



Ruth Vanessa Canahuire Cabello

Projeto de Controladores H-infinito de Ordem Reduzida e Compensação de Saturação em Estruturas Flexíveis

62/2014

CAMPINAS
2014



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

Ruth Vanessa Canahuire Cabello

Projeto de Controladores H-infinito de Ordem Reduzida e Compensação de Saturação em Estruturas Flexíveis

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas, para a obtenção do título de Doutora em Engenharia Mecânica, na Área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELA ALUNA Ruth Vanessa Canahuire Cabello, E ORIENTADA PELO PROF. DR. Alberto Luiz Serpa.


.....
ASSINATURA DO ORIENTADOR

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C16p Canahuire Cabello, Ruth Vanessa, 1983-
Projeto de controladores H-infinito de ordem reduzida e compensação de saturação em estruturas flexíveis / Ruth Vanessa Canahuire Cabello. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Alberto Luiz Serpa.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Controle H [Infinito]. 2. Vibração - Controle. 3. Sistemas de controle por realimentação. 4. Programação não-linear. 5. Otimização com restrições. I. Serpa, Alberto Luiz, 1967-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Reduced order H-infinity controller design and saturation compensator in flexible structures

Palavras-chave em inglês:

H [Infinity] Control

Vibration - Control

Feedback control systems

Nonlinear programming

Constrained optimization

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Doutora em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Alberto Luiz Serpa [Orientador]

Katia Lucchesi Cavalca Dedini

Ely Carneiro de Paiva

Décio Crisol Donha

Samuel da Silva

Data de defesa: 15-07-2014

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL

TESE DE DOUTORADO

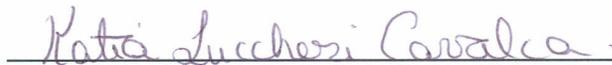
**Projeto de Controladores H-infinito de Ordem
Reduzida e Compensação de Saturação em
Estruturas Flexíveis**

Autora: Ruth Vanessa Canahuire Cabello
Orientador: Alberto Luiz Serpa

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Tese:



Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa, Presidente
DMC/FEM/UNICAMP



Profa. Dra. Katia Lucchesi Cavalca Dedini
DSI/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Ely Carneiro de Paiva
DSI/FEM/UNICAMP



Prof. Dr. Décio Crisol Donha
USP-POLI/São Paulo



Prof. Dr. Samuel da Silva
UNESP/Ilha Solteira

Campinas, 15 de Julho de 2014.

Dedicatória

A Deus e a meus pais por todo o amor que sempre me deram.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por todo o amor e por sempre me segurar nos momentos difíceis.

A meus pais Esteban Canahuire Cruz e Gloria Cabello Aldave pela confiança, apoio, compreensão no meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Ao meu orientador Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa pela confiança, paciência, compreensão e ajuda constante no desenvolvimento deste trabalho.

A meus avós Carmen Aldave e Inocente Cabello pelo grande apoio e suporte emocional que sempre me deram.

A meus irmãos Christian Canahuire, Frank Canahuire e Nicolas Canahuire pelo carinho e apoio durante todo este processo de formação profissional.

A todos meus amigos que formaram parte da minha vida nestes anos de aprendizagem, e de forma bem especial aos seguintes, Ángela Flores Granados, Iris Ordoñez Guerrero, Miguel Tipacti Milachay, Paola Soto Rojas e Rocío Cruz López. Obrigada por todos os conselhos e pelo carinho que sempre me deram.

Aos meus colegas do Departamento de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP pela contribuição no enriquecimento do trabalho.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), mediante o programa de estudante convênio PEC-PG, pelo apoio financeiro.

Resumo

CANAHUIRE CABELLO, Ruth Vanessa. Projeto de Controladores H-infinito de Ordem Reduzida e Compensação de Saturação em Estruturas Flexíveis. Tese de Doutorado. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2014.

A síntese de controle H-infinito de estruturas flexíveis pode levar à obtenção de controladores de alta ordem. Estes controladores podem apresentar dificuldades para a implementação prática acarretando atrasos de resposta no sistema. Para evitar esse problema, este trabalho apresenta duas sínteses de controladores H-infinito de ordem reduzida por realimentação de saída. Para este propósito, são formulados dois problemas de otimização para a obtenção de controladores de ordem reduzida considerando que as matrizes de estado do controlador estão na forma canônica controlável e canônica modal. As duas sínteses propostas estão baseadas na minimização da norma H-infinito garantindo a estabilidade do sistema em malha fechada.

Outro problema considerado neste trabalho são os efeitos de saturação dos atuadores sobre o sistema controlado. A saturação, quando presente no sistema, pode levar a uma perda de desempenho e as vezes à instabilidade da planta. Para tratar o problema de saturação é proposto um problema de otimização baseado no projeto de compensadores *anti-windup*. A abordagem proposta usa a síntese do problema H-infinito para minimizar diretamente os efeitos do sinal de saturação sobre o sinal de desempenho.

Finalmente, as formulações são verificadas no controle ativo de vibração sobre um modelo teórico e em uma bancada experimental com uma viga de alumínio engastada-livre. Os métodos mostraram ter bom desempenho garantindo a estabilidade do sistema em malha fechada. Os problemas de otimização são resolvidos usando algoritmos genéticos e alguns aspectos numéricos são discutidos.

Palavras-chave: Controlador de ordem reduzida, Controle H-infinito, Controle por realimentação de saída, Algoritmos genéticos, *Anti-windup*.

Abstract

CANAHUIRE CABELLO, Ruth Vanessa. Reduced Order H-infinity Controller Design and Saturation Compensator in Flexible Structures. PhD Thesis. Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas. 2014.

The H-infinity controller synthesis for flexible structures leads to full-order controllers. This can represent difficulties for practical controller implementation arising delay in the system response. To avoid this difficulty, this work presents two reduced order H-infinity controllers synthesis based on output feedback. For this goal, it is formulated two optimization problem to obtain a reduced order controller in its state-space controllable canonical form and state-space modal canonical form. The two proposed synthesis are based on the minimization of the H-infinity norm ensuring the stability of the closed loop system.

Another problem considered in this work is related to the effects of saturation of the actuators on the controlled system. The saturation in the system can lead to a performance loss and occasionally to the instability of the plant. An optimization problem based on *anti-windup* compensator design is proposed to treat this problem. The proposed approach uses the H-infinity controller synthesis to minimize directly the saturation effects on the performance signal.

Finally, the formulations are verified in the active control of vibration of a theoretical model and a cantilever aluminium beam is used on an experimental bench. The methods proposed presented good performance in terms of the stability of the closed loop system. The optimization problems are solved using genetic algorithms and some numerical aspects are discussed.

Keywords

Reduced-order controller, H-infinity Control, Output feedback controller, Genetic algorithm, *Anti-windup*.

Lista de Ilustrações

2.1	Representação do problema \mathcal{H}_∞	12
2.2	Características do filtro passa baixa como função de ponderação.	15
2.3	Sistema sem controle e filtros de ponderação	16
2.4	Diagrama do sistema aumentado, W_u and W_p são os filtros de ponderação, P é a planta e K o controlador.	17
3.1	Região desejada dos polos do controlador de ordem reduzida $K(s)$ e do sistema controlado $T_{zw}(s)$ no plano complexo - controlador na forma canônica controlável.	25
3.2	Região desejada dos polos do controlador de ordem reduzida no plano complexo - controlador na forma canônica modal.	28
3.3	Estrutura de operação do GA	30
3.4	Processo de solução usando algoritmos genéticos.	33
4.1	Esquema do sistema controlado submetido a limites de saturação.	36
4.2	Sistema controlado submetido a limites de saturação - situação <i>windup</i>	37
4.3	Estrutura do projeto <i>anti-windup</i>	39
4.4	Fracionamento do bloco <i>anti-windup</i>	39
5.1	Viga engastada-livre	47
5.2	Graus de liberdade da viga engastada-livre com 10 elementos finitos	48
5.3	Resposta em frequência do modelo da planta nominal e do modelo da planta “real”.	49
5.4	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável (can. ctrv), controlador de ordem 4×4	53
5.5	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 4×4	54
5.6	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método LMI-AL, controlador de ordem 4×4	54
5.7	Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável, forma modal e LMI-AL, controlador de ordem 4×4	55

5.8	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável, controlador de ordem 2×2	57
5.9	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 2×2	57
5.10	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método LMI-AL, controlador de ordem 2×2	58
5.11	Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável, forma modal e LMI-AL, controlador de ordem 2×2	59
5.12	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável, controlador de ordem 4×4	64
5.13	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 4×4	65
5.14	Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável e na forma canônica modal, controlador de ordem 4×4	65
5.15	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável, controlador de ordem 2×2	67
5.16	Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 2×2	68
5.17	Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável e na forma canônica modal, controlador de ordem 2×2	68
5.18	Esforço de controle do sistema controlado de ordem 2×2	70
5.19	Resposta na extremidade da viga - sistema controlado de ordem 4×4 sem compensador, com compensador e sistema controlado sem efeitos de saturação.	72
6.1	Distribuição da viga para o processo de controle	73
6.2	Esquema da montagem experimental da viga	74

6.3	Viga experimental engastada-livre implementada no Laboratório de Mecânica Computacional, na Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.	75
6.4	Sensor e atuador piezo-elétrico.	75
6.5	Resposta em frequência do modelo da planta estimada obtido de dados experimentais, modelo da planta “real” e o modelo da planta nominal.	76
6.6	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10	79
6.7	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10	80
6.8	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8	80
6.9	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8	81
6.10	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6	81
6.11	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6	82
6.12	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4	82
6.13	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4	83
6.14	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10	85
6.15	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10	85
6.16	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8	86
6.17	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8	86

6.18	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6	87
6.19	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6	87
6.20	Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4	88
6.21	Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4	88
6.22	Esforço de controle do sistema controlado de ordem 4×4	90
6.23	Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 com efeitos de saturação, com compensação <i>anti-windup</i> e sistema controlado sem efeitos de saturação.	91
6.24	Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 com efeitos de saturação.	92
6.25	Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 com compensação <i>anti-windup</i>	92
6.26	Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 sem efeitos de saturação.	93
A.1	Viga de elemento finito	105
C.1	Processo da função cruzamento (<i>@crossoversscattered</i>).	118
E.1	Resposta da extremidade da viga - sistema controlado na forma modal (usando o algoritmo SQP e GA) e não controlado, controlador de ordem 1×1	132
F.1	Resposta em frequência dos modelos estimados da viga engastada livre - modelos de ordem 90×90 e 50×50	133

Lista de Tabelas

5.1	Resumo dos resultados dos 4 controladores projetados usando a planta nominal: método LMI-LA, função <i>hinfsyn</i> (controlador de ordem completa) e métodos usando GA (forma canônica controlável e forma modal)	62
5.2	Resumo dos resultados dos 4 controladores projetados usando a planta nominal e algoritmos genéticos (o mesmo par de funções de ponderação).	62
5.3	Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta “real” e os algoritmos genéticos.	67
6.1	Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta nominal e um par de funções de ponderação.	79
6.2	Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta “real”.	84
C.1	Características do GA para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida . . .	117
C.2	Características do GA para o projeto de compensadores <i>anti-windup</i>	118
E.1	Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta real para o algoritmo SQP e os algoritmos genéticos - método na forma canônica controlável	131
E.2	Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta real para o algoritmo SQP e os algoritmos genéticos - método na forma modal.	131

Notação, Nomenclatura e Siglas e Abreviaturas

Notação

Neste trabalho as letras minúsculas em negrito denotam vetores e as letras maiúsculas em negrito representam matrizes.

Nomenclatura

A nomenclatura usada é:

\mathbf{I}	- Matriz identidade
\mathbf{A}^T	- Matriz \mathbf{A} transposta
$\det(\mathbf{A})$	- Determinante da matriz \mathbf{A}
$tr(\mathbf{A})$	- Representa o traço da matriz \mathbf{A}
$\mathbf{A} > \mathbf{0}$	- Matriz \mathbf{A} é simétrica e positiva definida
$\ \mathbf{A}\ $	- Norma euclidiana da matriz \mathbf{A}
\mathbf{A}^*	- Hermitiana da matriz \mathbf{A}
$\lambda_i(\mathbf{A})$	- Autovalor λ_i da matriz \mathbf{A}
$\lambda_{max}(\mathbf{A})$	- Maior autovalor da matriz \mathbf{A}
$\ \mathbf{G}(s)\ _\infty$	- Norma infinito da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$, ou seja, representa o pico da resposta em frequência de $\mathbf{G}(s)$
$\ \mathbf{G}(s)\ _2$	- Norma 2 da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$
$sup_w(g(w))$	- Supremo da função $g(w)$
j	- Unidade imaginária $j = \sqrt{-1}$
s	- Variável no domínio da transformada de Laplace
$\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{m \times m}$	- Conjunto dos números reais, vetor de números reais de ordem n , matriz de número reais de ordem $m \times m$ respectivamente

Siglas e Abreviaturas

- ALGA - Método conjunto dos algoritmos genéticos e Lagrangiano Aumentado, do inglês *Augmented Lagrangian - Genetic Algorithms*
- can. ctrv - Denota o método de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável.
- ERA - Algoritmo de Realização de Autosistemas, do inglês *Eigensystem Realisation Algorithm*
- GA - Algoritmos genéticos, do inglês *Genetic Algorithms*
- GDL - Graus de Liberdade
- HIFOO - H-Infinity Fixed-Order Optimization
- LMI - Denota desigualdades matriciais lineares, do inglês *Linear Matrix Inequalities*
- LMI-AL - Denota o uso dos métodos conjuntos das desigualdades matriciais lineares e o Lagrangiano Aumentado, do inglês *Linear Matrix Inequalities - Augmented Lagrangian*
- LPV - Parâmetros lineares e variantes no tempo do inglês *linear parameter varying*
- KYK - Kalman Yakounobic Popov
- MIMO - Denotação para sistemas de mais de uma entrada e mais de uma saída, do inglês *Multiple Input Multiple Output*
- SDP - Programação semi-definida, do inglês *Semidefinite Programming*
- SISO - Denotação para sistemas de uma entrada e uma saída, do inglês *Simple Input Simple Output*
- SQP - Programação quadrática sequencial, do inglês *Sequential Quadratic Programming*

Unidades de medição

- [*m*] - Metro - Medida de comprimento
- [*N*] - Newton - Medida de força
- [$\frac{N}{m}$] - Newton sobre metro - Medida de rigidez
- [*s*] - Segundo - Medida de tempo
- [*Hz*] - Hertz - Medida de frequência
- [*rad*] - Radiano - Medida angular
- [*dB*] - Decibel - Medida de intensidade
- [*V*] - Volts - Medida de tensão

SUMÁRIO

Lista de Ilustrações	xv
Lista de Tabelas	xix
Lista de Notação, Nomenclatura e Siglas	xxi
SUMÁRIO	xxiii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Revisão bibliográfica	4
1.3 Objetivos	7
1.4 Estrutura do trabalho	7
2 Projeto de controlador \mathcal{H}_∞ de ordem completa	9
2.1 Introdução ao controle \mathcal{H}_∞	9
2.1.1 Norma \mathcal{H}_∞	10
2.2 Controlador \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída	11
2.3 Funções de ponderação	14
2.3.1 Introdução	14
2.3.2 Seleção das funções de ponderação	14
2.3.3 Modelo de estados do sistema com filtros de ponderação	16
2.3.4 Problema de otimização para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞	19
2.4 Comentários finais	20
3 Síntese de obtenção direta de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida	21
3.1 Introdução	21
3.2 Projeto de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável	22
3.3 Projeto de controladores de ordem reduzida na forma canônica modal	25
3.4 Abordagem via algoritmos genéticos	28
3.4.1 Introdução aos algoritmos genéticos	28
3.4.2 Algoritmos genéticos para a síntese de controladores de ordem reduzida	31

3.5	Algoritmo de solução via algoritmos Genéticos	32
3.6	Comentários finais	33
4	Abordagem <i>anti-windup</i> para efeitos de saturação de atuadores	35
4.1	Introdução	35
4.2	Definições prévias	36
4.2.1	Restrição da entrada de controle	36
4.2.2	Efeito <i>windup</i>	36
4.2.3	Abordagens ao problema <i>windup</i>	37
4.3	Projeto <i>anti-windup</i>	38
4.3.1	Arquitetura do projeto <i>anti-windup</i>	38
4.4	Comentários finais	44
5	Resultados simulados	47
5.1	Projeto de controladores de ordem reduzida	50
5.1.1	Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal	51
	Controlador de ordem reduzida 4×4	52
	Controlador de ordem reduzida 2×2	56
	Controlador de ordem reduzida 1×1	60
	Projeto do controlador de ordem completa	60
	Alguns comentários e discussões	60
5.1.2	Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta “real”	63
	Controladores de ordem reduzida 4×4	63
	Controladores de ordem reduzida 2×2	66
	Controladores de ordem 1×1 e 8×8	66
	Alguns comentários e discussões	69
5.2	Projeto <i>anti-windup</i>	69
5.3	Comentários finais	71
6	Resultados experimentais	73
6.1	Características da bancada experimental	73
6.2	Obtenção do modelo experimental da viga	74
6.3	Projeto de controladores de ordem reduzida	77
6.3.1	Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal	78
	Alguns comentários e discussões	83
6.3.2	Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta “real”	84

	Alguns comentários e discussões	89
6.4	Projeto <i>anti-windup</i>	89
6.4.1	Alguns comentários e discussões	93
6.5	Comentários finais	94
7	Conclusão	95
7.1	Perspectivas futuras	97
	Referências	99
	APÊNDICES	104
A	Viga flexível	105
A.1	Modelo de estados	106
B	Projeto de controladores de ordem reduzida usando o Lagrangiano Aumentado e as LMIs	109
B.1	Introdução	109
B.2	Controle \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida	110
B.3	Algoritmo usado para o projeto de controle \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida	114
B.4	Minimização da função Lagrangiana Aumentada	115
C	Estrutura dos algoritmos genéticos para o projeto de controladores de ordem reduzida e compensadores <i>anti-windup</i>	117
D	Controladores de ordem reduzida em tempo contínuo obtidos para o modelo experimental da viga	121
D.1	Projeto de controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal	121
D.1.1	Controlador de ordem reduzida 4×4	121
D.1.2	Controlador de ordem reduzida 6×6	121
D.1.3	Controlador de ordem reduzida 8×8	122
D.1.4	Controlador de ordem reduzida 10×10	123
D.2	Projeto de controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta real	124
D.2.1	Controlador de ordem reduzida 4×4	124
D.2.2	Controlador de ordem reduzida 6×6	124
D.2.3	Controlador de ordem reduzida 8×8	125
D.2.4	Controlador de ordem reduzida 10×10	126

D.3	Compensador <i>anti-windup</i> implementado para a viga experimental	127
E	Alguns resultados usando o algoritmo SQP	129
E.1	Algoritmo SQP	129
E.2	Exemplo de aplicação	130
F	Escolha da ordem do modelo estimado da viga experimental engastada-livre	133

1 Introdução

1.1 Motivação

Na atualidade, existe um enorme interesse no controle de vibração de estruturas flexíveis em diversas áreas da engenharia. Algumas situações de aplicação são sistemas mecânicos como automóveis e aeronaves. Uma forma de abordar o problema de vibração pode ser mediante o uso de controladores ativos ou passivos. Devido à necessidade de adicionar grandes quantidades de massa para a implementação de controladores passivos surge interesse na implementação de controladores ativos de vibrações (Hurlebaus e Gaul, 2006). Exemplos sobre suspensão ativa veiculares são mostrados em (Wang *e outros*, 2005; Merlin, 2010).

O problema de controle ativo de vibrações em estruturas apresenta certa complexidade associada com algumas de suas características típicas. Uma estrutura flexível geralmente apresenta picos de ressonância próximo uns dos outros, o que caracteriza uma alta densidade de modos e geralmente com baixo amortecimento. Essa alta densidade de modos leva à necessidade do uso de modelos matemáticos de alta ordem, com um elevado número de graus de liberdade, para caracterizar o comportamento da estrutura flexível numa faixa de frequência de interesse.

Usualmente, o modelo matemático da estrutura pode ser obtido através do método de elementos finitos (Bathe e Wilson, 1976; Friswell e Mottershead, 1996; Kwon e Bang, 1997) ou, através de técnicas de identificação experimental (Ewins, 1984; Lew *e outros*, 1993; Alvin e Park, 1994), se a estrutura estiver disponível para medição. Em ambas situações, o modelo resultante terá uma forma truncada em relação à estrutura real. Uma dificuldade adicional é que os modos não considerados no processo de modelagem podem ser excitados caracterizando o fenômeno de *spillover* de controle, o que pode levar a altas amplitudes de vibração do sistema (Meirovitch e Baruh, 1981).

No problema de projeto de controladores ativos para vibração de estruturas flexíveis, um critério usado é a minimização da norma \mathcal{H}_∞ (Hu e Ng, 2005), que consiste na atenuação do pico da resposta em frequência do sistema controlado, mantendo a estabilidade. Particularmente no caso de problemas de controle de vibração, o interesse na redução do valor de pico é associado a reduzir os picos de ressonância.

O controle \mathcal{H}_∞ é particularmente interessante por aumentar a capacidade do sistema para rejeitar distúrbios externos, bem como para aumentar a sua robustez. Uma forma de resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ é através de sua formulação como um problema de desigualdades matriciais lineares (LMI) (Boyd e Ghaoui, 1994; Scherer *e outros*, 1997).

A formulação \mathcal{H}_∞ usual leva à obtenção de um controlador de ordem completa (mesma ordem da planta) (Gahinet e Apkarian, 1994; Scherer *e outros*, 1997). Esta formulação, quando usada para modelos de estruturas flexíveis, pode gerar controladores de alta ordem. Estes controladores de alta ordem apresentam, as vezes, dificuldades para a implementação prática do controlador devido à necessidade do uso de *hardwares* avançados para evitar possíveis atrasos de tempo de resposta do controlador. Para evitar essa dificuldade, controladores de ordem reduzida podem ser projetados, buscando-se um desempenho razoável e estabilidade do sistema controlado (Apkarian *e outros*, 2003; Sarracini, 2006).

O projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida caracteriza um problema de otimização não-convexo. Neste contexto, alguns autores conseguiram tratar a não-convexidade usando uma combinação do método de Lagrangiano Aumentado e desigualdades matriciais lineares (Apkarian *e outros*, 2003, 2001). Um exemplo da utilização desta abordagem para estruturas flexíveis é apresentado em (Sarracini, 2006). Esta abordagem pode ser um método eficaz, mas pode levar a custos numéricos elevados para a solução no caso de modelos de estados com ordens consideradas elevadas.

Neste trabalho apresenta-se duas abordagens para o projeto de controladores de ordem reduzida, que são:

- Síntese de controladores na forma canônica controlável: É proposto um problema de otimização para a obtenção de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável. Para esse propósito, é imposta a forma canônica controlável das matrizes do controlador diretamente no problema de otimização.
- Síntese de controladores na forma canônica modal: É proposto um problema de otimização para a obtenção de controladores de ordem reduzida na forma canônica modal. Para esse propósito, é imposta a forma canônica modal das matrizes do controlador diretamente no problema de otimização.

Estas sínteses propostas de controladores de ordem reduzida podem ser vistas como a minimização da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada sujeito às condições de estabilidade. Em cada um destes problemas de otimização não-lineares, elementos desconhecidos das matrizes do controlador são as variáveis de otimização a serem encontradas. O fato de colocar as matrizes do controlador na forma canônica controlável ou canônica modal de espaço de estados permite reduzir o custo computacional de obtenção dos controladores.

A maior dificuldade deste problema de otimização está relacionada com o processo de busca (problema de otimização não-linear/não-convexo). Os algoritmos genéticos (GA) são algoritmos de busca estocásticos baseados na seleção natural, onde o foco central de pesquisa é a robustez e o balanço entre eficiência e a eficácia. O algoritmo genético é considerado adequado na busca de otimização robusta (Goldberg, 1989) e seu potencial para o projeto de controladores de ordem reduzida é investigado neste trabalho.

No processo do projeto \mathcal{H}_∞ é importante considerar os limites de saturação dos componentes do sistema de controle. A desconsideração destes limites podem levar a uma perda de desempenho no caso do atuador se saturar. Neste trabalho foi estudado os efeitos produzidos pela presença da saturação do atuador no sistema controlado. Para este propósito, a informação sobre os limites de trabalho do atuador foram incorporados no projeto \mathcal{H}_∞ .

Na abordagem do problema de saturação existem métodos para evitar a saturação do atuador. Dentro deste escopo, destacam-se métodos iterativos de correção da amplitude do sinal de controle (Canahuire, 2009), de inclusão direta da restrição do sinal de controle dentro do problema de minimização da norma \mathcal{H}_∞ (Boyd e Ghaoui, 1994), etc. A abordagem utilizada neste trabalho foi o método *anti-windup* que não evita a saturação do atuador, mas busca garantir a melhora do desempenho do sistema na presença de saturação. Alguns trabalhos sobre o enfoque *anti-windup* podem ser encontrados em (Turner e outros, 2007; Galeani, 2005; Gomes e Tarbouriech, 2005; Grimm e outros, 2003).

É importante ressaltar que na situação real a escolha do método *anti-windup* deve ser implementada experimentalmente para sistemas que suportam a saturação, sem ocorrência de deterioração física dos atuadores.

Os exemplos estudados neste trabalho são baseados no controle ativo de vibração de uma viga engastada-livre incluindo o compensador *anti-windup*. No primeiro exemplo, o projeto é testado

num modelo teórico estimado obtido através do método de elementos finitos. No segundo exemplo, o projeto é implementado usando uma bancada experimental de uma viga de alumínio. O modelo da viga é obtido através do algoritmo *ERA* (do inglês *Eigensystem Realisation Algorithm*). Finalmente, são apresentados e discutidos os resultados numéricos e experimentais.

1.2 Revisão bibliográfica

Um problema comum no projeto de controladores \mathcal{H}_∞ está relacionado com a ordem dos controladores \mathcal{H}_∞ que é da mesma ordem do modelo da planta que se deseja controlar. Tais controladores são conhecidos como controladores de ordem completa, e são as vezes difíceis de serem implementados devido a limitações de hardware (podem apresentar atrasos de tempo de resposta do controlador). Para contornar este problema, controladores de baixa ordem que garantam estabilidade e desempenho razoável do sistema são buscados.

Na literatura atual, existem várias formas de obtenção de controladores de ordem reduzida. As três formas mais comuns de obtenção são as seguintes:

- Redução do modelo da planta seguido do projeto do controlador para a obtenção do controlador de ordem reduzida (Sarracini e Serpa, 2005).
- Projeto de controladores de ordem completa seguido pela redução do modelo do controlador para a obtenção do controlador de ordem reduzida (Zhou *e outros*, 1996).
- Projeto direto de controladores de ordem reduzida incluindo a restrição adicional durante o processo de projeto.

Nesta última é realizado o projeto de controladores robustos de ordem reduzida baseado em um enfoque de otimização como o feito por Apkarian e Tuan em (Apkarian *e outros*, 2003, 2001), o qual consiste por exemplo na utilização do método Lagrangiano Aumentado em conjunto com as Desigualdades Matriciais Lineares.

Técnicas atuais de projeto de controladores de ordem reduzida estão baseadas em aproximações convexas como apresentadas em (Henrion e Louembet, 2012), onde é apresentado um algoritmo para a aproximação interior convexa de problemas não convexos por regiões, onde é garantida

a estabilidade do sistema mas com possível perda da solução ótima. Outra extensão desta abordagem de aproximação interior convexa é usada para problemas com incertezas politópicas como apresentadas em (Khatibi *e outros*, 2008), onde são usadas as LMI originadas do Lema de Kalman-Yakounobic-Popov (KYP). Outros estudos sobre controladores de ordem reduzida são apresentados em (Yang *e outros*, 2007), onde são projetados controladores para sistemas com incertezas politópicas usando o método polinomial. Esta abordagem busca garantir estabilidade e alocação de polos dentro de uma região de interesse no plano complexo usando LMIs.

Atualmente alguns trabalhos baseados em algoritmos híbridos no projeto de controladores de ordem reduzida vêm sendo desenvolvidos. Um destes enfoques é apresentado em (Burke *e outros*, 2006) onde é apresentado o pacote *HIFOO (H-Infinity Fixed-Order Optimization)* para projetar controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida baseado no algoritmo quasi-Newton e técnicas de amostragem do gradiente. Outro trabalho baseado em algoritmos evolutivos pode ser encontrado em (Mahar *e outros*, 2012).

Os dois métodos propostos neste trabalho estão dentro do escopo de projetos de obtenção direta de controladores de ordem reduzida usando no processo de solução os algoritmos genéticos. As sínteses dos controladores de ordem reduzida propostas são apresentadas como a minimização da norma \mathcal{H}_∞ do sistema em malha fechada sujeito às condições de estabilidade. Nestes problemas de otimização não-lineares, elementos desconhecidos das matrizes do controlador são as variáveis de otimização a ser encontradas.

O método proposto visa tratar o problema de projeto de controladores de alta ordem de forma simples e com baixo custo computacional. Este enfoque pode evitar problemas com limitações de *hardware* e atraso na resposta do sistema devido ao fato de ser controladores de menor ordem com respeito aos controladores de ordem completa.

Outro problema a ser tratado neste trabalho é a limitação de saturação dos atuadores. Particularmente no caso do problema da rejeição de distúrbios, que podem não ser muito bem caracterizados em termos da distribuição em frequência e da amplitude, o controlador projetado poderá gerar um sinal de controle incompatível com o atuador empregado no sistema, ocorrendo a saturação (*wind-up*) (Forrai *e outros*, 2002).

A saturação caracteriza um comportamento não linear que passa a fazer parte do sistema e que pode ser analisada considerando ferramentas específicas da área de sistemas e controle não

lineares, tais como as discutidas em (Slotine e Li, 1991). Contudo, existem alternativas para levar em conta a questão da saturação nas formulações baseadas em desigualdades matriciais lineares como em (Boyd e Ghaoui, 1994), onde são apresentadas as LMIs necessárias para evitar que o sinal de controle supere limites estabelecidos.

Entre os métodos desenvolvidos para abordar o problema de saturação encontram-se métodos conservadores baseados em projetar controladores que não superem o limite de saturação, considerando algum conhecimento das características das entradas exógenas que afetam o sistema (Canahuire, 2009). Outros métodos limitam a amplitude do esforço de controle diretamente na formulação matemática, com a inclusão de uma restrição adicional como mostrado em (Boyd e Ghaoui, 1994). Embora estes enfoques solucionem o problema de saturação, são pouco flexíveis às alterações dos limites de saturação. Outros métodos que abordam o problema de saturação são os que procuram melhorar o desempenho do sistema na presença de saturação. Este enfoque não impede que o esforço de controle supere seu valor limite de saturação. Dentro deste enfoque está o método *anti-windup*, baseado na inclusão de um compensador ao sistema de controle com o fim de minimizar os efeitos de saturação. Este método tem como vantagem a flexibilidade às mudanças dos limites de saturação (Turner e outros, 2007; Gomes e Tarbouriech, 2005; Grimm e outros, 2003).

O trabalho de Gomes e Tarbouriech apresentado em (Gomes e Tarbouriech, 2005) mostra uma abordagem ao problema de saturação usando a compensação *anti-windup*. Tarbouriech e Gomes usam a compensação *anti-windup* em sistemas com estabilidade local para maximizar a região de estabilidade do sistema controlado em condições de saturação.

Outros trabalhos sobre a abordagem *anti-windup* são aplicados para sistemas estáveis como os apresentados em (Grimm e outros, 2003; Turner e outros, 2007). O trabalho apresentado por Turner em (Turner e outros, 2007) mostra uma arquitetura desacoplada dos compensadores *anti-windup* usados para projetar controladores estáticos, dinâmicos e compensadores de ordem reduzida.

Atualmente pode-se encontrar muitos trabalhos relacionados ao uso dos compensadores *anti-windup* como são mostrados em (Bender e outros, 2011), onde são projetados compensadores *anti-windup* dinâmicos para sistemas com atrasos, e em (Forni e Galeani, 2010) onde os compensadores *anti-windup* são usados para sistemas LPV.

Neste trabalho é desenvolvido um método que procura considerar a saturação dos atuadores no projeto de controladores baseados na minimização da norma \mathcal{H}_∞ . O método é baseado no enfoque *anti-windup* considerando uma arquitetura desacoplada dos compensadores como apresentado em (Turner *e outros*, 2007), mas considerando e tratando diretamente os efeitos da função de zona morta do sinal de controle sobre o sinal de desempenho usando algoritmos genéticos.

1.3 Objetivos

Um objetivo deste trabalho é propor métodos de obtenção direta de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida visando tratar problemas relacionados à implementação de controladores de alta ordem em estruturas flexíveis. Neste trabalho foram propostos dois métodos de obtenção direta de controladores de ordem reduzida impondo estruturas matriciais na forma canônica controlável e canônica modal para o controlador.

Outro objetivo foi propor uma abordagem de obtenção de compensadores de saturação baseados na arquitetura *anti-windup*. Estes compensadores são projetados para tratar situações adversas relacionadas à saturação dos atuadores do sinal de controle. Para a obtenção dos compensadores é proposto um problema de otimização para melhorar o comportamento do sistema na zona saturação.

1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho está estruturado como segue:

- O Capítulo 1 apresenta a introdução e uma ideia geral do que se desenvolveu no trabalho.
- O Capítulo 2 aborda os conceitos e a formulação do projeto de controladores \mathcal{H}_∞ , incluindo os conhecimentos para o uso de filtros de ponderação, mostrando a formulação matemática para o caso de um sistema na forma padrão do problema \mathcal{H}_∞ .
- O Capítulo 3 mostra o problema de otimização proposto para a obtenção direta de controladores de ordem reduzida, os conceitos fundamentais dos algoritmos genéticos e o algoritmo de solução implementado.

- O Capítulo 4 apresenta a abordagem *anti-windup* que permite minimizar os efeitos de saturação do atuador.
- O Capítulo 5 explica as características do exemplo simulado utilizado para a análise e mostra os resultados obtidos da aplicação do projeto no exemplo.
- O Capítulo 6 mostra o exemplo e os resultados experimentais do projeto de controladores de ordem reduzida para a bancada experimental da viga de alumínio engastada-livre.
- O Capítulo 7 mostra as conclusões obtidas do trabalho.
- Na sequência é apresentada a lista de referências do trabalho.
- O Apêndice A apresenta os conceitos básicos do método de elementos finitos para uma viga flexível.
- O Apêndice B mostra o método de projeto de controladores de ordem reduzida proposto em (Apkarian *e outros*, 2003, 2001), e que é utilizado neste trabalho no processo de comparação com o método proposto.
- O Apêndice C mostra a estrutura dos algoritmos genéticos usada para o projeto de controladores de ordem reduzida e compensadores *anti-windup*.
- O Apêndice D mostra as matrizes de estado dos controladores contínuos de ordem reduzida e do compensador contínuo *anti-windup* para o modelo experimental da viga engastada-livre.
- O Apêndice E mostra alguns resultados obtidos usando o algoritmo sequencial quadrático (SQP).
- O Apêndice F apresenta alguns aspectos da escolha da ordem do modelo estimado da viga experimental engastada-livre

2 Projeto de controlador \mathcal{H}_∞ de ordem completa

Este Capítulo contém primeiramente, uma breve introdução ao problema \mathcal{H}_∞ apresentando algumas características da síntese do problema \mathcal{H}_∞ . Nesta introdução é mencionada algumas abordagens mais usadas para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ e é apresentada a formulação matemática da norma \mathcal{H}_∞ . Seguidamente, é apresentada a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída, onde é mostrado o problema de otimização \mathcal{H}_∞ ótimo para a obtenção de controladores dinâmicos \mathcal{H}_∞ . Finalmente, são apresentados os conceitos de funções de ponderação, onde é explicada a importância da inclusão das funções de ponderação na síntese do problema \mathcal{H}_∞ . Dentro desse escopo, são mostrados as formulações matemáticas das funções de ponderação usadas e o problema de otimização para a obtenção de controladores \mathcal{H}_∞ levando em consideração as informações das funções de ponderação.

2.1 Introdução ao controle \mathcal{H}_∞

A síntese do problema \mathcal{H}_∞ padrão leva à obtenção de controladores com a mesma ordem da planta. Estes controladores são conhecidos como controladores de ordem completa. No caso de controle ativo de estruturas flexíveis pode ser usado um modelo truncado da planta, pois são modelos em geral de alta ordem. Isto implicaria no uso de funções de ponderação para evitar possíveis problemas de instabilidade.

Formulado pela primeira vez por Zames em (Zames, 1981) a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ pode ser tratada como um problema de otimização no domínio da frequência. O projeto de controladores \mathcal{H}_∞ busca minimizar o maior pico da resposta em frequência do sistema e pode ser utilizado quando os níveis de desempenho e estabilidade com respeito a distúrbios externos devem ser garantidos (Skogestad e Postlethwaite, 2005).

Métodos para resolver o problema de projeto do controladores \mathcal{H}_∞ foram desenvolvidos nas últimas décadas, por exemplo, os métodos baseados em desigualdades matriciais lineares (LMI), o qual torna o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem completa num problema de otimização convexa (Boyd e Ghaoui, 1994).

Outra abordagem usada para a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ é o trabalho proposto por Gahinet

e Apkarian em (Gahinet e Apkarian, 1994), onde o projeto de controle \mathcal{H}_∞ é escrito como um problema de otimização com restrições na forma de LMIs usando o Lema da Projeção e o Lema do Limite Real. Outro trabalho no escopo das LMIs é o proposto por Scherer (Scherer *e outros*, 1997) baseado em transformações de variáveis e de congruência na síntese do problema conjunto \mathcal{H}_∞ e \mathcal{H}_2 .

2.1.1 Norma \mathcal{H}_∞

O projeto \mathcal{H}_∞ consiste em reduzir a norma infinito da função de transferência da saída de desempenho com respeito às entradas exógenas, o que representa a minimização do maior pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada. No caso de sistemas multivariáveis (MIMO), a resposta em frequência refere-se ao diagrama de valores singulares, e no caso de sistemas de única entrada e única saída (SISO) refere-se ao diagrama de Bode (Skogestad e Postlethwaite, 2005; Zhou e Doyle, 1998).

A norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $G(s)$ (SISO) pode ser calculada no domínio da frequência como (Zhou *e outros*, 1996)

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_w |G(j\omega)|$$

e a norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$ (MIMO) é calculada como (Zhou *e outros*, 1996)

$$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty = \sup_w \sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$$

onde s representa a variável no domínio da transformada de Laplace, j representa a unidade imaginária, w é a variável da frequência, $\sigma(\mathbf{G}(j\omega))$ é o valor singular da matriz de transferência $\mathbf{G}(s)$, e $\sup_w(\cdot)$ representa o correspondente valor supremo. $\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega))$ é definido como (Skogestad e Postlethwaite, 2005)

$$\sigma_{max}(\mathbf{G}(j\omega)) = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{G}^*(j\omega)\mathbf{G}(j\omega))}$$

onde $\lambda_{max}(\cdot)$ representa o máximo autovalor e \mathbf{G}^* é a transposta conjugada da matriz \mathbf{G} .

2.2 Controlador \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída

Considere a planta linear de ordem n com um número de entradas exógenas n_w , número de entradas de controle n_u , número de saídas de desempenho n_z e número de saídas medidas n_y , dada como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}\end{aligned}\tag{2.1}$$

com $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ sem perda de generalidade já que os resultados podem ser estendidos para o caso geral (Sánchez-Peña e Sznaier, 1998). $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{w} \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é o vetor de entradas exógenas, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^{n_z}$ é o vetor da saída de desempenho, $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^{n_u}$ é o vetor da entrada de controle e $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^{n_y}$ é o vetor das saídas medidas. A matriz de transferência de \mathbf{w} para \mathbf{z} do modelo da planta mostrado em (2.1) é definida como:

$$\mathbf{P}_{zw}(s) = \mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{11}$$

onde \mathbf{I} representa a matriz identidade.

Considere o controlador dinâmico linear de ordem n dado por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y}\end{aligned}\tag{2.2}$$

e a correspondente função de transferência

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c$$

Assim, o sinal de controle por realimentação de saída é dado como:

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}(s)\mathbf{Y}(s)$$

Do modelo em espaço de estados da planta, Eq. (2.1), e com o controlador, Eq. (2.2), o sistema em malha fechada de w para z pode ser representado, segundo o esquema apresentado na Figura 2.1, como:

$$\dot{\mathbf{x}}_{cl} = \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{B}_{cl}\mathbf{w} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}\mathbf{w} \quad (2.4)$$

onde:

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{cl} = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c], \quad \mathbf{D}_{cl} = [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21}]$$

com $\dot{\mathbf{x}}_{cl} = [\dot{\mathbf{x}}^T \quad \dot{\mathbf{x}}_c^T]^T$, e T representa transposição.

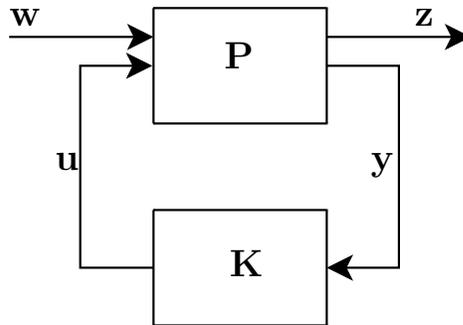


Figura 2.1: Representação do problema \mathcal{H}_∞

A matriz de transferência em malha fechada de w para z é definida como:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{C}_{cl}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1}\mathbf{B}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}$$

O controle \mathcal{H}_∞ ótimo busca encontrar um controlador $\mathbf{K}(s)$ (que estabilize o sistema) de forma que $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$ seja minimizada (Zhou e Doyle, 1998), i.e., busca minimizar, tanto quanto seja possível, o pico da resposta em frequência entre a entrada exógena w e a saída de desempenho z .

O projeto de controle \mathcal{H}_∞ sub-ótimo (Zhou e Doyle, 1998) busca encontrar um controlador

$\mathbf{K}(s)$ que estabilize o sistema, se existir algum, de forma que, para um escalar $\gamma \in \mathfrak{R}$,

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty} < \gamma \quad (2.5)$$

onde $\gamma > 0$.

Em busca do controlador ótimo $\mathbf{K}(s)$, γ é minimizado até que a condição da Eq. (2.5) não seja satisfeita ou uma malha fechada não estável seja obtida. Ou seja, o controlador $\mathbf{K}(s)$ é ótimo se o seguinte problema de otimização é resolvido para $\gamma > 0$ (Zhou e Doyle, 1998):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{K}(s)} \quad & \gamma \\ \text{sujeito a} \quad & \|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty} < \gamma \end{aligned} \quad (2.6)$$

com $\mathbf{T}_{zw}(s)$ estável.

Este problema de otimização é frequentemente usado para obter o controlador de ordem completa (controlador com a mesma ordem da planta). Isso pode ser resolvido usando as formulações baseadas em equações de Riccati ou abordagens por LMI (Boyd e Ghaoui, 1994; Skogestad e Postlethwaite, 2005).

O método de redução da ordem dos controladores proposto por Apkarian e Tuan (Apkarian e outros, 2003) é baseado na minimização da função objetivo, representado pela norma \mathcal{H}_{∞} do sistema controlado, sujeita a três restrições, na forma de LMI e uma restrição não-convexa de inversão de matriz. Na solução deste problema de otimização, a restrição não-convexa está incluída na função Lagrangiana Aumentada, envolvendo parâmetros de penalidade e termos associados aos multiplicadores de Lagrange. A restrições na forma de LMI são mantidas explicitamente, explorando as ferramentas atuais de programação semi-definida (SDP). A função Lagrangiana Aumentada é minimizada sucessivamente sujeita a restrições LMI, com parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange atualizados como mencionados em (Apkarian e outros, 2003; Sarracini, 2006). O Apêndice B apresenta os principais aspectos de essa formulação.

2.3 Funções de ponderação

2.3.1 Introdução

As funções de ponderação, também chamadas de filtros de ponderação, têm como objetivo impor pesos para certas regiões de frequências para os sinais de entrada ou saída do sistema durante a fase de projeto do controlador.

Quando colocadas na entrada da planta, as funções de ponderação garantem uma composição espectral específica, diminuindo o conservadorismo no projeto, pois a informação sobre o comportamento em frequência das entradas passa a ser levado em consideração para o projeto do controlador.

As funções de ponderação aplicadas na saída da planta têm como objetivo que o sistema em malha fechada apresente um comportamento pré-determinado, ou seja, faz com que a função de transferência da saída de desempenho com respeito à entrada exógena tenha uma composição espectral definida.

A aplicação de funções de ponderação na entrada e na saída da planta no projeto \mathcal{H}_∞ tem a vantagem de priorizar e ponderar a minimização das saídas de desempenho com respeito às entradas exógenas, tornando-se uma ferramenta importante no caso das estruturas flexíveis, onde o modelo matemático é obtido comumente através do truncamento da sua composição espectral. A utilização de funções de ponderação procura que os modos desconsiderados na modelagem não sejam excitados, o que se conhece como fenômeno de *Spillover* de controle (Meirovitch e Baruh, 1981; Balas, 1982). Salienta-se que as funções de ponderação devem ser consideradas somente no processo de síntese do controlador, mas não são implementados fisicamente, pois são apenas uma forma de caracterizar o comportamento espectral do controlador numa região desejada.

2.3.2 Seleção das funções de ponderação

A seleção das funções ponderadoras para um problema específico requer um bom ajuste. Neste trabalho são usadas funções de ponderação com as seguintes características no domínio de

Laplace (Zhou e Doyle, 1998):

- Filtro passa baixa \mathbf{W}_p : utilizado na saída da planta para priorizar à minimização do sinal de desempenho na baixa frequência, pode ser caracterizado como:

$$\mathbf{W}_p = \left(\frac{s / \sqrt[k]{M_p} + w_c}{s + w_c \sqrt[k]{\epsilon_p}} \right)^k$$

- Filtro passa alta \mathbf{W}_u : utilizado na entrada da planta de controle para priorizar a minimização do sinal de controle na alta frequência (para evitar o fenômeno spillover), pode ser caracterizado como:

$$\mathbf{W}_u = \left(\frac{s + w_c / \sqrt[k]{M_u}}{\sqrt[k]{\epsilon_u} s + w_c} \right)^k$$

onde M_p e M_u representam os ganhos na passagem, ϵ_p e ϵ_u representam os ganhos na rejeição, w_c a frequência de cruzamento para o ganho unitário e k a ordem do filtro. A Figura 2.2 mostra estas especificações para o caso de um filtro passa baixa.

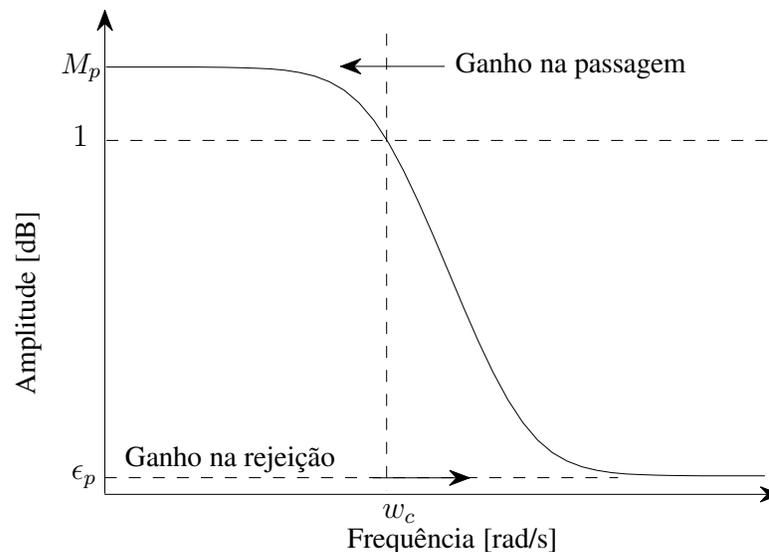


Figura 2.2: Características do filtro passa baixa como função de ponderação.

A escolha das especificações de cada função de ponderação depende das características da planta. Estas características dependem das faixas de frequência de interesse para a rejeição do dis-

túrbio e dos ganhos de cada filtro para a priorização das saídas de desempenho (ver Figura 2.3). Para o caso ilustrado na Figura 2.3, o filtro W_p assegura uma ponderação grande na região de baixa frequência, buscando uma atenuação das amplitudes nesta região. O filtro W_u tem ganho pequeno na baixa frequência, permitindo que o esforço de controle seja maior, pois este é considerado usualmente um dos sinais de desempenho do problema de otimização, e tem uma ponderação grande na região de alta frequência, onde o sinal de controle deve ser pequeno para não excitar os modos de maior frequência. Na seção seguinte, é explicado com maior detalhe como as funções de ponderação são levadas em conta na síntese do controlador.

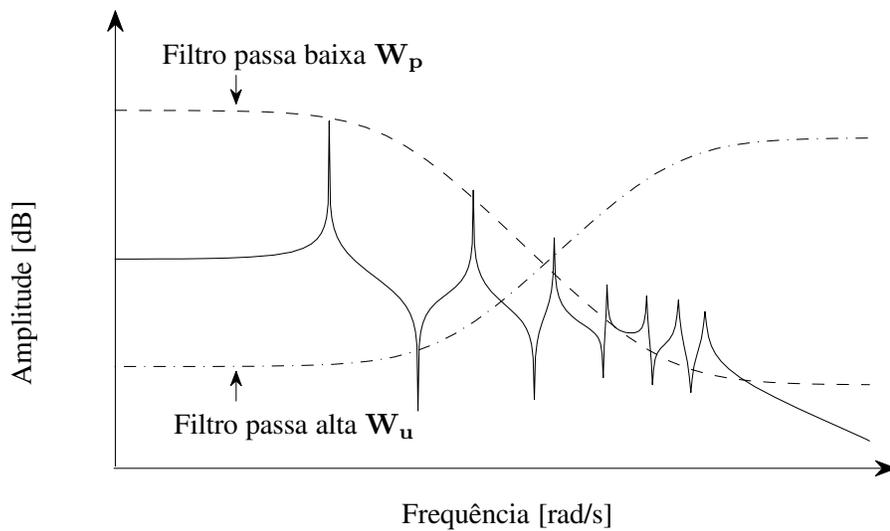


Figura 2.3: Sistema sem controle e filtros de ponderação

2.3.3 Modelo de estados do sistema com filtros de ponderação

São incluídos no processo de projeto \mathcal{H}_∞ filtros de ponderação, como se mostra na Figura 2.4. Os filtros de ponderação mostrados na Figura 2.4 apresentam as seguintes especificações:

- W_p : Filtro que especifica um ganho alto na região de frequência de interesse para a atenuação de vibrações do sistema. É geralmente um filtro passa baixa cujo objetivo é a minimização dos efeitos dos sinais de distúrbio na região de frequência em que se deseja atenuar a vibração, o que significa uma maior ponderação para o controle das saídas de desempenho na região;

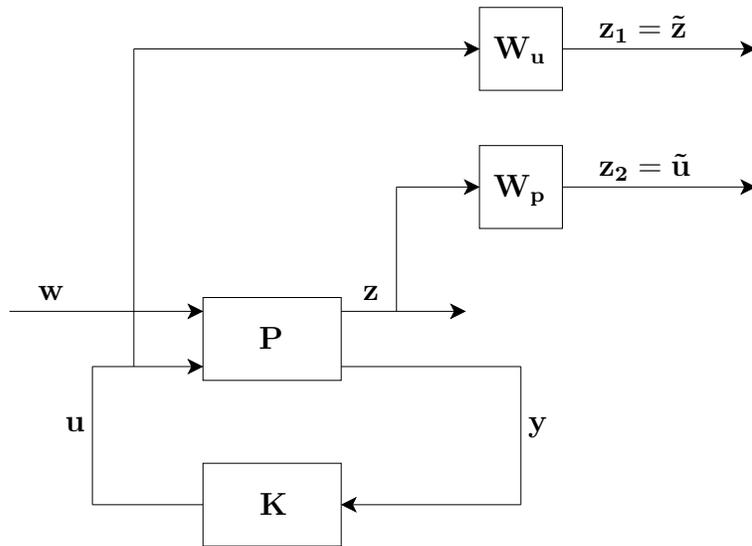


Figura 2.4: Diagrama do sistema aumentado, W_u and W_p são os filtros de ponderação, P é a planta e K o controlador.

- W_u : Filtro que especifica um ganho alto para o esforço de controle fora da região onde se deseja controlar. É geralmente um filtro passa alta cujo objetivo é a eliminação do sinal de controle na região de frequência onde não se deseja excitação pelo controlador.

Levando em conta esta informação apresentam-se os modelos de estados de cada bloco como segue:

- Modelo de estados do sistema em malha aberta P :

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\
 z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\
 \tilde{y} &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

onde w é o sinal de distúrbio.

- Modelo de estados do filtro W_p :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_p &= A_px_p + B_pz \\
 \tilde{z} &= C_px_p + D_pz
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

- Modelo de estados do filtro W_u :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{B}_u \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{C}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{D}_u \mathbf{u}\end{aligned}\quad (2.9)$$

De (2.7), (2.8) e (2.9) obtém-se o sistema em malha aberta aumentada na forma adequada ao projeto \mathcal{H}_∞ como se mostra:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_u \\ \dot{\mathbf{x}}_p \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_p \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_p \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_a} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_p \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{a1}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_u \\ \mathbf{B}_p \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{a2}} \mathbf{u}\quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{z}} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_p \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_u & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{a1}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a11}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_p \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_u \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a12}} \mathbf{u}\quad (2.11)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_{a2}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_u \\ \mathbf{x}_p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a21}} \mathbf{w} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{a22}} \mathbf{u}\quad (2.12)$$

onde $\tilde{\mathbf{z}}$ e $\tilde{\mathbf{u}}$ são as componentes do novo vetor de desempenho aumentado. O sinal $\tilde{\mathbf{z}}$ é o sinal da saída do sistema em malha aberta após passar pelo filtro passa-baixa para priorizar a redução dos efeitos do distúrbio \mathbf{w} sob o sinal de saída \mathbf{z} na baixa frequência. O sinal $\tilde{\mathbf{u}}$ é o sinal na entrada do sistema em malha aberta após passar pelo filtro passa-alta e é incluído no vetor de desempenho para evitar o fenômeno de *Spillover* de controle (eliminar os componentes do sinal de controle na alta frequência).

Do sistema em malha aberta apresentado em (2.10), (2.11) e (2.12), tem-se o problema de otimização usado para a obtenção dos controladores como apresentado a seguir.

2.3.4 Problema de otimização para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞

Reescrevendo as equações (2.10), (2.11) e (2.12) e considerando o vetor de estados aumentado $\mathbf{x}_a = [\mathbf{x} \quad \mathbf{x}_u \quad \mathbf{x}_p]^T$ e o vetor de desempenho aumentado $\mathbf{z}_a = [\tilde{\mathbf{z}} \quad \tilde{\mathbf{u}}]^T$ tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_a &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_{a1} \mathbf{w} + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{u} \\ \mathbf{z}_a &= \mathbf{C}_{a1} \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_{a11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_{a2} \mathbf{x}_a + \mathbf{D}_{a21} \mathbf{w}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Com o controlador linear \mathbf{K} por realimentação de saída apresentado em (2.2) e o sistema aumentado (2.13), considerando $\mathbf{D}_{a22} = \mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ sem perda da generalidade, pois as matrizes do controlador podem ser reajustadas quando a matriz $\mathbf{D}_{a22} \neq \mathbf{0}$ conforme mostrado em (Sánchez-Peña e Sznaier, 1998; Canahuire, 2009), o sistema em malha fechada pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_a \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a2} & \mathbf{B}_{a2} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_{a2} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{z}_a &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a1} + \mathbf{D}_{a21} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a1} & \mathbf{D}_{a12} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{a11} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \mathbf{w}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Com isto as matrizes em malha fechada do sistema (2.14) podem ser rescritas como,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{A}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a2} & \mathbf{B}_{a2} \mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c \mathbf{C}_{a2} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{a1} + \mathbf{B}_{a2} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} \\ \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a1} + \mathbf{D}_{a21} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{a1} & \mathbf{D}_{a12} \mathbf{C}_c \end{bmatrix} \\ \tilde{\mathbf{D}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{a11} + \mathbf{D}_{a12} \mathbf{D}_c \mathbf{D}_{a21} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

com a matriz de transferência definida como:

$$\mathbf{T}_{z_a \mathbf{w}}(s) = \tilde{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}}\tag{2.15}$$

Esta matriz de transferência (2.15) é usada no problema (2.6) da seguinte forma:

Encontrar um controlador $\mathbf{K}(s)$, para $\gamma > 0$, de forma que

$$\begin{array}{ll} \min & \gamma \\ \text{sujeito a} & \|\mathbf{T}_{zaw}\|_{\infty} < \gamma \end{array} \quad (2.16)$$

com $\mathbf{T}_{zw}(s)$ estável.

A solução deste problema de otimização permite obter o controlador \mathcal{H}_{∞} de ordem completa considerando as características em frequência impostas pelas funções de ponderação, ou seja, o controlador obtido buscará minimizar os efeitos das entradas de distúrbio na baixa frequência sem apresentar componentes espectrais em alta frequência na saída do controlador.

2.4 Comentários finais

Este Capítulo teve por finalidade apresentar a síntese de controladores \mathcal{H}_{∞} de ordem completa com a inclusão de funções de ponderação como um problema de otimização no domínio da frequência. A síntese de controladores \mathcal{H}_{∞} incluindo as funções de ponderação buscam minimizar o maior pico da resposta em frequência do sistema controlado numa faixa de frequência de interesse evitando o fenômeno de *Spillover* de controle. O problema de otimização apresentado em (2.16) foi baseado no problema \mathcal{H}_{∞} ótimo, onde se salienta que a abordagem do controle \mathcal{H}_{∞} foi para sistemas por realimentação de saída. Esta síntese é usada no próximo Capítulo para apresentar duas propostas de síntese de obtenção direta de controladores de ordem reduzida.

3 Síntese de obtenção direta de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida

Neste Capítulo é apresentada primeiramente, uma introdução sobre alguns problemas que podem surgir na implementação de controladores de ordem completa de estruturas flexíveis. Sobre este escopo, é mencionada uma abordagem usada e existente na literatura para projetar controladores de ordem menor. Seguidamente, são apresentadas duas propostas de sínteses de obtenção direta de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida. As sínteses estão baseadas no problema de otimização de controladores \mathcal{H}_∞ apresentadas no Capítulo 2 onde é incluída a informação sobre a ordem do controlador desejado. Finalmente, é apresentada a abordagem usando algoritmos genéticos para a solução dos problemas de otimização propostos.

3.1 Introdução

O projeto de controladores de ordem completa usado em modelos de plantas de ordem elevada leva à obtenção de controladores de ordem elevada. Esta abordagem pode acarretar atrasos no funcionamento físico dos controladores o que leva ao uso de *hardwares* mais complexos. Para contornar este problema é sugerido o uso de controladores de ordem reduzida (ordem k). Estes controladores são de ordem menor que do modelo da planta, $k < n$, e podem levar a um menor custo de hardware e menores tempos de processamento.

A síntese de controladores de ordem reduzida é caracterizada por ser um problema de otimização não-convexo. Nesse contexto, existem abordagens que aproximam o problema não-convexo a um problema de otimização convexa. Uma abordagem, segundo essa linha, foi o projeto de controladores de ordem reduzida proposta por Apkarian e Tuan em (Apkarian *e outros*, 2003) e é baseado na combinação do método do Lagrangiano Aumentado e restrições na forma de LMI. O método busca resolver o problema de otimização baseado na minimização da função objetivo representado pela norma \mathcal{H}_∞ do sistema controlado sujeita a três restrições em forma de LMI e uma restrição não convexa de inversão matricial. Na solução deste problema de otimização, a restrição não convexa é incluída na função Lagrangiana Aumentada. As restrições na forma de LMI são mantidas explícitas, explorando as vantagens das ferramentas computacionais da programação semi-definida. A função Lagrangiana Aumentada é sucessivamente minimizada sujeita a restrições

LMI, envolvendo atualizações dos parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange como discutido em (Apkarian e outros, 2003; Sarracini, 2006). Esta abordagem que envolve o uso das LMI e o Lagrangiano Aumentado é usada neste trabalho para permitir uma comparação e validação dos resultados obtidos com o método proposto. Uma breve explicação da formulação do método das LMI junto com o Lagrangiano Aumentado é dada no Apêndice B.

Neste trabalho são apresentadas duas sínteses de obtenção direta de controladores de ordem reduzida baseadas na solução do problema de otimização apresentado na Eq. (2.6), onde:

- A primeira síntese é estabelecida de forma que as matrizes do controlador de ordem reduzida a se projetar se encontram na forma canônica controlável. Isto leva a uma diminuição do número das variáveis de otimização desconhecidas no projeto, porém este método restringe o espaço de busca unicamente para controladores que podem ser representados na forma canônica controlável.
- A segunda síntese considera que os controladores estão na forma canônica modal. Este método reduz o número de variáveis desconhecidas embora não tanto quanto a forma anterior. Este método possui um espaço de busca maior que na síntese anterior devido a que a maioria dos sistemas podem ser representados na forma canônica modal. O controlador linear mostrado em (2.2) pode ser de ordem $k \leq n$, onde cada elemento das matrizes do controlador é uma variável de otimização a ser encontrada.

Os métodos propostos estão baseados na solução direta do problema de otimização não-convexa usando algoritmos genéticos. Nesse contexto, não houve necessidade de realizar transformações ou aproximações da síntese proposta a um problema de otimização convexa.

3.2 Projeto de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável

O projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida pode ser baseado na solução do problema de otimização apresentado na equação (2.6). O controlador linear apresentado na equação (2.2) pode ser de ordem reduzida k onde cada elemento das matrizes do controlador é uma variável de otimização a ser encontrada.

Para obter o controlador na forma canônica controlável é considerada a seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{T}\mathbf{x}_t \quad (3.1)$$

onde \mathbf{T} representa a matriz de transformação de coordenadas de estado relativa ao vetor de estados originais \mathbf{x}_c e ao vetor de estados na forma canônica \mathbf{x}_t . Usando a transformação (3.1) em (2.2), o controlador pode ser reescrito como

$$\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}_c\mathbf{T}\mathbf{x}_t + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}_c\mathbf{y}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_c\mathbf{T}\mathbf{x}_t + \mathbf{D}_c\mathbf{y}$$

Considerando o primeiro sinal de entrada do controlador (primeira coluna de \mathbf{B}_c) como referência para a transformação como apresentado em (Kailath, 1980; Ogata, 2003), obtém-se:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{B}_{c1} \quad \mathbf{A}_c\mathbf{B}_{c1} \quad \mathbf{A}_c^2\mathbf{B}_{c1} \quad \dots \quad \mathbf{A}_c^{k-1}\mathbf{B}_{c1}]$$

onde \mathbf{B}_{c1} é o vetor componente da matriz de entrada do controlador \mathbf{B}_c relativo à primeira entrada.

Esta transformação apresenta o controlador na sua forma canônica controlável relativa a sua primeira entrada, onde as matrizes de estados do controlador apresentam a seguinte forma.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \alpha_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,j} \\ 0 & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,j} \\ 0 & \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \cdots & \beta_{3,j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \beta_{k-1,1} & \beta_{k-1,2} & \cdots & \beta_{k-1,j} \\ 0 & \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \cdots & \beta_{k,j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & \cdots & c_{1,k} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & \cdots & c_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & c_{i,3} & c_{i,4} & c_{i,5} & \cdots & c_{i,k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{i,1} & d_{i,2} & \cdots & d_{i,j} \end{bmatrix}$$

onde $j + 1$ e i são os números de sinais de entrada e sinais de saída do controlador respectivamente.

Devido a que as matrizes do controlador estão na forma canônica controlável permite a redução do número de variáveis desconhecidas na síntese do controlador de ordem reduzida.

Considerando o esquema do sistema em malha fechada segundo apresentado na Figura 2.1 para a planta \mathbf{P} e o controlador de ordem reduzida \mathbf{K} o sistema em malha fechada $\mathbf{T}_{zw}(\mathbf{P}, \mathbf{K})$ pode ser reescrito na forma compacta (Zhou e Doyle, 1998) como:

$$\mathbf{T}_{zw}(\mathbf{P}, \mathbf{K}) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_{cl} \\ \hline \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} \end{array} \right] \quad (3.2)$$

Do sistema em malha fechada apresentado em (3.2), o problema de otimização para a obtenção de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável pode ser escrito usando o problema \mathcal{H}_∞ ótimo apresentado em (2.6) como:

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_k, \beta_k, j, c_i, k, d_i, j} \quad & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \\ \text{sujeito a} \quad & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_c))) < \epsilon_1 \\ & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < \epsilon_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $\lambda(\cdot)$ representa o correspondente autovalor e $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ garantirá a estabilidade do sistema. Os parâmetros ϵ_1 e ϵ_2 podem também ser escolhidos de forma que os polos do controlador e do sistema em malha fechada sejam alocados dentro de uma região de interesse como é mostrado na Figura 3.1. Os polos podem ser alocados de forma a garantir uma resposta mais rápida (polos localizados mais à esquerda no semiplano complexo) para o sistema controlado.

Para melhorar os resultados obtidos pode ser incluída a seguinte restrição para o problema de otimização Eq. (3.3):

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \|\mathbf{P}_{zw}\|_\infty \quad (3.4)$$

o que garante que o sistema em malha fechada apresente uma norma \mathcal{H}_∞ menor comparada com o sistema sem controle.

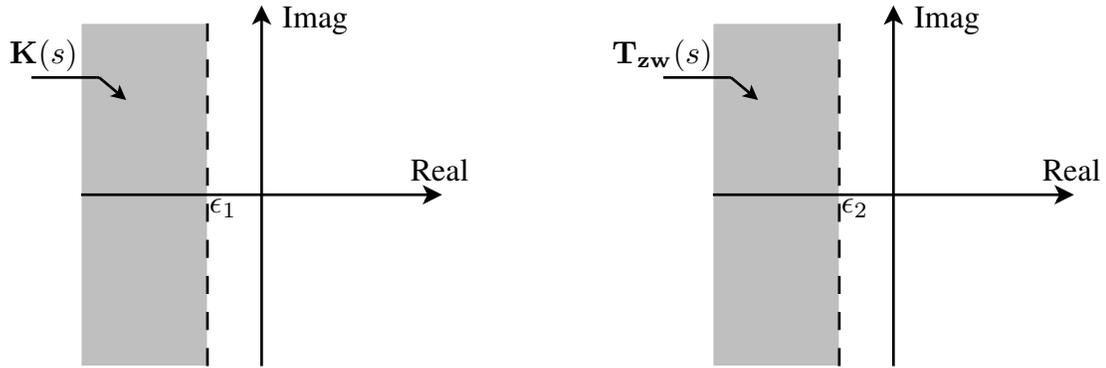


Figura 3.1: Região desejada dos polos do controlador de ordem reduzida $\mathbf{K}(s)$ e do sistema controlado $\mathbf{T}_{zw}(s)$ no plano complexo - controlador na forma canônica controlável.

O problema de otimização dado por (3.3) e (3.4) é um problema de otimização não-linear. Os algoritmos genéticos são usados neste trabalho explorando sua robustez no processo de busca para resolver este problema. No Apêndice E são mostrados alguns resultados usando programação quadrática sequencial (SQP) na solução do problema de otimização proposta. Os resultados são obtidos para um exemplo específico onde uma comparação com o uso dos algoritmos genéticos é discutida.

3.3 Projeto de controladores de ordem reduzida na forma canônica modal

Um segundo enfoque é baseado na obtenção de controladores de ordem reduzida na forma canônica modal (Gawronski, 2004; Kailath, 1980). O controlador será obtido levando em consideração diretamente suas características de frequência e amortecimento como se explica a seguir.

A matriz de estados \mathbf{A}_c do controlador linear $\mathbf{K}(s)$ descrito em (2.2) pode ser apresentada como um bloco matricial diagonal, também conhecido como forma canônica diagonal de Jordan (Kailath, 1980; Ogata, 2003). O controlador pode apresentar pares de polos, para um fator de amortecimento ξ_i e frequência natural não amortecido w_{ni} relativo ao modo de vibrar i do controlador, definidos como:

$$s_{1,2;i} = -\xi_i w_{ni} \pm j w_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \quad (3.5)$$

Quando $0 < \xi_i < 1$ os polos $s_{1,2;i}$ representam pares complexos conjugados, já quando $\xi_i \geq 1$

representam pares de polos reais obtidos como:

$$s_{1,2;i} = -\xi_i w_{ni} \pm w_{ni} \sqrt{\xi_i^2 - 1} \quad (3.6)$$

Segundo a forma modal do controlador, a matriz \mathbf{A}_c é caracterizada na forma diagonal como:

$$\mathbf{A}_c = \text{diag}(\mathbf{A}_{m1}, \mathbf{A}_{m2}, \mathbf{A}_{m3}, \dots, \mathbf{A}_{ml}, \lambda_{q1}, \lambda_{q2}, \lambda_{q3}, \dots, \lambda_{qr})$$

onde l é o número de pares de polos complexos conjugados do controlador. r é o número de pólos reais do controlador. \mathbf{A}_{mi} é uma matriz de ordem 2×2 caracterizada por um par de polos complexos conjugados apresentado em (3.5). λ_{qr} é um autovalor real ($\xi_i \geq 1$) do controlador obtido de (3.6). A matriz \mathbf{A}_{mi} é dada por:

$$\mathbf{A}_{mi} = \begin{bmatrix} -\xi_i w_{ni} & w_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} \\ -w_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2} & -\xi_i w_{ni} \end{bmatrix}_i \quad (3.7)$$

Usando (3.7) as matrizes de estado do controlador de ordem k podem ser escritas como:

$$\mathbf{A}_c = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{m3} & \cdots & \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{ml} & & & & & & \\ \hline & & & & & \lambda_{q1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{0} & \lambda_{q2} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{q3} & \cdots & \mathbf{0} & \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_{qr} & \end{array} \right]$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \cdots & \beta_{1,j} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \cdots & \beta_{2,j} \\ \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & \cdots & \beta_{3,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{k-1,1} & \beta_{k-1,2} & \cdots & \beta_{k-1,j} \\ \beta_{k,1} & \beta_{k,2} & \cdots & \beta_{k,j} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4} & c_{1,5} & \cdots & c_{1,k} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4} & c_{2,5} & \cdots & c_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i,1} & c_{i,2} & c_{i,3} & c_{i,4} & c_{i,5} & \cdots & c_{i,k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_c = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \cdots & d_{1,j} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \cdots & d_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{i,1} & d_{i,2} & \cdots & d_{i,j} \end{bmatrix}$$

onde j e i são os números de sinais de entrada e sinais de saída do controlador respectivamente. A ordem do controlador é $k = 2l + r$.

Devido a que a matriz de estado do controlador \mathbf{A}_c apresenta uma forma matricial diagonal permite a redução do número de variáveis desconhecidas no projeto do controlador de ordem reduzida.

Para o processo de síntese do controlador \mathcal{H}_∞ , será considerada a estrutura na forma canônica modal para o controlador de ordem reduzida, \mathbf{K} , no sistema em malha fechada apresentada na Equação (3.2).

O problema de otimização para a obtenção dos controladores de ordem reduzida na forma canônica modal pode ser escrito usando o problema \mathcal{H}_∞ ótimo apresentado em (2.6) como:

$$\begin{aligned} \min_{\xi_p, w_n^p, \beta_{k,j}, c_{i,k}, d_{i,j}} \quad & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \\ \text{s.a} \quad & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_c))) < \epsilon_1 \\ & \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < \epsilon_2 \\ & \|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \|\mathbf{P}_{zw}\|_\infty \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde p representa o número total de pólos do controlador. Este problema de otimização é também resolvido usando os algoritmos genéticos.

Uma vantagem deste método é que ele permite limitar o comportamento do controlador em uma faixa de frequência desejada e permite restringir o fator de amortecimento de forma simples

incluindo as seguintes restrições:

$$\xi_o < \xi_p < \xi_f \quad (3.9)$$

$$w_{no} < w_n^p < w_{nf} \quad (3.10)$$

onde ξ_o é o fator de amortecimento mínimo desejado, ξ_f o fator de amortecimento máximo desejado, w_{no} a frequência natural mínima desejada e w_{nf} a frequência natural máxima desejada. A inclusão destas restrições dentro do problema de otimização permite, explicitamente, alocar os polos do controlador dentro de uma região de interesse como se mostra na Figura 3.2.

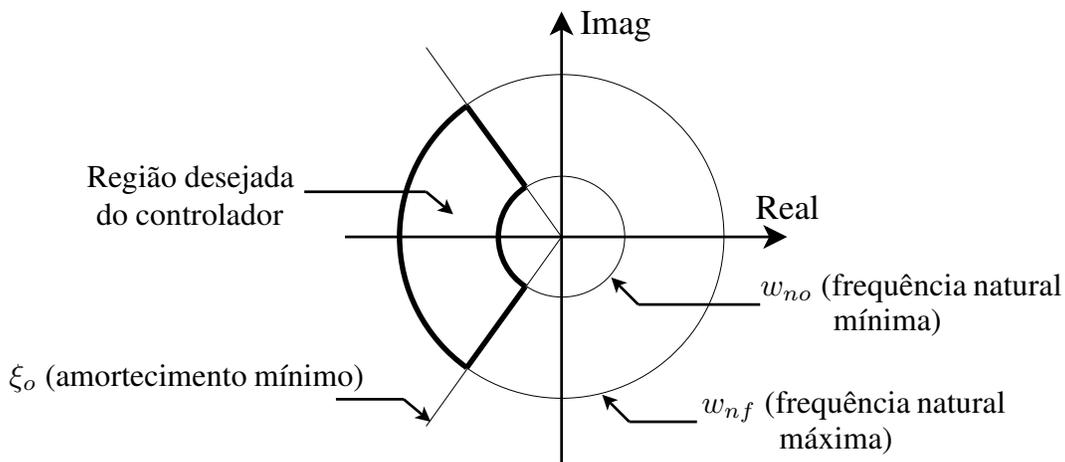


Figura 3.2: Região desejada dos polos do controlador de ordem reduzida no plano complexo - controlador na forma canônica modal.

Estas restrições permitem priorizar diretamente a minimização da norma \mathcal{H}_∞ do sistema controlado numa faixa de frequência desejada.

3.4 Abordagem via algoritmos genéticos

3.4.1 Introdução aos algoritmos genéticos

Os algoritmos genéticos são uma classe de métodos de otimização que são inspirados em processos biológicos como a seleção, a herança, a mutação e o cruzamento. O GA pode ser usado

para resolver problemas de otimização apresentando as seguintes vantagens com respeito a outros métodos de busca convencionais (Goldberg, 1989):

1. Eles trabalham com um código para o conjunto de parâmetros e não com os valores dos parâmetros. Eles trabalham com as características dos parâmetros que podem ser funções de adaptação, seleção, etc.
2. Eles não são limitados por restrições com respeito à continuidade, existência de derivadas, unimodalidade e outros aspectos.
3. Eles fazem a busca simultânea sobre uma população de pontos e não em um único ponto.
4. Eles usam definições de transição probabilísticas e não definições determinísticas.

GA trabalham simulando o comportamento da natureza dos indivíduos. Eles trabalham com populações de indivíduos que representam uma possível solução para o problema de otimização. Os indivíduos competem entre si para produzir a próxima população, onde a seleção natural depende de quão boa é a adaptação do indivíduo ao problema. Os melhores indivíduos, que têm melhores valores de aptidão, são selecionados e eles são chamados de *pais*. Esses pais são usados para criar a próxima população formada por filhos elite, filhos cruzamento e filhos de mutação. As populações são geradas até que algum critério de convergência seja alcançado.

Uma estrutura simples do GA usa três operadores para criar a próxima geração da população atual (Goldberg, 1989):

1. Seleção: Seleciona os pais que contribuem para a criação da população da próxima geração.
2. Cruzamento: Cruza dois pais para formar os filhos da próxima geração.
3. Mutação: Aplicar alterações aleatórias aos pais para formar os filhos. A mutação gera maior diversidade na população aumentando o espaço de busca do algoritmo genético.

Um diagrama de como os algoritmos genéticos trabalham é mostrado na Figura 3.3.

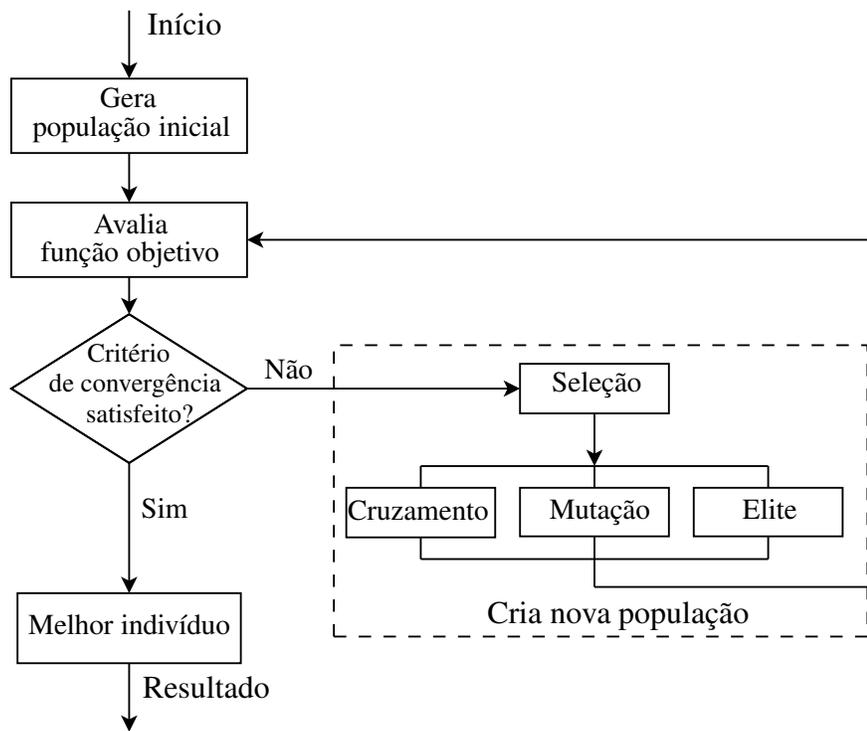


Figura 3.3: Estrutura de operação do GA

A grande vantagem do GA é sua robustez, podendo ser utilizado com sucesso em uma grande variedade de problemas de otimização. GA não garantem encontrar a melhor solução global em um problema de otimização, mas eles podem encontrar boas soluções em um tempo razoável.

Estas características tornam os GA uma abordagem potencialmente útil no projeto de controladores de ordem reduzida deste trabalho, uma vez que este problema de otimização não-convexo pode ser considerado complexo e difícil de ser resolvido por técnicas convencionais baseadas em gradientes.

3.4.2 Algoritmos genéticos para a síntese de controladores de ordem reduzida

Seja o problema de otimização não linear, usado para o projeto de controladores de ordem reduzida, definido como:

$$\text{P1: } \begin{cases} \text{minimizar} & F(\mathbf{K}(s), \mathbf{P}(s)) = \|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty} \\ \text{sujeito a} & g_1 = \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_c))) < 0 \\ & g_2 = \max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

onde $F(\mathbf{K}(s), \mathbf{P}(s))$ é a função objetivo a ser minimizada (função aptidão), g_1 e g_2 representam as restrições de desigualdades não lineares.

Para resolver o problema de otimização não linear apresentado em (3.11) é usado o método Lagrangiano Aumentado junto com os algoritmos genéticos. O problema é formulado de forma que unicamente as restrições não lineares são incluídas na função Lagrangiana Aumentada. Quando o problema de otimização (3.11) apresenta restrições lineares ou limites nas variáveis de otimização, essas restrições são deixadas explicitamente no problema de otimização (por exemplo no caso da síntese de controladores na forma modal). A função Lagrangiana Aumentada é descrita a seguir (Conn e outros, 1991, 1997):

$$\Phi_c(\mathbf{K}(s), \lambda, s, \rho) = F(\mathbf{K}(s), \mathbf{P}(s)) - \sum_{i=1}^2 \lambda_i s_i \log(s_i - g_i(\mathbf{x})) \quad (3.12)$$

onde λ_i é o multiplicador de Lagrange, s_i é um valor de variação não negativo e ρ é o parâmetro de penalidade.

A função Lagrangiana Aumentada (3.12) é minimizada utilizando o algoritmo genético de forma que as restrições lineares e os limites de contorno sejam satisfeitos. Se os critérios de convergência não são atingidos, os multiplicadores de Lagrange e os parâmetros de penalidade devem ser atualizados seguindo a formulação apresentada em (Conn e outros, 1997).

3.5 Algoritmo de solução via algoritmos Genéticos

As características dos algoritmos genéticos usadas para a solução da síntese proposta de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida são apresentadas no Apendice C.

O processo de solução usando GA segue a estrutura mostrada na Figura 3.4 e pode ser resumido como segue:

1. O modelo da planta é determinado.
2. A ordem fixa do controlador a ser projetado é indicada na variável n_k e é escolhida pelo projetista. O número de variáveis de otimização desconhecidas ($nvar$) é calculado como se mostra:
 - número de variáveis na forma canônica controlável: $nvar = n_k(n_y + n_u) + n_u n_y$
 - número de variáveis na forma canônica modal: $nvar = n_k(n_y + n_u + 1) + n_u n_y$

onde n_u é o número de sinais de controle e n_y é o número de sinais de medição.

3. A população inicial (\mathbf{Pop}_o), que contém os valores iniciais das variáveis desconhecidas do controlador, é considerada como um vetor zero na primeira iteração.
4. Inicializa-se o contador de iterações, $i = 1$.
5. Com as considerações anteriores, o problema de otimização apresentado nas equações (3.3) e (3.4) para o controlador na forma canônica controlável, ou (3.8) no caso da forma canônica modal, é resolvido usando GA (buscando minimizar a norma \mathcal{H}_∞ do sistema controlado).
6. Se a solução for factível, a estabilidade e a redução da norma \mathcal{H}_∞ do sistema controlado em relação ao sistema não controlado são garantidos, o controlador de ordem reduzida é obtido. Caso contrário, $\mathbf{Pop}_o(i + 1) = \mathbf{Pop}_f(i)$, onde $\mathbf{Pop}_f(i)$ representa a população final da iteração atual. $i = i + 1$ e se volta para o passo 5.

Com essas considerações o problema de otimização pode ser resolvido e os controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida podem ser projetados.

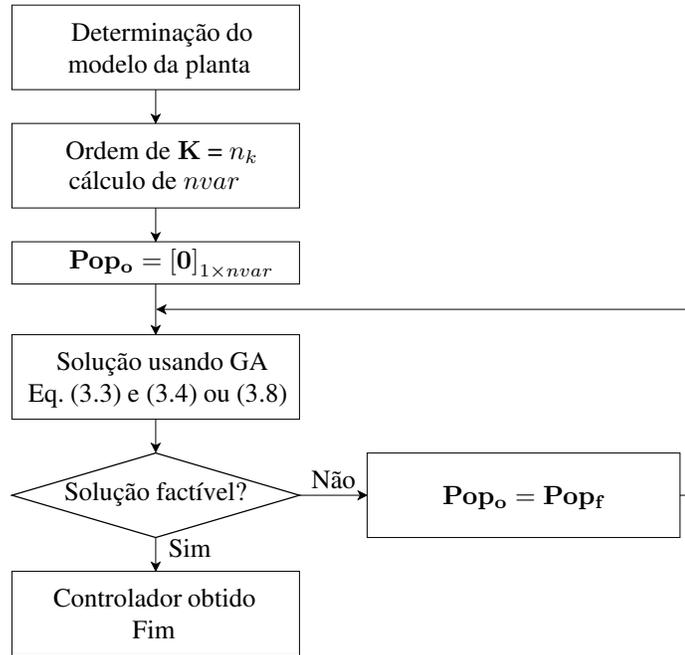


Figura 3.4: Processo de solução usando algoritmos genéticos.

3.6 Comentários finais

Este Capítulo apresentou duas alternativas de sínteses de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida. Os controladores são obtidos diretamente da solução dos problemas de otimização não convexa usando algoritmos genéticos. As sínteses são caracterizadas por levar em consideração diretamente na formulação uma estrutura matricial específica do controlador (forma canônica controlável ou forma canônica modal). Uma característica destas sínteses é que permite ao projetista alocar os polos do controlador de forma simples numa região desejada reduzindo o espaço de busca do controlador de solução ótima. As abordagens propostas são uma alternativa quando se deseja implementar controladores de baixo custo computacional ou em situações onde existem limitações de *hardwares*.

4 Abordagem *anti-windup* para efeitos de saturação de atuadores

Neste Capítulo são explicados os efeitos produzidos no sistema controlado quando o sinal de controle supera seu limite de amplitude máxima permitindo ocasionando a saturação do atuador. Nesse contexto, são apresentadas algumas abordagens existentes na literatura para evitar ou tratar os efeitos de saturação no sistema controlado. Baseadas nas abordagens existentes, é proposta uma síntese de compensadores *anti-windup* através de um problema de otimização não convexo para melhorar o desempenho do sistema na região de saturação garantindo a estabilidade. Finalmente, o problema de otimização não convexo proposto é resolvido diretamente usando algoritmos genéticos.

4.1 Introdução

É de conhecimento que os dispositivos de controle estão submetidos a limites de operação, sendo um dos mais comuns a restrição em amplitude dos sinais. Estes limites quando ignorados no processo de projeto podem levar a uma perda de desempenho severa relativa ao esperado se o sinal alcança seu limite máximo de operação.

Neste capítulo é apresentado um método para melhorar o desempenho do sistema controlado quando submetido a efeitos de saturação dos atuadores. Alguns métodos conservadores são baseados em reduzir a amplitude do sinal de controle de forma de evitar a saturação dos atuadores. Para esse propósito é necessário o conhecimento de algumas características do sinal de distúrbio, tais como a amplitude e a frequência de atuação.

Os compensadores *anti-windup* são incluídos no projeto para trabalhar unicamente na região de saturação atenuando os efeitos de saturação sobre o sistema controlado. Esta característica dos compensadores *anti-windup* permite que o sistema controlado atue na zona linear na ausência de saturação. A abordagem usando compensadores *anti-windup* não requer o conhecimento prévio das características dos sinais de distúrbio.

Métodos convencionais de controle linear e não linear são uma boa opção de solução, mas não são recomendados em situações onde a saturação está presente em curtas faixas de tempo (por exemplo unicamente no regime transitório), pois passado esse tempo o sistema pode continuar atuando na região linear.

4.2 Definições prévias

4.2.1 Restrição da entrada de controle

Considere agora para o projeto de controle \mathcal{H}_∞ a presença da não linearidade devido à saturação como se mostra na Figura 4.1.

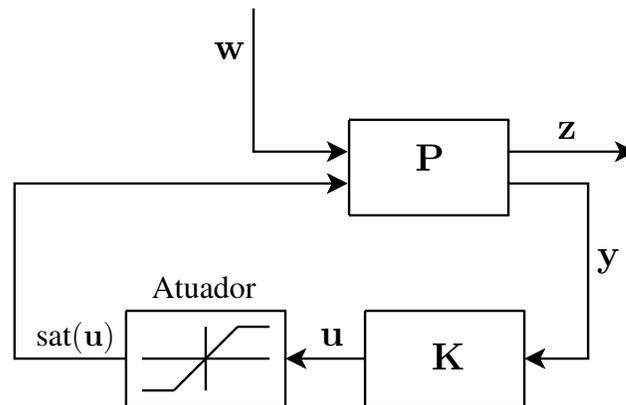


Figura 4.1: Esquema do sistema controlado submetido a limites de saturação.

A saída do atuador é definida como segue:

$$\text{sat}(u_i) = \begin{cases} u_{i,max}, & u_i > u_{i,max} \\ u_i, & -u_{i,max} \leq u_i \leq u_{i,max} \\ -u_{i,max}, & u_i < -u_{i,max} \end{cases}$$

com $u_{i,max}$ definido como o limite máximo na saída do atuador para o sinal de controle u_i .

Neste escopo, o esforço de controle será restrito em amplitude na saída do controlador produzindo um sinal não desejado na entrada da planta quando superar seu limite máximo.

4.2.2 Efeito *windup*

O efeito *windup* é produzido quando o sinal de controle na entrada da planta é diferente do sinal de saída do controlador ($\bar{\mathbf{u}} \neq \mathbf{u}$) (ver Figura 4.2), ou seja quando o sinal de controle é

limitado pelo atuador ocorrendo sua saturação. Este efeito *windup* pode levar a uma perda severa do desempenho e às vezes a instabilidade do sistema.

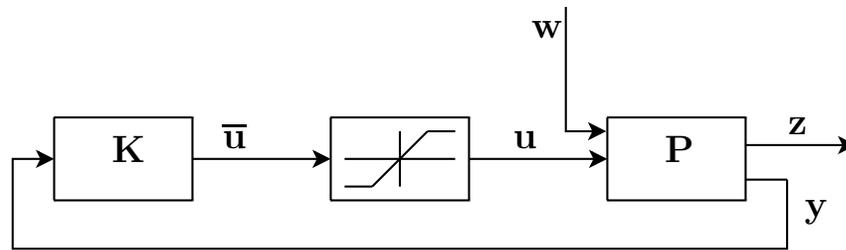


Figura 4.2: Sistema controlado submetido a limites de saturação - situação *windup*.

4.2.3 Abordagens ao problema *windup*

Para contornar o problema de saturação são propostas três possíveis soluções (Galeani, 2005):

- **Projeto de controladores restritos:** Os controladores são projetados para evitar a saturação do sistema, e dependem dos limites de saturação de projeto o que leva a pouca flexibilidade quando estes limites variam.

Estes controladores apresentam uma perda de desempenho relativa ao sistema projetado sem considerar a restrição do sinal de controle. Isso é uma desvantagem em regime permanente tendo em conta que a saturação, na maioria dos casos, só está presente na situação transitório (Galeani, 2005).

Salienta-se que esta abordagem não garante uma melhora do desempenho com relação ao sistema que permite a saturação.

- **Projeto de controladores não lineares:** Apresentam um processo de projeto mais complicado, com poucas ferramentas de auxílio disponíveis. O projeto de controladores não lineares leva em consideração a não linearidade em todo o processo de projeto, o que leva a um pequeno aproveitamento do comportamento do sistema na região em que este se torna linear.
- **Projeto de controladores *anti-windup*:** Uma compensação K_{AW} é incluída para ajudar o controlador K com o objetivo de melhorar o desempenho. K_{AW} é ativa quando existe a

saturação. O projeto preserva o comportamento do controlador \mathbf{K} na ausência da saturação, ou seja, garante um bom desempenho na zona de comportamento linear. Este é o enfoque usado neste trabalho.

4.3 Projeto *anti-windup*

Um dos maiores problemas no projeto de controladores lineares é a saturação dos atuadores e os efeitos que eles causam como a degradação do desempenho do sistema e, em certos casos, sua instabilidade.

Nas últimas décadas uma considerável atenção foi dada aos problemas de saturação do esforço de controle com progressos significativos. Entre os mais comuns apresentados para resolver o problema estão os métodos de otimização projetando o controlador ótimo com restrição no esforço de controle. Além disso, têm-se os métodos clássicos de projeto, onde o controlador é obtido através de uma série de testes garantindo que o sinal de controle não supere o limite estabelecido. Outro enfoque para a abordagem do problema será definido como o projeto *anti-windup* e se caracteriza pela inclusão de um compensador ao sistema com o fim de atenuar os efeitos de saturação do esforço de controle.

O projeto *anti-windup* é baseado na correção do controlador mediante a inclusão de um compensador no sistema controlado. Existem diversas abordagens para a solução do projeto *anti-windup* como é a abordagem de compensadores de estrutura desacoplada apresentada em (Turner *e outros*, 2007), ou o enfoque realizado por Gomes e Tarbouriech (Gomes e Tarbouriech, 2005; Grimm *e outros*, 2003) onde é realizada a análise e a inclusão *anti-windup* para sistemas com estabilidade local.

4.3.1 Arquitetura do projeto *anti-windup*

A abordagem usada neste trabalho está baseada no trabalho apresentado por Turner em (Turner *e outros*, 2007). O projeto *anti-windup* apresenta a estrutura mostrada na Figura 4.3. O compensador *anti-windup* é incluído no sistema para recuperar o comportamento linear ideal do controlador através do sinal \mathbf{v}_2 . O sinal \mathbf{v}_2 é responsável pela rápida recuperação do comportamento

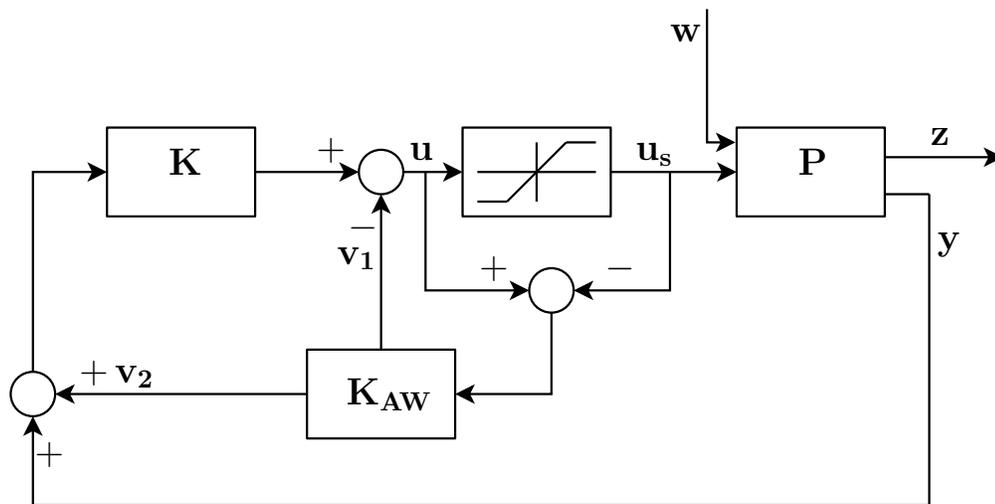


Figura 4.3: Estrutura do projeto *anti-windup*.

linear do sistema após sair da zona de saturação. O sinal v_1 é incluído principalmente para garantir a estabilidade do sistema na zona de saturação.

O bloco do compensador dinâmico *anti-windup* é dividido em dois subsistemas como mostrado na Figura 4.4 (Turner *e outros*, 2007).

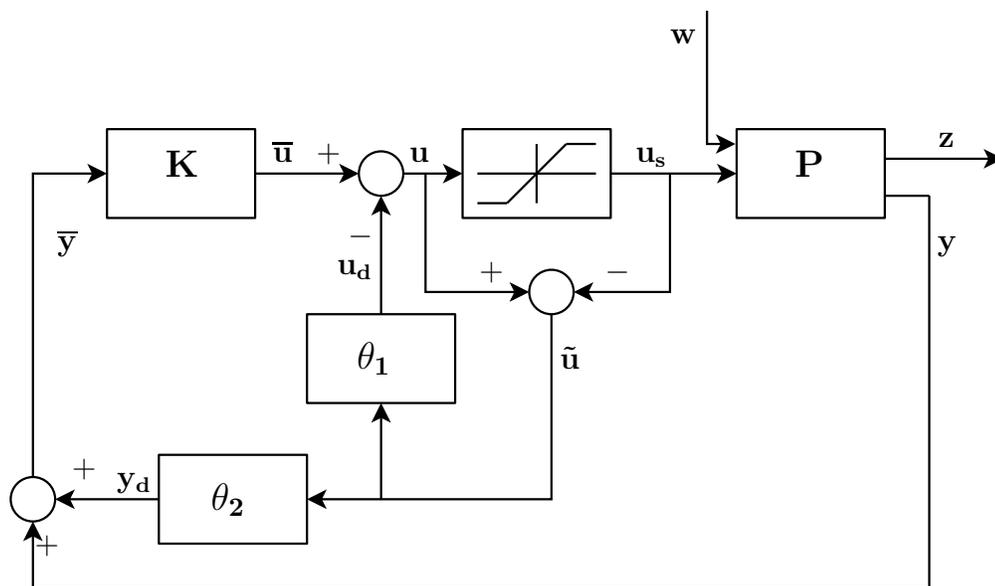


Figura 4.4: Fracionamento do bloco *anti-windup*.

O compensador *anti-windup* adiciona sinais extras na entrada e saída do controlador K quando houver presença de saturação como é mostrado na Figura 4.4. Vale mencionar que o con-

trolador \mathbf{K} é projetado sem considerar as restrições de saturação do atuador.

A planta \mathbf{P} mostrada na Figura 4.4, para a entrada de distúrbio \mathbf{w} , a entrada de controle \mathbf{u}_s e a saída de desempenho \mathbf{z} , é definida como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_s \quad (4.1)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}_s \quad (4.2)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}_s \quad (4.3)$$

com $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ sem perda de generalidade desde que os resultados podem ser estendidos para o caso geral (Sánchez-Peña e Sznaier, 1998).

A planta \mathbf{P} pode ser escrita em termos de funções de transferência como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}(s) \\ \mathbf{Y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw}(s) & \mathbf{P}_{zu_s}(s) \\ \mathbf{P}_{yw}(s) & \mathbf{P}_{yu_s}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}(s) \\ \mathbf{U}_s(s) \end{bmatrix}$$

Neste trabalho é considerado que o modelo da planta \mathbf{P} é estável. Unicamente o sistema $\mathbf{P}_{yu_s}(s)$ forma parte do compensador *anti-windup* e sua representação compacta é dada por:

$$\mathbf{P}_{yu_s}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right]$$

O projeto *anti-windup* proposto é baseado na arquitetura desacoplada apresentada em (Turner e outros, 2007), onde o modelo do compensador *anti-windup* apresenta a seguinte característica:

$$\begin{bmatrix} \theta_1(s) \\ \theta_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(s) - \mathbf{I} \\ \mathbf{P}_{yu_s}(s)\mathbf{M}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(s) - \mathbf{I} \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix}$$

Segundo os trabalhos de (Weston e Postlethwaite, 1998a,b), a boa funcionalidade dos compensadores *anti-windup* é baseada na escolha de $\mathbf{M}(s)$. Uma escolha interessante é fazer $\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}$, embora esta escolha não é boa para sistemas onde $\mathbf{P}_{yu_s}(s)$ é pouco amortecido (Weston e Postlethwaite, 1998a,b). Como é descrito em (Turner e outros, 2007) uma boa escolha de $\mathbf{M}(s)$ é

considerá-lo com um produto coprimo de $\mathbf{P}_{y_{u_s}}(s)$.

Considerando o produto $\mathbf{P}_{y_{u_s}}(s) = \mathbf{N}(s)\mathbf{M}(s)^{-1}$, o parâmetro $\mathbf{M}(s)$ é escolhido como parte do produto coprimo de $\mathbf{P}_{y_{u_s}}(s)$. Um exemplo de como obter este produto coprimo pode ser verificado em (Zhou e outros, 1996). Neste caso o compensador *anti-windup* é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}_{aw} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F})\mathbf{x}_{aw} + \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{y}_d = (\mathbf{C}_2 + \mathbf{D}_{22}\mathbf{F})\mathbf{x}_{aw} + \mathbf{D}_{22}\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.5)$$

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{F}\mathbf{x}_{aw} \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = dz(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d) \quad (4.7)$$

onde $dz(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \text{sat}(\mathbf{u})$ é conhecida como a função de zona morta (Turner e outros, 2007). Os sinais \mathbf{u}_d e \mathbf{y}_d são os sinais que realimentam o controlador na presença de saturação.

A matriz \mathbf{F} determina o produto coprimo de $\mathbf{P}_{y_{u_s}}(s)$, o qual tem um grande efeito no comportamento do compensador *anti-windup*. A matriz \mathbf{F} deve ser calculada de forma que o sistema seja capaz de reduzir os efeitos do sinal de saturação sob o sinal de desempenho z .

O objetivo desta seção é encontrar uma matriz \mathbf{F} que determine o compensador *anti-windup* de forma que $\|\mathbf{T}_{z\tilde{\mathbf{u}}}\|_\infty$ seja minimizada. A matriz \mathbf{F} é calculada como se mostra a seguir.

Seja o controlador projetado sem considerar limites de operação definido segundo a Figura 4.4 como:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\bar{\mathbf{y}} \quad (4.8)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\bar{\mathbf{y}} \quad (4.9)$$

Considere as seguintes equações determinadas da Figura 4.4.

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \mathbf{y}_d \quad (4.10)$$

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_s \quad (4.11)$$

e

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d \quad (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (4.11) tem-se

$$\tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d - \mathbf{u}_s \quad (4.13)$$

ou

$$\mathbf{u}_s = \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d - \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) no modelo da Planta, equação (4.1), obtem-se o seguinte:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{B}_2\mathbf{u}_d - \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.15)$$

De (4.9) e (4.6) em (4.15) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2(\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{F}\mathbf{x}_{aw}) - \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.16)$$

Substituindo (4.10) em (4.16) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c(\mathbf{y}_d + \mathbf{y}) - \mathbf{B}_2\mathbf{F}\mathbf{x}_{aw} - \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.17)$$

De (4.3) e (4.5) em (4.17) obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c(\mathbf{C}_2\mathbf{x}_{aw} + \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}) - \mathbf{B}_2\mathbf{F}\mathbf{x}_{aw} - \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.18)$$

e ordenando a expressão (4.18) tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2)\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2\mathbf{F})\mathbf{x}_{aw} + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21})\mathbf{w} - \mathbf{B}_2\tilde{\mathbf{u}} \quad (4.19)$$

Substituindo (4.10) em (4.8) obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c(\mathbf{y} + \mathbf{y}_d) \quad (4.20)$$

De (4.3) e (4.5) em (4.20), tem-se

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) + \mathbf{B}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x}_{aw}) \quad (4.21)$$

e ordenando a equação (4.21) mostra-se que:

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_{aw} + \mathbf{B}_c \mathbf{D}_{21} \mathbf{w} \quad (4.22)$$

Para o sinal de desempenho substitui-se (4.14) na equação (4.2) e obtém-se

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_d - \tilde{\mathbf{u}}) \quad (4.23)$$

De (4.6) e (4.9) em (4.23) tem-se

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} (\mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c \bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} \mathbf{x}_{aw} - \mathbf{D}_{12} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.24)$$

Substituindo (4.10) em (4.24) tem-se

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c (\mathbf{y}_d + \mathbf{y}) - \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} \mathbf{x}_{aw} - \mathbf{D}_{12} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.25)$$

De (4.3) e (4.5) em (4.25), obtém-se

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c (\mathbf{C}_2 \mathbf{x}_{aw} + \mathbf{C}_2 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}) - \mathbf{D}_{12} \mathbf{F} \mathbf{x}_{aw} - \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}_c \quad (4.26)$$

e ordenando a equação (4.26) verifica-se que:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2) \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + (\mathbf{D}_{12} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_2 - \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}) \mathbf{x}_{aw} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w} - \mathbf{D}_{12} \tilde{\mathbf{u}} \quad (4.27)$$

Das equações (4.4), (4.19), (4.22) e (4.27) o sistema em malha fechada do sinal de desempe-

ndo z relativo ao sinal de zona morta \tilde{u} pode ser representado como segue.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_{aw} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_2 D_c C_2 - B_2 F \\ B_c C_2 & A_c & B_c C_2 \\ 0 & 0 & A + B_2 F \end{bmatrix}}_{A_{mf}} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ x_{aw} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_c D_{21} & -B_2 \\ B_c D_{21} & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}}_{B_{mf}} \begin{bmatrix} w \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

$$z = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c & D_{12} D_c C_2 - D_{12} F \end{bmatrix}}_{C_{mf}} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ x_{aw} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{11} & -D_{12} \end{bmatrix}}_{D_{mf}} \begin{bmatrix} w \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$$

Seja a matriz $B_{mf} = [B_{mf1} \ B_{mf2}]$ e a matriz $D_{mf} = [D_{mf1} \ D_{mf2}]$. Com isto a função de transferência do sinal de desempenho z relativo ao sinal de zona morta \tilde{u} do sistema em malha fechada é definida como:

$$\mathbf{T}_{z\tilde{u}}(s) = C_{mf}(s\mathbf{I} - A_{mf})^{-1}B_{mf2} + D_{mf2}$$

O problema de otimização para a obtenção do compensador *anti-windup* é escrito como

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{F}} \quad & \|\mathbf{T}_{z\tilde{u}}\|_{\infty} \\ \text{s.a} \quad & \max(\text{real}(\lambda(A_{mf}))) < 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

O problema de otimização (4.28) é resolvido neste trabalho usando algoritmos genéticos, onde a estrutura que caracteriza o algoritmo de busca é apresentada no Apêndice C.

4.4 Comentários finais

Este Capítulo mostrou uma alternativa de projeto para contornar os problemas presentes em situações de saturação de atuadores. A síntese proposta foi baseada na abordagem de compensadores *anti-windup* com arquitetura desacoplada. A abordagem proposta reduz diretamente os efeitos do sinal de zona morta sobre a saída de desempenho garantido estabilidade. Para esse propósito, foi apresentado o problema de otimização (4.28) com o objetivo de reduzir, tanto quanto seja possível, a norma \mathcal{H}_{∞} do sinal de desempenho relativo ao sinal de zona morta. A abordagem *anti-windup*

pode ser vantajosa desde que os compensadores implementados estão ativos unicamente na região de saturação. Este fato leva numa redução de energia requerida em relação a outros métodos que ficam ativos durante todo o processo de controle. Finalmente, deve ser considerado que as abordagens baseadas em compensadores *anti-windup* devem ser implementadas unicamente em situações onde os atuadores não apresentem deteriorização física.

5 Resultados simulados

Considere a seguinte viga flexível engastada-livre como mostrada na Figura 5.1, com módulo de elasticidade $E = 70 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, altura da seção transversal $b = 0,032 \text{ m}$, largura da seção transversal: $a = 0,003 \text{ m}$, densidade $\rho = 2880 \text{ Kg/m}^3$ e o amortecimento proporcional viscoso $\mathbf{H} = \alpha\mathbf{K} + \beta\mathbf{M}$, com $\alpha = 10^{-5}$, $\beta = 10^{-5}$. \mathbf{K} é a matriz de rigidez e \mathbf{M} é a matriz de massa.

A viga apresenta apenas o movimento de flexão e é controlada através da aplicação de um momento no ponto A. Um distúrbio é aplicado no ponto B na forma de momento. Na extremidade da viga é colocado um sensor para medir a aceleração do ponto C. Para o processo de síntese e análise não foram considerados os efeitos do acoplamento dos atuadores.

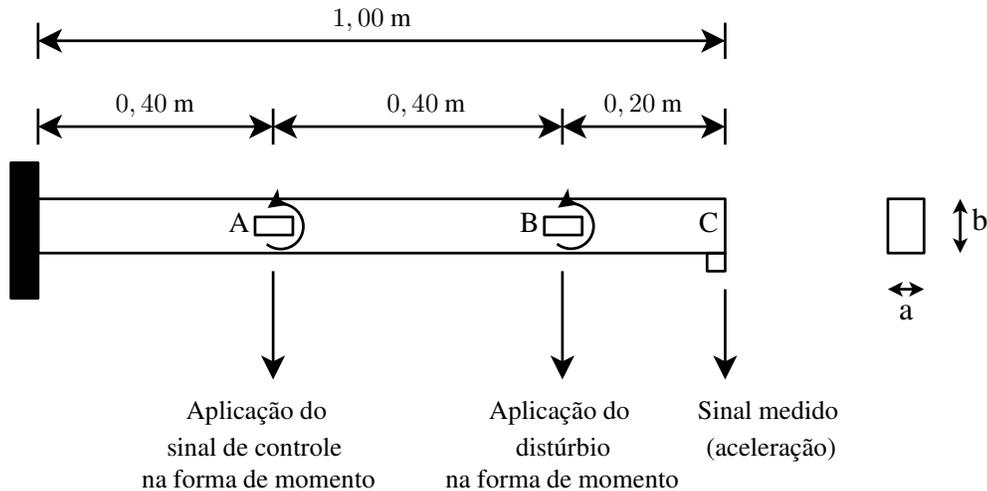


Figura 5.1: Viga engastada-livre

O objetivo é minimizar a vibração na extremidade da viga em termos de deslocamentos verticais. O deslocamento na extremidade da viga pode ser considerado como o sinal de desempenho.

Para a obtenção do modelo matemático, a viga foi discretizada em 10 elementos finitos de Euler-Bernoulli e 11 nós, com dois graus de liberdade (GDL) em cada nó, como mostrado na Figura 5.2. Os graus de liberdade da viga são numerados na ordem como indicado na Figura 5.2.

Neste exemplo, o nó 1 é engastado, portanto os graus de liberdade 1 e 2 são nulos. O modelo

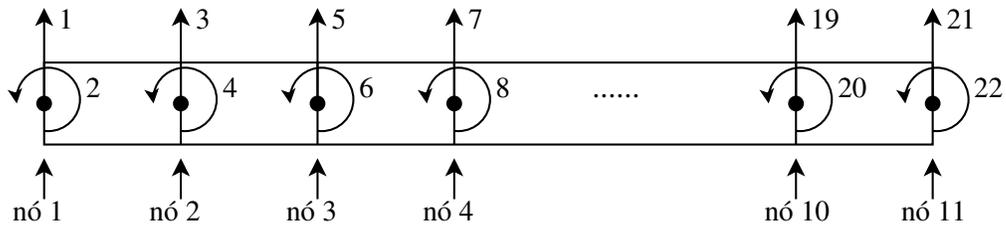


Figura 5.2: Graus de liberdade da viga engastada-livre com 10 elementos finitos

de espaço de estados da viga é construído considerando apenas os graus de liberdade de 3 a 22.

De acordo com a posição dos nós, o distúrbio é aplicado no nó 9 (GDL 18) e o sinal de controle é aplicado no nó 5 (GDL 10) da viga.

Com estas considerações, o modelo de espaço de estados da viga tem 40 estados. O modelo da planta de 20 GDL é obtido através do método de elementos finitos como apresentado no Apêndice A.

Para o processo de projeto de controle são usado os dois modelos seguintes:

- Modelo da planta “real”: é o modelo assumido para representar a planta considerando algumas incertezas dinâmicas. Neste exemplo é usado para representar a planta com um número finito e suficiente de modos para caracterizar o comportamento da planta numa região de interesse.
- Modelo da planta nominal: é o modelo reduzido assumido para representar a planta sem considerar as incertezas dinâmicas. Neste exemplo é usado para representar a planta com um número reduzido de modos (menor que o número de modos da planta “real”) para ser usado no processo de projeto dos controladores.

Considerando-se a faixa de frequência de interesse de 0 a 320 Hz, o modelo da planta é truncado nos primeiros sete modos de vibrar. Este modelo de 14 estados é considerado aqui como a planta “real”. O modelo da planta “real” truncado no seus três primeiros modos de vibrar é considerado como o modelo da planta nominal e é utilizado no processo de projeto do controlador. Os modelos reduzidos da planta foram obtidos realizando uma transformação diagonal modal nas matrizes de espaço de estados da planta e ordenando a matriz de estado de forma ascendente em

relação às magnitudes dos autovalores. Finalmente, sobre este modelo modal da planta são eliminadas as componentes modais do vetor de estados correspondentes aos modos localizados fora da região de frequência de interesse para a obtenção do modelo reduzido.

realiza-se uma eliminação dos modos que não são de interesse para a obtenção do modelo reduzido. A resposta em frequência do modelo da planta “real” e o modelo da planta nominal do sinal de deslocamento da extremidade da viga com respeito ao distúrbio externo são apresentados na Figura 5.3.

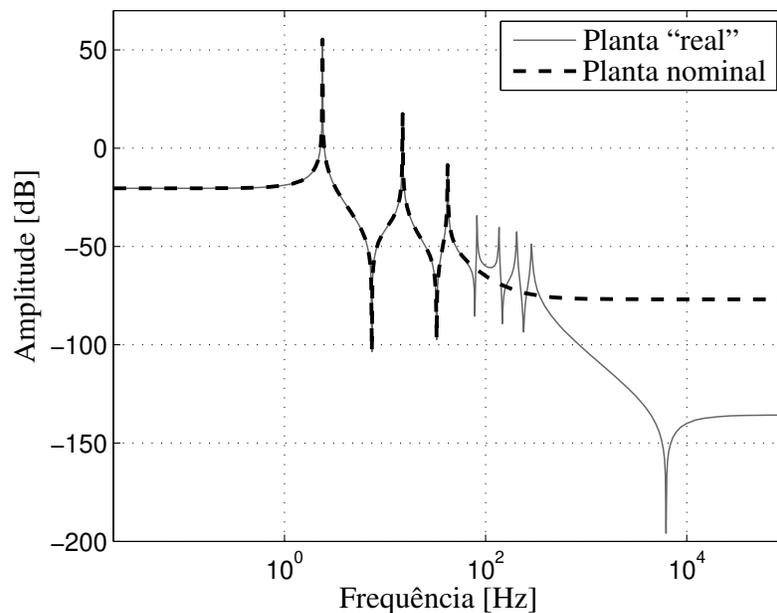


Figura 5.3: Resposta em frequência do modelo da planta nominal e do modelo da planta “real”.

Para avaliar o desempenho do sistema controlado na região de interesse foi aplicado um sinal de distúrbio externo na forma de uma varredura senoidal de amplitude 0,1 N e média zero, iniciando em 0,1 Hz e terminando em 320 Hz, num tempo de varredura de 100 segundos com uma frequência de amostragem de 10 kHz.

Para a avaliação do projeto de controladores de ordem reduzida e compensadores *anti-windup* primeiramente são projetados os controladores de ordem reduzida sem considerar as restrições de saturação do atuador. Seguidamente os compensadores *anti-windup* são obtidos da solução do problema de otimização (4.28) apresentado no Capítulo 5.

Os controladores de ordem reduzida são projetados como explicado no Capítulo 3 e as variáveis que caracterizam o algoritmo de busca são definidas como se mostra a seguir.

5.1 Projeto de controladores de ordem reduzida

Os problemas de otimização apresentados nas equações (3.3) e (3.4), para o método na forma canônica controlável, e (3.8), para o método na forma canônica modal, são resolvidos usando a função *ga* do Matlab considerando os parâmetros $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$.

As opções de configuração padrão da função *ga* foram usadas com as seguintes mudanças nos valores: Tamanho da população (PopulationSize=60), Tolerância da função objetivo (TolFun=1e-8), tolerância das restrições (TolCon=1e-8), população inicial (InitialPopulation=[0]), penalidade inicial (InitialPenalty=5) e fator de penalidade (PenaltyFactor=50). Os outros parâmetros foram mantidos com os valores padrão mostrados em (MathWorks, 2010), estas informações caracterizam o algoritmo de solução para o problema de otimização dos controladores de ordem reduzida apresentados neste trabalho. Estes parâmetros foram escolhidos através de vários testes, onde os parâmetros apresentados foram adequados para a obtenção dos 8 controladores de ordem reduzida projetados.

No caso do projeto na forma canônica modal foram consideradas os seguintes limites para os modos do controlador:

$$\begin{aligned} 0 < \xi < 5 \\ 0,1 \text{ Hz} < w_n < 35 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Com essas configurações do algoritmo, controladores de ordem reduzida de ordem 8, 4, 2 e 1 foram projetados.

Os controladores de ordem reduzida são projetados usando os modelos reais e nominais da planta, como mostrado nas seções seguintes.

5.1.1 Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal

Nesta secção, o modelo nominal da planta é utilizado no projeto de controladores de ordem reduzida. O modelo nominal é usado para a obtenção dos controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável e canônica modal segundo explicado na Seções 3.2 e 3.3. Os controladores são obtidos usando algoritmos genéticos e são testados na planta “real” onde funções de ponderação de ordem 1 são usadas para evitar o fenômeno *spillover* de controle.

Os resultados são comparados com a formulação usando a combinação das LMI e do método do Lagrangiano Aumentado (LMI-LA método) (Apkarian *e outros*, 2003; Sarracini, 2006). Neste método também foram usadas duas funções de ponderação a fim de garantir as condições de desempenho e estabilidade. Isto leva a dois sinais de desempenho: deslocamento da extremidade da viga e o esforço de controle. O primeiro sinal de desempenho no problema \mathcal{H}_∞ garante a redução do deslocamento da extremidade da viga na região de interesse (frequência baixa). O segundo sinal de desempenho garante a minimização do sinal do esforço de controle em alta frequência para evitar o fenômeno de *spillover* de controle.

Os parâmetros usados para o método LMI-LA foram: fator de atualização dos parâmetros de penalidade $\rho = 1,7$, matriz inicial dos parâmetros de penalidade $\mathbf{C}^0 = 10^{-8}\mathbf{I}$, onde \mathbf{I} é a matriz identidade, matriz inicial dos multiplicadores de Lagrange $\mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{0}$ e o critério de convergência das restrições não lineares $\epsilon = 10^{-5}$. Estes valores foram escolhidos partindo dos valores usados para um exemplo de uma viga apresentado em (Sarracini, 2006), onde foram realizados alguns ajustes nos parâmetros para este exemplo específico.

Salienta-se que, como o sinal de excitação é uma varredura senoidal linear, existe uma relação direta entre o vetor de tempo e o vetor da frequência de excitação. Nesse contexto, os gráficos da resposta temporal do sinal medido serão apresentado em relação ao vetor da frequência de excitação da viga.

Com estas considerações os controladores projetados (forma canônica controlável, forma canônica modal e LMI-AL) são apresentados nas subseções seguintes.

Controlador de ordem reduzida 4×4

Para este controlador, as seguintes funções de ponderação foram usadas para os três métodos:

$$\mathbf{W}_p = \frac{0,8035s + 100}{s + 92,26}, \quad \mathbf{W}_u = \frac{35,48s + 946,4}{s + 532,2}$$

Este par funções de ponderação, assim como os que são apresentado em todo este Capítulo, foram obtidos através de vários testes segundo a característica em frequência da planta nominal.

O controlador obtido usando o método na forma canônica controlável, via algoritmos genéticos, de ordem 4×4 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6,397 \\ 1 & 0 & 0 & -12,67 \\ 0 & 1 & 0 & -7,259 \\ 0 & 0 & 1 & -2,279 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0 & -8,443 \times 10^{-3} & 2,951 & -8,3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0$$

A norma \mathcal{H}_∞ do sinal de deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio externo do sistema controlado e não controlado são 17,93 dB e 55,27 dB, respectivamente, como mostrado na Figura 5.4.

Usando o método na forma canônica modal, via algoritmos genéticos, o controlador de ordem 4×4 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -24,33 & 16,63 & 0 & 0 \\ -16,63 & -24,33 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,122 & 1,931 \\ 0 & 0 & -1,931 & -1,122 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0,02803 \\ 0,5318 \\ -0,5261 \\ -0,08073 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 2,138 & 1,165 & 1,25 & 0,438 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0$$

No método na forma modal, o sistema controlado apresentou uma norma \mathcal{H}_∞ de $-2,07$ dB obtendo uma redução da norma de $57,31$ dB, como mostrado na Figura 5.5.

Usando o método LMI-LA, o sistema controlado apresentou uma norma \mathcal{H}_∞ de $16,98$ dB obtendo uma redução da norma de $38,29$ dB como mostrado na Figura 5.6.

Na Figura 5.7 é mostrado o deslocamento vertical da extremidade da viga submetido ao distúrbio externo, com e sem controle.

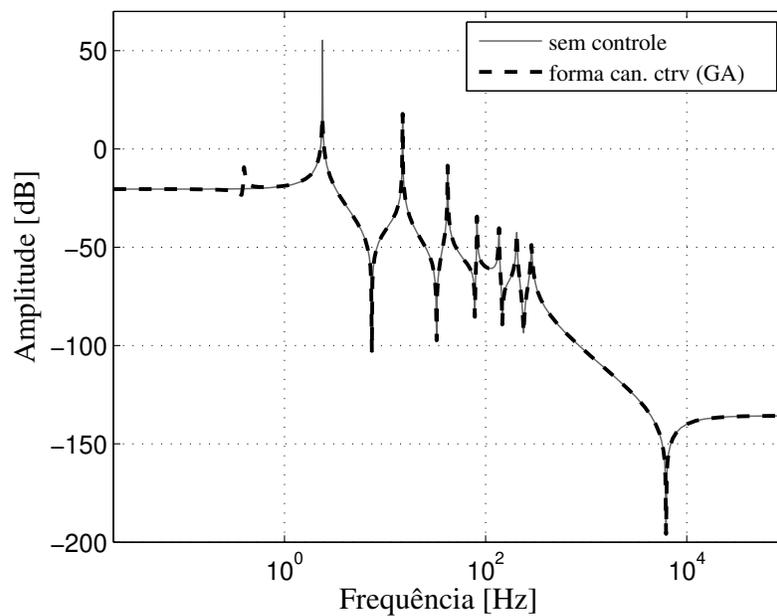


Figura 5.4: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável (can. ctrv), controlador de ordem 4×4 .

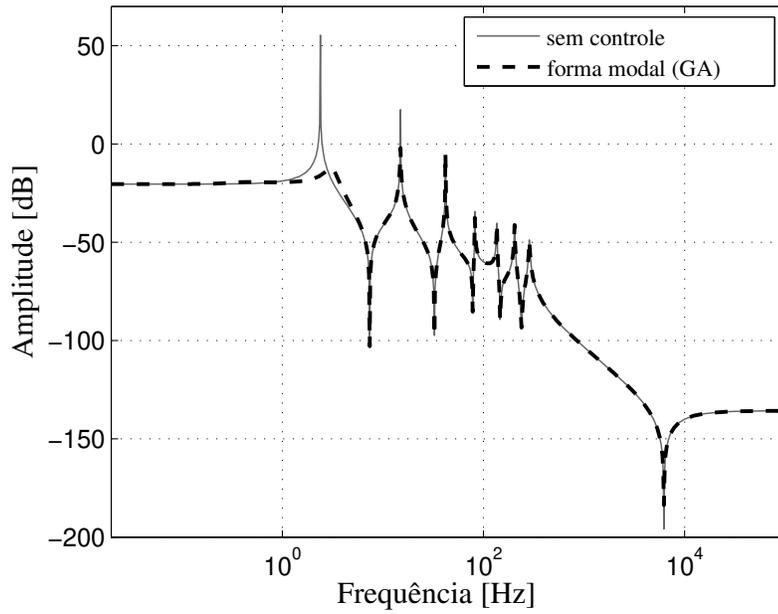


Figura 5.5: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 4×4 .

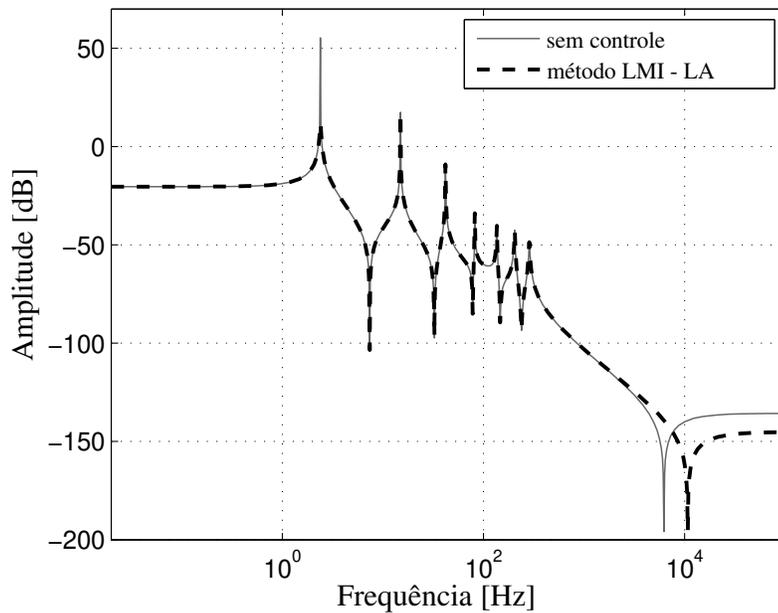


Figura 5.6: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método LMI-AL, controlador de ordem 4×4 .

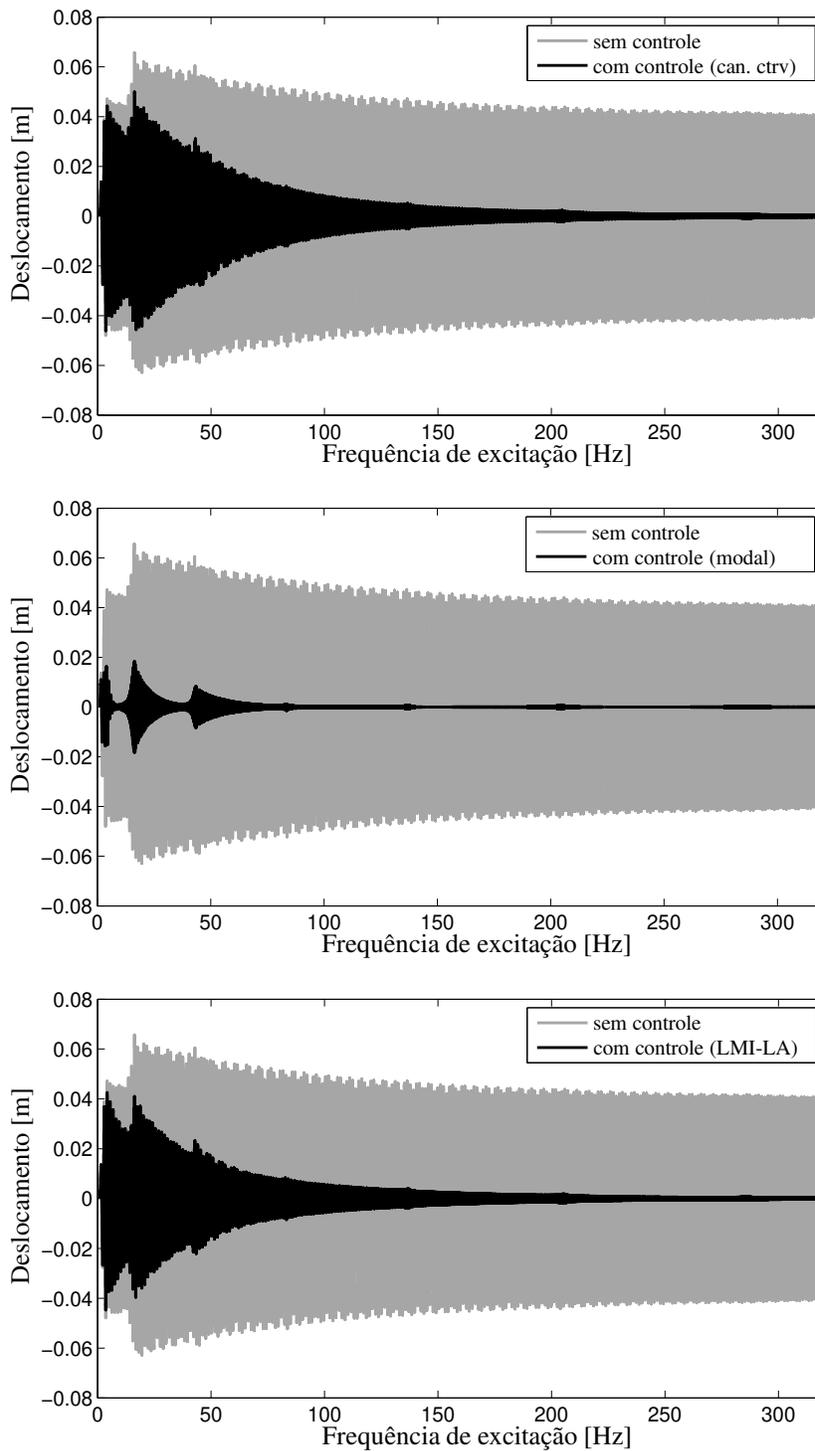


Figura 5.7: Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável, forma modal e LMI-AL, controlador de ordem 4×4

Controlador de ordem reduzida 2×2

Para este controlador, as seguintes funções de ponderação foram usadas para os três métodos:

$$\mathbf{W}_p = \frac{0,6383s + 100}{s + 69,98}, \quad \mathbf{W}_u = \frac{2,818s + 399,1}{s + 563,7}$$

O controlador obtido usando o método na forma canônica controlável, via algoritmos genéticos, de ordem 2×2 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -0,3389 \\ 1 & -10,31 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0,01281 & -1,413 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0$$

A norma \mathcal{H}_∞ do sinal de deslocamento da extremidade da viga com respeito ao distúrbio externo do sistema controlado é 9,22 dB obtendo uma redução da norma de 46,05 dB, como mostrado na Figura 5.8.

Usando o método na forma modal, via algoritmos genéticos, o controlador de ordem 2×2 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -1,527 & 16,73 \\ -16,73 & -1,527 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0,2515 \\ 0,368 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0,03147 & 0,04705 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0$$

No método na forma modal, o sistema controlado apresentou uma norma \mathcal{H}_∞ de 4,18 dB obtendo uma redução da norma de 51,09 dB, como mostrado na Figura 5.9.

Usando o método LMI-LA, o sistema controlado apresentou uma norma \mathcal{H}_∞ de 27,41 dB obtendo uma redução da norma de 27,86 dB como mostrado na Figura 5.10.

Na Figura 5.11 é mostrado o deslocamento vertical da extremidade da viga submetido ao distúrbio externo, com e sem controle.

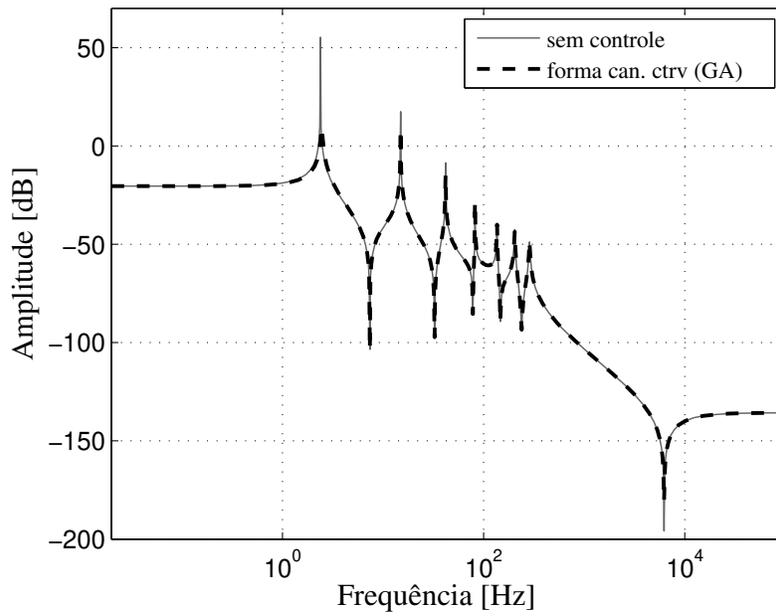


Figura 5.8: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável, controlador de ordem 2×2 .

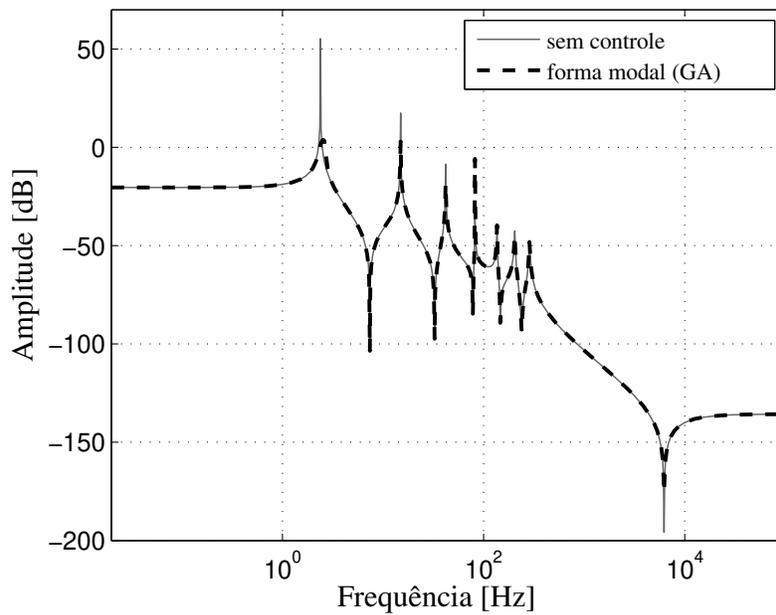


Figura 5.9: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 2×2 .

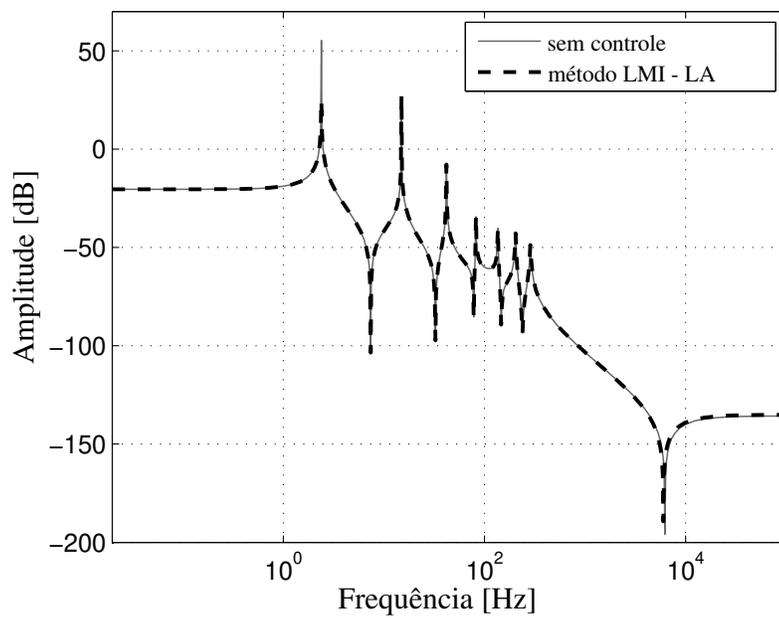


Figura 5.10: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método LMI-AL, controlador de ordem 2×2 .

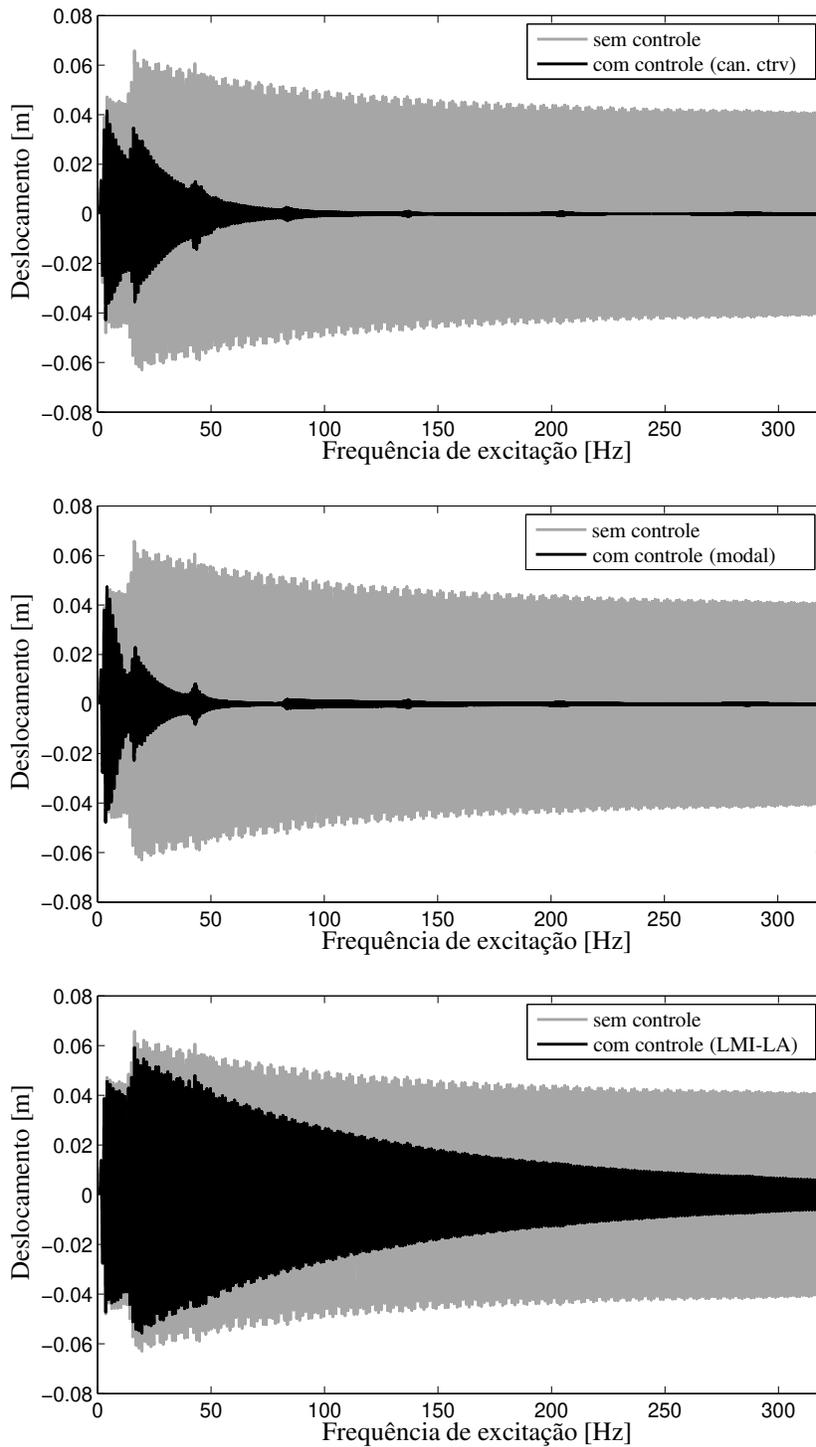


Figura 5.11: Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável, forma modal e LMI-AL, controlador de ordem 2×2

Controlador de ordem reduzida 1×1

Os controladores de ordem reduzida 1×1 foram projetados usando as seguintes funções de ponderação:

$$\mathbf{W}_p = \frac{0,2239s + 100}{s + 25,12}, \quad \mathbf{W}_u = \frac{1,778s + 0,8934}{s + 355,7}$$

Os principais resultados são apresentados na Tabela 5.1.

Projeto do controlador de ordem completa

Os controladores de ordem completa 8×8 foram projetados usando as seguintes funções de ponderação:

$$\mathbf{W}_p = \frac{0,05623s + 100}{s + 56,23}, \quad \mathbf{W}_u = \frac{3548s + 891,3}{s + 3548}$$

Os principais resultados são apresentados na Tabela 5.1.

Alguns comentários e discussões

Os principais resultados dos controladores projetados usando os três métodos (método na forma canônica controlável, forma canônica modal e LMI-AL) são apresentados na Tabela 5.1. Pode-se observar na Tabela 5.1 que o método que conseguiu a maior minimização da norma \mathcal{H}_∞ foi o método na forma canônica modal. Os métodos na forma canônica controlável e na forma canônica modal apresentaram menores tempos computacionais de obtenção dos controladores em relação ao método LMI-AL (tempo de obtenção dos controladores até 13 vezes mais rápido). Nesse contexto, o uso dos métodos propostos podem ser uma vantagem para o projetista quando é necessário realizar vários testes para uma escolha adequada das funções de ponderação.

Para o caso do controlador de ordem 8×8 , por ser o controlador de ordem completa, trata-se de um problema de otimização convexa. Para a obtenção deste controlador pode ser usando algum pacote de programação semi-definida (SDP) para resolver o problema de otimização convexa. As comparações dos métodos propostos foram realizadas com os resultados obtidos usando a função *hinfsyn* do MATLAB. Neste caso, foi o método canônico modal o que apresentou um resultado

mais próximo da solução global.

Uma dificuldade que foi encontrado usando o método LMI-AL, para este exemplo específico, foi a de encontrar o mesmo par de funções de ponderação para projetar todos os controladores de ordem reduzida que garantam estabilidade e redução da norma. Na formulação proposta usando GA foi mais simples projetar controladores de ordem reduzida usando o mesmo par de funções de ponderação. Alguns resultados são apresentados na Tabela 5.2.

Todos os resultados apresentados na Tabela 5.2 foram obtidos utilizando o mesmo par de funções de ponderação usados para o controlador de ordem 8×8 mostrados anteriormente. Pode-se verificar que o método canônico modal apresentou uma maior minimização da norma \mathcal{H}_∞ em relação ao método canônico controlável em tempos computacionais razoáveis.

Tabela 5.1: Resumo dos resultados dos 4 controladores projetados usando a planta nominal: método LMI-LA, função *hinf* (controlador de ordem completa) e métodos usando GA (forma canônica controlável e forma modal)

Ordem do controlador	Método LMI-LA		Método forma canônica controlável (GA)		Método forma modal (GA)	
	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Tempo computacional [s]	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Tempo computacional [s]	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Tempo computacional [s]
8×8	37,97	4 (<i>hinf</i>)	29,85	990	37,70	945
4×4	38,29	15281	37,34	638	57,31	1101
2×2	27,86	2502	46,05	611	51,09	1089
1×1	18,78	769	26,55	211	20,78	341

Tabela 5.2: Resumo dos resultados dos 4 controladores projetados usando a planta nominal e algoritmos genéticos (o mesmo par de funções de ponderação).

Ordem do controlador	Método forma canônica controlável (GA)		Método forma modal (GA)	
	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Tempo computacional [s]	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Tempo computacional [s]
8×8	29,85	990	37,70	945
4×4	37,37	836	51,87	647
2×2	23,67	703	40,88	685
1×1	13,54	275	19,40	658

5.1.2 Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta “real”

Nesta seção o modelo da planta “real” é usado diretamente no processo de projeto dos controladores de ordem reduzida. Nesta abordagem de solução não foi necessária a inclusão das funções de ponderação, uma vez que foram considerados todos os modos do modelo da planta “real” no processo de projeto. No caso do método de LMI-LA, o uso do modelo da planta “real” levou a um alto custo computacional no processo de projeto, superior as 12 horas sem convergência, e por este motivo, os resultados deste método não foram apresentados no presente trabalho. Os controladores projetados são apresentados na subseção seguinte.

Controladores de ordem reduzida 4×4

O controlador obtido usando o método na forma canônica controlável, via algoritmos genéticos, de ordem 4×4 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,02902 \\ 1 & 0 & 0 & -0,1349 \\ 0 & 1 & 0 & -0,9274 \\ 0 & 0 & 1 & -2,1520 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0 & 14,36 & 1,303 & -5,634 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_c = 0$$

A norma \mathcal{H}_∞ do sinal de deslocamento da extremidade da viga com respeito ao distúrbio externo do sistema controlado é 17,29 dB obtendo uma redução da norma de 37,98 dB, como mostrado na Figura 5.12.

Usando o método na forma modal, via algoritmos genéticos, o controlador de ordem 4×4 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -22,58 & 33,51 & 0 & 0 \\ -33,51 & -22,58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13,1 & 12,87 \\ 0 & 0 & -12,87 & -13,1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0,04736 \\ 2,029 \\ 0,3971 \\ 1,153 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0,7631 & 0,07958 & -1,277 & 0,2822 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

No método na forma modal, o sistema controlado apresentou uma norma \mathcal{H}_∞ de $-14,69$ dB obtendo uma redução da norma de $69,96$ dB, como mostrado na Figura 5.13.

Na Figura 5.14 é mostrado o deslocamento vertical da extremidade da viga submetido ao distúrbio externo, com e sem controle.

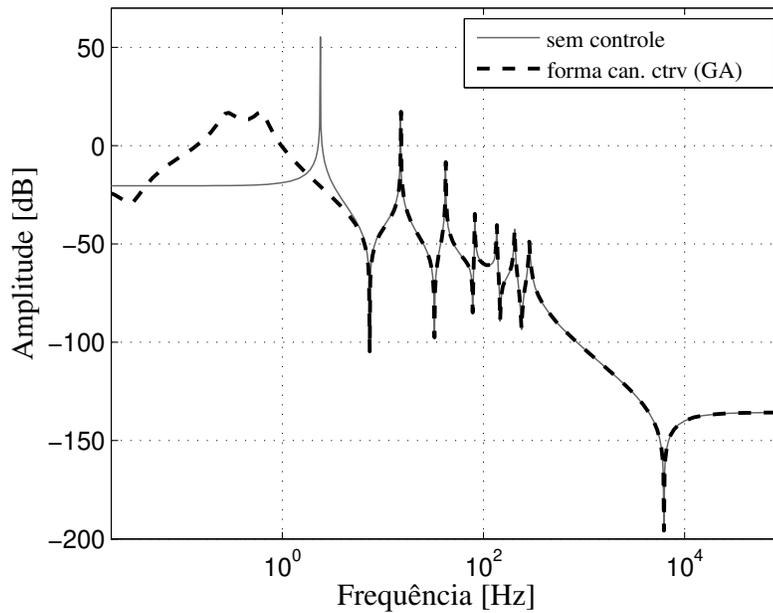


Figura 5.12: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável, controlador de ordem 4×4 .

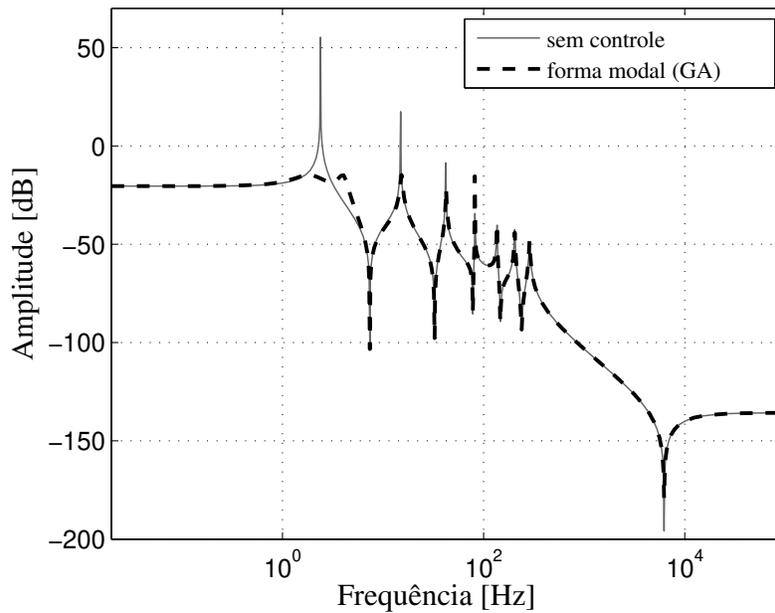


Figura 5.13: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 4×4 .

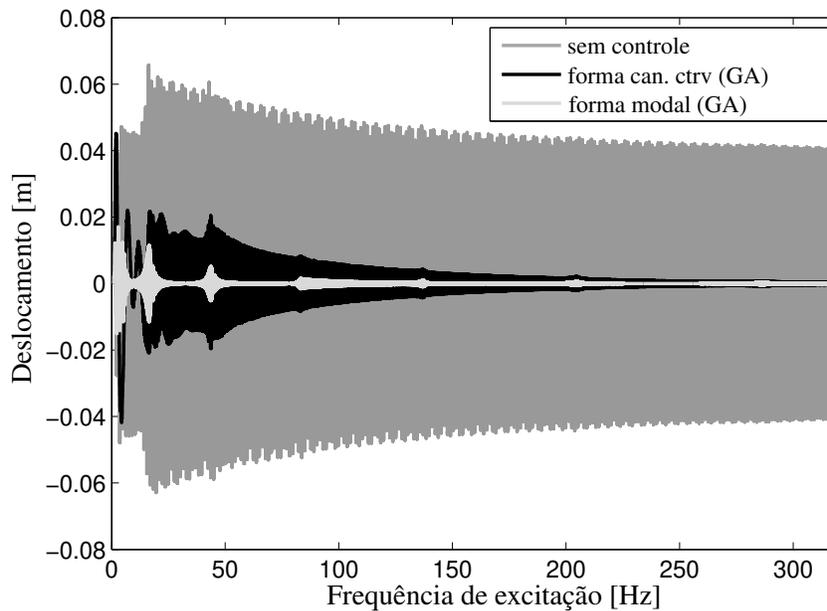


Figura 5.14: Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável e na forma canônica modal, controlador de ordem 4×4 .

Controladores de ordem reduzida 2×2

O controlador obtido usando o método na forma canônica controlável, via algoritmos genéticos, de ordem 2×2 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & -0,5187 \\ 1 & -2,53 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0 & -1,037 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

A norma \mathcal{H}_∞ do sinal de deslocamento da extremidade da viga com respeito ao distúrbio externo do sistema controlado é 17,90 dB obtendo uma redução da norma de 37,37 dB, como mostrado na Figura 5.15.

Usando o método na forma canônica modal, via algoritmos genéticos, o controlador de ordem 2×2 é

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -3,242 & 9,642 \\ -9,642 & -3,242 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0,04965 \\ -0,3735 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0,5239 & 0,0001221 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0$$

No método na forma canônica modal, o sistema controlado apresentou uma norma \mathcal{H}_∞ de 3,26 dB obtendo uma redução da norma de 52,01 dB, como mostrado na Figura 5.16.

Na Figura 5.17 é mostrado o deslocamento vertical da extremidade da viga submetido ao distúrbio externo, com e sem controle.

Controladores de ordem 1×1 e 8×8

Outros controladores foram projetados e os resultados são apresentados na Tabela 5.3.

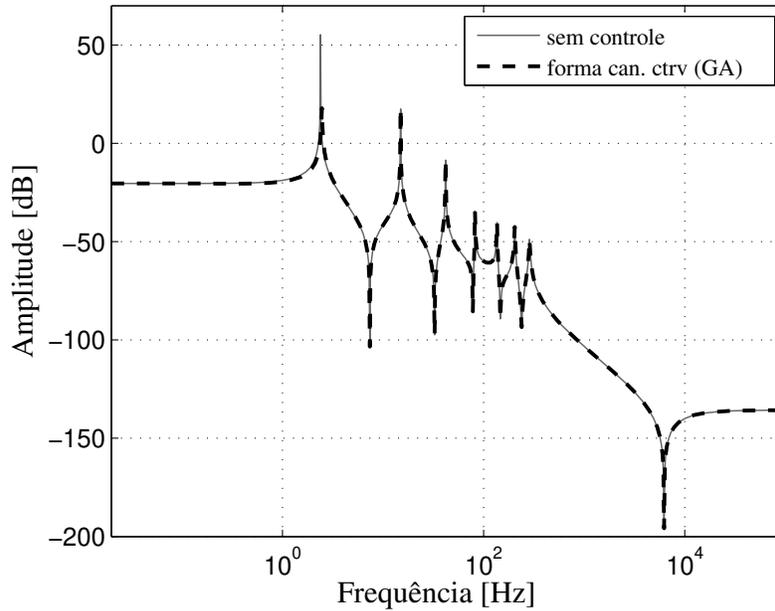


Figura 5.15: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica controlável, controlador de ordem 2×2 .

Tabela 5.3: Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta “real” e os algoritmos genéticos.

Ordem do controlador	Método forma canônica controlável (GA)		Método forma modal (GA)	
	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Tempo computacional [s]	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Tempo computacional [s]
8×8	39,37	1140	68,98	393
4×4	37,98	1548	69,96	891
2×2	37,37	1174	51,01	343
1×1	26,55	457	28,56	414

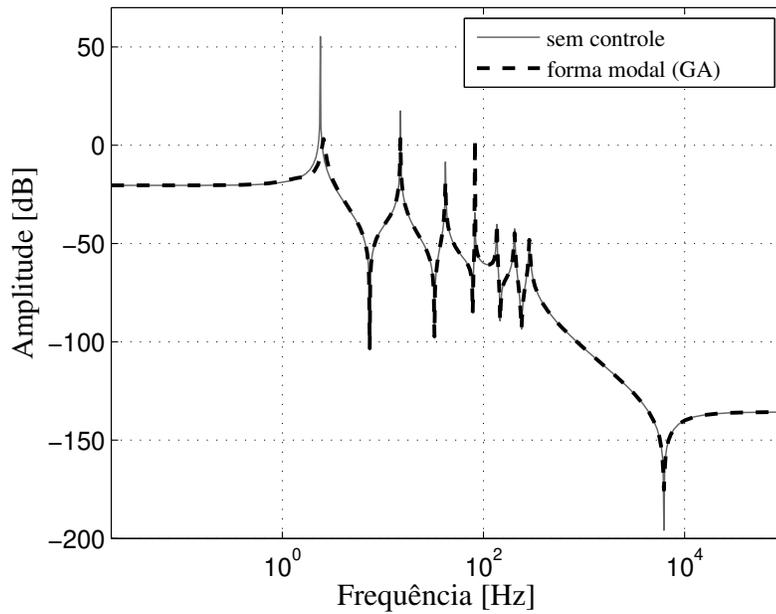


Figura 5.16: Resposta em frequência do deslocamento da extremidade da viga relativo ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma canônica modal, controlador de ordem 2×2 .

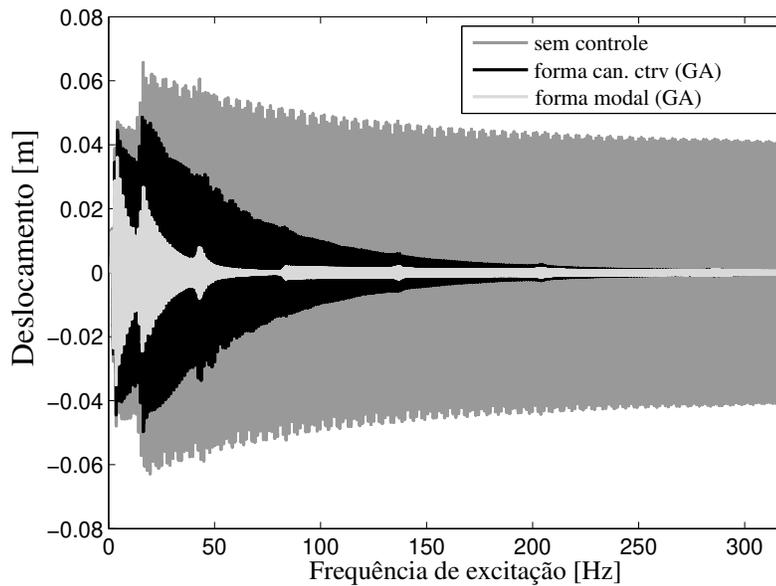


Figura 5.17: Resposta da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, métodos na forma canônica controlável e na forma canônica modal, controlador de ordem 2×2 .

Alguns comentários e discussões

O principal objetivo desta seção foi evitar o uso das funções de ponderação usando diretamente o modelo da planta “real”. Pode-se observar que o método da forma canônica modal conseguiu melhor minimização da norma \mathcal{H}_∞ em relação ao método na forma canônica controlável. Esta abordagem permite projetar controladores de ordem reduzida sem a necessidade de realizar testes para a escolha adequada das funções de ponderação. Considerando que o tempo total de projeto de controladores \mathcal{H}_∞ pode ser composto pelo tempo de uma escolha adequada das funções de ponderação e o tempo da solução do problema \mathcal{H}_∞ , o uso desta abordagem leva numa redução do tempo total de obtenção dos controladores \mathcal{H}_∞ .

Salienta-se que, segundo os resultados apresentados nas Tabelas 5.1 e 5.3, a abordagem que utilizou diretamente o modelo da planta “real” apresentou uma maior minimização da norma \mathcal{H}_∞ que a abordagem usando o modelo da planta nominal e funções de ponderação para os 4 controladores projetados.

Nesta abordagem, o método LMI-LA foi considerado inviável por apresentar um elevado tempo computacional, obrigando a interromper o processo de projeto.

5.2 Projeto *anti-windup*

Para avaliar o desempenho do compensador *anti-windup* foi escolhido o controlador de ordem reduzida de ordem 2×2 obtido usando a forma canônica modal, pois foi o que apresentou maior perda de desempenho na zona de saturação. O esforço de controle do sistema controlado sem restrição em amplitude é mostrado na Figura 5.18. Pode-se observar que o esforço de controle tem uma amplitude máxima de 0,23 N.m.

Para avaliar do desempenho do compensador *anti-windup* é considerado a limitação em amplitude do atuador de 0,04 N.m.

Os parâmetros utilizados que caracterizam o algoritmo de busca foram os seguintes: Tamanho da população (PopulationSize=60), Tolerância da função objetivo (TolFun=1e-8), tolerância das

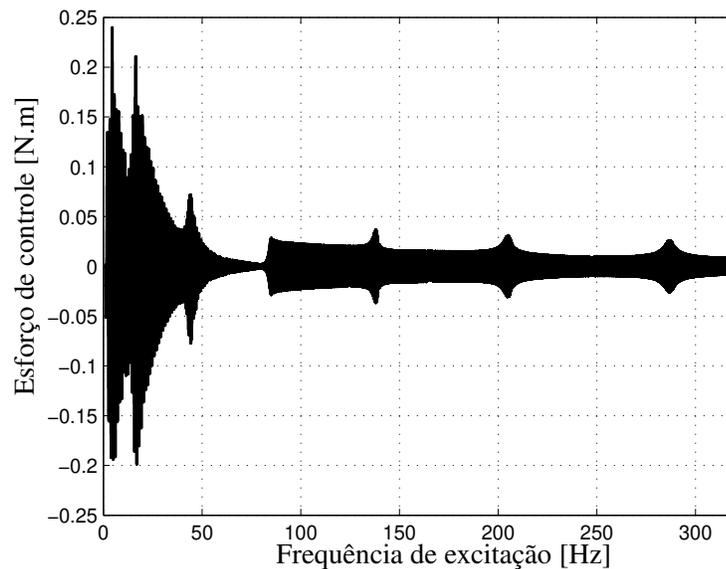


Figura 5.18: Esforço de controle do sistema controlado de ordem 2×2 .

restrições ($TolCon=1e-8$), população inicial ($InitialPopulation=[0]$) e fator de cruzamento ($crossover=0,80$). Para os outros parâmetros são mantidos os valores padrões mostrados no (MathWorks, 2010). Estes valores foram escolhidos através de vários testes de forma de obter uma solução razoável ao problema de otimização apresentado em (4.28).

Com estas considerações, resolvendo o problema de otimização dado em (4.28) foi encontrada a matriz incógnita F e o compensador *anti-windup* de ordem 14. Por motivos de espaço aqui no texto só será apresentada a matriz F , pois a dinâmica do compensador pode ser calculada ao substituir F nas Equações (4.4), (4.5) e (4.6).

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -317,6010 \\ 28,3806 \\ 55,0678 \\ -7,0069 \\ 51,8007 \\ 40,7042 \\ -54,2597 \\ -38,7354 \\ 57,6888 \\ 44,7590 \\ -27,4490 \\ -13,4663 \\ -20,9330 \\ 27,4038 \end{bmatrix}^T$$

Na Figura 5.19 é apresentada a resposta do sistema controlado com e sem compensador *anti-windup* submetida à saturação do atuador e do sistema controlado sem efeitos de saturação.

O compensador *anti-windup* conseguiu melhorar a resposta do sistema em condições de saturação. A abordagem de solução do projeto *anti-windup* proposta neste trabalho apresentou resultados razoáveis para sistemas controlados com problemas de limitação do esforço de controle. O compensador é responsável pela recuperação do comportamento linear do controlador na presença de saturação e pela velocidade de recuperação do comportamento linear do sistema controlado fora da região de saturação.

5.3 Comentários finais

Este Capítulo apresentou a implementação dos métodos propostos para o projeto de controladores de ordem reduzida e compensadores *anti-windup* para um modelo teórico de uma viga de alumínio engastada-livre. Os métodos projetaram 4 controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal e funções de ponderação e 4 controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta “real”. Sobre a abordagem usando a planta nominal e funções de ponderação,

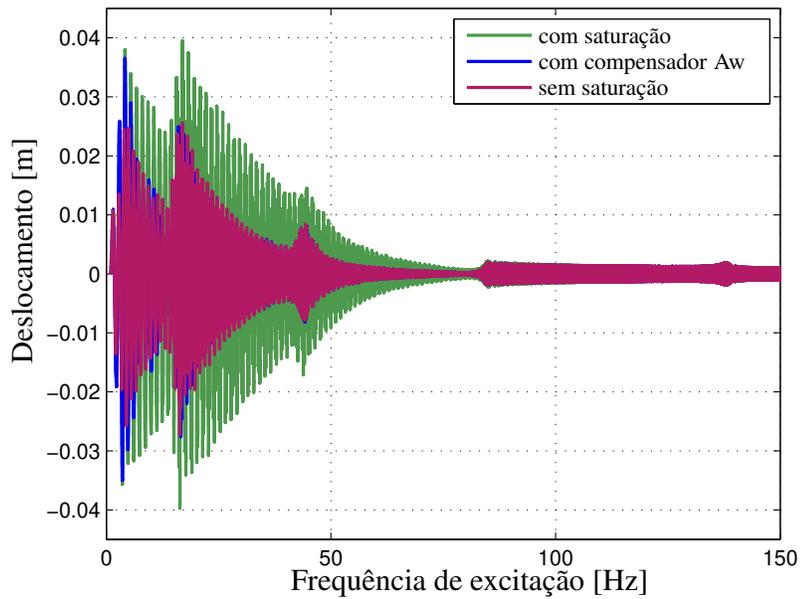


Figura 5.19: Resposta na extremidade da viga - sistema controlado de ordem 4×4 sem compensador, com compensador e sistema controlado sem efeitos de saturação.

foram realizadas comparações e discussões dos métodos propostos com os resultados obtidos da implementação do método LMI-AL. Finalmente, sobre o controlador projetado, foi implementado o compensador *anti-windup* onde os resultados obtidos foram discutidos.

6 Resultados experimentais

6.1 Características da bancada experimental

O método proposto de projeto de controladores de ordem reduzida foi testado numa viga de alumínio engastada livre. O esquema da viga experimental é mostrado na Figura 6.1, com módulo de elasticidade $E = 70 \text{ GPa}$ e densidade $\rho = 2880 \text{ Kg/m}^3$, altura da seção transversal $b = 0,032 \text{ m}$ e largura da seção transversal $a = 0,003 \text{ m}$.

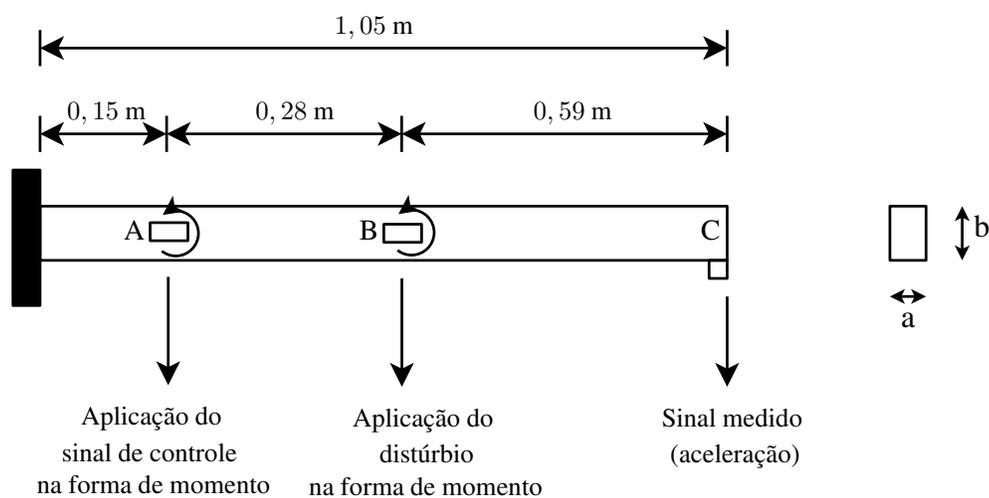


Figura 6.1: Distribuição da viga para o processo de controle

A viga é controlada através da aplicação de um momento no ponto A. Um distúrbio é aplicado no ponto B na forma de momento. No ponto C da viga é colocado um sensor para medir a aceleração.

Para a geração do momento no ponto A foi colocado um atuador piezo-elétrico. Para a geração do momento no ponto B foi usado um par de atuadores piezo-elétricos. Para a medida do sinal no ponto C foi usado um acelerômetro. Para o processo de síntese e análise não foram considerados os efeitos do acoplamento dos atuadores piezo-elétricos.

Para o processo de aplicação dos momentos no ponto A e B foram usados dois amplificadores

de potência dedicados aos atuadores piezo-elétricos. Para a medição do sinal no ponto C foi usado um condicionador de sinal com o objetivo de evitar problemas de *aliasing* do sinal enviado pelo acelerômetro. O esquema da colocação destes componentes eletrônicos é apresentado na Figura 6.2.

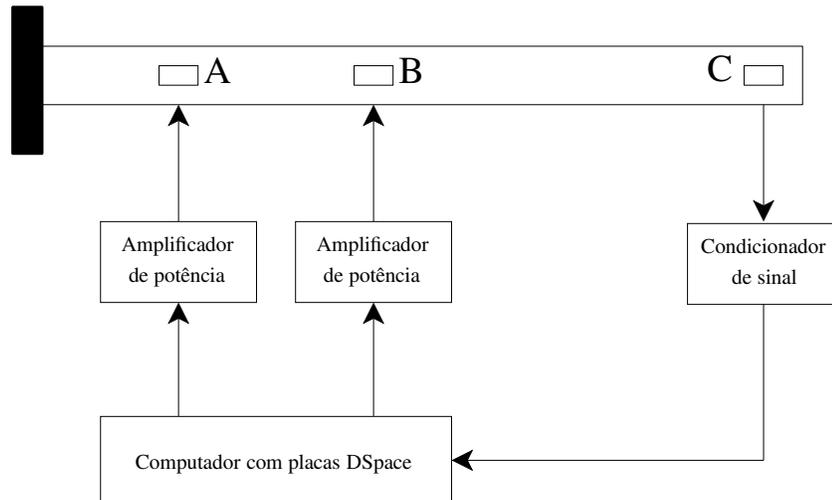


Figura 6.2: Esquema da montagem experimental da viga

Para o processo de aquisição dos dados e controle da viga foi usado um computador com a placa Dspace modelo DS1104.

A bancada experimental da viga foi montada no laboratório de Mecânica Computacional da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP como mostrado na Figura 6.3. O sensor e os atuadores piezo-elétricos usados são mostrados na Figura 6.4. Para o engaste da viga foi empregado um dispositivo de aço com massa significativamente maior que a viga.

6.2 Obtenção do modelo experimental da viga

Segundo o esquema de montagem da viga apresentada na Figura 6.2 foi aplicado um sinal de excitação nos pontos de entrada A e B individualmente. Para cada entrada foi medida a resposta na forma de aceleração do ponto C. O sinal usado como excitação foi uma varredura senoidal de 0 a 4000 Hz num tempo de varredura de 10 segundos, amplitude máxima de 0,1 V e média zero.

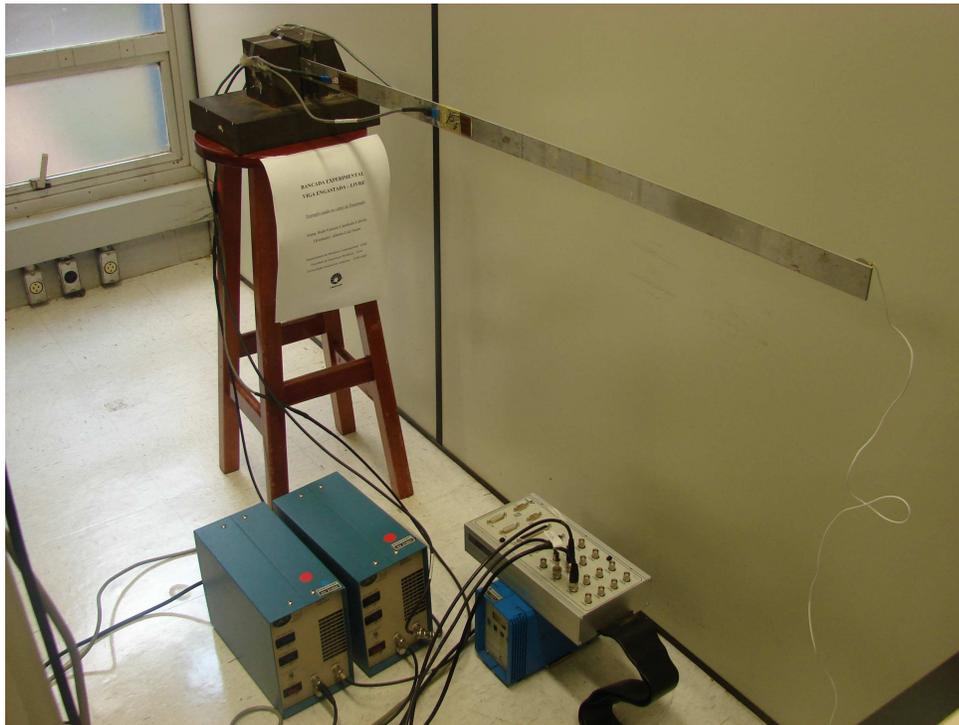


Figura 6.3: Viga experimental engastada-livre implementada no Laboratório de Mecânica Computacional, na Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP.

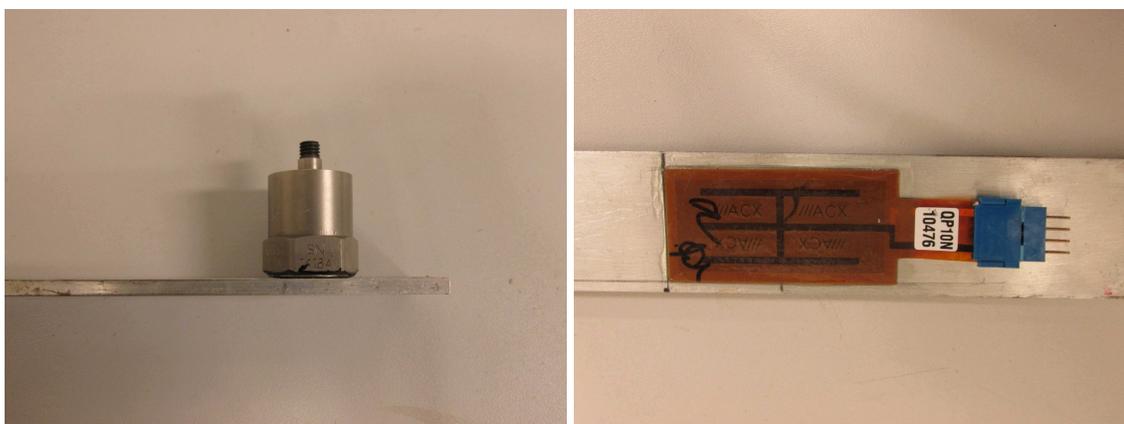


Figura 6.4: Sensor e atuador piezo-elétrico.

Para conseguir um modelo mais próximo do real foram feitas 5 medições temporais da aceleração no ponto C para cada ponto de entrada excitada e considerada finalmente a média resultante

das 5 medições.

Uma vez adquiridos os sinais no ponto C, o modelo da viga foi obtido através do algoritmo de realização de autosistemas (*ERA*) apresentado em (Lew e outros, 1993), onde o modelo discreto obtido é levado a um modelo contínuo usando a função *d2c* do MATLAB. O modelo estimado da viga obtido usando o algoritmo ERA foi de ordem 50×50 . A escolha da ordem do modelo estimado foi realizada considerando os maiores picos de ressonância da viga engastada-livre. Os modelos obtidos de ordem maior que 50×50 não apresentaram grandes picos de ressonância para ser levadas em consideração no processo de projeto. Uma comparação com um modelo estimado de ordem maior (90×90) é apresentado no Apêndice F.

Para o processo de projeto dos controladores de ordem reduzida o modelo obtido foi truncado em modelos 20×20 e 12×12 para obter os modelos da planta “real” e da planta nominal respectivamente (a necessidade do uso destes modelo truncados foi explicada no Capítulo 5). As características em frequência do modelo da planta adquirida do algoritmo *ERA*, o modelo da planta “real” e o modelo da planta nominal são apresentados na Figura 6.5.

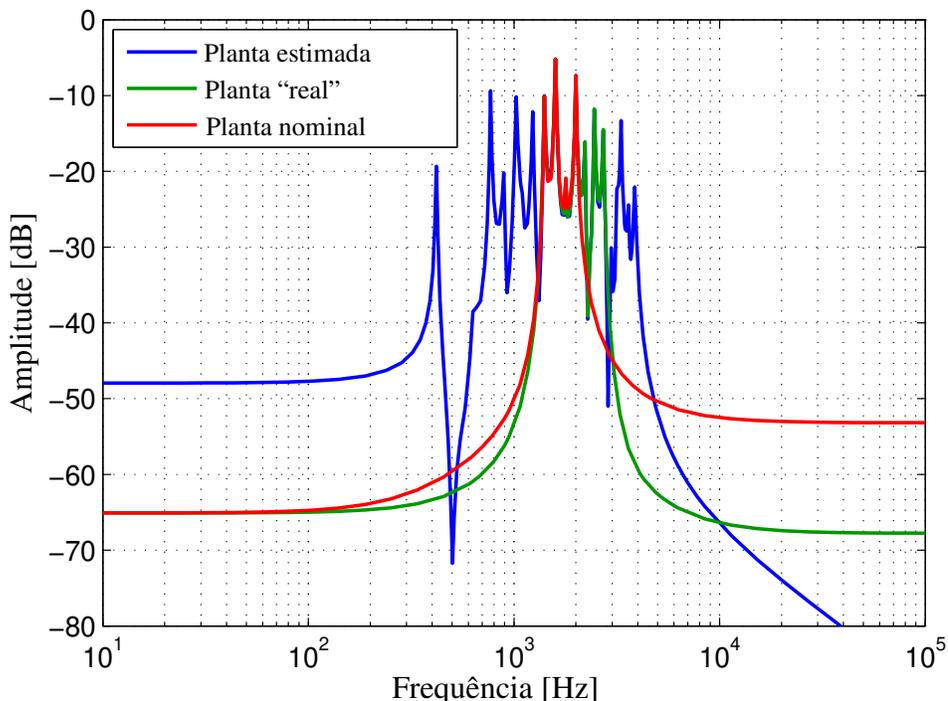


Figura 6.5: Resposta em frequência do modelo da planta estimada obtido de dados experimentais, modelo da planta “real” e o modelo da planta nominal.

Para avaliar o desempenho do sistema controlado na região de interesse foi aplicado um sinal de distúrbio externo na forma de uma varredura senoidal de amplitude 1 V e média zero, iniciando em 1 Hz e terminando em 2500 Hz, num tempo de varredura de 10 segundos com uma frequência de amostragem de 20 KHz.

Para a avaliação do projeto de controladores de ordem reduzida e compensadores *anti-windup* primeiramente são projetados os controladores de ordem reduzida sem considerar as restrições de saturação do atuador. Em seguida, os compensadores *anti-windup* são obtidos da solução do problema de otimização (4.28) apresentado no Capítulo 5.

Os controladores de ordem reduzida são projetados como explicado na Seção 3.3 (controladores na forma canônica modal) e as variáveis que caracterizam o algoritmo de busca são definidas como se mostra a seguir.

6.3 Projeto de controladores de ordem reduzida

Os controladores de ordem reduzida projetados para o modelo experimental da viga foram obtidos da solução do problema de otimização apresentado em (3.8). O problema de otimização apresentado em (3.3), baseado em controladores na forma canônica controlável, foi usado nesta seção, mas não foram encontrados controladores com desempenhos razoáveis, minimização da norma \mathcal{H}_∞ não atingiu 1 dB. O problema de otimização (3.8) foi resolvido usando algoritmos genéticos considerando os parâmetros $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$.

As opções de configuração padrão da função *ga* foram usadas com as seguintes mudanças nos valores: Tamanho da população (PopulationSize=60), Tolerância da função objetivo (TolFun=1e-8), tolerância das restrições (TolCon=1e-8), população inicial (InitialPopulation=aleatório). Os outros parâmetros foram mantidos com os valores padrão mostrados em (MathWorks, 2010). Estes parâmetros foram escolhidos através de vários testes, onde os parâmetros apresentados foram adequados para a obtenção dos 8 controladores de ordem reduzida projetados.

Com o objetivo de limitar o espaço de busca do controlador são definidos os limites das

características modais do controlador como segue:

$$0 < \xi < 5$$
$$80 \text{ Hz} < w_n < 2000 \text{ Hz}$$

Com essas configurações do algoritmo, controladores de ordem reduzida de ordem 10, 8, 6 e 4 foram projetados. Para realizar a implementação prática usando a placa dSpace, os controladores obtidos foram discretizados. No processo de discretização dos controladores foi considerado o método de discretização de Tustin ou transformação Bilinear (Ogata, 1995) usando a função *c2d* do MATLAB a uma frequência de amostragem de 20 kHz.

Os controladores de ordem reduzida são projetados usando os modelos da planta “real” e da planta nominal, como mostrado nas seções seguintes.

6.3.1 Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal

Nesta seção, o modelo nominal da planta é utilizado na solução do problema de otimização dado pela Eq. (3.8). Os controladores obtidos usando algoritmos genéticos são testados na planta real e funções de ponderação de ordem 1 são usadas para evitar o fenômeno de *spillover* de controle. Vale salientar que para os 4 controladores de ordem reduzida projetados foram usados o mesmo par de funções de ponderação mostrados a seguir.

$$\mathbf{W}_p = \frac{0,01603s + 31550}{s + 4111}, \quad \mathbf{W}_u = \frac{1,778s + 6255}{s + 5,575 \times 10^4}.$$

Este par funções de ponderação foram obtidos através de vários testes segundo a característica em frequência da planta nominal.

O resumo dos principais resultados dos controladores de ordem reduzida projetados são apresentados na Tabela 6.1, onde as matrizes de estado dos controladores obtidos são mostrados no Apêndice D.

Os resultados da Tabela 6.1 é referente à atenuação do maior pico individual de \mathbf{T}_{zw} , onde a

norma \mathcal{H}_∞ do sinal de aceleração da extremidade da viga relativo ao distúrbio externo do sistema não controlado é de $-69,62$ dB.

Tabela 6.1: Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta nominal e um par de funções de ponderação.

Ordem do Controlador	Norma $\ \mathbf{T}_{zw}\ _\infty$ [dB]	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _\infty$ [dB]	Tempo computacional [s]	Figuras
10×10	$-74,89$	$5,27$	1293	Figura 6.6 e 6.7
8×8	$-73,52$	$3,90$	1187	Figura 6.8 e 6.9
6×6	$-75,41$	$5,79$	956	Figura 6.10 e 6.11
4×4	$-77,55$	$7,93$	1075	Figura 6.12 e 6.13

As respostas temporais e em frequência dos sistemas controlados são apresentadas graficamente a seguir. Salienta-se que, como o sinal de excitação é uma varredura senoidal linear, existe uma relação linear direta entre o vetor de tempo e o vetor da frequência de excitação. Nesse contexto, os gráficos da resposta temporal do sinal de aceleração medido serão apresentado em relação ao vetor da frequência de excitação da viga.

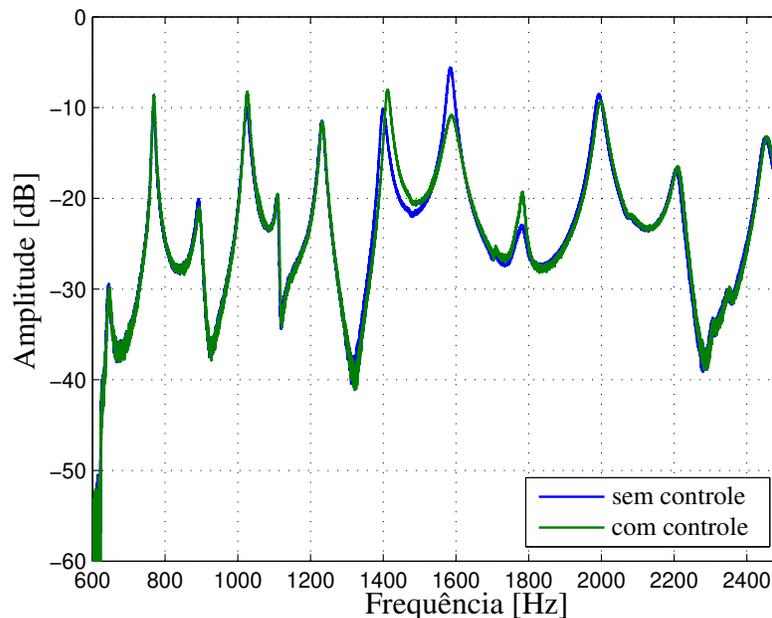


Figura 6.6: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10 .

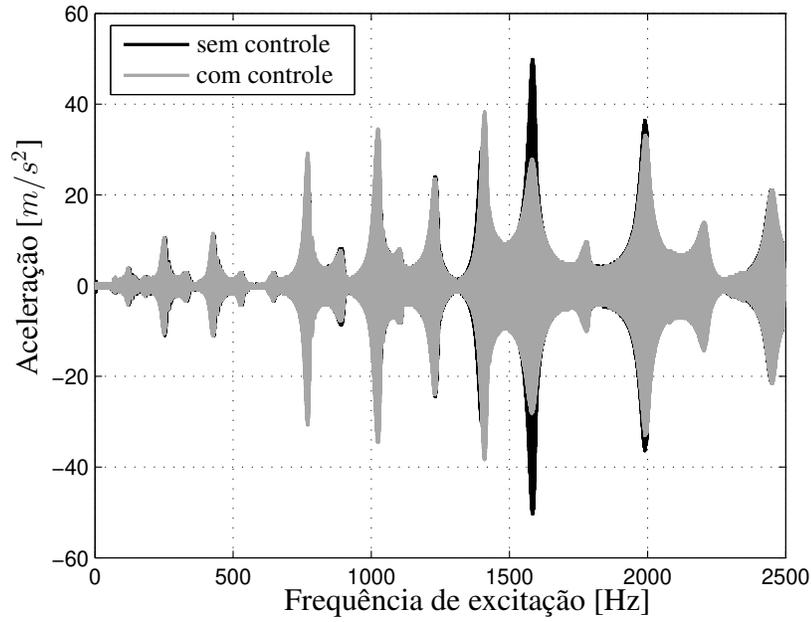


Figura 6.7: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10 .

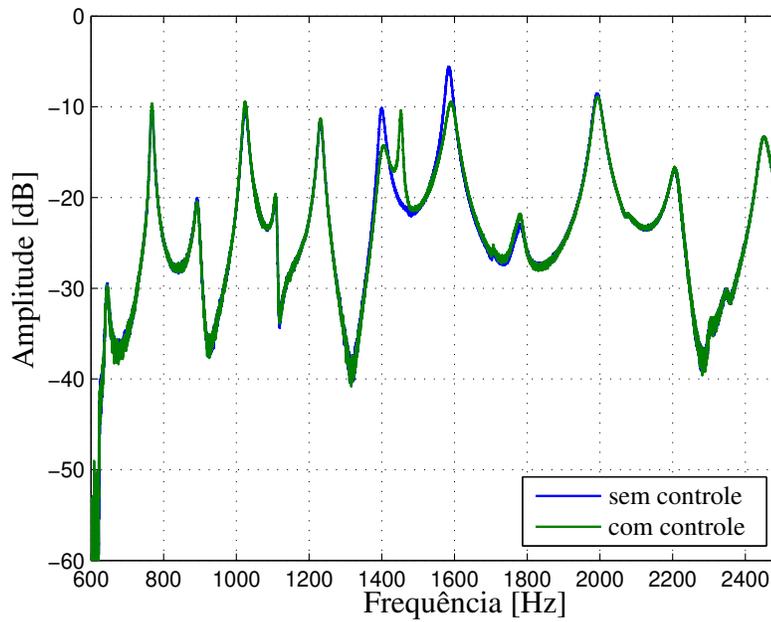


Figura 6.8: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8 .

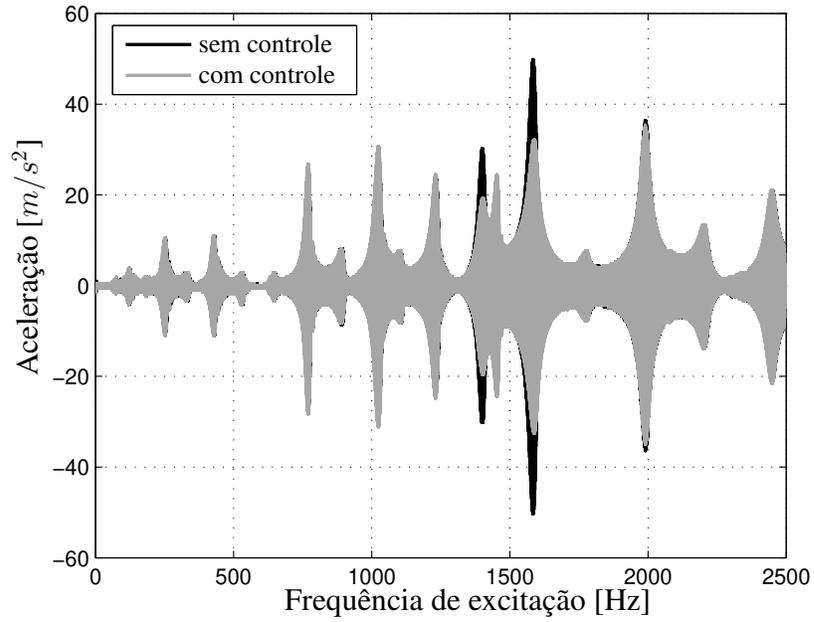


Figura 6.9: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8 .

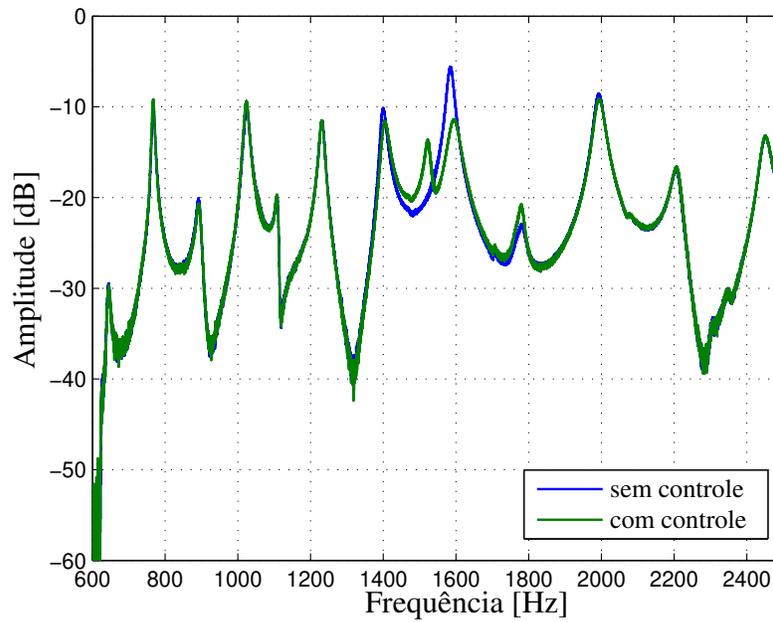


Figura 6.10: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6 .

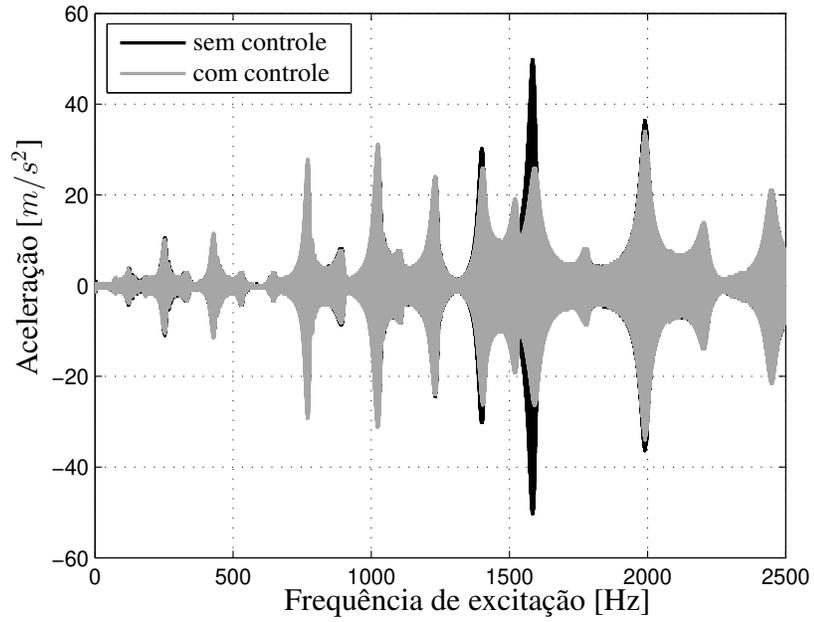


Figura 6.11: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6 .

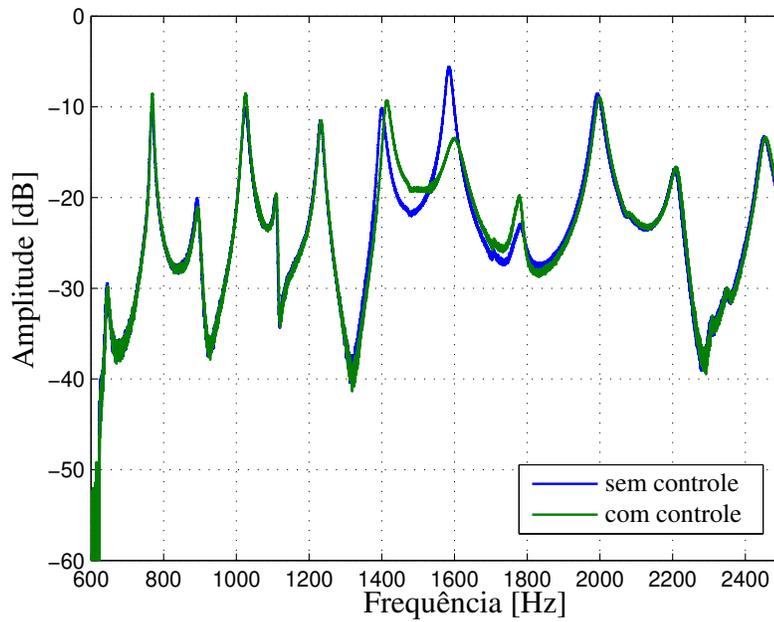


Figura 6.12: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4 .

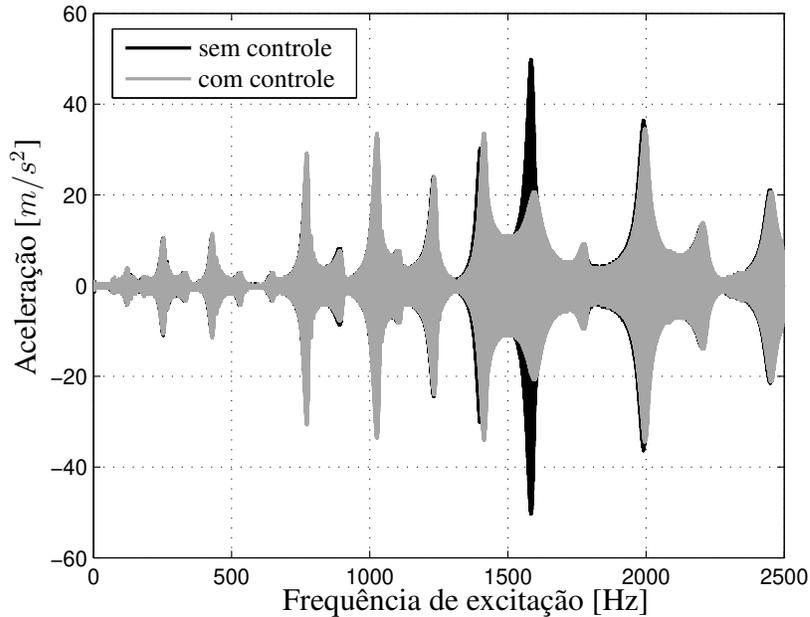


Figura 6.13: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4 .

Alguns comentários e discussões

O método na forma canônica modal conseguiu projetar os 4 controladores de ordem reduzida garantindo a redução do maior pico de resposta em frequência da planta usando os algoritmos genéticos. Mesmo assim, os controladores projetados apresentaram aumentos de amplitude dos picos de resposta em frequência dos modos próximos ao maior pico de ressonância da planta. Isto pode acontecer devido a que o problema de otimização proposto só considera como função objetivo a minimização do maior pico de ressonância da planta. Este problema pode ser corrigido, para trabalhos futuros, incluindo a informação dos picos próximos ao maior pico de ressonância da planta na função objetivo do problema de otimização proposto. Esta nova abordagem pode levar na proposta de um problema de otimização multiobjetivo para a síntese de controladores de ordem reduzida.

6.3.2 Controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta “real”

Nesta seção o modelo da planta “real” é usado diretamente no processo de projeto dos controladores de ordem reduzida. Nesta abordagem de solução não foi necessária a inclusão das funções de ponderação, uma vez que as condições de estabilidade e redução da norma \mathcal{H}_∞ foram consideradas no processo de solução.

O resumo dos principais resultados dos controladores de ordem reduzida projetados são apresentados na Tabela 6.2, onde as matrizes de estado dos controladores obtidos são mostradas no Apêndice D.

Os resultados da Tabela 6.2 são referentes à atenuação do maior pico individual de \mathbf{T}_{zw} , onde a norma \mathcal{H}_∞ do sinal de aceleração da extremidade da viga relativo ao distúrbio externo do sistema não controlado é de $-69,62$ dB (o mesmo da Seção anterior).

Tabela 6.2: Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta “real”.

Ordem do Controlador	Norma $\ \mathbf{T}_{zw}\ _\infty$ [dB]	Redução da $\ \mathbf{T}_{zw}\ _\infty$ [dB]	Tempo computacional [s]	Figuras
10×10	$-73,14$	$3,52$	1381	Figura 6.14 e 6.15
8×8	$-73,28$	$3,66$	1320	Figura 6.16 e 6.17
6×6	$-73,43$	$3,81$	1090	Figura 6.18 e 6.19
4×4	$-76,22$	$6,60$	1065	Figura 6.20 e 6.21

As respostas temporais e em frequência dos sistemas controlados são apresentadas graficamente a seguir. Da mesma forma que na Seção anterior, os gráficos da resposta temporal do sinal de aceleração medido serão apresentados em relação à frequência de excitação da viga.

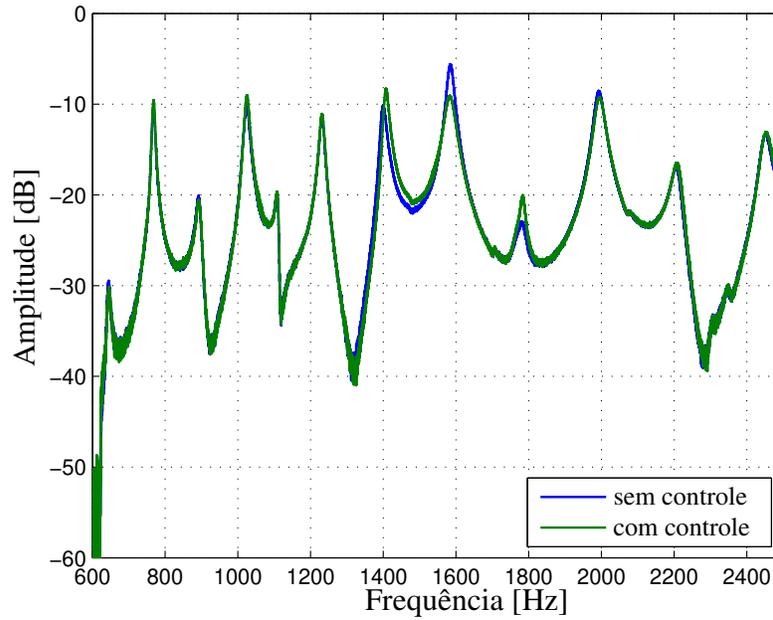


Figura 6.14: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10 .

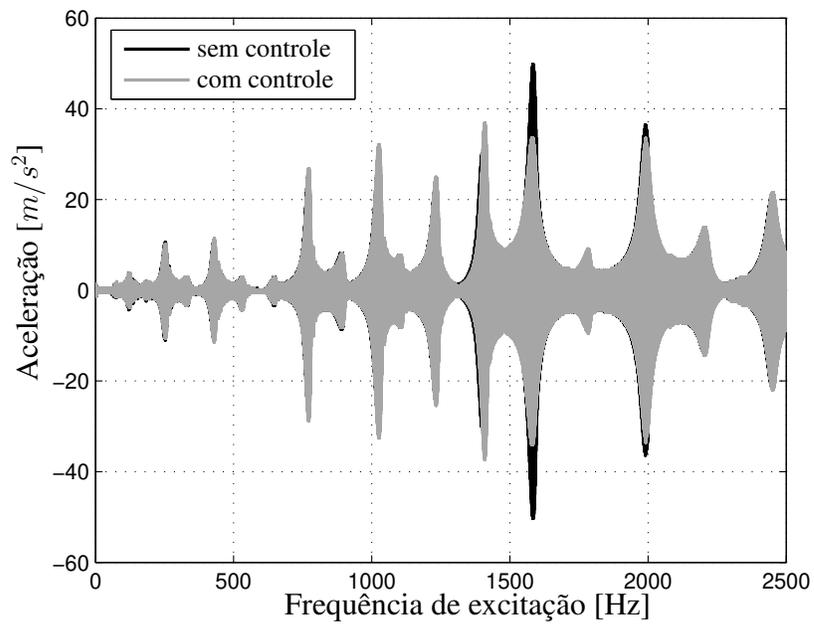


Figura 6.15: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 10×10 .

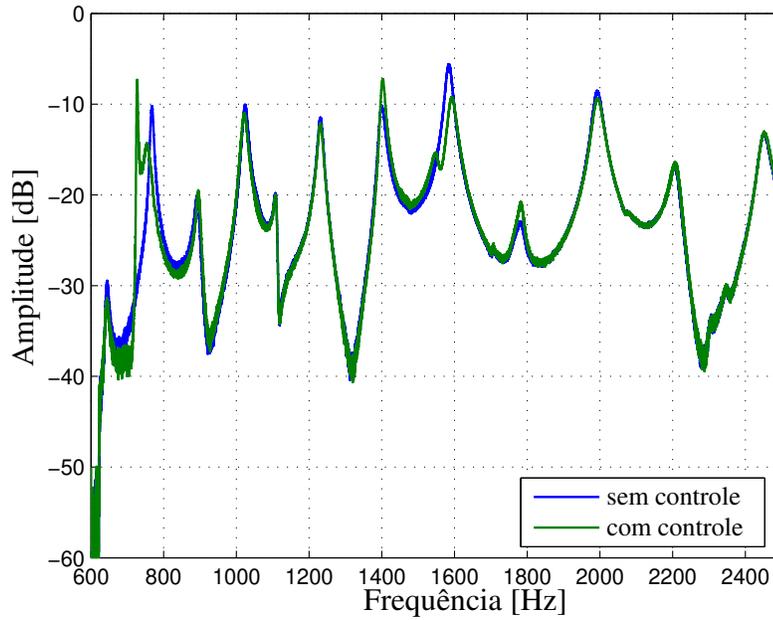


Figura 6.16: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8 .

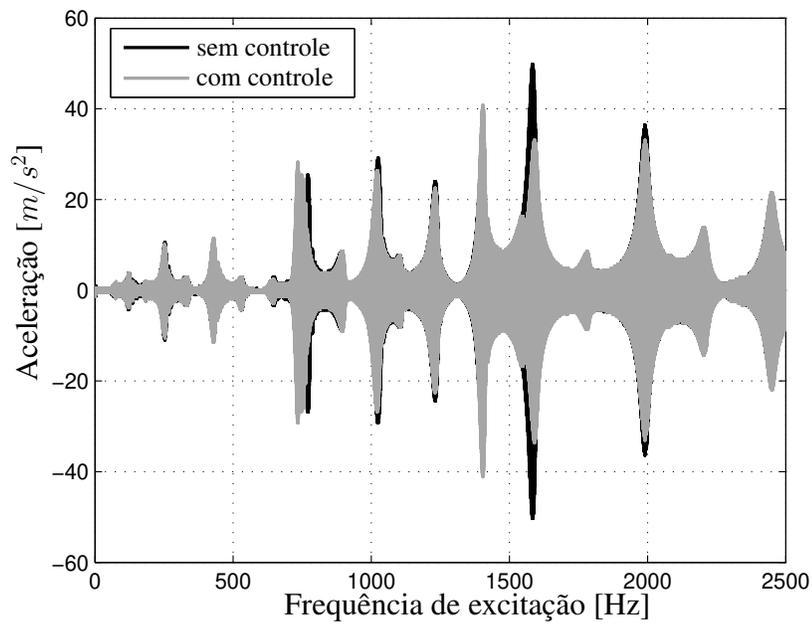


Figura 6.17: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 8×8 .

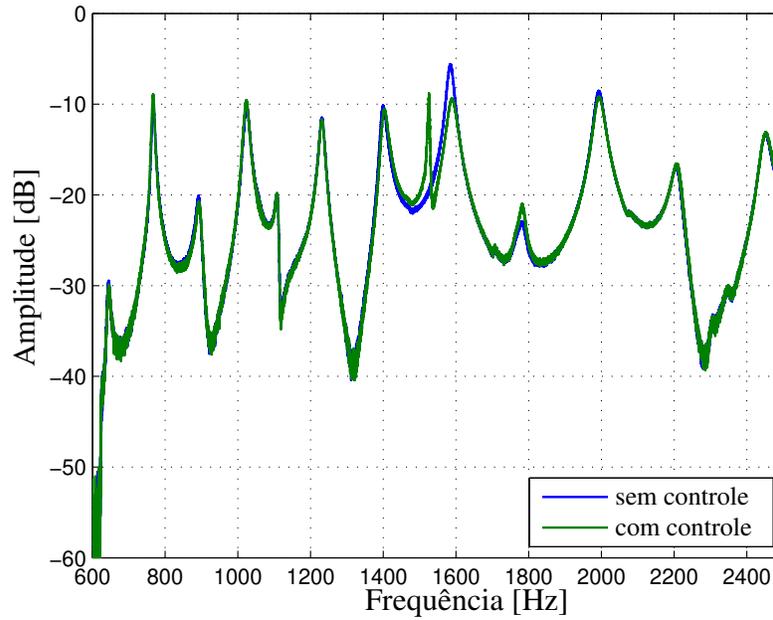


Figura 6.18: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6 .

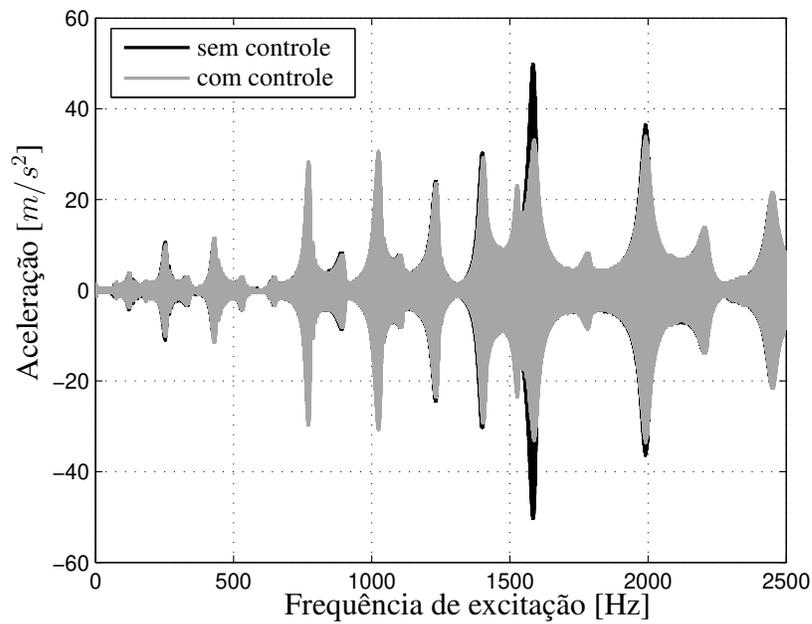


Figura 6.19: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 6×6 .

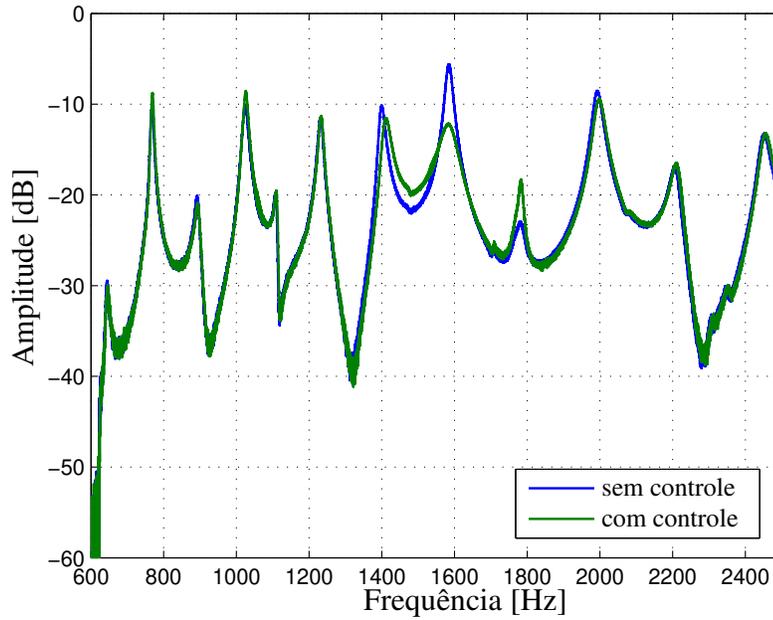


Figura 6.20: Resposta em frequência da aceleração da extremidade da viga com respeito ao distúrbio - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4 .

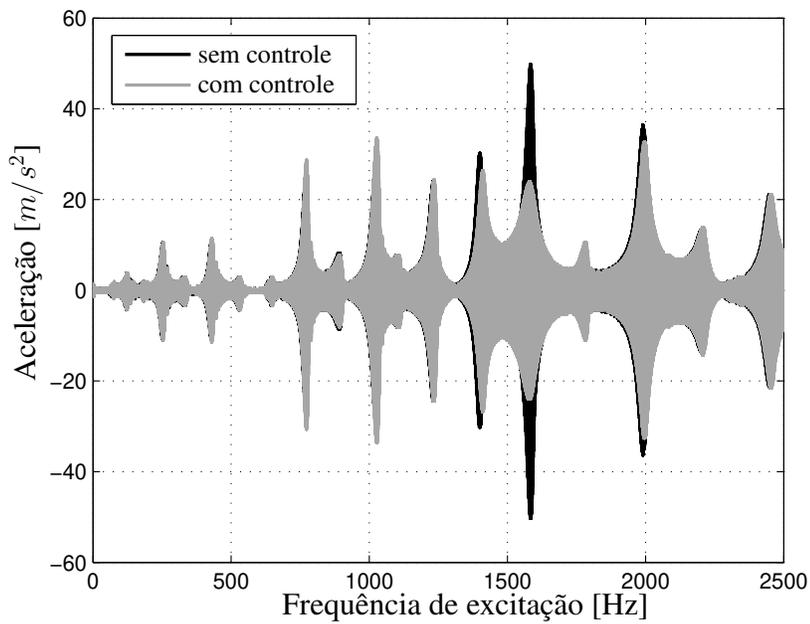


Figura 6.21: Aceleração da extremidade da viga - sistema controlado e não controlado, método na forma modal, controlador de ordem 4×4 .

Alguns comentários e discussões

O método na forma modal usando GA conseguiu projetar os 4 controladores na forma modal com uma minimização razoável da norma \mathcal{H}_∞ sem a utilização de funções de ponderação. O GA conseguiu projetar controladores de forma a obter um desempenho razoável num curto tempo de processamento. Para este exemplo, esta abordagem apresentou uma maior minimização da norma \mathcal{H}_∞ que para o caso que usa a planta nominal e funções de ponderação. Da mesma forma que na Seção anterior, os controladores obtidos apresentaram um aumento de amplitude nos picos de ressonância de alguns modos da planta. Como foi indicado na Seção anterior, este problema pode ser resolvido propondo um problema de otimização multiobjetivo para a síntese de controladores de ordem reduzida, aumentando mais a robustez da síntese proposta.

Uma dificuldade encontrada neste exemplo experimental foi que, usando o método na forma canônica controlável para as duas abordagens, usando a planta nominal e a planta “real” respectivamente, não foi possível obter controladores com um desempenho razoável (redução da norma \mathcal{H}_∞ menor a 1 dB). Isto pode ser devido a que o método na forma canônica controlável limitou o espaço de busca dos controladores factíveis numa região menor ao método na forma canônica modal. O espaço de busca do método canônico controlável inclui unicamente aos controladores que possuem as matrizes de espaço de estados na forma canônica completamente controlável, ou dito matematicamente, o espaço de busca é restrito para controladores que apresentam todos seus estados linearmente dependentes.

6.4 Projeto *anti-windup*

Para avaliar o desempenho do compensador *anti-windup* foi escolhido o controlador de ordem reduzida de ordem 4×4 da Seção anterior, pois foi o que apresentou a maior minimização da norma. O esforço de controle do sistema controlado sem restrição em amplitude é mostrado na Figura 6.22. Pode-se observar que o esforço de controle tem uma amplitude máxima de 1, 2 V.

Para avaliar o desempenho do compensador *anti-windup* é considerado a limitação em amplitude do atuador de 0, 5 V.

Os parâmetros utilizados que caracterizam o algoritmo de busca foram os seguintes: Ta-

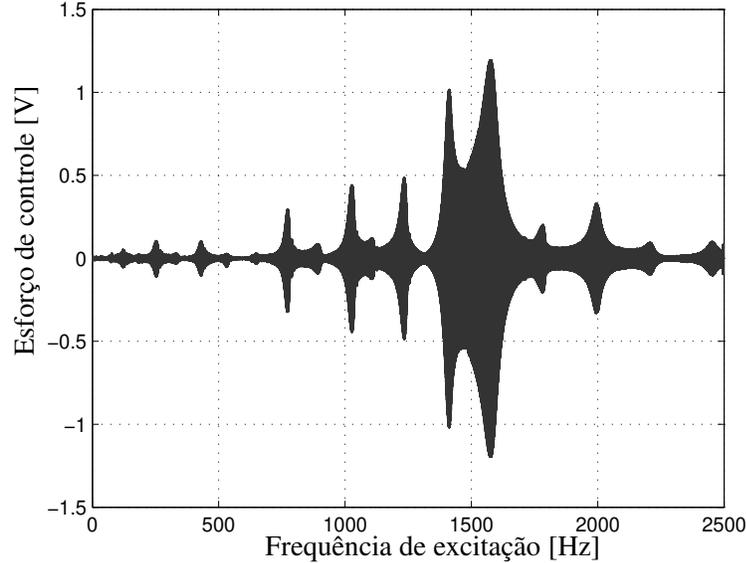


Figura 6.22: Esforço de controle do sistema controlado de ordem 4×4 .

manho da população (PopulationSize=60), Tolerância da função objetivo (TolFun=1e-8), tolerância das restrições (TolCon=1e-8), população inicial (InitialPopulation=aleatório) e fator de cruzamento (crossover=0,85). Os outros parâmetros são mantidos os valores padrões mostrados no (MathWorks, 2010). Estes valores foram escolhidos através de vários testes de forma de obter uma solução razoável ao problema de otimização apresentado em (4.28).

Com estas considerações, resolvendo o problema de otimização dado em (4.28), foi encontrada a matriz incógnita F e o compensador *anti-windup* apresentado no Apêndice D.

Na Figura 6.23 é apresentada a resposta do sistema controlado sem restrição de amplitude no esforço de controle (sinal sem saturação) e a resposta do sistema controlado com restrição em amplitude no esforço de controle (sinal com saturação). É apresentada também a resposta do sistema controlado com restrição no esforço de controle incluindo a compensação *anti-windup* (sinal com compensação).

Na Figura 6.23 pode-se observar a perda do desempenho do sistema controlado uma vez incluída a restrição no atuador (sinal com saturação). Observa-se, no sinal com compensação, que a inclusão do compensador *anti-windup* conseguiu melhorar o desempenho do sistema saturado.

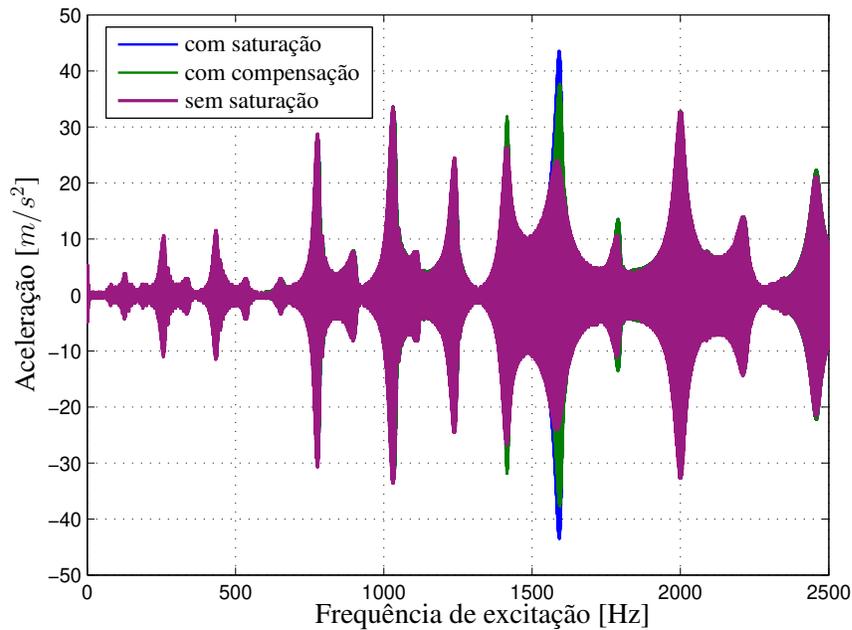


Figura 6.23: Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 com efeitos de saturação, com compensação *anti-windup* e sistema controlado sem efeitos de saturação.

Para observar melhor o comportamento de cada um destes sinais serão apresentados em figuras diferentes da seguinte forma: A resposta do sistema controlado com restrição em amplitude no esforço de controle (sinal com saturação) é apresentado na Figura 6.24. A resposta do sistema controlado com restrição no esforço de controle incluindo a compensação *anti-windup* (sinal com compensação) é apresentado na Figura 6.25. A resposta do sistema controlado sem restrição de amplitude no esforço de controle (sinal sem saturação) é apresentada na Figura 6.26.

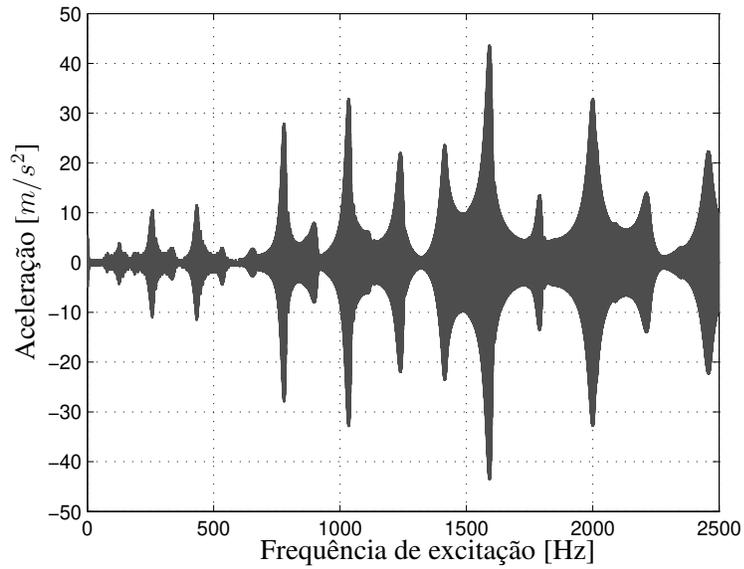


Figura 6.24: Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 com efeitos de saturação.

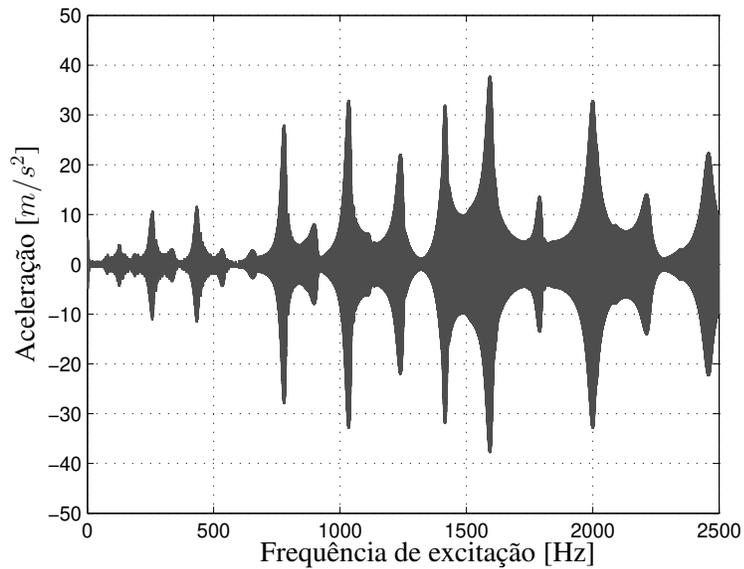


Figura 6.25: Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 com compensação *anti-windup*.

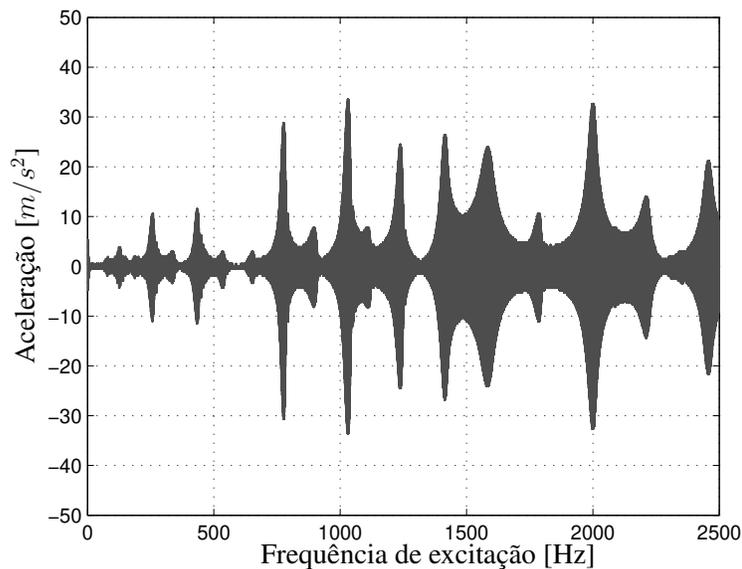


Figura 6.26: Aceleração na extremidade da viga: sistema controlado de ordem 4×4 sem efeitos de saturação.

6.4.1 Alguns comentários e discussões

O compensador *anti-windup* conseguiu melhorar o desempenho do maior pico de resposta em frequência do sistema controlado em condições de saturação. A abordagem de solução do projeto *anti-windup* proposto neste trabalho apresentou resultados razoáveis para sistemas controlados com problemas de limitação do esforço de controle. O compensador é responsável pela recuperação do comportamento linear do controlador na presença de saturação e pela velocidade de recuperação do comportamento linear do sistema controlado fora da região de saturação.

Para a análise e inclusão do compensador *anti-windup* na bancada experimental foi necessário incluir um bloco de saturação no *Simulink* na saída do controlador discreto. Este bloco de saturação gera o sinal saturado (quando houver) que é enviado ao atuador piezo-elétrico da viga de alumínio.

6.5 Comentários finais

Este Capítulo apresentou a implementação dos métodos propostos para o projeto de controladores de ordem reduzida e compensadores *anti-windup* numa bancada experimental de uma viga de alumínio engastada-livre. Neste exemplo o único método que permitiu a implementação experimental foi o método na forma canônica modal. O método na forma canônica modal projetou 4 controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal e funções de ponderação e 4 controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta “real”, onde os resultados obtidos foram comparados e discutidos. Finalmente, sobre o controlador projetado, foi implementado o compensador *anti-windup* onde os resultados obtidos foram discutidos.

7 Conclusão

A idéia principal deste trabalho foi apresentar dois métodos para a síntese de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida incluindo o compensador *anti-windup*. Para as sínteses de controladores de ordem reduzida foram propostos dois problemas de otimização não lineares para garantir a estabilidade e um desempenho razoável do sistema. Finalmente, é proposta uma abordagem de solução para a síntese de compensadores *anti-windup* através de um problema de otimização. O projeto explora as vantagens oferecidas pelos algoritmos genéticos na solução de problemas não-convexos.

O projeto de controladores de ordem reduzida proposto foi aplicado no controle ativo de vibração de dois exemplos: o primeiro sob um modelo teórico de uma viga engastada-livre e no segundo exemplo num modelo experimental de uma viga de alumínio engastada-livre.

No primeiro exemplo foram usados os métodos de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável e canônica modal. Os resultados obtidos foram comparados com o método conjunto do Lagrangiano Aumentado e LMI. Os controladores projetados apresentaram uma boa minimização da norma \mathcal{H}_∞ , onde o método na forma modal apresentou o melhor desempenho (minimização da norma \mathcal{H}_∞) dentre os três métodos implementados. Os métodos propostos projetaram controladores de ordem reduzida num menor tempo computacional com relação ao método LMI-AL.

No segundo exemplo, usando o modelo da viga experimental, não foi possível obter controladores com desempenho razoáveis (minimização da norma não atingiu 1 dB) usando o método baseado em controladores na forma canônica controlável, devido a que a imposição na forma canônica controlável restringiu o espaço de busca do controladores factíveis. Para este caso de implementação experimental, foi usado o projeto de controladores de ordem reduzida na forma canônica modal. Com essa consideração os 8 controladores projetados e implementados apresentaram um desempenho razoável na minimização do maior pico da resposta em frequência num curto tempo de processamento (tempo de obtenção do controlador).

Nos dois exemplos propostos os controladores projetados usando método na forma canônica modal mostraram ter uma maior minimização da norma \mathcal{H}_∞ sob o método na forma canônica controlável. Além disso, o método usando a forma canônica modal impõe limites para algumas

características modais (frequência natural e fator de amortecimento) do controlador. Esta consideração visa reduzir o espaço de busca dos controladores factíveis para um espaço mais próximo ao desejado (minimização na baixa frequência) permitindo ao projetista a alocação dos polos do controlador numa região desejada de forma implícita.

Devido as características dos algoritmos genéticos, não necessariamente os controladores obtidos representam soluções globais do problema de otimização do projeto de controladores de ordem reduzida estes controladores podem ter sido soluções locais razoáveis para um tempo de processamento razoável.

Um aspecto a salientar é que os métodos propostos de projeto de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável e canônica modal foram capazes de obter controladores de ordem reduzida utilizando o modelo da planta “real” sem a utilização das funções de ponderação.

Na etapa de análise do sistema saturado foram projetados compensadores *anti-windup*. Os controladores *anti-windup* são projetados para atuar em situações de saturação sem conhecimento do limite máximo do atuador. Este método pode ser considerado uma alternativa de solução flexível e mais sofisticada. O método é empregado com o objetivo de melhorar o desempenho do sistema na região de saturação. Uma vantagem deste método em relação aos outros mais conservadores é que ele preserva o comportamento do controlador na zona linear, onde este não seria afetado pela saturação. Porém, a utilização deste método é limitada para os casos onde não existe deterioração física do sistema na situação de saturação.

Este trabalho apresentou uma abordagem baseada na arquitetura desacoplada do compensador *anti-windup* como proposta em (Turner e outros, 2007), na qual os compensadores foram obtidos através da solução de um problema de otimização não linear usando os algoritmos genéticos. Os resultados para os dois exemplos estudados foram bons. No primeiro exemplo o sistema conseguiu melhorar a resposta temporal em relação ao sistema saturado sem compensação. No segundo exemplo, viga experimental, pode-se observar que houve um redução do maior pico na resposta temporal na região de saturação.

Para um processo de análise e comparação do desempenho dos algoritmos genéticos no problema de controle de ordem reduzida proposto, foi usado o algoritmo SQP no primeiro exemplo deste trabalho. Os algoritmos genéticos mostraram ter maior flexibilidade na escolha do ponto de partida e conseguiram melhores resultados (maior minimização da função objetivo) comparado ao

algoritmo SQP. O algoritmo SQP apresentou problemas de factibilidade na obtenção de alguns controladores de ordem reduzida para o exemplo escolhido.

Os algoritmos genéticos mostraram um bom potencial na solução do projeto de controladores de ordem reduzida e dos compensadores *anti-windup*. Na área de projeto de controle, com base na solução de problemas de otimização, o estudo e a utilização de algoritmos genéticos pode ser uma solução alternativa atrativa.

A abordagem da solução provou ser uma boa e simples alternativa de projeto que pode ser explorada alternativamente para algumas formulações clássicas baseadas sobre abordagens de Riccati e LMI, particularmente possibilitando a inclusão de restrições adicionais.

7.1 Perspectivas futuras

O projeto proposto de controladores de ordem reduzida na forma modal apresentou aumentos de amplitude dos picos de alguns modos de ressonância da planta. Na maioria dos casos foram os modos próximos ao maior pico de ressonância os que apresentaram esse aumento. Este problema pode ser corrigido, para trabalhos futuros, incluindo a informação dos picos próximos ao maior pico de ressonância da planta na função objetivo do problema de otimização proposto. Esta nova abordagem pode levar na proposta de um problema de otimização multiobjetivo para a síntese de controladores de ordem reduzida aumentando a robustez da síntese proposta.

Sobre a abordagem do problema de controladores de ordem reduzida podem ser facilmente incluídas novas restrições para formular novas sínteses como, por exemplo, para o projeto de controladores de ordem reduzida em sistemas com incertezas do tipo politópicas. Uma inclusão e análise adequada de restrições neste aspecto, no projeto de controladores de ordem reduzida, pode ser realizada em trabalhos futuros.

Outra ideia de trabalho futuro sobre o estudo e inclusão de novas restrições, no projeto de controladores de ordem reduzida, é a alocação de polos do sistema em malha fechada numa região desejada. Para este propósito, devem ser considerados e analisados os efeitos das características modais do controlador (frequências naturais e fator de amortecimento) sobre o sistema em malha fechada. Sobre esse análise, devem ser formuladas as novas restrições baseadas nas variáveis mo-

dais desconhecidas do controlador (frequências naturais e fator de amortecimento) para a alocação de polos do sistema em malha fechada.

Para evitar possíveis erros de aproximação do modelo contínuo projetado em relação ao modelo discretizado usado para a implementação experimental pode ser proposta a síntese de controladores de ordem reduzida em tempo discreto. Nesse contexto, as estruturas dos controladores projetados (para o caso do método na forma modal) devem ser escritas considerando as características dos polos no plano discreto. Assim mesmo, as condições de desempenho (minimização da norma \mathcal{H}_∞) e estabilidade devem ser escritas como restrições diretamente no plano discreto.

Finalmente, partindo da síntese de compensadores *anti-windup* apresentada pode ser proposta a síntese de compensadores *anti-windup* de ordem reduzida. Isto pode ser tratado realizando uma análise sobre a inclusão das funções de ponderação na formulação proposta.

Referências

ALVIN, K.F. e PARK, K.C. Second-order structural identification procedure via state-space-based system identification. **AIAA Journal**, v. 32, n. 2, 397–406, 1994.

APKARIAN, P.; NOLL, D. e FARES, B. An augmented lagrangian method for a class of lmi-constrained problems in robust control theory. **International Journal of Control**, v. 74, 348–360, 2001.

APKARIAN, P.; TUAN, H.D. e NOLL, D. Fixed-order h-infinity control design via a partially augmented lagrangian method. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 13, 1137–1148, 2003.

BALAS, M. Trends in large space structure control theory: Fondest hopes, wildest dreams. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 27, n. 3, 522–535, 1982.

BATHE, K.J. e WILSON, E.L. **Numerical Methods in Finite Element Analysis**. Prentice-Hall, 1976.

BAZARAA, M.S.; SHERALI, H.D. e M., S.C. **Nonlinear Programming - Theory and Algorithms**. John Wiley & Sons, 2006.

BENDER, F.; GOMES DA SILVA, J. e TARBOURIECH, S. Convex framework for the design of dynamic anti-windup for state-delayed systems. **IEEE Control Theory and Applications IET**, v. 5, n. 12, 1388–1396, 2011.

BOYD, S. e GHAOUI, L.E. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

BURKE, J.V.; HENRION, D.; LEWIS, A.S. e L., O.M. Hifoo - a matlab package for fixed-order controller design and \mathcal{H}_∞ optimization. In **5th IFAC Symp. Robust Control Design**. Toulouse, France, 2006.

CANAHUIRE, R. V. **Controle H-infinito de Vibrações com Restrições no Esforço de Controle**. 2009. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas.

CONN, A.R.; GOULD, N.I. e TOINT, P.L. A globally convergent augmented lagrangian algorithm for optimization with general constraints and simple bounds. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 28, n. 2, 545–572, 1991.

CONN, A.R.; GOULD, N.I. e TOINT, P.L. A globally convergent augmented lagrangian barrier algorithm for optimization with general inequality constraints and simple bounds. **Mathematics of Computation**, v. 66, n. 217, 261–288, 1997.

DEKKING, F.; KRAAIKAMP, C.; LOPUHAA, H. e MEESTER, L. **A Modern Introduction to Probability and Statistics**. Springer, 2005.

EWINS, D.J. **Modal Testing: Theory and Practice**. Research Studies Press Ltd, 1984.

FORNI, F. e GALEANI, S. Gain-scheduled model-based anti-windup for lpv systems. **Automatica**, v. 46, n. 1, 222–225, 2010.

FORRAI, A.; HASHIMOTO, S.; FUNATO, H. e K., K. Robust-controller design with hard constraint on the control signal - application for active vibration suppression of flexible structure. In **Archive of Applied Mechanics**, v. 72, pp. 379–394. 2002.

FRISWELL, M. e MOTTERSHEAD, J. **Finite Element Model Updating in Structural Dynamics**. Kluwer Academic Publishers, 1996.

GAHINET, P. e APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to h-infinity control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, v. 4, n. 4, 421–448, 1994.

GALEANI, S. Robustification of anti-windup controllers: a performance-robustness trade-off. In **Giornata di Studio su Identificazione e Controllo Robusto di Sistemi Incerti**. Università di Roma, Dip. di Informatica, Sistemi e Produzione, 2005.

GAWRONSKI, W.K. **Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures**. Springer, 2004.

GOLDBERG, D. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. Addison Wesley, 1989.

GOMES, J.M.J. e TARBOURIECH, S. Antiwindup design with guaranteed regions of stability: An lmi-based approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 50, n. 1, 106–111, 2005.

GRIMM, G.; HATFIELD, J.; POSTLETHWAITE, I.; TEEL, A.; TURNER, M. e ZACCARIAN, L. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: An lmi-based synthesis. **IEEE Transactions on Automatic control**, v. 48, n. 9, 1509–1525, 2003.

HENRION, D. e LOUEMBET, C. Convex inner approximations of nonconvex semialgebraic sets applied to fixed-order controller design. **International Journal of Control**, v. 85, n. 8, 1083–1092, 2012.

HU, Y.R. e NG, A. Active robust vibration control of flexible structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 288, n. 1-2, 43–56, 2005.

HURLEBAUS, S. e GAUL, L. Smart structure dynamics. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 20, n. 2, 255–281, 2006.

KAILATH, T. **Linear Systems**. Prentice-Hall, 1980.

KHATIBI, H.; KARIMI, A. e LONGCHAMP, R. Fixed-order controller design for systems with polytopic uncertainty using lmis. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 53, n. 1, 428–434, 2008.

- KWON, Y.W. e BANG, H. **The finite element method using MATLAB**. CRC Press, 1997.
- LEW, J.; JUANG, J. e LONGMAN, R. Comparison of several identification methods for flexible structures. **Journal of Sound and Vibration**, v. 167, n. 3, 461–480, 1993.
- LUENBERGER, D.G. **Linear and Non Linear Programming**. Addison Wesley, 2008.
- MAHAR, F.; AZHAR, S.S. e BHUTTO, Z. Evolutionary algorithms based fixed order robust controller design and robustness performance analysis. In **4th International Conference on Machine Learning and Computing**, v. 25, pp. 137–142. 2012.
- MATHWORKS. **Global Optimization Toolbox**. The MathWorks, Inc, 2010.
- MEIROVITCH, L. e BARUH, H. Effect of damping on observation spillover instability. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 35, n. 1, 31–44, 1981.
- MERLIN, M. **Controle H-infinito em Suspensões Ativas Aplicando Técnicas baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares**. 2010. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas.
- NOCEDAL, N. e WRIGHT, S.J. **Numerical Optimization**. Springer, 2006.
- OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. Prentice-Hall, 1995.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Prentice-Hall, 2003.
- SÁNCHEZ-PEÑA, R.S. e SZNAIER, M. **Robust Systems: Theory and Applications**. John Wiley & Sons, 1998.
- SARRACINI, F. **Síntese de Controladores H_∞ de Ordem Reduzida com Aplicação no Controle Ativo de Estruturas Flexíveis**. 2006. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de

Campinas.

SARRACINI, J.F. e SERPA, A.L. Reduced model in h-infinity vibration control using linear matrix inequalities. In **XI International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. XI DINAME**, 2005.

SCHERER, C.; GAHINET, P. e M., C. Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 42, n. 7, 896–911, 1997.

SKELTON, R.E.; IWASAKI, T. e GRIGORIADIS, K. **An unified Algebraic Approach to Linear Control Design**. Taylor and Francis, 1998.

SKOGESTAD, S. e POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control - Analysis and Design**. John Wiley & Sons, 2005.

SLOTINE, J.J. e LI, W. **Applied Non-linear Control**. Prentice-Hall, 1991.

TURNER, C.M.; HERRMANN, G.; SKOGESTAD, S. e POSTLETHWAITE, I. Anti-windup compensation using a decoupling architecture. In **Advanced Strategies in Control Systems with Input and Output Constraints**, pp. 121–171. 2007.

WANG, J.; WILSON, D.A.; XU, W. e CROLLA, D.A. Active suspension control to improve vehicle ride and steady-state handling. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 11, 1982–1987, 2005.

WESTON, P. e POSTLETHWAITE, I. Analysis and design of linear conditioning schemes for systems containing saturating actuators. In **IFAC Nonlinear Control System Design Symposium**. 1998a.

WESTON, P. e POSTLETHWAITE, I. Analysis and design of linear conditioning schemes for systems with nonlinear actuators. In **Internal Report, Dept. of Engineering, Leicester Univ**. 1998b.

YANG, F.; GANI, M. e HENRION, D. Fixed-order robust \mathcal{H}_∞ controller design with regional pole assignment. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 52, n. 10, 1959–1963, 2007.

ZAMES, G. Feedback of optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transaction on Automatic Control**, v. 26, n. 2, 301–320, 1981.

ZHOU, K. e DOYLE, J.C. **Essentials of robust control**. Prentice Hall, 1998.

ZHOU, K.; DOYLE, J.C. e GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Prentice Hall, 1996.

APÊNDICE A Viga flexível

A viga flexível usada neste trabalho é engastada em uma das suas extremidades e livre na outra. O modelo matemático é obtido através do método de elementos finitos, como explicado a seguir.

Considere uma viga bidimensional de elementos finitos como mostrado na Figura A.1. Os elementos apresentam dois nós e dois graus de liberdade em cada nó (v_i e θ_i). A viga apresenta uma densidade ρ , uma área transversal A , um momento de inércia da secção transversal I , um módulo de elasticidade E e um comprimento de cada elemento l .

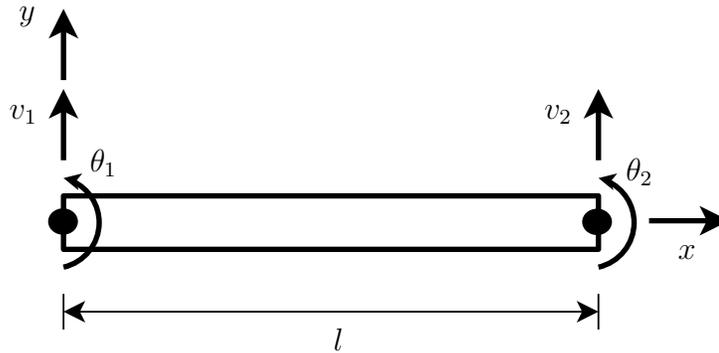


Figura A.1: Viga de elemento finito

Usando um elemento de viga de Euler-Bernoulli (Kwon e Bang, 1997), a matriz de rigidez e a matriz de massa podem ser obtidas como:

$$\mathbf{K}^e = \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12I & 6Il & -12I & 6Il \\ 6Il & 4I^2 & -6Il & 2I^2 \\ -12I & -6Il & 12I & -6Il \\ 6Il & 2I^2 & -6Il & 4I^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^e = \rho Al \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11}{210}l & \frac{9}{70} & -\frac{13}{420}l \\ \frac{11}{210}l & \frac{1}{105}l^2 & \frac{13}{420}l & -\frac{1}{140}l^2 \\ \frac{9}{70} & \frac{13}{420}l & \frac{13}{35} & -\frac{11}{210}l \\ -\frac{13}{420}l & -\frac{1}{140}l^2 & -\frac{11}{210}l & \frac{1}{105}l^2 \end{bmatrix}$$

No caso quando a viga está inclinada em relação ao sistema de coordenadas globais, as matrizes de massa e de rigidez precisam de uma transformação de coordenadas (Kwon e Bang, 1997).

Com as matrizes de massa e rigidez obtidas para cada elemento, é necessário obter as matrizes de massa e rigidez do sistema completo (montagem de todos os elementos da viga) como mostrado em (Kwon e Bang, 1997).

A.1 Modelo de estados

A forma de espaço de estados é considerada mais adequada do ponto de vista de controle neste caso.

Para este propósito, seja a seguinte equação de movimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{H}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}\mathbf{u} \quad (\text{A.1})$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{H} é a matriz de amortecimento, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{F} é a matriz de influência da entrada, \mathbf{q} é o vetor de coordenadas generalizadas e \mathbf{u} é o vetor de entrada de controle.

A fim de transformar a equação (A.1) numa forma de primeira ordem, considere a seguinte mudança de variável:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

onde \mathbf{x} é usualmente chamado de vetor de estados.

A partir da derivada do vetor de estado (A.2) é obtida a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{H}]\dot{\mathbf{q}} - [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]\mathbf{q} + [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{F}]\mathbf{u} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] & -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{H}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ [\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{F}] \end{bmatrix} \mathbf{u}\end{aligned}$$

ou

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (\text{A.3})$$

O vetor de saída pode ser representado pela seguinte equação:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (\text{A.4})$$

APÊNDICE B Projeto de controladores de ordem reduzida usando o Lagrangiano Aumentado e as LMIs

B.1 Introdução

Neste capítulo é explicado brevemente o método de obtenção de controladores de ordem reduzida proposto por Apkarian e Tuan em (Apkarian *e outros*, 2003). O método consiste na solução de um problema de otimização não convexa usando o método Lagrangiano Aumentado e as LMIs. O problema de otimização usado no projeto é baseado na minimização de uma função linear sujeita a restrições na forma de LMIs e uma restrição não linear de igualdade como se apresenta a seguir:

$$P1: \begin{cases} \text{minimizar} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeito a} & \mathbf{L}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ & \text{Rank } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = r, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde \mathbf{x} é o vetor de variáveis de decisão, \mathbf{c} é um vetor dado que caracteriza a função objetivo e r é um escalar inteiro positivo. A restrição $\mathbf{L}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$ é uma restrição na forma de LMI e o $\text{Rank } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = r$ representa a restrição não linear de igualdade.

A restrição $\text{Rank } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = r$ é a função de rank da matriz \mathbf{A} e é a que determina a ordem do controlador de ordem reduzida. A função Rank é representada no problema de controle como uma restrição de inversão matricial.

A abordagem de solução do problema (B.1) consiste em incluir a restrição não linear dentro da função objetivo para criar a função lagrangiana aumentada usando multiplicadores de Lagrange e parâmetros de penalidades, segundo o método lagrangiano aumentado explicado em (Bazaraa *e outros*, 2006; Luenberger, 2008). O problema de otimização é escrito novamente através da minimização da função lagrangiana aumentada sujeita às restrições LMIs. Este problema de otimização é resolvido usando o resolvidor de LMIs disponível no MATLAB (funções *lmiterm* e *mincx*).

Os principais aspectos para a obtenção do controlador de ordem reduzida são trabalhados a seguir.

B.2 Controle \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida

Os modelos da planta e do controlador são escritos novamente para facilitar a visualização do problema.

Seja o modelo da planta na forma padrão para o problema de controladores \mathcal{H}_∞ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{B.2}$$

com $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ sem perda de generalidade desde que os resultados podem ser estendidos para o caso geral (Sánchez-Peña e Sznaier, 1998). \mathbf{w} é o vetor de entradas exógenas, \mathbf{z} é o vetor da saída de desempenho, \mathbf{u} é o vetor da entrada de controle, \mathbf{y} é o vetor das saídas medidas e \mathbf{x} é o vetor de estados. A matriz de estados $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, onde n é a ordem da planta.

O controlador dinâmico linear $\mathbf{K}(s)$ é dado por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{y} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c\mathbf{y}\end{aligned}\tag{B.3}$$

A matriz de estados do controlador $\mathbf{A}_c \in \mathfrak{R}^{k \times k}$, onde $k < n$ é a ordem do controlador de ordem reduzida.

Do modelo de estados da planta, Eq. (B.2), e com o controlador, Eq. (B.3), o sistema em malha fechada de \mathbf{w} a \mathbf{z} pode ser representado como

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2)\mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21})\mathbf{w}\tag{B.4}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}\tag{B.5}$$

$$\mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2)\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c\mathbf{x}_c + (\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21})\mathbf{w}\tag{B.6}$$

O modelo em malha fechada pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{cl} &= \mathbf{A}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{B}_{cl}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= \mathbf{C}_{cl}\mathbf{x}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}\mathbf{w}\end{aligned}\tag{B.7}$$

onde:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_{cl} &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{B}_2\mathbf{C}_c \\ \mathbf{B}_c\mathbf{C}_2 & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{B}_c\mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{cl} &= [\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{C}_2 \quad \mathbf{D}_{12}\mathbf{C}_c], \quad \mathbf{D}_{cl} = [\mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{D}_c\mathbf{D}_{21}]\end{aligned}$$

Da equação (B.7), a matriz de transferência em malha fechada de \mathbf{w} para \mathbf{z} é definida como:

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \mathbf{C}_{cl}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl})^{-1}\mathbf{B}_{cl} + \mathbf{D}_{cl}\tag{B.8}$$

Uma forma tradicional de obtenção de controladores \mathcal{H}_∞ é usando o lema do limite real, que é definido para o sistema (B.8) como (Skelton *e outros*, 1998; Zhou e Doyle, 1998):

Lema. A desigualdade $\|\mathbf{T}_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$ é satisfeita se e somente se existir uma matriz simétrica $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A}_{cl} & \mathbf{X}\mathbf{B}_{cl} & \mathbf{C}_{cl}^T \\ \mathbf{B}_{cl}^T\mathbf{X} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{cl}^T \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}\tag{B.9}$$

A equação (B.9) pode ser reescrita de forma a tornar explícitas as matrizes do controlador de ordem reduzida. Com este objetivo as matrizes em malha fechada podem ser expressadas como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_{cl} \\ \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a\mathbf{K}_a\mathbf{C}_a & \mathbf{B}_{1,a} + \mathbf{B}_a\mathbf{K}_a\mathbf{D}_{21,a} \\ \mathbf{C}_{1,a} + \mathbf{D}_{12,a}\mathbf{K}_a\mathbf{C}_a & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{A}_{12,a}\mathbf{K}_a\mathbf{D}_{21,a} \end{bmatrix}\tag{B.10}$$

onde:

$$\mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D}_c \end{bmatrix}, \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_k \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{1,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_{1,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_k \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{12,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_{21,a} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

A expressão (B.9) pode ser reescrita usando a equação (B.10) como:

$$\Psi + \mathbf{Q}^T \mathbf{K}_a^T \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x^T \mathbf{K}_a \mathbf{Q} < \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

onde:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a^T \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12,a}^T \end{bmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & \mathbf{D}_{21,a} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_a & \mathbf{X} \mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T \mathbf{X} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

com

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a^T & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{12,a}^T \end{bmatrix}$$

Usando o Lema da Projeção (Boyd e Ghaoui, 1994) para eliminar as matrizes incógnitas do controlador, a expressão (B.11) pode ser substituída pelas seguintes equações:

$$\mathbf{N}_Q^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_a & \mathbf{X} \mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T \mathbf{X} & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_Q < \mathbf{0} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{N}_R^T \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \mathbf{A}_a^T + \mathbf{A}_a \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{B}_{1,a} & \mathbf{X}^{-1} \mathbf{C}_{1,a}^T \\ \mathbf{B}_{1,a}^T & -\gamma \mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_{1,a} \mathbf{X}^{-1} & \mathbf{D}_{11} & -\gamma \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{N}_R < \mathbf{0} \quad (\text{B.13})$$

onde \mathbf{N}_R e \mathbf{N}_Q representam bases arbitrárias do espaço nulo de \mathbf{R} e \mathbf{Q} respectivamente.

Pode-se observar que a equação (B.13) apresenta um termo não-linear. Com o objetivo de tornar a expressão (B.13) convexa, é considerado que $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^{-1}$ e que pode ser reescrito como:

$$\mathbf{X} \mathbf{Y} - \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (\text{B.14})$$

Da expressão (B.9) sabe-se que $\mathbf{X} > 0$ então pode-se definir que $\mathbf{Y} > 0$, como mostrado na seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (\text{B.15})$$

Com estas considerações as equações (B.12) e (B.13) são incluídas em (B.9) para escrever o problema de projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida baseado no seguinte problema de otimização:

$$\text{P2:} \begin{cases} \text{minimizar} & \gamma \\ \text{sujeito a:} & (\text{B.12}), (\text{B.13}), (\text{B.14}) \text{ e } (\text{B.15}) \end{cases}$$

A equação (B.14) é uma condição de inversão matricial que torna o problema de otimização (P2) não convexo. Para a solução deste problema de otimização é usado o método Lagrangiano Aumentado. A equação (B.14) é incluída dentro da função objetivo para formar a função lagrangiana como dada por

$$\Phi_c(\xi, \Lambda) = \gamma + \sum_{ij} \Lambda_{ij} (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{ij} c_{ij} (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})_{ij}^2 \quad (\text{B.16})$$

onde $\xi = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, Λ_{ij} são os multiplicadores de lagrange e c_{ij} são os parâmetros de penalidade.

A função Lagrangiana Aumentada (B.16) pode ser escrita em forma matricial como:

$$\Phi_c(\xi, \Lambda) = \gamma + \text{Tr}(\Lambda^T (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})) + \frac{\mathbf{C}_p}{2} \text{Tr}((\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})^T (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})) \quad (\text{B.17})$$

em que a matriz \mathbf{C}_p é a matriz diagonal de parâmetros de penalidade e Λ é a matriz que contém os multiplicadores de Lagrange. Esta função Lagrangiana é substituída em (P2) para criar o novo problema de otimização mostrado a seguir.

$$\text{P3:} \begin{cases} \text{minimizar} & \gamma + \text{Tr}(\Lambda^T (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})) + \frac{\mathbf{C}_p}{2} \text{Tr}((\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})^T (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})) \\ \text{sujeito a:} & (\text{B.12}), (\text{B.13}) \text{ e } (\text{B.15}) \end{cases}$$

As LMIs (B.12), (B.13) e (B.15) são deixadas de fora da função Lagrangiana Aumentada explicitamente devido ao fato de usar o resolvidor de problemas de otimização na forma de LMIs já disponíveis no Matlab.

Após a solução do problema de otimização (P3), as variáveis \mathbf{X} e γ são usadas na solução do problema de factibilidade (B.11) para obter as matrizes do controlador de ordem reduzida (\mathbf{A}_c , \mathbf{B}_c , \mathbf{C}_c , \mathbf{D}_c). Neste trabalho foi usado o comando *feasp* do MATLAB para a solução do problema de factibilidade.

B.3 Algoritmo usado para o projeto de controle \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida

O algoritmo usado no projeto é baseado nos seguintes 4 passos segundo os trabalhos de (Apkarian e outros, 2003, 2001).

1. **Fase inicial:** O algoritmo é inicializado em um ponto factível ξ_0 obtido das restrições (B.12), (B.13) e (B.15). Inicializa-se a matriz dos parâmetros de penalidade $\mathbf{C}_p^0 > \mathbf{0}$ e a matriz dos multiplicadores de Lagrange $\mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{0}$.
2. **Fase otimização:** Para uma iteração m resolve-se o problema de otimização (P3) obtendo o ponto de solução ξ^{m+1} . O ponto ξ^m é usado como ponto de partida no processo de otimização do problema (P3).
3. **Fase de atualização:** Os parâmetros de penalidade e multiplicadores de Lagrange são atualizados seguindo as seguintes expressões:

$$\mathbf{\Lambda}^{m+1} = \mathbf{\Lambda}^m + c_p^m (\mathbf{X}^{m+1} \mathbf{Y}^{m+1} - \mathbf{I})$$

$$c_{pij}^{m+1} = \begin{cases} \rho c_{pij}^m & \text{se } |(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})_{ij}^{m+1}| > \mu \\ c_{pij}^m & \text{se } |(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I})_{ij}^{m+1}| \leq \mu \end{cases}$$

onde os seguintes parâmetros são usados $\rho > 1$ e $0 < \mu < 1$.

4. **Fase final:** Critério de convergência. Se $\|\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{I}\|_F > \epsilon$, para $0 < \epsilon < 1$. Faz-se $m = m + 1$ e volta-se ao passo 2. Caso contrário monta-se o controlador \mathcal{H}_∞ de ordem k . Se a construção do controlador apresenta alguma falha, reduz-se o valor ϵ , faz-se $m = m + 1$ e retorna-se ao passo 2.

B.4 Minimização da função Lagrangiana Aumentada

O algoritmo apresentado em (B.3) envolve a minimização da função lagrangiana aumentada $\Phi_c(\xi, \Lambda)$ para \mathbf{C}_m e Λ_m fixos.

Considerando ξ um ponto factível a função lagrangiana pode ser reescrita como uma expansão em séries de Taylor considerando o termo até a segunda derivada da seguinte forma.

$$\Pi_c(\xi, \Lambda) = \nabla\Phi(\xi, \Lambda)^T \mathbf{d}\xi + \frac{1}{2} \mathbf{d}\xi^T \mathbf{H} \mathbf{d}\xi \quad (\text{B.18})$$

onde \mathbf{H} é a matriz hessiana de função $\Pi_c(\xi, \Lambda)$. Substituindo (B.18) no problema (P3) tem-se:

$$\text{P4: } \begin{cases} \text{minimizar} & \Pi_c(\xi, \Lambda) = \nabla\Phi_c(\xi, \Lambda)^T \mathbf{d}\xi + \frac{1}{2} \mathbf{d}\xi^T \mathbf{H} \mathbf{d}\xi \\ \text{sujeito a:} & \xi + \mathbf{d}\xi \in (B.12), (B.13) \text{ e } (B.15) \end{cases}$$

No problema de otimização (P4) a verdadeira Hessiana $\nabla^2\Phi_c$ é substituída por sua aproximação por Gauss-Newton $H = \nabla^{GN}\Phi_c$ ou mais especificamente pela aproximação estritamente convexa de $H = \nabla^{GN}\Phi_c$ como apresentado em (Apkarian e outros, 2003). Pela convexidade de \mathbf{H} , o problema (P4) pode ser tratado como um problema de programação semi-definida via a seguinte formulação:

$$\text{P5: } \begin{cases} \text{minimizar} & t \\ \text{sujeito a:} & \begin{bmatrix} t - \nabla\Phi_c(\xi, \Lambda)^T \mathbf{d}\xi & \mathbf{d}\xi^T \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T \mathbf{d}\xi & 2\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & \xi + \mathbf{d}\xi \in (B.12), (B.13) \text{ e } (B.15) \end{cases}$$

onde \mathbf{L} é o fator de Cholesky de \mathbf{H} de forma que $\mathbf{H} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$.

De um ponto de vista prático, em vez de modificar a matriz Hessiana diretamente e obter o fator de Cholesky da matriz resultante, considera-se mais seguro e eficiente usar a sua fatoração como

$$\mathbf{H} = \mathbf{P}^T \mathbf{L} (\mathbf{D} + \mathbf{E}) \mathbf{L}^T \mathbf{P} \quad (\text{B.19})$$

onde \mathbf{P} é a matriz de permutação, \mathbf{L} é a matriz triangular inferior, \mathbf{D} é a matriz diagonal que conterà os autovalores da matriz hessiana e \mathbf{E} é a matriz diagonal que altera os autovalores negativos e nulos da matriz hessiana de forma de tornar esta positivo-definida (Apkarian e outros, 2003).

Após a solução do problema de otimização (P5), a direção de descida $d\xi$ é obtida. O próximo passo ótimo a ser dado na direção de descida é determinado mediante um processo de busca unidimensional. Para isso se deseja determinar o valor de α de forma que o novo ponto $\xi + \alpha d\xi$ esteja na região factível e consiga a maior redução possível de $\Phi_c(\xi, \Lambda)$.

A busca unidimensional é feita substituindo $\xi + \alpha d\xi$ na função (B.17) obtendo a seguinte expressão:

$$\Phi_c(\xi + \alpha d\xi, \Lambda) = a_4\alpha^4 + a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 \quad (\text{B.20})$$

A solução dos pontos mínimos é resolvida através da derivada da função (B.20) como segue:

$$4a_4\alpha^3 + 3a_3\alpha^2 + 2a_2\alpha + a_1 = 0 \quad (\text{B.21})$$

Os valores de α obtidos da solução de equação (B.21) são testados na função $\Phi_c(\xi + \alpha d\xi, \Lambda)$ e é escolhido o que fornece o menor valor factível.

APÊNDICE C Estrutura dos algoritmos genéticos para o projeto de controladores de ordem reduzida e compensadores *anti-windup*

Este trabalho usa o toolbox GA do MATLAB (MathWorks, 2010) que implementa os algoritmos genéticos para minimizar uma função objetivo. A função *ga* do MATLAB pode resolver problemas restritos e irrestritos, e oferece opções de configuração para selecionar as características do algoritmo, como a população inicial, a função de seleção, a função de mutação, a função de cruzamento, etc.

O problema de otimização apresentado nas equações (3.3) e (3.4) para o projeto de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável, e (3.8) para a forma canônica modal são resolvidos usando a função *ga*. As características do algoritmo de solução para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida é mostrada na Tabela C.1.

Tabela C.1: Características do GA para o projeto de controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida

Elementos de <i>ga</i>	Representação
Função aptidão (ou objetivo)	$\ \mathbf{T}_{zw}\ _\infty$
Função restrição	$\max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_e))) < 0$ e $\max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{cl}))) < 0$
Indivíduos	$[\alpha_k, \beta_{k(j-1)}, c_{ik}, d_{ij}]$ (canônica controlável) $[\xi_p, w_n^p, \beta_{k,j}, c_{i,k}, d_{i,j}]$ (canônica modal)
SelectionFcn	@selectionstochunif
CrossoverFcn	@crossoversscattered
MutationFcn	[@mutationgaussian] [1] [1]
EliteCount	2

Para o projeto de compensadores *anti-windup* baseado no problema de otimização apresentada na equação (4.28), as características do algoritmo genético usadas são apresentadas na Tabela C.2.

Tabela C.2: Características do GA para o projeto de compensadores *anti-windup*

Elementos de <i>ga</i>	Representação
Função aptidão (ou objetivo)	$\ \mathbf{T}_{z\bar{u}}\ _{\infty}$
Função restrição	$\max(\text{real}(\lambda(\mathbf{A}_{mf}))) < \mathbf{0}$
Indivíduos	\mathbf{F}
SelectionFcn	@selectionstochunif
CrossoverFcn	@crossoverscattered
MutationFcn	[@mutationgaussian] [1] [1]
EliteCount	2

As funções principais que conformam o algoritmo são definidas a seguir.

- Função seleção *@selectionstochunif*: Escolhe pais usando a amostragem uniforme estocástica. Esta função cria uma linha que é dividida em segmentos de comprimento proporcional aos valores de desempenho do indivíduo na otimização (valor aptidão). O algoritmo avança sobre a linha usando passos de igual tamanho. A cada passo o algoritmo escolhe o indivíduo correspondente à seção em que este se situa. O primeiro passo é um número aleatório uniforme menor que o tamanho do passo padrão.
- Função de cruzamento *@crossoverscattered*: é usada para produzir os filhos de cruzamento, que cria um vetor binário aleatório que será associado a dois indivíduos (pais) selecionados para cruzamento. Estes novos indivíduos, chamados de filhos de cruzamento, recebem os genes do primeiro pai onde o vetor binário é 1 e os genes do segundo pai onde o vetor binário é 0. A Figura C.1 mostra o processo da função cruzamento usada neste trabalho.

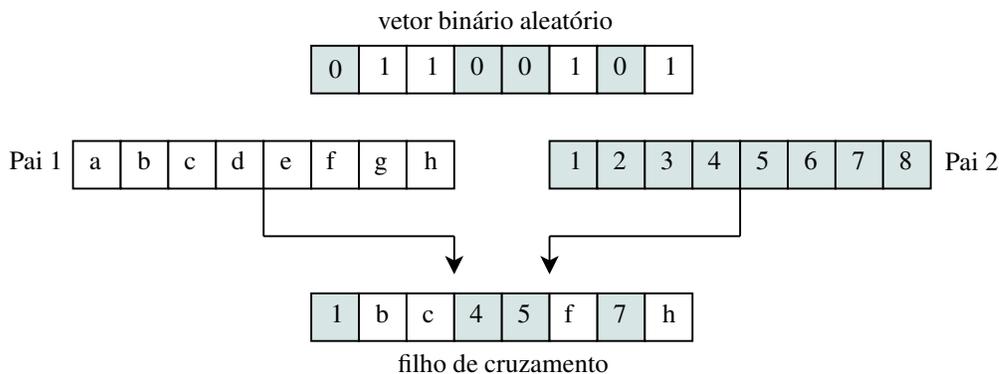


Figura C.1: Processo da função cruzamento (*@crossoverscattered*).

- Função de mutação *@mutationgaussian*: usada para produzir os filhos com mutação, esta função realiza uma variação no vetor dos pais escolhidos para mutação usando a formulação de distribuição gaussiana. A formulação de distribuição gaussiana usada é (Dekking e outros, 2005):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

onde para a função mutação μ é a média de valor 0 e σ é o desvio padrão.

O desvio padrão pode ser definido através dos parâmetros de escala e de encolhimento. O parâmetro de escala (*PES*) é responsável por determinar o desvio inicial na primeira geração. Considerando o vetor de valores limites (valor mínimo e máximo) da primeira população definido como $v = [v_1 \ v_2]$, o desvio inicial pode ser obtido como:

$$\sigma_0 = PES.(v_2 - v_1)$$

O parâmetro de encolhimento (*PE*) controla a taxa com a qual o desvio diminui. O desvio padrão para as próximas gerações pode ser calculado como:

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} \left(1 - PE \times \frac{k}{\text{Gerações}}\right)$$

onde k corresponde à $k^{\text{é-sima}}$ geração.

Ao ser escolhida a função *@mutationgaussian* como função mutação devem ser especificados juntamente os valores dos parâmetros de escala e encolhimento.

- Filhos elite: São os indivíduos com a melhor adaptação nas populações. Os filhos elite passam diretamente sem modificações nos genes. O número de filhos elite considerado neste trabalho é de 2.

Um aspecto que pode ser considerado no processo de obtenção dos controladores \mathcal{H}_∞ de ordem reduzida é poder reproduzir os resultados obtidos da solução dos problemas de otimização propostos. O GA é um método estocástico que faz escolhas aleatórias na criação de cada geração, como no processo de seleção, cruzamento e mutação. O toolbox *ga* usa o vetor padrão de números pseudo-randômicos do MATLAB para gerar a sequência de números aleatórios (MathWorks, 2010). Se é desejado pelo projetista poder reproduzir os resultados obtidos de cada solução dos problemas de otimização propostos é recomendado que os estados internos atuais do vetor padrão, gerador de números aleatórios, sejam inicializados depois de cada execução do *ga*.

APÊNDICE D Controladores de ordem reduzida em tempo contínuo obtidos para o modelo experimental da viga

Nesta seção são mostrados as matrizes de estado dos controladores usados para o controle experimental da viga engastada-livre.

D.1 Projeto de controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta nominal

D.1.1 Controlador de ordem reduzida 4×4

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -1,747 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -183,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -441,3 & 9787 \\ 0 & 0 & -9787 & -441,3 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 7,499 \\ 37,78 \\ -11 \\ 95,54 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 18,06 & 33,86 & 92,13 & -11,17 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0.$$

D.1.2 Controlador de ordem reduzida 6×6

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -4245 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -167,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,586 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1654 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -121,8 & 9827 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9827 & -121,8 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 8,939 \\ 29,6 \\ 13,39 \\ 24,51 \\ 15,9 \\ 30,96 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 6,763 & 34,34 & 4,653 & 24,49 & 35,72 & -15,95 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_c = 0.$$

D.1.3 Controlador de ordem reduzida 8×8

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -90,73 & 9297 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9297 & -90,73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,071 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -212,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -242,7 & 9997 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9997 & -242,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,605 \times 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 21,82 \\ 45,5 \\ 4,887 \\ 19,21 \\ -15,57 \\ 14,72 \\ 4,664 \\ 19,76 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 43,89 & 7,51 & 11,82 & 17,22 & 43,77 & 1,912 & 13,59 & 20,44 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_c = 0.$$

D.1.4 Controlador de ordem reduzida 10×10

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -2,453 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -376,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -469,2 & 7493 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7493 & -469,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -760,3 & 9481 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9481 & -760,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,013 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -105,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1,93 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -202,5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 22,61 \\ 16,76 \\ 9,12 \\ 20,49 \\ 11,65 \\ 89,65 \\ 12,36 \\ 20,13 \\ 25,44 \\ 9,941 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = [10,25 \quad 8,56 \quad 22,4 \quad 15,24 \quad 93,75 \quad 1,043 \quad 15,01 \quad 23,99 \quad 9,081 \quad 20,03], \quad \mathbf{D}_c = 0.$$

D.2 Projeto de controladores de ordem reduzida usando o modelo da planta real

D.2.1 Controlador de ordem reduzida 4×4

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -3973 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -813,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -630,2 & 9793 \\ 0 & 0 & -9793 & -630,2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 33,53 \\ 31,03 \\ 2,735 \\ 102,3 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C}_c = [7,499 \quad 29,63 \quad 95,68 \quad 19,42], \mathbf{D}_c = 0.$$

D.2.2 Controlador de ordem reduzida 6×6

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -1,36 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1389 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,601 \times 10^5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1637 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44,91 & 9806 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9806 & -44,91 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 10,01 \\ 43,73 \\ 8,485 \\ 39,94 \\ -6,409 \\ 24,9 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C}_c = [5,481 \quad 43,59 \quad 12,38 \quad 44,26 \quad 30,18 \quad 13,14], \mathbf{D}_c = 0.$$

D.2.3 Controlador de ordem reduzida 8×8

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -43,95 & 4503 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4503 & -43,95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,054 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -214,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -86,41 & 9992 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9992 & -86,41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 33,51 \\ 60,38 \\ 2,978 \\ 47,82 \\ -8,968 \\ 23,72 \\ 12,24 \\ 29,24 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 63,07 & 32,76 & 19,24 & 44,26 & 31,84 & -7,463 & 9,796 & 27,19 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}_c = 0.$$

D.2.4 Controlador de ordem reduzida 10×10

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -214,6 & 8531 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8531 & -214,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5,548 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -567,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -760,9 & 9489 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9489 & -760,9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9576 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -109,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4079 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -66,18 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 30,45 \\ 50,79 \\ 22,38 \\ 25,94 \\ 38,38 \\ 85,78 \\ 14,98 \\ 35,94 \\ 26,21 \\ 35,99 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_c = [48,59 \quad 40,25 \quad 22,92 \quad 27,49 \quad 91,52 \quad 8,69 \quad 21,95 \quad 27,57 \quad 27,03 \quad 34,9], \quad \mathbf{D}_c = 0.$$

D.3 Compensador *anti-windup* implementado para a viga experimental

$$\mathbf{F} = [-38,4247 \quad 119,6140 \quad -112,9530 \quad 10,2825 \quad -101,2360 \quad -72,8604 \quad -35,2285 \quad 88,8095 \quad 69,8699 \quad -46,3502 \quad 52,0664 \quad 78,8456].$$

$$\mathbf{A}_w = \begin{bmatrix} 1658 & 3465 & 5060 & -460,6 & 4535 & 3264 & 1578 & -3978 & -3130 & 2076 & -2332 & -3532 \\ -7625 & -3792 & 3521 & -320,5 & 3156 & 2271 & 1098 & -2768 & -2178 & 1445 & -1623 & -2458 \\ -5039 & 1,57 \times 10^4 & -1,52 \times 10^4 & 1,13 \times 10^4 & -1,33 \times 10^4 & -9556 & -4620 & 1,16 \times 10^4 & 9164 & -6079 & 6829 & 1,03 \times 10^4 \\ 745,5 & -2321 & -7752 & -533,7 & 1964 & 1414 & 683,5 & -1723 & -1356 & 899,2 & -1010 & -1530 \\ -1573 & 4896 & -4624 & 420,9 & -4217 & 7011 & -1442 & 3635 & 2860 & -1897 & 2131 & 3227 \\ -796,8 & 2480 & -2342 & 213,2 & -1,21 \times 10^4 & -1584 & -730,5 & 1842 & 1449 & -961,1 & 1080 & 1635 \\ -3404 & 1,06 \times 10^4 & -1,00 \times 10^4 & 910,9 & -8968 & -6454 & -3201 & 1,91 \times 10^4 & 6189 & -4106 & 4612 & 6984 \\ 2248 & -6998 & 6609 & -601,6 & 5923 & 4263 & -9165 & -5277 & -4088 & 2712 & -3046 & -4613 \\ 2367 & -7368 & 6958 & -633,4 & 6236 & 4488 & 2170 & -5471 & -4707 & 1,54 \times 10^4 & -3207 & -4857 \\ 3086 & -9605 & 9070 & -825,7 & 8129 & 5851 & 2829 & -7131 & -1,81 \times 10^4 & 3319 & -4181 & -6331 \\ -1237 & 3852 & -3638 & 331,1 & -3260 & -2346 & -1135 & 2860 & 2250 & -1493 & 1596 & 1,51 \times 10^4 \\ 885,3 & -2756 & 2602 & -236,9 & 2332 & 1679 & 811,6 & -2046 & -1610 & 1068 & -1,38 \times 10^4 & -1898 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_w = \begin{bmatrix} -44,79 \\ -31,17 \\ 131,2 \\ -19,4 \\ 40,93 \\ 20,74 \\ 88,58 \\ -58,51 \\ -61,6 \\ -80,3 \\ 32,2 \\ -23,04 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_w = \begin{bmatrix} 0,5118 & 0,03031 & -0,0889 & -0,07473 & 0,7906 & 0,00984 & -0,05156 & 0,3707 & -0,0607 & 0,05959 & 0,1888 & -0,5179 \\ -38,42 & 119,6 & -113 & 10,28 & -101,2 & -72,86 & -35,23 & 88,81 & 69,87 & -46,35 & 52,07 & 78,85 \end{bmatrix}, \mathbf{D}_w = 0.$$

APÊNDICE E Alguns resultados usando o algoritmo SQP

E.1 Algoritmo SQP

O algoritmo SQP (Sequential Quadratic Programming (Nocedal e Wright, 2006)) pode ser usado na solução de problemas de otimização não lineares e é baseado na solução de uma sequência de subproblemas de otimização de programação quadrática. Nesse enfoque, a função objetivo é substituída por uma aproximação quadrática e as restrições são substituídas por aproximações lineares, que constituem uma generalização do método Quase-Newton para minimização irrestrita (Nocedal e Wright, 2006). O algoritmo SQP pode ser usado para resolver o seguinte problema de otimização não linear:

$$\text{P1: } \begin{cases} \text{minimizar} & f(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a:} & c_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & h_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = l + 1, \dots, m \end{cases}$$

Na solução do problema de otimização (P1) a ideia principal é representar o problema como uma aproximação de um problema de programação quadrática baseados na aproximação quadrática da seguinte função Langrangiana

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^l \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=l+1}^m \lambda_i h_i(\mathbf{x}) \quad (\text{E.1})$$

onde λ_i representa os multiplicadores de Lagrange.

Com esta consideração o problema quadrático pode ser expressado linearizando as restrições como se mostra:

$$\text{P2: } \begin{cases} \text{minimizar} & \nabla f(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k \\ \text{sujeito a:} & c_i(\mathbf{x}_k) + \nabla c_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k = 0, \quad i = 1, \dots, l \\ & h_i(\mathbf{x}_k) + \nabla h_i(\mathbf{x}_k)^T \mathbf{d}_k \leq 0, \quad i = l + 1, \dots, m \end{cases}$$

onde $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ representa a aproximação da matriz Hessiana da função Lagrangiana ($L(\mathbf{x}, \lambda)$) avaliada para \mathbf{x}_k ($k^{\text{ésima}}$ iteração) e λ_i , e \mathbf{d}_k é a direção de correção do ponto \mathbf{x}_k .

O problema de otimização (P2) é resolvido usando os seguintes passos:

1. Escolher um ponto de partida \mathbf{x}_0 e um multiplicador de Lagrange λ_0 . Fazer $k = 0$.
2. Calcular as funções $f(\mathbf{x}_k)$, $\nabla f(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$, $c_i(\mathbf{x}_k)$, $\nabla c_i(\mathbf{x}_k)$, $h_i(\mathbf{x}_k)$ e $\nabla h_i(\mathbf{x}_k)$. Resolver o problema de programação quadrática (P2) para obter o vetor \mathbf{d}_k e \mathbf{x}_k .
3. Faz-se então uma busca linear unidimensional para determinar o tamanho do passo α_k , na direção \mathbf{d}_k de forma que $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ seja um ponto que contribua para o decréscimo da função objetivo.
4. Determinar o próximo ponto $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k$ e verificar os critérios de convergência.
5. Se os os critérios de convergência são satisfeitos então \mathbf{x}_{k+1} é a solução ótima, se não:
 - A matriz de aproximação da Hessiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ é atualizada usando a formulação BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (Nocedal e Wright, 2006)) que é a formulação padrão usada no MATLAB.
 - fazer $k = k + 1$ e voltar ao passo 2.

E.2 Exemplo de aplicação

Nesta seção são mostrados os resultados do uso do algoritmo de solução SQP para o modelo teórico da viga engastada-livre apresentado no Capítulo 5. O algoritmo foi usado para projetar controladores de ordem 8, 4, 2 e 1, resolvendo o problema de otimização apresentado em (3.3) e (3.4), para a obtenção de controladores de ordem reduzida na forma canônica controlável e (3.8), para a obtenção de controladores de ordem reduzida na forma modal.

O método SQP foi implementado usando a função *fmincon* do MATLAB com as seguintes características: Algoritmo SQP (Algorithm=sqp), tolerância da função objetivo (TolFun=1e-8), tolerância das restrições (TolCon=1e-8) e máximo número de iterações (MaxIter=100). Os valores dos parâmetros foram escolhidos de forma que seja possível a comparação com os resultados obtidos usando algoritmos genéticos.

O algoritmo SQP apresentou sensibilidade na solução dos problemas de otimização. Quando o ponto de partida foi a origem ($\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}$, mesmo ponto de partida usado com o algoritmo genético)

o algoritmo SQP não conseguiu minimizar a função objetivo para uma direção de descida factível terminando o processo de busca rapidamente (número de iterações realizadas=1) sem sucesso.

Para a obtenção de controladores factíveis é necessário um estudo mais profundo para uma adequada escolha do ponto de partida. Os resultados do uso do algoritmo SQP para o projeto de controladores na forma canônica controlável e na forma modal são apresentado na Tabela E.1 e E.2 respectivamente.

Tabela E.1: Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta real para o algoritmo SQP e os algoritmos genéticos - método na forma canônica controlável

Ordem do controlador	Algoritmo SQP		Algoritmos genéticos	
	Solução factível?	Redução da $\ T_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Solução factível?	Redução da $\ T_{zw}\ _{\infty}$
8×8	não	—	sim	43,84
4×4	não	—	sim	47,55
2×2	sim	25,12	sim	51,70
1×1	não	—	sim	25,78

Tabela E.2: Resultados dos 4 controladores projetados usando a planta real para o algoritmo SQP e os algoritmos genéticos - método na forma modal.

Ordem do controlador	Algoritmo SQP		Algoritmos genéticos	
	Solução factível?	Redução da $\ T_{zw}\ _{\infty}$ [dB]	Solução factível?	Redução da $\ T_{zw}\ _{\infty}$
8×8	não	—	sim	73,88
4×4	não	—	sim	73,17
2×2	sim	51,60	sim	52,42
1×1	sim	19,43	sim	28,36

Os resultados apresentados nas Tabelas E.1 e E.2 foram obtidos usando diretamente o modelo da planta real para um ponto de partida do controlador escolhido aleatoriamente numa faixa de -5 a 5. Pode-se observar da Tabela E.2 que o algoritmo SQP só conseguiu encontrar controladores factíveis na ordem 2 e 1. No caso dos controladores de ordem 8 e 4 o algoritmo SQP não conseguiu encontrar controladores estáveis. Na Tabela E.1 o algoritmo só conseguiu encontrar um controlador factível de ordem 2.

Na Figura E.1 se mostra a resposta temporal do deslocamento vertical da extremidade da viga submetido ao distúrbio externo para o sistema com e sem controle (controlador na forma modal de ordem 1×1).

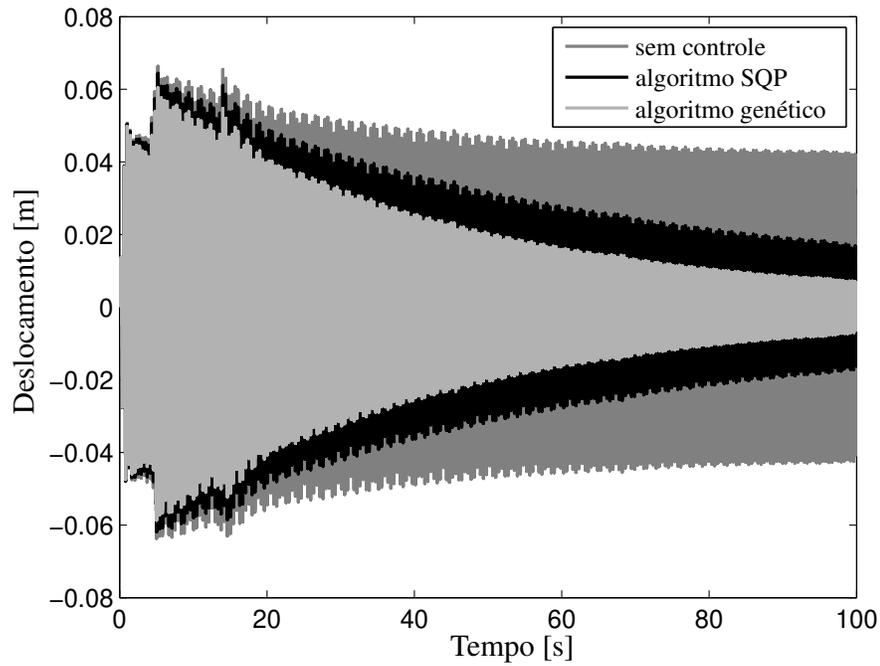


Figura E.1: Resposta da extremidade da viga - sistema controlado na forma modal (usando o algoritmo SQP e GA) e não controlado, controlador de ordem 1×1 .

Pode-se concluir para este exemplo que os algoritmos genéticos conseguiram uma melhor solução factível (menor minimização da norma \mathcal{H}_∞) de que a obtida com o algoritmo SQP.

APÊNDICE F Escolha da ordem do modelo estimado da viga experimental engastada-livre

Para a escolha da ordem do modelo estimado da viga foram realizadas algumas simulações para diferentes ordens de forma que o modelo adotado contenha os maiores picos de ressonância mantendo uma ordem reduzida. A ordem escolhida para o processo de projeto foi 50×50 . Modelos estimados de ordem maior não apresentaram grandes picos de ressonância para ser levados em consideração no processo de projeto, como mostrado na comparação de um modelo estimado de ordem 90×90 com o modelo de ordem 50×50 apresentados na Figura F.1.

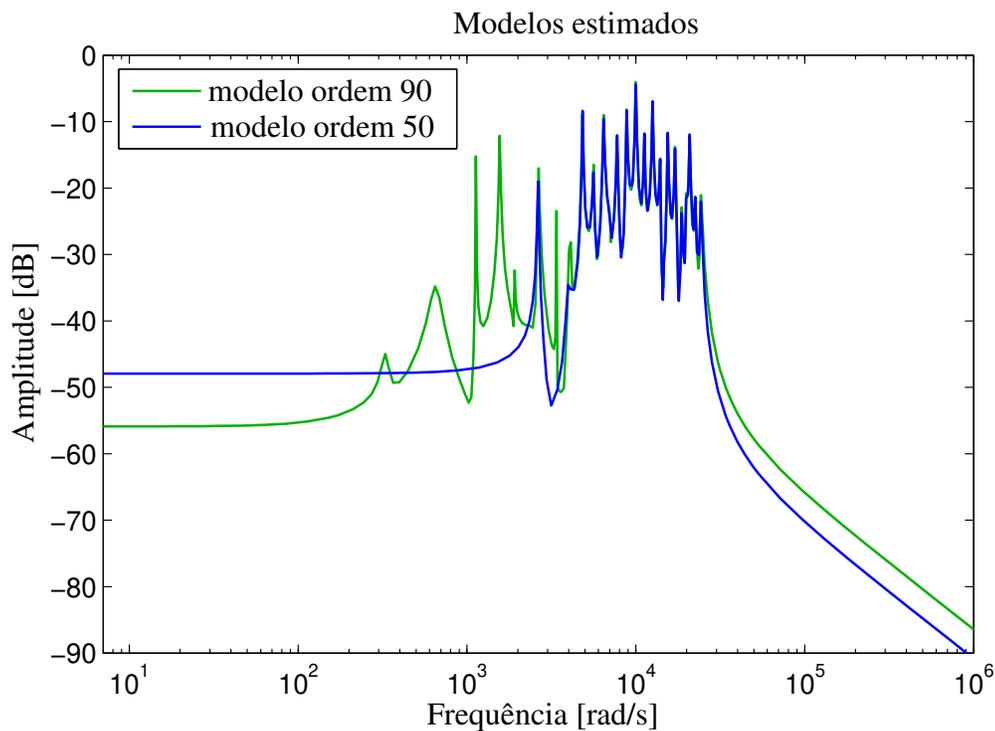


Figura F.1: Resposta em frequência dos modelos estimados da viga engastada livre - modelos de ordem 90×90 e 50×50

Pode-se ver na Figura F.1 que os maiores picos da resposta em frequência da viga já estão contidos no modelo estimado de ordem 50×50 .