

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Uma Formulação para Análise de Peças de
Seção Delgada em Regime Elasto-plástico sob
Efeito Dinâmico Transiente Usando o Método
dos Elementos de Contorno**

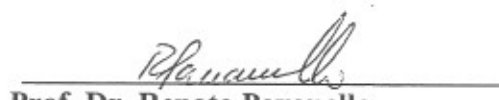
Autor: Eng Msc. Carlos Eduardo Foltran
Orientador: Prof. Dr Leandro Palermo Jr
Co-orientador: Prof Dr Euclides de Mesquita Neto

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL
TESE DE DOUTORADO

Uma Formulação para Análise de Peças de Seção Delgada em Regime Elasto-plástico sob Efeito Dinâmico Transiente Usando o Método dos Elementos de Contorno

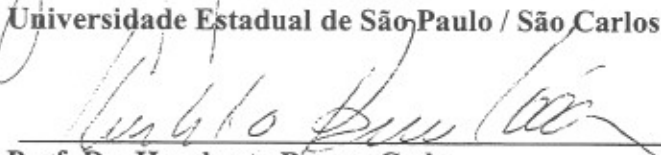
Autor: Carlos Eduardo Foltran
Orientador: Leandro Palermo Júnior


Prof. Dr. Leandro Palermo Júnior, Orientador
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Renato Pavanello
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. Pablo Siqueira Meirelles
Universidade Estadual de Campinas


Prof. Dr. João Batista de Paiva
Universidade Estadual de São Paulo / São Carlos


Prof. Dr. Humberto Breves Coda
Universidade Estadual de São Paulo / São Carlos

Campinas, 27 de fevereiro de 2004

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

Uma Formulação para Análise de Peças de Seção Delgada em Regime Elasto-plástico sob Efeito Dinâmico Transiente Usando o Método dos Elementos de Contorno

Autor: Eng Msc. Carlos Eduardo Foltran
Orientador: Prof. Dr Leandro Palermo Jr
Co-orientador: Prof Dr Euclides de Mesquita Neto

Curso: Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos sólidos

Tese de doutorado apresentada à comissão de Pós Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Campinas, 2004
S.P. – Brasil

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

F731f	Foltran, Carlos Eduardo Uma formulação para análise de peças de seção delgada em regime elasto-plástico sob efeito dinâmico transiente usando o método dos elementos de cortono / Carlos Eduardo Foltran.--Campinas, SP: [s.n.], 2004. Orientador: Leandro Palermo Junior. Tese (Doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica. 1. Plasticidade. 2. Integração numérica. 3. Análise numérica. 4. Métodos de elementos de contorno. 5. Deformação e tensões. 6. Placas (Engenharia). 7. Paredes finas Estruturas. I. Palermo Junior, Leandro. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.
-------	--

Agradecimentos

Aos meus pais pelo apoio desde o início deste trabalho.

À FAPESP, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, que concedeu a bolsa de estudos para este trabalho.

Aos meus colegas pós-graduandos do Departamento de Mecânica Computacional.

Ao Prof. Dr. Euclides de Mesquita Neto, co-orientador deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Leandro Palermo Jr.

Resumo

FOLTRAN, Carlos Eduardo, *Uma Formulação para Análise de Peças de Seção Delgada em Regime Elasto-plástico sob Efeito Dinâmico Transiente Usando o Método dos Elementos de Contorno*, Campinas,: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1993. 259 p. Tese (Doutorado)

Apresenta-se, neste trabalho, um resumo da elasticidade plana, da teoria de Kirchhoff de flexão de placas e de alguns modelos de plasticidade. Em seguida desenvolvem-se as equações integrais do problema de flexão de placas e de estados planos de tensão com plastificação, com suas respectivas implementações no Método dos Elementos de Contorno (MEC). Discute-se a formulação de alguns algoritmos de integração no tempo e suas respectivas implementações no MEC. A seguir apresenta-se uma forma de se combinar os problemas planos de flexão de placa e estado plano de tensão, por meio da técnica de sub-regiões, possibilitando a análise de peças de paredes finas. São discutidas formas de se considerar o efeito de plastificação e a inércia da peça durante a análise. São apresentados exemplos em regime elástico e elasto-plástico, em equilíbrio estático e dinâmico.

Abstract

FOLTRAN, Carlos Eduardo, *Boundary Element Analysis of Thin Walled Piece in Elasto-plastic Regimen under Transient Dynamic Effect*, Campinas, : Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1993. 259 p. Tese (Doutorado)

This work opens with a short summary of the formulations for analysis of plane elasticity, plate bending according to the theory due to Kirchhoff and some models of plasticity. The integral equations of plate bending and plane elasto-plastic problems are developed and its implementation on Boundary Element Method is discussed (BEM). Some time-step integrators for dynamic analysis are presented and they are combined with the BEM. An algorithm, based on sub-region technique, for analysis of thin-walled structures is presented and the consideration of inertia and plastic effects are discussed. Some examples of structures on elastic and elasto-plastic regimen, under static and dynamic equilibrium, are presented.

Sumário

1-Introdução	1
2-Revisão Bibliográfica	3
2.1-Contexto histórico	3
2.2-Objetivos	11
3-Estados Planos de Tensão e deformação	15
3.1-Introdução	15
3.2-Hipóteses básicas	15
3.3-Equação de equilíbrio	15
3.4-Relação deformação - deslocamento	17
3.5-Relações Constitutivas	18
3.6-Equações de Navier	19
3.7-Estados planos de tensão e deformação	20
3.8-Estado plano de tensão generalizado	21
3.9-Solução fundamental de chapas	22
4-Flexão de Placas Pela Teoria Clássica	26
4.1-Introdução	26
4.2-Equações constitutivas de placas	26
4.3-Equações diferenciais de placas finas	30
4.4-Condições de contorno	32
4.4.1-Engaste	33
4.4.2-Apoio simples	34
4.4.3-Borda livre	34
4.5-Sistema de coordenadas normais e tangenciais	34

4.5.1-Engaste	36
4.5.2-Apoio simples	36
4.5.3-Borda livre	36
4.6-Coordenadas cilíndricas	36
4.7-Solução fundamental de placas	38
5-Noções Básicas de Plasticidade	41
5.1-Introdução	41
5.2-Comportamento plástico dos materiais	41
5.3-Tipos de encruamento	42
5.4-Critérios de escoamentos	43
5.4.1-Critério de Tresca	43
5.4.1-Critério de Von Mises	44
5.4.1-Critério de Drucker-Prager	45
5.5-Formulação elasto-plástica para materiais com encruamento isotrópico	45
5.6-Materiais com encruamento misto	48
5.7-Equações de Navier para o caso elasto-plástico:	55
5.8-Acréscimo de deformação plástica:	56
6-Equação integral de placas segundo a teoria clássica	61
6.1-Introdução	61
6.1-Técnica dos resíduos ponderados	61
6.2-Carregamento de domínio	63
6.3-Deflexão de pontos no contorno	64
6.4-Equações algébricas	65
6.5 Determinação das integrais H_k^u , H_k^0 , G_k^u e G_k^0	67
6.5.1-Expressões analíticas	67
7-Formulação do MEC para Meios Elasto-plásticos.	69
7.1-Introdução:	69
7.2-Formulação para Meios Elasto-plásticos:	69
7.3-Redução do Carregamento:	72
7.4-Determinação do Vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$:	73
7.5-Determinação dos Incrementos de Deformações em Pontos Internos:	74

7.6-Determinação dos Incrementos de Tensões em Pontos Internos:	76
7.7-Determinação dos Incrementos de Tensões e Deformações em Pontos do Contorno:	76
8-Integradores no tempo	78
8.1-Introdução	78
8.2-Integrador de Wilson θ	78
8.3-Integrador de Newmark	82
8.4-Integrador de Houbolt	84
8.5-Aplicação dos integradores ao MEC	85
8.5.1-Integrador Wilson θ	85
8.5.2-Integrador de Newmark	87
8.5.3-Integrador de Houbolt	88
8.6-Integrador de Wilson θ incremental	89
9-Montagem do sistema de equações	91
9.1-Introdução	91
9.2-Macro-elementos	91
9.3-Sistema de coordenadas	92
9.3.1-Compatibilidade entre giros e momentos	93
9.4-Montagem das matrizes H e G	94
9.4.1-Transformação do sistema de coordenadas	94
9.4.2-Acoplamento dos macro-elementos	96
9.5-Consideração do efeito elasto-plástico	98
9.6-Consideração do efeito dinâmico	100
10-Exemplos elásticos	102
10.1-Introdução	102
10.2-Viga de seção quadrada	102
10.2.1-Flexão	102
10.2.2-Torção	105
10.3-Viga U curta	109
10.3.1-Flexão simples em torno do eixo y	109
10.3.2-Flexão simples em torno do eixo x	111
10.3.3-Flexo-torção	119

10.4-Viga U longa	121
10.5-Viga I curta	127
10.6-Problema de Vlassov	128
10.7-Chapa larga sob carregamento dinâmico	131
10.8-Chapa estreita sob carregamento dinâmico	135
10.8.1-Estudo com integrador incremental	145
11-Exemplos elasto-plásticos	149
11.1-Introdução	149
11.2-Viga de seção quadrada	149
11.3-Viga U curta	152
11.3.1-Flexão simples em torno do eixo y	152
11.3.2-Flexão simples em torno do eixo x com carga no C.C.	154
11.3.3-Flexão simples em torno do eixo x com carga na alma.	158
11.3.4-Momento nas arestas	160
11.4-Viga U longa	161
11.4.1-Flexão simples em torno do eixo y	161
11.4.2-Flexão simples em torno do eixo x com carga no C.C.	163
11.4.3-Flexão simples em torno do eixo x com carga na alma.	167
11.4.4-Momento nas arestas	169
11.5-Viga I curta	169
11.6-Viga U longa bi-apoiada	171
11.7-Viga I curta sujeita a carregamento reverso	173
11.8- Chapa estreita sob carregamento dinâmico	178
12-Conclusões	181
12.1-Conclusões gerais	181
12.2-Sugestões para prosseguimento	182
13-Bibliografia	184
13.1-Referências	184
13.2-Bibliografia	192
Apêndice A- Deformações, rotações e cargas concentradas	226
A.1-Introdução	226

A.2-Derivadas e integrais do raio	226
A.2.1-Derivadas	226
A.2.2-Integrais	227
A.3-Derivadas do deslocamento	228
A.3.1-Derivada de u_{ik}^*	229
A.3.2-Derivada de p_{ik}^*	229
A.3.3-Derivada de σ_{ijk}^*	230
A.3.4-Integral convexa	230
A.3.5-Derivadas em relação ao ponto de colocação	231
A.4-Deformações de um ponto interno	231
A.5-Rotação de um ponto interno	232
A.6-Cargas concentradas	233
A.6.1-Aplicação de momentos	233
A.6.2-Cargas perpendiculares ao plano	237
A.6.3-Deslocamento de pontos carregados	239

Lista de Figuras

Figura 3.1 - Elemento infinitesimal.	16
Figura 3.2 - Forças de superfície.	16
Figura 3.3 - Transformação do corpo.	17
Figura 3.4 - Corpo com pequena espessura.	22
Figura 4.1 – Elemento de placa sujeito a carregamento.	27
Figura 4.2 – Sentido positivo dos esforços atuantes	29
Figura 4.3 – Condições de contorno	32
Figura 4.4 – Coordenadas normais e tangenciais.	35
Figura 4.5 – Forças verticais atuantes num círculo de raio qualquer	39
Figura 5.1 - Modelos elasto-plásticos.	41
Figura 5.2 - Tipos de encruamento.	42
Figura 5.3 - Critérios de Tresca e de Von Mises em um estado plano de tensão.	44
Figura 5.4 - Componentes elástica e plástica da deformação.	46
Figura 6.5 - Acréscimo de um domínio infinitesimal	64
Figura 8.1 – Variação da aceleração.	79
Figura 9.1 – Peça decomposta em seus macro-elementos.	92
Figura 9.2 – Transformação do sistema de coordenadas	93
Figura 9.3 – Macro-elementos contíguos pertencentes a um mesmo plano	94
Figura 9.4 – Associação de dois macro-elementos	96
Figura 10.5 – Viga de seção quadrada com carregamento vertical.	102
Figura 10.6 – Malha de um dos macro-elementos.	103
Figura 10.7 – Distribuição das forças no apoio na direção do eixo.	103
Figura 10.8 – Deflexão da viga multiplicada pela inércia.	104

Figura 10.9 – Viga se seção quadrada com torque.	105
Figura 10.10 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (5cm).	105
Figura 10.11 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (5cm).	106
Figura 10.12 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (5cm).	106
Figura 10.13 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (10cm).	107
Figura 10.14 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (10cm).	107
Figura 10.15 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (10cm).	108
Figura 10.16 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (20cm).	108
Figura 10.17 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (20cm).	109
Figura 10.18 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (20cm).	109
Figura 10.19 – Viga de seção U com carregamento vertical.	110
Figura 10.20 - Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em y.	110
Figura 10.21 – Viga de seção U com carregamento vertical.	111
Figura 10.22 - Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em x (Programa de Elementos de contorno).	112
Figura 10.23 - Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em x (Programa de Elementos de Finitos).	112
Figura 10.24 - Forças no vão a 25cm ($\ell/32$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x.	113
Figura 10.25 - Forças no vão a 50cm ($\ell/16$) altura do engaste na direção do eixo z para flexão em x.	113
Figura 10.26 - Forças no vão a 75cm ($3\ell/32$) altura do engaste na direção do eixo z para flexão em x.	114
Figura 10.27 - Forças no vão a 100cm ($\ell/8$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x.	114
Figura 10.28 - Tensões de cisalhamento no engaste para flexão em torno de x (Programa de Elementos de Contorno).	115
Figura 10.29 - Tensões de cisalhamento no engaste para flexão em torno de x (Programa de Elementos de Finitos).	115
Figura 10.30 - Tensões de cisalhamento no vão a 25cm ($\ell/32$) do engaste para flexão em torno de x.	116

Figura 10.31 - Tensões de cisalhamento no vão a 50cm ($\ell/16$) do engaste para flexão em torno de x.	116
Figura 10.32 - Tensões de cisalhamento no vão a 75cm ($3\ell/32$) do engaste para flexão em torno de x.	117
Figura 10.33 - Tensões de cisalhamento no vão a 100cm ($\ell/8$) do engaste para flexão em torno de x.	117
Figura 10.34 – Eixos principais e centros de cisalhamento.	118
Figura 10.35 – Deflexões da viga nas direções dos eixos principais.	119
Figura 10.36 – Tensões no engaste na direção do eixo z para flexo-torção (Teórico).	120
Figura 10.37 – Tensões no engaste na direção do eixo z para flexo-torção.	120
Figura 10.38 – Deflexão da viga na linha média da alma.	121
Figura 10.39 – Malha de um dos macro-elementos.	121
Figura 10.40 – Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em x	122
Figura 10.41 – Forças no vão a 25cm ($\ell/96$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x.	122
Figura 10.42 – Forças no vão a 50cm do ($\ell/48$) engaste na direção do eixo z para flexão em x.	123
Figura 10.43 – Forças no vão a 75cm ($3\ell/96$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x.	123
Figura 10.44 – Forças no vão a 100cm ($\ell/24$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x.	124
Figura 10.45 - Tensões de cisalhamento no engaste para flexão em torno de x.	124
Figura 10.46 - Tensões de cisalhamento no vão a 25cm do engaste para flexão em torno de x.	125
Figura 10.47 - Tensões de cisalhamento no vão a 50cm do engaste para flexão em torno de x.	125
Figura 10.48 - Tensões de cisalhamento no vão a 75cm do engaste para flexão em torno de x.	126
Figura 10.49 - Tensões de cisalhamento no vão a 100cm do engaste para flexão em torno de x.	126
Figura 10.50 – Deflexão da viga na direção do eixo y.	127
Figura 10.51 – Viga I curta.	127
Figura 10.52 – Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em torno do eixo de maior inércia	128

Figura 10.53 – Problema de Vlassov.	129
Figura 10.54 – Tensões na aresta mais solicitada.	130
Figura 10.55 – Tensões na aresta menos solicitada.	130
Figura 10.56 – Geometria da chapa larga.	131
Figura 10.57 – Malha para a chapa larga.	132
Figura 10.58 – Deslocamentos na borda carregada para carga constante.	133
Figura 10.59 – Reação na borda vinculada para carga constante.	133
Figura 10.60 – Deslocamentos na borda carregada para carga variável.	134
Figura 10.61 – Reação na borda vinculada para carga variável.	135
Figura 10.63 – Primeira malha da chapa estreita	136
Figura 10.64 - Segunda malha da chapa estreita	136
Figura 10.65 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 1s.	136
Figura 10.66 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 1s.	137
Figura 10.67 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 1s.	137
Figura 10.68 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 1s.	138
Figura 10.69 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 1s.	138
Figura 10.70 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 1s.	139
Figura 10.71 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 1s.	139
Figura 10.72 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 1s.	140
Figura 10.73 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 0.25s.	141
Figura 10.74 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 0.25s.	141
Figura 10.75 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 0.25s.	142
Figura 10.76 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 0.25s.	142
Figura 10.77 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 0.25s.	143
Figura 10.78 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 0.25s.	144
Figura 10.79 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 0.25s.	144
Figura 10.80 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 0.25s.	145
Figura 10.81 - Deslocamentos da extremidade livre com integrador incremental	146
Figura 10.82 - Reação na extremidade vinculada com integrador incremental	146
Figura 10.83 – Comparação dos deslocamentos obtidos com as modalidades do integrador de Wilson	147

Figura 10.84 – Comparação das forças obtidas com as modalidades do integrador de Wilson	147
Figura 11.1 – Viga de seção quadrada com carregamento vertical.	149
Figura 11.2 – Malha do macro-elemento.	150
Figura 11.3 – Resultados com a primeira malha	151
Figura 11.4 – Viga U fletida em torno do eixo y	152
Figura 11.5 – Força resultante em função da flecha imposta para flexão em torno do eixo de menor inércia.	153
Figura 11.6 – Posição da linha neutra relativamente à mesa	154
Figura 11.7 – Viga U fletida em torno do eixo x	154
Figura 11.8 – Força resultante em função da flecha imposta para flexão em torno do eixo de simetria	155
Figura 11.9 – Posição instantânea do centro de cisalhamento.	156
Figura 11.10 – Força resultante em função da flecha imposta para flexão em torno do eixo de simetria do perfil compacto	157
Figura 11.11 – Força resultante em função da flecha imposta	157
Figura 11.12 – Força resultante em função da flecha imposta	158
Figura 11.13 – Posição do centro de giro	159
Figura 11.14 – Posição do centro instantâneo de giro	159
Figura 11.15 – Desenvolvimento das tensões devidas aos momentos fletores das paredes da viga ao longo da aresta	160
Figura 11.16 – Viga U longa fletida em torno do eixo y	161
Figura 11.17 – Malha empregada na análise	161
Figura 11.18 – Força resultante em função da flecha imposta	162
Figura 11.19 – Posição da linha neutra relativamente à mesa	163
Figura 11.20 – Viga U longa fletida em torno do eixo x	163
Figura 11.21 – Força resultante em função da flecha imposta	164
Figura 11.22 – Posição instantânea do centro de cisalhamento.	165
Figura 11.23 – Força resultante em função da flecha imposta para o perfil compacto	166
Figura 11.24 – Posição instantânea do centro de cisalhamento do perfil compacto.	166
Figura 11.25 – Força resultante em função da flecha imposta	167
Figura 11.26 – Posição do centro de giro	168

Figura 11.27 – Posição do centro instantâneo de giro	168
Figura 11.28 - Desenvolvimento das tensões devidas aos momentos fletores das paredes da viga ao longo da aresta	169
Figura 11.29 – Viga I curta.	170
Figura 11.30 – Força na extremidade em função da flecha imposta.	171
Figura 11.31 – Seção da viga bi-apoiada.	172
Figura 11.32 – Curvas de carga e descarga.	172
Figura 11.33 – Aplicação de carregamento reverso com escoamento.	173
Figura 11.34 – Remoção total do deslocamento.	174
Figura 11.35 – Verificação de histerese.	175
Figura 11.36 – Ampliação do gráfico da Figura 11.35	176
Figura 11.37 – Histerese em uma viga com alma de 20cm.	177
Figura 11.39 - Segunda malha da chapa estreita	178
Figura 11.40 – Deslocamento da borda livre	179
Figura 11.41 – Reação da borda vinculada	179
Figura A.1 – Cavidade infinitesimal com tensão tangencial aplicada	235
Figura A.2 – Corpo chato sujeito a uma carga perpendicular a seu plano médio.	237

Lista de Símbolos

α_{ij}	Tensor de deslocamento do centro da superfície de escoamento.
α	Inclinação do elemento em relação a horizontal na integração analítica.
β	Ângulo entre o raio e o contorno de uma célula
$\bar{\beta}$	Ângulo entre o macro-elemento e o eixo x
β_{ij}	Integral de célula.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
ε_{ij}	Tensor das deformações totais.
ε_{ij}^p	Tensor das deformações plásticas.
ε_{ij}^e	Tensor das deformações elásticas.
ε_e	Deformação efetiva.
ε_p	Deformação plástica efetiva.
ε	Raio infinitesimal.
ϕ_i	Função de forma.
φ_i	Função de forma auxiliar.
γ	Ângulo externo do contorno.
η_i	Versor normal ao contorno.
$\bar{\kappa}$	Fator de redução do carregamento.
λ	Constante de Lamè.
λ	Constante de distância na integração analítica.
$d\lambda$	Escalar que depende do histórico do carregamento.

μ	Módulo de elasticidade transversal.
ν	Coefficiente de Poisson.
π	3.14159265358979
θ_i	Inclinação do elemento de contorno segundo a horizontal.
θ_η	Giro de placa na direção normal.
θ	Variável angular.
ρ	Densidade em massa.
σ_{ij}	Tensor das tensões.
σ_e	Tensão efetiva.
σ_0	Tensão de escoamento do material.
ω	Angulo de varredura da integração analítica.
ξ	Variável homogênea.
ξ_i	Abcissa de Gauss.
ζ	Variável homogênea auxiliar.
$\Delta(X, P)$	Delta de Dirac.
Γ	Variável de contorno.
Γ_i	Versor tangente ao contorno.
Γ_ε	Contorno infinitesimal.
Λ_k	Núcleo para integral de contorno de célula.
Σ_k	Integral de célula.
$\{\tilde{\Sigma}\}$	Vetor das contribuições plásticas.
Ω	Variável de domínio.
Ω_ε	Domínio infinitesimal.
Ψ_{ij}	Núcleo para integração em contorno de célula.
∇^2	Operador de Laplace.
ℓ	Comprimento de um elemento.
b	Dobro da projeção de $\sqrt{c}$ na direção do elemento na integração analítica.

b_i	Carregamento de massa.
c	Parâmetro de encruamento.
c	Raio da região plastificada no problema do tubo de parede espessa e do disco em rotação.
c	Quadrado da distância entre o ponto de colocação e o ponto médio do elemento na integração analítica.
c_{ij}	Tensor de correção para deslocamentos no contorno ou fora deste.
d	Distância do ponto de colocação ao elemento na integração analítica.
g_i	Carregamento distribuído na direção i .
g_{ij}^k	Integral analítica.
h_{ij}^k	Integral analítica.
p_i	Força aplicada ao contorno.
p_{ij}^*	Solução fundamental de força.
r	Raio.
s_{ij}	Tensor das tensões deviatórias.
u_i	Deslocamento de um ponto.
u_{ij}^*	Solução fundamental para deslocamentos.
w^*	Solução fundamental de placa.
w_i	Peso de Gauss.
A_{ij}	Constantes de célula.
B_i	Integral de célula.
C_{ijkl}	Tensor elástico.
D	Rigidez de placa
E	Módulo de elasticidade longitudinal.
$[G]$	Matriz do método dos elementos de contorno que multiplica o vetor de forças.
$\bar{H}$	Módulo de encruamento.

$[H]$	Matriz do método dos elementos de contorno que multiplica o vetor de deslocamentos.
I_1	Primeiro invariante do tensor das tensões.
J_2	Segundo invariante do tensor das tensões deviatórias.
M	Matriz de massa.
M	Grau de mistura para encruamento misto.
M_{ij}	Tensor de momentos.
P	Ponto de colocação.
Q_i	Cortante na face i
R	Raio.
R_c	Reação de canto.
V_i	Cortante equivalente na face i.
$\tilde{x}$	Incremento da variável x .
$\bar{x}$	Valor reduzido da variável x .
$\tilde{x}$	Coordenada local do Macro-Elemento x .
$\dot{x}$	Derivada da variável x em relação ao tempo.
$\ddot{x}$	Segunda derivada da variável x em relação ao tempo.

We can forgive a man for making a useful thing as long as he does not
admire it. The only excuse for making a useless thing is that one
admires it intensely. All art is quite useless.

Oscar Wilde

1-Introdução

O tratamento de problemas elasto-plásticos e de dinâmica transiente são assuntos que despertam grande interesse na engenharia. O Método dos Elementos de Contorno vem sendo empregado com sucesso neste tipo de análise desde meados da década de 1960. Neste trabalho propõe-se uma forma de analisar o comportamento dinâmico transiente de peças de seção delgada em regime elasto-plástico.

Inicialmente apresenta-se no Capítulo 2 uma revisão bibliográfica do tema. No Capítulo 3 é apresentado um resumo das formulações da elasticidade, dando ênfase aos estados planos de tensão e deformação. Neste capítulo é apresentada a obtenção das soluções do problema de Kelvin para a elasticidade plana.

Uma visão geral da formulação do problema de flexão de placas segundo a teoria clássica, ou teoria de Kirchhoff, é apresentada no Capítulo 4.

Apresenta-se no Capítulo 5 uma visão breve da formulação necessária para o tratamento de problemas em regime elasto-plástico.

No Capítulo 6 é mostrada a obtenção da equação integral para flexão de placas e um breve resumo da aplicação método dos elementos de contorno no tratamento deste tipo de problema.

No Capítulo 7 é descrita a formulação do método dos elementos de contorno para o problema de chapas em regime elasto-plástico.

Discutem-se alguns algoritmos de integração ao longo do tempo no Capítulo 8. Estes integradores são empregados na obtenção da resposta transiente do problema em estudo.

A montagem do sistema de equações do problema de folhas poliédricas é apresentada no Capítulo 9.

Para aferição do modelo proposto são apresentados no Capítulo 10 alguns exemplos em regime elástico e, no Capítulo 11, em regime elasto-plástico.

As conclusões deste trabalho estão reunidas no Capítulo 12.

Ademais se apresenta detalhadamente no Apêndice a formulação do MEC para o cálculo de deformações e rotações no interior do domínio em estudo.

2-Revisão Bibliográfica

2.1-Contexto histórico

A obtenção de soluções fechadas para as equações que descrevem os mais diversos fenômenos é uma tarefa em geral difícil quando não impossível. Quando disponíveis, estas soluções são aplicáveis apenas a casos bastante simples. Por estas razões, parte-se a procura de um método numérico capaz de fornecer uma resposta confiável para um dado problema.

A evolução dos métodos numéricos sempre esteve ligada ao equipamento disponível para a aplicação destes. No início do século XIX, cálculos numéricos simples, como a obtenção de tabelas de logaritmos e funções trigonométricas, eram executados por pessoas que exerciam a profissão de “computador” [Tweedale 1990]. Dotados muitas vezes apenas de papel e caneta, quando muito de calculadoras mecânicas bastante rudimentares, os “computadores” cometiam muitos erros em suas tabelas.

Tentando melhorar a qualidade das tabelas de funções trigonométricas, essenciais à navegação, em 1821 Charles Babbage concebeu uma máquina capaz de executar esses cálculos automaticamente e sem erros. Sua máquina é tida como o primeiro computador no sentido moderno do termo [Swade 1991].

Seguindo os passos de Babbage, vários outros construíram máquinas cada vez mais complexas até que em 1930 Vannevar Bush construiu o primeiro computador mecânico capaz de solucionar equações diferenciais [Tweedale 1990].

O tratamento de problemas de elasticidade por meio de equações integrais remonta ao final do século XIX, com o trabalho de Somigliana publicado em 1886 [Becker 1992]. Em 1949, Massonnet publicou um trabalho descrevendo como problemas de elasticidade plana poderiam ser resolvidos numericamente a partir de suas equações integrais [Massonnet 1949]. Neste trabalho, Massonnet descreve como aplicar a propriedade de convergência das equações integrais para obter soluções via aproximações sucessivas. No mesmo trabalho foi

apresentado um equipamento mecânico capaz de efetuar as integrações, obtendo graficamente o campo de tensões de um problema.

Esses dispositivos mecânicos eram alternativas viáveis na época em que foram concebidos, pois os computadores eletrônicos eram máquinas extremamente caras, lentas e raras. Em 1949 havia apenas quatro computadores eletrônicos em operação no mundo. Além disso, a programação destas máquinas era feita com conexões físicas por meio de cabos, o que tornava sua operação difícil e não confiável. Apenas em meados da década de 1950 computadores eletrônicos capazes de aceitar programação lógica se tornaram comercialmente disponíveis [**Lavington 1988**].

Em 1956, quando computadores eletrônicos já estavam disponíveis, Massonnet expandiu seu trabalho para problemas tridimensionais. As integrações sucessivas requeridas pelo processo eram efetuadas numericamente pelo computador, garantindo uma maior acuidade na resposta. A principal diferença entre o algoritmo de Massonnet e os elementos de contorno atuais é a inexistência de um sistema de equações. A solução era obtida diretamente da equação integral.

Seguindo a mesma direção do trabalho de Massonnet, **Jaswon 1963** e **Symm 1963** apresentaram soluções numéricas, via equação integral de contorno, para problemas potenciais. Suas aproximações consistiam em dividir o contorno do problema em trechos retos, chamados elementos, nos quais as funções de potencial eram assumidas constantes. As integrais de contorno eram avaliadas usando-se a regra de Simpson, exceto pelas integrais singulares que tinham tratamento analítico. Após a integração do contorno havia um sistema de equações algébricas a ser resolvido.

Rizzo 1967 publicou um trabalho explorando a semelhança entre os problemas potenciais e a teoria clássica da elasticidade. Neste trabalho, vários problemas de elasticidade são resolvidos por uma aproximação numérica idêntica a usada por **Jaswon 1963**.

O trabalho de **Rizzo 1967** foi expandido para problemas tridimensionais por **Cruse 1969**. Mais tarde **Lachat & Watson 1975** propuseram o uso de polinômios de grau mais alto, quadráticos e cúbicos, como funções de densidade para obtenção de melhores resultados. Com isso outros autores passaram a usar elementos isoparamétricos quadráticos, onde tanto a geometria do contorno quanto as funções de densidade eram aproximadas por funções quadráticas.

O problema elasto-plástico foi analisado pela primeira vez por **Swedlow & Cruse 1971**, que apresentaram a formulação direta para a integral de contorno. Houve a necessidade de uma discretização do interior do corpo em estudo para a avaliação das integrais de domínio.

Este procedimento não aumenta o número de incógnitas do problema, como ocorreria na técnica dos elementos finitos, mas é uma atividade que aumenta a quantidade de operações necessárias ao processamento. **Riccardella 1973** ampliou este trabalho usando o critério de resistência de Von Mises e assumiu que as tensões eram constantes nas células de domínio, em um processo de solução não iterativo. Devido ao elevado custo computacional deste processo, **Riccardella 1973** concluiu que o método não apresentava vantagens em relação a outras abordagens disponíveis na época, a pesar de sua acuidade.

Mendelson & Albers 1975 apresentaram uma formulação para materiais perfeitamente plásticos e com enrijecimento, diferente da usada por **Riccardella 1973**. Estes trabalhos mostraram, na época de sua publicação, a acuidade e o potencial dos elementos de contorno no tratamento deste tipo de problema.

Algumas correções às formulações para o estado plano de deformação, considerando o efeito térmico, foram publicadas por **Mukherjee 1977**, que introduziu modificações nos núcleos das integrais de deformação plástica. **Bui 1978** publicou mais algumas correções para os casos bi e tridimensional, considerando o efeito da integral convexa.

Telles & Brebbia 1979 apresentaram a formulação para o cálculo das deformações e tensões em pontos internos, incluindo um tratamento das integrais singulares de domínio, com base no trabalho de **Bui 1978**, adaptando a formulação para o problema bidimensional. Eles apresentaram uma formulação direta para o método dos elementos de contorno, utilizando elementos lineares tanto no contorno quanto no domínio.

Lee 1983 utilizando elementos quadráticos, apresentou um estudo sobre elementos de contorno, tendo por base os trabalhos de **Telles & Brebbia 1979** e **Axelsson & Samuelsson 1979**. No trabalho de **Axelsson & Samuelsson 1979** foi apresentado um estudo de problemas elasto-plásticos com encruamento misto, usando o critério de escoamento de Von Mises, para aplicação no método dos elementos finitos. O problema plástico foi tratado efetuando-se integrações sobre o domínio. A contribuição das deformações plásticas nos deslocamentos e forças no contorno do corpo em estudo foi determinada através de um processo incremental e iterativo. **Lee 1983** apresentou também um algoritmo de aceleração de convergência para as iterações plásticas.

A seguir, o trabalho de **Lee 1983** foi implementado para aplicações práticas em mecânica da fratura por **Tan & Lee 1983**, analisando um tubo de parede espessa com uma trinca, e na análise de chapas de ligação por **Lee & Fenner 1986**.

Ainda utilizando a mesma abordagem feita em **Lee 1983**, **Lou & Zhang 1992** trataram o problema elasto-plástico em um meio composto por dois materiais.

Seguindo a linha mostrada em **Telles 1983**, para o tratamento da plasticidade como força de domínio, **Chen & Nisitani 1997** estudaram o efeito do coeficiente de Poisson neste tipo de análise.

Uma abordagem totalmente diferente das anteriores foi proposta por **Henry 1987**. Nesta, foi proposta uma função particular que satisfaz a equação diferencial dos problemas elasto-plásticos. O conceito de funções complementares e integrais particulares é aplicado, transformando-se as integrais de domínio em integrais de contorno. Desta forma simplifica-se o tratamento destes problemas, uma vez que se dispensa a integração de domínio e, por conseguinte, sua discretização.

Algumas contribuições à formulação de problemas elasto-plásticos foram feitas por **Montans & Borja 2002** que propuseram o uso de uma superfície de encruamento no algoritmo plástico. A formulação tem por base a regra de escoamento de Prager e não difere muito do método consagrado.

A avaliação numérica das integrais envolvidas no método dos elementos de contorno sempre foi um tema de grande atenção. Nos primeiros trabalhos publicados, as integrais singulares eram tratadas analiticamente e as demais integradas numericamente. O uso de funções de forma de grau mais elevado dificultou o tratamento analítico das integrais singulares e técnicas numéricas passaram a ser utilizadas no lugar das expressões analíticas. Desde então a pesquisa de métodos para avaliação numérica de integrais singulares e quase-singulares tem se mostrado um campo bastante produtivo.

Lachat & Watson 1976 propuseram uma técnica para melhorar a acuidade da integração numérica quando o ponto de colocação se encontrasse próximo do contorno. A técnica consiste em dividir-se o elemento a ser integrado em vários elementos menores, ou subelementos. Esta técnica tem sido bastante empregada e produz bons resultados para elementos quase-singulares, mas é ineficaz com elementos singulares. No caso de elementos com singularidade fraca, **Lachat & Watson 1976** utilizaram a técnica de degeneração do Jacobiano. A degeneração do Jacobiano, que consiste em forçar a coincidência de dois nós em um elemento ou célula, produz um Jacobiano singular, garantindo a convergência de integrais com singularidade fraca.

Lee 1983 aplicou a mesma técnica no tratamento das singularidades nas integrais de domínio do problema elasto-plástico. As integrais singulares do contorno foram tratadas com quadraturas logarítmicas e analogias de corpo rígido.

Telles 1987 propôs o uso de uma função de mapeamento cúbica durante a integração do contorno, de modo a produzir um Jacobiano singular, melhorando a acuidade no cálculo de

integrais quase singulares. Esta técnica, embora menos poderosa que a proposta por **Lachat & Watson 1976**, exige pouco esforço computacional e produz resultados com boa acuidade para aplicações práticas.

Foltran & Palermo 1997 retomaram a abordagem analítica da integração dos elementos de contorno, apresentando um conjunto de expressões para o elemento linear no tratamento de problemas da elasticidade bidimensional. Tais expressões demandam pequeno esforço computacional e fornecem resultados extremamente acurados. De posse destas expressões foi possível obter um parâmetro confiável para avaliação de outras técnicas de integração numérica.

Expressões analíticas para a integral singular do elemento quadrático curvo foram apresentadas por **Pina 1997**. Em seu trabalho, **Pina 1997** apresentou um estudo bastante compreensível da técnica utilizada.

Uma implementação recursiva da técnica de **Lachat & Watson 1976** foi apresentada por **Foltran & Palermo 1998**. Esta implementação destaca-se pela sua simplicidade, podendo ser empregada em programas já prontos sem massivas modificações do código. Além disso, na implementação de **Foltran & Palermo 1998** as contribuições de cada subelemento é somada a de outro de mesmo tamanho. Isso reduz apreciavelmente o erro por truncamento do processo, produzindo resultados comparáveis a integração analítica.

De posse dessas técnicas de integração melhoradas, **Foltran 1999** apresentou um estudo comparativo entre as abordagens do problema elasto-plástico propostas por **Lee 1983** e **Henry 1987**. Aplicando a técnica de integração por contorno de células, mostrada em **Chaves 1997**, foi possível proceder as integrais de domínio com velocidade e acuidade. Outrossim, a técnica das integrais por contorno de células dispensa um tratamento mais sofisticado das singularidades de domínio, como as que ocorriam na implementação de **Lee 1983**. O problema de quase-singularidade observado na integração do contorno das células foi tratado com sucesso utilizando-se a técnica de subelementos proposta por **Foltran & Palermo 1998**.

O método dos elementos de contorno também foi bastante aplicado na solução de problemas de flexão de placas. Um dos primeiros trabalhos empregando esta abordagem foi publicado por **Jaswon & Maiti. 1968**. Estes pesquisadores fizeram uso da natureza biarmônica da equação deste problema para resolver placas com diversas condições de contorno.

No final da década de 1970, **Bezine 1978** e **Stern 1979** apresentaram quase simultaneamente a representação integral direta para o problema de flexão de placas. Ambos propõem implementações de elementos de contorno para a equação integral. Enquanto **Bezine**

1978 aplicou elementos constantes com os pontos de colocação sobre seus pontos médios, **Stern 1979** utilizou elementos lineares com os pontos de colocação nos extremos. Na abordagem de **Stern 1979** os nós poderiam ser colocados nos cantos da placa.

Seguindo a linha estabelecida por **Bezine 1978** e **Stern 1979**, **Tottenham 1979** apresentou uma formulação para o estudo de placas e cascas abatidas pelo método dos elementos de contorno. **Tottenham 1979** propôs também o uso de uma solução fundamental ligeiramente diferente da apresentada por **Bezine 1978** e **Stern 1979**. Estudos comparando a performance das soluções fundamentais de **Bezine 1978**, **Stern 1979** e **Tottenham 1979** não mostraram diferença apreciável nos resultados obtidos com uma ou outra [Simões 2001]. No entanto, as expressões obtidas a partir da solução fundamental de **Tottenham 1979** são um pouco mais simples que as anteriores.

Danson 1980 implementou a formulação de **Tottenham 1979** para placas utilizando elementos constantes. **Danson 1980** posicionou os pontos de colocação sobre o ponto médio dos elementos para a montagem das equações referentes à deflexão e à rotação normal. Uma outra equação era montada com o ponto de colocação em cada canto da placa para a determinação das reações de canto incógnitas.

Bezine 1981 estendeu seu trabalho anterior para comportar vinculações e carregamentos no interior do domínio. Mais tarde **Bezine et al. 1985** publicou um estudo da instabilidade de placas devido a carregamento em seu plano.

Seguindo o trabalho de **Danson 1980**, **Paiva 1987** apresentou um estudo de placas com condições de contorno no domínio, além da iteração da placa com outros elementos estruturais como vigas e pilares. Esta abordagem difere das anteriores por utilizar apenas uma equação integral. Dois pontos de colocação distintos são tomados para cada nó, um sobre o contorno e outro fora do domínio, produzindo equações linearmente independentes. Além disso as reações de canto incógnitas são assumidas nulas, dispensando a montagem de uma equação para a determinação de seu valor.

Komatsu & Nagai 1982 pela primeira vez utilizaram o método dos elementos de contorno para analisar peças de paredes finas. Com o objetivo de estudar o fenômeno do shear-lag, vigas de seção retangular foram divididas em três seções. A seção central foi analisada com o método dos segmentos de paredes finas, que utiliza a formulação variacional de **Vlassov 1962**. Os segmentos extremos foram tratados como estados planos de tensão, discretizados com elementos de contorno quadráticos. A técnica das sub-regiões foi utilizada para unir todos os elementos em um único sistema de equações. No entanto a técnica de

Komatsu & Nagai 1982 limitava a geometria da seção a ser analisada, que deveria ser composta por células.

Tanaka 1987 apresentou uma formulação integral para a análise da vibração livre de peças compostas por placas. Um estudo de grandes deflexões foi apresentado no mesmo trabalho. Essa formulação foi implementada por **Tanaka et al. 1988** para o método dos elementos de contorno. Utilizando elementos de contorno e células constantes, foram identificados os três primeiros modos de vibração de uma barra de seção U. O modelo proposto por **Tanaka 1987** não permitiu a consideração de forças externas aplicadas às arestas, limitando seu uso em problemas práticos de engenharia.

Combinando o estado plano de tensão com a flexão de placa, **Palermo 1989** produziu uma ferramenta capaz de analisar peças de paredes finas como uma associação de problemas planos em um espaço tridimensional. Esta abordagem, que utilizou a formulação de placas proposta por **Paiva 1987** e o estado plano de tensão estudado por **Rizzo 1967**, resulta em um sistema de coordenadas para o deslocamento com quatro parâmetros. Três desses se referem ao deslocamento nas direções dos eixos coordenados e o quarto, à flexão transversal da parede.

Mendonça 2002 retomou o trabalho de **Palermo 1989** introduzindo um sistema de coordenadas de seis parâmetros, três deslocamentos e três rotações, ainda fazendo uso da teoria clássica de placas para modelar a flexão das paredes da peça. Além disso **Mendonça 2002** estudou problemas elasto-plásticos formados por sub-regiões coplanares.

Houve, na segunda metade do século XX, várias tentativas de se estudar o comportamento dinâmico de meios elásticos por meio de computadores. Um desses trabalhos, de grande destaque, foi publicado por **Houbolt 1950**. Neste trabalho o movimento da asa de uma aeronave é analisado por meio de um integrador de passo múltiplo. Este método pressupõe que são conhecidas as posições dos pontos em análise em dois passos de tempos anteriores, além do atual, para assim determinar as posições no instante seguinte.

Tentando simplificar a análise dos problemas dinâmicos, **Newmark 1959** propôs um método de integração de passo único. Neste método, conhecidos os deslocamentos, velocidades e acelerações de um ponto em um dado instante, é possível determinar estas grandezas para um instante seguinte. Embora mais simples de ser implementado, o método de **Newmark 1959** apresenta, em alguns casos, instabilidade nos resultados.

Um integrador de passo único e que produz resultados estáveis foi proposto por **Wilson et al 1973**. Este novo integrador conduz a resultados tão suaves quanto aqueles obtidos com o integrador de **Houbolt 1950**.

Uma característica bastante peculiar do método dos elementos de contorno é a possibilidade de se analisar domínios ilimitados a partir da discretização de seu contorno ou de apenas parte dele. Isto torna os elementos de contorno particularmente interessantes para o estudo de problemas que envolvem interação com o solo ou acústica de ambientes abertos.

O primeiro estudo utilizando o método dos elementos de contorno em problemas de vibração foi proposto por Friedman & Shaw 1962 [**Coda & Venturini 1995b**].

Cruse & Rizzo 1968 e **Cruse 1968** propuseram os primeiros estudo de propagação de ondas transientes em meios ilimitados pelo método dos elementos de contorno. Nestes trabalhos a solução do problema era obtida no espaço transformado de Laplace e uma transformada numérica inversa foi empregada para obtenção de uma resposta no domínio do tempo. Esta abordagem foi seguida por vários autores na análise de problemas dinâmicos.

Na década de 1980 **Mansur & Brebbia 1982** propuseram uma solução fundamental no domínio do tempo, resolvendo o problema transiente por meio de passos de tempo. Esta formulação foi largamente empregada no estudo de problemas transientes pelo método dos elementos de contorno desde então.

Katsikadelis et al 1988 apresentou um método para solução de problemas de flexão de placas com apoios internos, em regime estático e dinâmico, por meio da integração direta das forças de inércia. Esta análise foi feita num espaço transformado e técnicas numéricas foram empregadas para se obter a resposta no domínio do tempo.

Tanaka & Matsumoto 1989 compararam o desempenho dos integradores de **Newmark 1959**, **Wilson et al 1973** e diferenças finitas em problemas de propagação de ondas em barras utilizando o método dos elementos de contorno. Concluiu-se neste trabalho que o integrador de **Wilson et al 1973** apresenta resultados melhores, para este tipo de problema, que os outros integradores analisados.

Seguindo a linha proposta por **Mansur & Brebbia 1982**, **Coda & Venturini 1995** apresentaram um estudo da interação da estrutura com sua fundação. O solo foi tratado utilizando-se a formulação proposta por **Mansur & Brebbia 1982** e a estrutura foi tratada com elementos finitos.

Mais tarde, **Coda & Venturini 2000** apresentaram um estudo de problemas transientes não lineares com integração direta das forças de inércia. Neste trabalho foram testados os integradores de **Houbolt 1950** e **Newmark 1959**.

Araujo et al 1999 apresentou um estudo da dinâmica transiente em meios tridimensionais no domínio do tempo utilizando o integrador de **Wilson et al 1973**. O uso deste integrador foi viabilizado pela simplificação na forma de se obter as forças de contorno

no instante em estudo. Em sua forma tradicional o integrador, quando aplicado a elementos de contorno, fornece o valor das forças num instante a frente do atual em 40% do passo de tempo adotado.

Sanchez 2002 aplicou a abordagem de **Palermo 1989** ao modelo proposto por **Wright 1990** na análise estática e dinâmica estacionária de lajes de concreto com forma de aço incorporada (steel deck). A solução fundamental da dinâmica foi aplicada utilizando-se elementos de contorno lineares com pontos de colocação sobre o contorno e fora do domínio. Com o propósito de mostrar a validade da formulação, foram resolvidos exemplos estáticos e dinâmicos estacionários. Na análise dinâmica estacionária são determinadas as Funções de Resposta em Freqüência. Das informações contidas nas FRF, foram obtidos as freqüências naturais e os modos próprios de vibração correspondentes.

2.2-Objetivos

A análise de peças de seção delgada está relacionada ao projeto de barras e estruturas, visando proporcionar economia de material. Podem ser relacionados neste conjunto perfis de aço, sejam laminados, soldados ou dobrados a frio, núcleos de concreto dos edifícios altos e até asas de aviões.

Devido ao campo de aplicação bastante amplo, a análise deste tipo de elemento estrutural é feita de várias maneiras. Pode-se encontrar desde abordagens simplificadas, bastante semelhantes à Resistência dos Materiais, até modelos elaborados que vislumbram materiais visco-elasto-plásticos.

A barra de seção delgada, seja aberta ou fechada, não é tratada adequadamente pela teoria clássica se submetida a alguns tipos de carregamentos, particularmente à torção não uniforme. Dentre os tratamentos dados ao problema destaca-se a teoria das superfícies setoriais de **Vlassov 1962**, cujo principal aspecto é a consideração do equilíbrio tridimensional da barra.

Vlassov 1962 obteve uma equação para a deformação longitudinal de barras longas de seção delgada aberta, semelhante àquela da teoria elementar de flexão. Nesta equação inclui-se um quarto termo que leva em conta o efeito do empenamento da seção, ou seja, os deslocamentos longitudinais que tornam a seção transversal não plana.

Para barras com seção fechada, a análise de **Vlassov 1962** inclui a influência das tensões de cisalhamento e dos momentos de flexão da parede no plano da seção transversal. **Vlassov 1962** afirmou que a restrição ao empenamento é mais importante que o efeito de

flexão transversal das paredes. Este último aspecto tornou trabalhosa a análise de barras de seção delgada fechada e métodos numéricos têm sido empregados largamente em sua solução.

Analisando-se os trabalhos concluídos na última década, identifica-se que modelos com base no Método dos Elementos Finitos (MEF) foram largamente empregados. Também houve tentativas de obter-se formulações fechadas para alguns casos particulares, como no trabalho de **Chang & Hijazi 1989**, mas estes são tratamentos muito restritos e custosos.

O trabalho de **Palermo 1989** foi um dos que aplicou a abordagem numérica ao problema, assumindo a barra como uma estrutura composta por lâminas. Para tal o método dos elementos de contorno foi empregado, fazendo uso de elementos isoparamétricos lineares. Os efeitos de extensão e de flexão foram considerados em cada lâmina através do estado plano de tensão generalizado e da teoria de placas finas, respectivamente. Isso permitiu o cálculo no regime elástico, com pequenas deformações, de peças de seção delgada de seção aberta ou fechada. . Adicionalmente, para que a seção transversal da peça fosse mantida rígida em seu plano e/ou permanecesse plana na deformação (sem empenamento), foram incluídos diafragmas rígidos ao longo do comprimento. Assim, à medida que se aplicasse um ou outro tipo de diafragma, o comportamento da associação aproximava-se daquele previsto pela resistência dos materiais ou do devido a **Vlassov 1962**. Deste modo, o uso dos diafragmas mostrou a conectividade entre os modelos matemáticos das folhas poliédricas e a teoria de flexo-torção de barras longas. O efeito de “shear-lag” (ou, a não uniformidade da tensão normal em uma mesa unicamente tracionada ou comprimida) pode ser identificado. Confirmou-se também a importância dos momentos de flexão transversal em barras de seção fechada para diversas condições de vinculação e carregamento.

Em **Foltran 1999** apresenta-se um estudo do problema elasto-plástico bidimensional por meio do método dos elementos de contorno. O efeito da plasticidade foi considerado por meio da integração, via malha de células, das deformações plásticas no domínio, como apresentado em **Lee 1983**. O tratamento numérico incluiu o desenvolvimento de elementos isoparamétricos lineares de contorno e de domínio, além do isoparamétrico quadrático somente no contorno. As singularidades e quase singularidades de contorno foram tratadas com o uso de expressões analíticas. As integrais de domínio foram transformadas em integrais de contorno de células, dispensando tratamentos especiais para as integrais singulares e hiper-singulares, além de possibilitar o uso de quadratura gaussiana convencional. Os resultados dessa proposta foram apresentados em **Foltran & Palermo 1997** e a demonstração de sua eficiência em problemas elásticos lineares mostrada em **Foltran & Palermo 1998**. O tratamento de problemas planos em regime elasto-plástico foi apresentado em **Foltran &**

Palermo 1999, onde as expressões analíticas foram combinadas com o tratamento das integrais de domínio nas células por integrais de contorno equivalente. Esta formulação mostrou-se estável e eficiente tanto na diminuição do tempo de processamento quanto na acuidade dos resultados. Apesar do uso de elementos lineares na discretização dos problemas estudados, não houve perda significativa de acuidade nos resultados, quando comparados a outros disponíveis na literatura.

No tocante ao comportamento dinâmico das peças de paredes finas, pode-se realizar dois tipos de análise. No caso de regime estacionário (domínio da frequência) as grandezas dinâmicas mais importantes para caracterizar o comportamento estrutural são as frequências naturais e os modos próprios. O segundo tipo de análise descreve comportamentos transientes e devem ser tratados diretamente no domínio do tempo.

A análise dinâmica transiente com o MEC pode ser realizada basicamente através de três metodologias. A primeira consiste na formulação diretamente no domínio do tempo como em **Mansur & Brebbia 1982**. Uma segunda possibilidade de se tratar problemas transientes com o MEC é através da utilização de transformações integrais, seja a transformada de Laplace, seja a transformada de Fourier ou mesmo de Hankel, como feito por **Cruse & Rizzo 1968** e **Cruse 1968**. No caso de haver a integração direta no tempo dentro do MEC, a Equação Integral de Contorno (EIC) é sintetizada utilizando-se como estado auxiliar uma Solução Fundamental (SF) para problemas dinâmicos transientes. No caso dos procedimentos de análise transiente com base nas transformações de integrais, a EIC do MEC é sintetizada a partir da solução fundamental da dinâmica estacionária, lê-se solução fundamental dinâmica no domínio da frequência.

Por outro lado, existe outra possibilidade de tratamento de problemas elasto-dinâmicos transientes no MEC. Nesta versão, a EIC é sintetizada tendo por base a Solução Fundamental do problema estático. A consequência é que os termos correspondentes às forças de inércia ficam expressas em termos de uma integral de domínio. A solução do problema dinâmico agora passa pela avaliação da integral de domínio contendo as forças de inércia (termos contendo aceleração). O tratamento da integral de domínio pode ser feito através da divisão do domínio em células e efetuando-se a integração em cada célula. Nesta estratégia, outra possibilidade é a tentativa de se converter a integral de domínio em uma série de integrais de contorno. Esta estratégia é utilizada nas versões conhecidas como Método da Reciprocidade Dual e o Método da Múltipla Reciprocidade.

No presente trabalho pretende-se criar ferramentas para possibilitar a análise dinâmica transiente de vigas de paredes finas solicitadas além do limite elástico. As peças em estudo,

inicialmente em repouso, serão submetidas a um carregamento variável no tempo. Nesta situação a amplitude das tensões na peça poderá crescer a cada ciclo, podendo ultrapassar o limite elástico. Com isso tem-se a plastificação de certas regiões.

Supondo que em um determinado ciclo ocorra a plastificação da peça, uma vez atingida sua amplitude máxima, há o descarregamento da mesma. A descarga ocorre em regime elástico mas, à medida que o carregamento é invertido, a plastificação poderá ocorrer novamente no sentido inverso. Uma vez atingido o limite elástico no carregamento inverso, ter-se-á novamente o regime elasto-plástico. As tensões e deformações residuais, oriundas do ciclo anterior, afetarão o comportamento da peça neste e demais ciclos, devendo ser acumuladas ao longo do histórico de carga e descarga.

Ademais, poder-se-á considerar que a peça já conta com uma distribuição de tensões residuais antes do início do carregamento. Tais tensões podem ser atribuídas ao processo de fabricação da peça.

Para tal análise, retoma-se a modelagem de vigas de paredes finas, proposta por **Palermo 1989**. Esta abordagem foi escolhida devido à sua funcionalidade e simplicidade.

O tratamento da não linearidade física é incluído no modelo empregando-se a abordagem de problemas elasto-plásticos apresentada em **Foltran 1999** que se mostrou adequada para a análise de problemas de estado plano de tensão e deformação.

A dinâmica transiente será incluída na análise por meio da integração no domínio das forças de inércia. Esta técnica foi empregada com sucesso por **Katsikadelis et al 1988** no estudo do comportamento dinâmico de placas. Um integrador, dentre os sugeridos por **Tanaka & Matsumoto 1989** será usado para obter uma solução no domínio do tempo.

3-Estados Planos de Tensão e deformação

3.1-Introdução

Para melhor compreensão do que será exposto mais adiante, apresenta-se um resumo das expressões utilizadas na teoria da elasticidade. Todos os índices neste capítulo variam de 1 até 3, a menos que se informe o contrário.

3.2-Hipóteses básicas

No decorrer deste texto supõem-se que as seguintes hipóteses sejam respeitadas:

- 1.É válida a geometria de pequenos deslocamentos;
- 2.O estado deformado do corpo pode ser escrito em função do estado indeformado, ou seja, aproximação Lagrangiana; e,
- 3.O material que constitui o corpo é elástico linear, homogêneo e isotrópico.

3.3-Equação de equilíbrio

Seja um corpo finito, em equilíbrio estático, sujeito a um sistema de forças aplicadas em sua superfície e em sua massa. Cada ponto deste corpo estará em equilíbrio, sujeito a um conjunto de tensões internas e forças de massa, conforme mostrado na Figura 3.1.

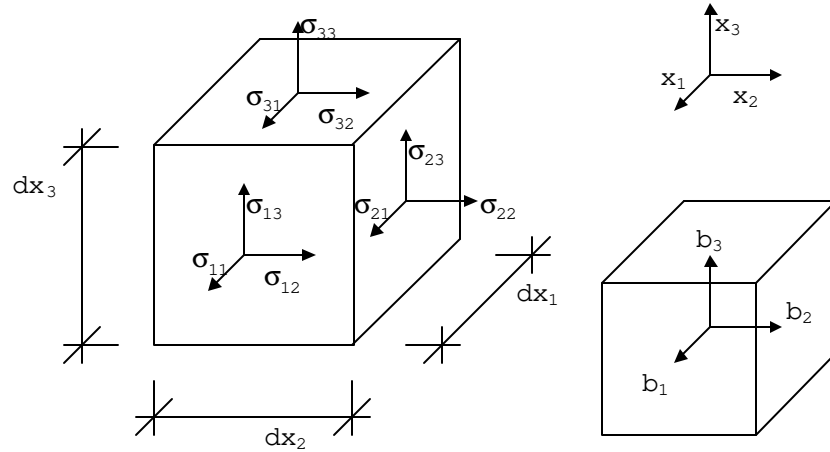


Figura 3.1 - Elemento infinitesimal.

As equações que regem o equilíbrio entre as tensões σ_{ij} e as forças de massa b_i podem ser escritas em notação indicial como [Saada 1993]:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.1)$$

Em um ponto na superfície do corpo, sujeito a um estado de tensões dado pelo tensor σ_{ij} , as forças de superfície aplicadas neste ponto relacionam-se com as tensões segundo a expressão:

$$p_i = \sigma_{ij} \eta_j \quad (3.2)$$

O vetor η é normal à superfície, conforme ilustrado na Figura 3.2.

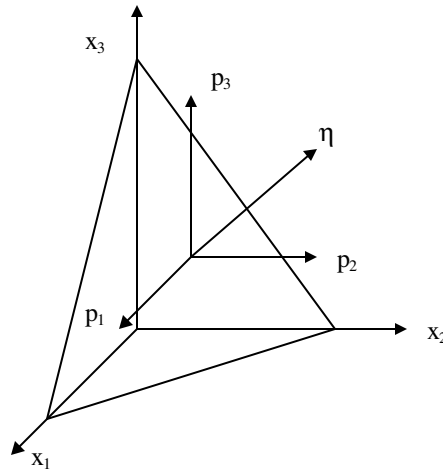


Figura 3.2 - Forças de superfície.

3.4-Relação deformação - deslocamento

Um corpo submetido a um sistema de forças terá sua conformação inicial alterada. Cada ponto deste corpo irá se deslocar caracterizando uma transformação de um estado inicial, ou indeformado, para um estado final, ou deformado.

Se para qualquer par de pontos, pertencentes ao corpo, a posição relativa entre eles não se altera após a transformação, diz-se que o corpo sofreu um movimento de corpo rígido. Esta transformação produz apenas translações e rotações no corpo, sem alterar sua forma.

Caso haja alteração da posição relativa entre os pontos após a transformação, diz-se que o corpo sofreu deformação, tendo sua forma original modificada.

Sejam dois pontos **M** e **N**, de coordenadas x_i e x_i+dx_i , respectivamente, infinitamente próximos, conforme ilustrado na Figura 3.3.

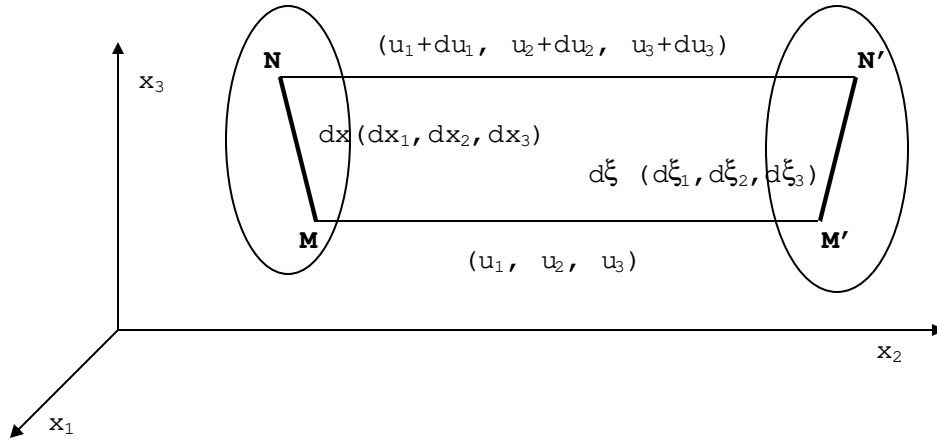


Figura 3.3 - Transformação do corpo.

Os pontos **M** e **N** são levados aos pontos **M'** e **N'**, de coordenadas ξ_i e $\xi_i+d\xi_i$, respectivamente. Então as coordenadas de **N'** podem ser escritas como:

$$N' \equiv \xi_i + d\xi_i \text{ ou } N' \equiv x_i + dx_i + u_i + du_i \quad (3.3)$$

Igualando-se as duas formas de se escrever as coordenadas de **N'** tem-se:

$$\xi_i + d\xi_i = x_i + dx_i + u_i + du_i \quad (3.4)$$

Expandindo-se os deslocamentos u_i em série de Taylor, procede-se a diferença dos quadrados entre os comprimentos final e inicial e relaciona-se o comprimento final com o inicial por um acréscimo linear. Este acréscimo linear é chamado de deformação que, por ser

pequeno, pode ser definido como sendo um tensor de segunda ordem, dado pela expressão [Saada 1993]:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j}) \quad (3.5)$$

Pode-se assumir ainda que a rotação para todos elementos que estão em torno do ponto **M** será a mesma. Além disso, se este ângulo de rotação for suficientemente pequeno, pode-se desprezar a dilatação cilíndrica. Isso implica que o vetor de deformação para um elemento em **M** será perpendicular a este, tanto no estado deformado quanto no indeformado. Se também for assumido que os quadrados das derivadas $u_{i,j}$ possam ser desprezados, então a relação (3.5) pode ser linearizada resumindo-se a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.6)$$

3.5-Relações Constitutivas

As relações constitutivas expressam a interdependência entre tensões e deformações, necessárias aos estudos dos problemas ligados a deformação de corpos.

Uma hipótese bastante usada para os problemas de engenharia, na dedução das relações constitutivas, é que as deformações são proporcionais ao carregamento aplicado. Isso significa que um aumento ou diminuição de carregamento acarretará num aumento ou diminuição da deformação. Cabe lembrar que esta hipótese só é válida se as propriedades do material que constitui o corpo em estudo não se alterarem com a variação das tensões. Esta hipótese pode ser expressa matematicamente como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.7)$$

O tensor de quarta ordem, C_{ijkl} , é composto por 81 constantes elásticas. Pode-se simplificar a expressão (3.7) considerando-se que os tensores de segunda ordem envolvidos são simétricos. Com isso passa-se a ter 36 constantes independentes. Se for considerada a existência de uma função de densidade de energia, pode-se mostrar que o tensor C_{ijkl} é simétrico em relação a cada par de índices, restando 21 constantes independentes. Como o material é suposto isotrópico, ou seja, suas propriedades independem da direção em que são medidas, estas constantes podem ser resumidas a apenas duas. A equação (3.7) pode agora ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (3.8)$$

As constantes de Lamé, μ e λ , podem ser escritas em função do coeficiente de Poisson ν e do módulo de Young E segundo as fórmulas apresentadas na Tabela 3.1. Na mesma Tabela são apresentadas várias relações entre as constantes elásticas nas suas combinações mais comuns.

Tabela 3.1 - Relações entre as constantes elásticas.

Constante	Em Função de			
	λ e μ	E e ν	E e μ	μ e ν
λ	λ	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$
μ	μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ	μ
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	E	E	$2\mu(1+\nu)$
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	ν	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	ν

A constante μ é chamada de módulo de elasticidade transversal e também notada como G [Saada 1993]. No decorrer deste trabalho manter-se-á a notação μ .

No tratamento de alguns problemas, é conveniente expressar as deformações de um ponto a partir das tensões que atuam neste. Para este fim, arranja-se adequadamente a expressão (3.8) para isolar os termos de deformação, obtendo-se:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \frac{\lambda\delta_{ij}}{2\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{nn} \quad (3.9)$$

3.6-Equações de Navier

Uma forma prática de se escrever o equilíbrio de um corpo é fazê-lo em termos de seus deslocamentos. As equações que expressam este equilíbrio, deduzidas a seguir, são conhecidas como equações de Navier. Derivando-se as relações (3.6) e (3.8) obtém-se as expressões:

$$\sigma_{ik,k} = \lambda\epsilon_{ll,i} + 2\mu\epsilon_{ik,k} \quad (3.10)$$

$$\epsilon_{ik,l} = \frac{1}{2}(u_{i,kl} + u_{k,il}) \quad (3.11)$$

Substituindo-se o valor da derivada das deformações (3.11) na expressão da derivada das tensões (3.10), chega-se a:

$$\sigma_{ik,k} = \lambda u_{l,li} + \mu(u_{i,kk} + u_{k,ik}) \quad (3.12)$$

Substituindo-se o valor da derivada das tensões, dadas por (3.12), nas equações de equilíbrio (3.1), chega-se a:

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} + b_i = 0 \quad (3.13)$$

Arranjando-se os índices e usando-se as relações da Tabela 3.1, chega-se às equações de Navier:

$$u_{i,jj} + \frac{u_{j,ji}}{1-2\nu} + \frac{b_i}{\mu} = 0 \quad (3.14)$$

3.7-Estados planos de tensão e deformação

Se um corpo é sujeito a um dado estado de deformação elástico, tal que uma das componentes de deslocamento seja dependente apenas da coordenada na sua direção, por exemplo, a coordenada $\mathbf{x}_3$, e as outras componentes sejam independentes desta direção, tem-se um problema de elasticidade plana. Matematicamente isso pode ser exemplificado por:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad u_3 = u_3(x_3)$$

No exemplo citado é fácil notar que ϵ_{i3} e σ_{i3} serão funções apenas de $\mathbf{x}_3$.

Se a função deslocamento $\mathbf{u}_3(\mathbf{x}_3)$ assume um valor constante, tem-se um **estado plano de deformação**. O estado plano de deformação é caracterizado por ter ϵ_{i3} nulo, ou seja, não há deformação na direção $\mathbf{x}_3$.

As relações constitutivas para este caso têm a mesma expressão de (3.8), no entanto os índices variam apenas até 2. As tensões tangenciais referentes à direção de $\mathbf{x}_3$ serão nulas e a tensão normal σ_{33} tem seu valor expresso a seguir:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (i,j=1,2) \quad (3.15)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (3.16)$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (3.17)$$

Por outro lado, se ocorrer das tensões tangenciais σ_{13} e σ_{23} , e da tensão normal σ_{33} serem nulas, ter-se-á um **estado plano de tensões**. As relações constitutivas apresentadas até agora não servirão para este caso, devendo-se tomar a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \delta_{ij} \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \epsilon_{kk} \quad (i,j,k=1,2) \quad (3.18)$$

Analogamente ao estado plano de deformação, tem-se que ϵ_{13} se anula, exceto por ϵ_{33} que tem seu valor calculado a seguir:

$$\epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (3.19)$$

Note-se que as relações para o estado plano de tensão podem ser obtidas do estado plano de deformação fazendo-se:

$$\lambda' = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \quad (3.20)$$

ou

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (3.21)$$

3.8-Estado plano de tensão generalizado

Seja um corpo com a dimensão na direção $\mathbf{x}_3$ muito menor que aquelas nas outras direções, como ilustrado na Figura 3.4. Se a tensão σ_{33} for desprezível ao longo da espessura desta chapa e as tensões tangenciais também puderem ser desprezadas nas faces perpendiculares a $\mathbf{x}_3$, então os valores das deformações, deslocamentos e tensões ao longo da espessura podem ser tomados como iguais aos seus valores médios. Ou seja, a seguinte relação será válida:

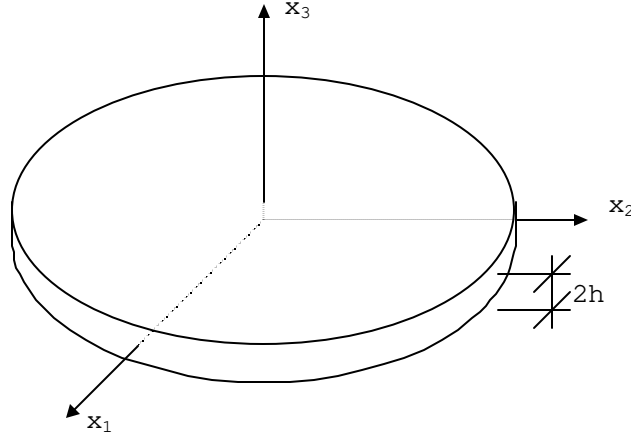


Figura 3.4 - Corpo com pequena espessura.

$$u_i(x_1, x_2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_i(x_1, x_2, x_3) dx_3 \quad (3.22)$$

A aproximação será tanto melhor quanto mais fina for a chapa. Este estado é chamado estado plano de tensões generalizado. Todas as equações apresentadas para o estado plano de tensão são válidas. As soluções das equações de equilíbrio têm forma análoga às do estado plano de deformação, com a alteração de λ ou ν mostrada em (3.20) e (3.21). Os deslocamentos, neste caso, devem ser entendidos como sendo valores médios destes ao longo da espessura.

3.9-Solução fundamental de chapas

A solução fundamental de chapas consiste na expressão da solução bidimensional do problema de Kelvin. Esta expressão fornece o valor dos deslocamentos de um corpo bidimensional infinito, sujeito a uma força unitária aplicada na origem do sistema de coordenadas.

Esta expressão é definida como a solução singular das equações de Navier, com uma não-homogeneidade dada pela função delta de Dirac. A função delta de Dirac é definida como:

$$\Delta(X, P) = \begin{cases} 0 & \text{Se } X \neq P \\ \infty & \text{Se } X = P \end{cases} \quad (3.23)$$

Definida desta forma, a função delta de Dirac apresenta as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(X, P) dx = 1 \quad (3.24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X) \cdot \Delta(X, P) dx = f(P) \quad (3.25)$$

A solução do problema de Kelvin é obtida das equações de Navier, repetidas a seguir, com os índices limitados até 2, quando um carregamento unitário, representado pelo vetor unitário $\bar{e}$, é aplicado na origem [Brebbia & Dominguez 1992], assim:

$$u_{i,jj} + \frac{u_{j,ji}}{1-2\nu} + \frac{b_i}{\mu} = 0$$

$$b_i = \Delta(X, O) \bar{e}_i \quad (i=1,2) \quad (3.26)$$

Uma maneira de se encontrar a solução fundamental é representar os deslocamentos a partir do vetor de Galerkin [Brebbia & Dominguez 1992].

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,jm} \quad (j,m=1,2) \quad (3.27)$$

Substituindo-se (3.26) e (3.27) em (3.14) obtém-se:

$$G_{i,mmjj} + \frac{\Delta(X, P) \bar{e}_i}{\mu} = 0 \quad (i,j,m=1,2) \quad (3.28)$$

ou

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_i) + \frac{\Delta(X, P) \bar{e}_i}{\mu} = 0 \quad (i=1,2) \quad (3.29)$$

Sendo ∇^2 o operador de Laplace. A equação (3.29) pode ser escrita para um problema de estado plano de deformação como [Brebbia & Dominguez 1992]:

$$\nabla^2 (F_i) + \frac{\Delta(X, P) \bar{e}_i}{\mu} = 0 \quad (i=1,2) \quad (3.30)$$

sendo:

$$F_i = \nabla^2 G_i \quad (i=1,2) \quad (3.31)$$

A equação (3.30) tem por solução:

$$F_i = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r) \bar{e}_i \quad (i=1,2) \quad (3.32)$$

sendo r a distância entre o ponto P e o ponto X . Logo:

$$G = -\frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(r) \quad (3.33)$$

Tomando o carregamento em cada direção de forma independente, pode-se escrever a componente do vetor de Galerkin em uma direção k , devido a uma carga na direção i como sendo [Brebbia & Dominguez 1992]:

$$G_{ik} = G \delta_{ik} \quad (i,k=1,2) \quad (3.34)$$

Por conseguinte, os deslocamentos dos pontos do domínio serão escritos como:

$$u_k^* = u_{ik}^* \bar{e}_i \quad (i,k=1,2) \quad (3.35)$$

De acordo com (3.27), os deslocamentos serão escritos como:

$$u_{ik}^* = G_{ik,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,km} \quad (i,k=1,2) \quad (3.36)$$

Substituindo (3.34) e (3.35) em (3.36) chega-se a:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ik} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad (i,k=1,2) \quad (3.37)$$

A solução representada em (3.37) pode ser usada em problemas de estado plano de tensão modificando-se apenas o coeficiente de Poisson segundo (3.21). Há uma dedução semelhante, apresentada em [Saada 1993], para o caso tridimensional, fazendo uso da Função de Deformação de Love em lugar do delta de Dirac.

Usando-se a expressão (3.2), a deformação linearizada (3.6) e a relação constitutiva (3.8), pode-se obter as forças de contato em uma superfície interna deste corpo infinito, a partir de (3.37) como sendo:

$$p_{ik}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k} \right] + (1-2\nu) (\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \right\} \quad (i,j=1,2) \quad (3.38)$$

sendo:

$$p_k^* = p_{ik}^* \bar{e}_i \quad (i,j=1,2) \quad (3.39)$$

4-Flexão de Placas Pela Teoria Clássica

4.1-Introdução

Neste capítulo apresenta-se um resumo da teoria clássica de flexão de placas finas segundo as hipóteses de Kirchhoff **Ugural 1981**. Essas hipóteses são:

1. A deflexão da superfície média da placa é pequena se comparada à espessura desta. Portanto, a derivada desta deflexão também é pequena e seu quadrado pode ser desprezado se comparado à unidade.
2. A superfície média da placa permanece indeformada após a flexão.
3. Seções inicialmente planas e perpendiculares à superfície média permanecem, após a flexão, planas e normais a esta. Isto significa que as deformações de cisalhamento ϵ_{13} e ϵ_{23} são desprezadas, o que constitui uma generalização da hipótese de vigas longas [**Palermo 1989**]. Portanto a deflexão da placa será devida apenas às deformações de flexão. Disso pode-se deduzir que a deformação ϵ_{33} também pode ser negligenciada.
4. A tensão normal ao plano da placa, σ_{33} , é pequena em relação às demais tensões envolvidas e pode ser desprezada. Portanto, essa teoria não é adequada para o tratamento de pontos próximos a uma carga concentrada.

Mais adiante é apresentada a formulação do método dos elementos de contorno para o problema de flexão de placas finas. Todos os índices neste capítulo variam de um até dois, exceto quando informado o contrário.

4.2-Equações constitutivas de placas

Algumas expressões da teoria da elasticidade, já apresentadas, e que serão necessárias neste capítulo são:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.1)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (4.2)$$

Na Figura 4.1 é mostrado um elemento de placa submetido a um carregamento transversal g_3 . Segundo as hipóteses de Kirchhoff, pode-se afirmar que:

$$\varepsilon_{3i} = 0 \quad (i=1,2,3) \quad (4.3)$$

Substituindo-se o valor de (4.3) na expressão das deformações linearizadas (4.1), e integrando-se esta, obtém-se:

$$u_3 = u_3(x, y) \quad (4.4)$$

Isso implica que a deflexão da placa, u_3 , não varia ao longo da espessura. Da mesma maneira, integrando-se as expressões para ε_{31} e ε_{32} , chega-se a:

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_0(x, y) \quad (4.5)$$

$$u_2 = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + v_0(x, y) \quad (4.6)$$

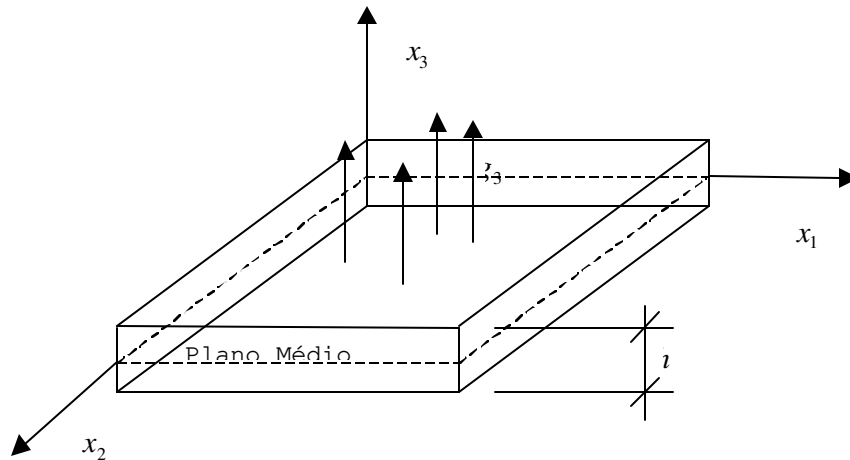


Figura 4.1 – Elemento de placa sujeito a carregamento.

Os valores de $u_0(x, y)$ e $v_0(x, y)$ representam os deslocamentos do plano médio da placa nas direções x_1 e x_2 respectivamente. Por hipótese esses deslocamentos são nulos, logo:

$$u_1 = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad (4.7)$$

$$u_2 = -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (4.8)$$

Substituindo-se o valor de (4.4), (4.7) e (4.8) nas expressões das deformações linearizadas (4.1), obtêm-se as relações entre a deflexão e as deformações como sendo:

$$\epsilon_{11} = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \quad (4.9)$$

$$\epsilon_{22} = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \quad (4.10)$$

$$\epsilon_{12} = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.11)$$

Substituindo-se o valor das deformações (4.9) (4.10) (4.11) na expressão das relações constitutivas (4.2) e substituindo-se adequadamente as constantes elásticas, obtém-se:

$$\sigma_{11} = -\frac{E \cdot x_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.12)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{E \cdot x_3}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) \quad (4.13)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{E \cdot x_3}{1+\nu} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.14)$$

Das expressões (4.12) até (4.14) pode-se observar que a tensão varia linearmente ao longo da espessura e se anula no plano médio. Definem-se momentos fletores, M_{11} e M_{22} , e momentos volventes, M_{12} e M_{21} , por unidade de comprimento, como sendo:

$$M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad (i,j=1,2) \quad (4.15)$$

Analogamente, pode-se definir o esforço cortante por unidade de comprimento, Q_i , como sendo:

$$Q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{i3} dx_3 \quad (i=1,2) \quad (4.16)$$

Esses esforços atuantes têm seu sentido positivo dado pela Figura 4.2.

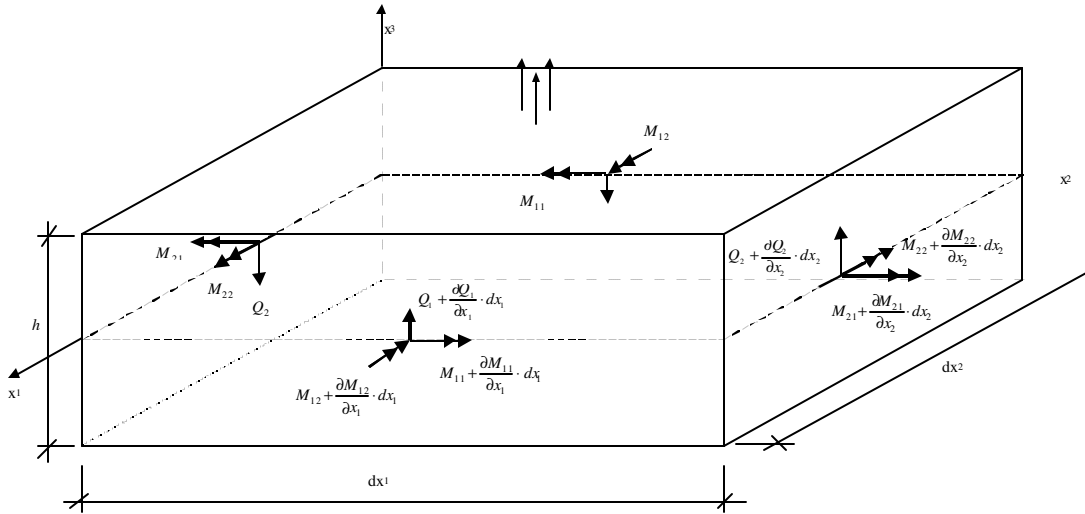


Figura 4.2 – Sentido positivo dos esforços atuantes

Substituindo-se o valor das tensões (4.12), (4.13) e (4.14) na expressão (4.15) e efetuando-se a integração, obtêm-se os valores dos momentos fletores e volventes, dados por:

$$M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) \quad (4.17)$$

$$M_{22} = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \right) \quad (4.18)$$

$$M_{12} = -D \cdot (1-\nu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.19)$$

$$M_{ij} = -D \left[(1-\nu) u_{3,ij} + \delta_{ij} u_{3,mm} \right] \quad (i,j=1,2) \quad (4.20)$$

Da expressão (4.20), pode-se perceber que o tensor dos momentos é simétrico, ou seja, $M_{12} = M_{21}$. A rigidez à flexão da placa, D , é dada por:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.21)$$

4.3-Equações diferenciais de placas finas

Montando-se a equação de equilíbrio, na direção x_3 , dos esforços que atuam sobre um elemento de placa, ilustrado na Figura 4.2, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + g_3 = 0 \quad (4.22)$$

Pode-se, também, equacionar o equilíbrio dos momentos em relação às faces, obtendo-se:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} - Q_2 = 0 \quad (4.24)$$

Ou ainda:

$$Q_i = M_{ki,k} \quad (i,k=1,2) \quad (4.25)$$

Isolando-se o valor dos esforços cortantes em (4.25), substituindo-os na equação (4.22) e levando em conta a simetria do tensor dos momentos, chega-se à equação diferencial de placas em função dos momentos:

$$\frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} = -g_3 \quad (4.26)$$

Substituindo-se o valores dos momentos de (4.20) na equação (4.26), obtém-se a equação diferencial de placas finas em função da deflexão u_3 , dada por:

$$\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u_3}{\partial x_2^4} = \frac{g_3}{D} \quad (4.27)$$

As expressões para os esforços de cisalhamento podem ser escritas substituindo-se os valores dos momentos, obtidos de (4.20), nas equações (4.25). Com isso chega-se a:

$$Q_i = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) \quad (i=1,2) \quad (4.28)$$

As expressões (4.27) e (4.28) podem ser escritas de forma mais compacta em notação de operadores diferenciais, assumindo, respectivamente, a forma:

$$D \cdot \nabla^2 (\nabla^2 u_3) = g_3 \quad (4.29)$$

$$Q_i = D \bar{\nabla} (\nabla^2 u_3) \cdot \bar{e}_i \quad (i=1,2) \quad (4.30)$$

Sendo que $\bar{e}_i$ representa o vetor unitário na direção i do sistema de coordenadas adotado. O símbolo ∇^2 representa o operador de Laplace, dado por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (4.31)$$

Uma conexão bastante interessante pode ser feita entre a teoria de placas finas e a teoria de vigas. Para tal, equaciona-se o primeiro invariante de momentos, dado por:

$$M = \frac{M_{jj}}{(1+\nu)} \quad (j=1,2) \quad (4.32)$$

Substituindo-se os valores dos momentos fletores de (4.20) na expressão (4.32) obtêm-se:

$$M = -D \cdot \nabla^2 u_3 \quad (4.33)$$

Com (4.33) e (4.30), pode-se escrever que:

$$Q_i = \frac{\partial M}{\partial x_i} \quad (i=1,2) \quad (4.34)$$

Substituindo-se o valor de $\nabla^2 u_3$, obtido de (4.33) em (4.29) e expandindo-se o operador de Laplace, tanto de (4.29) quanto de (4.33), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} = -g_3 \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = -\frac{M}{D} \quad (4.36)$$

Assim, igualando-se a zero, em (4.32), o coeficiente de Poisson e tomando-se apenas uma dimensão, as equações (4.34) a (4.36) transformam-se naquelas da teoria de vigas. Essa dedução foi mostrada pela primeira vez por Marcus **Ugural 1981**]. Algumas vezes o uso das equações (4.35) e (4.36) na forma de um sistema de equações diferenciais parciais acopladas é preferível ao uso de (4.29) [**Ugural 1981**].

4.4-Condições de contorno

Uma solução da equação diferencial (4.27) ou da (4.29) apenas representa o comportamento de uma placa caso sejam respeitadas algumas condições de contorno específicas.

Considere-se uma placa retangular de lados a e b , paralelos aos eixos x_1 e x_2 respectivamente, como ilustrado na Figura 4.3.

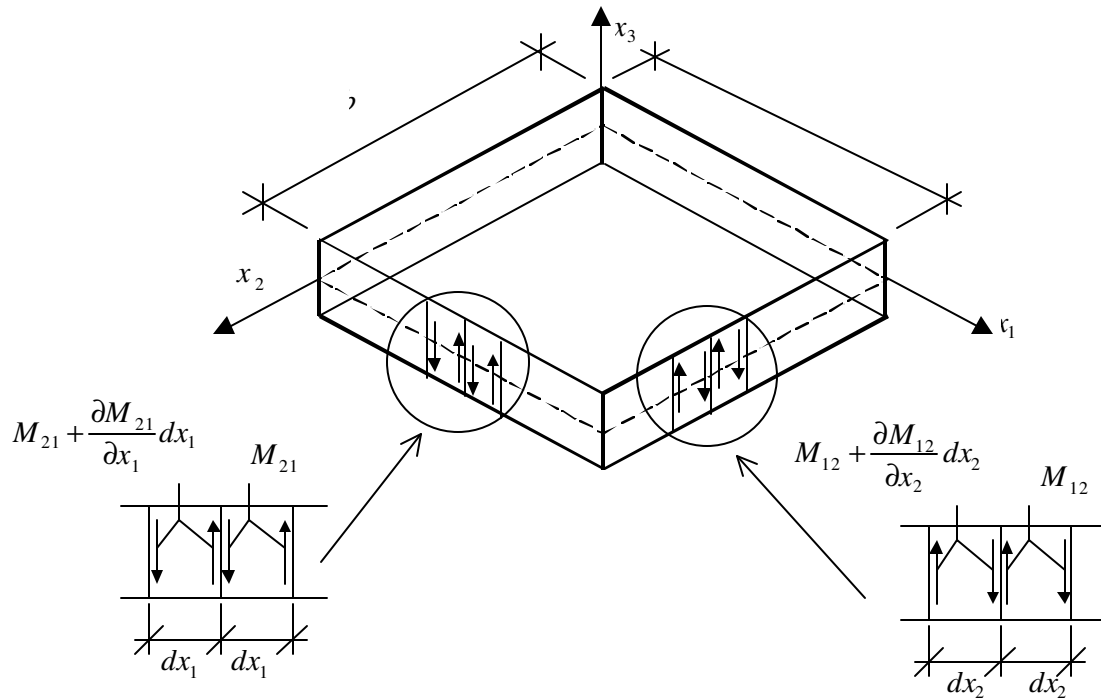


Figura 4.3 – Condições de contorno

Tomando-se, na borda de coordenada $x_1 = a$, paralela ao eixo x_2 , dois elementos sucessivos de largura dx_2 , nota-se que no elemento da direita age um momento volvente de valor $M_{12} \cdot dx_2$, e que o elemento da esquerda estará sujeito a $\left(M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_2$. Na Figura 4.3, os momentos volventes são representados como binários infinitesimais. Na interface dos dois elementos, age uma força vertical para cima de módulo M_{12} , e uma força para baixo de módulo $M_{12} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} dx_2$. Adicionando-se a resultante dessas forças à cortante Q , obtém-se a força cortante equivalente na borda paralela ao eixo x_2 , V_1 , ou seja:

$$V_1 = Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} \quad (4.37)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para a borda paralela ao eixo x_1 , $x_2 = b$, obtém-se:

$$V_2 = Q_2 + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_1} \quad (4.38)$$

Substituindo-se o valor de Q_i , de (4.28), e M_{12} , de (4.20), nas expressões (4.37) e (4.38), chega-se a:

$$V_1 = -D \left[\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right] \quad (4.39)$$

$$V_2 = -D \left[\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right] \quad (4.40)$$

As expressões (4.37) até (4.40) são devidas a Kirchhoff e significam que uma distribuição de momento volvente ao longo de uma borda pode ser tratada como uma força cortante vertical [Ugural 1981]. Adicionalmente, quando houver cantos nas bordas da placa, haverá componentes do momento volvente que não são compensadas. Isso conduz ao aparecimento de forças concentradas nesses pontos, denominadas **reações de canto**.

Analisando-se a situação em que os elementos infinitesimais das duas bordas tendem ao canto, Figura 4.3, e lembrando da simetria do tensor de momentos, pode-se determinar o valor da reação de canto como sendo:

$$R_c = 2M_{12} \quad (4.41)$$

ou

$$R_c = -2D \cdot (1-\nu) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (4.42)$$

Pode-se agora estabelecer as condições de contorno para uma borda paralela ao eixo x_2 na coordenada $x_1 = a$, para as diversas condições de vinculação possíveis.

4.4.1-Engaste

Nessas condições, tanto a deflexão quanto a inclinação, ou giro, da placa são nulos no apoio. Assim:

$$u_3 = 0 \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \quad (x_1 = a) \quad (4.43)$$

4.4.2-Apoio simples

O apoio simples é caracterizado pela ausência de momento fletor na direção perpendicular a este. Ou seja:

$$u_3 = 0 \quad M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (x_1 = a) \quad (4.44)$$

Essa mesma condição de contorno pode ser escrita de uma outra forma:

$$u_3 = 0 \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} = 0 \quad (x_1 = a) \quad (4.45)$$

4.4.3-Borda livre

Essa condição de contorno caracteriza-se pela ausência de reações de apoio. Portanto:

$$V_1 = -D \left[\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right] = 0 \quad M_{11} = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right) = 0 \quad (x_1 = a) \quad (4.46)$$

4.5-Sistema de coordenadas normais e tangenciais

Nos itens precedentes, as equações e condições de contorno para solução de um problema de placa foram apresentadas em coordenadas cartesianas. É desejável uma formulação mais flexível, tornando possível impor tais condições de contorno de uma maneira mais simples. Para tal, define-se um sistema de coordenadas normais e tangenciais que percorrem o contorno da placa, como ilustrado na Figura 4.4.

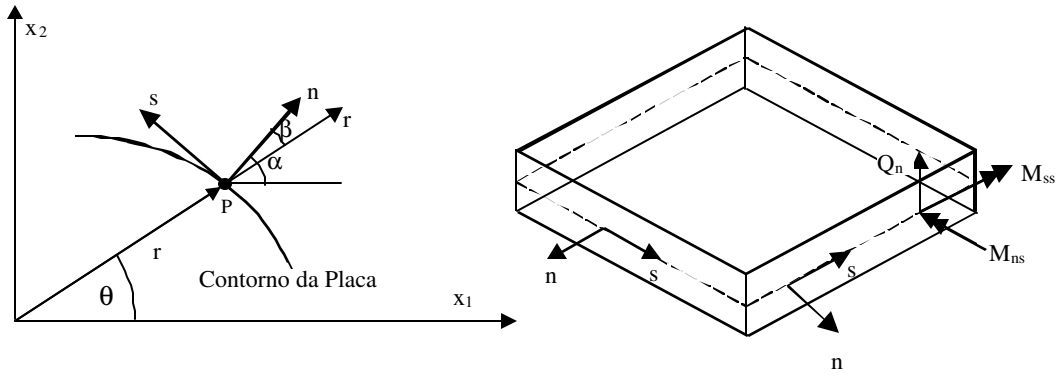


Figura 4.4 – Coordenadas normais e tangenciais.

Os dois sistemas podem ser relacionados pela matriz de rotação dada por:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Assim, se η_i representa o sistema normal e tangencial, pode-se escrever que:

$$x_i = T_{ij} \eta_j \quad (4.48)$$

Em notação matricial tem-se:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

A transformação inversa é dada pela transposição da matriz de rotação, ou seja:

$$\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix} = T^T \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Ou em notação indicial:

$$\eta_i = T_{ji} x_j \quad (4.51)$$

Pode-se expressar os momentos e cortantes no novo sistema, segundo:

$$\begin{pmatrix} M_n & M_{ns} \\ M_{ns} & M_s \end{pmatrix} = T^T \cdot \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \cdot T \quad (4.52)$$

$$\begin{pmatrix} Q_n \\ Q_s \end{pmatrix} = T^T \cdot \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Ou, em notação indicial:

$$M_{ns} = T_{in} T_{js} M_{ij} \quad (4.54)$$

$$Q_n = T_{jn} x_j \quad (4.55)$$

Pode-se, agora, expressar as condições de contorno no novo sistema de coordenadas.

4.5.1-Engaste

$$u_3 = 0 \quad \frac{\partial u_3}{\partial \eta_1} = 0 \quad (4.56)$$

4.5.2-Apoio simples

$$u_3 = 0 \quad M_{nn} = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \right) = 0 \quad (4.57)$$

ou

$$u_3 = 0 \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} = 0 \quad (4.58)$$

4.5.3-Borda livre

$$V_n = -D \left[\frac{\partial^3 u_3}{\partial s^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 u_3}{\partial n^2 \partial s} \right] = 0 \quad M_{nn} = -D \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} \right) = 0 \quad (4.59)$$

4.6-Coordenadas cilíndricas

Tomando-se a equação (4.29) e escrevendo-se o operador de Laplace em coordenadas cilíndricas, obtém-se:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) = \frac{g}{D} \quad (4.60)$$

Também se pode expressar os momentos e cortantes em coordenadas cilíndricas, obtendo-se:

$$M_{rr} = -D \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (4.61)$$

$$M_{\theta\theta} = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} \right) \quad (4.62)$$

$$M_{r\theta} = -D \cdot (1 - \nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_3}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \quad (4.63)$$

$$Q_r = D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 u_3) \quad (4.64)$$

$$Q_\theta = D \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 u_3) \quad (4.65)$$

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \quad (4.66)$$

$$V_\theta = Q_\theta + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} \quad (4.67)$$

Novamente, pode-se obter o valor dos momentos e cortantes, nas coordenadas normais e tangenciais, a partir dos valores em coordenadas cilíndricas. Isto é feito a partir da matriz de rotação T_{ij} utilizando-se o ângulo β no lugar de α mostrado na Figura 4.4. Efetuando-se os produtos matriciais e expandindo-se as expressões obtidas, chega-se a:

$$M_n = -D \cdot \left[(\cos^2 \beta + \nu \cdot \sin^2 \beta) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + (\sin^2 \beta + \nu \cdot \cos^2 \beta) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} \right) + 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) \right] \quad (4.68)$$

$$M_s = -D \cdot \left[(\sin^2 \beta + \nu \cdot \cos^2 \beta) \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + (\cos^2 \beta + \nu \cdot \sin^2 \beta) \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} \right) - 2 \cdot (1 - \nu) \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} \right) \right] \quad (4.69)$$

$$M_{ns} = -D \cdot (1 - \nu) \cdot \left[\sin \beta \cdot \cos \beta \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} \right) + \right. \\ \left. + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) \right] \quad (4.70)$$

$$Q_n = -D \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_3 \cdot \cos \beta + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_3 \cdot \sin \beta \right) \quad (4.71)$$

$$V_n = \left(-D \cdot \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_3 + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_{ns}}{\partial \theta} \right) \cdot \cos \beta - \\ + \left(D \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_3 + \frac{\partial M_{ns}}{\partial r} \right) \cdot \sin \beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \cdot \frac{\partial M_{ns}}{\partial \beta} \quad (4.72)$$

4.7-Solução fundamental de placas

A solução fundamental de uma equação diferencial é aquela que corresponde a uma não homogeneidade dada pelo delta de Dirac. Assim, a solução fundamental do problema de placas é dada por:

$$D \cdot \nabla^2 (\nabla^2 u_3^*) = \Delta(\xi, x) \quad (4.73)$$

Considerando-se a simetria axial do problema em relação ao eixo x_3 , pode-se escrever:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 u_3^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial r} \right) = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \quad (4.74)$$

Arranjando-se os termos de modo conveniente, chega-se a:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial u_3^*}{\partial r} \right) \right] \right\} = \frac{\Delta(\xi, x)}{D} \quad (4.75)$$

Integrando-se sucessivamente (4.75), chega-se à seguinte solução:

$$u_3^* = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 \quad (4.76)$$

É fácil perceber que a constante c_4 representa um movimento de corpo rígido. Assim pode-se assumir, sem perda de generalidade que:

$$c_4 = 0 \quad (4.77)$$

Como o problema tem simetria com relação ao eixo x_3 , pode-se afirmar que:

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial r} = 0 \quad \text{para } r = 0 \quad (4.78)$$

Dessa condição tem-se que:

$$c_1 = 0 \quad (4.79)$$

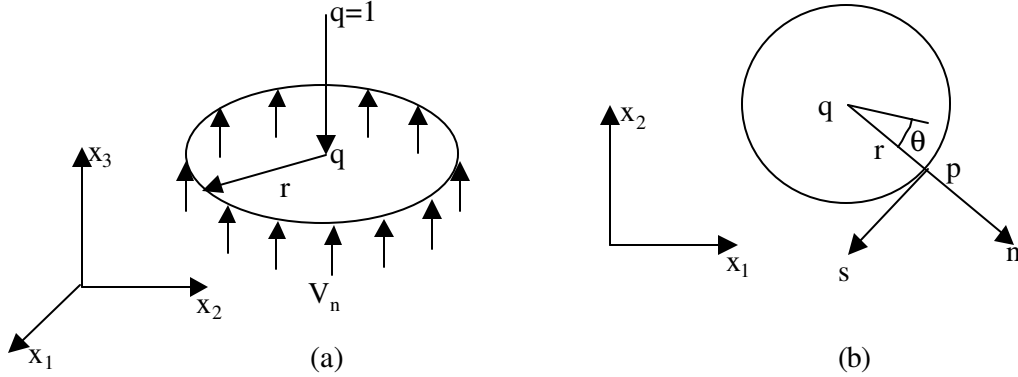


Figura 4.5 – Forças verticais atuantes num círculo de raio qualquer

Uma outra condição que deve ser satisfeita pela solução fundamental é o equilíbrio de forças em torno da origem. Assim, para qualquer círculo, de raio diferente de zero, que se tome com a origem em seu interior, a integral das forças que atuam na sua periferia deve ser unitária. Ou seja:

$$\int_0^{2\pi} V_r d\theta = 1 \quad (4.80)$$

Substituindo-se o valor de V_r , de (4.66) e o valor de u_3^* , de (4.76), já com as constantes c_1 e c_4 determinadas, na equação (4.80), obtém-se:

$$c_2 = \frac{1}{8\pi D} \quad (4.81)$$

No caso da constante c_3 , seu valor não pode ser determinado diretamente. Assim tem-se que a solução fundamental para o problema de placas possui uma constante livre, ou seja:

$$u_3^* = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 \cdot (\ln r - k) \quad (4.82)$$

Vários autores têm proposto valores diferentes para a constante k . Em **Bezine 1978** e **Stem 1979** o valor de k é tomado como zero. Já **Tottenham 1979** sugeriu o uso da constante

1/2. Os trabalhos de **Danson 1981** e **Paiva 1987** seguiram essa sugestão. **Simões 2001** apresentou vários exemplos de placas com diferentes condições de contorno e, para cada exemplo, a constante k era alterada para um dos valores disponíveis na literatura. Não foi observada em **Simões 2001** variação significativa nos resultados de forças e deslocamentos.

No presente trabalho adota-se a constante proposta por **Tottenham 1979**, assim tem-se:

$$u_3^* = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot D} \cdot r^2 \cdot \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (4.83)$$

Pode-se agora determinar, no sistema de coordenadas normais e tangenciais, os esforços atuantes em qualquer contorno contido no espaço em que (4.83) é definida. Assim tem-se que:

$$\frac{\partial u_3^*}{\partial n} = \theta_\eta^* = \frac{r}{4 \cdot \pi \cdot D} \cdot \ln r \cdot \cos \beta \quad (4.84)$$

$$M_{\eta\eta}^* = -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \left[(1+\nu) \cdot \ln r + (1-\nu) \cdot \cos^2 \beta + \nu \right] \quad (4.85)$$

$$M_{\eta s}^* = \frac{(1-\nu)}{8 \cdot \pi} \cdot \sin 2\beta \quad (4.86)$$

$$V_\eta^* = \frac{\cos \beta}{4 \cdot \pi \cdot r} \cdot \left[2 \cdot (1-\nu) \cdot \sin^2 \beta - 3 + \nu \right] + \frac{(1-\nu)}{4 \cdot \pi \cdot R} \cdot \cos 2\beta \quad (4.87)$$

5-Noções Básicas de Plasticidade

5.1-Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação básica para o tratamento do problema elasto-plástico. A dedução é feita para o caso genérico de materiais com encruamento e depois simplificada para o caso de materiais elasto-plástico perfeitos. Todos os índices neste capítulo variam de 1 a 3, a menos que se informe o contrário.

5.2-Comportamento plástico dos materiais

O comportamento plástico da maioria dos materiais, usualmente empregados em estruturas, pode ser analisado seguindo-se um dos modelos apresentados na Figura 5.1, obtidos de ensaios de tração uniaxial.

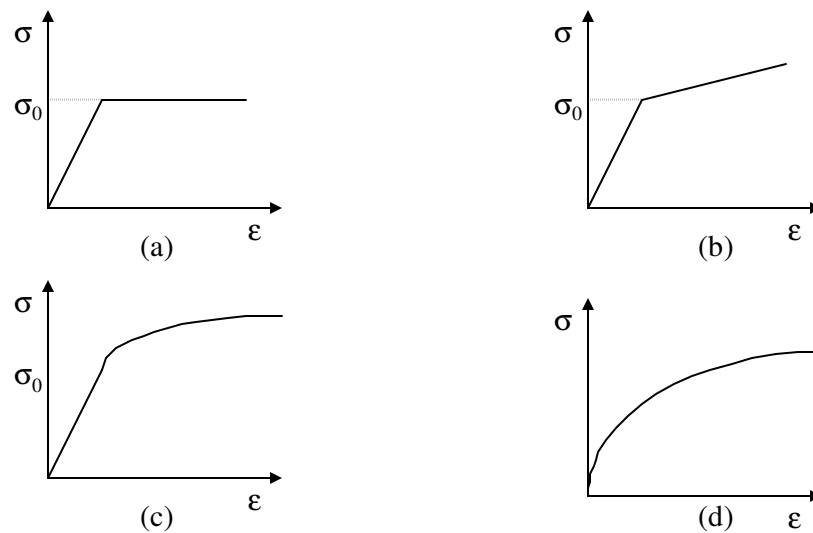


Figura 5.1 - Modelos elasto-plásticos.

Na Figura 5.1a vê-se o modelo elasto-plástico perfeito, segundo o qual o material deforma-se elasticamente até que se atinja uma tensão σ_0 , conhecida como tensão de escoamento. Deste ponto em diante, o material deforma-se indefinidamente sem que haja um acréscimo nas tensões. Este modelo é normalmente empregado para aço.

Já na Figura 5.1b apresenta-se o modelo de plastificação com enrijecimento linear, ou encruamento linear, tendo o material uma reserva de resistência após a tensão σ_0 ter sido alcançada. Neste caso há um acréscimo de tensões acompanhando o acréscimo da deformação. O comportamento de vários metais pode ser representado por este modelo, dentre eles o alumínio.

Na Figura 5.1c e na Figura 5.1d tratam-se de materiais com comportamento não-linear. Para a Figura 5.1c a não-linearidade ocorre apenas depois de atingida a tensão de escoamento σ_0 . Na Figura 5.1d o comportamento é não-linear desde o início do carregamento, não sendo clara a separação das fases elástica e plástica. A tensão de escoamento para este caso é obtida por convenção. Estes modelos podem ser empregados para estudo de materiais como o concreto.

5.3-Tipos de encruamento

Como foi descrito na seção anterior, alguns materiais apresentam uma reserva de resistência após terem atingido a tensão de escoamento. Na Figura 4.2, ilustra-se o comportamento de um material que, após sofrer escoamento, é solicitado de maneira reversa. Este pode comportar-se de uma forma diferente da inicial.

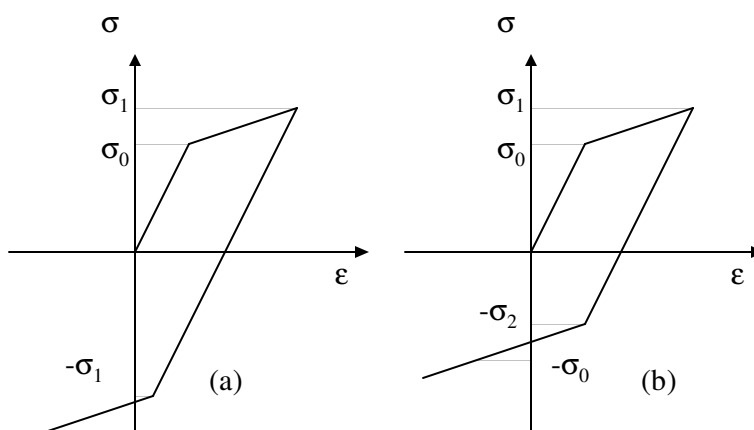


Figura 5.2 - Tipos de encruamento.

Admitindo-se um material com encruamento, na Figura 5.2a este é solicitado até uma tensão σ_1 , após o escoamento ter ocorrido em σ_0 . Em seguida, o carregamento é invertido e o

material escoar novamente, sob a ação de uma tensão de módulo σ_1 . Neste caso o encruamento representa um ganho de resistência para o material. Isso caracteriza o **encruamento isotrópico**.

Para a situação ilustrada na Figura 5.2b, a tensão de escoamento no carregamento reverso é $-\sigma_2$, que tem módulo inferior a σ_0 . Assim, tem-se que a existência do encruamento representa uma diminuição de resistência para cargas no sentido reverso, caracterizando o encruamento cinemático. Este fenômeno é conhecido como efeito Bauschinger.

Qualquer outra possibilidade de encruamento pode ser escrita como uma combinação dessas anteriores, sendo chamado de encruamento misto.

5.4 Critérios de escoamentos

Em um ensaio de carregamento uniaxial, a tensão de escoamento pode ser facilmente encontrada a partir do gráfico de tensão-deformação. Um meio de se determinar se um material entra em escoamento, quando sujeito a um estado multiaxial de tensões, a partir de resultados de ensaios uniaxiais, é adotar-se um critério de escoamento.

5.4.1-Critério de Tresca

O escoamento dos metais, em geral, não é influenciado pela alteração da pressão hidrostática. Assim, um critério que leve em conta apenas as tensões deviatorias é adequado para seu estudo. Historicamente, um critério de escoamento para metais foi proposto pela primeira vez por Tresca em 1864. Segundo este critério, o escoamento do material ocorre em um ponto quando a tensão de cisalhamento neste, atinge um valor crítico **k**. Se o comportamento mecânico do material for expresso pelas tensões principais, as tensões de cisalhamento serão a metade do módulo de cada uma das diferenças entre as tensões principais. Portanto, o critério de Tresca pode ser expresso matematicamente como:

$$\text{Max}\left(\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2|, \frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3|, \frac{1}{2}|\sigma_3 - \sigma_1|\right) \leq k \quad (5.1)$$

Em um ensaio uniaxial, as tensões σ_2 e σ_3 são nulas. Assim pode-se determinar a tensão de cisalhamento crítica **k** como sendo:

$$k = \frac{\sigma_0}{2} \quad (5.2)$$

sendo σ_0 a tensão de escoamento do material.

Se a tensão σ_3 é nula, o critério de Tresca pode ser representado graficamente pelo hexágono mostrado na Figura 5.3. A região interna representa estados de tensão onde não há escoamento.

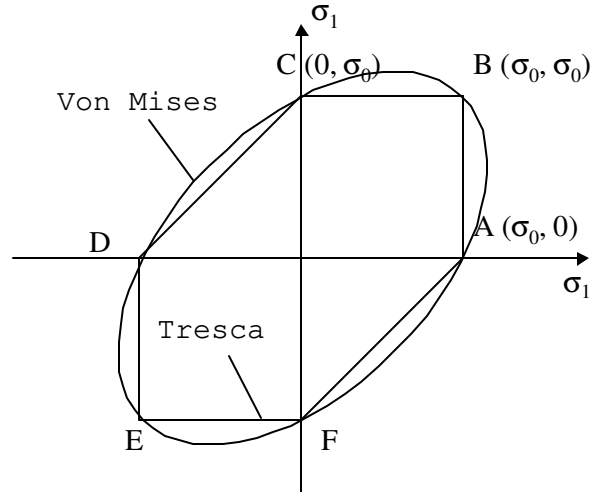


Figura 5.3 - Critérios de Tresca e de Von Mises em um estado plano de tensão.

5.4.1-Critério de Von Mises

O critério de Tresca apresenta uma formulação bastante simples, o que facilita seu emprego em soluções analíticas de problemas elasto-plásticos. No entanto, este critério leva em conta apenas duas das tensões principais, ignorando a influência da terceira no escoamento. Além disso, para um tratamento mais adequado do problema elasto-plástico, é conveniente que a expressão do critério de escoamento usado tenha derivadas contínuas em todos os pontos. Neste sentido, foi proposto por Von Mises em 1913, um critério que levasse em conta os aspectos mencionados. Este critério é representado pela expressão:

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (5.3)$$

sendo **k** um **parâmetro de escoamento** e J_2 o segundo invariante do tensor das tensões deviatórias, dado por:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (i,j=1..3) \quad (5.4)$$

Este critério é representado graficamente pela elipse, para o estado plano de tensão, que passa pelos pontos **A** a **F** da Figura 5.3.

Para materiais elasto-plásticos perfeitos, $\mathbf{k}$ assume um valor constante. Havendo encruamento, $\mathbf{k}$ será uma função que depende do histórico de carregamento.

5.4.1-Critério de Drucker-Prager

No estudo de materiais cujo escoamento pode ser influenciado pela pressão hidrostática, o critério de Von Mises não conduzirá a resultados satisfatórios. O critério de Drucker-Prager, uma generalização do critério de Von Mises, considera a contribuição da pressão hidrostática com uma modificação da expressão (5.3).

$$f(I_1, J_2) = aI_1 + \sqrt{J_2} - k = 0 \quad (5.5)$$

O parâmetro a dá o grau de influência da pressão no escoamento do material e I_1 é o primeiro invariante do tensor das tensões. Materiais como solos e concretos têm seu comportamento melhor representado por este critério.

5.5-Formulação elasto-plástica para materiais com encruamento isotrópico

Seja uma função f , que define um critério de escoamento, dependente do estado de tensões σ_{ij} , do estado de deformação plástico ϵ_{ij}^p , e do parâmetro de escoamento k :

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) = 0 \quad (5.6)$$

A função f define uma superfície no espaço em que todos os pontos estão no limiar do escoamento, conhecida como **superfície de escoamento**. Os pontos internos à superfície representam estados de tensão e deformação em regime elástico. Pontos externos representam estados que só podem ser atingidos se houver encruamento do material. O processo de encruamento isotrópico pede que o parâmetro k seja uma função dependente do acúmulo de deformação plástica. No caso de encruamento cinemático, o parâmetro k será uma constante.

A matriz de rigidez tangente será tal que:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{ep} \tilde{\epsilon}_{ij} \quad (5.7)$$

A linha curva sobre os tensores significa que se trata de um incremento de tensão ou deformação. O incremento de deformação total, $\tilde{\epsilon}_{ij}$, pode ser dividido em uma porção elástica e outra plástica [Drucker 1956]:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij}^e + \tilde{\epsilon}_{ij}^p \quad (5.8)$$

Nas relações incrementais, assume-se que o acréscimo de tensão pode ser escrito a partir do acréscimo de deformações elástico usando-se a lei de Hooke generalizada, ou seja:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{ij}^e \quad (5.9)$$

Na Figura 5.4 ilustra-se a separação das deformações plástica e elástica. Se o material for elástico perfeitamente plástico, ele atingirá a deformação total final seguindo o caminho OABC. Após o descarregamento, apenas as deformações plásticas permanecem, tornando-se clara a relação da deformação elástica com o tensor das tensões.

Submetendo-se um material que apresenta encruamento ao mesmo estado de deformação alcançado pelo material elasto-plástico perfeito, o caminho seguido na carga será OAC. No entanto, o caminho para a descarga não se altera. Assim, a relação entre a deformação elástica e o tensor das tensões permanece a mesma. Por isso, as deformações plásticas não devem produzir acréscimo de tensões durante o encruamento.

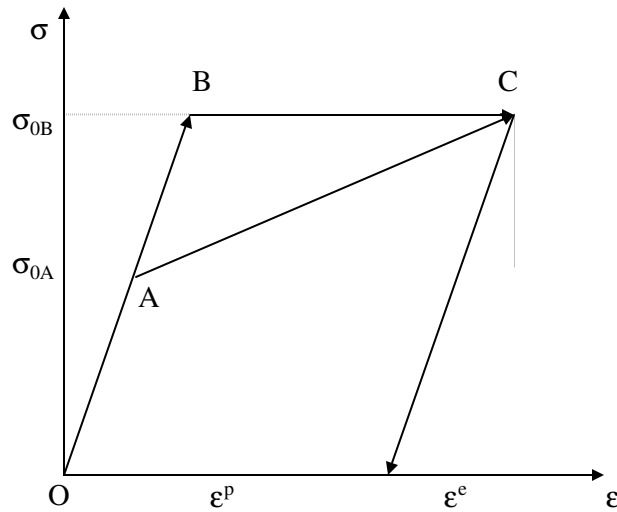


Figura 5.4 - Componentes elástica e plástica da deformação.

O incremento de deformação plástica, $\tilde{\epsilon}_{ij}^p$, pode ser definido como:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.10)$$

sendo $d\lambda$ um escalar não negativo que depende do histórico do carregamento, e $g(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k)$ é a **função de potencial plástico**, que define a direção da deformação plástica. Quando a função de potencial plástico assume o mesmo valor da função de escoamento, tem-se uma **regra de escoamento associada**. Isso é expresso matematicamente como:

$$f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) = g(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) \quad (5.11)$$

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação elástica, obtido de (5.8), e o valor do acréscimo de deformação plástica (5.10) em (5.9), obtém-se:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\tilde{\epsilon}_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (5.12)$$

Na equação (5.12), se $d\lambda$ for conhecido, a relação constitutiva fica determinada. Para este fim, utiliza-se a condição de consistência definida a seguir.

Toma-se um estado de tensão e deformação que satisfaça (5.6). A este estado, dá-se um acréscimo de deformação $\dot{\epsilon}_{ij}$. O novo estado de tensão e deformação deve continuar a satisfazer (5.6), ou seja:

$$f(\sigma_{ij} + \tilde{\sigma}_{ij}, \epsilon_{ij}^p + \tilde{\epsilon}_{ij}^p, k + dk) = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, k) + df = 0 \quad (5.13)$$

Para que (5.13) possa ser satisfeita, tem-se a seguinte relação, conhecida como condição de consistência:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \tilde{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (5.14)$$

Considerando que o parâmetro de escoamento k é função da deformação plástica acumulada, define-se incremento de deformação plástica efetiva como sendo:

$$\tilde{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \tilde{\epsilon}_{ij}^p \tilde{\epsilon}_{ij}^p} \quad (5.15)$$

A deformação plástica efetiva será:

$$\epsilon_p = \int \tilde{\epsilon}_p \quad (5.16)$$

Pode-se, agora, definir o parâmetro de escoamento como função da deformação plástica efetiva, ou seja:

$$k = k(\epsilon_p) \quad (5.17)$$

Tendo em mente as definições (5.16) e (5.17), pode-se escrever que:

$$dk = \frac{dk}{d\epsilon_p} \tilde{\epsilon}_p \quad (5.18)$$

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação plástica, dado por (5.10), na expressão (5.15) chega-se a:

$$\tilde{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda \quad (5.19)$$

Substituindo-se, agora, o valor do acréscimo de deformação plástica efetiva de (5.19) na expressão da diferencial do parâmetro de escoamento dado por (5.18) tem-se:

$$dk = \frac{dk}{d\epsilon_p} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda \quad (5.20)$$

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação plástica (5.10), o acréscimo de tensão dado por (5.12) e a diferencial do parâmetro de escoamento (5.20) na condição de consistência (5.14) obtém-se:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} - h \cdot d\lambda \quad (5.21)$$

sendo:

$$h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{d\epsilon_p} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (5.22)$$

Logo:

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} \quad (5.23)$$

5.6-Materiais com encruamento misto

Para materiais que sofrem encruamento misto, a superfície de escoamento é dada por uma função do tipo:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, k) = 0 \quad (5.24)$$

sendo α_{ij} o deslocamento do centro da superfície de escoamento no espaço considerado. É comum escrever-se as coordenadas de tensão em relação ao centro deslocado da superfície de escoamento segundo:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \alpha_{ij} \quad (5.25)$$

O encruamento misto é aquele no qual ocorrem, simultaneamente, um encruamento isotrópico e um cinemático. Assim, o acréscimo da deformação plástica pode ser escrito como:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \tilde{\epsilon}_{ij}^{pi} + \tilde{\epsilon}_{ij}^{pk} \quad (5.26)$$

sendo que $\tilde{\epsilon}_{ij}^{pi}$ representa a fase isotrópica, e $\tilde{\epsilon}_{ij}^{pk}$, a fase cinemática do acréscimo de deformação plástica.

A expressão (5.26) pode ser usada para os casos em que o material pode ter acréscimo de tensões após o escoamento (enrijecimento) ou decréscimo (amolecimento), desde que o material continue estável. Neste trabalho o amolecimento não é estudado e os tensores $\tilde{\epsilon}_{ij}^{pi}$ e $\tilde{\epsilon}_{ij}^{pk}$ tem a mesma direção e sentido do acréscimo de deformação plástica total, podendo-se escrever que:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^{pi} = M \cdot \tilde{\epsilon}_{ij}^p \quad \text{e} \quad \tilde{\epsilon}_{ij}^{pk} = (1 - M) \tilde{\epsilon}_{ij}^p \quad (5.27)$$

O **parâmetro de encruamento misto** M varia entre 0 e 1, dando o grau de “mistura” dos encruamentos.

Segundo a regra de encruamento de Prager, apresentada em **Prager 1945** e **Prager 1956**, o deslocamento do centro da superfície de escoamento pode ser definido como:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = c \cdot \tilde{\epsilon}_{ij}^{pk} = c(1 - M) \tilde{\epsilon}_{ij}^p \quad (5.28)$$

sendo c um parâmetro de encruamento do material. Se for considerada a regra de encruamento de Ziegler, sabe-se que:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = a(1 - M) \tilde{\epsilon}_p (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (5.29)$$

Deve-se salientar que a regra de Prager depende unicamente do incremento de deformação plástica $\tilde{\epsilon}_{ij}$, sendo a direção da translação do centro da superfície de escoamento dada por este.

Tendo identificado certos problemas com a regra de Prager quando há amolecimento do material, **Ziegler 1959** propôs uma modificação. A regra de encruamento proposta por Ziegler depende do incremento efetivo $\tilde{\epsilon}_p$, definido em (5.15), e a direção da translação do centro da superfície de escoamento será dada pela direção do estado de tensões do ponto em estudo.

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação plástica, dado por (5.10), na expressão da regra de Prager (5.28) tem-se:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = c(1-M) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (5.30)$$

Substituindo-se o valor do acréscimo de deformação (5.10) e a definição de acréscimo de deformação plástica efetiva, mostrada em (5.15), na expressão da regra de Ziegler (5.29) tem-se:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = a(1-M) (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda \quad (5.31)$$

Por simplicidade, pode-se escrever:

$$\tilde{\alpha}_{ij} = A_{ij} d\lambda \quad (5.32)$$

Define-se A_{ij} conforme a regra de encruamento adotada. Então, para as regras de Prager e Ziegler, respectivamente, tem-se:

$$A_{ij} = c(1-M) \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.33)$$

$$A_{ij} = a(1-M) (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (5.34)$$

Para escrever-se uma relação incremental entre as tensões e as deformações para um material com encruamento misto, analogamente ao que foi feito para materiais com encruamento isotrópico, retoma-se a condição de consistência. Neste caso esta condição depende de $\tilde{\alpha}_{ij}$, ou seja:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tilde{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \tilde{\alpha}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (5.35)$$

Deve-se notar que:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \delta_{ik} \delta_{jl} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \quad (5.36)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \alpha_{ij}} = - \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \delta_{ik} \delta_{jl} = - \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} = - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.37)$$

Logo:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5.38)$$

Portanto:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\bar{\sigma}_{ij} - \bar{\alpha}_{ij}) + \frac{\partial f}{\partial k} dk = 0 \quad (5.39)$$

Deve-se notar que $\bar{\alpha}_{ij}$ é função apenas da fase cinemática da deformação e k é função apenas da fase isotrópica da deformação efetiva. Define-se o incremento de deformação plástica efetiva reduzida, $\bar{\bar{\epsilon}}_p$, como:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_p = \sqrt{\frac{2}{3} \bar{\bar{\epsilon}}_{ij}^{pi} \bar{\bar{\epsilon}}_{ij}^{pi}} \quad (5.40)$$

Lembrando-se de (5.27), tem-se:

$$\bar{\bar{\epsilon}}_p = M \bar{\epsilon}_p \quad (5.41)$$

Pode-se escrever:

$$dk = \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} \bar{\bar{\epsilon}}_p = \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}} d\lambda \quad (5.42)$$

Substituindo-se na condição de consistência (4.37) o acréscimo de tensão dado por (5.12), o diferencial de translação da superfície de escoamento (5.32) e o incremento do parâmetro de escoamento (5.42), chega-se a:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left[C_{ijkl} \bar{\bar{\epsilon}}_{kl} - d\lambda \left(A_{kl} + C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \right] + \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} d\lambda = 0 \quad (5.43)$$

ou:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \bar{\bar{\epsilon}}_{kl} - \bar{h} \cdot d\lambda = 0 \quad (5.44)$$

sendo:

$$\bar{h} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} + A_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (5.45)$$

Resolvendo-se (5.44) para $d\lambda$ chega-se a:

$$d\lambda = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} \quad (5.46)$$

Definindo-se:

$$H_{kl} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \quad \text{e} \quad H_{kl}^* = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \quad (5.47)$$

Pode-se escrever (5.46) como:

$$d\lambda = \frac{1}{h} H_{kl} \tilde{\epsilon}_{kl} \quad (5.48)$$

Substituindo-se (5.48) na relação constitutiva (5.12) tem-se:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\tilde{\epsilon}_{kl} - \frac{1}{h} H_{st} \tilde{\epsilon}_{st} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) = \left(C_{ijst} - \frac{1}{h} H_{st} H_{ij}^* \right) \tilde{\epsilon}_{st} \quad (5.49)$$

Pode-se escrever (5.49) na mesma forma de (5.7) fazendo-se:

$$C_{ijkl}^{ep} = C_{ijkl}^e + C_{ijkl}^p \quad (5.50)$$

Sendo:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{1}{h} H_{ij}^* H_{kl} \quad (5.51)$$

Um outro parâmetro importante nesta análise é o da tensão efetiva. Se a função (5.24) for tomada segundo o critério de Von Mises, tem-se:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, k) = \bar{J}_2 - k^2 (\epsilon_p) = 0 \quad (5.52)$$

sendo $\bar{J}_2$ o segundo invariante do tensor reduzido $\bar{s}_{ij}$. Pode-se escrever a função de escoamento (5.24) na forma:

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, k) = F(\bar{\sigma}_{ij}) - k(\epsilon_p) \quad (5.53)$$

Define-se **tensão efetiva**, σ_e , como

$$F(\sigma_{ij}) = C \sigma_e^n \quad (5.54)$$

Sendo **C** e **n** constantes a serem determinadas segundo o critério de escoamento escolhido. Para o caso particular do critério de Von Mises tem-se:

$$F(\sigma_{ij}) = J_2 \quad (5.55)$$

Logo:

$$C = \frac{1}{3} \quad n = 2 \quad \sigma_e = \sqrt{3J_2} \quad (5.56)$$

A expressão (5.52) pode ser escrita, com (5.4), (5.54) e (5.56), como:

$$f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}, k) = \frac{2}{3} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{ij} - \bar{\sigma}_e^2 (\bar{\epsilon}_p) = 0 \quad (5.57)$$

Assumindo-se uma regra de escoamento associada, segundo (5.11), tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 3 \bar{s}_{ij} \quad (5.58)$$

O tensor elástico C_{ijkl} pode ser escrito na forma:

$$C_{ijkl} = 2\mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \quad (5.59)$$

Os tensores definidos em (5.47) assumem a forma:

$$H_{kl} = H_{kl}^* = C_{ijkl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} = 6\mu \bar{s}_{kl} \quad (5.60)$$

Logo, o tensor plástico, definido por (5.51), terá a forma:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{36\mu^2}{h} \bar{s}_{ij} \bar{s}_{kl} \quad (5.61)$$

Resta apenas estabelecer a função $\bar{h}$, que assume a forma:

$$\bar{h} = 18\mu \bar{s}_{kl} \bar{s}_{kl} + 3A_{kl} \bar{s}_{kl} - 2\bar{\sigma}_e \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p} M \sqrt{6\bar{s}_{kl} \bar{s}_{kl}} \quad (5.62)$$

O tensor A_{kl} é o mesmo definido em (5.33) e (5.34), sendo tomado segundo a regra de encruamento estabelecida. Cabe notar que a derivada $\frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p}$ também depende da regra de encruamento adotada, devendo ser avaliada para cada caso. Se for assumido o material elasto-plástico perfeito, não há qualquer encruamento. Logo:

$$M = 1 \quad \text{e} \quad \frac{dk}{d\bar{\epsilon}_p} = 0 \quad (5.63)$$

Portanto, (5.45) fica resumida a:

$$\bar{h} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (5.64)$$

Para o caso da regra de encruamento associada ao critério de Von Mises, substitui-se (5.58) em (5.64):

$$\bar{h} = 9C_{ijkl} s_{ij} s_{kl} \quad (5.65)$$

Ou, com uso da expressão (5.59):

$$\bar{h} = 36\mu J_2 \quad (5.66)$$

Chega-se que o tensor plástico para a regra de escoamento associada ao critério de Von Mises assume a forma:

$$C_{ijkl}^p = -\frac{\mu}{J_2} s_{ij} s_{kl} \quad (5.67)$$

Para o caso de estado plano de deformação, o tensor elasto-plástico assume seguinte a forma:

$$[C^{ep}] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}^2 & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{22} & -\frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{12} \\ \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{22} & 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}^2 & -\frac{\mu}{J_2} s_{22} s_{12} \\ -\frac{\mu}{J_2} s_{11} s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{22} s_{12} & 2\mu - \frac{\mu}{J_2} s_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

com:

$$\sigma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \frac{\mu}{J_2} s_{33} s_{kl} \epsilon_{kl} \quad (5.69)$$

No estado plano de tensões tem-se:

$$s_{13} = s_{23} = s_{32} = s_{12} = 0$$

Como $s_{33} \neq 0$, deve-se considerar uma linha a mais do tensor C^{ep} para se levar em conta a influência desta tensão. O tensor assume a seguinte forma:

$$[C^{ep}] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}^2 & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{22} & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{33} & -\frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{12} \\ \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{22} & 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}^2 & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{33} & -\frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{12} \\ \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{33} & \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{33} & 2\mu + \lambda - \frac{\mu}{J_2} s_{33}^2 & -\frac{\mu}{J_2} s_{33}s_{12} \\ -\frac{\mu}{J_2} s_{11}s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{22}s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{33}s_{12} & -\frac{\mu}{J_2} s_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

5.7-Equações de Navier para o caso elasto-plástico:

A equação de equilíbrio pode ser escrita de modo incremental como:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{b}_i = 0 \quad (5.71)$$

As relações constitutivas, escritas de forma incremental ficam:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu\tilde{\epsilon}_{ij}^e + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}\tilde{\epsilon}_{kk}^e\delta_{ij} \quad (5.72)$$

Usando-se (5.8), escreve-se a parte elástica do incremento de deformação como sendo

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^e = \tilde{\epsilon}_{ij} - \tilde{\epsilon}_{ij}^p \quad (5.73)$$

Substituindo-se o valor do incremento de deformação elástica (5.73) na relação constitutiva (5.72) chega-se a:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu\tilde{\epsilon}_{ij} - 2\mu\tilde{\epsilon}_{ij}^p + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}(\tilde{\epsilon}_{kk} - \tilde{\epsilon}_{kk}^p)\delta_{ij} \quad (5.74)$$

Escrevendo-se a expressão das deformações linearizadas de modo incremental, tem-se:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad (5.75)$$

Diferenciando-se (5.75) tem-se

$$\tilde{\epsilon}_{ij,k} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,jk} + \tilde{u}_{j,ik}) \quad (5.76)$$

Tomando-se a derivada de (5.72) na direção j tem-se:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = 2\mu\tilde{\epsilon}_{ij,j} - 2\mu\tilde{\epsilon}_{ij,j}^p + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu}(\tilde{\epsilon}_{kk,j} - \tilde{\epsilon}_{kk,j}^p)\delta_{ij} \quad (5.77)$$

Substituindo-se o valor de (5.76) na expressão (5.77) e (5.77) na equação de equilíbrio (5.71) chega-se a:

$$\tilde{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\tilde{u}_{j,ji} + \frac{\tilde{b}_i}{\mu} = 2\tilde{\epsilon}_{ij,j}^p + \frac{2\nu}{1-2\nu}\tilde{\epsilon}_{jj,i}^p \quad (5.78)$$

Se for adotado o critério de Von Mises, é possível mostrar que:

$$\epsilon_{kk}^p = 0 \quad (5.79)$$

Logo, a expressão (5.78) resume-se a:

$$\tilde{u}_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu}\tilde{u}_{j,ji} + \frac{\tilde{b}_i}{\mu} = 2\tilde{\epsilon}_{ij,j}^p \quad (5.80)$$

A expressão (5.80) é válida tanto para o caso tridimensional quanto para o estado plano de deformação, sendo que para isto deve-se limitar os índices a 2.

Para o estado plano de tensão, retoma-se a expressão (5.78), limitando-se os índices a 2 e empregando-se o valor efetivo do coeficiente de Poisson.

5.8-Acréscimo de deformação plástica:

Na equação (5.8) o acréscimo de deformação total foi definido como a soma de uma parcela elástica a uma parcela plástica. Por isso torna-se necessário definir uma destas fases para que a outra possa ser determinada inequivocamente a partir da deformação total. Assumindo-se o critério de escoamento de Von Mises, definida em (5.57), e a regra de encruamento de Prager, definida em (5.33), a condição de consistência (5.35) pode ser escrita como:

$$df = 3\bar{s}_{ij}\bar{\sigma}_{ij} - 9\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}c(1-M)d\lambda - 4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}M d\lambda \quad (5.81)$$

sendo:

$$\bar{H} = \frac{d\bar{\sigma}_e}{d\bar{\epsilon}_p} \quad (5.82)$$

Para determinar-se o valor da constante c supõe-se um ensaio uniaxial, sendo satisfeitas as seguintes condições:

$$\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{31} = 0 \quad (5.83)$$

$$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} - \alpha_{11} \quad \bar{\sigma}_{22} = -\alpha_{22} \quad \bar{\sigma}_{33} = -\alpha_{33} \quad (5.84)$$

A partir de (5.32) e (5.33), lembrando-se que a deformação plástica volumétrica, para o critério de Von Mises, é nula, (5.79), chega-se a:

$$\bar{\alpha}_{kk} = 0 \quad (5.85)$$

Por se tratar de um ensaio uniaxial, com (5.85), tem-se:

$$\alpha_{22} = \alpha_{33} = -\frac{1}{2}\alpha_{11} \quad (5.86)$$

Substituindo-se os valores obtidos das expressões (5.83), (5.84) e (5.86) na expressão da tensão efetiva (5.56), obtém-se o valor da tensão efetiva reduzida:

$$\bar{\sigma}_e = \sigma_{11} - \frac{3}{2}\alpha_{11} \quad (5.87)$$

Escrevendo-se (5.87) para os incrementos de tensões tem-se:

$$d\bar{\sigma}_e = d\sigma_{11} - \frac{3}{2}d\alpha_{11} \quad (5.88)$$

Substituindo-se o valor de $\bar{\alpha}_{11}$ da expressão (5.33) e lembrando-se que, para um ensaio uniaxial, a tensão aplicada é igual a tensão efetiva e a deformação plástica obtida, igual a deformação efetiva, chega-se a:

$$d\bar{\sigma}_e = d\sigma_e - \frac{3}{2}c(1-M)d\epsilon_p \quad (5.89)$$

Isolando-se o acréscimo de tensão efetiva reduzida de (5.82), substituindo-se em (5.89) e arranjando-se os termos de maneira adequada, chega-se a:

$$\frac{d\sigma_e}{d\epsilon_p} = M \left(\bar{H} - \frac{3}{2}c \right) + \frac{3}{2}c \quad (5.90)$$

Como (5.90) deve valer para qualquer valor de M dentro dos limites já comentados, os valores de c e $\bar{H}$ devem ser:

$$c = \frac{2}{3}H \quad \text{e} \quad \bar{H} = \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_p} = H \quad (5.91)$$

Substituindo-se os valores das expressões (5.91) em (5.81) e lembrando-se que a condição de consistência deve ser nula, chega-se a:

$$3\bar{s}_{ij}\check{\sigma}_{ij} - 6\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}\bar{H}(1-M)d\lambda - 4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}M d\lambda = 0 \quad (5.92)$$

Substituindo-se em (5.92) o valor de $\bar{s}_{ij}\bar{s}_{ij}$ em termos de $\bar{\sigma}_e^2$, isolado de (5.57), obtém-se:

$$3\bar{s}_{ij}\check{\sigma}_{ij} - 4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}(1-M)d\lambda - 4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}M d\lambda = 0 \quad (5.93)$$

Com isso chega-se a:

$$3\bar{s}_{ij}\check{\sigma}_{ij} = 4\bar{\sigma}_e^2 d\lambda \bar{H} \quad (5.94)$$

Logo:

$$d\lambda = \frac{3\bar{s}_{ij}\check{\sigma}_{ij}}{4\bar{\sigma}_e^2\bar{H}} \quad (5.95)$$

Substituindo-se o valor de $d\lambda$ (5.95) e o valor da derivada do potencial plástico, dado por (5.58), na expressão (5.10) tem-se:

$$\check{\epsilon}_{ij}^p = \frac{9}{4} \frac{\bar{s}_{kl}\check{\sigma}_{kl}}{\bar{\sigma}_e^2\bar{H}} \bar{s}_{ij} \quad (5.96)$$

Pode-se relacionar o tensor das deformações plásticas com o tensor das deformações totais, substituindo-se em (5.96) a relação constitutiva da elasticidade. Assim chega-se a:

$$\check{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{kl}\check{\epsilon}_{kl}}{\left(1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}\right) \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} \quad (5.97)$$

Para o estado plano de deformação, a expressão (5.96) pode ser escrita como:

$$\check{\epsilon}_{ij}^p = \frac{9}{4} \frac{\bar{s}_{kl}\check{\sigma}_{kl} + \bar{s}_{33}\check{\sigma}_{33}}{\bar{\sigma}_e^2\bar{H}} \bar{s}_{ij} \quad (5.98)$$

Cabe notar que as componentes das deformações plásticas na direção 3 são compensadas por deformações elásticas contrárias, mantendo-se nula a deformação total, que é a condição para que se tenha o estado plano de deformação. Este fato gera tensões residuais naquela direção.

Tomando-se a expressão (5.12), substituindo-se C_{ijkl} , dado por (5.59), e o valor de $\check{\epsilon}_{ij}^p$, dado por (5.10), chega-se a:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu \left(\tilde{\epsilon}_{ij} - \tilde{\epsilon}_{ij}^p + \frac{\nu}{1-2\nu} (\tilde{\epsilon}_{kk} - \tilde{\epsilon}_{kk}^p) \delta_{ij} \right) \quad (5.99)$$

Multiplicando-se ambos os membros por $\bar{s}_{ij}$, e lembrando-se de (5.79), a expressão (5.99) fica:

$$\bar{s}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu \left(\tilde{\epsilon}_{ij} \bar{s}_{ij} - \tilde{\epsilon}_{ij}^p \bar{s}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \tilde{\epsilon}_{kk} \bar{s}_{ij} \delta_{ij} \right) \quad (5.100)$$

Limitando-se os índices i e j de (5.100) a 2 tem-se:

$$\bar{s}_{ij} \tilde{\sigma}_{ij} = 2\mu \left(\tilde{\epsilon}_{ij} \bar{s}_{ij} - \tilde{\epsilon}_{ij}^p \bar{s}_{ij} - \frac{\nu}{1-2\nu} \tilde{\epsilon}_{kk} \bar{s}_{33} \right) \quad (5.101)$$

Se for considerado o estado plano de tensões tem-se:

$$\tilde{\sigma}_{33} = 0 = \tilde{\epsilon}_{33} - \tilde{\epsilon}_{33}^p + \frac{\nu}{1-2\nu} \tilde{\epsilon}_{kk} \quad (5.102)$$

Logo:

$$\frac{\nu}{1-2\nu} \tilde{\epsilon}_{kk} = \tilde{\epsilon}_{33}^p - \tilde{\epsilon}_{33} \quad (5.103)$$

Substituindo-se o valor de $\tilde{\epsilon}_{kk}$, dado por (5.103), em (5.101) chega-se a:

$$\bar{s}_{kl} \tilde{\sigma}_{kl} = 2\mu (\bar{s}_{kl} \tilde{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \tilde{\epsilon}_{33} - \bar{s}_{kl} \tilde{\epsilon}_{kl}^p - \bar{s}_{33} \tilde{\epsilon}_{33}^p) \quad (k,l=1,2) \quad (5.104)$$

Ou, escrevendo-se os termos negativos de (5.104) com índices variando até 3, obtém-se:

$$\bar{s}_{kl} \tilde{\sigma}_{kl} = 2\mu (\bar{s}_{kl} \tilde{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \tilde{\epsilon}_{33} - \bar{s}_{mn} \tilde{\epsilon}_{mn}^p) \quad (k,l=1,2 \text{ m,n}=1,2,3) \quad (5.105)$$

Substituindo-se o valor obtido de (5.105) em (5.96) chega-se a:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{kl} \tilde{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \tilde{\epsilon}_{33}}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} - \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{mn} \tilde{\epsilon}_{mn}^p}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} \quad (k,l=1,2 \text{ i,j,m,n}=1,2,3) \quad (5.106)$$

A expressão (5.106) pode ser escrita como:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{kl} \tilde{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33} \tilde{\epsilon}_{33}}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} - \frac{18\mu}{4} \frac{\bar{s}_{mn} \bar{s}_{mn} \tilde{\epsilon}_{ij}^p}{\bar{H} \bar{\sigma}_e^2} \quad (k,l=1,2 \text{ i,j,m,n}=1,2,3) \quad (5.107)$$

Substituindo-se o valor de $\bar{s}_{mn}\bar{s}_{mn}$ pelo obtido de (5.57) e agrupando-se os termos em função de $\check{\epsilon}_{ij}^p$ chega-se facilmente a:

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{kl}\check{\epsilon}_{kl} + \bar{s}_{33}\check{\epsilon}_{33}}{\left(1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}\right)\bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} \quad (i,j=1,2,3 \text{ } k,l=1,2) \quad (5.108)$$

6-Equação integral de placas segundo a teoria clássica

6.1-Introdução

Para a aplicação do método dos elementos de contorno, as equações diferenciais de flexão de placas devem ser transformadas em equações integrais. Para tal, a técnica dos resíduos ponderados é empregada.

Todos os índices neste capítulo variam de 1 até 2, a menos que se informe o contrário.

6.1-Técnica dos resíduos ponderados

Seja a equação diferencial de flexão de placas dada na forma:

$$Q_{j,j} + g_3 = 0 \quad (6.1)$$

Aplicando-se a técnica dos resíduos ponderados e utilizando-se a solução fundamental de placas como função ponderadora obtém-se a expressão:

$$\int_{\Omega} (Q_{j,j} + g_3) u_3^* d\Omega = 0 \quad (6.2)$$

Separando-se a expressão (6.2) em duas integrais, chega-se a:

$$\int_{\Omega} u_3^* Q_{j,j} d\Omega + \int_{\Omega} g_3 u_3^* d\Omega = 0 \quad (6.3)$$

Tomando-se o primeiro membro de (6.3) e integrando-se por partes uma primeira vez, chega-se a:

$$\int_{\Omega} u_3^* Q_{j,j} d\Omega = \int_{\Gamma} u_3^* Q_j n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{3,j}^* Q_j d\Omega \quad (6.4)$$

Mas sabe-se que:

$$Q_i = M_{ki,k} \quad (6.5)$$

Substituindo-se o valor de Q_j , de (6.5) e integrando-se por partes a integral em Ω do segundo membro de (6.4), obtém-se:

$$-\int_{\Omega} u_{3,j}^* M_{jk,k} d\Omega = -\int_{\Gamma} u_{3,j}^* M_{jk} \eta_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{3,jk}^* M_{jk} d\Omega \quad (6.6)$$

Sabe-se que:

$$M_{ij} = -D[(1-\nu)u_{3,ij} + \delta_{ij}u_{3,nn}] \quad (6.7)$$

Substituindo-se o valor do tensor de momentos de (6.7) na integral de domínio em (6.6) e arranjando-se adequadamente os índices, obtém-se:

$$\int_{\Omega} u_{3,jk}^* M_{jk} d\Omega = -D \int_{\Omega} u_{3,jk}^* u_{3,jk} (1-\nu) + \delta_{jk} u_{3,jk}^* u_{3,nn} d\Omega \quad (6.8)$$

Repetindo-se o procedimento de integração por partes com a integral de domínio do segundo membro de (6.8) chega-se a:

$$\begin{aligned} -D \int_{\Omega} u_{3,jk}^* u_{3,jk} (1-\nu) + \delta_{jk} u_{3,jk}^* u_{3,nn} d\Omega &= -D \int_{\Gamma} u_{3,jk}^* u_{3,j} \eta_k (1-\nu) + \delta_{jk} u_{3,jk}^* u_{3,n} \eta_n d\Gamma + \\ &+ D \int_{\Omega} u_{3,jkk}^* u_{3,j} (1-\nu) + \delta_{jk} u_{3,jkn}^* u_{3,n} d\Omega \end{aligned} \quad (6.9)$$

Reconhecendo-se em (6.9) os termos de (6.5) e de (6.7), pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} u_{3,jk}^* M_{jk} d\Omega = \int_{\Gamma} u_{3,j}^* M_{jk}^* \eta_k d\Gamma - \int_{\Omega} u_{3,j}^* Q_j^* d\Omega \quad (6.10)$$

Novamente integrando por partes, tem-se:

$$-\int_{\Omega} u_{3,j}^* Q_j^* d\Omega = -\int_{\Gamma} u_3 Q_j^* \eta_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_3 Q_{j,j}^* d\Omega \quad (6.11)$$

Substituindo-se as expressões (6.4) e (6.11) em (6.3) e lembrando que $Q_{j,j}^*$ representa o delta de Dirac, tem-se que:

$$u_3 = \int_{\Gamma} u_3^* Q_j \eta_j d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{3,j}^* M_{jk} \eta_k d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{3,j}^* M_{jk}^* \eta_k d\Gamma - \int_{\Gamma} u_3 Q_j^* \eta_j d\Gamma + \int_{\Omega} g_3 u_3^* d\Omega \quad (6.12)$$

A integral envolvendo momentos fundamentais M_{ij}^* pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} u_{3,j}^* M_{jk}^* \eta_k d\Gamma = \int_{\Gamma} \theta_{\eta} M_{\eta\eta}^* + \theta_s M_{\eta s}^* d\Gamma \quad (6.13)$$

Integrando-se por partes a parcela que envolve o giro na direção tangente, tem-se:

$$\int_{\Gamma} \theta_s M_{\eta s}^* d\Gamma = M_{\eta s}^* u_3 \Big|_{\Gamma_i}^{\Gamma_f} - \int_{\Gamma} u_3 \frac{\partial M_{\eta s}^*}{\partial s} d\Gamma \quad (6.14)$$

Para placas com cantos no contorno, o produto do momento volvente fundamental com a deflexão resulta nas reações de cantos R_c . Caso contrario, esse termo se anula. A integral envolvendo a derivada do momento volvente pode ser adicionada àquela que envolve a cortante fundamental, resultando na cortante equivalente. O mesmo procedimento pode ser feito para a integral do momento incógnito, resultando na seguinte expressão:

$$u_3 = \int_{\Gamma} u_3^* V_{\eta} - \theta_{\eta}^* M_{\eta} d\Gamma - \int_{\Gamma} u_3 V_{\eta}^* - \theta_{\eta} M_{\eta}^* d\Gamma + \sum (R_c u_3^* - R_c^* u_3) + \int_{\Omega} g_3 u_3^* d\Omega \quad (6.15)$$

Tem-se, assim, a equação integral que relaciona as deflexões e rotações do contorno com a deflexão interna.

6.2-Carregamento de domínio

A integral que representa o carregamento de domínio na placa pode ser transformada em uma integral de contorno assumindo-se que o carregamento g_3 tenha uma variação quadrática no domínio da placa, ou seja:

$$g_3(X) = \alpha_{vl} r^2 r_{,v} r_{,l} + A_v r r_{,v} + b_3 \quad (6.16)$$

Substituindo-se o valor de g_3 na integral de domínio de (6.15), obtém-se:

$$\int_{\Omega} g_3 u_3^* d\Omega = \int_{\Omega} (\alpha_{vl} r^2 r_{,v} r_{,l} + A_v r r_{,v} + b_3) u_3^* d\Omega \quad (6.17)$$

Escrevendo-se a diferencial de área, $d\Omega$, em coordenadas cilíndricas tem-se:

$$d\Omega = r \cdot dr \cdot d\theta \quad (6.18)$$

Sendo que:

$$\left. \begin{aligned} d\theta &= \frac{d\Gamma \cos \beta}{R} \\ \cos \beta &= r_t \eta_t \end{aligned} \right\} d\theta = \frac{d\Gamma r_t \eta_t}{r} \quad (6.19)$$

Substituindo-se (6.18) e (6.19) em (6.17) e efetuando-se a integração em $\mathbf{r}$ chega-se a:

$$\int_{\Omega} g_3 u_3^* d\Omega = \frac{\alpha_{vl}}{48\pi D} \int_{\Gamma} r_v r_d r_i \eta_i r^5 \left(\ln r - \frac{2}{3} \right) d\Gamma + \frac{A_v}{40\pi D} \int_{\Gamma} r_v r_d \eta_i r^4 \left(\ln r - \frac{7}{10} \right) d\Gamma + \frac{b_3}{32\pi D} \int_{\Gamma} r_d \eta_i r^3 \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) d\Gamma \quad (6.20)$$

Caso o carregamento g_3 possa ser considerado quadrático em todo o domínio, então a integral (6.20) pode ser avaliada sobre o contorno do problema. Caso contrario, pode-se dividir o domínio em células onde o carregamento possa ser assumido como quadrático. Neste caso a integral (6.20) deverá ser avaliada sobre o contorno de cada célula.

Para a aproximação linear do carregamento, basta tomar α_{vl} como identicamente nulo.

6.3-Deflexão de pontos no contorno

A equação (6.15) pode ser modificada para representar a deflexão de pontos no contorno. Cabe lembrar que neste caso o acréscimo da região Ω_ϵ implica na perda de um canto e no surgimento de dois novos, C_1 e C_2 , conforme é mostrado na Figura 6.5.

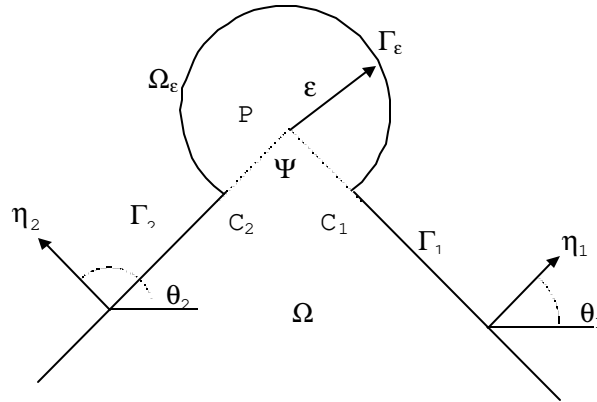


Figura 6.5 - Acréscimo de um domínio infinitesimal

Com o acréscimo de Ω_ϵ (6.15) torna-se:

$$\begin{aligned} u_3 = & \int_{\Gamma-\Psi} u_3^* V_\eta - \theta_\eta^* M_\eta d\Gamma + \int_{\Gamma_\epsilon} u_3^* V_\eta - \theta_\eta^* M_\eta d\Gamma - \int_{\Gamma-\Psi} u_3 V_\eta^* - \theta_\eta M_\eta^* d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma_\epsilon} u_3 V_\eta^* - \theta_\eta M_\eta^* d\Gamma + \sum (R_c u_3^* - R_c^* u_3) + R_{c_1} u_3^* - R_c^* u_{3c_1} + R_{c_2} u_3^* - R_c^* u_{3c_2} \\ & + \int_{\Omega} g_3 u_3^* d\Omega + \int_{\Omega_\epsilon} g_3 u_3^* d\Omega \end{aligned} \quad (6.21)$$

Pode-se mostrar que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ as contribuições dos cantos C_1 e C_2 tendem a zero. As demais integrais em Γ_ε também se anulam, exceto:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u_3 V_\eta^* - \theta_\eta M_\eta^* d\Gamma = -u_3 \frac{\gamma}{2\pi} \quad (6.22)$$

Sendo γ arco descrito pelo contorno Γ_ε . Com isso chega-se a:

$$K \cdot u_3 = \int_{\Gamma} u_3^* V_\eta - \theta_\eta^* M_\eta d\Gamma - \int_{\Gamma} u_3 V_\eta^* - \theta_\eta M_\eta^* d\Gamma + \sum (R_c u_3^* - R_c^* u_3) + \int_{\Omega} g_3 u_3^* d\Omega \quad (6.23)$$

A constante K é dada por:

$$K = 1 - \frac{\gamma}{2\pi} \quad (6.24)$$

Quando γ tende a 2π , K tende a zero, o que caracteriza o ponto externo. Para pontos no interior do corpo o arco γ é nulo e K vale a unidade.

De posse da equação (6.23) segue-se com a discretização do contorno e do domínio.

6.4-Equações algébricas

Depois de discretizar a placa em estudo, procede-se a montagem do sistema de equações algébricas que relacionam as deflexões, cortantes, giros e momentos no contorno. Para cada nó do contorno são conhecidas duas grandezas enquanto as outras duas permanecem incógnitas.

Ainda há o problema das reações de canto. Além das incógnitas de esforços e deslocamentos deve-se considerar uma força incógnita por canto da placa. Isso dificulta a implementação do método, uma vez que o número de incógnitas não está diretamente relacionado ao número de nós. No entanto, pode-se assumir que estas reações de canto são nulas sem prejuízo da acuidade dos resultados, eliminando esta variável do problema [Paiva 1987].

Uma outra dificuldade na implementação do método dos elementos de contorno para o problema de flexão de placas finas é que há apenas uma equação relacionando as grandezas do contorno. No entanto há duas incógnitas por nó, logo não é suficiente montar-se uma equação por nó.

Este problema pode ser resolvido criando-se uma segunda equação que relacione o giro no contorno com as demais grandezas. Esta equação é obtida derivando-se (6.15) em relação a um sistema de coordenadas com origem no ponto de colocação.

Uma estratégia mais simples é tomar-se um segundo conjunto de pontos de colocação localizados fora do domínio. Então, com os N pontos de colocação sobre os nós e os outros N pontos externos, procede-se a montagem da $2N$ equações do problema. Com isso obtém-se um sistema de equações da forma:

$$\begin{pmatrix} H_i^u & H_i^\theta \\ H_e^u & H_e^\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ \theta_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_i^u & G_i^\theta \\ G_e^u & G_e^\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_\eta \\ M_\eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_i \\ B_e \end{pmatrix} \quad (6.25)$$

Sendo que o índice i corresponde à equação gerada a partir de um ponto de colocação sobre o contorno e o índice e , àquela gerada com um ponto externo. Os demais valores são:

$$H_k^u = \int_{\Gamma_e} V_\eta^* \phi_k(\Gamma_e) d\Gamma_e \quad (6.26)$$

$$H_k^\theta = - \int_{\Gamma_e} M_\eta^* \phi_k(\Gamma_e) d\Gamma_e \quad (6.27)$$

$$G_k^u = \int_{\Gamma_e} u_3^* \phi_k(\Gamma_e) d\Gamma_e \quad (6.28)$$

$$G_k^\theta = - \int_{\Gamma_e} \theta_\eta^* \phi_k(\Gamma_e) d\Gamma_e \quad (6.29)$$

Nas expressões de (6.26) a (6.29) o índice k varia conforme a função de interpolação adotada, ou seja, de um até dois para funções lineares e de um até três para funções quadráticas.

Os termos B_i e B_e representam as contribuições das cargas distribuídas sobre a placa. Estes podem ser calculados sobre todo o domínio ou sobre células, conforme foi explicado no Item 6.2.

No caso de haver nós duplos as contribuições devido às reações de canto fundamentais e do fator K devem ser distribuídos adequadamente entre os nós extremos do elemento que contém o nó duplo.

6.5 Determinação das integrais H_k^u , H_k^θ , G_k^u e G_k^θ

As integrais de (6.26) a (6.29) podem ser avaliadas numericamente. O processo mais comum para isso é a quadratura gaussiana. As tabelas de pontos para integração disponíveis na literatura normalmente cobrem o intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$, por isso é feita uma mudança de variáveis. As expressões de (6.26) a (6.29) tornam-se:

$$H_k^u = \int_{-1}^1 V_\eta^* \phi_k(\zeta) J(\xi) d\zeta \quad (6.30)$$

$$H_k^\theta = - \int_{-1}^1 M_\eta^* \phi_k(\zeta) J(\xi) d\zeta \quad (6.31)$$

$$G_k^u = \int_{-1}^1 u_3^* \phi_k(\zeta) J(\xi) d\zeta \quad (6.32)$$

$$G_k^\theta = - \int_{-1}^1 \theta_\eta^* \phi_k(\zeta) J(\xi) d\zeta \quad (6.33)$$

O termo $J(\xi)$ é o jacobiano da transformação que, para o elemento linear, vale metade do comprimento deste.

Para o elemento quadrático tem-se:

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma_e}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (6.34)$$

Sendo:

$$\frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} x_i \quad \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} y_i \quad (i=1..3) \quad (6.35)$$

As expressões de (6.30) até (6.33) não podem ser usadas quando o ponto de colocação estiver sobre o elemento. Nesta situação elas produziriam um resultado inconsistente devido à singularidade dos núcleos envolvidos, devendo-se recorrer a expressões analíticas.

6.5.1-Expressões analíticas

Integrando-se analiticamente as expressões de (6.26) a (6.29) com funções de interpolação lineares e o ponto de colocação sobre o primeiro nó chega-se a:

$$H_k^u = 0 \quad (6.36)$$

$$H_1^\theta = \frac{-\ell}{16\pi} [(1+\nu)(3-2\ln(\ell)) - 2\nu] \quad (6.37)$$

$$H_2^\theta = \frac{-\ell}{16\pi} [(1+\nu)(1-2\ln(\ell)) - 2\nu] \quad (6.38)$$

$$G_1^u = \frac{\ell^3}{96\pi D} \left(\ln(\ell) - \frac{13}{12} \right) \quad (6.39)$$

$$G_2^u = \frac{\ell^3}{32\pi D} \left(\ln(\ell) - \frac{3}{4} \right) \quad (6.40)$$

$$G_k^\theta = 0 \quad (6.41)$$

Para o ponto de colocação no segundo nó têm-se as seguintes expressões:

$$H_k^u = 0 \quad (6.42)$$

$$H_1^\theta = \frac{-\ell}{16\pi} [(1+\nu)(1-2\ln(\ell)) - 2\nu] \quad (6.43)$$

$$H_2^\theta = \frac{-\ell}{16\pi} [(1+\nu)(3-2\ln(\ell)) - 2\nu] \quad (6.44)$$

$$G_1^u = \frac{\ell^3}{32\pi D} \left(\ln(\ell) - \frac{3}{4} \right) \quad (6.45)$$

$$G_2^u = \frac{\ell^3}{96\pi D} \left(\ln(\ell) - \frac{13}{12} \right) \quad (6.46)$$

$$G_k^\theta = 0 \quad (6.47)$$

7-Formulação do MEC para Meios Elasto-plásticos.

7.1-Introdução:

Neste capítulo, a técnica dos resíduos ponderados é empregada para obtenção da equação integral do problema elasto-plástico bidimensional.

Nas expressões deste capítulo os índices variam até dois, a menos que se informe o contrário.

7.2-Formulação para Meios Elasto-plásticos:

A formulação plástica deve ser tratada em termos de incrementos de tensão e deformação, uma vez que os problemas elasto-plásticos são dependentes do histórico do carregamento. Assim, a equação de equilíbrio das tensões deve ser escrita na forma:

$$\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \quad (7.1)$$

O ponto significa que se trata de uma variação das grandezas envolvidas. Adotando-se a solução do problema de Kelvin como função ponderadora, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} (\bar{\sigma}_{ij,j} + \bar{b}_i) u_{ki}^* d\Omega = 0 \quad (7.2)$$

Ou, arranjando-se os termos para uma forma mais adequada tem-se:

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\sigma}_{ij} u_{kj}^*) - \bar{\sigma}_{ij} u_{ki,j}^* \right] d\Omega + \int_{\Omega} \bar{b}_i u_{ki}^* d\Omega = 0 \quad (7.3)$$

Aplicando-se o teorema da divergência ao primeiro termo da primeira integral, tem-se:

$$\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{ij} u_{ki}^* \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{ij} u_{ki,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} \bar{b}_i u_{ki}^* d\Omega = 0 \quad (7.4)$$

Mas sabe-se que:

$$p_i = \sigma_{ij} \eta_j \quad (7.5)$$

Arranjando-se adequadamente os índices de (7.4) e usando-se a relação (7.5), chega-se a:

$$\int_{\Gamma} \tilde{p}_i u_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \tilde{b}_i u_{ki}^* d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega \quad (7.6)$$

A integral do segundo membro pode ser desenvolvida substituindo-se o valor de $\tilde{\sigma}_{ij}$ por:

$$\sigma_{ij} = 2\mu(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) + \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^p) \quad (7.7)$$

Assim chega-se a:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} 2\mu \left(\tilde{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_{mm} \right) \varepsilon_{kij}^* d\Omega - \int_{\Omega} 2\mu \left(\tilde{\varepsilon}_{ij}^p + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_{mm}^p \right) \varepsilon_{kij}^* d\Omega \quad (7.8)$$

Arranjando-se os índices de maneira adequada, pode-se escrever que:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} 2\mu \left(\varepsilon_{kij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kmm}^* \right) \tilde{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} 2\mu \left(\varepsilon_{kij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kmm}^* \right) \tilde{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.9)$$

logo:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.10)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.11)$$

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{kij}^* \tilde{u}_i) - \sigma_{kij,j}^* \tilde{u}_i \right] d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.12)$$

Aplicando-se novamente o teorema da divergência e lembrando que a solução fundamental do problema corresponde a um delta de Dirac, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_{ki} \tilde{u}_i d\Gamma + \tilde{u}_k - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\varepsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.13)$$

Portanto, a equação integral terá a forma:

$$\tilde{u}_k = \int_{\Gamma} \tilde{p}_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \tilde{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \tilde{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.14)$$

A equação (7.14) relaciona os incrementos de forças e deslocamentos do contorno e os incrementos de deformações plásticas do domínio com o incremento de deslocamento de um ponto do domínio. Caso se deseja calcular o incremento de deslocamento de um ponto sobre o contorno, as integrais singulares de (7.14) devem ser avaliadas como um valor principal de Cauchy. Assim (7.14) torna-se

$$c_{ki} \tilde{u}_i = \int_{\Gamma} \tilde{p}_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \tilde{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \tilde{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.15)$$

O tensor c_{ik} vale $1/2\delta_{ik}$ para pontos em uma região suave do contorno, zero para pontos externos e a unidade para pontos internos ao domínio. A última integral, que considera o efeito da plastificação do meio, possui um núcleo singular. Este núcleo apresenta algumas alterações para os estados planos de tensão e deformação, dado por:

$$\sigma_{kij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i} - K\delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (7.16)$$

A constante K vale, respectivamente, para os estados planos de tensão e deformação:

$$K = 1 \quad \text{e} \quad K = \frac{1}{1-2\nu} \quad (7.17)$$

Deve-se salientar ainda que para o estado plano de tensão deve-se usar o coeficiente de Poisson efetivo.

O cálculo da última integral de (7.15) pode ser feito com uso de células de domínio. Devido ao fato do núcleo (7.16) apresentar uma singularidade forte, as integrais destas células deverão receber um tratamento especial, que será apresentado mais adiante.

Aplicando-se à expressão (7.15) a discretização do método dos elementos de contorno, pode-se montar um sistema de equações do tipo:

$$[H]\{\tilde{U}\} = [G]\{\tilde{P}\} + \{\tilde{B}\} + \{\tilde{\Sigma}\} \quad (7.18)$$

Todos os termos de (7.18) têm seus valores dados pelas integrais sobre os elementos de contorno e células de domínio. O vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$ dá a influência das deformações plásticas nos deslocamentos e forças de contorno. Caso não haja plastificação do meio, $\{\tilde{\Sigma}\}$ será identicamente nulo e o sistema representará um problema elástico.

Após a imposição das condições de contorno, o sistema de equações assume a forma:

$$[A]\{\tilde{X}\} = \{\tilde{F}\} + \{\tilde{\Sigma}\} \quad (7.19)$$

As deformações plásticas envolvidas na formulação são, a princípio, desconhecias. Assim assume-se inicialmente um valor arbitrário, em geral o mesmo do passo anterior ou zero, que é corrigido com base nos novos deslocamentos e forças calculados. Este processo é repetido até se atingir uma estabilização dos valores obtidos.

A matriz $[A]$ não sofre alteração durante o processo de cálculo e o vetor $\{\tilde{F}\}$ define o **passo de carga**. Assim, devem-se fazer atualizações apenas no vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$, para cada iteração do processo.

7.3-Redução do Carregamento:

Os problemas elasto-plásticos podem ou não apresentar plastificação desde o início do carregamento. Assim sendo, deve-se determinar o ponto em que passam a existir deformações plásticas no corpo em estudo. Isso é feito resolvendo-se o problema em regime elástico e verificando se, em algum ponto, o critério de escoamento adotado é atingido ou ultrapassado.

Adotando-se o critério de escoamento de Von Mises, o corpo estará se deformando em regime elasto-plástico quando em algum de seus pontos for respeitada a expressão a seguir:

$$J_2 - k^2 = 0 \quad (7.20)$$

Resolvendo-se o problema em regime elástico, a expressão anterior pode produzir um valor maior que zero. Neste caso, pode-se definir um fator de redução do carregamento, $\bar{\kappa}$. Este fator corresponde à fração do carregamento suportado em regime elástico, tendo seu valor dado por:

$$\bar{\kappa} = \frac{k}{\sqrt{J_2}} \quad (7.21)$$

Quando $\bar{\kappa}$ assume um valor unitário ou maior, significa que todo o carregamento foi suportado em regime elástico. Um valor nulo corresponde à inexistência de uma fase elástica, sendo todo carregamento suportado em fase plástica. Com isso tem-se que a fração elástica do vetor resposta é dada por:

$$\{X\}_e = \bar{\kappa}\{X\} \quad (7.22)$$

O restante do carregamento, correspondente à fração complementar de $\bar{\kappa}$, deve ser aplicado em pequenas parcelas chamadas **passos de carga**. Assumindo-se que os passos de carga são todos de mesmo tamanho, e em um número total de N , é fácil notar que:

$$\{\dot{F}\} = \{F\} \left(\frac{1 - \bar{\kappa}}{N} \right) \quad (7.23)$$

O vetor resposta do problema elasto-plástico será definido como:

$$\{X\} = \{X\}_e + \sum_{i=1}^N \{\dot{X}\}_i \quad (7.24)$$

7.4-Determinação do Vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$:

Para determinar o valor do vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$, a seguinte integral deve ser avaliada sobre as células do domínio:

$$\tilde{\Sigma}_k = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.25)$$

Esta avaliação pode ser feita por quadratura numérica, sobre o domínio das células ou sobre seu contorno. A avaliação sobre o domínio demanda um maior tempo computacional, além de necessitar de um tratamento especial para a singularidade do núcleo σ^* .

A integração sobre o contorno das células traz um ganho considerável de tempo computacional, no entanto deve-se efetuar algumas alterações no núcleo da integral. Neste caso particular tem-se a seguinte aproximação para as deformações plásticas no interior das células:

$$\epsilon_{ij}^p = A_{ijv} r r_{,v} + b_{ij}^0 \quad (7.26)$$

Os tensores A_{ijv} e b_{ij}^0 são formados pelas constantes que definem os planos usados para aproximar cada componente do tensor ϵ_{ij}^p nos pontos internos da célula. Efetuando-se a integração de (7.25) segundo a variável r , chega-se a [Foltran 1999]:

$$\tilde{\Sigma}_k = \int_{\Gamma_c} R_{,i} \eta_i \Psi_k d\Gamma \quad (7.27)$$

$$\Psi_k = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \left[(1-2\nu) (\delta_{jk} R_{,i} + \delta_{ik} R_{,j} - K \delta_{ij} R_{,k}) + 2 R_{,i} R_{,j} R_{,k} \right] \left(A_{ijv} \frac{R}{2} R_{,v} + b_{ij}^0 \right) \quad (7.28)$$

A integral (7.27) não apresenta problemas com singularidades, pois quando o ponto de colocação está sobre um dos lados da célula o produto $R_i \eta_i$ é nulo, dispensando qualquer tipo de tratamento especial. No entanto deve-se utilizar algum algoritmo para quase-singularidade caso o ponto de colocação esteja muito próximo a um dos lados da célula [Foltran 1999].

7.5-Determinação dos Incrementos de Deformações em Pontos Internos:

A equação integral para incrementos deformações em pontos internos pode ser obtida efetuando-se a derivada da expressão (7.14) e substituindo seu valor na relação entre a deformação e o deslocamento. A derivada das integrais sobre o contorno pode ser efetuada sob o sinal de integração, pois o ponto de colocação é interno, logo estas integrais não produzirão singularidades [Bui 1978] [Lee 1983]. A integral referente à força de massa apresenta uma singularidade fraca, por ser efetuada sobre o domínio, mas a diferenciação ainda pode ser feita sob o sinal da integral [Lee 1983].

Já a integral (7.25) apresenta uma singularidade forte e seu valor deve ser tomado no sentido do valor principal de Cauchy [Bui 1978]. Por este motivo, a derivada não pode ser feita diretamente sob o sinal da integral [Bui 1978] [Lee 1983].

Para resolver este problema, subtrai-se do domínio total uma porção infinitesimal ω em torno do ponto de colocação, logo:

$$\tilde{\Sigma}_k = \int_{\Omega-\omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\epsilon}_{ij}^p d\Omega + \int_{\omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (7.29)$$

A primeira integral pode agora ser diferenciada sob o sinal de integração e a segunda deve receber um tratamento especial. Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{k,h}(P) = & \lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{\Omega-\omega} \frac{\partial}{\partial P_h} \sigma_{kij}^*(X, P) \tilde{\epsilon}_{ij}^p(X) d\Omega(X) + \\ & + \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial P_h} \int_{\omega} \sigma_{kij}^*(X, P) \tilde{\epsilon}_{ij}^p(X) d\Omega(X) \end{aligned} \quad (7.30)$$

A expressão final para os incrementos de deformações em pontos internos será:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{ij}(P) = & - \int_{\Gamma} S_{kij}(X, P) \tilde{u}_k(X) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij}(X, P) \tilde{p}_k(X) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij}(X, P) \tilde{b}_k(X) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \sigma_{khij}^*(X, P) \tilde{\epsilon}_{kh}^p(X) d\Omega + k_1 \tilde{\epsilon}_{ij}^p(P) + k_2 \delta_{ij} \tilde{\epsilon}_{mm}^p(P) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Os núcleos S_{kij} e D_{kij} são os mesmos do problema elástico, disponíveis na literatura [Foltran 1999]. Os demais termos são:

$$\sigma_{k hij}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[2(1-2\nu)K\delta_{hk}r_{,i}r_{,j} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,h} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,h} + \right. \\ \left. + 2\nu(\delta_{jh}r_{,i}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,h} + \delta_{ijh}r_{,j}r_{,k} + \delta_{ijk}r_{,j}r_{,h}) + (1-2\nu)(\delta_{jk}\delta_{ih} + \delta_{ik}\delta_{jh} - K\delta_{ij}\delta_{hk}) \right] \quad (7.32)$$

$$k_1 = \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} \quad (7.33)$$

$$k_2 = \begin{cases} -\frac{1}{8(1-\nu)} & \text{EPD} \\ -\frac{1-4\nu}{8(1-\nu)} & \text{EPT} \end{cases} \quad (7.34)$$

A integral envolvendo o núcleo (7.32) apresenta singularidade forte, devendo receber tratamento adequado. Também é possível avaliar-se esta integral no contorno das células, assim tem-se:

$$\tilde{\Sigma}_{kh} = \int_{\Gamma_c} R_i \eta_i \Psi_{kh} d\Gamma \quad (7.35)$$

$$\Psi_{ij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[2(1-2\nu)K\delta_{hk}R_{,i}R_{,j} + 2\delta_{ij}R_{,k}R_{,h} - 8R_{,i}R_{,j}R_{,k}R_{,h} + \right. \\ \left. + 2\nu(\delta_{jh}R_{,i}R_{,k} + \delta_{jk}R_{,i}R_{,h} + \delta_{ih}R_{,j}R_{,k} + \delta_{ik}R_{,j}R_{,h}) + \right. \\ \left. + (1-2\nu)(\delta_{jk}\delta_{ih} + \delta_{ik}\delta_{jh} - K\delta_{ij}\delta_{hk}) \right] \cdot \left(A_{kh\nu}R_{,v} + b_{kh}^0 \frac{\ln R}{R} \right) \quad (7.36)$$

A integral de contorno de célula (7.35) apresenta singularidade forte, no entanto o produto $R_i \eta_i$ se anula quando o ponto de colocação está sobre o contorno da célula. Isso dispensa algum tratamento da singularidade, mas problemas de quase singularidade podem ocorrer. Um desenho adequado da malha de células faz-se necessário para evitar este tipo de problema. Se o ponto de colocação estiver no interior da célula, a formulação torna-se inválida, pois neste caso a integral deve ser tomada no sentido do valor principal de Cauchy.

7.6-Determinação dos Incrementos de Tensões em Pontos Internos:

Pode-se, a exemplo do que foi mostrado no item anterior, deduzir-se equações integrais para a determinação dos incrementos de tensões nos pontos internos do corpo. No entanto, uma forma alternativa de se obter estas tensões é utilizar a expressão (7.7)

As deformações plásticas podem ser obtidas a partir das deformações totais utilizando-se a expressão a seguir:

$$\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\bar{s}_{kl} \tilde{\epsilon}_{kl}}{\left(1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}\right) \bar{\sigma}_e^2} \bar{s}_{ij} \quad (i,j,k,l=1,2,3) \quad (7.37)$$

Deve-se salientar que para a relação constitutiva (7.7), v deve ser tomado segundo seu valor efetivo.

7.7-Determinação dos Incrementos de Tensões e Deformações em Pontos do Contorno:

A determinação dos incrementos de tensões e deformações no contorno pode ser feita mais facilmente em um sistema de coordenadas normais e tangenciais ao contorno. Assim tem-se que:

$$\tilde{\sigma}_{\eta\eta} = \tilde{p}_i \eta_i \quad (7.38)$$

$$\tilde{\sigma}_{\Gamma\eta} = \tilde{\sigma}_{\eta\Gamma} = \tilde{p}_i \Gamma_{,i} \quad (7.39)$$

η_i e $\Gamma_{,i}$ são versores normal e tangente ao contorno respectivamente.

É também possível determinar o incremento de deformação total na direção tangente ao contorno, derivando-se as funções de deslocamento, ou seja:

$$\tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} = \frac{\partial \tilde{u}_{\Gamma}}{\partial \Gamma} \quad (7.40)$$

Para se determinar as demais componentes dos tensores, é preciso que o tensor do incremento de deformações plásticas seja conhecido. Seu valor foi arbitrado no processo de cálculo dos deslocamentos e forças de contorno e este valor deve ser usado aqui. O incremento de tensão na direção tangente pode agora se determinado por:

$$\tilde{\sigma}_{\Gamma\Gamma} = \frac{1}{1-\nu} \left[\nu \tilde{\sigma}_{\eta\eta} + 2\mu (\tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} - \tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma}^p) - \frac{2\mu\nu}{1-\nu} \tilde{\epsilon}_{zz}^p \right] \quad (7.41)$$

$$\tilde{\sigma}_{\Gamma\Gamma} = 2\mu(1+\nu)(\tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} - \tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma}^p) + \nu \tilde{\sigma}_{\eta\eta} \quad (7.42)$$

Deve-se usar a expressão (7.41) para o estado plano de deformação e (7.42) para o estado plano de tensão.

Os incrementos de deformações nas demais direções são dados por:

$$\tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} = \tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma} = \frac{\tilde{\sigma}_{\Gamma\Gamma}}{2\mu} + \tilde{\epsilon}_{\Gamma\Gamma}^p \quad (7.43)$$

$$\tilde{\epsilon}_{\eta\eta} = \frac{1}{2\mu} \left[\tilde{\sigma}_{\eta\eta} - \frac{\nu}{1+\nu} (\tilde{\sigma}_{\eta\eta} + \tilde{\sigma}_{\Gamma\Gamma} + \tilde{\sigma}_z) \right] + \tilde{\epsilon}_{\eta\eta}^p \quad (7.44)$$

Em se tratando de um problema de estado plano de deformação, tem-se:

$$\tilde{\epsilon}_{zz} = 0 \quad (7.45)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = \nu (\tilde{\sigma}_{\Gamma\Gamma} + \tilde{\sigma}_{\eta\eta}) + 2\mu(1+\nu) \tilde{\epsilon}_{zz}^p \quad (7.46)$$

Para o estado plano de tensão valem as seguintes relações:

$$\tilde{\epsilon}_{zz} = \frac{-\nu}{2\mu(1+\nu)} (\tilde{\sigma}_{\Gamma\Gamma} + \tilde{\sigma}_{\eta\eta}) + \tilde{\epsilon}_{zz}^p \quad (7.47)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = 0 \quad (7.48)$$

O tensor do incremento de deformações plásticas, inicialmente arbitrado, pode agora ser determinado pela expressão (7.37). Com o novo valor de $\tilde{\epsilon}_{ij}^p$, recalculam-se os valores dos deslocamentos e forças de contorno, até obter-se uma convergência.

8-Integradores no tempo

8.1-Introdução

A análise dinâmica de uma estrutura pode ser feita, basicamente, por duas abordagens distintas; superposição modal ou integração direta no tempo. Na primeira abordagem, são identificados os modos próprios, ou naturais, de vibração da estrutura com suas respectivas frequências de oscilação. Estes são então superpostos de modo a obter uma resposta ao longo do tempo.

Na integração direta, adotada neste trabalho, o comportamento dinâmico da estrutura é analisado ao longo do tempo. As forças de inércia e amortecimento são equilibradas com as cargas aplicadas e as forças elásticas ao longo de pequenos passos de tempo.

Neste capítulo são descritos alguns algoritmos para se efetuar esta integração.

8.2-Integrador de Wilson θ

Seja $\ddot{U}_t$ a aceleração de um ponto material no instante t . Seja Δt um intervalo de tempo pequeno e θ um número maior que a unidade. Suponha-se ainda que a aceleração deste ponto material tenha uma variação linear na vizinhança do instante t , conforme ilustrado na Figura 8.1.

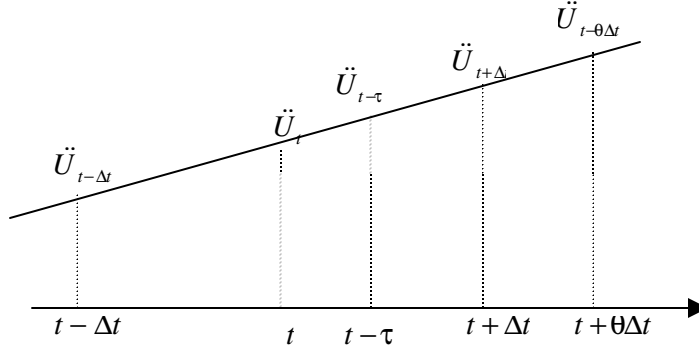


Figura 8.1 – Variação da aceleração.

Pode-se escrever a aceleração do ponto material em um instante $t + \tau$ como:

$$\ddot{U}_{t+\tau} = \ddot{U}_t + \left(\frac{\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t}{\theta\Delta t} \right) \tau \quad (8.1)$$

Integrando-se (8.1) em relação à variável τ , obtém-se a velocidade do ponto material como sendo:

$$\dot{U}_{t+\tau} = \tau \ddot{U}_t + \left(\frac{\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t}{\theta\Delta t} \right) \frac{\tau^2}{2} + \dot{U}_t \quad (8.2)$$

Integrando-se (8.2) novamente em relação à variável τ , obtém-se a posição do ponto material como sendo:

$$U_{t+\tau} = \frac{\tau^2}{2} \ddot{U}_t + \left(\frac{\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t}{\theta\Delta t} \right) \frac{\tau^3}{6} + \tau \dot{U}_t + U_t \quad (8.3)$$

Fazendo-se em (8.3) $\tau = \theta\Delta t$ chega-se a:

$$U_{t+\theta\Delta t} = \frac{(\theta\Delta t)^2}{2} \ddot{U}_t + \left(\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t \right) \frac{(\theta\Delta t)^2}{6} + \theta\Delta t \dot{U}_t + U_t \quad (8.4)$$

Isolando-se de (8.4) o valor de $\ddot{U}_{t+\theta\Delta t}$ obtém-se:

$$\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} (U_{t+\theta\Delta t} - U_t) - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{U}_t - 2\ddot{U}_t \quad (8.5)$$

Fazendo-se em (8.2) $\tau = \theta\Delta t$ chega-se a:

$$\dot{U}_{t+\theta\Delta t} = \theta\Delta t \ddot{U}_t + \left(\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t \right) \frac{\theta\Delta t}{2} + \dot{U}_t \quad (8.6)$$

Substituindo-se o valor da aceleração $\ddot{U}_{t+\theta\Delta t}$ de (8.5) em (8.6) chega-se a:

$$\dot{U}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t}(U_{t+\theta\Delta t} - U_t) - 2\dot{U}_t - \frac{\theta\Delta t}{2}\ddot{U}_t \quad (8.7)$$

A dinâmica de um sistema de pontos materiais pode ser descrita pela equação:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = P \quad (8.8)$$

Na equação gral do movimento (8.8), M é a matriz de massa do sistema, C a matriz de amortecimento e K é a matriz de rigidez. O vetor P representa as forças externas aplicadas ao sistema.

Escrevendo-se (8.8) para o instante $t + \theta\Delta t$, obtém-se:

$$M\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} + C\dot{U}_{t+\theta\Delta t} + KU_{t+\theta\Delta t} = P_{t+\theta\Delta t} \quad (8.9)$$

Substituindo-se em (8.9) os valores das acelerações e velocidades no instante $t + \theta\Delta t$ das expressões (8.7) e (8.5) e multiplicando-se por $(\theta\Delta t)^2$, chega-se a:

$$\begin{aligned} & [(\theta\Delta t)^2 K + 6M + 3\theta\Delta t C] U_{t+\theta\Delta t} = \\ & = (6M + 3\theta\Delta t C) U_t + (6\theta\Delta t M + 2(\theta\Delta t)^2 C) \dot{U}_t + (\theta\Delta t)^2 \left(2M + \frac{\theta\Delta t C}{2} \right) \ddot{U}_t + (\theta\Delta t)^2 P_{t+\theta\Delta t} \end{aligned} \quad (8.10)$$

As grandezas U_t , $\dot{U}_t$ e $\ddot{U}_t$ são supostamente conhecidas do instante anterior e o vetor de carregamento P pode ser determinado para qualquer tempo. Pode-se escrever (8.10) de uma forma mais simples como:

$$\hat{K} U_{t+\theta\Delta t} = \hat{P}_{t+\theta\Delta t} \quad (8.11)$$

Sendo que, em (8.11), $\hat{P}_{t+\theta\Delta t}$ é o segundo membro de (8.10) e a matriz $\hat{K}$ corresponde à matriz do primeiro membro que multiplica o vetor $U_{t+\theta\Delta t}$.

Fazendo-se em (8.1) $\tau = \Delta t$ obtém-se:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \ddot{U}_t + \left(\frac{\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t}{\theta\Delta t} \right) \Delta t \quad (8.12)$$

O termo entre parêntesis pode ser obtido de (8.4), isolando-se o mesmo. Assim chega-se a:

$$\frac{\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t}{\theta\Delta t} = \left[U_{t+\theta\Delta t} - U_t - \theta\Delta t\dot{U}_t - \frac{(\theta\Delta t)^2}{2}\ddot{U}_t \right] \frac{6}{(\theta\Delta t)^3} \quad (8.13)$$

Substituindo-se (8.13) em (8.12) obtém-se:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = (U_{t+\Delta t} - U_t) \frac{6}{(\theta^3\Delta t^2)} - \frac{6}{\theta^2\Delta t}\dot{U}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right)\ddot{U}_t \quad (8.14)$$

Tomando-se a expressão (8.2) com $\tau = \Delta t$ e $\theta = 1$, pode-se determinar o valor de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ como sendo:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + (\ddot{U}_{t+\Delta t} + \ddot{U}_t) \frac{\Delta t}{2} \quad (8.15)$$

Efetuando-se o mesmo procedimento em (8.3), obtém-se o valor de $U_{t+\Delta t}$ como sendo:

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t\dot{U}_t + (\ddot{U}_{t+\Delta t} + 2\ddot{U}_t) \frac{(\Delta t)^2}{6} \quad (8.16)$$

Pode-se agora estabelecer o algoritmo para o integrador Wilson θ . Para tal, seguem os passos:

1. Conhecidos os valores de U_0 , $\dot{U}_0$ e P_0 , determina-se o valor das acelerações no instante inicial pela equação:

$$M\ddot{U}_0 = P_0 - C\dot{U}_0 - KU_0 \quad (8.17)$$

2. Determina-se o valor de $U_{t+\theta\Delta t}$ resolvendo-se o sistema de equações (8.11).
3. Determina-se o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.14).
4. Determinam-se os valores de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ e $U_{t+\Delta t}$ com as expressões (8.15) e (8.16), respectivamente.
5. Retorna-se ao passo 2 para determinar os valores do próximo passo de tempo, até a conclusão da análise.

8.3-Integrador de Newmark

Se o deslocamento, U_t , e a velocidade, $\dot{U}_t$, de um ponto material no instante t forem conhecidos, então pode-se determinar sua posição e velocidade no instante $t + \Delta t$ pelas seguintes expressões [Geradin 1994]:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \int_t^{t+\Delta t} \ddot{U}(\tau) d\tau \quad (8.18)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - \tau) \ddot{U}(\tau) d\tau \quad (8.19)$$

Por aproximações em séries de potência da função da aceleração $\ddot{U}(\tau)$, pode-se escrever que:

$$\int_t^{t+\Delta t} \ddot{U}(\tau) d\tau \cong [(1-\gamma)\ddot{U}_t + \gamma\ddot{U}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (8.20)$$

$$\int_t^{t+\Delta t} (t + \Delta t - \tau) \ddot{U}(\tau) d\tau \cong \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_t + \beta \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (8.21)$$

Substituindo-se os valores aproximados das integrais (8.20) e (8.21) nas expressões (8.18) e (8.19) chega-se a:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + [(1-\gamma)\ddot{U}_t + \gamma\ddot{U}_{t+\Delta t}] \Delta t \quad (8.22)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_t + \beta \ddot{U}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (8.23)$$

Pode-se mostrar que, como visto em **Geradin 1994** o integrador de Newmark é incondicionalmente estável se:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha, \quad \beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad \text{para } \alpha \geq 0 \quad (8.24)$$

Tomando-se $\alpha = 0$ obtém-se uma simplificação das expressões (8.25) e (8.23) que se reduzem a:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + (\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t}) \frac{\Delta t}{2} \quad (8.25)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t \dot{U}_t + \left(\ddot{U}_t + \ddot{U}_{t+\Delta t} \right) \frac{\Delta t^2}{4} \quad (8.26)$$

Isolando-se de (8.26) o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$, chega-se a:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = (U_{t+\Delta t} - U_t) \frac{4}{\Delta t^2} - \frac{4}{\Delta t} \dot{U}_t - \ddot{U}_t \quad (8.27)$$

Substituindo-se o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$, obtido de (8.27), na expressão (8.25), chega-se a:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = (U_{t+\Delta t} - U_t) \frac{2}{\Delta t} - \dot{U}_t \quad (8.28)$$

Tomando-se a equação do movimento escrita para um instante $t + \Delta t$, tem-se:

$$M\ddot{U}_{t+\Delta t} + C\dot{U}_{t+\Delta t} + KU_{t+\Delta t} = P_{t+\Delta t} \quad (8.29)$$

Substituindo-se os valores da aceleração (8.27) e velocidade (8.28) na equação (8.29) e multiplicando-se por Δt^2 , obtém-se:

$$\begin{aligned} (\Delta t^2 K + 4M + 2\Delta t C)U_{t+\Delta t} &= \\ &= (4M + 2\Delta t C)U_t + (4\Delta t M + \Delta t^2 C)\dot{U}_t + \Delta t^2 M\ddot{U}_t + \Delta t^2 P_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (8.30)$$

O sistema (8.30) pode ser escrito de forma simplificada como:

$$\hat{K}U_{t+\Delta t} = \hat{P}_{t+\Delta t} \quad (8.31)$$

Sendo $\hat{P}_{t+\Delta t}$ o segundo membro da equação (8.30) e a matriz $\hat{K}$ é dada por:

$$\hat{K} = \Delta t^2 K + 4M + 2\Delta t C \quad (8.32)$$

1. Conhecidos os valores de U_0 , $\dot{U}_0$ e P_0 , determina-se o valor das acelerações no instante inicial pela equação (8.17).
2. Determina-se o valor de $U_{t+\Delta t}$ resolvendo-se o sistema de equações (8.31).
3. Determina-se o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.27).
4. Determina-se o valor de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.28).
5. Retorna-se ao passo 2 para determinar os valores do próximo passo de tempo, até a conclusão da análise.

8.4-Integrador de Houbolt

O integrador de Houbolt difere dos anteriores por depender de mais de um passo de tempo para a determinação dos valores do passo seguinte. Por esta razão é chamado de **integrador de passo múltiplo**. O método consiste em escrever a velocidade e a aceleração em um instante t como derivadas de um polinômio cúbico que interpola os deslocamentos em função do tempo [Bathe 1996, Houbolt 1950]. Assim tem-se que:

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2U_{t+\Delta t} - 5U_t + 4U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t}) \quad (8.33)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11U_{t+\Delta t} - 18U_t + 9U_{t-\Delta t} - 2U_{t-2\Delta t}) \quad (8.34)$$

Substituindo os valores das expressões (8.33) e (8.34) na equação do movimento (8.29) e multiplicando-se por Δt^2 , obtém-se:

$$\begin{aligned} (2M + 11\Delta t C + \Delta t^2 K)U_{t+\Delta t} = \\ = \Delta t^2 P_{t+\Delta t} + (5M + 3\Delta t C)U_t - \left(4M + \frac{3\Delta t}{2}C\right)U_{t-\Delta t} + \left(M + \frac{\Delta t}{3}C\right)U_{t-2\Delta t} \end{aligned} \quad (8.35)$$

A equação (8.35) pode ser escrita de modo compacto, como (8.31), sendo:

$$\hat{K} = 2M + 11\Delta t C + \Delta t^2 K \quad (8.36)$$

$$\hat{P}_{t+\Delta t} = \Delta t^2 P_{t+\Delta t} + (5M + 3\Delta t C)U_t - \left(4M + \frac{3\Delta t}{2}C\right)U_{t-\Delta t} + \left(M + \frac{\Delta t}{3}C\right)U_{t-2\Delta t} \quad (8.37)$$

Para iniciar o método de Houbolt é necessário conhecer-se o valor dos deslocamentos em instantes anteriores ao início da análise. Embora seja possível, com alguma manipulação algébrica, auto-iniciar o integrador [Houbolt 1950], o procedimento usual consiste em utilizar algum outro integrador para calcular os primeiros dois passos. Deste ponto em diante o integrador de Houbolt pode ser aplicado diretamente [Bathe 1996].

O algoritmo para o integrador de Houbolt é o seguinte:

1. Uma vez que as condições iniciais do problema sejam conhecidas, determinam-se os valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações nos primeiros dois passos por algum outro integrador.
2. Determina-se o valor de $U_{t+\Delta t}$ resolvendo-se o sistema de equações (8.35).

3. Determina-se o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.33).
4. Determina-se o valor de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.34).
5. Retorna-se ao passo 2 para determinar os valores do próximo passo de tempo, até a conclusão da análise.

8.5-Aplicação dos integradores ao MEC

No Método dos Elementos de Contorno, a inércia do corpo em análise pode ser levada em conta por uma integração no domínio. Isso é feito imaginando-se a inércia do corpo como um carregamento distribuído sobre o domínio. Assim tem-se que:

$$c_{ki}u_i = \int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* \ddot{u}_i \rho d\Omega \quad (8.38)$$

A discretização e posterior integração da última parcela da equação integral produz uma matriz de massa que leva em conta não somente o valor da aceleração nos nós de contorno, mas também nos pontos internos. Assim, há de se levar em conta um crescimento no número de incógnitas no problema. Escrito em notação matricial, a equação para o problema já discretizado e sem amortecimento assume a forma:

$$HU_t = GP_t - M\ddot{U}_t + F_t \quad (8.39)$$

Num instante inicial, onde são conhecidos os deslocamentos e as velocidades dos nós e pontos internos, assim como as forças de corpo e de superfície, as acelerações podem ser determinadas resolvendo-se o seguinte sistema:

$$M\ddot{U}_0 = GP_0 - HU_0 + F_0 \quad (8.40)$$

É importante notar que o sistema (8.39) envolve acelerações em pontos internos, *a priori* incógnitas. Isso fica mais evidente escrevendo-se o sistema (8.39) na forma:

$$\begin{pmatrix} H_c & 0 \\ H_d & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{tc} \\ U_{td} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_c & 0 \\ G_d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{tc} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{cc} & M_{cd} \\ M_{dc} & M_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U}_{tc} \\ \ddot{U}_{td} \end{pmatrix} + F_t \quad (8.41)$$

Em (8.41) os índices *c* e *d* representam os valores para pontos no contorno e no domínio, respectivamente.

8.5.1-Integrador Wilson θ

Escrevendo-se o sistema (8.39) para um instante $t + \theta\Delta t$, obtém-se:

$$HU_{t+\theta\Delta t} = GP_{t+\theta\Delta t} - M\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} + F_{t+\theta\Delta t} \quad (8.42)$$

Substituindo-se o valor da aceleração da expressão (8.5) no sistema (8.42) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[(\theta\Delta t)^2 H + 6M \right] U_{t+\theta\Delta t} = \\ & = (\theta\Delta t)^2 GP_{t+\theta\Delta t} + 6MU_t + 6\theta\Delta t M\dot{U}_t + 2(\theta\Delta t)^2 M\ddot{U}_t + (\theta\Delta t)^2 F_{t+\theta\Delta t} \end{aligned} \quad (8.43)$$

Ou, de forma simplificada:

$$\hat{H}U_{t+\theta\Delta t} = (\theta\Delta t)^2 GP_{t+\theta\Delta t} + M\hat{\dot{U}}_t + (\theta\Delta t)^2 F_{t+\theta\Delta t} \quad (8.44)$$

Sendo:

$$\hat{H} = (\theta\Delta t)^2 H + 6M \quad (8.45)$$

$$\hat{\dot{U}}_t = 6U_t + 6\theta\Delta t \dot{U}_t + 2(\theta\Delta t)^2 \ddot{U}_t \quad (8.46)$$

As matrizes do sistema (8.44) têm a mesma estrutura daquelas no sistema (8.41), envolvendo, portanto, incógnitas de domínio.

Deve-se notar que resolvendo-se o sistema (8.44), obtém-se os valores das forças de contorno incógnitas no instante $t + \theta\Delta t$. No entanto, serão necessários para o passo de tempo seguinte, os valores das forças no instante $t + \Delta t$. Estes valores deverão ser determinados a partir dos deslocamentos e acelerações no instante t . Isso pode ser feito resolvendo-se o sistema:

$$GP_t = HU_t - M\ddot{U}_t + F_t \quad (8.47)$$

Foi sugerido em **Araujo et al 1999** uma forma alternativa para a determinação das forças de contorno no instante $t + \Delta t$, dada pela expressão:

$$P_{t+\Delta t} = \frac{P_{t+\theta\Delta t}}{\theta} + \frac{\theta - 1}{\theta} P_t \quad (8.48)$$

Assim, o algoritmo do integrador Wilson θ para o MEC fica:

1. Conhecidos os deslocamentos, velocidades e forças dos nós de contorno, determinam-se as acelerações no instante inicial resolvendo-se o sistema (8.40).
2. Determina-se o valor de $U_{t+\theta\Delta t}$ resolvendo-se o sistema de equações (8.44).

3. Determina-se o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.14).
4. Determinam-se os valores de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ e $U_{t+\Delta t}$ com as expressões (8.15) e (8.16), respectivamente.
5. Determinam-se os valores das forças de contorno incógnitas no instante $t + \Delta t$, resolvendo-se o sistema (8.47) ou pela expressão (8.48).
6. Retorna-se ao passo 2 para determinar os valores do próximo passo de tempo, até a conclusão da análise.

8.5.2-Integrador de Newmark

Escrevendo-se o sistema (8.39) para um instante $t + \Delta t$, obtém-se:

$$HU_{t+\Delta t} = GP_{t+\Delta t} - M\ddot{U}_{t+\Delta t} + F_{t+\Delta t} \quad (8.49)$$

Substituindo-se o valor da aceleração da expressão (8.27) no sistema (8.49) obtém-se:

$$(\Delta t^2 H + 4M)U_{t+\Delta t} = \Delta t^2 GP_{t+\Delta t} + M(4U_t + 4\Delta t\dot{U}_t + \Delta t^2\ddot{U}_t) + \Delta t^2 F_{t+\Delta t} \quad (8.50)$$

Ou, de forma mais simples:

$$\hat{H}U_{t+\Delta t} = \Delta t^2 GP_{t+\Delta t} + M\hat{U}_t + \Delta t^2 F_{t+\Delta t} \quad (8.51)$$

Sendo:

$$\hat{H} = \Delta t^2 H + 4M \quad (8.52)$$

$$\hat{U}_t = 4U_t + 4\Delta t\dot{U}_t + \Delta t^2\ddot{U}_t \quad (8.53)$$

Novamente as matrizes do sistema (8.51) assumem a estrutura mostrada no sistema (8.41), que envolve incógnitas de domínio.

Portanto, o algoritmo do integrador de Newmark para o MEC segue os seguintes passos:

1. Conhecidos os deslocamentos, velocidades e forças dos nós de contorno, determinam-se as acelerações no instante inicial resolvendo-se o sistema (8.40).
2. Determina-se o valor de $U_{t+\Delta t}$ e as forças de contorno incógnitas resolvendo-se o sistema de equações (8.51).

3. Determina-se o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.27).
4. Determina-se o valor de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.28).
5. Retorna-se ao passo 2 para determinar os valores do próximo passo de tempo, até a conclusão da análise.

O integrador de Newmark apresenta uma maior simplicidade de implementação em relação ao integrador Wilson θ , pois a parte incógnita das forças de contorno é determinada diretamente no instante $t + \Delta t$.

8.5.3-Integrador de Houbolt

Substituindo-se em (8.49) o valor da aceleração dada por (8.33) e multiplicando-se por Δt^2 chega-se a:

$$(\Delta t^2 H + 2M)U_{t+\Delta t} = \Delta t^2 GP_{t+\Delta t} - M(-5U_t + 4U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t}) + \Delta t^2 F_{t+\Delta t} \quad (8.54)$$

Ou, de forma simplificada:

$$\hat{H}U_{t+\Delta t} = \Delta t^2 GP_{t+\Delta t} - M\hat{\dot{U}}_t + \Delta t^2 F_{t+\Delta t} \quad (8.55)$$

Sendo:

$$\hat{H} = \Delta t^2 H + 2M \quad (8.56)$$

$$\hat{\dot{U}}_t = -5U_t + 4U_{t-\Delta t} - U_{t-2\Delta t} \quad (8.57)$$

Mais uma vez as matrizes do sistema (8.55) assumem a estrutura mostrada no sistema (8.41), que envolve incógnitas de domínio.

Portanto, o algoritmo para o integrador de Houbolt é:

1. Uma vez que as condições iniciais do problema sejam conhecidas, determinam-se os valores dos deslocamentos, velocidades e acelerações nos primeiros dois passos por algum outro integrador.
2. Determina-se o valor de $U_{t+\Delta t}$ e as forças de contorno incógnitas resolvendo-se o sistema de equações (8.55).
3. Determina-se o valor de $\ddot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.33).
4. Determina-se o valor de $\dot{U}_{t+\Delta t}$ com a expressão (8.34).

5. Retorna-se ao passo 2 para determinar os valores do próximo passo de tempo, até a conclusão da análise.

8.6-Integrador de Wilson θ incremental

No tratamento de problemas não lineares, como a plasticidade ou instabilidade, é comum escreverem-se as equações em termos de incrementos de carregamentos e deslocamentos. Assim, subtraindo-se a expressão (8.39) da expressão (8.42), chega-se a:

$$H\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} = G\ddot{P}_{t+\theta\Delta t} - M\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} + \ddot{F}_{t+\theta\Delta t} \quad (8.58)$$

Os incrementos relacionam-se com os valores totais segundo as expressões:

$$\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} = U_{t+\theta\Delta t} - U_t \quad (8.59)$$

$$\dot{\ddot{U}}_{t+\theta\Delta t} = \dot{U}_{t+\theta\Delta t} - \dot{U}_t \quad (8.60)$$

$$\ddot{\ddot{U}}_{t+\theta\Delta t} = \ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{U}_t \quad (8.61)$$

$$\ddot{P}_{t+\theta\Delta t} = P_{t+\theta\Delta t} - P_t \quad (8.62)$$

$$\ddot{F}_{t+\theta\Delta t} = F_{t+\theta\Delta t} - F_t \quad (8.63)$$

Com (8.59), (8.61) e (8.5) chega-se a:

$$\ddot{\ddot{U}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\ddot{U}}_t - 3\ddot{\ddot{U}}_t \quad (8.64)$$

Analogamente, obtém-se o incremento de velocidade como sendo:

$$\dot{\ddot{U}}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} \ddot{U}_{t+\theta\Delta t} - 3\dot{\ddot{U}}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\ddot{U}}_t \quad (8.65)$$

Substituindo-se (8.64) em (8.58), chega-se a:

$$\begin{aligned} [(\theta\Delta t)^2 H + 6M] \ddot{U}_{t+\theta\Delta t} = \\ = (\theta\Delta t)^2 G\ddot{P}_{t+\theta\Delta t} + 6\theta\Delta t M\dot{\ddot{U}}_t + 3(\theta\Delta t)^2 M\ddot{\ddot{U}}_t + (\theta\Delta t)^2 \ddot{F}_{t+\theta\Delta t} \end{aligned} \quad (8.66)$$

Ou, de forma simplificada:

$$\hat{H}\ddot{U}_{t+\theta\Delta t} = (\theta\Delta t)^2 G\ddot{P}_{t+\theta\Delta t} + M\hat{\dot{\ddot{U}}}_t + (\theta\Delta t)^2 \ddot{F}_{t+\theta\Delta t} \quad (8.67)$$

Sendo:

$$\hat{H} = (\theta \Delta t)^2 H + 6M \quad (8.68)$$

$$\hat{\ddot{U}}_t = 6\theta \Delta t \dot{U}_t + 3(\theta \Delta t)^2 \ddot{U}_t \quad (8.69)$$

Aplicam-se as condições de contorno ao sistema (8.67), determinando-se, assim, os valores dos incrementos de forças e deslocamentos incógnitos. Deve-se então reverter os resultados para o tempo $t + \Delta t$. Os incrementos das forças de contorno podem ser calculados fazendo-se:

$$\check{P}_{t+\Delta t} = \frac{\check{P}_{t+\theta \Delta t}}{\theta} \quad (8.70)$$

Determinar-se os incrementos de deslocamento, velocidade e aceleração, é uma tarefa um pouco mais complexa. Os incrementos de aceleração são dados por:

$$\check{\ddot{U}}_{t+\Delta t} = \frac{6}{(\theta^3 \Delta t^2)} \check{U}_{t+\theta \Delta t} - \frac{6}{\theta^2 \Delta t} \dot{U}_t - \frac{3}{\theta} \ddot{U}_t \quad (8.71)$$

De posse dos incrementos de aceleração, pode-se então calcular os incrementos de velocidade e deslocamento no tempo $t + \Delta t$ com as expressões:

$$\check{\dot{U}}_{t+\Delta t} = \left(\check{\ddot{U}}_{t+\Delta t} + 2\ddot{U}_t \right) \frac{\Delta t}{2} \quad (8.72)$$

$$\check{U}_{t+\Delta t} = \Delta t \dot{U}_t + \left(\check{\dot{U}}_{t+\Delta t} + 3\dot{U}_t \right) \frac{(\Delta t)^2}{6} \quad (8.73)$$

Os incrementos são então acumulados aos totais dos passos anteriores e procede-se com o cálculo do passo de tempo seguinte, até a conclusão da análise.

9-Montagem do sistema de equações

9.1-Introdução

Neste capítulo descreve-se o processo de montagem do sistema de equações, combinando-se o estado plano de tensões com a flexão de placas finas, com o objetivo de tratar peças de paredes finas. A técnica das sub-regiões é utilizada para se compor a peça a ser analisada a partir dos problemas planos estudados até agora.

9.2-Macro-elementos

Define-se, neste trabalho, macro-elemento como sendo um elemento estrutural plano no qual ocorrem simultaneamente um estado plano de tensão e uma flexão de placa fina. Admite-se, também, que as tensões no macro-elemento, devidas ao seu comportamento de chapa, não alteram seu comportamento como placa e vice-versa.

Desta forma, o macro-elemento pode ser modelado utilizando-se as equações integrais de chapas e de placas. Na Figura 9.1 é mostrada uma peça de paredes finas decomposta em macro-elementos.

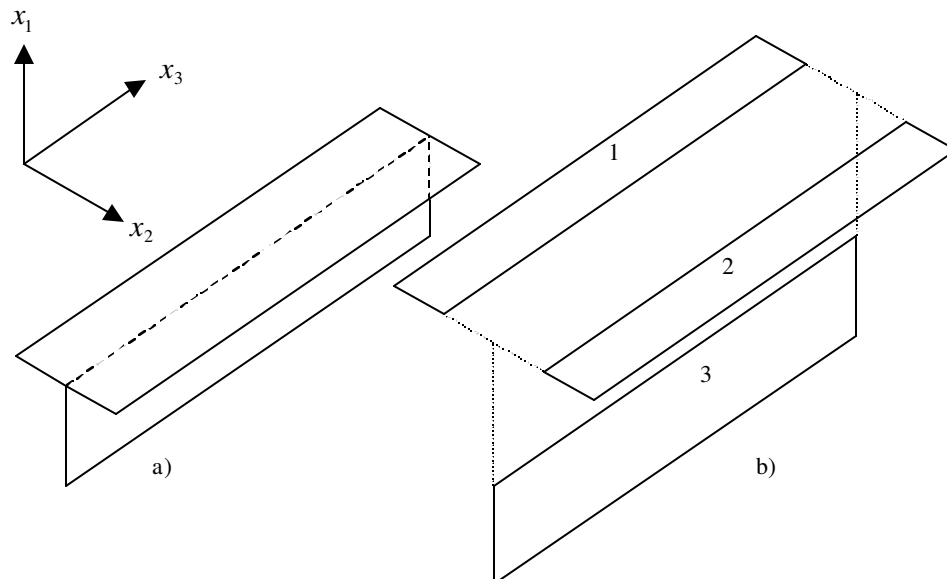


Figura 9.1 – Peça decomposta em seus macro-elementos.

9.3-Sistema de coordenadas

Uma característica das equações integrais de flexão de placas e de estado plano de tensão é que o deslocamento de um ponto é escrito em função de sua posição relativa aos demais pontos do problema. Assim não importa qual sistema de coordenadas se use para a montagem das matrizes do problema, as relações entre as forças e deslocamentos do contorno serão preservadas. Portanto, cada macro-elemento pode possuir seu próprio sistema de coordenadas, no qual suas equações integrais são escritas.

Esse **sistema local** $\tilde{x}$, ilustrado na Figura 9.2a, pode não ser o mesmo para os vários macro-elementos de uma peça. Como se deseja compatibilizar as forças e deslocamentos de vários macro-elementos, resolvendo-os simultaneamente, é necessário escrever essas incógnitas em um mesmo sistema global de coordenadas.

Assim, toma-se necessário escrever equações de transformação de coordenadas para cada macro-elemento, levando do sistema local a um sistema global x , ilustrado na Figura 9.2c. Por conveniência da análise de perfis de seção delgada, adota-se x_3 como sendo o eixo da peça. O sistema local $\tilde{x}$ é então transformado num sistema intermediário $\bar{x}$, conforme mostrado na Figura 9.2b, por meio da transformação (9.1).

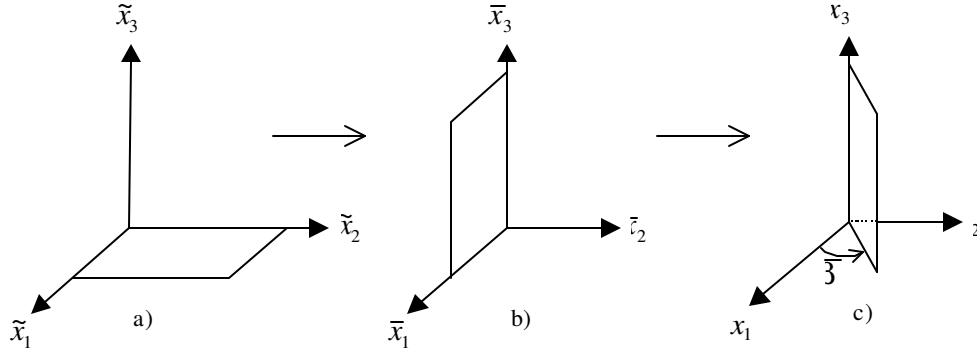


Figura 9.2 – Transformação do sistema de coordenadas

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

Uma nova transformação é aplicada ao sistema intermediário, levando o macro-elemento a formar um ângulo $\bar{\beta}$ com o eixo x_1 . Essa transformação pode ser expressa como:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\beta} & -\sin \bar{\beta} & 0 \\ \sin \bar{\beta} & \cos \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} \quad (9.2)$$

Para levar o sistema local diretamente para o sistema global, efetua-se o produto das matrizes de transformação das expressões (9.1) e (9.2), obtendo-se:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\beta} & 0 & \sin \bar{\beta} \\ \sin \bar{\beta} & 0 & -\cos \bar{\beta} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

A transformação inversa é dada pela expressão:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\beta} & \sin \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin \bar{\beta} & -\cos \bar{\beta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

9.3.1-Compatibilidade entre giros e momentos

Na Figura 9.3, mostram-se dois macro elementos contíguos, pertencentes ao plano $x_1 x_3$, com os momentos M_η positivos indicados. Estes momentos não são alterados pelas

matrizes de transformação apresentadas até aqui. Por esta razão, na interface desses macro-elementos, os momentos positivos locais têm sentidos contrários. O mesmo problema ocorre com os giros θ_η .

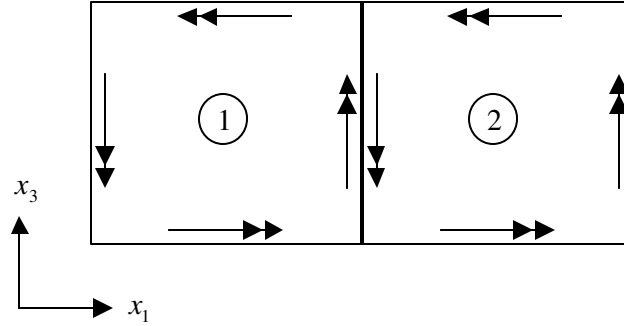


Figura 9.3 – Macro-elementos contíguos pertencentes a um mesmo plano

Para tornar compatíveis os giros e os momentos nas interfaces dos macro-elementos, adota-se um sentido positivo para os elementos de contorno. Nesse trabalho assume-se que o elemento está orientado positivamente quando o índice do nó inicial é menor que o índice do nó final. Assim, quando um elemento de contorno de um dado macro elemento estiver orientado negativamente, procede-se a inversão dos sinais dos momentos e dos giros. Mais adiante esse procedimento será descrito em maiores detalhes.

9.4-Montagem das matrizes H e G

9.4.1-Transformação do sistema de coordenadas

Levando-se em conta o que se expôs no Item 9.2, a solução de um macro-elemento envolve a solução simultânea de um problema de chapa e um de placa. Assim, a contribuição de cada elemento de contorno, no sistema local de coordenadas do macro-elemento, é dada pelas matrizes a seguir:

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & h_{43} & h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{\theta}_\eta \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & 0 & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \\ \tilde{M}_\eta \end{pmatrix} \quad (9.5)$$

Os termos não nulos das duas primeiras linhas referem-se ao problema de chapa, enquanto as outras duas, ao problema de placa.

Uma maneira simples de se obter as contribuições (9.5) é transformar as coordenadas dos nós do macro-elemento do sistema global para o local através da equação (9.4).

Deve-se a seguir transformar os vetores de forças e deslocamentos das contribuições (9.5) para o sistema global. Deve-se também proceder a inversão do sentido de giro do momento M_η nos casos de elemento orientados negativamente, conforme explicado no Item 9.3.1. Obtêm-se assim duas matrizes de transformação dadas por:

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{\theta}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\beta} & \sin \bar{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \bar{\beta} & -\cos \bar{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_\eta \end{pmatrix} \quad (9.6)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{\theta}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \bar{\beta} & \sin \bar{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sin \bar{\beta} & -\cos \bar{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_\eta \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

A transformação (9.6) aplica-se a elementos de contorno orientados positivamente e (9.7), a elementos com orientação negativa. As mesmas matrizes são aplicadas às forças p_i e ao momento M_η .

Substituindo-se os valores de deslocamentos e esforços, dados por (9.6) e (9.7), nas matrizes de contribuição (9.5), obtêm-se:

$$\begin{pmatrix} h_{11} \cos \bar{\beta} & h_{11} \sin \bar{\beta} & h_{12} & 0 \\ h_{21} \cos \bar{\beta} & h_{21} \sin \bar{\beta} & h_{22} & 0 \\ h_{33} \sin \bar{\beta} & -h_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & h_{34} \\ h_{43} \sin \bar{\beta} & -h_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_\eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{11} \cos \bar{\beta} & g_{11} \sin \bar{\beta} & g_{12} & 0 \\ g_{21} \cos \bar{\beta} & g_{21} \sin \bar{\beta} & g_{22} & 0 \\ g_{33} \sin \bar{\beta} & -g_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & g_{34} \\ g_{43} \sin \bar{\beta} & -g_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ M_\eta \end{pmatrix} \quad (9.8)$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} \cos \bar{\beta} & h_{11} \sin \bar{\beta} & h_{12} & 0 \\ h_{21} \cos \bar{\beta} & h_{21} \sin \bar{\beta} & h_{22} & 0 \\ h_{33} \sin \bar{\beta} & -h_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & -h_{34} \\ h_{43} \sin \bar{\beta} & -h_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & -h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta_\eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{11} \cos \bar{\beta} & g_{11} \sin \bar{\beta} & g_{12} & 0 \\ g_{21} \cos \bar{\beta} & g_{21} \sin \bar{\beta} & g_{22} & 0 \\ g_{33} \sin \bar{\beta} & -g_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & -g_{34} \\ g_{43} \sin \bar{\beta} & -g_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & -g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ M_\eta \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

As matrizes (9.8) referem-se a um elemento com orientação positiva e (9.9), negativa.

9.4.2-Acoplamento dos macro-elementos

Cada macro-elemento individual, com N nós, possui $4N$ incógnitas no contorno e outros $4N$ valores conhecidos. Nestes dois grupos tem-se que $2N$ valores são referentes ao problema de chapa e os outros $2N$ referem-se ao problema de flexão de placa.

Na Figura 9.4 é mostrada uma peça formada pela associação de dois macro-elementos. Suponha-se que cada um dos macro-elementos tenha, em sua discretização, M nós na aresta e N nós nos demais lados. Cada macro-elemento fornece $4(N+M)$ equações, $4N$ incógnitas para os lados não compartilhados e mas $8M$ incógnitas para a aresta. Isso resulta em um sistema com $8(N+M)$ equações e $8N+16M$ incógnitas.

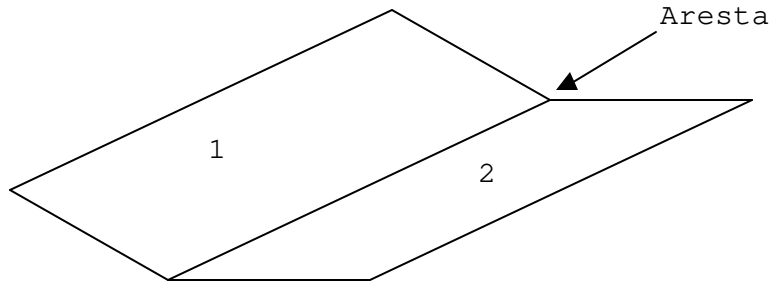


Figura 9.4 – Associação de dois macro-elementos

As $8M$ equações que faltam para o sistema são dadas pelas seguintes expressões:

$$u_i^1 = u_i^2 \quad (9.10)$$

$$\theta_\eta^1 = \theta_\eta^2 \quad (9.11)$$

$$p_i^1 + p_i^2 = p_i \quad (9.12)$$

$$M_\eta^1 + M_\eta^2 = M_\eta \quad (9.13)$$

Nas equações de (9.10) até (9.13) o índice superior refere-se ao macro-elemento. Para as equações (9.12) e (9.13), os valores de p_i e M_η sem os índices superiores representam os esforços aplicados à aresta. Estes são conhecidos quando os deslocamentos são incógnitos e vice-versa.

O sistema de equações para a análise de peças com uma única aresta, tal como ilustrado na Figura 9.4, já considerando as equações (9.10) até (9.13), assume a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} H_{11}^1 & H_{1i}^1 & 0 & -G_{li}^1 & 0 \\ H_{i1}^1 & H_{ii}^1 & 0 & -G_{ii}^1 & 0 \\ 0 & H_{ii}^2 & H_{i2}^2 & 0 & -G_{ii}^2 \\ 0 & H_{2i}^2 & H_{22}^2 & 0 & -G_{2i}^2 \\ 0 & 0 & 0 & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u_i \\ u^2 \\ p_i^1 \\ p_i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}^1 & 0 & 0 \\ G_{li}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{2i}^2 \\ 0 & 0 & G_{22}^2 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^1 \\ p_i \\ p^2 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

Sendo que:

- u^1 e u^2 são os deslocamentos dos nós não pertencentes à aresta dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
- p^1 e p^2 são as forças nos nós não pertencentes à aresta dos macro-elementos 1 e 2, respectivamente.
- u_i são os deslocamentos dos nós da aresta.
- p_i São as forças nos nós da aresta.
- p_i^1 e p_i^2 são os esforços nas interfaces dos macro-elementos.
- H_{ij}^k e G_{ij}^k são as sub-matrizes de coeficientes, análogas a (9.8) e (9.9), do macro-elemento k .
- I é uma matriz identidade.

O processo descrito para a associação das matrizes individuais de cada macro-elemento foi elaborado a partir da técnica das sub-regiões. Desta forma, as equações de cada macro-elementos pode ser obtida de forma independente. Posteriormente essas equações são acopladas por relações de equilíbrio e compatibilidade.

Para uma peça formada por mais de dois macro-elementos concorrendo em uma mesma aresta, como mostrado na Figura 9.1, segue-se o mesmo procedimento descrito anteriormente. A seguir apresenta-se, esquematicamente, uma matriz proveniente da associação de três macro-elementos.

$$\begin{pmatrix} H_{11}^1 & H_{1i}^1 & 0 & 0 & -G_{li}^1 & 0 & 0 \\ H_{i1}^1 & H_{ii}^1 & 0 & 0 & -G_{ii}^1 & 0 & 0 \\ 0 & H_{ii}^2 & H_{i2}^2 & 0 & 0 & -G_{ii}^2 & 0 \\ 0 & H_{2i}^2 & H_{22}^2 & 0 & 0 & -G_{2i}^2 & 0 \\ 0 & H_{ii}^3 & 0 & H_{i3}^3 & 0 & 0 & -G_{ii}^3 \\ 0 & H_{3i}^3 & 0 & H_{33}^3 & 0 & 0 & -G_{3i}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u_i \\ u^2 \\ u^3 \\ p_i^1 \\ p_i^2 \\ p_i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}^1 & 0 & 0 & 0 \\ G_{li}^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{2i}^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{i3}^3 \\ 0 & 0 & 0 & G_{33}^3 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^1 \\ p_i \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

9.5-Consideração do efeito elasto-plástico

No Capítulo 7 descreveu-se a formulação do MEC para o problema elasto-plástico bidimensional. Como foi visto naquele capítulo, é necessário escrever as equações integrais do problema em termos de incrementos de forças e deslocamentos. Assim as equações integrais de um macro-elemento podem ser escritas como:

$$c_{ki}\tilde{u}_i = \int_{\Gamma} \tilde{p}_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \tilde{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \tilde{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (9.16)$$

$$K\tilde{u}_3 = \int_{\Gamma} u_3^* \tilde{V}_{\eta} - \theta_{\eta}^* \tilde{M}_{\eta} d\Gamma - \int_{\Gamma} \tilde{u}_3 V_{\eta}^* - \tilde{\theta}_{\eta} M_{\eta}^* d\Gamma + \sum (\tilde{R}_c u_3^* - R_c^* \tilde{u}_3) + \int_{\Omega} \tilde{g}_3 u_3^* d\Omega \quad (9.17)$$

Por não haver alteração nos núcleos das integrais de contorno das equações (9.16) e (9.17), as matrizes $[H]$ e $[G]$ são as mesmas calculadas no regime elástico. No entanto, em (9.16) há uma nova integral de domínio que leva em conta a contribuição das deformações plásticas. As matrizes elementares (9.8) e (9.9) podem então ser escritas como:

$$\begin{pmatrix} h_{11} \cos \bar{\beta} & h_{11} \sin \bar{\beta} & h_{12} & 0 \\ h_{21} \cos \bar{\beta} & h_{21} \sin \bar{\beta} & h_{22} & 0 \\ h_{33} \sin \bar{\beta} & -h_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & h_{34} \\ h_{43} \sin \bar{\beta} & -h_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{\theta}_{\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{11} \cos \bar{\beta} & g_{11} \sin \bar{\beta} & g_{12} & 0 \\ g_{21} \cos \bar{\beta} & g_{21} \sin \bar{\beta} & g_{22} & 0 \\ g_{33} \sin \bar{\beta} & -g_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & g_{34} \\ g_{43} \sin \bar{\beta} & -g_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \\ \tilde{M}_{\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_1 \\ \tilde{\Sigma}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

$$\begin{pmatrix} h_{11} \cos \bar{\beta} & h_{11} \sin \bar{\beta} & h_{12} & 0 \\ h_{21} \cos \bar{\beta} & h_{21} \sin \bar{\beta} & h_{22} & 0 \\ h_{33} \sin \bar{\beta} & -h_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & -h_{34} \\ h_{43} \sin \bar{\beta} & -h_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & -h_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{\theta}_{\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_{11} \cos \bar{\beta} & g_{11} \sin \bar{\beta} & g_{12} & 0 \\ g_{21} \cos \bar{\beta} & g_{21} \sin \bar{\beta} & g_{22} & 0 \\ g_{33} \sin \bar{\beta} & -g_{33} \cos \bar{\beta} & 0 & -g_{34} \\ g_{43} \sin \bar{\beta} & -g_{43} \cos \bar{\beta} & 0 & -g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \\ \tilde{M}_{\eta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_1 \\ \tilde{\Sigma}_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

As contribuições do vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$ são calculadas pela integração no domínio dos incrementos de deformação plástica, dadas por:

$$\tilde{\Sigma}_k = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \tilde{\epsilon}_{ij}^p d\Omega \quad (9.20)$$

A expressão (9.20) é avaliada por meio de células de domínio, assim torna-se necessário discretizar a região do macro-elemento que está sujeita a plastificação.

Nas contribuições elementares (9.18) e (9.19) o vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$ possui componentes nulas nas linhas referentes às equações do problema de flexão de placa. Portanto o modelo adotado neste trabalho admite que a plastificação de um macro-elemento isolado ocorre apenas devido ao estado plano de tensões. Assim apenas as forças e deslocamento contidos no plano do

macro-elemento são influenciados pelas deformações plásticas. Admite-se também que a plastificação do macro-elemento não altera seu comportamento como placa.

Assim, o sistema de equações para o problema elasto-plástico adquire o seguinte formato:

$$\begin{pmatrix} H_{11}^1 & H_{1i}^1 & 0 & 0 & -G_{1i}^1 & 0 & 0 \\ H_{i1}^1 & H_{ii}^1 & 0 & 0 & -G_{ii}^1 & 0 & 0 \\ 0 & H_{ii}^2 & H_{i2}^2 & 0 & 0 & -G_{ii}^2 & 0 \\ 0 & H_{2i}^2 & H_{22}^2 & 0 & 0 & -G_{2i}^2 & 0 \\ 0 & H_{ii}^3 & 0 & H_{i3}^3 & 0 & 0 & -G_{ii}^3 \\ 0 & H_{3i}^3 & 0 & H_{33}^3 & 0 & 0 & -G_{3i}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}_i \\ \tilde{u}^2 \\ \tilde{u}^3 \\ \tilde{p}_i^1 \\ \tilde{p}_i^2 \\ \tilde{p}_i^3 \end{pmatrix} = (G)(\tilde{p}) + \begin{pmatrix} \tilde{\Sigma}_{11} \\ \tilde{\Sigma}_{1i} \\ \tilde{\Sigma}_{2i} \\ \tilde{\Sigma}_{22} \\ \tilde{\Sigma}_{3i} \\ \tilde{\Sigma}_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.21)$$

O sistema de equações (9.20) é essencialmente o mesmo que (9.15), exceto pelo vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$ que depende apenas dos incrementos de deformações plásticas locais de cada macro-elemento isolado.

Uma vez aplicadas as condições de contorno ao sistema (9.15), procede-se então a solução do problema elástico que adquire a forma:

$$[A]\{x\} = \{F\} \quad (9.22)$$

Em (9.22) o vetor $\{x\}$ contém as incógnitas do problema e $\{F\}$ é obtido a partir das forças e deslocamentos conhecidos.

De posse da solução do problema em regime elástico, procura-se pelo ponto da peça em estudo onde se dá o início da plastificação. O carregamento é então reduzido de modo que o ponto mais solicitado esteja no limiar da plastificação. O restante do carregamento deverá ser aplicado em porções discretas, ou passos de carga, e as contribuições dos incrementos de deformações plásticas passam a ser considerados. O sistema (9.22) adquire a seguinte forma:

$$[A]\{\tilde{x}\} = \{\tilde{F}\} + \{\tilde{\Sigma}\} \quad (9.23)$$

Resolve-se então o sistema (9.23), obtendo uma primeira aproximação para o incremento do vetor das incógnitas $\{\tilde{x}\}$. De posse deste resultado, avalia-se novamente os incrementos de deformações plásticas, atualiza-se o vetor $\{\tilde{\Sigma}\}$ e novamente resolve-se (9.23). O processo é repetido até que se obtenha uma convergência.

Uma vez obtida a convergência para o incremento de deformações plásticas, o vetor $\{\bar{x}\}$ é acrescido aos valores calculados no passo anterior e o processo recomeça para o passo seguinte, até que todo o carregamento tenha sido aplicado.

Deve-se salientar que numa peça como a ilustrada na Figura 9.1, a plastificação do macro-elemento 3 altera o comportamento de placa dos macro-elementos 1 e 2. Desta forma a flexão de placa de um macro-elemento recebe uma contribuição indireta do vetor $\{\bar{\Sigma}\}$ via compatibilidade de deslocamentos e forças.

9.6-Consideração do efeito dinâmico

A consideração do efeito dinâmico transiente na peça pode ser feita a partir da integração no domínio das forças de inércia, conforme foi descrito detalhadamente no capítulo anterior. O sistema de equações para os macro-elementos, levando em conta a influência das acelerações dos pontos internos, passa então a ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} H_c & 0 \\ H_d & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^c_t \\ U^d_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_c & 0 \\ G_d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^c_t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{cc} & M_{cd} \\ M_{dc} & M_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U}^c_t \\ \ddot{U}^d_t \end{pmatrix} + F_t \quad (9.24)$$

Na expressão (9.24) as sub-matrizes H_c e G_c correspondem às matrizes $[H]$ e $[G]$, cuja montagem já foi descrita nos itens anteriores. As matrizes H_d e G_d relacionam as informações dos pontos internos com os de contorno.

Aplicando-se um método de integração no tempo, o sistema de equações (9.24) assume a forma:

$$\hat{H}U_{t+\Delta t} = \hat{G}P_{t+\Delta t} - \hat{M}\hat{U}_t + \hat{F}_{t+\Delta t} \quad (9.25)$$

Escrevendo-se o sistema (9.25) na forma de (9.24) e efetuando-se o produto matricial $\hat{M}\hat{U}_t$, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \hat{H}_{cc} & \hat{H}_{cd} \\ \hat{H}_{dc} & \hat{H}_{dd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^c_{t+\Delta t} \\ U^d_{t+\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{G}_c & 0 \\ \hat{G}_d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^c_{t+\Delta t} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \hat{I}^c_t \\ \hat{I}^d_t \end{pmatrix} + \hat{F}_{t+\Delta t} \quad (9.26)$$

O vetor $\hat{I}_t$ carrega as informações inerciais do passo de tempo t. O sistema (9.26) pode ser escrito como duas equações matriciais acopladas da forma:

$$\hat{H}_{cc}U^c_{t+\Delta t} + \hat{H}_{cd}U^d_{t+\Delta t} = \hat{G}_cP^c_{t+\Delta t} - \hat{I}^c_t + \hat{F}^c_{t+\Delta t} \quad (9.27)$$

$$\hat{H}_{dc}U^c_{t+\Delta t} + \hat{H}_{dd}U^d_{t+\Delta t} = \hat{G}_dP^c_{t+\Delta t} - \hat{I}_t^d + \hat{F}_{t+\Delta t}^d \quad (9.28)$$

Isolando-se o valor dos deslocamentos no domínio de (9.27) obtém-se:

$$U^d_{t+\Delta t} = \hat{H}_{dd}^{-1}\hat{G}_dP^c_{t+\Delta t} - \hat{H}_{dd}^{-1}\hat{I}_t^d - \hat{H}_{dd}^{-1}\hat{H}_{dc}U^c_{t+\Delta t} + \hat{H}_{dd}^{-1}\hat{F}_{t+\Delta t}^d \quad (9.29)$$

Substituindo-se o valor dos deslocamentos dos pontos internos obtidos de (9.29) em (9.27) e agrupando-se os termos semelhantes chega-se a:

$$\hat{H}U^c_{t+\Delta t} = \hat{G}P^c_{t+\Delta t} - \hat{I}_t^c + \hat{F}_{t+\Delta t}^c \quad (9.30)$$

Sendo:

$$\hat{H} = \hat{H}_{cc} - \hat{H}_{cd}\hat{H}_{dd}^{-1}\hat{H}_{dc} \quad (9.31)$$

$$\hat{G} = \hat{G}_c - \hat{H}_{cd}\hat{H}_{dd}^{-1}\hat{G}_d \quad (9.32)$$

$$\hat{I}_t = M_{cc}\hat{U}_t^c + M_{cd}\hat{U}_t^d \quad (9.33)$$

$$\hat{F}_{t+\Delta t} = \hat{F}_{t+\Delta t}^c - \hat{H}_{cd}\hat{H}_{dd}^{-1}\hat{F}_{t+\Delta t}^d \quad (9.34)$$

Desta forma, pode-se calcular os deslocamentos do contorno para um passo de tempo separadamente dos deslocamentos dos pontos internos. Com isso há uma redução substancial na dimensão do sistema de equações, agilizando o cálculo. Uma vez determinados os deslocamentos e forças incógnitas no contorno, os deslocamentos dos pontos internos podem ser calculados diretamente com a expressão (9.29). Atualiza-se então os vetores $\hat{I}$ e $\hat{F}$, procedendo-se o cálculo do passo seguinte.

10-Exemplos elásticos

10.1-Introdução

Neste capítulo apresentam-se os exemplos em regime elástico, estático e dinâmico, analisados com os programas computacionais desenvolvidos. Os resultados obtidos são comparados, sempre que possível, com soluções analíticas ou com resultados equivalentes disponíveis na literatura. Adicionalmente, no caso dos exemplos elasto-dinâmicos, compara-se a performance dos integradores estudados neste trabalho.

10.2-Viga de seção quadrada

10.2.1-Flexão

Neste primeiro exemplo é estudada uma viga em balanço de seção quadrada e de paredes finas, conforme ilustrado na Figura 10.5. A viga foi analisada para espessuras de parede de 5cm, 10cm e 20cm. Adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal de 205GPa. O coeficiente de Poisson foi tomado com os valores zero e 0.33.

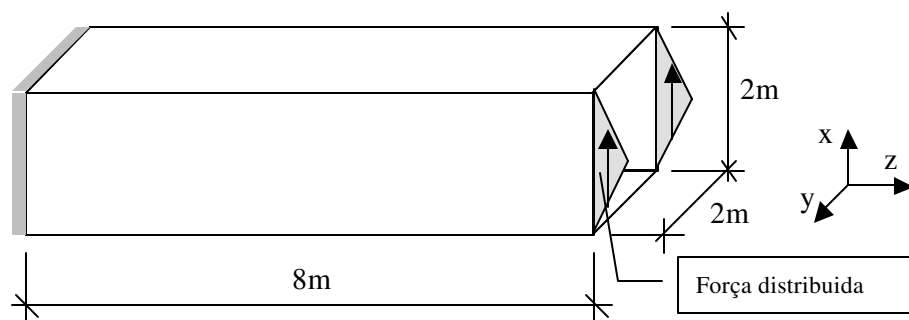


Figura 10.5 – Viga de seção quadrada com carregamento vertical.

Na extremidade livre aplica-se uma carga 1000kN na direção do eixo x por meio de uma força distribuída nas almas. Várias distribuições de força foram testadas, aplicadas tanto às almas quanto às mesas, conduzindo sempre aos mesmos resultados, com variação interior a 0,5%. Os resultados apresentados correspondem a uma distribuição triangular ao longo das almas, conforme mostrado na Figura 10.5. Todas as paredes da viga foram discretizadas segundo a malha mostrada na Figura 10.6. Nos cantos há nós duplos em um total de 44 nós por macro-elemento. O invólucro final conta com 108 nós.

A condição de contorno do engaste é aplicada restringindo-se o deslocamento dos macro-elementos nas direções dos eixos coordenados. A restrição ou não da rotação de placa, θ_η , não causa variação significativa nos resultados para este problema.

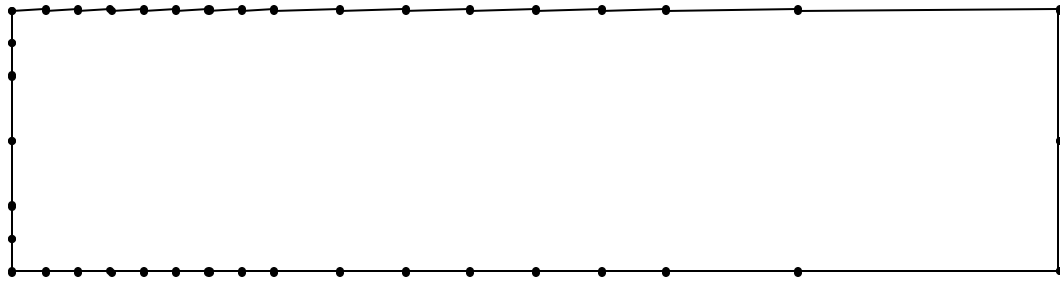


Figura 10.6 – Malha de um dos macro-elementos.

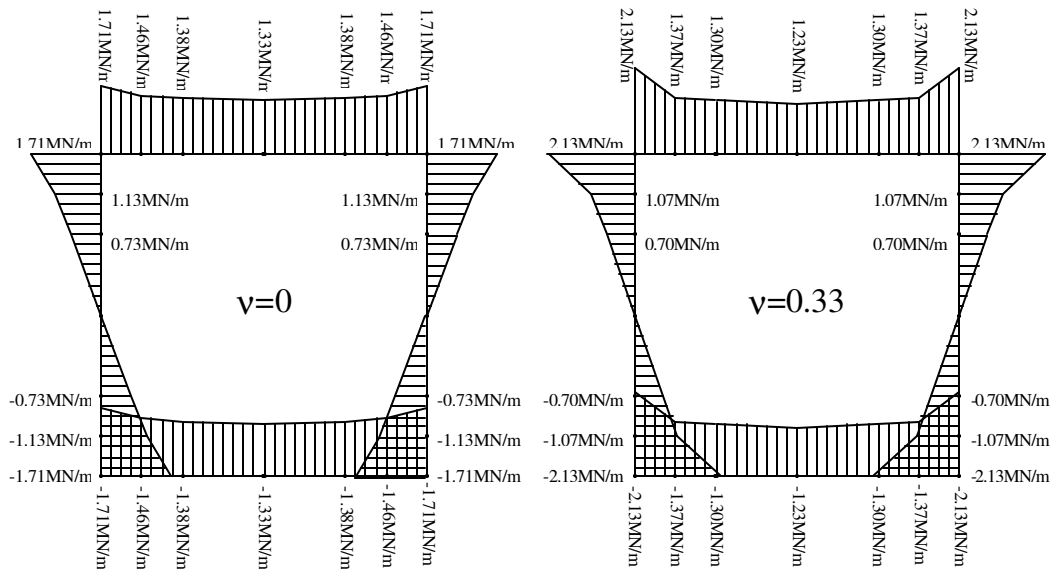


Figura 10.7 – Distribuição das forças no apoio na direção do eixo.

Na Figura 10.7 são mostradas as distribuições de tensões no engaste correspondentes ao esforço de momento fletor. A alteração da espessura das paredes produziu variação nos

resultados apenas na terceira casa decimal. Esse resultado era esperado pois não foram considerados efeitos de não linearidade geométrica.

Segundo a resistência dos materiais, era esperada nas mesas da peça uma tensão uniforme de módulo pouco menor que 1.5MN/m, variando linearmente nas almas. O valor médio da tensão nas mesas encontrado neste trabalho é de 1.43MN/m e 1.40MN/m para coeficientes de Poisson iguais a zero e 0.33, respectivamente. Este valor menor é justificado pelo aumento da colaboração das almas na flexão.

Para a viga estudada neste exemplo, a flecha é dada pela expressão:

$$f = P \frac{3\ell x^2 - x^3}{6EI} + \frac{Pf_s x}{\mu A} \quad (10.1)$$

A segunda parcela da expressão (10.1) corresponde à deformação devido ao esforço cortante que deve ser considerada neste caso por se tratar de uma viga curta. O fator de forma f_s tem seu valor dado pela seguinte expressão:

$$f_s = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{Q^2}{b^2} dA \quad (10.2)$$

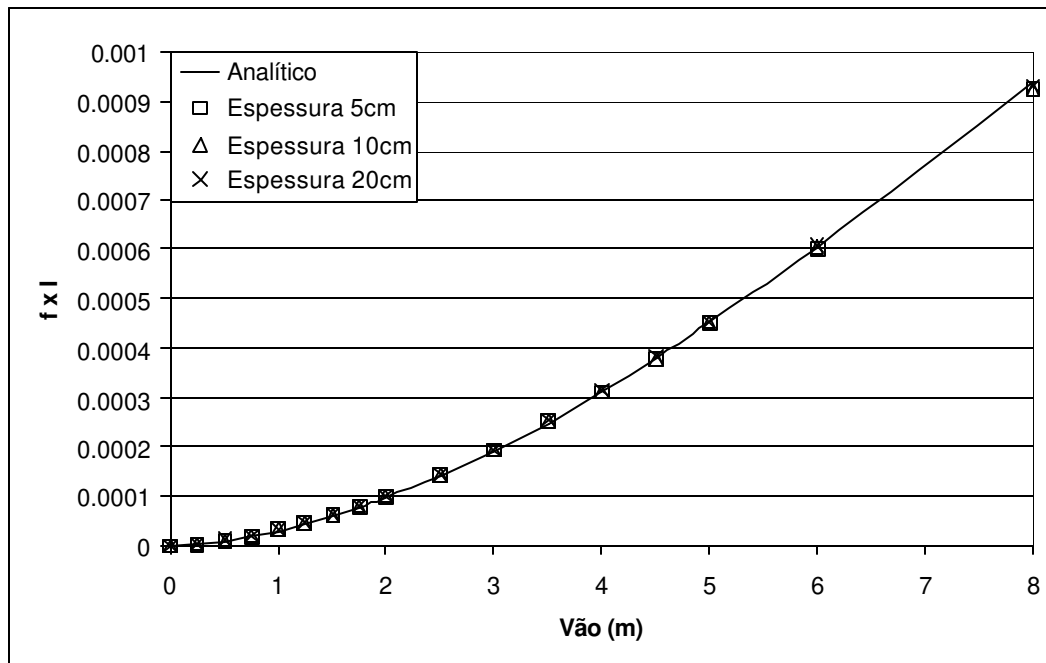


Figura 10.8 – Deflexão da viga multiplicada pela inércia.

Na Figura 10.8 são mostrados os resultados obtidos para as flechas. Para facilitar a comparação dos resultados, os valores obtidos foram multiplicados pela inércia das vigas. Há

uma boa concordância entre os valores obtidos e os previstos pela resistência dos materiais, havendo um erro máximo de 2%.

10.2.2-Torção

Estuda-se agora o comportamento à torção da viga analisada no item anterior. É aplicado um torque de 1000kNm na extremidade livre por meio de uma tensão constante, aplicada nos sentidos adequados. Esta nova condição de contorno é ilustrada na Figura 10.9

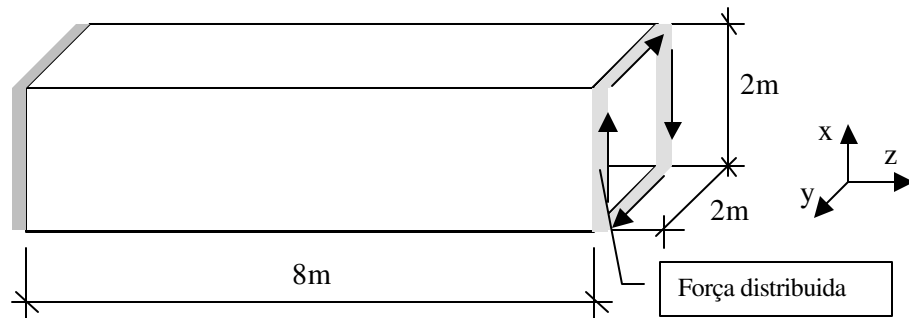


Figura 10.9 – Viga se seção quadrada com torque.

A viga foi analisada em seis situações diferentes produzidas pela alternância do coeficiente de Poisson entre zero e 0.33 e pela restrição ou não da rotação θ_η e da deflexão u_3 locais das paredes da viga no apoio.

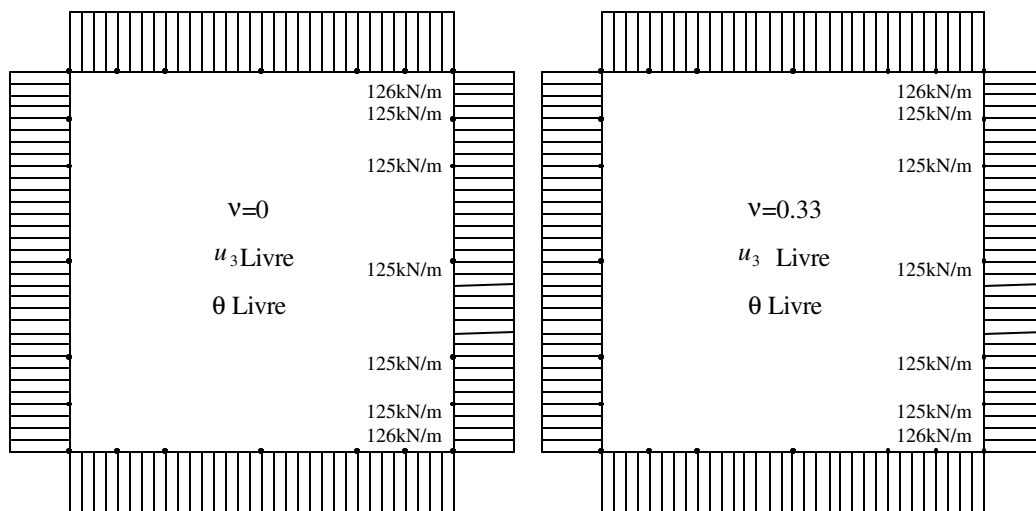


Figura 10.10 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (5cm).

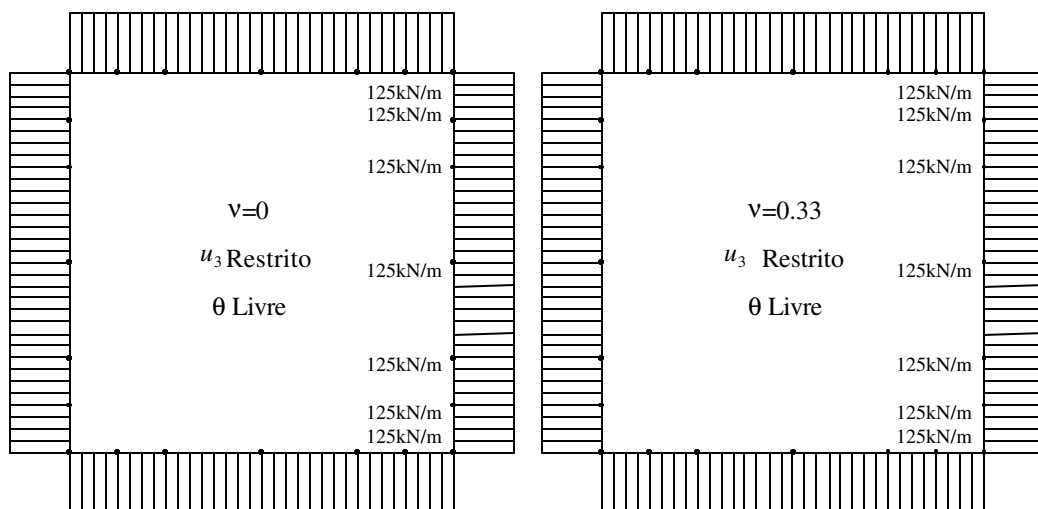


Figura 10.11 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (5cm).

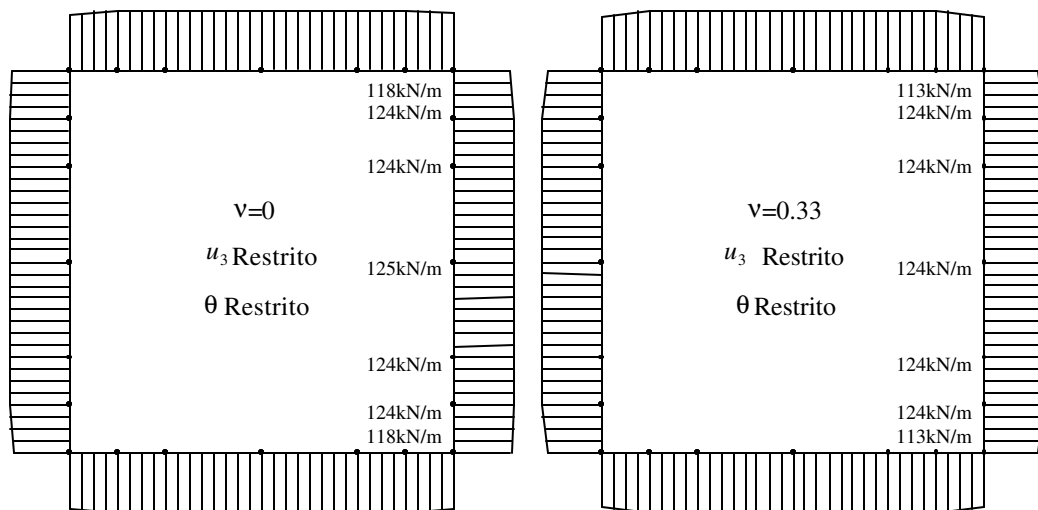


Figura 10.12 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (5cm).

Da Figura 10.10 à Figura 10.12 são mostradas as distribuições das tensões tangenciais no engaste para a espessura de 5cm. Pode-se notar que a variação do coeficiente de Poisson não altera a distribuição de tensões quando a rotação θ_η está livre. Restringindo-se este grau de liberdade ocorre uma diminuição do valor da tensão tangencial nos cantos, mais pronunciada para o coeficiente de Poisson 0.33. Acredita-se que essa redução ocorre devido ao aumento da colaboração do efeito de placa na absorção desse esforço.

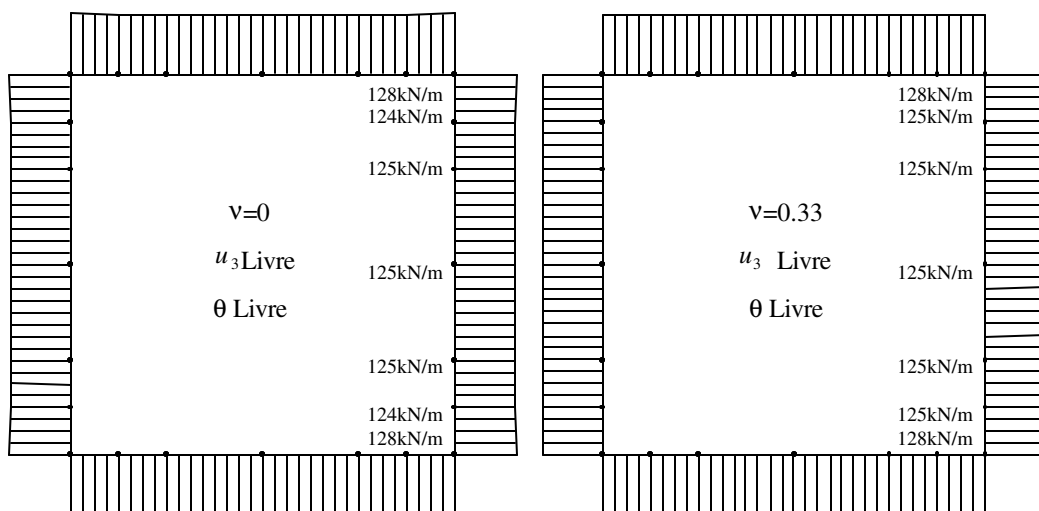


Figura 10.13 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (10cm).

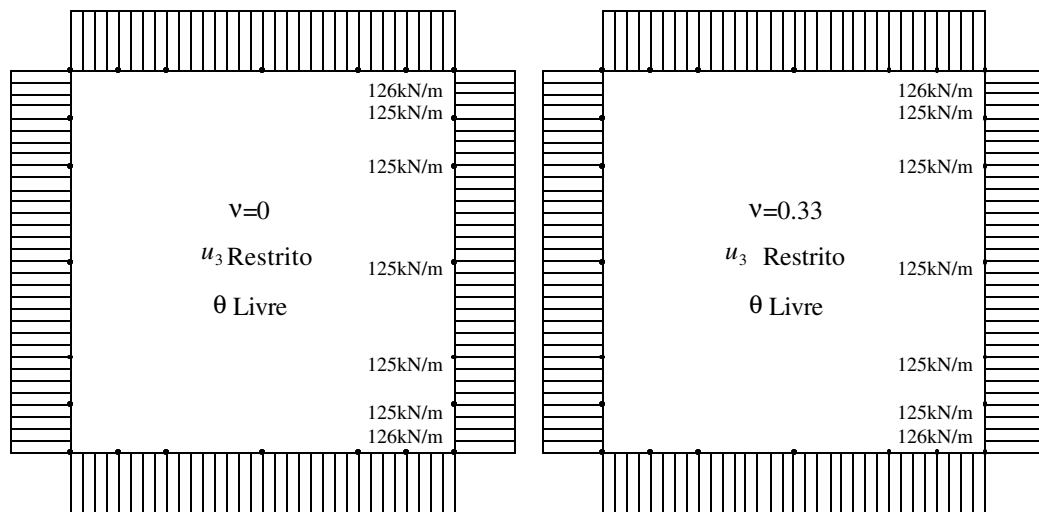


Figura 10.14 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (10cm).

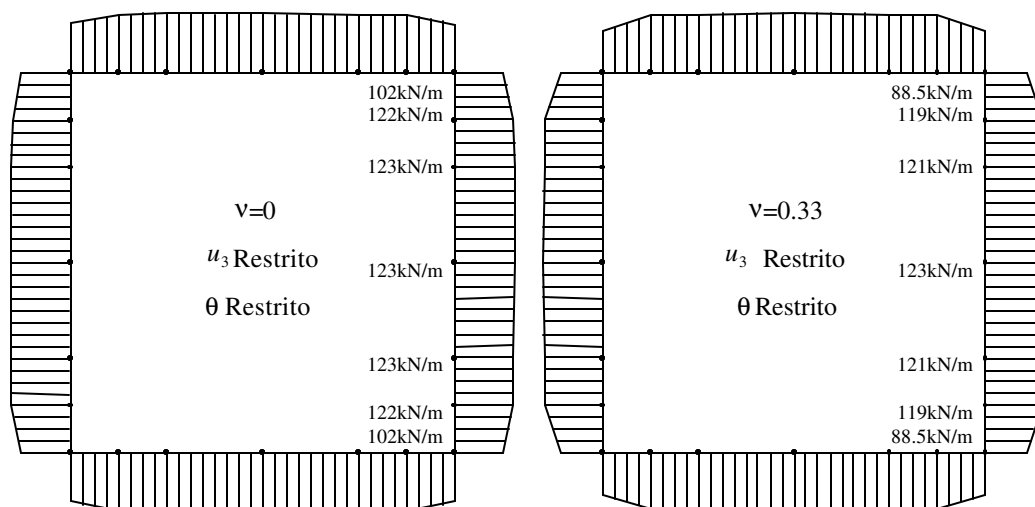


Figura 10.15 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (10cm).

Aumentando-se a espessura das paredes para 10cm obtêm-se as distribuições mostradas da Figura 10.13 à Figura 10.15. O aumento da espessura causa um ligeiro aumento no valor das tensões nos cantos da seção quando a rotação está livre. Restringindo-se a rotação, há uma diminuição ainda mais acentuada do valor das tensões tangenciais nos cantos da seção. Do mesmo modo, a restrição da deflexão também traz uma queda no valor da tensão nos cantos, porém menos pronunciada.

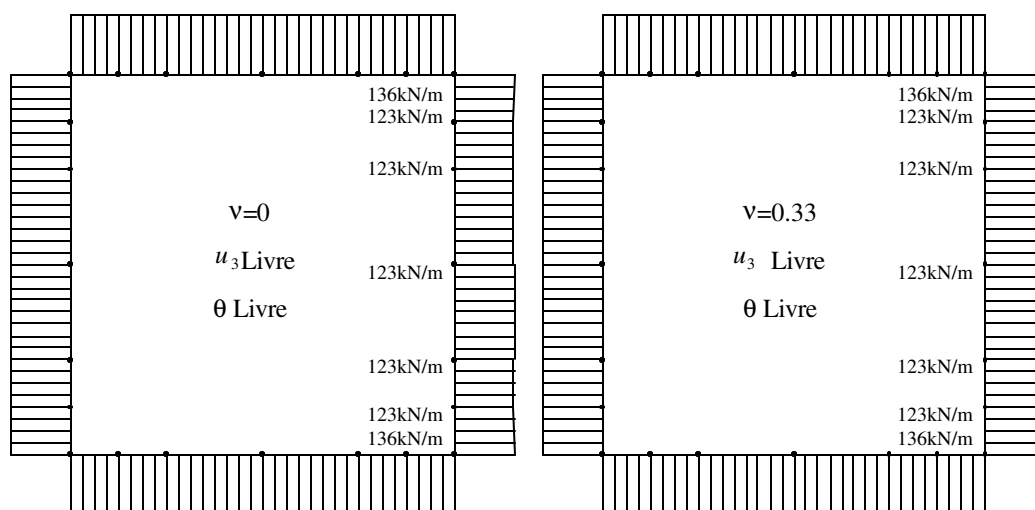


Figura 10.16 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (20cm).

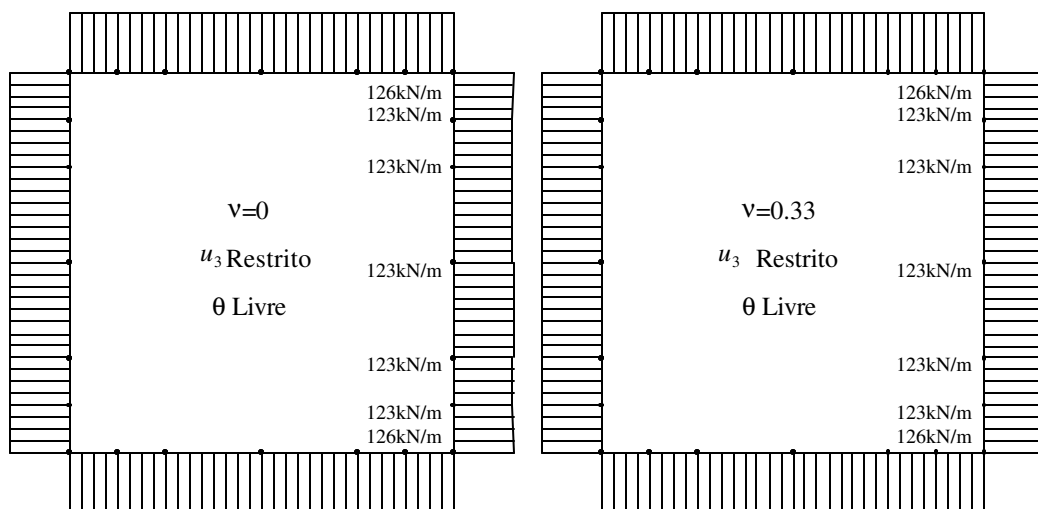


Figura 10.17 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (20cm).

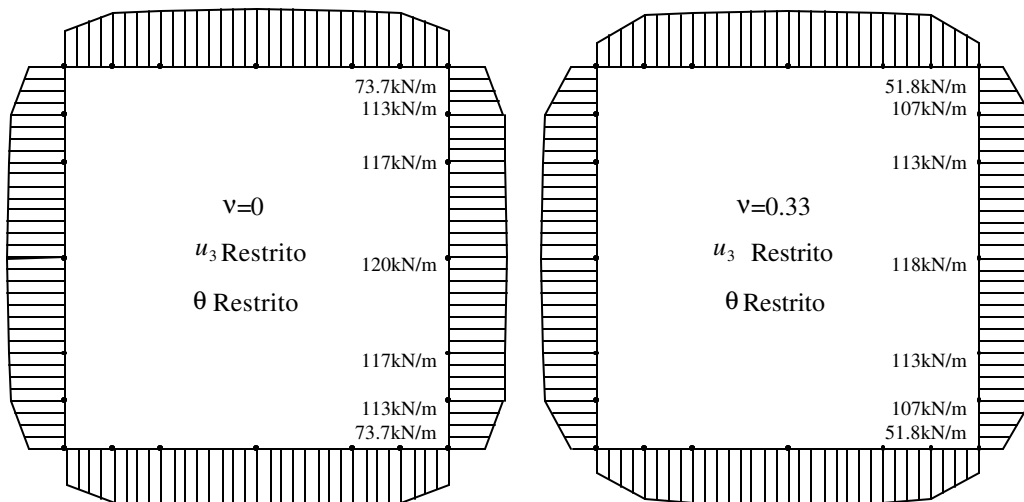


Figura 10.18 – Distribuição das forças tangenciais no apoio (20cm).

Para a espessura de 20cm há uma continuidade do comportamento já observado para as espessuras de 5cm e 10cm. As distribuições das tensões tangenciais, mostradas da Figura 10.17 à Figura 10.18, apresentam uma forte queda junto aos cantos da seção.

10.3-Viga U curta

10.3.1-Flexão simples em torno do eixo y

Neste exemplo estuda-se o comportamento de uma viga curta de seção U, ilustrada na Figura 10.19, submetida à flexão simples em torno do eixo principal menor. A espessura das

paredes foi assumida constante igual a 5cm. Adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal de 205GPa. O coeficiente de Poisson foi tomado com os valores zero e 0.33. Na Figura 10.19 é mostrado o carregamento aplicado às almas da peça para flexão em relação ao eixo y . A malha utilizada nesta análise foi a mesma ilustrada na Figura 10.6, perfazendo 98 nós e 120 elementos lineares.

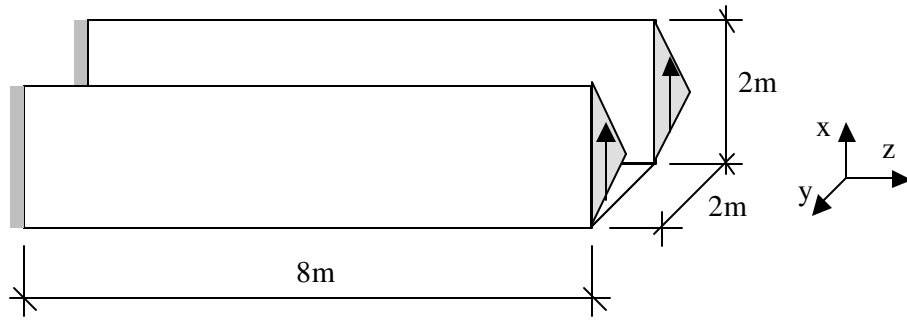


Figura 10.19 – Viga de seção U com carregamento vertical.

Na Figura 10.20 são mostrados os valores das forças no engaste na direção do eixo z .

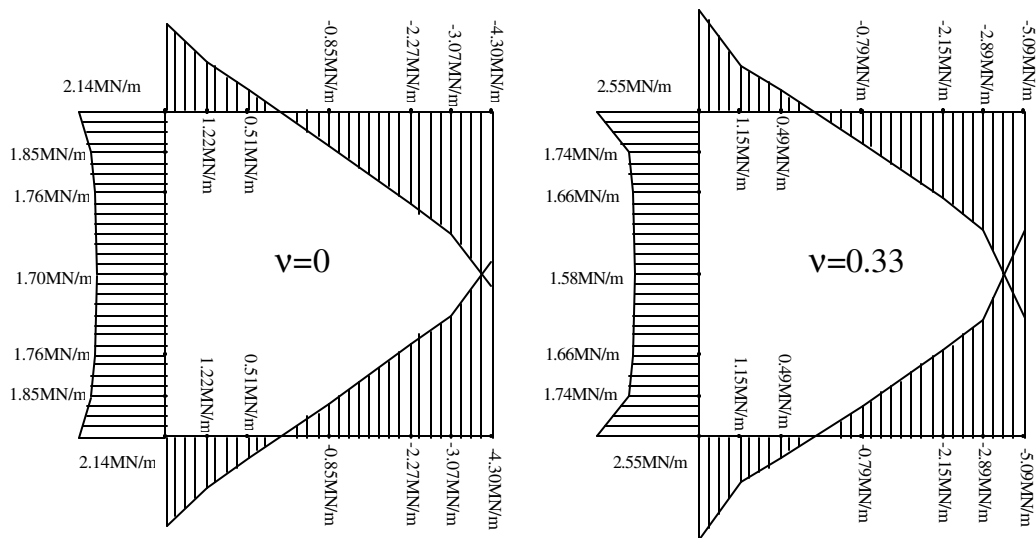


Figura 10.20 - Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em y .

Nota-se uma distorção nos diagramas da Figura 10.20. Essa distorção, bastante pronunciada para o valor 0.33 do coeficiente de Poisson, é atribuída ao fenômeno do “shear-lag”.

10.3.2-Flexão simples em torno do eixo x

Para flexão em relação ao eixo de simetria, x , aplica-se um carregamento tanto na alma quanto nas mesas tal que sua resultante seja 1000kN na direção do eixo y . Este carregamento é ilustrado na Figura 10.21. O carregamento nas mesas é aplicado para que estas não se desloquem na direção do eixo x . Aplicando-se o carregamento desta forma, sua resultante coincide com o centro de cisalhamento da seção.

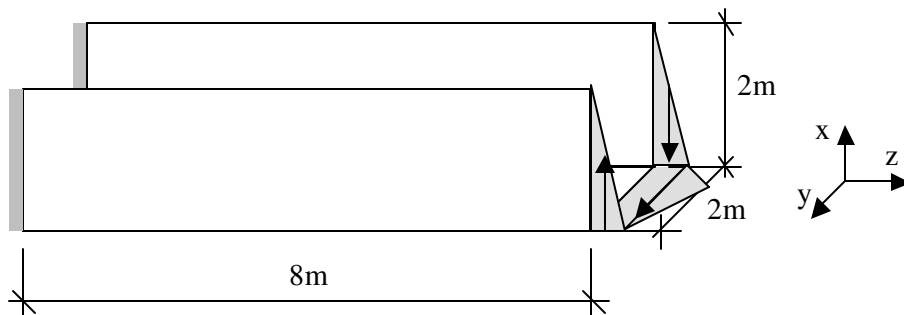


Figura 10.21 – Viga de seção U com carregamento vertical.

Os valores das tensões para flexão em relação ao eixo de simetria são mostrados na Figura 10.22. Nota-se uma variação dos valores nas arestas da peça quando o coeficiente de Poisson é alterado. Pode-se notar um aumento do valor da tensão na borda livre das mesas. Tal elevação, atribuída ao fenômeno do ‘shear-lag’, é devida a distorção da seção transversal da peça. Para evitar este fenômeno, seria necessário a inclusão de diafragmas rígidos na formulação, a exemplo do que foi mostrado em **Palermo 1989**.

Para efeito de comparação, o mesmo problema foi analisado usando-se um programa comercial de elementos finitos (ANSYS 6.0). Foram usados 768 elementos tipo “Shell63” de quatro nós, todos do mesmo tamanho, com lado de 0.25m, perfazendo um total 825 nós. Os resultados para as tensões na direção do eixo da viga são mostradas na Figura 10.23.

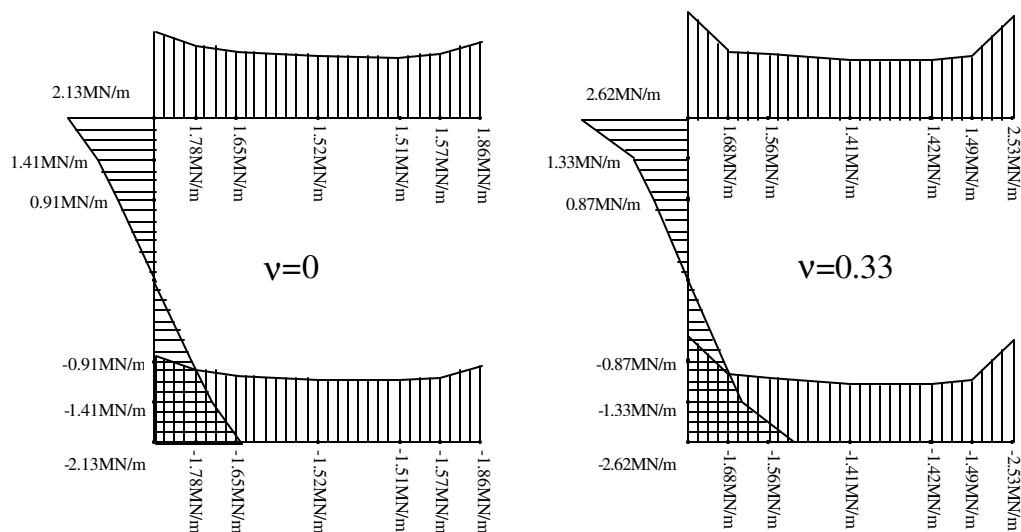


Figura 10.22 - Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em x (Programa de Elementos de contorno).

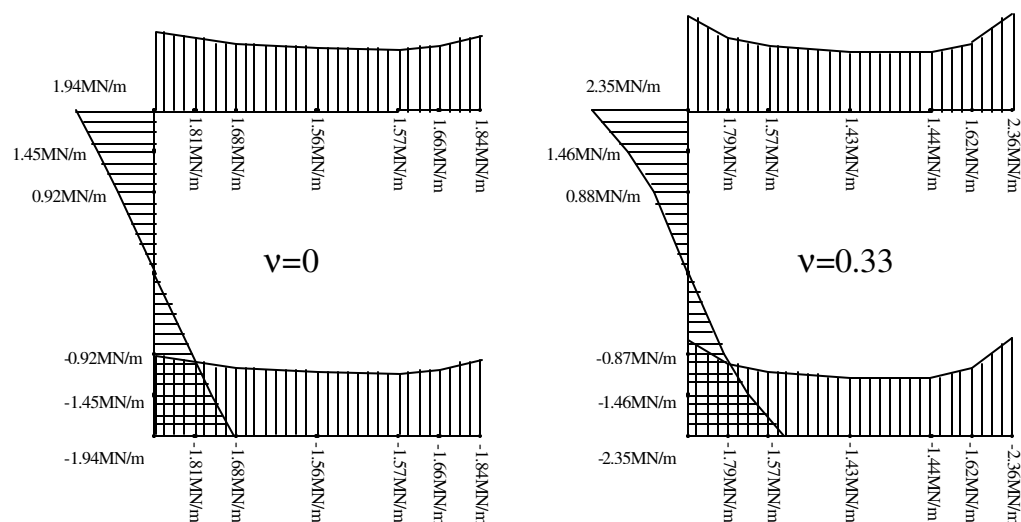


Figura 10.23 - Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em x (Programa de Elementos de Finitos).

Nos resultados obtidos com elementos finitos observa-se uma redução nas tensões de pico se comparadas às obtidas com os elementos de contorno.

Da Figura 10.24 à Figura 10.27 são mostradas as mesmas distribuições de tensões para varias seções próximas do apoio. Observa-se que a elevação da tensão junto à borda livre é um fenômeno local e dissipa-se rapidamente. A Figura 10.27 corresponde a uma seção localizada a uma distância do apoio de meia altura da seção.

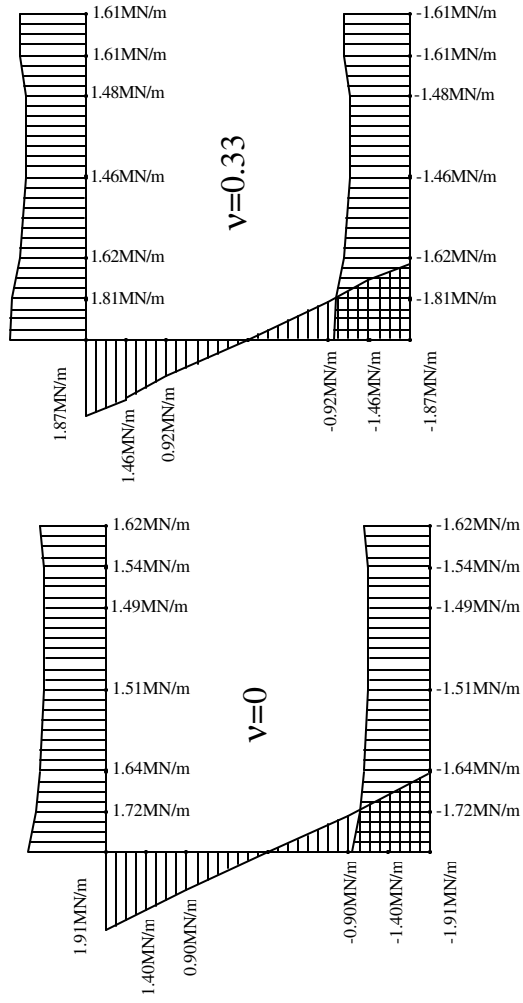


Figura 10.24 - Forças no vão a 25cm ($\ell/32$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x .

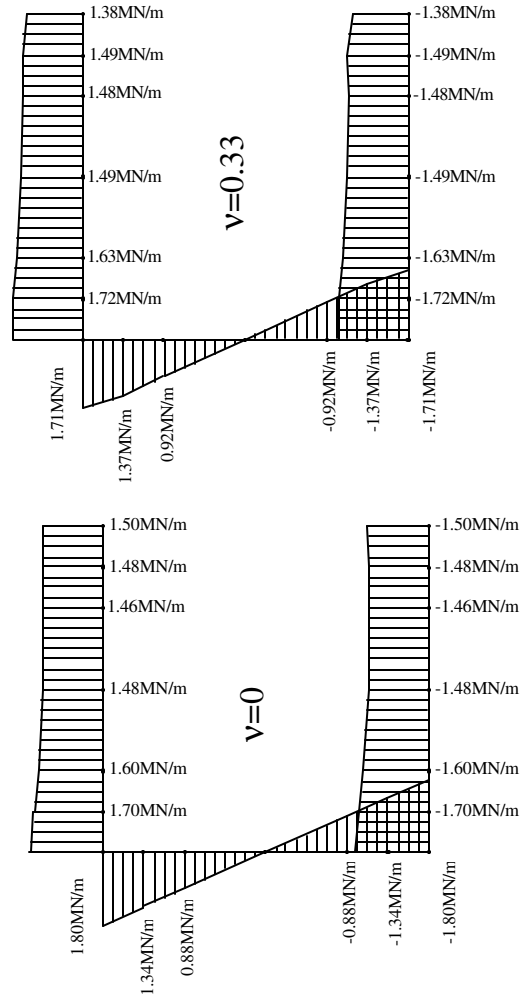


Figura 10.25 - Forças no vão a 50cm ($\ell/16$) altura do engaste na direção do eixo z para flexão em x .

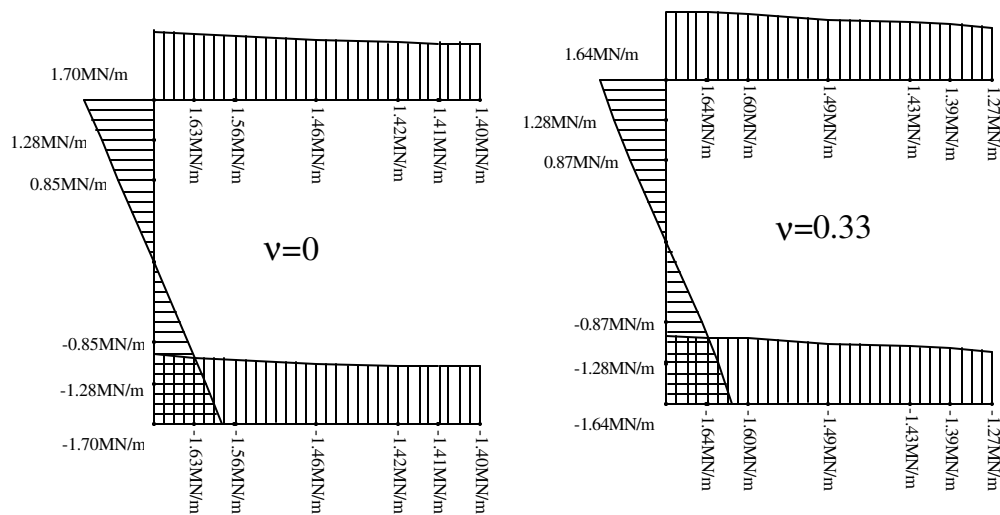


Figura 10.26 - Forças no vão a 75cm ($3\ell/32$) altura do engaste na direção do eixo z para flexão em x.

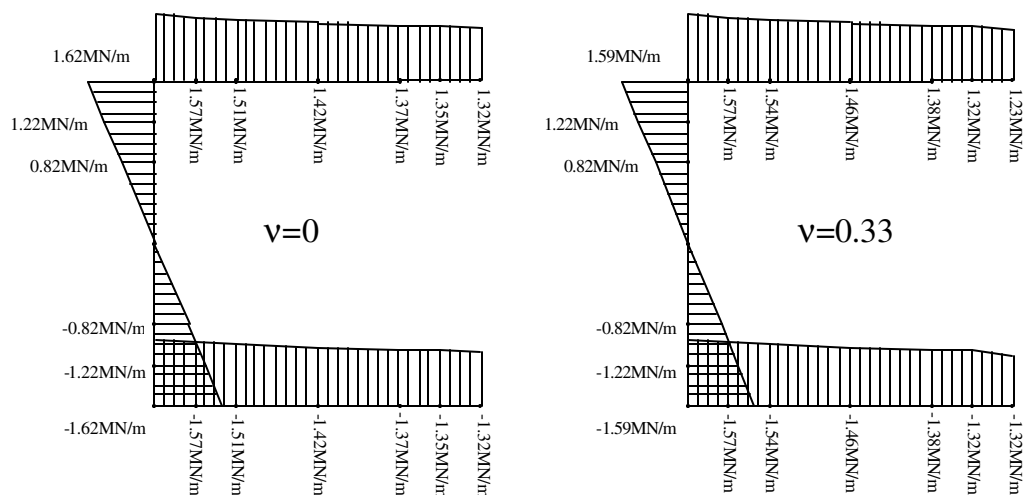


Figura 10.27 - Forças no vão a 100cm ($\ell/8$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x.

Há uma forte influência do valor do coeficiente de Poisson sobre a distribuição das tensões tangenciais no apoio. Estas distribuições estão ilustradas da Figura 10.28 à Figura 10.33. Novamente os valores foram comparados aos obtidos por um programa comercial de elementos finitos. Estes valores são apresentados na Figura 10.29. Essa distorção do diagrama de tensões tangenciais, devida ao efeito de Poisson, também se dissipa rapidamente, aproximando-se da distribuição prevista pela resistência dos materiais.

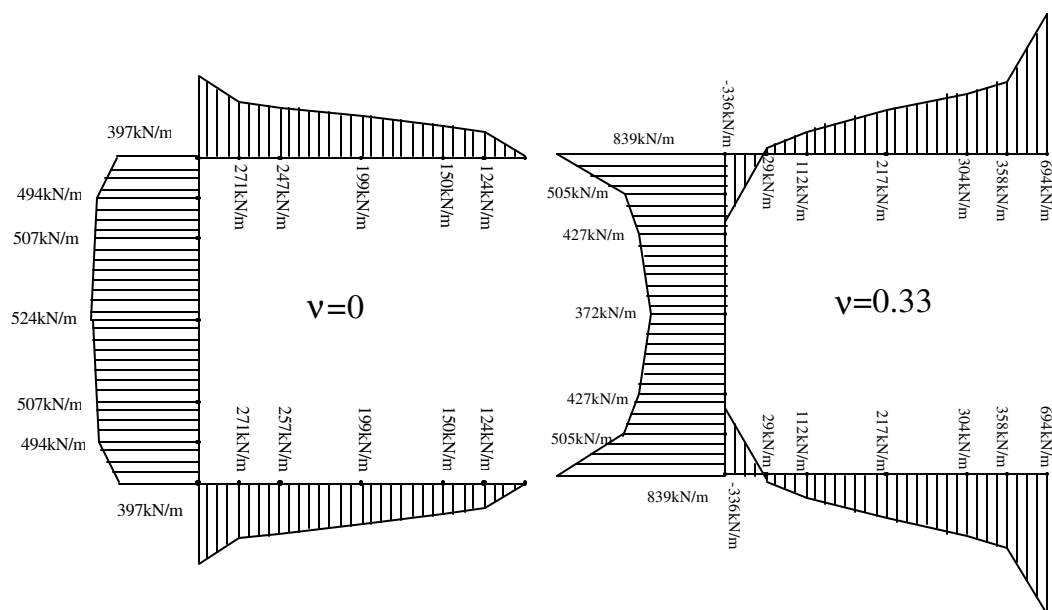


Figura 10.28 - Tensões de cisalhamento no engaste para flexão em torno de x (Programa de Elementos de Contorno).

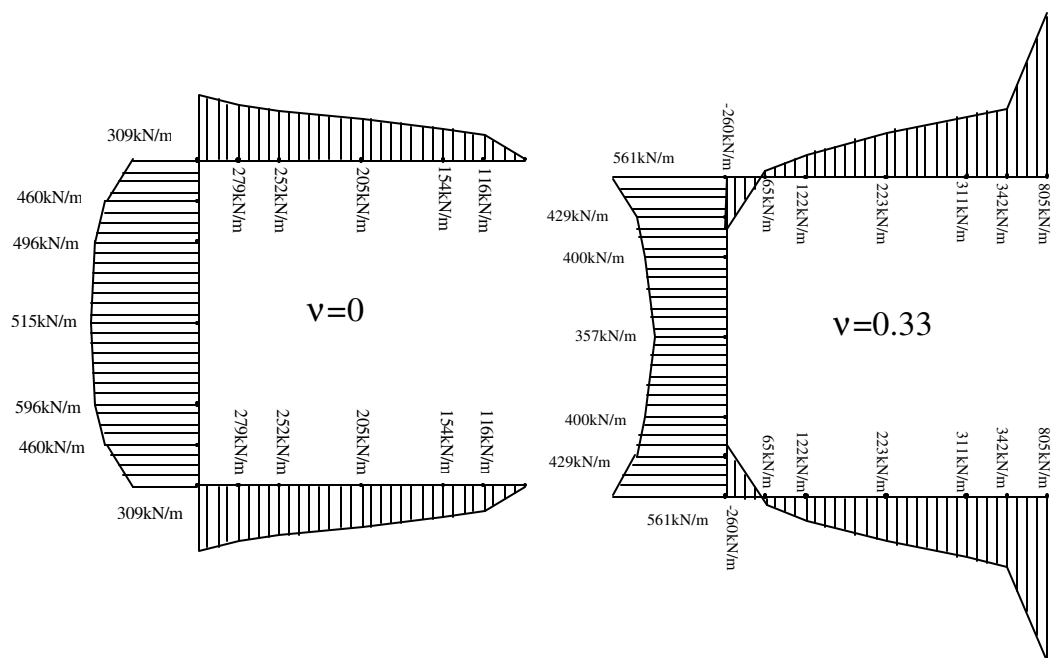


Figura 10.29 - Tensões de cisalhamento no engaste para flexão em torno de x (Programa de Elementos de Finitos).

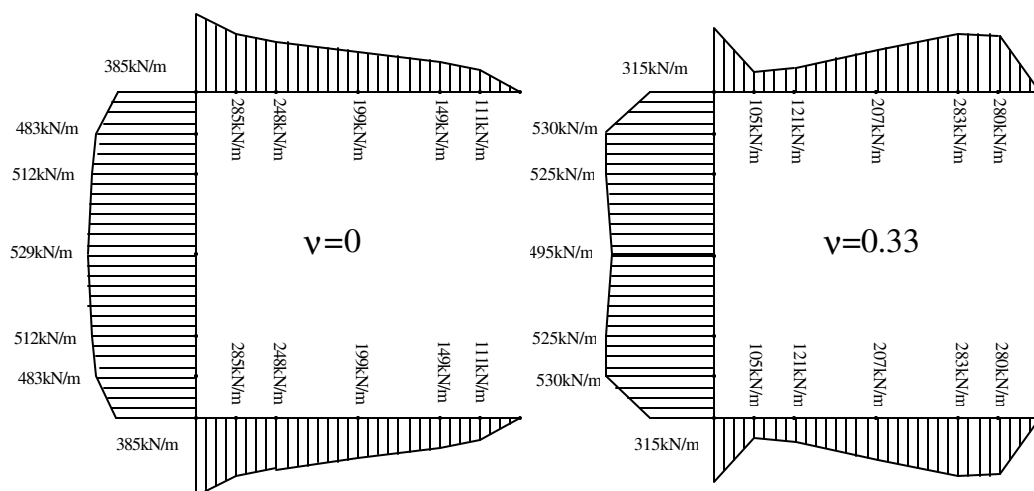


Figura 10.30 - Tensões de cisalhamento no vão a 25cm ($\ell/32$) do engaste para flexão em torno de x .

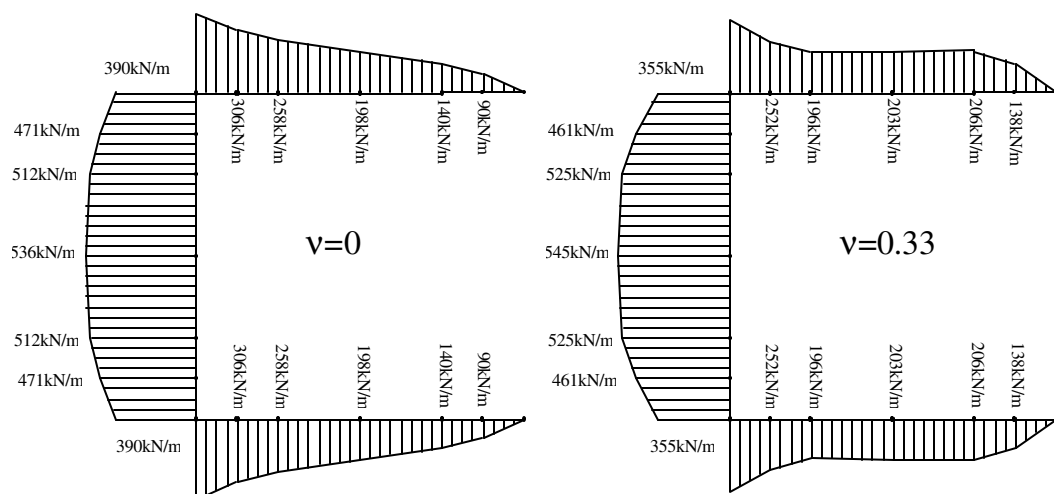


Figura 10.31 - Tensões de cisalhamento no vão a 50cm ($\ell/16$) do engaste para flexão em torno de x .

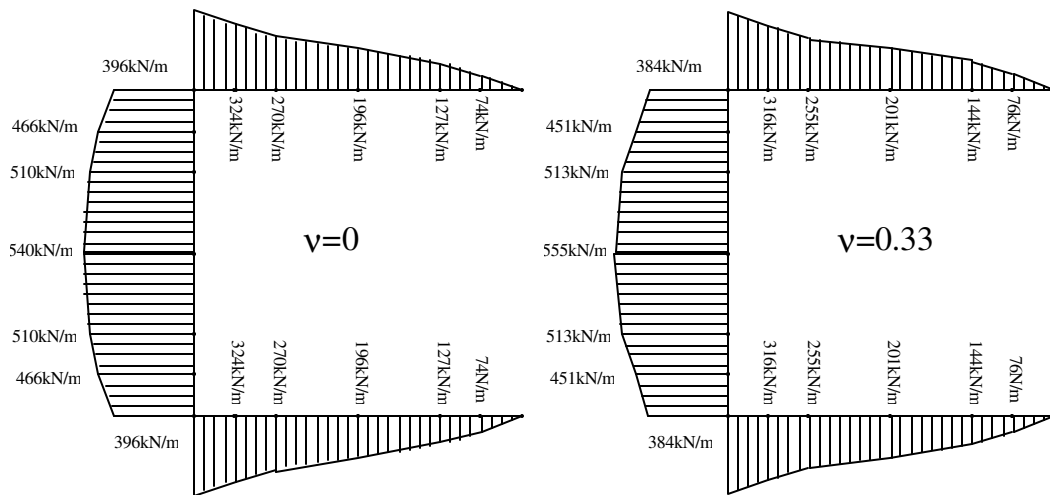


Figura 10.32 - Tensões de cisalhamento no vão a 75cm ($3\ell/32$) do engaste para flexão em torno de x .

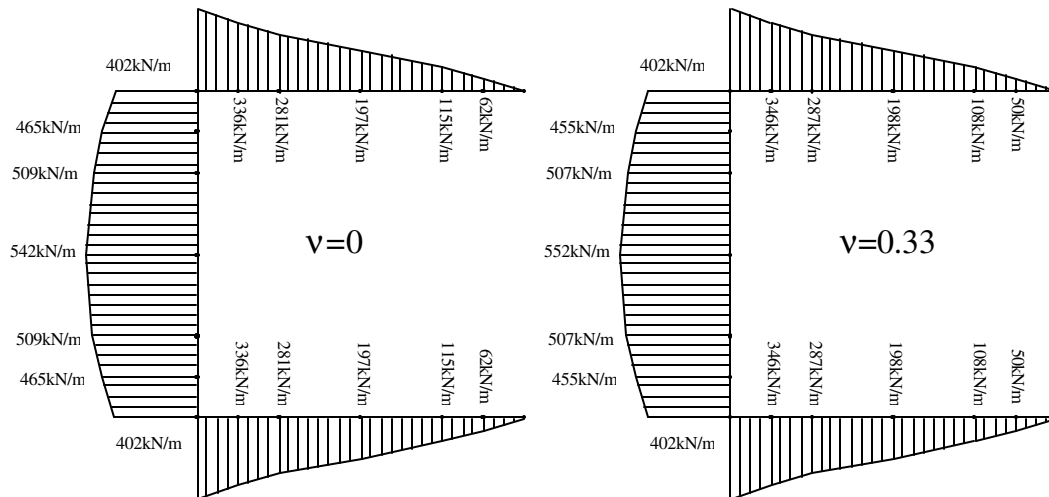


Figura 10.33 - Tensões de cisalhamento no vão a 100cm ($\ell/8$) do engaste para flexão em torno de x .

Pode-se obter a posição do centro de cisalhamento da seção U a partir do carregamento ilustrado na Figura 10.21 ou a partir das tensões de cisalhamento observadas no engaste, mostradas na Figura 10.28. Pelo primeiro processo encontra-se que o centro de cisalhamento está sobre o eixo de simetria da seção a uma distância de 79.4cm , e pelo segundo, a uma distância de 79.6cm . A posição prevista pela resistência dos materiais seria de 85.7cm . Este

mesmo fenômeno do deslocamento do centro de cisalhamento também foi observado em **Palermo 1989**.

Na Figura 10.34 são mostrados em escala os eixos principais da seção e os centros de cisalhamento. O ponto quadrado representa o centro previsto pela resistência dos materiais, enquanto o círculo representa os dois valores calculados a partir das distribuições de tensão encontradas.

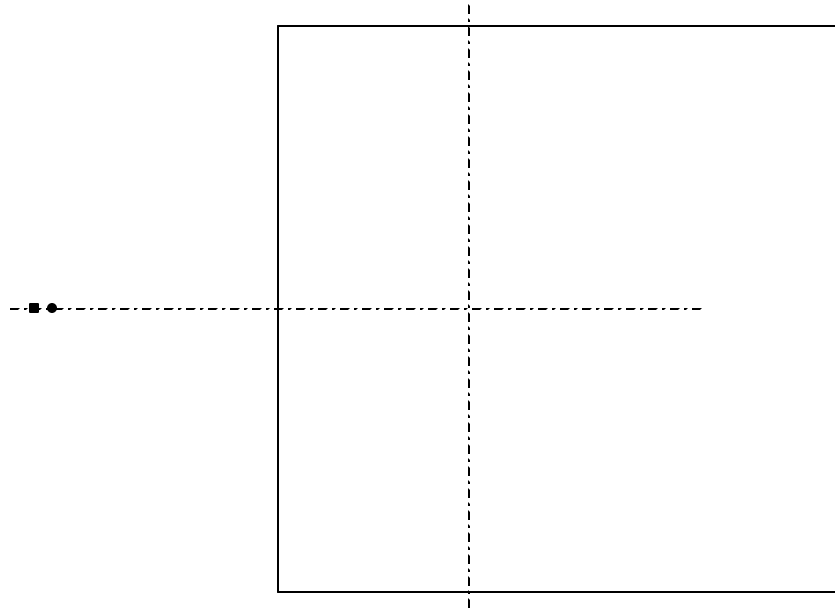


Figura 10.34 – Eixos principais e centros de cisalhamento.

Na Figura 10.35 são mostrados os resultados para as flechas da viga para a flexão em torno dos eixos principais de inércia. A maior diferença entre os resultados obtidos e os valores previstos pela resistência dos materiais foi de 1%.

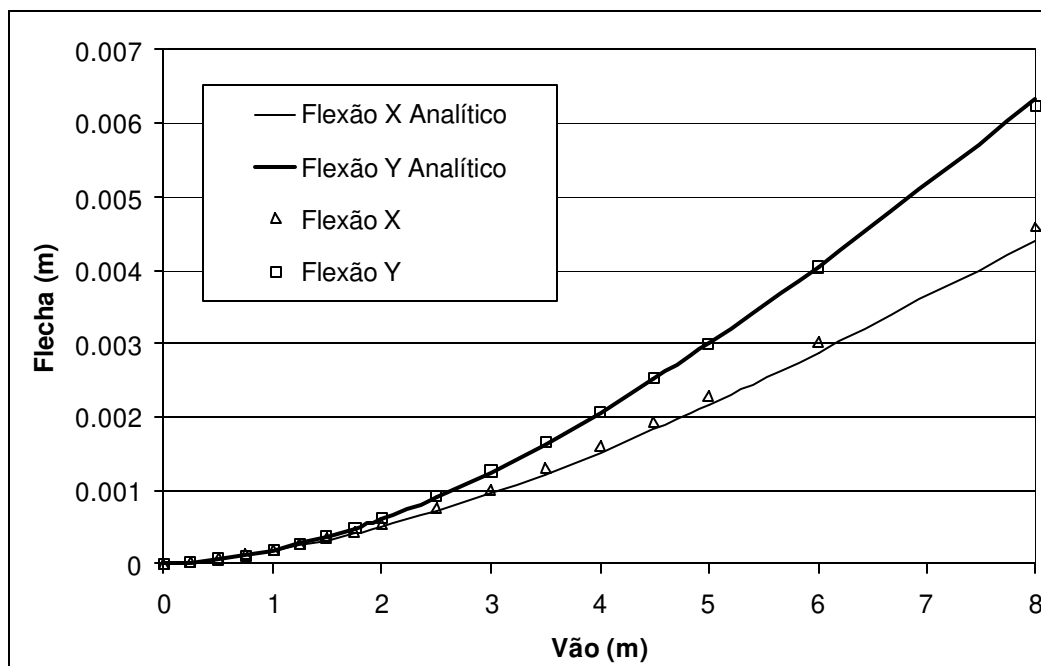


Figura 10.35 – Deflexões da viga nas direções dos eixos principais.

10.3.3-Flexo-torção

Quando a resultante do carregamento não coincide com o centro de cisalhamento da seção transversal, a viga fica submetida a flexo-torção. Este fenômeno é mais pronunciado quanto maior for a diferença entre os momentos principais de inércia. Neste caso deve-se levar em conta os efeitos do momento torçor e do bimomento, como mostrado em **Vlassov 1962**.

A viga mostrada na Figura 10.21 foi estudada para o caso em que a resultante do carregamento coincide com a alma da peça.

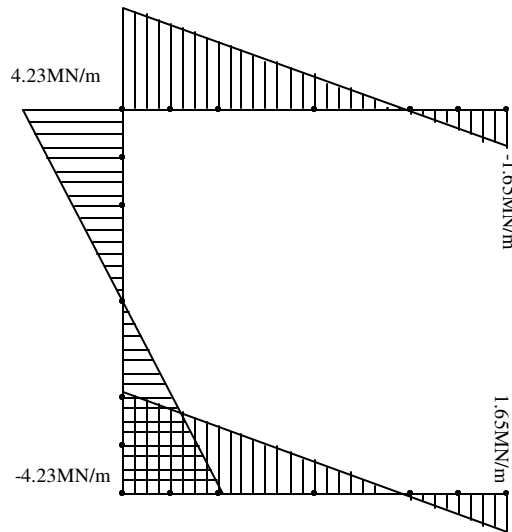


Figura 10.36 – Tensões no engaste na direção do eixo z para flexo-torção (Teórico).

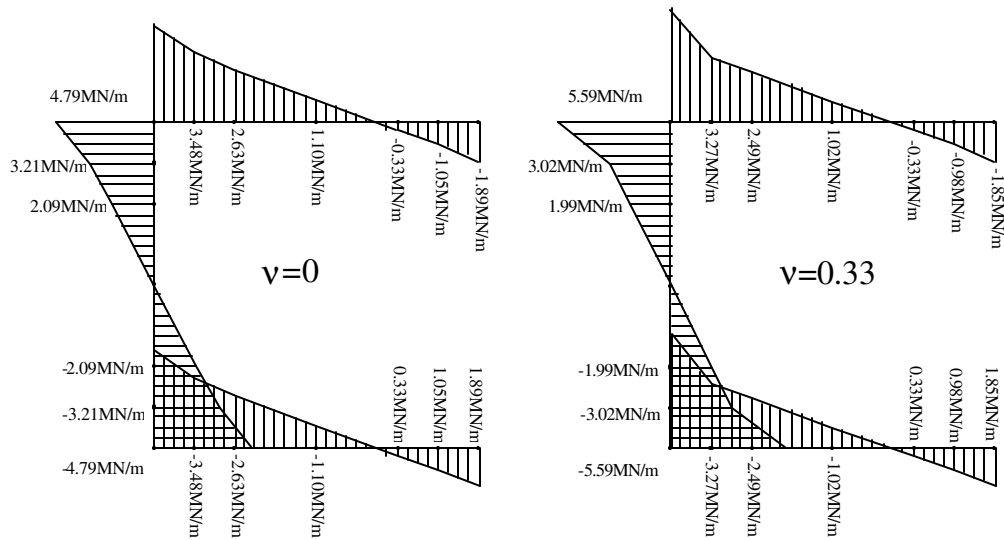


Figura 10.37 – Tensões no engaste na direção do eixo z para flexo-torção.

Na Figura 10.38 são mostrados os resultados para as flechas da viga. Os valores referem-se ao deslocamento de uma linha situada sobre a alma na metade de sua altura. Apesar de a teoria de **Vlassov 1962** ser mais adequada para o tratamento de vigas longas, há uma boa concordância entre os resultados numéricos e os previstos pelo modelo analítico.

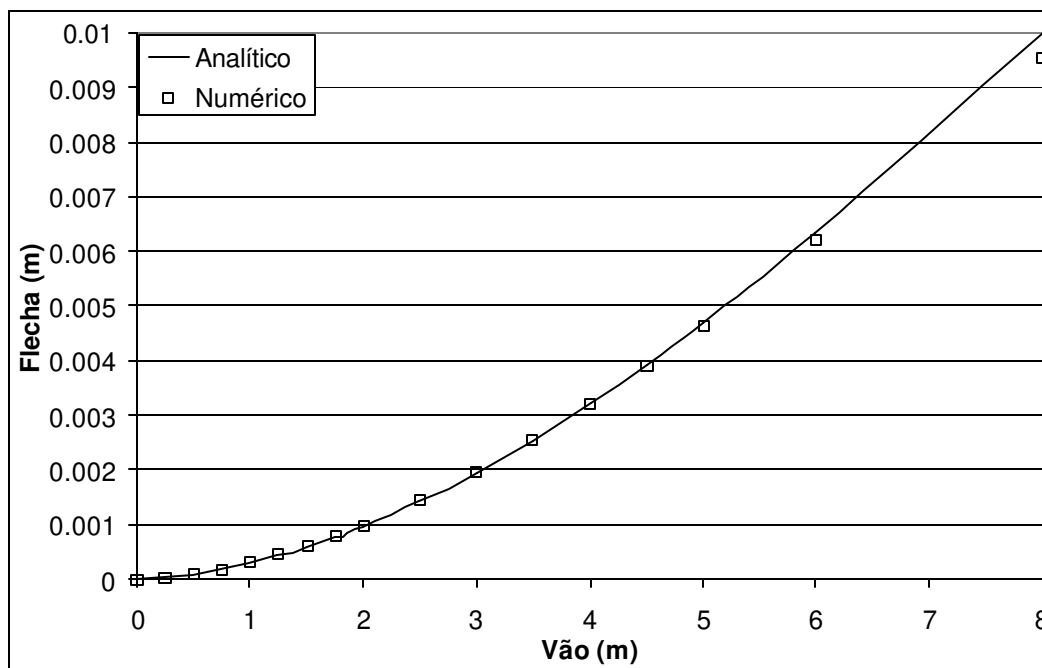


Figura 10.38 – Deflexão da viga na linha média da alma.

10.4-Viga U longa

Neste exemplo estuda-se o comportamento de uma viga de seção U longa, com a mesma geometria ilustrada na Figura 10.21 porém com um vão de 24m. A espessura das paredes foi assumida constante igual a 5cm. Adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal de 205GPa. O coeficiente de Poisson foi tomado com os valores zero e 0.33. A malha empregada na análise é composta de três macro elementos, cada qual discretizado com 76 nós como ilustrado na Figura 10.39, perfazendo um total de 162 nós.

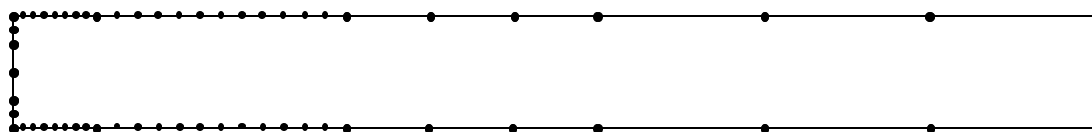


Figura 10.39 – Malha de um dos macro-elementos.

O carregamento é o mesmo mostrado na Figura 10.21, consistindo de uma distribuição de tensões equivalente a uma carga concentrada de 1000kN aplicada no centro de cisalhamento da seção.

Como no caso da viga curta observa-se um deslocamento do centro de cisalhamento em relação à posição prevista pela resistência dos materiais. Neste caso, o valor encontrado foi de 79.2cm, concordando dos valores anteriormente observados.

Da Figura 10.40 à Figura 10.44 são mostradas as distribuições das tensões na direção do eixo da viga originadas pela flexão. Pode-se notar uma repetição do mesmo comportamento observado na a viga curta. Embora a posição das seções observadas seja a mesma em termos distância do apoio, elas representam proporções do vão bem menores.

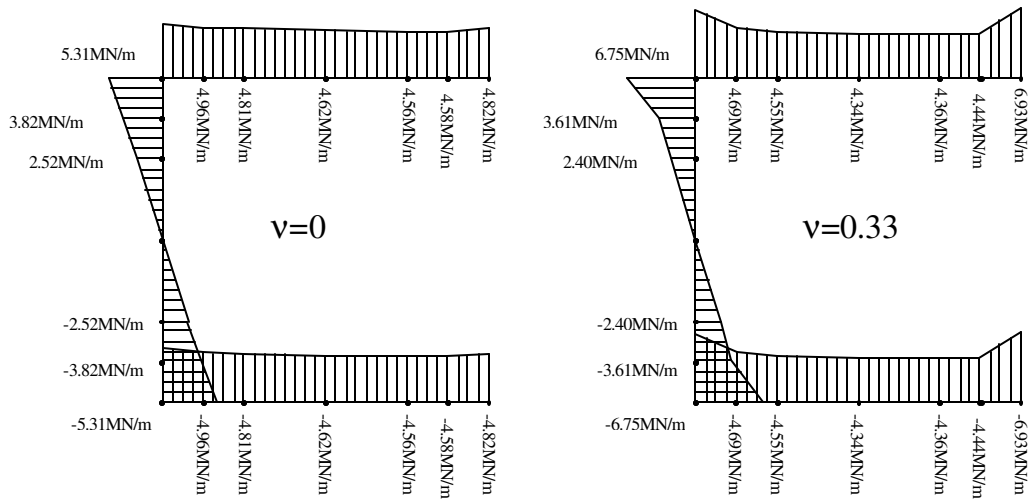


Figura 10.40 – Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em x

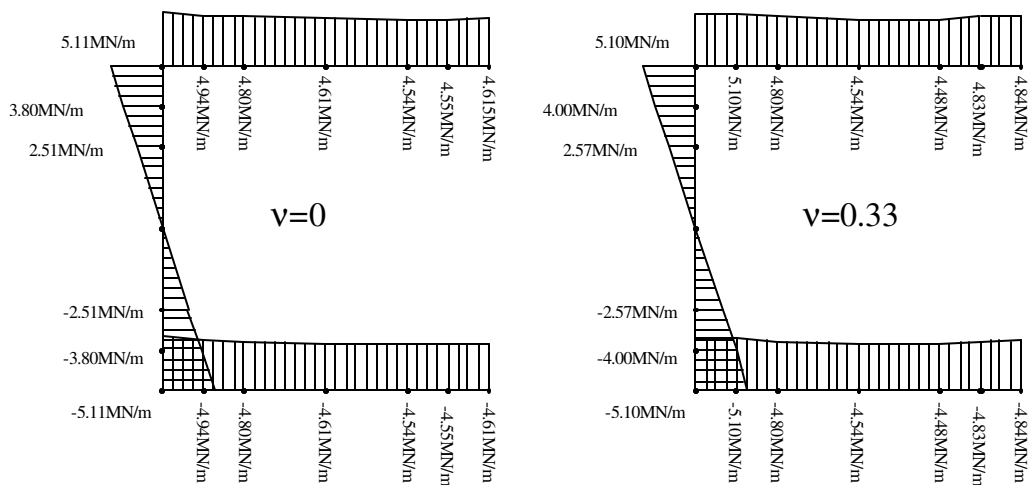


Figura 10.41 – Forças no vão a 25cm ($\ell / 96$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x.

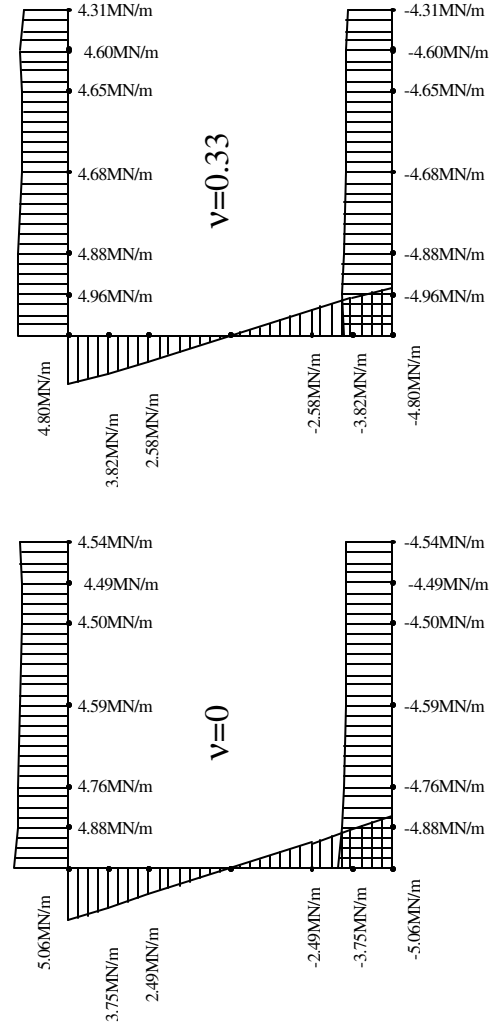


Figura 10.42 – Forças no vão a 50cm do ($\ell/48$) engaste na direção do eixo z para flexão em x .

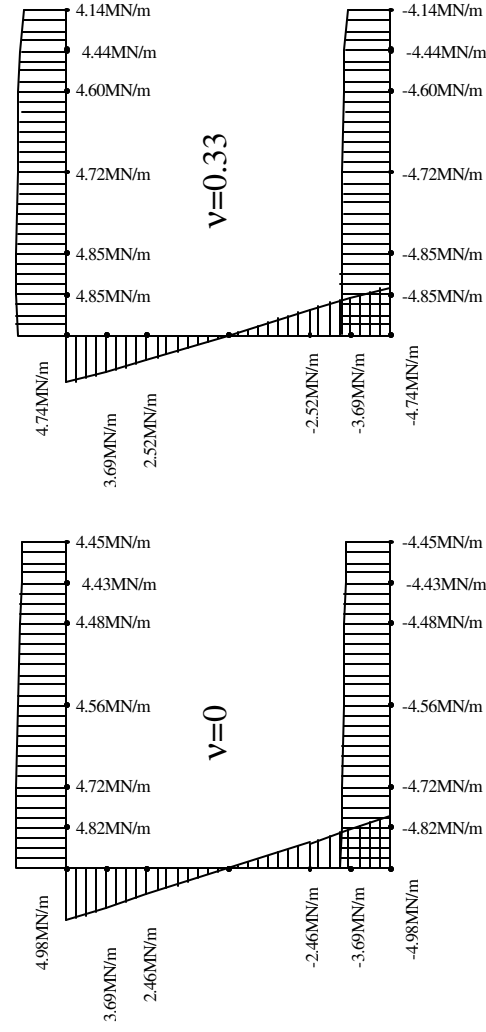


Figura 10.43 – Forças no vão a 75cm ($3\ell/96$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x .

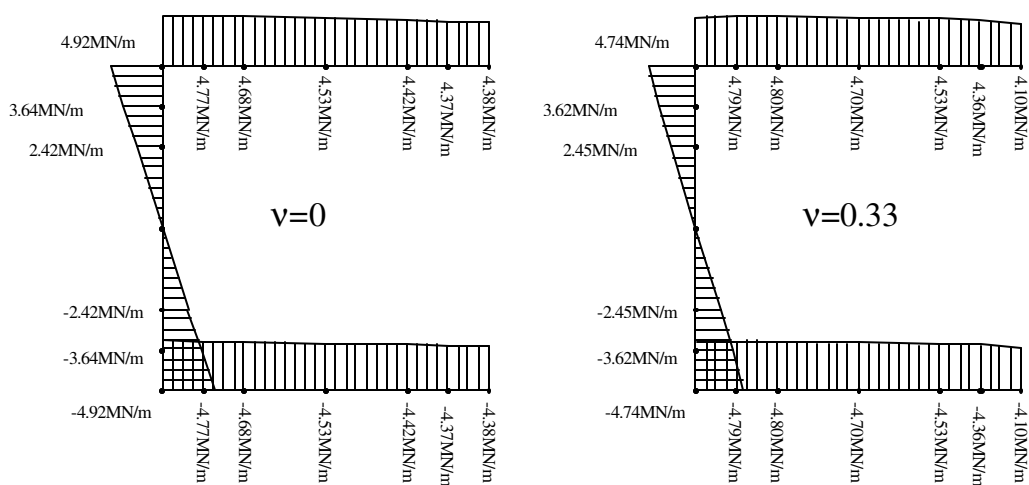


Figura 10.44 – Forças no vão a 100cm ($\ell/24$) do engaste na direção do eixo z para flexão em x .

Entre a Figura 10.46 e a Figura 10.49 são mostradas as épuras de cisalhamento para algumas seções a partir do apoio até um metro de distância deste. Pode-se notar uma forte perturbação nos estorços devido ao efeito de Poisson

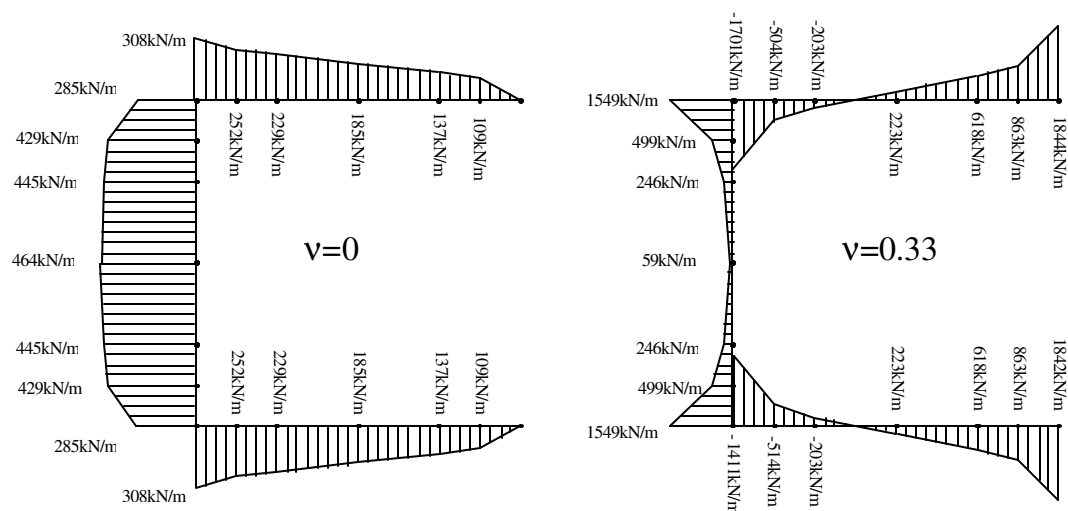


Figura 10.45 - Tensões de cisalhamento no engaste para flexão em torno de x .

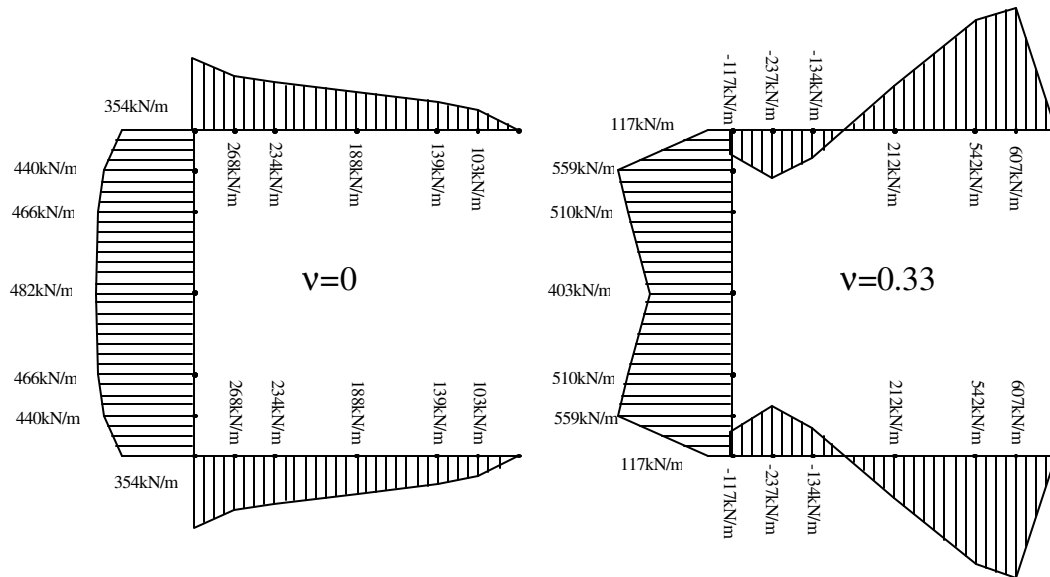


Figura 10.46 - Tensões de cisalhamento no vão a 25cm do engaste para flexão em torno de x.

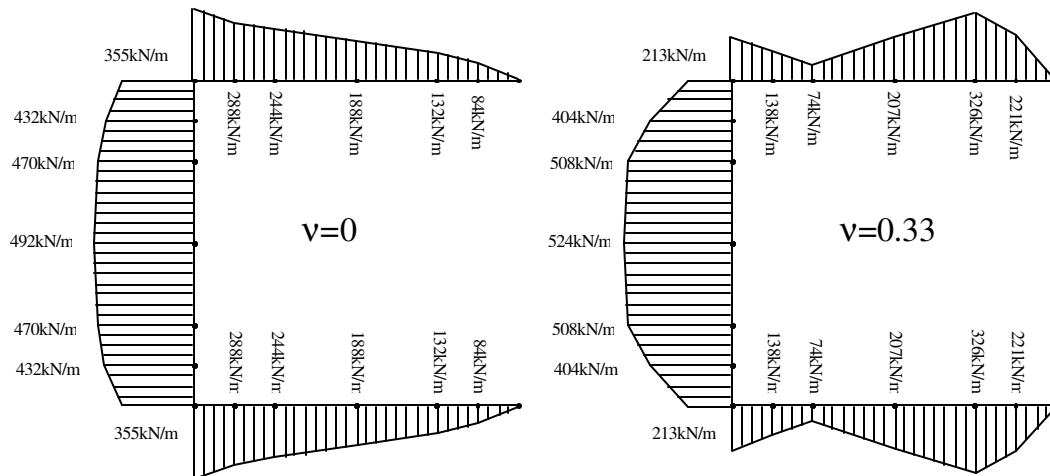


Figura 10.47 - Tensões de cisalhamento no vão a 50cm do engaste para flexão em torno de x.

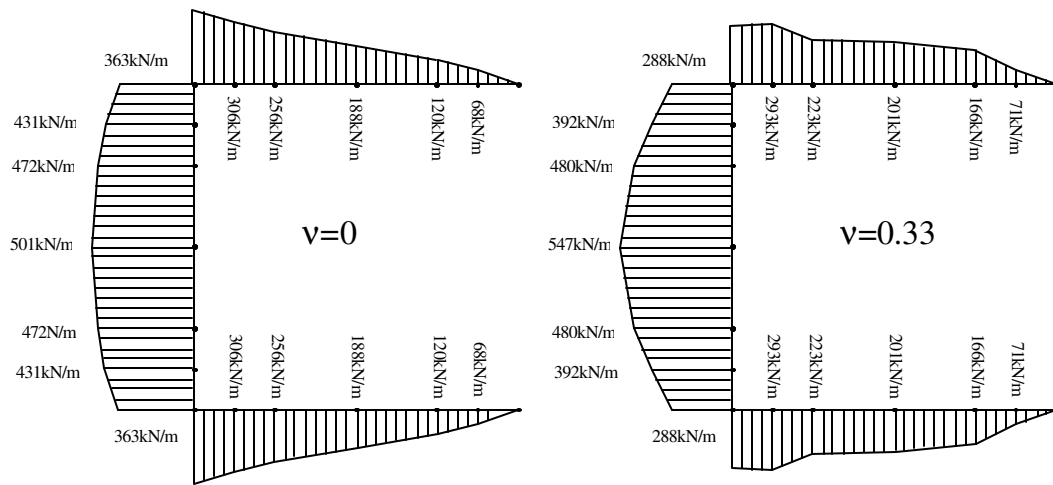


Figura 10.48 - Tensões de cisalhamento no vão a 75cm do engaste para flexão em torno de x .

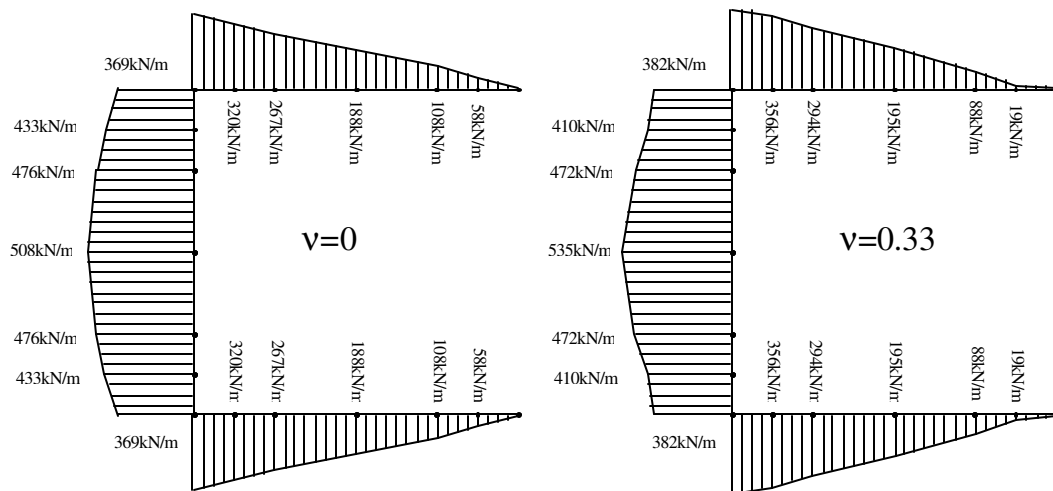


Figura 10.49 - Tensões de cisalhamento no vão a 100cm do engaste para flexão em torno de x .

Na Figura 10.50 são mostradas as deflexões da viga para o carregamento aplicado. Houve uma discordância maior do que a anteriormente observada para a deflexão no final da viga. No entanto o erro é inferior a 10%.

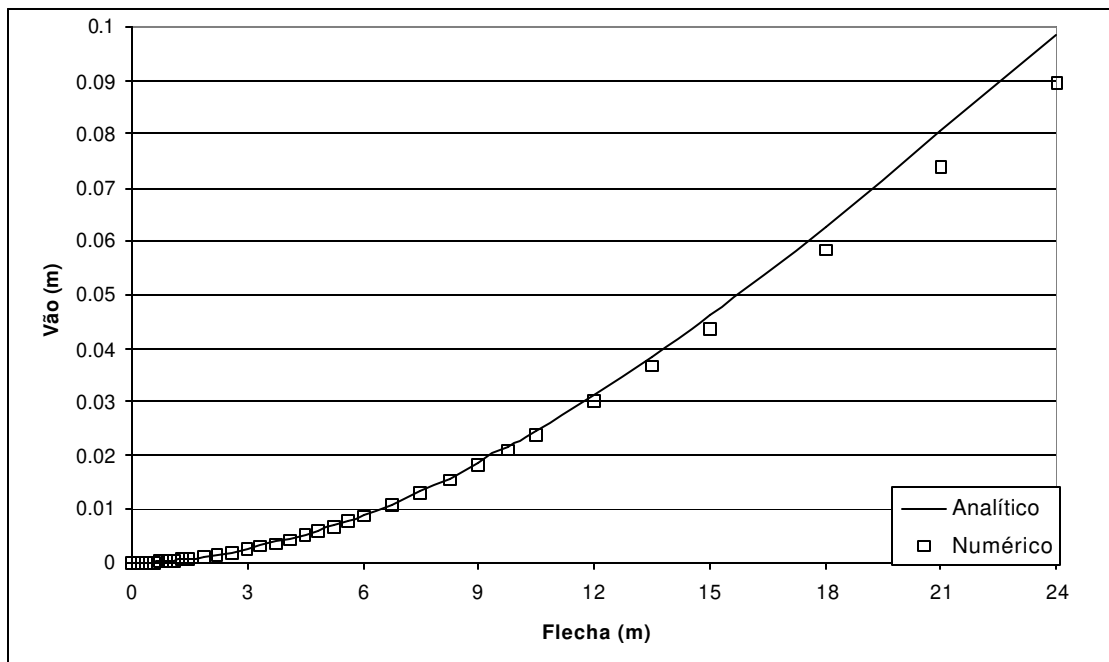


Figura 10.50 – Deflexão da viga na direção do eixo y.

10.5-Viga I curta

Analisou-se, com o programa desenvolvido, o comportamento à flexão de uma viga I curta sujeita a flexão em torno de seu eixo de maior inércia. A viga, seu carregamento e vinculações são ilustrados na Figura 10.51.

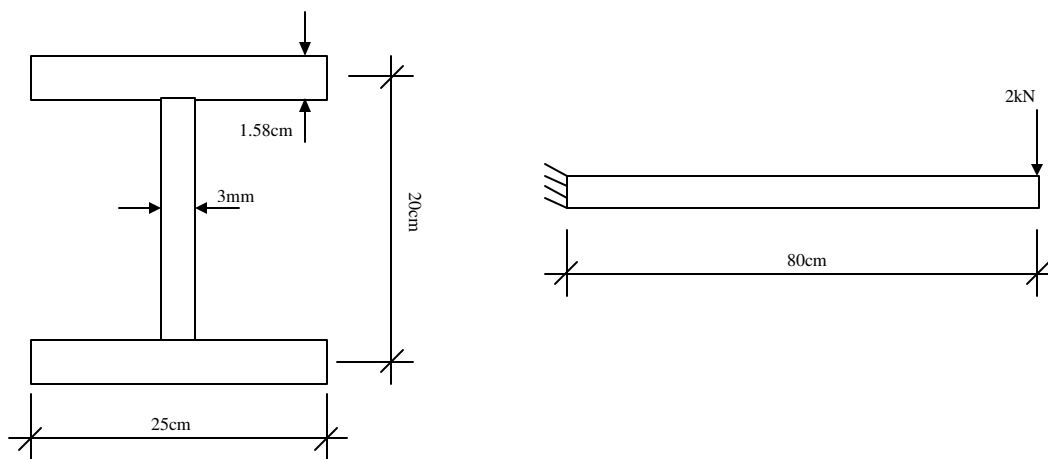


Figura 10.51 – Viga I curta.

Seguindo o modelo dos exemplos anteriores, a carga foi aplicada por meio de uma força distribuída na alma. Adotou-se módulo de elasticidade longitudinal de 205Gpa e coeficiente de Poisson nulo e 0.33.

Na Figura 10.52 são mostradas as distribuições das tensões na direção do eixo da viga originadas pela flexão. Nota-se que neste exemplo a variação do coeficiente de Poisson trouxe pouca alteração na distribuição das tensões.

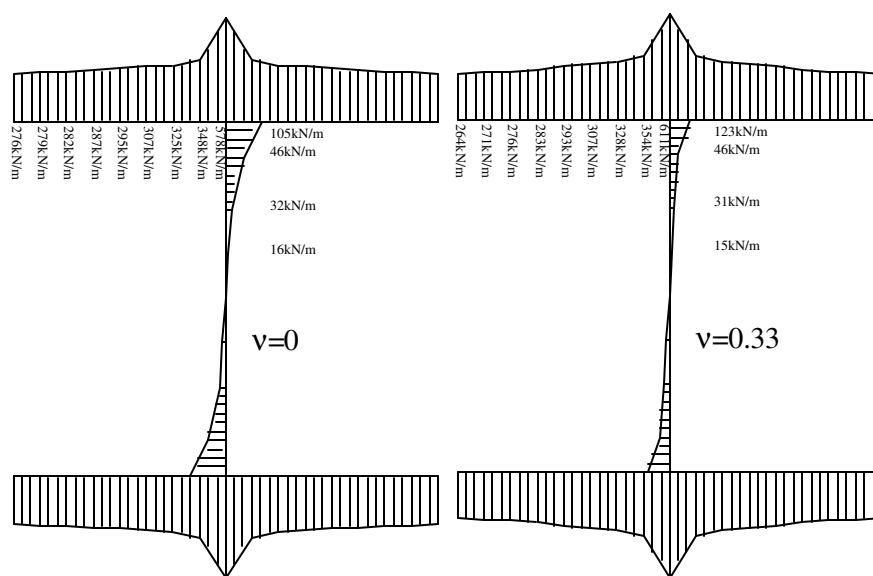


Figura 10.52 – Forças no engaste na direção do eixo z para flexão em torno do eixo de maior inércia

A distribuição de tensão de cisalhamento na alma da viga foi praticamente a mesma para ambos os casos estudados. Encontrou-se uma tensão uniforme na alma com uma ligeira flutuação, menor que 10%, próxima às mesas. Deve-se dizer que neste exemplo não se restringiu o deslocamento referente à retração das mesas por efeito de Poisson, assim as tensões de cisalhamento nas mesas são identicamente nulas.

10.6-Problema de Vlassov

Este exemplo consiste em uma viga carregada excentricamente, a qual é formada por quatro folhas poliédricas. Ele foi proposto e resolvido em **Vlassov 1962** e consiste em analisar a tensão na junção das folhas na aresta carregada. A geometria do problema é mostrada na Figura 10.53. Este mesmo problema também foi analisado em **Palermo 1989**.

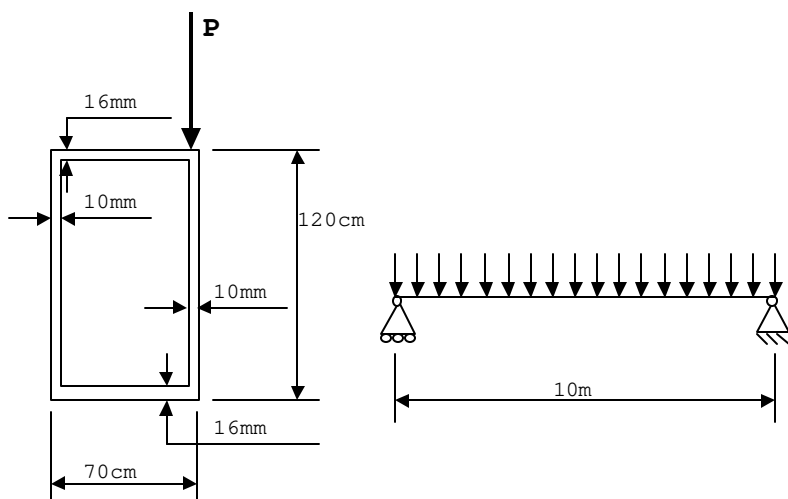


Figura 10.53 – Problema de Vlassov.

Em **Palermo 1989** o problema foi analisado usando-se uma malha de 76 nós. Essa malha foi testada neste trabalho, porém não conduziu a resultados satisfatórios. Isto pode ser devido à estratégia empregada no posicionamento dos pontos de colocação que eram externos em **Palermo 1989** e neste trabalho foram dispostos sobre o contorno.

Neste trabalho, discretizações com 168, 204 e 396 nós foram testadas para reproduzir os valores previstos em **Vlassov 1962**. As tensões devidas à flexão na aresta mais solicitada são mostradas na Figura 10.54. O valor máximo encontrado em **Vlassov 1962** foi de -13.83kgf/cm², enquanto que o valor obtido com o programa é -13.58kgf/cm² para a malha de 396 nós.

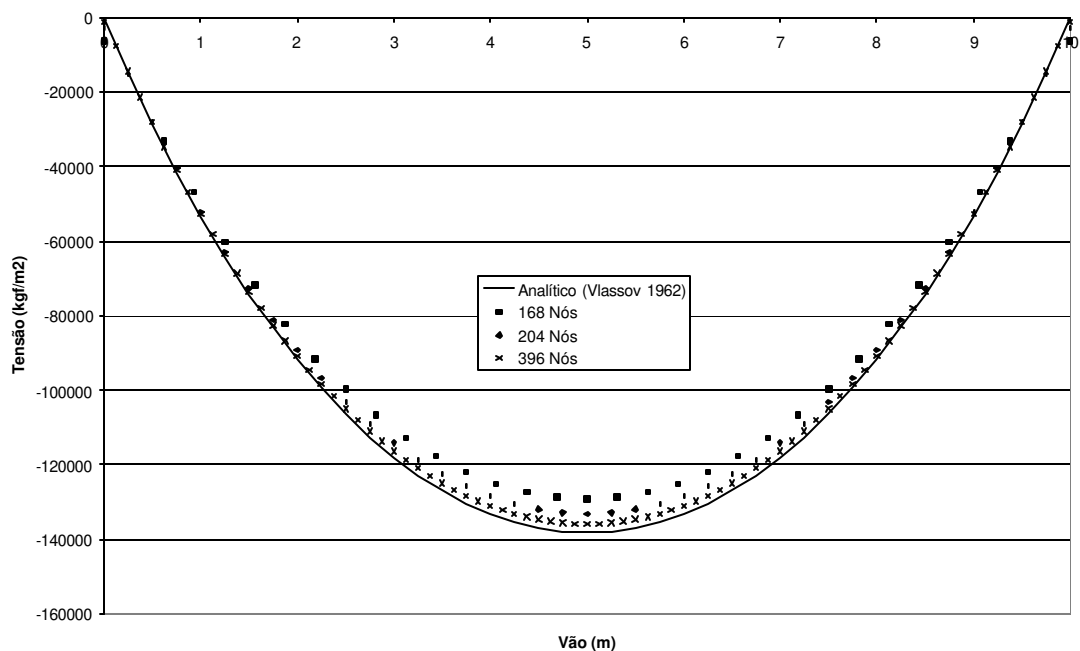


Figura 10.54 – Tensões na ares ta mais solicitada.

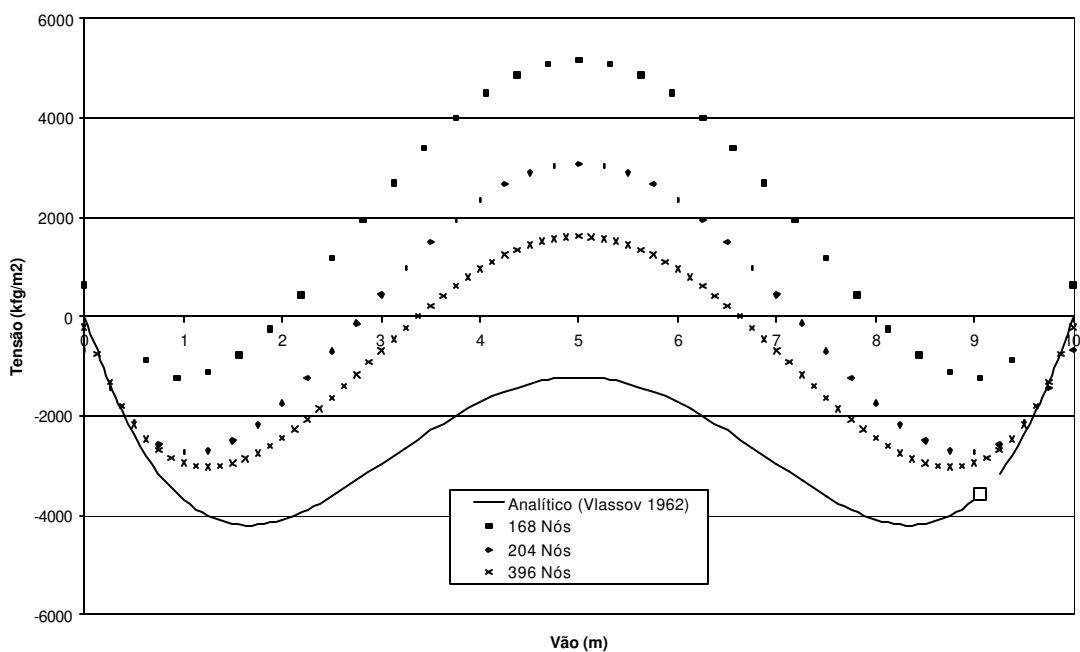


Figura 10.55 – Tensões na aresta menos solicitada.

A distribuição das tensões na aresta menos carregada, correspondente àquela diagonalmente oposta à que se aplica o carregamento, é mostrada na Figura 10.55. O valor para a tensão no centro do vão dado em **Vlassov 1962** é de -0.13kgf/cm^2 . O valor mais

próximo encontrado neste trabalho foi de $+0.16\text{kgf/cm}^2$. Nota-se que, com o aumento do número de nós, os valores obtidos com o programa se aproximam daqueles previstos por **Vlassov 1962**.

10.7-Chapa larga sob carregamento dinâmico

Para ilustrar o comportamento elasto-dinâmico dos estados planos de tensão, toma-se uma chapa com dimensões de 9m por 12m, conforme ilustrado na Figura 10.56. Este mesmo problema foi estudado em **Vera-Tudela & Telles 2003**, utilizando-se a técnica de OQM-BEM. Foram adotados para este exemplo módulo de elasticidade de 2.4Pa , coeficiente de Poisson de 0.2, densidade de 1kg/m^3 e um passo de tempo de 0.25s. A malha empregada para a análise é apresentada na Figura 10.57.

Duas análises distintas foram feitas para a aplicação do carregamento. No primeiro caso, o carregamento é mantido durante todo o tempo da análise. No segundo caso, este é aplicado por 10s e então removido.

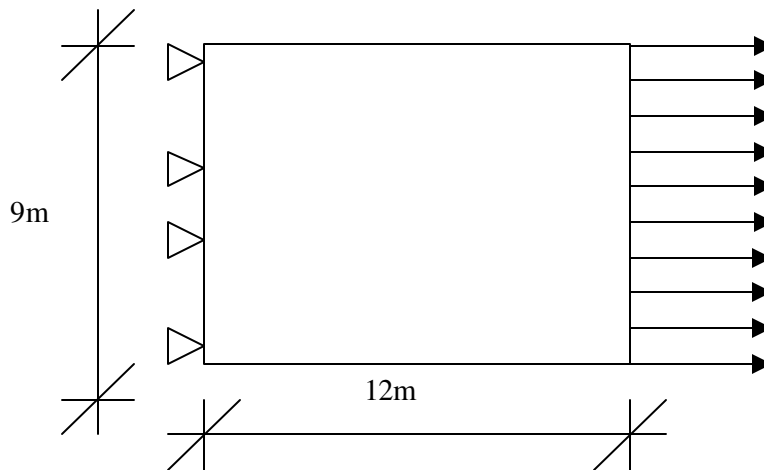


Figura 10.56 – Geometria da chapa larga.

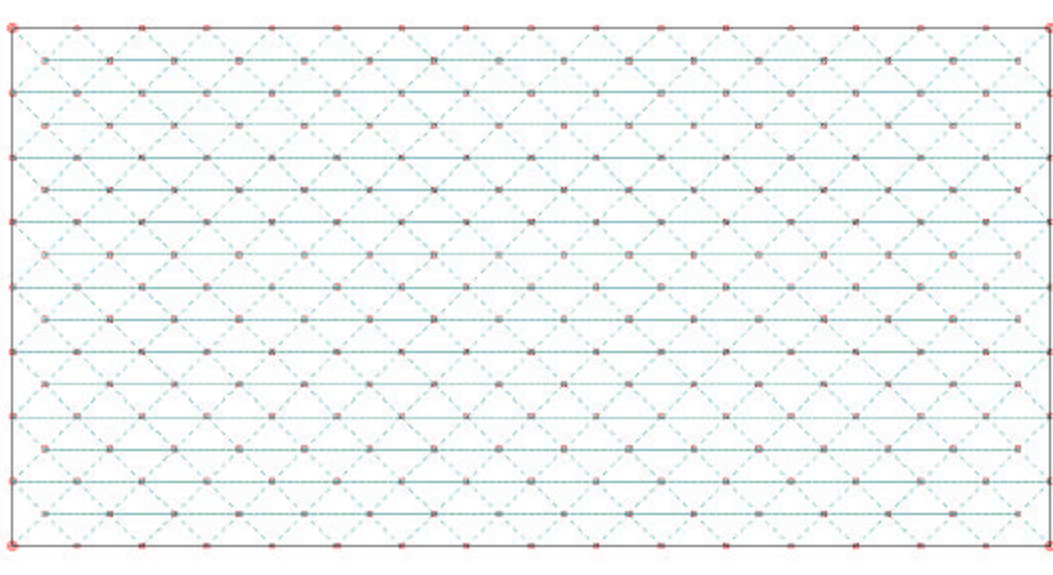


Figura 10.57 – Malha para a chapa larga.

Na Figura 10.58 tem-se o resultado para os deslocamentos na extremidade carregada da chapa. Os resultados são comparados à solução analítica do caso unidimensional. Nos resultados numéricos nota-se um pequeno aumento no período do movimento. Percebe-se, também, que para tempos altos, o integrador de Houbolt apresenta uma ligeira perda na amplitude e o de Newmark oscila. O integrador de Wilson produz resultados intermediários aos anteriores.

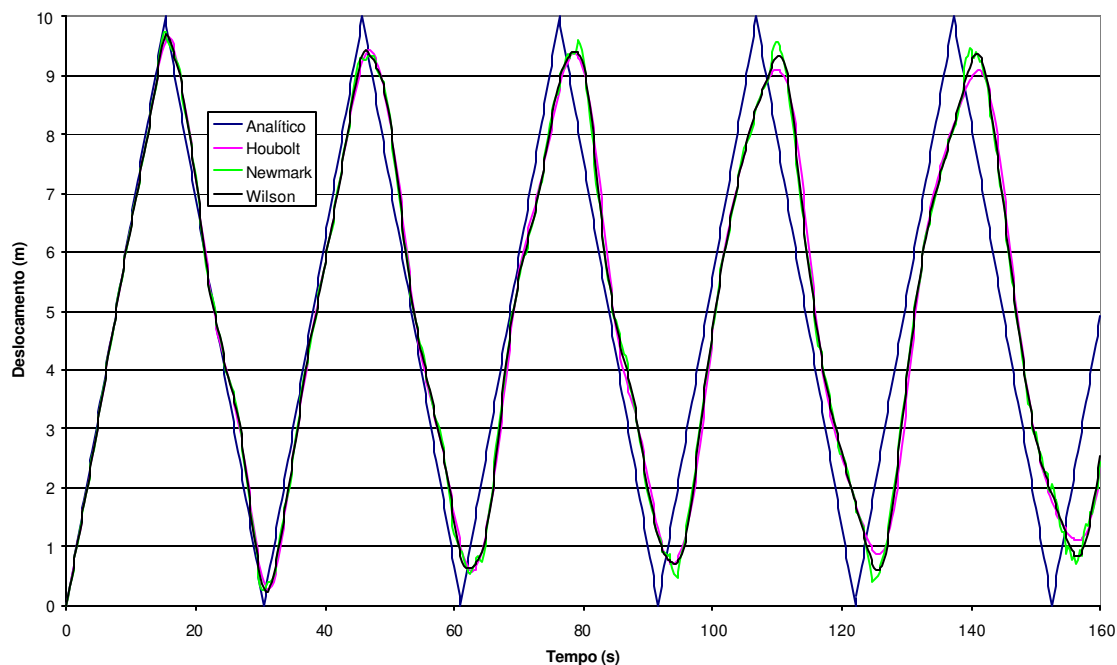


Figura 10.58 – Deslocamentos na borda carregada para carga constante.

A reação no centro da borda vinculada é apresentada na Figura 10.59. No gráfico desta figura nota-se que o integrador de Newmark produz grandes oscilações para o valor da reação, enquanto os outros geram resultados mais estáveis.

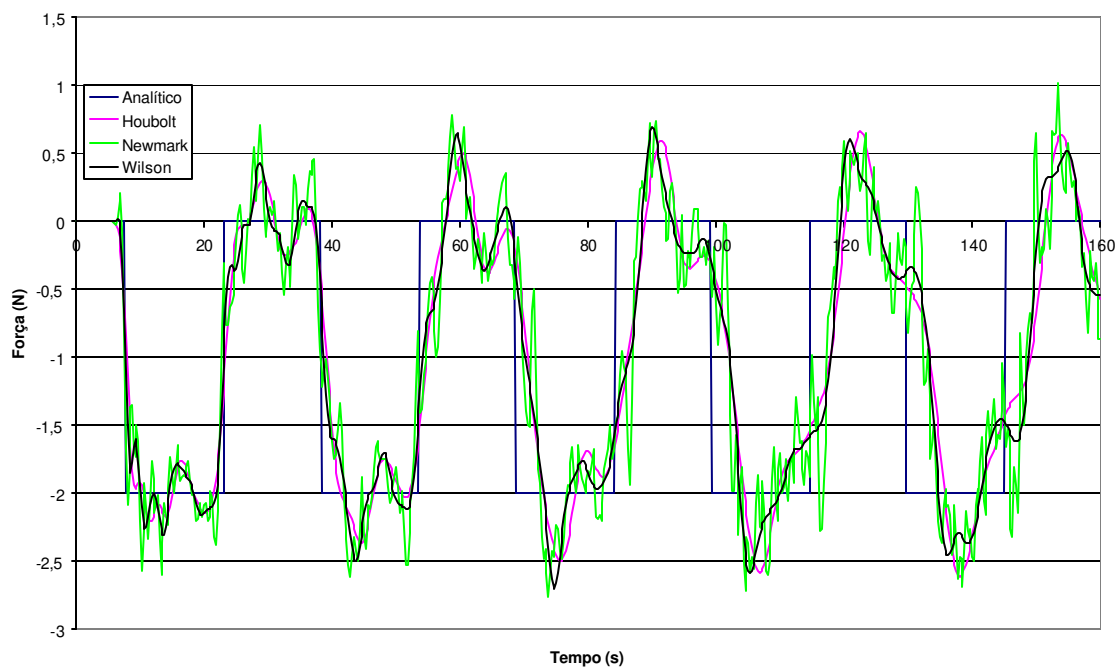


Figura 10.59 – Reação na borda vinculada para carga constante.

Se o carregamento é removido após 10s de análise, obtém-se, na borda carregada, os deslocamentos apresentados na Figura 10.60. Novamente há uma boa concordância entre os resultados numéricos e o analítico.

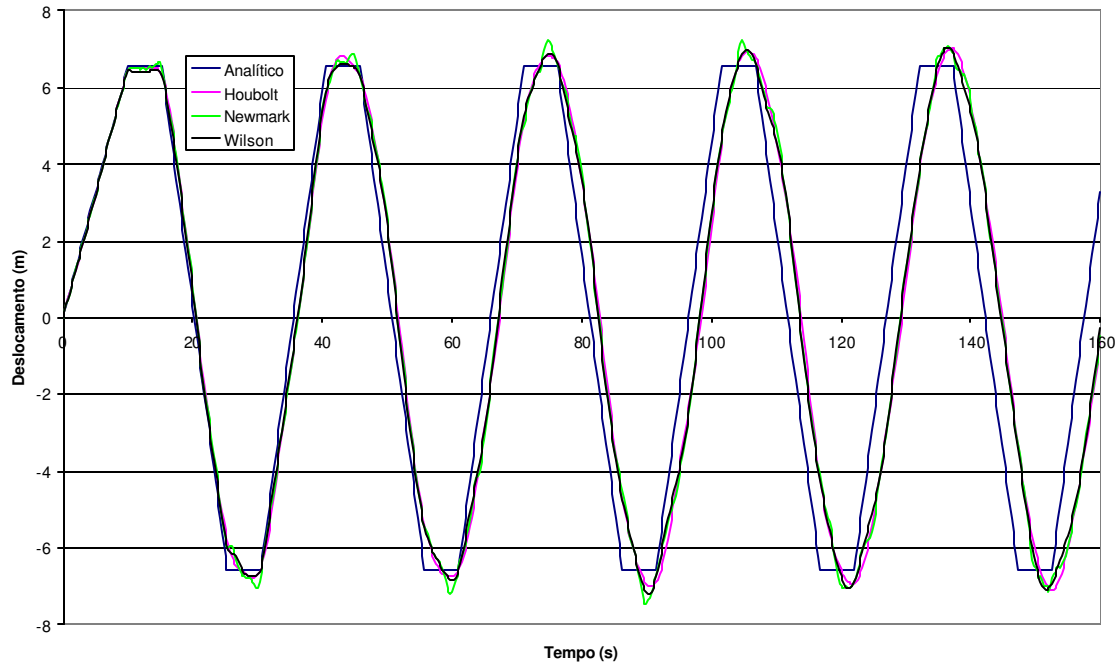


Figura 10.60 – Deslocamentos na borda carregada para carga variável.

Na Figura 10.61 tem-se o gráfico da reação no centro da borda vinculada. Observa-se a mesma oscilação nos resultados fornecidos pelo método de Newmark.

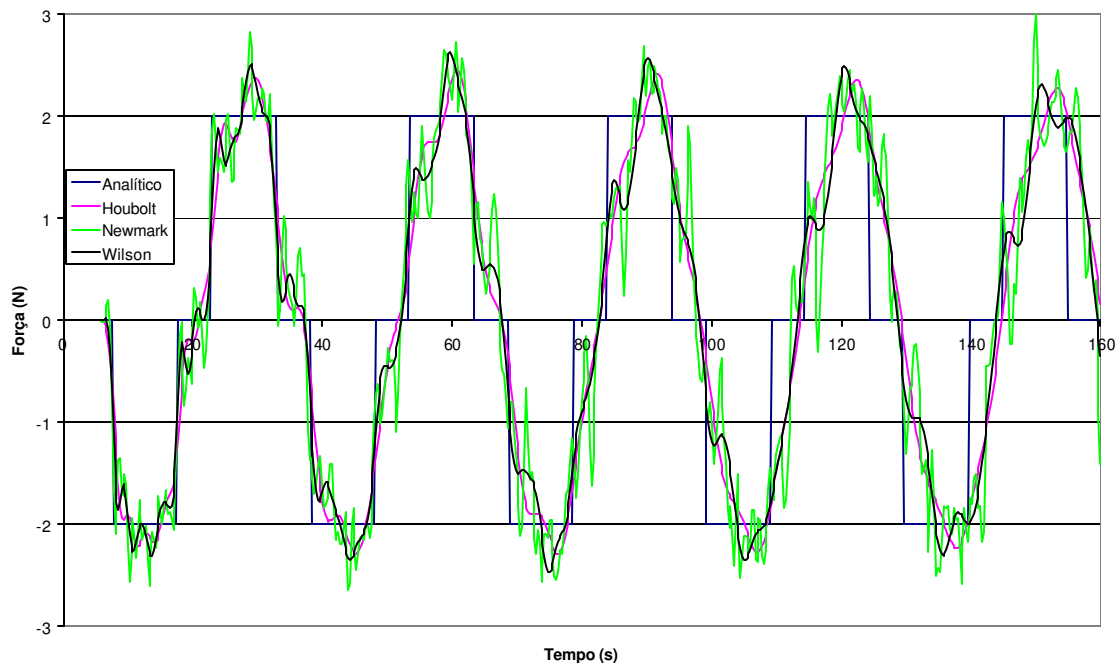


Figura 10.61 – Reação na borda vinculada para carga variável.

10.8-Chapa estreita sob carregamento dinâmico

Neste segundo exemplo elasto-dinâmico, estuda-se o comportamento de uma chapa estreita, com dimensões de 1m por 6m, conforme ilustrado na Figura 10.62. Foram adotados para este exemplo módulo de elasticidade de 1Pa, coeficiente de Poisson de 0.333, densidade de 6kg/m^3 . Foram usados passos de tempo de 1s e de 0.25s. As malhas empregadas nesta análise são apresentadas na Figura 10.63 e na Figura 10.64.

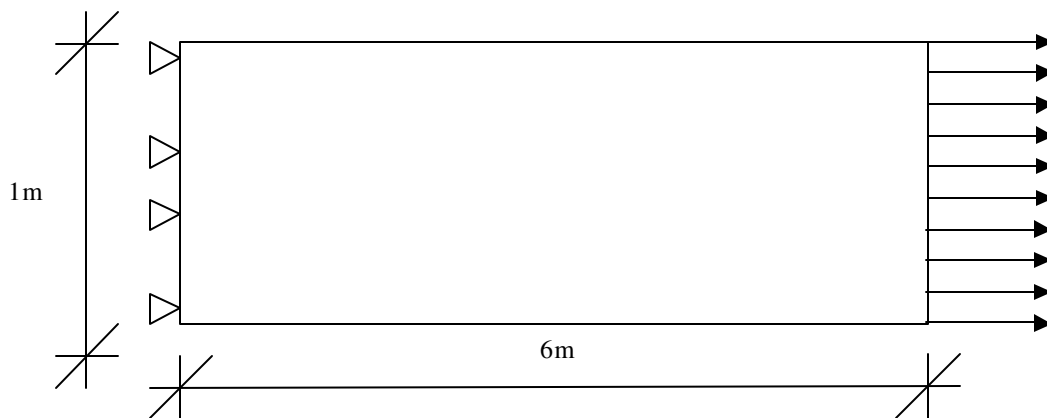


Figura 10.62 – Geometria da chapa estreita.

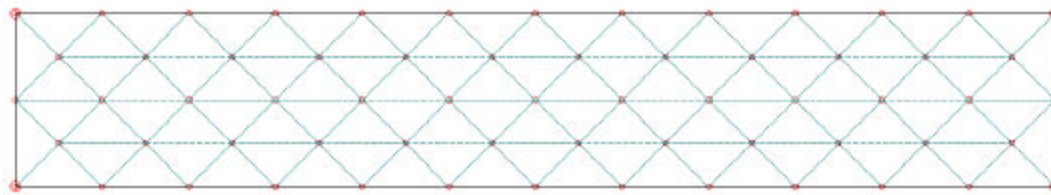


Figura 10.63 – Primeira malha da chapa estreita

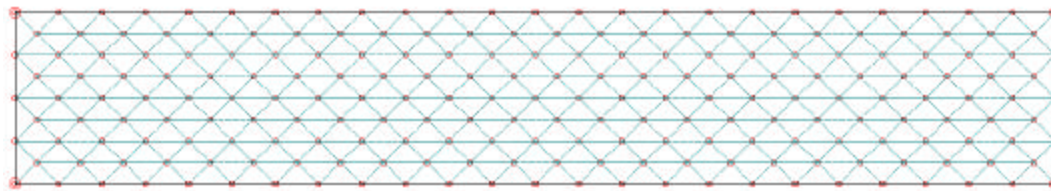


Figura 10.64 - Segunda malha da chapa estreita

Na Figura 10.65 é mostrado o resultado do deslocamento na borda carregada para a malha 1 e na Figura 10.66, o mesmo resultado obtido com a malha 2. Em ambas as análises utilizaram-se passos de tempo de 1s.

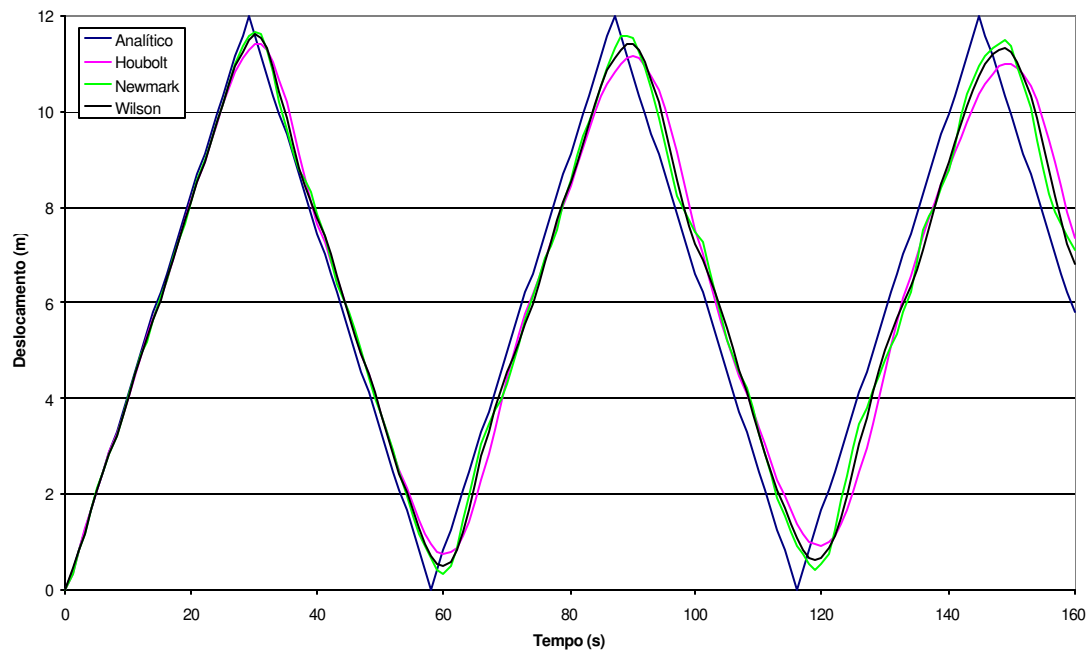


Figura 10.65 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 1s.

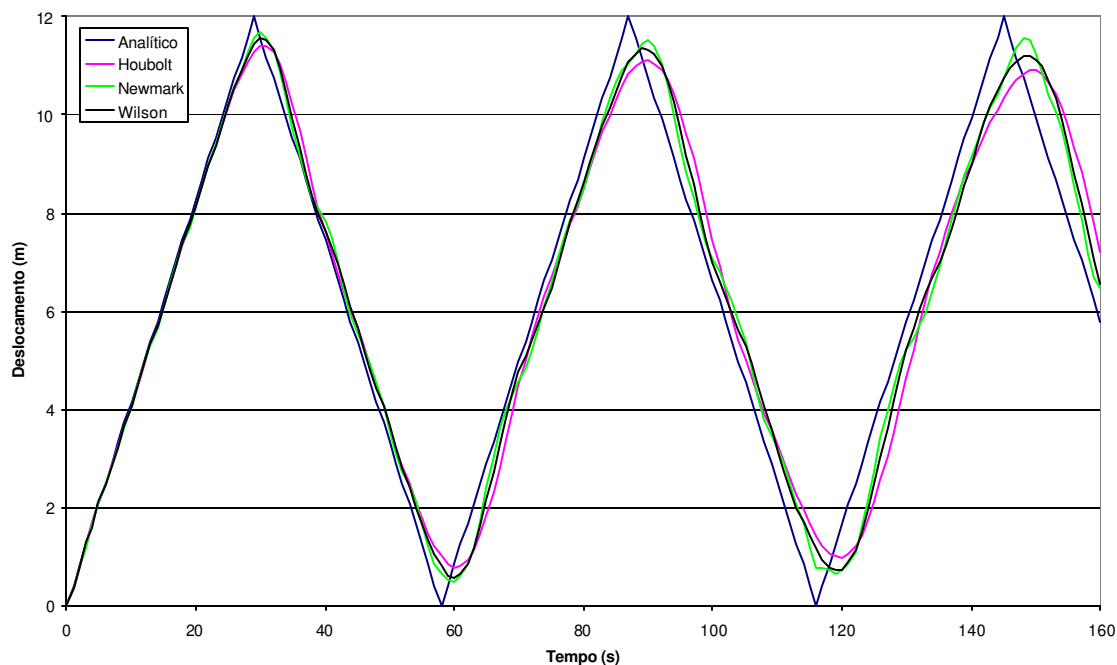


Figura 10.66 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 1s.

Não se nota mudança apreciável nos resultados obtidos com uma ou outra malha. Também as forças não sofrem grande influência da alteração da malha, como pode ser visto na Figura 10.67 para a primeira malha e na Figura 10.68.

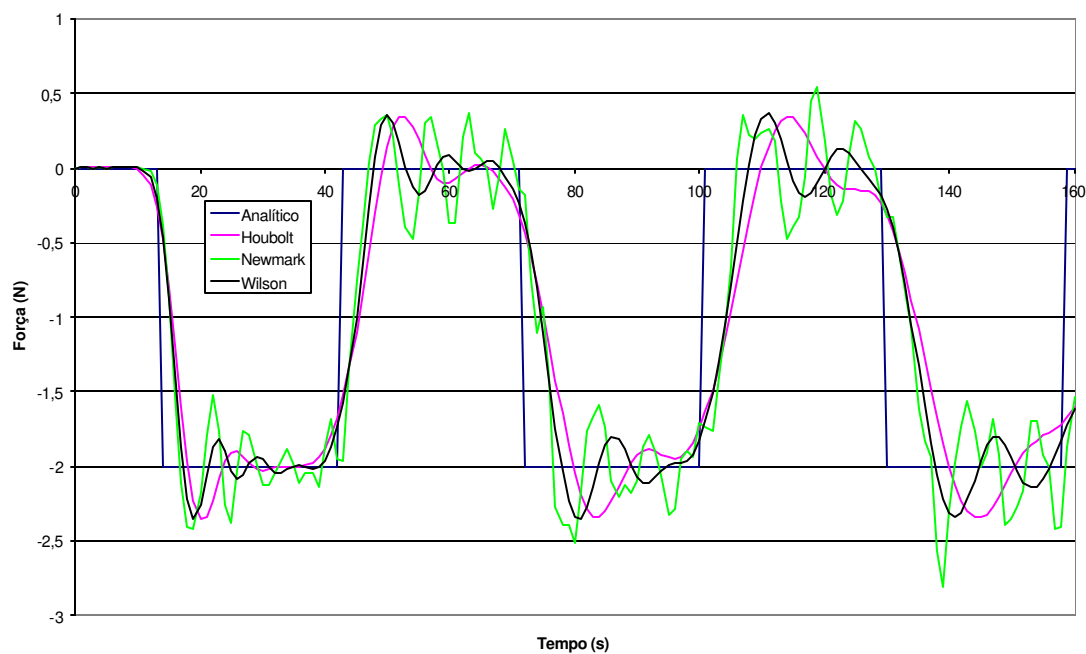


Figura 10.67 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 1s.

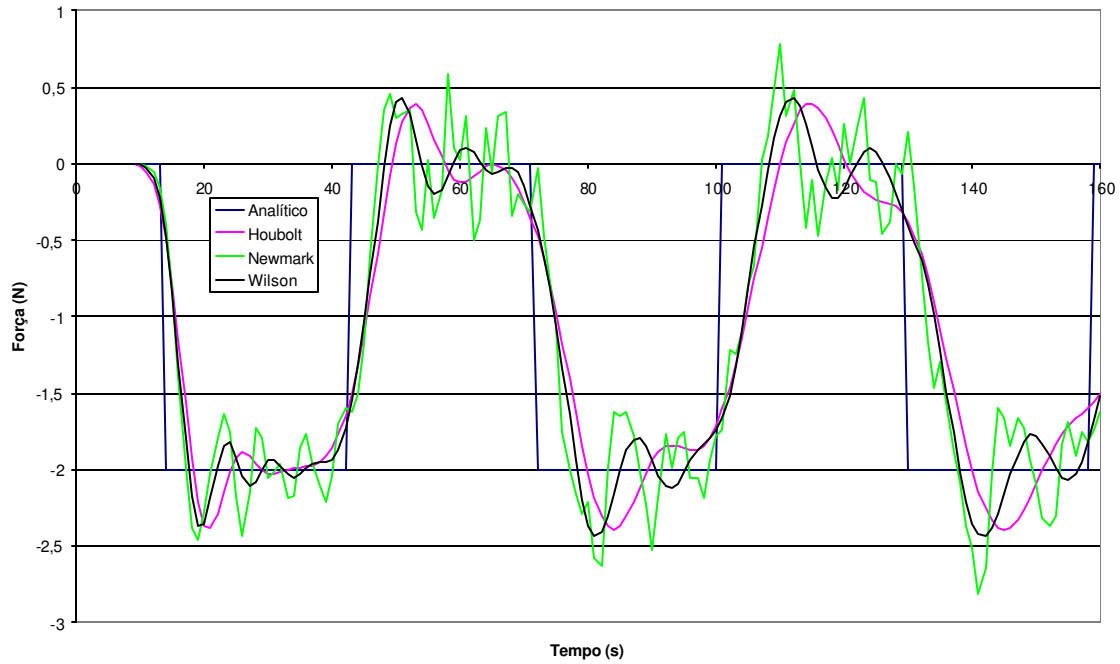


Figura 10.68 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 1s.

Se o carregamento é removido quatro segundos depois de aplicado, obtém-se, na borda carregada, os deslocamentos mostrados na Figura 10.69, para a malha 1, e na Figura 10.70, para a malha 2.

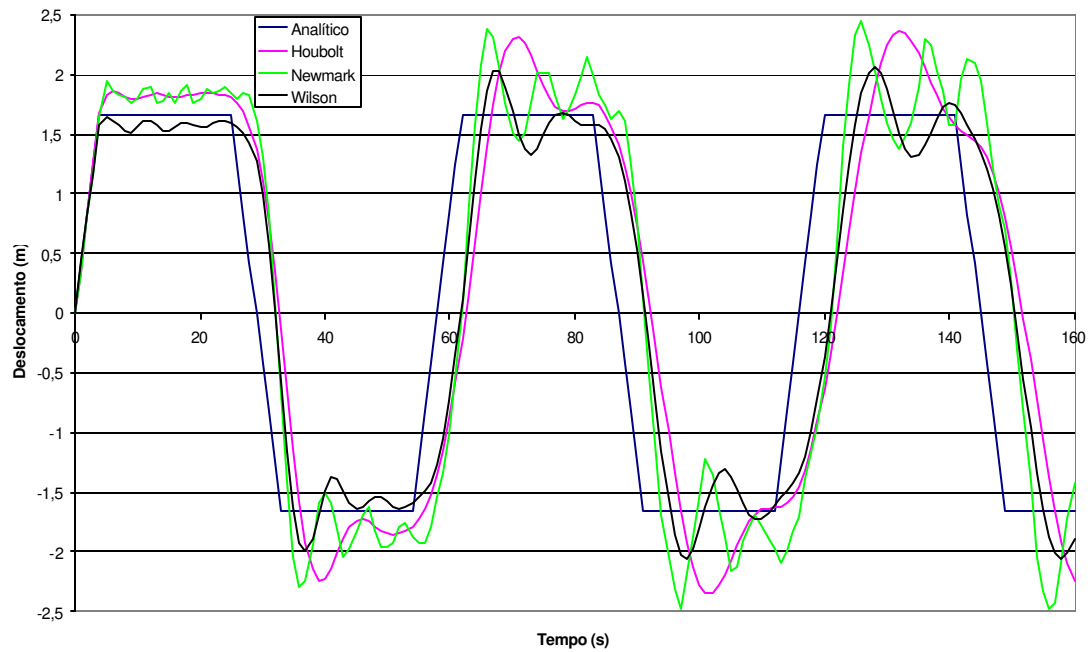


Figura 10.69 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 1s.

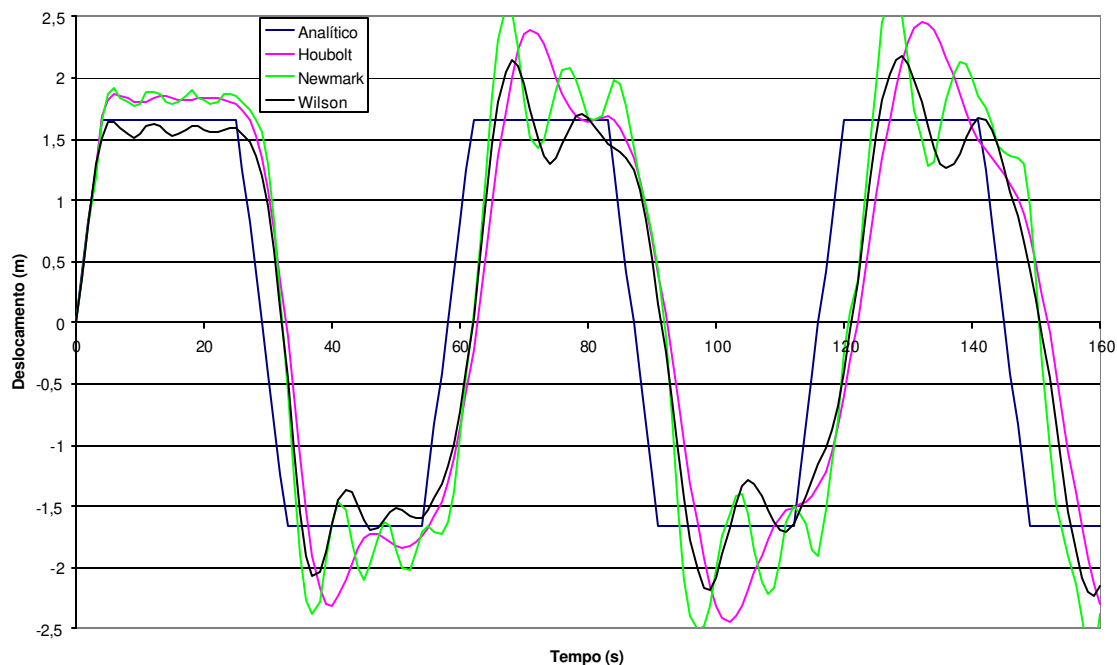


Figura 10.70 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 1s.

Houve, com a alteração da malha, uma sutil variação no comportamento da reação na borda vinculada, como pode ser observado na Figura 10.71, para a malha 1, e na Figura 10.72.

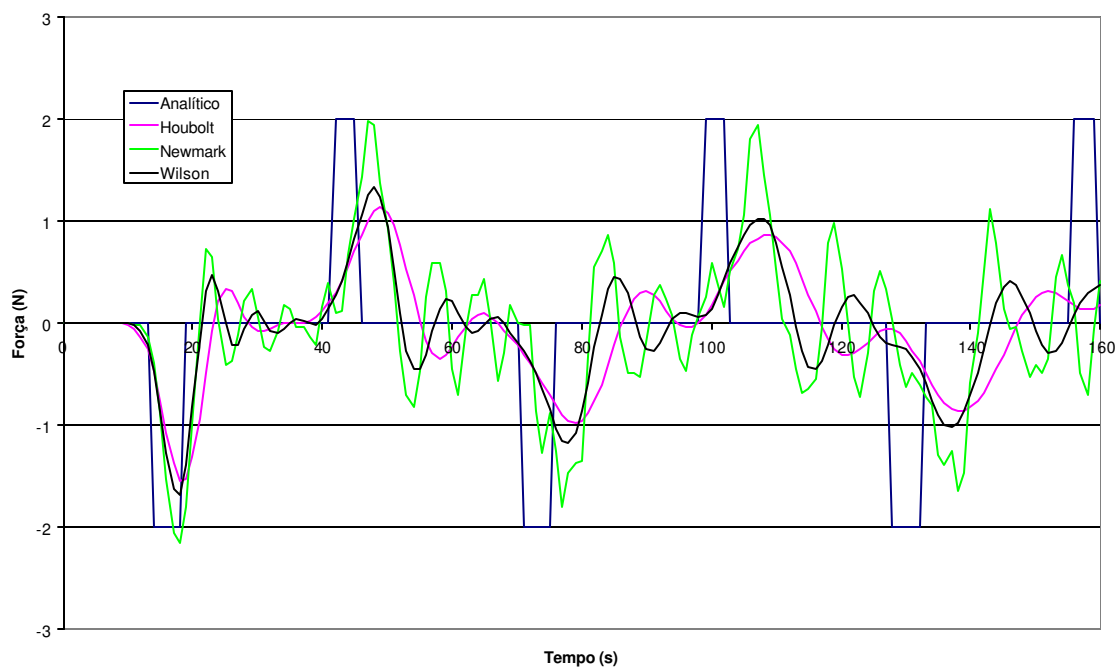


Figura 10.71 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 1s.

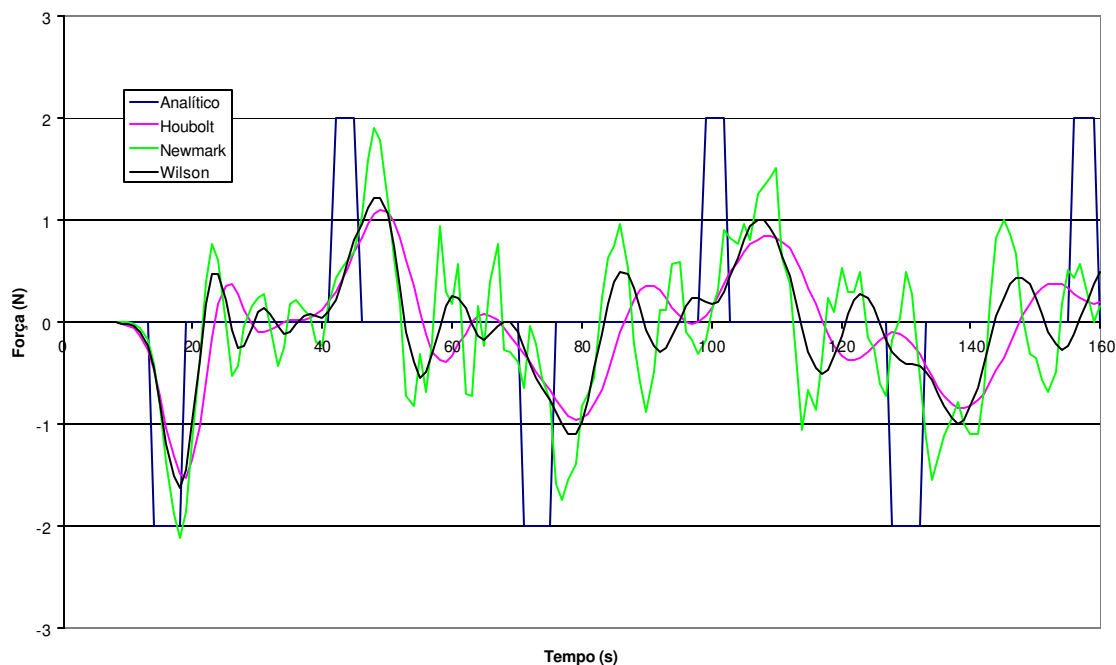


Figura 10.72 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 1s.

Diminuindo-se o tamanho do passo de tempo para 0.25s, pode-se repetir as análises anteriores obtendo-se resultados ligeiramente diferentes. Com a Figura 10.73 e a Figura 10.74, pode-se comparar a influência do refinamento da malha sobre os integradores estudados. Nota-se que o integrador de Newmark conduz a instabilidades nos resultados da Figura 10.74 para tempos maiores que 100s. Já na análise da Figura 10.73 isso não ocorre. Outro fator relevante que pode ser notado é que a ligeira perda de amplitude nos deslocamentos obtidos com o integrador de Houbolt diminui com a adoção de um passo de tempo menor.

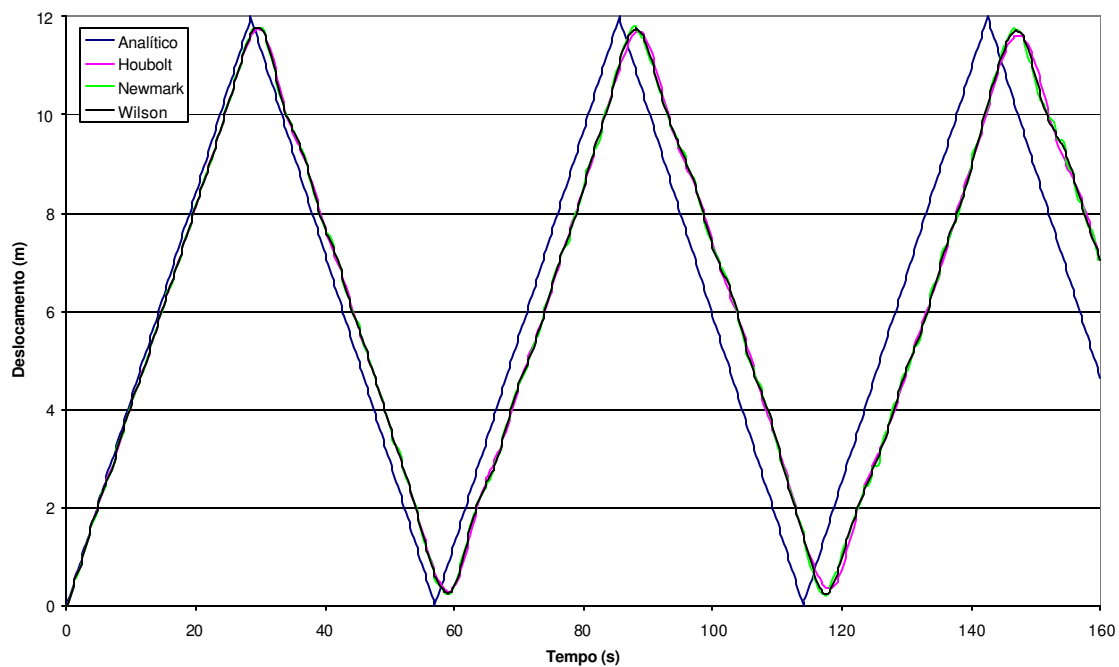


Figura 10.73 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 0.25s.

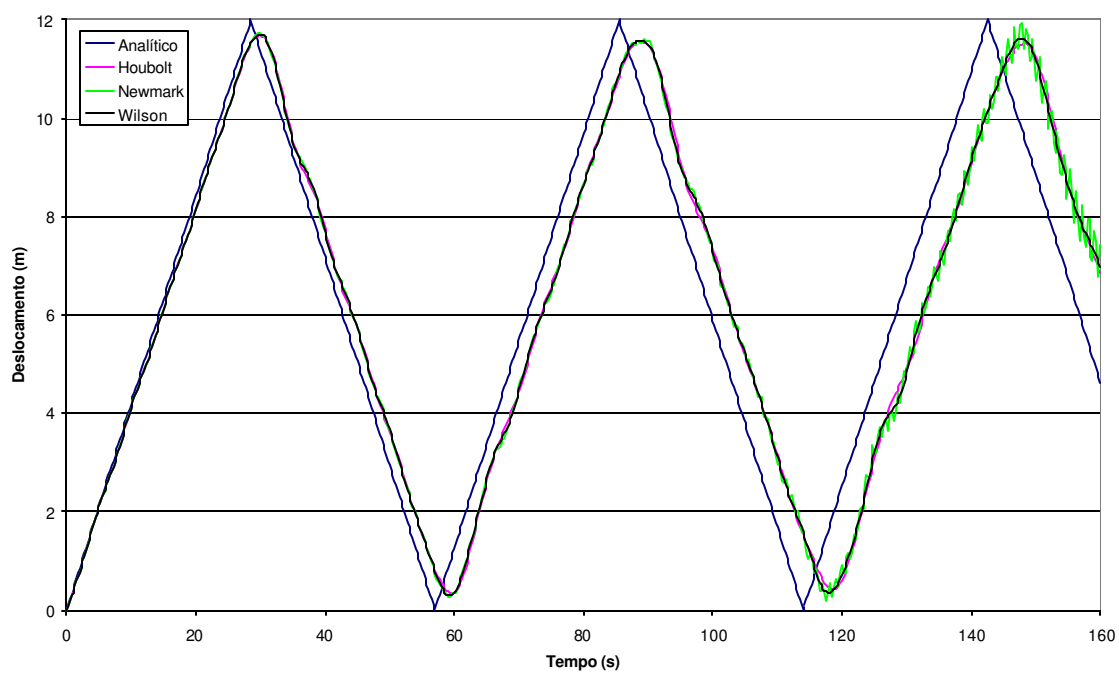


Figura 10.74 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 0.25s.

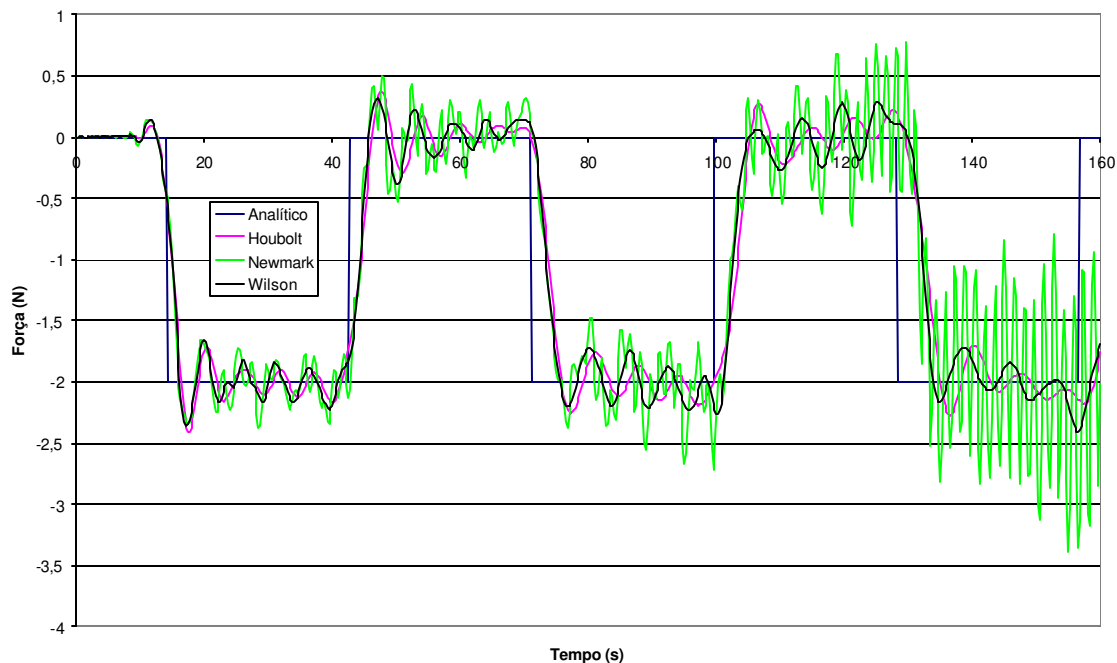


Figura 10.75 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 0.25s.

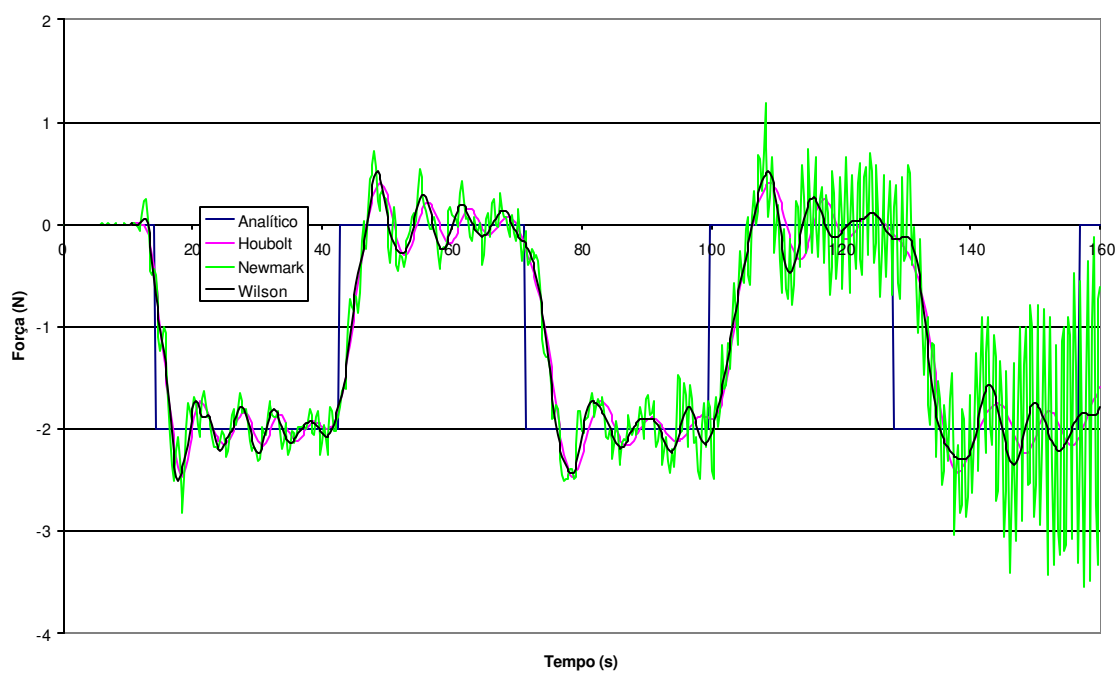


Figura 10.76 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 0.25s.

Há uma maior instabilidade no valor da força obtida com a malha 1 e o integrador de Newmark, como pode ser visto na Figura 10.75. Esta instabilidade diminui com o refino da

malha, como vê-se no gráfico da Figura 10.76. Entretanto deve-se lembrar que o deslocamento da malha 2 se desestabiliza para tempos maiores que 100s.

Removendo-se o carregamento depois de 4s, obtém-se os deslocamentos para a borda carregada mostrados na Figura 10.77 e na Figura 10.78.

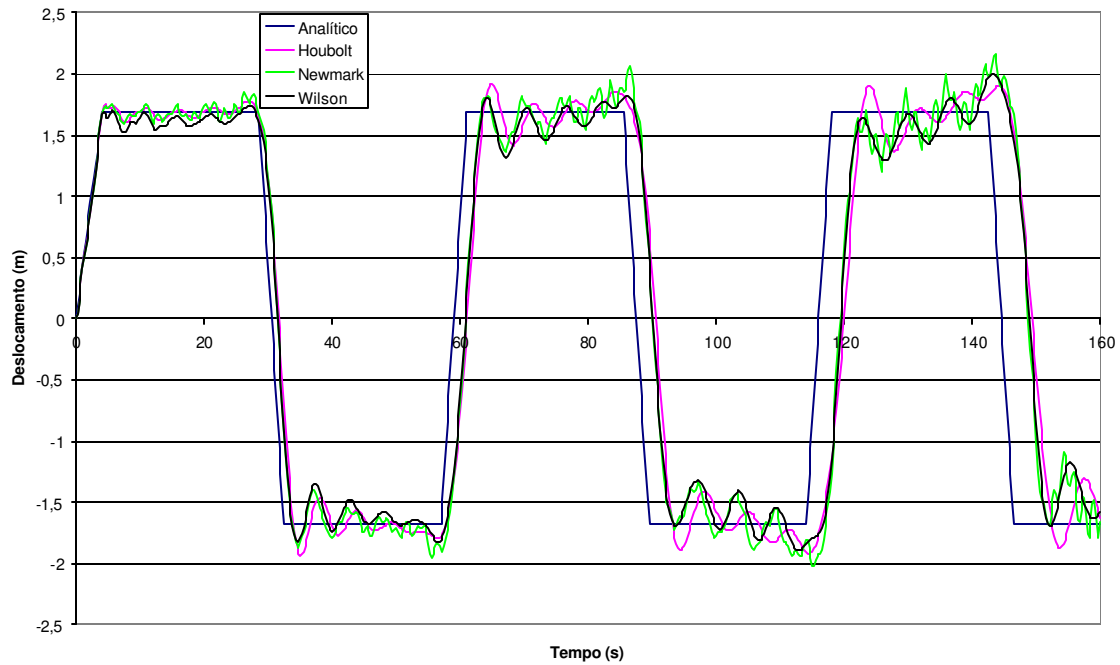


Figura 10.77 – Deslocamento da borda carregada com a malha 1 e passo de 0.25s.

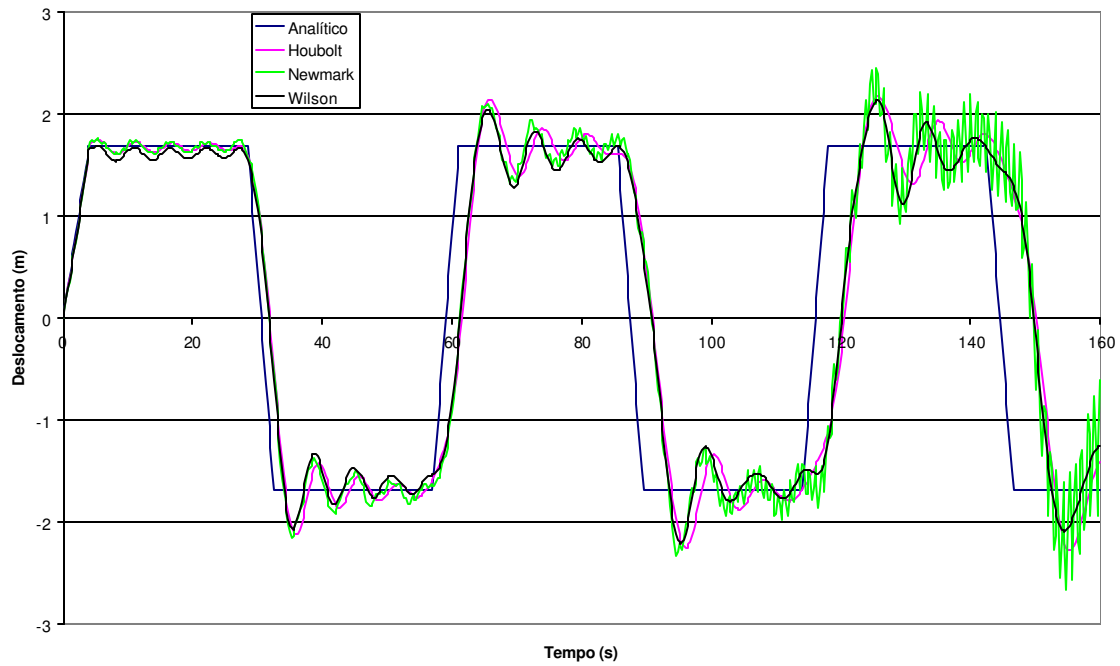


Figura 10.78 – Deslocamento da borda carregada com a malha 2 e passo de 0.25s.

Novamente há uma perda da estabilidade dos resultados produzidos pelo integrador de Newmark. Devido à natureza do carregamento aplicado, esta instabilidade torna-se notória para tempos maiores que 80s.

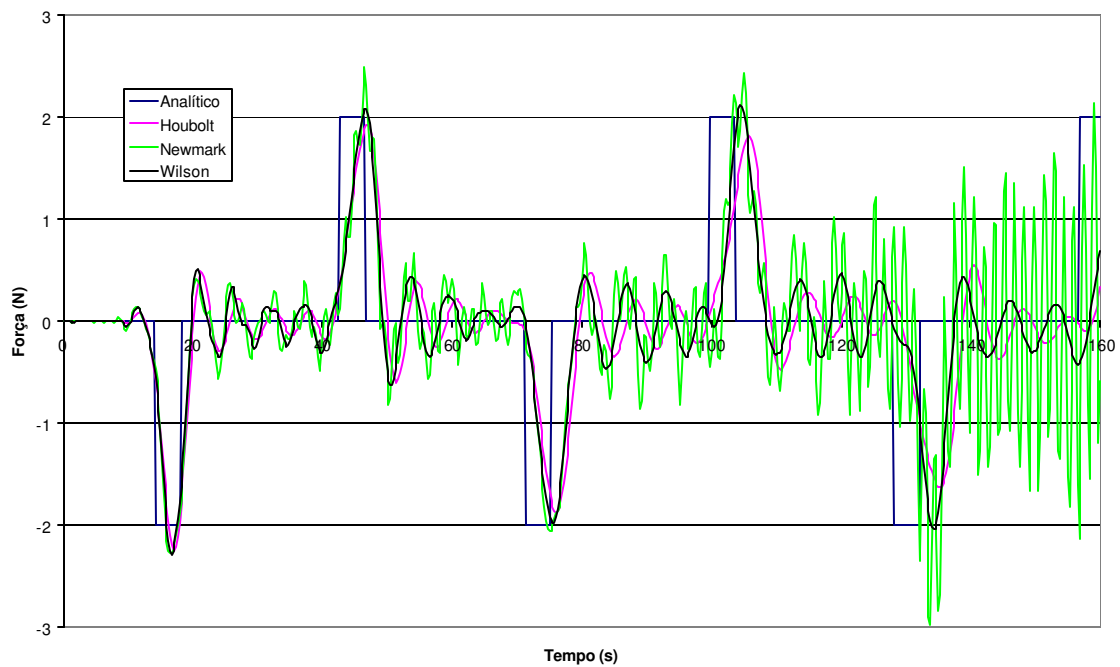


Figura 10.79 – Reação na borda vinculada com a malha 1 e passo de 0.25s.

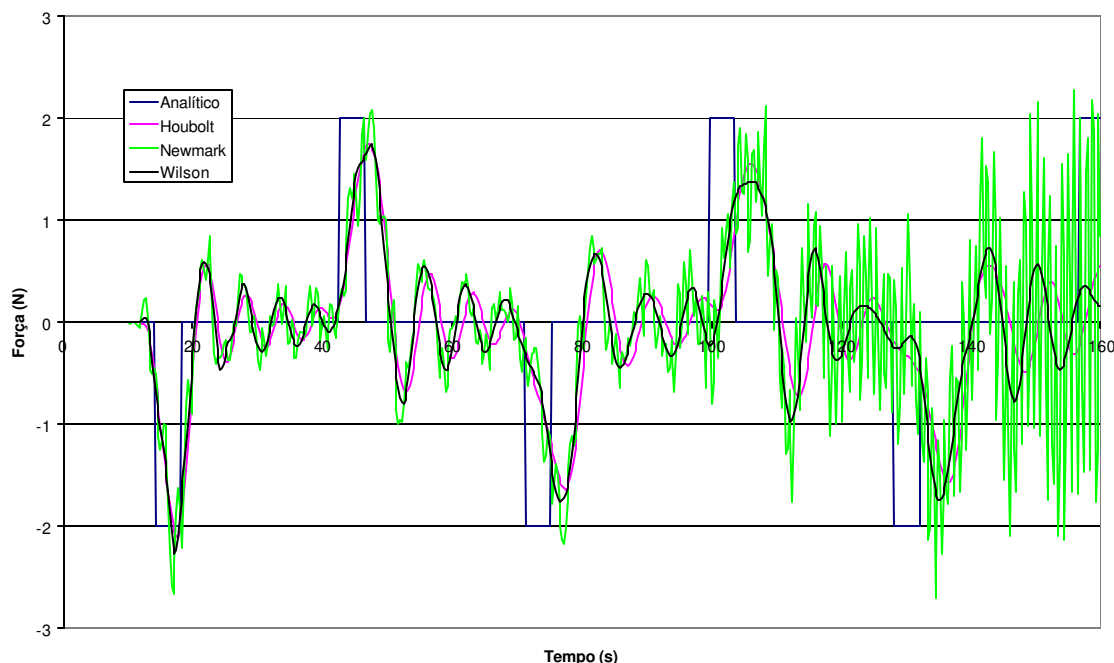


Figura 10.80 – Reação na borda vinculada com a malha 2 e passo de 0.25s.

Em todos os exemplos estudados, os integradores de Houbolt e Wilson produziram resultados compatíveis entre si. Um leve amortecimento foi notado no primeiro e, aparentemente, o integrador de Wilson descreve mais adequadamente a mudança de carregamento nos exemplos em que este foi removido.

10.8.1-Estudo com integrador incremental

O mesmo problema da chapa estreita foi analisado com o integrador de Wilson em sua forma incremental. Utilizou-se a malha mostrada na Figura 10.64 com os mesmos dados de densidade e constantes elásticas. Uma carga unitária constante foi aplicada na extremidade livre, permanecendo inalterada durante a análise.

Na Figura 10.81 são mostrados os resultados obtidos para os deslocamentos da extremidade livre com diversos passos de tempo. Nota-se que para passos grandes o integrador perde sua estabilidade. A medida que o tamanho dos passos diminui, o integrador adquire estabilidade.

A reação no centro da borda vinculada é mostrada na Figura 10.82. Nota-se mais claramente neste gráfico a influência do passo de tempo no resultado final do processo. Em sua modalidade incremental, o integrador de Wilson apresenta um amortecimento numérico maior que o encontrado no método clássico.

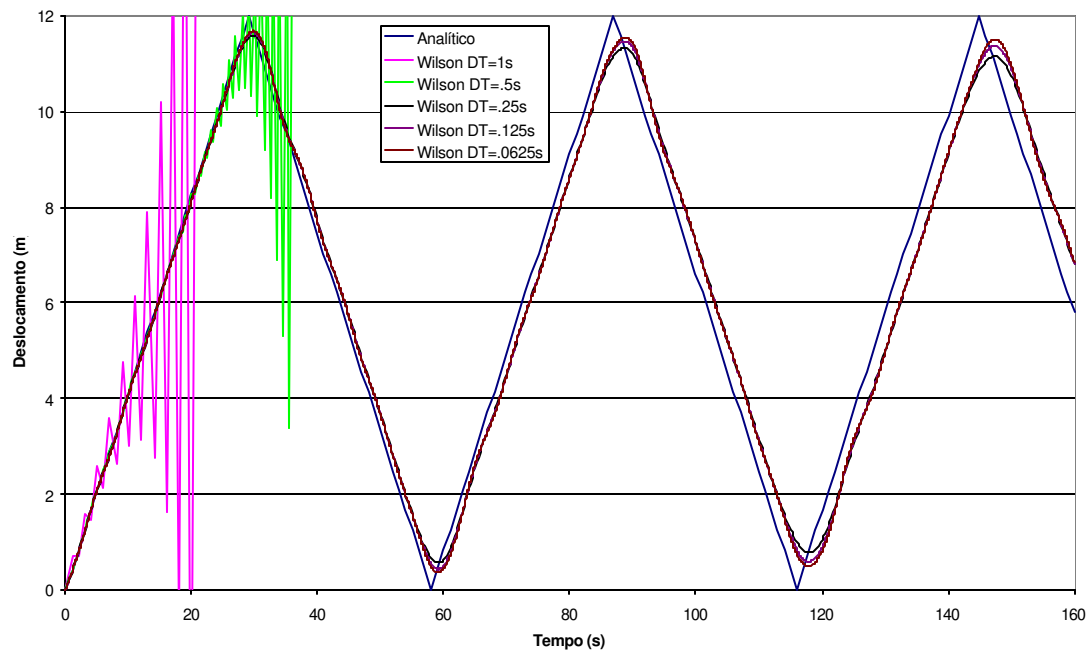


Figura 10.81 - Deslocamentos da extremidade livre com integrador incremental

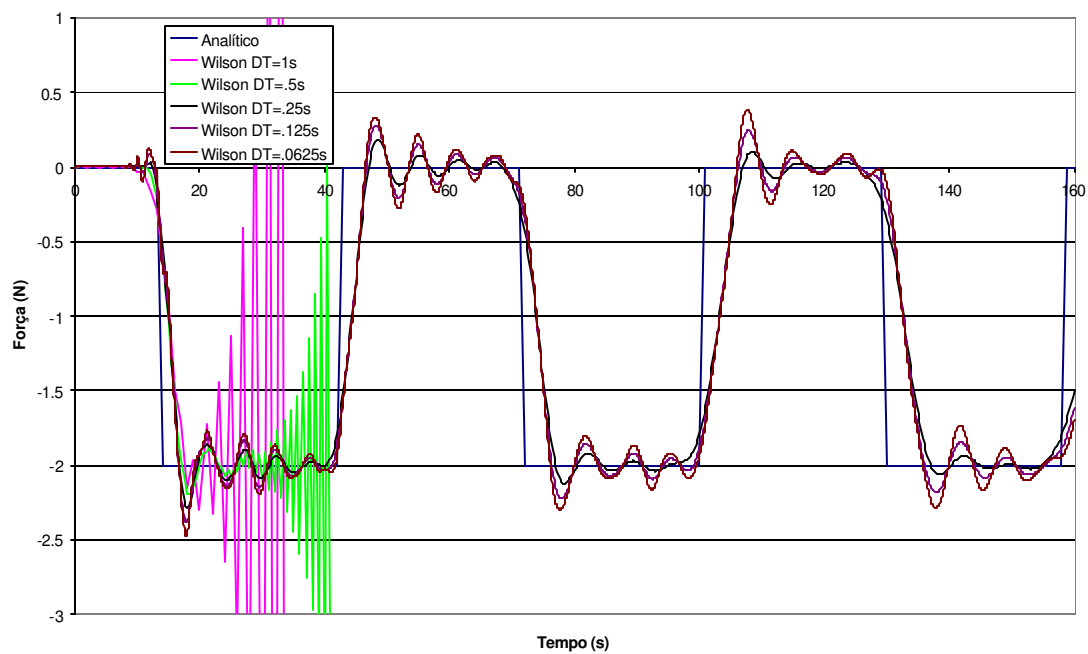


Figura 10.82 - Reação na extremidade vinculada com integrador incremental

Na Figura 10.83 comparam-se os resultados de deslocamentos obtidos com o integrador de Wilson clássico e sua modalidade incremental. O carregamento aplicado foi um pulso retangular com duração de 4s. Em ambos os casos adotaram-se passos de tempo de 0.25s.

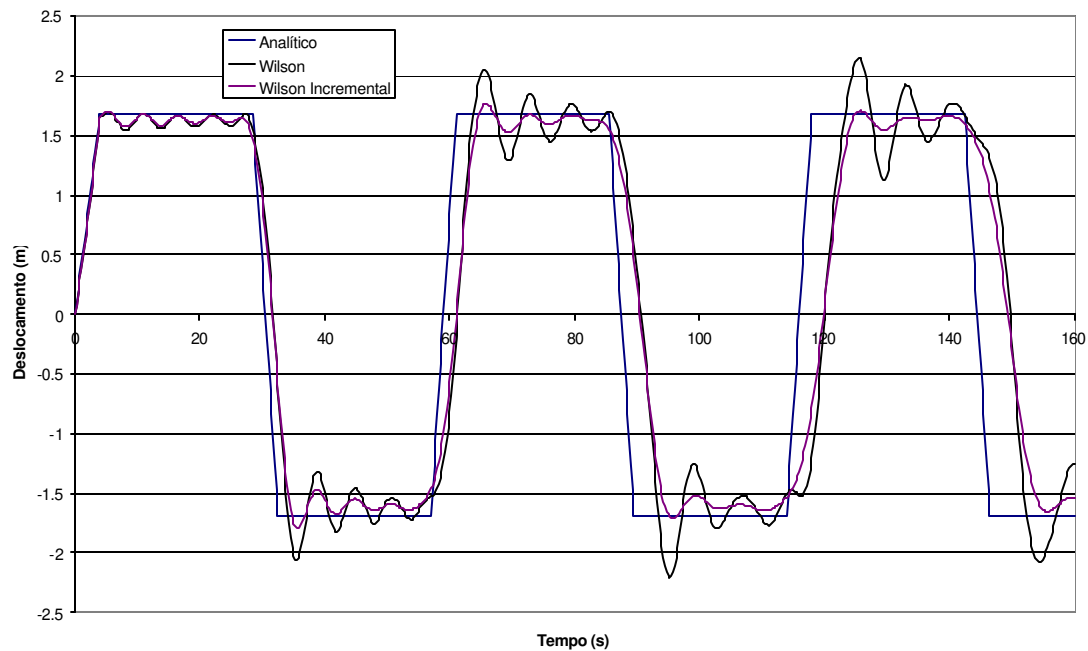


Figura 10.83 – Comparação dos deslocamentos obtidos com as modalidades do integrador de Wilson

A mesma análise foi feita para as forças no centro da extremidade vinculada e os resultados são mostrados na Figura 10.84.

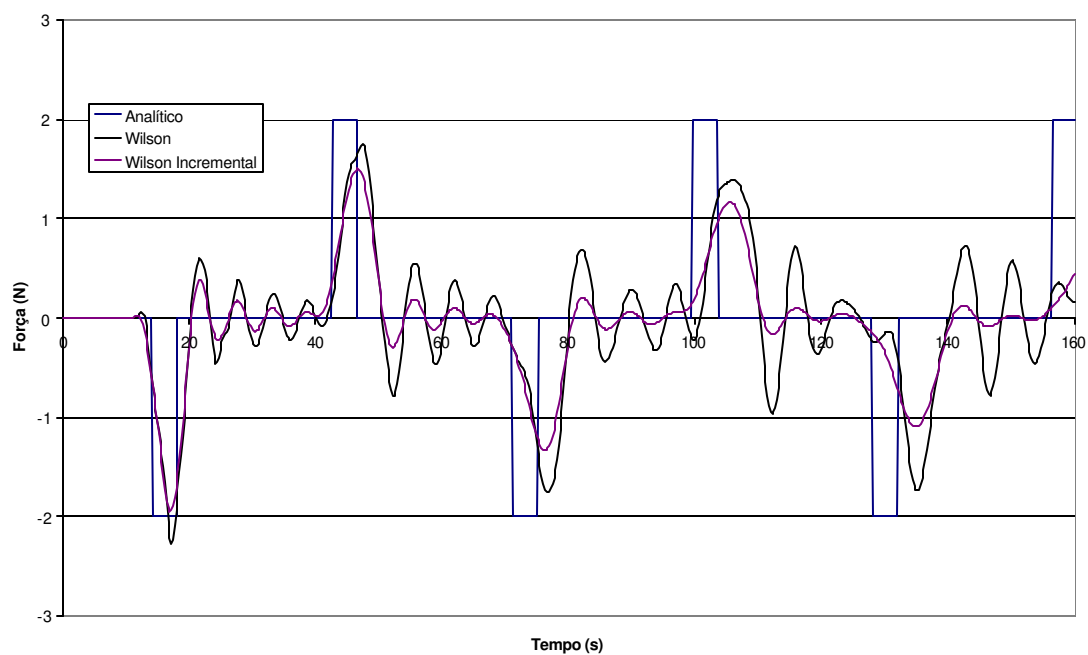


Figura 10.84 – Comparação das forças obtidas com as modalidades do integrador de Wilson

Tanto na Figura 10.83 quanto na Figura 10.84 nota-se que o amortecimento numérico é mais pronunciado na modalidade incremental do integrador que em sua forma clássica.

11-Exemplos elasto-plásticos

11.1-Introdução

Neste capítulo apresentam-se os exemplos em regime elasto-plástico analisados com o programa computacional desenvolvido. Os resultados obtidos são comparados, sempre que possível, com soluções analíticas ou com resultados equivalentes disponíveis na literatura.

11.2-Viga de seção quadrada

Neste primeiro exemplo é estudada uma viga em balanço de seção quadrada e de paredes finas, conforme ilustrado na Figura 11.1. A espessura da parede foi tomada como 10cm. Adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal de 205GPa e uma tensão de escoamento de 250MPa. O coeficiente de Poisson foi tomado como 0.3. Não se considera encruamento nesta primeira análise.

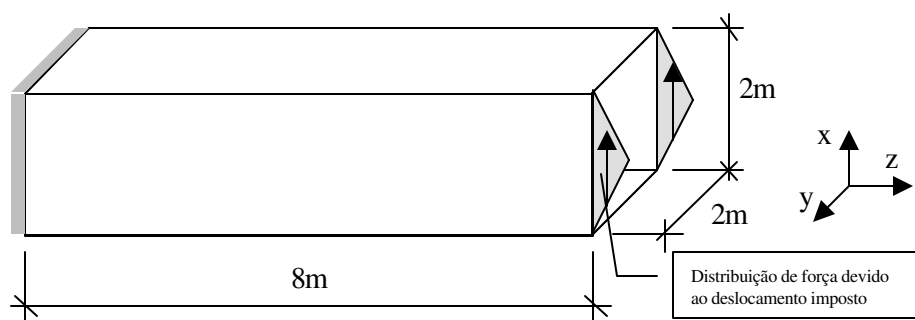


Figura 11.1 – Viga de seção quadrada com carregamento vertical.

O carregamento é aplicado por meio de um deslocamento na direção do eixo x imposto nas almas na extremidade livre da viga. Este deslocamento é aplicado de modo a produzir uma distribuição de forças nas almas como ilustrado na Figura 11.1.

Todas as paredes da viga foram discretizadas segundo a malha mostrada na Figura 11.2. A malha conta com nós duplos nos cantos em um total de 70 nós por macro-elemento. O invólucro final conta com 180 nós. A malha interna conta com 67 pontos internos e 159 células, perfazendo 636 células e 268 pontos internos no invólucro.

A condição de contorno do engaste é aplicada restringindo-se o deslocamento dos macro-elementos nas direções dos eixos coordenados e a rotação de placa, θ_{η} .

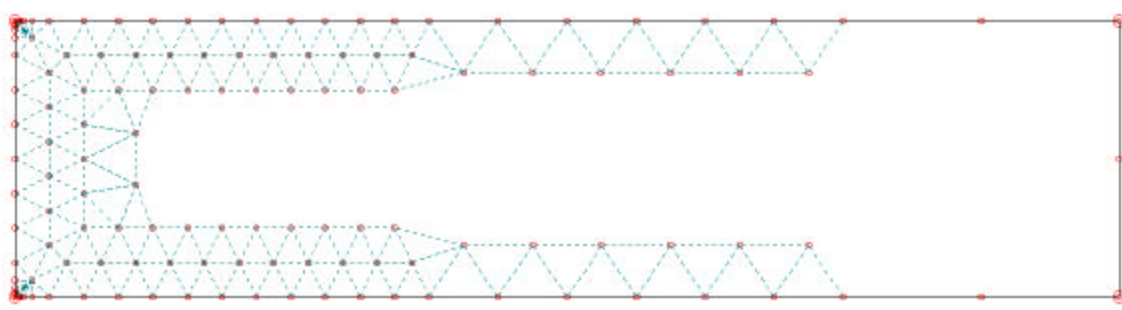


Figura 11.2 – Malha do macro-elemento.

Na Figura 11.3 são mostradas as curvas da força aplicada no balanço em função do com várias quantidades de passos de carga.

Um corpo é plastificado quando este, ao sofrer ação de um carregamento, não mais retorna ao seu estado inicial se o carregamento é removido. No caso do gráfico da Figura 11.3, o deslocamento residual da peça é muito pequeno para os primeiros passos de carga. Assim, para uma melhor análise, o trecho elasto-plástico da curva da Figura 11.3 será dividida em duas partes demarcadas por uma linha vertical:

- Na primeira parte há pouca influência das deformações plásticas no comportamento da peça. Não há um desvio considerável da curva em relação à reta do regime elástico.
- Na segunda parte a contribuição das deformações plásticas é significativa e a curva passa a se afastar da reta do regime elástico.

Arbitra-se o limite entre da primeira parte como sendo o ponto em que os deslocamentos permanentes da peça correspondem a 2% do deslocamento total.

Visto isso tem-se que, no gráfico da Figura 11.3, o trecho elasto-plástico tem seu início quando a carga atinge 9.93MN, no entanto não há um desvio considerável da curva. Esta plastificação inicial se dá devido ao fenômeno de “shear lag”, que produz uma elevação no valor das tensões devidas à flexão em pontos próximos ao apoio. Como a região solicitada

pelo fenômeno é bastante limitada, não há alteração significativa no comportamento da peça neste estágio.

Quando o carregamento atinge 19.83MN a peça entra na segunda parte da curva. A partir deste ponto, se o carregamento for removido haverá uma flecha residual correspondente a 2% da flecha atingida até então. Observa-se nas curvas da Figura 11.3 um ligeiro encruamento da peça para o processamento com 32 passos de carga em relação aos demais resultados. Com 64 passos, este encruamento é bem menos pronunciado e os resultados obtidos com 128 e 192 passos são praticamente os mesmos.

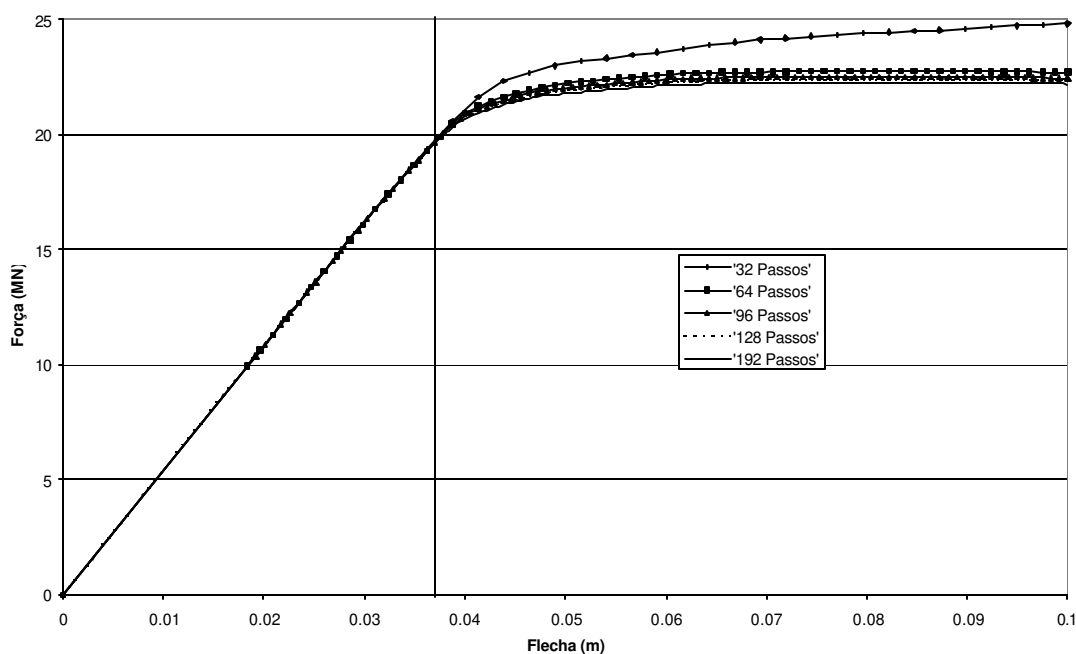


Figura 11.3 – Resultados com a primeira malha

Estes mesmos exemplos foram processados impondo-se força no balanço em lugar de deslocamento. No entanto não se obteve convergência para cargas superiores a 20MN e observou-se uma forte instabilidade dos resultados mesmo para cargas menores.

A resistência dos materiais prevê para a seção da peça em estudo, pelo modelo de plastificação total da seção, um valor máximo para o momento plástico de 150MNm. O valor encontrado com 192 passos de carga foi de 177.6MNm, que representa uma diferença de 15.5%. Esta diferença era esperada. No modelo da resistência dos materiais admite-se que toda a seção está sujeita a uma tensão longitudinal igual à tensão de escoamento do material, sendo nulas todas as demais. Neste trabalho emprega-se o modelo de estado plano de tensões, que leva em conta não somente as tensões longitudinais mas também as transversais e de

cisalhamento. Isso proporciona uma reserva de resistência à peça, desconsiderada no outro modelo.

11.3-Viga U curta

11.3.1-Flexão simples em torno do eixo y

Nesta primeira análise da peça ilustrada na Figura 11.4 é submetida à flexão em torno do eixo principal de menor inércia por meio de um deslocamento imposto na extremidade em balanço. A espessura da parede foi tomada como 10cm. Adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal de 205GPa e uma tensão de escoamento de 250MPa sem encruamento. O coeficiente de Poisson foi tomado como 0.3.

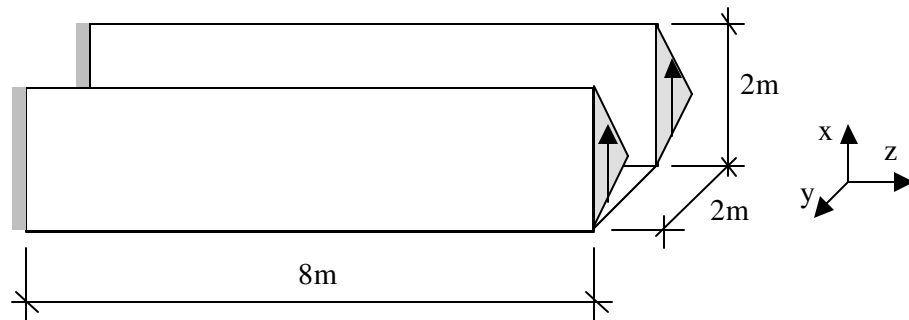


Figura 11.4 – Viga U fletida em torno do eixo y

A malha dos macro-elementos foi a mesma mostrada na Figura 11.2, produzindo um invólucro final de 160 nós, com nós duplos nos cantos, 477 células e 201 pontos internos.

Na Figura 11.5 apresentam-se as curvas de força versus deslocamento do balanço para este exemplo. A plastificação da peça tem início com uma carga de 2.96MN. No entanto não há um desvio significativo da curva nos primeiros passos de carga. Isso se deve à influência do fenômeno de “shear lag” no ponto de início da plastificação. Para cargas maiores que 7.70MN o desvio da curva torna-se superior aos 2% em deslocamento e as deformações plásticas passam a ser significativas no comportamento da peça.

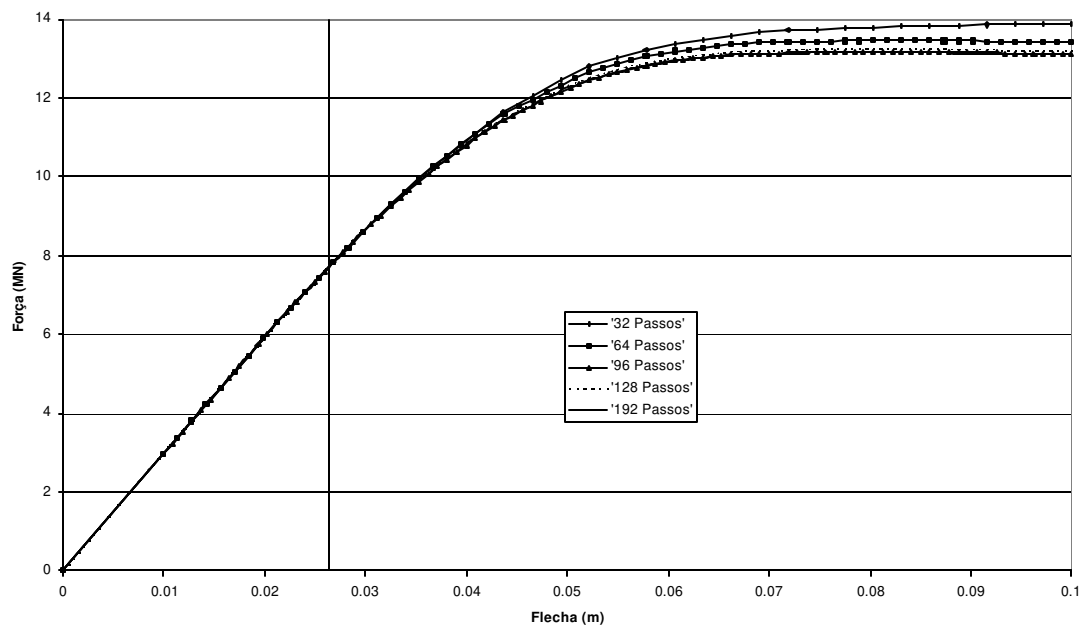


Figura 11.5 – Força resultante em função da flecha imposta para flexão em torno do eixo de menor inércia.

Para esta seção o momento plástico previsto pela resistência dos materiais é de 87.5MNm enquanto que o valor calculado com 192 passos de carga é de 105.2MNm. A diferença de 16.8% pode ser explicada pela mesma razão apresentada no item anterior.

No gráfico da Figura 11.6 apresenta-se a posição da linha neutra na seção do apoio, determinada a partir da interpolação das forças obtidas no contorno. Esta posição corresponde à distância entre a linha neutra e a mesa. Nota-se que à medida que a peça plastifica há um grande deslocamento da linha neutra em direção à mesa.

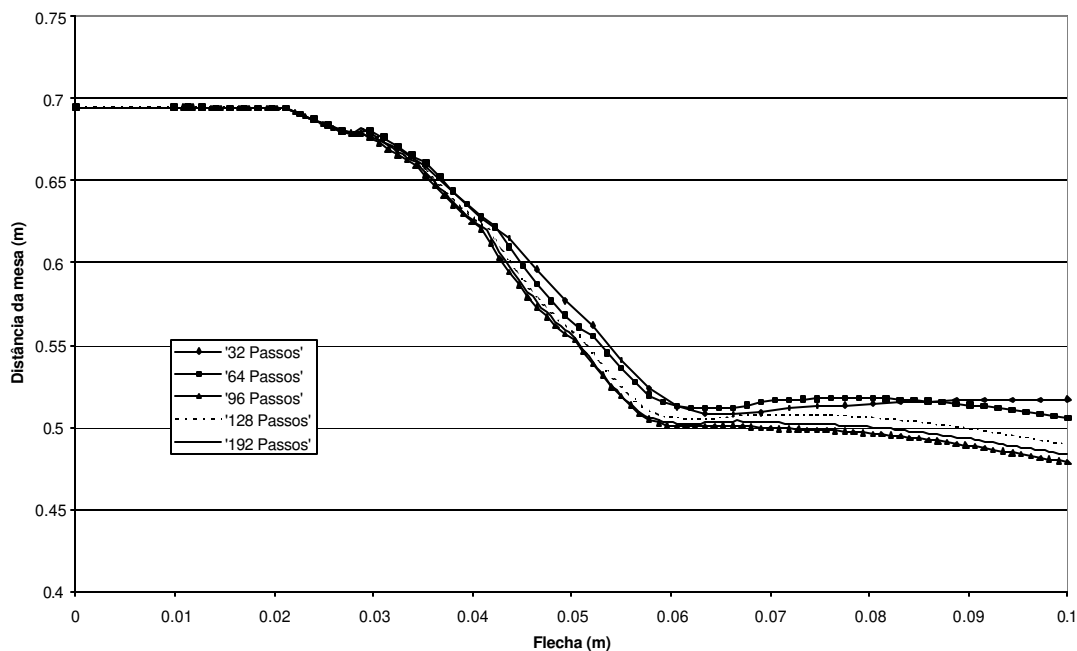


Figura 11.6 – Posição da linha neutra relativamente à mesa

11.3.2-Flexão simples em torno do eixo x com carga no C.C.

Nesta segunda análise a peça da Figura 11.7 é submetida à flexão em torno do eixo de simetria por meio de um deslocamento imposto na extremidade em balanço. O deslocamento foi aplicado de tal forma que a resultante do carregamento obtido coincidissem sempre com o centro de cisalhamento da peça. O perfil de forças na extremidade em balanço é esboçado na Figura 11.7.

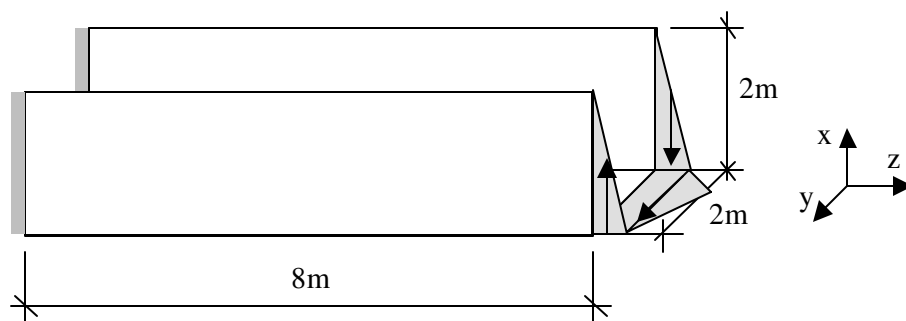


Figura 11.7 – Viga U fletida em torno do eixo x

Na Figura 11.8 é mostrado o comportamento da força resultante em função do deslocamento da extremidade em balanço. A plastificação tem início quando o carregamento atinge o valor de 5.79 MN. No entanto apenas pequenas porções junto aos cantos da peça

plastificam e não há um desvio significativo nas curvas. Isso se deve ao fenômeno do “shear lag” que produz um aumento no valor das tensões devidas à flexão nos cantos da peça. Quando a força atinge 15.94MN a curva passa a se desviar abruptamente da reta do regime elástico, não havendo mais aumento significativo de força para um aumento no deslocamento imposto.

Com 32 passos de carga não se obteve convergência para valores de flecha maiores que 9cm. Com o aumento do número de passos obteve-se convergência para o deslocamento final inicialmente imposto. Os resultados obtidos com 128 e com 192 passos de carga foram praticamente os mesmos.

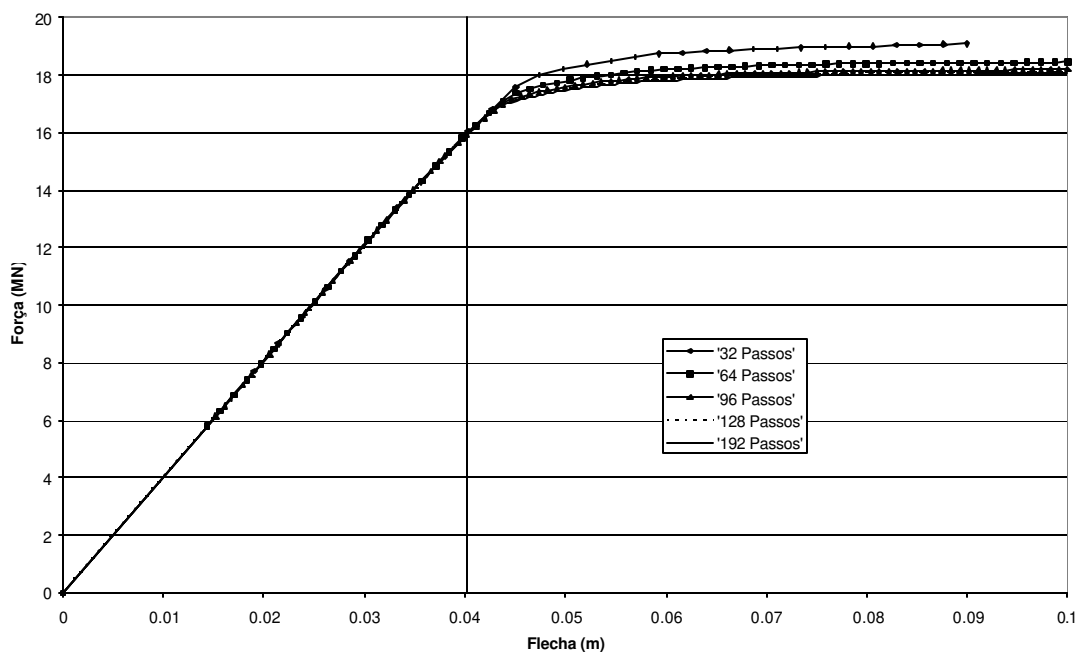


Figura 11.8 – Força resultante em função da flecha imposta para flexão em torno do eixo de simetria

O momento plástico previsto pela resistência dos materiais para esta seção é de 125MNm enquanto que o valor calculado com 192 passos de carga é de 144.0MNm. Novamente esta diferença de 13.2% pode ser explicada pelo surgimento de tensões transversais devido ao engaste.

Na Figura 11.9 é mostrada a posição instantânea do centro de cisalhamento em função do deslocamento. Esta posição refere-se a distancia entre a alma da peça e o centro de cisalhamento, medida sobre o eixo de simetria. No regime elástico não há alteração na posição do centro de cisalhamento. Uma vez iniciada a plastificação, este se afasta da alma, alterando em cerca de 2.5cm sua posição original. Quando a peça entra em regime

francamente plástico, este passa a se aproximar da alma. Nota-se também que a posição final do centro de cisalhamento varia muito com o número de passos de carga. Cabe notar que a distância entre a alma e o centro de cisalhamento previsto pela resistência dos materiais seria de 85.7cm.

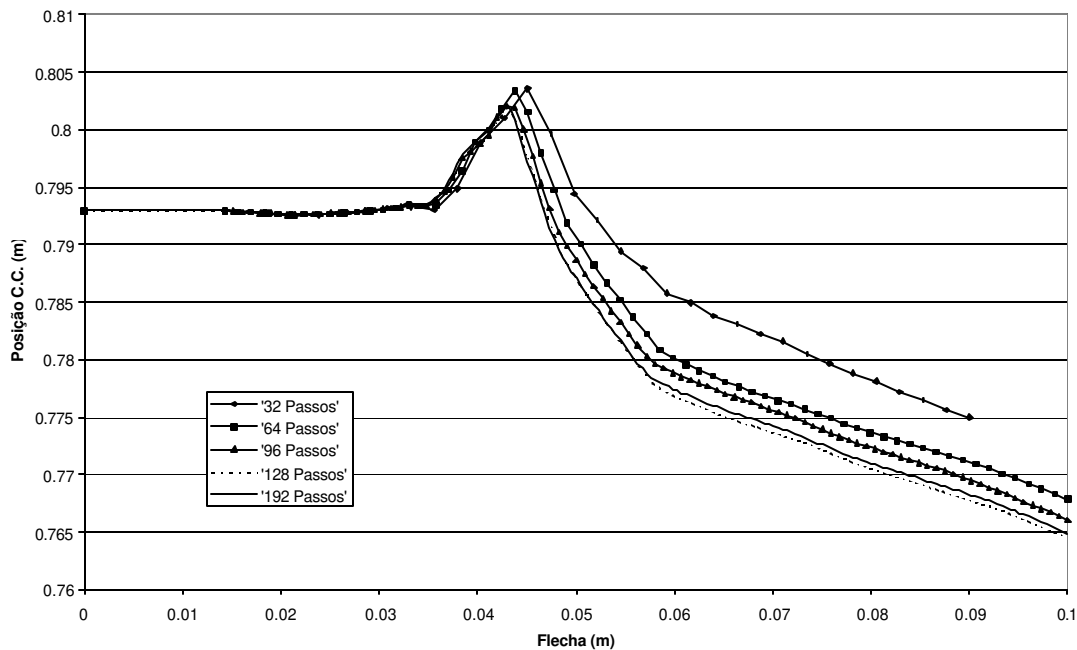


Figura 11.9 – Posição instantânea do centro de cisalhamento.

11.3.2.1-Perfil compacto

Aumentando-se a espessura das mesas da viga em estudo de 10cm para 24cm, obtém-se um perfil compacto. Esta alteração traz uma grande modificação no comportamento da peça. Na Figura 11.10 mostra-se o valor da força aplicada na extremidade do balanço contra a flecha. Cabe notar que para este novo perfil o momento plástico obtido com 32 passos de carga foi de 279.7MNm. O valor previsto pela resistência dos materiais é de 265MNm, portanto com um erro de 5.6%. Para o processamento com 192 passos, obteve-se um momento de 268.8MNm, assim com um erro de 1.4%.

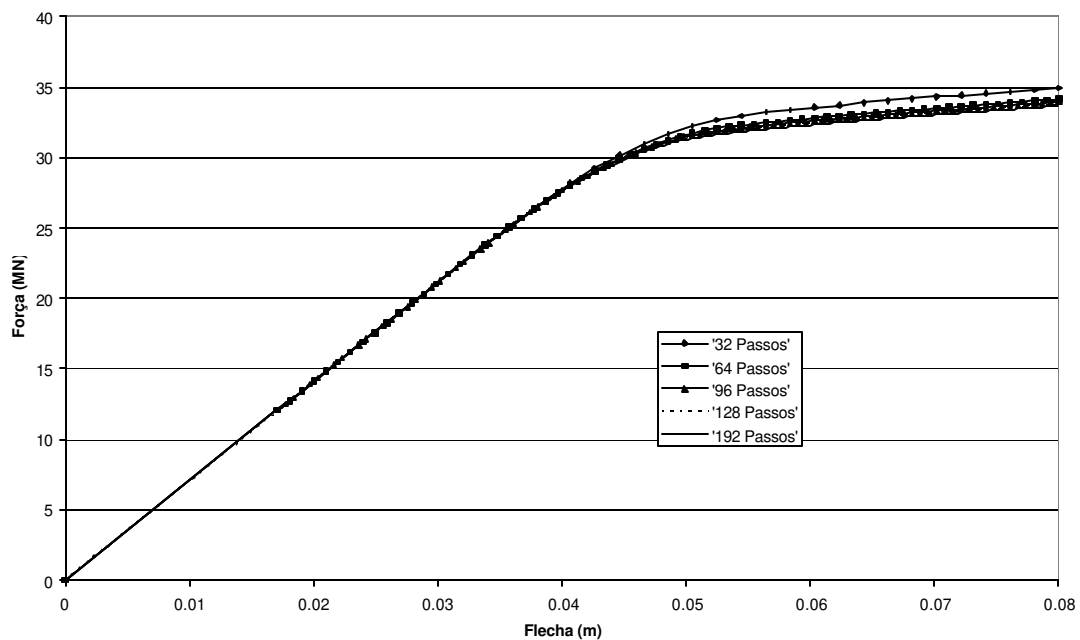


Figura 11.10 – Força resultante em função da flecha imposta para flexão em torno do eixo de simetria do perfil compacto

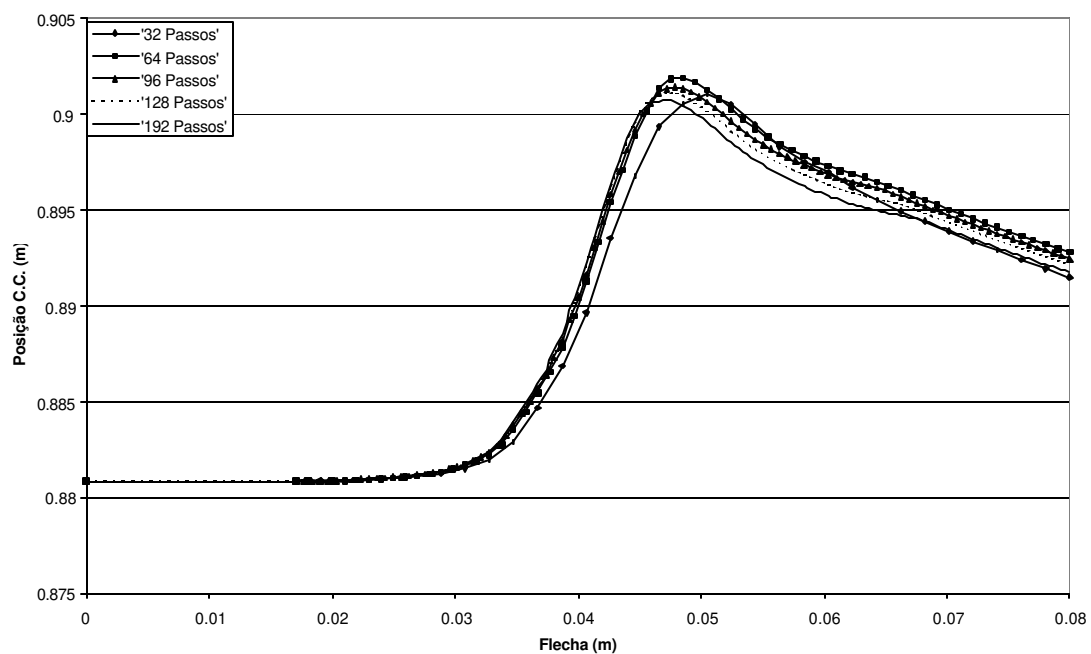


Figura 11.11 – Força resultante em função da flecha imposta

Na Figura 11.11 tem-se a posição do centro de cisalhamento do perfil compacto. Nota-se uma clara mudança no comportamento deste em regime plástico, que passa a se afastar da sua posição original.

11.3.3-Flexão simples em torno do eixo x com carga na alma.

Aplicando-se um deslocamento à extremidade em balanço da peça, de tal forma que o carregamento obtido tenha sua resultante sobre a alma, tem-se uma situação de flexão com torção. Nesta situação, além de se deslocar na direção da força, a seção transversal da peça gira em torno de um centro de giro.

Na Figura 11.12 são apresentadas as curvas para a força na extremidade em balanço em função da flecha imposta. Pode-se notar que a carga final obtida para esta situação de carregamento é inferior àquela obtida quando a carga sobre o centro de cisalhamento.

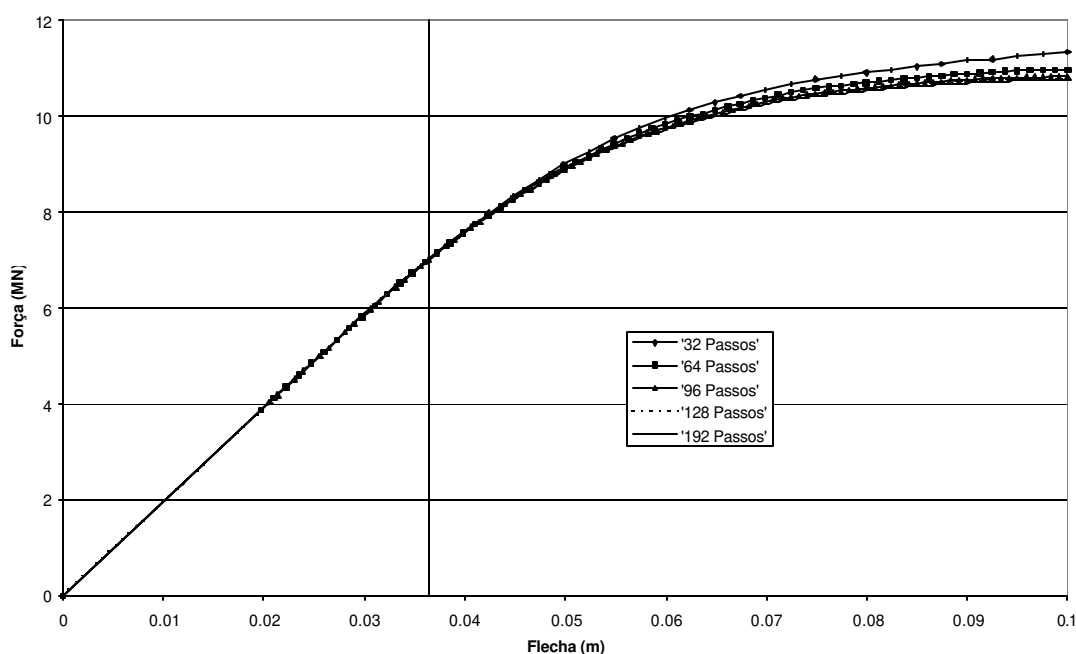


Figura 11.12 – Força resultante em função da flecha imposta

À medida que a peça se desloca, a posição do centro de giro se altera. Na Figura 11.13 pode-se observar a variação da distância entre o centro de giro e a alma da peça. Cabe dizer que a posição do centro de giro da Figura 11.13 refere-se ao deslocamento total da seção.

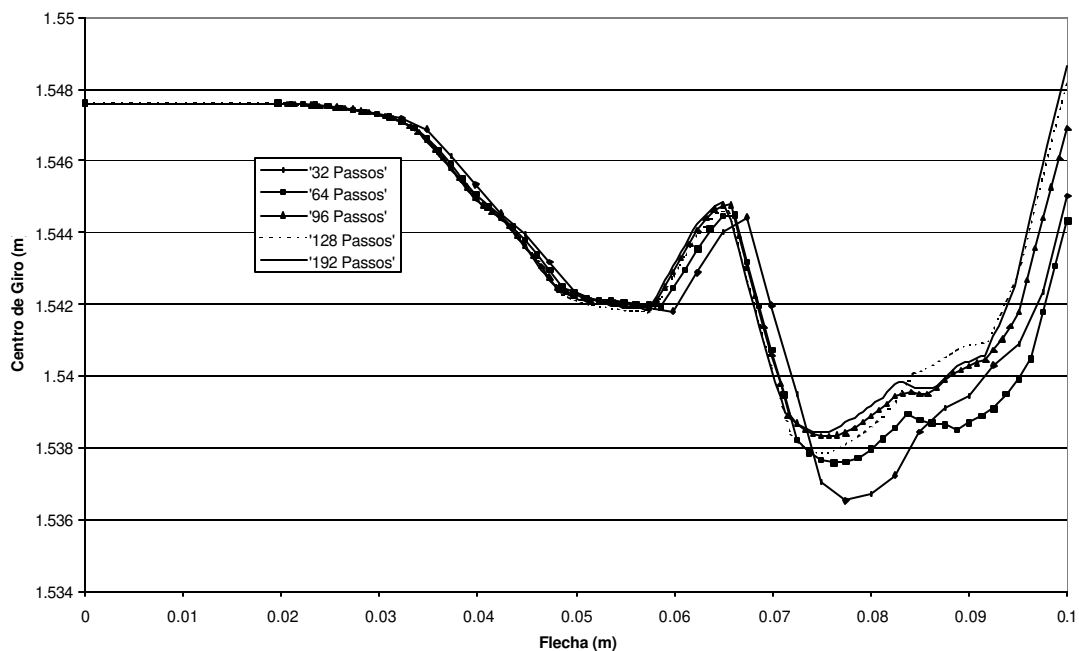


Figura 11.13 – Posição do centro de giro

Na Figura 11.14 é apresentado um gráfico da posição do centro instantâneo de giro, diferente para cada passo de carga, em função do deslocamento da extremidade em balanço. As curvas para 32, 64 e 96 passos de carga foram omitidas para melhor visualização.

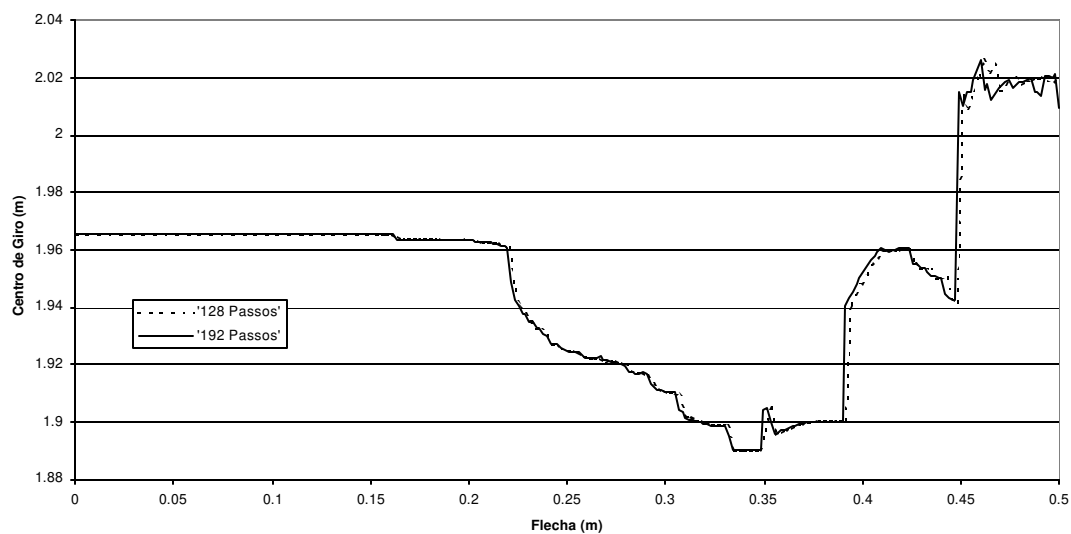


Figura 11.14 – Posição do centro instantâneo de giro

11.3.4-Momento nas arestas

Neste trabalho considera-se que a plastificação de cada macro-elemento que compõem a peça em análise se dá apenas devido ao estado plano de tensões. Por isso é necessário verificar se a magnitude dos momentos fletores nas paredes da peça não ultrapassara o limite do regime elástico.

Devido às condições de vinculação e carregamento das peças aqui analisadas, os momentos máximos ocorrerão nas arestas da viga. Assim, na Figura 11.15 é mostrado um gráfico do valor da tensão máxima devida ao momento fletor nas paredes da viga ao longo de uma aresta.

Nota-se uma instabilidade no valor das tensões para os pontos próximos ao engaste, devido à flutuação do valor do momento. Esta instabilidade é normalmente observada em problemas de placas sob apoios indesejáveis [Paiva 1991]. Além deste pequeno, trecho a tensão máxima devida ao momento fletor nas arestas se estabiliza em patamares bastante inferiores ao limite de plastificação das paredes.

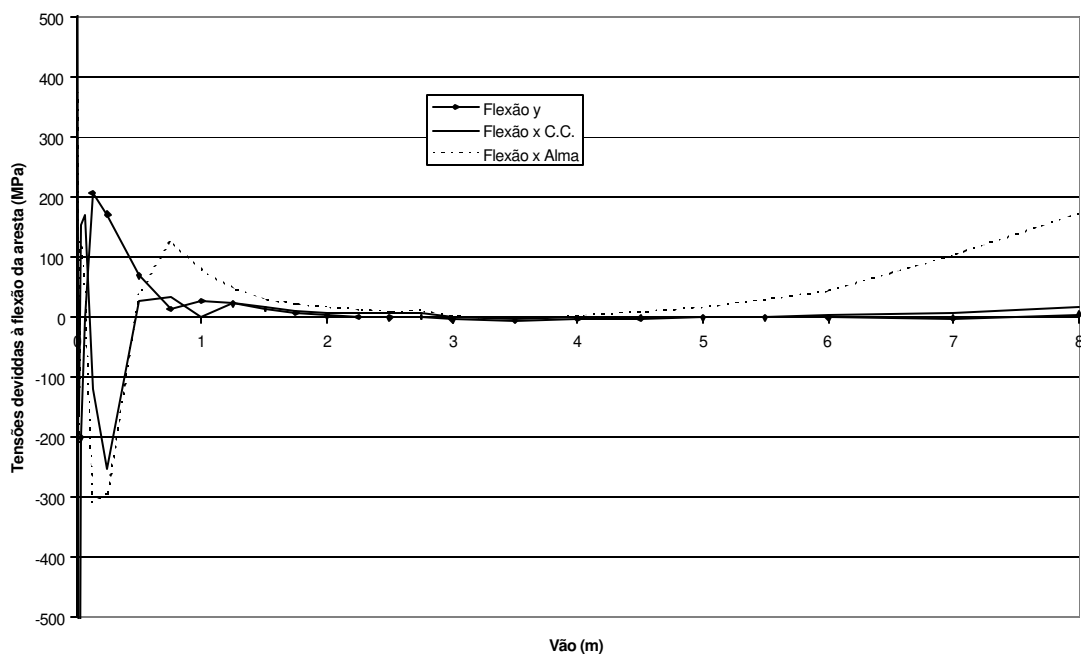


Figura 11.15 – Desenvolvimento das tensões devidas aos momentos fletores das paredes da viga ao longo da aresta

11.4-Viga U longa

11.4.1-Flexão simples em torno do eixo y

Neste item, uma peça longa é submetida à mesma análise feita na viga curta do Item 11.3. A geometria da peça é ilustrada na Figura 11.16. Numa primeira situação de carregamento a viga é submetida à flexão em torno do eixo principal menor por meio de um deslocamento imposto na extremidade em balanço. A espessura da parede foi tomada como 10cm. Adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal de 205GPa e uma tensão de escoamento de 250MPa sem encruamento. O coeficiente de Poisson foi tomado como 0.3.

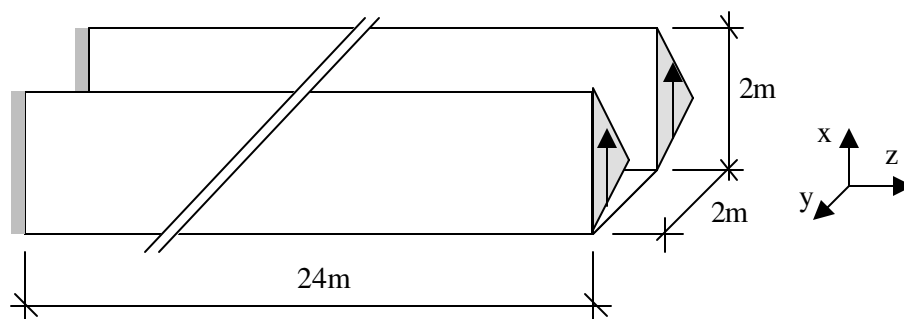


Figura 11.16 – Viga U longa fletida em torno do eixo y

A malha dos macro-elementos é mostrada na Figura 11.17. Esta malha deriva daquela mostrada na Figura 11.2 pelo acréscimo de elementos no seu comprimento. Com isso produziu-se um invólucro final de 190 nós com nós duplos nos cantos, 477 células e 201 pontos internos.



Figura 11.17 – Malha empregada na análise

Na Figura 11.18 apresentam-se as curvas de força versus deslocamento da extremidade em balanço. A plastificação da peça tem início com uma carga de 1.52MN, sem no entanto haver um desvio significativo da curva nos primeiros passos de carga. Isso se deve à influência do fenômeno de “shear lag”, que produz tensões altas nos cantos do engaste. Como a região afetada pelo fenômeno é limitada, não há uma caracterização do regime elasto-

plástico. Para cargas maiores que 3.44MN o desvio da curva torna-se mais evidente e as deformações plásticas passam a ser significativas no comportamento da peça.

Nota-se que a curva obtida com 32 passos de carga se afasta das demais quando no segundo trecho. Pode-se notar também o estabelecimento de um patamar plástico para as curvas de 96, 128 e 192 passos de carga a partir da flecha de 41cm.

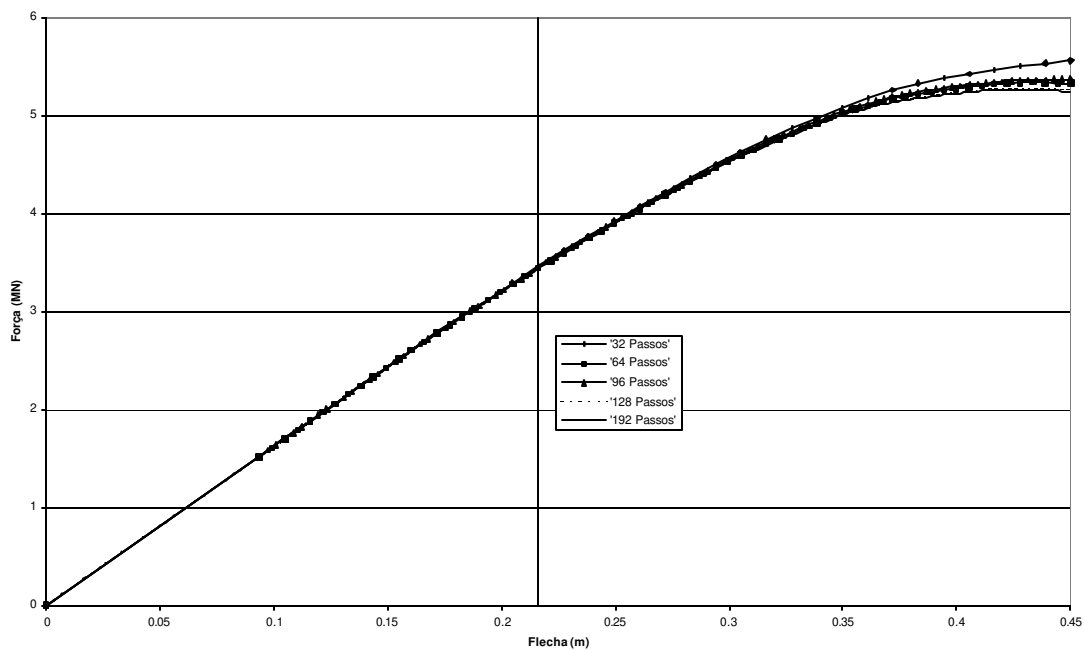


Figura 11.18 – Força resultante em função da flecha imposta

Para a seção em estudo, o momento plástico previsto pelo modelo da resistência dos materiais é de 87.5MNm enquanto que o calculado chega a 126MNm, uma diferença de 30.5%. Esta diferença, maior que a encontrada nas vigas curtas, era esperada. Naqueles exemplos havia uma forte contribuição da tensão de cisalhamento na plastificação. Neste, a contribuição da tensão de cisalhamento no engaste é bem menor. Assim a peça entra em plastificação principalmente devido às tensões originadas pela flexão. Logo haverá, devido ao engaste e ao efeito de Poisson, uma componente hidrostática mais acentuada neste exemplo que nos anteriores.

No gráfico da Figura 11.19 apresenta-se a posição da linha neutra na seção do apoio, determinada a partir da interpolação das forças obtidas no contorno. Esta posição corresponde à distância entre a linha neutra e a mesa. Nota-se que à medida que a peça plastifica há um grande deslocamento da linha neutra em direção à mesa.

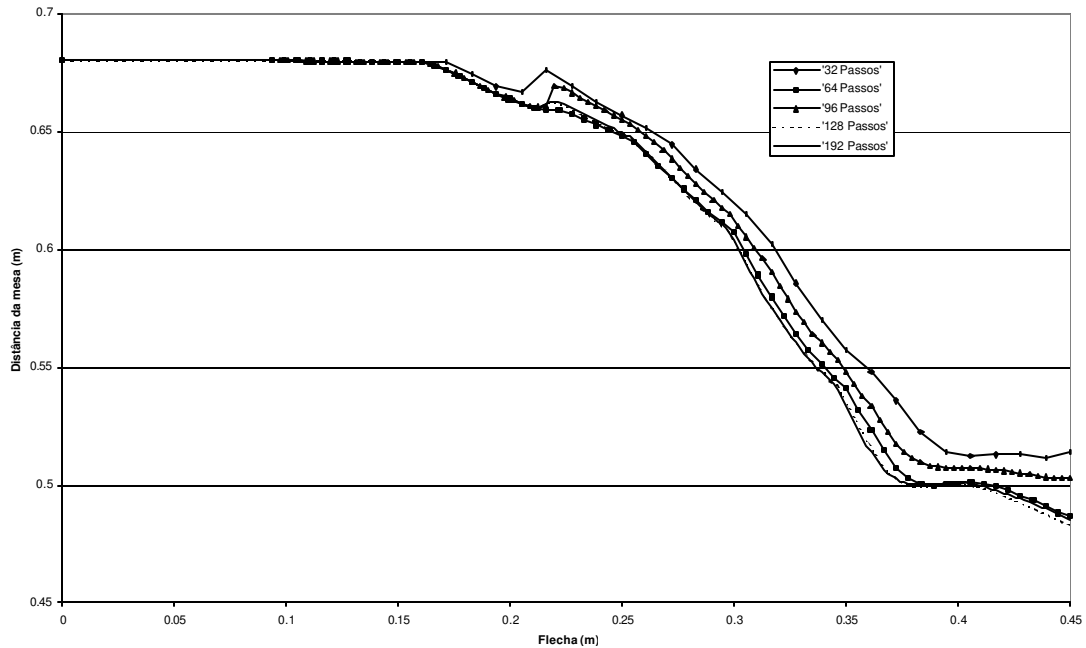


Figura 11.19 – Posição da linha neutra relativamente à mesa

11.4.2-Flexão simples em torno do eixo x com carga no C.C.

Nesta segunda análise a peça da Figura 11.20 é submetida à flexão em torno do eixo de simetria por meio de um deslocamento imposto na extremidade em balanço. O deslocamento foi aplicado de tal forma que a resultante do carregamento obtido coincidissem sempre com o centro de cisalhamento da peça. O perfil de forças na extremidade em balanço é esboçado na Figura 11.20.

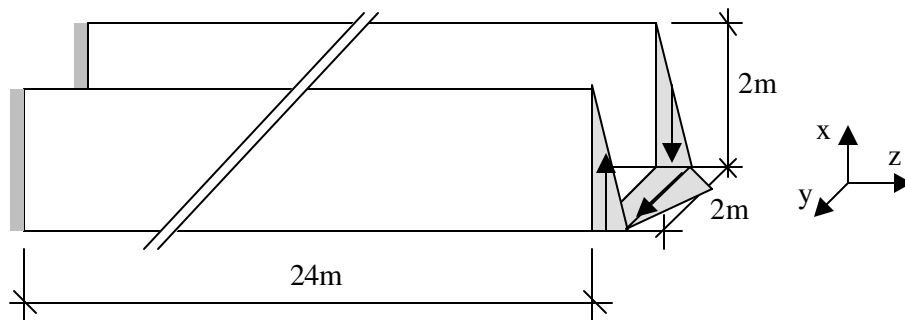


Figura 11.20 – Viga U longa fletida em torno do eixo x

Na Figura 11.21 é mostrado o comportamento da força resultante em função do deslocamento da extremidade em balanço. A plastificação tem início quando o carregamento atinge o valor de 2,61 MN. No entanto apenas pequenas porções junto aos cantos da peça

plastificam e não há um desvio significativo nas curvas. Isso se deve ao fenômeno do “shear lag” que produz um aumento no valor das tensões devidas à flexão nos cantos da peça. Quando a força atinge 6.12MN não há mais aumento significativo de força para um aumento no deslocamento imposto.

Os resultados obtidos com 32 passos de carga não refletiram muito bem o estabelecimento de um patamar de escoamento, já com 64 ou 96 passos o patamar fica claramente estabelecido. Os resultados obtidos com 128 e com 192 passos de carga foram praticamente os mesmos.

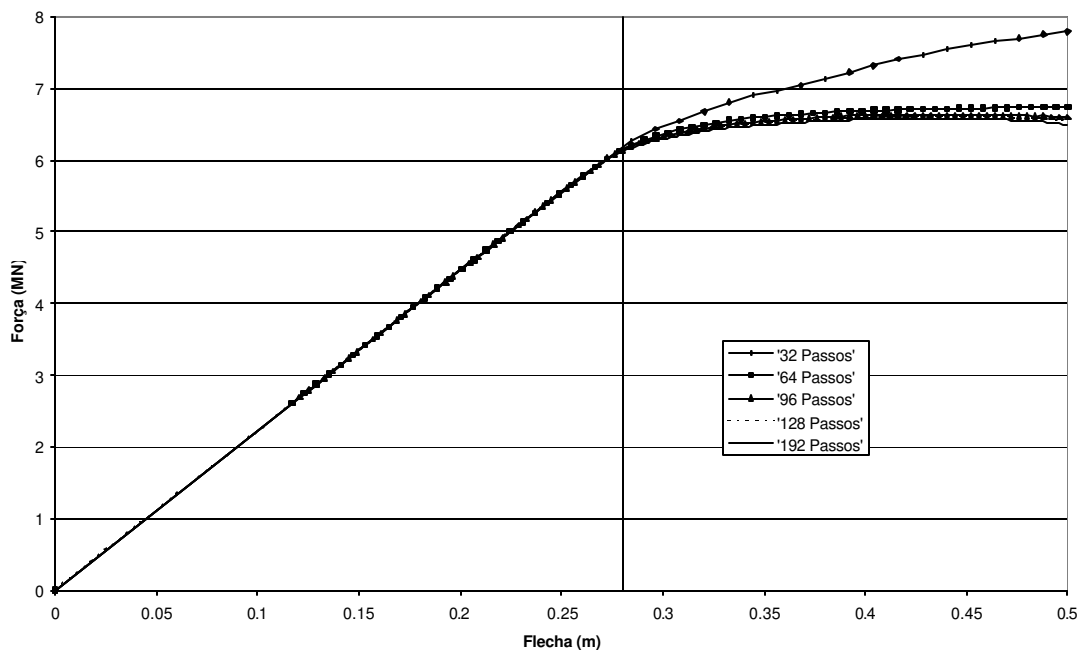


Figura 11.21 – Força resultante em função da flecha imposta

Neste exemplo o momento plástico encontrado foi de 156MNm, que comparado aos 125MNm, previstos pela resistência dos materiais, apresenta uma diferença de 20%. A razão para esta diferença é a mesma apresentada anteriormente.

Na Figura 11.22 é mostrada a posição instantânea do centro de cisalhamento em função do deslocamento. Esta posição refere-se a distancia entre a alma da peça e o centro de cisalhamento, medida sobre o eixo de simetria. No regime elástico não há alteração na posição do centro de cisalhamento. Uma vez iniciada a plastificação, este se afasta da alma, alterando em cerca de 2.5cm sua posição original e no segundo trecho da curva este passa a se aproximar da alma. Nota-se também que a posição final do centro de cisalhamento varia com

o número de passos de carga. A distância entre a alma e o centro de cisalhamento previsto pela resistência dos materiais seria de 85.7cm.

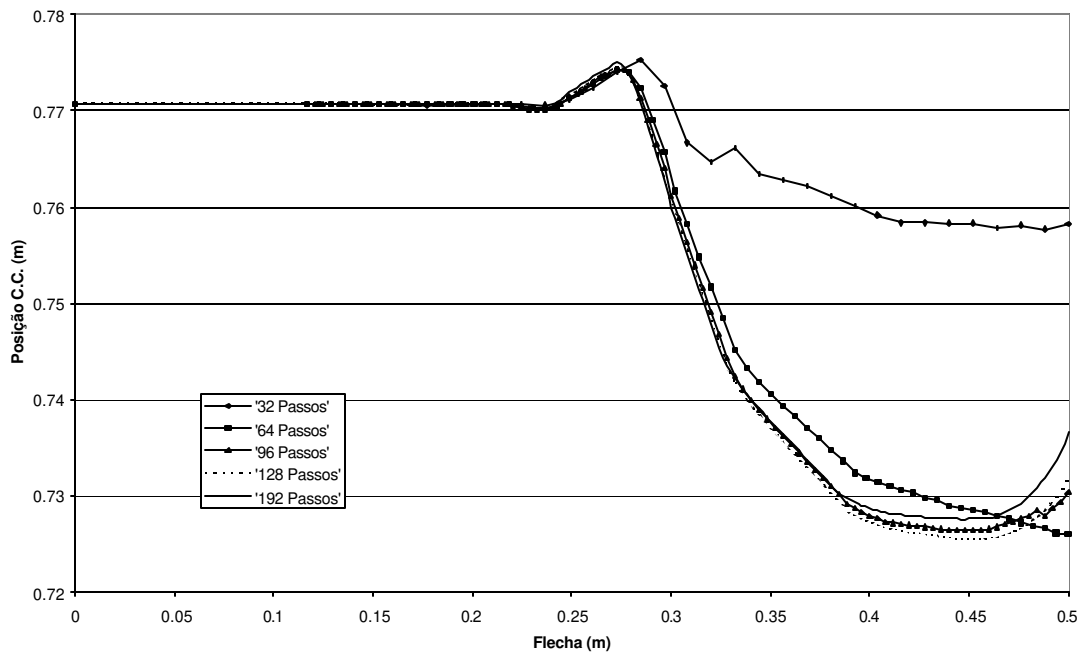


Figura 11.22 – Posição instantânea do centro de cisalhamento.

11.4.2.1-Perfil compacto

Novamente, a exemplo do que se fez na análise da viga curta, aumenta-se a espessura das mesas de 10cm para 24cm, obtém-se um perfil compacto. Esta alteração traz uma forte modificação no comportamento da peça. Na Figura 11.23 mostra-se o valor da força aplicada na extremidade do balanço contra a flecha. Cabe notar que para este novo perfil o momento plástico obtido com 32 passos de carga foi de 384.9MNm. O valor previsto pela resistência dos materiais é de 265MNm, portanto com um erro de 45%. Com 192 passos, o valor do momento plástico se reduz a 329.5MNm, com um erro de 24%. Nesta situação, o aumento da espessura produziu um aumento na discordância entre os valores obtidos e os previstos pela resistência dos materiais.

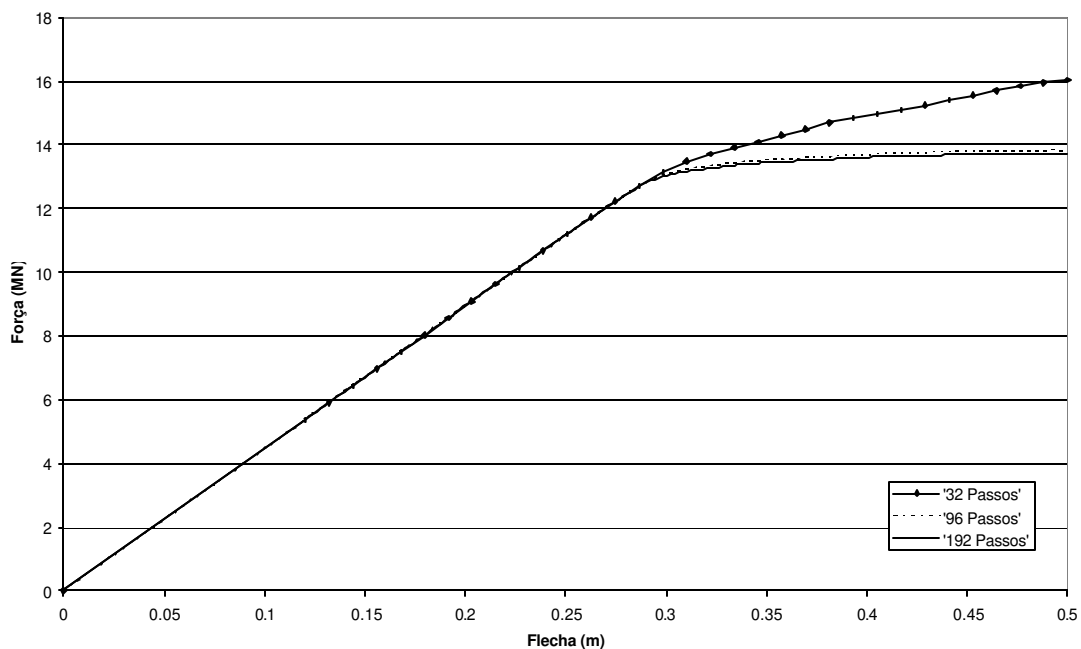


Figura 11.23 – Força resultante em função da flecha imposta para o perfil compacto

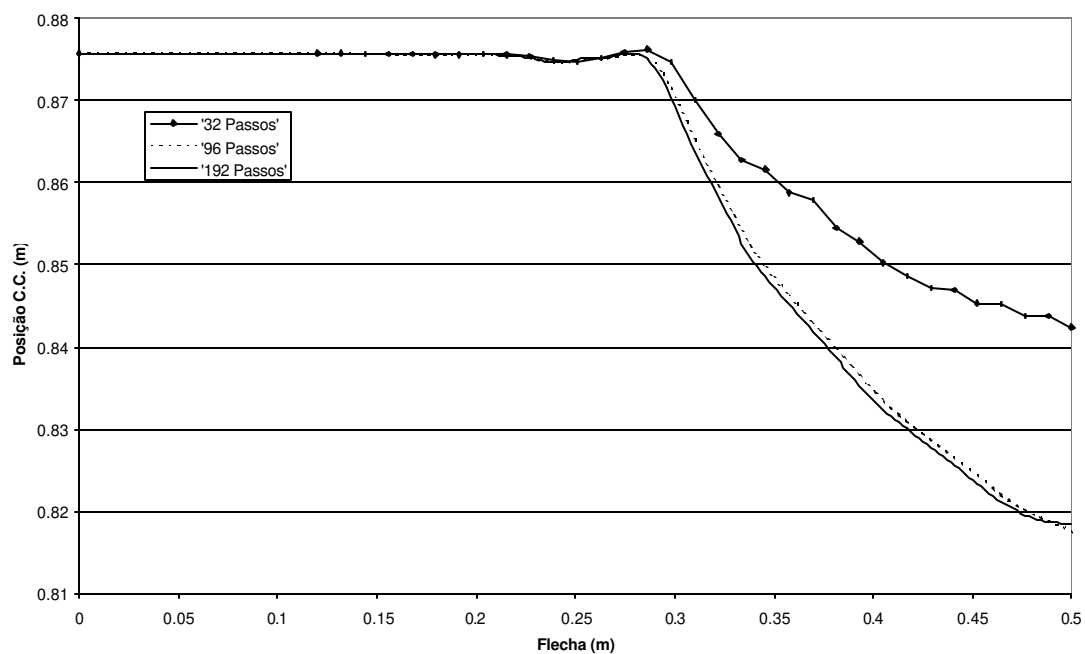


Figura 11.24 – Posição instantânea do centro de cisalhamento do perfil compacto.

Como pode ser observado na Figura 11.24, o aumento da espessura das mesas não acarretou em mudança significativa no comportamento do centro de cisalhamento. A pesar de

sua posição inicial ter sido alterada, este continua a se aproximar da peça conforme esta plastifica.

11.4.3-Flexão simples em torno do eixo x com carga na alma.

Aplicando-se um deslocamento à extremidade em balanço da peça, de tal forma que o carregamento obtido tenha sua resultante sobre a alma, tem-se uma situação de flexão com torção. Nesta situação, além de se deslocar na direção da força, a seção transversal da peça gira em torno de um centro de giro. Na Figura 11.25 são apresentadas as curvas para a força na extremidade em balanço em função da flecha imposta. Pode-se notar que a carga final obtida para esta situação de carregamento é inferior àquela obtida para a carga sobre o centro de cisalhamento.

A plastificação tem seu início com uma carga de 2.05MN, mas apenas com cargas superiores a 3.50MN há um desvio significativo da curva.

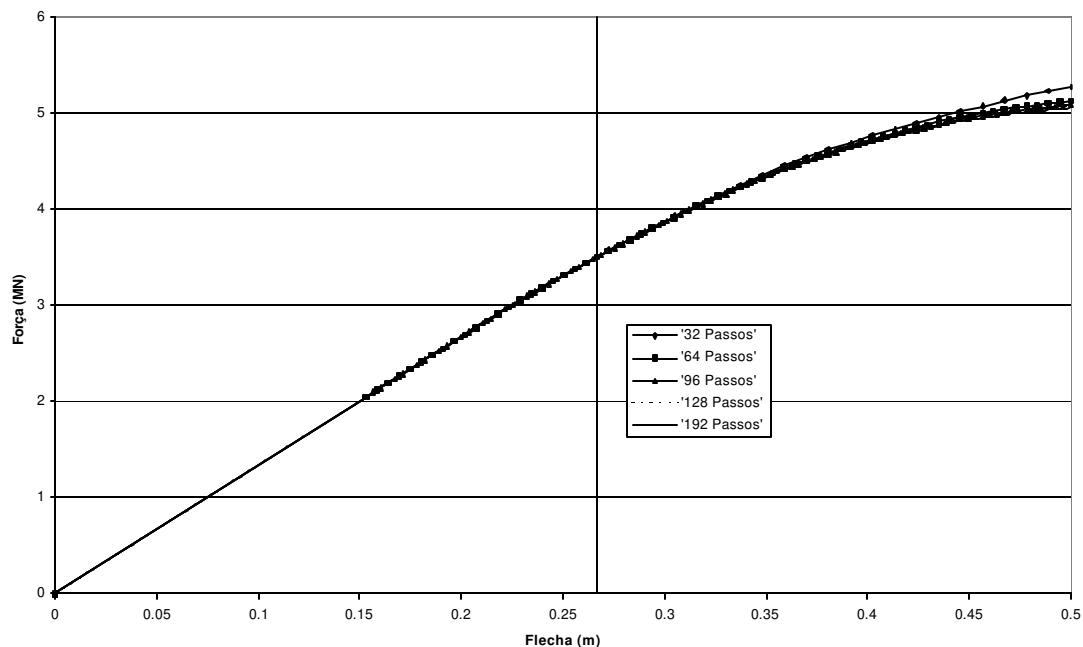


Figura 11.25 – Força resultante em função da flecha imposta

À medida que a peça se desloca, a posição do centro de giro se altera. Na Figura 11.26 pode-se observar a variação da distância entre o centro de giro e a alma da peça. Cabe dizer que a posição do centro de giro da Figura 11.26 refere-se ao deslocamento total da seção.

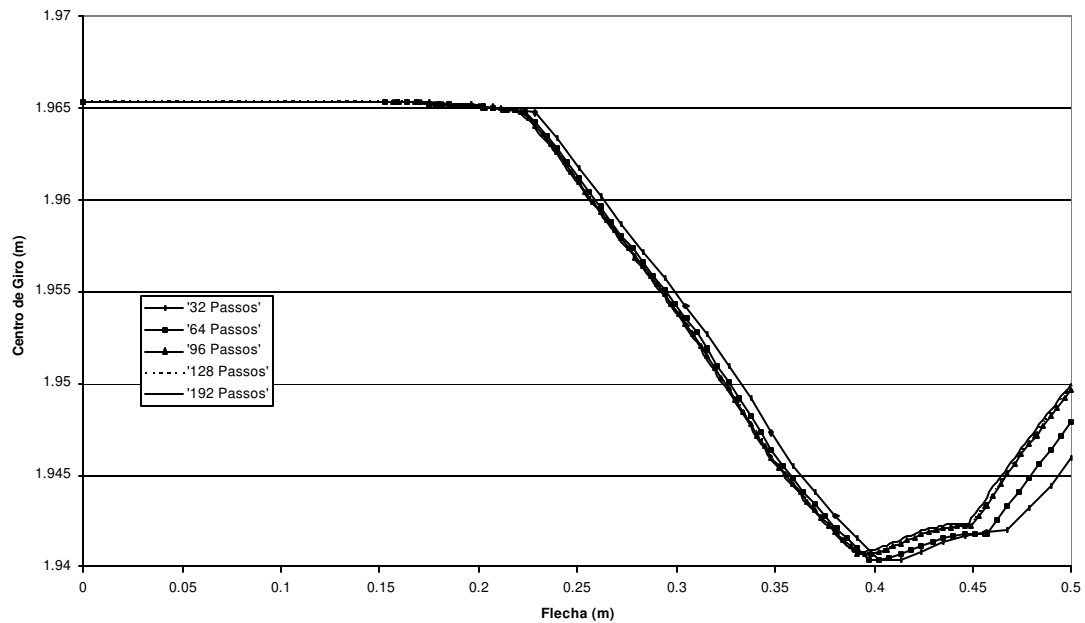


Figura 11.26 – Posição do centro de giro

Na Figura 11.27 é apresentado um gráfico da posição do centro instantâneo de giro, diferente para cada passo de carga, em função do deslocamento da extremidade em balanço. As curvas para 32, 64 e 96 passos de carga foram omitidas para melhor visualização.

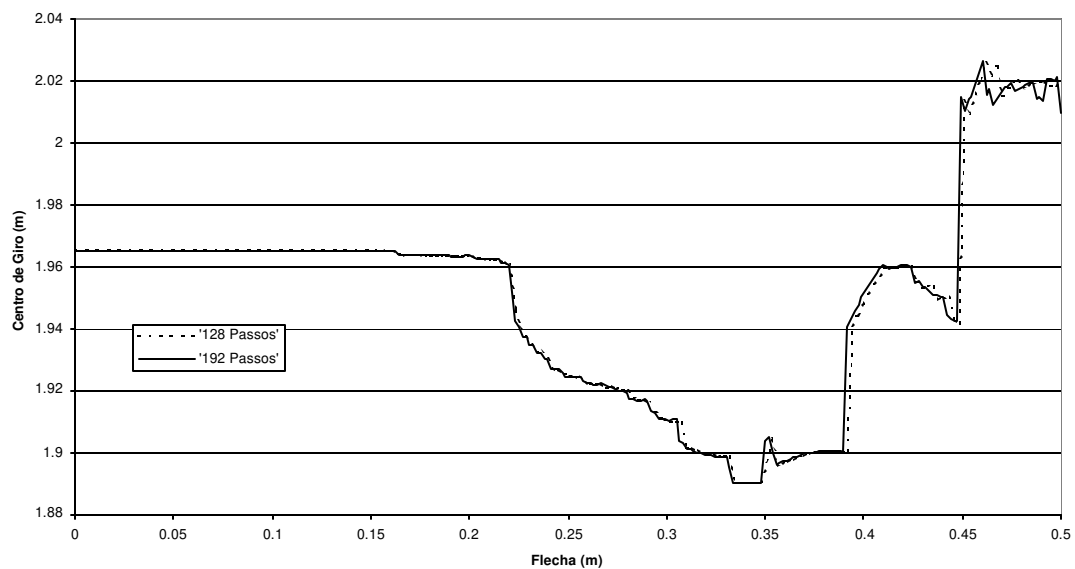


Figura 11.27 – Posição do centro instantâneo de giro

11.4.4-Momento nas arestas

Novamente deve-se verificar se a magnitude das tensões devidas aos momentos fletores nas paredes da peça não ultrapassara o limite do regime elástico.

Na Figura 11.28 é mostrado um gráfico do valor das tensões devidas à flexão das paredes da viga ao longo de uma aresta.

Nota-se aqui também uma instabilidade nos valores para os pontos próximos ao engaste, que é normal em problemas de placas sob apoios indeslocáveis [Paiva 1991]. Além deste pequeno trecho que ocupa o primeiro metro da viga, as tensões nas arestas se estabilizam em patamares bastante inferiores ao limite de plastificação das paredes. Para a flexão em torno o eixo de simetria e com carregamento na alma, há um aumento do valor do momento fletor na aresta nos últimos quatro metros da viga. Ainda assim as tensões ficam abaixo do limite elástico.

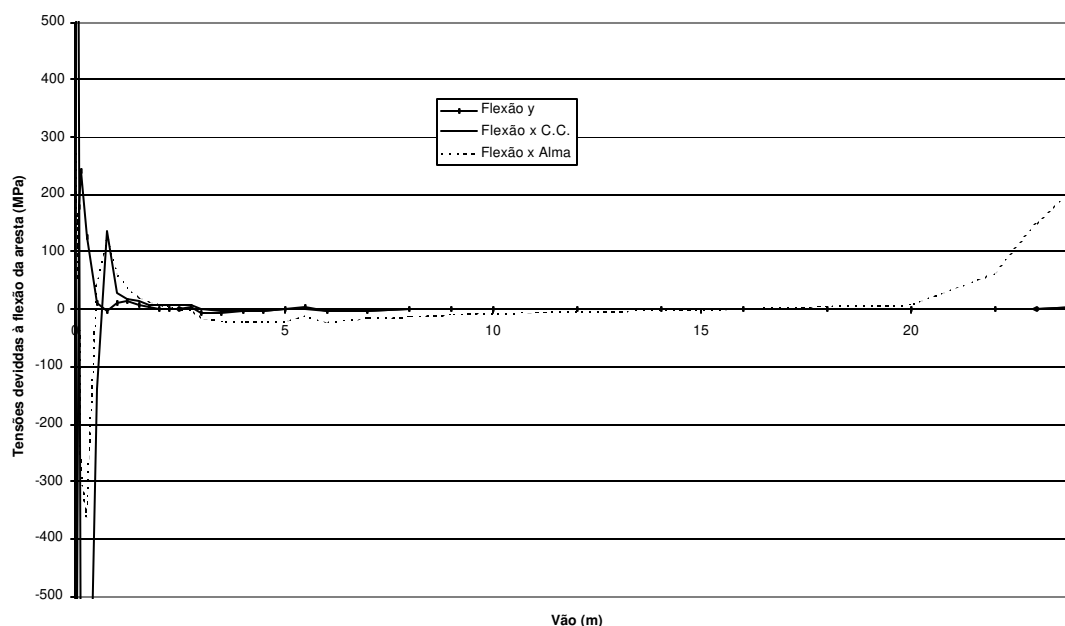


Figura 11.28 - Desenvolvimento das tensões devidas aos momentos fletores das paredes da viga ao longo da aresta

11.5-Viga I curta

Analisou-se, com o programa desenvolvido, o comportamento à flexão de uma viga I curta sujeita a flexão em torno de seu eixo de maior inércia. A viga, seu carregamento e vinculações são ilustrados na Figura 11.29.

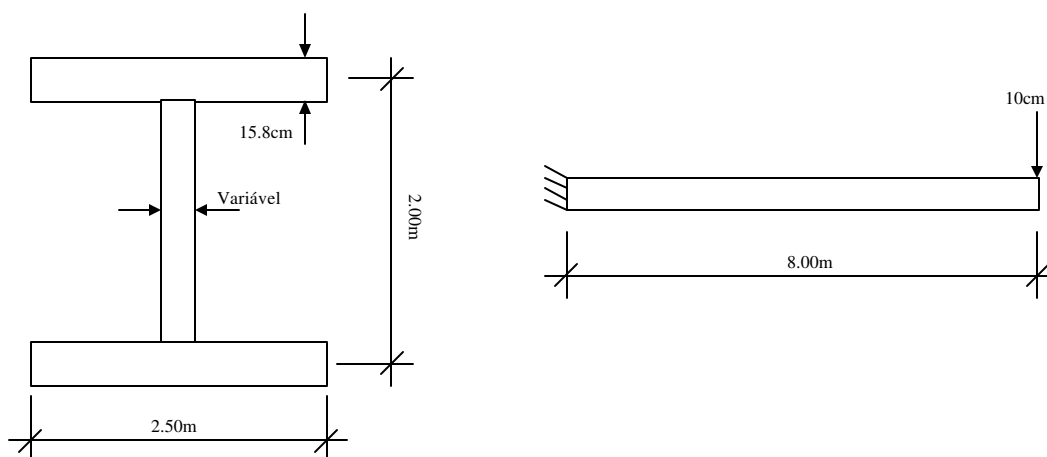


Figura 11.29 – Viga I curta.

Seguindo o modelo dos exemplos anteriores, a carga foi aplicada por meio de um deslocamento imposto na alma. Adotou-se módulo de elasticidade longitudinal de 205Gpa, coeficiente de Poisson 0.33 e tensão de escoamento de 250MPa.

Foi empregada nesta a mesma malha utilizada nos exemplos da viga curta de perfil U, vinculando-se as arestas de modo a gerar uma condição de simetria. Também se verificou a utilização de uma malha completa, modelando-se ambos lados da mesa, sem consideração de simetria. Nos casos estudados com esta segunda malha, os resultados foram rigorosamente os mesmos, porém com a demanda de um maior esforço computacional.

A espessura da alma foi variada entre 3cm e 16cm, para verificar a mudança do mecanismo de falha da estrutura. Com a espessura menor, a falha se dá por cisalhamento com plastificação da alma. À medida que a alma adquire rigidez, a falha tende a ocorrer por plastificação das mesas.

Na Figura 11.30 é mostrado o gráfico que relaciona a força obtida na extremidade em balanço da viga em função da flecha imposta. Nota-se que, para espessuras até 10cm, o ganho de resistência da peça é substancial à medida que a alma é reforçada. A partir de 10cm de espessura, a peça passa a sofrer plastificação nas mesas, devido ao esforço de flexão.

Para a espessura de alma de 16cm, encontrou-se uma força máxima na extremidade da viga de 34.3MN, enquanto que o valor previsto pelo modelo simplificado da resistência dos materiais é de 29.7MN, portanto uma diferença máxima de 15%.

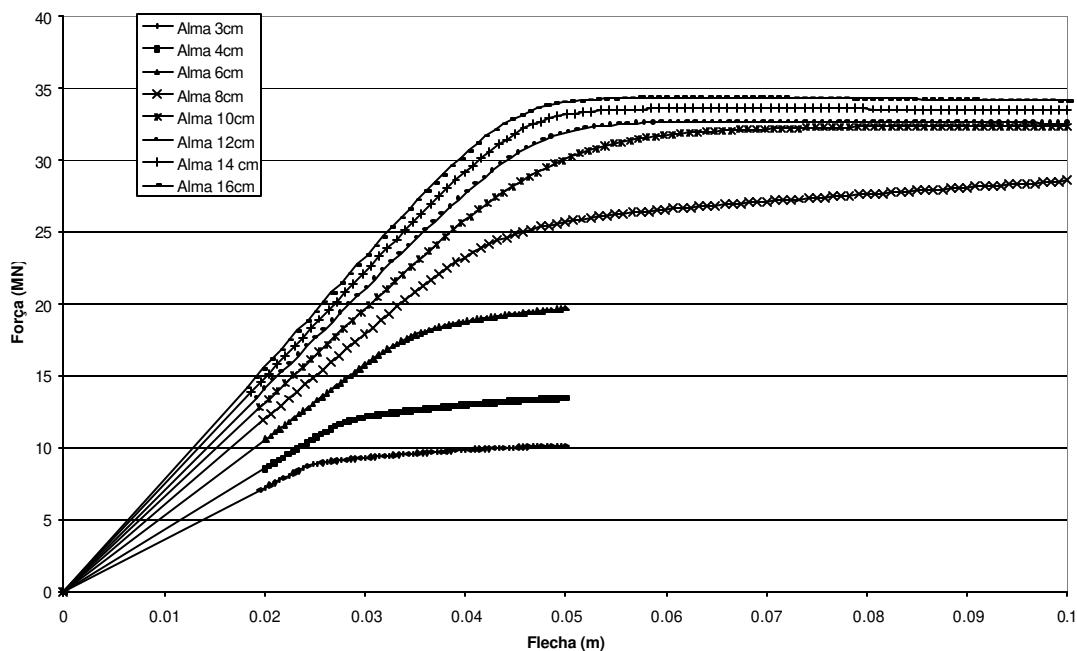


Figura 11.30 – Força na extremidade em função da flecha imposta.

11.6-Viga U longa bi-apoiada

Neste exemplo, uma viga bi-apoiada de 4.8m de vão é submetida a uma força concentrada até atingir a plastificação. A força é aplicada no centro do vão e, uma vez atingida uma flecha de 5cm, esta é removida, descarregando a viga. Neste instante um novo carregamento é aplicado no sentido contrário fazendo a peça plastificar novamente.

A peça é um perfil U compacto com a geometria ilustrada na Figura 11.31. Adotou-se o módulo de elasticidade longitudinal de 205GPa e uma tensão de escoamento de 250MPa sem encruamento. O coeficiente de Poisson foi tomado como 0.3. O carregamento é aplicado por meio de um deslocamento controlado de modo que a viga sofra flexão simples em torno do eixo de maior inércia da seção.

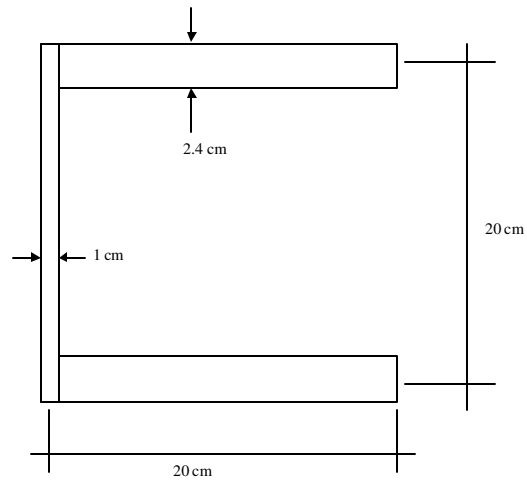


Figura 11.31 – Seção da viga bi-apoiada.

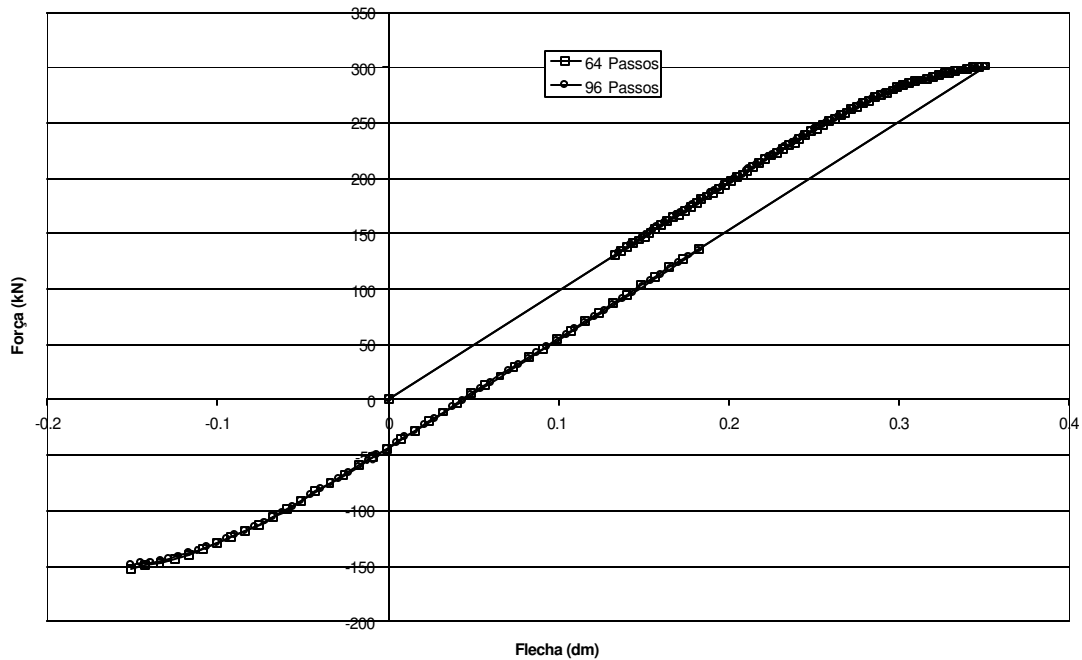


Figura 11.32 – Curvas de carga e descarga.

Na Figura 11.32 são mostradas as curvas de carga e descarga da viga, processadas com 64 e 96 passos de carga.

Nota-se que a plastificação ocorre também durante a descarga e a resistência da peça ao carregamento reverso é comprometida.

11.7-Viga I curta sujeita a carregamento reverso

A mesma peça analisada no item 11.5 foi estudada em condições de carregamento reverso. Nesta análise foi usada a espessura de alma de 16cm. O carregamento foi aplicado como um deslocamento imposto na extremidade em balanço.

Inicialmente a peça foi submetida a um carregamento tal que produzisse deformação plástica, chegando ao ponto “A”, especificamente, uma flecha imposta de 6cm. O carregamento foi então revertido a três patamares diferentes. No primeiro caso, ilustrado na Figura 11.33, o carregamento foi revertido até atingir a plastificação no ponto “B”. A partir deste ponto, a viga foi descarregada. Nota-se, no ponto “C”, que houve uma recuperação de 55% da deformação permanente inicial. A peça foi então carregada de modo a escoar até o ponto “D”.

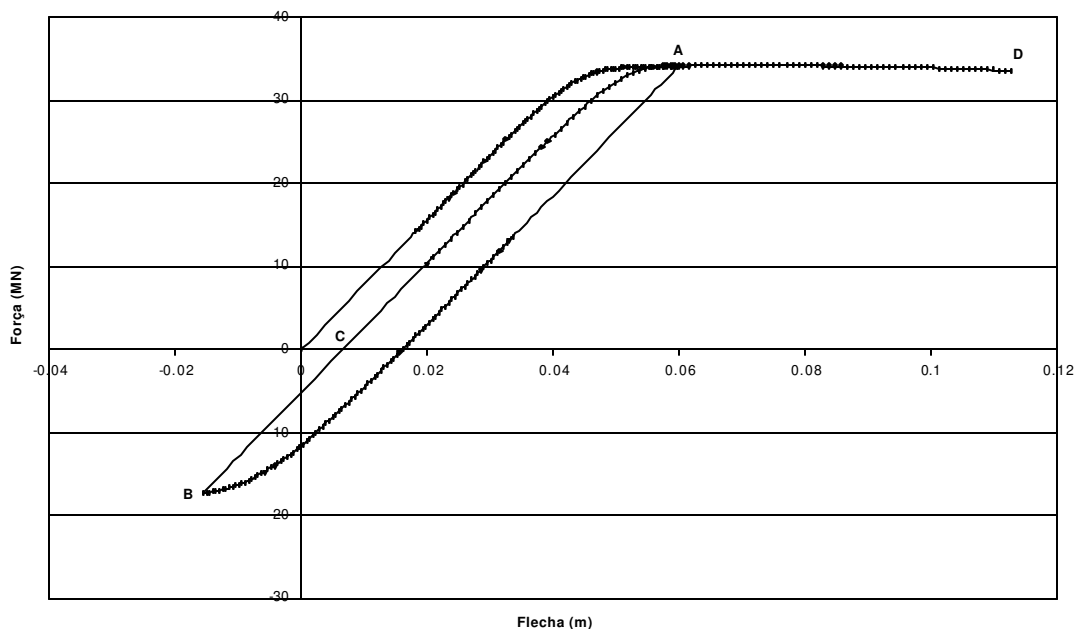


Figura 11.33 – Aplicação de carregamento reverso com escoamento.

Neste exemplo o carregamento inicial da peça até o ponto “A” comprometeu sua resistência ao carregamento reverso. A capacidade portante da peça ficou reduzida a 51% da encontrada no carregamento inicial. No entanto, com o restabelecimento da carga inicial, trecho “A-B”, nota-se que não houve alteração na posição do patamar originalmente encontrado.

No segundo caso, ilustrado na Figura 11.34, o carregamento reverso foi aplicado até que a peça retornasse a sua posição inicial, ponto “B”. Uma vez atingida a posição inicial, aplicou-se novamente o carregamento, fazendo a peça escoar até o ponto “D”.

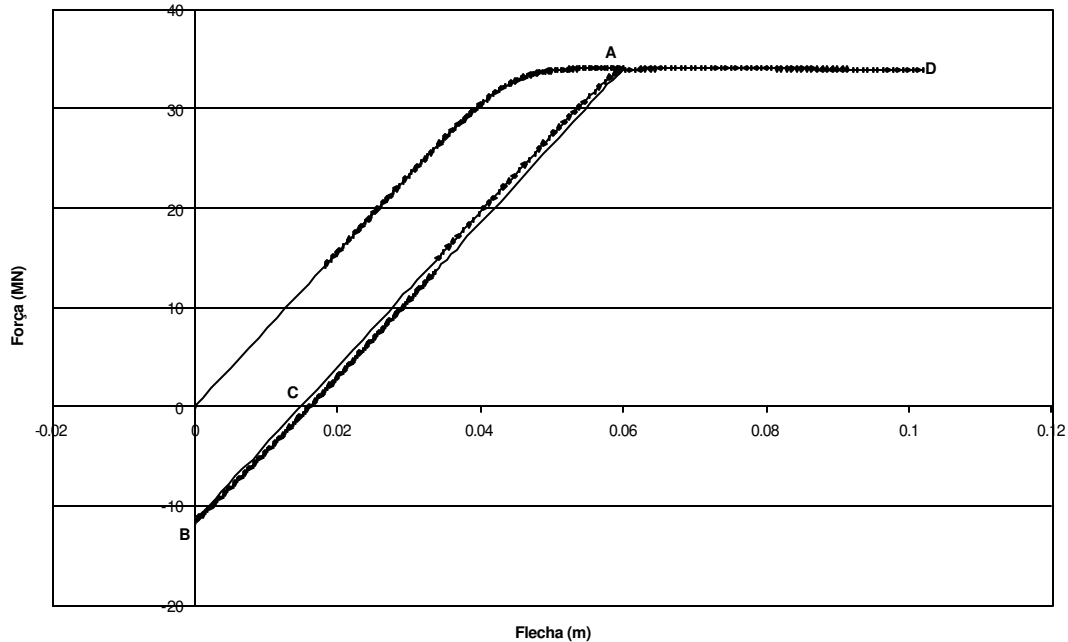


Figura 11.34 – Remoção total do deslocamento.

Na Figura 11.35 é ilustrada a terceira condição de carregamento analisada. Consiste em, após uma plastificação inicial, ponto “A”, remover o carregamento até que a força aplicada se anule, ponto “B”. O carregamento é então elevado novamente ao patamar original e mais além, até o ponto “C”. Pode-se notar, na ampliação da Figura 11.36, que as linhas de carga e descarga não coincidem, evidenciando o fenômeno da histerese.

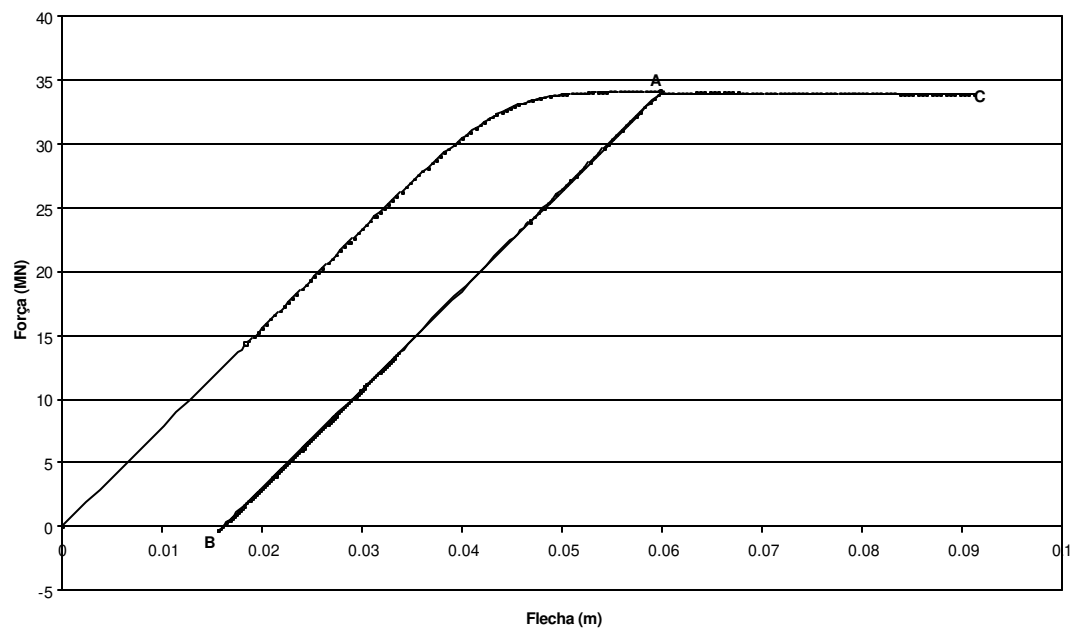


Figura 11.35 – Verificação de histerese.

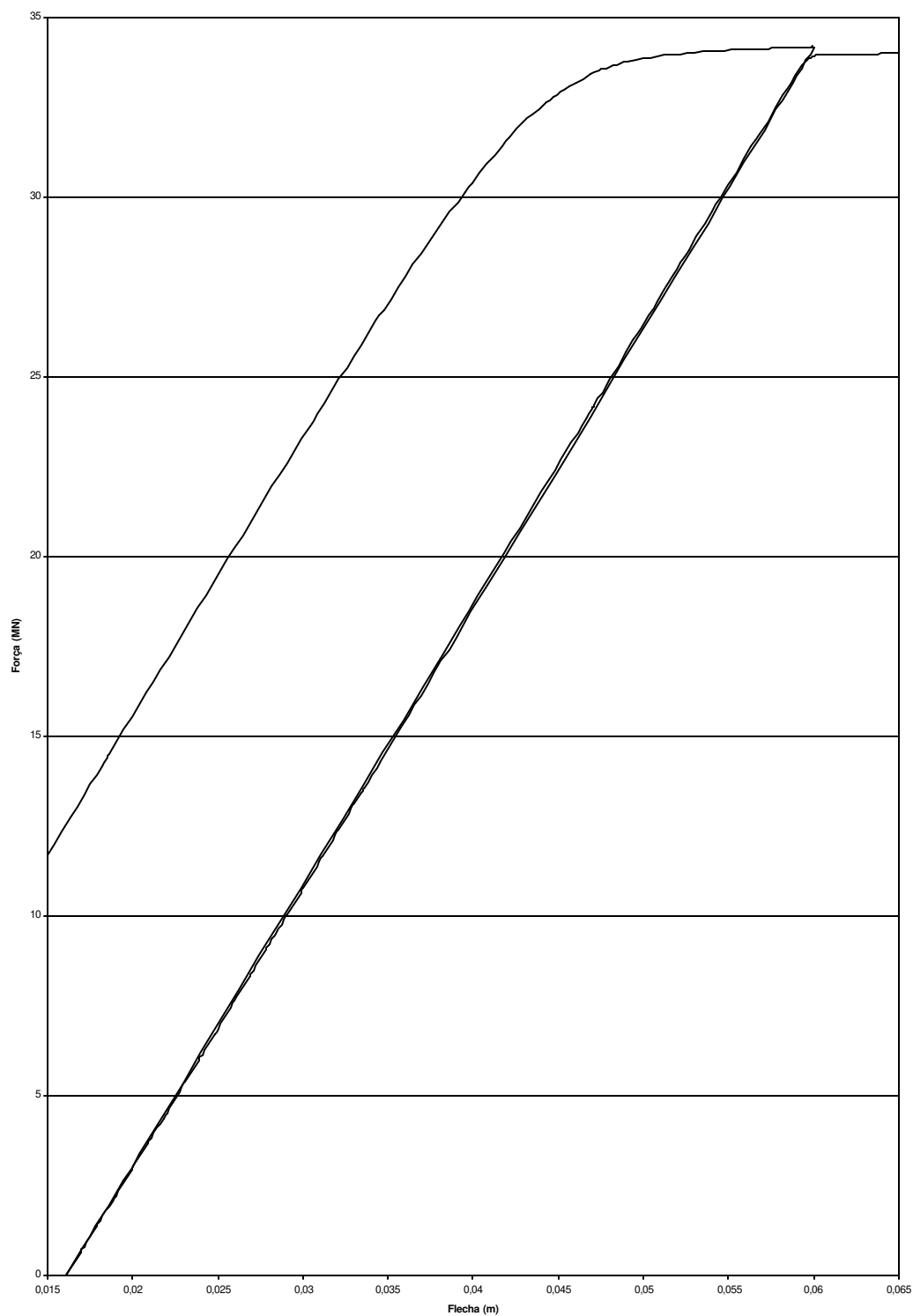


Figura 11.36 – Ampliação do gráfico da Figura 11.35

Aumentando-se a espessura da alma para 20cm, o fenômeno da histerese fica mais claramente caracterizado, como visto na Figura 11.37.

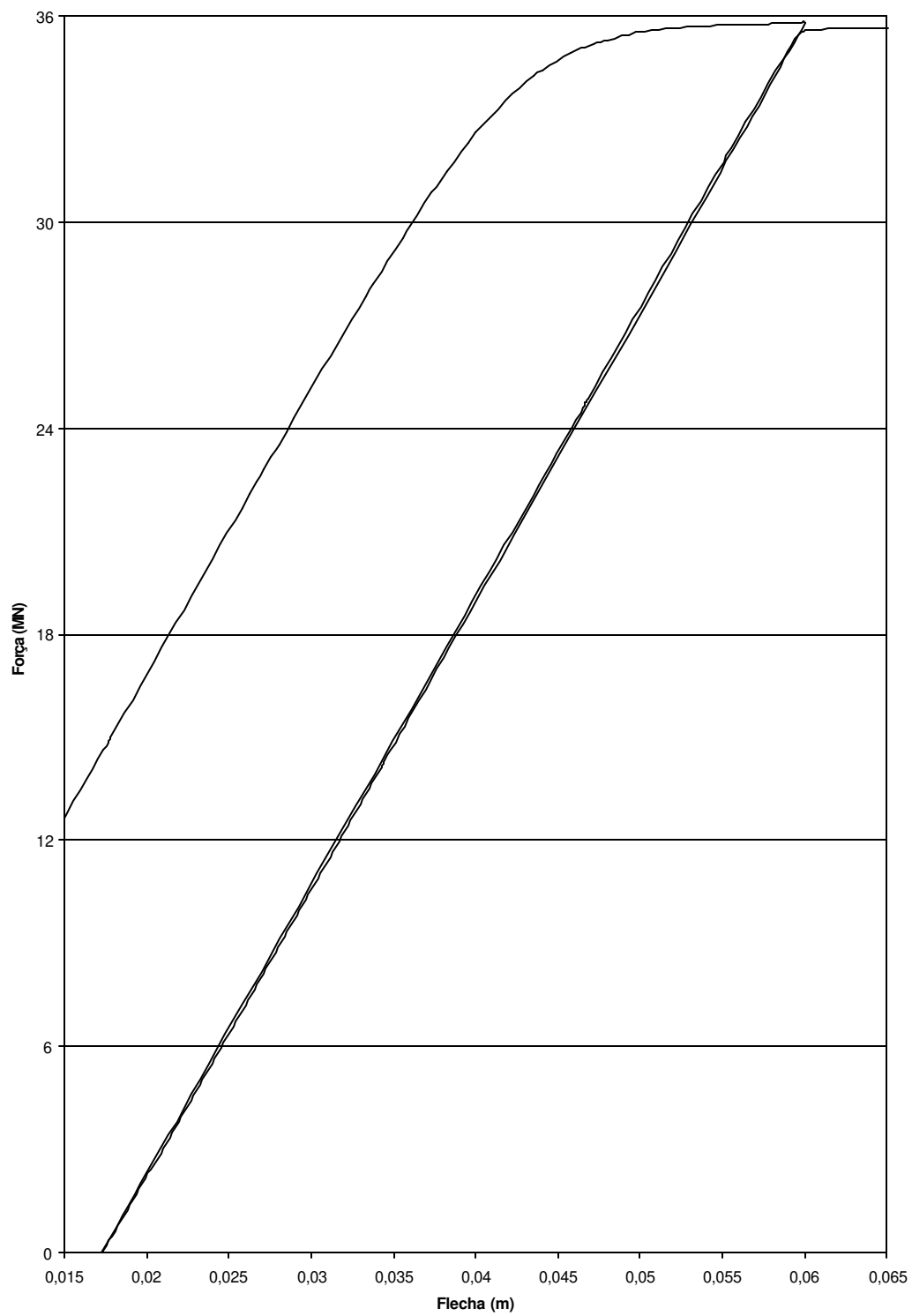


Figura 11.37 – Histerese em uma viga com alma de 20cm.

11.8- Chapa estreita sob carregamento dinâmico

Neste exemplo estuda-se o comportamento de uma chapa estreita, com dimensões de 1m por 6m, conforme ilustrado na Figura 11.38 submetida a um carregamento variável no tempo. Foram adotados para este exemplo módulo de elasticidade de 1Pa, coeficiente de Poisson de 0.333, densidade de 6kg/m^3 e tensão de escoamento de 1.5Pa. A malha empregada nesta análise é apresentada na Figura 11.39.

O carregamento aplicado consiste de uma força harmônica de amplitude 1N/m, ressonante com o primeiro modo da barra.

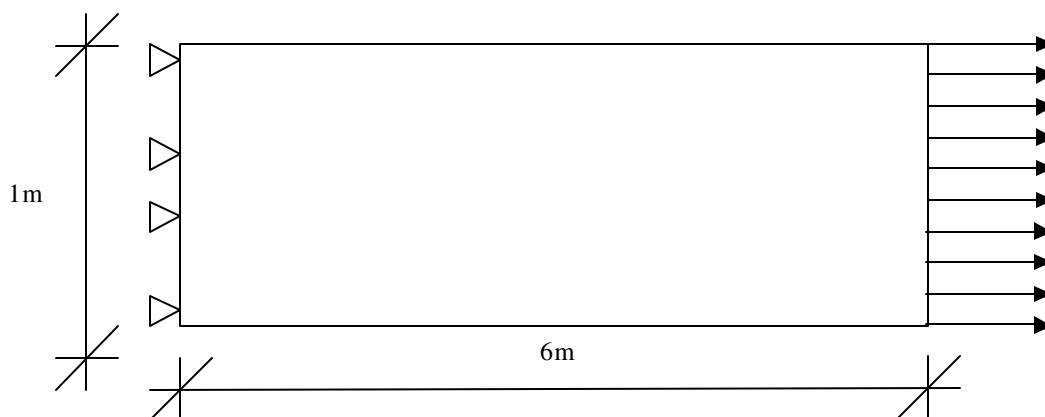


Figura 11.38 – Geometria da chapa estreita.

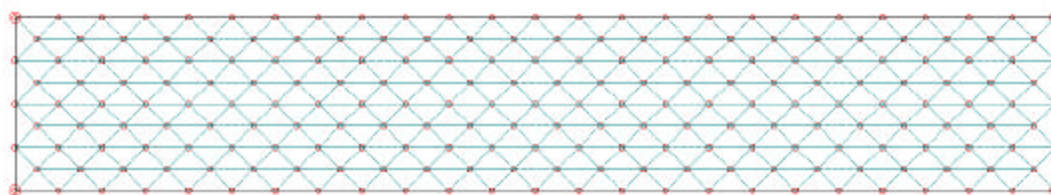


Figura 11.39 - Segunda malha da chapa estreita

Na Figura 11.40 é mostrado o resultado do deslocamento na borda carregada e na Figura 11.41, as forças, para diversos passos de tempo.

Os resultados para o regime elástico não foram alterados pela diminuição do tamanho do passo de tempo. No entanto, a medida que a plastificação se desenvolve, o passo de tempo passa a ter grande influência no resultado.

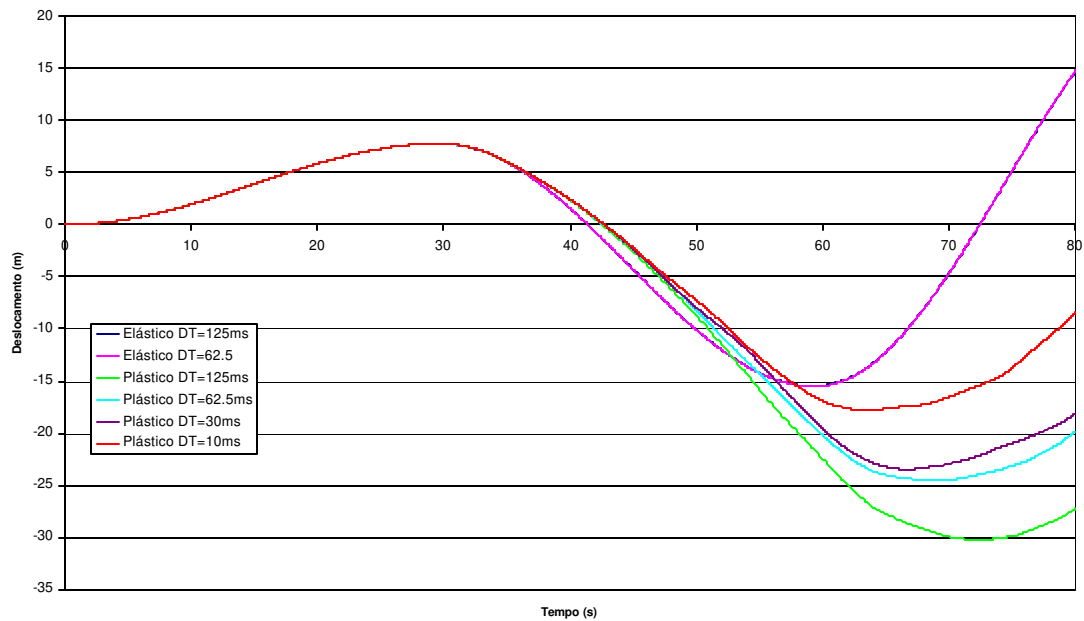


Figura 11.40 – Deslocamento da borda livre

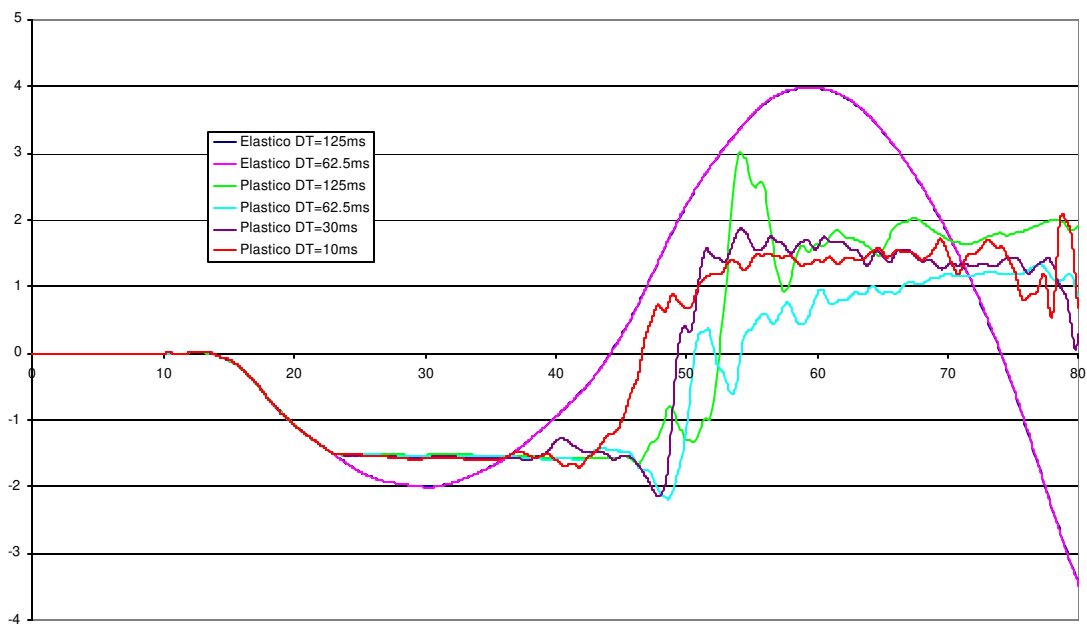


Figura 11.41 – Reação da borda vinculada

Pode-se dividir os gráficos da Figura 11.40 e da Figura 11.41 em três regiões distintas. Na primeira fase, compreendida entre os tempos de 0s até aproximadamente 23s a peça encontra-se em regime elástico, não havendo alteração nos resultados inicialmente obtidos. Entre os tempos de 23s e 36s ocorre a primeira plastificação da peça junto à extremidade

vinculada. Neste primeiro estágio não há tensões residuais influenciando o processo plástico e o patamar plástico-perfeito pode ser nitidamente reconhecido. Também não há, nesta fase, grande influência do tamanho do passo de tempo nos resultados obtidos.

Entre os tempos de 36s até 50s já houve a inversão na direção do movimento da extremidade livre. A peça continua a sofrer plastificação, no entanto na direção contrária a que vinha sofrendo até então. Nota-se uma mudança brusca na direção da reação da extremidade vinculada, que retorna ao regime elástico e passa a plastificar novamente sob compressão.

A partir dos 50s até o final da análise ocorre uma grande influência do passo de tempo no resultado obtido. Nesta fase a peça está se contraindo por influência do carregamento externo, no entanto a existência de deformações plástica altera seu comportamento.

12-Conclusões

12.1-Conclusões gerais

Acredita-se ter se alcançado sucesso na implementação do método dos elementos de contorno para o tratamento dos problemas elasto-plásticos, elasto-dinâmicos e elasto-plasto-dinâmicos estudados neste trabalho. Os exemplos mostrados atestam a eficácia do uso de elementos isoparamétricos lineares nesta análise e encorajam o desenvolvimento de novos estudos, buscando resultados ainda melhores.

A aplicação das expressões analíticas e técnicas de integração apresentadas em **Foltran 1999** no modelo de folhas poliédricas apresentado em **Palermo 1989** conduziu a uma melhoria na qualidade e acuidade dos resultados em regime elástico.

Nos problemas de flexão de vigas além do regime elástico, o momento plástico obtido foi comparado com aquele previsto pela resistência dos materiais. Os valores obtidos do modelo numérico estiveram sempre próximos daqueles previstos pela teoria simplificada, atestando que há consistência na modelagem numérica empregada. A formulação empregada, que leva em conta as deformações plásticas e uma regra de fluência associada ao critério de Von Mises, mostrou-se estável e conduziu a resultados consistentes com o esperado para os casos analisados.

Observou-se em alguns exemplos com carregamento reverso a ocorrência de efeito Bauschinger e histerese. Uma vez que o modelo usado na análise foi o elasto-plástico perfeito, conclui-se que estes fenômenos foram ocasionados pela complexidade da estrutura analisada e não pelo material em si [**Chen & Han 1988**]. Isso valida o emprego do modelo elasto-plástico perfeito neste tipo de análise.

Notou-se também que o início da plastificação em peças de paredes finas se dá muito antes que a tensão média na seção em estudo atinja o patamar da tensão de escoamento. Isso ocorre devido ao acúmulo de tensões em determinados pontos, provocado pelo fenômeno do

“shear lag”. No entanto não se observa um desvio acentuado do comportamento linear da estrutura neste estágio inicial, pois esta plastificação ocorre em regiões bastante limitadas. Uma vez que a tensão média atinge o valor da tensão de escoamento, a peça passa a apresentar um comportamento claramente não linear.

Para determinação do efeito das forças de inércia, as integrais de domínio foram convertidas em integrais de contorno de células. Estas foram tratadas analiticamente, para a determinação dos deslocamentos e forças, e numericamente, para a determinação das deformações e tensões. O tratamento analítico das integrais de domínio dispensou o uso de estratégias numéricas especiais, no caso de haver singularidades ou quase singularidades de domínio.

A performance dos integradores de Houbolt, Newmark e Wilson foram comparadas. Nos exemplos estudados, o integrador de Wilson foi o que mostrou a melhor performance global. A implementação computacional deste conserva a simplicidade do algoritmo de Newmark, conduzindo a resultados com a mesma qualidade do algoritmo de Houbolt.

O integrador de Wilson também foi implementado em sua forma incremental como sugestão para análise de problemas com não linearidade física, segundo o que foi exposto em **Clough & Penzien 1975**. Notou-se que nesta modalidade o integrador pode perder sua estabilidade para passos de tempo grandes. Observou-se também, nos exemplos estudados, um maior amortecimento numérico na implementação incremental que na clássica. Com a redução do passo de tempo, a resposta do integrador incremental tende àquela fornecida pela modalidade clássica.

No estudo de problemas elasto-plasto-dinâmicos, optou-se por implementar o integrador de Wilson em sua forma incremental. Observou-se que, nos estágios iniciais da plastificação dos exemplos analisados, a mudança do passo de tempo trouxe pouca alteração nos resultados. No entanto, à medida que a plastificação toma vulto, há uma grande influência do passo de tempo na resposta final do modelo.

12.2-Sugestões para prosseguimento

Tendo em vista a qualidade dos resultados obtidos do modelo de folhas poliédricas de **Palermo 1989**, acredita-se serem válidos maiores investimentos neste. Diversos aspectos ainda podem ser analisados em trabalhos futuros. Dentre estes se recomenda investigar mais profundamente:

- Outras formas de se aplicar o carregamento direto e inverso;

- A influência do encruamento do material na resposta da estrutura;
- O efeito das tensões residuais oriundas do processo de fabricação na peça;
- O fenômeno do “shear lag”

Acredita-se, também, que os resultados de flexão possam ser melhorados com o uso de um modelo de flexão de placa que leve em conta a deformação por cortante. Uma sugestão de formulação para este tipo de modelo pode ser vista em **Sanchez 1998**.

Outra contribuição ao modelo, esta bastante relevante, seria a inclusão do efeito de grandes deformações ao lado da plasticidade. Ensaio de laboratório, executados com perfis de paredes finas, normalmente implicam na aplicação de grandes deformações [**Lay & Galambos 1967**], [**Kuren & Galambos 1964**], [**Galambos & Lay 1965**]. Como o modelo usado tem por hipótese pequenas deformações, a possibilidade de comparação dos resultados computacionais com aqueles obtidos em laboratório é limitada.

Devido a maior estabilidade do integrador de Wilson em sua forma clássica, sugere-se também a implementação da plasticidade aliada a este integrador. Espera-se com isso obter resultados de boa acuidade com passos de tempo maiores, reduzindo substancialmente o esforço computacional despendido.

13-Bibliografia

13.1-Referências

ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., editors, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972

ALBUQUERQUE, Éder Lima de, *Análise de Problemas Dinâmicos em Materiais Anisotrópicos Usando o Método dos Elementos de Contorno*, 2001. 146f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ARAÚJO, F.C., MANSUR, WEBE JOÃO, NISHIKAVA, L.K., A linear theta time-marching algorithm in 3D BEM formulation for elastodynamics, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v23, p825-833, 1999

AXELSSON, K., SAMUELSSON, A., Finite element analysis of elastic-plastic materials displaying mixed hardening, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v14, p211-225, 1979

BARROS, Pércio Leister de Almeida, *Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise da Interação Solo-Estrutura*, 1997. 300f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BATHE, Klaus-Jürgen, *Finite element procedures*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1996

BECKER, A. A., *The Boundary Element Method in Engineering: a Complete Course*, London: McGraw-Hill, 1992

- BEZINE, G., A boundary integrfal equation method for plate flexure with conditions inside the domain, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v17, p1647-1657, 1981
- BEZINE, G., Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions, *Mech. Res. Comm.*, v5, n4, p197-206, 1978
- BEZINE, G., CIMETIERE, A., GELBERT, J.P., Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v21, p2189-2199, 1985
- BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J., *Boundary Elements: an Introductory Course*, 2^a ed, New York: McGraw-Hill, 1992
- BUI, H.D., Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations, *International Journal of Solids and Structures*, v14, p935-939, 1978
- CHANG, P., HIJAZI, H., General analysis of asymmetric thin-walled members, *Thin-Walled Structures*, v7, p159-186, 1989
- CHAVES, Eduardo Walter Vieira, *Análise de Placas com Variação de Espessura Através do Método dos Elementos de Contorno*, 1997. 171f. Dissertação (Mestrado em estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos
- CHEN, Dai-Heng, NISITANI, Hironobu, Effect of Poisson's ratio on elastic-plastic stress under plane deformation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v20, p17-24, 1997
- CHEN, W. F., HAN, D. J., *Plasticity for Structural Engineers*, New York: Springer-Verlag, 1988
- CLOUGH, Ray W., PENZIEN, Joseph, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, Dynamic non-linear stree analysis by the mass matrix BEM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v24, n9, p623-632, 2000

CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, Non-singular time-stepping BEM for transient elastodynamic analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v15, p11-18, 1995

CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, Three-dimensional transient BEM analysis, *Computers & Structures*, v56, n5, p751-768, 1995

CRUSE, T.A., A direct formulation and numerical solution of general transient elastodynamic problem II, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v22, n2, p341-355, 1968

CRUSE, T.A., RIZZO, F.J., A direct formulation and numerical solution of general transient elastodynamic problem I, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v22, n1, p244-259, 1968

CRUSE, Thomas A., Numerical solutions in three dimensional elastostatics, *International Journal of Solids and Structures*, v5, p1259-1274, 1969

DANSON, D. J., Analysis of plate bending problems by direct boundary element method, MSc. dissertation, University of Southampton, Southampton, 1980

DRUCKER, D.C., On uniqueness in the theory of plasticity, *Quarterly Applied Mathematics*, v14, n1, p35-42, 1956

FOLTRAN, Carlos Eduardo, *Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno*, 1999. 227f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, Boundary Element Method Applied to Simple Problems of the Two Dimensional Elastostatics, In: *Computational Mechanics and The Use of Computers in Engineering*, International Symposium on the Use of Computers in Engineering and The Quality of the Software, AMC, Rio de Janeiro, Brazil, v135, 142, 1998

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, Um Tratamento Analítico para Obtenção das Matrizes H e G do Método dos Elementos de Contorno em Problemas da Elastostática Bidimensional, In: *XVIII Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia*, Brasília, Brasil, v1, p389-396, 1997

GERADIN, Michel, RIXEN, Daniel, *Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics*, Chichester: Wiley; Paris: Masson, 1994.

HENRY, D. P., *Advanced Development of the Boundary Element Method for Elastic and Inelastic Thermal Stress Analysis*, PhD dissertation, State University of New York at Buffalo, Buffalo, New York, 1987

HOU Bolt, John C., A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *Journal of the Aeronautical Science*, v17, n9, p540-550, 1950

JASWON, M.A., Integral equation method in potential theory, " *Proceedings of Royal Society of London; Series A: Mathematical and Physical Science*", v275, p23-32, 1963

JASWON, M.A., MAITI, M., An integral equation formulation of plate bending problems, *Journal of Engineering Mathematics*, v2, n1, p83-93, 1968

KATSIKADELIS, J.T., SAPOUNTZAKIS, E.J., ZORBA, E.G., A BEM approach to static and dynamic analysis of plates with internal supports, In: *Boundary Elements X*, Ed. BREBBIA, C.A., Springer-Verlag, Berlin, v4, p431-444, 1988

KELLOG, O. D., *Fondations of Potential Theory*, Berlin: Springer, 1929

KOMATSU, S., NAGAI, M., Analytical combination of boundary element method and thin-walled segment method and its application to box girder bridges, In: *Boundary Element Methods in Engineering*, Eds. Brebbia, C.A., Springer, Berlin, p636-649, 1982

LACHAT, J.C., WATSON, J.O., A second generation boundary integral equation program for three-dimensional elastic analysis, In: *Boundary integral equation method: Computational application in applied mechanics*, Eds. Cruse & Rizzo, AMD Series, v11, p85-100, 1975

LACHAT, J.C., WATSON, J.O., Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v10, p991-1005, 1976

LAVINGTON, Simon. *The Pegasus Story: A history of a vintage British computer*. London: Science Museum, 1988

LEE, K. H., *A Boundary Integral Equation Method for two Dimensional Elastoplastic Analysis*, PhD Thesis, Imperial College, University of London, 1983

LEE, Kwok Hong, FENNER, R.T., A quadratic formulation for two-dimensional elastoplastic analysis using the boundary integral equation method, *Journal of Strain Analysis*, v21, n3, p159-175, 1986

LOU, Z.-W., ZHANG, M., Elastoplastic boundary element analysis with Hetenyi's fundamental solution, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v10, p231-239, 1992

LOVE, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed. Dover Publications, 1994

LUTZ, Earlin David, Numerical Methods for Hypersingular and Near-Singular Boundary integral in Fracture Mechanics, 1991, 223f. PhD Thesis, Department of Computer Science, Cornell University, USA

MANSUR, W.J., BREBBIA, Carlos Alberto, Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation, *Applied Mathematical Modelling*, v6, n4, p307-311, 1982

MANSUR, W.J., BREBBIA, Carlos Alberto, Numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional transient scalar wave propagation problems, *Applied Mathematical Modelling*, v6, n4, p299-306, 1982

MASSONNET, Charles Ernest, *Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane*, Bulletin du Centre Et. Rech. Essais Sc. Génie Civil, Liège, v.4, 1949

MENDONÇA, Ângelo Vieira, Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessura constante: Uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. 2002. 291f. Tese (Doutorado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos

MONTÁNS, Francisco J., BORJA, Ronaldo I., Implicit J2-bounding surface plasticity using Prager's translation rule, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v55, n10, p1129-1166, 2002

- MUKHERJEE, Subrata, Corrected boundary-integral equations in planar thermoelastoplasticity, *International Journal of Solids and Structures*, v13, n4, p331-335, 1977
- NEWMARK, Nathan M., A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, v85, n3, p67-94, 1959
- PAIVA, J. B., Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. 1987. Tese (Doutorado em estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos
- PALERMO Jr., Leandro, Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno. 1989. 148f. Tese (Doutorado em estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos
- PALERMO Jr., Leandro, Esforços de flexão e flexo-torção em teoria de segunda ordem: Automatização do cálculo, 1985. 151f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos
- PINA, Heitor L., Analytical Integration in the 2D Boundary element method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v13, p715-725, 1997
- PORTELA, Artur, Dual boundary element incremental analysis of crack growth, 1992. 198f. PhD Thesis - Wessex Institute of Technology, Southampton, England
- PRAGER, William, A new method of analysing stresses and strain in work-hardening plastic solids, *Journal of Applied Mechanics*, v23, p493-496, 1956
- PRAGER, William, Strain hardening under combined stresses, *Journal of Applied Physics*, v16, n12, p837-840, 1945
- RICARDELLA, Peter, An Implementation of the Boundary Integral Technique for Plane Problems in Elasticity and Elastoplasticity, PhD Thesis, Carnegie-Mellon University, 1973
- RIZZO, Franc J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elasto-statics, *Quarterly Applied Mathematics*, v25, n1, p83-95, 1967

- SAADA, A. S., *Elasticity: Theory and Applications*, Krieger Publishing Company, 2^a ed, Malabar, Florida, USA, 1993
- SANCHES, L. C. F. *Análise estática e dinâmica de um modelo de folhas poliédricas e o estudo de lajes com forma de aço incorporada através do Método dos Elementos de Contorno*. 2002. 318p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- SANCHES, L. C. F. Uma resolução de placas com a teoria de Mindlin através do método dos elementos de contorno. 1998. 186p. Dissertação (Mestrado em Estruturas - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Campinas
- SIMÕES, Rogério, *Um Estudo de Placas sob Cargas Dinâmicas Estacionárias e com o Efeito da Não Linearidade Geométrica sob Cargas Estáticas Usando o Método dos Elementos de Contorno*. 2001. 252f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- SOUZA, Valério Junior Bitencourt De, Algoritmos de integração para o método de elementos de contorno tridimensional. 2001. 135f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos
- STERN, Morris, A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems, *International Journal of Solids and Structures*, v15, n10, p769-782, 1979
- SWADE, Doron, Charles Babbage and his Calculating Engines, Lodon: Science Museum, 1991
- SWEDLOW, J.L., CRUSE, Thomas A., Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow, *International Journal of Solids and Structures*, v7, p1673-1683, 1971
- SYMM, G.T., Integral equation in potential theory II, " *Proceedings of Royal Society of London; Series A: Mathematical and Physical Science*", v275, p33-46, 1963
- TAN, C.L., LEE, Kwok Hong, Elastic-plastic stress analysis of a cracked thick-walled cylinder, *Journal of Strain Analysis*, v18, n4, p253-260, 1983

- TANAKA, Masataka et al, Free vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method, *Engineering Analysis*, v5, p182-188, 1988
- TANAKA, Masataka, MATSUMOTO, Toshiro, A new boundary element formulation for transient elastodynamic problems with damping based on time-stepping schemes, In: *Advances in Boundary Elements*, Eds. Brebbia, C.A. & Connor, J.J., Springer-Verlag, Berlin, v3, p331-342, 1989
- TELLES, J.C.F, BREBBIA, C.A., On the application of boundary element method to plasticity, *Applied Mathematical Modelling*, v3, p466-470, 1979
- TELLES, Jose Claudio de Faria, A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v24, p959-972, 1987
- TELLES, José Claudio de Faria, *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*, Berlin: Springer-Verlag, 1983
- TOTTENHAM, H., The boundary element method for plates and shells, In: *Developments in Boundary Element Methods*, Eds. Banerjee, Prasanta K. & Butterfield, R., Applied Science Publ. London, p173-205, 1979
- TWEEDALE, Geoffrey, *Calculating Machines and Computers*, Shire Publications, 1990
- UGURAL, A. C., *Stresses in plates and Shells*, New York McGraw-Hill, 1981
- VERA-TUDELA, Carlos Andrés Reyna; TELLES, José Claudio de Faria, NUMERICAL MODELLING OF 2D ELASTODYNAMIC PROBLEMS USING BOUNDARY ELEMENTS AND THE OPERATIONAL QUADRATURE METHOD, COBEM, 2003
- VLASSOV, B. Z., *Pieces Longues en Voiles Minces*, Paris: Editiones Eyrolles, 1962, 655p.
- WILSON, E.L., FARHOOMAND, I., BATHE, K.J, Nonlinear dynamic analysis of complex structures, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v1, p241-252, 1973
- WRIGHT, H.D., A plate model for composite slab analysis, *Thin-Walled Structures*, v10, n4, p299-328, 1990
- ZIEGLER, Hans, A Modification of Prager's hardening rule, *Quarterly Applied Mathematics*, v17, n1, p55-65, 1959

13.2-Bibliografia

- ABDEL-AKHER, Ahmed, HARTLEY, Gilbert A., Evaluation of boundary integrals for plate bending, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v28, p75-93, 1989
- ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., editors, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1972
- ABREU, A.I., CARRER, J.A.M., MANSUR, WEBE JOÃO, Scalar wave propagation in 2D: a BEM formulation based on the operational quadrature method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v27, p101-105, 2003
- AHMAD, Shahid, BANERJEE, Prasanta Kumar, Free vibration analysis by BEM using particular integrals, *Journal of Engineering Mechanics*, v112, n7, p682-695, 1986
- AIMI, A., DILIGENTI, M., MONEGATO, G., New numerical integration schemes for applications of Galerkin BEM to 2-D problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v40, p1977-1999, 1997
- AIMI, A., DILIGENTI, M., MONEGATO, G., Numerical integration schemes for the BEM solution of hypersingular integral equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v45, p1807-1830, 1999
- AKKARI, M.M., HUTCHINSON, J.R., An alternative BEM formulation applied to plate vibrations, In: *Boundary Elements VII*, Ed. BREBBIA, C.A. & MAIER, G., Springer-Verlag, Berlin, v1, p6111-6126, 1985
- AL-BERMANI, F.G.A., KITIPORNCHAI, S., CHIN, S., Stability of cold-formed members, *Engng Struct.*, v16, n5, p386-392, 1994
- ALBUQUERQUE, Éder Lima de, *Análise de Problemas Dinâmicos em Materiais Anisotrópicos Usando o Método dos Elementos de Contorno*, 2001. 146f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

ALBUQUERQUE, Eder Lima, SOLLERO, Paulo, ALIABADI, M.H., The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials, International Journal of Solids and Structures, v39, p1405-1422, 2002

ALIABADI, M.H., HALL, W.S., Analytical removal of singularities and one-dimensional integration of three-dimensional boundary element method kernels, Engineering Analysis, v4, p21-24, 1987

ALIABADI, M.H., HALL, W.S., PHEMISTER, T.G., Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v21, p2221-2236, 1985

ALIABADI, M.H., MARTIN, D., Boundary element hyper-singular formulation for elastoplastic contact problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v48, p995-1014, 2000

ALTIERO, Nicholas J., SIKARSKIE, David L., A boundary integral equation method applied to plates of arbitrary plan form, Computers & Structures, v9, p163-168, 1978

AMINI, S., MAINES, N.D., Regularization of strongly singular integrals in boundary integral equations, Communications in Numerical Methods in Engineering, v12, p787-793, 1996

AMMONS, Bruce A., VABLE, Madhukar, A dynamic algorithm for integration in the boundary element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v41, p639-650, 1998

AMMONS, Bruce A., VABLE, Madhukar, Continuity and collocation effects in the boundary element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v40, p1877-1891, 1997

ANTES, H., A boundary element procedure for transient wave propagations in two-dimensional isotropic elastic media, Finite Elements Analysis and Design, v1, n4, p313-322, 1985

ARAÚJO, F.C., MANSUR, WEBER JOÃO, NISHIKAWA, L.K., A linear theta time-marching algorithm in 3D BEM formulation for elastodynamics, Engineering Analysis with Boundary Elements, v23, p825-833, 1999

ARISTODEMO, M., TURCO, E., Boundary element discretization of plane elasticity and plate bending problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v37, n6, p965-987, 1994

ARIZA, M.P., SAEZ, A., DOMINGUES, J., A singular element for three-dimensional fracture mechanics analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v20, p275-285, 1997

ARIZUMI, Yasunori, OSHIRO, Takeshi, Finite Strip Analysis of Curved Composite Girders with Incomplete Interaction, *Computers & Structures*, v15, n6, p603-612, 1982

ATLURI, S.N., O'DONOGHUE, P.E., ZHANG, J.-D., Analysis and control of finite deformations of plates and shells: : Formulations and interior/boundary element algorithms, In: *Formulations and Algorithms*, Eds. Hughes, T.J. & Hinton, E., Swansea, UK, Pine-Ridge Press, p127-153, 1986

AXELSSON, K., SAMUELSSON, A., Finite element analysis of elastic-plastic materials displaying mixed hardening, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v14, p211-225, 1979

BAKHT, Baidar, JAEGER, Leslie G., CHEUNG, Mo S., Cellular and voided slab bridges, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, v107, n9, p1797-1813, 1981

BANERJEE, Prasanta Kumar, AHMAD, S., MANOLIS, G.D., Advanced elastodynamic analysis, In: *Boundary elements methods in mechanics*, Eds BESKOS, D.E., North-Holland, Amsterdam, v3, p257-284, 1987

BANERJEE, Prasanta Kumar, CATHIE, D.N., A direct formulation and numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional problems of elasto-plasticity, *International Journal of Mechanical Sciences*, v22, p233-245, 1980

BANERJEE, Prasanta Kumar, CATHIE, D.N., DAVIES, T.G., Two- and three-dimensional problems of elasto-plasticity, In: *Developments in Boundary Element Methods*, Eds. Banerjee, Prasanta K. & Butterfield R., Applied Science Publishers, London, v1, p65-95, 1979

- BANERJEE, Prasanta Kumar, RAVEENDRA, S.T., Advanced boundary element analysis of two- and three-dimensional problems of elasto-plasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v23, n6, p985-1002, 1986
- BANERJEE, Prasanta Kumar, RAVEENDRA, S.T., New boundary element method formulation for 2-D elastoplastic analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, v113, p252-265, 1987
- BARROS, Pécio Leister de Almeida, Elastodinâmica de Meios Transversalmente Isotrópicos: Funções de Green e o Método dos Elementos de Contorno na Análise da Interação Solo-Estrutura, 1997. 300f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- BARROS, Percio Leister de Almeida, MESQUITA Neto, Euclites, Singular-ended spline interpolation for two-dimensional boundary element analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v47, p951-967, 2000
- BASSALI, W.A., NASSIF, M., Stress and deflection in a elastically restrained circular plate under uniform normal loading over a segment, *Journal of Applied Mechanics*, v26, n1, p44-54, 1959
- BATHE, Klaus-Jürgen, *Finite element procedures*, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1996
- BATHE, Klaus-Jurgen, HO, Lee-Wing, A simple and effective element for analysis of general shell structures, *Computers & Structures*, v13, p673-681, 1981
- BECKER, A. A., *The Boundary Element Method in Engineering: a Complete Course*, London: McGraw-Hill, 1992
- BENITEZ, F.G. et al, Triomensional plasticity using BIEM, *Applied Mathematical Modelling*, v5, n6, p442-447, 1981
- BERGAN, P.G. et al, Solution techniques for non-linear finite element problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v12, p1677-1696, 1978
- BESKOS, Dimitri E., Boundary element methods in dynamic analysis, *Applied mechanics reviews*, v40, n1, p1-23, 1987

BESKOS, Dimitri E., NARAYANAN, G.V., Dynamic response of frameworks by numerical Laplace transform, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v37, p289-307, 1983

BEZINE, G., A boundary integrfal equation method for plate flexure with conditions inside the domain, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v17, p1647-1657, 1981

BEZINE, G., Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions, *Mech. Res. Comm.*, v5, n4, p197-206, 1978

BEZINE, G., CIMETIERE, A., GELBERT, J.P., Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v21, p2189-2199, 1985

BEZINE, G., GAMBY, D., Étude des mouvements transitoires de flexion d'une plaque par la méthode des équations intégrales de frontière, *Journal de Mécanique Appliquée*, v1, n3, p451-466, 1982

BLANDFORD, George E., TWO-DIMENSIONAL STRESS INTENSITY FACTOR COMPUTATIONS USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v17, p387-404, 1981

BOUDJELAL, M.T., BEAULIEU, D., FAFARD, M., Analyse non linéaire par elements finis des pieces comprimées et fléchies à parois minces, *Can. J. Civ. Eng.*, v21, p966-979, 1994

BREBBIA, C. A., DOMINGUEZ, J., *Boundary Elements: an Introductory Course*, 2^a ed, New York: McGraw-Hill, 1992

BREBBIA, Carlos Alberto, CHUANG, P., Application of the boundary element method for solving elastodynamic problems, In: *Soil dynamics and earthquake engineering*, Eds. CAKMAK, A.S. et al, A.A. Balkema, Rotterdam, v1, p381-408, 1982

BREBBIA, Carlos Alberto, NARDINI, D., Dynamic analysis in solid mechanics by na alternative boundary element procedure, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v24, n7-8, p513-518, 2000

BRUNET, M., Numerical analysis of cyclic plasticity using the boundary integral equation method, In: Proc. 3rd. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, Irvine, p337-349, 1981

BUI, H.D., LORET, B., BONNET, M., Régularization des équations de l'élastostatique et de l'élastodynamique, C. R. Acad Sci Ser II, v300, p633-636, 1985

BUI, H.D., Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations, International Journal of Solids and Structures, v14, p935-939, 1978

CAMP, C.V., GIPSON, G.S., Aiharmonic analysis of rectilinear plates by the boundary element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v30, p517-539, 1990

CARRER, J.A.M., MANSUR, WEBE JOÃO, Stress and velocity in 2D transient elastodynamic analysis by the boundary element method, Engineering Analysis with Boundary Elements, v23, p233-245, 1999

CATHIE, David N., On the implementation of elasto-plastic boundary element analysis, In: Proc. 2nd. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods, Southampton, p318-334, 1980

CHANG, P., HIJAZI, H., General analysis of asymmetric thin-walled members, Thin-Walled Structures, v7, p159-186, 1989

CHAVES, E.W.V, FERNANDES, G.R., VENTURINI, Wilson Sergio, Plate bending boundary element formulation considering variable thickness, Engineering Analysis with Boundary Elements, v23, p405-418, 1999

CHAVES, Eduardo Walter Vieira, *Análise de Placas com Variação de Espessura Através do Método dos Elementos de Contorno*, 1997. 171f. Dissertação (Mestrado em estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos

CHEN, Dai-Heng, NISITANI, Hironobu, Effect of Poisson's ratio on elastic-plastic stress under plane deformation, Engineering Analysis with Boundary Elements, v20, p17-24, 1997

- CHEN, G., TRAHAIR, N.S., Inelastic Nonuniform torsion of steel I-beams, J. Construct. Steel Research, v23, p189-207, 1992
- CHEN, W. F., HAN, D. J., *Plasticity for Structural Engineers*, New York: Springer-Verlag, 1988
- CLOUGH, Ray W., PENZIEN, Joseph, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1975
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, A general 3D BEM/FEM coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v46, n5, p695-712, 1999
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, A simple comparison between two 3D time domain elastodynamic boundary element formulations, Engineering Analysis with Boundary Elements, v17, p33-44, 1996
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, BEM/FEM non-linear model applied to transient analysis with viscous damping, Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, v21, n3, p519-536, 1999
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, Dynamic non-linear stress analysis by the mass matrix BEM, Engineering Analysis with Boundary Elements, v24, n9, p623-632, 2000
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, Further improvements on three dimensional transient BEM elastodynamic analysis, Engineering Analysis with Boundary Elements, v17, p231-243, 1996
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, Non-singular time-stepping BEM for transient elastodynamic analysis, Engineering Analysis with Boundary Elements, v15, p11-18, 1995
- CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, On the coupling of 3D BEM and FEM frame model applied to elastodynamic analysis, International Journal of Solids and Structures, v36, n31-32, p4798-4804, 1999

CODA, Humberto Breves, VENTURINI, Wilson Sergio, Three-dimensional transient BEM analysis, *Computers & Structures*, v56, n5, p751-768, 1995

CONWAY, H.D., FARNHAM, K.A., The free flexural vibration of triangular, rhombic and parallelogram plates and some analogies, *International Journal of Mechanical Sciences*, v7, n12, p811-816, 1965

CONWAY, H.D., The bending, buckling and flexural vibrations of simply supported polygonal plates by point-matching, *Journal of Applied Mechanics*, v28, n2, p288-291, 1961

CROTTY, J.M., A Block Equation Solver for Large Unsymmetric Matrices Arising in the Boundary Integral Equation Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v18, n7, p997-1017, 1982

CRUSE, T.A., A direct formulation and numerical solution of general transient elastodynamic problem II, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v22, n2, p341-355, 1968

CRUSE, T.A., RIZZO, F.J., A direct formulation and numerical solution of general transient elastodynamic problem I, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v22, n1, p244-259, 1968

CRUSE, Thomas A., Boundary-integral equation fracture mechanics analysis, In: *Boundary integral equation method: Computational application in applied mechanics*, Eds. Cruse & Rizzo, AMD Series, v11, p31-46, 1975

CRUSE, Thomas A., Numerical solutions in three dimensional elastostatics, *International Journal of Solids and Structures*, v5, p1259-1274, 1969

CRUSE, Thomas A., SNOW, D.W., WILSON, R.B., Numerical solution in axisymmetric elasticity, *Computers & Structures*, v7, p445-451, 1977

DALLNER, Rudolf, KUHN, Gunther, Efficient evaluation of volume integrals in the boundary element method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v109, p95-109, 1993

DANSON, D. J., Analysis of plate bending problems by direct boundary element method, MSc. dissertation, University of Southampton, Southampton, 1980

DECONINCK, J., Analytic integration of integrals involved by the two-dimensional boundary element method using straight elements, *Engineering Analysis*, v3, p173-176, 1986

DEMIREL, Vedat, WANG, Shen, An efficient boundary element method for two-dimensional transient wave propagation problems, *Applied Mathematical Modelling*, v11, n6, p411-416, 1987

DEZI, Luigino, MENTRATI, Lando, Nonuniform bending-stress distribution (shear lag), *Journal of Structural Engineering*, v111, n12, p2675-2690, 1985

DRUCKER, D.C., A definition of stable inelastic material, *Journal of Applied Mechanics*, v26, n1, p101-106, 1959

DRUCKER, D.C., On uniqueness in the theory of plasticity, *Quarterly Applied Mathematics*, v14, n1, p35-42, 1956

DRUCKER, D.C., The effect of shear on plastic bending beams, *Journal of Applied Mechanics*, v23, p509-514, 1956

DU, Qinghua, YAO, Zhenhan, SONG, Guoshu, Solution of some plate bending problems using the boundary element method, *Applied Mathematical Modelling*, v8, n1, p15-22, 1984

DUMONT, Ney Augusto, On the efficient numerical evaluation of integrals with complex singularity poles, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v13, p155-168, 1994

DYKA, C.T., MILLWATER, H.R., Formulation and integration of continuous and discontinuous quadratic boundary elements for two dimensional potential and elastostatics, *Computers & Structures*, v31, n4, p495-504, 1989

EISENBERG, M.A., A generalization of plastic flow theory with application to cyclic hardening and softening phenomena, *Journal of Engineering Materials and Technology*, v98, n3, p221-228, 1976

EVANS, H. Roy, SHANMUGAM, Nandivaran E., Simplified analysis for cellular structures, *Journal of Structural Engineering*, v110, n3, p531-543, 1984

FARIA, L.M.Oliveira et al, Boundary elements in 2D plasticity using quadratic shape functions, *Applied Mathematical Modelling*, v5, n5, p371-375, 1981

FAUCHART, Jacques, Shear lag in box girders, Journal of Structural Engineering, v109, n1, p291-293, 1983

FENG, Zhengnong, LI, Zengfu, Application of boundary element method in bending problem of thin plates with large deflection, In: Boundary Elements, Eds. Du Qinghua, Pergamon Press, Oxford, p411-418, 1986

FOLTRAN, Carlos Eduardo, *Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno*, 1999. 227f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas Bidimensionais em Regime Elasto-plástico, In: XX Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, São Paulo, Brasil, CDROM, 1999

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, Boundary Element Method Applied to Simple Problems of the Two Dimensional Elastostatics, In: Computational Mechanics and The Use of Computers in Engineering, International Symposium on the Use of Computers in Engineering and The Quality of the Software, AMC, Rio de Janeiro, Brazil, v135, 142, 1998

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, Elastoplastic Problems Solved with Boundary Integrals Performed with an Analytical Formulation, Proc. Boundary Element Techniques, Queen Mary and Westfield College University of London, London, England, p197-206, 1999

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, MESQUITA Neto, Euclides, Additional Results for Plane Elastoplastic Analysis Using The Boundary Element Method, In: XXI Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil, CDROM, 2000

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, MESQUITA Neto, Euclides, Analise de um tubo de parede espessa em regime elasto-plástico sob carregamento cíclico pelo método dos elementos de contorno, In: XXII Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Campinas, Brasil, CDROM, 2001

FOLTRAN, Carlos Eduardo, PALERMO Junior, Leandro, Um Tratamento Analítico para Obtenção das Matrizes H e G do Método dos Elementos de Contorno em Problemas da Elastostática Bidimensional, In: XVIII Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Brasília, Brasil, v1, p389-396, 1997

FOSSA, G., NAPPI, A., A critical discussion on possible variable changes related to elastic-plastic collocation BEM analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v8, n1, p24-35, 1991

FOUTCH, Douglas A., CAHNG, P.C., A shear lag anomaly, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, v108, n7, p1653-1658, 1982

FRANTANTONIO, M., RENCIS, J.J., Exact boundary element integrations for two-dimensional Laplace equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v24, p325-342, 2000

GALAMBOS, Theodore V., LAY, Maxwell G., Studies of the ductility of steel structures, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, v91, n4, p125-151, 1965

GALUTA, E.M., CHEUNG, M.S., Combined boundary element and finite element analysis of composite box girder bridges, *Computers & Structures*, v57, n3, p427-437, 1995

GELLIN, S., LEE, G.C., CHERN, J.H., A finite element model for thin-walled members, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v19, n1, p59-57, 1983

GERADIN, Michel, RIXEN, Daniel, *Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics*, Chichester: Wiley; Paris: Masson, 1994.

GHOSH, N. et al, A new boundary element method formulation for linear elasticity, *Journal of Applied Mechanics*, v53, n1, p69-76, 1986

GOVINDARAJAN, R.M., ARAVAS, N., Pressure-dependent plasticity models: loading-unloading criteria and the consistent linearization of an integration algorithm, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v11, p339-345, 1995

GUIGGIANI, Massimo, CASALINI, Paolo, Direct computation of Cauchy principal value integrals in advanced boundary elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v24, p1711-1720, 1987

- GUIGGIANI, Massimo, Hypersingular formulation for boundary stress evaluation, Engineering Analysis with Boundary Elements, v13, p169-179, 1994
- GUIGGIANI, Massimo, LOMBARDI, F., Self-adaptative boundary element with h-hierarchical shape functions, Advances in Engineering Software, v15, p269-277, 1992
- GUNNLAUGSSON, Geir A., PEDERSEN, P. Terndrup, A Finite Element Formulation for Beams with Thin Walled Cross Sections, Computers & Structures, v15, n6, p691-699, 1982
- GUO-SHU, Song, MUKHERJEE, Subrata, Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions, Engineering Analysis, v3, n1, p36-44, 1986
- GUPTA, A. et al, Elasto-plastic boundary element analysis utilizing a zone condensation technique, Computers & Structures, v43, n3, p595-604, 1992
- HAICHANG, Hu, A new type of boundary integral equation in elasticity, Scientia Sinica Series A, v30, n4, p385-390, 1987
- HAMMER, P.C., MARLOWE O.J., STROUD, A.H., Numerical integration over simplexes and cones, Mathematical Tables and Other Aids to Computation, v10, n55, p130-137, 1956
- HANSEN, Erik B., Numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems, Journal of Elasticity, v6, n1, p39-56, 1976
- HART, E.W., Constitutive relations for the nonelastic deformation of metals, Journal of Engineering Materials and Technology, v98, n3, p193-202, 1976
- HARTMANN, F., ZOTEMANTEL, R., The direct boundary element method in plate bending, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v23, n11, p2049-2069, 1986
- HASEGAWA, Akio, NAVEED, Anwar, DELLELEGNE, Teshome, Effects of load point location on the instability and nonlinear behaviour of I Channel and Zee shaped beams, Structural Eng./Earthquake Eng., v6, n1, p59-68, 1989

- HASEGAWA, Akio, SHRESTHA, Prakash, NISHINO, Fumio, An analytical evaluation of ultimate strength of beams based on linearized finite displacement theory, J. Construct. Steel Research, v13, p137-152, 1989
- HAVEN, C.O.O., HARDING, J.F., Studies of plastic flow problems by photo grid methods, Experimental Stress Analysis, v2, n2, p59-70, 1945
- HAYAMI, K, BREBBIA, Carlos Alberto, A new coordinate transformation method for singular and nearly singular integral over general curved boundary elements, In: Boundary Elements IX, Eds. Brebba, C.A., Wendland, W.L., Kuhn, G., Springer-Verlag, Berlin, v1, p375-399, 1987
- HEINS, C.P., SHEU, F.H., Design/Analysis of Curved Girder Bridges, Computers & Structures, v15, n3, p241-258, 1982
- HENRY, D. P, *Advanced Development of the Boundary Element Method for Elastic and Inelastic Thermal Stress Analysis*, PhD dissertation, State University of New York at Buffalo, Buffalo, New York, 1987
- HENRY, Donald P., BANERJEE, Prasanta Kumar, A new BEM formulation for two- and three-dimensional elastoplasticity using particular integrals, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v26, p2079-2096, 1988
- HENRY, Donald P., BANERJEE, Prasanta Kumar, A new boundary element formulation for two- and three-dimensional thermoelasticity using particular integrals, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v26, p2061-2077, 1988
- HILDENBRAND, J., KUHN, Gunther, Numerical computation of hypersingular integrals and application to the boundary integral equation for the stress tensor, Engineering Analysis with Boundary Elements, v10, p209-217, 1992
- HODGE Jr, P.G., WHITE Jr, G.N., PROVIDENCE, R.I., A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity, Journal of Applied Mechanics, v17, p180-184, 1950
- HOUBOLT, John C., A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, Journal of the Aeronautical Science, v17, n9, p540-550, 1950

HUBER, O. et al, Evaluation of the stress tensor in 3-D elastoplasticity by direct solving of hypersingular integral, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v39, n15, p2555-2573, 1996

HUI, C.-Y., SHIA, D., Evaluation of hypersingular integral using gaussian quadrature, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v44, p205-214, 1999

HUTCHINSON, J.R., Vibration of plates, In: Boundary Elements X, Ed. BREBBIA, C.A., Springer-Verlag, Berlin, v4, p415-430, 1988

IFFLAND, Jerome S.B., Folded Plate Structures, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, v105, n1, p111-123, 1979

INGBER, Marc S., MITRA, Ambar K., Grid optimization for the boundary element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v23, n11, p2121-2136, 1986

IOAKIMIDIS, N.I., THEOCARIS, P.S., The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium, International Journal of Solids and Structures, v13, n4, p269-278, 1977

ISHAC, Ishac I., SMITH, Tom R. Graves, Approximations for moments in Box Girders, Journal of Structural Engineering, v111, n11, p2333-2342, 1985

JASWON, M.A., Integral equation method in potential theory, " Proceedings of Royal Society of London; Series A: Mathematical and Physical Science", v275, p23-32, 1963

JASWON, M.A., MAITI, M., An integral equation formulation of plate bending problems, Journal of Engineering Mathematics, v2, n1, p83-93, 1968

JASWON, M.A., MAITI, M., SYMM, G.T., Numerical biharmonic analysis and some applications, International Journal of Solids and Structures, v3, p309-332, 1967

JASWON, M.A., PONTER, A.R., Integral equation solution of the torsion problem, " Proceedings of Royal Society of London; Series A: Mathematical and Physical Science", v275, p237-246, 1963

JASWON, M.A., Some theoretical aspects of boundary integralequations, Applied Mathematical Modelling, v5, n6, p409-411, 1981

- JIAJU, Yin, XING, Ji, Numerical computation of dynamic stress intensity factors by the boundary element method, *Engineering Analysis*, v5, p140-145, 1988
- JIAN-FAN, Xie, YONG-LI, Wu, A new type of boundary integral equation for plane problems of elasticity including rotational forces, *Computers & Structures*, v43, n3, p531-537, 1992
- JIN, Feng, PEKAU, O.A., ZHANG, Chuhan H., A 2-D time-domain boundary element method with damping, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v51, p647-661, 2001
- JUN, Liu, BEER, G., MEEK, J.L., Efficient evaluation of integrals of order $1/r$, $1/r^2$, $1/r^3$ using Gauss quadrature, *Engineering Analysis*, v2, p118-123, 1985
- KAFTANOGLU, B., SIVACI, K., Investigation of the plastic properties of certain ferrous and nonferrous materials at high temperature, *Journal of Engineering Materials and Technology*, v98, n3, p203-212, 1976
- KAMIYA, N. et al, An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method, *Applied Mathematical Modelling*, v6, p23-27, 1982
- KAMIYA, N., ANDOH, E., A note on multiple reciprocity integral formulation for the Helmholtz equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v9, p9-13, 1993
- KAMIYA, N., Geometrically nonlinear analysis of elastic plates by the boundary element method, In: *Advanced Boundary Element Method*, Eds. Cruse, T.A., Springer-Verlag, Berlin, p189-196, 1988
- KAMIYA, N., KAWAGUCHI, K., Error analysis and adaptive refinement of boundary elements in elastic problems, *Advances in Engineering Software*, v15, p223-230, 1992
- KAMIYA, N., SAWAKI, Y., An integral equation approach to finite deflection of elastic plates, *International Journal of Non-linear Mechanics*, v17, n3, p187-194, 1982
- KAMIYA, N., SAWAKI, Y., Boundary element analysis of non-linear bending of sandwich plates and shallow shells, In: *Developments in Boundary Element Methods*, Eds. Banerjee, Prasenta K. & Watson, J.O., Elsevier Applied Science, London, v4, p121-148, 1986

- KAMIYA, N., SAWAKI, Y., Finite deflection of plates, In: Topics in Boundary Element Research, Eds. Brebbia, C.A., Springer-Verlag, Berlin, p204-224, 1984
- KAMIYA, N., SAWAKI, Y., Integral equation formulation for nonlinear bending of plates formulated by weighted residual method, Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik, v69, p651-655, 1982
- KAMIYA, N., SAWAKI, Y., NAKAMURA, Y., Finite and postbuckling deformations of heated plates and shallow shells, In: Boundary Elements, Eds. Brebbia, C.A., Futagami, T., Tanaka, M., Springer-Verlag, Berlin, p507-516, 1983
- KAMIYA, N., SAWAKI, Y., NAKAMURA, Y., Postbuckling analysis by the boundary element method, Engineering Analysis, v1, n1, p40-44, 1984
- KARABALIS, D.L., BESKOS, Dimitri E., Dynamic response of 3-D rigid surface foundations by domain boundary element, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v12, p73-93, 1984
- KARMAN, Theodore Von, CHIEN, Wei-Zang, Torsion with variable twist, Journal of the Aeronautical Science, v13, n10, p503-510, 1946
- KATSIKADELIS, J.T., NERANTZAKI, M.S., Large deflection of thin plates by the boundary element method, In: Boundary Element X, Eds. Brebbia, C.A., Springer-Verlag, Berlin, p435-456, 1988
- KATSIKADELIS, J.T., NERANTZAKI, M.S., The boundary element method for nonlinear problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, v23, p365-373, 1999
- KATSIKADELIS, J.T., SAPOUNTZAKIS, E.J., ZORBA, E.G., A BEM approach to static and dynamic analysis of plates with internal supports, In: Boundary Elements X, Ed. BREBBIA, C.A., Springer-Verlag, Berlin, v4, p431-444, 1988
- KAWAGUCHI, K., KAMIYA, N., An adaptive BEM by sample point error analysis, Engineering Analysis with Boundary Elements, v9, p255-262, 1992
- KELLOG, O. D., *Foundations of Potential Theory*, Berlin: Springer, 1929

KIM, Yoon Young, KIM, Jin Hong, Thin-walled closed box beam element for static and dynamic analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v45, p473-490, 1999

KOMATSU, S., NAGAI, M., Analytical combination of boundary element method and thin-walled segment method and its application to box girder bridges, In: *Boundary Element Methods in Engineering*, Eds. Brebbia, C.A., Springer, Berlin, p636-649, 1982

KONTONI, D.P.N., BESKOS, Dimitri E., Boundary element formulation for dynamic analysis of nonlinear systems, *Engineering Analysis*, v5, p114-125, 1988

KRISTEK, J., Box Girders of Deformable Cross Section - Some Theory of Elasticity Solutions, *Proceedings of Institute of Civil Engineers*, v47, p239-253, 1970

KRISTEK, Vladimir, Tapered Box Girders of Deformable Cross Section, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, v96, n8, p1761-1793, 1970

KUMAR, Virendra, MUKHERJEE, Subrata, A boundary-integral equation formulation for time-dependent inelastic deformation in metals, *International Journal of Mechanical Sciences*, v19, p713-724, 1977

KUREN, Ralph C. Van, GALAMBOS, Theodore V., Beam column experiments, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, v90, n2, p223-256, 1964

KUZMANOVIC, Bogdan O., GRAHAM, H. James, Shear lag in box girders, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, v107, n9, p1701-1712, 1981

LACHAT, J.C., WATSON, J.O., A second generation boundary integral equation program for three-dimensional elastic analysis, In: *Boundary integral equation method: Computational application in applied mechanics*, Eds. Cruse & Rizzo, AMD Series, v11, p85-100, 1975

LACHAT, J.C., WATSON, J.O., Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v10, p991-1005, 1976

LACHAT, J.C., WATSON, J.O., Progress in the use of boundary integral equations illustrated by examples, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v10, n3, p273-289, 1977

- LAVINGTON, Simon. The Pegasus Story: A history of a vintage British computer. London: Science Museum, 1988
- LAY, Maxwell G., GALAMBOS, Theodore V., Inelastic beams under moment gradient, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, v93, n1, p381-399, 1967
- LEE, K. H., *A Boundary Integral Equation Method for two Dimensional Elastoplastic Analysis*, PhD Thesis, Imperial College, University of London, 1983
- LEE, Kwok Hong, FENNER, R.T., A quadratic formulation for two-dimensional elastoplastic analysis using the boundary integral equation method, Journal of Strain Analysis, v21, n3, p159-175, 1986
- LEI, Xiao-Yan, A new BEM approach for linear elasticity, International Journal of Solids and Structures, v31, n24, p3333-3343, 1994
- LEICESTER, R.H., Finite Deformation of Shallow Shells, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, v94, n6, p1409-1423, 1968
- LEITAO, Vitor Manuel Azevedo, ALIABADI, M.H., ROOKE, D.P., The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v38, p315-333, 1995
- LEVY, Samuel, Bending of rectangular plates with large deflections, NACA Technical Report 737, p139-157, 1942
- LIAPIS, Stergios, An adaptive boundary element method for the solution of potential flow problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, v18, p29-37, 1996
- LIEW, K.M., WU, Y.C., NG, T.Y., Elasto-plasticity revisited: numerical analysis via reproducing kernel particle method and parametric quadratic programming, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v55, n6, p669-683, 2002
- LO, H.H., CHEUNG, Y.K., LEUNG, Y.T., An algorithm to display three-dimensional objects, Computers & Structures, v15, n6, p673-683, 1982
- LOU, Z.-W., ZHANG, M., Elastoplastic boundary element analysis with Hetenyi's fundamental solution, Engineering Analysis with Boundary Elements, v10, p231-239, 1992

LOVE, A.E.H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4 ed. Dover Publications, 1994

LUTZ, Earlin David, Numerical Methods for Hypersingular and Near-Singular Boundary integral in Fracture Mechanics, 1991, 223f. PhD Thesis, Department of Computer Science, Cornell University, USA

LUTZ, Earlin, Exact Gaussian quadrature methods for near-singular integrals in boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v9, p233-245, 1992

MAITI, M., CHAKRABARTY, S.K., Integral equation solution for simply supported polygonal plates, *International Journal of Engineering Science*, v12, n10, p793-806, 1974

MANOLIS, George D., A comparative study on three boundary element method approaches to problems in elastodynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v19, n1, p73-91, 1983

MANSUR, W.J., Boundary element method applications in two-dimensional transient elastodynamics, In: *Boundary Elements X*, Ed. BREBBIA, C.A., Springer-Verlag, Berlin, v4, p387-399, 1988

MANSUR, W.J., BREBBIA, Carlos Alberto, Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation, *Applied Mathematical Modelling*, v6, n4, p307-311, 1982

MANSUR, W.J., BREBBIA, Carlos Alberto, Numerical implementation of the boundary element method for two-dimensional transient scalar wave propagation problems, *Applied Mathematical Modelling*, v6, n4, p299-306, 1982

MANSUR, WEBE JOÃO, CARRER, J.A.M., FERREIRA, W.G., Time-segmented frequency-domain analysis for non-linear multi-degree-of-freedom structural systems, *Journal of Sound and Vibration*, v237, n3, p457-475, 2000

MARTIN, D., ALIABADI, M.H., Boundary element analysis of two-dimensional elastoplastic contact problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v21, p349-360, 1998

- MARTIN, P.A., RIZZO, F.J., Hypersingular integrals: how smooth must the density be?, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v39, p687-704, 1996
- MARTINEZ, Jose, DOMINGUEZ, Jose, On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v20, p1941-1950, 1984
- MASSONNET, Charles Ernest, A new approach (including shear lag) to elementary mechanics of materials, International Journal of Solids and Structures, v19, n1, p33-54, 1983
- MASSONNET, Charles Ernest, MORELLE, P., The origin of the boundary element method and its variants, In: Boundary Elements IX, Eds. Brebba, C.A., Wendland, W.L., Kuhn, G., Springer-Verlag, Berlin, v1, p1-10, 1987
- MASSONNET, Charles Ernest, Numerical use of integral procedures, In: Stress Analysis, Eds. ZIENKIEWICZ, O.C. & HOLISTER, G.S., p198-235, 1965
- MASSONNET, Charles Ernest, *Résolution graphomécanique des problèmes généraux de l'élasticité plane*, Bulletin du Centre Et. Rech. Essais Sc. Génie Civil, Liège, v.4, 1949
- MASSONNET, Charles Ernest, Solution générale du problème aux tensions de l'élasticité tridimensionnelle, 9 Congrès Int. Méc. Appl, Bruxelles, v8, p168-180, 1956
- MAYER, M., DREXLER, W., KUHN, G., A semianalytical boundary integral approach for axisymmetric elastic bodies with arbitrary boundary conditions, International Journal of Solids and Structures, v16, n10, p863-871, 1980
- MCCARTNEY, L. N., A new boundary element technique for solving plane problems of linear elasticity: I. Theory, Applied Mathematical Modelling, v7, n6, p441-451, 1983
- MCCARTNEY, L. N., A new boundary element technique for solving plane problems of linear elasticity: improved theory and an application to fracture mechanics, Applied Mathematical Modelling, v8, n4, p243-250, 1984
- MENDONÇA, Ângelo Vieira, Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessura constante: Uma abordagem pelo método dos elementos de contorno. 2002. 291f. Tese (Doutorado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos

- MEREDITH, D., WITMER, E.A., A Nonlinear Theory of General Thin-walled Beams, Computers & Structures, v13, n1-3, p3-9, 1981
- MICHAEL, Ofer, AVRASHI, Jacob, ROSENHOUSE, Giora, A new boundary spectral strip method for non-periodical geometrical entities based on analytical integrations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v135, p327-342, 1996
- MIGEOT, Jean-Louis, Numerical integration in the vicinity of a logarithmic singularity, Engineering analysis, v2, p92-94, 1985
- MIKKOLA, Martti J., PAAVOLA, Juha, Finite Element Analysis of Box Girders, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, v106, n6, p1343-1356, 1980
- MILROY, J., HINDUJA, S., DAVEY, K., The 3-D thermoelastic boundary element method: semi-analytical integration for subparametric triangular elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v41, p1029-1055, 1998
- MILROY, J., HINDUJA, S., DAVEY, K., The elastostatic three-dimensional boundary element method: analytical integration for linear isoparametric triangular elements, Applied Mathematical Modelling, v21, p763-782, 1997
- MINDLIN, Raymond D., Stress distribution around a hole near the edge of a plate under tension, Experimental Stress Analysis, v5, n2, p56-68, 1948
- MOFFATT, Kevin R., DOWLING, Patrick J., British shear lag rules for composite girders, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, v104, n7, p1123-1130, 1978
- MONTÁNS, Francisco J., BORJA, Ronaldo I., Implicit J2-bounding surface plasticity using Prager's translation rule, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v55, n10, p1129-1166, 2002
- MORJARIA, Mahesh, MUKHERJEE, Subrata, Numerical analysis of planar time-dependent inelastic deformation of plates with cracks by the boundary element method, International Journal of Solids and Structures, v17, p127-143, 1981
- MUKHERJEE, Subrata, Corrected boundary-integral equations in planar thermoelastoplasticity, International Journal of Solids and Structures, v13, n4, p331-335, 1977

MUSAT, Sorin, EPUREANU, Bogdan I., Study of warping torsion of thin -walled beams with closed cross-section using macro-elements, Communications in Numerical methods in Engineering, v12, p873-884, 1996

NARDINI, D., BREBBIA, Carlos Alberto, A new approach to free vibration analysis using boundary elements, In: Boundary Element Methods in Engineering, Eds. Brebbia, C.A., Springer, Berlin, p312-326, 1982

NAYAK, G. C., ZIENKIEWICZ, O. C., Convenient form of stress invariants for plasticity, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, v98, n4, p949-954, 1972

NAYAK, G.C., ZIENKIEWICZ, O.C., Elastoplastic stress analysis, a generalization for various constitutive relations including strain softening, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v5, p113-135, 1972

NERANTZAKI, M.S., KATSIKADELIS, J.T., A Green's function method for large deflection analysis of plates, Acta Mechanica, v75, p211-225, 1988

NEWMARK, Nathan M., A method of computation for structural dynamics, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, v85, n3, p67-94, 1959

NING, Hu, An effective boundary method for the analysis of elastoplastic problems, Applied Mathematics and Mechanics, v13, n8, p737-744, 1992

OCHIAI, Yoshihiro, Formulation for three-dimensional elastoplastic analysis without internal cells by triple-reciprocity BEM, In: Boundary Element Technique, New Jersey, USA, Ed. M. Denda e M. H. Aliabadi, , p217-224, 2001

OCHIAI, Yoshihiro, KOBAYASHI, Tadashi, Initial strain formulation without internal cells for elastoplastic analysis by triple-reciprocity BEM, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v50, p1877-1892, 2001

ODEN, J.T., PRUDHOMME, S., NEW APPROACHES TO ERROR ESTIMATION AND ADAPTIVITY FOR THE STOKES AND OSEEN EQUATIONS, Int. J. Numer. Meth. Fluids, v31, p3-15, 1999

O'DONOGHUE, P.E., ATLURI, S.N., Field/boundary element approach to the large deflection of thin flat plates, Computers & Structures, v27, n3, p427-435, 1987

ONATE, E., SUAREZ, B., A Unified Approach for the Analysis of Bridges, Plates and Axisymmetric Shells Using the Linear Mindlin Strip Element, Computers & Structures, v17, n3, p407-426, 1983

PAIVA, J. B., Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas. 1987. Tese (Doutorado em estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos

PAIVA, Joao Batista de, Boundary element formulation for plate analysis with special distribution of reactions along the boundary, Advances in Engineering Software and Workstations, v13, n4, p162-168, 1991

PAIVA, João Batista de, Boundary element formulation of building slabs, Engineering Analysis with Boundary Elements, v17, n2, p102-110, 1996

PALERMO Jr., Leandro, Análise de Peças de Seção Delgada como Associação de Placas pelo Método dos Elementos de Contorno. 1989. 148f. Tese (Doutorado em estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos

PALERMO Jr., Leandro, Esforços de flexão e flexo-torção em teoria de segunda ordem: Automatização do cálculo, 1985. 151f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos

PALERMO Junior, Leandro, FOLTRAN, Carlos Eduardo, MESQUITA Neto, Euclides, On the analysis of the thin walled structures using the boundary element method , In: Third Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, CDROM, 2002

PALERMO Junior, Leandro, RACHID, Munir, VENTURINI, Wilson Sergio, Analysis of thin walled structures using the boundary element method, Engineering Analysis with Boundary Elements, v9, p359-363, 1992

PARIS, F., LEON, S. de, Boundary element method applied to the analysis of thin plates, Computers & Structures, v25, n2, p225-233, 1987

PARIS, F., LEON, S. de, Simply supported plates by the boundary integral equation method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v23, n2, p173-191, 1986

PARIS, F., LEON, S. de, Thin plates by the boundary element method by means of two Poisson equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v17, n2, p111-122, 1996

PARK, M.S., LEE, B.C., Geometrically non-linear and elastoplastic three-dimensional shear flexible beam element of Von-Mises-type hardening material, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v39, p383-408, 1996

PI, Yong Lin, BRADFORD, M.A., Effects of approximations in analysis of beams of open thin-walled cross-section - Part I: Flexural-torsional stability, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v51, p757-772, 2001

PI, Yong Lin, BRADFORD, M.A., Effects of approximations in analysis of beams of open thin-walled cross-section - Part II: 3D non-linear behaviour, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v51, p773-790, 2001

PI, Yong Lin, TRAHAIR, N.S., Nonlinear inelastic analysis of steel beam-columns. I: Theory, *Journal of Structural Engineering*, v120, n7, p2041-2061, 1994

PINA, Heitor L., Analytical Integration in the 2D Boundary element method, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, v13, p715-725, 1997

PINA, Heitor L., Numerical quadrature over triangles with weak singularities, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v45, p1871-1885, 1999

PORTELA, Artur, Dual boundary element incremental analysis of crack growth, 1992. 198f. PhD Thesis - Wessex Institute of Technology, Southampton, England

PRAGER, Willian, A new method of analysing stresses and strain in work-hardening plastic solids, *Journal of Applied Mechanics*, v23, p493-496, 1956

PRAGER, Willian, Strain hardening under combined stresses, *Journal of Applied Physics*, v16, n12, p837-840, 1945

PRAGER, Willian, The theory of plasticity: A survey of recent achievements, *Proceedings of Institution of Mechanical Engineers*, v169, p41-57, 1955

PROVIDAKIS, C.P., BESKOS, Dimitri E., Dynamic analysis of elastic plates, In: *Boundary Elements X*, Ed. BREBBIA, C.A., Springer-Verlag, Berlin, v4, p403-413, 1988

- RANK, E., Adaptive boundary element method, In: Boundary Elements IX, Eds. Brebba, C.A., Wendland, W.L., Kuhn, G., Springer-Verlag, Berlin, v1, p259-278, 1987
- RERKSHANANDANA, N., USAMI, T., KARASUDHI, P., Ultimate strength of Eccentrically Loaded Steel Plates and Box Sections, Computers & Structures, v13, n4, p467-481, 1981
- RICARDELLA, Peter, An Implementation of the Boundary Integral Technic for Plane Problems in Elasticity and Elastoplasticity, PhD Thesis, Carnegie-Mellon University, 1973
- RICHARDSON, J.D., CRUSE, Thomas A., Weakly singular stress-BEM for 2D elastostatics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v45, p13-35, 1999
- RIZZO, Franc J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elasto-statics, Quarterly Applied Mathematics, v25, n1, p83-95, 1967
- RIZZO, Franc J., The boundary-integral equation method: A modern computational procedure in applied mechanics, In: Boundary integral equation method: Computational application in applied mechanics, Eds. Cruse & Rizzo, AMD Series, v11, p1-5, 1975
- ROATTA, A., BOLMARO, R.E., An eshelby inclusion-based model for the study of stresses and plastic strain localization in metal matrix composites I: General formulation and its application to round particles, Materials Science and Engineering, A229, p182-191, 1997
- ROATTA, A., BOLMARO, R.E., An eshelby inclusion-based model for the study of stresses and plastic strain localization in metal matrix composites II: Fiber reinforcement and lamellar inclusions, Materials Science and Engineering, A229, p192-202, 1997
- RONAGH, H.R., BRADFORD, M.A., Non-linear analysis of thin-walled members of open cross-section, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v46, p535-552, 1999
- RUBENCHIK, V., Accurate numerical solution in two-dimensional elasticity using smooth-kernel boundary integral equations, Finite Elements in Analysis and Design, v6, p197-205, 1990
- SAADA, A. S., *Elasticity: Theory and Applications*, Krieger Publishing Company, 2^a ed, Malabar, Florida, USA, 1993

- SAEZ, A., ARIZA, M.P., DOMINGUES, Jose, Three-dimensional fracture analysis in transversely isotropic solids, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v20, p287-298, 1997
- SALVADORI, Alberto, Analytical integratin in 2D BEM elasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v53, p1695-1719, 2002
- SANCHES, L. C. F. *Análise estática e dinâmica de um modelo de folhas poliédricas e o estudo de lajes com fôrma de aço incorporada através do Método dos Elementos de Contorno*. 2002. 318p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.
- SANCHES, L. C. F. Uma resolução de placas com a teoria de Mindlin através do método dos elementos de contorno. 1998. 186p. Dissertação (Mestrado em Estruturas - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, Campinas
- SARGIOUS, Michel A., DILGER, Walter H., HAWK, Hugh, Box girder bridge diaphragms with openings, *Journal of the Structural Division, Proc. ASCE*, v105, n1, p53-65, 1979
- SARIHAN, Vijay, MUKHERJEE, Subrata, Axisymmetric viscoplastic deformation by the boundary element method, *International Journal of Solids and Structures*, v18, n12, p1113-1128, 1982
- SCHARDT, Richard, Lateral torsional and distortional buckling channel- and hat-sections, *J. Construct. Steel Research*, v31, p243-265, 1994
- SEILER, J.A., COTTER, B.A., SYMONDS, P.S., Impulsive loading of elasto-plastic beams, *Journal of Applied Mechanics*, v23, p515-521, 1956
- SHI, G., BEZINE, G., A direct boundary element method for the bending analysis of arbitrary planform plates with square or circular opening, *Eur. J. Mech. A/Solids*, v8, n5, p341-359, 1989
- SHIELD, Richard Thorpe, ZIEGLER, Hans, On Prager's hardening rule, *Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Physik*, v9, p260-276, 1958
- SHUSHKEWICH, Kenneth W., Membrane forces Acting on a Box Girder Bridge, *Journal of Structural Engineering*, v112, n8, p1900-1907, 1986

SIMÕES, Rogério, *Um Estudo de Placas sob Cargas Dinâmicas Estacionárias e com o Efeito da Não Linearidade Geométrica sob Cargas Estáticas Usando o Método dos Elementos de Contorno*. 2001. 252f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) - Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SINGH, Krishna M., TANAKA, Masataka, On non-linear transformations for accurate numerical evaluation of weakly singular boundary integrals, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v50, p2007-2030, 2001

SIVAKUMARAN, K.S., Analysis for web crippling behaviour of cold-formed steel members, *Computers & Structures*, v32, n3-4, p707-719, 1989

SLADEK, J., SLADEK, V., The BIE analysis of the berger equation, *Ingenieur-Archiv*, v53, p385-397, 1983

SLADEK, V., SLADEK, J., Non-singular boundary integral representation of stresses, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v33, p1481-1499, 1992

SLADEK, V., SLADEK, J., Nonsingular formulation of BIE for plate bending problem, *Eur. J. Mech. A/Solidis*, v11, n3, p335-348, 1992

SLADEK, V., SLADEK, J., The calculation of singular integral in the boundary integral formulation of two-dimensional elastostatics, *Engineering Analysis*, v3, n1, p25-35, 1986

SMITH, R.N.L., Direct Gauss quadrature formulae for logarithmic singularities on isoparametric elements, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v24, p161-167, 2000

SOUZA, Valério Junior Bitencourt De, *Algoritmos de integração para o método de elementos de contorno tridimensional*. 2001. 135f. Dissertação (Mestrado em Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos

STEFANOU, G.D., DRITSOS, S., BAKAS, G.J., The effects of additional deformations in box-beam bridges on the longitudinal stresses and transverse moments, *Computers & Structures*, v16, n5, p613-628, 1983

STEPHENS, B.J., VANCE, O.L., RUBIN, Carol, Bending of Circular plate by edge moments, *Journal of Engineering Mechanics*, v112, n7, p721-727, 1986

- STERN, Morris, A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems, *International Journal of Solids and Structures*, v15, n10, p769-782, 1979
- STIPPES, M., Notes on the simply-supported plate, *Quarterly Applied Mathematics*, v14, n1, p90-93, 1956
- SWADE, Doron, Charles Babbage and his Calculating Engines, London: Science Museum, 1991
- SWEDLOW, J.L., A procedure for solving problems of elastoplastic flow, *Computers & Structures*, v3, p879-898, 1973
- SWEDLOW, J.L., CRUSE, Thomas A., Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow, *International Journal of Solids and Structures*, v7, p1673-1683, 1971
- SYMM, G.T., Integral equation in potential theory II, " *Proceedings of Royal Society of London; Series A: Mathematical and Physical Science*", v275, p33-46, 1963
- TAKHTEYEV, V., BREBBIA, Carlos Alberto, Analytical integrations in boundary elements, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v7, n2, p95-100, 1990
- TAN, C.L., LEE, Kwok Hong, Elastic-plastic stress analysis of a cracked thick-walled cylinder, *Journal of Strain Analysis*, v18, n4, p253-260, 1983
- TANAKA, Integral equation approach to free vibration problems of assembled plate structures, In: *Proceedings of the 1st Japan-China Symposium on Boundary Element Method*, p375-384, 1987
- TANAKA, Masataka et al, Free vibration analysis of elastic plate structures by boundary element method, *Engineering Analysis*, v5, p182-188, 1988
- TANAKA, Masataka, BERCIN, A.N., Static bending analysis of stiffened plates using the boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v21, n2, p147-154, 1998

- TANAKA, Masataka, Integral equation approach to small and large displacements of thin elastic plates, In: Boundary Element Methods in Engineering, Eds. Brebbia, C.A., Springer, Berlin, p526-539, 1982
- TANAKA, Masataka, Large deflection analysis of thin elastic plates, In: Developments in Boundary Element Methods, Eds. Banerjee, Prasenta K. & Mukherjee, S., Elsevier Applied Science, London, p115-136, 1984
- TANAKA, Masataka, MATSUMOTO, Toshiro, A new boundary element formulation for transient elastodynamic problems with damping based on time-stepping schemes, In: Advances in Boundary Elements, Eds. Brebbia, C.A. & Connor, J.J., Springer-Verlag, Berlin, v3, p331-342, 1989
- TANAKA, Masataka, MATSUMOTO, Toshiro, SHIOZAKI, A., Application of boundary-domain element method to the free vibration problem of plate structures, Computers & Structures, v66, n6, p725-735, 1998
- TANAKA, Masataka, MATSUMOTO, Toshiro, ZHENG, Z.-D., Incremental analysis of finite deflection of elastic plates via boundary-domain-element method, Engineering Analysis with Boundary Elements, v17, n2, p123-131, 1996
- TANG, W, TELLES, Jose Claudio de Faria, BREBBIA, Carlos Alberto, A generalized approach to transfer the domain integrals onto boundary ones for potential problems in BEM, In: Boundary Elements IX, Eds. Brebba, C.A., Wendland, W.L., Kuhn, G., Springer-Verlag, Berlin, v1, p99-116, 1987
- TELLES, J.C.F, BREBBIA, C.A., On the application of boundary element method to plasticity, Applied Mathematical Modelling, v3, p466-470, 1979
- TELLES, Jose Claudio de Faria, A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v24, p959-972, 1987
- TELLES, Jose Claudio de Faria, BREBBIA, Carlos Alberto, Boundary elements: new developments in elastoplastic analysis, Applied Mathematical Modelling, v5, n5, p376-382, 1981

- TELLES, Jose Claudio de Faria, BREBBIA, Carlos Alberto, Boundary element solution of half-plane problems, *International Journal of Solids and Structures*, v17, n12, p1149-1158, 1981
- TELLES, Jose Claudio de Faria, BREBBIA, Carlos Alberto, Elastic/viscoplastic problems using boundary elements, *International Journal of Mechanical Sciences*, v24, n10, p605-618, 1982
- TELLES, Jose Claudio de Faria, BREBBIA, Carlos Alberto, The boundary element method in plasticity, In: *Proc. 2nd. Int. Seminar on Recent Advances in Boundary Element Methods*, Southampton, p295-317, 1980
- TELLES, Jose Claudio de Faria, BREBBIA, Carlos Alberto, The boundary element method in plasticity, *Applied Mathematical Modelling*, v5, n4, p275-281, 1981
- TELLES, Jose Claudio de Faria, BREBBIA, Carlos Alberto, Viscoplastic analysis, In: *Boundary Element Methods in Engineering*, Eds. Brebbia, C.A., Springer, Berlin, p327-348, 1982
- TELLES, Jose Claudio de Faria, CARRER, J.A.M., MANSUR, WEBER JOÃO, Transient dynamic elastoplastic analysis by the time-domain BEM formulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v23, p479-486, 1999
- TELLES, José Claudio de Faria, *The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems*, Berlin: Springer-Verlag, 1983
- THEOCARIS, P.S., MARKETOS, E., Elastic-plastic analysis of perforated thin strips of a strain-hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, v12, p377-390, 1964
- TOSAKA, N., MIYAKE, S., Geometrically nonlinear analysis of shallow spherical shells using an integral equation method, In: *Boundary Elements VIII*, p537-546, 1986
- TOSAKA, N., MIYAKE, S., Large deflection analysis of shallow spherical shell using an integral equation method, In: *Boundary Elements*, Eds. Du Qinghua, Pergamon Press, Oxford, p59-66, 1986
- TOSAKA, N., MIYAKE, S., Nonlinear analysis of elastic shallow shells by boundary element method, In: *Boundary Elements VII*, p443-452, 1985

- TOTTENHAM, H., The boundary element method for plates and shells, In: Developments in Boundary Element Methods, Eds. Banerjee, Prasenta K. & Butterfield, R., Applied Science Publ. London, p173-205, 1979
- TRALLI, A., A Simple Hybrid Model for Torsion and Flexure of Thin walled Beams, Computers & Structures, v22, n4, p649-658, 1986
- TWEEDALE, Geoffrey, Calculating Machines and Computers, Shire Publications, 1990
- UGURAL, A. C., *Stresses in plates and Shells*, New York McGraw-Hill, 1981
- VABLE, Madhukar, ZHANG, Yikang, A boundary element method for plate bending problems, International Journal of Solids and Structures, v29, n3, p345-361, 1992
- VAGLIENTE, Victor N., KRAWINKLER, Helmut, Euler's paper on statically indeterminate analysis, Journal of Engineering Mechanics, v113, p189-195, 1987
- VEEEN, Frank Van Der, Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model, In: Boundary Element Methods in Engineering, Eds. Brebbia, C.A., Springer, Berlin, p487-499, 1982
- VENTURINI, Wilson Sergio, Alternative formulations of the boundary element method for potential and elastic zoned problems, Engineering Analysis with Boundary Elements, v9, p203-207, 1992
- VENTURINI, Wilson Sergio, BREBBIA, Carlos Alberto, Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics, Applied Mathematical Modelling, v8, n4, p251-260, 1984
- VENTURINI, Wilson Sergio, Reciprocidade dual para análise não-linear através do MEC, In: XV Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, Belo Horizonte, Brasil, p576-590, 1994
- VERA-TUDELA, Carlos Andrés Reyna; TELLES, José Claudio de Faria, NUMERICAL MODELLING OF 2D ELASTODYNAMIC PROBLEMS USING BOUNDARY ELEMENTS AND THE OPERATIONAL QUADRATURE METHOD, COBEM, 2003
- VERHOEVEN, N.A., MORGAN, K., A quadratic boundary element for potential problems in 2D with no numerical integration, Communications in Numerical Methods in Engineering, v11, p391-401, 1995

- VICTOR, Fouad H., ELLYIN, Fernand, Assemblage Method for Folded-Plate Analysis, Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, v105, n7, p1509-1524, 1979
- VLASSOV, B. Z., Pieces Longues en Voiles Minces, Paris: Editiones Eyrolles, 1962, 655p.
- WALDRON, P., Sectorial properties of straight thin-walled beams, Computers & Structures, v24, n1, p147-156, 1986
- WATSON, J.O., Advanced implementation of the boundary element method for two- and three-dimensional elastostatics, In: Developments in Boundary Element Methods, Eds. Banerjee, Prasanta K. & Butterfield R., Applied Science Publishers, London, v1, p31-63, 1979
- WILSON, E.L., FARHOOMAND, I., BATHE, K.J, Nonlinear dynamic analysis of complex structures, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, v1, p241-252, 1973
- WRIGHT, H.D., A plate model for composite slab analysis, Thin-Walled Structures, v10, n4, p299-328, 1990
- WU, Benjamin C., ALTIERO, Nicholas J., A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions, Computers & Structures, v10, n4, p703-707, 1979
- YE, T.Q., LIU, Yijun, Finite deflexion analysis of elastic plate by the boundary element method, Applied Mathematical Modelling, v9, p183-188, 1985
- YE, T.Q., LIU, Yijun, Finite deflexion analysis of heated elastic plate by the boundary element method, In: Boundary Elements, Eds. Du Qinghua, Pergamon Press, Oxford, p367-374, 1986
- YOO, Chai Hong, ACRA, Samir V., Cross-sectional properties of thin-walled multi-cellular section, Computers & Structures, v22, n1, p53-61, 1986
- YU, De-Hao, The numerical computation of hypersingular integrals and application in BEM, Advances in Engineering Software, v18, p103-109, 1993
- YU, Guoyou, et al, A more stable scheme for BEM/FEM coupling applied to twodimensional elastodynamics, Computers & Structures, v79, p811-823, 2001

- YU, Ming, KUFFEL, E., The integration of functions with singularities in boundary element method for Poisson's equationI, COMPEL - The International Journal for Computational and Mathematics in Electrical and Eletronic Engineering, v13, n1, p43-46, 1994
- YUUKI, Ryoji, CAO, Gou-Qiang, TAMAKI, Masatoshi, Efficient error estimator and adaptive meshing method for boundary element analysis, Advances in Engineering Software, v15, p279-287, 1992
- ZHANG, Jin-Dong, ATLURI, S.N., Nonlinear quasi-static and transient response analysis of shallow shells: Formulations and interior/boundary element algorithms, In: Boundary Elements, Eds. Du Qinghua, Pergamon Press, Oxford, p87-109, 1986
- ZHANG, Jin-Dong, ATLURI, S.N., Nonlinear quasi-static and transient response analysis of shallow shells: Formulations and interior/boundary element algorithms, In: Recent Applications in Computational Mechanics, Eds. Karabalis, D.L., New York, ASCE, p43-65, 1986
- ZHANG, Jin-Dong, ATLURI, S.N., Post-buckling analysis of shallow shells by the field-boundary element method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v26, p571-587, 1988
- ZHANG, S.H., LYONS, L.P.R., A Thin-Walled Box Beam finite Element for Curved Bridge Analysis, Computers & Structures, v18, n6, p1035-1046, 1984
- ZHU, J., SHAH, A.H., The evaluations of Cauchy principal value integrals and weakly singular integrals in BEM and their applications, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v39, p1017-1028, 1996
- ZIEGLER, Hans, A Modification of Prager's hardening rule, Quarterly Applied Mathematics, v17, n1, p55-65, 1959
- ZIENKIEWICZ, O.C., CORMEAU, I.C., Visco-platicity - Plasticity and creep in elastic solids - A unified numerical solution approach, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v8, p821-845, 1974
- ZIENKIEWICZ, O.C., GAGO, J.P. de S.R., KELLY, D.W., The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis, Computers & Structures, v16, n1-4, p53-65, 1983

ZIENKIEWICZ, O.C., VALLIAPPAN, S., KING, I.P., Elasto-plastic solutions of engineering problems 'initial stress', finite element approach, International Journal for Numerical Methods in Engineering, v1, p75-100, 1969

Apêndice A- Deformações, rotações e cargas concentradas

A.1-Introdução

Neste apêndice é apresentada com algum detalhamento a obtenção das expressões de deformação e rotação para o MEC. Por generalidade, as deduções foram feitas em termos dos incrementos de deslocamento. A formulação para problemas elásticos é a mesma desconsiderando-se a contribuição da deformação plástica.

Ademais se apresenta uma alternativa para a consideração de cargas concentradas em pontos de domínio e de contorno. Também é demonstrado como um momento concentrado pode ser aplicado a um problema de chapa.

Todos os índices neste apêndice variam de um até dois.

A.2-Derivadas e integrais do raio

A.2.1-Derivadas

Inicialmente deve-se estabelecer o valor das derivadas do raio vetor em relação ao sistema de coordenadas ortonormal cartesiano com respeito ao ponto campo. Essas expressões serão utilizadas mais adiante.

A derivada do raio vetor em relação à coordenada x_k é escrita em notação indicial como:

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{r_k}{r} = r_k \quad (\text{A.109})$$

O valor de r_k na expressão (A.109) corresponde à componente do vetor r na direção x_k .

A segunda derivada do raio vetor é dada por:

$$\frac{\partial r_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{r_i}{r} \right) = \frac{\delta_{ik} - r_i r_k}{r} \quad (\text{A.110})$$

Outra expressão recorrente nas derivadas das soluções fundamentais dos elemento de contorno é a derivada em relação a x_k da derivada do raio vetor em relação à normal do ponto campo. Esta derivada é dada por:

$$\frac{\partial r_{,i}}{\partial x_k} = \eta_i \frac{\partial r_i}{\partial x_k} = \frac{\eta_k - r_{,i} r_k}{r} \quad (\text{A.111})$$

A.2.2-Integrais

Para facilitar a operação de integração das derivadas do raio vetor deve-se lembrar estas podem ser escritas em termos de funções trigonométricas tais que:

$$r_1 = \cos \theta \quad \text{e} \quad r_2 = \sin \theta \quad (\text{A.112})$$

Pode-se então definir um versor $\bar{\eta}$ tal que:

$$\bar{\eta}_1 = \sin \theta \quad \text{e} \quad \bar{\eta}_2 = -\cos \theta \quad (\text{A.113})$$

É fácil notar que definido desta forma o versor $\bar{\eta}$ guarda a seguinte relação com as derivadas do raio vetor:

$$\int r_{,i} d\theta = \bar{\eta}_i \quad (\text{A.114})$$

De posse de (A.114) pode-se escrever a seguinte tabela de integrais:

$$\int r_{,i} r_{,k} d\theta = \frac{2\delta_{ik}\theta + r_{,i}\bar{\eta}_k + \bar{\eta}_i r_{,k}}{4} \quad (\text{A.115})$$

$$\int r_{,i} r_{,j} r_{,k} d\theta = \frac{1}{3} (\delta_{ij}\bar{\eta}_k + \delta_{ik}\bar{\eta}_j + \delta_{jk}\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_i \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k) \quad (\text{A.116})$$

$$\begin{aligned} \int r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,t} d\theta = & \frac{\theta}{8} (\delta_{ij}\delta_{kt} + \delta_{ik}\delta_{jt} + \delta_{it}\delta_{jk}) + \frac{5}{6} [\delta_{ij}(\bar{\eta}_k r_{,t} + \bar{\eta}_t r_{,k}) + \delta_{ik}(\bar{\eta}_j r_{,t} + \bar{\eta}_t r_{,j}) + \\ & + \delta_{it}(\bar{\eta}_j r_{,k} + \bar{\eta}_k r_{,j}) + \delta_{jk}(\bar{\eta}_i r_{,t} + \bar{\eta}_t r_{,i}) + \delta_{jt}(\bar{\eta}_i r_{,k} + \bar{\eta}_k r_{,i}) + \delta_{kt}(\bar{\eta}_i r_{,j} + \bar{\eta}_j r_{,i})] - \\ & - \bar{\eta}_i \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k r_{,t} - \bar{\eta}_i \bar{\eta}_j r_{,k} \bar{\eta}_t - \bar{\eta}_i r_{,j} \bar{\eta}_k \bar{\eta}_t - r_{,i} \bar{\eta}_j \bar{\eta}_k \bar{\eta}_t \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

Há ainda outras relações notáveis entre $\bar{\eta}$ e r dadas a seguir:

$$r_{,i}r_{,k} + \bar{\eta}_i\bar{\eta}_k = \delta_{ik} \quad (\text{A.118})$$

$$\bar{\eta}_{i,k}r_{,i} - \bar{\eta}_k r_{,i} = \varepsilon_{ik3} \quad (\text{A.119})$$

$$\delta_{i1}r_{,2} - \delta_{i2}r_{,1} = \bar{\eta}_i \quad (\text{A.120})$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}_i}{\partial x_t} = \frac{\varepsilon_{it3} - \bar{\eta}_i r_{,t}}{r} \quad (\text{A.121})$$

A.3-Derivadas do deslocamento

O deslocamento de um ponto interno ao contorno do problema em regime elasto-plástico é obtido por um processo incremental. O incremento de deslocamento é dado por:

$$\tilde{u}_i = \int_{\Gamma} \tilde{p}_k u_{ik}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^* \tilde{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* \tilde{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \tilde{\varepsilon}_{jk}^p d\Omega \quad (\text{A.122})$$

Sendo:

$$u_{ik}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ik} + r_{,i}r_{,k} \right] \quad (\text{A.123})$$

$$p_{ik}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k} \right] + (1-2\nu) (\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \right\} \quad (\text{A.124})$$

$$\sigma_{ijk}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,k} - K \delta_{jk} r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (\text{A.125})$$

Em (A.125) a constante K assume os valores para os estados planos de tensão e deformação respectivamente:

$$K = 1 \quad \text{e} \quad K = \frac{1}{1-2\nu} \quad (\text{A.126})$$

Portanto, a derivada da expressão (A.122) em relação à direção x_t pode ser escrita em notação indicial como:

$$\tilde{u}_{i,t} = \int_{\Gamma} \tilde{p}_k u_{ik,t}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik,t}^* \tilde{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik,t}^* \tilde{b}_k d\Omega + \int_{\Omega - \Omega_{\Delta}} \sigma_{ijk,t}^* \tilde{\varepsilon}_{jk}^p d\Omega - \int_{\Gamma_{\Delta}} \sigma_{ijk}^* \tilde{\varepsilon}_{jk}^p \eta_{,t}(\Gamma_{\Delta}) d\Gamma_{\Delta} \quad (\text{A.127})$$

A última integral em (A.127) corresponde a integral convexa, que deve ser considerada devido à singularidade do núcleo σ_{ijk}^* . Para maiores detalhes ver **Bui 1978**.

Resta agora determinar o valor das derivadas de cada uma das funções núcleo.

A.3.1-Derivada de u_{ik}^*

Tomando a expressão (A.123), sua derivada pode ser escrita, com respeito ao ponto campo, como:

$$u_{ik,t}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \frac{\partial}{\partial x_t} \ln(r) \delta_{ik} + r_{,i} \frac{\partial r_{,k}}{\partial x_t} + r_{,k} \frac{\partial r_{,i}}{\partial x_t} \right] \quad (\text{A.128})$$

Aplicando-se a regra da cadeia e as expressões (A.109) e (A.110), a expressão (A.128) pode ser simplificada como:

$$u_{ik,t}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(3-4\nu) \delta_{ik} r_{,t} + \delta_{kt} r_{,i} + \delta_{it} r_{,k} - 2r_{,i} r_{,k} r_{,t} \right] \quad (\text{A.129})$$

A.3.2-Derivada de p_{ik}^*

A partir da expressão (A.124) pode-se escrever a derivada do núcleo p_{ik}^* como:

$$p_{ik,t}^* = \frac{r_{,t}}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ r_{,\eta} [(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] + (1-2\nu) (\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \} - \frac{r}{4\pi(1-\nu)r^2} \frac{\partial}{\partial x_t} \{ r_{,\eta} [(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] + (1-2\nu) (\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \} \quad (\text{A.130})$$

Tomando-se a segunda parcela de (A.130):

$$r \frac{\partial}{\partial x_t} \{ r_{,\eta} [(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] + (1-2\nu) (\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \} = r \frac{\partial}{\partial x_t} \left\{ \frac{\partial r_{,\eta}}{\partial x_t} [(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] + r_{,\eta} \frac{\partial}{\partial x_t} [(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] + (1-2\nu) \frac{\partial}{\partial x_t} (\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \right\} \quad (\text{A.131})$$

Aplicando-se as expressões (A.109) a (A.111) e lembrando que η não é função de x , chega-se finalmente que:

$$p_{ik,t}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ 2r_{,\eta} [(2\nu-1) \delta_{ik} r_{,t} + \delta_{it} r_{,k} + \delta_{kt} r_{,i} - 4r_{,i} r_{,k} r_{,t}] + (1-2\nu) (\eta_i \delta_{kt} - \eta_k \delta_{it} - 2\eta_i r_{,k} r_{,t} + 2\eta_k r_{,i} r_{,t}) + \eta_{,t} [(1-2\nu) \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] \} \quad (\text{A.132})$$

A.3.3-Derivada de σ_{ijk}^*

Como nos casos anteriores, toma-se o valor de (A.125) e derivando-se em relação a x_t com respeito ao ponto campo obtém-se:

$$\sigma_{ijk,t}^* = \frac{r_{,t}}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k} - K\delta_{jk}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] - \frac{r}{4\pi(1-\nu)r^2} \frac{\partial}{\partial x_t} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k} - K\delta_{jk}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (\text{A.133})$$

Efetutando-se as derivações e agrupando-se os termos semelhantes chega-se a:

$$\sigma_{ijk,t}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[2(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k}r_{,t} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,t} - K\delta_{jk}r_{,i}r_{,t}) + 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,t} - 2(\delta_{it}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jt}r_{,i}r_{,k} + \delta_{kt}r_{,i}r_{,j}) - (1-2\nu)(\delta_{ij}\delta_{kt} + \delta_{ik}\delta_{jt} - K\delta_{it}\delta_{jk}) \right] \quad (\text{A.134})$$

A.3.4-Integral convexa

Resta agora calcular o valor da integral convexa. Como esta é calculada no contorno da região de raio Δ excluída do domínio Ω , ou seja, em Γ_Δ , tem-se que:

$$d\Gamma_\Delta = \Delta d\theta \quad (\text{A.135})$$

$$\eta_{,t}(\Gamma_\Delta) = \Delta_{,t} = r_{,t} \quad (\text{A.136})$$

Assim, a integral convexa pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma_\Delta} \sigma_{ijk}^* \tilde{\epsilon}_{jk}^p \eta_{,t}(\Gamma_\Delta) d\Gamma_\Delta = \tilde{\epsilon}_{jk}^p \int_0^{2\pi} \sigma_{ijk}^* r_{,t} \Delta d\theta \quad (\text{A.137})$$

Portanto, resta determinar o valor de:

$$\int_0^{2\pi} \frac{-1}{4\pi(1-\nu)\Delta} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j}r_{,t} + \delta_{ij}r_{,k}r_{,t} - K\delta_{jk}r_{,i}r_{,t}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,t} \right] \Delta d\theta \quad (\text{A.138})$$

De posse das expressões (A.115) e (A.117) chega-se rapidamente que:

$$\int_0^{2\pi} \sigma_{ijk}^* r_{,t} \Delta d\theta = \frac{-1}{8(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu)(\delta_{ij}\delta_{kt} + \delta_{ik}\delta_{jt}) - \delta_{it}\delta_{jk} [2(1-2\nu)K - 1] \right\} \quad (\text{A.139})$$

Assim a contribuição dos incrementos das deformações plástica é dada por:

$$\tilde{\varepsilon}_{jk}^p \int_0^{2\pi} \sigma_{ijk}^* r_{,t} \Delta d\theta = \frac{-1}{8(1-\nu)} \{ 2\tilde{\varepsilon}_{ij}^p (3-4\nu) - \delta_{it} \tilde{\varepsilon}_{mm}^p [2(1-2\nu)K - 1] \} \quad (\text{A.140})$$

A.3.5-Derivadas em relação ao ponto de colocação

As expressões (A.129), (A.132) e (A.134) foram obtidas derivando-se os núcleos de (A.122) com relação ao ponto campo. No entanto o que se deseja é o valor desta derivada no ponto de colocação. Para tal, basta alterar o sinal das expressões (A.129), (A.132) e (A.134), ou seja:

$$u_{ik,t}^* = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[-(3-4\nu)\delta_{ik}r_{,t} + \delta_{kt}r_{,i} + \delta_{it}r_{,k} - 2r_{,i}r_{,k}r_{,t} \right] \quad (\text{A.141})$$

$$p_{ik,t}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,\eta} \left[(2\nu-1)\delta_{ik}r_{,t} + \delta_{it}r_{,k} + \delta_{kt}r_{,i} - 4r_{,i}r_{,k}r_{,t} \right] + \right. \\ \left. + (1-2\nu)(\eta_i\delta_{kt} - \eta_k\delta_{it} - 2\eta_i r_{,k}r_{,t} + 2r_i\eta_k r_t) + \eta_t \left[(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k} \right] \right\} \quad (\text{A.142})$$

$$\sigma_{ijk,t}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[2(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k}r_{,t} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,t} - K\delta_{jk}r_{,i}r_{,t}) + 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,t} - \right. \\ \left. - 2(\delta_{it}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jt}r_{,i}r_{,k} + \delta_{kt}r_{,i}r_{,j}) - (1-2\nu)(\delta_{ij}\delta_{kt} + \delta_{ik}\delta_{jt} - K\delta_{it}\delta_{jk}) \right] \quad (\text{A.143})$$

A equação integral para a derivada do incremento de deslocamento fica:

$$\tilde{u}_{i,t} = \int_{\Gamma} \tilde{p}_k u_{ik,t}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik,t}^* \tilde{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik,t}^* \tilde{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ijk,t}^* \tilde{\varepsilon}_{jk}^p d\Omega + \\ + \frac{1}{8(1-\nu)} \{ 2\tilde{\varepsilon}_{it}^p (3-4\nu) - \delta_{it} \tilde{\varepsilon}_{mm}^p [2(1-2\nu)K - 1] \} \quad (\text{A.144})$$

O valor da constante K é o mesmo apresentado em (A.126).

A.4-Deformações de um ponto interno

A deformação de um ponto material pode ser definida como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.145})$$

Substituindo-se o valor da derivada do incremento de deslocamento dada por (A.144) na expressão (A.145) chega-se ao valor do incremento de deformação total como sendo:

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{ij} = & -\int_{\Gamma} S_{kij} \tilde{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{kij} \tilde{p}_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} \tilde{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{khij}^* \tilde{\varepsilon}_{kh}^p d\Omega + \\ & + \frac{1}{8(1-\nu)} \left\{ 2\tilde{\varepsilon}_{ij}^p (3-4\nu) - \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_{mm}^p [2(1-2\nu)K-1] \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.146})$$

Os núcleos das integrais em (A.146) são dados por:

$$D_{kij} = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{kj}r_{,i}) - \delta_{ij}r_{,k} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (\text{A.147})$$

$$\begin{aligned}S_{kij} = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2\frac{\partial r}{\partial \eta} [\nu(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j}) + \delta_{ij}r_{,k} - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + \right. \\ & \left. + [(1-2\nu)\delta_{jk} + 2\nu r_{,j}r_{,k}]n_i + [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2\nu r_{,i}r_{,k}]n_j - (1-2\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i}r_{,j})n_k \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.148})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{khij}^* = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left[2(1-2\nu)K\delta_{hk}r_{,i}r_{,j} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,h} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,h} + \right. \\ & \left. + 2\nu(\delta_{jh}r_{,i}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,h} + \delta_{ih}r_{,j}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,h}) + (1-2\nu)(\delta_{jk}\delta_{ih} + \delta_{ik}\delta_{jh} - K\delta_{ij}\delta_{hk}) \right]\end{aligned}\quad (\text{A.149})$$

A.5-Rotação de um ponto interno

A rotação de um ponto pode ser definida como:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (\text{A.150})$$

É fácil notar que em (A.150), sempre que $i = j$ o valor de ω_{ij} será nulo. Também é notório que o tensor ω_{ij} é antissimétrico, portanto basta tomar-se uma de suas componentes. Por simplicidade de notação, chamar-se-á a componente ω_{12} apenas de ω .

Substituindo-se a equação (A.144) em (A.150) chega-se a:

$$\tilde{\omega} = -\int_{\Gamma} S_k \tilde{u}_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_k \tilde{p}_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_k \tilde{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{kh}^* \tilde{\varepsilon}_{kh}^p d\Omega \quad (\text{A.151})$$

Em (A.151) os núcleos são dados por:

$$D_k = \frac{\bar{\eta}_k}{2\pi\mu r} \quad (\text{A.152})$$

$$S_k = \frac{1}{\pi r^2} (\bar{\eta}_k - r_{,k} \varepsilon_{it3} r_{,i} \eta_{,t}) \quad (\text{A.153})$$

$$\sigma_{kh}^* = \frac{1}{2\pi r^2} (r_{,k} \bar{\eta}_h + r_{,h} \bar{\eta}_k) \quad (\text{A.154})$$

A.6-Cargas concentradas

No MEC a aplicação de cargas concentradas é feita pelo somatório do produto destas pela solução fundamental correspondente, ou seja

$$\tilde{u}_i = \int_{\Gamma} \tilde{p}_k u_{ik}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^* \tilde{u}_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^* \tilde{b}_k d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \tilde{\epsilon}_{jk}^p d\Omega + \sum u_{ik}^* \tilde{P}_k + \sum u_i^{\Delta} \tilde{P}_3 + \sum u_i^{\omega} \tilde{M} \quad (\text{A.155})$$

Na equação (A.155) $\tilde{P}_k$ e $\tilde{M}$ são respectivamente os incrementos de força e momento concentrados. A força $\tilde{P}_3$ corresponde a uma pressão agindo perpendicularmente ao plano do problema, em ambos os lados, de modo a produzir tensões nesta direção. As soluções fundamentais para momento, u_i^{ω} , e para pressão fora do plano, u_i^{Δ} , serão deduzidas mais adiante.

De posse de (A.155) pode-se determinar o incremento de deslocamento de qualquer ponto do domínio exceto aqueles em que a carga P_k é aplicada. Isso se dá porque a solução fundamental de deslocamento é singular nesse ponto. Uma alternativa para contornar este problema será apresentada mais adiante.

A.6.1-Aplicação de momentos

As equações de equilíbrio e compatibilidade do estado plano de deformação, escritas em coordenadas polares, assumem a seguinte forma:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A.156})$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A.157})$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \epsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \epsilon_{\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_r}{\partial r} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \epsilon_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} \right) \quad (\text{A.158})$$

As deformações em coordenadas polares se relacionam com os deslocamentos segundo:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (\text{A.159})$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (\text{A.160})$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) \quad (\text{A.161})$$

Seja o problema de um momento concentrado aplicado na origem do sistema de coordenadas em um corpo linearmente elástico e isotrópico. Devido à natureza do esforço, o campo de deslocamento assumirá uma simetria radial. Por conseguinte nenhuma das grandezas envolvidas será função da coordenada θ . Assim, as equações (A.156), (A.157) e (A.158) simplificam-se a:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A.162})$$

$$\frac{d\sigma_{r\theta}}{dr} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{A.163})$$

$$\frac{d^2\epsilon_{\theta}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\epsilon_{\theta}}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d\epsilon_r}{dr} = 0 \quad (\text{A.164})$$

Das relações constitutivas para o estado plano de deformação tem-se:

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r(1-\nu)}{2\mu} - \frac{\nu\sigma_{\theta}}{2\mu} \quad (\text{A.165})$$

$$\epsilon_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}(1-\nu)}{2\mu} - \frac{\nu\sigma_r}{2\mu} \quad (\text{A.166})$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{\sigma_{r\theta}}{2\mu} \quad (\text{A.167})$$

Isolando-se de (A.162) o valor de σ_{θ} , tem-se:

$$\sigma_{\theta} = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r \quad (\text{A.168})$$

Substituindo-se o valor de σ_{θ} obtido de (A.168) nas relações constitutivas (A.165) e (A.166) e, em seguida, os valores obtidos de ϵ_r e ϵ_{θ} na equação de compatibilidade (A.164), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1-\nu}{2\mu r} \left(3 \frac{d\sigma_r}{dr} + 5r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + r^2 \frac{d^3\sigma_r}{dr^3} \right) = 0 \quad (\text{A.169})$$

A equação diferencial (A.169) tem por solução a seguinte expressão:

$$\sigma_r = \frac{C_1}{r^2} + C_2 \ln(r) + C_3 \quad (\text{A.170})$$

É razoável se supor que no infinito as tensões devido ao momento aplicado tendam a zero. Portanto as constantes C_2 e C_3 devem ser nulas.

Imagine-se agora que o momento é aplicado por meio de uma tensão tangencial agindo em uma cavidade circular infinitesimal de raio δ , conforme ilustrado na Figura A.1.

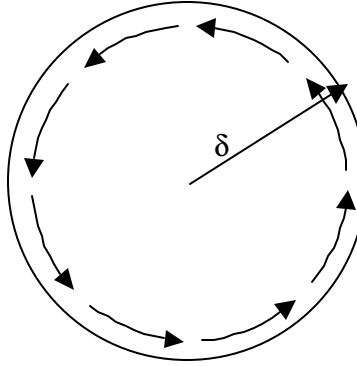


Figura A.1 – Cavidade infinitesimal com tensão tangencial aplicada

Fazendo-se em (A.170) $r = \delta$, tem-se que a tensão radial deve anular-se. Portanto a constante C_1 também deve ser nula. Assim conclui-se que as tensões σ_r e σ_θ são identicamente nulas em qualquer ponto do corpo.

Resta apenas determinar o valor da tensão $\sigma_{r\theta}$. Resolvendo-se a equação (A.163) obtém-se:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{C_1}{r^2} \quad (\text{A.171})$$

Para determinar a constante C_1 em (A.171) deve-se lembrar que o esforço originalmente aplicado consiste em um momento concentrado unitário. Assim a integral da tensão tangencial ao longo de um círculo de raio qualquer, multiplicada por este raio, deve retornar o momento originalmente aplicado, ou seja:

$$\int_0^{2\pi} r \sigma_{r\theta} r d\theta = 1 \quad (\text{A.172})$$

Substituindo-se o valor da tensão $\sigma_{r\theta}$ de (A.171) na equação (A.172) e resolvendo-se para C_1 , chega-se que:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\pi r^2} \quad (\text{A.173})$$

Substituindo-se o valor de $\sigma_{r\theta}$ obtido de (A.173) na relação constitutiva (A.167) obtém-se:

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{4\pi\mu r^2} \quad (\text{A.174})$$

Substituindo-se o valor de $\varepsilon_{r\theta}$ da expressão (A.174) na equação (A.161) e resolvendo-se a equação diferencial obtida, chega-se ao valor do deslocamento u_θ dado por:

$$u_\theta = \frac{1}{4\pi\mu r} \quad (\text{A.175})$$

Escrevendo-se o valor do deslocamento u_θ de (A.175) em coordenadas cartesianas chega-se a:

$$u_i^\omega = \frac{-\bar{\eta}_i}{4\pi\mu r} \quad (\text{A.176})$$

A expressão (A.176) é a solução fundamental para o deslocamento de um ponto devido a um momento concentrado. Agora, utilizando-se (A.155), pode-se calcular o deslocamento de um ponto no interior de um corpo devido a um momento concentrado.

Derivando-se a solução fundamental (A.176) em relação à coordenada x_i com respeito ao ponto de campo obtém-se:

$$u_{i,j}^\omega = \frac{2\bar{\eta}_i r_{,j} - \varepsilon_{ij3}}{4\pi\mu r^2} \quad (\text{A.177})$$

Substituindo-se o valor de (A.177) na expressão de definição de deformação (A.145) e alterando-se o sinal para referenciar o ponto de colocação obtém-se:

$$\varepsilon_{ij}^\omega = -\frac{\bar{\eta}_i r_{,j} + \bar{\eta}_j r_{,i}}{4\pi\mu r^2} \quad (\text{A.178})$$

Substituindo-se o valor de (A.177) na expressão de definição de rotação (A.150) obtém-se um valor nulo. Este resultado pode parecer estranho à primeira vista, devido à natureza do

esforço aplicando. No entanto para que a simetria radial do problema seja garantida, esse resultado não poderia ter outro valor. Assim, no corpo infinito suposto, um momento concentrado produz apenas deslocamentos e deformações, mas não rotações.

Outra conclusão que se pode obter a partir da consideração de simetria do problema diz respeito ao deslocamento do ponto onde se aplica o momento. Pontos infinitamente próximos à origem do sistema terão deslocamentos tendendo ao infinito. No entanto, quaisquer dois pontos que definam um segmento de reta cujo ponto médio é a origem terão deslocamentos iguais porem em sentidos opostos. Portanto, para garantir a simetria, o deslocamento da origem deverá ser nulo.

A.6.2-Cargas perpendiculares ao plano

Há situações em que se deseja levar em conta, em estados planos de tensão e deformação, cargas que produzem compressão ou tração em ambos os lados do plano em estudo. É o caso, por exemplo, do aperto de um parafuso ou da força aplicada por um laminador. Este tipo de esforço, por agir igualmente em ambos as faces do problema, não gera flexão. No entanto causa tensões e deformações no sentido da espessura, podendo, conforme sua magnitude, influenciar as demais tensões e deformações. Tal situação é ilustrada na Figura A.2.

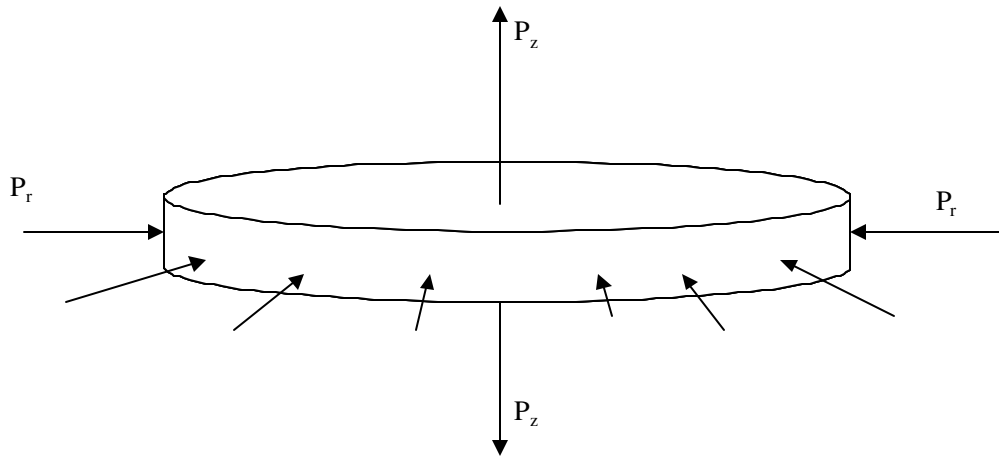


Figura A.2 – Corpo chato sujeito a uma carga perpendicular a seu plano médio.

Suponha-se um corpo circular de raio a sujeito a uma pressão radial P_r e uma força perpendicular ao seu plano P_z . Supondo-se que a carga P_z possa ser assumida como uniformemente distribuída sobre uma área de raio a , então tem-se:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = -P_r \quad (\text{A.179})$$

$$\sigma_z = \frac{P_z}{\pi a^2} \quad (\text{A.180})$$

Sabe-se também que:

$$E\varepsilon_r = \sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z) \quad (\text{A.181})$$

Substituindo os valores das tensões na expressão anterior tem-se:

$$\varepsilon_r = \frac{P_r(1-\nu)}{E} - \frac{\nu P_z}{E\pi a^2} \quad (\text{A.182})$$

Integrando-se a deformação radial, obtém-se o deslocamento do corpo em seu perímetro como sendo:

$$u_{r_a} = \frac{P_r(1-\nu)}{E}a - \frac{\nu P_z}{E\pi a} \quad (\text{A.183})$$

Sabe-se que o deslocamento de um ponto em um domínio infinito com um orifício de raio a sujeito a uma pressão é dada por [Foltran 1999]:

$$u_r = \frac{P_r a^2(1+\nu)}{Er} \quad (\text{A.184})$$

Pode-se então superpor os dois problemas, obtendo o deslocamento de um ponto em um domínio infinito sujeito a um carregamento perpendicular ao plano em uma região restrita. Isso é feito inicialmente igualando-se os deslocamentos obtidos de (A.183) e (A.184). Com isso chega-se a seguinte relação para P_r e P_z :

$$P_r = \frac{\nu P_z}{2\pi a^2} \quad (\text{A.185})$$

Substituindo-se o valor de P_r de (A.185) em (A.184), supondo que P_z tenha valor unitário e arranjando-se a expressão obtida, chega-se a:

$$u_r = -\frac{\nu}{4\pi\mu r} \quad (\text{A.186})$$

A expressão (A.186) dá o valor do deslocamento de um ponto em um domínio infinito sujeito a uma carga concentrada agindo na origem em ambos os lados de seu plano. Escrita em coordenadas cartesianas, a expressão (A.186) fica:

$$u_i^\Delta = -\frac{\nu}{4\pi\mu r} r_i \quad (\text{A.187})$$

Derivando-se (A.187) obtém-se:

$$u_{i,k}^{\Delta} = -\frac{\nu(\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k})}{4\pi\mu r^2} \quad (\text{A.188})$$

Assim pode-se determinar o valor das deformações como sendo:

$$\varepsilon_{ik}^{\Delta} = -\frac{\nu(\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k})}{4\pi\mu r^2} \quad (\text{A.189})$$

Deve-se notar que as rotações são identicamente nulas. Isso se deve a natureza do carregamento que gera apenas uma dilatação no domínio.

A.6.3-Deslocamento de pontos carregados

Devido à natureza singular das soluções fundamentais não é possível calcular o valor do deslocamento de um ponto no qual se aplica uma carga concentrada. Isso se torna um problema para aplicações do MEC quando a carga é aplicada sobre um nó do contorno. Neste caso o ponto de colocação do referido nó pode ser deslocado, normalmente para fora do domínio, evitando-se a singularidade. Esta técnica conduz a resultados coerentes, porém fortemente influenciados pela posição do ponto de colocação.

Quando a carga é aplicada a pontos internos não há como alterar a posição do ponto de colocação. Embora se saiba que o deslocamento deste ponto tende ao infinito, é desejável que, ao menos computacionalmente, o ponto tenha um deslocamento coerente com o sistema em análise.

Uma forma de se resolver este problema é simplesmente ignorar a contribuição da força no cálculo do deslocamento de seu ponto de aplicação. Porém, calculado desta maneira, o deslocamento do ponto carregado discordará enormemente dos deslocamentos dos pontos vizinhos.

Uma outra alternativa para o problema é admitir que a força está distribuída em uma pequena área de raio δ ao redor de seu ponto de aplicação. Uma nova solução fundamental, u_{ik}^{δ} , poderá ser usada nos pontos singulares e quase singulares.. Assim, para ponto próximos e para o próprio ponto carregado, tem-se:

$$u_{ik}^{\delta} = \int_{\Omega_{\delta}} u_{ik}^* dF \quad (\text{A.190})$$

O diferencial de força pode ser escrito como:

$$\left. \begin{aligned} dF &= PdA \\ P &= \frac{1}{A} = \frac{1}{\pi \delta^2} \\ dA &= r dr d\theta \end{aligned} \right\} dF = \frac{r dr d\theta}{\pi \delta^2} \quad (\text{A.191})$$

Portanto, pode-se escrever que:

$$u_{ik}^\delta = \int_0^\delta \int_0^{2\pi} \frac{1}{8\pi^2 \mu (1-\nu) \delta^2} \left[-(3-4\nu) r \ln(r) \delta_{ik} + r r_{,i} r_{,k} \right] d\theta dr \quad (\text{A.192})$$

Resolvendo-se a integral (A.192) chega-se a:

$$u_{ik}^\delta = \frac{1}{8\pi \mu (1-\nu)} \left[-2(3-4\nu) \left(\ln(\delta) - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} + \frac{\delta_{ik}}{2} \right] \quad (\text{A.193})$$

Assim, para pontos afastados do ponto de aplicação da força utiliza-se a expressão (A.123), já para pontos próximos, a expressão (A.193) deve ser empregada.

Computacionalmente, adota-se um raio mínimo a partir do qual a expressão (A.193) será usada. Para garantir a continuidade dos resultados, o valor de δ deve ser tomado como:

$$\delta = \sqrt{r_{\min} \sqrt{e}} \quad (\text{A.194})$$

Substituindo-se o valor de δ da expressão (A.194) na expressão (A.193) chega-se a:

$$u_{ik}^\delta = \frac{1}{8\pi \mu (1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \left(\ln(r_{\min}) - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} + \frac{\delta_{ik}}{2} \right] \quad (\text{A.195})$$

Se o mesmo processo for aplicado às soluções fundamentais referentes ao cálculo de deformação obter-se-á um valor nulo. Logo, para o cálculo de deformações em pontos internos, a técnica de ignorar a singularidade é uma alternativa válida.

A técnica descrita acima, *grosso modo*, implica em assumir que o deslocamento do ponto singular é igual à média dos deslocamentos dos pontos circunvizinhos.

Por este processo as soluções fundamentais (A.176), (A.178), (A.187) e (A.189) também se anulam, desta vez devido à simetria radial do problema.