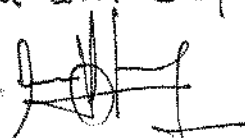


UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

Este exemplar corresponde
à redação final da tese
defendida por Silvio Luiz
de Mello Junqueira e
aprovada pela Comissão
Julgadora em 26/12/90.

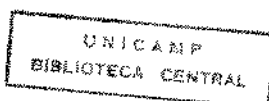


APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE
AO PROBLEMA INVERSO DA CONDUÇÃO DO CALOR

063/90

Autor : Silvio Luiz de Mello Junqueira
Orientador : Prof. Dr. Osvair Vidal Trevisan†

18.911.0096



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECANICA
DEPARTAMENTO DE ENERGIA

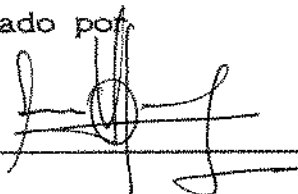
Tese de: Mestrado

Título da Tese: Aplicação da Transformada de
Laplace ao Problema Inverso da
Condução do Calor.

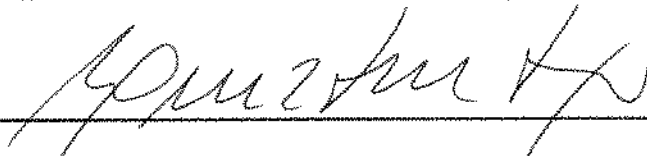
Autor: Silvio Luiz de Mello Junqueira

Orientador: Prof. Dr. Osvalir Vidal Trevisan

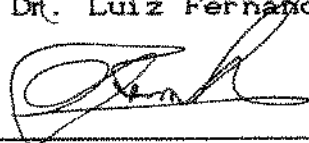
Aprovado por



Prof. Dr. Osvalir Vidal Trevisan, Presidente



Prof. Dr. Luiz Fernando Milanez



Prof. Dr. Antônio Carlos Bannwart

Campinas, 26 de dezembro de 1990

Uma coisa aprendi na minha longa vida :
que toda a nossa ciência, contraposta à
realidade, é primitiva e infantil. E,
apesar disso, é a coisa mais preciosa
que temos.

Albert Einstein (1879 - 1955)

Dedico este trabalho a Sebastião
Junqueira Netto e Deolinda de Mello
Junqueira, meus pais, e também a
minha esposa, Eliane Valente pelo
carinho e incentivo necessário e sem
o qual este trabalho não seria
realizado.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Osvaldo Vidal Trevisan pelo exemplo de dedicação, seriedade, confiança e amizade que tornou agradável e produtivo todo um período que culmina com a realização desta dissertação.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela concessão da bolsa de estudo durante a realização deste trabalho.

Ao Deptos. de ENERGIA e TÉRMICA e FLUIDOS pelo suporte técnico e, principalmente, pelo incentivo de seus professores, colegas e funcionários.

Aos companheiros do CIFEM, pela presteza com que cederam os equipamentos que permitiram a conclusão deste trabalho.

Quero registrar meus agradecimentos à Prof. Dra. Tereza Cristina Samico Cavalcanti, do Laboratório de Pesquisas Bioquímicas do CAISM/UNICAMP e a Rubens Silva Telles, do Depto. de Energia desta Faculdade, cuja paciência e carinho foram presença constantes ao longo deste trabalho.

RESUMO

O problema inverso da condução do calor envolve o cálculo da temperatura e ou do fluxo de calor, a partir de medidas da temperatura, num ponto interior de um sólido.

Esta dissertação compara três técnicas numéricas envolvendo inversão de transformadas de Laplace, no trato do problema inverso da condução do calor. A comparação é procedida através de testes que visam quantificar o poder de resolução dos algoritmos de inversão. É estudado o efeito causado pela introdução de um erro nas medidas da temperatura interna e sua influência nos valores do fluxo de calor e da temperatura em uma superfície externa do sólido.

Os algoritmos estudados - Crump, Stehfest e Piessens - se baseiam em metodologias distintas para a inversão da transformada. Os resultados mostram que os métodos apresentam características bastante diversas de comportamento. O método de Crump tem o melhor desempenho quanto ao poder de resolução na inversão de uma função pulso. Na avaliação da sensibilidade à introdução de um pulso isolado no interior do sólido, o método de Crump é exageradamente sensível enquanto que os demais métodos, mostram não detectar a perturbação introduzida no perfil de temperatura interna.

ABSTRACT

The inverse heat conduction problem consists of obtaining the temperature or heat flux at a external surface from temperatures measured at internal points in solids.

The present work compares three numerical technics of inverse Laplace transform applied to the inverse heat conduction problem. The comparison is carried out through tests in order to measure the resolving power of the inversion algorithms. The effect caused by the introduction of measurement errors in the interior temperature is studied along with the influence of the errors on the temperature and heat flux calculated at an other boundary of the solid.

The algorithms considered - Crump, Stehfest and Piessens - are constructed based on different methodologies of inverse Laplace transform. The results show that the methods have much diverse behavior characteristics. Crump algorithm presents a better performance as to resolving power when inverting a pulse. Regarding sensitivity to the introduction of a single pulse at a interior point in the solid, Crump algorithm is rather sensitive while the two others do not adequately detect the perturbation introduced at the interior temperature profile.

APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE AO PROBLEMA INVERSO DA CONDUÇÃO DO CALOR

ÍNDICE

Nomenclatura	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
1. Introdução	01
2. Dos Métodos de Inversão de Transformada de Laplace	09
2.1. Histórico e Aplicações dos Métodos de Inversão	09
2.2. Método de Crump	11
2.2.1. Equações Empregadas	11
2.2.2. Determinação da Expressão usada por Crump	14
2.2.3. Análise do Erro no Método	17
2.2.4. Comentários a Respeito do Método	18
2.3. Método de Stehfest	19
2.4. Método de Piessens	22
2.4.1. Equações Empregadas	23
2.4.2. Cálculos dos Coeficientes de Chebyshev	24
2.4.3. Determinação dos Polinômios $\phi_k(x)$	24
2.4.4. Escolha dos Parâmetros Livres	25
3. Aplicação dos Métodos de Inversão na Resolução de um Problema Inverso de Condução	27
4. Perturbação na Superfície	34
4.1. A Função Pulso	34
4.2. Poder de Resolução de um Algoritmo	38
4.3. TESTE 1 : Variação do Domínio	41

4.4. TESTE 2 : Duração do Pulso	44
4.5. Normalização do Desvio de Fase	49
5. A Propagação do Erro das Medidas de Temperatura	
Interna	51
5.1. Solução do Problema Inverso Proposto	52
5.2. Inversão Analítica da Temperatura	56
5.2.1. Cálculo do Resíduo em $F_1(s)$	57
5.3. Inversão Analítica do Fluxo de Calor	61
5.4. Testes Realizados	63
6. Conclusões	84
Referências	87
Apêndice A	94

NOMENCLATURA

a	parâmetro livre - método de Piessens
α	parâmetro livre - método de Crump
as	parâmetro livre - método de Piessens
b	parâmetro livre - método de Piessens
cc	parâmetro livre - método de Piessens
c_k	coeficientes do polinômio de Chebyshev
d	extensão do domínio padrão
err	parâmetro livre - método de Crump
L	largura da placa
M	parâmetro livre - método de Stehfest
N	parâmetro livre - método de Stehfest
N_{max}	parâmetro livre - método de Piessens
p	extensão do domínio a ser normalizado
Q^n	valores exatos de inversão
$\hat{Q}^n$	valores de inversão estimados
$\hat{Q}^{max}$	máximo valor estimado na inversão
x'	coordenada cartesiana
x	coordenada cartesiana adimensional
x_i	ponto no interior da placa
s	argumento da transformada de Laplace
t'	tempo
t	tempo adimensional
t_o	instante de início do pulso
T'	temperatura
T	temperatura adimensional
$\bar{T}$	transformada de Laplace da temperatura

T_k	polinômio de Chebyshev
T_m	temperatura no ponto interior
$(\bar{})$	transformada de Laplace de uma função

Símbolos Gregos

α	difusividade térmica
δ_A	desvio de amplitude
ϵ	duração do pulso
ϕ_k	função hipergeométrica generalizada
Γ	função gama
σ_f	desvio de fase
σ_f^*	desvio de fase normalizado

LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 - Geometria de um Problema Direto.
- Figura 1.2 - Geometria de um Problema Inverso.
- Figura 3.1 - Representação do Problema Inverso.
- Figura 4.1 - Representação Cartesiana da Função Pulso.
- Figura 4.2 - Pulsos original e invertido no Domínio do caso 1.
- Figura 4.3 - Pulsos original e invertido no Domínio do caso 2.
- Figura 4.4 - CASO 3 - Pulsos original e invertido com duração de pulso 0.001.
- Figura 4.5 - CASO 4 - Pulsos original e invertido com duração de pulso 0.01.
- Figura 4.6 - CASO 5 - Pulsos original e invertido com duração de pulso 0.1.
- Figura 5.1 - Inversão Analítica - para pulso de duração 0.001.
- Figura 5.2 - Inversão Analítica - para pulso de duração 0.01.
- Figura 5.3 - Inversão Analítica - para pulso de duração 0.1.
- Figura 5.4 - Inversão Analítica - para pulso de duração 0.01 em domínio deslocado.
- Figura 5.5 - Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.001.
- Figura 5.6 - Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.01.
- Figura 5.7 - Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.1.
- Figura 5.8 - Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.01 em domínio deslocado.
- Figura 5.9 - Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.001.
- Figura 5.10 - Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.01.

Figura 5.11 - Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.1.

Figura 5.12 - Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.01 em domínio deslocado.

Figura 5.13 - Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.001.

Figura 5.14 - Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.01.

Figura 5.15 - Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.1.

Figura 5.16 - Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.01 em domínio deslocado.

Figura 5.17 - Inversão Analítica - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura.

Figura 5.18 - Inversão Analítica - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.1 na temperatura.

Figura 5.19 - Inversão Analítica - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura em domínio deslocado.

Figura 5.20 - Método de Crump - Resposta no fluxo para pulso na temperatura com duração 0.01.

Figura 5.20 - Método de Crump - Resposta no fluxo para pulso na temperatura com duração 0.01.

Figura 5.21 - Método de Crump - Resposta no fluxo para pulso na temperatura com duração 0.1.

Figura 5.22 - Método de Crump - Resposta no fluxo para pulso na temperatura com duração 0.01 em domínio deslocado.

Figura 5.23 - Método de Stehfest - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura.

Figura 5.24 - Método de Stehfest - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.1 na temperatura.

Figura 5.25 - Método de Stehfest - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura em domínio deslocado.

Figura 5.26 - Método de Piessens - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura.

Figura 5.27 - Método de Piessens - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.1 na temperatura.

Figura 5.28 - Método de Stehfest - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura em domínio deslocado.

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Comparação da temperatura original com valores obtidos por inversão.

Tabela 4.1 - Parâmetros empregados pelos algoritmos.

Tabela 4.2 - Desvios de amplitude e fase em domínios diferentes.

Tabela 4.3 - Desvios de amplitude e fase para diferentes durações de pulso.

Tabela 5.1 - Domínio e duração do pulso considerados na análise da sensibilidade em termos da temperatura superficial.

Tabela 5.2 - Domínio e duração do pulso considerados na análise da sensibilidade em termos do fluxo de calor.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Antes de iniciarmos a apresentação de um problema inverso, se faz necessário estabelecer, ainda que rapidamente, a diferença entre um problema inverso e um problema direto de condução de calor.

Tipicamente, ao analisarmos um problema de condução de calor, buscamos a determinação da distribuição de temperatura no interior de um sólido, a partir do conhecimento da equação de transporte de energia e dos valores do fluxo de calor ou da temperatura na superfície do corpo sólido.

Tomando-se como exemplo uma placa plana de espessura conhecida (L) :

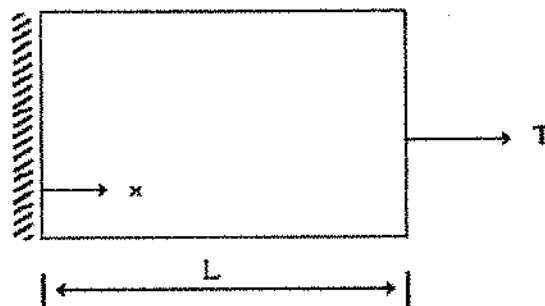


Figura 1.1- Geometria de um problema direto

Nesta situação, temos conhecimento das condições de contorno do sólido. Para a placa plana em questão, as condições de contorno em $x=0$ e em $x=L$ são, respectivamente :

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0 \quad \text{em } x = 0$$

$$T(x,t) = T \quad \text{em } x = L$$

Juntando-se as equações acima, à equação da energia, por exemplo a clássica equação da difusão, temos um problema linear de solução simples. A este tipo de problema chamamos de problema direto.

Alternativamente ao exemplo recém descrito, no problema de condução de calor inverso, o fluxo e/ou a temperatura histórica na superfície do sólido não são conhecidos. Sua determinação é feita indiretamente, através de medidas das temperaturas em um ou mais pontos interiores. Na representação geométrica do problema inverso, associado ao problema direto anteriormente descrito (Figura 1.1), teríamos :

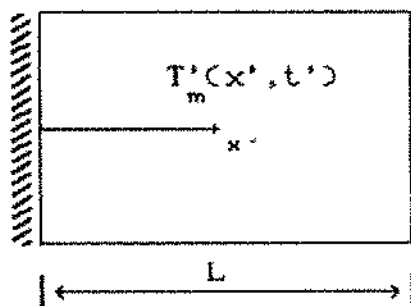


Figura 1.2- Geometria de um problema inverso

Observamos na Figura 1.2 que, enquanto no problema direto temos representadas as condições de contorno necessárias

para a determinação do fluxo de calor e ou da temperatura na superfície do sólido, no problema inverso temos a ausência de uma condição de contorno. A condição de contorno ausente é substituída pela temperatura, que varia com o tempo, medida no interior do sólido. Esta diferença faz com que o problema inverso da condução do calor seja mais difícil de resolver analiticamente que o problema direto. Embora o tratamento do problema seja mais complicado, a ocorrência prática destas situações é bastante frequente.

Diversos impedimentos experimentais podem surgir na medição ou na reprodução de determinadas condições de contorno. A situação física da superfície de interesse pode ser inconveniente para a instalação e manutenção de sensores. Ou então, a precisão das medidas realizadas em tal superfície, pode ser seriamente afetada pela presença de sensores. Contrapondo-se às frequentes dificuldades que ocorrem nas medidas de temperatura em superfícies de sólidos, há uma maior facilidade de se medir corretamente a temperatura e sua variação temporal em interiores ou em superfícies isoladas de corpos. Assim, é necessário proceder a uma escolha, quando ela for possível, entre uma medição relativamente imprecisa ou um problema analítico de difícil resolução. Uma solução precisa e ao mesmo tempo tratável, do ponto de vista matemático do problema inverso, contornaria as dificuldades ressaltadas.

Na solução do problema inverso, os problemas de determinação da temperatura superficial e do fluxo de calor na superfície são equivalentes no sentido que se um destes for obtido o outro pode ser facilmente determinado. Os valores de

ambos não podem ser independentemente encontrados, visto que nos problemas de condução de calor diretos somente uma condição de contorno pode ser imposta em um dado instante e fronteira. A literatura relacionada ao problema inverso enfatiza a questão do cálculo do fluxo de calor na superfície, pois com o conhecimento do fluxo de calor podemos determinar a temperatura na superfície do sólido através de métodos numéricos.

Stolz [1] foi um dos primeiros investigadores a tratar do assunto, formulando o problema inverso da condução do calor através de inversão numérica de uma equação integral. Há controvérsias quanto ao pioneirismo de Stolz na área, já que anteriormente Mirsepassi [2] havia usado as mesmas técnicas numérica e gráfica.

O programa espacial, que teve início em meados da década de 50, imprimiu um impulso considerável ao estudo do problema inverso da condução do calor [3-6]. Suas aplicações, neste campo, estão relacionadas à ogiva de mísseis e sondas, ogivas de foguetes e outros dispositivos espaciais e aeronáuticos de alta velocidade. Beck [7], contribuiu para a resolução do problema, ao desenvolver conceitos básicos que o permitiram trabalhar com incrementos de tempo menores do que os do método usado por Stolz.

A solução do problema inverso foi bastante utilizada também no teste de reatores nucleares [8,9]. Vários programas de computação, atualmente em uso, são baseados no método descrito por Beck [7].

Existem outras aplicações para o problema inverso da condução do calor, tais como : aquecimento periódico em câmaras

de combustão de motores de combustão interna [10], solidificação de vidro [11], aparelhos de calorimetria indireta para uso em laboratórios [12] e curvas de estado de vapor [13].

Poderíamos ainda citar o emprego de conceituações análogas em questões relativas ao sensoriamento remoto, exploração de petróleo, ensaios de materiais não destrutivos e na determinação da estrutura interior da Terra.

Entre as várias técnicas utilizadas na solução do problema, encontramos o uso do teorema de Duhamel, que utiliza a convolução integral e se restringe à classe dos problemas lineares [14, 9, 15]. Procedimentos numéricos, tais como diferenças finitas [16, 17] e elementos finitos [9, 18], têm também sido empregados devido às possibilidades que apresentam no tratamento de problemas não lineares. Técnicas de solução exata foram propostas por Burgraff [19], Imber e Khan [20], Langford [21] entre outros. Algumas técnicas usam transformadas de Laplace e também são limitadas à problemas lineares [12, 22, 23].

Vários critérios podem ser utilizados, num levantamento ordenado, visando a classificação das diversas metodologias empregadas na resolução de um problema inverso de condução de calor. Beck et al [24] classificam os métodos segundo a capacidade de tratar os problemas. Assim, são separados os métodos dirigidos a problemas de condução inversa lineares e não lineares. Em outra classe, encontram-se os algoritmos que podem ser utilizados tanto em problemas lineares como não lineares, pelo emprego de dois procedimentos básicos que são a função especificação e o método da regularização.

Alguns métodos de solução do problema inverso da

condução são inerentemente lineares, como os que usam transformadas de Laplace. Beck [24] restringe sua classificação aos métodos puramente numéricos de solução das equações diferenciais. Assim, os métodos podem ser classificados da seguinte maneira :

a)-Quanto à forma de resolução da equação da condução :

A forma de resolução da equação da condução do calor, pode ser usada para classificar o problema inverso. Entre os métodos de solução estão incluídos o uso do teorema de Duhamel, diferenças finitas, elementos finitos e métodos de volume de controle finitos. O uso do teorema de Duhamel, restringe-se a algoritmos que resolvem o problema inverso linear, enquanto que os outros procedimentos podem tratar também dos casos não lineares.

b)-Quanto ao domínio do tempo :

O domínio do tempo utilizado nos problemas de condução de calor inverso, pode também ser usado como critério na classificação dos métodos de solução. Beck [24] propôs três domínios de tempo :

b.1)-Somente para o tempo presente :

Um exemplo de uso de medidas somente para o tempo presente é o método de Stolz [1], que obtém temperaturas calculadas muito próximas das temperaturas obtidas através da colocação de um único sensor no interior do corpo. Este recurso é

intuitivo, mas os algoritmos nele baseados são frequentemente bastante sensíveis aos erros de medida.

b.2)-Para o tempo presente mais alguns intervalos de tempo :

São utilizadas nesta segunda classe algumas temperaturas futuras, as quais estão associadas a tempos futuros e algoritmos associados a este método são chamados sequenciais. As melhoras são notadas na redução considerável da sensibilidade aos erros de medidas e em pequenos incrementos de tempo, permitindo informações mais detalhadas com respeito à variação no tempo do fluxo de calor superficial a ser determinado.

b.3)-Todo o domínio de tempo :

Os procedimentos que consideram a estimação em todo o domínio são também eficazes, porque podem ser tomados intervalos de tempo muito pequenos. Mas tais procedimentos não são computacionalmente tão eficientes quanto aqueles que usam somente algumas temperaturas futuras. A função especificação e o método da regularização podem ser empregados na forma sequencial e na estimação de todo o domínio de tempo.

c)-Quanto à dimensionalidade do problema inverso :

Se somente um fluxo de calor histórico necessita ser determinado, o problema pode ser considerado como unidimensional. No uso do teorema de Duhamel, as dimensões físicas do problema não são consideradas, isto é, o mesmo procedimento é usado para corpos uni, bi ou tridimensionais onde um único fluxo de calor deve ser determinado. Se dois ou mais fluxos históricos são

estimados e o teorema de Duhamel é usado, o problema é multidimensional. Quando o método de diferenças finitas ou outro método numérico é empregado para problemas não lineares, a dimensionalidade do problema depende do número de coordenadas espaciais necessárias para descrever o corpo condutor de calor. Uma coordenada corresponde a um problema unidimensional, duas coordenadas a um problema bidimensional e assim por diante.

Neste trabalho serão investigados alguns métodos de inversão de transformadas de Laplace aplicados à solução do problema inverso de condução do calor linear.

Os métodos serão analisados quanto à sua capacidade e precisão de inversão. Para tanto os diferentes algoritmos serão empregados para inverter funções com variações temporais bruscas, no caso representadas por funções impulso de amplitude unitária. A comparação dos resultados obtidos através de cada método é feita por parâmetros próprios, que visam quantificar os desvios produzidos em relação à solução exata. Como segundo elemento de estudo, será investigada a sensibilidade do método completo de solução do problema variando-se o algoritmo de inversão. A verificação da sensibilidade se refere neste estudo à sobreposição dos erros introduzidos na medição da temperatura interior.

CAPÍTULO 2

DOS MÉTODOS DE INVERSÃO DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

2.1-Histórico e Aplicações dos Métodos de Inversão

A maior dificuldade na aplicação de técnicas envolvendo transformadas de Laplace está relacionada à determinação da função original $f(t)$ partindo da sua própria transformada dada por :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (2.1)$$

Existem vários problemas cujas soluções podem ser expressas em termos de transformadas de Laplace, mas que se mostram complexos quando se tenta aplicar técnicas de inversão. Muitos métodos tem sido desenvolvidos para o cálculo numérico de inversão de transformadas de Laplace. Uma revisão ampla destes métodos foi apresentada por Davies e Martin [25]. Piessens [26] apresentou uma bibliografia detalhada sobre métodos de inversão, relatando que o primeiro trabalho enfocando uma inversão de transformada de Laplace foi elaborado por Widder [27], que posteriormente aplicou os polinômios de Laguerre em seu algoritmo de inversão. Desde então, vários autores têm publicado trabalhos

propondo algumas modificações nos métodos já existentes ou mesmo apresentando novos métodos de inversão, baseados em quadraturas Gaussianas [28, 29], transformações bilineares [30-32], séries de Fourier [33-35] e expansão em funções exponenciais [36-38].

Davies e Martin [25] afirmam que, na prática, existem vários problemas para os quais a inversão numérica de transformadas de Laplace requer um tipo especial de método ou ao menos a solução pode ser facilitada pelo emprego de um determinado método. Em outras palavras, para tais problemas um método de grande aceitação pode ser inapropriado. Exemplos incluem problemas com dados numéricos em pontos arbitrários, problemas com transformação na forma de frações racionais, problemas com dados instáveis, ou questões para as quais a solução é conhecida na forma particular.

Muitas são as técnicas de inversão numérica que podem ser usadas na determinação da função original $f(t)$. Optou-se por apresentar neste trabalho, três algoritmos que utilizam técnicas diferentes para inverter numericamente transformadas de Laplace. Tais algoritmos obtiveram bons resultados na inversão de um significativo número de funções, além de serem relativamente simples quanto à implantação e também rápidos na compilação e apresentação de resultados.

O algoritmo construído por Crump [35] aproxima a função inversa $f(t)$ através de uma série de Fourier em cosseno, aliado a um algoritmo de aceleração, que permite uma rápida convergência da série de Fourier.

O segundo algoritmo escolhido, desenvolvido por Stehfest [39], utiliza a técnica estatística descrita por Gaver

[40] para obter valores de $f(t)$ ao longo da variação do tempo.

O terceiro algoritmo a ser experimentado foi construído por Piessens [41] e aproxima a função original por uma série de polinômios de Chebyshev.

2.2-O METODO DE CRUMP

O método apresentado por Crump [35] para inversão numérica de transformadas de Laplace requer, no cálculo da própria transformada da função em estudo, as funções seno, cosseno e exponencial. O método é conceitualmente semelhante ao de Dubner e Abate [33], que aproxima a função inversa por meio de uma série de Fourier em cosseno. A metodologia utilizada por Crump apresenta, no entanto, diferenças em relação ao método acima citado em dois aspectos importantes : a) a representação da série de Fourier contém termos adicionais envolvendo a função seno selecionada, tal que o erro na aproximação é menor que o apresentado no método de Dubner e Abate e b) está incorporada ao método de Crump, a transformação de uma série aproximada numa outra que converge mais rapidamente.

2.2.1-EQUAÇÕES EMPREGADAS

A partir da eq.(2.1) e assumindo que $f(t)$ é contínua e exponencial de ordem α , isto é $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, a transformada

$F(p)$ é então definida para $\text{Re}(p) > \alpha$. Assim, a transformada inversa é dada pela fórmula de inversão :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (2.2)$$

ou, de outra maneira :

$$f(t) = \frac{e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\text{Re}\left[F(p)\right] \cos(wt) - \text{Im}\left[F(p)\right] \text{sen}(wt) \right] dw \quad (2.3)$$

sendo $p = a+iw$, onde $\text{Re}(p)$ e $\text{Im}(p)$ correspondem, respectivamente, a parte real e imaginária do número complexo p . As equações (2.2) e (2.3) podem também ser substituídas pela transformada em cosseno :

$$\text{Re}\left[F(p)\right] = \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos(wt) dt \quad (2.4)$$

onde

$$f(t) = \frac{2 e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\text{Re}\left[F(p)\right] \right] \cos(wt) dw \quad (2.5)$$

ou por uma transformada em seno :

$$\text{Im}\left[F(p)\right] = - \int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \text{sen}(wt) dt \quad (2.6)$$

onde

$$f(t) = - \frac{2 e^{at}}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\operatorname{Im} \left\{ F(p) \right\} \right] \operatorname{sen}(wt) dw \quad (2.7)$$

A técnica proposta por Dubner e Abate [33] para inverter numericamente $F(p)$ é essencialmente a aproximação da regra trapezoidal de (2.5), a qual envolve somente $\operatorname{Re}\{F(p)\}$. O método é conceitualmente simples e de fácil programação em computadores. Dubner e Abate mostram que $f_c(t)$ é a aproximação proposta para $f(t)$ definida como sendo :

$$f_c(t) = \frac{2 e^{at}}{T} \left[\frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right] \quad (2.8)$$

onde os parâmetros a e T satisfazem as condições $T > t$ e $a > \alpha$. Todavia, a limitação do método de Dubner e Abate é que a série (2.8) que representa $f(t)$ converge vagorosamente, utilizando um número elevado de termos antes de convergir. Simon et al. [42] propuseram uma técnica que contorna esta limitação através do uso da transformada de Euler. Se tomarmos $T=2t$, então :

$$f_c(t) = \frac{e^{at}}{t} \left[\frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ F\left(a + \frac{k\pi i}{t}\right) \right\} (-1)^k \right] \quad (2.9)$$

A utilização de tal recurso aumenta significativamente a convergência da série (2.8).

Das várias fórmulas de inversão (2.3), (2.5) e (2.7), pode-se conjecturar que outras técnicas de inversão numérica similares podem ser desenvolvidas utilizando $\text{Im}\{F(p)\}$ ao invés de $\text{Re}\{F(p)\}$, ou talvez uma combinação de ambas as partes, real e imaginária. Deste modo, pode-se calcular $\text{Re}\{F(p)\}$ e $\text{Im}\{F(p)\}$ da mesma maneira, sendo que a série envolvida neste método converge mais rapidamente que (2.7).

2.2.2-DETERMINAÇÃO DA EXPRESSÃO USADA POR CRUMP

A mesma expressão geral usada por Dubner e Abate -eq.(2.8)- será seguida. Essencialmente, será obtida a série de Fourier para uma função $g_0(t)$ que é periódica de período igual a $2T$ e igual a $f(t) \cdot e^{-at}$ no intervalo $(0, 2T)$. Ocorre que os coeficientes de Fourier das séries podem ser aproximados usando $F(p)$. A fim de que a série de Fourier convirja para $g_0(t)$ nos pontos de descontinuidade, será imposta a seguinte condição :

$$f(t) = (f(t+) + f(t-)) / 2$$

com valores de t para os quais $f(t)$ é descontínua. Para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, define-se $g_n(t) = f(t) \cdot e^{-at}$, $2nT \leq t \leq 2(n+1)T$, com $g_n(t)$ periódica com período $2T$. A representação da série para cada n é dada por :

$$g_n(t) = \frac{1}{2} A_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ A_{n,k} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) + B_{n,k} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right\} \quad (2.10)$$

onde os coeficientes de Fourier são :

$$A_{n,k} = \frac{1}{T} \int_{2nT}^{2(n+1)T} e^{-at} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt$$

$$B_{n,k} = \frac{1}{T} \int_{2nT}^{2(n+1)T} e^{-at} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt$$

Pela somatória em (2.10) com respeito a n e notando que :

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = \operatorname{Re}\left\{F\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right)\right\}$$

e

$$\int_0^{\infty} e^{-at} f(t) \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) dt = -\operatorname{Im}\left\{F\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right)\right\}$$

encontramos que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) &= \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{Re}\left\{F\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right)\right\} \cos\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{Im}\left\{F\left(a + \frac{k\pi i}{T}\right)\right\} \sin\left(\frac{k\pi t}{T}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sendo que no intervalo $(0, 2T)$, $g_0(t) = f(t)e^{-at}$. Partindo de (2.11) obtém-se a aproximação $\bar{f}(t)$ para a transformada inversa :

$$\begin{aligned} \bar{f}(t) = \frac{e^{at}}{T} \left\{ \frac{1}{2} F(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{Re} \left\{ F \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \cos \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \operatorname{Im} \left\{ F \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

A eq.(2.12) é a fórmula procurada para a aproximação de $f(t)$. Nota-se que é simplesmente uma regra trapezoidal para a eq. (2.3), exatamente como (2.8) é uma aproximação similar de (2.5). Nota-se também que (2.12) contém todos os termos de (2.8) mais os termos referentes a $\operatorname{Im}\{F(p)\}$. Tomando-se metade de cada lado da expressão (2.12), subtraindo de (2.8) e multiplicando-se o resultado por 2, temos de imediato um procedimento de inversão usando somente $\operatorname{Im}\{F(p)\}$.

$$f_s(t) = - \frac{2 e^{at}}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} \left\{ F \left(a + \frac{k\pi i}{T} \right) \right\} \sin \left(\frac{k\pi t}{T} \right) \quad (2.13)$$

Assim, a aproximação da inversa dada por $f(t)$ nada mais é que a média $\{f_c(t) + f_s(t)\} / 2$ das aproximações envolvendo somente termos em seno e cosseno, respectivamente. Deve-se ressaltar ainda que o parâmetro a pode ser escolhido de modo que $\bar{f}(t)$ aproxime-se de $f(t)$ no intervalo $(0, 2T)$ enquanto que o erro, quando do uso das expressões de $f_c(t)$ ou $f_s(t)$, pode ser minimizado somente para um dado t no intervalo $(0, T)$.

2.2.3-Análise do Erro no Método

Existem duas fontes de erro neste método, excluindo-se o de arredondamento. Primeiro tem-se o erro devido ao fato de os coeficientes usados na série de Fourier para $g_0(t)$ não serem exatos, tratando-se somente de aproximações obtidas usando $F(s)$. O segundo erro considera que as séries em (2.12) não são somadas até o infinito havendo, portanto, um erro de truncamento.

Em geral, é possível aumentar a taxa de convergência de (2.12) e assim reduzir o erro de truncamento usando uma série de transformação adequada. Crump [35] considerou duas transformações: a transformação de Euler (TE), que foi usada por Simon et al. [42], e o Algoritmo Epsilon (ALEP). Em todos os testes considerados até então, o ALEP tem provado ser superior ao TE na velocidade de convergência da expressão (2.12). O ALEP tem, sem exceção, melhorado significativamente a taxa de convergência sendo recomendado que seja usado acoplado ao método de inversão. O algoritmo Epsilon pode ser brevemente descrito como se segue. Suponhamos que deseja-se aproximar a somatória da série dada por :

$$S_m = \sum_{n=1}^m a_n$$

onde $n = 1, 2, \dots, 2N+1$. Definimos então

$$e_{p+1}^{(m)} = e_{p-1}^{(m+1)} + \left\{ e_p^{(m+1)} - e_p^{(m)} \right\}^{-1}$$

com $e_0^{(m)} = 0$ e $e_1^{(m)} = S_m$

Então a sequência $\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_3^{(1)}, \varepsilon_5^{(1)}, \dots, \varepsilon_{2n+1}^{(1)}$ é uma sequência de aproximações sucessivas para a soma das séries que frequentemente aproximará a soma melhor que a sequência não transformada dada por $S_1, \dots, S_{2n+1}$.

2.2.4-Comentários a Respeito do Método

Crump [35] analisou a performance do método testando diferentes valores de T e de N , este representando o número de termos usados na soma.

As séries não transformadas convergem vagarosamente, particularmente para os maiores valores de t . A série de Euler transformada converge mais rapidamente que a série não transformada, mas o ALEP dá uma precisão maior que os métodos de Dubner e Abate [33] e Simon et al. [42]. Com o ALEP, 29 termos foram suficientes para alcançar uma precisão de 6 a 8 algarismos significativos. Entretanto, tratando-se de uma transformação não linear, aplicando-se o ALEP separadamente em (2.8) e (2.13), e em seguida calculando-se a média dos resultados, corre-se o risco de reduzir-se a precisão.

Ao analisar os efeitos sobre a taxa de convergência para diferentes valores de T , geralmente o menor valor de T melhora a convergência para pequenos t , mas produz um efeito oposto para t maiores. A convergência é frequentemente melhor para valores de t próximos de T . Considerando que o valor numérico de $f(t)$ seja desejado sobre uma faixa de valores de t ,

dos quais o maior é $t_{\max}$, o primeiro T deve ser escolhido de modo que $2T > t_{\max}$. Como regra geral, observa-se que para um erro relativo entre 10^{-2} e 10^{-8} , o valor $T = 0.80 t_{\max}$ dá resultados bastante aceitáveis.

2.3-MÉTODO DE STEHFEST

O método desenvolvido por Harald Stehfest [39], calcula numericamente a transformada inversa de Laplace de uma função $P(s)$, produzindo um valor aproximado F_a que representa $F(t)$ no instante t , sendo que F_a é dado por :

$$F_a = \frac{\ln 2}{T} \sum_{i=1}^N v_i P\left(\frac{\ln 2}{T} i\right) \quad (2.14)$$

onde N deve ser constante.

O método apresentado origina-se de Gaver [40], que considerou a esperança de $F(t)$ com respeito à função densidade de probabilidade como se segue :

$$f_n(a, t) = a \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} (1 - e^{-at})^n e^{-nat}, \quad a > 0$$

$$\bar{F}_n = \int_0^{\infty} F(t) f_n(a, t) dt \quad (2.15)$$

implicando que

$$\bar{F}_n = a \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \sum_{i=0}^N \binom{n}{i} (-1)^i P((n+1)a)$$

$f_n(a,t)$ tem as seguintes propriedades :

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad & \int_{-\infty}^{\infty} f_n(a,t) dt = 1 \\ 2. \quad & \text{o valor modal de } f_n(a,t) = \frac{\ln 2}{a} \\ 3. \quad & \text{var}(t) = \frac{1}{a^2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n+i)^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Estas propriedades implicam que F_n converge para $F(\ln 2/a)$ quando $n \rightarrow \infty$. F_n tem a expansão assintótica :

$$F_n \approx F\left(\frac{\ln 2}{a}\right) + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \dots$$

Para um dado número N de valores de P , uma aproximação melhor para $f_n(\frac{\ln 2}{a})$ do que para F_{n-1} é possível de ser obtida :

$$\sum_{i=1}^n x_i(K) \frac{1}{(N/2 + 1 - i)^K} = \delta_{ko}$$

$$\text{onde } k = 0, 1, \dots, K-1, K \leq \frac{N}{2}$$

encontra-se :

$$x_i(K) = \frac{(-1)^{i-1}}{K!} \begin{bmatrix} K \\ i \end{bmatrix} \frac{1}{(N/2 + 1 - i)^{K-1}} \quad (2.17)$$

e então :

$$\sum_{i=1}^n x_i^{(K)} F_{N/2+1-i} = F\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right) + (-1)^{K+1} \alpha_K \frac{(N/2-K)!}{(N/2)!} + O\left(\frac{(N/2-K)!}{(N/2)!}\right) \quad (2.18)$$

fixando $k = N/2$, $\alpha = (\ln 2)/T$ e usando (2.15) obtém-se a expressão para F_a :

$$F_a = \sum_{i=1}^{N/2} x_i^{(N/2)} F_{N/2+1-i} = \frac{\ln 2}{T} \sum_{i=1}^N v_i P\left(\frac{\ln 2}{T} i\right) \quad (2.19)$$

com

$$v_i = (-1)^{N/2+i} \sum_{k=\frac{i+1}{2}}^{\min(i, N/2)} \frac{k^{N/2} (2k)!}{(N/2-k)! k! (k-1)! (i-k)! (2k-1)!}$$

Teoricamente, F_a torna-se mais precisa com o aumento de N . Entretanto, na prática, erros de arredondamento pioram os resultados se N for muito grande, porque a matriz V_i assume valores cada vez maiores. Para dado $P(s)$ e T , o N para o qual a precisão é máxima, cresce com o número de algarismos significativos usado. Para um computador com precisão fixa, o valor ótimo de N é o menor. Uma $F(t)$ oscilante certamente não é suave o suficiente a não ser que o comprimento de onda das oscilações seja grande comparado com a meia largura do pico que $f_{N/2}(\frac{\ln 2}{T}, t)$ tem em T . O termo "suave" caracteriza uma taxa de

convergência muito grande. Nenhum resultado preciso deverá ser esperado se $F(t)$ tiver descontinuidades perto de t . Se $F(t)$ comportar-se igualmente nas vizinhanças de dois diferentes valores de T , o resultado para o menor valor de T será o melhor, porque o pico de $f_n(\frac{\ln 2}{T}, t)$ amplia-se com o aumento de T .

Ao testar seu algoritmo para algumas funções, Stehfest [41] percebeu que com o aumento de N , o número de algarismos significativos corretos primeiro cresceu quase linearmente e então, devido a erros de arredondamento, decresceu linearmente mostrando com isso que o valor ótimo de N é aproximadamente proporcional ao número de dígitos do computador no qual se trabalha. Segundo observação deste autor, com dupla precisão e $N=18$, o número de significativos corretos é o dobro comparado com $N=10$ e simples precisão.

2.4-MÉTODO DE PIESSENS

O algoritmo elaborado por Robert Piessens [41] inverte numericamente uma transformada de Laplace, baseando-se na aproximação de transformadas através do truncamento de séries de funções ortogonais, relacionadas aos polinômios de Jacobi e também aos de Laguerre. Todavia, Piessens [31], já havia proposto o uso dos polinômios de Jacobi e na prática restringiu sua atenção ao caso especial dos polinômios de Chebyshev.

2.4.1-Equações Empregadas

Consideremos que $F(p)$ seja a transformada de Laplace de $f(t)$, que $f(t)$ seja analítica para $\text{Re}(p) > c$ e assumindo a existência de um parâmetro $a > 0$, tal que $p^a F(p)$ tenha uma singularidade removível no infinito. Então existe a seguinte expansão :

$$F(p + c) = p^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} ' c_k T_k \left(1 - \frac{b}{p} \right) \quad (2.20)$$

onde o símbolo (') na somatória representa que o primeiro termo da série está multiplicado pelo fator $1/2$. Sendo b um parâmetro arbitrário positivo e $T_k(x)$ um polinômio de Chebyshev de primeira espécie e de grau k .

A partir do truncamento da série representada em (2.20) após o termo $M+1$, tem-se uma aproximação de $F(p)$ através dos mínimos quadrados sobre o intervalo $[b/2, \infty)$. Invertendo a série (2.20) termo a termo chega-se a equação:

$$f(t) = \exp(ct) \frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k \left(\frac{b t}{2} \right) \quad (2.21)$$

com

$$\phi_k(x) = {}_2F_2 \left[\begin{matrix} -k, k \\ \frac{1}{2}, a \end{matrix} ; x \right] \quad (2.22)$$

onde $\phi_k(x)$ é uma função hipergeométrica generalizada.

As equações (2.21) e (2.22) descritas acima, foram obtidas através de uma generalização feita por Piessens [41], na qual o autor considerou inicialmente a expansão de $F(p)$ como função de um polinômio de Jacobi.

2.4.2-Cálculo dos Coeficientes do Polinômio de Chebyshev

A expressão que fornece os coeficientes c_k é descrita abaixo, onde N é o número de coeficientes que se deseja calcular:

$$c_k \cong \frac{2}{N} \sum_{m=0}^N {}''\psi \left[\cos \frac{\pi m}{N} \right] \cos \left(\frac{\pi m}{N} \right) \quad (2.23)$$

onde

$$\psi(u) = \left[\frac{b}{1-u} \right]^a F \left[\frac{b}{1-u} \right] \quad (2.24)$$

Na expressão (2.23), o símbolo (') na somatória, indica que o primeiro e o último termo da série são multiplicados por (1/2).

2.4.3-Determinação dos Polinômios $\phi_k(x)$

Uma vez calculados os coeficientes c_k , $k = 0, 1, 2, \dots$ não há maiores dificuldades teóricas para a determinação da série representada em (2.25). Assim, usando a fórmula de recorrência :

$$\phi_n = (A_n + B_n x) \phi_{n-1} + (C_n + D_n x) \phi_{n-2} + E_n \phi_{n-3} \quad (2.26)$$

onde

$$A_n = \frac{3n^2 - 9n + an - 3a + 6}{(n+a-1)(n-2)}$$

$$B_n = \frac{-4}{n+a-1}$$

$$C_n = \frac{3n^2 - 9n - an + 6}{(n+a-1)(n-2)}$$

$$D_n = \frac{4(n-1)}{(n+a-1)(n-2)}$$

$$E_n = \frac{(n-1)(n-a-2)}{(n+a-1)(n-2)}$$

sendo que os primeiros ϕ_k 's são :

$$\phi_0(x) = 1$$

$$\phi_1(x) = 1 - \frac{2x}{a}$$

$$\phi_2(x) = 1 - \frac{8x}{a} + \frac{8}{a(a+1)^2} x^2$$

2.4.5-Escolha dos Parâmetros Livres

Conforme recomendação do autor [31,41], os parâmetros livres do algoritmo devem ser adotados conforme critérios específicos.

Parâmetro a : A fim de haver uma boa convergência de (2.20), o parâmetro a deve ser determinado tal que :

$$F(p) \approx p^{-a}, \quad p \rightarrow \infty$$

entretanto, o valor de a não existe em todos os casos.

Parâmetro b : O valor de b determina o tamanho do intervalo para o qual a expansão (2.20) é válida. Este intervalo

é $[b/2, \infty]$. Se b é pequeno, então $F(p)$ é aproximada num intervalo grande e melhores resultados podem ser esperados mas, por outro lado, a convergência da série representada por (2.20) é mais lenta e mais termos podem ser necessários. Desta forma, o tempo de computação será aumentado.

Parâmetro c : este parâmetro deve ser um número real, tão pequeno quanto possível, de modo que $F(p)$ seja analítica na metade do plano onde $\text{Re}(p) > c$ do plano complexo.

Parâmetro a_s : deve ser um número real assumindo o valor do limite :

$$a_s = \lim_{p \rightarrow \infty} p^a F(p)$$

apresentando uma singularidade removível no infinito.

Parâmetro $N_{\max}$: corresponde ao número de coeficientes de Chebyshev com os quais será efetuada a inversão.

Os algoritmos apresentados e seus parâmetros livres estão descritos no apêndice A.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÃO DOS MÉTODOS DE INVERSÃO NA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA INVERSO DE CONDUÇÃO

Os métodos de inversão de Transformadas de Laplace apresentados anteriormente, serão agora utilizados na solução de um exemplo de problema inverso de condução do calor. No exemplo a ser analisado, anteriormente considerado por Woo e Chow [23], procurou-se determinar a temperatura na superfície de uma placa plana de espessura conhecida e isolada em uma de suas extremidades. Neste exercício teórico, os dados da variação da temperatura com o tempo no interior da placa, ao invés de medidos, são gerados a partir de uma solução conhecida, pela resolução da equação da condução do calor. Desta forma, os dados exatos da temperatura interior são usados na determinação da temperatura na fronteira do corpo. A Figura 3.1 representa a geometria do problema em análise :

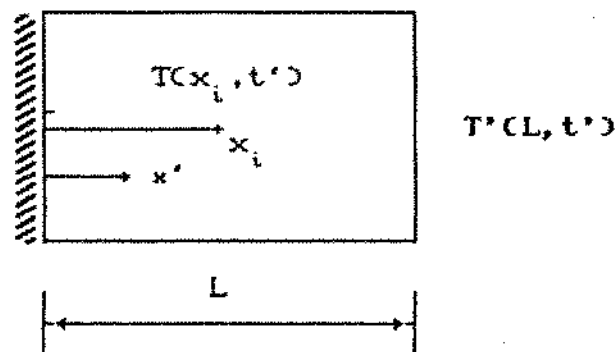


Figura 3.1- Representação do problema inverso.

Nesta figura, x_i é o ponto onde é conhecida a temperatura interior da placa e $T'(L,t)$ é a temperatura que se deseja encontrar. A equação da condução do calor é representada abaixo :

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x'^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T'}{\partial t'} \quad (3.1)$$

onde α é a difusividade térmica. A condição inicial, a de contorno e a condição apresentada no interior do corpo são, respectivamente :

$$T'(x', 0) = 0$$

$$\frac{\partial T'(x', t')}{\partial x'} = 0 \quad \text{em } x' = 0$$

$$T'(x_i, t') = T_m(t') \quad \text{em } x' = x_i$$

onde $T_m(t')$ é a temperatura medida em x_i .

Para a geração de $T_m(t')$ obtida no ponto x_i é necessário que se considere um perfil de distribuição da temperatura na superfície. Por exemplo, consideremos que a temperatura $T'(L, t')$ assuma o comportamento semelhante ao de uma reta :

$$T'(L, t') = ct' \quad (3.2)$$

Com isso, pode-se determinar a temperatura no interior da placa através da resolução da equação da energia representada em (3.1). A adimensionalização das variáveis envolvidas no problema pode ser feita através de :

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{x'}{L} \\ t &= \frac{\alpha t'}{L^2} \\ T &= \frac{\alpha T'}{cL^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Substituindo (3.3) em (3.1), chegamos à equação da condução adimensionalizada com as seguintes condições inicial e de contorno :

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial T}{\partial t} \\ T(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &= 0 \quad \text{em } x=0 \\ T(L, t) &= t \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

Tal como mostrado por Carslaw e Jaeger [43], a solução analítica do problema proposto conduz à seguinte expressão :

$$T(x,t) = t + \frac{1}{2} (x^2 - 1) +$$

$$- \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \exp \left[-(2n-1)^2 \pi^2 \frac{t}{4} \right] \cos \frac{(2n-1)}{2} \pi x \quad (3.5)$$

A equação (3.5) representa a solução do problema direto. Ao substituir $x = \frac{1}{2}$, no caso de se tomar $x_i = \frac{L}{2}$ como exemplo, em (3.5) estarão sendo gerados os dados da temperatura interior da placa :

$$T(\frac{1}{2}, t) = t - 0.375 +$$

$$- \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \exp \left[-(2n-1)^2 \pi^2 \frac{t}{4} \right] \cos \frac{(2n-1)}{4} \pi \quad (3.6)$$

Considerando a definição de transformada de Laplace dada pela equação (2.1), pode-se calcular a transformada de Laplace da equação (3.5):

$$\bar{T}(x,s) = \frac{1}{s^2} \frac{\cosh (x s^{1/2})}{\cosh (s^{1/2})} \quad (3.7)$$

Tomando $x = \frac{1}{2}$ em (3.7), tem-se a transformada de Laplace da temperatura interior, cuja distribuição, no espaço real, é conhecida em (3.6) :

$$\bar{T}(\frac{1}{2}, s) = \frac{1}{s^2} \frac{\cosh (\frac{1}{2} s^{1/2})}{\cosh (s^{1/2})} \quad (3.8)$$

Para a resolução do problema inverso da condução do calor, é necessário determinar uma expressão que represente a transformada de Laplace da temperatura no corpo em função da transformada de Laplace da temperatura histórica medida em seu interior. Tal expressão pode ser determinada a partir da divisão de (3.7) por (3.8) :

$$\bar{T}(x,s) = \bar{T}\left(\frac{1}{2},s\right) \frac{\cosh\left(x s^{1/2}\right)}{\cosh\left(\frac{1}{2} s^{1/2}\right)} \quad (3.9)$$

Ao substituir $x=1$ na equação (3.9), obtém-se a expressão da temperatura da placa, no espaço de Laplace, avaliada na fronteira de interesse. Assim, conhecendo-se $\bar{T}(1/2,s)$, o problema estará resolvido com a transformação inversa. Neste exemplo, a expressão (3.9) pode ser ainda mais simplificada, já que pode-se assumir uma transformação exata de $T(1/2,t)$ - equação (3.6) - a qual é fornecida por (3.8). Substituindo (3.8) em (3.9), com $x=1$, vem :

$$\bar{T}(1,s) = \frac{1}{s^2} \quad (3.10)$$

que coerentemente expressa a transformada de Laplace da condição de temperatura - equação (3.2) - então suposta $T(L,t) = t$ na face $x' = L$.

Aplicando-se os algoritmos de inversão de transformada

na eq.(3.10), teremos a resolução do problema inverso proposto.

Na Tabela 3.1, para o método de Crump, os valores da transformada inversa foram gerados com apenas 21 termos da série de Fourier e os parâmetros $\alpha=0.0$ e $\text{err}=10^{-6}$. Os resultados para o método de Stehfest indicados nesta tabela, foram obtidos usando $N=18$. Os parâmetros de entrada no algoritmo de Piessens observados nesta mesma tabela foram : $a=2.0$, $b=0.125$, $cc=0.0$, $as=1.0$ e $n_{\text{max}}=10$ (n_{max} é o número de coeficientes de Chebyshev necessários na inversão).

Tabela 3.1- Comparação da temperatura original com valores obtidos por inversão.

t	TC(1,t)	MÉTODOS DE INVERSÃO		
		CRUMP	STEHFEST	PIESSENS
0.1	0.1	0.10000023	0.09999999	0.10000000
0.2	0.2	0.20000045	0.19999998	0.20000000
0.3	0.3	0.30000105	0.29999998	0.30000000
0.4	0.4	0.40000091	0.39999996	0.40000000
0.5	0.5	0.50000172	0.49999995	0.50000000
0.6	0.6	0.60000211	0.59999996	0.60000000
0.7	0.7	0.70000099	0.69999993	0.70000000
0.8	0.8	0.80000181	0.79999992	0.80000000
0.9	0.9	0.90000506	0.89999999	0.90000000
1.0	1.0	1.00000345	0.99999999	1.00000000

Pelos resultados mostrados na Tabela 3.1, pode-se verificar a excelente aproximação obtida com o emprego dos três métodos de inversão de transformadas de Laplace para a solução do problema. Neste exemplo, apenas os métodos de inversão tem seu poder avaliado, já que supõe-se o conhecimento exato da temperatura no interior do corpo, bem como da transformada exata

do perfil daquela temperatura.

No exemplo de problema inverso, resolvido por Transformada Inversa de Laplace, o problema reduziu-se a inverter uma função. Neste caso, assumiu-se como conhecida e de forma exata a variação da temperatura no ponto interior do corpo sólido. O exemplo trata de uma configuração unidimensional cartesiana, com uma das extremidades isolada e outra a uma temperatura conhecida. A redução do problema à inversão de uma função, no entanto, vale para qualquer que seja a configuração, o modelo e as condições de contorno.

CAPÍTULO 4

PERTURBAÇÃO NA SUPERFÍCIE

Considerando o que foi exposto no capítulo anterior, é de interesse testar os algoritmos na inversão das funções mais comuns nos problemas práticos de engenharia. Uma forma mais abrangente e geral neste processo é a de testar os algoritmos em funções representativas críticas.

A função pulso pode, neste sentido, ser considerada como crítica, pois o método de inversão capaz de reproduzir um pulso estará apto também a reproduzir qualquer função por superposição, a medida que toda a metodologia se refere a problemas lineares. Há de se ressaltar ainda que a função pulso possui também o aspecto da variação brusca e discreta comum nas medidas experimentais, normalmente realizadas em intervalos de tempo definidos.

4.1- A Função Pulso :

Sendo $G(t)$ a função pulso a ser analisada, pode-se descrever o seu comportamento segundo a expressão :

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t_0 < t < (t_0 + \varepsilon) \\ 0, & t > (t_0 + \varepsilon) \end{cases} \quad (4.1)$$

A representação cartesiana da função pulso será :

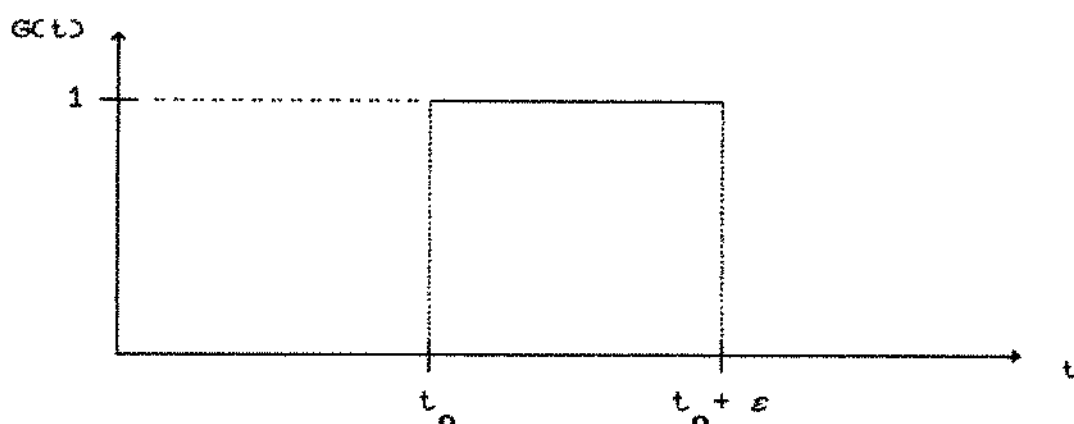


Figura 4.1- Representação cartesiana da função pulso.

onde : t_0 = instante de ocorrência do impulso e

ε = duração do impulso.

A transformada de Laplace $\bar{G}(s)$ da função pulso é dada pela seguinte expressão :

$$\bar{G}(s) = G(s) = \frac{\exp(-t_0 s) [1 - \exp(-\varepsilon s)]}{s} \quad (4.2)$$

No capítulo anterior, considerou-se que o perfil de temperatura na superfície assumiu o comportamento semelhante ao de uma reta e notou-se que a resolução do exemplo tratado reduziu-se à inversão de uma função no espaço de Laplace, independentemente da configuração adotada ou de suas condições de contorno. Com o propósito de ressaltar a utilidade do emprego de funções críticas em problemas práticos, o perfil de temperatura na superfície a ser adotado neste exemplo, assumirá o comportamento semelhante ao de um pulso.

A resolução do problema direto fornece uma equação que representa a distribuição da temperatura no sólido a partir do conhecimento do perfil de temperatura na fronteira do corpo :

$$T(x,t) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\lambda_m} \cos(\lambda_m x) \left[e^{-\lambda_m^2 [t-(t_0 + \epsilon)]} - e^{-\lambda_m^2 (t-t_0)} \right] \quad (4.3)$$

com $t_0 > t + \epsilon$ e onde $\lambda_m = \frac{(2m+1)}{2} \pi$

que é a resposta no interior do corpo ao impulso de temperatura dado na superfície.

A transformada de Laplace analítica da equação (4.3) será :

$$\bar{T}(x,s) = \frac{\exp(-t_0 s) [1 - \exp(-\epsilon s)]}{s} \frac{\cosh(x s^{1/2})}{\cosh(s^{1/2})} \quad (4.4)$$

Tomando-se $x=x_i$ na equação (4.4), obtém-se a transformada de Laplace analítica da temperatura interior do corpo :

$$\bar{T}(x_i, s) = G(s) \frac{\cosh(x_i s^{1/2})}{\cosh(s^{1/2})} \quad (4.5)$$

onde $G(s)$ é a transformada da função pulso.

A equação (4.5) é a transformada de Laplace analítica da resposta, no interior do corpo, ao pulso dado na superfície.

Sabe-se que nos problemas de condução do calor inverso é necessário que se encontre uma expressão da transformada de Laplace da temperatura, no ponto onde se quer calcular, que leve em consideração a condição de contorno num ponto interior do corpo. Assim, a divisão de (4.4) por (4.5), fornece a distribuição da temperatura da placa em função da temperatura no interior, no espaço de Laplace :

$$\bar{T}(x, s) = \bar{T}(x_i, s) \frac{\cosh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})} \quad (4.6)$$

Assumindo o conhecimento de uma transformação exata para $\bar{T}(x_i, s)$, dada pela substituição de x por x_i na equação (4.3) e substituindo (4.5) em (4.6), com $x=1$ (fronteira de interesse), chega-se a :

$$\bar{T}(1, s) = G(s) \quad (4.7)$$

que representa a transformada de Laplace do pulso dado na superfície. A expressão (4.7) é coerente com as considerações feitas na abordagem do capítulo anterior, quando o problema colocado reduziu-se à inversão de uma função no espaço de Laplace.

4.2- Poder de Resolução de um algoritmo :

Pode-se definir como poder de resolução a capacidade que um algoritmo de inversão possui para a reprodução de um pulso. Um método que suavize este impulso não estará apto a estimar corretamente mudanças rápidas da temperatura ou do fluxo de calor com exatidão. Da mesma forma, o algoritmo que atrase ou adiante as variações representadas pelo pulso terá problemas em oferecer elementos corretos de análise. Nestas situações podemos dizer que o algoritmo possui baixo poder de resolução. Neste trabalho procura-se estabelecer formas de quantificar o poder de resolução dos algoritmos, examinando a influência da permanência ou duração da perturbação sobre o desempenho dos procedimentos numéricos.

Para tanto, define-se um parâmetro com o propósito de traduzir a diferença entre a amplitude do pulso original e a amplitude do pulso ou sinal reproduzido por um determinado algoritmo. Esta quantidade será denominada desvio de amplitude (δ_A) :

$$\delta_A = 1 - \hat{Q}^{\max} \quad (4.8)$$

onde $\hat{Q}^{\max}$ é o máximo valor estimado da função, não importando o momento de ocorrência do valor máximo.

Outra medida do poder de resolução dos métodos de inversão deve ser feita para avaliar as variações devidas a avanços ou atrasos na reprodução do pulso. Tal medida pode ser obtida através da estimativa de erros relativos, ou seja, pela raiz quadrada da soma dos desvios dos valores estimados em relação aos valores exatos. Este parâmetro será chamado de desvio de fase (σ_f) :

$$\sigma_f = \left[\frac{1}{m-1} \sum_{n=1}^m (Q^n - \hat{Q}^n)^2 \right]^{1/2} \quad (4.9)$$

onde m representa o número total de pontos utilizados na inversão, Q^n são os valores reais e $\hat{Q}^n$ os valores estimados.

Comparando-se as expressões (4.8) e (4.9), pode-se verificar que δ_A não leva em conta um possível atraso do sinal, mas somente expressa sua amplitude, enquanto que σ_f permite que se faça observações sobre o comportamento do sinal em todo o domínio do tempo. Estabelecidos estes parâmetros de quantificação do poder de resolução dos algoritmos, passaremos a abordar o desempenho de cada procedimento.

Os testes a serem realizados terão como modelo um pulso de amplitude unitária que deverá ser reproduzido pelos métodos de inversão adotados.

Na primeira sequência de testes é investigado o comportamento dos algoritmos, considerando que o pulso a ser

reproduzido ocorrerá num domínio com início na origem. Posteriormente, o domínio será alterado, de modo que o intervalo investigado esteja deslocado em relação à origem. O propósito é então verificar possíveis efeitos da variação na magnitude da variável tempo sobre os resultados da inversão.

Na segunda bateria de testes, são observados os resultados obtidos pelos métodos a partir da variação do tamanho do pulso gerado, mantendo-se o domínio constante.

A Tabela 4.1 mostra os valores ótimos atribuídos aos parâmetros livres de entrada em cada um dos algoritmos analisados. A escolha dos parâmetros foi feita de acordo com as recomendações dos autores dos procedimentos. Vários ensaios foram feitos com outros valores possíveis, sendo que os indicados na Tabela 4.1 levaram a resultados de maior precisão.

Tabela 4.1-Parâmetros empregados pelos algoritmos.

CRUMP	STEHFEST	PIESSENS
alpha = 0.0		a = 1.0 cc = 0.0
err = 10^{-4}	N = 18	b = 0.125 as = 1.0
		NMAX = 50

4.3 - TESTE 1 : Variação do Domínio :

Nesta sequência de testes, é investigado o comportamento dos algoritmos quando alteramos o intervalo total onde se deseja reproduzir o pulso. A Tabela 4.2 resume os resultados representados pelos desvios produzidos pelos diferentes algoritmos de inversão, em dois domínios distintamente posicionados.

Tabela 4.2- Desvios de amplitude e fase em domínios diferentes.

CASO	DOMÍNIO		CRUMP	STEHFEST	PIESSENS
1	[0.0;0.11]	δ_A	0.000	0.495	0.883
		σ_f	0.096	0.214	0.285
2	[1.0;1.11]	δ_A	-0.108	0.972	0.983
		σ_f	0.110	0.297	0.300

Uma vez que na solução de problemas práticos de engenharia é comum a utilização de variáveis adimensionais, o domínio de tempo a ser analisado neste estudo envolverá coerentemente valores da variável tempo na faixa 0.00- 0.11. A inversão é feita em pontos discretos da função. Não há para a inversão de Laplace nenhum impedimento quanto ao número de pontos a serem estimados, diferentemente do que ocorre nos procedimentos estritamente numéricos de diferenças finitas. Como procedimento

geral, discretizamos o domínio em um número igual de pontos, num valor adequado para uma representação contínua da função. Neste teste a inversão é realizada utilizando 55 pontos igualmente espaçados.

Para uma melhor ilustração da capacidade de resolução dos algoritmos, os resultados produzidos nos ensaios estão dispostos na forma de gráficos. A Figura 4.2 justapõe as curvas obtidas pelos métodos de cálculo e a curva exata original para o domínio [0.0-0.11]. Analogamente, a Figura 4.3 dispõe as curvas relativas ao domínio [1.0-1.11]. Observe-se que a extensão do domínio foi mantida constante, de forma a isolar o efeito de deslocamento do domínio sobre os resultados.

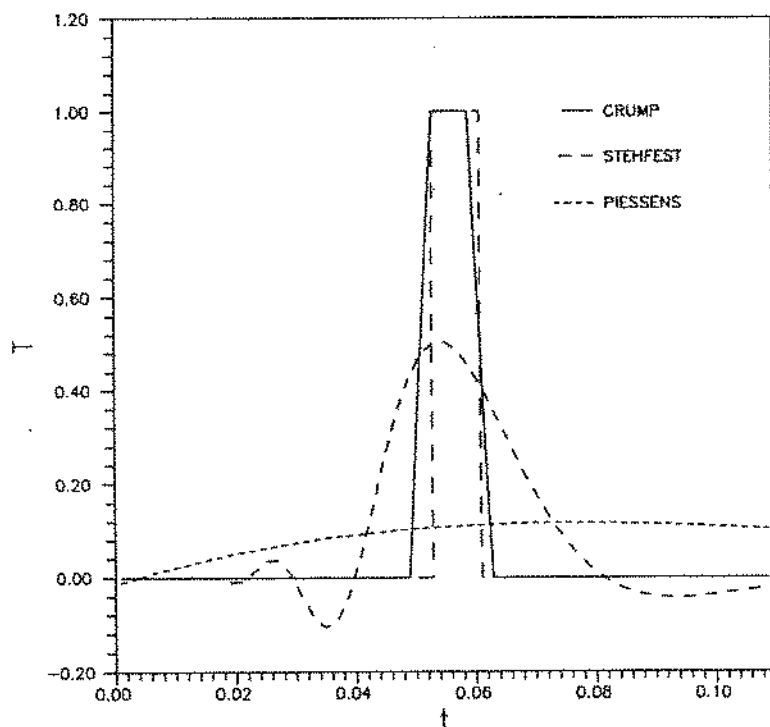


Figura 4.2- Pulsos original e invertido no Domínio do Caso 1.

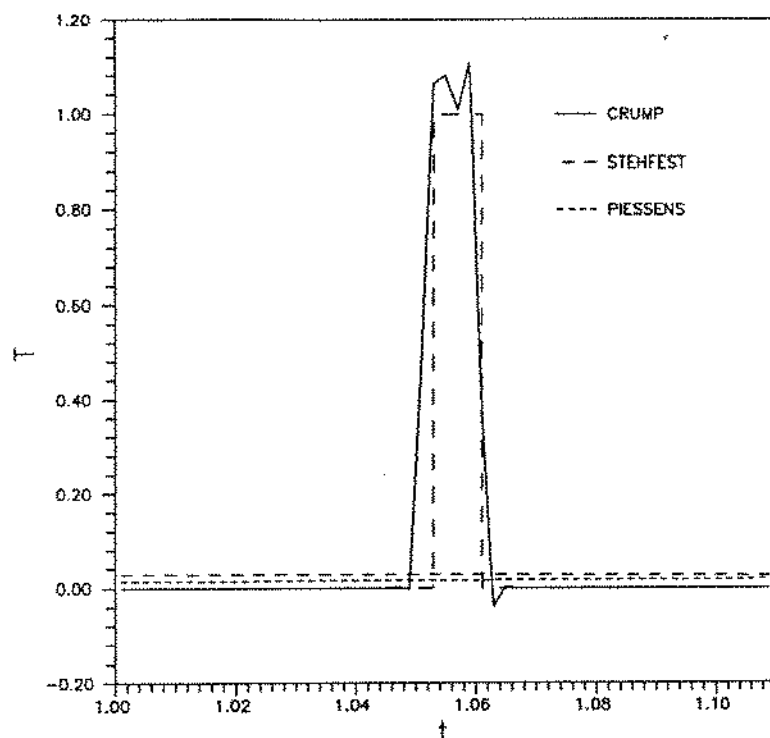


Figura 4.3 - Pulsos original e invertido no Domínio do Caso 2.

Das observações feitas nas Figuras 4.2 e 4.3, pode-se notar, com o auxílio da Tabela 4.2, que nos dois domínios considerados, o método de Crump reproduziu o pulso. Entretanto, a amplitude do sinal gerado na Figura 4.3 é maior que a unidade, implicando num valor de $\delta_A = -0.108$ (Tabela 4.2). Percebe-se também, na mesma Figura 4.3, uma pequena oscilação dos valores estimados no final do pulso; fato que não ocorreu quando da investigação no domínio anterior. O valor de δ_A , fornecido pelo algoritmo de Stehfest na Figura 4.2, foi menor que o da Figura 4.3, visto que nesta última o sinal não foi reproduzido. Esta é também a razão de σ_f , na Figura 4.3, ser maior que o da outra representação. Os valores dos desvios e amplitudes relativas, apresentados pelo método de Piessens, mostram que houve pouca

variação de σ_f . Na Figura 4.3, o algoritmo nem ao menos apresenta indícios de reprodução do pulso, ocorrência que pode ser verificada observando-se a diferença entre os valores do desvio de amplitude apresentados.

4.4-TESTE 2 : Duração do Pulso

Este teste tem o objetivo de analisar o comportamento dos métodos de inversão em situações de tamanho de pulso diferentes, ou seja, para diferentes durações do pulso a ser reproduzido. Sua importância está relacionada com as variações bruscas das medidas experimentais utilizadas em problemas práticos. O método que melhor conseguir reproduzir um pulso de pequena duração, mais sensível será à ocorrência de variações abruptas em medidas realizadas nos problemas práticos. O domínio de realização do teste foi mudado para $[0,0.2]$, o que pode ser observado nas Figuras 4.4, 4.5. e 4.6, para que fosse possível a reprodução do sinal, no caso de investigarmos pulsos de duração maior. O teste foi realizado utilizando 200 pontos igualmente espaçados e foram considerados os mesmos parâmetros empregados na Tabela 4.1 .A Tabela 4.3 indica os valores do desvio de amplitude e de fase para três casos de duração de pulso distintos.

Tabela 4.3- Desvios de amplitude fase para diferentes durações de pulso.

CASO	PULSO		CRUMP	STEHFEST	PIESSENS
3	0.001	δ_A	0.499	0.970	0.991
		σ_f	0.050	0.098	0.100
4	0.01	δ_A	0.000	0.710	0.909
		σ_f	0.050	0.192	0.229
5	0.1	δ_A	0.000	-0.083	0.259
		σ_f	0.051	0.177	0.477

As Figuras 4.4 a 4.6, mostram o desempenho dos procedimentos em estudo na reprodução de funções pulso com durações distintas por um fator 10.

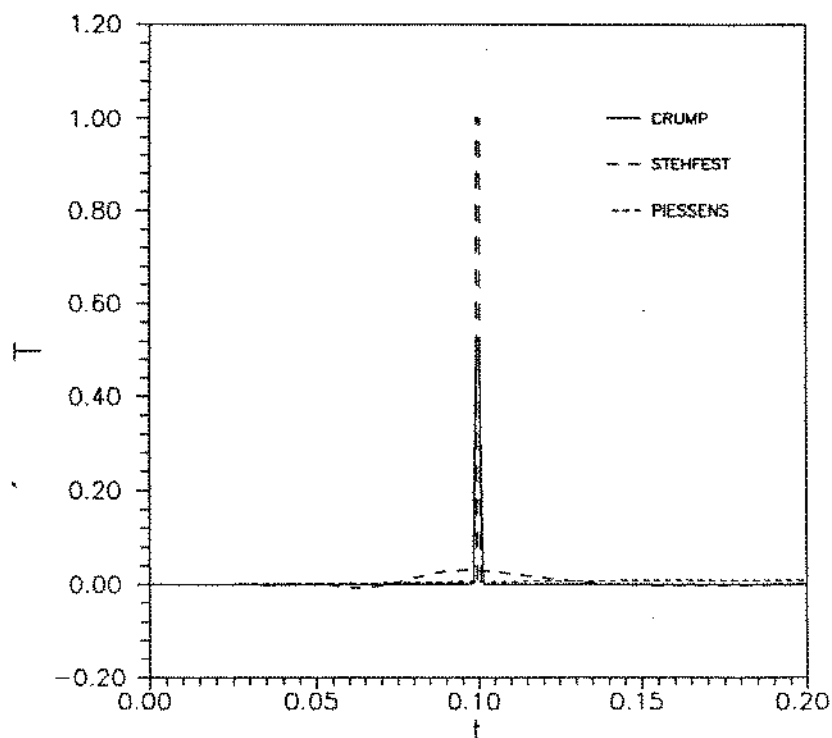


Figura 4.4- CASO 3 - Pulsos original e invertido com duração de pulso 0.001.

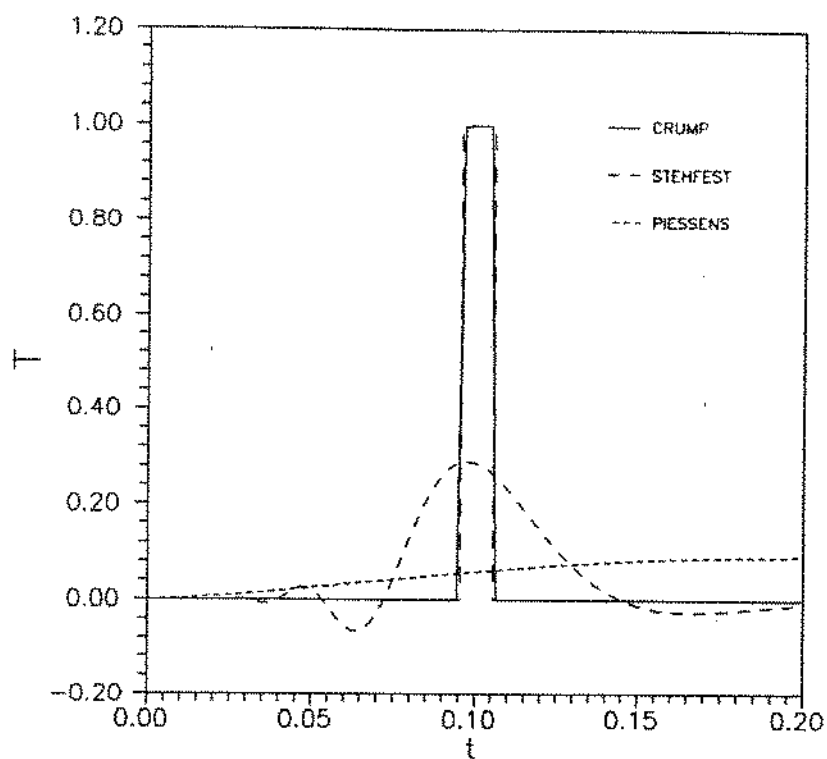


Figura 4.5- CASO 4 - Pulsos original e invertido com duração de pulso 0.01.

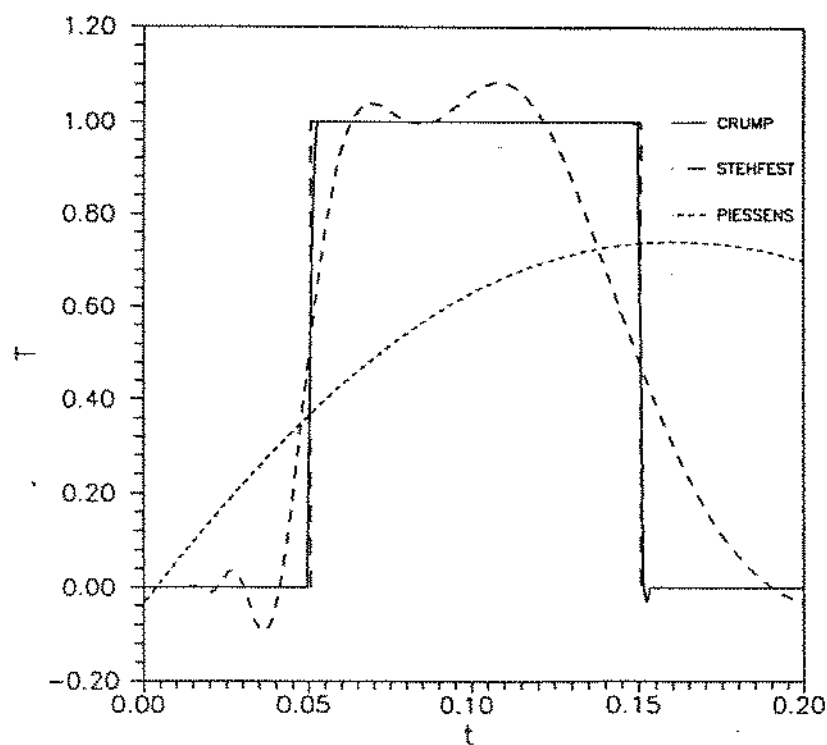


Figura 4.6- CASO 5 - Pulsos original e invertido com duração de pulso 0.1.

A Tabela 4.3, que apresenta os valores de δ_A e σ_f , obtidos nos casos 3, 4 e 5, mostra que com os pulsos de duração 0.01 e 0.1, o método de Crump apresenta resultados bastante satisfatórios, inclusive com $\delta_A = 0.00$. Quando a duração do sinal é diminuída para 0.001, o algoritmo fornece resultados menos precisos, mas em todos os casos σ_f não varia.

O algoritmo de Stehfest mostra seu melhor resultado no caso 5, fornecendo um valor de δ_A próximo de zero. Comparando as Figuras 4.5 e 4.6 com relação ao método de Stehfest nota-se que aumentando o tamanho do pulso de 0.01 para 0.1, o valor de σ_f diminui, mas percebe-se uma diferença significativa entre os δ_A mostrados.

Dos resultados do teste de duração do pulso, vê-se que o algoritmo de Piessens é mais sensível ao sinal para pulsos mais longos, mas ainda assim não consegue reproduzir o pulso no domínio considerado.

O método de Crump obteve a aproximação mais precisa da função pulso, embora o sinal reproduzido por este método esteja deslocado para a esquerda, o que fez com que o pulso se iniciasse antes do previsto. Este deslocamento para a esquerda na aproximação teve influência sobre o valor de σ_f . A amplitude do sinal gerado neste método atingiu valores próximos de 1, fato que pode ser verificado nas Tabelas 4.1 e 4.3, onde encontram-se valores de δ_A bastante pequenos.

Na aplicação do algoritmo de Stehfest, observa-se a ocorrência de oscilações na reprodução da função nas regiões próximas ao pulso (Figuras 4.2 - 4.6), com um adiantamento do mesmo. Após o sinal, a função estimada assumiu valores negativos,

para no final do domínio representado, estabilizar novamente em torno de zero.

Na aproximação feita pelo método de Piessens, o pulso inicia-se em valores próximos da origem, implicando em amplitudes pequenas, o que se traduz em valores de δ_A elevados. Nota-se também, que o domínio adotado é insuficiente para representar completamente a função reproduzida pelo algoritmo, já que no intervalo considerado o sinal não está completo, o que resulta num elevado valor de σ_f .

Sobre o teste do domínio, observa-se que ao analisar um intervalo deslocado em relação à origem, os métodos de Stehfest e de Piessens não apresentam resultados satisfatórios. A alteração dos valores de δ_A e de σ_f a partir da variação do domínio da Figura 4.2 para o da Figura 4.3, segundo o método de Crump, mostra que o sinal gerado é menos preciso no domínio deslocado da origem.

Do teste da duração do sinal, pode-se concluir que quando aumenta-se o tamanho do pulso, os métodos de Crump e de Stehfest ganham em poder de resolução, pois os valores de δ_A diminuem (Tabela 4.3). Para estes algoritmos quanto mais longo o sinal na função a ser invertida, maior será a sensibilidade em reproduzi-lo.

Pelos resultados alcançados nos dois testes, foi observado que o método de Crump apresenta os melhores resultados mesmo em situações consideradas severas, como as que foram apresentadas na forma de um sinal de pequena duração, por exemplo 0.001, ou num domínio deslocado em relação à origem.

4.5- Normalização do Desvio de Fase

O fato de os testes 1 e 2 terem sido realizados sobre domínios de extensões diferentes, impede que se faça comparações entre os valores de σ_f determinados. Propõe-se então, uma normalização do desvio de fase, que permita comparar os valores obtidos através de inversões da função, feitas em domínios diferentes. A expressão proposta para o desvio de fase normalizado vem a ser :

$$\sigma'_f = \left[\frac{1}{(m-1) \frac{d}{\rho}} \sum_{n=1}^m (Q^n - \hat{Q}^n)^2 \right]^{1/2} \quad (4.10)$$

onde : d = extensão do domínio a ser normalizado ;

ρ = extensão do domínio padrão e

m = número de pontos usados no domínio padrão.

Comparando-se (4.9) com (4.10) chega-se a:

$$\sigma'_f = \frac{\sigma_f \rho}{d} \quad (4.11)$$

Como exemplo de aplicação da normalização do desvio de fase, pode-se considerar uma expansão no domínio representado na Figura 4.2 de [0.0, 0.11] para [0.0,0.20]. Nesta situação encontra-se :

$$d = 0.20$$

$$\rho = 0.11$$

$$\text{da Tabela 4.2} \longrightarrow \sigma'_f = \begin{cases} 0.096 \text{ (Crump)} \\ 0.214 \text{ (Stehfest)} \end{cases}$$

Do emprego da expressão (4.11) vem :

$$\sigma'_f = 0.052 \text{ (Crump)}$$

$$\sigma'_f = 0.117 \text{ (Stehfest)}$$

Considerando que (4.10) é o resultado de uma expansão do domínio padrão (p), deve-se notar que σ'_f só será válida se em ($d-p$), ou seja, no intervalo de expansão, tivermos $Q^n - \hat{Q}^n = 0$. Esta padronização elimina a influência de extensão do domínio sobre o parâmetro do desvio de fase. Pode-se confirmar, com os resultados acima descritos, que a extensão de domínio não tem efeito sobre o desempenho do algoritmo, como erroneamente poderiam ser interpretados os valores diferentes do desvio de fase nestes casos.

CAPÍTULO 5

A PROPAGAÇÃO DO ERRO DAS MEDIDAS DE TEMPERATURA INTERNA

Neste capítulo estuda-se a sensibilidade dos algoritmos de inversão a erros de medição. A relevância desta questão, para o caso de um problema inverso de aplicações práticas, está relacionada à ocorrência de erros nas medidas da temperatura interna e sua influência ou propagação sobre a temperatura ou fluxo de calor, avaliados na posição de interesse.

Em aplicações práticas, a temperatura (T_m), medida no interior do corpo, é uma função do tempo e contém erros de diferentes naturezas e magnitudes. Em geral, a precisão dos sensores de temperatura são menores que a dos cronômetros disponíveis, razão porque, nesta análise, apenas os erros de temperatura são objetos de verificação. Para simplicidade, foi considerado o caso em que todas as temperaturas medidas são nulas, exceto num instante t , onde a mesma assume o valor unitário. Ou seja, T_m tem o comportamento de uma função impulso de amplitude unitária. Pode-se considerar, neste caso, a temperatura histórica como um erro de magnitude igual a 1, no instante em que ocorre o pulso. Note-se que, caso tal erro não estivesse presente nas medidas de T_m , todas as temperaturas seriam nulas e o fluxo de calor ou a temperatura avaliados na fronteira da placa ($x = L$), seriam igualmente nulos. Neste sentido, no problema inverso em análise, o fluxo de calor estimado está baseado no conhecimento da temperatura interior

e mostra a propagação de um erro simples. A magnitude do distúrbio causado na temperatura calculada da superfície, depende da sensibilidade do método de inversão à introdução de erros. Para tanto, necessita-se de um algoritmo que reúna um alto poder de resolução, sendo capaz de registrar adequadamente o distúrbio, considerando o instante no qual o mesmo ocorreu e a sua duração. Assim, quanto maior a sensibilidade do algoritmo, maior será sua possibilidade de captar o erro.

5.1- Solução do problema inverso proposto :

A solução do problema proposto, cuja geometria é a mesma que vem sendo analisada ao longo deste trabalho, pode ser determinada através da transformada de Laplace aplicada à equação da difusão e suas condições de contorno, já adimensionalizadas :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.1)$$

com condições :

$$\begin{aligned} \text{inicial} &: T(x, 0) = 0 \\ \text{isolada} &: \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{para } x=0 \\ \text{interior} &: T(x_i, t) = T_m(t) \end{aligned}$$

onde T, x e t estão adimensionalizados.

Aplicando-se a transformada de Laplace à equação da condução temos :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} = T(x,0) + s \bar{T}(x,s) \quad (5.2)$$

onde $\bar{T}(x,s)$ é a transformada de Laplace de $T(x,t)$. Na equação (5.2), temos da condição inicial que $T(x,0) = 0$, assim chegamos a :

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} - s \bar{T}(x,s) = 0 \quad (5.3)$$

que apresenta solução da forma :

$$\bar{T}(x,s) = A \sinh(x s^{1/2}) + B \cosh(x s^{1/2}) \quad (5.4)$$

Para determinarmos A e B é necessária a utilização das transformadas das condições de contorno.

Da condição de fronteira isolada :

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{Transformada de}} \quad \frac{\partial \bar{T}(0,s)}{\partial x} = 0 \quad (5.5)$$

derivando-se (5.4) em função de x encontra-se que :

$$\frac{\partial \bar{T}(x,s)}{\partial x} = A s^{1/2} \cosh(x s^{1/2}) + B s^{1/2} \sinh(x s^{1/2}) \quad (5.6)$$

substituindo (5.5) em (5.6) para $x = 0$, obtém-se $A=0$.

E da Condição no interior da placa :

$$T(x_i, t) = T_m(t) \xrightarrow[\text{Laplace}]{\text{Transformada de}} \bar{T}(x_i, s) = \bar{T}_m(s) \quad (5.7)$$

Lembrando que a transformada de Laplace de $T_m(t)$ é a função pulso dada pela equação (4.2) :

$$\bar{T}_m(s) = \frac{\exp(-t_0 s) [1 - \exp(-\varepsilon s)]}{s}$$

onde : t_0 = instante de ocorrência do erro (impulso) e

ε = duração do impulso (na prática, o intervalo de medidas no tempo)

Substituindo (5.7) em (5.4), para $x = x_i$, que é o ponto interior do corpo onde são medidas as temperaturas, obtém-se :

$$\bar{T}(x_i, s) = B \cosh(x_i s^{1/2})$$

ou seja :

$$B = \frac{\bar{T}_m(s)}{\cosh(x_i s^{1/2})}$$

Desta forma, a solução do problema é determinada substituindo-se A e B em (5.4) :

$$\bar{T}(x, s) = \bar{T}_m(s) \frac{\cosh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})} \quad (5.8)$$

Note-se que a expressão (5.8), fornece a distribuição da temperatura da placa em função da transformada de Laplace da temperatura interior que, no presente caso, assume a forma de uma função pulso, cuja influência procura-se determinar através da avaliação da temperatura e do fluxo de calor na fronteira da placa.

Ao substituir $x = 1$ em (5.8), teremos a expressão da temperatura da superfície da placa no espaço de Laplace :

$$\bar{T}(1, s) = \bar{T}_m(s) \frac{\cosh(s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})} \quad (5.9)$$

A derivada da equação (5.8) em função de x fornece o fluxo de calor na fronteira do corpo, onde ($x=1$):

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(1,s) = \bar{T}_m(s) s^{1/2} \frac{\sinh(s^{1/2})}{\cosh(x_1 s^{1/2})} \quad (5.10)$$

As expressões (5.9) e (5.10) exprimem a temperatura e o fluxo de calor no espaço de Laplace, avaliados na fronteira do corpo. A partir do conhecimento de $\bar{T}_m(s)$, pode-se avaliar a influência do erro nas medidas sobre o comportamento da temperatura, aplicando-se os métodos de inversão nas equações (5.9) e (5.10). Neste estudo assume-se, para efeito de exemplo, que as medidas da temperatura $T_m(t)$ foram realizadas no ponto $x_1=1/2$.

Com o propósito de comparar os resultados obtidos através da inversão das funções no espaço de Laplace, são determinadas as transformadas inversas analíticas das equações (5.9) e (5.10), que representam a temperatura e o fluxo de calor genérico, avaliados na superfície de interesse. Assim, torna-se possível quantificar a sensibilidade dos algoritmos através do emprego das variáveis δ_A e σ_f , o desvio de amplitude e o desvio de fase, respectivamente.

5.2-Inversão Analítica da Temperatura :

Substituindo a função pulso em (5.8), poderemos reduzi-la à soma de duas funções no espaço de Laplace :

$$\bar{T}(x,s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s} \frac{\cosh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})}$$

o que implica em :

$$\bar{T}(x,s) = F(s) = \underbrace{\frac{e^{-as}}{s} \frac{\cosh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})}}_{F_1(s)} - \underbrace{\frac{e^{-bs}}{s} \frac{\cosh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})}}_{F_2(s)} \quad (5.11)$$

onde a e b correspondem ao início e término do pulso. O cálculo da transformada inversa analítica será realizado através do teorema dos resíduos. Assim, considera-se que a função origem no espaço real pode ser representada pela somatória dos resíduos das funções $F_1(s)$ e $F_2(s)$.

5.2.1-Cálculo do resíduo em $F_1(s)$:

Multiplicando-se $F_1(s)$ por e^{st} :

$$e^{st} F_1(s) = \frac{e^{(1-a)s}}{s} \frac{\cosh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})} \quad (5.12)$$

Teremos pólos em s e $\cosh(x_i s^{1/2})$. Para a determinação do resíduo em s será utilizada a expressão usada por Arfken [44] :

$$\text{Res} \left[f(a) \right] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z) \right] \right\} \quad (5.13)$$

onde n representa a ordem do pólo no ponto a . Fazendo $f(z)=F_1(s)$, $a=0$ e $n=1$, o resíduo em $s=0$ será :

$$\text{Res}(0) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{e^{(1-\alpha)s}}{s} \frac{\cosh(x_i s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})} = 1 \quad (5.14)$$

No cálculo do resíduo em $\cosh(s^{1/2})$, será utilizado o procedimento adotado por Arpacı [45], que considerou s como um número imaginário com parte real nula. Desta maneira, o argumento de $\cosh(x_i s^{1/2})$ pode ser escrito da seguinte forma :

$$\begin{cases} s^{1/2} = \mu + j \lambda \\ \mu = 0 \end{cases} \longrightarrow s^{1/2} = j \lambda \longrightarrow s = -\lambda^2$$

então :

$$\cosh(x_i s^{1/2}) = \cosh(j x_i \lambda) = \cos \lambda x_i$$

$$\text{Se } \cos \lambda = 0 \text{ então } x_i \lambda_n = \frac{(2n+1)}{2} \pi$$

Assim, tem-se que :

$$s = - \left[\frac{(2n+1)}{2} \pi \right]^2 \quad (5.15)$$

com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

O resíduo no pólo $s = -\lambda^2$ pode ser calculado tomando-se a

seguinte expressão :

$$f(s) = \frac{P(s)}{s^k Q(s)} \quad (5.16)$$

Segundo Arpací [45], quando se tem uma função como a representada por $F_1(s)$ em (5.11), a somatória de seus resíduos em $z = a_n$ é dada por :

$$\sum_{n=1}^N \text{Res}(a_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(a_n)}{a_n^k \left(\frac{dQ}{dz} \right)_{z=a_n}} \quad (5.17)$$

A comparação das expressões (5.12) e (5.16) resulta em :

$$\begin{aligned} P(s) &= e^{(1-\alpha)s} \cosh(x s^{1/2}) \\ Q(s) &= \cosh(x_1 s^{1/2}) \\ k &= 1 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Do obtido em (5.18) vem :

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{d}{dz} \left[\cosh(x_1 s^{1/2}) \right] = \frac{1}{2} x_1 s^{-1/2} \sinh(x_1 s^{1/2})$$

Na expressão (5.17), considerando-se que $a_n = -\lambda_n^2$, chega-se a :

$$\sum_{n=1}^N \text{Res}(-\lambda_n^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-(t-a)\lambda_n^2) \cosh(\lambda_n x)}{-\lambda_n^2 \frac{1}{(-\lambda_n^2)^{1/2}} x_i \sinh(j x_i \lambda_n)}$$

$$e : \cosh(j x \lambda_n) = \cos(x \lambda_n)$$

$$\sinh(j x_i \lambda_n) = j \sin x_i \lambda_n$$

$$\sin x_i \lambda_n = (-1)^n$$

Então :

$$\sum_{n=1}^N \text{Res}(-\lambda_n^2) = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n x_i} \exp(-(t-a)\lambda_n^2) \cosh(\lambda_n x) \quad (5.19)$$

A soma dos resíduos em $F_1(s)$ será :

$$\sum \text{Res}(F_1(s)) = \text{Res}(0) + \text{Res}(-\lambda_n^2) = F_1(t)$$

ou seja :

$$F_1(t) = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n x_i} \exp(-(t-a)\lambda_n^2) \cosh(x \lambda_n) \quad (5.20)$$

para $t > a$

Aplicando-se o mesmo procedimento para $F_2(s)$ chega-se a :

$$F_2(t) = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n x_i} \exp(-(t-b)\lambda_n^2) \cosh(x \lambda_n) \quad (5.21)$$

para $t > b$

Logo, a expressão para a transformada inversa analítica da distribuição da temperatura será :

$$T(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ F_1(x,t) & \text{se } a < t < b \\ F_1(x,t) - F_2(x,t) & \text{se } t > b \end{cases} \quad (5.22)$$

onde a e b são os valores correspondentes ao início e o término do pulso no domínio considerado e x é o ponto onde se deseja determinar a temperatura. Neste caso, para calcularmos a temperaturas na superfície da placa, basta substituir $x = 1$.

5.3-Inversão Analítica do Fluxo de Calor :

O procedimento para o cálculo da transformada inversa analítica da equação (5.10) é o mesmo adotado no da inversão analítica da temperatura. Assim, a expressão da distribuição no espaço de Laplace pode ser também colocada na forma de uma soma de duas funções :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}(x, s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s} s^{1/2} \frac{\sinh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})} = G(s)$$

ou

$$G(s) = \underbrace{\frac{e^{-as}}{s} s^{1/2} \frac{\sinh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})}}_{G_1(s)} + \underbrace{- \frac{e^{-bs}}{s} s^{1/2} \frac{\sinh(x s^{1/2})}{\cosh(x_i s^{1/2})}}_{G_2(s)} \quad (5.23)$$

Após o cálculo dos resíduos em $G_1(s)$ e $G_2(s)$, chega-se a expressão da transformada inversa analítica dada por :

$$G_1(x, t) = \frac{2}{x_i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(-(a-\alpha)\lambda_n^2) \sinh(\lambda_n x) \quad (5.24)$$

para $t > a$

$$G_2(x, t) = \frac{2}{x_i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp(-(a-b)\lambda_n^2) \sinh(\lambda_n x) \quad (5.25)$$

para $t > b$

As equações (5.24) e (5.25), poderiam ser também obtidas por derivação, em relação a x , das equações (5.20) e (5.21).

Logo, a transformada inversa analítica do fluxo de calor é :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ G_1(x,t) & \text{se } a < t < b \\ G_1(x,t) - G_2(x,t) & \text{se } t > b \end{cases} \quad (5.26)$$

As temperaturas superficiais e o fluxo de calor estimados são obtidos através do emprego dos algoritmos de inversão nas equações (5.9) e (5.10), respectivamente. Neste teste, são utilizados os mesmos parâmetros usados nos testes anteriores para quantificação da sensibilidade dos algoritmos, conforme já mostrado na Tabela 4.1.

A sensibilidade dos métodos de inversão é determinada pelo emprego das expressões de δ_A e σ_f apresentadas no capítulo anterior. São realizadas comparações entre as inversões feitas pelos algoritmos com os valores apresentados pelas inversões analíticas, determinadas pelas equações (5.22) e (5.26), respectivamente, a temperatura e o fluxo de calor.

5.4- Testes Realizados :

Nos testes realizados neste capítulo, o erro introduzido, representado por um pulso, ocorre nos instantes $t_0 = 0.05$ e 1.05 , ($\Delta t = 0.01$), respectivamente, para os dois domínios utilizados. A Tabela 5.1 mostra a variação do domínio considerado, a duração do erro introduzido na forma de um pulso e as figuras que representam os casos analisados.

Tabela 5.1- Domínio e duração do pulso considerados na análise da sensibilidade em termos da temperatura superficial.

DOMÍNIO	[0.0;2.0]			[1.0;3.0]
DURAÇÃO DO DISTÚRBO	0.001	0.01	0.1	0.01
FIGURAS				
INVERSAO ANALITICA	5.1	5.2	5.3	5.4
CRUMP	5.5	5.6	5.7	5.8
STEHFEST	5.9	5.10	5.11	5.12
PIESSENS	5.13	5.14	5.15	5.16

Foram necessários 20 termos da série de Fourier, representada em (5.22), para os cálculos das inversões analíticas.

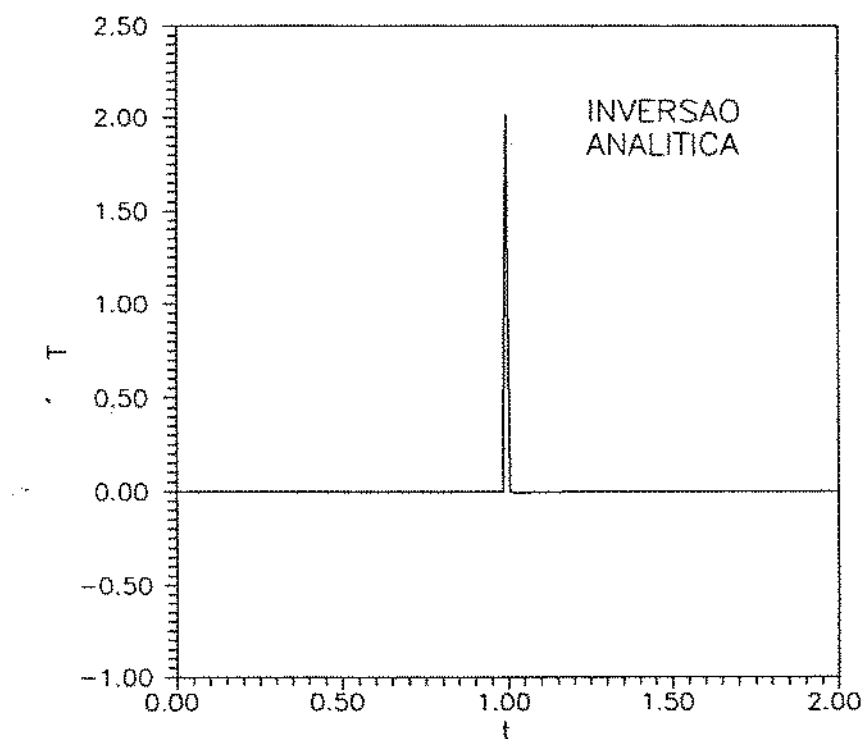


Figura 5.1- Inversão Analítica - para pulso de duração 0.001.

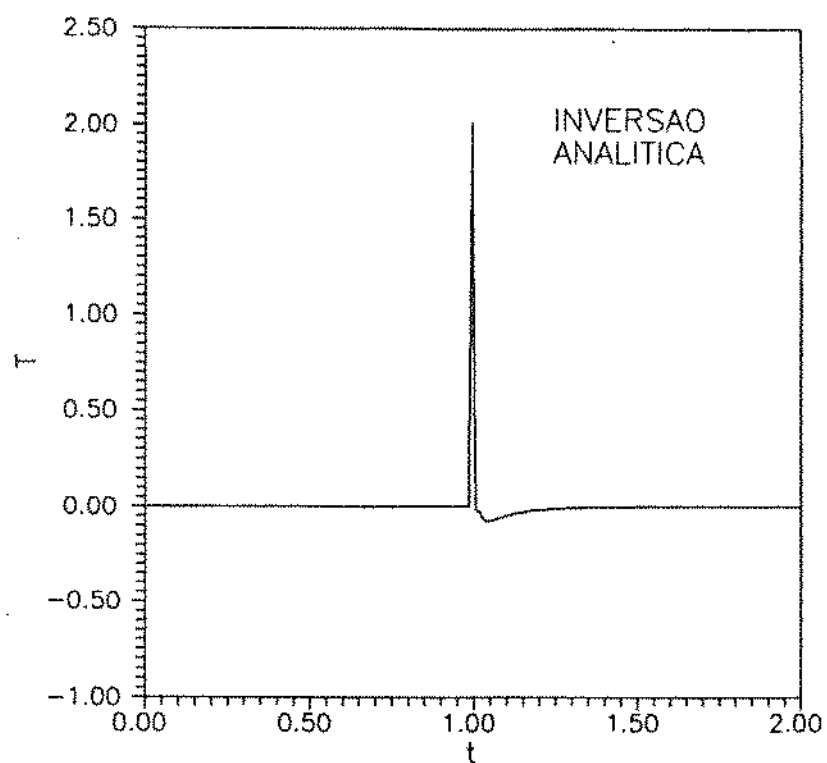


Figura 5.2- Inversão Analítica - para pulso de duração 0.01.

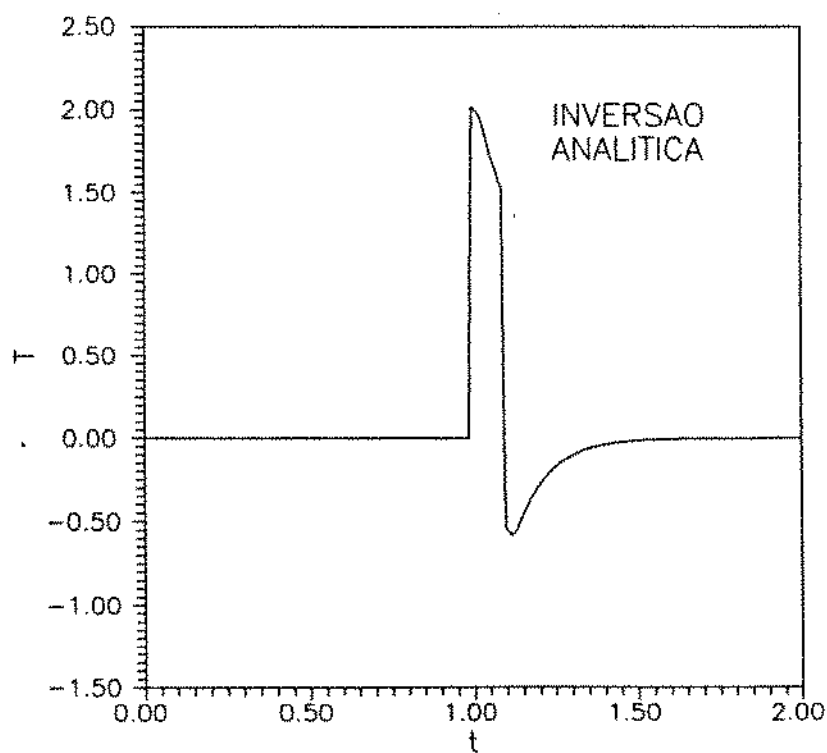


Figura 5.3- Inversão Analítica - para pulso de duração 0.1.

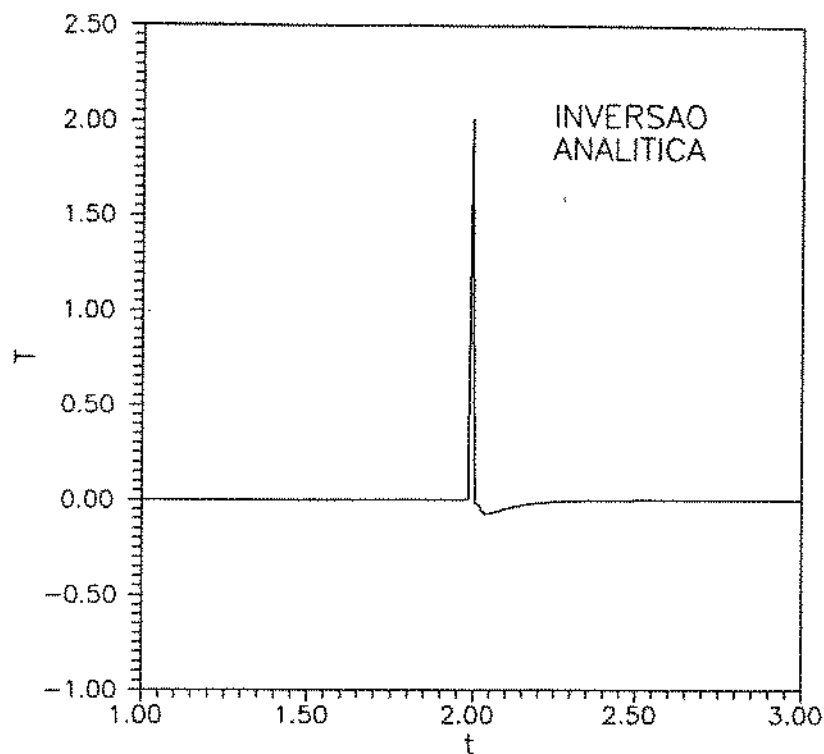


Figura 5.4- Inversão Analítica - para pulso de duração 0.01 em domínio deslocado

As Figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8 mostram, no caso da temperatura, que o método de Crump é muito sensível ao erro introduzido na temperatura interior e reproduz o pulso no instante desejado. Foi observado que com o aumento da duração do distúrbio, as oscilações aumentaram nas imediações do instante de início e do término destes. Com o deslocamento do domínio (Figura 5.8), observou-se que o algoritmo de Crump produziu os melhores valores de δ_A e σ_f .

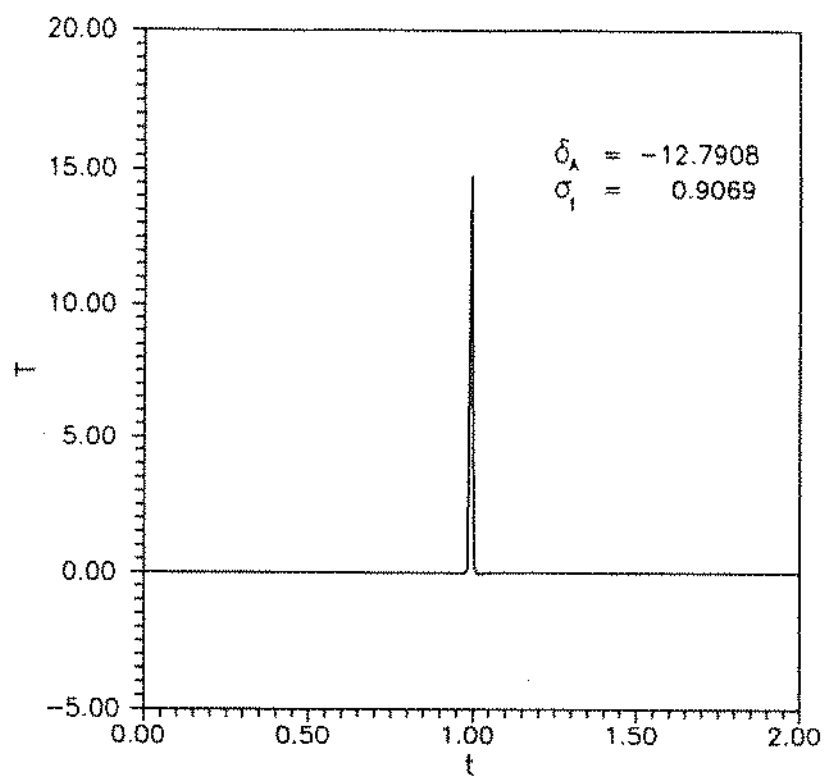


Figura 5.5- Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.001.

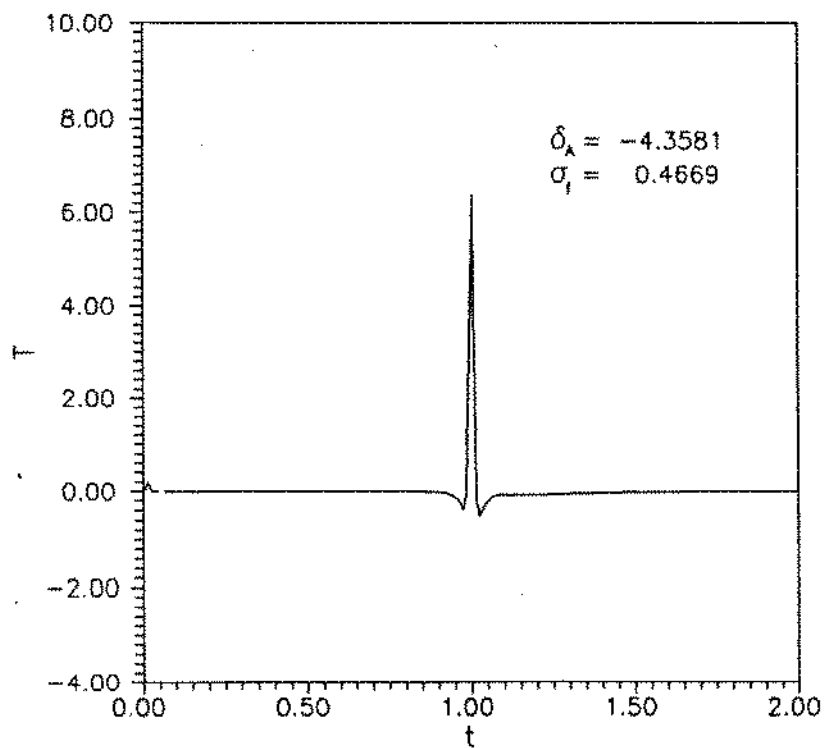


Figura 5.6- Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.01.

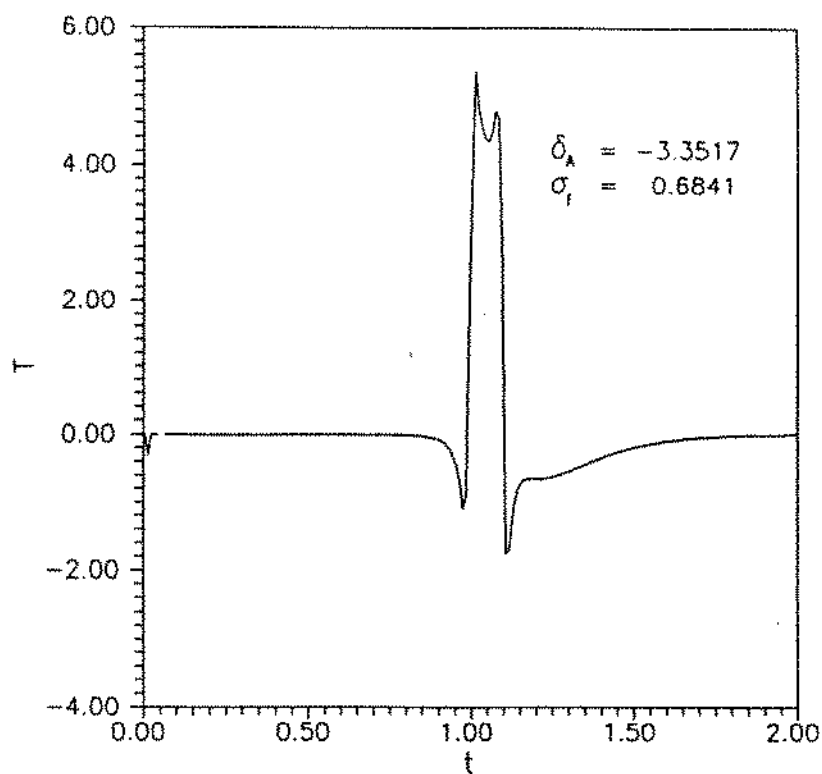


Figura 5.7- Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.1.

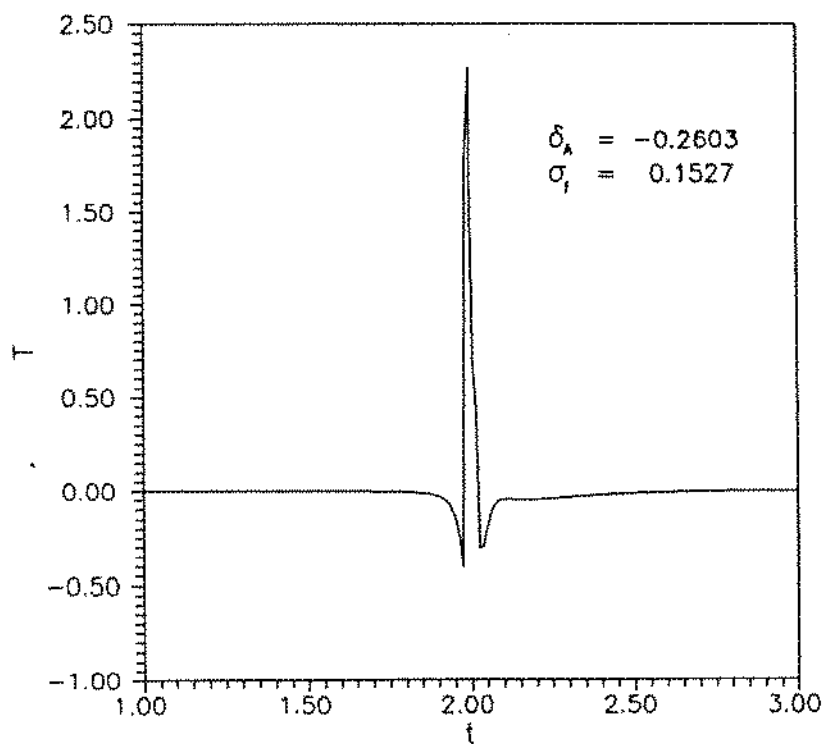


Figura 5.8- Método de Crump - Resposta a pulso de duração 0.01 em domínio deslocado.

O método de Stehfest, com inversões representadas nas Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12, mostrou-se pouco sensível ao erro introduzido, já que a instabilidade apresentada no gráfico tem amplitude extremamente reduzida. A forma da resposta reproduzida mostra que os efeitos se estendem a todo o domínio, inclusive para tempos com valores menores que aquele do instante do pulso. No entanto, estes efeitos são sentidos apenas para pulsos de grande duração, como se verifica pela maior intensidade da resposta à medida que aumenta a duração da perturbação introduzida.

Para o domínio deslocado, a única alteração sensível é a da forma da resposta com oscilações de menor frequência, já que a amplitude permanece na mesma escala verificada com o domínio original.

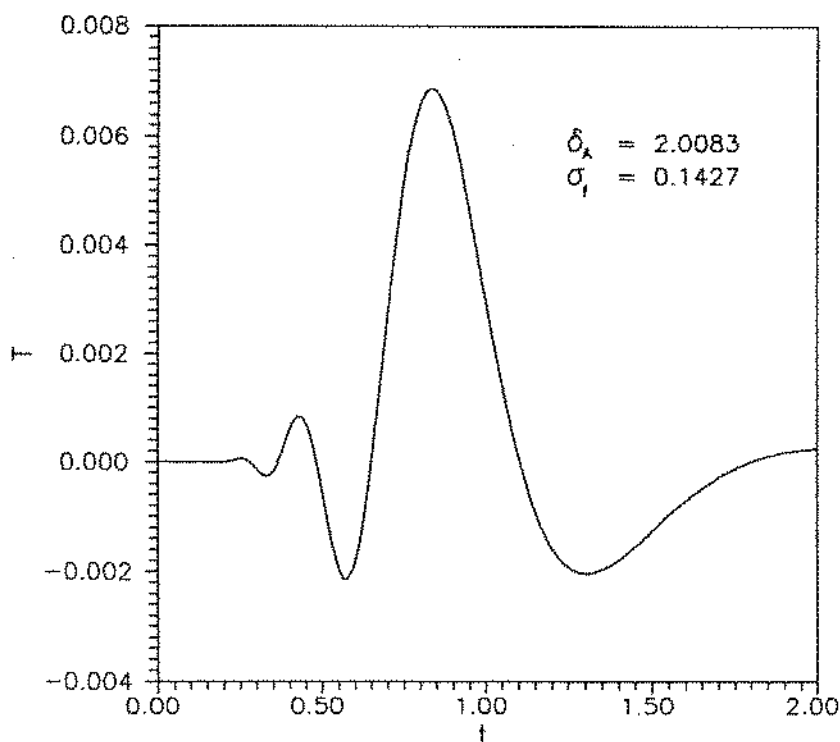


Figura 5.9- Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.001.

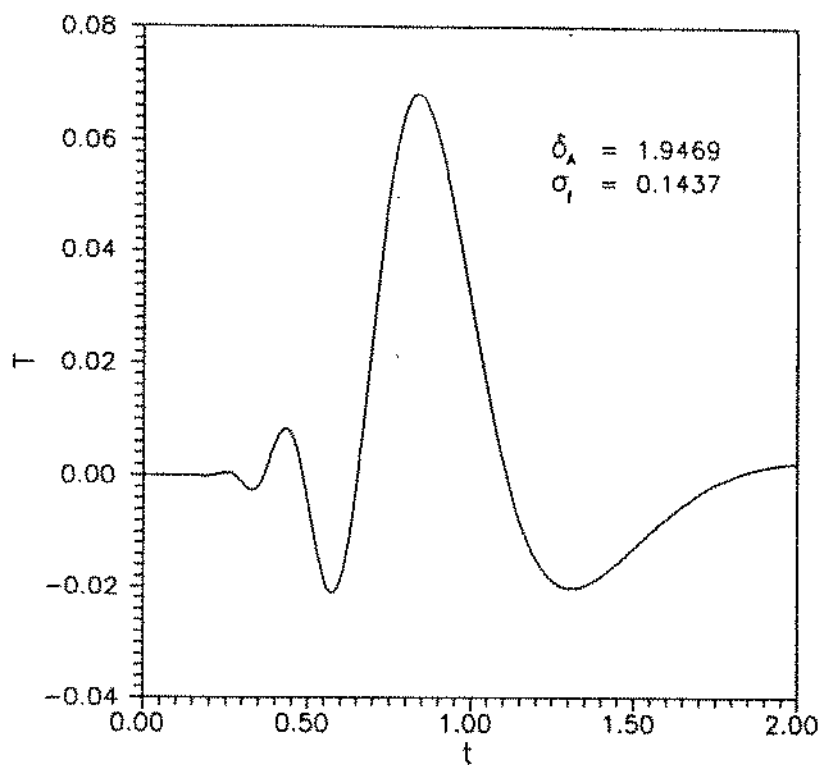


Figura 5.10- Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.01.

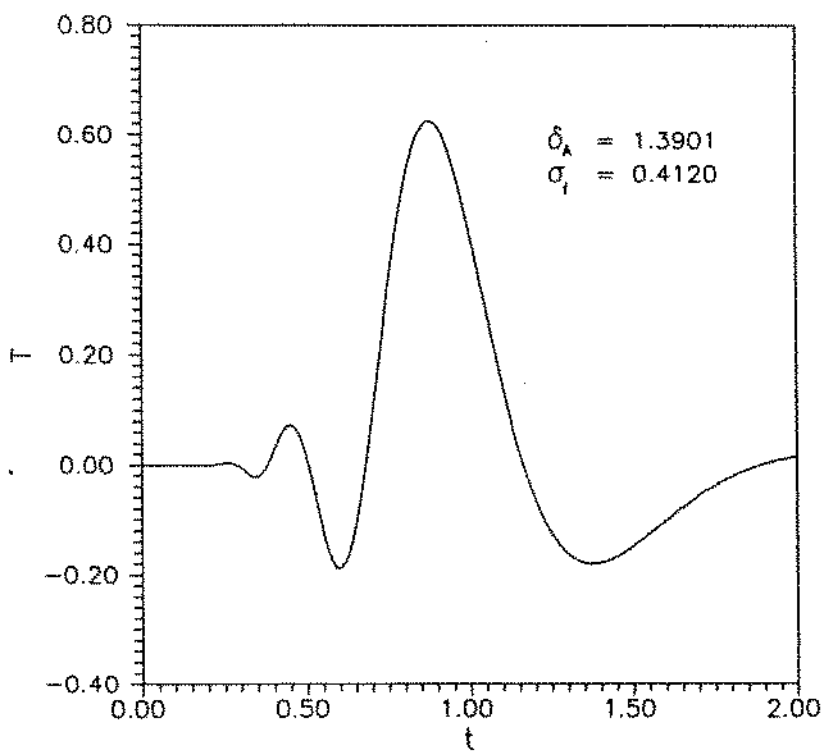


Figura 5.11- Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.1.

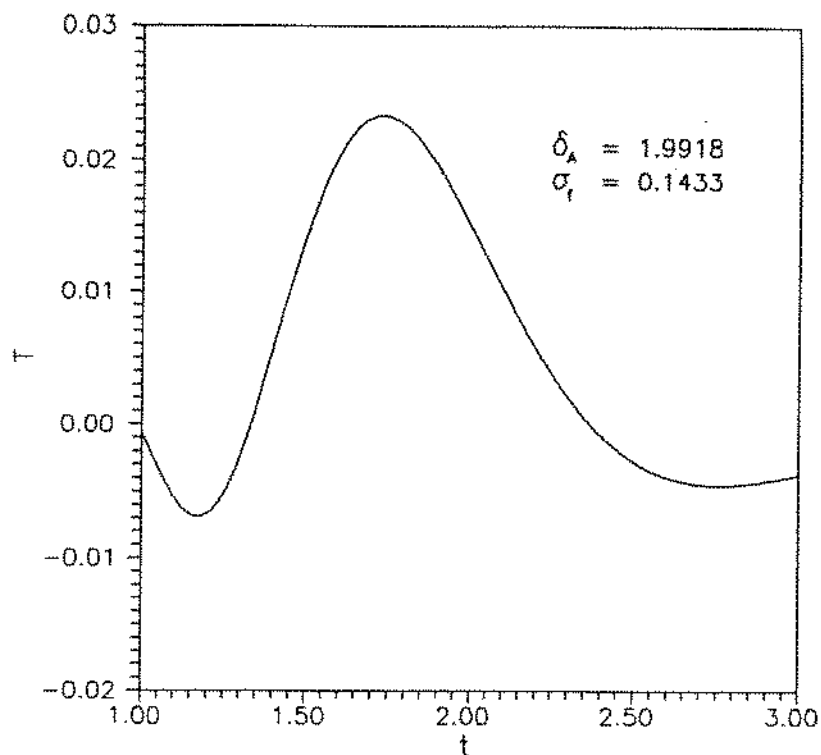


Figura 5.12- Método de Stehfest - Resposta a pulso de duração 0.01 em domínio deslocado.

As Figuras 5.13, 5.14, 5.15 e 5.16, apresentam as inversões realizadas segundo a metodologia de Piessens aplicadas à equação (5.9). O método não reproduz o pulso no instante desejado e não é sensível o bastante para completar o sinal no domínio considerado nos valores esperados. Apresenta valores em módulo crescentes até o final do domínio, o que se reflete nos valores de σ_f calculados a partir das comparações feitas com as inversões analíticas representadas nas Figuras 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4. De forma semelhante ao método anterior, a resposta produzida apresenta maior sensibilidade à medida em que aumenta a duração do pulso imposto. O deslocamento do domínio, mantendo-se o tamanho do pulso, produz uma suavização do distúrbio reproduzido.

Nota-se que a ordem de grandeza das amplitudes dos pulsos reproduzidos pelos algoritmos de Stehfest e Piessens, com resposta em termos da temperatura, variam segundo o mesmo fator, ou seja, comparando-se, por exemplo, as Figuras 5.9 - 5.11 e 5.13 - 5.15, observa-se que a relação entre a duração do pulso e a ordem de grandeza da amplitude é sempre igual a dez. Tal ocorrência também pode ser comprovada observando-se os valores do desvio de amplitude (δ_A) e do desvio de fase (σ_f) calculados.

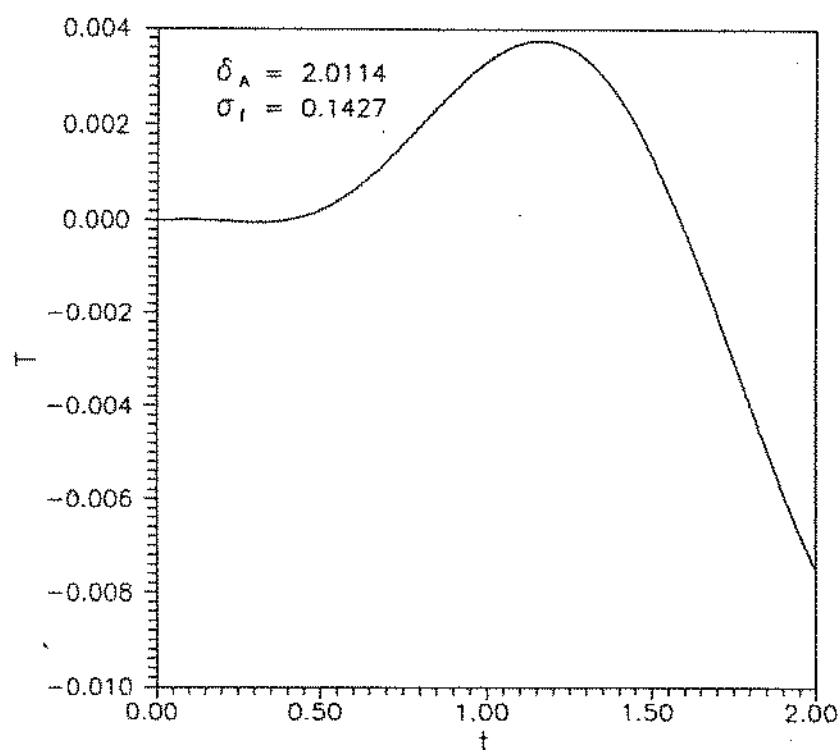


Figura 5.13- Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.001.

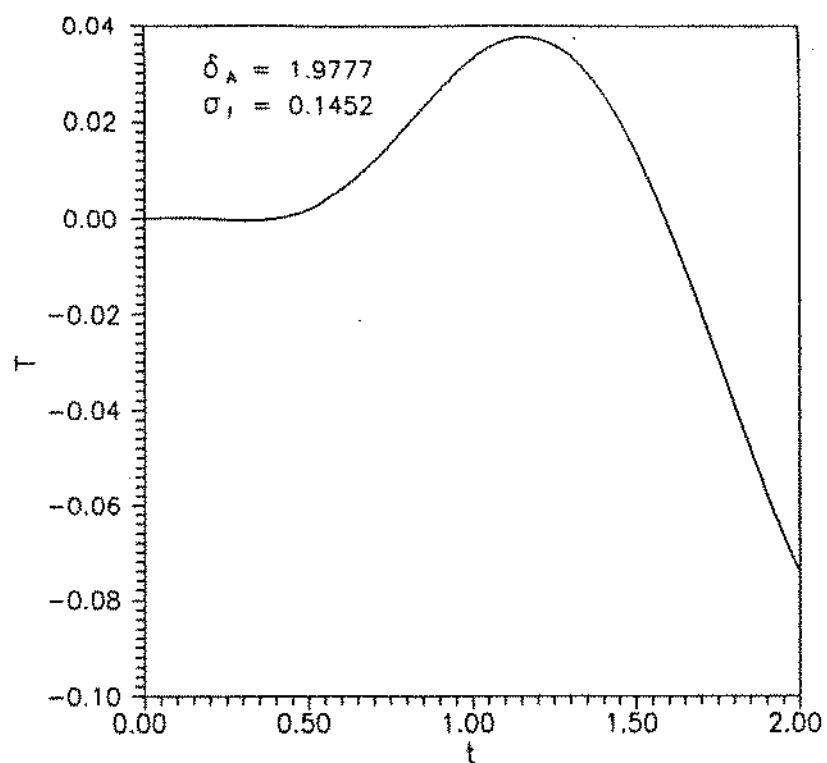


Figura 5.14- Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.01.

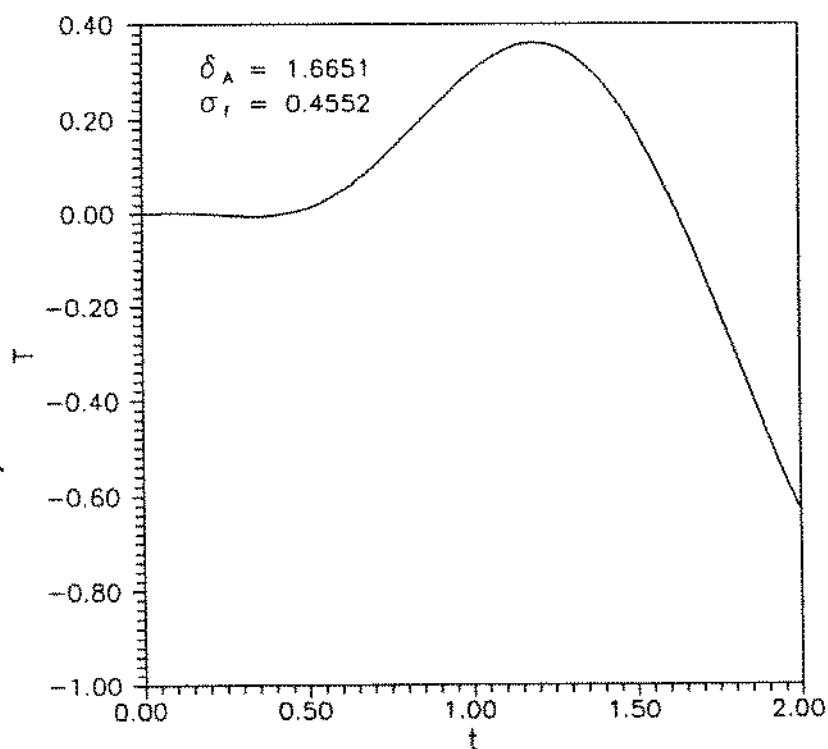


Figura 5.15- Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.1.

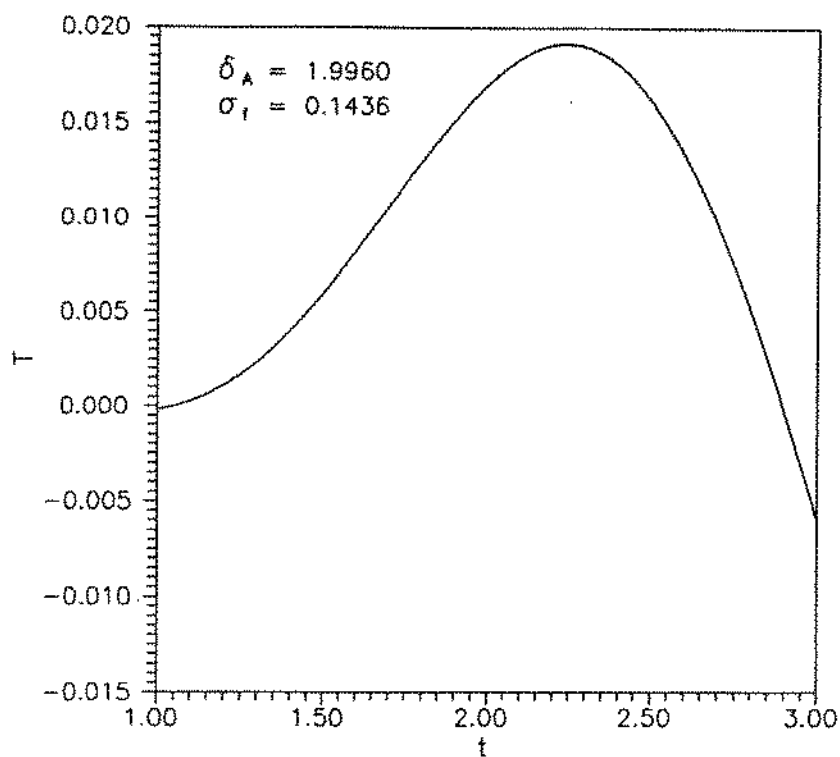


Figura 5.16- Método de Piessens - Resposta a pulso de duração 0.01 em domínio deslocado.

A Tabela 5.2 mostra os casos analisados na inversão da equação (5.10), que representam o fluxo de calor superficial utilizando os métodos de inversão de transformada de Laplace.

Tabela 5.2- Domínio e duração do pulso considerados na análise da sensibilidade em termos do fluxo de calor.

DOMÍNIO	[0.0;2.0]		[1.0;3.0]
DURAÇÃO DO DISTÚRBO	0.01	0.1	0.01
FIGURAS			
INVERSAO ANALITICA	5.17	5.18	5.19
CRUMP	5.20	5.21	5.22
STEHFEST	5.23	5.24	5.25
PIESSENS	5.26	5.27	5.28

Para o caso da análise do fluxo de calor, as Figuras 5.17 a 5.19 mostram as inversões analíticas utilizadas na comparação com os valores obtidos pelos três métodos considerados.

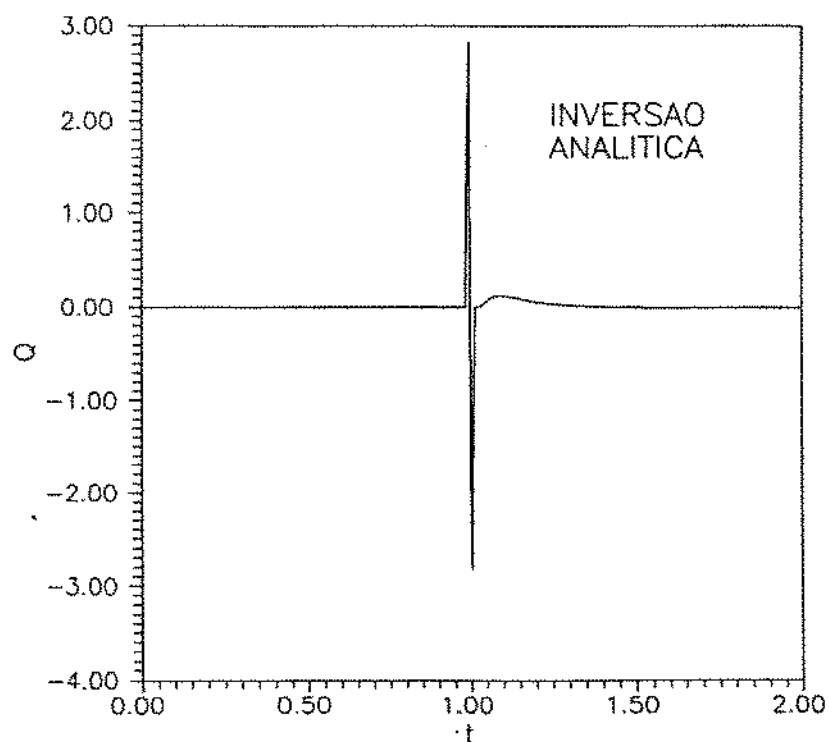


Figura 5.17 - Inversão Analítica - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura.

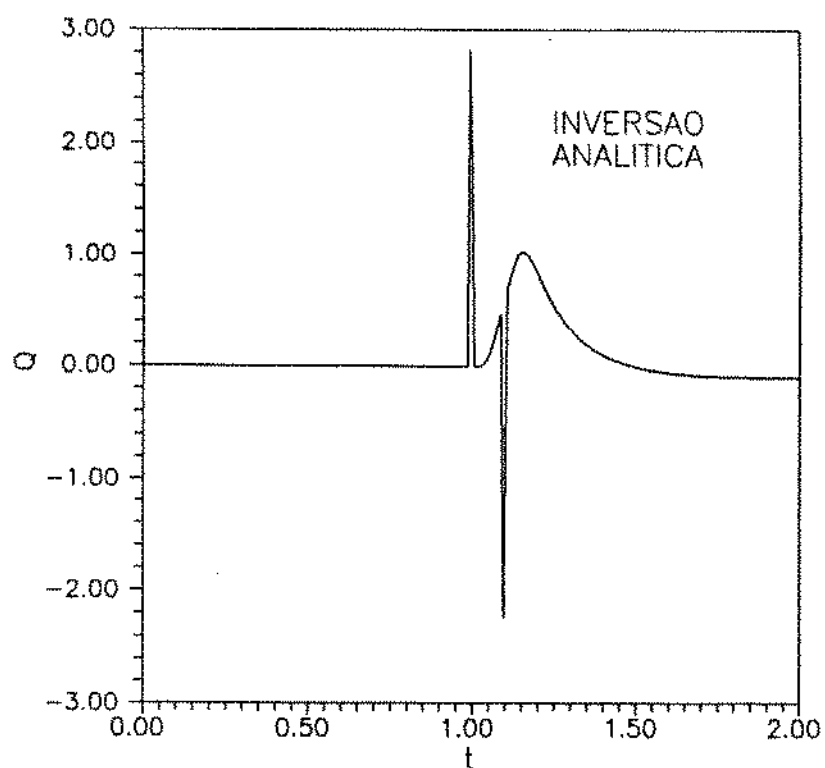


Figura 5.18 - Inversão Analítica - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.1 na temperatura.

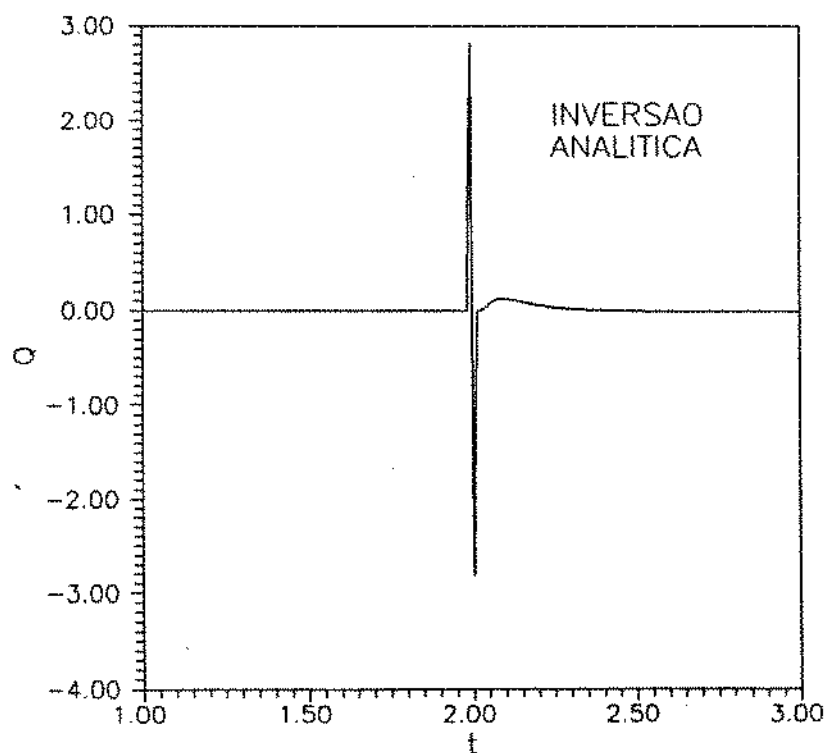


Figura 5.19 - Inversão Analítica - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura em domínio deslocado.

O levantamento da influência dos erros de medidas da temperatura interior no fluxo de calor, estimado pelo método de Crump, mostrado nas Figuras 5.20, 5.21 e 5.22, indica que a amplitude dos sinais reproduzidos pelo algoritmo foram muito superiores às encontradas pelas inversões analíticas (Figuras 5.17, 5.18 e 5.19). Nota-se, no entanto, que o algoritmo registra os picos observados nas inversões analíticas no momento exato de suas ocorrências.

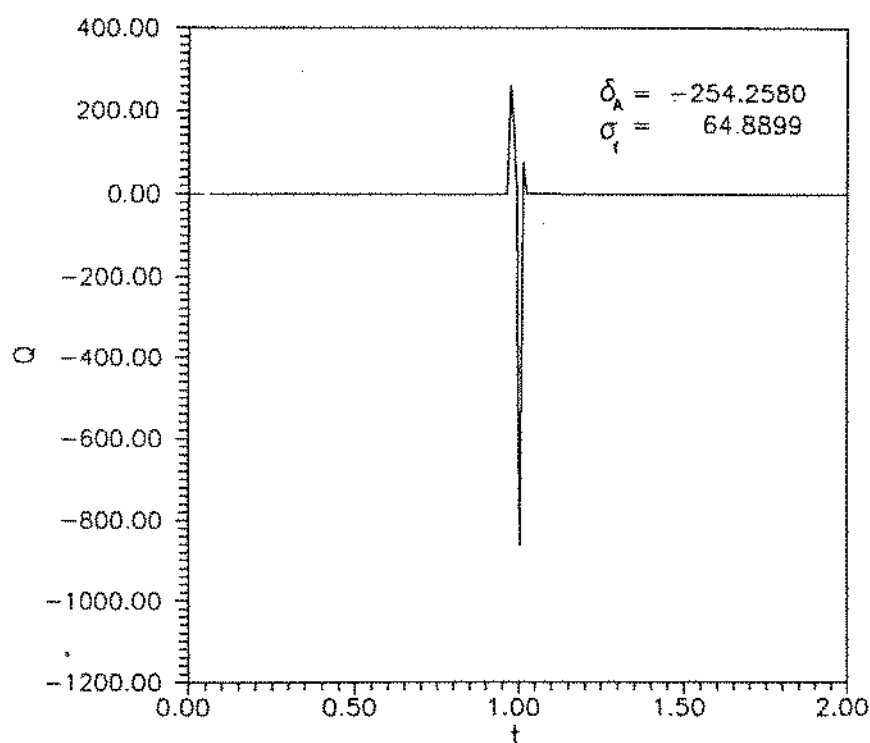


Figura 5.20 - Método de Crump - Resposta no fluxo para pulso na temperatura com duração 0.01.

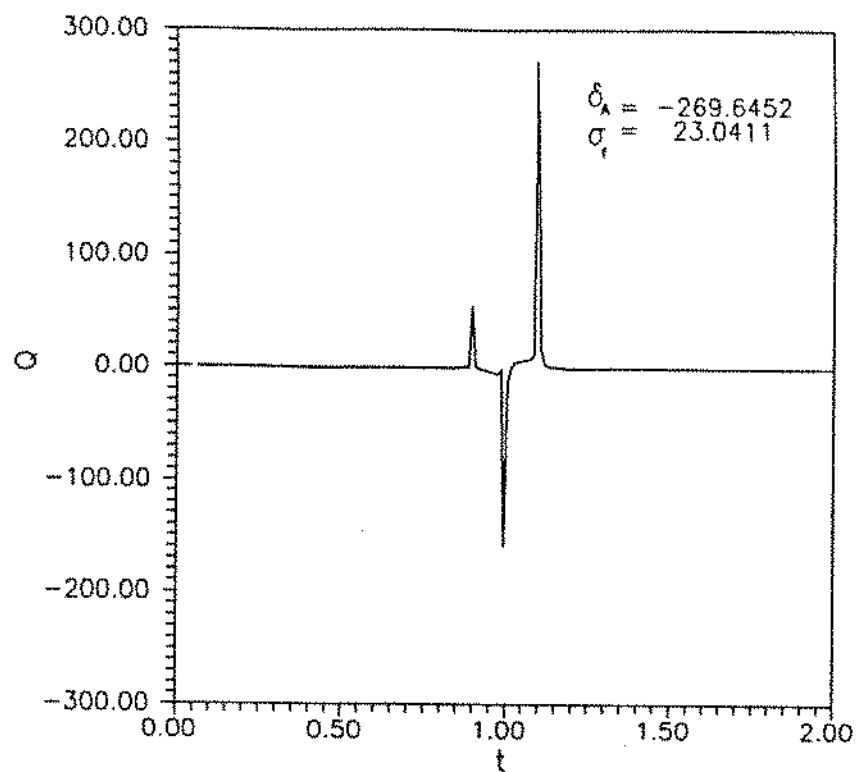


Figura 5.21 - Método de Crump - Resposta no fluxo para pulso na temperatura com duração 0.1.

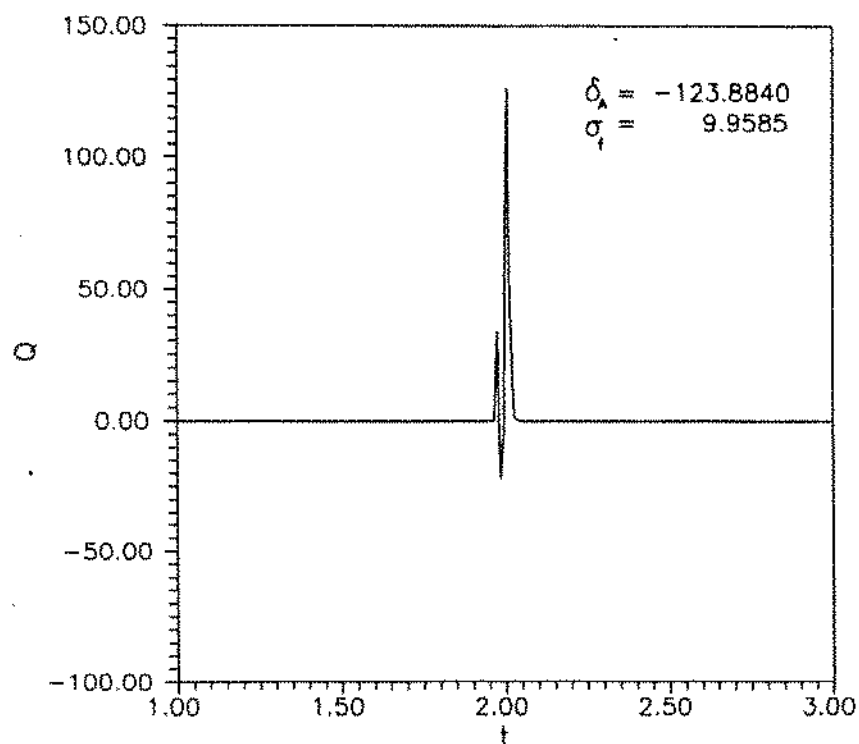


Figura 5.22 - Método de Crump - Resposta no fluxo para pulso na temperatura com duração 0.01 em domínio desocado.

Comparando-se os resultados analíticos com os numéricos para o método de Stehfest, percebe-se através das Figuras 5.23 e 5.24, que o aumento da duração do distúrbio não altera a forma do sinal a ser reproduzido mas, por outro lado, a amplitude da resposta aumenta, indicando um aumento da sensibilidade ao erro introduzido. Neste algoritmo, o deslocamento do domínio (Figura 5.25), produz também uma suavização do sinal, ao lado de uma forte diminuição da amplitude.

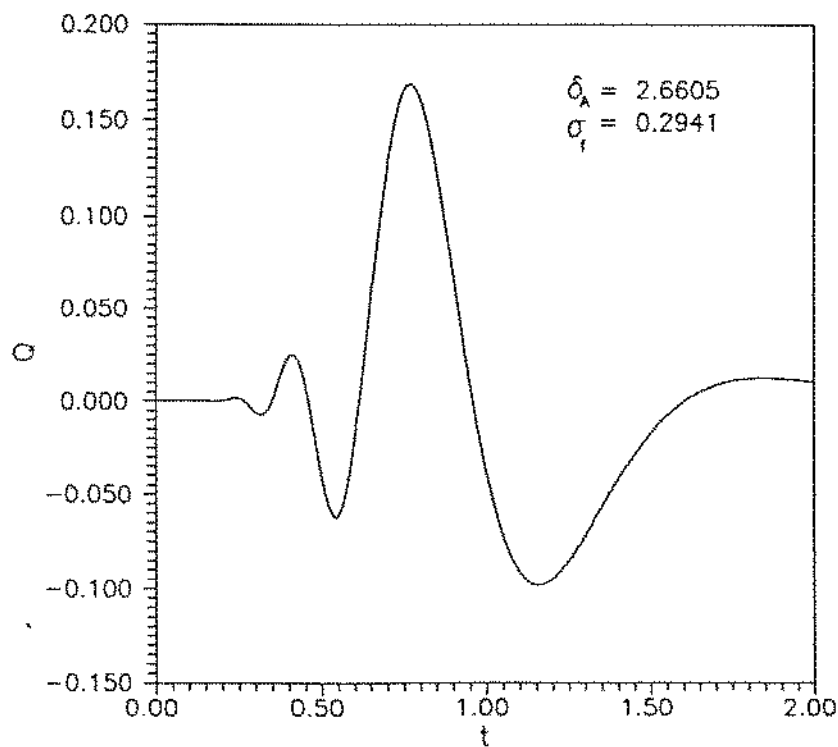


Figura 5.23 - Método de Stehfest - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura.

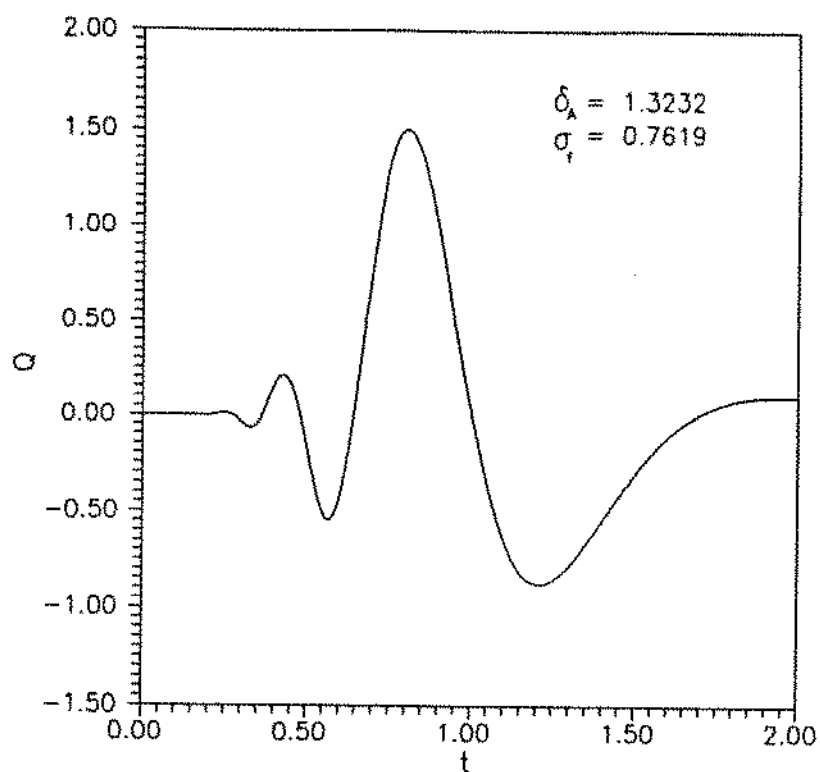


Figura 5.24 - Método de Stehfest - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.1 na temperatura.

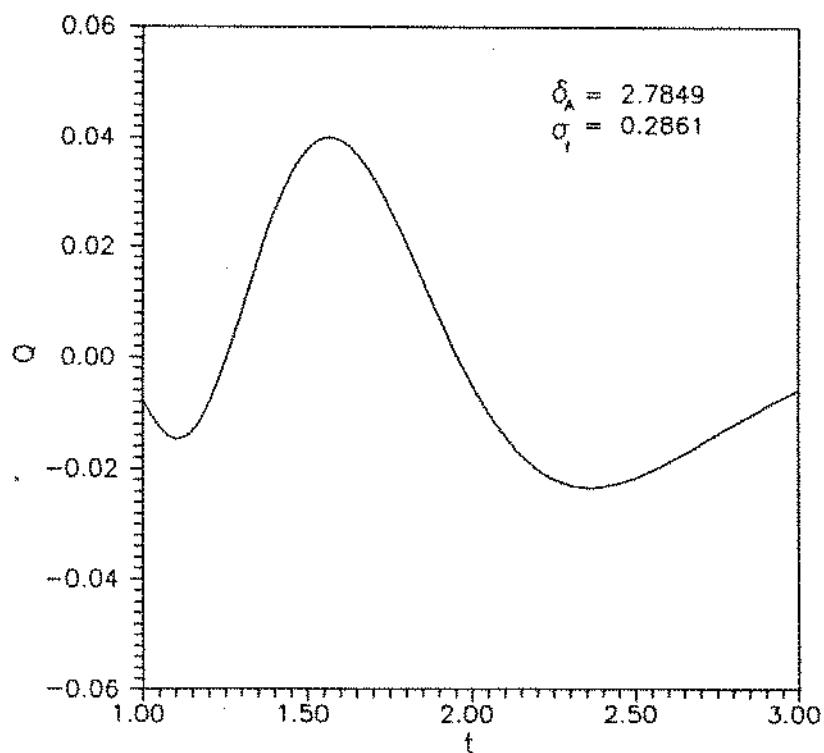


Figura 5.25 - Método de Stehfest - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura em domínio deslocado.

A forma do sinal, reproduzido pelo algoritmo de Piessens, permanece a mesma quando se aumenta o tamanho do pulso. Vale também, para este caso, a relação entre o fator que determina a variação da amplitude com o fator que aumenta o tamanho do pulso. O deslocamento do domínio causa redução da amplitude do pulso gerado, como pode ser notado, verificando-se os valores de δ_A das Figuras 5.26 e 5.28.

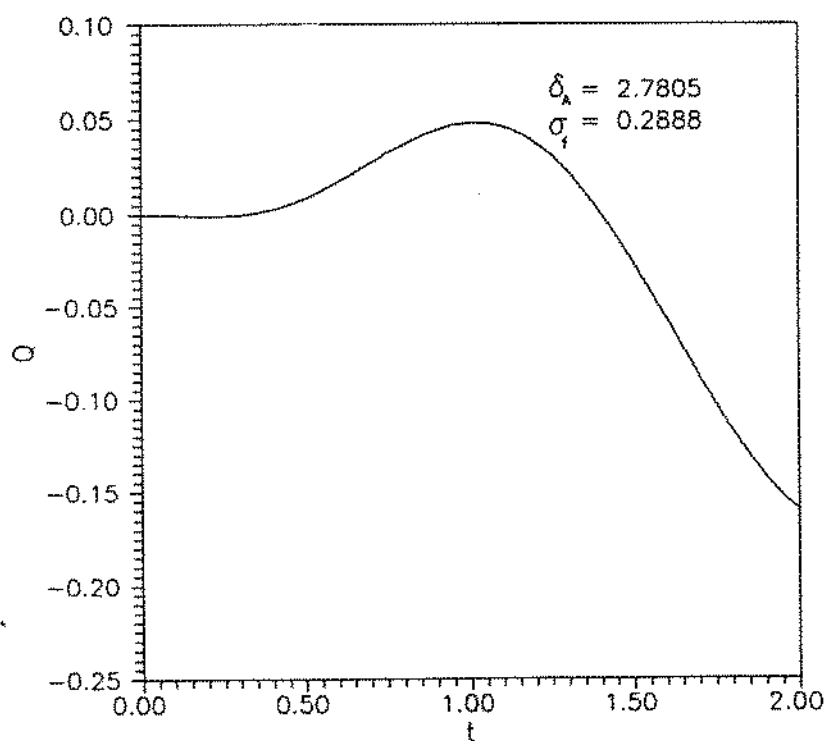


Figura 5.26 - Método de Piessens - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura.

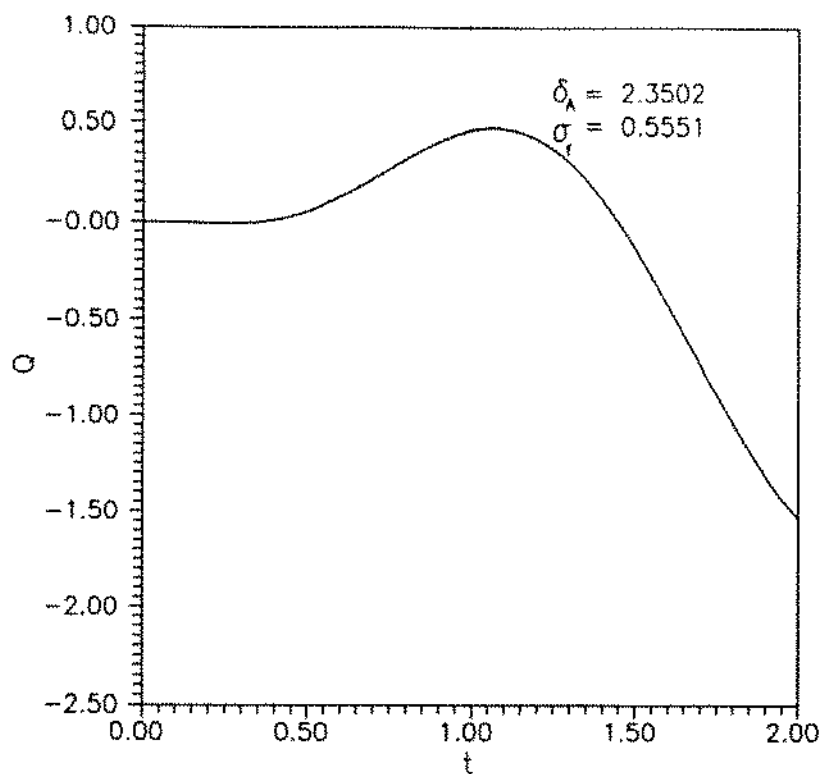


Figura 5.27 - Método de Piessens - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.1 na temperatura.

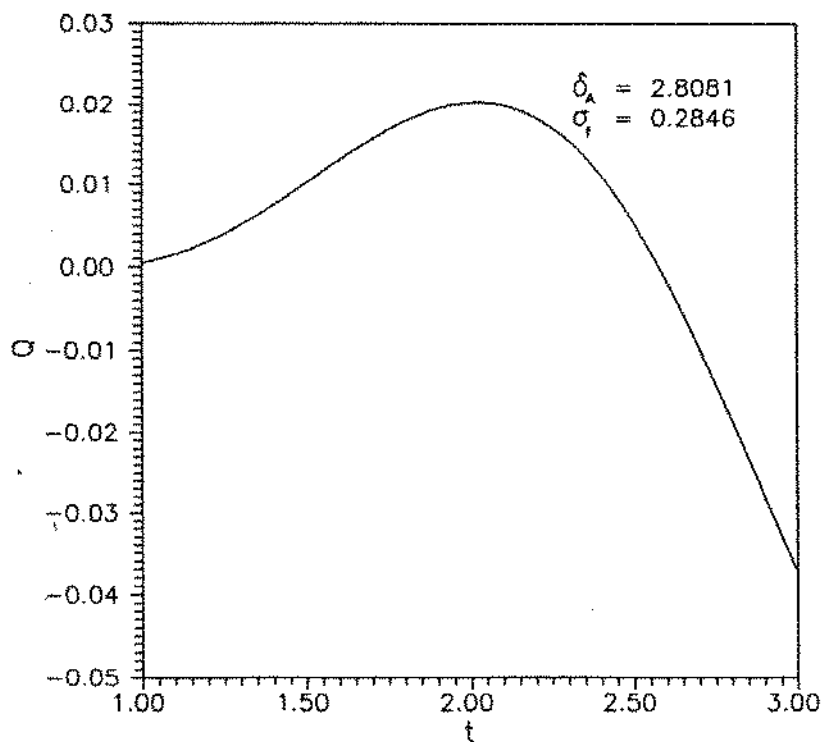


Figura 5.28 - Método de Piessens - Resposta no fluxo para pulso de duração 0.01 na temperatura em domínio deslocado.

Como conclusão desta série de testes, pode-se notar que o método de Crump apresentou sensibilidade exagerada ao erro introduzido, já que a sua resposta em termos de amplitude, atingiu valores bastante maiores que os apresentados pelas inversões analíticas no caso da temperatura e do fluxo de calor. Na análise das respostas, em termos do desvio de fase, pode-se afirmar que o algoritmo de Crump apresentou bons resultados, na medida em que reproduziu o sinal em instantes muito próximos aos observados nas inversões analíticas.

A observação dos sinais reproduzidos nestes testes pelo algoritmo de Stehfest, indicam a pouca sensibilidade deste método. Tal fato pode ser observado nos pequenos valores das amplitudes dos sinais reproduzidos.

O método de Piessens apresenta a mesma característica observada no método anterior, além de não conseguir completar o pulso reproduzido. Em comum, pode-se notar que a amplitude da resposta nestes dois métodos aumenta com a duração do distúrbio, o que significa que quanto maior for o distúrbio ocorrido, maior será a sensibilidade destes métodos.

Antes de partirmos para a identificação do método de melhor sensibilidade é preciso definir as características do distúrbio a ser analisado, levando-se em conta principalmente a sua duração. A análise deste fator pode indicar o melhor método a ser empregado.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

O presente trabalho compara o comportamento de três métodos de inversão de transformadas de Laplace no trato de problemas de condução do calor inverso.

Inicialmente, considerou-se o problema direto, no qual parte-se de um histórico de temperatura conhecido na fronteira do corpo e busca-se determinar os perfis de temperatura interior. Com o auxílio dos perfis de temperatura interior, foi possível resolver o problema inverso configurado através do emprego dos métodos de inversão de transformada de Laplace. Neste caso, os resultados apresentados pelos 3 algoritmos foram satisfatórios, sendo que o problema proposto reduziu-se a inverter uma função no espaço de Laplace, independente do modelo adotado e de suas condições de contorno.

Em seguida, foi investigado o comportamento dos algoritmos na inversão da função pulso, considerando-se que esta função pode representar as variações bruscas da temperatura, comumente encontradas nos problemas práticos. Foram definidos parâmetros de quantificação do poder de resolução dos algoritmos. Através da realização de testes de variação do domínio e da duração do pulso, verificou-se que o método de Crump apresentou o mais alto poder de resolução entre os algoritmos analisados, tendo produzido resultados satisfatórios, inclusive na inversão de pulso de pequena duração. Como característica geral, notou-se

que o aumento da duração do pulso aumenta também o poder de resolução dos métodos. Com a normalização do desvio de fase, foi possível isolar a influência da extensão do domínio sobre o desempenho do algoritmo.

Outra etapa do trabalho correspondeu à aplicação dos algoritmos na solução de um problema inverso, em que a inversão analítica a "priori" não é suposta como conhecida. A inversão numérica, neste caso, implicou na inversão de uma função, representada pela multiplicação da função pulso por uma função característica da geometria do problema analisado. Os ensaios numéricos visando o estudo da sensibilidade dos métodos, foram realizados com o propósito de investigar a influência de erros ocorridos nas medidas da temperatura interior. A análise estendeu-se sobre as influências no fluxo de calor e na temperatura da superfície de uma placa plana. Nos testes realizados verificou-se que o algoritmo de Crump apresentou sensibilidade exagerada, ao produzir valores do desvio de amplitude significativamente maiores que os do sinal original. Os métodos de Stehfest e de Piessens, ao contrário, mostraram pouca sensibilidade aos erros ocorridos nas medidas internas, visto que a amplitude do sinal reproduzido por estes dois métodos foi bastante inferior aos valores observados nos resultados analíticos, tanto para a temperatura como para o fluxo de calor. Em geral, observou-se que a sensibilidade dos métodos cresceu com o aumento da duração do pulso.

Para trabalhos futuros, sugere-se a utilização de outros modelos para a realização dos testes apresentados neste

trabalho. Sugere-se também, que se estude a propagação dos erros ocorridos nas medidas internas da temperatura em outros pontos do corpo, a fim de se estabelecer um perfil de propagação do erro ao longo do sólido. Considerando que o distúrbio introduzido na forma de um pulso é um erro isolado, pode-se, alternativamente, introduzir um conjunto de erros nos dados da temperatura interior, na forma de erros randômicos, com o objetivo de analisar os efeitos causados por este conjunto de perturbações na superfície do sólido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. STOLZ, G. Jr. Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shapes. J. Heat Transfer, 82: 20-6, 1960.
2. MIRSEPASSI, T. J. Heat-transfer charts for time-variable boundary conditions. Br. Chem. Eng., 4 : 130-6, 1959a.
3. BLACKWELL, B. F. An efficient technique for the numerical solution of the one-dimensional inverse problem of heat conduction. Numer. Heat Transfer, 4 : 229-39, 1981.
4. IMBER, M. Inverse problem for a solid cylinder. AIAA J., 17 : 91-4, 1979.
5. MULHOLLAND, G. P.; GRUPTA, B. P. & SAN MARTIN, R. L. Inverse problem of heat conduction in composite media. ASME Paper, 75-WA/HT-83, 1975.
6. WILLIAMS, S. D. & CURRY, D. M. An analytical experimental study for surface heat flux determination. J. Spacecraft, 14 : 632-7, 1977.
7. Beck, J. V. Criteria for comparison of methods or solutions of the inverse heat conduction problem. Nucl. Eng. Des., 53 : 11-22, 1979.

8. FRANCE, S. D. & CHIANG, T. Analytical solutions to inverse heat conduction problem with periodicity. J. Heat Transfer, 102 : 579-81, 1980.
9. BASS, B. R. Applications of the finite element to the inverse heat conduction problem using Beck's second method. J. Eng. Ind., 102, : 188-78, 1980.
10. ALKIDAS, A. L. Heat transfer characteristics of spark - ignition engine. J. Heat Transfer, 102 : 189-93, 1980.
11. HOUSE, T. K. J.; KENT, R. & RAWSON, H. The determination of glass-mould heat fluxes from mould temperature measurements. Glass Technol., 12 : 91-3, 1971.
12. SPARROW, E. M. ; HAJI-SHEIKH, A. & LUNDGREN, T. S. The inverse problem in transient heat conduction. J. Appl. Mech. Trans. ASME, series E, 86 : 369-75, 1964.
13. LIN, D. Y. T. & WESTWATER, J. W. Effect of metal thermal properties on boiling curves obtained by the quenching method. In : LIN, D. Y. T. & WESTWATER, J. W., eds. Heat transfer 1982 - Munchen conference proceedings. New York, Hemisphere Publ. Co., 1982. 4, pp. 155-60.
14. MIRSEPASSI, T. J. Graphical evaluation of a convolution integral. Math. Tabl. Aid. Comput., 13 : 202-12, 1959b.

15. MURIO, D. A. The modification method and the numerical solution of an inverse heat conduction problem. SIAM J. Sci. Stat. Comput., 2 : 17-34, 1981.
16. BECK, J. V. Nonlinear estimation applied to the nonlinear heat conduction problem. Int. J. Heat Mass Transfer, 13 : 703-16, 1970.
17. BLACKWELL, B. F. An efficient technique for the solution of the one-dimensional inverse problem of heat conduction. Numer. Heat Transfer, 4 : 229-39, 1981.
18. BASS, B. R. Incap - A finite element program for one-dimensional nonlinear inverse heat conduction analysis. Technical Report NRC/NUREG/CSD/TM-8, Oak Ridge National Laboratory.
19. BURGGRAF, O. R. An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications. J. Heat Transfer, 86C : 373-82, 1964.
20. IMBER, M. & KHAN, J. Prediction of transient temperature distribution with embedded thermocouples. AIAA J., 10 : 784-9, 1972.
21. LANGFORD, D. New analytic solutions of the one-dimensional heat equations for temperature and heat flow rate both prescribed at the same field boundary (with applications

to the phase change problem. Q. Appl. Math., 24 : 315-22, 1967.

22. GRYSA, K.; CIALKOWSKI, M. J. & KAMINSKI, H. An inverse temperature field problem of the theory of thermal stresses. Nucl. Eng. Des., 64 : 169-84, 1981.
23. WOO, K. C. & CHOW, L. C. Inverse heat conduction by direct inverse Laplace transform. Num. Heat Transfer, 4 : 499-504, 1981.
24. BECK, J. V.; BLACKWELL, B. & ST. CLAIR Jr, C. S. Classification of methods. In : BECK, J. V.; BLACKWELL, B. & ST. CLAIR, C. S. Jr., eds. Inverse heat conduction. Ill-posed problems. New York, Wiley-Interscience Publ., 1985 pp. 35-7.
25. DAVIES, B. & MARTIN, B. Numerical inversion of the Laplace transform : a survey and comparison methods. J. Comp. Physics, 33 : 1-32, 1979.
26. PIESSENS, R. A bibliography on numerical inversion of the Laplace transform. J. Comp. Appl. Math., 1 : 115-28, 1978.
27. WIDDER, D. V. The inversion of the Laplace transform and the moment problem. Amer. Math. Soc. Trans., 36 : 107-20, 1984.
28. PIESSENS, R. Some aspects of Gaussian quadrature formulae for

the numerical inversion of the Laplace transform. Comp. J., 14 : 433-6, 1971.

29. SCHMITTROH, L. A. Numerical inversion of Laplace transform. Comm. Ass. Comp. Math., 3 : 171-3, 1960.
30. WEEKS, W. T. Numerical inversion of Laplace transform using Laguerre functions. J. Ass. Comp. Math., 13 : 419-26, 1966.
31. PIESSENS, R. & BRANDERS, M. Numerical inversion of the Laplace transform using generalised Laguerre polynomials. Proc. IEE, 189 : 1517-22, 1971.
32. PIESSENS, R. A new numerical method for the inversion of the Laplace transform. J. Inst. Math. Applics., 10 : 185-92, 1972.
33. DUBNER, H. & ABATE, J. Numerical inversion of Laplace transforms by relating them to the finite Fourier Cosine transform. J. Ass. Comp. Math., 15 : 115-23, 1968.
34. SILVERBERG, M. Improving the efficiency of Laplace-transform inversion for network analysis. Electronics Lett., 6 : 105-6, 1970.
35. CRUMP, K. S. Numerical inversion of Laplace transform using Fourier series approximation. J. Ass. Comp. Math., 23 : 89-94, 1976.

36. PAPOULIS, A. A new method of inversion of the Laplace transform. Quart. Appl. Math., 14 : 405-14, 1956.
37. BELMAN, R.; KALABA, R. & LOCKETT, J. Numerical inversion of the Laplace transform. American Elsevier, New York, 1966.
38. COST, T. L. Approximate Laplace transform inversion in solid propellant structural integrity analysis. Addendum to Bull of Second Ann. Meeting of ICRPG Working Group on Mechanical Behavior, CPIA Publ. 27-A, 127, 1964.
39. STEHFEST, H. Algorithm 368 : numerical inversion of Laplace transform. Comm. Ass. Comp. Math. , 13 : 47-8, 1970.
40. GAVER, D. P. Observing Stochastic processes and approximate transform inversion. Oper. Res. , 14 : 444-59, 1966.
41. PIESSENS, R. Inversion of the Laplace transform. Comp. J. , 25 : 278-82, 1982.
42. SIMON, R. M.; STROOT, M. T. & WEISS, G. H. Numerical inversion of Laplace transform with application to percentage labeled mitoses experiments. Comp. Biomed. Res. 5 : 596-607, 1972.
43. CARSLAW, H. S. & JAEGER, J. C. Conduction of heat in solids. 2. Oxford University Press, London, 1959.

44. ARFKEN, G. Mathematical Methods for physicists. 2. Academic Press, New York, 1970.
45. ARPACI, V.S. Conduction heat transfer. Addison-Wesley Publ.Co., Reading, 1966.

APÊNDICE A

ALGORÍTMOS LINGUAGEM FORTRAN

```

C***** PROGRAMA PRINCIPAL *****
C ***** ALGORITMO DE CRUMP *****

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      REAL*8 E,Eim1,FT,ImZ,ReZ,SUM,IT
      REAL*8 alpha,arg2,aux,dif,err,errest,t
      WRITE(*,*)'FORNECA t'
      READ(*,*)t

C
C***** DADOS DE ENTRADA DO ALGORITMO *****
C
      alpha=0.0D0
      err=1.0D-04

C
      CALL CRUMP ( t, alpha, err, N, FT)

C
      WRITE(*,100)t,FT,N
100  FORMAT(1X,'PARA t=',F7.5,/,1X,'TRANSFORMADA INVERSA =',F7.5,
/,1X,'NUMERO DE TERMOS DA SERIE DE FOURIER =',I4)
      STOP
      END

C
C***** FUNÇÃO CONSIDERADA *****
C
      DOUBLE COMPLEX FUNCTION ZLAP(X)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DOUBLE COMPLEX X
C      ZLAP=1/CSQRT(X)
      ZLAP=1/X*X
      RETURN
      END

      SUBROUTINE CRUMP ( t, alpha, err, N, FT)
C***** INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE USANDO O *****
C***** MÉTODO DE CRUMP *****

C      (Journal of the ACM, Vol. 23, No. 1, January 1978, pp. 89-96.)
C

```

C***** DADOS DE ENTRADA *****

C

C t REAL*8

C tempo no qual a inversão será efetuada

C

C ZLAP FUNÇÃO DE ARGUMENTO COMPLEXO

C transformada de Laplace a ser invertida

C

C alpha REAL*8

C valor real máximo do pólo da ZLAP

C

C err REAL*8

C máximo erro relativo permitido

C

C***** SAÍDA *****

C

C FT REAL*8

C valor calculado da transformada inversa da ZLAP

C

C N INTEGER*4

C número de termos da série de Fourier usados na

C aproximação de FT

C

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

DOUBLE COMPLEX Z,a,arg1,im,X,ZLAP

REAL*8 E,Eim1,FT,ImZ,ReZ,SUM,TT

REAL*8 alpha,arg2,aux,dif,err,errest,t

DIMENSION E(999)

DO 10 i = 1, 500

 E(i) = 0.0D0

10 CONTINUE

 NMAX = 249

 im = (0.0D0,1.0D0)

 TT = 0.8D0 * t

 a = alpha - 0.5D0 * DLOG(err) / TT

 ST = 0.0D0

 SUM = 0.0D0

 SUMLST = 0.0D0

```

pi=4.0D0* DATAN(1.0D0)
DO 40 k = 1, 2*NMAX+1
    arg1 = a + k * pi * im / TT
    arg2 = k * pi * t / TT
    Z=ZLAP(ARG1)
    ST = ST + REAL(Z) * DCOS(arg2) - IMAG(Z) * DSIN(arg2)

```

C

C***** ALGORITMO EPSILON *****

C

```

    Eim1 = 0.0D0
    Ei = E(1)
    E(1) = ST
    IF ( k .EQ. 1) GO TO 35
    DO 30 i = 1, k-1
        aux = E(i+1)
        dif = E(i) - Ei
        IF ( DABS(dif) .LT. 1.0D-70) THEN
            E(i+1) = E(i)
        ELSE
            E(i+1) = Eim1 + 1.0D0 / dif
        ENDIF
        Eim1 = Ei
        Ei = aux

```

C

```

    SUM = E(i+1)
30    CONTINUE
    SUM = E(i)

```

C

C***** TESTE DE CONVERGÊNCIA *****

C

```

    IF (MOD(K,2) .NE. 0) THEN
        errest = DABS(SUM) - DABS(SUMLST)
    C    IF( SUM .NE. 0.0D00) THEN
        errest = DABS(errest) / DABS(SUM)
    C    ENDIF
    IF ( errest .LT. 0.001D00*DABS(erro) ) THEN
        N = k
        GO TO 50
    ENDIF
ENDIF
ENDIF

```

C

35 CONTINUE

IF (MOD(K,2) .NE. 0)SUMLST = SUM

C

C***** FINAL DO ALGORITMO EPSILON *****

C

40 CONTINUE

C***** CÁLCULO DA TRANSFORMADA INVERSA *****

50 FT= CEXP(a * t) / TT * (0.5D0 * ZLAP(a) + SUM)

RETURN

END

C***** ALGORITMO DE STEHFEST *****

C***** PARA INVERSAO DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE *****

C (Communications of the ACM, vol. 13, No. 1, January 1970, pp. 47-49)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

C

WRITE (*,*) 'TECLE O VALOR DE N E M '

READ(*,*) N1,M1

OPEN(9,FILE='TAB.CHI',STATUS='UNKNOWN')

DO 1 I = 1,10

TD1=I/10.D00

T=I/10.D00

FA1=FACTD1,N1,M1)

WRITE(9,30)T,TD1,FA1

30 FORMAT(3X,F4.2,3X,F4.2,5X,F15.8)

1 CONTINUE

ENDFILE 9

STOP

END

C

C***** ALGORITMO DE STEHFEST *****

C

FUNCTION FACTD,N,M)

C***** ESTA FUNÇÃO CALCULA NUMERICAMENTE *****

C***** A TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE F(S) *****

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

DIMENSION GC(50),VC(50),HC(25)

C

C***** DADOS DE ENTRADA *****

C

C TD REAL*8

C tempo no qual a inversão será efetuada

C

C N INTEGER

C número de componentes da matriz V

C

C M INTEGER

C deve ser diferente de N para que a matriz V

C seja calculada somente uma vez

C

C***** SAÍDA *****

C

C FA REAL*8

C aproximação numérica para $F(s)$

IFCN.EQ.MD GO TO 17

M = N

DLOGTW=0.6931471805599

NH=N/2

C

C OS FATORIAIS DE 1 ATÉ N SÃO CALCULADOS NA MATRIZ G.

G(1)=1.D00

DO 1,I=2,N

G(I)=G(I-1) * I

1 CONTINUE

C

C TERMOS COM K SOMENTE SÃO CALCULADOS NA MATRIZ H.

H(1)=2.D00/G(NH-1)

DO 6 I = 2,NH

FI=I

IF(I-NH)4,5,6

4 H(I)=FI**NH*G(2*I)/(G(NH-I)*G(I)*G(I-1))

GO TO 6

5 H(I)=FI**NH*G(2*I)/(G(I)*G(I-1))

6 CONTINUE

C

C OS TERMOS $(-1)**NH+1$ SÃO CALCULADOS

C PRIMEIRO O TERMO PARA I=1

SN=2*(NH-NH/2*2)-1

C

C O RESTO DOS SN's SÃO CALCULADOS NA ROTINA PRINCIPAL

C

C

C A MATRIZ V(I) É CALCULADA

DO 7 I = 1,N

C

C PRIMEIRO FAÇA V(I)=0

V(I) = 0.D00

C

C OS LIMITES PARA K SÃO ESTABELECIDOS

```

C      O LIMITE INFERIOR É  $K1=INTG((I+1)/2)$ 
       $K1 = (I+1)/2$ 

C
C      O LIMITE SUPERIOR É  $K2=MIN(I,N/2)$ 
       $K2 = I$ 
      IF(K2-NH)8,8,9
9       $K2 = NH$ 
C
C      A SOMATÓRIA DO TERMO EM  $V(I)$  É CALCULADA.
8      DO 10 K = K1,K2

          IF(2*K-I)12,13,12
12      IF(I-K)11,14,11
11       $V(I)=V(I)+H(K)/(G(I-K)*G(2*K-I))$ 
          GO TO 10
13       $V(I)=V(I)+H(K)/G(I-K)$ 
          GO TO 10
14       $V(I)=V(I)+H(K)/G(2*K-I)$ 
10      CONTINUE

C
C      A MATRIZ  $V(I)$  É FINALMENTE CALCULADA POR PONDERAÇÃO
C      DE ACORDO COM SN
       $V(I)=SN*V(I)$ 

C
C      O TERMO SN MUDA SEU SINAL A CADA ITERAÇÃO
      SN = -SN
7      CONTINUE

C
C      A APROXIMAÇÃO NUMÉRICA É CALCULADA
17     FA=0.000
          A=DLOGTW/TD
          DO 15,I=1,N
C      ARG É O ARGUMENTO DA FUNÇÃO A SER TRANSFORMADA
          ARG=A*I
           $FA=FA+V(I)*(1/ARG**2)$ 
15     CONTINUE
          FA = FA*A
          RETURN
          END

```

```

C***** ALGORITMO DE PIESENS *****
C***** PARA INVERSÃO DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE *****
C
C      R.Piessens, A new numerical method for the inversion of the
C      Laplace transform. Journal of the Institute of Mathematics and
C      its Applications 10, 185-192 (1972).
C
C      R.Piessens, Algorithm 113, Inversion of the Laplace Transform
C      The Computer Journal, vol.25, no.2, 1982
C
C***** PROGRAMA PRINCIPAL *****
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION TT(10),Y(20),EPSX(20)
C      COMMON /C1/A,B,AS,CC
C      COMMON /C3/NMAX
C
C      A MATRIZ TT CONTÉM OS ELEMENTOS DO DOMÍNIO DO TEMPO NO QUAL
C      A INVERSÃO SERÁ REALIZADA
C
C      DATA TT/0.1D0,0.2D0,0.3D0,0.4D0,0.5D0,0.6D0,0.7D0,0.8D0,0.9D0,
C      11.0D0/
C
C***** DADOS DE ENTRADA *****
C
C      A      REAL*8
C              deve ser determinado de modo que
C               $F(p) \approx p^{-\alpha}$  quando  $p \rightarrow \infty$ 
C
C      B      REAL*8
C              determina a extensão do intervalo no qual a inversão
C              será realizada. Real positivo
C
C      CC     REAL*8
C              deve ser arbitrado como o menor real possível
C              de modo que  $F(p)$  seja analítica
C
C      AS     REAL*8
C              assume o valor do limite :

```

```

C                                     as =  $\lim_{p \rightarrow \infty} p^{-\alpha} F(p)$ 
C
C      NMAX      INTEGER
C                  corresponde ao número de coeficientes de Chebyshev
C                  usados na inversão da função
C
C*****SAÍDA*****
C      Y          REAL*8
C                  matriz contendo os valores de inversão estimados
C
C      WRITE(*,*) 'DE VALORES PARA A,B,CC,AS,NMAX '
C      READ(*,*) A, B, CC, AS, NMAX
C      CALL LAPLINCTT,Y,EPS,NT,CC,B,A)
C      DO 33 I = 1, 10
C          WRITE(*,30) TT(I),Y(I),EPS(I)
30      FORMAT(3X,F4.2,3X,F15.8,3X,E15.8)
33      CONTINUE
C      STOP
C      END
C
C
C      SUBROUTINE LAPLINCT,Y,EPS,NT,CC,B,A)
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      COMMON /C3/NMAX
C      DIMENSION CT(500),DX(0:500),Y(20),EPS(20),TC(10)
C
C      CALL CHEBFTC-1.D00,1.D00,CT,N)
C      OPEN (UNIT = 7, FILE = 'COF1.SAI', STATUS = 'UNKNOWN')
C      do 90 kn = 1,n
C          WRITE(7,99) KN,CT(KN)
99      FORMAT(3X,'CTC',I4,'')=','E15.8)
90      continue
C      CLOSE (UNIT = 7)
C      NT = N
C      NT = NT - 1
C      M = NT - 3
C      GAM = GAMMA(A)
C      DO 66 JJ=1,N
C          DX(JJ-1) = CT(JJ)

```

```

66      CONTINUE
      DO 10 I = 1,10
        EPSI = 0.D00
        TI = T(I)
        Z = TI*(B/2.D00)
        FACTOR = TI**((A-1.D00)*DEXP(CC*TI))/GAM
        P1 = 1.D00
        P2 = 1.D00-2.D00*(Z/A)
        P3 = 1.D00+B.D00*Z*(Z/(A+1.D00)-1.D00)/A
        SOM = D(0)/2.D00 + D(1)* P2 + D(2)* P3
        DO 20 K = 3,NT
          P4 = ((K*(3.D00*K - 9.D00 + A) - 3.D00*A
!           + 6.D00-4.D00*FLOAT(K-2)*Z)*P3
!           - (K*(3.D00*K - 9.D00 - A) + 6.D00
!           + 4.D00*FLOAT(K-1)*Z)*P2
!           + FLOAT(K-1)*(FLOAT(K) - A - 2.D00)*P1)
!           /(FLOAT(K) + A - 1.D00)*FLOAT(K - 2))
          SOM = SOM + D(K)*P4
          P1 = P2
          P2 = P3
          P3 = P4
          IF(K .GT. ND) EPSI = EPSI+D(K)*P4
20      CONTINUE
        Y(I) = SOM * FACTOR
        EPSX(I) = EPSI * FACTOR
10      CONTINUE
      RETURN
C      'FIM DA SUBROTINA LAPLIN'
      END
C
C
C      ESTE PROGRAMA IRÁ PRODUZIR OS COEFICIENTES
C      DO POLINÔMIO DE CHEBYSHEV PARA UMA DADA FUNÇÃO
C
      SUBROUTINE CHEBFT(AX,BX,C,ND)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /C1/A,B,AS,CC
      COMMON /C3/NMAX
      DIMENSION CC(500),FC(500)

```

```

C                               INICIO
C      NMAX = 50
      N = NMAX
      PI = 4.D00*DATAN(1.D00)
      BMA = 0.5D00 * (BX-AX)
      BPA = 0.5D00 * (BX+AX)
      DO 11 K = 1, N
          Y = DCOS(PI * (K-0.5D00)/N)
          F(K) = FUNC(Y * BMA + BPA)
11     CONTINUE
      FAC = 2.D00/N
      DO 13 J = 1, N
          SUM = 0.D00
          DO 12 K = 1, N
              SUM = SUM + F(K) * DCOS(PI*(J-1))*((K-0.5D00)/N)
12     CONTINUE
          C(J) = FAC * SUM
13     CONTINUE
      RETURN
      END

C
C
      FUNCTION FUNC(Z)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      COMMON /C1/A,B,AS,CC
      COMMON /C3/NMAX
      EPSIL = 0.99999D00
      IF (Z .GT. EPSIL) THEN
          FUNC = AS
      ELSE
          Z = B / (1.D00 - Z)
          FUNC = FFC(Z + CC) * Z ** A
      ENDIF
      RETURN
      END

C
C
      FUNCTION FFC(X)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

```

```

COMMON /C1/A,B,AS,CC
COMMON /C3/NMAX
FF = 1.D00 / (X*X)
RETURN
END

```

C
C

```

FUNCTION GAMMA(X)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
    GAMMA = 1.D00
    ERRO = 0.D00
    TOL = 1.D-8
    XM = 1.D00
    EULER = 0.57721566490153286
10    GAMMA1 = GAMMA * (1.D00 + X/XM * DEXP(-X/XM)
    IF (DABS(GAMMA-GAMMA1) .LT. TOL) THEN
        GAMMA = GAMMA1 * X * DEXP(EULER*X)
        GAMMA = 1.D00/GAMMA
        RETURN
    ELSE
        GAMMA = GAMMA1
        XM = XM + 1.D00
        GO TO 10
    ENDIF
END

```