
5.14	Resposta experimental da planta para uma senóide de 10 Hz	79
5.15	Resposta experimental da planta para uma senóide de 20 Hz	80
5.16	Resposta experimental da planta para uma senóide de 50 Hz	81
5.17	Resposta experimental da planta para uma senóide de 100 Hz	82
5.18	Resposta experimental da planta para onda quadrada com <i>duty cycle</i> de 5 % e frequência de 1 Hz	83
5.19	Diagrama em blocos do controlador em tempo contínuo	84
5.20	Célula do bloco adaptativo HF	85
5.21	Célula do bloco adaptativo HC	86
5.22	Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 10 Hz ($\mu=1000$)	87
5.23	Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 20 Hz ($\mu=500$)	88
5.24	Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 50 Hz ($\mu=300$)	89
5.25	Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 100 Hz ($\mu=200$)	90
5.26	Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma onda quadrada de 1 Hz e <i>duty cycle</i> de 5 % ($\mu=1$)	91
5.27	Sinal senoidal pulsante de perturbação	92
5.28	Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide pulsante ($\mu=300$)	93
5.29	Resposta controlada da planta para senóide de 50 Hz para diferentes valores de ganho adaptativo	94

Lista de Tabelas

5.1	Zeros da resposta relativa à entrada de perturbação	65
5.2	Zeros da resposta relativa à entrada de controle	66
5.3	Pólos (comuns às duas entradas)	66

Nomenclatura

Letras Latinas

A	matriz do sistema linear contínuo [A,B,C,D]	
\bar{A}	matriz do sistema linear discreto [\bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D}]	
B	matriz do sistema linear contínuo [A,B,C,D]	
\bar{B}	matriz do sistema linear discreto [\bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D}]	
C	matriz do sistema linear contínuo [A,B,C,D]	
\bar{C}	matriz do sistema linear discreto [\bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D}]	
C	Matriz controlabilidade	
D	matriz do sistema linear contínuo [A,B,C,D]	
\bar{D}	matriz do sistema linear discreto [\bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D}]	
d	vetor do sinal desejado do filtro adaptativo	
<i>d</i>	sinal desejado do sistema adaptativo	
<i>e</i>	base do logaritmo natural	
<i>f_s</i>	frequência de amostragem	[s ⁻¹]
<i>h</i>	resposta impulsiva de um sistema linear genérico com função de transferência <i>H</i>	
<i>h_p</i>	resposta impulsiva da planta	
<i>H</i>	função de transferência genérica de um sistema linear	
<i>H_A</i>	função de transferência que modela o atraso do sistema de controle <i>feedforward</i>	
<i>H_C</i>	função de transferência do filtro adaptativo com pesos calculados pelo algoritmo FXLMS	
<i>H_D</i>	função de transferência da resposta da planta quanto à entrada de perturbação	

H_F	função de transferência do sistema que calcula os pesos do algoritmo FXLMS	
H_M	função de transferência do modelo	
H_P	Função de transferência da resposta da planta quanto à entrada de controle	
H_W	função de transferência do filtro adaptativo com algoritmo LMS	
I	Matriz identidade	
j	número imaginário	
k	índice de amostra de um sistema em tempo discreto	
L	número de pesos	
M	índice de perturbação de um sistema adaptativo	
μ	ganho do filtro adaptativo descrito em SIMULINK	
n	número de pesos do filtro adaptativo	
O	matriz observabilidade	
P	vetor de inter-correlação dos vetores X e d do filtro adaptativo	
p	parâmetro de atraso do filtro <i>allpass</i>	
Q	matriz de auto-vetores de R	
R	matriz de auto-correlação do vetor X do filtro adaptativo	
r	sinal de <i>dither</i>	
s	variável da transformada de Laplace	
t	tempo	[s]
t_D	atraso do filtro <i>allpass</i>	[s]
t_s	período de amostragem	[s]
t_s	período de amostragem do filtro adaptativo descrito em SIMULINK	[s]
U	vetor de entrada do controlador	
u	sinal de entrada do controlador	
V	vetor W modificado por transformação linear	
V_X	Tensão num nó genérico X	[V]
W	vetor de pesos do filtro adaptativo	
W*	vetor de pesos ótimo do filtro adaptativo	
w_n	enésimo peso do filtro adaptativo	
X	vetor de entrada do filtro adaptativo	
x	sinal de entrada do filtro adaptativo	

y saída do filtro adaptativo
 y_t resposta total da planta
 z variável da transformada Z

Letras Gregas

Δ atraso de leitura do controlador *feedforward*
 Φ matriz de transição do sistema linear
 K matriz de auto-vetores de Φ
 Λ vetor de auto-valores
 $\Sigma^{1/2}$ decomposição em valores singulares de $H(1)$
 Ψ matriz inversa de K
 δ função delta de Kronecker
 ε erro do filtro adaptativo
 ϕ_{xx} espectro de frequência da auto-correlação do vetor X
 ϕ_{dx} espectro de frequência da inter-correlação dos vetores X e d
 φ termo da matriz Ψ
 κ termo da matriz K
 λ auto-valor
 μ ganho do filtro adaptativo em tempo discreto
 θ fase do filtro *allpass* [s⁻¹]
 ρ ganho do filtro adaptativo em tempo contínuo
 τ constante de tempo [s]
 ω velocidade angular [s⁻¹]
 ξ valor médio do erro do filtro adaptativo
 ζ fator de amortecimento

Abreviações

A/D	Analógico/Digital
ADPCM	<i>Adaptive Differential Pulse Code Modulation</i>
BBD	<i>Bucket Brigade Device</i>
BIBO	<i>Bounded Input Bounded Output</i>
CCD	<i>Charge Coupled Device</i>
C.I.	Circuito Integrado
CMOS	<i>Complementary Metal Oxide Semiconductor</i>
D/A	Digital/Analógico
dB	Decibel
ERA	<i>Eigensystem Realization Algorithm</i>
FRF	Função de Resposta em Frequência
FXLMS	<i>Filtered-X LMS</i>
IRF	Função de Resposta Inversa
LMS	<i>Least Mean Square</i>
MOS	<i>Metal Oxide Semiconductor</i>
MOSFET	<i>Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor</i>
MRAS	<i>Model Reference Adaptive System</i>
MSE	Erro Quadrático Médio
OTA	<i>Operational Transconductance Amplifier</i>
PDS	Processamento Digital de Sinais
PI	Proporcional-Integral
PID	Proporcional-Integral-Derivativo
RLS	<i>Recursive Least Square</i>
RTI	<i>Real Time Interface</i>
STR	<i>Self-Tuning Regulator</i>

Capítulo 1

Controle Adaptativo e Controle Convencional

1.1 Introdução

Observa-se hoje no campo do controle a presença das mais diversas linhas teóricas: controle clássico, robusto, adaptativo, por variáveis de estados e ótimo. Frequentemente estes métodos baseiam-se na disponibilidade de um bom modelo matemático do sistema a ser controlado e partem do pressuposto que o modelo é linear e invariante no tempo. De forma geral nenhum destes requisitos é completamente cumprido; os sistemas são linearizados em torno do ponto de operação e os parâmetros variam em função deste ponto e de fatores externos. O modelo é normalmente simplificado para que possibilite tratamento teórico. Além disso degradações decorrentes do uso e do envelhecimento fazem o sistema distanciar-se de seu modelo original. Embora estas variações tendam a ser atenuadas pelo uso de realimentação, há casos em que são grandes o suficiente para impossibilitar o projeto de um controlador adequado a todas as condições de uso. Eis alguns exemplos:

- Um avião supersônico está sujeito a reações aerodinâmicas bastante distintas em função do ângulo de ataque, velocidade e altitude em que se encontra. O piloto automático deve levar em consideração tais informações de forma a obter efetivo controle do avião.

- Um carro de corrida tem normalmente grande parte de sua massa como combustível. Durante uma competição seu peso cai à medida que o combustível é consumido. Ainda assim, a

suspensão deve manter a estabilidade do veículo dentro das duas condições extremas: completamente abastecido e com o tanque praticamente vazio.

- Os momentos de inércia de um braço de robô têm relações trigonométricas com os ângulos formados entre as articulações. As variações do modelo causadas por estas relações não-lineares tornam inadequadas soluções convencionais como controladores PI.

Fica claro a partir destes exemplos que um sistema de controle que consegue aliviar ou mesmo prescindir dos requisitos necessários para as linhas convencionais, *adaptável* às condições da planta, que encontra o ponto de trabalho *ótimo* ainda que submetido a condições não totalmente conhecidas, certamente tem desempenho superior e encontra aplicação mais abrangente.

É buscando este objetivo que nasce a teoria dos sistemas de controle adaptativo. As primeiras aplicações foram em pilotos automáticos de aeronaves supersônicas nos anos 50. Um acidente e a ausência de abordagem teórica levaram à paralisação momentânea das pesquisas. Avanços obtidos na teoria de controle nas décadas seguintes permitiram a retomada das pesquisas nesta área, com os primeiros resultados, bastante limitados, surgindo na década de 70. Os primeiros sistemas comerciais foram lançados durante a década de 80, e encontram-se atualmente em grande fase de desenvolvimento, com destaque para os controladores PID auto-sintonizáveis. Esta área de conhecimento é hoje bastante extensa, em que se destacam 3 configurações [Åstrom 1995]:

1- Ajuste de ganho (*Gain Scheduling*) Os parâmetros do controlador são obtidos a partir de variáveis que se correlacionam com variações do processo a ser controlado

2- Regulador auto-sintonizado (*Self Tuning Regulator - STR*): neste esquema, os parâmetros do controlador são ajustados a partir da identificação da planta e de fatores de projeto. O regulador auto-sintonizado teve uma aplicação recente em controle de vibração [La Scala 1995].

3- Sistema adaptativo de modelo de referência (*Model Reference Adaptive System – MRAS*): O controlador é ajustado de modo que o conjunto planta-controlador responda de acordo com um modelo pré-estabelecido. Uma suspensão ativa foi proposta recentemente baseada neste esquema [Dukkipati 1993]

Os sistemas de controle adaptativo foram investigados em tempo contínuo ou discreto, neste último caso utilizando tanto algoritmos recursivos como não-recursivos. A adaptação é normalmente feita com alguma modalidade de algoritmo de mínimos quadrados, mais notadamente o RLS (*Recursive Least Square*). A estabilidade do controlador é alcançada em condições bastante restritas, como consequência da lei não-linear de adaptação.

Problemas semelhantes aos encontrados no campo do controle se verificam em processamento de sinais: os meios de comunicação podem sofrer variações em função das distâncias ou das condições ambientais; a informação pode estar de tal forma degradada por ruído que só pode ser satisfatoriamente recuperada se o tratamento a que for submetida for capaz de ajustar-se a ponto de eliminar aquele tipo específico de ruído; um canal de comunicação é melhor aproveitado se este se adapta às características da informação que está sendo transmitida.

A utilização de técnicas adaptativas em processamento de sinais é desenvolvida principalmente a partir das décadas de 50 e 60 nas áreas de equalização, codificação de voz, análise espectral, cancelamento de ruído e de lobos laterais em antenas. As aplicações podem ser divididas em 4 grupos principais [Widrow 1985, Haykin 1996]:

Identificação de sistemas: neste esquema o sistema adaptativo é ajustado de forma que a resposta se assemelhe ao do sistema em identificação, permitindo assim a obtenção de um modelo. Um exemplo de uso de modelamento adaptativo é o levantamento da profundidade das camadas geológicas em sismologia [Widrow 1985, Haykin 1996].

Modelamento inverso: similar ao caso anterior, o sistema adaptativo deve em alguns casos identificar o modelo inverso da planta, como no caso da equalização adaptativa de canais de transmissão.

Predição: neste caso o sistema adaptativo faz a melhor predição de um sinal a partir de dados do passado. O sistema ADPCM (Adaptive Differential Pulse Code Modulation) utilizado em telefonia é um exemplo clássico de predição de sinais.

Cancelamento de interferências: o sistema adaptativo extrai o sinal primário a partir de dados do ruído em que este sinal estava inserido. A eliminação de eco em redes telefônicas faz uso de um sistema adaptativo de cancelamento de interferência.

O processamento adaptativo de sinais restringiu-se a sistemas em tempo discreto, sendo muito recente a investigação de versões em tempo contínuo. As estruturas são usualmente não recursivas, o que garante a estabilidade do processo adaptativo. O algoritmo RLS também é utilizado porém com variantes que visam acelerar o processo de convergência, pois o comportamento destes sistemas é em geral ordens de grandeza mais rápido que os encontrados em controle. Entre as várias opções disponíveis o algoritmo mais difundido e utilizado na área de processamento de sinais é o algoritmo LMS, proposto por Widrow, pela sua facilidade de implementação e simplicidade.

Uma ponte entre os campos de controle e processamento adaptativo de sinais é estabelecida com os trabalhos de Widrow em controle inverso e o uso de filtros adaptativos na supressão de ruído em dutos por Burgess e Warnaka *et al.* [Kuo 1996] na década de 80. O uso do algoritmo LMS em conjunto com os processos de identificação adaptativa resultaram em dois sistemas de controle, propostos em [Widrow 1985]:

1- Controle por modelamento direto: este sistema baseia-se na identificação do modelo para que seja calculada a resposta do controlador ao sinal de controle. Este sinal excita a planta de forma que esta tenha o comportamento desejado. A configuração se assemelha ao STR do controle adaptativo pela relação entre o controlador e a identificação da planta. Um controle de vibração estrutural foi realizado por meio de uma variação deste sistema, obtendo-se também uma estimação dos parâmetros da planta [Lim 1997].

2- Controle inverso: este sistema é construído de tal forma que a parte adaptativa identifica a função de transferência *inversa* da planta. O controle inverso tem semelhança com o MRAS, pela sua capacidade de seguir a resposta de um determinado modelo.

Os filtros adaptativos são hoje muito utilizados no controle ativo de ruído e vibração [Fuller 1995, Elliot 1987, Kuo 1996]. Aplica-se com mais frequência nesta área o *filtered-x* LMS, uma versão do algoritmo LMS desenvolvido por Widrow. Não se tem referência, apesar da presença bem sucedida nas áreas acima citadas, de que os sistemas de controle adaptativo baseado no algoritmo LMS tenham resolvido problemas clássicos tais como controle de velocidade, rotação e posição. Acredita-se que este fato se deva ao ainda elevado custo dos sistemas de processamento digital de sinais de alto desempenho necessários, tornando estas técnicas pouco atraentes quando comparadas às linhas mais consagradas de controle.

1.2 Motivação do trabalho

A área de comunicações têm feito uso de sistemas adaptativos integrados como alternativa aos sistemas discretos de processamento digital de sinais (PDS) para suprir em alguns casos as exigências de velocidade, consumo e custo que estes sistemas não satisfazem com a tecnologia disponível atualmente. A viabilidade do emprego de circuitos integrados adaptativos em outras áreas de atuação com preço acessível e desempenho competitivo quando comparados aos sistemas de PDS é uma hipótese que tem sido pouco explorada, encontrando-se apenas uma recente publicação de um projeto de circuito adaptativo para controle de vibração de estruturas flexíveis [Lenning 1997] em tecnologia pronta e de baixo custo.

O objetivo básico deste trabalho é apresentar uma proposta de sistema de controle adaptativo idealizado para ser construído em um circuito integrado de baixo custo, tornando-se assim uma opção viável com relação às outras soluções disponíveis e gozando ainda das capacidades de otimização e ajuste dos sistemas adaptativos.

A estrutura a ser proposta é uma variante do já bastante conhecido controle *filtered-X* LMS, com a inclusão de um modelo de referência. O controlador é inicialmente desenvolvido

utilizando a abordagem convencional ou seja, em tempo discreto. Recentes pesquisas sobre estruturas adaptativas que utilizam uma versão em tempo contínuo do algoritmo LMS incentivaram o estudo de uma variante do controlador com processamento totalmente em tempo contínuo que não sofreria de problemas tais como discretização, *aliasing* e limitações de taxa de amostragem de sua versão original em tempo discreto.

As opções de realização de um circuito integrado são estudadas a partir de trabalhos direcionados para a área de comunicações. Destas opções um sistema adaptativo é proposto que se baseia no desenvolvimento de células adaptativas em suas versões em tempo contínuo e discreto que comporiam o filtro transversal adaptativo.

O esquema de controle é então avaliado com a sua aplicação no controle de vibração de uma viga flexível engastada em uma das extremidades. A versão em tempo discreto é analisada tanto através de simulações como de experimentos. Simulações da versão em tempo contínuo do controlador permitem fazer comparações com seu equivalente em tempo discreto.

1.3 Descrição do trabalho

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

Capítulo 1: Apresentam-se as diferenças entre as linhas de controle convencional e adaptativa, discutem-se as vantagens de sistemas de controle com capacidade de adaptação. Os principais esquemas de controle adaptativo são apresentados. A motivação do trabalho é apresentada: desenvolver um sistema de controle adaptativo, previsto para ser realizado em circuito integrado, como uma alternativa competitiva aos sistemas de controle convencional que incorpora ainda as propriedades dos sistemas adaptativos.

Capítulo 2: Este capítulo é responsável pela introdução de todos os fundamentos teóricos que serão utilizados no trabalho. Introduzem-se os sistemas adaptativos; os principais conceitos são discutidos de forma resumida. O filtro transversal adaptativo, a estrutura mais utilizada, é

apresentado. Discutem-se a formulação da superfície de desempenho e a dedução do vetor de pesos ótimo.

Deduz-se o algoritmo LMS. Estabilidade da convergência, constante de adaptação e perturbação são analisados bem como sua relação para com parâmetros do sistema adaptativo.

Estuda-se a modificação do algoritmo LMS e do filtro transversal para aplicação em sistemas adaptativos em tempo contínuo. Os critérios utilizados para o caso em tempo discreto são modificados para o caso em tempo contínuo. Faz-se breve comparação entre o desempenho dos sistemas em tempo discreto e contínuo.

Capítulo 3: Neste capítulo encontra-se a revisão bibliográfica das realizações em circuitos integrados dos sistemas adaptativos. As várias técnicas utilizadas são analisadas, tanto as realizações em tempo discreto como as recentes realizações em tempo contínuo.

Tendo como referência este estudo, apresentam-se propostas de realização em *hardware* de um sistema adaptativo com componentes comerciais mas que não oferece obstáculos para ser transferido para um circuito integrado.

Capítulo 4: As técnicas de controle adaptativo utilizando o algoritmo LMS e o filtro transversal adaptativo são analisadas. O controlador adaptativo a ser utilizado é apresentado; suas principais características, vantagens e desvantagens são discutidas. Deduzem-se as relações importantes do sistema de controle. Analisa-se o desempenho do controlador e sua relação com fatores de projeto tais como número de elementos do filtro transversal e resposta impulsiva do sistema a ser modelado.

Capítulo 5: Faz-se a descrição da bancada experimental: uma viga flexível engastada em uma das pontas, submetida a vibração através de atuadores piezoelétricos. O modelamento através do método ERA é descrito. Um modelo completo da bancada experimental é obtido. Apresentam-se simulações do controle da bancada experimental em MATLAB, para uma versão

do controlador em tempo discreto e para uma versão em tempo contínuo. Descreve-se o experimento de controle da bancada experimental e seus resultados.

Capítulo 6: Os resultados práticos e simulados são analisados, discute-se a influência dos fatores de projeto sobre o desempenho obtido, bem como a influência da planta em que é aplicada. Apresentam-se as conclusões obtidas e discutem-se os futuros estudos que podem ser desenvolvidos como consequência deste trabalho.

Capítulo 2

Sistemas Adaptativos

2.1 Introdução

Neste capítulo discutem-se os principais conceitos relativos ao sistemas adaptativos. A estrutura mais utilizada, o filtro transversal adaptativo, é apresentada. Introduz-se o algoritmo LMS, cuja popularidade se deve à sua simplicidade e facilidade de implementação. Conceitos como estabilidade e a convergência deste algoritmo são estudados para que se possa entender seu impacto sobre o desempenho do sistema de controle a ser projetado. A apresentação destes conceitos é feita de forma breve pois estão bem estabelecidos na literatura [Widrow 1985, Haykin 1996].

Analisa-se em seguida a adaptação do algoritmo LMS, inicialmente formulado em tempo discreto, para o tempo contínuo. Demonstra-se a equivalência das deduções do primeiro para o segundo caso para o filtro transversal. O estudo do algoritmo LMS em tempo contínuo vem merecendo cada vez mais atenção. Os trabalhos publicados com aplicações deste algoritmo, bastante recentes e escassos, e a ausência de tratamento teórico não fornecem ainda noção clara sobre as suas implicações e limitações. Abre no entanto a possibilidade de obterem-se sistemas adaptativos sem as restrições impostas aos sistemas em tempo discreto como velocidade de processamento e limitação de banda de sinal.

2.2 Sistemas adaptativos

Embora não exista consenso quanto à sua definição, tem-se como sistema adaptativo aquele que possui a estrutura ajustável de tal forma que seu comportamento ou desempenho modifica-se em função de fatores externos, de acordo com algum critério desejado. Um exemplo de sistema adaptativo é o controle automático de ganho do televisor, que ajusta a sensibilidade do receptor na função inversa da intensidade do sinal de entrada.

Os sistemas adaptativos exibem, entre outras, as seguintes características:

- 1- Capacidade de programação por processo de treinamento: a partir de um ponto inicial os parâmetros do sistema adaptativo são modificados para encontrar seu ponto ótimo à medida que são excitados. O sistema mantém-se neste ponto desde que a excitação seja adequada
- 2- Projeto simplificado: dado que tenha suficiente grau de liberdade o sistema adaptativo encontra o seu ponto ótimo, ainda que o modelo do sistema a que se aplica não seja completamente conhecido, aliviando desta forma os requisitos da etapa de projeto
- 3- Possibilidade de extrapolação do desempenho para situações desconhecidas a partir de padrões de treino conhecidos: os parâmetros adaptativos fornecem informações sobre o sistema a que se aplica. O tratamento destas informações permite fazer uma estimativa da resposta do sistema para uma nova situação
- 4- Habilidade de auto-reparação para alguns tipos de falhas internas: a constante busca do equilíbrio do sistema adaptativo faz com este compense algumas falhas internas desde que estas permitam que o processo de adaptação continue
- 5- Classificação como sistemas não-lineares de parâmetros variantes no tempo: os parâmetros do sistema adaptativo mudam em função de dados externos e da história antecedente, o que os torna variantes no tempo. São não-lineares pois podem assumir valores diferentes a partir da mesma entrada em função da história do sistema.

Sistemas adaptativos são mais comumente utilizados em malha fechada, onde o processo adaptativo leva em consideração os dados de entrada e de saída. Este sistema é ilustrado na Figura 2.1, onde x representa os dados de entrada, y a saída do processador e d a saída desejada. ε é o erro gerado pela diferença entre a saída e o sinal desejado. Os parâmetros do processador são

ajustados em função do sinal de erro de forma que este tenda a seu mínimo, ou seja, que a saída do processador aproxime-se cada vez mais do sinal desejado.

A forma como ocorre este processo assim como os tipos de processadores utilizados podem variar bastante. Neste capítulo analisa-se o algoritmo LMS, um algoritmo do tipo de busca por gradiente e usa-se como processador o filtro transversal adaptativo, basicamente um filtro transversal em que os coeficientes podem ser modificados em função do algoritmo de adaptação.

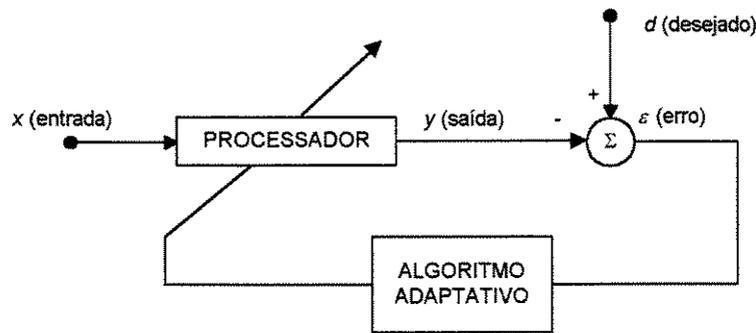


Figura 2.1 – Sistema adaptativo em malha fechada

2.3 O filtro transversal adaptativo

Embora haja várias estruturas adaptativas podendo-se citar as estruturas em treliça e as redes sistólicas [Haykin 1996], a mais utilizada é o filtro transversal. No sistema em tempo discreto ilustrado pela Figura 2.2, o sinal de saída y_k é o resultado da soma de várias amostras da entrada (x_{k-i}) multiplicadas pelos pesos w_{ik} , ajustados pelo processo adaptativo. O erro ε_k é a diferença entre y_k e o sinal desejado d_k , e é utilizado para atualizar os valores dos pesos. O índice k refere-se ao instante de amostragem, z^{-1} é a representação no plano z do atraso unitário e $L+1$ é o número de pesos do filtro transversal.

O sistema ilustrado pela Figura 2.2 é não-recursivo ou seja, a saída é função única e exclusiva do sinal de entrada. A não-recursividade é uma das vantagens desta estrutura pois garante a estabilidade do processo adaptativo.

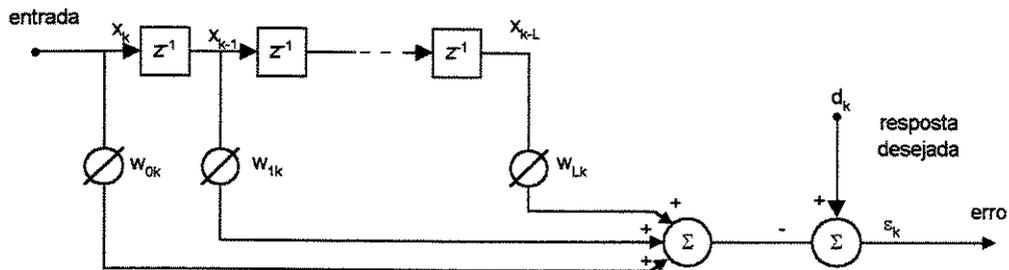


Figura 2.2 – Filtro transversal adaptativo

2.4 A função desempenho

Definem-se para o filtro da Figura 2.2 os vetores peso e entrada como sendo respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k &= [w_{0k} \ w_{1k} \ \dots \ w_{Lk}] \\ \mathbf{X}_k &= [x_k \ x_{k-1} \ \dots \ x_{k-L}] \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

A saída y_k nesta figura é igual à soma do vetor de entrada multiplicado pelo vetor peso, ou seja

$$y_k = \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}_k = \mathbf{W}_k^T \mathbf{X}_k. \quad (2.4.2)$$

A expressão do erro é dada por

$$\varepsilon_k = d_k - y_k. \quad (2.4.3)$$

Considerando-se que os pesos neste momento não estão sendo ajustados e substituindo-se (2.4.2) em (2.4.3) tem-se

$$\varepsilon_k = d_k - \mathbf{X}_k^T \mathbf{W} = d_k - \mathbf{W}^T \mathbf{X}_k. \quad (2.4.4)$$

O objetivo do processo adaptativo é minimizar o erro ε_k . A forma mais adequada de fazê-lo é diminuir seu valor *médio*, tornando a busca pelo mínimo independente do sinal do erro. Para isto faz-se o quadrado da expressão (2.4.4) obtendo-se

$$\varepsilon_k^2 = d_k^2 + \mathbf{W}^T \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W} - 2d_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}. \quad (2.4.5)$$

Aplicando-se a média dos dois lados de (2.4.5), assumindo que ε_k , d_k e y_k são sinais estatisticamente estacionários obtém-se

$$E[\varepsilon_k^2] = E[d_k^2] + \mathbf{W}^T E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T] \mathbf{W} - 2E[d_k \mathbf{X}_k^T] \mathbf{W}. \quad (2.4.6)$$

Definem-se a matriz de autocorrelação do vetor de entrada e o vetor da intercorrelação entre os vetores de entrada e de saída como sendo respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T] \\ \mathbf{P} &= E[d_k \mathbf{X}_k^T] \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Substituindo-se as definições de (2.4.7) em (2.4.6) encontra-se o erro quadrático médio (MSE):

$$\text{MSE} = \xi = E[\varepsilon_k^2] = E[d_k^2] + \mathbf{W}^T \mathbf{R} \mathbf{W} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}. \quad (2.4.8)$$

Na expressão (2.4.8) ξ é dado como soma de termos quadráticos e lineares do vetor de pesos \mathbf{W} . A curva típica de MSE em função deste vetor, chamada de superfície de desempenho, tem formato de parabolóide (ou hiperparabolóide). Este tipo de curva é especialmente

interessante pois possui um único mínimo global, o que garante que o processo de busca pelo gradiente seja convergente em direção a este mínimo.

O vetor de pesos que resulta no mínimo é chamado de vetor de pesos *ótimo*. Para encontrá-lo tome-se o gradiente (∇) da expressão (2.4.8) com relação a \mathbf{W}

$$\begin{aligned}\nabla = \frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{W}} &= \left[\frac{\partial \xi}{\partial w_0} \quad \frac{\partial \xi}{\partial w_1} \quad \dots \quad \frac{\partial \xi}{\partial w_L} \right]^T \\ &= 2\mathbf{R}\mathbf{W} - 2\mathbf{P}.\end{aligned}\tag{2.4.9}$$

O mínimo de ξ é encontrado quando o gradiente é zero. Portanto o vetor de pesos ótimo \mathbf{W}^* satisfaz a equação

$$\nabla = \mathbf{0} = 2\mathbf{R}\mathbf{W}^* - 2\mathbf{P},\tag{2.4.10}$$

e vale então

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}.\tag{2.4.11}$$

A expressão (2.4.11) é a equação de Wiener-Hopf [Widrow 1985] na forma matricial.

2.5 O erro estacionário no processo de identificação adaptativo

Quando o sinal desejado de uma estrutura adaptativa é gerado por um sistema, que pode ser simples ou a combinação de outros sistemas, diz-se que o processo adaptativo é de *identificação*, pois após a convergência a estrutura adaptativa fornece dados que permitem modelar o sistema que gerou o sinal desejado. Quando a estrutura adaptativa é o filtro transversal não recursivo, modela-se a resposta impulsiva, ou a aproximação não recursiva da função de transferência, do sistema em identificação.

O processo de identificação é influenciado por características do sistema adaptativo tais como número de pesos e período de amostragem assim como do sinal de excitação e do sistema em identificação. Como ponto de partida do estudo desta influência, vamos tomar a expressão do erro quadrático médio para este caso [Widrow 1985]:

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 - 2\xi_2 \quad (2.5.1)$$

onde:

$$\xi_0 = \frac{1}{2\pi j} \oint \left[|H(z)|^2 \phi_{xx}(z) \right] \frac{dz}{z} \quad (2.5.2)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint \left[M(z^{-1})M(z)\phi_{xx}(z) \right] \frac{dz}{z} \quad (2.5.3)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint \left[\phi_{dx}(z)M(z) \right] \frac{dz}{z} \quad (2.5.4)$$

Nestas equações, $H(z)$ e $M(z)$, respectivamente as funções de transferência discreta da planta e do filtro transversal adaptativo, são expressas como

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)z^{-n} \quad (2.5.5)$$

$$M(z) = \sum_{n=0}^L w_n z^{-n} \quad (2.5.6)$$

ϕ_{xx} e ϕ_{dx} são respectivamente os espectros de potência da autocorrelação do sinal de entrada e da intercorrelação entre o sinal de entrada e o sinal desejado.

Sem perda de generalidade, tomemos o sinal de entrada como sendo um ruído branco, ou seja randômico com média zero e variância 1, tendo-se então que $\phi_{xx} = 1$. Usando esta igualdade e a definição de $H(z)$ a equação (2.5.3) torna-se:

$$\xi_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)z^{-n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(mT)z^m \right] \frac{dz}{z} \quad (2.5.7)$$

A série para $h(nT)$ converge, de forma que esta última equação pode ser escrita como:

$$\xi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(nT)h(mT) \left[\frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-n-1} dz \right] \quad (2.5.8)$$

Da teoria de variáveis complexas [Widrow 1985, Haykin 1996] tem-se que

$$\frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-n-1} dz = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} \quad (2.5.9)$$

Usando esta última relação, (2.5.8) torna-se:

$$\xi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(nT)h(mT), m = n \quad (2.5.10)$$

A equação anterior pode ser simplificada como

$$\boxed{\xi_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(nT)]^2} \quad (2.5.11)$$

Tomando-se agora a equação (2.5.4) e substituindo a definição (2.5.6) tem-se

$$\xi_1 = \frac{1}{2\pi j} \oint \left[\sum_{n=0}^L w_n z^{-n} \sum_{m=0}^L w_m z^m \right] \frac{dz}{z} \quad (2.5.12)$$

Repetindo-se o raciocínio para obtenção de (2.5.8) tem-se

$$\xi_1 = \sum_{n=0}^L \sum_{m=0}^L w_n w_m \left[\frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-n-1} dz \right] \quad (2.5.13)$$

Aplicando novamente a relação (2.5.9) nesta última equação tem-se

$$\xi_1 = \sum_{n=0}^L [w_n]^2 \quad (2.5.14)$$

A propriedade de simetria do espectro de potência da intercorrelação entre o sinal de entrada e o sinal desejado [Widrow 1985] permite que seja válida a seguinte relação:

$$\phi_{dx}(z) = \phi_{xd}(z^{-1}) = H(z^{-1})\phi_{xx}(z^{-1}) = H(z^{-1}) \quad (2.5.15)$$

Substituindo o resultado de (2.5.15) e a definição de $M(z)$ em (2.5.3) obtém-se:

$$\xi_2 = \frac{1}{2\pi j} \oint \left[H(z^{-1}) \sum_{n=0}^L w_n z^{-n} \right] \frac{dz}{z} \quad (2.5.16)$$

Substituindo-se a definição para $H(z^{-1})$ em (2.5.16) e assumindo que a série $h(mT)$ converge a última equação se torna

$$\xi_2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(mT) \sum_{n=0}^L w_n \left[\frac{1}{2\pi j} \oint z^{m-n-1} dz \right] \quad (2.5.17)$$

Aplicando-se a relação (2.5.9) a última equação fica

$$\xi_2 = \sum_{n=0}^L h(nT) w_n \quad (2.5.18)$$

Substituindo (2.5.11), (2.5.14) e (2.5.18) em (2.5.1) tem-se a expressão para o erro médio:

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(nT)]^2 + \sum_{n=0}^L [w_n^2 - 2h(nT)w_n] \quad (2.5.19)$$

A última expressão dá a solução genérica do erro médio em função da resposta impulsiva do sistema a ser modelado, quando excitado por um sinal randômico.

O erro mínimo é atingido quando o vetor peso encontra seu valor ótimo. Neste ponto o gradiente do erro com relação ao vetor peso deve ser zero ou seja,

$$\nabla(\xi)_{w_n} = \frac{\partial \xi}{\partial w_n} = 2w_n - 2h(nT) = 0 \quad (2.5.20)$$

o que resulta

$$w_n = h(nT) \quad (2.5.21)$$

A última expressão demonstra que o vetor peso tem uma relação biunívoca com a resposta impulsiva do sistema sendo identificado.

O erro mínimo é encontrado substituindo-se o resultado expresso por (2.5.21) em (2.5.19) de onde se obtém

$$\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [h(nT)]^2 + \sum_{n=0}^L [h(nT)]^2 \quad (2.5.22)$$

Para sistemas causais os valores da resposta impulsiva são nulos para instantes de amostragem negativos ou seja,

$$h(nT) = 0, n < 0 \quad (2.5.23)$$

Neste caso (2.5.22) simplifica-se em

$$\xi_{min} = \sum_{n=L+1}^{\infty} [h(nT)]^2 \quad (2.5.24)$$

Assim, o erro médio é dado pela porção não reproduzida da resposta impulsiva do sistema a ser identificado.

As equações (2.5.14) e (2.5.24) trazem algumas conclusões interessantes. A resposta impulsiva é a soma de elementos em intervalos de tempo com largura igual ao período de amostragem. Assim sendo uma mesma parcela da resposta impulsiva necessita de mais elementos quando o período de amostragem é menor. A primeira equação indica a necessidade de cada elemento da resposta impulsiva ser reproduzida pelo valor de um peso. Portanto é necessário que a frequência de amostragem seja a mais *baixa* possível de forma a se usar um número *mínimo* de pesos para um mesmo valor de erro médio. Ou seja, no sentido contrário, quanto maior a frequência de amostragem adotada, maior o número de pesos necessários para reproduzir a resposta impulsiva.

De (2.5.24) é possível concluir que o sistema de identificação terá um erro médio (não se considerando o erro introduzido pelo próprio processo adaptativo) tanto maior quanto for a energia da parte da resposta impulsiva que não foi modelada. Assim, como é intuitivo, sistemas cujas respostas impulsivas demoram a atenuar requerem muitos pesos para serem apropriadamente identificados.

O estudo anterior foi feito para sinal de entrada randômico, que é o sinal com maior riqueza espectral possível, sendo portanto o que exige maior fidelidade na identificação. Podemos considerar que o erro para outros sinais é sempre um caso especial da expressão genérica dada por (2.5.19) pois envolve alguma limitação de banda quando comparado com o sinal randômico.

2.6 O algoritmo LMS

O objetivo do processo adaptativo é fazer com que a saída y_k na Figura 2.2 tenda ao valor desejado d_k , o que é obtido ajustando-se o vetor peso. Ao se aproximar a saída do valor desejado, o erro ε e seu valor quadrático, ξ , tendem ao mínimo. Graficamente minimizar ξ em função dos pesos representa modificar \mathbf{W} de forma que, na curva de desempenho este encontre o valor em que o erro é mínimo, determinado pelo vetor ótimo \mathbf{W}^* .

O gradiente de uma função num determinado ponto indica graficamente a direção em que esta função varia com maior intensidade. Assim, se de um dado ponto da função encontrar-se outro caminhando no sentido contrário ao apontado pelo gradiente, é razoável afirmar que após algumas repetições deste procedimento tenha-se chegado ao mínimo. O algoritmo de busca do mínimo fundamentado neste conceito recebe o nome de *steepest descent*. Sua aplicação à atualização dos pesos no processo adaptativo resulta na fórmula iterativa

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mu \nabla, \quad (2.6.1)$$

onde ∇ é o gradiente do erro quadrático médio como expresso na equação (2.4.9).

O cálculo de ∇ envolve o conhecimento das matrizes \mathbf{R} e \mathbf{P} , que não são disponíveis *a priori*. Dada esta dificuldade torna-se necessário formular uma *estimativa* do gradiente. Tome-se neste sentido ε_k^2 como estimativa de ξ na Figura 2.2. Então para cada iteração do processo adaptativo tem-se a seguinte estimativa do gradiente

$$\hat{\nabla}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_k^2}{\partial w_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_k^2}{\partial w_L} \end{bmatrix} = 2\varepsilon_k \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial w_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial w_L} \end{bmatrix} = -2\varepsilon_k \mathbf{X}_k. \quad (2.6.2)$$

O resultado da expressão (2.6.1) foi obtido derivando-se parcialmente (2.4.4) com relação a \mathbf{W} . Substituindo-se na fórmula de atualização dos pesos a expressão para o gradiente estimado tem-se

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{k+1} &= \mathbf{W}_k - \mu \hat{\nabla}_k \\ &= \mathbf{W}_k + 2\mu \varepsilon_k \mathbf{X}_k.\end{aligned}\quad (2.6.3)$$

A expressão (2.6.3) define o algoritmo LMS [Widrow 1975, Widrow 1976]. Nesta equação μ é a constante de ganho que controla a velocidade e estabilidade de adaptação. O algoritmo LMS pode ser implementado em um sistema prático sem operações de potenciação, média ou diferenciação e é elegante em sua simplicidade e eficiência [Widrow 1985].

É necessário contudo verificar se a aproximação do gradiente como foi feita leva ao seu real valor. Para tanto aplica-se o valor esperado em (2.6.2), mantendo-se o vetor peso inalterado

$$\begin{aligned}E[\hat{\nabla}_k] &= -2E[\varepsilon_k \mathbf{X}_k] \\ &= -2E[d_k \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}] \\ &= 2(\mathbf{R}\mathbf{W} - \mathbf{P}) = \nabla.\end{aligned}\quad (2.6.4)$$

A expressão (2.6.4) demonstra que o valor real do gradiente é estimado de forma não polarizada pela expressão dada em (2.6.3).

A análise de convergência necessita levar em conta o ajuste a cada iteração do vetor peso. Considere-se que sucessivos vetores de entrada são independentes entre si, o que implica que \mathbf{W}_k é independente de \mathbf{X}_k . Tomando-se o valor esperado em ambos os lados de (2.6.3) tem-se

$$\begin{aligned}E[\mathbf{W}_{k+1}] &= E[\mathbf{W}_k] + 2\mu E[\varepsilon_k \mathbf{X}_k] \\ &= E[\mathbf{W}_k] + 2\mu (E[d_k \mathbf{X}_k] - E[\mathbf{X}_k \mathbf{X}_k^T \mathbf{W}]).\end{aligned}\quad (2.6.5)$$

Assumindo-se que \mathbf{W}_k é independente de \mathbf{X}_k , aplicando-se as definições de (2.4.7) e o resultado de (2.4.11) em (2.6.5) tem-se

$$\begin{aligned} E[\mathbf{W}_{k+1}] &= E[\mathbf{W}_k] + 2\mu(\mathbf{P} - \mathbf{R}E[\mathbf{W}_k]). \\ &= (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})E[\mathbf{W}_k] + 2\mu\mathbf{R}\mathbf{W}^*. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

Transformando para a nova variável: $\mathbf{V} = \mathbf{W} - \mathbf{W}^*$, e sabendo que $E[\mathbf{W}^*] = \mathbf{W}^*$, a equação (2.6.6) torna-se

$$E[\mathbf{V}_{k+1}] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})E[\mathbf{V}_k]. \quad (2.6.7)$$

Fazendo agora $\mathbf{V} = \mathbf{Q}\mathbf{V}'$, onde \mathbf{Q} é a matriz de auto-vetores de \mathbf{R} , obtém-se

$$E[\mathbf{Q}\mathbf{V}'_{k+1}] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})E[\mathbf{Q}\mathbf{V}'_k]. \quad (2.6.8)$$

Porém, se os sinais são estatisticamente estacionários, \mathbf{R} e conseqüentemente \mathbf{Q} são constantes. Assim, (2.6.8) torna-se

$$\mathbf{Q}E[\mathbf{V}'_{k+1}] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R})\mathbf{Q}E[\mathbf{V}'_k]. \quad (2.6.9)$$

Multiplicando-se os dois lados por \mathbf{Q}^{-1}

$$E[\mathbf{V}'_{k+1}] = (\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{Q} - 2\mu\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{Q})E[\mathbf{V}'_k]. \quad (2.6.10)$$

Sendo \mathbf{Q} a matriz de autovetores de \mathbf{R} , então $\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$, onde $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz diagonal de autovalores. Com isso (2.6.10) fica

$$E[\mathbf{V}'_{k+1}] = (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda})E[\mathbf{V}'_k]. \quad (2.6.11)$$

A solução para esta equação é

$$\begin{aligned} E[\mathbf{V}'_k] &= (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k E[\mathbf{V}'_0] \\ &= (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k \mathbf{V}'_0. \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

onde \mathbf{V}'_0 é o vetor de condição inicial do vetor peso no novo sistema de coordenadas.

Para que (2.6.12) seja convergente é necessário que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{I} - 2\mu\Lambda)^k = \mathbf{0}. \quad (2.6.13)$$

O limite da expressão (2.6.13) aplica-se para todos os elementos da matriz diagonal $\mathbf{I} - 2\mu\Lambda$. Para garantir a convergência estes devem ter módulo menor que 1. Portanto vale a seguinte inequação

$$|1 - 2\mu\lambda_i| < 1,$$

ou,

$$-1 < 1 - 2\mu\lambda_i < 1. \quad (2.6.14)$$

Se μ garante a convergência para o maior autovalor de Λ (λ_{\max}) então esta também estará garantida para os demais autovalores. Neste caso, após algumas manipulações algébricas em (2.6.12), tem-se que μ deve estar contido no intervalo

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}}. \quad (2.6.15)$$

Sabe-se ainda que é válida a inequação

$$\lambda_{\max} \leq \sum \lambda_i = \text{tr}[\mathbf{R}]. \quad (2.6.16)$$

onde $\text{tr}[\mathbf{R}]$ é a somatória dos elementos diagonais de \mathbf{R} , que é igual à soma de seus autovalores. Assim a constante de ajuste do algoritmo pode assumir valores dentro do intervalo

$$\boxed{0 < \mu < \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]}} \quad (2.6.17)$$

A expressão (2.6.17) é mais adequada para estimativa do valor limite de μ pois os elementos de \mathbf{R} são mais facilmente estimados que seus autovalores. Esta expressão define também a faixa de valores para o qual o algoritmo LMS é estável. O limite está ligado à energia do sinal de entrada. Um aumento na amplitude do sinal faz com que a variação de cada passo do algoritmo seja maior. Para compensar este aumento é necessário diminuir μ de modo que a modificação do vetor de pesos não ultrapasse o limite que garante a convergência do processo adaptativo.

Se a condição de (2.6.13) é satisfeita, segue-se de (2.6.12) que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{V}'_k] = \mathbf{0}. \quad (2.6.18)$$

Retornando às coordenadas naturais tem-se

$$\boxed{\lim_{k \rightarrow \infty} E[\mathbf{W}_k] = \mathbf{W}^*}. \quad (2.6.19)$$

Demonstra-se portanto que o algoritmo LMS leva o valor esperado do vetor peso a convergir para a solução ótima, desde que a condição dada por (2.6.17) seja respeitada.

Para se conhecer os fatores que influenciam a convergência do algoritmo LMS, a fórmula do erro quadrático médio dada pela equação (2.4.8) é retomada e substitui-se \mathbf{W} por $\mathbf{V}-\mathbf{W}^*$,

$$\xi = E[d_k^2] + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{W}^* + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{V} + \mathbf{W}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{W}^* - 2\mathbf{P}^T \mathbf{V} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{W}^*. \quad (2.6.20)$$

Cada termo na expressão anterior é um escalar e portanto igual ao seu próprio transposto. Desta propriedade e da substituição dos termos que compõem a expressão do erro quadrático médio para o vetor de pesos ótimo tem-se

$$\xi = \xi_{\min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} + 2\mathbf{W}^{*T} \mathbf{R} \mathbf{V} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{V}. \quad (2.6.21)$$

Substituindo \mathbf{W}^* por sua expressão em (2.4.11) e sabendo que \mathbf{R} é simétrica tem-se

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_{\min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} + 2\mathbf{P}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{V} - 2\mathbf{P}^T \mathbf{V} \\ &= \xi_{\min} + \mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V}. \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Fazendo em (2.6.22) $\mathbf{V} = \mathbf{Q} \mathbf{V}'$ onde \mathbf{Q} é a matriz de autovetores de \mathbf{R} , ou seja $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1}$, obtém-se

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_{\min} + \mathbf{V}'^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{V}' \\ &= \xi_{\min} + \mathbf{V}'^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}'. \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

Substituindo a expressão (2.6.12), onde se toma \mathbf{V}' como estimativa não polarizada de $E[\mathbf{V}']$, tem-se

$$\xi = \xi_{\min} + \mathbf{V}_0'^T \left[(\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda})^k \right]^T \mathbf{\Lambda} (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda})^k \mathbf{V}_0'^T. \quad (2.6.24)$$

As matrizes $\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda}$ e $\mathbf{\Lambda}$ são diagonais, logo seu produto pode ser comutado. A equação (2.6.24) passa a ser escrita como

$$\xi = \xi_{\min} + \mathbf{V}_0'^T (\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{\Lambda})^{2k} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}_0'. \quad (2.6.25)$$

ou da seguinte forma

$$\xi = \xi_{min} + \sum_{n=0}^L v_{0n}'^2 \lambda_n (1 - 2\mu\lambda_n)^{2k}. \quad (2.6.26)$$

onde v_{0n}' é o valor inicial do enésimo peso no novo sistema de coordenadas.

A aproximação utilizada em (2.6.24) significa tomar o gradiente pelo seu valor *exato* no lugar do valor *estimado*, o que faz de (2.6.26) uma *aproximação* do comportamento do erro. Na verdade o fato do gradiente ser estimado torna de modo geral o percurso de ξ em direção ao mínimo bastante errático, ao contrário do comportamento previsível dado por (2.6.26).

Cada um dos termos da somatória de (2.6.26) corresponde a sucessivas multiplicações por $(1 - 2\mu\lambda_n)^2$. Quando o processo é convergente, estes fatores são cada vez menores. Para que se possa avaliar os fatores que influem em sua dinâmica, o processo de convergência é modelado como um decaimento exponencial em que cada termo corresponde à atenuação de uma constante de tempo, chamada de τ_{mse} , desta função exponencial. Assim, ao se igualar o termo multiplicativo de (2.6.26) ao decaimento exponencial tem-se a equação

$$\exp\left(-\frac{1}{2(\tau_{mse})_n}\right) = 1 - 2\mu\lambda_n, \quad (2.6.27)$$

Para grandes valores de τ_{mse} vale a aproximação

$$\exp\left(-\frac{1}{2(\tau_{mse})_n}\right) \approx 1 - \frac{1}{2(\tau_{mse})_n}. \quad (2.6.28)$$

Combinando (2.6.27) e (2.6.28) obtém-se

$$(\tau_{mse})_n = \frac{1}{4\mu\lambda_n}. \quad (2.6.29)$$

Relembre-se o fato de que $\text{tr}[\mathbf{R}]$ é igual à soma dos autovalores de \mathbf{R} . Quando todos os autovalores são iguais pode-se então escrever

$$\lambda = \frac{\text{tr}[\mathbf{R}]}{L+1}. \quad (2.6.30)$$

Para este caso a expressão para τ_{mse} é

$$\tau_{mse} = \frac{L+1}{4\mu\text{tr}[\mathbf{R}]} \quad (2.6.31)$$

A expressão (2.6.31) permite avaliar de que forma o processo de convergência do algoritmo LMS é influenciado. Caso se use um maior número de pesos a convergência será mais lenta, pois o aumento do número de elementos tende a diminuir os autovalores e com isso o fator multiplicativo $(1 - 2\mu\lambda_n)^2$ aproxima-se mais da unidade. Ao contrário, o aumento de μ ou da energia do sinal de entrada, indicada pelo valor de $\text{tr}[\mathbf{R}]$, acelerará o processo adaptativo pois os dois fatores aumentam a variação do vetor de pesos, diminuindo desta forma o número de iterações para se alcançar o valor mínimo.

A estimativa do gradiente através do algoritmo LMS é feita de forma estocástica, em função do sinal de entrada e do erro. A tendência desta estimativa é aumentar o nível médio do erro do processo adaptativo. O conceito de perturbação (M) introduzido por [Widrow 1985] foi criado para medir o efeito da estimativa do gradiente sobre este erro e é dado como a relação entre o erro final do sistema adaptativo e o erro mínimo. Para o caso em que todos os autovalores são iguais a perturbação é dada por

$$M = \frac{\xi}{\xi_{min}} = \mu\text{tr}[\mathbf{R}]. \quad (2.6.32)$$

A dedução de (2.6.32), embora direta, é relativamente extensa e foge ao escopo deste trabalho, sendo disponível em [Widrow 1985].

As duas últimas equações demonstram que há um compromisso entre o valor ideal para μ : um aumento nesta variável diminui a constante de tempo do processo adaptativo, o que significa acelerar sua convergência. Há no entanto um aumento na perturbação, com a resposta do sistema adaptativo tornando-se mais incerta e ruidosa.

2.7 Adaptação do filtro transversal para o caso contínuo

Considere-se agora para a Figura 2.2 que os sinais de entrada e desejado passem a ser *contínuos* e sejam identificados como $x(t)$ e $d(t)$ respectivamente. Os vários sinais de entrada são gerados fazendo a transformação bilinear [Karni 1989]

$$z = \frac{s+p}{s-p}. \quad (2.7.1)$$

Assim, se na Figura 2.2 tinha-se

$$x_i = x(k-i) = z^{-1}x_{i-1}, \quad (2.7.2)$$

para o plano s tem-se

$$x_i(s) = \frac{s-p}{s+p} x_{i-1}(s). \quad (2.7.3)$$

A função de transferência $(s-p)/(s+p)$ é chamada de *allpass*, e corresponde ao deslocamento no tempo do sinal de entrada sem modificação de sua amplitude. A transformada no tempo de (2.7.3) resulta

$$x_i(t) = x_{i-1}(t) - 2p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} x_{i-1}(t-\tau) d\tau. \quad (2.7.4)$$

A saída $y(t)$ passa a ser

$$y(t) = \sum_{i=1}^L w_i x_i(t) = \mathbf{W}(t)^T \mathbf{X}(t). \quad (2.7.5)$$

Compare-se a equação (2.7.5) com (2.4.2); percebe-se que a primeira é procedente da segunda com os vetores peso e entrada substituídos por suas versões contínuas no tempo. Da mesma forma que o ocorrido com (2.7.5) e (2.4.2) um novo conjunto de equações para o caso contínuo pode ser obtido das equações para o caso discreto sem que estas percam a validade. Todas as deduções apresentadas para o caso discreto no item 2.3 podem ser então utilizadas fazendo os sinais contínuos no tempo.

O processo de busca do vetor de pesos mínimo implica numa significativa modificação do algoritmo adaptativo, para que possa ser feito continuamente. Para isto, consideremos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) = -\frac{\rho}{2} \nabla = -\rho \mathbf{R} \mathbf{W}(t) + \rho \mathbf{P}, \quad (2.7.6)$$

onde ∇ é o gradiente do erro quadrático médio em função dos pesos como definido em (2.4.9). A equação (2.7.6) é a aplicação do algoritmo *steepest descent* para o caso contínuo. Pode-se provar que a solução desta equação é:

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P} - e^{-\rho \mathbf{R} t} (\mathbf{W}(0) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{P}) \quad (2.7.7)$$

A interpretação de (2.7.7) é que em um sistema adaptativo em que o vetor peso varia na direção contrária à indicada pelo gradiente, este converge para o seu valor ótimo, indicada pela solução de regime desta última equação.

Ao se analisar (2.7.7) percebe-se que a constante de convergência ρ não tem limitação superior da constante μ do caso discreto, que deve estar contido no intervalo definido em

(2.6.19). Isto significa que teoricamente o processo adaptativo em tempo contínuo pode ser feito *tão rápido quanto desejado*.

Para se implementar o algoritmo adaptativo dado por (2.7.6) são necessários \mathbf{R} e \mathbf{P} , que de forma geral não são conhecidas, como ocorre para o caso discreto. Para tanto as seguintes aproximações não polarizadas são propostas [Haykin 1996]:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) &= d(t)\mathbf{X}(t) \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^T(t)\end{aligned}\tag{2.7.8}$$

Aplicando-se as definições de (2.7.8) na equação (2.7.6) tem-se

$$\frac{d}{dt}\mathbf{W}(t) = \rho[d(t) - \mathbf{X}^T(t)\mathbf{W}(t)]\mathbf{X}(t) = \rho e(t)\mathbf{X}(t).\tag{2.7.9}$$

que é o algoritmo LMS [Widrow 1975, Widrow 1976] para o caso contínuo.

É necessário provar que o algoritmo aqui proposto é estável no sentido BIBO (*Bounded Input Bounded Output*) isto é, se \mathbf{P} é limitado em amplitude \mathbf{W} também o será.

Da teoria de sistemas não lineares [Vidyasagar 1993] tem-se a seguinte desigualdade

$$\|\mathbf{W}(t)\| \leq \left[I \Big|_0^t \right] \|\mathbf{W}(0)\| + \int_0^t \left[I \Big|_\tau^t \right] \|\rho \mathbf{P}(\tau)\| d\tau.\tag{2.7.10}$$

onde

$$I \Big|_b^a = \exp \left\{ \int_b^a -\rho \lambda_{\min}[\mathbf{R}(s)] ds \right\}.\tag{2.7.11}$$

Na equação (2.7.11) λ_{min} é o menor autovalor de $\mathbf{R}(t)$. Esta no entanto é uma matriz de autocorrelação, seus autovalores são sempre positivos. Então existe α tal que $0 < \alpha < \lambda_{min}[\mathbf{R}(t)]$ para todo $t > 0$. Desta forma (2.7.10) torna-se

$$\mathbf{W}(t) \leq e^{-\rho\alpha} \|\mathbf{W}(0)\| + \rho \int_0^t e^{-\rho\alpha(t-\tau)} \|\mathbf{P}(\tau)\| d\tau. \quad (2.7.12)$$

Percebe-se de (2.7.12) que $\mathbf{W}(t)$ é assintoticamente estável ou seja $\mathbf{W}(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, se $\mathbf{P} \equiv 0$. Também se conclui que, desde que $\rho > 0$, $\mathbf{W}(t)$ será limitado se $\mathbf{P}(t)$ o for.

Aplicando-se a esperança na igualdade de (2.7.6) tem-se

$$E\left[\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t)\right] = \rho E[\mathbf{P}(t)] - \rho E[\mathbf{R}(t)\mathbf{W}(t)] \quad (2.7.13)$$

Usando as aproximações não polarizadas de (2.7.8) e considerando-se o vetor peso independente do sinal de entrada tem-se

$$E\left[\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t)\right] = \rho E[d(t)\mathbf{X}(t)] - \rho E[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{X}(t)]E[\mathbf{W}(t)] = \rho\mathbf{P} - \rho\mathbf{R}E[\mathbf{W}(t)] \quad (2.7.14)$$

A equação (2.7.6) deve ter média nula após a convergência ou então a média do vetor peso irá decrescer ou aumentar. Portanto

$$E\left[\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t)\right] = \rho\mathbf{P} - \rho\mathbf{R}E[\mathbf{W}(t)] = 0 \quad (2.7.15)$$

A equação (2.7.14) simplifica-se em

$$E[\mathbf{W}(t)] = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{P} \quad (2.7.16)$$

ou seja, $W(t)$ obtido pelo algoritmo LMS contínuo é estimativa não polarizada da solução ótima.

Para ilustrar as idéias expostas anteriormente tomamos novamente o filtro transversal adaptativo em tempo discreto, cuja estrutura é ilustrada de forma simplificada na Figura 2.3. Vê-se nesta figura as amostras do sinal de entrada geradas a partir de atrasos unitários, multiplicadas pelos pesos variáveis em função do algoritmo adaptativo. Na Figura 2.4 o algoritmo LMS é detalhado, onde cada peso é obtido pelo bloco $2\mu/(z-1)$ que faz a integração discreta dos sinais de erro e de entrada multiplicados. Na Figura 2.5 os blocos z^{-1} e $2\mu/(z-1)$ da figura anterior são substituídos pelo filtro *allpass* e pelo integrador no plano s respectivamente, passando então todo o processamento a ser feito em tempo contínuo. Os elementos dentro da área pontilhada configuram uma célula adaptativa, que se repete tantas vezes quanto for o número de pesos do filtro transversal adaptativo. Nesta célula o sinal de entrada passa por um filtro *allpass* para se obter o sinal de entrada da próxima célula. Os outros sinais são o erro $\varepsilon(t)$ e a multiplicação do peso com o sinal de entrada. A somatória deste último sinal de todas as células é a saída do filtro transversal adaptativo.

A utilização do filtro *allpass* como elemento de atraso deve simular o efeito do atraso unitário discreto do bloco z^{-1} . Chamando de θ a defasagem causada pelo filtro *allpass*

$$\theta = 2 \arctg\left(\frac{\omega}{p}\right) \quad (2.7.17)$$

Para pequenos valores de x , é válida a aproximação $\arctgx \approx x$. Assim a equação anterior se torna

$$\theta \approx 2\left(\frac{\omega}{p}\right) \quad (2.7.18)$$

O atraso t_D para esta aproximação é:

$$t_D = \frac{d\theta}{d\omega} = \frac{2}{p} \quad (2.7.19)$$

Assim, se queremos que o filtro *allpass* simule o atraso do bloco z^{-1} , ou seja de um período de amostragem (t_s), o parâmetro p deve valer

$$p = \frac{2}{t_s} \quad (2.7.20)$$

A utilização do filtro *allpass* como elemento de atraso é uma aproximação apenas pois o seu atraso não é linear com a frequência. Verificações numéricas demonstraram que a aproximação utilizada para obtenção de (2.7.18) é válida para frequências menores que $f_s/12$, onde f_s é a frequência de amostragem, com um erro menor que 10 %.

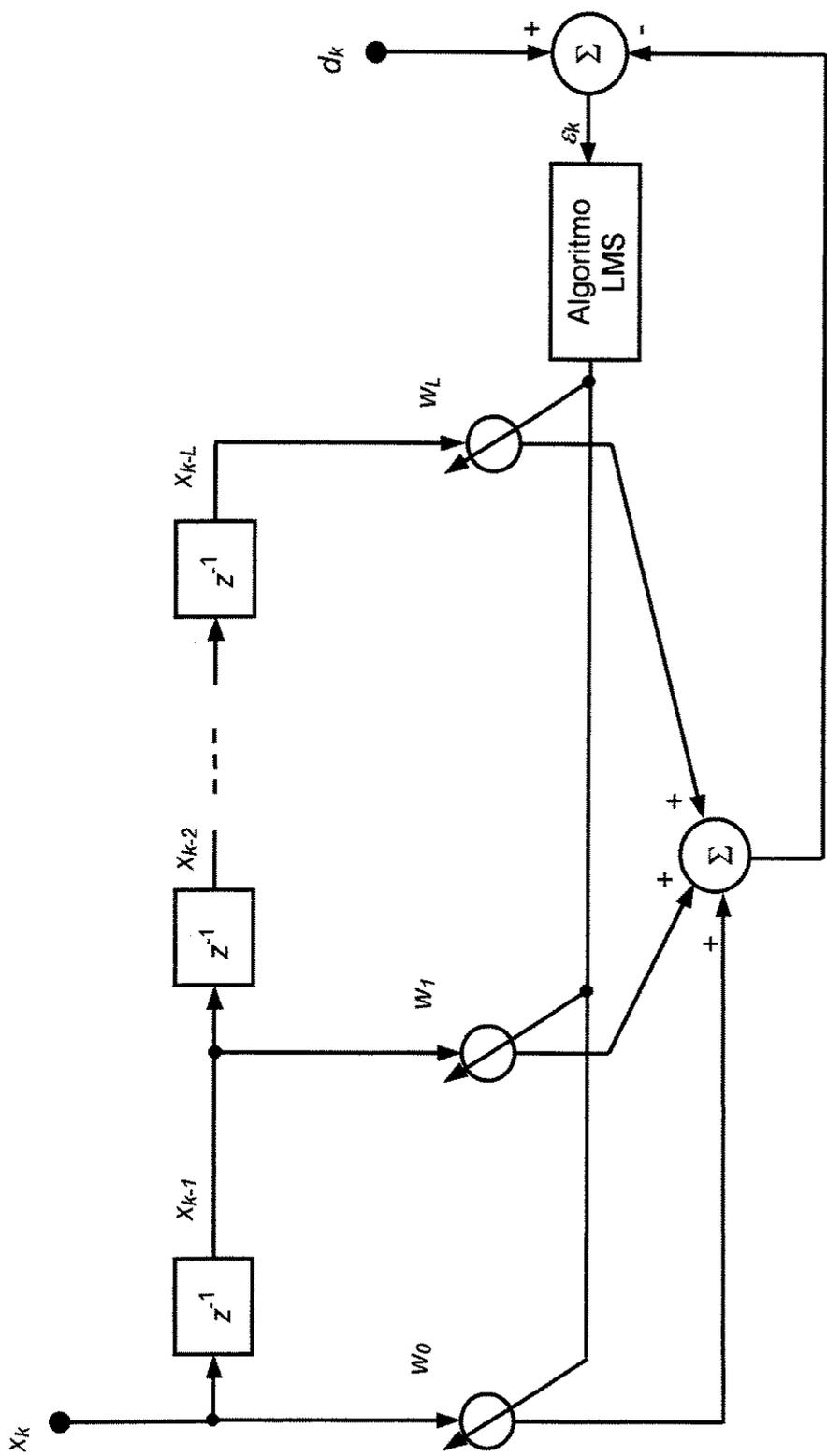


Figura 2.3 – Filtro transversal adaptativo com algoritmo LMS

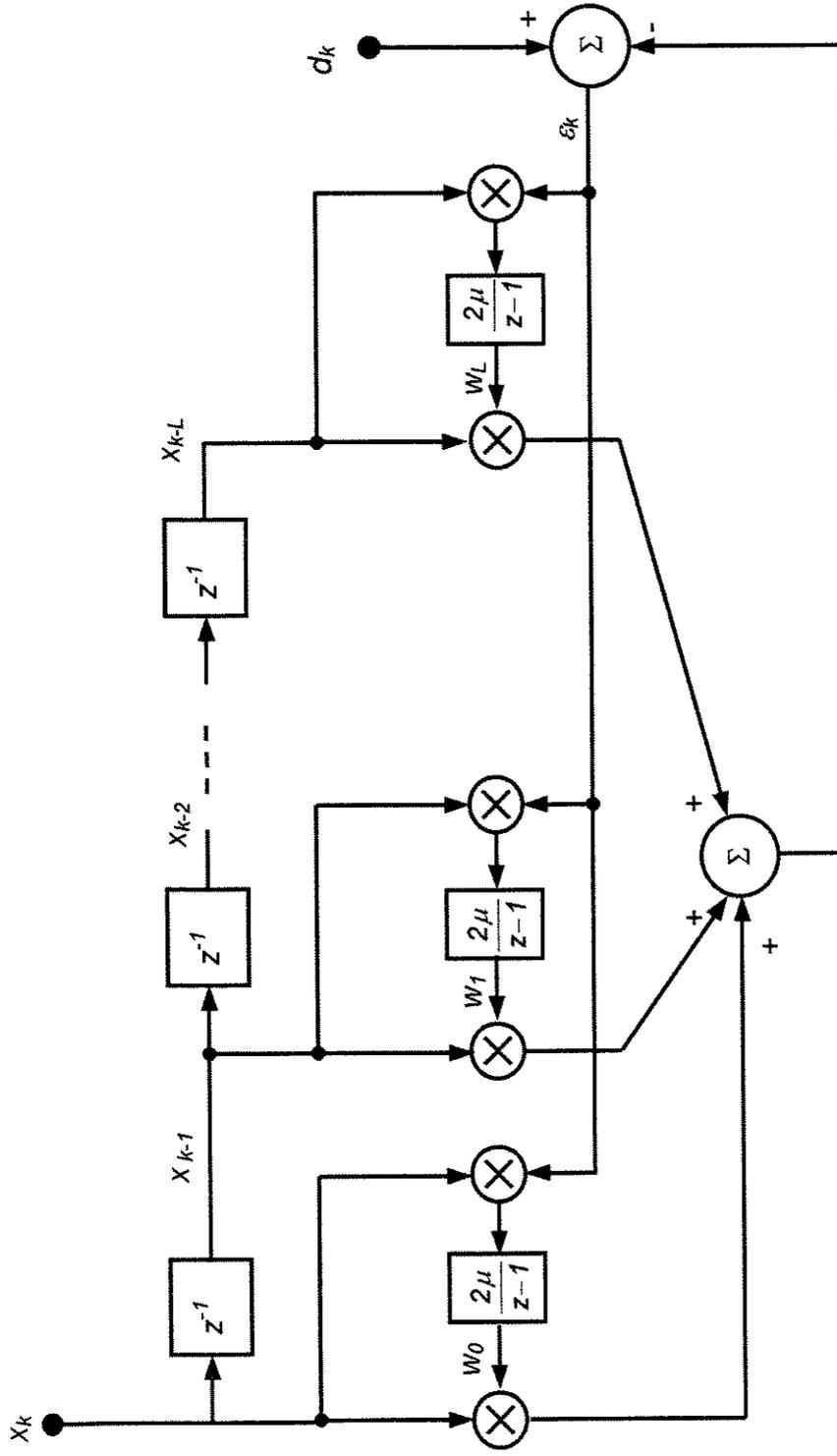


Figura 2.4 – Filtro transversal adaptativo com detalhe do algoritmo LMS em tempo discreto

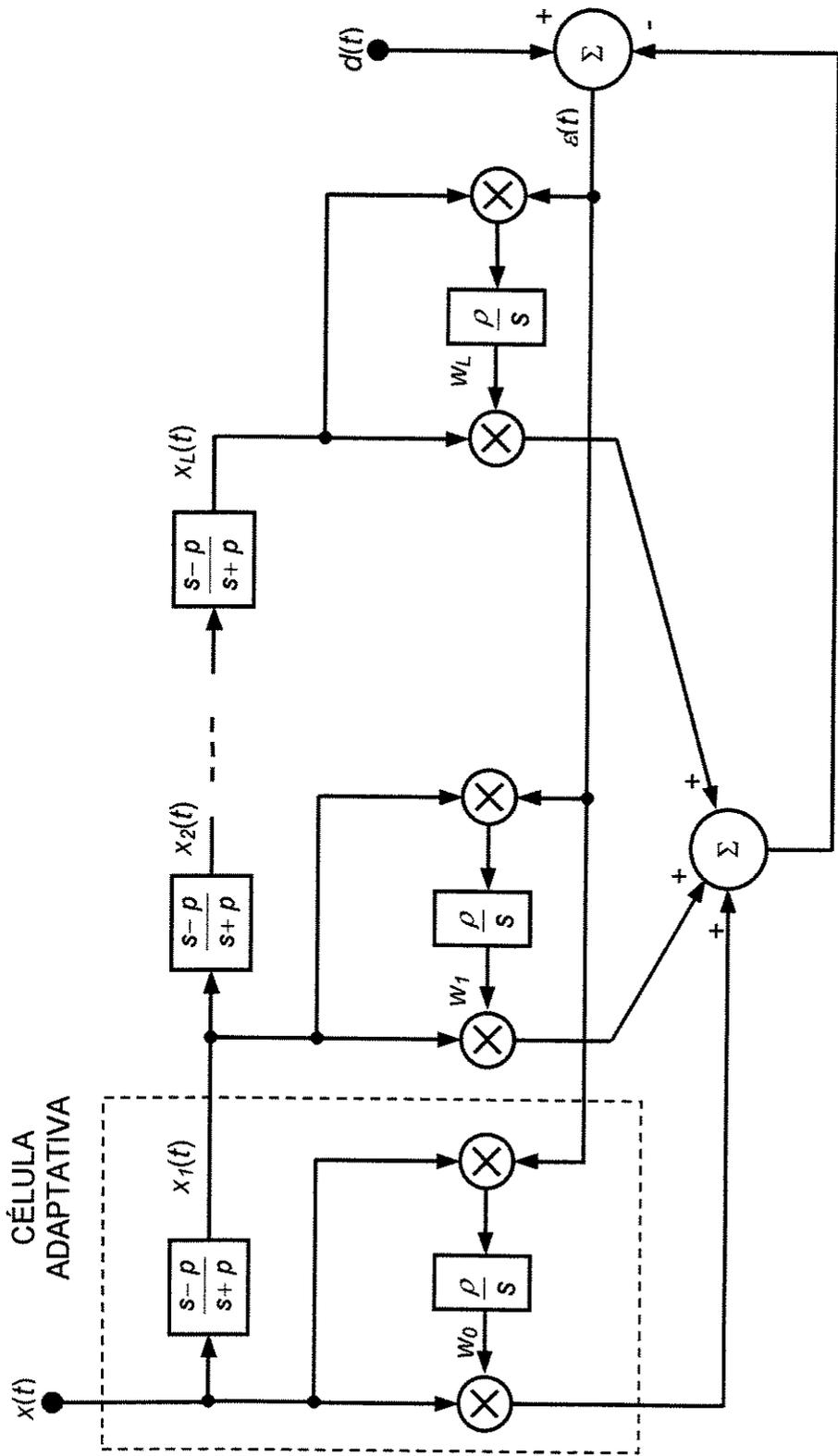


Figura 2.5 – Modificação da Figura 3.4 para processamento totalmente em tempo contínuo

Capítulo 3

Sistemas Adaptativos em *Hardware*

3.1 Introdução

Este capítulo trata sobre as formas de implementação dos sistemas adaptativos baseados no algoritmo LMS em *hardware* analógico. Muitas pesquisas foram feitas neste campo, a maior parte direcionada para a área de comunicações, em que a velocidade de processamento necessária não permite outra alternativa. As principais linhas de pesquisa são os circuitos com elementos de transferência de carga e a capacitores chaveados. Muito recentemente circuitos em tempo contínuo começaram a ser pesquisados, a partir de uma versão do algoritmo LMS em tempo contínuo.

Tendo como base as diversas propostas de circuitos adaptativos encontradas na literatura, propõe-se uma solução em *hardware*, com versões em tempo contínuo e discreto, como uma alternativa aos sistemas de aquisição e processamento de dados para a solução do problema de controle a ser tratado.

Os circuitos adaptativos em tempo contínuo são alvo de intensas pesquisas atualmente pois permitem alto grau de integração, têm baixo consumo, podem trabalhar em frequências na faixa de dezenas de MHz e dispensam filtros anti *aliasing* e a geração de sinais de chaveamento necessários para os circuitos em tempo discreto.

3.2 Implementação do algoritmo LMS em *hardware*

Soluções em *hardware* digital para sistemas adaptativos baseados no algoritmo LMS têm sido desenvolvidas normalmente fazendo uso de complexos e caros sistemas de aquisição de dados e processamento digital de sinais. O elevado custo destas soluções tem limitado seu uso a aplicações que requeiram baixa frequência de processamento tais como controle de vibração estrutural e acústica [Kuo 1996].

Várias soluções visando a diminuição da complexidade do *hardware* digital foram estudadas. A maior parte delas procura minimizar o número de operações matemáticas realizadas, especialmente as multiplicações, como por exemplo fazendo a multiplexagem do multiplicador digital. O conseqüente aumento do tempo do processamento desta solução compromete a largura de banda do processador. Outra estratégia é manter o comprimento da palavra de dados num mínimo aceitável com o objetivo de diminuir a complexidade dos multiplicadores. Algoritmos adaptativos simplificados, em que as multiplicações envolvem apenas a polaridade dos sinais também foram propostos. Outras alternativas que podem ser citadas são os sistemas digitais de memória de resíduo numérico e de arquitetura distribuída [Cowan 1985]. Apesar das diversas formas de diminuir as exigências do sistema de processamento digital, certas aplicações chegam a necessitar de mais de 200 milhões de operações em ponto flutuante por segundo, ou 200 M Flops [Lang 1995].

Soluções em *hardware* analógico por sua vez vem há algum tempo sendo propostas principalmente visando a área de comunicações, em que os sistemas de processamento digital de sinais ainda não têm capacidade suficiente para suprir a demanda de processamento. O objetivo é obter sistemas integrados com grande capacidade de compactação e baixo custo. Alguns trabalhos em circuitos adaptativos que ilustram as tendências que as pesquisas nesta área tomaram são discutidos a seguir.

O primeiros sistemas com capacidade adaptativa foram construídos com tecnologia CCD/MOS. Em [Denyer 1979] o filtro transversal era composto por elementos de transferência de carga, os CCDs (*Charge Coupled Devices*). As multiplicações envolvidas eram feitas com

transistores MOSFETs atuando na região triodo e as referências dos pesos adaptativos eram multiplexadas a partir de um conversor analógico-digital. Um filtro de 64 estágios foi construído e seu desempenho na síntese de função passa-baixas com atenuação teórica na banda passante de -50 dB e como detetor de correlação. O circuito integrado chegava a trabalhar em 100 KHz e tinha faixa dinâmica de 34 dB.

O trabalho de [Tanaka 1980] propõe o uso de outro tipo de elemento de transferência de carga, o BBD (*Bucket Brigade Device*). A topologia do circuito prevê um conjunto de colunas de BBDs de até 32 estágios. A multiplicação das cadeias de BBDs com o sinal de entrada é feita com conversores D/A construído com circuitos a capacitores chaveados, substituindo os multiplicadores a MOSFET visando sanar os problemas de estabilidade e acuidade destes. O sistema é controlado por microprocessador, que programa os conversores D/A, responsáveis pelos valores do filtro transversal. O filtro tem frequência máxima de 125 kHz e faixa dinâmica de 65 dB.

Em [Cowan 1981] há a apresentação de um circuito adaptativo que faz uso do algoritmo LMS. O circuito foi construído em tecnologia CCD e uma versão sequencial do algoritmo, que atualiza um peso a cada período de amostragem, foi implementada para diminuir o número de multiplicadores e com isso a área do circuito integrado. A estrutura do filtro transversal programável é a mesma da proposta em [Denyer 1979]. O trabalho se detém na análise do efeito das não linearidades e mostra a diferença de desempenho que o circuito tem quando o armazenamento e o cálculo é feito de forma analógica, inferior ao conseguido quando estas operações são feitas digitalmente. O circuito pode ser integrado com até 256 pesos e pode operar entre 100 Hz e 100 kHz.

Um filtro de seqüência pseudo-randômica de 64 estágios é descrito em [Haken 1982]. Neste filtro o sinal de entrada é ponderado antes do deslocamento pelo filtro transversal, ao contrário dos circuitos anteriores. A multiplicação é realizada em níveis discretos (+1 e -1) evitando-se deste modo a multiplicação analógica. O autor relata que o filtro alcançou 20 MHz quando realizando correlação com uma onda quadrada.

Apesar da evolução obtida e da alta frequência máxima alcançada, circuitos baseados em elementos de transferência de carga são densos, têm consumo elevado, limitada faixa dinâmica e necessitam de razoável quantidade de circuitos externos.

Um circuito foi desenvolvido baseado totalmente na técnica de capacitores chaveados [Haque 1983] e previsto para ser construído em tecnologia CMOS. O filtro transversal era composto de amostradores e amplificadores operacionais e a multiplicação feita por conversores analógico-digitais. Implementação discreta do circuito mostrou a viabilidade desta técnica, adequada ao projeto de circuitos integrados pelo seu baixo consumo e pela pequena área necessária.

Outro circuito baseado nesta técnica foi apresentado [Menzi 1993]; desta vez utilizaram-se multiplicadores analógicos contínuos em lugar dos conversores analógico-digitais anteriormente propostos, visando diminuir a densidade do circuito e aumentar a frequência máxima de operação. Extenso tratamento teórico dos efeitos das não-linearidades inerentes aos circuitos utilizados foi feito. As principais conclusões foram de que todos os erros modelados do filtro transversal adaptativo são corrigidos pelo próprio algoritmo adaptativo ou pela introdução de um peso com entrada constante, desde que a parte do circuito responsável pela adaptação não contenha imperfeições. Para a parte adaptativa os erros de *offset* levam o vetor peso a convergir para um valor diferente do ótimo. Demais não-idealidades desta parte não têm efeito sobre a qualidade do circuito. Todos os fatores não ideais aumentam o erro quadrático médio, porém há dominação dos *offsets* da parte adaptativa e do filtro transversal sobre este aumento. Simulações e medidas em uma implementação em *hardware* com circuitos que compensam estes *offsets* na identificação de uma planta de primeira ordem foram apresentadas. O trabalho conclui que o desempenho do circuito é dominado pela não-linearidade dos multiplicadores, uma vez que os *offsets* foram cancelados nos novos circuitos propostos. Para a aplicação estudada, a solução apresentada tem desempenho superior ao seu equivalente digital, desde que o erro introduzido pelo sistema adaptativo em ambos os casos seja significativamente maior que aqueles devidos às não-linearidades do circuito. Neste caso a realização com circuitos a capacitor chaveado tem a vantagem de menor consumo e menor complexidade.

A idéia apresentada em [Haque 1983] é retomada na topologia apresentada em [Diaz-Sanchez 1997] com a apresentação de circuitos sem realimentação interna, em tecnologia CMOS. O filtro transversal é composto de uma cadeia de capacitores e seguidores de tensão em que amostras do sinal de entrada são armazenadas e transferidas através do chaveamento. A inexistência de realimentações internas permitiu uma elevada frequência de chaveamento (20 MHz). Problemas decorrentes de descasamentos são diminuídos pois a estrutura da linha de atraso não depende de relações de capacitores como ocorre em circuitos a capacitor chaveado. A estrutura modular permite a implementação muito compacta de várias topologias de filtros digitais usando os mesmos 4 blocos principais, sendo plenamente factível a realização deste circuito em qualquer processo CMOS.

Enquanto os sistemas em *hardware* digital têm seu desempenho limitado pelo comprimento finito das palavras de dados, os trabalhos analisados mostram como sistemas em *hardware* analógico sofrem com *offsets* e não-linearidades inerentes dos circuitos. Além das alternativas apresentadas em [Menzi 1993] estes problemas foram abordados por outros pesquisadores que analisaram soluções diferentes das propostas neste último trabalho:

Em [Perry 1981] a influência das diversas não-linearidades dos blocos de um circuito adaptativo de cancelamento de ruído é estudada. A principal conclusão do trabalho é o efeito do *offset* de saída dos multiplicadores que pode levar à instabilidade da convergência caso a matriz de correlação do sinal de entrada seja singular. Como solução o autor propõe que o ganho adaptativo seja distribuído através do caminho do sinal. Simulações demonstram dramática melhoria do desempenho num cancelador de ruído com dois pesos.

Em [Tzeng 1990] um novo conjunto de coeficientes adaptativos é introduzido para compensar *offsets* de um circuito de cancelamento de eco construído com técnicas de capacitor chaveado. Conseguiu-se eliminação praticamente total do efeito destes *offsets* no desempenho do circuito.

Os trabalhos acima descritos destacam a importância dos multiplicadores na introdução de não-linearidades e *offsets*. Alternativas foram apresentadas de forma que o processamento

adaptativo fosse feito sem o uso destes circuitos como as propostas de substituição por conversores D/A de multiplicação [Tanaka 1980, Haque 1983] e a construção de filtros de seqüência pseudo-randômica [Haken 1982]. Variações destas técnicas foram analisadas por outros autores, como se descreve a seguir.

Em aplicações em que o sinal de entrada é randômico, o multiplicador e o filtro transversal foram substituídos por um gerador pseudo-randômico e um registrador de deslocamento [Qiuting 1993]. A estrutura do circuito permite que se economizem os dois multiplicadores e um elemento de atraso. O desempenho do sistema mostrou-se comparável ao da execução convencional.

Conversores sigma-delta substituíram multiplicadores nas estruturas que foram desenvolvidas por [Qiuting 1993] e [Mueller 1993] tornando o processamento totalmente digital. Em [Mueller 1993] o circuito foi experimentado em um cancelador de eco, com uma versão simplificada do algoritmo LMS que considera apenas a polaridade do sinal de entrada, em que os pesos puderam ser estimados com resolução de 11 bits. Em [Qiuting 1993] os moduladores sigma-delta são utilizados para gerar seqüências binárias a partir de sinais não-randômicos. O autor conclui neste trabalho que o desempenho pode ser superior ao da realização convencional pois o ruído de quantização pode melhorar o processo adaptativo quando a matriz de correlação de entrada é singular.

Os sistemas adaptativos não se restringiram aos circuitos em tempo discreto. O algoritmo LMS em tempo contínuo é analisado em [Gabriel 1976], direcionado para sistemas adaptativos de redes de antenas. Uma proposta de estrutura contínua é apresentada por [Karni 1989] onde os elementos de atraso do filtro transversal digital são substituídos por redes atrasadoras contínuas (*allpass*). Um circuito com dois pesos foi experimentado, porém o autor relata que o circuito converge para a saturação quando a constante adaptativa é muito grande devido à sua limitada faixa dinâmica.

[Ortiz-Balbuena 1995] retoma o tema de obtenção de uma estrutura adaptativa contínua a partir da identificação de sistemas com polinômios ortogonais tais como de Laguerre, Legendre, Hermite e Chebyshev. Funções de Laguerre modificadas podem ser obtidas por uma cascata de

estágios em que o primeiro é uma estrutura que tem função de transferência passa-baixas e as outras têm função de transferência *allpass*. Simulações demonstraram a identificação de um filtro com tempo de convergência menor que 1 μ s.

[Juan 1997] discute a superioridade dos filtros Gamma sobre a linha de atraso discreta, principalmente pela capacidade que os primeiros têm de modificar a sua profundidade de memória. Um filtro transversal foi feito com circuitos com amplificadores de transcondutância e capacitores como filtros Gamma e utilizado para identificar um filtro de Sallen-Key. Algumas diferenças entre as curvas desejada e obtida são percebidas porém o resultado ainda é satisfatório. O autor faz também uma comparação entre os filtros Gamma com filtros Laguerre. Resultados de simulações mostraram que estes últimos apresentam menor tempo de convergência na identificação de uma função de transferência e maior imunidade a ruídos internos e variações de parâmetros. Baseado nestes resultados, o autor conclui que os filtros de Laguerre são melhores candidatos para implementação analógica.

Um circuito adaptativo recursivo foi proposto por [Johns 1991] em que os termos de uma equação biquadrática são ajustados através do algoritmo LMS. Uma boa quantidade de circuitos extras foi necessária cujas funções de transferência geravam os gradientes do sinal da saída com relação ao coeficiente a ser adaptado. O trabalho traz ainda análise do efeito de *offsets* dos integradores sobre o desempenho do circuito e demonstra a relação entre este desempenho e a estrutura do circuito. O trabalho propõe o uso da estrutura *ladder* ortonormal em que o efeito total dos *offsets* sobre o erro médio do processo adaptativo é menor que nas estruturas convencionais. A identificação de sistemas de segunda e terceira ordem foi feita e os resultados mostraram a coincidência da resposta em frequência com a do modelo seguido.

O método LMS também foi utilizado para ajustar um único parâmetro, a frequência natural de um circuito biquadrático [Kwan 1991], a partir de uma entrada senoidal. O circuito foi projetado utilizando amplificadores de transcondutância e capacitores em tecnologia CMOS. Uma versão deste circuito foi construída e experimentada em 300 kHz. Os vários efeitos não ideais do circuito são avaliados, em que predominam os efeitos dos *offsets* dos amplificadores, que levam o circuito a desviar-se da frequência correta.

3.3 Uma proposta de filtro transversal adaptativo com componentes discretos

A Figura 3.1 ilustra a idéia de um filtro transversal adaptativo em *hardware*. Nesta figura, a célula adaptativa é um circuito que responde pelo deslocamento do sinal de entrada V_{Xi} e pelo cálculo do peso segundo o algoritmo LMS. O deslocamento de V_{Xi} é feito por *sample & holds*, cujos sinais de chaveamento são \bar{S}/H_i , numa variante da idéia apresentada por [Haque 1983]. V_E é o sinal de erro entre o sinal do filtro adaptativo V_Y e o sinal desejado. V_{Di} é a multiplicação do sinal de entrada da célula com o peso e cuja soma, realizada pelo amplificador operacional, resulta em V_Y . Este último amplificador também é utilizado para minimizar os efeitos dos *offsets* de saída dos multiplicadores, de acordo com a estratégia relatada em [Perry 1981].

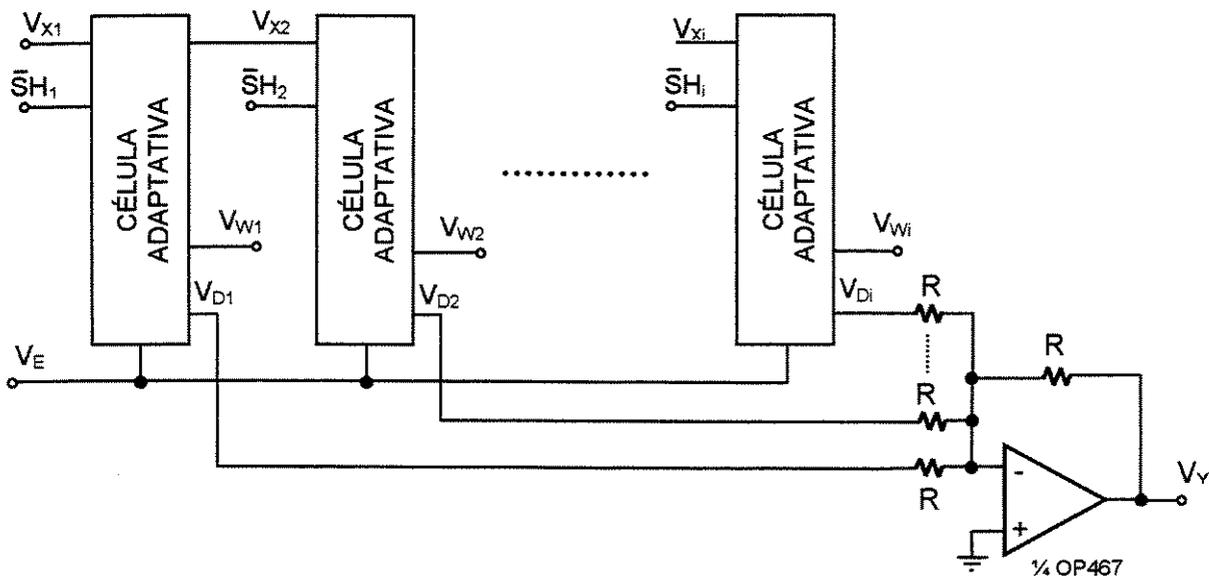


Figura 3.1 – Filtro adaptativo em *hardware*

A célula adaptativa é ilustrada na Figura 3.2 abaixo. V_{Xi} é o sinal que vem da célula anterior e V_E é o sinal de erro. U_1 , U_2 e U_3 em conjunto realizam o algoritmo LMS. O ganho adaptativo é dado pelo ganho do amplificador operacional. A saída do *sample & hold* é o valor do peso V_{Wi} . U_4 realiza a multiplicação do sinal de entrada e o peso, tendo como resultado o sinal a

ser somado para obter a resposta do filtro adaptativo. A saída do *sample & hold* U_5 é o sinal que será enviado à próxima célula.

U_1 e U_4 são multiplicadores de quatro quadrantes pertencentes a um CI MLT04, que contém quatro destes circuitos. U_2 é um amplificador operacional de baixo *offset* que também pertence a um CI quádruplo, o OP467. O mesmo ocorre com U_3 e U_5 , dois dos 4 *sample & holds* contidos no CI SMP04. Esta compactação permite que, com 5 circuitos integrados, seja possível implementar 4 células adaptativas, utilizando-se assim pouco espaço de placa. O filtro adaptativo pode ser imaginado como um sistema em que a célula adaptativa (ou grupo de células adaptativas) é montada como um módulo em uma placa-mãe permitindo desta forma que o filtro adaptativo seja configurado com número variável de pesos. O desempenho do circuito é garantido pelo baixo *offset* do amplificador operacional (0,1 mV típico) e distorção dos multiplicadores (0,2 %). O sistema completo pode operar com frequência de chaveamento de até 85 kHz, limitada basicamente pelo *sample & hold*.

A Figura 3.3 ilustra a célula adaptativa modificada para processamento em tempo contínuo. U_2 é um amplificador operacional de transcondutância (OTA), um circuito cuja corrente de saída é função da tensão entre os terminais de entrada. O C.I. utilizado, o LM13700, substitui simultaneamente os circuitos OP467 (U_2) e SMP04 (U_3) que efetuavam o algoritmo LMS em tempo discreto na figura anterior. Este circuito está configurado como integrador, cuja constante de tempo responde pelo ganho adaptativo. O terminal I_B permite o ajuste da transcondutância do OTA, e conseqüentemente do ganho adaptativo, por mais de 6 décadas. O bloco em destaque é o filtro *allpass*, que simula o deslocamento no tempo do sinal de entrada causado pelo *sample & hold* U_5 da Figura 3.2. Como no caso do outro C.I. LM13700, o terminal I_B permite modificar o atraso do filtro *allpass*.

A Figura 3.4 abaixo traz o circuito responsável pelo acionamento dos *sample & holds* das células adaptativas, chamado de varredura de chaveamento. O circuito integrado 74LS193 está configurado como contador decrescente de módulo 8. Os sinais deste circuito geram a seleção do multiplexador 74LS138, cujas saídas estão conectadas aos sinais de controle dos *sample & holds* (\bar{S}/H_1 a \bar{S}/H_8 na figura). À medida que ocorre a contagem, estes sinais são acionados em

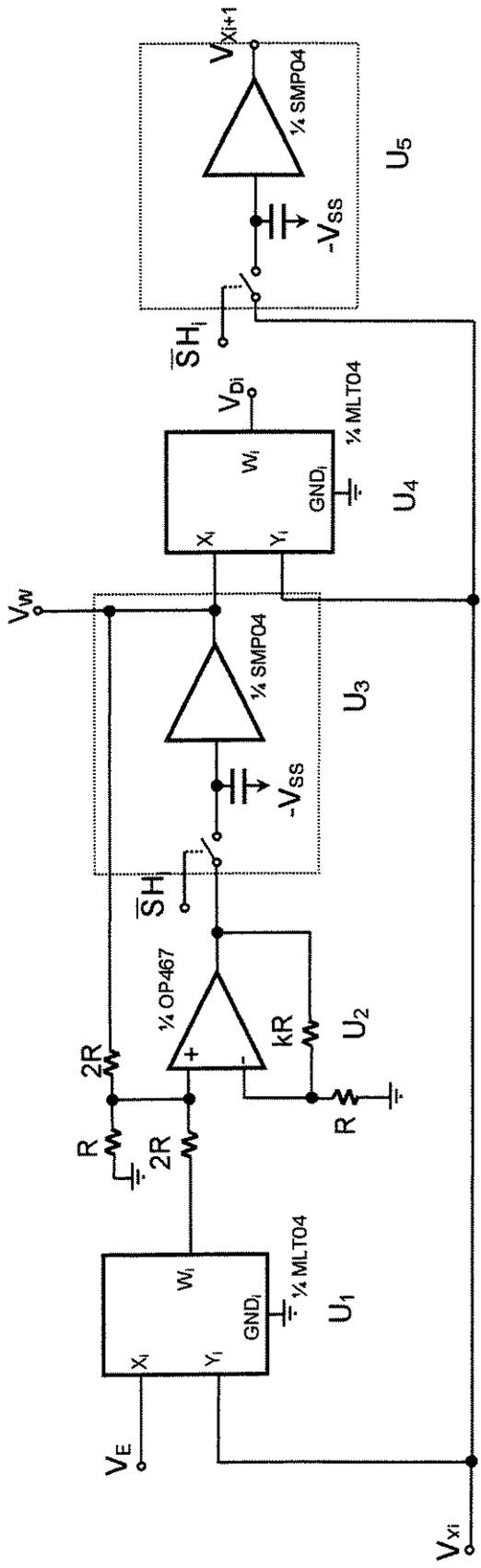
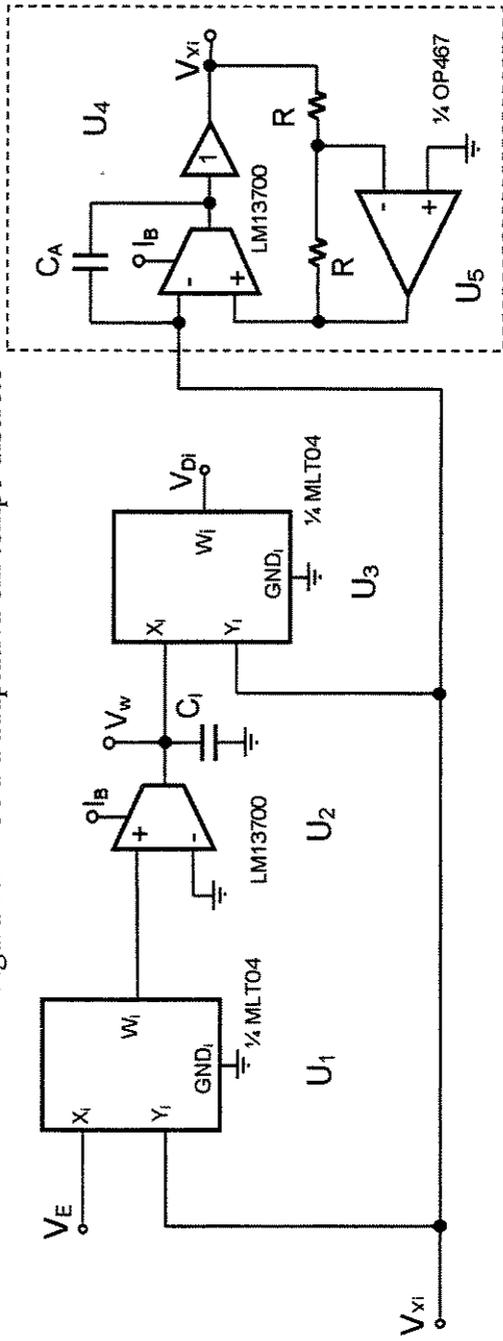


Figura 3.2 – Célula adaptativa em tempo discreto



ALLPASS

Figura 3.3 – Célula adaptativa em tempo contínuo

seqüência, colocando os respectivos circuitos na condição de amostragem. O acionamento em seqüência a cada ciclo de chaveamento causa então o deslocamento dos sinais dentro da cadeia de *sample & holds*, o que reproduz o efeito dos elementos de atraso do filtro transversal. O circuito mostrado é um exemplo bem simples e acessível de se obter o processo de acionamento dos *sample & holds*. Sistemas mais sofisticados utilizando dispositivos lógicos programáveis podem ser idealizados para um número maior de elementos.

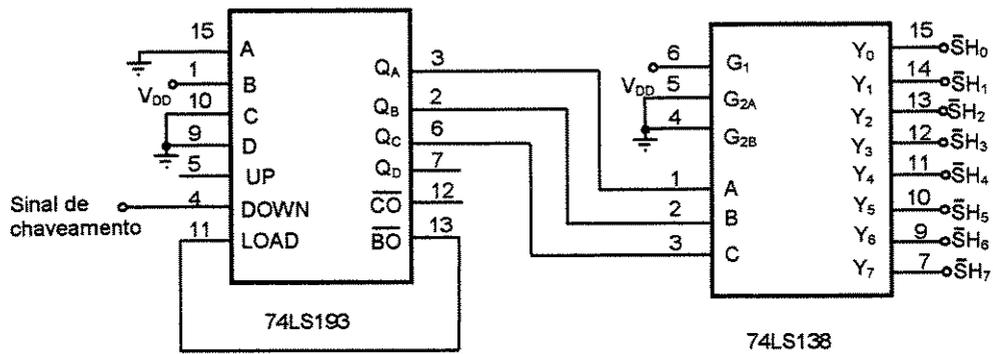


Figura 3.4 – Circuito de varredura de chaveamento

Capítulo 4

Controle Adaptativo Utilizando o Algoritmo LMS

4.1 Introdução

Este capítulo trata das abordagens de controle adaptativo, originalmente apresentadas por [Widrow 1985] e [Kuo 1996], utilizando o filtro transversal adaptativo e o algoritmo LMS.

A primeira abordagem baseia-se no modelamento direto da planta, ou seja, no ajuste do filtro transversal adaptativo de forma que este imite o comportamento do sistema em identificação (denominado “planta” em teoria de controle). A segunda abordagem é semelhante à primeira porém neste caso o filtro adaptativo busca manter a resposta do conjunto filtro-planta com algum comportamento desejado. Neste caso o filtro tende a apresentar a melhor aproximação para a função de transferência recíproca do sistema desconhecido.

O controle adaptativo *feedforward*, muito utilizado no controle de vibrações e ruído, é analisado em seguida. Esta abordagem é então modificada de modo a compensar influências da planta e do processamento sobre o sinal de controle, resultando no algoritmo *filtered-x* LMS. Uma última modificação ainda é feita neste esquema de controle incluindo-se um bloco cuja função de transferência servirá de modelo de referência para moldar o comportamento do conjunto filtro-planta.

O esquema final com algoritmo *filtered-x* LMS e modelo de referência é analisado em detalhe, visando levantar os fatores de influência de seu desempenho, pois será utilizado nas simulações e experimentos deste trabalho.

4.2 Controle por modelamento adaptativo

A primeira abordagem de controle adaptativo chama-se controle por modelamento adaptativo e funciona da seguinte maneira: faz-se o modelamento direto da planta para determinar entradas de controle que causem as saídas desejadas da planta. Aplicamos então estas mesmas entradas de controle para a planta real e o resultado são saídas da planta que se aproximam das saídas desejadas. Este tipo de controle é de uma certa forma de malha aberta, porém a malha é fechada através do processo adaptativo.

Um diagrama em blocos deste tipo de controlador é ilustrado na Figura 4.1 abaixo. O sinal de controle é dado por r_k . O controle da planta x_k é obtido do bloco cálculo avançado no tempo. Este bloco calcula x_k da referência da entrada de referência, do vetor peso \mathbf{W}_k e do vetor de entrada \mathbf{X}_k . Vamos considerar agora a operação do bloco de cálculo avançado no tempo.

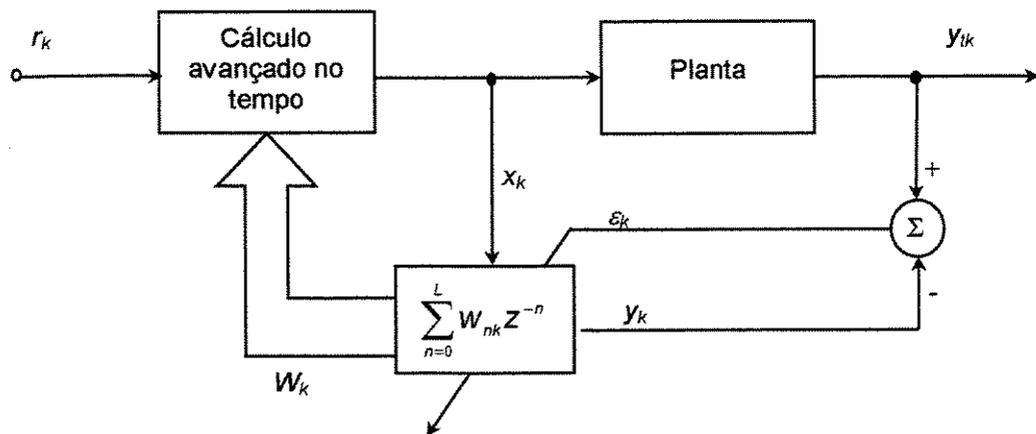


Figura 4.1 – Controle por modelamento direto

Assumindo que o erro tenha sido levado a zero pelo processo adaptativo, o objetivo do cálculo avançado no tempo é obter x_k de r_k de forma que r_k e y_k sejam iguais. Se esta situação se estabelece então a saída da planta y_{ik} será próxima a r_k , que é nosso objetivo final. Portanto o

cálculo avançado no tempo deve se transformar essencialmente num inverso do modelo adaptativo na figura acima.

Formamos o modelo inverso da seguinte maneira. O vetor inteiro é atualizado em cada iteração de acordo com o algoritmo LMS. No modelo adaptativo, ao assumirmos que y_k e r_k são iguais como discutido acima, temos na k -ésima iteração

$$y_k = \sum_{n=0}^L w_{nk} x_{k-n} \quad (4.2.1)$$

Portanto,

$$x_k = \frac{1}{w_{0k}} \left[r_k - \sum_{n=1}^L w_{nk} x_{k-n} \right] \quad (4.2.2)$$

A obtenção do sinal de controle porém encontra um problema: w_{0k} não pode se aproximar de zero ou então x_k sofrerá grande variação. Este fato se manifesta quando a planta apresenta atraso de transporte. A modificação a ser feita é introduzir um número de pesos com entrada zero cujo efeito seja reproduzir este atraso, que deve ser conhecido *a priori*. Tomemos como exemplo que os dois primeiros pesos tenham a entrada zero com este objetivo. Então a entrada corrente e anterior não tem efeito sobre sua saída, mas x_{k-2} , x_{k-3}, \dots , x_k tem efeito. Escolhendo entradas que levem a saída do modelo a ser igual a r_k , temos agora

$$y_k = \sum_{n=2}^L w_{nk} x_{k-n} \quad (4.2.3)$$

Este resultado permitiria calcular x_{k-2} , como foi feito em (4.2.2), mas realmente desejamos x_k , não x_{k-2} . Portanto vamos deslocar a última equação duas unidades de tempo no

futuro:

$$y_{k+2} = \sum_{n=2}^L w_{nk+2} x_{k+2-n} \quad (4.2.4)$$

Vamos assumir agora que os pesos variem lentamente de forma que podemos usar os valores correntes de peso no lugar de valores futuros. Então com r_k igual a y_k temos

$$x_k = \frac{1}{w_{2k}} \left[r_{k+2} - \sum_{n=3}^L w_{nk} x_{k+2-n} \right] \quad (4.2.5)$$

Este resultado requer o conhecimento da entrada do comando de referência duas unidades de tempo avançadas no futuro. Às vezes valores futuros estão disponíveis, e a última equação pode ser usada para se alcançar o objetivo do controle. Quando somente r_k está disponível, (4.2.5) pode ser modificado para usar o conhecimento disponível como segue,

$$x_k = \frac{1}{w_{2k}} \left[r_k - \sum_{n=3}^L w_{nk} x_{k+2-n} \right] \quad (4.2.6)$$

Usar (4.2.6) obrigará o modelo a seguir a referência de comando defasada de duas unidades de tempo. Este atraso na resposta é pois uma consequência inevitável do atraso de transporte da planta.

4.3 Controle adaptativo inverso

Controle adaptativo inverso é outra abordagem ao problema do controle adaptativo, baseado nas técnicas de modelamento inverso. Foi desenvolvido primariamente para acomodar situações onde a planta pode ser “fase não-mínima” quer dizer, pode ter zeros na função de transferência na metade direita do plano s ou em termos de um modelo (digital) discreto, pode ter zeros fora do círculo unitário no plano z . Controlar uma planta de fase não-mínima pelo método

de controle por modelamento direto pode levar a dificuldades, porque o sinal de saída deve ter uma transformada essencialmente igual ao produto da transformada do sinal de comando de entrada e a recíproca da função de transferência da planta (ver Figura 4.1). Se o modelo da planta tem zeros fora do círculo unitário, o sinal de controle x_k terá uma transformada com pólos fora do círculo unitário. Neste caso o sinal de controle será instável. No mundo físico, este sinal aumentará até que alguma parte do sistema entre em saturação, causando perda de controle.

Em outras palavras, uma planta desconhecida pode ser feita para rastrear um sinal de comando de entrada quando este sinal é aplicado a um controlador cuja função de transferência aproxima-se da inversa da função de transferência da planta. A saída do controlador se torna o sinal de acionamento para a planta. No controle adaptativo inverso, os parâmetros do controlador são obtidos por um processo de modelamento adaptativo inverso aplicado à planta. Se o controlador é realizado como um filtro transversal adaptativo cujos pesos são adaptados por um algoritmo de mínimos quadrados como o algoritmo LMS, foi mostrado que a estabilidade do controlador pode ser garantida seja a planta de fase não-mínima ou não.

O modelo inverso da planta desconhecida pode ser formado como mostrado na Figura 4.2. A entrada do filtro adaptativo é a saída da planta e o filtro é adaptado para que sua saída seja a melhor aproximação em mínimos quadrados da saída da planta. A aproximação implica que a cascata da planta desconhecida e do filtro LMS têm uma função de transferência que é essencialmente de valor unitário, ao menos dentro da banda de frequência do sinal de entrada. Aproximações adequadas podem ser obtidas em geral com filtros transversais adaptativos de comprimento suficiente, mesmo que a planta tenha muitos pólos e zeros.

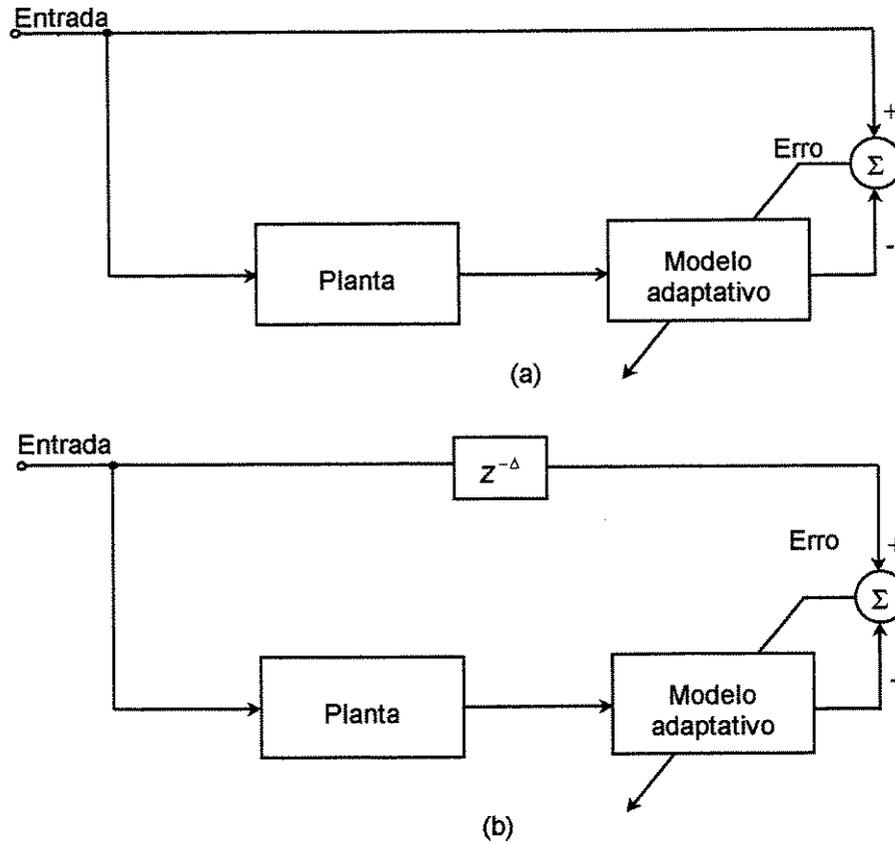


Figura 4.2 – Modelamento adaptativo inverso (a) sem atraso (b) com atraso

Se uma planta contínua é estável, todos os seus pólos se encontram no semiplano esquerdo do plano s . Alguns zeros podem estar no semiplano direito e então a planta seria de fase não-mínima. O inverso de uma planta de fase mínima tem todos os seus pólos no semiplano esquerdo, e é portanto estável. Mas no caso de plantas de fase não-mínima o modelo inverso pode ser instável. Este tipo básico de instabilidade pode ser removida incluindo o atraso do modelamento inverso, $z^{-\Delta}$, mostrado na Figura 4.2(b). Demonstra-se [Widrow 1985] que neste caso o modelo adaptativo fornece uma cópia atrasada da planta. Este atraso permite que o modelo adaptativo tenha resposta impulsiva bilateral. Portanto permitindo o atraso na Figura 4.2(b) nós podemos aproximar modelos inversos tanto para plantas de fase mínima e não mínima sem conhecer *a priori* se a planta é ou não de fase-mínima pois a porção não causal da resposta impulsiva é aproximada pela parte anterior ao atraso no modelo adaptativo. Contudo algum conhecimento das

características da planta será sempre útil na escolha do atraso Δ e do comprimento do filtro transversal usado para modelamento inverso.

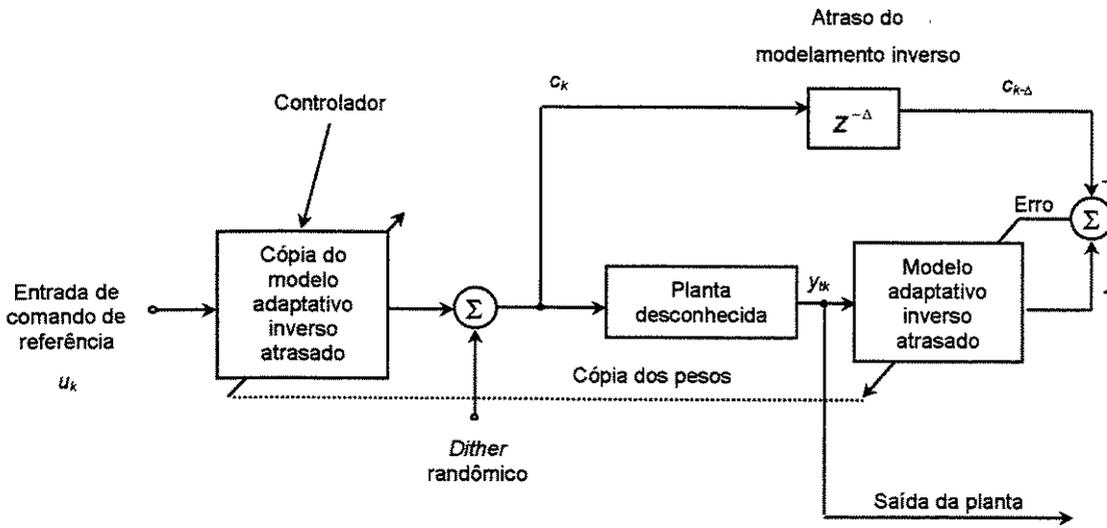


Figura 4.3 – Controle adaptativo inverso

O método de controle adaptativo inverso é ilustrado na Figura 4.3. Aqui a versão adaptativa inversa, sendo um filtro transversal sem realimentação é uma aproximação estável do inverso da planta. O conceito incluindo o sinal de *dither* é similar ao conceito do controle por modelamento direto. O sinal de *dither* mantém o processo adaptativo na ausência de um sinal de controle de excitação persistente. O controlador na Figura 4.3 é uma cópia do modelo inverso aproximado e quando o sistema está operando apropriadamente a saída da planta irá rastrear o sinal de referência de comando que é aplicado como entrada para o controlador. A saída do controlador é a função que aciona a planta. Se o controlador for um inverso atrasado exato da planta, a saída desta, assumindo não haver ruído, seria uma cópia exata do comando de referência de entrada ou seja,

$$y_{tk} = u_{k-\Delta} \quad (4.3.1)$$

4.4 Controle adaptativo *feedforward*

No controle *feedforward* o sinal de controle é obtido exclusivamente em função do sinal de referência. Para tanto este sinal deve ser sensorado antes de sua introdução na planta, de forma a permitir que a ação de controle aconteça simultaneamente com a resposta da planta ao sinal de referência.

O sistema de controle adaptativo *feedforward*, ilustrado na Figura 4.4, é considerado um problema de identificação adaptativa, em que o filtro H_W é usado para estimar um planta desconhecida H_D . A planta e o filtro são excitados pelo mesmo sinal de entrada u_k . A saída da planta fornece o sinal desejado para o filtro adaptativo. O algoritmo adaptativo tem então a tarefa de manter pequeno o erro de modelamento com o acompanhamento contínuo das variações da dinâmica da planta, minimizando assim o efeito conjunto da resposta da planta e do filtro adaptativo.

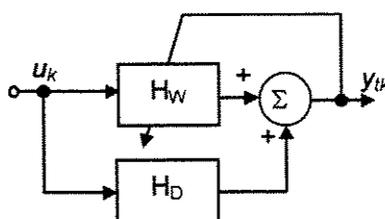


Figura 4.4 – Controle *feedforward*

O uso do filtro adaptativo como mostrado na Figura 4.4 é complicado pelo fato de dificilmente ser possível a comparação da resposta pura do filtro adaptativo com relação à saída da planta; normalmente entre a superposição do sinal da planta e do filtro adaptativo há algum tipo de processamento ou modificação. Tomemos como exemplo o controle *feedforward* de ruído. Neste caso a saída do filtro adaptativo deve ser fornecida a um conversor D/A, amplificador e alto-falante até que uma resposta acústica seja gerada. A onda acústica por sua vez se propaga pelo meio material sofrendo atenuações e/ou reflexões até chegar ao ponto em que se

encontra o sensor, cujo sinal deve ser minimizado. Se a intenção é a efetiva minimização do ruído na região de interesse, tais influências devem ser levadas em consideração.

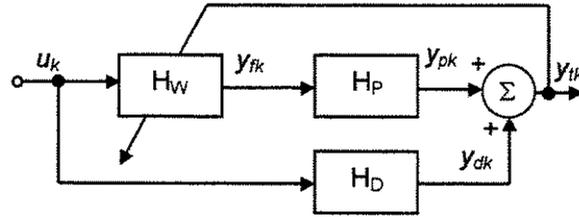


Figura 4.5 – Controle *feedforward* com introdução do efeito do caminho secundário

Na Figura 4.5 há a introdução de H_P , que representa a influência total sobre o sinal do filtro adaptativo até o ponto que se toma como referência do efeito conjunto da planta e do sinal do controlador. O filtro adaptativo deve então efetuar o modelamento direto da função H_D e o modelamento inverso de H_P para compensar o efeito do caminho secundário percorrido pelo sinal de controle.

Em termos de processamento de sinal no domínio do tempo a introdução da função de transferência H_P em um controlador usando o algoritmo LMS geralmente causará instabilidade. Isto acontece porque o sinal de erro não está corretamente “alinhado” com o sinal de referência, devido à presença de H_P [Kuo 1996].

Uma solução para a instabilidade criada pela presença de H_P é a introdução de um filtro idêntico no caminho de referência de sinal para a atualização dos pesos do algoritmo LMS, que realiza o chamado *filtered-x* LMS (FXLMS).

Com base na Figura 4.5 temos:

$$y_{tk} = y_{dk} + y_{pk} \quad (4.4.1)$$

$$= y_{dk} + h_p * y_{fk} \quad (4.4.2)$$

$$= y_{dk} + h_p * [\mathbf{W}_k^T \mathbf{U}_k] \quad (4.4.3)$$

onde h_p é a resposta impulsiva de H_p e o símbolo $*$ representa convolução linear.

O objetivo é ajustar o vetor peso para minimizar y_{ik} . Para isto vamos fazer a variação dos pesos no sentido contrário ao indicado pelo gradiente de y_{ik} , de forma semelhante ao descrito no capítulo 2 para a dedução do algoritmo LMS. O algoritmo *steepest descent* para este caso é:

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \mu \nabla E[y_{ik}^2] \quad (4.4.4)$$

Calculando o gradiente para a aproximação não polarizada de $E[y_{ik}^2]$ tem-se:

$$\nabla E[y_{ik}^2] = \nabla [y_{ik}^2] = 2(\nabla y_{ik})y_{ik} \quad (4.4.5)$$

O gradiente de y_{ik} em função do vetor peso é dado por:

$$\nabla y_{ik} = h_p * \mathbf{U}_k = \mathbf{U}'_k \quad (4.4.6)$$

Assim repetindo o raciocínio para a obtenção do algoritmo LMS e de acordo com a convenção de sinais adotada obtemos o algoritmo FXLMS:

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - 2\mu \mathbf{U}'_k y_{ik} \quad (4.4.7)$$

A última equação mostra que o algoritmo deve utilizar uma versão “filtrada” do sinal de entrada u_k , obtida com a multiplicação pela função de transferência H_p .

A Figura 4.6 ilustra o controle *feedforward*, em que H_W aparece desmembrado no filtro transversal (H_C) e no algoritmo LMS (H_F). A cópia de H_p multiplica o sinal de entrada utilizado por H_F , cumprindo assim o algoritmo *filtered-x* LMS.

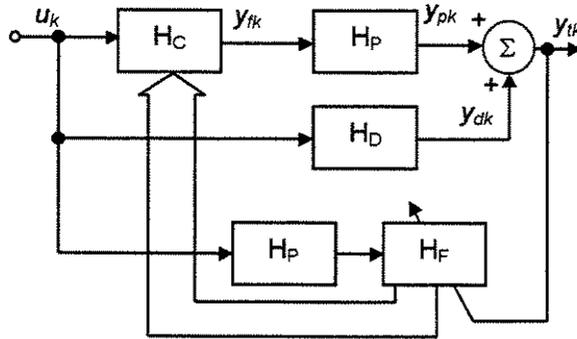


Figura 4.6 – Controle *feedforward* utilizando algoritmo FXLMS

4.5 Controle adaptativo *feedforward* com modelo de referência

O controle adaptativo descrito no capítulo anterior é capaz de minimizar o efeito conjunto do sistema de controle e do efeito da planta, de modo global ou seja para qualquer sinal de perturbação. O esquema de controle pode no entanto sofrer uma modificação que dá mais flexibilidade ao seu desempenho com a introdução de um modelo de referência. Este modelo pode moldar a resposta esperada de acordo com requisitos mais restritivos permitindo por exemplo que o controle se concentre numa determinada faixa de frequência ou compense perdas ou distorções indesejáveis.

O sistema de controle proposto é ilustrado na Figura 4.7 abaixo. Com relação à figura anterior, há duas modificações: a introdução de um ramo com H_M , função de transferência do modelo que se deseja que a planta siga, e de H_A no ramo com a cópia de H_P . H_A é um desmembramento de H_D , modela separadamente o atraso entre a percepção da perturbação e sua introdução na planta e será tratado como variável de projeto.

O bloco H_C excita o ramo onde se encontra o modelamento da resposta da planta ao sinal de controle (H_P). O algoritmo adaptativo H_F é ajustado a partir do erro (e_k) entre a saída da planta e a saída do modelo. O sinal r_k é o sinal de *dither*, que introduz excitação suficiente para sustentar o processo de adaptação na ausência de estímulo externo. O bloco H_C é um filtro adaptativo cujos

pesos são calculados através do algoritmo LMS representado por H_F como descrito no capítulo anterior.

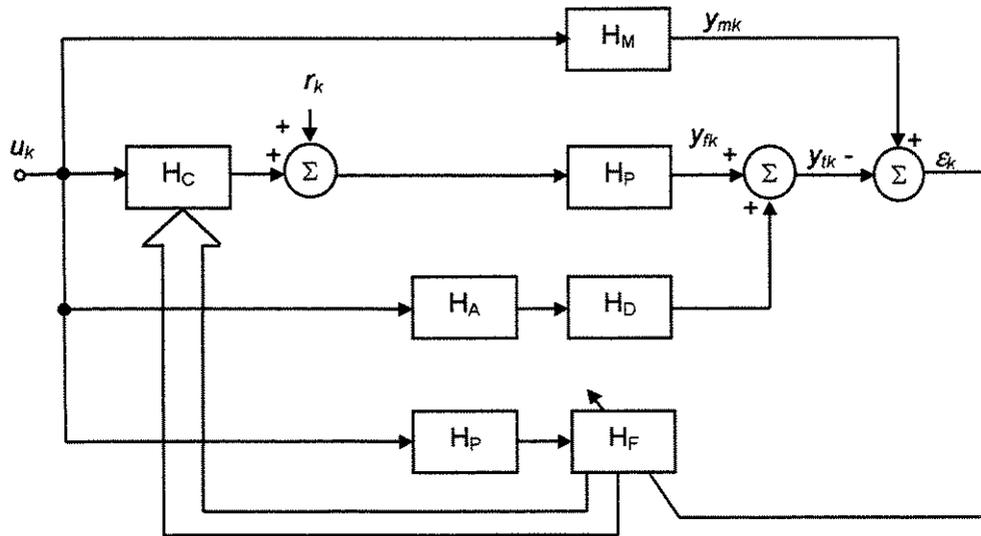


Figura 4.7 – Controle *feedforward* com modelo de referência

O processo adaptativo ajusta H_F de modo que o sinal de erro seja minimizado. Quando esta situação se estabelece as respostas do modelo e do filtro transversal ao sinal de entrada são iguais, ou seja:

$$H_M u_k = (H_A H_D + H_P H_C) u_k \quad (4.5.1)$$

O controlador é basicamente um filtro transversal em que os pesos são copiados do filtro adaptativo representado por H_F . Assim,

$$H_C = H_F \quad (4.5.2)$$

Substituindo (4.5.2) em (4.5.1) tem-se:

$$H_M u_k = (H_A H_D + H_P H_F) u_k \quad (4.5.3)$$

A solução desta última equação para H_F é:

$$H_F = \frac{H_M}{H_P} - \frac{H_A H_D}{H_P} \quad (4.5.4)$$

A saída da planta y_{tk} , utilizando a igualdade de (4.5.2) é:

$$y_{tk} = (H_A H_D + H_P H_F) u_k \quad (4.5.5)$$

Substituindo a equação (4.5.4) obtém-se

$$y_{tk} = \left[H_P \left(\frac{H_M}{H_P} - \frac{H_A H_D}{H_P} \right) + H_A H_D \right] u_k \quad (4.5.6)$$

que se simplifica em

$$\boxed{y_{tk} = H_M u_k} \quad (4.5.7)$$

Portanto o sistema de controle descrito é capaz de moldar o comportamento da planta pela escolha adequada do modelo a ser seguido.

4.6 Fatores de projeto do sistema de controle

O controlador tem fatores que estão abertos para definição e que são definidos em função da aplicação a ser dada. Estes fatores são os parâmetros do filtro transversal adaptativo, o intervalo entre a percepção da perturbação e a efetiva introdução desta na planta, representada pela função de transferência H_A , e o modelo a ser utilizado. Cada um destes fatores deve ser escolhido tendo como base critérios que otimizem o desempenho, procurando obter ao mesmo tempo um mínimo de complexidade.

O projeto do filtro adaptativo envolve a definição da frequência de amostragem (f_s), do número de pesos ($L+1$), e da constante de adaptação μ . Como foi demonstrado na equação (2.5.21), para um sinal de entrada randômico, os pesos do filtro transversal tendem a reproduzir a resposta impulsiva do sistema por ele identificado, quando o erro tende ao mínimo. Prova-se também que neste caso o erro mínimo do processo adaptativo é dado pela porção não identificada da resposta impulsiva da função de transferência por (2.5.24). Outras equações importantes para a definição dos fatores do filtro são o intervalo para o qual o ganho adaptativo garante a convergência do processo adaptativo (2.6.17) e a constante de tempo deste processo, dado por (2.6.31). A definição de perturbação expressa em (2.6.32) também deve ser considerada na definição dos fatores do filtro adaptativo.

As equações (2.5.21) e (2.5.24) são as diretrizes do projeto do controlador. As duas apontam para a necessidade de minimizar o número de pesos e conseqüentemente a frequência de amostragem a ser utilizada. (2.6.31) e (2.6.32) no entanto mostram um compromisso do desempenho do controlador com relação ao ganho adaptativo, desde que este respeite os limites que (2.6.17) impõe. O aumento do ganho acelera a convergência do processo adaptativo pela diminuição da constante de convergência, como indicada por (2.6.31), porém, de acordo com (2.6.32), obtendo-se um controle mais ruidoso e instável dado o aumento da perturbação.

A equação (2.5.24) nos dá a relação do erro mínimo com a resposta impulsiva do sistema, que deve ser utilizada como informação de projeto caso esteja disponível *a priori*. Especificando-se um erro mínimo desejável pode-se definir a extensão da resposta impulsiva a ser simulada pelo vetor peso. Deste dado e do valor do período de amostragem utilizado define-se o número de pesos $L+1$.

Muitas vezes a resposta impulsiva do sistema é obtida parcialmente sem que se conheça o seu modelo, o que dificulta a utilização de (2.5.24). Pode-se contudo descrever uma rotina que estima o número de pesos necessários para determinado erro estacionário fazendo uma estimativa do decaimento da resposta impulsiva. A partir do valor inicial e da estimativa do decaimento é feito uma aproximação para um modelo exponencial que permite estimar a parte faltante da resposta impulsiva e a partir daí o erro estacionário para o número de pesos escolhido. O fato do

número de pesos obtido deste processo ser apenas aproximado não invalida sua utilização pois é necessário que certa margem seja dada a este parâmetro de forma a não prejudicar a capacidade adaptativa do controlador caso o modelamento seja imperfeito ou variável.

Para sistemas reguladores o modelo a ser utilizado deve tornar a resposta da planta praticamente insensível à perturbação. Para isto deve-se ter

$$H_M \cong 0 \quad (4.6.1)$$

Assim, a solução não-nula de (4.5.5) torna-se

$$H_F \cong -\frac{H_A H_D}{H_P} \quad (4.6.2)$$

Para sistemas rastreadores a saída deve ser a mais próxima possível do sinal de excitação. Isto é possível fazendo

$$H_M \cong z^{-\Delta} \quad (4.6.3)$$

Desta forma, com a função de transferência do modelo dado por (4.6.3) a equação (4.5.9) garante que o sistema, desde que tenha assegurada a convergência, leva a planta a ter uma resposta igual ao sinal de excitação, porém com um atraso dado por Δ .

O último fator a ser definido é a função de transferência H_A , que relaciona-se ao tempo de resposta do controlador. É necessário que o sensoreamento da perturbação seja feito em tempo hábil para que o controlador possa gerar o sinal de controle. Além disto, H_A deve ser longo o suficiente para que seja possível a realização da parte não causal de H_F , caso esta possua pólos fora do círculo unitário, como explicado no capítulo 4.3.

Capítulo 5

Resultados Simulados e Experimentais

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta o modelamento e a identificação pelo método ERA da bancada experimental, uma viga flexível submetida a vibração através de atuadores piezoelétricos, pelo método ERA. O modelo obtido é então utilizado em simulações com o programa MATLAB 5 para avaliar o desempenho do controlador quando submetido a vários sinais de perturbação. Descreve-se depois o experimento de controle da bancada utilizando-se o sistema dSPACE e seus resultados. São feitas também simulações para a versão em tempo contínuo do controlador, visando uma comparação com sua versão em tempo discreto.

5.2 Identificação da planta ser controlada

A planta a ser controlada é uma viga com seção transversal retangular engastada em uma de suas extremidades, ilustrada na Figura 5.1 abaixo onde aparecem os transdutores piezoelétricos montados aos pares em 3 posições em ambas as faces laterais da viga. O par mais próximo ao engaste é responsável por gerar a perturbação, o par do meio é usado para o controle e o último par serve como sensor da vibração. A viga tem 800 mm de comprimento, 6 mm de espessura e 16 mm de largura. Os transdutores estão centrados na lateral da viga e igualmente espaçados entre si e da borda de engaste de 60 mm.

As funções de resposta em frequência (FRFs) da saída do sensor com relação às entradas de perturbação e controle foram levantadas com auxílio do analisador de rede e espectro HP 3566. Utilizou-se excitação aleatória gerada pelo próprio equipamento, limitada a 400 Hz por filtro passa-baixas Butterworth de 8ª ordem. A identificação foi feita com um filtro do mesmo tipo na saída da planta, necessário para o sistema de controle a ser utilizado.

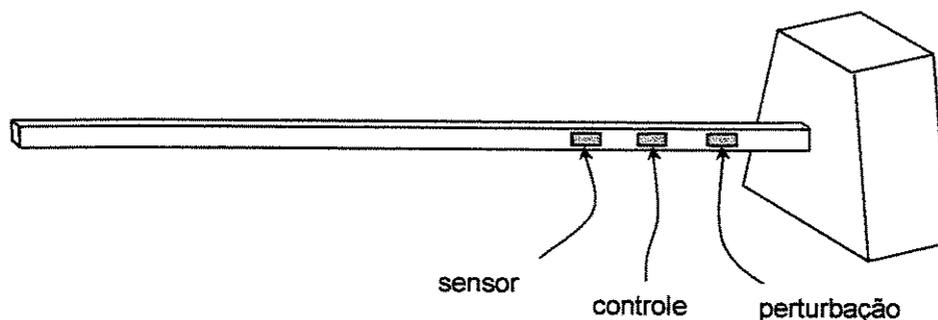


Figura 5.1 – Viga engastada com transdutores piezoelétricos

A resposta do sensor passou por um amplificador de carga para melhorar o nível do sinal. O sistema de aquisição foi configurado para banda de 400 Hz, resolução de 0,5 Hz e a realização de 50 médias. O esquema utilizado é ilustrado na Figura 5.2.

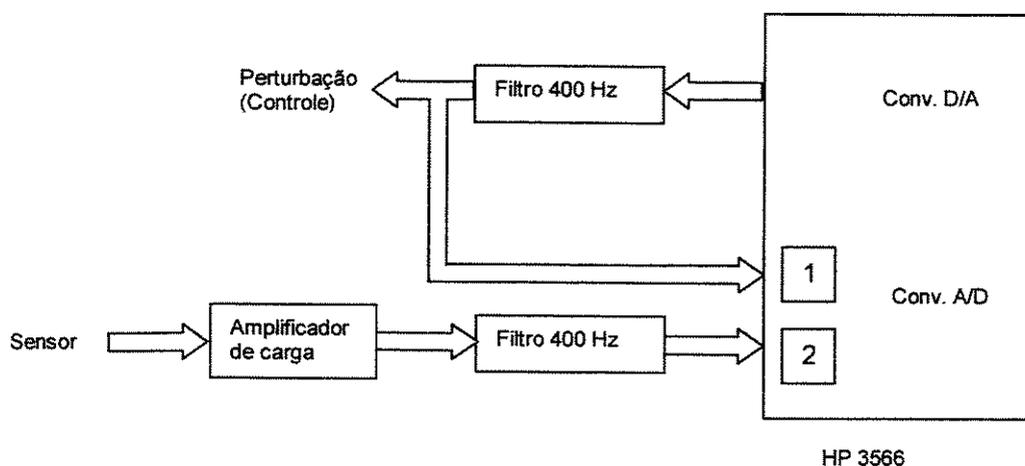


Figura 5.2 –Esquema para levantamento das funções de resposta em frequência

Os dados gerados pelo analisador foram utilizados diretamente pelo programa *erapoly.m* em ambiente MATLAB para fazer o modelamento da viga. A descrição do método ERA e a listagem do programa encontra-se no Anexo A. A identificação foi feita de 1 Hz a 400 Hz, obtendo-se um sistema de 23ª ordem. Os zeros das entradas de perturbação e controle constam nas Tabelas 5.1 e 5.2. A Tabela 5.3 traz os pólos do sistema, comuns às duas entradas. Os valores assinalados com asterisco são raízes reais e simples.

Frequência (Hz)	Fator de amortecimento
3,3668	$4,2905 \times 10^{-1}$
13,660*	----
48,042	$6,6440 \times 10^{-3}$
121,72	$3,4902 \times 10^{-2}$
156,12	$9,7403 \times 10^{-4}$
245,44	$7,0827 \times 10^{-1}$
262,24	$3,8117 \times 10^{-3}$
272,54*	----
290,00	$4,2114 \times 10^{-3}$
401,88	$1,4586 \times 10^{-2}$
437,27	$6,1541 \times 10^{-2}$
476,92	$3,2210 \times 10^{-1}$

Tabela 5.1: Zeros da resposta relativa à entrada de perturbação

Frequência (Hz)	Fator de amortecimento
3,0084	$5,9052 \times 10^{-1}$
9,8680*	----
48,408	$5,3514 \times 10^{-3}$
121,09	$3,8186 \times 10^{-2}$
133,05	$5,8736 \times 10^{-3}$
156,43*	----
213,53	$2,9575 \times 10^{-3}$
262,81	$3,2686 \times 10^{-3}$
267,53	$5,0842 \times 10^{-1}$
385,18	$5,9946 \times 10^{-3}$
413,55	$3,0445 \times 10^{-2}$
693,25	$2,0357 \times 10^{-1}$

Tabela 5.2: Zeros da resposta relativa à entrada de controle

Frequência (Hz)	Fator de amortecimento
8,2208	$7,2228 \times 10^{-2}$
27,428*	----
49,057	$6,1634 \times 10^{-3}$
121,38	$3,6009 \times 10^{-2}$
136,03	$3,6145 \times 10^{-3}$
149,30	$6,9427 \times 10^{-1}$
248,45	$4,3161 \times 10^{-1}$
262,09	$3,3128 \times 10^{-3}$
262,95	$2,9867 \times 10^{-3}$
319,31	$2,0767 \times 10^{-1}$
370,55	$8,6275 \times 10^{-2}$
397,34	$1,3021 \times 10^{-2}$

Tabela 5.3: Pólos (comuns às duas entradas)

As Figuras 5.3 e 5.4 ilustram as FRFs para os pontos de perturbação e controle, comparando as curvas obtidas experimentalmente com os modelos teóricos obtidos a partir do método ERA. As curvas mostram excelente concordância, o que leva a concluir que o modelo possui polos e zeros nesta faixa de frequência bastante próximos aos valores reais.

5.3 Simulação do controle de vibração da viga flexível

A configuração de controle proposta no capítulo anterior foi implementada utilizando-se o programa SIMULINK, interface gráfica de simulação do MATLAB versão 5. O diagrama de blocos é ilustrado na Figura 5.5 abaixo. Neste diagrama a entrada u representa a perturbação a que o sistema será submetido, gerado externamente, HP é a entrada de controle e HD a de perturbação, como seus homônimos na descrição do controlador. HF gera a partir do erro e do sinal filtrado de perturbação o vetor peso, copiado no bloco HC. G2 é um pequeno sinal de *dither*, para garantir a continuidade do processo adaptativo na ausência de sinal de perturbação.

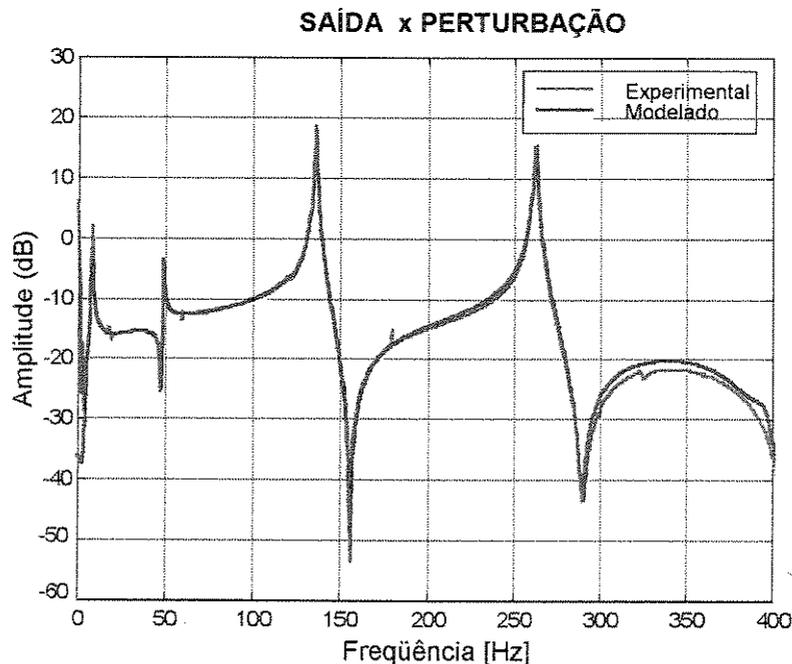


Figura 5.3 – FRF da resposta da planta com relação à entrada de perturbação

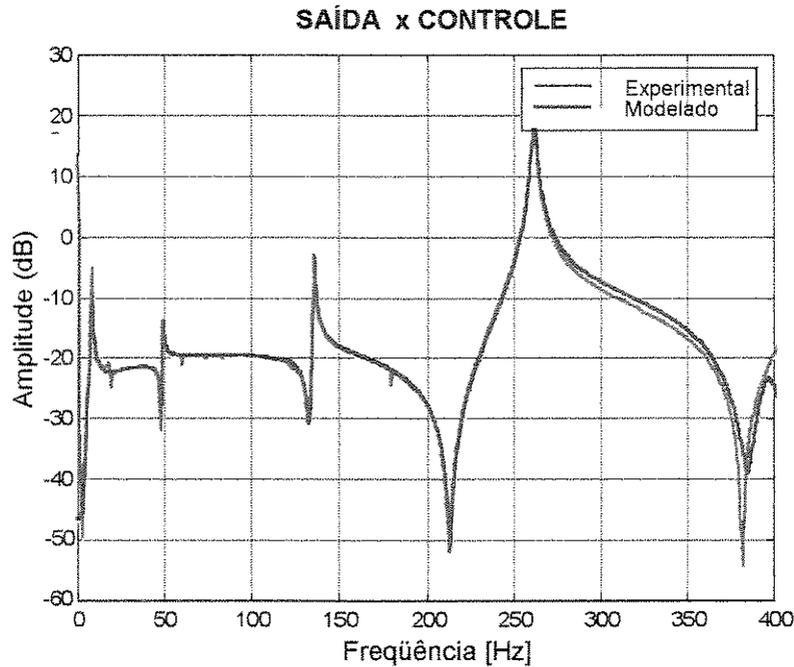


Figura 5.4 – FRF da resposta da planta com relação à entrada de controle

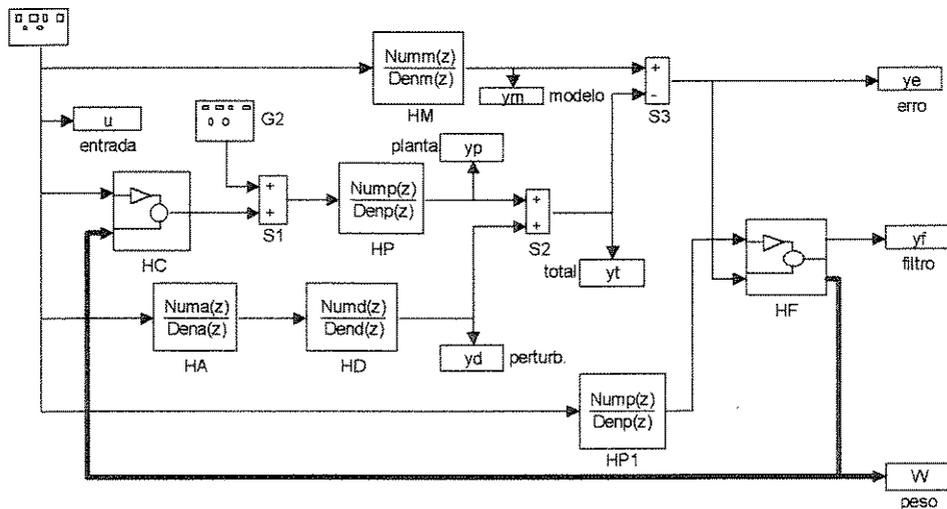


Figura 5.5 – Diagrama em blocos do controlador em SIMULINK

Utilizou-se o número de pesos (n) de 101, o mesmo valor utilizado no sistema experimental a ser descrito mais adiante. O número foi feito o maior possível, limitado apenas pela capacidade do sistema experimental, com o objetivo de minimizar o efeito da longa resposta impulsiva (da ordem de segundos) do sistema a ser controlado. O ganho adaptativo μ foi de 0,1 que visa neste

caso a diminuir o ruído introduzido pelo processo adaptativo, uma vez que se quer avaliar o desempenho do controlador. Como consequência a convergência tornou-se significativamente lenta.

O modelo poderia neste caso simplesmente ser suprimido pois a intenção é minimizar a resposta da viga à perturbação. Por razões didáticas usou-se um modelo centrado em 100 Hz, com fator de amortecimento de 0,707 e amplitude 0,01. Desta forma o modelo permite a passagem de uma estreita faixa de pequena amplitude em torno de 100 Hz, sendo que para o restante da faixa de frequência pode ser considerado nulo. Foi introduzido no modelo um deslocamento da extensão de HA, para garantir que não haja problemas de não causalidade na síntese da parcela do modelo em HF. O período de amostragem foi o mesmo para o modelamento da viga ou seja 975,61 μ s.

O desempenho global do controlador é avaliado na Figura 5.6, onde se ilustra a FRF do sinal do sensor para a faixa de 400 Hz com e sem a atuação do controle. Houve atenuação para quase toda a faixa com exceção das regiões próximas aos zeros da resposta sem controle. Este comportamento pode ser explicado pela diferença existente entre os zeros das respostas relativas aos pontos de perturbação e controle. Os pontos de zero com relação à entrada de perturbação são ditos não observáveis pois não é possível excitá-los. Por sua vez os pontos de zero com relação à entrada de controle são não controláveis pois não é possível obter um sinal de controle mesmo que o sensor indique a existência de vibração. Assim, nas regiões dos zeros relativos à entrada de perturbação o controlador percebe apenas a vibração que ele mesmo introduziu e dos zeros com relação à entrada de controle a resposta da planta tende a permanecer inalterada.

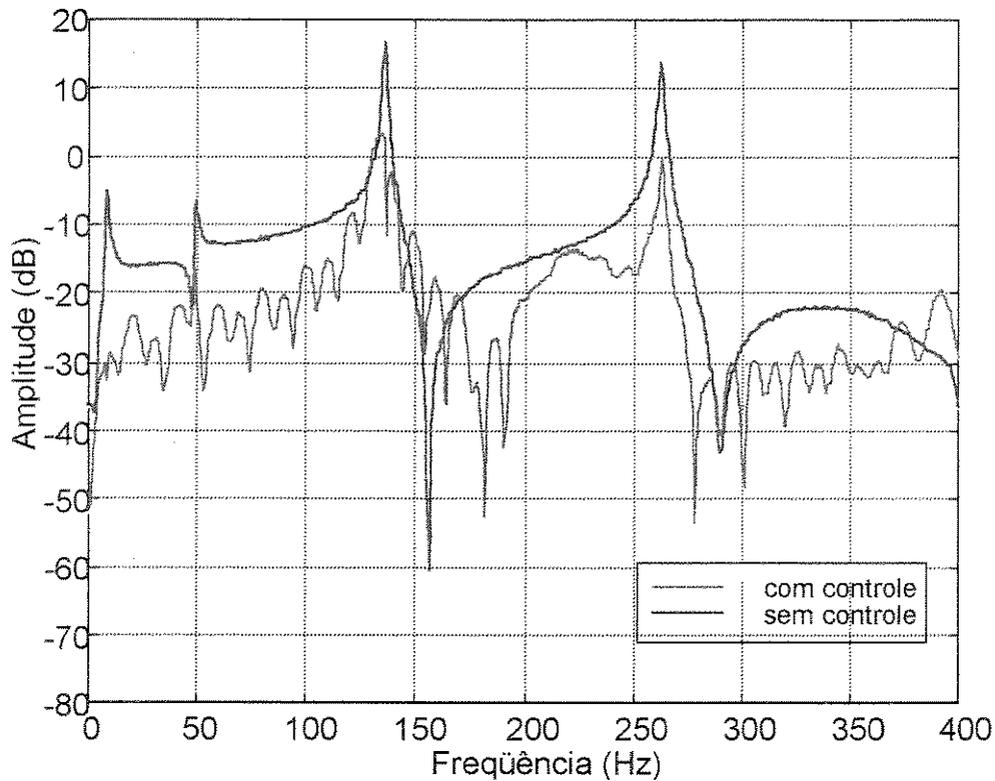
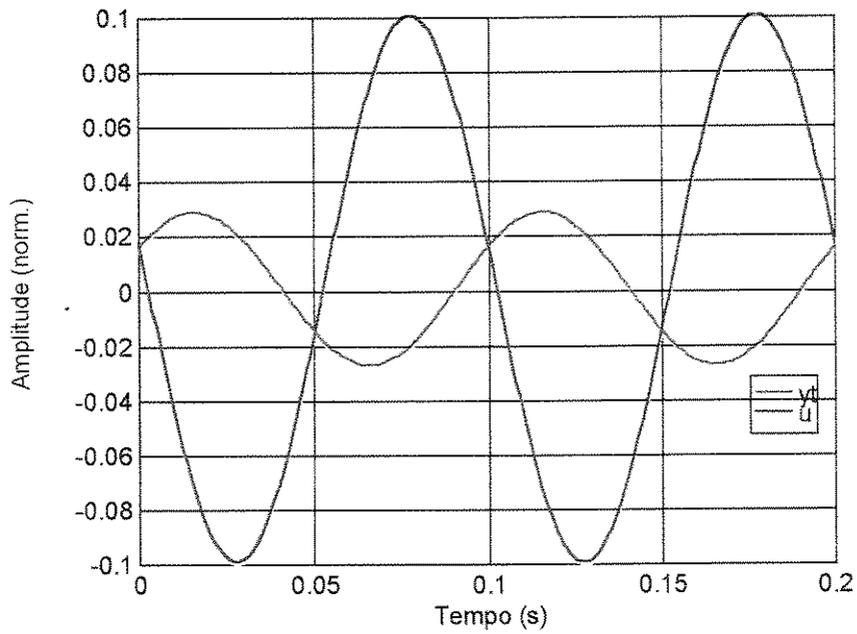
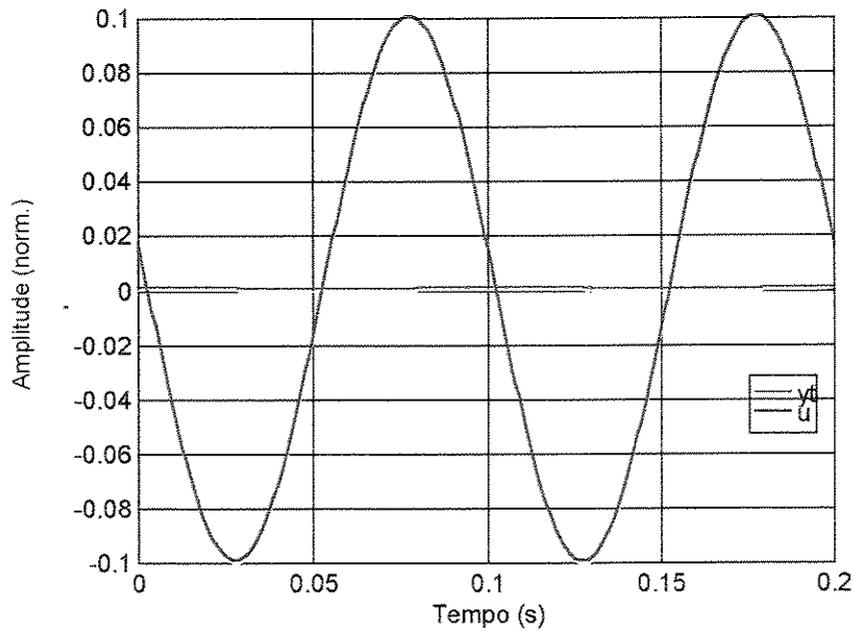


Figura 5.6 – FRF da resposta da planta (simulada) com e sem a atuação do controle

O controlador foi simulado tendo como perturbação vários sinais periódicos e incluindo um sinal com características impulsivas, uma onda quadrada de 1 Hz com ciclo de trabalho de 5%. Os resultados estão ilustrados nas Figuras 5.7 a 5.11, após a convergência. Todos os sinais periódicos foram significativamente atenuados pelo controlador. Contudo quando utilizou-se a onda quadrada houve atenuação dos componentes de mais baixa freqüência sem a mesma eficiência para as freqüências mais altas.



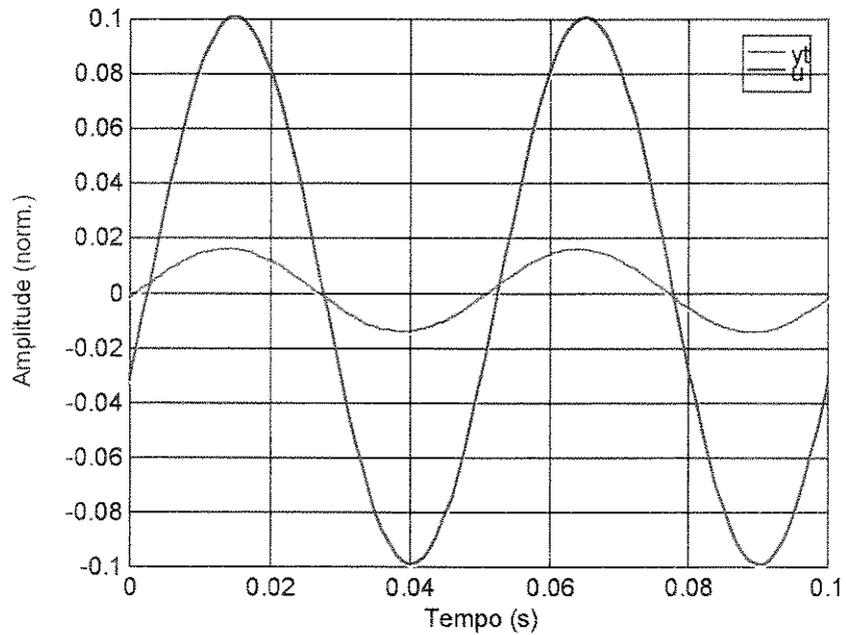
(a)



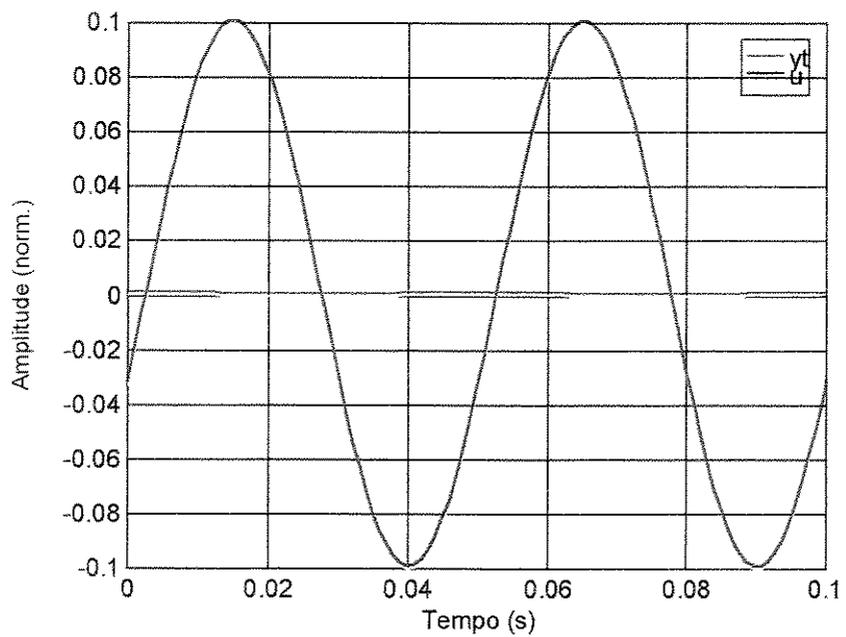
(b)

Figura 5.7 - Resposta simulada da planta para uma senóide de 10 Hz:

(a) sem controle (b) com controle



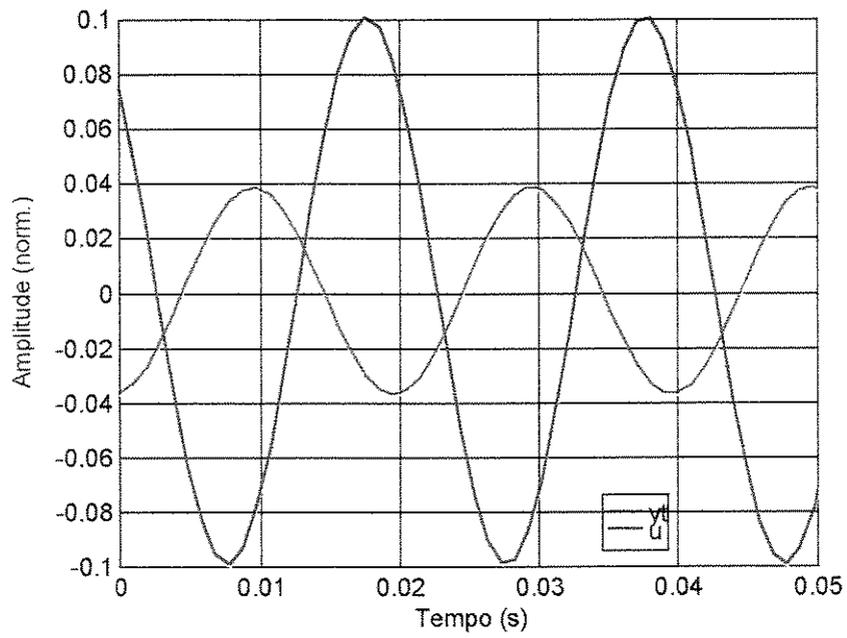
(a)



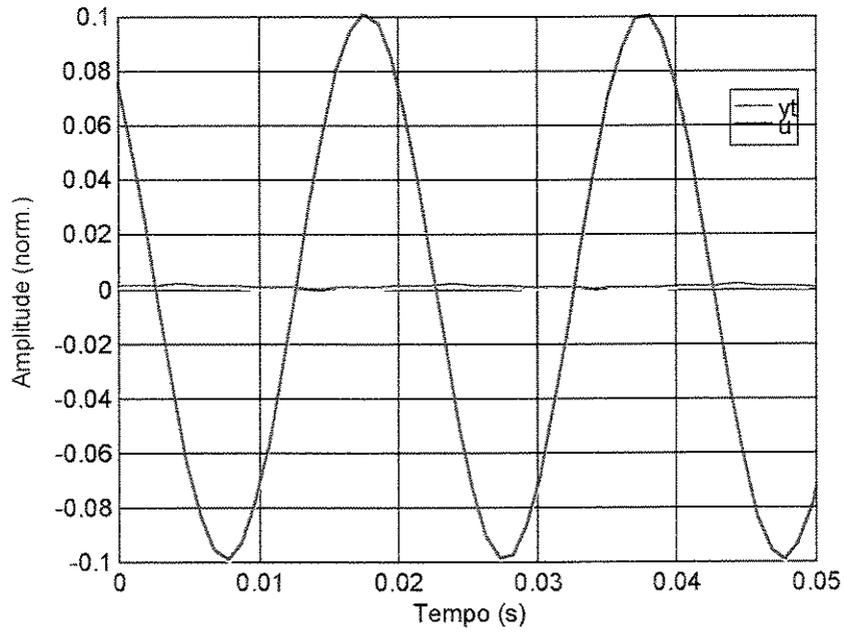
(b)

Figura 5.8 - Resposta simulada da planta para uma senóide de 20 Hz:

(a) sem controle (b) com controle



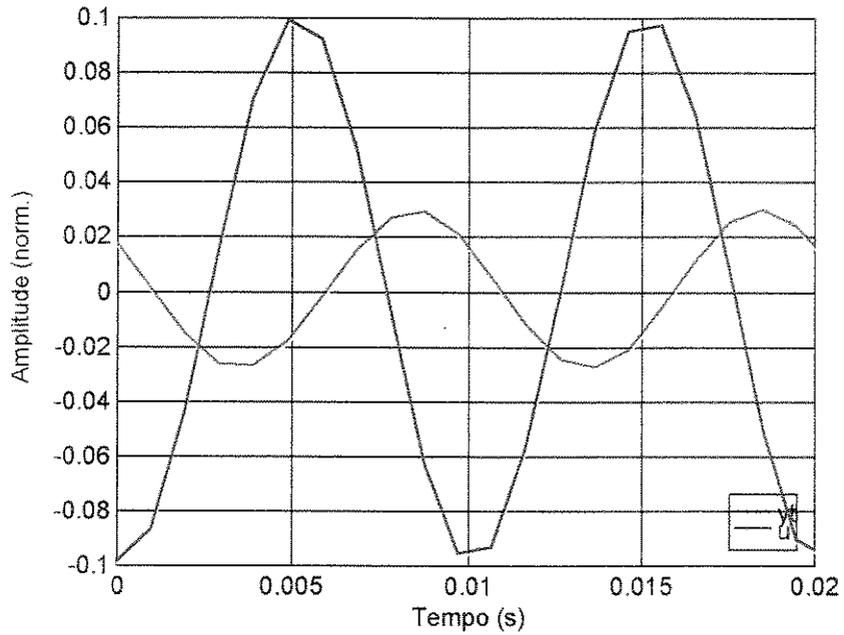
(a)



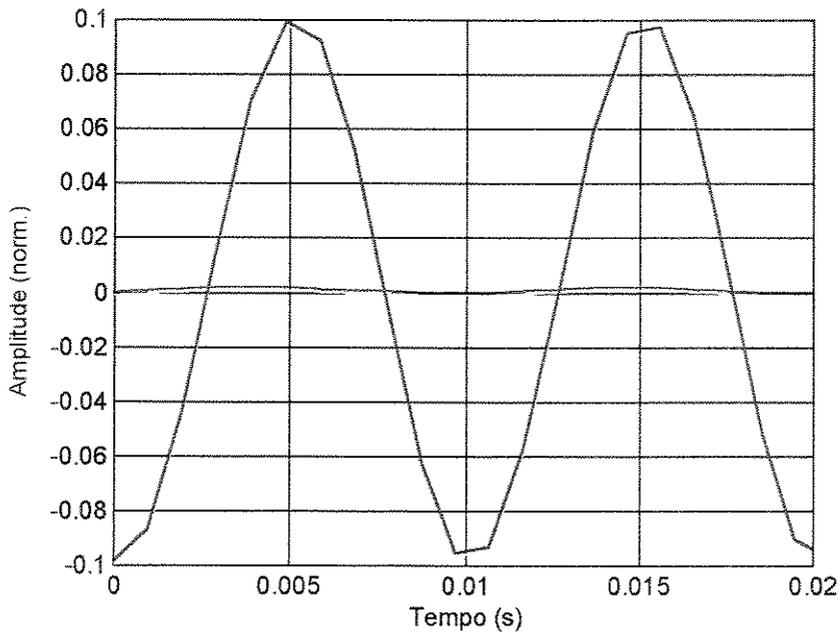
(b)

Figura 5.9 - Resposta simulada da planta para uma senóide de 50 Hz:

(a) sem controle (b) com controle



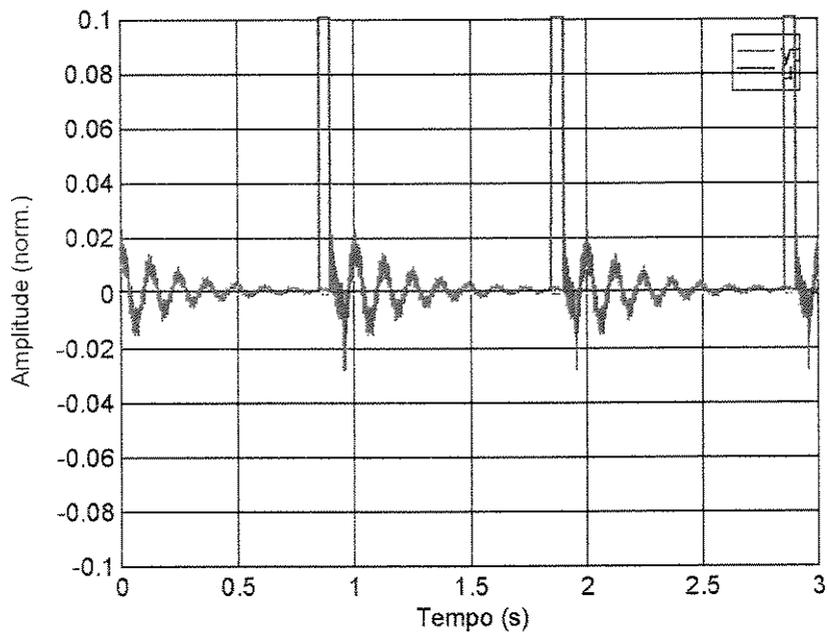
(a)



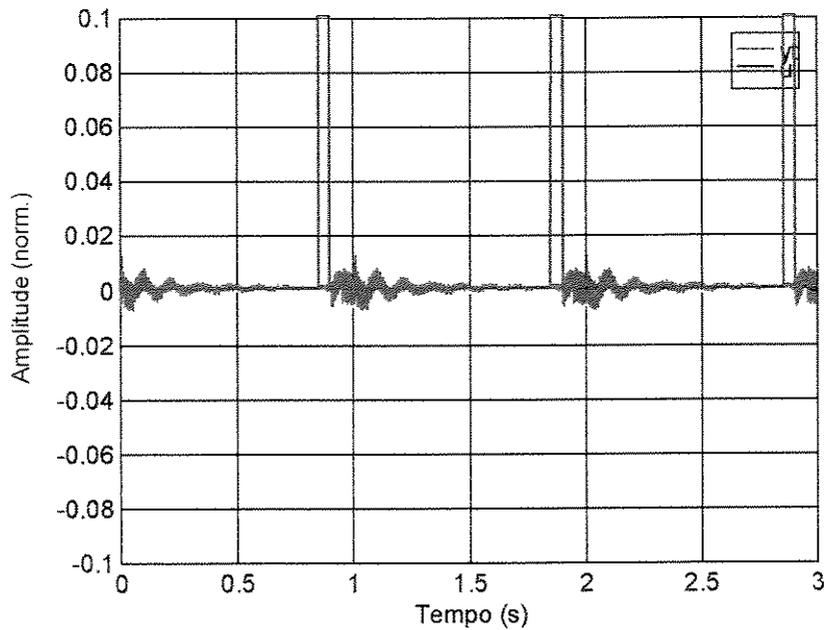
(b)

Figura 5.10 - Resposta simulada da planta para uma senóide de 100 Hz:

(a) sem controle (b) com controle



(a)



(b)

Figura 5.11 - Resposta simulada da planta para onda quadrada com *duty cycle* de 5 % e frequência de 1 Hz:

(a) sem controle (b) com controle

Para avaliar o comportamento global do controlador fez-se uso novamente do sistema de análise espectral HP 3566 para avaliação da resposta em frequência do da viga após a atuação do controlador. O sistema para levantamento das FRFs é semelhante ao descrito para a identificação dos modos de vibração da viga. O sinal de perturbação novamente é gerado pelo analisador espectral, porém agora o sinal de controle também está em ação, sendo gerado pelo sistema dSPACE a partir do diagrama em blocos do Simulink.

A Figura 5.13 ilustra as FRFs da viga com e sem controle. A atenuação chega a ser de 30 dB para as frequências em torno de 260 Hz, chegando a 10 dB para a faixa em torno de 50 Hz. Há porém regiões nas frequências mais altas, principalmente em torno dos zeros do sinal de saída com relação à perturbação, em que houve ênfase da resposta, mostrando que o controlador foi incapaz de sintetizar corretamente estes zeros. A diferença mais significativa com relação à FRF simulada é a resposta ao polo em torno de 260 Hz. A explicação que pode ser apresentada é que o método de modelamento introduziu zeros em frequências acima da faixa de interesse pois assume que o espectro é nulo além desta faixa, o que não é verdade. Tais zeros teriam trazido uma distorção de fase suficiente para diminuir a atenuação para o polo em torno de 260 Hz, assim como explicariam a melhor atenuação para as frequências acima de 300 Hz na simulação.

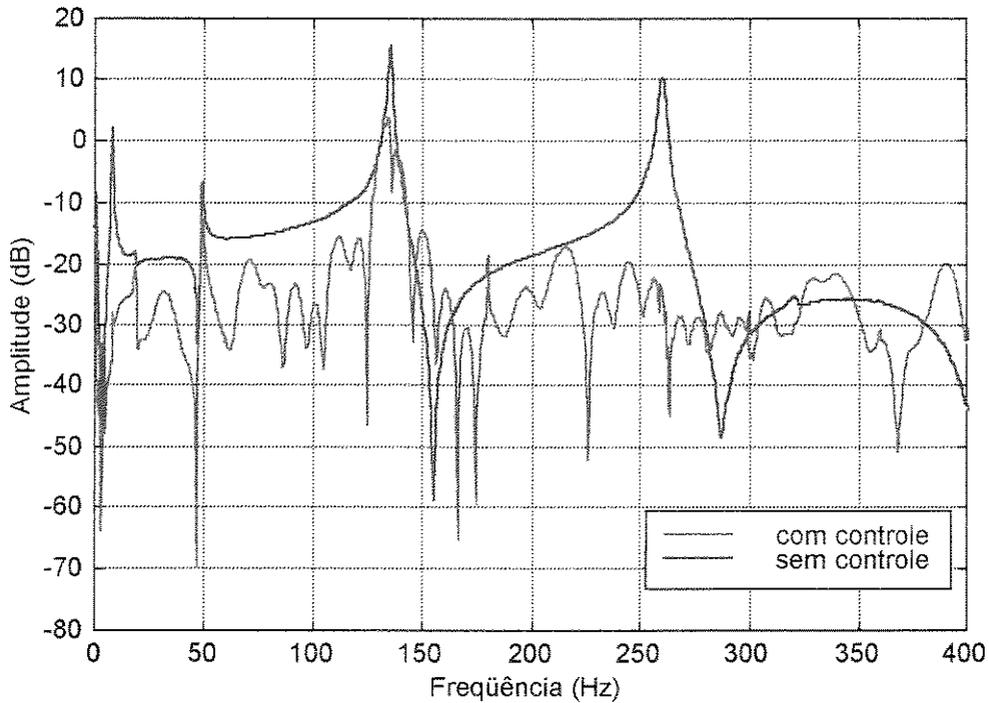
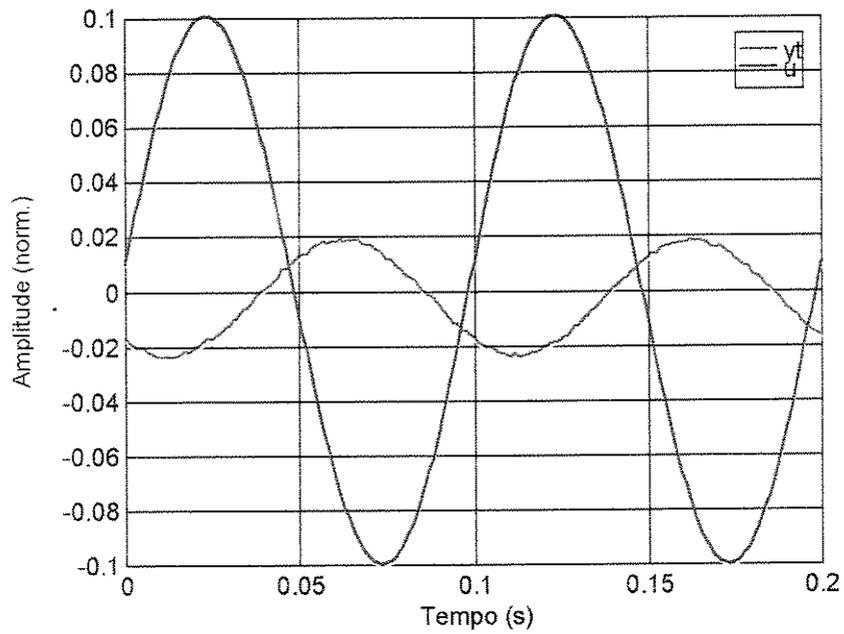
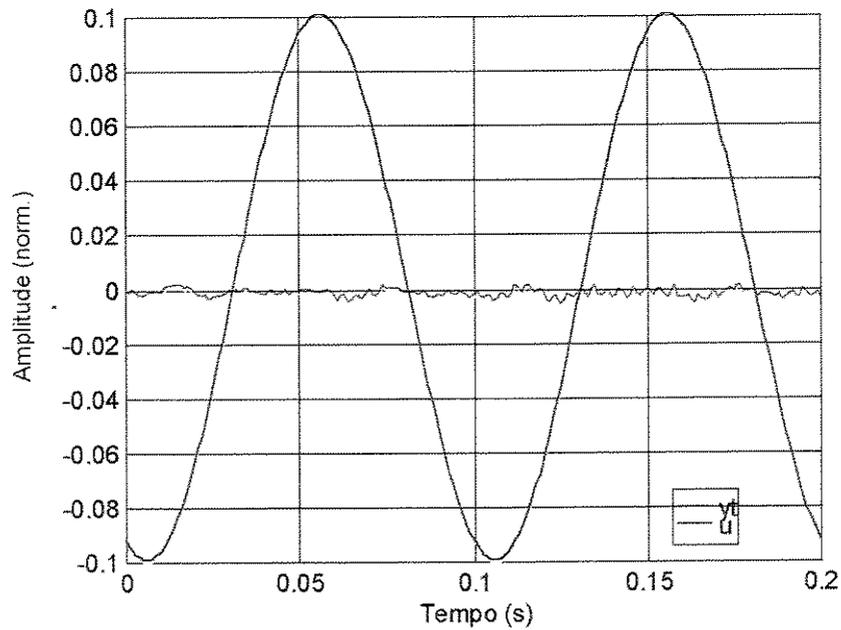


Figura 5.13 – FRF da viga com e sem a atuação do controle

O sistema de controle foi experimentado para os mesmos sinais utilizados na simulação do diagrama da Figura 5.5. Os resultados estão ilustrados nas Figuras 5.14 a 5.18. A semelhança com os resultados simulados é notável. A resposta à onda quadrada porém apresentou uma queda ainda mais acentuada nas frequências baixas, provavelmente por um desvio no modelo que subestimou o fator de amortecimento do polo próximo a 8 Hz. As frequências mais altas contudo sofreram reforço na amplitude, demonstrando que o controlador não consegue um ajuste perfeito de amplitude e fase para esta faixa.



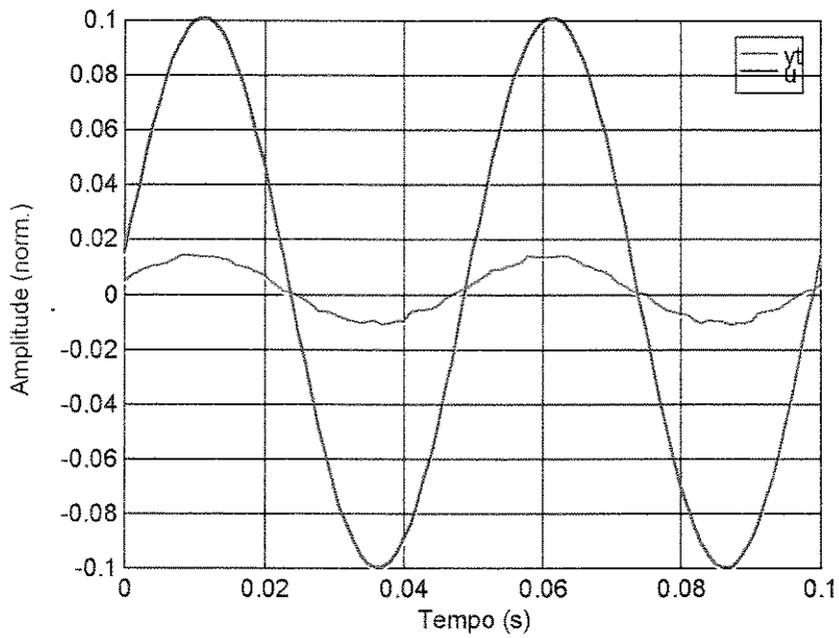
(a)



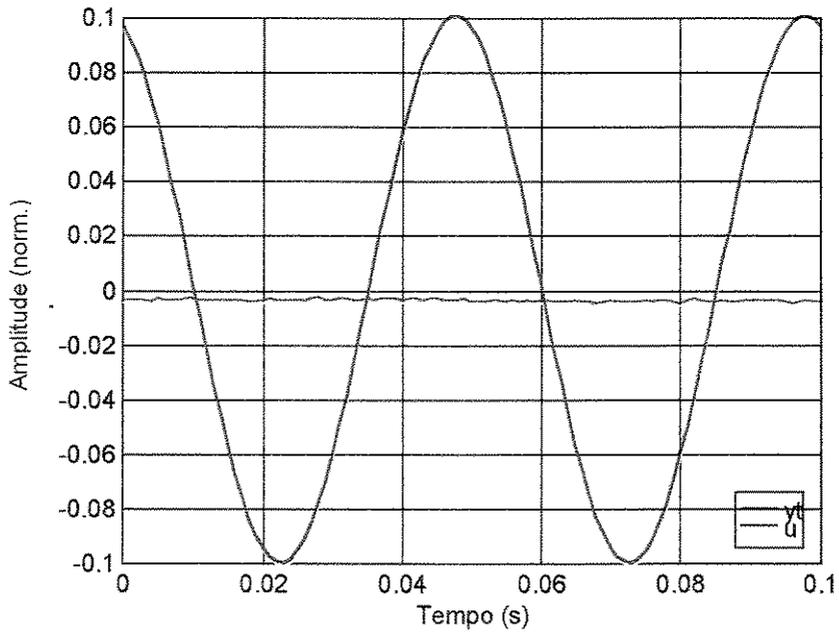
(b)

Figura 5.14 - Resposta experimental da planta para uma senóide de 10 Hz:

(a) sem controle (b) com controle



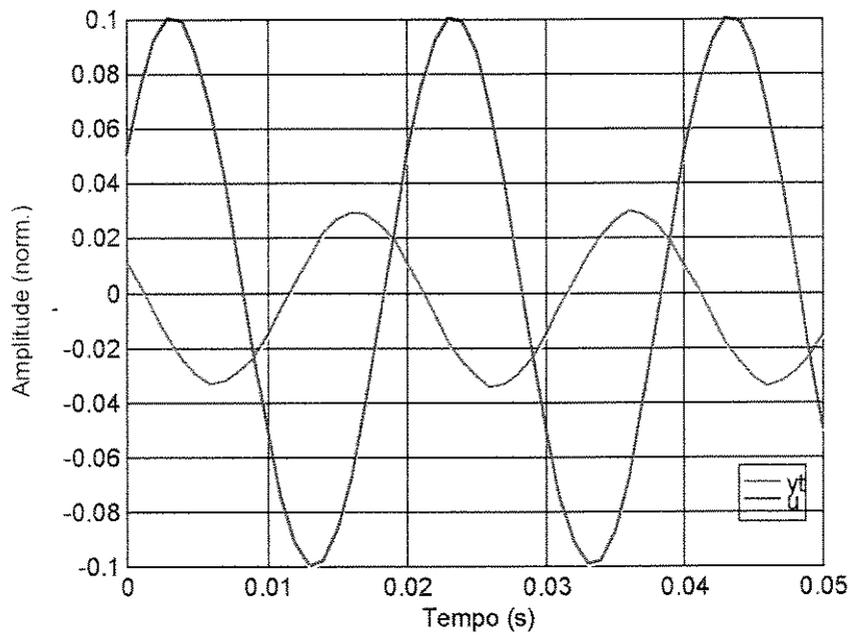
(a)



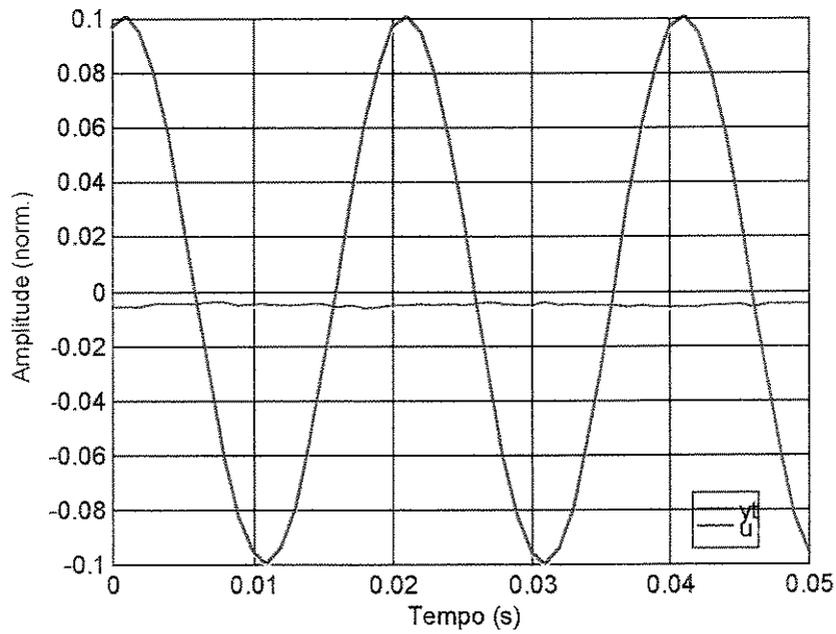
(b)

Figura 5.15 - Resposta experimental da planta para uma senóide de 20 Hz:

(a) sem controle (b) com controle



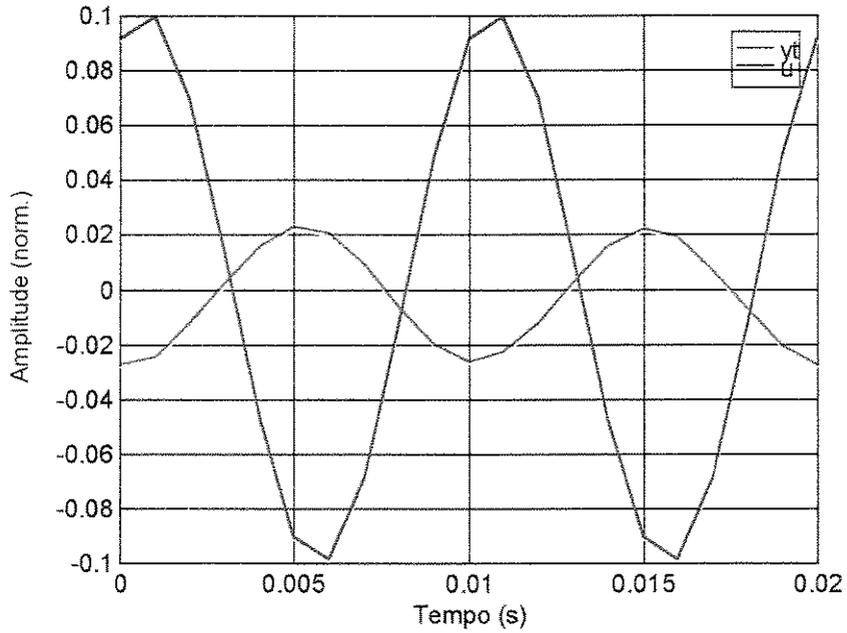
(a)



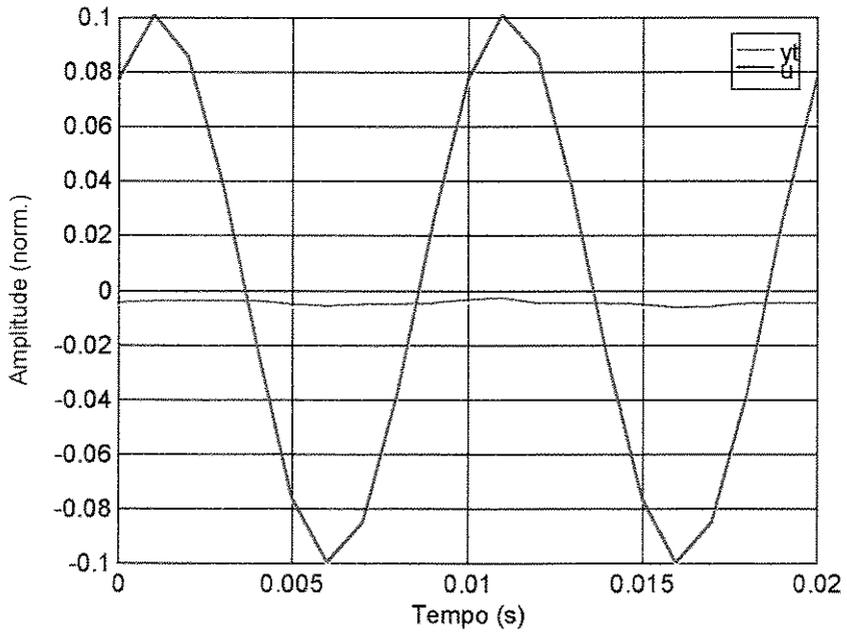
(b)

Figura 5.16 - Resposta experimental da planta para uma senóide de 50 Hz:

(a) sem controle (b) com controle

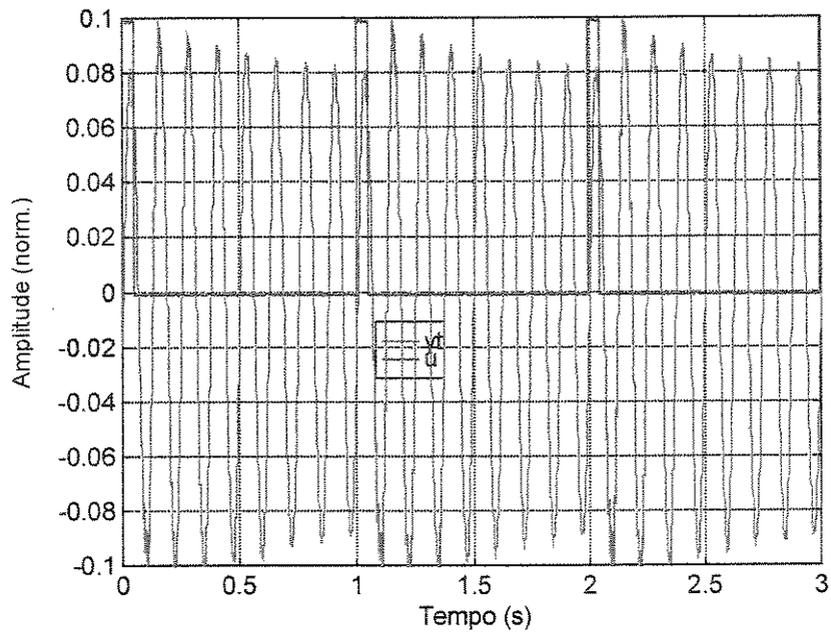


(a)

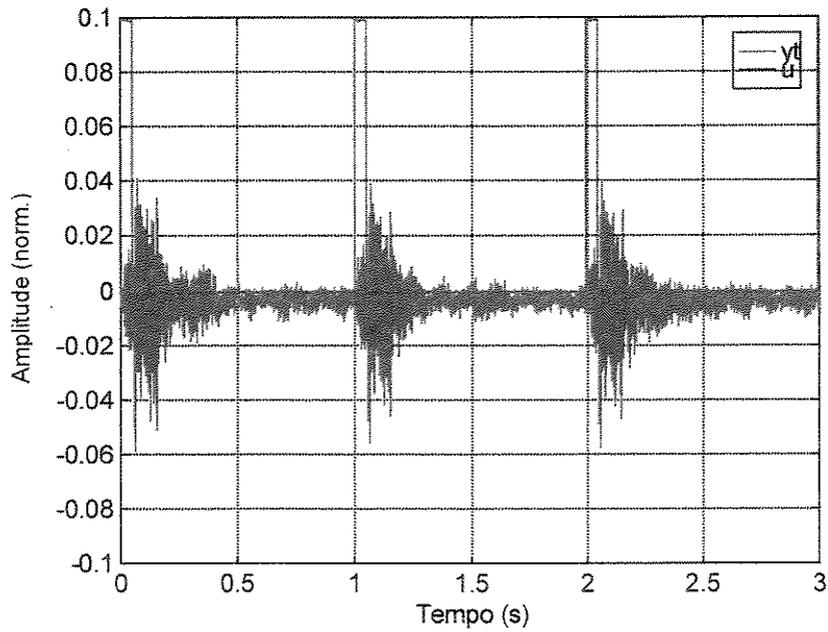


(b)

Figura 5.17 - Resposta experimental da planta para uma senóide de 100 Hz:
 (a) sem controle (b) com controle



(a)



(b)

Figura 5.18 - Resposta experimental da planta para onda quadrada com *duty cycle* de 5 % e frequência de 1 Hz:

(a) sem controle (b) com controle

5.5 Simulação do controlador em tempo contínuo

A modificação do filtro adaptativo para obtenção de um controlador em tempo contínuo como descrito no capítulo 2 foi implementada em Simulink e é ilustrada na Figura 5.19. Como se pode observar, é bastante semelhante à sua versão em tempo discreto. As diferenças consistem no fato de que as funções de transferência estão expressas em termos de polinômios da variável s da transformada de Laplace e de que a função de transferência HA foi substituída pelo bloco de atraso de transporte. Este mesmo bloco teve que ser introduzido no ramo que contém a função de transferência do modelo para não trazer problemas de não causalidade na síntese de HF.

As maiores diferenças contudo não estão evidentes no diagrama de blocos e referem-se aos blocos HF, responsável pelo cálculo dos pesos e HC, que gera o sinal de controle. Estes blocos foram adaptados para realizarem o algoritmo LMS em tempo contínuo, assim como simularem os elementos de atraso através de filtros *allpass*.

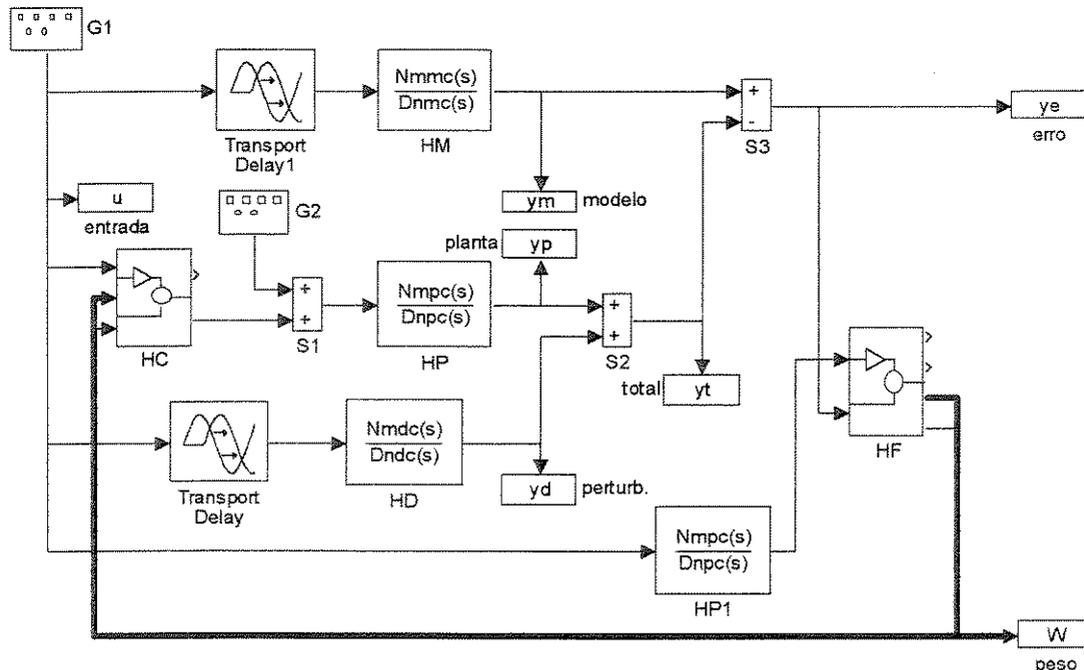


Figura 5.19 – Diagrama em blocos do controlador em tempo contínuo

Uma célula do bloco HF é ilustrado na Figura 5.20. Neste bloco, W é o peso gerado pela célula adaptativa, x_d é o valor a ser somado para se obter o sinal do filtro adaptativo e x_a é o sinal de entrada do bloco adaptativo deslocado no tempo pelo filtro *allpass* AP. O peso é o resultado da integração da multiplicação do sinal de erro (y_e) e do sinal de entrada (x_i).

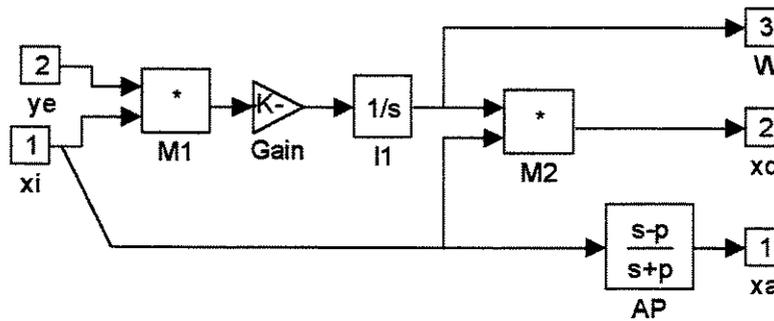


Figura 5.20 – Célula do bloco adaptativo HF

A Figura 5.21 ilustra uma célula do bloco HC. É semelhante à célula do bloco HF, com a diferença de que a multiplicação do sinal de entrada (x_i) é feita com o peso W vindo do bloco HF.

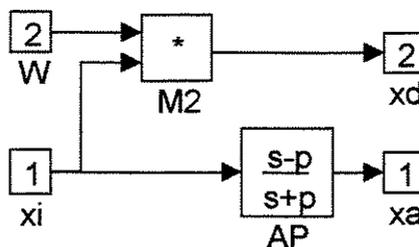
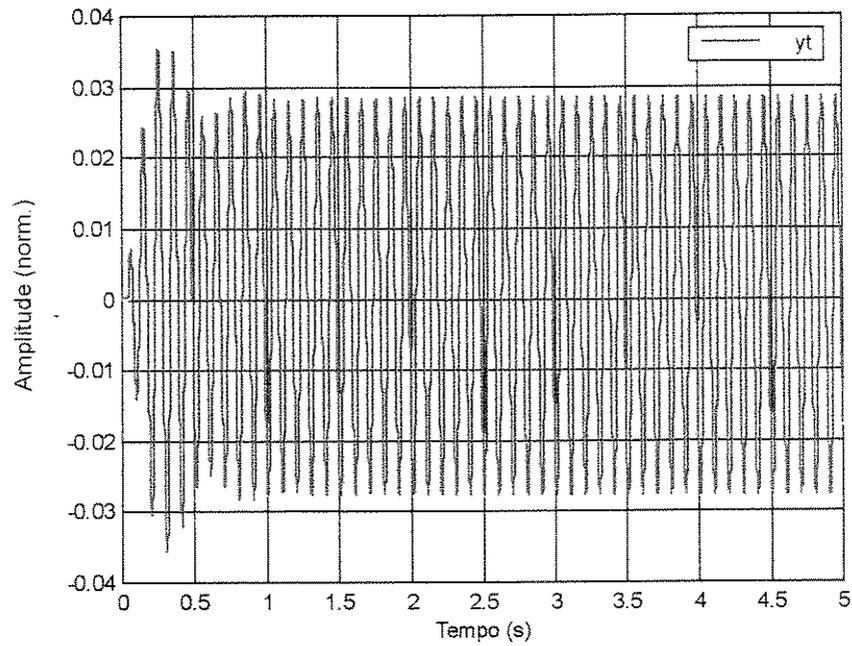


Figura 5.21 – Célula do bloco adaptativo HC

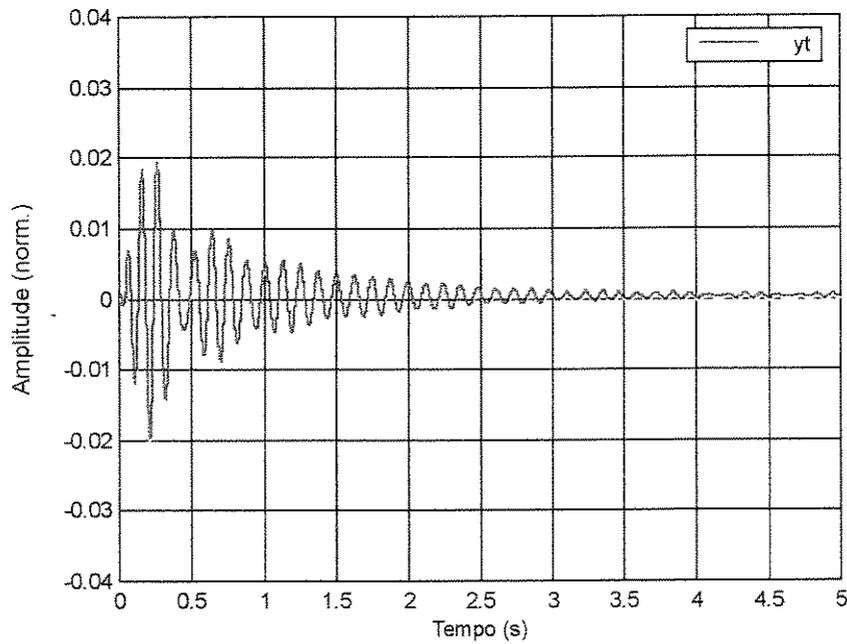
A versão do controlador em tempo contínuo foi simulada com os mesmos sinais utilizados na simulação e no experimento da versão em tempo discreto. HF e conseqüentemente HC foram construídos com 101 células descritas nas Figuras 5.20 e 5.21. O valor de p foi escolhido como sendo $2/t_s$ onde t_s é o período de amostragem do controlador em tempo discreto ($975,61 \mu s$),

obtendo-se desta forma um atraso aproximado de um período de amostragem para a faixa de frequências até $f_s/12$. Os valores de ganho adaptativo μ para este caso variaram entre 1 e 1000.

Os resultados das simulações encontram-se nas Figuras 5.22 a 5.26. Para estas figuras, optou-se por destacar a fase de transição do sinal do sensor, de forma a ilustrar o comportamento dinâmico do controlador. Para maior clareza as figuras não trazem as curvas dos sinais de perturbação. Pode-se observar que houve estabilização para todos os sinais senoidais. A onda quadrada como sinal de perturbação contudo provocou acréscimo de variação do sinal de saída.



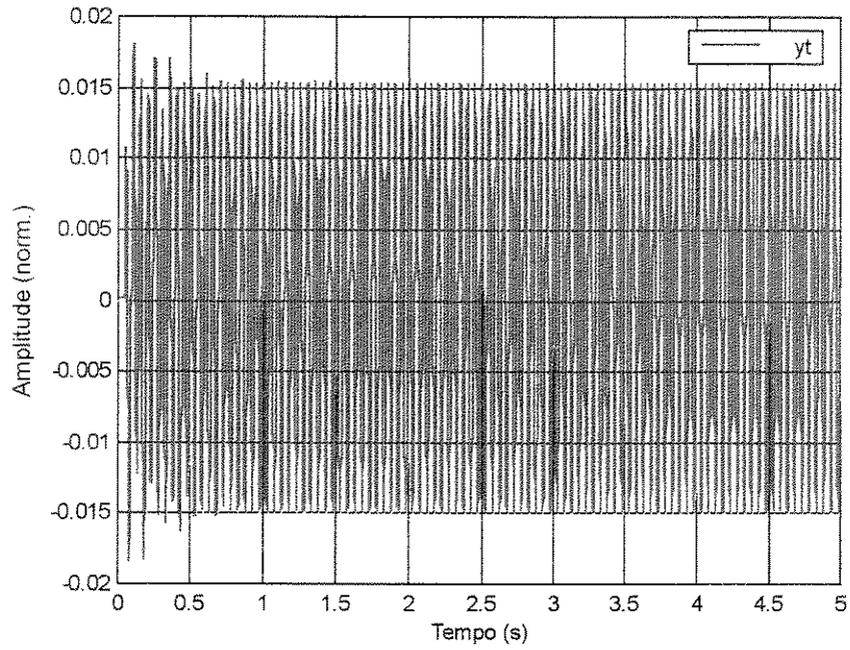
(a)



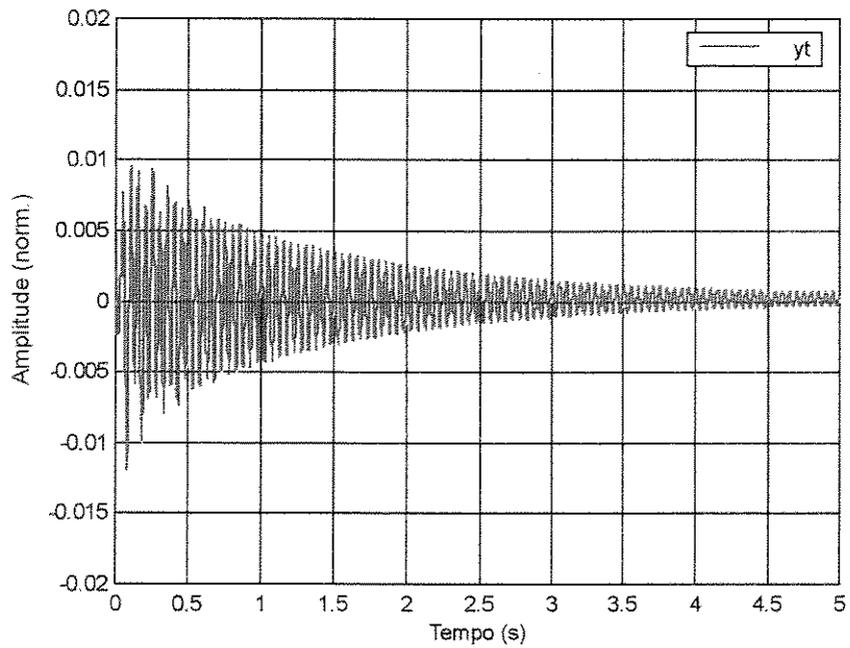
(b)

Figura 5.22 - Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 10 Hz ($\mu=1000$)

(a) sem controle (b) com controle



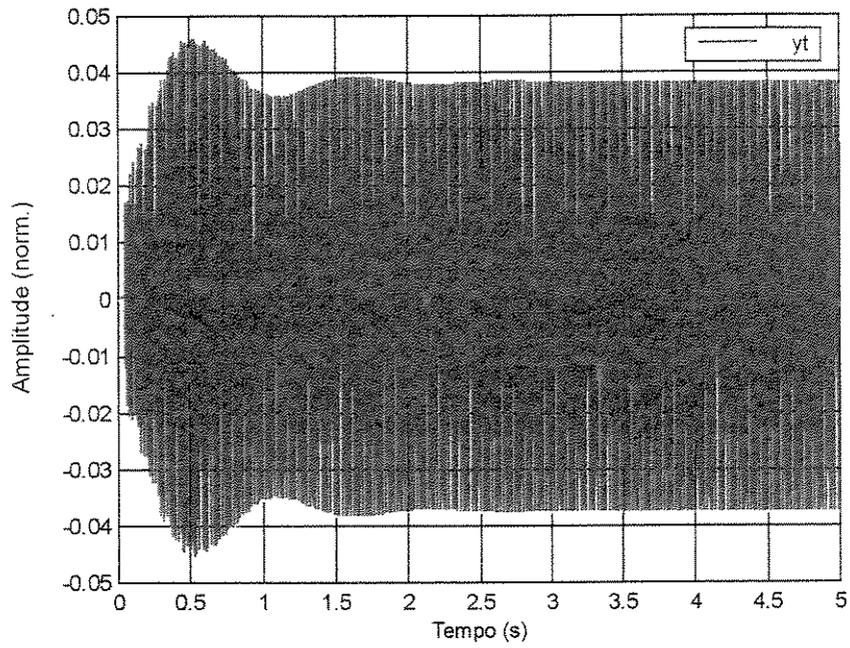
(a)



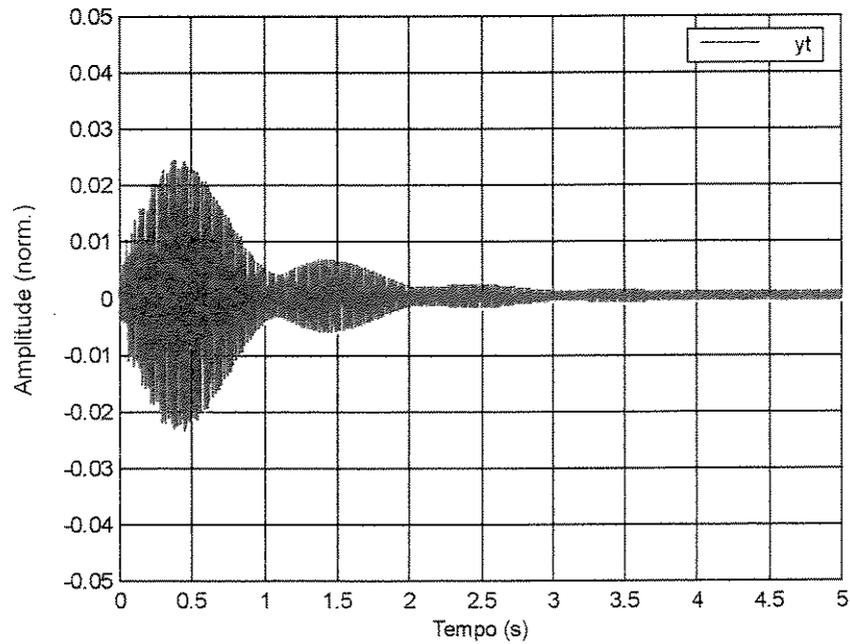
(b)

Figura 5.23 - Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 20 Hz ($\mu=500$)

(a) sem controle (b) com controle



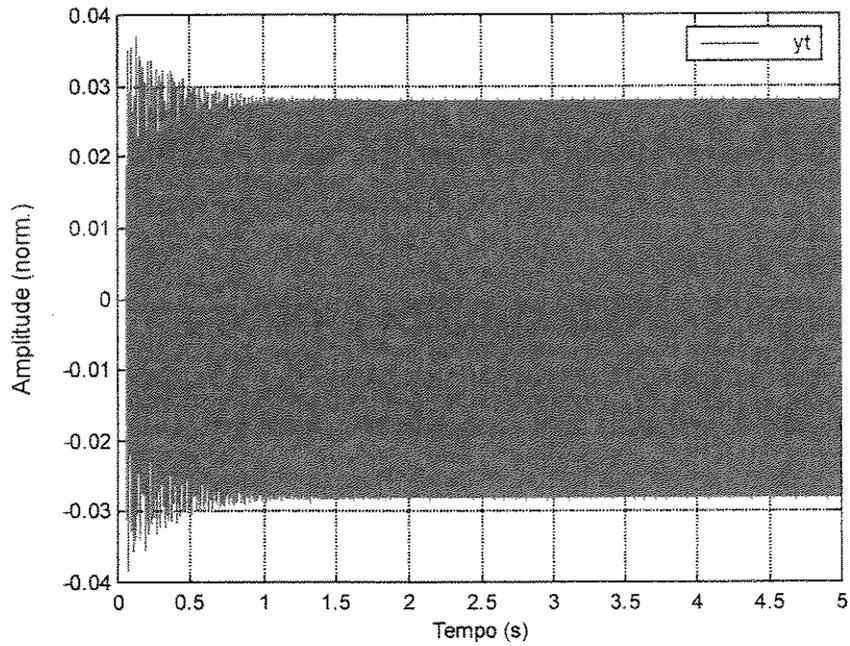
(a)



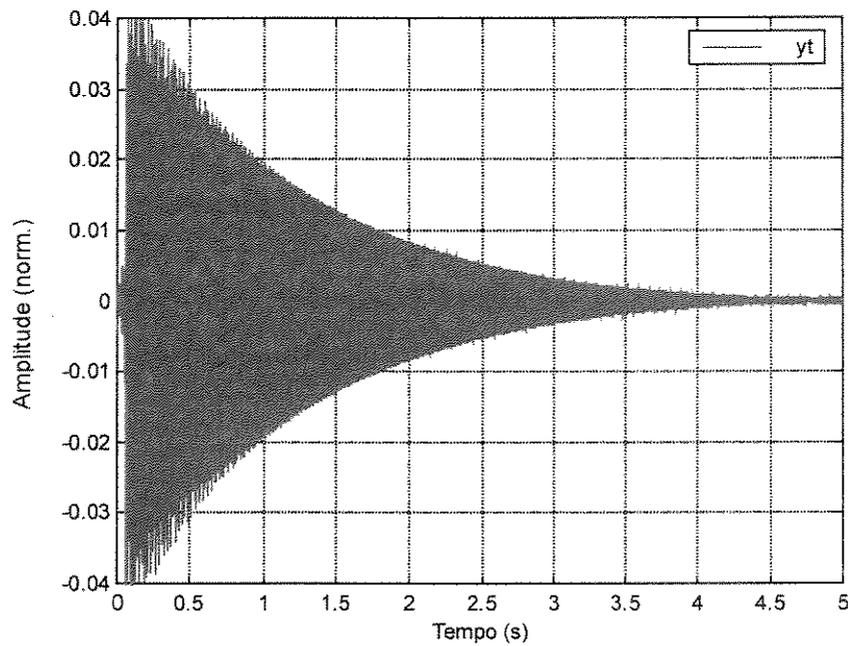
(b)

Figura 5.24 - Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 50 Hz ($\mu=300$)

(a) sem controle (b) com controle



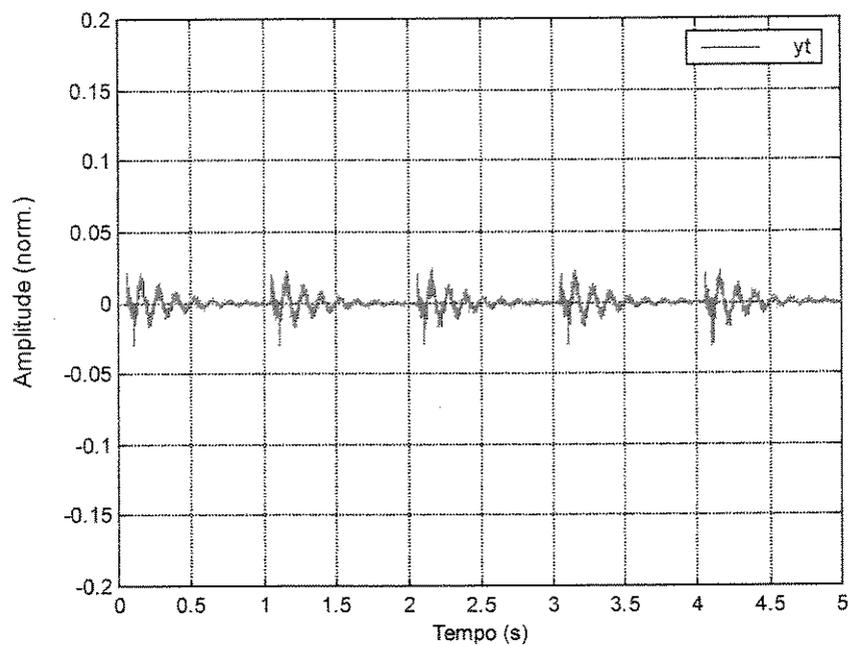
(a)



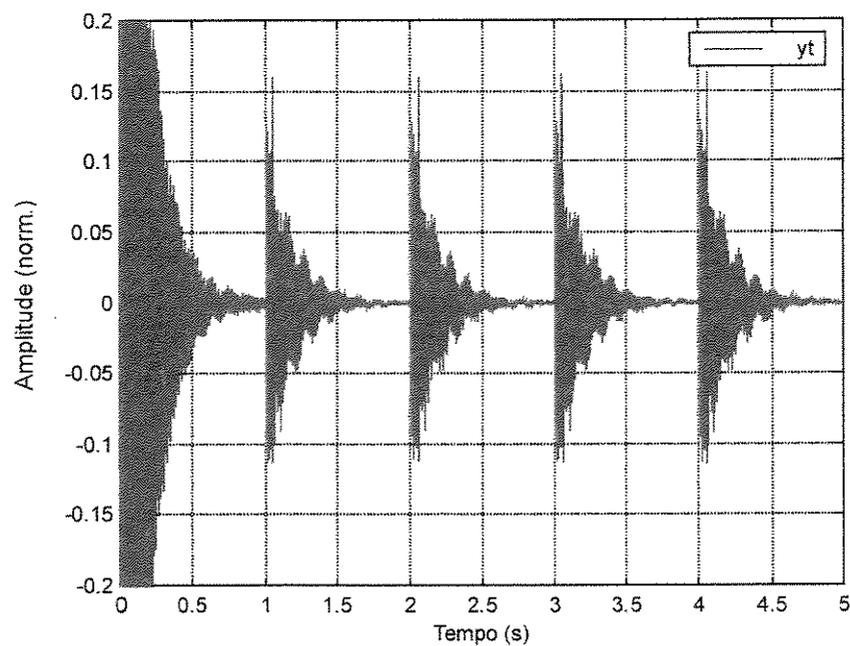
(b)

Figura 5.25 - Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide de 100 Hz ($\mu=200$)

(a) sem controle (b) com controle



(a)



(b)

Figura 5.26 - Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma onda quadrada de 1 Hz e *duty cycle* de 1 % ($\mu=1$)

(a) sem controle (b) com controle

Levantou-se a hipótese de que o baixo desempenho apresentado para o sinal de características impulsivas estivesse relacionado com a extensão de seu espectro. Para isto, uma nova simulação foi feita, agora com um pulso senoidal de 5 Hz, repetido de 1 s em 1 s. A senóide é deslocada de forma que seu ponto de mínimo seja zero, garantindo uma transição suave para o trecho em que o sinal permanece nulo. O sinal de perturbação é ilustrado na Figura 5.27.

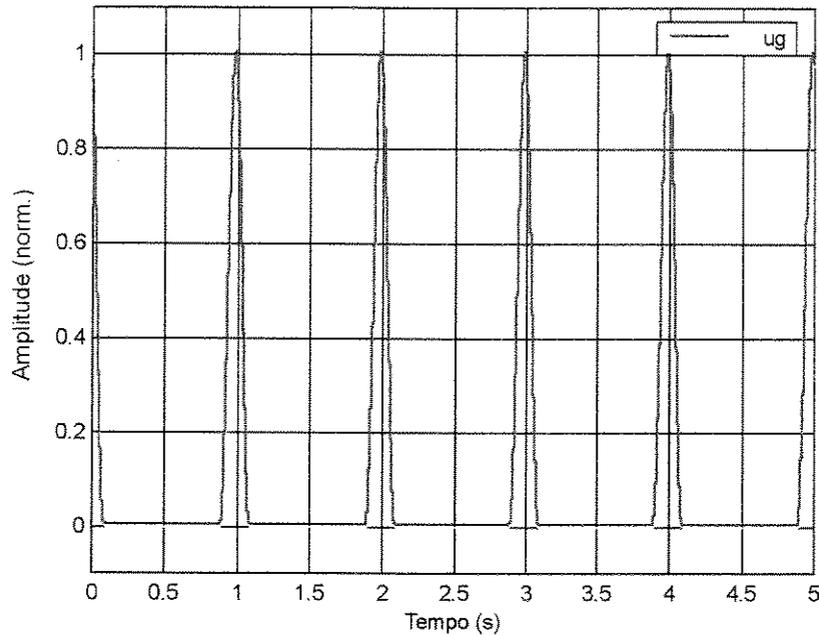
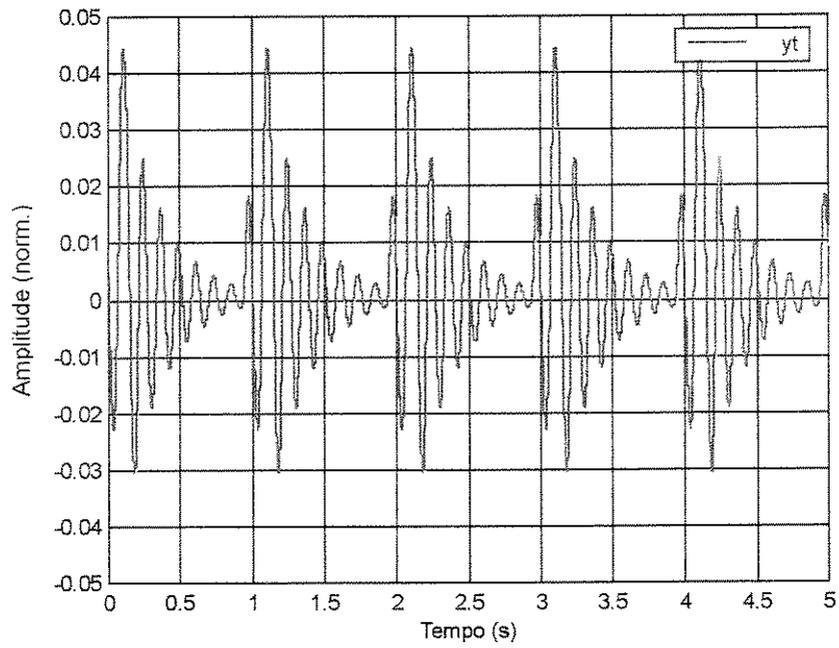


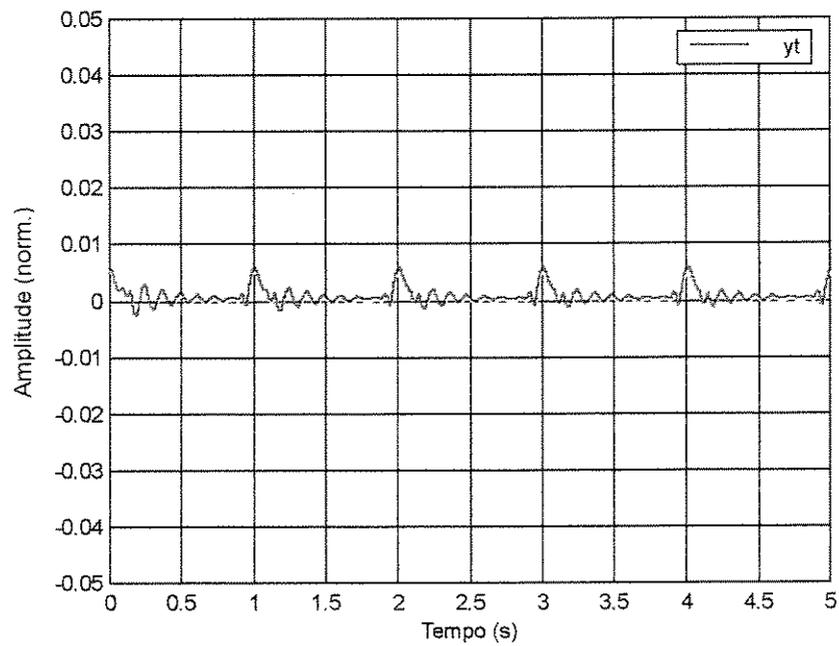
Figura 5.27 – Sinal senoidal pulsante de perturbação

Este sinal não contém as variações bruscas da onda quadrada utilizada na simulação ilustrada na Figura 5.26 e por isso possui espectro significativamente menor.

As respostas da planta a este sinal são ilustradas na Figura 5.28. O controle da planta foi bem sucedido, deixando apenas um pequeno resíduo próximo ao instante em que ocorre o pulso. Percebe-se também que o sinal de perturbação excitou muito pouco as frequências mais altas da planta, o que parece corroborar com a hipótese levantada.



(a)

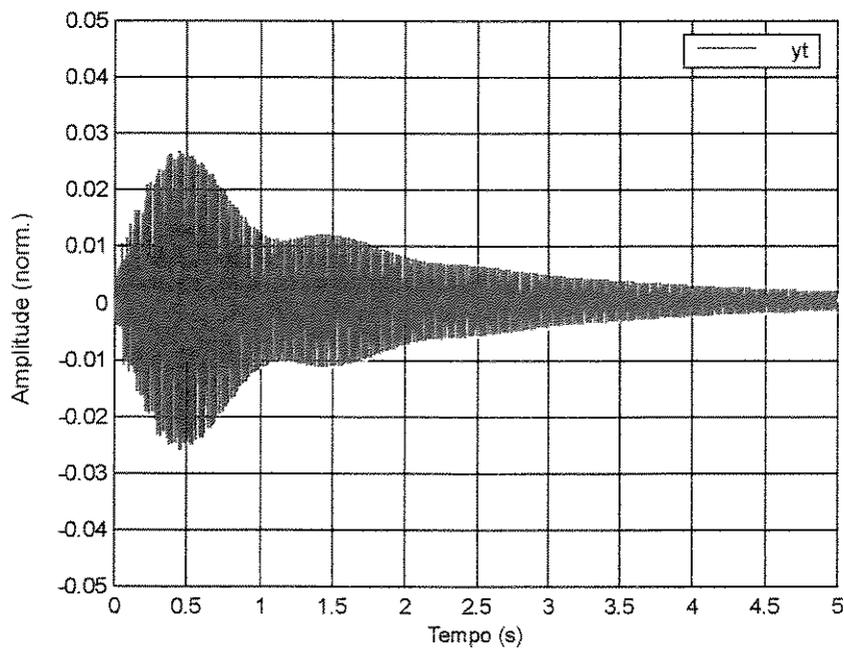


(b)

Figura 5.28 - Resposta simulada da planta ao controlador em tempo contínuo para uma senóide pulsante ($\mu=300$)

(a) sem controle (b) com controle

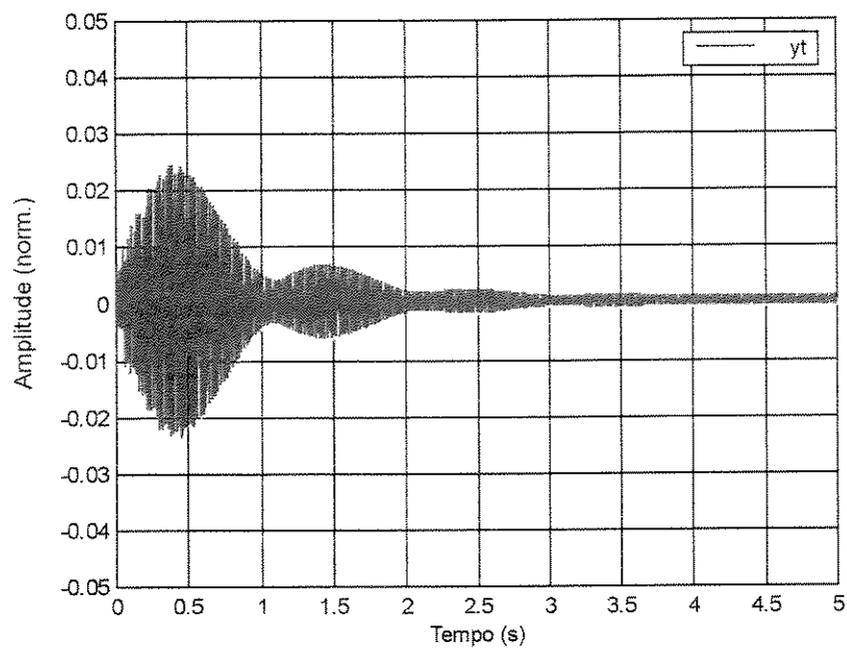
Uma das grandes diferenças do algoritmo LMS em tempo contínuo para seu equivalente em tempo discreto é a inexistência de limite superior para o ganho adaptativo μ , o que em teoria permite que o processo de convergência seja tão rápido quanto desejado. É natural que se faça portanto a seguinte pergunta: qual é o efeito da variação de μ sobre o processo de convergência? Para trazer alguma luz a esta questão foram feitas simulações do desempenho do controlador para diferentes ganhos adaptativos, que se encontram ilustradas na Figura 5.29. A resposta ao ganho mais baixo mostra claramente que a convergência é incompleta no período ilustrado. Para o ganho de valor intermediário o sinal tendeu rapidamente para seu valor de estabilidade. Para o ganho mais elevado a convergência foi ainda mais rápida porém esta demonstra um comportamento peculiar: o sinal se estabiliza num nível expressivamente mais elevado que no caso anterior. O que se pode inferir é que o índice de perturbação (M), como definido para o controlador em tempo discreto, aumentou ou seja o controlador tende a apresentar uma resposta mais exacerbada a variações do sinal de perturbação. Assim o ruído introduzido pelo processo adaptativo tende a tornar mais ruidosa a resposta do controlador com o aumento do ganho adaptativo.



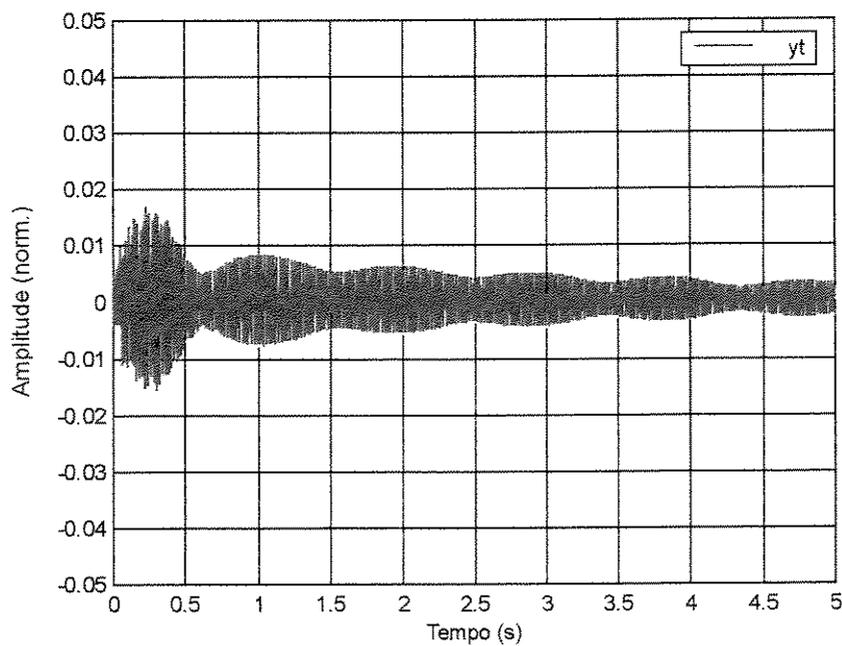
(a)

Figura 5.29: Resposta controlada da planta para senóide de 50 Hz:

(a) $\mu=100$



(b)



(c)

Figura 5.29 (cont.) - Resposta controlada da planta para senóide de 50 Hz:
 (b) $\mu=300$ (c) $\mu=1000$

Capítulo 6

Conclusões e Futuros Trabalhos

6.1 Análise dos resultados

Os esquemas de controle adaptativo baseados no algoritmo LMS têm vantagens sobre os esquemas tradicionais pois são mais tolerantes a variações e imperfeições no modelamento, aliados com a simplicidade deste algoritmo. O enfoque deste trabalho foi apresentar uma solução que contorne as limitações dos sistemas de processamento digital de sinais sendo competitiva com as soluções tradicionais. Esta solução seria dada por um *hardware* analógico dedicado, a exemplo do que ocorre com a área de comunicações, que prescinde de processadores de alta capacidade e de conversores A/D e D/A de grande precisão.

Foram apresentadas as opções de sistemas adaptativos em *hardware*, estudadas há vários anos, a maior parte delas para sistemas em tempo discreto. Muito recentemente foram apresentadas alternativas utilizando uma versão em tempo contínuo do algoritmo LMS, que não possui as limitações de banda de frequência, taxa de amostragem e velocidade de processamento dos seus similares em tempo discreto.

Baseando-se na revisão de sistemas adaptativos em *hardware* analógico, duas versões de filtro adaptativo foram apresentadas, uma em tempo contínuo e outra em tempo discreto, que são plenamente factíveis de serem produzidas em circuitos integrados.

Estudaram-se os fatores que influenciam o desempenho e complexidade do controlador utilizando filtro transversal adaptativo: a extensão da resposta impulsiva a ser identificada e a implicação que esta tem com o número de pesos, a utilização da menor frequência de amostragem possível para diminuir este número. Demonstrou-se que o erro residual do controlador é função da parcela da resposta impulsiva que não foi identificada. Equacionaram-se os fatores que determinam a estabilidade e a rapidez de convergência do processo adaptativo, que são funções da energia do sinal de entrada e do número de pesos.

Um novo esquema de controlador *feedforward* foi apresentado. O controlador é uma variante do controle *filtered-x* LMS, com a introdução de um modelo de referência. O esquema proposto tem capacidade de controle bastante ampla, adquirida pela leitura em antecipação da perturbação. O controle adaptativo consegue, a partir deste prévio conhecimento, apresentar respostas que em sistemas de ação simultânea seriam não-causais.

A bancada experimental, uma viga flexível submetida a perturbação pela ação de atuadores e sensores piezoelétricos, foi modelada utilizando-se o método ERA tendo-se em vista a resposta de um sensor com relação aos pontos de introdução de perturbação e de ação do controlador.

A resposta impulsiva do modelo foi utilizada para orientar o projeto do controlador com base nos fatores anteriormente citados. Especificou-se um grande número de pesos para controlar a planta pois o baixo fator de amortecimento de seus modos resultou numa resposta impulsiva bastante longa, da ordem de segundos. O ganho adaptativo foi definido de forma a minimizar a introdução de ruído devido à estimativa do gradiente pelo algoritmo LMS adaptativo, com o objetivo de focar a análise sobre o desempenho do controlador na sua capacidade de atenuação da vibração. Como consequência o tempo de convergência foi significativamente longo.

O desempenho do controlador foi exercitado através de simulações em ambiente MATLAB. Foram utilizados como perturbação sinais senoidais puros e um sinal mais complexo com características impulsivas. O controle dos sinais senoidais puros foi bem sucedido, porém o controle de um sinal com maior riqueza espectral mostrou maior atenuação para as frequências mais baixas. O desempenho global do controlador foi levantado para um sinal randômico de 0 a

400 Hz. Houve atenuação de até 10 dB nas frequências correspondentes aos modos principais de vibração. As frequências dos nós com relação à perturbação tiveram alguma introdução de ruído devido provavelmente ao algoritmo LMS, e pela limitação do controlador em sintetizar com fidelidade os zeros da função de transferência da saída com relação à perturbação. As regiões dos zeros com relação ao controle não sofreram atenuação por serem regiões não controláveis.

O desempenho do controlador foi analisado também através do experimento de controle da viga que fora modelada. Os resultados são bastante semelhantes aos simulados, com exceção do sinal de perturbação com características impulsivas que se apresentou maior na prática que o sinal teórico. Neste caso fica patente o melhor resultado de controle para os componentes de baixa frequência, com alguma acentuação das frequências mais altas. O desempenho global para um sinal randômico apresentou para algumas faixas de frequência resultado melhor que o teórico, demonstrando a capacidade do controlador de compensar eventuais erros de modelamento. O nível de atenuação esteve de forma geral mais alto que o caso teórico, o que é razoável levando-se em consideração os efeitos de discretização, ruído de medida e resolução, limitações inerentes ao experimento.

O esquema de controle foi então modificado para que o processamento acontecesse totalmente em tempo contínuo. Procurou-se observar ao máximo as características topológicas do esquema original para ser possível a comparação dos resultados. Os mesmos sinais foram então utilizados em simulações em MATLAB para avaliar o comportamento do esquema de controle com ênfase em suas características dinâmicas. Houve bons resultados para sinais senoidais puros porém um sinal de características impulsivas não conseguiu ser adequadamente atenuado. Uma nova simulação com um sinal de banda mais estreita demonstrou que este problema de desempenho está relacionado ao fato do filtro *allpass* ter atraso aproximadamente constante apenas para uma faixa limitada de frequências. Após esta faixa, o comportamento do controlador pode não ser semelhante ao seu correspondente em tempo discreto mesmo com a otimização realizada pelo algoritmo LMS. De qualquer forma a afirmação feita por Karni [Karni 1989] de que o filtro adaptativo pode ter qualquer composição de sinais de entrada deve ser vista com restrições.

A ausência de limitação superior da constante adaptativa do controlador em tempo contínuo foi investigada concluindo-se que ainda que a convergência possa ser feita tão rápida quanto desejada, o preço a ser pago é o aumento da sensibilidade da resposta do sistema a variações no sinal de perturbação. O resultado é compatível com o conceito de perturbação introduzido para os sistemas em tempo discreto, pois o maior ganho adaptativo leva a maior nível de ruído introduzido pelo processo adaptativo.

6.2 Futuros trabalhos

O esquema de controle foi exercitado no controle de uma viga flexível modelada como sistema de 23ª ordem para faixa de 1 Hz a 400 Hz. As simulações e resultados experimentais apresentaram-se satisfatórios e confirmam a viabilidade do esquema proposto. O esquema gozou da simplicidade do algoritmo LMS que, se apresenta convergência mais lenta que outros métodos, permitiu que esta faixa de frequência fosse alcançada. Métodos de estimação de parâmetros como RLS certamente são afetados pela quantidade de parâmetros e pela complexidade dos cálculos, levando a limitação da faixa de frequências. Um controle adaptativo baseado neste método foi utilizado para a faixa até 78 Hz como relata um trabalho recentemente desenvolvido com a mesma viga flexível [Alves Júnior 2000]. Uma versão em tempo contínuo do controlador foi apresentada que também mostrou bons resultados e pode ser uma opção aos sistemas de PDS em custo e desempenho.

A implementação das soluções em *hardware* analógico propostas neste trabalho permite alcançar frequências da ordem de dezenas de MHz com a tecnologia disponível atualmente. Deve-se contudo levar em consideração que o número de pesos será função da resposta impulsiva e da frequência de amostragem como exposto no capítulo 2. Assim sendo, não é razoável que o período de amostragem seja muito pequeno quando comparado com a resposta impulsiva pois isto acarretaria a necessidade de um grande número de pesos.

A planta controlada tem uma resposta impulsiva bastante longa, devido ao baixo fator de amortecimento de seus modos de vibração. Esta característica é comum a muitos sistemas mecânicos e aponta um novo campo de estudo que seria a utilização de estruturas adaptativas

recursivas. Estas estruturas apresentam drástica redução do número de elementos e conseqüente diminuição de custo quando comparados a sistemas não recursivos com o mesmo desempenho. Esquemas recursivos vêm sendo estudados e, embora não tenham a estabilidade garantida incondicionalmente, demonstra-se que possuem um mínimo global se a ordem do numerador do filtro adaptativo é pelo menos uma ordem superior ao denominador do sistema a ser identificado [Fan 1989]. Neste caso o uso do algoritmo *filtered-u*, uma versão recursiva do algoritmo *filtered-x* deve ser usado [Kuo 1996]. Seguindo esta mesma linha de raciocínio, a combinação *feedback-feedforward* pode ser uma estratégia que leve a sistemas de controle mais simples e com o mesmo desempenho [Kuo 1996]. Outras versões do algoritmo LMS tais como o LMS normalizado e o *leaky* LMS [Kuo 1996] podem também apresentar resultados interessantes quando implementados em tempo contínuo.

A introdução do modelo de referência foi avaliada apenas na sua condição de regulador, utilizando-se neste caso um modelo de módulo pequeno e limitado em freqüência. É necessário ainda estudar a função do modelo na condição de rastreador e outras variantes para se conhecer a capacidade desta modificação.

Todo o campo de soluções em tempo contínuo, apenas introduzido neste trabalho, precisa ainda ser explorado. Tanto para sistemas recursivos como não recursivos, a teoria encontra-se ainda em sua fase inicial. As pesquisas relatadas trataram apenas de sistemas de identificação, de forma empírica. Apenas para ilustrar, algumas questões podem ser levantadas com relação à dedução do algoritmo LMS em tempo contínuo:

- 1) A estabilidade BIBO foi obtida para $\mathbf{R}(t)$ como matriz positiva definida, o que é verdade para o caso exato em que $\mathbf{R}(t)$ é uma matriz de autocorrelação. Mas e o caso aproximado? A possibilidade de que a matriz $\mathbf{R}(t)$ aproximada ser positiva semidefinida pode levar o sistema à instabilidade?
- 2) Não seria a saturação verificada por [Karni 1989] resultado da aproximação de $\mathbf{R}(t)$? Ou seria efeito de singularidades na matriz de autocorrelação como diagnosticado em [Perry 1981]?
- 3) A dedução de que o algoritmo LMS em tempo contínuo leva o vetor peso à solução ótima apoiou-se na premissa de que o vetor peso era independente do vetor de entrada. Contudo esta premissa é falsa para altos valores de ganho adaptativo pois mudanças rápidas no vetor peso

acontecem como função de mudanças no vetor de entrada. Qual seria então o valor de estabilização do algoritmo LMS?

Os esquemas em tempo contínuo propostos são em sua maioria não recursivos e é possível, pela semelhança topológica que apresentam com os seus equivalentes em tempo discreto, que também necessitem de muitos elementos caso a resposta impulsiva a ser reproduzida seja longa. A proposta não recursiva apresentada por [Johns 1991] pode ser uma alternativa porém a complexidade do sistema não diminui muito dada a quantidade de circuitos extras introduzidos para a obtenção dos gradientes dos parâmetros a serem ajustados. Outra alternativa nesta linha é estudar a viabilidade de equivalentes topológicos dos sistemas recursivos em tempo discreto, numa abordagem semelhante à apresentada neste trabalho, substituindo o algoritmo LMS e o elemento de atraso por seus equivalentes em tempo contínuo. Pode-se sugerir também a exploração de modelamento de sistemas lineares utilizando-se integradores para derivar os sinais do algoritmo LMS, resultando em parâmetros que representam diretamente o sistema a ser identificado e não sua resposta impulsiva. A possibilidade de se utilizar qualquer composição de sinais de entrada aponta para a exploração da identificação de sistemas não lineares em tempo contínuo.

Ainda dentro da teoria, a análise do modelamento com a utilização de funções de Bessel, Hermite e Chebishev iniciado por [Ortiz-Balbuena 1995] é uma linha que permite bastante aprofundamento.

O desdobramento natural do trabalho aqui realizado é o projeto de um circuito integrado dedicado à área de controle, com enfoque nas estruturas em tempo contínuo apresentadas. A viabilidade deste projeto como alternativa aos sistemas de PDS leva em consideração:

1- O acesso e desempenho dos sistemas de PDS têm crescido continuamente podendo ser em pouco tempo factível a popularização destes sistemas em controle adaptativo. Tais sistemas possuem as vantagens de fácil reconfiguração e memória. Soluções com vários microprocessadores passam a ser possíveis em que a limitação de velocidade de processamento é contornada com processamento distribuído.

2- Os sistemas em tempo contínuo alcançam frequências maiores, possuem menor consumo e não estão sujeitos ao efeito de *aliasing* e discretização dos sistemas de PDS. Porém não são naturalmente dotados de memória, de forma que é necessário algum procedimento de inicialização, como treinamento, antes de serem postos em operação.

3- Deve-se avaliar a influência de *offsets* e não linearidades no desempenho dos sistemas implementados em *hardware*

4- O número necessário de elementos do filtro adaptativo tem impacto sobre o custo do circuito integrado

5- Opções já discutidas tais como o uso de estruturas recursivas ou diferentes esquemas de controle influenciam a complexidade do circuito integrado

Em suma, o trabalho aqui apresentado apenas toca num campo onde ainda há muito a ser estudado. Contudo, sua exploração permite saber se os benefícios do controle adaptativo utilizando o algoritmo LMS, sua versatilidade e robustez podem ser estendidos além das áreas de vibração e ruído em que é hoje mais utilizado com a apresentação de uma alternativa de baixo custo.

Referências Bibliográficas

[Åstrom 1995]

Åstrom, K. J., Wittenmark, B. *Adaptive control*, 2. ed. Reading: Addison-Wesley, 1995, 573p.

[Alves Júnior 2000]

Alves Júnior, M. A. O. *Detecção de falhas por redes neurais em uma viga flexível*. Campinas: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 2000. 143 p. Dissertação (Mestrado)

[Cowan 1981]

Cowan, C. F. N., Arthur, J. W., Mavor, J., Denyer, P. B. CCD based adaptive filters: realization and analysis. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. ASSP-29, No. 2, p. 220-229, April 1981

[Cowan 1985]

Cowan, C. F. N., Grant, P. M. (eds.) *Adaptive filters*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1985, 308p.

[Denyer 1979]

Denyer, P.B., Mavor, J., Arthur, J. W. Miniature programmable transversal filter using CCD/MOS technology. *Proceedings of IEEE*, vol. 67, no. 1, p. 42-49, January 1979

[Diaz-Sanchez 1997]

Diaz-Sanchez, A., Ramirez-Angulo, J. A novel VLSI sampled data adaptive filter. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 1997, Hong-Kong, *Proceedings...Piscataway: IEEE*, 1997, p. 1964-1967

[Dukkipati 1993]

Dukkipati, R. V., Osman, M. O. M., Vallurupalli, S. S. Adaptive active suspension to attain optimal performance and maintain static equilibrium levels. *International Journal of Vehicle Design*, vol. 14, nos. 5/6, p. 471-496, 1993

[Elliot 1987]

Elliot, S. J., Stothers, I. M., Nelson, P. A. A multiple error LMS algorithm and its application to the active control of sound and vibration. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, no. 10, p. 1423-1434, October 1987

[Fan 1989]

Fan, H., Nayeri, M. On error surfaces of sufficient order adaptive IIR filters: proofs and counterexamples to a unimodality conjecture. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 37, no. 9, p.1436-1442, September 1989

[Fuller 1995]

Fuller, C. R., von Flotow, A. H. Active control of sound and vibration. *IEEE Control Systems*, p. 9-19, November 1995

[Gabriel 1976]

Gabriel, W. F. Adaptive arrays – an introduction. *Proceedings of IEEE*. vol. 64, p.239-272, February 1976

[Haken 1982]

Haken, R. A. An electronically programmable transversal filter. *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol.SC-17, no.1, p.34-39, February 1982

[Haque 1983]

Haque, Y. A. An adaptive transversal filter. IEEE International Congress on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1983, Boston. *Proceedings...Piscataway: IEEE, 1993*, p.1208-1211

[Haykin 1996]

Haykin, S. *Adaptive filter theory* 2. ed. Upper Saddle River: Prentice-Hall 1996, 989 p.

[Johns 1991]

Johns, D. A., Snelgrove, M., Sedra, A. Continuous-time LMS adaptive recursive filter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-38, no. 7, p. 769-778, July 1991

[Juan 1997]

Juan, J.-K., Harris, J. G., Principe, J. C. Analog hardware implementation of adaptive filter structures. IEEE International Conference on Neural Networks, 1997, Houston, *Proceedings...Piscataway: IEEE, 1997*, p.916-921

[Karni 1989]

Karni, S., Zeng, G. The analysis of continuous-time LMS algorithm. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol.37, no. 4, p. 595-597, April 1989

[Kuo 1996]

Kuo, S. M., Morgan, D. R. *Active noise control systems*. New York: John Wiley & Sons, 1996, 389 p.

[Kwan 1991]

Kwan, T., Martin, K. An adaptive analog continuous-time CMOS biquadratic filter. *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. 26, no. 6, p.859-867 June 1991

[La Scala 1995]

La Scala, B. F., Bitmead, R. R. A self-tuning regulator for vibration control. 34th. Conference on Decision and Control, New Orleans, 1995, *Proceedings...*Piscataway: IEEE, 1995, p. 1141-1146

[Lang 1995]

Lang, D., Reithler, L. Active control of a composite plate: from the specific problem to an optimized solution. *Proceedings of SPIE*, vol. 2443, p. 597-608, 1995

[Lenning 1997]

Lenning, L. G., Shah, A., Özgüner, Ü., Bibyk, S. B. Integration of VLSI circuits and mechanics for vibration control of flexible structures. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 2, no.1, p. 30-40 March 1997

[Lim 1997]

Lim, T.W.; Bosse, A.; Fisher, S. Adaptive filters for real time system identification and control. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 20, no. 1, p. 61-66 January/February 1997

[Menzi 1993]

Menzi, U., Moschytz, G. S. Adaptive switched-capacitor filter based on the LMS algorithm. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – Theory and Applications*, vol. 40, no.12, p.929-942, December 1993

[Mueller 1993]

Mueller, D., Kaelin, A., Moschytz, G. S. A mixed analog-digital realization of the LMS algorithm. IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1993, *Proceedings...*Piscataway: IEEE, 1993, p.882-885

[Ortiz-Balbuena 1995]

Ortiz-Balbuena, L., Martinez-Gonzales, A., Perez-Meana, H., Rivera, L. N., Ramirez-Angulo, J. Continuous-time adaptive filter structures. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1995, Proceedings...* Piscataway: IEEE, 1995, p.1061-1064

[Perry 1981]

Perry, K. A distributed μ implementation of the LMS algorithm. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. ASSP-29, no. 3, p.753-762, June 1981

[Qiuting 1993]

Qiuting, H., Moschytz, G. S. Analog multiplierless adaptive filter structures. *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 40, no. 3, p.790-794, December 1993

[Tanaka 1980]

Tanaka, S. C., Tseng, H.-F., Lyn, L. T., Chen, P.-J. An integrable real-time programmable transversal filter. *IEEE Journal of Solid State Circuits*, vol. SC-15, no. 6, p. 978-983, December 1980

[Tzeng 1990]

Tzeng, C.-P. J. An adaptive offset cancellation technique for adaptive filters. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech and Signal Processing*, vol. 38, no. 5, p.799-803, May 1990

[Vidyasagar 1993]

Vidyasagar, M. *Nonlinear systems analysis*, 2nd ed. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1993, 498 p.

[Widrow. 1975]

Widrow, B., *et al.* Adaptive noise cancelling: principles and applications. *Proceedings of IEEE*, vol. 63, no. 12, p.1692-1716, December 1975

[Widrow 1976]

Widrow, B.; McCool, J. M.; Larimore, M. G.; Johnson, C. R. Stationary and nonstationary learning characteristics of the LMS adaptive filter. *Proceedings of IEEE*, vol. 64, no. 8, p. 1151-1162, August 1976

[Widrow 1985]

Widrow B., Stearns S. D. *Adaptive Signal Processing*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall 1985, 474 p.

Apêndice A

Análise modal experimental usando o algoritmo de realização de auto-sistemas (ERA)

A.1 Introdução

Este texto tem por objetivo introduzir a Análise Modal Experimental como uma técnica de identificação de sistemas lineares, com base na teoria de realização de auto-sistemas, que utiliza um modelo modal.

Para isso, inicialmente é feita uma revisão sucinta da teoria de sistemas lineares chegando até a formulação das Funções de Resposta em Frequência (FRF) como uma superposição modal. A discretização de ordem zero de um sistema em tempo contínuo é utilizada e o algoritmo de identificação é formulado para o tempo discreto. O texto deste apêndice foi condensado de Arruda (1999)¹.

¹ Arruda, J. R. F. Análise modal experimental usando um algoritmo de realização de auto-sistemas. In *Técnicas ópticas para medidas de vibrações e deformações* (Notas de aula), UNICAMP, 1999

A.2 Teoria de sistemas lineares

Todo sistema linear invariante no tempo pode ser representado matematicamente por uma equação do tipo:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{A.2.1}$$

onde as matrizes A , B , C e D caracterizam o sistema. A matriz A é chamada de **matriz do sistema** e sua dimensão é a **ordem do sistema** linear. Frequentemente a matriz D é nula, e esta hipótese será considerada aqui para simplificar a formulação. Entretanto, esta não é uma necessidade.

A **matriz de transição** vem da solução homogênea da equação (A.2.1):

$$\dot{\Phi} = A\Phi\tag{A.2.2}$$

e a solução homogênea pode ser expressa:

$$x(t) = \Phi(t)x(0)\tag{A.2.3}$$

com $\Phi(0) = I$.

Busca-se uma função que atenda à equação (A.2.2). A função exponencial atende a esta propriedade:

$$e^{At} = I + AT + \frac{1}{2!} A^2 T^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i T^i}{i!} \quad \text{tal que} \quad \frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At}\tag{A.2.4}$$

e, portanto,

$$\Phi(t) = e^{At} \quad (\text{A.2.5})$$

Para qualquer instante inicial t_0 tem-se:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) \quad (\text{A.2.6})$$

Para expressar a solução geral do sistema de equações (A.2.1), vamos aplicar a transformada de Laplace, sabendo que $\dot{x}(t) \stackrel{L}{\Leftrightarrow} sX(s) - x_0$:

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \quad (\text{A.2.7})$$

de onde obtemos:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (\text{A.2.8})$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]x_0 + L^{-1}\left[(sI - A)^{-1}BU(s)\right] \quad (\text{A.2.9})$$

Reconhecendo que a transformada inversa no primeiro termo é a matriz de transição, isto é, $\phi(t) \stackrel{L}{\Leftrightarrow} (sI - A)^{-1}$ (ver equações (A.2.6) e (A.2.8)), vem:

$$x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau \quad (\text{A.2.10})$$

Isto porque, pelo teorema da convolução temos que:

$$L^{-1}[X(s)Y(s)] = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau \quad (\text{A.2.11})$$

* para $y(\tau) = 0, \tau < 0$ e $x(t-\tau) = 0, \tau > t$

Todo este equacionamento foi feito no **tempo contínuo**. Para passar ao **tempo discreto**, vamos utilizar a discretização de ordem zero, ou “zero order hold”, que consiste em amostrar o sinal e manter seu valor amostrado até a próxima amostra, ou seja:

$$u_i(t) = u_i(kT); \quad kT \leq t \leq (k+1)T \quad (\text{A.2.12})$$

Substituindo na equação (A.2.10) :

$$x(t) = \Phi(t - kT)x(kT) + \int_{kT}^t \Phi(t - \tau)Bu(kT)d\tau \quad (\text{A.2.13})$$

Fazendo:

$$\theta(t - kT) = \int_{kT}^T \Phi(t - \tau)Bd\tau \quad (\text{A.2.14})$$

e substituindo $t = (k+1)T$ tem-se:

$$x((k+1)T) = \Phi(T)x(kT) + \theta(T)u(kT) \quad (\text{A.2.15})$$

onde:

$$\begin{aligned} \Phi(T) &= e^{AT} \\ \theta(T) &= \int_{kT}^{(k+1)T} \Phi((k+1)T - \tau) B d\tau \\ y(kT) &= Cx(kT) + Du(kT) \end{aligned} \quad (\text{A.2.16})$$

ou seja:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \bar{A}x_k + \bar{B}u_k \\ y_k &= \bar{C}x_k + \bar{D}u_k \end{aligned} \quad (\text{A.2.17})$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= e^{AT} & ; & & \bar{C} &= C \\ \bar{B} &= \theta(T) & ; & & \bar{D} &= D \end{aligned} \quad (\text{A.2.18})$$

Usando a propriedade da transformada de Laplace $\dot{x} \stackrel{L}{\leftrightarrow} sX(s)$ na equação (A.2.1) temos:

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \quad (\text{A.2.19})$$

Definindo a matriz de transferência como a matriz das funções que relacionam entradas e saídas do sistema linear no domínio de Laplace, temos:

$$Y(s) = H(s)U(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) \Rightarrow H(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (\text{A.2.20})$$

Fazendo a decomposição modal da matriz do sistema:

$$A = K\Lambda K^{-1} = K\Lambda\Psi \quad (\text{A.2.21})$$

Agora fazendo a **transformação modal** $x = Kz$ na equação (A.2.19) e pré multiplicando esta equação por K^{-1} tem-se

$$K^{-1}(sI - A)KZ(s) = K^{-1}BU(s) \quad (\text{A.2.22})$$

Usando a equação (A.2.20) vem:

$$\begin{aligned} (sI - \Lambda)Z(s) &= K^{-1}BU(s) \Rightarrow Z(s) = (sI - \Lambda)^{-1}K^{-1}BU(s) \\ \Rightarrow X(s) &= K(sI - \Lambda)^{-1}K^{-1}BU(s) \end{aligned} \quad (\text{A.2.23})$$

Isto implica, finalmente, em que:

$$H(s) = K(sI - \Lambda)^{-1}K^{-1}B = K(sI - \Lambda)^{-1}\Psi B \Rightarrow H_{ij}(s) = \sum_r \frac{\kappa_{ir}\phi_{jr}}{s - \lambda_r} \quad (\text{A.2.24})$$

onde λ_r é o r -ésimo elemento da diagonal da matriz Λ , ou seja, o r -ésimo autovalor do sistema.

A **Função de Resposta em Freqüência (FRF)** é definida como a função de transferência avaliada em $s = j\omega$. A FRF entre uma entrada u_j e uma saída x_i pode ser expressa como:

$$H_{ij}(\omega) = \sum_r \frac{\kappa_{ir}\phi_{jr}}{i\omega - \lambda_r} \quad (\text{A.2.25})$$

A transformada de Fourier inversa da FRF é chamada de função de resposta ao impulso unitário (IRF) e pode ser expressa como:

$$h_{ij}(t) = \sum_r \kappa_{ir}\phi_{jr}e^{\lambda_r t} u(t) \quad (\text{A.2.26})$$

onde $u(t)$ é a função degrau unitário:

$$u(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Por analogia aos sistemas de um grau de liberdade, é usual expressar os autovalores como:

$$\lambda_r = -\zeta_r \omega_r \pm i \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \quad (\text{A.2.27})$$

onde ω_r é denominada frequência natural não amortecida e ζ_r o fator de amortecimento modal.

A.3 Análise modal experimental

Na sua forma mais clássica, a Análise Modal Experimental (AME) consiste em determinar experimentalmente um conjunto de FRFs e utilizar um algoritmo para obter, a partir delas, os parâmetros modais através da sua expressão por superposição modal, equação (A.2.25). Alternativamente, as IRFs podem ser usadas em conjunto com a equação (A.2.26). Obtidas as FRFs, o problema que se coloca é o de como obter os parâmetros modais que podem representá-la adequadamente, ou seja, nas equações (A.2.25) ou (A.2.26), dado o lado esquerdo da equação, determinar os parâmetros do lado direito. Este é um problema não linear nos parâmetros. Como os métodos de mínimos quadrados não-linear são numericamente problemáticos é conveniente buscar outros métodos. Aqui será exposto o método de Realização de Auto-sistemas, ERA, proposto por Juang e Pappa². Na formulação que segue supõe-se que IRFs foram estimadas, o que é feito geralmente calculando-se as transformadas de Fourier inversas da FRFs.

² Juang, J.-N. & Pappa, R. S., Effects of Noise on Modal Parameters Identified by the Eigensystem Realization Algorithm, *AIAA J. Guidance*, 9(3): 294-303.

Vimos que a matriz de transição pode ser expressa como:

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)} \quad (\text{A.3.1})$$

de modo que:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau, t_0)Bu(\tau)d\tau \quad (\text{A.3.2})$$

Com $x(t_0) = 0$ e $u(t) = \delta(t)$ podemos escrever (fazendo $D=0$, o que não é absolutamente necessário):

$$y(t) = C \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau, t_0)B\delta(\tau)d\tau \quad (\text{A.3.3})$$

Substituindo:

$$\Phi(t-\tau) = e^{A(t-\tau)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i(t-\tau)^i}{i!} \quad (\text{A.3.4})$$

na equação (A.3.3) tem-se:

$$y(t) = C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(CA^i B) t^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} M_i \frac{t^i}{i!}, \quad t > 0 \quad (\text{A.3.5})$$

onde os M_i são denominados parâmetros de Markov e são independentes da realização $[A, B, C, D]$ escolhida.

Tomando agora o sistema em tempo discreto, regido pelas equações (A.2.17), podemos escrever, para uma excitação do tipo $u_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k \geq 1 \end{cases}$ e com $x_0 = 0$ propagando as equações para k crescente:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 & y_0 &= \bar{D} \\ x_1 &= \bar{B} & y_1 &= \bar{C}\bar{B} \\ x_2 &= \bar{A}\bar{B} & y_2 &= \bar{C}\bar{A}\bar{B} \\ x_3 &= \bar{A}^2\bar{B} & y_3 &= \bar{C}\bar{A}^2\bar{B} \\ &\vdots & &\vdots \\ x_k &= \bar{A}^{k-1}\bar{B} & y_k &= \bar{C}\bar{A}^{k-1}\bar{B} \end{aligned} \quad (\text{A.3.6})$$

Com estas expressões da resposta discretizada, podemos montar uma matriz bloco de Hankel³ ($r \times N_o \times s$) onde N_o é o número de saídas medidas:

$$H(k) = \begin{bmatrix} Y(k) & Y(k+1) & \cdots & Y(k+s) \\ Y(k+1) & Y(k+2) & \cdots & Y(k+s+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y(k+r) & Y(k+r+1) & \cdots & Y(k+r+s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.7})$$

Deve-se notar aqui que, no caso de haver mais de uma referência ou entrada, as matrizes $[Y(k)]$ têm dimensão $N_o \times N_i$ onde N_i é o número de referências. Usualmente a matriz $[Y(k)]$ é formada de IRFs que podem ter sido obtidas em ensaios com excitações simultâneas ou não. Mas pela teoria de sistemas lineares, sabemos que esta matriz bloco de Hankel podem ser expressos como:

³ Esta matriz é dita bloco de Hankel porque as submatrizes das diagonais cruzadas ('*cross-diagonals*') são iguais.

$$H(k) = \begin{bmatrix} \overline{CA}^{k-1}\overline{B} & \overline{CA}^k\overline{B} & \dots & \overline{CA}^{k+s-1}\overline{B} \\ \overline{CA}^k\overline{B} & \overline{CA}^{k+1}\overline{B} & \dots & \overline{CA}^{k+s}\overline{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{CA}^{k+r-1}\overline{B} & \overline{CA}^{k-1}\overline{B} & \dots & \overline{CA}^{k+s+r-1}\overline{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.8})$$

ou ainda:

$$H(k) = \begin{bmatrix} \overline{C} \\ \overline{CA} \\ \overline{CA}^2 \\ \vdots \\ \overline{CA}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}^{k-1} \overline{B} & \overline{A}\overline{B} & \overline{A}^2\overline{B} & \dots & \overline{A}^s\overline{B} \end{bmatrix} = \mathbf{O}\overline{A}^{k-1}\mathbf{C} \quad (\text{A.3.9})$$

onde pode-se reconhecer \mathbf{O} , matriz de observabilidade, e \mathbf{C} , matriz de controlabilidade.

Temos então:

$$\begin{aligned} H(1) &= \mathbf{O}\mathbf{C} \\ H(2) &= \mathbf{O}\overline{A}\mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

Fazendo uma **decomposição em valores singulares**⁴ de $H(1)$ temos:

$$H(1) = U\Sigma V' = U\Sigma^{1/2}\Sigma^{1/2}V' \quad (\text{A.3.11})$$

com $V'V = I$, $U'U = I$ e Σ diagonal. Fazendo $\mathbf{O} = U\Sigma^{1/2}$ e $\mathbf{C} = \Sigma^{1/2}V'$ podemos escrever:

$$H(2) = U\Sigma^{1/2}\overline{A}\Sigma^{1/2}V' \quad (\text{A.3.12})$$

⁴ Golub, G. H. & Van Loan, C. F., *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, 1989.

E finalmente:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= U \Sigma^{-\frac{1}{2}} H(2) \Sigma^{-\frac{1}{2}} V \\ \bar{C} &= [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{O} = [I \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] U \Sigma^{\frac{1}{2}} \\ \bar{B} &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \Sigma^{\frac{1}{2}} V' \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.3.13})$$

Lembrando a relação entre a matriz do sistema em tempo contínuo e discreto ($e^{At} = \bar{A}$), os autovalores do sistema contínuo podem ser obtidos a partir dos autovalores do sistema discreto por:

$$s_i = \frac{1}{T} \ln(\bar{s}_i) \quad (\text{A.3.14})$$

Os autovetores são os mesmos, pois:

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + AT + \frac{1}{2!} A^2 T^2 + \dots \quad \text{e} \quad A = \mathbf{K} \Lambda \mathbf{K}^{-1} \Rightarrow \\ A^2 &= \mathbf{K} \Lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \Lambda \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K} \Lambda^2 \mathbf{K}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.3.15})$$

Este método está implementado no programa *erapoly.m* desenvolvido em ambiente MATLAB® (The Mathworks, Inc.), cuja listagem está anexa.

```

function [As,Bs,C]=erapoly(Htr,nr,ndof,ts)

%function [As,Bs,C]=erapoly(Htr,nr,ndof,ts)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%      função para realização do ERA - POLIREFERÊNCIA      %
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%-----
% Eigensystem Realization Algorithm
% Estimação de parâmetros modais pelo metodo ERA de
% Juang e Pappa, NASA Implementação Arruda 4/1992
%-----
%      Resultados em: EFreq, EDamp, EPsi
% IMPLEMENTAÇÃO POLIREFERÊNCIA
% fazendo Y(k) (mxnr) com nr = No. de referencias
%                               m = No. de amostras temporais
%-----
%
%-----
%
%      Dados de entrada
%
%      - Htr   -> Matriz que será utilizada para a identificação
%      - nr    -> número de atuadores
%      - ndof  -> número de sensores
%      - ts    -> tempo de discretização
%
%      Dados de saída
%
%      - As,Bs,C -> matrizes de estado Discretas
%-----

h=real(ifft(Htr));      % realizando a tranformada inversa
clear Htr
h=h';

```

```

%=====
%                               Montar matriz de Hankel H(1):
%=====

H1=0;
H2=0;

[ntot nt]=size(h);

prompt = {'No. de time samples  nt = (* NAO ALTERAR *) ', ...
         'No. total de linhas de h ntot = (* NAO ALTERAR *) ', ...
         'No. de fontes (R) = (* NAO ALTERAR *) ', ...
         'No. de sensores (S) = (* NAO ALTERAR *) ', ...
         'No. s para s*nr colunas da matriz de Hankel ( s+r+2 < nt ):', ...
         'No. r de vezes que h é sobreposta na matriz de Hankel:'};

def      = {num2str(nt),num2str(ntot),num2str(nr),num2str(ndof),'30','30'};
titlei  = 'Montar matriz de Hankel H(1)';
lineNo  = 1;
answer  = inputdlg(prompt,titlei,lineNo,def);

s       = str2num(answer{5});
r       = str2num(answer{6});

if ntot ~= nr*ndof,
    fprintf('\n No. de fontes e de sensores não compatíveis !!! \n');
    break;
end

%=====
%                               "arrumando" h para o ERA Polireferência:
%=====

hr=[];

for j=1:nt,
    hj=[];
    for i=1:ndof,
        hj=[hj

```

```

        h((i-1)*nr+1:i*nr,j)'];
    end
    hr=[hr hj];
end

%=====
%                               Montagem de H1 e H2
%=====

%s=input('No. s para s*nr colunas da matriz de Hankel ( s+r+2 < nt ): ');
%r=input('No. r de vezes que h e sobreposta na matriz de Hankel: ');

s=s-1;

for j=1:s+1,
    im=1;
    ir=0;
    for i=1:r*ndof,
        H1(i,(j-1)*nr+1:j*nr)= hr(im,(j+ir-1)*nr+1:(j+ir)*nr);
        H2(i,(j-1)*nr+1:j*nr)= hr(im,(j+ir)*nr+1:(j+ir+1)*nr);
        im=im+1;
        if im > ndof,
            im=1;
            ir=ir+1;
        end
    end
end
end

%=====
% SVD de H1:
%=====

[U S V]=svd(H1);

%=====
% Selecionar SVs nao-nulos:
%=====

figure

```

```

plot(diag(S),'k')
xlabel('No. de raizes','FontSize',12)
ylabel('Singular Values','FontSize',12)
title('Escolha o No. de raizes com os SVs:','FontSize',14)
set(gca,'FontSize',10)

%   nsvd=input(' No. de raizes: ');

prompt = {'No. de time samples nt = '};
def     = {'20'};
titlei = 'Selecionar SVs nao-nulos: ';
lineNo = 1;
answer = inputdlg(prompt,titlei,lineNo,def);
nsvd = str2num(answer{1});

%=====
% Truncar U, S e V com nsvd escolhido:
%=====

St=S(1:nsvd,1:nsvd);
Ut=U(:,1:nsvd);
Vt=V(:,1:nsvd);

%=====
% Calcular system realization matrices:
%=====

St2=sqrt(St);
Sti2=inv(St2);
Enr=[eye(nr) zeros(nr,s*nr)]';
Endof=[eye(ndof) zeros(ndof,(r-1)*ndof)];

As=Sti2*Ut'*H2*Vt*Sti2;
Bs=St2*Vt'*Enr;
C=Endof*Ut*St2;

%*****
%
%                               Area de Exclusão

```

```

%
%=====
% Calcular eigensolutions para As:
%=====

ss=0;
Freq=0;
Damp=0;
[Fi,Lamb]=eig(As);

for i=1:nsvd,
    ss(i)=log(Lamb(i,i))/ts;
    wd(i)=imag(ss(i));
    wr(i)=abs(ss(i));
    Freq(i)=wr(i)/(2*pi);
    Damp(i)=real(ss(i))/wr(i);
end

%=====
% Transformando Psi para coordenadas fisicas:
%=====

Ct=Ut*St2;
Psi=Ct*Fi;

%=====
% calculo do MCF:
%=====

jm=sqrt(-1);
Q=inv(Fi)*St2*Vt';
Q=Q(:,1:nr:(s+1)*nr);
Qe=Q(:,1);

for i=1:s,
    esj=Lamb^i;
    Qe=[Qe esj*Q(:,1)];
end

```

```

clear esj;

for i=1:nsvd,
    MCF(i)=(Qe(i,:)*Q(i,:)')^2/((Qe(i,:)*Qe(i,:)')*(Q(i,:)*Q(i,:)'));
    MCF(i)=sqrt(abs(MCF(i)));
end

%=====
% eliminando os pares conjugados para impressao dos resultados
%=====

ij=0;
nm=0;

for i=1:nsvd,
    if wd(i)<0.,
        ij=ij+1;
        nm(ij)=i;
    end
end

%=====
% nm(i) ; i=1,ij. guarda localizacao doa autovalores p/ impressao
% normalizacao dos modos :
%=====

for i=1:ij,
    Psi(:,nm(i))=Psi(:,nm(i))/Psi(1,nm(i));
end

%=====
% resultados finais para comparacao entre metodos :
%=====

EPsi=zeros(r*ndof,ij);EDamp=zeros(ij);EFreq=EDamp;EMCF=EDamp;

for i=1:ij,
    EFreq(i)=abs(Freq(nm(i)));
    EDamp(i)=abs(Damp(nm(i)));

```

```

    EPsi(:,i)=Psi(:,nm(i));
    EMCF(i)=MCF(nm(i));
end

%=====
% ordenamento dos modos:
%=====

for il=ij:-1:2,
    for i=ij-il+2:ij,
        if EFreq(ij-il+1) > EFreq(i),
            Buf=EFreq(ij-il+1);
            Bud=EDamp(ij-il+1);
            Bup=EPsi(:,ij-il+1);
            Bum=EMCF(ij-il+1);
            EFreq(ij-il+1)=EFreq(i);
            EDamp(ij-il+1)=EDamp(i);
            EPsi(:,ij-il+1)=EPsi(:,i);
            EMCF(ij-il+1)=EMCF(i);
            EFreq(i)=Buf;
            EDamp(i)=Bud;
            EPsi(:,i)=Bup;
            EMCF(i)=Bum;
        end
    end
end

%=====
% reimpressao de resultados de polyref e polymode
% impressao dos resultados
%=====

clc
fprintf('\n modo no.      freq. natural  amortecimento    MCF \n\n');

for i=1:ij,
    p1=EFreq(i);
    p2=EDamp(i);
    p3=EMCF(i);

```

```

    fprintf('    %2.0f ',i);
    fprintf('    %8.3g Hz    %5.3f    %5.3f\n',p1,p2,p3);
end

```

```

=====
% impressao dos resultados
=====

```

```

%im=1;
%while im>0,
%   im=input('entre o no. do modo desejado ou 0 para sair:');
%   if im>0,
%       fprintf('\n modo no.: %2.0f  frequencia: %8.3f
Hz\n',im,abs(EFreq(im)));
%       fprintf('   GDL no.           Amplitude do modo\n');
%       for i=1:ndof,
%           fprintf('    %2.0f           %8.3g %8.3g
i\n',i,real(EPsi(i,im)),imag(EPsi(i,im)));
%       end
%   end
%end

```